电 动 力 学

王秀江　刘迎春　编

吉林大学出版社

电动力学

王秀江　刘迎春　编

责任编辑、责任校对：王瑞金　　封面设计：孙　群

吉林大学出版社出版　　吉林大学出版社发行
（长春市解放大路125号）　长春市永昌福利印刷厂印刷

开本：787×1092毫米 1/16　　2000年9月第1版
印张：18.125　　2000年9月第1次印刷
字数：458千字　　印数：1—1000册

ISBN 7—5601—2421—6/O·264　　定价：23.00元

前　言

本书是根据编者在吉林大学物理系授课的讲义整理而成的。全书共分8章，第一章是数学准备。第二章至第六章介绍宏观电磁场的基本理论。从电磁现象的基本规律出发，阐述了静电场、稳定电磁场、似稳电磁场、辐射和传播的主要内容，强调在各种条件下，如何从基本方程出发去计算和分析电磁场。第七章介绍狭义相对论。第八章，介绍带电粒子和电磁场的相互作用。

有一些理论，如磁单极子理论、超光速粒子理论等，目前还只能认为仅是理论上的探索，尚未得到实验的肯定，故在本教材中未作介绍。关于物质电磁性质的微观理论，如介质的极化和磁化、超导理论等，因在固体物理教材中已有详细介绍，为避免重复，在本书中也就不涉及了。

编者力求将电动力学的基本概念和理论叙述得清楚易懂，公式推导尽可能详细，对基本方法，尽可能多举一些典型例题加以说明。每章后面都有复习思考题和习题及答案供读者参考。限于编者水平，缺点、错误之处在所难免，恳请有关专家及读者批评指正。

编　者

2000年5月

目　录

第一章　矢量分析和场论基础…… (1)

§1　矢量代数的基本公式 …… (1)

§2　张量与并矢及其运算规则 …… (3)

§3　梯度、散度和旋度…… (5)

§4　▽算符的运算规则 …… (8)

§5　积分变换公式…… (11)

§6　δ函数及其基本性质 …… (14)

§7　矢量场的分类和基本性质…… (18)

思考题与习题一 …… (23)

第二章　电磁现象的基本规律 …… (24)

§1　库仑定律　静电场的散度和旋度…… (24)

§2　毕奥-萨伐尔定律　静磁场的散度和旋度 …… (27)

§3　法拉弟电磁感应定律…… (32)

§4　真空中电磁现象的基本方程…… (34)

§5　介质中电磁现象的基本方程…… (38)

§6　电磁场的边值关系…… (42)

§7　电磁场的能量　能量密度　能流密度矢量…… (45)

思考题与习题二 …… (50)

第三章　静电场 …… (52)

§1　静电场的基本方程…… (52)

§2　泊松方程解的唯一性问题与解的积分形式…… (55)

§3　解静电问题的电像法…… (59)

§4　解静电问题的分离变数法…… (64)

§5　解静电问题的格林函数方法…… (71)

§6　计算静电场的多极展开方法…… (75)

§7　静电场的能量与静电作用…… (79)

思考题与习题三 …… (86)

第四章　稳定电磁场与似稳定电磁场 …… (88)

§1　稳定电场的基本方程…… (88)

§2　稳定电流磁场的矢势…… (94)

§3　稳定磁场的标势 …… (100)

§4 计算稳定磁场的多极展开方法 …… (106)
§5 稳定磁场的能量与磁作用力 …… (110)
§6 似稳电磁场和似稳电路方程 …… (116)
思考题与习题四 …… (119)
第五章 电磁波的辐射 …… (120)
§1 变化电磁场的矢势和标势 …… (120)
§2 达朗伯方程的解及推迟势 …… (124)
§3 电偶极子的电磁场 …… (127)
§4 线状天线系统的辐射 …… (134)
§5 磁偶极矩和电四极矩的辐射 …… (141)
思考题与习题五 …… (148)
第六章 电磁波的传播 …… (149)
§1 电磁波传播问题中的基本方程 …… (149)
§2 平面单色电磁波在均匀介质中的传播 …… (153)
§3 电磁波在介质分界面上的反射和折射 …… (156)
§4 电磁波在导体中的传播及在导体表面的反射和折射 …… (164)
§5 电磁波在等离子体中的传播 …… (169)
§6 电磁波在波导中的传播 …… (172)
§7 矩形波导 …… (177)
§8 谐振腔 …… (182)
§9 电磁波的衍射 …… (185)
§10 电磁场的动量 …… (190)
思考题与习题六 …… (195)
第七章 狭义相对论 …… (196)
§1 狭义相对论产生的历史背影和实验基础 …… (196)
§2 狭义相对论基本原理和洛伦兹变换 …… (202)
§3 狭义相对论的时空特性 …… (207)
§4 多普勒效应 时钟佯谬问题 …… (214)
§5 速度合成 时序和因果律 时空光锥 …… (219)
§6 洛伦兹变换的四维形式 …… (224)
§7 真空中电动力学方程的相对论协变形式 …… (226)
§8 相对论粒子动力学 …… (235)
§9 相对论力学的应用 …… (239)
§10 带电粒子在电磁场中的拉格朗日函数和哈密顿函数 …… (246)
思考题与习题七 …… (251)

第八章　带电粒子和电磁场的相互作用…… (253)
§1　运动带电粒子的势 …… (253)
§2　运动带电粒子的场 …… (254)
§3　运动带电粒子的辐射 …… (258)
§4　韧致辐射与同步辐射 …… (261)
§5　切仑科夫(Cerenkov)辐射 …… (264)
§6　带电粒子的电磁场对粒子本身的反作用 …… (267)
§7　带电粒子对电磁波的散射 …… (271)
思考题与习题八…… (275)
常用物理常数表…… (276)
参考答案…… (277)

第一章　矢量分析和场论基础

电动力学的主要任务是计算电磁场的分布，因此，必然要遇到场的概念.“场”是什么?场有些什么特点？如何从数学上描述它们？这些都是首先应弄清楚的问题.

许多物理领域所研究的物质对象连续地分布在一定的空间范围，空间各点处的物理性质、运动状态以及相互作用一般是不相同的，描述这些性质、状态和作用的所有物理量都是空间各点的函数.一定物理量的空间分布称为场，如描述物体温度分布的温度场，描述流体速度分布的速度场，描述引力作用的引力场，描述电磁作用的电磁场等等.从物理观点看，要了解一个场的运动规律，就是要知道相应的物理量在空间各点的分布和随时间变化的情况.

与质点或刚体力学的情况不同，因为质点和刚体的自由度是有限的，而电磁场的自由度是无限的，因此需要应用新的数学工具.从数学观点看，一个场就是指一个空间坐标函数.各种场都由相应物理量的空间坐标函数来表示，这些空间坐标函数称为场函数.不管物理量的具体性质，研究它们共同的空间分布特性和数量关系，这是数学场论的任务.如果场函数是空间坐标的标量函数

$$\phi = \phi(x,y,z) \tag{1}$$

就称为标量场.如果场函数是空间坐标的矢量函数

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(x,y,z) = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k} \tag{2}$$

称为矢量场.不随时间变化的场称为稳定场.如果场函数还是时间的函数，则称为变化场.研究场的运动规律，就是研究相应场函数随空间和时间的变化关系.这一章介绍数学场论的基础，重点讨论矢量场，分析它的性质和结构.

§1　矢量代数的基本公式

在直角坐标系中，三个单位矢量

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i} &= \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{j} &= \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{k} &= \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_3 \end{aligned} \tag{1.1}$$

是互相垂直的常矢量.任一矢量 $\boldsymbol{A}$ 可用沿坐标轴的三个分量表示，即

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k} = \sum_{i=1}^{3} A_i\boldsymbol{e}_i \tag{1.2}$$

它的数值为

$$A = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2} \tag{1.3}$$

它的方向由三个方向余弦确定

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A},\quad \cos\beta = \frac{A_y}{A},\quad \cos\gamma = \frac{A_z}{A} \tag{1.4}$$

两个矢量相加，只要相应分量相加即可

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(A_x+B_x)\boldsymbol{i}+(A_y+B_y)\boldsymbol{j}+(A_z+B_z)\boldsymbol{k} \tag{1.5}$$

两个矢量相乘有三类乘积：标量积、矢量积和张量积.

标量积是一个标量，等于两个矢量的数值相乘，再乘以两矢量夹角的余弦

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB\cos\theta \tag{1.6}$$

标量积满足交换律

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} \tag{1.7}$$

和分配律

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} \tag{1.8}$$

按照标量积的定义可知

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij}=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases} \tag{1.9}$$

所以

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\sum_i A_i\boldsymbol{e}_i\cdot\sum_j B_i\boldsymbol{e}_j=\sum_{i,j}A_iB_j\delta_{ij}=\sum_i A_iB_i$$

即

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z \tag{1.10}$$

矢量积是一个矢量，它的数值是两个矢量的数值相乘，再乘以夹角的正弦；它的方向与两个矢量所在平面垂直，沿着从第一个矢量转向第二个矢量的右手螺旋前进的方向，即

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=AB\sin\theta\boldsymbol{e}_n \tag{1.11}$$

其中 $\boldsymbol{e}_n$ 是从 $\boldsymbol{A}$ 转向 $\boldsymbol{B}$ 的右手螺旋前进方向的单位矢量.

矢量积不满足交换律，因为

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}) \tag{1.12}$$

但满足分配律

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C} \tag{1.13}$$

按照矢量积的定义可知

$$\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j=\sum_k\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k \tag{1.14}$$

其中勒维-齐维塔(Levi-Civita)记号 ε_{ijk} 定义如下：

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}+1, & ijk\text{ 是 }123\text{ 的偶排列}\\ -1, & ijk\text{ 是 }123\text{ 的奇排列}\\ 0, & \text{任意二个指标相同}\end{cases} \tag{1.15}$$

因此

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}&=\sum_i A_i\boldsymbol{e}_i\times\sum_j B_j\boldsymbol{e}_j\\ &=\sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}A_iB_j\boldsymbol{e}_k\\ &=(A_yB_z-A_zB_y)\boldsymbol{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\boldsymbol{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\boldsymbol{k}\\ &=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}\end{aligned} \tag{1.16}$$

利用标量积和矢量积的定义，可以证明两个很有用的公式：

三个矢量的混合积

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) \tag{1.17}$$

双重矢量积

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{1.18}$$

先证明混合积公式.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})&=\boldsymbol{A}\cdot\sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}B_jC_k\boldsymbol{e}_i\\&=\sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}A_iB_jC_k\\&=\begin{vmatrix}A_x&A_y&A_z\\B_x&B_y&B_z\\C_x&C_y&C_z\end{vmatrix}.\end{aligned} \tag{1.19}$$

由行列式可看出混合积对 A,B,C 具有轮换对称性.

其次，证明双重矢量积公式. 这要用到关于勒维-齐维塔记号的一个重要等式

$$\sum_k\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk}=\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm} \tag{1.20}$$

双重矢量积

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})&=\Big(\sum_jA_j\boldsymbol{e}_j\Big)\times\Big(\sum_{mnk}\varepsilon_{mnk}B_mC_n\boldsymbol{e}_k\Big)\\&=\sum_{ij}\sum_{mnk}C_nA_jB_m\varepsilon_{mnk}\varepsilon_{jki}\boldsymbol{e}_i\\&=\sum_{ij}\sum_{mnk}(\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm})A_jB_mC_n\boldsymbol{e}_i\\&=\sum_{ij}(A_jB_iC_j-C_iA_jB_j)\boldsymbol{e}_i\\&=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\end{aligned}$$

§2 张量与并矢及其运算规则

我们知道，一些物理量，像质量、电荷、温度等等，都是标量，只有一个数值；另一些物理量，像力、速度、加速度等等，都是矢量，不仅具有数值，而且还有一定的方向. 在直角坐标系中，每个矢量都有三个分量. 在物理学中，还有一些物理量，其性质比矢量更复杂，例如弹性体中的应力和形变、各向异性晶体中的介电常数、磁导率等等. 现以各向异性晶体中的电极化为例来说明. 在电磁学中已熟悉各向同性介质的极化，在这种介质中电位移矢量 $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{D}$ 与电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的方向一致，并与 $\boldsymbol{E}$ 成正比，介电常数 ε 是一个标量. 但在各向异性介质中，$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的方向一般不相同，并且在介质的同一点上，介质的极化随 $\boldsymbol{E}$ 的方向而变化. 对于各向异性介质，介电常数不再是一个标量. 实验发现，当场强不太强时，$\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 各分量仍保持线性关系，一般形式是

$$\begin{cases} D_x = \varepsilon_{11}E_x + \varepsilon_{12}E_y + \varepsilon_{13}E_z \\ D_y = \varepsilon_{21}E_x + \varepsilon_{22}E_y + \varepsilon_{23}E_z \\ D_z = \varepsilon_{31}E_x + \varepsilon_{32}E_y + \varepsilon_{33}E_z \end{cases} \tag{2.1}$$

由此可见，各向异性介质的介电常数在直角坐标系中一般有九个分量，这样的量称为二阶张量，一般的二阶张量可用矩阵表示如下：

$$\overleftrightarrow{\mathscr{T}} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

为了统一名称，可把标量称为零阶张量，只有一个量；矢量可称为一阶张量，具有三个分量；二阶张量则具有九个分量，等等.

二阶张量也可由两个矢量的张量积构成. 两个矢量的张量积称为并矢

$$\overleftrightarrow{\mathscr{T}} = \boldsymbol{AB} \tag{2.3}$$

$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 直接并列，中间没有任何运算符号. 矢量 $\boldsymbol{A}$ 称为并矢 $\overleftrightarrow{\mathscr{T}}$ 的前项，$\boldsymbol{B}$ 称为并矢的后项. 将并矢用分量表示，立刻看到它有九个分量.

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{\mathscr{T}} &= \boldsymbol{AB} \\ &= (A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k})(B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k}) \\ &= A_xB_x\boldsymbol{ii} + A_xB_y\boldsymbol{ij} + A_xB_z\boldsymbol{ik} + A_yB_x\boldsymbol{ji} + A_yB_y\boldsymbol{jj} + A_yB_z\boldsymbol{jk} \\ &\quad + A_zB_x\boldsymbol{ki} + A_zB_y\boldsymbol{kj} + A_zB_z\boldsymbol{kk} \\ &= \sum_{ij} A_iB_j\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \qquad (i,j = 1,2,3) \end{aligned} \tag{2.4}$$

在一般情况下，一个并矢的前后项不能互相交换

$$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA} \tag{2.5}$$

一般二阶张量也可写成并矢式

$$\overleftrightarrow{\mathscr{T}} = \sum_{ij} T_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \qquad (i,j = 1,2,3) \tag{2.6}$$

因此并矢 $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ 可作为二阶张量的九个基.

一个特殊的并矢式

$$\overleftrightarrow{\mathscr{I}} = \boldsymbol{ii} + \boldsymbol{jj} + \boldsymbol{kk} \tag{2.7}$$

$\mathscr{I}$ 称为单位张量，它的矩阵表示为

$$\mathscr{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

下面介绍张量和并矢的一些代数运算规则. 熟悉并矢运算的关键在于牢记并矢的定义和并矢的前后项不能交换，然后将并矢中的前后项当成普通的矢量来运算.

两个同阶张量相加，就是将它们对应的分量相加，即

$$\overleftrightarrow{\mathscr{T}} + \overleftrightarrow{\mathscr{V}} = \sum_{ij} (T_{ij} + \boldsymbol{V}_{ij})\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \tag{2.9}$$

标量与张量相乘，就是将标量与张量的每个分量逐项相乘，即

$$\phi\overleftrightarrow{\mathscr{T}} = \sum_{ij} \phi T_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = \overleftrightarrow{\mathscr{T}}\phi \tag{2.10}$$

并矢与矢量的点乘为

$$(AB)\cdot C = A(B\cdot C) \tag{2.11}$$

$$C\cdot(AB) = (C\cdot A)B \tag{2.12}$$

并矢与矢量点乘，结果为矢量. 需要注意矢量与并矢的前、后项点乘结果是不同的，与前项点乘，其方向是后项矢量的方向；与后项点乘，则其方向为前项矢量的方向. 故一般说来

$$(AB)\cdot C \neq C\cdot(AB) \tag{2.13}$$

并矢与矢量的叉乘为

$$(AB)\times C = A(B\times C) \tag{2.14}$$

$$C\times(AB) = (C\times A)B$$

并矢与矢量叉乘，结果仍为并矢. 不被叉乘的矢量当做独立矢量，其余两个矢量按矢量积规则运算. 一般说来

$$(AB)\times C \neq C\times(AB) \tag{2.15}$$

并矢与并矢的一次点乘为

$$(AB)\cdot(CD) = A(B\cdot C)D = (B\cdot C)AD \tag{2.16}$$

$$(CD)\cdot(AB) = C(D\cdot A)B = (D\cdot A)CB \tag{2.17}$$

两个并矢点乘是将靠近的两个矢量点乘，其余未被点乘的两个矢量构成一个新的并矢；已经点乘的两个矢量变成标量，可以放在新并矢前后. 一般说来

$$(AB)\cdot(CD) \neq (CD)\cdot(AB) \tag{2.18}$$

并矢与并矢的二次点乘为

$$\begin{aligned}(AB):(CD) &= (B\cdot C)(A\cdot D)\\ &= (CD):(AB)\end{aligned} \tag{2.19}$$

先将靠近的两个矢量点乘，再将剩下的两个矢量点乘，两次点乘所得结果为一标量. 其先后次序可以交换.

单位张量与任一矢量的点乘等于原矢量，与任一并矢的点乘等于原并矢.

$$\overleftrightarrow{\mathscr{I}}\cdot C = C\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{I}} = C \tag{2.20}$$

$$\overleftrightarrow{\mathscr{I}}\cdot AB = AB\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{I}} = AB \tag{2.21}$$

并有

$$\overleftrightarrow{\mathscr{I}}:AB = A\cdot B = AB:\overleftrightarrow{\mathscr{I}} \tag{2.22}$$

上述并矢的方法可推广到任意个矢量的情形，例如由三个矢量的并矢，可构成一个三阶张量

$$ABC = \sum_{ijk} A_iBC_k\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k \tag{2.23}$$

在场论中遇到的矢量大都是空间坐标函数，即 $A=A(x,y,z)$. 对矢量场函数，前面所介绍的矢量运算的基本公式及并矢的运算规则也都完全适用.

§3 梯度、散度和旋度

为了细致刻划标量场和矢量场的空间分布特性，在场论中引进了梯度、散度和旋度三个重要概念.

1. 标量场的梯度

这个概念来源于对标量场 $\phi(x,y,z)$ 的变化率的研究，考查场函数 ϕ 从点 $M(x,y,z)$ 经过一段微小距离 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 到点 $M'(x',y',z')$ 的变化情况：

$$\begin{aligned}\Phi(M')-\Phi(M)&=\mathrm{d}\phi\\&=\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial\phi}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial\phi}{\partial z}\mathrm{d}z\\&=\boldsymbol{G}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\end{aligned}\tag{3.1}$$

这是两个矢量的标量积，矢量 $\boldsymbol{G}$ 称为标量场的梯度

$$\boldsymbol{G}=\mathrm{grad}\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\boldsymbol{k}\tag{3.2}$$

标量场沿任一方向 $\boldsymbol{e}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 的变化率，称为方向导数，

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{l}}&=\frac{\partial\phi}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial\phi}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial\phi}{\partial z}\cos\gamma\\&=(\mathrm{grad}\phi)\cdot\boldsymbol{e}\end{aligned}\tag{3.3}$$

因为 $\boldsymbol{e}$ 是任意的，故 M 点的方向导数有无限多. 沿哪一个方向 ϕ 的变化率最大？显然，当 $\boldsymbol{e}$ 与梯度 $\mathrm{grad}\phi$ 方向一致时，方向导数最大. 因而梯度的数值给出场函数 $\phi(x,y,z)$ 在 M 点的最大变化率，它的方向是场函数变化率最大的方向. 知道了梯度，由上式就可算出标量场函数沿任一方向的变化率. 因此梯度完全刻划了标量场的空间分布特性.

2. 矢量场的散度

有些矢量场，例如静电场，电场线不是闭合的，从正电荷出发，终止于负电荷，电荷是静电场的场源，称为有源场. 为了描述有源场的特性，引进了矢量场散度的概念.

在矢量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ 中，任取一闭合曲面 S，定义场量 $\boldsymbol{A}$ 穿过 S 面的通量为

$$\phi=\oint_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\tag{3.4}$$

对不同的矢量场，通量的物理意义不同. 对电场 $\boldsymbol{E}$，电通量表示穿出闭合曲面 S 的电场线总数，电通量愈大，表示从 S 面内穿出来的电场线数愈多. 但这样定义的通量只能标志某一空间范围内场的发散情况，我们希望找一个能细致刻划场中每一点发散情况的物理量，为此引入单位体积的通量的极限，记为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V}\tag{3.5}$$

式中 ΔV 是闭合曲面 S 所包围的体积. 当 $\Delta V\to 0$ 时，上述极限值就能刻划出矢量场在某一点 M 的发散程度，称为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 在 M 点的散度.

当 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}>0$ 时，通过包围该点的无穷小闭合曲面的通量为正，表明在该点有产生场的力线的源头；反之当 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}<0$ 时，则表明该点有会聚场的力线的负源. 例如静电场，正电荷是发出电场线的正源，负电荷是会聚电场线的负源. 如果场中各点的散度均为零，这样的矢量场是无源场. 因此，散度完全刻划了一个矢量场的力线发散或会聚的情况.

3. 矢量场的旋度

有些矢量场，例如磁场，磁场线是闭合的. 为了描述这类矢量场的特性，引进了矢量场旋度的概念.

首先定义矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的环流量，它是场函数 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ 沿任一空间闭合曲线 $\boldsymbol{L}$ 的线积分

$$\Gamma = \oint_L \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{3.6}$$

在流体中，如果某处有涡旋存在，则流体速度场的环流量不等于零. 在场论中则用环流量来刻划任意矢量场的涡旋特性，但环流量的大小与 L 所包围的面积 S 有关. 为了更细致地刻划场中任一点 M 处涡旋的强弱，引入单位面积环流量的极限，称为涡旋量，记为

$$R_n = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_L \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S} \tag{3.7}$$

式中 ΔS 为闭合曲线 L 所包围的面积，n 为面积元 ΔS 的正法线方向. 不难看出涡旋量的大小与所取面积元 ΔS 的方位有关. 当 ΔS 取某一方位时，涡旋量最大；而在其它方位时，则可看成是此最大涡旋量在此方向的分量. 定义一个新的矢量 $\boldsymbol{R}$，它的数值是 M 点的最大涡旋量，它的方向是涡旋量最大时面积元 ΔS 的法线正方向，它可以用沿三个坐标轴方向的涡旋量表示出来

$$\boldsymbol{R}(M) = R_x \boldsymbol{i} + R_y \boldsymbol{j} + R_z \boldsymbol{k} \tag{3.8}$$

此矢量称为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度，记为

$$\boldsymbol{R}(m) = \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \tag{3.9}$$

旋度 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ 是矢量场 $\boldsymbol{A}$ 在 M 点的最大涡旋量的方向和数值. 沿任一方向 n 的涡旋量为

$$\mathrm{rot}_n \boldsymbol{A} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_L \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S} \tag{3.10}$$

因此，旋度完全刻划了一个矢量场的涡旋特性.

下面列出梯度、散度、旋度在各坐标系中的表达式.

直角坐标系中的表达式：在直角坐标系中，利用矢量算符

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{3.11}$$

则有

$$\mathrm{grad}\phi = \nabla\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{3.12}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\boldsymbol{A} &= \nabla \times \boldsymbol{A} \\ &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\nabla^2\phi = \nabla \cdot \nabla\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \tag{3.15}$$

柱坐标系中的表达式：用 $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_z$ 表示柱坐标系中的三个单位矢量，则有

$$\nabla\phi = \frac{\partial \phi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{\partial \phi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \tag{3.16}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{3.17}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_\theta & A_z \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\theta + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\boldsymbol{e}_z \tag{3.18}$$

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \tag{3.19}$$

球坐标系中的表达式：用 $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\varphi$ 表示球坐标中的三个单位矢量，则有

$$\nabla\phi = \frac{\partial \phi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi \tag{3.20}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \tag{3.21}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right]\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right]\boldsymbol{e}_\theta$$

$$+ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\boldsymbol{e}_\varphi \tag{3.22}$$

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \tag{3.23}$$

注意，在球坐标系中的上述表达式，在 z 轴上失去意义，因为 $\sin\theta = 0$.

§4 ∇算符的运算规则

在电磁场理论中经常进行梯度、散度、旋度的运算. 如果每次都要在一个具体的坐标系中用分量来进行运算，非常麻烦. 研究发现，如果利用算符

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{4.1}$$

来进行运算，将会简便得多，可以大大提高运算的效率.

从∇算符的定义看到，它有两个基本性质：既是矢量算符，又是线性微商算符. 将它作用于场量进行运算时，既要注意它的微商作用，又要考虑到它的矢量性. 为了保持∇算符在运算过程中的矢量关系，就必须熟记矢量代数中的一些基本公式. 现举例说明∇算符的运算规则.

例 1 设 ϕ 和 ψ 是两个标量场，即空间坐标的标量函数，求 $\nabla(\phi\psi) = ?$

解 首先记住∇算符的两重性质. 第一步把它当成一个微商算符，根据微商法则有

$$\nabla(\phi\psi) = \nabla(\phi_c\psi) + \nabla(\phi\psi_c) \tag{4.2}$$

在场量上加下指标 c，表示∇算符对 ϕ_c 或 ψ_c 没有微商作用，可作常量处理. 第二步再按矢量代

数规则调整场函数的位置，把带 c 的场量移到∇算符的前面，最后得到

$$\nabla(\phi\psi)=\phi_c\nabla\psi+\psi_c\nabla\phi=\phi\nabla\psi+\psi\nabla\phi \tag{4.3}$$

调整完毕后，下标 c 就可不写了.

例 2 设 A 和 B 是两个矢量场，即空间坐标的矢量函数，求$\nabla\cdot(A\times B)=$?

解 第一步进行微商运算

$$\nabla\cdot(A\times B)=\nabla\cdot(A\times B_c)+\nabla\cdot(A_c\times B) \tag{4.4}$$

注意，对于矢量场进行微商运算时，先不要变更矢量的位置. 第二步按矢量性质作调整，利用混合积公式

$$a\cdot(b\times c)=c\cdot(a\times b)=b\cdot(c\times a) \tag{4.5}$$

可得

$$\nabla\cdot(A\times B_c)=B_c\cdot(\nabla\times A) \tag{4.6}$$

同理可得

$$\nabla\cdot(A_c\times B)=-A_c\cdot(\nabla\times B) \tag{4.7}$$

上式中的负号是由于 B 必须放在∇算符的后面，两者交换位置而出现的. 最后得到

$$\nabla\cdot(A\times B)=B\cdot(\nabla\times A)-A\cdot(\nabla\times B) \tag{4.8}$$

注意，调整矢量场位置时，必须利用矢量代数公式，同时还必须保持原先的微商关系不被破坏.

例 3 $\nabla\times(A\times B)=\nabla\times(A_c\times B)+\nabla\times(A\times B_c)$ (4.9)

利用双重矢量积公式作调整.

解

$$a\times(b\times c)=b(a\cdot c)-c(a\cdot b) \tag{4.10}$$

由于不能破坏原来的微商关系，故第一项应写为

$$\nabla\times(A_c\times B)=A_c\nabla\cdot B-A_c\cdot\nabla B \tag{4.11}$$

而初学者往往错误地写为

$$\nabla\times(A_c\times B)=A_c\nabla\cdot B-B\nabla\cdot A_c \tag{4.12}$$

这里的错误在于只注意了矢量性质，而忽视了微商关系. 因为 A_c 不被∇算符微商，应该移到∇算符的前面，而 B 要被∇算符微商，应放到∇算符后面. 同理，第二项应写为

$$\nabla\times(A\times B_c)=B_c\cdot\nabla A-B_c\nabla\cdot A \tag{4.13}$$

最后得到

$$\nabla\times(A\times B)=A\nabla\cdot B-A\cdot\nabla B+B\cdot\nabla A-B\nabla\cdot A \tag{4.14}$$

例 4 $\nabla(A\cdot B)=\nabla(A_c\cdot B)+\nabla(A\cdot B_c)$ (4.15)

等式右端两项如何调整?

解

$$\nabla(A_c\cdot B)\neq(\nabla A_c)\cdot B \tag{4.16}$$

因为微商关系错了.

$$\nabla(A_c\cdot B)\neq A_c\cdot\nabla B \tag{4.17}$$

因为矢量关系错了.

$$\nabla(A_c\cdot B)=\nabla(B\cdot A_c)=(\nabla B)\cdot A_c \tag{4.18}$$

运算虽然没有错误，但由于并矢和矢量的点乘不满足交换律，故 A_c 只能放在∇算符后面. 如果不加以特殊标志，就容易被误认为还要被∇算符作用. 所以一般利用双重矢量积公式进行调整

$$\nabla(A_c\cdot B)=A_c\times(\nabla\times B)+A_c\cdot\nabla B \tag{4.19}$$

同理

$$\nabla(A\cdot B_c)=B_c\times(\nabla\times A)+B_c\cdot\nabla A \tag{4.20}$$

最后得

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})+\boldsymbol{A}\cdot\nabla\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})+\boldsymbol{B}\cdot\nabla\boldsymbol{A} \tag{4.21}$$

注意，在开始学习时，可将不被∇算符微商的场量用下标c标出来，在掌握了这个运算规则后，就不必用下标c了. 只要心中记住哪些量是不被∇算符微商的，在中间运算过程中不要把微商关系弄错就行.

从上述几个例题看出，运用∇算符的关键在于牢记其两重性. 首先作微商运算，再按矢量规则作调整. 微商不能改变矢量关系，调整不要搞错微商对象. 记住上面这几点后，只解决了会运算的问题，还要求能熟练用∇算符作运算. 在电磁场理论中出现的标量或矢量场函数都是场源点与待求场点间距离的函数，对这类特殊的场函数，还需熟记一些公式，这会使我们的运算更简便.

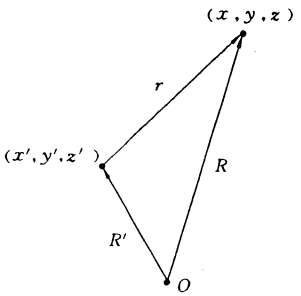


图 1.1

如图 1.1 所示，场源点坐标为(x',y',z')，以矢径$\boldsymbol{R}'$表示；待求场点的坐标为(x,y,z)，以矢径$\boldsymbol{R}$表示. 从源点到场点的矢径以$\boldsymbol{r}$表示，即

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}'=(x-x')\boldsymbol{i}+(y-y')\boldsymbol{j}+(z-z')\boldsymbol{k} \tag{4.22}$$

$$r=|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}'|=[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{1/2} \tag{4.23}$$

算符∇只对场点进行运算，用带撇的算符∇'表示只对源点进行运算. 两者运算结果只相差一个负号，例如

$$\nabla f(r)=-\nabla' f(r) \tag{4.24}$$

由直接微商可以证明以下公式：

$$\nabla r=\frac{\boldsymbol{r}}{r}=e_r \tag{4.25}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{r}=3 \tag{4.26}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{r}=0 \tag{4.27}$$

$$\nabla\boldsymbol{r}=\boldsymbol{ii}+\boldsymbol{jj}+\boldsymbol{kk}=\overrightarrow{\mathscr{I}} \tag{4.28}$$

关于复合函数的几个公式：

$$\nabla f[\phi(\boldsymbol{r})]=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\phi}\nabla\phi \tag{4.29}$$

$$\nabla f(r)=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\nabla r=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{4.30}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}[u(r)]=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}u}\cdot\nabla u \tag{4.31}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}[u(r)]=-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}u}\times\nabla u \tag{4.32}$$

例 5 已知电偶极子的电势为

$$\phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{4.33}$$

求电场强度$\boldsymbol{E}=-\nabla\phi=?$（其中电偶极矩$\boldsymbol{p}$是常矢量.）

解 因为

$$\nabla\left(\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\right)=\frac{1}{r^3}\nabla(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})+(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\nabla\frac{1}{r^3}$$

$$=\frac{1}{r^3}\nabla(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})+(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r^3}\right)\nabla r$$

$$=\frac{1}{r^3}\mathscr{I}\cdot\boldsymbol{p}-(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\frac{3}{r^4}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

$$=\frac{\boldsymbol{p}}{r^3}-\frac{3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5} \tag{4.34}$$

所以电场强度

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5}-\frac{\boldsymbol{p}}{r^3}\right\} \tag{4.35}$$

§5 积分变换公式

1. 散度定理——高斯(Gauss)公式

利用散度的定义，可以证明高斯公式

$$\oint_S \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_V \mathrm{div}\boldsymbol{A}\mathrm{d}V \tag{5.1}$$

即矢量场 $\boldsymbol{A}$ 穿过任一闭合曲面 S 的通量等于 A 的散度对 S 所包围的体积 V 的积分. 在曲面积分中，被积函数在闭合曲面 S 上取值；在体积分中被积函数在体积 V 内取值. 高斯公式表达了一个矢量场沿任意闭合曲面的面积分与对所包围体积的体积分之间的关系. 这是在电磁场理论中用途很广泛的一个重要公式.

为证明高斯公式，将体积 V 用许多平行于坐标面的平面分成 n 个小体积元 $\Delta V_1,\Delta V_2,\cdots,\Delta V_n$，包围每个小体积元的曲面记为 $S_1,S_2,\cdots,S_n$. 当第 i 个小体积元 $\Delta V_i\to 0$ 时，按散度的定义有

$$\lim_{\Delta V_i\to 0}\frac{\oint_{S_i}\boldsymbol{A}(M)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V_i}=\mathrm{div}\boldsymbol{A}(M_i) \tag{5.2}$$

当 ΔV_i 是一个有限的小体积元时，则有

$$\oint_{S_i}\boldsymbol{A}(M)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\mathrm{div}\boldsymbol{A}(M_i)\Delta V_i+\varepsilon_i\Delta V_i \tag{5.3}$$

当 $\Delta V_i\to 0$ 时，$\varepsilon_i\to 0$. 将上式对 n 个小体积元求和

$$\sum_{i=1}^{n}\oint_{S_i}\boldsymbol{A}(M)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{div}\boldsymbol{A}(M_i)\Delta V_i+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\Delta V_i \tag{5.4}$$

在 V 内部每个小体积元都是长方体，各个面都为相邻的两个小体积元所共有，因此都要做两次面积分. 这两次积分中被积函数相同，但面积元的方向相反，故两次积分数值相同，符号相反，相加时刚好抵消. 于是只剩下包围 V 的外界面 S 上的积分值，即上式左端

$$\sum_{i=1}^{n}\oint_{S_i}\boldsymbol{A}(M)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.5}$$

右端第一项求和式当 $\Delta V_i\to 0, n\to\infty$ 时的极限值变为体积分

$$\lim_{\substack{\Delta V_i\to 0\\ n\to\infty}}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{div}\boldsymbol{A}(M_i)\Delta V_i=\oint_V\mathrm{div}\boldsymbol{A}\mathrm{d}V \tag{5.6}$$

右端第二项，取 ε_i 中最大者为 ε，则

$$\sum_i \varepsilon_i \Delta V_i \leqslant \sum_i \varepsilon \Delta V_i = \varepsilon \sum_i V_i = \varepsilon V \tag{5.7}$$

当 $\Delta V_i \to 0$ 时，所有 ε_i（包括 ε）$\to 0$，故

$$\lim_{\substack{\Delta V_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \Delta V_i \leqslant V \lim_{\Delta V_i \to 0} \varepsilon = 0 \tag{5.8}$$

因此得高斯公式

$$\oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \mathrm{div}\boldsymbol{A}\mathrm{d}V = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A}\mathrm{d}V \tag{5.9}$$

2. 旋度定理——斯托克斯(Stokes)公式

利用旋度的定义，可以证明斯托克斯公式

$$\oint_L \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.10}$$

即矢量场 $\boldsymbol{A}$ 沿任一闭合曲线 L 的环量，等于 $\boldsymbol{A}$ 的旋度穿过以 L 为周界的任意曲面 S 的通量. 线积分的被积函数在闭合曲线 L 上取值，面积分的被积函数则在曲面 S 上取值. 斯托克斯公式表达了一个矢量场沿任意闭合曲线的曲线积分与以此曲线为周界的任意曲面的曲面积分的关系. 这也是场论中的一个基本公式.

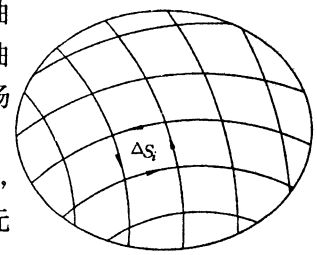


图 1.2

为证明斯托克斯公式，将曲面分成 n 个小块：$\Delta S_1, \Delta S_2, \cdots, \Delta S_n$，相应地 n 个周界记为：$l_1, l_2, \cdots, l_n$（图 1.2）. 在第 i 块小面积元 ΔS_i 上，根据旋度的定义有

$$\oint_{l_i} \boldsymbol{A}(M) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A}(M_i) \cdot \Delta \boldsymbol{S}_i + \varepsilon_i \Delta S_i \tag{5.11}$$

当 $\Delta S_i \to 0$ 时，式中的 $\varepsilon_i \to 0$. 再将上式对 n 个小面积元求和

$$\sum_{i=1}^{n} \oint_{l_i} \boldsymbol{A}(M) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{rot}\boldsymbol{A}(M_i) \cdot \Delta \boldsymbol{S}_i + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \Delta S_i \tag{5.12}$$

由于曲面 S 上的分割线每段都为相邻的两小面积元所共有，需要做两次线积分，数值相等、符号相反，故求和时分割线上的积分互相抵消，只剩下沿 S 周界 L 的线积分，故上式左端

$$\sum_{i=1}^{n} \oint_{l_i} \boldsymbol{A}(M) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_L \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{5.13}$$

右端第一项

$$\lim_{\substack{\Delta Sl \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{rot}\boldsymbol{A}(M_i) \cdot \Delta \boldsymbol{S}_i = \int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.14}$$

第二项

$$\lim_{\substack{\Delta Sl \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \Delta S_i = 0 \tag{5.15}$$

因此得斯托克斯公式

$$\oint_L \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \nabla \times \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.16}$$

3. 格林(Green)公式

如果在高斯公式中令 $\boldsymbol{A} = \psi \nabla \phi$，则有

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A} \mathrm{d}V = \int_V \nabla \cdot (\psi \nabla \phi) \mathrm{d}V = \oint_S \psi \nabla \phi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.17}$$

因为

$$\nabla \cdot (\psi \nabla \phi) = \psi \nabla^2 \phi + \nabla \psi \cdot \nabla \phi \tag{5.18}$$

代入上式得

$$\int_V (\psi \nabla^2 \phi + \nabla \psi \cdot \nabla \phi) \mathrm{d}V = \oint_S \psi \nabla \phi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.19}$$

此式称为格林第一公式. 在上式中交换 ψ 和 ϕ 的位置得

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) \mathrm{d}V = \oint_S \phi \nabla \psi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.20}$$

再将交换前后的两式相减得

$$\int_V (\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) \mathrm{d}V = \oint_S (\psi \nabla \phi - \phi \nabla \psi) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.21}$$

此式称为格林第二公式. 格林公式在求解电磁场方程时有重要的应用.

4. 积分变的一般规则

由高斯公式可推出

$$\int_V \mathrm{d}V \nabla \times \boldsymbol{A} = \oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{A} \tag{5.22}$$

$$\int_V \mathrm{d}V \nabla \phi = \oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \phi \tag{5.23}$$

$$\int_V \mathrm{d}V \nabla \cdot (\boldsymbol{AB}) = \oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot (\boldsymbol{AB}) \tag{5.24}$$

$$\int_V \mathrm{d}V \nabla \times (\boldsymbol{AB}) = \oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \times (\boldsymbol{AB}) \tag{5.25}$$

由此可归纳出体积分变成面积分的一般规则

$$\int_V \mathrm{d}V \nabla \longrightarrow \oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.26}$$

由斯托克斯公式可推出

$$\int_V \mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \nabla \phi = \oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{l} \phi \tag{5.27}$$

可归纳出面积分变成线积分的一般规则

$$\int_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \nabla \longrightarrow \oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{5.28}$$

以上公式的证明方法基本相同，现举例说明如下.

例 1 证明

$$\int_V \mathrm{d}V \nabla \times \boldsymbol{A} = \oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{A} \tag{5.29}$$

证 以常矢量 $\boldsymbol{C}$ 点乘上式左端有

$$\int_V \mathrm{d}V \boldsymbol{C} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \int_V \mathrm{d}V \nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C})$$

$$= \oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C})$$

$$= \oint_S \boldsymbol{C} \cdot (\mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{A}) \tag{5.30}$$

即

$$\boldsymbol{C} \cdot \int_V \mathrm{d}V \nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{C} \cdot \oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{A} \tag{5.31}$$

由于 $\boldsymbol{C}$ 是任意的常矢量，故可推出

$$\int_V \mathrm{d}V \nabla \times \boldsymbol{A} = \oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{A} \tag{5.32}$$

例 2 证明

$$\int_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \nabla\phi = \oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{l}\phi \tag{5.33}$$

证 仍用常矢量 $\boldsymbol{C}$ 点乘上式左端，并利用混合积公式可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C} \cdot \int_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \nabla\phi &= \int_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot (\nabla\phi \times \boldsymbol{C}) \\ &= \int_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \nabla \times (\phi\boldsymbol{C}) = \oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{l} \cdot (\phi\boldsymbol{C}) \\ &= \boldsymbol{C} \cdot \oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{l}\phi \end{aligned} \tag{5.34}$$

由于 $\boldsymbol{C}$ 是任意常矢量，故可得

$$\int_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \nabla\phi = \oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{l}\phi \tag{5.35}$$

其余所列公式可仿此证明，读者可作为练习自证.

§6 δ 函数及其基本性质

一个位于 $\boldsymbol{R}_0$ 的点电荷 q，其电荷密度分布 $\rho(\boldsymbol{R})$ 具有下列一些性质：

(1) $\rho(\boldsymbol{R}) = 0$，　当 $\boldsymbol{R} \neq \boldsymbol{R}_0$ 时　(6.1)

(2) $\rho(\boldsymbol{R}) = \infty$，　当 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_0$ 时　(6.2)

(3) $\int_V \rho(\boldsymbol{R})\mathrm{d}V = q$，　当 V 内包含 $\boldsymbol{R}_0$ 时　(6.3)

很明显，这样的函数不是通常的连续函数. 为了能描述类似点电荷密度这样特殊的性质，在物理学中首先引入了 δ 函数，其定义为：

$$\delta(x-a) = \begin{cases} \infty, & \text{当 } x = a \\ 0, & \text{当 } x \neq a \end{cases} \tag{6.4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\mathrm{d}x = 1 \tag{6.5}$$

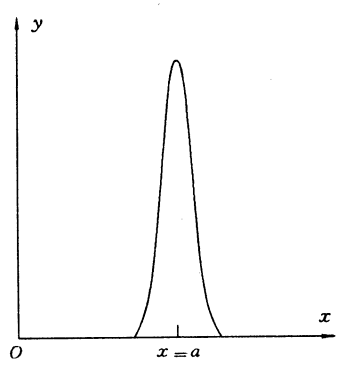


图 1.3

δ 函数的性质是很奇特的. 除 $x=a$ 的奇点外. 在 $x \neq a$ 的所有点上它均为零，但积分又等于 1. 若令图 1.3 中的曲线在 $x=a$

处无限升高，同时它的宽度无限变窄，并保持曲线内的面积为1，这时就得到$\delta(x-a)$函数的简单图象.

三维空间中δ函数的定义为：

$$\delta(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_0)=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0) \tag{6.6}$$

于是，位于$\boldsymbol{R}_0$处电量为q的点电荷的电荷密度分布为

$$\rho(\boldsymbol{R})=q\delta(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_0) \tag{6.7}$$

δ函数最先是从物理上的需要引入的，以后才从数学方面奠定了它的理论基础. 在广义函数理论中，δ函数可以看成是许多不同形式的解析函数序列的极限.

同普通函数一样，可以定义δ函数的各级微商. 一级微商的定义为

$$\delta'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\delta(x+\Delta x)-\delta(x)}{\Delta x} \tag{6.8}$$

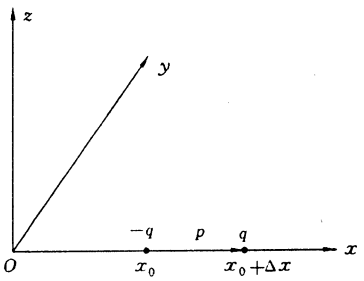


图 1.4

电偶极子的电荷密度分布可以用δ函数的微商表示. 如图1.4所示. 处在x轴上x_0点的电偶极子在空间的电荷密度为

$$\begin{aligned}\rho(\boldsymbol{R})&=\lim_{\Delta x\to 0}q[\delta(x-x_0-\Delta x)-\delta(x-x_0)]\delta(y)\delta(z)\\&=-\lim_{\Delta x\to 0}q\Delta x\frac{\delta(x-x_0)-\delta(x-x_0-\Delta x)}{\Delta x}\delta(y)\delta(z)\\&=-p\delta'(x-x_0)\delta(y)\delta(z)\end{aligned} \tag{6.9}$$

式中$p=\lim_{\Delta x\to 0}q\Delta x$是电偶极矩. 在$R_0$处偶极矩$\boldsymbol{p}$沿任意方位的电偶极子，其电荷密度为

$$\rho(\boldsymbol{R})=-(\boldsymbol{p}\cdot\nabla)\delta(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_0) \tag{6.10}$$

δ函数有一些重要性质，列举如下：

(1)若$f(x)$是任意的连续函数，则有

$$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x=\begin{cases}f(x_0), & a<x_0<b\\ 0, & x_0<a\ \text{或}\ x_0>b\end{cases} \tag{6.11}$$

证明 当x_0不在积分限内时，由于$\delta(x-x_0)$在整个积分区域内处处为零，故上述积分为零. 当x_0在积分限内时，因δ函数只在$x=x_0$时才有贡献，故在x_0近旁可取任一微小量ε，于是

$$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x=\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}f(x)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x \tag{6.12}$$

利用积分中值定理，可将$f(x)$取在x_0附近某一点x'的值后提出积分号外，当$\varepsilon\to 0$时，$x'\to x_0$，故有

$$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x=f(x_0)\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}\delta(x-x_0)\mathrm{d}x=f(x_0) \tag{6.13}$$

(2)若$f(x)$存在连续的微商，则有

$$\int_a^b f(x)\delta'(x-x_0)\mathrm{d}x=\begin{cases}-f'(x_0), & a<x_0<b_0\\ 0, & x_0<a\ \text{或}\ x_0>b\end{cases} \tag{6.14}$$

证明 应用分部积分法

$$\int_a^b f(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta(x-x_0)\mathrm{d}x = f(x)\delta(x-x_0)\Big|_b^a - \int_a^b f'(x)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x \tag{6.15}$$

上式右边第一项为零，再根据性质(1)，得

$$\int_a^b f(x)\delta'(x-x_0)\mathrm{d}x = \begin{cases} -f'(x_0), & a<x_0<b_0 \\ 0, & x_0<a \text{ 或 } x_0>b \end{cases} \tag{6.16}$$

重复应用分部积分法，还可证明

$$\int_a^b f(x)\delta^{(n)}(x-x_0)\mathrm{d}x = \begin{cases} (-1)^n f^{(n)}(x_0), & a<x_0<b_0 \\ 0, & x_0<a \text{ 或 } x_0>b \end{cases} \tag{6.17}$$

(3)δ 函数是偶函数，即

$$\delta(x) = \delta(-x) \tag{6.18}$$

证明 由性质(1)，有

$$\int_a^b f(x)\delta(x)\mathrm{d}x = f(0), \qquad a<0<b \tag{6.19}$$

而

$$\int_a^b f(x)\delta(-x)\mathrm{d}x = \int_{-b}^{-a} f(-x)\delta(x)\mathrm{d}x = f(0), \qquad -b<0<-a \tag{6.20}$$

上述两式相等，故必有

$$\delta(x) = \delta(-x)$$

(4)δ 函数可表示为阶梯函数的微商.

阶梯函数的定义是：

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1, & x>0 \end{cases} \tag{6.21}$$

显然有

$$H'(x) = \begin{cases} 0, & x\neq 0 \\ \infty, & x=0 \end{cases} \tag{6.22}$$

$$\int_{-k}^{k} H'(x)\mathrm{d}x = H(k) - H(-k) = 1$$

因此得到

$$\delta(x) = H'(x) \tag{6.23}$$

下面讨论 δ 函数的一些具体形式. 由傅里叶(Fourier)变换公式

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k \tag{6.24}$$

$$C(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x \tag{6.25}$$

设 $f(x)=\delta(x)$，则有

$$C(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \tag{6.26}$$

于是得 $\delta(x)$ 的傅里叶积分表示为

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikx}dk \tag{6.27}$$

或

$$\delta(x-x_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik(x-x_0)}dk \tag{6.28}$$

三维空间的 δ 函数则为

$$\delta(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_0)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_0))d\boldsymbol{k} \tag{6.29}$$

式中 $d\boldsymbol{k}=dk_xdk_ydk_z$. 应该指出(6.27)式应该是下列极限

$$\begin{aligned}\delta(x)&=\lim_{K\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-K}^{K}e^{ikx}dk\\&=\lim_{K\to\infty}\frac{1}{2\pi}\frac{1}{ix}(e^{iKx}-e^{-iKx})\\&=\lim_{K\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\sin Kx}{x}\end{aligned} \tag{6.30}$$

严格地说上述极限并不存在,因此 δ 函数不是普通的函数,在进行积分运算时才有意义. 例如

$$\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{K\to\infty}\frac{\sin Kx}{\pi x}dx=\lim_{K\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin Kx}{Kx}d(Kx)=1 \tag{6.31}$$

这与 δ 函数的定义一致. 图 1.5 描画了函数

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{\sin Kx}{x} \tag{6.32}$$

的曲线. 当 $K\to\infty$ 时,在 $x=0$ 处,峰的高度无限增高

$$\lim_{K\to\infty}\left(\lim_{x\to0}\frac{\sin Kx}{Kx}\right)\frac{K}{\pi}=\lim_{K\to\infty}\frac{K}{\pi}\to\infty \tag{6.33}$$

峰的宽度无限变窄

$$\lim_{K\to\infty}\frac{\pi}{K}=0 \tag{6.34}$$

峰下的面积 $(K/\pi)\cdot(\pi/K)=1$. 在 $x\neq0$ 处,曲线正负振荡的间距无限缩短,从而使在任一不包含 $x=0$ 的有限区间上的积分为零,因此可把 δ 函数表示为

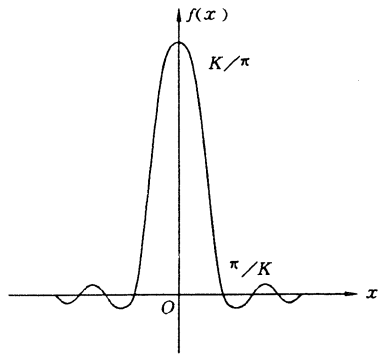


图 1.5

$$\delta(x)=\lim_{K\to\infty}\frac{\sin Kx}{\pi x} \tag{6.35}$$

δ 函数的具体表示形式很多,不再逐一列举了.

在电动力学中有一个用得很多的关系式

$$\nabla^2\frac{1}{r}=-4\pi\delta(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}') \tag{6.36}$$

其中 $r=|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}'|$. 此关系式可利用点电荷的电荷密度分布表示式直接从电势所满足的方程得到;也可以通过求解方程

$$\nabla^2G=-4\pi\delta(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}')=-\frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int\exp(i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}'))d\boldsymbol{k} \tag{6.37}$$

加以证明. 因为

$$\nabla^2\exp(i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}'))=-k^2\exp(i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}')) \tag{6.38}$$

所以

$$\nabla^2 G=\frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{k^2}\nabla^2\exp(i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}'))\mathrm{d}\boldsymbol{k} \tag{6.39}$$

由此可得

$$G=\frac{1}{2\pi^2}\int\frac{\exp(i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}'))}{k^2}\mathrm{d}\boldsymbol{k} \tag{6.40}$$

令 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}'$，在 $\boldsymbol{k}$ 空间中引入球坐标(k,θ,φ)，将 k_3 轴指向矢量 $\boldsymbol{r}$ 的方向

$$k=\sqrt{k_1^2+k_2^2+k_3^2} \tag{6.41}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{k}=k^2\sin\theta\mathrm{d}k\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \tag{6.42}$$

则

$$G=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty\mathrm{d}k\int_0^\pi\sin\theta e^{ikr\cos\theta}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \tag{6.43}$$

利用等式

$$\int_0^\pi\sin\theta e^{ikr\cos\theta}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi=4\pi\frac{\sin kr}{kr} \tag{6.44}$$

得

$$G=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin kr}{kr}\mathrm{d}k \tag{6.45}$$

而积分

$$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2} \tag{6.46}$$

由此可得出

$$G=\frac{1}{r} \tag{6.47}$$

所以，关系式(6.36)成立.

§7 矢量场的分类和基本性质

矢量场可按照散度、旋度来分类. 一个矢量场 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$，如果它的旋度处处为零，即 $\nabla\times\boldsymbol{F}=0$，就称这一矢量场为无旋场，反之则称为有旋场；如果它的散度处处为零，即 $\nabla\cdot\boldsymbol{F}=0$，就称这一矢量场为无源场，反之则称为有源场.

从数学结构看，要确定一个矢量场必须三个分量都给出. 如果只知道矢量场的散度，即给出方程(ρ 是已知函数)

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\rho \tag{7.1}$$

还不能确定矢量场 $\boldsymbol{F}$. 因为散度是标量，只给出一个偏微分方程

$$\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}=\rho \tag{7.2}$$

当然不能解出三个未知函数 F_x, F_y, F_z. 同样，只给出矢量场的旋度方程($\boldsymbol{J}$ 是已知函数)

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{J} \tag{7.3}$$

也不能确定 $\boldsymbol{F}$. 表面上看，旋度方程是矢量方程，可分解为三个分量方程. 实际上这三个分量方程并不独立，因为由矢量公式可得出下列恒等式

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{F}) \equiv 0 \tag{7.4}$$

这相当于三个分量之间存在一个约束关系，因而独立方程数只有两个. 两个独立方程不能解出三个未知函数. 要确定一个矢量场 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$，必须同时给出它的散度和旋度，即

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{J}, \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{F} = \rho \tag{7.5}$$

从数学上完全解出 $\boldsymbol{F}$，还必须给定区域边界条件. 根据一个矢量场 $\boldsymbol{F}$ 的散度和旋度是否处处为零，即根据 $\boldsymbol{J}, \rho$ 的取值情况，矢量场可分成以下几类：

1) $\boldsymbol{J}=0, \rho\neq 0$，$\boldsymbol{F}$ 称为无旋有源场，例如静电场.

2) $\boldsymbol{J}\neq 0, \rho=0$，$\boldsymbol{F}$ 称为有旋无源场，例如稳定电流磁场.

3) $\boldsymbol{J}\neq, \rho\neq 0$，$\boldsymbol{F}$ 称为有旋有源场，例如变化电磁场.

应该指出，在全部空间内 $\boldsymbol{J}=0, \rho=0$ 的情况是不存在的，但在局部空间内可以有 $\boldsymbol{J}=0, \rho=0$ 的情况. 例如均匀场，这时在区域的边界上场必须不为零，否则在区域内就不会有场存在.

下面讨论矢量场的一些重要性质.

(1)任一无旋场 $\boldsymbol{F}$，可用一标量场 ϕ 的梯度表示，即 $\boldsymbol{F}=\nabla\phi$.

证明 因为 $\nabla\times\boldsymbol{F}=0$，将 $\boldsymbol{F}=\nabla\phi$ 代入，必然保证方程满足

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{F} &= \nabla \times (\nabla\phi) \\ &= \sum_i \boldsymbol{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \times \sum_j \boldsymbol{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j}\phi \\ &= \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\phi \boldsymbol{e}_k \\ &= 0\end{aligned} \tag{7.6}$$

利用斯托克斯公式，可求出 ϕ 的形式

$$\oint_L \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \nabla\times\boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{7.7}$$

上式表明无旋场沿空间任一闭合曲线的积分恒为零. 在曲线 L 上任取两点 $a(x_0,y_0,z_0)$ 和 $b(x,y,z)$，可将沿闭合曲线 L 的积分表为沿 l_1 和 l_2 的线积分之和

$$\int_{a(l_1)}^{b} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{b(l_2)}^{a} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$$

或

$$\int_{a(l_1)}^{b} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_{b(l_2)}^{a} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{a(l_2)}^{b} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{7.8}$$

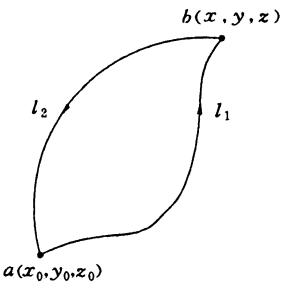


图 1.6

这表明无旋场在任意两点之间的线积分，与积分的路径无关，只与两点的位置有关.

将 $\boldsymbol{F}=\nabla\phi$ 代入上式，则有

$$\int_a^b \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_a^b \nabla\phi\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_a^b \frac{\partial\phi}{\partial l}\mathrm{d}l$$

$$=\int_a^b \mathrm{d}\phi = \phi(b) - \phi(a) \tag{7.9}$$

于是得

$$\phi(b) = \phi(x,y,z) = \phi(x_0,y_0,z_0) + \int_a^b \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{7.10}$$

其中$\phi(x_0,y_0,z_0)$是常数，可随意选取.ϕ称为无旋场的势函数.势函数只能确定到相差一个任意常数.

(2)任一无源场$\boldsymbol{F}$，可用另一矢量场$\boldsymbol{A}$的旋度表示，即若$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=0$，则$\boldsymbol{F}=\nabla\times\boldsymbol{A}$.

证明 因为$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=0$，将$\boldsymbol{F}=\nabla\times\boldsymbol{A}$代入，必然保证方程满足

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{F} = \nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) &= \sum_i \boldsymbol{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\cdot\sum_{jkl}\varepsilon_{jkl}\frac{\partial}{\partial x_j}A_k\boldsymbol{e}_l \\ &= \sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}A_k = 0\end{aligned} \tag{7.11}$$

但应注意矢量场$\boldsymbol{A}$的选取不是唯一的.令

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\psi$$

则

$$\nabla\times\boldsymbol{A}' = \nabla\times\boldsymbol{A} + \nabla\times(\nabla\psi) = \nabla\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{F} \tag{7.12}$$

故由$\boldsymbol{A}'$与由$\boldsymbol{A}$算得的$\boldsymbol{F}$是相同的.矢量场$\boldsymbol{A}$称为无源场$\boldsymbol{F}$的矢势.矢势只能确定到相差任一标量函数的梯度.

(3)亥姆霍兹(Helmholtz)定理

任意一个有旋有源场$\boldsymbol{F}$，可分解为无旋场$\boldsymbol{F}_1$和无源场$\boldsymbol{F}_2$之和，即$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$，而$\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2$各满足$\nabla\times\boldsymbol{F}_1=0$，$\nabla\cdot\boldsymbol{F}_2=0$.

证明 由δ函数的性质可把$\boldsymbol{F}$写成

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}) = \int_V \boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}')\delta(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}')\mathrm{d}V' \tag{7.13}$$

由(6.36)式可得

$$\delta(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}') = -\frac{1}{4\pi}\nabla^2\frac{1}{r} \tag{7.14}$$

所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}) &= -\int_V \boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}')\frac{1}{4\pi}\nabla^2\frac{1}{r}\mathrm{d}V' \\ &= -\nabla^2\int_V\frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}')}{4\pi r}\mathrm{d}V'\end{aligned} \tag{7.15}$$

式中$r=|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}'|$是$\boldsymbol{R}$和$\boldsymbol{R}'$的函数，对$\boldsymbol{R}'$积分后，只是$\boldsymbol{R}$的函数.令

$$\int_V\frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}')}{4\pi r}\mathrm{d}V' = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{R}) \tag{7.16}$$

利用矢量恒等式

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{G}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{G}) - \nabla^2\boldsymbol{G} \tag{7.17}$$

则

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}) = -\nabla^2\boldsymbol{G} = -\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{G}) + \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{G})$$

$$= \nabla\phi + \nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 \tag{7.18}$$

其中

$$\phi = -\nabla \cdot \boldsymbol{G} \qquad \boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{G} \tag{7.19}$$

显然

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{F}_1 = \nabla \times (\nabla\phi) = 0 \\ \nabla \cdot \boldsymbol{F}_2 = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0 \end{cases} \tag{7.20}$$

定理得证.

(4)唯一性定理

在一区域内唯一确定一个矢量场的条件是:给定区域内场的散度和旋度,在区域边界上给定场的切线或法线分量.

证明 假定存在两个矢量场 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$,它们都满足给定的条件,若能证明 $\boldsymbol{F}_1=\boldsymbol{F}_2$,则上述定理得证. 令

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 - \boldsymbol{F}_2 \tag{7.21}$$

因为区域内场的旋度给定,即

$$\nabla \times \boldsymbol{F}_1 = \nabla \times \boldsymbol{F}_2, \text{故 } \nabla \times \boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F}_1 - \nabla \times \boldsymbol{F}_2 = 0$$

可见 F 是无旋场,由无旋场的性质可得

$$F = \nabla\phi$$

因区域内场的散度是给定的,即

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F}_1 = \nabla \cdot \boldsymbol{F}_2, \text{故 } \nabla \cdot \boldsymbol{F} = \nabla \cdot \boldsymbol{F}_1 - \nabla \cdot \boldsymbol{F}_2 = 0$$

于是得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \nabla \cdot \nabla\phi = \nabla^2\phi = 0 \tag{7.22}$$

利用格林第一公式,令其中的 $\psi=\phi$,则有

$$\int_V [\phi\nabla^2\phi + (\nabla\phi)^2]\mathrm{d}V = \oint_S \phi\nabla\phi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{7.23}$$

由于 $\nabla^2\phi=0$,故

$$\int_V (\nabla\phi)^2\mathrm{d}V = \oint_S \phi\nabla\phi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{7.24}$$

或改写为

$$\int_V \boldsymbol{F}^2\mathrm{d}V = \oint_S \phi\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{7.25}$$

若在区域边界上给定的是场的法线分量,则有

$$F_n = F_{1n} - F_{2n} = 0$$

因而

$$\oint_S \phi\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_S \phi F_n \mathrm{d}S = 0 \tag{7.26}$$

若在边界上给定的是场的切线分量,则有

$$F_t = F_{1t} - F_{2t} = 0$$

则量函数 ϕ 沿界面 S 切线方向的微分为

$$\mathrm{d}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial l_t}\mathrm{d}l_t = (\nabla\phi)_t\mathrm{d}l_t = F_t\mathrm{d}l_t = 0 \tag{7.27}$$

这表明在界面 S 上 ϕ 值是相同的. 于是

$$\oint_S \phi \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \phi \oint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \phi \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{F} \mathrm{d}V = 0 \tag{7.28}$$

这样在两种边界条件下(7.25)式都变为

$$\int_V \boldsymbol{F}^2 \mathrm{d}V = 0 \tag{7.29}$$

因 $\boldsymbol{F}^2 \geqslant 0$, 上式成立则必须

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 - \boldsymbol{F}_2 = 0 \tag{7.30}$$

于是 $\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}_2$, 即在给定条件下, 区域中场的分布是唯一确定的.

思考题与习题一

1. 设 $\boldsymbol{r}=(x-x')\boldsymbol{i}+(y-y')\boldsymbol{j}+(z-z')\boldsymbol{k}$，证明

(a) $\nabla r=\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$　　(b) $\nabla\dfrac{1}{r}=-\nabla'\dfrac{1}{r}=-\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$

(c) $\nabla\cdot\boldsymbol{r}=3$　　(d) $\nabla\times\boldsymbol{r}=0$

(e) $\nabla\cdot\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}=\dfrac{2}{r}$　　(f) $\nabla\times\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}=0$

2. 设 $\boldsymbol{c}$ 为常矢量，计算

(a) $\nabla(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})$　　(b) $\nabla\cdot(c\boldsymbol{r})$

(c) $\nabla\times(r\boldsymbol{c})$　　(d) $\nabla\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r}/r^3)$

(e) $\nabla\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{c})$　　(f) $\nabla\cdot[(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}]$

(g) $\nabla\times[(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}]$　　(h) $\nabla\cdot[(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{r}]$

(i) $\nabla\times[(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{r}]$　　(j) $\nabla[(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r})]$

(k) $\nabla\times\left(\dfrac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r}}{r^3}\right)$　　(l) $\nabla\times\left(\nabla\times\dfrac{\boldsymbol{c}}{r}\right)$

3. 已知矢量 $\boldsymbol{A}=3x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k}$，$\phi=x^2+y^2+z^2$，计算 $\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{A})$ 和 $\nabla\times(\phi\boldsymbol{A})$ 在点(2,2,2)的值.

4. 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(r)$，$\phi=\phi(r)$，证明

(a) $\nabla\phi=\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$　　(b) $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}r}\cdot\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$

(c) $\nabla\times\boldsymbol{A}=\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\times\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}r}$　　(d) $\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r})=\boldsymbol{A}+\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\left(\boldsymbol{r}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}r}\right)$

(e) $\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{r})=3\phi+r\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}$　　(f) $\nabla\times(\phi\boldsymbol{r})=0$

(g) $\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{r})=2\boldsymbol{A}-\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\times\left(\boldsymbol{r}\times\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}r}\right)$

5. 设 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$，其中 $\boldsymbol{E}_0$，$\boldsymbol{k}$ 是常矢量，有

(1) $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}$　　(2) $\nabla\times\boldsymbol{E}=\mathrm{i}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}$

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是任意矢量函数，ϕ 是任意标量函数，证明

(1) $\displaystyle\int_V[\nabla\phi\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})]\mathrm{d}V=\oint_S\phi(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$

(2) $\displaystyle\oint_L\phi\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_S\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\nabla\phi$

7. 利用 δ 函数表示下列带电系统的电荷密度分布：

(1) n 个点电荷 q_k，分别位于 $\boldsymbol{R}_k(k=1,2,\cdots,n)$；

(2) 一半径为 a 的导体球均匀带电，总电量为 Q，导体球位于坐标原点.

8. 利用 δ 函数表示下列线电流的电流密度分布：

(1) 一无限长直线电流，电流强度为 I，位于 Oz 轴；

(2) 一半径为 a 的圆电流圈，电流强度为 I，位于 xy 平面内，圆心在坐标原点.

第二章　电磁现象的基本规律

本章从电磁现象的实验定律出发，如电荷守恒定律、库仑定律、毕奥-沙伐尔定律、法拉弟电磁感应定律，进行概括、总结、提高，得出电动力学的基本方程，即电磁现象的基本规律.

在电磁运动中有电荷和电场、电流和磁场、电荷和电流、电场和磁场这四对基本关系，通过对这些基本关系的考察分析，从而全面地认识电磁现象的基本规律.

电磁场是物质存在的一种形式，它具有自己独特的性质，它弥漫于整个空间，因此描述其运动状态必须用空间的矢量函数：电场强度矢量 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R},t)$ 和磁场强度矢量 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R},t)$ 来表示. 电磁场的运动规律就是要用这两个矢量场所满足的偏微分方程来表示；而电磁场对电荷及电流的作用，则由洛仑兹力公式来表示.

§1　库仑定律　静电场的散度和旋度

1. 库仑(Coulomb)定律　电场强度

静电相互作用的实验定律是1785年库仑从实验中总结出来的. 按照库仑定律，两个处于真空中的静止点电荷之间有相互作用力，力的大小和它们的电量成正比，与它们之间的距离的平方成反比；力的方向沿着电荷之间的联线，并且异号电荷相互吸引，同号电荷相互排斥. 用公式可表示为

$$\boldsymbol{F}_{12}=K\frac{q_1q_2}{r_{12}^3}\boldsymbol{r}_{12} \tag{1.1}$$

式中 $\boldsymbol{F}_{12}$ 是电荷1作用在电荷2上的力，q_1，q_2 分别代表两个点电荷的电量代数值，$\boldsymbol{r}_{12}$ 是从电荷1指向电荷2的矢径，K 是比例常数，其大小与选用的单位有关. 我们采用SI单位制即国际单位制. 力的单位是牛顿(N)，距离单位是米(m)，电荷单位是库仑(C)，则 $K=1/4\pi\varepsilon_0$，ε_0 称为真空介电常数

$$\varepsilon_0=\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}=8.854\times10^{-12}\mathrm{F/m} \tag{1.2}$$

于是库仑定律可写成

$$\boldsymbol{F}_{12}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{12}^3}\boldsymbol{r}_{12} \tag{1.3}$$

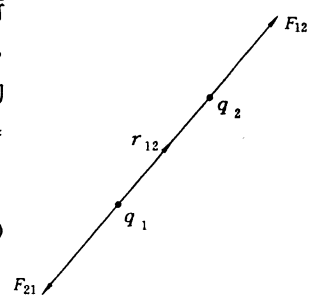


图 2.1

原始的库仑定律只适用于真空、静止、点电荷的情况. 当然，实际的电荷总是分布在有限区域内的. 所谓点电荷应理解为带电体的大小和它们之间的距离相比是足够小的，即当物体间的距离一定时，在测量的精密度内，物体大小和形状的变化，都不会使相互作用力改变.

由库仑定律，我们可设想电荷周围的空间具有特殊的物理性质，当另一个电荷处在这个空间中时，将受到力的作用，这种能对另一电荷产生作用力的空间称为存在一个电场. 在这里电场还只是作为计算电荷之间相互作用的一种手段而引入的，以后将会看到，电场具有更深刻的

物理意义，它是物质存在的一种形式. 为了描述电场的性质，引入电场强度的概念. 电场强度是一个矢量，它等于作用在场中单位正电荷上的力. 于是电荷 2 在电荷 1 的电场中所受的作用力可写成：

$$\boldsymbol{F}_{12} = q_2\boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{12}^3}\boldsymbol{r}_{12} \tag{1.4}$$

$\boldsymbol{E}$ 是电荷 q_1 在 $\boldsymbol{r}_{12}$处的电场强度. 在 SI 单位制中，电场强度的单位是伏特每米(V/m).

实验还发现电场满足叠加原理. 在有几个点电荷同时存在的情况下，空间某点处的电场强度，等于各个点电荷在该点产生的电场之矢量和，即

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i\boldsymbol{r}_i}{r_i^3} \tag{1.5}$$

$\boldsymbol{r}_i$ 是第 i 个点电荷 q_i 到待求场点 $P(x,y,z)$处的矢径. 当电荷连续分布在某一空间区域时，为了描述电荷的分布状况，引入电荷体密度概念. 其定义为

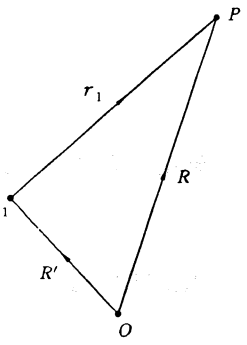


图 2.2

$$\rho(x,y,z) = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta V} \tag{1.6}$$

ΔV 是(x,y,z)点周围一个小体积元，Δq 是 ΔV 内的电量. 这时区域 V 内电荷在 $\boldsymbol{R}(x,y,z)$点的电场强度应为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}) = \int_V \frac{\rho(\boldsymbol{R}')\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\mathrm{d}V' \tag{1.7}$$

式中各量如图 2.3 所示. 如果电荷分在一薄层内，可以忽略厚度而认为电荷分布在一个几何曲面上. 这时的电荷分布称为面电荷. 为了描述面电荷的特性，引入面电荷密度. 它的定义是

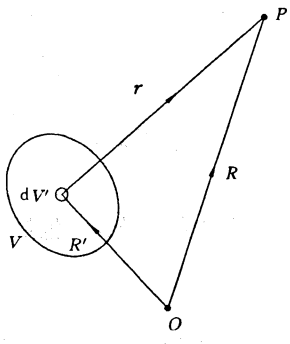


图 2.3

$$\sigma(x,y,z) = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta S} \tag{1.8}$$

式中 ΔS 是曲面上(x,y,z)点周围的面积元，Δq 是面元内的电量. 应该注意，面电荷是一个抽象的数学概念，实际的电荷是分布在薄层内的. 对抽象后的面电荷，体密度为无限大，因为无厚度的几何面元 ΔS 内(体积为零)，分布了有限的电量 Δq，在 S 面上的面电荷产生的电场强度为

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}S' \tag{1.9}$$

引入电场强度以后，计算一个电荷受其它电荷的作用力，就归结为计算该电荷处的电场强度. 如果对任意电荷的分布情况，一律从原始的库仑定律来计算电场强度，往往是不方便的. 研究发现，高斯定理对于计算某些特殊情况下的电场强度很有用处.

2. 高斯(Gauss)定理和静电场的散度

在普通物理电磁学中大家已熟悉高斯定理的内容：在静电场中，通过任意闭合曲面的电通量等于曲面内部所包围的总电量的代数和，除以真空介电常数. 即

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho(\boldsymbol{R})\mathrm{d}V = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{1.10}$$

式中 S 是 V 的界面，ρ 是 V 内电荷体密度，Q 是 V 内的总电量.

从库仑定律(1.7)式，很易证明高斯定理.

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} \frac{\rho(\boldsymbol{R}')\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}V'$$

上式中 V' 是电荷分布区域. 作任意曲面 S，并在 S 面上作积分：

$$\begin{aligned}\oint_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{R})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\int_{V'}\frac{\rho(\boldsymbol{R}')\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}V' \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\rho(\boldsymbol{R}')\mathrm{d}V'\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\rho(\boldsymbol{R}')\mathrm{d}V'\int_V \nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}V\end{aligned}$$

注意到第一章(6.36)式，有

$$\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}V = -\nabla\cdot\nabla\frac{1}{r} = 4\pi\delta(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}')$$

再代入上式得到

$$\oint_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{R})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{V'}\rho(\boldsymbol{R}')\mathrm{d}V'\int_V \delta(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}')\mathrm{d}V \tag{1.11}$$

式中 V 是 S 面包围的体积. 由于 S 面是任意的，V 和 V' 之间的关系有三种情况，如下图所示.

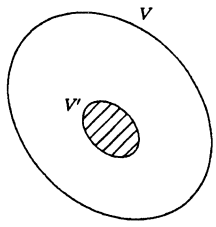


图 2.4

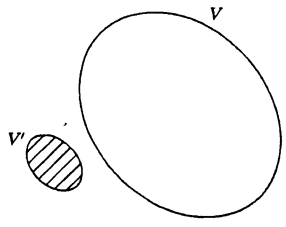


图 2.5

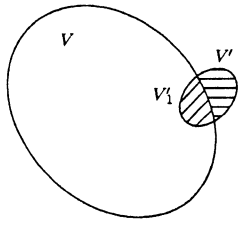


图 2.6

对图 2.4 的情况，V 包括了全部 V'，利用 δ 函数的性质，(1.11)式为

$$\oint_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{R})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{V'}\rho(\boldsymbol{R}')\mathrm{d}V' = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho(\boldsymbol{R})\mathrm{d}V$$

对图 2.5 的情况，V 与 V' 的点不重合，(1.11)右端积分值为零. 对图 2.6 的情况，如只包围了 V' 中的一部分 V_1'，只在 V_1' 内(1.11)右端的积分值才不为零，可化为

$$\oint_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{R})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{V_1'}\rho(\boldsymbol{R}')\mathrm{d}V' = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho(\boldsymbol{R}')\mathrm{d}V'$$

由此可见在任意情况下都可得到

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\mathrm{d}V \tag{1.12}$$

这就是高斯定理. 注意，上式左端面积分中的 $\boldsymbol{E}$ 是 V 内外电荷产生的总电场，而右端的体积分却与 V 外电荷分布无关.

高斯定理对于计算有某些对称性的电场是很有用的. 例如球对称性电荷分布，柱对称性电荷分布的电场等. 这时利用对称性可将(1.12)式左端的面积分作出并用 E 表示，因而可求出

E 来. 但是若电场不具有良好的对称性，用高斯定理来计算电场仍然是很不方便的，甚至是不可能的. 这时待求函数 $\boldsymbol{E}$ 在被积函数中，(1.12)是一个积分方程. 并且 $\boldsymbol{E}$ 是一个矢量函数，由一个积分方程原则上是不能求出的. 因此，还必须寻找计算电场强度的更有力的方法.

将(1.12)化为微分方程的形式就能便于求解. 利用场论中的散度定理有

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_V \nabla\cdot \boldsymbol{E}\mathrm{d}V=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \mathrm{d}V$$

因为上式对任意区域都成立，故得

$$\nabla\cdot \boldsymbol{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \tag{1.13}$$

这就是高斯定理的微分形式，它给出了静电场的散度方程. 它表明了静电场是一个有源场. 必须注意，得到(1.13)的微分形式方程时，利用了散度定理，而散度定理要求 $\nabla\cdot \boldsymbol{E}$ 在空间 V 内连续，所以(1.13)式只在电荷分布 ρ 连续的区域内才成立. 从场论中知道，要确定一个矢量场，除了给出散度方程外，还必须同时给出其旋度方程.

3. 静电场的旋度

由库仑定律(1.7)出发，对空间任一封闭回路作线积分

$$\begin{aligned}\int_L \boldsymbol{E}(\boldsymbol{R})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}&=\oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\boldsymbol{R}')\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}V'\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \mathrm{d}V'\rho(\boldsymbol{R}')\oint_L \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\boldsymbol{R}')\mathrm{d}V'\int_S\left(\nabla\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\end{aligned}$$

由于

$$\nabla\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=-\nabla\times\nabla\frac{1}{r}=0$$

所以

$$\oint_L \boldsymbol{E}(\boldsymbol{R})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0 \tag{1.14}$$

再根据斯托克斯公式可得

$$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_S(\nabla\times \boldsymbol{E})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$$

因为上式对任意曲面都成立，故有

$$\nabla\times \boldsymbol{E}=0 \tag{1.15}$$

上式表明，静电场的旋度处处为零，静电场是一个无旋场.

(1.12)—(1.15)是确定静电场的基本方程，它们是从库仑定律推出来的，目前它们还只是库仑定律的一种变化形式. 这种变化，把计算电场归结为求解微分方程的问题，它比用原始库仑定律来计算电场更方便. 不仅如此，以后将看到，这种形式更便于推广到普遍情况.

§2 毕奥-萨伐尔定律 静磁场的散度和旋度

电荷的运动形成电流. 为了描述导体中电流的大小，引入电流强度. 电流强度用 I 表示. 它

的定义是：在有电流流动的空间内，任取一曲面，单位时间内通过该曲面的电量叫做该曲面上的电流强度. 在 SI 单位制中电流强度的单位是安培. 电流强度只能描写整个曲面上电流的大小，不能细致刻划导体内每一点电流的情况. 为了描述导体内电流的分布，引入电流密度，用 $\boldsymbol{J}$ 表示. 电流密度 $\boldsymbol{J}$ 是一矢量，$\boldsymbol{J}$ 的方向就是该点电荷流动的方向，它的数值等于单位时间垂直通过单位面积的电量. $\boldsymbol{J}$ 和 I 的关系为

$$I = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

稳定电流的特点是电流密度与时间无关. 在稳定电流存在的区域内作任意封闭曲面，单位时间内流入曲面的电量一定等于流出曲面的电量. 单位时间内流过 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的电量为 $\boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$，因而对稳定电流有

$$\oint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

利用散度定理可得

$$\oint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{J} \mathrm{d}V = 0$$

上式对任意区域成立，故

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$$

这是稳定电流的基本性质.

实验发现，在通有电流的两根导线之间有相互作用力存在. 可以认为电流周围空间存在着对另外电流的作用力场，称为磁场，这是因为实验发现这个力场的性质和永久磁铁产生的力场的性质完全相同. 与引入电场相似，目前引入的磁场概念，只是作为描述电流相互作用的一种手段，以后会看到磁场是物质存在的一种形式.

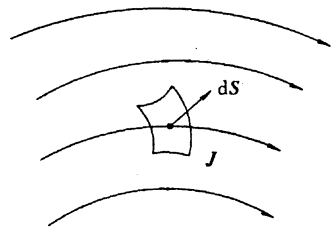


图 2.7

引入磁场以后，就可以把电流的相互作用归结为两个问题：第一，如何决定电流的磁场；第二，如何决定磁场对电流的作用力.

1. 毕奥-萨伐尔(Biot-Savart)定律

真空中电流磁场的大小用磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 来描述. 1820 年，毕奥-萨伐尔、拉普拉斯总结实验资料，获得了由电流决定磁感强度的实验定律，简称毕奥-萨伐尔定律. 它的内容如下：通有电流强度为 I 的线电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，在距它为 $\boldsymbol{r}$ 处产生的磁感强度 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = K \frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}}{r^3}$$

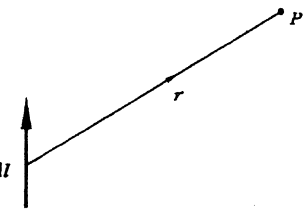


图 2.8

式中 K 是比例常数，由单位制的选择决定. 选 SI 单位制后，$K = \mu_0/4\pi$，μ_0 是真空磁导率，其值为

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\mathrm{H/m}$$

于是毕奥-萨伐尔定律为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}}{r^3} \tag{2.1}$$

如果是体电流分布，电流密度为 $\boldsymbol{J}$，上式中的电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 应换为 $\boldsymbol{J}\mathrm{d}V$，于是有

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{J}dV \times \boldsymbol{r}}{r^3} \tag{2.2}$$

在区域V内的闭合体电流分布产生的磁感强度为

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}') \times \boldsymbol{r}}{r^3}dV' \tag{2.3}$$

2. 安培(Ampere)作用力定律

1822 年安培总结实验资料得到电流在磁场中受力的公式，称为安培定律. 它的内容是：在磁场中一个线电流元所受的力为

$$d\boldsymbol{F} = Id\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B} \tag{2.4}$$

对于体电流分布元$\boldsymbol{J}dV$，在磁场中受力为

$$d\boldsymbol{F} = \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}dV \tag{2.5}$$

若有两个电流元$\boldsymbol{J}_1dV_1$与$\boldsymbol{J}_2dV_2$，它们相距为$\boldsymbol{r}_{12}$(图 2.9)，由(2.2)式得$\boldsymbol{J}_1dV_1$在$\boldsymbol{r}_{12}$处的磁场为

$$d\boldsymbol{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{J}_1dV_1 \times \boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

因而$\boldsymbol{J}_2dV_2$受到的作用力按(2.5)式为

$$d\boldsymbol{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{J}_2dV_2 \times \left(\frac{\boldsymbol{J}_1dV_1 \times \boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^3}\right) \tag{2.6}$$

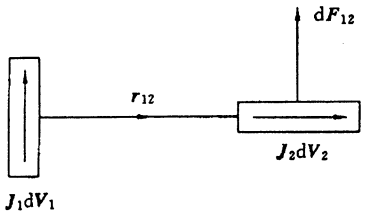


图 2.9

同理，$\boldsymbol{J}_1dV_1$受到$\boldsymbol{J}_2dV_2$的磁场的作用力为

$$d\boldsymbol{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{J}_1dV_1 \times \left(\frac{\boldsymbol{J}_2dV_2 \times \boldsymbol{r}_{21}}{r_{12}^3}\right) \tag{2.7}$$

由(2.6)、(2.7)看到，两个电流元之间的作用力并不满足牛顿第三定律. 如图 2.9 所示的情况，$d\boldsymbol{F}_{21}=0$，而$d\boldsymbol{F}_{12}\neq 0$. 但不能由此得出结论说，电磁相互作用力不遵守牛顿第三定律. 上述矛盾的出现，在于假定存在两个孤立的稳定电流元，实际上这是不可能的，稳定电流一定是一个封闭的回路. 可以证明两个稳定电流回路之间的作用力完全服从牛顿第三定律. 如图 2.10 所示，电流回路I_2受到I_1的作用力为$\boldsymbol{F}_{12}$.

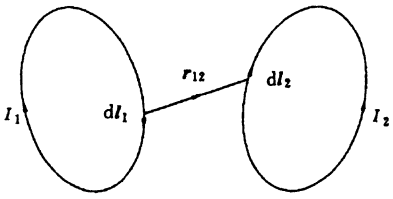


图 2.10

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{12} &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{L_2}\oint_{L_1}\frac{d\boldsymbol{l}_2 \times (d\boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{r}_{12})}{r_{12}^3} \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{L_2}\oint_{L_1}\left[\frac{d\boldsymbol{l}_1(d\boldsymbol{l}_2 \cdot \boldsymbol{r}_{12})}{r_{12}^3} - \frac{d\boldsymbol{l}_1 \cdot d\boldsymbol{l}_2}{r_{12}^3}\boldsymbol{r}_{12}\right]\end{aligned} \tag{2.8}$$

由斯托克斯公式

$$\oint_{L_2} d\boldsymbol{l}_2 \cdot \frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^3} = \int_S \left(\nabla \times \frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^3}\right) \cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

则

$$\boldsymbol{F}_{12} = \frac{-\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{L_1}\oint_{L_2}\frac{d\boldsymbol{l}_1 \cdot d\boldsymbol{l}_2}{r_{12}^3}\boldsymbol{r}_{12} \tag{2.9}$$

同理可得

$$\boldsymbol{F}_{21}=\frac{-\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{L_1}\oint_{L_2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2}{r_{12}^3}\boldsymbol{r}_{21} \tag{2.10}$$

由于 $\boldsymbol{r}_{12}=-\boldsymbol{r}_{21}$，故得到 $\boldsymbol{F}_{12}=-\boldsymbol{F}_{21}$.

由(2.3)式的毕奥-萨伐尔定律原则上可以算出任意稳定电流所产生的磁场. 但在一般情况下用这个公式计算磁场往往不方便. 可以找到计算磁场更为方便的形式，这就是安培环路定理.

3. 磁场的环量和旋度

安培环路定理的内容是：在磁场中，磁感强度对任意闭合回路的积分，等于通过以此曲线为周界的曲面上的电流强度乘以真空磁导率，即

$$\oint_L \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0\int_S \boldsymbol{J}(\boldsymbol{R})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{2.11}$$

证明如下：在磁场的空间内任选一闭合回路 L，它可以包围全部电流，也可包围一部分电流，也可以不包围任何电流，如图 2.11 所示. 将(2.3)的 $\boldsymbol{B}$ 对 L 作积分

$$\oint_L \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_L\int_V\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')\mathrm{d}V'\times\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

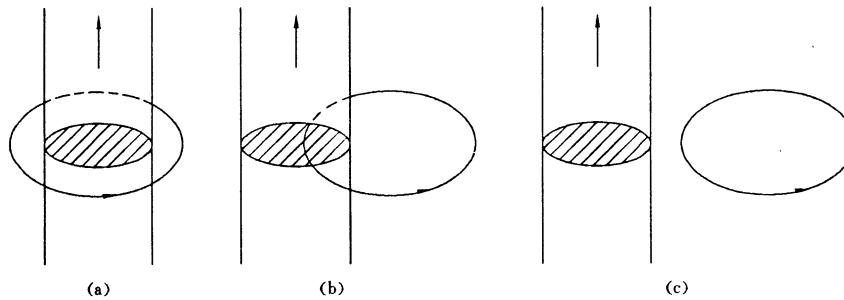


图 2.11

注意到 $\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=-\nabla\frac{1}{r}$，并且 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')$ 与 $\boldsymbol{R}$ 无关，而 ∇ 只对 $\boldsymbol{R}$ 坐标微商，则有

$$\begin{aligned}\oint_L \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\mathrm{d}V'\oint_L\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')\times\left(-\nabla\frac{1}{r}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\mathrm{d}V'\oint_L\nabla\times\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')}{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\end{aligned}$$

再利用斯托克斯公式，将上式中的线积分化为以 L 为周界的曲面积分，得

$$\begin{aligned}\oint_L \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\mathrm{d}V'\int_S\nabla\times\left(\nabla\times\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')}{r}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_S\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\int_V\left(\nabla\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')}{r}-\nabla^2\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')}{r}\right)\mathrm{d}V'\end{aligned} \tag{2.12}$$

先计算上式右端第一项体积分，注意 ∇ 只对 $\boldsymbol{r}$ 微商，而积分变量是 $\boldsymbol{R}'$，则有

$$\begin{aligned}\int_V\nabla\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')}{r}\mathrm{d}V'&=\nabla\int_V\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')\cdot\nabla\frac{1}{r}\mathrm{d}V'\\&=-\nabla\int_V\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')\cdot\nabla'\frac{1}{r}\mathrm{d}V'\end{aligned}$$

$$=-\nabla\int_V\left[\nabla'\cdot\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')}{r}-\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')}{r}\right]\mathrm{d}V'$$

对于稳定电流，$\nabla'\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')=0$，故上式第二项积分为零，第一项积分利用散度定理可化为面积分，得

$$-\int_V\nabla\nabla'\cdot\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')}{r}\mathrm{d}V'=-\nabla\oint_S\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')}{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

注意，上式的面积分是在包围稳定电流分布区域的表面上进行的. 稳定电流不可能流出包围面，在包围面上的任何点电流的法线分量都为零，因而上式的面积分为零，即

$$\oint_S\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')}{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint_S\frac{\boldsymbol{J}_n(\boldsymbol{R}')}{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'=0$$

由此得到(2.12)式右端第一项积分为零. 于是利用公式

$$\nabla^2\frac{1}{r}=-4\pi\delta(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}')$$

可将(2.12)的积分化为

$$\begin{aligned}\oint_L\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}&=\mu_0\int_S\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\int_V\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')\delta(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}')\mathrm{d}V'\\&=\mu_0\int_S\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R})\end{aligned}\tag{2.13}$$

这就是安培环路定理. 上式的面积分是以 L 为周界的曲面. 上式也称为安培环路定理的积分形式. 当电流的磁场具有某种对称性时，用积分形式的安培环路定理可以方便地算出磁场. 但用它来计算普遍情况下的磁场仍然是不方便的，这时待求磁场不能提出积分号外，需要求解积分方程.

利用斯托克斯公式可得

$$\oint_L\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_S(\nabla\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\mu_0\int_S\boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

上式的积分区域是任意的，故可得

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}\tag{2.14}$$

这也称为安培环路定理的微分形式. 必须注意斯托克斯公式要求 $\boldsymbol{B}$ 的旋度连续，所以上式只在 $\boldsymbol{J}$ 连续的区域才成立. (2.14)是一个矢量微分方程，由场论知道，确定矢量场还必须给出它的散度方程.

4. 磁场的散度

将(2.3)式对磁场中任一封闭曲面积分

$$\begin{aligned}\oint_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}&=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\int_{V'}\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')\times\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}V'\\&=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\mathrm{d}V'\oint_S\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\left(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')\times\nabla\frac{1}{r}\right)\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\mathrm{d}V'\oint_S\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\left(\nabla\times\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')}{r}\right)\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\mathrm{d}V'\int_V\nabla\cdot\left(\nabla\times\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')}{r}\right)\mathrm{d}V\end{aligned}$$

由于矢量恒等式 $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$，故得

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{2.15}$$

再利用散度定理

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{B} \mathrm{d}V = 0$$

由于上式对任意积分区域都成立，故有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{2.16}$$

(2.14)和(2.16)两式是稳定电流磁场的基本方程，它们表明了稳恒电流的磁场是一个无源有旋场.

§3 法拉第电磁感应定律

1831 年法拉第(Faraday)从实验中发现，在任意一个闭合的导体回路里，当回路所围面积的磁感应通量变化时，回路中将出现电流，这种现象称为电磁感应. 电磁学告诉我们，要在闭合的导体回路中维持电流必须接上电源. 电源的本质在于给它内部可移动的电荷提供某种非静电的外力. 非静电力使单位正电荷从电源的一端经电源内部移到另一端时做的功，称为电源的电动势. 在电磁感应现象中，回路里有电流，说明回路中有电动势存在，这种电动势称为感应电动势. 法拉第首先从实验中确定了感应电动势的大小与穿过回路的磁通量变化率成正比，后来楞次(Lenz)又从实验中确定了感应电动势的方向，即感应电流的磁通量总是力图补偿原来引起感应电流的那种磁通量的变化. 把这两个实验定律结合起来，就得到感应电动势 $\mathscr{E}$ 的定量表达式

$$\mathscr{E} = -K\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{3.1}$$

在 SI 单位制中，$\mathscr{E}$ 的单位为伏特，磁通量 Φ 的单位为韦伯，这时 $K=1$，因而上式可表为

$$\mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{3.2}$$

这就是电磁感应定律或称为法拉第定律. 上式中的负号可以表示感应电动势的方向，根据回路 L 的绕行方向，按右旋规则确定所围曲面 S 的法线方向，当通过 S 的磁通量减少时，电动势 $\mathscr{E}$ 的方向才与回路绕行方向一致，如图(2.12)所示.

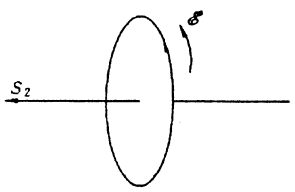


图 2.12

不管是什么原因引起磁通变化，法拉第定律说明，只要回路中磁通量有变化就会发生感应电动势. 实验表明，引起磁通变化的原因有三种：一种情况是磁场不随时间变化，但回路的整体或局部运动，这样产生的电动势称为动生电动势；第二是回路不动，但磁场随时间变化，这样引起的电动势称为感生电动势；第三是前两种情况同时出现，因而出现的电动势也为两者叠加. 在电磁学中已证明，动生电动势来源于磁场对运动电荷的作用力，因此动生电动势的物理原因是清楚的，它并没提供新的物理机制. 感生电动势中的非静电力是什么机制产生的呢?在此以前的一切电磁学知识都不能说明它的原因，所以感生电动势的出现暗示着存在一种新的物理机制.

我们的目的是要从特殊规律找到电磁现象的普遍规律，因此对暗含着新的物理机制的感

生电动势应特别注意分析. 既然这个回路线圈没有运动，可是回路中却出现了感应电动势，表明回路中的电子受到了一种作用力. 这种力当然不是电荷引起的库仑力，也不是磁场对运动电荷施加的洛伦兹力. 这时唯一的物理起因是回路中出现了变化磁场，所以这种力是由变化磁场引起的. 在讨论库仑定律时曾引入电场概念，电场就是能对电荷产生作用力的一种物理场. 静电场是由静止电荷分布引起的. 现在看到变化的磁场也能对电荷产生作用力，因此可以把这种力场也称为电场. 这种电场由变化磁场引起，它和静电场有本质差别，但就对电荷产生作用力这一点来看，它们之间又没有区别. 由于现在有了两种电场，因此在表达它们的符号上需要暂时加以区别. 将来建立普遍规律后，可以不再加以区别.

现在研究变化磁场引起的电场所满足的方程式. 用 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{b}}$ 表示变化磁场引起的电场，可简称感应电场. 按电动势的定义，它等于非静电力使单位正电荷沿闭合回路移动一周所做的功. 因此有

$$\mathscr{E} = \oint_{S} \boldsymbol{E}_{\mathrm{b}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

再按穿过闭合回路磁通量的定义

$$\Phi = \int_{L} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

代入法拉第定律得

$$\oint_{L} \boldsymbol{E}_{\mathrm{b}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

这时回路不动，即 L，S 固定不变，上式右端对时间的微商可移入积分号内. 而磁场 $\boldsymbol{B}$ 一般还是坐标的函数，故对时间的微商应改为偏微商，于是有

$$\oint_{L} \boldsymbol{E}_{\mathrm{b}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_{S} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{3.3}$$

上式的积分已与具体回路的性质无关，可以假定上式在变化磁场的空间中，对任意一个闭合曲线都成立. 这意味着在变化磁场的空间中各点都会出现感应电场，具体的导体回路只是显示感应电场存在的一种方式而已.

利用斯托克斯公式

$$\oint_{L} \boldsymbol{E}_{\mathrm{b}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{S} (\nabla \times \boldsymbol{E}_{\mathrm{b}}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

可将(3.3)式写成

$$\int_{S} (\nabla \times \boldsymbol{E}_{\mathrm{b}}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\int_{S} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

上式对任意区域都成立，故得

$$\nabla \times \boldsymbol{E}_{\mathrm{b}} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{3.4}$$

(3.3)和(3.4)式给出了感应电场旋度的积分形式和微分形式方程，它的实验基础是法拉第定律. 从场论中知道，要确定一个矢量场还必须知道它的散度方程. 实验上没有直接给出关于 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{b}}$ 的散度性质. 麦克斯韦(Maxwell)从理论上假定

$$\oint_{S} \boldsymbol{E}_{\mathrm{b}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{3.5}$$

这个假定的正确性由理论与实验对比来证明. 大量事实表明，这个假定是正确的. 再利用散度

定理，有

$$\oint_S \boldsymbol{E}_b \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{E}_b dV = 0$$

由于上式对任意体积均成立，故得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}_b = 0 \tag{3.6}$$

由(3.4)和(3.6)式看出，感应电场是有旋无源场，而静电场是无旋有源场. 这两种电场性质有本质差别. 用 $\boldsymbol{E}_e$ 表示静电场，可将这两种电场的方程对比如下：

(1)静电场

$$\begin{aligned} &\oint_S \boldsymbol{E}_e \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV, && \nabla \cdot \boldsymbol{E}_e = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ &\oint_L \boldsymbol{E}_e \cdot d\boldsymbol{l} = 0, && \nabla \times \boldsymbol{E}_e = 0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

(2)感应电场

$$\begin{aligned} &\oint_S \boldsymbol{E}_b \cdot d\boldsymbol{S} = 0, && \nabla \cdot \boldsymbol{E}_b = 0 \\ &\oint_L \boldsymbol{E}_b \cdot d\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{S}, && \nabla \times \boldsymbol{E}_b = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \end{aligned} \tag{3.8}$$

在普遍情况下，这两种电场都存在，这时总的电场满足什么方程呢？在下一节将讨论这个问题.

§4 真空中电磁现象的基本方程

前面简述了从一些特殊情况下总结出来的实验定律，并对它们的形式进行了改造. 这些定律只能描述局部范围内的电磁现象. 现在我们要把这些特殊规律，经过分析推广，建立描述电磁现象的基本方程，即找出电磁运动的普遍规律.

我们知道事物的特殊性和普遍性有着密切关系，普遍性存在于特殊性之中. 特殊规律往往是普遍规律某一侧面的反映. 科学研究的任务就在于从这些侧面去发现各方面的普遍联系. 从特殊到一般是认识过程的一次飞跃. 需要运用思维手段对特殊情况下获得的规律加以改造，就可能得到普遍情况下的运动规律.

根据电磁现象的特点，它的基本方程应包括三个方面：首先是电荷自身的运动规律；其次是电磁场的运动变化规律；再就是电磁场对电荷的作用规律. 这三方面分别由电荷守恒定律，麦克斯韦方程和洛伦兹力公式来表达，它们构成了电磁理论的基础.

1. 电荷守恒定律

无论在宏观电磁现象中或是在微观电磁过程中，实验发现电荷都是守恒的. 在宏观领域中，电荷可以运动但不能产生或消失. 在微观粒子物理中，粒子之间可以转化，但总电荷数也是守恒的. 在宏观电荷运动的空间中取任一封闭曲面，由电流密度的定义可知，单位时间内流出封闭曲面的电量为

$$\oint_S \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{S}$$

电荷守恒定律要求，单位时间内流出 S 面的电量必须等于在 S 面内的体积中单位时间内减少

的电量. 设区域 V 内电荷密度为 ρ，则电荷守恒定律可表示为

$$\oint_S \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho \mathrm{d}V \tag{4.1}$$

利用散度定理可得

$$\oint_S \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \nabla\cdot \boldsymbol{J}\mathrm{d}V = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho \mathrm{d}V = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\mathrm{d}V$$

由于 V 是任意的，故得

$$\nabla\cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{4.2}$$

(4.1)式是电荷守恒定律的积分形式，(4.2)式是电荷守恒定律的微分形式.

2. 麦克斯韦方程组

由前几节介绍的实验定律可获得在一些特殊情况下的场方程：静电场方程

$$\oint_S \boldsymbol{E}_{\mathrm{e}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \mathrm{d}V, \qquad \nabla\cdot \boldsymbol{E}_{\mathrm{e}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{4.3}$$

$$\oint_L \boldsymbol{E}_{\mathrm{e}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0, \qquad \nabla\times \boldsymbol{E}_{\mathrm{e}} = 0 \tag{4.4}$$

稳定电流磁场方程

$$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0, \qquad \nabla\cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{4.5}$$

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0\int_S \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}, \qquad \nabla\times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} \tag{4.6}$$

感应电场方程

$$\oint \boldsymbol{E}_{\mathrm{b}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0, \qquad \nabla\cdot \boldsymbol{E}_{\mathrm{b}} = 0 \tag{4.7}$$

$$\oint_L \boldsymbol{E}_{\mathrm{b}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}, \qquad \nabla\times \boldsymbol{E}_{\mathrm{b}} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{4.8}$$

静电场与稳定磁场方程只适用于不随时间变化的情况，感应电场方程虽可用于随时间变化情况，但原始的电磁感应定律是在随时间缓慢变化情况下得到的. 为了得到普遍情况下的电磁场方程，必须对上述方程进行分析推广. 普遍情况下应包含电荷产生的电场与变化磁场产生的电场，并且随时间变化的快慢没有限制. 为此目的需要运用假设这一思维形式. 假设这种思维形式在发展自然科学理论中有重要的作用. 恩格斯曾说过："只要自然科学在思维着，它的发展形式就是假说."在推广过程中，如果作出的假定不与已有实验定律矛盾，就认为这个假定在逻辑上是合理的. 这些假定能否正确反映客观规律，成为真正的科学理论，最终完全由大量的实践检验来确认.

首先来推广只与电场有关的方程. 在适用于普遍情况下的场方程中，不再区分电荷产生的电场或是变化磁场产生的电场，用 $\boldsymbol{E}$ 表示总的电场. 令 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_e+\boldsymbol{E}_b$，由(4.3)、(4.7)看出，如果假定它们在普遍情况下都成立，则可得

$$\nabla\cdot \boldsymbol{E} = \nabla\cdot(\boldsymbol{E}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{E}_{\mathrm{b}}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{4.9}$$

这种假定和已有事实不矛盾，因而逻辑上是允许的. 关于 $\boldsymbol{E}$ 的旋度方程推广的问题涉及到磁场，所以放在推广磁场有关的方程以后再讨论.

我们来分析一下能否将(4.6)式直接推广在普遍情况. 不妨先假定它在变化情况也成立，这样就会得到

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$$

由电荷守恒定律(4.2)，在变化情况下

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$$

这说明直接推广(4.6)式到普遍情况与电荷守恒定律矛盾. 当然我们应该承认电荷守恒定律的普遍性，必须另找出路.

怎么办？麦克斯韦分析了不能直接推广的原因. 从理论上看，上述假定意味着只有电流才能产生磁场. 认真分析某些实验现象就会看到，这种假定与事实不符. 以一个平行板电容器的放电过程为例，在电容器两极板间并没有传导电流，可是周围空间也存在磁场，并且磁场的性质与稳定传导电流磁场的性质相同，都是旋涡场. 显然，一个闭合的电流回路和一个接有电容器的放电回路，在物理上是不同的，然而都能产生旋涡性的磁场. 这启示我们，在电容器空间中也有某种物理作用，在产生磁场方面与传导电流的作用相同. 因此必须打破只有传导电流才能产生磁场的观念. 在放电过程中，电容器极板间存在变化的电场，应该假定变化的电场也能产生磁场. 从理论上看这一假定是很自然的，变化的磁场既然可以产生电场，从对称性考虑，变化的电场也应该产生磁场.

按照变化的电场也能产生磁场这一假定来推广(4.6)式. 假定它在普遍情况下的形式为

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} + \alpha \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{4.10}$$

式中 α 是待定的常数，可以根据不与其它方程矛盾的要求来确定它. 由上式有

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \boldsymbol{J} + \alpha \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$$

根据电荷守恒定律

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

和方程

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

可定出

$$\alpha = \varepsilon_0 \mu_0 \tag{4.11}$$

于是得到推广后的(4.6)式为

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{B} &= \mu_0 \boldsymbol{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \\ &= \mu_0 \left[\boldsymbol{J} + \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \boldsymbol{E}) \right] \end{aligned} \tag{4.12}$$

上式中括号内的第二项在产生磁场方面与传导电流有相同的作用，历史上称为位移电流.

$$\boldsymbol{J}_{位} = \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \boldsymbol{E}) \tag{4.13}$$

在真空中位移电流只是一个形式的名称，并不表示电荷的运动. 把它称为电流，只是由于它和传导电流在产生磁场方面有相同的作用. 在电流前加“位移”两字，与以太观念有关. 当时人们认为电磁场是以太的一种形变，电场变化就相当于以太媒质发生位移，故把这种作用称为位移

电流. 引入位移电流是麦克斯韦对电磁理论发展的一个重要贡献.

还有一点应该指出,引入位移电流后,磁场就有两种来源,电流产生的磁场和变化电场产生的磁场. 在普遍情况下这两种磁场同时出现,(4.12)式中的 $\boldsymbol{B}$ 已是总的磁场. 因此对于其它包含磁场的方程如(4.5)和(4.8)式推广到普遍情况时,其中的磁场 $\boldsymbol{B}$ 当然也应理解为总的磁场. 稳定电流产生的磁场是旋涡场,其散度为零. 变化电场产生的磁场按照麦克斯韦的假定也是旋涡场,因而散度仍为零. 这样就可把(4.5)、(4.8)式直接推广到普遍情况,即

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{4.14}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{4.15}$$

这两个方程显然不会与(4.9)、(4.12)两个方程矛盾,因为场量的散度和旋度是决定场量的独立方程,不能互相代替. 也就是给定了旋度方程后,还可独立给出散度方程. 现在需要再审查一下(4.14)与(4.15)两方程之间会不会有矛盾. 由(4.15)式可得

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

由此有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = f(x,y,z)$$

这表明(4.15)式允许 $\boldsymbol{B}$ 的散度等于与时间无关的任意函数. 设 $t=0$ 时,没有磁场或只有稳定磁场,就可定出 $f(x,y,z)=0$. 由此可得出结论,(4.14)、(4.15)两方程是一致的.

综合上述结果,我们得到了在普遍情况下真空中的电磁场运动方程,也称为麦克斯韦方程组. 它的微分形式为

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \qquad \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ &\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \qquad \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \end{aligned} \tag{4.16}$$

积分形式为

$$\begin{aligned} &\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \mathrm{d}V, \qquad \oint_L \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0, \qquad \oint_L \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 \int_S \left[\boldsymbol{J} + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \boldsymbol{E})\right] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \end{aligned} \tag{4.17}$$

麦克斯韦方程组是从特殊情况下的一些实验定律推广而得到的,其中最重要的推广是假定存在位移电流,即变化电场能产生磁场,并且这种磁场是旋涡场. 另一个重要假定是认为变化磁场产生的电场是旋涡场. 这里得到的麦克斯韦方程组在当初建立时,看成是逻辑上允许的一种假设,后来用它计算普遍情况下的电磁场问题,不仅已有的事实都可由它解释,而且它的解中还预言了许多新的物理现象,例如电磁波,这些现象都被实验证实. 它建立后的一百多年来,人们用它解决了许多实际问题,理论预言都和实验一致. 因此可以认为麦克斯韦方程组是电磁场的最普遍运动方程.

3. 洛伦兹(Lorentz)力公式

麦克斯韦方程组解决了如何从电荷电流分布计算电磁场的问题. 实践中还需要解决电荷电流受电磁场的作用力问题. 库仑定律给出了在静止情况下电荷受电场作用力的公式,安培定律给出了稳定电流受磁场的作用力公式. 现在把这两个特殊情况下的作用力公式推广到普遍情况. 设一带电体有连续电荷分布,体电荷密度为 ρ,在静电场 $\boldsymbol{E}$ 中单位体积的静止电荷上受

到的力为

$$f_e = \rho E$$

若带电体等速运动，其速度为 v，则在空间形成电流密度 $J=\rho v$，在稳定磁场中，单位体积的电流元上受到的力为

$$f_m = J \times B = \rho v \times B$$

综合以上公式，将其推广到普遍情况. 假定不论带电体的运动状态如何，任何电磁场作用在带电体单位体积上的力为

$$f = \rho E + J \times B = \rho(E + v \times B) \tag{4.18}$$

上式称为洛伦兹力公式. 第一项是电场的力，第二项是磁场的力. E 和 B 是运动电荷所在处的总的电场和磁场，对电荷连续分布的带电体，总的电磁场中包括带电体自身的电磁场. 对点电荷，洛伦兹力公式为

$$F = q(E + v \times B) \tag{4.19}$$

这时的 E，B 不包括点电荷自身的场. 洛伦兹力公式已被大量实验事实证明是正确的.

§5 介质中电磁现象的基本方程

在宏观电磁现象中常遇到有介质存在的情况. 介质是各种各样物质的简称. 为了建立介质中电磁现象的基本方程，可以不管介质的具体结构，主要分析介质在电磁场中所表现出来的电磁性质. 根据能否导电将介质分为两类，导电的介质称为导体，不导电的介质称为绝缘体. 从微观看，不论介质结构如何，它们都是由原子构成的，原子又由原子核和电子组成. 因此可以简单认为介质是由带正负电荷的粒子组成. 如果正负电荷数量相等，则为中性介质. 在绝缘体中电荷不能自由移动，只能束缚在原有位置附近，称为束缚电荷. 在导体中一部分电荷可以自由移动，称为自由电荷，其余的电荷还是束缚电荷.

在电磁场中自由电荷运动形成宏观的传导电流. 真空情况下的电磁场方程已经反映了自由电荷和传导电流对电磁场的贡献. 因此建立介质中电磁场方程的问题，实质上是研究在各种情况下，束缚电荷对电磁场的贡献.

为此采用一简单模型. 把正负电荷束缚在一起的最小单位简称为分子. 这里的分子概念是最小单元的意思，可包括原子，一般意义下的分子等. 在电性质方面分子是中性的，它内部的电荷不停地运动. 无外场时，有的分子平均看来正负电中心是重合的，称为无极分子；有的则不重合，称为有极分子. 例如二氧化碳分子就是无极分子，水分子就是有极分子. 有极分子具有固有的电偶极矩，无外场时，分子混乱排列，宏观上不显电偶极矩. 加上外电场时，无极分子的正负电中心要分离，有极分子要沿外场定向排列，于是介质中出现宏观的电偶极矩. 这种现象称为介质的极化. 用宏观上显示出的单位体积内的电偶极矩表达介质极化的程度，称为极化强度 P，它的定义为

$$P = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_i p_i}{\Delta V} \tag{5.1}$$

极化强度一般是时空坐标的函数.

另一方面，束缚电荷虽然不能在介质内移动，但在介质的分子内部，电荷却不停地运动，例

如电子绕原子核运动. 可以一般地认为，分子内的负电荷绕正电荷做轨道运动，这种运动形成的电流叫分子电流. 每个分子电流和一个磁偶极子等效，磁偶极子的磁矩 m 与分子电流强度 i 的关系为 $m=iS$，S 是分子电流的轨道面积. 无外磁场时，由于热运动分子混乱排列，不出现宏观磁矩. 加上外磁场后，分子磁矩定向排列，出现宏观磁矩，这种现象称为介质的磁化. 用单位体积磁矩来表达介质磁化的程度，称为磁化强度，它的定义是

$$M=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\sum_i m_i}{\Delta V} \tag{5.2}$$

磁化强度一般是时空坐标的函数.

在极化和磁化前，由于分子混乱运动，介质内不出现宏观的束缚电荷和分子电流. 极化和磁化后，在宏观上就会出现束缚电荷和分子电流. 但这些束缚电荷和分子电流不能从宏观上直接测量. 为研究它们对电磁场的贡献，首先应将它们用宏观可测量表示出来. 极化强度 P 和磁化强度 M 可从实验上测量. 下面就来讨论束缚电荷、分子电流与极化强度、磁化强度的关系. 在讨论中假定介质是静止的，这样就不涉及由于介质运动而出现的附加分子电流.

1. 束缚电荷密度与极化强度的关系

无极分子与有极分子的极化机制不同，无极分子在外场作用下正负电中心分离，称为位移极化. 有极分子在场作用下定向排列，称为取向极化. 无论哪种机制，宏观效果是一样的，都出现宏观的束缚电荷分布. 在极化介质内部任取一个闭合曲面 S，如图 2.13 所示，极化以后，原先处于 S 面内的那些分子，一部分电荷穿出 S 面，原先处于 S 面外的一些分子，一部分电荷进入 S 面. 在一般情况下穿出和进入的电荷并不相等，于是在 S 面内就出现不为零的束缚电荷. 显然，因为分子是中性的，故只有与 S 面相交的那些分子，才对 S 面内的束缚电荷有贡献. 在 S 面上取一小面元 $\mathrm{d}S$，在 $\mathrm{d}S$ 附近的极化可认为是均匀的，并认为每个分子对极化强度的贡献相同. 以 $\mathrm{d}S$ 为中间截面，以平均偶极长度 l 为斜高作如图的圆柱体，则中心处于圆柱体内的偶极子都同 $\mathrm{d}S$ 面相交. 设单位体积分子数为 N，分子中正负电荷的绝对值都为 e，则落入 $\mathrm{d}S$ 内侧的束缚电荷数为

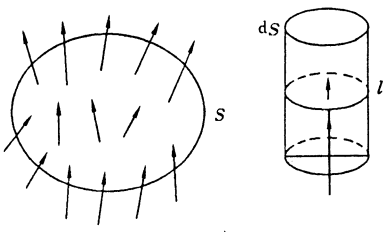


图 2.13

$$\mathrm{d}q_{\mathrm{p}}=-Nel\cdot\mathrm{d}S=-\boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

式中负号表示当偶极矩方向和 $\mathrm{d}S$ 外法线方向的夹角为锐角时，落入 $\mathrm{d}S$ 内侧的电荷正好是负的. 对 S 面积分则得到在 S 面内总的束缚电荷

$$q_{\mathrm{p}}=-\oint_S \boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

当束缚电荷为连续分布时，设体束缚电荷密度为 ρ_p，则有

$$q_{\mathrm{p}}=\int_V \rho_{\mathrm{p}}\mathrm{d}V=-\oint_S \boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{P}\ \mathrm{d}V$$

由于 S 面是任意的，于是得束缚电荷密度与极化强度的关系为

$$\rho_{\mathrm{p}}=-\nabla\cdot\boldsymbol{P} \tag{5.3}$$

如果介质均匀极化，P 是常数，则介质内的体束缚电荷密度为零，束缚电荷只能分布在表面.

2. 分子电流密度与磁化强度的关系

分子电流由两种原因引起，一是由磁化所引起的磁化电流，另是由变化电场引起的极化电

流. 先看磁化引起的磁化电流，在介质中任取一闭合曲线 L，以 L 为周界作任一曲面 S(图 2.14). 当没有外磁场时，分子混乱排列，因而各分子电流穿过 S 面的方式也是任意的，结果互相抵消不出现穿过 S 面的定向电流. 磁化以后分子磁矩定向排列，被周界 L 穿过的那些分子电流，只和 S 面相交一次，因而对 S 面贡献定向电流，其它分子电流和 S 面相交两次，正负抵消，不对 S 面贡献定向电流. 在周界线 L 上取线元 $\mathrm{d}l$，在 $\mathrm{d}l$ 附近，磁化可认为是均匀的，设每个分子对磁化强度的贡献相同. 计算被 $\mathrm{d}l$ 穿过的分子电流数，以其中心在 L 上的分子电流圈的面积 S 为底，以 $\mathrm{d}l$ 为斜高作圆柱体. 凡是中心在圆柱体内的分子电流都将被 $\mathrm{d}l$ 穿过. 设每个分子电流的强度为 i，单位体积分子数为 N，则由 $\mathrm{d}l$ 穿过的分子电流对 S 面的磁化电流强度的贡献为

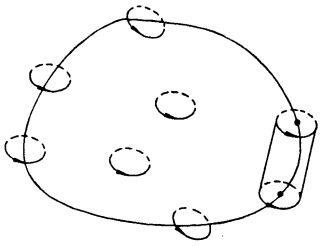


图 2.14

$$\mathrm{d}I_{\mathrm{m}} = iNS \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = N\boldsymbol{m} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{M} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

式中 $\boldsymbol{m}=i\boldsymbol{S}$ 是一个分子的磁矩，$\boldsymbol{M}=N\boldsymbol{m}$ 是磁化强度，穿过以 L 为周界的 S 面的总磁化电流为

$$I_{\mathrm{m}} = \oint_L \boldsymbol{M} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{5.4}$$

磁化电流是连续分布的，设磁化电流密度为 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}$，有

$$I_{\mathrm{m}} = \int_S \boldsymbol{J}_{\mathrm{m}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_L \boldsymbol{M} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{M}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

由于闭合曲线 L 是任意取的，故可得磁化电流密度为

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}} = \nabla \times \boldsymbol{M} \tag{5.5}$$

再看变化电场引起的分子电流，以无极分子介质为例. 对于无极分子，因分子电偶极矩与外加电场成正比，$\boldsymbol{p}=e\boldsymbol{l}$，当电场变化时，分子电偶极矩 $\boldsymbol{p}$ 也随着变化，正负电荷相对运动形成电流，这种电流与极化强度的变化有关，故称极化电流. 设单位体积分子数为 N，由于外电场变化引起分子偶极长度 $\boldsymbol{l}$ 变化而出现的极化电流密度为

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{p}} = \rho_{\mathrm{p}}\boldsymbol{v} = Ne\frac{\partial \boldsymbol{l}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} \tag{5.6}$$

对于有极分子介质，因分子电矩定向排列与外加电场有关，当电场变化时，同样出现极化电流，上式仍然适用.

3. 介质中的电磁场方程

介质存在时和真空相比，从电磁性质来看多了一些束缚电荷和分子电流，它们也会对电磁场产生贡献. 就产生场的作用来看，束缚电荷分子电流与自由电荷传导电流没有差别. 所以介质中的场方程只需要用总的电荷电流代替原先的自由电荷与传导电流就可得到，即

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho + \rho_{\mathrm{p}})$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0\left[\boldsymbol{J} + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0\boldsymbol{E}) + \boldsymbol{J}_{\mathrm{p}} + \boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}\right]$$

将 ρ_p，$\boldsymbol{J}_m$，$\boldsymbol{J}_p$ 的表达式代入上面各方程得到

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}) = \rho$$

$$\nabla \times \left(\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M} \right) = \boldsymbol{J} + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P})$$

定义两个新的物理量

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}) \tag{5.7}$$

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{M} \tag{5.8}$$

则介质中的麦克斯韦方程组变为

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{D} &= \rho, \qquad \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} &= 0, \qquad \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \end{aligned} \tag{5.9}$$

对应的积分形式的方程为

$$\begin{aligned} \oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \int_V \rho \mathrm{d}V, \qquad \oint_L \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ \oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= 0, \qquad \oint_L \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \left(\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \end{aligned} \tag{5.10}$$

这里引入的 $\boldsymbol{D}$ 称为电位移矢量，$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ 称为介质中的位移电流，$\boldsymbol{H}$ 称为磁场强度. $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 都是由两个基本的电磁量合成，因此它们自身只是辅助量而不是基本量. 引入 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 以后，可使介质中电场方程形式简化，这时在场方程中只出现自由电荷和传导电流. 在实际问题中，它们往往是预先作为已知量给出，这给计算带来很大方便.

4. 介质的电磁性质方程

到此为止，我们只是原则上得到了介质中的电磁场方程，但要具体地计算介质中的电磁场问题，只利用方程组(5.9)是不够的，未知量比方程的个数更多. 未知数 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{D},\boldsymbol{B},\boldsymbol{H}$ 共十二个分量，但独立方程数只有六个. 实际上介质中的 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 是密切相关的，因而 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 有关系，同样 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 有关，从而 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 也有关. 建立这些量之间的关系后才能求解介质中的场方程. 在宏观电磁场现象中这些关系由实验确定. 这些关系式与介质是否均匀、是否各向同性有关，也与电磁场的强弱、变化快慢有关，情况比较复杂. 我们先讨论各向同性介质和电磁场不十分强的简单情况. 实验发现 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 成正比，即

$$\boldsymbol{P} = \chi_p \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$$

χ_p 称为极化率，代入(5.7)式得

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon_0(1 + \chi_p)\boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \varepsilon^* \boldsymbol{E} = \varepsilon \boldsymbol{E} \tag{5.11}$$

ε 称为介电常数，$\varepsilon^* = 1 + \chi_p$ 称为相对介电常数. 同样有

$$\boldsymbol{M} = \chi_m \boldsymbol{H}$$

χ_m 称为磁化率，代入(5.8)式得

$$\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) = \mu_0(1 + \chi_m)\boldsymbol{H} = \mu_0 \mu^* \boldsymbol{H} = \mu \boldsymbol{H} \tag{5.12}$$

式中 μ 是介质的磁导率，$\mu^* = 1 + \chi_m$ 是相对磁导率. 介电常数和磁导率都由实验测定.

在各向同性导体中，当电场不很强时，实验发现 $\boldsymbol{J}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 成正比，即

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{5.13}$$

σ 称为电导率. 当存在非电场起因的外电动势时，如化学电动势、温差电动势，这时的外电动势可用一个等效的外力场 $E_{外}$ 来表示. (5.13)式应改为

$$\boldsymbol{J}=\sigma(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_{外}) \tag{5.14}$$

(5.11)、(5.12)和(5.14)式表示出了介质的电磁性质，称为介质的电磁性质方程. 考虑了介质电磁性质方程后，未知数只是 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$，麦克斯韦方程组中的方程数与未知函数的数目相等，联立求解电磁场方程，则可唯一确定介质中的电磁场分布.

应该注意，以上各式的电磁性质方程只适用于各向同性介质，并且场强不太强. 对于各向异性介质，$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的方向不同，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的方向也不同. 这时的电磁性质方程要复杂得多. 当场强不太强时，$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 各分量仍是线性关系，一般形式是

$$\begin{aligned} D_1&=\varepsilon_{11}E_1+\varepsilon_{12}E_2+\varepsilon_{13}E_3\\ D_2&=\varepsilon_{21}E_1+\varepsilon_{22}E_2+\varepsilon_{23}E_3\\ D_3&=\varepsilon_{31}E_1+\varepsilon_{32}E_2+\varepsilon_{33}E_3 \end{aligned} \tag{5.15}$$

或改写为

$$\boldsymbol{D}=\overleftrightarrow{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{E} \tag{5.16}$$

$\overleftrightarrow{\varepsilon}$ 称为介电常数张量，可表为

$$\overleftrightarrow{\varepsilon}=\varepsilon_{11}\boldsymbol{ii}+\varepsilon_{12}\boldsymbol{ij}+\cdots+\varepsilon_{32}\boldsymbol{kj}+\varepsilon_{33}\boldsymbol{kk} \tag{5.17}$$

对各向异性磁介质有

$$\boldsymbol{B}=\overleftrightarrow{\mu}\cdot\boldsymbol{H} \tag{5.18}$$

$\overleftrightarrow{\mu}$ 称为磁导率张量.

当电场强度很强时，例如在现代激光束中的电场强度可高达 $10^9\mathrm{V/m}$. 这时 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 分量就不再是线性关系，将和 $\boldsymbol{E}$ 的二次项甚至三次项有关. 这时的介质称为非线性介质，这种介质的电磁性质方程更复杂了.

此外，当外加电磁场的频率很高时，电磁性质方程还和频率有关，即介电常数、磁导率都是频率的函数，这种介质称为色散介质.

总之，物质的电磁性质是很复杂的，对它们的深入研究已形成了专门的学科.

§6 介质分界面上的电磁场方程——边界条件

在前面讨论电磁场方程时已指出，微分形式的麦克斯韦方程组，只适用于电荷电流连续分布的区域. 在实际问题中常常遇到两种介质的交界面，在交界面上电磁参量如 ε,μ,σ 等发生突变，电荷、电流分布一般不连续，场量 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{D},\boldsymbol{B},\boldsymbol{H}$ 等也发生突变. 在界面上各点场量的微商不存在，因而微分形式的场方程失去了意义. 因此需要研究适用于界面上的场方程，通常简称为边界条件，在数学上也称为连接条件.

积分形式的场方程，并不涉及场量对空间坐标的微商，在包括界面的区域内仍然适用. 下面就从积分形式的场方程出发来推导边界条件. 边界条件实质上就是积分形式的场方程在界面上的具体化.

1. $\boldsymbol{D},\boldsymbol{B}$ 的边界条件

如图 2.15 所示，通过边界面作一圆柱体，上下底 S_1 和 S_2 都是无限小量，可以认为在 S_1，S_2 面上各点的场量相同，圆柱高为 h. 把积分形式方程

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_V \rho \mathrm{d}V$$

应用到圆柱体上. 注意到圆柱体是无限小的，可将积分写为

$$\boldsymbol{D}_1\cdot \boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{D}_2\cdot \boldsymbol{S}_2+\boldsymbol{D}lh=\rho Sh$$

式中 $\boldsymbol{D}$ 表示圆柱侧面电位移矢量的平均值，l 是 S 面的周长，按图中符号可得

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)S+\boldsymbol{D}lh=\rho hS$$

$\boldsymbol{n}$ 规定为由介质 1 指向介质 2 的界面法线方向.

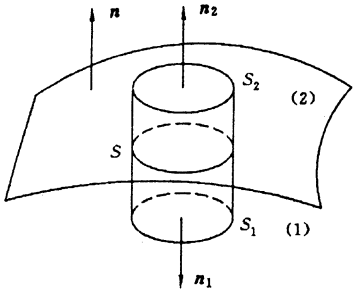


图 2.15

如果界面上分布有面电荷，按面电荷密度的定义

$$\sigma=\lim_{\substack{\rho\to\infty\\ h\to 0}}\rho h$$

因此当 $h\to 0$ 时，上式第二项可以略去，于是得到

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)=\sigma \tag{6.1}$$

如果界面上没有面电荷，则

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)=0 \tag{6.2}$$

(6.1)、(6.2)就是电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 的边界条件. 当界面上没有面电荷时，电位移矢量的法线分量是连续的.

同理，对场方程

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$$

重复上面的讨论可得

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)=0 \tag{6.3}$$

即磁感强度 $\boldsymbol{B}$ 的法线分量在分界面上永远是连续的.

2. $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ 的边界条件

如图 2.16 所示，通过界面在两侧作闭合曲线，其长为 l，其宽为 h，l，h 均为无限小量. $\boldsymbol{n}$ 为界面法线方向，仍规定为从介质 1 指向介质 2. t 为沿 l 的切线方向，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{n}\times t$ 为闭曲线所围面积的法线方向. 把场方程

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int\left(\boldsymbol{J}+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

应用到闭合曲线上，注意到每一段都是无限小量，可得

$$\boldsymbol{H}_1\cdot \boldsymbol{l}_1+\boldsymbol{H}_2\cdot \boldsymbol{l}_2+2\boldsymbol{H}h=\left(\boldsymbol{J}+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\cdot hl\boldsymbol{b} \tag{6.4}$$

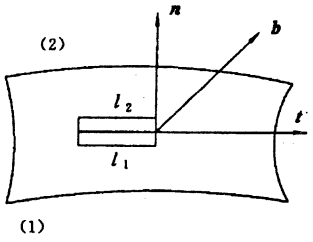


图 2.16

式中 $\boldsymbol{H}$ 表示曲线两端磁场强度的平均值.

考虑界面上有面电流的情况. 面电流也是一个理想概念，它认为电流只在一个几何面上流动，实际情况当然不是这样. 当电流只在其厚度可忽略不计的一薄层内流动时就可看成是面电流. 面电流的特性由电流密度 $\boldsymbol{a}$ 表示. 它的定义为

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\substack{J\to\infty\\ h\to 0}}\boldsymbol{J}h \tag{6.5}$$

h 是薄层的厚度，$\boldsymbol{J}$ 是薄层内的体电流密度. 面电流密度的物理意义是：它代表在界面上沿电流方向在单位时间内流过单位横截线的电量. 利用(6.5)式，当矩形曲线的宽 $h\to 0$ 时，得

$$t \cdot (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$$

注意到$t=b\times n$，上式可改为

$$(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{n}) \cdot (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) = \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$$

由于曲线回路方向 $\boldsymbol{b}$ 是任意的，上式成立必须有

$$\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) = \boldsymbol{a} \tag{6.6}$$

对于实际导体电导率总是有限的，电流密度 J 不会到无限大，不存在面电流，只有理想导体才出现面电流. 当面电流为零时有

$$\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) = 0 \tag{6.7}$$

(6.6)和(6.7)式是磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 的边界条件，等式左端的方向沿界面的切线，在没有面电流时，磁场强度的切线分量连续.

同理，对于场方程

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

重复上面的讨论可得

$$\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) = 0 \tag{6.8}$$

即在界面上电场强度的切线分量连续.

3. 其它量的边界条件

应用上述方法，不难由

$$\oint \boldsymbol{P} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\int \rho_p \mathrm{d}V$$

$$\oint \boldsymbol{M} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int \boldsymbol{J}_m \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\int \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}V$$

得到

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_1) &= -\sigma_{\mathrm{p}} \\ \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{M}_2 - \boldsymbol{M}_1) &= \boldsymbol{a}_{\mathrm{m}} \\ \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{J}_2 - \boldsymbol{J}_1) &= -\frac{\partial \sigma}{\partial t} \end{aligned} \tag{6.9}$$

这里的 σ_{p} 是分界面上的面束缚电荷密度，$\boldsymbol{a}_{\mathrm{m}}$是面分子电流密度，$\sigma$ 是面自由电荷密度. $\boldsymbol{n}$ 的方向是由介质 1 指向介质 2 的界面法线方向.

由于边界条件实质上是场方程在界面上的具体化，因此它有很广泛的用途，现举例说明如何用边界条件来解决实际问题.

例 1 决定静电场中导体与介质界面上的自由电荷与束缚是电荷分布.

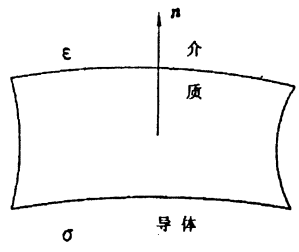


图 2.17

解 将导体作第(1)区域，介质作第(2)区域，利用(6.1)式，并注意到导体内场强为零，则有

$$\sigma = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{D} = \varepsilon E_n$$

再由(6.8)式可知 $E_t=0$，故导体上的自由面电荷密度为

$$\sigma = \varepsilon E$$

由(6.9)式中的

$$\sigma_p = -\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1)$$

可得界面上的束缚电荷密度为

$$\sigma_p = -P_n = (\varepsilon_0-\varepsilon)E$$

例 2 有一均匀磁化介质球，磁化强度为 $\boldsymbol{M}$，计算磁化电流分布.

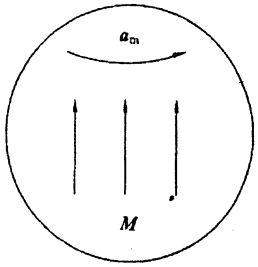


图 2.18

解 由(5.5)式，磁化电流密度 $\boldsymbol{J}_m=\nabla\times\boldsymbol{M}$. 现在是均匀磁化，$\boldsymbol{M}$ 为常数，体磁化电流为零. 再由(6.9)式，磁化电流面密度的一般公式为

$$\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{M}_2-\boldsymbol{M}_1)$$

设 $\boldsymbol{n}$ 为介质球面的法线方向，则 $\boldsymbol{M}_1=\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{M}_2=0$，可得面磁化电流密度

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_m &= -\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{n}\\ &= M\sin\theta\boldsymbol{e}_\psi\end{aligned}$$

§7 电磁场的能量、场能密度和能流密度矢量

上面我们已从实验定律总结出了电磁运动的基本方程，从基本方程可以得出电磁场的各种性质. 首先从场方程来研究电磁场的能量问题. 回顾物理学的发展可以看出，对于一种新的物质运动能量的认识，总是通过它与已知能量形态之间的转化来获得的. 例如对热运动能量的认识，就是通过热运动能量和机械运动能量之间的转化来获得的. 我们对机械运动能量的了解比较清楚，为了认识电磁场的能量，仍从电磁场对带电体的机械作用开始，通过带电体在电磁场作用下机械能的变化去揭示电磁场的能量形式. 关于介质中的场能问题一般是很复杂的，我们只考虑最简单情况，假定介质均匀并且在极化和磁化中没有热耗损，这样介电常数 ε 和磁导率 μ 与时间和空间坐标无关.

设有一带电体在电磁场中运动，其体电荷密度为 ρ，运动速度为 v，在 $\mathrm{d}t$ 时间内电磁场对单位体积带电体做的机械功为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}V} &= \boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\\ &= \rho(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}t\\ &= \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

式中 $\boldsymbol{J}=\rho\boldsymbol{v}$ 为带电体运动形成的电流密度. 在单位时间内电磁场对整个带电体做的机械功为

$$A = \int\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}V$$

为了找出机械功和场能变化的关系，利用场方程将电流密度 $\boldsymbol{J}$ 用场量表示. 由

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$$

可得

$$\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H})-\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$$

而由

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

再利用矢量公式

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{E}) - \boldsymbol{E} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H})$$

并注意到 ε 和 μ 是与时空无关的常数，可得

$$\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H}) - \nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H})$$

对空间区域 V 积分得到

$$\int_V \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E} \mathrm{d}V = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{1}{2}(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H})\mathrm{d}V - \oint_S (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{7.1}$$

为了看出右端两项的物理意义，把积分区域扩大到全部空间. 以后我们将会看到，在普遍情况下，运动电荷产生的电磁场有两部分：一部分是向外传播的电磁波，其场量与距离一次方成反比，由于电磁波以有限速度传播，在有限时间内不可能传播到无限远处，在无穷远的积分界面上这部分场量为零. 另一部分是与场源相联系的，其场量与距离二次方以上成反比，在无穷远界面上的积分仍为零. 因此当积分区域扩大到无穷时(7.1)式变为

$$\int_V \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E} \mathrm{d}V = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{1}{2}(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H})\mathrm{d}V$$

上式左端是电磁场对带电体所做的机械功. 这时整个区域中只有运动的带电体和电磁场，并假定介质没有热损耗. 由能量守恒定律可以推知，上式右端代表电磁场能量的减少，由此可以认为电磁场具有能量，其能量密度为

$$w = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H}) \tag{7.2}$$

现在讨论(7.1)式的意义. 它的左端代表在单位时间内电磁场对区域 V 中带电体所做的机械功. 右端第一项表示区域 V 中电磁场能量的减少，由能量守恒定律，可将第二项的面积分理解为在单位时间内穿过区域界面流出的能量. 于是

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \tag{7.3}$$

表示在单位时间内流过垂直于 S 的单位面积的能量，称为能流密度矢量，也称为坡印廷矢量(Poynting's vector).

坡印廷矢量在电磁理论中具有重要意义，它给出了电磁场中能量的流动情况，清楚地表明电磁能量是由电磁场传输的. 我们以一个由电池供电的导电回路为例来说明电磁能量的传输过程.

一般的导线都有一定的电阻，电流通过导线会产生焦耳热. 热损耗的能量当然是由电池供给的，问题是这些能量是以什么方式传输到导线中去的呢?表面上看，没有导线就不会有电流，也许有人由此认为能量是通过导线中的自由电子传输的. 很容易看出这种想法的错误. 自由电子在导线中的移动速度很慢，例如当电流密度达到 $1\mathrm{A/mm^2}$ 时，在铜中的自由电子平均速度每秒不到 1mm. 实际上能量的传输速度很快，只要电路一接通，导线各处立刻就有电流并同时发生焦耳热损耗. 这说明电磁能量不是通过自由电子移动传输，能量只能由电磁场传输. 电磁能量传输的具体图象可由坡印廷矢量给出. 要严格地给出能量传输图象，必须求出空间各点的电磁场. 这里只给出能量传输的大致情况(见图 2.19). 电路中有三个区域，电源内部、传输线区域、负载区域. 先看传输线附近区域的能流分布. 传输线一般都有一定的电阻，传输线内有电流通过，电导率有限时导线内电场不为零. 由于电场切线分量连续，在导线外侧的电场必然有

与导线平行的分量. 在导线表面有电荷积累，靠近电源正极部分有正电荷，接近电源负极部分有负电荷，因此在导线外侧一定还有电场的法线分量. 导线外侧的磁场沿环绕电流回路的切线方向. 这样导线外侧的能流按公式 $S=E\times H$ 计算，就包含平行于导线的分量和垂直导线表面并指向导体内部的分量，如图 2.20 所示. 垂直流向导体内部那部分能流就供给焦耳热损耗，平行于导线流动的那部分能流就把电源的能量传输到负载上去消耗. 对于理想传输线，导体内电场为零，因而导体外侧也就没有电场的切线分量，能流只沿着平行于导线的方向传送到负载.

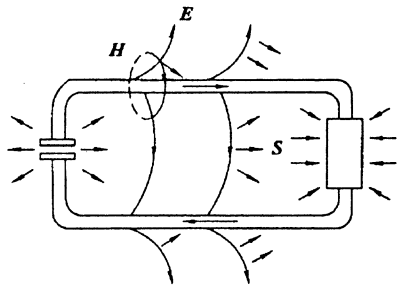


图 2.19

在电源区域，由于非静电的外力场存在，电流和电场 E 的方向相反，而磁场 H 仍沿环绕电流的切线方向，与在传输线部分相同，所以在电源区域的能流方向是由电源指向外部，如图 2.19 所示. 在负载区域，由于电阻很大，电导率很小，要使电流和其它部分相同，作为负载导体内的电场强度就必然很大，因而在导体外侧的电场平行于导线的分量就很大，能流矢量主要是垂直于负载导体的表面而指向导体内部，如图 2.19 所示.

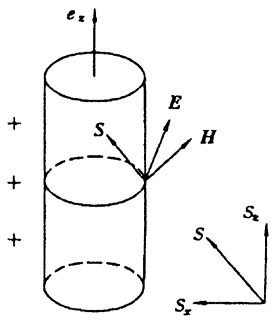


图 2.20

现以传输线部分为例，做定量计算. 令导线的轴为 e_z，导线的半径为 a，电导率为 σ，导线中的电流强度为 I. 由欧姆定律导线柱内电场只有 e_z 方向的分量

$$E_{内}=\frac{J}{\sigma}=\frac{I}{\sigma\pi a^2}e_z$$

由电场切线分量连续的条件，可得导线外侧电场强度为 e_z 分量

$$E_z=\frac{I}{\sigma\pi a^2}$$

设导线表面带有正电荷，电荷面密度为 δ，由边界条件

$$n\cdot(D_2-D_1)=\delta$$

$n=e_r$，D_1 是导体内的电场，D_2 是导体外侧的电场. 由于导体内电场只有 e_z 分量，故得到

$$e_r\cdot D=\varepsilon_0 E_r=\delta$$

这样在导体外侧的总电场强度为

$$\begin{aligned}E&=E_z e_z+E_r e_r\\&=\frac{I}{\sigma\pi a^2}e_z+\frac{\delta}{\varepsilon_0}e_r\end{aligned}$$

为算出导体外侧的能流矢量，还应求出磁场强度 H. 由安培环路定理，导体外侧的磁场强度为

$$H=\frac{I}{2\pi a}e_\psi$$

于是可算得导体柱表面外侧的能流矢量为

$$S=E\times H=\frac{-I^2}{2\pi^2\sigma a^3}e_r+\frac{I\delta}{2\pi\varepsilon_0 a}e_z$$

这清楚表明，一部分能流沿着 e_z 方向，一部分能流向着导体内部. 流向导体内部的能量变为焦

耳热损耗，为确信这点，可计算出单位时间内流入长为 L 一段导体的能量是

$$-\int S\cdot \mathrm{d}S=\frac{I^2}{2\pi^2\sigma a^3}2\pi aL=\frac{I^2}{\sigma\pi a^2}L=I^2R$$

上式中的 R 是长为 L 的导体电阻，在这段导体中单位时间内损耗的焦耳热为

$$\int \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}V=\pi a^2L\frac{I}{\pi a^2}\boldsymbol{e}_z\cdot\frac{I}{\sigma\pi a^2}\boldsymbol{e}_z$$

$$=\frac{I^2}{\sigma\pi a^2}L=I^2R$$

这两者完全相等.

也许有人会想，既然电磁能量是由导线周围的电磁场传输的，那为什么电力工业上还要用导线呢？对稳定电流或低频电流，导线的主要作用是引导电磁场的能量向着预定方向传送. 由于电磁场和导线内电荷的相互作用，使得导线周围产生很强的电磁场，这些电磁场将能量送到负载上去. 对于高频电磁场，不需要导线的引导，也可以在预定的方向上产生很强的电磁场，从而把能量传送到目的地. 例如有人设想在太空中利用太阳能建立宇宙电站，用高频电磁波把电磁能量传送到地面.

关于能流矢量的理解还有一个问题应该指出，这就是在静止场的情况下坡印廷矢量是否还有意义. 所谓静止场，指的是电流为零并且一切量不随时间变化的场. 例如图 2.21 的装置产生的场就是静止场. 在两磁极之间存在垂直向下的均匀磁场，而在圆柱形电容器内存在沿径向的电场. 对于这种情况下能流密度矢量是否适用的问题，存在不同的看法. 有人认为能流密度矢量不适用于静止场情形，理由是将 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ 的解释为能流密度矢量只有当 $\boldsymbol{J}=0$ 才可能. 也有人认为能流密度矢量适用于任何情况，理由是引入能流密度矢量的推导是普遍的，其中未加入什么限制条件.

我们认为后一种看法是正确的，但其理由需要更细致的说明. 的确，由静止情况下的麦克斯韦方程组只能得到

$$\oint(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$$

由这一关系不能从逻辑上把 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ 解释为能流密度，但是也不能从逻辑上否定 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ 可以表示能流密度矢量. 在静止场的情况下，到底 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ 具有什么意义，需要分析更多的事实. 深入分析一些事实后发现，为了保证能量守恒和动量守恒这样一些普遍原理得到满足，必须认为在静止场情况下，$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ 仍然表示能流密度矢量，但这时的 $\boldsymbol{S}$ 形成封闭环流.

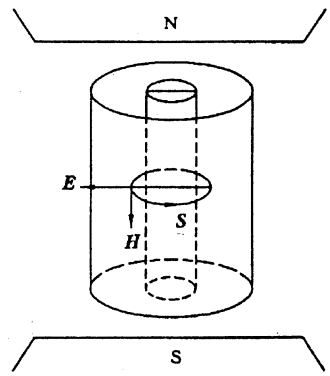


图 2.21

让我们对图 2.21 的装置作些分析. 设图中的圆形柱形电容器可绕柱轴自由旋转，内外筒分别带等量的正负电荷 Q，电容器内存在沿径向的电场，同时还有向下的均匀磁场. 设想用放射线照射柱形电容器空间的气体，使气体电离，电容器放电. 这种放电过程不存在外加的力矩，照理电容器不会旋转. 仔细分析后将会发现，电容器是会旋转的. 因为电场沿径向方向，气体电离后的带电粒子将沿径向运动，由于存在向下的磁场，带电粒子将受到横向的洛伦兹力，从而带电粒子获得沿环形的动量. 当带电粒子到达电容器的极

板时，将动量传递给极板，于是引起电容器绕轴旋转. 从角动量守恒来看，电容器旋转的机械角动量，必然有来源，显然这种来源不是机械外力矩，唯一可能的来源是电磁场的运动. 如果认为 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ 表示静场的能流密度，则在静场中它形成环流，环形能流的存在，意味着这种静场中具有电磁角动量. 电容器放电以后，电场消失，电磁角动量不再存在，按角动量守恒，电磁角动量转化为电容器的机械角动量. 在学习电磁场的动量以后，可对这个问题作出定量计算，将更具体看到机械电容器获得的机械角动量完全等于放电前电磁场的角动量.

由此可见，如果认为能流密度矢量 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ 仍然适用于静止场情况，就可使电磁理论内部清除矛盾，更好理解，更显得协调.

思考题与习题二

1. 库仑定律的适用条件是什么？它能否作为描述静电场的基本规律？

2. 从库仑定律可以推出高斯定理，从高斯定理是否可以推出库仑定律？

3. 从毕奥-萨伐尔定律可以推出安培环路定理，安培环路定理是否能代替毕奥-萨伐尔定律？

4. 从实验定律到麦克斯韦方程组的建立过程中有哪些重要假定？

5. 介质的存在对电磁场方程有何影响？如何表现这些影响？

6. 麦克斯韦方程的积分形式和微分形式有何区别？在介质分界面上的边界条件的实质是什么？

7. 两个导体球带等量异号电荷，用导线连接使之放电，导线上将产生焦耳热. 放电后，电场不再存在，试分析原来弥散于空间的静电能如何转为导线上的焦耳热.

8. 证明：在 $\boldsymbol{J}=0,\rho=0$ 的真空中，电场作如下代换

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\to c\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)\to -\frac{1}{c}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$$

后仍然满足麦克斯方程组.

9. 证明：在均匀介质内部，极化电荷体密度 ρ_p 与自由电荷密度 ρ 的关系为

$$\rho_p=\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}-1\right)\rho$$

10. 证明：在均匀磁介质内部，稳定情况下磁化电流 $\boldsymbol{J}_m$ 与自由电流 $\boldsymbol{J}_f$ 的关系为

$$\boldsymbol{J}_m=\left(\frac{\mu}{\mu_0}-1\right)\boldsymbol{J}_f$$

11. 设均匀导体内部 $t=0$ 时有自由电荷密度 $\rho_0(\boldsymbol{r})$，从场方程与电荷守恒定律、欧姆定律导出导体内电荷密度随时间 t 的变化规律为

$$\rho(\boldsymbol{r},t)=\rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}$$

12. 一个球形电容器，内径为 R_1，外径为 R_2，电容器中充满电导率为 σ，介电常数为 ε 的介质. 设开始时内导体电势为 V_1，外导体接地.

(1)计算电容器内任意时刻的电场与磁场；

(2)计算介质上极化电荷的分布.

13. 证明：当两种绝缘介质的分界面上不带自由电荷时，电场线与界面法线的夹角 θ_1 和 θ_2 满足条件

$$\frac{\tan\theta_2}{\tan\theta_1}=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

14. 证明：当两种导电介质内有稳定电流时，分界面上电场线与界面法线的夹角 θ_1,θ_2 满足条件

$$\frac{\tan\theta_2}{\tan\theta_1}=\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

15. 一均匀磁化的介质圆柱，磁化强度为 $\boldsymbol{M}$，求柱体各部分上的磁化电流分布.

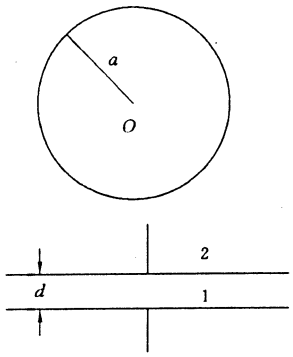
16. 内外半径分别为 r_1 和 r_2 的无穷长中空导体圆柱，沿轴向流有稳定的自由电流 J_f，导体的磁导率为 μ，求柱体上的磁化电流分布情况.

17. 如右图示，两圆板组成平行板电容器，用直长无电阻的导线将交变电压 $V=V_0\cos\omega t$ 接于两平板间. 设 $d\ll a\ll c/\omega$，可略去场的边缘效应，并可看成似稳电磁场. 设两板间为真空.

(1)用麦克斯韦方程求区域 1 中的电场和磁场；

(2)求导线上的电流强度与平板上的面电流密度；

(3)求区域 2 中的磁场，若将电容器极板看成一平面，验证磁场的边界条件.



(习题 2.17)

18. 在上述电容器中，若 d 并不很小，证明在一般情况下电容器内的电场不可能是均匀的轴向电场.

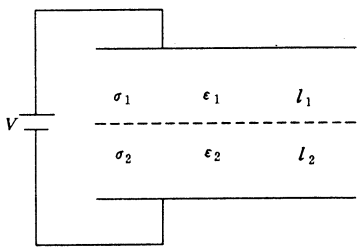
19. 一圆柱形电容器，内导体半径为 a，外导体半径为 b，长为 l，外加电压 $V=V_0\cos\omega t$，设 ω 不大，电场可看成似稳场，计算电容器中位移电流密度及穿过半径 $r(a<r<b)$ 的圆柱形表面的总位移电流，并证明后者等于电容器引线中的传导电流.

20. 同轴传输线内导线半径为 a，外导线半径为 b，两导线间是真空. 导线间电压为 V，导线上电流强度为 I.

(1)忽略导线电阻，计算同轴线空间中的能流和传输功率.

(2)设内导体的电导率为 σ，计算通过内导线表面进入导线内的能流，证明它等于导线的损耗功率.

21. 平行板电容器内是两层均匀介质，厚度分别为 l_1,l_2，介电常数分别为 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$，介质还有一定的导电能力，电导率分别为 σ_1,σ_2，在两板上接电动势为 V 的电池，当电流达到稳定时，求各处自由电荷与束缚电荷的分布.



(习题 2.21)

第三章　静电场

前面得到的电磁运动的普遍规律，还仅是人们对电磁现象认识的第一次飞跃. 为了用这种认识去指导实践，并在实践中检验认识的正确性，还必须以普遍规律为指导，继续深入地对各种具体问题进行研究. 人类的认识总是这样由特殊到一般，再由一般到特殊，循环往复地进行. 从本章开始我们从基本规律出发，深入地研究各种特殊情况下的电磁场性质. 首先研究静电场，接着研究稳定电磁场和似稳电磁场，然后再研究一般的变化电磁场.

静止电荷所产生的场称为静电场. 静电现象早为人们所熟知，但是各种静电的应用技术，例如，利用静电作用对物质进行分离、提纯、分级等的静电分选技术；为防止空气污染和回收有用物质而广泛应用的静电集尘技术，以及静电喷涂、静电植绒、静电复印等等，都是随着近代科学技术的发展而迅速发展起来的，并广泛应用于国民经济的各个部门. 由于生产自动化程度的不断提高，静电危害的防止也日益引起人们的重视. 各种应用都离不开静电场的分析和计算. 本章着重介绍静电场的基本性质和计算静电场的各种基本方法.

§1　静电场的基本方程

对于只有静止电荷，没有电流($\boldsymbol{J}=0$)，所有场量都不随时间变化，并且也不存在永久磁体(即磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 处处为零)的特殊情形，电磁场基本方程可分成两组：

$$\begin{aligned}
&\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho, && \nabla\times\boldsymbol{H}=0\\
&\nabla\times\boldsymbol{E}=0, && \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\\
&\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}, && \boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}\\
&\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=0, && \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=0\\
&\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)=\sigma, && \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)=0
\end{aligned}\qquad(1.1)$$

由于 μ_0 是常数，故 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{H}=0$ 是上面右边部分方程的唯一解. 因此只存在静电场时，上面左边部分方程是它的基本方程.

由上述基本方程可得出静电场的一切性质. 在均匀各向同性介质中，由于介质的存在，在外电场作用下，介质会极化，会出现宏观的束缚电荷. 已知极化强度

$$\boldsymbol{P}=\chi_p\varepsilon_0\boldsymbol{E}=\boldsymbol{D}-\varepsilon_0\boldsymbol{E}$$

束缚电荷密度

$$\rho_p=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}=-\nabla\cdot\boldsymbol{D}+\varepsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}-1\right)\rho\qquad(1.2)$$

在均匀介质内，ρ_p 与 ρ 成正比. 自由电荷为零的地方，束缚电荷也为零，哪里有自由电荷哪里也就有束缚电荷，但束缚电荷密度小于自由电荷密度，符号也相反.

在两种介质的分界处，由 $\nabla\cdot\boldsymbol{P}=-\rho_p$ 可求得

$$P_{1n}-P_{2n}=\sigma_p\qquad(\sigma_p\text{ 为束缚电荷面密度})$$

若介质 2 为真空，则介质表面的束缚电荷面密度

$$\sigma_p = P_n = (\varepsilon^* - 1)\varepsilon_0 E_n \tag{1.3}$$

在静电场中，在静电平衡下导体内部

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} = 0 \qquad (\sigma \text{ 为电导率})$$

因为导体的电导率 $\sigma \neq 0$，故在导体内部电场强度 $\boldsymbol{E}$ 处处为零，因此电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 和极化强度 $\boldsymbol{P}$ 也处处为零，即

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} = 0, \qquad \boldsymbol{P} = (\varepsilon^* - 1)\varepsilon_0 \boldsymbol{E} = 0$$

从而得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho = 0 \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{P} = -\rho_p = 0$$

即导体内部自由电荷密度和束缚电荷密度都为零，电荷只能分布在导体表面.

导体表面附近的电场，可由边界条件

$$E_{2t} - E_{1t} = 0, \qquad D_{2n} - D_{1n} = \sigma$$

得出，若有介质 1 为导体，则 $\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{D}_1 = 0$，导体表面附近

$$E_t = 0, \qquad E_n = \frac{1}{\varepsilon}\sigma \tag{1.4}$$

即电场的切线分量为零，电场处处垂直于导体表面，其大小与导体表面的面电荷密度 σ 成正比，与周围介质的介电常数 ε 成反比.

为了更深入了解静电场的各种性质，必须掌握各种具体问题中静电场的分布，这就需要求解静电场的基本方程，但(1.1)式的场方程是矢量方程，直接求解不方便，应设法将它简化.

因为静电场是无旋场，$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$，故可引入电势 ϕ，它与电场强度之间的关系为

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \phi \tag{1.5}$$

这样引入电势 ϕ，显然满足 $\boldsymbol{E}$ 的旋度处处为零的要求，因为 $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\nabla \times \nabla \phi = 0$，但电势 ϕ 又不是唯一的，可以相差一个任意常数. 规定电场强度 $\boldsymbol{E}$ 为电势 ϕ 的负梯度，取负号是为了与在电磁学中所定义的电势相一致.

利用(1.5)式，也可以反过来用电场强度 $\boldsymbol{E}$ 来表示电势 ϕ. 相距为无限小距离 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的两点之间的电势差为

$$\mathrm{d}\phi = \nabla \phi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.6}$$

它与电场力所做的元功成正比. 相距为有限距离的两点 P 和 Q 之间的电势差为

$$\phi_Q - \phi_P = -\int_P^Q \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.7}$$

上述积分只与端点 P 和 Q 位置有关，而与积分所取的路径无关，P，Q 两点间的电势差等于单位正电荷从 P 点移到 Q 点时电场力所做的功. 当电荷分布在有限区域时，通常选择无穷远点作为电势的参考点，令 $\phi_\infty = 0$，则得

$$\phi_P = \int_P^\infty \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.8}$$

静电场中任一点 P 的电势等于将单位正电荷从 P 点移到无穷远处电场力所做的功. 这是计算静电场中任一点电势的基本公式. 从上述看到，所谓一点上的电势并没有绝对的意义，当我们说某点的电势时，实际上是指该点和参考点之间的电势差. 在电工、无线电技术中常以接地导体作为电势的零点.

下面推导电势 ϕ 所满足的微分方程. 将 $\boldsymbol{E} = -\nabla \phi$ 代入 $\nabla \cdot D = \rho$，并利用 $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$，则得均匀各向同性介质中 ϕ 所满足的微分方程

$$\nabla^2\phi = -\frac{1}{\varepsilon}\rho \tag{1.9}$$

上式称为泊松方程. 在无电荷的区域，电势 ϕ 满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2\phi = 0 \tag{1.10}$$

在两种介质的分界面上，电势 ϕ 满足一定的边界条件. 在分界面两侧作积分

$$\phi_1 - \phi_2 = \int_1^2 \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

1,2 两点分别处于介质 1 和介质 2 内. 将 1,2 两点保持在两种介质内，但使两点间的距离趋于零，若分界面上电场强度 $\boldsymbol{E}$ 有限(不存在电偶层)，则上式积分为零，$\phi_1-\phi_2=0$，即电势连续

$$\phi_1 = \phi_2 \tag{1.11}$$

由边界条件 $\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)=\sigma$ 可得

$$\varepsilon_1\frac{\partial\phi_1}{\partial\boldsymbol{n}} - \varepsilon_2\frac{\partial\phi_2}{\partial\boldsymbol{n}} = \sigma \tag{1.12}$$

$\boldsymbol{n}$ 是由介质 1 指向介质 2 的界面法线方向.

电势连续的边界条件可保证电场强度切线分量连续. 在界面两侧 1,2 两点附近任取 1′,2′ 两点(如图 3.1 所示). 由电势连续条件可知

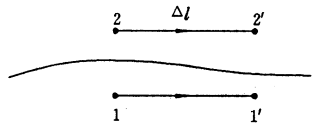


图 3.1

$$\phi_1 = \phi_2, \qquad \phi_1' = \phi_2'$$

因此

$$\phi_2 - \phi_2' = \phi_1 - \phi_1'$$

当 1′,2′ 趋近于 1,2 两点时，Δl 的方向就是界面切线方向，故

$$\phi_2 - \phi_2' = \int_2^{2'}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = E_{2t}\Delta l$$

$$\phi_1 - \phi_1' = \int_1^{1'}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = E_{1t}\Delta l$$

上述两式左边相等，因此得

$$E_{1t} = E_{2t}$$

即界面两边电场强度切线分量连续.

对于静电场中存在的导体，归纳起来有这样一些特殊性质：导体内部不能积累电荷，电荷只分布在导体表面；导体内部电场处处为零，因此导体是一个等势体；导体表面附近电场强度切线分量为零，只有法线分量.

设介质 1 为导体，介质 2 的介电常数为 ε，导体外的电势为 ϕ，则导体表面的边界条件为

$$\phi = \text{常数} \tag{1.13}$$

$$\sigma = -\varepsilon\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}} \tag{1.14}$$

式中 σ 是导体上的面电荷密度. 在实际问题中，导体表面的面电荷密度是未知的. 导体上的电荷分布由导体与外电场的相互作用来决定，导体内的自由电荷在外电场作用下将发生流动，直到导体内电场强度处处为零，达到静电平衡时，自由电荷就不再流动了. 在静电问题中，导体的边界条件分为两类：一类是给定导体的电势，例如导体接地或接到一个具有固定电势的电源电极上；另一类是给定导体上的总电量

$$Q = -\oint_S \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial n} \mathrm{d}S \tag{1.15}$$

即上述对整个导体表面的积分值给定. 通常在求得整个电势 ϕ 的分布以后，再用(1.14)式来确定导体表面的面电荷密度.

综上所述，引入电势 ϕ 以后，求解静电场的问题，就归结为已知自由电荷分布求电势的问题，即求解泊松方程

$$\nabla^2 \phi = -\frac{1}{\varepsilon}\rho$$

或拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \phi = 0$$

在两种介质的分界面上，满足边界条件

$$\phi_1 = \phi_2$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} - \varepsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} = \sigma$$

在导体界面上，或给定导体的电势

$$\phi = \phi_S$$

或给定导体上的总电量

$$\oint \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial n} \mathrm{d}S = -Q$$

§2 泊松方程解的唯一性问题与解的积分形式

1. 唯一性定理

静电场的基本方程是泊松方程或拉普拉斯方程，它们是偏微分方程. 为了确定它们的解，必须给出待求区域边界上的条件. 到底应该给出什么条件才能把静电场唯一确定下来，这是在讨论求静电场方程的具体方法以前必须解决的重要问题. 唯一性定理不仅告诉我们唯一确定静电场的条件是什么，同时还告诉我们，无论用什么方法求得的解，只要所得的解满足给定的条件，它就是唯一真正的解. 这就给求解静电场问题带来极大的方便.

对于最简单的均匀介质的情况，唯一性定理为：设待求场区域 V 内介质是均匀的，介电常数为 ε，给定了 V 内的自由电荷分布 $\rho(x,y,z)$，电势 ϕ 满足泊松方程

$$\nabla^2 \phi = -\frac{1}{\varepsilon}\rho \tag{2.1}$$

若区域 V 的边界面 S 上给定电势值 ϕ_S，或给定电势的法向微商 $\left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_S$，则 V 内的电场就可唯一确定. 给定边界上的电势值，称为第一类边值问题；给定边界上电势的法向微商，称为第二类边值问题.

证明 设泊松方程的解不是唯一的，有两组解 ϕ_1 和 ϕ_2 都满足上述条件，即在 V 内都满足泊松方程

$$\nabla^2 \phi_1 = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \qquad \nabla^2 \phi_2 = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

在 S 上满足同样的边界条件

$$\phi_1 = \phi_S, \qquad \phi_2 = \phi_S$$

或

$$\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial n}\right)_S = \left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_S, \qquad \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial n}\right)_S = \left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_S$$

令

$$\phi = \phi_1 - \phi_2 \tag{2.2}$$

在 V 中 ϕ 满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \phi = \nabla^2 \phi_1 - \nabla^2 \phi_2 = 0 \tag{2.3}$$

在 S 上满足边界条件

$$\phi_S = \phi_{1S} - \phi_{2S} = 0 \tag{2.4}$$

或

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_S = \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial n}\right)_S - \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial n}\right)_S = 0 \tag{2.5}$$

应用格林第一公式(见第一章(5.19)式),令 $\phi=\psi$,即得

$$\int_V (\phi \nabla^2 \phi + \nabla \phi \cdot \nabla \phi) \mathrm{d}V = \oint_S \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} \mathrm{d}S \tag{2.6}$$

考虑到 ϕ 所满足的方程与两类边界条件,可得

$$\int_V (\nabla \phi)^2 \mathrm{d}V = 0 \tag{2.7}$$

因为被积函数是恒正的,要积分为零必须在 V 内处处满足

$$\nabla \phi = 0 \tag{2.8}$$

故在 V 内

$$\phi = \phi_1 - \phi_2 = \text{常数} \tag{2.9}$$

对第一类边值问题,在 V 的边界面 S 上,$\phi_S=\phi_{1S}-\phi_{2S}=0$,故上式中常数应为零,即在 V 中

$$\phi_1 = \phi_2$$

电势是唯一确定的. 对于第二类边值问题,在 V 的边界面 S 上,$\left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_S=0$,电势不能确定,但只相差一个任意的相加常数,故电场还是唯一确定的. 唯一性定理得证.

实际上,介质常是分区均匀的,在每一分区均匀介质内部,电势 ϕ_i 满足泊松方程

$$\nabla^2 \phi_i = -\frac{\rho}{\varepsilon_i} \tag{2.10}$$

在两种介质的分界面上满足边值关系

$$\phi_i = \phi_j$$

$$\varepsilon_i \frac{\partial \phi_i}{\partial n} = \varepsilon_j \frac{\partial \phi_j}{\partial n} \tag{2.11}$$

只要区域 V 内的自由电荷分布 $\rho(x,y,z)$ 给定,V 的边界面 S 上的电势 ϕ_S 或电势的法向微商 $\left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_S$ 给定,则 V 内的电场唯一地确定.

若待求场区域 V 内有导体存在时,为了唯一地确定电场,除上述条件外,还必须给出每个导体上的电势 ϕ_K(常数)或总电量

$$Q_K = -\oint_{S_K} \varepsilon_K \frac{\partial \phi}{\partial n} \mathrm{d}S \tag{2.12}$$

读者试自证之. 当导体外电势确定后，由边值关系

$$-\varepsilon_K \left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_{S_K} = \sigma_K \tag{2.13}$$

可完全确定各导体上的自由面电荷分布.

唯一性定理对于求解具体问题也是很有用的. 首先可按唯一性定理的条件，分析问题是否有解. 对一些较简单的问题，可从物理上分析解的形式，提出试探性的解. 只要能满足唯一性定理的条件，这个解就是唯一正确的解.

例 两种均匀介质(介电常数为 ε_1 和 ε_2)充满空间，一半径为 a，带电量为 Q 的导体球放在介质的交界面处，如图 3.2 所示，计算球外介质中的电势分布.

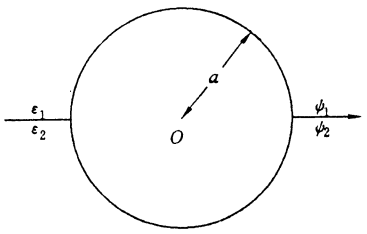


图 3.2

解 由唯一性定理可知，题中所给条件足够确定场方程的解.

当均匀介质充满空间时，电场分布是球对称的. 现在有了分界面，会不会破坏场的球对称性呢？由于在分界面处电场线是与它平行的，电场线不会终止在分界面上，因而分界面上不会出现束缚电荷，束缚电荷只能出现在球面上. 由于对称性，束缚电荷应该分别在上、下半球均匀分布，因而每一部分空间中的电场是球对称分布. 为保证分界面上电场切线分量连续，整个球外空间电场应具有球对称性. 设上半空间电势为 ϕ_1，下半空间电势为 ϕ_2，它们都满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \phi = 0$$

选球坐标系

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\right) = 0$$

它的解为

$$\phi = -\frac{c}{r} + d$$

c, d 是待定系数. 由 $r \to \infty$ 时，$\phi_1 = \phi_2 = 0$，可定出 $d = 0$. 由导体面上的条件

$$\oint_{r=a} \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial r} \mathrm{d}S = -Q$$

可定出

$$c = \frac{-Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$$

球外的电势分布为

$$\phi_1 = \phi_2 = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) r} \tag{2.14}$$

上、下半球上的面电荷密度分别为

$$\sigma_1 = -\varepsilon_1 \left.\frac{\partial \phi_1}{\partial r}\right|_a = \frac{\varepsilon_1 Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) a^2} \quad \text{(上半球)}$$

$$\sigma_2 = -\varepsilon_2 \left.\frac{\partial \phi_2}{\partial r}\right|_a = \frac{\varepsilon_2 Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) a^2} \quad \text{(下半球)}$$

2. 泊松方程解的积分形式

研究静电场的基本任务是在给定电荷分布和区域的边界条件后，求出电场的分布. 解决这个问题的关键在于求解泊松方程. 我们先研究泊松方程的一般形式解.

在待求场空间任取一区域 V（如图 3.3），场源点 M 的坐标为 $\boldsymbol{R}'(x',y',z')$，待求场点 P 的坐标为 $\boldsymbol{R}(x,y,z)$，在 V 内应用格林第二公式（见第一章 5.21 式）

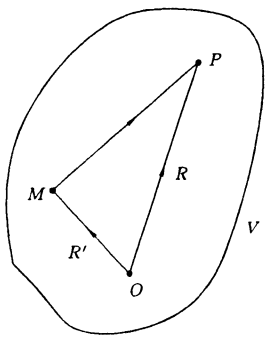


图 3.3

$$\int_V(\psi\nabla'^2\phi-\phi\nabla'^2\psi)\mathrm{d}V'$$

$$=\oint_S(\psi\nabla'\phi-\phi\nabla'\psi)\cdot\mathrm{d}S' \qquad (2.15)$$

选 ϕ 是 V 内泊松方程的解，有

$$\nabla'^2\phi=-\frac{1}{\varepsilon}\rho(\boldsymbol{R}')$$

$$\psi=\frac{1}{r},\qquad r=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

在第一章中已证明下述关系

$$\nabla'^2\frac{1}{r}=-4\pi\delta(\boldsymbol{R}'-\boldsymbol{R})$$

将上面各式代入(2.15)式得

$$\int_V(\psi\nabla'^2\phi-\phi\nabla'^2\psi)\mathrm{d}V'$$

$$=-\frac{1}{\varepsilon}\int_V\frac{\rho(\boldsymbol{R}')}{r}\mathrm{d}V'+4\pi\int_V\phi(\boldsymbol{R}')\delta(\boldsymbol{R}'-\boldsymbol{R})\mathrm{d}V'$$

$$=-\frac{1}{\varepsilon}\int_V\frac{\rho(\boldsymbol{R}')}{r}\mathrm{d}V'+4\pi\phi(\boldsymbol{R})$$

$$=\oint_S\left(\frac{1}{r}\nabla'\phi-\phi\nabla'\frac{1}{r}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'$$

由此得到

$$\phi(\boldsymbol{R})=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V\frac{\rho(\boldsymbol{R}')}{r}\mathrm{d}V'+\frac{1}{4\pi}\oint_S\left(\frac{1}{r}\nabla'\phi-\phi\nabla'\frac{1}{r}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}' \qquad (2.16)$$

这就是泊松方程解的积分形式，这个解只是一个形式解，因为在边界上 ϕ 与 $\nabla'\phi$ 的值并不知道，用它来解决实际问题并不方便，但是在数学上用它来讨论泊松方程解的性质却是很有用的.

当电荷分布在有限区域时，由于

$$\phi\sim\frac{1}{r},\quad \nabla'\phi\sim\frac{1}{r^2},\quad \mathrm{d}S\sim r^2$$

故(2.16)式的面积分值和 $\frac{1}{r}$ 成比例，当包围面 S 扩至无穷，即 $r\to\infty$ 时，(2.16)式就变为

$$\phi(\boldsymbol{R})=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V\frac{\rho(\boldsymbol{R}')}{r}\mathrm{d}V' \qquad (2.17)$$

这说明当积分区域包括电荷不为零的全部区域时，电势的公式由库仑定律决定.

再研究(2.16)式面积分的含义. 应该注意，(2.16)式中的积分区域 V 是从待求场中任意划出

来的，在 V 中可能只包括产生场的一部分电荷. (2.16)式中的体积分表示 V 内体分布电荷的贡献，面积分表达了区域 V 以外的电荷分布对 V 内电势的贡献. 在(2.16)式的面积分中，令

$$\varepsilon\nabla'\phi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'=\sigma\mathrm{d}S',\qquad \varepsilon\phi=\tau$$

则(2.16)式可写为

$$\phi(\boldsymbol{R})=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V\frac{\rho(\boldsymbol{R}')}{r}\mathrm{d}V'+\frac{1}{4\pi\varepsilon}\oint_S\frac{\sigma\mathrm{d}S'}{r}-\frac{1}{4\pi\varepsilon}\oint_S\tau\mathrm{d}\boldsymbol{S}'\cdot\nabla'\frac{1}{r}\tag{2.18}$$

上式中第一个面积分表示分布在 S 面上的面电荷产生的电势. 第二个面积分代表分布在 S 面上的电偶极矩所产生的电势. 上式清楚地说明，在计算 V 内的电势时，V 外的电荷分布可用位于 S 面上的假想面电荷和电偶极子层来等效地代替.

§3 解静电问题的电象法

根据静电场的唯一性定理，无论用什么方法，只要能求得满足边界条件的解，这个解就是唯一的. 因此，对于不同的静电问题，可以用各种尽可能简单的方法来求解.

前面已指出，在计算 V 内的电势时，V 外的电荷对 V 内电势的贡献可用位于 V 的界面上的假想面电荷和电偶层来代替. 这启发我们去设想，如果在 V 的界面上真实分布有面电荷，那么也应该可用分布在 V 外的电荷来代替. 例如，在导体附近放置电荷时，导体面上会产生感应电荷，这些面电荷对所求区域内电势的贡献，可用位于区域外的假想电荷来代替，这些假想电荷的位置和大小可由边界条件确定. 这种方法称为电象法. 电象法的核心问题是确定假想电荷的位置和大小，确定的依据是保证原有边界条件得到满足. 务必牢记，假想电荷必须处于待求场区域以外，只有这样才能保证原有区域内电荷分布不变.

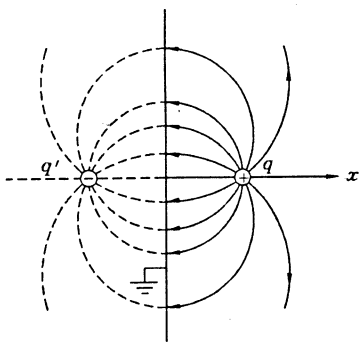


图 3.4

例 1 如图 3.4 所示，在真空中一接地的无限大导体平板附近有一点电荷 q，距平板为 d，求空间电势分布.

解 设导体面位于 $x=0$，点电荷位于 x 轴上. 由于导体接地，静电屏蔽作用，$x<0$ 的区域电场为零. 只需要求 $x>0$ 区域的场，这个区域的电场由点电荷与导体面上的感应电荷决定. 用假想电荷来代替导体面上的电荷. 假想电荷称为象电荷，它一定处在 $x<0$ 的区域. 导体是等势体，电场线一定要垂直于等势面. 为保证 $x=0$ 是等势面，象电荷一定位于负 x 轴上. 设象电荷是一个点电荷，电量为 q'，位于 $x=-d'$. 在 $x>0$ 空间区域内任一点 $P(x,y,z)$ 处的电势为

$$\phi(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}}+\frac{q'}{\sqrt{(x+d')^2+y^2+z^2}}\right)$$

题中给出的边界条件是

$$x=0,\qquad \phi=0$$

由此条件有

$$\frac{q}{\sqrt{d^2+y^2+z^2}}=\frac{-q'}{\sqrt{d'^2+y^2+z^2}}$$

显然 $q'=-q, d'=d$ 是上式的解，由唯一性定理这也是唯一的解. 由这个解看到导体平面相当

于一平面镜，假想电荷是原来电荷的镜象，电象法因此而得名.

综上所述，这个问题解的最后结果为

$$\phi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{(x-\mathrm{d})^2+y^2+z^2}} + \frac{q'}{\sqrt{(x+d')^2+y^2+z^2}}\right) \qquad x>0 \qquad (3.1)$$

$$\phi_2 = 0 \qquad x<0$$

由上式可求出导体面上的感应电荷密度 σ 为

$$\sigma = \varepsilon_0 E_x\big|_{x=0} = -\varepsilon_0 \frac{\partial \phi_1}{\partial x}\bigg|_{x=0} = -\frac{qd}{2\pi(d^2+y^2+z^2)^{3/2}} \qquad (3.2)$$

导体面上的总感应电荷为

$$Q = \int_S \sigma \mathrm{d}S = -\frac{qd}{2\pi}\int_0^\infty \frac{2\pi r\mathrm{d}r}{(r^2+d^2)^{3/2}} = -q$$

由于导体平面无限大，原来电荷的电场线将全部终止在导体平面上，故感应电荷数值和原来电荷相等.

例 2 有一半径为 a 的导体球，原先不带电，在球外离球心为 d 处放一点电荷 q，设导体球接地，求空间电势.

解 我们的任务是要用象电荷来代替球面上的感应电荷. 显然，为了保证代替后仍然满足原先的物理条件，象电荷必须处于球内；为保证球面是等势面，象电荷必须处在球心和原来电荷的连线上. 设象电荷的电量为 q'，处于和球心相距为 d' 处.

由图 3.5，在任一点 P 处的电势为

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{R} + \frac{q'}{R'}\right) \qquad (3.3)$$

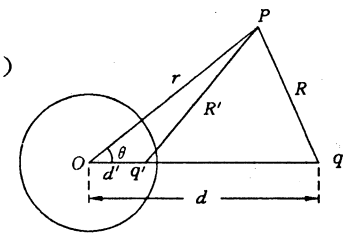


图 3.5

式中

$$R = \sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}$$

$$R' = \sqrt{r^2+d'^2-2rd'\cos\theta}$$

由已知条件，当 $r=a$ 时，$\phi=0$，即

$$\frac{q'}{\sqrt{a^2+d'^2-2ad'\cos\theta}} + \frac{q}{\sqrt{a^2+d^2-2ad\cos\theta}} = 0$$

将上式改写成

$$q'^2(a^2+d^2) - 2q'^2ad\cos\theta = q^2(a^2+d'^2) - 2q^2ad'\cos\theta$$

要使上式对任意值都成立，必须

$$q^2(a^2+d'^2) = q'^2((a^2+d^2)$$

$$q'^2d = q^2d'$$

联立求解上两式可得两组解

$$d' = \frac{a^2}{d}, \qquad q' = \pm\frac{aq}{d}$$

或

$$d' = d, \qquad q' = \pm q$$

显然，$d'=d$ 这一组解是不合理的，因为它意味着象电荷处在球外. 第一组解中 $d'=\frac{a^2}{d}<a$，故能满足原先的物理条件. 象电荷 q' 应取负号，因它代替的是球上的感应电荷.

将

$$d' = \frac{a^2}{d}, \qquad q' = -\frac{aq}{d} \tag{3.4}$$

代入(3.3)式,则得球外电势分布

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta}} - \frac{q}{\sqrt{\left(\frac{d}{a}\right)^2 r^2 + a^2 - 2rd\cos\theta)}}\right) \tag{3.5}$$

利用上式可算出球面上的感应电荷面密度

$$\sigma = -\varepsilon_0 \frac{\partial\phi}{\partial r}\bigg|_{r=a} = -\frac{q}{4\pi}\frac{d^2 - a^2}{a(d^2 + a^2 - 2da\cos\theta)^{3/2}}$$

对球面积分后可得总的感应电荷为

$$q' = \oint_{r=a}\sigma \mathrm{d}S = -\frac{q}{4\pi}\int_0^{\pi}\frac{2\pi(d^2 - a^2)a^2\sin\theta\mathrm{d}\theta}{a(d^2 + a^2 - 2da\cos\theta)^{3/2}} = -\frac{aq}{d} \tag{3.6}$$

用高斯定理也可得到上述结果,因为用象电荷代替感应电荷后,导体外的电场不变. 包围导体球计算电位移通量,利用(3.5)式得

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_{r=0}\sigma\mathrm{d}S = q' = -\frac{aq}{d}$$

在上述问题中若导体球不接地,结果如何呢? 可以这样来分析:接地以后有电量为$-q'$的电荷移到地中,球面上感应电荷q'的分布已达到静电平衡,使导体为等势体;若导体不接地,则接地时移到地中去的那部分电量$-q'$应仍留在球上. 利用场的叠加原理,只要留在球上的$-q'$电荷能单独达到静电平衡,使导体为等势体,则将这部分电荷产生的电势再叠加到导体接地时产生的电势上去,就可得到不接地时的总电势. 显然,$-q'$电荷单独在球上达到静电平衡时,应均匀分布在球面上,它在球外的电势和$-q'$电荷集中在球心产生的电势相同,于是导体球不接地时总的电势为

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta}} - \frac{q}{\sqrt{\left(\frac{d}{a}\right)^2 r^2 + a^2 - 2rd\cos\theta}}\right) + \frac{aq/d}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{3.7}$$

如果导体球不接地,并且原先导体球上还带电荷为Q,仿照前面的做法,再次利用叠加原理,就得这种情况下的总电势为

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta}} - \frac{q}{\sqrt{\left(\frac{d}{a}\right)^2 r^2 + a^2 - 2rd\cos\theta}}\right) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q + aq/d}{r} \tag{3.8}$$

图 3.6 画出了接地导体球附近有一点电荷时的电场线分布情况.

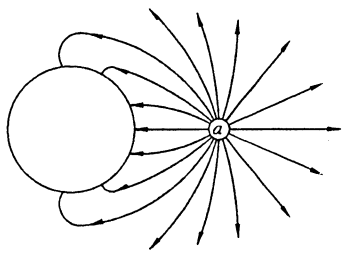


图 3.6

例 3 一半径为 a 的接地导体球，放在一均匀电场中，求球外的电势.

解 均匀电场是指空间的某一区域内，各点场强的方向和数值都相同，例如平板电容器内的电场. 先来证明均匀电场和两个相距无限远具有无限大电量的两个反号点电荷的场等效.

如图 3.7 所示，在 z 轴上有两个点电荷 $-q$ 和 $+q$，其坐标分别为 z_0，$-z_0$，它们在空间任一点 $P(x,y,z)$ 产生的电势为

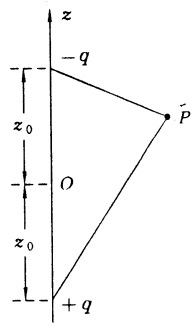


图 3.7

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z_0)^2}}\right)$$

令 $l^2=x^2+y^2+z^2+z_0^2$，则上式可写为

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{l^2\left(1+\frac{2zz_0}{l^2}\right)}} - \frac{1}{\sqrt{l^2\left(1-\frac{2zz_0}{l^2}\right)}}\right)$$

$$\approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}\left[\left(1-\frac{zz_0}{l^2}\right)-\left(1+\frac{zz_0}{l^2}\right)\right] = \frac{-2qzz_0}{4\pi\varepsilon_0 l^3}$$

当 z_0，q 都很大时，$l\approx z_0$，上式化为

$$\phi = \frac{-2qz}{4\pi\varepsilon_0 z_0^2}$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 z_0^2}\boldsymbol{e}_z$$

上式中的 q 与 z_0 都是常数，故电场是沿 z 方向的均匀场，只要 qz_0 足够大，就可将它们的场看成均匀的.

再来讨论本问题的解. 由前所述，可用处于 $\pm z_0$ 的两异号点电荷来代替 E_{0z} 的作用. 于是问题就变成了在 $\pm q$ 的作用下，接地导体球的电势问题，可用电象法来解. 象电荷的分布如图 3.8 所示，象电荷处于 $\pm z_0'$，其大小为 $\pm q'$，由例 2 的结果知

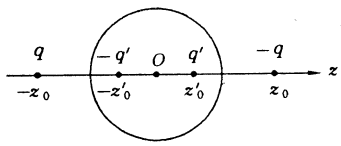


图 3.8

$$z_0 z_0' = a^2$$

$$\pm q' = \pm\frac{aq}{z_0}$$

当 $z_0\to\infty$ 时，象电荷 $\pm q'$ 便无限接近球心，从而形成一个电偶极矩. 偶极矩的方向沿 z 轴，其大小为

$$p = 2q' z_0' = \frac{2qa^3}{z_0^2}$$

由于均匀场

$$E_{0z} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 z_0^2}$$

所以

$$\boldsymbol{p} = 4\pi\varepsilon_0 \boldsymbol{E}_0 a^3$$

于是球外任一点的电势是外加均匀场和在球心的象电荷形成的电偶极矩电势之和，即

$$\phi = -E_0 z + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{R}}{R^3}$$

$$= -E_0 R\cos\theta + \frac{E_0 a^3}{R^2}\cos\theta \qquad (3.9)$$

例 4 在图 3.9 所示的 $x>0$ 与 $x<0$ 区域充满两种均匀介质，介电常数为 ε_1 与 ε_2，在 x 轴上的 d 处有点电荷 q，求空间的电势.

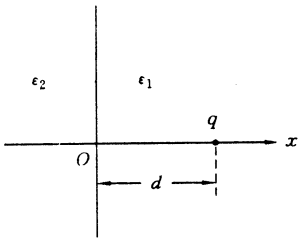


图 3.9

解 这时的电势由点电荷 q 与分界面上的束缚电荷、q 附近的束缚电荷所产生. 设在 $x>0$ 区域电势为 ϕ_1，$x<0$ 区域电势为 ϕ_2，它们在空间满足方程

$$\nabla^2\phi_1 = -\frac{q}{\varepsilon_1}\delta(x-\mathrm{d},y,z) \tag{3.10}$$

$$\nabla^2\phi_2 = 0$$

在边界上满足边界条件

$$\phi_1 = \phi_2, \qquad \varepsilon_1\frac{\partial\phi_1}{\partial x} = \varepsilon_2\frac{\partial\phi_1}{\partial x} \tag{3.11}$$

在无穷远的界面上满足条件

$$\phi = 0 \tag{3.12}$$

用电象法求 ϕ_1 的解时，用处于 $x<0$ 区域内的象电荷来代替分界面上的面电荷，代替后界面不再存在，全部空间充满介电常数为 ε_1 的均匀介质. 为保证边界条件满足，象电荷必须位于负 x 轴上，因为从 q 发出的电场线，垂直进入第二介质时，电场线不折射，这是由于 $E_{1t}=E_{2t}=0$. 设象电荷的大小为 q'，位置在 $x=-d'$，则可写出 ϕ_1 的解为

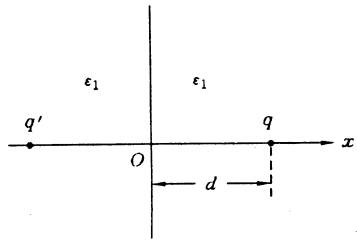


图 3.10

$$\phi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\left(\frac{q}{\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}} + \frac{q'}{\sqrt{(x+d')^2+y^2+z^2}}\right) \tag{3.13}$$

同理，求 ϕ_2 的解时，象电荷应处在 $x>0$ 区域的 x 轴上，用象电荷代替分界面上的面电荷后，全空间只充满介电常数为 ε_2 的均匀介质. 设象电荷大小为 q''，由对称性考虑，可设象电荷位置在 $x=d'$，这时 ϕ_2 由原有电荷与象电荷产生，故 ϕ_2 的解可写为

$$\phi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_2}\left(\frac{q}{\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}} + \frac{q''}{\sqrt{(x-d')^2+y^2+z^2}}\right) \tag{3.14}$$

(3.13)和(3.14)式中的未知量 q'，q''，d' 由边界条件确定. 当 $x=0$ 时应满足

$$\phi_1 = \phi_2, \qquad \varepsilon_1\frac{\partial\phi_1}{\partial x} = \varepsilon_2\frac{\partial\phi_2}{\partial x}$$

由此可定出

$$\begin{aligned} d' &= d, \qquad q'' = -q' \\ q' &= \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q \end{aligned} \tag{3.15}$$

是方程的解，由唯一性定理，这个解也就是唯一的解. 由此最后求得空间电势为

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\left[\frac{q}{\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}} + \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{q}{\sqrt{(x+d)^2+y^2+z^2}}\right] \\ \phi_2 &= \frac{2q}{4\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}} \end{aligned} \tag{3.16}$$

上述例题涉及的都是平面或球面这种单一的分界面，对单一分界面象电荷一般只有一个. 对某些平面球面的组合情况，仍可用电象法求解，但这时象电荷的个数不止一个，有的还可能

有无穷多. 应该注意，由于电象法只依靠调整少数参量来满足边界条件，它的局限性很大，对稍复杂的分界面就不能用电象法求解.

例 5 两无限大导体平面相交，夹角为 θ，导体平面接地，在平面间有一点电荷 q，什么条件下可用电象法求解？

解 如图 3.11 所示，以下板为极轴，电荷 q 位于 θ_0 处. 为保证两板上电势为零，象电荷不止一个，但全部象电荷都应在待求场区域之外，由对称性推断，它们都位于图中 $r=a$ 的圆上. 例如，为使上板电势为零，必须先在 $2\theta-\theta_0$ 处放负 q 象电荷，为使下板电势为零必须先在 $-\theta_0$ 处放负 q 象电荷，这些电荷都不能同时保证上下两板电势为零，为此又必须在 $2\theta+\theta_0$ 处放正 q 象电荷，在 $-2\theta-\theta_0$ 处放负 q 象电荷，等等. 由图可以看出

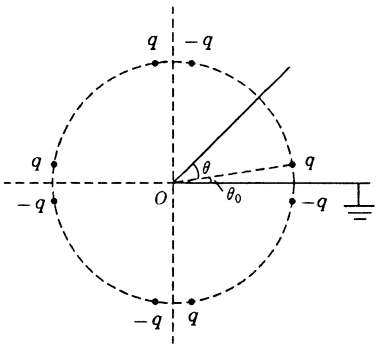


图 3.11

第一个正象电荷的位置在 $2\theta+\theta_0$

第二个正象电荷的位置在 $4\theta+\theta_0$

……

第 n 个正象电荷的位置在 $2n\theta+\theta_0$

只有当第 n 个正象电荷的位置和原来的电荷 q 重合时，才能保证上下两极的电势为零. 如果第 n 个正象电荷不能与原来的电荷重合，则象电荷将出现在待求场区域，这就破坏了唯一性定理的条件，不能用电象法求解这个问题. 第 n 个正象电荷与原来电荷相重的条件是

$$2n\theta+\theta_0=2\pi+\theta_0$$

即

$$\theta=\pi/n$$

这说明两个无限大的接地导体板只有当其夹角为 π/n 时(90°，60°，45°，…)，才可能用电象法求解，此时象电荷共有 $2n-1$ 个.

§4 解静电问题的分离变数法

解静电问题的核心是在一定的边界条件下求解拉普拉斯方程 $\nabla^2\phi=0$，分离变数法是求解上述方程的常用方法. 它的大致步骤是：首先按照区域内分界面的形状和物理问题的对称性质，选择适当的坐标系，写出在该坐标系中拉普拉斯方程的形式. 选坐标系时不仅要看分界面的几何形状，也要看问题的对称性质. 具有球对称时选球坐标系，有柱对称时选柱坐标系，对称性很差的问题，可选直角坐标系. 其次用分离变数法求出在该坐标系中拉普拉斯方程的解，最后用边界条件定出解中的系数.

从物理上看，选坐标系与分析边界条件是比较重要的. 用分离变数法解方程，在数学中已有详细讨论，这里只利用其结果. 下面着重分析静电问题中常遇到的边界条件.

边界条件有两类：一类是包围待求场区域外部边界上的条件；另一类是在区域内部各分区界面上的条件. 首先应分析外边界上的条件. 通常是求全空间的场，这时外部边界是 $r\to0$ 与 $r\to\infty$ 两个面.

若原点没有点电荷，则 $r\to0$ 时，电势有限；若电荷分布在有限区域，则 $r\to\infty$ 时电势为零.

若存在均匀外场 $\boldsymbol{E}_z = E_0 \boldsymbol{e}_z$，在无限远处有

$$\phi = -E_0 z + \text{常数}$$

有均匀电场时，不能把电势零点选在无限远处. 若选原点为电势零点，则有均匀电场时，在无限远处的边界条件为

$$\phi = -E_0 z$$

在球坐标系中

$$\phi = -E_0 r\cos\theta$$

其次分析区域内部各分区界面上的边界条件. 在分界面上若电场有限，则电势连续，$\phi_1 = \phi_2$. 在两种介质的分界面上有

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n}$$

若存在导体，则在导体上可能有如下两个条件之一：给定导体上的电势 ϕ_S 或给定导体上的总电荷 Q，即

$$Q = -\oint \varepsilon \frac{\partial \phi_1}{\partial n} \mathrm{d}S$$

例 1 如图 3.12 所示，一对半无限的平行板接地，相距为 b，左端有一极板电势为 V，求两平行板之间的电势.

解 这个问题选直角坐标系方便，电势 ϕ 与 z 无关，拉普拉斯方程为

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \qquad (4.1)$$

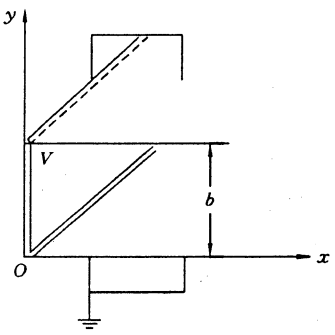


图 3.12

令

$$\phi(x,y) = X(x)Y(y) \qquad (4.2)$$

代入(4.1)则得分离变量后的两个方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} - k^2 X(x) = 0 \qquad (4.3)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2} + k^2 Y(y) = 0 \qquad (4.4)$$

式中 k^2 是常数，上述方程的解为

$$X(x) = G\mathrm{e}^{kx} + H\mathrm{e}^{-kx}$$

$$Y(y) = A\sin ky + B\cos ky$$

$$\phi = XY = (A\sin ky + B\cos ky)G(\mathrm{e}^{kx} + H\mathrm{e}^{-kx}) \qquad (4.5)$$

由 $y=0, \phi=0$，定出 $B=0$. 由 $y=b, \phi=0$ 定出

$$kb = n\pi, \qquad k = \frac{n\pi}{b}, \qquad n = 1,2,3,\cdots$$

再由 $x\to\infty$ 时，$\phi=0$，可定出 $G=0$. 将定出的各系数代入(4.5)式得到

$$\phi = C\sin\frac{n\pi y}{b}\mathrm{e}^{-n\pi x/b} \qquad (4.6)$$

但上式不可能满足边界条件：$x=0, \phi=V$. 这是因为上式只取了一个 n 值，还有其它 n 值的解没有包括进来. 因此普遍解应是(4.6)式的线性组合

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi y}{b}\mathrm{e}^{-n\pi x/b} \qquad (4.7)$$

式中的C_n由边界条件

$$x=0 \qquad \Phi=V$$

来确定，代入后有

$$V=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{4.8}$$

在上式两端乘以

$$\sin\frac{m\pi y}{b}$$

并对y从0到b积分，得

$$\int_0^b V\sin\frac{n\pi y}{b}\mathrm{d}y=\int_0^b\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{m\pi y}{b}\mathrm{d}y \tag{4.9}$$

利用关系式

$$\int_0^b\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{m\pi y}{b}\mathrm{d}y=\begin{cases}0 & n\neq m\\ b/2 & n=m\end{cases}$$

得到(4.9)式中的系数

$$C_m=\frac{2}{b}V\int_0^b\sin\frac{m\pi y}{b}\mathrm{d}y=\begin{cases}\dfrac{4V}{m\pi} & m\text{ 为奇数}\\ 0 & m\text{ 为偶数}\end{cases}$$

再代入(4.8)式，最后求得

$$\Phi(x,y)=\frac{4V}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin\frac{(2n+1)\pi y}{b}\mathrm{e}^{-(2n+1)\pi x/b} \tag{4.10}$$

例 2 有一半径为a，介电常数为ε的无限长电介质圆柱，柱轴沿$\boldsymbol{e}_z$方向，沿$\boldsymbol{e}_z$方向外加一均匀电场$\boldsymbol{E}_0$，求空间电势分布.

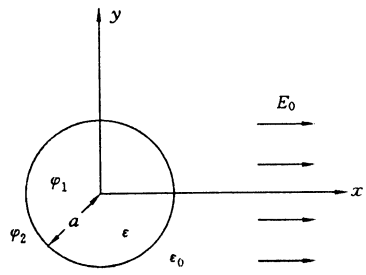


图 3.13

解 这个问题的边界面是柱面，选柱坐标系. 设柱内的电势为ϕ_1，柱外的电势为ϕ_2，电势与z无关. 先求

$$\nabla^2\phi(r,\theta)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}=0$$

的解. 设

$$\phi(r,\theta)=f(r)g(\theta)$$

代入方程后得

$$\frac{r}{f(r)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}\right)=\frac{-1}{g(\theta)}\frac{\mathrm{d}^2g(\theta)}{\mathrm{d}\theta^2}=\nu^2 \quad (\nu\text{ 为常数})$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}^2g(\theta)}{\mathrm{d}\theta^2}+\nu^2g(\theta)=0 \tag{4.11}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}\right)-\frac{\nu^2}{r^2}f(r)=0 \tag{4.12}$$

(4.11)的解为

$$g(\theta)=B_1\sin\nu\theta+B_2\cos\nu\theta$$

由于$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$，应该有$\phi(0)=\phi(2\pi)$，以保证电势的单值性. 这就要求$\nu=n$(正整数)，由此得

$$g(\theta) = B_1\sin n\theta + B_2\cos n\theta$$

方程(4.12)的两个线性无关解为 r^n, r^{-n}，于是求得 ϕ 的普遍解形式为

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty}[r^n(A_n\sin n\theta + B_n\cos n\theta) + r^{-n}(C_n\sin n\theta + D_n\cos n\theta)] \tag{4.13}$$

下面再用边界条件来确定 ϕ_1, ϕ_2 解的具体形式. 外加均匀场沿 e_z 方向，故 ϕ_1, ϕ_2 相对 θ 是对称的，不应包含 $\sin n\theta$ 项. $r=0$ 时，ϕ_1 有限，在 ϕ_1 中不应有 r^{-n} 项. $r\to\infty$ 时 $\phi_2 = -E_0 r\cos\theta$，由此推断 ϕ_1, ϕ_2 为

$$\phi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n r^n \cos n\theta$$

$$\phi_2 = -E_0 r\cos\theta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n r^{-n}\cos n\theta$$

再由 $r=a$ 时，$\phi_1=\phi_2$，$\varepsilon\dfrac{\partial\phi_1}{\partial r} = \varepsilon_0\dfrac{\partial\phi_2}{\partial r}$ 可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n a^n\cos n\theta = -E_0 a\cos\theta + \sum_{n=1}^{\infty} D_n a^{-n}\cos n\theta$$

$$\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty} nB_n a^{n-1}\cos n\theta = -\varepsilon_0 E_0\cos\theta + \sum_{n=1}^{\infty}(-n)\varepsilon_0 D_n a^{-(n+1)}\cos n\theta$$

上两式对任意 θ 值成立，故两端 $\cos n\theta$ 前的系数应相等. 当 $n=1$ 时有

$$B_1 a = -E_0 a + D_1 a^{-1} \tag{4.14}$$

$$\varepsilon B_1 = -\varepsilon_0 E_0 - \varepsilon_0 D_1 a^{-2} \tag{4.15}$$

当 $n\neq 1$ 时有

$$B_n a^n = D_n a^{-n} \tag{4.16}$$

$$\varepsilon n B_n a^{n-1} = -\varepsilon_0 n D_n a^{-(n+1)} \tag{4.17}$$

由上两组方程可解出

$$D_1 = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} E_0 a^2 \tag{4.18}$$

$$B_1 = \frac{-2\varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} E_0 \tag{4.19}$$

$$B_n = D_n = 0 \tag{4.20}$$

将求得的系数再代回到 ϕ_1, ϕ_2 中，得到最后结果为

$$\phi_1 = -\frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} E_0 r\cos\theta \tag{4.21}$$

$$\phi_2 = -E_0 r\cos\theta + \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0}\frac{a^2}{r} E_0\cos\theta \tag{4.22}$$

柱内电场

$$\boldsymbol{E}_1 = -\nabla\phi_1 = \frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} E_0 \boldsymbol{e}_x \tag{4.23}$$

它仍是均匀的. 上式中 $(2\varepsilon_0/\varepsilon+\varepsilon_0)<1$，故 $\boldsymbol{E}_1<\boldsymbol{E}_0$. 这是由于柱内介质极化后，极化电荷产生的场和原来外加电场方向相反. 极化电荷产生的场称为退极化场，用 $\boldsymbol{E}_d$ 表示

$$\boldsymbol{E}_d = \boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_0 \tag{4.24}$$

退极化场与极化强度 $\boldsymbol{P}$ 成比例，比例因子称为退极化因子，它的定义是

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{d}} = -\frac{1}{\varepsilon_0}L\boldsymbol{P} \tag{4.25}$$

负号表示 E_{d} 总是与 $\boldsymbol{P}$ 的方向相反.

$$\boldsymbol{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\boldsymbol{E}_1 = \frac{2(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\varepsilon + \varepsilon_0}\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0$$

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{d}} = \boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_0 = \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{\varepsilon + \varepsilon_0}\boldsymbol{E}_0$$

由此求出这时的退极化因子为

$$L = \frac{1}{2}$$

在(4.22)式中令 $\varepsilon \to \infty$,介质圆柱就化为导体圆柱,导体圆柱在均匀电场作用下,在柱外产生的电势为

$$\phi = -E_0 r\cos\theta + \frac{a^2}{r}E_0\cos\theta \tag{4.26}$$

例 3 如图 3.14 所示,一半径为 a 的均匀介质球,介电常数为 ε_1,介质球内带均匀自由电荷,电荷密度为 ρ,介质球沉浸在介电常数为 ε_2 的无限大均匀介质中. 在 z 方向加一均匀电场 $\boldsymbol{E}_0$,求球内外的电势.

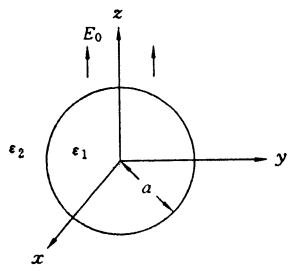


图 3.14

解 这是球形分界面,选球坐标系. 设球内电势为 ϕ_1,球外电势为 ϕ_2,球内电势满足泊松方程

$$\nabla^2\phi_1 = \frac{-\rho}{\varepsilon_1}$$

球外电势满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2\phi_2 = 0$$

泊松方程是非齐次方程,其普遍解应包括特解再加上齐次方程的通解. 从物理上看,特解对应于自由电荷在球内产生的电势,这个电势为

$$-\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_1}$$

用分离变量法求拉普拉斯方程

$$\nabla^2\phi(r,\theta) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) = 0$$

的解. 令

$$\phi(r,\theta) = u(r)f(\theta) \tag{4.27}$$

代入上式可得两个独立方程

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2u(r)}{\mathrm{d}r^2} + 2r\frac{\mathrm{d}u(r)}{\mathrm{d}r} - \lambda^2u(r) = 0 \tag{4.28}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2f(\theta)}{\mathrm{d}\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}f(\theta)}{\mathrm{d}\theta} + \lambda^2f(\theta) = 0 \tag{4.29}$$

令 $x=\cos\theta$,(4.29)可化为

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2f(\theta)}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}f(\theta)}{\mathrm{d}x} + \lambda^2f(\theta) = 0 \tag{4.30}$$

上式称为勒让德方程,为了保证解的有限性,令

$$\lambda^2 = n(n+1)$$

式中 n 是正整数. 对应每一个 n 值的解为勒让德多项式，即

$$f(\theta) = P_n(\cos\theta)$$

当 $\lambda^2=n(n+1)$ 时，(4.28)的两个线性无关解为

$$r^n, \qquad r^{-(n+1)}$$

于是得到(4.27)方程的普遍解为

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty}[A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}]P_n(\cos\theta)$$

在均匀场时，选坐标原点为电势零点. 这样选定后，有限范围内的电荷分布在无限远处的电势就不为零，而是一个常数. 因此本题中的外边界条件为：

$$r = 0, \qquad \phi_1 = 0$$

$$r \to \infty, \qquad \phi_2 = -E_0 r\cos\theta + C$$

为满足上述条件，球内外的电势为

$$\phi_1 = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_1} + \sum_{n=0}^{\infty}A_n r^n P_n(\cos\theta)$$

$$\phi_2 = -E_0 r\cos\theta + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{r^{n+1}}P_n(\cos\theta) + C$$

再由内边界条件

$$r = a, \qquad \phi_1 = \phi_2, \qquad \varepsilon_1\frac{\partial\phi_1}{\partial r} = \varepsilon_2\frac{\partial\phi_2}{\partial r}$$

可解出系数

$$B_0 = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_2}, \qquad C = -\frac{\rho a^2}{6\varepsilon_1} - \frac{\rho a^2}{3\varepsilon_2}$$

$$B_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2\varepsilon_2 + \varepsilon_1}a^3 E_0$$

$$A_1 = -E_0\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}$$

最后得到球内外电势为

$$\phi_1 = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_1} - \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}E_0 r\cos\theta \tag{4.31}$$

$$\phi_2 = -E_0 r\cos\theta + \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_2 r} + \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)a^3 E_0\cos\theta}{(2\varepsilon_2 + \varepsilon_1)r^2} - \frac{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1}{6\varepsilon_2\varepsilon_1}\rho a^2 \tag{4.32}$$

当球内不带自由电荷时 $\rho=0$，这时电势为

$$\phi_1 = \frac{-3\varepsilon_2}{2\varepsilon_2 + \varepsilon_1}E_0 r\cos\theta \tag{4.33}$$

$$\phi_2 = -E_0 r\cos\theta + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2\varepsilon_2 + \varepsilon_1}\frac{a^3 E_0}{r^2}\cos\theta \tag{4.34}$$

若球外是真空，这时球内电场为

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon_1}\boldsymbol{E}_0$$

它仍是均匀的. $3\varepsilon_0 < 2\varepsilon_0 + \varepsilon_1$，$\boldsymbol{E}_1 < \boldsymbol{E}_0$，这是由于极化电荷引起的退极化场与外加场方向相反. 退极化场

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{d}} = \boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_0 = \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_0 + \varepsilon_1}\boldsymbol{E}_0$$

$$\boldsymbol{P} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\boldsymbol{E}_1 = \frac{3(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2\varepsilon_0 + \varepsilon_1}\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0$$

退极化因子

$$L = -\frac{\varepsilon_0 \boldsymbol{E}_{\mathrm{d}}}{\boldsymbol{P}} = \frac{1}{3} \tag{4.35}$$

在(4.34)中令 $\varepsilon_1 \to \infty$，则得置于均匀电场中导体球所产生的电势为

$$\phi_2 = -E_0 r\cos\theta + \frac{a^3 E_0}{r^2}\cos\theta \tag{4.36}$$

导体球面上的面电荷密度为

$$\sigma = -\varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial r}\bigg|_{r=a} = 3\varepsilon_0 E_0 \cos\theta \tag{4.37}$$

例 4 如图 3.15 所示有一不带电的导体球，半径为 a，在 $b>a$ 处有一点电荷，电量为 q，求空间的电势分布.

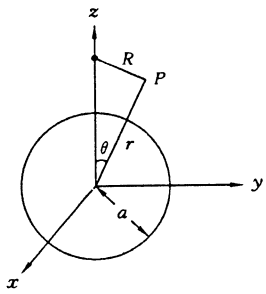


图 3.15

解 选球坐标系. 设球内电势为 ϕ_1，球外电势为 ϕ_2. ϕ_1 是常数，ϕ_2 满足泊松方程

$$\nabla^2 \phi_2 = -\frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r} - b\boldsymbol{e}_z)$$

对于现在的问题，特解为点电荷的势. 可将 ϕ_2 写成

$$\phi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \phi \tag{4.38}$$

ϕ 满足 $\nabla^2\phi = 0$. 式中

$$R = \sqrt{b^2 + r^2 - 2rb\cos\theta} \tag{4.39}$$

$$\phi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta) \tag{4.40}$$

用边界条件定系数. 这时电荷在有限区域，$r \to \infty$ 时，$\phi_2 = 0$，由此定出 $A_n = 0$. 于是

$$\phi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{b^2 + r^2 - 2rb\cos\theta}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{r^{n+1}}P_n(\cos\theta)$$

为了利用 $r=a$ 时的边界条件，应将上式的第一项按 $P_n(\cos\theta)$ 展开，利用公式

$$(1 - 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n, \qquad |t| < 1 \tag{4.41}$$

可得在 $r<b$ 的情况下，ϕ_2 的表达式为

$$\phi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{b^{n+1}}P_n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{r^{n+1}}P_n \tag{4.42}$$

由 $r=a$，$\phi_2 = \phi_1 = C$ 可求出 $n=0$ 时

$$B_0 = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a}{b} + Ca$$

$n \neq 0$ 时

$$B_n = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a^{2n+1}}{b^{n+1}}$$

导体球电势 C 是未知的，因而 B_0 也未知. 再利用 $r=a$ 时

$$\int_S \varepsilon_0 \frac{\partial \phi_2}{\partial r} \mathrm{d}S = 0$$

来确定 B_0，将(4.42)式代入上式的面积分中，注意到

$$\int_0^{\pi} P_n(\cos\theta)\sin\theta \mathrm{d}\theta = \int_{-1}^{1} P_n(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} P_n(x)P_0(x)\mathrm{d}x$$

再利用正交关系

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{2}{2n+1}, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \tag{4.43}$$

可求出 $B_0=0$，最后求得

$$\phi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{b^2 + r^2 - 2br\cos\theta}} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{2n+1}}{b^{n+1}}\frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}} \tag{4.44}$$

令

$$b' = \frac{a^2}{b}$$

由于 $b'<a$，再利用(4.41)的展开式，可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{R'} &= \frac{1}{\sqrt{b'^2 + r^2 - 2rb'\cos\theta}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b'^n}{r^{n+1}}P_n(\cos\theta) \end{aligned} \tag{4.45}$$

(4.44)最后一项可改写为

$$\begin{aligned} &-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a}{b}\frac{b'^n}{r^{n+1}}P_n(\cos\theta) + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a}{b}\frac{1}{r} \\ =&-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{aq}{b}\right)\frac{1}{\sqrt{b'^2 + r^2 - 2rb'\cos\theta}} + \frac{aq/b}{4\pi\varepsilon_0 r} \end{aligned}$$

令

$$q' = \frac{a}{b}q$$

则(4.44)式可改写为

$$\phi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{b^2 + r^2 - 2rb\cos\theta}} - \frac{q'}{\sqrt{b^2 + r^2 - 2rb'\cos\theta}}\right) + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{4.46}$$

上式和前面用电象法算得的结果相同. 注意，上式最后一项是由于不接地而出现的，前面已对此作过讨论.

§5 解静电问题的格林函数方法

格林函数方法是求解数学物理方程的一种用途很广的方法. 这里只研究解泊松方程的格林函数方法，但这种思想可用于其它方程. 现在的任务是求 V 内泊松方程的解. V 的边界上给定 ϕ_S 或 $\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial n}\right)_S$. 如图 3.16 所示，$x,y,z$ 表示待求场点 P 的坐标，x',y',z' 表示场源点 M 的坐

标. 利用格林公式

$$\int_V (\psi \nabla'^2 \phi - \phi \nabla'^2 \psi) \mathrm{d}V'$$

$$= \oint_S (\psi \nabla' \phi - \phi \nabla' \psi) \cdot \mathrm{d}S' \tag{5.1}$$

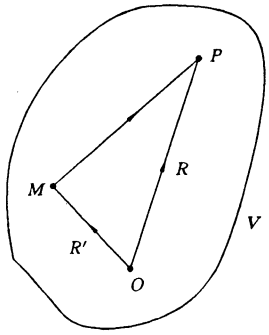


图 3.16

因为 ψ, ϕ 是任意的函数，可取 ϕ, ψ 满足方程

$$\nabla'^2 \phi = -\frac{\rho(\boldsymbol{R}')}{\varepsilon} \tag{5.2}$$

$$\nabla'^2 \psi(\boldsymbol{R}', \boldsymbol{R}) = -\frac{1}{\varepsilon}\delta(\boldsymbol{R}' - \boldsymbol{R}) \tag{5.3}$$

注意 ψ 与场点和源点的坐标 $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}'$ 有关，这样定义 ψ 的原因是为了求出 $\phi(\boldsymbol{R})$. 将(5.2)、(5.3)式代入(5.1)式，利用 δ 函数的性质，立刻得出 (x, y, z) 点的电势

$$\phi(\boldsymbol{R}) = \int_V \psi(\boldsymbol{R}', \boldsymbol{R}) \rho(\boldsymbol{R}') \mathrm{d}V' + \oint_S \varepsilon(\psi \nabla' \phi - \phi \nabla' \psi) \cdot \mathrm{d}S'$$

一般将满足(5.3)式的 ψ 用 G 表示，即

$$\nabla'^2 G(\boldsymbol{R}', \boldsymbol{R}) = -\frac{1}{\varepsilon}\delta(\boldsymbol{R}' - \boldsymbol{R}) \tag{5.4}$$

$$\phi(\boldsymbol{R}) = \int_V G(\boldsymbol{R}', \boldsymbol{R}) \rho(R') \mathrm{d}V' + \oint_S \varepsilon \left(G \frac{\partial \phi}{\partial n'} - \phi \frac{\partial G}{\partial n'} \right) \mathrm{d}S' \tag{5.5}$$

由上式看到，为了求出 $\phi(\boldsymbol{R})$，必须首先求出 $G(\boldsymbol{R}', \boldsymbol{R})$. 但只由(5.4)式不能完全确定 G，还必须给出 G 在边界上满足的条件. G 在边界上的条件如何给出，由原先问题中 ϕ 的边界条件来定.

对第一类边值问题，格林函数取为下述边值问题的解

$$\nabla'^2 G(\boldsymbol{R}', \boldsymbol{R}) = -\frac{1}{\varepsilon}\delta(\boldsymbol{R}' - \boldsymbol{R}) \tag{5.6}$$

$$G(\boldsymbol{R}', \boldsymbol{R})\Big|_s = 0$$

这时(5.5)式化为

$$\phi(\boldsymbol{R}) = \int_V G(\boldsymbol{R}', \boldsymbol{R}) \rho(\boldsymbol{R}') \mathrm{d}V' - \oint_S \varepsilon \phi \frac{\partial G}{\partial n'} \mathrm{d}S' \tag{5.7}$$

对第二类边值问题，已在边界上给定了 $\left.\frac{\partial \phi}{\partial n'}\right|_s$，为了从(5.5)式能求出 ϕ，必须设法消除(5.5)式中包含 ϕ 的面积分. 初看起来应在边界上要求

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n'}\right|_s = 0 \tag{5.8}$$

但若研究的是第二类边值问题的内部问题，即求 S 内的电势，则上述条件不可能得到满足，原因如下：由方程

$$\nabla'^2 G(\boldsymbol{R}', \boldsymbol{R}) = -\frac{1}{\varepsilon}\delta(\boldsymbol{R}' - \boldsymbol{R})$$

利用高斯定理可得

$$\int_V \nabla' \cdot \nabla' G \mathrm{d}V' = \oint_S \mathrm{d}S' \cdot \nabla' G$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon}\int \delta(\boldsymbol{R}' - \boldsymbol{R}) \mathrm{d}V' = -\frac{1}{\varepsilon}$$

即这时应有

$$\oint_S \mathrm{d}S' \frac{\partial G}{\partial n'} = \frac{-1}{\varepsilon} \tag{5.9}$$

显然上式和(5.8)是矛盾的. 为了消除矛盾,应在边界上给定

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n'}\right|_S = C(\text{常数})$$

代入(5.9)式得

$$\oint_S \mathrm{d}S' \frac{\partial G}{\partial n'} = \oint_S \mathrm{d}S' C = CS = -\frac{1}{\varepsilon}$$

所以

$$C = \frac{-1}{S\varepsilon}$$

综上所述,对于第二类边值问题的内部问题,格林函数应是下述边值问题的解

$$\begin{aligned} \nabla'^2 G(\boldsymbol{R}', \boldsymbol{R}) &= -\frac{1}{\varepsilon}\delta(\boldsymbol{R}' - \boldsymbol{R}) \\ \left.\frac{\partial G}{\partial n'}\right|_S &= -\frac{1}{S\varepsilon} \end{aligned} \tag{5.10}$$

这时(5.7)最后一项的面积分为

$$\oint_S \varepsilon \frac{\partial G}{\partial n'} \phi \mathrm{d}S' = \varepsilon C \oint_S \phi \mathrm{d}S' = \text{常数}$$

因而电势为

$$\phi(\boldsymbol{R}) = \int_V G(\boldsymbol{R}', \boldsymbol{R})\rho(\boldsymbol{R}')\mathrm{d}V' + \oint_S \varepsilon G(\boldsymbol{R}', \boldsymbol{R}) \frac{\partial \phi}{\partial n'} \mathrm{d}S' + \text{常数} \tag{5.11}$$

对第二类边值问题的外部问题,即求 S 面外部区域的电势,这时可看成是无穷远面和 S 面所围成的内部问题. 区域原界面变为无限大,因此这时在边界上可以给定 $\frac{\partial G}{\partial n'} = 0$. 也就是说,对于第二类边值问题的外部问题,格林函数应是下述边值问题的解

$$\begin{aligned} \nabla'^2 G(\boldsymbol{R}', \boldsymbol{R}) &= -\frac{1}{\varepsilon}\delta(\boldsymbol{R}' - \boldsymbol{R}) \\ \left.\frac{\partial G}{\partial n'}\right|_S &= 0 \end{aligned} \tag{5.12}$$

这时的电势为

$$\phi(\boldsymbol{R}) = \int_V G(\boldsymbol{R}', \boldsymbol{R})\rho(\boldsymbol{R}')\mathrm{d}V' + \oint_S \varepsilon G(\boldsymbol{R}', \boldsymbol{R}) \frac{\partial \phi}{\partial n'} \mathrm{d}S' \tag{5.13}$$

从(5.7)、(5.11)、(5.13)三式看到,求泊松方程解的问题,已转化为求格林函数 $G(\boldsymbol{R}', \boldsymbol{R})$ 的问题. 求格林函数 G,需要解(5.6)、(5.10)、(5.12)的边值问题. 表面看这样做好像没解决什么问题,实际上不是这样. 求格林函数是解一个很特殊的边值问题,比原来的边值问题简单得多. 从格林函数满足的微分方程看出,它有明确的物理意义. 格林函数是一个单位正电荷在一定边界条件下产生的电势. 在很多情况下可根据格林函数的物理意义,用物理方法求出格林函数,从而求得更复杂边值问题的解. 因此格林函数方法在求解数学物理方程中有着广泛的应用.

注意,格林函数方法也可用来求解拉普拉斯方程. 这时电荷密度 $\rho = 0$,(5.7)、(5.11)、(5.13)三式变得更简单,只存在面积分项.

上面定义的格林函数$G(\boldsymbol{R}',\boldsymbol{R})$有一个重要的性质，它过坐标$(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}')$是对称的，即

$$G(\boldsymbol{R}',\boldsymbol{R}) = G(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}') \tag{5.14}$$

我们以第一类边值问题的格林函数为例证明其对称性. 这时的方程为

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}') = -\frac{1}{\varepsilon}\delta(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}') \tag{5.15}$$

$$G(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}')|_S = 0 \tag{5.16}$$

利用格林公式

$$\int_V (\psi\nabla^2\phi - \phi\nabla^2\psi)\mathrm{d}V = \oint_S (\psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.17}$$

取$\psi=G(\boldsymbol{R}',\boldsymbol{R}'')$，$\phi=G(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}')$它们都满足(5.15)式，将它们代入(5.17)式得到

$$G(\boldsymbol{R}',\boldsymbol{R}'') - G(\boldsymbol{R}'',\boldsymbol{R}') = -\varepsilon\oint_S \left[G(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}'')\frac{\partial G(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}')}{\partial n} - G(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}')\frac{\partial G(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}'')}{\partial n}\right]\mathrm{d}S$$

由于在边界S上$G(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}'')=0$，$G(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}')=0$，故上式的面积分为零，于是对称性得证，即

$$G(\boldsymbol{R}'',\boldsymbol{R}') = G(\boldsymbol{R}',\boldsymbol{R}'')$$

格林函数的对称性也称为互易性，它有明确的物理意义. 它说明，在边界条件相同的情况下，$\boldsymbol{R}$点的点电荷在$\boldsymbol{R}'$点产生的电势与$\boldsymbol{R}'$点的同一点电荷在$\boldsymbol{R}$点产生的电势相同.

例 利用格林函数方法来证明：静电势的均值定理.

即在无电荷空间中的任一点的电势，等于以该点为球心任一球面上的电势的平均值.

证明 利用格林第二公式：

$$\int_V (G(\nabla'^2\Phi - \Phi\nabla'^2 G)\mathrm{d}V' = \oint_S (G\nabla'\Phi - \Phi\nabla' G)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

设Φ为该问题的解

$$\nabla'^2\Phi = -\frac{1}{\varepsilon}\rho(\boldsymbol{R}')$$

G为单位正电荷所产生的势：

$$\nabla'^2 G = -\frac{1}{\varepsilon}\delta(\boldsymbol{R}'-\boldsymbol{R})$$

代入公式中有：

$$\phi(\boldsymbol{R}) = \int_V G(\boldsymbol{R}',\boldsymbol{R})\rho(\boldsymbol{R}')\mathrm{d}V' + \oint_S \varepsilon(G\nabla'\phi - \phi\nabla' G)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'$$

因为该问题是求任一点电势与球面上的电势之间的关系，所以属于第一类边值问题. 所以选格林函数为：

$$\begin{cases} \nabla^2 G(\boldsymbol{R}',\boldsymbol{R}) = -\dfrac{1}{\varepsilon}\delta(\boldsymbol{R}'-\boldsymbol{R}) \\ G(\boldsymbol{R}',\boldsymbol{R})|_S = 0 \end{cases}$$

所以

$$G(\boldsymbol{R}',\boldsymbol{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon r}, \qquad \frac{\partial G}{\partial n} = \frac{-1}{4\pi\varepsilon r^2}$$

代入$\Phi(\boldsymbol{R})$表达式中：

$$\Phi(\boldsymbol{R}) = \int_V G(\boldsymbol{R}',\boldsymbol{R})\rho(\boldsymbol{R}')\mathrm{d}V' - \oint_S \varepsilon(\Phi\nabla' G)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'$$

注意：V为无荷空间：$\rho(\boldsymbol{R}')=0$.

因为 R 为球心，

故

$$\Phi(0)=\frac{1}{4\pi a^2}\oint_S \Phi\cdot \mathrm{d}S'$$

即为均值定理.

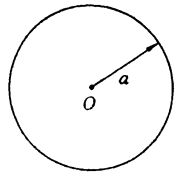


图 3.17

从而格林函数为：

$$G(\boldsymbol{R}',\boldsymbol{R})=\frac{1}{4\pi\varepsilon R'}-\frac{1}{4\pi\varepsilon a}$$

§6 计算静电场的多极展开方法

当电荷分布在一个小区域内时，可利用多极展开方法计算电场. 所谓小区域，是指区域的线度和待求场点到区域内任一点的距离相比很小而言.

先介绍电多极子概念. 一个点电荷系统称为电零极子，它的电学特性用总电量表征，即知道总电量后，电势分布就可决定，由等量、异号、相距无限小的两个点电荷组成的系统，称为电偶极子. 电偶极子的总电量等于零，其电学特性由电偶极矩表征，即知道电偶极矩后，才能确定它的电势，由大小相等、方向相反并相距无限小的两个电偶极子的组成的系统叫做电四极子. 电四极子的电学特性用电四极矩表征. 依此类推可以定义更高级的电多极子.

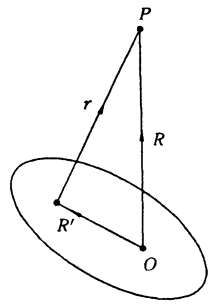


图 3.18

下面来研究如何将小区域电荷的电势展开成各极电多极子电势的叠加. 如图 3.18 所示，设电荷连续分布在区域 V 内，密度为 $\rho(\boldsymbol{R}')$，则 P 点的电势为

$$\phi(\boldsymbol{R})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho(\boldsymbol{R}')}{r}\mathrm{d}V' \tag{6.1}$$

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}'$$

$$r=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

由于 $|\boldsymbol{R}'|\ll|\boldsymbol{R}|$，可将 $1/r$ 在 $\boldsymbol{R}'=0$ 附近展开. 由泰勒公式

$$f(\boldsymbol{R}')=f(0)+\boldsymbol{R}'\cdot(\nabla' f(\boldsymbol{R}'))_{\boldsymbol{R}'=0}+\frac{1}{2}\boldsymbol{R}'\boldsymbol{R}':(\nabla'\nabla' f(\boldsymbol{R}'))_{\boldsymbol{R}'=0}+\cdots$$

现在的 $f(\boldsymbol{R}')=\dfrac{1}{r}$，故

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{R}+\boldsymbol{R}'\cdot\left(\nabla'\frac{1}{r}\right)_{\boldsymbol{R}'=0}+\frac{1}{2}\boldsymbol{R}'\boldsymbol{R}'\cdot\left(\nabla'\nabla'\frac{1}{r}\right)_{\boldsymbol{R}'=0}+\cdots$$

$$=\frac{1}{R}-\boldsymbol{R}'\cdot\nabla\frac{1}{R}+\frac{1}{2}\boldsymbol{R}'\boldsymbol{R}':\nabla\nabla\frac{1}{R}+\cdots \tag{6.2}$$

由此可将电势 ϕ 写为

$$\phi(\boldsymbol{R})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho(\boldsymbol{R}')}{R}\mathrm{d}V'-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\rho(\boldsymbol{R}')\boldsymbol{R}'\cdot\nabla\frac{1}{R}\mathrm{d}V'+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}\int_V\rho(\boldsymbol{R}')\boldsymbol{R}'\boldsymbol{R}':\nabla\nabla\frac{1}{R}\mathrm{d}V'+\cdots$$

$$=\phi^{(0)}+\phi^{(1)}+\phi^{(2)}+\cdots \tag{6.3}$$

令

$$q = \int_V \rho(R')\mathrm{d}V' \tag{6.4}$$

$$\boldsymbol{p} = \int_V \rho(\boldsymbol{R}')\boldsymbol{R}'\mathrm{d}V' \tag{6.5}$$

$$\overleftrightarrow{\mathscr{D}} = \int_V 3\boldsymbol{R}'\boldsymbol{R}'\rho(\boldsymbol{R}')\mathrm{d}V' \tag{6.6}$$

则

$$\phi^{(0)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R} \tag{6.7}$$

$$\phi^{(1)} = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\boldsymbol{p}\cdot\nabla\frac{1}{R} \tag{6.8}$$

$$\phi^{(2)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\overleftrightarrow{\mathscr{D}} : \nabla\nabla\frac{1}{R} \tag{6.9}$$

$\phi^{(0)}$是处于原点的电量为q的点电荷产生的电势，$\phi^{(1)}$是处于原点的电偶极矩为$\boldsymbol{p}$的电偶极子的电势.(6.5)是电偶极矩的一般定义，它包括了过去关于两个点电荷系统的电偶极矩的一般定义，将(6.5)式的定义用于图3.19，有

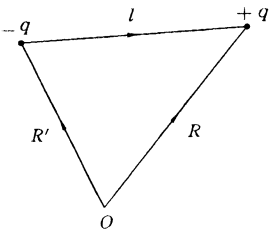


图 3.19

$$\rho(\boldsymbol{R}') = q\delta(\boldsymbol{R}' - \boldsymbol{R}'_+) - q\delta(\boldsymbol{R}' - \boldsymbol{R}'_-)$$

$$\boldsymbol{p} = \int\rho(\boldsymbol{R}')\boldsymbol{R}'\mathrm{d}V' = q\boldsymbol{R}'_+ - q\boldsymbol{R}'_- = q\boldsymbol{l}$$

这同以前的定义一致. 按照(6.5)的定义，中性电荷系统的电偶极矩与坐标原点的选择无关. 例如，原先的原点为O，后将原点称至O'，显然有

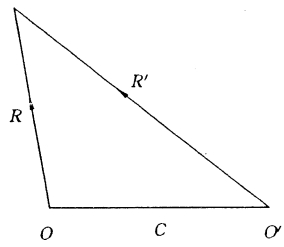


图 3.20

$$\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{C}$$

注意$\boldsymbol{C}$是常矢量. 由(6.5)式有

$$\boldsymbol{p} = \int_V \rho\boldsymbol{R}'\mathrm{d}V'$$

$$= \int_V \rho\boldsymbol{R}\mathrm{d}V' - \boldsymbol{C}\int_V \rho\mathrm{d}V' = \int_V \rho\boldsymbol{R}\mathrm{d}V'$$

下面来讨论$\phi^{(2)}$的意义. 它是处于原点的电四极矩为$\overleftrightarrow{\mathscr{D}}$的电四极子的电势. 从(6.9)式看出，电四极矩描述了电四极子的电学特性，由于电四级子是由两个大小相同方向相反的电偶极子相距无限小距离时组成的电荷体系，因此电四极子的电学特性和偶极子的方向以及两偶极子的位移方向有关. 因而电四极矩有两个方向，它是一个二阶张量，有九个分量. 点电荷体系的电四极矩可由(6.6)式得出，设第i个点电荷的位置在$\boldsymbol{R}_i$，有

$$\rho(\boldsymbol{R}') = \sum_i q_i\delta(\boldsymbol{R}' - \boldsymbol{R}_i)$$

$$\overleftrightarrow{\mathscr{D}} = \int_V 3\boldsymbol{R}'\boldsymbol{R}'\rho(\boldsymbol{R}')\mathrm{d}V' = \sum_i 3q_i\boldsymbol{R}_i\boldsymbol{R}_i \tag{6.10}$$

由(6.6)式定义的电四极矩是对称的，有6个独立分量. 但由于

$$\nabla^2\frac{1}{R} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{R} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{1}{R} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{1}{R} = 0$$

故$\nabla\nabla\frac{1}{R}$张量中的三个对角线分量不是独立的.$\phi^{(2)}$实际上只用五个独立参量就可表出用(6.6)式定义的电四极矩.有六个独立分量,没有反映出只用五个独立参量就可决定电四极矩的电势,应该使电四极矩中也只包含五个独立分量,因此应修改(6.6)式的定义.利用

$$\nabla^2\frac{1}{R}=\vec{\mathscr{I}}:\nabla\nabla\frac{1}{R}=0$$

把$\phi^{(2)}$改写成

$$\phi^{(2)}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\int_V\rho(\boldsymbol{R}')(3\boldsymbol{R}'\boldsymbol{R}'-R'^2\vec{\mathscr{I}}):\nabla\nabla\frac{1}{R}\mathrm{d}V'$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\vec{\mathscr{D}}:\nabla\nabla\frac{1}{R}\tag{6.11}$$

$$\vec{\mathscr{D}}=\int_V\rho(\boldsymbol{R}')(3\boldsymbol{R}'\boldsymbol{R}'-R'^2\vec{\mathscr{I}})\mathrm{d}V'\tag{6.12}$$

$\vec{\mathscr{D}}$称为体系的电四极矩.按(6.11)式定义的电四极矩,有如下性质

$$Q_{11}+Q_{22}+Q_{33}=0$$

因此$\boldsymbol{D}$只有五个独立分量.一般都采用(6.12)式作为电四极矩的定义.

综上所述我们看到,分布在小区域内的电荷产生的电势,可表示为各级矩电势的叠加,各级矩电势的具体形式为

$$\phi^{(0)}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}\tag{6.13}$$

$$\phi^{(1)}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\boldsymbol{p}\cdot\nabla\frac{1}{R}=\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{R}}{4\pi\varepsilon_0R^3}\tag{6.14}$$

$$\phi^{(2)}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\vec{\mathscr{Q}}:\nabla\nabla\frac{1}{R}=\frac{1}{24\pi\varepsilon_0}\vec{\mathscr{Q}}:\frac{3\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}-R^2\vec{\mathscr{I}}}{R^5}\tag{6.15}$$

通过电势的分布状况,可以推知区域内电荷的分布性质.例如由球对称的电势分布,可推知体系的电偶极矩和电四极矩为零,进而定出体系的电荷是球对称分布的.

例1 计算一个半径为a,体电荷密度为ρ的均匀带电球的电偶极矩和电四极矩.

解 电偶极矩

$$\boldsymbol{p}=\int_V\rho\boldsymbol{R}'\mathrm{d}V'=\rho\int_V\boldsymbol{R}'\mathrm{d}V'=0$$

由于球对称,对任意$\boldsymbol{R}'$必有负$\boldsymbol{R}'$与之对应,故积分为零.

电四极矩

$$\vec{\mathscr{D}}=\int_V(3\boldsymbol{R}'\boldsymbol{R}'-\boldsymbol{R}'^2\vec{\mathscr{I}})\rho\mathrm{d}V'$$

$$Q_{11}=\int_V(3x'^2-R'^2)\rho\mathrm{d}V'$$

由于球对称,必有

$$\int_V x'^2\mathrm{d}V'=\int_V y'^2\mathrm{d}V'=\int_V z'^2\mathrm{d}V'=\frac{1}{3}\int_V R'^2\mathrm{d}V'$$

将上式代入Q_{11}的表示式即得$Q_{11}=0$,同理$Q_{22}=Q_{33}=0$

$$Q_{12}=\rho\int_V 3x'y'\mathrm{d}V'$$

$$= \rho\int_0^a R'^4 \mathrm{d}R' \int_0^{\pi} \sin^3\theta' \mathrm{d}\theta' \int_0^{2\pi} \cos\varphi' \sin\varphi' \mathrm{d}\varphi' = 0$$

同理，$Q_{13}=Q_{23}=0$.

例 2 如图 3.21 所示，有一均匀带电的回转椭球体，回转半径为 a，轴半径长为 c，总电量为 q，计算其电偶极矩、电四极矩以及远处的电势.

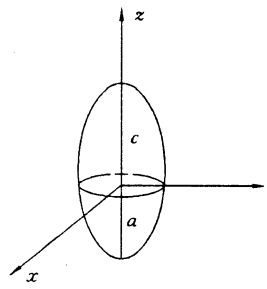


图 3.21

解 选广义球坐标：

$$x = aR\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = bR\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = cR\cos\theta$$

由雅可比行列式可算出

$$\mathrm{d}V' = abcR^2\sin\theta \mathrm{d}R'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\varphi'$$

本题中 $a=b$. 电偶极矩

$$\boldsymbol{p} = \int_{V'} \rho\boldsymbol{R}' \mathrm{d}V' = \rho\int_{V'} \boldsymbol{R}' \mathrm{d}V' = 0$$

因椭球是柱对称的，对任意点 $\boldsymbol{R}'$，都可找到相应的一 $\boldsymbol{R}'$ 点，故积分必然为零.

$$\overleftrightarrow{\mathscr{D}} = \int_V (3\boldsymbol{R}'\boldsymbol{R}' - \boldsymbol{R}'^2\overleftrightarrow{\mathscr{I}})\rho(\boldsymbol{R}')\mathrm{d}V'$$

$$Q_{11} = \int_V \rho(3x'x' - R'^2)\mathrm{d}V' = \frac{q}{5}(a^2 - c^2) \tag{6.16}$$

对回转椭球有 $Q_{11}=Q_{22}$. 再由 $Q_{11}+Q_{22}+Q_{33}=0$，可得 $Q_{33}=-2Q_{11}$. 再由对称性分析或直接计算可得 $Q_{12}=Q_{13}=Q_{23}=0$.

四极矩的电势

$$\phi^{(2)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\overleftrightarrow{\mathscr{Q}} : \nabla\nabla\frac{1}{R}$$

$$= \frac{\overleftrightarrow{\mathscr{Q}}}{24\pi\varepsilon_0} : \frac{(3\boldsymbol{R}\boldsymbol{R} - R^2\overleftrightarrow{\mathscr{I}})}{R^5}$$

注意 $\overleftrightarrow{\mathscr{Q}} : \mathscr{I} = Q_{11}+Q_{22}+Q_{33}=0$，所以

$$\phi^{(2)} = \frac{3\overleftrightarrow{\mathscr{D}} : \boldsymbol{R}\boldsymbol{R}}{24\pi\varepsilon_0 R^5} = \frac{3(Q_{11}x^2 + Q_{22}y^2 + Q_{33}z^2)}{24\pi\varepsilon_0 R^5}$$

$$= \frac{q}{40\pi\varepsilon_0}(c^2 - a^2)\frac{3z^2 - R^2}{R^5}$$

椭球电偶极矩为零，总电荷为 q，电势取近似到四极矩项时为

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} + \frac{c^2 - a^2}{10}\frac{3\cos^2\theta - 1}{R^3}\right)$$

上例表明，回转椭球 的电四极矩只由一个分量 Q_{33} 就可表征出来. 实验证明大多数原子核的形状是偏离球形不大的轴对称椭球. 原子核的总电荷为 Ze，Z 是核的电荷数，e 是基本电荷. 定义原子核的电四极矩为

$$Q = \frac{1}{e}Q_{33} = \frac{1}{e}\int_V \rho(3z'^2 - R'^2)\mathrm{d}V'$$

如果假定原子核电荷均匀分布于椭球内，则由(6.16)式有

$$Q=\frac{2}{5}Z(c^2-a^2) \tag{6.17}$$

当 $c=a$ 时，$Q=0$，即球形核的电四极矩为零；$c>a$ 时，$Q>0$，即长椭球形原子核具有正的电四极矩；$c<a$ 时，$Q<0$，即扁椭球形原子核具有负的电极矩. 因此，根据电四极矩 Q 值的大小和符号可以推知原子核偏离球形的程度，实验表明，电四极矩有正有负，多数是正值，这说明大多数原子核的形状是长椭球.

§7 静电场的能量与静电作用力

1. 静电场的能量

电磁场能量的最普遍表达式为

$$W=\frac{1}{2}\int(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H})\mathrm{d}V$$

只存在静电场时，静电场总能量为

$$W=\frac{1}{2}\int\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}V \tag{7.1}$$

这表明能量分布于整个电场，场能密度为

$$W=\frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E} \tag{7.2}$$

静电场总能量也可以通过电势和电荷分布表出. 由 $\boldsymbol{E}=-\nabla\phi$ 和 $\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$ 得

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}=-\nabla\phi\cdot\boldsymbol{D}=-\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{D})+\phi\nabla\cdot\boldsymbol{D}$$

代入(7.1)式有

$$\begin{aligned}W&=\frac{1}{2}\int\phi\nabla\cdot\boldsymbol{D}\mathrm{d}V-\frac{1}{2}\int\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{D})\mathrm{d}V\\&=\frac{1}{2}\int\rho\phi\mathrm{d}V-\frac{1}{2}\oint\phi\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\end{aligned} \tag{7.3}$$

当面积分遍及无穷远界面时，按 $1/r$ 趋于零. 上式化为

$$W=\frac{1}{2}\int\rho\phi\mathrm{d}V \tag{7.4}$$

这是静电场总能量的另一种表达式. 因为能量分布于整个电场，不只存在于电荷分布区域内，故不应该把 $\frac{1}{2}\rho\phi$ 看做场能密度.

若空间充满均匀介质，则电势

$$\phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\frac{1}{r}\rho(\boldsymbol{R}')\mathrm{d}V'$$

可得静电场总能量的又一表达式

$$W=\frac{1}{8\pi\varepsilon}\int\frac{1}{r}\rho(\boldsymbol{R})\rho(\boldsymbol{R}')\mathrm{d}V\mathrm{d}V' \tag{7.5}$$

这是电荷之间相互作用能的形式. (7.4)与(7.5)只适用于静电场的情况，而(7.1)适用于任何电场的情况. 静电场决定于电荷分布，因而静电场能量也由电荷分布所决定，故总能量也可通过电荷分布来表示. 在变化电磁场情况下，电场和磁场互相激发形成电磁波，可以脱离场源独立运动，因而电磁场总能量不可能完全由电荷、电流分布表示出来.

例 1 求真空中 n 个点电荷系统的静电能量.

解 设第 i 个点电荷的电量为 q_i，位于 $\boldsymbol{R}_i$，故电荷密度为

$$\rho(\boldsymbol{R}') = \sum_{i=1}^{n} q_i \delta(\boldsymbol{R}' - \boldsymbol{R}_i)$$

静电场能量为

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\int \rho\phi \mathrm{d}V \\ &= \frac{1}{2}\sum_i q_i \int \phi(\boldsymbol{R}')\delta(\boldsymbol{R}' - \boldsymbol{R}_i)\mathrm{d}V' \\ &= \frac{1}{2}\sum_i q_i \phi_i \end{aligned} \tag{7.6}$$

式中 ϕ_i 是第 i 个点电荷所在处的电势，不包括第 i 个点电荷自身的贡献.

$$\phi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{1}{r}\rho(\boldsymbol{R}')\mathrm{d}V' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i\neq j}^{n}\frac{q_i}{r_{ij}}$$

式中 $r_{ij} = |\boldsymbol{R}_i - \boldsymbol{R}_j|$，故

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{ij}\frac{q_i q_j}{r_{ij}} \tag{7.7}$$

这是点电荷之间的相互作用能，不包括点电荷自身的固有能.

例 2 求真空中带电导体球的静电能量.

解 设导体球的半径为 a，所带电量为 Q，电荷均匀分布于导体球的表面，整个导体为等势体，电势为

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a}$$

故静电总能量由(7.4)式得

$$W = \frac{1}{2}\oint \sigma\phi \mathrm{d}S = \frac{1}{2}Q\phi = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{a} \tag{7.8}$$

静电场总能量也可由(7.1)式求出. 因为电场强度为

$$\boldsymbol{E} = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^3}\boldsymbol{r}, & r > a \\ 0, & r < a \end{cases}$$

所以

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0\int E^2 \mathrm{d}V = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_a^{\infty}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{a}$$

由(7.5)式求 W 最麻烦，

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\int \frac{\sigma(\boldsymbol{R})\sigma(\boldsymbol{R}')}{r}\mathrm{d}S\mathrm{d}S'$$

式中(图 3.22)

$$\begin{aligned} r &= |\boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}'| \\ &= (R^2 + R'^2 - 2RR'\cos\theta')^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2}\,a(1 - \cos\theta')^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

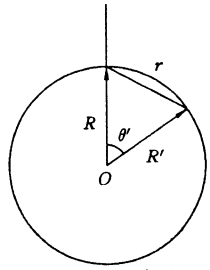


图 3.22

$$W=\frac{\sigma^2}{8\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}S\int \frac{a^2\sin\theta'\,\mathrm{d}\theta'\,\mathrm{d}\phi'}{\sqrt{2}\,a(1-\cos\theta')^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{\sigma^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{a^2}{\sqrt{2}\,a}2\pi(2\sqrt{1-\cos\theta'})\Big|_0^{\pi}\int \mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{a}\quad\left(\text{其中}\ \sigma=\frac{Q}{4\pi a^2}\right)$$

电子具有电荷 $e=-1.60\times10^{-19}\mathrm{C}$，静止质量 $m_e=9.11\times10^{-31}\mathrm{kg}$，按相对论，电子的静止能量为

$$W=m_ec^2$$

式中 $c=2.998\times10^8\mathrm{m/s}$，是真空中的光速. 假定电子是直径为 r_e 的导体球，则其电能为

$$W=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_e}$$

如两者相等，由此可估算出

$$r_e=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{m_ec^2}=2.82\times10^{-15}\mathrm{m}\tag{7.9}$$

依此作为描述电子大小的尺度，称为“电子经典半径”.

2. 电多极子与外电场的相互作用能

在微观物理中，常需要电多极子与外电场相互作用能的知识. 先介绍一下相互作用能的概念. 设小区域电荷体系的电荷密度为 ρ，所产生的电势为 ϕ，当它单独存在时的能量为

$$W_1=\frac{1}{2}\int\rho\phi\mathrm{d}V$$

设外电场的电势为 ϕ_e，其电荷分布为 ρ_e，则它的电场能量为

$$W_2=\frac{1}{2}\int\rho_e\phi_e\mathrm{d}V$$

当小区域电荷体系与外场源同时存在时，静电场的总能量为

$$W=\frac{1}{2}\int(\rho+\rho_e)(\phi+\phi_e)\mathrm{d}V\neq W_1+W_2$$

W 与 W_1+W_2 的相差是由于两体系间存在相互作用的缘故，故

$$W_I=W-(W_1+W_2)=\frac{1}{2}\int(\rho\phi_e+\rho_e\phi)\mathrm{d}V$$

称为相互作用能. 由于

$$\int\rho\phi_e\mathrm{d}V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{R})\rho_e(\boldsymbol{R}')}{r}\mathrm{d}V\mathrm{d}V'=\int\rho_e\phi\mathrm{d}V'$$

而且体积分都对整个空间进行，故相互作用能可表为

$$W_I=\int\rho\phi_e\mathrm{d}V\tag{7.10}$$

上式积分区域实际上只有 $\rho\neq0$ 的小区域内，ϕ_e 的变量变化的范围很小. 设原点选在小区域内，可将 $\phi_e(\boldsymbol{R})$ 在 $\boldsymbol{R}=0$ 点附近展开为

$$\phi_e(\boldsymbol{R})=\phi_e(0)+\boldsymbol{R}\cdot(\nabla\phi_e)_{R=0}+\frac{1}{2}\boldsymbol{RR}:(\nabla\nabla\phi_e)_{R=0}+\cdots$$

将上式代入(7.10)式，得

$$W_I=W^{(0)}+W^{(1)}+W^{(2)}+\cdots$$

其中

$$W^{(0)} = \int \rho\phi_e(0)\mathrm{d}V = q\phi_e(0) \tag{7.11}$$

$$W^{(1)} = \int \rho \boldsymbol{R} \cdot (\nabla\phi_e)_0 \mathrm{d}V = \boldsymbol{p} \cdot \nabla\phi_e = -\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E}_e \tag{7.12}$$

$$W^{(2)} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}V \rho \boldsymbol{RR} : (\nabla\nabla\phi_e)_0 \tag{7.13}$$

注意到外场源距离小区域较远，故

$$\overleftrightarrow{\mathscr{I}} : (\nabla\nabla\phi_e)_0 = (\nabla^2\phi_e)_0 = 0$$

可将(7.13)式改写为

$$W^{(2)} = \frac{1}{6}\int \mathrm{d}V \rho(3\boldsymbol{RR} - R^2\mathscr{I}) : (\nabla\nabla\phi_e)_0$$

$$= -\frac{1}{6}\overleftrightarrow{\mathscr{D}} : \nabla \boldsymbol{E}_e \tag{7.14}$$

由此看到，$W^{(0)}$是点电荷在外场中的能量；$W^{(1)}$是电偶极子在外场中的能量；$W^{(2)}$则是电四极子在外场中的能量. 故小区域电荷体系在外场中的能量可用各级电多极子与外场的相互作用能之和来表示.

3. 由静电能量计算静电相互作用力

计算带电体在电场中受力最直接的方法是利用库仑定律，但实际计算时只对点电荷利用库仑定律才较方便. 在很多情况下，由能量变化来计算力更简单. 带电体在电场中处于平衡状态，一定有机械力和电力同时作用于带电体，并且两者大小相等方向相反. 为计算作用在带电体上的电力，设想带电体的广义坐标 η_i 发生了虚位移 $\delta\eta_i$，与广义坐标 η_i 相应的广义力 F_i 做功 $F_i\delta\eta_i$，若带电体系是孤立的，不和外电源相连，则电力做功 A 应等于体系静电能量 W 的减少，即

$$A = -\delta W$$

$$A = \sum_i F_i\delta\eta_i = -\sum_i \frac{\partial W}{\partial \eta_i}\delta\eta_i = -\delta W$$

于是求得

$$F_i = -\frac{\partial W}{\partial \eta_i} \tag{7.15}$$

若在变化过程中，带电体的固有能不发生变化，上式中的 W 就是带电体之间的相互作用能.

由(7.15)算出的 F_i 可能为正号也可能是负号，由它的正负号可决定广义力 F_i 的方向. 广义力做功后总是使体系的能量减少，即 $\delta W<0$，因此 F_i 与 $\delta\eta_i$ 同号. 当 $F_i>0$，则广义力的方向使 $\delta\eta_i>0$；反之，当 $F_i<0$，则广义力的方向使 $\delta\eta_i<0$.

例 1 计算电偶极矩为 $\boldsymbol{p}$ 的电偶极子在外电场 $\boldsymbol{E}$ 中受的作用力与力矩.

解 由(7.12)式，电偶极子在外电场 $\boldsymbol{E}$ 中的势能为

$$W = -\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E}$$

假定在外电场力作用下，电偶极矩 $\boldsymbol{p}$ 不改变，则由(7.15)式，作用在电偶极子上的力矩 L 为

$$L = -\frac{\partial W}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}(pE\cos\theta) = -pE\sin\theta$$

力矩的方向是使 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 的夹角 θ 减少，故可改写成矢量形式

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E} \tag{7.16}$$

作用在偶极矩上的力为

$$\boldsymbol{F} = -\nabla W = \nabla(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E})$$

由场方程

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=0$$

可得

$$\boldsymbol{p}\times(\nabla\times\boldsymbol{E}) = \nabla(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}) - \boldsymbol{p}\cdot\nabla\boldsymbol{E} = 0$$

所以

$$\boldsymbol{F} = \nabla(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{p}\cdot\nabla\boldsymbol{E} \tag{7.17}$$

上式表明，在均匀电场中电偶极子不受力，由(7.16)式，它只受力矩的作用，力矩使电偶极矩转向电场 E 的方向. 在非均匀电场中，它同时受力矩与力的作用.

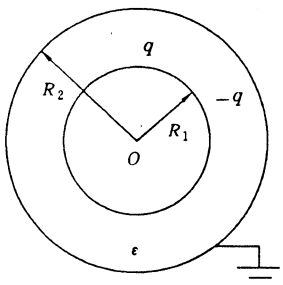


图 3.23

例 2 如图 3.23 所示两同心导体球壳的内、外半径分别为 R_1、R_2，内球带电 q，外球接地，球壳间充满介电常数为 ε 的均匀介质. 求内外球面每单位面积上的力.

解 由对称性可以看出内外球面上受的力都沿半径方向，作用在球面上的总力为零，只有单位面积上的力才有意义. 选单位面积上的力为广义力，相应的广义坐标应为体积，因为广义力与广义坐标乘积的因次是功. 先求出带电导体系的能量. 导体是等势体，只存在面电荷，故

$$W = \frac{1}{2}\int\sigma\phi\mathrm{d}S = \frac{1}{2}\sum_i\oint_{S_i}\sigma\phi_i\mathrm{d}S$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i\phi_i\oint_{S_i}\sigma\mathrm{d}S = \frac{1}{2}\sum_i q_i\phi_i \tag{7.18}$$

两导体球壳间的电势差为

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

由带电导体系的能量公式(7.18)，可得体系的能量为

$$W = \frac{1}{2}q(\phi_1 - \phi_2) = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \tag{7.19}$$

求内球面上的广义力 F_1 时，选广义坐标为 $V_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3$

$$F_1 = -\frac{\partial W}{\partial V_1}$$

$$= -\frac{q^2}{8\pi\varepsilon}\frac{1}{4\pi R_1^2}\frac{\partial}{\partial R_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$= \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon R_1^4} \tag{7.20}$$

$F_1>0$，故力指向 R_1 增加的方向. 求外球内侧面上单位面积上的力 F_2 时，选广义坐标为 $V_2 = \frac{4}{3}\pi R_2^3$

$$F_2 = -\frac{\partial W}{\partial V_2}$$

$$= -\frac{q^2}{8\pi\varepsilon}\frac{1}{4\pi R_1^2}\frac{\partial}{\partial R_2}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

$$= \frac{-q^2}{32\pi^2\varepsilon R_2^4} \tag{7.21}$$

$F_2<0$，说明力的方向指向 R_2 减少的方向.

(7.15)的公式只适用于孤立体系. 对导体系来说，相当于导体上的总电荷是不变的情况. 如果在导体上保持电势不变，则计算力的公式有所不同. 要保持电势不变，导体系的电容将随之而变化，为了维持导体上的电势不变，外电源必须向导体迁移电荷. 因而外电源将供给体系能量，这时体系就不再是孤立的了. 设 δW_0 为外电源供给的能量，δW 是体系增加的能量，δA 是电场力做的功，按能量守恒定律有

$$\delta W_0 = \delta W + \delta A \tag{7.22}$$

设第 k 个导体上增加的电荷为 δq_k，则外电源供给的能量为

$$\delta W_0 = \sum_{k=1}^{n}\phi_k\delta q_k$$

而导体系的能量为

$$W = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\phi_k q_k$$

故

$$\delta W = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\phi_k\delta q_k$$

由此求得

$$\delta W_0 = 2\delta W$$

将上式代入(7.22)得

$$\delta W = \delta A \tag{7.23}$$

与广义坐标 η_i 对应的广义力为 F_i，则有

$$\delta W = \sum_i \frac{\partial W}{\partial \eta_i}\delta\eta_i = \delta A = \sum_i F_i\delta\eta_i$$

由此求得

$$F_i = \left(\frac{\partial W}{\partial \eta_i}\right)_\phi \tag{7.24}$$

由于这时导体和外电源相连，导体系的能量反而增加，即 $\delta W>0$，故 F_i 与 δq_i 同号，由此可确定力的方向.

注意，在导体上固定电荷时，计算力的公式为

$$F_i = -\left(\frac{\partial W}{\partial \eta_i}\right)_q \tag{7.25}$$

固定电荷与固定电势时计算力的公式相差一负号，实际应用中必须牢记.

对于同一导体系在同一状态下的相互作用力，用上述两种观点计算的结果应该相同. 例如，平行板电容器充电后的能量可写为

$$W = \frac{C}{2}V^2 = \frac{q^2}{2C}$$

V 是两板间的电压，q 是板上的电荷，选两板间的距离 d 为广义坐标，则作用在板上的力为

$$F=\left(\frac{\partial W}{\partial l}\right)_{\phi}=\frac{V^2}{2}\frac{\partial C}{\partial l}$$

$$F=-\left(\frac{\partial W}{\partial l}\right)_{q}=-\frac{q^2}{2}\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{C}\right)=\frac{q^2}{2}\frac{1}{C^2}\frac{\partial C}{\partial l}=\frac{V^2}{2}\frac{\partial C}{\partial l}$$

两种观点计算完全相同.

例 3 一平行板电容器，板长为 l，宽为 b，板间距离 d. 如图 3.24 所示，从板的左部插入一块介质，其介电常数为 ε，插入深度为 x，介质和平板之间无空隙，求介质板上受的力. 略去平板电容器的边缘效应，两板间保持电位差为 V.

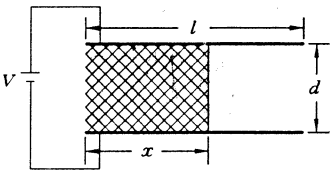


图 3.24

解 首先求电容器的能量

$$W=\frac{V^2}{2}C$$

电容 C 是由两个电容器并联而成，未被介质填充部分的电容为 C_1，其余部分电容为 C_2

$$C_1=\frac{\varepsilon_0(l-x)b}{d},\qquad C_2=\frac{\varepsilon x b}{d}$$

$$C=C_1+C_2=\frac{b}{d}[\varepsilon_0 l+x(\varepsilon-\varepsilon_0)]$$

作用在介质板上的力

$$F_x=\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)=\frac{V^2}{2}\frac{\partial C}{\partial x}=\frac{V^2}{2}\frac{b}{d}(\varepsilon-\varepsilon_0)$$

介质板的横截面为 db，故得作用在单位面积介质板上的力为

$$f_x=\frac{1}{2}\left(\frac{V}{d}\right)^2(\varepsilon-\varepsilon_0)=\frac{E^2}{2}(\varepsilon-\varepsilon_0)$$

显然 $F_x>0$，力的方向沿着 x 增加的方向，即电场力使介质更深地进入电容器中.

思考题与习题三

1. 静电场有哪些基本性质？导体和介质在静电场中的性质有些什么不同？

2. 静电场中的基本问题是什么？如何由电势 ϕ 求 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{D},\boldsymbol{P},\rho,\rho_p,\sigma,\sigma_p$？

3. 当区域内有导体存在时，唯一确定静电场的条件是什么？并证明之.

4. 用唯一性定理解释一下为什么金属壳可以屏蔽壳外静电场对壳内的影响？能否屏蔽球内电荷对壳外电场的影响？

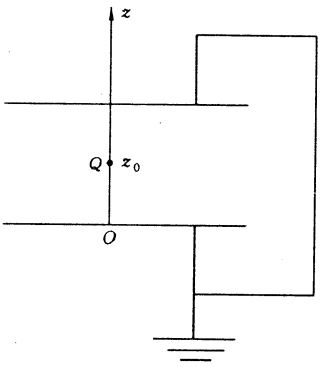
5. 证明静电场中不在电荷处的电势没有极值，而且其电势等于以该点为中心，r 为半径的球面上电势的平均值.

6. 电偶极矩和电四极矩的定义是什么？它们是否与坐标原点的选择有关？分析一下电多极展开各项的物理意义.

7. 静电场能量有几种表达形式？它们所表示的意义有何差别？

8. 计算静电作用力有几种方法？

9. 两块平行的无限大导体平板，相距为 l，在 $(0,0,z_0)$ 处有一点电荷 Q，两导体板接地，求电势分布.

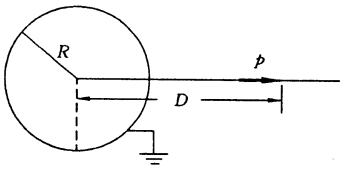


（习题 3.9）

10. 导体半球壳接地，壳内距球心为 ρ 处有一点电荷 Q，球的半径为 R_0，求空间电势分布.

11. 两无限大的接地导体平板，互成直角围成一个空间，在这空间内有一点电荷 Q，距两平面为 a,b，求空间电势.

12. 有一个电矩为 p 的电偶极子，与接地导体球的球心相距为 D，偶矩方向沿着半径的方向，如图示，求空间电势.

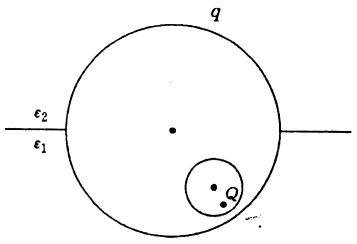


（习题 3.12）

13. 一导体球半径为 a，球内有一不同心球洞，洞的半径为 b，整个球的球心位于两介质的交界上，在球洞内距洞心为 c 处有一点电荷 Q，导体球带电 q.

(1) 求洞中点电荷 Q 受的力 F；

(2) 求空间的自由电荷与束缚电荷的分布情况.



（习题 3.13）

14. 一半径为 a 的介质球的介电常数为 ε，在球外包一层导体，导体层的外半径为 b，介质球均匀带电，其密度为 ρ，导体上带电量 Q，求整个空间的电势分布和导体上的电荷密度以及介质球的总偶极矩.

15. 均匀介质球介电常数为 ε_1，半径为 a，放在一无限大、介电常数为 ε_2 的均匀介质中，在球内离球心为 $b(b<a)$ 处有一电量为 Q 的点电荷，求空间的电场强度和球面上的束缚电荷面密度.

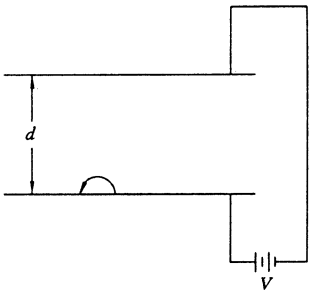
16. 均匀介质球的介电常数为 ε_1，在球中心放一自由电偶极子 p_f，球外充满介电常数为 ε_2 的介质，求空间的电势和极化电荷分布.

17. 平行板电容器的平板间相距为 d，两极间加直流电压 V，下板电势高，在下板内侧面上有一很小的半球突起，球半径为 a，求电容器内的电场和半球上的电荷密度.

18. 一无限长的均匀导体圆柱，半径为 a，处在真空中，在柱外平行柱轴有一无限长的直导线，距柱轴为 b，导线均匀带电，其线电荷密度为 η，求空间电势分布.

19. 求点电荷 q 与半径为 a 的接地导体球间的相互作用能 u 和相互作用力 F，电荷与球心的距离为 d，整个系统位于介电常数为 ε 的均匀电介质内.

20. 有一平板电容器，浸在不可压缩的液体中，并使平板竖直放置，液体的介电常数为 ε，密度为 τ，两板间距离为 d，电势差为 V，求电容器内液体上升的高度.



（习题 3.17）

21. 有一个半径为 R 的未带电导体球浮在液体上，球的质量为 m，液体的介电常数为 ε. 开始导体球有四分之一体积浸在液体内，如果要导体球有一半浸在液体内，必须使导体球带多少电量?

22. 设有两个电偶极子，它们的偶极矩大小相等，并都指向 z 轴方向，其一位置在原点，另一位置在

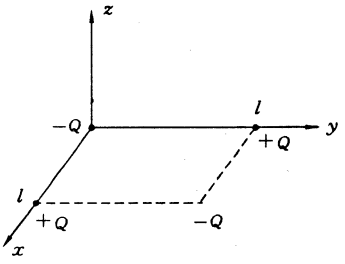
(1) $\theta=\frac{\pi}{2}$，距原点为 R；

(2) $\theta=0$，距原点为 R.

求两种情况下的相互作用能和相互作用力.

23. 有一个电矩为 p 的偶极子，位于距无限大导体平面为 a 处，求偶极子所受的力.

24. 如图示的平面四极子位于 xy 平面内，每个点电荷的电量的数值为 Q，相距为 l，求四极矩和电势.



（习题 3.24）

第四章　稳定电磁场与似稳电磁场

当导体构成的闭合回路中有直流电源时，电荷流动形成稳定电流，此时导体表面存在稳定的电荷分布，稳定的电荷电流产生稳定电磁场. 当导电回路中有交流电源时，会出现周期性变化的交流电，当电流(以及电荷)变化的频率很低，电路范围又不大，则任一时刻周围的电磁场由同一时刻的电荷电流分布决定，从瞬时关系看与稳定电磁场类似，称为似稳电磁场.

直流电和交流电最早应用于生产实践，随着近代科学技术发展，稳定和似稳电磁场理论应用也日益普遍，例如电子光学、电力工程、地球物理勘探等等领域.

电子光学的基本任务就是设计各种形式的电磁场来加速和控制带电粒子，使之成象、成束或产生偏转，以便制造出各种用途的电子器件，如电子显微镜、电子示波器、电子衍射仪、电子转换器、电视机以及各种超高频电子管等等. 这里要解决的中心问题有两个：一是给定电荷、电流分布，确定电磁场的分布，并求出带电粒子在电磁场中运动的轨迹；另一个是，按照想要获得的电子束运动轨迹参数，求所需要的电磁场，并设计出能产生此种场的电极、磁极和线圈电流分布等. 解决这些问题的出发点就是电磁场方程.

电力工程中的重要问题是高压输电，那里有许多高压静电场的计算问题. 高压输电线上带有电荷，可近似看为稳定的分布，这些电荷与周围的物体相互影响，会产生非常复杂的电场. 设计线路时许多问题必须要考虑，例如，输电线应架设多高？各相输电线之间应相距多远？每相导线要不要分裂成几根？各根导线如何配置？与铁塔联结的绝缘子串应选用多大尺寸，什么材料？在发电厂和变电所，高压线要穿过房屋的墙壁，穿墙的洞应开多大？以及高压线的防雷接地等问题. 要正确解决这些设计问题，首先应根据传输的电压和电流，再考虑到周围介质情况算出电场分布.

地球物理勘探也是应用电磁理论的一个广阔领域. 地质勘探的任务是找出地下的矿产分布，各种矿物的电导率、磁导率、介电常数不同. 将电极埋入地下一定位置，通以电流，就会在周围形成电磁场，不同的矿物分布对电磁场分布的影响也不同. 测出这些场的分布，就可推知地下矿产的性质和分布情况. 这里的关键问题仍然是计算电磁场分布.

总之，各种应用都离不了电磁场的分析和计算. 前一章介绍了计算静电场的一些基本方法，本章主要介绍稳定电磁场和似稳电磁场的问题.

§1　稳定电磁场的基本方程

稳定电磁场的基本特征是：电荷电流分布与一切场量均不随时间变化. 在普遍的场方程中，令

$$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial \rho}{\partial t}=0$$

即可得稳定电磁场方程

$$
\begin{aligned}
&\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho, && \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \\
&\nabla \times \boldsymbol{E} = 0, && \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\
&\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) = 0, && \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) = \boldsymbol{a} \\
&\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1) = \sigma, && \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1) = 0 \\
&\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, && \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \\
&\boldsymbol{J} = \sigma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}_{外}) && \\
&\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0, && \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{J}_2 - \boldsymbol{J}_1) = 0
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

由上述方程可见，在稳定的电荷电流分布周围存在稳定不变的电磁场. 电场和磁场虽然同时存在，但可以分别求解.

虽然电流密度 $\boldsymbol{J} \neq 0$，但电荷分布仍是稳定不变的，$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$，这是因为稳定电流满足

$$
\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0, \qquad \oint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{1.2}
$$

对于任一区域，流入的电量和流出的电量相等，故电荷分布保持稳定不变. 电场是由稳定的电荷分布产生的，磁场则是由稳定的电流分布产生的.

(1.1)式的左边部分是稳定电场方程. 由 $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$，$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$ 可见稳定电场与静电场的性质相同，它是由稳定电荷分布产生的无旋场，但空间自由电荷分布并不预先给定，是未知的，因此并不能由这两个方程来确定稳定电场. 由公式 $\boldsymbol{J} = \sigma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}_{外})$ 可见，稳定电流是由稳定电场 $\boldsymbol{E}$ 和非静电的外力场 $\boldsymbol{E}_{外}$ 共同决定的. $\boldsymbol{E}_{外}$ 只存在电源内部，但对形成稳定电流起着决定性作用. 由于电流 $\boldsymbol{J} \neq 0$，因此要产生焦耳热，使一部分电磁场能量转变为热能，如不及时补充能量，电磁场就不能保持稳定. 从能量守恒定律可以看得更清楚.

$$
\int \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E} \mathrm{d}V = -\frac{\partial}{\partial t} \int w \mathrm{d}V - \oint \boldsymbol{S} \cdot \mathrm{d}\sigma
$$

在稳定条件下

$$
\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H}) = 0
$$

把

$$
\boldsymbol{E} = \frac{1}{\sigma} \boldsymbol{J} - \boldsymbol{E}_{外}
$$

代入得

$$
\int \frac{1}{\sigma} \boldsymbol{J}^2 \mathrm{d}V = \int \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E}_{外} \, \mathrm{d}V - \oint \boldsymbol{S} \cdot \mathrm{d}\sigma \tag{1.3}
$$

由于 $\boldsymbol{E}_{外}$ 只存在于电源区，将上式用到电源区以外的导体上，$\boldsymbol{E}_{外} = 0$，故

$$
\int \frac{1}{\sigma} \boldsymbol{J}^2 \mathrm{d}V = -\oint \boldsymbol{S} \cdot \mathrm{d}\sigma \tag{1.4}
$$

导体上的焦耳热损耗等于流入的电磁能量. 用到电源区，则

$$
\int \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E}_{外} \, \mathrm{d}V = \int \frac{1}{\sigma} \boldsymbol{J}^2 \mathrm{d}V + \oint \boldsymbol{S} \cdot \mathrm{d}\sigma \tag{1.5}
$$

外来电动力所做的功等于电源内消耗的焦耳热加上流出去的能量. 应用到整个电磁场空间，有

$$
\oint \boldsymbol{S} \cdot \mathrm{d}\sigma = \oint (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \cdot \mathrm{d}\sigma = 0
$$

故

$$\int \frac{1}{\sigma} J^2 \mathrm{d}V = \int \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E}_{外} \mathrm{d}V \tag{1.6}$$

全部焦耳热损耗完全由外电源供给. 若 $\boldsymbol{E}_{外}$ 处处为零，则 $\boldsymbol{J}=0$，不可能有稳定电流. 因此外来电动力 $\boldsymbol{E}_{外}$ 是形成稳定电流的必要条件.

为了对稳定电场的实际问题有形象的了解，以石油测井为例(见图 4.1)，说明如何确定稳定电场分布. 电阻率测井是利用含油层与其它地层电阻率不同的特点来探测地下油层的分布情况. 将供电电极 A 放入充满泥浆的井筒中，A，B 两个电极与外电源相连，在地下形成稳定的电流分布. 当电极 A 处于不同层段时，电极周围的电场分布也不同，测出电极 A 附近的电场，就可判断出各层段的电阻率异差，从而确定含油层的位置. 作为判断的依据，在理论上应先计算出各种地层条件下稳定电流和电场的分布.

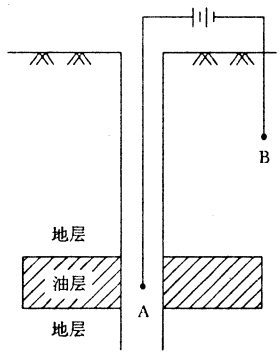


图 4.1

在理论上要算出稳定电场的分布，必须先给定 $\boldsymbol{E}_{外}$ 和导体的分布情况，再求解下列方程

$$\begin{aligned} &\nabla \times \boldsymbol{E} = 0, \\ &\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0, \qquad \boldsymbol{J} = \sigma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}_{外}) \\ &\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) = 0, \qquad \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{J}_2 - \boldsymbol{J}_1) = 0 \end{aligned} \tag{1.7}$$

实际上给定的只是外电源的电动势，$\boldsymbol{E}_{外}$ 的具体形式是不知道的，直接求解(1.7)式不可能. 通常的做法是把 $\boldsymbol{E}_{外}$ 的作用通过电极体现出来，电极作为边界，设法确定电极上的边界条件. 这样在待求场的区域内就没有 $\boldsymbol{E}_{外}$ 存在了，场方程可进一步简化. 在上述测井的例子中，我们感兴趣的是电极 A 周围的电场，电极 B 离得很远，它的影响可略去不计. 这样上述问题可简化为：给定电极 A 的边界条件，求解电极 A 周围的导电介质内的电场分布.

由 $\nabla \times \boldsymbol{E}=0$ 可引入电势 ϕ

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$$

把它代入方程

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = \nabla \cdot \sigma \boldsymbol{E} = 0 \tag{1.8}$$

在每一均匀导电介质内 σ=常数，电势 ϕ 满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \phi = 0 \tag{1.9}$$

在两种导电介质的边界上应满足一定的边界条件

$$\phi_1 = \phi_2 \tag{1.10}$$

由

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{J}_2 - \boldsymbol{J}_1) = 0$$

可得另一条件

$$\sigma_2 E_{2n} - \sigma_1 E_{1n} = 0$$

即

$$\sigma_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} = \sigma_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} \tag{1.11}$$

再来看电极上的条件. 作为电极的导体，其电导率都很高，可近似看做理想导体，即认为电导率 $\sigma \to \infty$. 但电极上的电流密度 $\boldsymbol{J}=\sigma \boldsymbol{E}$ 总是有限的，因而电极导体内的电场 $\boldsymbol{E} \to 0$，电极上的电势为常数. 电极上有两类边界条件：一类是给定电极上的电势 ϕ_i，另一类是给定电极上的总

电流强度，即

$$I_i = \oint_S \boldsymbol{J}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\oint_S \sigma \frac{\partial \phi}{\partial n} \mathrm{d}S \tag{1.12}$$

上述两类条件只要给定一类就可完全确定待求区域内的电场分布，这和静电场中导体上的边界条件相似.

为更清楚看出静电场方程和导体中的稳定电场方程的相似性，将它们对照写在下面：

介质中的静电场	导体中的稳定电场
$\nabla \times \boldsymbol{E}=0$，	$\nabla \times \boldsymbol{E}=0$
$\nabla \cdot \boldsymbol{D}=0$（$\rho=0$ 处），	$\nabla \cdot \boldsymbol{D}=0$
$\boldsymbol{D}=\varepsilon \boldsymbol{E}$，	$\boldsymbol{J}=\sigma \boldsymbol{E}$（$\boldsymbol{E}_{外}=0$ 处），
$\boldsymbol{E}=-\nabla \phi$，	$\boldsymbol{E}=-\nabla \phi$
$\nabla^2 \phi=0$，	$\nabla^2 \phi=0$
$\phi_i=$常数（导体上），	$\phi_i=$常数（理想导体上）
$Q_i = \oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$	$I_i = \oint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$
$= -\oint_S \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial n} \mathrm{d}S$	$= -\oint_S \sigma \frac{\partial \phi}{\partial n} \mathrm{d}S$

由对比看出：在静电场中（$\rho=0$ 区域）的 $\boldsymbol{D}$ 与稳定电场中（$\boldsymbol{E}_{外}=0$ 区域）的 $\boldsymbol{J}$ 相似；静电场中导体上的电荷 Q 与稳定电场中电极（理想导体）上的电流 I 相似；介电常数 ε 与电导率 σ 的作用相似. 利用这种相似性，求解稳定电场时就可利用静电场的结果.

例 1 如图 4.2 所示，半径为 a 的球形电极埋在无限的均匀导电介质中，电导率为 σ，已知电极上总电流为 I，试计算空间的电场分布.

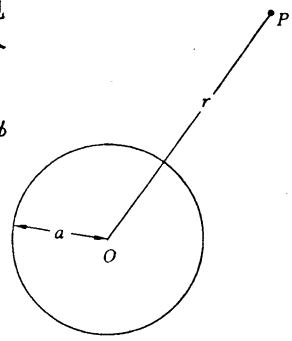


图 4.2

解 设电极外空间电势为 ϕ，已知边界条件：在无限远界面上 $\phi=0$，在电极上给定了总电流 I.

电势 ϕ 满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \phi = 0$$

因为此问题具有球对称性，可选球坐标系，原点在电极中心，则

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{\mathrm{d}r}\left(r^2 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\right) = 0$$

它的解为

$$\phi = -\frac{c}{r} + d \tag{1.13}$$

c, d 为待定系数. 由 $r \to \infty$ 时 $\phi=0$，可定出 $d=0$；由 $r=a$ 时

$$\oint \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\sigma \oint \frac{\partial \phi}{\partial r} \mathrm{d}S = I$$

可定出

$$c = -\frac{I}{4\pi\sigma}$$

将 c, d 代入(1.13)式得

$$\phi = \frac{I}{4\pi\sigma} \frac{1}{r}, \qquad \boldsymbol{E} = \frac{I}{4\pi\sigma} \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{1.14}$$

利用稳定电场与静电场的相似性，对处于均匀介质(介电常数为 ε)的带电导体球(总电量为 Q)的电势和场强，作替换 $Q\to I$，$\varepsilon\to\sigma$，也得上述结果.

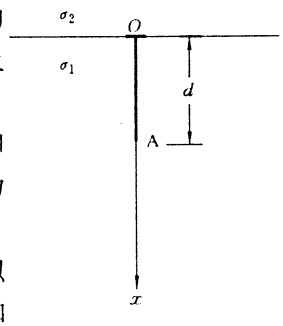


图 4.3

例 2 以水平面为分界面，整个空间充满了电导率分别为 σ_1 和 σ_2 的均匀导电介质，在导电介质 1 中有一点电极 A，与界面相距为 d，已知电极上的总电流为 I，求空间的电势分布.

解 这是一个稳定电场问题，可利用稳定电场和静电场的相似性来求解. 此问题与上一章电象法的例 4 完全相似，故可取坐标系如图 4.3 所示，将第三章(3.16)式的 ε 换为 σ，电量 q 换为电流 I，即可得出本题所求的电势

$$\phi_1=\frac{I}{4\pi\sigma_1}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-\mathrm{d})^2+y^2+z^2}}+\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}\frac{1}{\sqrt{(x+\mathrm{d})^2+y^2+z^2}}\right]$$

$$\phi_2=\frac{2I}{4\pi(\sigma_1+\sigma_2)\sqrt{(x-\mathrm{d})^2+y^2+z^2}} \tag{1.15}$$

如介质 2 为绝缘介质，$\sigma_2=0$，这时

$$\phi_1=\frac{1}{4\pi\sigma_1}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-\mathrm{d})^2+y^2+z^2}}+\frac{1}{\sqrt{(x+\mathrm{d})^2+y^2+z^2}}\right]$$

$$\phi_2=\frac{2I}{4\pi\sigma_1}\frac{1}{\sqrt{(x-\mathrm{d})^2+y^2+z^2}} \tag{1.16}$$

在导电介质的边界上电流的法线分量为零

$$J_{1n}=\sigma_1E_{1n}=\sigma_1\frac{\partial\phi_1}{\partial x}=0$$

由(1.16)式看到，这时象电流与原电流相同，保证了上述边界条件得到满足.

上述结果在电力工程中有实际用途. 在电力工程中常遇到接地问题，将高压设备与大地相连，一般是将一金属导体埋在地下，再将电力设备与此金属导体连结. 接地电极上有电流流入大地，因而在大地中形成稳定电场，在电极附近的地面上各点就出现电势差. 当人进入这个区域时，人体两脚之间的电势差称为跨步电压，跨步电压超过允许值时，就将危及人身的安全. 设计接地电极时，必须估算出跨步电压的大小. 将接地电极近似看成球形，虽不是点电极，仍可用(1.16)式求电势分布. 假定电极埋得不太深，近似可取 $d=0$，于是地面上距电极为 r 处的电势为

$$\phi=\frac{I}{2\pi\sigma r}$$

设人的跨步距离为 l，则跨步电压为

$$\Delta\phi=\frac{I}{2\pi\sigma}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r+l}\right)\approx\frac{I}{2\pi\sigma}\frac{l}{r^2} \tag{1.17}$$

取 $\Delta\phi$ 为最大允许的跨步电压，则 r 就是危险区的边界，不允许进入以 r 为半径的危险区，就可保证安全.

例 3 将上题用分离变量法求解.

解 前面已用电象法解出这个问题，现用分离变量法求解. 这时的分界面虽是平面，但电势分布有柱对称性(见图 4.4)，选柱坐标系，电势只是 (r,z) 的函数. 设电势分别为 ϕ_1，ϕ_2，它们满足方程

$$\nabla^2\phi_1 = -\frac{I}{\sigma_1}\delta(x,y,z) \tag{1.18}$$

$$\nabla^2\phi_2 = 0 \tag{1.19}$$

先将(1.18)的泊松方程特解分出，它的解可写为

$$\phi_1 = \frac{I}{4\pi\sigma_1}\frac{1}{R} + \phi \tag{1.20}$$

$$\nabla^2\phi = 0 \tag{1.21}$$

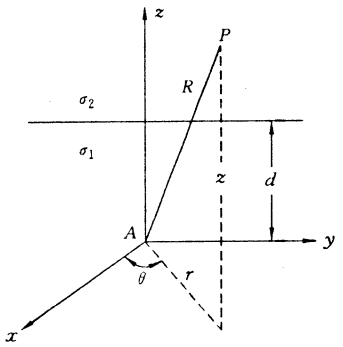


图 4.4

在柱坐标系中(1.21)的形式为

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$$

令 $\phi=u(r)v(z)$，代入后得

$$\frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{ru}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = -\frac{1}{v}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}z^2} = -\lambda^2$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} + \lambda^2u = 0 \tag{1.22}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}z^2} - \lambda^2v = 0 \tag{1.23}$$

(1.22)式是零阶贝塞尔方程，它的两个线性无关解为

$$J_0(\lambda r), \qquad N_0(\lambda r)$$

(1.23)式的两个线性无关解为

$$\mathrm{e}^{\lambda z}, \qquad \mathrm{e}^{-\lambda z}$$

因此$\nabla^2\phi=0$ 的解中包含有四种类型的项

$$J_0(\lambda r)\mathrm{e}^{\lambda z}, \quad J_0(\lambda r)\mathrm{e}^{-\lambda z}, \quad N_0(\lambda r)\mathrm{e}^{\lambda z}, \quad N_0(\lambda r)\mathrm{e}^{-\lambda z}$$

我们应选择满足边界条件的解.

ϕ,ϕ_2 都满足拉普拉斯方程，它们在 $r\to0$ 时都是有限值. 而 $r\to0$ 时函数 $N_0(\lambda r)\to\infty$，所以 ϕ,ϕ_2 的解中不能包含 $N_0(\lambda r)$.

$z\to-\infty$时 $\phi_1=0$，故 ϕ 中不能包含 $\mathrm{e}^{-\lambda z}$的项，于是 ϕ 的解只能由 $J_0(\lambda r)\mathrm{e}^{\lambda z}$的项组成. 为了得到普遍解，应取各种 λ 值的线性组合，由于 λ 取正值，连续变化，故普遍解为

$$\phi_1 = \frac{I}{4\pi\sigma_1}\frac{1}{R} + \int_0^\infty a(\lambda)J_0(\lambda r)\mathrm{e}^{\lambda z}\mathrm{d}\lambda \tag{1.24}$$

同理，为满足 $z\to\infty$时 $\phi_2=0$ 的条件，ϕ_2 的普遍解为

$$\phi_2 = \int_0^\infty b(\lambda)J_0(\lambda r)\mathrm{e}^{-\lambda z}\mathrm{d}\lambda \tag{1.25}$$

式中系数 $a(\lambda),b(\lambda)$可由分界面上的条件来确定，$z=d$ 时

$$\phi_1 = \phi_2, \qquad \sigma_1\frac{\partial\phi_1}{\partial z} = \sigma_2\frac{\partial\phi_2}{\partial z} \tag{1.26}$$

为了能够利用这组边界条件，应将(1.24)式中的第一项也改写成包含 $J_0(\lambda r)$的积分. 利用韦伯-李普希兹公式

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} = \int_0^\infty J_0(\lambda r)\mathrm{e}^{-\lambda|z|}\mathrm{d}\lambda \tag{1.27}$$

于是 ϕ_1 可改写为

$$\phi_1 = \int_0^\infty d\lambda J_0(\lambda r)\left[\frac{I}{4\pi\sigma_1}e^{-\lambda|z|} + a(\lambda)e^{\lambda z}\right] \tag{1.28}$$

利用(1.26)式的边界条件可得

$$\int_0^\infty d\lambda J_0(\lambda r)\left[\frac{I}{4\pi\sigma_1}e^{-\lambda d} + a(\lambda)e^{-\lambda d}\right] = \int_0^\infty d\lambda J_0(\lambda r)b(\lambda)e^{-\lambda d}$$

$$\int_0^\infty d\lambda\sigma_1 J_0(\lambda r)\left[-\lambda\frac{I}{4\pi\sigma_1}e^{-\lambda d} + \lambda a(\lambda)e^{\lambda d}\right] = -\int_0^\lambda d\lambda\sigma_2 J_0(\lambda r)\lambda b(\lambda)e^{-\lambda d}$$

要求上两式对任意 r 值都成立，则必须满足

$$\frac{I}{4\pi\sigma_1}e^{-\lambda d} + a(\lambda)e^{\lambda d} = b(\lambda)e^{-\lambda d} - \frac{I}{4\pi}e^{-\lambda d} + \sigma_1 a(\lambda)e^{\lambda d} = -\sigma_2 b(\lambda)e^{-\lambda d}$$

联立求解上面两个方程，可求出 a，b 系数

$$a(\lambda) = \frac{I}{4\pi\sigma_1}\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}e^{-2\lambda d}$$

$$b(\lambda) = \frac{I}{4\pi\sigma_1}\left(1+\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}\right)$$

将求得的系数 a 代入(1.24)式得

$$\phi_1 = \frac{I}{4\pi\sigma_1}\frac{1}{R} + \frac{I}{4\pi\sigma_1}\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}\int_0^\infty J_0(\lambda r)e^{-\lambda(2d-z)}d\lambda$$

利用(1.27)式可得

$$\int_0^\infty J_0(\lambda r)e^{-\lambda(2d-z)}d\lambda = \frac{1}{\sqrt{r^2+(2d-z)^2}}$$

于是最后得

$$\phi_1 = \frac{I}{4\pi\sigma_1}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} + \frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}\frac{1}{\sqrt{r^2+(2d-z)^2}}\right) \tag{1.29}$$

将系数 b 代入(1.25)式得

$$\phi_2 = \frac{I}{4\pi\sigma_1}\left(1+\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}\right)\int_0^\infty J_0(\lambda r)e^{-\lambda z}d\lambda$$

$$= \frac{I}{4\pi\sigma_1}\left(1+\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}\right)\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} \tag{1.30}$$

(1.29)和(1.30)两式和前面用电象法求得的结果完全相同.

§2 稳定电流磁场的矢势

1. 稳定电流磁场的基本方程

稳定电流磁场的基本方程为

$$\begin{aligned} &\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}, \qquad &&\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1) = \boldsymbol{a} \\ &\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0, \qquad &&\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1) = 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

从上述基本方程可知，稳定电流磁场是有旋无源场，当不存在永久磁体时，它只由稳定电流产生. 能不能仿照静电场情况，引入一个辅助量来简化磁场方程的求解呢？由于这时$\nabla \times \boldsymbol{H} \neq 0$，不能引入一个标量势$\phi$使得$\boldsymbol{H} = -\nabla\phi$，但由$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$可以看出，如果引入一个矢量函数$\boldsymbol{A}$，令$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$，则可以满足上述方程. 称$\boldsymbol{A}$为磁场的矢势，它是求解磁场的一个辅助量.

对均匀各向同性介质，将$\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$代入(2.1)中第一式

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla\nabla \cdot \boldsymbol{A} - \nabla^2\boldsymbol{A} = \mu\boldsymbol{J} \tag{2.2}$$

上式是没有经过简化的矢势$\boldsymbol{A}$所满足的微分方程. 应该指出，满足方程$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$的$\boldsymbol{A}$并不是单值的，若已有一个函数$\boldsymbol{A}$满足

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

则当$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\psi$时仍有

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}' = \nabla \times \boldsymbol{A} + \nabla \times (\nabla\psi) = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

式中ψ是任一标量函数. 可见辅助量$\boldsymbol{A}$相差任一标量函数的梯度时，仍能保证所求出的$\boldsymbol{B}$不变. 根据$\boldsymbol{A}$的非单值性，可以对$\boldsymbol{A}$加一些附加条件，使得(2.2)式化简. 通常选

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0 \tag{2.3}$$

于是(2.2)式化简为

$$-\nabla^2\boldsymbol{A} = \mu\boldsymbol{J} \tag{2.4}$$

(2.4)式就是矢势的微分方程. 上述方程在直角坐标系中的分量方程为

$$\nabla^2 A_i = -\mu J_i \quad (i = x, y, z) \tag{2.5}$$

将它们和静电势方程

$$\nabla^2\phi = -\rho/\varepsilon$$

及其解

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \frac{\rho(\boldsymbol{R}')}{r}\mathrm{d}V'$$

对比，可得矢势$\boldsymbol{A}$的方程解为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R}) = \frac{\mu}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')}{r}\mathrm{d}V' \tag{2.6}$$

由此可算得磁场

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int\left(\nabla \frac{1}{r}\right) \times \boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')\mathrm{d}V' = \frac{\mu}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}V' \tag{2.7}$$

这正是毕奥-萨伐尔定律.

2. 矢势$\boldsymbol{A}$的边界条件

为了能求解几种介质存在时的磁场问题，还应将$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{H}$的边界条件化为$\boldsymbol{A}$的边界条件.

由

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1) = 0$$

得

$$\boldsymbol{n} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}_2 - \nabla \times \boldsymbol{A}_1) = 0$$

在界面上两侧作积分，有

$$\int_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}_2 - \nabla \times \boldsymbol{A}_1) = 0$$

利用斯托克斯公式把上式化为界面上的线积分(图4.5)

$$\oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{l} \cdot (\boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{A}_1) = 0$$

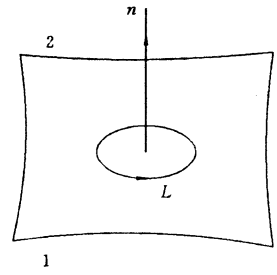


图 4.5

由于$\nabla \cdot \boldsymbol{A}=0$，故$\boldsymbol{A}$是一个旋涡场，旋涡场的环流积分一般不为零，要上式成立，被积函数应该为零，即

$$(\boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{A}_1) \cdot \boldsymbol{e}_i = 0$$

$\boldsymbol{e}_i$表示在分界面上的切线方向. 上式说明为了保证$\boldsymbol{B}$的法线分量连续，$\boldsymbol{A}$的切线分量必须连续，即

$$A_{1t} = A_{2t} \tag{2.8}$$

其次由边界条件

$$\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) = \boldsymbol{a}$$

有

$$\boldsymbol{n} \times \left(\frac{1}{\mu_2} \nabla \times \boldsymbol{A}_2 - \frac{1}{\mu_1} \nabla \times \boldsymbol{A}_1 \right) = \boldsymbol{a}$$

这是矢势的第二个边界条件. 若分界面是柱面，选柱坐标系. 当$\boldsymbol{A}=A\boldsymbol{e}_z$，$\boldsymbol{a}=a\boldsymbol{e}_z$时有

$$\frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_1}{\partial r} - \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_2}{\partial r} = a \tag{2.9}$$

对球面分界面，选球坐标系. 当

$$\boldsymbol{A} = A\boldsymbol{e}_\phi, \qquad \boldsymbol{a} = a\boldsymbol{e}_\phi$$

时，有

$$\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial}{\partial r}(rA_1) - \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial}{\partial r}(rA_2) \right] = a \tag{2.10}$$

(2.9)和(2.10)两式在解决具体问题时是常用的. 但应注意，在某些情况下，也可以不用矢势的边界条件，而直接由矢势$\boldsymbol{A}$算出$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{H}$，再利用场的边界条件.

3. 矢量泊松方程解的唯一性定理

现在讨论磁场矢势的唯一性定理. 为简单起见，假定区域V内没有介质分界面，这时矢势的唯一定理内容如下：给定V内传导电流$\boldsymbol{J}$和V的边界S上的A_t或B_t，则V内的磁场由方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu \boldsymbol{J}$$

与边界条件唯一确定.

证明 设有两个解$\boldsymbol{A}'$，$\boldsymbol{A}''$满足条件，则在V内

$$\nabla^2 \boldsymbol{A}' = -\mu \boldsymbol{J}, \qquad \nabla^2 \boldsymbol{A}'' = -\mu \boldsymbol{J}$$

在V的边界S上

$$A'_t = A_t, \qquad A''_t = A_t$$

令

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}' - \boldsymbol{A}''$$

则在V内有

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = \nabla^2 \boldsymbol{A}' - \nabla^2 \boldsymbol{A}'' = 0$$

在S上有

$$A_t = A'_t - A''_t = 0$$
$$\boldsymbol{B}_t = \boldsymbol{B}'_t - \boldsymbol{B}''_t = 0$$

利用矢量恒等式

$$\nabla \cdot [\boldsymbol{A} \times (\nabla \times \boldsymbol{A})] = (\nabla \times \boldsymbol{A})^2 - \boldsymbol{A} \cdot \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A})$$

再由高斯定理可得

$$\int \nabla \cdot [\boldsymbol{A} \times (\nabla \times \boldsymbol{A})] \mathrm{d}V = \int [(\nabla \times \boldsymbol{A})^2 - \boldsymbol{A} \cdot \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A})] \mathrm{d}V$$

$$= \oint_S \boldsymbol{A} \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

在 V 内 $\nabla^2 \boldsymbol{A} = 0$，故可得

$$\boldsymbol{A} \cdot \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \nabla \cdot \boldsymbol{A} - \nabla^2 \boldsymbol{A}) = 0$$

于是

$$\int (\nabla \times \boldsymbol{A})^2 \mathrm{d}V = \oint \boldsymbol{A} \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$= \oint (\mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{B} = \oint \mathrm{d}S (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{B}$$

$$= \oint A_t B_t \mathrm{d}S$$

在边界 S 上已给定 $A_t = 0$ 或 $B_t = 0$，故

$$\int (\nabla \times \boldsymbol{A})^2 \mathrm{d}V = 0$$

因上式中的 $(\nabla \times \boldsymbol{A})^2 \geqslant 0$，为保证上式成立，在 V 内必须有 $\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} = 0$，即 $\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B}''$，定理得证.

例 1 设 $x > 0$ 的半空间充满磁导率为 μ 的均匀介质，$x < 0$ 的半空间为真空，有线电流 I 沿 z 轴流动，求空间磁场和磁化电流分布.

解 这个问题中，若没有磁介质，场显然是轴对称的. 现在 $x > 0$ 的半空间中充满了均匀磁介质，是否会破坏场的对称性？我们知道介质对磁场的影响主要是产生了磁化电流.

由

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} + \mu_0 \boldsymbol{M} = \mu \boldsymbol{H}$$

可得

$$\boldsymbol{M} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \boldsymbol{H}$$

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}} = \nabla \times \boldsymbol{M} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \boldsymbol{J}$$

可见在均匀介质中 $\boldsymbol{J} = 0$ 处，$\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}} = 0$. 现在，在 $x > 0$ 空间是均匀介质，又没有传导电流，故也不会有磁化电流，磁化电流只能在轴线上. 总的磁场 $\boldsymbol{B}$ 由传导电流与磁化电流产生，则介质的作用又由磁化电流代替. 因此，虽然 $x > 0$ 半空间有介质，表面上看介质分布不对称，但实际上磁场 $\boldsymbol{B}$ 仍有轴对称性，因而 $\boldsymbol{B}$ 沿 $\boldsymbol{e}_\theta$ 方向. 由唯一性定理，只要所求解满足边界条件，所得解正确. $\boldsymbol{B}$ 有轴对称性，显然有 $x = 0$ 面上满足 $\boldsymbol{B}_{1n} = \boldsymbol{B}_{2n} = \boldsymbol{B}$，由于 $\boldsymbol{B}$ 沿 $\boldsymbol{e}_\theta$ 方向，因而在 $x = 0$ 面上只有法线分量而没有切线分量，即满足 $H_{1t} = H_{2t}$，可见上述分析是正确的. 剩下的问题就是把 B 的数值求出来. 设 $x > 0$ 区域磁场强度为 H_1，$x < 0$ 区域为 H_2，由安培环路定理

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{H}_1 \pi r + \boldsymbol{H}_2 \pi r = \boldsymbol{I}$$

$$\left(\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} + \frac{\boldsymbol{B}}{\mu} \right) \pi r = \boldsymbol{I}$$

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0\mu}{\mu_0+\mu}\frac{\boldsymbol{I}}{\pi r}$$

再由

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0\int(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{J}_m)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

求得

$$2\pi rB=\frac{2I\mu_0\mu}{\mu_0+\mu}=\mu_0(I+I_{\mathrm{m}})$$

由此

$$I_{\mathrm{m}}=\frac{\mu-\mu_0}{\mu_0+\mu}I$$

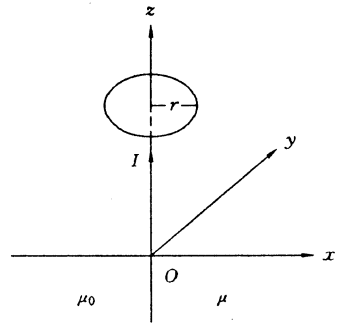


图 4.6

例 2 一半径为 a 的均匀带电的导体球壳，绕自身某一直径以角速度 ω 转动，设球上的总电量为 Q，球内外为真空，计算球内外的磁场.

解 球壳转动时，在球面上出现面电流，面电流密度用球坐标系可表为

$$\boldsymbol{a}=\sigma\boldsymbol{\omega}\times a\boldsymbol{e}_r=\frac{Q}{4\pi a^2}\omega a\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi=\frac{Q\omega}{4\pi a}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi$$

矢势与电流方向一致，故 $\boldsymbol{A}$ 只有 $\boldsymbol{e}_\phi$ 分量，由对称性可知 $\boldsymbol{A}$ 只与(r,θ)有关，即

$$\boldsymbol{A}=A(r,\theta)\boldsymbol{e}_\phi$$

设球内矢势为 $\boldsymbol{A}_1$，球外矢势为 $\boldsymbol{A}_2$，它们满足

$$\nabla^2\boldsymbol{A}_1=0$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A}_2=0$$

注意在球坐标系中基矢量也是变量的函数，必须利用矢量公式

$$\nabla^2\boldsymbol{A}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=-\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$$

来计算$\nabla^2\boldsymbol{A}$ 的分量方程. 由于 $\boldsymbol{A}=A(r,\theta)\boldsymbol{e}_\phi$，可得 $\boldsymbol{e}_\phi$ 方向的分量方程为

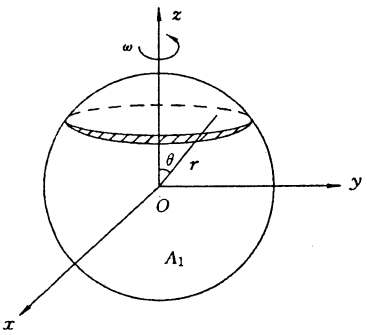


图 4.7

$$(\nabla^2\boldsymbol{A})_\phi=\nabla^2A-\frac{A}{r^2\sin^2\theta}=0$$

在球坐标系中上述方程为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial A}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial A}{\partial\theta}\right)-\frac{A}{r^2\sin^2\theta}=0$$

用分离变量法求解，令

$$A(r,\theta)=u(r)v(\theta)$$

代入上方程后可得

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2}+2r\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}-\lambda u=0 \tag{2.11}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{1}{\sin^2\theta}\right)v=0$$

令 $x=\cos\theta$，上式可化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right]+\left(\lambda-\frac{1}{1-x^2}\right)v=0 \tag{2.12}$$

上述方程只有当 $\lambda=n(n+1)$ 时才有有界解. 在数理方程中已熟知，它是一阶连带勒让德方程，(2.12)的解为

$$\mathrm{P}_n^{(1)}(x)=(1-x^2)^{1/2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{P}_n(x)$$

(2.11)的两个线性无关解为 $r^n, r^{-(n+1)}$. 由此可得 A_1, A_2 的最一般解为

$$A_1=\sum_{n=0}^{\infty}\left(b_n r^n+\frac{a_n}{r^{n+1}}\right)\mathrm{P}_n^{(1)}(\cos\theta) \tag{2.13}$$

$$A_2=\sum_{n=0}^{\infty}\left(d_n r^n+\frac{c_n}{r^{n+1}}\right)\mathrm{P}_n^{(1)}(\cos\theta) \tag{2.14}$$

上式中的各系数可由边界条件确定，边界条件为

$$\begin{aligned}&①r=0,\quad A_1\text{ 有限}\\&②r\to\infty,\quad A_2\text{ 为零}\\&③r=a,\quad A_1=A_2\\&④r=a\end{aligned}$$

由(2.10)式，再注意到面电流 $\alpha=Q\omega\sin\theta/4\pi a$，有边界条件

$$\left[\frac{1}{\mu_0 r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_1-rA_2)\right]_{r=a}=\frac{Q\omega}{4\pi a}\sin\theta$$

由条件①可定出 $a_n=0$；由条件②可定出 $\mathrm{d}_n=0$. 因此(2.13)和(2.14)两式化为

$$A_1=\sum_{n=0}^{\infty}b_n r^n\mathrm{P}_n^{(1)}(\cos\theta) \tag{2.15}$$

$$A_2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{r^{n+1}}\mathrm{P}_n^{(1)}(\cos\theta) \tag{2.16}$$

由条件③可得

$$b_n a^n=\frac{c_n}{a^{n+1}} \tag{2.17}$$

注意到 $\mathrm{P}_1^{(1)}=\sin\theta$，由条件④可得

$$\begin{aligned}&(n+1)b_n a^n+n\frac{c_n}{a^{n+1}}=0,\qquad n\neq 1\\&2b_1 a+\frac{c_1}{a^2}=\frac{\mu_0 Q\omega}{4\pi}\end{aligned} \tag{2.18}$$

由(2.17)和(2.18)式可解出

$$\begin{aligned}&b_n=c_n=0,\qquad n\neq 1\\&b_1=\frac{\mu_0 Q\omega}{12\pi a}\\&c_1=\frac{\mu_0 Q\omega}{12\pi}a^2\end{aligned}$$

再代回(2.15)和(2.16)式得

$$\boldsymbol{A}_1=\frac{\mu_0 Q\omega}{12\pi a}r\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi=\frac{\mu_0 Q\omega}{12\pi a}\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{A}_2=\frac{\mu_0 Q\omega}{12\pi r^2}a^2\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi=\frac{\mu_0 Q a^2\omega}{12\pi}\boldsymbol{e}_z\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

因此

$$\boldsymbol{B}_1 = \nabla \times \boldsymbol{A}_1 = \frac{\mu_0 Q\omega}{12\pi a}\nabla \times (\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 Q\omega}{6\pi a}\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{B}_2 = \nabla \times \boldsymbol{A}_2 = \frac{\mu_0 Q a^2 \omega}{12\pi}\left(\frac{3\boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{r}\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{e}_z}{r^3}\right)$$

令

$$\boldsymbol{m} = \frac{Qa^2\omega}{3}\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{B}^2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{m}}{r^3}\right]$$

由此看出，球内的磁感强度是均匀的，球外的磁感强度在形式上与电偶极子产生的电场相似. 如果把 $\boldsymbol{m}$ 称做磁偶极子的磁矩，则球外磁场就与一个磁偶极子的场相同.

§3 稳定磁场的标势

前面已看到，由于磁场不是无旋场，一般不能引入标势，但可引入矢势 $\boldsymbol{A}$. 在均匀各向同性介质下，可将场方程化为矢势 $\boldsymbol{A}$ 的泊松方程，但矢量泊松方程的边值问题，求解起来比较麻烦. 研究发现，稳定磁场和静电场虽然基本方程不同，但在场源以外的空间，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的散度和旋度均为零. 在磁场中引入标势 ϕ，使 $\boldsymbol{H} = -\nabla\phi$，主要有两个困难：首先是在场源区域 $\boldsymbol{J} \neq 0$，标势的引入与场方程

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \tag{3.1}$$

发生矛盾，因为左边 $\nabla \times \boldsymbol{H} = -\nabla \times \nabla\phi = 0$；其次，所引入的标势 ϕ 一般不是单值函数，因为由安培环路定理

$$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{3.2}$$

$\boldsymbol{H}$ 的环流一般不等于零，其大小与穿过积分回路的电流值有关. 因此

$$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\oint_l \nabla\phi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\Delta\phi \neq 0 \tag{3.3}$$

式中 $\Delta\phi$ 是标势沿回路的变化值，即 ϕ 沿与电流相交链的任意回路回到出发点时其值已经改变了，因此 ϕ 不是单值函数.

这两点困难是有联系的. 为了引入磁标势，首先要限制场源以外的区域 $\boldsymbol{J} = 0$，因此

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = 0 \tag{3.4}$$

其次必须创造条件，使在此空间中的任何回路都不与电流相交链，即要求

$$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \tag{3.5}$$

因为稳定电流是闭合的，若将以电流圈为周界的壳层挖掉，不允许回路穿过，则在其余的空间内，任意回路都不可能与电流相交链. 因而条件(3.5)总是能满足的，这样在剩下的空间内计算磁场就可引入磁标势. 从物理上看，这样作相当于把原来闭合的磁场线割断了，使磁场线变成了有始有终的，如图 4.8 所示，电流圈 I 产生的磁场线本来是封闭的，将电流圈 I 圈成的壳层挖掉后，磁场线被割

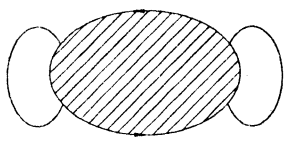


图 4.8

断. 在剩下的空间来看，磁场线从壳层的上部出发终止到壳层的下部，因而磁场成了非旋场，与静电场相似，于是可以引入标量势. 必须注意，只把电流本身挖掉还不能引入标量势，必须把电流圈围成的壳层全部挖去. 若磁场由永久磁体产生，这时没有传导电流，在全空间中$\nabla \times \boldsymbol{H}=0$，因而对永久磁体总是可以引入标量势的.

在能够引入磁标势的空间内，磁场方程为

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = 0 \tag{3.6}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{3.7}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} + \mu_0 \boldsymbol{M} \tag{3.8}$$

(3.6)的方程与静电场方程$\nabla \times \boldsymbol{E}=0$形式相同，可仿照电场中的标量势引入静磁标势$\phi_m$，使

$$\boldsymbol{H} = -\nabla \phi_m \tag{3.9}$$

由(3.7)、(3.8)有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \mu_0 \nabla \cdot (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) = 0$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = -\nabla^2 \phi_m = -\nabla \cdot \boldsymbol{M}$$

$$\nabla^2 \phi_m = \nabla \cdot \boldsymbol{M} \tag{3.10}$$

和静电势方程

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

对比，可引入静磁荷密度ρ_m，使

$$\nabla^2 \phi_m = -\frac{\rho_m}{\mu_0} \tag{3.11}$$

注意到(3.10)式有

$$\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \boldsymbol{M} \tag{3.12}$$

引入磁标势ϕ_m后，计算磁场的方法就同计算静电场的方法完全相同. 为了求解(3.11)式，还必须给出ϕ_m的边界条件. 与静电场相似，在两种磁介质的界面上有

$$(\phi_m)_1 = (\phi_m)_2 \tag{3.13}$$

也可以直接用磁场的切线分量连续的条件$H_{1t}=H_{2t}$. 另一个条件为

$$B_{1n} = B_{2n} \tag{3.14}$$

对非铁磁物质有$\boldsymbol{B}=\mu \boldsymbol{H}$，上述条件化为

$$\mu_1 \left(\frac{\partial \phi_m}{\partial n}\right)_1 = \mu_2 \left(\frac{\partial \phi_m}{\partial n}\right)_2 \tag{3.15}$$

对$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{H}$关系比较复杂的铁磁物质，应直接利用(3.14)式.

引入磁标势后，求磁场的问题就和求静电场的方法相似了. 为便于比较，下面列出用磁标势法求磁场与用电势求电场的方程式.

静电场	静磁场
$\nabla \times \boldsymbol{E}=0$，	$\nabla \times \boldsymbol{H}=0$
$\nabla \cdot \boldsymbol{E}=(\rho_f+\rho_p)/\varepsilon_0$，	$\nabla \cdot \boldsymbol{H}=\rho_m/\mu_0$
$\rho_P=-\nabla \cdot \boldsymbol{P}$，	$\rho_m=-\mu_0 \nabla \cdot \boldsymbol{M}$
$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0 \boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$，	$\boldsymbol{B}=\mu_0 \boldsymbol{H}+\mu_0 \boldsymbol{M}$
$\boldsymbol{E}=-\nabla \phi$，	$\boldsymbol{H}=-\nabla \phi_m$
$\nabla^2 \phi=-(\rho_f+\rho_p)/\varepsilon_0$，	$\nabla^2 \phi=-\rho_m/\mu_0$

上述方程中的差别是，静电场中有自由电荷，而静磁场中没有自由磁荷.

例 1 如图 4.9 所示，一无限长的磁导率为 μ_1 的介质圆柱，半径为 R_0，置于磁导率为 μ_2 的磁介质中，在垂直于柱轴方向加一均匀静磁场 H_0，求柱内、外磁场分布.

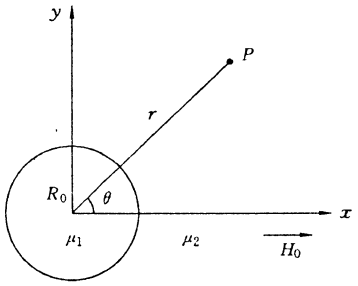


图 4.9

解 选柱坐标系，柱轴方向为 e_z，外加磁场 $\boldsymbol{H}_0$ 沿 e_x，全部空间内没有传导电流，可用磁标势求解. 设柱内为 ϕ_1，柱外为 ϕ_2，它们均与 z 无关. 由于介质是均匀的，有

$$\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H} + \mu_0\boldsymbol{M} = \mu\boldsymbol{H}$$

$$\boldsymbol{M} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}\boldsymbol{H}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{M} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}\nabla \cdot \boldsymbol{H} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}\frac{1}{\mu}\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

因而静磁荷密度 $\rho_m = 0$，故有

$$\nabla^2\phi_1(r,\theta) = 0, \nabla^2\phi_2(r,\theta) = 0$$

在柱坐标系中，$\nabla^2\phi(r,\theta) = 0$ 的通解为

$$\phi = c_0\ln r + d_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta)(c_n r^n + d_n r^{-n}) \tag{3.16}$$

ϕ_1, ϕ_2 具有以下性质

$$\phi_1(r,\theta) = \phi_1(r, -\theta)$$

$$r = 0, \qquad \phi_1 = 0$$

$$r \to \infty, \qquad \phi_2 = -H_0 r\cos\theta$$

满足上述要求的 ϕ_1, ϕ_2 为

$$\phi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos n\theta r^n \tag{3.17}$$

$$\phi_2 = -H_0 r\cos\theta + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{r^n}\cos n\theta \tag{3.18}$$

再由边界条件：$r = R_0$ 时

$$\phi_1 = \phi_2, \ \mu_1\frac{\partial\phi_1}{\partial r} = \mu_2\frac{\partial\phi_2}{\partial r}$$

即可定出 ϕ_1, ϕ_2 中的未知系数

$$a_1 = \frac{-2H_0\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$$

$$\mathrm{d}_1 = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}H_0 R_0^2$$

$$a_n = d_n = 0, n \neq 1$$

最后得

$$\phi_1 = -\frac{2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}H_0 r\cos\theta$$

$$\phi_2 = -H_0 r\cos\theta + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}H_0 R_0^2\frac{\cos\theta}{r}$$

$$\boldsymbol{H}_1 = -\nabla\phi_1 = \frac{2\mu_0}{\mu_1+\mu_2}\boldsymbol{H}_0$$

$$\boldsymbol{H}_2 = -\nabla\phi_2 = \boldsymbol{H}_0 - \frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}R_0^2\frac{\boldsymbol{H}_0}{r^2} + 2\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}H_0R_0^2\cos\theta\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

若柱外为真空，则 $\mu_2=\mu_0$，这时柱内磁场为

$$\boldsymbol{H}_1 = \frac{2\mu_0}{\mu_0+\mu_1}\boldsymbol{H}_0 < \boldsymbol{H}_0 \tag{3.19}$$

柱内磁场之所以比原来外加磁场小是由于在磁介质的柱面上出现等效的磁荷分布，这些磁荷产生的场与外加磁场 H_0 方向相反，通常称为退磁场. 退磁场强度为 H_d，它与磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 成正比，但方向相反，可表示为

$$\boldsymbol{H}_d = -N\boldsymbol{M}$$

N 是比例常数，称为退磁因子. 磁介质内的总磁场是退磁场与外加磁场之和.

$$\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{H}_d$$

由(3.19)式可求得

$$\boldsymbol{H}_d = \frac{\mu_0-\mu_1}{2\mu_0}\boldsymbol{H}_1$$

而磁介质内的磁化强度

$$\boldsymbol{M} = \frac{\mu_1-\mu_0}{\mu_0}\boldsymbol{H}_1$$

由此可求得圆柱介质的退磁因子

$$N = 1/2$$

例 2 估算中子星磁场的极限值.

解 根据天文观测，中子星磁场很强，磁感强度 $\boldsymbol{B}$ 的值可达 10^8-10^9T 以上. 因为中子星密度很大，约为 $10^{17}-10^{18}\text{kg/m}^3$，故可假定中子星由中子密集排列而成. 它的磁场来自中子的磁矩($\mu_n=9.65\times10^{-27}\text{A}\cdot\text{m}^2$)，中子磁矩都沿同一方向排列. 这样假定产生的磁场最强，可由此来估算中子星磁场的极限值.

已知中子的半径约为

$$R_0 = 8\times10^{-16}\text{m}$$

在中子星中单位体积的中子数约为

$$N = \frac{1}{\frac{4\pi}{3}R_0^3} = 5\times10^{44}\text{ 个}/\text{m}^3$$

中子星的磁化强度约为

$$M = N\mu_n = 5\times10^{18}\text{A/m}$$

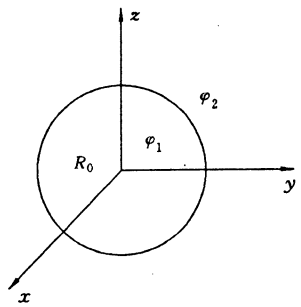


图 4.10

知道中子星的磁化强度后，可用磁标势求出它的磁场. 设中子星内磁标势为 ϕ_1，中子星外为 ϕ_2(见图 4.10). 因为在均匀磁介质中磁荷密度为零，故 ϕ_1 和 ϕ_2 都满足拉普拉斯方程. 选球坐标系，使磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 沿 $\boldsymbol{e}_z$ 方向. 为保证满足边界条件：$r=0$ 时，ϕ_1 有限，$r\to\infty$ 时，$\phi_2=0$，ϕ_1 和 ϕ_2 应取如下形式的解

$$\phi_1 = \sum_n a_n r^n \text{P}_n(\cos\theta) \tag{3.20}$$

$$\phi_2 = \sum_n \frac{b_n}{r^{n+1}} \mathrm{P}_n(\cos\theta) \tag{3.21}$$

当 $r=R_0$ 时满足边界条件

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi_2 \\ B_{1n} &= B_{2n} \end{aligned} \tag{3.22}$$

其中

$$B_{1n} = \mu_0 H_{1n} + \mu_0 M_n = -\mu_0 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} + \mu_0 M\cos\theta$$

$$B_{2n} = -\mu_0 \frac{\partial \phi_2}{\partial n}$$

所以

$$-\mu_0 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} + \mu_0 M\cos\theta = -\mu_0 \frac{\partial \phi_2}{\partial n}$$

将 ϕ_1 和 ϕ_2 代入上述边界条件中，可得

$$a_1 = \frac{1}{3}M$$

$$b_1 = \frac{1}{3}MR_0^3$$

$$a_n = b_n = 0, n \neq 1$$

由此得

$$\phi_1 = \frac{1}{3}Mr\cos\theta = \frac{1}{3}\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{r} \tag{3.23}$$

$$\phi_2 = \frac{1}{3}MR_0^3\frac{\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{3}\frac{R_0^3}{r^3}\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{r} \tag{3.24}$$

中子星的磁场

$$\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M}) = -\mu_0\nabla\phi_1 + \mu_0\boldsymbol{M} = \frac{2}{3}\mu_0\boldsymbol{M} \tag{3.25}$$

磁感强度的极限值为

$$B_{\max} = \frac{2}{3} \times 4\pi \times 10^{-7} \times 5 \times 10^{18} \approx 4 \times 10^{12}\mathrm{T}$$

中子星外的磁场

$$\boldsymbol{B} = -\mu_0\nabla\phi_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\left(\boldsymbol{m}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right) \tag{3.26}$$

其中 $\boldsymbol{m}=\frac{4\pi}{3}R_0^3\boldsymbol{M}$，中子星外的磁场相当于磁矩为 $\boldsymbol{m}$ 的磁偶极子产生的磁场.

例 3 如图 4.11 所示，有一内、外半径分别为 R_1 和 R_2 的空心球壳，放置在均匀磁场 $\boldsymbol{H}_0$ 中，球壳介质的磁导率为 μ，球壳外为真空，求球壳内部空间的磁场.

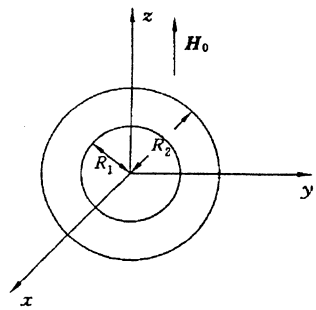


图 4.11

解 用磁标势求解. 设球壳内的磁标势为 ϕ_1，球壳中的磁标势为 ϕ_2. 球壳外的磁标势为 ϕ_3. 前已指出在均匀磁介质中磁荷密度为零，因而磁标势都满足拉普拉斯方程. 选球坐标系，取外磁场 $\boldsymbol{H}_0$ 为 $\boldsymbol{e}_z$ 方向. 为保证边界条件

$$r = 0 \text{ 时}, \phi_1 = 0$$

$$r \to \infty \text{ 时}, \phi_3 = -H_0 r\cos\theta$$

得到满足，ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 应取如下形式的解

$$\phi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \mathrm{P}_n(\cos\theta) \tag{3.27}$$

$$\phi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(b_n r^n + \frac{c_n}{r^{n+1}} \right) \mathrm{P}_n(\cos\theta) \tag{3.28}$$

$$\phi_3 = -H_0 r\cos\theta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{r^{n+1}} \mathrm{P}_n \cos\theta \tag{3.29}$$

式中的各系数由界面上的边界条件确定，即

$$r = R_1 \text{ 时}, \phi_1 = \phi_2, \mu_0 \frac{\partial \phi_1}{\partial r} = \mu \frac{\partial \phi_2}{\partial r}$$

$$r = R_2 \text{ 时}, \phi_2 = \phi_3, \mu \frac{\partial \phi_2}{\partial r} = \mu_0 \frac{\partial \phi_3}{\partial r}$$

将 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 的具体形式代入上面各条件后可得到如下的系数方程：当 $n=1$ 时，有

$$\begin{aligned}
&a_1 R_1 = b_1 R_1 + \frac{c_1}{R_1^2} \\
&\mu_0 a_1 = \mu b_1 - 2\mu \frac{c_1}{R_1^3} \\
&b_1 R_2 + \frac{c_1}{R_2^2} = \frac{d_1}{R_2^2} - H_0 R_2 \\
&\mu\left(b_1 - 2c_1 \frac{1}{R_2^3} \right) = -\mu_0 H_0 - \mu_0 \frac{2d_1}{R_2^3}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

当 $n \neq 1$ 时，有

$$\begin{aligned}
&a_n R_1^n = b_n R_1^n + \frac{c_n}{R_1^{n+1}} \\
&\mu_0 n a_n R_1^{n-1} = n\mu b_n R_1^{n-1} - \mu(n+1) \frac{c_n}{R_1^{n+2}} \\
&b_n R_2^n + \frac{c_n}{R_2^{n+1}} = \frac{d_n}{R_2^{n+1}} \\
&\mu n b_n R_2^{n-1} - \mu(n+1) \frac{c_n}{R_2^{n+2}} = -\mu_0 \frac{(n+1)d_n}{R_2^{n+2}}
\end{aligned} \tag{3.31}$$

求解(3.31)式的代数方程组($n \neq 1$)得

$$a_n = b_n = c_n = d_n = 0$$

求解(3.30)式的联式代数方程组得

$$a_1 = \frac{-9\mu_0 \mu H_0}{D} \tag{3.32}$$

$$b_1 = \frac{-3\mu_0(2\mu + \mu_0)H_0}{D} \tag{3.33}$$

$$c_1 = \frac{-3\mu_0 R_1^3(\mu - \mu_0)H_0}{D} \tag{3.34}$$

$$d_1 = \frac{(2\mu + \mu_0)(\mu - \mu_0)(R_2^3 - R_1^3)H_0}{D} \tag{3.35}$$

上式中

$$D=(2\mu_0+\mu)(2\mu+\mu_0)-2(\mu-\mu_0)^2\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 \tag{3.36}$$

球壳内的磁标势

$$\phi_1=a_1 r\cos\theta=a_1 z$$

球壳内的磁场

$$\boldsymbol{H}_1=-\nabla\phi_1=-a_1\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}_1$$

将(3.32)和(3.36)式的系数代入并作适当的整理得

$$\boldsymbol{B}=\left\{1-\frac{1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3}{\frac{(2\mu_0+\mu)(2\mu+\mu_0)}{2(\mu-\mu_0)^2}-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3}\right\}\mu_0\boldsymbol{H}_0$$

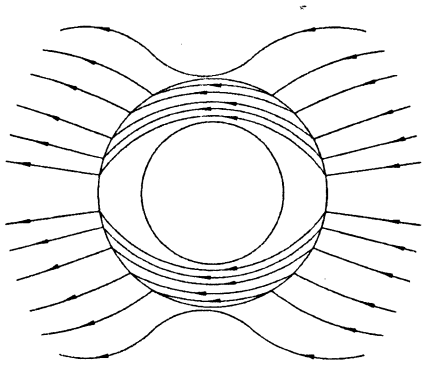


图 4.12

当$\mu\gg\mu_0$时，由上式看到，球壳内部的$B\approx 0$，因此可用高磁导率的磁性介质来屏蔽外磁场. 例如若$\mu=600\mu_0$，$R_1/R_2=0.9$，由上式可算出$\boldsymbol{B}=0.13\mu_0\boldsymbol{H}_0$；若$\mu=2000\mu_0$，则球壳内的$\boldsymbol{B}=0.0082\mu_0\boldsymbol{H}$，磁场线在空间的分布如图 4.12 所示.

§4 计算稳定磁场的多极展开方法

在静电场中曾指出，分布在一个小区域的电荷所产生的电场，可看成是由各级电多极子场的叠加. 同样，对于分布在一个小区域内的稳定电流，在远处所产生的磁场，也可以看成是各级磁多极子场的叠加.

设电流分布在小区域V内，稳定电流是闭合的，因此在区域的界面S上没有电流通过. 区域V中电流在$P(x,y,z)$处产生的磁场的矢势为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')}{r}\mathrm{d}V' \tag{4.1}$$

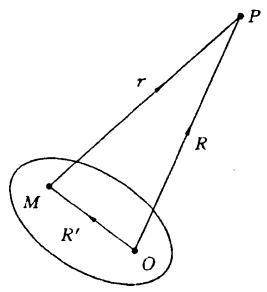


图 4.13

其中$r=|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}'|$(见图 4.13)，因为$|\boldsymbol{R}'|\ll|\boldsymbol{R}|$，利用$1/r$的展开式

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{R}-\boldsymbol{R}'\cdot\nabla\frac{1}{R}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{R}'\cdot\nabla)^2\frac{1}{R}+\cdots$$

可将$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R})$写成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R})&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')}{R}\mathrm{d}V'-\frac{\mu_0}{4\pi}\int\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')\boldsymbol{R}'\cdot\nabla\frac{1}{R}\mathrm{d}V'+\cdots\\&=\boldsymbol{A}^{(0)}+\boldsymbol{A}^{(1)}+\boldsymbol{A}^{(2)}+\cdots\end{aligned} \tag{4.2}$$

其中

$$\boldsymbol{A}^{(0)}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{R}\int\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')\mathrm{d}V' \tag{4.3}$$

因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}&=\boldsymbol{J}\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{I}}\\&=\boldsymbol{J}\cdot\nabla'\boldsymbol{R}'+(\nabla'\cdot\boldsymbol{J})\boldsymbol{R}'\end{aligned}$$

$$= \nabla' \cdot (\boldsymbol{J}\boldsymbol{R}')$$

在上面计算中已考虑了稳定电流$\nabla' \cdot \boldsymbol{J}=0$，故

$$\boldsymbol{A}^{(0)} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{R}\int_V \nabla' \cdot (\boldsymbol{J}\boldsymbol{R}')\mathrm{d}V' \tag{4.4}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{R}\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}' \cdot \boldsymbol{J}\boldsymbol{R}'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{R}\oint_S J_n \boldsymbol{R}'\mathrm{d}S'$$

$$= 0$$

因为在S面上$J_n=0$，故上式成立. $\boldsymbol{A}^{(0)}=0$表明与静电场不同，不存在与点电荷相对应的磁单极项.

展开式中第二项为

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')\boldsymbol{R}' \cdot \nabla \frac{1}{R}\mathrm{d}V'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{1}{R^3}(\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{R}')\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')\mathrm{d}V' \tag{4.5}$$

利用矢量公式

$$\boldsymbol{R} \times (\boldsymbol{R}' \times \boldsymbol{J}) = (\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{J})\boldsymbol{R}' - (\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{R}')\boldsymbol{J} \tag{4.6}$$

可证明上式右边两项的体积分只相差一个符号：因为

$$(\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{J})\boldsymbol{R}' = [\nabla'(\boldsymbol{R}' \cdot \boldsymbol{R}) \cdot \boldsymbol{J}]\boldsymbol{R}'$$

$$= [\nabla' \cdot (\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{R}')\boldsymbol{J}]\boldsymbol{R}' - (\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{R}')(\nabla' \cdot \boldsymbol{J})\boldsymbol{R}'$$

由分部积分法可推得

$$\int (\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{J})\boldsymbol{R}'\mathrm{d}V' = \int [\nabla' \cdot (\boldsymbol{R}' \cdot \boldsymbol{R})\boldsymbol{J}]\boldsymbol{R}'\mathrm{d}V'$$

$$= -\int (\boldsymbol{R}' \cdot \boldsymbol{R})\boldsymbol{J} \cdot \nabla'\boldsymbol{R}'\mathrm{d}V'$$

$$= -\int (\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{R}')\boldsymbol{J}\mathrm{d}V' \tag{4.7}$$

故由(4.6)和(4.7)式可得

$$\int (\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{R}')\boldsymbol{J}\mathrm{d}V' = -\frac{1}{2}\boldsymbol{R} \times \int (\boldsymbol{R}' \times \boldsymbol{J})\mathrm{d}V' \tag{4.8}$$

代入(4.5)式，注意到R与积分变量无关，则

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{1}{2}\int (\boldsymbol{R}' \times \boldsymbol{J})\mathrm{d}V'\right] \times \frac{\boldsymbol{R}}{R^3}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{m} \times \frac{\boldsymbol{R}}{R^3} \tag{4.9}$$

式中

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2}\int (\boldsymbol{R}' \times \boldsymbol{J})\mathrm{d}V' \tag{4.10}$$

称为电流分布$\boldsymbol{J}$的磁偶极矩. 对于电流为$\boldsymbol{I}$的线电流圈，按上式的定义，磁偶极矩为

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2}I\oint \boldsymbol{R}' \times \mathrm{d}\boldsymbol{l}' = I\int \mathrm{d}\boldsymbol{S}' = I\boldsymbol{S} \tag{4.11}$$

式中 S 是电流线圈的面积矢量，方向按右旋规则决定. 这同以前熟悉的关于磁矩的定义相同.

磁偶极矩 $\boldsymbol{m}$ 所产生的磁场为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}^{(1)} &= \nabla \times \boldsymbol{A}^{(1)} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\boldsymbol{m} \times \frac{\boldsymbol{R}}{R^3} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\boldsymbol{m} \left(\nabla \cdot \frac{\boldsymbol{R}}{R^3} \right) - (\boldsymbol{m} \cdot \nabla) \frac{\boldsymbol{R}}{R^3} \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{R})\boldsymbol{R}}{R^5} - \frac{\boldsymbol{m}}{R^3} \right] \end{aligned} \tag{4.12}$$

由 $\boldsymbol{B}=\mu_0 \boldsymbol{H}$ 和上式，可得出

$$\boldsymbol{H}^{(1)} = -\frac{1}{4\pi} \nabla \left(\boldsymbol{m} \cdot \frac{\boldsymbol{R}}{R^3} \right) = -\nabla \phi_{\mathrm{m}} \tag{4.13}$$

式中

$$\phi_{\mathrm{m}} = \frac{1}{4\pi} \boldsymbol{m} \cdot \frac{\boldsymbol{R}}{R^3} \tag{4.14}$$

称为磁偶极矩的标势，在形式上与电偶极矩 $\boldsymbol{p}$ 产生的电势很相似.

以上讨论说明了 $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 项相当于磁偶极子的贡献，可以证明 $\boldsymbol{A}^{(2)}$ 项相当于磁四极子的贡献. 一个小区域的稳定电流分布所产生的磁场，是各级磁多极子场的叠加，但通常磁四极矩就很少有人去计算了.

当电流分布区域的线度比从电流到待求场点 P 的距离小得多的情况下，计算磁场只用磁偶极子场代替就可以了，这样的电流分布称为元电流，线元电流 I 的磁矩 $\boldsymbol{m}=I\boldsymbol{S}$.

当考虑的电流不能看成元电流时，如图 4.14 所示的一个较大的线电流圈，它的磁场就不能用磁偶极子场来代替，这时可把电流圈围成的曲面分成许多小块，设想每个小块都是一个电流相同的元电流，其磁矩 $\boldsymbol{m}_i = I\Delta \boldsymbol{S}_i$. 由于在线电流圈内部的网线上都有相反电流通过，因而互相抵消，只有边线上的电流才不抵消，因此这样代替后并没有改变原来的电流分布. 每个元电流相当于一个磁偶极子，整个线电流圈的磁场与一个磁偶层的磁场等效.

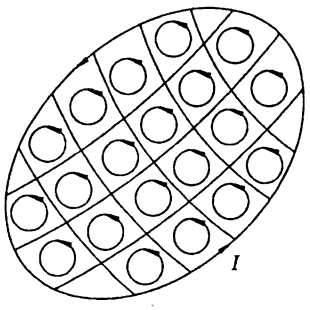


图 4.14

线电流圈的磁场是各元电流磁场的叠加，故磁标势

$$\phi_{\mathrm{m}} = \frac{1}{4\pi} \sum_i I\Delta \boldsymbol{S}_i \cdot \frac{\boldsymbol{R}_i}{R_i^3}$$

其中 $\Delta \boldsymbol{S}_i$ 是第 i 个元电流的面积矢量，$\boldsymbol{R}_i$ 是它到 P 点的矢径. 取极限得线电流圈的磁标势

$$\phi_{\mathrm{m}} = \frac{I}{4\pi} \int \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \frac{\boldsymbol{R}}{R^3} = \frac{I}{4\pi} \int \mathrm{d}\Omega = \frac{I}{4\pi} \Omega \tag{4.15}$$

式中 Ω 是线电流圈对 P 点所张的立体角，从 P 点看电流回路，若电流沿逆时针方向流动，则 Ω 为正，反之为负.

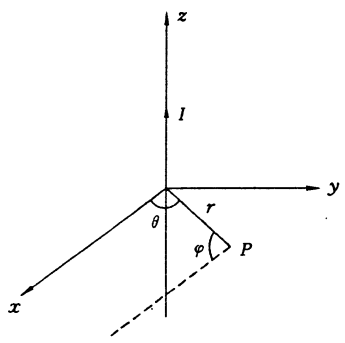


图 4.15

例 1 用磁标势法计算一无限长直线电流 I 所产生的磁场.

解 取坐标系使 I 沿 z 轴，并令待求场点 P 位于 xy 平面内（见图 4.15），把无限长直线电流看成电流圈，所围的磁偶层是 x

$\geqslant 0, y=0$ 的半无限大平面，则它对 P 点所张的立体角为

$$\Omega = 2\varphi$$

因为 $\varphi=\pi-\theta$，磁标势为

$$\phi_{\mathrm{m}} = \frac{I}{2\pi}(\pi - \theta)$$

磁场强度

$$\boldsymbol{H} = -\nabla\phi_{\mathrm{m}} = H\boldsymbol{e}_{\theta}$$

$$H = -\frac{1}{r}\frac{\partial\phi_{\mathrm{m}}}{\partial\theta} = \frac{I}{2\pi r}$$

这与由安培环路定理计算所得结果相同.

例 2 一半径为 a 的均匀带电球壳，质量为 M，总电量为 Q，绕某一直径以角速度 ω 转动，求磁矩和旋磁比.

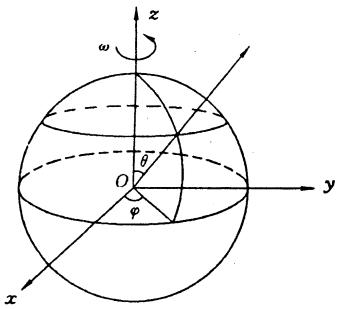


图 4.16

解 当球壳转动时，在球面上的面电流密度为

$$\boldsymbol{a} = \sigma\boldsymbol{v} = \sigma\boldsymbol{\omega}\times a\boldsymbol{e}_r$$

$$= \frac{Q\omega}{4\pi a}\sin\theta\boldsymbol{e}_{\phi}$$

按(4.10)式，磁矩为

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2}\int(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{a})\mathrm{d}S$$

$$= \frac{1}{2}\int(a\boldsymbol{e}_r\times\frac{Q\omega}{4\pi a}\sin\theta\boldsymbol{e}_{\phi})a^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{Q\omega}{8\pi}a^2\int(-\boldsymbol{e}_{\theta})\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{Q\omega}{8\pi}a^2\int(\boldsymbol{e}_z\sin\theta - \boldsymbol{e}_{\rho}\cos\theta)\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{Q}{4}a^2\omega\int_0^{\pi}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{3}Qa^2\omega$$

质量为 M 绕直径以 ω 转动的球壳的动量矩为

$$\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega} = \frac{2}{3}Ma^2\boldsymbol{\omega}$$

磁矩和动量矩之比，称为旋磁比

$$\gamma = \frac{m}{L} = \frac{Q}{2M}$$

电子具有磁矩 $\mu_e=9.28\times10^{-24}\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}^2$，自旋角动量 $S_z=5.27\times10^{-35}\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}$，旋磁比

$$\gamma = \frac{\mu_e}{S_z} = \frac{e}{m_e}$$

是电子电荷与质量之比.

如果把旋转的带电导体球壳作为电子的经典模型，则旋磁比小一半. 另外由电子磁矩大小，可估算出旋转球面赤道上的速度

$$v = a\omega = 3\frac{\mu_e}{ea}$$

$$= 3 \times \frac{9.28 \times 10^{-24}}{1.60 \times 10^{-19} \times 2.28 \times 10^{-15}}$$

$$= 6.15 \times 10^{10}\text{m/s}$$

超过真空中的光速. 因此当 1925 年乌仑贝克(Uhlenbeck)和高德斯密特(Goudsmit)提出电子自旋假设时,受到洛伦兹(Lorentz)的质疑,泡利(Pauli)也表示怀疑. 但电子自旋和磁矩是电子固有的属性,用经典理论是解释不了微观粒子的运动规律和性质的.

§5 稳定磁场的能量与磁作用力

1. 稳定磁场的能量

磁场能量一般可表示为

$$W = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H} \mathrm{d}V \tag{5.1}$$

这表明能量分布于整个磁场,场能密度为

$$W = \frac{1}{2}\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H} \tag{5.2}$$

稳定电流磁场也可通过矢势和电流分布表出. 由

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}, \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$$

及矢量恒等式

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H})$$

可得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{H} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) \\ &= \nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{H}) + \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H}) \\ &= \nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{H}) + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{J} \end{aligned}$$

代入(5.1)式得

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\int \nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{H}) \mathrm{d}V + \frac{1}{2}\int \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{J} \mathrm{d}V \\ &= \frac{1}{2}\oint (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{H}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \frac{1}{2}\int \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{J} \mathrm{d}V \end{aligned} \tag{5.3}$$

电流一般分布在有限区域,因而对全空间积分时,由于面积分对无穷远界面进行而趋于零,上式化为

$$W = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{J} \mathrm{d}V \tag{5.4}$$

这是稳定磁场总能量的另一种表达式. 上式表明能量只存在于 $\boldsymbol{J} \neq 0$ 的区域,实际上能量分布于整个磁场,不只存在于电流分布区域内,故不应该把 $\frac{1}{2}\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{J}$ 当做场能密度.

若空间充满均匀介质,则由泊松方程的解

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')}{r} \mathrm{d}V'$$

可得稳定磁场总能量的又一表达式

$$W = \frac{\mu}{8\pi}\int \frac{1}{r}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}) \cdot \boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}') \mathrm{d}V \mathrm{d}V' \tag{5.5}$$

在稳定电流条件下，磁场总能量的三种表达式是等效的；在变化电磁场中，必须认为能量存在于电磁场中.

例 1 一半径为 a 的均匀带电球壳，总电量为 Q，绕某一直径以角速度 ω 转动，求磁场总能量.

解 前面已经求出面电流分布为

$$\alpha = \frac{Q\omega}{4\pi a}\sin\theta \boldsymbol{e}_\varphi$$

以及球内外的矢势

$$\boldsymbol{A}_1 = \frac{\mu_0 Q\omega}{12\pi a} r\sin\theta \boldsymbol{e}_\varphi, \qquad r < a$$

$$\boldsymbol{A}_2 = \frac{\mu_0 Q\omega a^2}{12\pi r^2}\sin\theta \boldsymbol{e}_\varphi, \qquad r > a$$

当 $r=a$ 时

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 Q\omega}{12\pi}\sin\theta \boldsymbol{e}_\varphi$$

由(5.4)式可求得磁场总能量为

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\int \boldsymbol{A}\cdot\alpha \mathrm{d}S \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{\mu_0 Q\omega}{12\pi}\sin\theta \quad \frac{Q\omega}{4\pi a}\sin\theta \quad 2\pi a^2\sin\theta \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\mu_0}{36\pi}Q^2\omega^2 a \end{aligned} \tag{5.6}$$

由已求得的球内外的磁感强度

$$\boldsymbol{B}_1 = \frac{\mu_0 Q}{6\pi a}\omega \boldsymbol{e}_z, \qquad r < a$$

$$\boldsymbol{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{m}}{r^3}\right], \qquad r > a$$

其中

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{3}Qa^2\omega \boldsymbol{e}_z$$

可利用(5.1)式求磁场总能量

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\int \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}\mathrm{d}V \\ &= \frac{1}{2}\int_{r<a} \boldsymbol{B}_1\cdot\boldsymbol{H}_1\mathrm{d}V + \frac{1}{2}\int_{r>a} \boldsymbol{B}_2\cdot\boldsymbol{H}_2\mathrm{d}V \\ &= \frac{\mu_0}{54\pi}Q^2\omega^2 a + \frac{\mu_0}{108\pi}Q^2\omega^2 a \\ &= \frac{\mu_0}{36\pi}Q^2\omega^2 a \end{aligned}$$

2. 线电流系统的磁场能量

设有 n 个线电流圈，第 i 个电流圈的电流为 I_i. 此系统的总能量按(5.4)式可写为

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} I_i \oint \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_i$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} I_i \int (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_i$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} I_i \int \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_i$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} I_i \Phi_i \tag{5.7}$$

上式中 Φ_i 是穿过第 i 个电流回路的磁感通量. 实验表明 Φ_i 与各回路的电流成线性关系，即

$$\Phi_i = L_{i1}I_1 + L_{i2}I_2 + \cdots + L_{in}I_n = \sum_{k=1}^{n} L_{ik}I_k \tag{5.8}$$

式中 L_{ii} 称为第 i 个回路的自感系数，$L_{ik}(k \neq i)$ 称为第 i 和第 k 个回路间的互感系数. 令

$$\Phi_i' = \sum_{k \neq i}^{n} L_{ik}I_k \tag{5.9}$$

它表示除和自身以外的所有电流回路对第 i 个回路所产生的磁通量. 由磁通量的定义有

$$\Phi_i' = \int \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_i = \int (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_i = \oint_i \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_i \tag{5.10}$$

式中 $\boldsymbol{A}$ 是第 i 个回路以外的电流所产生的总矢势

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')}{r}\mathrm{d}V' = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{k \neq i}^{n} \oint_k \frac{I_k}{r_{ik}}\mathrm{d}\boldsymbol{l}_k \tag{5.11}$$

将上式代入(5.10)式得

$$\Phi_i' = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{k \neq i}^{n} \oint_i \oint_k \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_k}{r_{ik}} I_k \tag{5.12}$$

将(5.12)和(5.9)式对比，可得

$$L_{ik} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_i \oint_k \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_k}{r_{ik}} \tag{5.13}$$

上式称为纽曼(Neumann)公式. 由此公式看到互感系数只与电流线圈的相互位置和几何形状有关，并且有

$$L_{ik} = L_{ki} \tag{5.14}$$

将(5.8)式代入(5.7)式，可得

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} L_{ik}I_iI_k \tag{5.15}$$

或写成

$$W = W_s + W_I$$

其中

$$W_s = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} L_{ii}I_i^2 \tag{5.16}$$

是各电流圈的固有能之和.

$$W_I = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k \neq i}^{n} L_{ik}I_iI_k = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} I_i\Phi_i' \tag{5.17}$$

是各电流圈的相互作用能. 两电流圈的相互作用能为

$$W_I = \frac{1}{2}(L_{12}I_1I_2 + L_{21}I_2I_1) = L_{12}I_1I_2 \tag{5.18}$$

例 2 求一长电缆线单位长度的自感系数. 设内外导体的半径分别为 a 和 b，外导体壳的

厚度可忽略，电流在内导体柱上的分布是均匀的(见图 4.17).

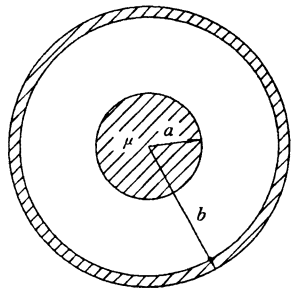


图 4.17

解 自感系数不能由纽曼公式(5.13)求，因为当 $i=k$ 时，$r_{ik}=0$ 积分发散. 可利用(5.16)式由能量求自感系数.

取柱坐标系，由安培环路定理可求得磁场分布为

$$H_1 = \frac{I}{2\pi a^2} r, \qquad r < a$$

$$H_2 = \frac{I}{2\pi r}, \qquad a < r < b$$

单位长度电缆的磁场能量为

$$W = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}\,\mathrm{d}V = \frac{\mu}{2}\frac{I^2}{4\pi^2 a^4}\int_0^a r^2 2\pi r\mathrm{d}r + \frac{\mu_0}{2}\frac{I^2}{4\pi^2}\int_a^b \frac{1}{r^2}2\pi r\mathrm{d}r$$

$$= \frac{\mu}{4\pi}\frac{I^2}{4} + \frac{\mu_0}{4\pi}I^2\ln\frac{b}{a}$$

又 $W=\frac{1}{2}LI^2$，因此可得

$$L = \frac{2W}{I^2} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\mu}{4} + \mu_0\ln\frac{b}{a}\right)$$

当 $a\to 0$ 时，即内导体为线电流的情况，自感系数是对数发散的.

3. 由磁场能量计算磁作用力

设有 n 个载流线圈，第 i 个线圈的电流为 I_i，电阻为 R_i，外电动势为 $\mathscr{E}_i$. 设确定某线圈位形的广义坐标 η 在 δt 时间内做虚位移 $\delta\eta$，相应的广义力 F 做虚功 $F\delta\eta$. 由于广义坐标 η 的变化一般还会在各线圈中引起磁通量的变化，产生感应电动势，为了保持各线圈中电流不变，外电源必须供给电流回路附加的能量. 在 δt 时间内，外电源供给各电流回路的能量共为 $\sum_i \mathscr{E}_i I_i \delta t$. 此外，各回路还有焦耳热损耗，$\delta t$ 时间共损耗 $\sum_i I_i^2 R_i \delta t$. 由于广义坐标 η 发生变化，载流线圈系统总能量也变化 δW.

根据能量守恒定律，外电源供给的能量用于焦耳热损耗、磁力所做的机械功以及系统能量的增加，即

$$\sum_i \mathscr{E}_i I_i \delta t = \sum_i I_i^2 R_i \delta t + F\delta\eta + \delta W \tag{5.19}$$

当第 i 个回路磁通量 Φ_i 发生变化时，按照法拉弟定律应有关系式

$$\mathscr{E}_i = I_i R_i + \frac{\mathrm{d}\Phi_i}{\mathrm{d}t} \tag{5.20}$$

将上式代入(5.19)式得

$$\sum_i I_i \delta\Phi_i = F\delta\eta + \delta W \tag{5.21}$$

由(5.7)式，当回路中电流 I_i 不变时

$$\delta W = \frac{1}{2}\sum_i I_i \delta\Phi_i = \delta W_I \tag{5.22}$$

故(5.21)式可化为

$$F\delta\eta = \frac{1}{2}\sum_i I_i \delta\Phi_i = \delta W_I \tag{5.23}$$

由此求得

$$F = \left(\frac{\partial W_I}{\partial \eta}\right)_{I_i} \tag{5.24}$$

上式是在电流 I_i 不变的条件下，由磁场能量计算磁作用力的公式. 当各线圈中电流 I_i 不变时，系统的固有能不变，只是相互作用能变化.

若当广义坐标 η 发生虚位移时，各回路中的磁感应通量 Φ_i 保持不变，则外电源除提供焦耳热损耗外，不再提供克服感应电动势所需附加的能量，即 $\mathscr{E}_i = I_i R_i$. 故由(5.19)式得

$$F\delta\eta + \delta W = 0$$

由此求得

$$F = -\left(\frac{\partial W}{\partial \eta}\right)_{\Phi_i} \tag{5.25}$$

上式是在 Φ_i 不变的条件下，由磁场能量计算磁作用力的公式.

在(5.24)式中，由于外电源供给系统能量，$\delta W > 0$，即力做功后系统能量反而增加，因而 F 和 $\delta\eta$ 同号，由此可决定力的方向. 当 $F > 0$ 时，力指向 η 增加的方向；$F < 0$ 时，力指向 η 减小的方向.

在(5.25)式中，外电源不供给系统能量，力做功后，系统的能量减少，$\delta W < 0$，因而 $F\delta\eta > 0$，即 F 和 $\delta\eta$ 仍然同号，可用同样的方法决定力的方向.

应该指出，前面所述求广义力的方法，只是设想某个广义坐标发生了可能的虚位移，实际上是在电流线圈系统确定的位形和电流分布状态下来计算相互作用力. 原则上说在同一系统同一状态下，两种方法算出的力应该相同. 但如果磁场能量用电流表出，则用(5.24)式较方便；如果磁场能量用磁通量表出，则用(5.25)式较方便.

例 3 在一长直导线电流 I_1 附近，有一矩形载流线圈，电流为 I_2，线圈和直导线的最短距离为 x，夹角为 θ，如图 4.18 所示，计算线圈所受的力和力矩.

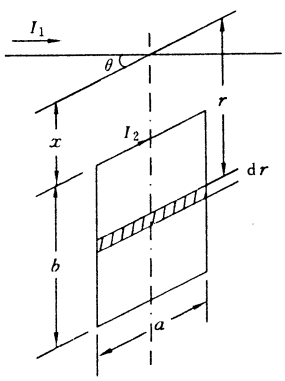


图 4.18

解 载流线圈与长直导线电流的相互作用能为

$$W_i = L_{12} I_1 I_2 = I_2 \Phi_2$$

式中 Φ_2 是由 I_1 产生的磁场穿过线圈的磁通量. 长直电流 I_1 在距离 r 处的磁场为

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

穿过宽为 dr，长为 a 的面元的磁通量为

$$\mathrm{d}\Phi_2 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} a\cos\theta \mathrm{d}r$$

由积分可得

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} a\cos\theta \int_x^{b+x} \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} a\cos\theta \ln\frac{b+x}{x}$$

故相互作用能为

$$W_I = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} a\cos\theta \ln\frac{b+x}{x}$$

取广义坐标为 x，则可得线圈所受的力为

$$F = \left(\frac{\partial W_I}{\partial x}\right)_I = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 ab}{2\pi x(b+x)}\cos\theta$$

当 $0>\theta>\pi/2$ 时，I_1, I_2 在线圈中产生的磁通方向相同，$W_I>0$，$F<0$，故力指向 x 减少的方向；当 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 时 $F>0$，力指向 x 增加的方向.

取广义坐标为 θ，可得线圈所受的力矩为

$$L=\left(\frac{\partial W_I}{\partial\theta}\right)_I=-\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}a\sin\theta\ln\frac{b+x}{x}$$

$\theta=\pi/2$ 时力矩最大，$\theta=0,\pi$ 时力矩为零，负号表示力矩有使 θ 减少的趋向.

例 4 计算电磁铁的起重力. 如图 4.19 所示，马蹄形钢芯上绕有线圈，通电流后，产生的磁通量经过衔铁而形成回路. 设每个磁极的截面积为 S，衔铁和磁极间空隙的长度为 x.

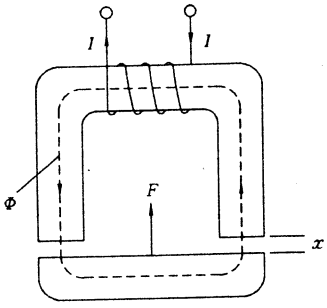


图 4.19

解 假定没有磁漏，磁通连续. 在空隙中的磁感强度 B 与钢芯中的 B 相同. 由于钢芯磁导率很大，故磁场强度 H 比空隙中小很多，因而磁场能量主要集中在空隙中. 贮存在空隙中的磁场能量为

$$W=\frac{B^2}{2\mu_0}2Sx=\frac{\Phi^2}{\mu_0 S}x$$

设衔铁做虚位移 δx，但磁通 Φ 保持不变，因为衔铁位移只是使空隙长度变化，因而也只是空隙中磁能改变. 用(5.25)式计算力，得

$$F=-\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_\Phi=-\frac{\Phi^2}{\mu_0 S}=-\frac{B^2}{\mu_0}S$$

$F<0$，力指向 x 减小的方向，是吸引力.

4. 磁偶极子在外磁场中的能量、力和力矩

设小区域电流密度和矢势为 $\boldsymbol{J}$ 和 $\boldsymbol{A}$，产生外磁场 $\boldsymbol{B}_e$ 的电流密度和矢势为 $\boldsymbol{J}_e$ 和 $\boldsymbol{A}_e$. 仿照小区域电荷分布与外电场相互作用能的做法，可得小区域电流分布与外磁场的相互作用能为

$$W_I=\frac{1}{2}\int(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{A}_e+\boldsymbol{J}_e\cdot\boldsymbol{A})\mathrm{d}V=\int\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{A}_e\mathrm{d}V$$

对于元电流圈的情形，上式可化为

$$W_I=I\oint\boldsymbol{A}_e\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=I\int\boldsymbol{B}_e\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}_e \tag{5.26}$$

其中 $\boldsymbol{m}=I\boldsymbol{S}$ 是磁偶极子的磁矩.

假定在外磁场作用下，磁偶极矩 $\boldsymbol{m}$ 不变，也就是保持电流 I 不变，因此应由(5.24)式求力和力矩.

$$\boldsymbol{F}=\nabla\boldsymbol{W}_I=\nabla(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}_e)=\boldsymbol{m}\cdot\nabla\boldsymbol{B}_e \tag{5.27}$$

因为对于稳定的外磁场，在小区域电流附近有 $\nabla\times\boldsymbol{B}_e=0$，由

$$\boldsymbol{m}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}_e)=\nabla(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}_e)-\boldsymbol{m}\cdot\nabla\boldsymbol{B}_e=0$$

即可得上述结果.

$$L=\left(\frac{\partial W_I}{\partial\theta}\right)_I=\frac{\partial}{\partial\theta}(mB_e\cos\theta)=-mB_e\sin\theta$$

力矩的方向是使 $\boldsymbol{m}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的夹角 θ 减少. 写成矢量形式

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}_e \tag{5.28}$$

在均匀外磁场中磁偶极子不受力的作用，只有力矩使磁偶极子转向外磁场的方向.

磁偶极子与外磁场的相互作用能(5.26)式同电偶极子在外电场中的作用能 $W_I=-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}_e$

相比，相差一个符号，如何理解？

这是由于电偶极子和磁偶极子的场有个根本区别：电场线从正电荷出发，终止于负电荷；而磁场线则是闭合的曲线. 两者的场力线在外部区域相同，在内部则相反，如图 4.20 所示. 对

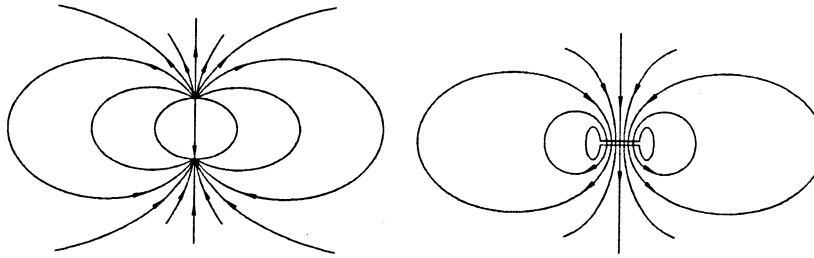


图 4.20

于稳定电磁场，相互作用能用场强来表示时分别为

$$W_I = \varepsilon_0 \int \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}_e \mathrm{d}V, \qquad W_I = \frac{1}{\mu_0} \int \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{B}_e \mathrm{d}V$$

式中 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是偶极子的场，相差的符号正是由于它们内部场强方向相反所造成的.

其次，从(5.23)式看到，当磁偶极子对外做了正功时，相互作用能反而增加了($\delta W_I > 0$). 这是因为要保持电流分布或磁偶极矩不变，必须由外源(外电动势或外力)补充能量，以抵消“感应”电场所引起的效应. 从(5.21)式可知所补充的能量为 $2\delta W_I$.

因为静电场是势场，故电偶极子与外电场的相互作用能就是势能. 但稳定磁场不是势场，故相互作用能(5.26)式不能理解为磁偶极子在外磁场中的势能. 如果从磁荷观点出发，磁偶极子就是两个相距无限小的等量异号点磁荷形成的系统，这样就可以仿照电偶极子在外电场中的势能，引入磁偶极子在外磁场中的势能. 设 U 代表势能，由势能可计算作用力，但也可由已知的作用力反推出势能来. 因为

$$\boldsymbol{F} = -\nabla U = \nabla (\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B}_e)$$

故可推得磁偶极子在外磁场中的势能应为

$$U = -\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B}_e \tag{5.29}$$

与相互作用能 W_I 相差一个符号.

§6 似稳电磁场和似稳电路方程

在电力工程中大都采用交流高压输电，一般的交流电路虽不属于稳定情况，但电流(以及电荷)变化的频率很低，而且电路的范围又不大，电磁场的波动性不明显，与稳定电流和稳定电磁场很相似，我们把具有上述性质的电流和电磁场称为似稳电流和似稳电磁场.

似稳电磁场虽然是随时间 t 变化的，但除少数区域外，每一瞬时场方程与稳定电磁场方程相似

$$\begin{aligned}
&\nabla \cdot \boldsymbol{D}(\boldsymbol{R},t) = \rho(\boldsymbol{R},t) \\
&\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{R},t) = 0 \\
&\nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{R},t) = J(\boldsymbol{R},t) \\
&\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R},t) = 0
\end{aligned} \tag{6.1}$$

似稳电流也基本上是闭合的

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J}(\boldsymbol{R},t) = 0 \tag{6.2}$$

在电容器中，由于存在位移电流，即$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \neq 0$，故(6.1)的第3式和(6.2)式不成立，这种例外的区域称为电容区. 在电感线圈中，$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \neq 0$，故(6.1)的第2式不成立，这种例外的区域称为电感区.

当电荷电流和相应的电磁场以一定频率ω变化时，要满足似稳场的条件，除变化频率ω较低外，电路的线度l不能太大，因为场源的变化所引起的场的变化是以有限速度传播的(在真空中为c). 某一时刻t空间各处的场$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R},t)$，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R},t)$并不由该时刻的$\rho(\boldsymbol{R}',t)$，和$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}',t)$所决定，只是在电路线度$l$不大的情况下，在电路邻近区域，推迟时间$\tau$(量级为$l/c$)足够小，在此时间内场源的变化可以忽略，才能近似地有场与源的瞬时对应关系. 所要满足的条件是

$$\frac{1}{c} = \tau \ll T = \frac{2\pi}{\omega}$$

或

$$l \ll \lambda$$

其中$\lambda = cT$代表变化电荷电流所辐射的电磁波的波长. 对于频率为50Hz的交流电，λ约等于6000km.

从求解电磁场边值问题来看，要严格求出一个简单的RLC电路的电磁场分布是很困难的，因为要满足所有连接导线、电阻器、电感线圈、电容器和电源的边界条件简直是不可能的. 但用电路方法求解却很容易. 显然，电路理论是一种近似，是在一定条件下由麦克斯韦方程推导出来的. 下面以RIC电路(图4.21)为例，说明如何根据似稳场的特点，从场方程推导出似稳电路方程，从而阐明场理论和电路理论间的关系.

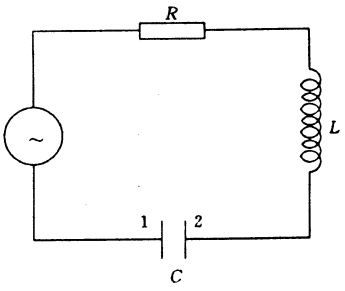


图 4.21

考察电场强度$\boldsymbol{E}$沿电路的闭合曲线积分$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$，一方面它等于电路的总电动势，包括电源电动势$\mathscr{E}$和自感线圈中的感应电动势

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mathscr{E} + \int_L \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{6.3}$$

设自感线圈共N圈，由于自感线圈中$\boldsymbol{E}$主要是感应电场，电场线是闭合的，因此虽然每一圈线圈并不真正闭合，仍可将$\boldsymbol{E}$沿每一圈的积分近似地认为是闭合的，故有

$$\int_L \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = = N \oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_I = - N \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_I$$

类似于稳定磁场，通过回路的磁感应通量与回路中的电流I成正比，故(6.3)式可表或

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_I = \mathscr{E} - L \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{6.4}$$

另一方面，电场强度$\boldsymbol{E}$沿电路的闭合曲线积分$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$等于沿非电容区的积分和沿电容区的积分之和. 在非电容区

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{\sigma} \boldsymbol{J} \tag{6.5}$$

假定电流沿电阻器导线是均匀分布的，S 代表导线横截面

$$\int_R \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int \frac{1}{\sigma}\boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int \frac{1}{\sigma S}\mathrm{d}l=IR \tag{6.6}$$

在电容区，利用似稳电场的特点

$$\int_C \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_1^2 \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\Phi_1-\Phi_2=\frac{Q}{C} \tag{6.7}$$

Q 为电容器极板上的电荷，C 为电容器的电容. 因此

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=RI+\frac{Q}{C} \tag{6.8}$$

由(6.4)和(6.8)式得似稳电路方程

$$\mathscr{E}=RI+L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{Q}{C} \tag{6.9}$$

设电流以频率 ω 周期性变化

$$I=I_0\mathrm{e}^{i\omega t}$$

由 $I=\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=\mathrm{i}\omega Q$，可给出电路的克希霍夫定律

$$\mathscr{E}=RI+\mathrm{i}\omega LI+\frac{1}{\mathrm{i}\omega C}I \tag{6.10}$$

上述电路方程是在似稳场条件下得到的，并且认为电容器只是一个电场储能的元件，磁场储能和能量损耗都可忽略不计. 自感线圈只是一个磁场储能的元件，其电场储能和能量损耗可以忽略不计. 而电阻则是一个纯粹的损耗元件.

当电流变化的频率较高，电路的线度 l 与波长 λ 可以相比时，已难于分开电场储能和磁场储能的区域，构成电路的条件已不复存在.

思考题与习题四

1. 试比较稳定电场和静电场，它们有何异同？

2. 在有稳定电流的导体中，导体内部电势是否是常数？导体内有无电荷？电荷分布在什么地方？

3. 磁场不是势场，为什么还能引入磁标势？什么情况下用磁标势？什么情况下用矢势计算磁场比较方便？

4. 比较磁多极展开与电多极展开的异同. 磁偶极矩的定义是什么？为什么说一个线电流圈与一个磁偶层等效？

5. 稳定磁场的能量有几种表达式？它们所表示的意义有何差别？

6. 如何由磁场能量计算作用力？电流固定不变和磁通量固定不变有什么不同？

7. 磁偶极子和外磁场的相互作用能与电偶极子和外电场的相互作用能相比差一符号，如何理解？

8. 在什么条件下可以用电路方程来代替场方程？

9. 设有两平面围成的直角形无穷容器，其内充满电导率为 σ 的液体，取该两平面为 xz 面和 yz 面，在 (x_0,y_0,z_0) 和 $(x_0,y_0,-z_0)$ 两点分别置正负极并通以电流 I. 求导电液体中的电势.

10. 在一很大的电解槽中充满电导率为 σ_2 的液体，使其中流着均匀的电流 J_{f0}，今在液体中置入一个电导率为 σ_1 的小球，求稳恒时电流分布和面电荷分布.

11. 半径为 a 的均匀带电球所带电量为 Q，球的质量也均匀分布，总质量为 M，以角速度 ω 绕其直径转动. 求磁矩与机械动量矩以及两者之比.

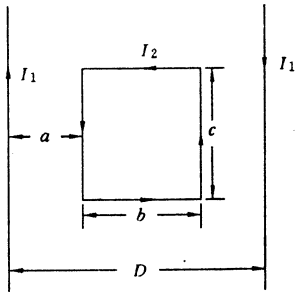
12. 有一个均匀带电的薄导体壳，其半径为 a，总电荷为 Q，球绕直径以角速度 ω 转动，用磁标势法求球内外的磁场.

13. 设理想铁磁材料的磁化规律为 $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}+\mu_0\boldsymbol{M}_0$，是与 $\boldsymbol{H}$ 无关的常数. 用这种材料做成永磁球，半径为 a，将球放在真空中，外加均匀磁场 $\boldsymbol{H}_0$. 求球内外的磁场.

14. 一均匀磁化的圆柱形永磁体，其磁化强度 $\boldsymbol{M}_0$ 沿柱轴方向，试用标势和矢势分别计算柱内外的 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{H}$，证明两种方法得的结果相同(设柱外为真空). (提示：用 $\boldsymbol{A},\phi$ 的积分表达式证明.)

15. 两个相同的磁偶极子磁矩为 $\boldsymbol{m}$，互相反平行，相距为 $\boldsymbol{r}$，计算它们之间的相互作用力.

16. 两无限长直线电流所在平面内有一矩形线圈，电流分布与几何位形如图示，求线圈所受磁场力.



(习题 4.16)

第五章　电磁波的辐射

为了研究由变化的电荷、电流分布所激发的电磁场，需要求解普遍情况下的电磁场方程. 与稳定电磁场情况类似，在普遍情况下，也引入矢势和标势来描述电磁场，通过它们来求解电磁场方程. 不稳定电荷电流所激发的电磁场也是随时间变化的，并且电场和磁场密切地联系在一起，并有一部分电磁场以波的形式脱离场源向外运动，这称为电磁波的辐射. 脱离场源的电磁波在空间运动时，与周围物质发生相互作用，影响电磁波的传播，并发生各种重要的物理现象.

电磁波辐射和传播的理论，是经典电磁场理论中最重要的部分，也是无线电物理和物理光学的理论基础. 一切无线电通讯、广播、电视、遥控、遥测等等，都是利用电磁波来进行的，都与辐射和传播问题密切相关. 光的反射、折射、干涉、衍射、偏振，以及散射、吸收、色散等等现象，也都能从变化电磁场理论得到解释. 无线电波、微波、红外线、可见光、紫外线、X 射线，γ 射线等都是电磁波. 因此研究电磁波的辐射和传播问题，无论对于科学研究还是生产实践，无论对于基础理论还是实验科学，也无论是宏观世界还是微观领域，都是十分重要的.

本章研究电磁波的辐射问题，给定了变化的电荷电流的分布，研究如何计算它们所激发的电磁场，主要是辐射电磁场. 电磁波的传播问题在下一章中讨论，微观带电粒子的辐射. 以及与物质的相互作用，放在第八章介绍.

§1　变化电磁场的矢势和标势

1. 矢势和标势的引入

在最普遍情况下，电磁场的基本方程是：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho, \qquad \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1) = \sigma \tag{1.1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) = 0 \tag{1.2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \qquad \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1) = 0 \tag{1.3}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) = \alpha \tag{1.4}$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}, \qquad \boldsymbol{J} = \sigma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}_{外})$$

我们在这里只讨论电荷、电流的分布已给定的情况下，上述方程的求解问题.

这是一组联立偏微分方程，直接求解是很困难的. 在静电和稳定电磁场中，为求解场方程曾引入过辅助量矢势 $\boldsymbol{A}$ 和标势 ϕ. 这自然会使我们联想到，对现在这组方程是否仍有可能引入一组辅助量，而使求解方程的问题变得简单呢？研究发现，这样做是可能的.

由 $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$，可引入一项辅助量 $\boldsymbol{A}$，仍称为矢势. 显然

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{1.5}$$

是上面方程的解. 将(1.5)代入(1.2)可得

$$\nabla \times \left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right) = 0 \tag{1.6}$$

仿照静电场情况，仍可引入辅助量 ϕ，只要令

$$\nabla \phi = - \left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right) \tag{1.7}$$

则(1.6)的方程一定满足. 这里的 ϕ 仍称为标量势. (1.7)式可改写为

$$\boldsymbol{E} = - \nabla \phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{1.8}$$

由(1.5)和(1.8)式看到，求解 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$，只要求出 $\boldsymbol{A}, \phi$ 就可以了.

应该指出，上面引入矢势和标势时，并没有直接定义 $\boldsymbol{A}$ 和 ϕ 本身，只是定义了 $\boldsymbol{A}$ 的旋度和 ϕ 的梯度. 因此，在这种定义下，$\boldsymbol{A}$ 和 ϕ 本身有一定程度的任意性. 也就是说，对同一个 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$，能够用来做辅助量的 $\boldsymbol{A}, \phi$ 不止一个. 下面对 $\boldsymbol{A}, \phi$ 的这种任意性作深入的分析.

2. 规范变换和规范不变性

由 $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ 看出，若令

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla \Psi \tag{1.9}$$

式中 Ψ 是任意的标量函数，则 $\boldsymbol{A}'$ 仍然满足

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}' = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

由此可见 $\boldsymbol{A}'$ 和 $\boldsymbol{A}$ 同样可以作为求解磁场 $\boldsymbol{B}$ 的辅助量，用不同的 $\boldsymbol{A}'$ 和 $\boldsymbol{A}$ 算出的 $\boldsymbol{B}$ 仍将是一样的.

由

$$\boldsymbol{E} = - \nabla \phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

看出，当 $\boldsymbol{A}$ 按(1.9)式变换时，为了保证 $\boldsymbol{E}$ 仍能是原先的值，那么 ϕ 的任意性就要受到限制. 如果 ϕ 变成 ϕ'，为保证 $\boldsymbol{E}$ 不变，它们就应满足关系式

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= - \nabla \phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \\ &= - \nabla \phi' - \frac{\partial \boldsymbol{A}'}{\partial t} \\ &= - \nabla \left(\phi' + \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \end{aligned}$$

于是得到

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

上面的讨论说明，如果 $\boldsymbol{A}, \phi$ 按

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}' &= \boldsymbol{A} + \nabla \Psi \\ \phi' &= \phi - \frac{\partial \Psi}{\partial t} \end{aligned} \tag{1.10}$$

变换时，所得到的 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ 仍然相同. 上式就是 $\boldsymbol{A}, \phi$ 任意性的具体表示，它称为规范变换(Gauge transformations). 由于在规范变换下有

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A}'$$

$$\boldsymbol{E} = - \nabla \phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = - \nabla \phi' - \frac{\partial \boldsymbol{A}'}{\partial t}$$

因而在规范变换下，不仅电磁场量 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{B},\boldsymbol{D},\boldsymbol{H}$ 等是不变的，而且矢势 $\boldsymbol{A}$ 和标势 ϕ 所满足的势方程也是不变的. 这种不变性通常称为电磁场的规范不变性(Gauge invariance). 在电磁场理论中最先引入了规范变换和规范不变性的概念，在现代理论物理中这个概念有了更进一步的发展. 现代理论物理中引入了许多场，凡是场的运动方程具有规范不变性的，这种场就称为规范场. 电磁场是最早发现的一种规范场，它传递电磁相互作用. 人们相信，传递一切相互作用的场都应是规范场，现在理论物理学正按照这个思想向前发展，因此规范场理论是当今理论物理中很活跃的一个领域.

由上所述，既然用矢势和标势来描述电磁场时，存在着规范变换的自由度，因此，我们可以利用这种规范变换来简化势方程. $\boldsymbol{A},\phi$ 的一种选择就称为一种规范.

3. 洛伦兹规范

这是电磁场理论中常用的一种选定 $\boldsymbol{A},\phi$ 的方式. 为说明这种规范的特性，我们先写出 $\boldsymbol{A},\phi$ 满足的一般方程. 将

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla\phi$$

代入场方程

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$$

在真空中则有

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \mu_0 \boldsymbol{J} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2}$$

以及

$$-\nabla^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

注意到 $\frac{1}{c^2} = \mu_0\varepsilon_0$，将上两式整理得

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = -\mu_0 \boldsymbol{J} \tag{1.11}$$

$$\nabla^2\phi + \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \boldsymbol{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1.12}$$

这就是 $\boldsymbol{A},\phi$ 满足的一般方程，它的形式还较复杂，可利用规范变换将它化简. 由规范不变性，满足规范变换的各种 $\boldsymbol{A},\phi$ 都可用来计算电磁场. 我们可以在许多的 $\boldsymbol{A},\phi$ 中再附加一些条件，按附加条件挑出所需要的 $\boldsymbol{A},\phi$. 根据不同的要求，可以选用不同的附加条件.

常用的附加条件是

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \tag{1.13}$$

这个条件称为洛伦兹条件. 按洛伦兹条件确定的 $\boldsymbol{A},\phi$ 称为洛伦兹规范. 将(1.13)代入(1.11)与(1.12)，得到洛伦兹规范下的势方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \boldsymbol{J} \tag{1.14}$$

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1.15}$$

上述方程称为达朗伯方程(D'Alembert equation),它是非齐次的波动方程.在洛伦兹规范下,$\boldsymbol{A},\phi$ 的方程是对称的,并且彼此独立.矢势由电流激发,标势由电荷激发.

现在有一个问题需要讨论,在 $\boldsymbol{A},\phi$ 满足(1.11)、(1.12)的情况下,能否保证洛伦兹条件得到满足呢?利用规范变换可以证明,一定可以找到满足洛伦兹条件的一组$(\boldsymbol{A},\phi)$.如果对某一组$(\boldsymbol{A},\phi)$不满足洛伦兹条件,即

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\neq 0$$

按规范变换可以引入新的 $\boldsymbol{A}',\phi'$,由于规范不变性,$\boldsymbol{A}',\phi'$ 显然满足(1.11)与(1.12)的方程.现在要求 $\boldsymbol{A}',\phi'$ 满足洛伦兹条件(1.13),将 $\boldsymbol{A}',\phi'$ 代入后得到

$$\nabla^2\Psi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=-\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)$$

上式右端已假定不为零,因而上方程的 Ψ 一定有非零解,这就证明了一定可以找到一个 Ψ,使得 $\boldsymbol{A}',\phi'$ 满足洛伦兹条件.

还要指出洛伦兹条件也没有把 $\boldsymbol{A},\phi$ 唯一确定.当 $\boldsymbol{A},\phi$ 已满足洛伦兹条件时,仍可作规范变换(1.10),为保证 $\boldsymbol{A}',\phi'$ 仍满足洛伦兹条件,只需要 Ψ 满足

$$\nabla^2\Psi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=0$$

在实际问题中利用洛伦兹规范这一性质往往可以使问题进一步得到简化.

4. 库仑规范

为了简化势方程(1.11)与(1.12),也可以取另一种规范条件

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0 \tag{1.16}$$

这称为库仑条件,按库仑条件确定的$(\boldsymbol{A},\phi)$称为库仑规范.取库仑规范时势方程(1.11)与(1.12)可简化为

$$\nabla^2\phi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1.17}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\boldsymbol{J}+\frac{1}{c^2}\nabla\frac{\partial\phi}{\partial t} \tag{1.18}$$

(1.17)是泊松方程,它的解为

$$\phi(\boldsymbol{R},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho(\boldsymbol{R}',t)}{r}\mathrm{d}V'$$

这是由电荷瞬时分布决定的瞬时库仑势,因此把这种选择称为库仑规范.

同洛伦兹规范一样,库仑条件总是可以满足的,并且在库仑规范下的 $\boldsymbol{A},\phi$ 也不能唯一确定,还可作规范变换.

库仑规范的优点是:标量势 ϕ 可直接由电荷分布的瞬时值算出;由于 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$,故矢势 $\boldsymbol{A}$ 是无散场或横场.洛伦兹规范的优点是:$\boldsymbol{A},\phi$ 方程有对称性,容易写成相对论的协变形式.在全空间电荷分布 $\rho=0$ 的时候,例如电磁波传播问题中,取库仑规范较方便,因这时 $\phi=0$.但一般计算电磁波的辐射问题时取洛伦兹规范很方便,因此下面只讨论洛伦兹规范.

§2 达朗伯方程的解及推迟势

先研究标量势方程

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2.1}$$

的齐次方程部分

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \tag{2.2}$$

的解. 这是一个空间波动方程,先考虑一维的情况. 这时波动方程化为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \tag{2.3}$$

引入新变量

$$\xi = t - \frac{x}{c}, \qquad \eta = t + \frac{x}{c}$$

则 ϕ 的方程换为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta} = 0$$

将上式对 ξ 积分得到

$$\frac{\partial f}{\partial\eta} = F(\eta)$$

式中 $F(\eta)$是任意函数. 再积分一次就得

$$f = f_1(\xi) + f_2(\eta)$$

这里的 f_1, f_2 也是任意函数,将 ξ,η 代入得

$$f = f_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{c}\right) \tag{2.4}$$

f_1 代表沿 x 正方向传播的波,c 代表波的速度,f_2 代表沿 x 负方向传播的波.

现在来讨论(2.1)的解. 将电荷存在的空间分为许多无限小的区域,每个小区域内的电荷为

$$\mathrm{d}q = \rho\mathrm{d}V'$$

先求出 $\mathrm{d}q$ 电荷产生的标量势 ϕ'. 由于场方程是线性的,全部电荷产生的标量势 ϕ 就等于每个小体元电荷产生的标量势之和.

$\mathrm{d}q$ 是位于(x',y',z')处的点电荷,这个点电荷在空间引起的电荷密度为

$$\rho(x,y,z,t) = \mathrm{d}q(t)\delta(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}') = \mathrm{d}q(t)\delta(\boldsymbol{r})$$

式中

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

电荷 $\mathrm{d}q$ 产生的标势 ϕ' 应满足方程

$$\nabla^2\phi' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi'}{\partial t^2} = -\frac{\mathrm{d}q(t)}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}) \tag{2.5}$$

先考虑 $\boldsymbol{r}\neq 0$ 的空间内上述方程的解,然后再由这个解去推测包含 $\boldsymbol{r}=0$ 这一点时解的形式. 在

$r\neq 0$ 的空间内方程(2.5)变为

$$\nabla^2\phi' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi'}{\partial t^2} = 0 \tag{2.6}$$

式中的 ϕ' 是位于 $r=0$ 处的点电荷产生的势，因此 ϕ' 应有球对称分布. 以 $r=0$ 为原点选球坐标系，则(2.6)式为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi'}{\partial r}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi'}{\partial t^2} = 0$$

作变换

$$u = r\phi'$$

得 u 的方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

这个方程正是一维波动方程，它的解已由(2.4)给出，由此得

$$u = f_1\left(t - \frac{r}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{r}{c}\right)$$

若选 $u=f_1$ 的特解，则

$$\phi' = \frac{f_1\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} \tag{2.7}$$

这里的 f_1 形式是任意的，它可由下述条件来确定. 当空间包含 $r=0$ 这点时，ϕ' 应满足(2.5)式，将(2.7)代入(2.5)式的左端得

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi'}{\partial t^2} &= f_1\left(t - \frac{r}{c}\right)\nabla^2\frac{1}{r}\\ &= -4\pi f_1\left(t - \frac{r}{c}\right)\delta(\boldsymbol{r})\end{aligned}$$

再与(2.5)式对比，在 $r=0$ 附近有

$$4\pi f_1(t) = \frac{\mathrm{d}q(t)}{\varepsilon_0}$$

故得

$$f_1 = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\rho\mathrm{d}V'$$

由此求得

$$\phi' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho\left(x',y',z',t - \frac{r}{c}\right)}{r}\mathrm{d}V'$$

ϕ' 是 (x',y',z') 处的电荷元产生的，全部电荷产生 ϕ 为

$$\phi(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho\left(x',y',z',t - \frac{r}{c}\right)}{r}\mathrm{d}V' \tag{2.8}$$

同理可求得矢势方程

$$\nabla^2\boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\boldsymbol{J}$$

的特解为

$$\boldsymbol{A}(x,y,z,t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{J}\left(x',y',z',t-\frac{r}{c}\right)}{r}\mathrm{d}V' \tag{2.9}$$

若选 $u=f_2\left(t+\frac{r}{c}\right)$ 的特解，则得

$$\phi(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho\left(x',y',z',t+\frac{r}{c}\right)}{r}\mathrm{d}V' \tag{2.10}$$

$$\boldsymbol{A}(x,y,z,t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{J}\left(x',y',z',t+\frac{r}{c}\right)}{r}\mathrm{d}V' \tag{2.11}$$

(2.8)－(2.11)各式都是在数学上可能的解.(2.8)和(2.9)两式说明，t 时刻(x,y,z)处的场，是由各(x',y',z')处的电荷电流元在 $t-r/c$ 时刻产生的场的总和.也就是说，(x',y',z')处的电荷电流元在 $t-r/c$ 时刻发生的变化要经过一段时间 r/c 以后，才能影响(x,y,z)处的电磁场.由此可见电磁场的变化情况是以有限速度 c 向前传播的.因此把(2.8)和(2.9)两式称为推迟势.(2.10)和(2.11)式则表示 t 时刻(x,y,z)处的场是由各电荷电流元在比 t 迟 $t+r/c$ 时刻产生的场的总和.这意味着电荷电流元的变化还没有发生，可是空间却已受到了由这种变化产生的影响，因此称这两式代表的解为超前势.超前势在物理上与因果律不符，我们以后只考虑推迟势.下面将看到，由推迟势得到的电磁场有一部分是以电磁波的形式向外传播的.

现在来证明，推迟势满足洛伦兹条件.

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{A}&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\nabla\cdot\left[\frac{\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{R}',t-\frac{r}{c}\right)}{r}\right]\mathrm{d}V'\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\left(\nabla\frac{1}{r}\right)\cdot\boldsymbol{J}+\frac{1}{r}\nabla\cdot\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{R}',t-\frac{r}{c}\right)\right]\mathrm{d}V'\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{R}',t-\frac{r}{c}\right)&=\nabla\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}',t')\\&=\frac{\partial\boldsymbol{J}}{\partial t'}\cdot\nabla t'\\&=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{J}}{\partial t'}\cdot\nabla r\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}&\nabla'\cdot\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{R}',t-\frac{r}{c}\right)\\&=\nabla'\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}',t')\Big|_{t'}+\frac{\partial\boldsymbol{J}}{\partial t'}\cdot\left(\frac{-1}{c}\nabla' r\right)\\&=\nabla'\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}',t')\Big|_{t'}+\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{J}}{\partial t'}\cdot\nabla r\end{aligned}$$

所以

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{R}',t-\frac{r}{c}\right)=\nabla'\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}',t')\Big|_{t'}-\nabla'\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}',t')$$

将上式代入(2.12)式可得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\left(\nabla\frac{1}{r}\right)\cdot\boldsymbol{J}+\frac{1}{r}(\nabla'\cdot\boldsymbol{J})_{t'}-\frac{1}{r}\nabla'\cdot\boldsymbol{J}\right]\mathrm{d}V' \tag{2.13}$$

再注意到

$$\left(\nabla \frac{1}{r}\right)\cdot \boldsymbol{J}-\frac{1}{r}\nabla'\cdot \boldsymbol{J}=-\left(\nabla' \frac{1}{r}\right)\cdot \boldsymbol{J}-\frac{1}{r}\nabla'\cdot \boldsymbol{J}$$

$$=-\nabla'\cdot\frac{\boldsymbol{J}}{r}$$

由此可得

$$\int\left[\left(\nabla \frac{1}{r}\right)\cdot \boldsymbol{J}-\frac{1}{r}\nabla'\cdot \boldsymbol{J}\right]\mathrm{d}V'$$

$$=-\int\nabla'\cdot\frac{\boldsymbol{J}}{r}\mathrm{d}V'$$

$$=-\oint\mathrm{d}S'\cdot\frac{\boldsymbol{J}}{r}$$

$$=0$$

将上式代入(2.13)式,得到

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{1}{r}(\nabla'\cdot\boldsymbol{J})_{t'}\mathrm{d}V'$$

再代入洛伦兹条件得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}=\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\frac{1}{r}(\nabla'\cdot\boldsymbol{J})_{t'}+\frac{1}{r}\frac{\partial\rho}{\partial t}\right]\mathrm{d}V'$$

由电荷守恒定律

$$\nabla'\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}',t')_{t'}+\frac{\partial\rho}{\partial t'}=(\nabla'\cdot\boldsymbol{J})_{t'}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

于是得出

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$$

§3 电偶极子的电磁场

现在我们利用推迟势来研究计算电磁场的方法.实际问题中的电荷电流分布一般都是随时间做周期变化,可表示为

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}',t)=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

$$\rho(\boldsymbol{R}',t)=\rho(\boldsymbol{R}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

代入电荷守恒定律可得

$$\nabla'\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}+\rho(\boldsymbol{R}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}(-\mathrm{i}\omega)=0$$

因此

$$\rho(\boldsymbol{R}')=\frac{-\mathrm{i}}{\omega}\nabla'\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}') \tag{3.1}$$

上式表明,在一个变化电荷电流同时存在的系统中,电荷密度与电流密度的分布不是独立无关的.例如辐射电磁波的天线系统,一般都是先设法确定它的电流分布,其电荷密度可由(3.1)式求出.

实际计算中，不必计算电荷分布 ρ. 由洛伦兹条件

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

再注意到 ϕ 随时间的关系为 $e^{-i\omega t}$，就可得

$$\phi = \frac{c^2}{i\omega}\nabla \cdot \boldsymbol{A} \tag{3.2}$$

这表明只要由电流求出矢势 $\boldsymbol{A}$ 后，由上式即可求出 ϕ. 对于辐射问题，还可以简化，只计算电流电荷分布区域以外的场. 真空中的场方程为

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = -i\omega \boldsymbol{D}$$

由此求得

$$\boldsymbol{E} = \frac{i}{\omega \varepsilon_0 \mu_0}\nabla \times \boldsymbol{B} \tag{3.3}$$

这说明只要求出矢势 $\boldsymbol{A}$ 后，由 $\boldsymbol{B}=\nabla \times \boldsymbol{A}$ 求出 $\boldsymbol{B}$，再由上式即可求出 $\boldsymbol{E}$. 因此，在辐射问题中只需要计算 $\boldsymbol{A}$. 由推迟势

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{R}', t - \frac{r}{c}\right)}{r} dV' \tag{3.4}$$

对周期变化的电流

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}', t) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')e^{-i\omega t}$$

可得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')}{r} e^{i\omega r/c} e^{-i\omega t} dV' = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{R})e^{-i\omega t}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')}{r} e^{ikr} dV' \tag{3.5}$$

其中 $k=\omega/c$.

当实际问题中的电流分布在一个小区域内时，可用多极展开方法来计算矢势. 如图 5.1 所示

$$r = |\boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}'|$$

由泰勒公式可得展开式

$$\frac{e^{ikr}}{r} = \frac{e^{ikR}}{R} - \boldsymbol{R}' \cdot \nabla \frac{e^{ikR}}{R} + \cdots \tag{3.6}$$

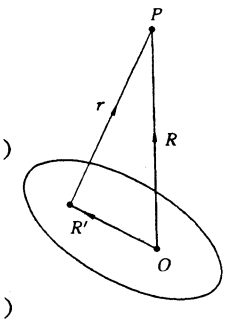


图 5.1

将上式代入(3.5)得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{A}^{(0)}(\boldsymbol{R}) + \boldsymbol{A}^{(1)}(\boldsymbol{R}) + \cdots$$

$$\boldsymbol{A}^{(0)} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikR}}{R}\int \boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')dV' \tag{3.7}$$

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \frac{-\mu_0}{4\pi}\int \boldsymbol{R}' \cdot \nabla \frac{e^{ikR}}{R}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')dV' \tag{3.8}$$

为了比较上述展开式中各项的大小，计算(3.6)式中第二项与第一项的比值. (3.6)中的第二项为

$$\boldsymbol{R}' \cdot \nabla \frac{e^{ikR}}{R} = \boldsymbol{R}' \cdot \left(\frac{-\boldsymbol{R}}{R^2} + ik\frac{\boldsymbol{R}}{R}\right)\frac{e^{ikR}}{R}$$

故得

$$\frac{\text{第二项}}{\text{第一项}} = -\boldsymbol{R}' \cdot \frac{\boldsymbol{R}}{R^2} + \mathrm{i}k\frac{\boldsymbol{R}' \cdot \boldsymbol{R}}{R}$$

为保证上述比值很小，必须同时满足

$$\frac{R'}{R} \ll 1, \qquad kR' \ll 1$$

第一个条件 $R' \ll R$ 的意义是：电流分布区域的最大线度比从原点到待求场点的距离小很多. 利用

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

可将第二个条件 $kR' \ll 1$ 改写为

$$R' \ll \lambda$$

λ 是与频率 ω 对应的电磁波的波长. 这个条件的意义是：电源分布区域的线度要比波长小很多. 当上述两个条件同时满足时，只取 $\boldsymbol{A}$ 的展开式第一项就足够了.

现在就来计算第一项 $\boldsymbol{A}^{(0)}$ 的电磁场. 由电偶极矩的定义

$$\boldsymbol{p} = \int \rho \boldsymbol{R}' \mathrm{d}V'$$

再注意到电荷守恒定律

$$\nabla' \cdot \boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}') = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

可得

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} &= \dot{\boldsymbol{p}} \\
&= \int \dot{\rho}\boldsymbol{R}'\mathrm{d}V' \\
&= -\int_V (\nabla' \cdot \boldsymbol{J})\boldsymbol{R}'\mathrm{d}V' \\
&= -\int_V \nabla' \cdot (\boldsymbol{J}\boldsymbol{R}')\mathrm{d}V' + \int_V \boldsymbol{J} \cdot \nabla'\boldsymbol{R}'\mathrm{d}V' \\
&= -\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}' \cdot \boldsymbol{J}\boldsymbol{R}' + \int_V \boldsymbol{J}\mathrm{d}V' \\
&= \int_V \boldsymbol{J}\mathrm{d}V'
\end{aligned}$$

上式中的面积分由于 $J_n = 0$ 而得零. 将上述关系代入(3.7)式中得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{(0)} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{\boldsymbol{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R} \tag{3.9}$$

由公式

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}, \qquad \boldsymbol{E} = i\frac{c^2}{\omega}\nabla \times \boldsymbol{B}$$

就可求出电磁场. 由于这时的 $\boldsymbol{A}$ 只与体系的电偶极矩有关，因而称为电偶极子的场. 在静电场中已经熟悉，两个等量异号相距很近的电荷系统称为电偶极子. 历史上首次证实电磁波存在的著名的赫兹实验，使用的装置就是一个振荡的电偶极子. 两个金属球相距很近，充电到很高的电压，使周围空气击穿而放电，就形成一个振荡的电偶极子.

由(3.9)式可算出电偶极子的电磁场为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}&=\nabla\times\boldsymbol{A}\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\times\dot{\boldsymbol{p}}\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{-1}{R^2}+\frac{\mathrm{i}k}{R}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}\frac{\boldsymbol{R}}{R}\times\dot{\boldsymbol{p}}\end{aligned}$$

注意

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t},\qquad \dot{\boldsymbol{p}}=\frac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial t}=-\mathrm{i}\omega\boldsymbol{p}$$

并令

$$\boldsymbol{R}_0=\frac{\boldsymbol{R}}{R}$$

可得到

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0\omega^2}{4\pi c}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{\mathrm{i}kR^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}\boldsymbol{R}_0\times\boldsymbol{p}\tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=\mathrm{i}\frac{c^2}{\omega}\nabla\times\boldsymbol{B}\\&=\frac{\mathrm{i}c\omega\mu_0}{4\pi}\left\{\nabla\left(\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{\mathrm{i}kR^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}\right)\times(\boldsymbol{R}_0\times\boldsymbol{p})+\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{\mathrm{i}kR^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}\nabla\times(\boldsymbol{R}_0\times\boldsymbol{p})\right\}\\&=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi\varepsilon_0}\mathrm{i}k\left\{\left(\frac{-3}{R^2}+\frac{3}{\mathrm{i}kR^3}+\frac{\mathrm{i}k}{R}\right)\boldsymbol{R}_0(\boldsymbol{R}_0\cdot\boldsymbol{p})+\left(\frac{1}{R^2}-\frac{1}{\mathrm{i}kR^3}-\frac{\mathrm{i}k}{R}\right)\boldsymbol{p}\right\}\\&=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{-k^2}{R}\boldsymbol{R}_0\times(\boldsymbol{R}_0\times\boldsymbol{p})+\left(\frac{\mathrm{i}k}{R^2}-\frac{1}{R^3}\right)(\boldsymbol{p}-3\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{R}_0)\right\}\end{aligned}\tag{3.11}$$

(3.10)和(3.11)式是电偶极矩 $\boldsymbol{p}$ 的电磁场，全部电磁场的结构是较复杂的. 为了更清楚看出偶极矩场的性质，研究两种极端情况，即在场源附近区域和离场源很远的区域内的场. 满足条件

$$\frac{1}{R}\gg\frac{\omega}{c}=\frac{2\pi}{\lambda}=k\ \text{或}\ R\ll\lambda$$

的区域为近区；满足条件

$$\frac{1}{R}\ll\frac{\omega}{c}=k=\frac{2\pi}{\lambda}\ \text{或}\ R\gg\lambda$$

的区域为远区. 先讨论在近区中的电磁场. 由于在近区中有 $kR\ll1$，可近似认为 $kR\approx0$，在(3.10)和(3.11)式中将贡献小的项略去，并取 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}\approx1$，得到近区中的电磁场为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0R^3}(3\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{R}_0-\boldsymbol{p})\\&=\frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\left(\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{R}}{R^3}\right)\end{aligned}\tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}&=\frac{i\mu_0\omega^2}{4\pi ckR^2}\boldsymbol{R}_0\times\boldsymbol{p}\\&=\frac{-\mu_0}{4\pi R^3}\boldsymbol{R}\times\dot{\boldsymbol{p}}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')\times\boldsymbol{R}}{R^3}\mathrm{d}V'\end{aligned}$$

由(3.12)两式看出，在近区中推迟作用可以忽略，场和源同相变化. 这时场虽然是变化的，但在每一瞬时 t，其电场和静止的电偶极子的场相同，磁场和稳定电流的磁场相同，这种场称为似稳电磁场. 下面计算这部分场的能流. 电磁场随时间的变化关系由

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_0 e^{-i\omega t}$$

决定. 可将(3.12)改写成

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega t}$$

$$\boldsymbol{B} = i\boldsymbol{B}_0 e^{-i\omega t} = \mu_0 \boldsymbol{H}_0 e^{-i\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)} \tag{3.13}$$

应该注意,电场、磁场以及它们的能流等物理量是可以实际测量的,应该是实数. 用复数表示周期过程只是为了简化运算的一种数学手段. 对于场的一次运算,例如场的相加,先取实数进行运算与用复数运算后再取实数,其结果是相同的;但对场的二次式用复数运算后再取实数,其结果和原先取实数作运算的结果不相等. 能流 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$,属于场的二次式,必须先把场取实数后再算能流. 人们关心的不是能流的瞬时值,而是能流在一周期内的平均值,为以后计算能流方便,这里先给出能流平均值的一般公式. 设

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega t}, \qquad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 e^{-i(\omega t - \varphi)}$$

φ 是电场磁场的相位差,先取实数作运算

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{S}} &= \frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\mathrm{d}t \\ &= \boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{H}_0\frac{1}{T}\int_0^T \cos\omega t\cos(\omega t-\varphi)\mathrm{d}t \\ &= \boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{H}_0\frac{1}{2}\cos\varphi\end{aligned}$$

另一方面由复数运算有

$$\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{H}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{H}_0\cos\varphi$$

于是得计算平均能流的一般公式为

$$\overline{\boldsymbol{S}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{H}) \tag{3.14}$$

为得到近区中起主要作用的那部分场的平均能流,将(3.13)代入(3.14)式即得

$$\overline{\boldsymbol{S}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{H}_0\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

这表明,虽然在每一瞬间这部分场的能量在场中流动,但平均能流为零,因而这部分场不能脱离场源向外运动.

再研究远区中的场. 这时 $R\gg\lambda$,保留(3.10)和(3.11)式中贡献最大的项,得到远区中的电磁场为

$$\boldsymbol{E} = \frac{e^{ikR}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{k^2}{R}(\boldsymbol{R}_0\times\boldsymbol{p})\times\boldsymbol{R}_0$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0\omega^2 e^{ikR}}{4\pi cR}\boldsymbol{R}_0\times\boldsymbol{p} \tag{3.15}$$

注意到

$$\ddot{\boldsymbol{p}} = -\omega^2\boldsymbol{p} = -\omega^2\boldsymbol{p}_0 e^{-i\omega t}$$

可将电磁场改写为

$$\boldsymbol{E} = \frac{e^{ikR}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R}\boldsymbol{R}_0\times(\boldsymbol{R}_0\times\ddot{\boldsymbol{p}}) \tag{3.16}$$

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi Rc}\ddot{\boldsymbol{p}}\times\boldsymbol{R}_0 \tag{3.17}$$

如果将电偶极矩 $\boldsymbol{p}$ 的方向选为 e_z，将 $\boldsymbol{p}$ 的位置选为坐标原点(见图 5.2)，由于 $\boldsymbol{p}=pe_z$，可将 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$ 写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=\frac{e^{ikR}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R}|\ddot{\boldsymbol{p}}|\sin\theta e_\theta\\ \boldsymbol{B}&=\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi cR}|\ddot{\boldsymbol{p}}|\sin\theta e_\varphi\end{aligned} \tag{3.18}$$

注意到 $\boldsymbol{p}$ 中的时间因子 $e^{-i\omega t}$，则 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}$ 中含有因子 $e^{-i(\omega t-kR)}$

由此看出，在远区域内起主要作用的电磁场是以波的形式向外传播的，称这部分场为电磁波. 它是沿着 R 方向传播的球面波. 电场和磁场彼此正交且和传播方向组成右手螺旋系，这种电磁波称为横电磁波. 波中的电磁场数值之比为

$$\frac{E}{H}=\frac{1}{\varepsilon_0 c}=\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}}$$

由此得出在波中的电场能量密度与磁场能量密度相等，即

$$\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}=\frac{\mu_0 H^2}{2}$$

通常将以波的形式向外传播的这部分场称为辐射场.

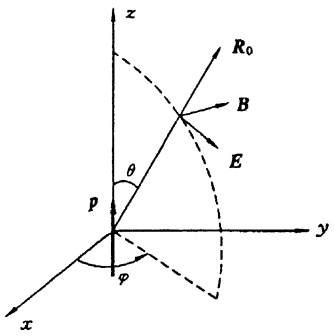


图 5.2

将(3.18)式代入(3.14)式可得辐射场的平均能流

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{S}}&=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{H})\\ &=\frac{|\ddot{\boldsymbol{p}}|^2}{32\pi^2c^3\varepsilon_0 R^2}\sin^2\theta e_R\end{aligned} \tag{3.19}$$

平均能量不等于零，说明这部分场确实是脱离了场源向外辐射出去了. 图 5.3 画出了平均能流的分布图，它有轴对称性，在 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 的方向辐射的能量最大，在偶极子轴线方向辐射的能量为零. 平均辐射能流标志了辐射系统的方向特性，即辐射能量在各方向的分布情况. 辐射系统简称为天线，方向特性是天线的一个重要参数.

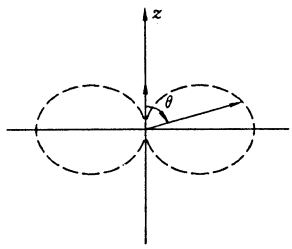


图 5.3

单位时间内辐射出的总能量称为辐射功率，用 W 表示，它等于 S 对任意半径的球面积分

$$\begin{aligned}W&=\oint|\overline{S}|R^2\mathrm{d}\Omega\\ &=\frac{|\ddot{\boldsymbol{p}}|^2}{32\pi^2c^3\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\\ &=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|\ddot{\boldsymbol{p}}|^2}{3c^3}\end{aligned}$$

将

$$|\ddot{\boldsymbol{p}}|=\omega^2 p_0\qquad\frac{\omega}{c}=\frac{2\pi}{\lambda} \tag{3.20}$$

代入后得

$$W = \frac{cp_0^2}{12\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\omega}{c}\right)^4 = \frac{cp_0^2}{12\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 \tag{3.21}$$

这表明电偶极矩的辐射与偶极矩强度 p_0 的平方成正比，与频率的四次方成正比或与波长的四次方成反比.

从上面对变化电偶极矩电磁场的分析看出，在一般情况下，变化电荷电流所产生的电磁场是很复杂的，在近区起主要作用的是似稳场，它们不能脱离场源向外运动，而是与场源的瞬时值对应，场源消失，这部分场也随之消失. 在远区起主要作用的场是辐射场，它们脱离场源以波的形式向外运动，它们被场源辐射出来后，就在空间独立存在. 这部分场就是近代技术上用作通讯工具的电磁波. 在近区与远区之间的中间区域，各部分场的作用差不多，场的结构很复杂. 在实际应用中人们并不关心全部电磁场，只考虑电磁波，因为电磁波在技术上有重要应用. 辐射场的基本特征是场的振幅同距离成反比，这一限制称为辐射场条件. 通常所说的辐射问题就是计算辐射场，在以后的辐射计算中只研究与距离成反比变化的场，其它各部分场就不再讨论了.

前面曾指出，一个辐射系统能看成电偶极矩的条件是：场源的线度要远小于波长. 可看成电偶极矩的天线称为短天线，不能看成电偶极矩的天线称为长天线. 对长天线可分成无限多的小天线元，每一个元天线可看成电偶极矩，将元天线的场叠加后就得到总辐射场，这是计算任意天线辐射场的一般方法，以后将详细讨论.

例 1 两个相同的电偶极矩，同向地排在一直线上，相矩为 a，计算它们的总辐射场.

解 如图 5.4 所示，偶极矩沿 z 轴排列.

$$\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_0 e^{-i\omega t}$$

由(3.17)式

$$\boldsymbol{B}_1 = \frac{\mu_0 e^{ikR_1}}{4\pi c R_1}\dot{\boldsymbol{p}}_1 \times \boldsymbol{e}_R$$

$$\boldsymbol{B}_2 = \frac{\mu_0 e^{ikR_2}}{4\pi c R_2}\dot{\boldsymbol{p}}_2 \times \boldsymbol{e}_R \tag{3.22}$$

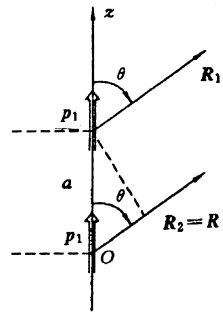


图 5.4

在辐射问题中，R_1, R_2 远大于场源线度，故可近似认为 $\boldsymbol{R}_1$ 与 $\boldsymbol{R}_2$ 是平行的.

$$R_1 = R_2 - a\cos\theta \tag{3.22}$$

在叠加场的过程中，可令分母上的 $R_1 \approx R_2 = R$，在指数因子中的 R_1 与 R_2 不能认为相等，因为在相位因子中相差虽小，但其函数值可能相差很大. 于是总的辐射场为

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi c R}(e^{ikR_1} + e^{ikR_2})\dot{\boldsymbol{p}} \times \boldsymbol{e}_R$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi c R}e^{ikR}(1 + e^{-ika\cos\theta})\dot{\boldsymbol{p}} \times \boldsymbol{e}_R$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{ic^2}{\omega}\nabla \times \boldsymbol{B} = c\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{e}_R$$

若 $a \ll \lambda$，则 $ka \ll 1$，可近似取

$$e^{-ika\cos\theta} \approx 1$$

则得

$$\boldsymbol{B} = \frac{2\mu_0}{4\pi cR} e^{ikR} \ddot{\boldsymbol{p}} \times \boldsymbol{e}_R$$

即辐射场为单个电偶极子场的二倍.

上述结果有实用价值，一般广播电台的中波天线假定可看成电偶极子，将天线垂直立在地面附近，大地可近似看成理想导体，理想导体内部电磁场为零，但在导体表面会出现感应电流，这些电流对场的影响可用象偶极子来代替，这样就和上述问题相同了. 因此，大地的作用可以提高天线的辐射场强度. 实际的大地与理想导体相差甚远，为提高地面的导电性能，通常在地面上铺设金属网.

§4 线状天线系统的辐射

产生电磁辐射的装置称为辐射天线. 根据实际需要，有各种类型的天线，例如把同轴线的内导体延伸出去一段，这段没有屏蔽的导体，当受到交变电源的激励时，就会辐射电磁波，这种天线称为鞭状天线；又如把一段终端开路的双线传输线的两个导体向相反的方向张开 90°，在交变电源的激励下也会辐射电磁波(见图 5.5). 这类天线导体都是直线形状，且导体的横截面比辐射的电磁波波长小很多，因而统称为线状天线，通常用于低频波段. 在微波频段，常用一电磁波源去照射一抛物形金属反射面，电磁波经抛物面反射后再向同一方向辐射出去，这时的辐射源是一个曲面，故称为面天线.

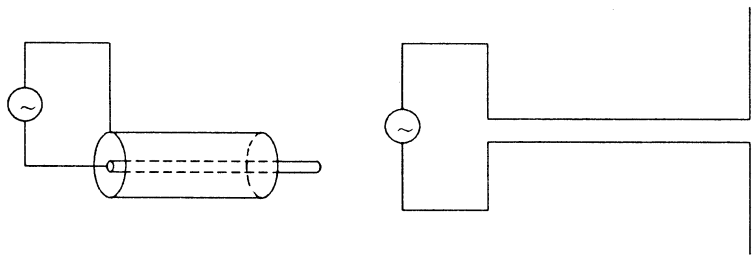


图 5.5

从理论上看，如果在天线的输入端给定了激励电动势，在一定的边界条件下求解麦克斯韦方程组，就应该能求出辐射场分布. 然而由于天线的形状复杂，在数学上很难严格求解，因此在实际应用上，通常都是把天线的辐射问题分成两个独立的问题来求解. 首先，设法确定天线上的源分布，例如对线状天线确定天线上的电流与电荷分布，对面天线确定场源面上的场强；其次，根据场源的分布来确定空间的辐射场. 确定场源也是一个复杂的边值问题，一般都用近似方法来求解，例如对线状天线上的电流分布，可用传输线理论中的长线理论来解决. 我们只讨论线状天线的第二个问题，即确定天线电流电荷分布后，如何计算辐射场问题.

1. 元天线的辐射和天线的基本参数

前面已经指出，计算线状天线的辐射场时可把天线分成无限多的小段，每段称为元天线，元天线可看成电偶极矩. 设天线沿 z 轴(见图 5.6)，天线上的电流为

$$I = I(z)e^{-i\omega t}$$

在 z 处的元天线长为 Δz，与元天线对应的电偶极矩为

$$\dot{p}=\int I(z)\mathrm{d}z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$
$$=I(z)\Delta z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$
$$\ddot{p}=-\mathrm{i}\omega I(z)\Delta z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

将上式代入(3.18)式得

$$\boldsymbol{E}=\frac{-\mathrm{i}\omega\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0c^2r}I(z)\Delta z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\boldsymbol{e}_\theta$$
$$\boldsymbol{B}=\frac{-\mathrm{i}\omega\mu_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\sin\theta}{4\pi cr}I(z)\Delta z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\boldsymbol{e}_\varphi \qquad (4.1)$$

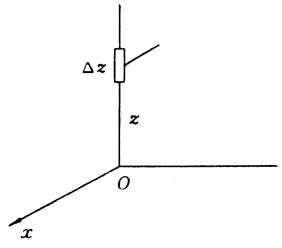


图 5.6

元天线的平均辐射能流为

$$\bar{S}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{H})=\frac{\omega^2I^2(z)\Delta z^2}{32\pi^2c^3\varepsilon_0r^2}\sin^2\theta\boldsymbol{e}_r \qquad (4.2)$$

元天线的辐射功率为

$$W^r=\oint|\bar{S}|r^2\mathrm{d}\Omega=\frac{(\omega I(z)\Delta z)^2}{12\pi c^3\varepsilon_0} \qquad (4.3)$$

利用上述结果引入描述天线特性的基本参数：

(1)辐射方向图　天线在各方向辐射的能量是不相同的，将(4.2)式表达的平均辐射能流随角度的变化情况用图形画出，可形象地表示辐射能量在空间的角分布，这种图称为天线的辐射方向图或称方向图. 一般都以相对能流来画方向图，即取平均能流的最大值为单位，这样元天线的方向图就按 $\sin^2\theta$ 画出. 图 5.7 就是元天线的方向图，在 $\theta=90°$ 时能流最大，在 $\theta=45°$ 时相对能流密度为 0.5. 方向图也称为波瓣图.

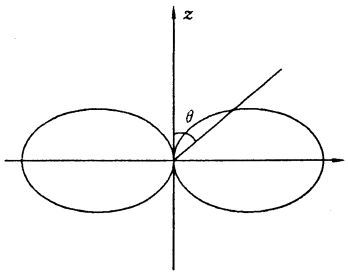


图 5.7

(2)辐射电阻　天线向外辐射的电磁能量是由电源供给的. 对电源来说，由于辐射而损耗的能量，可等效地看成是一个电阻 R 所消耗的. 通过等效电阻流入天线输入端的电流，在等效电阻 R_r 上耗散的功率恰好等于总的辐射功率. 等效电阻 R_r 称为辐射电阻. 对元天线整个天线上的电流是相同的. 因此，电流为 I，长度为 Δz 的元天线的辐射电阻由下式定义：

$$W=\frac{1}{2}R_rI^2$$

将(4.3)的 W 代入得

$$R_r=\frac{2W}{I^2}=\frac{\omega^2\Delta z^2}{6\pi c^3\varepsilon_0}$$
$$=\frac{4\pi^2}{6\pi c\varepsilon_0}\left(\frac{\Delta z}{\lambda}\right)^2=80\pi^2\left(\frac{\Delta z}{\lambda}\right)^2(\Omega) \qquad (4.5)$$

因元天线长度 $\Delta z\ll\lambda$，故元天线的辐射电阻很小. 为了增加元天线的辐射功率必须提高天线电流，电流太大使得天线导体的欧姆损耗也增加，因此靠提高天线电流来增加辐射功率是不合适的，一般都是用增加天线的长度来提高辐射能力.

(3)方向性系数　已经看到天线在各方向辐射的能量是不相同的. 设对时间的平均辐射能流为 $\bar{S}$，则 $U=\bar{S}r^2$ 表示在某一方向上单位立体角内天线辐射出的能量，称为辐射强度. 辐射强度与方位角有关，但总有一个最大的辐射强度，用 U_m 表示，例如元天线在 $\theta=90°$ 方位上的辐射强度取最大值. 也可以设想天线辐射的能量，是由一个各个方向辐射能量相同的理想天线所

辐射的. 理想天线的辐射强度是各向同性的，可称为平均辐射强度，用 U_0 表示，它和实际天线的辐射功率 W 的关系为

$$W = \int U_0 \mathrm{d}\Omega = 4\pi U_0 \tag{4.6}$$

为了定量表示天线辐射能量的集中程度，引入天线在某方向的方向性系数 $D(\theta,\varphi)$，它的定义是

$$D(\theta,\varphi) = \frac{\text{某方向的辐射强度 } U(\theta,\varphi)}{\text{平均辐射强度 } U_0} = \frac{4\pi U(\theta,\varphi)}{W} \tag{4.7}$$

在辐射强度最大方向上的方向性系数用 D 表示，有时也直接把 D 称为天线的方向性系数.

由(4.2)和(4.3)式可得元天线的方向性系数为

$$D = \left(\frac{\omega^2 I^2 \Delta z^2}{32\pi^2 c^3 \varepsilon_0}\right) 4\pi \Big/ \left(\frac{\omega^2 I^2 \Delta z^2}{12\pi c^3 \varepsilon_0}\right) = 1.5 \tag{4.8}$$

一个天线的 D 值愈大，它辐射的能量就愈集中. 注意，这里的 D 实际是辐射最大方向上的方向性系数.

(4)天线的增益　对一个实际天线，由于天线导体有电阻，将发生欧姆损耗，因而输入天线的能量不能全部转换为辐射能量. 用 η 表示实际天线的效率

$$\eta = \frac{\text{辐射功率 } W}{\text{输入功率 } W_i}$$

设有一理想天线，它将输入的能量全部转换为辐射能量，并将它们均匀地辐射到各个方向. 在和实际天线的输入能量相同的情况下，设理想天线的辐射强度为 U_0，则

$$W = W_i = \int U_0 \mathrm{d}\Omega = 4\pi U_0$$

前面引入的方向系数，只能表示辐射能量的集中程度，没有表达出天线把输入能量转换为辐射能量的能力. 为了全面表达天线的质量，再引入天线增益 $G(\theta,\varphi)$，它的定义是：在输入功率相同的情况下

$$\begin{aligned} G(\theta,\varphi) &= \frac{\text{天线在某方向的实际辐射强度 } U(\theta,\varphi)}{\text{理想天线的辐射强度 } U_0} \\ &= \frac{4\pi U(\theta,\varphi)}{W_i} \\ &= \frac{4\pi\eta U(\theta,\varphi)}{W} \end{aligned} \tag{4.9}$$

因为

$$D(\theta,\varphi) = \frac{4\pi U(\theta,\varphi)}{W}$$

表示某方向上的方向性系数，则天线增益为

$$G(\theta,\varphi) = \eta D(\theta,\varphi) \tag{4.10}$$

η 是天线的效率. 天线增益与方向有关，沿轴辐射最大的方向上天线的增益为

$$G = \eta D \tag{4.11}$$

2. 长天线的辐射

前面已指出，为了提高天线的辐射功率，必须增加天线的长度. 实际天线的横截面比波长小很多，天线上的电流可近似看成线电流. 设天线长为 $2l$，激励电源加在天线的中点，称为中点馈电，外加电源在天线导体上激励起电磁场，这些电磁场以波的形式沿天线传播，当电磁波

到达天线端点时将被反射，在天线上形成驻波，因此天线上的电流以驻波的形式分布，端点是电流驻波的节点. 在图 5.8 的天线中，天线电流的分布可近似表为

$$I(z)=I_0\sin\frac{2\pi}{\lambda}(l-|z|)$$
$$=I_0\sin k(l-|z|) \tag{4.12}$$

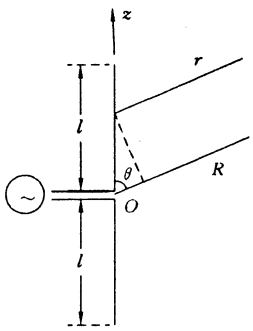


图 5.8

计算长天线的辐射场时，先算出 $\mathrm{d}z$ 一段元天线的场，再把元天线的场叠加起来即得到长天线的辐射场.

由(4.1)式元天线的辐射场(略去时间因子)为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}=\frac{-\mathrm{i}\omega\sin\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi\varepsilon_0c^2r}I(z)\mathrm{d}z\boldsymbol{e}_\theta \tag{4.13}$$

式中 r 是位于 z 处的一段元天线 $\mathrm{d}z$ 距待求场点的距离. 由图 5.5 可见，R 是原点到待求场点的距离，待求场点离天线很远，可近似认为 r 与 R 平行，于是在整个天线上的各段元天线产生的电场的方向相同，叠加时只需要考虑场的大小，由图可得

$$r=R-z\cos\theta$$

把场叠加时，分母中的 r 可近似用 R 代替，由(4.13)可得天线产生的总电场为

$$E=-\frac{\mathrm{i}\omega\sin\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi\varepsilon_0c^2R}\int_{-l}^{l}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz\cos\theta}I(z)\mathrm{d}z \tag{4.14}$$

其中

$$\int_{-l}^{l}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz\cos\theta}I(z)\mathrm{d}z$$
$$=\int_{-l}^{l}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz\cos\theta}I_0\sin k(l-|z|)\mathrm{d}z$$
$$=\int_{-l}^{0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz\cos\theta}I_0\sin(kz+kl)\mathrm{d}z+\int_{0}^{l}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz\cos\theta}I_0\sin(kl-kz)\mathrm{d}z \tag{4.15}$$

利用积分公式

$$\int\mathrm{e}^{at}\sin(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{e}^{at}}{\alpha^2+\omega^2}[\alpha\sin(\omega t+\varphi)-\omega\cos(\omega t+\varphi)]$$

可将(4.15)的积分作出，得

$$\int_{-l}^{l}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz\cos\theta}I(z)\mathrm{d}z=\frac{2kI_0}{k^2\sin^2\theta}[\cos(kl\cos\theta)-\cos(kl)]$$

再代入(4.14)式得

$$\boldsymbol{E}=\frac{-\mathrm{i}I_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{2\pi\varepsilon_0cR}\left[\frac{\cos(kl\cos\theta)-\cos(kl)}{\sin\theta}\right]\boldsymbol{e}_\theta \tag{4.16}$$

$$\boldsymbol{B}=\frac{1}{c}\boldsymbol{e}_R\times\boldsymbol{E}$$

平均辐射能流

$$\overline{\boldsymbol{S}}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{H})=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}^*\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{e}_R$$

$$\bar{S}=\frac{I_0^2}{8\pi^2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{1}{R^2}\left(\frac{\cos(kl\cos\theta)-\cos(kl)}{\sin\theta}\right)^2 \tag{4.17}$$

当 $2l=\frac{\lambda}{2}$，即天线的长度等于半波长时

$$\bar{S}=\frac{I_0^2}{8\pi^2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{1}{R^2}\left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\right]^2 \tag{4.18}$$

图(5.9)中画出了天线长度取不同值时的方向图. 方向图只是 θ 的函数，在长度为半波长和一个波长时，方向图中只有一个主波瓣；当长度增加时，将出现多个大小不等的波瓣.

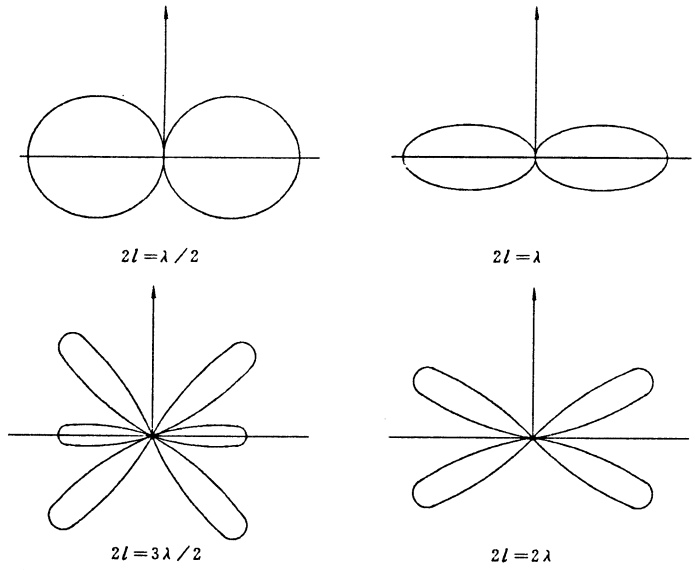


图 5.9

下面计算半波长的辐射功率. 由(4.18)式可得

$$W=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\bar{S}R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{I_0^2}{4\pi^2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\int_0^{\pi}\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\mathrm{d}\theta \tag{4.19}$$

令 $u=\cos\theta$，则 $\mathrm{d}u=-\sin\theta\mathrm{d}\theta$，上式中的积分化为

$$I=\int_0^{\pi}\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=-\frac{1}{2}\int_1^{-1}\frac{1+\cos\pi u}{1-u^2}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(1+\cos\pi u)\left(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}\right)\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1+\cos\pi u)\frac{1}{1+u}\mathrm{d}u$$

令 $1+u=\frac{v}{\pi}$，则上式化为

$$I = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}\frac{1-\cos v}{v}\mathrm{d}v$$

$$= \frac{1}{2}[\ln(2\pi\gamma) - \mathrm{Ci}(2\pi)] \tag{4.20}$$

式中 $\gamma=1.7811$ 是尤拉常数，$\mathrm{Ci}(x)$是余弦积分

$$\mathrm{Ci}(x) = -\int_{x}^{\infty}\frac{\cos v}{v}\mathrm{d}v$$

余弦积分可查表得到：$\mathrm{Ci}(2\pi)=-0.0226$，将(4.20)式以及各量的值代入(4.19)式，得半波天线的辐射功率为

$$W = \frac{I_0^2}{8\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}[2.415+0.0226] = 36.57I_0^2$$

在天线输入端的电流为 I_0，故可求得半波天线的辐射电阻为

$$R_r = \frac{2W}{I_0^2} = 73.14\Omega \tag{4.21}$$

半波天线的辐射电阻比元天线的辐射电阻要大得多，因而辐射能力高得多. 由(4.9)和(4.18)式，半波天线在某方向的方向性系数为

$$D(\theta) = \frac{4\pi\bar{S}R^2}{W}$$

$$= \frac{4\pi}{36.57I_0^2}\frac{I_0^2}{8\pi^2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\right]^2$$

$$= \frac{60}{36.57}\left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\right]^2 \tag{4.22}$$

在最大辐射方向$\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)$的方向性系数 $D=1.64$.

3. 天线阵的辐射

前面看到单一长天线的方向图，只和极角 θ 有关，但与方位角 φ 无关. 为了得到定向性很强的辐射，通常都是用很多天线按一定方式排成天线阵. 天线阵中每一天线的方向、电流分布和相位都可有差别，但若每一天线都取任意值时，则计算总的电磁场时将出现极大的困难. 因此为便于计算，在设计天线阵时，一般都尽可能采用较简单的天线阵.

下面只介绍最简单的直线式天线阵. 设每一天线的型式相同，例如都是元天线或半波天线，天线中的电流分布与相位相同. 每一天线都沿 $\boldsymbol{e}_z$ 方向排列，相邻天线的中心相距为 d，天线阵的轴指向 $\boldsymbol{e}_x$，天线的编号如图 5.10 所示. 相邻天线中心到待求场点的距离相差为 $d\cos\varphi$，$r_i=r_{i-1}-d\cos\varphi$，天线辐射场的一般形式为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0(r,\theta,\varphi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}$$

r 是从天线中心到待求场点的距离. 将各天线场叠加时，在振辐部分 $\boldsymbol{E}_0(r,\theta,\varphi)$中，各天线在 r

上的差别可略去，只保留在相位因子中 r 的差别. 具体写出各天线的场为：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}^{(0)} &= \boldsymbol{E}_0 e^{ikr_0} \\
E^{(1)} &= E_0 e^{ikr_1} \\
&= E_0 e^{ik(r_0 - d\cos\varphi)} \\
&= E^{(0)} e^{-ikd\cos\varphi} \\
E^{(2)} &= E_0 e^{ikr_2} \\
&= E_0 e^{ik(r_1 - d\cos\varphi)} \\
&= E^{(1)} e^{-ikd\cos\varphi} \\
&= E^{(0)} e^{-2ikd\cos\varphi} \\
E^{(m)} &= E^{(0)} e^{-imkd\cos\varphi}
\end{aligned}$$

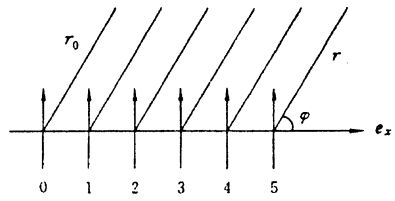


图 5.10

总的场为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= \sum_{m=0}^{N-1} \boldsymbol{E}^{(m)} \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} \boldsymbol{E}^{(0)} e^{-imkd\cos\varphi} \\
&= \boldsymbol{E}^{(0)} \frac{1 - e^{iNkd\cos\varphi}}{1 - e^{ikd\cos\varphi}} \\
\boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}^{(0)} F(\varphi)
\end{aligned} \tag{4.23}$$

能流与 $|\boldsymbol{E}|^2$ 成比例，即总的辐射能流与

$$|E^{(0)}|^2 |F(\varphi)|^2$$

成比例. 也就是说，总的辐射能流等于原来单一天线的辐射能流再乘以因子 $|F(\varphi)|^2$.

$$f(\varphi) = |F(\varphi)|^2 = \frac{\sin^2\left(\frac{N}{2}kd\cos\varphi\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}kd\cos\varphi\right)} \tag{4.24}$$

称为天线阵的因子. 由此可见天线阵的方向图由原来单一天线的辐射角分布再乘阵因子. 适当选择天线阵元的个数与相邻天线的距离，就可获得不同的方向图. 当 $\frac{N}{2}kd\cos\varphi = m\pi$　$m = \pm 1, \pm 2, \cdots$ 时，$f(\varphi) = 0$，例如，当 $N = 4, d = \lambda/2$ 时

$$\cos\varphi = \frac{2m\pi}{Nkd} = \frac{2m\pi}{4 \times \frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{\lambda}{2}} = \frac{2m}{4}$$

$m = 1, \cos\varphi = 1/2$，求得 $\varphi = 60°$. $m = 2, \cos\varphi = 1$，求得 $\varphi = 0°$. 这表明在第一象限中，$\varphi = 0°, 60°$ 时，阵因子 $f(\varphi)$ 有零点. 用求函数极大值的方法，可求出当 $\varphi = \pi/2, \varphi = 3\pi/2$ 时，$f(\varphi)$ 取最大值. 图 5.11 画出了当 $N = 4$，$d = \lambda/2$ 时 $f(\varphi)$ 的分布情况. 由此看出在垂直于天线阵轴线的方向，辐射最强. 天线阵轴线沿 e_x 方向，所以 $f(\varphi)$ 最大的方向是在 $y-z$ 平面内. 另一方面，单个天线辐射最强的方向是在 $x-y$ 平面内（天线轴沿 e_z）. 把两者结合起来考虑，天线阵辐射的最强的方向就只在 y 轴上了. 当然由于波瓣有一定张角，主要的辐射能量集中在一定的张角范围内.

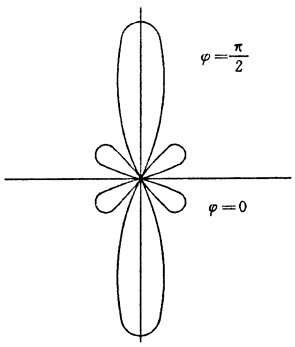


图 5.11

§5 磁偶极矩和电四极矩的辐射

现在让我们再回到矢势的多极展开上来. 前面只讨论了展开式的第一项 $A^{(0)}$，它表示电偶极矩的贡献. 当电流体系的电偶极矩为零时，就必须考虑展开式中的第二项 $A^{(1)}$

$$A^{(1)}=\frac{-\mu_0}{4\pi}\int \boldsymbol{R}'\cdot\nabla\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')\mathrm{d}V'$$

我们只讨论辐射场，在上式中只保留与 R 一次方成反比的项，得到

$$\boldsymbol{A}=\frac{-\mu_0\mathrm{i}k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R}\int \boldsymbol{R}_0\cdot\boldsymbol{R}'\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')\mathrm{d}V' \tag{5.1}$$

式中 $\boldsymbol{R}_0=\boldsymbol{R}/R$. 注意到等式

$$\boldsymbol{R}'\boldsymbol{J}'=\frac{1}{2}(\boldsymbol{R}'\boldsymbol{J}'+\boldsymbol{J}'\boldsymbol{R}')+\frac{1}{2}(\boldsymbol{R}'\boldsymbol{J}'-\boldsymbol{J}'\boldsymbol{R}')$$

可将(5.1)式的积分改写为

$$\int \boldsymbol{R}_0\cdot\boldsymbol{R}'\boldsymbol{J}'\mathrm{d}V'=\boldsymbol{R}_0\cdot\int\frac{1}{2}(\boldsymbol{R}'\boldsymbol{J}'+\boldsymbol{J}'\boldsymbol{R}')\mathrm{d}V'+\frac{1}{2}\int\boldsymbol{R}_0\cdot(\boldsymbol{R}'\boldsymbol{J}'-\boldsymbol{J}'\boldsymbol{R}')\mathrm{d}V' \tag{5.2}$$

再注意到矢量关系

$$\boldsymbol{R}_0\times(\boldsymbol{R}'\times\boldsymbol{J}')=\boldsymbol{R}_0\cdot\boldsymbol{J}'\boldsymbol{R}'-\boldsymbol{R}_0\cdot\boldsymbol{R}'\boldsymbol{J}'$$

(5.2)式的第二项积分可化为

$$\frac{1}{2}\int\boldsymbol{R}_0\cdot(\boldsymbol{R}'\boldsymbol{J}'-\boldsymbol{J}'\boldsymbol{R}')\mathrm{d}V'=-\frac{1}{2}\boldsymbol{R}_0\times\int(\boldsymbol{R}'\times\boldsymbol{J}')\mathrm{d}V'=-\boldsymbol{R}_0\times\boldsymbol{m} \tag{5.3}$$

$\boldsymbol{m}$ 是体系的磁偶极矩. 为了算出(5.2)式中的第一项积分，利用关系

$$\boldsymbol{J}'\cdot\nabla'\boldsymbol{R}'=\boldsymbol{J}'\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{I}}=\boldsymbol{J}'$$

可得到

$$\boldsymbol{R}'\boldsymbol{J}'+\boldsymbol{J}'\boldsymbol{R}'=\boldsymbol{R}'\boldsymbol{J}'\cdot\nabla'\boldsymbol{R}'+\boldsymbol{J}'\cdot(\nabla'\boldsymbol{R}')\boldsymbol{R}' \tag{5.4}$$

另一方面还有关系式

$$\begin{aligned}\nabla'\cdot(\boldsymbol{J}'\boldsymbol{R}'\boldsymbol{R}')&=(\nabla'\cdot\boldsymbol{J}')\boldsymbol{R}'\boldsymbol{R}'+\boldsymbol{J}'\cdot\nabla'(\boldsymbol{R}'\boldsymbol{R}')\\&=-\frac{\partial\rho}{\partial t}\boldsymbol{R}'\boldsymbol{R}'+\boldsymbol{J}'\cdot(\nabla\boldsymbol{R}')\boldsymbol{R}'+\boldsymbol{R}'\boldsymbol{J}'\cdot\nabla'\boldsymbol{R}'\end{aligned}$$

于是(5.2)式中的第一项积分可化为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{R}_0\cdot\frac{1}{2}\int(\boldsymbol{R}'\boldsymbol{J}'+\boldsymbol{J}'\boldsymbol{R}')\mathrm{d}V'\\&=\boldsymbol{R}_0\cdot\frac{1}{2}\int\nabla'\cdot(\boldsymbol{J}'\boldsymbol{R}'\boldsymbol{R}')\mathrm{d}V'+\boldsymbol{R}_0\cdot\frac{1}{2}\int\frac{\partial\rho}{\partial t}\boldsymbol{R}'\boldsymbol{R}'\mathrm{d}V'\\&=\frac{1}{2}\boldsymbol{R}_0\cdot\oint_S\mathrm{d}\boldsymbol{S}'\cdot\boldsymbol{J}'\boldsymbol{R}'\boldsymbol{R}'+\frac{1}{6}\boldsymbol{R}_0\cdot\int3\dot{\rho}\boldsymbol{R}'\boldsymbol{R}'\mathrm{d}V'\\&=\frac{1}{6}\boldsymbol{R}_0\cdot\dddot{\mathscr{D}}\end{aligned} \tag{5.5}$$

式中

$$\dddot{\mathscr{D}}=\int3\dot{\rho}\boldsymbol{R}'\boldsymbol{R}'\mathrm{d}V' \tag{5.6}$$

是体系的电四极矩. 将(5.3)和(5.5)式代回(5.2)与(5.1)式得到

$$\boldsymbol{A}^{(1)}=\boldsymbol{A}=\frac{-\mathrm{i}\mu_0 k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R}\left[-\boldsymbol{R}_0\times\boldsymbol{m}+\frac{1}{6}\boldsymbol{R}_0\cdot\dot{\overleftrightarrow{\mathscr{D}}}\right] \tag{5.7}$$

上式中第一项与磁偶极矩有关,第二项与电四极矩有关,这说明磁偶极矩辐射与电四极矩辐射是同一数量级的,同时出现在矢势展开式的第二级项中.

对于一个具体电流分布系统来说,当它的电偶极矩为零时,就应考虑它的磁偶极矩与电四极矩辐射. 但并不一定在任何体系中磁偶极矩与电四极矩同时存在,有的体系只有磁偶极矩,有的体系只有电四极矩,有的体系两者同时存在,以后我们将举例说明.

下面先计算磁偶极矩与电四极矩的辐射场. 对于磁偶极矩项的矢势为

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mathrm{i}\mu_0 k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R}\boldsymbol{R}_0\times\boldsymbol{m} \tag{5.8}$$

计算辐射场只保留与 R 成反比的项,故得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}&=\nabla\times\boldsymbol{A}\\&=\frac{\mu_0 k^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R}(\boldsymbol{R}_0\times\boldsymbol{m})\times\boldsymbol{R}_0\\&=\frac{\mu_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi Rc^2}\boldsymbol{R}_0\times(\boldsymbol{R}_0\times\ddot{\boldsymbol{m}})\end{aligned} \tag{5.9}$$

$$\boldsymbol{E}=c\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{R}_0=-\frac{\mu_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi cR}(\ddot{\boldsymbol{m}}\times\boldsymbol{R}_0) \tag{5.10}$$

将磁偶极矩辐射场与(3.16)和(3.17)式的电偶极矩辐射场对比

$$\boldsymbol{E}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R}\boldsymbol{R}_0\times(\boldsymbol{R}_0\times\ddot{\boldsymbol{p}})$$

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi cR}\ddot{\boldsymbol{p}}\times\boldsymbol{R}_0$$

可以看出,将电偶极矩辐射场中的各量按下面变换

$$\boldsymbol{p}\to\frac{\boldsymbol{m}}{c},\qquad \boldsymbol{E}\to c\boldsymbol{B},\qquad c\boldsymbol{B}\to-\boldsymbol{E}$$

就得到磁偶极矩的辐射场. 设磁偶极矩为

$$m=m_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

m_0 沿 e_z 方向,则磁偶极矩的平均辐射能流

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{S}}&=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{H})\\&=\frac{\mu_0\omega^4 m_0^2}{32\pi^2c^3R^2}\sin^2\theta\boldsymbol{e}_R\end{aligned} \tag{5.11}$$

辐射功率为

$$\begin{aligned}W&=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\bar{S}R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{\mu_0\omega^4 m_0^2}{12\pi c^3}=\frac{m_0^2}{12\pi\varepsilon_0 c}\left(\frac{\omega}{c}\right)^4\end{aligned} \tag{5.12}$$

将上式和电偶极矩的辐射功率(3.21)式对比

$$W=\frac{cp_0^2}{12\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\omega}{c}\right)^4$$

表面上看两者的辐射功率都和频率的四次方式成正比. 用体系的电流将磁偶极矩与电偶极矩表出，例如对电偶极矩天线

$$\dot{\boldsymbol{p}} = I\boldsymbol{l} = I_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\boldsymbol{l}$$

而 $p = p_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$，故有

$$-\mathrm{i}\omega \boldsymbol{p}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = I_0 \boldsymbol{l} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

$$p_0^2 = \frac{I_0^2 l^2}{\omega^2}$$

对圆形电流圈的磁矩 $m_0 = I_0 S$，$m_0^2 = I_0^2 S^2$. 将上面的 p_0^2 与 m_0^2 分别代入(3.21)与(5.12)式，立即看到，用电流振辐表示辐射功率后，电偶极矩辐射功率与频率平方成正比，而磁偶极矩辐射功率与频率四次方成正比.

现在来计算电四极矩的辐射场. 由(5.7)式电四极矩项的矢势为

$$\boldsymbol{A} = \frac{-i\mu_0 k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R} \frac{1}{6} \boldsymbol{R}_0 \cdot \dddot{\vec{\mathscr{D}}}$$

$$= \frac{\mu_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{24\pi c R} \boldsymbol{R}_0 \cdot \ddot{\vec{\mathscr{D}}} \tag{5.13}$$

辐射场为

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \mathrm{i}k\boldsymbol{R}_0 \times \boldsymbol{A}$$

注意到矢量关系

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{R}_0 \times [\boldsymbol{R}_0 \cdot \ddot{\vec{\mathscr{D}}}] \\
&= \boldsymbol{R}_0 \times \left[\boldsymbol{R}_0 \cdot \int 3\ddot{\rho}\boldsymbol{R}'\boldsymbol{R}' \mathrm{d}V'\right] \\
&= \boldsymbol{R}_0 \times \left[\boldsymbol{R}_0 \cdot \int \ddot{\rho}(3\boldsymbol{R}'\boldsymbol{R}' - \boldsymbol{R}'^2 \vec{\mathscr{I}}) \mathrm{d}V'\right] \\
&= \boldsymbol{R}_0 \times [\boldsymbol{R}_0 \cdot \ddot{\vec{\mathscr{D}}}]
\end{aligned}$$

式中

$$\vec{\mathscr{D}} = \int \rho(3\boldsymbol{R}'\boldsymbol{R}' - \boldsymbol{R}'^2 \vec{\mathscr{I}}) \mathrm{d}V'$$

是通常使用的电四极矩的定义. 因此将(5.13)式的 $\boldsymbol{A}$ 改为

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{24\pi c R} \boldsymbol{R}_0 \cdot \ddot{\vec{\mathscr{D}}} \tag{5.14}$$

对于计算辐射场没有任何影响. 这样代替后，辐射场中出现的就是通常使用的电四极矩 $\mathscr{D}$. 由(5.14)计算出的场为

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mathrm{i}k\mu_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{24\pi c R} \boldsymbol{R}_0 \times (\boldsymbol{R}_0 \cdot \ddot{\vec{\mathscr{D}}})$$

$$= \frac{\mu_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{24\pi c^2 R} (\boldsymbol{R}_0 \cdot \dddot{\vec{\mathscr{D}}}) \times \boldsymbol{R}_0 \tag{5.15}$$

$$\boldsymbol{E} = c\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{R}_0$$

$$= \frac{\mu_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{24\pi c R} [(\boldsymbol{R}_0 \cdot \dddot{\vec{\mathscr{D}}}) \times \boldsymbol{R}_0] \times \boldsymbol{R}_0 \tag{5.16}$$

平均辐射能流为

$$\overline{\boldsymbol{S}}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}^{*}\times\boldsymbol{H})=\frac{c}{2\mu_0}|\boldsymbol{B}|^2\boldsymbol{e}_R$$

$$=\frac{\mu_0}{1152\pi^2c^3R^2}|(\boldsymbol{R}_0\cdot\overrightarrow{\overrightarrow{\mathscr{D}}})\times\boldsymbol{R}_0|^2 \tag{5.17}$$

四极矩的平均辐射能流形式比较复杂，但辐射功率的结果都比较简单. 令 $\boldsymbol{R}_0=\boldsymbol{n}=\boldsymbol{R}/R$，因为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\varepsilon_{ijk}a_jb_k\boldsymbol{e}_i$

$$\begin{aligned}&|(\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{\overrightarrow{\mathscr{D}}})\times\boldsymbol{n})|^2\\&=\sum_{ijk}\sum_{lm}[\varepsilon_{ijk}(\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{\overrightarrow{\mathscr{D}}})_jn_k][\varepsilon_{ilm}(\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{\overrightarrow{\mathscr{D}}})_ln_m]\\&=\sum_{ijk}\sum_{lm}\sum_{rs}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}(n_rQ_{rj}n_k)(n_sQ_{sl}n_m)\\&=\sum_{jk}\sum_{lm}\sum_{rs}(\delta_{lj}\delta_{km}-\delta_{jm}\delta_{kl})Q_{rj}Q_{sl}n_rn_kn_sn_m\end{aligned}$$

因为 $n_1=\sin\theta\cos\varphi, n_2=\sin\theta\sin\varphi, n_3=\cos\theta$，可以证明

$$\int n_rn_s\mathrm{d}\Omega=\frac{4\pi}{3}\delta_{rs}$$

$$\int n_rn_kn_mn_s\,\mathrm{d}\Omega=\frac{4\pi}{15}(\delta_{rk}\delta_{sm}+\delta_{rs}\delta_{km}+\delta_{rm}\delta_{ks})$$

由上述关系式可得

$$\int|(\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{\overrightarrow{\mathscr{D}}})\times\boldsymbol{n}|^2\mathrm{d}\Omega$$

$$=4\pi\left\{\frac{1}{3}\sum_{rj}|Q_{rj}|^2-\frac{1}{15}\left[\sum_{rs}Q_{rs}Q_{sr}+\sum_{rk}Q_{rk}Q_{rk}+\sum_{rs}Q_{rr}Q_{ss}\right]\right\}$$

若四级矩为零迹对称张量，即 $Q_{rs}=Q_{sr}$，且

$$\sum_rQ_{rr}=Q_{11}+Q_{22}+Q_{33}=0$$

则可得辐射功率为

$$W=\int\overline{S}R^2\mathrm{d}\Omega=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{360c^5}\sum_{rs}|\dddot{Q}_{rs}|^2 \tag{5.18}$$

从上式和(5.12)式看到，磁偶极矩与电四极矩的辐射功率都与 c 的五次方成反比，而由(3.21)式看到电偶极矩的辐射功率与 c 的三次方成反比，因此它们比电偶极矩要弱得多. 所以，一般只当体系的电偶极矩为零时，才计算磁偶极矩和电四极矩辐射.

例 1 如图 5.12 所示，一圆形线圈半径为 a，外接交变电动势，线圈中出现交变电流，$a\ll\lambda$，在整个线圈中电流振辐是常数 I_0，计算辐射能流和功率.

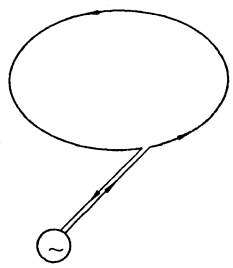


图 5.12

解 线圈中电流可近似看成闭合的. 线圈上有对称的电荷分布，电偶极矩为零. 线电流圈的磁偶极矩

$$m=I_0\pi a^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\boldsymbol{e}_z=m_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\boldsymbol{e}_z$$

将 $m_0=I_0\pi a^2$ 代入(5.11)式得辐射能流

$$\overline{\boldsymbol{S}}=\frac{\mu_0\omega^4I_0^2\pi^2a^4}{32\pi^2c^3R^2}\sin^2\theta\boldsymbol{e}_R$$

由(5.12)式，辐射功率为

$$W=\frac{\mu_0 c\pi^2 a^4 I_0^2}{12\pi}\left(\frac{\omega}{c}\right)^4$$

$$=\frac{4}{3}\pi^5\mu_0 c I_0^2\left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 \tag{5.19}$$

辐射电阻 R_r 为

$$R_r=\frac{2W}{I_0^2}=\frac{8}{3}\pi^5\mu_0 c\left(\frac{a}{\lambda}\right)^4$$

由于 $a\ll\lambda$，故圆形线圈的辐射功率是很小的.

例 2 两个相同的电偶极子，电偶极矩为 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_0 e^{-i\omega t}$，反平行位于一平面内，其中心相距为 $a\ll\lambda$，计算辐射场和能流.

解 这个问题可用两种办法求解. 先用电偶极子场叠加的办法求解. 两个偶极矩的位置如图 5.13 所示. 由(3.15)式电偶极矩 $\boldsymbol{p}$ 产生的辐射场为

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0\omega^2 e^{ikR}}{4\pi cR}\boldsymbol{R}_0\times\boldsymbol{p}$$

$$\boldsymbol{R}_0=\boldsymbol{e}_R$$

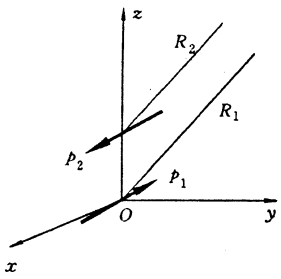


图 5.13

由图 5.13 知

$$\boldsymbol{p}_1=-p\boldsymbol{e}_x e^{-i\omega t},\qquad \boldsymbol{p}_2=p\boldsymbol{e}_x e^{-i\omega t},$$

$$R_2=R_1-a\cos\theta,\qquad R_1=R$$

体系的总辐射场为两个电偶极子辐射场之和. 注意到 $a\ll\lambda$，则有

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2$$

$$=\frac{\mu_0\omega^2}{4\pi cR}(-e^{ikR_1}+e^{ikR_2})\boldsymbol{e}_R\times\boldsymbol{p}$$

$$=\frac{\mu_0\omega^2 p}{4\pi cR}(1-e^{-ika\cos\theta})e^{ikR}\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_R$$

$$\approx\frac{i\mu_0\omega^2 pak}{4\pi cR}\cos\theta e^{ikR}\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_R$$

而

$$\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_R=-\cos\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_\varphi-\sin\varphi\boldsymbol{e}_\theta$$

代入上式后得体系的总辐射场为

$$\boldsymbol{B}=\frac{-i\mu_0\omega^3 pa}{4\pi c^2 R}(\cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_\theta+\cos^2\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_\varphi)e^{ikR}$$

$$\boldsymbol{E}=c\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e}_R=\frac{i\mu_0\omega^3 a}{4\pi Rc}p(-\cos^2\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_\theta+\cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_\varphi)e^{ikR} \tag{5.20}$$

现在讨论另一种计算方法. 由于两个电偶极子相距 $a\ll\lambda$，故是一个平面四极子. 这个体系的磁偶极矩与电四极矩同时存在，总辐射场是电四极矩与磁偶极矩辐射场之和. 先计算电四极矩场. 设电偶极矩的变化是由于组成它的电荷 Q 的变化引起的，每个电偶极子的长度为 l，如图 5.14 所示，体系的电四极矩为

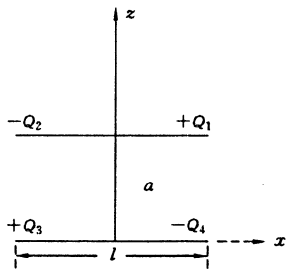


图 5.14

$$\overrightarrow{\overrightarrow{\mathscr{D}}}=\sum_{i=1}^{4}Q_i(3\boldsymbol{R}_i'\boldsymbol{R}_i'-R'^2\overrightarrow{\overrightarrow{\mathscr{I}}})$$

$$=Q\left[3\left(\frac{l}{2}\boldsymbol{i}+a\boldsymbol{k}\right)\left(\frac{l}{2}\boldsymbol{i}+a\boldsymbol{k}\right)-\left(\left(\frac{l}{2}\right)^2+a^2\right)\overrightarrow{\overrightarrow{\mathscr{I}}}\right]$$

$$
\begin{aligned}
&-Q\left[3\left(-\frac{l}{2}\boldsymbol{i}+a\boldsymbol{k}\right)\left(-\frac{l}{2}\boldsymbol{i}+a\boldsymbol{k}\right)-\left(\left(\frac{l}{2}\right)^2+a^2\right)\overrightarrow{\mathscr{I}}\right]\\
&+Q\left[3\left(-\frac{l}{2}\boldsymbol{i}\right)\left(-\frac{l}{2}\boldsymbol{i}\right)-\left(\frac{l}{2}\right)^2\overrightarrow{\mathscr{I}}\right]\\
&-Q\left[3\left(\frac{l}{2}\boldsymbol{i}\right)\left(\frac{l}{2}\boldsymbol{i}\right)-\left(\frac{l}{2}\right)^2\overrightarrow{\mathscr{I}}\right]\\
&=3pa(\boldsymbol{ik}+\boldsymbol{ki})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}
\end{aligned}
\tag{5.21}
$$

式中 $p=Q_0l$ 是每个电偶极矩的振幅，$\boldsymbol{i}=\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{e}_z$. 令 $\boldsymbol{R}_0=\boldsymbol{e}_R$，略去时间因子

$$
\dddot{\mathscr{D}}=3\mathrm{p}\ \mathrm{a}\ (-\mathrm{i}\ \omega)^3(\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_z+\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_x)
$$

$$
(\boldsymbol{R}_0\cdot\dddot{\mathscr{D}})\times\boldsymbol{R}_0=i3pa\omega^3(\cos\theta\boldsymbol{e}_x+\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_z)\times\boldsymbol{e}_R
$$

再注意到

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_R&=-\cos\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_\varphi-\sin\varphi\boldsymbol{e}_\theta\\
\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_R&=\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi
\end{aligned}
$$

可得到

$$
(\boldsymbol{R}_0\cdot\dddot{\mathscr{D}})\times\boldsymbol{R}_0=i3pa\omega^3(-\cos2\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_\varphi-\cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_\theta)
$$

再将上式代入(5.15)式得到电四极矩的辐射场为

$$
\boldsymbol{B}_\mathrm{e}=\frac{-\mathrm{i}\mu_0\omega^3pa}{8\pi c^2R}(\cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_\theta+\cos2\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_\varphi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}
$$

$$
\boldsymbol{E}_\mathrm{e}=c\boldsymbol{B}_\mathrm{e}\times\boldsymbol{e}_R=\frac{\mathrm{i}\mu_0\omega^3pa}{8\pi cR}(-\cos2\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_\theta+\cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_\varphi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}
$$

再计算体系的磁偶极矩场. 每个电偶极子内的电流为

$$
I=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=-\mathrm{i}\omega Q_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}
$$

体系的磁偶极矩为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{m}&=\frac{I}{2}\int\boldsymbol{R}'\times\mathrm{d}\boldsymbol{l}'\\
&=\frac{I}{2}\int(x'\boldsymbol{i}+a\boldsymbol{k})\times\mathrm{d}x'\boldsymbol{i}\\
&=\frac{I}{2}a\int\mathrm{d}x'\times\boldsymbol{e}_y\\
&=\frac{I}{2}al\boldsymbol{e}_y\\
&=\frac{-\mathrm{i}\omega Q_0al\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{2}\boldsymbol{e}_y\\
&=\frac{-\mathrm{i}\omega pa}{2}\boldsymbol{e}_y\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}
\end{aligned}
$$

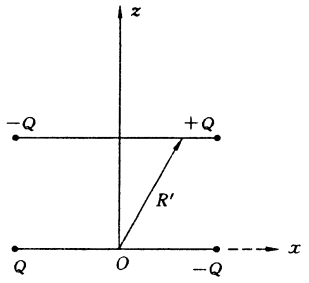


图 5.15

由(5.10)式磁偶极矩的辐射场为(略去时间因子)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_\mathrm{m}&=-\frac{\mu_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi cR}(\ddot{\boldsymbol{m}}\times\boldsymbol{e}_R)\\
&=-\frac{\mathrm{i}\mu_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi cR}\frac{\omega^3pa}{2}\times\boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{e}_R\\
&=\frac{\mathrm{i}\mu_0\omega^3pa}{8\pi cR}(-\cos\varphi\boldsymbol{e}_\theta+\cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_\varphi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}
\end{aligned}
\tag{5.22}
$$

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{m}}=\frac{1}{c}\boldsymbol{e}_R\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}$$

$$=\frac{-\mathrm{i}\mu_0\omega^3 pa}{8\pi c^2 R}(\cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_\theta+\cos\varphi\boldsymbol{e}_\varphi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR} \tag{5.23}$$

平面四极子总有辐射场为(5.22)与(5.23)两式叠加

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=\boldsymbol{E}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}=\frac{\mathrm{i}\mu_0\omega^3 pa}{4\pi cR}(-\cos^2\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_\theta+\cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_\varphi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}\\ \boldsymbol{B}&=\boldsymbol{B}_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{B}_{\mathrm{m}}=-\frac{\mathrm{i}\mu_0\omega^3 pa}{4\pi c^2 R}(\cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_\theta+\cos^2\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_\varphi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}\end{aligned} \tag{5.24}$$

上两式的结果和(5.20)两式完全相同.

平均辐射能流为

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{S}}&=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{H})\\&=\frac{1}{2\mu_0 c}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}^*\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{e}_R\\&=\frac{p^2a^2\omega^6\mu_0}{32\pi^2c^3R^2}[\cos^4\theta\cos^2\varphi+\cos^2\theta\sin^2\varphi]\boldsymbol{e}_R\end{aligned} \tag{5.25}$$

平均辐射功率为

$$W=\int\bar{S}R^2\mathrm{d}\Omega=\frac{\mu_0 p^2a^2\omega^6}{30\pi c^3} \tag{5.26}$$

例 3 有一回转椭球形分布的振荡电荷,求其四极矩辐射的平均辐射能流和辐射功率.

解 取对称轴为 z 轴,在主轴坐标系中,四极矩的非对角元为零,即

$$Q_{12}=Q_{23}=Q_{31}=0$$

对角元

$$Q_{11}=Q_{22}=-\frac{1}{2}Q_{33}$$

令 $Q_{33}=Q$,则四极矩张量为

$$\overleftrightarrow{\mathscr{D}}=\frac{1}{2}Q(3\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}-\overleftrightarrow{\mathscr{I}})$$

平均辐射能流为

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{S}}&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\omega^6}{288\pi c^5R^2}|(\boldsymbol{R}_0\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{D}})\times\boldsymbol{R}_0|^2\boldsymbol{e}_R\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\omega^6}{128\pi c^5R^2}Q^2\sin^2\theta\cos^2\theta\boldsymbol{e}_R\end{aligned} \tag{5.27}$$

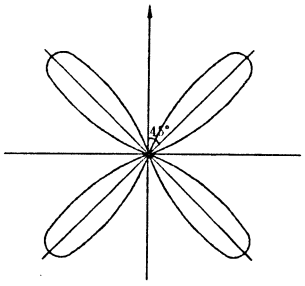


图 5.16

当 $\theta=0,\frac{\pi}{2},\pi$ 时,能流为零;当 $\theta=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}$ 时,能流最大,故四极矩辐射的辐射方向图如图 5.16 所示. 辐射功率为

$$\begin{aligned}W&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\omega^6}{360c^5}\sum_{rs}|Q_{rs}|^2\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\omega^6}{360c^5}\left(\frac{1}{4}Q^2+\frac{1}{4}Q^2+Q^2\right)\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\omega^6}{240c^5}Q^2\end{aligned}$$

思考题与习题五

1. 在求解电磁场方程时，为什么要引入矢势和标势？

2. 什么是规范变换和规范不变性规范变换有什么意义？

3. 一个天线在什么条件下可以看成是电偶极子？用什么方法计算辐射场最简单？

4. 以电偶极矩辐射场为例，说明辐射场的特性.

5. 一般的广播天线是垂直立在地面上的，大地是具有一定电导率的非理想导体，分析一下地面附近的电场方向.

6. 一只密封的塑料盒子里有一个天线在辐射 电磁波，你如何辨认这个天线是电偶极子还是磁偶极子？

7. 两个电偶极矩相互成直角，以同一频率做简谐变化，偶极矩强度为 p，两者相位差为 $\frac{\pi}{2}$，计算辐射场辐射能流.

8. 一个线性四极子由 $-e$，$+2e$，$-e$ 三个电荷组成，正电荷和在原点，负电荷位于 z_1，z_2，并且有

$$z_1 = -z_2 = a\cos\frac{1}{2}\omega_l t$$

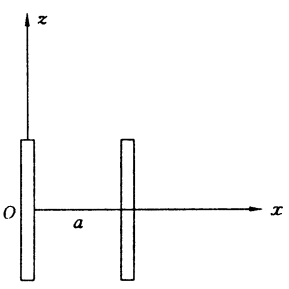
计算辐射场和辐射能流.

9. 在上题中若两负电荷的距离保持为 a，两负电荷绕原点以角速度 ω 旋转，旋转时三个电荷保持在一条直线上，计算辐射场与辐射角分布.

10. 如图所示，两根完全相同的直天线，长度为 $l \ll \lambda$，在天线中点外接交变电动势，天线上电流为

$$I(z) = I_0\left(1 - \left(\frac{2}{l}|z|\right)\right)$$

天线平行排列，相距为 $a \ll \lambda$，计算辐射场、辐射角分布和辐射功率.



（习题 5.10）

11. 一点电荷 e 绕原点以角速度 ω 旋转，轨道半径 $a \ll \lambda$，设轨道位于 $x-y$ 平面，计算辐射场与辐射功率.

12. 一半波天线，辐射 10^3W 的功率，计算它在赤道平面上 10km 远处的电场强度.

13. 有一磁化强度为 M，半径为 a 的均匀磁化球，以恒定的频率 ω 绕通过球心并与 M 方向成 φ 角的轴旋转，求辐射场与辐射角分布.

第六章　电磁波的传播

从前面的讨论已经看出，随时间变化的电荷电流要向周围空间辐射电磁波. 电磁波被场源辐射以后，就脱离场源独立地在空间传播. 周围空间存在各种各样的介质，有绝缘介质也有导电介质，绝缘介质如空气、水、玻璃等，导电介质如大地、海水、电离层等. 由于介质和导体都是由带电粒子所组成，因此，在空间传播的电磁波就会与遇到的介质或导体发生相互作用，从而影响电磁波的运动状态，例如使电磁波发生衰减、反射、折射、衍射等. 研究电磁波在一定的介质或导体条件下的运动情况，称为电磁波的传播问题. 在现代通讯技术中电磁波的传播问题是非常重要的，在其它生产部门应用也非常广泛. 由于各种各样介质具有不同的复杂的电磁性质，它们与电磁波相互作用会发生许多复杂的物理现象. 对这类问题的研究有的已形成了专门的学科. 本章只能讨论一些最基本的电磁波的传播问题.

解决电磁波传播问题的关键是在一定介质或导体条件下，求解电磁场方程. 由于传播问题讨论的是已经脱离了场源的电磁波在空间的运动，因而在基本方程中不存在激发电磁波的电荷电流分布. 在求解传播问题的基本方程时，一般不引入矢势和标势，而是直接求解麦克斯韦方程组.

§1　电磁波传播问题中的基本方程

1. 电磁波在介质中传播的基本方程

传播问题中讨论的是由场源辐射出来的电磁波在一定的介质或导体条件下如何运动，因此不需要考虑激发电磁波的外场源. 在真空或不导电的介质中，只要在麦克斯韦方程中令 $\boldsymbol{J}=\rho=0$，就得到这种情况下的电磁波传播方程

$$\begin{aligned} &\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad &&\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\\ &\nabla\cdot\boldsymbol{D}=0 \qquad &&\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

对真空情况

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$$

而

$$\begin{aligned} \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})&=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\nabla^2\boldsymbol{E}=-\nabla^2\boldsymbol{E}\\ &=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{B})=-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

于是得

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0$$

同样可得

$$\nabla^2\boldsymbol{B}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2}=0$$

令

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \tag{1.2}$$

则有

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} = 0 \tag{1.3}$$

这是典型的波动方程. 由它可得出电磁场的波动解，称为电磁波. c 是电磁波在真空中的传播速度.

电磁波在介质中传播时，一般情况下介质的介电常数、磁导率将和电磁波的频率有关，这种现象称为介质的色散. 这时介质的电磁性质方程为

$$\boldsymbol{D}(\omega) = \varepsilon(\omega)\boldsymbol{E}(\omega)$$

$$\boldsymbol{B}(\omega) = \mu(\omega)\boldsymbol{H}(\omega)$$

在色散介质中不再存在一般的关系

$$\boldsymbol{D}(t) = \varepsilon \boldsymbol{E}(t)$$

$$\boldsymbol{B}(t) = \mu \boldsymbol{H}(t)$$

这是因为对任意变化的电磁场，可按傅里叶展开写为

$$\boldsymbol{D}(t) = \int \boldsymbol{D}(\omega) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}\omega$$

$$\boldsymbol{E}(t) = \int \boldsymbol{E}(\omega) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}\omega$$

$$\boldsymbol{D}(t) = \int \varepsilon(\omega)\boldsymbol{E}(\omega) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}\omega \neq \varepsilon \boldsymbol{E}(t)$$

同样可得 $\boldsymbol{B}(t) \neq \mu \boldsymbol{H}(t)$. 因而在介质中(1.1)的场方程不能化为(1.3)的波动方程.

以后只讨论具有确定频率的电磁波的传播问题，这种电磁波称为单色电磁波或定态电磁波. 单色电磁波是比较常见的，例如无线电通讯或广播的载波. 即使一般电磁波也可由傅里叶分析展开为各种单色波的叠加. 对于单色电磁波，存在关系式 $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$，因而可将场方程(1.1)式化为波动方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{E} = 0$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{B} = 0 \tag{1.4}$$

式中

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \tag{1.5}$$

是单色电磁波在介质中的传播速度.

设单色电磁波的角频率为 ω，可将电磁场随时间的变化表示为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}, t) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R}, t) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{1.6}$$

于是(1.1)式可化为

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = \mathrm{i}\omega \mu \boldsymbol{H}, \qquad \nabla \times \boldsymbol{H} = -\mathrm{i}\omega \varepsilon \boldsymbol{E}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0, \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0 \tag{1.7}$$

(1.4)式可化为

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} + k^2 \boldsymbol{E} = 0 \tag{1.8}$$
$$\nabla^2 \boldsymbol{B} + k^2 \boldsymbol{B} = 0$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} = \omega^2 \varepsilon \mu \tag{1.9}$$

(1.8)式称为亥姆霍兹(Helmholtz)方程,(1.7)—(1.9)式就是单色电磁波在介质中传播的基本方程. 实际求解场方程时,只要从(1.8)式求出 $\boldsymbol{E}$(或 $\boldsymbol{B}$)再由(1.7)式求出 $\boldsymbol{B}$(或 $\boldsymbol{E}$),即基本方程为:

$$\begin{cases} \nabla^2 \boldsymbol{E} + k^2 \boldsymbol{E} = 0 \\ \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \\ \boldsymbol{B} = -\dfrac{\mathrm{i}}{\omega} \nabla \times \boldsymbol{E} \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \nabla^2 \boldsymbol{B} + k^2 \boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ \boldsymbol{E} = \dfrac{\mathrm{i}}{\omega \varepsilon \mu} \nabla \times \boldsymbol{B} \end{cases}$$

2. 电磁波在导体中传播的基本方程

导体内存在自由电荷,在电场作用下,会出现传导电流,$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$,传导电流又会影响电磁场的分布,因此在场方程中必须考虑传导电流的作用. 还要考察传导电流的出现会不会在导体内引起自由电荷的积累.

对于均匀导体,由电荷守恒定律

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

和

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = \sigma \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho$$

可得方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\varepsilon} \rho$$

它的解是

$$\rho(\boldsymbol{R}, t) = \rho_0(\boldsymbol{R}) \mathrm{e}^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t} \tag{1.10}$$

式中 $\rho_0(\boldsymbol{R})$ 是 $t=0$ 的电荷密度分布. 从上式看到,导体内各点的 ρ 是指数衰减的. 衰减的快慢只与导体的 σ 和 ε 有关,而与电磁场无关. 当 ρ 由 ρ_0 衰减到它的 $\frac{1}{e}$ 所需的时间

$$\tau = \varepsilon / \sigma \tag{1.11}$$

称为弛豫时间. 对于一般导体,弛豫时间是极短的. 如铜 $\tau = 1.5 \times 10^{-19}\mathrm{s}$,海水 $\tau = 2.0 \times 10^{-10}\mathrm{s}$. 因此在均匀导体内不可能积累自由电荷,即使起始时刻导体内存在密度不为零的自由电荷,随着时间也将迅速消失. 在导体内总可认为 $\rho = 0$.

于是在导体中电磁波传播的基本方程为

$$\begin{aligned} &\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \qquad \nabla \times \boldsymbol{H} = \sigma \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \\ &\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0, \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \end{aligned} \tag{1.12}$$

对于单色电磁波

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 e^{-i\omega t}$$

(1.12)式可化为

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{E} &= i\omega\mu\boldsymbol{H}\\ \nabla \times \boldsymbol{H} &= \sigma\boldsymbol{E} - i\varepsilon\omega\boldsymbol{E}\\ &= -i\omega\left(\varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega}\right)\boldsymbol{E} = -i\omega\varepsilon'\boldsymbol{E}\end{aligned} \tag{1.13}$$

式中

$$\varepsilon' = \varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega}$$

(1.13)与介质中的方程$\nabla \times \boldsymbol{H} = -i\omega\varepsilon\boldsymbol{E}$对比可以看出，两者形式上相同，差别只是导体中的场方程出现ε'，它称为复介电常数. 因此只要将在介质中求得的电磁波传播的基本方程(1.7)—(1.9)式中的ε换为ε'，就得到在导体中单色电磁波传播的基本方程

$$\begin{cases}\nabla \times \boldsymbol{E} = i\omega\mu\boldsymbol{H},\\ \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0\\ \nabla^2\boldsymbol{E} + k'^2\boldsymbol{E} = 0,\end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases}\nabla \times \boldsymbol{H} = -i\omega\varepsilon'\boldsymbol{E}\\ \nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0\\ \nabla^2\boldsymbol{B} + k'^2\boldsymbol{B} = 0\end{cases} \tag{1.14}$$

$$k'^2 = \omega^2\varepsilon'\mu \tag{1.15}$$

$$\tag{1.16}$$

只要将在介质中求得的电磁波解所包含的ε换为ε'就可得到上述导体中电磁波传播方程的解.

3. 在介质或导体分界面处的边界条件

在传播问题中，电磁波常会遇到介质或导体的边界面，因此在基本方程中还应包含边界条件

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) &= 0, \qquad \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) = \alpha\\ \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1) &= \sigma, \qquad \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1) = 0\end{aligned} \tag{1.17}$$

和

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{J}_2 - \boldsymbol{J}_1) = -\frac{\partial\sigma}{\partial t} \tag{1.18}$$

不存在理想导体时，面电流密度$\alpha = 0$. 此时对单色电磁波可证明(1.17)的后两式能由前两式推出. 单色电磁波

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}, t) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{R})e^{-i\omega t}$$

可推断面电荷密度也是以相同频率ω做周期性变化的，故(1.18)式可化为

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{J}_2 - \boldsymbol{J}_1) = \boldsymbol{n} \cdot (\sigma_2\boldsymbol{E}_2 - \sigma_1\boldsymbol{E}_1) = i\omega\sigma \tag{1.19}$$

与方程

$$\boldsymbol{n} \cdot (\varepsilon_2\boldsymbol{E}_2 - \varepsilon_1\boldsymbol{E}_1) = \sigma \tag{1.20}$$

联立消去面电荷密度σ，可得

$$\boldsymbol{n} \cdot \left[\left(\varepsilon_2 + i\frac{\sigma_2}{\omega}\right)\boldsymbol{E}_2 - \left(\varepsilon_1 + i\frac{\sigma_1}{\omega}\right)\boldsymbol{E}_1\right] = 0$$

或

$$\boldsymbol{n} \cdot (\varepsilon_2'\boldsymbol{E}_2 - \varepsilon_1'\boldsymbol{E}_1) = 0 \tag{1.21}$$

可以证明，上述条件可由$\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) = 0$推出来. 因为

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = -i\omega\varepsilon'\boldsymbol{E}$$

在界面两侧对同一与界面相切的任意无限小闭合回路分别作环积分

$$\oint \boldsymbol{H}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_1 = \int \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H}_1) = -\mathrm{i}\omega\varepsilon'_1 \boldsymbol{E}_1 \cdot \Delta\boldsymbol{S}_1$$

$$\oint \boldsymbol{H}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_1 = \int \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H}_2) = -\mathrm{i}\omega\varepsilon'_2 \boldsymbol{E}_2 \cdot \Delta\boldsymbol{S}_2$$

由于 $\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=0$，磁场的切线分量在界面两侧相等，因而上述两个环积分相等. 积分是对同一回路进行的，$\Delta S_1=\Delta S_2=\Delta S_n$，故得

$$\boldsymbol{n} \cdot (\varepsilon'_2 \boldsymbol{E}_2 - \varepsilon'_1 \boldsymbol{E}_1) = 0$$

类似可证，当 $\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=0$ 满足时，$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)=0$ 也成立. 因此在求解场方程时，只要利用电场和磁场的切线分量连续这两个条件就可以了.

§2 平面单色电磁波在均匀介质中的传播

单色电磁波在介质中传播的基本方程为

$$\begin{aligned} &\nabla^2 \boldsymbol{E} + k^2 \boldsymbol{E} = 0 \\ &\boldsymbol{B} = -\frac{\mathrm{i}}{\omega} \nabla \times \boldsymbol{E} \\ &k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu \end{aligned} \tag{2.1}$$

下面我们求上述方程的平面波解.

平面波的特点是波前或同相位面为一平面. 设波沿 $\boldsymbol{k}$ 方向传播(见图 6.1)，则波前应是垂直于 $\boldsymbol{k}$ 的平面. 在波前面上场矢量应相同. 设波前面距原点为 D，以 D 为变量，电场 $\boldsymbol{E}$ 只与 D 有关，则(2.1)的第一式化为

$$\frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{E}(D)}{\mathrm{d}D^2} + k^2 \boldsymbol{E}(D) = 0 \tag{2.2}$$

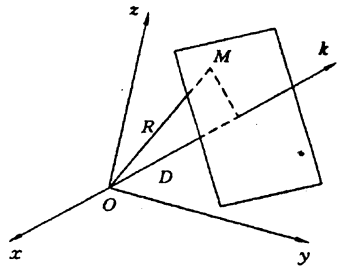


图 6.1

上述方程的解为

$$\boldsymbol{E}(D) = \boldsymbol{E}_0 \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}kD} \tag{2.3}$$

考虑到随时间变化的因子，则解为

$$\boldsymbol{E}(D,t) = \boldsymbol{E}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t \pm kD)}$$

上式括号中取负号的解为沿正 $\boldsymbol{k}$ 方向传播的平面波，取正号的解为沿负 $\boldsymbol{k}$ 方向传播的平面波. 我们只讨论沿正 $\boldsymbol{k}$ 方向传播的波. 对波前面上任一点 $M(\boldsymbol{R})$，有

$$D = \boldsymbol{R} \cdot \frac{\boldsymbol{k}}{k}$$

代入后得所需要的平面波解

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R},t) = \boldsymbol{E}_0 \exp[-\mathrm{i}(\omega t - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{R})] \tag{2.4}$$

同样可得

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R},t) = \boldsymbol{B}_0 \exp[-\mathrm{i}(\omega t - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{R})] \tag{2.5}$$

现在来讨论平面单色电磁波的一些性质. 在(2.4)和(2.5)中振幅 $\boldsymbol{E}_0$ 和 $\boldsymbol{B}_0$ 是常矢量，$\boldsymbol{k}$ 是波矢量，它的方向就是平面波的传播方向，它的量值 $k=\omega/v=2\pi/\lambda$ 称为圆波数.

对于一定时刻 t，波前(即同相位面)所满足的方程为

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{R} = k_1 x + k_2 y + k_3 z = \text{常数} \tag{2.6}$$

由

$$k^2 = \omega^2\varepsilon\mu = \frac{\omega^2}{v^2}$$

求得相速度为

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{n} \tag{2.7}$$

其中 $c=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ 是真空中电磁波的传播速度，$n=\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}\approx\sqrt{\varepsilon_r}$ 表示介质的折射率. 由于相对介电常数 ε_r 和相对磁导率 μ_r 是频率 ω 的函数，因此，在介质中不同频率的电磁波有不同的相速度，这就是介质的色散现象.

由(2.4)和(2.5)式可得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \mathrm{i}\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E} = 0, \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = \mathrm{i}\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{2.8}$$

这表明场矢量 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$ 与传播方向垂直，平面单色电磁波是横波. 由(2.1)第二式得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} &= -\frac{\mathrm{i}}{\omega}\nabla \times \boldsymbol{E} \\ &= -\frac{\mathrm{i}}{\omega}(\mathrm{i}\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}) \\ &= \sqrt{\varepsilon\mu}\,\frac{\boldsymbol{k}}{k} \times \boldsymbol{E} \\ &= \frac{1}{v}\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}\end{aligned} \tag{2.9}$$

式中 $\boldsymbol{n}$ 是传播方向的单位矢量. 上式进一步表明，$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 互相垂直，组成右手螺旋系统. 对介质来说，因为 ε，μ 是实数，$\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是同相位变化的，振幅之比

$$\left|\frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{B}}\right| = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = v \tag{2.10}$$

是电磁波在介质中的传播速度. 而

$$\left|\frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{H}}\right| = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z \tag{2.11}$$

Z 具有阻抗的量纲，称为特征阻抗或波阻抗. 在真空中

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\Omega \approx 377\Omega$$

平面电磁波沿传播方向各点上的电场和磁场的变化，如图 6.2 所示. 整个波形沿 $\boldsymbol{n}$ 方向以速度 $v=c/\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$ 移动.

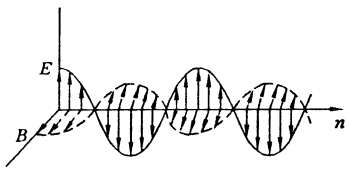


图 6.2

平面单色电磁波是横波，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 与传播方向垂直，但可在垂直于 $\boldsymbol{k}$ 的任意方向上振荡. 以电场 $\boldsymbol{E}$ 的振荡方向为标准，称为电磁波的极化(或偏振)方向. 取两个与 $\boldsymbol{k}$ 垂直的互相正交的单位矢量 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$，则

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R},t) = (E_1\boldsymbol{e}_1 + E_2\boldsymbol{e}_2)\exp[-\mathrm{i}(\omega t - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{R})] \tag{2.12}$$

振幅 E_1 和 E_2 可以是复数

$$E_1 = E_0^1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}, \qquad E_2 = E_0^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$$

表示两部分波可能有相位差.

(1)线偏振(或线极化)

若 $E_2=0$,电场 $\boldsymbol{E}$ 始终在 $\boldsymbol{e}_1$ 方向上振荡,则称此电磁波为沿 $\boldsymbol{e}_1$ 方向的线偏振波.

若 $E_1=0$,电场 $\boldsymbol{E}$ 总在 $\boldsymbol{e}_2$ 方向上振荡,则称此电磁波为沿 $\boldsymbol{e}_2$ 方向的线偏振波.

若 E_1 和 E_2 同相位变化($\alpha=\beta=0$),则(2.12)式仍表示一个线偏振波,其极化方向与 $\boldsymbol{e}_1$ 的夹角为

$$\theta = \arctan\frac{E_2}{E_1}$$

(2)圆偏振(或圆极化)

若 E_1 和 E_2 的量值相等,但相位相差 $\pi/2$,则

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R},t) = E_0(\boldsymbol{e}_1 \pm \mathrm{i}\boldsymbol{e}_2)\exp[-\mathrm{i}(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}] \tag{2.13}$$

设电磁波沿 z 方向传播,$\boldsymbol{e}_1$ 沿 x 轴,$\boldsymbol{e}_2$ 沿 y 轴(见图 6.3). 取(2.13)式的实部,其分量

$$\begin{aligned} E_x &= E_2\cos(\omega t - kz) \\ E_y &= \pm E_2\sin(\omega t - kz) \end{aligned} \tag{2.14}$$

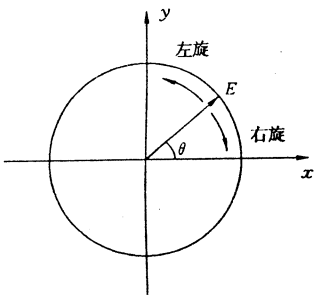


图 6.3

电场 $\boldsymbol{E}$ 的量值

$$E = (E_x^2 + E_y^2)^{1/2} = E_0$$

其方向与 $\boldsymbol{e}_1$ 的夹角(令 $z=0$)

$$\theta = \arctan\frac{E_y}{E_x} = \pm\omega t$$

故电矢量的量值是常数,其方向以角速度 ω 旋转,故称为圆偏振波. 对于 $\boldsymbol{e}_1+\mathrm{i}\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{E}$ 绕逆时针方向旋转,称为左旋圆偏振波;对于 $\boldsymbol{e}_1-\mathrm{i}\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{E}$ 绕顺时针方向旋转,称为右旋圆偏振波.

(3)椭圆偏振(或椭圆极化)

若 E_1 和 E_2 量值不等,相位相差 $\pi/2$,则

$$\begin{aligned} E_x &= A\cos(\omega t - kz) \\ E_y &= \pm B\sin(\omega t - kx) \end{aligned} \tag{2.15}$$

消去 t 得

$$\frac{E_x^2}{A^2} + \frac{E_y^2}{B^2} = 1$$

电场 $\boldsymbol{E}$ 的矢端在一椭圆上旋转,称为椭圆偏振波.

在均匀介质中,场能密度为

$$w = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}) = \frac{1}{2}(\varepsilon E^2 + \mu H^2)$$

对于平面电磁波,$\sqrt{\varepsilon}\,\boldsymbol{E} = \sqrt{\mu}\,\boldsymbol{H}$,故

$$w = \varepsilon E^2 = \mu H^2 \tag{2.16}$$

上式表明平面波的电场能量与磁场能量相等. 平面电磁波的能流密度为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S} &= \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\boldsymbol{E}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}) \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E^2\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}w\boldsymbol{n} = v w\boldsymbol{n} \end{aligned} \tag{2.17}$$

v 为电磁波在介质中的相速度. 上式正好是单位时间沿 $\boldsymbol{n}$ 方向流过单位面积的能量. 平面电磁波的能量在介质中以速度 $v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ 传播过去.

综上所述，可得平面电磁波在均匀介质中传播的基本性质如下：

平面电磁波是横波；$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 在时间上同相位变化，在空间上互相垂直，且与波矢量 $\boldsymbol{k}$ 组成右手螺旋系；根据 $\boldsymbol{E}$ 的振荡方向，可把平面电磁波分成线偏振波、圆偏振波和椭圆偏振波；场能密度为 $\varepsilon E^2=\mu H^2$，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的振幅之比就是电磁波能量的传播速度，在真空中为 $c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$，在介质中为 $v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=c/n$.

关于光的本质，牛顿曾认为光是微粒子流，惠更斯则认为光是一种波动. 在物理学史上，“微粒说”和“波动说”争论了整整一个世纪，后来“波动说”战胜了“微粒说”. 麦克斯韦首先把光和电磁波统一起来，认为光是一定波段的电磁波. 近代物理又把光的“微粒性”和“波动性”统一起来，揭示了光的波粒二象性.

1972 年用激光测得的真空中光速为

$$c = 299792456.2 \pm 1.1 \text{ m/s}$$

1952 年用微波测得的电磁波在真空中的传播速度为

$$c = (299792.6 \pm 0.7 \times 10^3 \text{ m/s}$$

1967 年用电磁学方法测得

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 299784 \times 10^3 \text{ m/s}$$

在不同条件下测得的这三个值，以极高的精度相一致，既表明了电磁波理论的正确性，也表明了光就是电磁波. 光的一些传播特性，如反射、折射、干涉、衍射、偏振等等，也都可以由电磁波理论加以说明. 电磁波理论已成为现代光学的理论基础.

§3 电磁波在介质分界面上的反射和折射

光在两种介质分界面上要发生反射和折射，并满足一系列实验定律. 既然光也是电磁波，从电磁场理论就应该能推导出反射定律、折射定律，以及反映反射波和折射波的强度、相位和偏振等关系的菲涅尔公式.

设有两种均匀各向同性介质充满整个空间，其分界面为 $z=0$ 的平面. 两种介质的介电常数和磁导率分别为 ε_1,μ_1 和 ε_2,μ_2. 一平面单色电磁波由介质 1 向介质 2 传播，当入射到界面时，一部分被界面反射成为反射波，另一部分透入界面成为折射波. 反射波和折射波仍然是平面单色波. 这时电磁波除满足传播方程外，还应满足边界条件

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) &= 0 \\ \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) &= 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

以 i 标志入射波，传播方向为 $\boldsymbol{n}_i$

$$\boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{E}_{i0}\exp[-\mathrm{i}(\omega_i t - \boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{R})]$$

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}}=\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\boldsymbol{n}_{\mathrm{i}}\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}} \tag{3.2}$$

以 f 标志反射波，传播方向为 $\boldsymbol{n}_{\mathrm{f}}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{\mathrm{f}}&=\boldsymbol{E}_{\mathrm{f0}}\exp[-\mathrm{i}(\omega_{\mathrm{f}}t-\boldsymbol{k}_{\mathrm{f}}\cdot\boldsymbol{R})]\\ \boldsymbol{H}_{\mathrm{f}}&=\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\boldsymbol{n}_{\mathrm{f}}\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{f}}\end{aligned} \tag{3.3}$$

以 g 标志折射波，传播方向为 $\boldsymbol{n}_{\mathrm{g}}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}&=\boldsymbol{E}_{\mathrm{g0}}\exp[-\mathrm{i}(\omega_{\mathrm{g}}t-\boldsymbol{k}_{\mathrm{g}}\cdot\boldsymbol{R})]\\ \boldsymbol{H}_{\mathrm{g}}&=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\boldsymbol{n}_{\mathrm{g}}\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}\end{aligned} \tag{3.4}$$

为了确定上述各波的频率、波矢量和振幅的关系，利用边界条件(3.1)，当 $z=0$ 时应满足

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{n}\times[\boldsymbol{E}_{\mathrm{i0}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{\mathrm{i}}t-k_{\mathrm{i}x}x-k_{\mathrm{i}y}y)}+\boldsymbol{E}_{\mathrm{f0}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{\mathrm{f}}t-k_{\mathrm{f}x}x-k_{\mathrm{f}y}y)}]\\ &=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{g0}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_{\mathrm{g}}t-k_{\mathrm{g}x}x-k_{\mathrm{g}y}y)}\end{aligned} \tag{3.5}$$

式中 $\boldsymbol{n}$ 是介质 1 指向介质 2 的界面法线方向，上式在任何时刻 t，对分界面上任何一点 (x,y) 都应成立. 取 $t=0,x=y=0$，得

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_{\mathrm{i0}}+\boldsymbol{E}_{\mathrm{f0}})=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{g0}} \tag{3.6}$$

这是三个波的电场强度切向分量的关系式. 为了保证在任意时刻界面上任意点 (x,y) 都满足边界条件，必须要求(3.5)式中的指数因子相等. 注意到 x,y,t 是任意的，由此可得

$$\omega_{\mathrm{i}}=\omega_{\mathrm{f}}=\omega_{\mathrm{g}} \tag{3.7}$$

$$k_{\mathrm{i}x}=k_{\mathrm{f}x}=k_{\mathrm{g}x} \tag{3.8}$$

$$k_{\mathrm{i}y}=k_{\mathrm{f}y}=k_{\mathrm{g}y} \tag{3.9}$$

利用上述各关系式可得许多重要结果.

(1)关于反射波、折射波传播方向问题

由(3.7)式知三种波的频率相同. 设入射波的传播方向在 $x-z$ 平面内，如图 6.4 所示. 这时

$$k_{\mathrm{i}y}=0$$

由(3.9)式得

$$k_{\mathrm{f}y}=k_{\mathrm{g}y}=0$$

于是得出结论：反射波、折射波和入射波的波矢量均在同一入射面内.

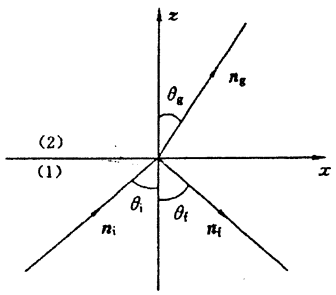


图 6.4

(2)反射定律和折射定律

由图(6.4)可见

$$k_{\mathrm{i}x}=k_{\mathrm{i}}\sin\theta_{\mathrm{i}}$$

$$k_{\mathrm{f}x}=k_{\mathrm{f}}\sin\theta_{\mathrm{f}}$$

$$k_{\mathrm{g}x}=k_{\mathrm{g}}\sin\theta_{\mathrm{g}}$$

再由(3.8)式得

$$\frac{\omega}{v_1}\sin\theta_{\mathrm{i}}=\frac{\omega}{v_1}\sin\theta_{\mathrm{f}}=\frac{\omega}{v_2}\sin\theta_{\mathrm{g}} \tag{3.10}$$

因为反射波也在介质 1 中，故由上式可得

$$\sin\theta_i = \sin\theta_f, \qquad \theta_i = \theta_f$$

即入射角等于反射角，这正是反射定律. (3.10)式中的 v_1, v_2 分别电磁波在介质 1 和介质 2 中的传播速度. 由于 $v=c/n$，故可得

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_g} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$$

即入射角正弦与折射角正弦之比等于两种介质的相对折射率，这正是折射定律.

(3)菲涅尔(Fresnel)公式

菲涅尔公式表达了反射波和折射波的振幅与入射波振幅之间的关系. 为求出这些关系，需要把反射波和折射波的电场强度用入射波的电场强度表示出来，知道电场的关系后，磁场的关系也随之求得.

在 $z=0$ 的界面上利用边界条件(3.1)，并考虑到(3.4)式后，可得

$$\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{E}_{i0} + \boldsymbol{E}_{f0}) = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}_{g0} \tag{3.11}$$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n}_i \times \boldsymbol{E}_{i0} + \boldsymbol{n}_f \times \boldsymbol{E}_{f0})$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n}_g \times \boldsymbol{E}_{g0}) \tag{3.12}$$

分两种情况讨论，先考虑电场矢量垂直于入射面的情况. 设入射面在 $x-z$ 平面，这时电场只有 y 分量. 由(3.11)式有

$$E_{i0} + E_{f0} = E_{g0} \tag{3.13}$$

注意到图 6.5，由(3.12)式可得

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}(E_{i0} - E_{f0})\cos\theta_i$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}E_{g0}\cos\theta_g \tag{3.14}$$

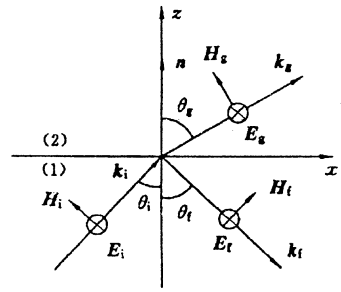


图 6.5

对于可见光波的频率，介质的磁导率 $\mu \approx \mu_0$，再注意到折射定律

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_g} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}}$$

联立(3.13)和(3.14)式，可得

$$\frac{E_{f0}}{E_{i0}} = \frac{-\sin(\theta_i - \theta_g)}{\sin(\theta_i + \theta_g)} \tag{3.15}$$

$$\frac{E_{g0}}{E_{i0}} = \frac{2\sin\theta_g\cos\theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_g)} \tag{3.16}$$

这就是当入射波的电场矢量垂直于入射面时的菲涅尔公式.

其次考虑电场矢量平行于入射面的情形. 注意到图 6.6 中各量的方向后，(3.11)与(3.12)的条件可化为

$$(E_{i0} - E_{f0})\cos\theta_i = E_{g0}\cos\theta_g \tag{3.17}$$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}(E_{i0} + E_{f0}) = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}E_{g0} \tag{3.18}$$

注意到 $\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0$，以及折射定律，联立求解(3.17)和(3.18)两式可得

$$\frac{E_{f0}}{E_{i0}} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_g)}{\tan(\theta_i + \theta_g)} \tag{3.19}$$

$$\frac{E_{g0}}{E_{i0}} = \frac{2\sin\theta_g\cos\theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_g)\cos(\theta_i - \theta_g)} \tag{3.20}$$

这就是当入射波电场矢量平行于入射面时的菲涅尔公式.

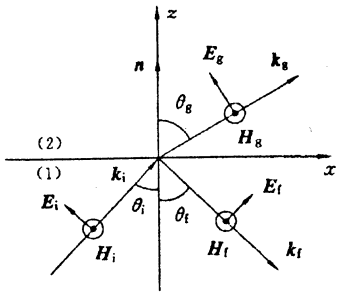


图 6.6

菲涅尔公式是物理光学中的重要公式，由它可得到一些重要结论：

第一，布卢斯特定律(Brewster's Law). 由(3.19)看到，当 $\theta_i + \theta_g = \frac{\pi}{2}$ 时，$E_{f0} = 0$. 这就是说，当反射波和折射波的方向互相垂直时，反射波中平行于入射面内的电场矢量将等于零. 如果入射的是自然光波，则在上述角度入射时，得到的反射光将是全偏振光，即电场矢量只在垂直于入射面内振动. 这个现象最早由布卢斯特从实验上总结出来，称为布卢斯特定律. 满足条件

$$\theta_i + \theta_g = \frac{\pi}{2}$$

的 θ_i 角称为布卢斯特角. 利用折射定律可将上述条件写为

$$\tan\theta_i = \frac{\sin\theta_i}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_g\right)} = \frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_g} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12}$$

对于普通玻璃，$n = 1.5$，当光从空气射到玻璃上，入射角 $\theta_i = \arctan(1.5) \approx 56°$ 时，就得到全偏振的反射光.

第二，半波损失. 当光由光疏介质入射到光密介质，$\theta_i > \theta_g$，由(3.15)式看到，反射光中垂直于入射面的电场矢量和入射光中的电场矢量差负号，表明两者相位差为 π. 对平行于入射面的电场矢量来说，由(3.19)式看出，只有当入射角大于布卢斯特角时，反射波的电场矢量才和入射波的电场矢量反号. 因此，在大角度下光从光疏介质向光密介质入射时，反射光中的电矢量相位要改变 π，相当于“损失了半个波长”，称这种现象为半波损失.

第三，反射系数与透射系数. 反射波在单位时间内从分界面上单位面积反射的平均能量，除以单位时间内入射波投射到分界面上单位面积的平均能量，称为反射系数. 可表为

$$R = \frac{\| \bar{S}_f \cdot \boldsymbol{n} \|}{\| \bar{S}_i \cdot \boldsymbol{n} \|} \tag{3.21}$$

式中 $\boldsymbol{n}$ 是分界面的法线方向. 由平均能流公式可得

$$\bar{S}_i = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}_i^* \times \boldsymbol{H}_i) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}E_{i0}^2\boldsymbol{n}_i$$

$$\bar{S}_f = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}E_{f0}^2\boldsymbol{n}_f$$

反射系数为

$$R = \frac{E_{f0}^2}{E_{i0}^2} \tag{3.22}$$

由(3.15)式，可得电场矢量垂直于入射面时的反射系数为

$$R_N = \frac{\sin^2(\theta_i - \theta_g)}{\sin^2(\theta_i + \theta_g)} \tag{3.23}$$

由(3.19)式，可得电场矢量平行于入射面时的反射系数为

$$R_P = \frac{\tan^2(\theta_i - \theta_g)}{\tan^2(\theta_i + \theta_g)} \tag{3.24}$$

对自然光，可按两个互相垂直方向分解，得

$$E_f^2 = E_{fN}^2 + E_{fP}^2 = (E_{f0N}^2 + E_{f0P}^2)\cos^2(\omega t - \boldsymbol{k}_f \cdot \boldsymbol{R})$$

对时间平均后得

$$\overline{E_f^2} = \frac{1}{2}(E_{f0N}^2 + E_{f0P}^2)$$

所以自然光的反射系数为

$$R = \frac{1}{2}(R_N + R_P)$$

图 6.7 画出了光由空气入射到相对折射率为$(n_2/n_1)=1.52$的玻璃上时，反射系数与入射角的关系. 当光垂直入射时，反射光的能量最小，反射系数只有 0.04；在入射角接近 90°时，反射系数接近于 1；在布卢斯特角入射时，对电场矢量垂直于入射面的光反射系数为 0.15.

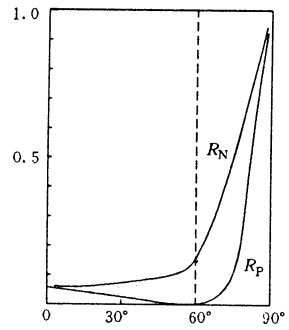


图 6.7

下面讨论透射系数. 透射波在单位时间内从分界面上单位面积透射的平均能量，除以入射波在单位时间内入射到界面上单位面积的平均能量，称为透射系数. 可表为

$$T = \frac{|\overline{S}_g \cdot \boldsymbol{n}|}{|\overline{S}_i \cdot \boldsymbol{n}|} \tag{3.25}$$

因为

$$\overline{S}_i = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}E_{i0}^2\boldsymbol{n}_i, \qquad \overline{S}_g = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}E_{g0}^2\boldsymbol{n}_i$$

所以

$$T = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\frac{E_{g0}^2}{E_{i0}^2}\frac{\cos\theta_g}{\cos\theta_i} \tag{3.26}$$

由(3.16)式，得电场矢量垂直于入射面时的透射系数为

$$T_N = \frac{4\sin\theta_i\cos\theta_i\sin\theta_g\cos\theta_g}{\sin^2(\theta_i + \theta_g)} \tag{3.27}$$

由(3.20)式，得电场矢量平行于入射面时的透射系数为

$$T_P = \frac{4\sin\theta_i\cos\theta_i\sin\theta_g\cos\theta_g}{\sin^2(\theta_i + \theta_g)\cos^2(\theta_i - \theta_g)} \tag{3.28}$$

由于能量守恒，应该满足关系

$$T + R = 1$$

的确，直接计算可以证实 $T_N+R_N=1$，$T_P+R_P=1$.

第四，全反射. 由折射定律

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_g}=\frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}}=n_{21}$$

当 $\varepsilon_2<\varepsilon_1$ 时，$n_{21}<1$，即当光由光密媒质入射到光疏媒质时，$\sin\theta_i<\sin\theta_g$. 当 $\sin\theta_i=n_{21}$ 时，$\sin\theta_g=1$. 此时的入射角称为临界角；如果入射角再增大，即 $\sin\theta_i>n_{21}$，这时 $\sin\theta_g>1$，则不能有实数的解 θ_g 满足 $\sin\theta_g>1$，这种情况下的电磁波传播有很特殊的性质，称为全反射. 电磁场的解可由前面的结果得到，只需要利用 $\sin\theta_i>n_{21}$ 这个条件. 由(3.8)式

$$k_{gx}=k_{ix}=k_i\sin\theta_i \tag{3.29}$$

另一方面，

$$k_g=\omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_0},\qquad k_i=\omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_0}$$

$$k_g=k_i\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}=k_in_{21} \tag{3.30}$$

当 $\sin\theta_i>n_{21}$ 时，$k_{gx}>k_g$. 取入射面为 $x-z$ 平面，则有

$$k_{gz}=\sqrt{k_g^2-k_{gx}^2}=\mathrm{i}k_i\sqrt{\sin^2\theta_i-n_{21}^2}=\mathrm{i}\tau \tag{3.31}$$

将上式代入折射波的电场中得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_g&=\boldsymbol{E}_{g0}\exp[-\mathrm{i}(\omega t-\boldsymbol{k}_g\cdot\boldsymbol{R})]\\&=\boldsymbol{E}_{g0}\mathrm{e}^{-\tau z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-k_{gx}x)}\end{aligned} \tag{3.32}$$

这是沿 x 轴方向传播的电磁波，其振幅沿 z 轴方向迅速衰减，在 $d=1/\tau$ 的厚度时，振幅已降到 $z=0$ 时的 $1/\mathrm{e}$，按(3.31)式

$$\begin{aligned}\mathrm{d}&=\frac{1}{k_i\sqrt{\sin^2\theta_i-n_{21}^2}}\\&=\frac{\lambda_i}{2\pi\sqrt{\sin^2\theta_i-n_{21}^2}}\end{aligned} \tag{3.33}$$

这表明波透入第二介质的厚度 d 与入射波的波长同数量级.

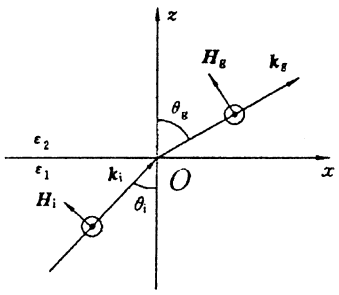


图 6.8

计算折射波的能流. 设折射波电场 $\boldsymbol{E}_g$ 垂直于入射面，$\boldsymbol{E}_g=E_g\boldsymbol{e}_y$，则

$$\boldsymbol{H}_g=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\frac{\boldsymbol{k}_g}{k_g}\times E_g\boldsymbol{e}_y$$

因 $\boldsymbol{k}_g=k_{gx}\boldsymbol{e}_x+k_{gz}\boldsymbol{e}_z$，故

$$\boldsymbol{H}_g=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\frac{E_g}{k_g}(k_{gx}\boldsymbol{e}_z-k_{gz}\boldsymbol{e}_x)$$

注意到(3.29)—(3.32)式，可得

$$H_{gz}=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\frac{\sin\theta_i}{n_{21}}E_g$$

$$H_{gx}=-\mathrm{i}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\sqrt{\frac{\sin^2\theta_i}{n_{21}^2}-1}E_g$$

平均能流

$$\bar{S}_g = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}_g^* \times \boldsymbol{H}_g) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(E_g^* H_{gz})\boldsymbol{e}_x - \frac{1}{2}\mathrm{Re}(E_g^* H_{gx})\boldsymbol{e}_z$$

$$\bar{S}_{gx} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(E_g^* H_{gz}) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\frac{\sin\theta_i}{n_{21}}E_{g0}^2 e^{-2rz} \tag{3.34}$$

$$\bar{S}_{gz} = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}(E_g^* H_{gx}) = 0$$

由此看出，折射波沿 x 方向平均能流不为零，但沿 z 方向的平均能流为零. 注意，沿 z 方向的瞬间能流不为零，前半周期能流沿正 z 方向，后半周期又沿负 z 方向. 这说明在全反射情况下，并不是没有能量流入第二介质. 实际过程是：入射波投射到界面上，有一部分折射波先透入到第二介质，它所带的能量进入了第二介质；在下半周期，折射波再带着能量流回第一介质，因而进入第二介质的平均能量为零. 这和交流电源供电的纯电感电路相似，前半周期能量流入电感储存起来，后半周期电感所储的能量再流回电源，因而在一个周期内流入电感的平均能量为零. 如何理解沿 x 方向的不为零的平均能流呢？由(3.34)式看出，这部分能流与入射角 θ_i 有关. 发生反射时，θ_i 一定大于临界角，因此电磁波是斜入射的. 在前半周期能流斜入射进入第二介质，有沿 x 方向的分量；在后半周期能流又流回第一介质，仍有沿 x 方向的分量. 现在讨论的是理想的平面波入射，意味着在无限大的界面上都有平面波入射. 因此在界面上的任何地方，都有沿 x 方向的能量分量. 所以沿 x 方向的能流，实质上是在斜入射时，透入第二介质内的能流往复流动的表现.

现在计算全反射时的反射系数. 以电场矢量垂直于入射面为例. 由(3.13)和(3.14)式，取 $\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0$，可解出

$$\frac{E_{f0}}{E_{i0}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_i - \sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta_g}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_i + \sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta_g} \tag{3.35}$$

由(3.30)和(3.31)式可得

$$\cos\theta_g = \frac{k_{gz}}{k_g} = \mathrm{i}\sqrt{\frac{\sin^2\theta_i}{n_{21}^2} - 1}$$

并注意到 $n_{21} = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$，(3.35) 可化为

$$\frac{E_{f0}}{E_{i0}} = \frac{\cos\theta_i - \mathrm{i}\sqrt{\sin^2\theta_i - n_{21}^2}}{\cos\theta_i + \mathrm{i}\sqrt{\sin^2\theta_i - n_{21}^2}} = e^{i\phi} \tag{3.35}$$

$$\tan\phi = \frac{2\cos\theta_i\sqrt{\sin^2\theta_i - n_{21}^2}}{\cos^2\theta_i - \sin^2\theta_i + n_{21}^2}$$

上式表明反射波与入射波的振幅相等但相位差 ϕ，反射系数

$$R_N = \left|\frac{E_{f0}}{E_{i0}}\right|^2 = 1$$

即入射波的能量全部被反射，这正是全反射所要求的.

全反射在光学技术中有重要应用，最近发展起来的光导纤维通讯，就是利用全反射原理使光在光导纤维中传播. 光导纤维是由带涂层的玻璃丝制成，涂层的折射率小于玻璃丝的折射率. 光线以一定角度入射到玻璃丝中，当入射到玻璃和涂层界面上的入射角大于临界角时，发

生全反射. 如图 6.9 所示，光在纤维内不断地被全反射而向前传播，一直到从另一端射出为止.

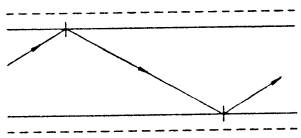


图 6.9

例 在无限大介质平面上有一层薄膜，介质的折射率为 n_3，膜的折射率为 n_2，膜的厚度为 d. 一平面电磁波由真空垂直入射到带膜的介质平面上，求透射系数 T，并讨论在什么条件下透射系数 $T=1$.

解 在区域 1 中有入射波和反射波，注意平面波的性质，有

$$E_1 = E_i + E_f$$

$$H_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}(E_i - E_f) \tag{3.36}$$

在区域 2 中有沿 z 方向传播的波也有沿负 z 方向传播的波(见图 6.10)，故在区域 2 中电磁场的形式为

$$E_2 = Ae^{-ik_2 z} + Be^{ik_2 z}$$

$$H_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}(Ae^{-ik_2 z} - Be^{ik_2 z}) \tag{3.37}$$

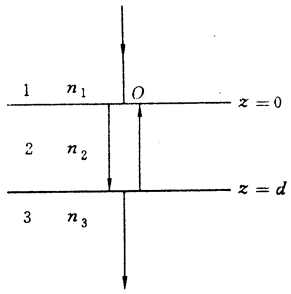


图 6.10

在区域 3 中只有透射波

$$E_3 = E_g, \qquad H_3 = \sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\mu_3}}E_g \tag{3.38}$$

对光波 $\mu_2 \approx \mu_3 \approx \mu_0$，令

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}, \qquad \alpha_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_0}}, \qquad \alpha_3 = \sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\mu_0}} \tag{3.39}$$

由(3.36)－(3.38)式看到，入射波 E_i 是已知的，未知数有反射波 E_f，透射波 E_g，以及区域 2 中的 A，B，共有四个未知数. 利用两个分界面上的电、磁场切线分量连续的边界条件，可求出这四个未知数.

当 $z=0$ 时，$E_1=E_2$，$H_1=H_2$

$$E_1 = A + B$$
$$H_1 = \alpha_2(A - B) \tag{3.40}$$

当 $z=d$ 时，$E_2=E_3$，$H_2=H_3$

$$E_3 = Ae^{-ik_2 d} + Be^{ik_2 d}$$
$$H_3 = \alpha_2(Ae^{-ik_2 d} - Be^{+ik_2 d}) \tag{3.41}$$

由(3.41)式把 A，B 用 E_3，H_3 表出，再代入(3.40)式得到

$$E_1 = E_3\cos k_2 d + i\frac{H_3}{\alpha_2}\sin k_2 d$$

$$H_1 = i\alpha_2 E_3 \sin k_2 d + H_3 \cos k_2 d$$

将(3.36)、(3.38)和(3.39)式代入上式得

$$E_i + E_f = E_g(\cos k_2 d + i\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\sin k_2 d)$$

$$\alpha_1(E_i - E_f) = E_g(i\alpha_2 \sin k_2 d + \alpha_3 \cos k_2 d) \tag{3.42}$$

因为

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}}=n_2,\qquad \frac{\alpha_3}{\alpha_1}=\sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_0}}=n_3$$

所以

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_2}=\sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}}=\frac{n_3}{n_2}$$

由(3.42)可解出

$$\frac{E_g}{E_i}=\frac{2}{(1+n_3)\cos k_2 d+\mathrm{i}\left(n_2+\dfrac{n_3}{n_2}\right)\sin k_2 d} \tag{3.43}$$

按(3.25)式，当 $\theta_i=0$ 时透射系数为

$$T=\frac{\bar{S}_g}{\bar{S}_i}=\sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_0}}\left|\frac{E_g}{E_i}\right|^2$$

$$=\frac{4n_3}{(1+n_3)^2+(n_2^2-1)\left(1-\dfrac{n_3^2}{n_2^2}\right)\sin^2 k_2 d} \tag{3.44}$$

为了使 T 尽可能大，必须使上式的分母尽可能小，上式中的 n_3 是介质的折射率，是固定不变的. 可以选择薄膜的厚度 d 与折射率 n_2，为了使分母尽可能小，应选 $n_2<n_3$，使第二项为负. 为使第二项的数值最大，应选取 d，保证

$$\sin^2 k_2 d=1$$

由此求出

$$k_2 d=\frac{\omega}{c}n_2 d=\frac{2\pi}{\lambda}n_2 d=\frac{\pi}{2}$$

$$d=\frac{\lambda}{4n_2} \tag{3.45}$$

λ 是电磁波在真空中的波长. 将(3.45)代入(3.44)式，再令 $T=1$，可求出 $n_3=n_2^2$. 于是得到结论：当膜的厚度 d 按(3.45)取值，膜的折射率 $n_2=\sqrt{n_3}$ 时，透射系数 $T=1$，无反射波. 这个结论在薄膜光学中有重要应用，这种膜称为增透膜，它可以改善光学仪器的性能.

§4 电磁波在导体中的传播及在导体表面的反射和折射

前面已指出，平面单色电磁波在导体中传播的基本方程与在介质中传播的基本方程形式相同，差别仅在于在导体场方程中应取复介电常数. 由(1.14)和(1.15)式，导体中电磁波方程为

$$\nabla^2 \boldsymbol{E}+k'^2\boldsymbol{E}=0 \tag{4.1}$$

$$k'^2=\omega^2\mu\varepsilon'=\omega^2\mu\left(\varepsilon+\mathrm{i}\frac{\sigma}{\omega}\right) \tag{4.2}$$

$$\boldsymbol{H}=\frac{-\mathrm{i}}{\omega\mu}\nabla\times\boldsymbol{E} \tag{4.3}$$

它的平面波解为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0\exp[-\mathrm{i}(\omega t - \boldsymbol{k}' \cdot \boldsymbol{R})] \tag{4.4}$$

现在的波矢量 $\boldsymbol{k}'$ 是复数，可令

$$\boldsymbol{k}' = \boldsymbol{k} + \mathrm{i}\tau \tag{4.5}$$

于是导体中的平面单色电磁波的形式为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0\exp(-\tau \cdot \boldsymbol{R})\exp[-\mathrm{i}(\omega t - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{R})] \tag{4.6}$$

可见电磁波要衰减，τ 称为衰减常数，$\boldsymbol{k}$ 是决定电磁波传播的量，称为传播常数. $\boldsymbol{k}$ 与 τ 的方向一般并不相同，要求出它们必须应用边界条件. 一般情况下导体内的电磁波都是来自导体外的空间. 设电磁波由真空入射到导体的界面上，在真空中会出现反射波，在导体内会出现折射波. 用 i 标志入射波，用 f 标志反射波，用 g 标志折射波，则有

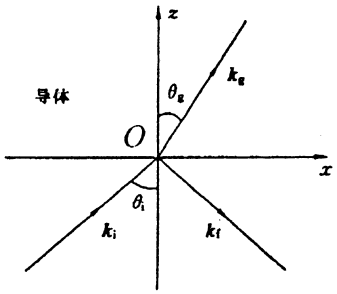


图 6.11

$$\boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{E}_{i0}\exp[-\mathrm{i}(\omega t - \boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{R})]$$
$$\boldsymbol{E}_f = \boldsymbol{E}_{f0}\exp[-\mathrm{i}(\omega t - \boldsymbol{k}_f \cdot \boldsymbol{R})]$$
$$\boldsymbol{E}_g = \boldsymbol{E}_{g0}\exp[-\mathrm{i}(\omega t - \boldsymbol{k}_g \cdot \boldsymbol{R})]$$
$$\boldsymbol{k}_g = \boldsymbol{k}' = \boldsymbol{k} + \mathrm{i}\tau$$

为保证在界面上满足电磁场的边界条件，与介质情况相似，应有以下关系：

$$\begin{aligned} k_{ix} &= k_{fx} = k_x' = k_x \\ \tau_x &= 0 \\ k_{iy} &= k_{fy} = k_y' = k_y \\ \tau_y &= 0 \end{aligned} \tag{4.7}$$

这表明衰减常数只有 z 分量，波只沿垂直界面方向衰减.

$$\boldsymbol{k}' = \boldsymbol{k} + \mathrm{i}\tau = \boldsymbol{k} + \mathrm{i}\tau\boldsymbol{e}_z$$
$$k'^2 = k^2 - \tau^2 + \mathrm{i}2\tau k_z = \omega^2\varepsilon\mu + \mathrm{i}\omega\mu\sigma$$

所以

$$k^2 - \tau^2 = \omega^2\mu\varepsilon \tag{4.8}$$
$$2\tau k_z = \omega\mu\sigma \tag{4.9}$$

设电磁波的入射面为 x—z 平面，则由(4.7)式有

$$\begin{aligned} k_x &= k_{ix} = k_i\sin\theta_i = \frac{\omega}{c}\sin\theta_i \\ k_y &= k_{iy} = 0 \end{aligned} \tag{4.10}$$

由(4.8)—(4.10)式可解出

$$\begin{aligned} k_z^2 &= \frac{1}{2}(\omega^2\mu\varepsilon - k_x^2) + \frac{1}{2}[(\omega^2\mu\varepsilon - k_x^2)^2 + (\omega\mu\sigma)^2]^{1/2} \\ \tau^2 &= -\frac{1}{2}(\omega^2\mu\varepsilon - k_x^2) + \frac{1}{2}[(\omega^2\mu\varepsilon - k_x^2)^2 + (\omega\mu\sigma)^2]^{1/2} \end{aligned} \tag{4.11}$$

若波垂直入射到界面上，则 $k_x = 0$

$$k = k_z = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}+1\right)\right]^{1/2}$$
$$\tau = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}-1\right)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{4.12}$$

在垂直入射时，导体内的电磁波为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{-\tau z} e^{-i(\omega t - kz)}$$
$$\boldsymbol{H} = \frac{-i}{\omega\mu}\nabla \times \boldsymbol{E} = \frac{1}{\omega\mu}(k + i\tau)\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{E} \tag{4.13}$$

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\omega\mu}\sqrt{k^2+\tau^2}e^{i\phi}\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{E} \tag{4.14}$$

其中

$$\tan\phi = \tau/k$$

由上述各式可得到电磁波在导体内传播的特性：

第一，波沿着垂直于界面的方向按指数衰减. 当 $z=d=1/\tau$ 时，波的振幅减少到界面处的 $1/e$，d 称为透入深度. 衰减的物理原因是因为导体内有自由电子，在电磁波作用下导体内出现诱导电流，产生焦耳热，消耗了电磁波的能量，因而振幅减弱. 注意，波的衰减方向总是与界面垂直，与入射波的方向无关，但是透入深度 d 的数值与入射波的方向是有关系的，这可从(4.11)式看出. 我们研究当波垂直入射在良导体上的情况. 良导体的条件是

$$\frac{\sigma}{\varepsilon\omega} \gg 1 \tag{4.15}$$

由(4.12)式

$$\tau \approx k \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \tag{4.16}$$

透入深度

$$d = \frac{1}{\tau} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \tag{4.17}$$

例如铜的电导率 $\sigma = 5.8\times10^7$S/m，当频率 $f=50$Hz 时，$d=0.945$cm；$f=5\times10^5$Hz 时，$d=0.094$mm，导体的电导率愈大，透入深度 d 愈小. 理想导体的透入深度为零. 导体的这种性质称为趋肤效应. 趋肤效应在技术上有重要应用，例如用金属罩屏蔽电磁波对无线电元件的影响. 在使用(4.17)式时，必须注意良导体条件(4.15)式. 对于一种导电物质，相对于电磁波来讲，是否是良导体，依赖于波的频率. 通常取 $(\sigma/\omega\varepsilon)>100$ 时，为良导体；当 $(\sigma/\omega\varepsilon)<0.01$ 时，就和介质的性质一样. 从物理上看，在变化电磁场中的导体内有位移电流与传导电流. 位移电流可忽略不计时，就表现为良导体；当传导电流可忽略时，导体就表现为介质. 例如一般的土壤，$\varepsilon_r=14$，$\sigma=0.01$S/m，当 $f=10^3$Hz 时，$(\sigma/\omega\varepsilon)=1.3\times10^4$，土壤就表现为良导体；但当 $f=3\times10^{10}$Hz 时，$(\sigma/\omega\varepsilon)=4\times10^{-4}$，土壤表现为介质.

第二，由(4.13)式看到，在导体内的电磁波仍然是横波，并且电场、磁场与传播方向互相垂直，三者组成右手螺旋系.

第三，由(4.14)式看到，电场和磁场不同相位. 对良导体 $k=\tau$，故电磁场的相位差 ϕ 为

$$\tan\phi = 1, \qquad \phi = 45°$$

在良导体条件下，(4.14)式化为

$$\boldsymbol{H}=\sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{E}$$

这时：

$$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left|\frac{\boldsymbol{H}}{\boldsymbol{E}}\right|=\sqrt{\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}}\gg 1$$

但在真空或介质中上面的比值为 1，说明在良导体中，磁场的作用比电场大. 例如在铜中，当 f 为 1MHz，E/H 的比值为 $3.7\times10^{-4}\Omega$，而真空中这个比值为 377Ω.

第四，由(4.12)式的传播因子可以求得在导体中电磁波的相位速度

$$v=\frac{\omega}{k}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}+1\right)\right]^{-1/2}\tag{4.18}$$

在良导体中，电磁波的相位速度比介质中要大大降低. 例如在铜中，当 f 为 1MHz 时，相速 $v=4.1\times10^2\mathrm{m/s}$，而声音在铜中的速度为 $3.6\times10^3\mathrm{m/s}$，这时在铜中电磁波的速度比声速小 10 倍. 此外相速与电磁波频率有关，这种现象称为色散.

第五，若电磁波不是垂直入射，这时 $k_x\neq0$，k_x，k_z 和 τ 由(4.10)与(4.11)式表示. 对于良导体情况有

$$\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\gg1,\qquad \sigma\gg\varepsilon\omega$$

因此

$$\omega\mu\sigma\gg\omega^2\varepsilon\mu$$

在(4.11)中只保留最大项 $\omega\mu\sigma$，于是有

$$k_z\approx\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}\gg\sqrt{\varepsilon\mu}\omega>\frac{\omega}{c}>k_x$$

这说明 $k_z\gg k_x$. 因此，无论电磁波以什么角度入射到导体面上，透入导体内的电磁波的传播方向都接近 z 轴. 进入导体的折射波不再服从介质情况下的折射定律. 但是在导体面上的反射波，由(4.7)式有 $k_{ix}=k_{fx}$，可见反射波仍然服从一般的反射定律.

例 1 平面单色电磁波由真空垂直入射到良导体表面上，导体的电导率为 σ，磁导率为 μ_0，求反射系数.

解 在真空中有反射波与入射波，在导体中有折射波. 注意，在界面上，入射波与反射波的电场同方向，但磁场则反方向，因为平面波中 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{H}$ 与传播方向组成右手螺旋系. 由边界条件有

$$E_\mathrm{i}+E_\mathrm{f}=E_\mathrm{g}\tag{4.19}$$

$$H_\mathrm{i}-H_\mathrm{f}=H_\mathrm{g}\tag{4.20}$$

在真空的平面波中有

$$H=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E$$

对于良导体情况，由(4.13)与(4.16)式有

$$H_\mathrm{g}=\frac{1}{\omega\mu}\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}(1+\mathrm{i})E_\mathrm{g}\tag{4.21}$$

于是(4.20)式化为

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}(E_\mathrm{i}-E_\mathrm{f})=\sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu}}(1+\mathrm{i})E_\mathrm{g}\tag{4.22}$$

联立求解(4.19)与(4.22)式得

$$\frac{E_f}{E_i}=\frac{-\left(1-\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}+i\right)}{1+\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}+i}$$

反射系数为

$$R=\left|\frac{E_f}{E_i}\right|^2=\frac{1+\left(1-\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}\right)^2}{1+\left(1+\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}\right)^2}=\frac{1+(1-\alpha)^2}{1+(1+\alpha)^2}$$

其中

$$\alpha=\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}$$

因为 α 很小,展开后只保留 α 的一次项,得

$$R\approx 1-2\alpha=1-2\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}} \tag{4.23}$$

由此可见,对良导体,电导率愈高,反射系数愈接近于 1.

例 2 如图 6.12 所示,平面单色电磁波垂直入射到良导体上,电磁波穿过导体的厚度 L 后,证明电磁波损失的能量等于在 L 厚的导体内焦耳热损耗.

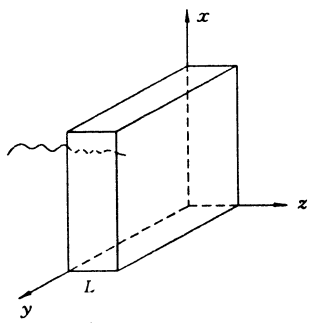


图 6.12

解 导体内的电场为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0e^{-\tau z}e^{-i(\omega t-kz)}$$

良导体中相应的磁场由(4.21)式为

$$\boldsymbol{H}=\sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu}}(1+i)\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{E}$$

导体中的能流

$$\overline{S}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{H})=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu}}E_0^2e^{-2\tau z}$$

在 $z=0$ 处的能流为 $\overline{S}(0)$,在 $z=L$ 处能流为 $\overline{S}(L)$. 能流差 $\overline{S}(0)-\overline{S}(L)$ 表示电磁波穿过厚度为 L,横截面为单位面积的导体后,在单位时间内电磁波损失的能量

$$\overline{S}(0)-\overline{S}(L)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu}}E_0^2(1-e^{-2\tau L}) \tag{4.24}$$

另一方面,导体内有电流 $\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$,单位时间内在导体单位体积中消耗的焦耳热为

$$\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{J}^*\cdot\boldsymbol{E})=\frac{\sigma}{2}(\boldsymbol{E}^*\cdot\boldsymbol{E})=\frac{\sigma}{2}E_0^2e^{-2\tau z}$$

在厚为 L,横截面为单位面积的导体中,单位时间消耗的焦耳热为

$$Q=\int_0^L\frac{\sigma}{2}E_0^2e^{-2\tau z}dz$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu}}E_0^2(1-\mathrm{e}^{-2rL}) \tag{4.25}$$

由此得到 $Q=\bar{S}(0)-\bar{S}(L)$.

§5 电磁波在等离子体中的传播

等离子体是由自由电子、离子和中性粒子组成的电离气体. 其中自由电子和离子所带的正、负总电量是相等的，对外呈现电中性. 在自然界中，闪电、极光、电离层以及绝大部分宇宙星体都是等离子体. 在实验室中研究等离子体是从气体放电开始的. 此外，火箭喷出的废气，氢弹爆炸时周围的气体等等也都是等离子体. 等离子体是宇宙中普遍存在的物质第四态.

当电磁波在等离体中传播时，带电粒子受到洛伦兹力的作用. 由于离子的质量比电子大得多，在高频外场作用下，可近似地认为它们是不动的. 以 N 表示等离子体每单位体积中自由电子的数目，v 表示在外场作用下电子的运动速度，热运动忽略不计，故在外场作用下，在等离子体中产生的运流电流密度为

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}} = Ne\boldsymbol{v} \tag{5.1}$$

对于平面单色电磁波

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0\exp[-\mathrm{i}(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R})] \tag{5.2}$$

由于 $|\boldsymbol{E}|=c|\boldsymbol{B}|$，当电子运动速度 $v\ll c$ 时，磁场力可以忽略不计，故

$$\boldsymbol{F} = +e(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \approx e\boldsymbol{E} \tag{5.3}$$

电子运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = e\boldsymbol{E} = e\boldsymbol{E}_0\exp[-\mathrm{i}(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R})] \tag{5.4}$$

对 t 积分得

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{i}e}{m\omega}\boldsymbol{E} \tag{5.5}$$

故运流电流密度为

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}} = Ne\boldsymbol{v} = \mathrm{i}\frac{Ne^2}{m\omega}\boldsymbol{E} \tag{5.6}$$

在等离子体中电磁波传播的基本方程为

$$\begin{aligned} &\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad \nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_{\mathrm{m}} + \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \\ &\nabla\cdot\boldsymbol{D} = 0 \qquad\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0 \end{aligned} \tag{5.7}$$

并有关系式

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H} \tag{5.8}$$

因为我们讨论的是单色电磁波，故有

$$\begin{aligned} \nabla\times\boldsymbol{E} &= \mathrm{i}\omega\mu_0\boldsymbol{H} \\ \nabla\times\boldsymbol{H} &= \mathrm{i}\frac{Ne^2}{m\omega}\boldsymbol{E} - \mathrm{i}\omega\varepsilon_0\boldsymbol{E} \\ &= -\mathrm{i}\omega\left(1-\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m\omega^2}\right)\varepsilon_0\boldsymbol{E} \end{aligned}$$

$$= -\mathrm{i}\omega\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)\varepsilon_0 \boldsymbol{E}$$

$$= -\mathrm{i}\omega\varepsilon \boldsymbol{E} \tag{5.10}$$

与介质中的方程在形式上完全相同，其中等效介电常数

$$\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0 = \left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)\varepsilon_0 \tag{5.11}$$

而 $\omega_p=\left(\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\right)^{1/2}$ 称为等离子体频率. 电离层的 N 的典型值是 10^{12} 个/m^3，所对应的频率

$$f_p = 8.98\sqrt{N} \approx 9\mathrm{MHz}$$

折射率

$$n = \sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \tag{5.12}$$

当电磁波的频率 $f>f_p$ 时，n 是实数，但 $n<1$；而当 $f<f_p$ 时，n 是虚数，电磁波不能在等离子体中传播而被反射回来. 阿普勒登(Appleton 1927 年)和哈特里(Hartree 1031 年)提出了电磁波在电离层中传播的理论. 他们导出了电离层的折射率公式，说明当电磁波频率低于等离子体频率时将被地球上空的电离层反射回地面. 短波通迅就是靠电离层反射进行的.

磁化等离子体是典型的各向异性的导电介质，下面着重讨论平面电磁波在磁化等离子体中传播的问题.

设在等离子体中沿着电磁波的传播方向存在均匀恒定磁场 $\boldsymbol{B}_0=\boldsymbol{E}_0\boldsymbol{e}_z$，则电子所受到的作用力为

$$\boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = e(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_0) \tag{5.13}$$

考虑到电子在交变电场作用下做周期性运动，随时间变化的因子为 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$，则上式的分量为

$$\begin{aligned}
-\mathrm{i}\omega v_x &= \frac{e}{m}E_x + \frac{e}{m}B_0 v_y \\
-\mathrm{i}\omega v_y &= \frac{e}{m}E_y - \frac{e}{m}B_0 v_x \\
-\mathrm{i}\omega v_z &= \frac{e}{m}E_z
\end{aligned} \tag{5.14}$$

令

$$\omega_c = \frac{e}{m}B_0 \tag{5.15}$$

ω_0 称为回旋频率. 代入上式并解得

$$\begin{aligned}
v_x &= \frac{e}{m}\cdot\frac{1}{\omega_c^2-\omega^2}(-\mathrm{i}\omega E_x + \omega_c E_y) \\
v_y &= \frac{e}{m}\cdot\frac{1}{\omega_c^2-\omega^2}(-\mathrm{i}\omega E_y - \omega_c E_x) \\
v_z &= \mathrm{i}\frac{e}{m\omega}E_z
\end{aligned}$$

由此可推断：电磁波将使电子绕 $\boldsymbol{B}_0$ 方向做螺旋运动. 当 $\omega\to\omega_0$ 时，v_x 和 v_y 都趋向无限大，电磁波与电子间存在强烈相互作用，这种现象称为回旋谐振.

电磁波在磁化等离子体中传播的旋度方程

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = \mathrm{i}\omega\mu_0 \boldsymbol{H}$$
$$\nabla \times \boldsymbol{H} = Ne\boldsymbol{v} - \mathrm{i}\omega\varepsilon_0 \boldsymbol{E} \tag{5.17}$$

第二个方程的分量式为

$$(\nabla \times \boldsymbol{H})_x = -\mathrm{i}\omega\varepsilon_0 E_x\left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2 - \omega^2}\right) + \frac{\omega_p^2\omega_c}{\omega_c^2 - \omega^2}\varepsilon_0 E_y \tag{5.18}$$

$$(\nabla \times \boldsymbol{H})_y = -\frac{\omega_p^2\omega_c}{\omega_c^2 - \omega^2}\varepsilon_0 E_x - \mathrm{i}\omega\varepsilon_0 E_y\left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2 - \omega^2}\right) \tag{5.19}$$

$$(\nabla \times \boldsymbol{H})_z = -\mathrm{i}\omega\varepsilon_0 E_z\left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \tag{5.20}$$

把它们写成下列形式

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = -\mathrm{i}\omega \overleftrightarrow{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{E} \tag{5.21}$$

此时等效介电常数由张量来表示

$$\overleftrightarrow{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \tag{5.22}$$

式中

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2 - \omega^2}\right)\varepsilon_0$$
$$\varepsilon_{33} = \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)\varepsilon_0 \tag{5.23}$$
$$\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = \mathrm{i}\frac{\omega_c}{\omega}\frac{\omega_p^2}{(\omega_c^2 - \omega^2)}\varepsilon_0$$

当 $\boldsymbol{B}_0 = 0$ 时，$\omega_c = 0$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon = \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)\varepsilon_0$$
$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = 0$$

这就回到前述各向同性介质的情况，因此，磁场是使介电常数变为张量的原因.

由

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = \mathrm{i}\omega\mu_0 \boldsymbol{H} \tag{5.24}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = -\mathrm{i}\omega \overleftrightarrow{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{E} \tag{5.25}$$

消去 $\boldsymbol{H}$ 得

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) - \omega^2\mu_0 \overleftrightarrow{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{5.26}$$

对于沿 z 方向传播的平面单色波

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}, \qquad \boldsymbol{E}_0 = E_1\boldsymbol{e}_1 + E_2\boldsymbol{e}_2 \tag{5.27}$$

则

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2\boldsymbol{E} = -\frac{\partial^2}{\partial z^2}\boldsymbol{E}$$
$$= k^2\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz} = k^2(E_1\boldsymbol{e}_1 + E_2\boldsymbol{e}_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz} \tag{5.28}$$

而

$$\overleftrightarrow{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0\\ -\varepsilon_{12} & \varepsilon_{11} & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_1\\ E_2\\ 0\end{pmatrix}e^{ikz}$$

$$=[(\varepsilon_{11}E_1+\varepsilon_{12}E_2)\boldsymbol{e}_1+(-\varepsilon_{12}E_1+\varepsilon_{11}E_2)\boldsymbol{e}_2]e^{ikz} \tag{5.29}$$

把(5.28)和(5.29)式代入(5.26)得

$$\begin{aligned}k^2E_1-\omega^2\mu_0(\varepsilon_{11}E_1+\varepsilon_{12}E_2)=0\\ k^2E_2-\omega^2\mu_0(-\varepsilon_{12}E_1+\varepsilon_{11}E_2)=0\end{aligned} \tag{5.30}$$

由(5.30)可求得

$$k^{\pm 2}=\omega^2\mu_0(\varepsilon_{11}\pm i\varepsilon_{12}) \tag{5.31}$$

当$k=k^+$时

$$(k^+)^2=\omega^2\mu_0(\varepsilon_{11}+i\varepsilon_{12})=\omega^2\mu_0\varepsilon_0\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega_c+\omega)}\right)$$

$$E_2=iE_1=iE_0$$

故平面波为

$$\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{e}_1+i\boldsymbol{e}_2)E_0e^{-i(\omega t-k^+z)} \tag{5.32}$$

是左旋圆极化波. 当$k=k^-$时

$$(k^-)^2=\omega^2\mu_0(\varepsilon_{11}-i\varepsilon_{22})=\omega^2\mu_0\varepsilon_0\left(1+\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega_c-\omega)}\right)$$

$$E_2=-iE_1=-iE_0$$

则平面波为

$$\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{e}_1-i\boldsymbol{e}_2)E_0e^{-i(\omega t-k^-z)} \tag{5.33}$$

是右旋圆极化波. 由(5.31)式看到，两个圆极化波的相速度不一样.

一个直线极化波可以分解为两个振幅相等. 旋转方向相反的圆极化波. 在各向同性介质中这两个圆极化波以相同的角速度旋转，因此极化面在传播过程中始终保持不变. 但在各向异性介质中，由于两个圆极化波的相速度不同，在传播一段距离后，合成波的极化面已不在原来的方向. 电磁波的极化面在各向异性介质中以传播方向为轴而不断旋转的现象，称为法拉第效应. 法拉第旋转角度的大小，取决于ω_p，B_0和传播距离，ω_p正比于等离子体的密度.

铁氧体在外磁场作用下是典型的各向异性的磁介质，在微波技术中，利用法拉第效应，可以设计出各种各样的微波铁氧体元件.

§6 电磁波在波导中的传播

1. 传输线

前面讨论的是电磁波在自由空间或有一无限大平面分界面的空间中的传播问题. 这种电磁波不能按人们预定的路线传播. 现代通讯技术中要求电磁波按照一定的路线传播，这就需要用传输线来引导电磁波，使电磁波沿传输线的方向传播. 传输线都是用良导体制成，在低频时一般用双明线.

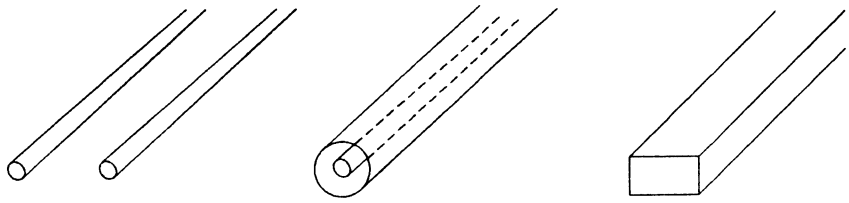


图 6.13

在高频时，双明线上的变化电流会产生很强的辐射场，辐射损失严重. 高频时改用同轴线，同轴线是在金属管的轴上放置圆柱形导体构成. 它可以避免辐射损失，但由于内导体半径小，电阻大，焦耳热损耗很大. 频率愈高，趋肤效显著，导体的有效截面更小，焦耳损耗也更严重. 因此在更高频率时，例如厘米波范围，采用空心金属管做传输线. 一般说来，凡是引导电磁波传播的导线都可称为波导，但在无线电技术中，通常只把空心金属管的传输线称为波导. 横截面为矩形的称为矩形波导. 还有圆形波导和其它形状的波导.

研究电磁波沿传输线传播的根本问题仍然是计算受传输线限制的空间中电磁场的分布. 实际的导体电导率都是有限的，电磁波会透入到传输线中，这将引起焦耳热损耗，在理论处理上一般都是先将传输线看为理想导体，求出电磁场分布后，再近似求出导体上的表面电流，计算这些电流的焦耳热损耗.

传输线的轴线方向一般取为 z 方向，在 z 方向可认为是无限长. 若横截面的形状与 z 无关，这种传输线称为均匀传输线. 一般理论上处理的都是均匀传输线. 在传输线限制的空间内一般都是真空或充放介质.

电磁波沿传输线传播的基本方程仍是赫姆霍兹方程

$$\begin{aligned} &\nabla^2\boldsymbol{E}+k^2\boldsymbol{E}=0 \qquad \text{及}\ \nabla\cdot\boldsymbol{E}=0 \\ &k^2=\omega^2\varepsilon\mu \end{aligned} \tag{6.1}$$

在理想导体的边界上，电磁场边界条件为

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}=0 \tag{6.2}$$

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}=\alpha \tag{6.3}$$

理想导体上的面电流密度 α 是未知的，因此在求解场方程过程中，能够使用的边界条件只有(6.2)式.

2. 传输线中电磁波的一般性质

传输线在 z 方向没有限制，研究方程(6.1)在 z 方向传播的电磁波解. 它的形式为

$$\boldsymbol{E}(x,y,z)=\boldsymbol{E}(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_z z} \tag{6.4}$$

令

$$\nabla=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}=\nabla_t+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

将(6.4)代入(6.1)式得到

$$\nabla_t^2\boldsymbol{E}(x,y)+(k^2-k_z^2)\boldsymbol{E}(x,y)=0 \tag{6.5}$$

由上式看出，满足上述方程解的 $\boldsymbol{E}(x,y)$ 可分两类：

(1)
$$\begin{aligned} &\nabla_t^2\boldsymbol{E}(x,y)=0, \qquad k_z^2-k^2=0 \\ &k_z^2=k^2=\omega^2\mu\varepsilon \end{aligned} \tag{6.6}$$

相速度

$$v = \frac{\omega}{k_z} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{6.7}$$

这种电磁波的相速与频率无关.

(2) $$\nabla_t^2 \boldsymbol{E}(x,y) \neq 0, \qquad k^2 - k_z^2 \neq 0 \tag{6.8}$$

$$k^2 - k_z^2 = k_c^2 = \left(\frac{\omega_c}{c}\right)^2 \tag{6.9}$$

相速度

$$v = \frac{\omega}{k_z} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \frac{\omega_c^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r - (\omega_c/\omega)^2}} \tag{6.10}$$

上式中的 ε_r, μ_r 是相对介电常数和相对磁导率. 上式说明，这种类型电磁波即使不存在介质，相速度也与频率有关. 并且当 ω 小于 ω_c 时，相速变成虚数，也就是传播常数 k_z 为虚数，因而不存在沿 x 方向传播的电磁波. ω_c 是这种波存在的最低频率，称为截止频率. 只有当 $\omega > \omega_c$ 时，这种波才能出现.

为了更进一步了解这两类波的性质，下面证明场的其它分量可用电场磁场的 z 分量表出. 利用

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(x,y)e^{ik_z z}, \qquad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}(x,y)e^{ik_z z}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = i\omega\mu\boldsymbol{H}, \qquad \nabla \times \boldsymbol{H} = -i\omega\varepsilon\boldsymbol{E}$$

可得到

$$(\nabla \times \boldsymbol{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial y} - ik_z E_y = i\omega\mu H_x$$

$$(\nabla \times \boldsymbol{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial E_z}{\partial x} + ik_z E_x = i\omega\mu H_y$$

$$(\nabla \times \boldsymbol{H})_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} - ik_z H_y = -i\omega\varepsilon E_x$$

$$(\nabla \times \boldsymbol{H})_y = -\frac{\partial H_z}{\partial x} + ik_z H_x = -i\omega\varepsilon E_y$$

联立求解上面四个方程得

$$E_x = \frac{i}{k^2 - k_z^2}\left(\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial y} + k_z\frac{\partial E_z}{\partial x}\right) \tag{6.11}$$

$$E_y = \frac{i}{k^2 - k_z^2}\left(-\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial x} + k_z\frac{\partial E_z}{\partial y}\right) \tag{6.12}$$

$$H_x = \frac{i}{k^2 - k_z^2}\left(k_z\frac{\partial H_z}{\partial x} - \omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial y}\right) \tag{6.13}$$

$$H_y = \frac{i}{k^2 - k_z^2}\left(k_z\frac{\partial H_z}{\partial y} + \omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial x}\right) \tag{6.14}$$

由上述方程看出，当 $k^2 - k_z^2 = 0$ 时，为得到有意义的电磁场解，必然有 $E_z = H_z = 0$，这正是第一种类型的电磁波，这种电磁波中没有场的纵向分量，称为横电磁波，用 TEM 表示. 当 $k^2 - k_z^2 \neq 0$ 时，H_z 或 E_z 必须有一个不为零，对 $H_z = 0$，但 $E_z \neq 0$ 的波，称为横磁波，用 TM 表示；对 $E_z =$

0 但 $H_z\neq 0$ 的波，称为横电波，用 TE 表示. 第二种类型的波是 TE 或 TM 波. 对于 TEM 波有 $k^2-k_z^2=0$，由(6.5)式得

$$\nabla_t^2\boldsymbol{E}(x,y)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\boldsymbol{E}(x,y)=0 \tag{6.15}$$

同理有

$$\nabla_t^2\boldsymbol{H}(x,y)=0$$

这组方程表达什么物理意义呢？由赫姆霍兹方程

$$\nabla^2\boldsymbol{E}+k^2\boldsymbol{E}=0$$

看到，当 $\omega=0$，即场不随时间变化时，$\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ 满足方程

$$\nabla^2\boldsymbol{E}=0 \qquad \nabla^2\boldsymbol{H}=0$$

与此对比，(6.15)的方程应表示在 xy 平面内，电磁场的分布和静止场的结构相同. 所以要决定某一传输线是否能传输 TEM 波，就必须检查一下它的导体上是否可以分布静电荷或沿线通过稳定电流. 双明线、同轴线都能实现上述条件，所以它们可以传输 TEM 波. 注意，这里只是说在传输线的横截面内，TEM 波的场与静止场结构相同. 既然在横截面内的电场与静电场结构相同，因而在横截面内可以引入电势，一般称为横向电压.

综上所述，对传输线中电磁波的特性，可得到以下结论：传输线中的电磁波有两类：TEM 波和 TE 波、TM 波. TEM 波是无色散波，即波速与频率无关，这种波的频率没有限制. TEM 波的横截面内的电场、磁场与静止场结构相同，因而可以引入横向电压. TE 波与 TM 波都是色散波，这种波的频率必须高于截止频率才能传播.

例 1 如图 6.14 所示，一对无限大的平行理想导体板，相距为 b，电磁波沿平行于板面的 z 方向传播，求在板面间可能传播的 TEM，TE，TM 波.

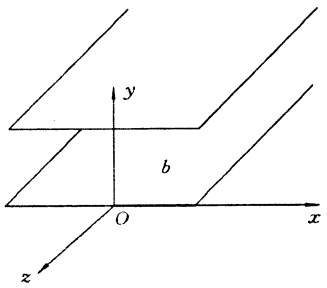


图 6.14

解 略去时间因子，设

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z}$$

对 TEM 波，横截面内的电场应该与静电场结构相同. 由图可见，导体系相当于无限大的电容器，在 y 方向能够存在与静电场相同的电场.

设

$$\boldsymbol{E}(x,y)=E_0\boldsymbol{e}_y$$

则

$$\boldsymbol{H}=\frac{-\mathrm{i}}{\omega\mu}\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{k_z}{\omega\mu}E_0\boldsymbol{e}_x$$

这就是 TEM 波的电磁场，这种波的截止频率为零.

再求 TE，TM 波的场. 这种波满足(6.5)式的方程，并且 $k^2-k_z^2\neq 0$. 在本题中平板在 x 方向是无限的，电磁波振幅与 x 无关. (6.5)式可化为

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{E}(y)}{\partial y^2}+(k^2-k_z^2)\boldsymbol{E}(y)=0$$

对 TE 波只需求 $H_z(y)$，对 TM 波只需求 $E_z(y)$，用 u 表示 H_z 或 E_z，它满足方程

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y^2}+(k^2-k_z^2)u=\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y^2}+k_y^2u=0$$

上方程的解为

$$u(y) = A\cos k_y y + D\sin k_y y$$

对 TE 波，令 $H_z=u$，式中的系数可由边界条件确定. 这个问题中的边界条件为

$$y = 0, \qquad y = b, \qquad E_x = 0$$

由(6.11)式为保证 $E_x=0$，必须在 $y=0, y=b$ 时有

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = -Ak_y\sin k_y y + Dk_y\cos k_y y = 0$$

由此得出 $D=0, \sin k_y b=0$，

$$k_y = \frac{m\pi}{b} \qquad m = 1,2,\cdots$$

于是得 TE 波中

$$H_z = A\cos\frac{m\pi}{b}y$$

再由(6.11)－(6.14)式算出

$$E_x = \frac{-\mathrm{i}\omega\mu bA}{m\pi}\sin\frac{m\pi}{b}y$$

$$E_y = 0, \quad E_z = 0, \quad H_x = 0$$

$$H_y = \frac{-\mathrm{i}k_z bA}{m\pi}\sin\frac{m\pi}{b}y$$

求 TM 波的场时，令 $E_z=u$，由(6.11)式，$E_x=0$，为保证满足边界条件，必须在 $y=0, y=b$ 时有

$$E_z = A\cos k_y y + D\sin k_y y = 0$$

由此得出 $A=0$

$$\sin k_y b = 0, \qquad k_y = \frac{n\pi}{b}$$

于是求得 TM 波中

$$E_z = D\sin\frac{n\pi}{b}y$$

再代入(6.11)－(6.14)式算出

$$E_x = 0, \quad H_y = 0, \quad H_z = 0$$

$$E_y = \frac{\mathrm{i}k_z bD}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{b}y$$

$$H_x = \frac{-\mathrm{i}\omega\varepsilon bD}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{b}y$$

TE，TM 波的传播常数

$$k_z = \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

$k_z=0$ 时对应的频率 ω_c 为截止频率，对 TE，TM 波

$$\omega_{c,n} = \frac{n\pi}{b}c \qquad n \neq 0$$

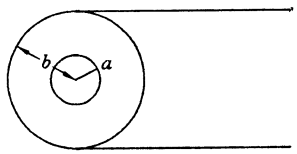


图 6.15

例 2 同轴线内半径为 a，外半径为 b，求沿同轴线传播的 TEM 波.

解 选柱坐标，同轴线的轴为 z 方向. 同轴线有内外导体，可以在横截面上实现静场结构，因而可以存在 TEM 波，它的形式为

$$E = E(r,\theta)e^{-ik_z z}$$

由于对称性，E 与 θ 无关. 设内外导体横向电势差值为 V，在横截面内的电势 ϕ 满足

$$\nabla^2\phi(r) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = 0$$

解出后得

$$\phi = c_1 \ln r + c_2$$

由边界条件 $r=a,\phi=V,r=b,\phi=0$ 可定出

$$c_1 = V/[\ln(a/b)], \qquad c_2 = -c_1\ln b$$

于是求出

$$\phi = V\frac{\ln(r/b)}{\ln(a/b)}$$

TEM 波的电场振幅为

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi = \frac{V}{\ln(a/b)}\frac{\boldsymbol{e}_r}{r}$$

写出传播因子后，TEM 的电场为

$$\boldsymbol{E} = \frac{V\boldsymbol{e}_r}{\ln(a/b)}\frac{1}{r}e^{-i(\omega t - k_z z}$$

$$k_z = \frac{\omega}{c}$$

磁场为

$$\boldsymbol{H} = \frac{-i}{\omega\mu}\nabla\times\boldsymbol{E} = \frac{-i}{\omega\mu}\frac{\partial E_r}{\partial z}\boldsymbol{e}_\theta$$

$$= \frac{Vk_z\boldsymbol{e}_\theta}{\omega\mu\ln(b/a)}\frac{1}{r}e^{-i(\omega t - k_z z)}$$

§7 矩形波导

1. 矩形波导中的电磁波

设波导宽为 a，厚为 b，波导管是理想导体(见图 6.16). 在波导管的横截面内不可能建立起静电场结构，因为建立电场必须有两个导体维持电势差. 双明线、同轴线才具备在横截面内建立静电场的条件. 因此波导内只能传播 TE 波或 TM 波. 波方程由(6.5)式决定，即

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\boldsymbol{E}(x,y) + (k^2 - k_z^2)\boldsymbol{E}(x,y) = 0$$

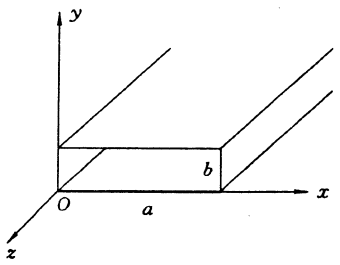


图 6.16

用 u 代表 E 或 H 的任一个分量，用分离变量法求解(6.5). 令

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

代入上式得

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2} + k^2 - k_z^2 = 0$$

令

$$\frac{d^2X}{dx^2} = -k_x^2 X \tag{7.1}$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} = -k_y^2 Y \tag{7.2}$$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 \tag{7.3}$$

解出(7.1)和(7.2)得

$$u(x,y) = (C_1\cos k_x x + D_1\sin k_x x)(C_2\cos k_y y + D_2\sin k_y y)$$

只考虑 TE 波，$E_z=0$，取 $u=E_x$，上式中的各系数由边界条件确定. 边界条件(6.2)$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}=0$ 化为

$$x = 0, \quad x = a, \quad E_y = 0 \tag{7.4}$$

$$y = 0, \quad y = b, \quad E_x = 0 \tag{7.5}$$

对 TE 波，边界条件还有：

$$x = 0 \quad , x = a, \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \tag{7.6}$$

$$y = 0, \quad y = b, \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \tag{7.7}$$

而

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = (C_1\sin k_x x + D_1\cos k_x x)(C_2\cos k_y y + D_2\sin k_y y)$$

由(7.5)式的条件可定出 $C_2=0$，$\sin k_y b=0$

$$k_y = \frac{n\pi}{b}, n = 0,1,2\cdots$$

由(7.6)的条件可定出 $D_1=0$，$k_x=m\pi/a$，于是得到

$$E_x = \frac{-i\omega\mu k_y}{k^2 - k_z^2} A\cos k_x x\sin k_y y \tag{7.8}$$

$$E_y = \frac{i\omega\mu k_x}{k^2 - k_z^2} A\sin k_x x\cos k_y y \tag{7.9}$$

$$H_x = \frac{-ik_z k_x}{k^2 - k_z^2} A\sin k_x x\cos k_y y \tag{7.10}$$

$$H_y = \frac{-ik_z k_y}{k^2 - k_z^2} A\cos k_x x\sin k_y y \tag{7.11}$$

$$H_z = A\cos\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y \tag{7.12}$$

其中

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, k_y = \frac{n\pi}{b} \tag{7.13}$$

由上面电磁场的表达式看到，m,n 取不同的值就对应不同的电磁场结构，用 TE_{mn} 标志这些波. 每一组(m,n)值表示一种型号的波. 在波导管内依据波导的尺寸和激发条件，可以同时存在几种型号的波，也可以只有一种型号的波. 一组(m,n)值也称为波的一种模式.

2. 矩形波导的截止频率

由(7.3)式有

$$k_z^2 = k^2 - (k_x^2 + k_y^2)$$

只有当 $k_z>0$ 时，才能有沿 z 轴传播的波. 当 $k_z^2=0$ 时，对应的频率 ω_c 称为截止频率. 由上式有

$$k_c^2 = \mu\varepsilon\omega_c^2 = k_x^2 + k_y^2$$

$$\omega_{c,mn} = \frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}} \tag{7.14}$$

相应的波长称为截止波长

$$\lambda_{c,mn} = \frac{2}{\sqrt{\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}}} \tag{7.15}$$

只有当电磁波的工作频率 $\omega>\omega_{c,mn}$ 时（或电磁波的波长 $\lambda<\lambda_{c,mn}$ 时），才能在波导中传输相应的 TE_{mn} 型号的电磁波.

对 $a=7\text{cm}, b=3\text{cm}$ 的矩形波导，各种型号波的截止波长如下（单位为 cm）：

(mn)	10	20	30	01	02	11	21	31
$\lambda_{c,mn}$	14	7	4.7	6.0	3.0	5.5	4.6	3.7

若电磁波在真空中的波长为 5cm，则在上述波导管内传输 TE_{10}，TE_{20}，TE_{01}，TE_{11} 四种波型. 在实际通讯技术中，波导内的电磁波是作为传输信号的载波. 如果在波导内同时存在几种波型的载波，场的结构很复杂，一般都尽量使用单一波型作载波. 适当选取波的工作频率，可实现一种波型. 例如在上述的波导管中，若选波长范围在 14 与 7cm 之间，则只有 TE_{10} 型的波才能在波导内传播.

3. 波导内电磁波的相速和群速

一个沿 z 方向传播的单色电磁波

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)}$$

其相位取某一常数值 ϕ_0 的时空坐标满足方程

$$\phi_0 = \omega t - kz \tag{7.16}$$

相位 ϕ_0 的传播速度为

$$v_\phi = \left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{\phi_0} \tag{7.17}$$

由(7.16)有

$$\frac{d\phi_0}{dt} = \frac{\partial\phi_0}{\partial t} + \frac{\partial\phi_0}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = 0$$

$$v_\phi = \left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{\phi_0} = -\frac{\partial\phi_0}{\partial t}\Big/\frac{\partial\phi_0}{\partial z}$$

$$= \frac{\omega}{k} \tag{7.18}$$

v_ϕ 称为波的相速度. 设有许多频率相差很小的波组成一个波包，其频率和传播常数可近似表为（严格说来，$\Delta\omega$ 是无限小，即 $d\omega$）

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega$$

$$k(\omega) = k(\omega_0) + \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0}\Delta\omega$$

$$= k_0 + \Delta k$$

由傅里叶分析可将合成波表为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(z,t) &= \int \boldsymbol{E}_0(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-kz)}\mathrm{d}\omega \\ &= \int \boldsymbol{E}_0(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Delta\omega t-\Delta kz)}\mathrm{d}\omega \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_0 t-k_0 z)} \\ &= \boldsymbol{A}(z,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_0 t-k_0 z)}\end{aligned}$$

式中

$$\boldsymbol{A}(z,t) = \int \boldsymbol{E}_0(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Delta\omega t-\Delta kz)}\mathrm{d}\omega \tag{7.19}$$

是合成波的振幅，它也是以波的形式沿 z 方向传播. 振幅为某一常数值的传播速度为

$$v_s = \left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{A\text{为常数}}$$

由(7.19)式有

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = 0$$

$$v_g = \frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{\partial A}{\partial t}\Big/\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

v_s 称为群速度. 在极限情况下 $\Delta\omega\to\mathrm{d}\omega$，故群速度为

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} \tag{7.20}$$

群速度是合成波振幅的传播速度，因而也是能量的传播速度.

由(7.18)，TE_{mn}型波在真空的矩形波导管内的相速度为

$$\begin{aligned}V_\phi &= \frac{\omega}{k_z} = \frac{\omega}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\omega^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}} \\ &= \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{\omega^2}\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]}}\end{aligned} \tag{7.21}$$

相速度大于真空中光速，并与频率有关. 为了使单一频率的载波能传送信号，就必须对载波进行调制. 调制后在波导内将出现频率分布在某一小范围内的各种波，这些波叠加形成波包. 由(7.20)式波包在矩形波导中的群速度为

$$v_s = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k_z}$$

由于

$$k_z^2 = k^2 - (k_x^2 + k_y^2)$$

因此

$$v_s = c\sqrt{1 - \frac{c^2}{\omega^2}\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]} = \frac{k_z}{\omega}c^2 \tag{7.22}$$

群速度小于光速 c，由(7.21)和(7.22)式看到

$$v_\phi v_s = \frac{\omega}{k_z}\frac{k_z}{\omega}c^2 = c^2$$

4. TE_{10}波传播的功率

$m=1, n=0$ 的波称为 TE_{10}波. 由(7.8)－(7.13)式可得到 TE_{10}波的电磁场为

$$E_y = \frac{i\omega\mu a}{\pi} A\sin\frac{\pi}{a}x$$

$$H_x = \frac{-ik_z a}{\pi} A\sin\frac{\pi}{a}x \tag{7.23}$$

$$H_z = A\cos\frac{\pi}{a}x$$

$$E_x = E_z = H_y = 0$$

TE_{10}波的平均能流

$$\bar{S} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}^* \times \boldsymbol{H})$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{aA}{\pi}\right)^2 \omega\mu k_z \sin^2\frac{\pi}{a}x\boldsymbol{e}_z$$

上式说明能量沿波导轴线方向传播出去. 沿波导截面单位时间内流出的平均能量称为波导传输的功率.

$$P = \int_0^a\int_0^b \bar{S}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\omega\mu k_z b}{2}\left(\frac{aA}{\pi}\right)^2 \int_0^a \sin^2\frac{\pi}{a}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{a^3 b\omega\mu k_z A^2}{4\pi^2} \tag{7.24}$$

5. TE_{10}波的管壁电流与损耗

由理想导体的边界条件可求出波导管壁上的面电流密度(其电流分布如图 6.17 所示)

$$\alpha = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H}$$

对 TE_{10}波,$x=0$,$x=a$ 的波导窄边上

$$\alpha = -A\boldsymbol{e}_y \tag{7.25}$$

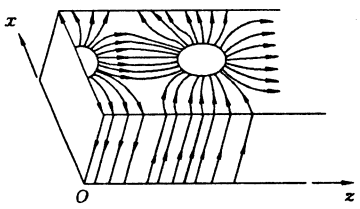


图 6.17

在 $y=0$ 的宽边上

$$\alpha = H_z\boldsymbol{e}_x - H_x\boldsymbol{e}_z$$

$$= A\cos\frac{\pi}{a}x\boldsymbol{e}_x + \frac{ik_z a}{\pi}A\sin\frac{\pi}{a}x\boldsymbol{e}_z \tag{7.26}$$

在 $y=b$ 的宽边上

$$\alpha = -A\cos\frac{\pi}{a}x\boldsymbol{e}_x - \frac{ik_z a}{\pi}A\sin\frac{\pi}{a}x\boldsymbol{e}_z \tag{7.27}$$

实际的波导管壁都不是理想导体,电磁波要透入到管壁内部一薄层,层厚可认为就是趋肤厚度 d. 导体内的电流将引起焦耳热损耗. 严格按照实际导体的边界条件来求波导内的电磁场是很困难的,一般都是先按理想导体的条件求出管壁上的面电流分布,然后认为这些电流是分布在厚度为 d 的导体薄层内,在导体的单位面积上,薄层 d 的电阻为

$$R_m = \frac{1}{\sigma d} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \tag{7.28}$$

在单位面积上损耗的能量为

$$\frac{R_m}{2}\mathrm{Re}(\alpha^* \cdot \alpha)$$

利用(7.25)—(7.27)的电流密度,可求得在单位长度的波导管的两个窄边上单位时间内损耗

的能量为

$$\frac{R_m}{2}2\int_0^b A^2 dy = R_m bA^2 \tag{7.29}$$

在两个宽边上单位时间内损耗的能量为

$$\frac{R_m}{2}\cdot 2\int_0^a (H_z^* H_z + H_x^* H_x)dx$$

$$= R_m\int_0^a \left[A^2\cos^2\frac{\pi}{a}x + \left(\frac{ak_z A}{\pi}\right)^2\sin^2\frac{\pi}{a}x\right]dx$$

$$= R_m\frac{A^2}{2}a\left(1+\frac{a^2}{\pi^2}k_x^2\right) \tag{7.30}$$

单位时间内在单位长的波导管的四壁上 TE_{10} 波损耗的总能量为

$$P_l = R_m A^2\left[b+\frac{a}{2}\left(1+\frac{a^2}{\pi^2}k_z^2\right)\right] \tag{7.31}$$

§8 谐 振 腔

电磁波由天线辐射，天线中的振荡电流则由激励电磁振荡的各种振荡器输入. 对于无线电波段，振荡器由真空管和具有集总参量的调谐回路(例如 LC 回路)组成. 随着频率增高，用集总参量元件组成振荡回路会发生许多困难. 当元件尺寸接近辐射波长时，振荡回路本身的辐射损失就很严重，并且由于趋肤效应，焦耳损耗也不断增大. 因此对于微波波段，通常采用谐振腔来产生高频振荡. 谐振腔是一个完全用金属面封闭的空腔，因此可以避免能量向外辐射. 而且由于用整个金属面做电流通路，故能减少由趋肤效应引起的焦耳损耗.

一个宽为 a，高为 b，长为 d 的矩形谐振腔，可由一段矩形波导构成，如图 6.18 所示. 在波导的一端 $z=d$ 处用金属板封闭. 当 d 等于半波长的整数倍时，电磁波由短路板反射而形成驻波，使波导另一端 $z=0$ 处电场为零. 如果在 $z=0$ 处放置一金属短路板，不会破坏原来的场分布，这样便构成了一个矩形谐振腔. 因此谐振腔内电磁场的分布，可以由波动方程和边界条件求解得到，也可以由相应波导内的场分布求得.

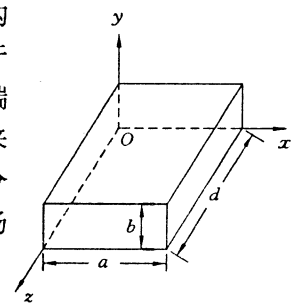


图 6.18

在矩形波导中，已知

$$k_z^2 = k^2 - k_c^2$$

$$= k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \tag{8.1}$$

现在要求在 z 轴方向上满足

$$d = l\frac{\lambda}{2}, \qquad l = 0,1,2\cdots$$

或

$$k_z d = l\pi \tag{8.2}$$

把它代入(8.1)式，可得

$$k^2=\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{l\pi}{d}\right)^2 \tag{8.3}$$

故谐振腔的谐振角频率为

$$\omega_0=\frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2+\left(\frac{l}{d}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{8.4}$$

相应的谐振波长为

$$\lambda_0=\frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2+\left(\frac{l}{\mathrm{d}}\right)^2}} \tag{8.5}$$

谐振波长 λ_0 与谐振腔的尺寸 a,b,d 有关，这与 LC 回路的谐振波长和电路参数 L,C 有关相似. 但 LC 回路只有一个谐振频率 $1/2\pi\sqrt{LC}$，而一定尺寸的谐振腔内，可有许多谐振频率，这与被激励的波型 m,n,l 有关. 只有当激励用的信号频率与某一波型的谐振频率相等时，谐振腔才处在谐振状态.

在微波领域内，常用谐振腔制成各种谐振器件，如微波振荡器和放大器中的谐振回路. 利用谐振腔的谐振特性也可做成微波滤波器. 在微波测量中可用做波长计.

例 1 求矩形谐振腔内 TE_{101} 模式的电磁场分布.

解 由于在谐振腔内沿 $+z$ 方向和 $-z$ 方向传播的电磁波叠加形成驻波，由(7.23)式可推知矩形谐振腔内 TE_{101} 模式的电磁场分布应为

$$H_z=(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z}+B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_z z})\cos\frac{\pi x}{a}$$

$$H_x=-\mathrm{i}k_z\frac{a}{\pi}(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z}-B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_z z})\sin\frac{\pi x}{a}$$

$$E_y=\mathrm{i}\omega\mu\frac{a}{\pi}(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z}+B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_z z})\sin\frac{\pi x}{a}$$

$$H_y=E_z=E_x=0$$

其中 A 和 B 代表沿 $+z$ 和 $-z$ 方向传播的波的振幅. 要使 E_y 在 $z=0$ 处为零，必有

$$B=-A$$

要使 E_y 在 $z=d$ 处为零，则有 $k_z=\pi/d$. 由此可得谐振腔内 TE_{101} 模式的电磁场分布为

$$\begin{aligned}
H_z&=2\mathrm{i}A\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi z}{d}\\
H_x&=-2\mathrm{i}\frac{a}{d}A\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi z}{d}\\
E_y&=-2\omega_0\mu\frac{a}{\pi}A\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi z}{d}\\
H_y&=E_z=E_x=0
\end{aligned} \tag{8.6}$$

式中

$$\omega_0=\omega_{101}=\frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{d^2}\right)^{1/2} \tag{8.7}$$

例 2 TE_{101} 模式矩形谐振腔的品质因数.

解 品质因数 Q 表示谐振腔内储存的能量 W 与功率损耗 P 的比值，其定义为

$$Q=\omega_0\frac{W}{P_1} \tag{8.8}$$

式中 ω_0 是谐振角频率. 假设介质没有损耗，对 TE_{101} 模式，可求得

$$W=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^b \mathrm{d}y\int_0^d \mathrm{d}z\left(\frac{\varepsilon}{2}|\boldsymbol{E}|^2+\frac{\mu}{2}|\boldsymbol{H}|^2\right)\right\}$$

$$=W_e+W_m \tag{8.9}$$

电场储存的能量为

$$W_e=\frac{\varepsilon}{4}4\omega_0^2\mu^2\frac{a^2}{\pi^2}A^2b\int_0^a\sin^2\frac{\pi x}{a}\mathrm{d}x\int_0^d\sin^2\frac{\pi z}{d}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{\varepsilon}{4\pi^2}\omega_0^2\mu^2a^3bdA^2 \tag{8.10}$$

磁场储存的能量为

$$W_m=\frac{\mu}{4}4A^2b\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^d\mathrm{d}z\left\{\cos^2\frac{\pi x}{a}\sin^2\frac{\pi z}{d}+\frac{a^2}{d^2}\sin^2\frac{\pi x}{a}\cos^2\frac{\pi z}{d}\right\}$$

$$=\frac{\mu}{4}A^2a^3bd\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{d^2}\right) \tag{8.11}$$

考虑到(8.7)式，可知 $W_e=W_m$，所以

$$W=\frac{\varepsilon}{2\pi^2}\omega_0^2\mu^2a^3bdA^2 \tag{8.12}$$

功率损耗主要是腔壁上的焦耳损耗

$$P_1=\frac{R_m}{2}\mathrm{Re}\int_s|H_t|^2\mathrm{d}S \tag{8.13}$$

在 $x=0$ 和 $x=a$ 两个侧面上

$$|H_t|^2=|H_z|^2=4A^2\sin^2\frac{\pi z}{d}$$

$$P_1=2\cdot\frac{R_m}{2}\cdot4A^2\int_0^b\mathrm{d}y\int_0^d\mathrm{d}z\sin^2\frac{\pi z}{d}$$

$$=2R_mbdA^2 \tag{8.14}$$

在 $z=0$ 和 $z=d$ 两个端面上

$$|H_t|^2=|H_x|^2=4\frac{a^2}{d^2}A^2\sin^2\frac{\pi z}{a}$$

$$P_2=2\cdot\frac{R_m}{2}\cdot4\frac{a^2}{d^2}A^2\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^b\mathrm{d}y\sin^2\frac{\pi x}{a}$$

$$=2R_m\frac{a^3b}{d^2}A^2 \tag{8.15}$$

在 $y=0$ 和 $y=b$ 上下两个面上

$$|\boldsymbol{H}_t|^2=|\boldsymbol{H}_x|^2+|\boldsymbol{H}_z|^2$$

$$=4\left(\frac{a}{d}\right)^2A^2\sin^2\frac{\pi x}{a}\cos^2\frac{\pi z}{d}+4A^2\cos^2\frac{\pi x}{a}\sin^2\frac{\pi z}{d}$$

$$P_3=2\cdot\frac{R_m}{2}\cdot4A^2\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^d\mathrm{d}z\left\{\frac{a^2}{d^2}\sin^2\frac{\pi x}{a}\cos^2\frac{\pi z}{d}+\cos^2\frac{\pi x}{a}\sin^2\frac{\pi z}{d}\right\}$$

$$=\boldsymbol{R}_ma^2\left(\frac{a}{b}+\frac{d}{a}\right)A^2 \tag{8.16}$$

总损耗功率为

$$P_1 = P_1 + P_2 + P_3$$
$$= \frac{R_m A^2}{d^2}(a^3 d + ad^3 + 2ba^3 + 2bd^3) \tag{8.17}$$

由此可得谐振腔的品质因数

$$Q = \frac{\varepsilon\mu^2\omega_0^3 a^3 b d^3}{2\pi^2 R_m(a^3 d + ad^3 + 2ba^3 + 2bd^3)} \tag{8.18}$$

对一具有 $a=b=d=2\text{cm}$ 用铜制成的立方形谐振腔，由上述公式可算得品质因素 $Q\approx 10^4$. 为了减少功率损耗，提高品质因素，谐振腔内壁应制作得十分光洁并镀银. 对于激励、耦合和短路等装置加工精度要高，接触要良好.

§9 电磁波的衍射

电磁波在传播过程中，当遇到障碍物或透过屏幕的小孔时，由于散射而使电磁波扩展，这种现象称为衍射现象. 衍射问题的研究对于光学和微波技术是很重要的.

在光学中衍射理论的基础是惠更斯原理. 惠更斯原理假设，波前上每一点可看做一个次波源，从这些次波源发出的次源以原波的速度向各方向传播，这些次波的包络给出新波前的形状，菲涅耳又进一步假设这些次波互相干涉，从而解释了光的衍射现象. 其实，惠更斯原理可从电磁场理论导出，这需要用到基尔霍夫公式.

在分析喇叭天线辐射场以及裂缝辐射等问题中，往往需要根据喇叭口上及裂缝处的电磁场计算出辐射场在空间的分布. 这时也需要应用基尔霍夫公式来进行计算.

解决衍射问题的方法，实质上是把一个区域内的电磁场用其边界上的值表示出来.

1. 基尔霍夫公式

对于一定频率的"单色"电磁波，标量场或矢量场的每一直角坐标分量具有如下形式

$$\Psi(\boldsymbol{R},t) = \psi(x,y,z)e^{-i\omega t} \tag{9.1}$$

设体积 V 内不包含场源，则标量场满足齐次波动方程，其振幅分布函数 ψ 满足亥姆霍兹(Helmholtz)方程

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(x,y,z) = 0 \tag{9.1}$$

其中 $k=\omega/c$. 现在的任务是求 V 内亥姆霍兹方程的积分形式的解，即用边界上的 ψ 和 $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ 值来表示区域 V 内任一点的 ψ 值. 应用格林第二公式

$$\int_V (\psi\nabla'^2\phi - \phi\nabla'^2\psi)\mathrm{d}V' = \oint_S (\psi\nabla'\phi - \phi\nabla'\psi)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{9.3}$$

式中 ψ 满足亥姆霍兹方程(9.2)式，选 ϕ 为出射球面波函数

$$\phi = \frac{e^{ikr}}{r} \tag{9.4}$$

其中 $r=|\boldsymbol{R}'-\boldsymbol{R}|$，由此不难推得 ϕ 满足如下方程

$$(\nabla^2 + k^2)\phi = -4\pi\delta(\boldsymbol{R}' - \boldsymbol{R}) \tag{9.5}$$

把 ψ 和 ϕ 所满足的方程代入(9.3)式，即得基尔霍夫公式

$$\psi(\boldsymbol{R})=\frac{1}{4\pi}\oint_S\left[\psi(\boldsymbol{R}')\nabla'\frac{e^{ikr}}{r}-\frac{e^{ikr}}{r}\nabla'\psi(\boldsymbol{R}')\right]\cdot d\boldsymbol{S}' \tag{9.6}$$

这表明区域V内的场完全由V外场源施于界面S上的ψ和$\frac{\partial\psi}{\partial n}$所产生，$\psi$和$\nabla\psi$不是独立的，由波动方程联系着，故只要给定其中一个就足够了.

基尔霍夫公式是惠更斯原理的数学表示. 把(9.6)式写成

$$\psi(\boldsymbol{R})=-\frac{1}{4\pi}\oint_S d\boldsymbol{S}'\boldsymbol{n}\cdot\left[\nabla'\psi+\left(ik-\frac{1}{r}\right)\frac{\boldsymbol{r}}{r}\psi\right]\frac{e^{ikr}}{r} \tag{9.7}$$

其中$\boldsymbol{n}$是界面S指向区域V内的法线方向单位矢量. 在面积分中，被积函数是由界面S上的$\boldsymbol{R}'$点向区域V内$\boldsymbol{R}$点传播的球面波，因此界面S上每一点可看做一个次波源. 区域V内的光波是由这些次波源发出的次波的叠加，方括号部分起着球面波振幅的作用，因此次波源的强度由$\boldsymbol{R}'$点上的ψ和$\frac{\partial\psi}{\partial n}$值确定.

2. 小孔衍射

基尔霍夫公式只是把区域V内的场ψ用边界S上的ψ和$\frac{\partial\psi}{\partial n}$表示出来，在问题完全解出以前，边界$S$上的$\psi$和$\frac{\partial\psi}{\partial n}$一般是不知道的. 只有在某些场合下，当边界$S$上的$\psi$和$\frac{\partial\psi}{\partial n}$值可以合理地估算时，才能由基尔霍夫公式求出区域$V$内的场.

下面以小孔衍射为例说明基尔霍夫公式的应用.

如图 6.19 所示，设无穷大平面屏幕上有一小孔，区域V为屏幕右边空间，其界面包括三部分：小孔表面S_0，屏幕S_1和屏幕右侧无穷大半球面S_2.

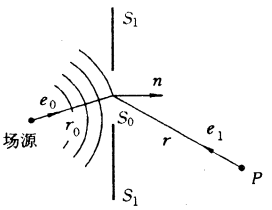


图 6.19

为了应用基尔霍夫公式，必须对界面上的ψ和$\frac{\partial\psi}{\partial n}$值作合理的假定.

①在屏幕S_1上假定ψ和$\frac{\partial\psi}{\partial n}$处处为零，即对光波来说，幕是完全不透明的.

②在小孔S_0上假定ψ和$\frac{\partial\psi}{\partial n}$值与无屏幕时的$\lambda$射波值相等，只有当小孔的大小远大于辐射波的波长时，这一假定才是有效的.

③在无穷大半球面S_2上，当$r\to\infty$时，ψ和$\frac{\partial\psi}{\partial n}$也都趋向于零.

在上述假定下，(9.6)式积分变为

$$\psi(\boldsymbol{R})=\frac{1}{4\pi}\int_{S_0}\left(\psi_i\nabla'\frac{e^{ikr}}{r}-\frac{e^{ikr}}{r}\nabla'\psi'\right)\cdot d\boldsymbol{S}' \tag{9.8}$$

取入射波为从场源传播到小孔的球面波

$$\psi_i=A\frac{e^{ikr_0}}{r_0} \tag{9.9}$$

则有

$$\psi(\boldsymbol{R})=\frac{1}{4\pi}\int_{S_0}\left\{\left(A\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\right)\left(\frac{ik}{r}-\frac{1}{r^2}\right)e^{ikr}\boldsymbol{e}_r-\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\left(\frac{ik}{r_0}-\frac{1}{r_0^2}\right)Ae^{ikr_0}\boldsymbol{e}_0\right\}\cdot\boldsymbol{n}dS' \tag{9.10}$$

我们只考虑r和r_0远大于辐射波长λ的情况，则包含$1/r^2$和$1/r_0^2$的项对积分值的贡献可以忽

略不计. 上式变为

$$\psi(\boldsymbol{R}) = \mathrm{i}\frac{Ak}{4\pi}\int_{S_0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r+r_0)}}{rr_0}(\boldsymbol{e}_r - \boldsymbol{e}_0)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S' \tag{9.11}$$

上述结果称为菲涅耳-基尔霍夫衍射公式.

在很多衍射问题中，入射波是平面波. 如场源离小孔 S_0 很远，投射到小孔的波前可看做平面，因此入射波 $\psi_i = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_0}/r_0$ 可由一个常数振幅 ψ_0 来代替，又波前面与屏幕平行，则 $\boldsymbol{e}_0\cdot\boldsymbol{n}=1$，$\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{n}=-\cos\theta$，故(9.11)式变为

$$\psi(\boldsymbol{R}) = -\mathrm{i}\frac{\psi_0}{2\lambda}\int_{S_0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}(1+\cos\theta)\mathrm{d}S' \tag{9.12}$$

被积函数是辐射球面波 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}/r$ 与称为斯托克斯倾斜因子$(1+\cos\theta)$的乘积. 正是这倾斜因子，自动消除了惠更斯原理中的回波. 因为当 $\theta=\pi$ 时，在反方向上，$\psi(\boldsymbol{R})=0$，即不存在辐射.

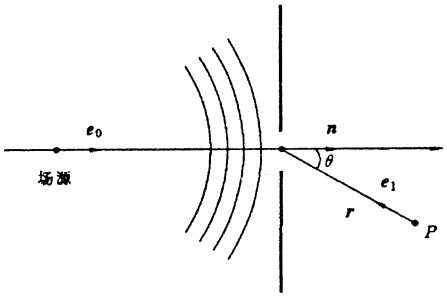


图 6.20

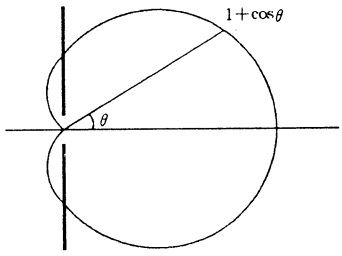


图 6.21

3. 夫琅和费(Fraunhofer)的衍射

在光学中，衍射现象通常分为两类；菲涅耳衍射和夫琅和费衍射.

在菲涅耳衍射中，光源和屏幕离开衍射孔的距离都是有限的. 在夫琅和费衍射中，光源和屏幕离衍射孔无限远. 实际上，只要将光源置于一个凸透镜的焦面处，并将屏幕置于另一个凸透镜的焦面处，第一个透镜使光束变成平行光，第二透镜使得屏幕上每一点都接收到一束平行光，所以两个透镜起到了将光源和屏幕移到无限远的效果. 计算夫琅和费衍射的强度分布比较容易. 如果主要关心的是小孔法线附近区域的场，则 $\cos\theta\approx1$，因此

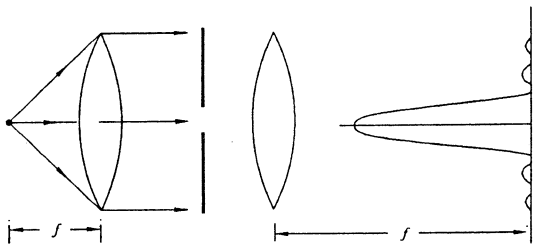


图 6.22

$$\psi(\boldsymbol{R}) = -\mathrm{i}\frac{\psi_0}{\lambda}\int_{S_0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}S' \tag{9.13}$$

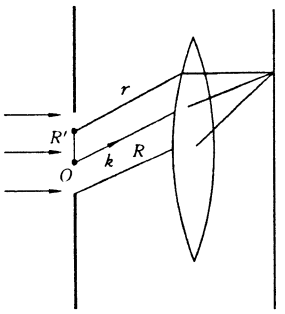


图 6.23

由于

$$r = R - \frac{\boldsymbol{k}}{k}\cdot\boldsymbol{R}', R \gg R'$$

所以

$$\psi(\boldsymbol{R}) = -\mathrm{i}\frac{\psi_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{\lambda R}\int_{S_0}\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}) \tag{9.14}$$

(1)单缝衍射

首先研究宽度为 $2a$ 的无限长的单缝(如图 6.24 所示)产生的夫琅和费衍射图样. 由于衍射只是在缝宽的方向发生的,故衍射积分为

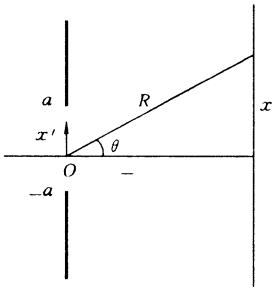


图 6.24

$$\psi(\boldsymbol{R}) = A\int_{-a}^{+a}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx'\sin\theta}\mathrm{d}x' \tag{9.15}$$

其中常数 A 代表积分(9.14)所包含的常数系数. 对(9.15)式积分

$$\psi(\boldsymbol{R}) = A\frac{\mathrm{i}}{k\sin\theta}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}ka\sin^0} - e^{ika\sin\theta})$$

$$= \frac{2A}{k\sin\theta}\sin(ka\sin\theta) = 2Aa\frac{\sin\alpha}{\alpha} \tag{9.16}$$

其中

$$\alpha = ka\sin\theta = 2\pi\frac{a}{\lambda}\sin\theta \tag{9.17}$$

因此强度分布为

$$I = |\psi((\boldsymbol{R})|^2 = \frac{4A^2a^2\sin^2\alpha}{\alpha^2} = I_0\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2} \tag{9.18}$$

式中 I_0 表示在 $\theta=0$ 处的强度,强度随 α 的变化如图 6.25 所示.

从(9.18)式看到,当 $\alpha=0$ 时,$\sin\alpha/\alpha=1$,因而 $I=I_0$ 对应强度的极大值。

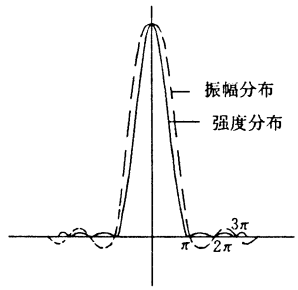


图 6.25

当:

$$\alpha = m\pi \quad (m \neq 0)$$

时,强度为零. 将 α 值代入得极小值条件为

$$2a\sin\theta = m\lambda, \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots \tag{9.19}$$

中央极大值两旁极小值之间所张的衍射角为

$$\Delta\theta = 2\sin^{-1}\left(\frac{\lambda}{2a}\right) \simeq \frac{\lambda}{a} \tag{9.20}$$

因此,当波长增加或缝宽减小时,衍射花纹更扩展. 在 $\lambda\to 0$ 的极限情形下,衍射效应将完全消失. 在光学中假定 $\lambda\to 0$ 的这一部分,就是几何光学.

(2)双缝衍射

下面的计算表明,由两个间隔为 $2d$ 的平行狭缝(每个缝宽均为 $2a$,如图 6.26 所示)所产生的夫琅和费衍射图样,其合强度分布是单缝衍射图样与间隔为 $2d$ 的两个点光源产生的干涉图样的乘积.

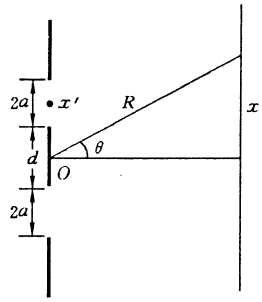


图 6.26

衍射积分现在是两项之和

$$\psi(\boldsymbol{R}) = A\int_{-d-a}^{-d+a}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx'\sin\theta}\mathrm{d}x' + A\int_{d-a}^{d+a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx'\sin\theta}\mathrm{d}x'$$

$$= -\frac{2A}{k\sin\theta}[\sin(k(d-a)\sin\theta) - \sin(k(d+a)\sin\theta)]$$

$$=\frac{4A}{k\sin\theta}\sin(ka\sin\theta)\cos(kd\sin\theta)$$

$$=4Aa\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)\cos\delta \tag{9.21}$$

其中

$$\alpha = ka\sin\theta, \qquad \delta = kd\sin\theta$$

因此强度分布为

$$I = |\psi(\boldsymbol{R})|^2$$

$$=16A^2a^2\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\cos^2\delta$$

$$=4I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\cos^2\delta \tag{9.22}$$

式中因子 $I_0\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}$ 代表缝宽为 $2a$ 的单缝产生的衍射图样；而因子 $\cos^2\delta$ 则代表间隔为 $2d$ 的两个点光源产生的干涉图样；合强度是这两个因子的乘积的 4 倍. 图 6.27 给出了 $d=3a$ 的强度分布关系.

如果 $a\ll d$，$\alpha\to 0$，$\frac{\sin\alpha}{\alpha}\to 1$，即可获得杨氏(Young)干涉图样.

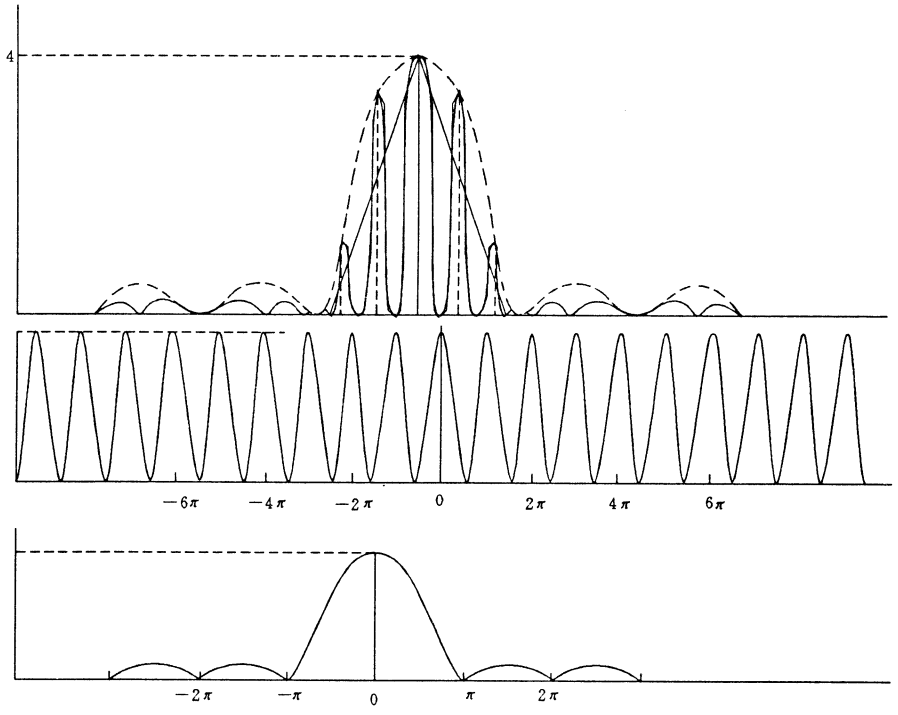


图 6.27

§10 电磁场的动量

我们知道电荷电流在电磁场中要受到机械力的作用，在这种力作用下带电物体的机械动量将发生变化. 任何物质系统的运动都应遵守动量守恒定律. 在带电体和电磁场组成的封闭系统中，由于动量守恒，带电体的机械动量变化一定和电磁场的动量变化有关. 因此应该承认电磁场也具有动量. 下面我们从电磁运动的基本规律来导出电磁场动量的具体表达式.

带电体在电磁场中受到的作用力密度为

$$\boldsymbol{f}=\rho\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B} \tag{10.1}$$

真空中的场方程为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$$

解出 ρ，$\boldsymbol{J}$，再代入(10.1)式中得

$$\boldsymbol{f}=(\nabla\cdot\boldsymbol{D})\boldsymbol{E}+\left(\nabla\times\boldsymbol{H}-\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\times\boldsymbol{B} \tag{10.2}$$

再利用另外两个场方程：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\quad \nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=0$$

可将(10.2)改写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}&=\boldsymbol{E}(\nabla\cdot\boldsymbol{D})+\boldsymbol{H}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})+\left(\nabla\times\boldsymbol{H}-\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\times\boldsymbol{B}+\left(\nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right)\times\boldsymbol{D}\\&=-\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B})+(\nabla\times\boldsymbol{H})\times\boldsymbol{B}+(\nabla\times\boldsymbol{E})\times\boldsymbol{D}+\boldsymbol{E}(\nabla\cdot\boldsymbol{D})+\boldsymbol{H}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})\end{aligned} \tag{10.3}$$

注意到向量关系

$$(\nabla\times\boldsymbol{E})\times\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}\cdot\nabla\boldsymbol{E}-(\nabla\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}\cdot\nabla\boldsymbol{E}-\frac{1}{2}\nabla(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})$$

可将(10.3)式中的关于电场的两项改写为

$$\begin{aligned}&(\nabla\times\boldsymbol{E})\times\boldsymbol{D}+\boldsymbol{E}(\nabla\cdot\boldsymbol{D})\\&=-\frac{1}{2}\nabla(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})+\boldsymbol{D}\cdot\nabla\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}(\nabla\cdot\boldsymbol{D})\\&=-\frac{1}{2}\nabla\cdot\mathscr{I}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})+\nabla\cdot(\boldsymbol{D}\boldsymbol{E})\\&=\nabla\cdot\left(\boldsymbol{D}\boldsymbol{E}-\frac{1}{2}\mathscr{I}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\right)\end{aligned} \tag{10.4}$$

式中 $\mathscr{I}$ 是单位张量. 同理(10.3)式中关于磁场的两项可改写为

$$(\nabla\times\boldsymbol{H})\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{H}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})=\nabla\cdot\left(\boldsymbol{B}\boldsymbol{H}-\frac{1}{2}\mathscr{I}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}\right) \tag{10.5}$$

将(10.4)和(10.5)代入(10.3)式得

$$\boldsymbol{f}=-\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B})+\nabla\cdot\left[(\boldsymbol{D}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{H})-\frac{1}{2}\mathscr{I}(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H})\right]$$

为简化书写，引用符号

$$\mathscr{T} = \boldsymbol{DE} + \boldsymbol{BH} - \frac{1}{2}\mathscr{I}(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}) \tag{10.6}$$

于是得到

$$\boldsymbol{f} = -\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B}) + \nabla\cdot\boldsymbol{T} \tag{10.7}$$

作用在带电体的总力为

$$\boldsymbol{F} = \int \boldsymbol{f}\mathrm{d}V = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B}\mathrm{d}V + \int \nabla\cdot\boldsymbol{T}\mathrm{d}V$$

再利用推广的散度定理，上式化为

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B}\mathrm{d}V + \oint_s \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{T} \tag{10.8}$$

为了看出上式左端各项的意义，将积分面扩至无穷远处. 有限时间内无限远处的场为零，因此面积分为零. (10.8)式变为

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B}\mathrm{d}V \tag{10.9}$$

上式的左端是电磁场对带电体的机械作用力. 设带电体的机械动量为 $\boldsymbol{G}_\mathrm{m}$，力等于机械动量变化率

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B}\mathrm{d}V$$

这时系统内只有带电体和电磁场两部分，根据动量守恒定律，在单位时间内带电体机械动量的增加，应等于电磁场的动量减少. 因此

$$\boldsymbol{G}_\mathrm{e} = \int_V \boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B}\mathrm{d}V$$

应表示电磁场的动量.

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B} \tag{10.10}$$

应表示电磁场的动量密度.

现在再来研究(10.8)式中面积分的物理意义. 为此应将积分范围取至有限区域，(10.8)可改写为

$$\oint \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{T} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{G}_\mathrm{m} + \boldsymbol{G}_\mathrm{e})$$

上式的右端代表在区域 V 内电磁场和带电体的总动量的变化率. 由力学的基本定律，应将左端的面积分解释为区域外的电磁场通过区域界面作用在区域内部电磁场上的力. 因此

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f} = \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{T} \tag{10.11}$$

应表示 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 前面的电磁场通过 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 面作用在 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 面后面电磁场上的力.

(10.8)式所表达的电磁场之间的作用力，形式上和弹性体内各部分之间的应力作用相似. 弹性体内的应力分布可用应力张量表示. 在历史上曾认为电磁场的相互作用力是由于以太的形变引起的，以太就是一种弹性介质. 与此类比历史上就把 $\mathscr{T}$ 称为电磁场的应力张量. 令

$$\mathscr{P} = -\mathscr{T}$$

可把(10.8)式改写成另一种形式

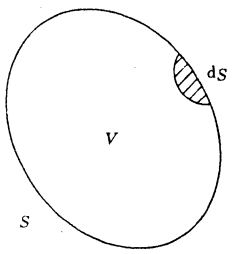


图 6.28

$$\oint \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\mathscr{P}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{G}_{\mathrm{m}}+\boldsymbol{G}_{\mathrm{e}}) \tag{10.12}$$

上式右端表示 V 内单位时间内场和带电体的总动量的减少. 怎样来解释这种减少的原因呢? 一定是和体积 V 外的区域发生了动量交换,这种交换通过左端的面积分来表示. 因此可以把上式左端的面积分解释为单位时间内由 V 内穿过界面向外流出的动量. 由于动量向外流出,所以 V 内总动量要减少. 于是

$$\mathrm{d}\boldsymbol{P}=\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\mathscr{P} \tag{10.13}$$

就应表示单位时间内从 $\mathrm{d}S$ 的后面向着 $\mathrm{d}S$ 前方流出去的动量. 在同一点,$\mathrm{d}S$ 方向不同,流出去的动量不同. $\mathscr{P}$ 称为动量流密度张量.

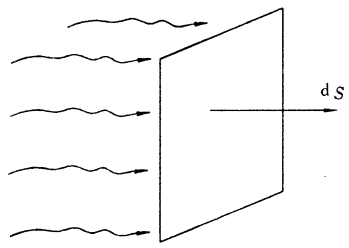


图 6.29

无论用动量流密度张量或电磁场的应力张量来分析各部分电磁场之间的作用力,所得的物理结果都是相同的. 例如一电磁波投射到如图 6.29 所示的 $\mathrm{d}S$ 面上,由于

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\mathscr{P}=-\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\mathscr{T}$$

上式左边表示从 $\mathrm{d}S$ 后面在单位时间内流向 $\mathrm{d}S$ 前方的动量,因而它表示 $\mathrm{d}S$ 后面的电磁场对 $\mathrm{d}S$ 的作用力;上式右端表示 $-\mathrm{d}S$ 前面的电磁场(也就是 $\mathrm{d}S$ 后面的场)对 $\mathrm{d}S$ 面的作用力,两种观点得到的结论完全相同. 但是在以上两种解释中,用应力张量更为方便,特别是在静电场或稳定磁场的情况,应力张量还有意义,可用应力张量来计算力. 但在只有静电场时动量流密度张量就失去意义.

例 1 用应力张量计算静电场中导体表面受力情况.

解 研究导体的 $\mathrm{d}S$ 面上受到的静电场力(图 6.30). 由(10.11)式,$\mathrm{d}S$ 上受的力为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f}=\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\mathscr{T}=\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\left[\varepsilon_0\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}-\frac{\mathscr{I}}{2}\varepsilon_0\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}\right]$$

注意到导体表面电场方向与 $\mathrm{d}S$ 方向相同,故上式化为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}\mathrm{d}S-\mathrm{d}\boldsymbol{S}\frac{\varepsilon_0E^2}{2}=\frac{\varepsilon_0}{2}E^2\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

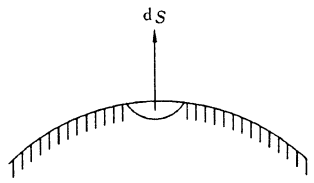


图 6.30

上式说明,导体表面受力的方向与表面垂直. 注意,由于导体内电场为零,只有导体外的电场对 $\mathrm{d}S$ 产生作用力.

例 2 平板电容器的一部分空间充满介电常数为 ε 的均匀介质,求界面上单位面积的介质板面上受到的静电作用力.

解 设真空为区域 1,介质为区域 2,电场切向分量连续,故 $\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{E}$. 为计算介质分界面上受的力,跨界面作如图 6.31 所示的曲面,曲面紧贴界面. 区域 1 电场对界面的作用力为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f}_1=\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\left[\varepsilon_0\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}-\frac{1}{2}\mathscr{I}\varepsilon_0E^2\right]$$

注意 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1$ 与 $\boldsymbol{E}$ 垂直,故

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f}_1=-\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1$$

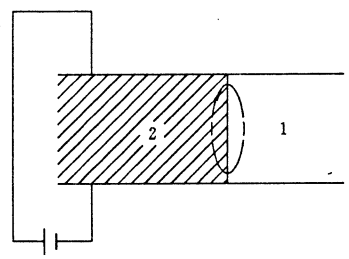


图 6.31

同理可计算出区域 2 的电场对界面的作用力为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f}_2 = -\frac{1}{2}\varepsilon E^2 \mathrm{d}\boldsymbol{S}_2 = \frac{\varepsilon}{2}E^2 \mathrm{d}\boldsymbol{S}_1$$

侧面的合力为零. 因此介质分界面的 $\mathrm{d}S$ 面上受到电场的作用力为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f} = \mathrm{d}\boldsymbol{f}_1 + \mathrm{d}\boldsymbol{f}_2 = \frac{E^2}{2}(\varepsilon - \varepsilon_0)\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1$$

力的方向与 $\mathrm{d}S_1$ 方向一致，即由介质指向真空. 这和第三章由能量计算作用力所得结果相同.

例 3 计算平面电磁波的动量密度.

解 真空中平面电磁波 $\boldsymbol{B}=\frac{1}{c}\boldsymbol{R}_0\times\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{R}_0$ 是传播方向. 动量密度

$$\boldsymbol{g} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} = \frac{\varepsilon_0}{c}\boldsymbol{E} \times (\boldsymbol{R}_0 \times \boldsymbol{E})$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{c}(E^2\boldsymbol{R}_0 - \boldsymbol{R}_0 \cdot \boldsymbol{E}\boldsymbol{E}) = \frac{\varepsilon_0}{c}E^2\boldsymbol{R}_0$$

另一方面电磁波的能量密度为

$$w = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2)$$

$$B^2 = \frac{E^2}{c^2} = \mu_0\varepsilon_0 E^2$$

代入得到 $w=\varepsilon_0 E^2$，于是动量密度为

$$\boldsymbol{g} = \frac{w}{c}\boldsymbol{R}_0$$

设单位体积内有 n 个光子，$w=nh\nu=n\hbar\omega$，光子的动量为 $\boldsymbol{p}$，则

$$\boldsymbol{g} = n\boldsymbol{p} = \frac{n\hbar\omega}{c}\boldsymbol{R}_0 = n\hbar\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{k} = \frac{\omega}{c}\boldsymbol{R}_0, \boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k}$$

例 4 平面电磁波垂直入射到物体表面上，设电磁波被物体完全吸收，计算电磁波对物体的作用力。

解 电磁波在真空中的速度为 c，单位时间内入射到物体表面单位面积上的电磁波的总体积就是 c. 单位时间内投到物体表面单位面积上的总动量为

$$gc = w$$

w 是电磁波的能量密度. 这个动量全被物体获得，因而物体单位面积上受到的电磁波作用力为 $f=w$，这个力是压力.

再用应力张量 $\mathscr{T}$ 来计算这个力. 如图 6.32 所示，$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 由物体指向外部. 由(10.11)式，$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 前面的场对 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的作用力为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f} = \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\mathscr{T} = \boldsymbol{n}\cdot\mathscr{T}\mathrm{d}S$$

$$= \boldsymbol{n}\cdot\left[\varepsilon_0\boldsymbol{E}\boldsymbol{E} + \mu_0\boldsymbol{H}\boldsymbol{H} - \frac{\mathscr{I}}{2}(\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2)\right]\mathrm{d}S$$

$$= -\frac{1}{2}(\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2)\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = -w\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

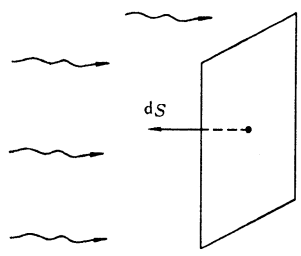


图 6.32

得到上式时利用了电磁波的横波性质：$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{H}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}=0$. 由上式看到，力的方向与 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 方向相反，说明电磁波对物体的作用力是压力，单位面积上力的大小等于场能密度，这与前面结果相同. 如果电磁波不是垂直于入射到物体

上，并且还存在反射波时，应先求出在物体表面上的总电磁场，再按上述方法计算力.

电磁波对物体的压力称为辐射压力. 入射到地面上的太阳光可看成平面波，假 定阳光完全被地面吸收. 已知阳光在地面上的能流密度大约是 $1.4\mathrm{kW/m^2}$，对地面的辐射压力大约为 $4.5\times10^{-6}\mathrm{N/m^2}$. 在近代的大功率激光器产生的强激光束中，能流密度很高，可产生很大的辐射压力.

辐射压力的存在早被实验证明. 1901 年列别节夫直接从实验上证实了光压的存在. 彗星那条长长的“尾巴”，就是由于太阳对彗星微粒所施加的辐射压力形成的. 这些事实也可看成是电磁场存在动量的直接证明.

思考题与习题六

1. 在自由空间中电磁波有何特性？为什么说光就是电磁波？

2. 导体中的电磁波与介质中的电磁波相比有何特点？

3. 推导非涅尔公式的基本思想是什么？从菲涅尔公式能说明什么物理效应？

4. 对电磁波来说，能否认为大地总是不良导体，金属总是良导体？

5. 电磁波在等离子体中传播有些什么特性？什么是法拉第效应？

6. 在传输线上传播的电磁波有什么特性？对电磁波在什么情况下可引入电势概念？

7. 电磁波在波导中传播有些什么特点？什么是相速和群速？群速是否总是小于相速？

8. 如何由标量衍射理论解释单缝衍射和双缝衍射？

9. 从什么事实说明电磁场有动量？如何用应力张量计算电磁场的作用力？

10. 太阳光垂直入射到地球表面上平均能量是 $8.4\mathrm{J/(cm^2\cdot d)}$，计算太阳光中电场强度的振幅. 太阳与地球间的平均距离是 $1.5\times10^{11}\mathrm{m}$，太阳的半径是 $7.0\times10^{8}\mathrm{m}$，计算太阳辐射的功率、太阳光在太阳表面上的电场强度.

11. 证明两个线偏振波

$$E_x=E_{x_0}e^{-i(\omega t-kz)}$$

$$E_y=E_{y_0}e^{-i(\omega t-kz+\varphi)}$$

合成的波是椭圆偏振波. 当 $\varphi=90°$，$E_{x_0}=E_{y_0}$ 时，合成波是圆偏振波.

12. 证明线偏振波在介质分界上全反射后，一般情况下要变成椭圆偏振波. 在什么情况下变成圆偏振波？

13. 一个 60W 灯泡悬挂在离水面 1.5m 的上空，水的折射率是 1.33，计算正在灯泡下面的水面处的入射光、反射光和折射光的电场和磁场的振幅. 设灯泡消耗的全部能量都变为电磁辐射.

14. 已知海水的 $\mu_r=1$，$\sigma=4.5/(\Omega\cdot\mathrm{m})$，$\varepsilon_r=80$. 计算频率为 $f=50,10^6,10^9\mathrm{Hz}$ 的三种波的透入深度.

15. 一平面波由真空垂直入射到介质板上，介质的介电常数等于 $4\varepsilon_0$，厚度为 1/4 波长，电磁波频率为 $f=1\mathrm{MHz}$，波中的电场振幅为 $100\mathrm{V/m}$，沿 x 方向极化，求透过介质板的电磁波中的电场强度.

16. 计算同轴线中传播 TEM 波时的面电流密度和传输功率. 设同轴线内外半径为 a,b，横向电压振幅为 V.

17. 求矩形波导内的 TM 波的电磁场分布. 设波导截面的边长为 a,b.

18. 导体的表面阻抗定义为表面上 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ 的切线分量之比 E_t/H_t. 证明良导体的表面阻抗是 $(1-i)/\sigma d$，d 是透入深度. 其中的量 $1/\sigma d$ 叫表面电阻，它表示在表面上单位面积的正方形两个对边之间的电阻. 进一步证明导体中每平方米的能量损耗是 $H_{t_0}^2/2\sigma d$，其中 H_{t_0} 是表面上 $\boldsymbol{H}$ 切线分量的振幅.

19. 有一半径为 r，比重为 5 的球形物体. 计算太阳作用在它上面的引力和辐射压力. 设球全部反射太阳辐射，在离太阳多远时两种力相等？太阳质量是 $2.0\times10^{30}\mathrm{kg}$，太阳辐射的电磁波功率是 $3.8\times10^{26}\mathrm{W}$，引力常数是 $6.7\times10^{-11}\mathrm{N\cdot m^2/kg^2}$.

第七章　狭义相对论

前几章我们从电磁现象的基本规律出发，介绍了静电场、稳定电磁场、似稳电磁场以及一般的变化电磁场（主要是电磁波的辐射与传播）的基本内容，但并没有涉及参考系的问题. 电磁现象的基本方程究竟在什么样的参考系内成立？从一个参考系变到另一个参考系时，一些基本的电磁学量如何变换？麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式的形式会不会改变？这些都是必须回答的重大的理论问题. 正是这些问题的深入探讨，揭示了旧时空观的局限性，导致了狭义相对论的出现.

狭义相对论建立了新的时空理论和新的相对性原理，是爱因斯坦（Einstein）在本世纪初提出的. 狭义相对论对近代物理学的发展，特别是核物理和高能粒子物理的发展起着重大作用，它是现代物理学的主要理论基础之一. 加速器、反应堆的建立，原子弹、氢弹的制成，原子能的越来越广泛的利用，都可以说是对狭义相对论从各个侧面进行了验证. 狭义相对论不仅对物理学的发展具有深远的影响，在哲学上也有重大意义. 相对论发展了自然科学的物质观、运动观、时空观，为辩证唯物论提供了更有力的科学根据.

§1.1　狭义相对论产生的历史背景和实验基础

1. 经典力学的时空理论

在经典力学中，为了描述宏观物体的机械运动，利用了各种参考系. 参考系主要分两大类：惯性系和非惯性系. 在惯性系中，反映宏观物体机械运动基本规律的牛顿运动定律具有最简单的标准形式，所有物体的加速度都是由它们之间的相互作用力产生的；在非惯性系中，除物体之间的相互作用力外，还出现惯性力，因此运动定律具有更复杂的形式.

伽利略相对性原理指出，在一切相对做匀速运动的惯性系中，牛顿运动定律具有相同的形式，所以一切惯性系都是等效的. 如果已知在一个惯性系中的运动方程，换算到另一个惯性系中，运动方程的形式应该不变.

怎样从一个惯性系换算到另一个惯性系呢？在相对论出现以前，根据当时人们的实验经验，这个问题是由伽利略变换来解决的.

设有两个惯性系 S 和 S'（见图 7.1），各坐标轴互相平行，S' 系沿着 S 系的 x 轴以速度 v 做匀速运动，把两坐标系原点重合的时刻选为时间的零点. 一个物理事件发生的空间位置和时刻，可用时空坐标来表示. 设事件 P 在 S 系中的时空坐标为 (x,y,z,t)，在 S' 系中为 (x',y',z',t'). 它们之间由伽利略变换相联系. 伽利略变换式为

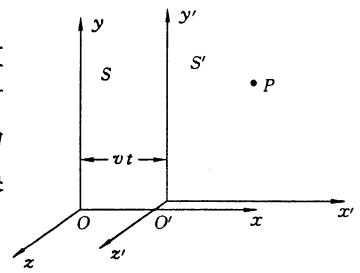


图 7.1

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \tag{1.1}$$

由伽利略变换所反映的时空观的基本特征如下：

①假定发生 1,2 两件事，在 S 系中它们的时间、地点分别为(x_1,t_1)和(x_2,t_2)；在 S' 系中为(x_1',t_1')和(x_2',t_2'). 根据(1.1)式有

$$t_2' - t_1' = t_2 - t_1 \tag{1.2}$$

这表明在不同惯性系中观察两件事发生的时间间隔相同. 若这两件事在 S 系中同时发生，即 $t_2=t_1$，则在 S' 系中也是同时发生的，因有 $t_2'=t_1'$，即时间间隔和同时性与观察者的运动状态无关. 对于两个同时发生的事件，它们之间的空间距离为

$$\begin{aligned} x_2' - x_1' &= (x_2 - vt_2) - (x_1 - vt_1) \\ &= x_2 - x_1 \end{aligned} \tag{1.3}$$

这表明空间两点的距离在不同惯性系中测量的结果是相同的，即空间距离也与观察者的运动状态无关. 以上称为时间和空间的绝对性. 具有这种特性的时空称为牛顿的绝对时空.

②在牛顿的绝对时空中，同一物体相对不同惯性系的运动速度是不同的. 用 $\boldsymbol{u}$ 表示某个物体在 S 系中的速度，用 $\boldsymbol{u}'$ 表示同一物体在 S' 系中的速度. 由(1.1)式得

$$\begin{aligned} u_x' &= \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - v = u_x - v \\ u_y' &= \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = u_y \\ u_z' &= u_z \end{aligned} \tag{1.4}$$

写成矢量形式

$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \tag{1.5}$$

此式称为伽利略的速度合成公式，与通常的矢量相加的平行四边形法则一致.

③根据伽利略相对性原理，牛顿运动定律在伽利略变换下形式是不变的. 在 S 系中牛顿运动定律为

$$\boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.6}$$

在经典力学中物体质量与运动状态无关，相互作用力只与物体之间的相对距离有关，因而 m 和 $\boldsymbol{F}$ 在不同惯性系中保持不变，加速度在伽利略变换下也是不变的. 所以在 S' 系中牛顿运动定律仍具有相同的形式

$$\boldsymbol{F}' = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t'^2}$$

一个运动方程，如果它的形式在某种变换下保持不变，则称此运动方程在该变换下是协变的. 伽利略相对性原理要求力学运动方程在伽利略变换下是协变的. 由伽利略相对性原理可知，无论用什么样的力学实验，都无法区别两个不同的惯性系.

牛顿伽利略的时空观与人们的日常生活经验完全一致. 在相对论出现以前，人们深信经典时空观的正确性，因而研究物体在不同惯性系中的运动，总是以伽利略变换为依据.

19 世纪 60 年代，反映物质电磁运动规律的麦克斯韦方程组建立以后，人们自然地要问：相对性原理是否也适用于电磁现象？ 在电动力学中，一切惯性系是否也是等效的，即从一个惯

性系换算到另一个惯性系时，麦克斯韦方程组是否在形式上也是不变的？从伽利略变换看来，似乎相对性原理不适用于电动力学，因为麦克斯韦方程组都是一阶偏微分方程，并不像牛顿定律那样是二阶微分方程. 显然，麦克韦方程组在伽利略变换下也不是协变的. 例如，假定一个带电体静止在 S 系中，则 S 系观察者在带电体周围只能观察到静电场，但在 S' 系观察，则带电体是做匀速运动的. 带电体周围除了电场外，还会有磁场. 带电体之间的相互作用，也与它们的运动状态有关. 对于自由电磁波，满足波动方程

$$\nabla^2\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}=0 \tag{1.7}$$

从波动方程看，电磁波沿任何方向传播的速度都是 c. 显然，如果上述波动方程在 S 系中成立，则在 S' 系中就不再成立了. 因为 S' 系相对于 S 系做匀速运动，按照伽利略速度合成公式在 S' 系中，电磁波各方向的传播速度不再都是 c 了. 沿 x' 方向小于 c，沿负 x' 方向大于 c.

从这些事实出发，进一步分析将得到三种可能性：第一，伽利略变换和麦克斯韦方程都是正确的，但电磁运动规律不服从相对性原理；第二，伽利略变换是正确的，电磁运动规律服从相对性原理，但麦克斯韦方程组不能正确地描述电磁运动规律；第三，麦克斯韦方程组能正确地描述电磁运动规律，电磁运动规律也遵从相对性原理，但伽利略变换不能正确表达惯性系之间的时空变换.

开始人们都相信第一种可能性，因为根据日常生活经验，深信伽利略变换的正确性；而麦克斯韦方程组是从宏观电磁现象的实验定律总结出来的，并不断被实践所证实，也不容怀疑. 承认第一种可能性，意味着承认麦克斯韦方程组只在一个特殊的参考系才成立，这是一种什么样的参考系呢？

在 19 世纪末，宏观电磁理论虽然获得极大成功，但人们对电磁场的本质并没有认识清楚，并没有认识到电磁场是物质存在的一种形态. 按照传统观念，很自然地认为光或电磁波也是一种机械波. 为了传播光或电磁波，就假想了一种所谓“以太”的介质，把电动力学归结为弹性以太介质的力学. 认为电磁场只不过是以太介质的应力和形变状态，电磁波也只不过是以太介质振动的传播形式. 以太充满整个宇宙，在牛顿的绝对空间中静止不动. 认为在以太中静止的物体是绝对静止，而相对于以太的运动则是绝对运动. 凡是在以太中做匀速运动的参考系都是惯性系. 麦克斯韦方程组不满足相对性原理，只对固定在以太中的所谓绝对参考系才成立. 牛顿力学由于受相对性原理的限止，不可能在一个惯性系中作力学实验来确定它相对于以太运动的绝对速度. 既然电动力学似乎不受相对性原理的限制，那就应该可以通过电磁学或光学实验来确定惯性系的绝对速度. 在这种思想指导下，许多物理学家设计了一系列精密的实验，企图在地球上测定地球本身在以太中的绝对速度.

2. 狭义相对论的实验基础

(1)恒星的光行差实验

1725 年，英国天文学家布拉德雷(James Bradley)发现，在一年内所有恒星在天空中的视位置都要发生周期变化，恒星的路径是绕固定中心的椭圆，每个恒星轨迹的长轴都近似地为 41″的弧. 在靠近天极(垂直于地球轨道平面的方向)的恒星近似地做圆运动，靠近黄道(包含地球轨道的平面)的恒星，其轨迹近似地为直线. 这个现象称为恒星的光行差.

如果假定以太不被地球所带动，则光行差现象很容易解释. 我们以处于黄道平面内的恒星为例. 图 7.2(a)表示地球的轨道平面. 恒星在图中箭头方向. 在轨道的长轴处，地球运动方向和恒星光线方向在一条直线上，这时星光平行射入望远镜内. 当地球位于轨道平面的短轴上

时，地球运动的方向和星光入射方向垂直. 光在以太中传播速度为 c，地球又在以太中以速度 v 运动，故这时光相对于地球的速度方向不是垂直的，而是沿着图 7.2(a)所示的方向. 这同在火车上看到垂直于地面下降的雨点变成倾斜的情况一样. 所以在短轴上要看到恒星必须使望远镜沿着运动方向倾斜角度 θ，由图 7.2(b)可见，

$$\tan\theta = \frac{v}{c}$$

v 是地球的轨道速度，$v=3\times10^4\mathrm{m/s}$，可算出

$$\tan\theta = \frac{v}{c} = \frac{3\times10^4}{3\times10^8} = 10^{-4}$$

由此求出 $\theta=20.5''$，这同光行差观测的实验结果完全相符.

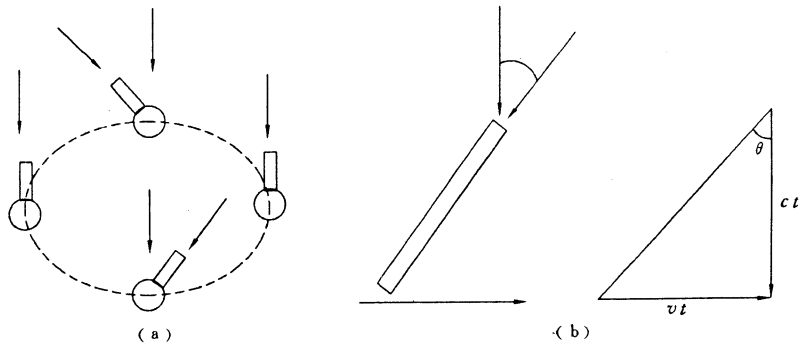


图 7.2

光行差实验说明的运动不带动以太. 1881 年迈克尔逊与莫雷设计了一个著名的实验来观察地球相对于以太的运动.

(2)迈克尔逊-莫雷(Michelson-Morley)实验

实验装置是一个迈克尔逊干涉仪，如图 7.3 所示. 光源 S 发出的光射到半镀银的薄片 A 上，A 与入射光的方向成 45°角，于是光线被分成沿互相垂直方向进行的两部分. B 是一个与 A 相同的补偿玻璃，使两路光在玻璃中走的路程相同. M_1 和 M_2 是反射镜. 两束光线中一束沿 AM_1AO，另一束沿 AM_2AO，这两束光如果有程差，则在 O 处将发生干涉.

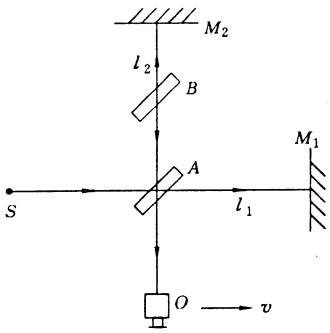


图 7.3

下面具体计算程差的大小. 设光线 AM_1 平行于地球在以太中的运动方向，AM_2 垂直于地球运动的方向. 按前面假定，只是在以太坐标系中，光速才为 c. 现在实验是在地球上进行，地球的运动速度为 v. 对于光线 AM_1 来说，当光由 A 向 M_1 传播时，由于光的运动方向和地球运动方向一致，光相对于地球的速度为 $c-v$；当光由 M_1 反射回来时，相对于地球的速度则为 $c+v$，所以光在 AM_1 间往返的路程中需要的时间 t_1 为

$$t_1 = \frac{l_1}{c-v} + \frac{l_1}{c+v} = \frac{2l_1}{c}\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{1.8}$$

再看光在垂直于地球运动方向往返所需时间. 根据伽利略的时空观，在各惯性系中时间都是相同的，可在以太坐标系中计算光通过 AM_2A 路程所需的时间. 在以太坐标系中，光线通过

的实际路程如图 7.4 所示. 因而

$$AM_2 = \sqrt{l_2^2 + (vt)^2}$$

光线在 AM_2 的路程上所需的时间为 t，有关系

$$t = \frac{1}{c}\sqrt{l_2^2 + (vt)^2}$$

光线经 AM_2A 全程所需时间为

$$t_2 = 2t = \frac{2l_2}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.9}$$

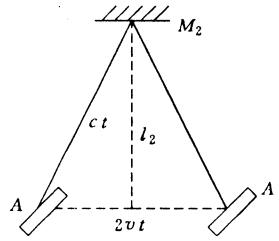


图 7.4

由(1.8)和(1.9)式可得到两光线重新回到 A 时的时间差为

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2}{c}\left(\frac{l_1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{l_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \tag{1.10}$$

因此两束光将在 O 点发生干涉，于是在望远镜中将观测到明暗相间的干涉条纹.

迈克尔逊在实验中将仪器台浮在水银面上，整个仪器可绕垂直于水银面的轴转动. 在实验过程中将仪器平台绕垂直轴旋转 90°，这样 AM_1 就垂直于地球轨道速度方向，AM_2 变为平行于地球轨道速度的方向. 沿 AM_1A 和 AM_2A 的两束光到达 O 点的时间分别为

$$t_1' = \frac{2l_1}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t_2' = \frac{2l_2}{c}\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

旋转后 1,2 两束光到达 O 点的时间差为

$$\Delta t' = t_1' - t_2' = \frac{2}{c}\left(\frac{l_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{l_2}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right) \tag{1.11}$$

因此这一转动将使两束光的时间差由 Δt 变为 $\Delta t'$，时间差的改变为

$$\delta = \Delta t - \Delta t' = \frac{2(l_1+l_2)}{c}\left(\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$$

考虑到 $\beta = \frac{v}{c} << 1$，上式可近似表为

$$\delta \approx \frac{l_1+l_2}{c}\beta^2$$

于是将会观察到干涉条纹的移动. 当时间差的改变等于光振动的一个周期时，将移动一个条纹. 转动 90°时移动的条纹数为

$$n = \frac{l_1+l_2}{cT}\beta^2 = \frac{l_1+l_2}{\lambda}\beta^2 \tag{1.12}$$

在 1887 年迈克尔逊-莫雷实验中，$l_1+l_2=22\text{m}$，用钠黄光，$\lambda = 5.9\times10^{-7}\text{m}$，地球绕太阳的轨道速度 $v=30\text{km/s}$，代入(1.12)式可算得条纹移动数 $n=0.37$. 实验装置的精度可测出干涉条纹百分之一的移动. 如果以太确实存在，而不被地球表面的空气所带动，则在迈克尔逊实验中应

该观察到条纹的移动.

然而实验结果却出乎意料，看不到条纹的移动. 后来许多人多次地在各种季节各个地方重复了这个实验，无例外地都得到否定的结果. 表 7.1 列出了这个实验的的各次观测结果.

表 7.1

观测者	年　代	l/m	n 预期值	n 实测值上限	比　值
迈克尔逊 莫　雷	1887	11.0	0.40	0.01	0.025
英雷、密勒	1902—1904	32.2	1.13	0.015	0.013
密　勒	1921	32.0	1.12	0.03	0.07
密　勒 (用日光)	1924	32.0	1.12	0.014	0.013
托马希克 (用恒星光)	1927	8.6	0.3	0.02	0.067
伊林沃斯	1927	2.0	0.07	0.0004	0.0057
迈克尔逊	1929	25.9	0.9	0.010	0.011
朱　斯	1930	21.0	0.75	0.002	0.0027

迈克尔逊实验的否定结果，在当时的物理学中引起了极大的震动. 伽利略时空观在人们头脑中根深蒂固，许多著名的物理学家力图在旧时空观的框架下解释迈克尔逊实验的否定结果，然而都没有成功.

这些解释中比较著名的是洛伦兹与裴兹杰拉尔德提出的收缩假设(Lorentz-Fitzgerald contraction). 这个假设认为当物体在以太参考系中运动时，物体沿着运动方向的长度要缩短一倍数$\sqrt{1-\beta^2}$. 这样(1.8)式中的t_1应为

$$t_1 = \frac{2}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{l_1}{c}$$

(1.10)式则为

$$\Delta t = \frac{2l_1}{2\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{2l_2}{c\sqrt{1-\beta^2}}$$

(1.11)式则为

$$\Delta t' = \frac{2l_1}{c\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{2l_2}{c\sqrt{1-\beta^2}}$$

于是在旋转前后两束到达O点的时间差是相同的，因而不应观察到条纹的移动.

注意，洛伦兹收缩假设是在承认以太存在的前提下，物体沿以太运动方向发生了实际的收缩，这种收缩是由于组成物体的带电粒子和以太发生了相互作用. 因此这种收缩应该是一种可观测的物理效应. 由光学中知道，当一物体受到单向压缩或拉伸时，将要发生双折射现象. 既然物体在以太中运动时沿运动方向受到压缩，所以应该观察到双折射现象. 然而实验又给出了否定的结果，观察不到双折射，收缩假说不能成立.

这些努力失败后，有人开始考虑第二种可能性，承认在伽利略时空观下，电磁现象也遵从相对性原理，但必须修改麦克斯韦方程组. 因为在麦克斯韦方程组中，真空中光的速度是常数；在伽利略时空观中，光的速度在各惯性系中是不同的. 于是李兹提出假定，认为光速与光源的运动有关. 他认为光在以太中的速度等于光相对于光源的速度同光源在以太中运动速度的矢

量和. 正如地面上运动的大炮所发射的炮弹相对于地面的速度，应等于炮弹相对于大炮的速度与大炮相对于地面的速度的矢量和. 这一假设可解释用实验室光源的迈克尔逊实验. 例如光沿着地球运动方向传播时，相对于以太的速度为 $c+v$，但光相对于地球的速度为 $(c+v)-v=c$. 光沿着垂直于地球运动方向传播时，相对地球的速度仍为 c，因此在迈克尔逊实验中观察不到干涉条纹的移动.

光速与光源的速度有关这个假定，和天文学上对双星的观测相矛盾. 双星是由两个恒星 A 和 B 组成，相互绕着它们的质心 O 转动. 为简单起见，设 B 星的质量远小于 A，可近似把 A 星看成是静止的，B 星绕着 A 沿椭圆轨道运动. 按李兹假说，B 星在 1 处射向地球的光速为 c+v，B 星在 2 处射向地球的光速为 c−v. 于是从 B 星射到地球上，光速将由点 1 处的 c+v 改变为点 2 处的 c−v，并且通过全部中间值. 由图 7.5 容易看到，从点 1 射到地球上的光速大于从点 1′ 射向地球的光速，但是从点 1 至地球的距离却大于从点 1′ 至地球的距离. 因此在 B 星的轨道上应当找出这样的点，从这些所发出的光线可以同时到达地球，因而同一时刻能看到 B 星的不同位置，如果摄下 B 星的照片，将在照片上看到不是一个亮点而是一条发光的弧. 但是在实验上对于任何双星系统都没有观察到这样的畸变，这说明光的速度与光源的速度无关.

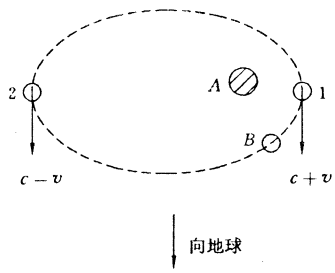


图 7.5

近年还用高速运动的介子作光源进行实验，例如 π^0 介子要衰变成两个光子，高速运动的 π^0 介子就可作光源. 当 π^0 介子速度达到 $0.9975c$ 时，测出沿 π^0 介子运动方向射出的光子速度为 $(2.9977\pm0.0004)\times10^8$m/s，仍然与用静止光源测得的光速一至，更进一步证实了光速与光源速度无关.

按第一种分析设计的测量地球绝对速度的各种实验，都得到否定结果. 而麦克斯韦方程组又与实验完全符合. 实验又证明光速与光源速度无关. 实践迫使人们必须考虑第三种可能性. 但否定伽利略变换，这就要改变人们传统的时空观念，就会动摇整个经典力学的基础. 一些权威物理学家不愿背离经典物理学的传统观念，总希望在保留旧观念的前提下，去调和已出现的各种矛盾. 杰出的荷兰物理学家洛伦兹进行了大量工作，甚至导出了从以太绝对参考系到运动参考系的时空坐标变换关系，即洛伦兹变换. 实际上他已走到了相对论的边缘，只是由于不敢突破旧的时空观，才限制了他再向前迈进一步.

在大量实验事实和前人许多失败教训的基础上，年青的爱因斯坦勇敢地冲破了机械论的束缚，抛弃了牛顿的绝对时空观，于 1905 年提出了狭义相对论，使许多矛盾的实验现象都得到了统一的解释，整个物理学发生了革命性的进展.

§2 狭义相对论基本原理和洛伦兹变换

1. 狭义相对的基本原理

1905 年爱因斯坦发表了题为《运动物体中的电动力学》的论文. 在这篇论文中系统地提出了狭义相对论的理论. 狭义相对论的基础建立在两条基本原理之上：第一，相对性原理；第二，

光速不变原理. 在1905年的论文中，爱因斯坦对这两条原理的表述* 如下：

①物理体系的状态据以变化的定律，同描述这些状态变化时所参照的坐标系究竟是用两个在互相匀速移动着的坐标系中的哪一个并无关系.

②任何光线在"静止的"坐标系中都是以确定的速度 c 运动着，不管这道光线是由静止的还是运动的物体发射出来的.

虽然爱因斯坦说过："著名的迈克尔逊-莫雷实验对我自己思考的影响到是间接的"**，但是为了使大家对相对论两条原理的实验基础了解得更清楚，我们在这里还是要深入分析一下迈克尔逊实验的结果. 麦克尔逊实验是在地球上进行的. 在进行实验的短时间内，地球运动速度几乎无变化，可看成惯性系，即实验是在惯性系中进行的. 在不同季节地球运动速度不同. 在不同季节进行实验就意味着是在不同的惯性系中进行实验. 这个实验的原始目的，是企图通过光学现象来发现惯性系相对于以太坐标系的绝对运动，也就是企图证明光学现象是不遵从相对性原理的，但是实验却得出了否定的结果. 如果从正面来理解实验结果，就应该认为实验结果表明了光学现象遵从相对性原理，即在任何惯性系中光学现象都按相同的方式发生. 这结果也可说成是，通过光学实验不可能发现任何惯性系的绝对运动. 在力学中早就有了这个结论，称为力学的相对性原理. 后来有人从电磁学的实验中也没有发现惯性系的绝对运动. 概括这些事实应该得到一个普遍的结率：在惯性系中进行的力学、电磁学、光学等任何物理实验都不能发现惯性系的绝对运动. 换句话说，在任何惯性系中物理现象都按相同的方式发生，物理规律有相同的形式. 这就是爱因斯坦的相对性原理. 伽利略相对性原理只适用于力学规律，爱因斯坦相对性原理适用于任何物理规律.

电磁运动规律也满足相对性原理，但麦克斯韦方程在伽利略变换下并不协变. 这就要求通过建立惯性系之间新的变换关系来解决这个基本矛盾.

只有爱因斯坦相对性原理，还不能找到修改反映旧时空观的伽利略变换的具体途径. 在迈克尔逊实验中，如果假定光速在各个方向都是 c，则很容易解释实验结果. 其它一些实验也表明了光速与光源运动状态无关. 分析这些事实后就可得出爱因斯坦的第二条原理：在一切惯性系中，光在真空中的速度都为 c，且与光源的运动状态无关. 这就是光速不变性原理.

应该注意，这两个原理相互独立的，不能由一个代替另外一个. 大家可能会想，在承认相对性原理和麦克斯韦方程组的正确性以后，光速不变不就是一个自然的推论吗？怎么能说它还是独立的原理呢？原因是这样：在爱因斯坦看来，相对性原理只是指出了寻找自然规律的方向，即要求任何物理规律在一切惯性系中都应具有相同的. 但是麦克斯韦方程组是否能正确地反映电磁运动规律还待进一步考察，正如牛顿定律是否能正确反映力学的运动规律还值得怀疑一样，相反地，他到是认为光速不变有着更可靠的实验基础，因而应该先承认光速不变性原理. 以此原理为基础建立了新的时空理论后，再按照新时空理论中各惯性系间的变换关系去检验麦克斯韦方程、牛顿定律，看它们是否满足相对性原理，如果满足，说明它们正确反映了电磁运动和力学运动规律，反之就应该修改.

牛顿经典力学在速度较低的日常世界里，是经过大量实践检验正确的理论. 因此在低速条件下新的惯性系间的变换关系应过渡到伽利略变换. 爱因斯坦相对性原理应过渡到伽利略相对性原理，新的力学方程应过渡到牛顿运动定律.

---

* 爱因斯坦文集，第二卷. 北京：商务印书馆，1977，P89.
** 爱因斯坦文集，第一卷. 北京：商务印书馆，1977，P89.

2. 洛伦兹变换

现在我们利用相对论的基本原理来寻找代替伽利略变换的新的规律. 设 S,S' 代表两个惯性系,两个坐标系的轴互相平行,S' 系相对于 S 系沿着 x 轴方向运动,速度为 v,并选取当两坐标系的原点重合时为每个坐标系中的时间零点,即 $t'=t=0$. 设一物理事件在 S 系的时空坐标为 (x,y,z,t),在 S' 系中的时空坐标为 (x',y',z',t'). 任务是求出这两组坐标间的变换关系. 先分析一下变换应具有的特点.

首先,变换必须是线性的,只有这样才能满足相对性原理的要求. 假设有一物体在 S 系中沿 x 轴做匀速运动,则物体的空间坐标 x 是时间 t 的线性函数,即 $x=a+bt$. 若 S 和 S' 系之间的坐标变换不是线性的,则在 S' 系中上述物体的空间坐标 x' 和时间 t' 的关系就不会是线性的,这表明在 S 系中做匀速直线运动的物体,在 S' 系中就不再是匀速运动了,这显然和相对性原理矛盾. 因此为了满足相对性原理,变换必须是线性的.

其次按图 7.6 所示,S 系和 S' 系的 x 轴和 x' 轴永远是重合的,从而 $y=0$ 的平面和 $y'=0$ 的平面重合,$z=0$ 与 $z'=0$ 的平面重合. 如果有一物体在 S 系中的 $y=0$ 平面内运动,必然也在 S' 系中的 $y'=0$ 平面内运动;同理在 $z=0$ 平面内运动,也必然在 $z'=0$ 平面内运动. 为了满足这些要求,变换关系应该有以下形式

$$
\begin{aligned}
x' &= \alpha x + \beta t \\
y' &= \lambda y \\
z' &= \lambda z \\
t' &= \gamma x + \delta t
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

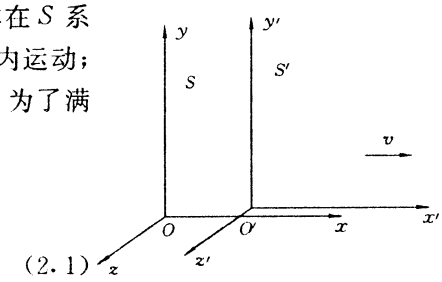


图 7.6

y,z 的变换系数都是 λ,这是因为空间各向同性,y,z 的地位应该相同.

下面就来确定(2.1)式中各系数. 从 S 中看,S' 的原点在 t 时刻的坐标为 $x=vt$,也就是说,对于发生在 S' 系原点上的事件来说,当 $x'=0$ 则有 $x=vt$,代入(2.1)的第一式有

$$\alpha vt + \beta t = 0$$

由此得到

$$\beta = -\alpha v$$

为确定其余的系数,利用光速不变原理. 设 $t=t'=0$ 时,从坐标系的原点发出一光讯号,经过一段时间后,光的波前将到达某一位置. 设在 S 中,t 时刻光波到达 (x,y,z),在 S' 中,t' 时刻光波到达 (x',y',z'). 根据光速不变原理,在每个坐标系内,光的波前都是一个球面,却存在关系

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$$
$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2$$

因此对光的运动来说,有

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2$$

坐标变换关系当然应该适用于光的运动,将(2.1)代入上面的等式,经整理后得

$$
\begin{aligned}
&(\alpha^2 - c^2r^2)x^2 + \lambda^2y^2 + \lambda^2z^2 + (\alpha^2v^2 - c^2\delta^2)t^2 - 2(\alpha^2v + c^2\gamma\delta)tx \\
&= x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2
\end{aligned}
$$

比较等式两端的系数得

$$\alpha^2 - c^2\gamma^2 = 1$$

$$\alpha^2 v^2 - c^2\delta^2 = -c^2$$

$$\alpha^2 v + c^2\gamma\delta = 0$$

$$\lambda^2 = 1$$

求解上述联立代数方程组后得

$$\alpha = \delta = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\gamma = \frac{-v/c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\lambda = 1$$

上面各系数取正号是考虑到 $v=0$ 时，必须有 $x'=x, y'=y, z'=z, t'=t$. 于是最后得到所求的变换关系为

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y' &= y, z' = z \\ t' &= \frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned} \tag{2.2}$$

上式中 $\beta=v/c$. 上述变换关系是从 S 到 S' 系的变换公式. 按照相对性原理，惯性系的地位是相同的. 从 S' 系看来，S 系是以速度 $-v$ 运动的. 只要在(2.2)式中将 v 换为 $-v$ 就可得到从 S' 系到 S 系的变换公式

$$\begin{aligned} x &= \frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y &= y', z = z' \\ t &= \frac{t'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned} \tag{2.3}$$

(2.2)式称为洛伦兹变换的正变换，(2.3)称为洛伦兹变换的逆变换. 很容易看出，当 $v \ll c$ 时，洛伦兹变换就化为伽利略变换. 所以伽利略变换及其所表达的时空特性在低速运动范围内是适用的.

洛伦兹变换是狭义相对论时空特性的集中表现. 在使用洛伦兹变换时必须注意如下几点：

首先，应该注意洛伦兹变换中的(x,y,z,t)与(x',y',z',t')是同一物理事件在 S 系与 S' 系中测量的空间、时间坐标，所以应用洛伦兹变换应注意两组时空坐标是否代表同一物理事件的坐标.

其次(2.2)和(2.3)式所表述的变换适用的条件是：S 与 S' 系原点重合时每个坐标系中的时刻都为零，即 $t=t'=0$，并用两坐标系的坐标轴互相平行，S' 系沿着 S 系的 x 轴以速度 v 运动.

若两坐标系原点重合时，S 系的时刻为 t_0，s' 系的时刻为 t_0'，则应该用 $t-t_0$ 代替前面变换式中的 t，用 $t'-t_0'$ 代替 t'. 这时的洛伦兹变换为

$$x' = \frac{x - v(t - t_0)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$
$$y' = y, \qquad z' = z \tag{2.4}$$
$$t' - t'_0 = \frac{t - t_0 - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

一般总是可以选 $t_0 = t'_0 = 0$，故(2.4)式一般不使用.

S 与 S' 系的坐标轴虽然平行，但 S' 的运动速度 v 可以是任意方向的. 假定坐标原点重合时仍取 $t = t' = 0$，为了得到这时的洛伦兹变换，可将物理事件的坐标矢量 $\boldsymbol{r}$ 沿平行于速度 $\boldsymbol{v}$ 与垂直于 $\boldsymbol{v}$ 的方向分解. 用 $\boldsymbol{r}_p$ 表示平行于 $\boldsymbol{v}$ 的分量，$\boldsymbol{r}_t$ 表示垂直于 $\boldsymbol{v}$ 的分量.

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_p + \boldsymbol{r}_t, \qquad \boldsymbol{r}_p = (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v})\frac{\boldsymbol{v}}{v^2}$$

这时 r_p 与 r_t 可用(2.2)的公式进行变换，r_p 与 x 相当，r_t 与 y, z 相当. 由(2.2)式可得

$$r'_p = \frac{r_p - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \boldsymbol{r}'_t = \boldsymbol{r}_t$$
$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}r_p}{\sqrt{1-\beta^2}}$$
$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}' &= \boldsymbol{r}'_p + \boldsymbol{r}'_t \\ &= \frac{(r_p - vt)}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\boldsymbol{v}}{v} + \boldsymbol{r}_t \\ &= \boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t + \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)\frac{\boldsymbol{v}}{v^2}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r} - v^2 t)\end{aligned} \tag{2.5}$$
$$t' = \frac{t - \frac{1}{c^2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

再次，应注意在各惯性坐标系中量度时间和空间坐标的基准问题. 一般都是用实际的物理过程来量度时间和空间坐标，例如用原子内部的振动周期来量度时间，用原子所发射的电磁波长来测量长度. 各坐标系中的量度基准应选用同一物理过程. 通常把用来量度空间和时间的物理过程简称为尺和钟. 每个坐标系中的尺和钟都应相对于该坐标系处于静止状态. 每一惯性系中的空间各点都有一个钟，在同一惯性系内所有的钟都是校准同步的. 任一物理事件的时空坐标就由事件发生点的钟和尺的读数来确定，钟和尺的读数的记录者简称为观察者. 在相对论中经常使用某一坐标系中的观察者这种说法，但应注意观察者只不过是尺和钟读数的记录者. 物理事件的时空坐标是钟和尺测量的客观结果，与收集这些测量结果的观察者的主观意识毫无关系.

最后我们说明，爱因斯坦从相对论基本原理导出的新的时空坐标变换关系，为什么称为洛伦兹变换呢？因为在相对论出现的前一年，为了解释迈克尔逊实验，洛伦兹已获得了这个变换关系，不过他的出发点仍是伽利略时空观. 彭加莱建议把这个变换命名为洛伦兹变换. 关于这段历史洛伦兹在1927年曾说过下面的话*：

---

* W. G. V. 罗瑟. 相对论导论. 北京：科学出版社，1980年，P69.

“因为必须变换时间，所以我引入了当地时间的概念，它在相互运动的不同坐标系中是不同的. 但是我从未认为它与真实时间有任何联系. 对我来说，真实时间仍由原来经典的绝对时间概念表示，它不依赖于参考特殊的坐标系. 在我看来仅存在一种真正的时间. 那时，我把我的时间变换仅看作为一个启发性的工作假设，所以相对论实际上完全是爱因斯坦的工作. 因此毫无疑问，即便所有前人在此领域的理论工作根本不曾作过，爱因斯坦也会想到它的. 在这方面他的工作是与以前的各种理论无关的.”

§3 狭义相对论的时空特性

1. 同时概念的相对性

在这一节中，我们利用洛伦兹变换来研究相对论中的时空特性，首先讨论同时性概念. 在伽利略时空理论中，任何惯性系中物理事件的时间进程是相同的. 两个事件在一个惯性系的不同地点同时发生，则在任何惯性系中这两个事件仍然同时发生，这说明在旧的时空理论中，同时性概念是绝对的，与参考系无关. 在狭义相对论中，惯性系间时空坐标变换关系由洛伦兹变换表达，同时性概念不再是绝对的了，与参考系有关. 设 S' 系沿着 S 系的 x 轴以速度 v 运动，现发生了两个事件 1 和 2，在 S' 系中测得这两事件的时空坐标为 (x_1', t_1') 和 (x_2', t_2')，在 S 系中测得这两个事件的时空坐标为 (x_1, t_1) 和 (x_2, t_2). 由洛伦兹变换有

$$t_1' = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$t_2' = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$t_2' - t_1' = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{3.1}$$

若在 S 系这两事件是在不同地点同时发生，即 $t_2 = t_1$，$x_2 \neq x_1$，则由(3.1)式有

$$t_2' - t_1' = \frac{-\frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\beta^2}} \neq 0$$

若 $v>0$，$x_2>x_1$，则 $t_2'-t_1'<0$，这表示在 S' 系中事件 2 将发生在事件 1 之前. 当 $v>0$，$x_2<x_1$ 时，$t_2'-t_1'>0$，即事件 2 将发生在事件 1 之后. 这清楚表明，不同地发生的两个事件，在一个坐标系中是同时的，则在另一个坐标系中就不再是同时的了. 但应注意，由洛伦兹变换很容易看出，在同一地点同时发生的两个事件，在任何惯性系中都是同时同地发生的.

异地两事件同时概念的相对性可由相对论的基本原理直接得到. 如图 7.7 所示，设一列车以匀速 v 前进，在车头和车尾有两个标记 A'，B'，当它们和地面上的两个标记 A 和 B 重合时，A，B 分别发出一个闪光. 在 AB 中点 O 和 $A'B'$ 的中点 O' 分别装有接收光讯号的仪器，O 与 O' 可以接收 A，B 发出的光讯号. A，B 发出闪光是两个物理事件，这两个事件在列车中发生在 A'，B' 两个地点. 设在地面上的接收器 O 同时收到 A，B 发出的闪光，因为 O 在 AB 的中点，因而地面上认为这两个事件是同时发生的. 列车上的接收器 O' 是否会同时收到光讯号呢？由光

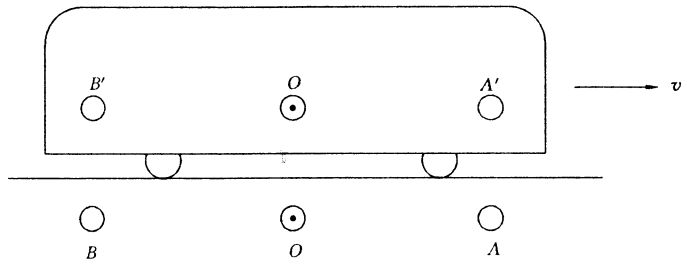


图 7.7

速不变原理，A，B 发出的光相对于 O' 的速度都是 c，但是 O' 迎着 A 发的光相向运动，却顺着 B 发的光波而运动，因此 O' 将早收到由 A 发出的光讯号，晚收到 B 的光讯号. 这说明在列车上的观察者将会认为发生在 A'，B' 的两个事件不再同时发生了，在 A' 处的事件早发生，这个结论与洛伦兹变换所得结果相同.

同时概念的相对性是相对论时空理论中的重要问题. 以后要讨论的运动物体长度缩短、运动时钟变慢都与同时概念的相对性有关.

2. 运动物体的长度沿运动方向缩短

在旧时空理论中，一根棍的长度是绝对不变的. 也就是说这根棍无论是相对于我们运动或静止，我们测得它的长度总是相同的，即物体的长度和运动状态无关. 现在来看一看在相对论中，同一根棍由于其运动状态不同，测得的长度有何变化. 测量棍的长度总是将被测物体同一个尺相比较，同时读出这根棍两端在尺上的标度，这两个标度差就是尺的长度.

现在两根棍 A 和 B 静止在 S 坐标系中，它们互相平行，这时测得它们的长度都为 l_0. 若棍 B开始以速度 v 沿着其长度方向运动，在 S 系来测量 B 的长度，在某时刻同时测得棍 B 的两端坐标为 x_1 和 x_2，两坐标之差 $l=x_2-x_1$ 就是在 S 系中测得的棍 B 的长度. 为求出 l 与 l_0 的关系，引入一个与棍 B 相对静止的惯性坐标系 S'. 在 S 系中对棍 B 的两端同时进行测量时，在 S' 系中也进行观测. B 棍的两端在 t 时刻同 S 系中的 x_1，x_2 重合(见图 7.8)，这相当于两个物理事件. 这两个事件在 S' 系中的时空坐标为 (x_1', t_1') 和 (x_2', t_2')，在 S 系中的时空坐标为 (x_1, t) 和 (x_2, t). 按洛伦兹变换有

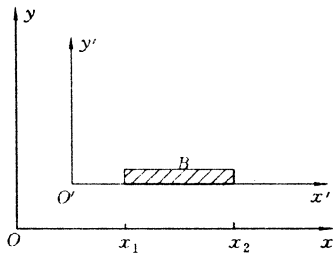


图 7.8

$$x_2' = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$x_1' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{3.2}$$

$x_2'-x_1'$ 是 B 棍在 S' 系中测得的长度. 虽然 x_2'，x_1' 不是在同一时刻测量的，但由于 B 棍相对于 S' 是静止的，因此测得的两端坐标差可以表示长度，并且这个长度就是 l_0. 注意到 $l=x_2-x_1$，可将(3.2)改写为

$$l = l_0\sqrt{1-\beta_2} \tag{3.3}$$

上式说明，运动的 B 棍比静止的 A 棍要缩短，即运动物体的长度沿其运动方向缩短.

应该指出，A，B 两棍的运动状态是相对的，站在 A 上的观察者认为 B 棍在运动，因而 B 棍比 A 棍缩短；站在 B 棍上的观察者认为 A 棍在运动，因而 A 棍比 B 棍缩短. 总之，每个观察者都测出相对他运动的物体的长度缩短了.

按传统的观念是很难理解这个结论的. 当 A 上的观察者测出相对于他运动的 B 棍缩短时，为什么 B 上的观察者不承认自己缩短，反而认为 A 棍要比自己短呢？这关键在于相对论中同时概念的相对性，让我们深入分析测量过程就清楚了. 设 A 棍静止在 S 系中，在 S 系中测量 B 棍长度时，是同时读出 B 棍两端在 S 系中的尺上的读数. 测读 B 棍两端的读数是两个物理事件，在 S 系中这两事件的时空坐标为 (x_1,t) 和 (x_2,t)；在随 B 棍一起运动的坐标系 S' 中，这两事件的时空坐标为 (x_1',t_1') 和 (x_2',t_2'). 前已指出，在 S 系中同时发生的两个不同地的事件，在 S' 系中不是同时的. 在 S' 系中的观察者认为这两事件的时间差为

$$t_2'-t_1'=\frac{-\frac{v}{c^2}(x_2-x_1)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

这里的 $x_2>x_1$，因此 $t_2'<t_1'$，即在 S' 系的观察者看来，站在 S 上的人对 B 棍的测量有错误. 如图

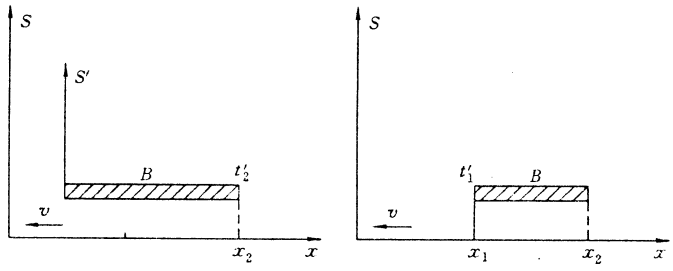


图 7.9

7.9 所示，在 t_2' 时刻测了 x_2 的读数，过了一段时间后在 t_1' 时刻再测了 x_1 的读数，S' 认为固定在 S 上的尺是以速度 v 向左运动的，先读 x_2，后读 x_1，用读数差 x_2-x_1 来表示 B 棍的长度当然要短. 按 S' 的观点，B 棍的长度应加上尺在 $(t_1'-t_2')$ 这段时间内所走的距离，即

$$(t_1'-t_2')v=\frac{(x_2-x_1)\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

此外按 S' 的观点，原先 S 中测出的距离还应缩短一个因子 $\sqrt{1-\beta^2}$. 因此，站在 S' 上的观察者认为·按照 S' 的尺和钟量出的 B 棍长度应为

$$x_2'-x_1'=(x_2-x_1)\sqrt{1-\beta^2}+\frac{(x_2-x_1)\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{(x_2-x_1)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

在 S 中的 $x_2-x_1=l=l_0\sqrt{1-\beta^2}$，代入上式得

$$x_2'-x_1'=\frac{l_0\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}=l_0$$

这正是 B 棍在静止的长度. 由此可见，站在 B 棍上的观察者不承认 B 棍比 A 棍缩短是有充足理由的. 它认为 A 棍在运动，因而 A 棍应比 B 棍缩短.

按照相对论的逻辑，大家可能接受运动物体沿其运动方向缩短的结论. 然而旧的观念仍可能使大家产生疑问：运动物体缩短是否真实？如果是真实的，物体运动速度不同，其长度不同，那么物体的“真正”长度是什么呢？这些问题涉及到对长度缩短物理实质的理解. 长度这个量表

达了物体的空间特性，空间物质存在的一种表现形式，物质的运动状态不同，其空间表现形式不同，因而长度不同，这是很自然的. 长度缩短的物理实质在于，物质存在的空间形式依赖于物质的运动状态. 从这个意义上说，长度缩短是真实的，即物体的运动状态不同，它所表现的长度不同. 换句话说，物体的长度是一个相对量，依赖于它的运动状态，离开了它的运动状态，抽象的讲物体的长度是没有意义的. 这是相对论的时空观区别于旧时空观的一个非常重要之点. 在旧时空观中，物体长度与运动状态无关，因而每一物体有确定不变的外形，于是在人们头脑中形成了“真正”长度的观念. 所谓“真正”长度，实际上是说物体只有一个长度. 在相对论中，物体状态不同，其长度不同，因而一个物体不会只有一个长度，不能用旧观念来问哪一个长度是物体的“真正”长度. 如果说“真正”长度意味着长度的真实性，那么在相对论中，物体处在每一种运动状态下的长度都是真实的. 通常把物体处于静止状态下测出的长度叫做固有长度. 必须注意，物体的运动状态总是相对于某一特定的参考系而言，因此物体的长度也是相对于一个具体参考系说的.

其实，具有相对性的物理量在日常生活中并不少见，例如上、下观念，物体的仰角概念等都是相对的. 观测一个建筑物的仰角，依赖于观察者与物体的距离，离开了观察者所处的位置，抽象地说一个物体的仰角是多少毫无意义. 这些现象在生活中习以为常了，接受起来毫不困难. 过去我们习惯了长度的绝对性，因而对长度的相对性就感到难理解，以致对运动物体长度缩短感到神秘. 相对论并不神秘，它只不过是向我们表明，物体的空间长度与物体的运动状态有关，是依赖于运动状态的一个相对物理量.

还应指出，相对论中运动物体长度缩短应同洛伦兹-裴兹杰拉尔德收缩假定在表现形式上是相同的，但两者在观念上有着本质的区别. 首先，洛伦兹和裴兹杰拉尔德把运动物体的缩短看成是一个真实的物理过程，是由于物体上对以太运动时组成物体的电子之间的力发生变化，引起电子形变，使物体缩短. 相对论中物体长度在运动时缩短，只意味着物体的空间特性与运动状态有关，并不是物体内部结构有了改变. 其次，洛伦兹和裴兹杰拉尔德的收缩假定认为，在物体相对于以太运动时，物体长度才收缩，因而这种收缩是绝对的. 静止时等长的两根棍，若一根棍相对以太运动，另一根棍相对以太静止，则这两根棍长度的差别是绝对的. 在相对论中不承认绝对运动，因而缩短是相对的. 两根静止时等长的棍，平行地发生相对运动后，每根棍上的观察者都认为对方缩短了.

既然运动体沿其运动方向缩短，故在相对论出现后的很长时间，人们都认为观察一个高速运动体的形象时，将会看到沿运动方向缩短，例如一个圆球高速运动，人们看到的将是一个扁球. 直到1960年左右，Terrell 及 Weisskopf 等人指出上述概念是错误的，错误的关键在于把测量和观看弄混淆了. 测量一个物体长度，是在同一时刻记录下物体在尺上的读数. 按照狭义相对论，测量所得运动物体的长度要缩短. 然而观看一个物体的视觉形象，情况就不同了. 看到一个物体的形象，意味着从物体上发出的光必须同时到达视网膜，离我们较远的点在较早时刻发出的光，与离我们较近的点在较晚时刻发出的光，都可能同时达视网膜. 物体的视觉形式是那些能使光同时到达人眼的物点的综合表现. 如图 7.10 所示，一个立方体以速度 v 运动，在垂直于运动方向来观看这个物体. 当物体离观看

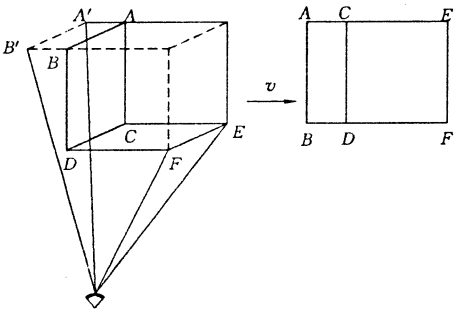


图 7.10

者较远时，$CDFE$ 面上各点发出的光可以同时到达人眼. 沿运动方向的长度要缩短因子 $\sqrt{1-\beta^2}$，但垂直于运动方向的 CD 和 EF 的长度不变，看到的正面形象如图右端所示的 $CDFE$. 此外，在测面 $ABCD$ 上各点较早时刻发的光也可能同正面各点发的光同时到达人眼. AB 棱位于 $A'B'$ 时发出的光，与正面各点发的光同时到达人眼的条件容易求出. 只要 $A'B'$ 发光的时间比 CD 发光的时间早 $\Delta t=\overline{AC}/c$ 就可以. 在 Δt 时间内物体移动了距离 $\overline{A'A}=v\Delta t$，因此，实际人眼看到的视觉形象如图 7.10 右边所示，除 $CDFE$ 外还应加上 $ABDC$ 侧面的投影. 侧面投影的宽度为

$$\overline{A'A}=v\Delta t=\frac{v}{c}\overline{AC}$$

看到正面的宽度为

$$\overline{DF}\sqrt{1-\beta^2}$$

设立方体边长约 l，则看到的视觉形象总的宽度为

$$\frac{v}{c}l+l\sqrt{1-\beta^2}$$

这个视觉形象相当于原来立方体在旋转了一个角度 θ 后所表现出的静态形象. 由图 7.11 可见

$$\cos\theta=\sqrt{1-\beta^2}$$

$$\sin\theta=\frac{v}{c}$$

因此如果是一个球形物体，它在高速运动时，人们看到的形状不是扁球体，而仍然是一个球体，因为看到的形状是物体旋转后的静态形状，球旋转后仍然是一个球.

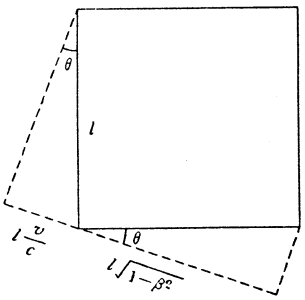


图 7.11

3. 运动时钟变慢

在相对论中对时间的测量是在空间每点放一个钟，在每个惯性系内，各点的钟都是校准同步运行的. 下面将看到，时钟运行的快慢也与它的运动状态有关. 如图 7.12 所示，设在 S 系中有两个同步的钟 A，B，它们位于 x 轴上的 x_1 和 x_2 两点；在 S' 系中有一个钟 C，它处在 S' 系中的 x' 点；$x_2-x_1=l$. C 钟同 A 钟重合这个事件在 S' 系中的时空坐标为 (x',t_1')，在 S 系中的时空坐标为 (x_1,t_1). 经过一段时间后 C 钟将同 B 钟相重合，这个事件在 S' 系中的时空坐标为 (x',t_2')，在 S 系中的时空坐标为 (x_2,t_2). 由洛伦兹变换

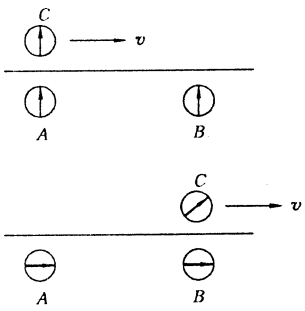


图 7.12

$$t_1'=\frac{t_1-\frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$t_2'=\frac{t_2-\frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

相减得

$$t_2'-t_1'=\frac{t_2-t_1-\frac{v}{c^2}(x_2-x_1)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

另一方面有

$$x_2 - x_1 = v(t_2 - t_1)$$

于是得

$$t_2' - t_1' = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v^2}{c^2}(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$= \sqrt{1 - \beta^2}(t_2 - t_1) \tag{3.4}$$

用 τ_0 和 τ 分别代表对于观察者运动的时钟和静止的时钟所指示出来的时间间隔，则有

$$\tau_0 = \tau\sqrt{1 - \beta^2} \tag{3.5}$$

上式说明两个事件的时间间隔，由运动的时钟测量的值小于由静止时钟测量的值，这表明运动的时钟变慢了.

在相对论中，每个惯性系都是等价的. 从 S' 系看来，A 钟以速度 v 沿着负 x' 轴运动，用上面同样的方法可以证明，运动的 A 钟要比静止在 S' 系的钟变慢. 总之，每个观察者都看到相对他运动的时钟变慢了. 这说明物理过程的时间进程也是一个相对的物理量，依赖于过程所处的运动状态. 在相对于物体为静止坐标系中测量出的时间间隔最小，这个时间称为固有时间，用 τ_0 表示. 在相对物体运动的坐标系内测出的时间用 τ 表示，则上述结论可表示为

$$\tau_0 = \tau\sqrt{1 - \beta^2}$$

运动的时钟变慢相当于运动物体的寿命延长，这已为很多实验所证实. 例如在地面上还能观测到宇宙线中的 μ 粒子便是一个重要的实验事实. 实验上测得 μ 粒子以接近光的速度运动. 如果按照牛顿的时空理论，μ 粒子在其存在的时间内能前进的距离为

$$d = \tau_0 v = 3 \times 10^8 \times 2 \times 10^{-6} = 600\text{m}$$

实验发现，宇宙线中的 μ 粒子是在 6000m 以上的高空中产生，按旧时空理论在地面上不可能观测到 μ 粒子，然而实验上却观测到了. 原因就在于按地面的观察者看来，运动的 μ 粒子寿命要延长，它的寿命为

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{2 \times 10^{-6}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

当 $\sqrt{1-\beta^2}=0.1$，即 $\beta^2=0.99$ 时，μ 粒子的寿命就延长到静止时寿命的 10 倍，在衰变前就可前进 6km，因而地面上就可看到 μ 粒子了.

上述实验事实，如果在固定于 μ 粒子上的参考系看来，μ 粒子的寿命没有延长，但地面相对于 μ 粒子的距离缩短了. 从产生 μ 粒子的高空到地面的距离，在 μ 粒子上看只有 600m，因而在它的生命期内可以到达地面. 由此看到，时钟变慢与运动物体长度缩短是密切相关的.

例 1 在 S 系内有五个钟等距排列，在 S' 系内与 S 系的钟重合位置上也有五个钟，如图 7.13 所示. 设 C′，C 两钟的指针都指示零点，问：按 S 系的观点，各钟指示的时刻为多少?

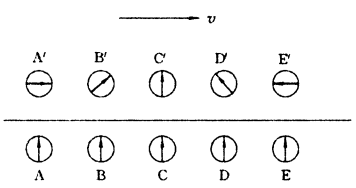


图 7.13

解 设各钟间的距离在 S' 坐标系内的固有长度为 l_0，选 C′，C 重合位置为坐标原点. 按 S 系观点，A，B，C，D，E 五个钟是校准了的，因而都指示零点；在 S' 系内的钟都没校准，可用洛伦兹变换求出各钟的指示时间. 例如求 D′ 钟的时间 t_D' 为

$$t'_{\mathrm{D}}=\frac{t_{\mathrm{D}}-\frac{v}{c^2}x_D}{\sqrt{1-\beta^2}}=-\frac{v}{c^2}\frac{l_0\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}=-\frac{vl_0}{c^2}$$

同理可得其余各钟指示时刻为

$$t'_{\mathrm{E}}=-\frac{2vl_0}{c^2}\quad t'_{\mathrm{B}}=\frac{vl_0}{c^2}\quad t'_{\mathrm{A}}=\frac{2vl_0}{c^2}$$

由此得出结论：迎着 C 运动的钟，离 C 愈远所指时刻愈晚；离开 C 运动的钟，离 C 愈远所指时刻愈早，如图所示.

例 2 如图 7.14 所示，一“火车”其固有长度为 l_0，在车头 B' 和车尾 A' 各放一校准了的时钟.“站台”的固有长度也为 l_0，在“站台”的头 A 和尾 B 也各放一校准了的钟.“火车”相对于“站台”的速度为 v，当 B' 和 A 重合时，在 B'，A 处的钟指都指示 12：00. 设 $l_0=8.64\times10^8\mathrm{km}$，$v=2.4\times10^5\mathrm{km/s}$，问：

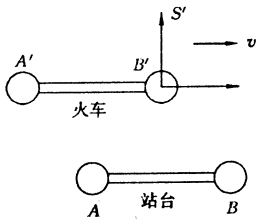


图 7.14

(1)是否能断言，在 A，B' 重合时刻，在任何参考系内所有的时钟也都指示 12：00?

(2)当车尾 A' 和站台头 A 重合时，各个钟指示的时间是多少?

解 (1)由于同时概念的相对性，在一个坐标系内校准了的钟，在另一坐标系看来就没有校准. 设火车是 S' 系，站台是 S 系，B'，A 重合时，在 S' 与 S 系中的观察者都承认 B'，A 两处的钟指示 12：00，在自己坐标系内的钟是校准的，对方坐标系内的钟都没有校准. S' 认为，$t'_A=t'_{B'}=t'_{A'}=12:00$，但 B 钟指示的时刻比 A 钟的时刻要大些

$$t'_B-t'_A=\frac{v}{c^2}l_0=\frac{2.4\times10^8}{(3\times10^8)^2}\times8.64\times10^{11}=38.4'$$

$$t'_B=t'_A+38.4'=12:38.4'$$

同理，在 S 系看来 $t_A=t_B=t'_B=12:00$，但 A' 指示的时刻要比 B' 指示的时刻大些

$$t_{A'}-t_{B'}=\frac{v}{c^2}l_0=38.4'$$

$$t_{A'}=12:38.4'$$

(2)在 S 系看(见图 7.15)，由 B'，A 重合到 A'，A 重合，火车走行了距离 $l_0\sqrt{1-\beta^2}$，站台上的钟量出这段时间为

$$\Delta t=\frac{l_0\sqrt{1-B^2}}{v}=36'$$

$$t_A=t_B=12:00+\Delta t=12:36'$$

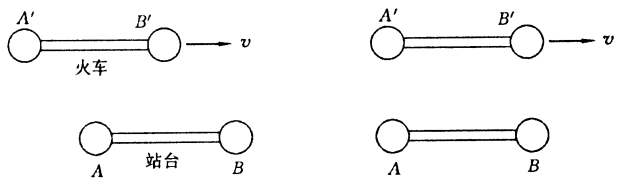


图 7.15

火车上的钟是运动的，运动的钟变慢，量出上述过程的时间为 $\Delta t'=\Delta t\sqrt{1-\beta^2}=21.6'$，故

$$t_{A'}=12:38.4'+21.6'=13:00$$

$$t_{B'} = 12:00 + 21.6' = 12:21.6'$$

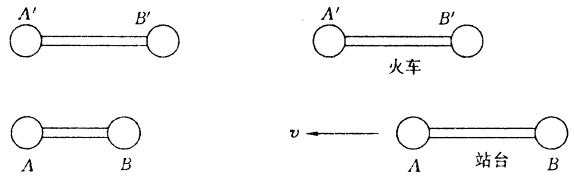


图 7.16

在 S' 系看，站台以速度 v 向左运动. 从 A, B' 重合到 A, A' 重合这个过程，用火车上的钟量出的时间为

$$\Delta t' = \frac{l_0}{v} = 60'$$

$$t'_{A'} = t'_{B'} = 12:00 + 60' = 13:00$$

火车上认为地面是运动的，时钟变慢，站台上的钟量出上述过程的时间为

$$\Delta t = \Delta t' \sqrt{1-\beta^2} = 36'$$

$$t_{A'} = 12:00 + \Delta t = 12:36'$$

$$t_{B'} = 12:38.4' + \Delta t = 13:14.4'$$

§4 多普勒效应 时钟佯谬问题

1. 多普勒效应

1842 年多普勒(Doppler)发现，如果波源和波的接收器彼此做相对运动，则接收到的波的频率将发生变化. 波源和接收器相互靠近时，频率变高；相互远离时，频率变低. 这种现象称为多普勒效应. 在相对论中高速运动原子或星体发射的光的频率变化有新的特点，称为相对论性多普勒效应.

如图 7.17 所示，设 A 是运动的光源，速度为 v；接收器设在 O 处，与 A 相距为 r；光源在 t 时刻发出的光波，在 t^* 时刻被接收到，则

$$t^* = t + \frac{r}{c} = t + \frac{1}{c}\sqrt{v^2t^2 + y^2} \tag{4.1}$$

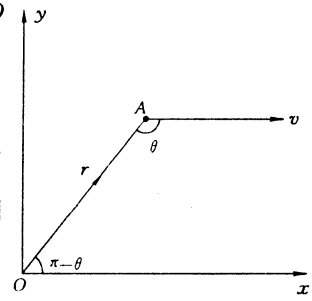


图 7.17

在如图所取的坐标系中，光源 A 的坐标 $x=vt, y$ 不变. 考虑时间间隔的关系

$$\Delta t^* = \frac{\mathrm{d}t^*}{\mathrm{d}t}\Delta t = \left(1 + \frac{1}{c}\frac{v^2t}{\sqrt{v^2t^2+y^2}}\right)\Delta t$$

$$= \left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)\Delta t = \left(1 + \frac{v_r}{c}\right)\Delta t$$

式中 $v_r = -v\cos\theta$ 称为视向速度. 设光源发射出的光波的周期为 T_A，观测者接收到的光波的周期为 T，则有

$$T = \left(1 + \frac{v_r}{c}\right)T_A \tag{4.2}$$

频率是周期的倒数，故

$$\nu = \frac{\nu_A}{1 + v_r/c} \tag{4.3}$$

当光源远离接收器运动时，$v_r > 0$，则 $\nu < \nu_A$，频率变低；当靠近时，$v_r < 0$，则 $\nu > \nu_A$，频率变高. 这是非相对论性多普勒效应. 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，$v_r = -v\cos\theta = 0$，故 $\nu = \nu_A$，频率不变，对于非相对论情况，不存在横向多普勒效应.

如果 A 是高速运动的光源，则必须考虑相对论效应.

设接收器固定在 S 系的 O 点，光源固定在 S' 系的 A 点，S' 系相对于 S 系以速度 v 沿 x 轴方向运动(图 7.18).

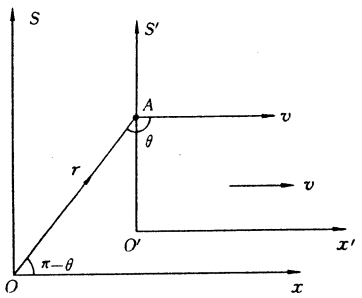


图 7.18

由于光源相对于 S' 系静止，故发射出光波的周期 T_0 应为固有时间，是在 S' 系测量的. S 系观察者在 A 处测量到的光波周期 T_A，由于运动时钟变慢，有

$$T_A = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \tag{4.4}$$

故在 O 处接收到光波的周期为

$$T = \left(1 + \frac{v_r}{c}\right) T_A = \frac{1 - \beta\cos\theta}{\sqrt{1 - \beta^2}} T_0 \tag{4.5}$$

频率关系为

$$\nu = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta\cos\theta}\nu' \tag{4.6}$$

当光源远离观察者运动时，$\theta = \pi$

$$\nu = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}\nu' < \nu' = \nu_0 \tag{4.7}$$

当光源向着观察者运动时，$\theta = 0$

$$\nu = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}\nu' > \nu' = \nu_0 \tag{4.8}$$

在垂直于运动方向观察时，$\theta = \pi/2$

$$\nu = \nu'\sqrt{1 - \beta^2} \tag{4.9}$$

对于相对论情况，存在横向多普勒效应，爱因斯坦认为这是检验相对论的重要判据. 相对论和非相对论多普勒效应在数量级 v/c 上是一致的，故用以区别它们的实验必须很灵敏，足以观察出数量级为 v^2/c^2 的效应，这是一项艰巨的任务. 1938 年，艾伏斯(Ives)和史迪威(Stilwell)首先测量了氢的极隧射线光谱线的二阶频移，完全证实了横向多普勒效应.

(1)类星体的大红移问题

因为 $\nu = c/\lambda$，故由(4.6)式得

$$\lambda = \frac{1 - \frac{v}{c}\cos\theta}{\sqrt{1 - \beta^2}}\lambda_0 = \frac{1 + \frac{v_r}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}}\lambda_0 \tag{4.10}$$

当 $v \ll c$ 时，定义红移值

$$Z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = v_r/c \tag{4.11}$$

在银河系中，有的恒星的红移值 $Z>0$，意味着它在远离太阳系运动；有的恒星 $Z<0$，向着太阳系运动. 例如距离较近的天狼星，它的红移值 $Z=-2.7\times10^{-5}$，由上式可估算出它正以每秒 8km 的速度向着太阳系运动.

1917 年，斯莱弗(Slipher)发现河外星云普遍存在红移现象，根据观测到的红移值，可估算出这些星系正以几百公里每秒的速度远离我们运动. 1929 年，哈勃(Hubble)在研究大量观测资料的基础上，发现河外星云的距离与视向速度之间存在比例关系

$$v_r = Hr \tag{4.12}$$

其中 $H=60\text{km/(s}\cdot\text{兆秒差距)}$(1 秒差距=3.26 光年)，称为哈勃常数.

60 年代发现了奇异的类星体，所显示的 Z 值远大于普通恒星和星系的红移，有的类星体的红移值 $Z>2$. 按经典公式 $Z=v_r/c$，则 $v_r>2c$，这是不可能的，说明经典的多普勒红移公式已不适用，必须用相对论性公式

$$Z=\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda_0}=\frac{1+v/c}{\sqrt{1-\beta^2}}-1 \tag{4.13}$$

如 $Z=2$，则由上式可求得退行速度 $v=0.8c$，再由哈勃定律可估算出类星体的距离约为

$$r=\frac{v}{H}=\frac{0.8\times3\times10^5}{60}\text{ 兆秒差距}\sim10^{10}\text{ 光年}$$

由此可见，类星体是最古老、最遥远、运动最快、也最明亮的星体了. 关于类星体大红移问题，如何解释，尚有不少争论，还是一个待深入研究的问题.

(2)多普勒导航

利用多普勒效应可从地面站追踪人造地球卫星，这种方法非常准确，确定远在 10^8m 处卫星的位置变化时，可以精确到几分之一厘米.

如图 7.20 所示设距地面站为 r 处的人造卫星以速度 v 运动，卫星上发出一固有频率为 ν_0 的信号. 因为卫星的速度 $v\ll c$，在(4.6)式中只保留 v/c 项，故地面站接收到的

$$\nu=\frac{\nu_0}{1-\beta\cos\theta}\approx\nu_0\left(1+\frac{v}{c}\cos\theta\right)$$

频率为地面站有一个和卫星上相同的振荡器(或采用双向多普勒追踪系统，从地面向卫星发出一信号. 然后卫星将其放大，转播回地面站). 由电子学方法可测得频率差

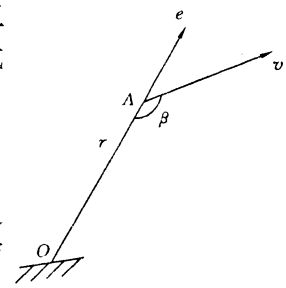


图 7.19

$$\nu-\nu_0=\nu_0\frac{v}{c}\cos\theta \tag{4.14}$$

卫星的经向速度为

$$v_r=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_r=-v\cos\theta$$

$$=-\frac{c}{\nu_0}(\nu-\nu_0)=\lambda_0(\nu-\nu_0)$$

式中 $\lambda_0=c/\nu_0$ 为辐射的波长. 接收频率 ν 随卫星的速度和方向的改变而变化. 将上式对时间积分，求出在时间 t_1 到 t_2 内卫星在径向所移动的距离

$$r_2-r_1=-\lambda_0\int_{t_1}^{t_2}(\nu-\nu_0)\mathrm{d}t \tag{4.15}$$

上式中积分表示在时间 t_1 到 t_2 内出现的频率差的周波数(在时间 $\tau=1/(\nu-\nu_0)$ 内发生一个周

波)，因此

$$r_2 - r_1 = -N\lambda_0 \tag{4.16}$$

上式表明：径向距离每增加一个波长，差频就减少一个周波；径向距离每减少一个波长，差频就增加一个周波.

人造卫星通讯系统的典型的工作波长是 10cm，差频可测至 1/10 周波，故追踪卫星可达到一个厘米.

相对论性多普勒频移公式的重要应用，主要是对快速运动的原子、原子核和基本粒子的辐射的分析. 艾夫斯实验就是对快速运动的氢离子的辐射观测到了横向多普勒效应.

2. 时钟佯谬问题

由运动时钟变慢，在历史上曾提出时钟佯谬问题. 因为运动时钟变慢相当于有生命的物体在运动中寿命延长，故时钟佯谬也称双生子佯谬. 两个双生子甲和乙，甲留在地面上，乙乘宇宙飞船到太空旅行. 飞船速度为 v，飞行了 l 距离后飞船突然转向，然后以匀速 v 飞回地面停下. 甲认为乙是运动的，按地面上的时钟，乙在太空中飞行的时间为 $\tau=2l/v$，按狭义相对论运动时钟变慢，在飞船上的时钟只经历了时间 $\tau_0=\tau\sqrt{1-\beta^2}$，因此当乙回到地面上时，甲认为乙比自己年轻. 乙的看法如何呢？乙认为甲也是运动的，运动时钟变慢，故甲应比自己年轻. 于是出现矛盾，这种表现矛盾称为佯谬.

如何解决这个矛盾？相对论出现后的几十年来曾有过各种解决方案. 一种常见的方案是，甲所在的地球是一个惯性系，乙所在的飞船在起飞、转向、降落时都要做加速运动，因而不是一个惯性系. 在地面上的惯性系可以用狭义相对论的结果. 设飞船加速的时间极短可略去不计，基本上全过程都做匀速运动.

从飞船起飞到回到地面这个过程中，地面上时间为 $\tau=2l/v$. 飞船上时间为 $\tau_0=\tau\sqrt{1-\beta^2}$，乙应比甲年轻. 乙所在的飞船不是一个惯性系，因此他不能用狭义相对论的结果，在有加速度的坐标系内应该用广义相对论. 广义相对论认为，加速度与引力场等效. 在乙的飞船转向时有极大的加速度，相当于在飞船内有一个极强的引力场，在引力场中时钟要变慢，引力场愈强时钟愈慢. 按照广义相对论可以计算出来，在飞船突然转向过程中，乙的时钟极度变慢趋于静止，相对说来，他将看到甲的时钟突然增加时间间隔为 $2vl/c^2$. 在飞船匀速运动的时间内，乙可以用狭义相对论的结果. 在匀速运动期间，乙经历的时间为 $\tau_0=\tau\sqrt{1-\beta^2}$，但乙认为这期间甲经历的时间为

$$\tau' = \tau_0\sqrt{1-\beta^2} = \tau(1-\beta^2)$$

在全过程中乙认为甲经历的全部时间为

$$\tau' + \frac{2vl}{c^2} = \tau - (1-\beta^2) + \tau\frac{v^2}{c^2} = \tau \tag{4.17}$$

但在这个过程中乙只经历了时间 $\tau_0=\tau\sqrt{1-\beta^2}$，因为在转向过程中乙的钟趋于静止. 于是乙也同意甲确实比他老，乙自己比甲年轻. 甲乙两人对双方的年龄认识完全一致，佯谬不再存在.

由上看到，解决时钟佯谬的关键在于，当飞船突然转向时，乙认为甲的年龄有一突然的增长 $2vl/c^2$，其实从狭义相对论也可得出上述结果.

如图 7.20 所示，设甲所在地面参考系为 S，飞船 C 从 S 系中的 A 点出航，飞至 B 点转向，AB 距离为 l. 在转向前飞船的参考系为 S'，在 B 点转向后，飞船以速度 v 沿着 S 系的负 x 轴运动. 转向以后的飞船参考系为 S'，假定转向是突然的. S 系的甲认为，乙航行全程按 S 系的

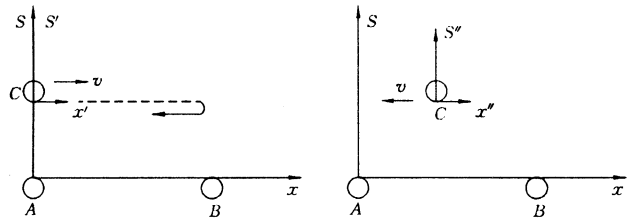


图 7.20

钟指示的时间为

$$\tau = 2\frac{l}{v} \tag{4.18}$$

但飞船中的钟要变慢，指示的时间为

$$\tau_0 = \tau\sqrt{1-\beta^2} = \frac{2l}{v}\sqrt{1-\beta^2} \tag{4.19}$$

现在按飞船中乙的观点来计算航行全程各坐标系所需时间. 先看转向以前这一段航程的时间. 按 S' 系的观点，AB 距离为 $l\sqrt{1-\beta^2}$，C 由 A 到 B 这段航程中飞船的钟指示时间为

$$\Delta t_c' = \frac{l\sqrt{1-\beta^2}}{v} \tag{4.20}$$

S 系的钟相对于飞船运动，应变慢，指示的时间为

$$\Delta t_1 = \Delta t_c'\sqrt{1-\beta^2} = \frac{l}{v}(1-\beta^2) \tag{4.21}$$

若飞船出发的时刻，C，A 处的钟均指零点，当飞船到达 B 但还未转向这一时刻，C 处的钟指示的时间为 $t' = \Delta t_c'$，这时飞船上的乙用洛伦兹变换可算出 A 处的钟指示的时刻为

$$t_1 = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

其中 $x' = -l\sqrt{1-\beta^2}$ 是 S' 系中 A 点在 t' 时刻的坐标，于是得到

$$t_1 = \frac{\frac{l}{v}\sqrt{1-\beta^2} - \frac{v}{c^2}l\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{l}{v}(1-\beta^2) \tag{4.22}$$

飞船在突然转向后其位置仍在 B 点这一时刻，飞船 C 上的钟指示的时刻仍为 $t'' = \Delta t_c'$，转向以后飞船的坐标系为 S''，S'' 沿着 S 系的负 x 轴运动. 从 S'' 系来看，S 系沿 S'' 系的正 x 轴运动，因此在转向后这一时刻，飞船上的乙应该用洛伦兹变换来计算 S 系 A 处的钟指示的时刻，设为 t_2，则

$$t_2 = \frac{t'' - \frac{v}{c^2}x''}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

x'' 是在 S'' 系中 A 点在 t'' 时刻的坐标，$x'' = -l\sqrt{1-\beta^2}$. 于是求得

$$t_2 = \frac{\frac{l}{v}\sqrt{1-\beta^2} + \frac{v}{c^2}l\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{l}{v}(1+\beta^2) \tag{4.23}$$

(4.22)和(4.23)式说明，在飞船上的乙看来，地面上甲所在的 A 处的时钟，在飞船转向前指示

的时刻为 t_1，突然转向后，A 处的时钟指示的时刻为 t_2. 因此乙认为在飞船转向这一瞬间，A 处时钟突然增长

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{l}{v}(1+\beta^2) - \frac{l}{v}(1-\beta^2)$$

$$= \frac{2l}{v}\beta^2 = \frac{2lv}{c^2} \tag{4.24}$$

转向后飞船由 B 回到 A 这段航程中，按 S'' 系的观点飞船的钟指示的时间为

$$\Delta t_c'' = \frac{l\sqrt{1-\beta^2}}{v} \tag{4.25}$$

地面上 A 处的钟指示的时间为

$$\Delta t_2 = \Delta t_c''\sqrt{1-\beta^2} = \frac{l}{v}(1-\beta^2) \tag{4.26}$$

全部航程中，飞船上的乙认为，他自己经历的时间 τ_0 由(4.20)和(4.25)可算出

$$\tau_0 = \Delta t_c' + \Delta t_c'' = 2l\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{v} \tag{4.27}$$

地面上的甲经历的时间 τ 由(4.21)、(4.24)及(4.26)可得

$$\tau = \Delta t_1 + \Delta t + \Delta t_2 = \frac{2l}{v} \tag{4.28}$$

这里得到的 τ_0 和 τ 与地面上的甲所得结果(4.19)和(4.18)完全相同. 这表明甲乙双方都承认乘飞船航行归来的乙要比地面上的甲年轻，而留在地面上的甲要比宇航归来的乙年老些. 如果飞船速度很大，双生子的年龄相差可以很大.

虽然我们无法实现关于双生子的假想实验，但是在 70 年代完成了飞机携带原子钟环绕地球航行的实验，以及测量在储存环中 μ 粒子绕圆周运行时的衰变寿命的实验. 实验表明：绕地球航行的时钟比静止在地球上的时钟走得慢；绕圆周运行的 μ 粒子的平均寿命比静止 μ 粒子的固有寿命长. 实验结果与狭义相对论运动时钟变慢的结论相符合.

§5 速度合成　时序和因果律　时空光锥

1. 速度合成公式

设一个物体在时刻 t 相对于 S 系的运动速度为 $\boldsymbol{u}$，在 S' 系中 t' 时刻测得其速度为 $\boldsymbol{u}'$. 通过洛伦兹变换可求得同一物体在两个相对运动惯性系中的速度 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{u}'$ 之间的变换法测.

注意到

$$\boldsymbol{u} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}, \qquad \boldsymbol{u}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t'}$$

根据洛伦兹变换

$$\mathrm{d}x' = \frac{\mathrm{d}x - v\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\mathrm{d}y' = \mathrm{d}y, \qquad \mathrm{d}z' = \mathrm{d}z \tag{5.1}$$

$$\mathrm{d}t' = \frac{\mathrm{d}t - \frac{v}{c^2}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

由此可求得

$$u_x' = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}x - v\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t - \frac{v}{c^2}\mathrm{d}x}$$

分子、分母各除以 $\mathrm{d}t$，得

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x} \tag{5.2}$$

同样可得

$$u_y' = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} = u_y \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{v}{c^2}u_x} \tag{5.3}$$

$$u_z' = \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'} = u_z \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{v}{c^2}u_x} \tag{5.4}$$

(5.2)－(5.4)就是相对论的速度合成公式. 其逆变换为

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{v}{c^2}u_x'}, \qquad u_y = u_y' \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v}{c^2}u_x'}$$

$$u_z = u_z' \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v}{c^2}u_x'} \tag{5.5}$$

由上式看出在低速运动 $v \ll c$ 条件下，相对论速度合成公式变为伽利略速度合成公式

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{v} \tag{5.6}$$

故伽利略速度合成公式只是相对论速度合成公式的低速近似.

设物体沿 x 轴方向运动，应用相对论速度合成公式(5.5)可证明：

①若 $u' < c$，$v < c$，则一定有 $u < c$；

②若 u' 和 v 其中之一等于 c 时，一定有 $u = c$；

③若 $u' = c$，$v = c$，则仍然有 $u = c$.

上述结论当物体沿任意方向运动时仍成立. 由此可见，通过速度合成的运动学方法，不可能使物体运动的速度大于光速 c. 以后还将看到通过使物体受力加速的动力学方法，也不能使物体的运动速度大于光速 c. 真空中的光速是物体运动的极限速度.

必须指出，如果在同一参考系内观察两个物体的相对运动速度，这时由于两个物体的速度是由同一观察者使用相同的尺和钟测得的，因此它们的相对速度就等于每个物体速度的矢量和. 这样，在同一惯性系内测得的两物体的相对速度就可能超过光速 c，但这并不与光速不变性原理相矛盾. 因为光速不变性原理只是表明，相对于任一惯性系，光在真空中沿各方向传播的速度都是 c.

例 1 两个飞船 A，B 在地面参考系中的速度都是 $0.9c$，并且相向运行. 求

(1)在地面上看这两个飞船的相对速度是多少?

(2)在飞船 A 上测得飞船 B 的速度是多少?

解 (1)在地面上测两飞船的相对速度，实质上就是测两飞船的相对距离随时间的改变率，距离和时间都是用 S 系中的尺和钟来度量. 因此 A，B 在 S 系中的相对速度就等于 A，B 速

度的矢量和. 现在A,B相向飞行,所以其相对速度为 $1.8c$.

(2)设 S' 系固定在A上,问题就变为在 S' 系求B的速度. 由速度合成公式

$$u'_x=\frac{u_x-v}{1-\frac{v}{c^2}u_x}=\frac{-0.9c-0.9c}{1+(0.9c)^2/c^2}=-0.994c$$

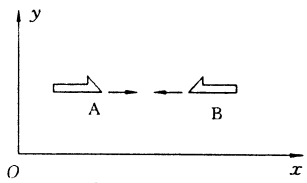


图 7.21

例 2 一光讯号在 S 系中的传播方向与 x 轴的夹角为 θ,传播速度为 c.

(1)证明在 S' 系中此光讯号的传播速度亦为 c;

(2)求此光讯号在 S' 系中的传播方向.

解 (1)在 S 系中,已知

$$u_x=c\cos\theta,\quad u_y=c\sin\theta \tag{5.7}$$

由速度合成公式可得 S' 系中光讯号的传播速度为

$$u'_x=\frac{u_x-v}{1-\frac{v}{c^2}u_x}=\frac{c\cos\theta-v}{1-\frac{v}{c}\cos\theta} \tag{5.8}$$

$$u'_y=u_y\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{v}{c^2}u_x}=\frac{c\sin\theta\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{v}{c}\cos\theta} \tag{5.9}$$

所以在 S' 中光讯号传播速度平方为

$$u'^2=u'^2_x+u'^2_y$$

$$=\frac{(c\cos\theta-v)^2+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)c^2\sin^2\theta}{(1-\frac{v}{c}\cos\theta)^2}=c^2$$

(2)在 S' 系中光讯号传播方向与 x' 轴的夹角为 θ',则

$$\tan\theta'=\frac{u'_y}{u'_x}=\frac{\sin\theta\sqrt{1-\beta^2}}{\cos\theta-\beta} \tag{5.10}$$

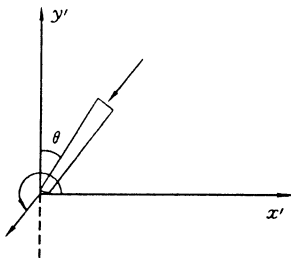


图 7.22

由第一个结果可解释迈克尔逊-莫雷实验,由第二个结果则可解释光行差现象.

设在 S 系中光沿负 y 轴方向传播,即 $\theta=\frac{3}{2}\pi$,则由上式可得

$$\tan\theta'=\frac{\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\sqrt{1-\beta^2}}{\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right)-\beta}=\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}$$

因为地球运动速度 $v\ll c$,故

$$\tan\theta'=\frac{1}{\beta}=\frac{c}{v}$$

在 S 系中望远镜指向 y 轴可看到光线,在 S' 系中望远镜要倾斜一个角度 δ 才能看到光线,如图 7.23 所示.

$$\tan\delta=\tan\left(\frac{3}{2}\pi-\theta'\right)=\cot\theta'=\frac{v}{c} \tag{5.11}$$

2. 时序与因果律

前面指出，在狭义相对论中，同时性是相对的，不同地点发生的两个事件，在一个惯性系中是同时的，在另一个惯性系中就不再是同时的了. 下面要指出，两个事件发生的先后次序在一定条件下也是相对的.

设在 S 系中事件 1 和 2 的时空坐标分别为(x_1,t_1)和(x_2,t_2)；在 S' 系中分别为(x_1',t_1')和(x_2',t_2'). 由洛伦兹变换可得

$$t_2'-t_1'=\frac{(t_2-t_1)-\frac{v}{c^2}(x_2-x_1)}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{5.12}$$

设$(t_2-t_1)>0$，即 $t_2>t_1$，在 S 系中事件 1 先发生，事件 2 后发生.

由上式看到，当满足如下条件时

$$(t_2-t_1)-\frac{v}{c^2}(x_2-x_1)<0 \tag{5.13}$$

则有 $t_2'-t_1'<0$，即 $t_2'<t_1'$，在 S' 系中观察到的事件发生的时间次序正相反. 如果这两件事有因果关系，例如在 S 系中 t_1 时刻发射炮弹，t_2 时刻击中目标，在 S' 系中若这两件事的次序颠倒，将和因果律发生矛盾. 为了克服这一矛盾，爱因斯坦假定，任何物体的运动速度或相互作用的传播速度都不可能大于真空中的光速 c. 这个假定也称为最大速度原理. 按此假定，因果律就不会被破坏了.

由(5.12)看到，若在 S 系中 $t_2-t_1>0$，为保证在 S' 系中 $t_2'-t_1'>0$，必须满足条件

$$(t_2-t_1)-\frac{v}{c^2}(x_2-x_1)>0 \tag{5.14}$$

或

$$\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}v<c^2 \tag{5.15}$$

取

$$u=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1} \tag{5.16}$$

代表联系两个因果事件的讯号速度，例如发射炮弹与击中目标两个事件是由炮弹作为讯号来联系的，u 就是炮弹的运动速度. 按爱因斯坦假定，u,v 都不可能大于 c，因此(5.15)式总能满足，这就保证了因果律不被破坏. (5.15)式也可看成是因果律对讯号速度的限制.

若两个事件需要超光速的讯号才能发生联系，即

$$u=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}>c \tag{5.17}$$

可以不满足(5.15)式的条件，这样两件事的时间次序在 S' 系中就会颠倒，它们之间不可能有因果联系.

把有因果关系的两个事件称为关连事件，原因必须发生在结果之前. 因果律要求，关连事件的时序在洛伦兹变换下是不变的. 其主要条件是关连事件之间的讯号联系或作用传播速度不能超过光速 c. 在相对论中，光速作为物体运动和相互作用传播的极限速度，这也是因果律所要求的. 直到目前，实验没有发现任何被确认的超光速运动，也没有发现任何以超光速传播的相互作用，这就肯定了相对论与因果律的一致性.

3. 时空间隔和光锥

在狭义相对论中，两个事件的时间间隔和空间距离与参考系有关，都是相对的量. 但是，若定义两个事件的时空间隔 Δs 为

$$\begin{aligned}\Delta s^2 &= c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \\ &= c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2\end{aligned} \tag{5.18}$$

则可由洛伦兹变换直接证明 Δs^2 是不变量，即

$$\begin{aligned}\Delta s^2 &= c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta x^2 \\ &= c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2\end{aligned} \tag{5.19}$$

若两个事件的时间间隔与空间距离都是无限小的，则它们的时空间隔平方可表示为

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 \tag{5.20}$$

由于时空间隔在洛伦兹变换下是不变的，是与参考系无关的绝对量，因此按照时空间隔的取值情况可将物理事件分类.

① $\Delta s^2 = 0$. 这时

$$\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = c^2\Delta t^2$$

这两个事件可由光讯号相互联系，Δs 称为类光间隔；

② $\Delta s^2 > 0$. 这时 $\Delta r^2 < c^2\Delta t^2$，它们之间可用低于光速的信号联系. 这两个事件发生的先后次序是绝对的，不可能通过洛伦兹变换把时序颠倒过来或变成同时发生. 但由洛伦兹变换可使它们在同地发生，时序仍不变. 这类事件的间隔称为类时间隔.

③ $\Delta s^2 < 0$. 这时 $\Delta r^2 > c^2\Delta t^2$，这两个事件的空间距离大于光讯号在 Δt 时间内能传播的距离，两个事件之间不能建立任何联系. 通过洛伦兹变换可使它们同时发生或把时序颠倒过来，但不能使它们在同地发生. 这类事件的间隔称为类空间隔.

任意两个事件的时空间隔必定属于上述三类时空间隔的某一类. 因为具有类空间隔的两个事件，时序是相对的，因此有因果联系的关连事件必定不是类空间隔，类空间隔只能是非关连事件. 类时间隔和类光间隔的时序不会改变，因此，关连事件或是类时间隔，或者是类光间隔.

为了形象地把上述三类事件的时空坐标分布情况用图形表示出来(见图 7.23)，将事件 1 取为时空坐标的原点 O，事件 2 由 P 点表示，其时空坐标为 (x, y, z, t)，使它们之间的时空间隔平方为零，即

$$(x^2 + y^2 + z^2) - c^2t^2 = 0$$

这是四维时空中的三维锥面，称为光锥. 用二维图形的两条直线 $r = \pm ct$ 来表示.

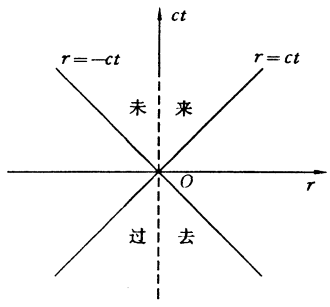


图 7.23

① 若 P 点在锥面上，则 $\Delta s^2 = 0$，$r = ct$，O，P 之间为类光间隔，可用光讯号相联系.

② 若 P 点在光锥外，则 $\Delta s^2 < 0$，$r > ct$，O，P 之间为类空间隔，它们是非关连事件，时序是相对的.

③ 若 P 点在光锥内，则 $\Delta s^2 > 0$，$r < ct$，O，P 之间为类时间隔，可用低于光速的讯号联系.

若 P 和 O 是关连事件，则 P 一定在锥面内或锥面上. O，P 之间的时序是绝对不变的，可进一步划分为两个区域：

若 P 在上半个光锥内，其 $t > 0$，相对于 O 为绝对未来；若 P 在下半个光锥内，其 $t < 0$，相对

于 O 为绝对过去. 故事件 1 的原因必在下半个光锥，其结果则必在上半个光锥.

§6 洛伦兹变换的四维形式

根据相对论的基本原理，任何物理规律在一切惯性系中都具有相同的形式. 物理规律总是通过一定的数学方程表达出来的，按相对论的要求，表达物理规律的数学方程在不同惯性系中应具有相同的形式. 我们知道在相对论中各惯性系间的时空坐标变换由洛伦兹变换表达. 因此要检验一个物理运动方程是否满足相对论要求，就要检验它在洛仑兹变换下是否协变. 只有洛仑兹变换下是协变的运动方程，才能正确描述物理规律. 这一思想是相对论的重要结论，它给我们指出了寻求新的物理规律的方向. 现代的理论物理正在这一思想指导下向前发展.

下面我们将检验电磁运动方程和牛顿力学方程在洛伦兹变换下是否协变. 如果直接用洛伦兹变换进行运算，检验运动方程的协变性过程将很复杂，为了使这一过程变得简单，需要将洛伦兹变换改写成四维形式.

用 x_1, x_2, x_3 分别代表 x, y, z 坐标. 从洛伦兹变换(2.2)式可直接证明

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2t^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - c^2t'^2$$

引入 $x_4 = ict$，上式可改写为

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 \tag{6.1}$$

我们称由 (x_1, x_2, x_3, x_4) 组成的空间为四维时空，在数学上把满足条件(6.1)式的线性变换称为线性正交变换，或简称为正交变换. 洛伦兹变换是四维时空中的正交变换. 正交变换的一般形式可写为

$$x_\mu' = \sum_{\nu=1}^{4} \alpha_{\mu\nu} x_\nu \tag{6.2}$$

$\alpha_{\mu\nu}$ 是变换系数，为简化书写，在理论物理中常用重复指标代替求和符号，规定在一个项中若两个量的下标重复，就表示对该下标所有可能的值求和. 按此规定(6.2)式可简写为

$$x_\mu' = \alpha_{\mu\nu} x_\nu \tag{6.3}$$

这种简记方法是爱因斯坦最先引用的，称为爱因斯坦惯例. 我们用 $\mu, \nu, \cdots$ 等希腊字母代表四维空间的分量，用 $i, j, \cdots$ 等拉丁字母表示三维空间分量.

下面讨论线性正交变换的性质. (6.1)式可简写为

$$x_\mu' x_\mu' = x_\nu x_\nu \tag{6.4}$$

将(6.3)代入上式左端得

$$\alpha_{\mu\sigma}\alpha_{\mu\lambda} x_\sigma x_\lambda = x_\nu x_\nu$$

对比两端的系数可得

$$\begin{aligned} &\alpha_{\mu\sigma}\alpha_{\mu\lambda} = 1 \qquad && \sigma = \lambda \\ &\alpha_{\mu\sigma}\alpha_{\mu\lambda} = 0 \qquad && \sigma \neq \lambda \end{aligned} \tag{6.5}$$

引用符号

$$\delta_{\sigma\lambda} = \begin{cases} 1, & \sigma = \lambda \\ 0, & \sigma \neq \lambda \end{cases}$$

则(6.5)可统一表为

$$\alpha_{\mu\sigma}\alpha_{\mu\lambda}=\delta_{\sigma\lambda} \tag{6.6}$$

(6.3)式的逆变换可表示为

$$x_\mu=\beta_{\mu\nu}x'_\nu$$

$$x'_\mu=\alpha_{\mu\lambda}x_\lambda=\alpha_{\mu\lambda}\beta_{\lambda\nu}x'_\nu \tag{6.7}$$

对比两端系数得

$$\alpha_{\mu\delta}\beta_{\delta\nu}=\delta_{\mu\nu} \tag{6.8}$$

另方面由(6.6)式有

$$\alpha_{\mu\sigma}\alpha_{\mu\lambda}\beta_{\lambda\nu}=\delta_{\sigma\lambda}\beta_{\lambda\nu}$$

再利用(6.8)式可得

$$\alpha_{\mu\sigma}\delta_{\mu\nu}=\delta_{\sigma\lambda}\beta_{\lambda\nu}$$

或

$$\alpha_{\nu\sigma}=\beta_{\sigma\nu} \tag{6.9}$$

以上得到的(6.6)、(6.8)和(6.9)式是正交变换的三个重要性质，以后将常用到这些性质.

在四维时空中，沿 x 轴相互运动的惯性系间的洛伦兹变换可用矩阵形式表为

$$\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\x'_3\\x'_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}&0&0&\dfrac{\mathrm{i}\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\\dfrac{-\mathrm{i}\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}&0&0&\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \tag{6.10}$$

变换矩阵为

$$[\alpha_{\mu\nu}]=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}&0&0&\dfrac{\mathrm{i}\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\\dfrac{-\mathrm{i}\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}&0&0&\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\end{pmatrix} \tag{6.11}$$

利用上式可直接验证正交变换的各种性质.

在理论物理中，广泛地利用物理量的变换性质将物理量分类. 大家知道物理量可分为标量、矢量、二阶张量等. 过去，按这些量在三维空间的几何特性来分类，有一个方向的量称为矢量，有两个方向的量称为二阶张量. 这种分类方法局限性较大，对多维空间和高阶张量就不方便. 根据变换性质分类适用性更广，为使大家理解这种分类的来源，让我们回到三维空间. 在三维空间中一个矢量

$$\boldsymbol{r}=x_1\boldsymbol{i}+x_2\boldsymbol{j}+x_3\boldsymbol{k}$$

的分量 x_i 在正交变换时的变换规律是

$$x'_i=\alpha_{ij}x_j$$

而矢量的长度

$$l=x_ix_i=x'_jx'_j$$

在正交变换时是不变的，长度是一个标量. 下面将这些结果推广到四维空间.

在四维空间中一个物理量只需一个量来表达，并且在正交变换下数值不变，称这个量为标

量. 如果一个物理量有四个分量 A_μ，这些分量在正交变换时如同坐标分量一样变换，即

$$A'_\mu = \alpha_{\mu\nu} A_\nu \tag{6.12}$$

则这个物理称为矢量. 如果一个物理量有 16 个分量 $F_{\mu\nu}$，在正交换变时每个分量的变换规律为

$$F'_{\mu\omega} = \alpha_{\mu\sigma}\alpha_{\nu\lambda} F_{\sigma\lambda} \tag{6.13}$$

则这个物理量称为二阶张量. 凡是在洛伦兹变换下具有确定变换性质的量，称为洛伦兹协变量.

利用上述结果，检验一个物理方程在洛伦兹变换下是否协变，就比较简单了，只要检查方程中的每一项是否属于同一类协变量. 每一项是同一类协变量，它的变换规律相同，整个运动方程一定是协变的.

§7 真空中电动力学方程的相对论协变形式

我们的任务是寻找满足相对论要求的真空中电动力学方程，并且将电动力学方程写成明显的相对论协变形式. 首先检查已得到的电动力学方程是否有洛伦兹协变性，如果是洛伦兹协变的，则电动力学方程就满足相对论要求，如果已有的电动力学方程不协变，再设法寻找新的方程.

已有的电动力学方程主要的有势方程、场方程和力的方程.

1. 势方程的协变性

势方程为

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \tag{7.1}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \boldsymbol{J} \tag{7.2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \tag{7.3}$$

因其中有 $\boldsymbol{J}$ 与 ρ，故检验上述方程的协变性时，还应同时考虑电荷守恒定律

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{7.4}$$

先将(7.3)式改写成四维形式

$$\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} + \frac{\partial A_4}{\partial x_4} = 0 \tag{7.5}$$

其中

$$A_4 = \mathrm{i}\frac{\phi}{c}$$

再将(7.4)式改写成四维形式

$$\frac{\partial J_1}{\partial x_1} + \frac{\partial J_2}{\partial x_2} + \frac{\partial J_3}{\partial x_3} + \frac{\partial J_4}{\partial x_4} = 0 \tag{7.6}$$

其中

$$J_4 = \mathrm{i}c\rho$$

(7.5)和(7.6)式可简写为

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}=0 \tag{7.7}$$

$$\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu}=0 \tag{7.8}$$

注意到

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu}=\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}=\beta_{\nu\mu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}=a_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}$$

是按矢量规律变换的. 若假定 $A_\mu\left(\boldsymbol{A},\mathrm{i}\frac{\phi}{c}\right)$ 和 $J_\mu(\boldsymbol{J},\mathrm{i}c\rho)$ 都是四维矢量，则(7.7)和(7.8)式都是标量方程，它们显然是洛伦兹协变的.

再设法将(7.1)改写成四维形式

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^{\,2}}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^{\,2}}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^{\,2}}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_4^{\,2}}=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

注意到 $A_4=\mathrm{i}\frac{\phi}{c}$，$J_4=\mathrm{i}c\rho$，上式可改写为

$$\frac{\partial^2 A_4}{\partial x_\mu\partial x_\mu}=-\mu_0 J_4 \tag{7.9}$$

(7.2)的三个分量方程可写为

$$\frac{\partial^2 A_i}{\partial x_\mu\partial x_\mu}=-\mu_0 J_i \tag{7.10}$$

将(7.9)和(7.10)合并写为

$$\frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x_\mu\partial x_\mu}=-\mu_0 J_\nu \tag{7.11}$$

上述方程中每一项都是伦兹变换的矢量，因此它在洛伦兹变换下一定具有协变性.

由上述我们看到，只要假定 A_μ，J_μ 是四维矢量，则原先电动力学中的势方程满足相对论要求，(7.7)、(7.8)及(7.11)式就是洛伦兹条件、电荷守恒定律、及势方程的相对论形式. 或者换句话说，原先的势方程等是自然满足相对论要求的，只不过原先看来无关的量如，(A,ϕ)和(J,ρ)，在相对论形式下都是一个统一的四维矢量中的分量.

2. 电磁场方程的协变性

由于

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}\qquad \boldsymbol{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$$

在直角坐标系中有

$$B_1=\frac{\partial A_3}{\partial x_2}-\frac{\partial A_2}{\partial x_3},\qquad E_1=\mathrm{i}c\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_1}-\frac{\partial A_1}{\partial x_4}\right)$$

$$B_2=\frac{\partial A_1}{\partial x_3}-\frac{\partial A_3}{\partial x_1},\qquad E_2=\mathrm{i}c\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_2}-\frac{\partial A_2}{\partial x_4}\right)$$

$$B_3=\frac{\partial A_2}{\partial x_1}-\frac{\partial A_1}{\partial x_2},\qquad E_3=\mathrm{i}c\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_3}-\frac{\partial A_3}{\partial x_4}\right)$$

若引入二阶张量 $F_{\mu\nu}$

$$F_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \tag{7.12}$$

则电场 $\boldsymbol{E}$，磁场 $\boldsymbol{B}$ 是 $F_{\mu\nu}$ 的分量，具体写出为

$$[F_{\mu\nu}]=\begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & \frac{-\mathrm{i}}{c}E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & \frac{-\mathrm{i}}{c}E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & \frac{-\mathrm{i}}{c}E_3 \\ \frac{\mathrm{i}}{c}E_1 & \frac{\mathrm{i}}{c}E_2 & \frac{\mathrm{i}}{c}E_3 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.13}$$

$F_{\mu\nu}$ 称为电磁场张量. 利用 $F_{\mu\nu}$ 可将场方程改写成四维形式.

场方程有四个

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{7.14}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{7.15}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{7.16}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{7.17}$$

先以(7.14)为例，把

$$\frac{\partial E_1}{\partial x_1}+\frac{\partial E_2}{\partial x_2}+\frac{\partial E_3}{\partial x_3}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

改写成

$$-\mathrm{i}c\left(\frac{\partial F_{41}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{42}}{\partial x_2}+\frac{\partial F_{43}}{\partial x_3}\right)=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

因为 $F_{44}=0$，故上式又可写成

$$\frac{\partial F_{4\nu}}{\partial x_\nu}=\mu_0 J_4 \tag{7.18}$$

(7.15)的第一个分量方程为

$$\frac{\partial B_3}{\partial x_2}-\frac{\partial B_2}{\partial x_3}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_1}{\partial t}=\mu_0 J_1$$

改写成

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial F_{13}}{\partial x_3}+\frac{\partial F_{14}}{\partial x_4}=\frac{\partial F_{1\nu}}{\partial x_\nu}=\mu_0 J_1 \tag{7.19}$$

其余两个分量方程为

$$\frac{\partial F_{2\nu}}{\partial x_\nu}=\mu_0 J_2,\qquad \frac{\partial F_{3\nu}}{\partial x_\nu}=\mu_0 J_3 \tag{7.20}$$

于是可将(7.14)与(7.15)两个场方程统一写成四维形式

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=\mu_0 J_\mu \tag{7.21}$$

用同样办法可将(7.16)和(7.17)两个场方程写成四维形式

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}+\frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}=0 \tag{7.22}$$

(7.21)式中的每一项是四维矢量，(7.22)式中的每一项是四维空间中的三阶张量，都是洛伦兹

协变量，因而这些方程在洛伦兹变换下是协变的. 这表明原先的麦克斯韦方程组满足相对论的要求，但是原先的电场磁场是统一的电磁场张量的分量，在相对论形式中应该用电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 来统一描述电磁场.

3. 洛伦兹力公式的协变性

洛伦兹力密度公式为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f} &= \rho(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \\ f_1 &= \rho E_1 + \rho(v_2 B_3 - v_3 B_2) \\ &= J_4 F_{14} + J_2 F_{12} + J_3 F_{13} \\ &= F_{1\nu} J_\nu \end{aligned} \tag{7.23}$$

其余两个分量方程有类似的形式

$$f_2 = F_{2\nu} J_\nu \qquad f_3 = F_{3\nu} J_\nu \tag{7.24}$$

洛伦兹力公式只有三个分量，从(7.23)和(7.24)式看到公式的左端是四维协变的矢量，因此力公式的相对论形式也应是四维矢量，可假定为

$$f_\mu = F_{\mu\nu} J_\nu \tag{7.25}$$

上式在洛伦兹变换下是协变的，其前三个分量就是原先的洛伦力公式，第四个分量为

$$\begin{aligned} f_4 &= F_{4\nu} J_\nu \\ &= \frac{\mathrm{i}}{c}(E_1 v_1 \rho + E_2 v_2 \rho + E_3 v_3 \rho) \\ &= \frac{\mathrm{i}}{c} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} \end{aligned}$$

这表明在相对论中，$\left(\boldsymbol{f}, \frac{\mathrm{i}}{c} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} \right)$ 组成一个四维矢量.

4. 动量、能量守恒定律的四维协变形式

在上述四维协变的场方程和洛伦兹力的基础上，可以把动量守恒定律和能量守恒定律统一写成四维协变形式.

四维洛伦兹力密度为

$$f_\mu = F_{\mu\nu} J_\nu$$

将场方程(7.21)式

$$\frac{\partial}{\partial x_\lambda} F_{\mu\lambda} = \mu_0 J_\mu$$

代入得

$$\begin{aligned} \mu_0 f_\mu &= F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} F_{\nu\lambda} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_\lambda}(F_{\mu\nu} F_{\mu\lambda}) - F_{\nu\lambda} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} F_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{7.26}$$

因为

$$\begin{aligned} F_{\nu\lambda} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} F_{\mu\nu} &= F_{\lambda\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} F_{\mu\lambda} \\ &= \frac{1}{2}\left(F_{\nu\lambda} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} F_{\mu\nu} + F_{\lambda\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} F_{\mu\lambda} \right) \end{aligned}$$

利用电磁场张量的反对称性，$F_{\lambda\nu} = -F_{\nu\lambda}$，$F_{\mu\lambda} = -F_{\lambda\mu}$，上式又可写为

$$F_{\nu\lambda}\frac{\partial}{\partial x_\lambda}F_{\mu\nu}=\frac{1}{2}F_{\nu\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial x_\lambda}F_{\mu\nu}+\frac{\partial}{\partial x_\nu}F_{\lambda\mu}\right)$$

再将场方程(7.22)式代入上式,得

$$\begin{aligned}F_{\nu\lambda}\frac{\partial}{\partial x_\lambda}F_{\mu\nu}&=-\frac{1}{2}F_{\nu\lambda}\frac{\partial}{\partial x_\mu}F_{\nu\lambda}\\&=-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_\mu}(F_{\nu\lambda}F_{\nu\lambda})\end{aligned}$$

将上述结果代入(7.26)式,得

$$\mu_0 f_\mu=\frac{\partial}{\partial x_\lambda}(F_{\mu\nu}F_{\nu\lambda})+\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_\mu}(F_{\nu\lambda}F_{\nu\lambda})$$

或

$$f_\mu=\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left(F_{\mu\nu}F_{\nu\lambda}+\frac{1}{4}\delta_{\mu\lambda}F_{\nu\sigma}F_{\nu\sigma}\right)$$

定义四维能量-动量张量

$$T_{\mu\lambda}=\frac{1}{\mu_0}\left(F_{\mu\nu}F_{\nu\lambda}+\frac{1}{4}\delta_{\mu\lambda}F_{\nu\sigma}F_{\nu\sigma}\right)\tag{7.27}$$

上式可写成

$$f_\mu=\frac{\partial}{\partial x_\lambda}T_{\mu\lambda}\tag{7.28}$$

由(7.13)式可推知

$$\begin{aligned}T_{44}&=\frac{1}{\mu_0}\left(F_{4\nu}F_{\nu4}+\frac{1}{4}F_{\nu\sigma}F_{\nu\sigma}\right)\\&=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2+\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}B^2=w\end{aligned}$$

是场能密度.

$$T_{14}=T_{41}=\frac{1}{\mu_0}F_{1\nu}F_{\nu4}=\frac{-\mathrm{i}}{\mu_0 c}(E_2B_3-E_3B_2)$$

$$T_{24}=T_{42}=\frac{1}{\mu_0}F_{2\nu}F_{\nu4}=\frac{-\mathrm{i}}{\mu_0 c}(E_3B_1-E_1B_3)$$

$$T_{34}=T_{43}=\frac{1}{\mu_0}F_{3\nu}F_{\nu4}=\frac{-\mathrm{i}}{\mu_0 c}(E_1B_2-E_2B_1)$$

因为动量密度和能流密度有关系式

$$\boldsymbol{g}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}=\frac{1}{c^2}\boldsymbol{S}$$

故(7.27)可写成矩阵形式

$$[T_{\mu\lambda}]=\begin{pmatrix}\mathscr{T} & -\mathrm{i}c\boldsymbol{g}\\ -\dfrac{\mathrm{i}}{c}\boldsymbol{S} & w\end{pmatrix}\tag{7.29}$$

方程(7.28)的前三个分量可写成

$$\boldsymbol{f}=\nabla\cdot\mathscr{T}-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{g}\tag{7.30}$$

微分形式的动量守恒定律.由方程(7.28)的第四个分量可得

$$\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}=-\nabla\cdot\boldsymbol{S}-\frac{\partial}{\partial t}w\tag{7.31}$$

是微分形式的能量守恒定律.

5. 四维作用力

在相对论中，$\left(\boldsymbol{f}, \frac{\mathrm{i}}{c}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\right)$ 组成四维力密度矢量 f_μ. 为了以后建立相对论力学方程，还需把作用在物体上的总力也写成四维协变形式. 力密度 f_μ 已是四维矢量，应设法找到一个体积元标量，使总力构成四维矢量.

设某一时刻物体以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动，可证明物体的固有体积元

$$\mathrm{d}V_0 = \frac{\mathrm{d}V}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{7.32}$$

是与参考系无关的标量，其中 $\beta=v/c$. 因洛伦兹变换是四维空间中的正交变换，正交变换相当于坐标轴旋转，故在正交变换下四维体积是个不变量，即

$$\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4 = \mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'\mathrm{d}x_3'\mathrm{d}x_4' \tag{7.33}$$

另一方面，设物体在 $\mathrm{d}t$ 时间内移动了 $\mathrm{d}l$ 距离，相应的时空间隔为

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}l^2 = c^2\mathrm{d}t^2\left(1-\frac{1}{c^2}v^2\right)$$

故

$$c\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{7.34}$$

利用上式，四维体积元可写成

$$\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4 = \mathrm{d}V(\mathrm{i}c\mathrm{d}t) = \frac{\mathrm{i}\mathrm{d}s\cdot\mathrm{d}V}{\sqrt{1-\beta^2}} = \text{不变量}$$

因间隔 $\mathrm{d}s$ 是不变量，而 i 是一个具体的常数，由此证明了(7.32)式的固有体积元是洛伦兹变换下的标量. 因此可设总的四维力为

$$K_\mu = \int f_\mu \mathrm{d}V_0 = \int f_\mu \frac{\mathrm{d}V}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{7.35}$$

K_μ 是洛伦兹协变量，是四维矢量. K_μ 的空间分量为

$$K_i = \int \frac{f_i\mathrm{d}V}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{F_i}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{7.36}$$

K_μ 的第四分量为

$$K_4 = \int \frac{f_4\mathrm{d}V}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\mathrm{i}}{c}\frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{7.37}$$

注意(7.36)和(7.37)式中的 v 是受力物体的速度. 物体静止时 $v=0$，$K_i=F_i$，$K_4=0$. 上述力的表达式虽来自洛伦兹力，但洛伦兹力没有任何特殊性，因此可将它们推广到任何力的情况.

总结以上讨论可以得出结论：原有的电动力学方程在洛伦兹变换下是协变的，满足相对论要求. 但是必须承认 $A_\mu\left(\boldsymbol{A}, \mathrm{i}\frac{\phi}{c}\right)$，$J_\mu(\boldsymbol{J}, \mathrm{i}c\rho)$ 是四维矢量，$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$ 组成统一的电磁场张量 $F_{\mu\nu}$. 总的四维力应为

$$(K_\mu) = \left(\frac{\boldsymbol{F}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{\mathrm{i}}{c}\frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \tag{7.38}$$

利用 A_μ，J_μ，$F_{\mu\nu}$，K_μ 在洛伦兹变换下的变换规律，可以求得许多有意义的结果.

例 1 利用 A_μ, J_μ 的矢量性质求 $\boldsymbol{A}, \phi, \boldsymbol{J}, \rho$ 在各惯性系间的变换关系.

解 由

$$A'_\mu = \alpha_{\mu\nu} A_\nu$$

得

$$\begin{aligned} A'_\lambda &= \alpha_{1\nu} A_\nu \\ &= \alpha_{11} A_1 + \alpha_{12} A_2 + \alpha_{13} A_3 + \alpha_{14} A_4 \\ &= \frac{A_1 - \frac{v}{c^2}\phi}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned} \tag{7.39}$$

$$A'_2 = A_2, \qquad A'_3 = A_3$$

$$A'_4 = \alpha_{41} A_1 + \alpha_{44} A_4 \qquad \phi' = \frac{\phi - vA_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

同样办法可求得

$$J'_1 = \frac{J_1 - v\rho}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$J'_2 = J_2 \qquad J'_3 = J_3$$

$$\rho' = \frac{\rho - \frac{v}{c^2} J_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{7.40}$$

若电荷静止在 S 系中，总电量为 $\mathrm{d}Q$，分布在 $\mathrm{d}V$ 内，密度为 ρ，则在 S' 系电荷密度 ρ' 为

$$\rho' = \frac{\rho}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

但 S 系认为，在 S' 系中电荷的体积要缩小，即

$$\mathrm{d}V' = \mathrm{d}V\sqrt{1-\beta^2}$$

于是总电量是一个不变量.

$$\mathrm{d}Q' = \rho' \mathrm{d}V' = \frac{\rho}{\sqrt{1-\beta^2}} \mathrm{d}V \sqrt{1-\beta^2} = \rho \mathrm{d}V = \mathrm{d}Q$$

例 2 利用 $F_{\mu\nu}$ 的变换性质求 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ 在各坐标系间的变换关系.

解 因为

$$F'_{\mu\omega} = \alpha_{\mu\sigma}\alpha_{\nu\lambda} F_{\sigma\lambda}$$

以 $F'_{12} = B'_3$ 为例，具体写出各项为

$$\begin{aligned} B'_3 &= F'_{12} = \alpha_{1\sigma}\alpha_{2\lambda} F_{\sigma\lambda} \\ &= \alpha_{11}\alpha_{2\lambda} F_{1\lambda} + \alpha_{14}\alpha_{2\lambda} F_{4\lambda} \\ &= \alpha_{11}\alpha_{22} F_{12} + \alpha_{14}\alpha_{22} F_{42} \\ &= \frac{B_3 - \frac{v}{c^2} E_2}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}$$

其余各分量计算方法相同，最后得

$$E'_1 = E_1 \qquad B'_1 = B_1$$

$$E'_2 = \frac{E_2 - vB_3}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad B'_2 = \frac{B_2 + \frac{v}{c^2} E_3}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{7.41}$$

$$E_3' = \frac{E_3 + vB_2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad B_3' = \frac{B_3 - \frac{v}{c^2}E_2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

利用场的变换公式可以求出等速运动点电荷 Q 产生的电磁场. 设电荷位于 S' 系的原点，以速度 v 沿 S 系的 x 轴运动. 在 S' 系中只有电场，即

$$B_1' = B_2' = B_3' = 0$$

$$E_1' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x'}{r'^3}$$

$$E_2' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y'}{r'^3}$$

$$E_3' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z'}{r'^3}$$

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

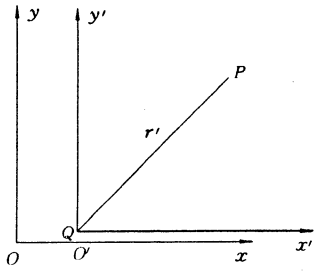


图 7.24

在(7.41)式中，将 v 换为 $-v$，得电磁场的逆变换公式，由此求得 S 系中的电磁场为

$$E_1 = E_1' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x'}{r'^3}$$

$$E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y'}{r'^3}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$E_3 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z'}{r'^3}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{7.42}$$

$$B_1 = 0, B_2 = -\frac{v/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z'}{r'^3}$$

$$B_3 = \frac{v/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y'}{r'^3}$$

利用洛伦兹变换将 r' 与 x', y', z' 换为 S 中的值

$$x = x'\sqrt{1-\beta^2} \quad y = y' \quad z = z' \tag{7.43}$$

$$r'^2 = \frac{x^2}{1-\beta^2} + y^2 + z^2 = \frac{r^2}{1-\beta^2} - \frac{\beta^2(r^2 - x^2)}{1-\beta^2}$$

再注意到 $x = \boldsymbol{r}\cdot\frac{\boldsymbol{v}}{v}$ 可得

$$r'^2 = \frac{1}{1-\beta^2}\left[r^2(1-\beta^2) + \frac{(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})^2}{c^2}\right] \tag{7.44}$$

将(7.43)和(7.44)代入(7.42)式得

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q(1-\beta^2)\boldsymbol{r}}{\left[r^2(1-\beta^2) + \left(\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}}{c}\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q(1-\beta^2)}{\left[r^2(1-\beta^2) + \left(\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}}{c}\right)^2\right]^{3/2}}\frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\times\boldsymbol{r}$$

$$= \frac{1}{c^2}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E} \tag{7.45}$$

由此我们看到了电磁场的相对性质. 在 S' 系中只是球对称的静电场，在 S 系中就出现磁场，电

场分布也发生了形变，平行于速度方向的分量保持不变，垂直于速度的电场分量则增大了.

利用场的变换公式(7.41)式还可以直接证明

$$E'^2 - c^2B'^2 = E^2 - c^2B^2$$

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}'\cdot\boldsymbol{B}' \tag{7.46}$$

这是电磁场的两个不变量. 对于平面电磁波有 $E=cB$，$\boldsymbol{E}$ 垂直于 $\boldsymbol{B}$，因而有

$$E^2 - c^2B^2 = 0$$

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B} = 0$$

由于上两式是不变量，故在任何惯性系中平面电磁波都将有上述特性.

例 3 利用四维力的矢量特性求各坐标系间一般三维空间中的力 $\boldsymbol{F}$ 的变换公式.

解 为简单设物体在 S' 系中静止，受力为 F'，在 S 系中物体速度为 $\boldsymbol{v}$，受力为 $\boldsymbol{F}$. 由(7.38)式可知，在 S' 和 S 系中的四维力分别为

$$K'_\mu(F',0), K_\mu\left(\frac{\boldsymbol{F}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathrm{i}\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F}}{c\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

由洛伦兹逆变换

$$K_1 = \frac{K'_1 - \mathrm{i}\beta K_4}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

注意到 $K'_1=F'_1$，$K'_4=0$，有

$$\frac{F_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{F'_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad F_1 = F'_1 \tag{7.47}$$

由 $K_2=K'_2$，$K_3=K'_3$ 可得

$$\frac{F_2}{\sqrt{1-\beta^2}} = F'_2, \qquad \frac{F_3}{\sqrt{1-\beta^2}} = F'_3 \tag{7.48}$$

(7.47)和(7.48)式说明，在相对论中，物体受力在不同坐标系中是不同的，即物体受力情况也和物体的运动状况有关.

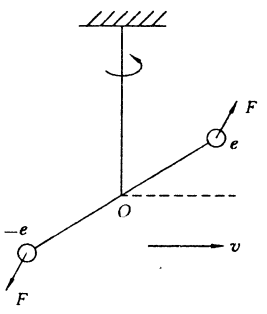


图 7.25

利用力的变换公式可以解释历史上著名的特鲁顿-诺勃尔(Trouton-Noble)实验. 这个实验是在 1904 年做的，大意如下：

在一根小棒的两端分别有电荷 $-e$ 和 e，水平挂在实验室中，在实验室内两电荷只受静电作用力，处于平衡状态. 若实验室以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动(例如地球的轨道运动)，电荷亦随着运动产生磁场，运动电荷将受到磁力 $\boldsymbol{F}$ 作用. 磁力不沿电荷连线，并且作用正负电荷上的力方向相反，形成力矩，棍将发生转动，如图 7.25 所示. 然而实验却观测不到转动. 在牛顿时空中无法解释这个实验. 现在可用相对论中得到的力的变换规律来解释.

设实验室坐标系为 S'，它相对 S 以速度 v 运动. 在 S' 系中，作用在电荷 e 上的力有静电力 F'_e，与棍的弹性反应力 F'_s，这两个力大小相等方向相反使电荷静止不动. 按力的变换公式(7.47)和(7.48)，平行于速度 v 方向的力 $F_1=F'_1$，但垂直于速度方向的力在 S 系中要变小，即 $F_2=F'_2\sqrt{1-\beta^2}$，因此在 S 系中电荷受的电磁力与弹性力都不再沿两电荷连线方向，如图 7.26 所示. 作用在负电荷上的力也发生相应变化，图中没有画出. $\boldsymbol{F}_s$，$\boldsymbol{F}_e$ 虽不沿电荷连线，但由于按相同规律变化，因而在 S 系中仍处于平衡，所以在 S 系中观测

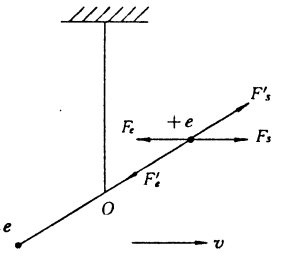


图 7.26

不到棍的转动. 在相对论出现前，只认为电荷运动的电磁力形成力矩，不认为弹性力也会形成力矩，因而无法解释实验结果.

§8 相对论粒子动力学

现在我们来讨论满足相对论要求的力学方程. 牛顿运动方程在伽利略变换下是不变的，因而在洛伦兹变换下不再具有协变性，牛顿运动方程不能满足相对论要求，必须寻找符合相对论要求的力学方程，称为相对论力学方程.

必须指出，在相对论中不存在刚体. 刚体是指在任何情况下都不发生形变的物体，相对论中任何作用都以有限速度传播，作用在一个物体上的力也是以有限速度从受力点到另外的点，因此物体中各点不可能同时开始运动，物体将发生形变. 这说明有限尺寸的物体不可能是刚体. 在研究微观粒子的力学运动时，都应将微观粒子看成几何质点. 我们在这里只讨论相对论质点力学，相对论力学方程在洛伦兹变换下必须是协变的，方程中每一项必须是洛伦兹协变量. 力学方程给出了物体的速度变化和它所受力之间的关系. 前面已获得了物体所受力的四维协变形式，这里首先研究四维速度和加速度的协变形式. 我们已知力是四维矢量，因此速度加速度也必须是四维矢量. 虽然

$$\mathrm{d}x'_\mu = \alpha_{\mu\nu}\mathrm{d}x_\nu$$

是四维矢量，但 $\mathrm{d}t$ 不是洛伦兹变换下的标量，因此 $\mathrm{d}x_\mu/\mathrm{d}t$ 不是四维矢量. 应找一个标量时间间隔. 设物体在 $\mathrm{d}t$ 时间内运动了 $\mathrm{d}l$ 距离，在 $\mathrm{d}t$ 内物体速度可看为常数，因而物体可作惯性系，在随着物体运动的坐标系内对这个过程测出的时间为 $\mathrm{d}\tau$. 上述事件的时空间隔为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 &= -\left(\mathrm{d}l^2 - c^2\mathrm{d}t^2\right)\\ &= -\left(\mathrm{d}l'^2 - c^2\mathrm{d}\tau^2\right) = c^2\mathrm{d}\tau^2\end{aligned}$$

在随物体运动的坐标系内全部过程都发生在同一点，故 $\mathrm{d}l' = 0$. 间隔 $\mathrm{d}s$ 是不变量，因而 $\mathrm{d}\tau$ 也是不变量，由上式可求得

$$\begin{aligned}c^2\mathrm{d}\tau^2 &= c^2\mathrm{d}t^2\left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}l^2}{\mathrm{d}t^2}\right)\\ &= c^2\mathrm{d}t^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\end{aligned}$$

故

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t\sqrt{1-\beta^2}$$

由于 $\mathrm{d}\tau$ 是洛伦兹变换下的标量，可定义四维速度为

$$u_\mu = \frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau} \tag{8.1}$$

u_μ 必然是四维矢量. u_μ 的空间分量为

$$u_i = \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \frac{v_i}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{8.2}$$

第四分量为

$$u_4 = \frac{\mathrm{d}x_4}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{i}c}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{8.3}$$

定义四维加速度为

$$a_\mu = \frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}\tau} \tag{8.4}$$

其空间分量为

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v_i}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \tag{8.5}$$

第四分量为

$$a_4 = \frac{\mathrm{i}c}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \tag{8.6}$$

前面已知四维力的形式为

$$K_\mu\left(\frac{\boldsymbol{F}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{\mathrm{i}}{c}\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

有了四维加速度和四维力后，就可以着手建立力学方程了. 假定在相对论中加速度仍和外力成正比，或者动量变化率和力成正比，则相对论力学方程的形式为

$$K_\mu = m_0 \frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}\tau} \text{ 或 } K_\mu = \frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}\tau} \tag{8.7}$$

上式中 m_0 是一常量，$p_\mu = m_0 u_\mu$ 称为四维动量. 上述方程的空间分量为

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \tag{8.8}$$

第四分量为

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \tag{8.9}$$

(8.7)的力学方程是否正确呢？它在洛伦兹变换下是协变的，因而满足相对论要求. 如果定义

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{8.10}$$

为运动质点的质量，定义

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = \frac{m_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{8.11}$$

为运动质点的动量，则(8.8)方程的意义为：动量改变率等于质点所受的外力. 当 $v \ll c$ 时，(8.8)式化为

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_0\boldsymbol{v})$$

这和牛顿方程完全一致. 由(8.10)式看出，当质点的速度 $v=0$ 时，$m=m_0$，故 m_0 是质点的静止质量. (8.10)式表明，若保留在牛顿力学中的质量概念，则在相对论中物体的质量将随运动速度增加. 当速度 v 接近 c 时，物体质量和动量都趋于无穷，在有限力的作用下其动量的改变趋于零，这就保证物体的速度不能超过光速. 由于物体质量与运动状态有关，故在相对论中物体的质量都是指静止质量.

以上讨论说明，从逻辑上看(8.7)式作为相对论力学方程是合理的. 当然它的正确性最终由实验来证明. 现代高能粒子方面的大量实验完全证实了(8.7)式的正确性.

现在来研究(8.9)式的意义. 它的左端代表外力在单位时间内对质点所做的功，由能量守恒定律，它应等于质点的动能增加率. 设 T 为动能，则有

$$\frac{dT}{dt} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{F} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

积分后得

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + \text{常数}$$

当 $v=0$ 时，动能 $T=0$，故常数应为 $-m_0c^2$，从而

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_0 c^2 = mc^2 - m_0 c^2 \tag{8.12}$$

上式说明，当质点的速度由零增至 v 时，质点的能量由 m_0c^2 增加至 mc^2，增加的这部分能量等于外力对质点所做的功，称为动能. 当 $v \ll c$ 时

$$T = m_0 c^2 \left\{1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{8}{3}\left(\frac{v}{c}\right)^4 + \cdots\right\} - m_0 c^2$$

$$\approx \frac{1}{2} m_0 v^2$$

与经典力学中动能的表达式完全一致.

从(8.12)式看到，质点在静止时具有能量 m_0c^2，在运动时的总能量为 mc^2，于是得出结论：物体在任何状态下的能量，等于它在该状态下的质量乘以真空中光速的平方，即

$$E = mc^2 \tag{8.13}$$

上式称为质能关系，它是相对论的重要结论之一，已为近代物理的大量实验所证实. 质能关系说明，在相对论中，物体处于某一状态的总能量有确定的意义.

但在牛顿力学中，物体在某一状态下的总能量没有意义，可以相差一个常数.

质能关系不仅对单个粒子适用，对多个粒子组成的物体也适用. 对多个粒子组成的复合物体，物体总的静止质量一般不等于各个单个粒子静质量之和，它们之差称为质量亏损. 与质量亏损对应的能量转化为物体内部的结合能. 电子与原子核结合成原子时其结合能较小，质量亏损也很少；质子与中子结合成原子核时，有些原子核结合能很大，相应的质量亏损也较大.

下面举两个实例，以说明质量亏损的大小.

例 1 一个原子质量单位(1u)约等于 1.66×10^{-27}kg. 质子的静质量为 1.00731u，中子静质量为 1.00867u，氘核由一个中子和一个质子组成，其静质量为 2.01360u，因此氘核静质量小于组成它的中子和质子静质量之和. 质量亏损为

$$\Delta m = (1.00731 + 1.00867) - 2.01360$$
$$= 0.00238\text{u}$$

对应的氘核结合能为

$$E = \Delta m c^2$$
$$= (0.00238 \times 1.66 \times 10^{-27}\text{kg}) \times (3.00 \times 10^8 \text{m/s})^2$$
$$= 3.57 \times 10^{-13}\text{J}$$
$$= 2.2\text{MeV}$$

质量亏损与氘核质量之比为

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{0.00238}{2.01360} = 1.18 \times 10^{-3}$$

例 2 氢原子的结合能为 13.58eV，与此相应的质量亏损为

$$\Delta m = \frac{E}{c^2} = \frac{13.58\text{eV}}{931 \times 10^6\text{eV/u}} = 1.46 \times 10^{-8}\text{u}$$

氢原子质量 $m=1.00797\text{u}$，所以

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{1.46 \times 10^{-8}}{1.00797} \approx 1.45 \times 10^{-8}$$

这样小的静质量变化远小于实验上对氢原子质量的测量误差，所以在化学反应中，不能探测到静质量的变化.

质能关系指明了描述物质运动属性的两个不同量之间存在着联系. 质量是描述物质运动惯性的量，能量是描述物质运动强度的量，这两个量是本质上不同的量，它们的量纲也不同. 物质有场和实物两种存在形式，任何一种物质形式都同时具有质量和能量，并且它们按质能关系相联系. 例如在正负电子对转化为光子这个过程中，实物形式的电子的静质量转化成了场形式的光子的运动质量，实物的内部能量转化成了光子场的能量.

利用四维动量可以得到相对论中的能量动量关系. 四维动量定义为

$$p_\mu = m_0 u_\mu$$

其空间分量为 $p_i = m_0 u_i = m v_i$，第四分量为

$$p_4 = m_0 u_4 = \frac{\mathrm{i} m_0 c}{\sqrt{1-\beta^2}} = \mathrm{i}\frac{E}{c}$$

四维动量的标量积 $p_\mu p_\mu$ 在洛伦兹变换下是不变的

$$\begin{aligned} p'_\mu p'_\mu &= \alpha_{\mu\nu}\alpha_{\mu\lambda} p_\nu p_\lambda \\ &= \delta_{\nu\lambda} p_\nu p_\lambda = p_\nu p_\nu \end{aligned} \tag{8.14}$$

设一物体静止在 S' 系中，$\boldsymbol{p}'=0$

$$p'_\nu p'_\nu = \boldsymbol{p}'^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_0^2 c^2$$

但在 S 系中有

$$p_\mu p_\mu = p^2 - \frac{E^2}{c^2}$$

由(8.14)式得

$$p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_0^2 c^2$$

则

$$E^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4 \tag{8.15}$$

上式就是相对论中的能量动量关系，将上式用于光子，可得到光子的动量. 因光子的静质量 $m_0=0$，光子的能量 $E=h\nu$，于是求得光子的动量为

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}$$

设 $h=2\pi\hbar$，则上式可化为

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{2\pi\hbar\nu}{c} = \frac{\hbar\omega}{c} = \hbar k$$

$k=\frac{\omega}{c}$ 是电磁波的波矢量值，因此可将光子的动量和能量写为

$$\boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k}, E = \hbar\omega \tag{8.16}$$

综上所述，由相对论力学方程(8.7)得到重要结论：

①粒子的运动方程：$\boldsymbol{F}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{m_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$

②粒子的质量与速度有关：$m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$

③质能关系：$E=mc^2$

④能量和动量的关系：$E^2=c^2p^2+m_0{}^2c^4$

§9 相对论力学的应用

处理高速运动问题必须用相对论力学. 经常遇到两类问题：一类是粒子物理中常见的碰撞和反应问题；另一类是带电粒子在电磁场中的运动问题，设计高能粒子加速器时就需要计算带电粒子在电磁场中的运动.

处理碰撞或反应问题的主要手段是利用能量动量守恒定律. 在相对论中，能量、动量是四维动量的分量，也可将能量、动量守恒合为四维动量守恒. 碰撞可分为弹性与非弹性碰撞. 弹性碰撞粒子内部状态不改变，非弹性碰撞粒子间有能量交换，可能引起粒子反应，产生新的粒子. 例如：

$$K^-+P\to\Omega^-+K^++K^0$$

在处理碰撞问题时，常用质心坐标系. 粒子体系总动量为零的坐标系叫做质心坐标系. 观测粒子运动的坐标系叫做实验室坐标系. 在质心系中求出结果后，再用洛伦兹变换就可得实验室系中的结果. 这里的关键是先求出质心系的速度. 在实验系中质心的速度和体系的总能量、总动量有关. 设第 i 个粒子在实验室系 S 内的动量为 $\boldsymbol{p}_i$，选 S 系的 x 轴沿质心速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向，质心系为 S' 系. 注意到 $\left(\boldsymbol{p},\mathrm{i}\dfrac{E}{c}\right)$ 组成四维矢量，由洛伦兹变换可得

$$p_x=\frac{p_x'-\mathrm{i}\beta p_4'}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{p_x'+\dfrac{v}{c^2}E'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$p_y=p_y',p_z=p_z'$$

$$p_4=\mathrm{i}\frac{E}{c}=\frac{\mathrm{i}\beta p_x'+p_4'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$E=\frac{E'+vp_x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

对体系内全部粒子的动量、能量求和可得

$$\sum_i p_{ix}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\sum_i p_{ix}{}'+\frac{v}{c^2}\sum_i E_i'\right)$$

$$\sum_i E_i=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\sum_i E_i'+v\sum_i p_{ix}{}'\right)$$

在 S' 系内，体系的总动量为零，故有

$$p_x=\sum_i p_{ix}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{v}{c^2}\sum_i E_i'$$

$$E=\sum_i E_i=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\sum_i E_i'$$

即

$$p_x = \frac{v}{c^2}E, v = \frac{c^2 p_x}{E}$$

p, E 是体系在 S 系中的总动量和总能量. 当质心系速度沿 x 轴时，总动量只有 x 分量. 在普遍情况下质心系速度为

$$\boldsymbol{v} = \frac{c^2}{E}\boldsymbol{p} \tag{9.1}$$

例 1 原子核的裂变和聚变.

用中子轰击铀一类重原子核可分裂成两个中等质量的原子核的现象称为原子核的裂变. 在裂变反应中放出巨大能量. 例如反应

$$n + {}_{92}\mathrm{U}^{235} \rightarrow {}_{56}\mathrm{Ba}^{141} + {}_{36}\mathrm{K}_r^{92} + 3\mathrm{n}$$

反应物和生成物静质量之差(质量亏损)为

$$\Delta m = 236.133 - 235.918 = 0.215\mathrm{u}$$

释放的能量

$$E = \Delta m c^2 \approx 200\mathrm{MeV}$$

$1\mathrm{kgU}^{235}$ 如果全部裂变，放出能量 $8.21\times10^{13}\mathrm{J}$，相当于 2 万吨 TNT 炸药爆炸所放出的能量.

轻原子核聚合成较重原子核的核反应，称为聚变反应. 例如反应

$${}_1\mathrm{H}^2 + {}_1\mathrm{H}^3 \rightarrow {}_2\mathrm{He}^4 + n$$

质量亏损为

$$\Delta m = 5.0317 - 5.0129 = 0.188\mathrm{u}$$

释放能量

$$E = \Delta m c^2 = 17.7\mathrm{MeV}$$

聚变反应一般在几百万度高温下进行，因此比裂变反应更不易控制. 聚变反应是恒星能量的主要来源. 聚变反应的质量亏损在反应物质量中所占比例裂变反应更大. 1945 年广岛原子弹爆炸，是 2 万吨级. 1952 年第一次氢弹热核爆炸，是 1 千万吨级.

例 2 康普顿(Compton)散射.

按照经典理论，自由电子对电磁波的散射，散射波与入射波频率应该相同. 1923 年康普顿等人在 X 射线波段发现散射波波长 λ' 比入射波波长 λ 稍长

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2k\sin^2\theta/2$$

波长改变只与散射角 θ 有关，与入射波波长、散射体的物质都无关. 实验测得 $k=0.0241$ Å，称为康普顿波长.

康普顿散射可用光子自由电子弹性散射理论来解释. 设入射光子能量为 $\hbar\omega$，自由电子静止，散射角为 θ，如图 7.27 所示.

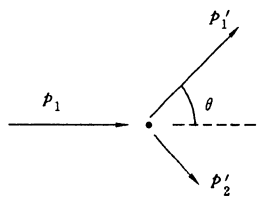


图 7.27

散射前后光子和电子的四维动量分别为

$$p_1 = \left(\hbar\boldsymbol{k}, \mathrm{i}\frac{\hbar\omega}{c}\right)$$

$$p_2 = (0, \mathrm{i}m_0 c)$$

$$p_1' = \left[\hbar\boldsymbol{k}', \mathrm{i}\frac{\hbar\omega'}{c}\right), \qquad p_2' = \left(\boldsymbol{p}', \frac{\mathrm{i}E'}{c}\right)$$

散射前后能量、动量守恒，故有

$$p_1 + p_2 = p_1' + p_2' \tag{9.2}$$

注意到四维动量的标量积是不变量，于是

$$p_1 \cdot p_1 = p_1' \cdot p_1' = 0$$

所以

$$p_2 \cdot p_2 = p_2' \cdot p_2' = -m_0^2 c^2 \tag{9.3}$$

由(9.2)式得

$$p_2' \cdot p_2' = (p_1 + p_2 - p_1') \cdot (p_1 + p_2 - p_1') \tag{9.4}$$

把(9.3)结果代入(9.4)式，得

$$p_1 \cdot p_1' = p_1 \cdot p_2 - p_2 \cdot p_1' \tag{9.5}$$

写成分量式

$$p_1 \cdot p_1' - \frac{\hbar^2}{c^2}\omega\omega' = \frac{\hbar^2}{c^2}\omega\omega'(\cos\theta - 1) = m_0\hbar(\omega' - \omega)$$

因为 $\omega = 2\pi\nu, c = \nu\lambda$，故由上式可得

$$\nu - \nu' = \nu' \frac{h}{m_0 c^2}(1 - \cos\theta)$$

或

$$\lambda' - \lambda = 2\frac{h}{m_0 c}\sin^2\frac{\theta}{2} \tag{9.6}$$

康普顿波长

$$k = \frac{h}{m_0 c} \approx 0.024263\,\text{Å}$$

理论计算与实验结果完全一致. 因为 $\nu > \nu'$，故在康普顿散射中光子失去能量，电子得到能量. 必须指出，光子不是经典力学的质点，能量是量子化的，不可能连续变化. 正确的理解应该是电子吸收一个能量为 $\hbar\omega$ 的光子，再放出一个能量为 $\hbar\omega'$ 的光子. 最后应指出，只有当入射电磁波的波长可以与康普顿波长相比时，量子效应才是显著的.

例 3 Λ 粒子在飞行时衰变为 π^- 介子和质子 P，反应过程为 $\Lambda \to \pi^-$ 介子和质子 P. 假定 Λ 在实验室系中的动量为 p.

(1)计算 P，π^- 在质心系中的能量与动量；

(2)求 P，π 在实验室系中的最大能量和最小能量.

解 在实验室系中 Λ，π^-，P 的四维动量为 p, p_1, p_2，在质心系中 π^-，P 的四维动量为 p_1'，p_2'. Λ，π^-，P 的静质量为 m, m_1, m_2.

(1)因为在衰变过程中能量和动量守恒，故有

$$p = p_1 + p_2 \tag{9.7}$$

由四维动量的标量积是不变量可得

$$\begin{aligned} p \cdot p &= (p_1 + p_2) \cdot (p_1 + p_2) \\ &= (p_1' + p_2') \cdot (p_1' + p_2') \end{aligned}$$

故

$$p_1' + p_2' = 0$$

故得

$$E_1' + E_2' = mc^2 \tag{9.9}$$

再由

$$E_1'^2 = c^2 p_1'^2 + m_1^2 c^4$$

$$E_2'^2 = c^2 p_2'^2 + m_2 c^4 \tag{9.10}$$

两式相减，注意到 $p_1'^2 = p_2'^2$，并利用(9.9)式，可求得

$$E_1' - E_2' = \frac{m_1' - m_2'}{m} c^2 \tag{9.11}$$

由(9.9)和(9.11)两式求出

$$E_1' = \frac{m_1^2 - m_2^2 + m^2}{2m} c^2 \tag{9.12}$$

$$E_2' = \frac{m_2^2 - m_1^2 + m^2}{2m} c^2 \tag{9.13}$$

将上述结果代入(9.10)式，可求得质心系中的动量为

$$p_1'^2 = p_2'^2 = \left(\frac{m_1^2 - m_2^2 + m^2}{2m} \right)^2 c^2 - m_1^2 c^2 \tag{9.14}$$

(2)由质心系的能量动量，再用洛伦兹变换可求得实验室系中的能量. 质心系的速度就是粒子的速度. 由(9.1)式可求得

$$\boldsymbol{v} = \frac{c^2 \boldsymbol{p}}{\sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}} \tag{9.15}$$

设 π 介子在质心系 S' 中动量 p_1' 与 x' 夹角为 θ_1'，质子动量 p_2' 与 x' 夹角 $\theta_2' = \pi + \theta_1'$. 由四维动量 $\left(\boldsymbol{p}, \mathrm{i} \frac{E}{c} \right)$ 的洛伦兹变换

$$p_4 = \frac{\mathrm{i}\beta p_1' + p_4'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Rightarrow E = \frac{E' + v p_x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

可得 π 介子和质子在实验室系中的能量 E_1 和 E_2 为

$$E_1 = \frac{E_1' + v p_1' \cos\theta_1'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \tag{9.16}$$

$$E_2 = \frac{E_2' - v p_2' \cos\theta_1'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \tag{9.17}$$

当 $\theta_2' = 0$ 时，E_1 最大，E_2 最小；当 $\theta_2' = \pi$ 时，E_1 最小 E_2 最大.

例 4 在反应过程 $\mathrm{P} + \mathrm{P} \rightarrow \mathrm{P} + \mathrm{P} + \bar{\mathrm{P}} + \mathrm{P}$ 中，设靶粒子静止，计算使反应能发生的入射粒子的最小动能是多少？这个最小动能称为阈能.

解 考虑一般情况

$$① + ② \rightarrow ③ + ④ + \cdots$$

设粒子 1,2,3… 的质量为 $m_1, m_2, m_3 \cdots$，并令

$$\Delta M = (m_3 + m_4 + \cdots) - (m_1 + m_2)$$

求阈能的物理要求为：在质心系中所有产生的粒子的动能为零. 因此在质心系中的总能量 E' 只是各生成粒子的静止能量，即

$$E' = (m_3 + m_4 + \cdots)c^2 = (m_1 + m_2 + \Delta M)c^2 \tag{9.18}$$

设入射粒子和靶粒子的四维动量在实验室系中为 p_1 和 p_2，在质心系中为 p_1' 和 p_2'. 因四维动量的标量积是不变量，故

$$(p_1 + p_2) \cdot (p_1 + p_2) = (p_1' + p_2') \cdot (p_1' + p_2') \tag{9.19}$$

写成分量形式

$$(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)^2-\frac{1}{c^2}(E_1+E_2)^2$$

$$=(\boldsymbol{p}_1'+\boldsymbol{p}_2')^2-\frac{1}{c^2}(E_1'+E_2')^2 \tag{9.20}$$

考虑到

$$\boldsymbol{p}_2=0,\qquad \boldsymbol{p}_1'+\boldsymbol{p}_2'=0,\qquad E_1^2=c^2\boldsymbol{p}_1^2+m_1^2c^4$$

上式可化为

$$E_1=\frac{1}{2m_2c^2}(E'^2-m_1^2c^4-m_2^2c^4) \tag{9.21}$$

把(9.18)式代入上式

$$E_1=\frac{1}{2m_2c^2}[(m_1+m_2+\Delta M)^2c^4-(m_1^2+m_2^2)c^4]$$

$$=\left(m_1+\frac{m_1}{m_2}\Delta M+\Delta M+\frac{\Delta M^2}{2m_2}\right)c^2$$

故能发生反应的入射粒子的最小动能为

$$T=E_1-m_1c^2=\Delta M\left(1+\frac{m_1}{m_2}+\frac{\Delta M}{2m_2}\right)c^2 \tag{9.22}$$

上式是当靶粒子静止时计算阈能的一般公式.

由于质子反质子的质量相同,故 $\Delta M=2m_p$

$$m_1=m_2=m_p=1.67\times10^{27}\text{kg}$$

$$T=2m_p(1+1+1)c^2=6m_pc^2=5.63\text{GeV}$$

例 5 多普勒效应.

在§4 中我们从相对论运动时钟变慢出发,计算和分析了多普勒效应.相对论多普勒效应公式也可由四维波矢量的洛伦兹变换,或由运动原子发射光子时动量、能量守恒来计算得到.

已知 $p_\mu\left(\boldsymbol{p},\mathrm{i}\frac{E}{c}\right)$ 是四矢,对光子来说

$$\boldsymbol{p}=\hbar\boldsymbol{k},\qquad E=\hbar\omega,\qquad \hbar=\frac{h}{2\pi},\qquad K=\frac{\omega}{c}$$

h 是普朗克常数,因此 $\left(\boldsymbol{k},\mathrm{i}\frac{\omega}{c}\right)$ 也是四矢,称为四维波矢量.设光源静止在 S' 系中,光的波矢量位于 x,y 平面内.在 S' 系中 $\boldsymbol{k}$ 与 x' 轴夹角为 θ',故

$$\begin{cases}\boldsymbol{k}_1'=\dfrac{\omega'}{c}\cos\theta'\\ \boldsymbol{k}_2'=\dfrac{\omega'}{c}\sin\theta',\quad \boldsymbol{k}_3'=0,\quad \boldsymbol{k}_4'=\mathrm{i}\dfrac{\omega'}{c}\end{cases} \tag{9.23}$$

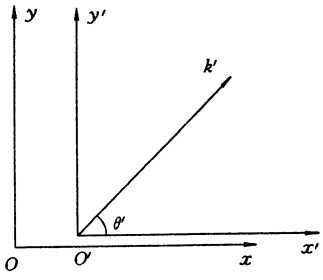


图 7.28

在 S 系中波矢 $\boldsymbol{k}$ 与 x 轴夹角为 θ,所以

$$\begin{cases}k_1=\dfrac{\omega}{c}\cos\theta,\quad k_2=\dfrac{\omega}{c}\sin\theta,\\ k_3=0,\quad k_4=\mathrm{i}\dfrac{\omega}{c}\end{cases} \tag{9.24}$$

由洛伦兹变换

$$\begin{cases} k_1' = \nu\left(k_1 - \dfrac{\omega v}{c^2}\right) \\ k_2' = k_2 \\ k_3' = k_3 \\ \omega' = \nu(\omega - v k_1) \end{cases} \tag{9.25}$$

其中：$\nu = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. 又

$$k = \frac{\omega}{c}, k_1 = \frac{\omega}{c}\cos\theta$$

代入

$$\omega' = \nu\left(\omega - \frac{v}{c}\omega\cos\theta\right) = \nu(1 - \beta\cos\theta)\omega$$

所以

$$\omega = \frac{\omega'}{\nu(1 - \beta\cos\theta)} \tag{9.26}$$

这就是相对论多普勒效应公式. 光源远离观察者时，$\theta=\pi$，则

$$\omega = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\omega' \tag{9.27}$$

这时观察到的频率 ω 比光源静止时的频率 ω' 小. 当光源向着观察者运动时，$\theta=0$，则

$$\omega = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\omega' \tag{9.28}$$

这时观察到的频率 ω 变大. 在垂直于光源运动方向观察时

$$\omega = \sqrt{1-\beta^2}\omega' \tag{9.29}$$

这叫横向多普勒效应，它在非相对论中是不出现的.

也可用力学的方法计算多普勒效应. 设原子在实验室坐标系 S 中运动，其动量为 $\boldsymbol{p}$（见图 7.29）. 原子发射光子后受到反冲. 原子发光前质量为 m，发光后质量为 m_2，动量为 $\boldsymbol{p}_2$. 光子的动量为 $\boldsymbol{p}_1$，光子运动方向与原子运动方向夹角为 θ. 由动量、能量守恒定律有

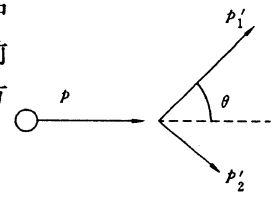


图 7.29

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2, E = E_1 + E_2$$

$$p_1 = \frac{\hbar\omega}{c}, E_1 = \hbar\omega$$

$$E_1 = cp_1$$

$$p_2^2 = p^2 + p_1^2 - 2\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}_1 = p^2 + p_1^2 - 2pp_1\cos\theta \tag{9.30}$$

$$E_2^2 = E^2 + E_1^2 - 2E_1E = E^2 + c^2p_1^2 - 2cp_1E \tag{9.31}$$

注意能量动量关系 $E^2=c^2p^2+m^2c^2$，由上两式可求得

$$m_2^2c^2 = m^2c^2 - 2p_1\left(\frac{E}{c} - p\cos\theta\right) \tag{9.32}$$

上式是在观察原子运动的坐标系 S 中求得的. 应设法建立和质心系中光子动量的关系. 设质心系中光子动量为 $\boldsymbol{p}_1'$，原子动量为 $\boldsymbol{p}_2'$，相应的能量为 E_1', E_2'. 在质心系中能量、动量守恒关系为

$$E' = E_1' + E_2', \qquad \boldsymbol{p}_1' + \boldsymbol{p}_2' = 0, \qquad p_1' = p_2'$$

$$mc^2 = cp_1' + \sqrt{c^2 p_1'^2 + m_2^2 c^4}$$

由此求出

$$p_1' = \frac{m^2 - m_2^2}{2m} c \tag{9.33}$$

由(9.32)和(9.33)式消去 m_2 后得

$$p_1 = \frac{p_1' mc}{\left(\frac{E}{c} - p\cos\theta\right)} \tag{9.34}$$

注意到

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad p = \frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$p_1 = \frac{\hbar\omega}{c}, \qquad p_1' = \frac{\hbar\omega'}{c}$$

将以上各个量代入(9.34)即得

$$\omega = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \beta\cos\theta}\omega' \tag{9.35}$$

这同(9.26)完全相同.

例 6 一电荷在均匀静电场中做高速度运动,求其运动轨迹. 设电场沿 x 方向,$t=0$ 是粒子初速度沿 y 方向.

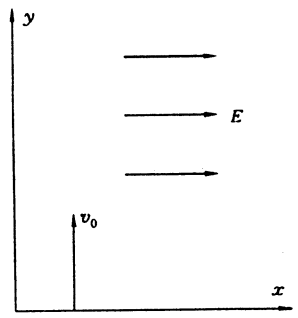


图 7.30

解 由运动方程 $\frac{dp}{dt} = F$ 可得

$$\frac{dp_x}{dt} = eE$$

$$\frac{dp_y}{dt} = 0, \frac{dp_z}{dt} = 0$$

由此解得

$$p_x = eEt + C_1, p_y = C_2, p_z = C_3$$

当 $t=0$ 时,$p_y = p_0, p_x = p_z = 0$,可定出 $p_x = eEt, p_y = p_0$. 再由(9.1)式,用 W 表示总能量有

$$\boldsymbol{v} = \frac{c^2}{W}\boldsymbol{p}$$

而

$$W = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 p_0^2 + (ceEt)^2}$$

$$= \sqrt{W_0^2 + (ceEt)^2}$$

则

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{c^2 eEt}{\sqrt{W_0^2 + (ceEt)^2}} \tag{9.36}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{c^2 p_0}{\sqrt{W_0^2 + (ceEt)^2}} \tag{9.37}$$

将上两式积分得

$$x = \frac{1}{eE}\sqrt{W_0^2 + (ceWt)^2} + \alpha_1$$

$$y = \frac{cp_0}{eE}\mathrm{sh}^{-2}\frac{ceEt}{W_0} + \alpha_2$$

设 $t=0$ 时，$x=\frac{W_0}{eE}$，$y=0$，则定出 $\alpha_1+\alpha_2=0$，最后得

$$x = \frac{1}{eE}\sqrt{W_0^2 + (ceEt)^2} \tag{9.38}$$

$$y = \frac{cp_0}{eE}\mathrm{arsinh}\frac{ceEt}{W_0} \tag{9.39}$$

从上两式消去 t，得到电子的运动轨迹

$$x = \frac{W_0}{eE}\cosh\frac{eEy}{cp_0} \tag{9.40}$$

在 $v \ll c$ 时，$p_0=mv_0$，$W_0=mc^2$，将 $\cosh\frac{eEy}{cp_0}$ 展开，只保留前两项得

$$x = \frac{W_0}{eE}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{e^2E^2y^2}{c^2p_0^2}\right) = \frac{me^2}{eE} + \frac{eE}{2mv_0^2}y^2$$

上式为一抛物线，同非相对论情况完全一致.

§10 带电粒子在电磁场中的拉格朗日函数与哈密顿函数

在分析力学中，拉格朗日函数与哈密顿函数有重要的意义. 对于一个力学体系，只要知道了拉氏函数或哈密顿函数，就可写出体系的运动方程. 用拉氏函数或哈密顿函数表出的运动方程不仅适用于经典力学，也适用于经典电磁场理论、量子力学和量子场理论. 在微观领域内的电子、原子核等都带有电荷，很多问题中都需要处理带电粒子在电磁场中的运动. 因此确定带电粒子在电磁场中的拉氏函数与哈密顿函数具有重要的实际意义.

可以从各种途径得到拉氏函数，而哈密函数又可从拉氏函数求得. 求得的拉氏函数是否正确，可由拉氏函数导得的运动方程是否正确来检验. 我们从最一般的哈密顿原理来推测拉氏函数的具体形式，这种方法在近代理论物理中用的较普遍. 哈密顿原理指出，对于任一力学体系都存在一个作用量积分 S，从一个状态到另一个状态的一切可能的运动中，对于真实的运动来说，作用量积分 S 具有极值，即 S 的一级变分为零. 哈密顿原理用数学形式表出为.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t \qquad \delta S = 0 \tag{10.1}$$

式中的 L 就是力学体系的拉氏函数. 由哈密顿原理可导出第二类拉氏方程. 设广义坐标为 q_i，广义速度为 $\dot{q}_i$，则

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\delta L\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i\right)\mathrm{d}t = 0 \tag{10.2}$$

而

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_I$$

代入(10.2)式，积分后得

$$\delta S = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\sum_i \left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial L}{\partial q_i}\right]\delta q_i \mathrm{d}t = 0$$

在 t_1, t_2 时刻状态是确定的，$\delta q_i|_{t_1} = \delta q_i|_{t_2} = 0$，面积分号下的 δq_i 是任意的，故由上式得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{10.3}$$

这正是第二类拉氏方程.

在相对论中要求作用量 S 在洛伦兹变换下具有不变性. 可利用这个性质来推测拉氏函数的形式. 先讨论自由粒子的拉氏函数. 自由粒子的状态由它的速度决定，拉氏函数中应包含粒子的速度. 已知间隔

$$\mathrm{d}S^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}l^2 = c^2\mathrm{d}t^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$\mathrm{d}S = c\mathrm{d}t\sqrt{(1-\beta^2)}$$

是洛伦兹不变量，它含有粒子速度. 可推测自由粒子的作用量为

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \alpha c\sqrt{1-\beta^2}\mathrm{d}t \tag{10.4}$$

α 是与粒子质量有关的常数. 由此求得自由粒子的拉氏函数为

$$L = \alpha c\sqrt{1-\beta^2} \tag{10.5}$$

在 $v \ll c$ 时，可将 L 展开，只取前两项

$$L = \alpha c\left(1 - \frac{1}{2}\beta^2\right) = \alpha c - \frac{\alpha v^2}{2c}$$

拉氏函数中常数项没有意义，因它对运动方程没有贡献，故在 $v \ll c$ 的低速时，拉氏函数可取为

$$L = -\frac{\alpha v^2}{2c} \tag{10.6}$$

另一方面，在低速时自由粒子的拉氏函数为

$$L = \frac{1}{2}mv^2 \tag{10.7}$$

将(10.7)与(10.6)式对比可求出 $\alpha = -cm$，由此得到自由粒子的拉氏函数为

$$L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} \tag{10.8}$$

再讨论带电粒子在电磁场中的拉氏函数. 这时的作用量积分中应附加一项带电粒子与电磁场的相互作用项. 这个附加项应由粒子的电荷、速度和电磁场的量构成，它还必须是洛伦兹不变量. 具有这些性质的附加项的可能形式假定为 $eA_\mu \mathrm{d}x_\mu$，A_μ 是电磁场四矢，$A_\mu \mathrm{d}x_\mu = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v} - \phi)\mathrm{d}t$，于是 S 可写为

$$S = \int_{t_1}^{t_2}[-cm^2\sqrt{1-\beta^2} + e\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v} - e\phi]\mathrm{d}t \tag{10.9}$$

由此得到相对论中一个带电粒子在电磁场中的拉氏函数为

$$L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} - e(\phi - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}) \tag{10.10}$$

上述的拉氏函数是否正确呢？那就要看把它代入(10.3)式的拉氏方程后是否能得到相对论的运动方程. 这时的广义坐标取为粒子的坐标 x_i，有

$$\frac{\partial L}{\partial v_i}=\frac{mv_i}{\sqrt{1-\beta^2}}+\partial A_i \tag{10.11}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}=-e\frac{\partial \phi}{\partial x_i}+e\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_i} \tag{10.12}$$

注意，$\boldsymbol{A}$ 是粒子所在处的矢势，当粒子运动时，$\boldsymbol{A}$ 对时间的全微商包括 $\boldsymbol{A}$ 自身随时间的变化，以及由于粒子运动在空间不同点引起的变化，即

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_3}\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t}\\&=\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{A}\end{aligned}$$

这样就可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{mv_i}{\sqrt{1-\beta_2}}\right)+e\frac{\partial A_i}{\partial t}+e\boldsymbol{v}\cdot\nabla A_i \tag{10.13}$$

将(10.12)和(10.13)代入(10.3)式，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{mv_i}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)=-e\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}+\frac{\partial A_i}{\partial t}\right)+e\left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_i}-\boldsymbol{v}\cdot\nabla A_i\right) \tag{10.14}$$

注意到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_i}-\boldsymbol{v}\cdot\nabla A_i&=\frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{v}\cdot A)-\boldsymbol{v}\cdot\nabla A_i\\&=[\nabla(\boldsymbol{v}\cdot A)-\boldsymbol{v}\cdot\nabla\cdot A]\cdot e_i\\&=[\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})]\cdot e_i\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t},\qquad \boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$$

则(10.14)可化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)=e\boldsymbol{E}+e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{10.15}$$

这正是带电粒子在电磁场中的相对论运动方程，因此(10.10)的拉氏函数是正确的.

哈密顿量为

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}-\boldsymbol{L} \tag{10.6}$$

$\boldsymbol{P}$ 是正则动量

$$P_i=\frac{\partial L}{\partial v_i}=\frac{mv_i}{\sqrt{1-\beta^2}}+eA_i$$

$$\boldsymbol{P}=\frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\beta}}+e\boldsymbol{A}=\boldsymbol{p}+e\boldsymbol{A} \tag{10.17}$$

$\boldsymbol{p}$ 是粒子的动量. 上式说明在电磁场中带电粒子的动量 $\boldsymbol{p}$ 和正则动量 P 不同. 将(10.17)代入(10.16)式得

$$H=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}+e\phi=\sqrt{c^2p^2+m^2c^4}+e\phi$$

哈密顿函数应由正则动量 $\boldsymbol{P}$ 表示出，由(10.17)式得

$$H=\sqrt{(\boldsymbol{P}-e\boldsymbol{A})^2c^2+m^2c^4}+e\phi \tag{10.18}$$

当 $v\ll c$ 时上式可近似取为

$$H=\frac{1}{2m}(\boldsymbol{P}-e\boldsymbol{A})^2+e\phi+mc^2$$

略去常数项 mc^2，就得到在非相对论情况下带电粒子在电磁场中的哈密顿函数

$$H=\frac{1}{2m}(\boldsymbol{P}-e\boldsymbol{A})^2+e\phi \tag{10.19}$$

这个结果在量子力学中将遇到.

从(10.17)和(10.18)式看到，正则动量 $\boldsymbol{P}$ 和哈密顿量 H 构成一个四维矢量$\left(\boldsymbol{P},\mathrm{i}\frac{H}{c}\right)$，称为四维正则动量，可写成

$$P_\mu=p+eA_\mu$$

拉氏函数(10.10)式，在低速条件下可化为

$$L=\frac{1}{2}mv^2-e(\phi-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})=T-V$$

与保守系的拉氏函数形式相同，因带电粒子在电磁场中运动，洛伦兹力与粒子运动速度有关，是非保守系，所以称

$$V=e(\phi-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}) \tag{10.20}$$

为广义势.

例 求两个运动带电粒子的相互作用势，即一个粒子在另一个粒子的电磁场中所具有的广义势.

解 设粒子 1 和 2 的质量为 m_1 和 m_2，电荷为 q_1 和 q_2，t 时刻的运动速度为$\boldsymbol{v}_1$ 和$\boldsymbol{v}_2$，则粒子 1 在粒子 2 的电磁场中的势为

$$V=q_1(\phi_2-\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{A}_2) \tag{10.21}$$

式中 ϕ_2 中 $\boldsymbol{A}_2$ 是粒子 2 的电磁场在时刻 t 到达粒子 1 所在处的推迟势. 因为场源的电荷密度和电流密度为

$$\begin{aligned}\rho(\boldsymbol{R},t)&=q_2\delta(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_2)\delta(t'-t)\\ \boldsymbol{J}(\boldsymbol{R},t)&=q_2\boldsymbol{v}_2(t')\delta(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_2)\delta(t'-t)\end{aligned} \tag{10.22}$$

故推迟势应为

$$\begin{aligned}\phi_2(\boldsymbol{R}_1,t)&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{q_2v_2(t')\delta(t'-t+r/c)}{r}\mathrm{d}t'\\ \boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{R}_1,t)&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{q_2v_2(t')\delta(t'-t+r/c)}{r}\mathrm{d}t'\end{aligned} \tag{10.23}$$

其中 $r=|\boldsymbol{R}_1(t)-\boldsymbol{R}_2(t')|$，$\boldsymbol{R}_1,\boldsymbol{v}_1$ 都是 t 时刻的量，$\boldsymbol{R}_2,\boldsymbol{v}_2$ 都是 t' 时刻的量，应把它们变成同一时刻 t 的量. 把积分号中的 δ 函数作展开

$$\delta\left(t'-t+\frac{r}{c}\right)=\delta(t'-t)+\frac{r}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\delta(t'-t)+\frac{1}{2}\frac{r^2}{c^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t'^2}\delta(t'-t)+\cdots \tag{10.24}$$

代入积分并利用 δ 函数的积分公式

$$\int_a^{\mathrm{d}}f(x)\delta\cdot(x-x_0)\mathrm{d}x=(-1)^af(a)(x_0),a<x_0<b$$

可得

$$\phi_2(\boldsymbol{R}_1,t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{2c^2}\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}+\cdots \tag{10.25}$$

$$\boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{R}_1,t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2\boldsymbol{v}_2}{c^2r}+\cdots \tag{10.26}$$

都取到$\frac{1}{c^2}$的修正项，并作规范变换

$$\begin{aligned}\phi_2' &= \phi_2-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\\ \boldsymbol{A}_2' &= \boldsymbol{A}_2+\nabla_1 x\end{aligned} \tag{10.27}$$

其中x为任意标量函数. 令$x=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{2c^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$，则

$$\phi_2'(\boldsymbol{R}_1,t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r} \tag{10.28}$$

$$\boldsymbol{A}_2'(\boldsymbol{R}_1,t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{2c^2}\nabla_1\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2v_2}{c^2r} \tag{10.29}$$

因为

$$\begin{aligned}\nabla_1\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}(\nabla_1 r)\\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)=-\frac{\boldsymbol{r}}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}-\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}_2}{\mathrm{d}t}\\ &= \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}_2)-\frac{\boldsymbol{v}_2}{r}\end{aligned}$$

所以

$$\boldsymbol{A}_2'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2\boldsymbol{v}_2}{2c^2r}+\frac{1}{8\pi\varepsilon_0c^2}\frac{\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}_2)}{r^3} \tag{10.30}$$

把(10.28)和(10.30)代入(10.21)式后得

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q_1q_2}{r}-\frac{q_1q_2}{2c^2}\left[\frac{\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2}{r}+\frac{(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}_1)(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}_2)}{r^3}\right]\right\}$$

用粒子的动量来表示，则

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q_1q_2}{r}-\frac{q_1q_2}{2m_1m_2c^2}\left[\frac{\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2}{r}+\frac{(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}_1)(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}_2)}{r^3}\right]\right\} \tag{10.31}$$

上式就是两个任意运动的带电粒子的相互作用势，称为勃莱脱(Breit)势. 其中第一项是库仑势，第二项是与粒子运动有关的相对论修正项. 当其中一个粒子静止不动时，上式就变为库仑势.

思考题与习题七

1. 相对论产生的历史背景是什么？你从这一段历史发展受到了什么启发？

2. 不利用洛伦兹变换，直接利用相对论的基本原理能否得出同时的相对性、运动物体长度缩短、运动时钟变慢？

3. 在推导洛伦兹变换时，当两坐标原点重合时是否一定要选 $t=t'=0$ 或 $t'=t$？

4. 为什么在相对论中一定要每一点放一个钟？为什么要用光信号来校准钟.

5. 根据相对论，是否一切事物都是相对的？相对论中是否存在绝对的东西，即存在对一切惯性系都就不变的东西？

6. 一具强大的激光器绕着一根垂直的轴高速旋转，光速在方位角上的速度（切向速度）能不能超过光速？这个光速能否用来在两点之间以超过光速的速度传送信号？某些示波器的制造厂声称它的扫描速度超过光速，你相信吗？

7. 两固有长度均为 l_0 的尺，在 S 系中一沿负 x 方向运动，一沿正 x 方向运动，速度均为 v，试求从一尺上所观察到的另一尺的长度.

8. 光在介质中的速度是 $v=\frac{c}{n}$，n 是介质的折射系数，若介质以速度 $u\ll c$ 相对于实验室运动，证明光相对于实验室的速度近似地等于

$$\frac{c}{n}+u\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

9. 中午，一艘火箭以速度 $0.8c$ 飞经地球. 飞船上和地球上的观测者一致同意这个事件发生在中午.

(1)按飞船上时钟读数，该飞船于午后 12：30 飞经一个行星际宇航站，该站相对于地球固定，其时钟指示地球时间. 试问它在该站什么时间发生？

(2)在地球坐标系上该站离地球多远？

(3)在飞船时间午后 12：30，该飞船用无线电向地球发回报告，试问地球何时接到信号？

(4)如果地面站立即回答，试问飞船按自己的时间何时接到回答？

10. 有一光源 S 与接收器 R 相对静止，距离为 l_0，S-R 装置浸在均匀无限的液体介质（静止折射率 n）中，试对下列两种情况计算光源发出讯号到接收讯号所经历的时间.

(1)液体沿着 S-R 连线方向以速度 v 流动.

(2)液体垂直于 S-R 连线方向以速度 v 流动.

11. 证明：自由电子不吸收或发射光子，否则将破坏能量与动量守恒定律.

12. 用以下办法可把可见光转变成高能 γ 射线. 用一束激光正面朝一束高能电子束射去，形成电子光子对撞，使光束反射回去. 设光子能量 $h\nu=2\text{eV}$，电子动能是 $6\times10^9\text{eV}$.

(1)计算在电子参考系中，入射光子的能量 $h\nu'$；

(2)光子以上述的相对于电子的能量反射回去，从实验室看，光子又发生多普勒频移，从而获得最高的能量，证明最后能量大约是 10^9eV.

13. 动量为 $\hbar\kappa$，能量为 $\hbar\varphi$ 的光子撞在静止的电子上，散射到与入射方向夹角为 θ 的方向上. 证明散射光子的频率变化量为

$$\omega - \omega' = \frac{2\hbar}{mc^2}\omega\omega'\sin^2\frac{\theta}{2}$$

散射光的波长为

$$\lambda' = \lambda + \frac{4\pi\hbar}{mc}\sin^2\frac{\theta}{2}$$

λ 为散射前光子波长，m 是电子的静止质量.

14. 一个总质量为 M_0 的激发原子，对所选定的坐标系静止. 它在跃迁到能一比之低 ΔW 的基态时，发射一个光子(能量 $\hbar\omega$，动量 $\hbar\kappa$)，同时受到光子反冲，因此光子的频率不能正好是 $\nu = \frac{\Delta W}{h}$，而是略小一些. 证明这个频率

$$\nu = \frac{\Delta W}{h}\left(1 - \frac{\Delta W}{2M_0c^2}\right)$$

15. 试求下列反应的阈能：

(1)$\nu + P \rightarrow \pi^0 + P$

(2)$P + P \rightarrow \pi^0 + P + P$

16. 设想一火箭以速度 v 沿半径为 R 的圆轨道运动，试问从瞬时伴随火箭的惯性系内的观察者来看，作用在位于火箭内、相对于火箭不动的物体(设质量为 m)上的力 F 是怎样的?

17. 设有一无限长的均匀带电直线(在直线静止的参考系内，线电荷密度为 η)以速度 v 沿着自身的长度匀速移动. 在与直线相距为 r 的地方，有一个以同样速度平行于直线运动的点电荷. 试求出作用在电荷上的电磁力 F，速度 v 是任意的.

18. 一静质量为 m 的带电粒子在均匀恒定的磁场 H 中运动，其速度可与 c 相比，初速度垂直于磁场，求运动轨迹.

19. 静质量各为 m_0 的两个高速粒子互相靠近并做对碰，一个粒子的原有速度为 $0.8c$，另一个为 $0.6c$，假定碰撞是完全非弹性的，求：

(1)碰撞后的动量是多少?

(2)牛顿力学所预言的动量值是多少?

(3)碰撞后总能量值是多少?

(4)碰撞后总的静质量是多少?

(5)碰撞后的动能是多少?

20. 一个静止的带电 π 介子蜕变成一个中微子和一个 μ 粒子，求中微子和 μ 粒子的动能. 设 π 介子、μ 粒子静质量为 m_π, m_μ.

21. A、B 是孪生兄弟. A 乘飞船做星际旅行，往返都是匀速直线飞行，速度为 v，突然转向. 单程飞行距离为 L. 在飞行过程中 A，B 都将自己心脏跳动情况用无线电波通知对方，每跳一次发射一个脉冲信号.

(1)在 A 逆转运动方向前，B 收到多少个 A 发出的信号? A 收到多少个 B 发出的信号?

(2)全航程中 A、B 各自总共收到多少个从对方发出的信号?

(3)A，B 根据所收到的心跳次数来判断哪一个比较年青，最后结论如何? 双方能得出一致意见吗?

第八章　带电粒子和电磁场的相互作用

为了进一步认识电磁作用的本质，必须从宏观领域深入到微观领域. 本章的任务就是应用经典电磁场理论研究运动的带电粒子与电磁场的相互作用. 从计算带电粒子在任意运动情况下所产生的电磁场出发，讨论运动带电粒子的各种辐射场，研究粒子所激发的场对粒子本身的反作用，以及带电粒子与外电磁场的相互作用.

微观粒子具有二重性，微粒性和波动性，遵循量子力学规律. 经典电磁场理论原则上不适用于微观领域，但经典电子论的一些结果在一定条件下还是近似地正确，或与相应的量子理论的结果基本相同，或存在一定的对应关系. 这部分内容对于认识物质的微观结构、性质和一些过程，是有重要意义的，对于进一步学习量子理论也是必要的.

§1　运动带电粒子的势

在经典电子论中，不考虑带电粒子的自旋和相应的磁矩，不考虑转动，只考虑平动，因此它的运动状态由坐标和速度来确定. 设带电粒子的坐标为(x^*,y^*,z^*)，速度为$\boldsymbol{v}$. 在外力作用下，带电粒子沿一定的轨道运动，轨道方程$x^*=x^*(t^*)$，$y^*=y^*(t^*)$，$z^*=z^*(t^*)$. 由推迟势知道，t 时刻(x,y,z)处的场应由 t^* 时刻带电粒子的运动状态决定，$t^*=t-r/c$，其中 r 是粒子到待求场点的距离

$$r=\sqrt{(x-x^*)^2+(y-y^*)^2+(z-z^*)^2}$$

我们用四维势矢量的洛伦兹变换来求出运动带电粒子的势.

虽然带电粒子的运动速度是任意变化的，但可以选 S' 系，在 t^* 时刻，使粒子相对静止于 S' 系的原点，并令 S' 系与 S 系坐标轴平行，但 S' 系的运动速度$\boldsymbol{v}$ 可沿任意方向. 在 S' 系中，t^* 时刻粒子静止，容易求出矢势和标势，再用洛伦兹变换求出 S 系中的势.

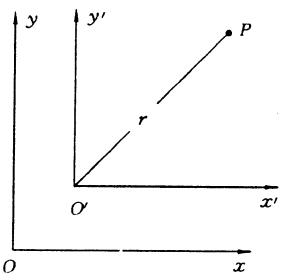


图 8.1

在 S 系中，t^* 时刻粒子在 $O'(x^*,y^*,z^*)$ 处激发的场，在 t 时刻传到 $P(x,y,z)$ 处，所以

$$r=c(t-t^*) \tag{1.1}$$

场在 O' 处激发和传到 P 点是两个事件. 这两个事件在 S' 系中的时空坐标分别为$(0,0,0,t^{*\prime})$和(x',y',z',t')，并有

$$r'=c(t'-t^{*\prime}) \tag{1.2}$$

在 S' 系中 t^* 时刻粒子静止，故

$$\boldsymbol{A}'=0,\qquad \phi'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r'}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{c(t'-t^{*\prime})} \tag{1.3}$$

利用 S' 系的运动速度沿任意方向的洛伦兹变换公式

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t+\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)\frac{\boldsymbol{v}}{v^2}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}-v^2t)$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[t - \frac{1}{c^2}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r})\right] \tag{1.4}$$

注意到$(\boldsymbol{r}, ict)$和$\left(\boldsymbol{A}, i\frac{\phi}{c}\right)$都是四维矢量，再将$\boldsymbol{v}$换为$-\boldsymbol{v}$，得到四维势矢量的逆变换公式

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}' - \frac{i\boldsymbol{v}}{c}A_4' + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\frac{\boldsymbol{v}}{v^2}\left(-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A} + \frac{iv^2}{c}A_4'\right) \tag{1.5}$$

$$A_4 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[A_4' + \frac{i}{c}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}')\right]$$

将(1.3)式的$\boldsymbol{A}'$，ϕ'代入上式得

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e\boldsymbol{v}}{c^2 r'\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r'\sqrt{1-\beta^2}} \tag{1.6}$$

再注意到(1.5)式，可得

$$\begin{aligned} r' &= c(t' - t^{*\prime}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[c(t-t^*) - \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}}{c}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(r - \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}}{c}\right) \end{aligned}$$

代入(1·6)式，得运动带电粒子的推迟势为

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e\boldsymbol{v}}{c^2\left(r - \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}}{c}\right)}$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{\left(r - \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}}{c}\right)} \tag{1.7}$$

(1.7)称为李纳-维希(Lienard-Wiechert)势. 注意上式中右边的$\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{v}$各量都要取$t^* = t - r/c$时刻的值. 为了与过去的表示一致，仍用t'代替t^*去表示推迟时刻，下面不再用洛伦兹变换不会混淆.

§2 运动带电粒子的场

这一节我们从李纳-维希势出发，计算一般的运动带电粒子的电磁场. 因为

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A} \tag{2.1}$$

在对李纳-维希势进行微商运算时，必须注意自变量是(x,y,z,t)，但$\boldsymbol{A}$和ϕ中的$\boldsymbol{r}$和$\boldsymbol{v}$都取推迟时刻$t' = t - r/c$的值，而

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

是(x,y,z)的显函数，(x',y',z')是t'的函数，t'又是(x,y,z,t)的函数，故r 间接通过t'而依赖于(x,y,z,t)，还存在隐函数关系. $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t')$，也是通过$t'$的$(x,y,z,t)$的隐函数. 为了简便，引入新变量

$$s = r - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}/c \tag{2.2}$$

把李纳-维希势写成

$$\phi = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{s} \tag{2.3}$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e\boldsymbol{v}}{s} = \frac{1}{c^2}\boldsymbol{v}\phi \tag{2.4}$$

由上述两式可求得

$$\nabla\phi = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{s^2}\nabla s \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left(\frac{1}{s}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} - \frac{1}{s^2}\boldsymbol{v}\frac{\partial s}{\partial t}\right) \tag{2.6}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \frac{\phi}{c^2}\nabla\times\boldsymbol{v} - \frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\times\nabla\phi$$

$$= \frac{\phi}{c^2}\nabla t'\times\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t'} - \frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\times\nabla\phi \tag{2.7}$$

由以上各式看出，要计算 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$，应先算出

$$\nabla s, \qquad \frac{\partial s}{\partial t}, \qquad \frac{\partial t'}{\partial t}, \qquad \nabla t'$$

(1)计算$\nabla t'$.

$$\nabla t' = -\frac{1}{c}\nabla r$$

$$= -\frac{1}{c}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r} + \frac{\partial r}{\partial t'}\nabla t'\right)$$

因为

$$\frac{\partial r}{\partial t'} = -\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}$$

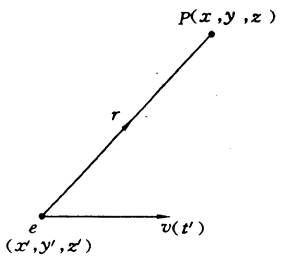


图 8.2

所以

$$\nabla t' = -\frac{1}{c}\frac{\boldsymbol{n}}{1-\frac{1}{c}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})} = -\frac{1}{c}\frac{\boldsymbol{r}}{s} \tag{2.8}$$

(2)计算$\frac{\partial t'}{\partial t}$.

注意到 $t' = t - r/c$，有

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c}\frac{\partial r}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} = 1 + \frac{1}{c}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\frac{\partial t'}{\partial t}$$

解得

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1-\frac{1}{c}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})} = \frac{r}{s} \tag{2.9}$$

(3)计算$\frac{\partial s}{\partial t}$.

注意到

$$s = r - \frac{1}{c}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})$$

$$\frac{\partial s}{\partial t}=\frac{\partial s}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}$$
$$=\left[\dot{r}-\frac{1}{c}(\dot{r}\cdot v)-\frac{1}{c}(r\cdot\dot{v})\right]\frac{r}{s}$$
$$=\left[-n\cdot v+\frac{v^2}{c}-\frac{1}{c}(r\cdot\dot{v})\right]\frac{r}{s}\tag{2.10}$$

(4)计算∇s.

$$\nabla s=(\nabla s)_{t'}+\frac{\partial s}{\partial t'}\nabla t'$$
$$=\left(n-\frac{1}{c}v\right)-\frac{1}{c}\frac{r}{s}\left[-n\cdot v+\frac{v^2}{c}-\frac{1}{c}(r\cdot\dot{v})\right]$$

因为

$$n+\frac{1}{c}\frac{r}{s}(n\cdot v)=\frac{r}{s}$$

所以

$$\nabla s=-\frac{v}{c}+\frac{r}{s}-\frac{1}{c^2}\frac{r}{s}(v^2-r\cdot\dot{v})\tag{2.11}$$

把上述结果代入(2.5)、(2.6)和(2.7)式,从而由(2.1)求得运动带电粒子的电磁场为

$$E=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{s^3}\left\{\left(r-\frac{r}{c}v\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)+\frac{1}{c^2}r\times\left[\left(r-\frac{r}{c}v\right)\times\dot{v}\right]\right\}\tag{2.12}$$

$$B=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0c^2}\frac{1}{s^3}\left\{-(r\times v)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)+\frac{r}{cr}\times\left[r\times\left(\left(r-\frac{r}{c}v\right)\times\dot{v}\right)\right]\right\}$$
$$=\frac{1}{c}n\times E\tag{2.13}$$

上述两式是带电粒子以任意运动速度运动时产生的电磁场.应该注意,E,B 表达式右端中出现的各量都是对应推迟时刻 $t'=t-r/c$ 的值.由(2.13)看出,B 与 E,r 垂直,由于 E 中有 r 方向的分量,E 并不与 r 垂直.E 和 B 可分成两部分,一部分场是

$$E_1=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{s^3}(1-\beta^2)\left(r-\frac{r}{c}v\right)$$
$$B_1=\frac{1}{c}n\times E_1=\frac{e(1-\beta^2)}{4\pi\varepsilon_0c^2s^3}v\times r\tag{2.14}$$

这部分场只与速度有关,而与加速度无关,并且场与 r 的平方成反比.当$v=0$时

$$E_1=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{r^3},\qquad B=0$$

电场就是点电荷所产生的静电库仑场,磁场为零.E_1 和 r 并不正交,E_1,B_1,n 并不构成右手螺旋系,这部分场不是辐射场.另一部分场是

$$E_2=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0c^2s^3}r\times\left[\left(r-\frac{r}{c}v\right)\times\dot{v}\right]$$
$$B_2=\frac{1}{c}n\times E_2\tag{2.15}$$

这部分场与加速度有关,与 r 的一次方成反比,E_2,B_2,n 构成正交螺旋系,因而这部分场是辐射场.这说明只有当电荷做加速运动时才能产生辐射.

当带电粒子做匀速运动时，只有第一部分场，第二部分场为零，因而不向外辐射能量.

先讨论等速运动电荷产生的电磁场的性质. 必须注意(2.14)式中 r 是待求场点同 $t'=t-r/c$ 时刻粒子位置之间的距离，v 是 t' 时刻粒子的速度. 现在将 r 和 v 化为 t 时刻的量. 如图 8.3 所示，t' 时刻粒子在 (x',y',z') 点，t 时刻粒子运动到 (x'',y'',z'') 点. R 表示 t 时刻待求场点和粒子之间的距离. $t-t'=r/c$，故 (x',y',z') 与 (x'',y'',z'') 点间的距离为 vr/c，由此得

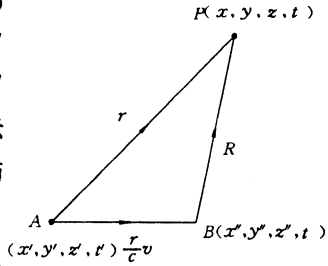


图 8.3

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\frac{r}{c}\boldsymbol{v} \tag{2.16}$$

$$R^2=r^2-2\frac{r}{c}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})+\frac{r^2}{c^2}v^2 \tag{2.17}$$

由(2.16)式有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{v}&=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\\(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{v})^2&=(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})\\&=\boldsymbol{r}\cdot[\boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})]\\&=\boldsymbol{r}\cdot[v^2\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})]\\&=v^2r^2-(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})^2\end{aligned} \tag{2.18}$$

另一方面

$$S^2=\left(r-\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}}{c}\right)^2=r^2-2\frac{r}{c}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})+\frac{1}{c^2}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})^2$$

将(2.17)和(2.18)代入上式得

$$S^2=R^2-\left(\frac{\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{v}}{c}\right)^2=R^2-\frac{R^2v^2}{c^2}+\frac{(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v})^2}{c^2}$$

$$S=r-\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}}{c}=\left[R^2-\frac{R^2v^2}{c^2}+\frac{(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v})^2}{c^2}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.19}$$

故带电粒子在 $P(x,y,z)$ 点产生的电磁场为

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e(1-\beta^2)\boldsymbol{R}}{\left[R^2-\beta^2R^2+\frac{1}{c^2}(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v})^2\right]^{\frac{3}{2}}} \tag{2.20}$$

$$\boldsymbol{B}=\frac{1}{c^2}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E} \tag{2.21}$$

由上面的表达式可得到等速运动电荷产生的场的性质. 先看电场. 同静止电荷的电场相比，$\boldsymbol{E}$ 的方向仍然在 $\boldsymbol{R}$ 方向，然而场强的大小却完全不同，场强不是球对称分布. 在电荷运动方向 $\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}=Rv$，场强为

$$\boldsymbol{E}=\frac{e(1-\beta^2)\boldsymbol{R}}{4\pi\varepsilon_0R^3} \tag{2.22}$$

同静止时相比，相当于运动电荷的有效电量减少到 $e(1-\beta^2)$，因而电场比静止时要减少，在垂直于电荷运动的方向 $\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}=0$，电场为

$$\boldsymbol{E}=\frac{e\boldsymbol{R}}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{1-\beta^2}R^3} \tag{2.23}$$

同静止时相比电场增加. 在其它方向电场介于上述两种情况之间，空间电场以 $\boldsymbol{v}$ 方向为轴对

称. 其电场线分布如图 8.4 所示.

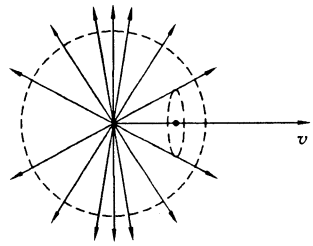


图 8.4

由(2.21)式看到磁场 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{v}$ 垂直,因而磁力线是以电荷运动方向为轴线的一组同心圆. 这部分场的能流

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}&=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\\&=\frac{1}{\mu_0c^2}\boldsymbol{E}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E})\end{aligned}$$

能流的方向垂直于电场线,在运动方向的轴线上能流的数值为零;在垂直于轴线方向能流数值最大. 能流是从运动电荷的后方围绕电荷形成半圆状终止到电荷的前方,圆心在电荷处,如图 8.4 所示. 能流没有脱离电荷向外流出去. 因此等速运动电荷不向外辐射能量. 电磁场随着粒子一起运动.

当$v\ll c$ 时

$$\boldsymbol{E}=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{R}}{R^3},\qquad \boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{R}}{R^3}$$

这同库仑定律与毕奥-萨伐尔定律一致. 当 $v\approx c$ 时,电磁场向垂直于 v 的平面集中,几乎全部电磁场都集中在垂直于$\boldsymbol{v}$ 并包含电荷在内的平面内. 这时电磁场就像一个平冲击波以速度 $v\approx c$ 前进.

§3 运动带电粒子的辐射

现在研究运动电荷产生的辐射. 在(2.12)和(2.13)的场表示式中,只有与 r 成反比的项才对辐射场有贡献. 在最普遍情况下,运动电荷的辐射场为

$$\boldsymbol{E}=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0c^2s^3}\boldsymbol{r}\times\left[\left(\boldsymbol{r}-\frac{r}{c}\boldsymbol{v}\right)\times\dot{\boldsymbol{v}}\right]\tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{B}=\frac{1}{c}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}$$

辐射问题中,首先要计算辐射能量的角分布和辐射功率. 由(3.1)式,辐射能流为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}&=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\\&=\frac{1}{\mu_0c}\boldsymbol{E}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E})\\&=c\varepsilon_0E^2\boldsymbol{n}\\&=\frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0c^3}\frac{1}{s^6}\left\{\boldsymbol{r}\times\left[\left(\boldsymbol{r}-\frac{r}{c}\boldsymbol{v}\right)\times\dot{\boldsymbol{v}}\right]\right\}^2\boldsymbol{n}\end{aligned}\tag{3.2}$$

必须注意,上式中的 r 是 t' 时刻粒子所在处到待求场点的距离,由上式算出的能流,是在 t 时刻单位时间内,在 $\boldsymbol{r}$ 方向通过待求场点处单位面积的能量. 将 S 对以 r 为半径的球面积分,则得到在 t 时刻单位时间内穿过球面的能量. 由于带电粒子在运动,上述能量不等于电荷在 t' 时刻单位时间内辐射的能量. 为什么呢? 请看图 8.5,t' 时刻粒子在 A 点,粒子在 t' 时辐射的能量在 $t=t'+\frac{r}{c}$ 时刻到达以 A 为球心、r 为半径的球面 Σ 上. 经过 $\mathrm{d}t'$ 粒子运动到了 B 点. 显然粒子在 $t'+\mathrm{d}t'$ 时刻辐射的电磁波不可能在 $t+\mathrm{d}t$ 时刻同时到达 Σ 球面. 电磁波沿着粒子运方向到达球面要早于 $t+\mathrm{d}t$,相反方向到达球面要晚于 $t+\mathrm{d}t$. 因此,直接将能流 S 进行球面积分并不就是

运动带电粒子的辐射功率. 那么，如何计算在 t' 到 $t'+\mathrm{d}t'$ 时间内运动带电粒子辐射的能量呢？粒子在 t' 时刻位于 A 点，从 A 点辐射的场，在 $t=t'+r/c$ 时刻将到达球面 Σ_1，Σ_1 的半径为 $r=c(t-t')$. 在 $t'+\mathrm{d}t'$ 时刻，粒子运动到 B 点，从 B 点辐射的场，在 t 时刻只能到达 Σ_2 球面，Σ_2 的半径为 $r=c(t-t'-\mathrm{d}t')$. 这就是说，电荷在 t' 到 $t'+\mathrm{d}t'$ 这段时间内所辐射的电磁场将完全处在 Σ_2 和 Σ_1 两　球面之间，这个区域内的辐射场的能量，就是电荷在 $\mathrm{d}t'$ 时间内所辐射出的总能量.

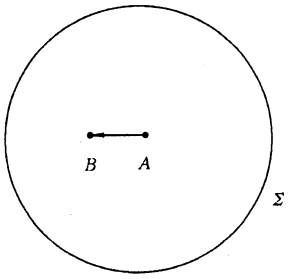


图 8.5

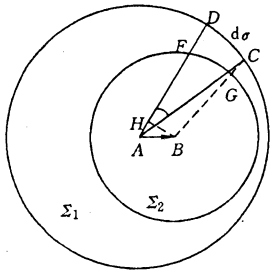


图 8.6

研究 Σ_1 面上 $\mathrm{d}\sigma$ 面元在 A 点所张立体角 $\mathrm{d}\Omega$ 所截出的小体积 $\mathrm{d}V$ 中的电磁场能量，它等于场能密度与 $\mathrm{d}V$ 的乘积，即

$$\mathrm{d}W(\theta)\mathrm{d}\Omega=\frac{1}{2}(\varepsilon_0E^2+\mu_0H^2)\mathrm{d}V=\varepsilon_0E^2\mathrm{d}V \tag{3.3}$$

由图 8.6 可见，$\mathrm{d}r=FD$，故

$$\mathrm{d}V=\mathrm{d}r\mathrm{d}\sigma \tag{3.4}$$

图中的 $\mathrm{d}\sigma$ 可取得使 BC 平行于 AD，再使 BH 垂直于 AD. 由于 $AB=v\mathrm{d}t'$，并且有

$$r=AD=c(t-t'),\qquad \boldsymbol{AH}=\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}}{r}\mathrm{d}t'$$

$$r_2=HF=BG=c(t-t'-\mathrm{d}t')$$

由此求得

$$\mathrm{d}r=FD=AD-AH-HF=\left(1-\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}}{cr}\right)c\mathrm{d}t' \tag{3.5}$$

将(3.4)和(3.5)代入(3.3)式得

$$\mathrm{d}W(\theta)\mathrm{d}\Omega=\varepsilon_0E^2\left(1-\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}}{cr}\right)c\mathrm{d}t'\mathrm{d}\sigma$$

注意到能流 $S=\varepsilon_0E^2c$，$\mathrm{d}\Omega=\mathrm{d}\sigma/r^2$，则在 t' 时刻的单位时间内，粒子在 θ 方向的单位立体角内辐射的能量为

$$\frac{\mathrm{d}W(\theta)}{\mathrm{d}t'}=S\left(1-\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}}{cr}\right)r^2 \tag{3.6}$$

单位时间内粒子辐射的总能量或辐射功率为

$$P(t')=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t'}=\oint S\left(1-\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}}{cr}\right)r^2\mathrm{d}\Omega \tag{3.7}$$

将(3.2)的能流 S 代入上式得辐射功率为

$$P(t')=\frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0c^3}\oint\frac{\left\{\boldsymbol{n}\times\left[\left(\boldsymbol{n}-\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right)\times\dot{\boldsymbol{v}}\right]\right\}^2}{\left(1-\frac{1}{c}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}\right)^5}\mathrm{d}\Omega \tag{3.8}$$

辐射功率的角分布或在 θ 方向单位立体角内辐射的能量为

$$\frac{\mathrm{d}P(t')}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{\mathrm{d}W(\theta)}{\mathrm{d}t'}$$

$$=\frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\frac{\left\{\boldsymbol{n}\times\left[\left(\boldsymbol{n}-\frac{1}{c}\boldsymbol{v}\right)\times\dot{\boldsymbol{v}}\right]\right\}^2}{\left(1-\frac{1}{c}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}\right)^5} \tag{3.9}$$

由上式可得到运动电荷辐射的性质. 先讨论低速运动情况，即 $v\ll c$ 的情况.

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}[\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\dot{\boldsymbol{v}})]^2 \tag{3.10}$$

令 $\boldsymbol{r}$ 与加速度 $\dot{\boldsymbol{v}}$ 之间的夹角为 θ，则上式化为

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\dot{\boldsymbol{v}}^2\sin^2\theta \tag{3.11}$$

上述辐射角分布公式表明，在与 $\dot{\boldsymbol{v}}$ 垂直的方向上辐射最强，沿 $\dot{\boldsymbol{v}}$ 方向则无辐射. 总辐射功率为

$$P=\frac{e^2\dot{\boldsymbol{v}}^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\oint\sin^2\theta\mathrm{d}\Omega=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{3}\frac{e^2\dot{\boldsymbol{v}}^2}{c^3} \tag{3.12}$$

这是非相对论性加速运动电荷的辐射功率的表达式，称为拉莫尔(Larmor)公式.

再讨论速度接近光速的情况. 令 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 夹角为 θ，则有

$$1-\frac{1}{c}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}=1-\frac{v}{c}\cos\theta$$

当 $v\approx c$ 时，在 $\theta\approx 0$ 附近，$1-\beta\cos\theta$ 很小，由(3.9)看出，在 $\theta\approx 0$ 附近辐射功率很大，辐射能量基本上集中在 $\theta\approx 0$ 附近，可以进一步估计出能量集中的角度范围，在 $\theta\approx 0$ 附近可将 $\cos\theta$ 展开只取前两项，于是有

$$1-\beta\cos\theta\approx 1-\beta\left(1-\frac{1}{2}\theta^2\right)\approx 1-\beta+\frac{1}{2}\theta^2$$

另一方面，若令 $\gamma=(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$，则有

$$\frac{1}{\gamma^2}=(1-\beta^2)=(1+\beta)(1-\beta)\approx 2(1-\beta)$$

所以得到

$$1-\beta\cos\theta\approx\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma^2}+\theta^2\right) \tag{3.13}$$

将上式代入(3.9)式，分子与角度 θ 的关系不敏感，因此辐射角分布主要由分母决定，可近似表为

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}\approx\frac{I_0}{(1-\beta\cos\theta)^5}\approx\frac{32I_0}{\left(\theta^2+\frac{1}{\gamma^2}\right)^5}$$

$\theta=\frac{1}{\gamma}$ 时的辐射功率只有 $\theta=0$ 时的辐射功率的 1/32. 因此可认为辐射能量基本上集中在与 $\boldsymbol{v}$ 的夹角为 $\Delta\theta$ 的方向以内.

$$\Delta\theta=\frac{1}{\gamma} \tag{3.14}$$

速度愈大 $\Delta\theta$ 愈小. 对电子来说有

$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}},\qquad \gamma=\frac{E}{mc^2}$$

电子的 $mc^2\approx 0.5\text{MeV}$，现代加速器很容易使电子能量达到 $E=10^3\text{MeV}$，这时电子加速辐射的能量将集中在 $\Delta\theta\approx 0.5\times 10^{-3}\text{rad}$ 内.

§4 韧致辐射与同步辐射

利用前面求出的运动带电粒子的辐射场、辐射角分布和辐射功率，我们研究加速度平行于速度与加速度垂直于速度情况下辐射的特点，这是两种重要的辐射机制.

在X光管中，高速运动电子打到金属靶上产生X光的过程，其中连续谱部分，是由于电子与原子碰撞，在原子核库仑场作用下改变速度而产生的，称为韧致辐射. 在等离子体中，电子与离子发生碰撞，库仑力作用使电子获得加速度而产生韧致辐射. 对于无磁场的热等离子体，这是一种主要的辐射机制，韧致辐射使能量不断损失，热等离子体逐渐冷却.

韧致辐射是 $\dot{\boldsymbol{v}}$ 平行于 $\boldsymbol{v}$ 情况的辐射. 由(3.1)式，此时的辐射电磁场为

$$\boldsymbol{E}=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2 s^3}r^2\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\dot{\boldsymbol{v}})$$

$$\boldsymbol{B}=\frac{1}{c}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}$$

由(3.9)式，得辐射角分布为

$$\frac{\mathrm{d}P(t')}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\frac{[\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\dot{\boldsymbol{v}})]^2}{\left(1-\frac{1}{c}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}\right)^5}$$

令 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的夹角为 θ，则辐射角分布为

$$\frac{\mathrm{d}P(t')}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{e^2\dot{\boldsymbol{v}}^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\frac{\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5}\tag{4.2}$$

当 $v\ll c$ 时，上式变为

$$\frac{\mathrm{d}P(t')}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\dot{\boldsymbol{v}}^2\sin^2\theta$$

与拉莫尔公式一致，在与 $\boldsymbol{v}$ 垂直的方向辐射最强，沿 $\boldsymbol{v}$ 方向无辐射. 当 $v\to c$ 时，辐射集中前方，强度也增加. 辐射最强的方向为

$$\theta_{\max}=\arccos\left[\frac{1}{3\beta}(\sqrt{1+15\beta}-1)\right]$$

在电子直线加速器中，当电子动能约为 80keV 时，$\beta=0.5$，$\theta_{\max}=38.2°$；$\beta\to 1$，$\theta_{\max}\to 0$. 总的辐射功率为

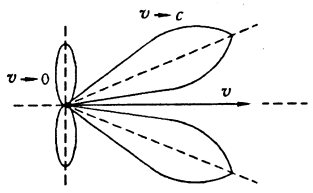


图 8.7

$$P(t')=\frac{e^2\dot{\boldsymbol{v}}^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{e^2\dot{\boldsymbol{v}}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{1}{(1-\beta^2)^3}\tag{4.3}$$

辐射功率只与速度和加速度的大小有关，当 $\boldsymbol{v}$ 接近光速时，辐射损失很大，故带电粒子速度越高，加速就越困难. 将上式用粒子所受的力来表示，由相对论力学方程

$$\boldsymbol{F}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{m\dot{\boldsymbol{v}}}{(1-\beta^2)^{3/2}}$$

代入(4.3)式得

$$P(t') = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{F^2}{m^2} \tag{4.4}$$

在一定作用下，直线运动带电粒子辐射功率与粒子的能量无关，而与质量的平方成反比.

相对论电子在磁场中沿圆周或螺旋线运动，加速度与速度方向垂直，这种辐射首先在同步加速器中得到证实，故称为同步辐射. 在天体物理学中，同步辐射是很普遍的现象. 例如，类星体、射电星系、超新星残迹，甚至一般星系的射电辐射，目前普遍认为都是这种同步辐射.

选粒子运动速度$\boldsymbol{v}$的方向为z轴，加速度$\dot{\boldsymbol{v}}$的方向为x轴，如图 8.8 所示.

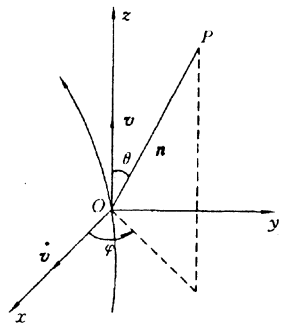


图 8.8

由(3.9)式可得辐射角分布

$$\frac{\mathrm{d}P(t')}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\frac{\left\{\boldsymbol{n}\times\left[\left(\boldsymbol{n}-\frac{1}{c}\boldsymbol{v}\right)\times\dot{\boldsymbol{v}}\right]\right\}^2}{(1-\beta\cos\theta)^5} \tag{4.5}$$

其中

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{n}\times\left[\left(\boldsymbol{n}-\frac{1}{c}\boldsymbol{v}\right)\times\dot{\boldsymbol{v}}\right]\\&=\left(\boldsymbol{n}-\frac{1}{c}\boldsymbol{v}\right)(\boldsymbol{n}\cdot\dot{\boldsymbol{v}})-(1-\beta\cos\theta)\dot{\boldsymbol{v}}\\&=\dot{v}\sin\theta\cos\varphi\left(\boldsymbol{n}-\frac{1}{c}\boldsymbol{v}\right)-(1-\beta\cos\theta)\dot{\boldsymbol{v}}\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&\left\{\boldsymbol{n}\times\left[\left(\boldsymbol{n}-\frac{1}{c}\boldsymbol{v}\right)\times\dot{\boldsymbol{v}}\right]\right\}^2\\&=\dot{\boldsymbol{v}}^2[(1-\beta\cos\theta)^2-(1-\beta^2)\sin^2\theta\cos^2\varphi]\end{aligned}$$

代入(4.5)式，辐射角分布变为

$$\frac{\mathrm{d}P(t')}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{e^2\dot{\boldsymbol{v}}^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\frac{(1-\beta\cos\theta)^2-(1-\beta^2)\sin^2\theta\cos^2\varphi}{(1-\beta\cos\theta)^5} \tag{4.6}$$

角分布与φ角有关，对$\boldsymbol{v}$方向不具有回转对称性. 当$\boldsymbol{v}\to c$时，$\beta\to 1$，辐射主要集中在$\boldsymbol{v}$方向的小角度内. 当粒子沿半径为a的圆周运动时，在$\varphi=0$平面内，辐射角分布如图 8.9 所示.

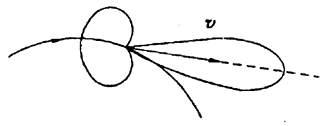


图 8.9

将(4.6)式对立体角积分，可得总的辐射功率为

$$P(t') = \frac{e^2\dot{\boldsymbol{v}}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{1}{(1-\beta^2)^2} \tag{4.7}$$

在$\dot{\boldsymbol{v}}$垂直于$\boldsymbol{v}$的情况下，由力学方程

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m\dot{\boldsymbol{v}}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

代入(4.7)式得

$$P(t') = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{F^2}{m^2(1-\beta^2)} = \frac{e^2F^2E^2}{6\pi\varepsilon_0 m^4c^7} \tag{4.8}$$

式中E是粒子的能量，这时总辐射功率与粒子的能量平方成正比. 在一定作用力下，粒子能量越大辐射损失也越大. 在$\dot{\boldsymbol{v}}$平行于$\boldsymbol{v}$的情况，辐射损失与粒子能量无关. 因此高能电子加速器，

一般不用同步加速器，而用直线加速器. 但质子质量比电子质量大得多，$m_p=1838m_e$. 由(4.8)式看，在能量相同情况下，质子的辐射损失要比电子小得多. 故对高能质子还是采用同步加速器.

从获得高能电子的观点来看，不宜采用同步加速器. 然而人们却利用在同步加速器中高能电子辐射很强这一特性，来获得一种新的光源，称为同步辐射光源. 由于加速器技术的发展，同步辐射光源在近十几年发展很快. 同步辐射光源有重要的特点，被称为新型的"理想"光源.

首先，同步辐射光源的频率可包含从可见光到 X 光的全部频段，加速器能量进一步提高还可延伸到 γ 辐射的频段. 我们定性分析一下同步辐射的频率. 图 8.9 表明，每一瞬间粒子产生的辐射能量主要集中在v 方向的一极窄的锥角内. 光速的张角由(3.14)式表示为

$$\Delta\theta=\frac{1}{\gamma}=\sqrt{1-\beta^2}$$

光束随着粒子做圆周运动而旋转. 在远处固定一点观察这个光束时，看到的将是周期性的脉冲光. 设轨道半径为 R，粒子走过 $R\Delta\theta$ 的时间为(粒子速度接近光速 c)

$$\Delta t'=\frac{R\Delta\theta}{v}\approx\frac{R}{c}\sqrt{1-\beta^2} \tag{4.9}$$

在观察点看到这个光脉冲的时间 $\Delta t\neq\Delta t'$，由(2.9)式有

$$\Delta t=\frac{\partial t}{\partial t'}\Delta t'=(1-\frac{v}{c}\mathrm{cso}\theta)\Delta t'$$

再由(3.13)式，可得

$$\Delta t=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma^2}+\theta^2\right)\Delta t'=\frac{R}{2c}\left(\frac{1}{\gamma^2}+\theta^2\right)\frac{1}{\gamma}$$

式中 θ 是所观测的光速与v 的夹角，可近似用光速的张角 $\Delta\theta$ 来代替. 将(3.14)式的 $\Delta\theta$ 代入上式得

$$\Delta t=\frac{R}{c\gamma^3} \tag{4.10}$$

Δt 是在观测点测出的光速的脉冲时间，也称脉冲宽度. 电荷的运动是周期性的，其周期为

$$T=\frac{2\pi R}{v}\approx\frac{2\pi R}{c}=\frac{2\pi}{\omega_0},\qquad \omega_0=\frac{c}{R} \tag{4.11}$$

T 是光脉冲的周期，ω_0 是相应的角频率. 按照傅里叶分析，可将周期性的脉冲场展开为傅里叶级数，每一傅里叶分量的频率是基本频率 ω_0 的整数倍. 频率的延展宽度并不是无限的，频率宽度 $\Delta\omega$ 与脉冲宽度应满足关系

$$\Delta\omega\Delta t=1 \tag{4.12}$$

由此可估算出脉冲光束中包含的频率范围为

$$\Delta\omega=\omega-\omega_0=\frac{1}{\Delta t}=\frac{c}{R}\gamma^3=\omega_0\gamma^3 \tag{4.13}$$

例如美国的 Spear 加速器，电子轨道半径 R 为 13m，可加速电子达到能量 $E=3\mathrm{GeV}=3\times10^3\mathrm{MeV}$，$\omega_0=2.3\times10^7$，$\Delta\omega=5.49\times10^{18}$，不仅包含了全部可见光频率，最短的极限波长可达 3.4Å. 这说明频率范围是很宽的，几乎可满足对任何频段的光源的要求. 频率是 ω_0 的整数倍，光谱是由很多相距很近的谱线组成.

其次，同步辐射光源的强度特别大，在几平方毫米的面积上可以有几百个千瓦的能流. 现在只有激光可以产生这样大的亮度，但同步光源却可以一直扩展到 X 光频段，其强度可比通常 X 光管产生的强度大十万倍以上.

第三，同步光源几乎是沿着电荷运动轨道的切线方向，光速集中在很窄的张角 $\Delta\theta=\sqrt{1-\beta^2}$ 内，这就可能减少实验的背景，便于由连续谱中引出“单色”的光，因而同步辐射光源可以成为频率是连续可调的光源.

第四，同步光源中的电场方向是确定的，因而光是完全极化的，这就为那些需要极化光源的实验提供了方便的条件.

由于同步辐射光源有许多优越性，它在近代科学技术中有着非常广泛的用途，成了一种非常强有力的研究手段. 它可以用于非线性光学、固体结构、表面物理、光化学、生物化学、生物物理，甚至生物体结构的研究. 用同步辐射光源做光刻，可以极大地提高半导体集成元件的集成度，并将为许多应用性领域的研究开辟途径. 例如可研究强辐射对材料的破坏、模拟核武器的破坏效应. 世界上各发达国家利用过时的加速器改建成了不少同步辐射光源的加速器. 我国第一台同步辐射加速器已建造成功.

§5 切仑科夫(Cercnkov)辐射

1934 年切仑科夫发现，将放射性物质放在一些透明液体旁边时，液体会发出蓝白色的微弱的光. 开始曾以为这是一种荧光，经过深入研究后查明它不是荧光. 荧光光谱有线状或带状结构，而这种光谱是连续的，且加入荧光粹灭剂也不熄灭. 进一步发现这种光具有显著的方向性，光线的方向与粒子运动方向夹角为 θ，并且满足条件

$$\cos\theta=\frac{c}{nv} \tag{5.1}$$

这是一种新的辐射，称为切仑科夫辐射.

1937 年塔姆与弗兰克用经典电磁理论对切仑科夫辐射作出了理论解释. 当带电粒子在介质中的速度超过光在介质中的速度时，就会产生这种辐射. 我们先定性地介绍这种理论.

设介质是均匀的，它由分子组成. 带电粒子通过介质时，电子产生的电场使其附近的分子极化；电子离开后，这些极化分子又恢复原状. 分子的电偶极矩经历了一个振荡过程. 由偶极矩的振动产生电磁波辐射. 介质是均匀的，高速电子在介质内的能量损失极小，可略去不计，因而电子在介质内做匀速运动. 在电子路径的每一点附近的分子，都要经历一个暂短的振荡过程，产生电磁波，这相当于在电子路径上的每一点都是一个电磁波源. 当电子速度 v 大于电磁波在介质中的传播速度 c/n 时，如图 8.10(b)所示，在电子路径上各点的次波有一共同的包络面，这个共同的包络面就是各次波叠加后形成的合成波的波前. 于是在垂直于波前的方向上将观测到电磁辐射，这就是切仑科夫辐射. 这种波和超音速子弹与飞机形成的冲击波相似.

由图 8.10(b)可见，切仑科夫辐射的方向与电子运动速度 v 的夹角 θ 有下面的关系

$$\cos\theta=\frac{(c/n)t}{vt}=\frac{c}{nv}$$

这同(5.1)式的实验观测结果一致.

当电子速度 v 小于电磁波在介质中的传播速度 c/n 时，同一时刻各次波的波阵面如图 8.10(a)所示. 这些波阵面没有共同的包络面，不能形成定向的电磁波辐射.

下面定量计算切仑科夫辐射的电磁场. 设电子沿 z 轴运动，$t=0$ 时电子在原点，t 时电子在 $z=vt$ 处. 它在均匀介质中贡献的电荷与电流密度为

$$\rho=e\delta(x)\delta(y)\delta(z-vt) \tag{5.2}$$

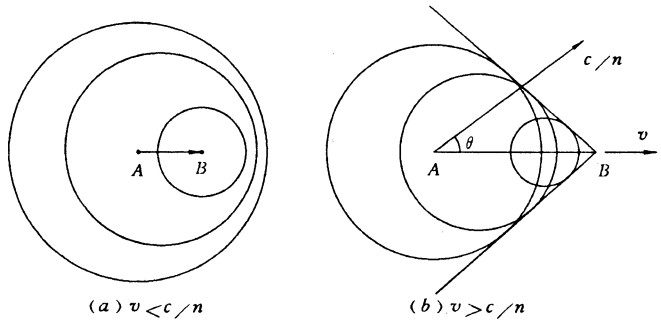


图 8.10

$$J_x = J_y = 0$$

$$J_z = ev\delta(x)\delta(y)\delta(z - vt) \tag{5.3}$$

在均匀介质中的势方程为

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon}\rho \tag{5.4}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A} - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu\boldsymbol{J} \tag{5.5}$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{n} \tag{5.6}$$

可以直接求解上述方程得到切仑科夫辐射的电磁场. 我们用更简单的办法来求电磁场. 如图

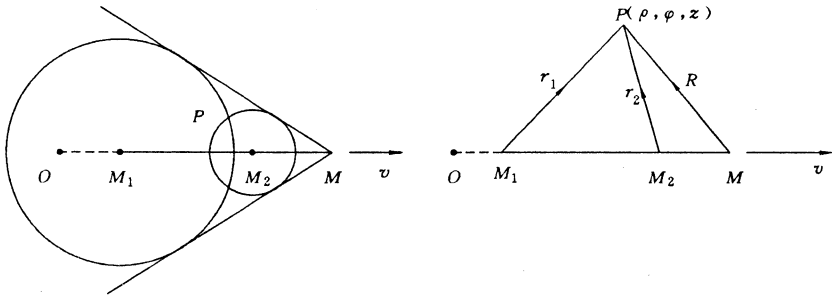


图 8.11

8.11 所示，当 $v>\frac{c}{n}$ 时. 电磁场只存在于锥内区域，整个锥体和电子一起前进，在锥外区域电磁场为零. 在锥内区域的任一点 P，t 时刻的电磁场是由电子在 M_1，M_2 点处所产生的. 设 $PM_1=r_1$，$PM_2=r_2$，电子在 M_1 的时刻为 $t^1=t-\frac{r_1}{c/n}$，电子在 M_2 的时刻为 $t_2'=t-\frac{r_2}{c/n}$，由李纳-维希势可求得 P 点在 t 时刻的势为

$$\phi = \frac{e}{4\pi\varepsilon\left(r_1 - \frac{\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{v}}{c/n}\right)} + \frac{e}{4\pi\varepsilon\left(r_2 - \frac{\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{v}}{c/n}\right)} \tag{5.7}$$

r_1，r_2 是电子在推迟时刻 t_1'，t_2' 的位置和待求场点的距离. 电子运动速度 v 是常数，可将 r_1，r_2 换为 t 时刻电子位置与待求场点的距离 R. 利用前面讨论等速运动电子的电磁场中的变换公式(2.16)与(2.19)式，并参照图 8.11 可求得

$$\left(r_1-\frac{\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{v}}{c/n}\right)=\left(r_2-\frac{\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{v}}{c/n}\right)=\boldsymbol{R}$$

$$\left(r_1-\frac{\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{v}}{c/n}\right)=\left(r_2-\frac{\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{v}}{c/n}\right)$$

$$=\left[R^2-n^2\beta^2R^2+\frac{n^2}{c^2}(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v})^2\right]^{1/2}$$

$$=[R^2-n^2\beta^2R^2+n^2\beta^2R^2\cos^2\theta]^{1/2}$$

$$=R(1-n^2\beta^2\sin^2\theta)^{1/2}$$

式中 $\beta=v/c$. 将上式代入(5.7)得到

$$\phi=\frac{2e}{4\pi\varepsilon R\sqrt{1-n^2\beta^2\sin^2\theta}} \tag{5.8}$$

现在讨论的是均匀介质中的场，应将(2.4)式的真空中电磁波传播速度换为(5.6)式的 u，于是求得矢势为

$$\boldsymbol{A}=\varepsilon\mu\boldsymbol{v}\phi \tag{5.9}$$

再将(5.8)式中的 R 换为柱坐标值(ρ,φ,z)，由图 8.11 可得

$$OM=vt,R^2=(z-vt)^2+\rho^2$$

于是(5.8)化为

$$\phi=\frac{2e}{4\pi\varepsilon\sqrt{(z-vt)^2+(1-n^2\beta^2)\rho^2}} \tag{5.10}$$

由(5·9)和(5.10)可求出切仑科夫辐射的电磁场为

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{2e(1-n^2\beta^2)\boldsymbol{R}}{[(z-vt)^2+(1-n^2\beta^2)\rho^2]^{3/2}} \tag{5.11}$$

$$\boldsymbol{B}=\varepsilon\mu\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E} \tag{5.12}$$

再作坐标变换，选电子所在处为坐标原点，即令

$$z'=z-vt$$

由(5.11)式看到只有当

$$z'^2-(n^2\beta^2-1)\rho^2>0$$

时电场才有意义. 并且电场只在电子的后方. 因此 $z'<0$. 由图 8.12，波前形成的圆锥面方程为

$$z'=-\sqrt{n^2\beta^2-1}\rho \tag{5.13}$$

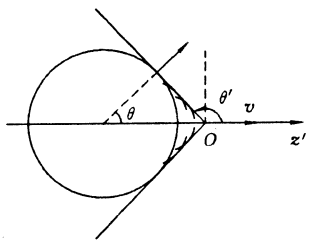


图 8.12

由上式求得

$$\tan\theta'=\frac{\rho}{z'}=\frac{-1}{\sqrt{n^2\beta^2-1}}$$

$$\sin\theta'=\frac{\tan\theta'}{\sqrt{1+\tan^2\theta'}}=\frac{1}{n\beta}=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$$

所以

$$\cos\theta=\frac{1}{n\beta}=\frac{c}{nv} \tag{5.14}$$

这和实验观测结果的(5.1)式完全一致.

由(5.11)式看到，在锥面上，由于(5.13)的关系，电场变为无穷大，这当然不符合实际情况. 出现这种不合理结果的原因在于：前面推导过程中假定了 n,μ,ε 是常数，实际上介质的折射率

n 是频率的函数. 在高频时 n 趋近于 1，因而只有对一定的频段才能满足 $v>c/n$ 的条件. 实验也发现切仑科夫辐射包含某一频段的各种频率. 不同频率成分的电磁波速度不同，它们的辐射方向不同，因而波前也不会集中在同个锥面上，各种频率的电磁场叠加起来不应是无限大.

切仑科夫辐射已用来制造探测带电粒子的计数器，称为切仑科夫计数器. 它只记录速度大于介质中光速的粒子，因而可以避免低速粒子的干扰. 用滤波器选择一定的频率，测出辐射角度，还可以定出粒子的速度. 切仑科夫计数器在核物理和粒子物理的实验中有广泛的用途.

§6 带电粒子的电磁场对粒子本身的反作用

我们知道带电粒子在电磁场中要受到洛伦兹力. 如果把带电粒子看成是具有一定体积的电荷分布，则可以计算出电荷产生的电磁场对电荷自身的洛伦兹力. 这种作用力就是电荷的场对其自身的反作用. 现在用简单的方法分析一下，电荷的场对自身的反作用会产生什么影响.

前面已经指出，运动电荷产生的电磁场包含两部分：一部分场随粒子一起运动，这部分场只与粒子运动速度有关，称为自有场；另一部分场与粒子加速度有关，这部分场将脱离场源把能量辐射出去，称为辐射场. 这两部分场对带电粒子反作用的影响不同.

自有场的反作用影响，使带电粒子的惯性质量增加，这个结论很容易得到. 电磁场是一种物质形态，它具有能量. 按照相对论中的质能关系，对任何物质形态，一定的能量就和相应的质量相联系. 自有场具有能量因而也具有相应的质量. 自有场与带电粒子联系在一起，改变带电粒子的运动状态，也必然要改变与它连在一起的自有场的状态，因而自有场的存在增加了带电粒子的惯性质量. 由于增加这部分惯性质量来源于电磁场的作用，故这部分质量也称为电磁质量. 带电粒子的总质量 $m=m_0+m_e$，m_0 是没有电磁场存在时带电粒子的质量，称为裸质量，m_e 是电磁质量. 带电粒子与其周围的自有场是不可分的，实际上观测的质量是总的质量.

电磁质量可由质能关系 $m_e=W/c^2$ 来计算，W 是带电粒子周围电磁场的能量. 为了算出 W，必须知道电荷分布情况，但在目前实验条件下还无法测量出电荷分布，只能在一定的模型下做些估计. 假设粒子的电荷均匀分布在半径为 r_e 的球面上，静电场能量为

$$\begin{aligned} W&=\frac{1}{2}\int\varepsilon_0E^2\mathrm{d}V\\ &=\frac{1}{2}\varepsilon_0\int_{r_e}^{\infty}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r^2}\right)^2 4\pi r^2\mathrm{d}r\\ &=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}\frac{e^2}{r_e} \end{aligned}$$

电磁质量为

$$m_e=W/c^2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}\frac{e^2}{c^2r_e} \tag{6.1}$$

假设电荷均匀分布在半径为 r_e 的球内，则静电能量为

$$W=\frac{1}{2}\int\varepsilon_0E^2\mathrm{d}V=\frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^{r_e}\left(\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\right)^2 4\pi r^2\mathrm{d}r+\frac{\varepsilon_0}{2}\int_{r_e}^{\infty}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}\right)^2 4\pi r^2\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3}{5}\frac{e^2}{r_e}$$

电磁质量为

$$m_e = W/c^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3}{5}\frac{e^2}{c^2 r_e} \tag{6.2}$$

在上述两种模型下电磁质量基本相同. 历史上阿伯拉罕(Abraham)曾假定电子的全部质量都是电磁质量. 由(6.1)与(6.2)式,略去系数因子,可认为电子的质量近似为

$$m = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{c^2 r_e} \tag{6.3}$$

式中的 m,e 取实验值,可定出电子的经典半径为

$$r_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{mc^2} \approx 2.82 \times 10^{-15}\text{m} \tag{6.4}$$

上述的阿伯拉罕的经典理论有许多内部矛盾. 首先,一个电荷内部各电荷元之间要互相排斥,仅由静电相互作用力不能形成稳定的电荷分布. 这说明一个带电粒子内部必然有非电磁的作用力存在,由此电子的质量也不可能只用电磁质量来代替. 现在已经发现许多不带电的粒子如中子等,它们的质量就不一定与电磁质量有关. 此外,由经典理论得到的电子半径也和现在实验不符. 现在的实验已发现,在 10^{-17}m 的范围内,电子仍然像一个点粒子,因此经典电子半径不能作为电子结构的尺度.

以上说明了电磁质量是存在的,但用经典理论不能获得电磁质量的大小. 如何计算电磁质量在近代量子理论中也没有解决.

现在研究辐射场对带电粒子的反作用. 带电粒子辐射电磁波后,由于电磁波带走了能量,粒子本身的能量要减少,运动速度减慢,因此辐射场的反作用使带粒子受到阻尼力,称为辐射阻尼力. 我们来求带电粒子在低速运动情况下的辐射阻尼力. 低速运动情况下粒子的辐射功率为

$$P(t') = \frac{e^2\dot{\boldsymbol{v}}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \tag{6.5}$$

$P(t')$也是带电粒子在单位时间内损失的能量. 这相当于带电粒子受到阻尼力 $\boldsymbol{F}_1$ 的作用,在单位时间内克服阻尼力所作的功应等于辐射出去的能量

$$\boldsymbol{F}_s \cdot \boldsymbol{v} = -\frac{e^2\dot{\boldsymbol{v}}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \tag{6.6}$$

因为粒子的速度和加速度是独立无关的,要上式对任意运动情况每一瞬时都保持成立,显然是困难的. 另外,在每一瞬时,辐射出去的能量并不等于带电粒子能量的减少,因为自有场也在变化,自有场的能量也在流动,参与能量平衡. 因此自有场能量的变化也必须考虑进去. 在带电粒子做周期运动情况下,当粒子运动一个周期后,自有场也回到原来状态. 因此,在一个周期内克服阻尼力所做的功应等于辐射出去的能量. (6.6)式对一个周期的积分应该成立,即

$$\int_t^{t+T} \boldsymbol{F}_s \cdot \boldsymbol{v}\mathrm{d}t = -\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\int_t^{t+T}\dot{\boldsymbol{v}}^2\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v}\Big|_t^{t+T} + \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\int_t^{t+T}\ddot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}t$$

在经历一个周期后,粒子的速度、加速度都回到原来状态,于是上式第一项值为零. 最后得

$$\int_t^{t+T}\boldsymbol{F}_s\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}t = \int_t^{t+T}\left(\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\ddot{\boldsymbol{v}}\right)\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}t$$

由此求得在一个周期内的平均辐射阻尼力为

$$\boldsymbol{F}_s = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\bar{\boldsymbol{v}} \tag{6.7}$$

综上所述，带电粒子的电磁场对粒子的反作用包含两个方面：一是使带电粒子的质量增加，即增加电磁质量，它已包括在实际测量的质量之中；另一方面是使带电粒子受到阻尼力，在低速运动时的平均辐射阻尼力由(6.7)式表示.

例　在考虑辐射阻尼力的情况下，求简谐振动电荷的运动规律.

解　设电荷的质量为 m，电量为 e，在 x 轴上做简谐振动. 电荷所受弹性力为 $-kx$，考虑辐射阻尼力后的运动方程为

$$m\ddot{x} = -kx + \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\dddot{x} \tag{6.8}$$

令

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \qquad \gamma = \frac{e^3\omega_0^2}{6\pi\varepsilon_0 mc^3} \tag{6.9}$$

则(6.8)式化为

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \gamma\dddot{x}\frac{1}{\omega_0^2} \tag{6.10}$$

在原子发光的经典理论中，认为一个发光的原子就是一个做简谐振动的振子，可见光的波长 $\lambda \approx 10^{-7}$m. 由((6.9)式有

$$\frac{\gamma}{\omega_0} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}\frac{2\omega_0}{3c} = \frac{2r_e\omega_0}{3c} = \frac{2}{3}r_e\frac{2\pi}{\lambda}$$

$$= \frac{2}{3}\times 2.8\times 10^{-15}\times\frac{2\pi}{10^{-7}} \approx 10^{-7} \ll 1$$

这说明(6.10)式中辐射阻尼力比弹性力要小得多. 因此可以用微扰方法来解(6.10)式，即先略去辐射阻尼力求解(6.10)式的 x，这样得到 x 的零极近似解. 用零级近似的 x 求出阻尼力后，再求解(6.10)式，这样得到 x 的一级近似解. 用一级近似 x 求阻尼力，再求 x 的二级近似解，如此重复下去可求得很精确的解. 现在的 γ 比 ω_0 小得多，只求到 x 的一级近似解就可以了.

先求 x 的零级近似解，即求解方程

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

其解为

$$x = x_0 e^{-i\omega_0 t} \tag{6.11}$$

用零级近似的 x 计算阻尼力后得一级近似的运动方程为

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{e^2\omega_0^2}{6\pi\varepsilon_0 mc^3}\dot{x} = -\gamma\dot{x}$$

即

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{6.12}$$

设上式解为

$$x = x_0 e^{-i\omega t}$$

代入(6.12)后得

$$\omega^2 + i\gamma\omega - \omega_0^2 = 0$$

$$\omega = \frac{-i\gamma \pm \sqrt{-\gamma^2 + 4\omega_0^2}}{2} \approx \omega_0 - i\frac{\gamma}{2}$$

最后求得一级近似下的振子运动规律

$$x = x_0 e^{-\frac{r}{2}t} e^{-i\omega_0 t} \tag{6.13}$$

这说明由于辐射阻尼力的作用，使振子的振幅迅速衰减. 振幅衰减到原值 1/e 的时间

$$\tau = 1/\gamma$$

τ 可称为振子的寿命. 对可见光 $\lambda \approx 5000$ Å，对应的 $\omega_0 = 2\pi c/\lambda \approx 4\times 10^{15}$，即 $\gamma/\omega_0 \approx 10^{-7}$，故 $\tau = 1/r \approx 3\times 10^{-9}$s. 寿命 τ 比振动周期大很多数量级，也就是说在振子的寿命期内振子振动次数 $n = \omega_0\tau/2\pi \simeq 10^6$.

利用上述结果可以解释光谱线的自然宽度. 实验发现，光谱线并不是严格的一条线，而是有一定宽度. 形成谱线宽度的原因有多种，在光谱理论中有专门的说明. 这里要指出的是，辐射阻尼力是形成谱线宽度的一种原因. 辐射阻尼力不能消除，由此引起的谱线宽度称为自然宽度.

原子发光的经典理论认为，原子中的电子做简谐运动，原子发光就是谐振电子辐射电磁波. 设振子从某一时刻 $t=0$ 开始辐射. 前已指出带电粒子运动产生的辐射场与粒子的加速度成正比. 考虑辐射阻尼力后的谐振电子运动情况由(6.13)式给出，因而谐振电子产生的辐射电场可表为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}_0 e^{-\frac{r}{2}t} e^{-i\omega_0 t} \qquad t > 0 \\ \boldsymbol{E} &= 0 \qquad\qquad\qquad t < 0 \end{aligned} \tag{6.14}$$

这是一个随时间衰减的电磁场. 为了求出这个场的频谱，可利用傅里叶变换

$$\boldsymbol{E}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{E}(t) e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \boldsymbol{E}_0 e^{-\frac{r}{2}t} e^{i(\omega-\omega_0)} dt \\ &= \frac{\boldsymbol{E}_0}{2\pi} \frac{1}{\frac{\gamma}{2} - i(\omega-\omega_0)} \end{aligned}$$

频率为 ω 的光的强度 $I(\omega)$ 与 $\boldsymbol{E}(\omega)$ 的绝对值平方成正比

$$I(\omega) = A|\boldsymbol{E}(\omega)|^2 = A\frac{E_0^2}{4\pi^2}\frac{1}{\left(\frac{\gamma}{2}\right) + (\omega-\omega_0)^2} \tag{6.15}$$

用 I_0 表示光谱线的总强度，则有

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} I(\omega) d\omega \\ &= A\frac{E_0^2}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 + (\omega-\omega_0)^2} \\ &= A\frac{E_0^2}{4\pi^2}\frac{2\pi}{\gamma} \end{aligned} \tag{6.16}$$

由此可定出

$$A = 2\pi \frac{I_0}{E_0^2}\gamma$$

代入(6.15)式得

$$I(\omega) = \frac{1}{2\pi} I_0 \frac{\gamma}{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 + (\omega - \omega_0)^2} \tag{6.17}$$

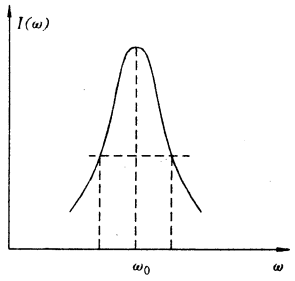


图 8.13

当 $\omega=\omega_0$ 时，光强最大，$I=4\frac{I_0}{2\pi}$；当 $\omega=\omega_0\pm\frac{\gamma}{2}$ 时，光强减为最大值的一半(图 8.13).

$$\Delta\omega = \left(\omega_0 + \frac{\gamma}{2}\right) - \left(\omega_0 - \frac{\gamma}{2}\right) = \gamma$$

是谱线的频率宽度. 前已算出 $\Delta\omega=\gamma\approx10^8$.

除了辐射阻尼力产生光谱线的宽度外，原子运动的多普勒效应和原子间的碰撞都可以产生光谱线的宽度.

§7 带电粒子对电磁波的散射

当电磁波投射到一个电荷体系上时，电荷体系在电磁场作用下运动状态发生变化，向外辐射电磁波，这种现象称为带电粒子对电磁波的散射. 投射到电荷体系上的电磁波称为入射波，由电荷体系辐射的电磁波称为散射波. 散射波的特性与电荷体系的结构有关. 通过对散射的研究可以了解电荷体系的性质. 从更广泛的意义看，散射问题在近代物理中有非常重要的地位，分析各种情况下波或粒子的散射性质，可以获得关于粒子之间相互作用以及物质内部结构的信息.

为了标志体系的散射特性，引入“散射截面”概念，它有微分散射截面和积分散射截面两种. 微分散射截面的定义是：散射体系在一给定方向，单位时间内向单位立体角所辐射出的平均能量与入射到电荷体系上的平均能流之比. 设入射波平均能流为 $\overline{S}_i$，散射波的平均能流为 $\overline{S}$，则微分散射截面可表为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma(\theta,\varphi)}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\overline{S}r^2}{\overline{S}_i} \tag{7.1}$$

积分散射截面的定义是：单位时间内散射体系沿各方向散射出的平均总能量同入射波平均能流之比，也就是(7.1)式对立体角的积分

$$\sigma = \oint \frac{\overline{S}r^2}{\overline{S}_i}\mathrm{d}\Omega \tag{7.2}$$

散射理论中的基本问题是计算散射截面. 散射截面标志了带电粒子对电磁波散射的能力，它具有面积量纲，因而得名.

1. 自由电子对电磁波的散射

设入射波是线偏振的平面波

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0\exp[-\mathrm{i}(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R})]$$

作用在带电粒子上的洛伦兹力为

$$\boldsymbol{F} = e\boldsymbol{E} + e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

对平面波有 $|\boldsymbol{E}|=c|\boldsymbol{B}|$，当电子运动速度 $v\ll c$ 时，磁场力可忽略不计. 此外，若电磁波的波长

为 λ，在一个周期 T 内电子移动距离为 $vT \ll cT = \lambda$. 这说明在电子的运动范围内，可不考虑电场的波动性，只需考虑电场随时间的周期变化. 顾及辐射阻尼力时，电子的运动方程为

$$m\ddot{x} = eE_0 e^{-i\omega t} + \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\dddot{x} \tag{7.3}$$

设上述方程的解为

$$x = x_0 e^{-i\omega t} \tag{7.4}$$

代入(7.3)式可定出

$$\boldsymbol{x}_0 = \frac{-e\boldsymbol{E}_0}{m(\omega^2 + i\omega\gamma)} \tag{7.5}$$

式中 γ 由(6.9)式表示，即

$$\gamma = \frac{e^2\omega^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} = \frac{2}{3}r_e\frac{\omega^2}{c} = \frac{4\pi}{3}\frac{r_e}{\lambda}\omega$$

$r_e = 2.82\times10^{-15}\mathrm{m}$ 是经典电子半径，只要入射波长比经典电子半径大得多，$\lambda \gg r_e$，则 $\omega\gamma \ll \omega^2$，辐射阻尼力总可略去. 在这种情况下，由(7.5)和(7.4)式可得电子的谐振运动解为

$$\boldsymbol{x} = -\frac{e\boldsymbol{E}_0}{m\omega^2}e^{-i\omega t} \tag{7.6}$$

低速运动电荷辐射的电场为

$$\boldsymbol{E}' = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{1}{r}\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\ddot{\boldsymbol{x}}) \tag{7.7}$$

设辐射方向 $\boldsymbol{n}$ 与外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 方向的夹角为 α，则由(7.6)和(7.7)式可得散射波的电场强度为

$$\boldsymbol{E}' = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{1}{r}\frac{e\boldsymbol{E}_0}{m}\sin\alpha e^{-i\omega t} \tag{7.8}$$

散射波的平均能流为

$$\begin{aligned}\overline{S} &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}'^{*}\times\boldsymbol{H}') \\ &= \frac{1}{2}c\varepsilon_0\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}'^{*}\cdot\boldsymbol{E}')\boldsymbol{n} \\ &= \frac{e^4}{32\pi^2\varepsilon_0}\frac{E_0^2}{m^2c^3r^2}\sin^2\alpha\boldsymbol{n} \\ &= \frac{c\varepsilon_0 E_0^2}{2}\frac{r_e^2}{r^3}\sin^2\alpha\boldsymbol{n}\end{aligned} \tag{7.9}$$

入射波的平均能流为

$$\overline{S}_i = \frac{1}{2}c\varepsilon_0\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}^{*}\cdot\boldsymbol{E}) = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 E_0^2 \tag{7.10}$$

将(7.9)和(7.10)代入(7.1)式得微分散射截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\overline{S}r^2}{\overline{S}_i} = r_e^2\sin^2\alpha \tag{7.11}$$

如果入射波不是线偏振的，而是自然光，假定入射波沿 z 方向，则 $\boldsymbol{E}_0$ 在 xy 平面内取任何方向的几率是相同的. α 角依赖于 $\boldsymbol{E}_0$ 的方位角 ψ，这时应将(7.11)式对各种 ψ 方向求平均. 如图 8.14 所示

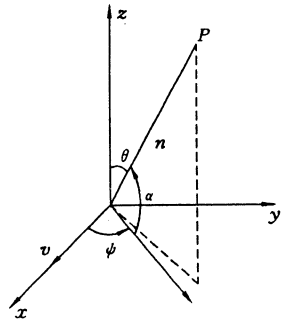


图 8.14

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{i} + \sin\varphi\boldsymbol{j} + \cos\theta\boldsymbol{k}$$

$$\frac{\boldsymbol{E}}{E_0}=\cos\psi\boldsymbol{i}+\sin\psi\boldsymbol{j}$$

$$\begin{aligned}\cos\alpha&=\boldsymbol{n}\cdot\frac{\boldsymbol{E}_0}{E_0}\\&=\sin\theta\cos\varphi\cos\psi+\sin\theta\sin\varphi\sin\psi\\&=\sin\theta\cos(\psi-\varphi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin^2\alpha&=1-\cos^2\alpha\\&=1-\sin^2\theta\cos^2(\psi-\varphi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\sin^2\alpha}&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\alpha\mathrm{d}\psi\\&=1-\frac{1}{2}\sin^2\theta\\&=\frac{1}{2}(1+\cos^2\theta)\end{aligned}\tag{7.12}$$

将上式代入(7.11)式,则得非偏振的入射波被自由电子散射的微分散射截面

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{1}{2}r_e^2(1+\cos^2\theta)\tag{7.13}$$

将上式对立体角积分得到积分散射截面为

$$\sigma=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}r_e^2(1+\cos^2\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=\frac{8\pi}{3}r_e^2\tag{7.14}$$

上式也称汤姆孙(Thomson)散射截面.必须指出,上述结果仅在入射波频率较低情况下是准确的.当频率高到与$\frac{mc^2}{\hbar}$可以相比时,即光子能量$\hbar\omega$与电子静止能量mc^2可相比时,量子效应就比较显著,这时称为康普顿散射,散射波的频率也不同于入射波的频率了.从量子电动力学计算表明,频率越高,偏离汤姆孙散射的结果也越大.

2. 束缚的谐振电子对电磁波的散射

在经典辐射理论中,原子中的电子运动可看成是受到弹性力的谐振子.在外来电磁波作用下,谐振电子受到三种作用力:弹性力、外电场力与辐射阻尼力.电子运动方程为

$$m\ddot{\boldsymbol{x}}=-m\omega_0^2\boldsymbol{x}+e\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}+\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}\dot{x}+\cdots\tag{7.15}$$

其中,ω_0是谐振子的固定频率,ω是外电磁波频率.

令

$$r=\frac{e^2\omega^2}{6\pi\varepsilon_0me^3}\tag{7.16}$$

并设

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\tag{7.17}$$

将上两式代入(7.15)式可得$\boldsymbol{x}_0$的方程

$$-\omega^2\boldsymbol{x}_0+\omega_0^2\boldsymbol{x}_0-\mathrm{i}\omega\gamma x_0=\frac{e}{m}\boldsymbol{E}_0$$

由此求出$\boldsymbol{x}_0$再代入(7.17)得在外电磁波作用下谐振电子的运动规律为

$$\boldsymbol{x}=\frac{e}{m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2-\mathrm{i}\omega r}\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

$$= \frac{e}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 r^2}} \boldsymbol{E}_0 e^{-i(\omega t - \delta)} \tag{7.18}$$

$$\tan\delta = \frac{\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{7.19}$$

设辐射方向与外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 方向的夹角为 α，将(7.18)代入(7.7)式，得散射波电场为

$$E' = -\frac{e^2 E_0 \sin\alpha}{4\pi\varepsilon_0 mc^2 r} \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\nu^2}} e^{-i(\omega t - \delta)} \tag{7.20}$$

散射波平均能流为

$$\bar{S} = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 \mathrm{Re}(\boldsymbol{E}'^* \cdot \boldsymbol{E}')$$

$$= \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_0^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} \frac{r_e^2}{r^2} \sin^2\alpha$$

入射波平均能流为

$$\bar{S}_i = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_0^2$$

微分截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\bar{S} r^2}{\bar{S}_i} = \frac{r_e^2 \omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\nu^2} \sin^2\alpha \tag{7.21}$$

若入射波是自然光，则应对 $\sin^2\alpha$ 按 E_0 的方位角取平均，由(7.12)

$$\overline{\sin^2\alpha} = \frac{1}{2}(1 + \cos^2\theta)$$

代入(7.12)式，再对立体角积分得到总散射截面为

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\nu^2} \tag{7.22}$$

当入射频率 $\omega \ll \omega_0$ 时，总散射截面化为

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 \tag{7.23}$$

这时的散射截面和入射波频率的四次方成正比，因此高频波比低频波散射得更多. 大气中的分子可以看成谐振子，太阳光中的蓝光比红光散射得更多，也就是说高频的蓝色散射波强度比红色的散射波强度大，因此看到的天空是蓝色的. 低频散射公式(7.23)也称为瑞利(Rayleigh)散射.

当入射波频率 $\omega \gg \omega_0$ 时，(7.22)式化为

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \tag{7.24}$$

这正是自由电子散射公式.

当 $\omega = \omega_0$ 时，(7.22)式化为

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \left(\frac{\omega}{\nu}\right)^2 \tag{7.25}$$

由于 $\omega_0 \gg \nu$，所以上式的截面值很大，比其它频率的散射截面大得多，这种散射称为共振散射. 共振散射之所以很强，是由于入射波频率与谐振子的固有频率相等，使谐振电子发生共振，振子的振幅增大，因而辐射出的电磁能量也增大. 若是连续谱的电磁波入射的谐振电子上，则 $\omega = \omega_0$ 的电磁波的能量强烈地被振子吸收，然后又被振子辐射出去转化为散射波的能量. 因此连续谱的电磁波透过谐振电子时，将在 $\omega = \omega_0$ 处观测到吸收谱线.

思考题与习题八

1. 导出李纳-维希势.

2. 等速运动带电粒子的电磁场的特征是什么?

3. 任意速度运动的带电粒子的电磁场有何特点?

4. 为什么运动电荷在单位时间内辐射出的能量不等于能流在球面上的积分? 两者关系如何?

5. 什么是韧致辐射? 有何特点? 什么是同步辐射? 有何特点?

6. 带电粒子的场,对粒子自身的作用力产生什么效果?

7. 散射过程的物理实质是什么,计算散射截面的方法如何?

8. 电荷为 e 的粒子在 xy 平面内绕 z 轴做匀速圆周运动,角速度为 ω,圆周半径为 a,设 $\omega a \ll c$,求辐射角分布.

9. 在氢原子中,设电子处于第一玻尔轨道($a=0.5\times10^{-10}\mathrm{m}$). 按照经典理论计算,电子由于辐射,在单位时间内所损失的能量是多少? 经过多长时间电子就会与质子相碰?

10. 设电子在均匀外磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 中运动,$v\ll c$,$\boldsymbol{B}_0$ 沿 z 轴方向. $t=0$,$\boldsymbol{x}=a\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{v}=v_0\boldsymbol{j}$. 求:

(1)考虑辐射阻尼力的电子运动轨道;

(2)辐射功率.

11. 一各向同性的带电谐振子处于均匀外磁场中,设粒子速度 $v\ll c$,并可忽略辐射阻尼力. 试确定振子的振动频率,并导出振子运动的通解. ($\omega_L=\dfrac{eB}{2m}\ll\omega_0$)

常用物理常数表

真空光速	$c=2.99792458\times10^{8}\mathrm{m/s}$
真空磁导率	$\mu_0=4\pi\times10^{-7}\mathrm{H/m}$
真空介电常数	$\varepsilon_0=8.854187818\times10^{-12}\mathrm{F/m}$
普朗克常数	$h=6.626176\times10^{-34}\mathrm{J\cdot s}$ $\hbar=h/2\pi=1.0545887\times10^{-34}\mathrm{J\cdot s}$
基本电荷	$e=1.6021892\times10^{-19}\mathrm{C}$
电子质量	$m_e=9.103534\times10^{-31}\mathrm{kg}=0.5110034\mathrm{MeV}/c^2$
质子质量	$m_p=938.2796\mathrm{MeV}/c^2=1.6726485\times10^{-27}\mathrm{kg}$
中子质量	$m_n=1.6749543\times10^{-27}\mathrm{kg}=939.5731\mathrm{MeV}/c^2$
原子质量单位	$1\mathrm{u}=1.6605655\times10^{-27}\mathrm{kg}=931.5016\mathrm{MeV}/c^2$
玻尔磁子	$\mu_B=e\hbar/2m_ec=9.274078\times10^{-24}\mathrm{J/T}$
核磁子	$\mu_N=e\hbar/2m_pc=5.050824\times10^{-27}\mathrm{J/T}$
电子磁矩	$\mu_e=1.0011596597\mu_B$
质子磁矩	$\mu_p=2.7928456\mu_N$
玻尔半径	$a_0=4\pi\varepsilon_0\hbar^2/m_ee^2=5.2917706\times10^{-11}\mathrm{m}$
电子康普顿波长	$\lambda_c=h/m_ec=2.4263089\times10^{12}\mathrm{m}$
精细结构常数	$\alpha=e^2/4\pi\varepsilon_0\hbar c=1/137.03604$
电子经典半径	$a=e^2/4\pi\varepsilon_0m_ec^2=2.8179380\times10^{-15}\mathrm{m}$
能量单位转换	$1\mathrm{MeV}=1.6021892\times10^{-13}\mathrm{J}$
玻耳兹曼常数	$k=1.380662\times10^{23}\mathrm{J/K}$
阿伏加德罗常数	$N_0=6.022045\times10^{-23}\mathrm{mol}^{-1}$
正常条件下摩尔体积	$V_m=22.41383\times10^{-3}\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{mol}^{-1}$

参考答案

思考题与习题一

2. (a)$\boldsymbol{c}$ (b)$\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{c}}{r}$ (c)$\frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{c}}{r}$ (d)0 (e)$-2\boldsymbol{c}$ (f)$4\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r}$ (g)$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r}$ (h)$2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{c}$ (i)$3\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r}$

(j)$2c^2\boldsymbol{r}-2(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{c}$ (k)$\frac{3(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})}{r^5}\boldsymbol{r}-\frac{\boldsymbol{c}}{r^3}$ (l)同 k

3. $8\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}-16\boldsymbol{k}$

6. (1)提示:利用高斯公式来证明.

(2)提示:以任意一常矢量 $\boldsymbol{c}$ 点乘等式右端.

7. (1) $\sum_{i=1}^{n}q_i\delta(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_i)$ (2) $\frac{Q}{4\pi a^2}\delta(\boldsymbol{R}-a)$

8. (1) $I\delta(z-0)$ (2)$I\delta(r-a,z-0)$

思考题与习题二

12. (1)$\boldsymbol{E}=E_0e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{B}=0$

(2)$r=R_1$ 处:$\sigma_p=\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)R_2V_1}{R_1(R_2-R_1)}e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}$,$r=R_2$ 处:$\sigma_p=\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)R_1V_1}{R_2(R_2-R_1)}e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}$

15. 体内 $\boldsymbol{J}_m=0$,柱表面:$\alpha_m=M_1\boldsymbol{e}_\phi$

16. $r=r_1$ 处:$\alpha_m=0$,$r=r_2$ 处:$\alpha_m=\left(1-\frac{\mu}{\mu_0}\right)(r_2^2-r_1^2)\frac{\boldsymbol{J}}{2r_2}$

17. (1)$\boldsymbol{E}=\frac{V_0}{a}\cos\omega t\boldsymbol{k},\boldsymbol{B}_1=-\frac{\mu_0\varepsilon_0\omega V_0}{2d}r\sin\omega t\boldsymbol{e}_\phi$

(2)$I=-\frac{\varepsilon_0\omega\pi a^2}{d}V_0\sin\omega t,\alpha_f=-\frac{\varepsilon_0\omega(r^2-a^2)}{2dr}V_0\sin\omega t\boldsymbol{e}_r$

19. $\boldsymbol{J}_D=-\frac{\varepsilon_0\omega V_0\sin\omega t}{\ln b/a}\cdot\frac{\boldsymbol{e}_r}{r},I_D=-\frac{2\pi\varepsilon_0h\omega V_0}{\ln b/a}\sin\omega t$

20. (1)$\boldsymbol{S}=\frac{IV}{2\pi l\ln b/a}\cdot\frac{1}{r^2}\boldsymbol{e}_z,p=IV$ (2)$\boldsymbol{S}_a=-\frac{I^2}{2\pi^2a^3\sigma}\cdot\boldsymbol{e}_r,p=I^2R$

21. 自由电荷:$\sigma_{上}=\frac{\varepsilon_1\sigma_2}{\sigma_1l_1+\sigma_2l_1}V$, $\sigma_{下}=\frac{-\varepsilon_1\sigma_1}{\sigma_1l_2+\sigma_2l_1}V$, $\sigma_{中}=\frac{\sigma_1\varepsilon_2-\sigma_2\varepsilon_1}{\sigma_1l_2+\sigma_2l_1}V$

束缚电荷:$\sigma_{p上}=\frac{(\varepsilon_0-\varepsilon_1)\sigma_2}{\sigma_1l_2+\sigma_2l_1}V$, $\sigma_{p下}=\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_0)\sigma_1}{\sigma_1l_2+\sigma_2l_1}V$, $\sigma_{p中}=\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\sigma_2-(\varepsilon_2-\varepsilon_0)\sigma_1}{\sigma_1l_2+\sigma_2l_1}V$

思考题与习题三

9. $\Phi=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+[z-(2\ln+z_0)]^2}}-\frac{1}{\sqrt{r^2+[z-(2\ln-z)]^2}}\right]$

10. 选球坐标系:

电荷 Q 的坐标为:(ρ,θ_0,ϕ_0),P 点坐标为:(R,θ,ϕ),$\angle QOP=\alpha$,$\angle Q'OP=\beta$

则壳内任一点 P 的电势为:

$$\phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{\sqrt{R^2+\rho^2-2R\rho\cos\alpha}}-\frac{Q}{\sqrt{R^2+\rho^2-2R\rho\cos\beta}}-\frac{R_0Q/\rho}{\sqrt{R^2+R_0^4/\rho^2-2RR_0^2/\rho\cos\alpha}}\right.$$

$$+\frac{R_0Q/\rho}{\sqrt{R^2+R_0^4/\rho^2-2RR_0^2/\rho\cos\beta}}\Bigg]$$

$$\cos\alpha=\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0\cos(\phi-\phi_0)$$

$$\cos\beta=-\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0\cos(\phi-\phi_0)$$

11. $$\phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-b)^2+(y-a)^2+z^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x-b)^2+(y+a)^2+z^2}}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\sqrt{(x+b)^2+(y-a)^2+z^2}}+\frac{1}{\sqrt{(x+b)^2+(y+b)^2+z^2}}\right]$$

12. 球外电势：

$$\phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\boldsymbol{P}\cdot(\boldsymbol{r}-D\boldsymbol{k})}{(r^2+D^2-2rD\cos\theta)^{3/2}}+\frac{\frac{R^3}{D^3}\boldsymbol{P}\cdot\left(\boldsymbol{r}-\frac{R^2}{D}\boldsymbol{k}\right)}{\left(r^2+\frac{R^4}{D^2}-2r\frac{R^2}{D}\cos\theta\right)^{3/2}}-\frac{PR/D^2}{\left(r^2+\frac{R^4}{D^2}-2r\frac{R^2}{D}\cos\theta\right)^{1/2}}\right]$$

13. (1)$$F=-\frac{Q^2bc}{4\pi\varepsilon_0(b^2-c^2)^2}$$

(2)洞外：$$\sigma_1=\frac{\varepsilon_1(Q+q)}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a^2},\quad \sigma_2=\frac{\varepsilon_2(Q+q)}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a^2},$$

$$\sigma_{P_1}=\frac{(\varepsilon_0-\varepsilon_1)(Q+q)}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a^2},\quad \sigma_{P_2}=\frac{(\varepsilon_0-\varepsilon_2)(Q+q)}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a^2}$$

洞内表面：$$\sigma=\frac{Q\cdot(c^2-b^2)}{4\pi b(b^2+c^2-2bc\cos\theta)^{3/2}}$$

14. $r<a$，$$\phi=\frac{-\rho r^2}{6\varepsilon}+\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 b}+\frac{\rho a^2}{6\varepsilon}$$

$a\leqslant r\leqslant b$，$$\phi=\frac{\rho a^2}{6\varepsilon}$$

$r>b$，$$\phi=\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$ 其中：$q=\frac{4}{3}\pi a^3\cdot\rho$

$r=b$ 面上：$$\sigma_b=\frac{q+Q}{4\pi b^2}$$

$r=a$ 面上：$$\sigma_a=-\frac{\rho a}{3}$$

总电偶极矩：$\boldsymbol{P}=0$

15. $r<a$，$$\phi_1=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_1 r}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Q(n+1)b^n(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{4\pi\varepsilon_1 a^{2n+1}[n\varepsilon_1+(n+1)\varepsilon_2]}r^nP_n(\cos\theta)$$

$r>a$，$$\phi_2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Qb^n(2n+1)}{4\pi[n\varepsilon_1+(n+1)\varepsilon_2]r^{n+1}}P_n(\cos\theta)$$

$r=a_{处}$：$$\sigma_P=\frac{Q\varepsilon_0}{4\pi\varepsilon_1}(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(2n+1)b^n}{a^{n+2}[n\varepsilon_1+(n+1)\varepsilon_2]}P_n(\cos\theta)$$

16. 设介质球的半径为 a，

$r<a$，$$\phi_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\left[\frac{\boldsymbol{p}_f\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}+\frac{\boldsymbol{p}_f\cdot\boldsymbol{r}}{a^3}\frac{2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{2\varepsilon_2+\varepsilon_1)}\right]$$

$r>a$，$$\phi_2=\frac{3\boldsymbol{p}_f\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi(2\varepsilon_2+\varepsilon_1)r^3}$$

∵均匀介质：$\rho_P=0$，

$r\to 0$ 附近：极化偶极子：$\boldsymbol{P}=\left(\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}-1\right)\boldsymbol{P}_f$

$r=a$ 面上：$\sigma_P=\dfrac{3(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\varepsilon_0 P_f}{2\pi\varepsilon_1(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)a^3}\cos\theta$

17. $\phi=V-\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{R}+\dfrac{a^3}{R^3}\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{R}$

$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0+a^3\left[\dfrac{3(\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{R})\boldsymbol{R}}{R^5}-\dfrac{\boldsymbol{E}_0}{R^3}\right]$

$\sigma=3\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0\cos\theta$

18. $\phi=\dfrac{\eta}{4\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{(x-c)^2+y^2}{(x+c)^2+y^2}$　其中：$c=\dfrac{b^2-a^2}{2b}$

19. $u=\dfrac{-q^2a}{8\pi\varepsilon(d^2-a^2)}$，$F=\dfrac{-q^2ad}{4\pi\varepsilon(d^2-a^2)^2}$

20. $h=\dfrac{1}{2}(\varepsilon-\varepsilon_0)\dfrac{V^2}{\tau g d^2}$

21. $Q=2(\varepsilon+\varepsilon_0)R\sqrt{\dfrac{2\pi mg}{(\varepsilon-\varepsilon_0)}}$

22. (1)$\boldsymbol{F}=\dfrac{3P^2\boldsymbol{R}}{4\pi\varepsilon_0R^5}$，　$W=\dfrac{P^2}{4\pi\varepsilon_0R^3}$　(2)$\boldsymbol{F}=-\dfrac{3P^2\boldsymbol{R}}{2\pi\varepsilon_0R^5}$，　$W=\dfrac{-P^2}{2\pi\varepsilon_0R^3}$

23. $\boldsymbol{F}=-\dfrac{3P^2(1+\cos^2\alpha)}{64\pi\varepsilon_0a^4}\boldsymbol{R}_0$

24. $\mathscr{D}_{11}=\mathscr{D}_{22}=\mathscr{D}_{33}=0$，$\mathscr{D}_{12}=\mathscr{D}_{21}=-3l^2Q$，　$\mathscr{D}_{23}=\mathscr{D}_{32}=0=\mathscr{D}_{13}=\mathscr{D}_{31}$

$\phi=-\dfrac{3Ql^2xy}{4\pi\varepsilon_0R^5}$，其中 $R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

思考题与习题四

9. 六个象，三个正象位置分别为：$(-x_0,y_0,z_0)$，$(x_0,-y_0,z_0)$，$(-x_0,-y_0,z_0)$

三个负象位置分别为：$(-x_0,y_0,-z_0)$，$(x_0,-y_0,-z_0)$，$(-x_0,-y_0,-z_0)$

$$\phi=\frac{I}{4\pi\sigma}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}+\frac{1}{\sqrt{(x+x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}\right.$$
$$+\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2+(z-z_0)^2}}+\frac{1}{\sqrt{(x+x_0)^2+(y+y_0)^2+(z-z_0)^2}}$$
$$-\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x+x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}$$
$$\left.-\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2+(z+z_0)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x+x_0)^2+(y+y_0)^2+(z+z_0)^2}}\right]$$

10. $\boldsymbol{J}_1=\dfrac{3\sigma_1}{\sigma_1+2\sigma_2}\boldsymbol{J}_f$，$\boldsymbol{J}_2=\boldsymbol{J}_f+\dfrac{(\sigma_1-\sigma_2)}{\sigma_1+2\sigma_2}R_1^3\left[\dfrac{3(\boldsymbol{J}_f\cdot\boldsymbol{R})\boldsymbol{R}}{R^5}-\dfrac{\boldsymbol{J}_f}{R^3}\right]$

设：$\varepsilon_1\approx\varepsilon_2\approx\varepsilon_0$，

$\delta=\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)\dfrac{\partial\phi_1}{\partial R}=\dfrac{3(\sigma_1-\sigma_2)\varepsilon_0}{\sigma_2(\sigma_1+2\sigma_2)}\boldsymbol{J}_f\cos\theta$

11. $m=\dfrac{Q\omega}{5}a^2$，$l=\dfrac{2}{5}M\omega a^2$，$m/l=Q/2M$

12. $\boldsymbol{B}_1=\dfrac{\mu_0\omega Q}{6\pi a}\boldsymbol{e}_x$，　$\boldsymbol{B}_2=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\left[\dfrac{3(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{R})\boldsymbol{R}}{R^5}-\dfrac{\boldsymbol{m}}{R^3}\right]$，　$\boldsymbol{m}=\dfrac{Qa^2}{3}\boldsymbol{\omega}$

13. $R<a$，　$\boldsymbol{B}_1=\dfrac{3\mu_0\mu}{2\mu_0+\mu}\boldsymbol{H}_0+\dfrac{2\mu_0^2}{2\mu_0+\mu}\boldsymbol{M}_0$

$R>a$，　$\boldsymbol{B}_2=\mu_0\left[\boldsymbol{H}_0+\dfrac{3(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{R})\boldsymbol{R}}{R^5}-\dfrac{\boldsymbol{m}}{R^3}\right]$

其中：$\boldsymbol{m}=\dfrac{(\mu-\mu_0)\boldsymbol{H}_0+\boldsymbol{M}_0\mu_0}{2\mu_0+\mu}a^3$

15. $\boldsymbol{F}=-\dfrac{3\mu_0 m^2\boldsymbol{r}}{4\pi r^5}$

16. 矩形线圈四边受力分别为：

$F_{上}=-F_{下}=\dfrac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln\dfrac{a(d-b)}{b(d-a)}$

$F_{左}=\dfrac{\mu_0 I_1 I_2 c}{2\pi}\left[\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{d-a}\right]$

$F_{右}=\dfrac{-\mu_0 I_1 I_2 c}{2\pi}\left[\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{d-b}\right]$

思考题与习题五

7. 提示：直角坐标基矢与球坐标基矢变换关系为：

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_x\\ \boldsymbol{e}_y\\ \boldsymbol{e}_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi\\ \cos\theta & -\sin\theta & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_R\\ \boldsymbol{e}_\theta\\ \boldsymbol{e}_\varphi\end{pmatrix}$$

设：$\boldsymbol{P}_1=Pe^{-i\omega t}\boldsymbol{e}_x$，　$\boldsymbol{P}_2=Pe^{-i\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)}\boldsymbol{e}_y$

$\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0\omega^2 P}{4\pi CR}(\cos\theta\boldsymbol{e}_\varphi-i\boldsymbol{e}_\theta)e^{-i(\omega t-kR-\varphi)}$

$\boldsymbol{E}=\dfrac{\mu_0\omega^2 P}{4\pi R}(\cos\theta\boldsymbol{e}_\theta+i\boldsymbol{e}_\varphi)e^{-i(\omega t-kR-\varphi)}$

$\boldsymbol{S}=\dfrac{\mu_0\omega^4 P^2}{32\pi^2 CR^2}(\cos^2\theta+1)\boldsymbol{e}_R$

8. $\boldsymbol{B}=\dfrac{ea^2\omega^3 e^{i\left(kR+\frac{\pi}{2}\right)}}{8\pi\varepsilon_0 RC^4}\sin2\theta e^{-\frac{i}{2}\omega t}\boldsymbol{e}_\varphi$

$\boldsymbol{E}=2C\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e}_R$

$\boldsymbol{S}=\dfrac{1}{2}R_e(\boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{H})$

9. $\boldsymbol{B}=\dfrac{\omega^3 a^2 Qe^{ikR}}{\pi\varepsilon_0 C^4 R}\left[\dfrac{1}{2}\sin2\theta\sin(2\omega t-2\varphi)\boldsymbol{e}_\varphi+\sin\theta\cos(2\omega t-2\varphi)\boldsymbol{e}_\theta\right]$

$\boldsymbol{E}=C\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e}_R$

$\overline{\boldsymbol{S}}=\dfrac{1}{2}R_e(\boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{H})$

10. $\because l\ll\lambda$，$\therefore$可视作短天线为电偶极辐射.

$\dot{P}=\dfrac{1}{2}I_0 le^{-i\omega t}$

$\therefore\boldsymbol{B}=\dfrac{-i\omega I_0 l\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 C^3 R}e^{ikR}\boldsymbol{e}_\varphi$

$\boldsymbol{E}=C\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e}_R$

$\overline{\boldsymbol{S}}=\dfrac{1}{2}R_e(\boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{H})$

11. 提示：电荷 e 绕原点以角速度 ω 旋转，可分解为相互成直角、位相差 $\frac{\pi}{2}$ 有同一频率的简谐振动的辐射.

$\boldsymbol{P}_1=eae^{-i\omega t}\boldsymbol{e}_x$，　　$\boldsymbol{P}_2=eae^{-i\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)}\boldsymbol{e}_y$

$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 ea\omega^2}{4\pi CR}\cdot(\cos\theta\boldsymbol{e}_\varphi-i\boldsymbol{e}_\theta)e^{-i(\omega t-kR-\varphi)}$

$\boldsymbol{E}=C\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e}_R$，　　$\overline{S}=\frac{1}{2}R_e(\boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{H})$，　　$P=\oint_S\overline{S}\cdot d\boldsymbol{S}$

12. 提示：参看书中(4.21)式

$|\boldsymbol{E}|\approx 3.14\times10^{-2}(\mathrm{V/m})$

13. $\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 a^3\omega^2 M}{3C^2R}\sin\Phi e^{ikR}[\cos\theta\boldsymbol{e}_\theta+i\boldsymbol{e}_\varphi]e^{i\varphi}$

$\boldsymbol{E}=C\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e}_R$

$\overline{S}=\frac{1}{2}R_e(\boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{H})$

思考题与习题六

10. $W=3.927\times10^{26}\mathrm{W}$

$E_{太}=2.196\times10^5\mathrm{V/m}$

14. $0.336\times10^2\mathrm{m}$，$0.237\mathrm{m}$，$0.116\times10^{-1}\mathrm{m}$

15. $\boldsymbol{E}_g=\boldsymbol{E}_{g_0}e^{-i\left(\omega t-k_z z+\frac{\pi}{2}\right)}$，$E_{g_0}=80\mathrm{V/m}$，$\omega=2\pi f$

16. $\alpha_a=\frac{Vk_z}{a\omega\mu\ln b/a}e^{-i(\omega t-k_z z)}$，　$\alpha_b=\frac{-Vk_z}{b\omega\mu\ln b/a}e^{-i(\omega t-k_z z)}$，　$P=\frac{\pi V^2k_z}{\omega\mu\ln b/a}$

17. $E_x=\frac{ik_xk_z}{k^2-k_z^2}A\cos k_x x\sin k_y y\cdot e^{ik_z z}$

$E_y=\frac{ik_yk_z}{k^2-k_z^2}A\sin k_x x\cos k_y y\cdot e^{ik_z z}$

$E_y=A\sin k_x x\sin k_y y\cdot e^{ik_z z}$

$H_x=\frac{-i\omega\varepsilon k_y}{k^2-k_z^2}A\sin k_x x\cos k_y y\cdot e^{ik_z z}$

$H_y=\frac{i\omega\varepsilon k_x}{k^2-k_z^2}A\cos k_x x\sin k_y y\cdot e^{ik_z z}$

$H_z=0$

其中：$k_x=\frac{m\pi}{a}$，　$k_y=\frac{n\pi}{b}$，　$m,n=1,2,3,\cdots$

19. $F_e=\frac{Wr^2}{2CR^2}$，　$F_g=G\frac{m_1m_2}{R^2}$，　$r\approx0.23\times10^{-6}\mathrm{m}$

思考题与习题七

7. $l=\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}l_0$，　$\beta=\frac{v}{c}$

9. (1)12：50　(2)7.2×10^{11}米　(3)13：30　(4)16：30′

10. (1)$\Delta t=\frac{1+\frac{v}{cn}}{v+\frac{c}{n}}l_0$　(2)$\Delta t=l_0\sqrt{\frac{1-\beta^2}{\left(\frac{c}{n}\right)^2-v^2}}$

12. (1)$h\gamma'=4.688\times10^4 ev$　(2)$h\gamma''=1.099\times10^9 ev$

15. (1)144.7Mev　(2)279.7Mev

16. $\boldsymbol{F}'=\gamma\boldsymbol{F}=\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\dfrac{mv^2}{R}\boldsymbol{e}_R$

17. $\boldsymbol{F}=\dfrac{q\eta}{2\pi\varepsilon_0 r}\sqrt{1-\beta^2}\boldsymbol{e}_r$

18. $\left(x^2-\dfrac{v_0}{\omega_0}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{v_0}{\omega_0}\right)^2$,　　$\omega_0=\dfrac{e}{m}B$

19. (1)$\dfrac{7}{12}m_0c$　(2)$0.2m_0c$　(3)$\dfrac{35}{12}m_0c^2$　(4)$M_0=\dfrac{7}{\sqrt{6}}m_0$　(5)$\dfrac{35-14\sqrt{6}}{12}m_0c^2$

20. $\dfrac{c^2}{2m_\pi}(m_\pi^2-m_\mu^2)$,　　$\dfrac{c^2}{2m_\pi}(m_\pi-m_\mu)^2$

21. (1)B 收到：$\dfrac{l}{v}f'\sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}}$,　　A 收到：$\dfrac{l}{v}f'(1-\beta)$

(2)A 收到：$2\dfrac{l}{v}f'$,　　B 收到：$2\dfrac{l}{c}f'\sqrt{1-\beta^2}$

(3)A、B 共同认为 A 年轻了，$\dfrac{2l}{v}f'>\dfrac{2l}{v}f'\sqrt{1-\beta^2}$

思考题与习题八

8. $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}=\dfrac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0C^3}\dot{v}^2\sin^2\theta$

9. $\dfrac{e^2\dot{\boldsymbol{v}}}{6\pi\varepsilon_0C^3}$,　　10^{-11}s

10. (1) $\left[X-\left(R_0+\dfrac{v_0}{\omega_0}\right)\right]^2+y^2=\left(\dfrac{v_0}{\omega_0}\right)^2e^{-2\gamma t}$

其中：$\omega_0=\dfrac{eB}{m}$,　　$\gamma=\dfrac{e^2\omega_0^2}{6\pi\varepsilon_0C^3m}$

(2)$P\approx\dfrac{e^2\omega_0^2v_0^2}{6\pi\varepsilon_0C^3}e^{-2\gamma t}$