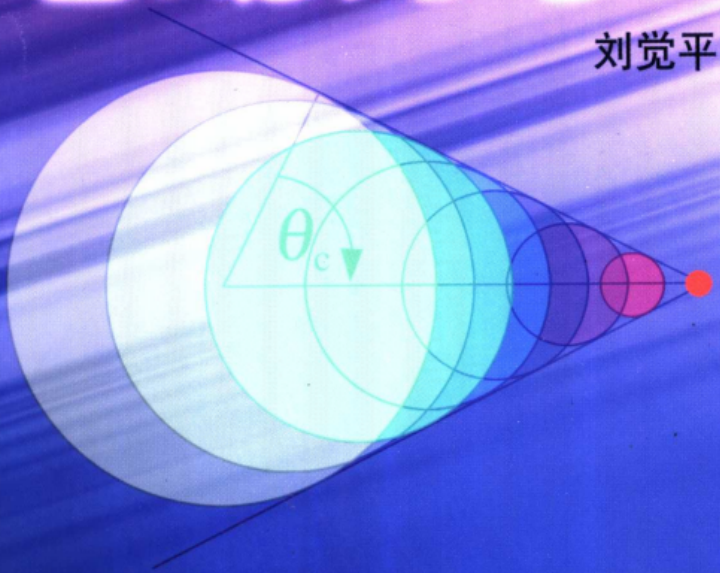
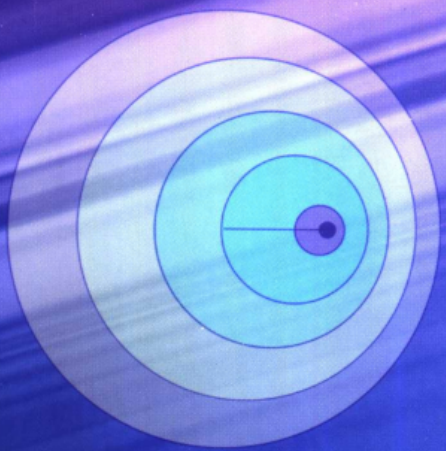
普通高等教育“十五”国家级规划教材

电动力学

刘觉平



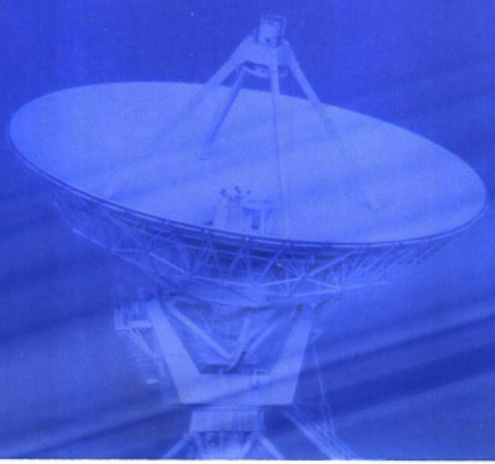
高等教育出版社



ISBN 7-04-014431-X

9 787040 144314 >

定价 35.00 元



普通高等教育“十五”国家级规划教材

电动力学

刘觉平

高等教育出版社

内容简介

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材.本书注重基本概念的物理意义的讲述.对于一些其他教材中没有详细讲解但又很重要的内容,本教材做了比较深入的展开分析,以加深学生对物理意义的理解,培养学生运用理论分析方法解决实际问题的能力;对于一些新知识、新应用,本书也做了一定的介绍.同时,本教材比较详细地介绍了许多在电动力学中使用较多的数学方面的内容,这些内容为学生正确理解电动力学的基本概念提供了必要的基础支撑,也使得学生的数学计算能力同基础物理的学习能得到比较均衡的发展.

本书可作为高等院校物理专业基础课教材,也可供其他专业选用.

图书在版编目（CIP）数据

电动力学/刘觉平. —北京：高等教育出版社，2004.7
ISBN 7-04-014431-X

Ⅰ.电… Ⅱ.刘… Ⅲ.电动力学-高等学校-教材 Ⅳ.0442

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 031079 号

策划编辑 庞永江 **责任编辑** 董洪光 **封面设计** 李卫青 **责任绘图** 黄建英
版式设计 王 莹 **责任校对** 殷 然 **责任印制** 杨 明

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网 址**	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷	人民教育出版社印刷厂		
开 本	787×960 1/16	**版 次**	2004 年 7 月第 1 版
印 张	30.75	**印 次**	2004 年 7 月第 1 次印刷
字 数	570 000	**定 价**	35.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

前　言

作者给武汉大学物理系实验班学生连续讲授电动力学至今已历十载，讲稿曾在1997年由武汉大学出版社以武汉大学本科生系列教材的名义出版，本书是在该版的基础上经增删修改而写成的．现将值得指出的改动及需要进一步说明的特点叙述如下．

一、物理系的学生总是在学习物理的过程中学习数学的，在学习理论物理时尤其如此．基于这种认识，我们用变换的观点将物理量分类为各阶张量或赝张量，并分别在三维欧氏空间和四维 Minkowski 时空中进行论述．这在逻辑体系上是完全必要的；很难设想，在没有清晰的张量概念的条件下能学懂建立在张量分析基础上的电动力学．这正如在没有微商概念时很难理解即时速度一样．同时，惯性参考系是 Minkowski 时空，不是 Euclidean 时空；而从 Minkowski 时空解析延拓至 Euclidean 时空是需要一定条件的．这就是为什么国际上同类教材与后续教材都已改用 Minkowski 时空的缘故．我们的教学实践说明，学生刚开始虽然很不容易接受张量的概念，但不必担心，训练一个月后就习惯了；而且一旦懂了三维欧氏空间中的张量概念，四维 Minkowski 时空中的张量并不成为难点．

二、在推导特殊 Lorentz 变换公式时，为了物理概念清晰起见，我们首先将狭义相对性原理坚持到底，将特殊 Lorentz 变换决定到一个待定常数；再由光速不变原理决定该常数．在本版中我们还给出了特殊 Lorentz 变换为线性变换的详细论述．

三、我们论述了所谓 k 算法，并用简单的例子与习题显示了该方法的快捷、明晰的特点．

四、我们明确指出，不仅固有时一般是一个不可积的量，还通过详细分析 Thomas 进动将其表示为物理意义非常明显的简单形式后指出，(在平行移动中的)点状指针或者说空间方向也是一个不可积的量．后者是人们对狭义相对论的认识进一步深化的重要标志．

五、在讨论延缓效应时，我们详细讨论了在远处任意方位上“拍摄”的像，这样讨论的目的在于我们可以将所拍摄的对象的形状推广到任意形状，因而得到了具有普遍意义的结果，这一结果与光行差效应完全一致．本版在如何进行“推广”这一工作上进一步做了阐述．

六、我们不仅展示了如何由 Lorentz 协变性与局域规范不变性构造出带电粒子与电磁场的自由作用量及其相互作用量，以及如何通过最小作用量原理得

到相应的运动方程;还进一步在本版中导出了这些标准的电磁作用量的一些等价变形,特别是首次由此导出了 Maxwell 方程的螺度形式,清楚地说明了自由电磁场是螺度为 ± 1 的矢量场.

七、电动力学实际上是一个经典场理论,但权威教科书(例如,Landau 的 *Theory of Fields*)所述的经典场理论的惯性中心定理是在不考虑相应的场的存在的条件下对粒子体系给出的;为了完整起见,我们将这一结果推广至粒子与场都可能存在时的一般情形.

八、在引入介质中的 Maxwell 方程组时,我们指出了建立在因果律基础上的 Kramer - Krönig 关系以及交叉对称关系对于介质极化率的限制.并在后面的有关介质的色散模型中展示了如何对所得到的极化率进行因果律检验.从而提醒学生,对于介质的极化率在一定的频率范围内与频率无关的近似,不能无限扩大其适用范围.否则将导致违背因果律的不正确的结果.

九、在恒场基本算法中,我们不仅介绍了通常的磁标势法;还通过将传导电流转换成相应的磁化强度分布,而引入了广义磁标势法,从而扩大了磁标势法的应用范围,并通过实例加以阐明.

十、我们明确指出,所谓多级展开实际上是对 Green 函数施行的,并用此观点处理全书中所有涉及多极展开的内容.因为在我们施行多极展开的对象中,只有出现在其中的 Green 函数才含有两个有长度量纲的量,它们的比是一个无量纲的量,在合适的假设下,可视为一个小量,可以施行 Taylor 展开.这样的理解十分自然易懂.

十一、我们由步步深入的对称性的物理分析自然地推出推迟 Green 函数的表达式,物理概念比通常的 Fourier 变换法更清晰易懂;本版充分利用了附加的阶跃函数因子的特性,使得在奇异点处的证明更加完美.进而,我们从时域转到频域(即通过 Fourier 变换)直接得到了形式简洁而优美的单色推迟 Green 函数.

十二、本版首次介绍了一般形式的电荷、电流的时空分布所激发的电磁场的普遍公式,即所谓 Jefimenko 方程,它是无界空间中 Maxwell 方程的一个重要的特解.进而,我们从时域转到频域,得到了形式简洁而优美的由频域中电荷、电流的振幅的空间分布所激发的单色电磁场的普遍公式.

十三、本版以一种十分简洁的方式从单色推迟 Green 函数顺便推出了所谓并矢 Green 函数,它广泛出现在电磁场理论的研究与应用的文献中.

十四、我们应用单色推迟 Green 函数直接写出了运动带电粒子在频域中的矢势与标势,然后从频域转到时域十分简洁地导出了 Liénard - Wiechert 势表达式,物理概念清楚,推导过程简单,易于为学生接受.

十五、我们在考察运动带电粒子的辐射场的同时,也考察了粒子的自有场的性质,证明了它是在相对于粒子瞬时静止的惯性参考系中纯 Coulomb 电场的

特殊 Lorentz 变换，不能脱离粒子而独立存在；此外，我们还证明了粒子的辐射功率是一个 Lorentz 不变量，因而粒子的自有场的能量不会因为粒子运动（即使是加速运动）而损失．这样便从粒子的辐射场与自有场的区别揭示了粒子的辐射场的独立的物理实在特性．

十六、我们首次在教科书中给出了同步辐射频谱分布的完整的计算过程，其中的关键步骤是使用了 Bessel 函数的级数表达式，避免了文献中的一系列利用 Bessel 函数理论中某些关系的变换，使得推导过程更加简洁．

十七、本版最后将电荷守恒定律、Lorentz 力公式及 Maxwell 方程推广至任意的参考系（不限于惯性参考系）、甚至任意的准 Riemannian 流形上，从而扩展了经典电动力学的应用范围．电动力学，若仅限于在惯性参考系中讨论，即使在经典的意义上也是不完全的．

由此可见，本书对于电动力学中最基本、最重要的内容以及某些教科书上一笔带过．但实际上又比较重要的论题进一步进行展开分析，以加深学生对基本概念的正确理解以及加强运用基本的理论分析方法解决实际问题的能力．这样，学生便可以在基本概念、基本方法与基本分析及综合能力上得到充分练习的机会，避免了初学时眼花缭乱、不得要领、浅尝辄止的毛病．实际上，一本好的教材绝不仅仅限于对已有素材的重新组合与取舍，还需要进行系统的科学研究．

值得说明的是，虽然有条件的地方可系统地讲授本书；但当学时有限时，上述内容不一定都讲．而将狭义相对论提前讲述，有助于在后续内容中反复强调 Lorentz 协变性，增加学生对 Maxwell 方程的 Lorentz 对称性的理解，也有助于对后面有关公式做出简洁而富含物理意义的推导，因而可缩短学时．虽然电动力学是一个经典场论，教师在推导有关公式（例如电磁场能量－动量定理等）时，根据学生的水平，可选取通常的简单推导方法．有的章节例如“寻找绝对参考系的实验”一节可安排学生自学；“恒场边值问题的解法”也可安排学生自学，但作业照做．最后一章可做一个学术报告或不讲．根据作者的经验，若只选讲下述内容，完全可在 54 学时内讲完：

1．第一章精讲第 1、2、3 节，串讲 4、5、6 节（第 7、8 节由学生自学）．

2．第二章精讲第 1、3、4、5、6 节，串讲第 7 节第 1 小节、第 7 节第 4 小节，精讲第 8 节第 1、2 小节，串讲第 8 节第 4 小节（第 2 节由学生自学）．

3．第三章精讲第 1、2 节，第 3 节第 2 小节、第 4 节第 2 小节；其中作用量的等价变形、经典场论部分略去．串讲第 5 节第 1、2、4 小节，仅略提一下第 5 节第 5 小节的结论．串讲第 6、7、8、9 节．

4．第四章精讲第 1、2 节，第 3 节第 2 小节、第 4 节第 2 小节；其中作用量的等价变形、经典场论部分略去．串讲第 5 节第 1、2、4 小节，仅略提一下第 5 节第 5 小节的结论．串讲第 6、7、8、9 节．

5. 第五章仅用一节课串讲镜像法、分离变量法与 Green 函数法的基本精神,其余自学,作业照样布置不误.

6. 第六章可略去"圆柱形导体中的趋肤效应",串讲其余各节.

7. 第七章讲第 1、2、4、5 节,其余可略去.

8. 第八章讲第 1、2、5、7 节,其余可略去.

9. 第九章精讲第 1、2、4、6 节,串讲第 7、9 节.

10. 第十章精讲第 1、2、4 节,串讲第 5、6、7、11 节.

11. 第十一章串讲第 1、2、3 节,精讲第 4、5、7 节.

12. 第十二章讲第 1、2、3、4、8 节.

13. 第十三章讲第 1、2 节,其余可略去.

14. 第十四章不讲,或仅花一刻钟的时间提一下其主要结论,或做一学术报告.

上述内容讲完后,学生仍有必要甚至要求进一步深化电动力学的学习(在国外研究型的大学里,电动力学一般是两学期讲授的课程),这时本书便进一步提供了方便之处.

黄志威同学为本版初稿画了全部插图,并进行了排版编辑,作者对此表示衷心感谢.

刘觉平

2003 年 8 月

目　录

第一章　三维欧氏空间中的张量 …… 1
§1.1　正交坐标系的转动 …… 2
习题 1－1 …… 4
§1.2　物理量在空间转动变换下的分类 …… 6
习题 1－2 …… 7
§1.3　物理量在空间反演变换下的进一步分类 …… 7
习题 1－3 …… 11
§1.4　张量代数 …… 12
习题 1－4 …… 14
§1.5　张量分析 …… 14
习题 1－5 …… 17
§1.6　Helmholtz 定理 …… 18
习题 1－6 …… 19
§1.7　正交曲线坐标系 …… 20
习题 1－7 …… 21
§1.8　正交曲线坐标系中的微分运算 …… 22
习题 1－8 …… 23
第二章　狭义相对论 …… 24
§2.1　相对性原理 …… 25
习题 2－1 …… 29
§2.2　寻找绝对参考系的实验 …… 29
2.2.1　Michelson－Morley 实验 …… 29
2.2.2　Fizeau 实验 …… 31
2.2.3　恒星光行差的观测 …… 32
§2.3　光速不变原理 …… 34
§2.4　特殊 Lorentz 变换 …… 36
习题 2－4 …… 39
§2.5　Minkowski 四维时空 …… 39
2.5.1　事件的时空间隔 …… 39
2.5.2　Lorentz 变换 …… 40

2.5.3 Minkowski 时空中的张量 …… 44
习题 2－5 …… 47
§2.6 狭义相对论的时空观念 …… 48
2.6.1 时空间隔的分类 …… 48
2.6.2 因果律 …… 50
2.6.3 Lorentz 收缩 …… 51
2.6.4 Einstein 延迟 …… 52
习题 2－6 …… 53
§2.7 相对论运动学 …… 54
2.7.1 速度变换 …… 54
2.7.2 相继的特殊 Lorentz 变换与 Thomas 进动 …… 56
2.7.3 加速度变换 …… 59
2.7.4 Doppler 频移 …… 59
2.7.5 延迟效应 …… 61
习题 2－7 …… 65
§2.8 相对论粒子动力学 …… 67
2.8.1 四维速度和四维加速度 …… 67
2.8.2 点粒子的自由运动 …… 67
2.8.3 点粒子的 Doppler 效应与轨道偏差 …… 70
2.8.4 点粒子在外力作用下的运动 …… 71
2.8.5 多粒子系统运动学 …… 72
习题 2－8 …… 75
第三章 电磁相互作用的基本规律 …… 77
§3.1 带电粒子在电磁场中的运动规律 …… 78
3.1.1 在电磁场中运动的带电粒子的作用量 …… 78
3.1.2 带电粒子在电磁场中的运动方程 …… 80
习题 3－1 …… 82
§3.2 电磁场在外源作用下的运动规律 …… 82
3.2.1 电磁场与源的相互作用量的普遍形式 …… 82
3.2.2 自由电磁场的作用量 …… 83
3.2.3 在外源作用下电磁场的运动方程 …… 85
习题 3－2 …… 88
§3.3 电磁场的能动张量定理 …… 88
3.3.1 场的正则能动张量 …… 88
3.3.2 电磁场的能动张量 …… 89

习题 3－3 …… 93
§3.4 电磁场的角动量张量定理 …… 93
3.4.1 场的正则角动量张量 …… 93
3.4.2 电磁场的角动量张量 …… 95
习题 3－4 …… 99
§3.5 介质中的 Maxwell 方程组 …… 99
3.5.1 介质中电荷的运动规律 …… 99
3.5.2 静止介质中的 Maxwell 方程组 …… 103
3.5.3 运动介质中的 Maxwell 方程组 …… 108
3.5.4 介质的电磁性质方程 …… 111
3.5.5 交叉对称关系与 Kramer－Krönig 关系 …… 113
习题 3－5 …… 115
§3.6 介质中电磁场能－动量与角动量定理 …… 118
3.6.1 介质中电磁场的能量定理 …… 118
3.6.2 介质中电磁场的动量定理 …… 118
3.6.3 介质中电磁场的角动量定理 …… 119
习题 3－6 …… 119
§3.7 Maxwell 方程组的完备性 …… 120
§3.8 波动方程 …… 121
习题 3－8 …… 124
§3.9 平面电磁波的偏振 …… 124
习题 3－9 …… 126
§3.10 电磁场的螺旋度 …… 126
习题 3－10 …… 130
第四章 恒场 …… 131
§4.1 恒场的基本方程 …… 132
4.1.1 恒场条件 …… 132
4.1.2 静电场基本方程 …… 133
4.1.3 稳恒电流体系的基本方程(静电场) …… 134
4.1.4 稳恒电流体系的基本方程(静磁场) …… 136
习题 4－1 …… 141
§4.2 恒场能量的势表达式 …… 142
习题 4－2 …… 143
§4.3 恒场唯一性定理 …… 143
习题 4－3 …… 145

§4.4 导体系静电叠加原理与静电屏蔽效应 …… 145
习题 4－4 …… 145
§4.5 导体系电容与电势系数和相互作用能 …… 146
习题 4－5 …… 148
§4.6 导体系静电平衡条件与静电体系稳定性 …… 149
习题 4－6 …… 150
§4.7 Green 定理与 Green 互易定理 …… 150
习题 4－7 …… 151
§4.8 作用在导体面上的电场力 …… 151
习题 4－8 …… 153
§4.9 恒场中的多极展开 …… 153
4.9.1 电势的多极展开 …… 153
4.9.2 电场强度的多极展开 …… 157
4.9.3 电荷体系与外场的相互作用能的多极展开 …… 159
4.9.4 二维电荷分布的电势的多极展开 …… 161
4.9.5 静磁矢势的多极展开 …… 162
4.9.6 电流体系与外场的相互作用能的多极展开 …… 166
4.9.7 局域电流分布在外场所受的力与力矩 …… 168
习题 4－9 …… 171
第五章 恒场边值问题的解法 …… 173
§5.1 镜像法 …… 174
5.1.1 Green 等效层定理 …… 174
5.1.2 镜像法及实例分析 …… 175
习题 5－1 …… 182
§5.2 分离变量法 …… 183
5.2.1 Laplace 方程的通解 …… 183
5.2.2 分离变量法实例分析 …… 185
习题 5－2 …… 191
§5.3 保角变换法 …… 193
5.3.1 平面恒场的复势 …… 193
5.3.2 保角变换法及实例分析 …… 194
习题 5－3 …… 196
§5.4 Green 函数法 …… 197
5.4.1 Poisson 方程边值问题的形式解 …… 197
5.4.2 Green 函数的常用求法 …… 200

习题 5－4 …… 206
第六章　似稳场 …… 209
§6.1　似稳近似 …… 210
§6.2　似稳场方程 …… 211
§6.3　似稳电路(电工学)方程 …… 212
§6.4　趋肤效应 …… 213
6.4.1　半无穷空间导体中的趋肤效应 …… 213
6.4.2　圆柱形导体中的趋肤效应 …… 214
§6.5　导体的高频内阻抗 …… 216
习题 6－5 …… 217
第七章　电磁波的传播 …… 220
§7.1　定态电磁波 …… 221
习题 7－1 …… 224
§7.2　绝缘介质中的平面电磁波 …… 225
习题 7－2 …… 226
§7.3　导电介质中的平面电磁波 …… 227
习题 7－3 …… 232
§7.4　平面电磁波在绝缘介质界面上的反射与折射 …… 232
7.4.1　反射定律与折射定律 …… 234
7.4.2　振幅关系 …… 235
7.4.3　反射系数与透射系数 …… 236
7.4.4　反射波与折射波的偏振状态 …… 238
7.4.5　相位关系 …… 239
习题 7－4 …… 240
§7.5　全反射 …… 241
7.5.1　发生全反射的条件 …… 241
7.5.2　折射波 …… 242
7.5.3　反射波 …… 243
7.5.4　第二种介质中的能流密度 …… 245
习题 7－5 …… 245
§7.6　电磁波在导体面上的反射与折射 …… 246
7.6.1　导电介质中的折射波 …… 247
7.6.2　从导电介质表面上的反射波 …… 250
习题 7－6 …… 252
第八章　波导与谐振腔 …… 254

§8.1 波导管中场的运动规律 …… 255
习题 8－1 …… 258
§8.2 矩形波导 …… 259
习题 8－2 …… 262
§8.3 圆柱形波导 …… 263
习题 8－3 …… 266
§8.4 波导中的能量传输与损耗 …… 266
习题 8－4 …… 270
§8.5 谐振腔 …… 271
习题 8－5 …… 274
§8.6 谐振腔的品质因素 …… 275
习题 8－6 …… 277
§8.7 同轴传输线 …… 277
习题 8－7 …… 284
§8.8 电介质波导 …… 284
习题 8－8 …… 287
第九章 时变场与多极辐射 …… 288
§9.1 推迟 Green 函数与推迟势 …… 289
习题 9－1 …… 293
§9.2 Jefimenko 方程 …… 293
习题 9－2 …… 295
§9.3 单色推迟 Green 函数与单色推迟势 …… 295
习题 9－3 …… 297
§9.4 单色源的电磁场的普遍形式 …… 297
习题 9－4 …… 299
§9.5 并矢 Green 函数 …… 299
习题 9－5 …… 302
§9.6 推迟势的多极展开 …… 302
习题 9－6 …… 306
§9.7 电偶极辐射 …… 306
习题 9－7 …… 311
§9.8 磁偶极辐射与电四极辐射 …… 312
9.8.1 磁偶极与电四极辐射势 …… 312
9.8.2 磁偶极辐射场 …… 313
9.8.3 电四极辐射场 …… 314

习题 9－8 …… 316
§9.9　线型天线辐射 …… 317
习题 9－9 …… 321
§9.10　天线阵 …… 321
第十章　运动带电粒子的辐射场 …… 324
§10.1　Liénard－Wiechert 势 …… 325
习题 10－1 …… 327
§10.2　运动电荷的场的普遍形式 …… 327
习题 10－2 …… 329
§10.3　运动电荷的自有场 …… 330
习题 10－3 …… 332
§10.4　运动电荷的辐射场 …… 333
习题 10－4 …… 336
§10.5　低速运动电荷的辐射 …… 337
习题 10－5 …… 338
§10.6　轫致辐射与直线加速辐射 …… 339
习题 10－6 …… 340
§10.7　同步辐射 …… 341
习题 10－7 …… 342
§10.8　辐射的频谱分析 …… 343
§10.9　低速轫致辐射频谱 …… 345
习题 10－9 …… 347
§10.10　同步辐射频谱 …… 347
习题 10－10 …… 351
§10.11　Cherenkov 辐射 …… 351
习题 10－11 …… 353
第十一章　电磁场对带电粒子的作用 …… 355
§11.1　电磁质量 …… 356
§11.2　辐射阻尼 …… 359
§11.3　辐射谱线的自然宽度 …… 362
§11.4　稀薄介质中的色散 …… 364
习题 11－4 …… 368
§11.5　稠密介质中的色散 …… 369
习题 11－5 …… 372
§11.6　金属导体中的色散 …… 373

§11.7 等离子体中的色散 …… 375
习题 11－7 …… 377
§11.8 外磁场下等离子中的双折射 …… 378
习题 11－8 …… 381
§11.9 Faraday 磁致旋光效应 …… 381
习题 11－9 …… 383
第十二章 电磁波的散射 …… 384
§12.1 Thomson 散射 …… 385
习题 12－1 …… 387
§12.2 束缚电子对电磁波的散射 …… 388
习题 12－2 …… 389
§12.3 束缚电子对电磁波的吸收 …… 390
§12.4 电荷体系对电磁波的散射 …… 392
习题 12－4 …… 393
§12.5 宏观物体对电磁波的散射 …… 394
习题 12－5 …… 397
§12.6 光学定理 …… 397
习题 12－6 …… 399
第十三章 电磁波的衍射 …… 400
§13.1 Kirchhoff 衍射理论 …… 401
13.1.1 Kirchhoff 积分公式 …… 401
13.1.2 Huygens－Fresnel 原理 …… 402
13.1.3 可逆定理与 Babinet 原理 …… 404
§13.2 小孔衍射 …… 404
习题 13－2 …… 408
§13.3 Kirchhoff 积分公式的矢量形式 …… 408
习题 13－3 …… 410
§13.4 薄导体屏上的小孔衍射 …… 410
习题 13－4 …… 413
§13.5 Babinet 原理的矢量形式 …… 413
习题 13－5 …… 415
§13.6 晶体对电磁波的衍射 …… 416
习题 13－6 …… 417
第十四章 电动力学的外微分形式 …… 418
§14.1 对偶空间与张量 …… 419

习题 14－1 …… 421
§14.2　外微分形式 …… 421
习题 14－2 …… 425
§14.3　流形、切空间和张量场 …… 425
习题 14－3 …… 428
§14.4　协变微商 …… 428
习题 14－4 …… 432
§14.5　Stokes 定理 …… 432
习题 14－5 …… 435
§14.6　协变散度 …… 435
习题 14－6 …… 437
§14.7　电荷守恒定律 …… 438
§14.8　外微分形式方程 …… 440
习题 14－8 …… 448
§14.9　若干重要引理 …… 448
习题 14－9 …… 451
§14.10　Lorentz 力公式 …… 451
习题 14－10 …… 452
§14.11　电磁场场强张量 …… 452
§14.12　Maxwell 第一方程 …… 454
§14.13　Maxwell 第二方程 …… 454
§14.14　势 1－形式 …… 455
§14.15　电动力学的发展前沿概述 …… 456
附录 A　几种常用的正交曲线坐标系 …… 458
§A.1　Cartesian 坐标系 …… 458
§A.2　柱坐标系 …… 458
§A.3　球坐标系 …… 459
§A.4　椭球坐标系 …… 459
附录 B　单位制换算与主要公式转换 …… 462
附录 C　有关的物理学常量 …… 466
参考文献 …… 467
索引 …… 469

第一章　三维欧氏空间中的张量

张量代数与分析是电动力学的数学基础.本章先叙述三维欧氏空间中的张量在空间转动与反演变换下的变换性质与分类,然后讲述张量代数运算与分析运算的基本规律,最后介绍关于矢量场的 Helmholz 定理以及在曲线坐标系中的矢量运算.

§1.1　正交坐标系的转动

在三维欧氏空间中，任一条射线 x_i 由方向矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 确定. 交于一点 O(原点)且不共面的三条射线(分别与方向矢量 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 平行的坐标轴)构成一个(斜角)坐标系 S. 空间中任一点 P 的位置由从原点 O 指向该点的矢径(坐标矢量) $\overrightarrow{OP}$ 确定. 考察由 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{e}_3$ 构成的一个平行六面体，其体积为

$$V=(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2)\cdot\boldsymbol{e}_3 \tag{1.1.1}$$

由于三个方向矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 不共面，$V\neq 0$. V 的符号与三个方向矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 的相互位置有关. 当 $V>0$ 时，称三矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 或坐标系 S 为右旋系；当 $V<0$ 时，称三矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 或坐标系 S 为左旋系.

当三个坐标轴两两相互垂直即

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij} \tag{1.1.2}$$

时，称 S 为正交坐标系(或 Cartesian 坐标系). 同样，当 $V=(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2)\cdot\boldsymbol{e}_3>0$ 时，称 S 为右旋正交坐标系；当 $V<0$ 时，称 S 为左旋正交坐标系(见图 1.1).

在三维欧氏空间中的任一点 P 由它在正交坐标系 S(为确定起见，设它是右旋系)中的三个坐标 (x_1,x_2,x_3) 确定. 通常规定

$$x_1=x,\quad x_2=y,\quad x_3=z \tag{1.1.3}$$

值得指出的是，在 Minkowski 时空中通常规定[见后面式(2.5.1)]

$$x^1=x,\quad x^2=y,\quad x^3=z$$

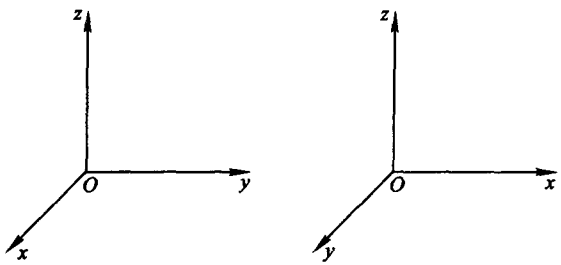


图 1.1　正交坐标系

(a) 右旋；(b) 左旋

故而

$$x_1=-x,\quad x_2=-y,\quad x_3=-z$$

不要将上式与式(1.1.3)混淆. 将 S 系整体绕 O 点作一有限转动，由于整体转动

不改变任意两条直线的夹角和相对位置，在作整体有限转动后的坐标系 S 也是一个正交右旋系. 设 P 点在 S 中的坐标为 (x'_1, x'_2, x'_3). 在欧氏空间中，对应于同一点 P 的这两组坐标满足线性关系：

$$x'_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = a_{ij}x_j, \qquad i = 1,2,3 \tag{1.1.4}$$

式中一对重复指标 j 表示从 1 到 3 求和，这是所谓的 Einstein 求和约定：

$$f_{\cdots j\cdots g\cdots j\cdots} \equiv \sum_{j=1}^{3} f_{\cdots j\cdots g\cdots j\cdots} \tag{1.1.5}$$

式中“…”表示其他的可能的指标，它们可以是除 j 以外的任何别的字母. 处于方程的同一边或关系式中的这种重复指标称为一对哑指标. 值得着重指出的是，哑指标必须成对；每对哑指标可以改用其他字母表示；不属于同一对的哑指标（在方程的同一边或在同一个表达式中）必须使用不同的字母，但处于方程两边的不属于同一对的哑指标却可以使用同一字母. 在方程的某一边或关系式中不成对的指标，如式(1.1.4)中的 i 称为显指标. 值得指出的是，在方程同一边或在某一表达式中的显指标只有一个；显指标仅特指或泛指某一指标，没有求和的意义，因而不可随意更换；而方程两边的显指标必须一一对应（即若方程左边有一显指标，则方程右边也必须有同一显指标）.

现考察欧氏空间中的转动变换(1.1.4)的重要性质，这些重要性质可从转动变换的不变量导出. 首先，我们注意到，O、P 两点之间的距离

$$L = \sqrt{x^2}, \qquad x^2 = x_i x_i \tag{1.1.6}$$

与坐标系 S 的转动无关，换言之，转动前的坐标系 S 中所测量的 O、P 两点之间的距离 L 应当等于在转动后的坐标系 S′中对同样两点之间距离的测量结果，即

$$x'^2 = x^2 \tag{1.1.7}$$

由此可得下述正交关系：

$$a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk} \tag{1.1.8}$$

写成矩阵形式即

$$a^{\mathrm{T}}a = I \tag{1.1.9}$$

式中 I 是 3×3 单位矩阵，a^{T} 表示矩阵 a 的转置. 可见三维转动变换矩阵 a 是正交矩阵，即 $a^{\mathrm{T}} = a^{-1}$. 因而

$$aa^{\mathrm{T}} = I \tag{1.1.10}$$

写成分量形式有

$$a_{ji}a_{ki} = \delta_{jk} \tag{1.1.11}$$

进而，矢径 $\overrightarrow{OP}$ 的大小与方向都与坐标系 S 的转动无关

$$x'_i e'_i = x_i e_i \tag{1.1.12}$$

式中 e_i 与 e'_i 分别是坐标系 S 与 S′的相应坐标轴的方向矢量. 由此易知

$$x'_i e'_i \cdot e'_j = x_i e_i \cdot e'_j \tag{1.1.13}$$

或

$$x'_j = e'_j \cdot e_i x_i \tag{1.1.14}$$

与定义转动变换的方程(1.1.4)比较可知

$$a_{ij} = e'_j \cdot e_i \tag{1.1.15}$$

它与空间中的点无关.利用这一转动变换矩阵元表达式,容易证明

$$e_j = e'_i a_{ij} \tag{1.1.16}$$

写成矩阵形式即

$$e^{\mathrm{T}} = e'^{\mathrm{T}} a \tag{1.1.17}$$

对上式取转置并左乘 a 得

$$e' = ae \tag{1.1.18}$$

写成分量形式即

$$e'_i = a_{ij} e_j \tag{1.1.19}$$

最后指出,由方程(1.1.4)可知 a_{ij} 可以写成

$$a_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \tag{1.1.20}$$

将方程(1.1.4)两边同乘以 a_{ik} 并对指标 i 求和,可得

$$x_i = (a^{\mathrm{T}})_{ij} x'_j = x'_j a_{ji} \tag{1.1.21}$$

由此可知 a_{ij} 还可以写成

$$a_{ij} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \tag{1.1.22}$$

由(1.1.20)可将正交关系写为

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x_j}\frac{\partial x'_i}{\partial x_k} = \delta_{jk} \tag{1.1.23}$$

习题 1-1

1. 设三个矢量 a、b 和 c 形成右(左)旋系.证明,当循环置换矢量 a、b 和 c 的次序,即当考察矢量 b、c 和 a(或矢量 c、a 和 b)时,右(左)旋系仍保持为右(左)旋系.
2. 写出矢量诸分量在下列情况下的变换矩阵:当 Cartesian 坐标系绕 z 轴转动角度 α 时.

   答案:

$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   式中 α 的读数方向与 z 轴的方向满足右手螺旋法则.
3. 设坐标系绕 z 轴转 α 角,再绕新的 y 轴(即原来的 y 轴在第一次转动后所处的位置)转 β

角,最后绕新的 z 轴(即原来的 z 轴经第一、二次转动后所处的位置)转 γ 角;这三个角称为 Euler 角(图 1.2).试用三个转动矩阵相乘的办法求矢量诸分量的在坐标轴转动时的变换矩阵.

答案:

$$R(\alpha,\beta,\gamma)=R_z(\gamma)R_x(\beta)R_z(\alpha)$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma & \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma & -\sin\beta\cos\gamma\\ -\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\cos\gamma & -\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma+\cos\alpha\cos\gamma & \sin\beta\sin\gamma\\ \cos\alpha\sin\beta & \sin\alpha\sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}$$

4. 设 a_x、a_y 与 a_z 是矢量 $\boldsymbol{a}$ 的 Cartesian 坐标,则

$$a_\pm=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}(a_x\pm\mathrm{i}a_y),\quad a_0=a_z$$

称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的循环坐标.设坐标系作一有限转动 $D(\alpha,\beta,\gamma)$,这里 α、β、γ 是相应的 Euler 角.试写出矢量诸循环坐标在坐标系转动时的变换矩阵.

答案:

$$D(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{pmatrix}-\sin^2\frac{\beta}{2}e^{-i(\alpha-\gamma)} & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta e^{-i\gamma} & -\cos^2\frac{\beta}{2}e^{i(\alpha+\gamma)}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta e^{-i\alpha} & \cos\beta & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta e^{i\alpha}\\ \sin^2\frac{\beta}{2}e^{-i(\alpha-\gamma)} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta e^{i\gamma} & \cos^2\frac{\beta}{2}e^{i(\alpha+\gamma)}\end{pmatrix}$$

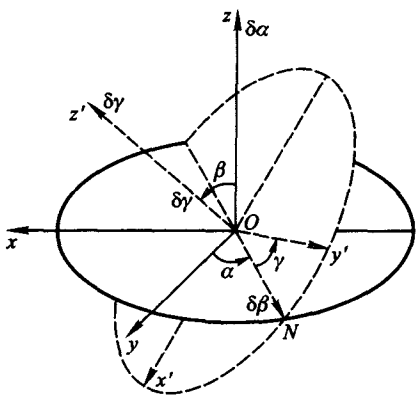


图 1.2 Euler 角

5. 试证坐标系作无限小转动的变换矩阵可写成 $a=I+\epsilon$,其中 ϵ 是反对称矩阵,而 I 是二阶单位张量;并指出 ϵ_{ij} 的几何意义.

提示:利用 $x'_i=x_i+\epsilon_{ik}x_k$ 与 $x_ix_i=x'_ix'_i$;引入矢量 $\delta\phi$,使 $\delta\phi_i=-\epsilon_{ijk}\epsilon_{jk}/2$,即使得 $\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}+\delta\phi\times\boldsymbol{r}$,由此分析 $\delta\phi$ 的物理意义.

6. 试证三维空间的转动变换(1.1.4)矩阵的矩阵元 a_{ij} 满足关系式(1.1.20)与(1.1.22).

§1.2　物理量在空间转动变换下的分类

假定在某一给定时刻，某一物理量在空间中的所有位置上都具有确定的值（测量值）. 我们便可将这个物理量描述为三个空间坐标 x_i 的一组函数 $f_n(\boldsymbol{r})|_{n=1,\cdots,N}$，或者说该物理量是定义在三维欧氏空间中的场. 三维欧氏空间中的场可按其在空间转动下的变换性质加以分类.

若场量 $\phi(\boldsymbol{r})$ 只有一个，且在坐标系的空间转动变换(1.1.4)下不变，即满足

$$\phi'(\boldsymbol{r}')=\phi(\boldsymbol{r}) \tag{1.2.1}$$

则称 $\phi(\boldsymbol{r})$ 为标量（场）.

若三个场量 $A_i(\boldsymbol{r})|_{i=1,2,3}$ 在空间转动变换(1.1.4)下像点 $\boldsymbol{r}$ 的三个坐标 x_i 那样变换，即满足

$$A'_i(\boldsymbol{r}')=a_{ij}A_j(\boldsymbol{r})=\frac{\partial x'_i}{\partial x_j}A_j(\boldsymbol{r}) \tag{1.2.2}$$

则这组量 $A_i(\boldsymbol{r})|_{i=1,2,3}$ 称为矢量（场），记为 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$，$A_i(\boldsymbol{r})$ 是 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ 的第 i 分量.

若九个场量 $T_{ij}(\boldsymbol{r})|_{i,j=1,2,3}$ 在空间转动变换(1.1.4)下像两个坐标分量的积 $x_ix_j|_{i,j=1,2,3}$（共有 9 个这样的积）那样变换，即满足

$$T'_{ij}(\boldsymbol{r}')=a_{il}a_{jm}T_{lm}(\boldsymbol{r})=\frac{\partial x'_i}{\partial x_l}\frac{\partial x'_j}{\partial x_m}T_{lm}(\boldsymbol{r}) \tag{1.2.3}$$

则这组量 $T_{ij}(\boldsymbol{r})|_{i,j=1,2,3}$ 称为二阶张量（场）$T(\boldsymbol{r})$，$T_{ij}(\boldsymbol{r})$ 是二阶张量 $T(\boldsymbol{r})$ 的第 (ij) 分量.

类似地，若 3^n 个场量 $T_{i_1i_2\cdots i_n}(\boldsymbol{r})|_{i_1,i_2,\cdots,i_n=1,2,3}$ 在空间转动变换(1.1.4)下像 n 个坐标分量积 $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}|_{i_1,i_2,\cdots,i_n=1,2,3}$（共有 3^n 个这样的积）那样变换，即满足

$$\begin{aligned}T'_{i_1i_2\cdots i_n}(\boldsymbol{r}')&=a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}T_{j_1j_2\cdots j_n}(\boldsymbol{r})\\&=\frac{\partial x'_{i_1}}{\partial x_{j_1}}\frac{\partial x'_{i_2}}{\partial x_{j_2}}\cdots\frac{\partial x'_{i_n}}{\partial x_{j_n}}T_{j_1j_2\cdots j_n}(\boldsymbol{r})\end{aligned} \tag{1.2.4}$$

则这组量 $T_{i_1i_2\cdots i_n}(\boldsymbol{r})|_{i_1,i_2,\cdots,i_n=1,2,3}$ 称为 n 阶张量（场）$T^{(n)}(\boldsymbol{r})$. 其中，$T_{i_1i_2\cdots i_n}(\boldsymbol{r})$ 是 $T^{(n)}(\boldsymbol{r})$（阶指标 n 常省去）的第 $(i_1\,i_2\cdots i_n)$ 分量；当未指明张量各指标的值时，$T_{i_1i_2\cdots i_n}(\boldsymbol{r})$ 实际上是张量各分量的代表元，为表述简捷起见，也将此代表元称为张量. 此外，由张量的定义知，标量是零阶张量，矢量是一阶张量.

例 2.1：试证 $\partial_i=\partial/\partial x_i$ 是三维矢量.

证明：由链式微分法则得

$$\partial'_i = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}\partial_j = a_{ij}\partial_j$$

证毕.

例 2.2:试证 δ_{ij} 是三维欧氏空间中的二阶张量.

证明:由式(1.1.19)得

$$\boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}'_j = a_{il}a_{jm}\boldsymbol{e}_l \cdot \boldsymbol{e}_m$$

此即

$$\delta_{ij} = a_{il}a_{jm}\delta_{lm}$$

证毕.

若张量 $T_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ 满足

$$T_{i_2 i_1 i_3 \cdots i_n} = \pm T_{i_1 i_2 i_3 \cdots i_n} \tag{1.2.5}$$

则张量 T 分别称为相对于指标(i_1, i_2)是对称的或反对称的.

定义张量关于指标(i_1, i_2)的对称部分与反对称部分:

$$\begin{cases} T_{\{i_1 i_2\}\cdots i_n} = (T_{i_1 i_2 i_3 \cdots i_n} + T_{i_2 i_1 i_3 \cdots i_n})/2 \\ T_{[i_1 i_2] i_3 \cdots i_n} = (T_{i_1 i_2 i_3 \cdots i_n} - T_{i_2 i_1 i_3 \cdots i_n})/2 \end{cases} \tag{1.2.6}$$

则

$$T_{i_1 i_2 i_3 \cdots i_n} = T_{\{i_1 i_2\}\cdots i_n} + T_{[i_1 i_2] i_3 \cdots i_n} \tag{1.2.7}$$

可见,任意二阶张量都可表为一个对称张量与一个反对称张量之和.对于更高阶张量,会出现混合对称情形;同样,任一张量都可以按其指标的对称性质(包括对称、反对称与混合对称各种不同的情形)加以分解.

习题 1-2

1. 若 T_{ij} 是一个二阶张量,b_i 是一个矢量,则 $a_i = T_{ij}b_j$ 也是一个矢量.
2. 若 a_i 是一个矢量,证明$\partial a_i/\partial x_j$是一个二阶张量.
3. 若 S_{ij} 是一个二阶对称张量,A_{ij} 是一个二阶反对称张量,则 $S_{ij}A_{ij} = 0$.
4. 证明二阶张量的对角分量之和是一个标量.
5. 证明:

$$\nabla^2(\phi\psi) = \phi\nabla^2\psi + 2\nabla\phi\cdot\nabla\psi + \nabla^2\psi$$

式中 ϕ 与 ψ 是三维标量.

§1.3 物理量在空间反演变换下的进一步分类

坐标系的空间反演变换 P 由下式定义:

$$x'_i = -x_i, \qquad i = 1,2,3 \tag{1.3.1}$$

它不是连续变换.容易看出,构成右(左)旋系三个矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 在空间反演变换后成为左(右)旋系.因而,右(左)坐标系在空间反演变换后成为左(右)旋坐

标系.

在上述空间反演 P 下,若 n 阶张量 T 的诸分量按 n 个坐标乘积的变换规律变换,即

$$T'_{i_1 i_2 \cdots i_n} = (-)^n T_{i_1 i_2 \cdots i_n} \tag{1.3.2}$$

则 T 是真正的张量,简称张量(当 $n=1$ 时又称为极矢量);若在空间反演 P 下,n 阶张量 T 的诸分量按下式变换:

$$T'_{i_1 i_2 \cdots i_n} = (-)^{n+1} T_{i_1 i_2 \cdots i_n} \tag{1.3.3}$$

则 T 称为赝张量(当 $n=1$ 时又称为轴矢量).

经典场论中场的状态以及量子力学中粒子的状态(称为波函数)都用空间坐标的某一函数 $\psi(x)$来描述,它可按照在转动变换与空间反演变换下的变换性质分类而属于某种张量场,这时空间反演变换下需乘的附加因子 $\eta_p = (-1)^p$ 称为粒子或场的空间宇称.常见的各种张量及其空间宇称为

$$\begin{aligned} &\eta_p(\text{标量}) = +1, && \eta_p(\text{赝标量}) = -1 \\ &\eta_p(\text{(极)矢量}) = -1, && \eta_p(\text{轴矢量}) = +1 \\ &\eta_p(\text{二阶张量}) = +1, && \eta_p(\text{二阶赝张量}) = -1 \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

若张量 $T_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ 在空间转动变换(1.1.4)下满足

$$T'_{i_1 i_2 \cdots i_n}(\boldsymbol{r}') = T_{i_1 i_2 \cdots i_n}(\boldsymbol{r}) \tag{1.3.5}$$

则称 T 为转动不变张量(简称不变张量).

例 3.1:不变矢量是零矢量.

例 3.2:δ_{ij} 是一个二阶对称张量,而且是不变张量.这个不变张量是欧氏空间中的度规张量.

事实上,若在一个矢量空间 V 中由下式

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j \tag{1.3.6}$$

定义了两个无限接近的点之间的距离的平方 $\mathrm{d}s^2$,则矢量空间 V 便成为一个度规空间,而 g_{ij} 称为度规张量.由于 $\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j = \mathrm{d}x_j\mathrm{d}x_i$,$g_{ij}$ 的反对称部分对 $\mathrm{d}s^2$ 的贡献为零,故 g_{ij} 只须取为对称张量.由于两点之间的距离与坐标系的选取无关,定义式(1.3.6)在不同坐标系中应具有相同的形式,故 g_{ij} 应是不变张量.若取 $g_{ij} = \delta_{ij}$,则

$$\mathrm{d}s^2 = \delta_{ij}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j = \mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_i \tag{1.3.7}$$

它正是欧氏空间中的距离公式(1.1.6).

由下式定义的 27 个分量

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{若}(i,j,k)\text{为}(1,2,3)\text{的正循环} \\ -1, & \text{若}(i,j,k)\text{为}(1,2,3)\text{的逆循环} \\ 0, & \text{其余情形} \end{cases} \tag{1.3.8}$$

的全体称为三阶全反对称张量

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ikj} \tag{1.3.9}$$

注:由(1,2,3)经变换 1→2,2→3,3→1 逐次生成的结果称为(1,2,3)的正循环;而由(1,2,3)经变换 1→3,3→2,2→1 逐次生成的结果称为(1,2,3)的逆循环.由定义知,ε_{ijk}是不变张量.

容易看出,欧氏度规张量 δ_{ij}在空间反演 P 下仍是张量.但三阶全反对称张量 ε_{ijk}则是赝张量.

此外,可以验证,三阶行列式可由下式展开:

$$\det\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} = \varepsilon_{ijk}A_iB_jC_k \tag{1.3.10}$$

因此,若 a_{ij}为二阶张量,则以 a_{ij}为矩阵元的 3×3 矩阵的行列式为

$$\det(a_{ij}) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \varepsilon_{lmn}a_{1l}a_{2m}a_{3n} \tag{1.3.11}$$

类似地,有

$$\det\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \end{pmatrix} = \varepsilon_{lmn}a_{il}a_{jm}a_{kn} = \varepsilon_{ijk}\det(a_{lm}) \tag{1.3.12}$$

与

$$\det\begin{pmatrix} a_{1i} & a_{2i} & a_{3i} \\ a_{1j} & a_{2j} & a_{3j} \\ a_{1k} & a_{2k} & a_{3k} \end{pmatrix} = \varepsilon_{lmn}a_{li}a_{mj}a_{nk} = \varepsilon_{ijk}\det(a_{lm}) \tag{1.3.13}$$

令 $a_{ij} = \delta_{ij}$,则

$$\varepsilon_{ijk} = \det\begin{pmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{pmatrix} \tag{1.3.14}$$

由此得

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} &= \det\begin{pmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} \delta_{1l} & \delta_{1m} & \delta_{1n} \\ \delta_{2l} & \delta_{2m} & \delta_{2n} \\ \delta_{3l} & \delta_{3m} & \delta_{3n} \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.3.15}$$

继而有

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \det\begin{pmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} \end{pmatrix} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \tag{1.3.16}$$

以及

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 2!\ \delta_{il}, \qquad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 3! \tag{1.3.17}$$

例 3.3:试证,正交坐标系 S 中的三阶全反对称张量 ε_{ijk}满足

$$\varepsilon_{ijk} = \pm (\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j) \cdot \boldsymbol{e}_k \tag{1.3.18}$$

式中±分别在右旋系与左旋系中适用，而 $\boldsymbol{e}_i$ 是相应的相互正交的基矢.

证明：正交坐标系 S 中的基矢满足关系

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = \pm \boldsymbol{e}_k \tag{1.3.19}$$

式中(i,j,k)是 1,2,3 的正循环，当 S 为右旋系取正号，若为左旋系取负号. 于是，在右旋系中有

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{pmatrix} \tag{1.3.20}$$

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} = \det \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} \tag{1.3.21}$$

而相应的计算公式在左旋系中则为

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{pmatrix} \tag{1.3.22}$$

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} = -\det \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} \tag{1.3.23}$$

式中 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 是任意的三个矢量. 在 S 系中运用展开公式(1.3.10)可得

$$(A_i \boldsymbol{e}_i \times B_j \boldsymbol{e}_j) \cdot C_k \boldsymbol{e}_k = \pm A_i B_j C_k \varepsilon_{ijk} \tag{1.3.24}$$

式中±分别在右旋系与左旋系中适用. 由于 $A_iB_jC_k$ 是任意的，因而上式两边 $A_iB_jC_k$ 的系数必然相等，此即所证.

例 3.4：试证，由式(1.3.8)定义的 27 个分量组成一个三阶赝张量.

证明：不失普遍性，可在右旋正交系中工作. 注意到坐标转动变换可写为

$$\boldsymbol{e}'_i = a_{ij} \boldsymbol{e}_j, \qquad i,j = 1,2,3$$

且转动变换保持坐标系的螺旋性(右旋系仍为右旋系)不变，可知

$$\varepsilon'_{ijk} = (\boldsymbol{e}'_i \times \boldsymbol{e}'_j) \cdot \boldsymbol{e}'_k = \det \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \end{pmatrix} \tag{1.3.25}$$

即

$$\varepsilon'_{ijk} = a_{il} a_{jm} a_{kn} \varepsilon_{lmn} \tag{1.3.26}$$

可见 ε_{ijk} 是 3 阶转动张量.

在空间反演变换下，右手系 $\boldsymbol{e}_i$ 变为左手系 $\boldsymbol{e}'_i$. 因而有

$$\varepsilon'_{ijk} = -(\boldsymbol{e}'_i \times \boldsymbol{e}'_j) \cdot \boldsymbol{e}'_k = (\boldsymbol{e}'_i \times \boldsymbol{e}_j) \cdot \boldsymbol{e}_k = \varepsilon_{ijk} \tag{1.3.27}$$

可见 ε_{ijk} 是赝张量.

例 3.5：试证：

(1) 三维欧氏空间中任一不变的二阶张量与 δ_{ij} 成正比；

(2) 任一不变的三阶张量与 ε_{ijk} 成正比；

(3) 任一不变的四阶张量与 $(\delta_{ij}\delta_{kl}+\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})$ 成正比.

证(3)：设在转动前后的坐标系 S 与 S′中，四阶张量 T_{ijlm} 满足

$$T'_{ijkl}=a_{im}a_{jn}a_{kr}a_{ls}T_{mnrs}=T_{ijkl}$$

式中 a_{ij} 是任意的正交矩阵 a 的矩阵元. 张量 T'_{ijkl} 显然应与坐标变换系数 a_{ij} 无关，而这只能在 T_{ijkl} 取下述形式：

$$T_{ijkl}=A\delta_{ij}\delta_{kl}+B\delta_{ik}\delta_{jl}+C\delta_{il}\delta_{jk}$$

时成立，式中 A、B、C 是常数. 上式可写成

$$T_{ijkl}=A(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j)(\boldsymbol{e}_k\cdot\boldsymbol{e}_l)+B(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_k)(\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_l)+C(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_l)(\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_k)$$

另外不变张量应在坐标轴的任意交换(例如第 j 轴与第 k 轴交换)下不变，因而有

$$A=B=C$$

证毕.

利用式(1.3.18)可得

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_i=\boldsymbol{e}_i\cdot(A_j\boldsymbol{e}_j\times B_k\boldsymbol{e}_k)=\pm\varepsilon_{ijk}A_jB_k \tag{1.3.28}$$

同样，式中 ± 分别在右旋系与左旋系中适用. 上式即

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\pm\varepsilon_{ijk}A_jB_k\boldsymbol{e}_i \tag{1.3.29}$$

它们与(1.3.21)和(1.3.23)中的相应矩阵公式等价.

对于任一个二阶反对称张量 ω_{ij}，可以利用 ε_{ijk} 构造一个矢量 ω_i：

$$\omega_i=\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\omega_{jk} \tag{1.3.30}$$

利用关于 ε_{ijk} 的恒等式，可从上式解得

$$\omega_{ij}=\varepsilon_{ijk}\omega_k \tag{1.3.31}$$

可见，矢量 ω_i 与反对称张量 ω_{ij} 是一一对应的.

习题 1-3

1. 证明：构成右(左)旋系三个矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 在空间反演变换后成为左(右)旋系.

2. 若 T_{ij} 是一个二阶张量，P_{ij} 是一个二阶赝张量，则 $T_{ij}P_{ij}$ 是一个赝标量.

3. 证明：当坐标系旋转或偶数个坐标轴反向时，变换行列式等于 1；当奇数个坐标轴反向时，变换行列式等于 −1.

4. 设 x_i 是笛卡儿坐标，求当空间坐标系作旋转与反演变换时诸体积分 $T_{ij}=\int \mathrm{d}v x_i x_j f(x^2)$ 的变换规律，式中 $f(x^2)$ 是一个标量函数.

5. 试用两矢量的循环分量表示它们的标积(点乘)与矢积(叉乘)；并用球谐函数表示矢径的诸循环分量.

答案：

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_0=\mathrm{i}(a_-b_+-a_+b_-),\quad (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_\pm=\pm\mathrm{i}(a_0b_\pm-a_\pm b_0),$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sum_{\mu=\pm}(-)^{\mu}a_{-\mu}b_{\mu},\quad r_{\mu}=\sqrt{\frac{4\pi}{3}}rY_{1\mu}$$

6. 证明(1.3.16)和(1.3.17).

§1.4　张量代数

若 A 与 B 为同类的 n 阶张量,则它们的和与差分别是下述 n 阶张量:

$$(A\pm B)_{i_1i_2\cdots i_n}=A_{i_1i_2\cdots i_n}\pm B_{i_1i_2\cdots i_n}\tag{1.4.1}$$

若 λ 是一个数(可以是实数或复数),则与张量之数乘是下述张量:

$$(\lambda T)_{i_1i_2\cdots i_n}=\lambda T_{i_1i_2\cdots i_n}\tag{1.4.2}$$

若 A 与 B 分别为 m 与 n 阶张量,则由下式定义

$$(A\otimes B)_{i_1i_2\cdots i_nj_1j_2\cdots j_n}=A_{i_1i_2\cdots i_m}B_{j_1j_2\cdots j_n}\tag{1.4.3}$$

的张量 $A\otimes B$ 是$(m+n)$阶张量,称为 A 与 B 的张量积.两个矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的张量积 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ 称为并矢,简记为 $\boldsymbol{AB}$.运算

$$T_{i_1i_2\cdots i_r\cdots i_s\cdots i_n}\delta_{i_ri_s}\tag{1.4.4}$$

称为张量 T 的指标 i_r 与 i_s 之间的收缩.一个 n 阶张量 T 经一次收缩后成为 $(n-2)$阶张量.二阶张量 T_{ij} 的迹

$$\mathrm{tr}\ T=T_{ii}=T_{ij}\delta_{ij}\tag{1.4.5}$$

与两矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的标积

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_iB_i=A_iB_j\delta_{ij}\tag{1.4.6}$$

以及两个张量 T 与 t 的一次点乘

$$T\cdot t=T_{\cdots i}t_{i\cdots}\tag{1.4.7}$$

和二次点乘

$$T:t=T_{\cdots ij}t_{ji\cdots}\tag{1.4.8}$$

都是收缩运算的例子.值得注意的是,由定义式(1.4.8)有

$$\boldsymbol{ab}:\boldsymbol{cd}=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})$$

即对于多次点乘,应逐次收缩两张量间最邻近的一对指标.按照相邻指标参与收缩的约定,容易写出两张量叉积的定义式:

$$T_1\times T_2=(T_1\cdot\boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}(\boldsymbol{e}_k\cdot T_2)\tag{1.4.9}$$

可以证明下述重要定理:若对任意矢量 $\boldsymbol{B}$,A_iB_i 是一个标量(或赝标量);则 $\boldsymbol{A}$ 是一个矢量(或轴矢量).若对任意轴矢量 $\boldsymbol{B}$,A_iB_i 是一个标量(或赝标量),则 $\boldsymbol{A}$ 是一个轴(或极)矢量.

例如,对于任意的矢量 $\boldsymbol{C}$,$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}$ 等于由矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 所张成的平行六面体的体积,它在三维空间中的转动变换下不变.在空间反演下,体积变号,因

而体积是赝标量;故由上述定理可知 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 是赝矢量.

利用关系(1.3.16)

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}$$

易证

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} \tag{1.4.10}$$

上式左端有两次叉乘运算,因而它的正确性与正交坐标系的螺旋性无关.利用此式可证明许多张量恒等式.张量代数运算中常用到的其他公式如下:

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\\(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\\(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=[\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d})]\boldsymbol{c}-[\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})]\boldsymbol{d}\\T_{ik}(a_ib_k-a_kb_i)=2\omega\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}),\qquad \omega_i=\dfrac{1}{2}\varepsilon_{ijk}T_{jk}\end{cases} \tag{1.4.11}$$

设 n_i 为欧氏空间中某一方向矢量 $\boldsymbol{n}$ 的第 i 分量.由 $\boldsymbol{n}$ 的张量积可构成高阶张量.这些高阶张量对空间所有方向平均后所得的张量对于坐标系的旋转是不变的,因而是不变的对称张量(对称是由于 $n_in_j=n_jn_i$).例如:

$$\begin{cases}\overline{n_i}=\dfrac{1}{4\pi}\int\mathrm{d}\Omega n_i=0\\\overline{n_in_j}=\dfrac{1}{4\pi}\int\mathrm{d}\Omega n_in_j=\dfrac{1}{3}\delta_{ij}\\\overline{n_in_jn_k}=\dfrac{1}{4\pi}\int\mathrm{d}\Omega n_in_jn_k=0\\\overline{n_in_jn_kn_l}=\dfrac{1}{4\pi}\int\mathrm{d}\Omega n_in_jn_kn_l=\dfrac{1}{15}(\delta_{ij}\delta_{kl}+\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})\end{cases} \tag{1.4.12}$$

由此可得

$$\begin{cases}\overline{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}}=0\\\overline{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n})^2}=|\boldsymbol{a}|^2/3\\\overline{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}/3\\\overline{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{a}/3\\\overline{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{n})^2}=2|\boldsymbol{a}|^2/3\\\overline{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{n})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{n})}=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}/3\\\overline{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{n}\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{n}}=\dfrac{1}{15}[\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}]\end{cases} \tag{1.4.13}$$

令 $\mathcal{I}=\boldsymbol{ii}+\boldsymbol{jj}+\boldsymbol{kk}$,此即度规张量 δ_{ij},它也常称为单位张量.因为

$$\begin{aligned}&T^{(n)}\cdot\mathcal{I}=\mathcal{I}\cdot T^{(n)}=T^{(n)},\qquad n>0\\&T^{(2)}:\mathcal{I}=\mathcal{I}:T^{(2)}=\mathrm{tr}(T^{(2)})\end{aligned} \tag{1.4.14}$$

式中 $T^{(n)}$ 是 n 阶张量(或赝张量).

习题 1-4

1. 证明:

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})+\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})+\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=0$$

2. 将下述量写成矢量表达式:

$$\varepsilon_{inl}\varepsilon_{irs}\varepsilon_{lmp}\varepsilon_{sp}a_n a_r b_m c_t$$

$$\varepsilon_{inl}\varepsilon_{krs}\varepsilon_{lmp}\varepsilon_{sp}a_i b_k c_m d_n e_r f_t$$

答案:

$$a^2(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}),$$

$$[(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{f}]\cdot[(\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{c}]$$

3. 设 I 为二阶单位张量,试证

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})I=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$$

提示:先验证恒等式

$$\varepsilon_{lmn}\delta_{ij}=\delta_{il}\varepsilon_{jmn}+\delta_{im}\varepsilon_{jnl}+\delta_{in}\varepsilon_{jlm}$$

4. 证明:若对任意矢量 $\boldsymbol{B}$,A_iB_i 是一个标量(或赝标量);则 $\boldsymbol{A}$ 是一个矢量(或轴矢量).若对任意轴矢量 $\boldsymbol{B}$,A_iB_i 是一个标量(或赝标量),则 $\boldsymbol{A}$ 是一个轴(或极)矢量.

5. 证明(1.4.10)式.

6. 证明(1.4.11)诸式.

7. 证明(1.4.12)诸式.

8. 证明(1.4.13)诸式.

9. I 为二阶单位张量,试证

$$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\times I=\boldsymbol{v}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}$$

10. I 为二阶单位张量,试证

$$(\boldsymbol{u}\times I)\cdot(\boldsymbol{v}\times I)=\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times I)=\boldsymbol{v}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}I$$

§1.5　张量分析

在三维 Cartesian 坐标系中,微分算子∇定义为

$$\nabla\equiv\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \tag{1.5.1}$$

微分算子∇不仅是一个微分算符,而且是一个(极)矢量;它可同时参与微分运算和张量运算.微分算子∇对张量场 T 的作用(即微分运算)有下述几种:

$$\begin{cases}\nabla T=\boldsymbol{e}_i\dfrac{\partial}{\partial x_i}T, & \nabla\cdot T=\dfrac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{e}_i\cdot T)\\ \nabla\times T=\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_i\dfrac{\partial}{\partial x_j}(\boldsymbol{e}_k\cdot T), & \nabla^2 T=\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)T\end{cases} \tag{1.5.2}$$

前三种运算的结果分别称之为张量场 T 的梯度、散度和旋度.微分算子∇ 所参与的张量运算有下述两种：

$$T\cdot\nabla=(T\cdot\boldsymbol{e}_i)\frac{\partial}{\partial x_i},\quad T\times\nabla=(T\cdot\boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_k}\tag{1.5.3}$$

容易证明下述公式：

$$\begin{cases}\nabla\times(\nabla T^{(n)})=0\\ \nabla\cdot(\nabla\times T^{(n>0)})=0\\ \nabla\times(\nabla\times T^{(n>0)})=\nabla(\nabla\cdot T^{(n>0)})-\nabla^2T^{(n>0)}\end{cases}\tag{1.5.4}$$

式中 $T^{(n>0)}$ 表示阶数大于零的张量.

设 ϕ 与 ψ 为标量场，$\boldsymbol{f}$ 与 $\boldsymbol{g}$ 为矢量场(下同)，可得

$$\begin{cases}\nabla(\phi\psi)=\phi\nabla\psi+\psi\nabla\phi\\ \nabla(\phi\boldsymbol{f})=\phi\nabla\boldsymbol{f}+(\nabla\phi)\boldsymbol{f}\\ \nabla\cdot(\phi\boldsymbol{f})=\phi\nabla\cdot\boldsymbol{f}+\boldsymbol{f}\cdot\nabla\phi\\ \nabla\times(\phi\boldsymbol{f})=\phi\nabla\times\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}\times\nabla\phi\\ (\nabla\boldsymbol{g})\cdot\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}\times(\nabla\times\boldsymbol{g})+\boldsymbol{f}\cdot(\nabla\boldsymbol{g})\\ \nabla(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g})=(\nabla\boldsymbol{g})\cdot\boldsymbol{f}+(\nabla\boldsymbol{f})\cdot\boldsymbol{g}\\ \nabla\cdot(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})=\boldsymbol{g}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{f})-\boldsymbol{f}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{g})\\ \nabla\times(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})=\boldsymbol{f}(\nabla\cdot\boldsymbol{g})-\boldsymbol{g}(\nabla\cdot\boldsymbol{f})-\boldsymbol{f}\cdot(\nabla\boldsymbol{g})+\boldsymbol{g}\cdot(\nabla\boldsymbol{f})\\ \nabla\boldsymbol{f}[\phi]=(\nabla\phi)\dfrac{\delta\boldsymbol{f}}{\delta\phi}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{f}[\phi]=(\nabla\phi)\cdot\dfrac{\delta\boldsymbol{f}}{\delta\phi}\\ \nabla\times\boldsymbol{f}[\phi]=(\nabla\phi)\times\dfrac{\delta\boldsymbol{f}}{\delta\phi}\end{cases}\tag{1.5.5}$$

记 $\boldsymbol{r}=(x-x',y-y',z-z')$，$r=|\boldsymbol{r}|$，我们有

$$\begin{cases}\nabla r=\boldsymbol{n}_r=\boldsymbol{r}/r, & \nabla\cdot\boldsymbol{n}_r=2/r\\ \nabla\cdot\boldsymbol{r}=3, & \nabla\times\boldsymbol{r}=0\\ \nabla\boldsymbol{r}=I, & \nabla^2\dfrac{1}{r}=-\nabla\cdot\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}=-4\pi\delta^3(\boldsymbol{r})\\ \nabla\times\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}=0, & \nabla\boldsymbol{n}_r=\dfrac{1}{r}[I-\boldsymbol{n}_r\boldsymbol{n}_r]\\ \nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})=\boldsymbol{a}, & (\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{n}_r=\dfrac{1}{r}[\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}_r)\boldsymbol{n}_r]=\boldsymbol{a}_\perp/r\\ \nabla\phi(r)=\phi'(r)\boldsymbol{n}_r=\phi'(r)\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\end{cases}\tag{1.5.6}$$

式中 $\boldsymbol{a}$ 为常矢量.

对于张量场的体积分，有下述常用的积分变换公式：

$$\begin{cases}\int_V \mathrm{d}v\,\nabla\phi = \oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\phi \\ \int_V \mathrm{d}v\,\nabla\cdot\boldsymbol{f} = \oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{f} \\ \int_V \mathrm{d}v\,\nabla\times\boldsymbol{f} = \oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{f} \\ \int_V \mathrm{d}v\,\nabla T = \oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}T \\ \int_V \mathrm{d}v\,\nabla\cdot T^{(n>0)} = \oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot T^{(n>0)} \\ \int_V \mathrm{d}v\,\nabla\times T^{(n>0)} = \oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\times T^{(n>0)}\end{cases} \tag{1.5.7}$$

式中 S 是体积 V 的闭合边界曲面，面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 的正方向取为外法向. 它们可概括为下述替换法则：

$$\int_V \mathrm{d}v\,\nabla \to \oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \tag{1.5.8}$$

式中∇算子与 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 的外法向应出现在被积式中同一位置.

对于张量场的面积分，有下述常用的积分变换公式：

$$\begin{cases}\int_S (\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\times\nabla)\phi = \oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{l}\phi \\ \int_S (\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\times\nabla)\cdot\boldsymbol{f} = \oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{f} \\ \int_S (\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\times\nabla)\times\boldsymbol{f} = \oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{f} \\ \int_S (\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\times\nabla)T = \oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{l}T \\ \int_S (\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\times\nabla)\cdot T^{(n>0)} = \oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot T^{(n>0)} \\ \int_S (\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\times\nabla)\times T^{(n>0)} = \oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{l}\times T^{(n>0)}\end{cases} \tag{1.5.9}$$

式中 L 是面积 S 的闭合边界曲线，面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 的方向按右手螺旋法则由 L 的方向决定. 它们可概括为下述替换法则：

$$\int_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\times\nabla \to \oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.5.10}$$

式中 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\times\nabla$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的方向应出现在被积式中同一位置.

习题 1-5

1. 证明：

$$\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\frac{1}{2}\nabla A^2-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\boldsymbol{A})$$

2. 证明：

(1) $\boldsymbol{C}\cdot\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{C}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}$

(2) $(\boldsymbol{C}\cdot\nabla)(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{C}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{C}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}$

(3) $(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\nabla\cdot\boldsymbol{A}$

(4) $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\nabla\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{C}-\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{C}$

(5) $(\boldsymbol{A}\times\nabla)\times\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})-\boldsymbol{A}\nabla\cdot\boldsymbol{B}$

(6) $(\nabla\times\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\nabla\cdot\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})-\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$

3. 证明(1.5.4)诸式.

4. 证明(1.5.5)诸式.

5. 证明(1.5.6)诸式.

6. 试求下列各量：

$$\nabla\cdot[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}];\nabla\times[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}];\nabla\cdot[(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n})\times\boldsymbol{n}];\nabla\times[(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n})\times\boldsymbol{n}].$$

式中(1) $\boldsymbol{n}$ 为一单位常矢量；(2) $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}/r$.

答案：(1) 1;0; −2;0;(2) 3;0;0;0.

7. 设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{E}_0$ 均为常矢量，试求下列各量：

$$(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{r};\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r});\nabla\cdot[\boldsymbol{E}_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})];\nabla\times[\boldsymbol{E}_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]$$

答案：$\boldsymbol{a}$；$\boldsymbol{a}$；$\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{k}\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$；$\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{k}\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$.

8. 试由 Gauss 定理证明

$$\int_V \mathrm{d}v\,\nabla\times\boldsymbol{A}=\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{A};\quad \int_V \mathrm{d}v\,\nabla\phi=\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\phi$$

式中 $\boldsymbol{A}$ 与 ϕ 分别是某一矢量与标量.

提示：将等式两边与任意常矢量点乘，经矢量运算后运用 Gauss 定理.

9. 试由 Stokes 定理证明

$$\int_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\times\nabla\phi=\oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{l}\phi$$

式中 ϕ 是一个标量.

提示：将等式两边与任意常矢量点乘，经矢量运算后运用 Gauss 定理.

10. 设矢量 $\boldsymbol{A}$ 在体积 V 中满足 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$，且在体积 V 的边界面 S 上满足 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{A}=0$，这里 $\boldsymbol{n}$ 为边界面 S 的法向.试证

$$(1)\int_V \mathrm{d}v\boldsymbol{A}=0;\qquad (2)\ \nabla_R\int_V \mathrm{d}v\,\frac{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}|}=0$$

式中 ∇_R 作用在矢径 $\boldsymbol{R}$ 上.

提示：(1) 考虑并矢 $\boldsymbol{Ax}$ 的散度的体积分.

11. 计算积分

$$\oint_S (\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{r};\qquad \oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})$$

式中 $\boldsymbol{a}$ 是常矢量.

答案:均为 $V\boldsymbol{a}$,V 是以 S 为边界的区域的体积.

12. 将下列积分

$$\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\phi;\qquad \oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{f};\qquad \oint_S (\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{f}$$

用体积分表出,式中 $\boldsymbol{a}$ 是常矢量,ϕ 是标量场,$\boldsymbol{f}$ 是矢量场.

13. 设 $f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{r})$ 是 $\boldsymbol{r}$ 的可微函数,且满足下述线性条件:

$$f(c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{r})=c_1f(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{r})+c_2f(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{r})$$

式中 c_1 与 c_2 是任意常数(相对于 $\boldsymbol{a}_i$ 和 $\boldsymbol{r}$ 而言).试证明:

$$\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}f(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})=\int_V \mathrm{d}vf(\boldsymbol{\nabla},\boldsymbol{r})$$

式中 S 是体积 V 的边界面,$\boldsymbol{n}$ 是 S 的外法向;微分算子 $\boldsymbol{\nabla}$ 作用在 $\boldsymbol{r}$ 上,且在所有变量的左方.

14. 将积分 $\oint_L \mathrm{d}\phi(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r})$ 用面积分表出,式中 ϕ 与 ψ 都是标量.

15. 证明:

$$\int_V \mathrm{d}v\{\boldsymbol{A}\cdot[\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})]-\boldsymbol{B}\cdot[\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})]\}$$
$$=\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot[\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})]$$

§1.6　Helmholtz 定理

定理:区域 V 中的一个单值、可微、有界的矢量场由它的散度、旋度和它在边界上的值(法向或切向分量)唯一地确定.这称为 Helmholtz 定理.

证明:设 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{r}'$ 是区域 V 内的两点,令 $R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$.借助于恒等式

$$\boldsymbol{\nabla}^2\frac{1}{4\pi R}=-\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

(式中 $\boldsymbol{\nabla}$ 作用在 $\boldsymbol{r}$ 上),可将区域 V 中的矢量场 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ 写为

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=\frac{-1}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}^2\int_V \mathrm{d}v'\frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{R}$$

或

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=-\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\int_V \mathrm{d}v'\frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{R}+\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\times\left[\boldsymbol{\nabla}\times\int_V \mathrm{d}v'\frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{R}\right]$$

利用积分变换公式和下述恒等式:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{1}{R}=-\boldsymbol{\nabla}'\cdot\frac{1}{R}\qquad(1.6.1)$$

(式中∇'作用在$\boldsymbol{r}'$上)可得

$$\nabla\cdot\int_V \mathrm{d}v'\frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{R}=\int_V \mathrm{d}v'\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{R}-\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}'\cdot\frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{R}$$

与

$$\nabla\times\int_V \mathrm{d}v'\frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{R}=\int_V \mathrm{d}v'\frac{\nabla'\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{R}-\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}'\times\frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{R} \tag{1.6.2}$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=&-\nabla\left[\int_V \mathrm{d}v'\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{4\pi R}-\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}'\cdot\frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{4\pi R}\right]+\\&\nabla\times\left[\int_V \mathrm{d}v'\frac{\nabla'\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{4\pi R}-\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}'\times\frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{4\pi R}\right]\end{aligned} \tag{1.6.3}$$

此即 Helmholtz 定理.

Helmholtz 定理说明:区域 V 中的矢量场$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$可表示为一个标量函数的梯度(它是无旋场即旋度为零的场)与一个矢量函数的旋度(它是无散场即散度为零的场)之和.这个标量函数由 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$的散度与 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$在边界上的法向分量完全确定;而矢量函数则由 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$的旋度与 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$在边界上的切向分量完全确定.

定义矢量场 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')$在区域 V 中与边界面 S 上源体密度$\rho(\boldsymbol{r}')$、源面密度$\omega(\boldsymbol{r}')$、漩涡源体密度$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')$和漩涡源面密度$\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{r}')$

$$\begin{aligned}\rho(\boldsymbol{r}')&=\nabla'\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')\\\omega(\boldsymbol{r}')&=-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')\\\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')&=\nabla'\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')\\\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{r}')&=-\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')\end{aligned} \tag{1.6.4}$$

式中 $\boldsymbol{n}$ 是面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 的外法向.利用这些源密度可将 Helmholtz 定理改写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=&-\nabla\left[\int_V \mathrm{d}v'\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{4\pi R}+\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}'\frac{\omega(\boldsymbol{r}')}{4\pi R}\right]+\\&\nabla\times\left[\int_V \mathrm{d}v'\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{4\pi R}+\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}'\frac{\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{r}')}{4\pi R}\right]\end{aligned} \tag{1.6.5}$$

这说明:区域 V 中的矢量场的无旋部分是体积 V 内和边界面上的源分布的势的梯度;其有旋部分则是体积 V 内和边界面上的漩涡源分布的势的旋度.

习题 1-6

1. 矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 分别在直角坐标系、柱坐标系或球坐标系中由下式表示:

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x(3y^2-2x)+\boldsymbol{e}_y x^2+\boldsymbol{e}_z 2z\\\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_r z^2\sin\phi+\boldsymbol{e}_\phi z^2\cos\psi+\boldsymbol{e}_z 2rz\sin\phi\\\boldsymbol{C}=\boldsymbol{e}_r\sin\theta\cos\phi+\boldsymbol{e}_\theta\cos\theta\cos\phi-\boldsymbol{e}_\phi\sin\phi\end{cases}$$

将它们表示为一个标量函数的梯度或一个矢量函数的旋度.

2. 证明在全空间中：

(1) 一个非零的无旋场的散度不能处处为零；

(2) 一个非零的无散场的旋度不能处处为零.

§1.7　正交曲线坐标系

设空间中有由下述三组函数

$$f_i(x_1,x_2,x_3)=u_i,\qquad i=1,2,3 \tag{1.7.1}$$

描述的三组曲面，式中 x_i 是空间点的 Cartesian 坐标. 若在空间中任一点 $P(x_1,x_2,x_3)$，Jacobi 矩阵 J

$$J=\frac{\partial(u_1,u_2,u_3)}{\partial(x_1,x_2,x_3)}=\begin{pmatrix}\partial u_1/\partial x_1 & \partial u_1/\partial x_2 & \partial u_1/\partial x_3\\ \partial u_2/\partial x_1 & \partial u_2/\partial x_2 & \partial u_2/\partial x_3\\ \partial u_3/\partial x_1 & \partial u_3/\partial x_2 & \partial u_3/\partial x_3\end{pmatrix} \tag{1.7.2}$$

的行列式不为零，则方程组(1.7.1)可对 x_i 解出

$$x_i=g_i(u_1,u_2,u_3) \tag{1.7.3}$$

因而空间中任一点 P 的 Cartesian 坐标 (x_1,x_2,x_3) 由一组参数值 (u_1,u_2,u_3) 唯一地确定，这组参数值称为点 P 的曲线坐标；而

$$u_i=\text{常数},\qquad i=1,2,3 \tag{1.7.4}$$

确定的曲面称为坐标曲面，坐标曲面的交线称为坐标曲线，相应的坐标系称为曲线坐标系.

由式(1.7.3)知

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}u_i\boldsymbol{n}_{(i)} \tag{1.7.5}$$

式中

$$\boldsymbol{n}_{(i)}=\partial\boldsymbol{r}/\partial u_i=(\partial x_j/\partial u_i)\boldsymbol{e}_j \tag{1.7.6}$$

是在 $P(\boldsymbol{r})$ 点的地方坐标基矢，而 $\boldsymbol{e}_i$ 是 Cartesian 坐标系中的基矢.

定义

$$h_{ij}^2=\boldsymbol{n}_{(i)}\cdot\boldsymbol{n}_{(j)}=\frac{\partial x_1}{\partial u_i}\frac{\partial x_1}{\partial u_j}+\frac{\partial x_2}{\partial u_i}\frac{\partial x_2}{\partial u_j}+\frac{\partial x_3}{\partial u_i}\frac{\partial x_3}{\partial u_j} \tag{1.7.7}$$

则 Jacobi 矩阵 J 满足

$$(J^{-1})^{\mathrm{T}}(J^{-1})=\begin{pmatrix}h_{11}^2 & h_{12}^2 & h_{13}^2\\ h_{21}^2 & h_{22}^2 & h_{23}^2\\ h_{31}^2 & h_{32}^2 & h_{33}^2\end{pmatrix} \tag{1.7.8}$$

若在空间中任一点 $P(\boldsymbol{r})$ 处的地方坐标基矢相互正交，则

$$h_{ij}^2=h_i^2\delta_{ij} \tag{1.7.9}$$

式中

$$h_i^2 = h_{ii}^2 = \frac{\partial x_1}{\partial u_i}\frac{\partial x_1}{\partial u_i} + \frac{\partial x_2}{\partial u_i}\frac{\partial x_2}{\partial u_i} + \frac{\partial x_3}{\partial u_i}\frac{\partial x_3}{\partial u_i} \tag{1.7.10}$$

称为 Lame 系数,且

$$(J^{-1})^{\mathrm{T}}(J^{-1}) = \begin{pmatrix} h_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3^2 \end{pmatrix} \tag{1.7.11}$$

因而

$$(\det J)^2 = \frac{1}{(h_1 h_2 h_3)^2} \tag{1.7.12}$$

满足正交条件(1.7.9)的曲线坐标系称为正交曲线坐标系.

在正交曲线坐标系中,无限接近的两点之间的距离的平方为

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 = h_1^2\mathrm{d}u_1^2 + h_2^2\mathrm{d}u_2^2 + h_3^2\mathrm{d}u_3^2 \tag{1.7.13}$$

可见,Lame 系数是正交曲线坐标系的度规因子,它说明当曲线坐标改变量为 $\mathrm{d}u_i$ 时,沿着坐标曲线 $\boldsymbol{n}_i$ 方向的弧元为

$$\mathrm{d}l_i = h_i\mathrm{d}u_i \tag{1.7.14}$$

在坐标曲面上对应的面积元为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}_i = h_j h_k \mathrm{d}u_j \mathrm{d}u_k, \qquad (i,j,k)\text{是}(1,2,3)\text{的正循环} \tag{1.7.15}$$

相应的体积元为

$$\mathrm{d}v = h_1 h_2 h_3 \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 \mathrm{d}u_3 \tag{1.7.16}$$

值得指出的是,仅满足正交条件的地方坐标基矢 $\boldsymbol{n}_{(i)}$ 不一定是单位矢量.由于

$$\boldsymbol{n}_{(i)} \cdot \boldsymbol{n}_{(j)} = h_i^2 \delta_{ij}$$

可知在空间中任一点 $P(\boldsymbol{r})$ 处的地方坐标单位基矢 $\boldsymbol{n}_{(i)}$ 为

$$\boldsymbol{n}_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i} = \boldsymbol{e}_j \frac{1}{h_i}\frac{\partial x_j}{\partial u_i} \tag{1.7.17}$$

习题 1-7

1. 设任一矢量在直角坐标系、柱坐标系和球坐标系中的表达式为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= a_x\boldsymbol{e}_x + a_y\boldsymbol{e}_y + a_z\boldsymbol{e}_z \\ &= a_\rho\boldsymbol{e}_\rho + a_\phi\boldsymbol{e}_\phi + a_z\boldsymbol{e}_z \\ &= a_r\boldsymbol{e}_r + a_\theta\boldsymbol{e}_\theta + a_\phi\boldsymbol{e}_\phi \end{aligned}$$

证明下述关系式:

$$\begin{pmatrix} a_\rho \\ a_\phi \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

2. 在柱坐标系与球坐标系中，用 δ 函数表示下列电荷分布：

(1) 均匀分布于半径为 a 的平面圆盘上的电荷 Q；

(2) 均匀分布于半径为 a 的细圆环上的电荷 Q.

3. 方程

$$u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

定义了一椭球族. 求椭球表面上任一点的外法向单位矢量.

§1.8　正交曲线坐标系中的微分运算

在正交曲线坐标系中，张量场 $T(\boldsymbol{r})$ 的梯度 ∇T、旋度 $\nabla \times T$ 与散度 $\nabla \cdot T$ 分别由下述关系式

$$\begin{cases} \mathrm{d}T = \mathrm{d}\boldsymbol{l} \cdot (\nabla T) \\ \oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{l} \cdot T^{(n>0)} = \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \times T^{(n>0)}) \\ \oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \cdot T^{(n>0)} = \mathrm{d}v(\nabla \cdot T^{(n>0)}) \end{cases} \tag{1.8.1}$$

确定，式中 $\mathrm{d}T$ 是 T 沿着线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的无穷小改变量；L 是无穷小面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 的闭合边界回路，$\oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{l} \cdot T^{(n>0)}$ 则是 $T^{(n>0)}$ 在回路 L 上的环量；S 是无穷小体积元 $\mathrm{d}V$ 的闭合边界曲面，$\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \cdot T^{(n>0)}$ 则是 $T^{(n>0)}$ 在曲面 S 上的通量. 上述关系式可作为张量场的梯度、旋度与散度的定义式，其形式不依赖于坐标系的选取.

由梯度定义式和正交曲线坐标系中弧元的表示式知

$$(\nabla T)_i = \boldsymbol{n}_i \cdot (\nabla T) = \frac{\partial T}{\partial l_i} = \frac{\partial T}{h_i \partial u_i} \tag{1.8.2}$$

故张量场 T 的梯度可表为

$$\nabla T = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{n}_i \frac{\partial T}{h_i \partial u_i} \tag{1.8.3}$$

取由线元 $\mathrm{d}l_2$ 与 $\mathrm{d}l_3$ 张成的曲线四边形为回路 L_1，则由旋度定义式和正交曲线坐标系中面元与弧元的表示式知

$$\begin{aligned} (\nabla \times T^{(n>0)})_1 h_2 h_3 \mathrm{d}u_2 \mathrm{d}u_3 = {} & T^{(n>0)}(u_1, u_2, u_3) h_2 \mathrm{d}u_2 + \\ & T^{(n>0)}(u_1, u_2 + \mathrm{d}u_2, u_3) h_3 \mathrm{d}u_3 - \\ & T^{(n>0)}(u_1, u_2 + \mathrm{d}u_2, u_3 + \mathrm{d}u_3) h_2 \mathrm{d}u_2 - \end{aligned}$$

$$T^{(n>0)}(u_1,u_2,u_3+\mathrm{d}u_3)h_3\mathrm{d}u_3$$

此即

$$(\nabla\times T^{(n>0)})_1=\frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial h_3T^{(n>0)}}{\partial u_2}-\frac{\partial h_2T^{(n>0)}}{\partial u_3}\right] \tag{1.8.4}$$

类似地可求得其余分量.因而,正交曲线坐标系中 $n(>0)$阶张量场 T 的旋度可表为

$$\nabla\times T=\frac{1}{h_1h_2h_3}\det\begin{pmatrix} h_1\boldsymbol{n}_1 & h_2\boldsymbol{n}_2 & h_3\boldsymbol{n}_3\\ \partial/\partial u_1 & \partial/\partial u_2 & \partial/\partial u_3\\ h_1(\boldsymbol{n}_1\cdot T) & h_2(\boldsymbol{n}_2\cdot T) & h_3(\boldsymbol{n}_3\cdot T)\end{pmatrix} \tag{1.8.5}$$

取由线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1$、$\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$与 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}_3$张成的曲线六面体为体积元 $\mathrm{d}v$,则由散度定义式和正交曲线坐标系中体积元与面元的表示式知

$$\begin{aligned}&(\nabla\cdot T^{(n>0)})h_1h_2h_3\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3\\ =\ &\boldsymbol{n}_3\cdot[T^{(n>0)}(u_1,u_2,u_3+\mathrm{d}u_3)-T^{(n>0)}(u_1,u_2,u_3)]h_1h_2\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2+\\ &\boldsymbol{n}_1\cdot[T^{(n>0)}(u_1+\mathrm{d}u_1,u_2,u_3)-T^{(n>0)}(u_1,u_2,u_3)]h_2h_3\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3+\\ &\boldsymbol{n}_2\cdot[T^{(n>0)}(u_1,u_2+\mathrm{d}u_2,u_3)-T^{(n>0)}(u_1,u_2,u_3)]h_3h_1\mathrm{d}u_3\mathrm{d}u_1\end{aligned}$$

因而,正交曲线坐标系中张量场 $T^{(n>0)}$的散度可表为

$$\begin{aligned}\nabla\cdot T^{(n>0)}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\Big[&\frac{\partial}{\partial u_1}(\boldsymbol{n}_1\cdot T^{(n>0)}h_2h_3)+\\ &\frac{\partial}{\partial u_2}(\boldsymbol{n}_2\cdot T^{(n>0)}h_3h_1)+\frac{\partial}{\partial u_3}(\boldsymbol{n}_3\cdot T^{(n>0)}h_1h_2)\Big]\end{aligned} \tag{1.8.6}$$

由正交曲线坐标系中张量场的梯度和散度公式可得拉氏算符对张量场的作用的表示式为

$$\nabla^2T=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}\right)\right]T$$

习题 1-8

1. 设电场在球坐标系中的表达式为 $\boldsymbol{E}=E_0(\boldsymbol{e}_r\cos\theta-\boldsymbol{e}_\theta\sin\theta)$,求$\nabla\cdot\boldsymbol{E}$ 与$\nabla\times\boldsymbol{E}$.

2. 设 $\boldsymbol{p}$ 是常矢量,在球坐标系中计算

(1) $\nabla[(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})/r^3]$;

(2) $\nabla\times[(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{r})/r^3]$.

第二章　狭义相对论

在自然界中，有没有各种特殊形式的相互作用的物理规律都必须遵从的规律呢？有.关于一切物质的存在形式——时间与空间的规律就是这样的一种可以称之为支配所有物理规律的规律，它被 A. Einstein 总结在狭义相对论的理论体系中.虽然 A. Einstein 关于狭义相对论的第一篇论文论述的是动体的电动力学[Ann. Physik. 1905. (17)]，但很快人们便意识到该论文对于整个物理学具有根本性的重要意义.本章首先引入狭义相对论的两个基本假设，由此建立其时空理论，进而介绍 Minkowski 时空中的张量，最后讲述相对论粒子运动学与动力学.

§2.1 相对性原理

自然界中任一物理过程都是相继发生的一系列事件的集合.任一事件都发生在某一确定的时刻和某一确定的地点.为了定量地描述物理过程,需要建立一个参考系.这个参考系由一个三维空间坐标系和位于该坐标系内各点已校准好的许多相互同步的完全相同的时钟构成;前者用来指明事件发生的地点,后者用来指明事件发生的时刻.

为了校准放在不同地点的时钟,需要利用已知的物理过程,例如利用我们确知的匀速直线运动的规律.各地时钟一旦校准并同步,参考系中各个固定地点便拥有了统一的时间,它表征整个参考系的特性,称为该参考系的内禀时间或固有时间.由该参考系测出的任一事件发生的时间作为该参考系中的物理测量结果,与选取用来校准各地时钟的物理过程是无关的.

事实上,存在着或近似存在着一些参考系,在这些参考系中,一个自由运动物体,即不受外力作用的运动物体,必定作匀速直线运动.这类参考系称为惯性系.如果 S 是惯性系,那么相对于 S 系作匀速直线运动的参考系 S′也是惯性系;因为在 S 系中作匀速直线运动的物体在 S′系中也作匀速直线运动.

在惯性系中,空间各点时钟的校准与同步是不难做到的.例如,让一个相对于该惯性系 S 以某一固定速率作匀速直线运动的物体在时刻 t_A 从地点 A 出发,在时刻 t_B 到达地点 B,同时立即从 B 点以相同的速率反向运动,在时刻 t'_A 回到原地点 A.如果

$$t_B = (t_A + t'_A)/2 \tag{2.1.1}$$

则称放在惯性系 S 中 A、B 两处的两个相同的时钟已被校准且相互同步.

实验证明:两物体之间的相互作用只能改变两物体之间的相对运动状态,不能改变两物体作为一个体系的整体运动状态.因此,在任何一个惯性系内部所进行的一切实验和观测都不可能判断该惯性系相对于另一惯性系的运动速度的大小与方向,各惯性系内的物理实验与观测都不能在规律上显示出差异.这导致了狭义相对论的第一个基本假设——**相对性原理,准确地说,应称为狭义相对性原理:一切物理规律在任何惯性系中都是相同的;换言之,当描述物理规律的方程用惯性系内的时空坐标表出时,其形式与惯性系的选取无关**.由此可知,相互匀速平动的两个惯性系在物理上是等效的.

现在,我们来考察相对性原理对于两个惯性系之间的时空坐标变换可能给出的限制.不失一般性,可取如图 2.1 所示的两个惯性系 S 与 S′.

两惯性系中三维空间正交坐标系的对应轴两两相互平行;S′系相对于 S 系以速率 V 沿 x 轴正方向运动;且当两坐标系的原点 O 与 O' 重合时,安放在原点

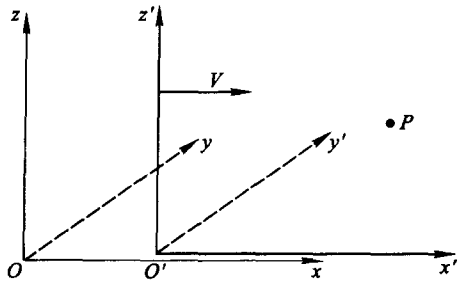


图 2.1　相互平动的两个惯性系

的两个时钟均指示零时刻.假设在 P 点发生了一个物理事件.在 S 系看来,该事件于 t 时刻发生在坐标为(x,y,z)的空间位置上,或说事件 P 的时空坐标为(t,x,y,z);而在 S 系中,同一事件 P 的时空坐标为(t',x',y',z').我们的任务是将(t',x',y',z')用(t,x,y,z)表出

$$\begin{cases} t'=\phi_0(t,x,y,z) \\ x'=\phi_1(t,x,y,z) \\ y'=\phi_2(t,x,y,z) \\ z'=\phi_3(t,x,y,z) \end{cases} \tag{2.1.2}$$

例如,对于两坐标系的原点 O 与O'在$t'=t=0$时刻重合这一事件,我们有

$$t'=t=0,\ x'=x=0,\ y'=y=0,\ z'=z=0 \tag{2.1.3}$$

首先时空变换(2.1.2)必须满足相对性原理的要求,特别是如果 P 点在 S 系中作惯性运动(即匀速直线运动)

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u_x,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=u_y,\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=u_z \tag{2.1.4}$$

在作变换(2.1.2)后在 S′系中也应作惯性运动

$$\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}=u'_x,\quad \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'}=u'_y,\quad \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'}=u'_z \tag{2.1.5}$$

综合两式(2.1.4)与(2.1.5),可知

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\right](\phi_i-u'_i\phi_0)=0,\qquad i=1,2,3 \tag{2.1.6}$$

对速度 u_i和u'_i取任意值时都成立.线性方程组(2.1.6)的解的一般形式为

$$\begin{cases} t'=\phi_0(t,x,y,z)=a_{00}t+a_{01}x+a_{02}y+a_{03}z+c_0 \\ x'=\phi_1(t,x,y,z)=a_{10}t+a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+c_1 \\ y'=\phi_2(t,x,y,z)=a_{20}t+a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+c_2 \\ z'=\phi_3(t,x,y,z)=a_{30}t+a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+c_3 \end{cases} \tag{2.1.7}$$

式中系数 $a_{\mu\nu}$和c_μ与事件的时空坐标无关,但可能是两惯性系相对速度的函数.

时空变换(2.1.7)对于任何事件都是成立的.特别地,它对于事件($t=0$, $x=0,y=0,z=0$)应成为(2.1.3),故

$$c_0=c_1=c_2=c_3=0 \tag{2.1.8}$$

进而,由于我们对于三维空间坐标系的选取,且两个惯性系的相对运动仅发生在 x 方向,可知

$$a_{12}=a_{13}=0,\quad a_{20}=a_{21}=a_{23}=0,\quad a_{30}=a_{31}=a_{32}=0 \tag{2.1.9}$$

于是,时空变换(2.1.7)成为

$$\begin{cases} t'=a_{00}(\boldsymbol{V})t+a_{01}(\boldsymbol{V})x+a_{02}(\boldsymbol{V})y+a_{03}(\boldsymbol{V})z \\ x'=a_{10}(\boldsymbol{V})t+a_{11}(\boldsymbol{V})x \\ y'=a_{22}(\boldsymbol{V})y \\ z'=a_{33}(\boldsymbol{V})z \end{cases} \tag{2.1.10}$$

式中明显地表示出了变换系数与两惯性系相对速度的可能的依赖关系.

惯性系 S′的原点 O'在惯性系 S 中的时空坐标为(t, Vt,0,0),故有

$$a_{10}(\boldsymbol{V})t+a_{11}(\boldsymbol{V})Vt=0 \tag{2.1.11}$$

它对于任意时刻 t 都成立,故

$$a_{10}(\boldsymbol{V})=-a_{11}(\boldsymbol{V})V \tag{2.1.12}$$

类似地,注意到惯性系 S 的原点 O 在惯性系 S′中的时空坐标为(t', $-Vt'$, 0,0),故亦有

$$t'=a_{00}(\boldsymbol{V})t,\qquad -Vt'=a_{10}(\boldsymbol{V})t$$

此即

$$a_{10}(\boldsymbol{V})=-a_{00}(\boldsymbol{V})V \tag{2.1.13}$$

于是时空变换(2.1.10)可写成

$$\begin{cases} t'=a_{11}(\boldsymbol{V})t+a_{01}(\boldsymbol{V})x+a_{02}(\boldsymbol{V})y+a_{03}(\boldsymbol{V})z \\ x'=a_{11}(\boldsymbol{V})(x-Vt) \\ y'=a_{22}(\boldsymbol{V})y \\ z'=a_{33}(\boldsymbol{V})z \end{cases} \tag{2.1.14}$$

时空变换作为时空的属性也应符合相对性原理,故

$$\begin{cases} t=a_{11}(-\boldsymbol{V})t'+a_{01}(-\boldsymbol{V})x'+a_{02}(-\boldsymbol{V})y'+a_{03}(-\boldsymbol{V})z' \\ x=a_{11}(-\boldsymbol{V})(x'+Vt') \\ y=a_{22}(-\boldsymbol{V})y' \\ z=a_{33}(-\boldsymbol{V})z' \end{cases} \tag{2.1.15}$$

将上式代入式(2.1.14)得

$$\begin{cases} a_{01}(-\boldsymbol{V})a_{11}(\boldsymbol{V})+a_{01}(\boldsymbol{V})a_{11}(-\boldsymbol{V})=0 \\ a_{11}(\boldsymbol{V})a_{11}(-\boldsymbol{V})+Va_{01}(\boldsymbol{V})a_{11}(-\boldsymbol{V})=1 \\ a_{02}(\boldsymbol{V})=0 \\ a_{03}(\boldsymbol{V})=0 \\ a_{22}(\boldsymbol{V})a_{22}(-\boldsymbol{V})=1 \\ a_{33}(\boldsymbol{V})a_{33}(-\boldsymbol{V})=1 \end{cases} \tag{2.1.16}$$

对于惯性系 S 中任一固定地点如原点 O 上的钟，由式(2.1.14)可知

$$\Delta t'=a_{11}(\boldsymbol{V})\Delta t \tag{2.1.17}$$

因而 $a_{11}(\boldsymbol{V})\neq 0$. 由于 $\Delta t'$ 与 Δt 都是三维空间中的标量，因之 $a_{11}(\boldsymbol{V})$ 也应是三维空间中的标量，故必是 $|\boldsymbol{V}|^2=V^2$ 的函数，即

$$a_{11}(\boldsymbol{V})=a_{11}(-\boldsymbol{V})=a_{11}(V^2) \tag{2.1.18}$$

于是，由式(2.1.16)的开头两式得

$$a_{01}(\boldsymbol{V})=[a_{11}^{-1}(V^2)-a_{11}(V^2)]/V \tag{2.1.19}$$

同样，注意到 y'(或 z')与 y(或 z)不可能依赖两惯性系沿 x 方向的相对速度 $\boldsymbol{V}$ 的方向，我们有

$$a_{22}(\boldsymbol{V})=a_{22}(V^2),\quad a_{33}(\boldsymbol{V})=a_{33}(V^2) \tag{2.1.20}$$

因而由式(2.1.16)中最后两式得

$$a_{22}(\boldsymbol{V})=a_{33}(\boldsymbol{V})=1 \tag{2.1.21}$$

值得指出的是，另一解 $a_{22}(\boldsymbol{V})=a_{33}(\boldsymbol{V})=-1$ 已舍去，因为它们与 $V=0$ 时所期待的结果 $\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}$ 相矛盾.

将式(2.1.16)、(2.1.19)和(2.1.21)代入式(2.1.14)得

$$\begin{cases} t'=\gamma(V^2)\left(t-\dfrac{1-\gamma^{-2}(V^2)}{V}x\right) \\ x'=\gamma(V^2)(x-Vt) \\ y'=y \\ z'=z \end{cases} \tag{2.1.22}$$

式中

$$\gamma(V^2)=a_{11}(V^2) \tag{2.1.23}$$

可见，相对性原理将两惯性系 S 与 S′之间的时空坐标变换的未定参数的减少至一个即非零参数 $\gamma(V^2)$. 由于 $V=0$ 时，两惯性系中的三维空间坐标系(按照我们的约定)重合，故有

$$\gamma(V=0)=1 \tag{2.1.24}$$

现在假定所有惯性参考系中测出的关于某一事件发生的时间都是相同的，这是所谓的时间绝对性假定. 换言之，如果 t 与 t' 分别是在惯性系 S 与 S′中的时

钟指示的任一事件 P 发生的时间，且这两个钟在两空间坐标系(见图 2.1)重合时指示的时间相同，那么一定有 $t=t'$. 对(2.1.22)中第一式应用时间绝对性假定可得 $a_{11}=1$，再代入式(2.1.22)便得到：

$$\begin{cases} x'=x-Vt \\ y'=y \\ z'=z \\ t'=t \end{cases} \tag{2.1.25}$$

这称之为 Galilei 变换. 可以证明：Newton 力学定律在 Galilei 变换下形式不变. 这一结论通常称为力学相对性原理，或 Galilei 相对性原理. 由时间绝对性假定可导出空间也是绝对的结论，即一刚性杆的长度在所有惯性系中都是相同的(见习题 2－1 第 2 题).

习题 2－1

1. 试由相对性原理与惯性系的定义证明两惯性系中事件的时空坐标变换一定是线性变换.
2. 试由相对性原理与时间绝对性假定证明一刚性杆的长度在所有惯性系中都是相同的，这一结论常称为空间绝对性.
3. 试由相对性原理与空间绝对性假定导出任一事件的时空变换公式.
4. 证明牛顿力学定律在 Galilei 变换下形式不变.

§2.2 寻找绝对参考系的实验

2.2.1 Michelson－Morley 实验

按照以太假说，真空中充满以太，光相对于以太以速度 c 传播，以太是光赖以进行传播的介质，或称之为绝对参考系. 这引起了旨在寻找绝对参考系的各种实验，它们与理论研究相互结合，在建立新的时空观上起过重大作用. 下面仅列举其中几个典型的实验(注：本节均假定 Galilei 相对性原理成立).

Michelson－Morley 实验装置如示意图 2.2 所示：由光源 S 发出的单色光以 45°的入射角射到分光玻璃板 P 的半透金属膜上分成两个分光束. 分光束 1 透过玻璃板传至反射镜 M_1 后沿原路折回至半透金属膜并被该膜部分反射；分光束 2 到达反射镜 M_2 后沿原路折回至半透金属膜并部分穿透该膜. 若 M_1 与 M_2 接近于相互垂直(但不严格垂直)，则在 T 处可观察到类似于由顶角很小的尖劈两表面的反射光形成的干涉条纹.

设地球相对于以太的速度为 $\boldsymbol{v}$，其方向如图 2.2 中所示. 则光束 1 与 2 在 P 与 M_i 之间往返所需时间分别是

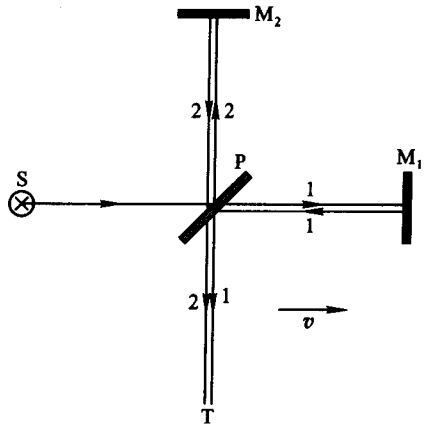


图 2.2　Michelson－Morley 实验装置示意图

$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{l_1}{c-v} + \dfrac{l_1}{c+v} \\ t_2 = \dfrac{2l_2}{\sqrt{c^2-v^2}} \end{cases} \tag{2.2.1}$$

式中 l_i 是从 P 至 M_i 的光程. 由此可得

$$\Delta t \equiv t_1 - t_2 \approx \frac{2}{c}\left[(l_1 - l_2) + \frac{v^2}{c^2}\left(l_1 - \frac{l_2}{2}\right)\right] \tag{2.2.2}$$

将整个实验装置旋转 90°角，以带撇的符号表示这时光束 1 与 2 在 P 与 M_i 之间往返所需的时间，则有

$$\begin{cases} t'_1 = \dfrac{2l_1}{\sqrt{c^2-v^2}} \\ t'_2 = \dfrac{l_2}{c-v} + \dfrac{l_2}{c+v} \end{cases} \tag{2.2.3}$$

由此得

$$\Delta t' \equiv t'_1 - t'_2 \approx \frac{2}{c}\left[(l_1 - l_2) + \frac{v^2}{c^2}\left(\frac{l_1}{2} - l_2\right)\right] \tag{2.2.4}$$

于是

$$\Delta t - \Delta t' = \frac{l_1 + l_2}{c}\frac{v^2}{c^2} \tag{2.2.5}$$

因而干涉花样应当移动 δ 个条纹

$$\delta = \frac{c(\Delta t - \Delta t')}{\lambda} = \frac{l_1 + l_2}{\lambda}\frac{v^2}{c^2} \tag{2.2.6}$$

这里 λ 是单色光的波长. 当 $l_1 = l_2 = l$ 时，

$$\delta=\frac{2lv^2}{\lambda c^2} \tag{2.2.7}$$

如果以太相对于太阳系是静止的，则在不考虑地球自转时，固定在地球上的实验装置将以地球公转的速率 $v=3.0\times10^4\ \mathrm{m/s}$ 相对于以太运动，于是可以求得条纹移动数的计算值．实验在一年四季（以观察地球公转效应）和白天黑夜（以观察地球自转效应）重复进行 50 年之久都没有观察到干涉条纹移动．

实验的零结果说明：不论实验装置处于静止或匀速直线运动状态，光相对于该实验装置的速度总是 c．如果以太存在，则它必定被地球拖着以相同的速度运行．1982 年 Fitz Gerald 和 H. A. Lorentz 据此实验结果提出收缩假说：所有物体沿其运动方向缩短到静止时的 $\sqrt{1-v^2/c^2}$ 倍．以后我们将证明，这一收缩效应是相对性原理和光速不变原理的直接结果．

2.2.2 Fizeau 实验

Fizeau 实验（1851 年）装置如图 2.3 所示．从光源 S 发出的光经半透膜 P 分成两束光，分别沿顺、逆时针方向经过三个反射镜 M_1、M_2、M_3 返回至半透膜 P 处，合成一束射进望远镜 T 中．水沿着图中所示的方向以恒定速率 v 流动，使得两束光中，一束顺着水流方向传播，另一束逆着水流方向传播．

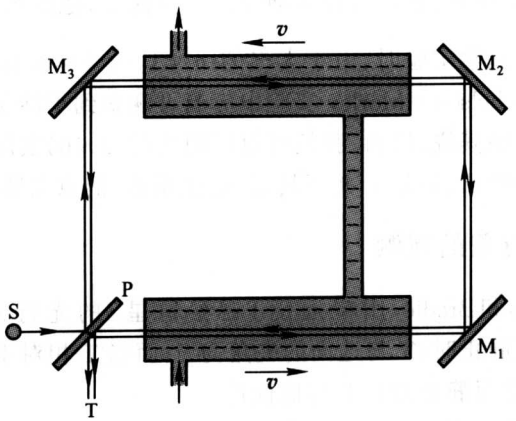


图 2.3 Fizeau 实验装置示意图

假定以太被水流拖动的速率为 kv，这里 k 是拖曳系数（$0\leqslant k\leqslant1$）．$k=0$ 表示以太完全不被拖曳即仍保持静止；$k=1$ 表示以太被完全拖曳，即以太与水流同步运动．当水静止时，以太亦静止，光相对于以太的速度为 c/n（n 为水的折射率）．当水以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动时，以太以速度 $k\boldsymbol{v}$ 运动，光相对于以太的速度为 $\boldsymbol{c}/n$，故其相对于静止的以太的速度为

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{c}/n + k\boldsymbol{v} \tag{2.2.8}$$

因而准确至 v/c 级，速率 u 可表示为

$$u = c/n + kv\cos\theta \tag{2.2.9}$$

式中 θ 为光线传播方向与 $\boldsymbol{v}$ 的夹角. 由 1817 年 Fresnel 基于物质中弹性以太的密度与 n^2 成正比的假设所导出的公式可知(见下面)

$$k = 1 - 1/n^2 \tag{2.2.10}$$

在 Fizeau 实验中，两光束因水的流动而引起的传播时间差可由式(2.2.9)求出：

$$\Delta t = \frac{2l}{c/n - kv} - \frac{2l}{c/n + kv} \approx \frac{4n^2 lkv}{c^2} \tag{2.2.11}$$

式中 $2l$ 是两边水管的总长. 于是，在 T 处可以观察到当水流动与不流动两种情形下两束光的干涉条纹的改变数 δ 为

$$\delta = \frac{c\delta t}{\lambda} = \frac{4n^2 lk}{\lambda c}v \tag{2.2.12}$$

实验结果为：

H. L. Fizeau(1851)，$k = 0.46$

Michelson 和 Movley(1886)，$k = 0.434 \pm 0.020$

对于水，$1 - 1/n^2 = 0.438$. 可见 Fizeau 实验证实了式(2.2.10).

因此，假如以太存在，它将会被运动介质部分拖曳，拖曳系数为 $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$. 当我们在大气中进行光学实验时，由于大气的 $n \approx 1$，故 $k \approx 0$，即以太实际上未被大气拖曳；于是 Michelson - Morley 实验中应当可观察到干涉条纹的移动. 因此，以太假说已不能自圆其说. 以后，我们可以证明式(2.2.10)实际上可由相对性原理和光速不变原理推出，只是 k 并不具有“拖曳系数”的意义罢了.

2.2.3　恒星光行差的观测

1972年，James和Bradley用望远镜T观察恒星S的光行差(图2.4). 若T相对于恒星参考系静止时，T与地面的夹角为 θ；而当T相对于恒星参考系以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动(相对于地面静止)时，T与地面的夹角为 θ'；则这两角之差 $\alpha = \theta' - \theta$ 称为光行差角.

若假定以太相对于恒星参考系静止，则由图 2.4 可得

$$\cos\theta \approx \frac{\cos\theta' + v/c}{1 + (v/c)\cos\theta'} \tag{2.2.13}$$

半年后，T 的速度方向随地球而反向，因而

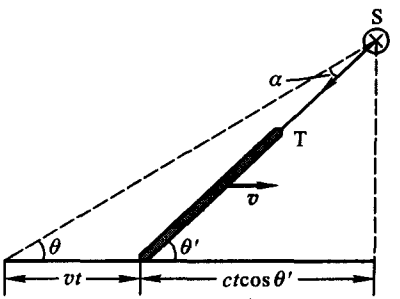


图 2.4　James - Bradley 实验装置示意图

上式中的 v 这时应取负值.将 $\boldsymbol{v}$ 按平行与垂直于星光的方向分解后易得

$$\tan\alpha\approx\frac{v\sin\theta'}{c+v\cos\theta'}\approx\frac{v}{c}\sin\theta' \tag{2.2.14}$$

式中已略去了 v^2 以上的高阶项.观察结果与式(2.2.13)和(2.2.14)相符,说明以太相对于恒星参考系是静止的,不被地球所拖曳.以后我们将证明,光行差现象也能用相对性原理与光速不变原理解释.

1871 年 Sir George Airy 用水灌满望远镜观察恒星的光行差(见图 2.5).图中星光垂直射向地面,经望远镜中的水折射而改变方向.Airy 发现光行差角 β 与未灌水时一样.

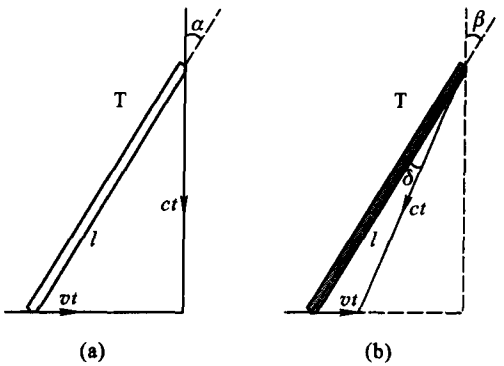


图 2.5 Airy 实验装置示意图
(a) T 中未灌水;(b) T 中已灌水

假定以太相对于恒星参考系静止不动.在如图 2.5 所示的两种情形下,望远镜 T 中可看到恒星的条件分别是:

$$\begin{cases}\text{(a)}\ \alpha\approx v/c\\ \text{(b)}\ \delta\approx nv/c\end{cases} \tag{2.2.15}$$

由折射定律知

$$\beta\approx n\delta\approx n^2 v/c \tag{2.2.16}$$

因之

$$\beta-\alpha\approx(n^2-1)v/c \tag{2.2.17}$$

故可决定地球相对于以太的速度 v.实验结果说明 $\beta\approx\alpha\approx v/c$ 或

$$\delta\approx\alpha/n\approx\beta/n \tag{2.2.18}$$

与式(2.2.15)矛盾,故以太不可能相对于恒星参考系完全静止.

为了解释 Airy 的结果,J. A. Fresnel 在 1817 年提出一个理论模型,其基本假设是:

1. 光速只可能与传递它的介质有关,与光源的运动状态无关;

2. 物质中的弹性以太的密度与该物质折射率的平方 n^2 成正比；

3. 运动物体拖曳其中多余的以太同速运行(部分拖曳假定).

体积为 V 的物体所拖曳的以太质量与

$$Vn^2 - V = n^2 V(1 - n^{-2})$$

成正比，于是物体中的以太的速度为

$$k\boldsymbol{v} = \boldsymbol{P}_{以太}/m_{以太} = \frac{n^2 V(1-n^{-2})\boldsymbol{v}}{n^2 V} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\boldsymbol{v}$$

对于固定在静止以太中的参考系 S′，通过运动介质的光的速度 $\boldsymbol{u}$ 可表为介质中以太的速度 $k\boldsymbol{v}$ 与光相对此运动以太的速度 c/n 之和，即式(2.2.8).

对于 Sir George Airy 实验，光通过充满水且长为 l 的望远镜所需时间为 $t \approx nl/c$，而光射入望远镜的条件是

$$vt \approx l\delta + kvt$$

上式右端第一项来自于光的折射，第二项是由于水对以太的部分拖曳. 于是可得 Airy 的实验结果 $\delta \approx v/(cn)$.

§2.3　光速不变原理

根据 Galilei 变换(2.1.25)，相对于惯性系 S 以速度 c 传播的一束光线在惯性系 S′中的传播速度应为 $\boldsymbol{c}' = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{v}$，其中 $\boldsymbol{v}$ 是 S′系相对于 S 系的速度；换言之，光速仅在某个特定的参考系(以太)中才等于 c. 然而，所有的光学实验都证实：相对于作为参考系的地球，光(电磁)现象并不受地球平动速度的影响；企图证实存在光赖以传播的介质(以太)以及地球相对于以太运动的种种努力都归于失败.

另一方面，电磁场的 Maxwell 方程组的正确性至少在某一个确定的(近似)惯性系(地球)中已获得证实. 于是按照相对性原理，这个理论对于所有惯性系都应当是正确的. 因此，出现在真空中电磁场波动方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E} = 0$$

中的速度的大小 c(它是电磁波在真空中的传播速度，即光速)应为适合于一切惯性系的普适常量.

必须指出：以绝对时间和绝对空间为基础的 Galilei 变换不允许在动力学方程中出现普适速度；在 Galilei 变换成立的时空体系中，相互作用的传递速度可以是无限大，因而会出现瞬时超距相互作用. 然而，自然界中实际上不存在瞬时超距相互作用，相互作用物体中的任何变化仅仅在某一段时间之后才会影响到体系的其他部分. 这一事实意味着存在相互作用的有限的最大传播速度. 自然界

中任何物体的运动速度不可能大于相互作用的最大传播速度;否则就可利用这种物体的运动实现一个传播速度更大的相互作用.两物体之间的相互作用的形式或性质,包括相互作用的最大传播速度,按照相对性原理,应当与所选取的惯性系无关;因而,相互作用的最大传播速度在所有惯性系中都是一样的,它是一个普适常量.物理实验告诉我们:这个普适速度是真空中的光速.

上述理由直接导致了狭义相对论的第二个基本假设——**光速不变原理:真空中的光速在任何惯性系中都相同,且与光传播的方向和光源的运动状态无关.**

既然光在真空中的传播速度在任何惯性系中都是常量,用光信号来校准位于同一个惯性系中不同地点的时钟便是再好不过的了.若一束光信号在时刻 t_A 从地点 A 朝方向 $\boldsymbol{n}$ 发出,在时刻 t_B 到达地点 B,同时立即从 B 点返回,在时刻 t'_A 到达原地点 A,则当

$$t_B = (t'_A + t_A)/2 \tag{2.3.1}$$

时称 A、B 两处的两个相同的时钟已被校准且相互同步.同时,由于光速 c 不变,显然有

$$|\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_B| = c(t'_A - t_A)/2 \tag{2.3.2}$$

因而,位于同一惯性系中 B 点的时空坐标为

$$(t_B, \boldsymbol{r}_B) = ((t'_A + t_A)/2, \boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{n}c(t'_A - t_A)/2) \tag{2.3.3}$$

在 1+1 维(即一维时间与一维空间)时空中,上式可用图 2.6 所示的时空图表出.图中的竖直线是 A 点的时空线(称为世界线),P(称为世界点)表示从 A 发出的光信号到达 B 并立即返回这一事件,其时空坐标(t,x)是在 A 所处的惯性系中按(2.3.3)计算的(由于 B 静止在此惯性系中,故这样算出的时空坐标可作为 B 点的时空坐标),称为事件 P 相对于 A 的时空坐标.反复应用这种方法,可将同一惯性系中所有点的时空坐标定出.

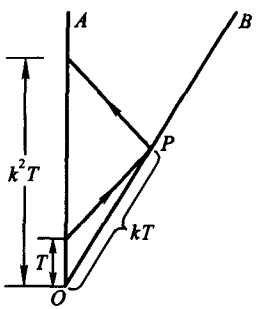


图 2.6 k 因子

现考虑两个相互运动的观察者 A 与 B,他们各自携带有时钟与闪光灯.A 静止,B 相对于 A 以速度 v 朝 x 轴正向作匀速运动.不失普遍性,可假定时空为 1+1 维(即一维时间与一维空间).设当 B 与 A 相遇(记为事件 O)时,A 与 B 已将各自时钟的时间读数调至零(同步).在钟 A 指示的时刻为 $t_A = T$ 时,A 向 B 发出一个光信号.B 在本身示数为 $t_B = k(v^2)T$(注:此式定义了所谓的 k 因子,由于时空变换是线性变换,此 k 因子是与时空坐标无关、但可能与速度有关的常数;由于此定义式中,t 与 T 均为空间标量,k 也应是空间标量,故只能是 v^2

的函数)时接收到由 A 发出的光信号,并立即向 A 出一个光信号(记为事件 P).按照相对性原理,A 应在本身示数为 $t'_A = k^2(v^2)T$ 时接收到由 B 发出的光信号.于是由(2.3.3)可知,在 A 看来,事件 P 的时空坐标为

$$(t_P = t, x_P = vt) = ((k^2+1)T/2, c(k^2-1)T/2) \tag{2.3.4}$$

因而

$$\frac{v}{c} = \frac{k^2-1}{k^2+1} \tag{2.3.5}$$

或

$$k = \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} \tag{2.3.6}$$

利用 k 因子,可发展一种所谓的 k 算法.现以 1+1 维时空中的速度合成问题为例加以说明.考虑三个观察者 A、B、C(分别固定在三个惯性参考系中),其中 B 相对于 A 的速度为 v_{BA},C 相对于 B 的速度为 v_{CB}.现求 C 相对于 A 的速度为 v_{CA}.A 在前后相隔时间 T 的瞬间相继发出两个光信号.按照 k 因子的定义,这两个光信号先后与 B 相遇时 B 自身携带的时钟的示数之差为 $k_{BA}T$;它们与 C 相遇时 C 自身携带的时钟的示数之差应为 $k_{CB}(k_{BA}T)$.因而,A 与 C 之间的 k 因子 k_{CA} 满足

$$k_{CA} = k_{CB}k_{BA} \tag{2.3.7}$$

此即 k 因子的合成公式.利用 k 因子的速度表达式(2.3.6)可将上式化为

$$v_{CA} = \frac{k_{CB}+k_{BA}}{1+k_{CB}k_{BA}} \tag{2.3.8}$$

此即所求结果.这结果表述了 1+1 维时空中的速度合成法则.

§2.4 特殊 Lorentz 变换

考察图 2.1 所示的两个惯性系 S 与 S′.设在惯性系 S 中有一束光信号沿 x 轴正方向传播.根据光速不变原理,这束光信号的传播方程在 S 与 S′系中分别为

$$\Delta x = c\Delta t \tag{2.4.1}$$

$$\Delta x'^2 = c^2\Delta t'^2 \tag{2.4.2}$$

将(2.4.1)代入两惯性系 S 与 S′之间时空变换的一般形式(2.1.22)中,可得

$$\begin{cases} \Delta t' = \gamma[1-(1-\gamma^{-2})/\beta]\Delta t \\ \Delta x' = \gamma(1-\beta)c\Delta t \end{cases} \tag{2.4.3}$$

式中

$$\beta = V/c \tag{2.4.4}$$

(2.4.2)式成为

$$(1-\beta)^2=[1-(1-\gamma^{-2})/\beta]^2 \tag{2.4.5}$$

其解为

$$\gamma^{-2}=1-\beta^2>0 \tag{2.4.6}$$

这说明

$$V<c \tag{2.4.7}$$

即任何惯性系的速度都小于光速.联立(2.4.6)与(2.1.24)得

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{2.4.8}$$

于是,当满足光速不变原理时,时空变换公式(2.1.22)成为

$$\begin{cases} ct'=\gamma(ct-\beta x) \\ x'=\gamma(x-\beta ct) \\ y'=y \\ z'=z \end{cases} \tag{2.4.9}$$

它通常被称为沿 x 轴方向的特殊 Lorentz 变换(或称为沿 x 轴方向的 boost).

由沿 x 轴方向的特殊 Lorentz 变换(2.4.9)易得

$$ct'-x'=k(ct-x),\qquad ct+x=k(ct'+x') \tag{2.4.10}$$

式中

$$k=\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \tag{2.4.11}$$

是所谓的 k 因子[见(2.3.6)式].

为了方便,常令

$$\cosh\psi=\gamma,\qquad \sinh\psi=\gamma\beta \tag{2.4.12}$$

这里,ψ 称为 S′系相对于 S 系在 β 方向上的快度.于是,沿 x 轴方向的特殊 Lorentz 变换(2.4.9)可改写为

$$\begin{cases} ct'=\cosh\psi ct-\sinh\psi x \\ x'=-\sinh\psi ct+\cosh\psi x \\ y'=y \\ z'=z \end{cases} \tag{2.4.13}$$

可见,$-i\psi$ 是 $t-x$ 平面旋转的转角,沿 x 轴的特殊 Lorentz 变换实际上是 $t-x$ 平面上的虚转动变换.

为了得到沿任意方向的特殊 Lorentz 变换公式,将式(2.4.9)改写为

$$\begin{cases} ct'=\gamma(ct-\beta x_{/\!/}) \\ x'_{/\!/}=\gamma(x_{/\!/}-\beta ct) \\ x'_{\perp}=x_{\perp} \end{cases} \tag{2.4.14}$$

式中

$$\begin{cases} x_{/\!/} = |\boldsymbol{x}_{/\!/}|, \quad \boldsymbol{x}_{/\!/} = \dfrac{\boldsymbol{x}\boldsymbol{\beta}}{\beta^2}\boldsymbol{\beta} \\ x_{\perp} = |\boldsymbol{x}_{\perp}|, \quad \boldsymbol{x}_{\perp} = \boldsymbol{x} - \dfrac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\beta}}{\beta^2}\boldsymbol{\beta} \end{cases} \tag{2.4.15}$$

将上式代入式(2.4.14)得

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\beta}\left(\dfrac{\gamma-1}{\beta^2}\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{x} - \gamma ct\right) \\ \quad = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\beta}\left(\dfrac{\gamma^2}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{x} - \gamma ct\right) \end{cases} \tag{2.4.16}$$

或表为

$$\begin{cases} ct' = ct\cosh\psi - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}\sinh\psi \\ \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{n}[(\cosh\psi - 1)\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x} - ct\sinh\psi] \end{cases} \tag{2.4.17}$$

这是沿 $\boldsymbol{\beta} = \beta\boldsymbol{n}$ 方向的特殊 Lorentz 变换. 为了方便起见，常将它写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} ct' \\ \boldsymbol{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \\ -\gamma\boldsymbol{\beta} & J + \dfrac{\gamma-1}{\beta^2}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix} \tag{2.4.18}$$

式中用三维矢量表示一个 3×1 矩阵，用三维矢量的转置表示一个 1×3 矩阵.

特殊 Lorentz 变换具有下述性质：

1. 特殊 Lorentz 变换是任何物理过程都必须满足的时空变换规律，与支配物理过程的动力学的特性无关.

2. 定义两事件的间隔为

$$\Delta S^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2] \tag{2.4.19}$$

式中(ct_i, x_i, y_i, z_i)是第 i 个事件的时空坐标. 由式(2.4.16)易证在任何特殊 Lorentz 变换下均有

$$\Delta S'^2 = \Delta S^2 \tag{2.4.20}$$

换言之，特殊 Lorentz 变换保持两事件的间隔不变.

3. 若将式(2.4.16)写成变换矩阵形式

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \Lambda(\beta) \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2.4.21}$$

则变换矩阵 $\Lambda(\beta)$的行列式为

$$\det[\Lambda(\beta)] = 1 \tag{2.4.22}$$

4. 同方向的特殊 Lorentz 变换相互对易，即

$$\Lambda(\beta_2 \boldsymbol{n})\Lambda(\beta_1 \boldsymbol{n}) = \Lambda(\beta_1 \boldsymbol{n})\Lambda(\beta_2 \boldsymbol{n}) \tag{2.4.23}$$

但不同方向的特殊 Lorentz 变换不对易.

习题 2－4

1. 证明任何特殊 Lorentz 变换保持两事件的间隔不变.
2. 证明特殊 Lorentz 变换的变换矩阵的行列式为 1.
3. 证明同方向的特殊 Lorentz 变换相互对易,但不同方向的特殊 Lorentz 变换不对易.
4. 考虑 1 + 1 维时空.观察者 A 与 B 分别固定在两个惯性系中,B 相对于 A 以速度 v 朝 x 轴正向运动;且 A 与 B 已在相遇时将他们所携带的时钟调节至相互同步.设事件 P 相对于 A 与 B 的时空坐标分别为(t,x)与(t',x').试仅利用 k 因子的定义导出特殊 Lorentz 变换公式.

   提示:画出本题对应的时空图如图 2.7,图中过 P 点的两条射线是两个光信号.利用 k 因子的定义可知

   $$ct' - x' = k(ct - x), \qquad ct + x = k(ct' + x')$$

   再利用 k 因子的表达式.

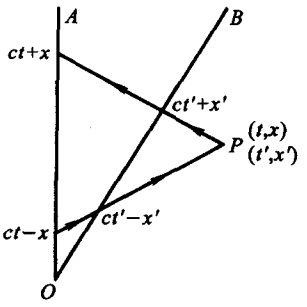


图 2.7 惯性观察者发出和接收光信号的事件的时空坐标化

§2.5 Minkowski 四维时空

2.5.1 事件的时空间隔

现在,我们来建立相对性原理的数学形式.为此,必须首先对惯性系作定量规定,通常的办法是建立一个 Cartesian 坐标系.为了量度事件的时空位置,这个坐标系应当是四维的,即应包括一个时间轴和三个空间轴.为了使四个坐标具有相同的量纲,我们可将时间轴上的时间刻度乘以一个具有速度量纲的常量.为了使上述做法适用于任何惯性系,这个具有速度量纲的常量应当与惯性系的选取无关,因而可选取真空中的光速 c.于是在惯性系 S 中,任一事件或者说时空世界中的任一点(称为世界点)的坐标是

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2.5.1}$$

这个 Cartesian 坐标系中的任何一条曲线,称为世界线.线元的长度 ds 是两个无限接近的"世界点"之间的距离,它可定义为

$$ds^2 = c^2 dt^2 - [dx^2 + dy^2 + dz^2] \tag{2.5.2}$$

实际上，它是无限邻近的两个事件之间的间隔，是三维空间中的线元长度表达式的一个合理的推广．式(2.5.2)可改写为

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{2.5.3}$$

式中 $\mu,\nu=0,1,2,3$(为了方便起见，用希腊字母表示时空指标，可取值 0,1,2,3;用英语字母表示空间指标，可取值 1,2,3)，且一对重复指标表示对该指标求和，而 $g_{\mu\nu}$ 是下述对角矩阵

$$g=\mathrm{diag}[1,-1,-1,-1] \quad 或 \quad g_{\mu\nu}=\mathrm{diag}[1,-1,-1,-1] \tag{2.5.4}$$

的矩阵元，称为度规张量，简称度规；式中 $\mathrm{diag}[a,b,c,d]$ 是以 a、b、c、d 为对角元的对角矩阵．度规由上式所规定的线性空间称为 Minkowski 空间或 Minkowski 时空．Minkowski 时空中的四维正交坐标系也可按通常方法由四个方向矢量 $\boldsymbol{e}_\mu$ 确定，这四个方向矢量满足：$\boldsymbol{e}_0^2=-\boldsymbol{e}_1^2=-\boldsymbol{e}_2^2=-\boldsymbol{e}_3^2=1$；$\boldsymbol{e}_\mu\cdot\boldsymbol{e}_\nu=0$，当 $\mu\neq\nu$．距离元 ds^2 的一个最重要的性质是：它与惯性系的选取无关．

考虑到 ds^2 是 Δs^2(见习题 2-4 第 1 题)的无穷小情形，上述论断显然正确．这里给出不利用 Lorentz 变换公式的一种证法．考虑惯性系 S 和相对于它以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动的另一个惯性系 S′．两个彼此无限接近的世界点之间的距离在 S 与 S′系中分别为 ds 与 ds'．它们具有这样的性质：即若 $ds^2=0$，那么两世界点可用光信号联系起来；由光速不变原理知也有 $ds'^2=0$．考虑到 ds 与 ds' 的量纲相同，必有

$$ds'=\lambda ds \tag{2.5.5}$$

式中 λ 是一个不等于零的量纲为 1 的量．它只可能是下述量纲为 1 的量

$$\beta_i=v_i/c, \qquad x^\mu/x'^\mu, \qquad x'^\mu/x^\nu$$

的函数．式(2.5.5)即使当 $x^\mu=0$ 和 $x'^\mu=0$ 时也是有意义的，故上述量纲为 1 的量中后两类量不可能作为 λ 的自变量，λ 至多只是 β_i 的函数．

由距离元或间隔的定义可知，ds 与 ds' 在三维空间中是转动不变量，故 λ 也是转动不变量(即三维标量)，于是有

$$\lambda=\lambda(|\beta|^2) \tag{2.5.6}$$

注意到 S 系相对于 S′系的速度为 $-\boldsymbol{v}$，由公式(2.5.5)与(2.5.6)便知

$$ds=\lambda ds' \tag{2.5.7}$$

故 $\lambda^2=1$，于是

$$ds^2=ds'^2 \tag{2.5.8}$$

可见，距离元 ds^2 对于惯性系之间的变换是不变量．

2.5.2　Lorentz 变换

保持距离元 ds^2 不变的齐次时空坐标变换 Λ，即

$$x'^\mu=\Lambda^\mu_{\ \nu}x^\nu \tag{2.5.9}$$

称为齐次 Lorentz 变换，μ 和 ν 分别是 Λ 的第一指标和第二指标. 保持距离元 ds^2 不变的非齐次的时空坐标变换 Λ，即

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu} x^{\nu} + a^{\mu}, \quad a^{\mu} = \text{常矢量} \tag{2.5.10}$$

称为 Poincare 变换或非齐次 Lorentz 变换. 以下仅考虑齐次 Lorentz 变换，并将其简称为 Lorentz 变换.

时空坐标变换 Λ 是 Lorentz 变换的充要条件是

$$g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}_{\ \rho}\Lambda^{\nu}_{\ \sigma} = g_{\rho\sigma} \tag{2.5.11}$$

写成矩阵形式即

$$\Lambda^{\mathrm{T}} g \Lambda = g$$

式(2.5.11)叫做 Minkowski 时空中的(赝)正交关系. 这种相互独立的正交关系式一共有 10 个，它们给出了对于 Lorentz 变换矩阵的 10 个独立的限制条件. 因而，Lorentz 变换矩阵的 16 个矩阵元中只有 6 个是相互独立的.

若 $\det \Lambda = +1$(或 -1)，则称 Λ 为正(或赝)Lorentz 变换；若 $\Lambda^{0}_{\ 0} > 0$(或 < 0)(事实上，可以证明当 $\Lambda^{0}_{\ 0} > 0$ 时必定不小于 1，当 $\Lambda^{0}_{\ 0} < 0$ 时必定不大于 1)，则称 Λ 为是正时向(或反时向)的 Lorentz 变换. 正时向的正 Lorentz 变换又称为 restricted Lorentz 变换. 容易证明：特殊 Lorentz 变换是 restricted Lorentz 变换，三维空间(正)转动也是 restricted Lorentz 变换(注：若三维空间转动变换的行列式为 $+1$，则该转动称为正转动，简称转动；若为 -1，则称为赝转动)，空间反演

$$\Lambda_s = \mathrm{diag}[1, -1, -1, -1] = g$$

是正时向的赝 Lorentz 变换，时间反演

$$\Lambda_t = \mathrm{diag}[-1, 1, 1, 1]$$

是反时向的赝 Lorentz 变换，时空全反演

$$\Lambda_{st} = \mathrm{diag}[-1, -1, -1, -1]$$

是反时向的正 Lorentz 变换.

设有三个四维时空惯性坐标系 S、$\bar{\mathrm{S}}$ 和 S′，其中系 $\bar{\mathrm{S}}$ 是系 S 经纯三维正转动变换 R^{-1} 后形成的，这个转动变换 R 由下式定义：

$$\bar{t} = t, \qquad \bar{\boldsymbol{x}} = R\boldsymbol{x} \tag{2.5.12}$$

而系 S′是系 $\bar{\mathrm{S}}$ 经特殊 Lorentz 变换(称为 boost)

$$\begin{pmatrix} ct' \\ \boldsymbol{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\bar{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}} \\ -\gamma\bar{\boldsymbol{\beta}} & \mathscr{I} + \dfrac{\gamma - 1}{\bar{\boldsymbol{\beta}}^2}\bar{\boldsymbol{\beta}}\bar{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\bar{t} \\ \bar{\boldsymbol{x}} \end{pmatrix} \tag{2.5.13}$$

后形成的，式中 $\bar{\beta} = \bar{v}/c$，$\bar{v}$ 是 S′系相对于 $\bar{\mathrm{S}}$ 系的速度. 由式(2.5.12)知

$$\bar{\boldsymbol{v}} = R\boldsymbol{v} \tag{2.5.14}$$

其中$\boldsymbol{v}$是S′系相对于S系的速度.注意到$\bar{\beta}\cdot\bar{\boldsymbol{x}}=\beta\cdot\boldsymbol{x}$,相继作变换(2.5.12)与(2.5.13),得到下述Lorentz变换$\Lambda(\boldsymbol{v},R)$:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ \boldsymbol{x}' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \\ -\gamma R\boldsymbol{\beta} & R+\dfrac{\gamma-1}{\beta^2}(R\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix} \tag{2.5.15}$$

容易看出,这是一个restricted Lorentz变换,它对于纯转动($\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$)是正交矩阵,对于$R=I$则是对称矩阵.利用参数变换(2.4.12)可将Restricted Lorentz变换(2.5.15)写成($\boldsymbol{\beta}=\beta\boldsymbol{n}$)

$$\begin{pmatrix} ct' \\ \boldsymbol{x}' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cosh\psi & -\sinh\psi\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}} \\ -\sinh\psi R\boldsymbol{n} & R+(\cosh\psi-1)R\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix} \tag{2.5.16}$$

或

$$\begin{cases} ct'=ct\cosh\psi-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}\sinh\psi \\ \boldsymbol{x}'=R\boldsymbol{x}+R\boldsymbol{n}[(\cosh\psi-1)\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}-ct\sinh\psi] \end{cases} \tag{2.5.17}$$

Restricted Lorentz变换(2.5.15)依赖于六个独立参数,这六个参数是v_1、v_2、v_3(或$\boldsymbol{\beta}$的大小β与标明其方向的极角θ与方位角ϕ)和标定一个三维正转动R的三个独立参数,例如按下式定义的三个Euler角ξ、η和ζ:

$$R(\xi,\eta,\zeta)=R_z(\xi)R_y(\eta)R_z(\zeta) \tag{2.5.18}$$

这里$R_{x_i}(\theta)$是绕x_i轴的转θ角的转动.

容易看出,$R(\xi,\eta,\zeta)$是围绕方向矢量$\boldsymbol{\zeta}/\zeta=(\theta=\eta,\phi=\xi,r=1)$旋转$\zeta$角度(其正负号按通常的右手螺旋定向法则确定)的转动.若$|\zeta|\leqslant\pi$,则式(2.5.12)表示的三维正转动变换$\Lambda(0,R)$可写作

$$\begin{cases} \bar{x}^0=x^0 \\ \bar{\boldsymbol{x}}=\dfrac{\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{x}}{\zeta^2}\boldsymbol{\zeta}+\left(\boldsymbol{x}-\dfrac{\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{x}}{\zeta^2}\boldsymbol{\zeta}\right)\cos\zeta-\left(\dfrac{\boldsymbol{\zeta}}{\zeta}\times\boldsymbol{x}\right)\sin\zeta \end{cases} \tag{2.5.19}$$

由此可知

$$R^i{}_j=\frac{\zeta^i\zeta^j}{\zeta^2}+\left(\delta^i_j-\frac{\zeta^i\zeta^j}{\zeta^2}\right)\cos\zeta+\left(\frac{1}{\zeta}\epsilon^{ijk}\zeta^k\right)\sin\zeta \tag{2.5.20}$$

restricted Lorentz变换(2.5.15)常简记为$\Lambda(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\zeta})$,其变换矩阵元为

$$\begin{cases} \Lambda^0{}_0=\gamma \\ \Lambda^0{}_i=-\gamma\beta^i \\ \Lambda^i{}_0=-\gamma R^i{}_j\beta^j \\ \Lambda^i{}_j=R^i{}_j+\dfrac{\gamma-1}{\beta^2}\beta^kR^i{}_k\beta^j \end{cases} \tag{2.5.21}$$

现在证明,一个任意给定的restricted Lorentz变换Λ,都可以表成形式

(2.5.15),即可选取 $\boldsymbol{\beta}$ 与 R 使式(2.5.15)满足.对于速度参数,取

$$\beta^i = -\Lambda^0{}_i/\Lambda^0{}_0 \tag{2.5.22}$$

由 Minkowski 时空中的赝正交关系的逆变形式

$$g^{\mu\omega} = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}g^{\rho\sigma} \tag{2.5.23}$$

中与 g^{00} 有关的方程

$$\Lambda^0{}_0\Lambda^0{}_0 - \Lambda^0{}_i\Lambda^0{}_i = 1 > 0 \tag{2.5.24}$$

可知 $\beta<1$,且

$$\gamma = \Lambda^0{}_0 \geqslant 1 \tag{2.5.25}$$

这正是所期望的.为了找到合适的 R,我们直接从式(2.5.21)得到

$$R^i{}_j = \Lambda^i{}_j - \frac{\Lambda^0{}_0 - 1}{\Lambda^0{}_k\Lambda^0{}_k}\Lambda^i{}_0\Lambda^0{}_j = \Lambda^i{}_j - \frac{1}{\Lambda^0{}_0 + 1}\Lambda^i{}_0\Lambda^0{}_j \tag{2.5.26}$$

从 Minkowski 时空中的赝正交关系可以证明,由上式确定的 R 满足正交关系 $R^i{}_jR^i{}_k = \delta_{jk}$ 或 $R^i{}_kR^j{}_k = \delta_{ij}$.因而 R 是一个正交矩阵.考虑到 Lorentz 变换(2.5.15)可写为

$$\Lambda(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\zeta}) = \Lambda(\boldsymbol{v},0)\Lambda(0,\boldsymbol{\zeta}) \tag{2.5.27}$$

以及 $\det\Lambda(\boldsymbol{v},0) = 1$,得

$$\det R = \det \Lambda = 1 > 0 \tag{2.5.28}$$

故 R 是一个三维正转动.转角可由式(2.5.20)取迹得到

$$1 + 2\cos\zeta = \mathrm{tr}\ R \tag{2.5.29}$$

而转轴 $\boldsymbol{\zeta}$ 是 R 的本征矢量,可按求本征矢量的方法(例如矩阵对角化的方法)求出.

容易看出,任意的特殊 Lorentz 变换 $\Lambda(\boldsymbol{v},0)$可写成

$$\Lambda(\boldsymbol{v},0) = \Lambda(0,R(\phi,\theta,0))\Lambda(ve_z,0) \tag{2.5.30}$$

式中$(1,\theta,\phi)$是速度$\boldsymbol{v}$的方向矢量在球坐标系中的坐标(θ 与 ϕ 分别是其极角与方位角).

至此我们证明了,任何一个 restricted Lorentz 变换都可表示为一个三维(正)转动、一个特殊洛伦兹变换和另一个三维(正)转动的乘积.换言之,若 $\Lambda^{\uparrow}_{+}$ 是一个 restricted Lorentz 变换,则

$$\Lambda^{\uparrow}_{+} = \Lambda(0,R(\phi,\theta,0))\Lambda(ve_z,0)\Lambda(0,R(\xi,\eta,\zeta)) \tag{2.5.31}$$

式中$(\phi,\theta,0)$与(ξ,η,ζ)分别是$\boldsymbol{v}$的方向与转动$R(\xi,\eta,\zeta)$所对应的 Euler 角.

还可以证明,任何一个正时向的赝 Lorentz 变换 $\Lambda^{\uparrow}_{-}$ 都可表示为空间反演变换 Λ_s 和某一个 restricted Lorentz 变换的乘积,任何一个反时向的赝 Lorentz 变换 $\Lambda^{\downarrow}_{-}$ 都可表示为时间反演变换 Λ_t 和某一个 restricted Lorentz 变换的乘积,任

何一个反时向的正 Lorentz 变换 $\Lambda_+^\uparrow$ 都可表示为时空全反演变换 Λ_{ts} 和某一个 restricted Lorentz 变换的乘积.

表 2-1 Lorentz 变换的分类

$\det \Lambda$	${\Lambda^0}_0$	名 称	一般形式
+1	>0	restricted Lorentz 变换	$\Lambda_+^\uparrow$
-1	>0	正时向的赝 Lorentz 变换	$\Lambda_s\Lambda_+^\uparrow$
-1	<0	反时向的赝 Lorentz 变换	$\Lambda_t\Lambda_+^\uparrow$
+1	<0	反时向的正 Lorentz 变换	$\Lambda_{ts}\Lambda_+^\uparrow$

2.5.3 Minkowski 时空中的张量

在 Minkowski 时空中的任一事件点 $P(ct,x,y,z)$ 的四维矢径 R 可记为

$$R = cte_0 + xe_x + ye_y + ze_z = x^\mu e_\mu \tag{2.5.32}$$

在 Lorentz 变换(即由一个惯性系到另一个惯性系的四维时空坐标变换)

$$x'^\mu = {\Lambda^\mu}_\nu x^\nu$$

下四维矢径 R 并没有改变,因而

$$x'^\mu e'_\mu = {\Lambda^\mu}_\nu x^\nu e'_\mu = x^\nu e_\nu$$

故

$$e_\nu = e'_\mu {\Lambda^\mu}_\nu \tag{2.5.33}$$

将上式两边同乘以 $({\Lambda^{-1}})^\nu_\mu$ 并对 ν 求和得

$$e'_\mu = e_\nu ({\Lambda^{-1}})^\nu_\mu = [({\Lambda^{-1}})^{\mathrm{T}}]_\mu^{\ \nu} e_\nu \tag{2.5.34}$$

可见,在 Minkowski 时空中事件点的坐标的变换与坐标基矢的变换并不一致,这是 Minkowski 时空与欧氏时空的一个重要区别.正是这一点,使得 Minkowski 时空中的张量比欧氏空间中的张量复杂一些.

例 5.1:试证:由下式

$$x_\mu \equiv \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \tag{2.5.35}$$

定义的坐标矢量在 Lorentz 变换下像坐标基矢量 e_μ 那样变换.

证明:四维矢径的长度 $x_\mu x^\mu = (ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$ 在 Lorentz 变换 $x'^\mu = {\Lambda^\mu}_\nu x^\nu$ 下不变,故有

$$x'_\mu x'^\mu = x'_\mu {\Lambda^\mu}_\nu x^\nu = x_\nu x^\nu$$

故

$$x_\nu = x'_\mu \Lambda^\mu{}_\nu, \quad x'_\mu = x_\nu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu = [(\Lambda^{-1})^{\mathrm{T}}]_\mu{}^\nu x_\nu \tag{2.5.36}$$

证毕.

可见,在 Minkowski 时空中,坐标矢量有两种表达形式,它们在坐标变换下的变换性质不一样.式(2.5.1)定义了坐标矢量的逆变形式,称为逆变坐标矢量.而式(2.5.35)定义了坐标矢量的协变形式,称为协变坐标矢量.两种坐标矢量满足下述关系:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \tag{2.5.37}$$

按式(2.5.34)变换的正交基矢称为协变基矢.自然,也可将事件点 $P(ct, x, y, z)$ 的四维矢径 R 用协变坐标表出

$$R = x_\mu e^\mu \tag{2.5.38}$$

相应的正交基矢 e^μ 称为逆变基矢.由于矢径 R 与所采用的表示方法无关,故有 $x^\mu e_\mu = x_\mu e^\mu$,由此得

$$e_\mu = g_{\mu\nu} e^\nu \tag{2.5.39}$$

对于定义在 Minkowsk 时空中的场,可根据其在 Lorentz 变换下的变换性质加以分类.若某个量在 Lorentz 变换下值不变,则该量称为四维时空中的标量,简称标量.例如,$x_\mu x^\mu$ 便是一个标量.在 Lorentz 变换下,其分量像 n 个坐标矢量的并矢那样变换,则所有 $4n$ 个分量的集合称为 n 阶四维时空中的张量,简称张量.例如,标量是零阶张量,满足

$$V'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu \tag{2.5.40}$$

的四个分量的集合 $\{V^\mu\}$ 称为逆变矢量,它在 Lorentz 变换下像逆变坐标矢量那样变换;满足

$$V'_\mu = V_\nu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu = V_\nu \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu} = V_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \tag{2.5.41}$$

的四个分量的集合 $\{V_\mu\}$ 称为协变矢量,它在 Lorentz 变换下像协变坐标矢量那样变换.逆变矢量和协变矢量都是一阶张量;而二阶逆变 $T^{\mu\nu}$、协变 $T_{\mu\nu}$ 以及混变张量 $T^\mu{}_\nu$ 则分别像两个逆变坐标矢量、两个协变坐标矢量以及一个逆变坐标矢量和一个协变坐标矢量的分量的乘积那样按下式变换:

$$\begin{cases} T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma T^{\rho\sigma} = \dfrac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \dfrac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} T^{\rho\sigma} \\ T'_{\mu\nu} = T_{\rho\sigma} (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu (\Lambda^{-1})^\sigma{}_\nu = T_{\rho\sigma} \dfrac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \dfrac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \\ T'^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\rho T^\rho{}_\sigma (\Lambda^{-1})^\sigma{}_\nu = \dfrac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} T^\rho{}_\sigma \dfrac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \end{cases} \tag{2.5.42}$$

在 Lorentz 变换下各分量的值均保持不变的张量称为不变张量. 例如,不变的二阶协变张量 $G_{\mu\nu}$ 满足

$$G'_{\mu\nu} = G_{\rho\sigma}(\Lambda^{-1})^{\rho}_{\ \mu}(\Lambda^{-1})^{\sigma}_{\ \nu} = G_{\mu\nu} \tag{2.5.43}$$

此即

$$\Lambda^{\mu}_{\ \rho}\Lambda^{\nu}_{\ \sigma}G_{\mu\nu} = G_{\rho\sigma} \tag{2.5.44}$$

可见,度规张量 $g_{\mu\nu}$ 是不变的二阶协变张量.

可以证明,二阶协变张量 $G_{\mu\nu}$ 若是不变张量,必与 $g_{\mu\nu}$ 成正比,即

$$G_{\mu\nu} = kg_{\mu\nu}, \qquad k \neq 0 \tag{2.5.45}$$

因而除开一个常数因子,不变的二阶协变张量是唯一的,它就是度规张量 $g_{\mu\nu}$.

于是,对任何逆变矢量 V^{μ},可唯一地(除开一个常因子)定义一个相应的协变矢量 V_{μ}:

$$V_{\mu} = g_{\mu\nu}V^{\mu} \tag{2.5.46}$$

上式可对 V^{ν} 解出

$$V^{\mu} = g^{\mu\nu}V_{\nu} \tag{2.5.47}$$

其中

$$g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}[1, -1, -1, -1] \tag{2.5.48}$$

称为逆变度规张量,它是 Minkowski 时空中唯一的(除开一个常因子)一个不变的二阶逆变张量. 用这两个度规张量可构造混变度规张量

$$g_{\mu}^{\ \lambda} = g_{\mu\nu}g^{\nu\lambda} = \delta_{\mu}^{\ \lambda} \tag{2.5.49}$$

它是二阶单位张量. 由式(2.5.46)与(2.5.47)相互联系的逆变矢量和协变矢量是一一对应的,它们可视为同一个四维矢量或 4 - 矢量 V 的逆变形式与协变形式. 因而,借助于度规张量可使矢量 V 的指标上升或下降. 这一结论对于高阶张量显然成立,只需对高阶张量的某一确定的指标进行同样的论证即可看出. 用度规张量使张量的指标上升或下降是张量代数中的一种常规运算.

若二阶张量 T 的协变形式满足(不失一般性,这里取协变形式;因为任何其他形式都可以通过指标升降运算转化成协变形式)

$$T_{\mu\nu} = \pm T_{\nu\mu} \tag{2.5.50}$$

则分别称为对称张量或反对称张量. 度规张量便是对称张量.

若 R 与 S 分别是 m 与 n 阶张量,不失一般性,取其协变形式为 $R_{\mu_1,\cdots,\mu_m}$ 与 $S_{\nu_1,\cdots,\nu_n}$;则 R 与 S 的张量积 $R\otimes S$ 是一个 $(m+n)$ 阶张量,其协变形式为

$$(R\otimes S)_{\mu_1,\cdots,\mu_m,\nu_1,\cdots,\nu_n} = R_{\mu_1,\cdots,\mu_m}S_{\nu_1,\cdots,\nu_n} \tag{2.5.51}$$

两个矢量 A 与 B 的并矢便是 A 与 B 的张量积.

张量代数中另一种运算叫做收缩,它是指对一对逆变与协变的哑指标进行

求和.注意:与欧氏空间中的收缩运算不同的是,逆变指标只能与协变指标收缩.两个矢量 A 与 B 的标积

$$A\cdot B=A_\mu B^\mu=A^\mu B_\mu=A_0B_0-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} \tag{2.5.52}$$

便是矢量 A 与 B 间的收缩,式中 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_iB_i=A^iB^i$ 是三维空间中三维矢量或 3-矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的标积.二阶张量 T 的迹

$$\mathrm{tr}\ T^{\mu\nu}=g_{\mu\nu}T^{\mu\nu}=T^\mu_\mu$$

则是 T 的协变指标与逆变指标之间的收缩.

有一类量,它们在正 Lorentz 变换下像张量那样变换;但在空间反演下却不像张量那样变换,而是除开像张量那样的变换之外,还要乘以因子(-1).这类量称为赝张量.零阶赝张量称为赝标量,一阶赝张量称为轴矢量.由下式定义

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}=\begin{cases}+1, & \text{当}(\mu\nu\rho\sigma)\text{是}(0123)\text{的偶置换时}\\ -1, & \text{当}(\mu\nu\rho\sigma)\text{是}(0123)\text{的奇置换时}\\ 0, & \text{其余情形}\end{cases} \tag{2.5.53}$$

的四维全反对称张量是一个四阶赝张量,而且是不变的赝张量.

由于 Minkowski 时空中的四维张量的形式(指其形式而不是指其分量的值)在各惯性系中都是一样的:有相同数目的分量,且在 Lorentz 变换下的变换规律相同.Minkowski 时空中四维张量的这种性质称为 Lorentz 协变性.只要规定出现在物理规律的方程中的物理量都应是 Minkowski 时空中的张量,例如标量 S、矢量 V_μ 和张量 $T_{\rho\sigma}$ 等,则描述物理规律的方程式

$$f(S,V_\mu,T_{\rho\sigma},\cdots)=0 \tag{2.5.54}$$

便在所有惯性系中呈现同样形式.这正好是狭义相对性原理的精神,因而式(2.5.54)便是当不考虑粒子的半整数自旋时狭义相对性原理的数学形式.

习题 2-5

1. 验证变换(2.5.15)是一个 restricted Lorentz 变换.
2. 试从 Minkowski 时空中的赝正交关系证明,由关系式(2.5.26)确定的 3×3 矩阵 R 满足正交关系 $R^i{}_jR^i{}_k=\delta_{jk}$ 或 $R^i{}_jR^j{}_k=\delta_{ij}$.
3. 试证式(2.5.15)所确定的 Lorentz 变换 $\Lambda(\boldsymbol{v},0)$ 可写成

$$\Lambda(\boldsymbol{v},0)=\Lambda(0,R(\phi,\theta,0))\Lambda(v\boldsymbol{e}_z,0)$$

式中 $(\phi,\theta,0)$ 是 $\boldsymbol{v}$ 的 Euler 角.

4. 设 Lorentz 变换由逆变坐标表出.试导出同一 Lorentz 变换用协变坐标的表述式.
5. 试证相对于逆(协)变坐标的微商是协(逆)变矢量.
6. 若 $A^\mu(A_\mu)$ 是一个逆(协)变矢量,而 $A\cdot B$ 是一个标量.试证 B 是一个协(逆)变矢量.
7. 试证除开一个常数因子,不变的二阶协变张量是唯一的.
8. 证明:

$$\det\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} a_{0\mu} a_{1\nu} a_{2\rho} a_{3\sigma} \tag{2.5.55}$$

9. 证明：

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \det\begin{pmatrix} g_{\mu 0} & g_{\mu 1} & g_{\mu 2} & g_{\mu 3} \\ g_{\nu 0} & g_{\nu 1} & g_{\nu 2} & g_{\nu 3} \\ g_{\rho 0} & g_{\rho 1} & g_{\rho 2} & g_{\rho 3} \\ g_{\sigma 0} & g_{\sigma 1} & g_{\sigma 2} & g_{\sigma 3} \end{pmatrix} \tag{2.5.56}$$

10. 证明：

$$\begin{cases} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -\det\begin{pmatrix} g^{\alpha}_{\mu} & g^{\beta}_{\mu} & g^{\gamma}_{\mu} & g^{\delta}_{\mu} \\ g^{\alpha}_{\nu} & g^{\beta}_{\nu} & g^{\gamma}_{\nu} & g^{\delta}_{\nu} \\ g^{\alpha}_{\rho} & g^{\beta}_{\rho} & g^{\gamma}_{\rho} & g^{\delta}_{\rho} \\ g^{\alpha}_{\sigma} & g^{\beta}_{\sigma} & g^{\gamma}_{\sigma} & g^{\delta}_{\sigma} \end{pmatrix} \\ \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -\det\begin{pmatrix} g^{\alpha}_{\mu} & g^{\beta}_{\mu} & g^{\gamma}_{\mu} \\ g^{\alpha}_{\nu} & g^{\beta}_{\nu} & g^{\gamma}_{\nu} \\ g^{\alpha}_{\rho} & g^{\beta}_{\rho} & g^{\gamma}_{\rho} \end{pmatrix} \\ \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -2!\det\begin{pmatrix} g^{\alpha}_{\mu} & g^{\beta}_{\mu} \\ g^{\alpha}_{\nu} & g^{\beta}_{\nu} \end{pmatrix} \\ \varepsilon^{\alpha\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -3!\,g^{\alpha}_{\mu} \\ \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -4! \end{cases} \tag{2.5.57}$$

11. 设$(E/c, \boldsymbol{p})$是四维能动量，试证明 $\mathrm{d}^3 p/(2E)$是一个 Lorentz 不变的测度.

12. 设$(E/c, \boldsymbol{p})$是四维能动量，试证明 $2E\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')$是一个 Lorentz 不变的分布.

§ 2.6 狭义相对论的时空观念

2.6.1 时空间隔的分类

我们已经知道，两个事件的时空间隔$(\Delta s)^2$与惯性系的选取无关，它是狭义相对论中具有绝对意义的量.因而，存在三种不同类型的间隔：类时间隔、类光间隔和类空间隔，它们分别对应于$(\Delta s)^2$大于、等于和小于零三种情形，即

$$\begin{cases} (\Delta s)^2 > 0, & \text{类时间隔} \\ (\Delta s)^2 = 0, & \text{类光间隔} \\ (\Delta s)^2 < 0, & \text{类空间隔} \end{cases} \tag{2.6.1}$$

显然，这种间隔类型的划分也是绝对的.换言之，间隔的类型不随惯性参考系的

选取而改变:若两事件的间隔在某一惯性系中是类时的(类光的或类空的),则它在任何惯性系中都是类时的(类光的或类空的).

两事件间隔$(\Delta s)^2$的绝对性意味着在惯性系 S 与 S′中有

$$c^2(\Delta t)^2-(\Delta l)^2=c^2(\Delta t')^2-(\Delta l')^2 \tag{2.6.2}$$

特别地,间隔的符号不可能反转,故不可能找到一个惯性系使得具有类时间隔的两事件的时间间隔等于零,也不可能找到一个惯性系使得具有类空间隔的两事件的空间间隔等于零.

然而,存在一个惯性系 S′使类时隔开的两事件发生于同一地点;因为

$$c^2(\Delta t')^2=c^2(\Delta t)^2-(\Delta l)^2>0$$

$$0=\Delta l'=\gamma(\Delta l-V\Delta t)$$

意味着惯性系 S′相对于原惯性系 S 的速度 $\boldsymbol{V}$ 为

$$\boldsymbol{V}=\left(\frac{\Delta l}{\Delta t}\right)\frac{\Delta \boldsymbol{l}}{\Delta l}<c\,\frac{\Delta \boldsymbol{l}}{\Delta l} \tag{2.6.3}$$

这样的惯性系 S′显然是存在的.

同样,也存在一个惯性系 S′使类空隔开的两事件发生于同一时刻;事实上

$$-(\Delta l')^2=c^2(\Delta t)^2-(\Delta l)^2<0$$

$$0=c\Delta t'=\gamma(c\Delta t-\beta\Delta l)$$

说明惯性系 S′相对于原惯性系 S 速度 $\boldsymbol{V}$ 为

$$\boldsymbol{V}=\left(\frac{c^2\Delta t}{\Delta l}\right)\frac{\Delta \boldsymbol{l}}{\Delta l}<c\,\frac{\Delta \boldsymbol{l}}{\Delta l} \tag{2.6.4}$$

这样的惯性系 S′显然也是存在的.

可见,当我们说"两事件发生于同一时刻或同一位置",我们是相对于某个参考系而言的;在其他参考系中,这两事件并不一定同时或同地.因而,在狭义相对论中,同时性与同地性都只是相对的.换言之,两事件的时间间隔$(\Delta t)^2$与空间间隔

$$(\Delta l)^2=\Delta x_i\Delta x_i \tag{2.6.5}$$

在狭义相对论中不再是不变的,它们因所选取的惯性系不同而不同,故仅具有相对意义.

对于具有类光间隔的两事件,其空间间隔与时间间隔只能同时为零或同时不为零;如这两事件发生在同一物体上,那么该物体在任何惯性系中都以光速 c 运动.我们不可能找到使该物体处于静止状态(即发生在同一物体上的两事件同地不同时)的惯性系;换言之,该物体不能取作参考系,因为参考系就其本性而言是可以视为处于静止状态的物体.可见,以光速运动的物体在狭义相对论中具有独特的地位.

2.6.2　因果律

图2.8表示惯性系S中四维Cartesian坐标系.图中用$x-y$平面来代表三维空间.事件O的世界点取为坐标系的原点,通过原点的两条射线AB与CD表示两个光信号经O点向相反方向的传播过程.在实际时空中,AOC与BOD是上下两个对顶的三维锥面,通常称为因果光锥面.

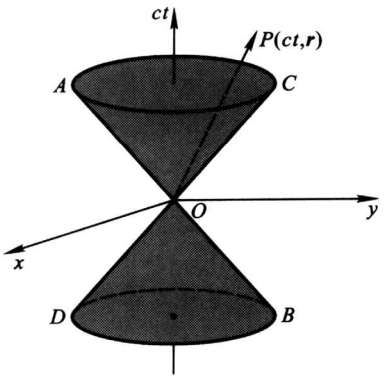


图2.8　因果光锥面

容易看出,这上下两个光锥面将时空分成三个区域:所有锥内的点与O点的间隔是类时的(类时区);锥面上所有的点与O点的间隔是类光的(类光区);所有锥外的点与O点的间隔是类空的(类空区).

另取一事件P,它与O有因果关系的必要条件是:它们可通过某个物理信号或影响联系起来.设这个物理信号的传播速度为v,则$v\leqslant c$,且O、P之间的间隔Δs满足

$$(\Delta s)^2=c^2(\Delta t)^2-(\Delta l)^2=t^2(c^2-v^2)\geqslant 0 \tag{2.6.6}$$

即P点与O点的间隔是类时或类光的.因此,能与O有因果联系的事件P只能位于光锥体上,故将类时区与类光区合起来称为因果区;处于光锥外的任何事件P与原点O都不可能有因果联系,它们相互之间"绝对远离".

现考察两事件A、B出现的先后次序问题.如果$\Delta t\equiv t_B-t_A>0$,即在惯性系S中事件B发生在事件A之后;那么,在另一相对于S系以速度V匀速运动的惯性系S′中,事件A、B出现的先后次序反转的条件是

$$\Delta t'=\gamma(\Delta t-\beta\Delta l/c)<0,\quad \text{其中}(\Delta l)^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2$$

即

$$c^2\Delta t/\Delta l<V<c \tag{2.6.7}$$

式中已利用了惯性系之间的相对速度V必然小于c的事实.

如果B是相对于A的绝对远离点,上述条件是满足的,因而在由式(2.6.7)确定的S′系中,事件B发生在事件A之前.故间隔类空的两事件出现的先后次序没有绝对意义.这并不违背因果律,因为在间隔类空的两事件之间不可能有相互作用传递,不可能有任何物理的相互联系,即不可能互为因果.

如果B是以A为顶点的光锥体上(包括光锥内与光锥面上)的点,则条件(2.6.7)不可能满足,这意味着使时间次序颠倒的参考系S′不存在,因而,这两事件A、B出现的先后次序是一种绝对的次序.这正是因果律所要求的,因为这两事件点之间可用物理的信号联系起来,因而可能有因果联系,而互有因果联系

的两事件的先后次序不能颠倒.由此易知,如果 P 点位于上光锥(即事件 P 发生事件 O 之后),则它总位于上光锥;对下光锥也是如此.故上光锥体上的点是 O 点的"绝对将来",下光锥体上的点是 O 点的"绝对过去".换言之,特殊 Lorentz 变换只能将上(下)光锥体上的点变到上(下)光锥体上.

试讨论:两个类空隔开的人是怎样进行信息交流的?

2.6.3 Lorentz 收缩

设两坐标系的坐标轴两两相互平行.S′系相对于 S 系以速度 V 沿 x 轴的正方向运动.在 S′系中,杆 AB 静置于 x' 轴上,其长度为 l_0.现求杆在 S 系中的长度 l.

杆 AB 在 S 系中的长度可定义为同时测量其两个端点的空间间隔,即

$$l=\sqrt{\Delta x_i \Delta x_i}\,|_{\Delta t=0} \tag{2.6.8}$$

按此定义,考虑在 S 系中同时发生在杆端 A、B 的两个事件

$$(ct_A, x_A, 0, 0), \qquad (ct_B, x_B, 0, 0), \qquad t_A = t_B$$

它们在 S′系中的时空坐标为

$$(ct'_A, x'_A, 0, 0), \qquad (ct'_B, x'_B, 0, 0), \qquad t'_A \neq t'_B$$

于是有

$$l = x_B - x_A \equiv \Delta x \tag{2.6.9}$$

定义(2.6.8)也应适用于 S′系中的固定杆,故

$$l_0 = x'_B|_{t'_A} - x'_A|_{t'_A} = x'_B|_{t'_B} - x'_A|_{t'_A} \equiv \Delta x' \tag{2.6.10}$$

这里应用了杆端 B 在 S′系中静止不动(即杆端 B 在任意时刻都位于空间同一点)的事实

$$x'_B|_{t'_A} = x'_B|_{t'_B} \tag{2.6.11}$$

应用特殊 Lorentz 变换公式可得

$$l_0 = \Delta x' = \gamma \Delta x = \gamma l \tag{2.6.12}$$

此即 Lorentz 收缩公式

$$l = l_0\sqrt{1-\beta^2} \tag{2.6.13}$$

所以,杆沿其长度方向运动时,其长度缩短为静止时的 $\sqrt{1-\beta^2}$ 倍.

值得注意的是:

1. 这种收缩效应是普适的,与相互作用的动力学性质无关;不是像 Lorentz 与 Fitz Gerald 在提出公式(2.6.13)时所认为的那样,是由于电磁作用力在运动时发生改变的结果.

2. 这种收缩效应是相对的,即在不同的惯性系里杆长的收缩是不同的.

3. 杆长是相对的，但杆在其固有坐标系（即杆上固定的坐标系）内的长度——固有长度 l_0 却是绝对的. 换言之，杆的固有长度是 Lorentz 不变量.

4. 杆两端的时空间隔是类空的，因为由式(2.6.11)知其在杆的固有坐标系中是类空的；这便保证了杆长定义(2.6.8)的可行性，即同时测量杆端位置的操作是可以做到的.

2.6.4 Einstein 延迟

设两惯性系中的坐标轴两两相互平行，S′系相对于 S 系以速度 V 沿 x 轴正向运动. 一振荡晶体固定在 S′系中 x' 处，其固有振动周期（即在固定在晶体上的参考系中测得的振动周期）为 τ_0. 现求该晶体在 S 系中的振动周期 τ.

按照通常的约定，一个晶体的振动周期可定义为在同一地点所测得的一个全振动的起点与终点的时间差，即

$$\tau_0 = \Delta t' \big|_{\Delta x'=0} \tag{2.6.14}$$

考虑该晶体某一次全振动的开始与结束两个事件 A 与 B. 这两个事件在 S′系中的时空坐标为

$$(ct'_A, x'_A, 0, 0), \quad (ct'_B, x'_B, 0, 0), \quad x'_A = x'_B$$

而在 S 系中的时空坐标则为

$$(ct_A, x_A, 0, 0), \quad (ct_B, x_B, 0, 0), \quad x_A \neq x_B$$

按照晶体振动周期的定义，在 S′中有

$$\tau_0 = t'_B - t'_A \tag{2.6.15}$$

在系 S 中有

$$\tau = t_B \big|_{x_A} - t_A \big|_{x_A} = t_B \big|_{x_B} - t_A \big|_{x_A} \tag{2.6.16}$$

这里利用了

$$t_B \big|_{x_B} = t_B \big|_{x_A} \tag{2.6.17}$$

因为按照特殊 Lorentz 变换有

$$t_B \big|_{x_B} = \gamma\left(t'_B + \frac{V}{c}x'_B\right) \tag{2.6.18}$$

$$t_B \big|_{x_A} = \gamma\left(t'_B + \frac{V}{c}x'_A\right) \tag{2.6.19}$$

而 $x'_A = x'_B$.

现在，对于事件 A 与 B 应用特殊 Lorentz 变换公式得

$$t_B - t_A = \gamma(t'_B - t'_A) \tag{2.6.20}$$

此即

$$\tau = \gamma\tau_0 = \tau_0/\sqrt{1-\beta^2} \tag{2.6.21}$$

这就是所谓 Einstein 延缓公式. 可见:晶体(或时钟)以速度 V 运动时,其振动周期延长为其固有周期的 $1/\sqrt{1-\beta^2}$ 倍.

值得注意的是:

一、Einstein 延缓效应是普适的,与计时的动力学机制无关,它是发生在运动物体上一切物理过程都具有的时空属性.

二、这种延缓效应是相对的,在不同的惯性系中有不同程度的延缓.

三、晶体的振动周期 T 是一个相对概念,但其固有周期却是绝对的.

四、固定在某处的晶体的一次全振动的开始与结束两事件的间隔是一个类时间隔,这保证了振动周期定义(2.6.14)的合理性.

固定在物体上的钟指示的时间,称为该物体的固有时 τ,也称原时. 这样,公式(2.6.21)可表示为

$$\Delta t = \gamma \Delta \tau = \Delta \tau / \sqrt{1-\beta^2} \tag{2.6.22}$$

物体的固有时 τ 是 Lorentz 不变量.

习题 2-6

1. 试证不可能找到一个惯性系使得具有类时(空)间隔的两事件的时间(空间)间隔等于零.

2. 试证存在一个惯性系使类时(空)隔开的两事件发生于同一地点(时刻).

3. 试证以类空间隔隔开的两个事件之间不可能有因果联系,而以类时或类光的间隔隔开的两个事件发生的时间顺序不可能颠倒.

4. 试证物体的固有时与固有尺度(如固有长度)是 Lorentz 不变量.

5. 一恒星与地球相距 5.00 光年,从地球上向它发射宇宙飞船,宇宙飞船的速度为 $0.800c$. 问

(1) 飞船到达恒星需要多少时间? 而从宇航员的钟看来是多少时间?

(2) 若飞船的速度为 $0.990c$,结果又如何?

答案:(1) 6.25 年,3.75 年;(2) 5.05 年,0.712 年.

6. μ 介子的衰变规律为 $N = N_0 \exp(-t/\tau)$,其中 τ 是 μ 介子的平均寿命. μ 介子的固有寿命为 $\tau_0 = 2.0 \times 10^{-6}$ s. 若在 2.8 km 高空有一束速度为 2.8×10^5 km/s 的 μ 介子垂直射向地面,问

(1) 达到地面的介子所占的百分比.

(2) 如不考虑相对论效应,结果又如何?

答案:(1) 16.6%;(2) 0.67 %.

7. π 介子的固有寿命为 $\tau_0 = 2.5 \times 10^{-8}$ s. 若将 π 介子加速到 $(1-5\times10^{-5})c$ 的速度. 问

(1) 它在实验室参考系中的寿命为多长?

(2) 能通过的距离有多远?

答案:(1) $\tau = 2.5 \times 10^{-6}$ s;(2) $l = 7.5 \times 10^2$ m.

8. 试证明

(1) 类光隔开的两个世界点的原时为零.

(2) 设有类时隔开的三个世界点 P_1、P_2、P_3，则当 $t_1<t_2<t_3$ 时有 Minkowski 不等式

$$\tau_{31}\geqslant\tau_{32}+\tau_{21}$$

成立，式中仅当三个世界点 P_1、P_2、P_3 位于同一条世界直线上时才取等号，而 τ_{ji} 是世界点 P_j 相对于世界点 P_i 的原时.

(3) 设 P_1、P_2 是类时隔开的两个世界点，且 $t_1<t_2$. 则粒子从 P_1 沿曲线运动到 P_2 比从 P_1 沿直线运动到 P_2 所用的原时少.

9. 有一对孪生子 A 与 B. B 以速度 $\boldsymbol{v}$ 飞离地球，至离地球 L 远处立即以速度 $-\boldsymbol{v}$ 返回并与 A 重逢. 计算重逢时 A、B 的年龄之差. A、B 各自对年龄差的观测结果一致吗?

答案: $\tau_A-\tau_B=(2L/v)[1-\sqrt{1-\beta^2}]$.

§2.7 相对论运动学

2.7.1 速度变换

考虑惯性系 S 和相对于 S 系以速度 $\boldsymbol{V}=V\boldsymbol{i}$ 作匀速直线运动的惯性系 S′，两惯性系中的空间坐标轴两两相互平行. 设一运动的点状物体 P 在时刻 t 经过 (x,y,z) 点，在无限接近的另一时刻 $(t+\mathrm{d}t)$ 经过无限邻近的另一点 $(x+\mathrm{d}x,y+\mathrm{d}y,z+\mathrm{d}z)$. 由特殊 Lorentz 变换公式知

$$\begin{cases}c\mathrm{d}t=\gamma(c\mathrm{d}t'+\beta\mathrm{d}x')\\ \mathrm{d}x=\gamma(\beta c\mathrm{d}t'+\mathrm{d}x')\\ \mathrm{d}y=\mathrm{d}y'\\ \mathrm{d}z=\mathrm{d}z'\end{cases}\tag{2.7.1}$$

于是可得狭义相对论中速度变换(或速度合成)规律为

$$\begin{cases}v_x=\dfrac{v'_x+V}{1+v'_xV/c^2}\\ v_y=\dfrac{v'_y}{\gamma(1+v'_xV/c^2)}\\ v_z=\dfrac{v'_z}{\gamma(1+v'_xV/c^2)}\end{cases}\tag{2.7.2}$$

式中 $\boldsymbol{v}=\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$ 与 $\boldsymbol{v}'=\mathrm{d}\boldsymbol{r}'/\mathrm{d}t'$ 分别表物体 P 在 S 或 S′系中的速度. 当 $v\ll c$ 时，上式约化为通常的速度合成法则.

利用特殊 Lorentz 变换的快度表达式，可将(2.7.2)中第一式写成

$$\operatorname{th}\psi=\frac{\operatorname{th}\psi'+\operatorname{th}\bar{\psi}}{1+\operatorname{th}\psi'\operatorname{th}\bar{\psi}}=\operatorname{th}(\psi'+\bar{\psi})\tag{2.7.3}$$

式中 ψ、ψ' 分别表示物体 P 在 S 系、S′系中的快度，$\bar{\psi}$ 则是 S′系相对于 S 系的快

度.上式即

$$\psi = \psi' + \bar{\psi} \tag{2.7.4}$$

可见,沿同一方向的快度是相加的.

当惯性系 S′相对于惯性系 S 运动的速度 $\boldsymbol{V}$ 的方向任意时,由沿任意方向的特殊 Lorentz 变换式可得

$$\begin{cases} c\mathrm{d}t' = \gamma(c\mathrm{d}t - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}) \\ \mathrm{d}\boldsymbol{x}' = \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\beta}\left[\dfrac{\gamma-1}{\beta^2}\boldsymbol{\beta}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \gamma c\mathrm{d}t\right] \\ \qquad = \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\beta}\left[\dfrac{\gamma^2}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \gamma c\mathrm{d}t\right] \end{cases} \tag{2.7.5}$$

由此可得到速度变换公式的普遍形式为

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{v}' + (\gamma-1)\dfrac{(\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{V})\boldsymbol{V}}{V^2} + \gamma\boldsymbol{V}}{\gamma\left(1 + \dfrac{\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{V}}{c^2}\right)} \tag{2.7.6}$$

在以 x 轴为极轴的球极坐标系中,速度变换式(2.7.2)成为

$$\begin{cases} v\cos\theta = \dfrac{v'\cos\theta' + V}{1 + (v'V/c^2)\cos\theta'} \\ v\sin\theta\sin\phi = \dfrac{v'\sin\theta'\sin\phi'}{\gamma[1 + (v'V/c^2)\cos\theta']} \\ v\sin\theta\cos\phi = \dfrac{v'\sin\theta'\cos\phi'}{\gamma[1 + (v'V/c^2)\cos\theta']} \end{cases} \tag{2.7.7}$$

由此易得

$$\begin{cases} \phi = \phi' \\ \tan\theta = \dfrac{v'\sin\theta'}{\gamma(v'\cos\theta' + V)} \\ v = \dfrac{\sqrt{v'^2 + V^2 + 2v'V\cos\theta' - [(v'V/c)\sin\theta']^2}}{1 + (v'V/c^2)\cos\theta'} \end{cases} \tag{2.7.8}$$

式中第一式说明方位角 ϕ 在特殊 Lorentz 变换下不变.这是容易理解的,因为按照这里极轴的取法,这不过意味着与 $\boldsymbol{V}$ 垂直的平面上的尺度(不是速度)不变.

(2.7.8)中第二式决定了当系 S′变换到系 S 时速度的方向的极角的改变.由(2.7.8)中第三式易知,当 $v' = c$ 时有 $v = c$;这时(2.7.8)中第二式便决定了光由系 S′变换到系 S 时的方向偏差,其形式为

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta'}{\cos\theta' + V/c}\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \tag{2.7.9}$$

由此易得

$$\begin{cases} \sin\theta = \dfrac{\sin\theta'\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{1+(V/c)\cos\theta'} \\ \cos\theta = \dfrac{\cos\theta'+V/c}{1+(V/c)\cos\theta'} \end{cases} \tag{2.7.10}$$

对于光行差角 $\alpha=\theta'-\theta$,精确至 V/c 级有

$$\tan\alpha\approx(V/c)\sin\theta' \tag{2.7.11}$$

这就是著名的光行差的实验公式(参见 §1.3),而式(2.7.9)则是光行差的理论公式.

光在液体中传播的速度是 $v'=c/n$, n 是该液体的折射率.如光的传播方向与液体流速 $\boldsymbol{V}$ 的方向相同(反),则由(2.7.8)中第三式易知,实验室测得的光速 v 应为

$$v=\frac{c/n\pm V}{1\pm V/(nc)}\approx\frac{c}{n}\pm\left(1-\frac{1}{n^2}\right)V \tag{2.7.12}$$

这与 Fizeau 实验的结果一致.

2.7.2 相继的特殊 Lorentz 变换与 Thomas 进动

按照特殊 Lorentz 变换的一般公式(2.5.13),速度分别为 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 的两个相继的特殊 Lorentz 变换之积为

$$\begin{aligned} &\Lambda(\boldsymbol{w},0)\Lambda(\boldsymbol{v},0) \\ &=\begin{pmatrix} \gamma(w) & -\gamma(w)\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}/c \\ -\gamma(w)\boldsymbol{w}/c & J+\dfrac{\gamma(w)-1}{w^2}\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma(v) & -\gamma(v)\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}/c \\ -\gamma(v)\boldsymbol{v}/c & J+\dfrac{\gamma(v)-1}{v^2}\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.7.13}$$

其结果为下述矩阵

$$\begin{pmatrix} \gamma(u) & -\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \\ -\boldsymbol{b} & M \end{pmatrix} \tag{2.7.14}$$

式中

$$\begin{cases} \gamma(u)=\gamma(w)\gamma(v)(1+\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}/c^2) \\ \boldsymbol{a}=\gamma(w)\gamma(v)\boldsymbol{v}/c+\gamma(w)\boldsymbol{w}/c+\gamma(w)(\gamma(v)-1)\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}/(v^2c) \\ \boldsymbol{b}=\gamma(w)\gamma(v)\boldsymbol{w}/c+\gamma(v)\boldsymbol{v}/c+\gamma(v)(\gamma(w)-1)\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}/(w^2c) \\ M=\mathcal{I}+(\gamma(w)-1)\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}/w^2+(\gamma(v)-1)\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}/v^2+ \\ \quad[\gamma(w)\gamma(v)+(\gamma(w)-1)(\gamma(v)-1)\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}/(w^2v^2)]\boldsymbol{w}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \end{cases} \tag{2.7.15}$$

容易看出,矩阵(2.7.14)除了 $\boldsymbol{w}\propto\boldsymbol{v}$ 的情形以外是不对称的,它不是单纯的特殊

Lorentz 变换，还包含一个转动.

为将变换(2.7.14)写成形式 $\Lambda(\boldsymbol{u}, R)$，需要利用公式(2.5.22)与(2.5.26).速度 $\boldsymbol{u}$ 为

$$\boldsymbol{u}=\frac{\boldsymbol{a}}{\gamma(u)}=\frac{\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}/\gamma(v)+(1-1/\gamma(v))\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}/v^2}{1+\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}/c^2} \tag{2.7.16}$$

恰与速度相加法则的结果(2.7.6)一致.

$\Lambda(\boldsymbol{u}, R)$中所包含的转动可由(2.5.26)求得

$$R=M-\frac{\gamma(u)-1}{\gamma^2(u)u^2}\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \tag{2.7.17}$$

从 $\boldsymbol{w}\cdot(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{v})=0$ 及 $\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{v})=0$ 容易看出，$\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{v}$ 是 R 的本征矢量，因而它的方向即为转轴.围绕该转轴转动的转角 ϕ 原则上可由式(2.5.29)求出.若 w 无穷小，可略去 w^2 项，我们有

$$R(\boldsymbol{\phi})\approx\mathcal{I}+\frac{\gamma-1}{\gamma v^2}(\boldsymbol{w}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}) \tag{2.7.18}$$

式中 $\gamma=\gamma(v)$.从式(2.5.19)(并注意到 $\cos\alpha\approx1$，$\sin\alpha\approx0$)容易看出相应的转动矢量(即转角大小为无穷小、方向沿转轴的矢量)为

$$\boldsymbol{\phi}=\frac{\gamma-1}{\gamma v^2}\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{v} \tag{2.7.19}$$

现在考虑一个点状指针，用某种方式确定了方向的点粒子(例如具有自旋的电子)便是这样一个点状指针.设这粒子相对于惯性系 S 的速度为 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t)$，而固定在粒子上的(非惯性)参考系 Σ 在 t 时刻与惯性系 S′重合，在 $t+\mathrm{d}t$ 时刻与惯性系 S″重合.于是，系 S′与 S″相对于 S 的速度分别为 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t)$ 与 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}(t+\mathrm{d}t)=\boldsymbol{v}+\mathrm{d}\boldsymbol{v}$，而 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 按公式(2.7.16)相互联系在一起.考虑到

$$\boldsymbol{v}\times\mathrm{d}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}=\frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}}{\gamma(1+\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}/c^2)}\approx\frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}}{\gamma} \tag{2.7.20}$$

由公式(2.7.19)可知，点状指针的指向在从 t 到 $t+\mathrm{d}t$ 时间内相对与系 S 的转角(此即固定在粒子上的参考系 Σ 在这段时间内的转角，也就是点状指针的指向所确定的轴的进动角)为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\phi}=-\frac{\gamma-1}{v^2}\boldsymbol{v}\times\mathrm{d}\boldsymbol{v} \tag{2.7.21}$$

即以速度 $\boldsymbol{v}$ 运行的粒子进动的角频率(即角速度)为

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{Thomas}}=-\frac{\gamma-1}{v^2}\boldsymbol{v}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \tag{2.7.22}$$

这种进动现象称为 Thomas 进动，所有具有固有方向的点粒子在运行时都会表现出这种进动.

注意到粒子的速度 $\boldsymbol{v}(t)$、$\boldsymbol{v}(t+\mathrm{d}t)$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{v}(t)\equiv\boldsymbol{v}(t+\mathrm{d}t)-\boldsymbol{v}(t)$ 满足通

常的平行四边形法则,易得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{v}+\mathrm{d}\boldsymbol{v})/v^2=\boldsymbol{v}\times\mathrm{d}\boldsymbol{v}/v^2 \tag{2.7.23}$$

式中 $\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$ 为$\boldsymbol{v}(t+\mathrm{d}t)$与$\boldsymbol{v}(t)$之间的夹角.于是,Thomas 进动角 $\mathrm{d}\boldsymbol{\phi}$ 可写为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\phi}=(1-\gamma)\mathrm{d}\boldsymbol{\theta} \tag{2.7.24}$$

或

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{Thomas}}=(1-\gamma)\boldsymbol{\Omega},\quad \boldsymbol{\Omega}=\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}/\mathrm{d}t \tag{2.7.25}$$

这里,我们将 Thomas 进动角直接与粒子运动速度方向的改变角联系在一起,或将 Thomas 进动角速度直接与粒子转动的角速度联系在一起.它说明:当点粒子旋转 $\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$ 角时,固定在粒子上的参考系 Σ 将会转动 $\mathrm{d}\boldsymbol{\phi}=(1-\gamma)\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$ 角;当点粒子旋转的角速度为 $\boldsymbol{\Omega}$ 时,固定在粒子上的参考系 Σ 的旋转(进动)角速度为 $\boldsymbol{\omega}_{\text{Thomas}}=(1-\gamma)\boldsymbol{\Omega}$.沿任一方向的特殊 Lorentz 变换前后的参考系的空间坐标轴是相互平行的,故称为参考系的平行移动.存在 Thomas 进动这一事实说明:任一参考系 Σ 沿任一封闭曲线平行移动至其出发点时,并不与出发时的原参考系重合,而相差一个由 Thomas 进动确定的空间转动.因而,参考系 Σ 相对于出发时的原参考系的相对取向 $\Delta\boldsymbol{\phi}$ 作为(2.7.24)右端对于参考系所经过路径的积分一般是不可积的(因为闭合路径的积分不为零).在狭义相对论中,参考系取向的这一性质与时钟的示数(固有时)相似,任一时钟沿任一封闭曲线平行移动至其出发点时,其示数与出发时固定在出发地点的时钟的示数不一样(此即所谓孪生子佯谬,或者说粒子的固有时是一般不可积的).

事实上,Thomas 进动与长度的 Lorentz 收缩或时钟的 Einstein 延缓密切联系在一起.为了看出这一点,考察一点状指针的平面运动.设粒子在时刻 t 经过其运行轨道上的点 P,粒子运行轨道在 P 点的曲率半径为 R;粒子在时刻 t 与 $t+\mathrm{d}t$ 的速度分别为$\boldsymbol{v}(t)$与$\boldsymbol{v}(t+\mathrm{d}t)$.由于 Lorentz 收缩只在速度的方向上发生,即仅沿运行轨道发生,若不考虑 Thomas 进动效应(即在很短的时间 $\mathrm{d}t$ 内假定忽略粒子加速度的影响),则从静止于 S 系中的观察者看来,从时刻 t 到 $t+\mathrm{d}t$ 粒子速度方向的改变角 $\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}$ 为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}=\gamma\mathrm{d}\boldsymbol{\theta} \tag{2.7.26}$$

或者说,在不考虑 Thomas 进动时粒子的速度或角频率 $\boldsymbol{\omega}$ 为

$$\boldsymbol{\omega}=\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}/\mathrm{d}t=\gamma\boldsymbol{\Omega} \tag{2.7.27}$$

(注意到频率与周期成反比,上式对于固定于某点的点状指针可从时钟的 Einstein 延缓推出).于是可得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\phi}=\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}-\mathrm{d}\boldsymbol{\beta} \tag{2.7.28}$$

或

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{Thomas}}=\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{\omega} \tag{2.7.29}$$

可见,Thomas 转角 $\mathrm{d}\boldsymbol{\phi}$ 是点状指针将“公转”效应除去后的“自转”的角度(即点

状指针绕通过该点的某轴线的转动，即指针的进动）；Thomas 进动角速度 $\boldsymbol{\omega}_{\text{Thomas}}$ 是将“公转”角速度除去后的“自转”的角速度.

Thomas 进动效应给处于外电磁场中的电子自旋的运动方程引入了一个修正项，从而导致了自旋－轨道相互作用能的改变，得到了正确的电子能级的精细结构. 由于 Thomas 进动是一种相对论效应，因而不难理解为什么后来 Dirac 得到的电子的相对论量子运动方程会自动包含 Thomas 进动效应.

2.7.3 加速度变换

由速度变换式(2.7.2)与无穷小四维位移变换(2.7.1)的第一式可得在沿 x 轴方向的特殊 Lorentz 变换下加速度 $\boldsymbol{a}=\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$ 的变换公式

$$\begin{cases} a_x=\dfrac{a'_x}{\gamma^3(1+v'_xV/c^2)^3} \\ a_y=\dfrac{a'_y}{\gamma^2(1+v'_xV/c^2)^2}-\dfrac{a'_x}{\gamma^2(1+v'_xV/c^2)^3}\dfrac{v'_yV}{c^2} \\ a_z=\dfrac{a'_z}{\gamma^2(1+v'_xV/c^2)^2}-\dfrac{a'_x}{\gamma^2(1+v'_xV/c^2)^3}\dfrac{v'_zV}{c^2} \end{cases} \tag{2.7.30}$$

式中 $\boldsymbol{V}=V\boldsymbol{i}$ 为 S′系相对于 S 系的速度.

由速度变换的普遍公式(2.7.6)与无穷小四维位移变换普遍公式(2.7.5)的第一式可得在沿任意方向的特殊 Lorent 变换下加速度变换的普遍公式：

$$\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{a}'}{\gamma^2(1+\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{V}/c^2)^2}-\frac{(\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{V})\boldsymbol{v}'}{\gamma^2(1+\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{V}/c^2)^3c^2}-\frac{(\gamma-1)(\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{V})\boldsymbol{V}}{\gamma^3(1+\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{V}/c^2)^3V^2} \tag{2.7.31}$$

2.7.4 Doppler 频移

考虑频率为 ω、波矢为 $\boldsymbol{k}$ 的平面光波. 如果 $t=0$ 时，光波的某波峰正好通过三维空间坐标的原点，且位于 $P(\boldsymbol{x})$点的观察者接收到一个光波波峰信号；那么，他在时刻 t 接收到光波波峰的数目是

$$(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)/(2\pi)=\Delta\phi/(2\pi) \tag{2.7.32}$$

式中 $\Delta\phi$ 称为光波的相位. 观察者接收到的光波波峰的数目是一个物理事件，应当与参考系的选取无关，因而是一个在 Lorentz 变换下不变的量，简称 Lorentz 不变量. 于是，由式(2.7.32)可知，光波的相位也是一个 Lorentz 不变量；又由于相位仅有一个独立分量，故它是 Lorentz 标量. 由此推知

$$k^\mu=\begin{pmatrix}\omega/c\\ k_x\\ k_y\\ k_z\end{pmatrix} \tag{2.7.33}$$

是一个四维逆变矢量.

在沿 z 轴方向的特殊 Lorentz 变换 $\Lambda_z(V)$下有

$$\begin{cases} k'_x = k_x \\ k'_y = k_y \\ k'_z = \gamma(k_z - \omega V/c^2) \\ \omega' = \gamma(\omega - Vk_z) \end{cases} \tag{2.7.34}$$

式中 S′相对于 S 系以速度 $\boldsymbol{V} = V\boldsymbol{e}_k$ 运动,此处 $\boldsymbol{e}_k$ 是波矢 $\boldsymbol{k}$ 的方向矢量.

取以 z 轴为极轴的球坐标系(对 S 系取 z'轴为极轴),并注意 $|\boldsymbol{k}| = \omega/c$ 与 $|\boldsymbol{k}'| = \omega'/c$,可得

$$\begin{cases} \phi' = \phi \\ \omega' \sin\theta' = \omega \sin\theta \\ \tan\theta' = \dfrac{\sin\theta\sqrt{1 - V^2/c^2}}{\cos\theta - V/c} \\ \omega' = \dfrac{1 - (V/c)\cos\theta}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\omega \end{cases} \tag{2.7.35}$$

其中第一式表示横向波矢的方向不变;第二式表示横向波矢的大小不变;第三式是光行差公式(2.7.9);第四式是相对论 Doppler 频移公式,它比通常的 Doppler 频移公式多了一个因子 γ.这个因子 γ 预言了所谓的“横向 Doppler 频移”,即当 $\theta = \pi/2$时仍存在频移

$$\omega'\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\omega}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \tag{2.7.36}$$

这是一种精确至 V^2/c^2级的效应.

利用

$$\omega/c = k = 2\pi/\lambda$$

将(2.7.34)的第四式用波长写出即

$$\lambda(\theta) = \gamma\lambda'(1 - \beta\cos\theta) \tag{2.7.37}$$

于是

$$\lambda(\pi) = \lambda'\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}, \qquad \lambda(0) = \lambda'\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \tag{2.7.38}$$

由此得(已将 λ'记为λ_0):

$$\begin{cases} \text{一级效应} \quad \delta\lambda_1(\theta) = \lambda(\theta) - \lambda_0 \approx -\lambda_0\beta\cos\theta \\ \text{二级效应} \quad \delta\lambda_2 \equiv [\lambda(\pi) + \lambda(0)]/2 - \lambda_0 \\ \qquad\qquad \approx \lambda_0\beta^2/2 = [\delta\lambda_1(0)]^2/(2\lambda_0) \end{cases} \tag{2.7.39}$$

1938 年,H.E. Ives 和 G.R. Stilwell 观察运动原子的辐射频谱,结果证实了上述

结论.

对(2.7.34)的第四式取逆得

$$\omega = \gamma\omega'(1+\beta\cos\theta') \tag{2.7.40}$$

用此式可将 Doppler 频移公式用自变量 θ' 表出

$$\omega' = \frac{\sqrt{1-V^2/c^2}}{1+(V/c)\cos\theta'}\omega \tag{2.7.41}$$

2.7.5 延迟效应

所谓"观看"或者"拍照"是指在同一时刻记录来自物体不同部分的光信号;而光信号的传播是需要时间的,因而所记录的光信号是物体的各个部分在"观看"或"拍照"时刻之前不同时刻发出的.于是,分析"观看"或"拍照"的结果时,必须考虑光速有限而引起的延迟效应.

一、观看运动的钟

设两惯性系中的坐标轴两两相互平行,S′系相对于 S 系以速度 $\boldsymbol{v}$ 沿 x 轴正向运动.一观察者位于 S 系的空间坐标原点.固定在 S′系中的钟在 t'_1 与 t'_2 时刻各发出一光信号,这两件事在 S 系中的时空坐标分别为 (t_1, x_1, y_1, z_1) 与 (t_2, x_2, y_2, z_2),观察者记录这两个光信号的时刻分别为 T_1 与 T_2.

考虑光信号以有限的速度传播而引起的时间延缓,有

$$T_1 = t_1 + \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}/c, \qquad T_2 = t_2 + \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}/c \tag{2.7.42}$$

应用 Einstein 时钟延缓效应即式(2.6.21)得

$$t_2 - t_1 = \Delta\tau/\sqrt{1-v^2/c^2} \tag{2.7.43}$$

式中 $\Delta\tau = t'_2 - t'_1$ 是运动的钟上两次发出光信号的原时间隔.由于钟在 S 系中以速度 v 沿 x 轴正向运动,故

$$x_2 - x_1 = v(t_2 - t_1) = v\Delta\tau/\sqrt{1-v^2/c^2} \tag{2.7.44}$$

于是

$$\Delta T = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{1}{c}\left[\sqrt{\left(x+\frac{v\Delta\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2+y^2+z^2} - \sqrt{x^2+y^2+z^2}\right] \tag{2.7.45}$$

式中 $\Delta T = T_2 - T_1$,且已去掉 x_1, y_1 与 z_1 的下标.

讨论:

(1) 若运动钟背离观察者而去,则 $y = z = 0$,故

$$\Delta T = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}\Delta\tau \tag{2.7.46}$$

观察者观察到运动的钟变慢.

(2) 若运动钟朝向观察者而来,这时亦有 $y=z=0$,且

$$\Delta T=\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}\Delta\tau \tag{2.7.47}$$

观察者"观察到"运动的钟变快.

(3) 若 y、z 相对于钟运动的距离 Δx 大得多,则

$$\Delta T=\frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{2.7.48}$$

观察者只"观察到"Einstein 时钟延缓效应.

二、运动物体的视觉形象

在图 2.9 中,两惯性系 S 与 S′中的坐标轴两两相互平行(仅显示出 $x-y$ 平面,坐标系未画出),S′系相对于 S 系以速度 v 沿 x 轴正向运动,以两坐标系重合时为两惯性系的计时零点.长为 l、宽为 h 的长方块 $O'A'B'C'$ 固定在 S′系中,且其长边 $O'A'$ 与 x' 轴重合,短边 $O'C'$ 与 y' 轴重合,O' 点即坐标原点.由于特殊 Lorentz 变换不改变横向距离,物块顶点 O、A 在 S 系中位于 x 轴上,顶点 B、C 在 S 系中位于直线 $y=h$ 上.现考察在 $t=T$ 时刻,处于 $z=0$ 平面上方位角为 $-\theta$、与原点 O 相距 cT 的远方(即 T 很大)的观察者所看到或拍摄的像.

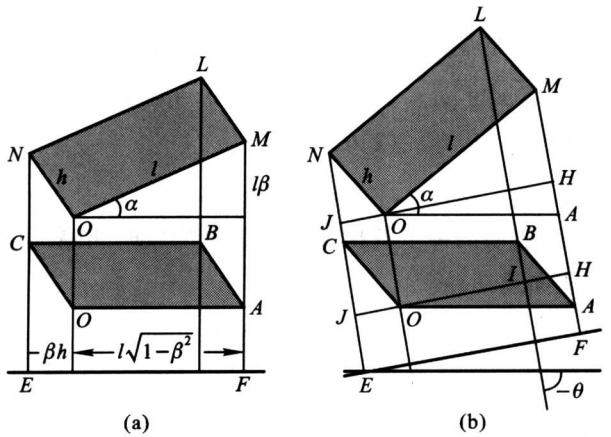


图 2.9　从远处观看运动物体

(a) $\theta=\pi/2$;(b) θ 为任意值

所谓像是同时到达眼球的视网膜或照相机底片的光线形成的,这些光线一般是在不同时刻从物块不同部位发出的.由于观察者与物体相距很远,仅需考虑分别从物体的四个顶点发出的、方位角为 $-\theta$(这里指的是在 $x-y$ 平面上与 x 轴正向的夹角)同时到达视网膜或照相机底片所在平面(图中用直线 EF 表示,

它与所考虑的光线垂直)的四条平行光线.

首先考虑最简单的情形 $\theta=\pi/2$. 这时,来自 O、A 两顶点垂直射向 EF 的光线是在同一时刻 $t_O=0$ 发出的;因而按 Lorentz 收缩

$$OA=l\sqrt{1-\beta^2} \tag{2.7.49}$$

观察者可以看到物体的正面 OA. 而来自顶点 C(且与前述两光线同时到达 EF)的光线则是在早先的时刻 $t_{\bar{C}}=-h/c$ 当顶点 C 处于位置 $\bar{C}$ 发出的;在从 t_C 到 t_O 这段时间内,顶点 C 通过了水平距离

$$-x_C=\beta h \tag{2.7.50}$$

再移到 O 点的正上方. 因而,观察者也可以看到物体的侧面 OC 的像 $O\bar{C}$. 故从 $\bar{C}$、A 两点垂直投向 EF 的两光线同时到达 EF,与 EF 的两交点之间的距离为

$$\beta h+l\sqrt{1-\beta^2} \tag{2.7.51}$$

因此,观察者看到的像是一个形状未变的物体,只不过转过了角度 $\alpha=\arcsin\beta$ 而已,如图 2.9(a)所示.

现在回到 θ 为任意值的普遍情形. 过原点 O 作直线 OH 与 EF 平行,从顶点 A、B、C 作 OH 的垂线分别交 OH 于 H、I、J 点,如图 2.9(b)所示. 则上述四条平行光线(设它们同时到达直线 EF)分别从相应的顶点发出这四个事件在 S 系中的时空坐标(ct,x,y,z)可设为

$$\begin{cases} O:\ (\ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0) \\ A:\ (AH,\ \ x_A,\ \ 0,\ \ 0) \\ B:\ (\ IB,\ \ x_B,\ \ h,\ \ 0) \\ C:\ (\ JC,\ \ x_C,\ \ h,\ \ 0) \end{cases} \tag{2.7.52}$$

由几何关系易知

$$\begin{cases} AH=x_A\cos\theta \\ IB=x_B\cos\theta-h\sin\theta \\ JC=x_C\cos\theta-h\sin\theta \end{cases} \tag{2.7.53}$$

由从 S 系到 S′系的特殊 Lorentz 变换可得

$$\begin{cases} l=\gamma(x_A-\beta\cdot AH) \\ l=\gamma(x_B-\beta\cdot IB) \\ 0=\gamma(x_C-\beta\cdot JC) \end{cases} \tag{2.7.54}$$

由方程(2.7.53)与(2.7.54)解出 x_A、x_B、x_C 与 AH、IB、JC,则在 S 系中 A、B、C 的时空坐标为

$$\begin{aligned} A:&\ (\ \ l\cos\theta\eta/\gamma,\ \ \ l\eta/\gamma,\ \ 0,\ 0\ ) \\ B:&\ (\ -[(1+\beta\cos\theta)\sin\theta h-l\cos\theta/\gamma]\eta,\ \ [l/\gamma-\beta\sin\theta h]\eta,\ \ h,\ 0\ ) \\ C:&\ (\ \ -[1+\beta\cos\theta]\sin\theta h\eta,\ \ -\beta\sin\theta h\eta,\ \ h,\ 0\ ) \end{aligned}$$

式中 $\eta=(1-\beta\cos\theta)^{-1}$. 由此易见,在 S 系中物体顶点 O、A、B、C 构成一个高为 h 的平行四边形,但不是长方形. 这是由于 O、A、B、C(以及 O'、A'、B'、C')不是物体在相应的参考系中同一时刻的顶点. 值得指出的是,图 2.9(b)相应于 $y_C/x_C>-\tan\theta$ 即 $\cos\theta<\beta$ 的情形,这时从点 C 射来的光线在来自点 O 点的光线的左边. 直接计算表明,对于其他情形结果完全一样.

由下式定义角度 α

$$\sin\alpha=\frac{\sin\theta}{1-\beta\cos\theta}\left[\left(\sqrt{1-\beta^2}-1\right)\cos\theta+\beta\right] \tag{2.7.55}$$

在 S 系中从原点 O 朝方位角为 α 与 $\alpha+\pi/2$ 的方向作直线 OM 与 ON,分别与直线 AH 与 CJ 交于点 M 与 N. 则可证明

$$OM=l,\qquad ON=h \tag{2.7.56}$$

事实上,只需证

$$\begin{cases}x_A\cos\alpha-x_A\sin\alpha\cot(\alpha+\theta)=l\\ h-h\cos\alpha=-\tan\theta(x_C+h\sin\alpha)\end{cases} \tag{2.7.57}$$

此即

$$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta}-\cot\theta\sin\alpha\\ \sin\alpha=\dfrac{\beta\sin\theta}{1-\beta\cos\theta}-\cot\theta(1-\cos\alpha)\end{cases} \tag{2.7.58}$$

其解即为式(2.7.55)[实际上,式(2.7.57)与(2.7.55)等价]. 因而光线 OK、AH、CJ 也可看做是从没有形变的长方形物体 $OMLN$[见图 2.9(b)]上的顶点 O、M、N 发出的. 换言之,从视网膜或照相机底片上形成的像不可能看出物体形状由于特殊 Lorentz 变换而发生的畸变;观察者所看到的是一个没有形变的物体,只是旋转了一个角度 α.

值得注意的是,式(2.7.55)可简写为

$$\alpha=\theta'-\theta \tag{2.7.59}$$

式中 $-\theta'$ 是光线 AF 在 S 系中的方位角,角度 θ' 与 θ 满足光行差公式. 因而,所观察到的物体的转角正好是光行差角 α.

下面的讨论可将上述结论推广到具有任意形状的物体. 一条四维波矢为 $k=(\omega/c,\boldsymbol{k}=n\omega/c)$、通过世界点 x_{0a} 的光线 a 上的任一世界点 x_a 应满足类光间隔方程

$$(x_a-x_{0a})^2=0 \tag{2.7.60}$$

上是右端为零,故不能像有质量的粒子那样用固有时度量世界线的长度. 注意到对于同一条光线有

$$k^2=0 \tag{2.7.61}$$

我们便发现方程(2.7.60)有一个如下形式的解：

$$x_a = \lambda_a k + x_{0a} \tag{2.7.62}$$

式中，参量 λ_a 是 Lorentz 不变量，称为仿射参量(affine parameter)．方程(2.7.62)的零分量形式是

$$c(t_a - t_{0a}) = \lambda_a \omega / c \tag{2.7.63}$$

可见，仿射参量 λ_a 与世界线的长度成正比，因而相当于固有时在具有非零质量的粒子的世界线的参数化中的地位．另一条与光线(2.7.62)平行的同频光线 b 必然具有与光线(2.7.62)相同的四维波矢，故可描述为

$$x_b = \lambda_b k + x_{0b} \tag{2.7.64}$$

进一步，我们假定两条平行的光线满足如下的限制条件：

$$k \cdot (x_{0a} - x_{0b}) = 0 \tag{2.7.65}$$

利用 $k^2 = 0$ 可证明

$$k \cdot (x_a - x_b) = 0 \tag{2.7.66}$$

此即

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{x}_a - \boldsymbol{x}_b) = c(t_a - t_b) \tag{2.7.67}$$

可见，同时从同一条直线上的任意两点朝垂直于该直线的方向发出的两条相互平行的光线 a、b 必同时碰到任何与它垂直的平面，这正是我们前面所讲的瞬间照相所碰到的情形．由于(2.7.65)与(2.7.66)是 Lorentz 不变的，这一结论在任何惯性参考系中都是正确的．进而，在条件(2.7.65)成立的前提下，利用 $k^2 = 0$ 还可证明

$$(x_a - x_b)^2 = (d_a - d_b)^2 \tag{2.7.68}$$

这说明，所考虑的两条平行光线间的垂直(空间)距离(注意，这时有 $t_a = t_b$)等于一个 Lorentz 不变的常数．考虑到在 S 系中光线波矢 $\boldsymbol{k}$ 与 x 轴的夹角 θ 和其在 S′系中的波矢 $\boldsymbol{k}'$ 与 x 轴的夹角 θ' 由光行差公式相联系，便可得到结论：S 系中在 θ 方向上拍摄的物体的像与 S′系中在 θ' 方向上拍摄的像完全相同，前者相对于 S′系中在 θ' 方向上拍摄的像转过了一个光行差角 $\alpha = \theta' - \theta$．因而，在我们的照片中看不到 Lorentz 收缩．

值得指出的是：这里的结论是在所记录的光线平行入射的情况下(即观察者离物体很远即物体对观察者所张的立体角——视角非常小时)做出的．如果视网膜或照相机底片离物体不很远，则物体的不同(的可以视为“小”的)部位在像上应呈现出不同的转角，物体的整个像会发生畸变，这时高速运动立方体垂直于其运动方向的侧面的视觉像不再是方形而是二次曲面．

习题 2－7

1．利用速度合成的办法可以使速度超过光速吗？试证明你的结论．

2. 设三个惯性系 S、S′、S″的原点在 $t=t'=t''$ 时重合，系 S′沿 S 中的 x 轴以速度 v 匀速运动，系 S″沿 S′中的 y' 轴以速度 v' 匀速运动．设 S″系与 S 系的相对运动方向在 S 系中与 x 轴的夹角为 θ，而在 S″系中与 x'' 轴的夹角为 θ''，试证

$$\tan\theta=(v'/v)(1-v^2/c^2)^{1/2},\quad \tan\theta''=(v'/v)(1-v'^2/c^2)^{-1/2}$$

若 v、$v'\ll c$，证明：$\theta''-\theta\approx vv'/2c^2$．

提示：利用速度合成法则．

3. 当粒子沿任意封闭轨道回到原处时，固定在粒子上的方向矢量会回到其初始方向吗？

4. 试从方程(2.7.28)与 Lorentz 收缩效应导出 Thomas 进动公式．

5. 由速度变换公式导出公式(2.7.8)．

6. 试从方程(2.7.10)导出 $\tan\theta/2$ 与 $\tan\theta'/2$ 间的简单关系．

答案：$\tan\theta/2=\sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}}\tan\theta'/2$．

7. 从固定在恒星中的惯性系看，一宇宙飞船从 $x=0$ 出发，沿 x 轴方向从静止开始作加速运动．在飞船中的宇航员所测定的飞船的加速度 g 为常量．问飞船直至到达速度 v 时所飞行的距离为多少？

提示：在时刻 t 与飞船相对静止的惯性系中，飞船的速度为零，加速度为 g．

答案：$x=(c^2/g)\left(1/\sqrt{1-V^2/c^2}-1\right)$．

8. 一点粒子在其固有系 S′中各向均匀地向周围辐射光波，因而其辐射角分布 $L'=$ 常量(即各向同性)．试求在相对于该粒子速度为 $\boldsymbol{v}$ 的参考系 S 中粒子辐射光波的角分布 $L(\theta)$．

提示：点粒子在某一立体角元中辐射的光子数是 Lorentz 不变的，即 $L\mathrm{d}\Omega=L'\mathrm{d}\Omega'$．

9. 一原子在静止时辐射的光波的波长为 λ_0．若该原子以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动，问顺着、逆着和垂直于 $\boldsymbol{v}$ 的方向传播的光波的波长各为多少？

答案：$\lambda_{顺}=\lambda_0\sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}}$；$\lambda_{逆}=\lambda_0\sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}}$；$\lambda_{\perp}=\lambda_0/\sqrt{1-\beta^2}$．

10. 氢原子光谱最显著的谱线之一——H_α 线是波长为 656.1×10^{-9} m 的一条亮红线．在地球上所测得的来自太阳赤道两端辐射中的 H_α 线的波长差为 9×10^{-12} m．假定此效应是由于太阳自转引起的，求太阳的自转周期．已知太阳直径为 1.4×10^9 m．

答案：$T=25$ 天．

11. 有一星球以 $0.8c$ 的速度远离地球而去，在地球上接收到的从该星球辐射出来的闪光按 5 昼夜的周期变化，求在固定于这星球上的参考系中测得的闪光周期．若此星球以同样的速度从远处朝地球而来，在地球上所接收到的闪光周期是多少？

答案：5/3 昼夜；5/9 昼夜．

12. 一个钠光源以 $0.95c$ 的速度相对于观察者运动．讨论当光源经过观察者时，光源的强度与颜色如何变化．

13. 一个 100 cm 长的棒在桌面上作纵向的匀速直线运动．在其路径某处的桌面上有一个 100 cm 长的洞．棒相对于桌面的 Lorentz 因子(即 $\gamma=1/\sqrt{1-v^2/c^2}$，$v$ 为棒的纵向速度)为 10．对于与棒一起运动的观察者，洞看来只有 10 cm 长，棒可以越过洞去．对于相对于桌面静止的观察者，棒看来只有 10 cm 长，棒在通过 100 cm 的洞时会在重力的作用下落到

地上.谁是正确的?

§2.8 相对论粒子动力学

2.8.1 四维速度和四维加速度

设某粒子以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动,则沿粒子运动的世界线上的无穷小间隔 $\mathrm{d}s$ 是类时的,且满足

$$\mathrm{d}s = c\mathrm{d}t\sqrt{1-v^2/c^2} = c\mathrm{d}\tau \tag{2.8.1}$$

显然,$\mathrm{d}\tau$ 是 Lorentz 不变量.由于 $\mathrm{d}x^\mu$ 是一个四维矢量,故

$$u^\mu = \mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}\tau \tag{2.8.2}$$

也是一个四维矢量,称为四维速度.按照相对性原理,出现在物理规律中的物理量应是 Minkowski 时空中的张量(或旋量).因此,出现在狭义相对论的物理方程中的速度应是四维速度 u^μ,而不是三维速度 $\boldsymbol{v}$,因为 $\boldsymbol{v}$ 不是 Lorentz 矢量.这就是我们为什么引入四维速度的原因.由式(2.8.2)与 $\mathrm{d}/\mathrm{d}\tau = \gamma\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ 易知四维速度各分量为

$$u^0 = \gamma c, \qquad u^i = \gamma v^i \tag{2.8.3}$$

因而

$$u^2 = u^\mu u_\mu = c^2 \tag{2.8.4}$$

可见,四维速度 u^μ 的各分量并不相互独立.

类似地,可定义四维加速度 ω^μ:

$$\omega^\mu = \mathrm{d}u^\mu/\mathrm{d}\tau \tag{2.8.5}$$

其分量形式是

$$\omega^0 = c\gamma\mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}t, \qquad \omega^i = \gamma\mathrm{d}(\gamma v^i)/\mathrm{d}t + \gamma^2 a^i \tag{2.8.6}$$

式中 a^i 是粒子的三维加速度 $\boldsymbol{a}$ 的分量.由式(2.8.4)可知

$$u\cdot\omega = u_\mu\omega^\mu = 0 \tag{2.8.7}$$

因此,四维加速度的各分量也不是相互独立的;且四维加速度与四维速度总是相互正交的(但其三维分量却不一定相互正交).

2.8.2 点粒子的自由运动

为了研究相对论点粒子的自由运动(严格地说,这里考虑的是这样一个点粒子,即除开粒子所处的时空位置外,标志该点粒子的特征参量只有一个,即粒子的固有质量),我们必须定出自由点粒子的作用量 S.按照相对性原理,作用量 S 应当与惯性系的选取无关;换言之,S 是一个 Lorentz 不变量.由(非相对论)分析力学可知 S 是一个三维标量,因而在狭义相对论中它只能是一个四维标量.

于是作用量积分中的被积函数应当是 Lorentz 标量. 然而,对于自由点粒子,这种标量只能与粒子的时空间隔 ds 成正比,因为 ds 是唯一的与该粒子的时空位置有关的四维标量(x^μ 不能明显地出现在作用量积分中,否则粒子的能－动量不守恒). 因此自由点粒子的作用量积分具有形式

$$S=-\alpha\int_a^b ds=\int_{t_1}^{t_2} L\,dt \tag{2.8.8}$$

式中 a、b 是粒子初、末时刻所处的两个世界点,α 是表征该粒子特性的一个常数,而 L 称为 Lagrange 函数或拉氏量. 由式(2.8.1)易知

$$L=-\alpha\frac{ds}{dt}=-\alpha c\sqrt{1-v^2/c^2} \tag{2.8.9}$$

其中 v 为粒子的运动速度的大小.

当 $v\ll c$ 时,

$$L\approx-\alpha c+\alpha v^2/(2c) \tag{2.8.10}$$

它应当与低速运动时自由粒子的拉氏量

$$L_N=m_0v^2/2 \tag{2.8.11}$$

至多差一个常数或与粒子的位置与速度无关的可积函数 $f(t)$,后者的贡献在对作用量取变分时消失. 上式中 m_0 是粒子的静止质量. 比较(2.8.10)与(2.8.11)两式易知

$$\alpha=m_0c>0 \tag{2.8.12}$$

值得指出的是,由于 α 与 c 都是 Lorentz 不变的常量,故 m_0 也是 Lorentz 不变的常量,它等于粒子在其固有参考系中的质量即固有质量或静止质量. 于是,静止质量 m_0 不为零的自由粒子的作用量与拉氏量是

$$S=-m_0c\int_a^b ds=\int_{t_1}^{t_2}L\,dt,\quad L=-m_0c^2\sqrt{1-v^2/c^2} \tag{2.8.13}$$

由粒子动量 $\boldsymbol{p}$ 与能量 E 的定义

$$p^i=\partial L/\partial v^i,\qquad E=p^iv^i-L \tag{2.8.14}$$

知

$$\boldsymbol{p}=\frac{m_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\quad E=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{2.8.15}$$

上式说明

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{v}E/c^2 \tag{2.8.16}$$

值得注意的是:当 $m_0\neq0$ 时式(2.8.15)在 $v=c$ 处为无限大. 这说明固有质量不为零的物体不可能以光速运动;而以光速运动的粒子,其固有质量一定为零.

对于固有质量不为零的粒子,由式(2.8.15)易得其静能为

$$E_{\boldsymbol{p}=0}=m_0c^2 \tag{2.8.17}$$

这是 Einstein 所提出的著名的质能关系式，它揭示了粒子的静能与粒子的静止质量之间的关系. 注意：粒子的静能是 Lorentz 不变量，而粒子的动能

$$T = E - m_0 c^2 \tag{2.8.18}$$

不是 Lorentz 不变量. 有时候为了方便起见，引入粒子的动质量

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{2.8.19}$$

而(2.8.15)中第二式可写为

$$E = mc^2 \tag{2.8.20}$$

它也常称为 Einstein 质能关系式. 但应注意，动质量不是 Lorentz 不变量.

对于以光速运动的粒子，方程(2.8.16)成为

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{n}E/c \tag{2.8.21}$$

式中 $\boldsymbol{n}$ 是粒子的运行方向. 能动量(2.8.15)表达式的分子与分母此时都是零，因而可取有限值，这一有限值应与标识粒子的特征量有关. 对于我们目前考虑的情形，我们只知道这一标识特定的粒子的特征量只有一个，且这个特征量对于不同的粒子应当不同. 满足这一条件的最直接的选择是该粒子的能量 E. 值得注意的是，粒子的能量不是 Lorentz 不变量. 如果我们采用基于波粒二象性(所谓波粒二象性即是说，按照量子力学，任何实物粒子与波是等价的)的 Einstein 的光量子假设，即

$$E = \hbar\omega \tag{2.8.22}$$

将以光速运动的粒子的能量与粒子所对应的波的频率联系起来，则方程(2.8.21)意味着粒子的动量为

$$\boldsymbol{p} = \hbar \boldsymbol{n}\omega/c = \hbar \boldsymbol{k} \tag{2.8.23}$$

式中

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{n}\omega/c \tag{2.8.24}$$

是粒子所对应的波的波矢.

进而，由式(2.8.15)易得

$$p^2c^2 + m_0^2c^4 = E^2 \tag{2.8.25}$$

这通常称为质壳条件. 对于一个 $v < c$ 的粒子，由式(2.8.16)知

$$p^2c^2 < E^2 \tag{2.8.26}$$

按质壳条件知该粒子(即运动速度小于光速的粒子)一定具有非零的质量.

从式(2.8.13)中被积式的协变形式出发可以直接得到粒子能－动量的四维形式. 按最小作用量原理可知

$$\delta S = -m_0 c\delta\int_a^b \sqrt{\mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x^\mu} = -m_0 c\int_a^b \frac{\mathrm{d}x_\mu \delta \mathrm{d}x^\mu}{\sqrt{\mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x^\mu}} = -m_0\int_a^b u_\mu \mathrm{d}\delta x^\mu = 0 \tag{2.8.27}$$

分步积分得

$$\delta S = -m_0 u_\mu \delta x^\mu \Big|_a^b + \int_a^b \mathrm{d}\tau \delta x^\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(m_0 u_\mu) \tag{2.8.28}$$

令 $\delta x^\mu|_a = \delta x^\mu|_b = 0$,我们便得到自由点粒子的运动方程

$$\mathrm{d}p^\mu/\mathrm{d}\tau = 0 \tag{2.8.29}$$

式中四维常矢量

$$p^\mu = m_0 u^\mu \tag{2.8.30}$$

叫做四维能－动量或四维动量,其分量表达式是

$$p^0 = \frac{E}{c}, \qquad p^i = \frac{m_0 v^i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{2.8.31}$$

考虑到 m_0是常量,运动方程(2.8.29)也可写作

$$\omega^\mu = 0 \tag{2.8.32}$$

由式(2.8.30)与(2.8.4),我们重新得到质壳条件

$$p^2 = p_\mu p^\mu = m_0^2 c^2 \tag{2.8.33}$$

若 a 点固定,即 $\delta x^\mu|_a = 0$;而 b 点沿满足运动方程的轨道变化,即式(2.8.28)右端的积分为零.记 $\delta x^\mu|_b$为 δx^μ,则

$$\delta S = -m_0 u_\mu \delta x^\mu \tag{2.8.34}$$

分析力学告诉我们

$$-\partial S/\partial Q = P \tag{2.8.35}$$

是相应于广义坐标 Q 的共轭冲量.故上式直接导致式(2.8.30).再由质壳条件,我们得到自由点粒子的 Hamilton－Jacobi 方程:

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right] = m_0^2 c^2 \tag{2.8.36}$$

2.8.3 点粒子的 Doppler 效应与轨道偏差

设惯性系 S 相对于惯性系 S 以速度 $\boldsymbol{V} = V\boldsymbol{e}_k$ 运动,且两惯性系中的三维空间坐标系的坐标轴两两相互平行,以两坐标原点重合时为计时零点.自由粒子的四维能－动矢量满足下述特殊 Lorentz 变换:

$$\begin{pmatrix} p\sin\theta\cos\phi \\ p\sin\theta\sin\phi \\ p\cos\theta \\ E/c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & \beta\gamma \\ 0 & 0 & \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p'\sin\theta'\cos\phi' \\ p'\sin\theta'\sin\phi' \\ p'\cos\theta' \\ E'/c \end{pmatrix} \tag{2.8.37}$$

这里取 $\boldsymbol{e}_k$ 为极轴方向.由此易得

$$\begin{cases} \phi = \phi' \\ p_\perp \equiv p\sin\theta = p'\sin\theta' \equiv p'_\perp \\ p_{/\!/} = p\cos\theta = \gamma E'(\beta/c + p'_{/\!/}/E') \\ E = \gamma(E' + c\beta p'_{/\!/}) \end{cases} \tag{2.8.38}$$

上式中第一、二式表示横向动量的方向和大小不变.若 $p'_{/\!/}=0$,则由式(2.8.38)易知

$$p_{/\!/} = m_\perp c\sinh\psi, \qquad E = m_\perp c^2\cosh\psi \tag{2.8.39}$$

式中 ψ 是 S′系相对于 S 系的快度,而

$$m_\perp = \sqrt{m_0^2 + p_\perp^2/c^2} \tag{2.8.40}$$

称为横质量,它是特殊 Lorentz 变换(2.8.37)的不变量.

(2.8.38)中第四式称为 Doppler 效应公式(下面取其逆形式):

$$E' = \frac{1 - \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{v}/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}E \tag{2.8.41}$$

式中 $\boldsymbol{v}$ 是粒子相对于系 S 的速度;当 $v=c$ 时,上式便成为光的 Doppler 效应公式.直接由(2.8.38)中第四式可得到用 S′系中的 $\boldsymbol{v}'$ 与 θ' 表示的公式:

$$E' = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{v}'}E \tag{2.8.42}$$

由(2.8.38)中第三式可得粒子轨道偏差公式:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta'}{\cos\theta' + V/v'}\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \tag{2.8.43}$$

当 $v=c$ 时,它便是光行差公式.

2.8.4 点粒子在外力作用下的运动

若存在外力 F^μ,则可将它与点粒子的时空位置 x^μ 收缩构成一个新的 Lorentz 标量;因而点粒子的作用量应修改为

$$S = S_0 - \int_a^b \mathrm{d}\tau F^\mu x_\mu \tag{2.8.44}$$

式中 S_0 是式(2.8.13)所示的自由点粒子的作用量.可以在 F^μ 之前加上一个待定的常数因子;这里我们将它归入 F^μ.

按最小作用量原理可得

$$\delta S = \int_a^b \mathrm{d}\tau\delta x_\mu[\mathrm{d}p^\mu/\mathrm{d}\tau - F^\mu] \tag{2.8.45}$$

因此,粒子在外力作用下的运动方程是

$$F^\mu = \mathrm{d}p^\mu/\mathrm{d}\tau = m\omega^\mu \tag{2.8.46}$$

由式(2.8.7)知

$$F^{\mu}u_{\mu}=0 \tag{2.8.47}$$

类似于四维速度的三维分量与通常的三维速度之间的关系(见式(2.8.6)),可以将通常的三维力矢量 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$ 定义为

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}=\sqrt{1-v^2/c^2}\,(F_1,F_2,F_3) \tag{2.8.48}$$

式中 F_i 是 F_{μ} 的三维分量.由式(2.8.46)与(2.8.47)得

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}=\mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t,\qquad \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}\cdot\boldsymbol{v}=\mathrm{d}E/\mathrm{d}t\equiv N \tag{2.8.49}$$

式中 N 是力的功率,且四维力 F^{μ} 的形式是

$$F^{\mu}=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\begin{pmatrix}N/c\\ \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}\end{pmatrix} \tag{2.8.50}$$

式(2.8.49)的积分形式是动量定理与功能原理:

$$\int\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}\mathrm{d}t=\Delta\boldsymbol{p},\qquad \int\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\Delta E \tag{2.8.51}$$

它可合写成四维能-动量定理[也可直接由式(2.8.46)导出]:

$$\int F_{\mu}\mathrm{d}\tau=\Delta p_{\mu} \tag{2.8.52}$$

方程(2.8.49)的第一式即

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)=\frac{m\boldsymbol{a}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+\frac{ma_1v\boldsymbol{v}}{c^2\sqrt{(1-v^2/c^2)^3}} \tag{2.8.53}$$

可见,一般而言,$\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$ 与加速度 $\boldsymbol{a}$ 并不平行.将 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 分解成沿 $\boldsymbol{v}$ 方向的纵向分量 $\boldsymbol{F}_l$ 和与 $\boldsymbol{v}$ 垂直的横向分量 $\boldsymbol{F}_t$

$$\begin{cases}\boldsymbol{F}_l=(\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}/v^2, & \boldsymbol{F}_t=\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}-\boldsymbol{F}_l\\ \boldsymbol{a}_l=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}/v^2, & \boldsymbol{a}_t=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}_l\end{cases} \tag{2.8.54}$$

则式(2.8.53)可写成

$$\boldsymbol{F}_l=\gamma^3(v)m\boldsymbol{a}_l,\quad \boldsymbol{F}_t=\gamma(v)m\boldsymbol{a}_t \tag{2.8.55}$$

2.8.5 多粒子系统运动学

按照相对性原理,孤立系统的作用量 S 与惯性系的选取无关,这必然要求:

(a) S 与四维坐标系的原点的选取无关,因而在四维时空中的无穷小平移变换

$$x^{\mu}\to x'^{\mu}=x^{\mu}+\delta a^{\mu} \tag{2.8.56}$$

下不变(常矢量 δa^{μ} 成为隐坐标或循环坐标,注意不要与矢量的循环分量混淆),与之相应的共轭冲量应当守恒;

(b) S 与四维 Cartesian 坐标系取向的选取无关,因而在四维时空中的无穷小旋转变换

$$x^{\mu}\to x'^{\mu}=x^{\mu}+x_{\nu}\delta\Omega^{\mu\nu} \tag{2.8.57}$$

下不变,与之相应的广义共轭冲量也应当守恒.现在求这两个共轭冲量.基本的出发点是与广义坐标共轭的广义冲量的定义式(2.8.35),特别是

$$\delta S=\sum_{l}\frac{\partial S}{\partial x^{\mu}_{(l)}}\delta x^{\mu}_{(l)}=-\sum_{l}p^{(l)}_{\mu}\delta x^{\mu}_{(l)} \tag{2.8.58}$$

式中$\sum_{l}$表示对系统中所有粒子求和.

对无穷小平移变换(2.8.56),上式成为

$$\delta S=-\delta a^{\mu}\sum_{l}p^{(l)}_{\mu} \tag{2.8.59}$$

故相应的冲量 P_{μ} 守恒:

$$P_{\mu}=-\frac{\delta S}{\delta a^{\mu}}=\sum_{l}p^{(l)}_{\mu}=\text{常矢量} \tag{2.8.60}$$

冲量 P_{μ} 称为系统的总的能-动量,当 $l=1$ 时它便是单粒子能-动量.

对于无穷小旋转变换(2.8.57),矢量 x^{μ} 与原点之间的间隔应当不变,即

$$\delta(x_{\mu}x^{\mu})=2x_{\mu}x_{\nu}\delta\Omega^{\mu\nu}=0 \tag{2.8.61}$$

或

$$x_{\mu}x_{\nu}(\delta\Omega^{\mu\nu}+\delta\Omega^{\nu\mu})=0 \tag{2.8.62}$$

应对任意的 x_{μ} 与 x_{ν} 成立,故必有

$$\delta\Omega^{\mu\nu}=-\delta\Omega^{\nu\mu} \tag{2.8.63}$$

于是由式(2.8.57)与(2.8.58)知

$$\delta S=-\delta\Omega^{\mu\nu}\frac{1}{2}\sum_{l}(p^{(l)}_{\mu}x^{(l)}_{\nu}-p^{(l)}_{\nu}x^{(l)}_{\mu}) \tag{2.8.64}$$

这说明相应的守恒冲量是

$$M_{\mu\nu}=\sum_{l}(x^{(l)}_{\mu}p^{(l)}_{\nu}-x^{(l)}_{\nu}p^{(l)}_{\mu})=\text{常张量} \tag{2.8.65}$$

这个反对称冲量张量称为体系的四维动量矩张量.

注意到式(2.8.58)中 $x^{\mu}_{(l)}$ 的选取是任意的以及粒子间间隔的类空性,我们可将各粒子的运动轨迹与 $t=$常数的平面的交点作为其时空位置,这时有 $t^{(l)}=t$,而张量 $M_{\mu\nu}$ 的各分量为

$$\begin{cases}M_{ij}=\sum_{l}(x^{(l)}_{i}p^{(l)}_{j}-x^{(l)}_{j}p^{(l)}_{i})=(\sum_{l}\boldsymbol{r}^{(l)}\times\boldsymbol{p}^{(l)})_{k}\\ M_{0i}=\sum_{l}(ctp^{(l)}_{i}-x^{(l)}_{i}E^{(l)}/c)=\sum_{l}(ct\boldsymbol{p}^{(l)}-E^{(l)}\boldsymbol{r}^{(l)}/c)_{i}\end{cases} \tag{2.8.66}$$

其中第一式中的(i,j,k)是$(1,2,3)$的循环置换,而 M_{ij} 正好是体系的总的三维轨道角动量 $\boldsymbol{L}=\sum_{l}\boldsymbol{r}^{(l)}\times\boldsymbol{p}^{(l)}$ 的三个分量;而第二式可写成

$$\frac{\sum_l E^{(l)} \boldsymbol{r}^{(l)}}{\sum_l E^{(l)}} - \frac{c^2 \sum_l \boldsymbol{p}^{(l)}}{\sum_l E^{(l)}} t = \text{常量} \tag{2.8.67}$$

这说明矢径为

$$\boldsymbol{R}_G = \frac{\sum_l E^{(l)} \boldsymbol{r}^{(l)}}{\sum_l E^{(l)}} \tag{2.8.68}$$

的点 G 以速度

$$\boldsymbol{V}_G = \frac{c^2 \sum_l \boldsymbol{p}^{(l)}}{\sum_l E^{(l)}} \tag{2.8.69}$$

作匀速直线运动. 点 G 称为系统的惯性中心. 值得注意的是, $\boldsymbol{R}_G$ 的各分量在 Lorentz 变换下并不像一个四矢量的空间分量那样变换; 当所有 $v^{(l)} \ll c$ 时, G 便是通常的质心.

取另一惯性系 S′, 它相对于目前的惯性系 S 的速度为 $\boldsymbol{V}_G$, 则在 S 系中, 系统的惯性中心 G 是静止的. 容易证明, 在 S′中

$$\boldsymbol{P}' \equiv \sum_l \boldsymbol{p}^{(l)} = 0 \tag{2.8.70}$$

满足上述条件的参考系称为动量中心系(亦称为质心系). 量

$$M = \sum_l E'_{(l)} / c^2 \Big|_{\sum_l \boldsymbol{p}_{(l)} = 0} \tag{2.8.71}$$

称为整个粒子系的质量, 而 E' 则是体系的内能, 它们都是 Lorentz 不变量. 体系的整体运动可视为质量为 M 的单粒子的运动.

注意: 在一般情况下, 物体(它是由其各组分粒子组成的粒子系)的质量并不等于其组分粒子质量的和. 这是由于物体的内能 Mc^2 不仅包含其所有组分粒子的静能, 还包含这些粒子的动能以及它们之间的相互作用能; 且使所有组分粒子都处于静止状态的参考系一般不存在. 物体的质量与其各组分粒子质量和的差

$$\Delta M = M - \sum_l m_l \tag{2.8.72}$$

称为质量亏损, 而 $-\Delta Mc^2$ 则叫做结合能. 如果一个物体自动分裂成两部分, 这两部分在整个系统的动量中心系中的速度分别为 v_1 与 v_2, 则由能量守恒定律知

$$Mc^2 = \frac{M_1 c^2}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} + \frac{M_2 c^2}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} \geqslant (M_1 + M_2) c^2 \tag{2.8.73}$$

因而 $\Delta M \geqslant 0$. 若 $\Delta M < 0$, 上式不能成立, 即不可能自动发生分裂, 物体处于稳定状态; 为使分裂发生, 必须从外面供给大于或等于结合能的能量.

考虑下述反应:

$$a + b \to c_1 + c_2 + \cdots + c_n$$

反应中真正释放的能量 Q 是

$$Q = \sum_i T'_i - (T_a + T_b) \tag{2.8.74}$$

式中 T 与 T' 是反应前、后相应粒子的动能. $Q>0$ 时称反应是放热的，$Q<0$ 时称反应是吸热的. 由能量守恒定律知

$$(m_a + T_a) + (m_b + T_b) = \sum_i (m'_i + T'_i) \tag{2.8.75}$$

故

$$Q = \left[(m_a + m_b) - \sum_i m'_i\right]c^2 \tag{2.8.76}$$

对于吸热反应，仅当入射粒子的能量大于某一阈值——阈能时才能发生. 在实验室坐标系 L(该坐标系由 $\boldsymbol{p}_a = 0$ 表征)中，由总的能－动量守恒知

$$\left(\sum_i p'_i\right)^2 = m_a^2 + m_b^2 + 2E_a^L m_b \tag{2.8.77}$$

式中 p'_i 为末态粒子 c_i 的四维动量，E_a^L 为粒子 a 在实验室坐标系中的能量. 由于

$$\left(\sum_i p'_i\right)^2 \geqslant \left(\sum_i m_i c\right)^2 \tag{2.8.78}$$

所以

$$E_a^L \geqslant E_{阈}^L = \frac{1}{2m_b}\left[\left(\sum_i m'_i\right)^2 - (m_a^2 + m_b^2)\right]c^2 \tag{2.8.79}$$

或

$$T_a^L \geqslant T_{阈}^L = \frac{1}{2m_b}\left[\left(\sum_i m'_i\right)^2 - (m_a + m_b)^2\right]c^2 \tag{2.8.80}$$

习题 2－8

1. 由四维速度和四维加速度的特殊 Lorentz 变换导出三维速度和三维加速度的相应的变换式.

2. 试导出运动的点粒子动质量在特殊 Lorentz 变换下的变换式.

答案：

$m'_{动} = m_{动}(1 - \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{v}/c^2)/\sqrt{1 - V^2/c^2}$，式中 $m'_{动}$ 与 $m_{动}$ 分别为粒子在惯性系 S′与 S 中的动质量，$\boldsymbol{V}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 分别为惯性系 S′与粒子相对于 S 系的速度.

3. 通常的力定义为

$$\boldsymbol{F}_N = \mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t$$

式中 $\boldsymbol{p}$ 是受到力作用的物体的三维动量. 试导出通常的力在特殊 Lorentz 变换下的变换式.

4. 试从能量－动量守恒定律证明下列基本粒子反应是不可能发生的：

(1) 一个自由电子在真空中辐射或吸收一个光子；

(2) 一对正负电子在真空中湮灭为一个光子,或者一个光子在真空中转变为一对正负电子.

5. 试导出粒子体系的惯性中心 G 的速度 $\boldsymbol{V}_G$ 在特殊 Lorentz 变换下的变换式,并证明在动量中心系中

$$\boldsymbol{P}' \equiv \sum_l \boldsymbol{p}^{(l)} = 0$$

成立.

6. 求发生下述反应的阈能:

(1) 一光子与一静止电子碰撞后产生正负电子对,其反应式为

$$\gamma + e^- \to e^+ + e^- + e^-$$

(2) 高能质子轰击质子靶产生质子与反质子,其反应式为

$$p + p \to p + p + p + \bar{p}$$

电子与质子的静质量分别为 $m_{e^-} = 0.51$ MeV 与 $m_p = 938$ MeV.

答案:

$E_\gamma > 4m_e c^2$; $T > 6m_p = 5.63$ GeV.

7. 质量为 m_a、速度为 $\boldsymbol{v}$ 的粒子 a 与质量为 m_b 的靶粒子 b 相互碰撞后成为一个粒子 c.求粒子 c 的质量与速度.

答案:

$m_c^2 = m_a^2 + m_b^2 + 2m_a m_b / \sqrt{1-\beta^2}$;

$V = m_b v / (M_a + m_b \sqrt{1-\beta^2})$.

8. 频率为 ω_0 的光子被自由电子散射(Compton 散射),入射光子运动的方向与散射前电子的动量 $\boldsymbol{p}_0$ 的夹角为 θ_0.求散射光子的频率 ω 与散射角 θ(散射光子的运动方向与入射光子的运动方向之间的夹角)之间的关系.

答案:

$\omega = [\omega_0(E_0 - p_0 c\cos\theta_0)]/[E_0 - p_0 c\cos(\theta+\theta_0) + \hbar\omega_0(1-\cos\theta)]$, E_0 是散射前自由电子的能量.

9. 一质量为 m_a、动量为 $\boldsymbol{p}_a$ 的粒子 a 与一质量为 m_b、动量为 $\boldsymbol{p}_b = 0$ 的粒子 b 发生弹性散射(即其反应式为 a + b→a + b).若散射后粒子 a 的能量为 E'_a,求散射角 θ_a.

答案:

$\cos\theta_a = [E'_a(E_a + m_b c^2) - (m_a^2 c^2 + m_b E_a)]/\sqrt{(E_a^2 - m_a^2 c^2)(E'^2_a - m_a^2 c^2)}$.

10. 一中性 π 介子相对于观察者以速度 $v = \beta c$ 飞行,其后衰变成两个光子,两个光子的运动轨道与 π 介子原飞行方向成相等的角度 α.证明这两光子具有相等的能量,且满足 $\cos\alpha = \beta$.

第三章　电磁相互作用的基本规律

本章从基本的对称性出发构造电磁相互作用的作用量，通过最小作用量原理得到 Lorentz 力公式与 Maxwell 方程组，从而导出电磁场的能量、动量与角动量张量定理；进而介绍在（宏观静止与运动的）连续介质中电磁相互作用的基本规律.

§3.1　带电粒子在电磁场中的运动规律

3.1.1　在电磁场中运动的带电粒子的作用量

我们已经知道，当任何外场例如电磁场不存在时的点粒子(标量粒子)作用量即自由点粒子作用量由下式决定：

$$S_{\text{p free}} = -m_0 c \int_a^b \mathrm{d}s$$

描述外场与粒子相互作用的作用量应由描述场的特征的量与描述粒子特征的量所构成的 Lorentz 标量来构造. 考虑到电磁场在某一点的自由度大于 1，可尝试将描述电磁场的特征的量 A 用最简单的张量场——四维矢量场来表示，这种尝试或假设的正确与否可根据由它推出的结果是否与实验相符合来决定. 故最简单的相互作用量的形式为

$$\alpha e \int_a^b \mathrm{d}x^\mu A_\mu \tag{3.1.1}$$

式中 $e\mathrm{d}x^\mu$ 是刻画带电粒子特征的量，而 α 是与单位制有关的常数. 处于电磁场中的、电荷为 e 的点粒子的作用量 S_p 应由上述两部分组成，因而有

$$S_\mathrm{p} = \int_a^b [-m_0 c\mathrm{d}s + \alpha e A^\mu \mathrm{d}x_\mu] \tag{3.1.2}$$

为了以后的方便，将 A^μ 的分量取为

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \phi/c \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi/c \\ \boldsymbol{A} \end{pmatrix} \tag{3.1.3}$$

则与作用量(3.1.2)相应的拉氏量为

$$L_\mathrm{p} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} + \alpha(e\phi - e\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}) \tag{3.1.4}$$

式中 $\boldsymbol{v}$ 为粒子的运动速度.

当 $v=0$ 时，$-L_\mathrm{p}$ 应是粒子本身的静能和粒子在外界静电场中的静电势能之和. 在国际单位制中有

$$L_\mathrm{p}(\boldsymbol{v}=0) = -[m_0 c^2 + e\phi_\mathrm{e}] \tag{3.1.5}$$

式中 ϕ_e 是外界静电场的静电势. 与式(3.1.4)比较知

$$-\alpha\phi(\boldsymbol{v}=0) = \phi_\mathrm{e} \tag{3.1.6}$$

因此

$$\alpha = -1 \tag{3.1.7}$$

从而 ϕ 当$\boldsymbol{v}=0$时等于外界电磁场的电势，故称 ϕ 为电磁场的标势；A^{μ} 的空间分量 $\boldsymbol{A}$ 则称之为电磁场的(三维)矢势. 在国际单位制中，电磁场的标势与矢势相差一个因子 $1/c$.

将所得到的 α 的值代入式(3.1.2)中得，在四维矢势为 A^{μ} 的电磁场中运动的带电粒子的作用量为

$$S_{\mathrm{p}}=S_{\mathrm{p\,free}}+S_{\mathrm{int}} \tag{3.1.8}$$

式中

$$S_{\mathrm{int}}=-\int_{a}^{b}eA^{\mu}\mathrm{d}x_{\mu} \tag{3.1.9}$$

相应的拉氏量为

$$L_{\mathrm{p}}=L_{\mathrm{p\,free}}+L_{\mathrm{int}} \tag{3.1.10}$$

式中

$$L_{\mathrm{int}}=-e\phi+e\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v} \tag{3.1.11}$$

值得注意的是：作用量(3.1.8)的被积函数在所谓定域规范变换

$$A'_{\mu}=A_{\mu}-\partial\chi(x)/\partial x^{\mu} \tag{3.1.12}$$

或

$$\phi'=\phi-\partial\chi(x)/\partial t,\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\nabla}\chi(x) \tag{3.1.13}$$

[式中 $\chi(x)$是 x 的标量函数]下仅相差一个全微分：

$$S'_{\mathrm{p}}=-\int_{a}^{b}\left[m_{0}c\mathrm{d}s+eA^{\mu}\mathrm{d}x_{\mu}-e\frac{\partial\chi(x)}{\partial x^{\mu}}\mathrm{d}x^{\mu}\right] \tag{3.1.14}$$

而

$$S'_{\mathrm{p}}-S_{\mathrm{p}}=e\int_{a}^{b}\frac{\partial\chi(x)}{\partial x^{\mu}}\mathrm{d}x^{\mu}=e[\chi(b)-\chi(a)] \tag{3.1.15}$$

仅仅是边界点的函数. 由于在推导运动方程时，边界点保持固定不变，两作用量的差对变分没有贡献，因而粒子的动力学保持不变. 注意，$\chi(x)$仅仅是 t 和 bfx 的函数，而不可能是 $\dot{x}$ 的函数. 这是因为我们可以固定边界点的坐标，但不可能固定运动粒子经过边界点的速度. 且对于速度有关的 χ，被积函数

$$\frac{\partial\chi(x,\dot{x})}{\partial x^{\mu}}\mathrm{d}x^{\mu}$$

与从点 a 到点 b 的路径有关，因而粒子在不同的路径上按不同的运动方程运行. 这种“规范变换”会改变粒子的动力学.

规范变换(3.1.12)可写成下述形式：

$$A'_{\mu}=UA_{\mu}U^{-1}+\mathrm{i}\frac{1}{e}(\partial_{\mu}U)U^{-1} \tag{3.1.16}$$

式中 $U\in\{\exp(\mathrm{i}e\chi)\}$. 集合$\{\exp(\mathrm{i}e\chi)\}$中的任一元素的逆都在该集合中，且其中任意两个元素的积(此处为通常的数的乘积)也是该集合中的元素. 这个集合具

有数学上称之为群的性质，被称为 $U(1)$ 群，而变换(3.1.16)叫做 $U(1)$ 规范变换．若 $U(1)$ 中的元素与四维时空中的位置无关，称 $U(1)$ 为整体(global) $U(1)$ 规范变换群，相应的变换(3.1.16)称为整体规范变换；若 $U(1)$ 中的元素与四维时空中的位置有关，则称 $U(1)$ 为局域 $U(1)$ 规范变换群，相应的变换(3.1.16)称为局域规范变换．值得指出的是，作用量(3.1.8)的自由部分不含表征电磁场的四矢势 A^{μ}，因而该作用量的自由部分与相互作用部分分别具有 $U(1)$ 规范不变性．

3.1.2　带电粒子在电磁场中的运动方程

由带电粒子与电磁场之间的相互作用的作用量(3.1.8)或拉氏量(3.1.10)可求出处于外场中带电粒子的动量 $\boldsymbol{P}$ 与能量 H

$$\begin{cases} H=\boldsymbol{v}\cdot\partial L/\partial\boldsymbol{v}-L=E+e\phi \\ \boldsymbol{P}=\partial L/\partial\boldsymbol{v}=\boldsymbol{p}+e\boldsymbol{A} \end{cases} \tag{3.1.17}$$

式中 $\boldsymbol{p}$ 与 E 表示粒子的机械动量与能量，它们满足质壳关系．于是

$$(H-e\phi)^2/c^2=(\boldsymbol{P}-e\boldsymbol{A})^2+m^2c^2 \tag{3.1.18}$$

用下述代换

$$P^{\mu}=-\partial S/\partial x_{\mu}\text{；或 }H=-\partial S/\partial t,\boldsymbol{P}=\nabla S \tag{3.1.19}$$

便得到电磁场中粒子的 Hamilton－Jacobi 方程

$$(\nabla S-e\boldsymbol{A})^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}+e\phi\right)^2+m^2c^2=0 \tag{3.1.20}$$

由 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{v}}=\nabla L \tag{3.1.21}$$

得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{p}+e\boldsymbol{A})=e\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}-\phi)=e[(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})-\nabla\phi] \tag{3.1.22}$$

此即带电粒子在电磁场中的运动方程

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t=e[\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}]=\boldsymbol{F} \tag{3.1.23}$$

式中

$$\boldsymbol{E}=-(\partial\boldsymbol{A}/\partial t+\nabla\phi),\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{3.1.24}$$

是电磁场的电场强度与磁感强度．方程(3.1.23)右端是电磁场作用于带电粒子上的力 $\boldsymbol{F}$，包括电场力 $e\boldsymbol{E}$ 与磁场力 $e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ 两部分，称为 Lorentz 力．

为了保持方程的协变性，可直接进行四维运算，得到的结果是与相应的三维形式等价的四维协变形式．对粒子运动的轨道变分得

$$\begin{aligned}\delta S_{\text{int}} &= \delta\left[-e\int_a^b A_\mu(x)\mathrm{d}x^\mu\right]\\ &= -e\int_a^b\left[\delta A_\mu(x)\mathrm{d}x^\mu + A_\mu(x)\mathrm{d}\delta x^\mu\right]\\ &= -\left[eA_\mu\delta x^\mu\right]\Big|_a^b - e\int_a^b\left[\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right]\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\delta x^\mu\mathrm{d}\tau\\ &= -\left[eA_\mu\delta x^\mu\right]\Big|_a^b - e\int_a^b F_{\mu\nu}u^\nu\delta x^\mu\mathrm{d}\tau \end{aligned}\tag{3.1.25}$$

式中，$F_{\mu\nu}$是四维电磁场场强张量：

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{3.1.26}$$

由定义式(3.1.24)与(3.1.26)可得

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c\\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y\\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x\\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{3.1.27}$$

由(3.1.25)和粒子自由作用量的变分结果可知

$$\delta S_p = -\left[(mu_\mu + eA_\mu)\delta x^\mu\right]\Big|_a^b + \int_a^b\left[m\frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}\tau} - eF_{\mu\nu}u^\nu\right]\delta x^\mu\mathrm{d}\tau \tag{3.1.28}$$

若取 a，b 为固定点，即$(\delta x^\mu)_a = (\delta x^\mu)_b = 0$，则由最小作用量原理

$$\delta S_p = 0$$

与 δx^μ 的任意性得

$$m\mathrm{d}u_\mu/\mathrm{d}\tau = eF_{\mu\nu}u^\nu \tag{3.1.29}$$

它是带电粒子运动方程(3.1.23)的四维形式，其右端即是四维 Lorentz 力

$$F_\mu = \gamma\begin{pmatrix} N/c\\ \boldsymbol{F}\end{pmatrix} = eF_{\mu\nu}u^\nu \tag{3.1.30}$$

事实上，由式(3.1.27)易知，上式的 i 分量与式(3.1.23)等价，其零分量方程则可化为

$$N \equiv \mathrm{d}\varepsilon/\mathrm{d}t = e\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} \tag{3.1.31}$$

若让 a 点固定，b 点沿真实的运动轨道变化，则式(3.1.28)中第二项为零；记$(\delta x^\mu)_b$ 为 δx^μ，便有

$$\delta S = -(mu_\mu + eA_\mu)\delta x^\mu \tag{3.1.32}$$

由此，我们便得到

$$P^\mu = -\partial S/\partial x_\mu = p^\mu + eA^\mu$$

从而由 $p^2 = m^2c^2$ 得电磁场中粒子的 Hamilton－Jacobi 方程的四维形式为

$$(\partial S/\partial x_\mu + eA^\mu)^2 = m^2c^2 \tag{3.1.33}$$

习题 3－1

1. 试证作用量(3.1.8)在 $U(1)$规范变换

$$A'_\mu = UA_\mu U^{-1} + \mathrm{i}\frac{1}{e}(\partial_\mu U)U^{-1}$$

下不变,式中 $U \in \{\exp(\mathrm{i}e\chi)\}$.

2. 将带电粒子的加速度用它的速度以及电场强度和磁感强度表示出来.

§3.2　电磁场在外源作用下的运动规律

3.2.1　电磁场与源的相互作用量的普遍形式

任何产生电磁场的源都可以看成是由若干运动的带电点粒子所组成的体系,它们与电磁场的相互作用量是式(3.1.1)所示的作用量的和,即

$$S_{\mathrm{int}} = -\sum_{l=1}^{N}\int Q_{(l)}A_\mu(x_{(l)})\mathrm{d}x^\mu_{(l)} \tag{3.2.1}$$

式中 $Q_{(l)}$与 $x_{(l)}$是第 l 个带电粒子的电荷与时空坐标.值得指出的是,此处各带电粒子时间坐标与空间坐标不是相互独立的,它们由粒子的运动轨道联系在一起

定义电荷密度

$$\rho(x) = \sum_l Q_{(l)}\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{(l)}) \tag{3.2.2}$$

与三维电流密度

$$\boldsymbol{j}(x) = \rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \sum_l Q_{(l)}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{(l)}}{\mathrm{d}t}\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{(l)}) \tag{3.2.3}$$

容易证明,它们满足连续性方程

$$\partial\rho/\partial t + \nabla\cdot\boldsymbol{j} = 0 \tag{3.2.4}$$

它意味着带电粒子体系的总电荷守恒:

$$Q = \sum_l Q_{(l)} = \int \mathrm{d}^3x\rho = 常量 \tag{3.2.5}$$

将式(3.2.3)中的三维速度换成相应的四维速度可得电流密度 4－矢量为

$$j^\mu(x) = \sum_{(l)} Q_{(l)}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\delta^3(x - x_{(l)}) = \sum_{(l)}\int c\mathrm{d}\tau Q_{(l)}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\delta^4(x - x_{(l)}) \tag{3.2.6}$$

容易看出

$$j^{\mu}=\begin{pmatrix} c\rho \\ \boldsymbol{j} \end{pmatrix} \tag{3.2.7}$$

且电流密度的连续性方程可写为

$$\partial_{\mu}j^{\mu}=0 \tag{3.2.8}$$

由式(3.2.6),电磁场与源的相互作用量(3.2.1)可改写为

$$\begin{aligned} S_{\text{int}} &= -\frac{1}{c}\int \mathrm{d}^4x \sum_{l=1} A_{\mu}(x_{(l)})Q_{(l)}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}\delta^3(x-x_{(l)}) \\ &= -\frac{1}{c}\int \mathrm{d}^4xA_{\mu}(x)\sum_{l=1} Q_{(l)}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}\delta^3(x-x_{(l)}) \\ &= -\frac{1}{c}\int \mathrm{d}^4xA_{\mu}j^{\mu} \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

式中已利用了粒子的时间坐标与其空间坐标由其运行轨道联系在一起的事实.

值得指出的是:电荷守恒或连续性方程(3.2.8)保证了作用量(3.2.9)的$U(1)$定域规范不变性,反之亦然.事实上,在规范变换(3.1.12)下有

$$\delta S_{\text{int}}=-\frac{1}{c}\int \mathrm{d}^4x\delta(j^{\mu}A_{\mu})=\frac{1}{c}\int \mathrm{d}^4xj^{\mu}\partial_{\mu}\chi \tag{3.2.10}$$

作分部积分,并注意到四维电流密度 j^{μ} 在封闭系外(例如无穷远处)为零,便有

$$\delta S_{\text{int}}=-\frac{1}{c}\int \mathrm{d}^4x\chi(x)\partial_{\mu}j^{\mu} \tag{3.2.11}$$

故由电流的连续性方程可得 $\delta S_{\text{int}}=0$,即 S_{int} 是规范不变的.反之,由于函数 $\chi(x)$可任意选取,从 S_{int} 的规范不变性可直接导致四维电流的连续性方程(即电荷守恒定律).

3.2.2 自由电磁场的作用量

电磁场作为一种物质形态,当源不存在时可以独立存在,这种脱离源而存在的电磁场称为自由电磁场.自由电磁场的作用量 $S_{\text{f free}}$ 应当满足下述条件:

(a) $S_{\text{f free}}$ 只是表征电磁场的量 A^{μ}(可将它视为场的连续坐标)及其一次导数 $\partial_{\mu}A_{\nu}$ 的泛函,且在作用量积分 $S_{\text{f free}}$ 的被积式中每一项所包含的一次导数 $\partial_{\mu}A_{\nu}$ 因子数目不大于 2.事实上,如果其中包含 A^{μ} 的高于一阶的导数,或者包含 $\partial_{\mu}A_{\nu}$ 因子数目大于 2,那么真空中自由场的波动方程将高于二次或成为非线性方程,这至少与至今为止的实验相矛盾.而且从理论上讲,在相互作用能量不太大的情况下所预期的波动方程应当是场 A^{μ} 的二次方程.

(b) $S_{\text{f free}}$ 不显含时-空坐标.因为自由电磁场作为一个整体是一个封闭的系统,即不与外源交换能-动量的系统;而仅当时-空坐标为循环坐标(即隐坐标)时,相应的共轭量即能-动量才守恒.

(c) 自由电磁场的作用量具有 $U(1)$规范不变性,因而应是 $U(1)$规范不变量的泛函.如若不然,将会与电荷守恒定律相矛盾.

可以证明,直至 A^μ 的一阶导数,除开一个常数因子,仅存在唯一的一个二阶张量

$$F^{\mu\nu}=\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu \tag{3.2.12}$$

在 $U(1)$规范变换下不变,这是一个反对称张量,称为电磁场场强张量.

事实上,由 A_μ 与坐标微商算符∂_μ 构成的二阶张量的普遍形式为

$$T_{\mu\nu}=aA_\mu A_\nu+b\partial_\mu A_\nu+c\partial_\nu A_\mu$$

若在定域规范变换(3.1.12)下不变:

$$T'_{\mu\nu}=T_{\mu\nu}-a[A_\mu\partial_\nu\chi+A_\nu\partial_\mu\chi]-(b+c)\partial_\mu\partial_\nu\chi=T_{\mu\nu}$$

则有

$$a=0,\quad b=-c$$

因而

$$T_{\mu\nu}=bF_{\mu\nu}$$

同样可以证明,直至 A^μ 的一阶导数,除开一个常数因子,仅存在唯一的一个二阶赝张量

$$\tilde{F}^{\mu\nu}=\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} \tag{3.2.13}$$

在 $U(1)$规范变换下不变,这个张量称之为电磁场场强张量的对偶张量,其中 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$是四阶全反对称张量.

于是,直至2个一次导数$\partial_\mu A_\nu$ 因子,由电磁场场强张量及其对偶张量所能构造的 Lorentz 不变量只有二个,即

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}=-\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}=-2(E^2/c^2-B^2) \tag{3.2.14}$$

$$\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}=-4\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}/c \tag{3.2.15}$$

其中前者为 Lorentz 标量,后者是 Lorentz 赝标量.

假设电磁场运动规律在空间反演变换下不变(这与迄今为止的实验结果相符合),因而作用量 $S_{\text{f free}}$应是 Lorentz 标量.我们便有

$$S_{\text{f free}}=-\frac{1}{4\mu_0 c}\int \mathrm{d}^4x F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{3.2.16}$$

式中引入了一个常数 μ_0,叫做真空磁导率,其数值取决于电磁场与源的单位的选取.此处我们指出 $\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$可表述为全微分:

$$\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}=\partial_\mu K^\mu \tag{3.2.17}$$

式中

$$K^\mu=\frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_\nu F_{\rho\sigma} \tag{3.2.18}$$

是一个规范有关的完全由 A_μ 构成的流.因而,若在拉氏量中加入与 $\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 成正比的项,并不影响场的运动方程;但在决定场的拓扑结构方面有重要作用.

由电磁场和场内一些带电粒子(源)所组成的整个体系的作用量是各带电粒子的自由作用量、电磁场的自由作用量和各带电粒子与电磁场的相互作用量的总和

$$S = S_{\text{p free}} + S_{\text{f free}} + S_{\text{int}} \tag{3.2.19}$$

式中

$$\begin{cases} S_{\text{p free}} = -\sum_{l=1}^{N} m_{(l)} c \int \mathrm{d}s_{(l)} \\ S_{\text{f free}} = -\dfrac{1}{4\mu_0 c}\int \mathrm{d}^4 x F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ S_{\text{int}} = -\sum_{l=1}^{N}\int Q_{(l)} A_\mu(x_{(l)})\mathrm{d}x^\mu_{(l)} = -\dfrac{1}{c}\int \mathrm{d}^4 x A_\mu j^\mu \end{cases}$$

作为本节的结尾,我们指出:若将 $S_{\text{f free}}$ 改写为

$$S_{\text{p free}} = \frac{1}{4\mu_0 c}\int \mathrm{d}^4 x F_{\mu\nu}[F^{\mu\nu} - 2(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)] \tag{3.2.20}$$

则对 $F_{\mu\nu}$ 的 Lagrange 方程自动导致定义 $F_{\mu\nu}$ 的方程(3.2.12).

3.2.3 在外源作用下电磁场的运动方程

求粒子的运动方程时,场是已知的外界电磁场,仅需变分粒子轨道.求场的运动方程时,带电粒子的运动或分布是已知的外源,则仅需变分场.在后一种情形下,对问题有贡献的作用量是

$$S_{\text{f}} = -\left(\frac{1}{4\mu_0 c}\int \mathrm{d}^4 x F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^4 x A_\mu j^\mu\right) \tag{3.2.21}$$

应用最小作用量原理,并利用 $F^{\mu\nu}$ 的定义式及其反对称性,得

$$\delta S_{\text{f}} = -\frac{1}{c}\int \mathrm{d}^4 x\left(\frac{1}{\mu_0}F_{\mu\nu}\partial^\mu \delta A^\nu + j_\mu \delta A^\mu\right) = 0 \tag{3.2.22}$$

对被积式中的第一项部分积分,并注意到场的变分在积分体积的边界上应为零,得

$$\delta S_{\text{f}} = \frac{1}{\mu_0 c}\int \mathrm{d}^4 x \delta A^\nu(\partial^\mu F_{\mu\nu} - \mu_0 j_\nu) = 0 \tag{3.2.23}$$

它对于场的任意变分 δA^ν 都成立,因而

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \mu_0 j_\nu \tag{3.2.24}$$

此外易证,电磁场场强张量的对偶满足

$$\partial^\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0 \tag{3.2.25}$$

式(3.2.25)与(3.2.24)便是电磁场在外源(即给定的电荷分布与电流分布)作用下的运动方程,它们是 Maxwell 方程组的四维形式.

由式(3.2.25)可知

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^{\mu}F^{\rho\sigma}=0 \tag{3.2.26}$$

将上式两边与 $\varepsilon^{\alpha\nu\beta\gamma}$ 收缩,并利用恒等式

$$\varepsilon^{\alpha\nu\beta\gamma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}=-\det\begin{pmatrix} g^{\alpha}_{\mu} & g^{\alpha}_{\rho} & g^{\alpha}_{\sigma} \\ g^{\beta}_{\mu} & g^{\beta}_{\rho} & g^{\beta}_{\sigma} \\ g^{\gamma}_{\mu} & g^{\gamma}_{\rho} & g^{\gamma}_{\sigma} \end{pmatrix}$$

可知

$$\partial_{\alpha}F_{\beta\gamma}+\partial_{\beta}F_{\gamma\alpha}+\partial_{\gamma}F_{\alpha\beta}=0 \tag{3.2.27}$$

它通常叫做 Jacobi 恒等式.由式(3.1.27)易知,它与下述方程组等价:

$$\begin{cases}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}=0\end{cases}$$

它们是 Maxwell 方程组的齐次方程.

此外,利用式(3.1.27)并由下式

$$\mu_0\varepsilon_0=1/c^2 \tag{3.2.28}$$

定义真空中的介电常量 ε_0,可知式(3.2.24)与下述方程组等价:

$$\begin{cases}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon_0\\ \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}+\mu_0\boldsymbol{j}\end{cases}$$

它们是 Maxwell 方程组的非齐次方程.

于是,我们得到三维形式的(真空中的)Maxwell 方程组的微分形式:

$$\begin{cases}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon_0\\ \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}=0\\ \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}+\mu_0\boldsymbol{j}\end{cases} \tag{3.2.29}$$

应用 Gauss 定理

$$\int_V \mathrm{d}^3x\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}=\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A}$$

和 Stokes 定理

$$\int_S(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\oint_L\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

可将式(3.2.29)改写成积分形式：

$$\begin{cases}\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{E}=Q/\varepsilon_0\\ \oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial}{\partial t}\int_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}\\ \oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}=0\\ \oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{B}=\mu_0\int_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\boldsymbol{j}+\varepsilon_0\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial}{\partial t}\int_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{E}+\mu_0 I\end{cases} \tag{3.2.30}$$

式中

$$Q=\int_V \mathrm{d}^3x\rho,\quad I=\int_S \boldsymbol{j}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \tag{3.2.31}$$

分别是体积 V 内的总电荷和穿过面 S 的总电流. Maxwell 积分方程(3.2.30)第一式是说：封闭曲面 S 的电场强度通量等于 S 中的总电荷(Gauss 定律)；第二式是说：变化的磁通量产生电动势(Faraday 电磁感应定律)；第三式即封闭面的磁通量等于零(磁单极不存在)；第四式即闭合曲线 C 的磁场环量等于以 C 为边界的曲面 S 上的全电流(通常电流与 Maxwell 位移电流 $\varepsilon_0\dot{\boldsymbol{E}}$ 之和)通量.

容易验证，出现在 Maxwell 方程组中的外电荷与电流源满足连续性方程，这是作用量 S_f 具有 $U(1)$规范不变性的必然结果.

有时候需要用到力密度的概念. 若点粒子于 t 时刻位于运行轨道上的点 $\boldsymbol{y}(t)$，而 $F_\mu(t,\boldsymbol{y}(t))$是此时作用在点粒子上的四维力矢量，则相应的四维力密度矢量 $f_\mu(x)$由下式定义：

$$\int \mathrm{d}^3x f_\mu(t,\boldsymbol{x})=F_\mu(t,\boldsymbol{y}(t)) \tag{3.2.32}$$

利用 δ 函数可将 $f_\mu(x)$对 $F_\mu(y)$解出，结果为

$$f_\mu(x)=\int c\mathrm{d}\tau F_\mu(y)\delta^4(x-y(\tau)) \tag{3.2.33}$$

现利用力密度的概念将由方程(3.1.30)决定的 Lorentz 力公式改写成另一在场论中的常用形式. 将式(3.1.30)两边同乘以 $c\delta^4(x-y(\tau))$，并对 τ 积分得 Lorentz 力密度公式：

$$\begin{aligned}f_\mu(x)&=\int c\mathrm{d}\tau eF_{\mu\nu}(y)u^\nu\delta^4(x-y(\tau))\\&=F_{\mu\nu}(x)e\int c\mathrm{d}\tau u^\nu\delta^4(x-y(\tau))=F_{\mu\nu}j^\nu\end{aligned} \tag{3.2.34}$$

利用四维电流密度矢量的分量形式(3.2.7)可将四维 Lorentz 力密度公式写成分量形式即

$$\begin{cases}f_0=\partial\varepsilon/(c\partial t)=\rho\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}/c=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}/c\\ \boldsymbol{f}=\rho\boldsymbol{E}+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}\end{cases} \tag{3.2.35}$$

式中 ε 是荷电粒子的能量密度

$$E_p = \int \varepsilon \mathrm{d}^3 x \tag{3.2.36}$$

式中 E_p 是荷电粒子的能量.

习题 3-2

1. 证明由式(3.2.2)定义的电荷密度与由式(3.2.3)定义的三维电流密度满足连续性方程.
2. 试证:直至 A^μ 的一阶导数,除开一个常数因子,电磁场场强张量的对偶张量是在 $U(1)$规范变换下不变的唯一的一个二阶赝张量.
3. 证明电磁场场强协变张量 $F_{\mu\nu}$ 分量表达式(3.1.27),并导出相应的逆变、混变张量的分量表达式.
4. 求出电磁场场强张量的对偶张量 $\tilde{F}_{\mu\nu}$ 的分量表达式,并证明 $F^{\mu\nu}$ 与 $\tilde{F}_{\mu\nu}$ 在所谓对偶变换

$$\boldsymbol{B} \leftrightarrow -\boldsymbol{E}/c$$

下互变.

5. 证明:$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}$ 与 $B^2 - E^2/c^2$ 在特殊 Lorentz 变换下保持其形式不变.
6. 证明:

$$\tilde{F}_{\mu\lambda}\tilde{F}^{\lambda\nu} = F_{\mu\lambda}F^{\lambda\nu} + \frac{1}{2}g_\mu^\nu F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$$

$$F_{\mu\lambda}\tilde{F}^{\lambda\nu} = g_\mu^\nu \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}$$

7. 验证关于电磁场场强张量的 Jacobi 恒等式与两个齐次的 Maxwell 方程等价.
8. 验证式(3.2.24)与两个非齐次的 Maxwell 方程等价.
9. 试由 Maxwell 方程组的四维形式或三维形式推出电荷守恒定律.
10. 试从 Lorentz 力密度公式导出 Lorentz 力公式.
11. 试由作用量(3.2.20)导出电磁场场强张量 $F_{\mu\nu}$ 的定义式(3.2.12)和真空中的无源 Maxwell 方程.

§3.3 电磁场的能动张量定理

3.3.1 场的正则能动张量

考虑由下述作用量积分

$$S = \int \mathrm{d}^4 x \mathscr{L}(\varphi_r(x), \partial_\mu \varphi_r(x), j_r(x))/c \tag{3.3.1}$$

所描述的在外源 $j_r(x)$作用下的场 $\varphi_r(x)$的任意体系,拉氏密度 $\mathscr{L}$ 是

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_0(\varphi_r(x), \partial_\mu \varphi_r(x)) + \varphi_r(x) j_r(x) \tag{3.3.2}$$

在无穷小时空平移变换

$$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu \tag{3.3.3}$$

下,拉氏密度的变化为

$$\delta\mathscr{L}=\mathscr{L}(x')-\mathscr{L}(x)=\varepsilon^{\mu}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x^{\mu}}$$

$$=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_r(x)}\delta\varphi_r+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_r)}\delta(\partial_\mu\varphi_r)+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial j_r(x)}\delta j_r \tag{3.3.4}$$

式中 $\delta\varphi_r$ 与 δj_r 是由变换(3.3.3)引起的场与源的变化:

$$\begin{cases}\delta\varphi_r=\varphi_r(x')-\varphi_r(x)=\varepsilon^{\mu}\partial\varphi_r/\partial x^{\mu}\\ \delta j_r=j_r(x')-j_r(x)=\varepsilon^{\mu}\partial j_r/\partial x^{\mu}\end{cases} \tag{3.3.5}$$

由拉氏密度的 Lagrange 方程

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_r)}\right)=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_r} \tag{3.3.6}$$

式(3.3.4)可写为

$$\varepsilon^{\mu}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x^{\mu}}=\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_r)}\varepsilon^{\nu}\partial_\nu\varphi_r\right)+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial j_r}\varepsilon^{\mu}\partial_\mu j_r$$

它对于任意的位移 ε^{μ} 都成立,因而得

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}=-\varphi_r\partial j_r/\partial x_\nu \tag{3.3.7}$$

式中已利用了 $\partial\mathscr{L}/\partial j_r=\varphi_r$,而 $T^{\mu\nu}$ 定义为

$$T^{\mu\nu}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_r)}\partial^{\nu}\varphi_r-g^{\mu\nu}\mathscr{L} \tag{3.3.8}$$

此即场的正则能-动量密度张量,简称正则能动张量,而式(3.3.7)便是场的能-动张量定理.

当所有外源 $j_r=0$ 时,正则能-动张量 $T^{\mu\nu}$ 满足守恒流方程

$$\partial_\mu T_0^{\mu\nu}=0,\ T_0^{\mu\nu}=T^{\mu\nu}\big|_{\mathrm{all}\,j_r=0} \tag{3.3.9}$$

而

$$P^{\mu}=\int \mathrm{d}^3x\,T_0^{0\mu}/c \tag{3.3.10}$$

是与时间无关的守恒量,称为场的正则能动 4-矢量;其中

$$H=\int \mathrm{d}^3x\,T_0^{00} \tag{3.3.11}$$

是场的 Hamilton 量或正则能量,而

$$T_0^{00}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial\varphi_r/\partial t)}\frac{\partial\varphi_r}{\partial t}-\mathscr{L}=\mathscr{H} \tag{3.3.12}$$

是场的 Hamilton 量密度或正则能量密度.

3.3.2 电磁场的能动张量

对于与守恒外源 j^{μ} 耦合的电磁场,其拉氏密度为

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-A_\mu j^\mu \tag{3.3.13}$$

按公式(3.3.8),其正则能－动张量为

$$\tilde{T}^{\mu\nu}=\tilde{T}_0^{\mu\nu}+g^{\mu\nu}j\cdot A \tag{3.3.14}$$

式中 $\tilde{T}_0$ 是外源 j 为零时的正则能－动张量:

$$\tilde{T}_0^{\mu\nu}=\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}-F^{\mu\rho}\partial^\nu A_\rho\right) \tag{3.3.15}$$

$\tilde{T}^{\mu\nu}$ 不是规范无关的.事实上,在无穷小 $U(1)$规范变换

$$A'^\mu=A^\mu-\partial^\mu\chi(x)$$

下,$\tilde{T}^{\mu\nu}$ 按下式变换:

$$\tilde{T}'^{\mu\nu}=\tilde{T}^{\mu\nu}-\partial_\rho\left(g^{\mu\nu}j^\rho\chi-\frac{1}{\mu_0}F^{\mu\rho}\partial^\nu\chi\right)+j^\mu\partial^\nu\chi \tag{3.3.16}$$

另外,$\tilde{T}^{\mu\nu}$ 的反对称部分

$$\tilde{T}^{\mu\nu}-\tilde{T}^{\nu\mu}=\frac{1}{\mu_0}(F^{\nu\rho}\partial^\mu A_\rho-F^{\mu\rho}\partial^\nu A_\rho) \tag{3.3.17}$$

不为零.

然而,能－动张量作为可测量的物理量,应当与选取的规范无关(因为作用量与运动方程都与规范无关).为了得到规范无关的能动张量,我们注意到,能－动张量的基本性质是满足守恒流方程(3.3.9);而它本身可加上一个能自动满足守恒流方程的二阶张量(自然,此张量必须由 A_μ 构成)

$$T^{\mu\nu}\equiv\tilde{T}^{\mu\nu}+\partial_\rho t^{\mu\rho\nu},\quad t^{\mu\rho\nu}[A_\mu(x)]=-t^{\rho\mu\nu}[A_\mu(x)] \tag{3.3.18}$$

同样满足守恒流方程(3.3.9),因而也可取为场的能－动张量.我们可选取合适的 $t^{\mu\rho\nu}$ 使得电磁场的能－动张量(至少在 $j=0$ 时)具有 $U(1)$规范不变性.为此目的,利用势场的规范变换性质,可将式(3.3.16)改写为

$$\tilde{T}'^{\mu\nu}+\partial_\rho\left(\frac{1}{\mu_0}F'^{\mu\rho}A'^\nu\right)=\tilde{T}^{\mu\nu}+\partial_\rho\left(\frac{1}{\mu_0}F^{\mu\rho}A^\nu\right)-g^{\mu\nu}j^\rho\partial_\rho\chi+j^\mu\partial^\nu\chi \tag{3.3.19}$$

可见满足我们要求的 $t^{\mu\rho\nu}$ 是

$$t^{\mu\rho\nu}=\frac{1}{\mu_0}F^{\mu\rho}A^\nu \tag{3.3.20}$$

于是,从电磁场正则能－动张量所构成的电磁场的物理的能－动张量为

$$\begin{aligned}T^{\mu\nu}&=\tilde{T}^{\mu\nu}+\partial_\rho\left(\frac{1}{\mu_0}F^{\mu\rho}A^\nu\right)\\&=\frac{1}{\mu_0}\left[g^{\mu\nu}\left(\frac{1}{4}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}+j\cdot A\right)-F^{\mu\rho}\partial^\nu A_\rho+\partial_\rho(F^{\mu\rho}A^\nu)\right]\end{aligned} \tag{3.3.21}$$

利用 Maxwell 方程可将上式化成

$$T^{\mu\nu} = T_0^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}(j\cdot A) - j^{\mu}A^{\nu} \tag{3.3.22}$$

式中

$$T_0^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}\left[\frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} - F^{\nu\rho}F_{\rho}^{\ \mu}\right] \tag{3.3.23}$$

是纯电磁场能－动张量，它是规范无关的、守恒的、对称的无迹张量.

按照式(3.3.7)，我们得到电磁场的能－动张量定理：

$$\partial_{\mu}T^{\mu\nu} = \partial_{\mu}\widetilde{T}^{\mu\nu} = A_{\rho}\partial^{\nu}j^{\rho} \tag{3.3.24}$$

或写成

$$\partial_{\mu}T_0^{\mu\nu} = -F^{\nu\rho}j_{\rho} = -f^{\nu} \tag{3.3.25}$$

式中 f^{ν} 是四维 Lorentz 力密度.

为了得到电磁场的能动张量定理的三维形式，将 $T_0^{\mu\nu}$ 用电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁感强度 $\boldsymbol{B}$ 表出

$$T_0^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} u & cg_x & cg_y & cg_z \\ cg_x & & & \\ cg_y & & \mathscr{T} & \\ cg_z & & & \end{pmatrix} \tag{3.3.26}$$

式中

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{2}\left[\varepsilon_0 E^2 + \dfrac{1}{\mu_0}B^2\right] \\ \boldsymbol{g} = \dfrac{1}{c^2}\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s} = \dfrac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} \\ \mathscr{T} = u\mathscr{I} - \varepsilon_0\boldsymbol{E}\boldsymbol{E} - \dfrac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B} \end{cases} \tag{3.3.27}$$

这里 $\boldsymbol{s}$ 称为 Poynting 矢量.

于是能－动张量定理(3.3.25)可写成三维形式：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{s} + \partial u/\partial t = -\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E} \tag{3.3.28}$$

$$\nabla\cdot\mathscr{T} + \partial\boldsymbol{g}/\partial t = -\boldsymbol{f} \tag{3.3.29}$$

从 Maxwell 方程组与 Lorentz 力公式的三维形式经合理的步骤可直接得到电磁场的能－动张量定理. 由 Maxwell 方程组

$$\begin{cases} \nabla\cdot\boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon_0 \\ \nabla\times\boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla\times\boldsymbol{B} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} + \mu_0\boldsymbol{j} \end{cases}$$

中第二式与第四式得

$$0=-\frac{1}{\mu_0}\left[(\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{B}+\frac{1}{2}\frac{\partial B^2}{\partial t}\right]$$

$$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}=\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{E}-\frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t}$$

两式相加得(为使上面第二式右端的空间微分化为全散度形式)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}&=\frac{1}{\mu_0}[(\nabla\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{E}-(\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{B}]-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)\\&=-\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)\end{aligned}\tag{3.3.30}$$

此即电磁场的能量定理(3.3.28)

由 Maxwell 方程组中第二式与第三式得

$$0=\frac{1}{\mu_0}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}+\varepsilon_0\left(\nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}\right)\times\boldsymbol{E}$$

由 Maxwell 方程组中第一式与第四式得

$$\boldsymbol{f}=\varepsilon_0(\nabla\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{E}+\frac{1}{\mu_0}\left(\nabla\times\boldsymbol{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)\times\boldsymbol{B}$$

两式相加得

$$\boldsymbol{f}=\varepsilon_0[(\nabla\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{E}+(\nabla\times\boldsymbol{E})\times\boldsymbol{E}]+\frac{1}{\mu_0}[(\nabla\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}+(\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}]-\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})\tag{3.3.31}$$

利用恒等式

$$(\nabla\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}+(\nabla\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{a}=\nabla\cdot(\boldsymbol{aa})-\frac{1}{2}\nabla\cdot(a^2\mathscr{I})\tag{3.3.32}$$

可得

$$\begin{cases}(\nabla\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{E}+(\nabla\times\boldsymbol{E})\times\boldsymbol{E}=\nabla\cdot(\boldsymbol{EE})-\dfrac{1}{2}\nabla\cdot(E^2\mathscr{I})\\(\nabla\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}+(\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}=\nabla\cdot(\boldsymbol{BB})-\dfrac{1}{2}\nabla\cdot(B^2\mathscr{I})\end{cases}\tag{3.3.33}$$

将上式代入式(3.3.31)得到电磁场的动量定理(3.3.29).

电磁场的能量定理与动量定理可改写为积分形式:

$$\int_V\mathrm{d}^3x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}=-\oint_S\boldsymbol{s}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\mathrm{d}^3xu\tag{3.3.34}$$

$$\int_V\mathrm{d}^3x\boldsymbol{f}=-\oint_S\mathscr{T}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\mathrm{d}^3x\boldsymbol{g}\tag{3.3.35}$$

其中式(3.3.34)亦称为 Poynting 定理.

注意到电荷与电流仅分布在空间的有限区域,因而在无穷远处电磁场应为

零.故当 V 为整个三维空间区域时,由上式得

$$\begin{cases} \mathrm{d}U_{\mathrm{m}}/\mathrm{d}t = \int_{\text{全空间}} \mathrm{d}^3 x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E} = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\text{全空间}} \mathrm{d}^3 xu \\ \mathrm{d}\boldsymbol{P}_{\mathrm{m}}/\mathrm{d}t = \int_{\text{全空间}} \mathrm{d}^3 x\boldsymbol{f} = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\text{全空间}} \mathrm{d}^3 x\boldsymbol{g} \end{cases} \tag{3.3.36}$$

式中 U_{m} 与 $\boldsymbol{P}_{\mathrm{m}}$ 分别是带电体系的总的机械能与总的机械动量.由能量守恒定律与动量守恒定律可知,$\int \mathrm{d}^3 xu$ 与 $\int \mathrm{d}^3 x\boldsymbol{g}$ 分别是电磁场的总能量与总动量(这正好与体系总的能-动量公式(3.3.10)一致),

由式(3.3.34)与(3.3.35)可知

$$-\oint_S \boldsymbol{s}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_V \mathrm{d}^3 x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \mathrm{d}^3 xu = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(U_{\mathrm{m}} + U_{\mathrm{f}})\big|_V \tag{3.3.37}$$

$$-\oint_S \mathscr{T}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_V \mathrm{d}^3 x\boldsymbol{f} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \mathrm{d}^3 x\boldsymbol{g} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{P}_{\mathrm{m}} + \boldsymbol{P}_{\mathrm{f}})\big|_V \tag{3.3.38}$$

式中 U_{f} 与 $\boldsymbol{P}_{\mathrm{f}}$ 分别是电磁场的总电磁能与总电磁动量.若按照式(3.3.36)的提示,将 u 与 $\boldsymbol{g}$ 分别解释为电磁能量密度与电磁动量密度(矢量).由上式可见

$$\begin{cases} -\oint_S \boldsymbol{s}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = N \\ -\oint_S \mathscr{T}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{F} \end{cases} \tag{3.3.39}$$

式中 N 与 $\boldsymbol{F}$ 分别是每单位时间穿过区域 V 的边界 S 流入 V 内的电磁能量与电磁动量,故 $\boldsymbol{s}$ 与 $\mathscr{T}$ 分别称为电磁能流密度矢量与电磁动量流密度张量;等价地,N 与 $\boldsymbol{F}$ 也可分别解释为体积 V 的界面 S 以外的电磁场对于体积 V 内的场每单位时间所做的功与所施加的作用力,从而 $-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}$ 与 $-\boldsymbol{n}\cdot\mathscr{T}$ 分别表示外法向为 $\boldsymbol{n}$ 的表面 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 以外的场对表面 S 内的场在单位面积上每单位时间所做的功与所施加的作用力(压强).因而 $\mathscr{T}$ 也称为 Maxwell 应力张量或张力张量.

习题 3-3

1. 证明纯电磁场能-动张量是规范无关的、守恒的、对称的无迹张量.
2. 证明恒等式:

$$(\nabla\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{a} + (\nabla\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{a} = \nabla\cdot(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}) - \frac{1}{2}\nabla\cdot(a^2 I)$$

§3.4 电磁场的角动量张量定理

3.4.1 场的正则角动量张量

考虑由式(3.3.1)与(3.3.2)所示的作用量描述的场的任意体系.由于式

(3.3.2)右端第二项即 $\varphi_r(x)j_r(x)$必是一个标量,故场与外源在无穷小 Lorentz 变换

$$x'_\mu = x_\mu + \varepsilon_{\mu\nu}x^\nu \tag{3.4.1}$$

下的变换性质相同,即

$$\begin{cases}\varphi_r(x)\to\varphi'_r(x)=S^{-1}_{rs}(\varepsilon)\varphi_s(x')\\ j_r(x)\to j'_r(x)=S^{-1}_{rs}(\varepsilon)j_s(x')\end{cases} \tag{3.4.2}$$

这里,$\varepsilon_{\mu\nu}$是与时空点无关的无穷小参数.由于 Lorentz 变换不改变四维时空间隔(即 $x'^2=x^2$),$\varepsilon_{\mu\nu}$对于指标 $\mu\nu$ 必然是反对称的.

将 $S^{-1}(\varepsilon)$对无穷小参量 $\varepsilon_{\mu\nu}$展开,可得

$$\delta\varphi_r(x)=S^{-1}_{rs}(\varepsilon)\varphi_s(x')-\varphi_r(x)=\varphi_r(x')-\varphi_r(x)-\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}\sum^{\mu\nu}_{rs}\varphi_s(x)$$

$$=\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}\left[\left(x^\nu\frac{\partial\varphi_r}{\partial x_\mu}-x^\mu\frac{\partial\varphi_r}{\partial x_\nu}\right)-\sum^{\mu\nu}_{rs}\varphi_s(x)\right] \tag{3.4.3}$$

式中$\sum^{\mu\nu}_{rs}$由下式

$$S_{rs}(\varepsilon)=\delta_{rs}+\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}\sum^{\mu\nu}_{rs} \tag{3.4.4}$$

定义.可见$\sum^{\mu\nu}_{rs}$关于其指标 $\mu\nu$ 的对称部分对 $S_{rs}(\varepsilon)$没有贡献,因而可取

$$\sum^{\mu\nu}_{rs}=-\sum^{\nu\mu}_{rs} \tag{3.4.5}$$

同理,对于外源 $j_r(x)$,亦有

$$\delta j_r(x)=\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}\left[\left(x^\nu\frac{\partial j_r}{\partial x_\mu}-x^\mu\frac{\partial j_r}{\partial x_\nu}\right)-\sum^{\mu\nu}_{rs}j_s(x)\right] \tag{3.4.6}$$

由于拉氏密度是一个 Lorentz 标量,它应在变换(3.4.2)下形式不变,即有

$$\mathscr{L}(S^{-1}_{rs}\varphi_s(x'),\frac{\partial}{\partial x^\mu}S^{-1}_{rs}\varphi_s(x'),S^{-1}_{rs}j_s(x'))=\mathscr{L}\left(\varphi_s(x'),\frac{\partial}{\partial x'^\mu}\varphi_s(x'),j_s(x')\right) \tag{3.4.7}$$

这保证了相应的运动方程在变换(3.4.2)下形式不变.

将式(3.4.7)两边在 x 附近展开,利用式(3.4.4),并应用 Lagrange 方程得

$$\mathscr{L}(x')-\mathscr{L}(x)=\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}\left(x^\nu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x_\mu}-x^\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x_\nu}\right)\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_r)}\delta\varphi_r\right)+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial j_r}\delta j_r$$

将式(3.4.3)与(3.4.6)代入上式得到

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\mathscr{M}^{\mu\nu\lambda}=(x^\lambda g^{\mu\nu}-x^\nu g^{\mu\lambda})\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial j_r}\partial_\mu j_r-\sum^{\nu\lambda}_{rs}j_s\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial j_r} \tag{3.4.8}$$

式中

$$\mathscr{M}^{\mu\nu\lambda}=(x^\lambda g^{\mu\nu}-x^\nu g^{\mu\lambda})\mathscr{L}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_r)}\left[\left(x^\nu\frac{\partial}{\partial x_\lambda}-x^\lambda\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)\varphi_r+\sum^{\nu\lambda}_{rs}\varphi_s\right]$$

$$=(x^{\nu}\widetilde{T}^{\mu\lambda}-x^{\lambda}\widetilde{T}^{\mu\nu})+\frac{\partial}{\partial(\partial_{\mu}\varphi_{r})}\sum_{rs}^{\mu\lambda}\varphi_{s} \tag{3.4.9}$$

称为场的正则角动量密度张量，简称正则角动量张量，它对于指标 ν,λ 是反对称的；式(3.4.8)则是场的正则角动量密度张量定理，简称正则角动量张量定理.

当所有外源 $j_r=0$ 时，场的正则角动量密度张量满足守恒流方程：

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\mathcal{M}_{0}^{\mu\nu\lambda}=0,\quad \mathcal{M}_{0}^{\mu\nu\lambda}=\mathcal{M}^{\mu\nu\lambda}\big|_{\text{所有}j_r=0} \tag{3.4.10}$$

守恒的角动量是

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{\nu\lambda}&=\int \mathrm{d}^3x\,\mathcal{M}_{0}^{0\nu\lambda}/c\\&=\int \mathrm{d}^3x\left[(x^{\nu}T_{0}^{0\lambda}-x^{\lambda}T_{0}^{0\nu})+\frac{c\partial\mathcal{L}_{0}}{\partial(\partial\varphi_{r}/\partial t)}\sum_{rs}^{\nu\lambda}\varphi_{s}\right]/c\end{aligned} \tag{3.4.11}$$

式中方括号内的第一项是场的坐标和正则能动张量密度的叉乘，其空间积分称为场的轨道角动量；方括号内的第二项则由场的极化性质(它由 $\sum_{rs}^{\nu\lambda}$ 所表征)决定，其空间积分称为场的自旋角动量.

3.4.2 电磁场的角动量张量

对于由式(3.3.13)所描述的电磁场体系，场 A_{μ} 在 Lorentz 变换(3.4.1)下的变化为

$$A_{\mu}(x)\to A'_{\mu}(x)=A_{\mu}(x')-\varepsilon_{\mu\nu}A^{\nu}(x') \tag{3.4.12}$$

即

$$\delta A_{\mu}=A_{\mu}(x')-A_{\mu}(x)-\varepsilon_{\mu\nu}A^{\nu}(x) \tag{3.4.13}$$

同样亦有

$$\delta j_{\mu}=j_{\mu}(x')-j_{\mu}(x)-\varepsilon_{\mu\nu}j^{\nu}(x) \tag{3.4.14}$$

与式(3.4.3)比较，得

$$\sum_{\mu\nu}^{\rho\sigma}=g_{\mu}^{\rho}g_{\nu}^{\sigma}-g_{\nu}^{\rho}g_{\mu}^{\sigma} \tag{3.4.15}$$

由拉氏密度(3.3.13)与(3.4.15)得

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}A_{\rho})}\sum_{\rho\sigma}^{\mu\nu}A_{\sigma}=\frac{1}{\mu_0}(F^{\nu\mu}A^{\lambda}-F^{\lambda\mu}A^{\nu}) \tag{3.4.16}$$

与

$$-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial j_{r}}\sum_{rs}^{\nu\lambda}j_{s}=A^{\nu}j^{\lambda}-A^{\lambda}j^{\nu} \tag{3.4.17}$$

于是，电磁场的正则角动量密度张量(或简称为电磁场的正则角动量张量)为

$$\widetilde{\mathcal{M}}^{\mu\nu\lambda}=(x^{\nu}\widetilde{T}^{\mu\lambda}-x^{\lambda}\widetilde{T}^{\mu\nu})+\frac{1}{\mu_0}(F^{\nu\mu}A^{\lambda}-F^{\lambda\mu}A^{\nu}) \tag{3.4.18}$$

式中 $\widetilde{T}^{\mu\lambda}$ 是电磁场的正则能动张量，而右端第一项是体系的轨道角动量，第二项

是体系的自旋角动量.相应的正则角动量密度张量定理是

$$\partial_\mu \widetilde{\mathscr{M}}^{\mu\nu\lambda} = (x^\nu g^{\mu\lambda} - x^\lambda g^{\mu\nu}) A_\rho \partial_\mu j^\rho + (A^\nu j^\lambda - A^\lambda j^\nu) \tag{3.4.19}$$

注意到恒等式

$$\frac{1}{\mu_0}(F^{\nu\mu}A^\lambda - F^{\lambda\mu}A^\nu) = -\frac{1}{\mu_0}\partial_\rho[x^\nu F^{\mu\rho}A^\lambda - x^\lambda F^{\mu\rho}A^\nu] + \left[x^\nu \frac{1}{\mu_0}(F^{\mu\rho}A^\lambda) - x^\lambda \frac{1}{\mu_0}(F^{\mu\rho}A^\nu)\right] \tag{3.4.20}$$

右端第一项与∂_μ收缩后消失为零,可将式(3.4.19)写成

$$\partial_\mu \mathscr{M}^{\mu\nu\lambda} = (x^\nu g^{\mu\lambda} - x^\lambda g^{\mu\nu}) A_\rho \partial_\mu j^\rho + (A^\nu j^\lambda - A^\lambda j^\nu) \tag{3.4.21}$$

式中

$$\mathscr{M}^{\mu\nu\lambda} = x^\nu T^{\mu\lambda} - x^\lambda T^{\mu\nu} \tag{3.4.22}$$

是电磁场的角动量密度张量,简称为电磁场角动量张量,而 $T^{\mu\nu}$ 是物理的能动张量.

利用电磁场的能动张量定理(3.3.25)与(3.3.22)知

$$\partial_\mu[x^\nu T_0^{\mu\lambda} - x^\lambda T_0^{\mu\nu}] = (x^\nu g^{\mu\lambda} - x^\lambda g^{\mu\nu}) j^\rho F_{\rho\mu} \tag{3.4.23}$$

于是,式(3.4.21)可写成

$$\partial_\mu \mathscr{M}_0^{\mu\nu\lambda} = x^\lambda f^\nu - x^\nu f^\lambda \tag{3.4.24}$$

这是电磁场的角动量密度张量定理的另一表达形式,亦简称为电磁场角动量张量定理,其中

$$\mathscr{M}_0^{\mu\nu\lambda} = x^\nu T_0^{\mu\lambda} - x^\lambda T_0^{\mu\nu} \tag{3.4.25}$$

是自由电磁场的角动量密度张量,简称为电磁场角动量张量,而 $T_0^{\mu\nu}$ 是自由电磁场的能动张量.

若矩 $x^\lambda f^\nu - x^\nu f^\lambda = 0$,则电磁场的角动量

$$\mathscr{M}^{\nu\lambda} = \int \mathrm{d}^3 x \mathscr{M}_0^{0,\nu,\lambda}/c = \int \mathrm{d}^3 x (x^\nu T_0^{0\lambda} - x^\lambda T_0^{0\nu})/c \tag{3.4.26}$$

守恒.

如指标 ν,λ 只取空间分量,式(3.4.24)便成为

$$\partial_\mu (x^i T_0^{\mu j} - x^j T_0^{\mu i}) = x^j f^i - x^i f^j \tag{3.4.27}$$

由 $T_0^{\mu\nu}$ 的分量表达式(3.3.26)可知,上式即

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{g}) - \nabla\cdot(\boldsymbol{r}\times\mathscr{T}) = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f} \tag{3.4.28}$$

式中 $\mathscr{T}$ 是电磁场动量流密度张量.

如取指标 $\nu=0$,则 λ 只能取空间分量,式(3.4.24)便成为

$$\partial_\mu (x^0 T_0^{\mu i} - x^i T_0^{\mu 0}) = x^i f^0 - x^0 f^i \tag{3.4.29}$$

由 $T_0^{\mu\nu}$ 与 Lorentz 力密度 f^μ 的分量表达式可将上式化为

$$c^2\boldsymbol{g}-\boldsymbol{r}\frac{\partial u}{\partial t}-c^2\nabla\cdot(\boldsymbol{g}\boldsymbol{r})=(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{r} \tag{3.4.30}$$

方程(3.4.28)与(3.4.30)是电磁场的角动量密度张量定理的三维形式.

由电磁场能动张量定理的三维形式(3.3.28)与(3.3.29)可直接得到电磁场角动量密度张量定理的三维形式.将 $\boldsymbol{r}$ 与式(3.3.29)两边作叉乘得

$$-\boldsymbol{r}\times(\nabla\cdot\mathscr{T})-\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}=\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{g}) \tag{3.4.31}$$

它可借助于恒等式

$$-\nabla\cdot(\mathscr{T}\times\boldsymbol{r})=\boldsymbol{r}\times(\nabla\cdot\mathscr{T}) \tag{3.4.32}$$

改写为式(3.4.28):

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{g})-\nabla\cdot(\boldsymbol{r}\times\mathscr{T})=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}$$

将 $\boldsymbol{r}$ 与式(3.3.28)两边作普通乘法得

$$-\boldsymbol{r}(\nabla\cdot\boldsymbol{s})-\frac{\partial u}{\partial t}\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{r} \tag{3.4.33}$$

它可借助于恒等式

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{s}\boldsymbol{r})=(\nabla\cdot\boldsymbol{s})\boldsymbol{r}+\boldsymbol{s} \tag{3.4.34}$$

改写为式(3.4.30):

$$c^2\boldsymbol{g}-\boldsymbol{r}\frac{\partial u}{\partial t}-c^2\nabla\cdot(\boldsymbol{g}\boldsymbol{r})=(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{r}$$

式(3.4.28)的积分形式是

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \mathrm{d}^3x(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{g})-\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot(-\mathscr{T}\times\boldsymbol{r})=\int_V \mathrm{d}^3x(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}) \tag{3.4.35}$$

式中右端是区域 V 中带电体系所受到的 Lorentz 力的力矩(即区域 V 中带电体系的机械角动量 $\boldsymbol{L}_{\mathrm{m}}$ 的变化率),而左端第二项可写成

$$\oint_S \boldsymbol{r}\times[\mathscr{T}\cdot(-\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma})] \tag{3.4.36}$$

它是 V 外电磁场对 V 内场的作用力的矩.

将式(3.4.35)写成

$$\oint_S \boldsymbol{r}\times[\mathscr{T}\cdot(-\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma})]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\boldsymbol{L}_{\mathrm{m}}+\int_V \mathrm{d}^3x(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{g})\right] \tag{3.4.37}$$

可看出,式中右端方括号内第二项是区域 V 中电磁场的角动量 $\boldsymbol{L}_{\mathrm{f}}$.因而,$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{g}$ 是电磁场的角动量密度矢量.

式(3.4.37)也可表述为

$$-\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot(-\mathscr{T}\times\boldsymbol{r})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{L}_{\mathrm{m}}+\boldsymbol{L}_{\mathrm{f}}],\quad \boldsymbol{L}_{\mathrm{f}}=\int_V \mathrm{d}^3x(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{g}) \tag{3.4.38}$$

它说明

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathscr{U}=\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot(-\mathscr{T}\times\boldsymbol{r}) \tag{3.4.39}$$

是穿过区域 V 的边界 S 上的 $\mathrm{d}\sigma$ 面流入 S 内的电磁角动量，故称 $\mathscr{U}=-\mathscr{T}\times\boldsymbol{r}$ 为电磁场角动量流密度张量，简称为电磁场角动量流张量.

式(3.4.30)的积分形式即

$$\int_V \mathrm{d}^3x c^2\boldsymbol{g}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \mathrm{d}^3x\boldsymbol{u}\boldsymbol{r}+\oint_S(\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{g})\boldsymbol{r}=\int_V \mathrm{d}^3x(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{r} \tag{3.4.40}$$

上式右端是

$$\int_V \mathrm{d}^3x\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\boldsymbol{r}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \mathrm{d}^3x\varepsilon\boldsymbol{r}-\int_V \mathrm{d}^3x\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial t} \tag{3.4.41}$$

而粒子体系的能量密度 ε 可用粒子能量 $E^{(l)}$ 表示：

$$\varepsilon=\sum_l E^{(l)}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_{(l)}) \tag{3.4.42}$$

因之

$$\int_V \mathrm{d}^3x\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial t}=\sum_l E^{(l)}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{(l)}}{\mathrm{d}t}=c^2\sum_l\boldsymbol{p}^{(l)} \tag{3.4.43}$$

上式中应用了下述关系式：

$$\boldsymbol{p}=E\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{c^2\mathrm{d}t}$$

它对于一切具有静能 E_0 点粒子均适用(即使它与其他物体处于相互作用之中).事实上，取两个惯性系 S 与 S′，S′系是粒子的固有参考系，它相对于 S 系以速度 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$ 运动，且四维能动量在 S 与 S′系中的表达式分别为 $(E/c,0,0,p)$ 与 $(E_0/c,0,0,0)$.按特殊 Lorentz 变换公式知

$$E=\gamma E_0,\quad \boldsymbol{p}=\gamma E_0\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{c^2\mathrm{d}t} \tag{3.4.44}$$

故所述关系式成立.

由式(3.4.41)与(3.4.43)知式(3.4.40)可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \mathrm{d}^3x(u+\varepsilon)\boldsymbol{r}=\int_V \mathrm{d}^3xc^2\boldsymbol{g}+\sum_l c^2\boldsymbol{p}^{(l)}+\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot c^2\boldsymbol{g}\boldsymbol{r} \tag{3.4.45}$$

若 V 为全空间，则

$$\oint_{\text{全空间}}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}c^2\boldsymbol{g}$$

消失为零；于是由式(3.4.45)知

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}_G}{\mathrm{d}t}=c^2\boldsymbol{P}/W=\text{常量} \tag{3.4.46}$$

式中

$$\begin{cases} \boldsymbol{R}_G = \int_{全空间} \mathrm{d}^3 x(u+\varepsilon)\boldsymbol{r}/W \\ W = \int_{全空间} \mathrm{d}^3 x(u+\varepsilon) \\ \boldsymbol{P} = \int_{全空间} \mathrm{d}^3 x\boldsymbol{g} + \sum_l p^{(l)} \end{cases} \tag{3.4.47}$$

分别是电磁场和场中所有带电粒子形成的整个体系的惯性中心 G 的矢径、总能量与总动量.可见,这个封闭的孤立系的惯性中心 G 的速度与体系的总动量成正比,与体系的总能量成反比,因而是一个常量.这正是所预期的惯性中心定理.值得指出的是,通常的惯性中心定理是在不考虑相应的场的存在的条件下对粒子体系给出的;此处将这一结果推广至粒子与场都可能存在时的一般情形.

式(3.4.46)还可以写成

$$\boldsymbol{P} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{全空间} \mathrm{d}^3 x \frac{u+\varepsilon}{c^2}\boldsymbol{r} \tag{3.4.48}$$

可见上式右端正好是整个封闭系统的总动量.

习题 3-4

1. 证明恒等式 $-\nabla\cdot(\mathscr{T}\times\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}\times(\nabla\cdot\mathscr{T})$,式中 $\mathscr{T}$ 是二阶对称张量.
2. 在无穷小规范变换下,电磁场的正则角动量密度张量(3.4.18)如何变换?

§3.5 介质中的 Maxwell 方程组

3.5.1 介质中电荷的运动规律

暂假定介质静止不动.所有介质都是由带正、负电荷的粒子组成的.介质的存在相当于在真空中给出了大量的处于束缚状态的带电粒子的某种分布.尚需研究的是构成介质的电荷在电磁场作用下的运动形态及其所满足的普遍规律.

一、介质的极化

极化机制

在无外界电磁场时,某些介质的分子的正、负电荷中心重合,不具有分子电偶极矩;另一些介质的分子的正、负电荷中心不重合,具有固有的分子电偶极矩,但热运动使这些分子电偶极矩取向杂乱无章,从而宏观小体积元 ΔV 内的平均电偶极矩为零.在外电场作用下,前一类介质分子的正、负电荷中心发生相对位移,后一类介质的分子电偶极矩按一定方向作有序排列,因而出现宏观的电偶极矩分布,这种现象称为介质的极化.

极化强度

由于介质极化而产生的宏观电偶极矩分布由极化强度(简称极化矢量)

$$\boldsymbol{P}(x)=\sum_i \boldsymbol{p}_i/\Delta V \tag{3.5.1}$$

描述,式中 ΔV 是在点 x 处的一个宏观上的微小体积元,$\boldsymbol{p}_i$ 是 ΔV 内第 i 个分子的电偶极矩.

极化电荷

由于介质极化,正、负电荷可能不会处处完全抵消,于是介质中各部分便会因极化出现宏观电荷,常称为极化电荷或束缚电荷(以与自由电荷相区别).由于分子是电中性的,故体积 V 中的极化电荷是在极化时由 V 外通过 V 的边界面移入的.若极化时正、负电荷的相对位移为 $\boldsymbol{l}$;那么,通过 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 面跑出去的正电荷数目为 $n\boldsymbol{l}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$,这里 n 是介质单位体积内的分子数.因此从 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 面跑出去的电荷为

$$-\mathrm{d}Q_{\mathrm{p}}=en\boldsymbol{l}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$$

式中已利用了对于此微体积元 ΔV 的结果:

$$\boldsymbol{P}(x)=\frac{Ne\boldsymbol{l}}{\Delta V}=ne\boldsymbol{l}$$

换言之,通过面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 因极化而移入的电荷是 $\mathrm{d}Q_{\mathrm{p}}=-\boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$(见图 3.1).

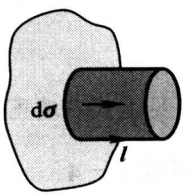


图 3.1　极化电荷

于是,极化后区域 V 中总的极化电荷是

$$Q_{\mathrm{p}}=-\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{P} \tag{3.5.2}$$

式中 S 是 V 的边界面,且以 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 的外法向为面元的正方向.式中

$$Q_{\mathrm{p}}=\int_V \mathrm{d}^3x\rho_{\mathrm{p}} \tag{3.5.3}$$

其中 ρ_{p} 是极化电荷密度.(3.5.2)右端的面积分可利用 Gauss 定理改写为体积分,故有

$$\int_V \mathrm{d}^3x\rho_{\mathrm{p}}=-\int_V \mathrm{d}^3x\,\nabla\cdot\boldsymbol{P} \tag{3.5.4}$$

上式对任意空间体积都成立,因而得到极化电荷体密度

$$\rho_{\mathrm{p}}=-\nabla\cdot\boldsymbol{P} \tag{3.5.5}$$

和在介质分界面上的极化电荷面密度

$$\sigma_{\mathrm{p}}=\boldsymbol{n}_{12}\cdot(\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_2) \tag{3.5.6}$$

式中 $\boldsymbol{n}_{12}$ 是分界面上由介质 1 指向介质 2 的法线方向.

极化电流

当介质中的极化强度 $\boldsymbol{P}$ 随时间变化时,因极化通过面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 的电荷 $-\mathrm{d}Q_{\mathrm{p}}=\boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 亦将随之变化,这相当于有电流流过此截面,这种电流称为极化电流.通过 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 的极化电流强度 $\mathrm{d}I_{\mathrm{p}}$ 为

$$dI_p \equiv \boldsymbol{j}_p \cdot d\boldsymbol{\sigma} = -\frac{\partial dQ_p}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

由 $d\boldsymbol{\sigma}$ 的任意性即得极化电流密度 $\boldsymbol{j}_p$ 为

$$\boldsymbol{j}_p = \partial \boldsymbol{P} / \partial t \tag{3.5.7}$$

其积分形式是

$$I_p = \int_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} \tag{3.5.8}$$

由式(3.5.5)与(3.5.7)可知极化电荷与极化电流满足连续性方程：

$$\partial \rho_p / \partial t + \nabla \cdot \boldsymbol{j}_p = 0 \tag{3.5.9}$$

二、介质的磁化

磁化机制

原子中电子不停地绕原子核运转，电子本身还具有自旋. 这些都形成局限于分子范围内的环形电流，统称分子环流，相应的磁偶极矩称为分子磁偶极矩. 没有外磁场时，这些分子磁偶极矩因为热运动而随机取向，因而相互抵消. 有外磁场时，这些分子磁偶极矩将按外磁场方向作有序排列，因而出现宏观的磁偶极矩分布，这种现象称为介质的磁化.

磁化强度

因介质磁化而产生的宏观磁偶极矩分布由磁化强度矢量(简称磁化矢量)

$$\boldsymbol{M}(x) = \sum_i \boldsymbol{m}_i / \Delta v \tag{3.5.10}$$

描述，式中 $\boldsymbol{m}_i$ 是在点 x 处的一个宏观小体积元 Δv 内第 i 个分子的磁偶极矩.

磁化电流

介质磁化引起的电流称为磁化电流. 设在任一宏观小体积内所有分子电流都具有相同的磁偶极矩 $\boldsymbol{m}$. 如计算穿过 Σ 面的总磁化电流强度 I_m，则仅围绕 Σ 面的边界闭合曲线 L 的分子电流对 I_m 有贡献；那些不被曲线 L 穿过的分子电流或者不穿过 Σ 面，或者穿过 Σ 面来回两次，故对穿过 Σ 面的总电流没有贡献. 任取边界线 L 上的一个线元 dl，并设分子电流圈的面积为 $\boldsymbol{a}$(见图 3.2).

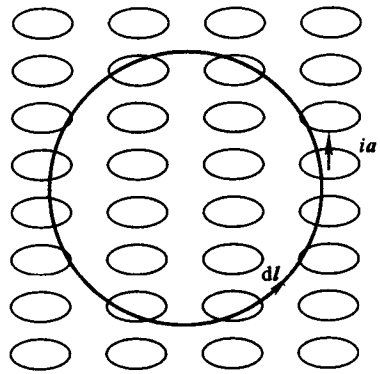


图 3.2 磁化电流

若分子中心位于由线元 dl 和与该线元垂直的分子环流面元 $\boldsymbol{a}$ 所张成的体积为 $\boldsymbol{a} \cdot dl$ 的柱体内，那么分子电流就被 L 穿过. 因此，若单位体积分子数为 n，每个分子电流强度为 i，那么磁化电流强度为

$$I_m = \oint_L nia \cdot dl = \oint_L nm \cdot dl \tag{3.5.11}$$

对于体积为 $a \cdot dl$ 的柱体，由(3.5.10)得

$$M(x) = \frac{Nm}{\Delta V} = nm \tag{3.5.12}$$

因而，(3.5.11)成为

$$I_m = \oint_L dl \cdot M \tag{3.5.13}$$

其微分形式是

$$j_m = \nabla \times M \tag{3.5.14}$$

式中 j_m 是磁化电流密度，即有

$$I_m = \int_\Sigma d\sigma \cdot j_m \tag{3.5.15}$$

由式(3.5.14)可知

$$\nabla \cdot j_m = 0 \tag{3.5.16}$$

因而磁化电流不会引起电荷的积累，即磁化电流是无源的，换言之，介质中的磁化电荷密度 ρ_m 处处为零.

总起来，介质内部由于极化与磁化而产生的诱导电荷密度 $\rho_i = \rho_p$ 与诱导电流密度 j_i 分别为

$$j_i = \partial P / \partial t + \nabla \times M \tag{3.5.17}$$

其积分形式是

$$I_i = \int_\Sigma d\sigma \cdot \frac{\partial P}{\partial t} + \oint_L dl \cdot M \tag{3.5.18}$$

式中 I_i 是通过介质内任意一截面 Σ 的诱导电流强度，L 是 Σ 的边界.

由式(3.5.18)可证明：在介质分界面上，面诱导电流密度与面磁化电流密度为

$$\Pi_i = \Pi_m = -n_{12} \times (M_1 - M_2) \tag{3.5.19}$$

证明：在介质分界面上取一个与该面垂直的面元 $d\sigma$，其边界 L 是由 $m dl$ 与 $n_{12}\delta$ 张成的平行四边形，且方向矢量 m 与分界面平行，n_{12} 则是分界面上由介质 1 指向介质 2 的法向(见图 3.3). 由式(3.5.18)知

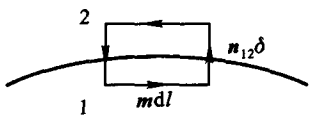


图 3.3　与介质分界面垂直的小平行四边形

$$\boldsymbol{j}_i \cdot (\mathrm{d}\boldsymbol{l}\boldsymbol{m} \times \delta \boldsymbol{n}_{12}) = (\boldsymbol{M}_1 - \boldsymbol{M}_2) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}\boldsymbol{m} + \frac{\partial (\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2)}{2\partial t} \cdot (\mathrm{d}\boldsymbol{l}\boldsymbol{m} \times \delta \boldsymbol{n}_{12})$$

令 $\delta \to 0$,便有

$$(\boldsymbol{n}_{12} \times \boldsymbol{\Pi}_i) \cdot \boldsymbol{m} = (\boldsymbol{M}_1 - \boldsymbol{M}_2) \cdot \boldsymbol{m}, \quad \boldsymbol{\Pi}_i = \lim_{\delta \to 0} \boldsymbol{j}_i \delta$$

因 $\boldsymbol{m}$ 的方向任意,故

$$\boldsymbol{n}_{12} \times \boldsymbol{\Pi}_i = (\boldsymbol{M}_1 - \boldsymbol{M}_2)_{/\!/}$$

式中下标表示与面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 平行的分量.由于面电荷电流密度的方向必沿介质分界面,因而

$$\boldsymbol{n}_{12} \cdot \boldsymbol{\Pi}_i = 0$$

于是

$$-\boldsymbol{n}_{12} \times (\boldsymbol{M}_1 - \boldsymbol{M}_2) = -\boldsymbol{n}_{12} \times (\boldsymbol{M}_1 - \boldsymbol{M}_2)_{/\!/} = (\boldsymbol{n}_{12} \times \boldsymbol{\Pi}_i) \times \boldsymbol{n}_{12} = \boldsymbol{\Pi}_i$$

由于 $\boldsymbol{\Pi}_i$ 仅与磁化强度有关,故 $\boldsymbol{\Pi}_m = \boldsymbol{\Pi}_i$.

三、介质中自由电荷的传导

若介质是导电的,则自由电子或离子会在电磁场的作用下运动而引起传导电流.介质中总的电荷密度与总的电流密度为

$$\begin{cases} \rho = \rho_f + \rho_i = \rho_f - \nabla \cdot \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_f + \boldsymbol{j}_i = \boldsymbol{j}_f + \dfrac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} + \nabla \times \boldsymbol{M} \end{cases} \tag{3.5.20}$$

式中 ρ_f 与 $\boldsymbol{j}_f$ 表示传导电荷密度与传导电流密度.由上式得

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j}_f = 0 \tag{3.5.21}$$

其积分形式是

$$\int_V \mathrm{d}^3 x \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{j}_f = 0 \tag{3.5.22}$$

故介质中的自由电荷守恒.

由上式可证明,在介质分界面上,面传导电荷密度 ω_f 与面传导电流密度 $\boldsymbol{\Pi}_f$ 满足

$$\partial \omega_f / \partial t + \nabla \cdot \boldsymbol{\Pi}_f + \boldsymbol{n}_{12} \cdot (\boldsymbol{j}_{2f} - \boldsymbol{j}_{1f}) = 0 \tag{3.5.23}$$

式中

$$\boldsymbol{\Pi}_f = \lim_{\delta \to 0} \boldsymbol{j}_f \delta$$

值得指出的是,若 $\boldsymbol{j}_f$ 有限,则 $\boldsymbol{\Pi}_f = 0$;仅当 $\boldsymbol{j}_f$ 为无限大时,才有 $\boldsymbol{\Pi}_f \neq 0$.

3.5.2 静止介质中的 Maxwell 方程组

由介质中的电荷与电流分布规律(3.5.20)可知,介质中的 Maxwell 方程组为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{E} = (\rho_{\mathrm{f}} - \nabla \cdot \boldsymbol{P})/\varepsilon_0 \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{B} = \dfrac{\partial}{c^2 \partial t}\boldsymbol{E} + \mu_0 \left(\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}} + \dfrac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{P} + \nabla \times \boldsymbol{M} \right) \end{cases} \tag{3.5.24}$$

引入电位移矢量(或称为电感矢量)$\boldsymbol{D}$ 及磁场强度 $\boldsymbol{H}$:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}, \quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}/\mu_0 - \boldsymbol{M} \tag{3.5.25}$$

则式(3.5.24)可化为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_{\mathrm{f}} \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = \dfrac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{D} + \boldsymbol{j}_{\mathrm{f}} \end{cases} \tag{3.5.26}$$

此即通常形式下介质中的 Maxwell 方程组.其积分形式为

$$\begin{cases} \oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{D} = Q_{\mathrm{f}} \\ \oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\int_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{B} \\ \oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ \oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{H} = \dfrac{\partial}{\partial t}\int_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{D} + I_{\mathrm{f}} \end{cases} \tag{3.5.27}$$

式中

$$Q_{\mathrm{f}} = \int_V \mathrm{d}^3 x \rho_{\mathrm{f}}, \quad I_{\mathrm{f}} = \int_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{j}_{\mathrm{f}} \tag{3.5.28}$$

在介质分界面上,Maxwell 方程组的积分形式(3.5.27)仍然成立,由此可推出该方程组在介质分界面上的等价表示——边值关系:

$$\begin{cases} \boldsymbol{n}_{12} \cdot (\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1) = \omega_{\mathrm{f}} \\ \boldsymbol{n}_{12} \times (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) = 0 \\ \boldsymbol{n}_{12} \cdot (\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1) = 0 \\ \boldsymbol{n}_{12} \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) = \boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{f}} \end{cases} \tag{3.5.29}$$

可见,在交界面两侧,电场强度的切向分量与磁感应场强度的法向分量都是连续的.

证明:在介质分界面上作一个底为 $\sigma \boldsymbol{n}_{12}$ 高为 $\varepsilon \boldsymbol{n}_{12}$ 的小扁平盒(见图 3.4).

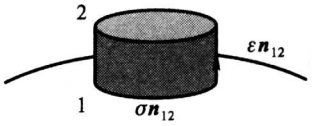


图 3.4 介质分界面上的小扁平盒

应用(3.5.27)中的第一式得

$$\boldsymbol{n}_{12}\sigma\cdot(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)+\oint_L(\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\varepsilon\boldsymbol{n}_{12})\cdot\frac{\boldsymbol{D}_1+\boldsymbol{D}_2}{2}=\rho_{\mathrm{f}}\varepsilon\sigma$$

式中 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\varepsilon\boldsymbol{n}_{12}$ 是图 3.4 中所示的小扁平盒的侧面的面元(面元的法向朝外).令 $\varepsilon\to 0$,并记

$$\omega_{\mathrm{f}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\rho_{\mathrm{f}}\varepsilon$$

即可导出(3.5.29)第一式.

在介质分界面上取一个与该面垂直的面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$,其边界 L 是由 $\boldsymbol{m}\mathrm{d}l$ 与 $\boldsymbol{n}_{12}\delta$ 张成的平行四边形,且方向矢量 $\boldsymbol{m}$ 与分界面平行,而 $\boldsymbol{n}_{12}$ 是分界面的由介质 1 指向介质 2 的法向(见图 3.3).对上述平行四边形回路应用(3.5.27)中第四式得

$$\mathrm{d}l\boldsymbol{m}\cdot(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\boldsymbol{D}_1}{\partial t}+\frac{\partial\boldsymbol{D}_2}{\partial t}\right)\cdot(\mathrm{d}l\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}_{12}\delta)+\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}\cdot(\mathrm{d}l\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}_{12}\delta)$$

令 $\delta\to 0$,记 $\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{f}}=\lim\limits_{\delta\to 0}\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}\delta$ 并利用恒等式

$$\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}\cdot(\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}_{12})=(\boldsymbol{n}_{12}\times\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}})\cdot\boldsymbol{m}$$

可得

$$\boldsymbol{m}\cdot(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)=\boldsymbol{m}\cdot(\boldsymbol{n}_{12}\times\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{f}})$$

由于 $\boldsymbol{m}$ 在界面上,且方向任意,故

$$(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)_t=\boldsymbol{n}_{12}\times\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{f}}$$

式中下标 t 表示该矢量沿界面切向.于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}_{12}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)&=\boldsymbol{n}_{12}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)_t=\boldsymbol{n}_{12}\times(\boldsymbol{n}_{12}\times\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{f}})\\&=-\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{f}}+\boldsymbol{n}_{12}(\boldsymbol{n}_{12}\cdot\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{f}})\end{aligned}$$

注意到 $\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{f}}$ 的方向与界面相切,即有 $\boldsymbol{n}_{12}\cdot\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{f}}=0$,便得到(3.5.29)中第四式.

Maxwell 方程组(3.5.26)可按下述方式更严格地导出.关键性的想法是:宏观量(电磁场、电流等)是相应的微观量对时间与空间(在宏观上很小、微观上很大的范围内)的平均,即

$$\omega=\langle\omega_{\mathrm{m}}\rangle=\int_{\Delta V}\frac{\mathrm{d}^3x'}{\Delta V}\int_{\Delta T}\frac{\mathrm{d}t'}{\Delta T}\omega_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}',t+t')\qquad(3.5.30)$$

式中具有下标 m 的量是所谓微观量，而 ΔV 与 ΔT 是以 $\boldsymbol{r}$ 和 t 为中心的宏观小而微观大的体积与时间间隔. 由此易知

$$\partial_\mu \omega = \partial_\mu \langle \omega_{\mathrm{m}} \rangle = \langle \partial_\mu \omega_{\mathrm{m}} \rangle \tag{3.5.31}$$

微观电磁场服从真空中的 Maxwell 方程组：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{E}_{\mathrm{m}} = \rho_{\mathrm{m}} / \varepsilon_0 \\ \nabla \times \boldsymbol{E}_{\mathrm{m}} = -\dfrac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{B}_{\mathrm{m}} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B}_{\mathrm{m}} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{B}_{\mathrm{m}} = \dfrac{\partial}{c^2 \partial t} \boldsymbol{E}_{\mathrm{m}} + \mu_0 \boldsymbol{j}_{\mathrm{m}} \end{cases} \tag{3.5.32}$$

将上述方程按式(3.5.30)进行平均得

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \nabla \cdot \langle \boldsymbol{E}_{\mathrm{m}} \rangle = \langle \rho_{\mathrm{m}} \rangle / \varepsilon_0 \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = \nabla \times \langle \boldsymbol{E}_{\mathrm{m}} \rangle = -\dfrac{\partial}{\partial t} \langle \boldsymbol{B}_{\mathrm{m}} \rangle = -\dfrac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{B} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = \nabla \cdot \langle \boldsymbol{B}_{\mathrm{m}} \rangle = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{B} = \nabla \times \langle \boldsymbol{B}_{\mathrm{m}} \rangle = \dfrac{\partial}{c^2 \partial t} \langle \boldsymbol{E}_{\mathrm{m}} \rangle + \mu_0 \langle \boldsymbol{j}_{\mathrm{m}} \rangle = \dfrac{\partial}{c^2 \partial t} \boldsymbol{E} + \mu_0 \langle \boldsymbol{j}_{\mathrm{m}} \rangle \end{cases} \tag{3.5.33}$$

现在计算 $\langle \rho_{\mathrm{m}} \rangle$ 与 $\langle \boldsymbol{j}_{\mathrm{m}} \rangle$. 设 q_i^α、$\boldsymbol{R}_i^\alpha$ 与 $\boldsymbol{V}_i^\alpha$ 分别表示介质中第 α 个分子内第 i 个带电粒子的电荷、坐标与速度，则

$$\begin{cases} \rho_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}) = \sum_{\alpha,i} q_i^\alpha \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}_i^\alpha) + \rho_{\mathrm{f}} \\ \boldsymbol{j}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}) = \sum_{\alpha,i} q_i^\alpha \boldsymbol{V}_i^\alpha \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}_i^\alpha) + \boldsymbol{j}_{\mathrm{f}} \end{cases} \tag{3.5.34}$$

令第 α 个分子的质心坐标为 $\boldsymbol{R}^\alpha$，第 α 个分子内第 i 个带电粒子相对于该质心的相对坐标为 $\boldsymbol{r}_i^\alpha = \boldsymbol{R}_i^\alpha - \boldsymbol{R}^\alpha$，则

$$\boldsymbol{V}_i^\alpha = \boldsymbol{v}^\alpha + \boldsymbol{v}_i^\alpha + \cdots \tag{3.5.35}$$

式中 $\boldsymbol{v}^\alpha$ 是第 α 个分子的质心速度，$\boldsymbol{v}_i^\alpha$ 是第 α 个分子内第 i 个带电粒子相对于第 α 个分子质心的速度，而“…”表示相对论修正. 依 Taylor 展开得

$$\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}_i^\alpha) = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}^\alpha - \boldsymbol{r}_i^\alpha) = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}^\alpha) - \boldsymbol{r}_i^\alpha \cdot \nabla_r \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}^\alpha) + \cdots \tag{3.5.36}$$

于是

$$\begin{cases} \rho_{\mathrm{m}} = \rho_{\mathrm{f}} + \sum_{\alpha,i} q_i^\alpha \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}_i^\alpha) - \sum_{\alpha,i} q_i^\alpha \boldsymbol{r}_i^\alpha \cdot \nabla_r \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}^\alpha) + \\ \qquad \dfrac{1}{2} \sum_{\alpha,i} q_i^\alpha \boldsymbol{r}_i^\alpha \boldsymbol{r}_i^\alpha : \nabla_r \nabla_r \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}^\alpha) + \cdots \\ \boldsymbol{j}_{\mathrm{m}} = \boldsymbol{j}_{\mathrm{f}} + \sum_{\alpha,i} \{ q_i^\alpha \boldsymbol{v}_i^\alpha \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}^\alpha) - q_i^\alpha \boldsymbol{v}_i^\alpha \boldsymbol{r}_i^\alpha \cdot \nabla_r \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}^\alpha) + \cdots \} + \\ \qquad \sum_{\alpha,i} \boldsymbol{v}^\alpha \{ q_i^\alpha \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}^\alpha) - q_i^\alpha \boldsymbol{r}_i^\alpha \cdot \nabla_r \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}^\alpha) + \\ \qquad \dfrac{1}{2} q_i^\alpha \boldsymbol{r}_i^\alpha \boldsymbol{r}_i^\alpha : \nabla_r \nabla_r \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}^\alpha) + \cdots \} \end{cases} \tag{3.5.37}$$

式中"…"表示与速度二次方成正比的高阶项.令

$$\begin{cases} q^a = \sum_i q_i^a, \quad q_m = \sum_a q^a \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}^a) \\ \boldsymbol{P}_m^a = \sum_i q_i^a \boldsymbol{r}_i^a, \quad \boldsymbol{P}_m = \sum_a \boldsymbol{P}_m^a \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}^a) \\ \mathscr{D}_m^a = 3\sum_i q_i^a \boldsymbol{r}_i^a \boldsymbol{r}_i^a, \quad \mathscr{D}_m = \sum_a \mathscr{D}_m^a \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}^a) \\ \boldsymbol{i}_m = \sum_a q^a \boldsymbol{v}^a \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}^a), \boldsymbol{M}_m = \frac{1}{2}\sum_{a,i} q_i^a (\boldsymbol{r}_i^a \times \boldsymbol{v}_i^a)\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}^a) \\ \boldsymbol{N}_m = \sum_a (\boldsymbol{P}_m^a \times \boldsymbol{v}^a + \boldsymbol{v}^a \times \frac{1}{6}\mathscr{D}_m^a \cdot \nabla_r)\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}^a) \end{cases} \tag{3.5.38}$$

由此可知

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{P}_m = \sum_a \left[\dfrac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{P}_m^a - \boldsymbol{P}_m^a(\boldsymbol{v}^a \cdot \nabla_r)\right]\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}^a) \\ \nabla_r \times \sum_a (\boldsymbol{P}_m^a \times \boldsymbol{v}^a)\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}^a) \\ \quad = \sum_a [\boldsymbol{P}_m^a(\boldsymbol{v}^a \cdot \nabla_r) - \boldsymbol{v}^a(\boldsymbol{P}_m^a \cdot \nabla_r)]\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}^a) \\ \nabla_r \times \boldsymbol{M}_m = -\sum_{a,i} \boldsymbol{v}_i^a q_i^a \boldsymbol{r}_i^a \cdot \nabla_r \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}^a) + \\ \quad \dfrac{1}{6}\sum_a \dfrac{\partial}{\partial t}(\mathscr{D}_m^a \cdot \nabla_r)\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}^a) - \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(\nabla_r \cdot \mathscr{D}_m) - \sum_a (\boldsymbol{v}^a \times \mathscr{D}_m^a \cdot \nabla_r) \times \nabla_r \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}^a) \\ \quad = \sum_a \boldsymbol{v}^a (\mathscr{D}^a : \nabla_r \nabla_r)\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}^a) - \sum_a \dfrac{\partial}{\partial t}(\mathscr{D}_m^a \cdot \nabla_r)\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}^a) \end{cases} \tag{3.5.39}$$

于是

$$\begin{cases} \rho_m = \rho_f + q_m - \nabla_r \cdot \boldsymbol{P}_m + \dfrac{1}{6}\nabla_r \nabla_r : \mathscr{D}_m + \cdots \\ \boldsymbol{j}_m = \boldsymbol{j}_f + \boldsymbol{i}_m + \dfrac{\partial}{\partial t}[\boldsymbol{P}_m - \dfrac{1}{6}\nabla_r \cdot \mathscr{D}_m] + \\ \quad \nabla_r \times \boldsymbol{M}_m + \nabla_r \times \boldsymbol{N}_m + \cdots \end{cases} \tag{3.5.40}$$

对上式按式(3.5.30)取平均得

$$\begin{cases} \langle \rho_m \rangle = \rho_f + \langle q_m \rangle - \nabla_r \cdot \langle \boldsymbol{P}_m \rangle + \dfrac{1}{6}\nabla_r \nabla_r : \langle \mathscr{D}_m \rangle + \cdots \\ \langle \boldsymbol{j}_m \rangle = \boldsymbol{j}_f + \langle \boldsymbol{i}_m \rangle + \dfrac{\partial}{\partial t}\left[\langle \boldsymbol{P}_m \rangle - \dfrac{1}{6}\nabla_r \cdot \langle \mathscr{D}_m \rangle\right] + \\ \quad \nabla_r \times [\langle \boldsymbol{M}_m \rangle + \langle \boldsymbol{N}_m \rangle] + \cdots \end{cases} \tag{3.5.41}$$

一般,介质在宏观体积内呈电中性,故有

$$\begin{cases} \langle q_m \rangle = \dfrac{1}{\Delta V}\sum_a q^a = 0 \\ \langle \boldsymbol{i}_m \rangle = \dfrac{1}{\Delta V}\sum_a q^a \dfrac{1}{\Delta T}\int \mathrm{d}t\, \boldsymbol{v}^a = \langle \boldsymbol{v} \rangle \dfrac{1}{\Delta V}\sum_a q^a = 0 \end{cases} \tag{3.5.42}$$

这里已注意到，由于分子热运动的结果，$\int \mathrm{d}t\, \boldsymbol{v}^{\alpha}/\Delta T = \langle \boldsymbol{v} \rangle$ 与分子 α 的具体情形无关. 于是

$$\begin{cases} \langle \rho_{\mathrm{m}} \rangle = \rho_{\mathrm{f}} - \nabla \cdot \boldsymbol{P} + \dfrac{1}{6} \nabla\nabla : \mathscr{D} + \cdots \\ \langle \boldsymbol{j}_{\mathrm{m}} \rangle = \boldsymbol{j}_{\mathrm{f}} + \dfrac{\partial}{\partial t}\left[\boldsymbol{P} - \dfrac{1}{6} \nabla \cdot \mathscr{D} \right] + \nabla \times (\boldsymbol{M} + \boldsymbol{N}) + \cdots \end{cases} \tag{3.5.43}$$

将式(3.5.43)代入式(3.5.33)，得

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{E} = (\rho_{\mathrm{f}} - \nabla \cdot \boldsymbol{P} + \dfrac{1}{6} \nabla\nabla : \mathscr{D} + \cdots)/\varepsilon_0 \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\partial \boldsymbol{B}/\partial t \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{B} = \partial \boldsymbol{E}/(c^2 \partial t) + \mu_0 \left[\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}} + \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{P} - \dfrac{1}{6} \nabla \cdot \mathscr{D} \right) + \nabla \times (\boldsymbol{M} + \boldsymbol{N}) + \cdots \right] \end{cases} \tag{3.5.44}$$

令

$$\begin{cases} \boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \left(\boldsymbol{P} - \dfrac{1}{6} \nabla \cdot \mathscr{D} + \cdots \right) = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}_{\mathrm{eff}} \\ \boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}/\mu_0 - (\boldsymbol{M} + \boldsymbol{N} + \cdots) = \boldsymbol{B}/\mu_0 - \boldsymbol{M}_{\mathrm{eff}} \end{cases} \tag{3.5.45}$$

则式(3.5.44)便化为式(3.5.26)，只是关系式(3.5.25)应代之以式(3.5.45). 因而，严格地说，式(3.5.25)中的极化强度与磁化强度应理解为等效极化强度与等效磁化强度. 注意：若介质具有宏观运动速度 $\boldsymbol{v}$，那么 $\langle \boldsymbol{v}^{\alpha} \rangle = \boldsymbol{v}$，因而 $\boldsymbol{N}$ 对等效磁化强度具有非零贡献：

$$\boldsymbol{N} \approx -\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{P} - \nabla \cdot \mathscr{D}/6) \tag{3.5.46}$$

3.5.3　运动介质中的 Maxwell 方程组

为了研究运动介质中的电动力学，需要考察介质中 Maxwell 方程组的协变形式. 为此，我们注意到，总电流密度 j_{t}^{μ} 与自由电流密度 j_{f}^{μ} 都是守恒的四维矢量，故其差即诱导电流密度 j_{i}^{μ}：

$$j_{\mathrm{i}}^{\mu} = (-c\, \nabla \cdot \boldsymbol{P}, \partial \boldsymbol{P}/\partial t + \nabla \times \boldsymbol{M}) \tag{3.5.47}$$

也是一个守恒的四维矢量. 该守恒方程 $\partial_{\mu} j_{\mathrm{i}}^{\mu} = 0$ 的解可写为

$$j_{\mathrm{i}}^{\nu} = c \partial_{\mu} M^{\mu\nu} \tag{3.5.48}$$

式中 $M^{\mu\nu}$ 是一个反对称张量，称为四维极化－磁化张量. 由式(3.5.47)易知 $M^{\mu\nu}$ 的具体形式可写为

$$M^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0 & P_x & P_y & P_z\\ -P_x & 0 & -M_z/c & M_y/c\\ -P_y & M_z/c & 0 & -M_x/c\\ -P_z & -M_y/c & M_x/c & 0\end{pmatrix} \tag{3.5.49}$$

用式(3.5.48)可将非齐次的 Maxwell 方程改写成

$$\partial_\mu(F^{\mu\nu}-\mu_0 cM^{\mu\nu})=\mu_0 j_{\mathrm{f}}^{\mu} \tag{3.5.50}$$

引入电磁感应张量

$$H^{\mu\nu}=F^{\mu\nu}-\mu_0 cM^{\mu\nu} \tag{3.5.51}$$

其分量式为

$$H^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0 & -\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}D_x & -\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}D_y & -\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}D_z\\ \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}D_x & 0 & -\mu_0 H_z & \mu_0 H_y\\ \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}D_x & \mu_0 H_z & 0 & -\mu_0 H_x\\ \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}D_x & -\mu_0 H_y & \mu_0 H_x & 0\end{pmatrix}$$

于是,式(3.5.50)可写成

$$\partial_\mu H^{\mu\nu}=\mu_0 j_{\mathrm{f}}^{\nu} \tag{3.5.52}$$

上式与$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}=0$或关于 $F^{\mu\nu}$的 Jacobi 式一起构成了介质中 Maxwell 方程组的协变形式.

在特殊 Lorentz 变换下,由张量 $F^{\mu\nu}$、$H^{\mu\nu}$和 $M^{\mu\nu}$的变换关系可导出矢量 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$;$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{H}$;$\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{M}$ 的变换关系(仅以 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 为例写出,但对 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{H}$ 和 $-\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{M}$ 都成立,仅需将公式中的 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 分别换为 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{H}$ 或 $-\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{M}$ 即可):

$$\begin{cases}E'_{/\!/}=E_{/\!/}, & E'_{\perp}=\gamma(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})_{\perp}\\ B'_{/\!/}=B_{/\!/}, & B'_{\perp}=\gamma(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}/c^2)_{\perp}\end{cases} \tag{3.5.53}$$

或写成

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}'=\gamma(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})-\dfrac{\gamma-1}{v^2}\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{B}'=\gamma\left(\boldsymbol{B}-\dfrac{\boldsymbol{v}}{c^2}\times\boldsymbol{E}\right)-\dfrac{\gamma-1}{v^2}\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{B}\end{cases} \tag{3.5.54}$$

式中下标//、⊥分别表示与$\boldsymbol{v}$平行与垂直的分量,不带撇与带撇的量则分别是在惯性系 S 与 S′中测量的,且 S′系相对于 S 系的速度为$\boldsymbol{v}$.

在运动介质中,电磁场的边值关系也应作相应变化.为此,我们还须知道4-矢量 n^{μ} 在特殊 Lorentz 变换下的变换关系.在惯性系 S′中,介质呈宏观静止状态,这时有

$$n'^{\mu}=\begin{pmatrix}0\\ \boldsymbol{n}'\end{pmatrix} \tag{3.5.55}$$

在惯性系 S 中，有

$$n^0 = \gamma \boldsymbol{n} \cdot \frac{\boldsymbol{v}}{c}, \quad \boldsymbol{n}_{/\!/} = \gamma \boldsymbol{n}'_{/\!/}, \quad \boldsymbol{n}_{\perp} = \boldsymbol{n}'_{\perp} \tag{3.5.56}$$

此外，在特殊 Lorentz 变换下亦有

$$\begin{cases} \rho' = \gamma\left(\rho - \frac{1}{c^2}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{j}\right) \\ \boldsymbol{j}'_{\perp} = \boldsymbol{j}_{\perp}, \quad \boldsymbol{j}'_{/\!/} = \gamma(\boldsymbol{j} - \rho \boldsymbol{v})_{/\!/} \end{cases} \tag{3.5.57}$$

式中 $j^{\mu} = (c\rho, \boldsymbol{j})$ 可以是任何电流密度 4－矢量，例如面电流密度 4－矢量 $\boldsymbol{\Pi}^{\mu} = (c\omega, \boldsymbol{\Pi})$

$$\begin{cases} \omega' = \gamma\left(\omega - \frac{1}{c^2}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\Pi}\right) \\ \boldsymbol{\Pi}'_{\perp} = \boldsymbol{\Pi}_{\perp}, \boldsymbol{\Pi}'_{/\!/} = \gamma(\boldsymbol{\Pi} - \omega \boldsymbol{v})_{/\!/} \end{cases} \tag{3.5.58}$$

因为按定义

$$\boldsymbol{\Pi}^{\mu} = \lim_{\varepsilon \to 0}(j^{\mu}\varepsilon)$$

而

$$\varepsilon = (\varepsilon \boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{n} = -(\varepsilon n) \cdot n = \text{Lorentz 标量}$$

电磁场的边值关系在 S′系中为

$$\begin{cases} \boldsymbol{n}'_{12} \cdot (\boldsymbol{D}'_2 - \boldsymbol{D}'_1) = \omega'_{\mathrm{f}} \\ \boldsymbol{n}'_{12} \times (\boldsymbol{E}'_2 - \boldsymbol{E}'_1) = 0 \\ \boldsymbol{n}'_{12} \cdot (\boldsymbol{B}'_2 - \boldsymbol{B}'_1) = 0 \\ \boldsymbol{n}'_{12} \times (\boldsymbol{H}'_2 - \boldsymbol{H}'_1) = \boldsymbol{\Pi}'_{\mathrm{f}} \end{cases} \tag{3.5.59}$$

利用式(3.5.53)、(3.5.57)与(3.5.56)便可由上式得到

$$\begin{cases} \boldsymbol{n}_{12} \cdot \left[\left(\mathcal{I} - \frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}}{c^2}\right) \cdot (\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1) + \frac{\boldsymbol{v}}{c^2} \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1)\right] = \omega_{\mathrm{f}} - \frac{\boldsymbol{v}}{c} \cdot \boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{f}} \\ \boldsymbol{n}_{12} \times [(\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) + \boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1)] = 0 \\ \boldsymbol{n}_{12} \cdot \left[\left(\mathcal{I} - \frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}}{c^2}\right) \cdot (\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1) - \frac{\boldsymbol{v}}{c^2} \times (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1)\right] = 0 \\ \boldsymbol{n}_{12} \times [(\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) - \boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1)] = \boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{f}} - \omega_{\mathrm{f}} \boldsymbol{v} \end{cases} \tag{3.5.60}$$

式中 $\boldsymbol{v}$ 是介质的宏观运动速度.

证明：由(3.5.59)第一式即

$$\boldsymbol{n}'_{\perp} \cdot (\boldsymbol{D}'_2 - \boldsymbol{D}'_1)_{\perp} + \boldsymbol{n}'_{/\!/} \cdot (\boldsymbol{D}'_2 - \boldsymbol{D}'_1)_{/\!/} = \omega'_{\mathrm{f}}$$

在 S 系中可表为

$$\begin{aligned} &\gamma \boldsymbol{n}_{\perp} \cdot \left[(\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1) + \frac{\boldsymbol{v}}{c^2} \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1)\right]_{\perp} + \gamma^{-1} \boldsymbol{n}_{/\!/} \cdot (\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1)_{/\!/} \\ &= \gamma\left(\omega_{\mathrm{f}} - \frac{\boldsymbol{v}}{c^2} \cdot \boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{f}}\right) \end{aligned} \tag{3.5.61}$$

式中 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_{12}$. 由 $\gamma^{-2}=1-\beta^2$ 知上式即(3.5.60)中的第一式.

(3.5.59)中的第四式等价于

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}'_{/\!/}\times(\boldsymbol{H}'_2-\boldsymbol{H}'_1)_{\perp}+\boldsymbol{n}'_{\perp}\times(\boldsymbol{H}'_2-\boldsymbol{H}'_1)_{/\!/}=\boldsymbol{\Pi}'_{\mathrm{f}\perp}\\ \boldsymbol{n}'_{\perp}\times(\boldsymbol{H}'_2-\boldsymbol{H}'_1)_{\perp}=\boldsymbol{\Pi}'_{\mathrm{f}/\!/}\end{cases}\tag{3.5.62}$$

在 S 系中可表为

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}_{/\!/}\times[(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)-\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{D}]_{\perp}+\boldsymbol{n}_{\perp}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)_{/\!/}=\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{f}\perp}\\ \boldsymbol{n}_{\perp}\times\gamma[(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)-\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{D}]_{\perp}=\gamma(\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{f}}-\omega\boldsymbol{v})_{/\!/}\end{cases}\tag{3.5.63}$$

它们与(3.5.60)中的第四式等价.

同理易证,在运动介质中,边值关系(3.5.6)、(3.5.19)与(3.5.23)应修改为

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}_{12}\cdot\left[\left(I-\dfrac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}}{c^2}\right)\cdot(\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1)-\dfrac{\boldsymbol{v}}{c^2}\times(\boldsymbol{M}_2-\boldsymbol{M}_1)\right]=-\left[\sigma_{\mathrm{p}}-\dfrac{\boldsymbol{v}}{c^2}\cdot\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{m}}\right]\\ \boldsymbol{n}_{12}\times[(\boldsymbol{M}_2-\boldsymbol{M}_1)+\boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1)]=\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{m}}-\sigma_{\mathrm{p}}\boldsymbol{v}\\ \dfrac{\partial\omega_{\mathrm{f}}}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{f}}+\boldsymbol{n}_{12}\cdot[(\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}2}-\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}1})-(\rho_{\mathrm{f}2}-\rho_{\mathrm{f}1})\boldsymbol{v}]=0\end{cases}\tag{3.5.64}$$

3.5.4 介质的电磁性质方程

介质中的宏观 Maxwell 方程组(3.5.26)或(3.5.52)是含有四个场矢量 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的八个方程.如不附加关于四个场矢量之间的关系

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}),\quad \boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})\tag{3.5.65}$$

其本身是不完备的.由 $\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 的定义式(3.5.25)知,$\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 与介质的极化与磁化性质有关,因而方程(3.5.65)实际上是描述介质的电磁性质的方程,常称为本构关系(consitutive relations).

若电磁场不太强且变化不太迅速,则介质对场的反应一般是线性的.在各向同性介质内,这种线性关系可写成(暂限于静止介质)

$$\begin{cases}\boldsymbol{P}=\chi\varepsilon_0\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{M}=\kappa\boldsymbol{H},\quad \boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}\end{cases}\tag{3.5.66}$$

式中比例常量 χ、ε、κ 和 μ 是表征介质电磁性质的物理量,分别称为介质的极化率、介电常量、磁化率和磁导率.由式(3.5.25)易知

$$\begin{cases}\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}},\quad \varepsilon_{\mathrm{r}}=1+\chi\\ \mu=\mu_0\mu_{\mathrm{r}},\quad \mu_{\mathrm{r}}=1+\kappa\end{cases}\tag{3.5.67}$$

式中 ε_{r}、μ_{r} 分别称为介质的相对介电常量和相对磁导率.

在高频电磁场作用下,极化电荷与磁化电流可能会跟不上场的迅速变化,因之

$$\boldsymbol{P}(\omega,t)=\chi\varepsilon_0\boldsymbol{E}(\omega,t-\tau)=\chi\varepsilon_0\exp(-\mathrm{i}\omega\tau)\boldsymbol{E}(\omega,t)=\chi(\omega)\varepsilon_0\boldsymbol{E}(\omega,t)$$

式中 $\boldsymbol{E}(\omega, t) = \boldsymbol{E}_0 \exp(\mathrm{i}\omega t)$. 可见，若将 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{E}$ 等用复数 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_0 \exp(\mathrm{i}\omega t)$、$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \exp(\mathrm{i}\omega t)$表出，而物理值理解为其实部，则线性关系仍成立，但 χ 等与场频有关. χ 等介质参量与频率有关的现象称为色散，相应的关系式称为色散关系. 对频率展开后便有

$$\begin{cases} \boldsymbol{P} = \sum_n \chi(\omega_n) \boldsymbol{E}(\omega_n), \boldsymbol{D} = \sum_n \varepsilon(\omega_n) \boldsymbol{E}(\omega_n) \\ \boldsymbol{M} = \sum_n \kappa(\omega_n) \boldsymbol{H}(\omega_n), \boldsymbol{B} = \sum_n \mu(\omega_n) \boldsymbol{H}(\omega_n) \end{cases} \tag{3.5.68}$$

式中 $\boldsymbol{E}(\omega_n)$与 $\boldsymbol{H}(\omega_n)$分别是 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 的 Fourier 分量.

对于各向异性介质，场强之间的关系成为

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j, \quad B_i = \mu_{ij} H_j$$

式中介电常量与磁导率都是张量；以后我们还将证明，介电常量张量与磁导率张量都是对称张量.

在铁电、铁磁介质或强场情形下，线性关系不再成立，例如

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j + \varepsilon_{ijk} E_j E_k + \cdots$$

电介质甚至可被击穿；而铁磁场物质中的 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 之间的关系甚至是非单值的，一定的 $\boldsymbol{H}$ 所对应的 $\boldsymbol{B}$ 值依赖于磁化过程.

对于导电介质，在最简单的情形下，Ohm 定律

$$\boldsymbol{j}_f = \sigma \boldsymbol{E} \tag{3.5.69}$$

或(在各向异性介质中)推广的 Ohm 定律

$$j_{fl} = \sigma_{lk} E_k \tag{3.5.70}$$

成立，式中 σ 称为电导率. 当电场变化较快时，σ 是场频的函数，需要用复数表示. 考虑到化学势差与温差电动势等外来电动力 $\boldsymbol{K}$，则上式中应作下述替换：

$$\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E} + \boldsymbol{K}$$

值得注意的是，这里忽略了磁场的作用，它会引起 Hall 效应与电阻的改变等. 在低温下，当电场在电子平均自由程内变化已很大时，导体中任一点的电流密度将依赖于该点邻近的电场分布. 此外，超导电流与气体导电电流也不满足上述 Ohm 定律.

对于以速度 $\boldsymbol{v}$ 作整体运动的介质，在随其一起运动的惯性系中，在最简单的线性情形下有

$$\boldsymbol{D}' = \varepsilon \boldsymbol{E}', \quad \boldsymbol{B}' = \mu \boldsymbol{H}' \tag{3.5.71}$$

由 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{H}$ 在特殊 Lorentz 变换下的变换性质易知在相对于 S 系以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动的 S′系中有

$$\begin{cases} \boldsymbol{D} + \dfrac{\boldsymbol{v}}{c^2} \times \boldsymbol{H} = \varepsilon (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \\ \boldsymbol{B} - \dfrac{\boldsymbol{v}}{c^2} \times \boldsymbol{E} = \varepsilon (\boldsymbol{H} - \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{D}) \end{cases} \tag{3.5.72}$$

它们可写成明显的协变形式：

$$H_{\mu\nu}u^{\nu}=\varepsilon_{r}F_{\mu\nu}u^{\nu},\quad \widetilde{F}_{\mu\nu}u^{\nu}=\mu_{r}\widetilde{H}_{\mu\nu}u^{\nu} \tag{3.5.73}$$

式中 $u^{\nu}=\gamma(c,\boldsymbol{v})$ 是介质的四维整体速度，而 $\widetilde{F}_{\mu\nu}$、$\widetilde{H}_{\mu\nu}$ 分别是 $F_{\mu\nu}$、$H_{\mu\nu}$ 的对偶. 解方程组(3.5.72)得

$$\begin{cases}\boldsymbol{D}=\dfrac{\varepsilon(1-\beta^{2})\boldsymbol{E}+(\varepsilon\mu-1/c^{2})[\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}-\varepsilon\boldsymbol{v}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v})]}{1-\mu_{r}\varepsilon_{r}\beta^{2}}\\ \boldsymbol{B}=\dfrac{\mu(1-\beta^{2})\boldsymbol{H}+(\varepsilon\mu-1/c^{2})[\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}-\mu\boldsymbol{v}(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{v})]}{1-\mu_{r}\varepsilon_{r}\beta^{2}}\end{cases} \tag{3.5.74}$$

若仅精确至 v/c 级，则上式化为

$$\begin{cases}\boldsymbol{D}\approx\varepsilon\boldsymbol{E}+(\varepsilon\mu-1/c^{2})\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}\\ \boldsymbol{B}\approx\varepsilon\boldsymbol{H}-(\varepsilon\mu-1/c^{2})\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}\end{cases} \tag{3.5.75}$$

3.5.5 交叉对称关系与 Kramer－Krönig 关系

现考察电场强度较弱的情形，故电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 与电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的关系是线性的. 这种线性关系的最一般的形式是

$$\boldsymbol{D}(t)=\varepsilon_{0}\left[\boldsymbol{E}(t)+\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t'f(\tau=t-t')\boldsymbol{E}(t')\right] \tag{3.5.76}$$

或表为

$$\boldsymbol{P}(t)=\varepsilon_{0}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t'f(\tau=t-t')\boldsymbol{E}(t') \tag{3.5.77}$$

上述关系必须满足因果律所给出的限制，即介质中 t 时刻以后的场 $\boldsymbol{E}(t'>t)$ 对 t 时刻的 $\boldsymbol{P}(t)$ 没有贡献. 换言之，关联函数 $f(\tau)$ 应满足

$$f(\tau<0)=0 \tag{3.5.78}$$

于是有

$$\boldsymbol{D}(t)=\varepsilon_{0}\left[\boldsymbol{E}(t)+\int_{0}^{\infty}\mathrm{d}\tau f(\tau)\boldsymbol{E}(t-\tau)\right] \tag{3.5.79}$$

$$\boldsymbol{P}(t)=\varepsilon_{0}\int_{0}^{\infty}\mathrm{d}\tau f(\tau)\boldsymbol{E}(t-\tau) \tag{3.5.80}$$

作单色分解，即通过 Fourier 变换将依赖于时间的量 $u(t)$ 展开为依赖于频率的量 u_{ω} 的叠加：

$$u(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}u_{\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{3.5.81}$$

可将(3.5.79)或(3.5.80)改写为单色分量之间的关系：

$$\boldsymbol{D}_{\omega}=\varepsilon_{0}\varepsilon_{r}(\omega)\boldsymbol{E}_{\omega},\quad \boldsymbol{P}_{\omega}=\varepsilon_{0}\chi(\omega)\boldsymbol{E}_{\omega} \tag{3.5.82}$$

式中，介质的介电常量 ε 与极化率 χ 都是与电磁场的频率有关的函数：

$$\varepsilon_{r}(\omega)=1+\chi(\omega)=1+\int_{0}^{\infty}\mathrm{d}\tau f(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau} \tag{3.5.83}$$

现在我们讨论作为频率的函数的介电常量的性质. 首先, $\boldsymbol{D}(t)$、$\boldsymbol{E}(t)$与$\boldsymbol{P}(t)$是实量, 由(3.5.79)或(3.5.80)可知关联函数 $f(\tau)$也是实的

$$f^*(\tau)=f(\tau) \tag{3.5.84}$$

因而, 由(3.5.83)知

$$\chi^*(\omega)=\chi(-\omega) \tag{3.5.85}$$

将极化率 $\chi(\omega)$分解为实部与虚部之和:

$$\chi(\omega)=\mathrm{Re}\ \chi(\omega)+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\ \chi(\omega) \tag{3.5.86}$$

由(3.5.85)可得

$$\begin{cases}\mathrm{Re}\ \chi(\omega)=\mathrm{Re}\ \chi(-\omega)\\ \mathrm{Im}\ \chi(\omega)=-\mathrm{Im}\ \chi(-\omega)\end{cases} \tag{3.5.87}$$

或写为

$$\begin{cases}\mathrm{Re}\ \varepsilon(\omega)=\mathrm{Re}\ \varepsilon(-\omega)\\ \mathrm{Im}\ \varepsilon(\omega)=-\mathrm{Im}\ \varepsilon(-\omega)\end{cases} \tag{3.5.88}$$

这便是关于极化率与介电常量的交叉对称关系(crossing relations for susceptibility), 它来自于相对于实场的响是实的极化的要求. 它指明极化率与介电常量的实部是频率的偶函数, 而虚部是频率的奇函数. 于是, 若在频率很小时可将 $\varepsilon(\omega)$展为 ω 的幂级数(例如在绝缘介质内), 则 $\mathrm{Re}\ \varepsilon(\omega)$的展开式从常数项[所谓静介电常量 $\varepsilon(\omega=0)$]开始; 而 $\mathrm{Im}\ \varepsilon(\omega)$的展开式从 ω 的一次项开始. 对于电导率 σ_c 不为零的介质, 后面我们将证明在低频下其介电常量为

$$\varepsilon(\omega)=\varepsilon(0)+\mathrm{i}\frac{\sigma_c}{\omega} \tag{3.5.89}$$

现在分析函数 $\chi(\omega)$的解析性质. 为此, 将 ω 视为复变数由(3.5.83)可知

$$\omega=\omega_r+\mathrm{i}\omega_i \tag{3.5.90}$$

因而(3.5.83)成为

$$\chi(\omega)=\int_0^\infty \mathrm{d}\tau[f(\tau)\mathrm{e}^{-\tau\omega_r}]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_i\tau} \tag{3.5.91}$$

注意到在积分区域中 τ 非负, 故 $f(\tau)\exp(-\tau\omega_r)$在复 ω 上半平面中是比$f(\tau)$具有更好性状(即更不奇异)的函数. 在我们的问题中, 函数 $f(\tau)$的 Fourier 变换当 $\omega\neq0$ 时已经给出了确定的 χ. 该函数乘以一个指数收敛因子后的 Fourier 变换应是很好定义的. 因而, 由方程(3.5.91)确定的函数 $\chi(\omega)$在复 ω 上半平面(除开原点)中是解析的. 同时, 由于指数收敛因子的存在, 我们有

$$\chi(\omega)\to0,\quad 当|\omega|\to\infty \tag{3.5.92}$$

在上半平面(除开原点)中解析函数 $\chi(\omega)$应满足 Cauchy 关系:

$$\chi(\omega)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \mathrm{d}\omega'\frac{\chi(\omega')}{\omega'-\omega} \tag{3.5.93}$$

式中,积分回路 C 是在复 ω 上半平面中从 $(-R,0)$ 开始沿实轴正向至 $(-a,0)$,经一个以原点为中心、a 为半径、位于上半平面的小半圆至 $(a,0)$,继而沿实轴正向至 $(R,0)$,再沿一个以原点为中心、R 为半径、位于上半平面的大半圆返回出发点的封闭路径;这里 a 取得很小,而 R 取得很大,以至于 ω 在回路 C 内.

令 ω 从上半平面趋于 Re ω,式(3.5.93)成为

$$\chi(\omega)=\lim_{\delta\to 0^+}\chi(\omega+\mathrm{i}\delta)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega'\frac{\chi(\omega')}{\omega'-\omega}+\frac{1}{2}\chi(\omega)+\frac{\mathrm{i}\sigma_c}{2\varepsilon_0\omega} \tag{3.5.94}$$

式中右端第一项是积分主值,第二项是绕极点 $\omega'=\omega$ 的半圆的贡献,而第三项是绕原点的半圆的贡献;由式(3.5.92)知无穷半圆的贡献为零.上式的实部与虚部分别是

$$\mathrm{Re}\ \chi(\omega)=\frac{1}{\pi}\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega'\frac{\mathrm{Im}\ \chi(\omega')}{\omega'-\omega} \tag{3.5.95}$$

$$\mathrm{Im}\ \chi(\omega)=-\frac{1}{\pi}\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega'\frac{\mathrm{Re}\ \chi(\omega')}{\omega'-\omega}+\frac{\sigma_c}{\varepsilon_0\omega} \tag{3.5.96}$$

这便是著名的 Kramer－Krönig 关系.利用交叉对称关系(3.5.87)可将Kramer－Krönig 关系改写为

$$\mathrm{Re}\ \chi(\omega)=\frac{2}{\pi}\mathrm{P}\int_{0}^{\infty}\mathrm{d}\omega'\frac{\omega'\mathrm{Im}\ \chi(\omega')}{\omega'^2-\omega^2} \tag{3.5.97}$$

$$\mathrm{Im}\ \chi(\omega)=-\frac{2\omega}{\pi}\mathrm{P}\int_{0}^{\infty}\mathrm{d}\omega'\frac{\mathrm{Re}\ \chi(\omega')}{\omega'^2-\omega^2}+\frac{\sigma_c}{\varepsilon_0\omega} \tag{3.5.98}$$

这两个关系对于介质的极化率(当介质呈现线性极化时)给出了重要的限制条件.当对于介质的极化率作某种近似时,例如通常的线性均匀近似,我们必须明白,这只是在一定的频率范围内(例如在某一频率以下)才近似成立,切不可认为介质的介电常量在任何情形下都与频率无关.否则,可能导致违背因果律的不正确的结果.

值得指出的是,式(3.5.97)比式(3.5.98)更有用.原因在于:按照光学定理,频率为 ω 的朝前散射振幅(事实上,原子介质中光的相干散射振幅的实部即为折射率的实部)的虚部与该频率的光的总吸收截面联系在一起,因而在实验中是一个容易测得的量.此外,对于磁导率也可由因果律推出类似的表达式.但由于磁导率概念在光频时已失去意义(参见:L. D. Landau, E. M. Lifshitz & L. P. Pitaevskii. Electrodynamics of Continuous Media. Second Edition. 世界图书出版公司),故类似于 Kramer－Krönig 关系的公式需要加以修改.

习题 3－5

1. 有一内外半径分别为 r_1 和 r_2 的空心介质球,介质的介电常量为 ε.若介质均匀地带有静

止的传导电荷，且传导电荷密度为 ρ_f，求

(1) 空间各点的电场；(2) 极化体电荷与极化面电荷分布.

答案：(1) $\boldsymbol{E}(r>r_2)=(r_2^3-r_1^3)\rho_f\boldsymbol{r}/(3\varepsilon_0 r^3)$，

$\boldsymbol{E}(r_1<r<r_2)=(r^3-r_1^3)\rho_f\boldsymbol{r}/(3\varepsilon r^3)$，$\boldsymbol{E}(r<r_1)=0$

(2) $\rho_p(r_1<r<r_2)=-(1-\varepsilon_0/\varepsilon)\rho_f$，

$\sigma_p(r=r_2)=(r_2^3-r_1^3)/(3r_2^2)(1-\varepsilon_0/\varepsilon)\rho_f$，$\sigma_p(r=r_1)=0$

2. 有一内外半径分别为 r_1 和 r_2 的无穷长中空导体圆柱，导体的磁导率为 μ. 若有稳恒均匀的传导电流 J_f 沿其轴向流动，求磁感强度与磁化电流.

答案：$\boldsymbol{B}(r>r_2)=\mu_0(r_2^2-r_1^2)/(2r^2)\boldsymbol{j}_f\times\boldsymbol{r}$，

$\boldsymbol{B}(r_1<r<r_2)=\mu(r^2-r_1^2)/(2r^2)\boldsymbol{j}_f\times\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{B}(r<r_1)=0$

$\boldsymbol{j}_M(r_1<r<r_2)=(\mu/\mu_0-1)\boldsymbol{j}_f$，

$\boldsymbol{\Pi}_M(r=r_2)=-(\mu/\mu_0-1)(r_2^2-r_1^2)/(2r_2)\boldsymbol{j}_f$，$\boldsymbol{\Pi}_M(r=r_1)=0$

3. 证明：均匀介质内部的体极化电荷密度 ρ_P 等于体传导电荷密度 ρ_f 的 $-(1-\varepsilon_0/\varepsilon)$ 倍.

4. 平行板电容器内有两层介质，其厚度分别为 l_1 与 l_2，介电常量分别为 ε_1 与 ε_2. 若两板加上电动势 $\mathscr{E}$，求

(1) 电容器两板上的传导电荷面密度 ω_{f1} 与 ω_{f2}；

(2) 介质分界面上的传导电荷面密度 ω_{f3}.

若介质漏电，电导率分别为 σ_1 与 σ_2，则当电流达到稳恒时，电容器两板与介质分界面上的传导电荷面密度分别为多少.

答案：介质绝缘时，$\omega_{f1}=-\omega_{f2}=\dfrac{\mathscr{E}}{l_1/\varepsilon_1+l_2/\varepsilon_2}$，$\omega_{f3}=0$

介质漏电时，$\omega_{f1}=\dfrac{\varepsilon_1\sigma_2\mathscr{E}}{l_1\sigma_2+l_2\sigma_1}$，$\omega_{f2}=-\dfrac{\varepsilon_2\sigma_1\mathscr{E}}{l_1\sigma_2+l_2\sigma_1}$

$$\omega_{f3}=\frac{(\varepsilon_2\sigma_1-\varepsilon_1\sigma_2)\mathscr{E}}{l_1\sigma_2+l_2\sigma_1},\ \sum_{i=1}^{3}\omega_{fi}=0$$

5. **证明**：

(1) 当两种绝缘介质分界面上不带自由电荷，在分界面上有

$$\tan\theta_2/\tan\theta_1=\varepsilon_2/\varepsilon_1$$

式中 ε_1 与 ε_2 分别为两种介质的介电常量，θ_1 与 θ_2 分别为绝缘介质交界面两侧电场线与界面法线的夹角.

(2) 当两种导电介质内有稳恒电流流动时，在分界面上有

$$\tan\theta_2/\tan\theta_1=\sigma_2/\sigma_1$$

式中 σ_1 与 σ_2 分别为两种介质的电导率，θ_1 与 θ_2 分别为导电介质交界面两侧电流线与界面法线的夹角.

6. 证明在两种磁导率分别为 μ_1 与 μ_2 的绝缘介质分界面上有

$$\tan\theta_2/\tan\theta_1=\mu_2/\mu_1$$

式中 θ_1 与 θ_2 分别为介质交界面两侧的磁场强度 $\boldsymbol{H}_1$ 和 $\boldsymbol{H}_2$ 与界面法线的夹角.

7. 两种各向同性的均匀线性导电介质在 S 面相接，且有一稳恒电流 $\boldsymbol{j}$ 流过边界面 S. 证明边

界面上的面电荷密度为

$$\omega=(\varepsilon_2/\sigma_2-\varepsilon_1/\sigma_1)\boldsymbol{n}_{12}\cdot\boldsymbol{j}$$

式中 $\boldsymbol{n}_{12}$ 是边界面的法向(指向介质 2 内部),而 ε_i 与 σ_i 分别是第 i 介质的介电常量与电导率.

8. 试利用边值关系证明:在绝缘介质与导电介质的分界面上

(1) 在静电情形下,导体外的电场线总是垂直于导体表面;

(2) 在稳恒电流情形下,导体内的电场线总是平行于导体表面.

9. 在一般情形下,电导率 σ_c 是电场 $\boldsymbol{E}$ 与磁场 $\boldsymbol{B}$ 的函数.试利用电磁场在空间转动与空间反演下的性质,证明置于弱场中的导体或半导体遵从广义 Ohm 定律:

$$\boldsymbol{E}=\eta_0\boldsymbol{j}+R(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{j})+\beta_1B^2\boldsymbol{j}+\beta_2(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{j})\boldsymbol{B}$$

式中 η_0 是无磁场时的电阻率,R 为 Hall 系数,β_i 也是仅与导体或半导体结构有关的常数.

提示:利用 Ohm 定律 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{j}/\sigma_c$,其中 $1/\sigma_c$ 一般是磁场 $\boldsymbol{B}$ 的函数,将 $1/\sigma_c$ 对 $\boldsymbol{B}$ 作 Taylor 展开,并利用 $\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的变换性质.

10. 若磁感应场随时间的变化率为 $\dot{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r}',t)$.证明在没有电荷的空间中相应的电场为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3x'\frac{\boldsymbol{R}\times\dot{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r}',t)}{R^3}$$

式中 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$.

提示:$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\int \mathrm{d}^3x'\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',t)\delta(\boldsymbol{R})$.

11. 在各向异性的线性均匀介质中,本构关系为

$$D_i=\varepsilon_{ij}E_j,\quad B_i=\mu_{ij}H_j$$

式中 $\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ji}$,$\mu_{ij}=\mu_{ji}$.

证明:

$$\boldsymbol{E}\cdot\dot{\boldsymbol{D}}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}),\quad \boldsymbol{H}\cdot\dot{\boldsymbol{B}}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})$$

12. 有一稳恒电磁场,其电场强度 $\boldsymbol{E}$ 与磁感强度 $\boldsymbol{B}$ 都是均匀的.试证相应的矢势与标势可表示为

$$\boldsymbol{A}=(1/2)(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{r}),\phi=-\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{r}$$

13. 试导出传导电荷守恒定律在导电介质与绝缘介质交界面上的形式.

14. 设在线性各向同性介质内无源区域中的电磁场分布为$(\boldsymbol{E}_a,\boldsymbol{H}_a)$,而$(\boldsymbol{E}_b,\boldsymbol{H}_b)$是同一区域中的另一种电磁场分布,它们均是时间的正弦函数且频率与初相位均相同,

试证(Lorentz 引理)

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}_a\times\boldsymbol{H}_b)=\nabla\cdot(\boldsymbol{E}_b\times\boldsymbol{H}_a)$$

15. 证明:介质中的无源(即没有传导电荷与传导电流)Maxwell 方程组在对偶变换

$$\begin{cases}\sqrt{\varepsilon_0}\boldsymbol{E}\to\sqrt{\mu_0}\boldsymbol{H},\quad \sqrt{\mu_0}\boldsymbol{H}\to-\sqrt{\varepsilon_0}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{p}\to\boldsymbol{m}/c,\quad \boldsymbol{m}/c\to-\boldsymbol{p}\end{cases}\tag{3.5.99}$$

下保持相同的形式.

§3.6　介质中电磁场能－动量与角动量定理

3.6.1　介质中电磁场的能量定理

由真空中电磁场的能量定理可知

$$\nabla\cdot\left(\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2+\frac{1}{2\mu_0}B^2\right)=-(\boldsymbol{j}_f+\boldsymbol{j}_i)\cdot\boldsymbol{E} \tag{3.6.1}$$

由介质中诱导电流密度与极化强度和磁化强度的关系式得

$$\boldsymbol{j}_i\cdot\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t}+\nabla\cdot(\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{E})-\boldsymbol{M}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{3.6.2}$$

式中已利用了$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\partial\boldsymbol{B}/\partial t$. 将式(3.6.2)代入式(3.6.1),利用极化强度和磁化强度的定义式得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{s}+\frac{\partial u}{\partial t}+\boldsymbol{j}_f\cdot\boldsymbol{E}=-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{D}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}-\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\boldsymbol{B}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}\right)-\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t}+\boldsymbol{P}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

式中

$$\begin{cases}\boldsymbol{s}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\\ u=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H})\end{cases} \tag{3.6.3}$$

对于线性介质,$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 成正比,$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 成正比. 于是式(3.6.3)右端的值为零,因而有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{s}+\partial u/\partial t=-\boldsymbol{j}_f\cdot\boldsymbol{E} \tag{3.6.4}$$

这时将 $\boldsymbol{s}$ 与 u 分别叫做线性介质中的电磁能流密度矢量(亦称为 Poynting 矢量)和电磁能量密度,它们已将极化效应与磁化效应包括在内,而式(3.6.4)称为线性介质中电磁体系的能量定理(亦称为 Poynting 定理),其积分形式是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \mathrm{d}^3x u+\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{s}=-\int_V \mathrm{d}^3x\boldsymbol{j}_f\cdot\boldsymbol{E} \tag{3.6.5}$$

3.6.2　介质中电磁场的动量定理

由真空中电磁场的动量定理可知

$$\nabla\cdot\mathscr{T}_0+\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{g}_0=-[(\rho_f+\rho_i)\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{j}_f+\boldsymbol{j}_i)\times\boldsymbol{B}] \tag{3.6.6}$$

式中 $\boldsymbol{g}_0$ 与 $\mathscr{T}_0$ 表示真空中的电磁动量密度与电磁动量流密度张量. 介质中诱导电流密度 4－矢量对式(3.6.6)右端的贡献可由齐次的 Maxwell 方程化为

$$\rho_i\boldsymbol{E}+\boldsymbol{j}_i\times\boldsymbol{B}=\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{B})+\nabla\cdot(\boldsymbol{BM}-\boldsymbol{PE})+[(\nabla\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{P}-(\nabla\boldsymbol{M})\cdot\boldsymbol{B}]$$

将上式代入式(3.6.6)得

$$\nabla\cdot\mathscr{T}+\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial t}+\boldsymbol{f}_{\mathrm{f}}=\frac{1}{2}\nabla\cdot(\boldsymbol{EP}-\boldsymbol{MB})-(\nabla\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{P}+(\nabla\boldsymbol{M})\cdot\boldsymbol{B} \tag{3.6.7}$$

式中

$$\begin{cases}\boldsymbol{g}=\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B}\\ \mathscr{T}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H})\mathscr{I}-\boldsymbol{DE}-\boldsymbol{BH}\end{cases} \tag{3.6.8}$$

在线性介质中，式(3.6.7)右端为零，因而有

$$\nabla\cdot\mathscr{T}+\partial\boldsymbol{g}/\partial t=-\boldsymbol{f}_{\mathrm{f}} \tag{3.6.9}$$

且

$$\boldsymbol{g}=\boldsymbol{s}/v^2,\ v^2=1/(\mu\varepsilon)$$

这时将 $\boldsymbol{g}$ 与 $\mathscr{T}$ 分别叫做线性介质中的电磁动量密度矢量和电磁动量流密度张量，它们已将极化效应与磁化效应包括在内，而式(3.6.9)称为线性介质中电磁体系的动量定理，其积分形式是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \mathrm{d}^3x\boldsymbol{g}+\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathscr{T}=-\int_V \mathrm{d}^3x\boldsymbol{f}_{\mathrm{f}} \tag{3.6.10}$$

3.6.3 介质中电磁场的角动量定理

由式(3.6.9)得

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}_{\mathrm{f}}=-\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{g})-\boldsymbol{r}\times(\nabla\mathscr{T}) \tag{3.6.11}$$

利用恒等式 $-\nabla\cdot(\mathscr{T}\times\boldsymbol{r})=\boldsymbol{r}\times(\nabla\cdot\mathscr{T})$，上式可改写成

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}_{\mathrm{f}}=-\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{g})-\nabla\cdot(-\mathscr{T}\times\boldsymbol{r}) \tag{3.6.12}$$

其积分形式为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}=\int_V \mathrm{d}^3x(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{g})=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \mathrm{d}^3x(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{g})-\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot(-\mathscr{T}\times\boldsymbol{r})$$

式中 $\boldsymbol{L}_{\mathrm{m}}$ 是自由带电体的机械角动量．式(3.6.12)或(3.6.13)表达了线性介质内电磁体系的角动量转化与守恒规律，称为介质中电磁场的角动量定理．这里

$$\boldsymbol{l}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{g},\ \mathscr{U}=-\mathscr{T}\times\boldsymbol{r} \tag{3.6.13}$$

分别是线性介质中电磁场的角动量密度矢量与电磁场角动量流密度张量，其中已包括了介质的极化效应与磁化效应．

习题 3－6

1. 在一半径为 a、电导率为 σ_{c} 的无穷长直圆柱形导体中，有一均匀恒电流 I 沿轴线方向流动．求导体表面的能流密度矢量；并证明在单位长度上通过导体表面从外面流入的电磁场

能量全部转化为这段导体上消耗的 Joule 热.

答案：$\boldsymbol{s} = -\boldsymbol{e}_r I^2/(2\pi^2 a^3 \sigma_c)$.

2. 有一同轴电缆，内外导体柱的半径分别为 a 与 b，两柱间为真空，导体可视为理想导体(即其电导率无穷大).若馈电电压(两柱间的电势差)为 U，电流为 I，求内外导体柱之间的能流密度矢量.

答案：$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{e}_z IU/[2\pi \ln(b/a) r^2]$，$P = IU$.

3. 一半径为 a 的导体球由两个半球拼合而成.当导体球带有电荷 Q 时，为使它不分成两半，至少应加多大的外力(用 Maxwell 应力张量计算)?

答案：$F = Q^2/[32\pi\varepsilon_0 a^2]$.

4. 在均匀磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 中有一线电流 I，电流方向与 $\boldsymbol{B}_0$ 垂直.若以线电流为轴作圆柱面，求单位长圆柱体外的场对柱内的场的作用力.

答案：$\boldsymbol{F} = I\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{B}_0$，电流在 $\boldsymbol{e}_z$ 方向.

5. 有三个同轴的导体圆筒.内筒半径为 a，对地电压为 V_0；中间的圆筒半径为 b，每单位筒长的电荷为 ρ；外筒半径为 c，接地.求作用在中间圆筒上的作用力.

6. 一磁控管由一个圆筒形板极和位于圆筒轴线上灯丝(也是一小圆筒)构成；管内是真空.灯丝半径为 a，接地；圆筒半径为 b，具有相对于地的正电压 V；沿管的轴线方向分布有均匀磁场.电子离开灯丝的初速度为零，且按曲线路径趋向板极.试问电压 V 低于何值时，电流将被磁场 H 所截止.

答案：$V_{\text{cutoff}} = eH^2(b^2 - a^2)^2/(8mb^2)$.

7. 地球接受到太阳的辐射功率为 1.2×10^3 W/m^2.设太阳光是线偏振的平面单色波，垂直入射到可绕对称轴旋转的 4 cm × 1 cm 矩形平板上.该对称轴将此板分成两个面积相等的 2 cm × 1 cm矩形.其中一个将太阳光全部反射回去，另一个则将太阳光全部吸收掉.试计算平板所受到的力矩.

答案：8×10^{-12} N·m.

8. 由一长为 l 的圆柱形导体电容器.半径为 R_1、质量为 m_1 的外筒接地；半径为 R_2、质量为 m_2 的内筒具有电势 ϕ_0.电容器置于均匀外磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 中，外磁场方向与电容器的对称轴平行.试求当突然除去外磁场时电容器转动的角速度.

答案：$\omega = -\boldsymbol{B}_0 \dfrac{\pi\phi_0 l(R_1^2 - R_2^2)}{\mu_0 c^2(m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2)\ln(R_1/R_2)}$.

§3.7　Maxwell 方程组的完备性

可以证明：在给定的初始条件与边界条件下，Maxwell 方程组不可能存在两组互不等价的解$(\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{B}_1)$和$(\boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{B}_2)$.这一性质称为 Maxwell 方程组作为电磁场运动方程的完备性.

由于介质中的 Maxwell 方程组是 Lorentz 协变的，仅需在静止介质中进行论证.静止介质中的 Maxwell 方程组可写为

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{E}=(\rho_f-\nabla\cdot\boldsymbol{P})/\varepsilon_0\\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\partial\boldsymbol{B}/\partial t\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\\ \nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\varepsilon_0\partial\boldsymbol{E}/\partial t+\mu_0(\boldsymbol{j}_f+\partial\boldsymbol{P}/\partial t+\nabla\times\boldsymbol{M})\end{cases}\tag{3.7.1}$$

注意,这里我们将介质的极化强度与磁化强度分布也视为给定的外界条件.

我们采用反证法证明它是完备的.若存在满足上述方程组的两组解($\boldsymbol{E}_1$,$\boldsymbol{B}_1$)和($\boldsymbol{E}_2$,$\boldsymbol{B}_2$),则令

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2\tag{3.7.2}$$

则 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足真空中自由电磁场的 Maxwell 方程组

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0\\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\partial\boldsymbol{B}/\partial t\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\\ \nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\varepsilon_0\partial\boldsymbol{E}/\partial t\end{cases}\tag{3.7.3}$$

初始条件

$$\boldsymbol{E}(0,\boldsymbol{r})=0,\quad \boldsymbol{B}(0,\boldsymbol{r})=0$$

与边界条件

$$\boldsymbol{E}|_S=0,\quad \boldsymbol{B}|_S=0$$

于是,由真空中电磁场的能量定理知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \mathrm{d}^3x\,\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)=-\frac{1}{\mu_0}\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})=0$$

式中已利用了 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足的边界条件.由此知

$$\int_V \mathrm{d}^3x\,\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)=\int_V \mathrm{d}^3x\,\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)\Big|_{t=0}=0$$

式中已利用了 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足的初始条件.由于上式左端被积函数恒正,故必有

$$E^2=0,\quad B^2=0$$

此即

$$\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{E}_2,\quad \boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{B}_2$$

§3.8 波动方程

首先推导场强的波动方程.为简单起见,只限于线性均匀介质(包括真空),Maxwell 方程组成为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho_f / \varepsilon \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu\varepsilon \dfrac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E} + \mu \boldsymbol{j}_f \end{cases} \tag{3.8.1}$$

将(3.8.1)中第四式对 t 微商，并利用(3.8.1)中第一、二式，得

$$\mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E} = \nabla^2 \boldsymbol{E} - \left(\frac{1}{\varepsilon}\nabla \rho_f + \mu \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{j}_f \right) \tag{3.8.2}$$

此即

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right)\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon}\left[\nabla \rho_f + \frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{j}_f \right] \tag{3.8.3}$$

式中

$$v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon} \tag{3.8.4}$$

同样，从式(3.8.1)中消去 $\boldsymbol{E}$，得

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right)\boldsymbol{B} = -\mu(\nabla \times \boldsymbol{j}_f) \tag{3.8.5}$$

式(3.8.3)与(3.8.5)称为电磁场的波动方程. 它表明：在不稳定的情形下，$\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均以波的形式存在，称为电磁波；而变化的电荷与电流可以激发或吸收电磁波，电磁波在线性介质中的传播速度为 $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$.

上述场的波动方程的右端同时与电荷分布和电流分布有关. 我们希望得到仅与电荷分布或电流分布有关的波动方程，这就是势的波动方程. 将(3.8.1)第一、四两式中的 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 用标势与矢势表出，可得

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi + \nabla \cdot \partial \boldsymbol{A}/\partial t = -\rho_f / \varepsilon \\ -\nabla^2 \boldsymbol{A} + \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) = -\dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial}{\partial t}(\nabla \varphi) - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{A} + \mu \boldsymbol{j}_f \end{cases} \tag{3.8.6}$$

它可改写成

$$\begin{cases} \left(\nabla^2 - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} \right)\varphi = -\dfrac{\rho_f}{\varepsilon} - \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \\ \left(\nabla^2 - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} \right)\boldsymbol{A} = -\mu \boldsymbol{j}_f + \nabla\left(\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \end{cases} \tag{3.8.7}$$

这分别是以 ρ_f 和 $\boldsymbol{j}_f$ 为源的标势 φ 与矢势 $\boldsymbol{A}$ 的波动方程.

现在，利用 A'' 的规范任意性来化简式(3.8.7). 选取 φ 与 $\boldsymbol{A}$ 使满足

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \mu\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \tag{3.8.8}$$

式(3.8.8)通常称为 Lorentz 规范条件，在真空中它就是协变形式的 Lorentz

条件

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{3.8.9}$$

在 Lorentz 规范条件下，式(3.8.7)成为

$$\begin{cases} \left(\nabla^2 - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = -\dfrac{\rho_f}{\varepsilon} \\ \left(\nabla^2 - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A} = -\mu \boldsymbol{j}_f \end{cases} \tag{3.8.10}$$

这是在 Lorentz 规范下标势与矢势的波动方程.

值得指出的是，总可以选取 φ 与 $\boldsymbol{A}$ 使 Lorentz 规范条件成立. 事实上，若对于给定的 φ 与 $\boldsymbol{A}$，关系式(3.8.8)不成立，则总可以按下式

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\chi = -\left(\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)$$

求出 χ，由规范变换

$$\varphi' = \varphi - \partial\chi/\partial t, \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\chi$$

确定的 φ' 与 $\boldsymbol{A}'$ 便满足式(3.8.8).

还需指出，Lorentz 规范条件并未将标势与矢势完全限定. 因为 Lorentz 规范条件与在该条件下的势的波动方程(3.8.10)在下述规范变换

$$\begin{cases} \varphi' = \varphi - \partial\chi_L/\partial t \\ \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\chi_L \end{cases} \tag{3.8.11}$$

下形式不变，式中 χ_L 满足

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\chi_L = 0 \tag{3.8.12}$$

另一种规范条件是所谓 Coulomb 规范：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0 \tag{3.8.13}$$

不难证明，这种规范条件也总是可以达到的. 在 Coulomb 规范下，势的波动方程成为

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi = -\rho_f/\varepsilon \\ \left(\nabla^2 - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A} - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi = -\mu\boldsymbol{j}_f \end{cases} \tag{3.8.14}$$

同样，Coulomb 规范条件并未将标势与矢势完全限定. 因为 Coulomb 规范条件与在该条件下的势的波动方程(3.8.14)在由满足

$$\nabla^2\chi_C = 0 \tag{3.8.15}$$

的 χ_C 所确定的规范变换(3.8.11)下形式不变.

此外，对于势，齐次的 Maxwell 方程成为恒等式. 因而，规范条件与在该条件下的势的波动方程可视为与 Maxwell 方程组等价. 特别地，由规范条件与在该条

件下的势的波动方程可推出电荷守恒定律.

习题 3-8

1. 在各向同性的线性均匀介质中,平面电磁波的电场可表示为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)]$$

式中 $\boldsymbol{k}$ 和 ω 分别是电磁波的波矢和频率,且 $k^2=\omega^2\mu\varepsilon$. 证明这一平面电磁波满足波动方程

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\mu\varepsilon\ddot{\boldsymbol{E}}=0$$

求出该电磁波的磁场.

2. 在某区域中,$\rho=0$,$\boldsymbol{j}=0$,$\mu=\mu_0$,且极化矢量 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r},t)$不为零.

(1) 证明这区域可视为具有电荷密度 $\rho'=-\nabla\cdot\boldsymbol{p}$ 和电流密度 $\boldsymbol{j}'=\dot{\boldsymbol{p}}$ 的真空.

(2) 证明电场强度 $\boldsymbol{E}$ 与磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 都可用 Hertz 矢量 $\boldsymbol{\pi}$ 来表示

$$\boldsymbol{E}=\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{\pi})-\boldsymbol{p}/\varepsilon_0,\quad \boldsymbol{B}=\mu_0\varepsilon_0\nabla\times\dot{\boldsymbol{\pi}}$$

式中 $\boldsymbol{\pi}$ 满足下述波动方程

$$\nabla^2\boldsymbol{\pi}-\mu_0\varepsilon_0\ddot{\boldsymbol{\pi}}=-\boldsymbol{p}/\varepsilon_0$$

(3) 试用 Hertz 矢量将矢势与标势表示出来.

3. 在各向同性的线性均匀介质中,电荷与电流分布由 $\rho(\boldsymbol{r},t)$与 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$给出. 证明可以找到一个矢量 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r},t)$,使得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{p}=-\rho,\quad \dot{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{j}$$

并证明 Maxwell 方程组可由满足下式

$$\nabla^2\boldsymbol{\pi}-\mu\varepsilon\ddot{\boldsymbol{\pi}}=-\boldsymbol{p}/\varepsilon$$

的 Hertz 矢量通过关系式

$$\boldsymbol{E}=\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{\pi})-\boldsymbol{p}/\varepsilon,\quad \boldsymbol{B}=\mu\varepsilon\nabla\times\dot{\boldsymbol{\pi}}$$

得到.

4. 在各向同性的线性均匀介质中,Maxwell 方程组可用下述复矢量

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{B}+\mathrm{i}\sqrt{\mu\varepsilon}\boldsymbol{E} \tag{3.8.16}$$

表示为两个复方程. 试求出这两个复方程. 如何将 $\boldsymbol{F}$ 用标势和矢势表出. 若区域中没有电荷与电流分布,证明 $\boldsymbol{F}$ 可用 Hertz 矢量 $\boldsymbol{\pi}$ 表出

$$\boldsymbol{F}=\mu\varepsilon\nabla\times\dot{\boldsymbol{\pi}}+\mathrm{i}\sqrt{\mu\varepsilon}\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{\pi}) \tag{3.8.17}$$

5. 设介质各向同性、线性,具有均匀磁导率 $\mu=\mu_0$ 和非均匀的介电常量 $\varepsilon=\varepsilon(\boldsymbol{r})$. 试证,若没有传导电荷与传导电流,则电磁场满足如下的波动方程

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\mu_0\varepsilon\ddot{\boldsymbol{E}}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})$$

$$\nabla^2\boldsymbol{H}-\mu_0\varepsilon\ddot{\boldsymbol{H}}=\varepsilon\nabla\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\times(\nabla\times\boldsymbol{H})$$

§3.9　平面电磁波的偏振

在与电磁波的传播方向 $\boldsymbol{n}$(设为 $\boldsymbol{e}_z$ 方向)垂直的平面(振动平面)上,电磁波

的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 可作下述分解：

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)]=(E_x\boldsymbol{e}_x+E_y\boldsymbol{e}_y)\exp[\mathrm{i}(kz-\omega t)] \tag{3.9.1}$$

式中 $\boldsymbol{e}_x$ 与 $\boldsymbol{e}_y$ 是电磁波振动平面上两个相互垂直的固定的实偏振基矢，且 $\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$ 与 $\boldsymbol{e}_z$ 三者成右手螺旋关系．定义复偏振基矢

$$\boldsymbol{e}_+=\frac{\boldsymbol{e}_x+\mathrm{i}\boldsymbol{e}_y}{\sqrt{2}},\quad \boldsymbol{e}_-=\frac{\boldsymbol{e}_x-\mathrm{i}\boldsymbol{e}_y}{\sqrt{2}} \tag{3.9.2}$$

则有

$$\boldsymbol{E}=(E_+\boldsymbol{e}_++\boldsymbol{E}_-\boldsymbol{e}_-)\exp[\mathrm{i}(kz-\omega t)] \tag{3.9.3}$$

式中

$$\boldsymbol{E}_+=\frac{E_x-\mathrm{i}E_y}{\sqrt{2}},\quad \boldsymbol{E}_-=\frac{E_x+\mathrm{i}E_y}{\sqrt{2}} \tag{3.9.4}$$

设 E_+ 波与 E_- 波的相位差为 ϕ_0，即

$$E_+=\sqrt{2}E_+^0\exp[\mathrm{i}(\phi_E+\phi_0/2)],\quad E_-=\sqrt{2}E_-^0\exp[\mathrm{i}(\phi_E-\phi_0/2)]$$

则

$$\boldsymbol{E}=[E_+^0(\boldsymbol{e}_x'+\mathrm{i}\boldsymbol{e}_y')+E_-^0(\boldsymbol{e}_x'+\mathrm{i}\boldsymbol{e}_y')^*]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} \tag{3.9.5}$$

式中 $\boldsymbol{e}_x'$ 与 $\boldsymbol{e}_y'$ 是分别由原来的基矢 $\boldsymbol{e}_x$ 与 $\boldsymbol{e}_y$ 绕 z 轴旋转角度 $\phi_0/2$ 而形成的：

$$\boldsymbol{e}_x'+\mathrm{i}\boldsymbol{e}_y'=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_0/2}(\boldsymbol{e}_x+\mathrm{i}\boldsymbol{e}_y) \tag{3.9.6}$$

由(3.9.5)得

$$\begin{cases}E_x'=\mathrm{Re}(\boldsymbol{e}_x'\cdot\boldsymbol{E})=(E_+^0+E_-^0)\cos(kz-\omega t+\phi_0)\\ E_y'=\mathrm{Re}(\boldsymbol{e}_y'\cdot\boldsymbol{E})=-(E_+^0-E_-^0)\sin(kz-\omega t+\phi_0)\end{cases} \tag{3.9.7}$$

这说明，$\boldsymbol{E}$ 的矢端的轨迹一般是一个长轴为 $|E_+^0+E_-^0|$、短轴为 $|E_+^0-E_-^0|$ 的椭圆，该椭圆的长轴与原来的 x 轴的夹角为 $\phi_0/2$；换言之，相应的电磁波是椭圆偏振波．

特别地，当 $E_-^0=0$ 时有

$$\begin{cases}E_x'=E_+^0\cos(\omega t-kz-\phi_0)\\ E_y'=E_+^0\sin(\omega t-kz-\phi_0)\end{cases} \tag{3.9.8}$$

这时，$\boldsymbol{E}$ 的矢端的轨迹是一个圆，且其随时间旋转的方向与波矢方向 $\boldsymbol{e}_z$ 成右手螺旋，故称为右旋圆偏振波．当 $E_+^0=0$ 时有

$$\begin{cases}E_x'=E_-^0\cos(-\omega t+kz+\phi_0)\\ E_y'=E_-^0\sin(-\omega t+kz+\phi_0)\end{cases} \tag{3.9.9}$$

这时，$\boldsymbol{E}$ 的矢端的轨迹是一个圆，且其随时间旋转的方向与波矢方向 $\boldsymbol{e}_z$ 成左手螺旋，故称为左旋圆偏振波．[注：右(左)旋圆偏振波的 $\boldsymbol{E}$ 的矢端当 t 固定时按左(右)手螺旋随 z 而旋进，故有的文献称其为左(右)旋圆偏振波．]

当 $E_+ = E_- \neq 0$ 时有

$$\begin{cases} E'_x = 2E_+^0 \cos(\omega t - kz - \phi_0) \\ E'_y = 0 \end{cases} \tag{3.9.10}$$

这时，$\boldsymbol{E}$ 的矢端在 $\boldsymbol{e}'_x$ 方向上来回振动，相应的电磁波是沿着 $\boldsymbol{e}'_x$ 方向的线偏振波．而当 $E_+ = -E_- \neq 0$ 时有

$$\begin{cases} E'_x = 0 \\ E'_y = 2E_+^0 \sin(\omega t - kz - \phi_0) \end{cases} \tag{3.9.11}$$

这时的电磁波是沿着 $\boldsymbol{e}'_y$ 方向的线偏振波．

习题 3－9

1. 由左旋圆偏振波和右旋圆偏振波合成的波一般是椭圆偏振波．试问椭圆偏振波为左旋圆偏振波或右旋圆偏振波的条件是什么？
2. 有两个频率和振幅都相等的单色平面波沿 z 轴正方向传播，其中一个波沿 $\boldsymbol{e}_x$ 方向偏振；另一个波沿 $\boldsymbol{e}_y$ 方向偏振，但相位比前者超前 $\pi/2$．求合成波的振幅．反之，一个圆偏振波可以分解为怎样的两个线偏振波．
3. 若将振幅为 $\boldsymbol{E}_0$ 的某一线偏振波分解为振幅分别为 $\boldsymbol{E}_0^{(l)}$ 与 $\boldsymbol{E}_0^{(r)}$ 的左右圆偏振波，证明总的瞬时能量密度为

$$W = \frac{\varepsilon}{2} | \boldsymbol{E}_0^{(l)} + \boldsymbol{E}_0^{(r)} |^2$$

4. 若将一椭圆偏振波分解为两个沿相互垂直方向振动的线偏振波，证明：
   (1) 椭圆偏振波的瞬时(或时平均)能量密度等于两个线偏振波的瞬时(或时平均)能量密度之和．
   (2) 椭圆偏振波的瞬时(或时平均)能流密度矢量等于两个线偏振波的瞬时(或时平均)能流密度矢量之和．
5. 证明一圆偏振波的瞬时能流密度矢量为常矢量．

§3.10　电磁场的螺旋度

考虑真空中的无源(自由)电磁场．首先，我们注意到利用自由电磁场的一个重要的 Lorentz 不变量是

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -2(E^2/c^2 - B^2)$$

可将自由电磁场的作用量(3.2.16)改写为

$$S_{\text{f free}} = \frac{1}{2\mu_0 c} \int \mathrm{d}^4 x \left(\frac{E^2}{c^2} - B^2 \right) \tag{3.10.1}$$

代替(3.10.1)，我们考虑下述作用量

$$S=\frac{1}{2\mu_0 c}\int \mathrm{d}^4 x\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F} \tag{3.10.2}$$

式中引入了一个复矢量场 $\boldsymbol{F}$

$$\boldsymbol{F}=\frac{\boldsymbol{E}}{c}+\mathrm{i}\boldsymbol{B}=-\frac{\nabla\phi}{c}-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{c\partial t}+\mathrm{i}\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{3.10.3}$$

作用量(3.10.2)与自由电磁场的作用量(3.10.1)之差为

$$\Delta S=S-S_{\mathrm{f\,free}}=\frac{\mathrm{i}}{\mu_0 c^2}\int \mathrm{d}^4 x\left(\nabla\phi+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) \tag{3.10.4}$$

利用微分恒等式及分部积分,可证

$$\int \mathrm{d}^4 x(\nabla\phi)\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=\int \mathrm{d}^4 x\nabla\cdot(\phi\nabla\times\boldsymbol{A})=0 \tag{3.10.5}$$

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^4 x\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})&=-\int \mathrm{d}^4 x\boldsymbol{A}\cdot\left(\nabla\times\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)\\&=-\int \mathrm{d}^4 x\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\times\nabla\right)\cdot\boldsymbol{A}\\&=-\int \mathrm{d}^4 x\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0\end{aligned} \tag{3.10.6}$$

式中已略去了在边界上的积分,因为它们在变分时没有贡献.由(3.10.5)与(3.10.6)可知,作用量(3.10.2)与自由电磁场的作用量(3.10.1)之差在变分时为零,它们应当导出同样的运动方程.

进而,为了将复矢量场 $\boldsymbol{F}$ 的定义式(3.10.3)也能自动由最小作用量原理导出,可将作用量(3.10.2)改写为

$$S=-\frac{1}{2\mu_0 c}\int \mathrm{d}^4 x\left\{\frac{1}{2}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}-\boldsymbol{F}\cdot\left[-\frac{\nabla\phi}{c}-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{c\partial t}+\mathrm{i}\nabla\times\boldsymbol{A}\right]\right\} \tag{3.10.7}$$

现在对作用量(3.10.7)应用最小作用量原理.首先,作用量对 $\boldsymbol{F}$ 的变分为零:

$$0=\frac{\delta S}{\delta\boldsymbol{F}}=-\frac{1}{2\mu_0 c}\left[\boldsymbol{F}-\left(-\frac{\nabla\phi}{c}-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{c\partial t}+\mathrm{i}\nabla\times\boldsymbol{A}\right)\right] \tag{3.10.8}$$

此即复矢量场 $\boldsymbol{F}$ 的定义式(3.10.3).

为了得到关于 $\boldsymbol{F}$ 的运动方程,将作用量对 $\boldsymbol{A}$ 变分,我们有

$$0=\delta S=\frac{1}{2\mu_0 c}\int \mathrm{d}^4 x\boldsymbol{F}\cdot\left[-\frac{\partial\delta\boldsymbol{A}}{c\partial t}+\mathrm{i}\nabla\times\delta\boldsymbol{A}\right] \tag{3.10.9}$$

式中,δS 表示仅当矢势 $\boldsymbol{A}$ 变化为 $\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A}$ 所引起的变化.经过分部积分得

$$0=\frac{1}{2\mu_0 c}\int \mathrm{d}^4 x\left[\frac{\partial\boldsymbol{F}}{c\partial t}+\mathrm{i}\nabla\times\boldsymbol{F}\right]\cdot\delta\boldsymbol{A} \tag{3.10.10}$$

由于变分 $\delta\boldsymbol{A}$ 是任意的,我们有

$$\mathrm{i}\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial t}=c\nabla\times\boldsymbol{F} \tag{3.10.11}$$

将作用量对 ϕ 变分，我们有

$$0=\delta S=\frac{1}{2\mu_0 c^2}\int \mathrm{d}^4 x\boldsymbol{F}\cdot\nabla\delta\phi \tag{3.10.12}$$

式中，δS 表示仅当标势 ϕ 变化为 $\phi+\delta\phi$ 所引起的变化. 经过分部积分得

$$0=\frac{1}{2\mu_0 c^2}\int \mathrm{d}^4 x(\nabla\cdot\boldsymbol{F})\delta\phi \tag{3.10.13}$$

由于变分 $\delta\phi$ 是任意的，我们有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=0 \tag{3.10.14}$$

方程(3.10.11)与(3.10.14)便是复电磁场 $\boldsymbol{F}$ 的运动方程，它等价于真空中的无源 Maxwell 方程. 现引入三个矩阵：

$$\hat{S}_1=\hbar\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-\mathrm{i}\\0&\mathrm{i}&0\end{pmatrix},\hat{S}_2=\hbar\begin{pmatrix}0&0&\mathrm{i}\\0&0&0\\-\mathrm{i}&0&0\end{pmatrix},\hat{S}_3=\hbar\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}&0\\\mathrm{i}&0&-\mathrm{i}\\0&\mathrm{i}&0\end{pmatrix} \tag{3.10.15}$$

它们满足下述对易关系：

$$[\hat{S}_i,\hat{S}_j]=\mathrm{i}\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{S}_k \tag{3.10.16}$$

与矩阵等式

$$\hat{S}_1^2+\hat{S}_2^2+\hat{S}_3^2=S(S+1),S=1 \tag{3.10.17}$$

并定义动量算符

$$\hat{\boldsymbol{p}}=-\mathrm{i}\hbar\nabla \tag{3.10.18}$$

式中 $\hbar$ 是 Planck 常数. 于是，方程(3.10.11)与(3.10.14)可写为

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}=c\hat{\boldsymbol{S}}\hat{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t) \tag{3.10.19}$$

$$\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t)=0 \tag{3.10.20}$$

式中，算符(或矩阵)$\hat{\boldsymbol{S}}$作用在下述列矩阵

$$\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}F_1\\F_2\\F_3\end{pmatrix} \tag{3.10.21}$$

所张的矢量函数空间上. (3.10.19)与(3.10.20)实际上是量子力学中自由光子所满足的 Schrödinger 方程. (注意：它与量子力学中静止质量为零的自由费米子的两分量 Pauli 旋量所满足的运动方程完全类似，只不过出现在该方程中的自旋矩阵是 2×2 矩阵，而场量是两分量列矩阵所描述的 Pauli 旋量.)这里我们看到一个非常有趣的现象：经典场的运动方程与点粒子的量子力学方程等价. 它是波粒二象性的初级表现形式.

进一步,定义所谓螺度算符

$$\hat{h}=\hat{\boldsymbol{S}}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}/|\boldsymbol{p}| \tag{3.10.22}$$

并考察螺度算符的本征值问题

$$\hat{h}\boldsymbol{F}_{\lambda}(\boldsymbol{x},t)=\lambda\boldsymbol{F}_{\lambda}(\boldsymbol{x},t) \tag{3.10.23}$$

式中 λ 称为螺度算符 $\hat{h}$ 的本征值,而 $\boldsymbol{F}_{\lambda}(\boldsymbol{x},t)$ 是属于该本征值的本征函数.取电磁波 $\boldsymbol{F}$ 的波矢 $\boldsymbol{k}$ 或"动量" $\boldsymbol{p}=\hbar\boldsymbol{k}$ 的方向为 $\boldsymbol{e}_z$ 方向.则螺度算符的矩阵为

$$\hat{h}=\hat{S}_3/\hbar \tag{3.10.24}$$

本征值由下述久期方程决定:

$$\det\{\hat{h}-\lambda\mathscr{I}\}=\det\{\hat{S}_3/\hbar-\lambda\mathscr{I}\}=0 \tag{3.10.25}$$

其解为

$$\lambda_+=+1,\quad \lambda_-=-1,\quad \lambda_0=0 \tag{3.10.26}$$

对于确定的本征值 λ,可由代数方程(3.10.22)定出相应的本征函数.结果为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{\lambda=+}&=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\\ 0\end{pmatrix}\left(\frac{E_0}{c}+B_0\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}kz}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_x+\mathrm{i}\boldsymbol{e}_y)\left(\frac{E_0}{c}+B_0\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}kz}\end{aligned} \tag{3.10.27}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{\lambda=-}&=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -\mathrm{i}\\ 0\end{pmatrix}\left(\frac{E_0}{c}+B_0\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}kz}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_x-\mathrm{i}\boldsymbol{e}_y)\left(\frac{E_0}{c}+B_0\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}kz}\end{aligned} \tag{3.10.28}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{\lambda=3}&=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\left(\frac{E_0}{c}+B_0\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}kz}\\&=\boldsymbol{e}_z\left(\frac{E_0}{c}+B_0\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}kz}\end{aligned} \tag{3.10.29}$$

按上节的定义可知,由(3.10.27)或(3.10.28)式确定的电磁波分别为右(螺)旋或左(螺)旋圆偏振波,它们与平面电磁波的传播方向 $\boldsymbol{k}$ 垂直;而由(3.10.29)确定的平面波的偏振方向正好与电磁波的传播方向 $\boldsymbol{k}$ 平行,被称为纵波.值得指出的是,由于自由电磁场 $\boldsymbol{F}$ 必须满足横向条件(3.10.20),因而自由的纵波模式 $\lambda=0$ 不存在.

作为本节的结尾,我们来进一步分析算符 $\hat{\boldsymbol{S}}$ 的物理意义.为此,考虑真空中

电磁场的总角动量的表达式

$$\boldsymbol{J}=\int \mathrm{d}^3x\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{g}=\varepsilon_0\int \mathrm{d}^3x\boldsymbol{x}\times[\boldsymbol{E}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})] \tag{3.10.30}$$

简单的矢量运算导致

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}\times[\boldsymbol{E}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})]&=E_i(\boldsymbol{x}\times\nabla)A_i-E_i(\boldsymbol{x}\times\nabla_i)\boldsymbol{A}\\&=E_i(\boldsymbol{x}\times\nabla)A_i+\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{A}-\nabla_i(E_i\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{A})\end{aligned} \tag{3.10.31}$$

上式中最后一项在全空间中的体积分为零.因而,真空中电磁场的总角动量可表为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}&=\int \mathrm{d}^3x\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{g}=\varepsilon_0\int \mathrm{d}^3x[E_i(\boldsymbol{x}\times\nabla)A_i+\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{A}]\\&=\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\varepsilon_0\int \mathrm{d}^3xE_i[\boldsymbol{x}_i\times(-\mathrm{i}\hbar\nabla_j)+\hat{\boldsymbol{S}}_{ij}]A_j\end{aligned} \tag{3.10.32}$$

式中我们已注意到由(3.10.15)定义的算符 $\hat{\boldsymbol{S}}$ 可简写为

$$(\hat{S}_i)_{jk}=-\mathrm{i}\hbar\varepsilon_{ijk} \tag{3.10.33}$$

(3.10.15)式告诉我们

$$\hat{\boldsymbol{J}}=\boldsymbol{x}\times\hat{\boldsymbol{p}}+\hat{\boldsymbol{S}} \tag{3.10.34}$$

是电磁场的总角动量算符,它的第一部分(上式右端第一项)是轨道角动量算符,它的第二部分(上式右端第二项)是所谓自旋角动量算符;这两个算符夹在电场强度和矢势之间而得到的乘积的空间积分分别是电磁场的轨道角动量与自旋角动量.

值得指出的是,真空中自由电磁场的自旋角动量并不守恒,它与电磁场的总角动量密不可分地联系在一起.然而,可以证明,右旋平面电磁波与左旋平面电磁波满足电磁场的运动方程(3.10.19)与(3.10.20).故自旋角动量在自由电磁波传播方向上的投影即电磁场的螺旋度才是守恒量(或者说,才可以确切地定义).

习题 3-10

1. 复电磁场 $\boldsymbol{F}$ 的运动方程为(3.10.11)与(3.10.14),试证明它们与真空中的无源 Maxwell 方程等价.
2. 试证明方程(3.10.11)与(3.10.14)等价于方程(3.10.19)与(3.10.20).
3. 试证明,右旋平面电磁波与左旋平面电磁波满足自由电磁场的运动方程(3.10.19)与(3.10.20).

第四章 恒 场

本章由恒场条件导出在各种情形下恒场(包括静电场与静磁场)所遵从的基本方程及相应的边界条件,用于解决包括导体系在内的各种静电学问题,并介绍对限制在小区域中的稳恒源(即稳定的电荷分布与电流分布)的势、场强与能量进行分析的多极展开方法.

§4.1 恒场的基本方程

4.1.1 恒场条件

恒场是满足下述关系(恒场条件)

$$\partial \boldsymbol{E}/\partial t=0, \qquad \partial \boldsymbol{B}/\partial t=0 \tag{4.1.1}$$

的电磁场.对于恒场,Maxwell 方程组成为

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_{\mathrm{f}}, & \nabla\times\boldsymbol{E}=0\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0, & \nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}\end{cases} \tag{4.1.2}$$

对方程组(4.1.2)应用恒场定义(4.1.1)得(恒源条件)

$$\partial \rho_{\mathrm{f}}/\partial t=0, \qquad \partial \boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}/\partial t=0 \tag{4.1.3}$$

可见,维持电磁场恒定的必要条件是:必须有恒定的电荷分布与电流分布.由恒源条件与电荷守恒定律可得(稳流条件)

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}=0; \quad \text{或}\oint_S \mathrm{d}\sigma\cdot\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}=0,\text{对任一封闭曲面 } S \tag{4.1.4}$$

这里有三种可能情形

$$\left.\begin{array}{lllll}(\mathrm{a}) & \rho_{\mathrm{f}}=0, & \boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}=0 & & \\ (\mathrm{b}) & \rho_{\mathrm{f}}\neq 0, & \boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}=0, & \partial\rho_{\mathrm{f}}/\partial t=0 & \\ (\mathrm{c}) & \rho_{\mathrm{f}}\neq 0, & \boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}\neq 0, & \partial\rho_{\mathrm{f}}/\partial t=0, & \partial\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}/\partial t=0\end{array}\right\} \tag{4.1.5}$$

对于情形(a),Maxwell 方程组有解 $\boldsymbol{E}=0,\boldsymbol{B}=0$.由 Maxwell 方程组的完备性知,这是唯一的一组解.因而恒定的电磁场不存在.对于情形(b),Maxwell 方程组仅具有形如 $\boldsymbol{E}\neq 0,\boldsymbol{B}=0$ 的解.因而仅存在恒定的电场(静电场情形).对于情形(c),静电场与静磁场(即恒定的磁场)同时存在,且有稳恒的电流分布(稳恒电流情形).

可以看出,Maxwell 方程不允许仅存在静磁场而没有静电场的情形出现.在静磁场不为零的情形(稳恒电流情形)下,静电场必须存在的一个重要原因是:静电场对稳定电流的建立与维持起着关键性的作用.这可由 Ohm 定律

$$\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}=\sigma_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{K}) \tag{4.1.6}$$

看出.对于电池外电路中的导线,外来电动力 $\boldsymbol{K}$ 不存在,因而导线中每一点的电流是由该点的电场推动的;在电池内部,正电荷在外来电动力的作用下克服电场力做功而形成持续的电流,并完成能量从其他形式(例如化学能)向电磁能的转化.若对于某一封闭面 S,流出的电荷(指正电荷)少,流入的电荷多,S 面内积累的正电荷的静电场将使流入的电流减小,使流出的电流增大;反之,若流出的电

荷多,流入的电荷少,S 面内积累的负电荷的静电场将使流入的电流增大,使流出的电流减小;这种由静电场随时进行的精细调节作用使电流分布保持稳定.

值得指出的是,体系要保持电流稳定流动的必要条件是存在外来电动力即 $\boldsymbol{K}\neq 0$. 这是因为由 Ohm 定律与电磁场恒定条件知电磁场的能量定理可写为下述形式:

$$\int_V \mathrm{d}v\boldsymbol{j}_f\cdot\boldsymbol{K}=\int_V \mathrm{d}v\frac{j_f^2}{\sigma_c}+\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{s} \tag{4.1.7}$$

所以,要维持体系内电流稳定,必须有外来电动力做功,以补偿体系内 Joule 热损耗和从体系界面流出去的能量. 正是静电场的作用力与外来电动力之间的细致平衡,产生了稳恒的电流分布.

4.1.2 静电场基本方程

现求静电场所遵循的基本规律. 将(4.1.5)中(b)的相应条件代入 Maxwell 方程可得静电场所满足的基本方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_f,\qquad \nabla\times\boldsymbol{E}=0 \tag{4.1.8}$$

及相应的边值关系

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}_{12}\cdot(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)=\omega_f\\ \boldsymbol{n}_{12}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=0\end{cases} \tag{4.1.9}$$

由于此时磁场及 $\boldsymbol{j}_f$ 均为零,另一半 Maxwell 方程实际上是恒等式. 由(4.1.8)第二式知静电场为纵场.

对于各向同性的线性介质,静电场的基本方程可写成下述标势形式:

$$\nabla\cdot(\varepsilon\nabla\varphi)=-\rho_f \tag{4.1.10}$$

式中,介电常量 ε 可能与 $\boldsymbol{x}$ 有关. 若介质是分区均匀的,则在均匀区域内部,介电常量是常量,与 $\boldsymbol{x}$ 无关,故有

$$\nabla^2\varphi=-\rho_f/\varepsilon,\qquad \text{当介质各向同性、线性均匀时} \tag{4.1.11}$$

在两个不同的均匀区域的分界面上有

$$\varphi_1=\varphi_2 \tag{4.1.12}$$

$$\varepsilon_1\partial\varphi_1/\partial n_{12}-\varepsilon_2\partial\varphi_2/\partial n_{12}=\omega_f \tag{4.1.13}$$

式中第一个边值关系来自于方程 $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$ 或

$$\varphi=-\int_{\text{无穷远处}}^{(x,y,z)}\mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{E} \tag{4.1.14}$$

因而 φ 是 x、y、z 的连续可微函数,故有式(4.1.12),从而场的边值关系(4.1.9)也自动满足.

对于导电介质,在静电平衡时,导电介质内部应有

$$\nabla\varphi_{\text{导体内}} = -\boldsymbol{E}|_{\text{导体内}} = -\frac{1}{\sigma_c}\boldsymbol{j}_f|_{\text{导体内}} = 0 \tag{4.1.15}$$

上式中第二个等号应用了外来电动力 $\boldsymbol{K}$ 不存在时的 Ohm 定律(4.1.6).可见,由于导体内电场强度恒为零,整个导体成为等势体.进而

$$\rho|_{\text{导体内}} = -\nabla^2\varphi_{\text{导体内}}/\varepsilon_0 = 0 \tag{4.1.16}$$

因而导体内部电荷密度为零.若导体是由各向同性、线性均匀介质构成的,则

$$\rho_f|_{\text{导体内}} = -\nabla^2\varphi/\varepsilon|_{\text{导体内}} = 0 \tag{4.1.17}$$

故均匀导体内部不可能存在自由电荷的堆积,自由电荷仅可能分布在导体表面上.于是对于导体表面 S,边值关系可写成

$$\varphi|_{\text{边界}S} = \text{常量}; \quad \text{或者说,导体表面为等势面} \tag{4.1.18}$$

$$\partial\varphi/\partial n|_{\text{边界}S} = -\omega_f/\varepsilon \quad \text{或} \quad Q_f = -\varepsilon\oint_S \mathrm{d}\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial n} \tag{4.1.19}$$

式中 $\boldsymbol{n}$ 为导体表面的外法向,$\partial\varphi/\partial n$ 为导体外的电势在导体表面的外法向 $\boldsymbol{n}$ 上的方向微商,ε 为包围导体的绝缘介质的介电常量.值得指出的是:式(4.1.18)是式(4.1.12)的一种特殊情形;式(4.1.18)说明边界 S 上所有点的势都等于同一个常量,这个量便是导体的电势,而式(4.1.12)虽然对边界 S 上所有点都成立,但 S 上不同点的势可能不同.此外,由于导体为等势体有

$$\varepsilon_1\partial\varphi_1/\partial n_{12} = 0 \tag{4.1.20}$$

这里已假定导体为介质 1.因而,式(4.1.13)成为(4.1.19)第二行第一式;再对导体整个外表面积分,并注意到

$$Q_f = \oint_S \mathrm{d}\sigma\omega_f \tag{4.1.21}$$

便得到(4.1.19)第二行第二式(即所谓导体的总电荷条件).

4.1.3 稳恒电流体系的基本方程(静电场)

现求稳恒电流体系所遵循的基本规律.将(4.1.5)中(c)的相应条件代入 Maxwell 方程可得稳恒电流体系所满足的基本方程为

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho_f, & \nabla\times\boldsymbol{E} = 0\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0, & \nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}_f\end{cases} \tag{4.1.22}$$

由以上方程第一行第二式知在此情形下的静电场仍为纵场.

在各向同性的线性介质中,方程(4.1.22)可写成

$$\begin{cases}\nabla\cdot(\varepsilon\boldsymbol{E}) = \rho_f, & \nabla\times\boldsymbol{E} = 0\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0, & \nabla\times(\boldsymbol{B}/\mu) = \boldsymbol{j}_f\end{cases} \tag{4.1.23}$$

这时伴随静电场满足一组封闭的方程,求出其满足相应边界条件的解后可由 Ohm 定律

$$\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}=\sigma_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{K})$$

定出相应的电流分布,再由第二组方程即可求出在相应边界条件下的稳恒电流的静磁场.

稳恒电流体系的静电场

当体系的传导电荷分布 ρ_{f} 未知时,不能按前述步骤求出静电场分布.然而,可以推出另一种形式的方程,以便可不利用传导电荷分布的信息而得到静电场分布.将 Ohm 定律

$$\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}=\sigma_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{K})$$

代入稳恒电流条件

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}=0$$

[它相当于式(4.1.22)中第四式]可得到导电介质中稳恒电流所伴随的静电场满足的基本方程

$$\nabla\cdot(\sigma_{\mathrm{c}}\nabla\varphi)=\nabla\cdot(\sigma_{\mathrm{c}}\boldsymbol{K}) \tag{4.1.24}$$

对于没有外来电动力即 $\boldsymbol{K}=0$ 的区域有

$$\nabla\cdot(\sigma_{\mathrm{c}}\nabla\varphi)=0 \tag{4.1.25}$$

对于均匀介质,σ_{c} 是与位置无关的常量,故

$$\nabla^2\varphi=0 \tag{4.1.26}$$

相应的边值条件是

$$\begin{cases}\varphi_1=\varphi_2\\ \sigma_{\mathrm{c}1}\partial\varphi_1/\partial n=\sigma_{\mathrm{c}2}\partial\varphi_2/\partial n\end{cases} \tag{4.1.27}$$

现证明式(4.1.27)中的第二个边值条件.在普通导体面上自由电流面密度

$$\Pi_{\mathrm{f}}=0$$

这是由于在普通导体中

$$\sigma_{\mathrm{c}}\neq 0$$

故面电流密度 Π_{f} 的存在意味着无限大的体电流密度存在,从而导致存在无限大的电场强度,与实际情形不符合.于是稳恒电流条件在导体面上成为

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{j}_{1\mathrm{f}}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{j}_{2\mathrm{f}} \tag{4.1.28}$$

若略去接触电势差,则在导体接触面上有

$$\boldsymbol{n}\cdot(\sigma_{\mathrm{c}1}\boldsymbol{E}_1)=\boldsymbol{n}\cdot(\sigma_{\mathrm{c}2}\boldsymbol{E}_2) \tag{4.1.29}$$

此即(4.1.27)中的第二式.

求出电势分布后,稳恒电流体系所伴随的电荷分布可由(4.1.10)与(4.1.13)式求出,即

$$\begin{cases}\rho_{\mathrm{f}}=\nabla\cdot\left(\dfrac{\varepsilon}{\sigma_{\mathrm{c}}}\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}\right)-\nabla\cdot(\varepsilon\boldsymbol{K})=\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}\cdot\nabla\left(\dfrac{\varepsilon}{\sigma_{\mathrm{c}}}\right)-\nabla\cdot(\varepsilon\boldsymbol{K})\\ \omega_{\mathrm{f}}=\boldsymbol{n}_{12}\cdot\left[\dfrac{\varepsilon_2}{\sigma_{\mathrm{c}2}}\boldsymbol{j}_{2\mathrm{f}}-\dfrac{\varepsilon_1}{\sigma_{\mathrm{c}1}}\boldsymbol{j}_{1\mathrm{f}}\right]=\left[\dfrac{\varepsilon_2}{\sigma_{\mathrm{c}2}}-\dfrac{\varepsilon_1}{\sigma_{\mathrm{c}1}}\right]\boldsymbol{n}_{12}\cdot\boldsymbol{j}_{1\mathrm{f}}\end{cases}\tag{4.1.30}$$

式中已利用了导体内与导体面上的稳恒电流条件.若

$$\boldsymbol{K}=0,\quad \varepsilon/\sigma_{\mathrm{c}}=\text{常量}$$

则由(4.1.30)中第一式得 $\rho_{\mathrm{f}}=0$.这意味着在均匀导体内部的无源区域不会出现自由电荷堆积,只有当导体的性质(即其介电常量与电导率的比值)沿着电流流向不均匀即

$$\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}\cdot\nabla(\varepsilon/\sigma_{\mathrm{c}})\neq0$$

时,才可能在导体内出现自由电荷.因而,对于分区均匀的导体,电荷仅可能分布在其交界面上.进而,由(4.1.30)中第二式可知,如果交界面两侧的 $\varepsilon/\sigma_{\mathrm{c}}$ 值相等,交界面上也不存在自由面电荷密度.

4.1.4 稳恒电流体系的基本方程(静磁场)

对于稳恒电流体系中的静磁场,其基本方程是(4.1.22)中第二行的两个公式

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\quad \nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}\tag{4.1.31}$$

相应的边值关系是

$$\boldsymbol{n}_{12}\cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)=0,\quad \boldsymbol{n}_{12}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{f}}\tag{4.1.32}$$

在各向同性的线性介质中可将(4.1.31)写成矢势形式.在 Coulomb 规范(对恒场它等价于 Lorentz 规范)$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$ 中,将 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$ 代入(4.1.31)可得

$$\nabla^2\boldsymbol{A}=-\mu\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}},\quad \text{在线性均匀介质中}\tag{4.1.33}$$

相应的边值关系是

$$\boldsymbol{n}_{12}\times(\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{A}_2)=0,\quad \text{即 } \boldsymbol{A} \text{ 沿边界切向连续}\tag{4.1.34}$$

$$\left[\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial\boldsymbol{A}_1}{\partial n_{12}}-\frac{1}{\mu_2}\frac{\partial\boldsymbol{A}_2}{\partial n_{12}}\right]-\left[\frac{1}{\mu_1}\nabla\boldsymbol{A}_1-\frac{1}{\mu_2}\nabla\boldsymbol{A}_2\right]\cdot\boldsymbol{n}_{12}=\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{f}}\tag{4.1.35}$$

式中,第一个边值关系来自于方程

$$\oint_L\mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{A}=\int_S\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}$$

事实上,将上式应用于图 3.3 中分界面上的与分界面垂直的平行四边形面元有

$$\boldsymbol{m}\mathrm{d}l\cdot(\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{A}_2)=\boldsymbol{m}\mathrm{d}l\times\boldsymbol{n}_{12}\cdot(\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2)/2$$

令 $\delta\to0$ 得

$$\boldsymbol{m}\cdot(\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{A}_2)=0$$

此即

$$(\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{A}_2)_t=0,\quad \text{即 } \boldsymbol{n}_{12}\times(\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{A}_2)=0$$

注意到 $\boldsymbol{A}$ 是 x、y、z 的连续可微函数,可知场的边值关系(4.1.32)中的第一式自动满足,即

$$\boldsymbol{n}_{12}\cdot(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2)=\nabla\cdot\boldsymbol{n}_{12}\times(\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{A}_2)=0$$

场的边值关系(4.1.35)中第二式可推证如下:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Pi}&=\boldsymbol{n}_{12}\times[\nabla\times(\boldsymbol{A}_2/\mu_2-\boldsymbol{A}_1/\mu_1)]\\&=-\boldsymbol{n}_{12}\cdot\nabla(\boldsymbol{A}_2/\mu_2-\boldsymbol{A}_1/\mu_1)+\nabla(\boldsymbol{A}_2/\mu_2-\boldsymbol{A}_1/\mu_1)\cdot\boldsymbol{n}_{12}\end{aligned}$$

例 1.1:全空间充满各向同性的均匀线性介质,且有一给定的传导电荷分布或稳恒电流分布,求空间中的静电场、静磁场以及任意两个电荷体系或电流体系之间的相互作用力.

解:恒场的标势与矢势满足

$$\nabla^2\varphi=-\rho_f/\varepsilon,\quad \nabla^2\boldsymbol{A}=-\mu\boldsymbol{j}_f \tag{4.1.36}$$

利用公式

$$\nabla^2(1/r)=-4\pi\delta^3(\boldsymbol{x})$$

知上述 Poisson 方程在无界区域中具有解

$$\begin{cases}\varphi(\boldsymbol{x})=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\displaystyle\int d^3x'\,\frac{\rho_f(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\dfrac{\mu}{4\pi}\displaystyle\int d^3x'\,\frac{\boldsymbol{j}_f(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\end{cases} \tag{4.1.37}$$

相应的电场与磁场为

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\displaystyle\int d^3x'\,\frac{\rho_f(\boldsymbol{x}')(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}\\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})=\dfrac{\mu}{4\pi}\displaystyle\int d^3x'\,\frac{\boldsymbol{j}_f(\boldsymbol{x}')\times(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}\end{cases} \tag{4.1.38}$$

式(4.1.38)称为 Biot-Savart 定律.根据 Lorentz 力公式,电荷体系或电流体系 1 对电荷体系或电流体系 2 的相互作用力是

$$\boldsymbol{F}_{12}^{e}=\frac{-1}{4\pi\varepsilon}\int_{V_1}d^3x\int_{V_2}d^3x'\,\frac{\rho_{1f}(\boldsymbol{x})\rho_{2f}(\boldsymbol{x}')(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3} \tag{4.1.39}$$

$$\boldsymbol{F}_{12}^{m}=\frac{-\mu}{4\pi}\int_{V_1}d^3x\int_{V_2}d^3x'\,\frac{\boldsymbol{j}_{1f}(\boldsymbol{x})\times[\boldsymbol{j}_{2f}(\boldsymbol{x}')\times(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')]}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3} \tag{4.1.40}$$

式中 V_1,V_2 是两电荷体系或电流体系所在的空间区域.

若电流体系是一个稳恒电流圈 L,则电流圈上沿电流方向的位移 $d\boldsymbol{l}$ 满足

$$\boldsymbol{j}_f\times d\boldsymbol{l}=0$$

因而若令 $d\boldsymbol{\sigma}$ 是电流圈的横截面,则

$$\boldsymbol{j}_f(d\boldsymbol{\sigma}\cdot d\boldsymbol{l})-(\boldsymbol{j}_f\cdot d\boldsymbol{\sigma})d\boldsymbol{l}=d\boldsymbol{\sigma}\times(\boldsymbol{j}_f\times d\boldsymbol{l})=0$$

此即

$$\boldsymbol{j}_f dv=(\boldsymbol{j}_f\cdot d\boldsymbol{\sigma})d\boldsymbol{l} \tag{4.1.41}$$

于是由式(4.1.37)得稳恒电流圈 L 的矢势为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\frac{\mu I}{4\pi}\oint_L\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \tag{4.1.42}$$

式中 $I=\int \boldsymbol{j}_f(\boldsymbol{x}')\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}'=$ 常量.类似地,相应的磁感强度为

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})=\frac{\mu I}{4\pi}\oint_L\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}'\times(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3} \tag{4.1.43}$$

对于两个电流回路,式(4.1.40)可写成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{LL'}^{\mathrm{m}}&=\frac{\mu II'}{4\pi}\oint_L\oint_{L'}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times[\mathrm{d}\boldsymbol{l}'\times(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')]}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}\\&=-\frac{\mu II'}{4\pi}\oint_L\oint_{L'}\frac{(\mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}')(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}\end{aligned} \tag{4.1.44}$$

式中最后一步应用了下述恒等式:

$$\oint_L\mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}=-\int_S\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot\left[\nabla\times\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right]=0 \tag{4.1.45}$$

式(4.1.39)与(4.1.44)分别称为 Coulomb 定律与 Ampéré 定律.

在某些情形下,稳恒电流体系的基本方程可以简化:

(a) 磁标势法

若在所考虑的区域 V 中,传导电流处处为零,则

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{H}=-\nabla\cdot\boldsymbol{M}\\\nabla\times\boldsymbol{H}=0\end{cases} \tag{4.1.46}$$

定义磁荷密度

$$\rho_{\mathrm{m}}=-\mu_0\nabla\cdot\boldsymbol{M} \tag{4.1.47}$$

则(4.1.46)中第一个方程可写为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{H}=\rho_{\mathrm{m}}/\mu_0 \tag{4.1.48}$$

引入磁标势 φ_{m}

$$\boldsymbol{H}=-\nabla\varphi_{\mathrm{m}} \tag{4.1.49}$$

则(4.1.46)中第二个方程自动满足,而第一个方程可写为

$$\nabla^2\varphi_m=-\rho_m/\mu_0 \tag{4.1.50}$$

值得指出的是:为了保证磁标势的单值性,不仅要求所考虑的区域 V 中没有传导电流,还要求所考虑的区域 V 是单连通的,即 V 中任意一条闭合曲线可以连续地缩成一点;换言之,对于 V 中任意一条闭合曲线都可找到一个以它为边界的曲面,使该曲面位于 V 中.事实上,只要将各传导电流回路连同以各回路为边界的曲面(称为磁壳)一起排除出所考虑的区域 V 之外,上述要求便可满足.因为这时对于 V 中任意封闭曲线 L 可找到以 L 为边界的曲面 S,使 S 仍在 V 中,故按 Ampéré 环路定理有

$$\oint_L\mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{H}=\int_S\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H})=0 \tag{4.1.51}$$

因而可定义满足式(4.1.49)的势函数

$$\varphi_{\mathrm{m}}(x,y,z)=\varphi_{\mathrm{m}0}-\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}\mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{H} \tag{4.1.52}$$

由磁场的边值关系可得到相应的磁标势的边值关系:

$$\begin{cases}(\varphi_m)_1=(\varphi_m)_2\\(\partial\varphi_m/\partial n_{12})_1-(\partial\varphi_m/\partial n_{12})_2=\omega_m/\mu_0\end{cases}\tag{4.1.53}$$

式中面磁荷密度 ω_m 为

$$\omega_m=\mu_0\boldsymbol{n}_{12}\cdot(\boldsymbol{M}_1-\boldsymbol{M}_2)\tag{4.1.54}$$

对于线性介质，上式中第二个边值关系可代之以

$$(\mu\partial\varphi_m/\partial n_{12})_1=(\mu\partial\varphi_m/\partial n_{12})_2\tag{4.1.55}$$

容易看出：以等效磁荷为源的静磁场方程与边值关系和以电荷为源的静电场方程与边值关系完全类似，因而可用同样方法求解.

(b) 广义磁标势法

稳恒电流体系的电流分布满足三维散度为零的条件

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j}_f=0\tag{4.1.56}$$

与自然边界条件

$$\boldsymbol{j}_f=0,\quad \text{在无穷远处}\tag{4.1.57}$$

方程(4.1.56)与(4.1.57)的解可表为下述形式：

$$\boldsymbol{j}_f=\nabla\times\boldsymbol{M}_f\tag{4.1.58}$$

值得注意的是，$\boldsymbol{M}_f$ 有一个规范自由度，即(4.1.58)在下述规范变换

$$\boldsymbol{M}_f'=\boldsymbol{M}_f+\nabla\chi\tag{4.1.59}$$

(式中 χ 是 $\boldsymbol{x}$ 的三维标量函数)下不变.故可对 $\boldsymbol{M}_f$ 加上一个规范限制条件，例如取 Coulomb 规范

$$\nabla\cdot\boldsymbol{M}_f=0\tag{4.1.60}$$

即 $\boldsymbol{M}_f$ 是一个仅具有两个横向自由度的三维矢量.对方程(4.1.58)两边取旋度，并利用条件(4.1.60)，可得关于 $\boldsymbol{M}_f$ 的微分方程(Poisson 方程)

$$\nabla^2\boldsymbol{M}_f=-\nabla\times\boldsymbol{j}_f\tag{4.1.61}$$

它在自然边界条件下的解为

$$\boldsymbol{M}_f=\int d^3x'\frac{\nabla'\times\boldsymbol{j}_f(\boldsymbol{x}')}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\tag{4.1.62}$$

利用(4.1.58)，方程(4.1.31)可改写成

$$\nabla\cdot\boldsymbol{H}^*=-\nabla\cdot\boldsymbol{M}^*,\quad \nabla\times\boldsymbol{H}^*=0\tag{4.1.63}$$

式中

$$\boldsymbol{H}^*=\boldsymbol{H}-\boldsymbol{M}_f,\quad \boldsymbol{M}^*=\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}_f\tag{4.1.64}$$

值得注意的是，由于对 $\boldsymbol{M}_f$ 取了 Coulomb 规范，$\boldsymbol{M}_f$ 对$\nabla\cdot\boldsymbol{M}^*$ 没有贡献.

为了推出相应的边值关系，将方程(4.1.58)两边对由封闭曲线 L 所张的曲面 S 积分，并利用 Stokes 定理，可得

$$I_f=\int_S d\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{j}_f=\oint_L d\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{M}_f\tag{4.1.65}$$

因而可得出相应的边值关系为

$$\boldsymbol{\Pi}_f=\boldsymbol{n}_{12}\times(\boldsymbol{M}_{f2}-\boldsymbol{M}_{f1})\tag{4.1.66}$$

式中 $\boldsymbol{n}_{12}$ 是从介质 1 指向介质 2 的分界面的法向.至此，空间中的稳恒传导电流均已转化为

M_f 分布，在方程(4.1.63)的右端不出现传导电流，故可安全地按磁标势法求解. 实例参见下一章的例题**均匀带电的旋转薄导体球壳**.

(c) 二维稳恒电流体系

二维稳恒电流体系由下述两个条件确定：其一是体系内稳恒电流只沿 z 轴方向流动；其二是体系的边界也是二维的(即在任意的 $z=$ 常数的平面上，情形完全一样). 这时稳恒电流条件化为

$$\partial j_z/\partial z=0 \tag{4.1.67}$$

即电流密度与 z 无关，因而

$$\boldsymbol{j}=\boldsymbol{e}_z j(x,y) \tag{4.1.68}$$

又由于边界也与 z 无关，故矢势 $\boldsymbol{A}$ 可写为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_z A(x,y) \tag{4.1.69}$$

于是矢势方程成为一个二维标量方程

$$[\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2]A(x,y)=-\mu j(x,y) \tag{4.1.70}$$

由于这时

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}_{12}=A\boldsymbol{e}_z\cdot(\boldsymbol{n}_{12})_{\text{沿}x-y\text{平面}}=0 \tag{4.1.71}$$

边值关系(4.1.35)成为

$$\begin{cases}A_1=A_2\\ \dfrac{1}{\mu_1}\dfrac{\partial A_1}{\partial n_{12}}-\dfrac{1}{\mu_2}\dfrac{\partial A_2}{\partial n_{12}}=\boldsymbol{\Pi}\end{cases} \tag{4.1.72}$$

(d) 旋转对称的三维电流体系

若电流分布及其边界状态都是围绕 z 轴旋转对称的，则在柱坐标系(ρ,ϕ,z)中

$$\boldsymbol{j}=\boldsymbol{e}_\phi j(\rho,z)$$

相应地亦有

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_\phi A(\rho,z)$$

于是矢势方程成为

$$[\nabla^2-1/\rho^2]A=-\mu j \tag{4.1.73}$$

此即

$$\frac{\partial^2 A}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial A}{\partial\rho}-\frac{A}{\rho^2}+\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}=-\mu j \tag{4.1.74}$$

这个非齐次方程的解是一个特解和相应的齐次方程通解之和，而通解

$$A_{j=0}=\sum R(\rho)Z(z)$$

可由分离变数后的方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}-\left(\dfrac{1}{\rho^2}-k^2\right)R=0\\ \dfrac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2}=k^2\end{cases} \tag{4.1.75}$$

求出，其中第一式是关于 R 的一阶 Bessel 方程. 若体系分区均匀，则相应的边值关系是

$$\begin{cases}A_1=A_2\\ \dfrac{1}{\mu_1}\dfrac{1}{\rho}\left[\dfrac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_1)\right]-\dfrac{1}{\mu_2}\dfrac{1}{\rho}\left[\dfrac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_2)\right]=\boldsymbol{\Pi}\end{cases} \tag{4.1.76}$$

在球坐标系(r,θ,ϕ)中,可将旋转对称的三维电流体系的电流密度写成

$$\boldsymbol{j}=\boldsymbol{e}_{\phi}j(r,\theta)$$

相应地亦有

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_{\phi}A(r,\theta)$$

于是矢势方程成为

$$[\nabla^2-1/(r^2\sin^2\theta)]A=-\mu j \tag{4.1.77}$$

若体系分区均匀,则相应的边值关系是

$$\begin{cases}A_1=A_2\\ \dfrac{1}{\mu_1}\dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial}{\partial r}(rA_1)\right]-\dfrac{1}{\mu_2}\dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial}{\partial r}(rA_2)\right]=\boldsymbol{\Pi}\end{cases} \tag{4.1.78}$$

习题 4-1

1. 试由恒场所满足的基本方程导出恒场条件.
2. 从式(4.1.40)导出式(4.1.44),从而验证两个稳恒电流回路之间的相互作用力满足牛顿第三定律.
3. 应用静电场的势方程证明 $\rho=-(\boldsymbol{p}\cdot\nabla)\delta(\boldsymbol{x})$是一个位于原点的电偶极矩为 $\boldsymbol{p}$ 的电偶极子的电荷密度.
4. 证明:

   (1) 在面电荷两侧,电势是连续的,但电势的法向微商却有跃变

   $$\partial\varphi_1/\partial n_{12}-\partial\varphi_2/\partial n_{12}=\omega$$

   式中 $\boldsymbol{n}_{12}$是边界面的法向(指向介质 2),而 ω 是边界面上的面电荷密度.

   (2) 在面电偶极层(带有等量的正负面电荷密度 $\pm\omega$、相距的距离 l 很小的两个面形成面电偶极层)两侧,电势的法向微商是连续的,但电势却有跃变:

   $$\varphi_1-\varphi_2=-(1/\varepsilon_0)\boldsymbol{n}_{12}\cdot\boldsymbol{p}$$

   式中 $\boldsymbol{p}=\lim\limits_{\substack{\sigma\to\infty\\ l\to 0}}\sigma l$ 是面电偶极层的面电偶极矩密度.
5. 有一半径为 a 的磁化介质球,球心取为坐标原点.若球中的磁化强度为 $\boldsymbol{M}=(Az^2+B)\boldsymbol{e}_z$ 求磁化电流与等效磁荷.

   答案:$j_{\mathrm{m}}=0$, $\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{m}}=M[-(y/a)\boldsymbol{e}_x+(x/a)\boldsymbol{e}_y]$

   $\rho_{\mathrm{m}}=-2\mu_0 Az$, $\omega_{\mathrm{m}}=\mu_0 zM/a$
6. 证明:若稳恒电流 I 形成的电流圈对场点 $\boldsymbol{x}$ 所张的立体角为 Ω,则该电流圈在场点的磁标势是

   $$\varphi_{\mathrm{m}}=-I\Omega/(4\pi)$$
7. 证明:在孤立的带电导体表面上,电场强度的法向导数由下式给出

   $$\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial n}=-\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$$

   式中 R_1 与 R_2 是曲面的主曲率半径.
8. 有一点电荷 q 位于某一直线上,以该直线为轴幅向展开三个半无穷大平面.这三个面形成

的三个二面角分别为 α_1、α_2、α_3，$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=2\pi$. 每个二面角内充满一种均匀介质，其介电常量分别为 ε_1、ε_2、ε_3. 求空间的电势分布、电场强度和电位移矢量.

答案：$\varphi_1=\varphi_2=\varphi_3=q/[2r(\varepsilon_1\alpha_1+\varepsilon_2\alpha_2+\varepsilon_3\alpha_3)]$

$\boldsymbol{D}_i=\varepsilon_i q\boldsymbol{x}/[2r^3(\varepsilon_1\alpha_1+\varepsilon_2\alpha_2+\varepsilon_3\alpha_3)]$

9. 一半径为 a 的磁壳沿径向磁化，使表面磁矩为 $M_0P_2(\cos\theta)$，这里 θ 为极角，$P_2(\cos\theta)$是二阶 Legendre 多项式. 求球外的磁标势.

答案：$\varphi_m=[(2a^4)/(5r^3)]M_0P_2(\cos\theta)$.

§4.2 恒场能量的势表达式

虽然静电场与静磁场的能量可分别表出，但为了公式紧凑起见，我们仍将它们写在一起. 真空中电磁场的能量表达式为

$$U=\int_V \mathrm{d}^3x\,\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right) \tag{4.2.1}$$

利用恒场的势表示

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi,\quad \boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{4.2.2}$$

以及势所满足的基本方程得

$$\begin{cases}E^2=-\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{E})+\varphi\rho/\varepsilon_0\\ B^2=\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})+\mu_0\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}\end{cases} \tag{4.2.3}$$

因而，真空中区域 V 中恒场的能量可表达为

$$\begin{aligned}U=&\left[-\frac{\varepsilon_0}{2}\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{E}\varphi+\frac{1}{2}\int_V \mathrm{d}v\rho\varphi\right]+\\ &\left[\frac{1}{2\mu_0}\oint_S \mathrm{d}\sigma\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})+\frac{1}{2}\int_V \mathrm{d}v\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}\right]\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

式中，与 ρ、$\boldsymbol{j}$ 有关的部分分别表示静电场能量与静磁场的能量.

若区域 V 为全空间，则有

$$U_{\text{全空间}}=\int_{\text{全空间}} \mathrm{d}^3x\,\frac{1}{2}(\rho\varphi+\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}) \tag{4.2.5}$$

值得注意的是，上式仅对全空间成立，对 V 为有限区域时不成立，因而它并不意味着被积式是恒场的能量密度.

现设区域中充满某种介质. 介质中电磁场的能量表达式为

$$U=\int_V \mathrm{d}^3x\,\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}) \tag{4.2.6}$$

式中已将介质的极化能与磁化能包括在内. 类似的方法可以证明

$$U=\left[-\frac{1}{2}\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{D}\varphi+\frac{1}{2}\int_V \mathrm{d}v\rho_f\varphi\right]+$$

$$\left[\frac{1}{2}\oint_S \mathrm{d}\sigma\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{H})+\frac{1}{2}\int_V \mathrm{d}v\boldsymbol{j}_\mathrm{f}\cdot\boldsymbol{A}\right] \tag{4.2.7}$$

若区域 V 为全空间,则有

$$U_{\text{全空间}}=\int_{\text{全空间}}\mathrm{d}^3x\,\frac{1}{2}(\rho_\mathrm{f}\varphi+\boldsymbol{j}_\mathrm{f}\cdot\boldsymbol{A}) \tag{4.2.8}$$

同样,此式对于有限区域不适用.

对于导体系,每个导体都是等势体,电荷仅分布在导体外表面上,故导体系总静电能为

$$U_{\text{全空间}}=\frac{1}{2}\sum_i\oint_{S_i}\mathrm{d}\sigma\omega_i\varphi_i=\frac{1}{2}\sum_i Q_i\varphi_i \tag{4.2.9}$$

式中,φ_i、Q_i 是第 i 个导体的电势与所带的总电荷.可见,导体系的总静电能与电荷在导体上的分布情形无关(实际上,静电平衡时导体上的电荷分布是唯一的).

习题 4-2

1. 试证式(4.2.7).
2. 一个带电圆柱壳体长为 l,半径为 a,且 $l\gg a$.电荷在壳表面均匀分布,密度为 σ.此壳体以角频率 ω 绕其对称轴 $\boldsymbol{e}_z$ 旋转.若忽略边缘效应,试求

   (1) 壳内的磁场;(2) 总磁能.

   答案:(1) $\boldsymbol{B}=\mu_0\sigma\omega a\boldsymbol{e}_z$;(2) $\frac{1}{2}\pi\mu_0\sigma^2\omega^2a^4l$.

§4.3 恒场唯一性定理

若存在两个不同的恒场$(\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{B}_1)$、$(\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{B}_2)$都满足恒场基本方程

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{D}_i=\rho_\mathrm{f}, & \nabla\times\boldsymbol{E}_i=0, \quad \text{对 } i=1,2\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}_i=0, & \nabla\times\boldsymbol{H}_i=\boldsymbol{j}_\mathrm{f}, \quad \text{对 } i=1,2\end{cases} \tag{4.3.1}$$

或其等价形式及相应的边值关系,例如

$$\begin{cases}\varphi_i|_{S=\text{给定值}}, & \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}_i|_S=\text{给定值}\\ \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}_i|_{S=\text{给定值}}, & \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}_i|_S=\text{给定值}\end{cases} \tag{4.3.2}$$

式中 $\boldsymbol{n}$ 是 S 上某面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 的外法向;则恒场

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2, \quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2 \tag{4.3.3}$$

满足 $\rho_\mathrm{f}=0$、$\boldsymbol{j}_\mathrm{f}=0$ 情形下的恒场方程及边值关系如

$$\begin{cases}\varphi_S=0, & (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D})_S=0\\ (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A})_S=0, & (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H})_S=0\end{cases} \tag{4.3.4}$$

式中 φ、$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 分别是与场$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})$相应的标势、矢势、电位移矢量与磁场强度.

由介质中静电场与静磁场的能量表达式知区域 V 中场强为$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})$的电磁场的能量可用场在边界上的值表示:

$$\int_V \mathrm{d}^3x\,\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H})=-\oint_S \mathrm{d}\sigma\left[\frac{1}{2}\varphi(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D})+\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H})\right] \tag{4.3.5}$$

利用边值关系(4.3.4),上式在线性介质中成为

$$\int_V \mathrm{d}^3x\,\frac{1}{2}(\varepsilon E^2+\frac{1}{\mu}B^2)=0 \tag{4.3.6}$$

由于 $\varepsilon>0$ 与 $\mu>0$,或 $\varepsilon<0$ 与 $\mu<0$(在所谓左旋介质中),故

$$\boldsymbol{E}=0,\quad \boldsymbol{B}=0 \tag{4.3.7}$$

此即

$$\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{E}_2,\quad \boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{B}_2 \tag{4.3.8}$$

因此,静电体系的电场由电荷与线性电介质的分布及边界上的 φ 或 $\boldsymbol{D}$ 的法向分量唯一确定;静磁体系的磁场由电流与线性磁介质的分布及边界上 $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量唯一确定.此称为恒场的唯一性定理.

注意:

(1) 若体系内含有导体,只要将导体表面视为边界面,恒场唯一性定理仍成立.

(2) 由式(4.3.5)易知,只要 $\boldsymbol{D}$,$\boldsymbol{H}$ 分别是 $\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{B}$ 的单值单调递增函数,仍可保证被积函数各项的正定性,因而唯一性定理仍成立.

(3) 对于铁电与铁磁介质,上述唯一性定理不成立,因为这时存在电滞回线与磁滞回线,使得 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{H}$ 不再分别是 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 的单值函数.

若在问题中,各导体上的电势值或导体表面上的 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}$ 未给出,仅给出各导体的总电荷与导体外空间中的电荷分布,则我们有下述唯一性定理:

仅存在唯一的解 φ,它在区域 V 中满足

$$\nabla\cdot(\varepsilon\nabla\varphi)=-\rho_f \tag{4.3.9}$$

在边界面上满足

$$\begin{cases}\varphi_{S_i}=\phi_i,\quad \oint_{S_i}\mathrm{d}\sigma\varepsilon\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}=Q_f^i\\ \varphi_S=\text{给定},\quad (\partial\varphi/\partial n)_S=\text{给定}\end{cases} \tag{4.3.10}$$

式中 S_i 与 S 分别为第 i 个导体的外表面与除导体表面以外的边界面,$\boldsymbol{n}$ 为相应边界面的外法向(注意,若边界是导体表面,则 $\boldsymbol{n}$ 指向导体内部);ϕ_i 与 Q_f^i 分别是第 i 个导体的电势与所带的总电荷.

习题 4-3

证明当各导体上的电势值或导体表面上的 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}$ 未给出、仅给出各导体的总电荷与导体外空间中的电荷分布时的静电唯一性定理.

§4.4 导体系静电叠加原理与静电屏蔽效应

由静电唯一性定理可导出导体系静电叠加原理:若处于线性介质(或真空)中的导体系呈静电平衡状态;且当各导体总电荷分别为 q_1'、q_2'、…时,其面电荷密度分别为 ω_1'、ω_2'、…,空间电势分布为 $\varphi'(\boldsymbol{x})$;而当各导体总电荷分别为 q_1''、q_2''、…时,其面电荷密度分别为 ω_1''、ω_2''、…,空间电势分布为 $\varphi''(\boldsymbol{x})$;则当各导体总电荷分别为 $q_1'+q_1''$、$q_2'+q_2''$、…时,其面电荷分布与电势分布分别为 $\omega_1'+\omega_1''$、$\omega_2'+\omega_2''$、…与 $\varphi'(\boldsymbol{x})+\varphi''(\boldsymbol{x})$.

事实上,处于静电平衡状态的导体系的面电荷分布 $\omega_1'+\omega_1''$、$\omega_2'+\omega_2''$、…满足各导体的总电荷条件

$$\oint_{S_i}\mathrm{d}\sigma(\omega_i'+\omega_i'')=q_i'+q_i''$$

而电势分布 $\varphi'(\boldsymbol{x})+\varphi''(\boldsymbol{x})$满足导体为等势体的条件

$$\varphi_{S_i}=\varphi'_{S_i}+\varphi''_{S_i}=\text{常量值}$$

对导体以外的区域(此区域中 $\rho_f=0$)有

$$\nabla\cdot(\varepsilon\nabla\varphi)=\nabla\cdot(\varepsilon\nabla\varphi')+\nabla\cdot(\varepsilon\nabla\varphi'')=0$$

因而由静电唯一性定理知,面电荷分布 $\omega_i'+\omega_i''$ 与电势分布 $\varphi'(\boldsymbol{x})+\varphi''(\boldsymbol{x})$就是实际的面电荷分布与电势分布.

由静电唯一性定理可说明静电屏蔽效应:接地导体壳内区域的电场由壳内导体上的电荷或电势值及壳面边值条件 $\varphi=0$ 完全确定,与壳外情况无关.

事实上,可考虑壳内各导体以外的空间区域 V.由于壳面电势已给定为零,若壳内各导体的电荷或电势值已给定,则 V 的边界上的边值条件已经确定.故由静电唯一性定理,壳内电场已唯一确定了.

习题 4-4

有两个相同的球形电容器,内外球壳半径分别为 a 和 b.设这两个电容器相距很远,相互绝缘,且两电容器的内球壳各带电荷 Q_1 与 Q_2.若用细导线将它们的外球壳联结起来,问系统的静电能量的变化 δW 近似为多少?

答案:$\delta W=(a-b)(Q_1-Q_2)^2/(16\pi\varepsilon_0 ab)$.

§4.5 导体系电容与电势系数和相互作用能

设有置于线性介质(或真空)中的导体系.若第 i 个导体上的总电荷为 1,其他导体上总电荷为零(注意:其面电荷密度并不处处为零)时,电势分布为 $p_i(x,y,z)$;那么,当第 i 个导体上总电荷为 Q_i,其他导体上总电荷为零时,由叠加原理知电势分布为 $Q_i p_i(x,y,z)$.如果各导体的总电荷分别为 Q_i,再次应用叠加原理知电势分布为

$$\varphi(x,y,z)=\sum_i p_i(x,y,z)Q_i \tag{4.5.1}$$

于是各导体的电势 ϕ_i 可表为

$$\phi_i=\sum_j p_{ij}Q_j \tag{4.5.2}$$

式中 p_{ij} 称为导体系的电势系数.由上式可解得

$$Q_i=\sum_j C_{ij}\phi_j \tag{4.5.3}$$

式中系数 $C_{ij}|_{i\neq j}$ 称为导体系的静电感应系数,而 C_{ii}(对 i 不求和)则称为导体系的电容系数,为方便起见将它们统称为电容系数.导体系的电势系数与电容系数同导体系中各导体的形状、相对位置及介质分布有关.若仅有一个导体,则

$$Q=C\phi$$

可见,C 正是该导体的电容.由导体系的总静电能 U 公式

$$U=\frac{1}{2}\sum_i \phi_i Q_i$$

可知,导体系的总静电能 U 完全由导体系中各导体的电势或所带的电荷决定

$$U=\frac{1}{2}\sum_{i,j} p_{ij}Q_iQ_j=\frac{1}{2}\sum_{i,j} C_{ij}\phi_i\phi_j \tag{4.5.4}$$

现考虑导体系当其电荷或电势发生无穷小变化时总静电能(包括极化能)的变化.若区域 V 的边界是由若干导体的外表面组成,则总静电能为

$$U=\int_V \mathrm{d}^3x\,\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}=\frac{1}{2}\sum_i \phi_i Q_i$$

式(4.5.2)与(4.5.3)告诉我们,导体上的电势与电荷互为线性函数,因此有

$$\delta U=\sum_i \phi_i\delta Q_i=\sum_i Q_i\delta\phi_i \tag{4.5.5}$$

于是

$$\phi_i=\partial U/\partial Q_i,\quad Q_i=\partial U/\partial\phi_i \tag{4.5.6}$$

进而

$$C_{ij}=\frac{\partial Q_i}{\partial\phi_j}=\frac{\partial^2 U}{\partial\phi_i\partial\phi_j}=\frac{\partial Q_j}{\partial\phi_i}=C_{ji} \tag{4.5.7}$$

又因能量 U 应恒正且有限，故

$$U=\frac{1}{2}\sum_{ij}C_{ij}\phi_i\phi_j$$

是一个正定二次型，换言之，以 C_{ij} 为矩阵元的矩阵是对称的正定矩阵．由此可导出系数 C_{ij} 所满足的一组不等式：

$$\det\begin{pmatrix} C_{i_1i_1} & C_{i_1i_2} & \cdots & C_{i_1i_n} \\ C_{i_2i_1} & C_{i_2i_2} & \cdots & C_{i_2i_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{i_ni_1} & C_{i_ni_2} & \cdots & C_{i_ni_n} \end{pmatrix}>0 \tag{4.5.8}$$

式中 $i_k\in\{1,2,\cdots,N\}$．特别地，有

$$\begin{cases} C_{ii}>0 \\ C_{ii}C_{jj}>C_{ij}^2, \qquad \text{当 } i\neq j \end{cases} \tag{4.5.9}$$

相反地，全部静电感应系数都是负的：

$$C_{ij}\big|_{i\neq j}<0 \tag{4.5.10}$$

这可以通过简单的物理分析看出．设导体系中除第 i 个导体外的所有导体都接地，即它们的电势都等于零，且唯一未接地的导体 i 的电势是正的，即 $\phi_i>0$．电场线只能从导体 i 表面出发，或到达其他导体，或延伸至无穷远处．接地的导体之间没有电场线相连，也不可能有电场线从接地的导体出发而延伸至无穷远处．故在全空间内，各处的电势都是正的；从而，电势仅在接地导体上才达到最小值（即零值）．于是，在接地导体的表面上，电势的法向导数 $\partial\varphi/\partial n$ 是正的（$\boldsymbol{n}$ 为导体表面外法向），由边值关系

$$Q_j=-\oint_{S_j}\mathrm{d}\sigma\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial n}$$

知，接地导体的电荷为负值．因而由

$$Q_j=\sum_k C_{jk}\phi_k=C_{ij}\phi_i\big|_{\text{对}i\text{不求和}}$$

知 $C_{ij}\big|_{i\neq j}$ 必为负值．

现在假定导体系中仅一个导体（如导体 j）的总电荷不为零，且是正值．则电场线从导体 j 表面出发，或到达其他导体，或延伸至无穷远处；其余导体 $j\neq i$ 上进出的电场线的数目相等．从任一导体 $j\neq i$ 发出的电场线，也是或到达其他导体，或延伸至无穷远处．由于静电场中的电场线不能闭合，故任一电场线最终必然延伸至无穷远处．故全空间的电势应为正值．由于电势的连续性，在导体（如导体 i）上的电势也是正的．由

$$\phi_i=\sum_k p_{ik}Q_k=p_{ij}Q_j\big|_{\text{对}j\text{不求和}}$$

便有

$$p_{ij}=(C^{-1})_{ij}>0 \tag{4.5.11}$$

所以,全部电势系数都是正的.

设有两个带电体 1 和 2,它们在空间激发的电场分别为 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$,则由静电叠加原理知空间总电场为 $\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2$.故体系总静电能为

$$U=\int \mathrm{d}^3x\,\frac{1}{2}\varepsilon E_1^2+\int \mathrm{d}^3x\,\frac{1}{2}\varepsilon E_2^2+\int \mathrm{d}^3x\varepsilon \boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{E}_2 \tag{4.5.12}$$

上式右方第一项或第二项表示带电体 1 或 2 单独存在时的静电能,称为带电体的固有静电能;而右方第三项表示两个带电体合起来后与原来单独存在时的能量之差,称为两个带电体相互作用能

$$U_1=\varepsilon\int \mathrm{d}^3x(\nabla\varphi_1)\cdot(\nabla\varphi_2) \tag{4.5.13}$$

经分部积分,并利用势 φ 满足的方程以及无穷远处势为零的边界条件,可得

$$U_1=(\varphi_1Q_2+\varphi_2Q_1)/2 \tag{4.5.14}$$

同理,处于介质(或真空)中的电荷体系的相互作用能可表示为

$$U_1=\frac{1}{2}\sum_i \varphi_i'Q_i \tag{4.5.15}$$

式中

$$\varphi_i'=\sum_{j\neq i}\varphi_j \tag{4.5.16}$$

是除电荷 Q_i 之外所有电荷在电荷 Q_i 处电势之和.类似地,也可定义稳恒电流体系的固有静磁能和相互作用磁能.

习题 4-5

1. 证明(4.5.14).并证明,若两带电体为导体,两导体在静电平衡时其总电荷与电势分别为 Q_i 与 $\Phi_i(i=1,2)$,则相互作用能为

$$U_1=\Phi_2Q_1=\Phi_1Q_2$$

2. 设两个孤立导体的电容为 C_1 与 C_2.现将这两个导体置于真空中,相距为 r,r 比每个导体的尺度都大得多.证明这个体系的电容系数为(准确到 $1/r^2$)

$$c_{11}=C_1\left[1+\frac{C_1C_2}{(4\pi\varepsilon_0 r)^2}\right],\quad c_{12}=-\frac{C_1C_2}{4\pi\varepsilon_0 r},\quad c_{22}=C_2\left[1+\frac{C_1C_2}{(4\pi\varepsilon_0 r)^2}\right]$$

3. 两个带 $\pm Q$ 电荷的导体的互电容定义为 $C=Q/(\phi_2-\phi_1)$,试用电容系数将这互电容表示出来.

答案:$C=(c_{11}c_{22}-c_{12}^2)/(c_{11}+c_{22}+2c_{12})$.

4. 在电势为 φ_a 的闭合导体面 A 内含有一个电势为 φ_b 的导体 B,且在导体面之间的 P 点的电势为 φ_p.现若将所有导体都接地,并在 P 点放置一个点电荷 Q,求各导体上所感生的电荷.

答案：$Q_a = Q\dfrac{\varphi_b - \varphi_p}{\varphi_a - \varphi_b}$，$Q_b = Q\dfrac{\varphi_a - \varphi_p}{\varphi_b - \varphi_a}$.

5. 在零级近似下，氦原子中的两个电子的电子层具有相同的分布 $\rho(x) = -[8e/(\pi a^3)]\exp(-4r/a)$，这里 a 是原子的 Bohr 半径，$-e$ 是电子电荷.求这两个电子之间的相互作用能.

答案：$U_1 = 5e^2/(16\pi\varepsilon_0 a)$.

§4.6 导体系静电平衡条件与静电体系稳定性

设导体系中导体上的电荷分布发生了某一无穷小变化，因而导体内部可能带有电荷，但每个导体的总电荷不变.相应地，体系的静电能

$$U = \int_{全空间} \mathrm{d}V\,\frac{1}{2}\epsilon E^2, \quad 对线性介质$$

变化为

$$\delta U = -\int_{全空间} \mathrm{d}^3x\,\boldsymbol{\nabla}\varphi\cdot\delta\boldsymbol{D} = \int_{全空间} \mathrm{d}^3x\varphi\delta\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{D} = \sum_i \int_{V_i} \mathrm{d}^3x\varphi\delta\rho_f$$

式中 V_i 是第 i 个导体所占的空间区域.若导体上的电势 $\varphi = \phi =$ 常数，则

$$\delta U = \sum_i \phi_i \int_{V_i} \mathrm{d}^3x\delta\rho_f = \sum_i \phi_i\delta Q_i = 0$$

式中最后一个等式应用了每个导体总电荷不变 $\delta Q_i = 0$ 这一条件.又由导体系电势系数的正定性知

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial Q_i \partial Q_j}\right|_{各导体为等势体} = (C^{-1})_{ij} > 0 \tag{4.6.1}$$

因而，若导体系中各导体的位置与所带的总电荷不变，则当电荷分布使各导体为等势体时，体系的总电能达到极小值，因而处于静电平衡状态.换言之，真实的静电场能量比导体上的电荷作其他任何分布时产生的电场能量要小.这个关于导体系静电平衡条件的结论称为 Thomson 定理.

作为 Thomson 定理的一个推论是：离电荷系统很远的不带电导体会受到电荷系统的吸引.换言之，将不带电的导体带到电荷系统的电场内，会使电场的总电能减小.这是因为按照 Thomson 定理，引入未带电导体后所建立的真实电场的能量应是这个新的导体系中所有可能的电荷分布产生的电场的能量中的极小值，故比原导体系及被引入导体的电荷分布均不改变的(假想)情形所对应的电能要小.

值得指出的是：一个荷电体系不可能处于纯静电平衡状态；换言之，仅受电场力作用的带电与不带电的导体，不可能在电场中静止地处于稳定平衡状态.这个结论称为 Earnshaw 定理.不失普遍性，我们仅需对点电荷体系进行证明.点电

荷体系的相互作用能由式(4.5.15)给出.由于 φ'_i 是除 Q_i 之外所有其他电荷在电荷 Q_i 处产生的合电势,故在电荷 Q_i 处的邻域 V_i 中有

$$\nabla^2 \varphi'_i = 0$$

一个体系处于稳定平衡的条件是其势能即相互作用能为极小,而 U_i 具有极小值的充要条件是:U_i 对所有电荷坐标的一阶微商为零,且第一个不全为零的高阶微商应存在且恒正.但这是不能满足的,因为在 V_i 中有

$$\partial_{j_1}\partial_{j_2}\cdots\partial_{j_n}\nabla^2 U_i = 0, \quad \text{对 } n>0$$

故 U_i 的所有高阶微商都不恒正,因而不可能有极小值.体系的稳定平衡状态不可能形成.所以,不存在任何稳定的纯静电体系;换言之,任何稳定的静电体系的形成都必须有非静电力参与作用.

习题 4-6

一球体内的电荷 Q 应如何分布才能使总静电能最小?

§4.7 Green 定理与 Green 互易定理

设 $\boldsymbol{A}$ 为闭合曲面 S 包围的体积 V 内定义的任意矢量场,则

$$\int_V \mathrm{d}^3x\ \nabla\cdot\boldsymbol{A} = \oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A}$$

令 $\boldsymbol{A} = \phi\nabla\psi$,其中 ϕ 和 ψ 是任意的标量场,则由上式知

$$\int_V \mathrm{d}^3x(\phi\nabla^2\psi + \nabla\phi\cdot\nabla\psi) = \oint_S \mathrm{d}\sigma\phi\frac{\partial\psi}{\partial n} \tag{4.7.1}$$

此称为 Green 第一恒等式.同理有

$$\int_V \mathrm{d}^3x(\psi\nabla^2\phi + \nabla\psi\cdot\nabla\phi) = \oint_S \mathrm{d}\sigma\psi\frac{\partial\phi}{\partial n}$$

由式(4.7.1)减去上式得 Green 第二恒等式

$$\int_V \mathrm{d}^3x(\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi) = \oint_S \mathrm{d}\sigma\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right) \tag{4.7.2}$$

上式又称为 Green 定理.

设 n 个导体分别带有电荷 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 时,其电势分别为 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$;当它们分别带有电荷 $q'_1, q'_2, \cdots, q'_n$ 时,其电势分别为 $\varphi'_1, \varphi'_2, \cdots, \varphi'_n$.由于电荷都分布在导体表面上,故除去导体表面以外的体积 V 内有

$$\nabla^2\varphi = 0, \quad \nabla^2\varphi' = 0$$

而导体表面的面电荷分布为

$$\omega_i = \varepsilon\frac{\partial\varphi_i}{\partial n}, \quad \omega'_i = \varepsilon\frac{\partial\varphi'_i}{\partial n}$$

式中 $\boldsymbol{n}$ 为导体表面的法向，方向指向导体外部. 令 $\phi=\varepsilon\varphi$，$\psi=\varphi'$，则由 Green 定理知

$$\sum_i \oint_{S_i} \mathrm{d}\sigma_i[\varphi_i\omega_i' - \varphi_i'\omega_i]=0$$

这里已考虑到无穷远处 $\varphi=\varphi'=0$，以至无穷远处的面积分为零. 由于导体是等势体，我们得到

$$\sum_i \left[\varphi_i\oint_{S_i}\mathrm{d}\sigma_i\omega_i' - \varphi_i'\oint_{S_i}\mathrm{d}\sigma_i\omega_i\right]=0$$

即

$$\sum_i \varphi_i q_i' = \sum_i \varphi_i' q_i \tag{4.7.3}$$

此称为 Green 互易定理.

习题 4－7

试用 Green 互易定理证明导体系的电容系数矩阵是对称的.

§4.8 作用在导体面上的电场力

放在静电场内的导体会受到电场的作用力. 作用在导体表面 $\mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}\sigma\boldsymbol{n}$（$\boldsymbol{n}$ 为导体表面的外法向）上的力恰好是每单位时间内从外面流入导体内的动量，即

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f}=-\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathscr{T} \tag{4.8.1}$$

故导体表面单位面积所受的力（压强）为

$$\boldsymbol{F}_S=-\boldsymbol{n}\cdot\mathscr{T} \tag{4.8.2}$$

由动量流密度张量 $\mathscr{T}$ 的表达式知对于静电场有

$$\mathscr{T}_{\text{静电场}}=\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\right)I-\boldsymbol{DE} \tag{4.8.3}$$

于是

$$\boldsymbol{F}_S=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{n}+(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D})\boldsymbol{E} \tag{4.8.4}$$

考虑到导体内电场 $\boldsymbol{E}=0$，导体表面的场只有法向分量，故若包围导体的介质是线性的，便有

$$\boldsymbol{F}_S=(\varepsilon E^2/2)\boldsymbol{n} \tag{4.8.5}$$

可见，导体表面受到指向导体表面外法向的力——负压力，其大小等于静电场的能量密度.

由导体面上的边值关系

$$\varepsilon\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}=\omega_f,\quad \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}=0$$

此即

$$\boldsymbol{E}_S=(\omega_f/\epsilon)\boldsymbol{n} \tag{4.8.6}$$

因之式(4.8.5)可改写成

$$\boldsymbol{F}_S=\frac{1}{2\epsilon}\omega_f^2\boldsymbol{n} \tag{4.8.7}$$

作用在导体上的合力,可由 $\boldsymbol{F}_S$ 对导体全表面积分得到,即

$$\boldsymbol{F}=\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\,\frac{1}{2}\epsilon E^2=\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\,\frac{1}{2\epsilon}\omega_f^2 \tag{4.8.8}$$

按照力学的普遍原理,沿广义坐标 q_i 方向作用在导体上的广义力(包括力和力矩)为

$$F_{q_i}=-\partial U/\partial q_i\,|_{Q_1,\cdots,Q_n} \tag{4.8.9}$$

式中,U 是导体系(一个封闭体系)的总电能,而下标 $Q_1,\cdots,Q_n$ 表示应在保持各导体总电荷不变的条件下计算导体系总电能随广义坐标 q_i 的变化.例如,作用在导体上的力矩在任一转轴上的投影等于

$$F_\theta=-\partial U/\partial\theta\,|_{Q_1,\cdots,Q_n}$$

式中 θ 为导体绕该转轴的转动角.由式(4.8.9)和(4.5.5)的第一等号所示的等式知有微分恒等式

$$\mathrm{d}U=\sum_i(\varphi_i\mathrm{d}Q_i-F_{q_i}\mathrm{d}q_i) \tag{4.8.10}$$

然而,不能利用导体系的总电能 U 按(4.8.9)式去求在保持各导体电势不变的条件下导体所受的静电力.因为要使运动导体上的电势保持不变,需求助于局外(即此导体系之外)的物体.例如,将导体接到另一个电容很大的导体(电荷储存器)上.若让导体 i 充入电荷 δQ_i,导体 i 便由相连的储存器内取出这些电荷.由于电荷储存器的电容很大,其电势 φ_i 并未改变;但电荷储存器减小了大小等于 $\varphi_i\delta Q_i$ 的电能.当导体系中每个导体都充入相应的微量电荷时,与导体相连的储存器的电能共改变了 $-\sum_i\varphi_i\delta Q_i$.故在各导体电势保持不变的条件下,导体系不是封闭体系;只有包括电荷储存器在内的导体系才是封闭的孤立体系.设后者的总电能为 $\widetilde{U}$,则对导体电势保持不变的导体系而言,起机械作用的不是 U 而是 $\widetilde{U}$,且

$$\delta\widetilde{U}=\delta U-\sum_i\varphi_i\delta Q_i=-\delta U \tag{4.8.11}$$

在式(4.8.10)中将变量 Q_i 变到 φ_i 后可得

$$\mathrm{d}\widetilde{U}=-\sum_i(Q_i\mathrm{d}\varphi_i+F_{q_i}\mathrm{d}q_i) \tag{4.8.12}$$

因之

$$F_{q_i} = -\partial \tilde{U}/\partial q_i \big|_{\varphi_1,\cdots,\varphi_n} = \partial U/\partial q_i \big|_{\varphi_1,\cdots,\varphi_n} \tag{4.8.13}$$

可见,在保持各导体电荷或电势不变的条件下,将导体系能量 U 对广义坐标 q_i 求导可得到导体所受的相应的广义力;唯一的不同是,保持各导体电荷不变时,导数应伴随一个负号,而保持各导体电势不变时不要这个负号.

习题 4-8

1. 试由下述三种方法导出静电场作用于导体单位表面上的力的公式:(1) 直接应用 Lorentz 力公式(用导体表面的面电荷密度 ω_f 表示出来);(2) 应用虚功原理(要求保持导体的总电荷不变,且用导体表面上的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 表示出来);(3) 应用虚功原理(要求保持导体的电势不变,且用导体表面上的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 表示出来).

   答案:(1) $\boldsymbol{F}_S = \frac{1}{2\epsilon}\omega_f^2 \boldsymbol{n}$;(2) $\boldsymbol{F}_S = \frac{1}{2\epsilon}E^2\boldsymbol{n}$;(3) $\boldsymbol{F}_S = -\frac{1}{2\epsilon}E^2\boldsymbol{n}$.式中 $\boldsymbol{n}$ 是导体表面的外法向,而 ϵ 是导体的介电常量.

2. 设位于介电常量为 ϵ 的均匀电介质中的两个导体的固有电容(即作为孤立导体时的电容)分别为 C_1 与 C_2,其电势分别为 V_1 与 V_2,且两导体间的距离比它们的尺度大得多.求它们之间的相互作用力的大小.

   答案:$F = 4\pi\epsilon C_1 C_2 (4\pi\epsilon r V_1 - C_2 V_2)(4\pi\epsilon r V_2 - C_1 V_1)/(16\pi^2\epsilon^2 r^2 - C_1 C_2)^2$.

3. 一球形电容器内外层半径分别为 a 与 b,接地外层很薄.在外层上作一小孔,用绝缘导线穿过该小孔将电容器的内层与离电容器很远的第三个导体连接起来.这导体具有固有电容为 C,且与球形电容器内层共带电荷 Q.求作用在第三导体上的静电力(准确至 $1/r^3$ 项).

   答案:$\boldsymbol{F} = -bC^2Q^2\left[C + 4\pi\epsilon_0\frac{ab}{b-a}\right]^{-2}\boldsymbol{x}/(4\pi\epsilon_0 r^4)$,其中 $\boldsymbol{x}$ 是第三导体的位置矢径.

§4.9 恒场中的多极展开

4.9.1 电势的多极展开

若电荷体系局限于某一小区域 V 内,则该电荷体系的势

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_V \mathrm{d}^3x' \frac{\rho_f(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \tag{4.9.1}$$

式中 $\boldsymbol{x}'$ 是一小区域 V 内源点的矢径,$\boldsymbol{x}$ 是区域 V 外场点的矢径,且坐标原点取在 V 内.我们将证明,对于远处的观测者(位于空间 $\boldsymbol{x}$ 点处)而言,小区域 V 内的静电荷分布(由只在小区域 V 内不为零的电荷密度函数 $\rho(x')$ 表示)可等效地视为一系列位于 V 内某点(取为原点)的所谓点电多极子(电单极子、电偶极子、电四极子等),即所谓多极展开.由于这里存在两个有长度量纲的量,$\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{x}'$,且其长度之比 $|\boldsymbol{x}'|/|\boldsymbol{x}|$ 是一个量纲为 1 的小量,因而可对含有 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{x}'$ 这两个量

的函数(即所谓的 Green 函数 $1/R$,见下文)进行 Taylor 展开.注意,不可能从一个具有长度量纲的量得到量纲为 1 的小量.因而,这里的多极展开实际上是对 Green 函数施行的.

在离该区域很远处(即所有 $r'=|\boldsymbol{x}'|$ 都远小于 $r=|\boldsymbol{x}|$)的表达式可以利用下述公式

$$\begin{aligned}\frac{1}{R}=\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}&=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{r}\left(\frac{r'}{r}\right)^{l}\mathrm{P}_{l}(\cos\beta)\\&=4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(2l+1)r}\left(\frac{r'}{r}\right)^{l}\sum_{m=-l}^{l}\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\phi)\mathrm{Y}_{lm}^{*}(\theta',\phi'),\quad \text{当 } r>r' \text{时}\end{aligned}\tag{4.9.2}$$

对 $\boldsymbol{x}'/r$ 作 Taylor 展开,式中 β 是 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{x}'$ 的夹角,(r',θ',ϕ') 是源点的球坐标,(r,θ,ϕ) 是观察点(或称为场点)的球坐标,$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'$,而 $\mathrm{P}_{l}(x)$ 是 Legendre 多项式,$\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\phi)$ 是球谐函数.于是有

$$\varphi(\boldsymbol{x})=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{1}{(2l+1)\epsilon}\left(\frac{1}{r}\right)^{l+1}Q_{lm}\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\phi)\tag{4.9.3}$$

式中

$$Q_{lm}=\int \mathrm{d}^{3}x'\rho_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{x}')r'^{l}\mathrm{Y}_{lm}^{*}(\theta',\phi')\tag{4.9.4}$$

称为球坐标系中电荷体系的 l 阶多极矩或电 l 极子的矩.考虑到任何电荷体系都可视为由 n 个点电荷 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 组成的,式(4.9.4)中的积分可改写为求和:

$$Q_{lm}=\sum_{i=1}^{n}e_{i}r_{i}'^{l}\mathrm{Y}_{lm}^{*}(\theta_{i}',\phi_{i}')\tag{4.9.5}$$

这种理解适用所有含有电荷密度的积分.由 $m=-l,-l+1,\cdots,l$ 可知,l 阶多极矩有 $(2l+1)$ 个分量.又因为 $\rho_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{x})$ 总是实的,故由 $\mathrm{Y}_{l,-m}(\theta,\phi)=(-1)^{m}\mathrm{Y}_{lm}^{*}(\theta,\phi)$ 易知

$$Q_{l,-m}=(-1)^{m}Q_{lm}^{*}\tag{4.9.6}$$

多极展开也可在直角坐标系中进行.由于 $r>r'$,故由 Taylor 展开知

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}=\frac{1}{r}+\boldsymbol{x}'\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}'\frac{1}{R}\right)_{r'=0}+\frac{1}{2!}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}':\left(\boldsymbol{\nabla}'\boldsymbol{\nabla}'\frac{1}{R}\right)_{r'=0}+\cdots$$

易证

$$\left(\underbrace{\boldsymbol{\nabla}'\boldsymbol{\nabla}'\cdots\boldsymbol{\nabla}'}_{n}\frac{1}{R}\right)_{r'=0}=\underbrace{(-\boldsymbol{\nabla})(-\boldsymbol{\nabla})\cdots(-\boldsymbol{\nabla})}_{n}\frac{1}{r}\tag{4.9.7}$$

故有

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}=\frac{1}{r}-\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r}+\frac{1}{2!}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}':\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r}+\cdots\tag{4.9.8}$$

式中二阶微商$\nabla\nabla(1/r)$的系数$x'x'/2!$是二阶对称张量,具有6个独立的分量.利用恒等式

$$I:\nabla\nabla\frac{1}{r}=\nabla^2\frac{1}{r}=0,\qquad \text{当 } r\neq 0 \text{ 时} \tag{4.9.9}$$

可将式(4.9.8)化为

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}=\frac{1}{r}-\boldsymbol{x}'\cdot\nabla\frac{1}{r}+\frac{1}{6}(3\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}'-r'^2I):\nabla\nabla\frac{1}{r}+\cdots \tag{4.9.10}$$

式中二阶微商$\nabla\nabla(1/r)$的系数$(3\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}'-r'^2\mathscr{I})/6$是二阶无迹对称张量,仅具有5个独立分量.于是,势在直角坐标系中的多极展开式为

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{x})&=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left\{\frac{Q}{r}-\boldsymbol{P}\cdot\nabla\frac{1}{r}+\frac{1}{6}\mathscr{D}:\nabla\nabla\frac{1}{r}+\cdots\right\}\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left\{\frac{Q}{r}+\frac{\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{x}}{r^3}+\frac{1}{2}\mathscr{D}:\frac{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}}{r^5}+\cdots\right\}\end{aligned} \tag{4.9.11}$$

式中右端各项对应于各极矩的势,而

$$\begin{cases}Q=\int \mathrm{d}^3x\rho_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{x}')\\ \boldsymbol{P}=\int \mathrm{d}^3x\rho_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{x}')\boldsymbol{x}'\\ \mathscr{D}=\int \mathrm{d}^3x\rho_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{x}')(3\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}'-r'^2\mathscr{I})\\ \cdots\end{cases} \tag{4.9.12}$$

分别是电荷体系的总电量、电偶极矩与电四极矩等(即位于原点的电单极子、电偶极子、电四极子等的矩),其独立分量分别为1、3、5,与球坐标系中的多极矩的分量计数结果相同.

可以证明上述结论是普遍成立的.事实上,直角坐标系中的2^l极矩的势为

$$\varphi^{(l)}(\boldsymbol{x})=\frac{(-1)^l}{4\pi\varepsilon l!}\widetilde{Q}^{(l)}\underbrace{\cdots}_{l\text{次点乘}}\overbrace{\nabla\nabla\cdots\nabla}^{l\uparrow}\frac{1}{r} \tag{4.9.13}$$

式中

$$\widetilde{Q}^{(l)}=\int \mathrm{d}^3x'\rho_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{x}')\underbrace{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}'\cdots\boldsymbol{x}'}_{l\uparrow} \tag{4.9.14}$$

它是l阶对称张量,称为电荷分布在直角坐标系中的2^l极矩,其分量的一般形式是

$$\widetilde{Q}^{(l)}_{\alpha\beta\gamma}=\int \mathrm{d}^3x'\rho_{\mathrm{f}}x'^{\alpha}y'^{\beta}z'^{\gamma},\quad \alpha+\beta+\gamma=l \tag{4.9.15}$$

其独立分量的个数等于$(x'+y'+z')^l$的展开式中单项式的个数,即$(l+1)(l+2)/2$个.由式(4.9.9)知,$\widetilde{Q}^{(l)}$的l个指标中任意两个收缩后对势的贡献为零,故可将式(4.9.13)写成

$$\varphi^{(l)}(\boldsymbol{x})=\frac{(-1)^l}{4\pi\epsilon l!}Q^{(l)}\underbrace{\cdots}_{l\text{次点乘}}\overbrace{\nabla\nabla\cdots\nabla}^{l\text{个}}\frac{1}{r} \tag{4.9.16}$$

式中 $Q^{(l)}$ 是由 $\tilde{Q}^{(l)}$ 去掉其中任何两个指标收缩后的结果(即去掉迹)而得到的，它是 l 阶无迹的对称张量，也称为电荷分布在直角坐标系中的 2^l 极矩，其独立分量的个数为

$$\frac{(l+1)(l+2)}{2}-\frac{l(l-1)}{2}=2l+1$$

与球坐标系中的 l 阶多极矩的分量个数相同.

进而，由式(4.9.4)可知，球坐标系中的 l 阶多极矩 Q_{lm} 可表为直角坐标系中的 l 阶多极矩 $Q^{(l)}$ 的分量的线性组合. 例如可由式(4.9.4)直接得到

$$\begin{cases}
Q_{0,0}=\dfrac{1}{\sqrt{4\pi}}Q\\
Q_{1,0}=\sqrt{\dfrac{3}{4\pi}}\displaystyle\int \mathrm{d}^3x'\rho_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{x}')z'=\sqrt{\dfrac{3}{4\pi}}P_z\\
Q_{1,1}=-\sqrt{\dfrac{3}{8\pi}}\displaystyle\int \mathrm{d}^3x'\rho_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{x}')(x'-\mathrm{i}y')=-\sqrt{\dfrac{3}{8\pi}}(P_x-\mathrm{i}P_y)\\
Q_{1,-1}=-Q_{1,1}^{*}=\sqrt{\dfrac{3}{8\pi}}(P_x+\mathrm{i}P_y)\\
Q_{2,0}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{5}{4\pi}}\displaystyle\int \mathrm{d}^3x'\rho_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{x}')(3z'^2-r'^2)=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{5}{4\pi}}\mathscr{D}_{zz}\\
Q_{2,1}=-\sqrt{\dfrac{15}{8\pi}}\displaystyle\int \mathrm{d}^3x'\rho_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{x}')z'(x'-\mathrm{i}y')=-\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{15}{8\pi}}(\mathscr{D}_{xz}-\mathrm{i}\mathscr{D}_{yz})\\
Q_{2,2}=\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{15}{2\pi}}\displaystyle\int \mathrm{d}^3x'\rho_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{x}')(x'-\mathrm{i}y')^2=\dfrac{1}{12}\sqrt{\dfrac{15}{2\pi}}(\mathscr{D}_{xx}-2\mathrm{i}\mathscr{D}_{xy}-\mathscr{D}_{yy})\\
Q_{2,-1}=-Q_{2,1}^{*}=\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{15}{8\pi}}(\mathscr{D}_{xz}+\mathrm{i}\mathscr{D}_{yz})\\
Q_{2,-2}=Q_{2,2}^{*}=\dfrac{1}{12}\sqrt{\dfrac{15}{2\pi}}(\mathscr{D}_{xx}+2\mathrm{i}\mathscr{D}_{xy}-\mathscr{D}_{yy})
\end{cases} \tag{4.9.17}$$

值得指出的是，在空间平移变换下，任何电荷分布的最低阶非零的多极矩的值保持不变，但更高阶多极矩的值却必然随之改变. 事实上，在空间平移变换

$$\boldsymbol{x}'_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{a}$$

下有

$$\tilde{Q}_{\mathrm{a}}^{(l)}=\sum_i e_i\underbrace{(\boldsymbol{x}'_i+\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}'_i+\boldsymbol{a})\cdots(\boldsymbol{x}'_i+\boldsymbol{a})}_{l\text{个}}$$

$$= \sum_i e_i \underbrace{\boldsymbol{x}_i' \boldsymbol{x}_i' \cdots \boldsymbol{x}_i'}_{l\uparrow} + \sum_i e_i \sum_{j=1}^{l} C_l^j \underbrace{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}\cdots\boldsymbol{a}}_{j\uparrow} \underbrace{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}'\cdots\boldsymbol{x}'}_{(l-j)\uparrow}$$

$$= \widetilde{Q}^{(l)} + \sum_{j=1}^{l} C_l^j \underbrace{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}\cdots\boldsymbol{a}}_{j\uparrow} \widetilde{Q}^{(l-j)} \tag{4.9.18}$$

由此式知当 $\widetilde{Q}^k|_{k=0,1,\cdots,l-1}=0$ 且 $\widetilde{Q}^l\neq 0$ 时有

$$\widetilde{Q}_a^{(l)} = \widetilde{Q}^{(l)} \tag{4.9.19}$$

及

$$\widetilde{Q}_a^{(l+n)} = \widetilde{Q}^{(l+n)} + \sum_{j=1}^{l+n} C_{l+n}^j \underbrace{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}\cdots\boldsymbol{a}}_{j\uparrow} Q^{(l+n-j)} \neq \widetilde{Q}^{(l+n)}, \quad \text{当 } n>0$$

因式中和 $\sum_{j=1}^{l+n}$ 内至少当 $j=n$ 时的那一项不等于零，故整个和亦不为零. 由于 Q_{lm} 是 $Q^{(l)}$ 分量的线性组合，上述结论对 Q_{lm} 亦成立.

4.9.2 电场强度的多极展开

对电势的多极矩展开式两边取梯度可得电场强度的多极矩展开式. 在球坐标系中有

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_\phi \end{pmatrix} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{Q_{lm}}{\epsilon(2l+1)r^{l+2}} \begin{pmatrix} l+1 \\ -\partial/\partial\theta \\ im/\sin\theta \end{pmatrix} \mathrm{Y}_{lm}(\theta,\phi) \tag{4.9.20}$$

在直角坐标系中有

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon}\left\{Q\nabla\frac{1}{r} + \nabla\left(\frac{\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{x}}{r^3}\right) + \nabla\left(\frac{1}{2}D:\frac{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}}{r^5}\right) + \cdots\right\} \tag{4.9.21}$$

对于沿 z 轴的电偶极子 $\boldsymbol{P}$，由上式得

$$\boldsymbol{E}_P(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\boldsymbol{P}\cdot\nabla\nabla\frac{1}{r} \tag{4.9.22}$$

或

$$E_r = \frac{P\cos\theta}{2\pi\epsilon r^3}, \quad E_\theta = \frac{P\sin\theta}{4\pi\epsilon r^3}, \quad E_\phi = 0 \tag{4.9.23}$$

换言之，位于原点的电偶极子 $\boldsymbol{P}$ 在 $\boldsymbol{x}\neq 0$ 点产生的场为

$$\boldsymbol{E}_P(\boldsymbol{x}) = \frac{3(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}-\boldsymbol{P}}{4\pi\epsilon|\boldsymbol{x}|^3}, \quad \text{当 } \boldsymbol{x}\neq 0 \tag{4.9.24}$$

式中 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}|$.

为了考察位于原点的电偶极子 $\boldsymbol{P}$ 在 $\boldsymbol{x}=0$ 点的场，先证一个辅助公式. 由 Legendre 多项式 $\mathrm{P}_l(x)$ 的正交性可以证明

$$\oint_{r=R} \mathrm{d}\Omega \frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} = \oint_{r=R} \mathrm{d}\Omega \boldsymbol{n} \frac{r_<}{r_>^2}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}') = \frac{r_<}{r_>^2}\left(\oint_{r=R} \mathrm{d}\Omega \boldsymbol{nn}\right)\cdot\boldsymbol{n}' \tag{4.9.25}$$

式中积分区域是圆心在原点半径为 R 的球面，而

$$\boldsymbol{n}' = \boldsymbol{x}'/|\boldsymbol{x}'|$$

$$r_> = \max\{R, r'\}, \quad r_< = \min\{R, r'\}$$

注意到在球坐标系中 $\boldsymbol{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$，可知

$$\boldsymbol{nn} = \begin{pmatrix} \sin^2\theta\cos^2\phi & \sin^2\theta\sin\phi\cos\phi & \sin\theta\cos\theta\cos\phi \\ \sin^2\theta\sin\phi\cos\phi & \sin^2\theta\sin^2\phi & \sin\theta\cos\theta\sin\phi \\ \sin\theta\cos\theta\cos\phi & \sin\theta\cos\theta\sin\phi & \cos^2\theta \end{pmatrix} \tag{4.9.26}$$

由此便有

$$\oint_{r=R} \mathrm{d}\Omega \boldsymbol{nn} = \frac{4\pi}{3} I \tag{4.9.27}$$

代入式(4.9.25)便得到所需的辅助公式

$$\oint_{r=R} \mathrm{d}\Omega \frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} = \frac{4\pi}{3}\frac{r_<}{r_>^2}\boldsymbol{n}' \tag{4.9.28}$$

若电荷分布在坐标原点及其附近的小区域 V 内，则在包容该区域的球内(该球内充满各向同性的均匀线性介质)，电场的体积分可表为

$$\int_{r<R} \mathrm{d}^3x \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = -\int_{r<R} \mathrm{d}^3x \nabla\varphi = -\oint_{r=R} R^2 \mathrm{d}\Omega \boldsymbol{n}\varphi(\boldsymbol{x})$$

$$= -\frac{R^2}{4\pi\varepsilon}\int_{r<R} \mathrm{d}^3x'\rho(\boldsymbol{x}')\oint_{r=R} \mathrm{d}\Omega \frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$$

式中体积分区域是圆心在原点半径为 R 的球体，而面积分区域是该球的外表面.利用式(4.9.28)得

$$\int_{r<R} \mathrm{d}^3x \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = -\frac{R^2}{3\varepsilon}\int \mathrm{d}^3x'\rho(\boldsymbol{x}')\frac{r_<}{r_>^2}\boldsymbol{n}' \tag{4.9.29}$$

若半径为 R 的球面完全包围了电荷分布的区域 V，那么 $r_> = R, r_< = r'$，由上式知

$$\int_{r<R} \mathrm{d}^3x \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{3\varepsilon}\boldsymbol{P}, \quad V\subset\text{球 R} \tag{4.9.30}$$

式中 $\boldsymbol{P}$ 是区域 V 中电荷分布的偶极矩.(4.9.30)式告诉我们，处于某一球体内的静电荷分布的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的球积分仅与位于球心(即原点)的点电偶极子的电偶极矩 $\boldsymbol{P}$ 有关，而与整个电流体系在多极展开中的其他的磁多极矩无关.因而，可将(4.9.30)式写为

$$\int_{r<R} \mathrm{d}^3 x \boldsymbol{E}_p(x)(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{3\epsilon}\boldsymbol{P} \tag{4.9.31}$$

若令 $R\to 0$,则上式左端仅有原点处的电场有贡献.于是可知

$$\boldsymbol{E}_P(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{3\epsilon}\boldsymbol{P}\delta^3(\boldsymbol{x}), \quad \text{当 } \boldsymbol{x}=0 \tag{4.9.32}$$

如电荷分布区域 V 全在球 R 之外,则 $r_> = r'$, $r_< = R$,故由式(4.9.29)知

$$\int_{r<R} \mathrm{d}^3 x \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = -\frac{R^3}{3\epsilon}\int_V \mathrm{d}V'\rho(\boldsymbol{x}')\frac{\boldsymbol{x}'}{r'^3}, \quad V\supset \text{球 R} \tag{4.9.33}$$

此即

$$\int_{r<R} \mathrm{d}^3 x \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{4\pi R^3}{3}\boldsymbol{E}(0), \quad V\supset \text{球 R} \tag{4.9.34}$$

现在容易写出位于 $\boldsymbol{x}_0$ 处的点电偶极子 $\boldsymbol{P}$ 在任一点的场的表达式,这可直接由式(4.9.24)与(4.9.32)经坐标平移得到

$$\boldsymbol{E}_P(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} [3(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}-\boldsymbol{P}]/[4\pi\epsilon|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^3], & \text{当 } \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{x}_0 \\ -[\boldsymbol{P}/(3\epsilon)]\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0), & \text{当 } \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0 \end{cases} \tag{4.9.35}$$

式中 $\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)/|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|$.

4.9.3 电荷体系与外场的相互作用能的多极展开

设 ρ 与 φ 分别表示所考虑的电荷体系 T 的电荷密度和电势,而 ρ_e 与 φ_e 分别表示体系 T 外的外源(外电荷体系)分布和相应的外电势.体系 T 与外场的相互作用能为

$$U_I = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3 x(\rho\varphi_e + \rho_e\varphi)$$

由 Green 互易定理知

$$\int \mathrm{d}^3 x\rho\varphi_e = \int \mathrm{d}^3 x\rho_e\varphi$$

故

$$U_I = \int \mathrm{d}^3 x\rho(\boldsymbol{x})\varphi_e(\boldsymbol{x}) \tag{4.9.36}$$

外源分布 $\rho_e(\boldsymbol{x}')$在区域 V 中 $\boldsymbol{x}$ 点处产生的电势为

$$\varphi_e(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_{V'} \mathrm{d}^3 x' \frac{\rho_e(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \tag{4.9.37}$$

式中 V'处于区域 V 之外.若区域 V 很小,且坐标原点取在 V 中,则对于 V 中任一点 $\boldsymbol{x}$, $r = |\boldsymbol{x}|$小于 $r' = |\boldsymbol{x}'|$.因而,可将 $1/|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|$对 $\boldsymbol{x}/r'$作 Taylor 展开

$$\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} = \frac{1}{r} - \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\nabla}'\frac{1}{r} + \frac{1}{2!}\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}:\boldsymbol{\nabla}'\boldsymbol{\nabla}'\frac{1}{r} + \cdots \tag{4.9.38}$$

于是,(4.9.37)式成为

$$\varphi_e = \varphi_{e0} + \boldsymbol{x}\cdot(\nabla\varphi_e)_0 + \frac{1}{2!}\boldsymbol{xx}:(\nabla\nabla\varphi_e)_0 + \cdots \tag{4.9.39}$$

式中,下标 0 表示相应的量在 $\boldsymbol{x}=0$ 点的取值.由于外源 ρ_e 分布在 V 外,故在 V 内有

$$(I:\nabla\nabla\varphi_e)_0 = (\nabla^2\varphi_e)_0 = 0 \tag{4.9.40}$$

于是,式(4.9.39)可写为

$$\begin{aligned}\varphi_e &= \varphi_{e0} + \boldsymbol{x}\cdot(\nabla\varphi_e)_0 + \frac{1}{6}(3\boldsymbol{xx} - r^2 J):(\nabla\nabla\varphi_e)_0 + \cdots \\ &= \varphi_{e0} - \boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{E}_e)_0 - \frac{1}{6}(3\boldsymbol{xx} - r^2 I):(\nabla\boldsymbol{E}_e)_0 + \cdots\end{aligned} \tag{4.9.41}$$

将式(4.9.41)代入式(4.9.36)得

$$\begin{aligned}U_l &= Q\varphi_{e0} + \boldsymbol{P}\cdot(\nabla\varphi_e)_0 + \frac{1}{6}\mathscr{Q}:(\nabla\nabla\varphi_e)_0 + \cdots \\ &= Q\varphi_{e0} - \boldsymbol{P}\cdot(\boldsymbol{E}_e)_0 - \frac{1}{6}\mathscr{Q}:(\nabla\boldsymbol{E}_e)_0 + \cdots\end{aligned} \tag{4.9.42}$$

上式右端第 l 项表示位于点 $\boldsymbol{x}_0$ 的电 2^l 极子与外场的相互作用能.

特别地,位于 $\boldsymbol{x}_1$ 与 $\boldsymbol{x}_2$ 的两个电偶极子 $\boldsymbol{P}_1$ 与 $\boldsymbol{P}_2$ 的相互作用能是

$$U_1^{(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2)} = -\boldsymbol{P}_1\cdot(\boldsymbol{E}_{P_2})_{x=x_1} = \frac{\boldsymbol{P}_1\cdot\boldsymbol{P}_2 - 3(\boldsymbol{P}_1\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{P}_2\cdot\boldsymbol{n})}{4\pi\epsilon|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|^3}$$

式中 $\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)/|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|$.

现设电偶极子 $\boldsymbol{P}$ 平移某一任意的虚位移 $\delta\boldsymbol{x}$,而偶极矩 P 的大小、方向及外场 $\boldsymbol{E}_e$ 均保持不变,则由虚功原理知

$$\boldsymbol{F}_P\cdot\delta\boldsymbol{x} = -\delta U_1 = \nabla(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{E}_e)\cdot\delta\boldsymbol{x}$$

式中 $\boldsymbol{F}_P$ 是外场 $\boldsymbol{E}_e$ 对电偶极子 $\boldsymbol{P}$ 的作用力.由 $\delta\boldsymbol{x}$ 的任意性得

$$\boldsymbol{F}_P = \nabla(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{E}_e) = (\nabla\boldsymbol{E}_e)\cdot\boldsymbol{P} \tag{4.9.43}$$

利用 V 中 $\nabla\times\boldsymbol{E}_e = 0$ 易得

$$(\nabla\boldsymbol{E}_e)\cdot\boldsymbol{P} - (\boldsymbol{P}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}_e = \boldsymbol{P}\times(\nabla\times\boldsymbol{E}_e) = 0$$

故电偶极子 $\boldsymbol{P}$ 在外场 $\boldsymbol{E}_e$ 中所受到的力为

$$\boldsymbol{F}_P = (\boldsymbol{P}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}_e \tag{4.9.44}$$

同理,在保持电偶极矩的大小与外场 $\boldsymbol{E}_e$ 不变的条件下,让电偶极子 $\boldsymbol{P}$ 转动一个任意的虚角度 $\delta\boldsymbol{\theta}$,则

$$\boldsymbol{L}_P\cdot\delta\boldsymbol{\theta} = -\delta U_1 = (\delta\boldsymbol{P})\cdot\boldsymbol{E}_e$$

式中 $\boldsymbol{L}_P$ 是外场 $\boldsymbol{E}_e$ 作用在电偶极子 $\boldsymbol{P}$ 上的力矩.因为 $\boldsymbol{P}$ 的大小不变,只有方向改变,故

$$\delta \boldsymbol{P} = \delta \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{P}$$

于是

$$\boldsymbol{L}_P \cdot \delta \boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{E}_e) \cdot \delta \boldsymbol{\theta}$$

由 $\delta \boldsymbol{\theta}$ 的任意性知电偶极子 $\boldsymbol{P}$ 在外场中所受力矩为

$$\boldsymbol{L}_P = \boldsymbol{P} \times \boldsymbol{E}_e \tag{4.9.45}$$

由式(4.9.44)与(4.9.45)知,电偶极子在外场中所受的力矩和力的作用的效果是使其转向外场 $\boldsymbol{E}_e$ 的方向.

4.9.4 二维电荷分布的电势的多极展开

线电荷密度为 λ 的均匀带电的无限长细棒的场是轴对称的,且在垂直于该轴的每一平面上的场或势的分布都是一样的,即

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = -\frac{\lambda \ln|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|}{2\pi\varepsilon_0} \tag{4.9.46}$$

式中 $\boldsymbol{x}'$ 与 $\boldsymbol{x}$ 分别是在 $x-y$ 平面(令对称轴方向为 z 轴方向)上电荷所在位置与观察点的矢径.现给出一个二维电荷分布 $\rho(\boldsymbol{x}')$,这相当于在任一 $\boldsymbol{x}'$ 处给定了一沿 z 轴方向的、线电荷密度为 $\lambda = \rho(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}\sigma'$(式中 $\mathrm{d}\sigma'$ 是点 $\boldsymbol{x}'$ 的无穷小邻域的面积)的、均匀带电的无限长细棒,由式(4.9.46)知电势分布为

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\int_S \mathrm{d}\sigma'\rho(\boldsymbol{x}')\ln|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'| \tag{4.9.47}$$

式中 S 为二维电荷分布的区域.

若 S 是 $x-y$ 平面上一个有限的小区域,则可按多极展开法求该电荷体系在远处的场.利用展开公式

$$\ln\left[1 - \frac{2r'}{r}\cos\alpha + \frac{r'^2}{r^2}\right] = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n}\left(\frac{r'}{r}\right)^n, \quad \text{当 } r > r'$$

可得

$$\begin{aligned}\ln|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'| &= \ln r + \frac{1}{2}\ln\left[1 - \frac{2r'}{r}\cos\alpha + \left(\frac{r'}{r}\right)^2\right] \\ &= \ln r - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\phi\cos n\phi' + \sin n\phi\sin n\phi'}{n}\left(\frac{r'}{r}\right)^n, \quad \text{当 } r > r'\end{aligned} \tag{4.9.48}$$

式中 ϕ 与 ϕ' 分别是 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{x}'$ 在平面极坐标系中的极角,而 $\alpha = \phi - \phi'$ 则是矢径 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{x}'$ 的夹角.于是,远处的二维电势可写成

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\ln r + \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n\cos n\phi + B_n\sin n\phi}{nr^n}$$

式中

$$Q = \int_S \mathrm{d}\sigma'\rho(\boldsymbol{x}') \tag{4.9.49}$$

是区域 S 内 e_z 方向单位长度内的总电荷，而

$$\begin{cases} A_n = \int_S \mathrm{d}\sigma' \rho(\boldsymbol{x}') r'^n \cos n\phi' \\ B_n = \int_S \mathrm{d}\sigma' \rho(\boldsymbol{x}') r'^n \sin n\phi' \end{cases} \tag{4.9.50}$$

是区域 S 内的二维电 n 极矩.

特别地，取 $n=1$ 的那一项得二维电偶极势为

$$\varphi_p(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}{r^2} \tag{4.9.51}$$

式中

$$\boldsymbol{p} = \int_S \mathrm{d}\sigma' \rho(\boldsymbol{x}') \boldsymbol{x}' \tag{4.9.52}$$

是区域 S 内沿 e_z 方向单位长度上的电偶极矩.

4.9.5 静磁矢势的多极展开

设全空间被各向同性的线性均匀介质所充满.若稳恒电流体系分布于某一小区域 V 内，则在离该区域很远处可对此电流体系的矢势

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \mathrm{d}^3 x' \frac{\boldsymbol{j}_f(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$$

进行多极展开.也就是说，对于远处的观测者而言，小区域 V 内的稳恒电流分布可等效地视为一系列位于 V 内某点(取为原点)的点磁多极子(磁单极子、磁偶极子、磁四极子等).

利用式(4.9.10)可将远处的矢势写成

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}^{(0)}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{A}^{(1)}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{A}^{(2)}(\boldsymbol{x}) + \cdots, \quad \text{当 } r \gg \max\{r'\} \tag{4.9.53}$$

式中

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}^{(0)}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\mu}{4\pi r} \int_V \mathrm{d}^3 x' \boldsymbol{j}_f(\boldsymbol{x}') \\ \boldsymbol{A}^{(1)}(\boldsymbol{x}) = -\dfrac{\mu}{4\pi} \int_V \mathrm{d}^3 x' \boldsymbol{j}_f(\boldsymbol{x}') \boldsymbol{x}' \cdot \nabla \dfrac{1}{r} \\ \boldsymbol{A}^{(2)}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\mu}{24\pi} \int_V \mathrm{d}^3 x' \boldsymbol{j}_f(\boldsymbol{x}') (3\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}' - r'^2 I:) \nabla\nabla \dfrac{1}{r} \end{cases} \tag{4.9.54}$$

可以证明

$$\boldsymbol{A}^{(0)}(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{4.9.55}$$

$$\boldsymbol{A}^{(1)}(\boldsymbol{x}) = -\frac{\mu}{4\pi} \boldsymbol{m} \times \nabla \frac{1}{r} = \frac{\mu \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{x}}{4\pi r^3} \tag{4.9.56}$$

式中

$$\boldsymbol{m}=\frac{1}{2}\int_V \mathrm{d}^3x'\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{j}_f(\boldsymbol{x}') \tag{4.9.57}$$

称为区域 V 中的稳恒电流体系的磁偶极矩,或等效地视为位于原点的点磁偶极子的磁偶极矩.

证明式(4.9.55)和(4.9.56):先给出一个辅助公式:设 $f(\boldsymbol{x}')$和 $g(\boldsymbol{x}')$是 $\boldsymbol{x}'$ 的可微函数,且稳恒电流 $\boldsymbol{j}_f(\boldsymbol{x}')$局限在空间某一有限区域 V 内,则

$$\int_V \mathrm{d}^3x'[g\boldsymbol{j}_f\cdot\nabla' f+f\boldsymbol{j}_f\cdot\nabla' g]=0 \tag{4.9.58}$$

事实上,应用电流稳恒条件$\nabla'\cdot\boldsymbol{j}_f=0$ 可将上式左端的被积式写成全微分

$$g\boldsymbol{j}_f\cdot\nabla' f+f\boldsymbol{j}_f\cdot\nabla' g=\nabla'\cdot(g\boldsymbol{j}_f f)$$

再将积分区域扩大至全空间,则积分结果化为在无穷远处的封闭面上的面积分,它等于零,因为电流局限在空间一有限区域 V 内.

令 $f=1,g=x_i'$ 代入辅助公式(4.9.58),并利用

$$\boldsymbol{j}_f\cdot\nabla' x_i'=j_{fi}$$

可得

$$\int_V \mathrm{d}^3x'\boldsymbol{j}_f(\boldsymbol{x}')=0$$

故有(4.9.55),此即磁单极子的矢势为零.由于所有磁效应均是在矢势的基础上导出的,故在通常的电动力学中,磁单极子没有物理效应.换言之,磁单极子在通常的电动力学中不存在(这里我们指出,P. A. M. Dirac 曾经证明:假定存在磁单极子,则电荷必然取某一最小值的整数倍,即所谓电荷量子化).

令 $f=x_i'$,$g=x_j'$,则由辅助公式(4.9.58)得

$$\int_V \mathrm{d}^3x'[x_i'\boldsymbol{j}_{fj}+x_j'\boldsymbol{j}_{fi}]=0 \tag{4.9.59}$$

故

$$\begin{aligned}-\int_V \mathrm{d}^3x'\boldsymbol{j}_{fi}\boldsymbol{x}'\cdot\nabla\frac{1}{r}&=\frac{x_j}{r^3}\int_V \mathrm{d}^3x'x_j'\boldsymbol{j}_{fi}\\&=-\frac{x_j}{2r^3}\int_V \mathrm{d}^3x'[x_i'\boldsymbol{j}_{fj}-x_j'\boldsymbol{j}_{fi}]\\&=-\frac{1}{r^3}(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{m})_i\end{aligned}$$

因而有(4.9.56),此即位于原点的点磁偶极子 $\boldsymbol{m}$ 的矢势.

稳恒电流体系的磁偶极矩还可以通过带电粒子的轨道角动量计算出来.如果电流体系是由若干带电粒子的稳定流动所形成,这些带电粒子具有电荷 e_i、质量 m_i 和速度$\boldsymbol{v}_i$,则体系的电流密度为

$$\boldsymbol{j}_f(\boldsymbol{x}')=\sum_i e_i\boldsymbol{v}_i(\boldsymbol{x}_i')\delta^3(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}_i');\quad \text{且对所有 } i,\nabla'\cdot\boldsymbol{v}_i(\boldsymbol{x}_i')=0$$

式中后一等式是带电粒子呈稳定流动的条件,它保证了稳恒电流条件$\nabla'\cdot\boldsymbol{j}_f(\boldsymbol{x}')=0$自动满足.利用上式,体系的磁矩可写为

$$\boldsymbol{m}=\frac{1}{2}\sum_i e_i(\boldsymbol{x}_i'\times\boldsymbol{v}_i) \tag{4.9.60}$$

或

$$\boldsymbol{m}=\sum_i\frac{e_i}{2m_i}\boldsymbol{L}_i \tag{4.9.61}$$

式中$\boldsymbol{L}$是第i个带电粒子的轨道角动量

$$\boldsymbol{L}_i=m_i(\boldsymbol{x}_i'\times\boldsymbol{v}_i)$$

磁偶极矩$\boldsymbol{m}$产生的磁场的磁感强度为

$$\boldsymbol{B}^{(1)}(\boldsymbol{x})=\nabla\times\boldsymbol{A}^{(1)}(\boldsymbol{x})=\nabla\times\left(-\frac{\mu}{4\pi}\boldsymbol{m}\times\nabla\frac{1}{r}\right) \tag{4.9.62}$$

$\boldsymbol{B}^{(1)}(\boldsymbol{x})$可以表示为某一磁标势的梯度.因$\nabla^2(1/r)|_{r\neq0}=0$及$\boldsymbol{m}$为常矢量,有

$$\boldsymbol{B}^{(1)}(\boldsymbol{x})=-\mu\nabla\varphi_m \tag{4.9.63}$$

式中

$$\varphi_m=-\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{m}\cdot\nabla\frac{1}{r}=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{x}}{4\pi r^3},\quad \text{当 } r\neq0 \tag{4.9.64}$$

它可以解释为位于原点的、磁偶极矩为$\boldsymbol{m}$的点磁偶极子在$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$点产生的磁标势.这一点磁偶极子在$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$点产生的磁感强度$\boldsymbol{B}^{(1)}(\boldsymbol{x})$为

$$\boldsymbol{B}_m(\boldsymbol{x})=\frac{\mu}{4\pi}\frac{3(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m}}{r^3},\quad \text{当 } r\neq0 \tag{4.9.65}$$

式中$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{x}/r$.

如果电流体系是一个环形的闭合电流,则

$$\boldsymbol{m}=\frac{1}{2}\int_V \mathrm{d}^3x'\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{j}_f(\boldsymbol{x}')=-\frac{I}{2}\oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{l}'\times\boldsymbol{x}'=I\boldsymbol{S} \tag{4.9.66}$$

式中$\boldsymbol{S}$是电流回路L的面积,I是回路的电流强度,且$\boldsymbol{S}$的方向与回路方向呈右手螺旋关系.在导出上式时,我们注意到了

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l}'/\!/\boldsymbol{j}_f(\boldsymbol{x}')$$

故可交换它们在矢量运算式中的位置,从而

$$\oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{l}'\cdot\int_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}'\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{j}_f(\boldsymbol{x}')=-\oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{l}'\times\boldsymbol{x}'\int_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}'\cdot\boldsymbol{j}_f(\boldsymbol{x}')$$

若电流圈很小,以至于在很远处该电流圈的磁场主要是磁偶极矩由式(4.9.66)所确定的磁偶极子的场,其余效应便是更高阶的小量.因而,一个无穷小的电流圈是一个磁偶极子.

如果电流体系是一个具有任意形状的闭合电流回路 L,它所产生的磁场可由下述方法求出:任选一个以此回路为边界的曲面 S,将曲面 S 分割成许多小块面元,各小块面元的边界回路上都流过电流 I,电流 I 的大小与流向同大回路 L 上的电流相同.对于每一小块面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$,都相应地有一个磁矩

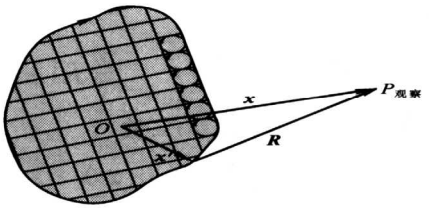


图 4.1 闭合电流回路的磁场

$$\mathrm{d}\boldsymbol{m}=I\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}'$$

它所产生的磁标势为

$$\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{m}}=-\frac{I}{4\pi}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}'\cdot\nabla\frac{1}{R}$$

式中 R 是从位于点 $\boldsymbol{x}'$ 处的面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}'$ 至观察点 $\boldsymbol{x}$ 的矢径 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'$ 的长度.于是整个回路 L 产生的磁标势为

$$\varphi_{\mathrm{m}}=\frac{I}{4\pi}\int_S\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}'\cdot\nabla'\frac{1}{R}=-\frac{I}{4\pi}\Omega \tag{4.9.67}$$

式中 Ω 是以回路 L 为边界的面 S 对观察点所张的立体角.这里我们规定:电流方向与回路 L 所张的曲面 S 的法向 $\boldsymbol{n}$ 满足右手螺旋法则;按此法则定好 $\boldsymbol{n}$ 的方向后,若观察点在 $\boldsymbol{n}$ 的正方向时,$\Omega<0$,反之 $\Omega>0$.由式(4.9.67)可得任意形状的闭合电流回路 L 产生的磁感强度为

$$\boldsymbol{B}_L=\frac{\mu I}{4\pi}\nabla\Omega \tag{4.9.68}$$

现考察位于原点的点磁偶极子 $\boldsymbol{m}$ 在原点产生的磁场.当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 时,直接由式(4.9.62)及 $\boldsymbol{m}$ 为常矢量可得

$$\boldsymbol{B}^{(1)}=\frac{\mu}{4\pi}(\boldsymbol{m}\cdot\nabla)\nabla\frac{1}{r}-\frac{\mu}{4\pi}\boldsymbol{m}\nabla^2\frac{1}{r}=\frac{\mu}{4\pi}(\boldsymbol{m}\cdot\nabla)\nabla\frac{1}{r}+\mu\boldsymbol{m}\delta^3(\boldsymbol{x}) \tag{4.9.69}$$

为了从上式得到更明晰的结果,现计算稳恒电流体系的磁感强度 $\boldsymbol{B}$ 的球积分:

$$\begin{aligned}\int_{r<R}\mathrm{d}^3x\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})&=\int_{r<R}\mathrm{d}^3x\,\nabla\times\boldsymbol{A}=R^2\oint_{r=R}\mathrm{d}\Omega\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}\\&=-\frac{\mu R^2}{4\pi}\int\mathrm{d}^3x'\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}'\times\oint_{r=R}\mathrm{d}\Omega\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\end{aligned}$$

式中 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{x}/r$. 利用公式(4.9.28)得

$$\int_{r<R}\mathrm{d}^3x\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})=\frac{\mu}{3}\int\mathrm{d}^3x'\left(\frac{R^2r_<}{r'r_>^2}\right)\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{x}') \tag{4.9.70}$$

式中 $r_<=\min\{R,r'\}$, $r_>=\max\{R,r'\}$. 若整个电流体系都在球 R 内,则 $r_<=r'$, $r_>=R$,故

$$\int_{r<R}\mathrm{d}^3x\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})=\frac{2\mu}{3}\boldsymbol{m},\qquad \text{当 } \boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}|_{r>R}=0 \tag{4.9.71}$$

若整个电流体系在球外,则 $r_<=R$, $r_>=r'$,故

$$\int_{r<R}\mathrm{d}^3x\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})=\frac{\mu}{3}R^3\int\mathrm{d}^3x'\frac{\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{x}')}{r'^3},\qquad \text{当 } \boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}|_{r<R}=0$$

利用 Biot－Savart 定律知

$$\boldsymbol{B}(0)=\frac{\mu}{4\pi}\int\mathrm{d}^3x'\frac{\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{x}')}{r'^3} \tag{4.9.72}$$

故

$$\int_{r<R}\mathrm{d}^3x\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})=\frac{4\pi}{3}R^3\boldsymbol{B}(0),\qquad \text{当 } \boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}|_{r<R}=0 \tag{4.9.73}$$

(4.9.71)式告诉我们,处于某一球体内的稳恒电流体系的磁感强度 $\boldsymbol{B}$ 的球积分仅与位于球心(即原点)的点磁偶极子的磁偶极矩 $\boldsymbol{m}$ 有关,而与整个电流体系在多极展开中的其他的磁多极矩无关. 因而,可将(4.9.71)式写为

$$\int_{r<R}\mathrm{d}^3x\boldsymbol{B}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x})=\frac{2\mu}{3}\boldsymbol{m} \tag{4.9.74}$$

若令 $R\to0$,则上式左端仅有原点处的磁场有贡献. 于是可知

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x})=\frac{2\mu}{3}\boldsymbol{m}\delta^3(\boldsymbol{x}),\qquad \text{当 } \boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \tag{4.9.75}$$

比较(4.9.22)与(4.9.69)两式可知,正是(4.9.69)式右端第二项的贡献使得位于球心(即原点)的点磁偶极子的磁场与相应的电偶极子的电场相比,其系数不仅改变符号,且绝对值增大两倍.

对于位于 $\boldsymbol{x}_0$ 处的点磁偶极子 $\boldsymbol{m}$,由式(4.9.65)与(4.9.71)知它在空间的磁场为

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x})=\begin{cases}[\mu(3\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m})]/[4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^3], & \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{x}_0\\ (2\mu\boldsymbol{m}/3)\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0), & \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0\end{cases} \tag{4.9.76}$$

式中 $\boldsymbol{n}=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)/|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|$.

4.9.6 电流体系与外场的相互作用能的多极展开

设 $\boldsymbol{j}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 分别表示体系的电流密度与矢势, $\boldsymbol{j}_{\mathrm{e}}$ 与 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{e}}$ 分别表示外源的电流

密度与矢势.体系与外场的相互作用能为

$$U_{\mathrm{I}}=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{j}_{\mathrm{e}}\cdot\boldsymbol{A})$$

由于

$$\int \mathrm{d}^3x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}_{\mathrm{e}}=\int \mathrm{d}^3x\boldsymbol{j}_{\mathrm{e}}\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\mu}{4\pi}\int \mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3x'\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{j}_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$$

于是

$$U_{\mathrm{I}}=\int \mathrm{d}^3x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}_{\mathrm{e}} \tag{4.9.77}$$

外源分布 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{x}')$在区域 V 中 $\boldsymbol{x}$ 点处产生的电势为

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{x})=\frac{\mu}{4\pi}\int_{V'}\mathrm{d}^3x'\frac{\boldsymbol{j}_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \tag{4.9.78}$$

式中 V'处于区域 V 之外.若区域 V 很小,且坐标原点取在 V 中,则对于 V 中任一点 $\boldsymbol{x}$,$r=|\boldsymbol{x}|$小于 $r'=|\boldsymbol{x}'|$.因而,可将 $1/|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|$对 $\boldsymbol{x}/r'$按(4.9.38)式作 Taylor 展开.于是,(4.9.78)式成为

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{e}}=\boldsymbol{A}_{\mathrm{e}0}+\boldsymbol{x}\cdot(\nabla\boldsymbol{A}_{\mathrm{e}})_0+\frac{1}{2!}\boldsymbol{xx}:(\nabla\nabla\boldsymbol{A}_{\mathrm{e}})_0+\cdots \tag{4.9.79}$$

式中 $\boldsymbol{x}$ 是区域 V 中相对于一固定点 $\boldsymbol{x}_0$ 的矢径,下标 0 表示相应的量在 $\boldsymbol{x}_0$ 点取值.由于外源 $\boldsymbol{j}_{\mathrm{e}}$ 分布在 V 外,故在 V 内有

$$(I:\nabla\nabla\boldsymbol{A}_{\mathrm{e}})_0=(\nabla^2\boldsymbol{A}_{\mathrm{e}})_0=0 \tag{4.9.80}$$

于是,式(4.9.79)可写为

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{e}}=\boldsymbol{A}_{\mathrm{e}0}+\boldsymbol{x}\cdot(\nabla\boldsymbol{A}_{\mathrm{e}})_0+\frac{1}{6}(3\boldsymbol{xx}-r^2I):(\nabla\nabla\boldsymbol{A}_{\mathrm{e}})_0+\cdots \tag{4.9.81}$$

将式(4.9.81)代入式(4.9.77)得

$$U_{\mathrm{I}}=\int_V \mathrm{d}^3x\left\{\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}_{\mathrm{e}0}+\boldsymbol{jx}:(\nabla\boldsymbol{A}_{\mathrm{e}})_0+\frac{1}{6}\boldsymbol{j}(3\boldsymbol{xx}-r^2I)\vdots(\nabla\nabla\boldsymbol{A}_{\mathrm{e}})_0+\cdots\right\} \tag{4.9.82}$$

上式右端第 l 项是点 $\boldsymbol{x}_0$ 处的磁 2^l 极子与外场的相互作用能.

特别地,第一项为

$$U_{\mathrm{I}}^{(0)}|_j=\boldsymbol{A}_{\mathrm{e}0}\cdot\int_V \mathrm{d}v\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})=0 \tag{4.9.83}$$

第二项为

$$U_{\mathrm{I}}^{(1)}|_j=\int_V \mathrm{d}^3x\boldsymbol{x}\cdot(\nabla\boldsymbol{A}_{\mathrm{e}})_0\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}) \tag{4.9.84}$$

作为对比,我们指出,在静电荷分布的情形,与上式相应的相互作用能的表达式是

$$U_1^{(1)}|_\rho = \int_V \mathrm{d}^3x\boldsymbol{x}\cdot(\nabla\boldsymbol{\varphi}_e)_0\rho(\boldsymbol{x})$$

易证

$$\boldsymbol{x}\cdot(\nabla\boldsymbol{A}_e)_0\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})\cdot(\nabla\boldsymbol{A}_e)_0\cdot\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{j})\cdot\boldsymbol{B}_{e0} \tag{4.9.85}$$

利用式(4.9.59)可得

$$\int_V \mathrm{d}^3x[\boldsymbol{x}\cdot(\nabla\boldsymbol{A}_e)_0\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})\cdot(\nabla\boldsymbol{A}_e)_0\cdot\boldsymbol{x}]=0$$

于是

$$\int_V \mathrm{d}^3x(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{j})\cdot\boldsymbol{B}_{e0}=2\int_V \mathrm{d}^3x\boldsymbol{j}\boldsymbol{x}:(\nabla\boldsymbol{A}_e)_0$$

故

$$U_1^{(1)}|_j=\frac{1}{2}\int_V \mathrm{d}^3x(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{j})\cdot\boldsymbol{B}_{e0}=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}_{e0} \tag{4.9.86}$$

值得注意的是，$U_1^{(1)}|_j$ 在磁偶极子与外场反向时为负值，同向时为正值.这与电偶极子的情形恰好相反.实际上，在电偶极子内部有一个很强的由正极到负极的场，而磁偶极子却没有.当电偶极子与外场同向时，其内部的场与外场是相抵消的.

利用上式及点磁偶极子 $\boldsymbol{m}$ 场强公式(4.9.76)可知，位于 $\boldsymbol{x}_1$ 与 $\boldsymbol{x}_2$ 的两个磁偶极子 $\boldsymbol{m}_1$ 与 $\boldsymbol{m}_2$ 的相互作用能是

$$U_1^{(\boldsymbol{m}_1,\boldsymbol{m}_2)}=-\frac{\mu[\boldsymbol{m}_1\cdot\boldsymbol{m}_2-3(\boldsymbol{m}_1\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{m}_2\cdot\boldsymbol{n})]}{4\pi|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|^3} \tag{4.9.87}$$

式中 $\boldsymbol{n}=(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)/|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|$.这与相应的点电偶极子的情形相差一个负号，原因在于：(4.9.86)与相应的点电偶极子的情形相差一个负号，而点磁偶极子的场强与偶极矩的表达式与相应的点电偶极子的情形之间没有符号差别.

另外，当磁偶极子转动或移动时，由于感应电动势的出现会使电流发生变化，因而场对磁偶极子所做的功并不等于 U_1 的减少，而应等于总能量的减少.因而，关于场对电偶极子的作用力与力矩的推导方法对于磁偶极子不再适用.

4.9.7 局域电流分布在外场所受的力与力矩

考虑由 n 个电流回路所组成的稳恒电流体系，除电流回路外的空间中充满均匀线性介质.第 i 个电流回路在 $\boldsymbol{x}$ 点产生的矢势为

$$\boldsymbol{A}_i=\frac{\mu}{4\pi}\int_{V_i}\mathrm{d}^3x_i\frac{\boldsymbol{j}_i}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i|}=\frac{\mu I_i}{4\pi}\oint_{L_i}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_i}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i|} \tag{4.9.88}$$

式中 $\boldsymbol{x}_i$、$\mathrm{d}\boldsymbol{l}_i$ 与 I_i 是第 i 个电流回路 L_i 上的点、线元与电流；在推导中应用了对电流回路成立的等式

$$\int_V \mathrm{d}^3 x\boldsymbol{j} = I\oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

这里,电流回路 L 与通过电流的横截面构成了积分体积 V. 第 i 个电流回路的场在第 j 个电流回路 L_j 中产生的磁通为

$$\Phi_{ij} = \oint_{L_j} \boldsymbol{A}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_j = I_i M_{ij} \tag{4.9.89}$$

式中

$$M_{ij} = \frac{\mu}{4\pi}\oint_{L_i}\oint_{L_j} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_j}{|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j|} = M_{ji} \tag{4.9.90}$$

是两电流回路 L_i 与 L_j 的互感系数(当 $i=j$ 时称为自感系数),上式常称为 Newmann公式. 这 n 个电流回路的相互作用能是

$$U_1 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} I_i \oint_{L_i} \mathrm{d}\boldsymbol{l}_i \cdot \sum_{j\neq i} \boldsymbol{A}_j = \frac{1}{2}\sum_{i,j\neq i} I_i I_j M_{ij} \tag{4.9.91}$$

而总磁能为

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} I_i \oint_{L_i} \mathrm{d}\boldsymbol{l}_i \cdot \sum_{j} \boldsymbol{A}_j = \frac{1}{2}\sum_{i,j} I_i I_j M_{ij} \tag{4.9.92}$$

特别地,当只有一个电流回路时

$$U = \frac{1}{2}LI^2 \tag{4.9.93}$$

设各电流回路在某一虚平移或虚转动下,各回路电流保持不变. 按照 Ohm 定律,对第 i 个电流回路有

$$\mathscr{E}_i^{(\mathrm{e})} + \mathscr{E}_i = I_i R_i$$

式中 R_i 是回路电阻,$\mathscr{E}_i^{(\mathrm{e})}$ 是外电源的电动势,而 $\mathscr{E}_i$ 则是各平移或转动回路在第 i 个回路中产生的感生电动势. 按照 Faraday 电磁感应定律有

$$\mathscr{E}_i = -\delta\Phi_i'/\delta t \tag{4.9.94}$$

式中 Φ_i' 是除第 i 个回路外的所有其他回路的电流在回路 i 中产生的磁通量

$$\Phi_i' = \sum_{j\neq i}\Phi_{ji} = \sum_{j\neq i} I_j M_{ij} \tag{4.9.95}$$

值得指出的是:在所考虑的虚平移或虚转动下,各回路电流 I_i 与回路自感 M_{ii} (对 i 不求和)均保持不变,仅 $M_{ij}|_{i\neq j}$ 变化;因而,在式(4.9.94)中仅考虑互感磁通.

外电源在 δt 时间内供给体系的能量为

$$\sum_i \mathscr{E}_i^{(\mathrm{e})} I_i \delta t = \sum_i I_i^2 R_i \delta t + \delta\Big(\sum_{i,j\neq i} I_i I_j M_{ij}\Big)$$

等式右端第一项是 Joule 热耗损;第二项则是在体系平移或转动时为保持体系电流不变而通过外加电动势提供的能量,记为 ω. 由式(4.9.91)知,ω 和体系相互

作用能的变化满足下述关系

$$\omega = 2\delta U_{\mathrm{I}} \tag{4.9.96}$$

因而,若不计 Joule 热耗损,包括外加电动势在内的整个体系的总能量 U_{t} 的变化是

$$\delta U_{\mathrm{t}} = \delta U_{\mathrm{I}} - \omega = -\delta U_{\mathrm{I}}, \quad \text{当各回路电流 } I_i \text{ 不变时} \tag{4.9.97}$$

设上述电流体系中有小电流圈,它可视为一个点磁偶极子 $\boldsymbol{m}$,而其余电流回路的场可视为该磁偶极子所受到的外场.由功能原理知,当磁偶极子 $\boldsymbol{m}$ 平移 $\delta\boldsymbol{x}$ 或转动一个角度 $\delta\boldsymbol{\theta}$,而保持 $\boldsymbol{m}$ 的大小及外场不变时有

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{x} = -\delta U_{\mathrm{t}} = \delta U_{\mathrm{I}} \\ \boldsymbol{L}\cdot\delta\theta = -\delta U_{\mathrm{t}} = \delta U_{\mathrm{I}} \end{cases} \tag{4.9.98}$$

式中 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{L}$ 分别是磁偶极子所受外场的作用力与力矩.由磁偶极子与外场相互作用能的表达式(4.9.86)得

$$\begin{cases} \boldsymbol{F} = \nabla(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}_{\mathrm{e}}) = \boldsymbol{m}\cdot\nabla\boldsymbol{B}_{\mathrm{e}} \\ \boldsymbol{L} = (\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}_{\mathrm{e}}) \end{cases} \tag{4.9.99}$$

与电偶极子所受外场的作用力与力矩的公式形式相同,没有符号差别(原因是,虽然对应的 U_{I} 相差一个符号,但对小电流回路而言,起作用的是总能 U_{t},而不是相互作用能 U_{I},这两者的变分又恰恰差一个负号);式中第一个等式的第二个等号来自于外场条件

$$\nabla\times\boldsymbol{B}_{\mathrm{e}}\big|_{\text{在}V\text{中}} = 0$$

公式(4.9.99)也可直接从电流体系的力与力矩的普遍表达式通过多极展开得到.电流体系在外场中所受的力与力矩可分别表为

$$\boldsymbol{F} = \int \mathrm{d}^3x'\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')\times\boldsymbol{B}_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{x}')$$

$$\boldsymbol{L} = \int \mathrm{d}^3x'\boldsymbol{x}'\times[\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')\times\boldsymbol{B}_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{x}')]$$

若电流体系局限于小区域 V 中,则外场 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{e}}$ 可对 V 内任一点 $\boldsymbol{x}'_0$ 展开[与(4.9.81)类似]

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{e}} = \boldsymbol{B}_{\mathrm{e}0} + \boldsymbol{x}'\cdot(\nabla'\boldsymbol{B}_{\mathrm{e}})_0 + \cdots$$

于是有

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}_{\mathrm{m}} = \int \mathrm{d}^3x'\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')\times[\boldsymbol{x}'\cdot(\nabla'\boldsymbol{B}_{\mathrm{e}})_0] \\ \boldsymbol{L}_{\mathrm{m}} = \int \mathrm{d}^3x'\boldsymbol{x}'\times[\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')\times\boldsymbol{B}_{\mathrm{e}0}] \end{cases} \tag{4.9.100}$$

式中仅保留了与磁偶极子有关的项.

$\boldsymbol{F}_{\mathrm{m}}$ 与 $\boldsymbol{L}_{\mathrm{m}}$ 的第 i 分量是

$$\begin{cases} F_{mi} = \varepsilon_{ijk}(\nabla_l B_{ek})_0 \dfrac{1}{2}\displaystyle\int d^3x'[j_j(\boldsymbol{x}')x_l' - j_l(\boldsymbol{x}')x_k'] \\ L_{mi} = \displaystyle\int d^3x' x_j'[B_{e0,j}j_i(\boldsymbol{x}') - B_{e0,\ ij}j_j(\boldsymbol{x}')] \end{cases} \tag{4.9.101}$$

令 $f=g=r'$,由稳恒电流应满足的等式(4.9.58)得

$$\int_V d^3x'\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}') = \int_V d^3x' r'\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')\cdot\nabla' r' = 0 \tag{4.9.102}$$

利用上式及式(4.9.59)可将式(4.9.101)写成

$$\begin{aligned} F_{mi} &= \varepsilon_{ijk}\frac{1}{2}\int_V d^3x'[\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')\boldsymbol{x}'\cdot\nabla - \boldsymbol{x}'\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')\cdot\nabla]_j B_{ek}(\boldsymbol{x})|_{r=0} \\ &= [(\boldsymbol{m}\times\nabla)\times\boldsymbol{B}_e(\boldsymbol{x})|_{r=0}]_i \\ L_{mi} &= (B_{e0})_j\frac{1}{2}\int d^3x'[j_i(\boldsymbol{x}')x_j' - j_j(\boldsymbol{x}')x_i'] = [\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}_{e0}]_i \end{aligned}$$

此即所证.

习题 4-9

1. 证明处于恒外电场 $\boldsymbol{E}$ 中的电偶极子 $\boldsymbol{P}$ 与外场的相互作用能为

$$W = -\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{E}$$

并由此导出外场作用在电偶极子 $\boldsymbol{P}$ 上的力为

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{P}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}$$

试证置于静电场 $\boldsymbol{E}$ 中的电介质每单位体积所受的力为

$$\boldsymbol{F} = \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{2}\nabla(E^2)$$

式中 ε 是电介质的介电常量.

2. 设有两个电偶极子,其电偶极矩大小均为 P,方向均朝 $\boldsymbol{e}_z$ 方向,一个位于原点,另一个位于

$$(1)\ (r,\theta)=(R,\pi/2) \qquad (2)\ (r,\theta)=(R,0)$$

求两电偶极子在上述两种情形下的相互作用能与相互作用力.

答案: $U(\theta=\pi/2)=P^2/(4\pi\varepsilon_0 R^3)$; $U(\theta=0)=-P^2/(2\pi\varepsilon_0 R^3)$.

$\boldsymbol{F}(\theta=\pi/2)=\boldsymbol{e}_r P^2/(2\pi\varepsilon_0 R^4)$; $\boldsymbol{F}(\theta=0)=-\boldsymbol{e}_r 3P^2/(2\pi\varepsilon_0 R^4)$.

3. 试利用(4.9.69)证明(4.9.71).

4. 证明(4.9.85).

5. 氢原子 $2p$ 能级中的 $m=\pm1$ 的态的电荷密度为

$$\rho(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{64\pi}\frac{r^2}{a^5}e^{-r/a}\sin^2\theta$$

式中 θ 是相对于 z 轴的极角,$a=\hbar^2/m_e e^2$ 是 Bohr 半径.

(1) 对此电荷分布作多极展开,确定所有的多极矩.用 Legendre 多项式表出远处的电势.

(2) 简明表出空间任一点的电势,并证明在原点附近有

$$4\pi\varepsilon_0\varphi(\boldsymbol{x})\approx\frac{1}{4r}-\mathrm{P}_2(\cos\theta)\frac{72r^2}{120}$$

答案：$Q_{00}=\sqrt{\frac{1}{4\pi}}$；$Q_{20}=-3\sqrt{\frac{5}{\pi}}a^2$；$\varphi(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}-\frac{6\mathrm{P}_2(\cos\theta)a^2}{r^3}\right]$.

6. 有两个相邻的平行的线电荷 λ 和 $-\lambda$，前者相对于后者的距离为 $\boldsymbol{a}$，求离线电荷很远处的电势.

答案：$\varphi(\boldsymbol{x})=\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}/(2\pi\varepsilon_0 r^2)$.

7. 有两半径为 R_1 与 R_2 的均匀带电球，其电量分别为 q_1 和 q_2，两球心相距为 d. 求每一带电球的固有能和两带电球间的相互作用能.

答案：$U_j=[3/(20\pi\varepsilon_0)]q_j^2/R_j$；$U_{12}=[1/(4\pi\varepsilon_0)]q_1q_2/d$.

8. 求两相距为 r 的电偶极子 $\boldsymbol{p}_1$ 与 $\boldsymbol{p}_2$ 的相互作用能和相互作用力. 对 $\boldsymbol{p}_1\parallel\boldsymbol{p}_2$ 或 $\boldsymbol{p}_1\perp\boldsymbol{p}_2$ 的情形进行讨论.

9. 在半径为 b 的无限长圆柱形导体薄壳内，有一半径为 a 的同轴导线，导线的磁导率为 μ_1，在导线与薄壳间充满磁导率为 μ_2 的磁介质. 求这种传输线每单位长度的自感系数.（可设有电流 I 沿导线均匀通过，同时有电流 I 沿导体薄壳向相反方向均匀地流回来.）

答案：$L=[\mu_1+4\mu_2\ln(b/a)]/(8\pi)$.

10. 有两根半径为 a 和 b 的平行长直导线，其轴心相距 d. 沿这两根导线均匀地通过大小相等、方向相反的电流 I. 求此双线式传输线单位长度的自感系数（设 $d\gg a,b$）.

答案：$L=\mu_0\left\{1+2\ln[d^2/(ab)]\right\}/(4\pi)$.

第五章　恒场边值问题的解法

本章叙述求解恒场边值问题的几种重要解法，包括镜像法、分离变量法、保角变换法和 Green 函数法. 最后介绍几种求 Green 函数的常用方法.

§5.1　镜像法

5.1.1　Green 等效层定理

考虑在区域 V 内的某一电荷分布 $\rho(\boldsymbol{x})$，它在 V 外任一点 P（其矢径为 $\boldsymbol{x}$）产生的电势为

$$\varphi_V(\boldsymbol{x})=\int_V \mathrm{d}^3x'\frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{4\pi\varepsilon|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$$

而 P 点的电势 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 是 $\varphi_V(\boldsymbol{x})$ 与 V 外可能有的电荷分布所产生的电势的和. 令 $\phi=\varphi,\psi=1/|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|$，代入 Green 定理

$$\int_V \mathrm{d}^3x'(\phi\nabla'^2\psi-\psi\nabla'^2\phi)=\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}'\cdot(\phi\nabla'\psi-\psi\nabla'\phi)$$

（式中 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}'$ 的法向 $\boldsymbol{n}'$ 指向区域外面）. 注意到在 V 内，

$$\nabla'^2\varphi(\boldsymbol{x}')=-\rho(\boldsymbol{x}')/\varepsilon$$

$$\nabla'^2\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}=0,\qquad \boldsymbol{x}'\in V,\boldsymbol{x}\notin V$$

可得

$$\int_V \mathrm{d}^3x'\frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{\varepsilon|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$$

$$=\oint_S \mathrm{d}\sigma'\left[\varphi(\boldsymbol{x}')(\boldsymbol{n}'\cdot\nabla')\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}-\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}(\boldsymbol{n}'\cdot\nabla')\varphi(\boldsymbol{x}')\right]$$

此即

$$\varphi_V(\boldsymbol{x})=\oint_S \mathrm{d}\sigma'\frac{\omega(\boldsymbol{x}')}{4\pi\varepsilon|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}+\oint_S \mathrm{d}\sigma'\boldsymbol{P}\cdot\nabla'\frac{1}{4\pi\varepsilon|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\qquad(5.1.1)$$

式中

$$\omega(\boldsymbol{x}')=-\varepsilon\boldsymbol{n}'\cdot\nabla'\varphi(\boldsymbol{x}'),\qquad \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}')=\varepsilon\varphi(\boldsymbol{x}')\boldsymbol{n}'\qquad(5.1.2)$$

称为 S 面上的等效面电荷分布和等效电偶极层分布，且

$$\oint_S \mathrm{d}\sigma'\omega(\boldsymbol{x}')=\oint_S \mathrm{d}\sigma'[-\varepsilon\boldsymbol{n}\cdot\nabla'\varphi(\boldsymbol{x}')]$$

$$=\int_V \mathrm{d}^3x'[-\varepsilon\nabla'^2\varphi(\boldsymbol{x}')]=\int_V \mathrm{d}^3x'\rho(\boldsymbol{x}')\qquad(5.1.3)$$

可见，分布在 V 内的电荷在 V 外的势与 V 的边界面 S 上的等效面电荷分布和等效电偶极层分布的势完全相同，且 S 面上等效面电荷的和等于 V 内总电荷，这便是 Green 等效层定理.

容易看出

$$\mathrm{d}\sigma' \boldsymbol{n}' \cdot \nabla' \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} = -\frac{\cos\theta \mathrm{d}\sigma'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^2} = -\mathrm{d}\Omega$$

式中 $\cos\theta = \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})$，而 $\mathrm{d}\Omega$ 是面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}'$ 相对于 P 点所张的立体角元. 于是 Green 等效层定理(5.1.1)可写成下述形式：

$$\varphi_V(\boldsymbol{x}) = \oint_S \mathrm{d}\sigma' \frac{\omega(\boldsymbol{x}')}{4\pi\varepsilon|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} - \frac{1}{4\pi}\oint_S \mathrm{d}\Omega\varphi(\boldsymbol{x}') \tag{5.1.4}$$

若 V 的边界面 S 是 φ 的等势面，则 φ_S = 常量，注意到 P 点在闭合面之外，便有

$$\oint_S \mathrm{d}\sigma' \boldsymbol{P}\cdot\nabla' \frac{1}{4\pi\varepsilon|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} = -\frac{1}{4\pi}\phi_S\oint_S \mathrm{d}\Omega = 0$$

于是，(5.1.1)式成为

$$\varphi_V(\boldsymbol{x}) = \oint_S \mathrm{d}\sigma' \frac{\omega(\boldsymbol{x}')}{4\pi\varepsilon|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \tag{5.1.5}$$

可见，当 V 的边界为等势面时，分布在 V 内的电荷在 V 外的势与 S 面上等效面电荷分布的势完全相同，且 S 面上等效面电荷的和等于 V 内总电荷.

我们可以将公式(5.1.5)中的等效面电荷变成物理的现实，办法是将电势分布 φ 的空间中的某一闭合的等势面代之以一层很薄的电中性导体面. 由于导体面必为等势面，故按照静电唯一性定理，这种替代并不改变原来的电势分布. 因而，这导体层内外表面由于静电感应而出现面电荷分布必然等量反号；根据静电屏蔽原理，V 内电荷(不包括导体层内表面的面电荷分布)在 V 外的场由导体层外表面的面电荷分布完全决定. 而且，导体层外表面的总感应面电荷恰好等于 V 内原来的总电荷 Q，导体层内表面的总感应面电荷恰好等于 $(-Q)$. 对 V 外区域，这相当于将 V 内原来总电荷全移到了导体层外表面；换言之，如同将区域 V 换成导体但 V 中总电荷却保持不变. 于是我们便得到了当区域 V 的边界为等势面时的 Green 等效层定理：**等势面 S 所包围的区域 V 内的电荷在 V 外产生的电势和在 S 面上放置一导体面、并将 V 内电荷都移到导体上(或将区域 V 换成导体)时产生的电势完全一样.**

5.1.2 镜像法及实例分析

镜像法是解静电边值问题的一种特殊方法. 这种方法的实质是：根据 Green 等效层定理，可用虚设的像电荷代替实际导体面或介质分界面上的感应电荷. 像电荷位于边界之外，只要调整像电荷的分布使它产生的场与原电荷分布产生的场的叠加满足问题所给的边界条件，那么像电荷的存在便不会改变所考虑的区域中的电荷分布；由唯一性定理可知，像电荷分布与原电荷分布的场的叠加便是区域内满足边界条件的正确的解.

导体平面镜像问题

在一接地的无穷导体平面前放置一固定的点电荷 q,求空间的电场分布.

解:取该导体平面为平面 $x=0$,设点电荷 q 位于 x 轴上,其坐标为 $(a,0,0)$.接地无穷导体平面的电势为零.整个空间可分成两个区域分别求解.由静电屏蔽效应知在 $x<0$ 的区域Ⅱ中应有

$$\varphi_{x<0}=0$$

在 $x>0$ 的区域Ⅰ中,电势 φ 满足方程

$$\nabla^2\varphi=-\frac{1}{\varepsilon_0}q\delta(x-a)\delta(y)\delta(z)$$

与边界条件

$$\varphi_{r\to\infty}=0,\qquad \varphi_{x=0}=0$$

电场线垂直于导体表面(等势面)且具有轴对称性,对称轴是 x 轴.像电荷必位于 x 轴上.取像电荷为 q',位于点 $(a',0,0)$ 上,其中 $a'<0$.点电荷与像电荷产生的势是

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}+\frac{q'}{\sqrt{(x-a')^2+y^2+z^2}}\right]$$

它显然满足区域Ⅰ内的方程与边界条件 $\varphi_{r\to\infty}=0$.由导体面上势为零的边界条件得

$$\frac{q}{\sqrt{a^2+y^2+z^2}}+\frac{q'}{\sqrt{a'^2+y^2+z^2}}=0,\quad \text{对任意的 } y,z$$

故像电荷的大小与位置为

$$q'=-q,\qquad a'=-a \tag{5.1.6}$$

在区域Ⅰ中的势是

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}+\frac{-q}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}\right] \tag{5.1.7}$$

由此可知,接地导体上的面感应电荷在区域Ⅰ中的势为

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\omega\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'}{\sqrt{x^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}$$

在上式中将 x 变为 $-x$ 可得导体上感应电荷在区域Ⅱ中的势为

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\omega\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'}{\sqrt{x^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}$$

可见,接地导体平面如同一面镜子:它对区域Ⅰ的作用相当于位于 $(-a,0,0)$ 处的电荷 $-q$.而它对区域Ⅱ的作用相当于位于 $(a,0,0)$ 处的电荷 $-q$,因而屏蔽了原电荷对区域Ⅱ的作用.

接地导体上的面电荷密度为

$$\omega = -\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \frac{-qa}{2\pi(a^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

导体上总感应电荷为

$$\int \mathrm{d}\sigma\omega = -q = q'$$

电荷 q 作用在导体板面上单位面积的力为

$$\boldsymbol{f} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \boldsymbol{e}_x = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_x$$

电荷 q 作用于导体板面的总力为

$$\boldsymbol{F} = \int \mathrm{d}\sigma \boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{(2a)^2}\boldsymbol{e}_x$$

它正是原电荷与像电荷之间的库仑力.事实上,由于像电荷与导体上感应电荷分布在区域Ⅰ中的作用是等价的,原电荷与导体上感应电荷的总作用力可通过原电荷与像电荷之间的库仑力(称为镜像力或像力)来计算.

导体球面镜像问题

在一接地的导体球附近放置一点电荷 q,求空间电势分布.

解:取坐标原点为球心,R 为球半径,点电荷 q 位于$(a,0,0)$处,且 $a>r$.接地导体球面的电势为零.由静电屏蔽效应知球内电势为零.而球外电势满足

$$\nabla^2\varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0}q\delta(x-a)\delta(y)\delta(z)$$

$$\varphi_{r\to\infty}=0, \qquad \varphi_{r=R}=0$$

电场线分布具有轴对称性,对称轴是 x 轴.像电荷必位于 x 轴上.取像电荷为 q',位于点$(a',0,0)$上,且$|a'|<R$.点电荷与像电荷产生的势是

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{|\boldsymbol{x}-a\boldsymbol{e}_x|}+\frac{q'}{|\boldsymbol{x}-a'\boldsymbol{e}_x|}\right)$$

它显然满足球外方程与边界条件 $\varphi(r\to\infty)=0$.由导体面上势为零的边界条件得

$$\frac{q}{R|\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_x a/R|}+\frac{q'}{a'|\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{n}R/a'|}=0, \quad \text{对任意的 } \boldsymbol{n}$$

式中 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{R}/R$.由此求得像电荷量的大小与位置为

$$q'=-\frac{R}{a}q, \qquad a'=\frac{R^2}{a} \tag{5.1.8}$$

球外的电势为

$$\varphi_{r\geqslant R}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-a\boldsymbol{e}_x|}-\frac{R}{|a\boldsymbol{x}-R^2\boldsymbol{e}_x|}\right) \tag{5.1.9}$$

球面上的感应电荷面密度为

$$\omega = -\varepsilon_0\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{r=R} = -\frac{(a^2-R^2)q}{4\pi R|\boldsymbol{R}-a\boldsymbol{e}_x|^3}$$

总感应电荷为

$$\oint_{r=R}\mathrm{d}\sigma\omega = -\frac{Rq}{a} = q'$$

由球面上的感应电荷面密度分布可算得感应电荷在球外的势

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{r=R}\frac{\omega R^2\mathrm{d}\Omega}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{R}|} = \frac{-Rq/a}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{x}-R^2/a\boldsymbol{e}_x|}$$

及在球内的势

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{r=R}\frac{\omega R^2\mathrm{d}\Omega}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{R}|} = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{x}'-a\boldsymbol{e}_x|}$$

可见，接地导体球面上的感应电荷对球外的作用相当于位于$(R^2/a,0,0)$处的电荷$(-Rq/a)$；它对球内的作用相当于位于$(a,0,0)$处的电荷$(-q)$，从而屏蔽了原电荷对球内的作用.

点电荷 q 作用于球形导体上的力为

$$\boldsymbol{F} = \oint_{r=R}\mathrm{d}\sigma\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2\boldsymbol{n} = \oint_{r=R}\mathrm{d}\sigma\frac{1}{2\varepsilon_0}\omega^2\boldsymbol{n}$$

$$= -\frac{q^2aR}{4\pi\varepsilon_0(a^2-R^2)^2}\boldsymbol{e}_x = -\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0(a-a')^2}\boldsymbol{e}_x$$

它正是点电荷 q 与其像电荷 q' 之间的库仑力.

讨论：

(a) 在电荷为 Q 的孤立导体球前面的点$(a,0,0)$上置一点电荷 q.

假定先让导体球接地，于是电荷 q' 分布在它的整个外表面上；然后断开地线，将电荷 $Q-q'$ 加到导体球上. 由于 q 产生的静电力已被电荷 q' 所平衡，故电荷 $Q-q'$ 将均匀地分布在球面上. 因此，导体球仍为等势体；对球外而言，新加的电荷 $Q-q'$ 相当于位于球心的等效点电荷. 故

$$\varphi_{r\geqslant R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{|\boldsymbol{x}-a\boldsymbol{e}_x|} - \frac{Rq}{a|\boldsymbol{x}-R^2/a\boldsymbol{e}_x|} + \frac{aQ+Rq}{ar}\right)$$

点电荷 q 作用于球形导体上的力为

$$\boldsymbol{F} = \frac{-q\boldsymbol{e}_x}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q'}{(a-a')^2} + \frac{Q-q'}{a^2}\right] = \frac{-q\boldsymbol{e}_x}{4\pi\varepsilon_0a^2}\left[Q - \frac{qR^3(2a^2-R^2)}{a(a^2-R^2)^2}\right]$$

如 $a\gg R$，上式便化为两个小带电体之间的库仑力. 如 Q 与 q 异号或 $Q=0$，力总是吸引力；即使 Q 与 q 同号，但

$$|Q| < |q|\frac{R^3(2a^2-R^2)}{a(a^2-R^2)^2}$$

时，力仍为吸引力，且吸引力随 q 离导体球距离减小而增大. 金属表面上的剩余

电荷之所以不会因为各电荷间的相互排斥而立即离开表面，是因为每当电荷元刚要从表面离开时，像力就将它吸引回来．金属脱出功大部分就是为了克服这一像力所做的功．

(b) 在电势 V 保持不变的导体球前面的点$(a,0,0)$上置一点电荷 q．

均匀分布在球面上的电荷 $Q-q'$等于导体球的电势 V 与孤立导体球的电容 $C=4\pi\varepsilon_0 R$ 的乘积．因此，由(a)中的结果立得

$$\varphi_{r\geqslant R}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-a\boldsymbol{e}_x|}-\frac{R}{|a\boldsymbol{x}-R^2\boldsymbol{e}_x|}\right)+\frac{R}{r}V$$

点电荷 q 作用于球形导体上的力为

$$\boldsymbol{F}=-qR\left[\frac{V}{a^2}-\frac{qa}{4\pi\varepsilon_0(a^2-R^2)^2}\right]\boldsymbol{e}_x$$

导体柱面镜像问题

在一无限长的导体柱附近放置一根与轴平行的无限长细导线，导线上的线电荷密度为 λ．求柱外电势分布．

解：取柱轴为 z 轴，由于电荷分布与 z 无关，柱外电势分布亦与 z 无关，仅需在 $z=0$ 平面上考虑．设带电细导线位于直线 $x=a$，$y=0$ 上，$a>R$，R 为柱的横截面半径．柱外电势满足方程

$$\nabla^2\varphi=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\varphi=-\frac{\lambda}{\varepsilon_0}\delta(x-a)\delta(y)$$

及边界条件

$$\varphi_{r\to\infty}=\text{常量},\qquad \varphi_{r=R}=\text{常量}$$

式中(r,θ)为点在 $z=0$ 平面上的极坐标．$z=0$ 平面上的电场线分布具有轴对称性，对称轴是 x 轴．故像电荷是位于直线 $x=a'<R$，$y=0$ 上分布的线电荷，设其线电荷密度为 λ'．满足所述方程及无穷远处的边界条件的柱外电势的普遍形式为

$$\varphi_{r\geqslant R}=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left(\lambda\ln\frac{R}{|\boldsymbol{x}-a\boldsymbol{e}_x|}+\lambda'\ln\frac{R}{|\boldsymbol{x}-a'\boldsymbol{e}_x|}+\lambda_0\ln\frac{R}{r}\right)+V_0$$

式中 λ_0是可能有的均匀分布在导体柱外表面上沿 z 方向的线电荷密度，而 V_0 的值取决于零电势点的选取．由导体柱面处的边界条件有

$$\lambda\ln\left|\frac{R}{a}\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_x\right|+\lambda'\ln\left|\boldsymbol{n}-\frac{a'}{R}\boldsymbol{e}_x\right|=\text{常量},\quad \text{对所有 } \boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{R}}{R}$$

其解为

$$\lambda'=-\lambda,\qquad a'=R^2/a \tag{5.1.10}$$

由 $r\to\infty$处的边界条件知

$$\lambda+\lambda'+\lambda_0=0$$

因而

$$\lambda_0 = 0$$

所求的柱外势分布为

$$\varphi_{r\geqslant R} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left(\lambda \ln \frac{|\boldsymbol{x} - (R^2/a)\boldsymbol{e}_x|}{|\boldsymbol{x} - a\boldsymbol{e}_x|} + \lambda_0 \ln \frac{R}{r}\right) + V_0 \qquad (5.1.11)$$

且

$$\varphi_{r=R} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln \frac{R}{a} + V_0$$

若取柱面为电势零点,则

$$V_0 = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln \frac{R}{a}$$

电介质镜像问题

设平面两边的半无穷空间中分别充满了两种均匀、各向同性的线性电介质,且在平面附近放置一点电荷 q_f.求电势分布.

解:取分界面为平面 $x=0$,设电荷 q_f 位于点 $(a,0,0)$ 处,且 $x>0$ 与 $x<0$ 的区域中的介质的介电常量分别为 ε_1 与 ε_2.电势满足方程

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{1}{\varepsilon_1} q_f \delta(x-a)\delta(y)\delta(z), \qquad \text{对 } x \neq 0$$

与边界条件

$$\varphi_{r\to\infty} = 0, \varphi_{1,x=0} = \varphi_{2,x=0}, \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\bigg|_{x=0}$$

式中 φ_1 与 φ_2 分别是 $x>0$ 与 $x<0$ 的区域中的电势.电荷分布与边界(因而电场线也)具有轴对称性,对称轴是 x 轴.界面 $x=0$ 上束缚电荷的贡献在区域 $x\geqslant 0$ 中可用位于 $(a',0,0)$ 点的像电荷 q_f' 代替;由对称性知该束缚电荷在区域 $x<0$ 中则相当于位于 $(-a',0,0)$ 点的像电荷 q_f'.电势分布为

$$\varphi_{x\geqslant 0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\left[\frac{q_f}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}} + \frac{q_f'}{\sqrt{(x-a')^2+y^2+z^2}}\right]$$

$$\varphi_{x<0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\left[\frac{q_f}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}} + \frac{q_f'}{\sqrt{(x+a')^2+y^2+z^2}}\right]$$

它显然满足方程与边界条件 $\varphi(r\to\infty)=0, \varphi_1(x=0)=\varphi_2(x=0)$.由关于势的法向梯度的边界条件得

$$\frac{aq_f(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{(\sqrt{a^2+y^2+z^2})^3} + \frac{a'q_f'(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{(\sqrt{a'^2+y^2+z^2})^3} = 0, \qquad \text{对所有 } y,z$$

由此解得像电荷量的大小与位置为

$$a'=-a,\qquad q_f'=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q_f \tag{5.1.12}$$

因而所求的解为

$$\begin{cases}\varphi_{x\geqslant 0}=\dfrac{q_f}{4\pi\varepsilon_1}\left[\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}+\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\dfrac{1}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}\right]\\ \varphi_{x<0}=\dfrac{q_f}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}\end{cases} \tag{5.1.13}$$

讨论：

(a) 当 $\varepsilon_2/\varepsilon_1\to\infty$ 时有

$$\begin{cases}\varphi_{x\geqslant 0}=\dfrac{q_f}{4\pi\varepsilon_1}\left[\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}\right]\\ \varphi_{x<0}=0\end{cases} \tag{5.1.14}$$

与前面所述的导体平面镜像问题的解比较可知：在静电问题中，介电常量为无穷大的介质相当于导体．原因在于当 $\varepsilon_2\to\infty$ 时，介质束缚电荷的分布必使得介质内部电场 $\boldsymbol{E}_2=0$，从而成为等势体，具有导体在静电问题中的唯一特性；否则，介质中极化强度 $\boldsymbol{P}_2$ 将趋于∞，从而束缚电荷及 $\boldsymbol{D}_2$ 亦为∞，这是不可能的．

(b) 当 $\varepsilon_2/\varepsilon_1\to 0$ 时有

$$\begin{cases}\varphi_{x\geqslant 0}=\dfrac{q_f}{4\pi\varepsilon_1}\left[\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}\right]\\ \varphi_{x<0}=\dfrac{q_f}{2\pi\varepsilon_1\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}\end{cases} \tag{5.1.15}$$

它满足

$$[\partial\varphi_1/\partial x]_{x=0}=0$$

(c) 直接计算知

$$\int_{x=0}\mathrm{d}\sigma\omega_1=\int_{x=0}\mathrm{d}\sigma\left(-\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)_{x=0}=\frac{1}{2}(-q_f+q_f') \tag{5.1.16}$$

及

$$\int_{C_-}\mathrm{d}\sigma\omega_1=\int_{C_-}\mathrm{d}\Omega\left(-\varepsilon_1 r^2\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right)_{r\to\infty}=\frac{1}{2}(q_f+q_f') \tag{5.1.17}$$

式中 C_- 是平面 $x=0$ 左边以原点为中心、半径为无穷大的半球面．可见

$$\oint_{x=0\text{平面加上}C_-\text{半球面}}\mathrm{d}\sigma\omega_1=q_f'$$

正如从 Green 等效层定理所预期的那样．仅当 $q_f+q_f'=0$ 时才有

$$\int_{x=0\text{平面}} \mathrm{d}\sigma\omega_1 = q_1'$$

这正是前面所述的导体平面镜像问题中所遇到的情形.

习题 5－1

1. 在电势为 V 的导体内有一半径为 R 的球形空腔,空腔内充满介电常量为 ε 的电介质.有一点电荷 q 位于离空腔中心为 $a(a<R)$ 的地方.用镜像法求空腔内的电势.

2. 在接地导体平面上有一凸出的半球,半径为 a,球心在导体平面上.有一点电荷 q 位于系统的对称轴上,与导体平面相距为 $b(b>a)$.用镜像法求电势及凸出半球上感生的电荷.

答案: $q' = -q\left(1-\dfrac{b^2-a^2}{b\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{b}|}-\frac{1}{|\boldsymbol{r}+\boldsymbol{b}|}+\frac{a}{b|\boldsymbol{r}+(a^2/b^2)\boldsymbol{b}|}-\frac{a}{b|\boldsymbol{r}-(a^2/b^2)\boldsymbol{b}|}\right]$$

3. 在 $x>0$ 的半无穷空间中充满介电常量为 ε_1 的介质,而在 $x<0$ 的半无穷空间中充满介电常量为 ε_2 的介质,在 $x=a$ 处放置一点电荷 q.试用镜像法求整个空间的电势分布和分界面上的束缚电荷.

提示: 求 $x>0$ 区域中的电势时,像电荷 q' 置于 q 的镜像位置(即 $x=-a$);
求 $x<0$ 区域的电势时,像电荷 q' 置于 q 的位置上(即 $x=a$).

答案:

$$\varphi(x>0) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_1\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}+\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)q}{4\pi\varepsilon_1(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}$$

$$\varphi(x<0) = \frac{q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}$$

$$\sigma_p = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_1-\varepsilon_2)aq}{2\pi\varepsilon_1(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(a^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

4. 两根相互平行的长直均匀带电的线电荷,相距为 d,每单位长度的电荷分别为 λ 和 $-\lambda$.求这个带电体系的等势面为圆柱面的条件,并求圆柱面的半径和轴的位置.

提示:在与线电荷垂直的平面上取两线电荷所在位置的联线为 x 轴(其方向从负线电荷处指向正线电荷处),两线电荷位置联线的中垂线为 y 轴.取原点 O 的电势为零,则点 $M(x,y)$ 的电势为

$$\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_1}{r_2}$$

式中 r_1 与 r_2 分别是 M 点到线电荷 λ 与 $-\lambda$ 的距离.M 点在等势面上的条件为

$$r_2^2/r_1^2 = k^2(\text{常数})$$

答案: 等势面是轴心位置在 $([d(k^2+1)]/[2(k^2-1)],0)$,半径为 $R=|(kd)/(k^2-1)|$ 的圆柱面.当 $k>1$ 时,等势面在 $x>0$ 区域;当 $k<1$ 时,等势面在 $x<0$ 区域.

5. 两个轴线平行的导体圆柱的半径分别为 R_1 和 R_2,每单位长度的电荷分别为 λ 和 $-\lambda$,两圆柱轴线间距离为 d,且 $d>R_1+R_2$.求这两个圆柱体的电势及单位长度的电容.

提示：可利用上题的结果，求出与本题给定的两个导体面相应的等势面及其电势值 ϕ_1 与 ϕ_2. 根据 Green 等效层定理，ϕ_1 与 ϕ_2 即为两个带电导体柱的电势. 故所求电容 $C=\lambda/(\phi_1-\phi_2)$.

答案：$\varphi_1=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{d-R_1-d_2}{R_1-d_1}$，$\varphi_2=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{R_2-d_2}{d-R_2-d_1}$

$$C=2\pi\varepsilon_0\left(\ln\frac{R_1R_2}{d_1d_2}\right)^{-1}=2\pi\varepsilon_0\left(\operatorname{arccosh}\frac{d^2-R_1^2-R_2^2}{2R_1R_2}\right)^{-1}$$

6. 一半径为 R 的无限长直导体柱与地面平行，与地面相距为 $d(d>R)$. 求导体柱与地面间单位长度的电容.

提示：可利用上题的结果，令 $R_1=R$ 及 $R_2=\infty$.

答案：$C=2\pi\varepsilon_0[\operatorname{arccosh}(d/R)]^{-1}$.

§5.2 分离变量法

5.2.1 Laplace 方程的通解

若介质各向同性、分区均匀且内部没有自由电荷或电流，则恒场满足 Laplace 方程

$$\nabla^2\varphi=0 \qquad 或 \qquad \nabla^2\boldsymbol{A}=0$$

这类恒场问题便是在相应的边界条件下 Laplace 方程的求解问题. 按不同的边界形状，可选取适当的坐标系，用分离变量法求出 Laplace 方程的通解；再由边界条件确定通解中的待定参数. 在一些常见的曲线正交系中，Laplace 方程的通解早已求出(参见：B. M. 布达克等. 数学物理题解. 1982)，现简述如下：

球坐标系中的通解

在球坐标系中，Laplace 方程成为

$$\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]\varphi=0$$

式中 r,θ,ϕ 分别是点的矢径的大小、极角与方位角. 其通解为

$$\varphi=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}(a_{lm}r^l+b_{lm}r^{-(l+1)})\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\phi) \tag{5.2.1}$$

其中 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$，$0\leqslant\phi\leqslant2\pi$，而 $\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\phi)$ 是球谐函数. 注意：

(a) 如 ϕ 的取值受到某种限制，则 $m\to\nu_m$，ν_m 不一定为整数.

(b) 若 θ 的取值被限制在 $0\leqslant\theta<\pi$ 的范围内，则仅要求 l 是等于或大于零的实数，并不要求它一定是整数.

(c) 在旋转对称时，通解为

$$\varphi=\sum_{\nu}[a_\nu r^\nu+b_\nu r^{-(\nu+1)}]\mathrm{P}_\nu(\cos\theta) \tag{5.2.2}$$

式中 $P_\nu(\cos\theta)$ 是第一类 Legendre 函数. 若 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, 则 $\nu=l=0,1,\cdots$; 若 $0\leqslant\theta<\pi$, 则 ν 为正实数.

(d) 如 φ 仅与 θ 有关, 则

$$\varphi=a_1\ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)+a_2 \tag{5.2.3}$$

柱坐标系中的通解

在柱坐标系中, Laplace 方程成为

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\varphi=0 \tag{5.2.4}$$

其通解为

$$\begin{aligned}\varphi=\sum_{\nu,k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\phi}\{&[a_k\sinh(kz)+b_k\cosh(kz)][c_{\nu k}\mathrm{J}_\nu(k\rho)+d_{\nu k}\mathrm{N}_\nu(k\rho)]+\\&[a'_k\sin(kz)+b'_k\cos(kz)][c'_{\nu k}\mathrm{I}_\nu(k\rho)+d'_{\nu k}\mathrm{K}_\nu(k\rho)]\}\end{aligned} \tag{5.2.5}$$

或

$$\begin{aligned}\varphi=\sum_{\nu,k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\phi}\{&\mathrm{e}^{ikz}[a_{\nu k}\mathrm{J}_\nu(k\rho)+b_{\nu k}\mathrm{N}_\nu(k\rho)]+\\&\mathrm{e}^{ikz}[a'_{\nu k}\mathrm{I}_\nu(k\rho)+b'_{\nu k}\mathrm{K}_\nu(k\rho)]\}\end{aligned} \tag{5.2.6}$$

式中 J_ν、N_ν 分别是第一、二类 ν 阶 Bessel 函数, 而 I_ν、K_ν 则是第一、二类 ν 阶变形 Bessel 函数.

注意:

(a) 若 φ 与 z 无关, 则

$$\varphi=a_0+b_0\ln\rho+\sum_{\nu\neq0}(a_\nu\rho^\nu+b_\nu\rho^{-\nu})[c_\nu\cos(\nu\phi)+d_\nu\sin(\nu\phi)]$$

或

$$\varphi=a_0+b_0\ln\rho+\sum_{\nu\neq0}(a_\nu\rho^\nu+b_\nu\rho^{-\nu})\exp(\mathrm{i}\nu\phi) \tag{5.2.7}$$

(b) 如 ϕ 的取值不受限制, 则 ν 为正整数; 否则, ν 为正实数.

直角坐标系中的通解

在直角坐标系中, Laplace 方程成为

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\varphi=0 \tag{5.2.8}$$

其通解为

$$\begin{aligned}\varphi=u_0(x,y)+\sum_{\nu,k}\{&[a_k\sin(kx)+b_k\cos(kx)][c_\nu\sin(\nu y)+\\&d_\nu\cos(\nu y)]+[d_{\nu k}\sinh(k_{\nu k}z)+e_{\nu k}\cosh(k_{\nu k}z)]+\text{permu.}\}\end{aligned} \tag{5.2.9}$$

式中 $u_0(x,y,z)$ 是在八个顶点满足边值条件的调和函数, 而 permu. 表示对 x, y, z 置换后所得到的项, 但各项相应的系数与原系数不同.

注意：

(a) 若 φ 与 z 无关，则通解为

$$\varphi = u_0(x,y,z) + \sum_k \{[a_k\sinh(kx) + b_k\cosh(kx)][c_k\sin(ky) + d_k\cos(ky)][a'_k\sin(kx) + b'_k\cos(kx)][c'_k\sinh(ky) + d'_k\cosh(ky)]\} \tag{5.2.10}$$

式中 $u_0(x,y)$ 是在四个顶点满足边值条件的调和函数.

(b) 将形如 $[a_k\sin(kx) + b_k\cos(kx)]$ 的表达式代之以 $\exp(\pm ikx)$ 线性组合后仍为相应方程的通解.

5.2.2 分离变量法实例分析

在实际应用中，可根据特定边界条件的对称性及所讨论问题的物理图像，直接由通解式中选出几个特解作为试解，并由边界条件确定试解中的待定参数.

均匀外场中的电介质球

一线性均匀、各向同性的电介质球置于另一种线性均匀、各向同性的电介质中，加上均匀外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 后，求电势分布.

解： 取 $\boldsymbol{E}_0$ 的方向为极轴 z 的方向，设球半径为 R，球内外介质的介电常量分别为 ε_1 与 ε_2. 在球坐标系中，球内外电势(分别以下标 1,2 表示)满足方程

$$\nabla^2\varphi = 0, \qquad \text{当 } r \neq R \text{ 时}$$

与边界条件

$$(\varphi_1)_{r=0} = \text{有限值}, \quad (\varphi_2)_{r\to\infty} \to E_0 r\cos\theta$$

$$(\varphi_1)_{r=R} = (\varphi_2)_{r=R}, \quad \varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\bigg|_{r=R} = \varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\bigg|_{r=R}$$

整个问题绕 z 轴旋转对称. 据叠加原理，球外电势由两部分组成：一是沿 z 方向的均匀外场，它对应的势为 $-E_0 r\cos\theta$，这相当于选取通解(5.2.2)中的 a_1 项；二是球面极化电荷的贡献，由于整个系统是轴对称的，因而球面极化电荷的贡献也应是轴对称的，即仅具有一个空间方向(z 方向)，故等价于具有一个空间方向的源即一个电偶极子的贡献，这相当于选式(5.2.2)中 $\nu = 1$ 的项，由于 $(\varphi_2)_{r\to\infty}$ 有限，应取式(5.2.2)中的 b_1 项. 于是球外试解取为

$$\varphi_2 = -E_0 r\cos\theta + \frac{a}{r^2}\cos\theta$$

球内电势也由两部分组成：一是均匀外场；二是球面极化电荷的贡献，它相当于一个电偶极子，由于 $(\varphi_1)_{r=0}$ 有限，故应取(5.2.2)中的 a_1 项. 两部分场的形式相同. 因而球内试解取为

$$\varphi_1 = br\cos\theta$$

由球面边界条件知

$$bR = -E_0 R + a/R^2, \qquad \varepsilon_1 b = \varepsilon_2(-E_0 - 2a/R^3)$$

解之得

$$a = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 R^3, \qquad b = -\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0$$

故

$$\varphi = \begin{cases} -\dfrac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 r\cos\theta, & r \leqslant R \\ -E_0\cos\theta + \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}\dfrac{E_0 R^3}{r^2}\cos\theta, & r > R \end{cases}$$

讨论：

(a) 球面上极化电荷对球外的贡献，相当于放置在原点的电偶极矩为

$$\boldsymbol{p} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 R^3$$

的电偶极子，该极化电荷对球内的贡献是产生一恒定的均匀场

$$-\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}\boldsymbol{E}_0 = \frac{-1}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{P}, \quad \boldsymbol{P} = \frac{\boldsymbol{p}}{4\pi R^3/3}$$

球内的场为：

$$\boldsymbol{E}_{r \leqslant R} = \boldsymbol{E}_0 - \frac{1}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{P} \tag{5.2.11}$$

式中因子 1/3 称为退化因子.

(b) 当 $\varepsilon_1/\varepsilon_2 \to \infty$ 即 $\varepsilon_1 \to \infty$ 时，$\boldsymbol{E}_{r<R} = 0$，这时介质球相当于一个导体球.

(c) 当 $\varepsilon_1/\varepsilon_2 \to 0$ 时，

$$\varphi = \begin{cases} -\dfrac{3}{2} E_0 r\cos\theta, & r \leqslant R \\ -E_0 r\cos\theta\left(1 + \dfrac{R^3}{2r^2}\right), & r > R \end{cases}$$

均匀外场中的导体柱

在均匀外场 $\boldsymbol{E} = E_0 \boldsymbol{e}_x$ 中有一半径为 R、线电荷密度为 λ 的无限长圆柱形导体，柱轴与外场垂直.求空间电势分布.

解： 柱内电场为零.在柱坐标系中，柱外电势满足方程

$$\nabla^2 \varphi = 0, \qquad \text{当 } \rho > R \text{ 时}$$

与边界条件

$$\varphi_{\rho\to\infty} = -E_0 \rho\cos\phi, \quad \varphi_{\rho=R} = 0, \quad \int_0^{2\pi} R\mathrm{d}\phi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{\rho=R} = -\frac{\lambda}{\varepsilon_0}$$

因 φ 与 z 无关，通解由(5.2.7)给出.导体柱带电，故有 $\nu = 0$ 的项 $a_0 + b_0 \ln\rho$；

外场均匀，相应的势是 $-E_0\rho\cos\phi$；均匀外场在柱面上感应的电荷等价于一个线电偶极子，它相当于(5.2.7)中 $\nu=1$ 的项，由于 $\rho\to\infty$ 时仅剩下外场，这电偶极子的势应在 $\rho\to\infty$ 处趋于零，因而它的势为 $(b_1/\rho)\cos\phi$. 于是试解取为

$$\varphi=a_0+b_0\ln\rho-E_0\rho\cos\phi+\frac{b_1}{\rho}\cos\phi$$

由边界条件可知：

$$a_0=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln R,\quad b_0=\frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0},\quad b_1=E_0R^2$$

柱外电势分布为

$$\varphi=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R}{\rho}-E_0\rho\cos\phi+E_0\frac{R^2}{\rho}\cos\phi$$

柱外电场强度为

$$\boldsymbol{E}=\left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\rho}+E_0\cos\phi+E_0\frac{R^2}{\rho^2}\cos\phi\right)\boldsymbol{e}_\rho+E_0\sin\phi\left(\frac{R^2}{\rho^2}-1\right)\boldsymbol{e}_\phi$$

均匀外场中的磁介质球壳

均匀磁介质球壳放在均匀外磁场中，球壳内腔与壳外分别充满不同的均匀磁介质，求磁场分布.

解：设介质球壳内外半径分别为 a 与 b. 球壳内表面以内、两表面之间与外表面以外的区域均是单连通的，均可定义磁标势，分别用 φ_{m1}、φ_{m2} 与 φ_{m3} 表示它们，各区域介质的导磁系数分别为 μ_1、μ_2 与 μ_3. 取外磁场 $\boldsymbol{H}_0$ 的方向为极轴 z 的方向. 磁标势在球坐标系中满足方程

$$\nabla^2\varphi_m=0,\qquad \text{当 } r\neq a,b \text{ 时}$$

与边界条件

$$(\varphi_{m1})_{r=0}=\text{有限},\qquad (\varphi_{m3})_{r\to\infty}=-H_0r\cos\theta$$

$$(\varphi_{m1})_{r=a}=(\varphi_{m2})_{r=a},\qquad (\varphi_{m2})_{r=b}=(\varphi_{m3})_{r=b}$$

$$\mu_1\frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial r}\bigg|_{r=a}=\mu_2\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial r}\bigg|_{r=a},\qquad \mu_2\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial r}\bigg|_{r=b}=\mu_3\frac{\partial\varphi_{m3}}{\partial r}\bigg|_{r=b}$$

球壳外表面以外的磁标势 φ_{m3} 由两部分组成：一是均匀外场的势 $-H_0r\cos\theta$；二是壳内外表面磁化电流(或面磁荷)的贡献，它相当于两个磁偶极子，故应取通解(5.2.2)中 $\nu=1$ 的项，由于 $(\varphi_{m3})_{r\to\infty}=-H_0r\cos\theta$，故这两个偶极子的势在无穷远处为零，应取 b_1 项. 故此区域中的试解取为

$$\varphi_{m3}=-H_0r\cos\theta+\frac{b_1}{r^2}\cos\theta$$

球壳内外表面之间的势由均匀外场的势与球壳表面磁荷的贡献构成，但此时球壳外表面磁荷(相当于一个磁偶极子)产生的势应在 $r=0$ 时有限，其形式与均

匀外场的势一样.故此区域中的试解取为

$$\varphi_{m2}=a_2 r\cos\theta+\frac{b_2}{r^2}\cos\theta$$

对球壳内表面以内区域,均匀外场与球壳表面磁荷产生的势均取相同形式,故取试解

$$\varphi_{m1}=a_1 r\cos\theta$$

球壳内外表面上的边界条件化为

$$a_1 a=a_2 a+b_2/a^2,\qquad a_2 b+b_1/b^2=-H_0 b+b_1/b^2$$

$$\mu_1 a_1=\mu_2(a_2-2b_2/a^3),\quad \mu_2(a_2-2b_2/b^3)=\mu_3(-H_0-2b_1/b^3)$$

对系数 a_1、a_2、b_1、b_2,解之得

$$a_1=\frac{-9\mu_2\mu_3}{(\mu_1+2\mu_2)(\mu_2+2\mu_3)+2(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(a/b)^3}H_0$$

$$a_2=\frac{-3(\mu_1+2\mu_2)\mu_3}{(\mu_1+2\mu_2)(\mu_2+2\mu_3)+2(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(a/b)^3}H_0$$

$$b_1=\frac{(\mu_1+2\mu_2)(\mu_2-\mu_3)b^3+(\mu_1-\mu_2)(2\mu+\mu_3)a^3}{(\mu_1+2\mu_2)(\mu_2+2\mu_3)+2(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(a/b)^3}H_0$$

$$b_2=\frac{3(\mu_1-\mu_2)\mu_3 a^3}{(\mu_1+2\mu_2)(\mu_2+2\mu_3)+2(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)(a/b)^3}H_0$$

所求的磁场是

$$\boldsymbol{H}_1=-\nabla\varphi_{m1}=-a_1\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{H}_2=-\nabla\varphi_{m2}=\frac{3b_2}{r^3}\cos\theta\boldsymbol{n}_r-\left(a_2+\frac{b_2}{r^3}\right)\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{H}_3=-\nabla\varphi_{m3}=\frac{3b_1}{r^3}\cos\theta\boldsymbol{n}_r+\left(H_0-\frac{b_1}{r^3}\right)\boldsymbol{e}_z$$

讨论:

(a) 球壳外的磁场是均匀场和一磁偶极矩 $\boldsymbol{m}$ 为 $4\pi b_1$ 的磁偶极子场的叠加.当 μ_2 很大时,该磁偶极子的磁偶极矩

$$\boldsymbol{m}\to 4\pi\boldsymbol{H}_0 b^3,\qquad \text{当 } r\to\infty \text{ 时}$$

与球壳内半径 a 的大小无关,类似于外电场中的导体球壳.

(b) 球壳中的场是均匀场(外场与外表面磁荷贡献之和)和一偶极矩为 $4\pi b_2$ 的磁偶极子场(等价于内表面磁荷的贡献)的叠加.当 $\mu_2\to\infty$ 时,$b_2\to 0$,内表面磁荷 $\to 0$,这与外电场中的导体球壳相似.值得注意的是,当 $\mu_2\to\infty$ 时,球壳中 $\boldsymbol{H}_2\to 0$,但

$$\boldsymbol{B}_2=\mu_2\boldsymbol{H}_2\to\left[\frac{-3a^3/(2r^3)}{1-a^3/b^3}\cos\theta\boldsymbol{n}_r+\frac{1+a^3/(2r^3)}{1-a^3/b^3}\boldsymbol{e}_z\right]3\boldsymbol{B}_0$$

(c) 球壳内为大小为 a_1 的均匀场，当 $\mu_2\to\infty$ 时

$$\boldsymbol{B}_1=\mu_1\boldsymbol{H}_1\approx\frac{9\boldsymbol{B}_0}{2\mu_2(1-a^3/b^3)}\to 0$$

这便是静磁屏蔽效应.球壳的 μ_2 越大，壳层越厚(即 a/b 愈小)，屏蔽效果越好.通过球壳横截面积的磁感通量为(当 μ_2 很大时)

$$\Phi=\int_a^b 2\pi r\mathrm{d}rB_{2z}=3B_0\pi b^2$$

比原来通过横截面积 $S=\pi b^2$ 的磁感通量 B_0S 大 3 倍.可见，μ_2 很大时的球壳有集中磁感线的作用.

均匀带电的旋转薄导体球壳

有一均匀带电的薄导体球壳，半径为 R，电荷为 Q.球绕自身的某一直径以恒定角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 旋转.求球内外磁场.

解法一(矢势法)：对于稳定转动，空间磁场为恒磁场.这磁场的存在不会改变静电荷的分布，故电荷 Q 将同未旋转时那样均匀分布在导体球外表面上.取 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向为球坐标系的极轴方向.球壳面电流密度为

$$\boldsymbol{\Pi}=\frac{Q}{4\pi R^2}\omega R\sin\theta\boldsymbol{n}_\phi$$

这是一个旋转对称的三维问题.矢势 $\boldsymbol{A}$ 仅有 $\boldsymbol{n}_\phi$ 方向的分量，令 $\boldsymbol{A}=A(r,\theta)\boldsymbol{n}_\phi$，则 A 满足方程

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\right)A=0,\qquad \text{当 } r\neq R \text{ 时}$$

与边界条件

$$A_{r=0}=\text{有限},\quad A_{r\to\infty}=0,\quad A_{r\to R_-}=A_{r\to R_+}$$

$$\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA)\right)_{r\to R_-}-\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA)\right)_{r\to R_+}=\frac{\omega Q}{4\pi R}\sin\theta$$

矢势由 $\boldsymbol{\Pi}$ 产生，因而也应按 $\sin\theta$ 的规律变化.故取试解为

$$A(r,\theta)=f(r)\sin\theta$$

代入体系的方程得

$$\left(r^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}+2r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}-2\right)f(r)=0$$

这是一个齐次 Euler 方程.考虑到在 $r=0$ 与 ∞ 处的边界条件，其解为

$$f(r)=\begin{cases}a_1r, & r\leqslant a\\ b_1/r^2, & r>a\end{cases}$$

由 $r=R$ 处的边值关系可得

$$a_1=\frac{\mu_0 Q\omega}{12\pi R},\qquad b_1=\frac{\mu_0 Q\omega R^2}{12\pi}$$

于是

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Q\omega r^2}{3}\left[\frac{r}{R^3}\theta(R-r)+\frac{1}{r^2}\theta(r-R)\right]\sin\theta\boldsymbol{n}_\phi$$

磁感强度为

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{2}{R^3}\boldsymbol{m}\theta(R-r)+\left(\frac{3\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{m}}{r^5}-\frac{\boldsymbol{m}}{r^3}\right)\theta(r-R)\right]$$

式中 $\boldsymbol{m}=QR^2\boldsymbol{\omega}/3$ 是体系的磁矩.

解法二(磁标势法):取 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向为球坐标系的极轴方向.导体球壳的面电流密度为

$$\boldsymbol{\Pi}=\frac{Q}{4\pi R^2}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R}=-\frac{\boldsymbol{R}}{R}\times\boldsymbol{M}$$

式中

$$\boldsymbol{M}=\frac{Q}{4\pi R}\boldsymbol{\omega}$$

是导体球壳处的等效磁化强度.由于导体球壳内无电流,可将导体球(包括其内部)视为均匀磁化的区域.这时

$$\boldsymbol{j}=\nabla\times\boldsymbol{M}=0,\quad \rho_m=-\nabla\cdot\boldsymbol{M}=0,\qquad \text{当 } r<R \text{ 时}$$

式中 ρ_m 是等效磁荷.球内外磁标势 φ_m 满足方程

$$\nabla^2\varphi_m=0,\qquad \text{当 } r\neq R \text{ 时}$$

与边界条件

$$\varphi_{m,r=0}=\text{有限},\qquad \varphi_{m,r\to\infty}=0$$

$$\varphi_{m,r\to R_-}=\varphi_{m,r\to R_+},\qquad \left.\frac{\partial\varphi_m}{\partial r}\right|_{r\to R_-}-\left.\frac{\partial\varphi_m}{\partial r}\right|_{r\to R_+}=\frac{\omega_m}{\mu_0}$$

式中

$$\omega_m=\mu_0\frac{\boldsymbol{R}}{R}\cdot\boldsymbol{M}=\mu_0\frac{Q\omega}{4\pi R}\cos\theta$$

为导体球壳外表面上的等效磁荷面密度.上述形式的磁荷分布等效于一个磁偶极子,考虑到边界条件,试解取为

$$\varphi_m=a_r\cos\theta\,\theta(R-r)+\frac{b_1R^2}{r^2}\cos\theta\,\theta(r-R)$$

由边值关系可得

$$a_1\equiv b_1=\frac{1}{4\pi R}\frac{Q\omega}{3}$$

故

$$\varphi_m=\frac{1}{4\pi}\frac{QR^2\omega}{3}\left[\frac{r}{R^3}\theta(R-r)+\frac{1}{r^2}\theta(r-R)\right]\cos\theta$$

于是

$$\boldsymbol{H}=-\nabla\varphi_m=\frac{1}{4\pi}\left[-\frac{\boldsymbol{m}}{R^3}\theta(R-r)+\left(\frac{3\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{m}}{r^5}-\frac{\boldsymbol{m}}{r^3}\right)\theta(r-R)\right]$$

式中 $\boldsymbol{m}=\frac{4\pi R^3}{3}\boldsymbol{M}$ 是体系的磁矩.由 $\boldsymbol{B}=\mu_0(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M})$可得所求的解.

习题 5-2

1. 在无限大各向同性均匀介质中,挖一半径为 R 的球形空腔,并加上一均匀的外电场 $\boldsymbol{E}_0$.介质的介电常量为 ε.求空腔内外的电势及电场分布.

答案:$\varphi_{r<R}=-\frac{3\varepsilon}{2\varepsilon+\varepsilon_0}\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{r}$,$\varphi_{r>R}=-\left[1+\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{2\varepsilon+\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^3}\right]\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{r}$,

$\boldsymbol{E}_{r<R}=\frac{3\varepsilon}{2\varepsilon+\varepsilon_0}\boldsymbol{E}_0$,$\boldsymbol{E}_{r>R}=\left[1+\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{2\varepsilon+\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^3}\right]\boldsymbol{E}_0$

2. 有一半径为 R、介电常量为 ε_1 的介质球,球心置一自由电偶极子,其电矩为 $\boldsymbol{p}$.球外空间充满另一种介质,介电常量为 ε_2.求空间电势分布及介质分界面上的束缚电荷.

答案:$\varphi_{r\leqslant R}=\left[\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2\varepsilon_2+\varepsilon_1}\frac{r^3}{R^3}\right]\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{2\pi\varepsilon_1 r^3}$

$\varphi_{r>R}=\left[\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2\varepsilon_2+\varepsilon_1}\right]\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{2\pi\varepsilon_1 r^3}$,$\sigma_p=\frac{3(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\varepsilon_0}{2\pi(2\varepsilon_2+\varepsilon_1)\varepsilon_1}\frac{p\cos\theta}{R^3}$

3. 一半径为 a、介电常量为 ε 的均匀介质球.把它放置在均匀的外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 中.求电势分布、介质球的极化强度 $\boldsymbol{p}$ 和总的电偶极矩 $\boldsymbol{p}_t$.

答案:$\varphi_{r\leqslant a}=-\frac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon_0+\varepsilon}\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{r}$,$\varphi_{r>a}=\left[-1+\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{2\varepsilon_0+\varepsilon}\frac{a^3}{r^3}\right]\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{r}$

$\boldsymbol{p}=\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}3\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0$,$\boldsymbol{p}_t=\frac{4\pi}{3}a^3\boldsymbol{p}$

4. 介电常量为 ε 的均匀介质球壳,内外半径分别为 a 与 b,置于均匀外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 中,试求

(1) 壳内电场强度;(2) 壳面束缚电荷形成的电偶极矩.

答案:(1) $\boldsymbol{E}_{r<a}=\frac{9\varepsilon_r\boldsymbol{E}_0}{9\varepsilon_r-2(1-\varepsilon_r)^2[(a/b)^3-1]}$

(2) $\boldsymbol{p}_{r=a}=\frac{3(\varepsilon_r-1)}{9\varepsilon_r-2(1-\varepsilon_r)^2[(a/b)^3-1]}4\pi\varepsilon_0 a^3\boldsymbol{E}_0$

$\boldsymbol{p}_{r=b}=\frac{3\varepsilon_r}{\varepsilon_r+2}\boldsymbol{p}_{r=a}-\frac{(\varepsilon_r-1)}{\varepsilon_r+2}4\pi\varepsilon_0 b^3\boldsymbol{E}_0$

5. 在均匀的外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 中,放一半径为 a 的不带电的导体球.求电势分布、电场分布和感应的电偶极矩.

答案:$\varphi=\left(\frac{a^3}{r^3}-1\right)\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{r}$,$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0-\nabla\left(\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right)$,$\boldsymbol{p}=4\pi\varepsilon_0 a^3\boldsymbol{E}_0$

6. 有一个半径为 a、电荷量为 Q 的金属球.在球外离球心距离为 d 处放置一个点电荷 q.用分离变量法求空间的电势分布.

提示:球外电势为球面上感应电荷产生的电势 ϕ_i 与点电荷电势 ϕ_q 的叠加,ϕ_i 满足 Laplace 方程.

答案:设 θ 为矢径 r 与 d 的夹角,则

$$\varphi=\frac{Q+aq/d}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}}-\frac{a/d}{\sqrt{r^2+(a^2/d)^2-2r(a^2/d)\cos\theta}}\right]$$

7. 一平面两边充满两种均匀半无限的电介质,其介电常量分别为 ε_1 和 ε_2,有一半径为 R、电荷量为 Q 的导体球放置在这两个介质的分界中间,球心在分界面上.求空间电场分布、球面上的电荷分布及束缚电荷分布.

答案:$\boldsymbol{E}_{r<R}=0$,　$\boldsymbol{E}_{r>R}=\dfrac{Q\boldsymbol{r}}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^3}$

$$\sigma_{fi}=\frac{\varepsilon_i Q}{2\pi R^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)},\sigma_{pi}=\frac{(1-\varepsilon_i)Q}{2\pi R^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$$

8. 一个内外半径为 R_1 与 R_2 的均匀磁介质球壳,放在一均匀的外磁场 $\boldsymbol{H}_0$ 中,球壳的磁导率 $\mu\gg\mu_0$.求磁壳内的磁感强度,说明磁屏蔽效应.

9. 将一磁导率为 μ、半径为 a 的球体置于均匀外磁场 $\boldsymbol{H}_0$ 中.求球内外的磁场强度 $\boldsymbol{H}$、球体的感应磁矩 $\boldsymbol{m}$、磁化强度 $\boldsymbol{M}$、磁化电流 j_m 和磁化面电流 $\boldsymbol{\Pi}_m$.

答案:$\boldsymbol{H}_{r<a}=\dfrac{3\mu_0}{\mu+2\mu_0}\boldsymbol{H}_0$,　$\boldsymbol{H}_{r>a}=\boldsymbol{H}_0-\dfrac{1}{4\pi}\nabla\left(\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\right)$

$$\boldsymbol{m}=\frac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0}4\pi a^3\boldsymbol{H}_0,\ \boldsymbol{M}=\boldsymbol{m}\Big/\left(\frac{4\pi}{3}a^3\right)$$

$$j_m=0,\qquad \boldsymbol{\Pi}_m=-\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{M}$$

10. 一半径为 a 的无限长圆柱形导体壳被通过其对称轴(取为 z 轴)的平面 $y=0$ 切成两半.这两半相互绝缘且分别具有恒电势 V_1(当 $0<\phi<\pi$ 时)与 V_2(当 $\pi<\phi<2\pi$ 时).求柱内外电势分布.

答案:$\varphi_{\rho<a}=\dfrac{V_1+V_2}{2}+\dfrac{V_1-V_2}{\pi}\arctan\dfrac{2a\rho\sin\phi}{a^2-\rho^2}$,

$$\varphi_{\rho>a}=\frac{V_1+V_2}{2}+\frac{V_1-V_2}{\pi}\arctan\frac{2a\rho\sin\phi}{\rho^2-a^2}$$

11. 将一不带电的导体椭球放在恒定的外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 中,求导体外的电势分布 φ 及导体椭球上感生电荷的电偶极矩 $\boldsymbol{p}$.

答案:取坐标轴沿导体椭球的三个主轴,设 a_i 是其第 i 主轴的半轴长.则

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3$$

$$\varphi_i=-E_{0i}x_i\left[1-\frac{1}{V_i}\int_\varepsilon^\infty\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{(a_i^2+\varepsilon)R_\varepsilon}\right],\quad i=1,2,3$$

$$R_\varepsilon=\sqrt{(a_1^2+\varepsilon)(a_2^2+\varepsilon)(a_3^2+\varepsilon)}$$

$$V_i=\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{(a_i^2+\varepsilon)R_\varepsilon},\qquad p_i=\frac{8\pi\varepsilon_0}{3V_i}E_{0i}$$

式中 ε 是椭球坐标系中的第一个坐标(见附录).

12. 一半径为 a 的超导球置于均匀外磁场 $\boldsymbol{H}_0$ 中,且 H_0 比临界磁场 H_c 小,温度 T 比临界温度 T_c 低,因而导体球处于超导态.试用磁标势法求球内外与球的外表面上的磁场.

提示:超导球内磁感强度 $\boldsymbol{B}_{内}=0$.

答案:取球坐标系

$$\boldsymbol{H}_{外表面}=-(3/2)H_0\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta,\ \boldsymbol{H}_{内}=(3/2)\boldsymbol{H}_0$$

$$\boldsymbol{H}_{外}=H_0\left\{[1-a^3/r^3]\cos\theta\boldsymbol{e}_r-[1-a^3/(2r^3)]\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta\right\}.$$

§5.3 保角变换法

5.3.1 平面恒场的复势

真空中静电场满足

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=0,\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$$

由第一个方程知可将 $\boldsymbol{E}$ 表成标势 φ 的梯度

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi \tag{5.3.1}$$

由第二个方程知可将 $\boldsymbol{E}$ 表成某一"矢势" $\boldsymbol{A}_e$(称为电矢势)的旋度

$$\boldsymbol{E}=\nabla\times\boldsymbol{A}_e \tag{5.3.2}$$

对于平面静电场,$\boldsymbol{E}$ 与某一坐标例如 z 无关,它仅有 $E_x(x,y)$ 与 $E_y(x,y)$ 两个分量.相应地,可令平面静电场的标势与 z 无关,而电矢势仅具有与 z 无关的 z 分量即 $\boldsymbol{A}=-A(x,y)\boldsymbol{e}_z$.于是,(5.3.1)式可写为

$$E_x=-\frac{\partial\varphi}{\partial x},\qquad E_y=-\frac{\partial\varphi}{\partial y} \tag{5.3.3}$$

而(5.3.2)式即

$$E_x=-\frac{\partial A}{\partial y},\qquad E_y=\frac{\partial A}{\partial x} \tag{5.3.4}$$

故电标势与电矢势按下式

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial A}{\partial y},\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial A}{\partial x} \tag{5.3.5}$$

相互联系.

利用(5.3.4)式可将电矢势的等势线方程

$$A(x,y)=常数 \tag{5.3.6}$$

改写成

$$\frac{\mathrm{d}x}{E_x}=\frac{\mathrm{d}y}{E_y} \tag{5.3.7}$$

可见电矢势的等势线是通常的电场线.由(5.3.5)式知

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial A}{\partial y}=0 \tag{5.3.8}$$

这说明电场线族与通常的等势线族相互正交.

平面静电场的复势 $w(x,y)$定义为

$$w(x,y)=\varphi(x,y)+\mathrm{i}A(x,y) \tag{5.3.9}$$

它的实部与虚部是连续可微的,且满足(5.3.5)式,即所谓 Cauchy－Riemann 条件,故是 $z=x+\mathrm{i}y$ 的解析函数.解析函数的实部与虚部都是调和函数,因而 φ 与 A 都满足 Laplace 方程.

不难看出,上述论证对于真空中的静磁场也适用;只需将 φ 与 $\boldsymbol{A}_e$分别换成等效磁标势 φ_m与磁矢势 $\boldsymbol{A}$.

5.3.2　保角变换法及实例分析

一个在 z 复平面上的区域 V 中解析的函数$w(z)$可以看成由 z 复平面的区域 V 到$w(z)$复平面的一种光滑(即在区域 V 中处处可导)的变换

$$z=x+\mathrm{i}y\rightarrow w(z)=\varepsilon+\mathrm{i}\eta \tag{5.3.10}$$

或

$$(x,y)\rightarrow(\varepsilon,\eta)$$

如果在 z 复平面上的区域 V 中

$$w'(z)\neq 0$$

则 V 内的任意两条直线的夹角在上述变换中保持不变,因而电力线与等势线在变换后也是正交的.这时,变换(5.3.10)称为保角变换.

可以证明:如果在 z 平面上的区域 V 中 $w'(z)\neq 0$,则 Poisson 方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\varphi=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(x,y)$$

在保角变换 $z\rightarrow w(z)$下成为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2}+\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right)\varphi=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho^*(\varepsilon,\eta) \tag{5.3.11}$$

式中

$$\rho^*(\varepsilon,\eta)=|w'(z)|^{-2}\rho(x,y) \tag{5.3.12}$$

且总电荷不变

$$\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\rho(x,y)=\int \mathrm{d}\varepsilon\mathrm{d}\eta\rho^*(\varepsilon,\eta) \tag{5.3.13}$$

Riemann 定理:对于任何一个单连通区域,存在着一个解析函数 $w(z)$将区域内的所有点单值、保角地映射到以原点为中心的单位圆内,并可使原点与实轴正方向分别对应于区域内的任意一点与过该点的任一射线方向(参见:N. N. 普里瓦洛夫.复变函数引论.第 12 章第 6 节).因此,单连通区域中的平面恒场问

题都可以通过一个解析映射函数使其边界变得简单.保角变换法的基本精神便是利用解析函数所代表的变换的几何性质,将平面恒场问题中复杂的边界变换为简单的边界,因而便于求解.

然而,还没有一个普遍适用的定则可用来找到这个解析函数.常用来解决平面恒场问题的保角映射有下面几种:

(a) 分式线性映射

$$w(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

它使圆保持为圆(**注意**:直线是半径为无穷大的圆);反演点对(即圆的镜像点对)仍保持为反演点对.

(b) 幂函数映射

$$w(z)=z^n$$

它将 z 平面上与正实轴夹角为 π/n 的角形区域变为 w 平面的上半部分,且 z 平面上半径为 a 的圆变为 w 平面上半径为 a^n 的圆.

(c) 指数映射

$$w(z)=\exp z$$

它将 z 平面上 $0\leqslant y\leqslant\pi$ 的带形映射为 w 平面的上半部分.

(d) 对数映射

$$w(z)=\ln z$$

它将 z 平面的上半部分映射为 w 平面上平行于实轴、宽为 π 的一个带形区域.

长直线电荷的复势

求均匀带电的无穷长直导线的场的复势.

解:在与长直导线垂直的任一平面内的电场都是一样的.设长直导线的线电荷密度为 λ,在以直导线为中心原点的平面极坐标系中,(ρ,ϕ)处的电场为

$$\boldsymbol{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho}\boldsymbol{e}_\rho$$

相应的标势与"矢势"分别是

$$\varphi=\frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\rho,\qquad A=\frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\phi$$

复势为

$$w=\frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}(\ln\rho+\mathrm{i}\phi)=\frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln z$$

若带电导线不通过原点,而是过点 $z_0=\rho_0\exp(\mathrm{i}\phi_0)$,则

$$w=\frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(z-z_0)$$

不等势的两个导体半柱壳

一无限长金属圆柱面，由绝缘介质分成两半，一半接地，另一半电势为恒势 V_0. 求圆柱内的电势分布.

解：金属柱面的横截面是一个圆，设其半径为 R，所在平面为 z 平面，柱轴与 z 平面交点为原点，且 $y=0$ 平面正好将柱面分成两半，位于 $y<0$ 区域的一半接地，位于 $y>0$ 区域的一半具有电势 V_0. 取分式线映射

$$w=\varepsilon+\mathrm{i}\eta=\mathrm{i}R\frac{R-z}{R+z}$$

在 z 平面上取极坐标(ρ,θ). 由于

$$w_{z=0}=\mathrm{i}R,\quad w_{\rho=R}=R\tan(\theta/2)$$

知此映射将 z 平面上的半径为 R 的圆内区域变为 w 平面上半部，且上半圆映射为正实轴，下半平面映射为负实轴. 再作对数映射

$$\overline{w}=\overline{\varepsilon}+\mathrm{i}\,\overline{\eta}=-\frac{V_0}{\pi}\ln w+\mathrm{i}V_0$$

于是

$$\overline{\eta}=V_0\left(1-\frac{1}{\pi}\arg w\right).$$

由

$$0=\overline{\eta}_{\arg w=\pi}\leqslant\overline{\eta}\leqslant\overline{\eta}_{\arg w=0}=V_0$$

知对数映射将 w 的上半平面映射成$\overline{w}$平面上直线$\overline{\eta}=0$ 与$\overline{\eta}=V_0$之间的带形区域；且 w 平面的负实轴变为$\overline{w}$平面上的实轴，因而其上电势为零；w 平面的正实轴则变为$\overline{w}$平面上的直线$\overline{w}=V_0$. 因而其上电势为 V_0.

在坐标系$(\overline{\varepsilon},\overline{\eta})$中，由对称性知 φ 与$\overline{\varepsilon}$无关. 故电势满足

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\overline{\eta}^2}=0,\qquad \text{当 } 0<\overline{\eta}<V_0 \text{ 时}$$

$$\varphi_{\overline{\eta}=0}=0,\qquad \varphi_{\overline{\eta}=V_0}=V_0$$

方程的通解为

$$\varphi=C\overline{\eta}+D$$

由边界条件知

$$C=1,\qquad D=0$$

于是

$$\varphi_{\rho\leqslant R}=V_0\left[1-\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{R^2-\rho^2}{2R\rho\sin\theta}\right)\right]$$

习题 5－3

1. 有一个二维直角区域：$x\geqslant 0, y\geqslant 0$. 直角两边上的电势为 ϕ_0. 求直角区域中的等势面与电

场分布.

提示：作保角变换 $\omega(z)=z^2$.

2. 有一个二维角形区域，它的边界是夹角为 $\pi/3$ 的两条射线.若这角形区域两边上的电势为 ϕ_0.求角形区域中的等势面与电场分布.

提示：作保角变换 $\omega(z)=z^3$.

3. 有一个二维带形区域，它的边界是 $y=0$ 与 $y=\pi$ 的两条直线.若这两条直线上的电势为 ϕ_0.求带形区域中的等势面与电场分布.

提示：作保角变换 $\omega(z)=\exp(z)$.

4. 两块半无穷大的导体板，以角 θ 相交，两板相互绝缘，且分别具有电势 V_1 与 V_2.求两板间的电势分布.

提示：先作保角变换 $\omega(z)=z^n$，$n=\pi/\theta$；再作保角变换 $\epsilon(\omega)=\ln\omega$.

§5.4 Green 函数法

5.4.1 Poisson 方程边值问题的形式解

设在充满了线性均匀的介质区域 V 中，任意给定了某一电荷分布 $\rho(\boldsymbol{x})$，以及区域 V 边界 S 上的电势值或电势的法向微商，求 V 中的电势分布 $\varphi(\boldsymbol{x})$.电势 φ 满足 Poisson 方程

$$\nabla^2\varphi(\boldsymbol{x})=-\frac{1}{\epsilon}\rho(\boldsymbol{x})$$

与第一类边界条件(亦称为 Dirichlet 边界条件)

$$\varphi|_S=\text{已知}$$

或第二类边界条件(亦称为 Newmann 边界条件)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_S=\text{已知}$$

这类求解问题分别称为 Poisson 方程的第一类边值问题与第二类边值问题.

为了求解上述边值问题，可引入辅助函数 $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$，它是位于 V 中 $\boldsymbol{x}'$ 点上的单位点电荷在 V 中 $\boldsymbol{x}$ 点处产生的势，称为 Green 函数.它满足 Poisson 方程

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=-\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{5.4.1}$$

及边界条件

$$\left[\alpha G+\beta\frac{\partial G}{\partial n}\right]\Big|_S=\beta\frac{-1}{S},\qquad \alpha,\beta\text{ 不同时为零} \tag{5.4.2}$$

式中 $\boldsymbol{n}$ 是边界面 S 上面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 的外法向，S 是边界面的总面积.当 $\alpha\neq0$ 而 $\beta=0$ 时，(5.4.2)式是第一类边值问题的边界条件，相应的 Green 函数称为第一类边值问题的 Green 函数或 Dirichlet Green 函数 $G_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$，它满足

$$G_D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')|_{x\in S}=0 \tag{5.4.3}$$

当 $\alpha=0$ 而 $\beta\neq0$ 时,(5.4.2)式是第二类边值问题的边界条件,相应的 Green 函数称为第二类边值问题的 Green 函数或 Newmann Green 函数 $G_N(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$,它满足

$$\frac{\partial G_N(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')}{\partial n}|_{x\in S}=\frac{-1}{S} \tag{5.4.4}$$

值得指出的是,位于 V 中 $\boldsymbol{x}'$ 点上的单位点电荷在边界上 $\boldsymbol{x}$ 点处所激发的电场强度在面元法向上的投影为

$$-\frac{\partial}{\partial n}G_N(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$$

故按 Gauss 定理有

$$\oint_S \mathrm{d}\sigma\frac{\partial}{\partial n}G_N(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=-1 \tag{5.4.5}$$

于是,若边界面的面积 S 是有限的,应有

$$\frac{\partial}{\partial n}G_N(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')|_{x\in S}\neq0,\qquad \text{当 } S \text{ 为有限时} \tag{5.4.6}$$

因而(5.4.4)是 Newmann Green 函数可能的边界条件中最简单的取法.若 S 为无限大,Newmann Green 函数的边界条件(5.4.4)便成为

$$\frac{\partial}{\partial n}G_N(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')|_{x\in S}\to0,\qquad \text{当 } S \text{ 为无限大时} \tag{5.4.7}$$

方程(5.4.1)的解具有下述形式:

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}+F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') \tag{5.4.8}$$

式中 $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$ 满足

$$\nabla^2F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=0 \tag{5.4.9}$$

它是区域 V 以外的电荷体系在 V 中产生的势,它的作用是与 V 中 $\boldsymbol{x}'$ 点上的单位点电荷的势叠加起来满足问题所给的边界条件.

在 Green 定理

$$\int_V \mathrm{d}^3x[\Phi\nabla^2\Psi-\Psi\nabla^2\Phi]=\oint_S \mathrm{d}\sigma\left[\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial n}-\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right]$$

(式中 $\boldsymbol{n}$ 为面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 的外法向)中令

$$\Phi=G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'),\qquad \Psi=G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'')$$

因为 α、β 不同时为零,由(5.4.2)可知下述关于 α 和 β 的方程组

$$\left[G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\alpha+\left(\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')}{\partial n}+\frac{1}{S}\right)\beta\right]|_S=0$$

$$\left[G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'')\alpha+\left(\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'')}{\partial n}+\frac{1}{S}\right)\beta\right]|_S=0$$

有非零解，故 α 与 β 的系数行列式应为零，即

$$\left[G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'')}{\partial n}-G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'')\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')}{\partial n}\right]\Big|_S=\frac{1}{S}[G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')-G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'')]$$

于是由 Green 定理可得

$$\int_V \mathrm{d}^3x[G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'')-G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'')\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')]$$

$$=\frac{1}{S}\oint_S \mathrm{d}\sigma[G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')-G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'')] \tag{5.4.10}$$

因而若

$$\frac{1}{S}\oint_S \mathrm{d}\sigma[G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')-G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'')]=0 \tag{5.4.11}$$

Green 函数便满足下述对称关系：

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=G(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}) \tag{5.4.12}$$

即具有**源与观察点互换的对称性**. 对于第一类边值问题以及面积 S 为无穷大的第二类边值问题，条件(5.4.11)自然满足；对于面积 S 有限的第二类边值问题，(5.4.11)或(5.4.12)常取为一个限制条件.

继而，在 Green 定理中令

$$\phi=\varphi(\boldsymbol{x}'),\qquad \psi=G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$$

则由 Green 定理知

$$\varphi(\boldsymbol{x})=\frac{1}{\varepsilon}\int_V \mathrm{d}^3x'\rho(\boldsymbol{x}')G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')+$$

$$\oint_S \mathrm{d}\sigma'\left[G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{x}')}{\partial n'}-\varphi(\boldsymbol{x}')\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')}{\partial n'}\right] \tag{5.4.13}$$

利用 Dirichlet 边界条件(5.4.3)便得到第一类边值问题的形式解：

$$\varphi(\boldsymbol{x})=\frac{1}{\varepsilon}\int_V \mathrm{d}^3x'\rho(\boldsymbol{x}')G_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')-\oint_S \mathrm{d}\sigma'\varphi(\boldsymbol{x}')\frac{\partial G_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')}{\partial n'}$$

利用 Newmann 边界条件(5.4.4)便得到第二类边值问题的形式解：

$$\varphi(\boldsymbol{x})=\frac{1}{\varepsilon}\int_V \mathrm{d}^3x'\rho(\boldsymbol{x}')G_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')+\oint_S \mathrm{d}\sigma' G_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{x}')}{\partial n'}+\langle\varphi\rangle_S$$

式中 $\langle\varphi\rangle_S$ 是势在边界面上的平均值

$$\langle\varphi\rangle_S=\frac{1}{S}\oint_S \mathrm{d}\sigma'\varphi(\boldsymbol{x}') \tag{5.4.14}$$

若边界面的面积为无限大，则第二类边值问题有形式解：

$$\varphi(\boldsymbol{x})=\frac{1}{\varepsilon}\int_V \mathrm{d}^3x'\rho(\boldsymbol{x}')G_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')+\oint_S \mathrm{d}\sigma' G_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{x}')}{\partial n'},\quad \text{当 } S\to\infty \tag{5.4.15}$$

这些形式解将静电边值问题化为求相应边界的 Green 函数的问题.特别地,若 V 为全空间,单位点电荷在无界空间产生的势就是相应的 Green 函数:

$$G_D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|},\qquad \text{当 } V \text{ 为全空间} \tag{5.4.16}$$

它也称为 Poisson 方程在无界空间中的 Green 函数.

5.4.2　Green 函数的常用求法

一、镜像法

当我们用镜像法求出了点源的势时,我们实际上求出了相应边界条件下的 Green 函数.将例 1 求出的势中的 q 换成 1,我们就得到了半无穷空间 $x\geqslant 0$ 中的第一类 Green 函数:

$$G_D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}-\frac{1}{|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}''|}\right],\qquad \text{当 } x\geqslant 0 \tag{5.4.17}$$

式中

$$\boldsymbol{x}''=\boldsymbol{x}'-2(\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{e}_x)\boldsymbol{e}_x$$

是 $\boldsymbol{x}'$相对于平面 $x=0$ 的镜面反射.

将例 2 求出的势中的 q 换成 1,便得到半径为 R 的球外空间的第一类 Green 函数:

$$G_D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}-\frac{R/r'}{|\boldsymbol{x}-(R^2/r'^2)\boldsymbol{x}'|}\right] \tag{5.4.18}$$

由球面镜像问题中的讨论,可知上式也是球内空间的 Green 函数.

二、本征函数展开法

本征函数展开法是求 Green 函数的一个重要方法.其步骤是:选取一个由满足问题的边界条件的本征函数组成的完全集合;将 Green 函数用这组本征函数展开,代入 Green 函数应满足的方程,由本征函数的正交归一关系求出展开系数.

矩形区域内的 Green 函数

求平面矩形区域内部 Poisson 方程第一类边值问题的 Green 函数.

解:设此矩形区域为

$$0\leqslant x\leqslant a,\qquad 0\leqslant y\leqslant b$$

Green 函数 $G_D(x,y;x',y')$在区域内满足:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)G_D(x,y;x',y')=-\delta(x-x')$$

边界条件为:

$$G_D(x,y;x',y')|_{x=0,a}=0,\qquad G_D(x,y;x',y')|_{y=0,b}=0$$

本征函数

$$\Phi_{mn}(x,y)=\frac{2}{\sqrt{ab}}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right),\ m,n=1,2,\cdots$$

显然满足边界条件,并形成完全集合,其正交归一关系为

$$\int_0^a\int_0^b \mathrm{d}x\mathrm{d}y\Phi_{mn}(x,y)\Phi_{m'n'}(x,y)=\delta_{mm'}\delta_{nn'}$$

将 $G_D(x,y;x',y')$按这组本征函数展开

$$G_D(x,y;x',y')=\sum_{m,n}g_{mn}(x',y')\Phi_{mn}(x,y)$$

代入 $G_D(x,y;x',y')$满足的方程得

$$\sum_{m,n}g_{mn}(x',y')\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]\Phi_{mn}(x,y)=\delta(x-x')\delta(y-y')$$

两边同乘以 $\Phi_{m'n'}(x,y)$,对 x 和 y 积分并利用 Φ_{mn} 的正交归一关系得

$$g_{mn}(x',y')=\frac{1}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}\Phi_{mn}(x',y')$$

于是平面矩形区域内 Poisson 方程第一类边值问题的 Green 函数为

$$G_D(x,y;x',y')=\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\cdot$$
$$\sin\left(\frac{m\pi x'}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y'}{b}\right)\qquad(5.4.19)$$

值得注意的是:在分离变数法中,选取特解满足齐次方程,选择组合系数满足边界条件;在本征函数展开法中,边界条件由选取适当的本征函数组来满足,展开函数则由非齐次方程决定.本征函数组 Φ_i 除了要满足边界条件外,还须满足本征方程

$$\nabla^2\Phi_i=\lambda_i\Phi_i,\qquad \lambda_i\text{为常数(称为本征值)}$$

以使原方程化为代数方程从而能将展开函数求出.人们可以选取不同的本征函数组,从而得到同一结果的(可能收敛速度不同的)展开式.

三、分离变量法

若封闭的边界面 S 是曲线正交坐标系中某一曲线坐标等于常数的曲面,便可对 Green 函数 $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$所满足的方程与边界条件同时分离变量,利用相应的正交归一关系,使方程化成下述非齐次的常数分方程:

$$\hat{L}[\psi]=\left[P_2(x)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+P_1(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+P_0(x)\right]\psi(x,x')=-\delta(x-x')$$

设 $\psi_1(x)$和 $\psi_2(x)$是相应的齐次方程 $\hat{L}[\psi]$的两个线性无关的解,且分别满足 $x=x_1$与 $x=x_2>x_1$处的边界条件,则上述方程的解为

$$\psi(x,x')=-\frac{1}{c}[\psi_1(x)\psi_2(x')\theta(x-x')+\psi_2(x)\psi_1(x')\theta(x'-x)] \tag{5.4.20}$$

式中

$$c=-P_2(x')W[\psi_1,\psi_2] \tag{5.4.21}$$

而

$$W[\psi_1,\psi_2]=\det\begin{pmatrix}\psi_1(x'), & \psi_2(x')\\ \psi_1'(x'), & \psi_2'(x')\end{pmatrix} \tag{5.4.22}$$

是 Wronski 行列式. 因而，当 $c=0$ 时函数 $\psi_1(x')$ 与 $\psi_2(x')$ 线性相关；当 $c\neq 0$ 时函数 $\psi_1(x')$ 与 $\psi_2(x')$ 线性无关.

两球壳间区域中的 Green 函数

求 $r=a$ 和 $r=b>a$ 的两球壳面间区域中的 Poisson 方程第一类边值问题的 Green 函数.

解：此 Green 函数满足

$$\nabla^2 G_D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=-\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),\qquad a\leqslant r,r'\leqslant b$$

$$G_D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')|_{r,r'=a,b}=0$$

由积分号下的测度变换易知，在曲线正交坐标系(u_1,u_2,u_3)中有

$$\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')=\left[\det\left(\frac{\partial x_i}{\partial u_j}\right)\right]^{-1}\delta(u_1-u_1')\delta(u_2-u_2')\delta(u_3-u_3')$$

对于球坐标系有

$$\begin{aligned}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')&=\frac{1}{r^2}\delta(r-r')\delta(\cos\theta-\cos\theta')\delta(\phi-\phi')\\&=\frac{1}{r^2}\delta(r-r')\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}^*(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi)\end{aligned} \tag{5.4.23}$$

式中利用了球谐函数的完备性关系. 将 Green 函数用球谐函数展开：

$$G_D(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}A_{lm}^*(r,r',\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi)$$

代入原方程得

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial A_{lm}}{\partial r}-\frac{l(l+1)}{r^2}A_{lm}+\frac{1}{r^2}\delta(r-r')\right]Y_{lm}^*(\theta',\phi')\right\}Y_{lm}(\theta,\phi)=0$$

这里已利用了球谐函数所满足的微分方程. 利用球谐函数的相互正交性知

$$\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial}{\partial r}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]\right\}A_{lm}=-\frac{1}{r^2}\delta(r-r')Y_{lm}^*(\theta',\phi')$$

可见

$$A_{lm}(r,r',\theta',\phi')=g_l(r,r')Y_{lm}^*(\theta',\phi')$$

式中径向 Green 函数 $g_l(r,r')$满足方程

$$\left[r^2\frac{d^2}{dr^2}+2r\frac{d}{dr}-l(l+1)\right]g_l(r,r')=-\delta(r-r')$$

相应的齐次微分方程是

$$\left[r^2\frac{d^2}{dr^2}+2r\frac{d}{dr}-l(l+1)\right]g_l(r)=0$$

在区域 $r<r'$, $G_D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$的边界条件要求

$$g_l(r)_{r=a}=0$$

故齐次微分方程有解

$$g_l(r)=A(r^l-a^{2l+1}/r^{l+1}),\qquad \text{当 } r<r' \text{时}$$

在区域 $r>r'$, $G_D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$的边界条件则要求

$$g_l(r)_{r=b}=0$$

故齐次微分方程有解

$$g_l(r)=B[r^{-(l+1)}-r^l/b^{2l+1}],\qquad \text{当 } r>r' \text{时}$$

按(5.4.20)可知,径向 Green 函数 $g_l(r,r')$的方程的解是

$$g_l(r,r')=-\frac{1}{c}g_1(r_<)g_2(r_>) \tag{5.4.24}$$

式中 $r_<=\min\{r,r'\}$, $r_>=\max\{r,r'\}$,而

$$c=\frac{1}{r^2}[g_1'(r_<)g_2(r_>)-g_1(r_<)g_2'(r_>)]$$

注意, $g_l(r,r')$与常数 A 与 B 无关.故

$$g_l(r,r')=\frac{1}{(2l+1)[1-(a/b)^{2l+1}]}\left(r_<^l-\frac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}}\right)\left(r_>^{-(l+1)}-\frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right) \tag{5.4.25}$$

于是,以 $r=a$ 与 $r=b>a$ 的两球面为边界的 Poisson 方程的第一类边值问题的 Green 函数为

$$G_D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{Y_{lm}^*(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi)}{(2l+1)[1-(a/b)^{2l+1}]}\cdot\left(r_<^l-\frac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}}\right)\left(r_>^{-(l+1)}-\frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right) \tag{5.4.26}$$

两接地导体平面间的 Green 函数

电势为零的两块无限大平行导电板位于 $z=0$ 与 $z=L$ 处.求这两导体平面之间的无限区域内的 Green 函数.

解: Green 函数满足方程

$$\nabla^2 G_D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=-\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$

和边界条件

$$G_D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')|_{z=0,L=0}=0$$

在柱坐标系(ρ,ϕ,z)中有

$$\begin{aligned}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')&=\frac{1}{\rho}\delta(\rho-\rho')\delta(\phi-\phi')\delta(z-z')\\&=\frac{1}{\pi L\rho}\delta(\rho-\rho')\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sin\frac{n\pi z}{L}\sin\frac{n\pi z'}{L}\exp[\mathrm{i}m(\phi-\phi')]\end{aligned}\tag{5.4.27}$$

式中利用了正弦函数和指数函数的完备性关系：

$$\delta(z-z')=\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi z}{L}\sin\frac{n\pi z'}{L},\qquad \text{当 } 0<z,z'<L$$

$$\delta(\phi-\phi')=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\exp[\mathrm{i}m(\phi-\phi')],\qquad \text{当 } 0<\phi,\phi'<2\pi \tag{5.4.28}$$

将 $G_D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$也按正弦函数和指数函数展开：

$$G_D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=\frac{1}{\pi L}\sum_{m=-\infty,n=1}^{\infty}\psi_{mn}(\rho,\rho')\sin\frac{n\pi z}{L}\sin\frac{n\pi z'}{L}\cdot\exp[\mathrm{i}m(\phi-\phi')]\tag{5.4.29}$$

代入原方程得径向 Green 函数 $\psi_{mn}(\rho,\rho')$方程

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\right)-\left(k^2+\left(\frac{m}{\rho}\right)^2\right)\right]\psi_{mn}(\rho,\rho')=-\frac{1}{\rho}\delta(\rho-\rho'),\quad k_n=\frac{n\pi}{L}$$

相应的齐次微分方程是

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\right)-\left(k_n^2+\left(\frac{m}{\rho}\right)^2\right)\right]\psi_{mn}(\rho)=0$$

此即虚宗量 Bessel 方程. 在区域 $\rho<\rho'$, G_D的边界条件要求

$$\psi_{mn}^{(1)}(\rho)|_{\rho=0}=\text{有限}$$

故齐次微分方程有解

$$\psi_{mn}^{(1)}(\rho)=A\mathrm{I}_m(k_n\rho),\qquad \text{当 } \rho<\rho' \text{时}$$

在区域 $\rho>\rho'$, G_D的边界条件则要求

$$\psi_{mn}^{(2)}(\rho)|_{\rho\to\infty}=0$$

故齐次微分方程有解

$$\psi_{mn}^{(2)}(\rho)=B\mathrm{K}_m(k_n\rho),\qquad \text{当 } \rho>\rho' \text{时}$$

式中 $\mathrm{I}_m(k_n\rho)$与 $\mathrm{K}_m(k_n\rho)$是第一类和第二类虚宗量 Bessel 函数. 于是径向 Green 函数方程的解是

$$\psi_{mn}(\rho,\rho')=-\frac{1}{c}\psi_{mn}^{(1)}(\rho_<)\psi_{mn}^{(2)}(\rho_>)$$

式中 $\rho_<=\min\{\rho,\rho'\}$, $\rho_>=\max\{\rho,\rho'\}$, 而

$$c=\rho^{-1}[\psi_{mn}^{(1)\prime}(\rho_<)\psi_{mn}^{(2)}(\rho_>)-\psi_{mn}^{(1)}(\rho_<)\psi_{mn}^{(2)\prime}(\rho_>)]=-1$$

于是,以 $\rho=a$ 与 $\rho=b>a$ 的两柱面为边界的区域内的 Poisson 方程的第一类边值问题的 Green 函数为

$$G_D(x,x')=\frac{1}{\pi L}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sin\frac{n\pi z}{L}\sin\frac{n\pi z'}{L}$$
$$\exp[im(\phi-\phi')]I_m(k_n\rho_<)K_m(k_n\rho_>) \tag{5.4.30}$$

四、保角变换法

定理:

若 $f(z)$是将 z 平面上区域 S 变换到 w 平面上以原点为圆心的单位圆的保角变换,且 $f(z')=0$(即将 z 平面上区域 S 中的点 $z=z'$变成 w 平面上的单位圆的圆心),则区域 S 中的第一类 Green 函数为

$$G_D(x,y;x',y')=\frac{-1}{2\pi}\ln|f(z)| \tag{5.4.31}$$

式中 $z=x+iy, z'=x'+iy'$.

为证明此定理,我们首先注意到保角变换

$$z=x+iy\rightarrow w=\varepsilon+i\eta=f(z) \tag{5.4.32}$$

将正交坐标系变为另一正交坐标系,故

$$d\varepsilon d\eta=h_1h_2dxdy$$

且

$$h_1^2=\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2,\qquad h_2^2=\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2$$

由解析函数的性质易知:

$$h_1^2=h_2^2=|f'(z)|^2$$

故

$$d\varepsilon d\eta=|f'(z)|^2dxdy \tag{5.4.33}$$

由于

$$-\varepsilon_0\int_S d\sigma\,\nabla^2\varphi=\int_S d\sigma\rho \tag{5.4.34}$$

是区域 S 中的总电荷,与坐标变换无关,故有

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\varphi=|f'(\varepsilon,\eta)|^2\left(\dfrac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)\varphi\\ \rho(x,y)=|f'(\varepsilon,\eta)|^2\rho^*(\varepsilon,\eta)\end{cases} \tag{5.4.35}$$

注意,$-\ln|w|/(2\pi)$是每单位长度带单位线电荷的无限长的直导线的复势,满足二维 Poisson 方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)\left[-\frac{1}{2\pi}\ln|w|\right]=-\delta(\varepsilon-\varepsilon')\delta(\eta-\eta')|_{\varepsilon'=0,\eta'=0}$$

将上式两边同乘$|f'(z)|^2$后可知$G_D(x,y;x',y')=-\ln|f(z)|/(2\pi)$满足

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)G_D(x,y;x',y')=-\delta(x-x')\delta(y-y')$$

式中应用了等式

$$|f'(z)|^2\delta(\varepsilon-\varepsilon')\delta(\eta-\eta')=\delta(x-x')\delta(y-y') \tag{5.4.36}$$

变换(5.4.32)将z平面上区域S的边界L变为w平面上过原点的单位圆，但不改变电势.故

$$G_D(x,y;x',y')|_{(x,y)\in L}=G_D(w,0)|_{|w|=1}=0 \tag{5.4.37}$$

证毕.

二维圆内的 Green 函数

在无穷长的、半径为R的导体圆筒内有一根与筒的轴线平行且线电密度为1的导线，求圆筒内的电势(取介电常量为1).

解：此问题即是求二维圆内的Green函数.设线电荷位于z'处，而$\bar{z}'$是z'的关于圆R(即导体圆筒)的对称点(即它们互为反演点对).取保角变换为：

$$w=f(z)=\exp(\mathrm{i}\phi)\frac{z-z'}{z-\bar{z}'}\frac{R}{|z'|}$$

易知

$$w_{z=z'}=f(z')=0,\qquad |w|_{|z|=R}=1$$

它将z平面上的点(x',y')映射为w平面上的原点，将z平面上的圆R映射为w平面上以原点为中心的单位圆.故按上述刚证明的定理有

$$\begin{aligned}G_D(x,y;x',y')&=-\frac{1}{2\pi}\ln|f(z)|\\&=-\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|}{|\boldsymbol{\rho}-\bar{\boldsymbol{\rho}}'|}+\ln\frac{R}{|\rho'|}\right]\end{aligned} \tag{5.4.38}$$

注意，此处实际上已取导体圆筒面为零电势点.

由Riemann定理可知，原则上，单连通区域的二维静电问题的Green函数都可以由此法求得.

习题 5－4

1. 证明：在无源空间中，任一点的静电势等于以该点为球心的任一球面上的静电势的平均值.

   提示：在无源空间中，$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\oint_S \mathrm{d}\sigma'\left(\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial n'}-\varphi\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{R}\right)$，式中$R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$

2. 在两块无限大的平行接地导体平面之间放置一点电荷q.用Green函数法求导体平面之间的电势分布和两导体平面上的感生电荷面密度.

   答案：设两板位于$z=0$与$z=L$处，而点电荷q位于z_0处，$0<z_0<L$，则有

$$\varphi(\rho,\phi,z)=\frac{q}{\pi\varepsilon_0 L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi z_0}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right)\mathrm{K}_0\left(\frac{n\pi\rho}{L}\right)$$

$$\sigma(\rho,\phi,0)=-\frac{q}{L^2}\sum_{n=1}^{\infty}n\sin\left(\frac{n\pi z_0}{L}\right)\mathrm{K}_0\left(\frac{n\pi\rho}{L}\right)$$

$$\sigma(\rho,\phi,L)=\frac{q}{L^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\sin\left(\frac{n\pi z_0}{L}\right)\mathrm{K}_0\left(\frac{n\pi\rho}{L}\right)$$

3. 在内外半径分别为 a 与 b 的金属球壳内放置一点电荷 q，该点电荷与球心相距为 d. 在球壳外加一外电场 E_0，其方向与点电荷相对于球心的距离平行. 求壳内外电势分布.

提示：此问题可分成两部分：其一是均匀场中半径为 b 的金属球外的场；其二是内外半径分别为 a 与 b 的金属球壳内点电荷的场.

4. 有一半径为 a 的、流有稳恒电流 I 的环形电流圈，取其对称轴为 z 轴. 证明在环外任一点 (ρ,ϕ,z)，矢势仅具有 ϕ 分量，并求出这个 ϕ 分量的表达式.

答案：$A_\phi=\frac{\mu_0 I}{\pi k}\sqrt{\frac{a}{\rho}}\left[\left(1-\frac{k^2}{2}\right)\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}-\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\alpha\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}\right]$

5. 一半径为 a 的导体球，被一过球心的平面切割成上下两半，两半相互绝缘且分别具有电势 $\pm V$. 求球内外电势分布.

答案：$\varphi(r<a)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(\frac{r}{a}\right)^n\mathrm{P}_n(\cos\theta)$

$$\varphi(r>a)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}\mathrm{P}_n(\cos\theta)$$

$$c_{2n}=0,\ c_{2n+1}=(-1)^n\frac{(2n-1)!}{(2n+2)!}(4n+3)V$$

6. 在一半径为 a 的接地导体球壳内，沿某一直径放置一长为 $2a$ 的细棒，棒两端与球壳绝缘，棒上均匀带电，总电荷为 Q. 求球壳内的电势分布.

答案：$\varphi=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left\{\ln\frac{a}{r}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+1}{2n(2n+1)}\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^{2n}\right]\mathrm{P}_{2n}(\cos\theta)\right\}$

7. 试求由接地导体平面构成的长方形封闭盒内的 Green 函数，长方形盒内为真空.

8. 试用镜像法求层状空间 $0<z<L$ 中第一类边值问题的 Green 函数.

答案：$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-2nL-z')^2}}-\right.$

$$\left.\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-2nL+z')^2}}\right]$$

9. 在 $z=0$ 平面上，边长为 $2a$ 的正方形区域的电势为 ϕ_0，平面上其余地方电势均为零. 求空间电势分布.

答案：$\varphi=2\phi_0\left\{\arctan\frac{(a-x)(a-y)}{|z|\sqrt{(a-x)^2+(a-y)^2+z^2}}+\right.$

$$\arctan\frac{(a+x)(a-y)}{|z|\sqrt{(a+x)^2+(a-y)^2+z^2}}+$$

$$\left.\arctan\frac{(a-x)(a+y)}{|z|\sqrt{(a-x)^2+(a+y)^2+z^2}}+\right.$$

$$\left.\arctan\frac{(a+x)(a+y)}{|z|\sqrt{(a+x)^2+(a+y)^2+z^2}}\right\}$$

10. 在无穷大导体平面上有一半径为 a 的圆，圆内外相互绝缘；且圆内电势为 ϕ_0，圆外导体接地.求导体平面上半空间中的电势分布.

答案： $\varphi=2z\phi_0\int_0^{2\pi}\int_0^a\frac{\rho'\mathrm{d}\rho'\mathrm{d}\phi'}{[\rho^2+\rho'^2+z^2-2\rho\rho'\cos(\phi'-\phi)]^{3/2}}$

11. 将半径为 a 的长直导体圆柱壳用通过柱轴的平面切割成六等分.这六等分柱面相互绝缘，且交替具有电势 $\pm\phi_0$.求柱内空间中的电势分布.

答案： $\varphi=\phi_0\sin(\sin\phi)+\frac{2\phi_0}{\pi}\left\{\arctan\frac{(a^2-\rho^2)\sin\phi}{(a^2+\rho^2)\cos\phi+a\rho}-\right.$

$$\left.\arctan\frac{(a^2-\rho^2)\sin\phi}{(a^2+\rho^2)\cos\phi-a\rho}-\arctan\frac{a^2-\rho^2}{2a\rho\sin\phi}\right\}$$

12. 夹角为 θ 的两块半无穷大导体板之间 (ρ_0,ϕ_0) 处有一平行于两板交线的线电荷 λ，求导体板之间的电势分布.

答案： $\varphi=\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\{[\rho^{\frac{\pi}{\theta}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{\theta}\phi}-\rho_0^{\frac{\pi}{\theta}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{\theta}\phi_0}]/[\rho^{\frac{\pi}{\theta}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{\theta}\phi}-\rho_0^{\frac{\pi}{\theta}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{\theta}\phi_0}]\}$

第六章 似 稳 场

本章考察随时间缓慢变化的电磁场——似稳场，建立似稳场基本方程，由此推出似稳电路方程；最后讨论导体表面的电流分布，包括导体的趋肤效应和高频内阻抗.

§6.1 似稳近似

电流与电荷分布的变化所引起的场的扰动只能以有限的速度传播，因而空间在某一时刻的场分布应由较早时刻的电流与电荷的分布决定.然而当源与场的变化速度足够慢时，可忽略系统内电磁扰动传播速度的有限性，即近似认为源与场的关系是瞬间对应的：

$$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})(t)\approx(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})(\boldsymbol{j}(t),\rho(t)) \tag{6.1.1}$$

这种近似称为似稳近似，满足这一近似关系的场称为似稳场.

源与场的变化要缓慢到何种程度才可认为是似稳情形呢？从源的变化来看，磁场 $\boldsymbol{H}$ 的旋度可视为由两个源决定：位移电流源 $\partial\boldsymbol{D}/\partial t$ 与传导电流源 $\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}$.前者是引起场的波动性的原因，因而场仅在位移电流与传导电流相比可忽略时，即条件

$$|\partial\boldsymbol{D}/\partial t|\ll|\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}| \tag{6.1.2}$$

(即略去波动效应的条件)满足时才可视为是似稳的.在导电介质内部，对于电场的某一频谱分量 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\exp(-\mathrm{i}\omega t)$ 有

$$\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=-\varepsilon\mathrm{i}\omega\boldsymbol{E},\qquad \boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}=\sigma_{\mathrm{c}}\boldsymbol{E}$$

于是条件(6.1.2)成为

$$\omega\ll\sigma_{\mathrm{c}}/\varepsilon \tag{6.1.3}$$

在纯金属中

$$\sigma_{\mathrm{c}}\approx10^{7}\Omega^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1},\qquad \varepsilon\approx\varepsilon_0$$

故

$$\omega\ll10^{17}\mathrm{Hz}$$

故对金属而言，电磁场在很大的频率范围内可视为似稳场.

从场的变化来看，在绝缘介质中 $\boldsymbol{r}$ 处的所激发的场 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\exp(-\mathrm{i}\omega t)$ 传播距离 $R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ 后成为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\exp[-\mathrm{i}\omega(t-R/c)]=\boldsymbol{E}_0\exp(-\mathrm{i}\omega t)\exp(-\mathrm{i}\omega R/c)$$

它仅当其频率 ω、周期 T 或波长 λ 满足条件

$$\omega\ll\frac{c}{R},\text{或}\quad T\gg\frac{R}{c},\text{或}\quad R\ll\lambda \tag{6.1.4}$$

(即略去推迟效应的条件)时才可视为是似稳的.可见，若考察区域的线度远小于电磁波的波长(对 50 Hz 的频率，$\lambda=6\ 000$ km；对 10^5 Hz 的频率，$\lambda=3$ km)，则该区域中的电磁场可视为似稳场.

§6.2 似稳场方程

似稳近似相当于略去了场的波动性(即略去了位移电流),因而 Maxwell 方程成为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_{\mathrm{f}} \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}_{\mathrm{f}} \end{cases} \tag{6.2.1}$$

这称为似稳场方程.在线性均匀介质中

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$$

取 Coulomb 规范条件

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$$

则有

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi(\boldsymbol{r}, t) &= -\frac{1}{\varepsilon}\rho_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{r}, t) \\ \nabla^2 \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) &= -\mu \boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{r}, t) \end{aligned} \tag{6.2.2}$$

与恒定场不同的是:似稳势场 $\varphi(\boldsymbol{r}, t)$ 与 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ 均与 t 有关,且电场 $\boldsymbol{E}$ 由 $\varphi(\boldsymbol{r}, t)$ 与 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ 一起决定:

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

在导电介质内部,$\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}} = \sigma_{\mathrm{c}} \boldsymbol{E}$,则由(6.2.1)第四式取散度知

$$\rho_{\mathrm{f}} = \nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0 \tag{6.2.3}$$

因而在似稳情形下均匀导体内部不可能堆积自由电荷.于是似稳场方程(6.2.1)在均匀导体内部成为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = \sigma_{\mathrm{c}} \boldsymbol{E} \end{cases} \tag{6.2.4}$$

由此方程组消去 $\boldsymbol{H}$ 或 $\boldsymbol{E}$ 可分别得到

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \mu\sigma_{\mathrm{c}} \dot{\boldsymbol{E}} = 0, \qquad \nabla^2 \boldsymbol{H} - \mu\sigma_{\mathrm{c}} \dot{\boldsymbol{H}} = 0 \tag{6.2.5}$$

可见,似稳情形下均匀导体内部的场满足扩散方程,其扩散系数为 $1/(\mu\sigma_{\mathrm{c}})$,它在理想导体中为零.

在导电介质外部,电磁场可由势场

$$\varphi(\boldsymbol{r},t)=\int\frac{\rho'\mathrm{d}v'}{4\pi\epsilon R},\qquad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\int\frac{\mu\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}'\mathrm{d}v'}{4\pi R}\tag{6.2.6}$$

求出.由此可知,似稳场中的磁场与静磁场表达式

$$\boldsymbol{B}=\int\mathrm{d}v'\frac{\mu}{4\pi}\frac{\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}'\times\boldsymbol{R}}{R^3}$$

相同,但电场表达式中则增加了因磁场变化所引起的贡献 $-\partial\boldsymbol{A}/\partial t$.

§6.3 似稳电路(电工学)方程

在似稳情形下,考虑由自感为 L 的线圈 1、互感为 M 的线圈 2、电容为 C 的电容器和电阻 R 以及外电动势 $\mathscr{E}$ 构成的串联闭合电路 L.线圈 1 与 2 的电容与电阻可忽略,电容器上的电感与电阻亦可忽略,电阻 R 中也可不计其电感与电容,由这样的集中参量元件组成的电路叫做集中参量电路.为了考察各集中参量元件中的电场的特点,将电场 $\boldsymbol{E}$ 分解为横场 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}}$ 与纵场 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{l}}$ 之和,它们分别满足下述方程:

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}}=0,\qquad \nabla\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\&\nabla\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{l}}=\frac{1}{\epsilon}\rho_{\mathrm{f}},\qquad \nabla\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{l}}=0\end{aligned}\tag{6.3.1}$$

在回路的电感区即电感线圈中,因其内阻一般很小,由 $\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}=\sigma_{\mathrm{c}}\boldsymbol{E}$ 知其中的 $\boldsymbol{E}$ 很小,故 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}}$ 与 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{l}}$ 几乎相互抵消.在回路的电容区即电容器中,电场主要由电容两极板上的电荷产生,电路其余部分的贡献可略去不计,因而其中的电场主要是纵场,即 $\boldsymbol{E}\approx\boldsymbol{E}_{\mathrm{l}}$.

设回路电流为 I,由 Faraday 电磁感应定律有

$$\oint_L\mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{E}=-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}-M\frac{\mathrm{d}I'}{\mathrm{d}t}$$

式中 I' 是与互感线圈 2 耦合的另一线圈中的电流.而方程左端可表为

$$\oint_L\mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{E}=\int_{L_{C-}}\mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{E}+\int_{L_C}\mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{E}$$

式中 L_C 与 L_{C-} 分别表示经过电容区的路径与电容区外的导电路径.

利用 Ohm 定律

$$\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}=\sigma_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{K}),\qquad \boldsymbol{K}\text{ 为外来电动力}$$

得

$$\int_{L_{C-}}\mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{E}=\int_{L_{C-}}\frac{1}{\sigma_{\mathrm{c}}}\mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}-\int_{L_{C-}}\mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{K}$$

$$= \int_{L_{C-}} \mathrm{d}l \frac{I}{\sigma_c S} - \mathscr{E} = IR - \mathscr{E}$$

式中已将导线内的电流密度近似视为均匀分布的，这并不影响推导结果. 对于积分路径 L_C，注意到纵场 $\boldsymbol{E}_l$ 可表为电势的梯度的负值，便有

$$\int_{L_C} \mathrm{d}\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{E} = \Delta\varphi = \frac{Q}{C}$$

式中 $\Delta\varphi$ 是电容两极板的电势差，而 Q 是电容极板上所带的电荷量.

综合以上各式，可得

$$\mathscr{E} = M\frac{\mathrm{d}I'}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI + \frac{Q}{C}, \qquad I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \tag{6.3.2}$$

这就是低频交流电路中的似稳电路方程，或电工学方程.

§6.4 趋肤效应

若导体置于交变电磁场内，透入导体内的磁场会在导体内感生电场；这感生的电场所引起的附加电流称为 Foucault 电流. Foucault 电流与导体中原来的电流叠加后，总是使得导体边缘的电流密度增大，导体内部的电流密度减小；换言之，导体中的交变电流或电磁场主要集中在导体表面附近. 这种现象称为趋肤效应.

6.4.1 半无穷空间导体中的趋肤效应

设 $z>0$ 的半无穷空间充满导电介质，并处于交变电磁场

$$(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}) = \left(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\exp(-\mathrm{i}\omega t), \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\exp(-\mathrm{i}\omega t)\right)$$

中，且 $\boldsymbol{E}$ 的方向与平面 $z=0$ 平行. 求这导电介质中的电场与电流分布.

解：设 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ 的方向沿 x 轴. 由对称性，E_x 只是 z 的函数. 它满足的扩散方程成为

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} + \mathrm{i}\mu\sigma_c\omega\right)E_x(z) = 0, \qquad \text{当 } z>0$$

而边界条件是

$$E_x(0) = E_0, \qquad E_x(z)\big|_{z\to\infty} \to 0$$

其解具有形式

$$E_x(z) = E_0\exp(-pz)$$

代入扩散方程得

$$p^2 = -\mathrm{i}\omega\mu\sigma_c \qquad \text{或} \qquad p = \pm\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma_c}{2}}(1-\mathrm{i})$$

上式右端根号前取负号时与无穷远处的边界条件矛盾,故有

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_x E_0\exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)\exp\left[-\mathrm{i}\left(\omega t-\frac{z}{\delta}\right)\right] \tag{6.4.1}$$

式中

$$\delta=\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma_c}} \tag{6.4.2}$$

称为趋肤深度;物理的场是其实部

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_x E_0\exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)\cos\left(\omega t-\frac{z}{\delta}\right) \tag{6.4.3}$$

而导电介质中的电流分布则是

$$\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}=\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}^{\mathrm{s}}\exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)\exp\left[-\mathrm{i}\left(\omega t-\frac{z}{\delta}\right)\right],\qquad \boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}^{\mathrm{s}}=\boldsymbol{e}_x\sigma_c E_0 \tag{6.4.4}$$

物理的电流分布是其实部

$$\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}=\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}^{\mathrm{s}}\exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)\cos\left(\omega t-\frac{z}{\delta}\right) \tag{6.4.5}$$

6.4.2 圆柱形导体中的趋肤效应

设有一圆柱形导体,并处于柱对称的交变电磁场.

$$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{H})=\left(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\exp(-\mathrm{i}\omega t),\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\exp(-\mathrm{i}\omega t)\right)$$

中,且 $\boldsymbol{E}$ 的方向与导体轴平行.求导体内的电场与电流分布.

解:由问题的对称性知,导体中的电流与场也是柱对称的.取柱坐标系 (ρ,ϕ,z),则

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_z E(\rho)\exp(-\mathrm{i}\omega t)$$

所满足的扩散方程成为

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\right)+k^2\right]E(\rho)=0,\qquad \text{当 } \rho<R$$

这是一个零阶 Bessel 方程,式中

$$k=(1+\mathrm{i})/\delta,\qquad \delta=1/\alpha=\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma_c}}$$

而边界条件是

$$\int_S \mathrm{d}\sigma_c\cdot\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}=\text{总电流 } I,\qquad E(\rho)|_{\rho\to 0}=\text{有限}$$

其解为

$$E(\rho)=aJ_0(k\rho)$$

式中 $J_0(k\rho)$ 是零阶 Bessel 函数,a 是一个常数.导体内的电场分布与电流分布分别为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_z a\mathrm{J}_0(k\rho)\exp(-\mathrm{i}\omega t)$$

$$\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}=\boldsymbol{e}_z\sigma_{\mathrm{c}} a\mathrm{J}_0(k\rho)\exp(-\mathrm{i}\omega t)$$

由总电流条件可定出常数 a 为

$$a=\frac{kI}{2\pi\sigma_{\mathrm{c}} R\mathrm{J}_1(kR)} \tag{6.4.6}$$

式中 $\mathrm{J}_1(\rho)$是 1 阶 Bessel 函数. 于是

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}=\dfrac{\mathrm{J}_0(k\rho)}{\mathrm{J}_0(kR)}\boldsymbol{E}_{\mathrm{s}}\exp(-\mathrm{i}\omega t)\\ \boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}=\dfrac{\mathrm{J}_0(k\rho)}{\mathrm{J}_0(kR)}\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}^{\mathrm{s}}\exp(-\mathrm{i}\omega t)\end{cases} \tag{6.4.7}$$

式中

$$\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}^{\mathrm{s}}=\sigma_{\mathrm{c}}\boldsymbol{E}_{\mathrm{s}}=\boldsymbol{e}_z\frac{kI}{2\pi R\mathrm{J}_1(kR)}\mathrm{J}_0(kR)$$

令

$$\mathrm{J}_0(k\rho)=u+\mathrm{i}v,\ \mathrm{J}_0(kR)=u_{\mathrm{s}}+\mathrm{i}v_{\mathrm{s}}$$

则

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}=\sqrt{\dfrac{u^2+v^2}{u_{\mathrm{s}}^2+v_{\mathrm{s}}^2}}\boldsymbol{E}_{\mathrm{s}}\exp[-\mathrm{i}(\omega t-\phi)]\\ \boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}=\sqrt{\dfrac{u^2+v^2}{u_{\mathrm{s}}^2+v_{\mathrm{s}}^2}}\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}^{\mathrm{s}}\exp[-\mathrm{i}(\omega t-\phi)]\end{cases} \tag{6.4.8}$$

讨论:

(i) 若 $\delta\gg R$ 即 $k\rho\to 1$(导线很细且频率很低)时,有

$$\mathrm{J}_0(k\rho)\to 1,\qquad \mathrm{J}_1(kR)\to\frac{kR}{2}$$

故

$$\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}=\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}^{\mathrm{s}}\exp(-\mathrm{i}\omega t),\qquad \boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}^{\mathrm{s}}=\boldsymbol{e}_z\frac{I}{\pi R},\quad \text{当 } \delta\gg R \tag{6.4.9}$$

(ii) 若 $\delta\ll R$ 即 $k\rho\to\infty$(导线很粗且频率很高)时,利用 Bessel 函数的渐近式

$$\mathrm{J}_\nu(x\exp(\mathrm{i}\pi/2))\to\exp(\mathrm{i}\nu\pi/2)\frac{\exp(x)}{\sqrt{2\pi x}}$$

可得

$$\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}=\sqrt{\frac{R}{\rho}}\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}^{\mathrm{s}}\exp\left(-\frac{R-\rho}{\delta}\right)\exp\left[-\mathrm{i}\left(\omega t-\frac{R-\rho}{\delta}\right)\right]$$

$$\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}^{\mathrm{s}}=\boldsymbol{e}_z\frac{kI}{2\pi R}\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}\right),\qquad \text{当 } \delta\ll R \tag{6.4.10}$$

由(6.4.5)、(6.4.9)与(6.4.10)式可知:

(a) 当电磁波频率较高且导体尺寸较大时,导体表面的电流密度(与场)最大;随着从导体表面向导体内部逐渐深入,电流密度(与场)以指数形式衰减;从导体表面向内深度为一个趋肤深度 δ 处,电流密度(与场)的幅度减少到表面电流(与场)的 $1/e$,其相位则改变 1 rad.

(b) 当电磁场频率越高或导体电导率越大时,电流(与场)所集中的导体表面层越薄;对于理想导体,$\delta\to 0$,电流与场全部集中于导体表面.

(c) 对于金属导体,$\sigma_c\approx 10^7\,\Omega^{-1}\cdot m^{-1}$. 若 $\mu\approx\mu_0$,则 $\delta=(2\pi\omega)^{-1/2}$ m;故趋肤效应在低频时并不显著,这时导体内电流分布是均匀的. 但对于铁磁性金属,$\mu\approx 10^3\mu_0$,这时趋肤效应即使在低频时也不可忽略.

§6.5 导体的高频内阻抗

趋肤效应使得高频电流集中到导体的表面薄层,因而大大减少了导体实际用于传导电流的有效横截面积,从而使导体的阻抗增大. 以前述半无穷空间导体为例,考虑导体中垂直于电流密度方向 $\boldsymbol{e}_x$ 上宽为一个长度单位的半无穷截面 $\boldsymbol{e}_y\times[0,\infty)\boldsymbol{e}_z$,利用结果(6.4.4)可得流经该截面的总电流为

$$I_f=\int_0^\infty \mathrm{d}z\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{j}_f=\frac{\boldsymbol{j}_f^s\delta\exp(-\mathrm{i}\omega t)}{1-\mathrm{i}} \tag{6.5.1}$$

它常称为该导体的线电流密度. 导体沿线电流方向上每单位长度每单位宽度的内阻抗 Z_s 可定义为每单位长度的表面电势降落与上述线电流密度之比. 而导体表面上每单位长度的电势降落等于电场强度在导体表面上的切向分量,故

$$Z_s=\frac{j_s\exp(-\mathrm{i}\omega t)}{\sigma_c I_f}=\frac{1-\mathrm{i}}{\sigma_c\delta} \tag{6.5.2}$$

由于考虑的是导体表面上一个单位面积,Z_s 常称为导体的每单位面积的内阻抗. 由上式可见,导体每单位面积的内电阻与内阻抗具有相等的数值

$$R_s=\frac{1}{\sigma_c\delta}=\sqrt{\frac{\mu\omega}{2\sigma_c}} \tag{6.5.3}$$

因而如果 σ_c 不随频率而显著变化的话,导体每单位面积的内阻抗便具有正比于 $\sqrt{\omega}$ 的模和数值为 $-\pi/4$ 的相角. 这里,R_s 称为导体的表面电阻率,它与导体电导率 σ_c 的平方根成反比,且比例系数与金属本身的特性无关. 这一结论与常温下的实验结果一致,被视为常温下趋肤效应中的一个基本特性.

对(6.4.1)应用齐次 Maxwell 方程 $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\partial\boldsymbol{B}/\partial t$ 可求出导体中的磁场

$$\boldsymbol{H}=\frac{1+\mathrm{i}}{\delta\omega\mu}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E} \tag{6.5.4}$$

式中,导体面的法向 $\boldsymbol{n}$ 为 $\boldsymbol{e}_z$,也是导体中电磁波的传播方向.注意到电场(6.4.1)与导体表面平行(它沿 $\boldsymbol{e}_x$ 方向),而磁场 $\boldsymbol{H}$ 沿 $\boldsymbol{e}_x$ 方向,由上式可得

$$\boldsymbol{E}=(1-\mathrm{i})\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma_c}}\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{n}=Z_s\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{n} \tag{6.5.5}$$

注意,在真空中有

$$Z_0=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \tag{6.5.6}$$

这里,Z_0 常称为真空的内禀阻抗.于是,可以将导体的相对表面阻抗定义为

$$Z_s=Z_{s,r}Z_0 \tag{6.5.7}$$

只要导体表面的曲率半径比趋肤深度 δ 大很多,上述结果便可应用于具有任何形状的长导体.若考虑例 2 中的圆柱形导体,因其横截面的总宽度即为其周长 $2\pi R$,故每单位长度的内阻抗为

$$Z=Z_s 2\pi R=2\pi R\sqrt{\frac{\mu\omega}{2\sigma_c}}(1-\mathrm{i}) \tag{6.5.8}$$

由于频率较高的电流主要分布在导体的表面层,因而在高频导电中导体的一个重要特性是导体的表面电导率(或等效电导率)σ_s

$$\langle Q\rangle=\frac{1}{\sigma_s}\langle I^2\rangle \tag{6.5.9}$$

式中$\langle Q\rangle$与$\langle I^2\rangle$是导体中以某一横截面积为底的体积内的能量损耗与流过该截面的电流的平方的时间平均值.

例:计算半无穷空间导体中的能量损耗.

解:考虑以导体表面上一个面积单位为底的半无穷导体柱,柱体内能量损耗的时间平均为

$$\begin{aligned}\langle Q\rangle&=\left\langle\int \mathrm{d}z\boldsymbol{j}_f\cdot\boldsymbol{E}\right\rangle\\&=\sigma_c E_0^2\int_0^\infty \mathrm{d}z\exp(-2\alpha z)\langle\cos^2(\omega t-\alpha z)\rangle\\&=\frac{\sigma_c}{4\alpha}E_0^2\end{aligned}$$

注意到横穿该半无穷导体柱的电流平方的时间平均值为

$$\langle I^2\rangle=\left\langle\left|\int_0^\infty \mathrm{d}z j_f\right|^2\right\rangle=\frac{\sigma_c^2}{4\alpha^2}E_0^2$$

便有

$$\langle Q\rangle=\langle I^2\rangle R_s \tag{6.5.10}$$

这正是所预期的.

习题 6-5

1. 试由导体内场的扩散方程及 Ohm 定律证明:处于交变场中的导体内的电流密度 j 满足方

程

$$\nabla^2 \boldsymbol{j} - \mu\sigma \boldsymbol{j} = 0 \tag{6.5.11}$$

2. 一半径为 a、电导率为 σ_c、磁导率为 μ 的无限长金属圆柱体置于一半径为 b 的无限长螺旋管中，柱轴与管轴重合. 当螺旋管(其每单位长度上的匝数为 n)通以电流 $I = I_0 \exp(-\mathrm{i}\omega t)$ 时，求

(1) 空间中的电磁场分布；

(2) 导体中的电流分布；

(3) 导体单位长度上每单位时间放出的热量 Q.

提示：圆柱体外、螺旋管内的磁场是均匀的；圆柱体内的磁场满足零阶 Bessel 方程

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} + k^2\right) H_z(\rho) = 0$$

答案：在以管轴为 z 轴的柱坐标系中，

(1)磁场为 $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{e}_z H(\rho)\exp(-\mathrm{i}\omega t)$，其中

$$H(\rho < b) = H_0 \frac{\mathrm{J}_0(k\rho)}{\mathrm{J}_0(ka)}, \quad H(a \leqslant \rho \leqslant b) = H_0, \quad H(\rho > b) = 0$$

电场为 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_\phi E(\rho)\exp(-\omega t)$，其中

$$E(\rho < b) = \frac{k}{\sigma_c} H_0 \frac{\mathrm{J}_1(k\rho)}{\mathrm{J}_0(ka)}$$

$$E(a \leqslant \rho \leqslant b) = \frac{k}{\sigma_c} H_0 \frac{\mathrm{J}_1(ka)}{\mathrm{J}_0(ka)} \frac{a}{\rho} + \mathrm{i}\omega\mu_0 \frac{H_0}{2\rho}(\rho^2 - a^2)$$

$$E(\rho > b) = \frac{k}{\sigma_c} H_0 \frac{\mathrm{J}_1(ka)}{\mathrm{J}_0(ka)} \frac{a}{\rho} + \mathrm{i}\omega\mu_0 \frac{H_0}{2\rho}(b^2 - a^2)$$

(2) $\boldsymbol{j}_f = \sigma_c \boldsymbol{E}$，　　当 $a \leqslant \rho \leqslant b$

(3) $Q = \dfrac{\pi a^2 n^2 I_0^2}{\sigma_c} \mathrm{Re}\left(\dfrac{k\mathrm{J}_1(ka)}{\mathrm{J}_0(ka)}\right)$

式中，$k^2 = \mathrm{i}\mu\sigma_c\omega$，$H_0 = nI_0$.

3. 一半径为 a、电导率为 σ_c、磁导率为 μ 的无限长金属圆柱体置于一恒定的均匀外磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 中，外磁场的方向与金属圆柱体的轴 $\boldsymbol{e}_z$ 平行. 试求除去外磁场后金属圆柱体内的电磁场随时间变化的规律.

答案：$\boldsymbol{B}(\rho, t) = \boldsymbol{e}_z \sum_m a_m k_m \mathrm{J}_m(k_m\rho)\exp[-k_m^2 t/(\mu\sigma_c)]$

式中，$a_m = \mu B_0 / [k_m \mu_0 \mathrm{J}_2(k_m a)]$，$x_m = k_m a$ 是 $\mathrm{J}_0(x) = 0$ 的第 m 个零点(自小到大排列).

4. 一半径为 a、电导率为 σ_c、磁导率为 μ 的金属球置于一均匀的变化频率较低(即 $\omega \ll c/a$)的磁场 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 \exp(-\mathrm{i}\omega t)$ 中. 求金属球内的 Foucault 电流分布与球的吸收功率(精确到一级近似).

答案：在以 $\boldsymbol{B}_0$ 为极轴 $\boldsymbol{e}_z$ 的球坐标系中

$$\boldsymbol{j} = -\frac{\mathrm{i}\omega}{2} \frac{3\mu\sigma_c}{\mu + 2\mu_0} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{B}$$

球的吸收功率为

$$N=\frac{3\pi\omega^2\mu^2a^5\sigma_cB_0^2}{5(\mu+2\mu_0)^2}$$

5. 一半径为 a 的各向同性的导体球置于一均匀的周期性变化的外磁场中.求该导体球的磁化率.

提示：在交变磁场中,导体的磁矩是由导体内的传导电流产生的.

答案：导体球的磁化率 κ 为 $\frac{3}{10}\frac{3\mu_0}{\mu+2\mu_0}\left(\frac{a}{\delta}\right)^2\exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right)$.

6. 在超导体中,电阻为零,电荷为 $-e$、质量为 m 的传导电子的运动方程为 $m\ddot{\boldsymbol{r}}=-e\boldsymbol{E}$.设单位体积中电子的数目为 N.

(1) 证明(London 第一方程)

$$\dot{\boldsymbol{j}}_s=\frac{Ne^2}{m}\boldsymbol{E}$$

(2) 若超导体可视为一各向同性的线性均匀介质,且其内部不存在稳恒场,证明(London 第二方程)

$$\nabla\times\boldsymbol{j}_s=-\frac{Ne^2}{m}\boldsymbol{B}$$

(3) 若有一半无穷超导体,试证外场仅能透入数量级为:

$$\lambda_L=\sqrt{m/(Ne^2\mu)}$$

的深处,这里,λ_L 为 London 穿透深度,而 μ 是其磁导率.

提示:在似稳近似下导出方程 $\lambda_L^2\nabla^2\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}$,再进行求解.

第七章　电磁波的传播

本章首先建立定态电磁波的基本方程与边值关系，然后考察其在绝缘介质与导电介质中以及相应边界上的传播特性.

§7.1 定态电磁波

按照 Fourier 分析,可将时域中的任一时变函数(例如电磁波)分解为频域中随频率而变的函数的叠加

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}f(\omega)\exp(-\mathrm{i}\omega t) \tag{7.1.1}$$

对于具有某一频率的定态电磁波(即单色电磁波)

$$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}))\exp(-\mathrm{i}\omega t) \tag{7.1.2}$$

时域中的 Maxwell 方程组成为频域中的定态 Maxwell 方程组

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_{\mathrm{f}}\\ \nabla\times\boldsymbol{E}=\mathrm{i}\omega\boldsymbol{B}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\\ \nabla\times\boldsymbol{H}=-\mathrm{i}\omega\boldsymbol{D}+\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}\end{cases} \tag{7.1.3}$$

值得注意的是,当频率 $\omega\neq0$ 时,上述四个方程并不是相互独立的.事实上,从方程$\nabla\times\boldsymbol{E}=\mathrm{i}\omega\boldsymbol{B}$ 可推出方程$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$;将方程$\nabla\times\boldsymbol{H}=-\mathrm{i}\omega\boldsymbol{D}+\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}$两边取散度并运用电荷守恒定律得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\nabla\cdot\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}=\frac{-1}{\mathrm{i}\omega}\frac{\partial\rho_{\mathrm{f}}}{\partial t}=\rho_{\mathrm{f}}$$

这里应用了源和场具有同样的频率的条件.于是,Maxwell 方程组简化为

$$\begin{cases}\nabla\times\boldsymbol{E}=\mathrm{i}\omega\boldsymbol{B}\\ \nabla\times\boldsymbol{H}=-\mathrm{i}\omega\boldsymbol{D}+\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}\end{cases} \tag{7.1.4}$$

与此相应,电磁场的边值关系[它们可由式(7.1.4)的积分形式按通常方法得到]也只有两个独立的方程:

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}_{12}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=0\\ \boldsymbol{n}_{12}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{f}}\end{cases} \tag{7.1.5}$$

式中 $\boldsymbol{n}_{12}$是由介质 1 指向介质 2 的边界面的法向,而 $\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{f}}$是边界面上的面电流密度.另外两个边值关系

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}_{12}\cdot(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)=\omega_{\mathrm{f}}\\ \boldsymbol{n}_{12}\cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)=0\end{cases} \tag{7.1.6}$$

可从边值关系(7.1.5)推出,这里 ω_{f}是边界面上的面电荷密度.事实上,对方程(7.1.5)两边求散度得

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}_{12}\cdot[\nabla\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)]=0\\ \boldsymbol{n}_{12}\cdot[\nabla\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)]=\nabla\cdot\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{f}}=0\end{cases} \tag{7.1.7}$$

利用定态 Maxwell 方程组(7.1.4)得

$$\begin{cases} \boldsymbol{n}_{12}\cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)=0 \\ \boldsymbol{n}_{12}\cdot(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)=\dfrac{1}{\mathrm{i}\omega}[\boldsymbol{n}_{12}\cdot(\boldsymbol{j}_{f2}-\boldsymbol{j}_{f1})+\nabla\cdot\boldsymbol{\Pi}_f]=\omega_f \end{cases} \tag{7.1.8}$$

此即边值关系(7.1.6).这里,利用了电荷守恒定律在边界上的表现形式

$$\frac{\partial\omega_f}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{\Pi}_f+\boldsymbol{n}_{12}\cdot(\boldsymbol{j}_{f2}-\boldsymbol{j}_{1f})=0$$

对于以一定频率 ω 变化的电荷与电流,上式成为

$$-\mathrm{i}\omega\omega_f+\nabla\cdot\boldsymbol{\Pi}_f+\boldsymbol{n}_{12}\cdot(\boldsymbol{j}_{f2}-\boldsymbol{j}_{1f})=0 \tag{7.1.9}$$

对于单色波,非色散介质的本构关系仍然成立.对色散介质,迅变场的本构关系可写为(这里仅对磁导率写出,因为与介电常量有关的类似关系已在§3.5.5中考察过)

$$\boldsymbol{B}(\omega)=\mu_0\mu_r(\omega)\cdot\boldsymbol{H}(\omega) \tag{7.1.10}$$

式中

$$\mu_r(\omega)=\int_0^\infty \mathrm{d}t\mu_r(t)\exp(\mathrm{i}\omega t) \tag{7.1.11}$$

也与频率有关.由于张量 $\mu_r(t)$是实的,故

$$\mu_r^*(\omega)=\mu_r(-\omega) \tag{7.1.12}$$

或按其实部与虚部分别写为

$$\begin{cases} \mathrm{Re}[\mu_r(\omega)]=\mathrm{Re}[\mu_r(-\omega)] \\ \mathrm{Im}[\mu_r(\omega)]=-\mathrm{Im}[\mu_r(-\omega)] \end{cases} \tag{7.1.13}$$

这便是关于磁导率的交叉对称关系.

对于导电介质,利用 Ohm 定律,定态 Maxwell 方程组(7.1.4)可写为

$$\begin{cases} \nabla\times\boldsymbol{E}=\mathrm{i}\omega\boldsymbol{B} \\ \nabla\times\boldsymbol{H}=-\mathrm{i}\omega\boldsymbol{D}+\boldsymbol{\sigma}_c\cdot\boldsymbol{E}=-\mathrm{i}\omega\boldsymbol{\varepsilon}_\omega\cdot\boldsymbol{E} \end{cases} \tag{7.1.14}$$

式中引入了复介电张量

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\omega=\boldsymbol{\varepsilon}+\mathrm{i}\frac{\boldsymbol{\sigma}_c}{\omega} \tag{7.1.15}$$

利用定态 Maxwell 方程组(7.1.4)可得

$$\frac{1}{2}[\boldsymbol{E}\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}^*-\boldsymbol{H}^*\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}]=\frac{\mathrm{i}\omega}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}^*-\boldsymbol{H}^*\cdot\boldsymbol{B})+\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}_f^*$$

上式左边即

$$-\frac{1}{2}\nabla\times(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)$$

引入复 Poynting 矢量(以大写黑体字母 $\boldsymbol{S}$ 表示,而通常的 Poynting 矢量用小写黑体字母 $\boldsymbol{s}$ 表示)

$$\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^{*} \tag{7.1.16}$$

则

$$-\nabla\cdot\boldsymbol{S}=\frac{\mathrm{i}\omega}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}^{*}-\boldsymbol{H}^{*}\cdot\boldsymbol{B})+\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}^{*} \tag{7.1.17}$$

这称为频域中的复 Poynting 定理. 若区域中没有传导电荷与传导电流，复 Poynting 定理成为

$$-\nabla\cdot\boldsymbol{S}=\frac{\mathrm{i}\omega}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}^{*}-\boldsymbol{H}^{*}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{7.1.18}$$

取其实部得

$$-\nabla\cdot\langle\boldsymbol{s}\rangle=\mathrm{Re}\left[\frac{\mathrm{i}\omega}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}^{*}-\boldsymbol{H}^{*}\cdot\boldsymbol{B})\right] \tag{7.1.19}$$

式中$\langle\boldsymbol{s}\rangle$是通常的 Poynting 矢量(即电磁波的能流密度)$\boldsymbol{s}$ 的时间平均值

$$\langle\boldsymbol{s}\rangle=\frac{1}{T}\int_{0}^{T}\mathrm{d}t\boldsymbol{s} \tag{7.1.20}$$

它可利用公式

$$\langle\boldsymbol{s}\rangle\equiv\langle\mathrm{Re}(\boldsymbol{E})\times\mathrm{Re}(\boldsymbol{H})\rangle=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^{*})=\mathrm{Re}(\boldsymbol{S}) \tag{7.1.21}$$

得到. 值得指出的是，电磁波的能流密度是场强的二次式，不是线性运算，其中的场强应在取实部后代入. (7.1.19)式左边是输入至某点的总的时平均功率，而式右边为该点邻域内单位体积中实际消耗(即热损耗)的时平均功率. 由于热损耗总是正的，故对于有耗介质有

$$-\nabla\cdot\langle\boldsymbol{s}\rangle=-\mathrm{Re}(\nabla\cdot\boldsymbol{S})>0 \tag{7.1.22}$$

而对于无耗介质则有

$$-\nabla\cdot\langle\boldsymbol{s}\rangle=-\mathrm{Re}(\nabla\cdot\boldsymbol{S})=0 \tag{7.1.23}$$

或

$$\mathrm{Re}\left[\frac{\mathrm{i}\omega}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}^{*}-\boldsymbol{H}^{*}\cdot\boldsymbol{B})\right]=0 \tag{7.1.24}$$

介质有耗与无耗的判别条件

各向同性的非色散线性介质当其介电常量与磁导率的虚部都大于零时为有耗介质，而当它们的虚部都等于零时为无耗介质.

证明：对于各向同性的非色散线性介质，其本构关系是

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_{0}\varepsilon_{\mathrm{r}}\boldsymbol{E},\qquad\boldsymbol{B}=\mu_{0}\mu_{\mathrm{r}}\boldsymbol{H}$$

式中 ε_{r}与 μ_{r}一般是复数. 易知

$$\mathrm{Re}\left[\frac{\mathrm{i}\omega}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}^{*}-\boldsymbol{H}^{*}\cdot\boldsymbol{B})\right]=\frac{\omega}{2}[\varepsilon_{0}\mathrm{Im}(\varepsilon_{\mathrm{r}})E^{2}+\mu_{0}\mathrm{Im}(\mu_{\mathrm{r}})H^{2}]$$

它当

$$\mathrm{Im}(\varepsilon_r)>0, \qquad \mathrm{Im}(\mu_r)>0$$

时大于零,而当

$$\mathrm{Im}(\varepsilon_r)=0, \qquad \mathrm{Im}(\mu_r)=0$$

时等于零,因而题中结论成立.

无耗介质的介电常量与磁导率

设一介质由本构关系

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\cdot\boldsymbol{E}+\eta\cdot\boldsymbol{H}$$

$$\boldsymbol{B}=\zeta\cdot\boldsymbol{E}+\mu_0\mu_r\cdot\boldsymbol{H}$$

表征,式中 ε_r、η、ζ 与 μ_r 都是复常数张量.试证无耗条件要求

$$\varepsilon_r^{\dagger}=\varepsilon_r, \qquad \mu_r^{\dagger}=\mu_r, \qquad \zeta^{\dagger}=\eta \tag{7.1.25}$$

即张量 ε_r 与 μ_r 是厄密张量.

证明:利用本构关系得

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\left[\frac{\mathrm{i}\omega}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}^*-\boldsymbol{H}^*\cdot\boldsymbol{B})\right]\\&=\frac{\mathrm{i}\omega}{4}[\varepsilon_0\boldsymbol{E}^*\cdot(\varepsilon_r^{\dagger}-\varepsilon_r)\cdot\boldsymbol{E}+\mu_0\boldsymbol{H}^*\cdot(\mu_r^{\dagger}-\mu_r)\cdot\boldsymbol{H}+\\&\quad\boldsymbol{H}^*\cdot(\eta^{\dagger}-\zeta)\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}^*\cdot(\zeta^{\dagger}-\eta)\cdot\boldsymbol{H}/2\end{aligned} \tag{7.1.26}$$

由于 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 是任意的两个复矢量,故无耗条件要求(7.1.25)成立.

对定态 Maxwell 方程组(7.1.14)的第一式取旋度并利用第二式得

$$\begin{cases}(\nabla^2+k^2)\boldsymbol{E}=0, & k^2=\omega^2\mu\varepsilon_\omega\\ \nabla\cdot\boldsymbol{E}=0\\ \boldsymbol{H}=\dfrac{-\mathrm{i}}{\omega\mu}\nabla\times\boldsymbol{E}\end{cases} \tag{7.1.27}$$

方程(7.1.27)称为 Helmholtz 方程.类似地也有

$$\begin{cases}(\nabla^2+k^2)\boldsymbol{H}=0, & k^2=\omega^2\mu\varepsilon_\omega\\ \nabla\cdot\boldsymbol{H}=0\\ \boldsymbol{E}=\dfrac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon_\omega}\nabla\times\boldsymbol{H}\end{cases} \tag{7.1.28}$$

方程(7.1.27)或(7.1.28)与定态 Maxwell 方程组等价,是实际用来求解定态电磁波的基本方程.

习题 7-1

1. 证明:对于定态电磁波,方程(7.1.27)或(7.1.28)与 Maxwell 方程组等价.
2. 利用电荷守恒定律在边界上的形式证明:对于定态电磁波,电磁场的四个边值关系中仅有两个是独立的.

3. 证明:任意一对随时间简谐变化的复矢量 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 的乘积对时间的平均值由下式决定

$$\langle \mathrm{Re}\,\boldsymbol{F}\times \mathrm{Re}\,\boldsymbol{G}\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{F}^*\times\boldsymbol{G}) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G}^*)$$

式中 Re $\boldsymbol{F}$ 表示取 $\boldsymbol{F}$ 的实部,而这里的叉积"×"可以全部换成标积.

§7.2 绝缘介质中的平面电磁波

设全空间充满均匀线性且各向同性的绝缘介质,且不存在传导电荷与传导电流,则电磁场满足无源的 Maxwell 方程组,相应的定态电磁场 $u(\boldsymbol{x})\in\{E_i(\boldsymbol{x}),B_i(\boldsymbol{x})\}$ 满足 Helmholtz 方程

$$(\nabla^2 + k^2)u(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{7.2.1}$$

及物理条件

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \tag{7.2.2}$$

式中

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \tag{7.2.3}$$

是实数.

它具有下述单色平面波解

$$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{E}_0,\boldsymbol{B}_0)\exp\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t + \phi_{(E,B)}) \tag{7.2.4}$$

式中波矢 $\boldsymbol{k}$ 的大小 k 满足(7.2.3)式.

电场的振动相位为 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t + \phi_E$.在同一时刻相位为常数的面称为等相位面 Σ,其方程为

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} = 常量$$

由此知等相位面 Σ 是平面,因而为平面波;且对位于等相位面 Σ 上的位置矢量 $\Delta\boldsymbol{x}$ 有

$$\boldsymbol{k}\cdot\Delta\boldsymbol{x} = 0$$

可见波矢 $\boldsymbol{k}$ 沿等相位面 Σ 的法向,故 $\boldsymbol{k}/k$ 即为电磁波的传播方向矢量 $\boldsymbol{n}$.

在任一时刻,沿着电磁波的传播方向相位相差为 2π 的两个等相位面之间的距离即为电磁波的波长 λ.容易看出

$$\boldsymbol{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\boldsymbol{n} \tag{7.2.5}$$

电磁波等相位面沿其法向移动的速度称为相速度 $\boldsymbol{v}_\mathrm{p}$,它可由等相位面沿波的传播方向的距离与时间的关系

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t = 常量$$

求出

$$\boldsymbol{v}_\mathrm{p} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega}{k}\boldsymbol{n} = v_\mathrm{p}\boldsymbol{n} \tag{7.2.6}$$

由物理条件$\nabla \cdot \boldsymbol{E}=0$与$\nabla \cdot \boldsymbol{B}=0$知

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}=0,\qquad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{7.2.7}$$

可见,电磁场的振动方向与其传播方向垂直,因而此电磁波是横波.

由方程$\nabla \times \boldsymbol{E}=\mathrm{i}\omega\boldsymbol{B}$知

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_0=v\boldsymbol{B}_0,\qquad \phi_E=\phi_B \tag{7.2.8}$$

可见,电场强度$\boldsymbol{E}$、磁感强度$\boldsymbol{B}$和波的传播方向$\boldsymbol{n}$三者两两相互垂直,其方向可按右手螺旋法则确定,且电场与磁场的振动相位相同.

利用公式(7.1.21)可得平面电磁波的平均能流密度与能量密度平均值分别为

$$\langle \boldsymbol{s}\rangle=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_0^2\boldsymbol{n} \tag{7.2.9}$$

与

$$\langle u\rangle=\frac{\varepsilon}{2}E_0^2 \tag{7.2.10}$$

于是

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}=\frac{\langle \boldsymbol{s}\rangle}{\langle u\rangle}=v\boldsymbol{n}=\boldsymbol{v}_{\mathrm{p}} \tag{7.2.11}$$

可见,在线性均匀的绝缘介质中,平面电磁波的能量传输速度$\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}$等于其相速度.

习题 7-2

1. 考虑沿同一方向传播的一个波包

$$u(z,t)=\int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k}\mathrm{d}kC(k)\exp[-\mathrm{i}(\omega t-kz)]$$

式中$k_0=\omega_0/c$,Δk很小,且$C(k)$是k的缓变函数.试证:

(1) 在k_0附近可近似将波包写成

$$u(z,t)=C(z,t)\exp[-\mathrm{i}(\omega_0 t-k_0 z)]$$

式中波包的包络$C(z,t)$为

$$C(z,t)=2C(k_0)\frac{\sin\phi}{\phi}\Delta k$$

其中

$$\phi=\left[\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right)_0 t-z\right]\Delta k$$

(2) 整个波包在空间移动的速度即所谓群速度为

$$v_{\mathrm{g}}=(\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k)_0$$

(3) 这一群速度等于波包能量的传输速度.

2. 证明群速度$v_{\mathrm{g}}=(\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k)$满足

$$v_{\mathrm{g}}=v_{\mathrm{p}}\left(1-\frac{\lambda}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right)^{-1}$$

式中 n 是介质的折射率.设空气的折射率为

$$n=1.000\ 27+1.5\times10^{-18}/\lambda^2,\qquad \lambda \text{ 的单位为 m}$$

试问,平均波长为 550 nm 的 1 ns 的光脉冲在空气中传播 10 km 所需要的时间比它在真空中传播同样距离所需时间长多少?

答案:长约 9.5 ns.

§7.3 导电介质中的平面电磁波

设全空间充满线性均匀各向同性的导电介质,现考察电磁波在其中的传播规律.首先,容易看出,**均匀导体内部是一个电中性区**.事实上,由导体内传导电流满足的 Ohm 定律知

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}=\nabla\cdot(\sigma_{\mathrm{c}}\boldsymbol{E})=\frac{\sigma_{\mathrm{c}}}{\varepsilon}\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\frac{\sigma_{\mathrm{c}}}{\varepsilon}\rho_{\mathrm{f}}$$

式中应用了本构关系 $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$ 与 $\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_{\mathrm{f}}$.于是,传导电流连续性方程成为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\sigma_{\mathrm{c}}}{\varepsilon}\right)\rho_{\mathrm{f}}=0$$

其解为

$$\rho_{\mathrm{f}}=\rho_{\mathrm{f}}^{0}\exp\left(-\frac{\sigma_{\mathrm{c}}}{\varepsilon}t\right)\tag{7.3.1}$$

在一般情形下,$\rho_{\mathrm{f}}^{0}=0$,故在导体内部有

$$\rho=\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\rho_{\mathrm{f}}=0\tag{7.3.2}$$

进而,即使在 $\rho_{\mathrm{f}}^{0}\neq0$ 的情形下,导体内的传导电荷密度 $\rho_{\mathrm{f}}(t)$ 也随时间指数地趋于零.因而,在均匀导体内部不可能出现稳定的电荷堆积.

利用(7.3.2)可知,在导体内部的电磁场满足 Maxwell－Ohm 联立方程组方程组

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{D}=0\\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\\ \nabla\times\boldsymbol{H}=\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\sigma_{\mathrm{c}}\boldsymbol{E}\end{cases}\tag{7.3.3}$$

由此得到波动方程为

$$\left(\nabla^2-\mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})=\sigma_{\mathrm{c}}\mu\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})\tag{7.3.4}$$

式中出现了对 t 的一次导数,这表明过程不再具有时间反演不变性.其原因是导体中不可避免地出现了电能向热能转化的伴随过程(此处它的规律由普通的

Ohm 定律描述),而这一过程是不可逆的.

对于定态电磁波,相应的电磁场满足 Helmholtz 方程

$$(\nabla^2 + k^2)u(\boldsymbol{x}) = 0, \qquad u \in \{E_i, B_j\}$$

式中 k^2 是复的.它具有下述单色平面波解

$$(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{E}_0, \boldsymbol{B}_0)\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t)]$$

这里,波矢与频率满足

$$k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_\omega \tag{7.3.5}$$

式中

$$\varepsilon_\omega = \varepsilon + \mathrm{i}\frac{\sigma_c}{\omega}$$

令 $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{\beta} + \mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}$,其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 是实矢量;则单色波可写为

$$(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{E}_0, \boldsymbol{B}_0)\exp(-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{x})\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t)] \tag{7.3.6}$$

这单色波随着其在导电介质中传播的距离 r 而呈指数衰减.

现考察 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的物理意义.等相位面方程为

$$\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{x} = 常量 \tag{7.3.7}$$

它是垂直于 $\boldsymbol{\beta}$ 的平面;换言之,波矢的实部 $\boldsymbol{\beta}$ 沿等相位面的法向,其指向即为电磁波相位变化最快的方向.

场的幅度与 $\exp(-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{x})$ 成正比,等幅面方程为

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{x} = 常量 \tag{7.3.8}$$

它是垂直于 $\boldsymbol{\alpha}$ 的平面;换言之,波矢的虚部 $\boldsymbol{\alpha}$ 沿等幅面的法向,其指向即为电磁波幅度衰减最快的方向.

一般而言,$\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 不一定同向.因而,电磁波等相位平面上各处场强的幅度一般不相等;若等相位平面上各处场强的幅度相等(即 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 同向),称为均匀平面波,不相等(即 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 不同向)时称为非均匀平面波.

现将电磁波的波矢与频率条件用 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 表示出来.为此将 $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{\beta} + \mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}$ 代入(7.3.5)式,比较等式两边的实部与虚部得

$$\begin{cases} \beta^2 - \alpha^2 = \omega^2 \mu\varepsilon \\ \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta} = \dfrac{\omega}{2}\mu\sigma_c \end{cases} \tag{7.3.9}$$

注意上式中第二式说明仅当 $\sigma_c = 0$ 时 $\cos\theta = 0$,这里 θ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 之间的夹角.由(7.3.9)式可解得

$$\begin{cases} \alpha = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left\{\dfrac{1}{2}\left[\sqrt{1 + \dfrac{\sigma_c^2}{\omega^2\varepsilon^2\cos^2\theta}} - 1\right]\right\}^{1/2} \\ \beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left\{\dfrac{1}{2}\left[\sqrt{1 + \dfrac{\sigma_c^2}{\omega^2\varepsilon^2\cos^2\theta}} + 1\right]\right\}^{1/2} \end{cases} \tag{7.3.10}$$

进而，由 Maxwell－Ohm 联立方程的第一、三两式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}=0, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{B}=0 \tag{7.3.11}$$

得

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{E}_0=0, \quad \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{E}_0=0 \tag{7.3.12}$$

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{B}_0=0, \quad \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{B}_0=0 \tag{7.3.13}$$

为使满足波动方程的单色波满足上述条件，若 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 同向（这是特殊情形），只需取电场 $\boldsymbol{E}$ 的方向与磁场 $\boldsymbol{B}$ 的方向都与波矢 $\boldsymbol{k}$ 垂直（因而称为横电磁型的均匀平面波即 TEM 波）. 这时，电场是线偏振的或圆偏振的（由于磁场与电场相互保持垂直，它必须同时是线偏振的或圆偏振的），且电磁波的传播方向 $\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{E}_0$ 与 $\boldsymbol{B}_0$ 三者成右手螺旋关系. 若 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 不同向（这是一般情形），则我们面临两种可能的选择：

(a) 选取 $\boldsymbol{E}_0$ 同时与 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 两者都垂直（因而称为横电型均匀或非均匀平面波即 TE 波）

$$\boldsymbol{E}_0=\frac{E_0}{\alpha\beta\sin\theta}\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}\exp(\mathrm{i}\phi_E) \tag{7.3.14}$$

这时，电场 $\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{x})$ 的方向与过 $\boldsymbol{x}$ 点的等相位面和等幅面的交线平行，因而是线偏振波. 再由将电场与磁场联系在一起的齐次 Maxwell 方程可得到 $\boldsymbol{B}_0$，此即

$$\boldsymbol{B}_0=\frac{1}{\omega}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0=\frac{1}{\omega}(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{E}_0+\mathrm{i}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{E}_0) \tag{7.3.15}$$

它自动满足条件(7.3.13)，且与 $\boldsymbol{E}_0$ 垂直. 这时，磁场位于由 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 张成的平面上，且不可能是线偏振的，而是椭圆偏振的. 注意，磁场不可能是圆偏振的. 因为可以证明，若磁场是圆偏振的，则电场也是圆偏振的，反之亦然.

(b) 选取 $\boldsymbol{B}_0$ 同时与 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 两者都垂直（因而称为横磁型均匀或非均匀平面波即 TM 波）

$$\boldsymbol{B}_0=\frac{B_0}{\alpha\beta\sin\theta}\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}\exp(i\phi_B) \tag{7.3.16}$$

这时，磁场 $\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{x})$ 的方向与过 $\boldsymbol{x}$ 点的等相位面和等幅面的交线平行，因而是线偏振波. 再由将电场与磁场联系在一起的齐次 Maxwell 方程得到 $\boldsymbol{E}_0$，此即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_0&=-\frac{\omega}{k^2}(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B}_0)\\&=-\frac{1}{\mu(\omega^2\varepsilon^2+\sigma_c^2)}[(\omega\varepsilon\boldsymbol{\beta}+\sigma_c\boldsymbol{\alpha})\times\boldsymbol{B}_0+\mathrm{i}(\omega\varepsilon\boldsymbol{\alpha}-\sigma_c\boldsymbol{\beta})\times\boldsymbol{B}_0]\end{aligned} \tag{7.3.17}$$

它自动满足条件(7.3.13)，且与 $\boldsymbol{B}_0$ 垂直. 这时，电场位于由 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 张成的平面上，且不可能是线偏振的，而是椭圆偏振的. 同样，这时电场也不可能是圆偏

振的.

显然,由(a)与(b)所确定的电磁场是 Maxwell－Ohn 联立方程组(7.3.3)的两个线性无关的均匀或非均匀平面波解.由方程组(7.3.13)知,$\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 各自仅有两个相互独立的自由度;因而,空间任一点的电场 $\boldsymbol{E}$ 与磁场 $\boldsymbol{B}$ 是由(a)与(b)所确定的 TE 波与 TM 波的线性组合.

讨论:

(1) 电磁波的波长 λ 由下式决定:

$$\beta=\frac{2\pi}{\lambda} \tag{7.3.18}$$

(2) 电磁波的相速度 v_p 可由关系式

$$\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t=\text{常量}$$

求出

$$v_p=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\right|=\frac{\omega}{\beta} \tag{7.3.19}$$

此即

$$v_p=\sqrt{\mu\varepsilon}\left\{\frac{1}{2}\left[\sqrt{1+\frac{\sigma_c^2}{\omega^2\varepsilon^2\cos^2\theta}}+1\right]\right\}^{-1/2} \tag{7.3.20}$$

可见频率不同的电磁波的相速度的大小一般不同,这便是介质的色散效应.对良导体,$\sigma_c/(\omega\varepsilon)\gg1$,因而

$$v_p\approx\sqrt{\frac{2\omega\cos\theta}{\sigma_c\mu}}=\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon\cos\theta}{\sigma_c}}\sqrt{\frac{1}{\mu\varepsilon}}\ll c \tag{7.3.21}$$

电磁波的相速度与频率的平方根成正比,且很小;对不良导体,$\sigma_c/(\omega\varepsilon)\ll1$,因而

$$v_p\approx\sqrt{\frac{1}{\varepsilon\mu}}\approx c \tag{7.3.22}$$

电磁波的相速度与频率无关,没有色散效应,其大小接近于真空中的光速.

(3) 导体中 TE 波的能流密度为

$$\boldsymbol{s}_{TE}=\frac{1}{\omega\mu}|\boldsymbol{E}_0|^2\exp(-2\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{x})\{\boldsymbol{\beta}\cos^2(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t+\phi_E)-\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}\sin[2(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t+\phi_E)]\} \tag{7.3.23}$$

其能量密度为

$$u_{TE}=\varepsilon|\boldsymbol{E}_0|^2\exp(-2\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{x})\{\cos^2(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t+\phi_E)-\frac{\sigma_c}{2\omega\varepsilon}\sin[2(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t+\phi_E)]\} \tag{7.3.24}$$

这 TE 波的一周期内的平均能流密度为

$$\langle \boldsymbol{s} \rangle_{\mathrm{TE}} = \frac{1}{2\omega\mu} |\boldsymbol{E}_0|^2 \exp(-2\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{\beta} \tag{7.3.25}$$

其能量密度平均值则为

$$\langle u \rangle_{\mathrm{TE}} = \frac{\varepsilon}{2} |\boldsymbol{E}_0|^2 \exp(-2\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{x}) \tag{7.3.26}$$

于是

$$\langle \boldsymbol{s} \rangle_{\mathrm{TE}} = \langle u \rangle_{\mathrm{TE}} \frac{\boldsymbol{\beta}}{\omega\mu\varepsilon} = \langle u \rangle_{\mathrm{TE}} \boldsymbol{v}_s^{\mathrm{TE}} \tag{7.3.27}$$

式中 $\boldsymbol{v}_s^{\mathrm{TE}}$ 是电磁波的能量传播速度，它与电磁波的相速度方向相同，其大小满足关系

$$v_{\mathrm{p}} v_s^{\mathrm{TE}} = \frac{1}{\mu\varepsilon} \tag{7.3.28}$$

(4) 导体中 TM 波的能流密度为

$$\boldsymbol{s}_{\mathrm{TM}} = \frac{1}{\omega\varepsilon} |\boldsymbol{H}_0|^2 \exp(-2\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{x}) \left\{ \frac{\boldsymbol{\beta} + \frac{\sigma_c}{\omega\varepsilon}\boldsymbol{\alpha}}{1 + \frac{\sigma_c^2}{\omega^2\varepsilon^2}} \cos^2(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t + \phi_{\mathrm{B}}) - \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} \frac{\boldsymbol{\alpha} - \frac{\sigma_c}{\omega\varepsilon}\boldsymbol{\beta}}{1 + \frac{\sigma_c^2}{\omega^2\varepsilon^2}} \sin[2(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t + \phi_{\mathrm{B}})] \right\} \tag{7.3.29}$$

其能量密度为

$$u_{\mathrm{TM}} = \mu |\boldsymbol{H}_0|^2 \exp(-2\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{x}) \cos^2(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t + \phi_{\mathrm{B}}) \tag{7.3.30}$$

这 TM 波的一周期内的平均能流密度为

$$\langle \boldsymbol{s} \rangle_{\mathrm{TM}} = \frac{1}{2\omega\varepsilon} |\boldsymbol{H}_0|^2 \exp(-2\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{x}) \frac{\boldsymbol{\beta} + \frac{\sigma_c}{\omega\varepsilon}\boldsymbol{\alpha}}{1 + \frac{\sigma_c^2}{\omega^2\varepsilon^2}} \tag{7.3.31}$$

其能量密度平均值则为

$$\langle u \rangle_{\mathrm{TM}} = \frac{\mu}{2} |\boldsymbol{H}_0|^2 \exp(-2\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{x}) \tag{7.3.32}$$

于是

$$\langle \boldsymbol{s} \rangle_{\mathrm{TM}} = \langle u \rangle_{\mathrm{TM}} \frac{\boldsymbol{\beta} + \frac{\sigma_c}{\omega\varepsilon}\boldsymbol{\alpha}}{\omega\mu\varepsilon \left(1 + \frac{\sigma_c^2}{\omega^2\varepsilon^2}\right)} = \langle u \rangle_{\mathrm{TM}} \boldsymbol{v}_s^{\mathrm{TM}} \tag{7.3.33}$$

可见 TM 波的能量传播速度为

$$v_s^{TM}=\frac{\beta+\frac{\sigma_c}{\omega\varepsilon}\alpha}{\omega\mu\varepsilon\left(1+\frac{\sigma_c^2}{\omega^2\varepsilon^2}\right)} \tag{7.3.34}$$

它一般不但与电磁波的相速度大小不等，连方向也可能不相同.对良导体

$$v_s^{TM}\approx\frac{\alpha}{\mu\sigma_c} \tag{7.3.35}$$

对不良导体则有

$$v_s^{TM}\approx\frac{\beta}{\omega\mu\varepsilon} \tag{7.3.36}$$

习题 7－3

1. 按定义，若一平面波的振幅矢量在等相位面上为常矢量，则此平面波为均匀平面波.
   证明：对一复波矢 $\boldsymbol{k}$，若 $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}^*=0$，则它为均匀平面波，否则为非均匀平面波.
2. 有一 300 MHz 的均匀平面波在有耗介质中传播.该有耗介质的电导率为 $\sigma_c=4$ S/m，介电常量与磁导率分别为 $\varepsilon=9\varepsilon_0$ 与 $\mu=\mu_0$.若此波的电场振幅矢量为 $\boldsymbol{E}_0=(10\text{ V/m})\boldsymbol{e}_x$，且沿 z 方向传播.写出时域内电磁场强度的表达式并求能流密度矢量.
3. 一均匀平面波在有耗介质中传播.该有耗介质的电导率为 $\sigma_c=2$S/m，介电常量与磁导率分别为 $\varepsilon=36\varepsilon_0$ 与 $\mu=4\mu_0$.若此波的电场为

$$\boldsymbol{E}=10e^{-k_2 z}\cos(8\pi10^8 t-k_1 x)\boldsymbol{e}_z\text{ V/m}$$

   求出 k_1、k_2 和磁场强度.

§7.4　平面电磁波在绝缘介质界面上的反射与折射

现考察平面电磁波通过两绝缘介质分界面时的现象.为简单起见，假设 $z<0$ 的半无穷空间中充满一种线性均匀各向同性的绝缘介质(以下标 1 记之)，而 $z>0$ 的半无穷空间中充满另一种线性均匀各向同性的绝缘介质(以下标 2 记之).在 $z<0$ 的半无穷空间中有一单色波入射到介质分界面 $z=0$ 上，在介质分界面上所激发的面极化电荷和面诱导电流便产生次波，这些次波在 $z<0$ 的半无穷空间中与该介质中的体诱导电流所产生的次波叠加形成反射波，在 $z>0$ 的半无穷空间中与该介质中的体诱导电流所产生的次波以及原来的入射波叠加形成折射波(见图 7.1).

按照 Fourier 分解，不仅入射波 $\boldsymbol{E}_i$，反射波 $\boldsymbol{E}_r$ 和折射波 $\boldsymbol{E}_d$ 都可写成单色波形式.设它们的电场在各自的区域内为

$$\boldsymbol{E}_j=\boldsymbol{E}_{j0}\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_j\cdot\boldsymbol{x}-\omega_j t)],\qquad j=\mathrm{i},\mathrm{r},\mathrm{d} \tag{7.4.1}$$

根据前面对绝缘介质中平面电磁波的分析，频率不为零的各单色波(7.4.1)在各

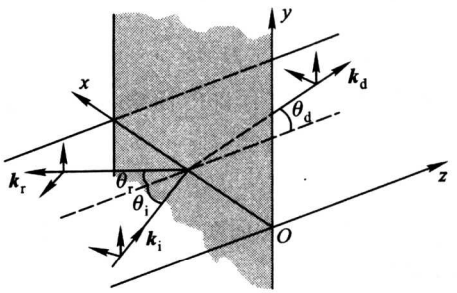


图 7.1 平面电磁波在绝缘介质界面上的反射与折射

自传播的区域(该区域充满一种线性均匀各向同性的绝缘介质)内,满足相应的 Helmholtz 方程

$$\begin{cases} (\nabla^2 + k_i^2)\boldsymbol{E}_j = 0 \\ \nabla \cdot \boldsymbol{E}_j = 0 \\ \boldsymbol{B}_j = -\mathrm{i}\dfrac{1}{\omega}\nabla \times \boldsymbol{E}_j \end{cases} \tag{7.4.2}$$

对于单色波(7.4.1),上述方程成为

$$\text{色散关系} \qquad k_j^2 = \omega_j^2 \mu_j \varepsilon_j \tag{7.4.3}$$

$$\text{横波条件} \qquad \boldsymbol{k}_j \cdot \boldsymbol{E}_j = 0 \tag{7.4.4}$$

$$\boldsymbol{B}_j = \frac{1}{\omega}\boldsymbol{k}_j \times \boldsymbol{E}_j \tag{7.4.5}$$

其中,(7.4.5)式说明磁场 $\boldsymbol{H}_j$ 是与电场 $\boldsymbol{E}_j$ 同频的单色波,因而满足相应的 Helmholtz 方程

$$\begin{cases} (\nabla^2 + k_i^2)\boldsymbol{H}_j = 0 \\ \nabla \cdot \boldsymbol{H}_j = 0 \\ \boldsymbol{D}_j = \mathrm{i}\dfrac{1}{\omega}\nabla \times \boldsymbol{H}_j \end{cases} \tag{7.4.6}$$

由此推得

$$\text{横波条件} \qquad \boldsymbol{k}_j \cdot \boldsymbol{H}_j = 0 \tag{7.4.7}$$

$$\boldsymbol{D}_j = -\frac{1}{\omega}\boldsymbol{k}_j \times \boldsymbol{E}_j \tag{7.4.8}$$

由于 Helmholtz 方程与 Maxwell 方程等价,所考虑的单色电磁波在各自传播的区域内满足无源 Maxwell 方程.

下面考虑边值关系所能提供的限制.对于所述的单色电磁波,在边界 $z=0$ 上相互独立的边值关系为

$$\boldsymbol{e}_z \times (\boldsymbol{E}_i + \boldsymbol{E}_r) = \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{E}_d \tag{7.4.9}$$

$$\boldsymbol{e}_z \times (\boldsymbol{H}_i + \boldsymbol{H}_r) = \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{H}_d \tag{7.4.10}$$

式中已注意到绝缘介质边界面上没有自由面电荷与自由面电流.由边值关系(7.4.9)知

$$\boldsymbol{E}_{i0,t} e^{i(k_{ix}x + k_{iy}y - \omega_i t)} + \boldsymbol{E}_{r0,t} e^{i(k_{rx}x + k_{ry}y - \omega_r t)} = \boldsymbol{E}_{d0,t} e^{i(k_{dx}x + k_{dy}y - \omega_d t)} \tag{7.4.11}$$

对边界面上任意的点$(x,y,0)$在任意时刻 t 都成立,式中下标 t 表示场在边界面的切向上的投影.因而有

$$\begin{cases} \omega_i = \omega_r = \omega_d \\ k_{ix} = k_{rx} = k_{dx} \\ k_{iy} = k_{ry} = k_{dy} \end{cases} \tag{7.4.12}$$

及

$$\boldsymbol{E}_{i0,t} + \boldsymbol{E}_{r0,t} = \boldsymbol{E}_{d0,t} \tag{7.4.13}$$

再由边值关系(7.4.10)得

$$\frac{1}{\mu_1}[\boldsymbol{k}_i \times \boldsymbol{E}_{i0} + \boldsymbol{k}_r \times \boldsymbol{E}_{r0}]_t = \frac{1}{\mu_2}[\boldsymbol{k}_d \times \boldsymbol{E}_{d0}]_t \tag{7.4.14}$$

这里已应用了等式(7.4.12)中的第一式.

7.4.1　反射定律与折射定律

由(7.4.12)可知:

(a) 现追踪一束入射波或者说一入射线,考察相应的反射线和折射线的方位.选取坐标系使 $k_{iy}=0$,这意味着取 $y=0$ 平面为入射面(即入射线的波矢 $\boldsymbol{k}_i$ 和分界面法向所张的平面).则有

$$k_{ry} = k_{dy} = 0$$

因而,入射线及其对应的反射线和折射线都位于入射面上.过入射线与分界面的交点作同时与分界面和入射面都垂直的平面 M.由入射波、反射波和折射波的波矢沿分界面的切向分量相等

$$k_{ix} = k_{rx} = k_{dx}$$

易知,相应于此入射线的反射线和折射线在入射面上位于平面 M 同侧,而入射波则位于平面 M 的另一侧.

(b) 入射波、反射波和折射波的频率相等,即

$$\omega_i = \omega_r = \omega_d = \omega$$

于是

$$k_i = k_r = \frac{\omega}{v_{ip}}, \qquad k_d = \frac{\omega}{v_{dp}}$$

式中

$$v_{jp}=1/\sqrt{\mu_j\varepsilon_j}$$

是电磁波在相应的介质中的相速度.

(c) 由 $k_{ix}=k_{rx}$ 得

$$k_i\sin\theta_i=k_r\sin\theta_r$$

式中 θ_i 与 θ_r 分别表示入射波矢与反射波矢和分界面的法向之间的夹角,称为入射角与反射角.上式可写成

$$\sin\theta_i=\sin\theta_r,\qquad \theta_i=\theta_r$$

此即入射角等于反射角.

(d) 由 $k_{ix}=k_{dx}$ 得

$$k_i\sin\theta_i=k_d\sin\theta_d$$

式中 θ_d 表示折射波矢和分界面的法向之间的夹角,称为折射角.上式可写成

$$\frac{\sin\theta_j}{\sin\theta_d}=\frac{k_d}{k_i}=\frac{v_{ip}}{v_{dp}}$$

此即

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_d}=\frac{n_d}{n_i}\tag{7.4.15}$$

式中 $n_i=c/v_{ip}$ 与 $n_d=c/v_{dp}$ 分别是相应介质的折射率.

7.4.2 振幅关系

为了清楚地看出入射波、反射波和折射波振幅之间的关系,可将电场写成分量形式.将电场按入射面 $y=0$ 的切向与法向分解:

$$\boldsymbol{E}_j=\boldsymbol{E}_{j/\!/}+\boldsymbol{E}_{j\perp},\qquad j=\mathrm{i},\mathrm{r},\mathrm{d}\tag{7.4.16}$$

式中下标//或⊥表示相应的矢量的方向分别与入射面 $y=0$ 平行或垂直.不失一般性,可规定 $\boldsymbol{E}_{j0/\!/}$、$\boldsymbol{E}_{j0\perp}$ 与 $\boldsymbol{k}_j$ 三者的方向成右手螺旋(实际的方向可通过选择适当的初相位确定).于是有

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_{i0}=(\boldsymbol{E}_{i0/\!/}\cos\theta_i,\boldsymbol{E}_{i0\perp},-\boldsymbol{E}_{i0/\!/}\sin\theta_i)\\ \boldsymbol{E}_{r0}=(-\boldsymbol{E}_{r0/\!/}\cos\theta_r,\boldsymbol{E}_{r0\perp},-\boldsymbol{E}_{r0/\!/}\sin\theta_r)\\ \boldsymbol{E}_{d0}=(\boldsymbol{E}_{d0/\!/}\cos\theta_d,\boldsymbol{E}_{d0\perp},-\boldsymbol{E}_{d0/\!/}\sin\theta_d)\end{cases}\tag{7.4.17}$$

利用电场的分量形式(7.4.17),边值关系(7.4.13)可改写为

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_{i0/\!/}\cos\theta_i-\boldsymbol{E}_{r0/\!/}\cos\theta_r=\boldsymbol{E}_{d0/\!/}\cos\theta_d\\ E_{i0\perp}+E_{r0\perp}=E_{d0\perp}\end{cases}\tag{7.4.18}$$

而边值关系(7.4.14)则可改写为

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\mu_1}[-k_i E_{i0\perp}\cos\theta_i + k_r E_{r0\perp}\cos\theta_r] = -\dfrac{1}{\mu_2}k_d E_{d0\perp}\cos\theta_d \\ \dfrac{1}{\mu_1}[k_i E_{i0/\!/} + k_r E_{r0/\!/}] = \dfrac{1}{\mu_2}k_d E_{d0/\!/}\end{cases} \tag{7.4.19}$$

由方程组(7.4.18)与(7.4.19)解得

$$\begin{cases}\dfrac{E_{r0/\!/}}{E_{i0/\!/}} = \dfrac{k_d\mu_1\cos\theta_i - k_i\mu_2\cos\theta_d}{k_d\mu_1\cos\theta_i + k_i\mu_2\cos\theta_d} \\ \dfrac{E_{r0\perp}}{E_{i0\perp}} = \dfrac{k_i\mu_2\cos\theta_i - k_d\mu_1\cos\theta_d}{k_i\mu_2\cos\theta_i + k_d\mu_1\cos\theta_d} \\ \dfrac{E_{d0/\!/}}{E_{i0/\!/}} = \dfrac{2k_i\mu_2\cos\theta_i}{k_d\mu_1\cos\theta_i + k_i\mu_2\cos\theta_d} \\ \dfrac{E_{r0\perp}}{E_{i0\perp}} = \dfrac{2k_i\mu_2\cos\theta_i}{k_i\mu_2\cos\theta_i + k_d\mu_1\cos\theta_d}\end{cases} \tag{7.4.20}$$

利用折射定律 $\sin\theta_i/\sin\theta_d = k_d/k_i$，并注意到对一般介质有 $\mu\approx\mu_0$，便得

$$\begin{cases}\dfrac{E_{r0/\!/}}{E_{i0/\!/}} = \dfrac{\tan(\theta_i - \theta_d)}{\tan(\theta_i + \theta_d)} \\ \dfrac{E_{r0\perp}}{E_{i0\perp}} = -\dfrac{\sin(\theta_i - \theta_d)}{\sin(\theta_i + \theta_d)} \\ \dfrac{E_{d0/\!/}}{E_{i0/\!/}} = \dfrac{2\sin\theta_d\cos\theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_d)\cos(\theta_i - \theta_d)} \\ \dfrac{E_{d0\perp}}{E_{i0\perp}} = \dfrac{2\sin\theta_d\cos\theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_d)}\end{cases} \tag{7.4.21}$$

此即光学中的 Fresnel 公式.

对于正入射情形，$\theta_i, \theta_d \to 0$，折射定律成为

$$n_i\theta_i = n_d\theta_d \tag{7.4.22}$$

Fresnel 公式可用分界面两边的介质的折射率表出：

$$\begin{cases}\dfrac{E_r}{E_i} = \dfrac{n_i - n_d}{n_i + n_d}, & \dfrac{H_r}{H_i} = \dfrac{n_d - n_i}{n_i + n_d} \\ \dfrac{E_d}{E_i} = \dfrac{2n_i}{n_i + n_d}, & \dfrac{H_d}{H_i} = \dfrac{2n_d}{n_i + n_d}\end{cases} \tag{7.4.23}$$

它们对于与入射面平行或垂直两种情形都是适用的，这正是所预期的，因为对于正入射而言，过分界面法向的任一平面都是入射面.

7.4.3　反射系数与透射系数

现考察入射波、反射波和折射波之间能量分配问题. 应用(7.2.9)式可得入射波、反射波和折射波的平均能流为

$$\langle \boldsymbol{s}_j \rangle = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\right)_j (E_{j0/\!/}^2 + E_{j0\perp}^2)\left(\frac{\boldsymbol{k}}{k}\right)_j, \qquad j = \mathrm{i,r,d} \tag{7.4.24}$$

定义电磁波的强度 I，它是单位时间内在与其传播方向垂直的截面 σ 上单位面积中所通过的电磁波的平均能量

$$I = \langle \boldsymbol{s} \rangle \cdot \boldsymbol{n} \tag{7.4.25}$$

式中 $\boldsymbol{n}$ 是截面 σ 的法向. 由式(7.4.24)可得分界面上入射波、反射波和折射波的强度为

$$I_j = \langle \boldsymbol{s} \rangle \cdot \boldsymbol{e}_z = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\right)_j (E_{j0/\!/}^2 + E_{j0\perp}^2)\cos\theta_j, \quad j = \mathrm{i,r,d} \tag{7.4.26}$$

定义反射系数 r 与透射系数 d 为

$$r = \frac{I_\mathrm{r}}{I_\mathrm{i}}, \qquad d = \frac{I_\mathrm{d}}{I_\mathrm{i}} \tag{7.4.27}$$

它可利用(7.4.26)式与 $\mu_\mathrm{i} \approx \mu_\mathrm{d} \approx \mu_0$ 表示为

$$\begin{cases} r = \dfrac{|E_{\mathrm{r}0}|^2}{|E_{\mathrm{i}0}|^2} \\ d = \dfrac{|E_{\mathrm{d}0}|^2}{|E_{\mathrm{i}0}|^2}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_\mathrm{d}}{\varepsilon_\mathrm{i}}}\dfrac{\cos\theta_\mathrm{d}}{\cos\theta_\mathrm{i}} = \dfrac{|E_{\mathrm{d}0}|^2 \sin\theta_\mathrm{i}\cos\theta_\mathrm{d}}{|E_{\mathrm{i}0}|^2 \cos\theta_\mathrm{i}\sin\theta_\mathrm{d}} \end{cases} \tag{7.4.28}$$

令

$$\lambda = \frac{|E_{\mathrm{i}0\perp}|}{|E_{\mathrm{i}0/\!/}|} \tag{7.4.29}$$

则(7.4.28)式可写为

$$\begin{cases} r = \dfrac{r_{/\!/} + \lambda^2 r_\perp}{1+\lambda^2} \\ d = \dfrac{d_{/\!/} + \lambda^2 d_\perp}{1+\lambda^2}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_d}{\varepsilon_\mathrm{i}}}\dfrac{\cos\theta_d}{\cos\theta_\mathrm{i}} \end{cases} \tag{7.4.30}$$

式中 $(r,d)_{/\!/}$ 与 $(r,d)_\perp$ 分别是入射波的电场与入射面平行与垂直时的反射系数和透射系数，它们可利用 Fresnel 公式和折射定律得到

$$\begin{cases} r_{/\!/} = \dfrac{\tan^2(\theta_\mathrm{i} - \theta_\mathrm{d})}{\tan^2(\theta_\mathrm{i} + \theta_\mathrm{d})} \\ d_{/\!/} = \dfrac{\sin(2\theta_\mathrm{i})\sin(2\theta_\mathrm{d})}{\sin^2(\theta_\mathrm{i} + \theta_\mathrm{d})\cos^2(\theta_\mathrm{i} - \theta_\mathrm{d})} \\ r_\perp = \dfrac{\sin^2(\theta_\mathrm{i} - \theta_\mathrm{d})}{\sin^2(\theta_\mathrm{i} + \theta_\mathrm{d})} \\ d_\perp = \dfrac{\sin(2\theta_\mathrm{i})\sin(2\theta_\mathrm{d})}{\sin^2(\theta_\mathrm{i} + \theta_\mathrm{d})} \end{cases} \tag{7.4.31}$$

容易看出

$$r+d=1 \tag{7.4.32}$$

$$r_{/\!/}=\frac{\cos^2(\theta_i+\theta_d)}{\cos^2(\theta_i-\theta_d)}r_{\perp}\leqslant r_{\perp} \tag{7.4.33}$$

$$d_{/\!/}=\frac{1}{\cos^2(\theta_i-\theta_d)}d_{\perp}>d_{\perp} \tag{7.4.34}$$

其中,(7.4.32)式说明电磁波在分界面上的反射、折射过程作为一个整体满足能量守恒定律.

对于正入射情形,反射系数与折射系数为

$$\begin{cases} r=\left(\dfrac{n_i-n_d}{n_i+n_d}\right)^2 \\ d=\dfrac{4n_in_d}{(n_i+n_d)^2} \end{cases} \tag{7.4.35}$$

7.4.4　反射波与折射波的偏振状态

关系式(7.4.31)及(7.4.33)和(7.4.34)说明:反射系数和透射系数对于不同偏振的入射波是不同的.

对于斜入射

$$\theta_i\neq\theta_d$$

对于非极化(或称为非偏振)的电磁波,则可定义极化度(或称为偏振度)

$$P=\frac{I_{/\!/}-I_{\perp}}{I_{/\!/}+I_{\perp}} \tag{7.4.36}$$

式中,$I_{/\!/}$与$I_{\perp}$是沿平行或垂直于入射面的偏振波(即极化波)的强度.于是,对于反射波与折射波分别有

$$P_r=\frac{r_{/\!/}-r_{\perp}}{r_{/\!/}+r_{\perp}},\qquad P_d=\frac{d_{/\!/}-d_{\perp}}{d_{/\!/}+d_{\perp}} \tag{7.4.37}$$

若入射波为自然光,则其极化度为

$$P_{i自然光}=0 \tag{7.4.38}$$

也就是说自然光是非极化的.但即使入射波是非极化的电磁波,在斜入射时,相应的折射波却总是部分偏振的;而反射波一般是部分偏振的,有时是线偏振的.

事实上,当

$$\theta_i+\theta_d=\pi/2 \tag{7.4.39}$$

时有

$$r_{/\!/}\big|_{\theta_i+\theta_d=\pi/2}=0,\quad d_{/\!/}\big|_{\theta_i+\theta_d=\pi/2}=1 \tag{7.4.40}$$

这说明:电场矢量与入射面平行的入射波分量完全被折射;而反射波只含有电场

矢量垂直于入射面的分量，它是完全线偏振的. 这时的入射角称为全偏振角或 Brewster 角，记为 θ_B，它可由折射定律确定：

$$\tan\theta_B=\frac{\sin\theta_B}{\cos\theta_B}=\left(\frac{\sin\theta_B}{\sin\theta_d}\right)_{\theta_B+\theta_d=\pi/2}=\frac{n_2}{n_1} \tag{7.4.41}$$

7.4.5 相位关系

利用 Fresnel 公式可得到入射波、反射波和折射波在边界面上的相位之间的关系.

(a) 设入射波是线偏振的，且其电矢量垂直于入射面：

$$\boldsymbol{E}_i=\boldsymbol{E}_{i\perp}$$

由 Fresnel 公式的第二式知

$$\mathrm{sign}(E_{r0\perp}/E_{i0\perp})=-\mathrm{sign}(\theta_i-\theta_d) \tag{7.4.42}$$

式中，sign(x)是所谓符号函数：sign($x>0$) = +1，sign($x<0$) = −1.

若介质 1 是光疏介质，介质 2 是光密介质，即

$$n_1<n_2$$

则

$$\theta_i>\theta_d$$

于是，由(7.4.42)得

$$\mathrm{sign}(E_{r0\perp}/E_{i0\perp})=-1 \tag{7.4.43}$$

这说明反射时会发生 180°的相位变化，相当于产生了所谓“半波损失”. 反之，若介质 1 是光密介质，介质 2 是光疏介质，反射时则无相位变化发生.

(b) 设入射波是线偏振的，且其电矢量平行于入射面：

$$\boldsymbol{E}_i=\boldsymbol{E}_{i/\!/}$$

由 Fresnel 公式的第一式及

$$\mathrm{sign}(\cos\theta)=\mathrm{sign}(\pi/2-\theta)$$

知

$$\mathrm{sign}(E_{r0/\!/}/E_{i0/\!/})=\mathrm{sign}(\theta_i-\theta_d),\qquad \text{当 } \theta_i<\theta_B \tag{7.4.44}$$

$$\mathrm{sign}(E_{r0/\!/}/E_{i0/\!/})=-\mathrm{sign}(\theta_i-\theta_d),\qquad \text{当 } \theta_i>\theta_B \tag{7.4.45}$$

式中已注意到 $\theta_i+\theta_d<\pi/2$ 即 $\theta_i<\theta_B$，而 $\theta_i+\theta_d>\pi/2$ 即 $\theta_i>\theta_B$. 假设介质 1 是光疏介质，介质 2 是光密介质. 由(7.4.44)与(7.4.45)得

$$\mathrm{sign}(E_{r0/\!/}/E_{i0/\!/})=+1,\qquad \text{当 } \theta_i<\theta_B \tag{7.4.46}$$

$$\mathrm{sign}(E_{r0/\!/}/E_{i0/\!/})=-1,\qquad \text{当 } \theta_i>\theta_B \tag{7.4.47}$$

因而反射时

没有相位变化即无半波损失，　　当 $\theta_i<\theta_B$

发生 180°相位变化即有半波损失，　　当 $\theta_i > \theta_B$

反之，若介质 1 是光密介质，介质 2 是光疏介质，则经同样的分析可得

发生 180°相位变化即有半波损失，　　当 $\theta_i < \theta_B$

没有相位变化即无半波损失，　　当 $\theta_i > \theta_B$

(c) 现考察在分界面 $z=0$ 上入射波与反射波的磁场之间的相位变化. 为此，可利用式(7.4.5)将 Fresnel 公式写成相应的磁场强度之比的形式，再按前述的同样的方法进行分析. 这里，我们采用另一更为简便的分析方法. 注意到三矢量($\boldsymbol{E}_{j/\!/}$, $\boldsymbol{B}_{j\perp}$, $\boldsymbol{k}_j$)与三矢量($\boldsymbol{E}_{j\perp}$, $\boldsymbol{B}_{j/\!/}$, $\boldsymbol{k}_j$)的方向都满足右手螺旋定则，且按前面所取的空间坐标系

$$\boldsymbol{k}_{rx} \text{与} \boldsymbol{k}_{ix} \text{同向}, \qquad \boldsymbol{k}_{rz} \text{与} \boldsymbol{k}_{iz} \text{反向}$$

容易从图 7.1 中得出下述结论：若 $\boldsymbol{E}_r$和 $\boldsymbol{E}_i$同向，则 $\boldsymbol{H}_r$和 $\boldsymbol{H}_i$反向；若 $\boldsymbol{E}_r$和 $\boldsymbol{E}_i$反向，则 $\boldsymbol{H}_r$和 $\boldsymbol{H}_i$同向. 因而，当电场无相位变化时，相应的磁场有相位上的半波损失；当电场的相位有半波损失时，相应的磁场无相位变化. 这对于(a)、(b)两种情形均成立.

(d) 现分析在分界面 $z=0$ 上入射波与折射波的电场或磁场之间的相位变化. 由 Fresnel 公式中的第三、四两式知，入射波与折射波的对应的电场分量之比总是正的，因而两者之间不存在相位突变. 另外，由于按前面所取的空间坐标系

$$\boldsymbol{k}_{dx} \text{与} \boldsymbol{k}_{ix} \text{同向}, \qquad \boldsymbol{k}_{dz} \text{与} \boldsymbol{k}_{iz} \text{同向}$$

容易从图 7.1 中得出下述结论：若 $\boldsymbol{E}_r$和 $\boldsymbol{E}_i$同向，则 $\boldsymbol{H}_r$和 $\boldsymbol{H}_i$同向. 因而，由于电场在折射时无相位变化，相应的磁场在折射时也没有相位变化.

习题 7－4

1. 考虑在两绝缘介质的分界面上，入射波、反射波与折射波所满足的边值关系

$$\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_i+\boldsymbol{D}_r)=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}_d \\ \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_i+\boldsymbol{E}_r)=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_d \\ \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_i+\boldsymbol{B}_r)=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}_d \\ \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_i+\boldsymbol{H}_r)=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}_d \end{cases}$$

式中，$\boldsymbol{n}$ 是分界面的法向.

证明：若第二个边值关系成立，则第三个边值关系自然满足；若第四个边值关系成立，则第一个边值关系自然满足.

2. 验证：电磁波在绝缘介质分界面上反射与折射时，能量守恒.

3. 一场强振幅为 $E_0=10^6$ cgs 单位的电磁波从真空垂直入射到一绝缘介质的表面(为平面)上，介质的介电常量 $\varepsilon=1.44$. 试将物理量换算到国际单位制后计算电磁波对介质产生的压力.

答案：$1.4\times10^9\ \mathrm{N/m^2}$

4. 平面电磁波从介质 1 垂直入射到与介质 2 的分界面上. 两介质的折射率分别为 n_1 与 n_2，且 $n_2/n_1=3+2\sqrt{2}$. 证明反射波能流等于折射波能流.

5. 有一个以平面 $z=0$ 与 $z=d$ 为边界的电介质层，其介电常量为 ε_2，它将介电常量分别为 ε_1 与 ε_3 的两种电介质隔开. 三种电介质的磁导率均为 μ_0. 电磁波从 $z<0$ 的区域，沿着垂直于层表面的方向入射到电介质层上. 问当层的厚度满足什么条件时反射系数取极值？当层的厚度为多大时反射最小？当三种电介质的介电常量满足什么条件时没有反射？

答案：用 λ_2 表示电磁波在介质 2 中的波长. 当层厚 $d=m\lambda_2/4$ 时，反射系数取极值；若 m 为奇数，反射系数最小；反射系数为零的条件为 $\varepsilon_2=\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}$.

6. 平面线偏振电磁波从介质 1 入射到与介质 2 的分界面上，两质的折射率分别为 n_1 与 n_2，偏振方向与入射面的夹角为 $\pi/4$. 若选取入射角使得反射波的偏振方向垂直于入射面，证明折射波的偏振方向与入射面的夹角为

$$\operatorname{arccot}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{n_1}{n_2}+\frac{n_2}{n_1}\right)\right]$$

7. 如果通常的近似 $\mu_2\approx\mu_1$ 不成立，

证明：在两绝缘介质的边界面上，反射系数为

$$r_{\perp}=\left(\frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cos\theta'-\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta}{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cos\theta'+\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta}\right)^2$$

$$r_{/\!/}=\left(\frac{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}\cos\theta'-\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}\cos\theta}{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}\cos\theta'+\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}\cos\theta}\right)^2$$

式中，θ 与 θ' 分别是入射角与折射角. 求折射系数，并讨论是否对每一种偏振（$\perp$ 或 $/\!/$），Brewster 角都存在.

8. 证明：当一个非偏振波从空气以 Brewster 角入射到折射率为 n 的绝缘介质表面上，折射波的偏振度为

$$P=\frac{(1+n^2)^2-4n^2}{(1+n^2)^2+4n^2}$$

§7.5 全反射

7.5.1 发生全反射的条件

由折射定律(7.4.15)可得出折射发生的条件是

$$\sin\theta_i=\frac{n_d}{n_i}\sin\theta_d\leqslant\frac{n_d}{n_i} \tag{7.5.1}$$

若波从波疏介质向波密介质传播，即当 $n_i<n_d$ 时，这一条件总是满足的. 但若波

从波密介质向波疏介质传播，即当 $n_i > n_d$ 时，上述条件当入射角大于一临界值

$$\theta_i > \theta_c = \arcsin \frac{n_d}{n_i} \tag{7.5.2}$$

即

$$\sin \theta_i > \sin \theta_c = \frac{n_d}{n_i} \tag{7.5.3}$$

时便不再满足. 这时

$$\sin \theta_d = \frac{\sin \theta_i}{n_d / n_i} > \frac{\sin \theta_c}{n_d / n_i} = 1$$

因而 θ_d 不再是实数，从而不具有角度的意义；这意味着不会发生折射，入射波将全部被反射，这种情形称为全反射. (7.5.2)或(7.5.3)即是发生全反射的条件，而 θ_c 被称为全反射临界角.

7.5.2　折射波

现在分析在发生全反射的条件

$$n = n_d / n_i < 1$$

$$\theta_i > \theta_c$$

满足时的折射波. 为此，首先由折射定律

$$\sin \theta_d = \frac{1}{n} \sin \theta_i$$

推得

$$\cos \theta_d = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta_d} = \pm \mathrm{i} \frac{1}{n} \sqrt{\sin \theta_i - n^2} \tag{7.5.4}$$

式中正负号的选取由要求第二介质(即折射波在其中传播的介质，假定这一介质伸展到无穷远处)中的电场强度 $\boldsymbol{E}_d$ 为有限值来决定.

若边界面与入射面分别为 $z=0$ 与 $y=0$ 平面，则折射波的波矢为

$$\boldsymbol{k}_d = (k_d \sin \theta_d, 0, k_d \cos \theta_d) = \left(k_d \frac{\sin \theta_i}{n}, 0, \pm \mathrm{i} \frac{k_d}{n} \sqrt{\cos^2 \theta_i - n^2} \right) \tag{7.5.5}$$

由此得到折射波的电场：

$$\boldsymbol{E}_d = \boldsymbol{E}_{d0} \exp\left[\mp \frac{k_d}{n} \sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2}\, z \right] \exp\left[\mathrm{i} \left(\frac{k_d}{n} \sin \theta_i x - \omega t \right) \right]$$

能量守恒要求折射波在介质中传播时其强度不可能逐渐增大，即必须保持 $\boldsymbol{E}_d (z \to \infty)$ 为有限，因而它应被表达成下述形式：

$$\boldsymbol{E}_d = \boldsymbol{E}_{d0} \exp(-z / l_d) \exp[\mathrm{i}(kx - \omega t)] \tag{7.5.6}$$

式中 l_d 与 k 是常量(其物理意义见下文所述).可见,应当在(7.5.4)式中选取正号.

讨论:在全反射时,我们有

(a) 折射波沿 $\boldsymbol{e}_z$ 方向衰减(故常称为消逝波).定义衰减长度

$$\boldsymbol{E}_d(z)=\exp(-z/l_d)\boldsymbol{E}_d(z=0) \tag{7.5.7}$$

由(7.5.6)与 $k_d\lambda_d=2\pi$ 可知折射波的衰减长度为

$$l_d=\frac{n\lambda_d}{2\pi\sqrt{\sin^2\theta_i-n^2}} \tag{7.5.8}$$

因而,在发生全反射时虽然仍存在折射波,但折射波被限制在界面附近的厚度约为 l_d 的一个薄层区域内.

(b) 折射波沿 $\boldsymbol{e}_x$ 方向即沿界面传播.这种沿分界面传播的折射波称为表面波.由(7.5.6)知,相应的波矢为

$$k=\frac{k_d}{n}\sin\theta_i \tag{7.5.9}$$

相速度为

$$v_{dp}=\frac{\omega}{k}=\frac{n\omega}{k_d\sin\theta_i}<\frac{c}{n_d} \tag{7.5.10}$$

(c) 折射波不是横波.事实上,由边值关系(7.4.18)的第一式知

$$(E_{d0/\!/})_x=E_{d0/\!/}\cos\theta_d=(E_{i0/\!/}-E_{r0/\!/})\cos\theta_i\neq 0 \tag{7.5.11}$$

式中应用了全反射时成立的不等式[参见下面(7.5.13)与(7.5.14)]:

$$E_{i0/\!/}\neq E_{r0/\!/} \tag{7.5.12}$$

7.5.3 反射波

现考察全反射时的反射波.利用(7.5.4)式,在全反射时,Fresnel 公式(7.4.21)对于反射波成为

$$\begin{cases}\dfrac{E_{r0/\!/}}{E_{i0/\!/}}=\dfrac{n^2\cos\theta_i-\mathrm{i}\sqrt{\sin^2\theta_i-n^2}}{n^2\cos\theta_i+\mathrm{i}\sqrt{\sin^2\theta_i-n^2}}=\rho_{/\!/}\exp(-\mathrm{i}\phi_{/\!/})\\[2ex]\dfrac{E_{r0\perp}}{E_{i0\perp}}=\dfrac{\cos\theta_i-\mathrm{i}\sqrt{\sin^2\theta_i-n^2}}{\cos\theta_i+\mathrm{i}\sqrt{\sin^2\theta_i-n^2}}=\rho_\perp\exp(-\mathrm{i}\phi_\perp)\end{cases} \tag{7.5.13}$$

由此得

$$\begin{cases} \rho_{/\!/} = \rho_{\perp} = 1 \\ \phi_{/\!/} = 2\arctan \dfrac{\sqrt{\sin^2\theta_i - n^2}}{n^2 \cos\theta_i} \\ \phi_{\perp} = 2\arctan \dfrac{\sqrt{\sin^2\theta_i - n^2}}{\cos\theta_i} \end{cases} \tag{7.5.14}$$

由(7.4.28)式及 $\rho_{/\!/} = \rho_{\perp} = 1$ 知

$$r = 1, \qquad \mathrm{Re}\, d = 0 \tag{7.5.15}$$

于是,能量守恒告诉我们,沿边界法向透入第二介质的平均能量为零.

由(7.5.14)式得反射波 $\boldsymbol{E}_{r/\!/}$ 与 $\boldsymbol{E}_{r\perp}$ 之间的相对相位变化 $\delta\phi = \phi_{/\!/} - \phi_{\perp}$ 满足

$$\tan\frac{\delta\phi}{2} = \frac{\cos\theta_i\sqrt{\sin^2\theta_i - n^2}}{\sin^2\theta_i} \tag{7.5.16}$$

它当 $\sin^2\theta_i = 2n^2/(1+n^2)$ 时达到极大值

$$\tan\frac{\delta\phi_{\max}}{2} = \frac{1-n^2}{2n} \tag{7.5.17}$$

若线偏振入射波的电场强度既不平行也不垂直于入射面,则由于 $\phi_{/\!/} \neq \phi_{\perp}$,全反射波一般是椭圆偏振的:

$$\begin{cases} E_{r/\!/} = -E_0\cos\psi\cos(\boldsymbol{k}_r\cdot\boldsymbol{x} - \omega t - \phi_{/\!/}) \\ E_{r\perp} = E_0\sin\psi\cos(\boldsymbol{k}_r\cdot\boldsymbol{x} - \omega t - \phi_{\perp}) \end{cases} \tag{7.5.18}$$

式中 ψ 是入射波的电矢量 $\boldsymbol{E}$ 与入射面的夹角.特别地,当 $\psi = \pi/4$ 且 $\phi_{\perp} - \phi_{/\!/} = \pm\pi/2$ 时,全反射波是圆偏振的.

Fresnel 利用这一原理,用冕牌玻璃($n = 1.51$)制成了有一个二面角为 54°37′(此时 $\delta\phi = 45°$)的平行四面体,称为 Fresnel 平行四面体.一束电矢量与入射面成 45°的线偏振光正入射到 Fresnel 平行四面体的侧面上,经一次全反射后成为一束椭圆偏振光;再经一次全反射后成为一束圆偏振光,从相对的侧面折射出去(见图 7.2),成为一束圆偏振光.

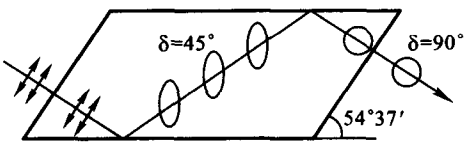


图 7.2　Fresnel 平行四面体

7.5.4 第二种介质中的能流密度

为简单计，取电矢量垂直于入射面，即 $\boldsymbol{E}_i = E_i \boldsymbol{e}_y$，则在第二种介质中有

$$\boldsymbol{E}_d = \boldsymbol{e}_y E_{d0} \exp\left[-k_d \sqrt{\frac{\sin\theta_i}{n^2} - 1}\, z \right] \cos\left(k_d \frac{\sin\theta_i}{n} x - \omega t \right)$$

$$\boldsymbol{H}_d = \frac{\mu}{\omega} \boldsymbol{k}_d \times \boldsymbol{E}_d$$

于是，由公式 $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = (\mu/\omega) E^2 \boldsymbol{k}$ 得

$$\begin{cases} s_{dx} = \dfrac{\mu_d k_d \sin\theta_i}{2\omega n} E_{d0}^2 \exp\left[-2k_d z \sqrt{\dfrac{\sin\theta_i}{n^2} - 1} \right] \cdot \\ \qquad \left[1 + \cos 2\left(k_d x \dfrac{\sin\theta_i}{n} - \omega t \right) \right] \\ s_{dz} = -\dfrac{\mu_d k_d}{2\omega} \sqrt{\dfrac{\sin\theta_i}{n^2} - 1}\, E_{d0}^2 \exp\left[-2k_d z \sqrt{\dfrac{\sin\theta_i}{n^2} - 1} \right] \cdot \\ \qquad 2\sin 2\left(k_d x \dfrac{\sin\theta_i}{n} - \omega t \right) \end{cases} \tag{7.5.19}$$

由此可见：

(a) 在界面法向上的能流(即 $s_{d,z}$)以频率 2ω 作周期振动，且 $\langle s_{d,z} \rangle = 0$，即平均而言无能量流入第二介质中. 实际上，在一个半周期内透入第二介质的电磁能在界面附近的薄层内储存起来，在另一个半周期内将这一能量以反射波的形式释放出来.

(b) 界面切线方向能流(即 $s_{d,x}$)对时间平均值不为零：

$$\langle s_{d,x} \rangle = \frac{\mu_d k_d \sin\theta_i}{2\omega n} E_{d0}^2 \neq 0$$

在 x 方向仍有能流. 它从 $x = -\infty$ 处来到 $x = +\infty$ 处去，形成稳恒流动. 其能量是波刚开始射到界面时透入第二介质用以建立电磁场的，一旦电磁场达到稳恒状态就不再有能量透入了.

值得注意的是：若两块相同的波密介质中间夹一薄层波疏介质，当这一薄层的厚度小于衰减长度 l_d(见公式 7.5.8)时，即使入射角大于临界角，也不会发生全反射，即仍然有电磁波折射出来.

习题 7-5

1. 证明：除全反射外，线偏振的平面电磁波在绝缘介质边界上反射与折射后仍然是线偏振的. 如果入射波的偏振面与入射面的夹角为 ϕ，入射角为 θ；试证明：反射波与折射波的偏振矢量与入射面的夹角 α 与 β 分别为

$$\tan\alpha=\frac{\cos(\theta'-\theta)}{\cos(\theta'+\theta)}\tan\phi$$

$$\tan\beta=\cos(\theta'-\theta)\tan\phi$$

式中 θ' 是折射角.

2. 证明:

在全反射波行进路径上某一固定点,方程(7.5.18)可写为

$$\frac{E_{\perp}^{r2}}{a^2}+\frac{E_{/\!/}^{r2}}{b^2}-\frac{2\cos\delta}{ab}E_{\perp}^{r}E_{/\!/}^{r}=\sin^2\delta \tag{7.5.20}$$

式中 $\delta=\phi_{/\!/}-\phi_{\perp}$、$a=E_0\sin\varphi$ 与 $b=-E_0\cos\varphi$. 再由此证明:当取 z 轴为全反射波的波矢方向、并使 x 轴与入射面的夹角为 φ 时上述方程成为

$$\frac{E_{\perp}^{r2}}{A^2}+\frac{E_{/\!/}^{r2}}{B^2}=1$$

式中 A 与 B 为常数. 于是矢量 $\boldsymbol{E}^r$ 的终端在与波矢方向垂直的平面上描绘出一个椭圆.

3. 一线偏振波从电介质 1 入射到电介质 2 的边界面上并被全反射,两介质的折射率分别为 n_1 与 n_2. 证明:若入射波的偏振方向与入射面的夹角为 $\pi/4$,则仅当

$$\frac{n_2}{n_1}\leqslant\sqrt{2}-1$$

时,全反射波才可以是圆偏振的.

4. 一平面电磁波从电介质 1 入射到电介质 2 的边界面上,介质 1 的介电常量与磁导率分别为 ε_1 与 μ_2,介质 2 的介电常量与磁导率分别为 $\varepsilon_2=\varepsilon_1(1+2\eta)$ 与 $\mu_2=\mu_1$,且 $|\eta|\ll1$. 证明:只要入射角 θ 不接近于 $\pi/2$,则

$$\frac{E_{\perp}^{r}}{E_{\perp}^{i}}\approx-\frac{1}{2}\eta\sec^2\theta$$

$$\frac{E_{/\!/}^{r}}{E_{/\!/}^{i}}\approx-\eta(1-\tan^2\theta) \tag{7.5.21}$$

式中 $E_{\perp}^{i}$ 与 $E_{\perp}^{r}$ 分别是偏振矢量垂直入射面时入射波与反射波的电场振幅,$E_{/\!/}^{i}$ 与 $E_{/\!/}^{r}$ 则相应于偏振矢量平行于入射面的情形. 并求全反射发生的条件.

5. 由 $\delta=\theta_c-\theta$ 定义一个正的量 δ,这里 θ 与 θ_c 分别是入射角和全反射临界角.

证明:当 $\delta\to0$ 时反射系数为

$$r_{\perp}\approx1-a_{\perp}\sqrt{\delta}$$

$$r_{/\!/}\approx1-a_{/\!/}\sqrt{\delta} \tag{7.5.22}$$

式中,$a_{\perp}$ 与 $a_{/\!/}$ 是与介质的折射率有关的常数.

§7.6 电磁波在导体面上的反射与折射

设 $z<0$ 的半无穷空间中充满一种线性均匀各向同性的绝缘介质(以下标 1 记之),而 $z>0$ 的半无穷空间中充满一种线性均匀各向同性的导电介质(以下标 2 记之),且在 $z<0$ 的半无穷空间中有一单色波入射到介质分界面 $z=0$ 上.

若在导电介质中引入复介电常量 $\varepsilon_{2\omega}=\varepsilon_2+\mathrm{i}\sigma_2/\omega$，则导电介质与绝缘介质中单色波所满足的 Maxwell 方程组形式相同；因而，导体面上与绝缘介质界面上的反射与折射公式以及 Fresnel 公式在“形式”上都相同，只是有些参量成为等效参量甚至是复的罢了.

7.6.1 导电介质中的折射波

为方便起见，假设 $\mu_2\approx\mu_0$；当此假设不成立时，正确结果可由下述替换

$$\varepsilon_0\to\varepsilon_0\frac{\mu_0}{\mu_2} \tag{7.6.1}$$

得到. 导电介质的折射率为

$$n_2=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}\left(1+\frac{\mathrm{i}\sigma}{\omega\varepsilon_2}\right)}=\pm(\eta+\mathrm{i}\kappa) \tag{7.6.2}$$

式中 η 与 κ 是下式

$$\eta^2-\kappa^2=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0},\qquad 2\eta\kappa=\frac{\sigma_2}{\omega\varepsilon_0} \tag{7.6.3}$$

确定的正实数，此即

$$\begin{cases}\eta^2=\dfrac{\xi_2}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{1+\left(\dfrac{\sigma_2}{\omega\varepsilon_2}\right)^2}+1\right]\\[2ex]\kappa^2=\dfrac{\xi_2}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{1+\left(\dfrac{\sigma_2}{\omega\varepsilon_2}\right)^2}-1\right]\end{cases} \tag{7.6.4}$$

考虑到导电介质中有 Joule 热耗损，折射波应为一衰减波，这一要求将(7.6.2)式右端的符号决定为正号. 于是导电介质中的波矢的大小为

$$k'_{\mathrm{d}}=\frac{\omega n_2}{c}=(\eta+\mathrm{i}\kappa)k_0,\qquad k_0=\frac{\omega}{c} \tag{7.6.5}$$

导电介质中的折射波为

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{d}}=\boldsymbol{E}_{\mathrm{d}0}\exp[\mathrm{i}(k'_{\mathrm{d}}x\sin\theta'_{\mathrm{d}}+k'_{\mathrm{d}}z\cos\theta'_{\mathrm{d}}-\omega t)] \tag{7.6.6}$$

由于折射定律“形式”不变，故有

$$\sin\theta'_{\mathrm{d}}=\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_{\mathrm{i}}=\frac{n_1}{\eta+\mathrm{i}\kappa}\sin\theta_{\mathrm{i}} \tag{7.6.7}$$

可见，折射角 θ'_{d} 是复的. 由(7.6.5)与(7.6.7)可知

$$\begin{cases}k'_{\mathrm{d}}\sin\theta'_{\mathrm{d}}=n_1k_0\sin\theta_{\mathrm{i}}\\k'_{\mathrm{d}}\cos\theta'_{\mathrm{d}}=k_0\sqrt{\eta^2-\kappa^2-n_1^2\sin^2\theta_{\mathrm{i}}+2\eta\kappa\mathrm{i}}=p+\mathrm{i}q\end{cases} \tag{7.6.8}$$

式中 p 与 q 是由下式

$$\begin{cases}p^2-q^2=(\eta^2-\kappa^2-n_1^2\sin^2\theta_{\mathrm{i}})k_0^2\\pq=\eta\kappa k_0^2\end{cases} \tag{7.6.9}$$

决定的正实数.于是,折射波的电矢量可写为

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{d}}=\boldsymbol{E}_{\mathrm{d}0}\exp(-qz)\exp[\mathrm{i}(n_1k_0x\sin\theta_{\mathrm{i}}+pz-\omega t)] \tag{7.6.10}$$

可见,$\boldsymbol{E}_{\mathrm{d}}$的振幅具有衰减因子 $\exp(-qz)$;因而等幅面

$$qz=\text{常量}$$

与边界面平行.而等相位面

$$n_1k_0x\sin\theta_{\mathrm{i}}+pz-\omega t=\text{常量}$$

在任一给定时刻 t 是与入射面交角为 θ_{d}(它等于等相位面法向与介质分界面法向的交角)的平面,它一般与等幅面不重合.由于等相位面上不同的点处的波幅不同,故折射波是所谓的非均匀平面波.

波的相位传播方向与等相位面垂直,故角 θ_{d}是真正的折射角.因而**折射定律**可写为

$$k_{\mathrm{i}}\sin\theta_{\mathrm{i}}=\sqrt{p^2+n_1^2k_0^2\sin^2\theta_{\mathrm{i}}}\sin\theta_{\mathrm{d}} \tag{7.6.11}$$

或

$$n_1\sin\theta_{\mathrm{i}}=n_2'\sin\theta_{\mathrm{d}} \tag{7.6.12}$$

式中

$$n_2'=\frac{1}{k_0}\sqrt{p^2+n_1^2k_0^2\sin^2\theta_{\mathrm{i}}} \tag{7.6.13}$$

是**导电介质的等效折射率**.值得注意的是,n_2'不仅与导电介质的性质有关,而且依赖于电磁波的频率和入射角.

导电介质中折射波的相速度即等相位面传播的速度为

$$v_2'=\frac{c}{n_2'}=\frac{\omega}{k_0n_2'} \tag{7.6.14}$$

它也与入射角有关.

值得注意的是,场矢量具有沿折射波传播方向的分量,因而**导电介质中的折射波不是真正的横波**.事实上,正如前面(参见第三节)所指出的,在导电介质中一般情形下不存在与相位传播方向垂直的、电矢量 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{d}}$与磁矢量 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{d}}$均为线偏振的电磁波.

对于良导体,例如所有金属,$\sigma_2\gg\omega\varepsilon_2$;方程(7.6.4)具有近似解

$$\eta\approx\kappa\approx\sqrt{\frac{\sigma_2}{2\omega\varepsilon_0}}\approx\sqrt{\frac{\sigma_2\mu_2}{2\omega\varepsilon_0\mu_0}} \tag{7.6.15}$$

式中最后一步应用了替换(7.6.1).于是,方程(7.6.9)的解为

$$\begin{cases}p^2\approx\dfrac{1}{2}k_0^2[\sqrt{4\eta^4+n_1^4\sin^4\theta_{\mathrm{i}}}-n_1^2\sin\theta_{\mathrm{i}}]\\ q^2\approx\dfrac{1}{2}k_0^2[\sqrt{4\eta^4+n_1^4\sin^4\theta_{\mathrm{i}}}+n_1^2\sin\theta_{\mathrm{i}}]\end{cases} \tag{7.6.16}$$

由于 $\eta\approx\kappa\gg1$ 及 $n_1\approx O(1)$,上式可写为

$$p\approx q\approx\eta k_0\approx\sqrt{\frac{\omega\sigma_2\mu_2}{2}} \tag{7.6.17}$$

可见,折射波的振幅具有一个衰减因子

$$\exp\left[-z\sqrt{\frac{\omega\sigma_2\mu_2}{2}}\right]=\exp[-z/\delta]$$

式中

$$\delta=\frac{1}{q}=\sqrt{\frac{2}{\sigma_2\mu_2\omega}} \tag{7.6.18}$$

是趋肤深度.若是铜导体,$\sigma=5.8\times10^7\,\mathrm{S/m}$,$\delta(\omega=10\ \mathrm{MHz})\approx2.1\times10^{-5}\,\mathrm{m}$.可见高频电磁波仅能传播至导体内不远处,或者说高频电流只集中在导体表面很薄的一层内;这使得导线的电阻随频率增大而增大,导线的电感随频率增大而减小.对于理想导体 $\sigma\to\infty$,$\delta\to0$,因而电磁波不能穿入理想导体.

由(7.6.13)式知,良导体的等效折射率为

$$n_2'\approx\frac{p}{k_0}\approx\eta\approx\sqrt{\frac{\sigma_2}{2\omega\varepsilon_0}} \tag{7.6.19}$$

于是,折射定律成为

$$\sin\theta_d\approx\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_1}{\sigma_2}}\sin\theta_i \tag{7.6.20}$$

可见,折射角 θ_d对于良导体很小,对于理想导体则趋于零.因而,不论入射角如何,在良导体中折射波的传播方向基本上与边界面垂直,其等相位面与等幅面是近似重合的.

这样,对于良导体,折射波可写为

$$\boldsymbol{E}_d\approx\boldsymbol{E}_{d0}\exp[-qz]\exp[\mathrm{i}(pz-\omega t)]$$

$$\boldsymbol{H}_d\approx\frac{p}{\omega\mu_2}(1+\mathrm{i})[\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{E}_d] \tag{7.6.21}$$

由此易知,在良导体内电磁波的电矢量与磁矢量的相位相差 $\pi/4$.由于

$$\frac{\mu_2H_dH_d^*}{\varepsilon_2E_dE_d^*}=\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}\left(\frac{\sqrt{2}\eta\omega}{\mu_2\omega c}\right)^2=\frac{\sigma_2}{\omega\varepsilon_2}$$

故在良导体中电能与磁能相比小得可以忽略.换言之,良导体对于振荡电场实际上是不可穿透的.仅当导体的厚度与其趋肤深度差不多时,电磁波才可能穿过良导体.值得指出的是,在良导体内电磁波的衰减以及电能与磁能的差别都是由于 Joule 热效应造成的,也就是说是因为波的电能逐渐地消耗成为热能所致.

由(7.6.21)式可得电磁波透入导体表面的平均能流为

$$\langle \boldsymbol{s} \rangle = \frac{\omega \mu_2}{4p} |\boldsymbol{H}_{d0}|^2 \boldsymbol{e}_z = \frac{\omega \mu_2 \delta}{4} |\boldsymbol{H}_t|^2 \boldsymbol{e}_z \tag{7.6.22}$$

式中 $\boldsymbol{H}_t = (\boldsymbol{H}_{i0} + \boldsymbol{H}_{r0})_t$ 是导体表面外侧的磁场的切向分量，运算中利用了边值关系 $\boldsymbol{H}_t = (\boldsymbol{H}_{d0})_t$. 如果导体足够厚的话，透入导体表面的折射波的能量最终必将转化为 Joule 热而耗损掉. 因此，处于波场中的导体壁每单位表面积造成的功率耗损 N 等于透入导体表面的平均能流在 $\boldsymbol{e}_z$ 方向上的投影

$$N = \langle \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{e}_z \rangle = \frac{1}{2\sigma_2 \delta} |\boldsymbol{H}_t|^2 = \sqrt{\frac{\omega \mu_2}{8\sigma_2}} |\boldsymbol{H}_t|^2 \tag{7.6.23}$$

7.6.2 从导电介质表面上的反射波

由(7.6.8)式得

$$\begin{cases} \sin \theta_d' = \dfrac{1}{k_d'} n_1 k_0 \sin \theta_i \\ \cos \theta_d' = \dfrac{1}{k_d'} p + \mathrm{i}q \end{cases}$$

若入射波的电矢量垂直于入射面，反射波的振幅可由 Fresnel 公式(7.4.21)得到

$$\begin{aligned} \frac{E_r}{E_i} &= \frac{\sin \theta_d' \cos \theta_i - \sin \theta_i \cos \theta_d'}{\sin \theta_d' \cos \theta_i + \sin \theta_i \cos \theta_d'} \\ &= \frac{(n_1 k_0 \cos \theta_i - p) - \mathrm{i}q}{(n_1 k_0 \cos \theta_i + p) + \mathrm{i}q} = \rho_\perp \exp(-\mathrm{i}\phi_\perp) \end{aligned}$$

式中模为

$$\rho_\perp^2 = \frac{(n_1 k_0 \cos \theta_i - p)^2 + q^2}{(n_1 k_0 \cos \theta_i + p)^2 + q^2} \tag{7.6.24}$$

而相位改变为

$$\phi_\perp = \arctan \frac{q}{n_1 k_0 \cos \theta_i - p} + \arctan \frac{q}{n_1 k_0 \cos \theta_i + p} \tag{7.6.25}$$

或

$$\tan \phi_\perp = \frac{2 n_1 k_0 q \cos \theta_i}{(n_1 k_0 \cos \theta_i)^2 - (p^2 + q^2)} \tag{7.6.26}$$

对于良导体，利用

$$p \approx q \approx \eta k_0$$

与

$$\eta \approx \sqrt{\frac{\sigma_2}{2\omega \varepsilon_0}} \gg 1$$

可将式(7.6.24)与(7.6.26)近似为

$$\rho_{\perp}^{2}\approx\frac{(n_1\cos\theta_i-\eta)^2+\eta^2}{(n_1\cos\theta_i+\eta)^2+\eta^2}$$

$$=1-\frac{4\gamma\cos\theta_i}{(1+\gamma\cos\theta_i)^2+1}\approx1-2\gamma\cos\theta_i \tag{7.6.27}$$

$$\tan\phi_{\perp}\approx\frac{2n_1\eta\cos\theta_i}{n_1^2\cos^2\theta_i-2\eta^2}$$

$$=\frac{2\gamma\cos\theta_i}{\gamma^2\cos^2\theta_i-2}\approx-\gamma\cos\theta_i \tag{7.6.28}$$

式中

$$\gamma=\frac{n_1}{\eta}\approx\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_1}{\sigma_2}}\ll1 \tag{7.6.29}$$

若入射波的电矢量平行于入射面，为了避免繁复的计算，假设导体为良导体，因而有

$$\begin{cases}\sin\theta_d'=\dfrac{k_0n_1\sin\theta}{k_d'}\approx\dfrac{n_1\sin\theta_i}{\eta(1+i)}=\dfrac{\gamma\sin\theta_i}{1+i}\\[2ex]\cos\theta_d'=\dfrac{k_0\eta(1+i)}{k_d'}\approx1\end{cases} \tag{7.6.30}$$

类似地，由 Fresnel 公式(7.4.21)得到

$$-\frac{E_r}{E_i}=\frac{\sin\theta_i\cos\theta_i-\sin\theta_d'\cos\theta_d'}{\sin\theta_i\cos\theta_i+\sin\theta_d'\cos\theta_d'}$$

$$\approx\frac{(\cos\theta_i-\gamma)+i\cos\theta_i}{(\cos\theta_i+\gamma)+i\cos\theta_i}=\rho_{/\!/}\exp(-i\phi_{/\!/}) \tag{7.6.31}$$

式中模为

$$\rho_{/\!/}^{2}=\frac{(\cos\theta_i-\gamma)^2+\cos^2\theta_i}{(\cos\theta_i+\gamma)^2+\cos^2\theta_i} \tag{7.6.32}$$

而相位改变为

$$\phi_{/\!/}=\arctan\frac{\cos\theta_i}{\gamma-\cos\theta_i}+\arctan\frac{\cos\theta_i}{\gamma+\cos\theta_i}$$

$$\approx\arctan\frac{2\gamma\cos\theta_i}{\gamma^2-2\cos^2\theta_i} \tag{7.6.33}$$

或

$$\tan\phi_{/\!/}=\frac{2(n_1k_0/q)\cos\theta_i}{\gamma^2-2\cos^2\theta_i} \tag{7.6.34}$$

可以看出，对于良导体，反射系数 $r_{\perp}=\rho_{\perp}^2$ 与 $r_{/\!/}=\rho_{/\!/}^2$ 都接近于 1，且基本上与入射角无关. 正是由于这一特性，才能用良导体实现对电磁波的屏蔽，并将电

磁波用金属壁包围起来做成波导与谐振腔.

另外,p 与 q 的值越大,γ 的值便越小,反射系数 $r_{\perp}$ 与 $r_{/\!/}$ 也越接近于 1.因此,若对于某一频率,电磁波强烈地被吸收,则它也将强烈地被反射,因为这时 q 很大.于是,由透射光与反射光所展现的金属薄膜的颜色是互补的.例如,白光透过一片薄金铂后成为蓝色的.

正如全反射情形那样,从金属表面反射而导致的相位改变与入射波的偏振状态有关,也就是说入射波中与入射面垂直与平行的分量在反射时其相位发生不同的变化

$$\phi_{\perp} \neq \phi_{/\!/}$$

因此,若入射波是线偏振波,且其偏振面与入射面既不平行也不垂直,则相应的反射波是椭圆偏振的.

习题 7-6

1. 一平面电磁波从绝缘介质正入射到导电介质表面上,证明透入到金属内部的电磁波能量全部转化为 Joule 热.

2. 设在理想导体表面上涂有一层厚度均匀的绝缘介质膜.介质膜的介电常量和磁导率分别为 ϵ 和 μ_0,其厚度为 d.今有一束线偏振的平面电磁波垂直地射向导体表面,试求反射系数.

   提示:总的反射波场应为在介质膜中经多次反射后透到绝缘膜外的所有场的叠加.

   答案:$n=\sqrt{\epsilon/\epsilon_0}$,$r=\left|\dfrac{(1-n)+(1+n)e^{-i2kd}}{(1+n)+(1-n)e^{-i2kd}}\right|^2 \approx 1$

3. 一平面电磁波从绝缘介质正入射到导电介质表面上,绝缘介质的介电常量为 ε_1,导电介质的介电常量与电导率分别为 ε_2 与 σ_c,两介质的磁导率均为 $\mu_1=\mu_2=\mu_0$.

   证明:在低电导率的极限情形下,反射系数为

$$r=\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1}-\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}+\sqrt{\varepsilon_2}}\right)^2+\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{(\sqrt{\varepsilon_1}+\sqrt{\varepsilon_2})^4}\left(\frac{\sigma_c}{\omega}\right)^2 \tag{7.6.35}$$

   求反射时波的相位变化.

4. 一平面电磁波从绝缘介质正入射到导电介质表面上,绝缘介质的折射率为 n_1,导电介质的复折射率为 $\eta+i\kappa$.

   证明:反射波相对于入射波的相位变化 ϕ 为

$$\tan\phi=\frac{2n_1\kappa}{n_1^2-(\eta^2+\kappa^2)} \tag{7.6.36}$$

   并由此证明:若第二介质为良导体,相位变化 ϕ 总是接近于 π.

5. 一平面电磁波从绝缘介质入射到导电介质表面上,绝缘介质的介电常量为 ε_1,导电介质的介电常量与电导率分别为 ε_2 与 σ_c,两介质的磁导率均为 $\mu_1=\mu_2=\mu_0$.

   证明:对于斜入射情形,当入射波偏振方向平行于入射面且入射角不接近于 $\pi/2$ 时,反射波的能量近似等于入射波能量乘以下述因子:

$$1-2\sqrt{2\omega\epsilon_1/\sigma_c}\sec h\theta$$

当入射波偏振方向垂直于入射面时，反射波的能量近似等于入射波能量乘以下述因子：

$$1-2\sqrt{2\omega\epsilon_1/\sigma_c}$$

6. 单色平面电磁波由真空斜入射到非磁性的金属表面上，波偏振方向与入射面成 α 角. 若线偏振入射波的强度为 I_0，试确定反射波的强度与偏振态.

答案： $I=I_0(|r_{/\!/}|^2\cos^2\alpha+|r_\perp|^2\sin^2\alpha)$

当所谓金属的相对的表面阻抗 $|Z_{s,r}|=(\varepsilon_\omega/\varepsilon_0)^{-1/2}\ll 1$ 时，反射系数为

$$r_{/\!/}=\frac{\cos\theta-Z_{s,r}}{\cos\theta+Z_{s,r}},\qquad r_\perp=2Z_{s,r}\cos\theta-1$$

式中 θ 是入射角；在一般情形下，反射波为椭圆偏振波.

7. 一线偏振波 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_yE_0\sin(kz-\omega t+\phi_0)$，由真空入射到理想导体平面（$z=d$）上. 试求：

(1) 全空间中电磁场的表达式；

(2) 导体表面上的面电流；

(3) 导体表面上的辐射压力（即单位表面积上所受到的电磁场的作用力）；

(4) 当导体非理想时导体表面上的辐射压力.

答案： (1) $\boldsymbol{E}_{入}=\boldsymbol{e}_yE_0e^{i(kz-\omega t+\phi_0-\pi/2)}$

$$c\boldsymbol{B}_{入}=-\boldsymbol{e}_xE_0e^{i(kz-\omega t+\phi_0-\pi/2)}$$

$$\boldsymbol{E}_{反}=-\boldsymbol{e}_zE_0e^{i(-kz-\omega t+2kd+\phi_0-\pi/2)}$$

$$c\boldsymbol{B}_{反}=-\boldsymbol{e}_xE_0e^{i(-kz-\omega t+2kd+\phi_0-\pi/2)}$$

$$\boldsymbol{E}_{折}=0,\qquad \boldsymbol{B}_{折}=0$$

(2) $\boldsymbol{\Pi}=\dfrac{2E_0}{\mu_0 c}\cos(kz-kd)\sin(kd-\omega t+\phi_0)\boldsymbol{e}_y$

(3) $\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{n}\cdot\mathscr{T}=2\varepsilon_0E_0^2\sin(kd-\omega t+\phi_0)\boldsymbol{e}_z$

8. 设区域 $x\leqslant 0$ 为理想导体. 一频率为 ω、沿 $\boldsymbol{e}_z$ 方向传播的电磁波掠入射到理想导体表面（$x=0$）上，入射波为

$$\boldsymbol{E}=[\boldsymbol{e}_x\cos\phi_0+\boldsymbol{e}_y\sin\phi_0]E_0\exp[i(kz-\omega t)]$$

(1) 求 $x>0$ 区域的电磁场分布；

(2) 若导体是良导体，其有限电导率为 σ_c，求单位面积上的功耗 N.

答案： (1) $\boldsymbol{E}_{反}=[\boldsymbol{e}_x\cos\phi_0-\boldsymbol{e}_y\sin\phi_0]\exp[i(kz-\omega t)]$

$$c\boldsymbol{B}_{反}=\boldsymbol{E}_{反}\times\boldsymbol{k}/\omega$$

(2) $N\approx\dfrac{1}{2\delta\sigma_c}\left(\dfrac{2}{\mu_0 c}E_0\cos\phi_0\right)^2$

第八章　波导与谐振腔

本章先建立波导中电磁场的运动规律，接着介绍电磁波在波导中的传播，再考察谐振腔中的电磁振荡，进而研究同轴传输线理论以及电介质波导理论.

§8.1 波导管中场的运动规律

由于趋肤效应，入射到良导体面上的电磁波将被反射且损耗很小.若导体面是理想的，则导体的趋肤深度为零，电磁波将全部被反射.因而，良导体表面构成了电磁场存在区域的边界，而良导体内部成了电磁场传播的禁区.于是，采用各种形状的良导体面便可以限制或引导电磁波在受限(即由导体面所限定的)空间(绝缘介质)中传播.这种被引导而传播的电磁波称为导波，而起引导作用的导体面称为波导.波导可以做成线状、面状、管状和箱状.最常用的是线状、管状和箱状，分别称为传输线、波导管和谐振腔.现考察波导管中电磁场的运动规律，包括电磁场所遵从的运动方程与边界条件.

设波导中充满了各向同性、线性均匀的绝缘介质.波导壁 S 均为理想导体面.则波导中的单色电磁场满足 Helmholtz 方程

$$[\nabla^2 + k^2](\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}) = 0, \qquad k^2 = \mu\varepsilon\omega^2 \tag{8.1.1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = \mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}, \text{或} \quad \nabla \times \boldsymbol{H} = -\mathrm{i}\omega\boldsymbol{D}, \qquad \text{在腔中} \tag{8.1.2}$$

及理想导体边界条件

$$(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E})|_S = 0 \tag{8.1.3}$$

$$(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{H})|_S = 0 \tag{8.1.4}$$

式中 $\boldsymbol{n}$ 是导体面的外法向(指向波导腔内).注意，(8.1.2)已自动满足物理条件

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0 \tag{8.1.5}$$

而边界条件(8.1.3)与(8.1.4)即为

$$\boldsymbol{E}_t|_S = 0 \tag{8.1.6}$$

$$\boldsymbol{H}_n|_S = 0 \tag{8.1.7}$$

式中，下标 t 或 n 分别表示相应的矢量与边界面平行或垂直的分量.

为了方便起见，还需要关于 $\boldsymbol{E}_n$ 或 $\boldsymbol{H}_t$ 的边界条件.它们是

$$\left.\frac{\partial(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{E})}{\partial n}\right|_S = 0 \tag{8.1.8}$$

$$\left.\frac{\partial(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H})}{\partial n}\right|_S = 0 \tag{8.1.9}$$

即

$$\partial \boldsymbol{E}_n/\partial n|_S = 0 \tag{8.1.10}$$

$$\partial \boldsymbol{H}_t/\partial n|_S = 0 \tag{8.1.11}$$

可见，在理想导体外表面上，切向电场为零，法向电场的法向梯度亦为零；法向磁场为零，切向磁场的法向梯度也为零.

证明：先证(8.1.10)式.利用物理条件(8.1.5)的第一式可得

$$\nabla\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E})=\boldsymbol{n}\,\nabla\cdot\boldsymbol{E}-\boldsymbol{n}\cdot\nabla\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial n}$$

再利用边界条件(8.1.3)有

$$0=\left.\frac{\partial\boldsymbol{E}_{\mathrm{n}}}{\partial n}\right|_S+\left.\frac{\partial\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}}}{\partial n}\right|_S=\left.\frac{\partial\boldsymbol{E}_{\mathrm{n}}}{\partial n}\right|_S$$

再证(8.1.11)式.利用(8.1.2)第二式可得

$$-\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{n}\times(\nabla\times\boldsymbol{H})=\nabla(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{H})-\boldsymbol{n}\cdot\nabla\boldsymbol{H}$$

再利用边界条件(8.1.3)与(8.1.4)有

$$0=\left.\frac{\partial\boldsymbol{H}_{\mathrm{n}}}{\partial n}\right|_S+\left.\frac{\partial\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}}}{\partial n}\right|_S=\left.\frac{\partial\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}}}{\partial n}\right|_S$$

证毕.

一旦求出腔中的电磁场,导体边界面上面电荷与面电流分布便可由下式决定:

$$\sigma=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}_S\qquad\boldsymbol{\Pi}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}_S\tag{8.1.12}$$

现考察一具有相同的横截面的单连通(即管中任一闭合曲线均可连续收缩成一点)直波导管(这里所谓"直"是指波导管纵向处处与波导管壁平行),管内无源且充满各向同性、线性均匀的介质.取波导管延伸方向(即电磁波的传播方向)为 $\boldsymbol{e}_z$ 方向,则方程(8.1.1)的解具有以下形式:

$$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{H})=(\boldsymbol{E}_0(x,y),\boldsymbol{H}_0(x,y))\exp[\mathrm{i}(k_z z-\omega t)]\tag{8.1.13}$$

式中场的振幅$(\boldsymbol{E}_0(x,y),\boldsymbol{H}_0(x,y))$满足方程

$$(\nabla_{\mathrm{t}}^2+k_{\mathrm{c}}^2)(\boldsymbol{E}_0(x,y),\boldsymbol{H}_0(x,y))=0\tag{8.1.14}$$

其中

$$\nabla_{\mathrm{t}}=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}\tag{8.1.15}$$

是横向梯度算符,而

$$k^2=\omega^2\mu\varepsilon=k_z^2+k_{\mathrm{c}}^2\tag{8.1.16}$$

式中 k_{c} 由振幅方程(8.1.14)决定.注意到在线性介质中,振幅方程与 k_z 和 ω 无关,因而 k_{c} 亦与 k_z 和 ω 无关.故(8.1.16)给出了导波的波数 k_z 与频率 ω 之间的关系,即**色散关系**.

将解(8.1.13)代入 Maxwell 方程$\nabla\times\boldsymbol{E}=\mathrm{i}\omega\boldsymbol{B}$ 得

$$\begin{cases}\partial E_{0z}/\partial x=\mathrm{i}[k_z E_{0x}-\omega B_y]\\ \partial E_{0z}/\partial y=\mathrm{i}[k_z E_{0y}+\omega B_x]\end{cases}\tag{8.1.17}$$

同样,由$\nabla\times\boldsymbol{B}=-\mathrm{i}\omega\mu\varepsilon\boldsymbol{E}$ 得

$$\begin{cases}\partial H_{0z}/\partial x=\mathrm{i}[k_z H_{0x}+\omega D_y]\\ \partial H_{0z}/\partial y=\mathrm{i}[k_z H_{0y}-\omega D_x]\end{cases}\tag{8.1.18}$$

由 Maxwell 方程可得到另外四个关系式，但它们可从以上四个关系式推出．由这些关系式可将场的横向分量用纵向分量表示出来，便得到所谓**导方程**（即横场振幅公式）

$$\begin{cases} E_{0x}=\dfrac{\mathrm{i}}{k_c^2}\left(\omega\dfrac{\partial B_{0z}}{\partial y}+k_z\dfrac{\partial E_{0z}}{\partial x}\right) \\ E_{0y}=\dfrac{-\mathrm{i}}{k_c^2}\left(\omega\dfrac{\partial B_{0z}}{\partial x}-k_z\dfrac{\partial E_{0z}}{\partial y}\right) \\ H_{0x}=\dfrac{-\mathrm{i}}{k_c^2}\left(\omega\dfrac{\partial D_{0z}}{\partial y}-k_z\dfrac{\partial H_{0z}}{\partial x}\right) \\ H_{0y}=\dfrac{\mathrm{i}}{k_c^2}\left(\omega\dfrac{\partial D_{0z}}{\partial x}+k_z\dfrac{\partial H_{0z}}{\partial y}\right) \end{cases} \tag{8.1.19}$$

或写为

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_{0t}=\dfrac{\mathrm{i}}{k_c^2}[k_z\nabla_t E_{0z}-\omega(\boldsymbol{e}_z\times\nabla_t B_{0z})] \\ \boldsymbol{H}_{0t}=\dfrac{\mathrm{i}}{k_c^2}[\omega(\boldsymbol{e}_z\times\nabla_t D_{0z})+k_z(\nabla_t H_{0z})] \end{cases} \tag{8.1.20}$$

此处的虚数单位 i 因子的存在意味着横场振幅与纵场振幅的相对相位为 $\pm\pi/2$．

由此可见，在 $\boldsymbol{e}_x$ 与 $\boldsymbol{e}_y$ 方向均受限的波导管中的电磁波具有以下特点：

(a) 场的纵向分量 E_{0z} 与 B_{0z} 决定了整个场分布．

(b) 不能传播场的纵向分量 E_{0z} 与 B_{0z} 均为零的横电磁波即 TEM 波．（注意，这是与无界空间中的电磁波的不同之处，后者只能是横电磁波．）

(c) 可以传播 $E_{0z}=0$ 与 $B_{0z}\neq 0$ 的横电型电磁波即 TE 波以及 $E_{0z}\neq 0$ 与 $B_{0z}=0$ 的横磁型电磁波即 TM 波或这两种类型的波的叠加．

(d) [作为(a)的推论]对于一定的频率 ω 与波矢 k_z，至多只有两种可传播的波（例如 TE 波与 TM 波）是相互独立的．因而，电磁波的自由度与无界空间中的相同，都是 2．

下面简要描述 TM 波与 TE 波的特点．

TE 波：$E_z=0$，电磁场完全由唯一非零的纵向感应磁场 B_z 决定．相应的导方程是

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_{0t}=\dfrac{-\mathrm{i}\omega}{k_c^2}\boldsymbol{e}_z\times\nabla_t B_{0z} \\ \boldsymbol{H}_{0t}=\dfrac{\mathrm{i}k_z}{k_c^2}\nabla_t H_{0z} \end{cases} \tag{8.1.21}$$

而纵向磁场振幅 B_{0z} 满足方程

$$(\nabla_t^2+k_c^2)H_{0z}(x,y)=0 \tag{8.1.22}$$

相应的边界条件(作为零级近似)可取理想导体边界条件,注意到对于直波导管,管的延伸方向 $\boldsymbol{e}_z$ 与管壁相切便有

$$\partial B_{0z}/\partial n\,|_{\text{管壁}}=0 \tag{8.1.23}$$

这是在第二类边值条件下求解二维 Helmholtz 方程的本征值问题.

TM 波: $B_z=0$,电磁场完全由唯一非零的纵向感应电场 E_z 决定.相应的导方程是

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_{0\mathrm{t}}=\dfrac{\mathrm{i}k_z}{k_{\mathrm{c}}^2}\nabla_{\mathrm{t}}E_{0z}\\[2ex]\boldsymbol{H}_{0\mathrm{t}}=\dfrac{\mathrm{i}\omega}{k_{\mathrm{c}}^2}\boldsymbol{e}_z\times\nabla_{\mathrm{t}}D_{0z}\end{cases} \tag{8.1.24}$$

而纵向电场振幅 E_{0z} 满足方程

$$(\nabla_{\mathrm{t}}^2+k_{\mathrm{c}}^2)E_{0z}(x,y)=0 \tag{8.1.25}$$

相应的理想导体边界条件为

$$E_{0z}\,|_{\text{管壁}}=0 \tag{8.1.26}$$

这是在第一类边值条件下求解二维 Helmholtz 方程的本征值问题.

习题 8-1

1. 求一对相距为 b 的无限大理想导体平板所构成的波导中可能传播的波型的场分布.

答案:取垂直于板面的方向为 y 轴,设电磁波沿着平行于板面的 $\boldsymbol{e}_z$ 方向传播,则此波导中能传播的电磁波的非零场分量为

TE 波:

$$E_x=-\mathrm{i}\frac{ck_0}{k_{\mathrm{c}}^2}\frac{n\pi}{b}B_0\sin\frac{n\pi y}{b}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)}$$

$$B_y=-\mathrm{i}\frac{ck_z}{k_{\mathrm{c}}^2}\frac{n\pi}{b}B_0\sin\frac{n\pi y}{b}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)}$$

$$B_z=B_0\cos\frac{n\pi y}{b}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)}$$

$$k_{\mathrm{c}}=\frac{n\pi}{b},\qquad k_z=\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

TM 波:

$$B_x=-\mathrm{i}\frac{k_0}{ck_{\mathrm{c}}^2}\frac{n\pi}{b}E_0\cos\frac{n\pi y}{b}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)}$$

$$E_y=-\mathrm{i}\frac{k_z}{k_{\mathrm{c}}^2}\frac{n\pi}{b}E_0\cos\frac{n\pi y}{b}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)}$$

$$E_z=E_0\sin\frac{n\pi y}{b}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)}$$

$$k_{\mathrm{c}}=\frac{n\pi}{b},\qquad k_z=\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

2. 设波导内充满各向同性、线性均匀的介质.对于在波导中传播的单色电磁波,引入 Hertz 矢量 $\boldsymbol{\Pi}$,使它满足

$$\begin{cases} \boldsymbol{E} = \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\Pi}) \\ \boldsymbol{B} = -\mathrm{i}\omega\mu\varepsilon\ \nabla \times \boldsymbol{\Pi} \end{cases} \tag{8.1.27}$$

试证：

(1) Hertz 矢量 $\boldsymbol{\Pi}$ 应满足的方程是

$$[\nabla^2 + k^2]\boldsymbol{\Pi} = 0, \quad \text{或} \quad [\nabla^2 + k^2]\boldsymbol{\Pi} = \nabla\chi \tag{8.1.28}$$

式中 χ 是任意的标量函数，$k^2 = \omega^2\mu\varepsilon$，且由 Hertz 矢量 $\boldsymbol{\Pi} = \Pi\boldsymbol{e}_z$ 确定的电磁波(8.1.27)是 TM 型波.

(2) 由 Hertz 矢量 $\boldsymbol{\Pi} = \Pi\boldsymbol{e}_z$ 确定的另一电磁波

$$\begin{cases} \boldsymbol{H} = \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\Pi}) \\ \boldsymbol{D} = \mathrm{i}\omega\mu\varepsilon\ \nabla \times \boldsymbol{\Pi} \end{cases} \tag{8.1.29}$$

也是波导中可能存在的波，且是 TE 型波.

3. 证明：在理想的波导中，

(1) 时平均能流方向平行于波导轴；

(2) 对于 TM 波型，面电流是纵向的.

§8.2 矩形波导

设波导管是由理想导体平面 $x=0$、$x=a$、$y=0$ 和 $y=b$ 围成，如下图所示.

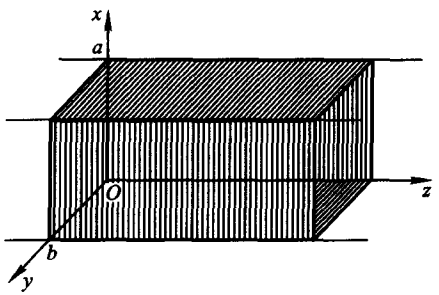


图 8.1 矩形波导管

由前面的结论可知，TE 波的纵向场振幅 H_{0z} 满足方程

$$(\nabla_t^2 + k_c^2)H_{0z}(x,y) = 0 \tag{8.2.1}$$

及边界条件

$$\partial H_{0z}/\partial x|_{x=0,a} = 0, \quad \partial H_{0z}/\partial y|_{y=0,b} = 0 \tag{8.2.2}$$

其解为

$$H_{0z} = H_0 \cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b} \tag{8.2.3}$$

式中 m 与 n 是不同时为零的整数(否则相应的电场为零).

而 TM 波的纵向场振幅 E_{0z} 则满足方程

$$(\nabla_t^2 + k_c^2)E_{0z}(x,y) = 0 \tag{8.2.4}$$

及边界条件

$$E_{0z}|_{x=0,a} = 0, \qquad E_{0z}|_{y=0,b} = 0 \tag{8.2.5}$$

其解为

$$E_{0z} = E_0 \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{8.2.6}$$

式中 m 与 n 都是不为零的整数(否则相应的电场为零).

由导方程立得相应的横场结构,因而波导管中可传播的电磁波是非零场振幅为

$$\begin{cases} E_{0x} = -\dfrac{\mathrm{i}}{k_c^2}\dfrac{\omega n\pi}{b}B_0\cos\dfrac{m\pi x}{a}\sin\dfrac{n\pi y}{b} \\ E_{0y} = \dfrac{\mathrm{i}}{k_c^2}\dfrac{\omega m\pi}{a}B_0\sin\dfrac{m\pi x}{a}\cos\dfrac{n\pi y}{b} \\ H_{0x} = \dfrac{-\mathrm{i}k_z m\pi}{k_c^2}\dfrac{}{a}H_0\sin\dfrac{m\pi x}{a}\cos\dfrac{n\pi y}{b} \\ H_{0y} = \dfrac{\mathrm{i}}{k_c^2}\dfrac{k_z n\pi}{b}H_0\cos\dfrac{m\pi x}{a}\sin\dfrac{n\pi y}{b} \\ H_{0z} = H_0\cos\dfrac{m\pi x}{a}\cos\dfrac{n\pi y}{b} \end{cases} \tag{8.2.7}$$

的 TE 波(或称 H 波,记为 H_{mn} 或 TE_{mn})和非零场振幅为

$$\begin{cases} E_{0x} = \dfrac{\mathrm{i}}{k_c^2}\dfrac{k_z m\pi}{a}E_0\cos\dfrac{m\pi x}{a}\sin\dfrac{n\pi y}{b} \\ E_{0y} = \dfrac{\mathrm{i}}{k_c^2}\dfrac{k_z n\pi}{b}E_0\sin\dfrac{m\pi x}{a}\cos\dfrac{n\pi y}{b} \\ E_{0z} = E_0\sin\dfrac{m\pi x}{a}\sin\dfrac{n\pi y}{b} \\ H_{0x} = \dfrac{-\mathrm{i}\omega n\pi}{k_c^2}\dfrac{}{b}D_0\sin\dfrac{m\pi x}{a}\cos\dfrac{n\pi y}{b} \\ H_{0y} = \dfrac{\mathrm{i}}{k_c^2}\dfrac{\omega m\pi}{a}D_0\cos\dfrac{m\pi x}{a}\sin\dfrac{n\pi y}{b} \end{cases} \tag{8.2.8}$$

的 TM 波(或称 E 波,记为 E_{mn} 或 TM_{mn})的线性叠加,行波因子为 $\exp[\mathrm{i}(k_z z - \omega t)]$. 不同的整数对 (m,n) 对应不同的场结构,即不同的波型或模式.

在 TE 波与 TM 波两种情形下均有

$$k_c^2 = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \tag{8.2.9}$$

由此可得色散关系为

$$k_z=\sqrt{k^2-k_c^2}=\sqrt{(\omega^2-\omega_c^2)\mu\varepsilon} \tag{8.2.10}$$

式中

$$\omega_c=\frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}} \tag{8.2.11}$$

称为波导管的截止频率,它由波导管本身的结构决定.

现分析截止频率的物理意义:

(a) 当电磁波频率 ω 大于截止频率 ω_c 时,电磁波的波数

$$k_z=\text{实数}$$

因而,电磁波具有正常的行波因子 $\exp[\mathrm{i}(k_z z-\omega t)]$,从而可在波导管中传播.

(b) 当电磁波频率 ω 小于截止频率 ω_c 时,

$$k_z=\mathrm{i}/\delta\big|_{\delta=\text{实数}}$$

因而,电磁波的"行波因子"成为

$$\exp\left(-\frac{z}{\delta}-\mathrm{i}\omega t\right)$$

其振幅随着 z 增大呈指数衰减,因而不可能在波导管中传播.

(c) 当电磁波频率 ω 等于截止频率 ω_c 时,k_z 为零,电磁波在 $z=0$ 平面上震荡而不前进,处于临界状态.

(d) 波导管的截止频率与波的模式有关.由于对于 TE 波,m 与 n 中只有一个可取零;对于 TM 波,m 与 n 中都不能取零.因而,在矩形波导中可传播的 H_{10}、H_{01} 和 E_{11} 波型可能具有相应模式中最低的截止频率:

$$\omega_c(H_{10})=\frac{\pi}{a\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

$$\omega_c(H_{01})=\frac{\pi}{b\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

$$\omega_c(E_{11})=\frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}$$

特别是,若 $a>b$,则 H_{10} 波(或称为 TE_{10} 波)具有最低的截止频率,相应的截止波长为

$$\lambda_c(H_{10})=\frac{v}{f_c}=\frac{1/\sqrt{\mu\varepsilon}}{1/(2a\sqrt{\mu\varepsilon})}=2a$$

令相位 $k_z z-\omega t=$ 常量,便可求得波导中电磁波的相速度

$$v_p=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\omega}{k_z}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1-\omega_c^2/\omega^2}} \tag{8.2.12}$$

注意到输入的电磁波不可能是完全的单色波,总是具有以某一频率为中心的极

窄的频谱宽度.这些不同频率波叠加成波群.整个波群的传播速度即群速度则为

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k_z} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{1-\omega_c^2/\omega^2} \tag{8.2.13}$$

可见,波导中的导波的相速度与群速度都与波的频率有关(这种现象被称为色散效应),这是由于波导壁的电磁性质所造成的.

习题 8-2

1. 证明:在矩形波导中不存在 TM_{m0} 与 TM_{0n} 波型.

2. 频率为 3×10^{10} Hz 的电磁波,在 0.7 cm×0.6 cm 的矩形波导能传播的波型有哪些?

   答案: TE_{10};TE_{01}.

3. 如果要在矩形波导中传播频率为 4×10^{9} Hz 的 TE_{10} 型波,应如何选择波导管的尺寸才能防止 TE_{20} 型波出现?

   答案: 3.75 cm$<a<$7.5 cm.

4. 写出矩形波导中 TE_{10} 型波的场分布及其管壁电流分布,并说明其特点.

5. 对于在横截面为 $a\times b$ 的无耗矩形波导中的 TE_{10} 波型,求

   (1) 波导中每单位长度的平均电能;

   (2) 波导中每单位长度的平均磁能.从而证明波导中每单位长度的总电磁能为 $E_0^2\varepsilon_0 ab/4$,其中 E_0 是电场的振幅.

   答案: $E_0^2\varepsilon_0 ab/8$;$E_0^2\varepsilon_0 ab/8$.

6. 有一沿 $\boldsymbol{e}_z$ 方向无限长、横截面为 $a\times b$ 的无耗矩形波导,在 $z=0$ 处被一块垂直插入的理想导体平板完全封闭.求在 $z=-\infty$ 到 $z=0$ 这段波导中可能存在的波型.

   答案:
   $$E_x = A_1\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\sin k_z z$$
   $$E_y = A_2\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\sin k_z z$$
   $$E_z = A_3\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\cos k_z z$$
   式中 $k_z=\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2-\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$,$A_1\frac{m\pi}{a}+A_2\frac{n\pi}{b}+A_3k_z=0$

7. 一频率为 ω 的 TE 型波在充有空气的矩形波导内传播,其磁场的纵向分量为
   $$H_z = H_0\cos\frac{\pi x}{3a}\cos\frac{\pi y}{3b}\exp[\mathrm{i}(k_z z-\omega t)]$$
   求波导内的电磁场、截止波长和导波波长.

   答案: 波导内的电磁场的非零分量为
   $$E_x = -\mathrm{i}\frac{3a\omega}{2\pi}B_0\cos\frac{\pi x}{3a}\sin\frac{\pi y}{3a}\exp[\mathrm{i}(k_z z-\omega t)]$$
   $$E_y = \mathrm{i}\frac{3a\omega}{2\pi}B_0\sin\frac{\pi x}{3a}\cos\frac{\pi y}{3a}\exp[\mathrm{i}(k_z z-\omega t)]$$
   $$H_x = -\mathrm{i}\frac{3ak_z}{2\pi}H_0\sin\frac{\pi x}{3a}\cos\frac{\pi y}{3a}\exp[\mathrm{i}(k_z z-\omega t)]$$

$$H_y = \mathrm{i}\frac{3ak_z}{2\pi}H_0\cos\frac{\pi x}{3a}\sin\frac{\pi y}{3a}\exp[\mathrm{i}(k_z z-\omega t)]$$

$$H_z = H_0\cos\frac{\pi x}{3a}\cos\frac{\pi y}{3a}\exp[\mathrm{i}(k_z z-\omega t)]$$

式中，$k_z=\sqrt{\omega^2/c^2-2\pi^2/(9a^2)}$；截止波长为 $\lambda_c=3\sqrt{2}\,a$；导波波长为 $\lambda=\dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega^2/c^2-2\pi^2/(9a^2)}}$.

§8.3 圆柱形波导

设波导管是由围绕 z 轴的半径为 a 的理想导体柱面构成，则波导中电磁波的纵场振幅 $\psi(E_{0z}$ 或 $B_{0z})$ 满足柱坐标系中的 Helmholtz 方程

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+k_c^2\right]\psi(\rho,\phi)=0 \tag{8.3.1}$$

及边界条件

$$\begin{cases}\psi|_{\rho=0}=\text{有限}\\ \psi|_{\rho=a}=0, & \text{当 } \psi=E_{0z}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}\psi|_{\rho=a}=0, & \text{当 } \psi=H_{0z}\end{cases} \tag{8.3.2}$$

令

$$\psi(\rho,\phi)=R(\rho)\Phi(\phi) \tag{8.3.3}$$

则原方程分离为两个方程：

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\phi^2}+m^2\right]\Phi=0 \tag{8.3.4}$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}+\left(k_c^2-\frac{m^2}{\rho^2}\right)\right]R=0 \tag{8.3.5}$$

由于解必须是单值的，方程(8.3.4)的解为

$$\Phi=\exp(\mathrm{i}m\phi),\qquad m=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{8.3.6}$$

由于解在原点有限，m 阶 Bessel 方程(8.3.5)的解为

$$R=\mathrm{J}_m(k_c\rho),\quad m=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{8.3.7}$$

因而通解为

$$\psi(\rho,\phi)=\mathrm{J}_m(k_c\rho)[A_1\exp(\mathrm{i}m\Phi)+A_2\exp(-\mathrm{i}m\Phi)] \tag{8.3.8}$$

或表为

$$\psi(\rho,\phi)=A\cos(m\phi+\delta_m)\mathrm{J}_m(k_c\rho) \tag{8.3.9}$$

式中 A_1、A_2 或 A、δ_m 是待定常数. 由波导管壁上的边界条件得

$$\begin{cases}\mathrm{J}_m(k_c a)=0, & \text{对 TM 波}\\ \mathrm{J}'_m(k_c a)=0, & \text{对 TE 波}\end{cases} \tag{8.3.10}$$

设 ν_{mn} 与 ν'_{mn} 分别为 $\mathrm{J}_m(x)$ 与 $\mathrm{J}'_m(x)$ 的第 n 个根(它们具有无穷多个根,这里将它们从小到大排列),即

$$\begin{cases}\mathrm{J}_m(\nu_{nl})=0, & \text{对 TM 波}\\ \mathrm{J}'_m(\nu'_{mn})=0, & \text{对 TE 波}\end{cases} \tag{8.3.11}$$

则 TM 波与 TE 波的色散关系为

$$k_z=\sqrt{(\omega^2-\omega_c^2)\mu\varepsilon}$$

式中 TM 波与 TE 波的截止频率分别为

$$\begin{cases}\omega_c=\dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\dfrac{\nu_{mn}}{a}, & \text{对 TM 波}\\ \omega_c=\dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\dfrac{\nu'_{mn}}{a}, & \text{对 TE 波}\end{cases} \tag{8.3.12}$$

相应的截止波长是

$$\begin{cases}\lambda_c=\dfrac{2\pi a}{\nu_{mn}}, & \text{对 TM 波}\\ \lambda_c=\dfrac{2\pi a}{\nu'_{mn}}, & \text{对 TE 波}\end{cases} \tag{8.3.13}$$

对于 TM 波,最低波型(具有最小根 ν_{mn})为 E_{01},相应的最低截止频率和最大截止波长为

$$\omega_c(E_{01})=2.405\frac{1}{a\sqrt{\mu\varepsilon}},\qquad \lambda_c(E_{01})=2.613a \tag{8.3.14}$$

对于 TE 波,最低波型为 H_{11}($\nu'_{01}=3.832$,$\nu'_{11}=1.841$),相应的最低截止频率和最大截止波长为

$$\omega_c(H_{11})=1.841\frac{1}{a\sqrt{\mu\varepsilon}},\qquad \lambda_c(H_{11})=3.413a \tag{8.3.15}$$

可见,最大截止波长比波导的孔径略大.

将导方程(8.1.20)改写成柱坐标形式:

$$\begin{cases}E_\rho=\dfrac{\mathrm{i}}{k_c^2}\left(k_z\dfrac{\partial E_{0z}}{\partial\rho}+\omega\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial B_{0z}}{\partial\phi}\right)\\ E_\phi=\dfrac{-\mathrm{i}}{k_c^2}\left(\omega\dfrac{\partial B_{0z}}{\partial\rho}-k_z\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial E_{0z}}{\partial\phi}\right)\\ H_\rho=\dfrac{\mathrm{i}}{k_c^2}\left(k_z\dfrac{\partial H_{0z}}{\partial\rho}-\omega\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial D_{0z}}{\partial\phi}\right)\\ H_\phi=\dfrac{\mathrm{i}}{k_c^2}\left(\omega\dfrac{\partial D_{0z}}{\partial\rho}+k_z\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial H_{0z}}{\partial\phi}\right)\end{cases} \tag{8.3.16}$$

波导中 TM_{mn} 型波的场结构为

$$\begin{cases} E_\rho = A\dfrac{\mathrm{i}k_z}{k_c}\cos(m\phi+\delta_m)J'_n(k_c\rho)\exp[\mathrm{i}(k_zz-\omega t)] \\ E_\phi = -A\dfrac{\mathrm{i}k_z}{k_c^2}\dfrac{m}{\rho}\sin(m\phi+\delta_m)J_m(k_c\rho)\exp[\mathrm{i}(k_zz-\omega t)] \\ E_z = A\cos(m\phi+\delta_m)J_m(k_c\rho)\exp[\mathrm{i}(k_zz-\omega t)] \\ H_\rho = A\dfrac{\mathrm{i}k_z\omega\varepsilon}{k_c^2}\dfrac{m}{\rho}\sin(m\phi+\delta_m)J_m(k_c\rho)\exp[\mathrm{i}(k_zz-\omega t)] \\ H_\phi = A\dfrac{\mathrm{i}\omega\varepsilon}{k_c}\cos(m\phi+\delta_m)J'_m(k_c\rho)\exp[\mathrm{i}(k_zz-\omega t)] \\ H_z = 0 \end{cases} \tag{8.3.17}$$

TE_{mn}型波的场结构为

$$\begin{cases} E_\rho = -A\dfrac{\mathrm{i}\omega\varepsilon}{k_c^2}\dfrac{m}{\rho}\sin(m\phi+\delta_m)J_m(k_c\rho)\exp[\mathrm{i}(k_zz-\omega t)] \\ E_\phi = -A\dfrac{\mathrm{i}\omega\varepsilon}{k_c}\cos(m\phi+\delta_m)J'_m(k_c\rho)\exp[\mathrm{i}(k_zz-\omega t)] \\ E_z = 0 \\ H_\rho = A\dfrac{\mathrm{i}k_z}{k_c}\cos(m\phi+\delta_m)J'_m(k_c\rho)\exp[\mathrm{i}(k_zz-\omega t)] \\ H_\phi = -A\dfrac{\mathrm{i}k_z}{k_c^2}\dfrac{m}{\rho}\sin(m\phi+\delta_m)J_m(k_c\rho)\exp[\mathrm{i}(k_zz-\omega t)] \\ H_z = A\cos(m\phi+\delta_m)J_m(k_c\rho)\exp[\mathrm{i}(k_zz-\omega t)] \end{cases} \tag{8.3.18}$$

当 $m=0$ 时，导波的场是轴对称的，与 ϕ 角无关，称为“主波”. E_{01} 波便是一种“主波”. 它具有轴对称的纵向电场与径向电场，常被用于直线加速器中加速带电粒子.

值得注意的是，在矩形波导中，TM 波与 TE 波的 k_c 形式相同，而 E_{0z} 与 B_{0z} 的结构不同；但在圆柱形波导中，TM 波与 TE 波的 k_c 完全不同，而 E_{0z} 与 B_{0z} 的结构却是相同的. 不论是矩形波导还是圆柱形波导，TM 波与 TE 波的场结构都在对偶变换

$$\boldsymbol{E}/c \to \boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{B} \to -\boldsymbol{E}/c$$

下互变.

通常使用三种方法在波导中激发或接收一种特定模式的波：

(a) 在波导的一端放上与所需波型的电场方向平行的耦合针或直导体天线，或者放入一个导体圈使其面与所需波型的磁场方向垂直；在每种情形下所放位置都应接近波的最大强度处.

(b) 波导体系也可通过小孔或缝耦合到激发源，但所需要的波型与激发源

之间必须有共同的场分量.

(c) 用无线电波源在波导壁合适的方向上激发电流,从而在波导中诱导出所需的波型.

若波导足够大,则一般可激发出许多模式,且不止一个模式可在波导中传播.然而,波导常常被设计成仅让一个模式通过.

习题 8-3

1. 试决定 E_{01} 波型的场结构.由此说明其场位形是轴对称的;并指出波导中电场线与磁感应线分布的大致特点.
2. 试决定 H_{01} 波型的场结构.

§8.4　波导中的能量传输与损耗

波导中的功率传输

波导中的时平均传输功率是通过波导管横截面 A 的时平均能流

$$\langle P\rangle=\int_A \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}\cdot\langle \boldsymbol{s}\rangle \tag{8.4.1}$$

而时平均能流为

$$\langle \boldsymbol{s}\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{s}(t)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\} \tag{8.4.2}$$

式中,T 是单色电磁场的周期,这里已考虑到单色场对时间的依赖关系为 $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$.于是有

$$\langle P\rangle=\frac{1}{2}\int_A \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}\cdot\mathrm{Re}\{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\}=\frac{1}{2}\int_S \mathrm{d}\Sigma\mathrm{Re}\{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\}_z \tag{8.4.3}$$

这里,已注意到在沿 z 轴延伸的长直波导管中,波导中的能流方向亦为纵向,即 $\pm\boldsymbol{e}_z$.由于波导管中的横场振幅与纵场相差 $\pm\pi/2$ 相位,于是平均能流的横向部分

$$\langle \boldsymbol{s}\rangle_t=\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_z\times(E_z\boldsymbol{H}_t^*-H_z^*\boldsymbol{E}_t) \tag{8.4.4}$$

是纯虚数,从而对平均传输功率没有贡献.因而平均传输功率

$$\langle P\rangle=\frac{1}{2}\int_S(\boldsymbol{E}_t\times\boldsymbol{H}_t^*)_z\mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma} \tag{8.4.5}$$

完全由横场决定.

对于单一模式(m,n)的导波,引入波阻抗 Z:

$$|\boldsymbol{E}_t|=Z|\boldsymbol{H}_t| \tag{8.4.6}$$

由导方程(8.1.20)易得

$$Z_{\mathrm{TM}}=\frac{k_z}{\omega\epsilon}=\sqrt{\frac{mu}{\epsilon}}\left[1-\left(\frac{\omega_{mn}}{\omega}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$Z_{\mathrm{TE}}=\frac{\omega\mu}{k_z}=\sqrt{\frac{mu}{\epsilon}}\left[1-\left(\frac{\omega_{mn}}{\omega}\right)^2\right]^{-1/2} \tag{8.4.7}$$

由此可知,波阻抗在截止频率之下是纯虚数,即是纯电抗性的或纯感抗性的;而当频率很高时,接近值$\sqrt{\mu/\epsilon}$,这个量常称为电介质的内禀阻抗.

单一模式的导波的平均传输功率可利用波阻抗写为

$$\langle P\rangle=\frac{Z}{2}\int_S \mathrm{d}\Sigma\,|\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}}|^2=\frac{1}{2Z}\int_S \mathrm{d}\Sigma\,|\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}}|^2 \tag{8.4.8}$$

对于 TE 波,利用 $\boldsymbol{H}_{0\mathrm{t}}=(\mathrm{i}k_z/k_{\mathrm{c}}^2)\nabla_{\mathrm{t}}H_{0z}$ 得

$$\int_S \mathrm{d}\Sigma\,|\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}}|^2=\frac{k_z^2}{k_{\mathrm{c}}^4}\int_S \mathrm{d}\Sigma(\nabla_{\mathrm{t}}H_{0z})\cdot(\nabla_{\mathrm{t}}H_{0z}^*) \tag{8.4.9}$$

进而,利用二维 Green 公式

$$\int_S \mathrm{d}\Sigma[H_z^*\nabla_{\mathrm{t}}^2H_z+(\nabla_{\mathrm{t}}H_z)\cdot(\nabla_{\mathrm{t}}H_z^*)]=\oint_C \mathrm{d}lH_z^*\frac{\partial H_z}{\partial n} \tag{8.4.10}$$

边界条件

$$\partial H_z/\partial n\,|_{\text{波导壁}}=0$$

和波动方程

$$(\nabla_{\mathrm{t}}^2+k_{\mathrm{c}}^2)H_z=0$$

得

$$\int_S \mathrm{d}\Sigma\,|\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}}|^2=\frac{k_z^2}{k_{\mathrm{c}}^2}\int_S \mathrm{d}\Sigma\,|H_z|^2,\qquad \text{对 TE 波} \tag{8.4.11}$$

于是

$$\langle P\rangle_{\mathrm{TE}}=\frac{Zk_z^2}{2k_{\mathrm{c}}^2}\int_S \mathrm{d}\Sigma\,|H_z|^2=\frac{k_z\omega\mu}{2k_{\mathrm{c}}^2}\int_S \mathrm{d}\Sigma\,|H_z|^2$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}}\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{c}}}\right)^2\sqrt{1-\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{c}}}\right)^2}\,\mu\int_S \mathrm{d}\Sigma\,|H_z|^2 \tag{8.4.12}$$

按同样方法可证明

$$\langle P\rangle_{\mathrm{TM}}=\frac{k_z^2}{2Zk_{\mathrm{c}}^2}\int_S \mathrm{d}\Sigma\,|E_z|^2=\frac{k_z\omega\epsilon}{2k_{\mathrm{c}}^2}\int_S \mathrm{d}\Sigma\,|E_z|^2$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}}\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{c}}}\right)^2\sqrt{1-\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{c}}}\right)^2}\,\epsilon\int_S \mathrm{d}\Sigma\,|E_z|^2 \tag{8.4.13}$$

事实上,$\langle P\rangle_{\mathrm{TE}}$与$\langle P\rangle_{\mathrm{TM}}$在对偶变换

$$\sqrt{\epsilon}\boldsymbol{E}\to\sqrt{\mu}\boldsymbol{H},\quad \sqrt{\mu}\boldsymbol{H}\to-\sqrt{\epsilon}\boldsymbol{E}$$

下互变.

导波的时平均能量密度为

$$\langle u\rangle=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}^{*}+\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}^{*}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\mathrm{Re}\{(\boldsymbol{E}_{t}\cdot\boldsymbol{D}_{t}^{*}+\boldsymbol{E}_{z}\cdot\boldsymbol{D}_{z}^{*})+(\boldsymbol{B}_{t}\cdot\boldsymbol{H}_{t}^{*}+\boldsymbol{B}_{z}\cdot\boldsymbol{H}_{z}^{*})\}\tag{8.4.14}$$

由此及导方程可得波导内 TE 波的场的时平均能量密度为

$$\langle u\rangle_{\mathrm{TE}}=\frac{1}{4}\mathrm{Re}\{\mu H_{z}H_{z}^{*}+\frac{\mu(k_{z}^{2}+\omega^{2}\varepsilon\mu)}{k_{c}^{4}}(\nabla_{t}H_{z})\cdot(\nabla_{t}H_{z}^{*})\}\tag{8.4.15}$$

故波导内 TE 波每单位长度的时平均能量为

$$\langle U\rangle_{\mathrm{TE}}=\int_{S}\mathrm{d}\Sigma\langle u\rangle_{\mathrm{TE}}$$

$$=\frac{1}{4}\int_{S}\mathrm{d}\Sigma\left\{\mu H_{z}H_{z}^{*}+\frac{\mu(k_{z}^{2}+\omega^{2}\varepsilon\mu)}{k_{c}^{4}}(\nabla_{t}H_{z})\cdot(\nabla_{t}H_{z}^{*})\right\}\tag{8.4.16}$$

对上式右端的第二项分部积分，并利用 H_z 所满足的 Helmholtz 方程，可得

$$\langle U\rangle_{\mathrm{TE}}=\frac{1}{4}\int_{S}\mathrm{d}\Sigma\mu H_{z}H_{z}^{*}\left(1+\frac{\omega^{2}\varepsilon\mu}{k_{c}^{2}}+\frac{k_{z}^{2}}{k_{c}^{2}}\right)=\frac{1}{2}\frac{\omega^{2}}{\omega_{c}^{2}}\int_{S}\mathrm{d}\Sigma\mu H_{z}^{2}\tag{8.4.17}$$

同理，可推得波导内 TM 波的场的时平均能量密度为

$$\langle u\rangle_{\mathrm{TM}}=\frac{1}{4}\mathrm{Re}\left\{\varepsilon E_{z}E_{z}^{*}+\frac{\varepsilon(k_{z}^{2}+\omega^{2}\varepsilon\mu)}{k_{c}^{4}}(\nabla_{t}E_{z})\cdot(\nabla_{t}E_{z}^{*})\right\}\tag{8.4.18}$$

波导内 TM 波每单位长度的平均能量为

$$\langle U\rangle_{\mathrm{TM}}=\frac{1}{2}\frac{\omega^{2}}{\omega_{c}^{2}}\int_{A}\mathrm{d}\Sigma\varepsilon E_{z}^{2}\tag{8.4.19}$$

于是对 TE 波或 TM 波都有

$$\left.\frac{\langle P\rangle}{\langle U\rangle}\right|_{\text{TE或TM波}}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{1-\left(\frac{\omega}{\omega_{c}}\right)^{2}}=v_{g}\tag{8.4.20}$$

可见场能量在波导管中传播的速度正是群速度.

波导中的能量损耗

首先考虑由于波导壁的有限电导率引起的损耗. 波导壁上的面电流密度 $\boldsymbol{\Pi}$ 满足边界条件

$$\boldsymbol{\Pi}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}|_{S}$$

式中边界面上的磁感应强度 $\boldsymbol{H}_S$ 可近似地取采用理想导体边界条件计算出来的值. 若导体壁面的曲率半径比趋肤深度大得多，则可应用在半无穷平面导体情形下所得到的表面电阻公式

$$R_{S}=\frac{1}{\sigma_{c}\delta}=\sqrt{\frac{\mu\omega}{2\sigma_{c}}}$$

来计算导体壁上每单位面积的电阻，虽然这种近似对某些地方[例如矩形波导的

拐角处]不适用,但通常这些地方只是整个周界的很小部分,故平面导体近似不会引起太大误差.因而波导壁每单位长度每单位时间的焦耳热损耗可写为

$$-\frac{\mathrm{d}\langle P\rangle}{\mathrm{d}z}=R_S\oint_C \mathrm{d}l\langle(\mathrm{Re}\,\boldsymbol{\Pi})^2\rangle \tag{8.4.21}$$

式中 C 是波导横截面的边界.

进而有

$$\langle(\mathrm{Re}\,\boldsymbol{\Pi})^2\rangle=\frac{1}{4}\langle(\boldsymbol{\Pi}+\boldsymbol{\Pi}^*)^2\rangle=\frac{1}{2}\langle|\boldsymbol{\Pi}|^2\rangle \tag{8.4.22}$$

式中已考虑到 $\boldsymbol{\Pi}^2$ 与 $\boldsymbol{\Pi}^{*2}$ 含有振荡因子 $\exp(\pm 2i\omega t)$,因而时平均后为零.又由于在导体壁表面上的磁感应场 $\boldsymbol{H}$ 的法向分量为零 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{H}|_S=0$,而切向分量满足 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}|_S=\boldsymbol{\Pi}$,故在波导壁上

$$\boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{\Pi}^*|_S=(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}|_S)\cdot(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}|_S)=\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}^*|_S$$

于是

$$-\frac{\mathrm{d}\langle P\rangle}{\mathrm{d}z}=\frac{1}{2\sigma_c\delta}\oint_C \mathrm{d}l\langle|\boldsymbol{H}|^2\rangle \tag{8.4.23}$$

利用导方程(8.1.20)立得

$$\begin{cases}\left(-\dfrac{\mathrm{d}\langle P\rangle}{\mathrm{d}z}\right)_{\mathrm{TM}}=\dfrac{1}{2\sigma_c\delta}\oint_C \mathrm{d}l\,\dfrac{1}{\mu^2}\left(\dfrac{\omega^2}{\omega_c^4}\right)\left\langle\left|\dfrac{\partial E_z}{\partial n}\right|^2\right\rangle\\ \left(-\dfrac{\mathrm{d}\langle P\rangle}{\mathrm{d}z}\right)_{\mathrm{TE}}=\dfrac{1}{2\sigma_c\delta}\oint_C \mathrm{d}l\left[\dfrac{1}{\mu\varepsilon}\left(\dfrac{\omega^2}{\omega_c^4}\right)\left(1-\dfrac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)\langle|\boldsymbol{n}\times\nabla_t H_z|^2\rangle+\langle|H_z|^2\rangle\right]\end{cases} \tag{8.4.24}$$

式中已利用了导体表面切向电场为零的事实,即

$$(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E})_{\mathrm{TM}}=0\quad\text{或}\quad[\boldsymbol{n}\times(\nabla_t E_z)]_{\mathrm{TM}}=0 \tag{8.4.25}$$

由下式定义由波导壁事实上并非理想导体引起的衰减系数 α_c

$$-\frac{\mathrm{d}\langle P\rangle}{\mathrm{d}z}=2\alpha_c\langle P\rangle \tag{8.4.26}$$

由于 x 与 y 坐标都被积掉了,$\langle P\rangle$ 与 $-\mathrm{d}\langle P\rangle/\mathrm{d}z$ 均与 x 或 y 无关;因而衰减系数 α_c 仅可能与 z 有关.事实上,在损耗很小的情形下,作为第一级近似,(8.4.8)与(8.4.24)右端被积函数中的场可用理想导体边界近似下的解代替.对于无限长直波导管,这种在理想导体边界近似下的场对 z 的依赖关系均可由一个与 x 和 y 无关的函数因子来表示,故而导致 $\langle P\rangle$ 与 $-\mathrm{d}\langle P\rangle/\mathrm{d}z$ 均与 z 有相同的依赖关系.因此,在第一级近似下,衰减系数 α_c 与 z 无关.故有

$$\langle P(z)\rangle=\langle P(0)\rangle\exp(-2\alpha_c z) \tag{8.4.27}$$

对于圆柱形波导,由波导壁引起的衰减系数 α_c 由(8.4.24)算出的结果为

$$\begin{cases}(\alpha_c)_{TM}=\dfrac{1}{a}\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}\sqrt{\dfrac{\mu_c\omega}{2\sigma_c}}\left(1-\dfrac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1/2}\\ (\alpha_c)_{TE}=\dfrac{1}{a}\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}\sqrt{\dfrac{\mu_c\omega}{2\sigma_c}}\left(1-\dfrac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1/2}\left[\dfrac{\omega_c^2}{\omega^2}+\dfrac{m^2}{\nu'^2_{mn}-m^2}\right]\end{cases}\tag{8.4.28}$$

式中 ν'_{mn} 是方程 $J'_n(\nu)=0$ 的(由小到大的)第 n 个根，而 σ_c 与 μ_c 分别是波导壁的电导率与磁导率. 由此可见，当 $\omega\to\omega_c$ 时，$\alpha_c\to\infty$，电磁波不能在波导中传播，这正是所预期的；另外，对于 TM 波，当 $\omega=\sqrt{3}\omega_c$ 时，损耗达到最小值.

现考虑由于电介质的有限电导率 σ_d 引起的衰减. 这样的介质可用一个等效的复介电常量 $\varepsilon'=\varepsilon(1+i\sigma_d/\omega)$ 表征. 因而波数成为复的

$$k'^2_z=\omega^2\mu\varepsilon'-k_c^2=\omega^2\mu\varepsilon-k_c^2+i\omega\mu\sigma_d\tag{8.4.29}$$

或写成

$$k'_z=k_z+i\alpha_d\tag{8.4.30}$$

式中 α_d 是由介质的有限电导率引起的衰减系数，k_z 是相应的等效波数. 于是

$$k_z^2-\alpha_d^2=\omega^2\mu\varepsilon-k_c^2,\qquad 2k_z\alpha_d=\omega\mu\sigma_d\tag{8.4.31}$$

导波场关于 z 的依赖关系成为 $\exp(-\alpha_d z+ik_z)$，相应地，仅因介质损耗引起的传输功率沿 z 轴的衰减为

$$\langle P(z)\rangle=\langle P(0)\rangle\exp(-2\alpha_d z)\tag{8.4.32}$$

在通常情形下，$k_z\gg\alpha_d$. 这时有

$$k_z\approx\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon-k_c}=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}}\tag{8.4.33}$$

$$\alpha_d=\frac{\omega\mu\sigma_d}{2k_z}\approx\frac{\sigma_d}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(\sqrt{1-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}}\right)^{-1}\tag{8.4.34}$$

由此可见，α_d 在截止频率处趋于无穷，在高频处下降至最小值 $\sqrt{\mu/\varepsilon}\sigma_d/2$.

在实际波导中，上述两种形式的衰减都同时存在，若其大小可以比拟，则总的波导衰减常数是它们的和 $\alpha_c+\alpha_d$. 最后，正如前面已提及的，当频率小于截止频率即波长大于截止波长时，波的振幅将按 $\exp(-\alpha z)$ 的规率衰减，衰减系数为

$$\alpha=\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda_c^2}-1}\tag{8.4.35}$$

习题 8-4

1. 试证明圆柱形波导因导体壁的损耗引起的衰减系数(8.4.28)式.
2. 求横截面为 $a\times b$ 矩形波导中单位长度上 TM 型波的功率损失 P.
3. 证明：横截面为 $a\times b$ 矩形波导中 TM_{mn} 型波因导体壁的损耗引起的衰减系数是

$$\alpha_c = 2R_S\sqrt{\frac{\varepsilon/\mu}{1-\omega_{c,mn}^2/\omega^2}}\frac{m^2/a^3+n^2/b^3}{m^2/a^2+n^2/b^2}$$

式中 R_S 是导体的表面电阻，ε 与 μ 分别是波导内绝缘介质的介电常量和磁导率. 求出此矩形波导中 TE_{mn} 型波因导体壁的损耗引起的衰减系数.

§8.5 谐振腔

如果将有限长度波导的两端截面用导体壁封闭起来，则入射到端面上的电磁波将被反射. 这时电磁波无论在横向还是在纵向上都是驻波，因而不能传输能量，只能使场的电磁能量相互转换而形成电磁振荡. 于是，封闭的导体空腔成为电磁振荡的谐振腔.

当波长很短例如在微波波段时，通常的 LC 谐振回路尺寸将与波长具有相同的数量级或更大，相当于一个大尺度的天线辐射系统，因而辐射损失很大；同时，趋肤效应造成的普通导体的等效电阻以及介质损耗将显著增加. 为了避免辐射损失，常将谐振回路用良导体封闭起来；为了降低趋肤效应的影响，电流路径应尽可能分布在较大的面积上. 这两个要求对于谐振腔来说都是满足的. 虽然在实际的谐振腔中仍有能量损耗，但与通常的 LC 谐振回路相比，损耗一般可降至 1/20 以下.

矩形谐振腔

矩形谐振腔是一个长(沿 $\boldsymbol{e}_z$ 方向)、宽(沿 $\boldsymbol{e}_x$ 方向)、高(沿 $\boldsymbol{e}_y$ 方向)各为 $a_3 = a$、$a_1 = b$、$a_2 = c$ 的矩形导体空腔. 腔中电磁波的电场满足方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2\right)\boldsymbol{E}=0 \tag{8.5.1}$$

无源空间中的物理条件

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0 \tag{8.5.2}$$

与边界条件

$$\partial E_i/\partial x_i|_{x_i=0}=0,\quad E_i|_{x_j=0,j\neq i}=0,\quad \text{对 } i,j=1,2,3 \tag{8.5.3}$$

$$\partial E_i/\partial x_i|_{x_i=a_i}=0,\quad E_i|_{x_j=a_j,j\neq i}=0,\quad \text{对 } i,j=1,2,3 \tag{8.5.4}$$

解的任一直角分量 $E_i(x,y,z)$ 具有下述驻波形式：

$$E_i(x,y,z)=[C_{1i}\cos(k_x x)+D_{1i}\sin(k_x x)]\cdot$$
$$[C_{2i}\cos(k_y y)+D_{2i}\sin(k_y y)][C_{3i}\cos(k_z z)+D_{3i}\sin(k_z z)]$$

式中 k_x、k_y、k_z 满足色散方程

$$k_x^2+k_y^2+k_z^2=k^2=\omega^2\mu\varepsilon \tag{8.5.5}$$

由边界条件(8.5.3)可定出 E_i(除开一个任意常系数)，即有下述形式解：

$$\begin{cases} E_x = E_x^{(0)} \cos(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z) \\ E_y = E_y^{(0)} \sin(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z) \\ E_z = E_z^{(0)} \sin(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z) \end{cases} \tag{8.5.6}$$

式中 $E_i^{(0)}$ 与 k_i 是待定常量.将此形式解代入边界条件(8.5.4)可将波数 k_i 确定为

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \qquad k_y = \frac{n\pi}{b}, \qquad k_z = \frac{l\pi}{c} \tag{8.5.7}$$

式中 m、n、l 是非负整数.这样的电场满足波动方程和所有边界条件.由腔中的物理条件(8.5.2)可得关于电场振幅的一个限制条件:

$$E_x^{(0)}k_x + E_y^{(0)}k_y + E_z^{(0)}k_z = 0 \tag{8.5.8}$$

相应的磁场可由 $\nabla \times \boldsymbol{E} = \mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}$ 求出

$$\begin{cases} H_x = -\dfrac{\mathrm{i}}{\mu\omega}(k_y E_z^{(0)} - k_z E_y^{(0)})\sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z) \\ H_y = -\dfrac{\mathrm{i}}{\mu\omega}(k_z E_x^{(0)} - k_x E_z^{(0)})\cos(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z) \\ H_z = -\dfrac{\mathrm{i}}{\mu\omega}(k_x E_y^{(0)} - k_y E_x^{(0)})\cos(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z) \end{cases} \tag{8.5.9}$$

对于每一组(m,n,l),电磁场(8.5.6)与(8.5.9)代表一种谐振模式(共振模式),或称为本征振荡.谐振频率(本征频率)可由色散方程得到

$$\omega_{mnl} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{l}{c}\right)^2} \tag{8.5.10}$$

由此可知,若 $a \leqslant b \leqslant c$,则最低的本征振荡频率为模式(0,1,1)对应的频率

$$f_{011} = \frac{\omega_{011}}{2\pi} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \tag{8.5.11}$$

相应的电磁波波长为

$$\lambda_{011} = \frac{1}{f_{011}\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{2}{\sqrt{1/b^2 + 1/c^2}} \approx L(\text{谐振腔的尺度}) \tag{8.5.12}$$

讨论:

(a) 由式(8.5.6)可知,m、n、l 中任意两个都不可同时取零.否则,相应的电场为零(因为各个电场分量都正比于分别以 $k_i x_i$ 为宗量的正弦因子).

(b) 由式(8.5.8)可知,对于给定的谐振模式(m,n,l),三个电场分量 E_x、E_y、E_z 中至多只有两个是相互独立的,电磁场的自由度为 2,与无界空间中的电磁场的自由度是一样的.因而,每种本征振荡一般具有两个独立的偏振波型;腔中的电磁场一般是这两个独立的偏振波型的线性叠加.

(c) 沿着谐振腔的任何对称轴,电磁驻波的电场与磁场都不可能是横向的.例如,对本征模式($m \neq 0, n \neq 0, l \neq 0$),若令 $E_z = 0$ 与 $H_z = 0$,则由(8.5.9)第三

式知$E_y \propto E_x$，再由方程(8.5.8)便得 $E_x = 0$，因而 $\boldsymbol{E} = 0$. 于是，沿着腔的任何对称轴，电磁驻波可表为 TE 与 TM 波的叠加，但不存在 TEM 波. 进而，对于某一对称轴而言的 TE 波对于另一对称轴而言可能是 TM 波. 为使 TE 或 TM 波有确定的意义，通常仅相对于 z 轴而言；这时，各种本征模式可唯一地表为 TE_{mnl} 或 TM_{mnl} 或它们的叠加. 注意：各种驻波均可视为沿对称轴传播的入射波与反射波的叠加. 例如：本征模式为 TM_{mnl} 的驻波可视为具有波矢 $\boldsymbol{k}'$ 与 $-\boldsymbol{k}'$ 以及振幅 C_{mn}^{+} 与 C_{mn}^{-} 以至于在波导壁上 $\boldsymbol{E}_t = 0$ 与 $\boldsymbol{H}_n = 0$ 的正反向传播的两个行波 TM_{mn} 的叠加.

圆柱形谐振腔

圆柱形谐振腔是一个以 z 轴为对称轴、长为 a（沿 $\boldsymbol{e}_z$ 方向）、内横截面半径为 a 的圆柱形导体空腔. 腔中电磁驻波的场结构可从圆柱形波导中的行波模式得到（它自动满足 Helmholtz 方程和物理条件）. 例如，驻波 TM_{mnl} 的场 E_ρ 可表为正反向传播的两个行波 TM_{mn} 的叠加：

$$E_\rho = \frac{\mathrm{i}k'}{h_{mn}} \mathrm{J}'_m(h_{mn}\rho)\cos(m\phi + \delta_m)(C_{mn}^{+}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'z} - C_{mn}^{-}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'z})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{8.5.13}$$

式中 $h_{mn}^2 = \omega_{\mathrm{c},mn}^2 \mu\varepsilon$，而 $\omega_{\mathrm{c},mn}$ 由(8.3.12)式确定. 在端面 $z = 0$ 处的边界条件

$$E_\rho|_{z=0} = 0$$

导致

$$C_{mn}^{+} = C_{mn}^{-} \equiv C_{mn} \tag{8.5.14}$$

由端面 $z = L$ 上的边界条件

$$E_\rho|_{z=L} = 0$$

则可得

$$k'L = l\pi, \qquad l = 0,1,2,\cdots \tag{8.5.15}$$

故（对于特定的 l，将 C_{mn} 记为 C_{mnl}）

$$E_\rho = -2\frac{C_{mn}l\pi}{h_{mn}L}\mathrm{J}'_m(h_{mn}\rho)\cos(m\phi + \delta_m)\sin\left(\frac{l\pi}{L}z\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{8.5.16}$$

同理可得到 TM_{mnl} 模式的驻波的其余非零的场分量：

$$\begin{cases} E_\phi = 2\dfrac{mC_{mnl}l\pi}{\rho h_{mn}^2 L}\mathrm{J}_m(h_{mn}\rho)\sin(m\phi + \delta_m)\sin\left(\dfrac{l\pi z}{L}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \\ E_z = 2C_{mnl}\mathrm{J}_m(h_{mn}\rho)\cos(m\phi + \delta_m)\cos\left(\dfrac{l\pi z}{L}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \\ H_\rho = \mathrm{i}2\dfrac{m\omega\varepsilon C_{mnl}}{\rho h_{mn}^2}\mathrm{J}_m(h_{mn}\rho)\sin(m\phi + \delta_m)\cos\left(\dfrac{l\pi z}{L}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \\ H_\phi = \mathrm{i}2\dfrac{\omega\varepsilon C_{mnl}}{h_{mn}}\mathrm{J}'_m(h_{mn}\rho)\cos(m\phi + \delta_m)\cos\left(\dfrac{l\pi z}{L}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \end{cases} \tag{8.5.17}$$

类似地，可得 TE_{mnl} 本征模式驻波的场结构：

$$\begin{cases} E_\rho = -2\mathrm{i}\dfrac{m\omega\varepsilon C'_{mnl}}{\rho h_{mn}^2}\mathrm{J}_m(h_{mn}\rho)\sin(m\phi+\delta_m)\sin\left(\dfrac{l\pi z}{L}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \\ E_\phi = -2\mathrm{i}\dfrac{\omega\varepsilon C'_{mnl}}{h_{mn}}\mathrm{J}'_m(h_{mn}\rho)\cos(m\phi+\delta_m)\sin\left(\dfrac{l\pi z}{L}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \\ H_\rho = 2\dfrac{C'_{mnl}l\pi}{h_{mn}L}\mathrm{J}'_m(h_{mn}\rho)\cos(m\phi+\delta_m)\cos\left(\dfrac{l\pi z}{L}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \\ H_\phi = -2\dfrac{mC'_{mnl}l\pi}{\rho h_{mn}^2 L}\mathrm{J}_m(h_{mn}\rho)\sin(m\phi+\delta_m)\cos\left(\dfrac{l\pi z}{L}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \\ H_z = 2C'_{mnl}\mathrm{J}_m(h_{mn}\rho)\cos(m\phi+\delta_m)\sin\left(\dfrac{l\pi z}{L}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \end{cases} \tag{8.5.18}$$

对 TM_{mnl} 与 TE_{mnl} 两种本征模式，本征频率或本征波长都可表为

$$\begin{cases} \omega_{mnl} = \sqrt{\omega_{c,mn}^2 + \left(\dfrac{l^2\pi^2}{L^2\mu\varepsilon}\right)} \\ \lambda_{mnl} = 2\pi\Big/\sqrt{\omega_{c,mn}^2\mu\varepsilon + \left(\dfrac{l\pi}{L}\right)^2} \end{cases} \tag{8.5.19}$$

可像以前激发波导中的行波模式一样的方法来激发谐振腔中的共振模．若所加信号的频率与腔的所有本征频率相差较大，则腔中的电磁场将相当弱．随着信号频率接近腔的本征频率，腔中的电磁场逐渐增强．当激发频率等于腔的本征频率时，电磁振荡便发生而在腔中形成强的电磁驻波．

习题 8－5

1．有一圆柱形谐振腔，其 TE_{011} 型波的谐振频率为 3 000 GHz．已知谐振腔的长度等于它的直径．

(1) 求谐振腔的尺寸大小；

(2) 写出谐振腔 TE_{011} 型波的电磁场分布；

答案：(1) $R = 6.6$ cm

(2) 谐振腔 TE_{011} 型波的电磁场的非零分量为

$$\begin{cases} E_\rho = \dfrac{-2\mathrm{i}}{h_{01}c}\mathrm{J}'_0(h_{01}\rho)\cos\delta_0\sin\left(\dfrac{\pi z}{2R}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \\ H_\rho = \dfrac{c_{01}\pi}{h_{01}c}\mathrm{J}'_0(h_{01}\rho)\cos\delta_0\cos\left(\dfrac{\pi z}{2R}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \\ H_z = 2c_{01}\mathrm{J}_0(h_{01}\rho)\cos\delta_0\sin\left(\dfrac{\pi z}{2R}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \end{cases}$$

2．导出矩形谐振腔中 TE_{mnl} 型驻波的场分布及其谐振频率．

3．证明：谐振腔内电场能量与磁场能量的时平均值相等．

4．有一理想的圆柱形谐振腔，其截面半径与长度分别为 a 与 l．若 v 是当腔未封闭时波在腔

内介质中传播的相速度.证明此谐振腔中最低的 TE 模式的频率为

$$f=0.293\,0\frac{v}{a}\sqrt{1+2.911\frac{a^2}{l^2}}\ \text{Hz}$$

5. 有一边长为 a 的理想的立方形谐振腔.证明:当波长小于 a 时,在每单位频率间隔中,TE 与 TM 两种模式中共振模的数目之和是

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\omega}=\frac{a^3\omega^2}{\pi^2v^3}$$

式中 v 是当腔未封闭时波在腔内介质中传播的相速度.

§8.6 谐振腔的品质因素

谐振腔中储存的电磁能量是下述能量密度

$$\begin{cases}U_{\mathrm{e}}=\dfrac{\varepsilon}{2}(\mathrm{Re}\,\boldsymbol{E})^2=\dfrac{\varepsilon}{8}(E^2+2\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*+E^{*2})\\[2ex] U_{\mathrm{m}}=\dfrac{\mu}{2}(\mathrm{Re}\,\boldsymbol{B})^2=\dfrac{\mu}{8}(B^2+2\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*+E^{*2})\end{cases}\tag{8.6.1}$$

和的体积分.由于

$$\begin{aligned}\int_V\mathrm{d}^3x(\varepsilon E^2+\mu H^2)&=\frac{\mathrm{i}}{\omega}\int_V\mathrm{d}^3x[\boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H})-\boldsymbol{H}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})]\\&=\frac{\mathrm{i}}{\omega}\int_V\mathrm{d}^3x\,\nabla\cdot(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{E})=\frac{-\mathrm{i}}{\omega}\oint_S(\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{e}}\times\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{H}=0\end{aligned}$$

式中 V 与 S 分别是谐振腔的体积与边界面,计算中已应用了理想导体面上的边值关系.对上式取复共轭可知 $\varepsilon E^{*2}+\mu H^{*2}$ 的体积分为零.于是,腔中储存的电磁总能为

$$W=\frac{1}{2}\int_V\mathrm{d}^3x\left(\frac{1}{2}\varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*+\frac{1}{2}\mu\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}^*\right)\tag{8.6.2}$$

它与时间无关;换言之,理想谐振腔中储存的电磁总能是一个恒量.注意,上式右端被积式是时平均电能密度与时平均磁能密度之和.故

$$W=\frac{1}{2}[\langle W_{\mathrm{e}}\rangle+\langle W_{\mathrm{m}}\rangle]\tag{8.6.3}$$

进而,腔中时平均总电能与时平均总磁能之差为

$$\begin{aligned}\langle W_{\mathrm{e}}\rangle-\langle W_{\mathrm{m}}\rangle&=\frac{1}{4}\int_V\mathrm{d}^3x\varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*-\frac{1}{4}\int_V\mathrm{d}^3x\mu\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}^*\\&=\frac{\mathrm{i}}{4\omega}\int_V\mathrm{d}^3x[\boldsymbol{E}^*\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H})-\boldsymbol{H}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E}^*)]\\&=\frac{\mathrm{i}}{4\omega}\int_V\mathrm{d}^3x\nabla\cdot(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{E}^*)\\&=\frac{-\mathrm{i}}{4\omega}\oint_S(\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{e}}\times\boldsymbol{E}^*)\cdot\boldsymbol{H}=0\end{aligned}$$

于是

$$W=\frac{\epsilon}{2}\int_V \mathrm{d}^3x\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*=\frac{\mu}{2}\int_V \mathrm{d}^3x\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}^* \tag{8.6.4}$$

在实际的谐振腔中,能量会损耗在导体壁与介质中.设 W_1 是每一次完全的电磁振荡所损失的能量,则

$$W_1=\frac{2\pi}{\omega}\langle P\rangle \tag{8.6.5}$$

式中$\langle P\rangle$是时平均功率损失.若功率损失主要来自于导体壁损耗,则由(8.4.23)得

$$\langle P\rangle=\frac{1}{2\sigma_c\delta}\oint_S \mathrm{d}\sigma\langle\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}^*\rangle \tag{8.6.6}$$

式中积分遍及整个谐振腔内表面 S.

定义品质因素 Q:

$$Q=\frac{2\pi W}{W_1}=\frac{\omega_0 W}{\langle P\rangle} \tag{8.6.7}$$

式中 ω_0是在无损耗条件下的振荡角频率;而 W 是腔中的电磁总能,作为第一级近似(当损耗很小时),可取为由(8.6.4)表示的无损耗时的总能.对于一个孤立的谐振腔,由能量守恒有

$$-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\langle P\rangle=\frac{\omega_0}{Q}W \tag{8.6.8}$$

如果损耗很小,例如仅存在很小的导体壁损耗,则由公式(8.6.4)、(8.6.6)与(8.6.7)可知 Q 近似为常数.因此总能呈指数衰减

$$W(t)=W(0)\exp\left[-2\left(\frac{\omega_0}{2Q}\right)t\right] \tag{8.6.9}$$

这说明腔内的场也呈指数衰减

$$E(t)=E_0\exp\left[-\left(\frac{\omega_0}{2Q}\right)t\right]\exp(-\omega_0 t) \tag{8.6.10}$$

场的衰减常数为

$$\alpha=\frac{\omega_0}{2Q} \tag{8.6.11}$$

将 $E(t)$变换至频域有

$$E(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}tE(t)\exp(\mathrm{i}\omega t)=\frac{1}{2\pi}\frac{E_0}{\omega_0/(2Q)-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)} \tag{8.6.12}$$

故而

$$|E(\omega)|^2=\frac{E_0^2/(2\pi^2)}{(\omega-\omega_0)^2+\omega_0^2/(4Q^2)} \tag{8.6.13}$$

可见腔内总能因损耗而有一定的频谱分布，它在 $\omega=\omega_0$ 时达到最大值

$$|E(\omega)|^2_{\max}=|E(\omega_0)|^2=\frac{4Q^2E_0^2/(2\pi^2)}{\omega_0^2} \tag{8.6.14}$$

而当

$$\omega=\omega_0\pm\omega_0/2Q \tag{8.6.15}$$

时达到最大值的一半. 于是腔总能频谱分布的半高宽 Γ 为

$$\Gamma=\frac{\omega_0}{Q} \tag{8.6.16}$$

将(8.6.15)式改写成

$$\frac{1}{2Q}=\frac{|\omega-\omega_0|}{\omega_0} \tag{8.6.17}$$

可见，品质因素 Q 越大，Γ 越小，即腔总能频谱分布越尖锐，频率选择性越好. 现在的超导谐振腔的 Q 值可达 $10^9\sim10^{10}$.

习题 8－6

1. 有一圆柱形谐振腔，其 TE_{011} 型波的谐振频率为 3 000 GHz. 已知谐振腔的长度等于它的直径. 求 TE_{011} 波型的固有品质因素.

   答案：$Q\approx R/\delta$，式中 δ 为导体的趋肤深度.

2. 证明：在圆柱形谐振腔中，TM_{0n0} 波型的固有品质因素为

$$Q=\frac{R/\delta}{(1+R/L)}$$

   式中 R 为腔的半径，L 为腔的长度，δ 为导体的趋肤深度或衰减长度.

3. 若在宽、高、长分别为 a、b、c 的矩形谐振腔中电介质损耗可以忽略，证明：TM_{mnl} 共振模的固有品质因素为

$$Q_{mnl}=\frac{\mu\omega}{4R_S}\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right]\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{n}{b}\right)^2\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right]^{-1}$$

   式中 R_S 是导体壁的表面电阻，μ 是腔内电介质的磁导率，ω 为共振频率，且假定 m、n、l 均不等于零.

4. 设在上题所述的矩形谐振腔中，$a\geqslant b\geqslant c$. 证明：TM 模式的最低共振模为 TM_{110}，且该共振模的固有品质因素为

$$Q_{110}=\frac{\mu\omega}{2R_S}\left[\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2\right]\left[\left(\frac{1}{a}\right)^2\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{1}{b}\right)^2\left(\frac{2}{b}+\frac{1}{c}\right)\right]^{-1}$$

   求最低 TE 共振模的固有品质因素.

§8.7 同轴传输线

同轴传输线由同轴(取为 z 轴)的两个很长的导体圆柱面构成，两柱面间常

填充绝缘介质.设同轴线内外半径分别为 a 与 b,所填充的电介质各向同性、线性均匀.作为第一级近似,设导体与电介质都是理想的.与圆柱形波导唯一不同的是,同轴传输线的横截面不是单连通的,其内外导体边界是互不相连的两部分.其间存在两类相互等价的闭合路径:一类环绕内导体柱,另一类不环绕,故而成为一个最简单的**多连通波导**(注:单连通面与多连通面都是连通的,即该面内任意两点都可用一条路径连接起来;在单连通面内任意闭合路径可以通过连续变形而收缩至一点,或者说在通过连续变形可以互变的意义上任意闭合路径都是等价的,即只存在一类相互等价的闭合路径;在 n 连通面内,所有闭合路径并不都是相互等价的,相互等价的闭合路径共有 n 类.).

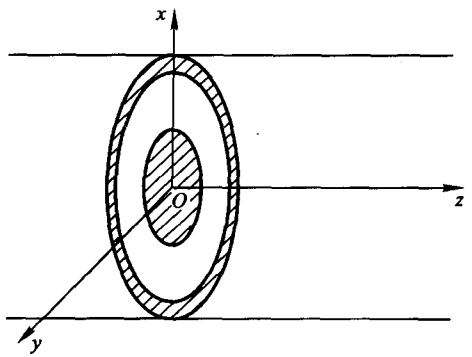


图 8.2　同轴传输线

导波的一般形式

同轴传输线的非单连通性导致的第一个特点是,同轴线中的导波的边界条件与圆柱形波导的不同,即**导波的场不需要在(处于传播区域之外的)对称轴(z 轴)上保持有限值**.因而在同轴线中传输的导波的纵场(它对于 TM 波为 E_z,对于 TE 波为 H_z)具有下述普遍形式(采用圆柱形波导一节的记号):

$$\psi=[AJ_m(k_c\rho)+BY_m(k_c\rho)]\cos(m\phi+\delta_m)e^{i(k_z z-\omega t)} \tag{8.7.1}$$

它满足 Helmholtz 方程,其中 $Y_m(k_c\rho)$ 是 Neumann 函数,它在 $\rho=0$ 点是奇异的.由两导体柱壁上的边界条件

$$\begin{cases}\psi(\rho=a)=0, & \psi(\rho=b)=0, & \text{对 TM 波}\\ \psi'(\rho=a)=0, & \psi'(\rho=b)=0, & \text{对 TE 波}\end{cases} \tag{8.7.2}$$

得

$$\begin{cases}AJ_m(k_c a)+BY_m(k_c a)=0, & AJ_m(k_c b)+BY_m(k_c b)=0, & \text{对 TM 波}\\ AJ'_m(k_c a)+BY'_m(k_c a)=0, & AJ'_m(k_c b)+BY'_m(k_c b)=0, & \text{对 TE 波}\end{cases} \tag{8.7.3}$$

它们有非零解的条件是

$$\begin{cases} J_m(k_c a)Y_m(k_c b) - J_m(k_c b)Y_m(k_c a) = 0, & \text{对 TM 波} \\ J'_m(k_c a)Y'_m(k_c b) - J'_m(k_c b)Y'_m(k_c a) = 0, & \text{对 TE 波} \end{cases} \tag{8.7.4}$$

由此可确定 k_c 的值，从而确定了导波的各种模式和相应的截止频率. 导波的场可由圆柱形波导一节的相应公式作下述替换：

$$AJ_m(k_c\rho) \to [AJ_m(k_c\rho) + BY_m(k_c\rho)] \tag{8.7.5}$$

而得到. 它们当 $k_c \neq 0$ 时，分别是相应的 TE 波与 TM 波.

主波

同轴线作为一种多连通波导而导致的第二个特点是**可以传输所谓主波，即截止频率为零的波**，因而既可传送高频电磁波，也可传送低频电磁波甚至稳恒电流. 首先可以证明，**主波一定是 TEM 波**，且其电场方向与磁场方向也相互垂直. 为了普遍起见，可对一个任意的多连通截面波导进行证明. 由于 $k_c = 0$，主波的纵向电场与纵向磁场分别满足

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) E_{0z} = 0, \quad E_{0z}|_S = 0 \tag{8.7.6}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) B_{0z} = 0, \quad \left.\frac{\partial B_{0z}}{\partial n}\right|_S = 0 \tag{8.7.7}$$

它们分别是二维 Laplace 方程的第一类与第二类边值问题，其解为

$$E_{0z} = 0, \qquad B_{0z} = \text{常量} \tag{8.7.8}$$

将 Maxwell 方程 $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ 即

$$i\omega\sqrt{\mu\varepsilon}B_{0z} + \nabla_t \cdot \boldsymbol{B}_{0t} = 0$$

(此处下标 t 表示取横向部分)对波导横截面积分得

$$i\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\int_S d\sigma B_{0z} + \oint_L dl B_{0n} = 0 \tag{8.7.9}$$

这里应用了二维 Gauss 定理

$$\int_S d\sigma\, \nabla_t \cdot \boldsymbol{B}_{0t} = \oint_L dl B_{0n}$$

(8.7.9)式意味着

$$B_z = 0 \tag{8.7.10}$$

因为 B_{0z} 为常量及 B_{0n} 在波导壁上为零. 进而，应用 Maxwell 方程可得

$$\begin{cases} (\nabla_t + ik_z\boldsymbol{e}_z) \times \boldsymbol{E}_t = i\omega\boldsymbol{B}_t \\ (\nabla_t + ik_z\boldsymbol{e}_z) \times \boldsymbol{H}_t = -i\omega\boldsymbol{D}_t \end{cases} \tag{8.7.11}$$

因而有

$$E_x = B_y/\sqrt{\mu\varepsilon}, \quad E_y = -B_x/\sqrt{\mu\varepsilon} \tag{8.7.12}$$

此即

$$\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{H}Z_0,\quad \boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{E}/Z_0,\quad Z_0=\sqrt{\mu/\varepsilon} \tag{8.7.13}$$

故

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{8.7.14}$$

且主波的波阻抗 Z_0 与波在未受限情形下(即无界介质中)传播时一样. 可见,多连通截面波导中的主波的形式是

$$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})_{0t}(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)},\quad k_z^2=\omega^2/c^2 \tag{8.7.15}$$

其纵场为零,且横向电场与横向磁场由公式(8.7.13)联系在一起.

现讨论多连通截面波导中主波存在的可能性. 由于 $k_c=0$,主波的场(例如电场)的振幅满足二维 Laplace 方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\boldsymbol{E}_0(x,y)=0 \tag{8.7.16}$$

与物理条件

$$\nabla_t\cdot\boldsymbol{E}_0=0 \tag{8.7.17}$$

由(8.7.16)与(8.7.17)可知

$$\nabla_t\times\boldsymbol{E}_0=0 \tag{8.7.18}$$

(8.7.17)与(8.7.18)说明主波电场的振幅相当于二维静电场方程,因而可引入相应的二维静电势,从而有

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\varphi(x,y)=0,\quad \boldsymbol{E}_0=-\nabla_t\varphi \tag{8.7.19}$$

它在单连通截面的边界条件(即 $\varphi_{波导壁}=$常量)下仅存在平凡解(即 $\varphi=$常量;换言之,不存在电场);但在多连通截面的边界条件下则存在非平凡解,因为互不连通的导体边界可具有不同的静电势,从而能在波导内建立起静电场. 可见,**主波横电场的振幅就是多连通截面波导的管壁组成的电容器中的静电场**.

自然,可将条件 $k_c=0$ 代入同轴线中导波场的普遍形式得到主波场的结构. 然而,求解主波场的最简捷的方法是利用其振幅的静电场特征. 同轴线中主波的电场的振幅即是其导体壁形成的柱形电容器中的静电场. 由对称性,此静电场仅有径向分量

$$\boldsymbol{E}_0(x,y)=E_{0\rho}(\rho)\boldsymbol{e}_\rho \tag{8.7.20}$$

在波导横截面内作以柱轴为中心、半径为 ρ 的圆,对以此圆为底、厚度为单位长度的圆柱体应用 Gauss 定理得

$$\oint \mathrm{d}\theta E_{0\rho}(\rho)=\sigma_0/\varepsilon$$

式中 σ_0 是内导体柱表面上沿柱轴方向 $\boldsymbol{e}_z$ 单位长度的面电荷的振幅. 由此立得主波电场的振幅为

$$E_{0\rho}=\frac{\sigma_0}{2\pi\varepsilon\rho} \tag{8.7.21}$$

相应的磁场振幅可由(8.7.13)求出,其非零分量为

$$H_{0\phi}=\frac{I_0}{2\pi\rho},\quad I_0=\frac{\sigma_0}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{8.7.22}$$

可见,同轴线中主波的电磁场在 $z=0$ 平面上是各向同性的,即对应于 $m=0$. TEM 波对应同轴线中可传输波的最低模式,TE 波或 TM 波则对应于高次模式.

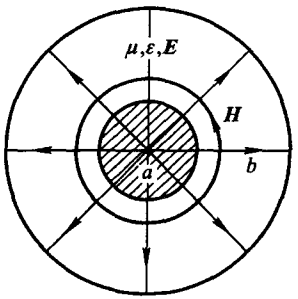


图 8.3 同轴线中主波的电磁场

主波的功率传输与衰减

同轴线传输主波时,时平均传输功率为

$$\langle P\rangle=\frac{1}{2}\int_S \mathrm{d}\Sigma\cdot\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\int_S \mathrm{d}\Sigma\,|\boldsymbol{H}|^2=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\pi a^2H_0^2\ln\frac{b}{a} \tag{8.7.23}$$

式中

$$H_0=H_{0\phi}=\frac{I_0}{2\pi a} \tag{8.7.24}$$

是内导体柱表面上的切向磁场的振幅.在传输线导体壁上(沿 $\boldsymbol{e}_z$ 方向)每单位长度的平均功率损耗为

$$-\frac{\mathrm{d}\langle P\rangle}{\mathrm{d}z}\frac{1}{2\sigma_c\delta}\oint_C \mathrm{d}l\langle|\boldsymbol{H}|^2\rangle=\frac{1}{2\sigma_c\delta}\oint_C \mathrm{d}l\langle|H_\phi|^2\rangle=\frac{1}{\sigma_c\delta}\pi a^2H_0^2\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right] \tag{8.7.25}$$

式中 C 为同轴线横截面的内外边界(即半径分别为 a 与 b 的同心圆的圆周).对于主波

$$H=\sqrt{\varepsilon/\mu}E \tag{8.7.26}$$

故对具有任意多连通截面的长直波导,仅由导体壁损耗导致的主波衰减系数可由下述公式计算:

$$\alpha=\frac{1}{2\langle P\rangle}\frac{\mathrm{d}\langle P\rangle}{\mathrm{d}z}=\frac{\sqrt{\varepsilon}}{4\sigma_c\delta\sqrt{\mu}}\frac{\oint_C \mathrm{d}lH^2}{\int_S \mathrm{d}\Sigma H^2}=\frac{\sqrt{\varepsilon}}{4\sigma_c\delta\sqrt{\mu}}\frac{\oint_C \mathrm{d}lE^2}{\int_S \mathrm{d}\Sigma E^2} \tag{8.7.27}$$

对于同轴线，当介质损耗可忽略时，主波的衰减系数为

$$\alpha=\frac{1}{2\sigma_c\delta}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ln^{-1}\frac{b}{a} \tag{8.7.28}$$

电报方程

考虑具有任意形状的多连通横截面的长直波导，下图是一个具有双连通横截面的长直波导. 由前面的分析可知，在这样的波导中，主波电场的振幅是波导壁电容中的静电场，故有

$$V(z,t)=\frac{\sigma(z,t)}{C} \tag{8.7.29}$$

式中 $V(z,t)$ 是内外波导壁之间的电势差，内导体柱外壁上的面电荷分布，而 C 是波导壁电容. 又由于磁场方向位于波导的横截面上，且对无限长的直波导，波导壁面的外法向 $\boldsymbol{n}$（指向波导管内）与 $\boldsymbol{e}_z$ 方向垂直，故在波导壁上按边界条件

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}_t|_S=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{e}_\phi H_t|_S=\boldsymbol{\Pi}\equiv I(z,t)\boldsymbol{e}_z$$

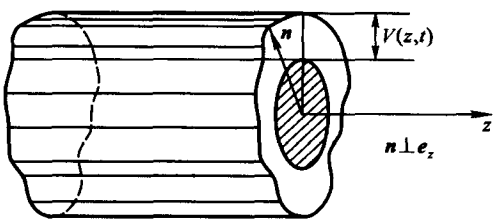


图 8.4 具有任意形状的双连通横截面的长直波导

必有沿 $\boldsymbol{e}_z$ 方向的线电流 $I(z,t)\boldsymbol{e}_z$. 根据电荷守恒有

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\frac{\partial I}{\partial z}=0 \tag{8.7.30}$$

或写成

$$\frac{\partial I}{\partial z}=-C\frac{\partial V}{\partial t} \tag{8.7.31}$$

此外，在导体上，由复 Ohm 定律知

$$-\frac{\partial V(z,t)}{\partial z}=E_z=Z_cI \tag{8.7.32}$$

式中

$$Z_c=R-\mathrm{i}\omega L \tag{8.7.33}$$

是波导每单位长度上的阻抗，它等于单位长度上的电阻与感抗之和. 值得注意的

是,当导体为理想导体时,$R=0$,E_z的实部为零即物理的电场的z分量为零,这正是(8.7.21)所示的情形(这是容易理解的,因为在推导(8.7.21)式时实际上已应用了理想导体边界条件,如B_n在导体壁上为零);对于实际的导体,$R\neq 0$,E_z的实部不为零即存在物理的纵向电场.将(8.7.33)与代入(8.7.32)得

$$\frac{\partial V}{\partial z}=-L\frac{\partial I}{\partial t}-RI \tag{8.7.34}$$

从联立方程(8.7.31)与(8.7.34)消去I或V得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-RC\frac{\partial}{\partial t}-LC\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)I=0 \tag{8.7.35}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-RC\frac{\partial}{\partial t}-LC\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)V=0 \tag{8.7.36}$$

上式或联立方程(8.7.31)与(8.7.34)被称为长线理论中的电报方程.

对于无耗同轴线,由(8.7.21)与(8.7.22)可知,主波场的非零分量可表为

$$E_\rho=\frac{1}{2\pi\rho}Z_0 I(z,t) \tag{8.7.37}$$

$$H_\phi=\frac{1}{2\pi\rho}I(z,t) \tag{8.7.38}$$

式中

$$Z_0=\sqrt{\mu/\varepsilon},\quad I(z,t)=I_0\exp[\mathrm{i}(kz-\omega t)] \tag{8.7.39}$$

内外导体柱之间的电压为

$$V(z,t)=\int_a^b \mathrm{d}\rho E_\rho=Z_c I(z,t) \tag{8.7.40}$$

式中

$$Z_c=\frac{1}{2\pi}Z_0\ln\frac{b}{a} \tag{8.7.41}$$

称为同轴线的特性阻抗.于是由(8.7.40)得

$$\frac{\partial V}{\partial z}=\mathrm{i}kZ_c I=-\sqrt{\mu\varepsilon}Z_c\frac{\partial I}{\partial t} \tag{8.7.42}$$

此即[与式(8.7.34)比较,并注意此时有$R=0$]

$$L=\sqrt{\mu\varepsilon}Z_c=\frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{b}{a} \tag{8.7.43}$$

同样有

$$\frac{\partial I}{\partial z}=\mathrm{i}kZ_c^{-1}V=-\sqrt{\mu\varepsilon}Z_c^{-1}\frac{\partial V}{\partial t} \tag{8.7.44}$$

此即[与式(8.7.31)比较]

$$C=\sqrt{\mu\varepsilon}Z_c^{-1}=2\pi\varepsilon\ln^{-1}\frac{b}{a} \tag{8.7.45}$$

值得指出的是，电报方程仅对 TEM 型的主波适用. 对于其他波型，根本就谈不上所谓横向电压；此外，当波长等于或小于同轴线的横向尺度时，这时会出现高次模式的波型，从而会影响主波的正常传播.

习题 8－7

若同轴线中的介质是无耗损的，问当外半径固定时，内半径为何值时其衰减系数最小？

§8.8　电介质波导

利用导体面对电磁波的反射机制，可使用导体壁来引导电磁波的传播. 利用合适的介质壁，也可以做到这一点. 例如，光导纤维（简称光纤）便可引导激光在其中传播. 一根典型的光纤的主要部分包括一个折射率为 n_1 的圆柱形的芯柱和一个折射率为 n_2 的圆筒状的包层，且满足条件 $n_1 > n_2$. 在这个条件下，在芯柱中传播的电磁波会由于两层介质界面的全反射而不会透射出去. 由于全反射时会有消逝波透入另一介质，因而包层应做得足够厚（设为无穷）以避免能量损失（图 8.5）.

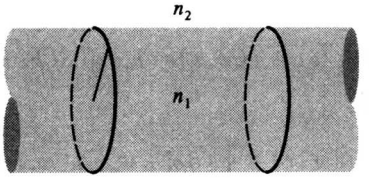


图 8.5　光导纤维

设芯柱半径为 a，取柱轴为 z 轴. 在光纤中传播的波应具有行波因子 $\exp[\mathrm{i}(k_z z - \omega t)]$，于是它应满足圆柱形波导中同样的波动方程. 其芯内（以下标 1 表示）、外（以下标 2 表示）的纵场分量的振幅 ϕ_{10} 与 ϕ_{20} 具有下述形式：

$$\begin{cases} \phi_{10} = [A_1 \mathrm{J}_m(h_1\rho) + B_1 \mathrm{Y}_m(h_1\rho)]\cos(m\phi + \delta_{1m}) \\ \phi_{20} = [A_2 \mathrm{H}_m^{(2)}(h_2\rho) + B_2 \mathrm{H}_m^{(1)}(h_2\rho)]\cos(m\phi + \delta_{2m}) \end{cases} \tag{8.8.1}$$

式中 J_m 与 Y_m 是第一、二类 Bessel 函数，$\mathrm{H}_m^{(1)}$ 与 $\mathrm{H}_m^{(2)}$ 是第一、二类 Hankel 函数，m 是非负整数，而

$$h_i^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu_i \varepsilon_i, \quad i = 1,2 \tag{8.8.2}$$

由于 $\rho = 0$ 与 ∞ 时的场应有限，故 $B_1 = 0, B_2 = 0$. 又由于电场与磁场的纵向振幅 E_z 与 H_z 在 $\rho = a$ 的面上都是连续的，故有 $\delta_{1m} = \delta_{2m} = \delta_m$. 因而有

$$\begin{cases} E_{1z} = C_1 \mathrm{J}_m(h_1\rho)\cos(m\phi + \delta_{m\mathrm{E}}) \\ H_{1z} = D_1 \mathrm{J}_m(h_1\rho)\cos(m\phi + \delta_{m\mathrm{B}}) \\ E_{2z} = C_2 \mathrm{H}_m^{(2)}(h_2\rho)\cos(m\phi + \delta_{m\mathrm{E}}) \\ H_{2z} = D_2 \mathrm{H}_m^{(2)}(h_2\rho)\cos(m\phi + \delta_{m\mathrm{B}}) \end{cases} \tag{8.8.3}$$

利用柱坐标系中的导方程(8.3.16)可由上式求出场的横向振幅，再由 $E_{1\phi} = E_{2\phi}$ 便得

$$h_2^2\left\{C_1\frac{mk_z}{a}\mathrm{J}_m(h_1a)\sin(m\phi + \delta_{m\mathrm{E}}) + D_1\mu_1\omega h_1\mathrm{J}'_m(h_1a)\cos(m\phi + \delta_{m\mathrm{B}})\right\}$$
$$= h_1^2\left\{C_2\frac{mk_z}{a}\mathrm{H}_m^{(2)}(h_1a)\sin(m\phi + \delta_{m\mathrm{E}}) + D_2\mu_2\omega h_2\mathrm{H}_m^{(2)\prime}(h_1a)\cos(m\phi + \delta_{m\mathrm{B}})\right\} \tag{8.8.4}$$

它对所有 ϕ 都成立. 由于三角函数的正交性，应有

$$\cos(m\phi + \delta_{m\mathrm{B}}) = \sin(m\phi + \delta_{m\mathrm{E}}) \tag{8.8.5}$$

否则便有

$$D_1\mu_1 h_2\mathrm{J}'_m(h_1a) = D_2\mu_2 h_1\mathrm{H}_m^{(2)\prime}(h_1a) \tag{8.8.6}$$

再利用其余的边值关系可知所有场的振幅都为零. 故仅当条件(8.8.5)满足时才能得到非平凡的场结构. 于是

$$\begin{cases} E_{1z} = C_1 \mathrm{J}_m(h_1\rho)\cos(m\phi + \delta_m) \\ H_{1z} = D_1 \mathrm{J}_m(h_1\rho)\sin(m\phi + \delta_m) \\ E_{2z} = C_2 \mathrm{H}_m^{(2)}(h_2\rho)\cos(m\phi + \delta_m) \\ H_{2z} = D_2 \mathrm{H}_m^{(2)}(h_2\rho)\sin(m\phi + \delta_m) \end{cases} \tag{8.8.7}$$

式中已令 $\delta_{m\mathrm{E}} = \delta_m$.

对于可沿轴向传播的波，应在芯柱外的包层中沿径向很快衰减，即是所谓表面波. 由第二类 Hankel 函数的渐近形式

$$\mathrm{H}_m^{(2)}(h_2\rho \gg 1) = \sqrt{\frac{2}{\pi h_2\rho}}\exp[-\mathrm{i}(h_2\rho - m\pi/2 - \pi/4)]$$

知，只要取

$$h_2 = -\mathrm{i}h, \qquad h \text{ 为实数} \tag{8.8.8}$$

所述要求便可满足. 这个虚宗量的第二类 Hankel 函数可写成第二类变形 Bessel 函数

$$\mathrm{K}_m(h\rho) = (-\mathrm{i})^{m+1}\frac{\pi}{2}\mathrm{H}_m^{(2)}(-\mathrm{i}h\rho) \tag{8.8.9}$$

于是有

$$\begin{cases} E_{2z} = C_2 \mathrm{K}_m(h\rho)\cos(m\phi + \delta_m) \\ H_{2z} = D_2 \mathrm{K}_m(h\rho)\sin(m\phi + \delta_m) \end{cases} \tag{8.8.10}$$

式中常系数仍记为 C_2 与 D_2.

应用边值关系

$$\begin{cases}(E_{1z})_{\rho=a}=(E_{2z})_{\rho=a}, & (E_{1\phi})_{\rho=a}=(E_{2\phi})_{\rho=a}\\ (H_{1z})_{\rho=a}=(H_{2z})_{\rho=a}, & (H_{1\phi})_{\rho=a}=(H_{2\phi})_{\rho=a}\end{cases} \tag{8.8.11}$$

可知,一般情形下场不可能像导体波导那样分解成 TE 波与 TM 波;但在 $m=0$ 时,场却自动分成 TE 波和 TM 波.为简单起见,仅考虑轴对称模式 $m=0$.这时边值关系成为

$$\begin{cases}C_1\mathrm{J}_0(h_1a)=C_2\mathrm{K}_0(ha)\\ \dfrac{\varepsilon_1}{h_1}C_1\mathrm{J}'_0(h_1a)=\dfrac{\varepsilon_2}{h}C_2\mathrm{K}'_0(ha)\\ D_1\mathrm{J}_0(h_1a)=D_2\mathrm{K}_0(ha)\\ \dfrac{1}{h_1}D_1\mathrm{J}'_0(h_1a)=\dfrac{1}{h}D_2\mathrm{K}'_0(ha)\end{cases} \tag{8.8.12}$$

式中已应用了导方程(8.3.16).若 C_1 与 C_2 都不为零,则有

$$h_1\frac{\mathrm{J}_0(h_1a)}{\varepsilon_1\mathrm{J}_1(h_1a)}=h\frac{\mathrm{K}_0(ha)}{\varepsilon_2\mathrm{K}_1(ha)} \tag{8.8.13}$$

若 D_1 与 D_2 都不为零,则有

$$h_1\frac{\mathrm{J}_0(h_1a)}{\mathrm{J}_1(h_1a)}=h\frac{\mathrm{K}_0(ha)}{\mathrm{K}_1(ha)} \tag{8.8.14}$$

式中利用了柱函数微商公式 $\mathrm{J}'_0(x)=-\mathrm{J}_1(x)$ 与 $\mathrm{K}'_0(x)=-\mathrm{K}_1(x)$.显然,条件(8.8.13)与(8.8.14)不可能同时满足,因而有下述可能性:

(a) 条件(8.8.13)成立且 $D_1=D_2=0$,这相当于 TM 型波;

(b) 条件(8.8.14)成立且 $C_1=C_2=0$,这相当于 TE 型波.

由 h_i 的定义可导出

$$\omega=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{(h_1a)^2-(h_2a)^2}{\mu_1\varepsilon_1-\mu_2\varepsilon_2}}=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{(h_1a)^2+(ha)^2}{\mu_1\varepsilon_1-\mu_2\varepsilon_2}} \tag{8.8.15}$$

当 $h=0$ 时,芯柱外场的振幅沿径向不衰减,波的能量将沿径向辐射出去,沿轴向的波不能传播而截止.故截止频率为

$$\omega_c=\frac{1}{a}\frac{(h_1a)}{\sqrt{\mu_1\varepsilon_1-\mu_2\varepsilon_2}} \tag{8.8.16}$$

式中 h_1a 由 $h=0$ 的条件决定,这个条件可由轴对称模式的非零解条件(8.8.14)、(8.8.13)转化为

$$\mathrm{J}_0(h_1a)=0 \tag{8.8.17}$$

设 ν_{0n} 是 $\mathrm{J}_0(x)=0$ 的第 n 个根,则 TE_{0n} 或 TM_{0n} 模的截止频率为

$$(\omega_c)_{0n}=\frac{1}{a}\frac{\nu_{0n}}{\sqrt{\mu_1\varepsilon_1-\mu_2\varepsilon_2}} \tag{8.8.18}$$

轴对称模中最低的截止频率为

$$(f_c)_{01}=\frac{2.048c}{2\pi a\sqrt{n_1^2-n_2^2}} \tag{8.8.19}$$

但这并不是所有模中最低的.最后,由(8.8.16)得

$$k_z=\sqrt{\omega^2\mu_1\varepsilon_1-h_1^2}=\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}\,\omega \tag{8.8.20}$$

故波的相速度为 $1/\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}$,即由包层的性质决定.

习题 8-8

一厚度为 d 的介质波导置于一平面理想导体上,介质波导的介电常量与磁导率分别为 ε 与 μ,介质波导的另一侧是空气.试问

(1) 哪些模可沿此介质传播?

(2) 对于每一种可传播模,导体表面上的面电流与面电荷为多少?

(3) 由(2)验证下述电荷守恒关系是正确的

$$\nabla_\Sigma\cdot\boldsymbol{\Pi}_f+\frac{\partial\omega_f}{\partial t}=0$$

(4) 若导体的电导率 σ_c 很大但不是无穷大,导体表面每单位面积的近似损耗功率为多少?

第九章　时变场与多极辐射

本章首先导出无界空间中的推迟Green函数、单色推迟Green函数以及所谓的并矢Green函数，给出势的波动方程的基本解——推迟势和相应的电磁场的场强；继而，通过对Green函数进行多极展开，得到各级多极辐射场，并用于讨论分布于小区域的随时间变化的电荷、电流系统的辐射．最后，介绍天线及其阵列的辐射．

§9.1 推迟 Green 函数与推迟势

现研究当已知系统的电荷、电流分布的场及其变化[即四维电流密度分布 $j_\mu(x)$]时如何决定随时间变化的电磁场(时变场)的场分布的问题,由电磁场场强与四维矢势的联系可知,只要由四维电流密度分布求出四维矢势即可.在 Lorentz 规范

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad 或 \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0 \tag{9.1.1}$$

下,四维矢势 A^μ 满足波动方程

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) A^\mu = \mu_0 j^\mu \tag{9.1.2}$$

与无界空间的边界条件

$$A^\mu(\boldsymbol{x}, t) = 0, \qquad 当 |\boldsymbol{x}| \to 0 \tag{9.1.3}$$

为求解上述波动方程,可引入无界区域中的 Green 函数 $G(x, x')$,它满足方程

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) G(x, x') = \delta^4(x - x') \tag{9.1.4}$$

与无界空间的边界条件

$$G(x, x') = 0, \qquad 当 |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'| \to 0 \tag{9.1.5}$$

则方程(9.1.2)在无界区域中的解可形式地写为

$$A^\mu(x) = A^\mu_c + \mu_0 \int \mathrm{d}^4 x' j^\mu(x') G(x, x') \tag{9.1.6}$$

式中右端第二项表示在 x' 四维电流 $j^\mu(x')$ 对 x 处的矢势 $A^\mu(x)$ 的贡献,而 Green 函数 $G(x, x')$ 则测量了 x' 处的一个单位的电磁激发(源)在 x 处产生的矢势;于是常称 x' 为场的激发点,而 x 则被称为观测点.

为了确定矢势分布 $A^\mu(x)$,需要明确上式中 A^μ_c 的物理意义.而这要求对 Green 函数 $G(x, x')$ 加上限制条件.通常有两种限制条件(或初始条件)

$$(1) \quad G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'; x_0, x_0') = 0, \qquad 当 \ t > t' \tag{9.1.7}$$

$$(2) \quad G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'; x_0, x_0') = 0, \qquad 当 \ t < t' \tag{9.1.8}$$

满足初始条件(9.1.7)的 Green 函数称为超前 Green 函数,记为 $G_a(x, x')$;这时观测时刻 t 处在激发时刻 t' 之前 Green 函数才可能不为零,这仅在同时处理粒子与反粒子的量子场论中对于反粒子(如正电子)才是可能的.而满足初始条件(9.1.8)的 Green 函数称为推迟 Green 函数,记为 $G_r(x, x')$;它表示 $\boldsymbol{x}'$ 处 t' 时刻激发的场只能在稍后的时刻 t 到达测量点 $\boldsymbol{x}$,这正好符合辐射问题的实际情形.对于推迟 Green 函数,我们有

$$G_r(x,x')|_{t=-\infty}=0 \tag{9.1.9}$$

因而

$$A^\mu(\boldsymbol{x},t=-\infty)=A_e^\mu \tag{9.1.10}$$

可见，A_e^μ是初始时刻$t=-\infty$在测量点$\boldsymbol{x}$早就存在的矢势，它不是后来由体系的电流分布$j^\mu(x')$所激发的场，而是所谓外场.由于波动方程(9.1.2)是线性方程，整个势场是外场和电流分布$j^\mu(x')$激发的场的叠加.

在推求推迟 Green 函数的具体形式之前，现考察 Green 函数在四维时空平移变换

$$x\to x-a,\qquad a=\text{四维时空常矢量} \tag{9.1.11}$$

下的变换性质.首先，四维 δ－函数$\delta^4(x-x')$仅与两个四维时空矢量之差有关，因而在变换(9.1.11)下不变.微分算符$\partial/\partial x^\mu$与时空点x^μ无关，故在变换(9.1.11)前后也保持不变.进而，边界条件仅与空间距离有关，而初始条件仅与时间差有关，故在平移交换后亦不变.因而，Green 函数是平移不变的，即它只可能依赖于四维时空坐标之差，故

$$G(x,x')=G(x-x') \tag{9.1.12}$$

通常用 Fourier 变换法来求解 Green 函数.本节为了使物理意义更加清楚起见，利用问题的对称性直接求解.根据 Green 函数的平移不变性，可将决定 Green 函数的方程化简.令

$$y\equiv(y_0,\boldsymbol{r})=x-x' \tag{9.1.13}$$

则推迟 Green 函数$G_r(y)$满足方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y_0^2}-\nabla^2\right)G_r(y)=\delta^4(y) \tag{9.1.14}$$

边界条件

$$G_r(y)=0,\qquad \text{当}|\boldsymbol{r}|\to\infty \tag{9.1.15}$$

与初始条件

$$G_r(y)=0,\qquad \text{当}\ y_0<0 \tag{9.1.16}$$

方程(9.1.14)、(9.1.15)与(9.1.16)是球对称的，即在三维空间转动变换下保持不变.因而，Green 函数$G_r(y)$也是球对称的，或者说$G_r(y)$仅与由y构成的球对称的量即$r=|y|$与y_0有关：

$$G(y)=G(r,y_0) \tag{9.1.17}$$

因而在球坐标系中有

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y_0^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)\right]G_r(y)=\delta^4(y) \tag{9.1.18}$$

当$r\neq0$时，$G_r(y)$满足齐次方程

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y_0^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)\right]G_r(y)=0,\quad r\neq 0 \tag{9.1.19}$$

作函数变换

$$G_r(r,y_0)=\frac{u(r,y_0)}{r} \tag{9.1.20}$$

则上述齐次方程成为二维时空中的波动方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y_0^2}-\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)u=0,\quad r\neq 0 \tag{9.1.21}$$

它可写成

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_0}-\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y_0}+\frac{\partial}{\partial r}\right)u=0,\quad r\neq 0 \tag{9.1.22}$$

其通解为

$$u_r(r,y_0)=f(y_0-r)+g(y_0+r) \tag{9.1.23}$$

因而除原点外有

$$\begin{aligned}G_r(r,y_0)&=\frac{f(y_0-r)}{r}+\frac{g(y_0+r)}{r}\\&=\left[\frac{f(y_0-r)}{r}+\frac{g(y_0+r)}{r}\right]\theta(y_0)+\left[\frac{f(y_0-r)}{r}+\frac{g(y_0+r)}{r}\right]\theta(-y_0)\end{aligned} \tag{9.1.24}$$

式中 $f(y_0-r)/r$ 表示从原点向外发射的球面波，$f(y_0+r)/r$ 则是向原点收缩的球面波；而 $\theta(y_0)$ 是阶跃函数：

$$\theta(y_0)=\begin{cases}1, y_0>0\\0, \text{其他}\end{cases} \tag{9.1.25}$$

由初始条件(9.1.16)得

$$\left[\frac{f(y_0-r)}{r}+\frac{g(y_0+r)}{r}\right]\theta(-y_0)=0 \tag{9.1.26}$$

从而

$$G_r(r,y_0)=\left[\frac{f(y_0-r)}{r}+\frac{g(y_0+r)}{r}\right]\theta(y_0) \tag{9.1.27}$$

考虑函数

$$\mathrm{F}(y)=\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2}-\nabla^2\right]\frac{f(y_0-r)+g(y_0+r)}{r}\theta(y_0) \tag{9.1.28}$$

它仅在 $r=0$ 处不为零，因而对它的体积分可化为包围原点 $y=0$ 的半径为无穷小的小球上的体积分

$$\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{F}(y)=\lim_{\eta\to 0}\int_0^{\eta}4\pi r^2\mathrm{d}r\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2}-\nabla^2\right]\frac{f(y_0-r)+g(y_0+r)}{r}\theta(y_0)$$

$$=\lim_{\eta\to 0}\int_0^{\eta}4\pi r^2\mathrm{d}r\left\{[f(y_0-r)+g(y_0+r)]\theta(y_0)4\pi\delta^3(y)+\right.$$
$$\frac{f(y_0-r)+g(y_0+r)}{r}\delta'(y_0)+2\frac{f'(y_0-r)+g'(y_0+r)}{r}\delta(y_0)+$$
$$\left.\theta(y_0)\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\frac{f(y_0-r)+g(y_0+r)}{r}\right\} \tag{9.1.29}$$

式中右端花括号中的第四项为零(因为 $r\neq 0$).现考虑上式右端花括号中的第二、三项.在 $r\neq 0$ 时,将算符$[\partial/(c^2\partial t^2)-\nabla^2]$作用于方程(9.1.26)两端得

$$\frac{f(y_0-r)+g(y_0+r)}{r}\delta'(y_0)+2\frac{f'(y_0-r)+g'(y_0+r)}{r}\delta(y_0)=0 \tag{9.1.30}$$

因而,上式左端与 r^2 的积对任意的 r 都是零.由式(9.1.14)知

$$\int \mathrm{d}^3x\mathrm{F}(y)=\lim_{\eta\to 0}4\pi[f(y_0-\eta)+g(y_0+\eta)]\theta(y_0)=\delta(y_0) \tag{9.1.31}$$

它显然有解

$$f(y_0)=g(y_0)=\frac{\delta(y_0)}{4\pi} \tag{9.1.32}$$

将此解代入(9.1.27)得

$$G_{\mathrm{r}}(y)=\frac{\delta(y_0-r)+\delta(y_0+r)}{4\pi r}\theta(y_0)=\frac{\delta(y_0-r)}{4\pi r} \tag{9.1.33}$$

用原来的坐标写出即

$$G_{\mathrm{r}}(x,x')=\frac{1}{4\pi}\frac{\delta(x_0-x_0'-R)}{R},\quad R=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'| \tag{9.1.34}$$

这是所求的推迟 Green 函数的具体表达式,这一 Green 函数被称为时域中的推迟 Green 函数.它可以写成协变形式

$$G_{\mathrm{r}}(x,x')=\frac{1}{2\pi}\delta[(x-x')^2]\theta(x_0-x_0') \tag{9.1.35}$$

利用(9.1.34),当外势场 A_e^{μ} 为零时,由方程(9.1.6)可得

$$A^{\mu}(\boldsymbol{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^4x'j^{\mu}(x')\frac{\delta(x_0-x_0'-R)}{R}$$
$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^3x'\frac{j^{\mu}(\boldsymbol{x}',t'=t-R/c)}{R} \tag{9.1.36}$$

写成三维形式即

$$\begin{cases}\varphi(\boldsymbol{x},t)=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int \mathrm{d}^3x'\,\frac{\rho\left(\boldsymbol{x}',t'=t-\dfrac{R}{c}\right)}{R}\\[2ex]\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \mathrm{d}^3x'\,\frac{\boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{x}',t'=t-\dfrac{R}{c}\right)}{R}\end{cases}\tag{9.1.37}$$

这便是所谓推迟势.它表明在观测点 $\boldsymbol{x}$ 于时刻 t 所测到的场是由较早时刻 $t'=t-R/c$ 的电荷、电流分布决定的,两时刻之差正是电磁场从源点 $\boldsymbol{x}'$ 传播至观测点 $\boldsymbol{x}$ 所需的时间.根据电荷守恒定律可以验证推迟势满足 Lorentz 规范条件.

习题 9-1

1. 试证明推迟势满足 D'Alembert 方程.
2. 利用电荷守恒定律验证推迟势满足 Lorentz 条件.
3. 试述求推迟 Green 函数的其他方法(例如 Fourier 变换法).

§9.2 Jefimenko 方程

利用 Lorentz 规范下的推迟势公式可以得到相应的电磁场的场强(电场强度与磁感应强度)用电荷、电流分布的表达式.事实上,将(9.1.37)代入场强定义式

$$\boldsymbol{E}(x)=-\left[\nabla\varphi(x)+\frac{\partial\boldsymbol{A}(x)}{\partial t}\right],\quad \boldsymbol{B}(x)=\nabla\times\boldsymbol{A}(x)\tag{9.2.1}$$

得

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}(x)=\dfrac{-1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int \mathrm{d}^3x'\left(\nabla\frac{[\rho]}{R}+\frac{1}{c^2R}\frac{\partial[\boldsymbol{j}]}{\partial t}\right)\\[2ex]\boldsymbol{B}(x)=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \mathrm{d}^3x'\,\nabla\times\frac{[\boldsymbol{j}]}{R}\end{cases}\tag{9.2.2}$$

式中,[ ]表示在时刻 $t'=t-R/c$ 取值的推迟量.利用

$$\begin{cases}\nabla[\rho]=-\dfrac{\boldsymbol{R}}{cR}\dfrac{\partial[\rho]}{\partial t}\\[2ex]\nabla\times[\boldsymbol{j}]=-\dfrac{\boldsymbol{R}}{cR}\times\dfrac{\partial[\boldsymbol{j}]}{\partial t}\end{cases}\tag{9.2.3}$$

易得

$$\begin{cases}\nabla\dfrac{[\rho]}{R}=-\dfrac{\boldsymbol{R}}{R^3}\left([\rho]+\dfrac{R}{c}\dfrac{\partial[\rho]}{\partial t}\right)\\[2ex]\nabla\times\dfrac{[\boldsymbol{j}]}{R}=-\dfrac{\boldsymbol{R}}{R^3}\times\left([\boldsymbol{j}]+\dfrac{R}{c}\dfrac{\partial[\boldsymbol{j}]}{\partial t}\right)\end{cases}\tag{9.2.4}$$

于是有

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}(x) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^3x' \left\{ \left([\rho] + \dfrac{R}{c}\dfrac{\partial[\rho]}{\partial t} \right)\dfrac{\boldsymbol{R}}{R^3} - \dfrac{1}{c^2 R}\dfrac{\partial[\boldsymbol{j}]}{\partial t} \right\} \\ \boldsymbol{B}(x) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^3x' \left([\boldsymbol{j}] + \dfrac{R}{c}\dfrac{\partial[\boldsymbol{j}]}{\partial t} \right) \times \dfrac{\boldsymbol{R}}{R^3} \end{cases} \tag{9.2.5}$$

这便是广义的 Biot－Savart 定律与 Coulomb 定律，也称为 Jefimenko 方程．它也可直接从 Maxwell 方程得到．

可以证明，由 Jefimenko 方程确定的电磁场满足 Maxwell 方程．作为计算的实例，我们由 Jefimenko 第一方程导出 Maxwell 第一方程．为此，将 Jefimenko 第一方程表为

$$\boldsymbol{E}(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^4x' \left\{ \frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\rho(x')\delta(x_0 - x_0' - R) + \frac{\boldsymbol{R}}{R^2}\rho(x')\delta'(x_0 - x_0' - R) - \frac{\boldsymbol{j}(x')}{cR}\delta'(x_0 - x_0' - R) \right\} \tag{9.2.6}$$

对上式取散度得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^4x' \left\{ -\rho(x')\delta(x_0 - x_0' - R)\nabla^2\frac{1}{R} - \frac{1}{R}\rho(x')\delta''(x_0 - x_0' - R) - \frac{\boldsymbol{j}(x')}{c}\cdot\nabla\left[\frac{1}{R}\delta'(x_0 - x_0' - R) \right] \right\} \tag{9.2.7}$$

式中，已注意到正比于 $\rho(x')\delta'(x_0 - x_0' - R)/R^2$ 的三项相互抵消，因而消失为零．通过分部积分可得

$$\begin{cases} \displaystyle\int \mathrm{d}^4x' \frac{1}{R}\rho(x')\delta''(x_0 - x_0' - R) = \int \mathrm{d}^4x' \frac{1}{cR}\dot{\rho}(x')\delta'(x_0 - x_0' - R) \\ \displaystyle\int \mathrm{d}^4x' \boldsymbol{j}(x')\cdot\nabla\frac{1}{R}\delta'(x_0 - x_0' - R) = \int \mathrm{d}^4x' \frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{j}(x')}{R}\delta'(x_0 - x_0' - R) \end{cases} \tag{9.2.8}$$

式中已应用了电荷密度与电流密度在无穷远处为零的条件，并注意到了

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}f(x_\mu - x_\mu') = -\frac{\partial}{\partial x'_\mu}f(x_\mu - x_\mu') \tag{9.2.9}$$

利用(9.2.8)与电荷守恒定律可知(9.2.7)右端被积式的第二、三项的贡献相互抵消，于是有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^4x'\rho(x')\delta(x_0 - x_0' - R)4\pi\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') = \frac{\rho(x)}{\varepsilon_0} \tag{9.2.10}$$

同样，可由 Jefimenko 方程也可导出其余的 Maxwell 方程．

讨论：

(a) Jefimenko 方程(9.2.5)可以改写为

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}(x) = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\displaystyle\int \mathrm{d}^4x' \left\{ \frac{\boldsymbol{R}\rho(x')}{R^2} + \frac{\boldsymbol{R}\dot{\rho}(x')}{cR} - \frac{\dot{\boldsymbol{j}}(x')}{c^2} \right\} G_r(x,x') \\ \boldsymbol{B}(x) = \mu_0 \displaystyle\int \mathrm{d}^4x' \left\{ \frac{\boldsymbol{j}(x')\times\boldsymbol{R}}{R^2} + \frac{\dot{\boldsymbol{j}}\times\boldsymbol{R}}{cR} \right\} G_r(x,x') \end{cases} \tag{9.2.11}$$

这说明方程右端的被积式内花括号中的源激发以光速向周围以球面波的形式传播,所测到的电磁场场强是同时到达观测点的电磁波的场强的叠加.换言之,(9.2.5)清楚地表明了电磁场具有推迟效应,并满足线性叠加原理.

(b) 定义"等效"的电荷密度与"等效"的电流密度

$$\rho^* = \rho + \frac{R}{c}\dot{\rho}, \quad \boldsymbol{j}^* = \boldsymbol{j} + \frac{R}{c}\dot{\boldsymbol{j}} \tag{9.2.12}$$

从而 Jefimenko 方程(9.2.5)化为下述形式:

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}(x) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int \mathrm{d}^3x' \left\{ \frac{[\rho^*]\boldsymbol{R}}{R^3} - \frac{1}{c^2R}\frac{\partial[\boldsymbol{j}]}{\partial t} \right\} \\ \boldsymbol{B}(x) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \mathrm{d}^3x' \frac{[\boldsymbol{j}^*]\times\boldsymbol{R}}{R^3} \end{cases} \tag{9.2.13}$$

除开第一式右端被积式内的第二项,上述公式"就是"恒场理论中的 Biot - Savart 定律与 Coulomb 定律,只不过将静止的电荷、电流分布推广为"等效"的罢了.

习题 9-2

1. 试直接从 Maxwell 方程导出 Jefimenko 方程.
2. 试证由 Jefimenko 方程确定的电磁场满足 Maxwell 方程.
3. 设一长度为 Δl 的短细导体沿 z 轴放置,其中心为坐标系的原点.这一短细导体上流有交变电流 $i = I\exp(-\mathrm{i}\omega t)$.求空间的电场与磁场.

§9.3 单色推迟 Green 函数与单色推迟势

任何电磁激发源(即四维电流分布)和任何电磁场都可以表示为各个频率分量的叠加,为了决定时变电磁场分布,只需弄清每个单频电磁场即单色场的分布即可.为此,考虑以某一频率 ω 随时间而变化的三维电流分布

$$\boldsymbol{j}_\omega(\boldsymbol{x}',t') = \boldsymbol{j}_\omega(\boldsymbol{x}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t'} \tag{9.3.1}$$

式中下标 ω 指明了该量变化的频率,以下在不致因其而混淆的情形下略去.电流分布(9.3.1)所激发的三维矢势为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) = \mu_0 \int \mathrm{d}^3x' \frac{\boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{x}', t - \dfrac{R}{c}\right)}{4\pi R} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{9.3.2}$$

可见,矢势也以频率 ω 随时间而变化,相应的振幅为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\mu_0\int \mathrm{d}^3x'\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R} \tag{9.3.3}$$

式中 $k=\omega/c$ 是相应的波数.由此可知,电流元 $\mathrm{d}^3x'\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')$所激发的电磁波是以该电流元所在处为中心向外传播的球面波;其中 $\exp(\mathrm{i}kR)$是推迟因子,kR 是推迟相位,它表示波从源点至观测点的相位移动.

将(9.3.3)式与(9.1.6)式对照可知,$\exp(\mathrm{i}kR)/(4\pi R)$是决定单色场的矢势的推迟 Green 函数,这是频域中的推迟 Green 函数.事实上,由四维矢势 A^μ 满足的方程(9.1.2)可知单色势场的振幅满足 Helmholtz 方程

$$[\nabla^2+k^2]A^\mu=-\mu_0 j^\mu \tag{9.3.4}$$

相应的单色 Green 函数 $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$在无界空间中应满足方程

$$[\nabla^2+k^2]G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=-\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{9.3.5}$$

与无界区域的自然边界条件

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=0,\qquad 当|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|\to 0 \tag{9.3.6}$$

方程(9.3.5)与(9.3.6)也可由(9.1.4)与(9.1.5)应用于时域中的无界空间中的 Green 函数的单色分量而得到.其解为

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=\frac{\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}kR}}{4\pi R} \tag{9.3.7}$$

将频域中的 Green 函数变换到时域正好得到时域中的 Green 函数

$$G(x,x')=\int\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi c}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t')}G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=\frac{\delta(x_0-x_0'\mp R)}{4\pi R} \tag{9.3.8}$$

或者说,无界空间中单色 Green 函数是无界空间内时域中的 Green 函数的单频分量;反之,将时域中的 Green 函数变换到频域也正好得到频域中的 Green 函数

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=\int \mathrm{d}x_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t-t')}G(x,x')=\frac{\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}kR}}{4\pi R}\bigg|_{t'=t\mp R/c} \tag{9.3.9}$$

对于推迟 Green 函数,推迟条件(9.1.8)要求

$$\int\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi c}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t')}G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=0,\qquad 当\ t-t'<0 \tag{9.3.10}$$

此即

$$\delta(t-t'\mp R/c)=0,\qquad 当\ t-t'<0$$

换言之,R 之前应取负号[即在(9.3.7)右端指数上应取正号].因而无界空间中单色推迟 Green 函数为

$$G_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R} \tag{9.3.11}$$

利用无界空间中单色推迟 Green 函数 $G_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$,可将单色推迟势的振幅写成

$$A^{\mu}(\boldsymbol{x})=\mu_0\int \mathrm{d}^3x'j^{\mu}(\boldsymbol{x}')\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R} \tag{9.3.12}$$

写成三维形式即

$$\begin{cases}\varphi(\boldsymbol{x})=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\displaystyle\int \mathrm{d}^3x'\rho(\boldsymbol{x}')\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R}\\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\mu_0\displaystyle\int \mathrm{d}^3x'\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R}\end{cases} \tag{9.3.13}$$

习题 9-3

试证明：在 Lorentz 条件成立的情况下，有限辐射体系在远离该体系的远场区（或称波区）内的标势可用公式 $\varphi=c\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{A}$ 表示，其中 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 分别是相应的辐射方向和矢势.

§9.4 单色源的电磁场的普遍形式

为了说明单色推迟 Green 函数的威力，我们将证明，利用单色推迟 Green 函数可以十分简洁地决定任意变化的电荷分布与电流分布的电磁场的场强分布.

单色电磁场可完全由三维矢势的振幅表出. 事实上，应用推迟势所满足的 Lorentz 规范条件

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi_{\omega}}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{A}_{\omega}=0$$

（注意此处加上了下标 ω）知，当频率 $\omega\neq0$ 时，可由单色矢势定出相应的标势

$$\varphi_{\omega}=-\mathrm{i}\frac{c^2}{\omega}\nabla\cdot\boldsymbol{A}_{\omega} \tag{9.4.1}$$

因而，相应的电磁场场强为

$$\begin{cases}\boldsymbol{B}_{\omega}=\nabla\times\boldsymbol{A}_{\omega}\\ \boldsymbol{E}_{\omega}=-\nabla\varphi_{\omega}+\mathrm{i}\omega\boldsymbol{A}_{\omega}=\mathrm{i}\omega\boldsymbol{A}_{\omega}+\mathrm{i}\dfrac{c^2}{\omega}\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})_{\omega}\end{cases} \tag{9.4.2}$$

利用 Lorentz 规范下的单色推迟势可以得到频域中由变化的电荷、电流分布激发的电磁场场强振幅的表达式. 事实上，将(9.3.13)代入(9.4.2)得

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_{\omega}(\boldsymbol{x})=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\displaystyle\int \mathrm{d}^3x'\left[-\rho_{\omega}(\boldsymbol{x}')\nabla+\frac{\mathrm{i}\omega}{c^2}\boldsymbol{A}_{\omega}(\boldsymbol{x}')\right]\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R}\\ \boldsymbol{B}_{\omega}(\boldsymbol{x})=\mu_0\displaystyle\int \mathrm{d}^3x'\boldsymbol{j}_{\omega}(\boldsymbol{x}')\times\nabla\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R}\end{cases} \tag{9.4.3}$$

利用恒等式

$$\nabla\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}=-\left(\frac{\boldsymbol{R}}{R^2}+\frac{-\mathrm{i}\omega\boldsymbol{R}}{cR}\right)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R} \tag{9.4.4}$$

(9.4.3)式成为

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_\omega(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^3x'\left[\rho_\omega(\boldsymbol{x}')\left(\dfrac{\boldsymbol{R}}{R^2}+\dfrac{-\mathrm{i}\omega\boldsymbol{R}}{cR}\right)+\dfrac{\mathrm{i}\omega}{c^2}\boldsymbol{j}_\omega(\boldsymbol{x}')\right]\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R} \\ \boldsymbol{B}_\omega(\boldsymbol{x}) = \mu_0\int \mathrm{d}^3x'\boldsymbol{j}_\omega(\boldsymbol{x}')\times\left[\dfrac{\boldsymbol{R}}{R^2}+\dfrac{-\mathrm{i}\omega\boldsymbol{R}}{c}\right]\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R} \end{cases} \tag{9.4.5}$$

这是在频域中由给定电荷分布与电流分布决定电磁场场强的普遍公式.

可以证明,公式(9.4.5)与 Jefimenko 方程是等价的.事实上,两者可用 Fourier 变换与 Fourier 逆变换相互转换.这里我们由公式(9.4.5)推出 Jefimenko 方程.首先有

$$[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)] = \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}[\boldsymbol{E}_\omega(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{B}_\omega(\boldsymbol{x},t)] \tag{9.4.6}$$

及

$$[\rho_\omega(\boldsymbol{x}'),\boldsymbol{j}_\omega(\boldsymbol{x}')] = \int \mathrm{d}t'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t'}[\rho(\boldsymbol{x}',t'),\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}',t')] \tag{9.4.7}$$

将(9.4.5)代入(9.4.6),并利用(9.4.7),可得

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\int \dfrac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\int \mathrm{d}^3x'\mathrm{d}t'\left[\rho(\boldsymbol{x}')\left(\dfrac{\boldsymbol{R}}{R^2}-\dfrac{\mathrm{i}\omega\boldsymbol{R}}{cR}\right)+\dfrac{\mathrm{i}\omega}{c^2}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')\right]\dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t'-R/c)}}{4\pi R} \\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) = \mu_0\int \dfrac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\int \mathrm{d}^3x'\mathrm{d}t'\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')\times\left(\dfrac{\boldsymbol{R}}{R^2}-\dfrac{\mathrm{i}\omega\boldsymbol{R}}{cR}\right)\dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t'-R/c)}}{4\pi R} \end{cases} \tag{9.4.8}$$

完成对频率 ω 的积分得

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^3x'\mathrm{d}t'\left[\dfrac{\rho(\boldsymbol{x}')\boldsymbol{R}}{R^2}+\dfrac{\dot{\rho}(\boldsymbol{x}')\boldsymbol{R}}{cR}-\dfrac{\dot{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{x}')}{c^2}\right]\dfrac{\delta(t-t'-R/c)}{4\pi R} \\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) = \mu_0\int \mathrm{d}^3x'\mathrm{d}t'\left[\dfrac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')\times\boldsymbol{R}}{R^2}+\dfrac{\dot{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{x}')\times\boldsymbol{R}}{cR}\right]\dfrac{\delta(t-t'-R/c)}{4\pi R} \end{cases} \tag{9.4.9}$$

这实际上就是 Jefimenko 方程.

讨论:

(a) 由于由 Jefimenko 方程所确定的电磁场满足 Maxwell 方程,故由方程(9.4.5)确定的电磁场也满足 Maxwell 方程.

(b) 方程(9.4.5)是频域中的振幅方程,其推迟效应是由单色推迟 Green 函数 $\exp(\mathrm{i}kR)/(4\pi R)$这一伴随因子来体现的.

(c) 单色推迟 Green 函数 $\exp(\mathrm{i}kR)/(4\pi R)$这一伴随因子又可视为一向四周传播的球面波,故方程(9.4.5)说明在 $\boldsymbol{x}$ 点所观测的电磁场场强的振幅是同时到达观测点的电磁波的场强振幅的叠加.

(d) 所谓的“等效”的电荷密度与“等效”的电流密度在频域中的形式为

$$\rho_\omega^* = \rho_\omega(1 - \mathrm{i}kR), \quad \boldsymbol{j}_\omega^* = \boldsymbol{j}_\omega(1 - \mathrm{i}kR) \tag{9.4.10}$$

从而方程(9.4.5)化为下述更简洁的形式

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_\omega(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\displaystyle\int \mathrm{d}^3x' \left[\rho_\omega^*(\boldsymbol{x}')\frac{\boldsymbol{R}}{R^2} + \frac{\mathrm{i}\omega}{c^2}\boldsymbol{j}_\omega(\boldsymbol{x}')\right]\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R} \\ \boldsymbol{B}_\omega(\boldsymbol{x}) = \mu_0\displaystyle\int \mathrm{d}^3x' \boldsymbol{j}_\omega^*(\boldsymbol{x}') \times \frac{\boldsymbol{R}}{R^2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R} \end{cases} \tag{9.4.11}$$

注意,恒场相当于频率 $\omega = 0$ 时的情形.

(e) 需要指出的是,由 Jefimenko 方程或方程(9.4.5)确定的电磁场只是 Maxwell 方程的特解,与齐次 Maxwell 方程的通解加在一起才能构成满足 Maxwell 方程和边界条件的物理解.

习题 9-4

1. 试直接从 Maxwell 方程导出方程(9.4.5).
2. 试由方程(9.4.5)也可导出 Maxwell 方程.
3. 电荷均匀分布在半径为 a 的细圆环上,总电荷为 Q.圆环围绕其对称轴作匀速转动,转动角速度为 ω.求对称轴上很远的电场与磁场.

§9.5 并矢 Green 函数

本节我们介绍将源与场直接联系起来的所谓并矢 Green 函数的概念,它频繁地出现在关于电磁场的研究文献和书籍中.为此,我们回到频域中的有源 Maxwell 方程

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{i}\omega\mu_0 \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) \\ \nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) = -\mathrm{i}\omega\varepsilon_0 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}) \end{cases} \tag{9.5.1}$$

式中的源与场(已略去了下标 ω)分别是时域中的源与场的 Fourier 变换

$$(\boldsymbol{j}_\omega(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{E}_\omega(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{H}_\omega(\boldsymbol{x})) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}(\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},t)) \tag{9.5.2}$$

或者说是按确定的频率 ω 变化的源与场的振幅.从方程(9.5.1)消去磁场 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$ 后得

$$[\nabla\nabla - \mathscr{I}(\nabla^2 + k^2)] \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{i}\omega\mu_0 \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}) \tag{9.5.3}$$

式中,$k = \omega/c$.

为了求出方程(9.5.3)的特解,引入并矢 Green 函数 $\mathscr{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$,使它满足微分方程

$$[\nabla\nabla - \mathscr{I}(\nabla^2 + k^2)]\cdot\mathscr{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = \mathscr{I}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{9.5.4}$$

和相应的边界条件.方程(9.5.3)具有下述形式的特解

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{i}\omega\mu_0\int_V \mathrm{d}^3x'\mathscr{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}') \tag{9.5.5}$$

加上齐次方程的通解,可以满足给定的边界条件.

为了验证解(9.5.5)满足方程(9.5.3),将它代入方程(9.5.3)的左端得

$$[\nabla\nabla - \mathscr{I}(\nabla^2 + k^2)]\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{i}\omega\mu_0\int_V \mathrm{d}^3x'[\nabla\nabla - \mathscr{I}(\nabla^2 + k^2)]\cdot\mathscr{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}') \tag{9.5.6}$$

利用并矢 Green 函数 $\mathscr{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$所满足的微分方程(9.5.4),可将上式右端计算出来

$$[\nabla\nabla - \mathscr{I}(\nabla^2 + k^2)]\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{i}\omega\mu_0\int_V \mathrm{d}^3x'\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\mathscr{I}\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')$$

完成对 δ 函数的积分便得到方程(9.5.3).

现在求解方程(9.5.4).将方程(9.5.4)两边同左乘以算符 $\mathscr{I}+\nabla\nabla/k^2$可得

$$(\nabla^2 + k^2)\mathscr{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = -\left(\mathscr{I}+\frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right)\mathscr{I}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{9.5.7}$$

它显然有形式解

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = \left(\mathscr{I}+\frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right)g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') \tag{9.5.8}$$

而方程(9.5.7)成为

$$(\nabla^2 + k^2)g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = -\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{9.5.9}$$

若采用无界空间中的推迟 Green 函数的边界条件.与方程(9.3.5)比较,可知 $g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$是我们所熟悉的无界空间中单色推迟 Green 函数,即

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = G_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R} \tag{9.5.10}$$

式中 $R = |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|$.将(9.5.10)代入(9.5.8)得

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = \left(\mathscr{I}+\frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R} \tag{9.5.11}$$

利用恒等式

$$\nabla\nabla\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R} = \left[\left(\frac{\mathrm{i}k}{R}-\frac{1}{R^2}\right)\left(\mathscr{I}-3\frac{\boldsymbol{RR}}{R^2}\right)-k^2\frac{\boldsymbol{RR}}{R^2}\right]\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R} \tag{9.5.12}$$

完成式(9.5.11)右边的梯度运算得

$$\mathscr{G}_{\omega\mathrm{r}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = \left[\left(\mathscr{I}-\frac{\boldsymbol{RR}}{R^2}\right)+\frac{\mathrm{i}c}{\omega R}\left(\mathscr{I}-3\frac{\boldsymbol{RR}}{R^2}\right)-\frac{c^2}{\omega^2R^2}\left(\mathscr{I}-3\frac{\boldsymbol{RR}}{R^2}\right)\right]\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R} \tag{9.5.13}$$

这里我们恢复了下标 ω 与 r,以清楚地指明此处的并矢 Green 函数是频域中的

推迟 Green 函数.上式右端大方括号中的二阶三维张量都是并矢,这就是为什么此 Green 函数称为并矢 Green 函数的缘故.

讨论:

(a) 并矢 Green 函数是对称张量,因而并矢 Green 函数作为一个 3×3 矩阵对右边的作用与它对于左边的作用相同.

(b) 并矢 Green 函数仅与场点相对于源点的相对位移 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'$ 有关,与源点和场点各自的位置不直接相关,它是 $\boldsymbol{R}$ 的函数.这说明并矢 Green 函数具有空间平移不变性,这是 Maxwell 方程具有空间平移不变性的结果.

(c) 并矢 Green 函数满足互易关系,即源点与场点以对称的形式出现在并矢 Green 函数的表达式中,交换源点与场点的坐标在并矢 Green 函数表达式中的位置不改变并矢 Green 函数

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=\mathscr{G}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}) \tag{9.5.14}$$

(d) 并矢 Green 函数(9.5.13)由三项组成:第一项按 $1/R$ 变化,称为辐射项,它在离源很远时是主要的,且由

$$\left(\mathscr{I}-\frac{\boldsymbol{RR}}{R^2}\right)\cdot\boldsymbol{R}=0 \tag{9.5.15}$$

可知,辐射场的场强方向与辐射方向 $\boldsymbol{R}$ 垂直;第三项与 $1/R^3$ 成正比,称为稳恒项,它在离源很近时是主要的;第二项随 $1/R^2$ 变化,称为感应项,它在离源中等距离上是主要的.

作为本节结尾,我们指出,利用并矢 Green 函数可直接得到单色源场强公式(9.4.5).为此,我们利用并矢 Green 函数表达式(9.5.11).由(9.5.5)知电场强度为

$$\boldsymbol{E}_\omega(\boldsymbol{x})=\mathrm{i}\omega\mu_0\int \mathrm{d}^3x'\boldsymbol{j}_\omega(\boldsymbol{x}')\left(I+\frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R} \tag{9.5.16}$$

式中梯度算符∇作用在仅与 R 有关的函数上,故可作代换$\nabla\to\nabla'$;然后对上式右端第二项分布一次得

$$\boldsymbol{E}_\omega(\boldsymbol{x})=\mathrm{i}\omega\mu_0\int \mathrm{d}^3x'\left(\boldsymbol{j}_\omega(\boldsymbol{x}')-\frac{1}{k^2}[\nabla'\cdot\boldsymbol{j}_\omega(\boldsymbol{x}')]\nabla'\right)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R} \tag{9.5.17}$$

利用频域中的电流连续性方程

$$-\mathrm{i}\omega\rho_\omega(\boldsymbol{x}')+\nabla'\cdot\boldsymbol{j}_\omega(\boldsymbol{x}')=0 \tag{9.5.18}$$

将电流的散度以电荷密度表出,并应用恒等式(9.4.4)完成余下的一个梯度运算,可得

$$\boldsymbol{E}_\omega(\boldsymbol{x})=\mathrm{i}\omega\mu_0\int \mathrm{d}^3x'\left[\boldsymbol{j}_\omega(\boldsymbol{x}')-\frac{\mathrm{i}\omega}{k^2}\rho_\omega(\boldsymbol{x}')\left(\mathrm{i}k\frac{\boldsymbol{R}}{R}-\frac{\boldsymbol{R}}{R^2}\right)\right]\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R}$$

此即(9.4.5)的第一式.(9.4.5)的第二式可将(9.4.5)的第一式代入频域中的 Maxwell 方程

$$\boldsymbol{H}_\omega(\boldsymbol{x})=\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{E}_\omega(\boldsymbol{x}) \tag{9.5.19}$$

得到.

顺便,由(9.5.5)与(9.5.19)可得到用并矢 Green 函数表示的电流的磁场

$$\boldsymbol{H}_\omega(\boldsymbol{x})=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3x'\nabla\times[\mathcal{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{j}_\omega(\boldsymbol{x}')] \tag{9.5.20}$$

再由(9.5.11)得

$$\boldsymbol{H}_\omega(\boldsymbol{x})=-\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3x'\boldsymbol{j}_\omega(\boldsymbol{x}')\times\nabla\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R} \tag{9.5.21}$$

习题 9-5

1. 试由并矢 Green 函数推出(9.4.5)的第二式.
2. 试证明无界空间中并矢 Green 函数满足因果律的要求.

§9.6 推迟势的多极展开

现考察某一小区域 V 内的电荷与电流分布所激发的单色场.所谓小区域 V 是指其线度 d 远小于单色场的波长 λ 与至观测点 $\boldsymbol{x}$ 的距离 R,即

$$d=\max\{|\boldsymbol{x}'|,\boldsymbol{x}'\in V\}\ll\lambda,\quad d\ll R=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|_{\boldsymbol{x}'\in V} \tag{9.6.1}$$

式中坐标原点 O 取在小区域 V 中(下同).这一系统的推迟势可由方程(9.3.12)或(9.3.13)表出.

对于任一小区域,由 R 与 λ 的相对大小的不同,可将观测区域分为三个:

(1) 近源区或静场区 $\quad d\ll R\ll\lambda$

(2) 过渡区或感应区 $\quad d\ll R\sim\lambda$

(3) 远源区或辐射区(或称为波区) $\quad d\ll\lambda\ll R$

考察远离发射系统的电磁波接收问题时需要计算远场,若研究场对电荷电流系统的反作用便要计算近场,当考虑若干邻近的发射系统之间的相互影响则必须计算感应场.在不同区域中场具有不同的特点.感应区是远近区域之间的过渡区域,场的特点比较复杂.对于所考虑的三个区域,总有 $|\boldsymbol{x}'|\ll|\boldsymbol{x}|$,其比值

$$|\boldsymbol{x}'|/|\boldsymbol{x}|\ll1 \tag{9.6.2}$$

因而可对单色推迟 Green 函数 $G_\mathrm{r}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$(9.3.11)进行多极展开.

首先考虑直角坐标系中单色推迟 Green 函数的多极展开.这只要在直角坐标系中令

$$G_\mathrm{r}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(\boldsymbol{x}'\cdot\nabla_0')^nG_\mathrm{r}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') \tag{9.6.3}$$

式中 ∇_0' 表示对所作用的函数相对于 $\boldsymbol{x}'$ 取梯度后令 $\boldsymbol{x}'=0$.事实上,此处应用了

下述恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(\boldsymbol{x}'\cdot\nabla_0')^n=\text{单位算符},\qquad \text{当}|\boldsymbol{x}'|\text{很小} \tag{9.6.4}$$

由于 $G_r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$只是 $R=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|$的函数,(9.6.3)可写成

$$G_r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-\boldsymbol{x}'\cdot\nabla)^n\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r} \tag{9.6.5}$$

式中∇表示所作用的函数相对于 $\boldsymbol{x}$ 取梯度,而 $r=|\boldsymbol{x}|$.于是

$$\begin{cases}\varphi(\boldsymbol{x})=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int \mathrm{d}^3x'\rho(\boldsymbol{x}')x'_{i_1}\cdots x'_{i_n}\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_n}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\mu_0\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int \mathrm{d}^3x'\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')x'_{i_1}\cdots x'_{i_n}\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_n}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\end{cases} \tag{9.6.6}$$

注意,这里的源 $j^\mu(\boldsymbol{x}')$与势 $A^\mu(\boldsymbol{x})$都是 $j^\mu(\boldsymbol{x}',t')$与 $A^\mu(\boldsymbol{x},t)$的频率为 ω 的频谱分量的振幅,即频域中的源与势

$$j^\mu_\omega(\boldsymbol{x}')=\int \mathrm{d}t'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t'}j^\mu(x'),\quad A^\mu_\omega(\boldsymbol{x})=\int \mathrm{d}t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}A^\mu(x) \tag{9.6.7}$$

任意的源与势(一般不是单色的)可由上式变换至时域中得到

$$j^\mu(x')=\int\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t'}j^\mu_\omega(\boldsymbol{x}'),\quad A^\mu_\omega(x)=\int\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}A^\mu_\omega(\boldsymbol{x}) \tag{9.6.8}$$

由(9.6.6)、(9.6.7)与(9.6.8)得

$$\begin{cases}\varphi(\boldsymbol{x},t)=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int \mathrm{d}^3x'\mathrm{d}t'\rho(\boldsymbol{x}',t')\\ \qquad x'_{i_1}\cdots x'_{i_n}\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_n}\dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t'-r/c)}}{4\pi r}\\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)=\mu_0\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int \mathrm{d}^3x'\mathrm{d}t'\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}',t')\\ \qquad x'_{i_1}\cdots x'_{i_n}\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_n}\dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t'-r/c)}}{4\pi r}\end{cases} \tag{9.6.9}$$

对频率积分后得到标势与矢势的多极展开式:

$$\begin{cases}\varphi(\boldsymbol{x},t)=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int \mathrm{d}^3x'\mathrm{d}t'\rho(\boldsymbol{x}',t')\\ \qquad x'_{i_1}\cdots x'_{i_n}\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_n}\dfrac{\delta(t-t'-r/c)}{4\pi r}\\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)=\mu_0\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int \mathrm{d}^3x'\mathrm{d}t'\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}',t')\\ \qquad x'_{i_1}\cdots x'_{i_n}\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_n}\dfrac{\delta(t-t'-r/c)}{4\pi r}\end{cases} \tag{9.6.10}$$

它也可用推迟 Green 函数的多极展开

$$G_r(x,x')=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-x'\cdot\nabla)^n\frac{\delta(x_0-x_0'-r)}{4\pi r} \tag{9.6.11}$$

得到.(9.6.10)式中 $\varphi(x)$展开式的 $n=0$ 项即

$$\varphi_{(0)}(x,t)=\frac{1}{\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^3x'\mathrm{d}t'\rho(x',t')\frac{\delta(t-t'-r/c)}{4\pi r}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{9.6.12}$$

这是将系统的总电荷 Q 置于原点所产生的 Coulomb 势.

有时候需要考虑球坐标系中单色推迟 Green 函数的多极展开.在球坐标系中可令

$$G_r(x,x')=\sum_{lm}g_l(r,r')Y_{lm}^*(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{9.6.13}$$

代入(9.3.5)得到关于径向 Green 函数 $g_l(r,r')$的方程

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}+\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}+k^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]g_l=-\frac{1}{r^2}\delta(r-r') \tag{9.6.14}$$

加上自然边界条件,即在原点有限

$$g_l(r,r')_{r=0}=\text{有限} \tag{9.6.15}$$

且在无穷远处为球面出射波形式

$$\lim_{r\to\infty}g_l(r,r')=A\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r} \tag{9.6.16}$$

前者是因为 $G_r(x,x')_{r=0}$是位于 x'的单位源在原点的势(事实上,按照我们关于 Green 函数的定义,这里的"势"与实际的势相差一个因子 μ_0 或 $1/\varepsilon_0$),而 $g_l(r,r')_{r=0}$是其径向部分;后者则易从 $G_r(x,x')$在无穷远处的渐近形式得出.由球 Bessel 函数与 Hankel 函数的渐近性状

$$\begin{cases} j_l(x)\to\dfrac{x^l}{(2l+1)!}, & \text{当 } x\to 0 \text{ 时} \\ h_l^{(1)}(x)\to(-\mathrm{i})^{l+1}\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{x}, & \text{当 } x\to\infty \text{ 时} \end{cases} \tag{9.6.17}$$

知方程(9.6.14)的解具有形式

$$g_l(r,r')=Bj_l(kr_<)h_l^{(1)}(kr_>) \tag{9.6.18}$$

式中 $r_<$ 与 $r_>$ 分别表示 r 与 r' 中的较小者与较大者.将此形式解代入方程(9.6.14)并对 r 积分可决定常数 B 为

$$B=\mathrm{i}k \tag{9.6.19}$$

于是单色推迟 Green 函数 $G_r(x,x')$(9.3.11)在球坐标系中的展开式为

$$G_r(x,x')=\mathrm{i}k\sum_{l=0}^{\infty}j_l(kr_<)h_l^{(1)}(kr_>)\sum_{m=-l}^{-l}Y_{lm}^*(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{9.6.20}$$

对于小区域源分布外的观测点有

$$r_< = r', \qquad r_> = r$$

故

$$G_r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = \mathrm{i}k\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\mathrm{j}_l(kr')\mathrm{Y}^*_{lm}(\theta',\phi')\mathrm{h}^{(1)}_l(kr)\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\phi) \tag{9.6.21}$$

于是,小区域源分布外的势场在球坐标系中具有下述展开式

$$\begin{cases}\varphi(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\mathrm{i}k}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\int \mathrm{d}^3x'\rho(\boldsymbol{x}')\mathrm{j}_l(kr')\mathrm{Y}^*_{lm}(\theta',\phi')\mathrm{h}^{(1)}_l(kr)\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\phi)\\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\mathrm{i}k\mu_0}{4\pi}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\int \mathrm{d}^3x'\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')\mathrm{j}_l(kr')\mathrm{Y}^*_{lm}(\theta',\phi')\mathrm{h}^{(1)}_l(kr)\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\phi)\end{cases} \tag{9.6.22}$$

现回到公式(9.6.6).在近源区内,$kR\ll 1$,推迟因子 $\exp(\mathrm{i}kR)\sim 1$,因而标势与矢势可写为

$$\varphi(\boldsymbol{x})\approx\int \mathrm{d}^3x'\frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{4\pi\varepsilon_0 R}, \quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\approx\int \mathrm{d}^3x'\frac{\mu_0\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')}{4\pi R},\text{当 } kR\ll 1 \tag{9.6.23}$$

可见,近场可视为准静态场:它随 t 按 $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$作简谐振荡,此外则保持稳恒场的主要特点.近场可像稳恒场那样进行多极展开,即在势的多极展开式(9.6.6)(见下面)中微分算子仅对分母运算即可;因为对分子微商一次所得的因子 $k=2\pi/\lambda$ 相对于对分母微商一次所得的因子 $1/r$ 而言很小,可以略去.

在远源区内,不仅 r'/r 很小,λ/r 也很小.于是,在势的多极展开式(9.6.6)中微分算子仅对分子运算即可;因为对分母微商一次所得的因子 $1/r$ 相对于对分子微商一次所得的因子 $k=2\pi/\lambda$ 而言很小,可以略去.这与近场情形正好相反.进而,注意到

$$\begin{cases}\boldsymbol{\nabla}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr} = \mathrm{i}k\boldsymbol{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\\ \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr} = \left[(\mathrm{i}k)^2\boldsymbol{nn} + (\mathrm{i}k)\dfrac{1}{r}(I-\boldsymbol{nn})\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\end{cases} \tag{9.6.24}$$

可知对 $\boldsymbol{n}$ 取梯度会增加 $1/r$ 的幂次,其贡献可忽略.因而,在计算远场时可将 $\boldsymbol{n}$ 与分母中的 r 视为常量.这样,算符$\boldsymbol{\nabla}$作用的结果相当于下述代换:

$$\boldsymbol{\nabla}\to\mathrm{i}k\boldsymbol{n}, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\to-\mathrm{i}\omega \tag{9.6.25}$$

为了紧凑起见,式中也列出了算符$\partial/\partial t$ 作用的结果.于是有

$$\begin{cases}\varphi(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi\varepsilon_0 r}\displaystyle\int \mathrm{d}^3x'\rho(\boldsymbol{x}')\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(-\mathrm{i}k\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}')^n\\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\mu_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\displaystyle\int \mathrm{d}^3x'\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-\mathrm{i}k\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}')^n\end{cases} \tag{9.6.26}$$

继而也有

$$\boldsymbol{B}=\mathrm{i}k\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{E}=c\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{n} \tag{9.6.27}$$

式中应用了

$$\boldsymbol{E}=\frac{\mathrm{i}c}{k}(\nabla\times\boldsymbol{B}-\mu_0\boldsymbol{j}) \tag{9.6.28}$$

它可由 Maxwell 方程应用于单色场推出.值得指出的是:为了保证电磁能量能传到任意远的 x 处,必须使电磁场场强都与 $1/r$ 成正比,从而其能流密度正比于 $1/r^2$,因而对包围小区域的球面积分后的总出射功率与球半径无关.满足这一条件的电磁场称为辐射场,只有辐射场才能真正脱离激发源而独立地在空间中传播.由于 Coulomb 场强正比于 $1/r^2$,不可能传到任意远处,故在远场的表达式中已略去,这就是为什么(9.6.26)标势的展开式中去掉了 $n=0$ 项的缘故.

习题 9-6

1. 比较处于近源区、感应区和远源区中的电磁场的各自特点.
2. 试用推迟 Green 函数的多极展开来得到时域中推迟势的多极展开.
3. 证明:辐射场仅与矢势的横向部分(即与矢径 r 垂直的分量)$\boldsymbol{A}_\perp$ 有关,而与矢势的纵向部分(即与矢径 r 平行的分量)$\boldsymbol{A}_{/\!/}$ 无关,即

$$\boldsymbol{E}_r=-\frac{\partial\boldsymbol{A}_\perp}{\partial t},\qquad \boldsymbol{B}_r=\nabla\times\boldsymbol{A}_\perp$$

4. 设电荷球对称地分布在一个有限区域内,并作径向脉动.证明此体系不可能辐射电磁波.
5. 相对于矢径方向,将矢势分解为横向部分与纵向部分之和.证明在远处的标势只与矢势的纵向部分有关,因而对辐射场的贡献与矢势纵向部分的贡献相消.

§9.7　电偶极辐射

展开式(9.6.26)中各项可解释为位于坐标原点的各个电多极子和磁多极子的单色辐射场的标势和矢势.在对各项分别进行讨论之前,先叙述分析辐射场的一般步骤.求解单色辐射场的关键是求得其三维矢势的振幅 $\boldsymbol{A}(x)$.然后,由下述公式得出相应的标势和电磁场场强:

$$\varphi(x)=c\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{A}(x) \tag{9.7.1}$$

$$\boldsymbol{B}=\mathrm{i}k\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}(x) \tag{9.7.2}$$

$$\boldsymbol{E}=-c\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{B} \tag{9.7.3}$$

式中 $\boldsymbol{A}(x)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\exp(-\mathrm{i}\omega t)$,$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}|$ 是观测点的矢径方向.进而可求得辐射场的能流

$$\boldsymbol{s}=c\mu_0H^2\boldsymbol{n}=c\varepsilon_0E^2\boldsymbol{n} \tag{9.7.4}$$

单色辐射场的时平均能流密度为

$$\langle \boldsymbol{s} \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}^* \times \boldsymbol{H}) = \frac{c}{2\mu_0}\mathrm{Re}[(\boldsymbol{B}^* \times \boldsymbol{n}) \times \boldsymbol{B}]$$

$$= \frac{c}{2\mu_0}|\boldsymbol{B}|^2 \boldsymbol{n} = \frac{c\varepsilon_0}{2}|\boldsymbol{E}|^2 \boldsymbol{n} \tag{9.7.5}$$

设辐射源在立体角元 $\mathrm{d}\Omega$ 内辐射出去的功率为 $-\mathrm{d}^2 W/\mathrm{d}t$，则

$$-\frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}r^2\mathrm{d}\Omega = f(\theta,\phi)\mathrm{d}\Omega \tag{9.7.6}$$

式中 $f(\theta,\phi)$称为辐射角分布，它表征了辐射的方向特性. 辐射的时平均角分布为

$$\langle f(\theta,\phi)\rangle = \langle -\frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega}\rangle = \langle \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}r^2\rangle = \frac{c}{2\mu_0}|r\boldsymbol{B}|^2\boldsymbol{n} = \frac{c\varepsilon_0}{2}|r\boldsymbol{E}|^2\boldsymbol{n} \tag{9.7.7}$$

辐射总平均功率为

$$\langle -\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\rangle = \oint \mathrm{d}\Omega\langle f(\theta,\phi)\rangle = \oint r^2\mathrm{d}\Omega\langle \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}\rangle \tag{9.7.8}$$

现考察远区中势的多极展开式(9.6.26)中右端求和号下第一项

$$\begin{cases} \varphi_1(\boldsymbol{x}) = \dfrac{-\mathrm{i}k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi\varepsilon_0 r}\displaystyle\int \mathrm{d}^3x'\rho(\boldsymbol{x}')\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\mu_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\displaystyle\int \mathrm{d}^3x'\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}') \end{cases} \tag{9.7.9}$$

注意

$$\int \mathrm{d}^3x'\boldsymbol{j}(x') = \int \mathrm{d}^3x'\boldsymbol{j}(x')\cdot\nabla' x' = -\int \mathrm{d}^3x'\boldsymbol{x}'\nabla'\cdot\boldsymbol{j}(x')$$

$$= -\mathrm{i}\omega\int \mathrm{d}^3x'\rho(x')\boldsymbol{x}'$$

式中进行了分部积分，并利用了连续性方程

$$\mathrm{i}\omega\rho = \nabla\cdot\boldsymbol{j}$$

于是有

$$\int \mathrm{d}^3x'\boldsymbol{j}(x') = -\mathrm{i}\omega\boldsymbol{P} = \dot{\boldsymbol{P}} \tag{9.7.10}$$

式中

$$\boldsymbol{P} = \int \mathrm{d}^3x'\rho(\boldsymbol{x}')\boldsymbol{x}'$$

是小区域电荷系统的电偶极矩，而

$$\dot{\boldsymbol{P}} = \partial\boldsymbol{P}(x')/\partial t'|_{t'=0}$$

因而

$$\begin{cases} \varphi_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{n}\cdot\dot{\boldsymbol{P}}\,\dfrac{-\mathrm{i}k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi\varepsilon_0 r} = c\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{x}) = -\mathrm{i}\omega\boldsymbol{P}\,\dfrac{\mu_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r} = \dot{\boldsymbol{P}}\,\dfrac{\mu_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r} \end{cases} \tag{9.7.11}$$

值得注意的是:这里的电偶极矩可视为位于原点的一个振荡电偶极子

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{0},t') = \boldsymbol{P}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t'} \tag{9.7.12}$$

式中 $\boldsymbol{P}_0 = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{0})$. 这种振荡的电偶极子常称为 Hertz 振子. 它可由一个负的点电荷 $-Q$ 和一个周期振动的正的点电荷 Q 构成,因而

(a) $\dot{\boldsymbol{P}} = Q\dot{\boldsymbol{l}}$

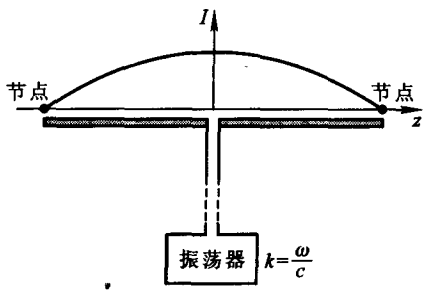


图 9.1　短天线

式中 $\dot{\boldsymbol{l}}$ 是两点电荷的相对位移;它也可以是一短导体 $\boldsymbol{l}$ 中的振荡电流 I(如短天线),故有

(b) $\dot{\boldsymbol{P}} = \dot{Q}\boldsymbol{l} = I\boldsymbol{l}$

为了考察三个观察区域中场的不同特点,可直接由推迟势公式计算 Hertz 振子的推迟矢势. 对于情形(a),有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^3x'\frac{[\rho\dot{\boldsymbol{l}}]}{R} \approx \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{[\dot{\boldsymbol{l}}]}{r}\int \mathrm{d}^3x'[\rho] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Q[\dot{\boldsymbol{l}}]}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi r}[\dot{\boldsymbol{P}}] \end{aligned} \tag{9.7.13}$$

对于情形(b),有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^3x'\frac{[I]}{R}\boldsymbol{l} \approx \frac{\mu_0}{4\pi r}[I]\boldsymbol{l} = \frac{\mu_0}{4\pi r}[\dot{\boldsymbol{P}}] \tag{9.7.14}$$

式中值得指出的是,$\boldsymbol{P}(x')$不是只依赖于单个频率的量,而[ ]表示在 t'取值. 在以电偶极子所在处为原点、以电偶极矩方向为 z 轴的球坐标系中,矢势可写为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) = -\frac{\mathrm{i}\omega\mu_0}{4\pi r}P_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t'}(\cos\theta\boldsymbol{e}_r - \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta) \tag{9.7.15}$$

相应的磁场强度为

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{1}{\mu_0}\begin{vmatrix}\dfrac{\boldsymbol{e}_r}{r^2\sin^2\theta} & \dfrac{\boldsymbol{e}_\theta}{r\sin\theta} & \dfrac{\boldsymbol{e}_\phi}{r}\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\phi}\\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\phi\end{vmatrix}$$

此即

$$\begin{cases}H_r=H_\theta=0\\ H_\phi=\dfrac{-1}{4\pi}\left(\dfrac{\omega^2}{rc}+\dfrac{\mathrm{i}\omega}{r^2}\right)p_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t'}\sin\theta\end{cases}\tag{9.7.16}$$

相应的电场可由

$$\boldsymbol{E}=\frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon_0}\nabla\times\boldsymbol{H}$$

得到

$$\begin{cases}E_r=\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left(-\dfrac{\mathrm{i}\omega}{r^2c}+\dfrac{1}{r^3}\right)p_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t'}\cos\theta\\ E_\theta=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\dfrac{\omega^2}{rc^2}-\dfrac{\mathrm{i}\omega}{r^2c}+\dfrac{1}{r^3}\right)p_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t'}\sin\theta\\ E_\phi=0\end{cases}\tag{9.7.17}$$

由此可见，电场 $\boldsymbol{E}$ 位于观测点所在的经面上，而磁场 $\boldsymbol{H}$ 则位于观测点所在的纬面上；磁感应线形成围绕极轴的圆周，$\boldsymbol{H}$ 总是横向的；电场线是经面上的闭合曲线，但由于场强在极轴上为零，电场线不可能是经面上的圆周，因而 $\boldsymbol{E}$ 不可能处处横向．故振荡电偶极子的场是横磁型(TM)的．

对于 $l\ll r\ll\lambda$ 的近区，唯一的不可忽略的场强分量为

$$E_r=\frac{2p_0\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t},\quad E_\theta=\frac{p_0\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\tag{9.7.18}$$

这是准静态电偶极子的场．

反之，若在 $l\ll\lambda\ll r$ 或 $c/r\ll\omega$ 的远区，则仅按 $1/r$ 变化的场强(即辐射场的场强)分量是不可忽略的．Hertz 振子的辐射场强的非零分量为

$$\begin{cases}E_\theta=-\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\omega^2}{c^2}\dfrac{\sin\theta}{r}P_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t'}\\ H_\phi=-\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\omega^2}{c}\dfrac{\sin\theta}{r}P_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t'}\end{cases}\tag{9.7.19}$$

或写为

$$\begin{cases}\boldsymbol{H}=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi cr}\ddot{\boldsymbol{P}}\times\boldsymbol{n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\\ \boldsymbol{E}=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi\varepsilon_0c^2r}(\ddot{\boldsymbol{P}}\times\boldsymbol{n})\times\boldsymbol{n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\end{cases}\tag{9.7.20}$$

由此可见，$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 两两相互垂直，三者成右手螺旋关系，因而电偶极子场的辐射部分是横电磁波；而辐射场矢量的大小满足

$$\sqrt{\varepsilon_0}\,|\boldsymbol{E}| = \sqrt{\mu_0}\,|\boldsymbol{H}| \tag{9.7.21}$$

辐射场强 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 在轴线 $\theta=0$ 上为零，而在赤道面 $\theta=\pi/2$ 上最大；而且由于 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{P}$ 都垂直，在电偶极矩矢量和波矢所张的平面上辐射场是完全极化的.

电偶极辐射的时平均能流密度为

$$\langle \boldsymbol{s} \rangle = \frac{|\ddot{\boldsymbol{P}}|^2}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3 r^2}\sin^2\theta\boldsymbol{n} \tag{9.7.22}$$

而电偶极辐射的时平均角分布为

$$\left\langle -\frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\Omega}\right\rangle = \frac{|\ddot{\boldsymbol{P}}|^2}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3}\sin^2\theta \tag{9.7.23}$$

可见，沿电偶极矩轴线方向没有辐射，而在与电偶极矩轴线垂直的平面上辐射最强.电偶极辐射总平均功率为

$$\left\langle -\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\right\rangle = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|\ddot{\boldsymbol{P}}|^2}{3c^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\omega^4 p_0^2}{3c^3} \tag{9.7.24}$$

可见，当电偶极矩振幅 P_0 保持不变时，总辐射功率与频率的 4 次方成正比.

若 Hertz 振子由一短导体(如短天线) l 中的振荡电流 I 形成，则

$$\dot{\boldsymbol{P}} = I\boldsymbol{l} = -\omega P_0 \sin\omega t'$$

于是

$$\langle I^2\rangle l^2 = \frac{1}{2}\omega^2 P_0^2$$

(9.7.24)式可写成

$$\left\langle -\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\right\rangle = \frac{\mu_0}{6\pi}\frac{\omega^2}{c}l^2\langle I^2\rangle = \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2\langle I^2\rangle = R_r\langle I^2\rangle \tag{9.7.25}$$

式中

$$R_r = \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 = 80\pi^2\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2\ \Omega, \qquad \text{因}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\ \Omega \tag{9.7.26}$$

称为短导体或短天线的辐射电阻.从(9.7.25)式中可看出，由于 $\langle I^2\rangle \sim \omega^2$，电偶极辐射功率的数量级为 $\omega^2(l\lambda)^2$.

最后若在中间过渡区域，即 $l \ll r \approx \lambda$，则(9.7.16)与(9.7.17)式场强中按 $1/r^2$ 变化的部分也是很重要的.这部分场称为感应场，而过渡区域称为感应区.

注意：感应磁场与电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \dot{\boldsymbol{P}}$ 的静磁场形式类似，可视为 Biot－Savart 场的推广.由(9.7.16)与(9.7.17)式可看出，静场、感应场和辐射场场强的大小之比为

$$\left(\frac{\lambda}{2\pi r}\right)^2 : \frac{\lambda}{2\pi r} : 1$$

习题 9-7

1. 一刚性电偶极子 $\boldsymbol{P}_0$ 位于原点，方向平行于 $z=0$ 平面，以角速度 ω 绕 z 轴旋转. 利用柱面坐标证明磁场在波区的分量为

$$H_\rho = \frac{-p_0\omega^2}{4\pi cr}\cos\theta\sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)-\phi\right]$$

$$H_\phi = \frac{p_0\omega^2}{4\pi cr}\cos\theta\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)-\phi\right]$$

$$H_z = \frac{p_0\omega^2}{4\pi cr}\sin\theta\sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)-\phi\right]$$

提示：$[\boldsymbol{p}] = [p_0\cos(\omega t'-\phi)\boldsymbol{e}_\rho + p_0\sin(\omega t'-\phi)\boldsymbol{e}_\phi]$，这里[ ]表示在时刻 $t'=t-R/c$ 取值.

2. 一点电荷 q 在 $z=0$ 平面内作匀速率圆周运动，其角速度 ω 沿 z 轴方向，半径为 a，且 $ka\ll 1(k=\omega/c)$. 求辐射场与平均辐射功率；并讨论 θ（辐射方向与 z 轴的夹角）为 0、$\pi/2$、π、$3\pi/2$ 时的电磁场的偏振情况.

3. 设有以两个相同频率振动的电偶极子，它们之间的相位差为 $\pi/2$，振动方向互成 α 角，振幅大小均为 p_0，相互距离比波长小. 试求波区中的磁场 H 及时平均辐射角分布.

答案：$\boldsymbol{H} = \frac{\omega^2 p}{4\pi cr}\{\boldsymbol{e}_\theta[\sin\phi + \mathrm{i}\sin(\phi-\alpha)] + \boldsymbol{e}_\phi[\cos\phi + \mathrm{i}\cos(\phi-\alpha)]\cos\theta\}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t'}$

$$f(\theta,\phi) = \frac{\omega^4 p^2}{32\pi^2 c^3\varepsilon_0}\{2-\sin^2\theta[\cos^2\phi+\cos^2(\phi-\alpha)]\}$$

4. 设有一线偏振平面波 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\exp[\mathrm{i}(kx-\omega t)]$ 照射到一个绝缘介质球上（$\boldsymbol{E}_0$ 沿 z 方向），引起介质球极化，极化矢量 $\boldsymbol{p}$ 随时间变化，因而产生辐射. 若平面电磁波的波长 $2\pi/k$ 远大于球半径 R_0，求介质球产生的辐射场和能流.

答案：辐射场即为总电偶极矩

$$\boldsymbol{p} = \frac{4\pi\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\varepsilon+2\varepsilon_0}R_0^3\boldsymbol{E}\exp(-\mathrm{i}\omega t)$$

的电偶极辐射场.

5. 由电偶极矩 $\boldsymbol{p}$ 的定义及电荷连续性方程，证明

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}(t)}{\mathrm{d}t} = \int \mathrm{d}\tau\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$$

6. 在 z 轴上，有一长度为 l 的小电流元，其电流为 $I=I_0\exp(-\mathrm{i}\omega t)$，且 $kl\ll 1(k=\omega/c)$. 求辐射场分布与能流.

7. 由中心馈送的长度为 d 的细直短天线，$d\ll\lambda$，在馈送点电流幅值为 I_0，天线两端电流为 0，天线上电流分布近似为线性形式

$$I(z') = I_0(1-2|z'|/d)\exp(-\mathrm{i}\omega t')$$

求短天线的辐射功率 N 和辐射电阻 R_γ.

答案：

$$N=\frac{\pi}{12}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}I_0^2\frac{d^2}{\lambda^2},\quad \lambda=2\pi c/\omega$$

$$R_r=\frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{d^2}{\lambda^2}=197\frac{d^2}{\lambda^2}\ \Omega$$

§9.8　磁偶极辐射与电四极辐射

9.8.1　磁偶极与电四极辐射势

现考察远区中势的多极展开式(9.6.26)中右端求和号下第二项

$$\begin{cases}\varphi_2(\boldsymbol{x})=\dfrac{-k^2e^{ikr}}{4\pi\varepsilon_0 r}\boldsymbol{nn}:\dfrac{1}{2!}\displaystyle\int d^3x'\rho(\boldsymbol{x}')\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}'\\ \boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x})=\dfrac{-ik\mu_0e^{ikr}}{4\pi r}\boldsymbol{n}\cdot\displaystyle\int d^3x'\boldsymbol{x}'\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')\end{cases}\tag{9.8.1}$$

(9.8.1)中第一式可写为

$$\varphi_2(\boldsymbol{x})=\frac{e^{ikr}}{4\pi\varepsilon_0c^2r}\boldsymbol{nn}:\frac{1}{6}\int d^3x'\ddot{\rho}(\boldsymbol{x}')(3\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}'-x'^2I)-i\omega\frac{\mu_0e^{ikr}}{24\pi r}\int d^3x'\dot{\rho}^{\bullet}(\boldsymbol{x}')x'^2\tag{9.8.2}$$

此即

$$\varphi_2(\boldsymbol{x})=\frac{e^{ikr}}{4\pi\varepsilon_0c^2r}\boldsymbol{nn}:\ddot{\mathscr{D}}-i\omega\psi(\boldsymbol{x})\tag{9.8.3}$$

式中 $\mathscr{D}$ 是系统的电四极矩，$\ddot{\mathscr{D}}=\partial^2\mathscr{D}(t')/\partial t'^2|_{t'=0}$，类似的理解也适用于对振幅 $\rho(\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0})$ 等物理量的时间 t' 的导数. 而 $\psi(\boldsymbol{x}')$ 是一个标量函数

$$\psi(\boldsymbol{x})=\frac{\mu_0e^{ikr}}{24\pi r}\int d^3x'\dot{\rho}^{\bullet}(\boldsymbol{x}')x'^2\tag{9.8.4}$$

为了看出 $\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x})$ 的物理意义，将式中的积分分解为反对称部分与对称部分之和

$$\boldsymbol{n}\cdot\int d^3x'\boldsymbol{x}'\boldsymbol{j}'=\frac{1}{2}\int d^3x'\left\{[(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}')\boldsymbol{j}'-(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{j}')\boldsymbol{x}'][(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}')\boldsymbol{j}'+(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{j}')\boldsymbol{x}']\right\}\tag{9.8.5}$$

利用恒等式

$$(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}')\boldsymbol{j}'-(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{j}')\boldsymbol{x}'=-\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{j}')$$

可将(9.8.5)式中右端第一项积分化为

$$-\boldsymbol{n}\times\left(\frac{1}{2}\int d^3x'\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{j}'\right)=-\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m}\tag{9.8.6}$$

式中 $\boldsymbol{m}$ 是系统的磁偶极矩. 利用恒等式

$$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{j}'+\boldsymbol{j}'\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{j}'\cdot\nabla'(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}')$$

可将(9.8.5)式中右端第二项积分化为

$$\int \mathrm{d}^3x'(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{j}'+\boldsymbol{j}'\boldsymbol{x}')=\int \mathrm{d}^3x'\boldsymbol{j}'\cdot\nabla'(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}')$$

$$=-\int \mathrm{d}^3x'(\nabla'\cdot\boldsymbol{j}')\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}'=\int \mathrm{d}^3x'\int \mathrm{d}^3x'\dot{\rho}(\boldsymbol{x}')\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}' \tag{9.8.7}$$

式中进行了分部积分并利用了电流连续性方程.类似地,可将上述积分与电四极矩联系起来

$$\int \mathrm{d}^3x'(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{j}'+\boldsymbol{j}'\boldsymbol{x}')=\frac{1}{3}\dot{\mathscr{D}}+\frac{1}{3}\mathscr{I}\int \mathrm{d}^3x'\dot{\rho}\,\boldsymbol{x}'^2 \tag{9.8.8}$$

于是,由(9.8.6)与(9.8.8)式得

$$\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x})=-\frac{\mu_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi cr}\boldsymbol{n}\times\dot{\boldsymbol{m}}+\frac{\mu_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{24\pi cr}(\boldsymbol{n}\cdot\ddot{\mathscr{D}})-\mathrm{i}k\boldsymbol{n}\phi(\boldsymbol{x}) \tag{9.8.9}$$

注意:标量函数 $\phi(\boldsymbol{x})$正比于因子 $\exp(\mathrm{i}kr)/r$,因而当 $r\neq0$ 时满足频域中的齐次 D'Alembert 方程,即齐次 Helmholtz 方程

$$(\nabla^2+k^2)\phi(\boldsymbol{x})=0,\qquad \text{当 } r\neq0 \text{ 时} \tag{9.8.10}$$

故可作 Lorentz 规范下的规范变换,它在频域中的形式为

$$\varphi'=\varphi+\mathrm{i}\omega\phi,\qquad \boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}+\mathrm{i}k\boldsymbol{n}\phi \tag{9.8.11}$$

于是经规范变换后得到

$$\begin{cases}\varphi_2(\boldsymbol{x})=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi\varepsilon_0c^2r}\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}:\ddot{\mathscr{D}}\\[2ex]\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x})=-\dfrac{\mu_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi cr}\boldsymbol{n}\times\dot{\boldsymbol{m}}+\dfrac{\mu_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{24\pi cr}(\boldsymbol{n}\cdot\ddot{\mathscr{D}})\end{cases} \tag{9.8.12}$$

式中为了简明起见已去掉变换后势的上撇号.可见,远区中势的多极展开式(9.6.26)中求和号下第二项是振荡磁偶极子与电四极子的辐射势.值得指出的是:经此规范变换后的势仍满足 Lorentz 规范条件.

9.8.2 磁偶极辐射场

磁偶极辐射场为

$$\begin{cases}\boldsymbol{B}=\mathrm{i}k\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}_m=\dfrac{\mu_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi c^2r}(\ddot{\boldsymbol{m}}\times\boldsymbol{n})\times\boldsymbol{n}\\[2ex]\boldsymbol{E}=c\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{n}=-\dfrac{\mu_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi cr}(\ddot{\boldsymbol{m}}\times\boldsymbol{n})\end{cases} \tag{9.8.13}$$

式中 $\boldsymbol{A}_m$ 是(9.8.12)第二式第一项所示的矢势.由与电偶极辐射场比较可知,公式(9.7.20)在下述对偶变换

$$\boldsymbol{p}\to\frac{\boldsymbol{m}}{c},\boldsymbol{m}\to-c\boldsymbol{p},\boldsymbol{E}\to c\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}\to-\frac{\boldsymbol{E}}{c} \tag{9.8.14}$$

下便成为公式(9.8.13).这是因为当没有传导电荷与传导电流分布时,Maxwell方程组在上述对偶变换下不变.

磁偶极辐射场的时平均能流密度为

$$\langle \boldsymbol{s} \rangle = \frac{c}{2\mu_0} |\boldsymbol{B}|^2 \boldsymbol{n} = \frac{\mu_0 \omega^4 |\boldsymbol{m}|^2}{32\pi^2 c^3 r^2} \sin^2\theta \boldsymbol{n} \tag{9.8.15}$$

式中$|\boldsymbol{m}|$是磁偶极矩的振幅,θ是以$\boldsymbol{m}$的方向为极轴时$\boldsymbol{x}$的极角.磁偶极辐射的时平均角分布为

$$\left\langle -\frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\Omega} \right\rangle = \langle \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{n} r^2 \rangle = \frac{\mu_0 \omega^4 |\boldsymbol{m}|^2}{32\pi^2 c^3} \sin^2\theta \tag{9.8.16}$$

可见,沿磁偶极矩轴线方向没有辐射,而在与磁偶极矩轴线垂直的平面上辐射最强.由于$\boldsymbol{E}$与$\boldsymbol{k}$和$\boldsymbol{m}$都垂直,在磁偶极矩矢量和波矢所张的平面上辐射场是完全极化的.磁偶极辐射总平均功率为

$$\left\langle -\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \right\rangle = \oint \mathrm{d}\Omega \left\langle -\frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\Omega} \right\rangle = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega^4 |\boldsymbol{m}|^2}{3c^3} \tag{9.8.17}$$

可见,当磁偶极矩振幅保持不变时,总辐射功率与频率的四次方成正比.

若振荡磁偶极子由一半径为a的小电流圈(如环形天线)中的振荡电流I形成,则

$$|\boldsymbol{m}| = I_0 \pi a^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t'}$$

于是(9.8.17)式可写成

$$\left\langle -\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \right\rangle = \frac{\mu_0 \omega^4 I_0^2 \pi a^4}{12c^3} = \frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} (ka)^4 \langle I^2 \rangle = R_r \langle I^2 \rangle \tag{9.8.18}$$

式中

$$\langle I^2 \rangle = I_0^2/2 \tag{9.8.19}$$

而

$$R_r = \frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} (ka)^4 = 320\pi^4 \left(\frac{\pi a^2}{\lambda^2}\right)^2 \Omega = 320\pi^4 \left(\frac{S}{\lambda^2}\right)^2 \Omega \tag{9.8.20}$$

称为环形天线的辐射电阻,$S = \pi a^2$是环形天线的面积.值得指出的是,上式中最后一个等式适用于任意形状的小平面天线.由此可见,磁偶极辐射功率的数量级为$\sim \omega^2 (a/\lambda)^4$,比电偶极辐射的辐射功率小$(a/\lambda)^2$的数量级.

9.8.3　电四极辐射场

定义矢量$\vec{\mathscr{D}}$为

$$\vec{\mathscr{D}} = \boldsymbol{n} \cdot \mathscr{D} \tag{9.8.21}$$

则电四极辐射场为

$$\begin{cases} \boldsymbol{B} = \mathrm{i}k\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{A}_{\mathscr{D}} = \dfrac{\mu_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{24\pi c^2 r} \dddot{\vec{\mathscr{D}}} \times \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{E} = c\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{n} = \dfrac{\mu_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{24\pi cr} (\dddot{\vec{\mathscr{D}}} \times \boldsymbol{n}) \times \boldsymbol{n} \end{cases} \tag{9.8.22}$$

式中 $\boldsymbol{A}_{\mathscr{D}}$ 是(9.8.12)第二式第二项所示的矢势.电四极辐射场的时平均能流密度为

$$\langle \boldsymbol{s} \rangle = \frac{c}{2\mu_0} |\boldsymbol{B}|^2 \boldsymbol{n} = \frac{\mu_0 \omega^6}{1152\pi^2 c^3 r^2} |\vec{\mathscr{D}} \times \boldsymbol{n}|^2 \boldsymbol{n} \tag{9.8.23}$$

电四极辐射的时平均角分布为

$$\left\langle -\frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega} \right\rangle = \langle \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{n} r^2 \rangle = \frac{\mu_0 \omega^6}{1152\pi^2 c^3} |\vec{\mathscr{D}} \times \boldsymbol{n}|^2 \tag{9.8.24}$$

为了得到电四极辐射总平均功率,将 $|\vec{\mathscr{D}} \times \boldsymbol{n}|^2$ 的角度依赖关系的显式写出

$$\begin{aligned} |\vec{\mathscr{D}} \times \boldsymbol{n}|^2 &= \vec{\mathscr{D}}^* \cdot \vec{\mathscr{D}} - |\boldsymbol{n} \cdot \vec{\mathscr{D}}|^2 \\ &= \mathscr{D}_{ij}^* \mathscr{D}_{ik} n_j n_k - \mathscr{D}_{ij}^* \mathscr{D}_{kl} n_i n_j n_k n_l \end{aligned} \tag{9.8.25}$$

式中 n_i 是矢径 $\boldsymbol{x}$ 的方向矢量 $\boldsymbol{n}$ 的第 i 直角分量.利用积分公式

$$\begin{cases} \oint \mathrm{d}\Omega n_j n_k = \dfrac{4\pi}{3} \delta_{jk} \\ \oint \mathrm{d}\Omega n_i n_j n_k n_l = \dfrac{4\pi}{15} (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \end{cases} \tag{9.8.26}$$

得

$$\begin{aligned} \oint \mathrm{d}\Omega |\vec{\mathscr{D}} \times \boldsymbol{n}|^2 &= 4\pi \left\{ \frac{1}{3} (\mathscr{D}_{ij}^* \mathscr{D}_{ij})^2 - \frac{1}{15} [\mathscr{D}_{ii}^* \mathscr{D}_{jj} + 2(\mathscr{D}_{ij}^* \mathscr{D}_{ij})^2] \right\} \\ &= \frac{4\pi}{5} \sum_{ij} |\mathscr{D}_{ij}|^2 \end{aligned} \tag{9.8.27}$$

式中已用了电四极矩为无迹对称张量的条件.因而电四极辐射总平均功率为

$$\left\langle -\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \right\rangle = \oint \mathrm{d}\Omega \left\langle -\frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega} \right\rangle = \frac{\mu_0 \omega^6}{1440\pi c^3} \sum_{ij} |\mathscr{D}_{ij}|^2 \tag{9.8.28}$$

可见,当电四极矩各向振幅平方之和 $\sum_{ij} |\mathscr{D}_{ij}|^2$ 保持不变时,总辐射功率与频率的 6 次方成正比.

一个振荡线性电四极子由两个极性相反的振荡电偶极子排在一条直线(z 轴)上构成,即在(0,0,l)、(0,0,0)和(0,0,$-l$)三点处分别出现三个振荡电荷 Q、$-2Q$ 和 Q.此系统的总电荷与电偶极矩都是零,但电四极矩却不为零

$$\mathscr{D} = 2Ql^2(3\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z - \mathscr{I}), \qquad Q = Q_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{9.8.29}$$

于是

$$\vec{\mathscr{D}} = 2Ql^2(3\cos\theta \boldsymbol{e}_z - \boldsymbol{n}) \tag{9.8.30}$$

故辐射场为

$$\begin{cases} \boldsymbol{H}=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{24\pi c^2 r}\dddot{\vec{\mathscr{D}}}\times\boldsymbol{n}=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi c^2 r}\dddot{Q}\,l^2\sin\theta\cos\theta\boldsymbol{e}_\phi \\ \boldsymbol{E}=\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}\,\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{n}=-\dfrac{\mu_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi cr}\dddot{Q}\,l^2\sin\theta\cos\theta\boldsymbol{e}_\theta \end{cases} \tag{9.8.31}$$

它们沿轴线方向($\theta=0$ 或 π)或在赤道平面($\theta=\pi/2$)均为零.其时平均能流密度为

$$\langle\boldsymbol{s}\rangle=\frac{c}{2\mu_0}|\boldsymbol{B}|^2\boldsymbol{n}=\frac{\mu_0\omega^6}{32\pi^2c^3r^2}Q_0^2\sin^2\theta\cos^2\theta\boldsymbol{n} \tag{9.8.32}$$

时平均角分布为

$$\left\langle-\frac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\Omega}\right\rangle=\langle\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}r^2\rangle=\frac{\mu_0\omega^6}{32\pi^2c^3}Q_0^2l^4\sin^2\theta\cos^2\theta \tag{9.8.33}$$

辐射总平均功率为

$$\left\langle-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\right\rangle=\oint\mathrm{d}\Omega\left\langle-\frac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\Omega}\right\rangle=\frac{\mu_0\omega^6}{60\pi c^3}Q_0^2l^4 \tag{9.8.34}$$

可见,电四极矩辐射功率的数量级为 $\sim\omega^2(l/\lambda)^4$,与磁偶极辐射功率的数量级相同.

习题 9-8

1. 证明:荷质比相同的不同带电粒子组成的体系不会有电偶极辐射和磁偶极辐射.

提示:体系的质心运动速度与体系的角动量不变.

2. 证明:按经典电磁理论,非相对论性的全同标量粒子之间的碰撞不会发出电偶极辐射和磁偶极辐射.

3. 具有持续的稳恒电流 I_0 的圆形线圈,其半径为 a.今绕其某一直径为轴作匀速旋转,角速度为 ω.若 $ka\ll1(k=\omega/c)$,求辐射场与能流.

答案:取转轴为 z 轴,则

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0\omega^2m_0}{4\pi c^2r}(\cos\theta\boldsymbol{e}_\theta+\mathrm{i}\boldsymbol{e}_\phi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\omega t+\phi)}$$

$$\boldsymbol{E}=c\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e}_r,\quad(m_0=I_0\pi d^2)$$

$$\langle\boldsymbol{s}\rangle=\frac{\mu_0m_0^2\omega^4}{32\pi^2\varepsilon_0c^3r^2}(1+\cos^2\theta)\boldsymbol{e}_r$$

4. 在 $z=0$ 平面内有相距为 $2l$ 的两个点电荷 e,其连线中点为坐标原点.若这两个点电荷在 $z=0$ 平面上以恒定角速度 ω 绕 z 轴旋转,且 $kl\ll1(k=\omega/c)$.试求

(1) 系统的电偶极距、磁偶极距和电四极矩;

(2) 系统所发出的辐射的类型与辐射场的频率;

(3) 沿 x 轴方向和沿 z 轴方向的辐射场.

答案:

(1) $\boldsymbol{p}=0$, $\boldsymbol{m}=e\omega l^2\boldsymbol{e}_z$

$$\mathscr{Q}=3el^2\left[(1+\cos 2\omega t)\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x+(1-\cos 2\omega t)\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_y+\sin 2\omega t(\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_x)\right]-2el^2\mathscr{I}$$

(2) 电四极辐射,频率为 2ω;

(3) 沿 z 轴方向:$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{B}=0$;

沿 x 轴方向:$\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0\omega^3}{3\pi c^3 r}\cos\left[2\omega\left(t-\dfrac{r}{c}\right)\right]\boldsymbol{e}_z$, $\boldsymbol{E}=c\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e}_x$

5. 在 z 轴上有两个电距大小相同、方向均沿 z 轴正向的电偶极子,以相同的频率 ω、相同的振幅 p_0、相反的相位振动.两电偶极振子的中心分别在 $\pm a/2$ 上.求这个系统的辐射场及辐射功率 N (设 $a\omega\ll c$).

提示:电四极辐射,仅 $Q_{zz}\neq 0$.

答案: $\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0 p_0 a\omega^3}{8\pi c^2 r}\sin 2\theta\sin(kr-\omega t)$, $\boldsymbol{E}=c\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e}_r$, $N=\dfrac{\mu_0 p_0^2 a^2\omega^6}{60\pi c^3}$

6. 设有一振幅为 $\boldsymbol{p}_0$、频率为 ω 的电偶极振子位于与理想导体平面距离为 $a/2$ 的地方,且 $\boldsymbol{p}_0$ 平行于导体平面.若 $a\ll\lambda$,试求在 $r\gg\lambda$ 处的电磁场及辐射功率 N.

提示:在导体面内有相反方向的镜像偶极振子,从而形成电四极辐射.

答案: $\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0 p_0 a\omega^3}{8\pi c^2 r}(\cos\theta\cos\phi)\boldsymbol{e}_\theta-\cos(2\theta)\sin\phi\boldsymbol{e}_\phi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}$

$\boldsymbol{E}=c\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e}_r$, $N=\dfrac{\mu_0 p_0^2 a^2\omega^6}{80\pi c^3}$

7. 一个按体积均匀带电的液滴,以不变的密度脉动,其表面可用方程

$$R(\theta)=R_0\left[1+aP_2(\cos\theta)\cos(\omega t)\right],\quad a\ll 1$$

描述.设总电荷为 Q,试求辐射角分布.

答案: $f(\theta,\phi)=\dfrac{9\mu_0\omega^6 QR_0^4 a^2}{7200\pi^2 c^3}\sin^2\theta\cos^2\theta$.

§9.9 线型天线辐射

线型天线是一种最简单的常用天线,由排在同一条直线(z 轴)上的两根长为 $l/2$ 的细直导体棒构成,两棒在原点隔开一小间隙,另两端分别位于(0,0,$l/2$)与(0,0,$-l/2$)点(这两点亦称为天线的端点),振荡电流从两棒接近原点的两个端点馈入,如图 9.2 所示.

天线端点的电流应当为零,因而天线上以一定频率($\omega l/c\approx 1$)变化的振荡电流分布满足

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}-\frac{\partial^2}{\partial z'^2}\right)\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}',t')=0 \tag{9.9.1}$$

与边界条件

$$\boldsymbol{j}(x'=y'=0,z'=\pm l/2,t')=0 \tag{9.9.2}$$

其解可表示为如下形式:

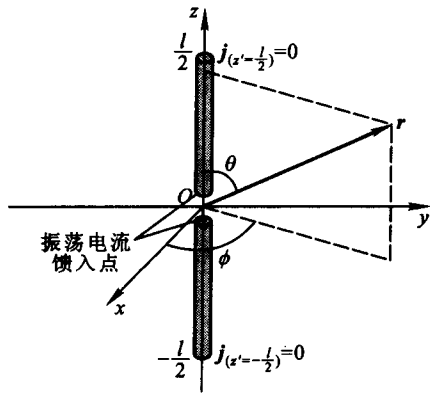


图 9.2　线型天线

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}',t')=\boldsymbol{e}_z I_0\delta(x')\delta(y')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t'}\sin\left(\frac{kl}{2}-k|z'|\right),\quad k=\frac{\omega}{c}\tag{9.9.3}$$

这一电流分布是中心对称的,相应的馈送方式称为同相馈送.

电流分布(9.9.3)激发的推迟矢势的振幅为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{e}_z\frac{\mu_0 I_0}{4\pi}\int_{-l/2}^{l/2}\mathrm{d}z'\frac{\sin\left(\frac{kl}{2}-k|z'|\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\tag{9.9.4}$$

式中 $R=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{e}_z z'|$.在辐射区,$R\approx r-z'\cos\theta$,分母中的 R 可直接用 r 代替.于是

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{e}_z\frac{\mu_0 I_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\int_{-l/2}^{l/2}\mathrm{d}z'\sin\left(\frac{kl}{2}-k|z'|\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz'\cos\theta}\tag{9.9.5}$$

值得注意的是,由于 $kl\approx1$,因而被积式中的指数函数的宗量 kz'不是小量,故不能作多极展开.直接积分得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{e}_z\frac{\mu_0 I_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{2\pi kr}\frac{\cos\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right)-\cos\frac{kl}{2}}{\sin^2\theta}\tag{9.9.6}$$

相应的辐射场为

$$\begin{cases}\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0 I_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(kr-\frac{\pi}{2}\right)}}{2\pi r}\dfrac{\cos\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right)-\cos\frac{kl}{2}}{\sin^2\theta}\boldsymbol{e}_\phi\\[2ex]\boldsymbol{E}=\dfrac{c\mu_0 I_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(kr-\frac{\pi}{2}\right)}}{2\pi r}\dfrac{\cos\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right)-\cos\frac{kl}{2}}{\sin^2\theta}\boldsymbol{e}_\theta\end{cases}\tag{9.9.7}$$

时平均能流密度为

$$\langle \boldsymbol{s} \rangle = \frac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi^2 r^2}\left[\frac{\cos\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right)-\cos\frac{kl}{2}}{\sin\theta}\right]^2 \boldsymbol{n} \tag{9.9.8}$$

时平均角分布为

$$\left\langle -\frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\Omega}\right\rangle = \frac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi^2}\left[\frac{\cos\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right)-\cos\frac{kl}{2}}{\sin\theta}\right]^2 \tag{9.9.9}$$

辐射总平均功率为

$$\left\langle -\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\right\rangle = \frac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi^2} A(kl) = \frac{1}{2} I_0^2 R_\gamma \tag{9.9.10}$$

式中 R_γ 是天线的辐射电阻：

$$R_\gamma = \frac{\mu_0 c}{4\pi^2} A(kl) \tag{9.9.11}$$

而 $A(kl)$ 是立体角积分：

$$A(kl) \equiv \int \mathrm{d}\Omega \left[\frac{\cos\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right)-\cos\frac{kl}{2}}{\sin^2\theta}\right]^2 \tag{9.9.12}$$

令 $u=\cos\theta$ 得

$$A(kl) = 2\pi\int_{-1}^{1} \mathrm{d}u\,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}\right)\left[\cos\left(\frac{kl}{2}u\right)-\cos\frac{kl}{2}\right]^2 \tag{9.9.13}$$

上式右端圆括号中两项贡献相等(对其中一项作变换 $u\to -u$ 即可验证)，因而

$$A(kl) = 2\pi\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}u}{1+u}\left\{\frac{1}{2}[1+\cos(klu)]-2\cos\left(\frac{kl}{2}\right)\cdot\left[1+\cos\left(\frac{kl}{2}u\right)\right]+\left[\cos^2\left(\frac{kl}{2}\right)+2\cos\left(\frac{kl}{2}\right)\right]\right\} \tag{9.9.14}$$

对上式右端三项分别作积分变换：

$$v = kl(1+u),\quad v=\frac{kl}{2}(1+u),\quad v=1+u \tag{9.9.15}$$

并利用积分正弦与积分余弦的定义式

$$\mathrm{si}(x) \equiv -\int_x^\infty \mathrm{d}t\,\frac{\sin t}{t} = -\frac{\pi}{2}+\int_0^x \mathrm{d}t\,\frac{\sin t}{t}$$

$$\mathrm{ci}(x) \equiv -\int_x^\infty \mathrm{d}t\,\frac{1-\cos t}{t} = \ln\gamma_E x+\int_0^x \mathrm{d}t\,\frac{1-\cos t}{t}$$

得

$$A(kl) = \pi\left\{\left[2+4\cos\frac{kl}{2}+\cos kl\right]\ln 2+\left[1-4\cos\frac{kl}{2}\right]\ln kl+[2+\cos kl]\ln\gamma_E-2[1+\cos kl]\mathrm{ci}(kl)+\right.$$

$$\cos kl\,\mathrm{ci}(2kl)+\sin kl\,[\mathrm{si}(2kl)-2\mathrm{si}(kl)]\Big\} \tag{9.9.16}$$

式中 $\gamma_E=1.781\cdots$是 Euler 常数.若天线长度是半波长的整数倍:$l=m\dfrac{\lambda}{2}$($m=1,2,\cdots$),则时平均角分布为

$$\left\langle -\frac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\Omega}\right\rangle=\frac{\mu_0 cI_0^2}{8\pi^2}\left[\frac{\cos\left(\dfrac{m\pi}{2}\cos\theta\right)-\cos\left(\dfrac{m\pi}{2}\right)}{\sin\theta}\right]^2 \tag{9.9.17}$$

长度不同的线性天线的时平均角分布 $f(\theta,\phi)=\left\langle -\dfrac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\Omega}\right\rangle$在 $\phi=$常数的平面上与极角 θ 的关系示于图 9.3 中.

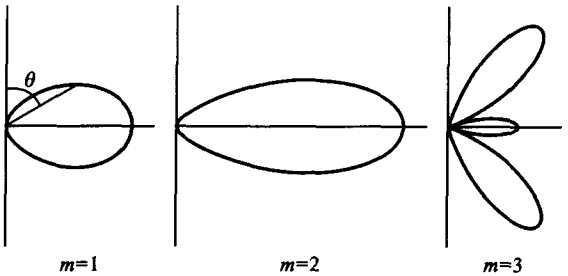


图 9.3　线性天线的辐射角分布

当 $m=1$ 时,赤道面($\theta=\pi/2$)上辐射最强;随 m 增大,辐射最强的方向(形成两个锥面)逐渐靠近两极(即天线轴线方向).而辐射电阻为

$$\begin{cases} R_\gamma=\dfrac{\mu_0 c}{4\pi}\Big\{3\ln 2+3\ln\gamma_E+[1-4(-1)^{m/2}]\ln\dfrac{m\pi}{2}+ \\ \quad .\mathrm{ci}(2m\pi)-4\mathrm{ci}(m\pi)\Big\}, & \text{当 } m \text{ 为偶数} \\ R_\gamma=\dfrac{\mu_0 c}{4\pi}[\ln(2m\gamma_E\pi)-\mathrm{ci}(2m\gamma_E\pi)], & \text{当 } m \text{ 为奇数} \end{cases} \tag{9.9.18}$$

特别地,对于半波或全波天线有

$$R_\gamma=\frac{\mu_0 c}{4\pi}\cdot\begin{cases}2.44\\6.64\end{cases}=\begin{cases}73.2\ \Omega & (\text{半波})\\199\ \Omega & (\text{全波})\end{cases} \tag{9.9.19}$$

这比短天线(如 $a/\lambda=0.01$)的辐射电阻

$$R_\gamma=197(a/\lambda)^2\approx 0.02\ \Omega$$

大得多,或者说其辐射能力强得多.

习题 9-9

从中央馈送的细直天线，其长度为 $d = m\lambda/2$，m 为偶数．若天线两端的电流是反相的，即

$$j(x', t') = e_z I_0 \delta(x')\delta(y')\sin\left[k\left(\frac{d}{2} - z'\right)\right]e^{-i\omega t'}$$

求天线辐射功率的角分布 $\mathrm{d}N/\mathrm{d}\Omega$．

答案：$\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\Omega} = \dfrac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi^2}\dfrac{\sin^2\left(\dfrac{m\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}$，　$m = 2, 4, \cdots$．

§9.10 天线阵

线性天线对极角而言有一定的方向性，但对方位角却没有方向性．为了得到较好的定向辐射，可将天线基元（如半波天线）排布成天线阵列，利用各基元天线辐射的干涉效应增强天线辐射的方向性．最简单的排布方式有两种（见图 9.4）．

1．线性排布：m 个相同的基元天线沿基元天线等距排列，排列方向与基元天线轴线方向平行，相邻基元中心之间的距离为 l，每个基元的激发是相同的．

2．横向排布：m 个相同的基元天线平行等距排列，排列方向与基元天线轴线方向垂直，相邻基元中心之间的距离为 l，每个基元的激发是相同的．

3．将上述两种排布而成的基元天线列排成 $m \times n$ 方阵．

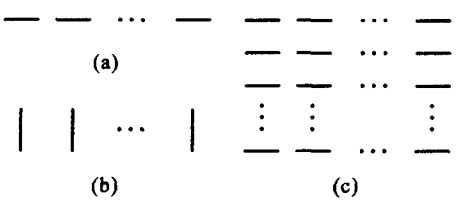


图 9.4　天线阵列

(a) 线性排布；(b) 横向排布；(c) 方阵

取基元天线轴线为极轴（z 轴），则上述天线列对于线性排布而言与极轴重合；对于横向排布而言可设为 x 轴．设在很远处某点 $P(\theta, \phi)$ 的矢径与天线列的夹角为 α，天线列中各基元天线所激发的场到达 P 点的路程不同，因而彼此间有相位差，从而相互干涉．容易看出，任意两个相邻的基元天线所激发的场在 P 点的相位差为

$$kl\cos\alpha = \begin{cases} kl\cos\theta & \text{对于线性排布} \\ kl\sin\theta\cos\phi & \text{对于横向排布} \end{cases} \qquad (9.10.1)$$

整个天线列在 P 点产生的辐射场为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{E}_3 + \cdots + \boldsymbol{E}_m \\ &= \boldsymbol{E}_1 [1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}kl\cos\alpha} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}2kl\cos\alpha} + \cdots + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-1)kl\cos\alpha}] \\ &= \boldsymbol{E}_1 Z(\alpha)\end{aligned} \tag{9.10.2}$$

式中

$$Z(\alpha) = \frac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}mkl\cos\alpha}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}kl\cos\alpha}} = \frac{\sin\dfrac{mkl}{2}\cos\alpha}{\sin\dfrac{kl}{2}\cos\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{m-1}{2}kl\cos\alpha} \tag{9.10.3}$$

是场的阵因子，对于线性排布有

$$Z(\alpha) = \frac{\sin\dfrac{mkl}{2}\cos\theta}{\sin\dfrac{kl}{2}\cos\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{m-1}{2}kl\cos\theta\right)} \tag{9.10.4}$$

对于横向排布有

$$Z(\alpha) = \frac{\sin\dfrac{mkl}{2}\sin\theta\cos\phi}{\sin\dfrac{kl}{2}\sin\theta\cos\phi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{m-1}{2}kl\sin\theta\cos\phi\right)} \tag{9.10.5}$$

天线列的辐射角分布为

$$f(\theta,\phi) = f_1(\theta,\phi)\,|Z(\cos\alpha)|^2 \tag{9.10.6}$$

式中 $f_1(\theta,\phi)$ 是基元天线的角分布；而 $|Z(\cos\alpha)|^2$ 称为角分布的阵因子，对于线性排布为

$$|Z(\cos\alpha)|^2 = \frac{\sin^2\left(\dfrac{mkl}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\left(\dfrac{kl}{2}\cos\theta\right)} \tag{9.10.7}$$

对于横向排布为

$$|Z(\cos\alpha)|^2 = \frac{\sin^2\left(\dfrac{mkl}{2}\sin\theta\cos\phi\right)}{\sin^2\left(\dfrac{kl}{2}\sin\theta\cos\phi\right)} \tag{9.10.8}$$

由此可知，线性排布的天线列的角分布阵因子当 $\cos\theta = 0$ 即 $\theta = \pi/2$ 时有最大值 m^2，在 $mkl\cos\theta = 2n\pi$，n = 非零整数时有零点. 角分布阵因子可分为若干瓣，辐射能量主要集中在主瓣内. 令 $\psi = \dfrac{\pi}{2} - \theta$，则当 $\psi = 0$ 时辐射最强，至第一零点 $mkl\sin\psi = 2\pi$ 处无辐射；因而主瓣的张角 $2\psi_0$ 由下式确定：

$$\sin\psi_0 = \frac{2\pi}{mkl} = \frac{\lambda}{ml} \tag{9.10.9}$$

可见，m 越大，主瓣的张角 $2\psi_0$ 越小，因而辐射方向性越好；且在赤道面上下夹

角为 $2\psi_0$ 范围内辐射最强，但对方位角 ϕ 而言却仍然是各方位同性的.

对于横向排布的天线列，辐射主极大位置分别出现在($\theta=\pi/2,\phi=\pm\pi/2$)、极轴正向(即 $\theta=0$)和极轴负向(即 $\theta=\pi$)四个方向上.若限定 $\theta=\pi/2$，则辐射角分布与线性排布的天线列在经面上的角分布完全一样；因而在 $\theta=\pi/2$ 平面上，辐射在 $\phi=\pm\pi/2$ 左右 $2\psi_0$ 范围内辐射最强，此处角度 ψ_0 由(9.10.9)式确定.可见，横向排布的天线列当 m 很大时对极角与方位角两者都有很强的方向性.

现考虑 $m\times n$ 天线阵，其中每行由 m 个基元天线作线性排布，每列由 n 个基元天线作横向排布.阵中每行作为一个整体可视为一个天线基元，则所考虑的 $m\times n$ 天线阵可视为由 n 个这种天线基元作横向排布而形成的.因而对于很远处，辐射场阵因子为

$$\begin{aligned}Z_{m\times n}&=Z_{m/\!/}Z_{n\perp}\\&=\frac{\sin\left(\frac{m}{2}kl\cos\theta\right)\sin\left(\frac{n}{2}kl\sin\theta\cos\phi\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}kl\cos\theta\right)\sin\left(\frac{1}{2}kl\sin\theta\cos\phi\right)}\ e^{j\left(\frac{m-1}{2}kl\cos\theta+\frac{m-1}{2}kl\sin\theta\cos\phi\right)}\end{aligned}\tag{9.10.10}$$

式中 $Z_{m/\!/}$、$Z_{n\perp}$ 分别是将 m 或 n 个天线基元作线性排布或横向排布时的阵因子.于是辐射角分布阵因子为

$$|Z_{m\times n}|^2=\frac{\sin^2\left(\frac{m}{2}kl\cos\theta\right)\sin^2\left(\frac{n}{2}kl\sin\theta\cos\phi\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}kl\cos\theta\right)\sin^2\left(\frac{1}{2}kl\sin\theta\cos\phi\right)}\tag{9.10.11}$$

它的主极大在($\theta=\pi/2,\phi=\pm\pi/2$)方向，而第一个极小在满足下式

$$mkl\cos\theta=2\pi,\qquad nkl\cos\phi=2\pi\tag{9.10.12}$$

的(θ,ϕ)处.因而，所考虑的 $m\times n$ 天线阵的主瓣张角为

$$\Delta\theta=2\arcsin\frac{\lambda}{ml},\quad \Delta\phi=2\arcsin\frac{\lambda}{nl}\tag{9.10.13}$$

当 m 与 n 足够大时其辐射具有相当高的方向性.

第十章　运动带电粒子的辐射场

本章研究运动带电粒子激发的电磁场.首先导出运动的点电荷产生的标势与矢势(Liénard－Wiechert 势)及相应的电磁场,继而讨论一些典型情形(如直线运动与圆周运动)下的辐射并进行频谱分析.最后考察 Cherenkov 辐射.

§ 10.1 Liénard – Wiechert 势

任意的电荷、电流体系都可以视为各个运动点电荷的集合，这个体系产生的电磁场是相应的运动点电荷激发的电磁场的叠加. 因而，一个重要问题是，当已知点电荷 e 在任意时刻的运动状态时，如何求该点电荷所激发的电磁场的标势与矢势.

由推迟势公式可知，要求出运动点电荷的势，只需知道它对应的电荷密度与电流密度即可. 设运动的点电荷在时刻 t' 的位置和速度分别为 $\boldsymbol{x}_e(t')$ 与 $\boldsymbol{v}_e(t')=\mathrm{d}\boldsymbol{x}_e(t')/\mathrm{d}t'$，则按照第二章 § 2.2 节的分析可知所求的电荷密度与电流密度为

$$\begin{cases}\rho(\boldsymbol{x}',t')=e\delta[\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}_e(t')]\\ \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}',t')=e\boldsymbol{v}_e(t')\delta[\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}_e(t')]\end{cases}\tag{10.1.1}$$

由第八章知，在频域中，以频率 ω 变化的源（其振幅为 $j^\mu(\boldsymbol{x}',\omega)$）所激发的势的振幅为

$$\begin{cases}\varphi(\boldsymbol{x},\omega)=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\displaystyle\int \mathrm{d}^3x'\rho(\boldsymbol{x}',\omega)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR_e}}{4\pi R_e}\\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\omega)=\mu_0\displaystyle\int \mathrm{d}^3x'\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}',\omega)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR_e}}{4\pi R_e}\end{cases}\tag{10.1.2}$$

式中，为了明确起见，将对频率的依赖关系已明显表出；且

$$R_e=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_e(t')|\tag{10.1.3}$$

将源密度从频域变换至时域，并利用(10.1.1)式，可得

$$\begin{cases}\varphi(\boldsymbol{x},\omega)=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\displaystyle\int \mathrm{d}^3x'\mathrm{d}t'e\delta[\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}_e(t')]\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t'+R_e/c)}}{4\pi R_e}\\ \qquad=\dfrac{e}{\varepsilon_0}\displaystyle\int \mathrm{d}t'\frac{\exp[\mathrm{i}\omega(t'+R_e/c)]}{4\pi R_e}\\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\omega)=e\mu_0\displaystyle\int \mathrm{d}^3x'\mathrm{d}t'e\boldsymbol{v}_e(t')\delta[\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}_e(t')]\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t'+R_e/c)}}{4\pi R_e}\\ \qquad=e\mu_0\displaystyle\int \mathrm{d}t'\boldsymbol{v}_e(t')\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t'+R_e/c)}}{4\pi R_e}\end{cases}\tag{10.1.4}$$

以下在不致引起混淆的地方将 R_e 简写为 R，将 $\boldsymbol{v}_e$ 简写为 $\boldsymbol{v}$. 为了求得 $A^\mu(\boldsymbol{x},t)$，须将对时刻 t' 的积分变换为对观测时刻 $t=t'+R_e/c$ 的积分. 此积分变换的 Jacobi 行列式满足

$$\frac{\partial t'}{\partial t}=1-\frac{1}{c}\frac{\partial R}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}=1+\frac{1}{cR}\boldsymbol{R}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{x}_e}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}=1+\frac{1}{c}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\frac{\partial t'}{\partial t}\tag{10.1.5}$$

式中已应用了恒等式

$$\frac{\partial R}{\partial t'} = -[\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}]_{t'} \tag{10.1.6}$$

且

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_e(t')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_e(t')|}$$

解方程(10.1.5)得到积分变换的 Jacobi 行列式为

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = k^{-1} \tag{10.1.7}$$

式中

$$k = 1 - \frac{1}{c}\boldsymbol{v}(t')\cdot\boldsymbol{n} \tag{10.1.8}$$

于是有

$$\begin{cases} \varphi(\boldsymbol{x},\omega) = \int dt e^{i\omega t}\dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{kR}\right] \\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\omega) = \int dt e^{i\omega t}\dfrac{e\mu_0}{4\pi}\left[\dfrac{\boldsymbol{v}}{kR}\right] \end{cases} \tag{10.1.9}$$

式中[ ]表示在时刻 $t' = t - R/c$ 取值.从上式可直接读出时域中相应的表达式

$$\begin{cases} \varphi(\boldsymbol{x},t) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{e}{kR}\right] \\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\left[\dfrac{e\boldsymbol{v}}{kR}\right] \end{cases} \tag{10.1.10}$$

或

$$\begin{cases} \varphi(\boldsymbol{x},t) = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{c(t-t')}\dfrac{\partial t'}{\partial t} \\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) = \dfrac{\beta(t')}{c}\varphi(\boldsymbol{x},t) \end{cases} \tag{10.1.11}$$

此即运动点电荷 e 在无界空间所激发的电磁场的标势与矢势,称为 Liénard - Wiechert 势.写成四维形式即

$$A^\mu(x) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\frac{ecu^\mu(\tau')}{u^\nu[x - x_e(\tau')]_\nu}\right\}_{\tau' = \tau_0} \tag{10.1.12}$$

式中 $d\tau' = \gamma^{-1}dt'$ 是运动点电荷的原时(即固有时)间隔,$x_e(\tau')_\mu$ 表示该点电荷的世界线,而 $[u(\tau')]_\mu$ 则是其四维速度;且 τ_0 需满足类光间隔条件

$$[x - x_e(\tau_0)]^2 = 0, \quad 即 |x_0 - x_{0e}(\tau_0)|^2 = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_e(\tau_0)|^2 = R^2(\tau_0) \tag{10.1.13}$$

及推迟条件

$$\theta[x_0 - x_{0e}(\tau_0)] \neq 0, \quad 即 \quad x_0 - x_{0e}(\tau_0) > 0 \tag{10.1.14}$$

换言之，τ_0满足限制条件

$$x_0 = x_{0e}(\tau_0) + R(\tau_0) \tag{10.1.15}$$

我们指出，利用

$$u^\nu [x - x_e(\tau')]_\nu = c[kR] \tag{10.1.16}$$

可证明(10.1.12)与(10.1.11)两式是等价的. 同时，Liénard－Wiechert 势实际上是推迟势当电荷电流分布为(3.8.14)式所示时的具体表达式，因而满足 Lorentz 条件.

习题 10－1

1. 试列举 Liénard－Wiechert 势的其他推导方法，例如收缩球法、(非单色的)推迟 Green 函数法和特殊 Lorentz 变换法.
2. 验证 Liénard－Wiechert 势满足 Lorentz 条件.
3. 若带电粒子的运动速度 v 比光速小得多，求出按 $1/c$ 展开的 Liénard－Wiechert 势.

   答案： $\varphi(\boldsymbol{r},t) = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{c^n n!}\left(R_0\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n \dfrac{n!}{R_0}$

   $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \dfrac{e\mu_0}{4\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{c^n n!}\left(R_0\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n \dfrac{\boldsymbol{v}_0(t)}{R_0}$

   其中 $R_0 = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0(t)|$，$\boldsymbol{r}_0(t) = \boldsymbol{r}_e(t' \to t)$，$\boldsymbol{v}_0(t) = \boldsymbol{v}_e(t' \to t)$
4. 在 Liénard－Wiechert 势的四维形式(10.1.12)中，试解释为什么 τ_0 应满足类光间隔条件与推迟条件.
5. 试证明(10.1.12)与(10.1.11)两式是等价的.

§10.2 运动电荷的场的普遍形式

为了从 Liénard－Wiechert 势得到运动电荷的场强，需要用到关于含推迟量的微商公式. 首先由关系式$[R(t')]^2 = [\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_e(t')]^2$易得

$$\frac{\partial R}{\partial t'} = -\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}, \qquad (\nabla R)_{t'} = \boldsymbol{n} \tag{10.2.1}$$

式中偏导数的下标如 t' 表示在 t' 不变的条件下进行微分. 由关系式 $\boldsymbol{R}(t') = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_e(t')$则有

$$\nabla_{t'}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}, \qquad \frac{\partial}{\partial t'}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}) = \dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{R} - v^2 \tag{10.2.2}$$

关于推迟时间 $t = t' + R/c$ 的微商公式是

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = k^{-1} = \frac{R}{S} \tag{10.2.3}$$

$$c\nabla t' = -k^{-1}\boldsymbol{n} = -\frac{\boldsymbol{R}}{S} \tag{10.2.4}$$

式中

$$S = kR = R - \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}}{c} \tag{10.2.5}$$

(10.2.4)中第一式即为(10.1.7)式;第二式可按类似方法证明.事实上

$$c\,\nabla t' = -\left[(\nabla R)_{t'} + \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial t'}\nabla t'\right] = -[\boldsymbol{n} - (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\nabla t'] \tag{10.2.6}$$

关于$\nabla t'$的方程(10.2.6)的解即是(10.2.4)中第二式.(10.2.4)与(10.2.6)可改写为下述算符运算公式:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} = k^{-1}\dfrac{\partial}{\partial t'} = \dfrac{R}{S}\dfrac{\partial}{\partial t'} \\ \nabla = \nabla_{t'} - \dfrac{1}{ck}\boldsymbol{n}\dfrac{\partial}{\partial t'} = \nabla_{t'} - \dfrac{\boldsymbol{R}}{cS}\dfrac{\partial}{\partial t'} \end{cases} \tag{10.2.7}$$

进而,利用上述关系得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial t'} = \dfrac{v^2}{c} - \dfrac{\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{R}}{c} - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} \\ \nabla S = \boldsymbol{n} - \dfrac{\boldsymbol{v}}{c} - \dfrac{\boldsymbol{R}}{cS}\dfrac{\partial S}{\partial t'} \\ \dfrac{\partial S}{\partial t} = \dfrac{R}{S}\dfrac{\partial S}{\partial t'}, \qquad \dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \dfrac{R}{S}\dot{\boldsymbol{v}} \\ \nabla\times\boldsymbol{v} = \nabla t'\times\dot{\boldsymbol{v}} = -\dfrac{\boldsymbol{R}}{cS}\times\dot{\boldsymbol{v}} \end{cases} \tag{10.2.8}$$

于是运动点电荷激发的电磁场为

$$\begin{cases} \boldsymbol{E} = -\left(\nabla\varphi + \dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) \\ \quad = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\dfrac{\nabla S}{S^2} + \left[\dfrac{\boldsymbol{v}}{c^2S^2}\dfrac{\partial S}{\partial t'} - \dfrac{1}{c^2S}\dot{\boldsymbol{v}}\right]\dfrac{\partial t'}{\partial t}\right\} \\ \quad = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{\nabla S}{S^2} + \dfrac{R\boldsymbol{v}}{c^2S^3}\dfrac{\partial S}{\partial t'} - \dfrac{R}{c^2S^2}\dot{\boldsymbol{v}}\right] \\ \boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A} \\ \quad = \dfrac{e}{4\pi c^2\varepsilon_0}\left[-\dfrac{1}{S^2}(\nabla S)\times\boldsymbol{v} - \dfrac{\boldsymbol{R}\times\dot{\boldsymbol{v}}}{cS^2}\right] \\ \quad = \dfrac{\boldsymbol{n}}{c}\times\dfrac{e}{4\pi c^2\varepsilon_0}\left[-\dfrac{c\boldsymbol{v}}{S^2} + \dfrac{R\boldsymbol{v}}{S^3}\dfrac{\partial S}{\partial t'} - \dfrac{R\dot{\boldsymbol{v}}}{cS^2}\right] \end{cases} \tag{10.2.9}$$

利用恒等式

$$\boldsymbol{n}\times\nabla S = \boldsymbol{n}\times(-\boldsymbol{v}/c) \tag{10.2.10}$$

可看出

$$c\boldsymbol{B}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E} \tag{10.2.11}$$

运动点电荷的电磁场可进一步表为

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}=\dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{(1-\beta^2)(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})}{k^3R^2}+\dfrac{\boldsymbol{n}\times[(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}]}{ck^3R}\right]\\ \boldsymbol{B}=\dfrac{\boldsymbol{n}}{c}\times\boldsymbol{E}\end{cases} \tag{10.2.12}$$

由式(10.2.12)可以看出：

(a) 运动点电荷的电磁场可分解为两部分：第一部分与点粒子的加速度无关，仅与速度有关，称为速度场(或自有场，亦称为感应场)；第二部分与加速度有关，称为加速度场(或辐射场)．速度场按 $1/R^2$ 的规律变化，不能将能量辐射到任意远处；加速度场按 $1/R$ 的规律变化，可将能量辐射到任意远处．

(b) 运动点电荷的磁场与电磁波传播方向 $\boldsymbol{n}$[由 Liénard－Wiechert 势的频域表达式(10.1.9)与 $k\boldsymbol{R}=k\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{R}$ 知，$\boldsymbol{n}$ 即为波矢方向]垂直，但其电场却与 $\boldsymbol{n}$ 一般不垂直(因 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}\sim1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta}$)．故运动点电荷的电磁场是横磁型的，却不是横电型的．电场的纵向部分仅与粒子的速度有关，而加速度场则是横电磁型的．

习题 10－2

1． 点电荷 e 开始时位于坐标原点，此后沿 x 轴作匀加速直线运动，加速度为 a．试求时刻 t 时在$(l,0,0)$处的势．并问此处的势是电荷在何处激发的？

答案： 当 $x(t')<l$ 时，

$$\varphi=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(1-at'/c)(l-at'^2/2)},\quad \boldsymbol{A}=\frac{e\mu_0}{4\pi}\frac{at'\boldsymbol{e}_x}{(1-at'/c)(l-at'^2/2)}$$

$$t'=\frac{c-\sqrt{c^2-2a(ct-l)}}{a}$$

当 $x(t')>l$ 时，

$$\varphi=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(1-at'/c)(at'^2/2-l)},\quad \boldsymbol{A}=\frac{e\mu_0}{4\pi}\frac{at'\boldsymbol{e}_x}{(1-at'/c)(at'^2/2-l)}$$

$$t'=\frac{\sqrt{c^2-2a(ct-l)}-c}{a}$$

2． 一点电荷在各向同性的线性均匀介质中以速度 $\boldsymbol{u}$ 作匀速直线运动，该介质中电磁波的相速为 v．

试证：电磁场的激发时刻 t' 由下述方程给出

$$(u^2-v^2)(t-t')^2+2\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r}(t-t')+r^2=0$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 是该点电荷在时刻 t 的位置到观测点的矢径．并证明

(1) 当 $u<v$ 时，上述方程有且仅有一个关于 $t-t'$ 的正实数解；

(2) 当 $u>v$ 时，关于 $t-t'$ 的正实数解仅存在于以该点电荷在时刻 t 所处的位置为顶点、以下述角度

$$\psi_0 = \arccos\sqrt{1-\frac{v^2}{u^2}}$$

的两倍为顶角的、以 $\boldsymbol{r}$ 为对称轴、向后伸展的(三维空间中的)锥面内;因而对于 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 的夹角每一给定值,有两个关于 $t-t'$ 的正实数解,它们对应于两个可能的推迟位置.

3. 若带电粒子的运动速度 v 比光速小得多,求出按 $1/c$ 展开的带电粒子的电磁场.

4. 设一点电荷 e 以低速 $\boldsymbol{v}$ 和加速度 $\dot{\boldsymbol{v}}$ 在有限区域内运动.试求波区中电磁场的近似表达式,以及波场区与似稳场区的分界位置.

提示:波场区与似稳场区的分界位置可用辐射场与似稳场场强大小的数量级相同这一条件来确定.

答案:
$$\boldsymbol{E}=\left[\frac{e\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}+\frac{3e\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})}{4\pi\varepsilon_0 cr^4}-\frac{e\boldsymbol{v}}{4\pi\varepsilon_0 cr^2}+\frac{e\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{v}})}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^3}\right]$$

$$\boldsymbol{H}=\left[\frac{\mu_0 e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}}{4\pi r^3}+\frac{\mu_0 e\dot{\boldsymbol{v}}\times\boldsymbol{r}}{4\pi cr^2}\right]$$

$$r_{分界}\approx c^2/\dot{v}$$

5. 试由 Jefimenko 方程导出 Feynman 关于运动的点电荷所激发的电磁场的场强公式:

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}=\dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{\boldsymbol{R}}{R^3}+\dfrac{R}{c}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\boldsymbol{R}}{R^3}\right)+\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\boldsymbol{R}}{R}\right)\right]\\ \boldsymbol{B}'=\left(\dfrac{\boldsymbol{R}}{R}\right)\times\dfrac{\boldsymbol{E}}{c}\end{cases}\tag{10.2.13}$$

式中,$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_e(t')$、$R=|\boldsymbol{R}|$ 在时刻 $t'=t-R/c$ 取值,而电磁场场强则在 $(\boldsymbol{x},t)$ 取值.

6. 试由 Feynman 关于运动的点电荷所激发的电磁场的场强公式导出(10.2.12).

§10.3　运动电荷的自有场

根据公式(10.2.12),为了决定运动点电荷的场在某一惯性参考系中的具体形式,只需确定该点电荷在所考虑的惯性参考系中的速度与加速度即可.从速度与加速度的特殊 Lorentz 变换公式可知:在特殊 Lorentz 变换下,粒子的速度场不能变换为加速度场,粒子的加速度场也不能变换为速度场;粒子的速度(若比真空中的光速小)可变换为零,但粒子的加速度却不可能变换为零.

选取在粒子辐射时刻 t' 相对于粒子静止的惯性参考系 $\sum^*(t')$,它相对于实验室参考系 $\sum$ 的速度即为粒子在时刻 t' 的运动速度 $\boldsymbol{v}(t')=v(t')\boldsymbol{e}_z$,且两参考系 $\sum$ 与 $\sum^*(t')$ 中对应的空间坐标轴两两相互平行,当 $t^*=t=0$ 时其原点重合.在参考系 $\sum^*(t')$ 中,粒子的速度与加速度为

$$\begin{cases}\boldsymbol{v}^*=0\\ \dot{v}_x^*=\gamma^2\dot{v}_x,\ \dot{v}_y^*=\gamma^2\dot{v}_y,\ \dot{v}_z^*=\gamma^3\dot{v}_z\end{cases}\tag{10.3.1}$$

运动电荷 t 时刻在 $\boldsymbol{x}$ 处激发的电磁场在参考系 $\sum^*(t')$ 中成为下述形式：

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{x},t)=\left\{\dfrac{e\boldsymbol{n}^*}{4\pi\varepsilon_0 r^{*2}}+\dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 cr^*}\boldsymbol{n}^*\times[\boldsymbol{n}^*\times\dot{\boldsymbol{v}}^*]\right\}_{t'=t-R/c} \\ \boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{x},t)=\left\{\dfrac{e\mu_0}{4\pi cr^*}[\dot{\boldsymbol{v}}^*\times\boldsymbol{n}^*]\right\}_{t'=t-R/c} \end{cases} \tag{10.3.2}$$

注意：上式右端打星号 * 的量都是参考系 $\sum^*(t')$ 中的量，它们通过特殊 Lorentz 变换与实验室系中在时刻 $t'=t-R/c$ 的量相联系，例如

$$\begin{bmatrix} r^*=c(t^*-t^{*\prime}) \\ x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R=c(t-t') \\ X=x-x' \\ Y=y-y' \\ Z=z-z' \end{bmatrix} \tag{10.3.3}$$

式中 X、Y 与 Z 分别是在 $\sum$ 系中 $\boldsymbol{R}$ 的坐标分量. 由此得

$$x^*=x=X,\ y^*=y=Y,\ z^*=\gamma(z-vt)=\gamma[Z-v(t-t')] \tag{10.3.4}$$

于是

$$r^{*2}=\frac{R^2(1-\beta\cos\theta)^2}{1-\beta^2} \tag{10.3.5}$$

再如，利用以 $\boldsymbol{\beta}$ 为极轴方向的方位角不变及光行差公式[参见第二章 §2.7 式(2.7.10)]

$$\begin{cases} \sin\theta^*=\dfrac{\sin\theta\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta} \\ \cos\theta^*=\dfrac{\cos\theta-\beta}{1-\beta\cos\theta} \end{cases} \tag{10.3.6}$$

可得

$$\begin{cases} n_{/\!/}^*\equiv\cos\theta^*=\dfrac{n_{/\!/}-\beta}{1-\beta n_{/\!/}}, & n_{/\!/}\equiv\cos\theta \\ n_\perp^*\equiv\sin\theta^*=\dfrac{n_\perp}{\gamma(1-\beta n_{/\!/})}, & n_\perp\equiv\sin\theta \end{cases} \tag{10.3.7}$$

式中矢量的下标 // 与 ⊥ 分别表示该矢量平行与垂直于粒子速度方向的分量.

由方程(10.3.2)知，运动电荷的速度场或自有场在相对于 t' 时的粒子静止的惯性参考系 $\sum^*(t')$ 中成为

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_s^*(\boldsymbol{x},t)=\left[\dfrac{e\boldsymbol{n}^*}{4\pi\varepsilon_0 r^{*2}}\right] \\ \boldsymbol{B}_s^*(\boldsymbol{x},t)=0 \end{cases} \tag{10.3.8}$$

它(当粒子的加速度为零时)是 Coulomb 场或(当粒子的加速度不为零时)准静态 Coulomb 场,均为纵向纯电场,不能脱离粒子而独立存在.

运动电荷的速度场或自有场是上述纵场的特殊 Lorentz 变换.事实上,由第三章§3.5第三小节式(3.5.53)电磁场场强的特殊 Lorentz 变换公式可知

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_{s/\!/} = \boldsymbol{E}^*_{s/\!/}\,,\ \boldsymbol{E}_{s\perp} = \gamma\left[\boldsymbol{E}^*_{s\perp} - \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}^*_{s\perp}\right] \\ \boldsymbol{B}_{s/\!/} = \boldsymbol{B}^*_{s/\!/}\,,\ \boldsymbol{B}_{s\perp} = \gamma\left[\boldsymbol{B}^*_{s\perp} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}^*_{s\perp}/c^2\right] \end{cases} \tag{10.3.9}$$

因而,在实验室系 Σ 中,运动电荷的自有场平行于粒子速度的分量保持不变:

$$\begin{cases} E_{s/\!/}(\boldsymbol{x},t) = E^*_{s/\!/} = \dfrac{e\cos\theta^*}{4\pi\varepsilon_0 r^{*2}} = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{(1-\beta^2)(\cos\theta-\beta)}{R^2(1-\beta\cos\theta)^3}\right] \\ B_{s/\!/}(\boldsymbol{x},t) = B^*_{s/\!/} = 0 \end{cases} \tag{10.3.10}$$

其垂直于粒子速度的分量则由于粒子运行速度而发生畸变:

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_{s\perp}(\boldsymbol{x},t) = \gamma\boldsymbol{E}^*_{s\perp} = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^{*2}}\gamma\boldsymbol{n}^*_{\perp} = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{(1-\beta^2)}{R^2(1-\beta\cos\theta)^3}\boldsymbol{n}_{\perp}\right] \\ \boldsymbol{B}_{s\perp}(\boldsymbol{x},t) = \dfrac{\gamma}{c^2}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}^*_{s\perp} = \dfrac{\boldsymbol{v}}{c^2}\times\boldsymbol{E}_{s\perp} \end{cases} \tag{10.3.11}$$

合起来,我们便得到粒子自有场的电磁场场强的表达式:

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_s(\boldsymbol{x},t) = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{(1-\beta^2)(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})}{k^3R^2}\right] = \left[\dfrac{e(1-\beta^2)\boldsymbol{n}}{4\pi\varepsilon_0 k^3R^2} - \dfrac{e(1-\beta^2)\boldsymbol{\beta}}{4\pi\varepsilon_0 k^3R^2}\right] \\ \boldsymbol{B}_s(\boldsymbol{x},t) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left[\dfrac{(1-\beta^2)e\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n}}{R^2(1-\beta\cos\theta)^3}\right] = \dfrac{\boldsymbol{n}}{c}\times\boldsymbol{E}_s \end{cases} \tag{10.3.12}$$

由此知,运动电荷的自有电场可分为两部分:第一部分的方向与矢径方向 $\boldsymbol{n}$ 平行,可视为变形的 Coulomb 场,它是各向同性的;第二部分的方向与粒子的速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向平行,它是真正的速度场.粒子的自有磁场则仅与真正的速度电场有关,它是由于自有电场经运动而感生的;但变形 Coulomb 场没有相应的感生磁场.此外,粒子的自有磁场同时与 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 两个矢量都垂直.确定粒子自有磁场的公式可视为 Biot－Savart 定律的一种推广.

习题 10－3

1. 试用特殊 Lorentz 变换决定匀速直线运动的点电荷的电磁场.
2. 试证,不可能通过特殊 Lorentz 变换将运动粒子的加速度变为零.
3. 一点电荷在 $z=0$ 平面上沿以原点为中心的圆周运动.试证 z 轴上任一点的电场强度的 z 分量 E_z 与点电荷的运动无关.E_z 是辐射场在 $\boldsymbol{e}_z$ 方向场强吗?如果不是,它是什么样的场在 $\boldsymbol{e}_z$ 方向场强?

§10.4 运动电荷的辐射场

由式(10.2.12)知运动电荷的辐射场为

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_r = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{\boldsymbol{n}\times[(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}]}{ck^3R}\right] \\ \boldsymbol{B}_r = \left[\dfrac{\boldsymbol{n}}{c}\times\boldsymbol{E}_r\right] \end{cases} \tag{10.4.1}$$

由此易知,运动电荷的辐射电场 $\boldsymbol{E}_r/c$、辐射磁场 $\boldsymbol{B}_r$与辐射方向 $\boldsymbol{n}$ 三者两两相互垂直,成右手螺旋.因而,运动电荷的辐射场是横电磁型的场(即 TEM 波).

TEM 波的能流密度可用下式计算:

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0 c}\boldsymbol{E}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}) = \varepsilon_0 cE^2\boldsymbol{n} \tag{10.4.2}$$

(注意,由于此时不是周期场,不能用前面的时平均表达式.)由此,运动电荷辐射场的能流密度为

$$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x},t) = \frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c}\left[\frac{|\boldsymbol{n}\times[(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}]|^2}{(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^6R^2}\boldsymbol{n}\right] \tag{10.4.3}$$

这是运动粒子在 t'时刻激发的场于推迟时刻 t 经过 $\boldsymbol{x}$ 点时的辐射能流.于是,在 t 至 $t+\mathrm{d}t$ 时间间隔内经 $\boldsymbol{x}$ 点向外辐射的能量为

$$-\mathrm{d}^2W = \boldsymbol{s}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}t = \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}R^2\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t \tag{10.4.4}$$

这能量是粒子在 t'至 $t'+\mathrm{d}t'$时间间隔内发出的.因而,在 $\boldsymbol{x}$ 处于时刻 t 每单位立体角元 $\mathrm{d}\Omega$ 所接受到的辐射功率为

$$\frac{-\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t} = \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}R^2 \tag{10.4.5}$$

此即

$$\frac{-\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t} = \frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c}\left[\frac{|\boldsymbol{n}\times[(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}]|^2}{(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^6}\right] \tag{10.4.6}$$

而粒子在时刻 t'向方向 $\boldsymbol{n}$ 每单位立体角元 $\mathrm{d}\Omega$ 所辐射出去的功率即辐射功率的角分布为

$$f(\theta,\phi) \equiv \frac{-\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t'} = \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}R^2\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} \tag{10.4.7}$$

此即

$$f(\theta,\phi) = \frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c}\frac{|\boldsymbol{n}\times[(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}]|^2}{(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^5} \tag{10.4.8}$$

式中左右两端所出现的量都是在时刻 t' 测量的.

当粒子运动速度不为零时,通常取 $\boldsymbol{\beta}$ 的方向为极轴方向.由(10.4.8)式可知,若粒子运动速度 $\boldsymbol{v}$ 接近光速,因子 $(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^5$ 在 $\theta\approx 0$ 时很小,故辐射能量强烈地集中于朝前方向.进而,当 $v\approx c$、$\theta\approx 0$ 时有

$$1-\beta\cos\theta\approx 1-\beta\left(1-\frac{1}{2}\theta^2\right)\approx\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma^2}+\theta^2\right)$$

于是角分布因子成为

$$\frac{1}{(1-\beta\cos\theta)^5}\approx\frac{32}{\left(\frac{1}{\gamma^2}+\theta^2\right)^5}$$

可见,对于运动速度 $\boldsymbol{v}$ 接近于光速的粒子,不论其加速度方向如何,辐射能量主要集中在沿速度方向的锥角为

$$\Delta\theta=\frac{1}{\gamma}\tag{10.4.9}$$

的射束之内.

粒子在时刻 t' 的辐射总功率为

$$-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t'}=\oint\mathrm{d}\Omega f(\theta,\phi)=\oint\mathrm{d}\Omega\,\frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c}\frac{|\boldsymbol{n}\times[(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}]|^2}{(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^5}\tag{10.4.10}$$

若取粒子运动速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向为 z 轴方向,并设粒子运动加速度 $\dot{\boldsymbol{v}}$ 矢量与 y 轴垂直,将由粒子运动速度 $\boldsymbol{v}$ 与加速度 $\dot{\boldsymbol{v}}$ 所张的平面取为 $x-z$ 平面(图 10.1),则

$$|\boldsymbol{n}\times[(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}]|^2=|(\dot{\boldsymbol{\beta}}\cdot\boldsymbol{e}_z)^2\sin^2\theta+(\dot{\boldsymbol{\beta}}\cdot\boldsymbol{e}_x)^2[(1-\beta\cos\theta)^2-(1-\beta^2)^2\sin^2\theta\cos^2\phi]-2\dot{\boldsymbol{\beta}}\cdot\boldsymbol{e}_z\dot{\boldsymbol{\beta}}\cdot\boldsymbol{e}_x(\cos\theta-\beta)\sin\theta\cos\phi\tag{10.4.11}$$

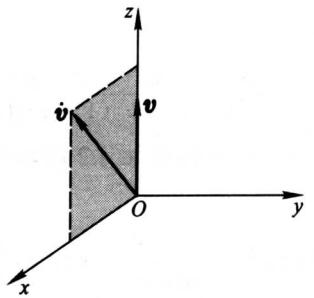


图 10.1　粒子速度与加速度的方向

式中右端第一项是与速度方向平行的加速度分量的贡献,第二项是与速度方向垂直的加速度分量的贡献,第三项则是加速度的这两个分量的干涉项.由于这干

涉项正比于因子 $\cos\phi$，虽对辐射角分布有贡献，但对方位角 ϕ 积分后为零. 于是，粒子辐射总功率是粒子加速度的上述两分量贡献的非相干叠加

$$-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t'}=\frac{e^2(\dot{\boldsymbol{\beta}}\cdot\boldsymbol{e}_z)^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c}\oint\mathrm{d}\Omega\,\frac{\sin^2\theta}{(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^5}+$$

$$\frac{e^2(\dot{\boldsymbol{\beta}}\cdot\boldsymbol{e}_x)^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c}\oint\mathrm{d}\Omega\,\frac{[(1-\beta\cos\theta)^2-(1-\beta^2)^2\sin^2\theta\cos^2\phi]}{(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^5}\tag{10.4.12}$$

完成积分后得

$$-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t'}=\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c}[(\dot{\boldsymbol{\beta}}\cdot\boldsymbol{e}_z)^2\gamma^6+(\dot{\boldsymbol{\beta}}\cdot\boldsymbol{e}_x)^2\gamma^4]=\frac{\gamma^6e^2}{6\pi\varepsilon_0 c}[\dot{\beta}^2-\beta^2|\dot{\boldsymbol{\beta}}\cdot\boldsymbol{e}_x|^2]$$

此即关于运动点电荷辐射功率的 Liénard 公式：

$$-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t'}=\frac{\gamma^6e^2}{6\pi\varepsilon_0 c}[(\dot{\boldsymbol{\beta}})^2-(\boldsymbol{\beta}\times\dot{\boldsymbol{\beta}})^2]\tag{10.4.13}$$

值得指出的是：运动点电荷的辐射功率 $-\mathrm{d}W/\mathrm{d}t'$ 是 Lorentz 不变量. 事实上，按能量守恒，$-\mathrm{d}W$ 应等于运动粒子在 $\mathrm{d}t'$ 时间内因辐射而损失的能量，或者说运动粒子在 $\mathrm{d}t'$ 时间内的能量变化为 $\mathrm{d}W$，相应的粒子动量变化设为 $\mathrm{d}\boldsymbol{P}$，则由相对论粒子运动学知

$$\mathrm{d}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\beta}\frac{\mathrm{d}W}{c}\tag{10.4.14}$$

这与粒子运动的位移与时间的关系

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{\beta}c\,\mathrm{d}t'$$

相似. 粒子的能动量与时空坐标都是四维矢量，在 Lorentz 变换下的变换规律相同. 对于实验室参考系 $\sum$ 与相对于 t' 时的粒子静止的惯性参考系 $\sum^*(t')$，我们有

$$\begin{pmatrix}\mathrm{d}W^*/c\\ \mathrm{d}p_x^*\\ \mathrm{d}p_y^*\\ \mathrm{d}p_z^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma&0&0&-\beta\gamma\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ -\beta\gamma&0&0&\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}W/c\\ \mathrm{d}p_x\\ \mathrm{d}p_y\\ \mathrm{d}p_z\end{pmatrix}\tag{10.4.15}$$

与

$$\begin{pmatrix}c\mathrm{d}t^{*\prime}\\ \mathrm{d}x^{*\prime}\\ \mathrm{d}y^{*\prime}\\ \mathrm{d}z^{*\prime}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma&0&0&-\beta\gamma\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ -\beta\gamma&0&0&\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\mathrm{d}t'\\ \mathrm{d}x'\\ \mathrm{d}y'\\ \mathrm{d}z'\end{pmatrix}\tag{10.4.16}$$

由此得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}W^*}{c}=\gamma\left(\dfrac{\mathrm{d}W}{c}-\beta\mathrm{d}p_z\right)\\ c\mathrm{d}t^{*\prime}=\gamma(c\mathrm{d}t'-\beta\mathrm{d}z')\end{cases}\tag{10.4.17}$$

将上式左右两端分别相除得

$$\frac{\mathrm{d}W^*}{c^2\mathrm{d}t^{*\prime}}=\frac{\mathrm{d}W/c^2\mathrm{d}t'-\beta\mathrm{d}p_z/c\mathrm{d}t'}{1-\beta\mathrm{d}z'/c\mathrm{d}t'}\tag{10.4.18}$$

利用(10.4.14)得

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t'}=\frac{\mathrm{d}W^*}{\mathrm{d}t^{*\prime}}\tag{10.4.19}$$

式中右端定义在一个特定的参考系$\sum^*(t')$中，故粒子的辐射功率$-\mathrm{d}W/\mathrm{d}t'$是Lorentz不变量.

利用粒子的辐射功率$-\mathrm{d}W/\mathrm{d}t'$的Lorentz不变性，可得

$$-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t'}=\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}(\dot{\boldsymbol{v}}^*)^2\tag{10.4.20}$$

式中右端是在惯性系$\sum^*$中测量的粒子的辐射功率$-\mathrm{d}W^*/\mathrm{d}t^{*\prime}$，由于在此参考系中粒子在辐射时刻$t'$的瞬时速度为零，故辐射功率角分布$-\mathrm{d}W^*/\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t^{*\prime}$对空间方位的依赖关系简单，容易将对立体角的积分算出(见下节)．继而，由(10.3.1)中的加速度变换知

$$\dot{v}^*_{/\!/}=\gamma^3\dot{v}_{/\!/},\quad \dot{\boldsymbol{v}}^*_{\perp}=\gamma^2\dot{\boldsymbol{v}}_{\perp}\tag{10.4.21}$$

式中下标//与⊥分别表示与粒子速度平行与垂直的分量．于是

$$\begin{aligned}(\dot{\boldsymbol{v}}^*)^2&=\gamma^6\{(\dot{v}_{/\!/})^2+(1-\beta^2)[(\dot{v})^2-(\dot{v}_{/\!/})^2]\}\\&=\gamma^6c^2[(\dot{\beta})^2(1-\beta^2)+(\boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})^2]\\&=\gamma^6c^2[(\dot{\beta})^2-(\boldsymbol{\beta}\times\dot{\boldsymbol{\beta}})^2]\end{aligned}\tag{10.4.22}$$

式中应用了恒等式

$$(\boldsymbol{\beta}\times\dot{\boldsymbol{\beta}})^2=\beta^2\dot{\beta}^2_{\perp}$$

将式(10.4.22)代入式(10.4.20)即得Liénard公式.

顺便指出：对于粒子的自有场，$-\mathrm{d}W/\mathrm{d}t'=0$．由于量$-\mathrm{d}W/\mathrm{d}t'$的洛伦兹不变性，只需在相对于粒子瞬时静止的惯性系$\sum^*$中进行检验．而在$\sum^*$系中，自有场的能流密度等于零，故所述结论显然成立．可见，粒子自有场的能量不会因为粒子运动(即使是加速运动)而损失.

习题 10－4

1. 电子的速度$\boldsymbol{v}$与加速度$\boldsymbol{a}$的夹角为α．证明在$\boldsymbol{v}$与$\boldsymbol{a}$所张的平面内，与$\boldsymbol{a}$的夹角为θ的方

向上无辐射，θ 由下述方程决定：

$$\sin\theta=\frac{v}{c}\sin\alpha,\qquad \beta=v/c$$

2. 有一质量为 m、电荷为 q 的粒子以速度 $\boldsymbol{v}$ 从一固定电荷 Q 旁边飞过，瞄准距离为 b. 假设运动粒子的动能比粒子的相互作用势能 $qQ/(4\pi\varepsilon_0 r)$ 大得多，以致可认为粒子的速度在整个过程中可视为常量. 试求整个过程总辐射功率的角分布 $\mathrm{d}N/\mathrm{d}\Omega$.

答案： $\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\Omega}=\dfrac{q^4Q^2(1-\beta^2)}{128\pi\varepsilon_0 m^2c^3b^3v(1-\beta n_z)^4}[4-3n_x^2-n_z^2-6\beta n_z+\beta^2(-2+3n_x^2+5n_z^2)+\beta^4(1-n_z^2)]$

这里已设粒子在 $x-z$ 平面内平行于 z 轴运动，即粒子的位矢为 $\boldsymbol{x}'=(b,0,vt')$，且在球坐标系中 $n_x=\sin\theta\cos\phi$，$n_y=\sin\theta\sin\phi$，$n_z=\cos\theta$.

§10.5 低速运动电荷的辐射

若带电粒子的运动速度非常小，$v\ll c$，则由普遍公式(10.2.12)可得其激发的电磁场为

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}=\dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{\boldsymbol{n}}{R^2}+\dfrac{\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\dot{\boldsymbol{\beta}})}{cR}\right]\\ \boldsymbol{B}=\dfrac{\boldsymbol{n}}{c}\times\boldsymbol{E}\end{cases}\tag{10.5.1}$$

式中第一项是不辐射的 Coulomb 场，第二项是电偶极矩为 $\boldsymbol{p}=e\boldsymbol{x}_e(t')$ 的电偶极子的辐射场

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}=\dfrac{e\dot{v}}{4\pi\varepsilon_0c^2R}\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta\\ \boldsymbol{B}=\dfrac{e\dot{v}}{4\pi\varepsilon_0c^3R}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi\end{cases}\tag{10.5.2}$$

式中已取 $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ 的方向为极轴方向. 故低速运动电荷的辐射场亦称为偶极辐射场.

偶极辐射场的角分布可由其场强公式或直接由(10.4.8)式求得

$$f(\theta,\phi)=\frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0c}|[\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\dot{\boldsymbol{\beta}})]|^2=\frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0c}\dot{\boldsymbol{\beta}}^2\sin^2\theta\tag{10.5.3}$$

可见在与粒子加速度方向垂直的平面上辐射最强.

利用

$$\int\mathrm{d}\Omega\sin\theta^2=\frac{8\pi}{3}$$

可将 $f(\theta,\phi)$ 对立体角的积分，结果为

$$-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t'}=\int \mathrm{d}\Omega f(\theta,\phi)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c}\dot{\beta}^2 \tag{10.5.4}$$

这是计算偶极辐射的总功率的 Larmor 公式，它也可直接由 Liénard 公式求得.

这里，我们指出，从上述非相对论的公式出发，也可得到 Liénard 公式. 关键的步骤是寻找使 Larmor 公式保持 Lorentz 不变性的推广. 为此，将 Larmor 公式写成

$$-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t'}=\frac{1}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m^2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t'}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t'} \tag{10.5.5}$$

以此公式为非相对论极限的 Lorentz 不变的表达式显然是

$$-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t'}=-\frac{1}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m^2}\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau'}\cdot\frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}\tau'} \tag{10.5.6}$$

式中，p_μ 是粒子的四维能－动量，而 τ' 则是相应的固有时. 利用以粒子运行速度 $\boldsymbol{v}$ 表出的四维能－动量的表达式，可证明(10.3.1)即是 Liénard 公式.

习题 10－5

1. 电荷为 q 的粒子在 $x-y$ 平面上绕 z 轴作匀速圆周运动，角频率为 ω，半径为 a. 设 $\omega a \ll c$，求能流密度和辐射功率，并讨论 $\theta=0$、$\pi/4$、$\pi/2$ 与 π 处电磁波的偏振.

答案：
$$\boldsymbol{E}=\frac{ea\omega^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R}(\cos\theta\boldsymbol{e}_\theta+\mathrm{i}\boldsymbol{e}_\phi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-\omega R/c-\phi)}$$

$$\boldsymbol{B}=\frac{ea\mu_0\omega^2}{4\pi cR}(-\mathrm{i}\boldsymbol{e}_\theta+\cos\theta\boldsymbol{e}_\phi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-\omega R/c-\phi)}$$

$$\boldsymbol{s}=\frac{e^2a^2\mu_0\omega^2}{32\pi^2cR^2}(1+\cos^2\theta)\boldsymbol{e}_R$$

$\theta=0,\pi$，圆偏振；$\theta=\dfrac{\pi}{4}$，椭圆偏振；$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，线偏振.

2. 两个电子以非相对论速度沿着半径为 a 的圆作匀速圆周运动，角频率为 ω. 设两电子总在同一直径的两端. 试问：

(1) 辐射场的偏振状况和辐射角分布如何？

(2) 若拿走一个电子，则辐射强度如何变化？

(3) 两电子应如何配置才能使电偶极辐射和电四极辐射强度相等？

答案：(1) $\theta=0,\pi$，圆偏振；

$\theta=\pi/2$，线偏振；

其他，椭圆偏振.

$$f(\theta,\phi)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}2e^2a^4\omega^6\pi c^5\sin^2\theta(1+\cos^2\theta)$$

(2) 增大到$(\lambda/a)^2$倍

(3) 需使电子矢径间的夹角为 $\pi-\sqrt{\dfrac{12}{5}}\dfrac{a\omega}{c}$

3. 有两个互相吸引的带电粒子，其质量、电荷分别为 m_1、e_1 和 m_2、e_2. 设这两个带电粒子在闭合轨道上作非相对论运动. 试计算系统的电偶极矩 $\boldsymbol{p}$ 和瞬时辐射功率 $N(t')$.

答案：$\boldsymbol{p}=\dfrac{e_1m_2-e_2m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}$，　$N(t')=\dfrac{e_1^2e_2^2(e_1/m_1-e_2/m_2)^2}{96\pi^3\varepsilon_0^3c^3r^4}$

式中，$\boldsymbol{r}$ 为两粒子的相对坐标矢量，且取质心为原点.

4. 按照经典理论，在氢原子中的电子绕质子作圆周运动时会辐射能量，其轨道半径将逐渐缩小，最后电子便会落到质子上. 设电子运动的轨道半径为 a，且运动是非相对论性的，求其辐射功率，并近似计算电子从第一玻尔轨道半径 a_0 落到位于中心的质子上时所需的时间.

提示：设电子运行的轨道略微向内倾斜，将辐射阻尼力视为微扰.

5. 试证明(10.3.1)即是 Liénard 公式的四维协变形式.

§10.6 韧致辐射与直线加速辐射

高速运动电子轰击金属靶受阻而减速时会放出具有连续谱的 X 射线，这种辐射称为韧致辐射，它是直线减速辐射. 直线加速器中被加速的带电粒子产生的辐射则是直线加速辐射. 这两种情形中，带电粒子的加速度方向都与其速度方向平行，即

$$\boldsymbol{\beta}\times\dot{\boldsymbol{\beta}}=0$$

于是由公式(10.4.1)得其辐射场分布为

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_r=\dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\dot{\boldsymbol{\beta}})}{ck^3R}\right]\\ \boldsymbol{B}_r=\left[\dfrac{\boldsymbol{n}}{c}\times\boldsymbol{E}_r\right]\end{cases}\tag{10.6.1}$$

它与低速带电粒子的加速度场的区别仅在于其多了一个与速度有关的因子

$$\frac{1}{k^3}=\frac{1}{(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n})^3}=\frac{1}{(1-\beta\cos\theta)^3}$$

与低速情形的偶极辐射场(10.5.1)相比，其场强向 θ 角小的方向倾斜.

由公式(10.4.8)可得直线加速带电粒子的辐射角分布为

$$f(\theta,\phi)=\frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0c}\frac{\dot{\beta}^2\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5}\tag{10.6.2}$$

对上式求极值可得辐射最强的方向角为

$$\theta_{\max}=\arccos\left[\frac{1}{3\beta}\left(\sqrt{1+15\beta^2}-1\right)\right]\xrightarrow{v\to c}0\tag{10.6.3}$$

可见角分布与方位角 ϕ 无关，即绕速度轴旋转对称；比偶极辐射多出了一个因子 $(1-\beta\cos\theta)^{-5}$，因而当粒子速度增大时，辐射最强的方向逐渐靠近粒子速度方向，

使得辐射分布向速度方向前倾(见图 10.2).辐射总功率可由 Liénard 公式得到

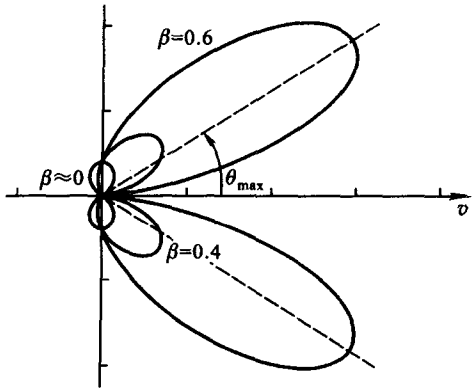


图 10.2　直线加速辐射

$$-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t'}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c}\gamma^6\dot{\beta}^2 \tag{10.6.4}$$

比偶极辐射多出了一个因子 γ^6.但这并不意味着当 $v\to c$ 时,辐射功率趋于无穷.原因在于粒子动质量将随着粒子速度增大而增大,当粒子所受到的外加电场强度一定时,粒子的加速度便随之减小.由相对论动力学方程及 $\boldsymbol{v}\ /\!/\ \dot{\boldsymbol{v}}$ 可得粒子所受到的力为

$$\boldsymbol{F}=e\boldsymbol{E}_{外}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\gamma m\boldsymbol{v}]=m\gamma^3\dot{\boldsymbol{v}} \tag{10.6.5}$$

于是可将(10.6.4)式改写为

$$-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t'}=\frac{e^4E_{外}^2}{6\pi\varepsilon_0 m^2c^3} \tag{10.6.6}$$

可见,若外界作用力或外加电场强度一定时,作直线运动的带电粒子的辐射功率与粒子的速度或能量无关.因而,直线加速器可将带电粒子加速至很高能量.

习题 10－6

1. 有一质量为 m、电荷为 q 的粒子以速度 $\boldsymbol{v}$ 从电荷为 Q 的重粒子旁边飞过,瞄准距离为 b.假设运动粒子的速度很大,以致可以认为基本上不偏离直线运动,其速度大小也基本不变.若粒子的速度仍可认为满足 $v\ll c$,试计算运动粒子因电磁辐射损失的能量 W.

   答案： $W=\dfrac{1}{3(4\pi\varepsilon_0)^3}\dfrac{\pi q^4Q^2}{m^2c^3b^3v}$.

2. 在时间间隔 τ 内,一电荷为 e 的粒子作直线运动,速度从 v_0 减小到零.若假定加速度为常量,求这段时间内粒子辐射能量的角分布.用静止的仪器所测量的脉冲时间 δt 为多少?

答案： $\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Omega}=\dfrac{e^2v_0^2}{16\pi c^3\tau}\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\left[\left(1-\dfrac{v_0}{c}\cos\theta\right)^{-4}-1\right]$

$\delta t=\tau\left[1-\dfrac{v_0}{2c}\cos\theta\right]$，$\theta$ 为速度与辐射方向的夹角.

3. 在一电子直线加速器中，加速电场为 $E_e=10\ \mathrm{MV\cdot m^{-1}}$. 设电子的速度接近于光速，求电子加速运动所辐射的功率与加速电场的输入功率的比值（电子静止质量 $m_0=0.51\ \mathrm{MeV/c^2}$）.

答案： 3.7×10^{-14}.

§10.7 同步辐射

带电粒子作匀速圆周运动会发出电磁辐射，这种电磁辐射于 1948 年在电子同步加速器中首次被观测到，称为同步辐射. 由于 $\boldsymbol{\beta}\perp\dot{\boldsymbol{\beta}}$，取 $\boldsymbol{\beta}$ 方向为 z 轴方向，$\dot{\boldsymbol{\beta}}$ 方向为 x 轴方向. 由公式(10.4.1)得其辐射场分布为

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_r=\dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{\dot{\beta}\sin\theta\cos\phi(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})-(1-\beta\cos\theta)\dot{\boldsymbol{\beta}}}{cR(1-\beta\cos\theta)^3}\right]\\ \boldsymbol{B}_r=\left[\dfrac{\boldsymbol{n}}{c}\times\boldsymbol{E}_r\right]\end{cases}\tag{10.7.1}$$

它不再像直线运动的带电粒子的辐射场那样具有围绕速度方向的旋转不变性.

由公式(10.4.8)可得同步辐射的角分布为

$$f(\theta,\phi)=\frac{e^2\dot{\beta}^2}{16\pi^2\varepsilon_0c(1-\beta\cos\theta)^3}\left[1-\frac{\sin^2\theta\cos^2\phi(1-\beta^2)}{(1-\beta\cos\theta)^2}\right]\tag{10.7.2}$$

在粒子运动轨道平面上即 $\phi=0$ 或 π 时有

$$f(\theta,\phi)_{\phi=0\text{或}\pi}=P_0\frac{(\cos\theta-\beta)^2}{(1-\beta\cos\theta)^5}\tag{10.7.3}$$

式中

$$P_0=\frac{e^2\dot{\beta}^2}{16\pi^2\varepsilon_0c}\tag{10.7.4}$$

由(10.7.3)式知

$$f(\theta,\phi)_{\phi=0\text{或}\pi}=\begin{cases}P_0/(1-\beta)^3\xrightarrow{\beta\to1}\infty, & \text{当 }\theta=0\text{ 时}\\ 0, & \text{当 }\theta=\pm\arccos\beta\text{ 时}\\ \beta^2P_0, & \text{当 }\theta=\pi/2\text{ 时}\\ P_0/(1+\beta)^3, & \text{当 }\theta=\pi\text{ 时}\end{cases}\tag{10.7.5}$$

可见,同步辐射主要集中在以粒子速度方向为中心的张角为 $2\arccos\beta$ 的区域内;粒子速度越接近光速,张角越小,辐射越强(图 10.3).同步辐射的总功率可

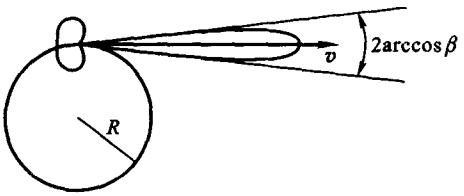


图 10.3　同步辐射

由 Liénard 公式得到

$$-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t'}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c}\gamma^4\dot{\beta}^2 \tag{10.7.6}$$

比偶极辐射多出了一个因子 γ^4.设同步轨道半径为 a,带电粒子能量为 $\mathscr{E}$,则由

$$\mathscr{E}=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad \dot{\beta}=\frac{c\beta^2}{a}$$

得

$$-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t'}=\frac{ce^2\beta^4}{6\pi\varepsilon_0 a^2}\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^4 \tag{10.7.7}$$

因而带电粒子每转一周因辐射而损失的能量为

$$\Delta\mathscr{E}=\frac{2\pi a}{v}\left(\frac{-\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t'}\right)=\frac{e^2\beta^3}{3\varepsilon_0 a}\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^4 \tag{10.7.8}$$

可见,同步辐射总功率与同步辐射损失都与粒子能量的四次方成正比.因而粒子能量越高,同步辐射损失越大.当辐射损失等于加速粒子的力能提供的功率时,带电粒子的能量便不能再提高.故同步加速器所加速的带电粒子有一能量上限.

习题 10－7

1. 一静止质量为 m、电荷为 e 的相对论性粒子,在均匀恒定的磁场 B 中作圆周运动.已知它的动量为 p,求圆的半径 R 和它辐射的总功率 N.

   答案： $R=p/eB$, $N=e^4p^2B^2/(6\pi\varepsilon_0c^3m^4)$.

2. 北京正负电子对撞机 BEPC 中,电子回旋的最高能量为 2.8 GeV.试计算同步辐射的张角 $\Delta\theta$ 以及沿轨道切向单位立体角内所接收到的最大的辐射功率[用电偶极辐射的最大强度 $N_0=e^2\dot{\boldsymbol{v}}^2/(16\pi^2\varepsilon_0c^3)$表出].

   答案： $\Delta\theta=1'15''$; $\mathrm{d}N/\mathrm{d}\Omega|_{\theta=0}=2.0\times10^{23}N_0$.

§10.8 辐射的频谱分析

观察者所接受到的带电粒子加速运动时激发的电磁辐射往往呈脉冲形式.例如,在X射线管内,高速电子碰到金属靶后在很短时间内突然减速而辐射出的是脉冲电磁波:在同步加速器的电子运动轨道平面上某一固定位置,所能观测到的同步辐射也是周期性的扫过该处的很短暂的脉冲.在实际应用中往往需要将辐射脉冲分解为各个频率的分量之和,即进行辐射的频谱分析.

若某物理量(如电流密度、势或电磁场)可表为某一时变实函数 $f(t)$,并设 f_ω 是其频率为 ω 的分量(或 n 次谐波分量):

$$\begin{cases} f_\omega = \int \mathrm{d}t f(t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, & \text{当 } f(t) \text{ 是非周期函数} \\ f_n = \int_0^T \dfrac{\mathrm{d}t}{T} f(t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t}, & \text{当 } f(t) \text{ 是周期为 } T \text{ 的函数} \end{cases} \tag{10.8.1}$$

则由 $f(t)$ 为实函数可知

$$\begin{cases} f_\omega^* = f_{-\omega}, & \text{当 } f(t) \text{是非周期函数} \\ f_n^* = f_{-n}, & \text{当 } f(t) \text{是周期为 } T \text{ 的函数} \end{cases} \tag{10.8.2}$$

而时变函数 $f(t)$ 的频域展开式为

$$\begin{cases} f(t) = \int \dfrac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} f_\omega \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, & \text{当 } f(t) \text{ 是非周期函数} \\ f(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} f_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t}, & \text{当 } f(t) \text{ 是周期为 } T \text{ 的函数} \end{cases} \tag{10.8.3}$$

进而有

$$\begin{cases} \int \mathrm{d}t f^2(t) = 2\int_0^\infty \dfrac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \mid f_\omega \mid^2, & \text{当 } f(t) \text{ 是非周期函数} \\ \dfrac{1}{T}\int \mathrm{d}t f^2(t) = f_0^2 + 2\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mid f_n \mid^2, & \text{当 } f(t) \text{ 是周期为 } T \text{ 的函数} \end{cases} \tag{10.8.4}$$

运动带电粒子的频率为 ω 的势为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_\omega(\boldsymbol{x}) &= \int_V \mathrm{d}t \frac{e\mu_0}{4\pi}\left[\frac{\boldsymbol{v}(t')}{kR}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \\ &= \int_V \mathrm{d}t' \frac{\partial t}{\partial t'} \frac{e\mu_0}{4\pi}\left[\frac{\boldsymbol{v}(t')}{kR}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t'+R/c)} \\ &= e\mu_0 \int \mathrm{d}t' \boldsymbol{v}(t') \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t'} \end{aligned} \tag{10.8.5}$$

若带电粒子在小区域 V 内运动,而观测点远离该区域,且坐标原点选在 V 内,

则

$$R = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_e| r - \boldsymbol{x}_e \cdot (\nabla_{x_e} R)_{x_e=0} + \cdots$$
$$= r - \boldsymbol{x}_e \cdot \boldsymbol{n}_r + O(1/r) \tag{10.8.6}$$

注意:此处 $\boldsymbol{n}_r = \boldsymbol{x}/r$,只与观测点有关,与粒子的位置无关(这与 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_R = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_e)/|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_e|$不同),为了简捷起见,仍将 $\boldsymbol{n}_r$ 记为 $\boldsymbol{n}$;而 $O(1/r)$表示 $1/r$ 以上的高阶项.于是积分(10.8.5)右端被积式中与 R 有关的因子即单色 Green 函数可化为

$$\frac{e^{ikR}}{R} = \frac{e^{ikr}}{r} e^{-ik\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}_e/c} + O(1/r^2) \tag{10.8.7}$$

式中仅保留正比于 $1/r$ 的项,因为只有它对辐射有贡献,$O(1/r^2)$项对辐射没有贡献.因而,运动带电粒子辐射势的频率为 ω 的分量为

$$\boldsymbol{A}_\omega(\boldsymbol{x}) = \frac{e\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int dt' \boldsymbol{v}(t') e^{i\omega(t' - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}_e/c)} \tag{10.8.8}$$

相应的电磁场为

$$\begin{cases} \boldsymbol{B}_\omega(\boldsymbol{x}) = i\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{A}_\omega(\boldsymbol{x}) \\ \qquad = \dfrac{ie\mu_0\omega}{4\pi c} \dfrac{e^{ikr}}{r} \displaystyle\int dt' \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v}(t') e^{i\omega(t' - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}_e/c)} \\ \boldsymbol{E}_\omega(\boldsymbol{x}) = -c\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{B}_\omega(\boldsymbol{x}) \\ \qquad = -\dfrac{ie\mu_0\omega}{4\pi} \dfrac{e^{ikr}}{r} \displaystyle\int dt' \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v}(t')) e^{i\omega(t' - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}_e/c)} \end{cases} \tag{10.8.9}$$

利用

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt'} \exp\left[i\omega \left(t' - \dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}_e'}{c} \right) \right] = i\omega(1 - \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n}) e^{i\omega\left(t' - \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}_e}{c}\right)} \\ \dfrac{d}{dt'} \left\{ \dfrac{\boldsymbol{n} \times [\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v}(t')]}{1 - \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n}} \right\} = \dfrac{\boldsymbol{n} \times [(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{v}}]}{(1 - \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n})^2} \end{cases} \tag{10.8.10}$$

式(10.8.9)经分部积分可变为

$$\boldsymbol{E}_\omega(\boldsymbol{x}) = \frac{e\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int dt' \frac{\boldsymbol{n} \times [(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{v}}]}{(1 - \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n})^2} e^{i\omega(t' - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}_e/c)} \tag{10.8.11}$$

将积分变量 t' 变为 t,利用

$$t = t' + \frac{R}{c} = t' + \frac{r - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}_e}{c} + O(1/r)$$

并略去对辐射无贡献的 $O(1/r)$项,得

$$\boldsymbol{E}_\omega(\boldsymbol{x}) = \int dt e^{i\omega t} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) \tag{10.8.12}$$

式中

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{\boldsymbol{n}\times[(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n})^3 r} \tag{10.8.13}$$

值得注意的是,上式与用 Liénard－Wiechert 势导出的辐射场的表达式形式一致;但此式中的 $\boldsymbol{n}$ 与 r 都只与观测点的矢径相关,这与用 Liénard－Wiechert 势导出的表达式中的相应量的意义不同,这是因为(10.8.13)中已去掉了由于带电粒子运动的局域性所导致的一部分非辐射电磁场的缘故.

局域运动的带电粒子所辐射能量的角分布为

$$-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Omega}=\int \mathrm{d}t\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}r^2=\varepsilon_0 cr^2\int \mathrm{d}t|\boldsymbol{E}(t)|^2=2\varepsilon_0 cr^2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}|\boldsymbol{E}_\omega|^2 \tag{10.8.14}$$

因而在频率为 ω 处单位频率间隔内辐射能量的角分布为

$$-\frac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\omega}=\frac{\varepsilon_0 cr^2}{\pi}|\boldsymbol{E}_\omega|^2 \tag{10.8.15}$$

对立体角积分可得频率为 ω 处单位频率间隔内辐射的能量为

$$-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\omega}=\frac{\varepsilon_0 c}{\pi}\oint r^2\mathrm{d}\Omega|\boldsymbol{E}_\omega|^2 \tag{10.8.16}$$

假如带电粒子在一个闭合轨道上作周期运动,则应将势与场按(10.8.1)第二式展为 Fourier 级数.该运动电荷平均辐射功率的角分布为

$$\begin{aligned}-\frac{\mathrm{d}^2\langle W\rangle}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega}&=\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}r^2=\frac{c}{\mu_0}r^2\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t|\boldsymbol{B}(t)|^2\\&=\frac{c}{\mu_0}r^2\left\{|\boldsymbol{B}_0|^2+2\sum_n|\boldsymbol{B}_n|^2\right\}\end{aligned} \tag{10.8.17}$$

因而 n 次谐波平均辐射功率的角分布为

$$\frac{-\mathrm{d}^2\langle W_n\rangle}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega}=\frac{2c}{\mu_0}r^2|\boldsymbol{B}_n|^2,\qquad n\geqslant 1 \tag{10.8.18}$$

对立体角积分可得 n 次谐波平均辐射功率为

$$-\frac{\mathrm{d}\langle W_n\rangle}{\mathrm{d}t}=\frac{2c}{\mu_0}\oint r^2\Omega|\boldsymbol{B}_n|^2,\qquad n\geqslant 1 \tag{10.8.19}$$

§10.9 低速韧致辐射频谱

带电粒子入射到物质靶上与靶中的电子和原子核碰撞,因速度减小而产生辐射(韧致辐射).若粒子速度很小即 $v\ll c$,则在很短的减速时间 τ 内,$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}_e\sim\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}\Delta t$ 与 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}/c$ 均可忽略.于是由式(10.8.11)得

$$\boldsymbol{E}_\omega(\boldsymbol{x})=\frac{e\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\int \mathrm{d}t'\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\dot{\boldsymbol{v}})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t'} \tag{10.9.1}$$

假设粒子在很短的时间 τ 内减速，则上式的积分区域为 $\Delta t' \sim \tau$. 当 $\omega \ll 1/\tau$ 时，积分中的相位 $\omega t'$ 可视为零. 故

$$\boldsymbol{E}_\omega(\boldsymbol{x}) = \frac{e\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\Delta\boldsymbol{v}), \qquad \text{当 } \omega\tau \ll 1 \text{ 时} \tag{10.9.2}$$

式中 $\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1$ 是粒子在时间 τ 内的改变量. 当 $\omega \gg 1/\tau$ 时，积分中的相因子 $\exp(\mathrm{i}\omega t')$ 迅速振荡，积分值近似为零. 故

$$\boldsymbol{E}_\omega(\boldsymbol{x}) \approx 0, \qquad \text{当 } \omega\tau \gg 1 \text{ 时} \tag{10.9.3}$$

于是，由式(10.8.15)得在频率 ω 处单位频率间隔内辐射能量的角分布为

$$\frac{-\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\omega} = \begin{cases} \dfrac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}(\Delta v)^2\sin^2\theta, & \text{当 } \omega\tau \ll 1 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } \omega\tau \gg 1 \text{ 时} \end{cases} \tag{10.9.4}$$

式中 θ 是 $\boldsymbol{n}$ 与 $\Delta\boldsymbol{v}$ 的夹角. 而在频率 ω 处单位频率间隔内的辐射能量为

$$\frac{-\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\omega} = \begin{cases} \dfrac{e^2}{6\pi^2\varepsilon_0 c}\left(\dfrac{\Delta v}{c}\right)^2, & \text{当 } \omega\tau \ll 1 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } \omega\tau \gg 1 \text{ 时} \end{cases} \tag{10.9.5}$$

或写成

$$\frac{-\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{-\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\omega}\left|\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\lambda}\right| = \begin{cases} \dfrac{e^2}{3\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{\Delta v}{c}\right)^2\dfrac{1}{\lambda^2}, & \text{当 } \lambda \gg c\tau \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } \lambda \ll c\tau \text{ 时} \end{cases} \tag{10.9.6}$$

利用光量子的概念(即一个频率为 ω 的光子的能量为 $\hbar\omega$)可知

$$\frac{-\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\omega}\mathrm{d}\omega = \hbar\omega N(\omega)\mathrm{d}\omega$$

式中 $N(\omega)$ 是光子数分布函数. 由此，式(10.9.5)可改写为

$$N(\omega)\mathrm{d}\omega = \frac{2\alpha}{3\pi}\left(\frac{\Delta v}{c}\right)^2\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega} \tag{10.9.7}$$

式中

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137.035\,982} \tag{10.9.8}$$

是电磁相互作用耦合常数或精细结构常数. 由此可见，低能光子数目与光子能量成反比；当光子能量 $\hbar\omega \to 0$ 时，$N(\omega) \to \infty$，但总辐射能量则有限. 当频率较低或波长较长时，过程涉及大量光子，电磁场的量子性不显著，辐射能量按波长的分布与经典公式(10.9.6)相符；但当频率很高时，过程仅涉及少数光子，电磁场的量子性很显著，经典理论不适用. 例如，在短波波长范围，X 射线连续谱有一个截止频率 ω_c，它只能由量子理论决定：

$$\hbar\omega_c = \mathscr{E}_{\mathrm{ke}}$$

式中 $\mathscr{E}_{\mathrm{ke}}$ 是电子的动能.

习题 10-9

一个作非相对论直线运动的粒子从速度 v_0 减速运动到速度为 0，其速度的变化为

$$v=\begin{cases} v_0, & t\leqslant 0 \\ v_0-a_0 t, & 0\leqslant t\leqslant v_0/a_0 \\ 0, & t\geqslant v_0/a_0 \end{cases}$$

(1) 求带电粒子辐射的电磁场的能量；

(2) 求远处辐射场的频谱分布；

(3) 如 $v_0\ll c$ 不成立，求辐射场的 Poynting 矢量.

答案：

(1) $W\approx\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2e^2a_0v_0}{3c^3}$

(2) $I(\omega)=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{4e^2}{3c^3}\dfrac{a^2}{\omega^2}\left[1-\cos(\omega v_0/a_0)\right]$

(3) $\boldsymbol{s}=\dfrac{e^2a_0^2}{16\pi^2\varepsilon_0c^3R^2}\dfrac{\sin^2\theta}{\left(1-\dfrac{v}{c}\cos\theta\right)^6}\boldsymbol{n}$

§10.10 同步辐射频谱

设一带电粒子作匀速圆周运动，运动周期为 $T=2\pi/\omega_0=2\pi a/v$. 在定量计算之前，估计一下辐射的频谱宽度或频率的上限(截止频率 ω_c). 当 $\beta\to1$ 时，同步脉冲的张角 $\Delta\theta\sim\arccos\beta$ 很小. 换言之

$$\cos\Delta\theta\sim\beta\to1,\ \sin\Delta\theta\sim\sqrt{1-\beta^2}=1/\gamma\to0 \tag{10.10.1}$$

故有

$$\begin{cases} \Delta t'=\dfrac{\Delta\theta}{\Delta\theta/\Delta t'}=\dfrac{\Delta\theta}{\omega_0}\sim\dfrac{\sin\Delta\theta}{\omega_0}=\dfrac{1}{\omega_0\gamma} \\ \dfrac{\partial t}{\partial t'}=1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n}=1-\beta\cos\Delta\theta\sim\gamma^{-2} \end{cases}$$

于是所接受到的同步脉冲的脉冲宽度 Δt 为

$$\Delta t=\Delta t'\frac{\partial t}{\partial t'}\sim\frac{1}{\omega_0\gamma^3} \tag{10.10.2}$$

由量子力学中的能量时间的测不准关系 $\hbar\omega_c\Delta t\sim\hbar$ 得

$$\omega_c=\frac{1}{\Delta t}=\omega_0\gamma^3\xrightarrow{\beta\to1}\infty \tag{10.10.3}$$

可见高能带电粒子的同步辐射频谱很宽.

下面进行定量计算. 由于运动是周期性的，按 Fourier 级数展开，矢势的频率

为 $\omega_n = n\omega_0$ 的分量是

$$\boldsymbol{A}_n(\boldsymbol{x}) = \frac{e\mu_0}{4\pi T}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\oint \mathrm{d}\boldsymbol{x}_e \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\omega_0 t' - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_e)} \tag{10.10.4}$$

设粒子轨道位于 $z=0$ 平面上，粒子方位角为 $\phi_e = \omega_0 t'$；不失普遍性，可设辐射方向 $\boldsymbol{n}$ 位于 $x=0$ 平面上(因为 $\boldsymbol{A}_n$ 与方位角 ϕ 无关)．则

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_e = a(\cos\phi_e, \sin\phi_e, 0) \\ \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_e = ka\sin\theta\cos\phi_e = n\beta\sin\theta\sin\phi_e \end{cases} \tag{10.10.5}$$

式中应用了

$$k = \frac{n\omega_0}{c} = \frac{n\beta}{a} \tag{10.10.6}$$

利用这些关系，可将(10.10.4)式写成(利用 $a/T = v/2\pi$)

$$\begin{cases} A_{xn} = -\dfrac{ev\mu_0}{8\pi^2}\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi_e \sin\phi_e \mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\phi_e - \beta\sin\theta\sin\phi_e)} \\ A_{yn} = \dfrac{ev\mu_0}{8\pi^2}\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi_e \cos\phi_e \mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\phi_e - \beta\sin\theta\sin\phi_e)} \\ A_{zn} = 0 \end{cases} \tag{10.10.7}$$

式中 A_{ym} 右端出现了下述类型的积分：

$$I_x(\varepsilon) = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi \sin\phi \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\phi - \varepsilon\sin\phi)}$$

$$I_y(\varepsilon) = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi \cos\phi \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\phi - \varepsilon\sin\phi)}$$

将 $\cos\phi$ 写成两项之和：

$$\left(\cos\phi - \frac{n}{\varepsilon}\right) + \frac{n}{\varepsilon}$$

第一项对 I_y 的贡献为零，故

$$\begin{aligned} I_y(\varepsilon) &= \frac{n}{\varepsilon}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi \exp[\mathrm{i}(n\phi - \varepsilon\sin\phi)] \\ &= \frac{2n}{\varepsilon}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\phi \cos(n\phi - \varepsilon\sin\phi) \frac{2n\pi}{\varepsilon}\mathrm{J}_n(\varepsilon) \end{aligned} \tag{10.10.8}$$

继而可得

$$I_x(\varepsilon) = \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{n}I_y\right) = 2\pi\mathrm{i}\mathrm{J}'_n(\varepsilon) \tag{10.10.9}$$

式中 $\mathrm{J}_n(\varepsilon)$ 与 $\mathrm{J}'_n(\varepsilon)$ 是整数 n 阶 Bessel 函数及其导数．利用上述积分公式可得

$$\begin{cases} A_{xn} = -\dfrac{\mathrm{i}ev\mu_0}{4\pi}\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{J}'_n(n\beta\sin\theta) \\ A_{yn} = \dfrac{ce\mu_0}{4\pi\sin\theta}\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{J}_n(n\beta\sin\theta) \\ A_{zn} = 0 \end{cases} \tag{10.10.10}$$

n 次谐波同步辐射平均射功率的角分布为

$$\frac{-\mathrm{d}^2\langle W_n\rangle}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega}=\frac{2c}{\mu_0}|\mathrm{i}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{A}_n|^2=r^2\frac{2cr^2}{\mu_0}\left[A_{xn}^2k^2+A_{ym}^2\cos^2\theta\right]$$

$$=\frac{e^2n^2\omega_0^2}{8\pi^2\varepsilon_0c}\left[\beta^2\mathrm{J}_n'^2(n\beta\sin\theta)+\cot^2\theta\mathrm{J}_n^2(n\beta\sin\theta)\right] \tag{10.10.11}$$

对 Ω 积分不能以有限形式进行.利用 Bessel 函数满足的方程可得

$$\mathrm{J}_n'^2(y)=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}+\frac{\mathrm{d}}{y\mathrm{d}y}\right)+\left(1-\frac{n^2}{y^2}\right)\right]\mathrm{J}_n^2(y) \tag{10.10.12}$$

因而(10.10.11)可化为

$$\frac{-\mathrm{d}\langle W_n\rangle}{\mathrm{d}t}=\frac{e^2n^2\omega_0^2}{4\pi\varepsilon_0c}\left[2\beta^2I_1-(1-\beta^2)I_2\right] \tag{10.10.13}$$

式中

$$\begin{cases}I_1=\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^\pi\mathrm{d}\theta\sin\theta\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}+\frac{\mathrm{d}}{y\mathrm{d}y}\right)\mathrm{J}_n^2(y)\\ I_2=\displaystyle\int_0^\pi\mathrm{d}\theta\sin\theta\,\mathrm{J}_n^2(y),\ y=\beta n\sin\theta\end{cases} \tag{10.10.14}$$

利用整数阶 Bessel 函数的级数展开式与

$$\mathrm{J}_n^2(y)=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{(2n+2i)!\ y^{2(n+i)}}{i!\ 2^{2(n+i)}(2n+i)!\ [(n+i)!]^2} \tag{10.10.15}$$

及积分公式

$$\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\sin^{2m+1}\theta=\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!} \tag{10.10.16}$$

容易通过直接计算证得

$$I_1=\frac{1}{n\beta}\mathrm{J}_{2n}'(2n\beta),\quad I_2=\frac{1}{n\beta}\int_0^{2n\beta}\mathrm{d}\xi\mathrm{J}_{2n}(\xi) \tag{10.10.17}$$

故 n 次谐波的平均辐射功率可写成下述形式:

$$\frac{-\mathrm{d}\langle W_n\rangle}{\mathrm{d}t}=\frac{e^2n\omega_0^2}{4\pi\varepsilon_0c}\left[2\beta\mathrm{J}_{2n}'(2n\beta)-2n(1-\beta^2)\int_0^1\mathrm{d}\xi\mathrm{J}_{2n}(2n\beta\xi)\right] \tag{10.10.18}$$

其辐射频谱如图 10.4 所示.

当 $\beta\ll1$ 时,

$$\frac{-\mathrm{d}\langle W_n\rangle}{\mathrm{d}t}\approx\beta^{2(n-1)}\left[\frac{-\mathrm{d}\langle W_1\rangle}{\mathrm{d}t}\right]=\beta^{2(n-1)}\left(\frac{e^2v^4}{6\pi\varepsilon_0c^3a^2}\right) \tag{10.10.19}$$

因而高次谐波成分与基波成分相比可以忽略,所接受到的主要是频率为 ω_0 的辐射波

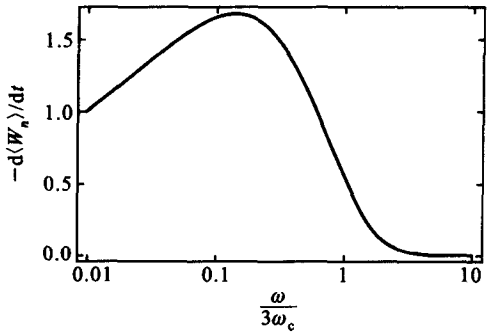


图 10.4　同步辐射谱

（注：图中已将 $\mathrm{d}\langle W_n\rangle/\mathrm{d}t$ 在 $\frac{\omega}{3\omega_c}=0.01$ 处归一）

$$\frac{-\mathrm{d}\langle W_1\rangle}{\mathrm{d}t}=\frac{e^2v^4}{6\pi\varepsilon_0c^3a^2} \tag{10.10.20}$$

这与偶极辐射的公式相合.

当 $\beta\approx1$ 时，利用大 n 时 Bessel 函数 $\mathrm{J}_{2n}(2n\xi)$ 的渐近展开式

$$\mathrm{J}_{2n}(2n\xi)\approx\frac{1}{n^{1/3}\sqrt{\pi}}\Phi[2n^{2/3}(1-\xi)]$$

式中

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \mathrm{d}t\ \cos\left(\frac{t^3}{3}+xt\right) \tag{10.10.21}$$

是 Airy 积分，可得

$$\frac{-\mathrm{d}\langle W_n\rangle}{\mathrm{d}t}=-\frac{e^2n^{1/3}\omega_0^2}{4\pi^{3/2}\varepsilon_0c}\left[2\Phi'(u)+u\int_u^\infty \mathrm{d}u\Phi(u)\right] \tag{10.10.22}$$

式中

$$u=n^{2/3}(1-\beta^2) \tag{10.10.23}$$

当 $u\ll1$ 时，利用 $\Phi'(0)=-0.458\,7\cdots$ 得

$$\frac{-\mathrm{d}\langle W_n\rangle}{\mathrm{d}t}=-\frac{e^2n^{1/3}\omega_0^2}{4\pi^{3/2}\varepsilon_0c}2\Phi'(0)\approx0.52\frac{e^2\omega_0^2n^{1/3}}{4\pi\varepsilon_0c},\quad \text{当 } 1\ll n\ll(1-\beta^2)^{-3/2} \tag{10.10.24}$$

当 $u\gg1$ 时，利用 Airy 积分当 x 为很大正数时的渐近式

$$\Phi(x)\approx\frac{1}{2x^{1/4}}\mathrm{e}^{-2x^{3/2}/3},\quad x>0\text{ 且很大} \tag{10.10.25}$$

得

$$\frac{-\mathrm{d}\langle W_n\rangle}{\mathrm{d}t}\approx\frac{e^2\omega_0^2n^{1/2}(1-\beta^2)^{1/4}}{8\pi^{3/2}\varepsilon_0c}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}n(1-\beta^2)^{3/2}},\quad \text{当 } n\gg(1-\beta^2)^{-3/2}$$

可见，当 $1 \ll n \ll (1-\beta^2)^{-3/2}$ 时，n 次谐波辐射功率与 $n^{1/3}$ 成正比；而当 $n \gg (1-\beta^2)^{-3/2}$ 时，辐射功率按指数规律下降；且辐射的主要部分集中在近似截止频率 ω_c

$$\omega_c = \frac{3}{2}\omega_0 (1-\beta^2)^{-3/2} \gg \omega_0 \tag{10.10.26}$$

之内，由于这些辐射频率比它们的间距 ω_0 大得多，故高能带电粒子的同步辐射谱是近似连续的.

习题 10－10

1. 设能量为 10 GeV 的电子沿半径为 100 m 的圆周作回旋运动. 问所接收到的同步辐射的频率上限 ω_c 近似为多少？

   答案：$\omega_c = 3.4 \times 10^{19}$ Hz.

2. 一接近光速的电荷 e 沿半径为 a 的圆轨道运动. 求辐射场的频谱分量.

§ 10.11 Cherenkov 辐射

在真空中，带电粒子产生辐射的条件是其加速度必须不为零. 然而在介质中，即使带电粒子作匀速直线运动，只要其运动速度的大小超过介质中的光速，也会产生电磁辐射，称为 Cherenkov 辐射(P. A. Cherenkov1943 年观察到超光速电子通过液体时会产生辐射).

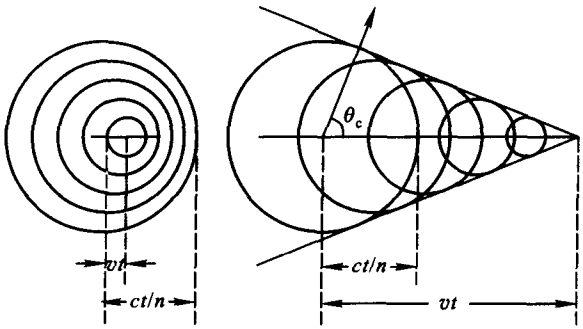
带电粒子通过介质时，会沿其路径上各点依次激发出球面次波($\sim e^{ikr}/r$). 这些次波以相同的相速度 $v_p = c/n$ 向四周传播(n 为介质的折射率). 如果粒子运动速度 v 小于或等于 v_p，则各球面次波不可能相遇，因而不可能相互干涉，只能是一个个能流密度逐渐衰减的孤立的球面波，故不可能形成辐射[见图 10.5(a)]. 但若 $v > v_p$，则所有次波必将相互叠加(即相互干涉)，在粒子后面形成一个锥形波阵面[见图 10.5(b)]. 这一锥形波阵面的法线方向便是 Cherenkov 辐射的方向，它与粒子运动方向的夹角 θ_c 满足

$$\cos\theta_c = \frac{c/n}{v} = \frac{1}{n\beta} \quad 或 \quad \theta_c = \arccos\frac{1}{n\beta} \tag{10.11.1}$$

由此可知，Cherenkov 辐射是以速度 $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_z$ 作匀速直线运动(即 $\boldsymbol{x}_e = vt'\boldsymbol{e}_z$)的带电粒子，或等价地，是下述传导电荷与电流密度：

$$\begin{cases} \rho(\boldsymbol{x}', t') = e\delta(x')\delta(y')\delta(z' - vt') \\ \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}', t') = ev\boldsymbol{e}_z\delta(x')\delta(y')\delta(z' - vt') \end{cases} \tag{10.11.2}$$

在介质中产生的束缚电荷与诱导电流所激发的次波的集体效应(相干效应). 而介质内束缚电荷与诱导电流的宏观效应体现在介电常量 ε 与磁导率 μ_0 中(在通



(a)　　(b)

图 10.5　介质中匀速直线运动电荷的场

(a) $v<c/n$;(b) $v>c/n$

常情形下 $\mu\approx\mu_0$).因而在介质中运动电荷产生的场仍可用推迟势描述,只是需要作下述代换

$$\varepsilon_0\to\varepsilon,\quad c\to c/n \tag{10.11.3}$$

于是,由(10.8.8)得带电粒子辐射矢势的频率为 ω 的分量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_\omega(\boldsymbol{x})&=\frac{e\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\int \mathrm{d}t'v\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t'-n\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}_e/c)}\boldsymbol{e}_z\\&=\frac{e\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\int \mathrm{d}z_e\exp\left[\mathrm{i}\omega\left(\frac{1}{v}-\frac{n}{c}\cos\theta\right)z_e\right]\boldsymbol{e}_z\end{aligned} \tag{10.11.4}$$

式中 $k=n\omega/c$ 是介质中的波数,而辐射方向 $\boldsymbol{n}$ 与速度方向 $\boldsymbol{e}_z$ 的夹角为 θ.由

$$\boldsymbol{B}_\omega=\mathrm{i}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{A}_\omega,\quad \boldsymbol{E}_\omega=\frac{c}{n}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{n} \tag{10.11.5}$$

可得 Cherenkov 辐射场的频率为 ω 的场强为

$$\begin{cases}\boldsymbol{B}_\omega=-\dfrac{\mathrm{i}\omega ne\mu_0}{4\pi c}\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\sin\theta\displaystyle\int \mathrm{d}z_e\exp\left[\mathrm{i}\omega\left(\frac{1}{v}-\frac{n}{c}\cos\theta\right)z_e\right]\boldsymbol{e}_\phi\\ \boldsymbol{E}_\omega=-\dfrac{\mathrm{i}\omega e\mu_0}{4\pi}\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\sin\theta\displaystyle\int \mathrm{d}z_e\exp\left[\mathrm{i}\omega\left(\frac{1}{v}-\frac{n}{c}\cos\theta\right)z_e\right]\boldsymbol{e}_\theta\end{cases} \tag{10.11.6}$$

于是,频率为 ω 处单位频率间隔的辐射能量的角分布为

$$\begin{aligned}\frac{-\mathrm{d}^2\boldsymbol{W}}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\omega}&=\frac{cr^2}{n\mu_0}|\boldsymbol{B}_\omega|^2\\&=\frac{ne^2\omega^2\mu_0}{16\pi^3c}\sin^2\theta\left|\int \mathrm{d}z_e\exp\left[\mathrm{i}\omega\left(\frac{1}{v}-\frac{n}{c}\cos\theta\right)z_e\right]\right|^2\end{aligned} \tag{10.11.7}$$

由

$$\int_{-L}^{L} \mathrm{d}z_e \exp\left[\mathrm{i}\omega\left(\frac{1}{v}-\frac{n}{c}\cos\theta\right)z_e\right] \xrightarrow{L\to\infty} 2\pi\delta\left(\frac{\omega}{v}-\frac{n\omega\cos\theta}{c}\right) \tag{10.11.8}$$

可知，在 $\theta=\theta_c=\arccos(1/n\beta)$ 方向出现辐射场，且这时必有

$$\cos\theta_c=\frac{c}{nv}<1 \quad 或 \quad v>\frac{c}{n}$$

注意：上式中的不等号改为等号的可能性是应当排除的，否则便有 $\theta_c=\pi/2$，等相位面总与 z 轴重合，即等相位面不传播，不可能有辐射场.

对于 L 很大但有限时，利用

$$\left|\int_{-L}^{L} \mathrm{d}z_e \exp\left[\mathrm{i}\omega\left(\frac{1}{v}-\frac{n}{c}\cos\theta\right)z_e\right]\right|^2 \approx 2\pi\delta\left(\frac{\omega}{v}-\frac{n\omega\cos\theta}{c}\right)\int_{-L}^{L}\mathrm{d}z_e \tag{10.11.9}$$

得

$$\begin{aligned}\frac{-\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\omega}&=\frac{ne^2\omega^2\mu_0}{8\pi^2c}\sin^2\theta\,\delta\left(\frac{\omega}{v}-\frac{n\omega\cos\theta}{c}\right)\int_{-L}^{L}\mathrm{d}z_e\\&=\frac{ne^2\omega^2\mu_0}{8\pi^2c}\left(1-\frac{1}{n^2\beta^2}\right)\delta\left(\frac{\omega}{v}-\frac{n\omega\cos\theta}{c}\right)\int_{-L}^{L}\mathrm{d}z_e\end{aligned} \tag{10.11.10}$$

这说明：粒子走过单位路程时频率为 ω 的辐射场单位频率间隔的辐射能量角分布为

$$\frac{-\mathrm{d}^3W}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\omega\mathrm{d}L}=\frac{ne^2\omega^2\mu_0}{8\pi^2c}\left(1-\frac{1}{n^2\beta^2}\right)\delta\left(\frac{\omega}{v}-\frac{n\omega\cos\theta}{c}\right) \tag{10.11.11}$$

从而，粒子每单位路程每单位频率间隔的辐射能量为

$$\begin{aligned}\frac{-\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}\omega\mathrm{d}L}&=\frac{ne^2\omega^2\mu_0}{8\pi^2c}\left(1-\frac{1}{n^2\beta^2}\right)\oint\mathrm{d}\Omega\,\delta\left(\frac{\omega}{v}-\frac{n\omega\cos\theta}{c}\right)\\&=\frac{e^2\mu_0\omega}{4\pi}\left(1-\frac{1}{\beta^2n^2}\right)_{v>c/n}\end{aligned} \tag{10.11.12}$$

或表为粒子每单位路程每单位频率间隔的辐射的光子数

$$\frac{\mathrm{d}^2N}{\mathrm{d}\omega\mathrm{d}L}=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c^2}\left(1-\frac{1}{\beta^2n^2}\right)_{v>c/n}=\frac{\alpha}{c}\left(1-\frac{1}{\beta^2n^2}\right)_{v>c/n} \tag{10.11.13}$$

式中折射率 $n=\sqrt{\varepsilon_r(\omega)}$ 是频率 ω 的函数，而 α 是精细结构常数.

当带电粒子以速度 $v>c/n$ 通过介质时，在 θ_c 方向发射光子，测量辐射方向角 θ_c 便可确定粒子的速度. 根据这一原理，可做成 Cherenkov 辐射探测器，其优点在于避免了低速粒子的干扰，因为它只记录速度大于 c/n 的粒子.

习题 10－11

1. 一电荷以恒定速度 v 穿过某种物质，该物质的相对介电常量为 $\varepsilon=1+\omega_p^2/(\omega_p^2-\omega^2)$

($\omega_p = 15$ Hz). 试问该电荷在单位距离上 Cherenkov 辐射的能量为多大? 辐射集中在多大的角度范围内?

2. 电偶极子 $\boldsymbol{p}$ 在介电常量为 $\varepsilon(\omega)$ 的介质中作匀速直线运动,其速度大于 c/n,运动方向沿着电偶极矩的指向. 试求电偶极子的 Cherenkov 辐射的能量.

提示:先求单个电荷的情形,再过渡到电偶极子的情形.

第十一章　电磁场对带电粒子的作用

本章研究电磁场对带电粒子的反作用.首先探讨粒子的自有场与辐射场所引起的物理效应(电磁质量与辐射阻尼),指明经典电动力学的适用范围;继而分析外来电磁场和粒子产生的电磁场对带电粒子的作用,并由此而讨论宏观介质的色散、双折射与磁致旋光现象.

§11.1　电磁质量

当带电粒子作匀速运动时，不仅带电粒子本身具有能量与动量，随粒子而运动的自有场也具有能量与动量．由于带电粒子及其自有场两者不可分割地联系在一起，它们各自的能量与动量也不可能截然分开，而必须作为一个整体来对待．因而在测量带电粒子的能量与动量时，必须计及粒子的自有场的贡献．

作匀速直线运动的带电粒子的电磁场为

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}=\dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{(1-\beta^2)(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})}{k^3R^2} \\ \boldsymbol{B}=\dfrac{\boldsymbol{n}}{c}\times\boldsymbol{E}=\dfrac{\boldsymbol{\beta}}{c}\times\boldsymbol{E} \end{cases} \tag{11.1.1}$$

式中第二式的第二个等号之所以成立，是因为此时有

$$(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\boldsymbol{E}=0 \tag{11.1.2}$$

方程(11.1.1)右端的量是在激发时刻 $t'=t-R/c$ 取值的，现在我们需要将方程右边的量全部转换为在观测时刻 t 取值．为此，考虑由在时刻 t 观测电磁场的空间位置 $\boldsymbol{x}=P$、这一被观测的电磁场的激发处 $\boldsymbol{x}_e(t')=A$(即它是在时刻 t'位于 $\boldsymbol{x}_e(t')$的带电粒子激发的)与带电粒子在时刻 t 所在的空间位置 $\boldsymbol{x}_e(t)=B$ 三个空间点构成的三角形$\triangle APB$．由于粒子作匀速直线运动及电磁场以光速传播，我们有

$$\begin{cases} \overrightarrow{AP}\equiv\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_e(t')=c(t-t')\boldsymbol{\beta} \\ \overrightarrow{AB}\equiv\boldsymbol{x}_e(t)-\boldsymbol{x}_e(t')=c(t-t')\boldsymbol{n} \end{cases} \tag{11.1.3}$$

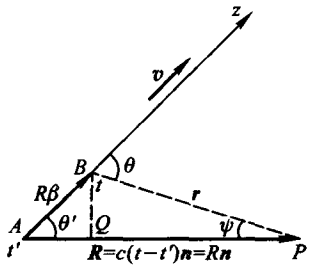


图 11.1　作匀速直线运动的带电点粒子的时空图

于是

$$\boldsymbol{r}(t)\equiv\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_e(t)=c(t-t')(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})=R(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta}) \tag{11.1.4}$$

式中

$$R\equiv AP=c(t-t')=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_c(t')|=|\boldsymbol{R}| \tag{11.1.5}$$

此外,由正弦定理可知

$$\frac{\sin\psi}{\sin\theta}=\frac{AB}{AP}=\frac{c(t-t')\beta}{c(t-t')}=\beta \tag{11.1.6}$$

式中 ψ 是三角形$\triangle APB$ 中的角$\angle APB$,而 θ 是三角形$\triangle APB$ 中的角$\angle ABP$ 的外角.于是

$$kR=R-R\beta\cos\theta'=AP-AB\cos\theta'=r\cos\psi=r\sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta} \tag{11.1.7}$$

式中,已注意到$\angle BAP$ 即为$\boldsymbol{v}$与 $\boldsymbol{R}$ 之间的夹角 θ'.利用(11.1.4)与(11.1.7),(11.1.1)中第一式成为

$$\boldsymbol{E}=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(1-\beta^2)\boldsymbol{r}}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}r^3} \tag{11.1.8}$$

式中右端都是在观测时刻 t 取值的,$\boldsymbol{r}$ 是观测位置对于 t 时粒子所处位置的相对距离,而 θ 是$\boldsymbol{r}$ 与粒子速度之间的夹角.

为了简单起见,假设带电粒子的运动速度 v 远小于光速 c.由作匀速直线运动的带电粒子的电磁场的表达式(11.1.8)知

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}\xrightarrow{\beta\ll1}\boldsymbol{E}_0\left(1+\dfrac{1}{2}\beta^2-\dfrac{3}{2}\beta^2\cos^2\theta\right)\\ \boldsymbol{B}=\dfrac{1}{c}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{E}\xrightarrow{\beta\ll1}\dfrac{1}{c}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{E}_0\end{cases} \tag{11.1.9}$$

式中 $\boldsymbol{E}_0$是静库仑场,且已略去了高于 β^2 阶的项.注意到 $\boldsymbol{E}_0$具有以带电粒子所在位置为中心的球对称性,可得粒子自有场的动量 $\boldsymbol{G}_s$为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}_s&=\varepsilon_0\int \mathrm{d}^3x\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}=\frac{\varepsilon_0}{c}\int \mathrm{d}^3x\boldsymbol{E}_0\times(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{E}_0)\\&=\frac{2\varepsilon_0}{3c}\int \mathrm{d}^3xE_0^2\boldsymbol{\beta}=\frac{4U_0}{3c}\boldsymbol{\beta}\end{aligned} \tag{11.1.10}$$

式中 U_0是静止点电荷的电场能量.而粒子自有场的能量 U_s为

$$\begin{aligned}U_s&=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x(\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2+\mu_0\boldsymbol{H}^2)\\&=\frac{\varepsilon_0}{2}\int \mathrm{d}^3x[\boldsymbol{E}_0^2(1+\beta^2-3\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{e}_z)+(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{E}_0)^2]=\left(1+\frac{2}{3}\beta^2\right)U_0\end{aligned} \tag{11.1.11}$$

故作匀速运动的带电粒子及其自有场在非相对论近似下的总动量与总能量为

$$\boldsymbol{G}_m+\boldsymbol{G}_s=\left(m_0+\frac{4U_0}{3c}\right)\boldsymbol{v},\quad U_m+U_s=U_0+\frac{1}{2}\left(m_0+\frac{4U_0}{3c^2}\right)v^2 \tag{11.1.12}$$

式中 $\boldsymbol{G}_{\mathrm{m}}=m_0\boldsymbol{v}$ 与 $U_{\mathrm{m}}=(1/2)m_0v^2$ 是粒子本身的机械动量与机械能量，而 m_0 是粒子本身的静质量.由此可见，计入粒子自有场的动量与能量后，粒子的静质量(或惯性)比原来增加了如下的数量：

$$m_{\mathrm{em}}=\frac{4U_0}{3c^2} \tag{11.1.13}$$

这一部分质量称为粒子的电磁质量，它与粒子原来(非电磁起源)的静质量 m_0 一起构成了粒子的总静质量

$$m=m_0+m_{\mathrm{em}} \tag{11.1.14}$$

只有 m 才是实验所能测出的物理量.

为了计算粒子例如电子的电磁质量的数值，必须计算电子静止时的固有能 U_0.然而，若将电子视为一个点粒子，则 U_0 为无穷大.为了得到有限值，须将电子看成是具有内部结构的、尺度有限的物体.例如，将电子视为半径为 a 的带电体：

(a) 若电荷均匀分布于球面上，则

$$U_0=\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\right),\quad m_{\mathrm{em}}=\frac{4U_0}{3c^2}=\frac{2}{3}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\right)$$

(b) 若电荷均匀分布于球体内，则

$$U_0=\frac{3}{5}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\right),\quad m_{\mathrm{em}}=\frac{4U_0}{3c^2}=\frac{4}{5}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 ac^2}\right)$$

可见，电磁质量的数量级为

$$m_{\mathrm{em}}=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 ac^2} \tag{11.1.15}$$

若假定电子质量完全起源于电磁相互作用，则有

$$m\approx m_{\mathrm{em}}=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_{\mathrm{c}}c^2}$$

式中

$$r_{\mathrm{c}}=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}\approx 2.817\,938\times10^{-13}\ \mathrm{cm} \tag{11.1.16}$$

称为电子的经典半径.然而这个经典半径根本不是电子尺度的正确量度，因为从宏观尺度直至 10^{-16} cm 的范围内，电子仍然可视为一个点粒子.对于具有强相互作用的粒子——强子(如质子、中子等)，所测出的电荷分布的均方根半径的数量级为 10^{-13} cm，与式(11.1.16)相符，但却具有完全不同的物理起源.虽然如此，电子的经典半径仍然具有两方面的意义：第一，它是一个具有长度量纲的量，经常出现在原子物理学中；第二，它决定了经典电动力学适用的范围，即 Maxwell 电磁理论仅当

$$r \gg r_c = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2} \tag{11.1.17}$$

时才是正确的，而在$\sim r_c$的尺度上已不能自洽地描述物理世界(一方面，Maxwell电磁理论的相对论协变性要求其理论中的基本粒子——电子应为一个几何点；另一方面，点粒子模型又导致与实验矛盾的无穷大的电磁质量).

§11.2 辐射阻尼

不仅带电粒子的自有场对粒子有反作用，作加速运动的带电粒子的辐射场对粒子也有反作用.前者表现为粒子的电磁质量；后者则表现为对粒子的辐射阻尼力$\boldsymbol{F}_r$，即粒子所激发的辐射场对粒子本身的反作用力.于是，带电粒子的运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{\boldsymbol{v}}) = \boldsymbol{F}_e + \boldsymbol{F}_r \tag{11.2.1}$$

式中$\boldsymbol{F}_e$是作用在带电粒子上的外力，且粒子质量m中已将粒子自有场的反作用——粒子的电磁质量包括在内.为简单起见，设粒子运动速度v远小于c，则按Larmor公式，粒子的辐射功率为

$$\frac{-\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{e^2\dot{v}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \tag{11.2.2}$$

由于能量守恒，辐射功率损失应由粒子克服辐射阻尼力所做的功来补偿，故

$$\boldsymbol{F}_r \cdot \boldsymbol{v} + \frac{e^2\dot{v}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} = 0$$

然而，上式不可能对每一瞬时都成立.其原因在于：当粒子加速运动时，不仅要辐射电磁波，而且还会使粒子的近场发生变化，但后者并未加以考虑，因而仅粒子本身和辐射场并不是在每一瞬时都构成封闭体系，它们的总能量并不守恒；同时，粒子的速度与加速度一般是不相关的量，因而上式左端第一项与粒子速度有关，第二项却与粒子速度无关，它们不可能相互抵消.然而，若粒子作周期运动或准周期运动，也就是说在一段时间T的始末粒子的运动状态相同或(当所存在的涨落可忽略时)近似相同；则粒子的近场在这段时间始末亦相同或(当所存在的涨落可忽略时)近似相同，因而在这段时间内粒子克服辐射阻尼力所做的功等于或近似等于辐射出去的能量

$$-\int_{t'_0}^{t'_0+T} \mathrm{d}t' \boldsymbol{F}_r \cdot \boldsymbol{v} = \int_{t_0}^{t'_0+T} \mathrm{d}t' \frac{e^2\dot{v}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \tag{11.2.3}$$

对上式右端分部积分后并移项得

$$\int_{t_0}^{t'_0+T} \mathrm{d}t' \left(\boldsymbol{F}_r - \frac{e^2\dot{\boldsymbol{v}}}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\right) \cdot \boldsymbol{v} = -\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \boldsymbol{v} \cdot \dot{\boldsymbol{v}} \Big|_{t_0}^{t'_0+T} = 0 \tag{11.2.4}$$

式中应用了粒子初末状态相同或近似相同的条件. 于是,平均而言有

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{r}}=\frac{e^{2}\ddot{\boldsymbol{v}}}{6\pi\varepsilon_{0}c^{3}} \tag{11.2.5}$$

注意:这个关于辐射阻尼力(或称为粒子的自作用力)的表达式并不对每一瞬时成立,它只代表一种平均效应;自然,辐射阻尼是一种可测效应.

于是,在 Lorentz 力作用下,低速电子的运动方程为

$$m\dot{\boldsymbol{v}}=e\boldsymbol{E}+e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}}\frac{2e^{2}}{3c^{3}}\ddot{\boldsymbol{v}} \tag{11.2.6}$$

式中 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是外加的电磁场. 若外场力可忽略,则

$$m\dot{\boldsymbol{v}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}}\frac{2e^{2}}{3c^{3}}\ddot{\boldsymbol{v}}$$

它有两个可能的解:

$$(\mathrm{i})\ \dot{\boldsymbol{v}}=0,\quad (\mathrm{ii})\ \dot{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{v}_{0}\exp\left(4\pi\varepsilon_{0}\frac{3mc^{3}}{2e^{2}}t\right)$$

其中第二个解意味着:一旦去掉外场,电子将无限制地"自我加速";换言之,电子的能量会自动不断增大. 为了避免这一反常解,只能将电子的运动方程(11.2.6)应用于辐射阻尼力比外场力小得多的情形;或者说,方程(11.2.6)适用的条件是辐射阻尼力对电子运动的影响可视为微扰.

为了进一步考察上述条件,先略去方程中起微扰作用的辐射阻尼力. 于是有

$$\dot{\boldsymbol{v}}=\frac{e}{m}\boldsymbol{E}+\frac{e}{m}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

由于 $v\ll c$,再略去速度项便有

$$\dot{\boldsymbol{v}}=\frac{e}{m}\boldsymbol{E}$$

将运动方程(指前一方程)两边对时间求导,并利用上式

$$\ddot{\boldsymbol{v}}=\frac{e}{m}\dot{\boldsymbol{E}}+\frac{e^{2}}{m^{2}}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$$

若 $\dot{\boldsymbol{E}}\sim-\mathrm{i}\omega\boldsymbol{E}$,则辐射阻尼力可近似表为

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{r}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}}\left(\frac{-\mathrm{i}2e^{3}\omega}{3mc^{3}}\boldsymbol{E}+\frac{2e^{4}}{3m^{2}c^{3}}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\right) \tag{11.2.7}$$

方程(11.2.6)适用的条件便成为

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}}\frac{2e^{3}\omega}{3mc^{3}}E\ll eE,\quad \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}}\frac{2e^{4}}{3m^{2}c^{3}}EB\ll eE \tag{11.2.8}$$

此即

$$\lambda\gg\frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}}\frac{e^{2}}{mc^{2}}=r_{\mathrm{c}},\quad B\ll 4\pi\varepsilon_{0}\frac{m^{2}c^{3}}{e^{3}} \tag{11.2.9}$$

这里第一式是对电磁波波长的限制，其实它即是前述的经典电动力学适用的空间尺度的界限的另一种说法罢了；第二式则是对电磁场场强的限制，超过这一场强，线性的经典电动力学也不再适用，必须发展所谓非线性电动力学. 可见，Maxwell 电磁理论的内在矛盾导致了它在尺度、波长和场强三个方面都要受到限制.

下面考察辐射阻尼力的力矩. 带电粒子体系在非相对论情形下辐射阻尼力的力矩为

$$\sum \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{F}_{\mathrm{r}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\sum \boldsymbol{x}\times\ddot{\boldsymbol{v}} \tag{11.2.10}$$

式中求和是指对粒子体系中各个粒子而言的. 粒子体系因辐射阻尼力矩所引起的角动量损失为

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_0+T}\mathrm{d}t'\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t'}&=\int_{t_0}^{t_0+T}\mathrm{d}t'\sum \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{F}_{\mathrm{r}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\int_{t_0}^{t_0+T}\sum \boldsymbol{x}\times\mathrm{d}\ddot{\boldsymbol{x}}\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\left[\sum \boldsymbol{x}\times\ddot{\boldsymbol{x}}\Big|_{t_0}^{t_0+T}-\int_{t_0}^{t_0+T}\mathrm{d}t'\sum\dot{\boldsymbol{x}}\times\ddot{\boldsymbol{x}}\right]\\&=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\int_{t_0}^{t_0+T}\mathrm{d}t'\sum\dot{\boldsymbol{x}}\times\ddot{\boldsymbol{x}}\end{aligned} \tag{11.2.11}$$

故平均而言，带电粒子体系每单位时间因辐射而损失的角动量为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t'}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\sum\dot{\boldsymbol{x}}\times\ddot{\boldsymbol{x}} \tag{11.2.12}$$

在偶极辐射情形下亦可用电偶极矩 $\boldsymbol{p}=e\boldsymbol{x}$ 表出(对单个粒子)

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t'}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{3c^3}\dot{\boldsymbol{p}}\times\ddot{\boldsymbol{p}} \tag{11.2.13}$$

(11.2.12)与(11.2.13)式右端在平均的意义上可视为粒子体系的辐射阻尼力矩.

辐射阻尼力的相对论形式

相对论形式的辐射阻尼力 F_μ^{r} 应当满足以下两个条件：

(a) 在低速情形下还原为非相对论形式(11.2.5)；

(b) 与四维速度 u^μ 的标积为零(因为按照狭义相对论，四维加速度与四维速度正交).

显然，非相对论形式的辐射阻尼力的直接推广

$$F_\mu=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\frac{\mathrm{d}^2u_\mu}{\mathrm{d}\tau^2}$$

(式中 τ 是粒子的固有时)满足条件(ⅰ)，但不满足条件(ⅱ). 故必须再附加一辅助矢量，而这辅助矢量应由四维速度及其导数构成，以保证当 $v=0$ 时其空间

分量为零从而使得辐射阻尼力具有正确的非相对论极限.容易看出,辅助矢量

$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^5}u_\mu u_\nu\frac{\mathrm{d}^2u^\nu}{\mathrm{d}\tau^2} \tag{11.2.14}$$

满足要求.于是辐射阻尼力的相对论形式为

$$F_\mu^{\mathrm{r}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\left(\frac{\mathrm{d}^2u_\mu}{\mathrm{d}\tau^2}+\frac{1}{c^2}u_\mu u_\nu\frac{\mathrm{d}^2u^\nu}{\mathrm{d}\tau^2}\right) \tag{11.2.15}$$

计及辐射阻尼力后的相对论性带电粒子的运动方程(Dirac 方程)为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(mu_\mu)=F_\mu^{\mathrm{e}}+F_\mu^{\mathrm{r}} \tag{11.2.16}$$

§11.3　辐射谱线的自然宽度

原子中的电子从高能级跃迁到低能级跃迁时会辐射出一定频率的光子,在光谱中便出现一条谱线.实验发现,每条谱线并不是单色的,都具有一定的频率分布,从而使谱线呈现一定的宽度,通常称之为谱线的自然宽度.按照经典电动力学,电子在原子中作简谐振动.若无辐射阻尼力,该电子的辐射频率即是其振荡频率,谱线应是单色的;但由于存在辐射阻尼力,电子将作阻尼简谐振动,其辐射场便呈现出一定的频谱分布,这便是谱线自然宽度的来源.

设电子在恢复力 $-kx$ 作用下作一维振动,考虑到辐射阻尼力便有

$$m\dot{v}=-kx+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\ddot{v} \tag{11.3.1}$$

式中 $k=m\omega_0^2$,ω_0是振动的电子的固有频率.此方程可改写为

$$\dot{v}=-\omega_0^2x+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3mc^3}\ddot{v} \tag{11.3.2}$$

当辐射阻尼力远小于恢复力时,可将辐射阻尼力作为微扰处理.于是,方程的零级近似解为

$$x=x_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0t'} \tag{11.3.3}$$

在一级近似下,方程成为

$$\ddot{x}=-\omega_0^2x+\frac{\mathrm{i}e^2\omega_0^3}{6\pi\varepsilon_0mc^3}x \tag{11.3.4}$$

由此可得方程的一级近似解为

$$x=x_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t'}=x_0\mathrm{e}^{-\gamma t'/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0t'} \tag{11.3.5}$$

式中

$$\omega=\omega_0\left(1-\frac{\mathrm{i}e^2\omega_0}{6\pi\varepsilon_0mc^3}\right)^{1/2}\approx\omega_0-\mathrm{i}\frac{\gamma}{2},\quad\gamma=\frac{e^2\omega_0^2}{6\pi\varepsilon_0mc^3} \tag{11.3.6}$$

这个近似解代表一个振幅不断衰减的阻尼振动,其适用的条件是

$$\left|\frac{e^2\omega_0^3}{6\pi\varepsilon_0 mc^3}x\right| \ll |\omega_0^2 x|, \qquad \text{即 } \gamma \ll \omega_0 \tag{11.3.7}$$

或写为

$$r_c \ll \frac{\lambda_0}{2\pi} \tag{11.3.8}$$

对于原子辐射或可见光谱,其波长在 $\lambda_0 = 10^{-5}$ cm 左右,而 $r_c \approx 10^{-13}$ cm,上述条件总是满足的.

假设振动从 $t'=0$ 时开始,则

$$x(t') = \begin{cases} 0, & \text{当 } t'<0 \\ x_0 e^{-\gamma t'/2} e^{-i\omega_0 t'}, & \text{当 } t'>0 \end{cases} \tag{11.3.9}$$

通常将振子能量衰减到初值的 $1/e$ 的时间称为振子的寿命 τ. 由于振子的能量 $\mathscr{E}(t')$ 与振子振幅的平方成正比,故

$$\mathscr{E}(t) \propto e^{-\gamma t'}$$

于是有

$$\tau = 1/\gamma \tag{11.3.10}$$

若电子运动速度远小于 c,则辐射场场强与电子振动位移的变化规律相同[参见§10.5式(10.5.2)的第一式],只是时刻从源时 t'(即从源发出波的时刻)推迟到场时 t(即在观察点收到波的时刻)

$$\boldsymbol{E}(t) = \begin{cases} 0, & \text{当 } t<0 \\ \boldsymbol{E}_0 e^{-\gamma t/2} e^{-i\omega_0 t}, & \text{当 } t>0 \end{cases} \tag{11.3.11}$$

式中 $t=0$ 是最初激发的辐射电磁波传至场点(即观测点)的时刻. 变换到频域可得辐射场的频谱分布为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dt \boldsymbol{E}(t) e^{i\omega t} \\ &= \frac{\boldsymbol{E}_0}{2\pi}\int_0^\infty dt e^{-\gamma t/2} e^{i(\omega-\omega_0)t} = \frac{\boldsymbol{E}_0}{2\pi}\frac{1}{\gamma/2 - i(\omega-\omega_0)} \end{aligned} \tag{11.3.12}$$

由频谱分析公式知单位频率间隔内的辐射能量为

$$\frac{-dW(\omega)}{d\omega} = \frac{\varepsilon_0 c}{\pi}\oint r^2 d\Omega |\boldsymbol{E}(\omega)|^2 = \frac{C\gamma}{(\omega-\omega_0)^2 + \gamma^2/4} \tag{11.3.13}$$

式中 C 是待定常数. 令 $-W$ 表示总辐射能量,则

$$-W = \int d\omega \left[-\frac{dW(\omega)}{d\omega}\right] = 2\pi C \tag{11.3.14}$$

因而有

$$\frac{-dW(\omega)}{d\omega} = \left(\frac{-W}{2\pi}\right)\frac{\gamma}{(\omega-\omega_0)^2 + \gamma^2/4} \tag{11.3.15}$$

由此可知，$-\mathrm{d}W(\omega)/\mathrm{d}\omega$ 在 $\omega=\omega_0$ 时达到其峰值；随着 ω 偏离 ω_0 而逐渐减小；当 $\omega=\omega_0\pm\gamma/2$ 时降为其峰值的一半．因而，通常称

$$\gamma=\frac{e^2\omega_0^2}{6\pi\varepsilon_0 mc^3} \tag{11.3.16}$$

为谱线的半高宽，它便是所有谱线都具有的自然宽度(图 11.2)．利用

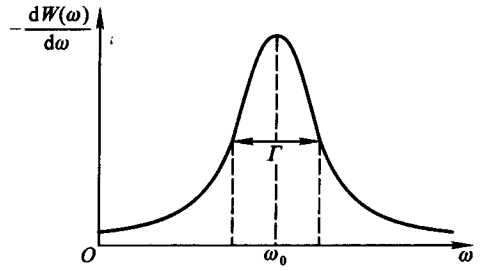


图 11.2　单位频率间隔内的辐射能量与频率的关系

$$\Delta\lambda=\left|\Delta\left(\frac{2\pi c}{\omega}\right)\right|=\frac{2\pi c}{\omega_0^2}\Delta\omega \tag{11.3.17}$$

可将谱线的半高宽用波长表示

$$\Delta\lambda=\frac{2\pi c}{\omega_0^2}\gamma=\frac{4\pi r_c}{3}=\frac{e^2}{3\varepsilon_0 mc^2}\approx 1.18\times10^{-12}\,\mathrm{cm} \tag{11.3.18}$$

它是一个与电子的固有频率无关的常量．然而，原子谱线宽度虽有些接近于经典宽度，有些却远小于经典宽度．这表明经典谐振子模型虽能说明任一谱线都会具有一定的宽度，但却远不能解释原子谱线宽度为什么会有较大的变化．不过，辐射反作用以及粒子寿命与宽度的关系仍具有普遍意义．

§11.4　稀薄介质中的色散

前面已经讲过，介质的极化机制有两种：其一是无极分子和有极分子中的电子在外场感应下产生位移极化，其二是有极分子中的电偶极矩在外场作用下产生转向极化．因而对于无极分子组成的介质，得到介质的介电常量表达式的最直接的方法是考察介质在外场中的所诱导的位移极化．若介质均匀线性、各向同性且 $\mu\approx\mu_0$，则其介电常量满足

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{p} \tag{11.4.1}$$

可见，一旦知道介质在外场 $\boldsymbol{E}$ 作用下的极化矢量 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 的关系，便可定出介质的介电常量．为简单起见，暂设稀薄介质由同一种原子组成，原子则由电子和正

离子构成.原子中的正离子由于其质量很大,可视为静止不动;而原子对电子的作用力可等效为一恢复力 $-k\boldsymbol{x}$,其中 $k=m\omega_0^2$,ω_0 是电子的固有振荡频率.由于介质的稀薄性,可忽略原子之间的相互作用力.

设某一频率为 ω 的单色电磁波 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\exp(-\mathrm{i}\omega t)$ 入射到介质内部.一般而言,原子中电子的运动速度 $v\ll c$,电磁波的磁场对电子的作用力与相应的电场力之比为 $\sim v/c\ll 1$,因而可略去磁场力的作用;同时,电子在策动源作用下作受迫振动的振幅 $\sim vT\ll cT=\lambda$(T 和 λ 分别是入射波的周期与波长),因而电子的运动范围远小于波长,作用于电子上的电场强度可用电子运行的中心位置上的电场强度来表示.考虑到辐射阻尼,原子中电子的运动方程为

$$m\dot{\boldsymbol{v}}=-k\boldsymbol{x}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\boldsymbol{v}}+e\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{11.4.2}$$

此即

$$\ddot{\boldsymbol{x}}+\gamma\dot{\boldsymbol{x}}+\omega_0^2\boldsymbol{x}=\frac{e}{m}\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{11.4.3}$$

这是受迫阻尼振荡运动的方程,其稳态解为

$$\boldsymbol{x}=\frac{e^2/m}{\omega_0^2-\omega^2-\mathrm{i}\gamma\omega}\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{11.4.4}$$

设每个原子中只存在一个谐振电子,且这些谐振电子都是一样的,都具有相同的固有频率.令单位体积内的原子数为 N,则介质中的极化矢量为

$$\boldsymbol{P}=N\boldsymbol{e}\boldsymbol{x}=N\alpha\boldsymbol{E} \tag{11.4.5}$$

式中

$$\alpha=\frac{e^2/m}{\omega_0^2-\omega^2-\mathrm{i}\gamma\omega} \tag{11.4.6}$$

是所谓原子极化率.

将式(11.4.5)代入式(11.4.1)可得介质中的介电常量为

$$\varepsilon=\varepsilon_0+N\alpha=\varepsilon_0+\frac{Ne^2}{m(\omega_0^2-\omega^2-\mathrm{i}\gamma\omega)} \tag{11.4.7}$$

此即各向同性、均匀线性的稀薄介质的色散关系.由此可知,相对介电常量或折射率 n 是复数

$$n=\sqrt{\varepsilon_r}=\pm(\eta+\mathrm{i}\kappa) \tag{11.4.8}$$

式中 η 与 κ 都是正的实数.正如导电介质的复介电常量的实部与虚部那样,这里应取正号,以保证在介质中传播的电磁波的振幅总是有限的;且实部 η 是介质的等效折射率,而虚部 κ 则代表介质对电磁波的吸收.将上式代入色散关系得

$$\eta^2-\kappa^2=1+\frac{\bar{\alpha}(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2},\quad 2\eta\kappa=\frac{\bar{\alpha}\omega\gamma}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2} \tag{11.4.9}$$

式中 $\bar{\alpha}=\dfrac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}$. 介质对电磁波的吸收主要来源于介质中的带电粒子对电磁波的散射. 在稀疏介质中这种散射子的密度很低,因而吸收效应很小,等效折射率 η 接近于 1,即

$$\eta \gg \kappa, \qquad \eta \approx 1$$

于是有

$$\eta^2 \approx 1+\frac{\bar{\alpha}(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}, \quad \kappa \approx \frac{\bar{\alpha}}{2}\frac{\omega\gamma}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2} \tag{11.4.10}$$

相应的曲线示于图 11.3 中.

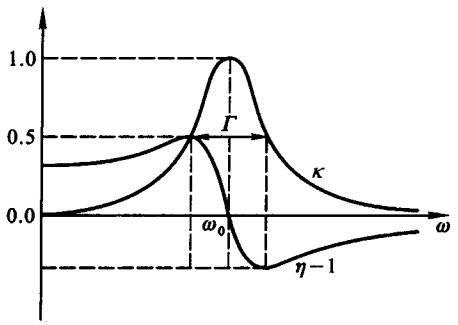


图 11.3　稀疏介质相对介电常量的实部 η 与虚部 κ 同频率的关系

如果 $(\omega_0^2-\omega^2)^2 \gg \omega^2\gamma^2$,即远离共振区,则式(11.4.10)成为

$$\eta^2 \approx 1+\frac{\bar{\alpha}}{\omega_0^2-\omega^2}, \quad \kappa \approx \frac{\bar{\alpha}}{2}\frac{\omega\gamma}{(\omega_0^2-\omega^2)^2} \tag{11.4.11}$$

由第一式知在远离共振区有

$$\begin{cases} \eta>1, & \text{当 } \omega<\omega_0 \\ \eta<1, & \text{当 } \omega<\omega_0 \end{cases} \tag{11.4.12}$$

且在两种情形下,等效折射率都随频率增加而增加,这通常称为正常色散;进而,当 $\omega \ll \omega_0$ 时,η 基本上与频率无关,故不出现色散. (11.4.11)中第二式说明在远离共振区介质的吸收非常小.

对于具有某一窄频带的电磁波,可令其在介质中的平均相速为 v,则可将(11.4.11)的第一式用波长 $\lambda=2\pi v/\omega$ 与 $\lambda_0=2\pi v/\omega_0$ 近似表为

$$\eta^2 \approx 1+\frac{\bar{\alpha}}{\omega_0^2}\frac{\lambda^2}{\lambda^2-\lambda_0^2} \tag{11.4.13}$$

这便是 Sellmeier 公式,它适用于不太接近固有频率的窄带电磁波.

若电磁波的频率低于固有频率,可将公式(11.4.13)对 λ_0/λ 展开

$$\eta^2 \approx 1 + \frac{\bar{\alpha}}{\omega_0^2}\left(1 + \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} + \frac{\lambda_0^4}{\lambda^4} + \cdots\right) \tag{11.4.14}$$

这与 Cauchy 经验公式

$$\eta - 1 \approx A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \cdots, \qquad \text{常数 } A, B, C > 0 \tag{11.4.15}$$

一致.

在共振区附近,$\omega \approx \omega_0$.注意到 $\eta \approx 1$,由(11.4.10)得

$$\begin{aligned} \eta - 1 &\approx \frac{\bar{\alpha}}{4\omega_0} \cdot \frac{\omega_0 - \omega}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2/4} \\ \kappa &\approx \frac{\bar{\alpha}}{4\omega_0} \cdot \frac{\gamma/2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2/4} \end{aligned} \tag{11.4.16}$$

可见,当 ω 从小于 ω_0 的值增加到大于 ω_0 的值时,η 便迅速从大于 1 的值改变到小于 1 的值.其改变速率为

$$\left.\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega = \omega_0} \approx -\frac{\bar{\alpha}}{\omega_0 \gamma^2} \tag{11.4.17}$$

因而在共振区附近,等效折射率随频率增加而减小,且阻尼系数 γ 越大,减小得越缓慢.这称之为反常色散.在反常色散区域,κ 于 ω_0 达到其最大值:

$$\kappa_{max} = \kappa_{\omega = \omega_0} = \frac{\bar{\alpha}}{2\omega_0 \gamma} \tag{11.4.18}$$

因而在共振区吸收最为强烈,换言之,出现了共振吸收.

若每个原子中存在多种不同的谐振电子,第 s 种谐振电子的个数、固有频率和阻尼系数分别为 f_s、ω_s 和 γ_s,则极化强度为

$$\boldsymbol{p} = \sum_s N f_s e \boldsymbol{x}_s \tag{11.4.19}$$

显然 $\sum_s f_s$ 是原子系数 Z.色散关系成为

$$n^2 = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \sum_s \frac{f_s}{\omega_s^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\gamma_s \omega} \tag{11.4.20}$$

由于不同类型的电子有不同的固有频率,该介质应有不同的吸收带,相应地也有几个不同的反常色散区域.

若电磁波的频率远离所有固有频率,阻尼系数便可忽略,则

$$\eta^2 \approx 1 + \sum_s \frac{\bar{\alpha}_s}{\omega_s^2 - \omega^2} \tag{11.4.21}$$

式中 $\bar{\alpha}_s = N f_s e^2/(\xi_0 m)$.又若对所有 s 有 $\omega < \omega_s$,则和中各项都可展成 λ_s^2/λ^2 的级数,因而有相应的 Cauchy 公式.

将所有固有频率按序排成

$$\omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_s$$

若所考虑的频率在两个固有频率 ω_r 与 ω_{r+1} 之间，则方程(11.4.21)可展成

$$\eta^2 \approx 1 - \sum_{s=1}^{r} \bar{\alpha}_s \omega^{-2} \left(1 + \frac{\omega_s^2}{\omega^2} + \cdots\right) + \sum_{s=r+1}^{S} \frac{\bar{\alpha}_s}{\omega_s^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_s^2} + \cdots\right)$$

在光频区可忽略 ω^{-4} 以上的项，故上式与改进了的 Cauchy 公式

$$\eta^2 \approx -D\lambda^2 + A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \cdots, \quad A、B、C、D \text{ 为常数} \tag{11.4.22}$$

一致.

对于很高频率的电磁波，例如 X 射线，即对所有 s 有 $\omega \gg \omega_s$，则方程(11.4.21)成为

$$\eta^2 \approx 1 - \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m\omega^2} \sim 1 \tag{11.4.23}$$

故 X 射线的折射率总是小于 1 且接近于 1.

因果律检验

现在我们证明由(11.4.7)确定的介电常量满足因果律的要求.为此，只需要证明它满足 Kramer－Krönig 关系.换言之，只需确定作为复变量 ω 的函数 ω 在复 ω 平面的上半平面是一个解析函数.事实上，由(11.4.7)式定出的电极化率为

$$\chi(\omega) = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\gamma\omega)} \tag{11.4.24}$$

作部分分式分解得

$$\chi(\omega) = \frac{-\bar{\alpha}}{\omega_1 - \omega_2}\left[\frac{1}{\omega - \omega_1} - \frac{1}{\omega - \omega_2}\right] \tag{11.4.25}$$

式中频率 ω_1 与 ω_2 为

$$\begin{cases} \omega_1 = -\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\left[\gamma - \sqrt{\gamma^2 - (2\omega_0)^2}\right] \\ \omega_2 = -\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\left[\gamma + \sqrt{\gamma^2 - (2\omega_0)^2}\right] \end{cases} \tag{11.4.26}$$

由式(11.4.25)可看出，极化率 χ 作为复变量 ω 的函数，有两个极点 ω_1 与 ω_2.当 $\gamma > 2\omega_0$ 时，这两个极点都位于负虚轴上；当 $\gamma < 2\omega_0$ 时，ω_1 位于复 ω 平面第四象限，ω_2 位于复 ω 平面第三象限，且两极点相对于虚轴是对称的.总之，复变函数 χ 的极点都在复 ω 平面的下半平面内.因而，$\chi(\omega)$ 在复 ω 平面的上半平面是解析的.

习题 11－4

1. 在 0 ℃ 和 1.01×10^5 Pa 大气压(标准状态)下的氢气对光频的折射率由下述经验公式给出

$$n=1+1.358\times10^{-4}\left(1+\frac{7.52\times10^{-11}}{\lambda^2}\right)$$

式中 λ 是用单位 cm 表出的电磁波的波长.假定每个氢分子具有两个相同的电子振子,求出其固有频率,并估算电子的经典半径的值.已知 1 mol 理想气体在标准状态下的体积为 22.4 L.氢原子的电离能是 13.59 eV,这与上面所得到的固有频率的值是一致的吗?

2. 考虑气体中的反常色散.证明:在等效折射率取极大或极小值的频率处,吸收常数等于其最大值的一半.

3. 在一般情况下,

$$\boldsymbol{D}(t)=\varepsilon_0\boldsymbol{E}(t)+\int \mathrm{d}\tau f(\tau)\varepsilon_0\boldsymbol{E}(t-\tau)$$

若在某介质中,$f(\tau)=A\exp(-\tau/a)$,且 A 与 a 都是常数.求 $\varepsilon(\omega)$.

答案:$\varepsilon(\omega)=\varepsilon_0\dfrac{aA}{1-\mathrm{i}a\omega}$.

4. 试从各向同性的束缚谐振电子模型出发,计算电介质中有恒定磁场 B_0 时电介质的介电常量张量 ε_{ij}.设介质中电子数密度为 N,所有电子的固有频率都是 ω_0,相对论效应和辐射阻尼力都可忽略.

提示:取 z 轴沿 $\boldsymbol{B}_0$ 方向,令

$$\chi^{+}=-\frac{1}{\sqrt{2}}(x+\mathrm{i}y),\qquad \chi^{-}=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-\mathrm{i}y)$$

在(χ^{+},χ^{-},z)系中求解单色场中的电子运动方程,继而求极化矢量 $\boldsymbol{p}$,由 $D_i=\varepsilon_0E_i+p_i=\varepsilon_{ij}E_j$ 便可求出 ε_{ij}.

答案:$\begin{pmatrix}(\varepsilon_{+}+\varepsilon_{-})/2 & \mathrm{i}(\varepsilon_{+}-\varepsilon_{-})/2 & 0\\ -\mathrm{i}(\varepsilon_{+}-\varepsilon_{-})/2 & (\varepsilon_{+}+\varepsilon_{-})/2 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_z\end{pmatrix}$

式中

$$\varepsilon_{\pm}=\varepsilon_0\{1-\omega_p^2/[\omega(\omega\pm\omega_L)-\omega_0^2]\}$$

$$\varepsilon_z=\varepsilon_0[1-\omega_p^2/(\omega^2-\omega_0^2)]$$

$$\omega_p=Ne^2/(\varepsilon_0 m)$$

$$\omega_L=eB_0/m=\text{Larmor 频率}$$

5. 试通过具体计算相应的积分,验证由(11.4.7)确定的电极化率满足 Kramer-Krönig 关系.

§11.5 稠密介质中的色散

对于各向同性、线性均匀且 $\mu\approx\mu_0$ 的稠密介质,其色散方程可按同样方法推出.唯一不同的是,邻近原子或分子的极化会在谐振电子所在处产生附加电场,这一附加电场的效应必须加以考虑.为此,设想在被外场 $\boldsymbol{E}$ 均匀极化的稠密介质内部挖出一个宏观上足够小但微观上足够大的介质球,则这个小介质球所感受到的电场强度是下述等效电场:

$$\boldsymbol{E}_{\text{eff}} = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}_{\text{p}} \tag{11.5.1}$$

式中 $\boldsymbol{E}_{\text{p}}$ 是均匀极化的小介质球在球内所产生的场强. 当介质球足够小时，$\boldsymbol{E}_{\text{eff}}$ 可视为位于介质球内的谐振电子所感受到的场强(见图 11.4).

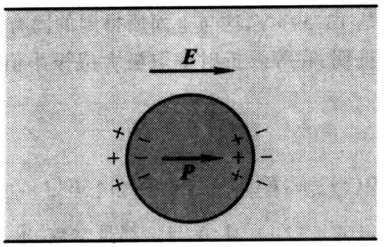


图 11.4　稠密介质中的等效电场

设极化强度为 $\boldsymbol{p}$，由对称性知介质球的面极化电荷分布

$$\sigma_{\text{p}} = -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{n}, \qquad \boldsymbol{n} \text{ 为介质球表面外法向} \tag{11.5.2}$$

产生的电场 $\boldsymbol{E}_{\text{p}}$ 必与 $\boldsymbol{p}$ 平行(设其方向为 e_z 方向). 故

$$\boldsymbol{E}_{\text{p}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint r^2 \mathrm{d}\Omega \frac{\sigma_{\text{p}}}{r^2}\cos\theta \boldsymbol{e}_z = -\frac{\boldsymbol{p}}{3\varepsilon_0} \tag{11.5.3}$$

于是

$$\boldsymbol{E}_{\text{eff}} = \boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{p}}{3\varepsilon_0} \tag{11.5.4}$$

谐振电子运动方程(11.4.2)中的电场应代之以等效的局域电场 $\boldsymbol{E}_{\text{eff}}$，相应地，介质中的极化强度应由 $\boldsymbol{E}_{\text{eff}}$ 决定

$$\boldsymbol{P} = Ne\boldsymbol{x} = N\alpha\boldsymbol{E}_{\text{eff}} = N\alpha\left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{p}}{3\varepsilon_0}\right) \tag{11.5.5}$$

而色散关系(11.4.7)应修改为

$$\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} = \frac{N\alpha}{3\varepsilon_0} \tag{11.5.6}$$

若介质中存在多种不同的谐振电子，则

$$\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} = \sum_s \frac{N_s\alpha_s}{3\varepsilon_0} \tag{11.5.7}$$

式中

$$\alpha_s = \frac{e^2/m}{\omega_s^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\gamma_s\omega} \tag{11.5.8}$$

是与第 s 种谐振电子有关的原子或分子极化率. 色散方程(11.5.7)常称之为 Chausius－Mossotti 关系，它也可写成

$$\frac{n^2-1}{n^2+2}=\frac{Ne^2}{3m\varepsilon_0}\sum_s\frac{f_s}{\omega_s^2-\omega^2-\mathrm{i}\gamma_s\omega} \tag{11.5.9}$$

Chausius－Mossotti 关系将相对介电常量 $\varepsilon_r=n^2$ 和由无极分子构成的非磁性介质的密度 ρ 联系起来了，因为 N_s 与单位体积中的分子总数成正比，故而也与 ρ 成正比．若辐射阻尼可以忽略，则相对介电常量 $\varepsilon_r=n^2$ 是实数，色散方程成为

$$\frac{n^2-1}{n^2+2}=\frac{Ne^2}{3m\varepsilon_0}\sum_s\frac{f_s}{\omega_s^2-\omega^2} \tag{11.5.10}$$

此即所谓 Lorentz－Lorenz 方程．由这一方程可从液体的折射率推知该液体的蒸汽的折射率，因为两者的主要差别是它们具有不同的密度．

值得指出的是，色散关系(11.5.9)也适用于稀薄介质．这是由于对于稀薄介质，$n^2\approx1$，故方程(11.5.9)还原为稀薄介质的色散关系(11.4.20)．因此，同稀薄介质中的情形一样，在稠密介质中 n 或 η 不会在有限频域内显著改变．于是，Sellmeier 公式和 Cauchy 公式或改进的 Cauchy 公式都可应用于液体或固体．

色散的经典理论的成功之处在于：它与折射率和频率的关系的数据符合，它将同一种物质的液态与气态的折射率联系起来了，它半定量地解释了正常与反常色散．然而，它不能计算体系中谐振子的固有频率．事实上，处于原子体系中的每个电子都具有一定的电离势能(即将电子从原子体系中激发成自由状态所需的能量)I_s，因而具有一定的固有频率 $\omega_s=I_s/\hbar$；而电离势能的计算只能通过量子力学．此外，从量子力学也可导出类似于(11.5.9)的结果，但 f_s 却与电子从基态到第 s 激发态的跃迁概率有关，不再具有经典理论中的含义．

有极分子的转向极化效应

对于有极分子组成的介质，施加外场 $\boldsymbol{E}$ 会使其中的电偶极子(即固有电偶极矩为 p_0 的分子)趋向有序排列；但热运动却会导致无序取向．根据 Boltzmann 统计，在热平衡时，单位体积内取向在立体角元 Ω 中的电偶极子数为

$$\mathrm{d}N=C\mathrm{d}\Omega\exp\left(-\frac{U_i}{k_BT}\right),\qquad U_i=-\boldsymbol{p}_0\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{eff}} \tag{11.5.11}$$

式中 k_B 是 Boltzmann 常量，T 是绝对温度，而常数 C 则可由单位体积内的电偶极子数 N

$$N=C\int\mathrm{d}\Omega\exp\left(-\frac{U_i}{k_BT}\right) \tag{11.5.12}$$

定出：

$$C=\frac{N}{4\pi}\frac{p_0E_{\mathrm{eff}}}{k_BT}\sin\mathrm{h}\frac{p_0E_{\mathrm{eff}}}{k_BT} \tag{11.5.13}$$

设电偶极子的取向与 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{eff}}$ 的夹角为 θ，则单位体积中的固有电偶极矩在电场方向的平均值为

$$\overline{Np_0\cos\theta}=NC\int \mathrm{d}\Omega p_0\cos\theta\exp\left(-\frac{U_i}{k_B T}\right) \tag{11.5.14}$$

令 $z=p_0E_{\mathrm{eff}}/(k_B T)$，$x=\cos\theta$，上式化为

$$\overline{Np_0\cos\theta}=N\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(p_0\ln\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\mathrm{e}^{zx}\right)=N\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(p_0\ln\frac{\mathrm{e}^{z}-\mathrm{e}^{-z}}{z}\right)$$

$$=Np_0\left(\frac{\mathrm{e}^{z}+\mathrm{e}^{-z}}{\mathrm{e}^{z}-\mathrm{e}^{-z}}-\frac{1}{z}\right)=Np_0\mathrm{L}(z) \tag{11.5.15}$$

式中 $\mathrm{L}(z)$叫做 Langevin 函数. 由对称性，单位体积中的固有电偶极矩在与电场垂直的方向上平均值为零. 于是在诱导极化之外因取向极化而产生的附加极化矢量为

$$\Delta\boldsymbol{p}=Np_0\mathrm{L}\left(\frac{p_0E_{\mathrm{eff}}}{k_B T}\right)\frac{\boldsymbol{E}_{\mathrm{eff}}}{E_{\mathrm{eff}}} \tag{11.5.16}$$

在通常情形下，$p_0E_{\mathrm{eff}}\ll k_B T$，故

$$\mathrm{L}\left(\frac{p_0E_{\mathrm{eff}}}{k_B T}\right)\approx\frac{p_0E_{\mathrm{eff}}}{3k_B T}$$

于是

$$\Delta\boldsymbol{p}\approx\frac{Np_0^2}{3k_B T}\boldsymbol{E}_{\mathrm{eff}} \tag{11.5.17}$$

因而由有极分子组成的介质的极化矢量为

$$\boldsymbol{p}=N\left(\alpha+\frac{p_0^2}{3k_B T}\right)\boldsymbol{E}_{\mathrm{eff}} \tag{11.5.18}$$

此即是所谓 Langevin－Debye 方程，式中 α 是仅由于位移极化产生的极化强度与电场 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{eff}}$ 的比值，即原子的位移极化率. 将原子极化率代之以

$$\alpha+\frac{p_0^2}{3k_B T}$$

后，Chausius－Mossotti 关系对于有极分子组成的介质也适用.

习题 11－5

1. 令 $n=\eta+\mathrm{i}\kappa$ 表示稠密介质的折射率，求出其实部和虚部与波的频率及介质的固有参数之间的关系. 对于透明的稠密介质，可设 $\kappa^2\ll\eta^2$. 证明：对这种介质，当频率远离所有固有频率时有下述近似关系：

$$\begin{cases}\dfrac{\eta^2-1}{\eta^2+2}\approx\dfrac{1}{3}\sum_s\dfrac{\alpha_s}{\omega_s^2-\omega^2}\\[2ex]\dfrac{\eta\kappa}{(\eta^2+2)^2}\approx\dfrac{\omega}{18}\sum_s\dfrac{\alpha_s\gamma_s}{(\omega_s^2-\omega^2)^2}\end{cases} \tag{11.5.19}$$

式中 ω_s 与 γ_s 分别表示第 s 类谐振电子的固有频率与阻尼系数，而

$$\alpha_s = \frac{N_s e^2}{\varepsilon_0 m}$$

其中 N_s 与 m 分别是单位体积内第 s 类谐振电子的数目与电子的质量.

2. 标准状态下的氢气的密度和折射率分别为 $8.96\times10^{-5}\ \mathrm{g\cdot cm^{-3}}$ 与 1.000 138. 液氢的密度为 $6.8\times10^{-2}\ \mathrm{g\cdot cm^{-3}}$. 求液氢的折射率.

§11.6 金属导体中的色散

金属导体与绝缘介质的差别在于其中存在准自由电子. 这些准自由电子没有受到恢复力的作用,因而它们不会被限制在某个平衡位置附近振动;却可以在正离子晶格中自由漂移,并与晶格中的正离子(质量很大)相碰而损失动量,故而受到一个等效阻力的作用. 一个准自由电子与重离子碰撞前后的动量变化可取 0 到 $-2m\dot{x}'$ 之间的值,这里 x' 是该电子相对于某个初始位置的位移. 平均而言,碰撞前后的动量变化可取为 $-m\dot{x}'$. 若一个自由漂移的电子平均每单位时间与离子碰撞的次数为 ν,则作用在该电子上的等效阻尼力为

$$-m\nu\dot{x}' = -m\gamma_0\dot{x}', \quad \gamma_0 = \nu \tag{11.6.1}$$

辐射阻尼仍然存在,但不是主要的.

准自由电子在外电场作用下的运动方程为

$$m\ddot{x}' = -m\gamma_0\dot{x}' - e\boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega t} \tag{11.6.2}$$

其稳态解为

$$\boldsymbol{x}' = \frac{e}{m}\frac{1}{\omega(\omega+i\gamma_0)}\boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega t} \tag{11.6.3}$$

假设导体中每单位体积有 N 个原子,每个原子有 f_0 个准自由电子,则电流密度为

$$\boldsymbol{j} = Nf_0\dot{\boldsymbol{x}}' = \frac{Ne^2 f_0}{m}\frac{1}{\gamma_0 - i\omega}\boldsymbol{E} \tag{11.6.4}$$

应用 Ohm 定律 $\boldsymbol{j} = \sigma_c \boldsymbol{E}$ 便得到电导率:

$$\sigma_c = \frac{Ne^2}{m}\frac{f_0}{\gamma_0 - i\omega} \tag{11.6.5}$$

这便是所谓的 Drude 关系.

注意到准自由电子相当于固有频率 ω_0 为零与阻尼系数为 γ_0 的情形,导体中的色散方程便可由 Chausius - Mossotti 关系(11.5.9)得到

$$\frac{n^2-1}{n^2+2} = \frac{Ne^2}{3m\varepsilon_0}\left[i\frac{f_0}{\omega(\gamma_0 - i\omega)} + \sum_{s\neq 0}\frac{f_s}{\omega_s^2 - \omega^2 - i\gamma_s\omega}\right] \tag{11.6.6}$$

这方程适用于非铁磁介质($\mu\approx\mu_0$),它可视为 Chausius－Mossotti 关系的推广.对于稀薄导电介质($n\approx1$),上式化为

$$\varepsilon(\omega)=\varepsilon_0+\mathrm{i}\frac{Ne^2}{m\omega}\frac{f_0}{\gamma_0-\mathrm{i}\omega}+\frac{Ne^2}{m}\sum_{s\neq0}\frac{f_s}{\omega_s^2-\omega^2-\mathrm{i}\gamma_s\omega}$$

$$=\varepsilon_c+\mathrm{i}\frac{Ne^2}{m\omega}\frac{f_0}{\gamma_0-\mathrm{i}\omega}=\varepsilon_c+\mathrm{i}\frac{\sigma_c}{\omega}\tag{11.6.7}$$

式中

$$\varepsilon_c=\varepsilon_0+\frac{Ne^2}{m}\sum_{s\neq0}\frac{f_s}{\omega_s^2-\omega^2-\mathrm{i}\gamma_s\omega}\tag{11.6.8}$$

是导电介质在通常意义(即不考虑准自由电子的贡献时)下的介电常量.(11.6.7)式最后的形式当忽略 ε_c 与 σ_c 中的虚部时(这在频率 ω 很低时是可以的)正是所熟悉的导电介质中复介电常量的表达式.

讨论:

(i) 在低频常温条件下,铜的电导率 $\sigma_c=5.8\times10^7\ \mathrm{S\cdot m^{-1}}$(即西门子/米),$N=8\times10^{28}\ \mathrm{m^{-3}}$,$f_0\approx1$.当 $\omega\to0$ 时,由 Drude 关系得 $\gamma_0\approx4\times10^{13}$ Hz.故当 $\gamma\ll\gamma_0\sim10^{13}$ Hz 时,Drude 关系成为

$$\sigma_c=\frac{Ne^2}{m}\frac{f_0}{\gamma_0}\tag{11.6.9}$$

故金属的低频电导率基本上与频率无关.实验上已证实:从 $\omega=0$ 直至 10^{14}Hz 的红外频率,金属的电导率近似为常量;高频电导率近似遵守 Drude 关系(11.6.5),与频率显著相关.

当频率 $\omega\to0$ 时,金属导体的介电常量可由(11.6.8)式进行估计.取 $\omega_s\approx6\times10^{15}$Hz(相当于波长 $\lambda=3\times10^{-5}$cm),$N\sum_{s\neq0}f_s\approx10^{24}\sim10^{25}\ \mathrm{cm^{-2}}$,便有 $\varepsilon_c\leqslant10\varepsilon_0$.与实际情形相符.

(ii) 当 $\omega\gg\gamma_0$时,金属的电导率成为纯虚数

$$\sigma_c=\frac{\mathrm{i}Nf_0e^2}{m\omega}\tag{11.6.10}$$

而介电常量成为

$$\varepsilon(\omega)=\varepsilon_c(\omega)-\frac{\omega_p^{*2}}{\omega^2}\varepsilon_0\tag{11.6.11}$$

式中

$$\omega_p^*=\sqrt{\frac{Ne^2}{m^*\varepsilon_0}}\tag{11.6.12}$$

称为等效质量 $m^*=m/f_0$的传导电子的等离子体频率.

当 ω 远大于金属中的最高共振频率时,所有电子都可视为自由的.故

$$\sigma_c = \frac{iNf_0 e^2}{m\omega}, \varepsilon_c(\omega) = \varepsilon_0 - \frac{Ne^2}{m\omega^2}\sum_{s\neq 0} f_s \tag{11.6.13}$$

注意到 $f_0 + \sum_{s\neq 0} f_s =$ 原子序数 Z，便有

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)\varepsilon_0 \tag{11.6.14}$$

它仅适用于 $\omega \gg \omega_p$ 的情形，而

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}} \tag{11.6.15}$$

称为电子的等离子体频率.

§11.7 等离子体中的色散

等离子体是由大量正负离子组成的电离气体，其正负电荷在总体上相等，且在任一宏观上小的体积内呈电中性或准电中性(即有 $\rho\approx 0$)，常称为物质的第四聚集态.金属中的准自由电子气、气体放电、半导体中的电子与空穴、电解质溶液等，都具有等离子体性质；从地球外围的电离层直至宇宙深处，几乎所有物质都呈等离子体状态.

等离子体中的阻尼主要来自于自由电子与原子、离子的碰撞，辐射阻尼通常比碰撞阻尼小；在低速情形下也可略去电磁波磁场部分的作用.此外一般正离子的质量很大，可略去其运动，故等离子体中的电子和金属中准自由电子遵从同样形式的运动方程.对于稀薄等离子体，可进一步忽略阻尼的影响.在这一近似下，由上节知运动方程的解为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{ie}{m\omega}\boldsymbol{E} \tag{11.7.1}$$

于是电子的集体运动形成的传导电流密度为

$$\boldsymbol{j} = Ne\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{iNe^2}{m\omega}\boldsymbol{E} \tag{11.7.2}$$

式中 N 是单位体积内的电子数.由此可得等离子体的电导率为

$$\sigma_c = \frac{iNe^2}{m\omega} \tag{11.7.3}$$

可见，稀薄等离子体的电导率是纯虚数，电流的相位比电场超前 $\pi/2$；因而没有能量损耗，这正是由于忽略了所有阻尼的结果.

设等离子体由非磁性物质组成，$\mu\approx\mu_0$.故等离子体中的电磁波满足波动方程

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{E} = \mu_0\boldsymbol{j} \tag{11.7.4}$$

此即

$$\left(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}+\frac{\omega_p^2}{c^2}\right)\boldsymbol{E}=0 \tag{11.7.5}$$

式中

$$\omega_p=\sqrt{\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}}$$

是前面提到过的等离子体频率.于是等离子体中的电磁波满足下述色散关系:

$$\omega^2=\omega_p^2+c^2k^2 \tag{11.7.6}$$

由此可知电磁波的相速度 v_p 与群速度 v_g 分别为

$$\begin{aligned}v_p&=\frac{\omega}{k}=c\sqrt{1+\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}>c\\ v_g&=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}=\frac{c^2}{v_p}<c\end{aligned} \tag{11.7.7}$$

色散关系(11.7.6)可用折射率 n 改写成

$$n^2=\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}=\left(\frac{c}{v_p}\right)^2=1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}<1 \tag{11.7.8}$$

或表为

$$\varepsilon=\varepsilon_0+\mathrm{i}\frac{\sigma_c}{\omega}=\varepsilon_0\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)<\varepsilon_0 \tag{11.7.9}$$

可见,等离子体比真空还光疏,仅当 $\omega\to\infty$ 时,才相当于真空.

将色散关系(11.7.6)写成

$$k=\frac{\omega}{c}\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \tag{11.7.10}$$

当 $\omega<\omega_p$ 时,波矢 k 为纯虚数;这时入射到等离子体内的电磁波是衰减的,由于介质无耗,这便意味着进入等离子体内的电磁波都将被反射回去.电磁波的透入深度为

$$\delta=\sqrt{\frac{c^2}{\omega_p^2-\omega^2}} \tag{11.7.11}$$

当 $\omega>\omega_p$ 时,波矢 k 为实数,这时波可以在等离子体内传播.因而,等离子体只能传播频率大于 ω_p 的电磁波,这种现象叫做截止现象,ω_p 也被称为截止频率.对于金属,这截止频率一般在紫外区以下,故紫外光可通过金属透射出去.

在地球大气层大约 50 km 以上的高空,气体因太阳辐射和其他宇宙射线的作用而离解,形成稀薄的等离子体即所谓电离层.电离层从下往上又分为六层:C、D、E、F 层,Helio 层与质子层;F 层进一步分为 F_1 与 F_2 层,近来还将 C 层考虑为 D 层的一部分.每层中自由电子与离子的密度渐增至最大值然后逐渐减小,

且各层处处近似呈电中性.电离层的高度与一天中的时刻、季节及地磁场强度有关.粗略地说,C层起始于约 50 km 高处,到 70 km 便进入 D 层,至 90 km 处 E 层开始,到 120 km 则进入 F 层.F 层的厚度及另外两层的起始高度变化显著,质子层的外边缘距地面约几个地球半径那么远.此外,某些层上还会出现离子密度反常高的区域,按照其位置称之为分散 E 层或分散 F 层.

由于离解与重新复合过程处于动态平衡,各层电子密度保持相对稳定.各电离层在中午时的电子密度 N 约为

电离层	C层	D层	E层	F_1层	F_2层	Helio层	质子层
$N(m^{-3})$	10^8	10^{9-10}	10^{11}	10^{10-13}	10^{12}	10^{10}	10^{9-10}

这些电子密度随着一天中的时刻、季节、日光与地磁场强度以及纬度而变化,一般夜晚非常低.由此密度数据可算得电离层的最大截止频率约为 $f_p=\omega_p/2\pi\approx$ 10 MHz,考虑到其他因素,截止频率可高达 $f_p\approx30$ MHz;同时可看出,电离层作为一个整体,从边缘到内部其电子密度逐渐增大.

现考虑入射到电离层的一束高频电磁波.若波的入射方向垂直向上,则它的群速度

$$v_g=c\sqrt{1-\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m\omega^2}} \tag{11.7.12}$$

将随着自由电子密度的增加而减小.若至某一高度处,电子密度达到数值

$$N=\frac{\varepsilon_0 m\omega^2}{e^2}$$

时,波的群速度为零,高频电磁波将反射回来;否则,这束波便会穿出电离层.故电离层中最大的电子密度层的 N_{max} 决定了能贯穿它的最低频率

$$\omega_c=\sqrt{\frac{N_{max}e^2}{\varepsilon_0 m}}$$

反过来,也可应用这一事实测量等离子体中的 N_{max}.

习题 11-7

1. 设有一平面电磁波在一均匀等离子体中传播.证明:当电磁波的频率小于等离子体频率时,时平均能流密度为零.
2. 若星际空间的电子密度为 1 个电子/cm^3,试求能在星际空间传播的电磁波的频率的下限.
3. 一频率为 30 MHz 的电磁波射向电离层.若使其能反射的最小入射角为 $\theta_0=75°$,求电子密度的最大值.

答案:$7.5\times10^{11}\,m^{-3}$.

§11.8　外磁场下等离子中的双折射

虽然在低速情形电磁波的磁场所引起的力与电场力相比可以忽略，但外磁场的作用(例如地磁场对电离层中电磁波的影响)却应当加以考虑. 设在等离子体中有一线偏振波

$$E_x = \mathrm{Re}E_0 e^{i(kz-\omega t)} = E_0\cos(kz-\omega t), \quad E_y = E_z = 0 \tag{11.8.1}$$

沿外磁场 $\boldsymbol{B}=(0,0,B)$方向(取为 $\boldsymbol{e}_z$方向)传播. 将这一线偏振波分解为右旋圆偏振波 $\boldsymbol{E}^+$

$$E_x^+ = \frac{1}{2}E_0\cos(\omega t-kz), \quad E_y^+ = \frac{1}{2}E_0\sin(\omega t-kz) \tag{11.8.2}$$

与左旋圆偏振波 $\boldsymbol{E}^-$

$$E_x^- = \frac{1}{2}E_0\cos(-\omega t+kz), \quad E_y^- = \frac{1}{2}E_0\sin(-\omega t+kz) \tag{11.8.3}$$

之和. 分别考虑等离子体中的电子在某一圆偏振波的作用下的运动，其运动方程为

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} + m\gamma\dot{\boldsymbol{x}} = -e(\boldsymbol{E}+\dot{\boldsymbol{x}}\times\boldsymbol{B}) \tag{11.8.4}$$

式中

$$\boldsymbol{E} = (E_x^{\pm}, E_y^{\pm}, 0) \tag{11.8.5}$$

而 $\gamma\approx\nu$ 则正如前面所述代表自由电子与离子或分子的碰撞阻尼. 将运动方程写成分量形式：

$$\begin{cases} \ddot{x}+\gamma\dot{x} = -\dfrac{e}{m}(E_x^{\pm}+\dot{y}B) \\ \ddot{y}+\gamma\dot{y} = -\dfrac{e}{m}(E_y^{\pm}-\dot{x}B) \\ \ddot{z}+\gamma\dot{z} = 0 \end{cases} \tag{11.8.6}$$

最后的方程有解

$$\dot{z}\sim e^{-\gamma t} \tag{11.8.7}$$

它说明至少在长时间之后，电子没有在 $\boldsymbol{e}_z$方向的运动. 为了求解电子在垂直于 $\boldsymbol{e}_z$方向的平面上的运动，令

$$\xi = x+\mathrm{i}y, \quad E^{\pm} = E_x^{\pm}+\mathrm{i}E_y^{\pm} = \frac{1}{2}E_0 e^{\pm i(\omega t-kz)} \tag{11.8.8}$$

则电子的运动方程成为

$$\ddot{\xi}+\gamma\dot{\xi} = \frac{-e}{m}(E^{\pm}-\mathrm{i}B\dot{\xi}) \tag{11.8.9}$$

或

$$\ddot{\xi}+(\gamma+\mathrm{i}\omega_g)\dot{\xi}=\frac{+e}{m}E^{\pm} \tag{11.8.10}$$

式中

$$\omega_g=\frac{-eB}{m} \tag{11.8.11}$$

称为电子的回旋频率.方程(11.8.9)的稳态解应具有与策动源 E 相同的形式即

$$\xi=\xi_0 e^{\pm i(\omega t-kz)}$$

代入方程(11.8.9)得

$$\xi=\frac{e}{m\omega}\frac{E^{\pm}}{\omega\mp\omega_g\mp\mathrm{i}\gamma} \tag{11.8.12}$$

传导电流密度 $\boldsymbol{j}=-Ne(\dot{x},\dot{y},0)$ 可写成

$$j=j_x+\mathrm{i}j_y=-Ne\dot{\xi}=\frac{-Ne^2}{m\omega}\frac{\dot{E}}{\omega\mp\omega_g\mp\mathrm{i}\gamma} \tag{11.8.13}$$

由波动方程[参见§3.8式(3.8.3),并注意到此处有 $\rho=0$]

$$\left(\nabla^2-\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}\right)\boldsymbol{E}=\mu_0\dot{\boldsymbol{j}}$$

可推知

$$\left(\nabla^2-\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}\right)E^{\pm}=\mu_0 j$$

此即

$$\nabla^2E-\mu_0\varepsilon_0\left[1-\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega\mp\omega_g\mp\mathrm{i}\gamma)}\right]\ddot{E}=0 \tag{11.8.14}$$

由此得色散关系为

$$k_{\pm}=\frac{\omega}{c}\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega\mp\omega_g\mp\mathrm{i}\gamma)}} \tag{11.8.15}$$

或用复折射率 $n=\eta+\mathrm{i}\kappa$ 表为

$$n_{\pm}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}=\frac{ck_{\pm}}{\omega}=\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega\mp\omega_g\mp\mathrm{i}\gamma)}} \tag{11.8.16}$$

当 $\omega\gg\gamma$ 时,从方程(11.8.16)可近似将等效折射率 η 与吸收系数 κ 解出:

$$\begin{cases}\eta\approx\sqrt{1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega(\omega\mp\omega_g)}}\\ \kappa\approx\dfrac{\gamma}{2\omega}\dfrac{\omega_p^2}{(\omega\mp\omega_g)^2}\end{cases} \tag{11.8.17}$$

由此可见,两种圆偏振波的等效折射率或传播速度不相等,因而一束线偏振的垂

直入射波分成了传播速度不同的左、右旋圆偏振的两束折射波.因而等离子体在外磁场下是一种双折射介质.等离子体对两束折射波的吸收也不相同,对于沿磁场方向行进的波,其右旋圆偏振(注:它在另一种约定下是左旋圆偏振波)波较易被吸收.

令 $\eta=0$,可得当 $\omega\gg\gamma$ 时左、右旋圆偏振波的截止频率:

$$\omega_{\pm}^{c}=\pm\frac{\omega_g}{2}+\sqrt{\omega_p^2+\frac{\omega_g^2}{4}} \tag{11.8.18}$$

于是,左旋圆偏振波的传播频带为

$$\omega>\omega_-$$

但对于右旋圆偏振波,由于 η_+ 当 $\omega<\omega_g$ 时恒为正值,故其传播频带有两个:

$$\omega<\omega_g,\quad \omega>\omega_+$$

若波的传播方向与外磁场方向夹角为 θ,则在一级效应中仅平行于波的传播方向的磁场分量有贡献.故在一级近似下,上述结果中仅需将 ω_g 改为 $\omega_g\cos\theta$.这意味着折射率与波的传播方向有关,因而在外磁场中的等离子体是一个各向异性介质.于是,一束线偏振波将分成左、右椭圆偏振的两束折射波;其中与无外磁场时的波较相似的那束折射波称为寻常波,另一束则称为非寻常波.

由于电子的回旋方向与右旋圆极化波的电场矢量的旋转方向相同,故当电场频率近似等于电子的回旋频率时,电场才能有效地加速电子,或者说等离子体对电磁波的吸收最强,正如(11.8.17)第二式所示.因之,当存在频率 $\omega\leqslant\omega_g$ 的右旋圆极化波时,其电磁波能量将不断地转化为电子的能量,这种现象称为电子回旋共振,它常用于对等离子体加热.地磁场强平均值约为 5×10^{-5}T,故电离层中的电子的回旋频率为 $f_g=\omega_g/(2\pi)\approx1.4$ MHz.频率为 1.4 MHz 的电磁波通过电离层时,层中电子将作回旋共振,故会极大地吸收电磁波的能量.无线电通讯应避开这一频率.

若 $\omega\ll\omega_g<\omega_p$,且忽略阻尼,则色散关系(11.8.15)近似为

$$\omega\approx\frac{\omega_g c^2k^2}{\omega_p^2} \tag{11.8.19}$$

由此知群速度为

$$v_g=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}=\frac{2c\sqrt{\omega_g}}{\omega_p}\sqrt{\omega} \tag{11.8.20}$$

它与频率的平方根成正比.故在电离层中传播的电磁波的高频部分沿地磁场方向传播的速度比其低频部分要快些,因而电磁波接收器应先收到高频讯号,后收到低频讯号,音调由高到低,形成所谓(空间物理中研究的)哨音.

习题 11-8

若地磁场的磁感强度为 $0.5\times10^{-4}\,\mathrm{Wb\cdot m^{-2}}$，证明电离层对无线电波能量的最大吸收将在波长为 212 m 时出现.

§11.9 Faraday 磁致旋光效应

事实上，处于外磁场中的任何介质都呈现出双折射性质，它们对于左、右旋圆或椭圆偏振的电磁波具有不同的折射率. 于是，一束线偏振入射波的左、右旋圆偏振分量将具有不同的传播速度，经过一段时间之后再合成的线偏振波的偏振面则转动了某一角度. 这种现象称之为 Faraday 磁致旋光效应.

设一束线偏振单色平面波(11.8.1)射入处于外磁场 $\boldsymbol{B}=B\boldsymbol{e}_z$ 的介质中，则在线偏振波的左或右旋圆偏振波的电场 $\boldsymbol{E}$ 作用下，介质中固有频率为 ω_0 的电子的运动方程为

$$m\ddot{\boldsymbol{x}}=-e(\boldsymbol{E}_{\mathrm{eff}}+\dot{\boldsymbol{x}}\times\boldsymbol{B}_{\mathrm{e}})-m\gamma\dot{\boldsymbol{x}}-m\omega_0^2\boldsymbol{x} \tag{11.9.1}$$

式中略去了电磁波的磁场对电子的作用，γ 是阻尼系数，它等于碰撞阻尼系数与辐射阻尼系数之和，$\boldsymbol{E}_{\mathrm{eff}}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{p}/3\varepsilon_0$ 是电子所在处的局域等效电场，而 $\boldsymbol{p}$ 是极化矢量，若介质中只有一种电子，则 $\boldsymbol{p}=-N\mathrm{e}\boldsymbol{x}$. 将方程(11.9.1)写成分量形式得

$$\begin{cases}\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\left(\omega_0^2-\dfrac{Ne^2}{3\varepsilon_0 m}\right)x=\dfrac{-e}{m}(E_x^{\pm}+\dot{y}B)\\[2ex]\ddot{y}+\gamma\dot{y}+\left(\omega_0^2-\dfrac{Ne^2}{3\varepsilon_0 m}\right)y=\dfrac{-e}{m}(E_y^{\pm}-\dot{x}B)\\[2ex]\ddot{z}+\gamma\dot{z}+\left(\omega_0^2-\dfrac{Ne^2}{3\varepsilon_0 m}\right)z=0\end{cases} \tag{11.9.2}$$

电子在 $\boldsymbol{e}_z$ 方向的运动是一个与策动源无关的有阻尼的固有振动，在长时间之后，电子在 $\boldsymbol{e}_z$ 方向的运动可略去. 电子在垂直于 $\boldsymbol{e}_z$ 方向的平面上的运动可用复坐标 $\xi=x+\mathrm{i}y$ 表示：

$$\ddot{\xi}+(\gamma+\mathrm{i}\omega_{\mathrm{g}})\dot{\xi}+\left(\omega_0^2-\frac{Ne^2}{3\varepsilon_0 m}\right)\xi=\frac{-e}{m}E^{\pm} \tag{11.9.3}$$

此方程的稳态解应具有与策动源 $E^{\pm}$ 相同的时空依赖关系，故按前一节同样的方法得

$$\boldsymbol{p}^{\pm}=Ne\xi=\frac{Ne^2}{m}\frac{E^{\pm}}{\omega_0^2-\omega^2-\left(\dfrac{Ne^2}{3\varepsilon_0 m}\mp\mathrm{i}\omega\omega_{\mathrm{g}}\right)\pm\mathrm{i}\gamma\omega} \tag{11.9.4}$$

由此易得色散关系为

$$\frac{n_{\pm}^2-1}{n_{\pm}^2+2}=\left(\frac{e^2}{3\varepsilon_0 m}\right)\frac{N}{\omega_0^2-\omega^2\pm\omega\omega_g\pm\mathrm{i}\gamma\omega} \tag{11.9.5}$$

式中已应用了非磁性物质的性质 $\mu\approx\mu_0$. 若介质中有若干种电子,则上式可推广为

$$\frac{n_{\pm}^2-1}{n_{\pm}^2+2}=\frac{e^2}{3\varepsilon_0 m}\sum_{s=0}^{S}\frac{N_s}{\omega_s^2-\omega^2\pm\omega\omega_g\pm\mathrm{i}\gamma_s\omega} \tag{11.9.6}$$

这是非磁性物质(包括导体,它相当于存在 $s=0$ 的情形)在外磁场中的 Chausius-Mossotti 关系.

若对所有 s 都有 $\omega\gg\gamma_s$,则介质中的吸收很小,故复折射率 $n_{\pm}=\eta_{\pm}\pm\kappa_{\pm}$ 的实部与虚部满足 $\eta_{\pm}\gg\kappa_{\pm}$ 与 $\eta_{\pm}\approx1$. 于是,由(11.9.6)得

$$\begin{cases}\eta_{\pm}\approx\sqrt{1+\dfrac{e^2}{\varepsilon_0 m}\displaystyle\sum_{s=0}^{s}\frac{N_s}{\omega_s^2-\omega^2\pm\omega\omega_g}}\\ \kappa_{\pm}\approx\dfrac{\omega e^2}{2\varepsilon_0 m}\displaystyle\sum_{s=0}^{s}\frac{N_s\gamma_s}{(\omega_s^2-\omega^2\pm\omega\omega_g)^2}\end{cases} \tag{11.9.7}$$

可见,左旋等效折射率 η_- 不等于右旋等效折射率 η_+,左旋吸收率 κ_- 也不等于右旋吸收率 κ_+.

由式(11.8.2)与式(11.8.3)表示的左、右旋圆偏振波也可写成指数形式(实际物理量取其实部):

$$E^{\pm}=\frac{E_0}{2}(\boldsymbol{e}_x\pm\mathrm{i}\boldsymbol{e}_y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_{\pm}z-\omega t)} \tag{11.9.8}$$

这两束沿外磁场方向传播的左、右旋圆偏振波经过一段距离 z 后的合成波的电场强度为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}^{+}+\boldsymbol{E}^{-}=\frac{E_0}{2}\{\boldsymbol{e}_x(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_+z}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_-z})+\mathrm{i}\boldsymbol{e}_y(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_+z}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_-z})\}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{11.9.9}$$

这仍然是一个线偏振波. 由于

$$\frac{E_y}{E_x}=-\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k^- -k^+)z/2}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k^- -k^+)z/2}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k^- -k^+)z/2}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k^- -k^+)z/2}}=\tan\frac{1}{2}(k^- -k^+)z$$

这个线偏振波的偏振方向即 $\boldsymbol{E}$ 的方向与 x 轴的夹角为

$$\phi=\arctan\frac{E_y}{E_x}=\frac{1}{2}(k^- -k^+)z=\frac{\omega}{2c}(\eta^- -\eta^+)z \tag{11.9.10}$$

式中利用了等式 $k=\omega\eta/c$. 故当波沿磁场方向行进了距离 z 时,波的偏振面绕磁场方向旋转了角度 ϕ.

当外磁场较小时,可将电子回旋频率作为微扰. 于是,由(11.9.7)可得

$$\eta^- - \eta^+ \approx \frac{\omega\mu_0 e^3}{\varepsilon_0 m^2} \sum_s \frac{N_s}{(\omega_s^2 - \omega^2)^2} H \tag{11.9.11}$$

故磁致偏转角为

$$\phi = C_F z H \tag{11.9.12}$$

式中

$$C_F = \frac{\omega^2 \mu_0 e^3}{2c\varepsilon_0 m^2} \sum_s \frac{N_s}{(\omega_s^2 - \omega^2)^2} \tag{11.9.13}$$

叫做 Verdet 常量.(11.9.12)便是 Faraday 磁致旋光效应的经验形式.

习题 11-9

来自银河辐射源的一波长为 10 cm 的线偏振波穿越直径为 10^{18} cm 的星际离子气体区域,该区域中平均电子密度为 1 个电子/cm^3.如果区域中的磁感强度为 10^{-8} Wb·m^{-2} 且与波的传播方向平行.求 Faraday 磁致偏转的转角.

第十二章　电磁波的散射

本章研究电子、电荷体系和宏观物体对电磁波的散射与吸收，着重讲述相应的概念与处理方法，最后介绍光学定理.

§ 12.1 Thomson 散射

当电磁波入射到电荷体系上时，该电荷体系便在入射电磁波的电磁力作用下作受迫振荡；与此同时，振荡的电荷体系向外辐射出电磁波．换言之，电荷体系将入射电磁波的部分能量以出射电磁波的形式分散投射到其他方向上去，这种现象称为电磁波被电荷体系所散射(见图 12.1)．

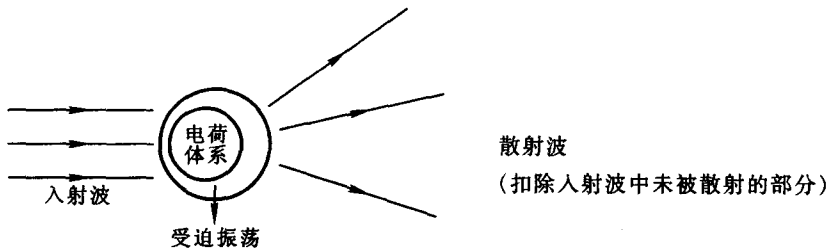


图 12.1 电荷体系对电磁波的散射

考察低速运动的自由电子对电磁波的散射．计算主要分为三步：一是求解电子在外场中的运动；二是由电子的运动状态求出其辐射场，此即电子所散射的电磁波(散射波)；最后求出散射过程中的一些物理量，如散射波的角分布、散射截面等．由于电子运动速度 $v \ll c$，可略去电磁波的磁场力；若电子在外场作用下局限于小区域中运动，则可将作用于电子上的电场强度用电子运行轨道中心位置上的电场强度来表示．考虑到辐射阻尼，电子在单色外场中的运动方程为

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} = -m\gamma\dot{\boldsymbol{x}} - e\boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega t} \tag{12.1.1}$$

式中辐射阻尼系数为

$$\gamma = \frac{\omega^2 e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m} = \frac{4\pi r_c}{3\lambda}\omega \tag{12.1.2}$$

这里 r_c 是电子的经典半径，而 $\lambda = 2\pi c/\omega$ 是入射波的波长．方程的稳态解为

$$\boldsymbol{x} = \frac{e\boldsymbol{E}_0}{m\omega(\omega + i\gamma)} e^{-i\omega t} \tag{12.1.3}$$

若入射波的波长比电子的经典半径大得多，则 $\omega \gg \gamma$．这时有

$$\boldsymbol{x} = \frac{e\boldsymbol{E}_0}{m\omega^2} e^{-i\omega t} \tag{12.1.4}$$

由此得电子所激发的辐射场即散射波的电场强度为

$$\boldsymbol{E}_s = \frac{-e}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n} \times \ddot{\boldsymbol{x}}) \tag{12.1.5}$$

式中 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{x}/r$ 为辐射方向的单位矢量，这实际上是电偶极辐射场. 设散射波波矢方向与入射波电场方向的夹角为 α，则散射波电场强度的大小为

$$E_s=\frac{e^2E_0}{4\pi\varepsilon_0 mc^2 r}\sin\alpha \tag{12.1.6}$$

入射波强度 I_i 即入射波的平均能流密度在入射方向上的投影

$$I_i=\langle \boldsymbol{s}_i\rangle\cdot\boldsymbol{n}_i=\frac{1}{2}\varepsilon_0 cE_0^2 \tag{12.1.7}$$

它表示入射波投射到单位横截面上的平均功率. 同样，散射波强度 I_s 也就是散射波的平均能流密度在散射方向上的投影

$$I_s=\langle \boldsymbol{s}_s\rangle\cdot\boldsymbol{n}=\frac{1}{2}\varepsilon_0 cE_s^2 \tag{12.1.8}$$

式中 I_s 表示散射波投射到 $\boldsymbol{x}$ 处单位横截面上的平均功率. 定义微分散射截面

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_s}{\mathrm{d}\Omega}=r^2\frac{I_s}{I_i}=\frac{\langle \boldsymbol{s}_s\rangle\cdot\boldsymbol{n}}{\langle \boldsymbol{s}_i\rangle\cdot\boldsymbol{n}_i}=r^2\frac{|\boldsymbol{E}_s|^2}{E_0^2} \tag{12.1.9}$$

它等于被散射到 $\boldsymbol{x}$ 处单位立体角中的电磁波的功率与入射波强度之比. 对于自由电子的散射有

$$I_s=\frac{e^4E_0^2}{32\pi\varepsilon_0 m^2c^3r^2}\sin^2\alpha=\left(\frac{r_c}{r}\right)^2 I_i\sin^2\alpha \tag{12.1.10}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_s}{\mathrm{d}\Omega}=r_c^2\sin^2\alpha \tag{12.1.11}$$

这是自由电子对线偏振入射波的微分散射截面.

取 z 轴平行于电磁波的入射方向，散射波的波矢方向 $\boldsymbol{n}$ 位于 $y=0$ 平面上，设入射波偏振方向与 x 轴的夹角为 ϕ，则

$$\cos\alpha=\sin\theta\cos\phi \tag{12.1.12}$$

对于非偏振的入射波(即各偏振方向机会均等的混合入射波)，应对入射波的偏振进行平均(即对 ϕ 平均，见图 12.2)

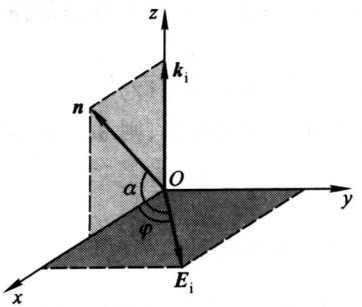


图 12.2　入射波的偏振

$$\overline{\sin^2\alpha}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos^2\theta) \tag{12.1.13}$$

这样便得到

$$\left.\overline{\frac{\mathrm{d}\sigma_s}{\mathrm{d}\Omega}}\right|_{\text{Thomson}}=\frac{1}{2}r_c^2(1+\cos^2\theta) \tag{12.1.14}$$

此即对入射波偏振平均后的 Thomson 散射的微分截面.总散射截面定义为

$$\sigma_s=\int\mathrm{d}\Omega\,\frac{\mathrm{d}\sigma_s}{\mathrm{d}\Omega} \tag{12.1.15}$$

而$(\mathrm{d}\sigma_s/\mathrm{d}\Omega)/\sigma_s$便是归一化的散射角分布.对 Thomson 散射,平均散射总截面为

$$\overline{\sigma_s}|_{\text{Thomson}}=\frac{8}{3}\pi r_c^2=0.665\times10^{-24}\,\mathrm{cm}^2 \tag{12.1.16}$$

Thomson 散射角分布在 $\theta=\pi/2$ 左右是对称的;其散射截面是一个常量,与入射波的频率无关.在 Thomson 散射中,电子可等效为一个横截面为 $8\pi r_c^2/3$ 的完全不透波的球.

习题 12-1

1. 一椭圆偏振的平面电磁波

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1\cos\omega t+\boldsymbol{E}_2\sin\omega t$$

(式中 $\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{E}_2=0$)被自由电子散射,忽略辐射阻尼力和相对论效应.证明散射截面为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_s}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{r_c^2}{k^2}\frac{(\boldsymbol{E}_1\times\boldsymbol{k})^2+(\boldsymbol{E}_2\times\boldsymbol{k})^2}{E_1^2+E_2^2}$$

式中 $\boldsymbol{k}$ 是散射波的波矢,而 r_c 是电子的经典半径.

2. 一非极化平面电磁波被一自由电子散射,由入射方向和散射方向张成的散射平面为 M.定义散射波的偏振度为

$$P=|I_\perp-I_{/\!/}|/|I_\perp+I_{/\!/}|$$

式中 $I_\perp$ 与 $I_{/\!/}$ 是散射波中偏振方向与平面 M 垂直与平行的分量的强度.

证明:在所考虑的情形下,散射波的极化度为

$$P=\sin\theta/(1+\cos^2\theta)$$

式中 θ 是散射角,并讨论此极化度随散射方向的变化.

3. 平面线偏振的电磁波被自由电子散射,假定电子运动是非相对论性的.求外场对电子的平均做功功率 N(即电子对电磁波的平均吸收功率);并证明平均吸收功率等于平均散射功率.

答案:令 E_0 为入射波振幅

$N=e^4E_0^2/[12\pi\epsilon_0c^3m^2(1+\gamma^2/\omega^2)]$, $\gamma=e^2\omega^2/(6\pi\epsilon_0mc^3)$

4. 电子在均匀外磁场 B 中运动,磁场沿 z 轴方向.已知 $t=0$ 时电子的位置和速度分别为 $(r_0,0,0)$与$(0,v_0,0)$.

(1).考虑辐射阻尼力后,求电子运动轨道;

(2) 求 $v_0 \ll c$ 时电子的平均辐射功率 N;

(3) 证明在单位时间内电子损失的动能等于它的辐射功率.

答案:(1) $x \approx (r_0 - v_0/\omega_0) + v_0/\omega_0 e^{-\eta} \cos \omega_0 t$

$y \approx v_0/\omega_0 e^{-\eta} \sin \omega_0 t$, $z = 0$

$\gamma = e^2 \omega_0^2/(6\pi\varepsilon_0 mc^3)$, $\omega_0 = eB/m \gg \gamma$

(2) $N = [e^2 v_0^2 \omega_0^2/(6\pi\varepsilon_0 c^3)] e^{-2\eta}$

§ 12.2　束缚电子对电磁波的散射

考察低速运动的束缚电子对电磁波的散射.如前所述,在经典描述中的束缚电子可视为具有某一固有频率 ω_0 的简谐振子.忽略波的磁场力的作用,束缚电子在入射场作用下的运动方程为

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} + m\omega_0^2 \boldsymbol{x} = -m\gamma \dot{\boldsymbol{x}} - e\boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega t} \tag{12.2.1}$$

为了更普遍起见,式中阻尼系数为碰撞阻尼系数和辐射阻尼系数之和

$$\gamma = \nu + \omega^2 e^2/(6\pi\varepsilon_0 c^3 m)$$

方程的稳态解为

$$\boldsymbol{x} = \frac{-e\boldsymbol{E}_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} e^{-i\omega t} \tag{12.2.2}$$

由此得散射波的电场强度为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_s &= \frac{-e}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r} \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n} \times \ddot{\boldsymbol{x}}) \\ &= \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2 r} \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \right) \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}_0) e^{-i(kr - \omega t)} \end{aligned} \tag{12.2.3}$$

设散射波波矢方向 $\boldsymbol{n}$ 与入射波偏振矢量方向的夹角为 α,则散射波电场强度的大小为

$$E_s = \frac{e^2 E_0}{4\pi\varepsilon_0 mc^2 r} \xi \sin \alpha \tag{12.2.4}$$

它与方程(12.1.6)的唯一差别在于多了一个因子

$$\xi = \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2}} \tag{12.2.5}$$

于是,当入射波为线偏振波时,散射波强度与散射微分截面应比自由电子情形多一个因子 ξ^2,即

$$\begin{cases} I_s = \left(\dfrac{r_e}{r} \right)^2 I_i \left[\dfrac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2} \right] \sin^2 \alpha \\ \dfrac{d\sigma_s}{d\Omega} = r_e^2 \left[\dfrac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2} \right] \sin^2 \alpha \end{cases} \tag{12.2.6}$$

对于非偏振的入射波，对入射波的偏振进行平均后得微分散射截面为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_s}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{1}{2}r_c^2(1+\cos^2\theta)\left[\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega\gamma)^2}\right] \tag{12.2.7}$$

为简明起见，已去掉表示平均的记号(下同)．平均散射总截面是

$$\sigma_s=\frac{8}{3}\pi r_c^2\left[\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega\gamma)^2}\right] \tag{12.2.8}$$

讨论：

(1) 对于强束缚电子，$\omega\ll\omega_0$，故

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_s}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{1}{2}r_c^2(1+\cos^2\theta)\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4,\quad \sigma_s=\frac{8}{3}\pi r_c^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 \tag{12.2.9}$$

可见，对于频率远小于电子固有频率的低频入射波，散射截面与频率的四次方成正比．这便是所谓 Rayleigh 散射．

(2) 对于弱束缚电子，$\omega\gg\omega_0$，故

$$\mathrm{d}\sigma_s/\mathrm{d}\Omega=r_c^2(1+\cos^2\theta)/2,\quad \sigma_s=8\pi r_c^2/3 \tag{12.2.10}$$

这便是 Thomson 散射．然而前面所述的低速时的近似条件之一是要求电磁波的波长较长($\lambda\gg vT$)即频率较低($\varepsilon=\hbar\omega/mc^2\approx0$)．这种低速近似的结果仅适用于低频范围．事实上，经典的 Thomson 散射公式仅当电磁波频率不太高时才和实验数据是一致的．当电磁波频率增大时，朝前的散射增强，向后的散射减弱．这时 Thomson 散射公式失效，而必须用量子电动力学得到的 Klein－Nishina 公式才与实验符合．

(3) 若 $\omega\approx\omega_0$，则

$$(\omega_0^2-\omega^2)^2\approx4\omega_0^2(\omega-\omega_0)^2$$

故有

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\sigma_s}{\mathrm{d}\Omega}=\dfrac{1}{8}r_c^2(1+\cos^2\theta)\left[\dfrac{\omega_0^2}{(\omega-\omega_0)^2+(\gamma/2)^2}\right]\\ \sigma_s=\dfrac{2}{3}\pi r_c^2\left[\dfrac{\omega_0^2}{(\omega-\omega_0)^2+(\gamma/2)^2}\right]\end{cases} \tag{12.2.11}$$

当 $\omega=\omega_0$ 时，截面达到最大值(且是很尖锐的峰值)：

$$\left.\begin{aligned}&\left.\frac{\mathrm{d}\sigma_s}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\max}=\left.\frac{\mathrm{d}\sigma_s}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\text{Thomson}}\left(\frac{\omega_0}{\gamma}\right)^2\gg\left.\frac{\mathrm{d}\sigma_s}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\text{Thomson}}\\ &\sigma_s|_{\max}=\sigma_s|_{\text{Thomson}}(\omega_0/\gamma)^2\gg\sigma_s|_{\text{Thomson}}\end{aligned}\right\} \tag{12.2.12}$$

这时称为共振散射．

习题 12－2

经典 Zeemann 效应．一个各向同性的带电谐振子，它所受的弹性恢复力为 $-m\omega_0^2\boldsymbol{r}$．现将

它置于均匀恒定的外磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 中.假定粒子速度 $v \ll c$,且辐射阻尼力可以略去.试求振子运动的普遍解及沿磁场方向和垂直磁场方向辐射场的频率和偏振.

答案:$\boldsymbol{r}(t) = A(\boldsymbol{e}_x + \mathrm{i}\boldsymbol{e}_y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_0 + \omega_L/2)t} + B(\boldsymbol{e}_x - \mathrm{i}\boldsymbol{e}_y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_0 - \omega_L/2)t} + C\boldsymbol{e}_z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}$

式中 $\omega_L = eB_0/m$,沿磁场方向观察到频率为 $\omega_0 \pm \omega_L/2$ 的圆偏振波;垂直于磁场方向观察到频率为 ω_0、$\omega_0 \pm \omega_L/2$ 的三个线偏振波.

§12.3　束缚电子对电磁波的吸收

由能量守恒可知,束缚电子从入射电磁波获得的能量的一部分用于克服电子的辐射阻尼作功并以散射波的形式向外辐射出去,另一部分则由于电子所受到的非辐射阻尼而被消耗掉了(如转化为热能).

若入射波强度为 I_i,则按散射截面 σ_s 的定义,平均散射功率 N_s 为

$$\langle N_s \rangle = \sigma_s I_i \tag{12.3.1}$$

式中〈〉表示对其中的量取周期平均值.类似地,吸收截面 σ_a 可由平均吸收功率 N_a 来定义:

$$\langle N_a \rangle = \sigma_a I_i \tag{12.3.2}$$

而

$$\langle N_a \rangle = \frac{1}{T}\int (m\nu \dot{\boldsymbol{x}})\cdot\dot{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[(m\nu\dot{\boldsymbol{x}})^*\cdot\dot{\boldsymbol{x}}] = \frac{1}{2}m\nu|\dot{\boldsymbol{x}}|^2 \tag{12.3.3}$$

式中 ν 表示非辐射的阻尼系数.将前面所得到的电子位移的稳态解代入得

$$\langle N_a \rangle = \frac{e^2E_0^2}{2m}\frac{\omega^2\nu}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega\gamma)^2} = I_i\left(\frac{e^2}{m\varepsilon_0 c}\right)\frac{\omega^2\nu}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega\gamma)^2} \tag{12.3.4}$$

式中利用了入射波强度的表达式(12.1.7).于是,吸收截面为

$$\sigma_a = \left(\frac{e^2}{m\varepsilon_0 c}\right)\frac{\omega^2\nu}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega\gamma)^2} = 4\pi c r_c\frac{\omega^2\nu}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega\gamma)^2} \tag{12.3.5}$$

讨论:

(1) 对于强束缚电子,$\omega \ll \omega_0$,故

$$\sigma_a = 4\pi c r_c \nu\omega^2/\omega_0^4 \tag{12.3.6}$$

可见,对于频率远小于电子固有频率的低频入射波,吸收截面与频率的平方成正比.

(2) 对于弱束缚电子,$\omega \gg \omega_0$,故

$$\sigma_a = 4\pi c r_c \nu/\omega^2 \tag{12.3 7}$$

可见,对于频率远大于电子固有频率的高频入射波,吸收截面与频率的平方成反比.

(3) 若 $\omega\approx\omega_0$,则

$$\sigma_a=\frac{\pi cr_c\nu}{(\omega-\omega_0)^2+(\gamma/2)^2} \tag{12.3.8}$$

当 $\omega=\omega_0$时,吸收截面达到最大值:

$$\sigma_a|_{max}=4\pi cr_c\nu/\gamma^2 \tag{12.3.9}$$

这时称为共振吸收,它比远离固有频率时的吸收要强得多.

以上所述的吸收是非辐射性吸收,所吸收的能量真正被耗散掉了.此外,从经典电磁理论看来,即使是以散射波形式射出的那一部分电磁能量,在近共振情形下($\omega\approx\omega_0$),也是一种被电子预吸收并再放射的过程.只要将非辐射阻尼系数换成辐射阻尼系数,便可同上面一样进行分析,结果与式(12.2.9)、(12.2.10)和(12.2.11)完全一样;很明显,只有在共振附近才有强烈的预吸收.下面分析共振情形下能量的吸收与再放射过程.

为了同时讨论辐射性与非辐射性的吸收,定义总截面 σ_t为

$$\sigma_t=\sigma_s+\sigma_a \tag{12.3.10}$$

容易证明:

$$\sigma_t=\frac{4\pi cr_c\omega^2\gamma}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega\gamma)^2} \tag{12.3.11}$$

式中 γ 是非辐射阻尼系数与辐射阻尼系数之和:

$$\gamma=\nu+\gamma_r=\nu+\frac{2}{3}\frac{r_c\omega^2}{c} \tag{12.3.12}$$

设入射波的频谱分布为 $I_i(\omega)$,总强度为

$$I_i=\int d\omega I_i(\omega) \tag{12.3.13}$$

电子在单位时间内所吸收能量为

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dt}&=\int_0^\infty d\omega\frac{d^2W}{dtd\omega}=\int_0^\infty d\omega I_i(\omega)\sigma_t(\omega)\\&=\int_0^\infty d\omega 4\pi cr_cI_i(\omega)\frac{\omega^2\gamma}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega\gamma)^2}\end{aligned} \tag{12.3.14}$$

在共振附近有

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dt}&=\int_0^\infty d\omega\pi cr_cI_i(\omega)\frac{\gamma}{(\omega-\omega_0)^2+(\gamma/2)^2}\\&\approx\pi cr_cI_i(\omega_0)[\nu+\gamma_r(\omega_0)]\int_0^\infty\frac{d\omega}{(\omega-\omega_0)^2+(\gamma/2)^2}\\&\approx 2\pi^2cr_cI_i(\omega_0)\left(\frac{\nu}{\gamma}+\frac{2r_c\omega^2}{3c\gamma}\right)\end{aligned}$$

$$=\frac{\pi e^2}{2m\varepsilon_0 c}I_i(\omega_0)\left(\frac{\nu}{\gamma}+\frac{2r_c\omega^2}{3c\gamma}\right) \tag{12.3.15}$$

式中最后的方括号的值为1(这是能量守恒的结果),方括号内第一项的贡献表示共振情形下能量的非辐射性吸收,而第二项的贡献则是辐射性共振吸收,后者恰等于共振散射功率,即每单位时间内放射的能量.

§12.4　电荷体系对电磁波的散射

为简单起见,假设入射波频率远大于由多电子组成的体系中所有电子的固有频率,且体系中的电子都只作低速运动.在约为几个入射波周期的时间间隔内,各电子的运动范围很小,电子之间的相互作用可以忽略,整个体系可视为自由局域电子的集合.

在外场 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)]$ 作用下,体系中第 i 个电子的运动方程为

$$m\ddot{\boldsymbol{x}}'_i=-m\gamma\dot{\boldsymbol{x}}'-e\boldsymbol{E}_0e^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}'_i-\omega t')} \tag{12.4.1}$$

式中 γ 是辐射阻尼系数.方程的稳态解为

$$\boldsymbol{x}'_i=\frac{e\boldsymbol{E}_0}{m\omega(\omega+\mathrm{i}\gamma)}e^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}'_i-\omega t')} \tag{12.4.2}$$

若入射波的频率 $\omega\gg\gamma$,则

$$\boldsymbol{x}'_i=\frac{e\boldsymbol{E}_0}{m\omega^2}e^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}'_i-\omega t')} \tag{12.4.3}$$

第 i 个电子所激发的散射波的电场为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{is}&=\frac{-e}{4\pi\varepsilon_0c^2R_i^3}\boldsymbol{R}_i\times(\boldsymbol{R}_i\times\ddot{\boldsymbol{x}}'_i)\\&=\frac{e^2E_0}{4\pi\varepsilon_0mc^2R_i^3}[\boldsymbol{R}_i\times(\boldsymbol{R}_i\times\boldsymbol{e}_0)]e^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}'_i}e^{\mathrm{i}(kR_i-\omega t)}\end{aligned} \tag{12.4.4}$$

式中 $\boldsymbol{e}_0=\boldsymbol{E}_0/E_0$,而 $\boldsymbol{R}_i=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'_i$ 是场点相对于源点的矢径.整个体系所激发的散射波的电场强度为

$$\boldsymbol{E}_s=\frac{e^2E_0}{4\pi\varepsilon_0mc^2}\sum_i\frac{\boldsymbol{R}_i\times(\boldsymbol{R}_i\times\boldsymbol{e}_0)}{R_i^3}e^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}'_i}e^{\mathrm{i}(kR_i-\omega t)} \tag{12.4.5}$$

若电子体系局限在小区域内,由于仅考虑辐射场,故可在相位因子中取近似 $R_i\approx r-\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{n}$,将其余的 $\boldsymbol{R}_i$ 代之以场点的矢径 $\boldsymbol{r}$,于是有

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_s=\dfrac{e^2E_0}{4\pi\varepsilon_0mc^2r}[\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{e}_0)]e^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}\displaystyle\sum_i e^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}'_i}\\\boldsymbol{B}_s=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_s/c\end{cases} \tag{12.4.6}$$

式中 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{k}-k\boldsymbol{n}$ 是入射波矢 $\boldsymbol{k}$ 与散射波矢 $\boldsymbol{k}'=k\boldsymbol{n}$ 之差.

散射波强度 I_s 为

$$I_s = \langle \boldsymbol{s}_s \rangle \cdot \boldsymbol{n} \frac{e^4 E_0^2}{16\pi\epsilon_0 m^2 c^3 r^2} \sin^2\alpha \left\langle \left| \sum_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}'_i} \right|^2 \right\rangle$$

$$= \left(\frac{r_c}{r}\right)^2 I_i \sin^2\alpha \left\langle \left| \sum_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}'_i} \right|^2 \right\rangle \tag{12.4.7}$$

式中 α 是散射波波矢 $\boldsymbol{n}$ 与入射波电场方向的夹角. 上式与单自由电子情形相比仅多一个因子

$$\left\langle \left| \sum_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}'_i} \right|^2 \right\rangle = \left\langle N + \sum_{i\neq j} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{x}'_i - \boldsymbol{x}'_j)} \right\rangle \tag{12.4.8}$$

式中 $\boldsymbol{x}_i$ 是时间的周期函数,而 N 为体系中的(准)自由电子数,若体系是一个原子,N 便是原子序数.

若入射波的波长 λ 远大于散射体的尺度 d,则 $|\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}'_i| \ll 1$,故

$$\left\langle \left| \sum_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}'_i} \right|^2 \right\rangle \approx N^2 \tag{12.4.9}$$

若入射波的波长远小于散射体的尺度,则 $|\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}'_i| \gg 1$,故而 $\exp[\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{x}'_i - \boldsymbol{x}'_j)]$ 是一个振动很快的函数,其时间平均值为零,于是

$$\left\langle \left| \sum_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}'_i} \right|^2 \right\rangle \approx N \tag{12.4.10}$$

由此可知,对线偏振入射波的微分散射截面为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_s}{\mathrm{d}\Omega} = \begin{cases} N^2 r_c^2 \sin^2\alpha, & \text{当 } \lambda \gg d \\ N r_c^2 \sin^2\alpha, & \text{当 } \lambda \ll d, \text{且散射角 } \theta \text{ 不太小} \end{cases} \tag{12.4.11}$$

对于非偏振的入射波,对入射波的偏振进行平均后的微分散射截面为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_s}{\mathrm{d}\Omega} = \begin{cases} N^2 r_c^2 (1+\cos^2\theta), & \text{当 } \lambda \gg d \\ N r_c^2 (1+\cos^2\theta), & \text{当 } \lambda \ll d, \text{且散射角 } \theta \text{ 不太小} \end{cases} \tag{12.4.12}$$

可见,小区域自由电子体系的散射截面当 $\lambda \gg d$ 且散射角不太小时是各个自由电子散射截面的强相干叠加,因而与原子序数的平方成正比;而当 $\lambda \ll d$ 时是各个自由电子散射截面的非相干叠加,因而与原子序数的一次方成正比.

习题 12－4

Rayleigh 散射公式. 波长为 λ、强度为 I_0 的线偏振平面电磁波被一体积为 V 的气体散射,气体中每单位体积内有 N 个相同的谐振电子. 取入射波的偏振方向为极轴方向. 若散射是非相干的,且阻尼可忽略. 证明:每单位时间内散射到沿 (θ,ϕ) 方向的立体角 $\mathrm{d}\Omega$ 中的能量为

$$\mathrm{d}W = [V\pi^2 I_0 (n^2-1)^2/(N n^4 \lambda^4)] \sin^2\theta \mathrm{d}\Omega$$

式中 n 是气体的折射率.

§12.5　宏观物体对电磁波的散射

设有一形状任意的非磁性宏观物体，物体内既没有自由电荷也没有传导电流，其介电常量为 $\varepsilon(\boldsymbol{x})$. 设一平面电磁波

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}=\boldsymbol{e}_0 E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)} \tag{12.5.1}$$

入射到该物体上，在物体内激发极化电荷与诱导电流. 将物体看成由许多宏观小体积元组成，并设每一小体积元中的极化强度为 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x},t)$. 这些小体积元中变化的极化强度所对应的极化电荷与诱导电流

$$\rho_{\mathrm{p}}=-\nabla\cdot\boldsymbol{p},\quad \boldsymbol{j}_{\mathrm{p}}=\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial t} \tag{12.5.2}$$

产生的辐射场的叠加便是散射波的场 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{x},t)$. 总场强为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}+\boldsymbol{E}_{\mathrm{s}} \tag{12.5.3}$$

它与物体小体积元中的极化强度满足下述局域关系：

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x},t)=\varepsilon_0(\varepsilon_{\mathrm{r}}-1)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=\chi(\boldsymbol{x},t)\varepsilon_0\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) \tag{12.5.4}$$

极化电荷与电流分布(12.5.2)产生的推迟势为

$$\begin{cases}\varphi_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{x},t)=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int \mathrm{d}^3x'\,\frac{-[\nabla'\cdot\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}',t')]}{R}\\[2ex] \boldsymbol{A}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{x},t)=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \mathrm{d}^3x'\,\frac{1}{R}\left[\frac{\partial \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}',t')}{\partial t'}\right]\end{cases} \tag{12.5.5}$$

式中 R 是场点 $\boldsymbol{x}$ 到源点 $\boldsymbol{x}'$(注意：这里源点是静止的)的距离，而[ ]表示在时刻 $t'=t-R/c$ 取值.

由 $\boldsymbol{E}=-(\nabla\varphi+\partial\boldsymbol{A}/\partial t)$得

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\int \mathrm{d}^3x'\,\frac{-[\nabla'\cdot\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}',t')]}{R}-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathrm{d}^3x'\,\frac{1}{R}\left[\frac{\partial \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}',t')}{\partial t'}\right] \tag{12.5.6}$$

又

$$\begin{cases}\displaystyle\int \mathrm{d}^3x'\,\frac{[\nabla'\cdot\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}',t')]}{R}=\int \mathrm{d}^3x'\left\{\nabla'\cdot\frac{[\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}',t')]}{R}-[\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}',t')]\cdot\nabla'\frac{1}{R}\right\}\\ \qquad=\displaystyle\oint \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{s}}\cdot\frac{[\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}',t')]}{R}-\int \mathrm{d}^3x'[\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}',t')]\cdot\nabla'\frac{1}{R}\\ \qquad=\displaystyle\int \mathrm{d}^3x'[\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}',t')]\cdot\nabla\frac{1}{R}=\nabla\cdot\int \mathrm{d}^3x'\frac{[\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}',t')]}{R}\\ \displaystyle\int \mathrm{d}^3x'\,\frac{1}{R}\left[\frac{\partial \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}',t')}{\partial t'}\right]=\frac{\partial}{\partial t}\int \mathrm{d}^3x'\,\frac{[\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}',t')]}{R}\end{cases} \tag{12.5.7}$$

式中应用了物体外为真空(即无极化电荷与极化电流分布)的条件.于是散射场可写为

$$\boldsymbol{E}_s(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\nabla\cdot\int \mathrm{d}^3x'\frac{[\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}',t')]}{R}-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \mathrm{d}^3x'\frac{[\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}',t')]}{R} \tag{12.5.8}$$

将关于电偶极矩的积分用推迟 Green 函数表出

$$\int \mathrm{d}^3x'\frac{[\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}',t')]}{R}=\int \mathrm{d}^3x'\mathrm{d}t'\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}',t')\frac{\delta(t'+R/c-t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$$

后利用推迟 Green 函数的性质可得

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\int \mathrm{d}^3x'\frac{[\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}',t')]}{4\pi R}=\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x},t) \tag{12.5.9}$$

于是式(12.5.8)可写成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_s(\boldsymbol{x},t)&=\nabla\nabla\cdot\int \mathrm{d}^3x'\frac{[\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}',t')]}{4\pi\varepsilon_0 R}-\nabla^2\int \mathrm{d}^3x'\frac{[\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}',t')]}{4\pi\varepsilon_0 R}-\frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x},t)\\&=\nabla\times\left(\nabla\times\int \mathrm{d}^3x'\frac{[\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}',t')]}{4\pi\varepsilon_0 R}\right)-\frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x},t)\end{aligned} \tag{12.5.10}$$

注意:$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x},t)$在物体内部不为零,但在物体外部的真空中为零.上式在散射体内外成为

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_{内}(\boldsymbol{x})=-\chi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{E}_{内}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}+\\\qquad\dfrac{1}{4\pi}\nabla\times\left(\nabla\times\int \mathrm{d}^3x'\dfrac{\chi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{E}_{内}(\boldsymbol{x}')\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\right)\\\boldsymbol{E}_{外}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}+\dfrac{1}{4\pi}\nabla\times\left(\nabla\times\int \mathrm{d}^3x'\dfrac{\chi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{E}_{外}(\boldsymbol{x}')\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\right)\end{cases} \tag{12.5.11}$$

这是求解宏观非磁性物体散射问题的积分方程.

若 $\chi\ll1$,可将散射体内外的场对 χ 展开(Born 展开):

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_{内}=\boldsymbol{E}_1^{(0)}+\chi\boldsymbol{E}_1^{(1)}+\cdots\\\boldsymbol{E}_{外}=\boldsymbol{E}_2^{(0)}+\chi\boldsymbol{E}_2^{(1)}+\cdots\end{cases} \tag{12.5.12}$$

代入方程(12.5.11)中并比较左右两边 χ 的幂次,便得到各级近似解,如

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_1^{(0)}=\boldsymbol{E}_2^{(0)}=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\\\boldsymbol{E}_1^{(1)}=\dfrac{1}{4\pi}\nabla\times\left(\nabla\times\int \mathrm{d}^3x'\dfrac{\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kR+\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}')}}{R}\right)-\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\\\boldsymbol{E}_2^{(1)}=\dfrac{1}{4\pi}\nabla\times\left(\nabla\times\int \mathrm{d}^3x'\dfrac{\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kR+\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}')}}{R}\right)\end{cases} \tag{12.5.13}$$

由此可见,零级近似正是入射波,高级近似才对应散射波.这样便得到散射积分方程的无穷级数解,级数的收敛性条件为

$$|\chi E^{(1)}|\ll E_0 \tag{12.5.14}$$

当仅考虑远场时，可将被积函数分母中的 R 代之以场点到源中某定点（坐标原点）的距离 r，并将位相中的 R 代之以 $r-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}'$，只保留 $1/r$ 的一次方，便有

$$\boldsymbol{E}_2^{(1)}=-\frac{k^2}{4\pi r}[\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_0)]\int \mathrm{d}^3x'\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}-k\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{x}'} \tag{12.5.15}$$

电介质球散射

若散射体是半径为 a 的电介质球，可将上式右端的积分算出：

$$\int \mathrm{d}^3x'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}'}=\int r'^2\mathrm{d}r'\mathrm{d}\Omega'\mathrm{e}^{\mathrm{i}qr'\cos\theta'}=4\pi\frac{\sin qa-qa\cos qa}{q^3}$$

$$=4\pi a^3\sqrt{\frac{\pi}{(qa)^3}}\mathrm{J}_{3/2}(qa) \tag{12.5.16}$$

式中已取 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{k}-k\boldsymbol{n}$ 为极轴．故在一级近似下这电介质球被外场极化而激发的散射场为

$$\boldsymbol{E}_s=\chi\boldsymbol{E}_2^{(1)}$$

$$=-\sqrt{\frac{\pi a^3}{q^3}}(\varepsilon_r-1)k^2\mathrm{J}_{3/2}(qa)[\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_0)]\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r} \tag{12.5.17}$$

式中 $q=|\boldsymbol{k}-k\boldsymbol{n}|=2k\sin\theta/2$，$\theta$ 是入射波矢与散射波矢之间的夹角（称为散射角）．由此可得对于线偏振入射波的微分散射截面为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_s}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{|\boldsymbol{E}_s|^2r^2}{E_0^2}=\frac{\pi\omega^4a^3}{c^4q^3}(\varepsilon_r-1)^2\mathrm{J}_{3/2}^2(qa)(\sin^2\phi+\cos^2\phi\cos^2\theta) \tag{12.5.18}$$

式中已取入射波矢的方向为 z 轴方向，而入射波的偏振方向与 x 轴的夹角为 ϕ，散射波矢方向 $\boldsymbol{n}$ 则位于平面 $y=0$ 上，如图 12.2 所示．

如果入射波是非偏振的，则必须对入射波的偏振进行平均，也就是对方位角 ϕ 求平均，于是有

$$\overline{\frac{\mathrm{d}\sigma_s}{\mathrm{d}\Omega}}=\frac{\pi\omega^4a^3}{2c^4q^3}(\varepsilon_r-1)^2\mathrm{J}_{3/2}^2(qa)(1+\cos^2\theta) \tag{12.5.19}$$

讨论：

(1) 当 $ka\ll1$（因而 $qa\ll1$）时，即在入射波波长远大于电介质球半径的情形，利用 Bessel 函数的渐近表达式

$$\mathrm{J}_{3/2}(qa)\approx\sqrt{(qa)^3/(9\pi)}$$

可得对频率 ω 的电磁波的微分散射截面：

$$\overline{\frac{\mathrm{d}\sigma_s}{\mathrm{d}\Omega}}=\frac{\omega^4a^6}{18c^4}(\varepsilon_r-1)^2(1+\cos^2\theta) \tag{12.5.20}$$

总散射截面是

$$\bar{\sigma}_s=\frac{8(\varepsilon_r-1)^2}{27c^4}\omega^4a^6\propto\omega^4a^6 \tag{12.5.21}$$

(2) 当 $ka \gg 1$ 时，即在入射波波长远小于电介质球半径的情形，这时 $[(qa)^{-3/2}J_{3/2}(qa)]^2$[**注意**：$q=2ka\sin(\theta/2)$]仅在 $\theta \ll 1/(ka)$时才显著不为零，朝前的散射是主要的，因而可取 $1+\cos^2\theta \approx 2$. 散射截面为

$$\bar{\sigma}_s = \frac{\pi\omega^4 a^3}{c^4}\int \mathrm{d}\cos\theta \frac{1}{q^3}(\varepsilon_r-1)^2 J_{3/2}^2(qa) = \frac{\pi(\varepsilon_r-1)^2}{18c^2}\omega^2 a^4 \propto \omega^2 a^4$$

习题 12-5

1. 一线偏振的平面波被一半径为 a 的介质小球所散射. 设介质球的介电常量为 ε，磁导率为 μ_0，且入射波的波长 $\lambda \ll a$. 求散射微分截面.

   提示：介质球在近似均匀的外场中被诱导出电偶极矩，由此产生电偶极辐射.

   答案：取入射波的波矢与偏振方向分别为 z 轴与 x 轴方向，令(θ,ϕ)表示散射波波矢方向

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_s}{\mathrm{d}\Omega} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\frac{\omega^4}{c^4}\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)^2}{(\varepsilon+2\varepsilon_0)^2 a^6 E_0^2}(\cos^2\theta\cos^2\phi+\sin^2\phi)$$

2. 平面单色电磁波被任意形状的宏观磁介质物体散射，试确定关于总磁场的积分方程.

3. 证明：作用于散射粒子上的平均力为

$$\langle \boldsymbol{f}\rangle = \sigma_t\langle u\rangle \boldsymbol{n}_0$$

   式中 σ_t 是总截面，$\langle u\rangle$ 是平均入射波场的能量密度，$\boldsymbol{n}_0$ 是入射波的传播方向.

4. 有一半径为 a 的导电小球，其表面阻抗为 $\rho=\rho_1+\mathrm{i}\rho_2$，且 $|\rho| \ll 1$. 一波长为 $\lambda \gg a$ 的线偏振平面电磁波入射到小球上，波的部分能量被吸收. 试求吸收截面.

   提示：因表面阻抗很小，球面上的磁场可视为均匀场中的超导体球面上的磁场(参考第五章习题 5-2 第 12 题)；由良导体中电磁场强度之间的关系确定相应的电场后，便可将平均 Poynting 矢量对球面积分得到耗散能量.

§12.6 光学定理

设一单色平面波被散射体(电子或宏观物体)所散射，则离散射体远处的电磁场的普遍形式为

$$\boldsymbol{E} = E_0\left[\boldsymbol{e}_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}kz} + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{n})\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\right] \tag{12.6.1}$$

式中 E_0 与 $\boldsymbol{e}_i$ 分别是入射波的振幅与偏振矢量，$E_0\boldsymbol{F}(\boldsymbol{n})$ 是沿 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}/r$ 方向的散射波振幅，而 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{n})$ 常称之为散射振幅. 散射振幅的具体形式与散射体的性质有关，例如，若散射体是谐振电子便有[从式(12.2.3)得]

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{n}) = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}\frac{\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2-\mathrm{i}\omega\gamma}[\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{e}_i)] \tag{12.6.2}$$

若散射体是半径为 a 的电介质球，在一级近似下便有[从式(12.5.17)得]

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{n}) = -\sqrt{\frac{\pi a^3}{q^3}}(\varepsilon_r-1)k^2 J_{3/2}(qa)[\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{e}_i)] \tag{12.6.3}$$

由于散射波是横波，故

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{n})=0 \tag{12.6.4}$$

由 $\boldsymbol{B}=\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\nabla\times\boldsymbol{E}$ 得

$$\boldsymbol{H}=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0\left[\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_i\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}+\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{n})\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\right] \tag{12.6.5}$$

式中 $\boldsymbol{e}_z$ 是入射波的传播方向.

散射体的吸收截面正比于通过以散射体为中心的球面流向球心的能流. 因而

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_a}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{-\langle\boldsymbol{s}\rangle\cdot\boldsymbol{n}r^2}{\langle\boldsymbol{s}_i\rangle\cdot\boldsymbol{e}_i} \tag{12.6.6}$$

式中 $\boldsymbol{s}$ 是(入射与散射)电磁波的总能流. 于是

$$\begin{aligned}\sigma_a&=\frac{-\sqrt{\mu_0}}{E_0^2\sqrt{\varepsilon_0}}\mathrm{Re}\int r^2\mathrm{d}\Omega(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)\cdot\boldsymbol{n}\\&=\frac{-\sqrt{\mu_0}}{2E_0^2\sqrt{\varepsilon_0}}\int r^2\mathrm{d}\Omega(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*+\boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{n}\end{aligned} \tag{12.6.7}$$

将离散射体远处总电磁场的表达式代入得

$$\begin{aligned}\sigma_a=&-\frac{1}{2}\int\mathrm{d}\Omega r\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r-z)}[\boldsymbol{e}_i^*\cdot\boldsymbol{F}+(\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{e}_i^*\cdot\boldsymbol{F})-(\boldsymbol{e}_i^*\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{F})]-\\&\frac{1}{2}\int\mathrm{d}\Omega r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(r-z)}[\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{F}^*+(\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{F}^*)-(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{F}^*)]-\\&\int\mathrm{d}\Omega r^2\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{n}-\int\mathrm{d}\Omega|\boldsymbol{F}|^2\end{aligned} \tag{12.6.8}$$

现计算上式右端的积分. 首先，由对称性知

$$\int\mathrm{d}\Omega\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{n}=0 \tag{12.6.9}$$

再由散射截面公式(12.1.9)得

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_s}{\mathrm{d}\Omega}=r^2\frac{|\boldsymbol{E}_s|^2}{E_0^2}=|\boldsymbol{F}|^2 \tag{12.6.10}$$

因而

$$\sigma_s=\int\mathrm{d}\Omega|\boldsymbol{F}|^2 \tag{12.6.11}$$

此外易得

$$\begin{aligned}&\int\mathrm{d}\Omega r\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r-z)}f(\boldsymbol{n})=\frac{1}{\mathrm{i}k}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr(1-\cos\theta)}f(\boldsymbol{n})\\&=\frac{1}{\mathrm{i}k}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\left[f(\boldsymbol{e}_z)-f(-\boldsymbol{e}_z)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}kr}+\frac{1}{\mathrm{i}kr}\int_\pi^0\mathrm{d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr(1-\cos\theta)}\frac{\partial f(\boldsymbol{n})}{\partial\cos\theta}\right]\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{i}k}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi[f(\boldsymbol{e}_z)-f(-\boldsymbol{e}_z)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega r/c}+O(1/r)] \tag{12.6.12}$$

式中第三项可略去(例如可取 r 很大);而第二项带有一个(当 r 很大时)急剧振荡的因子 $\exp(2\mathrm{i}r\omega/c)$,注意到任何实际的"单色波"都分布在某一狭窄的频率间隔内,故第二项对频率间隔平均后为零.于是有

$$\int \mathrm{d}\Omega r\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r-z)}f(\boldsymbol{x})=\frac{2\pi}{\mathrm{i}k}f(\boldsymbol{e}_z) \tag{12.6.13}$$

应用此式得

$$\begin{cases}\int \mathrm{d}\Omega r\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r-z)}\boldsymbol{e}_i^*\cdot\boldsymbol{F}=\dfrac{2\pi}{\mathrm{i}k}[\boldsymbol{e}_i^*\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{e}_z)]\\ \int \mathrm{d}\Omega r\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r-z)}(\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{e}_i^*\cdot\boldsymbol{F})=\dfrac{2\pi}{\mathrm{i}k}[\boldsymbol{e}_i^*\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{e}_z)]\\ \int \mathrm{d}\Omega r\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r-z)}(\boldsymbol{e}_i^*\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{F})=\dfrac{2\pi}{\mathrm{i}k}[\boldsymbol{e}_i^*\cdot\boldsymbol{e}_z][\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{e}_z)]=0\\ \int \mathrm{d}\Omega r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(r-z)}\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{F}^*=-\dfrac{2\pi}{\mathrm{i}k}[\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{e}_z)]\\ \int \mathrm{d}\Omega r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(r-z)}(\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{F}^*)=-\dfrac{2\pi}{\mathrm{i}k}[\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{e}_z)]\\ \int \mathrm{d}\Omega r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(r-z)}(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{F}^*)=-\dfrac{2\pi}{\mathrm{i}k}[\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_z][\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{e}_z)]=0\end{cases} \tag{12.6.14}$$

式中利用了入射波与散射波都是横波的性质即 $\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_z=0$ 与 $\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{e}_z)=0$.

将上述积分结果代入式(12.6.8)中得

$$\sigma_a=-\sigma_s+\frac{2\mathrm{i}\pi}{k}[\boldsymbol{e}_i^*\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{e}_z)]-\frac{2\mathrm{i}\pi}{k}[\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{e}_z)] \tag{12.6.15}$$

此即

$$\sigma_t=\frac{4\pi}{k}\mathrm{Im}[\boldsymbol{e}_i^*\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{e}_z)] \tag{12.6.16}$$

它说明散射总截面与向前的散射波的散射振幅在入射波偏振方向上的投影的虚部成正比,这一结果称之为光学定理.

习题 12-6

一非偏振的平面波被一半径为 a 的导体小球所散射.设导体球的介电常量为 ε,电导率为 σ_c,磁导率为 μ_0.若入射波的波长 $\lambda\gg a$,且 $|\varepsilon_r-1|\ll 1$.

(1) 求总散射截面和吸收截面;

(2) 由光学定理计算总截面.

第十三章　电磁波的衍射

本章首先叙述 Kirchhoff 衍射理论，导出 Huygens－Fresnel 原理，并应用于分析小孔衍射问题；继而介绍矢量衍射理论．最后考察晶体对电磁波的衍射规律．

§ 13.1 Kirchhoff 衍射理论

当电磁波在传播过程中遇到障碍物或通过屏上的小孔时，其行进方向会发生改变的现象称为衍射. 所谓衍射问题，实际上是在某一闭合曲面上的电磁场分布给定的条件下求曲面内各点场强的边值问题. 通常在求解中都采用了某些近似. Kirchhoff 衍射理论(亦称为标量衍射理论)便是在忽略电磁场各分量间的相互影响的前提下，孤立地求解电磁场的任一直角分量 ψ 的一种近似处理方案.

13.1.1 Kirchhoff 积分公式

设 V 为封闭曲面 S 所包围的体积，P 为 V 内一点，而 $\boldsymbol{x}$ 为该点的矢径. 在 Green 公式

$$\int_V \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}'[\psi\nabla'^2\phi-\phi\nabla'^2\psi]=\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}'\cdot[\psi\nabla'\phi-\phi\nabla'\psi]$$

中(这里，$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 是从区域 V 指向外部的面元)，令

$$\psi=\psi(\boldsymbol{x}'),\quad \phi=G_r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') \tag{13.1.1}$$

式中 ψ 是电磁场的任一直角分量(E_i 或 B_i)的振幅，它在 V 内满足 Helmholtz 方程

$$(\nabla^2+k^2)\psi=0 \tag{13.1.2}$$

在 V 的边界 S 上的值与法向微商

$$\psi|_S,\quad \partial\psi/\partial n'|_S$$

是已知的($\boldsymbol{n}'$ 为包围区域 V 的曲面 S 的外法向)；而 $G_r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$ 为频域中的无界空间推迟 Green 函数，已满足方程

$$[\nabla^2+k^2]G_r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=-\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{13.1.3}$$

于是有

$$\psi(\boldsymbol{x})=-\oint_S \mathrm{d}\sigma'[\psi(\boldsymbol{x}')\boldsymbol{n}'\cdot\nabla'G_r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')-G_r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\boldsymbol{n}'\cdot\nabla'\psi(\boldsymbol{x}')]$$

利用 $G_r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$ 的具体表达式

$$G_r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=\frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R},\quad k=\frac{\omega}{c}$$

式中 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'$，而 $R=|R|$. 便有

$$\psi(\boldsymbol{x})=\frac{-1}{4\pi}\oint_S \mathrm{d}\sigma'\left[\psi(\boldsymbol{x}')\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\right)-\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\right)\frac{\partial}{\partial n'}\psi(\boldsymbol{x}')\right] \tag{13.1.4}$$

利用

$$\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\right)=\boldsymbol{n}'\cdot\left(\mathrm{i}k-\frac{1}{R}\right)\frac{\boldsymbol{R}}{R} \tag{13.1.5}$$

可完成对 Green 函数的方向微商运算，因而有

$$\psi(\boldsymbol{x})=\oint_S \frac{e^{ikR}}{R}\left\{\frac{1}{4\pi}d\sigma'\boldsymbol{n}'\cdot\left[\nabla'+\left(ik-\frac{1}{R}\right)\frac{\boldsymbol{R}}{R}\right]\psi(\boldsymbol{x}')\right\} \tag{13.1.6}$$

式(13.1.4)或(13.1.6)称为 Kirchhoff 积分公式. 被积式中的因子 $\exp(ikR)/R$ 表示由曲面上的点 $\boldsymbol{x}'$ 向 V 内的点 $\boldsymbol{x}$ 传播的波，因而曲面上每一个点都可视为发射球面波的次级波源；次级波源的强度由被积式中花括号内的量表示，即由 $\boldsymbol{x}'$ 上的场的运动状态也就是 ψ 与 $\partial\psi/\partial n'$ 确定；V 内的点 $\boldsymbol{x}$ 处的波则是由曲面 S 上的所有点的次级波源发射的子波的叠加.

对于衍射问题，Kirchhoff 积分公式中的闭合曲面 S 可分为两部分：屏及屏上的孔一起形成的面 S_1，在无穷远处的一个大球面的一部分 S_2. 在衍射区域中的场是通过面 S_1(例如其上的小孔)透射进来的(见图 13.1)，它们在面 S_2 附近是出射波，故应满足渐近条件(亦称为辐射条件)：

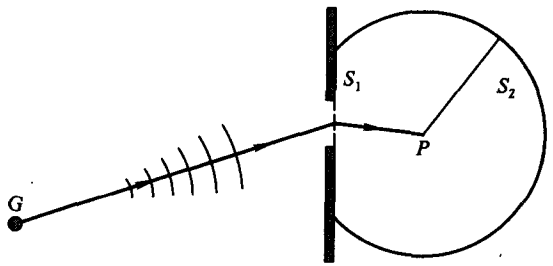


图 13.1　Kirchhoff 衍射

$$\psi(x)\to f(\theta,\phi)\frac{e^{ikr}}{r},\quad \frac{\partial\psi}{\partial n'}=\frac{\partial\psi}{\partial r}\to\left(ik-\frac{1}{r}\right)\psi \tag{13.1.7}$$

于是，当部分球面 S_2 的半径趋于无穷大时，Kirchhoff 积分公式中在面 S_2 上的积分至少应像 $1/r$ 那样趋于零. 这样，在衍射问题中式(13.1.6)成为 Kirchhoff 衍射积分公式：

$$\psi(\boldsymbol{x})=-\frac{1}{4\pi}\int_{S_1} d\sigma'\frac{e^{ikR}}{R}\boldsymbol{n}'\cdot\left[\nabla'+\left(ik-\frac{1}{R}\right)\frac{\boldsymbol{R}}{R}\right]\psi(\boldsymbol{x}') \tag{13.1.8}$$

注意：为了方便起见，式中面元 $d\sigma'$ 的方向 $\boldsymbol{n}'$ 已改为指向衍射区域(即改变了一个符号).

13.1.2　Huygens－Fresnel 原理

假设由源点 G(取为坐标原点)发出一球面电磁波

$$\phi(\boldsymbol{x})=A\frac{e^{ikr}}{r} \tag{13.1.9}$$

代入 Kirchhoff 衍射积分公式得

$$\psi(\boldsymbol{x})=-\frac{A}{4\pi}\int_{S_1}\mathrm{d}\sigma'\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r'+R)}}{r'R}\left\{\mathrm{i}k[\cos(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{n}')+\cos(\boldsymbol{R},\boldsymbol{n}')]-\left[\frac{1}{r'}\cos(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{n}')+\frac{1}{R}\cos(\boldsymbol{R},\boldsymbol{n}')\right]\right\} \tag{13.1.10}$$

式中

$$\begin{cases}\cos(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{n}')=\boldsymbol{n}'\cdot\nabla' r'=\partial r'/\partial\boldsymbol{n}'\\ \cos(\boldsymbol{R},\boldsymbol{n}')=-\boldsymbol{n}'\cdot\nabla' R=-\partial R/\partial\boldsymbol{n}'\end{cases} \tag{13.1.11}$$

由方程(13.1.10)可知 $P(x)$点在时刻 t 的电磁场为

$$\psi(\boldsymbol{x},t)=\int_{S_1}\mathrm{d}\sigma'\frac{-A}{4\pi r'R}\left\{k\sin[\omega t-k(r'+R)][\cos(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{n}')+\cos(\boldsymbol{R},\boldsymbol{n}')]-\cos[\omega t-k(r'+R)]\left[\frac{\cos(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{n}')}{r'}+\frac{\cos(\boldsymbol{R},\boldsymbol{n}')}{R}\right]\right\} \tag{13.1.12}$$

若 $kR\gg1$ 及 $kr'\gg1$,则上式可写为

$$\psi(\boldsymbol{x},t)=-\int_{S_1}\mathrm{d}\sigma'\frac{kA}{4\pi r'R}[\cos(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{n}')+\cos(\boldsymbol{R},\boldsymbol{n}')]\sin[\omega t-k(r'+R)] \tag{13.1.13}$$

由式(13.1.13)可见,从 G 点发出的频率很高的电磁波对 P 点的作用可视为包围 P 点的封闭曲面 S 上各点所发出的球面次波在 P 点相互干涉的结果.此即光学中的 Huygens－Fresnel 原理.传播至 S 面上的点 $\boldsymbol{x}'$的电磁波

$$A\left.\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr'-\omega t)}}{r'}\right|_S \tag{13.1.14}$$

在该点所激发的球面次波的振幅是

$$gA\left.\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr'}}{r'}\right|_S \tag{13.1.15}$$

其中

$$g=\frac{k}{4\pi}[\cos(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{n}')+\cos(\boldsymbol{R},\boldsymbol{n}')] \tag{13.1.16}$$

叫做辐射因子,它是三个方向矢量 $\boldsymbol{r}'/r'$、$\boldsymbol{R}/R$ 和 $\boldsymbol{n}'$的函数.因而这些次球面波的强度具有各向异性.事实上,辐射因子的各向异性是由倾斜因子

$$\cos(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{n}')+\cos(\boldsymbol{R},\boldsymbol{n}') \tag{13.1.17}$$

造成的.若 G、P 与次波波源 $\boldsymbol{x}'$三点在同一条直线上,则当次波波源位于 G、P 之间时

$$\cos(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{n}')=\cos(\boldsymbol{R},\boldsymbol{n}')$$

这时的强度最大;而当次波波源位于 GP 的延长线上时

$$\cos(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{n}') = -\cos(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{n}')$$

这时的强度为零.故球面次波不可能反向传播.在原来的惠更斯原理中,次波波源既可发出向前传播的波,也可发出向后传播的波,但后者并未观测到.在 Huygens－Fresnel 原理中,由于存在辐射因子,不存在次波向后传播的问题.

13.1.3 可逆定理与 Babinet 原理

由 Huygens－Fresnel 原理可看出,源点与观测点是以对称的形式出现在衍射场公式(13.1.13)中的.换言之,位于 G 点的点源在 P 点所产生的衍射效果,与同一点源位于 P 点时在 G 点所产生的衍射效果相同.这一结论便是所谓可逆定理.

若两个屏中任一屏的孔正好是另一屏的不透明部分,则称这两个屏是互补屏.设在保持其他条件不变时将屏 1 代之以与其互补的屏 2 以后,P 点接受到的衍射场由原来的 $\psi_1(P)$改变为 $\psi_2(P)$,则

$$\psi_1(P) + \psi_2(P) = \psi(P) \tag{13.1.18}$$

因而,仅有屏 1 时的场与仅有屏 1 的互补屏 2 时的场之和正好是没有屏时 P 点的场.这一结论称为互补原理或 Babinet 原理.由此易得

$$\begin{cases} \psi_2(P) = \psi(P), & \text{当 } \psi_1(P) = 0 \\ \psi_1(P) = -\psi_2(P), & \text{当 } \psi(P) = 0 \end{cases} \tag{13.1.19}$$

其中第一式是说在仅有屏 1 时场强为零的点(暗点)在改放其互补屏 2 时该点的场强同没放屏时一样(即成为亮点);而第二式则表明,在没有屏时场强为零的点上,放屏 1 时的场强与改放其互补屏 2 时的场强大小相等、相位相反.

§ 13.2 小孔衍射

为了应用 Huygens－Fresnel 原理来分析小孔衍射问题,必须确定屏及屏上的孔所组成的面 S_1 上的波场及波场的法向微商(即所谓边界条件).对于有一小孔的不透明屏,基尔霍夫提出了两个近似假设(Kirchhoff 边界条件):

(a) 屏上的小孔部分 S_0 是完全透明的,即与没有屏时(以上标(i)表示)的场完全一样:

$$\psi|_{S_0} = \psi^{(i)}|_{S_0}, \quad \partial\psi/\partial n'|_{S_0} = \partial\psi^{(i)}/\partial n'|_{S_0} \tag{13.2.1}$$

(b) 屏上未开孔的部分 S'_0 完全不透明,即在屏的背照面有

$$\psi|_{S'_0} = 0, \quad \partial\psi/\partial n'|_{S'_0} = 0 \tag{13.2.2}$$

这两个假设忽略了屏特别是小孔边缘对入射波的扰动,故只有在孔的线度比波长大得多的条件下即当电磁波频率很高(例如为光频)时才接近实际情况.当电

磁波频率不太高时例如在微波波段,小孔线度与电磁波波长可以比拟,孔边缘对入射波的扰动便不可忽略,Kirchhoff 边界条件不成立[这时需要应用 J. Schwinger的基于变分原理提出的微波衍射理论,参见:Phys. Rev. 1948(70):958;1949(75):1 243].

设从点源 G 发出一单色波,通过(与 $z=0$ 平面重合的)不透明无穷平面屏上的小孔而被衍射,求屏的另一边(即 $z>0$ 的区域中)的观测点 P 处的衍射场.按照 Kirchhoff 边界条件,仅屏上小孔部分 S_0 对 Huygens - Fresnel 积分有贡献.为方便起见,将坐标原点 O 取在屏上的小孔中,设屏上的小孔区域内的点 Q、源点 G 与观测点 P 的矢径分别为 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{r}_0$ 与 $\boldsymbol{R}_0$,Huygens - Fresnel 积分可表示为

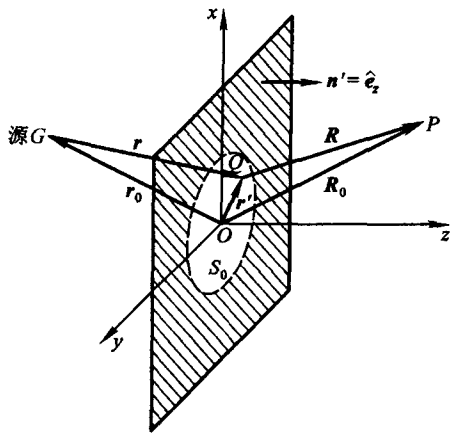


图 13.2 小孔衍射

$$\psi(\boldsymbol{R}_0,t)=-\int_{S_0}\mathrm{d}\sigma'\frac{kA}{4\pi rR}[\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}')+\cos(\boldsymbol{R},\boldsymbol{n}')]\sin[\omega t-k(r+R)] \tag{13.2.3}$$

式中

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0,\quad \boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_0-\boldsymbol{r}',\quad r=|\boldsymbol{r}|,\quad R=|\boldsymbol{R}|$$

需要考虑的长度有三种:屏上的孔的线度 d,源点 G 与观测点 P 离屏的距离 r_0 与 R_0,电磁波的波长 λ.首先考虑前两种长度.为了使衍射图样变得清晰,须使源点 G 与观测点 P 均离屏很远,即

$$r_0\gg r',\quad R_0\gg r'$$

这时有

$$\begin{cases} r=\sqrt{r_0^2+r'^2-2(\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{r}')}\approx r_0\left[1+\dfrac{r'^2}{2r_0^2}-\dfrac{(\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{r}')}{r_0^2}-\dfrac{(\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{r}')^2}{2r_0^4}\right] \\ R=\sqrt{R_0^2+r'^2-2(\boldsymbol{R}_0\cdot\boldsymbol{r}')}\approx R_0\left[1+\dfrac{r'^2}{2R_0^2}-\dfrac{(\boldsymbol{R}_0\cdot\boldsymbol{r}')}{R_0^2}-\dfrac{(\boldsymbol{R}_0\cdot\boldsymbol{r}')^2}{2R_0^4}\right] \end{cases} \tag{13.2.4}$$

于是

$$r+R\approx r_0+R_0+f(x',y')/k \tag{13.2.5}$$

式中

$$f(x',y')=-(l_0+L_0)kx'-(m_0+M_0)ky'+\frac{k}{2}\left[r'^2\left(\frac{1}{r_0}+\frac{1}{R_0}\right)-\frac{(l_0x'+M_0y')^2}{r_0}-\frac{(L_0x'+M_0y')^2}{R_0}\right]+\cdots \tag{13.2.6}$$

这里，(l_0,m_0,n_0)与(L_0,M_0,N_0)分别是 $\boldsymbol{r}_0$与 $\boldsymbol{R}_0$的方向余弦.设直线 GO 和 OP 同 GP 的夹角都很小，则对小孔内任意一点 Q 都有

$$\cos(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n}')+\cos(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n}')\approx 2\cos\delta \tag{13.2.7}$$

式中 δ 是直线 GP 与屏的法线方向(z 轴方向)的夹角.

将 Huygens－Fresnel 原理(13.1.13)中位相因子内的 $r+R$ 用表达式(13.2.5)代入，辐射因子用式(13.2.7)计算，分母中的 r 与 R 则分别由 r_0与 R_0近似表示，P 点的场便为

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{R}_0,t)&=\frac{-kA\cos\delta}{2\pi r_0R_0}\int_{S_0}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\sin[\omega t-k(r_0+R_0)-f(x',y')]\\&=\psi_0\{C\sin[\omega t-k(r_0+R_0)]+S\cos[\omega t-k(r_0+R_0)]\}\end{aligned} \tag{13.2.8}$$

式中

$$\begin{cases} \psi_0=\dfrac{-kA\cos\delta}{2\pi r_0R_0} \\ C=\displaystyle\int_{S_0}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\cos[-f(x',y')] \\ S=\displaystyle\int_{S_0}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\sin[-f(x',y')] \end{cases} \tag{13.2.9}$$

于是衍射波在 P 点的强度 $I=c\varepsilon_0E^2/2$(即衍射波在 P 点平均能流密度)为

$$I=I_0(C^2+S^2) \tag{13.2.10}$$

式中

$$I_0=I_Gk^2\cos^2\delta/(4\pi^2r_0^2) \tag{13.2.11}$$

是与 G 点的波源强度

$$I_G=c\varepsilon_0A^2/(2R_0^2) \tag{13.2.12}$$

及源点、屏和观测点的相对几何位置有关的常数.

注意到式(13.2.6)右端相继各项的数量级为 kd、kd^2/r、…,可以将上述衍射现象进一步分类.若屏孔的尺度比电磁波的波长大得多,即 $d\gg\lambda$,即使 $d\ll r$,数量级为 kd^2/r 的项仍不可略去,因而 $f(x',y')$中的 x'与y'的二次项不可忽略,相应的衍射便称为 Fresnel 衍射.若屏孔的尺度比电磁波的波长小得多,即 $d\ll\lambda$,或者 r 足够大,以至于仅须保留 $f(x',y')$中的 x'与y'的一次项,相应的衍射称为 Fraunhofer 衍射.

对于 Fraunhofer 衍射,由式(13.2.6)得

$$f(x',y')=-(l_0+L_0)kx'-(m_0+M_0)ky' \tag{13.2.13}$$

于是

$$\begin{cases} C=\int_{S_0}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\cos[k(l_0+L_0)x'+(m_0+M_0)y'] \\ S=\int_{S_0}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\sin[k(l_0+L_0)x'+(m_0+M_0)y'] \end{cases} \tag{13.2.14}$$

圆孔的 Fraunhofer 衍射

设 S_0是一个半径为 a 的圆,且入射波波矢与屏面垂直.取圆心为坐标原点 O,则

$$\begin{cases} C=\int_{S_0}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\cos[k(L_0x'+M_0y')] \\ S=\int_{S_0}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\sin[k(L_0x'+M_0y')]=0 \end{cases} \tag{13.2.15}$$

其中第二式是因为被积函数是 x'与y'的奇函数.而第一式可改写为

$$C=\mathrm{Re}\int\mathrm{d}\sigma'\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}')=\mathrm{Re}\int r'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\phi'\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr'\sin\theta\cos\phi'} \tag{13.2.16}$$

式中 θ 是衍射波波矢 $\boldsymbol{k}=k\boldsymbol{R}/R$ 与沿 z 轴方向行进的入射波波矢的夹角(即衍射角).利用零阶 Bessel 函数的积分表示

$$\mathrm{J}_0(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\mathrm{e}^{\mathrm{j}z\cos\phi} \tag{13.2.17}$$

得

$$C=2\pi\mathrm{Re}\int\mathrm{d}r'r'\mathrm{J}_0(kr'\sin\theta) \tag{13.2.18}$$

进一步利用 Bessel 函数的递推关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[z^{n+1}\mathrm{J}_{n+1}(z)]=z^{n+1}\mathrm{J}_n(z) \tag{13.2.19}$$

可求出

$$C=\frac{2\pi a}{k\sin\theta}[\mathrm{J}_1(ka\sin\theta)] \tag{13.2.20}$$

由衍射强度分布公式(13.2.10)得

$$I = I_0(\pi a^2)^2\left[\frac{2J_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}\right]^2 \tag{13.2.21}$$

在 $\theta=0$ 附近的衍射强度分布为

$$I = I_0(\pi a^2)^2\left[2\frac{J_1(ka\theta)}{ka\theta}\right]^2 \tag{13.2.22}$$

光强主要集中在中心圆形亮斑内,其周围还有几个亮度较弱的同心亮环.由 $J_1(z)$ 的第一个零点 $z=3.832$,可得第一个暗纹对应的衍射角为

$$\theta_1 = 1.220\pi/(ak) = 1.220\lambda/(2a) \tag{13.2.23}$$

它决定了光学仪器的分辨率.

习题 13-2

1. 一光束垂直投射到无限大不透明屏上的 $a\times b$ 的矩形小孔上,求衍射强度的角分布.
2. 一光栅有 N 条缝,缝隙宽为 $2a$,缝隙之间的不透明部分的宽度为 $2b$.求该光栅的 Fraunhofer 衍射强度的角分布.
3. 一频率为 ω、强度为 I_0 的光束垂直投射到一内径为 a、外径为 b 的环形小孔上,该环形小孔位于无限大不透明屏上,求衍射强度的角分布.

   答案:$dI/d\Omega = I_0[(aJ_1(ak\theta) - bJ_1(bk\theta)]^2/(\theta)^2$

   其中 I_0 为入射波的强度,$k=\omega/c$,θ 为衍射角,$J_1(x)$ 是一阶 Bessel 函数.

§ 13.3 Kirchhoff 积分公式的矢量形式

值得指出的是:Kirchhoff 边界条件与 ψ 所满足的 Helmholtz 方程(或 Laplace 方程)是不相容的.事实上,从数学上可以证明:若 ψ 及其法向导数 $\partial\psi/\partial n$ 在任一有限曲面上都等于零,则 ψ 必然处处等于零.Kirchhoff 衍射理论之所以能在光学领域里取得惊人的成功,是因为通常孔的尺度远大于光波的波长,从而使得屏的背光面上的衍射场相当小的缘故.对于孔的尺度与电磁波的波长可以比拟的情形,Kirchhoff 标量衍射理论不再适用.进而,考虑到电磁场的矢量特征,发展相应的矢量衍射理论是必须的.

注意到 Kirchhoff 积分公式(13.1.6)是一个精确的数学关系式,因而可应用于电磁场场强的任一直角分量,于是有

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \oint_S d\sigma'[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{\nabla}')G_r - G_r(\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{\nabla}')\boldsymbol{E}] \tag{13.3.1}$$

式中 $\boldsymbol{x}$ 位于封闭面 S 所包围的体积 V 内,$\boldsymbol{n}'$ 是面元的内法向(指向衍射区域),而 G_r 则是单色推迟 Green 函数.设 S_ε 是包围点 $\boldsymbol{x}$ 的一个小体积 V_ε 的边界面,同

样应有

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=\oint_{S_\varepsilon}\mathrm{d}\sigma'[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{n}'\cdot\nabla')G_\mathrm{r}-G_\mathrm{r}(\boldsymbol{n}'\cdot\nabla')\boldsymbol{E}] \tag{13.3.2}$$

于是

$$0=\oint_{S_-}\mathrm{d}\sigma'[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{n}'\cdot\nabla')G_\mathrm{r}-G_\mathrm{r}(\boldsymbol{n}'\cdot\nabla')\boldsymbol{E}] \tag{13.3.3}$$

式中曲面 S_- 是 V 内去掉 V_ε 后所剩体积 V_- 的边界面. 注意到 Green 函数 G_r 在 V_- 内是正则的,可以应用适用于正则函数的矢量运算定理. 因而上式可改写为

$$\begin{aligned}0&=\oint_{S_-}\mathrm{d}\sigma'[2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{n}'\cdot\nabla')G_\mathrm{r}-(\boldsymbol{n}'\cdot\nabla')(G_\mathrm{r}\boldsymbol{E})]\\&=\oint_{S_-}\mathrm{d}\sigma'2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{n}'\cdot\nabla')G_\mathrm{r}+\int_{V_-}\mathrm{d}^3x'\nabla'^2(G_\mathrm{r}\boldsymbol{E})\\&=\oint_{S_-}\mathrm{d}\sigma'2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{n}'\cdot\nabla')G_\mathrm{r}+\int_{V_-}\mathrm{d}^3x'[\nabla'(\nabla'\cdot(\boldsymbol{E}G_\mathrm{r}))-\nabla'\times(\nabla'\times(\boldsymbol{E}G_\mathrm{r}))]\end{aligned}$$

将式中的体积分重新用面积分表出得

$$0=\oint_{S_-}\mathrm{d}\sigma'[2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{n}'\cdot\nabla')G_\mathrm{r}-\boldsymbol{n}'\nabla'\cdot(\boldsymbol{E}G_\mathrm{r})+\boldsymbol{n}'\times(\nabla'\times(\boldsymbol{E}G_\mathrm{r}))]$$

利用 Maxwell 方程

$$\nabla'\cdot\boldsymbol{E}=0,\quad \nabla'\times\boldsymbol{E}=\mathrm{i}\omega\boldsymbol{B}$$

便有

$$0=\oint_{S_-}\mathrm{d}\sigma'[\mathrm{i}\omega G\boldsymbol{n}'\times\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{n}'\cdot\nabla')G_\mathrm{r}-\boldsymbol{n}'\boldsymbol{E}\cdot\nabla'G_\mathrm{r}-\boldsymbol{n}'\times(\boldsymbol{E}\times\nabla'G_\mathrm{r})]$$

再利用矢量的代数运算公式可得

$$0=\oint_{S_-}\mathrm{d}\sigma'[\mathrm{i}\omega G_\mathrm{r}\boldsymbol{n}'\times\boldsymbol{B}+(\boldsymbol{n}'\times\boldsymbol{E})\times(\nabla'G_\mathrm{r})+(\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{E})\nabla'G_\mathrm{r}]$$

以上操作只是在等式右端作一些恒等变换. 将上式右端化成对面 S 的积分与对面 S_ε 的积分之差后,并令体积 V_ε 趋于零,则对面 S_ε 的积分应等于 $-\boldsymbol{E}$. 故

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=\oint_S\mathrm{d}\sigma'[\mathrm{i}\omega G_\mathrm{r}\boldsymbol{n}'\times\boldsymbol{B}+(\boldsymbol{n}'\times\boldsymbol{E})\times(\nabla'G_\mathrm{r})+(\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{E})\nabla'G_\mathrm{r}]$$

由此利用对偶变换

$$\boldsymbol{E}/c\to\boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{B}\to-\boldsymbol{E}/c$$

可得到关于 $\boldsymbol{B}$ 的相应关系式.

令封闭面 S 由一个有限曲面 S_1(带有孔面 S_0 的屏)和一个半径为无穷大的球面部分 S_2 组成. 在曲面 S_2 上,利用 $R\to r'+\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{x}$(式中的正号是由于此处 $\boldsymbol{n}'$ 为面元的内法向)有

$$G_r \to \frac{e^{ikr'}}{4\pi r'} e^{ikn'\cdot x}, \quad \nabla' G_r \to -ikn' G_r \tag{13.3.4}$$

于是

$$\begin{aligned}\int_{S_2} d\sigma' [i\omega G_r \boldsymbol{n}' \times \boldsymbol{B} + (\boldsymbol{n}' \times \boldsymbol{E}) \times (\nabla' G_r) + (\boldsymbol{n}' \cdot \boldsymbol{E}) \nabla' G_r] \\ = ik \int_{S_2} d\sigma' [c\boldsymbol{n}' \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{n}' \times (\boldsymbol{n}' \times \boldsymbol{E}) - \boldsymbol{n}' (\boldsymbol{n}' \cdot \boldsymbol{E})] G_r \\ = ik \int_{S_2} d\sigma' [c\boldsymbol{n}' \times \boldsymbol{B} - \boldsymbol{E}] G_r = 0 \end{aligned} \tag{13.3.5}$$

式中已应用了 S_2 面上的场所满足的辐射条件，特别是场 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 以及辐射方向（趋向于方向 $\boldsymbol{n}'$）三者两两相互垂直，且

$$\boldsymbol{E} \to c\boldsymbol{n}' \times \boldsymbol{B}$$

的条件.

综合(13.3.4)与(13.3.5)两式，便得到矢量形式的 Kirchhoff 积分公式

$$\boldsymbol{E}(x) = \int_{S_1} d\sigma' [i\omega G_r \boldsymbol{n}' \times \boldsymbol{B} + (\boldsymbol{n}' \times \boldsymbol{E}) \times (\nabla' G_r) + (\boldsymbol{n}' \cdot \boldsymbol{E}) \nabla' G_r] \tag{13.3.6}$$

式中 x 是衍射区域 V 中的一点，积分仅在带孔的屏面 S_1 上进行，且面元法向 $\boldsymbol{n}'$ 指向 V 内.

习题 13－3

试讨论 Kirchhoff 积分公式的标量形式与矢量形式的异同点.

§13.4　薄导体屏上的小孔衍射

为了方便起见，通常希望将 Kirchhoff 积分表述为仅对孔面的积分. 对于带孔的理想导体薄平面屏 S_1，可以将 Kirchhoff 积分公式(13.3.6)化成一个相当简单的形式. 为此目的，可用一想像的位于薄导体内部区域中的源来代替实际的源，但保持 S_1 面上的场不变. 按公式(13.3.6)，这种替代不会改变原衍射区域 V 的场，却使衍射区域扩大成为以薄导体屏为对称面的两个区域 V 与 V'，这两个区域在无穷远处相连通，因为通常的例如圆形薄导体屏的面积虽然很大但却有限. 设 $\boldsymbol{n}$ 是导体与区域 V 相邻的 S_1 面上的法向，方向指向 V 内；而 $\boldsymbol{n}'$ 是导体与区域 V' 相邻的 S'_1 面上的法向，方向指向 V' 内. 并将区域 V 与 V' 中的衍射场和虚拟衍射场分别表示为 $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})$ 和 $(\boldsymbol{E}', \boldsymbol{B}')$. 当导体屏非常薄时，应用 Kirchhoff 积分公式(13.3.6)，并注意到 $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{n}'$，可得

$$\boldsymbol{E}(x)=\int_{S_1}\mathrm{d}\sigma'[\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}')\times\nabla' G_r+\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}')(\nabla' G_r)+\mathrm{i}\omega G_r\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}')] \tag{13.4.1}$$

式中 $\boldsymbol{x}$ 是衍射区域 V 中的一点.

值得注意的是,可以改变虚拟衍射场但不改变衍射场(这相当于选定薄导体屏中的某个特定的源).这一点还可进一步说明如下:按照远处衍射场所满足的辐射条件,无穷远处曲面对 Kirchhoff 积分的贡献可以忽略,因而可设想导体屏无穷大,以至于将区域 V 与 V' 隔断开来.于是有

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=\int_{S_1}\mathrm{d}\sigma'[(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E})\times(\nabla' G_r)+(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E})(\nabla' G_r)+\mathrm{i}\omega G_r\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{B}]\\ 0=\int_{S'_1}\mathrm{d}\sigma'[(\boldsymbol{n}'\times\boldsymbol{E}')\times(\nabla' G_r)+(\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{E}')\nabla' G_r+\mathrm{i}\omega G_r\boldsymbol{n}'\times\boldsymbol{B}']\end{cases} \tag{13.4.2}$$

方程(13.4.1)是上述两式左右分别相加的结果.由此可知,所考虑的衍射场的确与虚拟衍射场无关.于是可以选取适当的虚拟衍射场以便使计算衍射场的积分成为最简形式.为此,我们要求

(a) 在导体屏面上的虚拟衍射场的值为

$$\begin{cases}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}')_{S'_1}=(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E})_{S_1}\\ (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{B}')_{S'_1}=(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{B})_{S_1}\end{cases} \tag{13.4.3}$$

(b) $(\boldsymbol{E}',\boldsymbol{B}')$满足 Maxwell 方程组以及在很远处的辐射条件.

容易验证,下述选择

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{x}')=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})\\ \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{x}')=-\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})\\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}'(\boldsymbol{x}')=-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\\ \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{B}'(\boldsymbol{x}')=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\end{cases} \tag{13.4.4}$$

满足上述要求,式中区域 V' 中的点 x' 与区域 V 中的点 x 是关于导体屏的一对镜像对称点.将所选取的虚拟衍射场的表达式(13.4.4)代入式(13.4.1)得

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=2\int_{S_1}\mathrm{d}\sigma'(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E})\times(\nabla' G_r) \tag{13.4.5}$$

注意,式中 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}$ 是与边界表面相切的电场,按照边值关系应有

$$(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E})_{\text{屏表面外侧}}=(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E})_{\text{屏表面内侧}} \tag{13·4·6}$$

它们对于理想导体屏面均为零.因而,式(13.4.5)右端的积分仅对屏上的孔面 S_0 不为零.考虑到 $\nabla' G_r=-\nabla G_r$,便有

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=2\nabla\times\int_{S_0}\mathrm{d}\sigma'(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E})G_r \tag{13.4.7}$$

这是关于薄导体屏小孔衍射的 Smythe 积分公式. 如果观测点远离衍射系统，可将推迟 Green 函数 $G_r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=\exp(\mathrm{i}kR)/(4\pi R)$ 中的相位 kR 展开

$$kR=kr-k\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}'+\frac{k}{2r}[r'^2-(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}')^2]+\cdots \tag{13.4.8}$$

仅考虑 Fraunhofer 衍射，可仅取前两项，这时 Smythe 公式成为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=\frac{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}kr}}{2\pi r}\boldsymbol{k}\times\int_{S_0}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}'\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}'} \tag{13.4.9}$$

式中 $\boldsymbol{k}$ 是衍射波的波矢.

薄导体屏小圆孔衍射

设一薄导体屏位于 $z=0$ 平面上，屏上有一半径为 a 的小圆孔，孔的中心即坐标原点. 一平面电磁波从 $z<0$ 的区域入射到屏上，入射面为 $y=0$ 平面，入射角为 α，且偏振矢量在入射面内. 入射波的电场为

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}=E_0[\boldsymbol{e}_x\cos\alpha-\boldsymbol{e}_z\sin\alpha]\exp[\mathrm{i}k(x\sin\alpha+z\cos\alpha)] \tag{13.4.10}$$

由此得

$$(\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}})_{z=0}=E_0\boldsymbol{e}_y\cos\alpha\exp(\mathrm{i}kx\sin\alpha) \tag{13.4.11}$$

将它近似代替孔面上的精确场，便可从公式(13.4.9)得

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=\frac{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}kr}E_0\cos\alpha}{2\pi r}(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}_y)\int_0^a\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\beta\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\rho(\sin\alpha\cos\beta-\sin\theta\cos(\phi-\beta))}$$

式中 θ 与 ϕ 是衍射方向 $\boldsymbol{n}$ 的极角与方位角. 定义

$$\varepsilon=\sqrt{\sin^2\theta+\sin^2\alpha-2\sin\theta\sin\alpha\cos\phi} \tag{13.4.12}$$

则式(13.4.12)中的角度积分可变换成

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\beta'\exp((-\mathrm{i}k\rho\varepsilon\cos\beta')=\mathrm{J}_0(k\rho\varepsilon) \tag{13.4.13}$$

进行径向积分后得

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=\frac{\mathrm{i}k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}a^2E_0\cos\alpha(\sin\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_z-\cos\theta\boldsymbol{e}_x)\frac{\mathrm{J}_1(ka\varepsilon)}{ka\varepsilon} \tag{13.4.14}$$

衍射波在 P 点的强度 $I=c\varepsilon_0E^2/2$ 为

$$I=I_0(\cos^2\theta+\sin^2\theta\cos^2\phi)(\pi a^2)^2\left[\frac{2\mathrm{J}_1(ka\varepsilon)}{ka\varepsilon}\right]^2 \tag{13.4.15}$$

式中

$$I_0=I_{\mathrm{G}}\frac{k^2\cos^2\alpha}{4\pi^2r^2} \tag{13.4.16}$$

而 $I_{\mathrm{G}}=c\varepsilon_0E_0^2/2$ 是屏孔处的波源强度. 与式(13.2.10)相比可知，这里出现了标量理论所不可能有的与方位角 ϕ 的依赖关系，因为这是由衍射场的偏振性质引起的[见式(13.4.14)]；此外，若衍射局限在围绕波的前进方向的很小的角度以

内，即当 $\alpha\approx 0$ 与 $\theta\approx 0$ 时，矢量理论的结果便还原为标量理论的结果.

习题 13-4

1. 有一振幅为 $\boldsymbol{E}_0$、波矢为 $\boldsymbol{k}$ 的线偏振平面电磁波，入射到理想导体平面薄屏的内外半径分别为 a 与 b 的环形孔上. 入射波矢与屏的法向的夹角为 α，偏振方向与入射面垂直. 假设在开孔处的切向电场等于相应的入射场，求衍射场和衍射强度分布.
2. 理想导体平面薄屏位于 $z=0$ 平面上，屏上开一矩形小孔，孔边位于 $x=\pm a/2$ 与 $y=\pm b/2$ 处. 一线偏振平面波入射到该小孔上，入射面为 $y-z$ 平面，波矢与 y 轴方向的夹角为 β，而偏振方向则垂直于入射面.
   (1) 假设在开孔处的切向电场等于相应的入射场，求衍射场和衍射强度分布；
   (2) 试与标量 Kirchhoff 衍射理论的结果比较.

§13.5 Babinet 原理的矢量形式

必须指出：前面叙述的标量形式的 Babinet 原理没有反应电磁场的矢量性质，并且以在数学上不自洽的 Kirchhoff 边界条件作为出发点，因而不能令人满意. 另一方面，在电磁波频率不太高时例如微波问题中，Babinet 原理的严格矢量形式常常是十分有用的.

对于理想导体薄平面屏及其互补屏，可以建立一个严格的 Babinet 原理. 设没有屏时的场(原场)为$(\boldsymbol{E}_0,\boldsymbol{B}_0)$. 在 $z=0$ 平面上放入导体薄屏 S_a 后，由于电磁场的感应作用，屏面上便会出现面诱导电荷与面诱导电流，因而激发出透射场$(\boldsymbol{E}_t,\boldsymbol{B}_t)$与反射场$(\boldsymbol{E}_r,\boldsymbol{B}_r)$(透射场与反射场统称为散射场，衍射场则是原场与透射场之和). 由于面诱导电荷与面诱导电流都局限于 $z=0$ 平面上，因而推迟势公式表明：相应的矢势 $\boldsymbol{A}_s$ 的 z 分量 $A_{sz}=0$，而 A_{sx} 与 A_{sy} 以及标势 φ_s 均为 z 的偶函数. 由场与势的关系易知，散射场具有下述反射对称性：

$$\begin{cases} E_{sx},E_{sy},B_{sz}\text{是}z\text{的偶函数} \\ B_{sx},B_{sy},E_{sz}\text{是}z\text{的奇函数} \end{cases} \quad z\neq 0 \tag{13.5.1}$$

换言之

$$\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}_t(\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}_r(\boldsymbol{x}') \\ \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_t(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_r(\boldsymbol{x}') \\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}_t(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}_r(\boldsymbol{x}') \\ \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{B}_t(\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{B}_r(\boldsymbol{x}') \end{cases} \quad z\neq 0 \tag{13.5.2}$$

式中面元法向 $\boldsymbol{n}$ 指向 $z>0$ 的衍射区域，点 $\boldsymbol{x}$ 位于衍射区域内，点 $\boldsymbol{x}'$ 是点 $\boldsymbol{x}$ 关于 $z=0$ 平面的镜像点. 在 $z=0$ 平面上，上述奇函数场不一定为零，原因是该处可能存在面电荷与面电流[在存在电荷与电流的地方势是奇异的，因而不可微，式

(13.5.2)在 $z=0$ 处不成立].现令 z 从 $z>0$ 与 $z<0$ 两边趋于零但不等于零，由对称关系(13.5.2)便得到在屏上(不在孔面上)有

$$\begin{cases}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}_t)_{z=0_-}=-(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}_r)_{z=0_+}=\alpha\\(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_t)_{z=0_-}=(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_r)_{z=0_+}=-(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_0)_{z=0}\\(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}_t)_{z=0_-}=(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}_r)_{z=0_+}=-(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}_0)_{z=0}\\(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}_t)_{z=0_-}=-(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}_r)_{z=0_+}=\boldsymbol{\Pi}\end{cases}\tag{13.5.3}$$

每一式中最后的等号来自于理想导体边界条件，而 α 与 $\boldsymbol{\Pi}$ 分别表示导体上的面电荷密度与面电流密度.由此可见，对称关系与电磁场的边值关系是相容的，此外，上式还进一步说明导体屏两侧的面电荷与面电流的分布都是相同的.在孔面上，没有感应电荷与电流，因而式(13.5.1)或(13.5.2)在 $z=0$ 处成立，即在孔面 S_0 上有

$$\begin{cases}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}_t)_{z=0}=(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}_r)_{z=0}=0\\(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_t)_{z=0}=(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_r)_{z=0}\\(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}_t)_{z=0}=(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}_r)_{z=0}\\(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{B}_t)_{z=0}=(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{B}_r)_{z=0}=0\end{cases}\tag{13.5.4}$$

这即是说，在屏孔内电场的法向分量与磁场的切向分量与无屏时相同.

由(13.5.3)中第四式所描述的导体屏两侧的面诱导电流分布可得到散射场的矢势为

$$\boldsymbol{A}_s=\mu_0\int_{S_a}\mathrm{d}\sigma' 2\boldsymbol{\Pi}G_r=2\int_{S_a}\mathrm{d}\sigma'(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{B}_t)G_r\tag{13.5.5}$$

由此，透射波的磁感应场为

$$\boldsymbol{B}_t(\boldsymbol{x})=2\nabla\times\int_{S_a}\mathrm{d}\sigma'[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{B}_t(\boldsymbol{x}')]G_r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\tag{13.5.6}$$

式中 S_a 是不计孔面的屏面部分.由式(13.5.4)知，上式的被积函数在孔面上等于零.

对于与屏 S_a 互补的屏 S_a'，根据 Smythe 积分公式有

$$\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{x})=2\nabla\times\int_{S_a}\mathrm{d}\sigma'[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{x}')]G_r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\tag{13.5.7}$$

式中 S_a 现在是屏 S_a' 上的孔面部分，且衍射场 $\boldsymbol{E}'$ 是原场 $\boldsymbol{E}_0'$ 和透射场 $\boldsymbol{E}_t'$ 之和：

$$\boldsymbol{E}'=\boldsymbol{E}_0'+\boldsymbol{E}_t'\tag{13.5.8}$$

容易看出，在变换

$$\boldsymbol{B}_t\to\pm(\boldsymbol{E}_0'+\boldsymbol{E}_t')/c\tag{13.5.9}$$

下公式(13.5.6)化为式(13.5.7).对上式两边取旋度，并利用无源麦克斯韦方程

可得 $\boldsymbol{E}_t$ 按下式

$$\boldsymbol{E}_t/c \to \mp(\boldsymbol{B}_0' + \boldsymbol{B}_t') \tag{13.5.10}$$

变换. 以上两变换式右端的符号差别反应了变换前后的场都是出射波的场这个事实. 当然, 也可以从屏 S_a' 开始, 这时上述变换成为

$$\begin{cases} \boldsymbol{B}_t' \to \mp(\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_t)/c \\ \boldsymbol{E}_t'/c \to \pm(\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_t) \end{cases} \tag{13.5.11}$$

比较这正反两次变换可知, 互补衍射问题的入射场(互补源)应满足条件

$$\boldsymbol{E}_0'/c = -\boldsymbol{B}_0, \quad \boldsymbol{B}_0' = \boldsymbol{E}_0/c \tag{13.5.12}$$

这两种入射波唯一的不同是其电场矢量与磁场矢量同时绕入射方向旋转了 $\pi/2$. 因此, 与标量场互补衍射不同的是, 电磁场的互补衍射的条件是, 不仅需要存在互补屏, 还必须有互补源.

设源场 $(\boldsymbol{E}_0, \boldsymbol{B}_0)$ 通过理想导体薄平面屏 S_a 而形成的透射场为 $(\boldsymbol{E}_t, \boldsymbol{B}_t)$(原问题), 而相应的互补源场 $(\boldsymbol{E}_0' = -\boldsymbol{B}_0, \boldsymbol{B}_0' = \boldsymbol{E}_0)$ 通过相应的互补屏 S_a' 而形成的透射场为 $(\boldsymbol{E}_t', \boldsymbol{B}_t')$(补问题). 由于补问题中衍射波的电场相当于原问题中透射波的磁场, 故有

$$\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{E}_0'(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{E}_t'(\boldsymbol{x}) = c\boldsymbol{B}_t(\boldsymbol{x}) \tag{13.5.13}$$

对上式两边取旋度, 利用无源空间中的 Maxwell 方程可得

$$\boldsymbol{B}'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{B}_0'(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{B}_t'(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{E}_t(\boldsymbol{x})/c \tag{13.5.14}$$

关系式(13.5.13)与(13.5.14)即为矢量形式的 Babinet 原理. 它常写成下述形式:

$$\begin{cases} \boldsymbol{B}_t - \boldsymbol{E}_t'/c = \boldsymbol{E}_0'/c = -\boldsymbol{B}_0 \\ \boldsymbol{E}_t/c + \boldsymbol{B}_t' = -\boldsymbol{B}_0' = -\boldsymbol{E}_0/c \end{cases} \tag{13.5.15}$$

由 Babinet 原理可知, 除了源场的入射方向以外, 在其他方向上(这时源场为零)有

$$\boldsymbol{B}_t = \boldsymbol{E}_t'/c, \quad \boldsymbol{E}_t/c = -\boldsymbol{B}_t' \tag{13.5.16}$$

因而在偏离入射方向时, 补问题中衍射波的偏振矢量相对于原问题中衍射波的偏振矢量的(绕入射方向)转角为 $\pi/2$, 且屏与其互补屏的衍射强度相同. 在实际情形中, 只要导体的电导率很大, 且在孔附近导体屏的曲率半径比孔的尺度大得多(故可近似视为平面导体屏上的孔), Babinet 原理便近似成立.

习题 13-5

试比较标量衍射理论与矢量衍射理论中 Babinet 原理的异同点.

§13.6　晶体对电磁波的衍射

由于衍射场是入射场与透射场的叠加，而后者实际上是处于衍射区域的散射场；进而，在偏离入射方向的远处，散射场就是衍射场，因而可以用求散射场的方法来解决衍射问题．现以讨论晶体对电磁波的衍射问题为例来加以说明．

晶体是具有三维周期性结构的原子阵列，其周期结构可用晶格表示．所有描述晶体性质的物理量，例如晶体的介电常量或极化率 $\chi(\boldsymbol{x})$，都应当具有与晶格本身相同的周期性．故

$$\chi(\boldsymbol{x}+n_1\boldsymbol{a}_1+n_2\boldsymbol{a}_2+n_3\boldsymbol{a}_3)=\chi(\boldsymbol{x}) \tag{13.6.1}$$

式中 n_i 是任意整数，而 $\boldsymbol{a}_i$ 是晶格基矢，它们张成的体积 $V=\boldsymbol{a}_1\cdot(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3)$ 是晶格的基元，称为元胞．将 $\chi(\boldsymbol{x})$ 展成三维 Fourier 级数：

$$\chi(\boldsymbol{x})=\sum_{\boldsymbol{b}}X_{\boldsymbol{b}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{13.6.2}$$

式中对 $\boldsymbol{b}$ 的一切可能值求和．$\boldsymbol{b}$ 称为晶格的倒格矢，它与晶格基矢的关系是

$$\boldsymbol{b}_i=[\boldsymbol{a}_j\times\boldsymbol{a}_k]/V,\quad (i,j,k)\text{是}(1,2,3)\text{的正循环} \tag{13.6.3}$$

根据上一章宏观电介质物体对电磁波散射的理论，在晶体外散射波的电场满足下述积分方程：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=\nabla\times\left[\nabla\times\int\mathrm{d}^3x'\chi(\boldsymbol{x}')\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}')G_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\right] \tag{13.6.4}$$

式中单色推迟 Green 函数 G_{r} 在晶体外很远处按通常的辐射条件可改写为

$$G_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\approx\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}'} \tag{13.6.5}$$

这里已将坐标原点取在晶体内部．于是有

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=-\frac{k^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\boldsymbol{n}\times\left[\boldsymbol{n}\times\int\mathrm{d}^3x'\chi(\boldsymbol{x}')\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}'}\right] \tag{13.6.6}$$

式中只保留了 r^{-1} 项．

当晶体的极化率小于 1 时，可用 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}')=\boldsymbol{E}_0\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})$ 迭代求解．零级近似为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=-\frac{k^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}[\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_0)]\int\mathrm{d}^3x'\chi(\boldsymbol{x}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}'} \tag{13.6.7}$$

式中 $\boldsymbol{q}=k\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}$ 是散射波矢与入射波矢之差．将极化率用式(13.6.2)代入得

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=-\frac{k^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}[\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_0)]\sum_{\boldsymbol{b}}X_{\boldsymbol{b}}\int\mathrm{d}^3x'\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi\boldsymbol{b}-\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{x}'} \tag{13.6.8}$$

相应的散射微分截面为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{|\boldsymbol{E}|^2r^2}{E_0^2}=\sin^2\alpha\,\frac{\omega^4}{16\pi^2c^4}\left|\sum_{\boldsymbol{b}}X_{\boldsymbol{b}}\int\mathrm{d}^3x'\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi\boldsymbol{b}-\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{x}'}\right|^2 \tag{13.6.9}$$

式中 α 是入射波偏振方向与矢径方向 $\boldsymbol{n}$ 的夹角.若入射波为非偏振波,则对入射波偏振方向平均后得

$$\overline{\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}}=\frac{1}{2}(1+\cos^2\theta)\frac{\omega^4}{16\pi^2c^4}\left|\sum_b X_b\int \mathrm{d}^3x'\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi\boldsymbol{b}-\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{x}'}\right|^2 \tag{13.6.10}$$

式中 θ 为散射角,亦称为衍射角.

值得注意的是,式(13.6.8)说明,散射场强仅当 $\boldsymbol{q}$ 接近某个 $2\pi\boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{q}=k\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}=2\pi\boldsymbol{b} \tag{13.6.11}$$

时才显著不为零,在任两个 $2\pi\boldsymbol{b}$ 值中间的散射场强度实际上为零.因而,只有在由式(13.6.11)所确定的散射方向 $\boldsymbol{n}$ 上,散射截面(13.6.9)与(13.6.10)才取极大值(称为主极大).式(13.6.11)通常称为 Laue(M. Von Laue)方程.为了进一步进行分析,将 Laue 方程写成

$$k\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}+2\pi\boldsymbol{b} \tag{13.6.12}$$

两边平方得

$$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{k}=-\pi b^2 \tag{13.6.13}$$

可见,对于给定的 $\boldsymbol{b}$,主极大不可能出现在任意入射方向与任意入射波频率上;仅当入射波的波矢在 $\boldsymbol{b}$ 方向的投影满足上式时,才会出现主极大.此外,对 Laue 方程两边取绝对值,注意到 $|k\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}|=2k\sin(\theta/2)$,便有

$$k\sin\frac{\theta}{2}=\pi b \tag{13.6.14}$$

此称为 Bragg(W. L. Bragg)方程,它决定了主极大发生时的衍射角,故又称为 Bragg 衍射定律.

值得指出的是,这里的衍射效应(即散射角分布的方向有关性)之所以会发生,是因为有规律排列的各个单原子散射波之间具有确定的相位关系,因而相互干涉,使之呈现出整体上的方向性.可见,这里的衍射实际上是一种相干的散射.当温度升高使得各个原子无规热运动极其剧烈,以至于各单原子散射波之间确定的相位关系被破坏时,其散射强度便成为各单原子散射强度的非相干叠加(非相干散射),其散射角分布也将随之失去显著的方向性.

习题 13-6

试求在元胞基矢为 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的长方形晶体上衍射的主极大周围衍射斑内的强度分布.

提示:衍射场由式(13.6.8)决定.

第十四章　电动力学的外微分形式

本章在介绍微分几何的必要基础后，将电荷守恒定律、Lorentz 力公式及 Maxwell 方程推广至任意的参考系（不限于惯性参考系）、甚至任意的准 Riemannian 流形上，从而扩展了经典电动力学的应用范围. 电动力学若仅限于在惯性参考系中讨论，即使在经典的意义上也是不完全的. 特别应指出的是，这里所介绍的微分几何的必要的基础，不应看成是纯数学的；其实，它是对于复杂的物质世界中由于物质运动与分布造成的“时空特性”的描述.

§14.1 对偶空间与张量

考虑实数域 R 上的任一有限维矢量空间 V，若定义了其中任意两个矢量的标积(或称为内积，它是两个矢量的对称的、非简并的双线性形式)

$$\exists\langle v,u\rangle\equiv g(v,u)=g(v,u),\quad \forall u,v\in V \tag{14.1.1}$$

$$\langle w,au+bv\rangle=a\langle w,u\rangle+b\langle w,v\rangle,\quad \forall u,v,w\in V;a,b\in R \tag{14.1.2}$$

所谓非简并即只有零矢量与 V 中所有矢量的内积为零. 定义了内积的矢量空间成为一个内积空间(或称为度规空间). 若所有非零矢量的内积都是正定的

$$\langle v,u\rangle>0\quad \forall u,v\in V,u\neq 0,v\neq 0 \tag{14.1.3}$$

则称为 Euclidean 空间，记为 $\boldsymbol{R}$.

若 U 与 V 是两个矢量空间，$u\in U$ 与 $v\in V$ 分别是这两个矢量空间中的矢量，则所有 uv 张成的空间也是一个矢量空间，称为 U 与 V 的直积空间，记为 $U\times V$. 实数域 R 实际上是一个一维矢量空间，n 个 $\boldsymbol{R}$ 的直积记为 $\boldsymbol{R}^n$，而一个 m 维 Euclidean 空间 $\boldsymbol{R}$ 实际上是 $\boldsymbol{R}^m$.

定义在矢量空间 V 上的线性形式或称为 1-(实)形式 f 是下述线性映射：

$$f:\quad V\to R$$

$$f(su+tv)=sf(u)+tf(v),\ \forall u,v\in V;\forall s,t\in\boldsymbol{R} \tag{14.1.4}$$

换言之，f 是 V 上的实线性函数. 在通常的函数的加法与数乘运算下，V 上所有的线性形式的集合成为 V 的对偶空间，记为 V^*.

在 V 中取一组基矢 $e_1,e_2,\cdots,e_n$. 相对于基矢 $\{e_i\}$ 的对偶基矢便是 V^* 中的基矢，它们是由下式定义的 n 个线性形式 $e^1,e^2,\cdots,e^n$：

$$e^j(e_i)=\delta_i^j \tag{14.1.5}$$

定理：双线性函数 $\langle v,u\rangle\equiv g(v,u)$ 诱导了一个从 V 到 V^* 的同构映射

$$V\to V^*:v\mapsto v^*,v^*\in V^*,\quad \forall v\in V \tag{14.1.6}$$

证明：事实上，对于 V 中的每一个矢量

$$v=\sum_{i=1}^{n}v^ie_i \tag{14.1.7}$$

(常称为逆变矢量，因其分量具有上指标)，可由下式确定 V^* 中的一个线性形式 v^*：

$$v^*(u)=g(v,u),\quad \forall u\in V \tag{14.1.8}$$

相对于 V^* 中的基矢，v^* 可表为

$$v^*=\sum_{i=1}^{n}v_ie^i \tag{14.1.9}$$

它的分量具有下指标.同构映射(14.1.8)也称为"指标下降"运算,因为相互对偶的矢量 v 与 v^* 的分量之间具有由同构映射(14.1.8)决定的转换关系:

$$v_j = v_i e^i(e_j) = v^*(e_j) = g(v, e_j) = v^i g(e_i, e_j) = v^i g_{ij} \tag{14.1.10}$$

式中,应用了 Einstein 求和约定(即一对相同的上下指标意味着对整个取值范围求和),而

$$g_{ij} \equiv g(e_i, e_j) \tag{14.1.11}$$

是所谓的协变度规张量.

可以证明,存在由下式定义逆变度规张量

$$g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k, \quad \forall\, i, k \tag{14.1.12}$$

它也是对称张量(因为已假定内积是对称的双线性函数).对于 V^* 中的每一个线性形式

$$f = f_i e^i \tag{14.1.13}$$

可以定义相应的逆变矢量 $v \in V$,使

$$v^j = f^j = g^{ji} f_i, \quad \text{或等价地 } v^* = f \tag{14.1.14}$$

这说明存在同构映射(14.1.8)的逆变换,它正好使"指标上升".所述定理证毕.

设 V 与 W 是矢量空间.线性映射

$$\begin{aligned} &F: \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{p \text{ times}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{q \text{ times}} \to W \\ &F(v_1, \cdots, v_{i-1}, a v_i + b u_i, v_{i+1}, \cdots, v_{p+q}) \\ &\quad = aF(v_1, \cdots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \cdots, v_{p+q}) + \\ &\qquad bF(v_1, \cdots, v_{i-1}, u_i, v_{i+1}, \cdots, v_{p+q}), \quad \forall\, i; \forall\, a, b \in R \end{aligned} \tag{14.1.15}$$

定义了一个在 W 域上赋值的 $p+q$ 个变量的函数,其中前面的 p 个变量是 V^* 中的形式,后面的 q 个变量是 V 中的矢量,且函数对每个变量都分别是线性的.这个函数称为在 W 域上赋值的 p 阶逆变、q 阶协变的张量,或称为在 W 域上赋值的 (p,q) 型张量.记它们的集合为 $L^p_q(V, W)$[并简记 $L^p_q(V, R)$ 为 V^p_q],此集合也是一个矢量空间.相对于 V 的一组基矢 $\{e_i\}$,任意张量 $F \in V^p_q$ 可表为下述矩阵形式:

$$F = \sum F^{i_1, \cdots, i_p}_{j_1, \cdots, j_q} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_q} \tag{14.1.16}$$

下述量

$$e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_q} \tag{14.1.17}$$

的集合是 V^p_q 的一组基矢.

习题 14－1

1. 试证明矢量空间 V 上的任意线性形式 f 满足

$$f=\sum_{i=1}^{n} f(e_i)e^i$$

式中 $\{e_i\}$ 是 V 中的一组基矢，而 $\{e^i\}$ 是相应的对偶基矢，因而 $\{e^i\}$ 是 V 的对偶空间 V^* 中的一组基矢.

2. 对于 Minkowski 空间 $\boldsymbol{M}$，两个世界点 x^μ 与 y^μ 的标积定义为

$$\langle y,x\rangle=g_{\mu\nu}x^\mu y^\nu$$

试证明 $\boldsymbol{M}$ 的对偶空间 $\boldsymbol{M}^*$ 是所谓协变坐标矢量 x_ν 所张的空间.

3. 试证明，对任意矢量 $v\in V$ 及任意形式 $f\in V^*$，有

$$f(v)=f_iv^i$$

4. 试证明，对任意矢量 $u,v\in V$，有

$$g(u,v)=u^*(v)=u_iv^i=v^*(u)=u^iv_i$$

5. 试证明，对于内积空间，逆变度规张量是存在的；且若内积是对称的双线性函数，则逆变度规张量和协变度规张量一样，都是对称张量.

§14.2 外微分形式

$(q\geqslant 1)$阶协变反对称张量称为 q－形式(或外微分形式).因而，$\alpha\in V_q^0$是一个 q－形式的充要条件是

$$\alpha(v_{\pi(1)},\cdots,v_{\pi(q)})=\mathrm{sign}(\pi)\alpha(v_1,\cdots,v_q),\quad \forall\, v_1,\cdots,v_q\in V;\forall\,\text{置换}\,\pi \tag{14.2.1}$$

n 维矢量空间上的所有 q－形式$(1\leqslant q\leqslant n)$的集合是一个矢量空间，记为 $\Lambda_q(V)$，其维数为

$$\dim\{\Lambda_q(V)\}=\binom{n}{q}=\frac{n!}{q!\,(n-q)!} \tag{14.2.2}$$

此外，0－形式是实标量，故

$$\Lambda_0(V)=R \tag{14.2.3}$$

且显然不存在 $q>n$ 的 q－形式.

由任意的 q 个 1－形式

$$\alpha_i,\quad i=1,2,\cdots,q \tag{14.2.4}$$

经反对称化可得到一个 q－形式

$$\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\cdots\wedge\alpha_q:=\sum_{\pi}\mathrm{sign}\,(\pi)\alpha_{\pi(1)}\otimes\alpha_{\pi(2)}\otimes\cdots\otimes\alpha_{\pi(q)} \tag{14.2.5}$$

每个 q－形式都是上述类型的 q－形式的线性组合.设 $\{e_i\}$ 是 V^* 的一组基矢，

则下述 q - 形式

$$e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \cdots \wedge e^{i_q}, \quad 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_q \leqslant n \tag{14.2.6}$$

的集合是 $\Lambda_q(V)$的一组基矢.

Wedge 积(外代数)

形如(14.2.5)所示的 q - 形式被称为是可分解的.一个可分解的 p - 形式

$$\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_p$$

与一个可分解的 q - 形式

$$\beta = \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \cdots \wedge \beta_q$$

的 Wedge 积(也称为外积)定义为

$$\alpha \wedge \beta = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p \wedge \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_q \tag{14.2.7}$$

一个任意的 p - 形式 α 与一个任意的 q - 形式 β 的 Wedge 积则是 α 中的每一个可分解的 p - 形式与 β 中的每一个可分解的 q - 形式的 Wedge 积的线性组合.

可以证明,Wedge 积满足分配律

$$\alpha \wedge (\beta + \gamma) = \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \gamma \tag{14.2.8}$$

$$(\beta + \gamma) \wedge \alpha = \beta \wedge \alpha + \gamma \wedge \alpha \tag{14.2.9}$$

结合律

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \tag{14.2.10}$$

及对易关系

$$\beta \wedge \alpha = (-)^{pq} \alpha \wedge \beta, \quad \forall \alpha \in \Lambda_p(V), \quad \forall \beta \in \Lambda_q(V) \tag{14.2.11}$$

Hodge 对偶

n 维矢量空间 V 上的所有 n - 形式 Ω(称为"volume n - 形式")构成的空间 $\Lambda_n(V)$是 1 维的,故任何两个非零的 n - 形式都相互成正比.设$\{e_i\}$与$\{f_i\}$是 V 的两组基矢,基矢变换为

$$Te_i = f_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{14.2.12}$$

则相应的对偶基矢形成的 n - 形式满足

$$e^1 \wedge e^2 \wedge \cdots \wedge e^n = \det(T) f^1 \wedge f^2 \wedge \cdots \wedge f^n \tag{14.2.13}$$

如果$\{e_i\}$与$\{f_i\}$是 V 的两组正交归一基矢,则 T 是正交变换,于是

$$\det(T) = \pm 1 \tag{14.2.14}$$

这说明有两类基矢组,使得行列式取正值的两组基矢属于同一类,使得行列式取负值的两组基矢属于不同的类.我们将其中一类基矢组称为是所谓"正取向"的,另一类基矢组称为是所谓"负取向"的.如果仅用"正取向"的同一类基矢组,n - 形式是唯一确定的,这时称 V 为有向内积空间.

记 n 维有向内积空间 V 上的 n - 形式为 Ω.任一 p - 形式 $\alpha(0 \leqslant p \leqslant n)$的 Hodge 对偶是一个这样的 $(n-p)$ - 形式 $_\perp\alpha$,它对于所有的 p - 形式 β 的

Wedge 积为

$$\beta \wedge {}_{\perp}\alpha = \langle \beta, \alpha \rangle \Omega \tag{14.2.15}$$

显然，若 p－形式 α 的 Hodge 对偶存在，它必定唯一．现证其存在性．对于 0－形式 α（即 α 是一个标量），则由(14.2.15)得

$${}_{\perp}\alpha = \alpha\Omega, \quad \alpha \in \Lambda_0(V) \tag{14.2.16}$$

若 $\alpha \in \Lambda_p(V)|_{p>0}$，则 α 是下述 p－形式（基矢）

$$\beta = e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \cdots \wedge e^{i_p}, \quad i_1 < i_2 < \cdots < i_p$$

的线性组合，只需求出这些基矢的 Hodge 对偶即可．可直接验证

$${}_{\perp}\beta = {}_{\perp}(e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_p}) = s\langle \beta, \beta \rangle e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_{n-p}} \tag{14.2.17}$$

式中

$$\{i_1, i_2, \cdots, i_p, j_1, \cdots, j_{n-p}\} = \pi\{1, 2, \cdots, n\} \tag{14.2.18}$$

而

$$s = \mathrm{sign}(\pi) \tag{14.2.19}$$

现考虑具有正交归一基的任意的 n 维矢量空间 V．利用式(14.2.17)可证，对于所有的 p－形式

$${}_{\perp}({}_{\perp}\alpha) = (-1)^{p(n-p)}\alpha \prod_{i=1}^{n} \langle e_i, e_i \rangle, \quad \forall \alpha \in \Lambda_p(V) \tag{14.2.20}$$

所以

$$\Lambda_p(V) \mapsto \Lambda_{n-p}(V), \alpha \to {}_{\perp}\alpha, \quad \forall \alpha \in \Lambda_p(V) \tag{14.2.21}$$

是同构映射．(14.2.20)即

$${}_{\perp}^{-1} = (-1)^{p(n-p)} \prod_{i=1}^{n} \langle e_i, e_i \rangle_{\perp} \tag{14.2.22}$$

特别有

$${}_{\perp}({}_{\perp}\alpha) = \alpha, \quad \forall \alpha \in \Lambda_p(R^3) \tag{14.2.23}$$

$${}_{\perp}({}_{\perp}\alpha) = (-1)^{p+1}\alpha, \quad \forall \alpha \in \Lambda_p(\boldsymbol{M}) \tag{14.2.24}$$

现给出可分解的 p－形式 α 的一个简单的几何解释．对于 V 中的任意的 p 个矢量 $w_1, w_2, \cdots, w_p$，相应的 p－形式

$$\alpha = w_1^* \wedge w_2^* \wedge \cdots \wedge w_p^* \tag{14.2.25}$$

将 V 中一组 $(n-p)$ 个矢量 $v_1, v_2, \cdots, v_{n-p}$ 映射为

$$\begin{aligned}({}_{\perp}\alpha)(v_1, v_2, \cdots, v_{n-p}) &= \Omega(w_1, w_2, \cdots, w_p, v_1, v_2, \cdots, v_{n-p}) \\ &= \text{平行 } n \text{ 面体的体积}\end{aligned} \tag{14.2.26}$$

证明：由于对每个 w_i 都是线性的，只需对 $w_1, w_2, \cdots, w_p$ 相互正交的情形验证(14.2.26)．经过对指标重新命名，可将

$$w_1, w_2, \cdots, w_p, v_1, \cdots, v_{n-p}$$

嵌入“正取向的”正交归一基矢

$$w_1, w_2, \cdots, w_p, w_{p+1}, \cdots, w_n$$

于是，利用式(14.1.10)有

$$\alpha = w_1^* \wedge \cdots \wedge w_p^* = w^1 \wedge \cdots \wedge w^p \prod_{k=1}^{p} \langle w_k, w_k \rangle = \langle \alpha, \alpha \rangle w^1 \wedge \cdots \wedge w^p \tag{14.2.27}$$

由式(14.2.17)得

$$\perp \alpha = \perp (w_1^* \wedge \cdots \wedge w_p^*) = \langle \alpha, \alpha \rangle^2 w^{p+1} \wedge \cdots \wedge w^n = w^{p+1} \wedge \cdots \wedge w^n \tag{14.2.28}$$

故

$$(\perp \alpha)(w_{k_{p+1}}, \cdots, w_{k_n}) = \begin{cases} 0, & \text{当}(k_{p+1}, \cdots, k_n) \notin \{(\pi_{p+1}, \cdots, \pi_n)\} \\ \operatorname{sign}(\pi), & \text{当}(k_{p+1}, \cdots, k_n) = (\pi_{p+1}, \cdots, \pi_n) \end{cases} \tag{14.2.29}$$

式中，π 是置换算符，$\pi_i = \pi(i)$. 容易看出

$$\Omega(w_1, \cdots, w_p, w_{k_{p+1}}, \cdots, w_{k_n}) = \begin{cases} 0, & \text{当}(k_{p+1}, \cdots, k_n) \notin \{(\pi_{p+1}, \cdots, \pi_n)\} \\ \operatorname{sign}(\pi), & \text{当}(k_{p+1}, \cdots, k_n) = (\pi_{p+1}, \cdots, \pi_n) \end{cases} \tag{14.2.30}$$

这就对 v_i 可由基矢组 $w_1, \cdots, w_n$ 抽出的情形给出了证明.

可以将 Hodge 对偶用张量分量的形式表示出来. 设相对于某一组基矢(可以不是正交的)，某一 p - 形式 α 的分量为 $\alpha_{i_1 i_2 \cdots i_p}$，则

$$(\perp \alpha)_{j_1 \cdots j_{n-p}} = \frac{1}{p!} \alpha^{\lambda_1 \cdots \lambda_p} \Omega_{\lambda_1 \cdots \lambda_p j_1 \cdots j_{n-p}} \tag{14.2.31}$$

式中 $\Omega_{i_1 \cdots i_n}$ 常记为 Levi - Civita 符号 $\varepsilon_{i_1 \cdots i_n}$.

证明：由于张量的协变性，只需对前述的一组基矢 $w_1, \cdots, w_n$ 进行论证. 由方程(14.2.31)是线性的，可取 α 如(14.2.25)所示，此时由基定义有

$$\alpha^{\lambda_1 \cdots \lambda_p} = \begin{cases} 0, & \text{当}(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \notin \{(\pi_1, \cdots, \pi_p)\} \\ \operatorname{sign}(\pi) & \text{当}(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) = (\pi_1, \cdots, \pi_p) \end{cases} \tag{14.2.32}$$

故对于任一特定的指标链 $i_1, \cdots, i_p$ 有

$$\begin{aligned} & \alpha^{i_1 \cdots i_p} \Omega_{i_1 \cdots i_p j_1 \cdots j_{n-p}} \big|_{\text{对} i_1, \cdots, i_p \text{不求和}} \\ = & \begin{cases} 0, & \text{当}(i_1, \cdots, i_p) \notin \{(\pi_1, \cdots, \pi_p)\}, \\ & \quad (j_1, \cdots, j_{n-p}) \notin \{(\pi'_{p+1}, \cdots, \pi'_n)\} \\ \operatorname{sign}(\pi'), & \text{当}(i_1, \cdots, i_p) = (\pi_1, \cdots, \pi_p), \\ & \quad (j_1, \cdots, j_{n-p}) = (\pi'_{p+1}, \cdots, \pi'_n) \end{cases} \end{aligned} \tag{14.2.33}$$

于是由(14.2.26)知

$$(\perp\alpha)_{j_1\cdots j_{n-p}}=(\perp\alpha)(w_{j_1},\cdots,w_{j_{n-p}})$$
$$=\Omega(w_1,\cdots,w_p,w_{j_1},\cdots,w_{j_{n-p}})=\Omega_{1\cdots pj_1\cdots j_{n-p}} \tag{14.2.34}$$

它与当$(i_1,i_2,\cdots,i_p)$为$(1,2,\cdots,p)$的任意一个置换时的(14.2.33)相等.而(14.2.31)式右端正好是对 $p!$ 个相等的项先求和后再平均.证毕.

习题 14-2

1. 证明:Wedge 积满足分配律,结合律及对易关系(14.2.11).
2. 设 V 为三维 Euclidean 空间,$\{e_1,e_2,e_3\}$是一组"正取向"的正交归一基矢.试证明:

$$\perp(\boldsymbol{v}^*\wedge\boldsymbol{w}^*)=(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})^* \tag{14.2.35}$$

3. 设 $\alpha=w^*$ 是 Minkowski 空间 $\boldsymbol{M}$ 上的 1-形式.试证明:

$$(\perp w^*)(v_1,v_2,v_3)=\Omega(w,v_1,v_2,v_3),\quad \forall\text{矢量 } w,v_1,v_2,v_3\in\boldsymbol{M} \tag{14.2.36}$$

§14.3 流形、切空间和张量场

流形

设 M 是一个连通的拓扑空间.拓扑空间 M 是一个赋予了拓扑结构的集合,所谓拓扑结构是指在 M 上给出了由 M 的子集(开集合)组成的子集组 $\mathcal{O}$,使得 $M\in\mathcal{O}$,空集合 $\varnothing\in\mathcal{O}$;且 $\mathcal{O}$ 中有限个元素的交集属于 $\mathcal{O}$,$\mathcal{O}$ 中任意个元素的和集属于 $\mathcal{O}$.所谓 M 连通是指不能将 M 分成交集为空集的两个非空开集合的并集.假定对于 M 的每一个点 p,都存在 p 的一个开邻域 U,且在该邻域中给出了连续的双映射(亦称为同胚映射)

$$\phi_U:\quad U\to R^n \tag{14.3.1}$$

这就是所谓的坐标卡或局部坐标系.具有由坐标卡[若满足下面的匹配条件(14.3.4)]给出的附加结构的连通拓扑空间 M 被称为流形.

同胚映射 ϕ_U 使得我们可以局域地将 M 视为 R^n.这就是说,给定 M 中的任一点 p,p 的某一邻域 U 可通过双映射 ϕ_U 视为 R^n

$$\phi_U(p)|_{p\in U\subset M}=(x^1(p),x^2(p),\cdots,x^n(p))\in R^n \tag{14.3.2}$$

式中

$$x^i(\cdot):\quad U\to R \tag{14.3.3}$$

称为 U 中的坐标函数(或局域坐标)(见图 14.1).

值得注意的是,对于同一点 $p\in M$,可能有两个开邻域 U 与 V 包含 p,这两个邻域中分别定义了相应的局域坐标系 ϕ_U 与 ϕ_V.这两个局域坐标系相互匹配

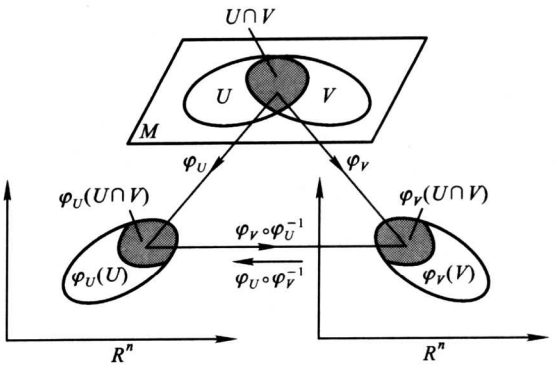


图 14.1　微分流形上的局域坐标系

的条件是

$$\phi_V \circ \phi_U^{-1}: \quad \phi_U(U \cap V) \to R^n \tag{14.3.4}$$

以至于 R^n 中的结构保持不变.若映射 $\phi_V \circ \phi_U^{-1}$ 属于 C^∞ 类(即无穷可微函数),则相应的流形被称为 C^∞ 流形.与流形 M 局域等价的 Euclidean 空间 R^n 的维数被称为流形的维数

切空间

考虑 R^3 中的单位球面 S^2.在任一点 $p \in S^2$ 与 S^2 相切的 R^3 中的矢量 v 可用来定义 $C^\infty(R^3)$ 上的一个实线性映射

$$\hat{v}(f) := \lim_{t \to 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t}, \quad \forall f \in C^\infty(R^3) \tag{14.3.5}$$

由于 v 与 S^2 相切,$\hat{v}(f)$ 仅依赖于 f 在 S^2 上的值.因而

$$\hat{v}(f) = \hat{v}(g), \quad \text{如果 } f_{S^2} = g_{S^2} \tag{14.3.6}$$

故 $\hat{v}(f)$ 可视为定义在 $C^\infty(S^2)$ 上的一个线性映射.

映射 $f \mapsto \hat{v}(f)$ 具有 Leibnitz 性质:

$$\hat{v}_p(fg) = \hat{v}_p(f)g(p) + f(p)\hat{v}_p(g), \quad \forall f, g \in C^\infty(S^2) \tag{14.3.7}$$

式中,为明确起见,对在 p 点定义的映射加上了下标 p.反之,将函数在 p 点展为 Taylor 级数,$C^\infty(S^2)$ 上具有性质(14.3.7)的任意实线性映射都具有形式(14.3.5),只不过 v_p 可能不同罢了.这一结果的重要意义在于,满足 Leibnitz 条件的实线性映射可视为切矢量.

定义:设 M 是一个流形,在点 $p \in M$ 的切矢量被定义为一个实线性映射

$$\begin{aligned} &f \mapsto w_p(f), \qquad \forall f \in C^\infty(M) \\ &w_p(fg) = w_p(f)g(p) + f(p)w_p(g), \qquad \forall f, g \in C^\infty(M) \end{aligned} \tag{14.3.8}$$

式中，映射 w_p 有时写成 w. 给定的 p 点处的所有切矢量的集合称为 M 在 p 点的切空间，记为 M_p. 如果 M 本身是一个矢量空间，则方程(14.3.5)自然地将每个切空间 M_p 视为与 M 等同.

矢量场

映射

$$p \mapsto v_p \in M_p, \qquad \forall\, p \in M \tag{14.3.9}$$

定义了 M 上的矢量场. 如果

$$\text{函数 } p \mapsto v_p(f) \text{是 } C^\infty \text{的}, \quad \forall\, M \text{ 上的} C^\infty \text{函数} \tag{14.3.10}$$

则矢量场 v 是 C^∞ 的，也记为 $v(f)$. 如果 v 是一个矢量场，g 是一个 C^∞ 函数，则矢量场 gv 自然地定义为

$$(gv)_p(f) = g(p)v_p(f), \qquad \forall\, f \in C^\infty(M) \tag{14.3.11}$$

M 上的全部矢量场的集合可视为 $C^\infty(M)$ 上的切丛.

设

$$p \mapsto \phi(p) \in R^n$$

是 M 的一个局域坐标卡，其坐标函数为

$$\phi(p) = (x^1(p), x^2(p), \cdots, x^n(p)) \tag{14.3.12}$$

对于任一点 $p \in M$ 和 M 上的任一 C^∞ 函数 f，在 $\phi(p)$ 相对于第 j 个坐标对 $f \circ \phi^{-1}$ 的微商是一个切矢量，记为 $(\partial/\partial^j)_p$（或简记为 ∂/∂^j）

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p (f) := \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial x^j}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f \circ \phi^{-1}(x_1, \cdots, x_j + h, \cdots, x_n) - f \circ \phi^{-1}(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_n)}{h} \tag{14.3.13}$$

易证

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n} \tag{14.3.14}$$

是 M_p 的一组基矢. 事实上，注意到 ∂/∂^j 是一个局域定义的矢量场，在 p 的足够小的邻域 U 中定义的每个矢量场都可唯一地写为

$$v = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \text{且 } v^i \in C^\infty(U) \tag{14.3.15}$$

形式场

映射

$$p \mapsto \omega_p \in M_p^* \tag{14.3.16}$$

称为 1－形式场，或 M 上的 1－形式. 如果对于所有 C^∞ 的矢量场，映射

$$p \mapsto \omega_p(v_p) \tag{14.3.17}$$

是 C^∞ 的，则所述的 1－形式称之为是 C^∞ 的. 类似地，可定义其他的 C^∞ 张量.

对于 M 上的每个 C^∞ 函数 f，可按下式定义一个 1－形式场 $\mathrm{d}f$（称为 f 的微分）：

$$(\mathrm{d}f)_p(v_p):=v_p(f),\quad \forall\, p\in M, v_p\in M_p \tag{14.3.18}$$

换言之，$\mathrm{d}f$ 在矢量 v_p 处的值是 f 沿 v_p 的方向的方向微商.

如果 (x^i) 是某一局域坐标卡的坐标函数

$$p\mapsto(x^1(p),x^2(p),\cdots,x^n(p)) \tag{14.3.19}$$

那么，在每点 p，下述 1－形式

$$(\mathrm{d}x^1)_p,(\mathrm{d}x^2)_p,\cdots,(\mathrm{d}x^n)_p \tag{14.3.20}$$

是 M_p^* 的一组基. 事实上，它是(14.3.14)的对偶基. 在这一组基下，任一函数 f 的微分可写成

$$\mathrm{d}f=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i \tag{14.3.21}$$

一般的 M 上的 p－形式 $(1\leqslant p\leqslant n)$ 可局域地表为下述可分解的 p－形式的和

$$\int \mathrm{d}x^{i_1}\wedge\mathrm{d}x^{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p} \tag{14.3.22}$$

由于矢量空间上的 0－形式是标量，流形上的 0－形式场只是一个函数.

习题 14－3

1. 证明：式(14.3.14)是 M_p 的一组基.
2. 证明：式(14.3.20)是 M_p^* 的一组基.
3. 证明：式(14.3.20)是式(14.3.14)的对偶基.

§14.4　协变微商

矢量场的协变微商

回到 R^3 中的单位球面 S^2. 对于 S^2 上任一点 p 和 R^3 中任一矢量场 w，可由下式

$$\mathrm{D}_v w:=\lim_{t\to 0}\frac{w_{p+tv}-w_p}{t} \tag{14.4.1}$$

定义在 p 点沿方向 v 的微分 $\mathrm{D}_v w$. 自然，这一定义对任意矢量场

$$p\mapsto w_p\in R^3$$

都适用，但我们仅对 S^2 上所有的点 p 的切矢量 $w_p\in(S^2)_p$ 构成的矢量场感兴趣. (14.4.1)可写成分量形式

$$\mathrm{D}_v w:=(v(w_1),v(w_2),v(w_3)) \tag{14.4.2}$$

式中，$w=(w_1,w_2,w_3)$. 由上节知，$v(w^i)$ 仅与 S^2 上 w^i 的值有关；故对于 S^2

上的点 q，$D_v w$ 也仅与 w 的 w_q 值有关. 因而

$$w \mapsto D_v w \tag{14.4.3}$$

可视为定义在 p 点附近的 C^∞ 矢量场 w 上以矢量形式赋值的映射，这提供了一个对 R^3 中的 S^2 的切矢量场进行微分的很自然的方法.

我们知道，流形的切空间可以内禀(既不需要提及该流形嵌入其中的参照物)地确定. 是否可以内禀地定义微商呢？回答是否定的. "矢量的微商"是基本的流形结构之外的附加结构. 流形上的微商应满足的基本要求是：

(1) 任给一点 $p \in M$ 和 p 点邻近的一个 C^∞ 矢量场，映射

$$v \mapsto D_v w, \qquad v \in M_p \tag{14.4.4}$$

应是从 M_p 到 M_p 的线性映射.

(2) 对于 M_p 中的任一 v、任一上述矢量场 w 和在 p 点附近定义的 C^∞ 函数 f，有

$$D_v(fw) = v(f)D_v w + fD_v w \tag{14.4.5}$$

所有满足上述两个要求的算符 D 都称为 M 上的协变微商.

(3) 有许多可能的协变微商的形式. 可对协变微商加上另一个条件

$$D_v w - D_w v = [v, w], \quad \forall \text{矢量场 } v, w \tag{14.4.6}$$

因为 R^n 中矢量场的分量微商具有这一性质. 满足(14.4.6)的协变微商被称为是无扭(torsion - free)的.

(4) 条件(1)、(2)、(3)仍然不能唯一地确定协变微商. 为看出这一点，选取一局域坐标系 $(x^1, \cdots, x^n)$，对于任意的 i 与 j，作 Taylor 展开：

$$D_{\partial/\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \tag{14.4.7}$$

这在坐标邻域中定义了函数

$$p \mapsto \Gamma_{ij}^k(p) \tag{14.4.8}$$

称为联络系数或 Christoffel 符号. 由于

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0 \tag{14.4.9}$$

任何协变微商若满足条件(3)，则必满足

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \tag{14.4.10}$$

反之亦然. 因而，给出一个任意的无扭的联络等价于给出对于下指标对称的联络系数.

定理：给定任一点 $p \in M$，总可以找到 p 点的一个局域坐标系，使得在该坐标系中所有联络系数 $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$. **注意**：通常不可能在整个流形上做到这一点. 因而，Christoffel 符号不是张量的分量. 因为，对于张量而言，若它在某个坐标系

中为零则它应在所有坐标系中都为零.

(5) 对于任意的矢量场 $w=\sum w^j\partial/\partial x^j$,协变微商为

$$D_{\partial/\partial x^j}\left(\sum w^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial w^k}{\partial x^i}+\sum_j w^j\Gamma_{ij}^k\right)\frac{\partial}{\partial x^k} \tag{14.4.11}$$

1－形式场的协变微商

(6) 给定定义在点 $p\in M$ 的邻域中的一个 1－形式场 α 和一个矢量 $v\in M_p$,并记 1－形式场 α 沿方向 v 的协变微商为 $D_v\alpha$,我们要求 Leibnitz 规则成立:

$$(D_v\alpha)(w)=v[\alpha(w)]-\alpha(D_vw) \tag{14.4.12}$$

它定义了对 1－形式场的协变微商.上式中右端的 $\alpha(w)$是下述函数:

$$\alpha(w):\ p\mapsto\alpha_p(w_p) \tag{14.4.13}$$

可以证明,$(D_v\alpha)(w)$仅依赖于 w 在 p 点的值 w_p.故任给一矢量 $w_p\in M_p$,我们可定义

$$(D_{v_p}\alpha)(w_p)=(D_{v_p}\alpha)(w) \tag{14.4.14}$$

(7) 对形式 dx^j,(14.4.1)式可用联络系数与基矢$\{\partial/\partial x^j\}$表为

$$D_{\partial/\partial x^i}(dx^j)=-\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ik}^j dx^k \tag{14.4.15}$$

(8) 对任意的 1－形式 $\alpha=\sum\alpha_i dx^i$,一般地有

$$D_{\partial/\partial x^i}\left(\sum\alpha_j dx^j\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\alpha_k}{\partial x^i}-\sum_j\alpha_j\Gamma_{ik}^j\right)dx^k \tag{14.4.16}$$

张量场的协变微商

(9) 任给一点 $p\in M$、一矢量 $v\in M_p$和一定义在 p 点邻近的(s,q)型张量 T,张量 T 沿方向v 的协变微商 $D_vT\in(M_p)_q^s$也是在p 点上定义的同型张量,相应的映射

$$T\mapsto D_v(T) \tag{14.4.17}$$

需满足下述两个要求:

(9a) 对于每个 $v\in M_p$,D_vT 在R 上是线性的;即对于两个同阶的张量场 S 与 T 和任一$v\in M_p$有

$$D_v(aS+bT)=aD_vS+bD_vT,\quad\forall a,b\in R \tag{14.4.18}$$

(9b)对任何矢量场 $v_1,\cdots,v_s$与 1－形式场 $\alpha_1,\cdots,\alpha_q$,下述微商法则成立

$$\begin{aligned}D_v(v_1\cdots\otimes v_s\otimes\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_q)&=(D_vv_1)\otimes\cdots\otimes v_s\otimes\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_q+v_1\otimes\\&(D_vv_2)\otimes\cdots\otimes\alpha_q+\cdots+v_1\otimes\cdots\otimes(D_v\alpha_q)\end{aligned} \tag{14.4.19}$$

上述两个要求已将高阶张量的协变微商用低阶张量的协变微商表出.若将 0－形式场 α(即 c^∞ 函数)的协变微商定义为

$$D_v\alpha = v(\alpha), \quad \forall v \in M_p \tag{14.4.20}$$

则(14.4.18)与(14.4.19)意味着

$$D_v(f\alpha) = v(f)\alpha + fD_v\alpha, \quad \forall v \in M_p, \forall \text{张量场 } \alpha, \forall C^\infty \text{函数 } f \tag{14.4.21}$$

(10) 设 T 为 $C^\infty(s,q)$型张量场,其分量形式为 $T^{i_1\cdots i_s}_{j_1\cdots j_q}$. 任给 $p\in M$,从 M_p 到$(M_p)^s_q$的映射

$$v_p \mapsto D_vT \tag{14.4.22}$$

是线性的,可视为$(M_p)^s_{q+1}$中的一个元素,记为$(DT)_p$(或简记为DT).将DT看成是函数

$$p \mapsto (DT)_p, \quad \forall p \in M \tag{14.4.23}$$

便将DT确定为$(s,q+1)$型张量场.此即

$$(DT)(\beta_1,\cdots,\beta_s;v_1,\cdots v_q,v_{q+1}) := (D_{v_{q+1}})(\beta_1,\cdots,\beta_s;v_1,\cdots,v_q),$$
$$\forall v_1,\cdots,v_q,v_{q+1}\in M_p;\forall \beta_1,\cdots,\beta_s\in M_p^* \tag{14.4.24}$$

这个关系将协变微商D定义为从(s,q)型张量场到$(s,q+1)$型张量场的映射.

q-形式的协变微商

(11) 设 α 是一个 q-形式,则 $D\alpha$ 是一个$(0,q+1)$型张量,但不一定是$(q+1)$-形式,因为它不一定是反对称的.$D\alpha$ 的反对称化称为 α 的外微分,记为 $d\alpha$.$d\alpha$ 在矢量 $v_1,\cdots,v_{q+1}$上的值为

$$(d\alpha)(v_1,\cdots,v_{q+1}) = \sum_{i=1}^{q+1}(-1)^{i+1}(D_{v_i}\alpha)(v_1,\cdots,v_{i-1},v_{i+1},\cdots,v_{q+1}) \tag{14.4.25}$$

若 α 为 0-形式,相应的外微分由(14.3.18)式给出.

(12) 在局域坐标系中,外微分可按下式计算

$$d(f\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_q}) = \mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_q}, \forall f\in C^\infty(M) \tag{14.4.26}$$

可以由外微分的定义(14.4.25)导出公式(14.4.26).首先由

$$D_v(f\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_q}) = v(f)\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_q} + f\sum_{s=1}^{q}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge D_v(\mathrm{d}x^{i_s})\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_q} \tag{14.4.27}$$

注意到 $v(f)=\mathrm{d}f(v)$可知,对上式右端第一项反对称化给出 $\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_q}$.我们只须证余下的项反对称化后为零.由(14.4.15)知

$$D(\mathrm{d}x^i) = -\sum_{j,k}\Gamma^i_{jk}\mathrm{d}x^j\otimes\mathrm{d}x^k \tag{14.4.28}$$

是对称张量,故反对称化后消失为零.证毕.

(13) 设$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$是定义在 n 维流形 M 的开子集 U 上的一组矢量场，且在任一点 $p\in U$，矢量组$\{(e_1)_p,(e_2)_p,\cdots,(e_n)_p\}$是切空间 M_p 的一组基. 令$\{e^1,e^2,\cdots,e^n\}$是形式场的对偶基，即满足 $e^i(e_j)=\delta^i_j$. 若 D 是定义在 M 上的一个无纽的协变微商. 则对于任一 q - 形式 $\alpha\in C^\infty(U)$有

$$\mathrm{d}\alpha=\sum_{i=1}^{n}e^i\wedge \mathrm{D}_{e_i}\alpha \tag{14.4.29}$$

证明：令 $\lambda=e^i$ 与 $\beta=\mathrm{D}_{e_i}\alpha$，应用(14.4.33)得

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}(e^i\wedge \mathrm{D}_{e_i}\alpha)(e_{j_1},\cdots,e_{j_{q+1}})\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{q+1}(-1)^{k+1}e^i(e_{j_k})(\mathrm{D}_{e_i}\alpha)(e_{j_1},\cdots,e_{j_{k-1}},e_{j_{k+1}},\cdots,e_{j_{q+1}})\\&=\sum_{k=1}^{q+1}(-1)^{k+1}(\mathrm{D}_{e_k}\alpha)(e_{j_1},\cdots,e_{j_{k-1}},e_{j_{k+1}},\cdots,e_{j_{q+1}})\\&=\mathrm{d}\alpha(e_{j_1},\cdots,e_{j_{q+1}})\end{aligned}\tag{14.4.30}$$

(14) 外微分算符 d 具有下述性质：

$$\mathrm{d}(\alpha\wedge\beta)=(\mathrm{d}\alpha)\wedge\beta+(-1)^p\alpha\wedge\mathrm{d}\beta,\quad \forall\,\alpha\in\Lambda_p(M),\forall\,\beta\in\Lambda_q(M)$$

它可由外代数证明. 此外，d^2是零算符，即

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\alpha)=0,\qquad \forall\,\alpha\in\Lambda_p(M) \tag{14.4.31}$$

对于 0 - 形式，它事实上是普通偏微商相互对易这一事实；普遍情形可应用(14.4.33)式证明.

习题 14 - 4

1. 证明：式(14.4.11)很好地定义了 1 - 形式 α 沿某矢量 v 方向的协变微商 $\mathrm{D}_v\alpha$. 换言之，需证明：

   (1) 任何矢量 $w_p\in M_p$ 可延拓为定义在 p 的邻域中的一个 C^∞ 矢量场 w；

   (2) 如果 u 与 w 是矢量场，且 $u_p=w_p$，则对于任何 $v_p\in M_p$ 有

$$v_p[\alpha(u)]-\alpha(\mathrm{D}_{v_p}u)=v_p[\alpha(w)]-\alpha(\mathrm{D}_{v_p}w) \tag{14.4.32}$$

2. 对于任意的 1 - 形式 λ、q - 形式 β 和矢量 $v_1,v_2,\cdots,v_{q+1}$，证明：

$$(\lambda\wedge\beta)(v_1,\cdots,v_{q+1})=\sum_{k=1}^{q+1}(-1)^{k+1}\lambda(v_k)\beta(v_1,\cdots,v_{k-1},v_{k+1},\cdots,v_{q+1}) \tag{14.4.33}$$

§ 14.5　Stokes 定理

有边界的流形

考虑 R^3 中的一个封闭的单位球

$$B=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1\} \tag{14.5.1}$$

这(至少在自然的方式上)不是一个流形,因为位于球面

$$S^2=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=1\} \tag{14.5.2}$$

上的点没有与 R^3 同胚的邻域.然而,开球

$$B_0=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2<1\} \tag{14.5.3}$$

是一个流形,而 S^2 是 B_0 在 R^3 中的拓扑边界.显然

$$B=B_0\cup S^2 \tag{14.5.4}$$

故称 B 为具有边界的流形.有边界的流形可视为通常的流形,只要允许局域坐标映射 ϕ_U 可映射到 R^n 中的半空间

$$\{(x_1,\cdots,x_n)\in R^n\mid x_1\leqslant 0\} \tag{14.5.5}$$

以及 R^n 本身即可.

有边界的流形的边界定义为超平面 $x_1=0$ 在所有坐标映射 ϕ 下的逆像的交集.由于 R^n 中的超平面 $x_1=0$ 是一个 R^{n-1} 空间,在由局域坐标卡集所诱导的微分结构下,n 维有边界的流形的边界自身应是一个 $n-1$ 维流形.设 M 是一个有边界的流形,通常将其边界记为 ∂M.不要将流形的边界与拓扑边界混淆.例如,闭球在拓扑上没有边界,因为球面是球体的子空间.再如 R^3 中的某直线上的一个闭区间,作为拓扑空间 R^3 的子空间,该闭区间本身就是边界;但如果考虑为有边界的流形,其边界为它的两个端点.

有向流形

如果流形 M 的微分结构是由一系列这样的坐标映射 ϕ_U 决定的,以至于对于其中任意两个映射 ϕ_U 与 ϕ_V,下述复合映射

$$\phi_U\circ\phi_V^{-1}:\ \phi_V(U\cap V\neq\varnothing)\to R^n \tag{14.5.6}$$

的 Jacobian 行列式总是正的,则称 M 是有向的.这个条件允许我们将 p 点处的切空间的一组正向基矢自恰地定义为这样一组基,它通过坐标微商映射而映射为 R^n 中的一组正向基矢,后者取 R^n 中的标准基

$$\{(1,0,\cdots,0),(0,1,0,\cdots,0),\cdots,(0,0,\cdots,0,1)\} \tag{14.5.7}$$

类似地,可定义有向的有边界的流形,而对于具有有向边界 ∂M 的有向流形 M,∂M 的方向与 M 的方向以一种自然的方式联系在一起.

流形上的积分

设 M 是一个 n 维有向流形(有边界或无边界),α 是流形 M 上的 n-形式.设想将流形 M 分割成许多小块,使得在小块中的点 $p\in M$ 处的切矢量可视为在 M 中,且每块近似为由切矢量 $\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 组成的正向基矢张成的 n 维立方体.α 对流形 M 的积分在 n 维立方体尺度很小但数目很大时可近似为下述数

值的和：

$$\alpha(v_1, v_2, \cdots, v_n) \tag{14.5.8}$$

注意：之所以要求 M 是有向的，是因为当基矢改变顺序时，数值(14.5.8)会改变符号.

现简述按照上述途径对有向流形 M 上的 n - 形式 α 的积分的严格定义.考虑某一开集 U 的一个局域坐标映射

$$p \mapsto \phi_U(p) = (x_1(p), x_2(p), \cdots, x_n(p)) \tag{14.5.9}$$

限制在 U 中的 α 可写为

$$\alpha = f \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n, \quad f \in C^\infty(M) \tag{14.5.10}$$

在开集 U 上的积分则定义为

$$\int_U \alpha = \int_{R^n} f \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n, \quad f \in C^\infty(M) \tag{14.5.11}$$

式中右端是普通的 Riemann 积分，而 n - 形式的变换性质意味着这积分与坐标的选取无关.最后，积分

$$\int_M \alpha \tag{14.5.12}$$

被定义为将所有坐标补丁上的积分适当相加(suitable patching together)所得到的结果.

Stokes 定理

若 M 是一个紧致的(即 M 的任一开覆盖都是有限的)、有向的有边界的 n 维流形，而 ω 是 M 上的一个任意的 $(n-1)$ - 形式，则

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega \tag{14.5.13}$$

值得指出的是，n 维立方体或具有非光滑边缘的其他几何体(经过使边界光滑的手续)也可视为流形，故可应用 Stokes 定理.

关于有向流形 M 及其有向边界 ∂M 的方向的约定如下.仅须对 M 为半空间(14.5.5)而 ∂M 为超平面 $x_1 = 0$ 的情形陈述这一约定即可，普遍情形可由坐标映射诱导而定.当且仅当一组有序基 $e_1 = (1, 0, \cdots, 0), e_2, \cdots, e_n$ 是 M 的正向基(即到标准基的线性变换的行列式为正值)时，有序基 $e_2, \cdots, e_n$ 才是 ∂M 的正向基.考虑到 $(1, 0, \cdots, 0)$ 可视为超平面的外法向.故将超平面的外法向从前面加到超平面的一组正向基上便构成了 R^n 的一组正向基.

注意：在具有不定度规的空间中，其子空间的边界的外法向可能不存在.例如，对于 1 + 1 维 Minkowski 空间中由光锥作为边界的子空间 M[一个以 $(ct = 0, x = 0)$、$(ct = 1, x = 1)$、$(ct = 2, x = 0)$、$(ct = 1, x = -1)$ 为顶点的正方形]，其边界的任一法向(它与边界上的矢量的内积为零)都与边界相切，故这时边界没

有外法向,但仍可找到从∂M中某点发出且与∂M不相切的矢量,它指向"进入"或"离开"M的方向.将这一矢量以合适的方式加到∂M的一组正向基中便构成了M的一组正向基.

习题 14-5

考虑R^3中的一个2-形式ω,

$$\omega = E_1 \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + E_2 \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + E_3 \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \tag{14.5.14}$$

设M是R^3中的一个紧致的三维子流形.试说明Stokes定理此时即为通常的Gauss定理.

§14.6 协变散度

基本定义

设T为$(r+1,s)|_{r,s\geqslant 0}$型张量(它至少有一个逆变指标),则$\mathrm{D}T$

$$(\mathrm{D}T)(\omega_1,\cdots,\omega_{r+1},v_1,\cdots,v_{s+1}) = (\mathrm{D}_{v_{s+1}})(\omega_1,\cdots,\omega_{r+1},v_1,\cdots,v_s)$$
$$\forall\, v_i \in M_p, \quad \omega_i \in M_p^* \tag{14.6.1}$$

可视为定义在点$p\in M$的$(r+1,s+1)$型张量.将ω_1与v_{s+1}收缩后便得到(r,s)型张量,成为T的协变散度,记为δT.令$e_1,\cdots,e_n$与$e^1,\cdots,e^n$分别为一组基和相应的对偶基,则δT的定义可用显矢写为

$$(\delta T)_p(\omega_1,\cdots,\omega_r,v_1,\cdots,v_s) = \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{D}_{e_k}T)(e^k,\omega_1,\cdots,\omega_r,v_1,\cdots,v_s),$$
$$\forall\, v_i \in M_p, \omega_i \in M_p^* \tag{14.6.2}$$

在局域坐标系$\{x^i\}$中,其分量为

$$(\delta T)^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s} := \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{D}_{\partial/\partial x^k}T)^{ki_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s} = T^{ki_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s;k} \tag{14.6.3}$$

式中最后的表达式中一对上下k-指标意味着对k求和,且

$$T^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s;k} \equiv (\mathrm{D}_{\partial/\partial x^k}T)^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s} \tag{14.6.4}$$

两个非齐次Maxwell方程可利用协变散度写成

$$\delta F = \rho u \tag{14.6.5}$$

式中,$F=(F^{ij})$是电磁场场强张量的逆变形式,而ρu电流4-矢量.此即

$$\sum_{i=1}^{3} (\mathrm{D}_{\partial/\partial x^i}F)(\mathrm{d}x^i,\alpha) = \rho\alpha(u), \quad \forall\, \alpha \in M_p^* \tag{14.6.6}$$

或

$$F^{ij}_{ji} = \rho u^j \tag{14.6.7}$$

准 Riemannian 流形

设 M 是一个流形，而 M_p 是点 $p\in M$ 的切空间. 若在每个切空间中赋予一个 C^∞ 非简并实内积的附加结构：

$$p\mapsto M_p\text{的内积}\langle\cdot,\cdot\rangle_p \tag{14.6.8}$$

则称 M 是一个准 Riemannian 流形. 将“非简并”条件换成“正定”条件，则流形 M 被称为 Riemannian 流形. 若上述内积(它是一个(0,2)型张量，即所谓度规张量)的特征值为(+，−，−，−)，则相应的四维准 Riemannian 流形被称为 Lorentzian 流形.

定理：在准 Riemannian 流形上存在唯一的无扭联络 D(称为 Riemannian 联络)满足 Leibnitz 恒等式：

$$w(\langle u,v\rangle)=\langle \mathrm{D}_w u,v\rangle+\langle u,\mathrm{D}_w v\rangle,\quad \forall C^\infty\text{矢量场 } u,v,w \tag{14.6.9}$$

式中

$$w:p\mapsto w_p(\langle u,v\rangle)$$

$$\langle u,v\rangle:p\mapsto\langle u,v\rangle_p$$

Riemannian 联络的一个重要性质是，它与指标“上升”或“下降”的手续对易. 特别地有

$$\mathrm{D}_v(u^*)=(\mathrm{D}_v u)^* \tag{14.6.10}$$

q－形式上的协变散度

设 α 是有向的准 Riemannian 流形 M 上的一个 q－形式场，其分量为

$$\alpha_{j_1 j_2\cdots j_q}$$

由于它没有逆变指标，我们不能像前面那样对它取协变散度. 然而，我们总可以先提升第一个协变指标使之成为

$$\alpha^{j_1}{}_{j_2\cdots j_q}$$

然后再取协变散度得

$$\delta\alpha=\sum_k \alpha^k{}_{j_2\cdots j_q;k} \tag{14.6.11}$$

这称之为对 α 的协变散度.

设 M 的维数为 n，而切空间 M_x 的一组正交归一基中模为负的基矢的个数为 b，则

$$\delta\alpha=(-1)^{b+(q+1)n}{}_\perp \mathrm{d}_\perp\alpha,\quad \forall\alpha\in\Lambda_q(M) \tag{14.6.12}$$

即除开一个符号因子，δ 是外微分对形式的作用的 Hodge 对偶变换. 对上式两边取 Hodge 对偶，并应用(14.2.17)得

$${}_\perp\delta\alpha=(-1)^{q+1}\mathrm{d}_\perp\alpha,\quad \forall\alpha\in\Lambda_q(M) \tag{14.6.13}$$

特别地，对于 Minkowski 空间有

$$\delta\alpha = -{}_{\perp}\mathrm{d}_{\perp}\alpha \tag{14.6.14}$$

例:考虑 Minkowski 空间中的 1 - 形式 $\alpha = f\mathrm{d}x^1$,易知

$$\alpha \wedge {}_{\perp}\alpha = \langle \alpha, \alpha \rangle \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 = -f^2 \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3$$

于是有

$${}_{\perp}\alpha = f\mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3$$

$$\mathrm{d}_{\perp}\alpha = \frac{\partial f}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3$$

进而

$${}_{\perp}\mathrm{d}_{\perp}\alpha = \frac{\partial f}{\partial x^1}$$

另一方面,经过对 α 提升指标得 $-f\partial/\partial x_1$.故

$$\delta\alpha \equiv \delta(f\mathrm{d}x^1) = -\frac{\partial f}{\partial x^1}$$

由此例易知,(14.6.14)对于 Minkowski 空间中的任一 q - 形式成立.

注意:$-\delta$ 又称之为余外微分算符,因为 $-\delta$ 作用于形式时是外微分算符的伴随(见习题 14 - 6 第 2 题).

Gauss 定理

设 M 是 n 维有边界的有向准 Riemannian 流形,∂M 是其边界,Ω 是 M 的 n - 体积形式,w 是一矢量场.由式(14.2.26)得

$$({}_{\perp}w^*)(v_1, \cdots, v_{m-1}) = \Omega(w, v_1, \cdots, v_{m-1}) \tag{14.6.15}$$

式中 $v_1, \cdots, v_{m-1}$ 是 M 上的切矢量场,而 $({}_{\perp}w^*)(v_1, \cdots, v_{m-1})$ 即是由矢量 w, $v_1, \cdots, v_{m-1}$ 张成的平行 n 面体的有向体积.由 Stokes 定理有

$$\int_{\partial M} {}_{\perp}w^* = \int_M \mathrm{d}_{\perp}w^* \tag{14.6.16}$$

由(14.6.13)知

$$\mathrm{d}_{\perp}w^* = {}_{\perp}\delta w^* = {}_{\perp}\delta(w) = \delta(w)\Omega \tag{14.6.17}$$

于是(14.6.16)成为

$$\int_{\partial M} {}_{\perp}w^* = \int_M \delta(w)\Omega \tag{14.6.18}$$

此称为 Gauss 定理.

习题 14 - 6

1. 将式(14.6.10)两边作用于 1 - 形式 $w \in M_p$,验证两边确实相等.
2. 设 M 是一个 n 维紧致连通的准 Riemannian 流形,$0 \leqslant p \leqslant n$,将 M 上的所有 C^∞ 的 p - 形式场构成的无穷维矢量空间记为 Λ_p.在 Λ_p 上定义内积为

$$(\alpha, \beta) \equiv \int_M \langle \alpha, \beta \rangle \Omega \tag{14.6.19}$$

式中$\langle\alpha,\beta\rangle$表示下述函数

$$p\mapsto\langle\alpha_p,\beta_p\rangle,\quad\forall\, p\in M \tag{14.6.20}$$

将外微分算符 d 定义为从 Λ_p 到 Λ^{p+1} 的线性映射. 试证明 d 的伴随 $\mathrm{d}^\dagger$

$$\mathrm{d}^\dagger:\ \Lambda_{p+1}\to\Lambda_p \tag{14.6.21}$$

是

$$\mathrm{d}^\dagger=-\delta \tag{14.6.22}$$

换言之,证明对于任一 C^∞ 的 p - 形式 α 和 $(p+1)$ - 形式 β 有

$$\int_M\langle\mathrm{d}\alpha,\beta\rangle\Omega=-\int_M\langle\alpha,\delta\beta\rangle\Omega \tag{14.6.23}$$

§14.7　电荷守恒定律

现在令 w 为四维电流密度 ρu,其中 u 是四维速度分布,而 ρ 是电荷密度分布. 对于 Minkowski 时空 M 中的任一点 $p\in M$,选取一个 Lorentz 参考系使位于该点的粒子处于静止状态,即 $u_p=(1,0,0,0)$. 如果 e_1,e_2,e_3 是位于 p 点的类空单位矢量,它们构成正交归一基,它们也与 u_p 垂直,以至于 u,e_1,e_2,e_3 也构成一组正向基矢. 由(14.6.15)式得

$$({}_\perp\rho u^*)(e_1,e_2,e_3)=\rho\Omega(u,e_1,e_2,e_3)=\rho \tag{14.7.1}$$

即使 e_1,e_2,e_3 与 u 不垂直,可将它们考虑为一组正交归一的正向基 e_0,e_1,e_2,e_3 中的一部分. 这组正向基是在 p 点的切空间的坐标系中定义的,在该系中 $u=\gamma(\boldsymbol{v})(c,\boldsymbol{v})$,其中 $\boldsymbol{v}$ 是粒子在 R^3 中的速度. 由(14.6.15)可得

$$({}_\perp\rho u^*)(e_1,e_2,e_3)=\rho\gamma(\boldsymbol{v}) \tag{14.7.2}$$

可以证明,在下述一组新的正交归一基

$$\begin{cases}e_0'=u,\ e_1'=\gamma(\boldsymbol{v})\left(\dfrac{|\boldsymbol{v}|}{c},\dfrac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\right)\\ e_2'=e_2,\ e_3'=e_3\end{cases} \tag{14.7.3}$$

下单位体积中的 ρ 个粒子在坐标基 e_0,e_1,e_2,e_3 下成为每单位空间体积 $\rho\gamma(\boldsymbol{v})$ 个粒子的通量. 故(14.7.2)式是单位空间体积中的电荷. 因而,如果 S 是一个有向的类空超平面(有向的三维类空子流形),则除开一个常数

$$\int_S{}_\perp\rho u^*$$

可解释为 S 上的总电荷.

现考虑一个四维体积

$$V=\{(x^0,x^1,x^2,x^3)\mid ct_1\leqslant x^0\leqslant ct_2,\ -a\leqslant x^i\leqslant a,\ i=1,2,3\} \tag{14.7.4}$$

式中,a 足够大,以至于所考虑的系统在时间间隔 $t_1\leqslant x^0/c\leqslant t_2$ 内位于边长为 a

的三维立方体中.于是,在∂V的具有类空的法向的侧面上,ρ为零;仅在$x^0=ct_1$与$x^0=ct_2$的侧面上的积分

$$\int_{\partial V}\perp(\rho u^*)$$

有贡献.进而,由V的方向所诱导的这两个侧面的方向在下述意义上才是正的,即它使得正电荷在侧面$x^0=ct_2$上给出正的贡献,而在侧面$x^0=ct_1$上给出负的贡献.于是

$$\int_V\delta(\rho u)\Omega=\int_{\partial V}\perp(\rho u^*)=Q_{t_2}-Q_{t_1} \tag{14.7.5}$$

式中Q_t是整个体积在t时的总电荷.故电荷守恒要求

$$\int_V\delta(\rho u)\Omega=0,\quad \text{对 } a \text{ 足够大的 } V \tag{14.7.6}$$

考虑即使ρ在V的类空边界面上不为零(这时对a不加任何限制)的普遍情形,V的类空边界可定义为下述集合:

$$S_{j\pm}\equiv\{(x^0,x^1,x^2,x^3)\mid ct_1\leqslant x^0\leqslant ct_2,x_j=\pm a,\mid x_i\mid\leqslant a,i\neq 0,j\} \tag{14.7.7}$$

可以看出

$$\int_{S_{j\pm}}\perp(\rho u^*)$$

表示在时间间隔$[t_1,t_2]$内通过二维面

$$\{(x^1,x^2,x^3)\mid x_j=\pm a,\mid x_i\mid\leqslant a,i\neq j\}$$

从三维立方体C内向外流出去的电荷$\Delta Q^{(S_{j\pm})}$.于是

$$\int_V\delta(\rho u)\Omega=\int_{\partial V}\perp(\rho u^*)=Q_{t_2}^{(V)}-Q_{t_1}^{(V)}+\sum\Delta Q^{(S_{j\pm})}=0 \tag{14.7.8}$$

式中$Q_t^{(V)}$是t时刻C中的总电荷.由于上式对任意的V成立,可将V收缩成一点,便有

$$\delta(\rho u)=0 \tag{14.7.9}$$

这是表述成外微分形式的电荷守恒定律.写成 Minkowski 时空中的分量形式即

$$\frac{\partial(\rho u^i)}{\partial x^i}=0 \tag{14.7.10}$$

式中一对指标i意味着对i求和.在一般的时空中,上式中的普通散度应代之以协变散度

$$0=\delta(\rho u)=(\rho u)^i_{;i}=\frac{\partial(\rho u^i)}{\partial x^i}+\rho u^j\Gamma^i_{ij} \tag{14.7.11}$$

§14.8　外微分形式方程

定义

设 V 为一个 n 维矢量空间. 令 $0\leqslant p\leqslant n-1$, 而 $u\in V$ 是任一矢量, $\eta\in\Lambda_1(V)$ 使任一 1－形式. 则线性变换 W_η(称为与 η 作 Wedge 积的算符)定义为

$$W_\eta:\quad \Lambda_p(V)\to\Lambda_{p+1}(V)$$

$$W_\eta\alpha:=\eta\wedge\alpha,\quad \forall\,\alpha\in\Lambda_p(V) \tag{14.8.1}$$

而线性变换 C_u(称为与 u 收缩的算符)定义为

$$C_u:\quad \Lambda_{p+1}(V)\to\Lambda_p(V)$$

$$(C_u\beta)(v_1,\cdots,v_p):=\beta(u,v_1,\cdots,v_p),\quad \forall\,\beta\in\Lambda_{p+1}(V),v_i\in V \tag{14.8.2}$$

基本定理

设 M 是一个有向的准 Riemannian 流形. p 为正整数. 在点 $q\in M$ 的邻域中, $(p+1)$－形式 γ 与 $(p-1)$－形式 α 分别满足

$$\mathrm{d}\gamma=0,\qquad \delta\alpha=0 \tag{14.8.3}$$

则在一些合适的假设下, 在点 q 的邻域中, 存在一个 p－形式 β 满足

$$\text{(a)}\quad \mathrm{d}\beta=\gamma \tag{14.8.4}$$

$$\text{(a1)}\quad \delta\beta=\alpha \tag{14.8.5}$$

注: 满足 $\mathrm{d}\alpha=0$ 的形式称为闭形式(closed form); 而若 $(p+1)$－形式 γ 可整体地表为 $\gamma=\mathrm{d}\alpha$, 则称 γ 为恰当形式(exact form). 恰当形式必为闭形式, 但闭形式不一定是恰当形式. 基本定理的第一部分说明, 闭形式可局域地表示为恰当形式.

举例:

1. Helmholtz 定理: 总可以找到 R^3 中的一个三维矢量, 具有给定的旋度, 只要所给定的旋度的散度为零; 总可以找到 R^3 中的一个标量, 具有给定的梯度, 只要所给定的梯度的旋度为零.

2. 描述电磁场场强张量的 2－形式 F 满足条件 $\mathrm{d}F=0$, 故总可以找到一个描述势的 1－形式 A 满足 $\mathrm{d}A=F$. 不仅 $\mathrm{d}A=F$ 可以局域地被满足, 且 δA 可以任意地选取(即取某种规范).

3. 基本定理若表述成应用于紧致 Riemannian 流形的整体形式, 便成为微分几何上的一个重要结果——Hodge 理论.

证明:

(a) 关于记号与有关简化条件的说明:

(a1) 令流形 M 的维数为 $n+1\geqslant 2$($n=0$ 情形非常简单).

(a2) 如果 M 是一个内积空间,则将它写成 $M=R^1\oplus R^n$,且$(1,0,\cdots,0)$在 M 中具有正模,但未假定 R^n 具有 Euclidean 内积. M 中的点在每个局域坐标系下形如

$$(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^1\oplus R^n$$

换言之,我们将第一个坐标取为"时间". 自然,这对于负定的内积是不可能的;但这时可反转内积的符号. 后者只不过意味着反转作用在形式上的协变散度算符的符号,因而如果结果对正定内积是对的,则它对负定内积也是对的.

(a3) 如果 M 是一个任意的准 Riemannian 流形,则要求在 M 的每点的局域坐标系

$$[t(\cdot),x^1(\cdot),x^2(\cdot),\cdots,x^n(\cdot)]$$

满足

$$\left\langle\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x^i}\right\rangle=0,\qquad \text{当 } i=1,2,\cdots,n \tag{14.8.6}$$

(a4) 对于基本定理的另一半,要求由$\partial/\partial t$ 所张的切空间的度规是正定的,而由$\partial/\partial x^1,\partial/\partial x^2,\cdots,\partial/\partial x^n$ 所张的切空间的度规是负定的.

(b) 设 M 是一个内积空间,假定(a1)、(a2)与(a3)满足. 对于任一给定的时刻 t_0

$$S_{t_0}\equiv\{(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid t=t_0\}$$

是在时刻 t_0的子流形. 并令 S 表示在时刻t 的子流形.

设 $p\geqslant 1$,任一 p-形式可表为 $\mathrm{d}x^i$(可能有 $\mathrm{d}t$)的 Wedge 积的线性组合. 在不含 $\mathrm{d}t$ 的情形下,

$$\sigma=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n} f_{i_1\cdots i_n}\,\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\mathrm{d}x^{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p} \tag{14.8.7}$$

称为空间 p-形式,且约定任意的 0-形式也是空间的. 任意 p-形式 β 可分解为

$$\beta=\mathrm{d}t\wedge\beta_T+\beta_S \tag{14.8.8}$$

式中,β_S是空间 p-形式,它构成了 β 的空间部分;而 β_T是空间$(p-1)$-形式,它构成了 β 的时间部分.

注意:β_S与β_T是定义在S 上的形式. 记在 S 中外微分为 d_S,则

$$\mathrm{d}_S\sigma:=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_{i_1\cdots i_n}}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\mathrm{d}x^{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p} \tag{14.8.9}$$

并定义

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t}\equiv\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n}\frac{\partial f_{i_1\cdots i_n}}{\partial t}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\mathrm{d}x^{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p} \tag{14.8.10}$$

它是满足下式

$$\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}_S\sigma + \mathrm{d}t \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial t} \tag{14.8.11}$$

的唯一的空间 p－形式.(14.8.11)说明$\partial\sigma/\partial t$ 与空间坐标的选取无关.

对(14.8.8)进行外微分得

$$\mathrm{d}\beta = -\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}\beta_T + \mathrm{d}\beta_S \tag{14.8.12}$$

式中应用了 $\mathrm{d}^2 t = \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}t = 0$. 对 $\sigma \equiv \beta_S$应用(14.8.11)式得

$$\mathrm{d}\beta = -\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}\beta_T + \mathrm{d}_S\beta_S + \mathrm{d}t \wedge \frac{\partial \beta_S}{\partial t} = \mathrm{d}t \wedge \left(\frac{\partial \beta_S}{\partial t} - \mathrm{d}_S\beta_T\right) + \mathrm{d}_S\beta_S \tag{14.8.13}$$

故 $\mathrm{d}\beta$ 的空间部分为

$$(\mathrm{d}\beta)_S = \mathrm{d}_S\beta_S \tag{14.8.14}$$

其时间部分则是

$$(\mathrm{d}\beta)_T = \frac{\partial \beta_S}{\partial t} - \mathrm{d}_S\beta_T \tag{14.8.15}$$

现在求解方程

$$\mathrm{d}\beta = \gamma \tag{14.8.16}$$

式中 γ 是给定的$(p+1)$－形式.

将 γ 分解为

$$\gamma = \mathrm{d}t \wedge \gamma_T + \gamma_S \tag{14.8.17}$$

利用(14.8.14)与(14.8.15)可知,(14.8.16)与下述方程等价

$$\mathrm{d}_S\beta_S = \gamma_S \tag{14.8.18}$$

$$\frac{\partial \beta_S}{\partial t} = \mathrm{d}_S\beta_T + \gamma_T \tag{14.8.19}$$

给定 γ 与β_T,以及关于 β_S的初始条件(即在 S_0中任一给定 β_S),(14.8.19)可对 β_S积出.注意,由于 β_T不出现在(14.8.18)中,β_T可任意选取.

现在分析方程(14.8.18).给定任一时刻 t,(14.8.18)可视为定义在流形 S_t 中的方程.S_t的维数比 M 少 1,因而可应用数学归纳法.于是,可假定对于 t_0时刻,式(14.8.18)可在 S_0中解出,解 β_{S_0}可作为方程(14.8.19)的初始条件.因而,我们得到 M 中的 p－形式 β,它满足(14.8.19)以及 t_0时的(14.8.18).

现证明所得到的 β 实际上满足在任意时刻 t 时的方程(14.8.18).由于所给的 γ 必须满足自洽条件

$$\mathrm{d}\gamma = 0$$

将上式与(14.8.16)比较可知,我们有类似于(14.8.18)与(14.8.19)的两个方程:

$$d_S\gamma_S = 0 \tag{14.8.20}$$

$$\frac{\partial \gamma_S}{\partial t} = d_S\gamma_T \tag{14.8.21}$$

将(14.8.19)的 γ_T 代入(14.8.21)得

$$\frac{\partial \gamma_S}{\partial t} = d_S\left(\frac{\partial \beta_S}{\partial t} - d_S\beta_T\right) = d_S\frac{\partial \beta_S}{\partial t} = \frac{\partial (d_S\beta)}{\partial t}$$

此即

$$\frac{\partial}{\partial t}(\gamma_S - d_S\beta_S) = 0 \tag{14.8.22}$$

它保证了所得到的 β 满足在任意时刻 t 时的方程(14.8.18).

至此,已将 $(n+1)$ 维流形 M 上的问题(14.8.16)约化为 n 维流形 S_0 上的同一问题.按同样手续处理,直至流形的维数减为 p.这时,流形中没有非零的 $(p+1)$-形式,即任何 p-形式的外微分都为零,问题已解.

上述论证同样适用于一般的流形,即使是准 Riemannian 流形.与 M 是内积空间相比,一个重要的区别在于,在一般的流形中,所得到的是(14.8.16)的局域解,因为在一般流形上的坐标不是整体上有定义的.

(c) 现在分析在自洽条件

$$\delta\alpha = 0 \tag{14.8.23}$$

下的方程

$$\delta\beta = \alpha \tag{14.8.24}$$

此外(为简单起见),假定条件(a1)、(a2)、(a3)与(a4)满足.

由习题(14.8.66)的结果知

$$\delta\beta = s_\perp d_\perp \beta \tag{14.8.25}$$

式中 s 是一个符号(正号或负号).由(14.2.20)知,对于任一 p-形式 σ 有

$$\perp\perp\sigma = s'\sigma \tag{14.8.26}$$

式中 s' 是另一个符号.于是,(14.8.24)等价于

$$d_\perp\beta = ss'_\perp\alpha \tag{14.8.27}$$

而自洽条件(14.8.23)等价于

$$d_\perp\alpha = 0$$

假定 $ss' = 1$,否则作变换 $\alpha \to -\alpha$.

现在试图在自洽条件

$$d\gamma = 0 \tag{14.8.28}$$

$$d_\perp\alpha = 0 \tag{14.8.29}$$

下解方程组

$$d\beta = \gamma \tag{14.8.30}$$

$$\mathrm{d}_{\perp}\beta={}_{\perp}\alpha \tag{14.8.31}$$

我们已经证明,(14.8.30)等价于

$$\mathrm{d}_S\beta_S=\gamma_S,\quad \text{在 } S_0 \text{ 中} \tag{14.8.32}$$

$$\frac{\partial\beta_S}{\partial t}=\mathrm{d}_S(\beta_T)+\gamma_T \tag{14.8.33}$$

类似地,(14.8.31)等价于

$$\mathrm{d}_S[({}_{\perp}\beta)_S]=({}_{\perp}\alpha)_S \qquad \text{在 } S_0 \text{ 中} \tag{14.8.34}$$

$$\frac{\partial({}_{\perp}\beta)_S}{\partial t}=\mathrm{d}_S[({}_{\perp}\beta)_T]+({}_{\perp}\alpha)_T \tag{14.8.35}$$

由下节的引理 4 可知,当 $p\geqslant 2$ 时,即当 α 至少是 1 - 形式时,可将式(14.8.34)与式(14.8.35)代之以

$$\mathrm{d}_S({}_{\perp S}\beta_T)={}_{\perp S}\alpha_T \qquad \text{在 } S_0 \text{ 中} \tag{14.8.36}$$

$$\frac{\partial({}_{\perp S}\beta_T)}{\partial t}=(-1)^p\mathrm{d}_S({}_{\perp S}\beta_S)+(-1)^{p-1}({}_{\perp S}\alpha_S) \tag{14.8.37}$$

式中,对于任一空间 p - 形式 σ,${}_{\perp S}\sigma$ 表示限制在空间流形 S 上的 Hodge 对偶,即${}_{\perp S}$是相对于限制在 S 上的度规的 Hodge 对偶. 为了使这有确定的定义,我们需要确定 S 的取向. 设 M 是有向的,则当且仅当

$$\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}$$

在 M 中是一组正向基,则

$$\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}$$

在 S 中才是一组正向基,由此可定出 S 的方向. **注意**:如果 $p=1$,则 α 是 0 - 形式,方程(14.8.34)两边都是零;这时 α_T 不能确定,可将(14.8.36)式作为它的定义.

假定 M 是内积空间,且线性坐标 $t,x_1,\cdots,x_n$ 是相对于一组正交归一基而言的. 基矢的正交性保证了算符${}_{\perp S}$与$\partial/\partial t$ 相互对易,即对于任一空间 p - 形式 σ 有

$$\frac{\partial({}_{\perp S}\sigma)}{\partial t}={}_{\perp S}\frac{\partial\sigma}{\partial t} \tag{14.8.38}$$

事实上,由于$\{\mathrm{d}x^i\}$正交归一,便有

$${}_{\perp S}(\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p})=\pm(\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_{n-p}})$$

$$(i_1,\cdots,i_p,j_1,\cdots,j_{n-p})=(1,2,\cdots,n)\text{的置换} \tag{14.8.39}$$

由此易证(14.8.38).

若 S 是 n 维的,且具有负定的度规,则由(14.2.20)知对于 S 中的 p - 形

式 σ

$$\perp_S\perp_S\sigma=(-1)^{p(n-p)}(-1)^n\sigma \tag{14.8.40}$$

取 $\sigma\equiv\beta_T$，将(14.8.38)代入(14.8.37)，并利用(14.8.40)得

$$\mathrm{d}_S(\perp_S\beta_T)=\perp_S\alpha_T \qquad \text{在 } S_0 \text{ 中} \tag{14.8.41}$$

$$\frac{\partial\beta_T}{\partial t}=(-1)^{np+1}\perp_S\mathrm{d}_S\perp_S\beta_S+(-1)^{p-1}\alpha_S \tag{14.8.42}$$

分解式

$$\beta=\beta_S+\mathrm{d}t\wedge\beta_T \tag{14.8.43}$$

唯一地将形式场

$$z\mapsto\beta_z, \qquad z\in M \tag{14.8.44}$$

等价为 M 的一对空间形式场

$$z\mapsto[(\beta_S)_z,(\beta_T)_z], \qquad z\in M \tag{14.8.45}$$

进而，空间形式可按下述方式视为从 $R^1\times R^n$ 到 $\Lambda_p(R^n)$ 的按矢量赋值的函数，即如果 $\{e_i\}$ 是一组正交归一基，坐标是相对于这组基定义的，则

$$\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_p}f_{i_1i_2\cdots i_p}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\mathrm{d}x^{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p} \tag{14.8.46}$$

可视为

$$\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_p}f_{i_1i_2\cdots i_p}e^{i_1}\wedge e^{i_2}\wedge\cdots\wedge e^{i_p} \tag{14.8.47}$$

按这种等同关系，M 上的 p－形式 β 可视为从 $R^1\times R^n$ 映射到固定的(即没有时间维的)两个矢量空间的直和 $\Lambda_p(R^n)\oplus\Lambda_{p-1}(R^n)$ 的函数

$$R^1\times R^n\to\Lambda_p(R^n)\oplus\Lambda_{p-1}(R^n):z\mapsto[(\beta_S)_z,(\beta_T)_z], \qquad z\in M \tag{14.8.48}$$

写成列矩阵即为

$$z\mapsto\begin{bmatrix}(\beta_S)_z\\(\beta_T)_z\end{bmatrix}, \quad z=(t,x^1,\cdots,x^n)\in R^1\times R^n \tag{14.8.49}$$

按照这一方式，方程(14.8.41)与(14.8.42)合起来成为

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}\beta_S\\\beta_T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \mathrm{d}_S\\(-1)^{np+1}\perp_S\mathrm{d}_S\perp_S & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_S\\\beta_T\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\gamma_T\\(-1)^{p-1}\alpha_S\end{bmatrix} \tag{14.8.50}$$

上式右端的 2×2 矩阵是一阶偏微商算符，故可表为

$$\begin{bmatrix}0 & \mathrm{d}_S\\(-1)^{np+1}\perp_S\mathrm{d}_S\perp_S & 0\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{n}A^i\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{14.8.51}$$

式中 A^i 是下述矢量空间

$$Y\equiv\Lambda_p(R^n)\oplus\Lambda_{p-1}(R^n),\qquad \text{其维数为 } m\equiv\binom{n}{p}+\binom{n}{p-1}$$

上的线性变换.故(14.8.50)可更紧凑地写成按矢量赋值的函数 u 的偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{i=1}^{n}A^i\frac{\partial u}{\partial x^i}+f \tag{14.8.52}$$

式中,f 是对应于(14.8.50)式右端最后一项的给定的按矢量赋值的函数.

注意,对于更普遍形式的方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{i=1}^{n}A^i\frac{\partial u}{\partial x^i}+Bu+f \tag{14.8.53}$$

有一个解的存在性定理:即若 Y 中存在一组基使得所有 C^∞ 的 A^i 的矩阵是对称的(而按矩阵赋值的 B 不必是对称的),方程(14.8.53)的局域的 C^∞ 解存在.我们将利用它来说明(14.8.50)的解存在.

事实上,条件(a4)意味着,相对于引理 2(见下节)的一组基(由 e_i 的 Wedge 积构成),A^i 的矩阵是对称的.为看出这一点,我们注意到,S 上的外微分算符 d_S 可形式地表为

$$\mathrm{d}_S=\sum_{i=1}^{n}W_{\mathrm{d}x^i}\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{14.8.54}$$

于是

$$\begin{aligned}{}_{\perp S}\mathrm{d}_{S\perp S}&=\sum_{i=1}^{n}{}_{\perp S}W_{\mathrm{d}x^i}\frac{\partial}{\partial x^i}{}_{\perp S}=\sum_{i=1}^{n}{}_{\perp S}W_{\mathrm{d}x^i\perp S}\frac{\partial}{\partial x^i}\\&=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{np+1}C_{\partial/\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^i}\end{aligned} \tag{14.8.55}$$

式中已应用了引理 3(见下节)及

$$\left({}_{\perp S},\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=0;\quad i=0,1,2,\cdots,n;\quad \text{当处处}\{\mathrm{d}x^i\}\text{正交归一} \tag{14.8.56}$$

由于(14.8.46)与(14.8.47)视为等同,$\mathrm{d}x^i$ 变为 e^i.因而,相对于由 e^i 的 Wedge 积构成一组基,A^i 的矩阵为

$$A_i=\begin{pmatrix}0 & (W_{e^i})\\(C_{e_i}) & 0\end{pmatrix} \tag{14.8.57}$$

由引理 2 可知它是对称的.于是,方程(14.8.33)与(14.8.37)的解存在,而 β_S 与 β_T 的初值可以是任意的.

整个问题要求 β_S 与 β_T 的初值满足方程(14.8.32)与(14.8.36).这可由 Poincaré 引理(见下节)得到.这就是说可在 S_0 中解 $\mathrm{d}_S\beta_S=\gamma_S$ 与 $\mathrm{d}_S({}_{\perp S}\beta_T)={}_{\perp S}\alpha_T$

(附加的自洽条件 $d_S\gamma_S=0$ 与 $d_{S\perp S}\alpha_T=0$ 可分别由自洽条件 $d\gamma=0$ 与 $d_{\perp\alpha}=0$ 自动得到),将结果作为方程(14.8.33)与(14.8.37)的初值条件.故对于给定的 C^∞ 的 α 与 γ,可在内积空间 M 找到 C^∞ 的解 β.

对于一般的准 Riemannian 流形,在某一局域坐标系中,上述证明需要做两点修改.第一点是方程(14.8.53)中的矩阵 B 不再为零.因为这时(14.8.56)不一定成立.例如,由(14.2.31)知

$$(_{\perp S}\beta)_{j_1\cdots j_{n-p+1}}=\frac{1}{(p-1)!}\Omega_S^{\lambda_1\cdots\lambda_{p-1}}{}_{j_1\cdots j_{n-p+1}}(\beta_T)_{\lambda_1\cdots\lambda_{p-1}} \tag{14.8.58}$$

式中 Ω_S 是"空间" S 中 q 点处的体积 n - 形式.对 t 微商得

$$\frac{\partial(_{\perp S}\beta_T)}{\partial t}=_{\perp S}\frac{\partial\beta_T}{\partial t}+L(\beta_T) \tag{14.8.59}$$

这是(14.8.38)式的推广,其中 L 是从 $(p-1)$ - 形式到 $(n-p+1)$ - 形式的线性变换

$$L(\beta_T)_{j_1\cdots j_{n-p+1}}\equiv\frac{1}{(p-1)!}(\beta_T)_{\lambda_1\cdots\lambda_{p-1}}\frac{\partial}{\partial t}\Omega_S^{\lambda_1\cdots\lambda_{p-1}}{}_{j_1\cdots j_{n-p+1}} \tag{14.8.60}$$

它提供了对 Bu 的部分贡献,另有一部分贡献来自于(14.8.50)中 $\perp_S d_S\perp_S$.

第二点不同之处在于这时 dx^i 不是正交归一的.于是,(14.8.56)不再成立,从而不能按引理 2 保证 A^i 的矩阵的对称性.在任一点可通过选取空间坐标系使 A^i 的矩阵成为对称的,但这一手续不能在整个坐标邻域施行.然而,我们可以通过改变关于 p - 形式与按矢量赋值的函数的等同手续跃出这一限制.在点 p 的坐标邻域 U 中取一组 C^∞ 处处正交归一的矢量场 $\bar e_1,\cdots,\bar e_n$.这时可以做到的,例如,对坐标基矢 $\partial/\partial x^i$ 施行 Gram - Schmidt 手续即可.令 $\bar e^1,\cdots,\bar e^n$ 是相应的对偶基,即

$$\bar e^i(\bar e_j)=\delta^i_j$$

同前,记相应的 R^n 的正交归一的对偶基为 $e^1,\cdots,e^n$.将 U 上的 p - 形式 μ

$$\mu=\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_p}f_{i_1\cdots i_p}\bar e^{i_1}\wedge\cdots\wedge\bar e^{i_p},\quad f_{i_1\cdots i_p}\in C^\infty(U) \tag{14.8.61}$$

视为从 $R^1\times R^n$ 映射到 $\Lambda_p(R^n)$ 的函数

$$\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_p}\bar f_{i_1\cdots i_p}e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_p},\quad \bar f_{i_1\cdots i_p}\in C^\infty(U) \tag{14.8.62}$$

式中

$$(t,x^1,\cdots,x^n)\mapsto\bar f_{i_1\cdots i_p}(t,x^1,\cdots,x^n)$$

使定义在 $R^1\times R^n$ 上的标量函数,它是由通过坐标映射将 U 视为 $R^1\times R^n$ 从 $f_{i_1\cdots i_p}$ 得到的.应用(14.4.29)得

$$\mathrm{d}_S\mu=\sum_{i=1}^{n}\vec{e}^{\,i}\wedge \mathrm{D}_{\vec{e}^{\,i}}\mu \tag{14.8.63}$$

式中 D 是 Riemannian 流形上的协变微商. 设 $\mu=f\vec{e}^{\,i_1}\wedge\cdots\wedge\vec{e}^{\,i_p}$,则

$$\sum_i\vec{e}^{\,i}\wedge \mathrm{D}_{\vec{e}^{\,i}}\mu=\sum_i\vec{e}^{\,i}(f)\vec{e}^{\,i}\wedge\vec{e}^{\,i_1}\wedge\cdots\wedge\vec{e}^{\,i_p}+f\sum_i\vec{e}^{\,i}\wedge \mathrm{D}_{\vec{e}^{\,i}}\vec{e}^{\,i_1}\wedge\cdots\wedge\vec{e}^{\,i_p} \tag{14.8.64}$$

而

$$\sum_i\vec{e}^{\,i}(f)\vec{e}^{\,i}\wedge\vec{e}^{\,i_1}\wedge\cdots\wedge\vec{e}^{\,i_p}=\mathrm{d}_S f\wedge\vec{e}^{\,i_1}\wedge\cdots\wedge\vec{e}^{\,i_p} \tag{14.8.65}$$

可见,(14.8.64)右边的第一项便是在前面的特殊情形下(即当 $M=R^{n+1}$ 与 $\vec{e}^{\,i}=\mathrm{d}x^i$ 时的情形)的结果;第二项对 A^i 的矩阵没有贡献(因与 f 的微商无关),而对 Bu 有贡献. 对 ${}_{\perp S}\mathrm{d}_{S\perp S}$ 也有类似结论. 基本定理至此证毕.

习题 14-8

设 M 是一个 n 维内积空间,且其度规在任一正交归一基中有 $b\geqslant 0$ 个负特征值.

(1) 试证明对于 M 上的任一 p-形式 α 有

$$\delta\alpha=(-1)^{b+(p+1)n}{}_{\perp}\mathrm{d}_{\perp}\alpha \tag{14.8.66}$$

(2) 将结果(14.8.66)推广到这样的准 Riemannian 流形 M,在 M 的任一点的度规具有 b 个负特征值.

§14.9　若干重要引理

引理 1(Poincaré 引理):设 M 是一个 $(n+1)|_{n\geqslant 0}$ 维 C^∞ 流形,γ 是定义在 M 的坐标邻域 U 中的 C^∞ 的 $(p+1)|_{p\geqslant 0}$-形式,且在 U 中满足 $\mathrm{d}\gamma=0$. 则存在定义在 U 中的 C^∞ 的 p-形式 β 使 $\mathrm{d}\beta=\gamma$.

证明:若 $n+1=\dim M\leqslant p$,则 $\gamma=0$(见习题 14-9-1),可令 $\beta=0$. 对于任意的 n 维流形,我们可以应用基本定理的第一部分将问题化为在子流形

$$S_0=\{u\in U\mid t(u)=0\}$$

[$t(\cdot),x^1(\cdot),\cdots,x^n(\cdot)$是 U 上的坐标系]上求解 $\mathrm{d}_S\beta_S=\gamma_S$ 的问题,因而问题已归纳地证毕.

引理 2:　设 V 是一个 n 维矢量空间,其基矢为 e_i. 令 $0\leqslant p\leqslant n-1$. 记 $(W_{\vec{e}^{\,i}})$是在 $\Lambda_p(V)$的基

$$e^{i_1}\wedge e^{i_2}\wedge\cdots\wedge e^{i_p},\quad 1\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant\cdots\leqslant i_p\leqslant n$$

下 $W_{\vec{e}^{\,i}}$的矩阵,而(C_{e_i})为在 $\Lambda_{p+1}(V)$的类似的基下 C_{e_i} 的矩阵. 那么(C_{e_i})是$(W_{\vec{e}^{\,i}})$的转置

$$(W_{e^i})^{\mathrm{T}} = (C_{e_i}) \tag{14.9.1}$$

故维数为

$$m = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$$

的矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & (W_{e^i}) \\ (C_{e_i}) & 0 \end{pmatrix}$$

是对称的.

证明:事实上,易知

$$C_{e_i}(e^i \wedge e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_p}) = e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_p}, \quad \text{对 } i \text{ 不求和}$$

证毕.

引理 3: 设 V 是一个负定的 n 维有向内积空间,$\{e_i\}$ 为其一组正交归一基.则对于 V 上的任一 p - 形式 λ,$1 \leqslant p \leqslant n$ 有

$$\perp W_{e^i} \perp \lambda = (-1)^{np+1} C_{e_i} \lambda \tag{14.9.2}$$

且对于任一 $u \in V$ 及任一 p - 形式 λ 有

$$\perp W_{u^*} \perp \lambda = (-1)^{np} C_u \lambda \tag{14.9.3}$$

证明:若将 u 视为一组正交归一基的基矢 e_1,并注意 $e^1 = -u^*$,则式(14.9.3)便可直接由(14.9.2)推出.为了证明式(14.9.2),利用方程的线性性质,仅需考虑下述可分解的形式:

$$\lambda = e^{j_1} \wedge e^{j_2} \wedge \cdots \wedge e^{j_p}, \quad j_1, j_2, \cdots, j_p \text{互不相同} \tag{14.9.4}$$

令

$$(j_1, j_2, \cdots, j_p, k_1, \cdots, k_{n-p}) = \pi(1, 2, \cdots, n)$$

式中 π 是任一偶置换.假定 $e_1, \cdots, e_n$ 是一组正向基,则

$$\perp (e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_p}) = (-1)^p (e^{k_1} \wedge \cdots \wedge e^{k_{n-p}}) \tag{14.9.5}$$

若 i 不属于集合 $\{j_1, \cdots, j_p\}$,则(14.9.2)显然成立.

设 $i = j_1$(这不失普遍性,因为如若不然,总可以经过置换将 i 移至前面),则

$$\begin{aligned} \perp W_{e^i} \perp (e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_p}) &= (-1)^p \perp (e^{j_1} \wedge e^{k_1} \wedge \cdots \wedge e^{k_{n-p}}) \\ &= (-1)^p (-1)^{n-p+1} (-1)^{(n-p)(p-1)} e^{j_2} \wedge \cdots \wedge e^{j_p} \\ &= (-1)^{np+1} e^{j_2} \wedge \cdots \wedge e^{j_p} = (-1)^{np+1} C_{e_i} (e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_p}) \end{aligned} \tag{14.9.6}$$

式中,各符号因子的来源是

$$(-1)^{n-p+1} = \mathrm{norm}(e^{j_1} \wedge e^{k_1} \wedge \cdots \wedge e^{k_{n-p}})$$

$$(n-p)(p-1) = \text{变换}\{e^{j_1} \wedge e^{k_1} \wedge \cdots \wedge e^{k_{n-p}} \wedge e^{j_2} \wedge \cdots \wedge e^{j_p}$$

$\rightarrow \Omega = e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_p} \wedge e^{k_1} \wedge \cdots \wedge e^{k_{n-p}}$ 的对换数

这些符号的出现是因为

$$\alpha \wedge {}_{\perp}\alpha = \langle \alpha, \alpha \rangle \Omega$$

若令 $\alpha \equiv e^{j_1} \wedge e^{k_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_{n-p}}$，而 ${}_{\perp}\alpha = \pm e^{j_2} \wedge \cdots \wedge e^{j_p}$. 而最后的符号来自于

$$p(p-1) = 0 (\mathrm{mod}\ 2), \quad (n-p)(p-1) = np - n (\mathrm{mod}\ 2)$$

引理 4：设 M 是一个有向的准 Riemannian 空间，其局域坐标系 $t, x^1, \cdots, x^n$ 满足基本定理中的条件(a3)(即(14.8.6))，换言之，其“时间”与“空间”垂直. 则对于 M 上的任一 p - 形式 $\beta (1 \leqslant p \leqslant n)$ 有

$$\text{(i)} \quad ({}_{\perp}\beta)_S = \langle \mathrm{d}t, \mathrm{d}t \rangle {}_{\perp S}\beta_T \tag{14.9.7}$$

$$\text{(ii)} \quad ({}_{\perp}\beta)_T = (-1)^p {}_{\perp S}\beta_S \tag{14.9.8}$$

且(ii)对于 β 为 0 - 形式也成立.

证明：设 $g_S(\cdot, \cdot) = \langle \cdot, \cdot \rangle_S$ 是 M 上的度规 $g(\cdot, \cdot) = \langle \cdot, \cdot \rangle$ 限制在时间为常数的空间子流形 S 上式的度规

$$\langle \mu, \eta \rangle_S = \langle \mu, \eta \rangle, \quad \forall \text{空间 } p \text{ - 形式 } \mu = \mu_S, \eta_S \tag{14.9.9}$$

注意，当“时间”与“空间”不垂直时，上式并非普遍成立. 对于“时间”与“空间”取为垂直时的局域坐标系，将 M 上的内积写成分量形式

$$\langle \mu, \eta \rangle = \frac{1}{p!} \mu_{i_1 i_2 \cdots i_p} g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} \cdots g^{i_p j_p} \eta_{j_1 j_2 \cdots j_p} \tag{14.9.10}$$

显然

$$(g_S)_{ij} = g_{ij}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n \tag{14.9.11}$$

然而，对 g_{ij} 的逆 g^{ij}，g_S^{ij} 一般不等于 g^{ij}. 但当“时间”与“空间”垂直时

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \langle \dfrac{\partial}{\partial t}, \dfrac{\partial}{\partial t} \rangle & 0 \\ 0 & (g_S) \end{pmatrix} \tag{14.9.12}$$

其逆为

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} \langle \dfrac{\partial}{\partial t}, \dfrac{\partial}{\partial t} \rangle & 0 \\ 0 & (g_S)^{-1} \end{pmatrix} \tag{14.9.13}$$

故

$$(g_S)^{ij} = g^{ij}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n \tag{14.9.14}$$

现记 Ω 为 M 上的体积 $(n+1)$ - 形式，记 Ω_S 为 S 上的体积 n - 形式，且选取流形的方向使得

$$\Omega = \mathrm{d}t \wedge \Omega_S \tag{14.9.15}$$

对任一空间 p - 形式 $\alpha = \alpha_S$，由

$$dt\wedge\alpha\wedge{}_\perp\beta=dt\wedge\alpha\wedge[dt\wedge({}_\perp\beta)_T+({}_\perp\beta)_S]=dt\wedge\alpha\wedge({}_\perp\beta)_S \tag{14.9.16}$$

可知

$$\begin{aligned}dt\wedge\alpha\wedge({}_\perp\beta)_S&=(dt\wedge\alpha)\wedge{}_\perp\beta=\langle dt\wedge\alpha,\beta\rangle\Omega\\&=\langle dt\wedge\alpha,dt\wedge\beta_T+\beta_S\rangle dt\wedge\Omega_S\\&=\langle dt,dt\rangle\langle\alpha,\beta_T\rangle dt\wedge\Omega_S=\langle dt,dt\rangle dt\wedge\langle\alpha,\beta_T\rangle_S\Omega_S\\&=\langle dt,dt\rangle dt\wedge(\alpha\wedge{}_\perp\beta_T)\end{aligned} \tag{14.9.17}$$

这里已多次应用了 Hodhe 对偶的定义(14.2.15). 由于 $\alpha\wedge({}_\perp\beta)_S$ 与 $\alpha\wedge{}_{\perp S}\beta_T$ 都是纯空间形式,故有

$$\alpha\wedge[({}_\perp\beta)_S-\langle dt,dt\rangle{}_\perp\beta_S]=0$$

由习题 14-9 第 3 题知必有

$$({}_\perp\beta)_S=\langle dt,dt\rangle{}_\perp\beta_S$$

现证(ii). 对于任意的空间 p-形式 $\alpha=\alpha_S$, $\alpha\wedge({}_\perp\beta)_S$ 是 n 维空间 S 上的 $(n+1)$-形式,故应为零. 直接计算得

$$\alpha\wedge({}_\perp\beta)=\alpha\wedge[dt\wedge({}_\perp\beta)_T+({}_\perp\beta)_S]=\alpha\wedge dt\wedge({}_\perp\beta)_T=(-1)^p dt\wedge\alpha\wedge({}_\perp\beta)_T$$

由此得

$$(-1)^p dt\wedge\alpha\wedge({}_\perp\beta)_T=\alpha\wedge{}_\perp\beta=\langle\alpha,\beta\rangle\Omega=\langle\alpha,\beta_S\rangle_S dt\wedge\Omega_S=dt\wedge\alpha\wedge{}_{\perp_S}\beta_S$$

注意到此式中的 α 是任意的 p-形式,便有结论(ii). 证毕.

习题 14-9

1. 试证明,如果 V 是一个维数为 n, $q>n$,则任一 V 上的 q-形式为零.
2. 试证明,对于定义在具有正定内积的 n 维有向矢量空间上的 1-形式 α、β 与 γ,有

$${}_\perp[\alpha\wedge{}_\perp(\beta\wedge\gamma)]=(-1)^n(\langle\alpha,\beta\rangle\gamma-\langle\alpha,\gamma\rangle\beta) \tag{14.9.18}$$

并证明,在 Euclidean 空间 R^3 中,若由映射 $\boldsymbol{v}\mapsto\boldsymbol{v}^*$ 将矢量与形式视为等同,则上式成为

$$\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w})\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{w} \tag{14.9.19}$$

3. 试证明,若 n 维流形 M 上的 $(n-p)$-形式 σ 满足

$$\beta\wedge\sigma=0,\quad\forall\beta\in\Lambda_p(M)$$

则 $\sigma=0$.

4. 设 M 是 n 维流形,而 α 是 M 上的 p-形式. 试证明,存在唯一的一个 $(n-p)$-形式 γ 满足

$$\beta\wedge\gamma=\langle\beta,\alpha\rangle\Omega,\quad\forall\beta\in\Lambda_p(M)$$

即证明 α 的 Hodge 对偶是唯一的.

§14.10 Lorentz 力公式

考虑一个在世界线 $\tau\mapsto z(\tau)\in M$ 上运动的带电点粒子,这里, M 是

Minkowski 时空流形，而 τ 是该粒子的固有时. 若粒子的电荷 q 非常小，则该粒子在外电磁场中的运动方程应是线性的：

$$m\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}=q\hat{F}_{z(\tau)}(u)=q\hat{F}_{z}(u) \tag{14.10.1}$$

式中 $u(\tau):=\mathrm{d}z/z\tau$. “方程是线性的”意味着，对于 M 中的固定点 $x\in M$，函数 $\hat{F}_x(\cdot)$ 是线性；即对于固定点 x，映射 $u\mapsto\hat{F}_x(u)$ 满足

$$\hat{F}_x(au+bv)=a\hat{F}_x(u)+b\hat{F}_x(v),\quad \forall u,v\in M_x;\forall a,b\in R \tag{14.10.2}$$

满足要求(14.10.2)的(14.10.1)成为 Lorentz 方程，或 Lorentz 力公式.

注意，$\hat{F}_z(u)$ 的自变量是类时速度矢量 $u(u^\mu u_\mu=c^2)$，故似乎 $\hat{F}_z(u)$ 不是完全有定义的. 但习题 14－10 第一题的引理说明这种担心是不必要的.

如何将 Lorentz 力公式推广到一般流形上呢？此即寻找 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}\tau$ 在一般流形上的替代量的问题. 为此，考虑粒子运行的世界线 $\tau\mapsto z(\tau)$（τ 是粒子的固有时）. $u\equiv z'(\tau)$ 实际上是定义在世界线上的矢量场 $x\mapsto u_x$，即仅对某些 τ 的 $x(\tau)$ 有定义. 由 $z'(\tau)$ 的定义可知，对于任意的定义在世界线上的函数 f 有

$$u_{z(\tau)}(f)=\lim_{\Delta\tau\to0}\frac{f(z(\tau+\Delta\tau))-f(\tau)}{\Delta\tau} \tag{14.10.3}$$

若函数 f 是矢量场 v，则上式便是 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}\tau$ 的自然定义. 事实上，沿曲线对矢量微商即是对矢量沿曲线的切矢量方向的微商 $\mathrm{D}_{z'(\tau)}v$. 故对于任意的具有协变微商的流形，在曲线 $\tau\mapsto z(\tau)$ 上对矢量场 v 的微商 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}\tau$ 为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau}:=\mathrm{D}_{z'(\tau)}v=\mathrm{D}_uv \tag{14.10.4}$$

在局域坐标系 $\{x_j\}$ 中，对 $v=v^j\partial/\partial x^j$ 有

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau}:=\mathrm{D}_uv=u^i\frac{\partial v^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}+u^iv^j\Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k}=u(v^j)\frac{\partial}{\partial x^j}+u^iv^j\Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k} \tag{14.10.5}$$

式中右边仅依赖于曲线 $\tau\mapsto z(\tau)$ 上 v 的值[因 $u(v^j)$ 是唯一可能出现的方向微商]. 于是，Lorentz 力公式(14.10.1)的左端应一般地写为 D_uu.

习题 14－10

试证明引理：设 ϕ 与 ψ 是 Minkowski 时空 M 上的线性变换 $M\mapsto M$，且对于任意类时矢量 $u(u^\mu u_\mu=c^2)$ 有 $\phi(u)=\psi(u)$，则 $\phi=\psi$.

§ 14.11　电磁场场强张量

按(14.10.2)，对于固定点 $x\in M$，$\hat{F}_x(\cdot)$ 是定义在切空间 M_x 上的线性变

换.因而,$\hat{F}_x(\cdot)$的度规即切空间 M_x上的双线性函数$F_x(\cdot,\cdot)$定义为

$$F_x(w,y)\equiv\langle\hat{F}_x(w),y\rangle,\quad \forall\, w,y\in M_x \tag{14.11.1}$$

以下将 F_x简记为F,并将 F 视为定义在M 上的二阶协变张量,下面将看到,此即我们所熟悉的电磁场场强张量.

现在我们指出,Lorentz 力公式意味着 $F(\cdot,\cdot)$是反对称张量.事实上,对于任何满足 Lorentz 力公式所示的方程的四维速度 $u(\cdot)$有

$$\begin{aligned}F[u(\tau),u(\tau)]&=\langle\hat{F}u(\tau),u(\tau)\rangle\\&=\frac{m}{q}\langle\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau},u(\tau)\rangle=\frac{m}{2q}\frac{\mathrm{d}\langle u(\tau),u(\tau)\rangle}{\mathrm{d}\tau}=0\end{aligned}\tag{14.11.2}$$

假定任意类时矢量可作为带电粒子在外电磁场中的四维速度,上式便意味着

$$F_x(v,v)=0,\quad \forall\, v\in M_x \tag{14.11.3}$$

这说明映射 $v\mapsto F_x(v,v)$在包含所有四维类时矢量的开集中为零.由于这一映射是 v 的分量的多项式,它应当与零算符恒同,因而(14.11.3)对所有四维速度 v(不论它是类时的或不是类时的)都成立.故

$$F(v,w)+F(w,v)=\frac{1}{2}[F(v+w,v+w)-F(v-w,v-w)]=0,\quad \forall\, v\in M_x \tag{14.11.4}$$

式中应用了

$$\langle v,w\rangle+\langle w,v\rangle=\frac{1}{2}[\langle v+w,v+w\rangle-\langle v-w,v-w\rangle],\quad \forall\, v\in M_x \tag{14.11.5}$$

于是,F 是一个 2-形式.

在 M 中选取一组正交归一基 e_0,e_1,e_2,e_3,可将 F 的矩阵$(F_{ij})\equiv[F(e_i,e_j)]$参数化为

$$(F_{ij})\equiv\begin{pmatrix}0&E^1&E^2&E^3\\-E^1&0&-B^3&B^2\\-E^2&B^3&0&-B^1\\-E^3&-B^2&B^1&0\end{pmatrix} \tag{14.11.6}$$

注意,此处已将转空中的光速 c 取为单位 1.于是,在平直的时空即 Lorentz 时空(即联络为零)中 Lorentz 力公式成为通常的熟悉的表达式

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\mathrm{d}u^0}{\mathrm{d}\tau}\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}\tau}\end{pmatrix}=\frac{qu^0}{m}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\end{pmatrix} \tag{14.11.7}$$

式中注意到了

$$u=\left(u^0=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau},\boldsymbol{u}\right)=\gamma(\boldsymbol{v})(1,\boldsymbol{v})$$

§ 14.12　Maxwell 第一方程

在取定的坐标系中，按(14.11.6)，电磁场 2－形式 F 可写为

$$\begin{aligned}F=&E_x\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x+E_y\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}y+E_z\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}z-\\&B_x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z-B_y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x-B_y\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\end{aligned}\tag{14.12.1}$$

在平直的 Lorentz 时空中，经直接的外微分运算得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}F=&\left(\frac{\partial E_x}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial B_z}{\partial t}\right)\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+\\&\left(\frac{\partial E_x}{\partial t}-\frac{\partial E_z}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial t}\right)\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+\\&\left(\frac{\partial E_y}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial B_x}{\partial t}\right)\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+\\&\left(-\frac{\partial B_x}{\partial x}-\frac{\partial B_y}{\partial y}-\frac{\partial B_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\end{aligned}\tag{14.12.2}$$

由 Maxwell 齐次方程

$$\begin{cases}\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\end{cases}$$

可知

$$\mathrm{d}F=0\tag{14.12.3}$$

反之，也可由(14.12.3)推出 Maxwell 齐次方程．因之，它们是相互等价的．(14.12.3)被称为以外微分形式表出的 Maxwell 第一方程．它与所取得坐标系无关，适用于任何参考系．

§ 14.13　Maxwell 第二方程

考虑一个空间电荷与电流分布为 ρu．电荷守恒定律为

$$\delta(\rho u)=0\tag{14.13.1}$$

由基本定理可知，存在一个 2－形式 K 使得

$$\delta K=\rho u\tag{14.13.2}$$

在前面所取的平直的 Minkowski 时空中的一组基下，可将 K 的矩阵$(K_{ij})\equiv[K(e_i,e_j)]$参数化为

$$(K_{ij})\equiv\begin{pmatrix}0 & D^1 & D^2 & D^3\\ -D^1 & 0 & -H^3 & H^2\\ -D^2 & H^3 & 0 & -H^1\\ -D^3 & -H^2 & H^1 & 0\end{pmatrix} \tag{14.13.3}$$

则(14.13.2)式成为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\gamma(\boldsymbol{v})\rho \tag{14.13.4}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\gamma(\boldsymbol{v})\rho\boldsymbol{v} \tag{14.13.5}$$

式中,$\gamma(\boldsymbol{v})\rho$ 与 $\gamma(\boldsymbol{v})\rho\boldsymbol{v}$ 是在给定的 Lorentz 参考系中所测量的电荷密度与电流密度.若总在一个固定的 Lorentz 参考系(实验室参考系)中工作,通常方便地将电荷密度定义为

$$\rho_{\text{lab}}\equiv\gamma(\boldsymbol{v})\rho$$

则式(14.13.4)与(14.13.5)式成为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_{\text{lab}} \tag{14.13.6}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{j} \tag{14.13.7}$$

式中,$\boldsymbol{j}=\rho_{\text{lab}}\boldsymbol{v}$.(14.12.3)被称为以外微分形式表出的 Maxwell 第二方程.它与所取得坐标系无关,适用于任何参考系.两个 2-形式 K 与 F 之间的关系成为本构关系,它由介质的特性决定.对于真空,K 与 F 成正比,在适当选取单位后可使得 $K=F$.这样,推广至任意参考系的 Maxwell 方程的普遍形式为

$$\mathrm{d}F=0 \tag{14.13.8}$$

$$\delta F=j \tag{14.13.9}$$

在给定电流密度 1-形式 $j=\rho u$ 的条件下是一组封闭的方程.而电流密度 1-形式满足守恒条件

$$\delta j=\delta(\rho u)=0 \tag{14.13.10}$$

值得注意的是,要使 Maxwell 第二方程有意义,(14.13.10)成立是一个先决条件(称为自洽条件);因为,对方程(14.13.2)或(14.13.9)取协变散度,便立即导致方程(14.13.10).

§14.14 势1-形式

为了简化 Maxwell 方程,可引入所谓势 1-形式 A 使

$$F=\mathrm{d}A \tag{14.14.1}$$

由 Maxwell 第一方程 $\mathrm{d}F=0$ 及前面的基本定理的第一部分可知,这样的势 1-形式 A 总是局域地存在.当电磁场场强 2-形式 F 在 Minkowski 时空中整

体地有定义时，由前面的引理 1 可知，所引入的势 1－形式 A 也整体地存在. 由前面的基本定理的第一部分可知，若有一势 1－形式 A 是方程(14.14.1)的局域解，则按下述所谓的规范变换

$$A \mapsto A' = A + \mathrm{d}\phi, \quad \forall \phi \in \Lambda_0(M) \tag{14.14.2}$$

所确定的一个新的势 1－形式 A 也满足方程(14.14.1).

前面的基本定理还告诉我们，方程(14.14.1)可以在任意给出 δA 时解出. 对 δA 的任何一种特殊的选取被称为固定某一个规范. 下述的选取

$$\delta A = 0 \tag{14.14.3}$$

称为 Lorentz 规范. 注意，两个方程(14.14.1)与(14.14.3)也没有完全固定势 1－形式 A；因为若 0－形式 ϕ 是满足

$$\delta \mathrm{d}\phi = 0 \tag{14.14.4}$$

(式中，已注意到当 α 为零形式时 $\delta\alpha = 0$，而

$$\Delta \equiv \delta \mathrm{d} + \mathrm{d}\delta \tag{14.14.5}$$

被称为 D'Alembert 算符或 Laplace 算符，事实上存在许多的 ϕ 满足上述方程)，则 $A + \mathrm{d}\phi$ 满足方程(14.14.1).

显然，引入势 1－形式 A 后，Maxwell 第一方程自动满足. 而 Maxwell 第二方程在 Lorentz 规范中成为

$$\Delta A = (\delta \mathrm{d} + \mathrm{d}\delta) A = \delta \mathrm{d} A = \delta F = j \tag{14.14.6}$$

因而，Maxwell 方程等价地化为下述简单的方程：

$$\begin{cases} \Delta A = j \\ \delta A = 0 \end{cases} \tag{14.14.7}$$

§ 14.15　电动力学的发展前沿概述

迄今为止，真空中的经典电磁理论的整个体系建立在比较坚实的基础上. 它不仅适用于任何惯性参考系，经过推广成为外微分形式方程后，它也适用于任何参考系，例如加速参考系或任意的准 Riemannian 流形. 这堪称为物理学上最辉煌的成果.

然而，介质中的电磁理论还是一个不太完善的体系；因为缺乏严格建立在理论分析上的本构关系. 同时，在所考察的空间尺度愈来愈小(如进入微观领域)时以及相互作用的能量愈来愈大(例如非线性区域)时，现有理论体系便表现出它的弱点. 电磁理论的发展正好是由于在这三个方面不断解决有关问题引起的.

首先，在微观领域的电磁理论已发展成由将经典电动力学与量子力学结合起来的**量子电动力学**. 它是一种将电子与光子视为量子场(其中，电子场是满足 Dirac 方程的电子波函数的量子化，而光子场则是 Maxwell 电磁场的量子化)，并

将它们的自由运动状态与相互作用按 Lorentz 协变性与 $U(1)$局域规范不变性的原则加以描述.它所推出理论计算结果,在相互作用距离比 10^{-16}cm 大时都成立.这不能不说是人们至今所知的最精密的物理理论.

其次,当相互作用的能量愈来愈大时,例如,在极强的激光的光场的作用下,相互作用的高阶非线性效应开始显现出来.特别是,这时,介质对电磁场的响应应当用非线性极化率来描述,从而一门称之为**非线性光学**的新学科初步发展起来.它不仅揭示了复杂的本构关系的非线性性质,而且引起了非线性理论处理方法的发展.

最后,由于电磁相互作用与人们的生活与生产活动密切相关,应用电磁理论的内容与研究方法都在发生显著变化.电磁理论已广泛应用到光学、凝聚态物理学、低温物理学(如超导物理学)、大气与空间物理、地球物理等,已由研究各向同性、均匀线性的简单介质到研究各向异性、非均匀、随机、非线性等复杂介质,由研究通常的正问题(例如由初始条件推出演化结果)转到研究逆问题(例如反散射方法).与国计民生密切相关的电动力学不仅在理论上仍在向前发展,近 20 年来在实际应用上的研究又十分活跃起来.

附录 A　几种常用的正交曲线坐标系

§ A.1　Cartesian 坐标系

$$\begin{cases} u_1 = x, u_2 = y, u_3 = z, h_1 = h_2 = h_3 = 1 \\ \nabla T = \left[\dfrac{\partial}{\partial x} \boldsymbol{e}_1 + \dfrac{\partial}{\partial y} \boldsymbol{e}_2 + \dfrac{\partial}{\partial z} \boldsymbol{e}_3 \right] T \\ \nabla \times T^{(n>1)} = \left[\boldsymbol{e}_1 \left(\dfrac{\partial}{\partial y} \boldsymbol{e}_3 - \dfrac{\partial}{\partial z} \boldsymbol{e}_2 \right) + \boldsymbol{e}_2 \left(\dfrac{\partial}{\partial z} \boldsymbol{e}_1 - \dfrac{\partial}{\partial x} \boldsymbol{e}_3 \right) + \right. \\ \qquad \left. \boldsymbol{e}_3 \left(\dfrac{\partial}{\partial x} \boldsymbol{e}_2 - \dfrac{\partial}{\partial y} \boldsymbol{e}_1 \right) \right] \cdot T^{(n>1)} \\ \nabla \cdot T^{(n>1)} = \left[\dfrac{\partial}{\partial x} \boldsymbol{e}_1 + \dfrac{\partial}{\partial y} \boldsymbol{e}_2 + \dfrac{\partial}{\partial z} \boldsymbol{e}_3 \right] \cdot T^{(n>1)} \\ \nabla^2 T = \left[\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} \right] T \end{cases} \tag{A.1.1}$$

§ A.2　柱坐标系

$$\begin{cases} u_1 = \rho, u_2 = \phi, u_3 = z, h_1 = 1, h_2 = \rho, h_3 = 1 \\ \nabla T = \left[\dfrac{\partial}{\partial \rho} \boldsymbol{n}_\rho + \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial}{\partial \phi} \boldsymbol{n}_\phi + \dfrac{\partial}{\partial z} \boldsymbol{n}_z \right] T \\ \nabla \times T^{(n>1)} = \left\{ \boldsymbol{n}_\rho \left[\dfrac{1}{\rho} \left(\dfrac{\partial}{\partial \phi} \boldsymbol{n}_z - \dfrac{\partial}{\partial z} \boldsymbol{n}_\phi \right) + \boldsymbol{n}_\phi \left(\dfrac{\partial}{\partial z} \boldsymbol{n}_\rho - \dfrac{\partial}{\partial \rho} \boldsymbol{n}_z \right) + \right. \right. \\ \qquad \left. \left. \boldsymbol{n}_z \dfrac{1}{\rho} \left(\dfrac{\partial}{\partial \rho} \rho \boldsymbol{n}_\phi - \dfrac{\partial}{\partial \phi} \boldsymbol{n}_\rho \right) \right] \right\} \cdot T^{(n>1)} \\ \nabla \cdot T^{(n>1)} = \left[\dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial}{\partial \rho} \boldsymbol{n}_\rho + \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial}{\partial \phi} \boldsymbol{n}_\phi + \dfrac{\partial}{\partial z} \boldsymbol{n}_z \right] \cdot T^{(n>1)} \\ \nabla^2 T = \left[\dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \dfrac{\partial}{\partial \rho} \right) + \dfrac{1}{\rho^2} \dfrac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} \right] T \end{cases} \tag{A.2.1}$$

Cartesian 坐标在柱坐标系中的表示式为

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z \tag{A.2.2}$$

Cartesian 坐标系与柱坐标系的两组基矢之间的变换关系为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{n}_\rho \\ \boldsymbol{n}_\phi \\ \boldsymbol{n}_z \end{pmatrix} \tag{A.2.3}$$

§ A.3　球坐标系

$$\begin{cases} u_1 = r, u_2 = \theta, u_3 = \phi, h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r\sin\theta \\ \nabla T = \left[\dfrac{\partial}{\partial r}\boldsymbol{n}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\boldsymbol{n}_\theta + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\phi}\boldsymbol{n}_\phi\right]T \\ \nabla \times T^{(n>1)} = \left\{\boldsymbol{n}_r\dfrac{1}{r\sin\theta}\left[\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\boldsymbol{n}_\phi) - \dfrac{\partial}{\partial\phi}\boldsymbol{n}_\theta\right] + \boldsymbol{n}_\theta\dfrac{1}{r}\left[\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\phi}\boldsymbol{n}_r - \dfrac{\partial}{\partial r}(r\boldsymbol{n}_\phi)\right] + \boldsymbol{n}_\phi\dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial}{\partial r}(r\boldsymbol{n}_\theta) - \dfrac{\partial}{\partial\theta}\boldsymbol{n}_r\right]\right\}\cdot T^{(n>1)} \\ \nabla\cdot T^{(n>1)} = \left[\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2\boldsymbol{n}_r) + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\boldsymbol{n}_\theta) + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\phi}\boldsymbol{n}_\phi\right]\cdot T^{(n>1)} \\ \nabla^2 T = \left[\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]T \end{cases} \tag{A.3.1}$$

Cartesian 坐标在球坐标系中的表示式为

$$x = r\sin\theta\cos\phi,\quad y = r\sin\theta\sin\phi,\quad z = r\cos\theta \tag{A.3.2}$$

Cartesian 坐标系与球坐标系的两组基矢之间的变换关系为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{n}_r \\ \boldsymbol{n}_\theta \\ \boldsymbol{n}_\phi \end{pmatrix} \tag{A.3.3}$$

§ A.4　椭球坐标系

与椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{A.4.1}$$

共焦的二次曲面($a^2 > b^2 > c^2$)

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1 \tag{A.4.2}$$

当(x, y, z)给定时是 λ 的三次方程,有三个不同的实根 ε、η 和 ζ.在下列区间

$$\varepsilon \geqslant -c^2,\quad -c^2 \geqslant \eta \geqslant -b^2,\quad -b^2 \geqslant \zeta \geqslant -a^2 \tag{A.4.3}$$

这三个根分别相应于三个二次曲面

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2+\varepsilon}+\dfrac{y^2}{b^2+\varepsilon}+\dfrac{z^2}{c^2+\varepsilon}=1, & \text{椭球面} \\ \dfrac{x^2}{a^2+\eta}+\dfrac{y^2}{b^2+\eta}+\dfrac{z^2}{c^2+\eta}=1, & \text{单叶双曲面} \\ \dfrac{x^2}{a^2+\zeta}+\dfrac{y^2}{b^2+\zeta}+\dfrac{z^2}{c^2+\zeta}=1, & \text{双叶双曲面} \end{cases} \tag{A.4.4}$$

对于空间中任一给定点 P，这三族曲面中每一族都有一个面正好通过，且这三个曲面即 $\varepsilon=$常数、$\eta=$常数和 $\zeta=$常数的曲面又正好相互正交，故(ε,η,ζ)便构成了点 P 的椭球坐标.

对(x,y,z)解方程组(A.4.4)得

$$\begin{cases} x=\pm\left[\dfrac{(a^2+\varepsilon)(a^2+\eta)(a^2+\zeta)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}\right]^{1/2} \\ y=\pm\left[\dfrac{(b^2+\varepsilon)(b^2+\eta)(b^2+\zeta)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}\right]^{1/2} \\ z=\pm\left[\dfrac{(c^2+\varepsilon)(c^2+\eta)(c^2+\zeta)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}\right]^{1/2} \end{cases} \tag{A.4.5}$$

此即从椭球坐标系到 Cartesian 坐标系的变换公式. Lame 系数为

$$\begin{cases} h_1=\dfrac{\sqrt{(\varepsilon-\eta)(\varepsilon-\zeta)}}{2R_\varepsilon} \\ h_2=\dfrac{\sqrt{(\eta-\zeta)(\eta-\varepsilon)}}{2R_\eta} \\ h_3=\dfrac{\sqrt{(\zeta-\varepsilon)(\zeta-\eta)}}{2R_\zeta} \end{cases} \tag{A.4.6}$$

式中

$$R_\lambda=\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)},\lambda=\varepsilon,\eta,\zeta \tag{A.4.7}$$

椭球坐标系中的 Laplace 方程为

$$\nabla^2\varphi=\frac{4}{(\varepsilon-\eta)(\zeta-\varepsilon)(\eta-\zeta)}\left[(\eta-\zeta)R_\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(R_\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right)+(\zeta-\varepsilon)R_\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\left(R_\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\right)+(\varepsilon-\eta)R_\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(R_\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\right]\varphi=0 \tag{A.4.8}$$

作变量替换

$$\begin{cases} \alpha=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{R_\varepsilon} \\ \beta=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}\eta}{R_\eta} \\ \gamma=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}\zeta}{R_\zeta} \end{cases} \tag{A.4.9}$$

写成微分形式即

$$\begin{cases} \mathrm{d}\alpha = \dfrac{\mathrm{d}\varepsilon}{R_\varepsilon} \\ \mathrm{d}\beta = \dfrac{\mathrm{d}\eta}{R_\eta} \\ \mathrm{d}\gamma = \dfrac{\mathrm{d}\zeta}{R_\zeta} \end{cases} \tag{A.4.10}$$

Laplace 方程成为

$$\nabla^2\varphi = \left[(\eta-\zeta)\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + (\zeta-\varepsilon)\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + (\varepsilon-\eta)\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\right]\varphi = 0 \tag{A.4.11}$$

附录 B　单位制换算与主要公式转换

将 Gauss 单位制与国际单位制中的物理公式相互转换的手续：公式中出现的物理量符号凡属表 B－1 中列出的，按表 B－1 进行转换；凡在表 B－1 中未列出的，如质量、长度、时间、力及其他电磁量等则保持不变.

表 B－1　两种单位制公式中物理量符号转换表

物理量	Gauss 单位制	国际单位制
光速	c	$\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$
电场强度(电势、电压)	$\boldsymbol{E}(\varphi, V)$	$\sqrt{4\pi\varepsilon_0}\,\boldsymbol{E}(\varphi, V)$
电位移矢量	$\boldsymbol{D}$	$\sqrt{4\pi/\varepsilon_0}\,\boldsymbol{D}$
电荷密度(电荷、电流密度、电流、电极化强度)	$\rho(q, j, I, p)$	$(4\pi\varepsilon_0)^{-1/2}\rho(q, j, I, p)$
磁感强度	$\boldsymbol{B}$	$\sqrt{4\pi/\mu_0}\,\boldsymbol{B}$
磁场强度	$\boldsymbol{H}$	$\sqrt{4\pi/\mu_0}\,\boldsymbol{H}$
磁化强度	$\boldsymbol{M}$	$\sqrt{\mu_0/(4\pi)}\,\boldsymbol{M}$
介电常量	ε	$\varepsilon/\varepsilon_0$
电导率	σ_c	$\sigma_c/(4\pi\varepsilon_0)$
磁导率	μ	μ/μ_0
电阻(阻抗)	$R(Z)$	$4\pi\varepsilon_0 R(Z)$
电感	L	$4\pi\varepsilon_0 L$
电容	C	$C/(4\pi\varepsilon_0)$

在两种不同单位制中，同一个物理量的数值换算按表 B－2 进行. 表中常数 $a = 2.997\,924\,58$.

表 B－2　两种单位制公式中物理量数值换算表

物理量(符号)	国际单位制	Gauss 单位制
长度 l	1 米(m)	10^2 厘米(cm)
质量 m	1 千克(kg)	10^3 克(g)
时间 t	1 秒(s)	1 秒(s)
频率 f	1 赫兹(Hz)	1 赫兹(Hz)
力 $\boldsymbol{F}$	1 牛顿(N)	10^5 达因(dyn)
功 W(能量 U)	1 焦耳(J)	10^7 尔格(erg)
功率 P	1 瓦特(W)	10^7 尔格·秒$^{-1}$(erg/s)
电荷 q	1 库仑(C)	$a10^9$ 静电库仑
电荷密度 ρ	1 库仑·米$^{-3}$(C/m^3)	$a10^3$ 静电库仑·厘米$^{-3}$

续表

物理量(符号)	国际单位制	Gauss 单位制
电流强度 I	1 安培(A)	$a10^9$静电安培
电流密度 j	1 安培·米$^{-2}$(A/m^2)	$a10^5$静电安培·厘米$^{-2}$
电场强度 E	1 伏特·米$^{-1}$(V/m)	$10^{-4}/a$ 静电伏特·厘米$^{-1}$
电极化强度 p	1 库仑·米$^{-2}$(C/m^2)	$a10^5$偶极矩·厘米$^{-2}$
电位移矢量 D	1 库仑·米$^{-2}$(C/m^2)	$4\pi a10^5$静电伏特·厘米$^{-1}$ (静电库仑·厘米$^{-2}$)
电势 φ(电压 V)	1 伏特(V)	$1/(100a)$静电伏特
电导率 σ_c	1 西门子·米$^{-1}$(S/m)	$a^2 10^9$秒$^{-1}$
电阻 R	1 欧姆(Ω)	$a^{-2}10^{-11}$秒·厘米$^{-1}$
电容 C	1 法拉(F)	$a^2 10^{11}$厘米
磁通量 Φ	1 韦伯(Wb)	10^8高斯·厘米^2(麦克斯韦)
磁感强度 B	1 特斯拉(T)	10^4高斯
磁场强度 H	1 安培·米$^{-1}$(A/m)	$4\pi 10^{-3}$奥斯特
磁化强度 M	1 安培·米$^{-1}$(A/m)	10^{-3}磁矩·厘米$^{-3}$
电感 L	1 亨利(H)	$a^{-2}10^{-11}$Gauss(静电)单位

表 B-3　两种单位制中主要公式对照表

公式名称	国际单位制	Gauss 单位制
库仑定律	$\boldsymbol{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$	$\boldsymbol{F}=\frac{q_1 q_2}{r^2}$
点电荷的电场	$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2}$	$\boldsymbol{E}=\frac{q^2}{r^2}$
点电荷的电势	$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$	$\varphi=\frac{q}{r}$
Biot－Savart 定律	$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$	$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\frac{1}{c}\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$
Lorentz 力	$\boldsymbol{F}=q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$	$\boldsymbol{F}=q\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right)$
Maxwell 方程组	$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$ $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$ $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ $\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{j}$	$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=4\pi\rho$ $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$ $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ $\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}$

续表

公式名称	国际单位制	Gauss 单位制
边值关系	$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)=\sigma$ $\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=0$ $\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)=0$ $\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=\boldsymbol{\Pi}$	$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)=4\pi\sigma$ $\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=0$ $\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)=0$ $\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{\Pi}$
本构关系	$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{p}$ $\boldsymbol{H}=\mu_0^{-1}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{M}$	$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{E}+4\pi\boldsymbol{p}$ $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{B}-4\pi\boldsymbol{M}$
电磁场能流密度	$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{s}=\frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$
电磁场能量密度	$u=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})$	$u=\frac{1}{8\pi}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})$
电磁场动量密度	$\boldsymbol{g}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{g}=\frac{1}{4\pi c}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$
场与势的关系	$\boldsymbol{E}=-\left[\nabla\varphi+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right]$ $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{E}=-\left[\nabla\varphi+\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right]$ $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$
波动方程	$\left[\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\boldsymbol{A}=-\mu_0\boldsymbol{j}$ $\left[\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\varphi=-\rho/\varepsilon_0$	$\left[\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\boldsymbol{A}=-\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}$ $\left[\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\varphi=-4\pi c\rho$
Lorentz 条件	$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$	$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$
推迟势	$\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\mathrm{d}^3x'[\boldsymbol{j}'/R]$ $\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\mathrm{d}^3x'[\rho'/R]$	$\boldsymbol{A}=\frac{1}{c}\int\mathrm{d}^3x'[\boldsymbol{j}'/R]$ $\varphi=\int\mathrm{d}^3x'[\rho'/R]$
场强张量	$F_{0i}=E_i/c$ $F_{ij}=-\varepsilon_{ijk}B_k$	$F_{0i}=E_i$ $F_{ij}=-\varepsilon_{ijk}B_k$
4－电流密度	$j^\mu=(c\rho,\boldsymbol{j})$	$j^\mu=(c\rho,\boldsymbol{j})$
4－矢势	$A^\mu=(\varphi/c,\boldsymbol{A})$	$A^\mu=(\varphi,\boldsymbol{A})$
Liénard－Wiechert 势	$\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e\boldsymbol{v}_e}{R-\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}_e/c}$ $\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{R-\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}_e/c}$	$\boldsymbol{A}=\frac{1}{c}\frac{e\boldsymbol{v}_e}{R-\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}_e/c}$ $\varphi=\frac{e}{R-\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}_e/c}$

续表

公式名称	国际单位制	Gauss 单位制
电偶极辐射	$\boldsymbol{E}=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\boldsymbol{e}_r\times(\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{v})$ $\boldsymbol{B}=\frac{1}{c}\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{E}=\frac{e}{c^2 r}\boldsymbol{e}_r\times(\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{v})$ $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{E}$
精细结构常数	$\alpha=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}$	$\alpha=\frac{e^2}{\hbar c}$
电子经典半径	$r_c=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}$	$r_c=\frac{e^2}{mc^2}$
辐射阻尼力	$\boldsymbol{F}_r=\frac{e^2\ddot{\boldsymbol{v}}}{6\pi\varepsilon_0 c^3}$	$\boldsymbol{F}_r=\frac{2e^2\ddot{\boldsymbol{v}}}{3c^3}$

附录 C　有关的物理学常量

真空中光速	$c = 299\ 792\ 458\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$
真空介电常量	$\varepsilon_0 = \dfrac{10^7}{4\pi c^2} = 8.854\ 18 \times 10^{-12}\ \mathrm{F \cdot m^{-1}}$
真空磁导率	$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} = 12.566\ 37 \times 10^{-7}\ \mathrm{H \cdot m^{-1}}$
质子电荷	$e = 1.602\ 177\ 33(49) \times 10^{-19}\mathrm{C}$
Planck 常量	$h = 6.626\ 075\ 5(40) \times 10^{-34}\mathrm{J \cdot s}$
	$\hbar = h/(2\pi) = 1.054\ 572\ 66(63) \times 10^{-34}\mathrm{J \cdot s}$
精细结构常数	$\alpha = \dfrac{1}{2}\mu_0 ce^2/h = e^2/(4\pi\varepsilon_0 \hbar c) = 7.297\ 353\ 08(33) \times 10^{-3}$
	$1/\alpha = 137.035\ 989\ 5(61)$
Boltzmann 常量	$k = 1.380\ 658(12) \times 10^{23}\mathrm{J \cdot K^{-1}}$
电子静止质量	$m_e = 0.910\ 938\ 97(54) \times 10^{-30}\mathrm{kg}$
	$= 5.485\ 799\ 03(13) \times 10^{-4}\mathrm{u}$
质子静止质量	$m_p = 1.672\ 623\ 1(10) \times 10^{-27}\mathrm{kg}$
	$= 1.007\ 276\ 470(12)\ \mathrm{u}$
Bohr 半径	$a_0 = 4\pi\varepsilon_0 \hbar^2/(m_e c^2) = 0.529\ 177\ 249(24) \times 10^{-10}\mathrm{m}$
经典电子半径	$r_c = \alpha^2 a_0 = e^2/(4\pi\varepsilon_0 m_e c^2) = 2.817\ 940\ 92(38) \times 10^{-15}\mathrm{m}$
电子伏特	$1\ \mathrm{eV} = 1.602\ 177\ 33(49)\mathrm{J}$
原子质量单位	$1\ \mathrm{u} = \dfrac{1}{12}m(^{12}\mathrm{C}) = 1.660\ 540\ 2(10) \times 10^{-27}\mathrm{kg}$

参考文献

[1] D 依凡宁柯,A 索科洛夫.经典场论.黄祖洽译.北京:科学出版社,1958

[2] J Aharoni. The Special Theory of Relativity. Oxford University Press, Amen House, London E. C. 1959:4

[3] P G 柏格曼.相对论引论.周奇,郝苹译.北京:人民教育出版社,1961

[4] John David Jackson. Classical Electrodynamics. John Wiley & Sons, Inc. New York, London, Sydney. 1962

[5] W K H Panofsky, M Phillips, Classical Electricity and Magnetism, Addison - Wesley pub. Com. INC. Reading, Massachusetts, USA. 1962

[6] 曹昌祺.电动力学.第2版.北京:人民教育出版社,1962

[7] J B Marior. Classical Electromagnetic Radiation. Academic press: New York and London, 1965

[8] Curtis C Johnson. Field and Wave Electrodynamics. McGraw - Hill. Inc. 1965

[9] A P French, Special Relativity, W. W. Norton & Company. Inc. New York. 1968

[10] Melvin Schwartz. Priciples of Electrodynamics. McGraw - Hill. Inc. 1972

[11] R U Sexl and H K Urbantke. Relativität. Gruppen und Teilchen. Springer - Verlag. 1976.

[12] L D Landau and E M Lifshitz. 场论(1959年第1版).任朗,袁柄南译.北京:人民教育出版社,1978

[13] A O Barut. Electrodynamics and Classical Theory of Fields & Particles. New York: Dover Publications, Inc. 1980

[14] Griffiths. Introduction to Electrodynamics. Prentice - Hall. Inc. 1981

[15] Y K Lim. Introduction to Classical Electrodynamics. World Scientific. 1986

[16] Stephen Parrott. Relativistic Electrodynamics and Differential Geometry. Springer - Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo, 1987

[17] [美]陈惠青.电磁波理论(无坐标方法).梁昌洪,刘鹏程,李天成译.北京:电子工业出版社,1988

[18] Baldassare Di Bartolo. Classical Theory of Electromagnetism. Prentice Hall. Engle - wood Cliffs. New Jersey. 1991

[19] 蔡伯濂.狭义相对论.北京:高等教育出版社,1991

[20] Wolfgang Rindler. Introduction to Special Relativity (Second Edition). Oxford: Clarendon Press. 1991

[21] 虞福春,郑春开.电动力学.北京:北京大学出版社,1992

[22] Ray d'Inverno. Introducing Einstein's Relativity. Oxford: Clarendon Press. 1992

[23] L D Landau. E M Lifshitz, L P Pitaevskii. Electrodynamics of Continuous Media. Second Edition. Beijing World Publishing Corporation by arrangement with Butterworth-Heinemann. 1999

[24] 蔡圣善,朱耘,徐建军.电动力学.北京:高等教育出版社,2002

索　引

k 算法 k - calculus,36
k 因子 k - factors,36
q - 形式 q - form,422,423
Babinet 原理 Babinet's principle,405,414,416
Biot - Savart 定律 Biot - Savart law,137
Brewster's 角 Brewster's angle,239,241
Chausius - Mossotti 关系 Chausius-Mossotti relation,371,372,374,382
Cherenkov 辐射 Cherenkov radiation,351
Coulomb 定律 Coulomb's law,138
Coulomb 规范 Coulomb gauge,123
Dirac 方程 Dirac equation,362
Doppler 频移 Doppler frequency shift,60,59,71
Drude 关系 Drude relation,373
Earnshaw 定理 Earnshaw's theorem,149
Einstein 延缓 Einstein time - dilation,52
Fresnel 公式 Fresnel formula,236
Green 定理 Green's theorem,150
Green 函数 Green's function,197
Green 互易定理 Green's reciprocation theorem,150
Hamilton - Jacobi 方程 Hamilton - Jacobi equation,70
Helmholtz 定理 Helmholtz theorem,18
Helmholtz 方程 Helmholtz equation,224
Hodge 对偶 Hodge dual,423
Huygens - Fresnel 原理 Huygens - Fresnel's principle,403
Jefimenko 方程 Jefimenko equation,294
Kirchhoff 积分公式 Kirchhoff integral formula,402
Kirchhoff 衍射 Kirchhoff diffraction,402
Kramer - Krönig 关系 Kramer - Krönig relation,113
Langevin - Debye 方程 Langevin - Debye equation,372
Larmor 公式 Larmor formula,338
Liénard - Wiechert 势 Liénard - Wiechert potential,326
Liénard 公式 Liénard formula,337,338
Lorentz 变换 Lorentz transformation,41
Lorentz 协变性 Lorentz covariance,47
Lorentz 规范 Lorentz gauge,123
Lorentz 力 Lorentz force,80,87
Lorentz 收缩 Lorentz contraction,51
Lorentz 条件 Lorentz condition,122
Maxwell 方程 Maxwell's equation,86,87
Maxwell 张力张量 Maxwell stress tensor,93
Michelson - Morley 实验 Michelson-Morley experiment,29
Minkowski 时空 Minkowski space - time,39
Poincaré 引理 Poincaré lemma,449
Poisson 方程 Poisson's equation,133,197
Poynting 定理 Poynting's theorem,92
Poynting 矢量 Poynting's vector,91
Rayleigh 散射 Rayleigh scattering,389
Stokes 定理 Stokes theorem,434
TEM 波 transverse electromagnetic wave,229,280
TE 波 transverse electric wave,229,258
TM 波 transverse magnetic wave,229,258
Thomas 进动 Thomas precession,56
Thomson 定理 Thomson's theorem,149

Thomson 散射 Thomson scattering,385
Wedge 积 Wedge product,423
保角变换 conformal transformation,193,205
本构关系 consitutive relation,111
标势 scalar potential,79
表面电阻 surface resistivity,216
并矢 Green 函数 dyadic Green's function,300
波导 wave guide,256
波动方程 wave equation,121
场的轨道角动量 orbit angular momentum of fields,95
场的角动量 angular momentum of fields,97
场的正则角动量张量 canonical angular momentum tensor of fields,95
场的正则角动量张量定理 theorem of canonical angular momentum tensor of fields,96
场的正则能动张量 canonical energy - momentum tensor of fields,88
场的自旋角动量 spin angular momentum of fields,96
磁标势 magnetic scalar potential,138,139
磁化电流 magnetization current,101
磁化电流密度 magnetization current density,102
磁化矢量 magnetization vector,101
等离子体频率 plasma frequency,375
电磁场场强张量 electromagnetic field strength tensor,81
电磁场动量定理 theorem of the electromagnetic field momentum,92
电磁场角动量 angular momentum of the electromagnetic fields,95
电磁场角动量定理 theorem of angular momentum of the electromagnetic fields,119
电磁场角动量流张量 angular momentum flow tensor of the electromagnetic fields,103
电磁场角动量张量 angular momentum tensor of the electromagnetic fields,96
电磁场角动量张量定理 theorem of angular momentum tensor of the electromagnetic fields,97
电磁场能 - 动张量 energy momentum tensor of the electromagnetic fields,89
电磁场能 - 动张量定理 theorem of energy-momentum tensor of the electromagnetic fields,91
电磁场能量定理 theorem of the electromagnetic field energy,92
电磁动量 momentum of the electromagnetic fields,93
电磁动量流密度张量 the momentum flow density tensor of the electromagnetic fields,93
电磁动量密度矢量 the momentum density vector of the electromagnetic fields,93
电磁能量 energy of the electromagnetic fields,93
电磁能量密度 the energy density of the electromagnetic fields,93
电磁能流密度矢量 the energy flow density vector of the electromagnetic fields,93
电荷守恒定律 charge conservation law,83
电介质波导 dielectric wave guide,285
电偶极子 Electric dipole,157
叠加原理 superposition principle,145
度规张量 metric tensor,40
对偶变换 dual transformation,314
对偶空间 dual space,420

多极辐射 multipole radiation,289
多极展开 multipole expansion,153,303
反常色散 anomalous dispersion,367
辐射电阻 radiation resistance,311,321
辐射频谱 frequency spectrum of radiation, 346,347
辐射条件 radiation condition,409,424
辐射阻尼力 radiation damping force,360
辐射阻尼力矩 moment of radiation damping force,361
共振散射 resonant scattering,390
共振吸收 resonant absorption,397,398,391
固有时 proper time,53
惯性系 inertial frame of reference,25
光速不变原理 postulate of the constancy of the velocity of light,34
光行差 aberration of light,56
光学定理 optical theorem,397
光锥 light cone,50
规范变换 gauge transformation,80
规范不变性 gauge invariance,83
轨道角动量 orbit angular momenta,130
横向 Doppler 频移 transverse Doppler frequency shift,60
极化电荷 polarization charge 100
极化电流 polarization current,100
极化矢量 polarization vector,100
交叉对称关系 crossing relations for susceptibility,114
角分布 angular distribution,308
截止频率 cutoff frequency,262
经典 Zeemann 效应 classical Zeemann effect, 390
镜像法 method of images,174,200
空间反演 space inversion,7
快度 rapidity,37
扩散方程 diffusion equation,211
类光间隔 light－like separation,48
类空间隔 space－like separation,48
类时间隔 time－like separation.48
联络 connection,437
连续性方程 continuity equation,82
流形 manifold,426
螺度 helicity,128
内积空间 inner product space,420
逆变矢量 contravariant vector,45
切空间 tangent space,427
切矢量 tangent vector,427
趋肤深度 skin depth,214
趋肤效应 skin effect,213
全反射 total reflection,242
散射截面 scattering cross section,386
色散关系 dispersion relation,263
四极矩 quadrupole,155
似稳场 quasi－stationary field,211
似稳电路方程 equation for quasi－stationary electric circuit,212
特殊 Lorentz 变换 special Lorentz transformation,37
同步辐射 synchrotron radiation,341
推迟 Green 函数 retarded Green's function, 290
推迟势 retarded potentials,290
外微分形式 alternating form,422
唯一性定理 uniqueness theorem,143
相对性原理 principle of relativity,25
相互作用能 interaction energy,148
协变散度 covariant divergence,436
协变矢量 covariant vector,45
协变微商 covariant derivative,429
谐振腔 resonant cavity,272
延迟效应 retardation effect,61
因果律 causality,49
正常色散 normal dispersion,366
准 Riemannian 流形 437
自旋角动量 spin angular momentum,130

自由点粒子的运动方程 equation of motion for a free point particle,67
自有场 self－field,331
最小作用量原理 principle of least action,81,85,90,135
作用量 action,85
韧致辐射 bremsstrahlung radiation,339