1.若把麦克斯韦方程组的所有矢量都分解为无旋的(纵场)和无散的(横场)两部分，写出 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 的这两部分在真空所满足的方程式，并证明电场的无旋部分对应于库仑场。

解：在真空中的麦克斯韦方程组是：

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\quad \nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},$$

$$\nabla\cdot\vec{E}=\rho\big/\varepsilon_0,\nabla\cdot\vec{B}=0$$

如果把此方程组中所有的矢量都分解为：无旋的纵场——用角标 L 表示，
无散的横场——用角标 T 表示。

那么：　$\vec{E}=\vec{E}_L+\vec{E}_T$，且$\nabla\times\vec{E}_L=0$，$\nabla\cdot\vec{E}_T=0$;

$\vec{J}=\vec{J}_L+\vec{J}_T$，

$\vec{B}=\vec{B}_L+\vec{B}_T$：由于$\nabla\times\vec{B}=0$，即 $\vec{B}$ 无源场，不存在纵场分量；亦是说 $\vec{B}_L$,则$\vec{B}=\vec{B}_T$

代入上面麦氏方程组：

1>$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ ：

$$\nabla\times(\vec{E}_L+\vec{E}_T)=\nabla\times\vec{E}_L+\nabla\times\vec{E}_T=\nabla\times\vec{E}_T=-\frac{\partial\vec{B}_T}{\partial t}$$

2>$\nabla\cdot\vec{E}=\rho\big/\varepsilon_0$：　　$\nabla\cdot(\vec{E}_L+\vec{E}_T)=\nabla\cdot\vec{E}_L+\nabla\cdot\vec{E}_T=\nabla\cdot\vec{E}_L=\rho\big/\varepsilon_0$

3>$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$：　$\nabla\times\vec{B}_T=\mu_0(\vec{J}_L+\vec{J}_T)+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}_L+\vec{E}_T)$

$$=(\mu_0\vec{J}_T+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}_T}{\partial t})+(\mu_0\vec{J}_L+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}_L}{\partial t})$$

若两边同时取散度，　$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{B}_T)=0$

$$\nabla\cdot(\mu_0\vec{J}_T+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}_T}{\partial t})=0$$

$$\therefore \text{当且仅当}\mu_0\vec{J}_L+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}_L}{\partial t}=0\text{时，上式方成立。}$$

综上，得麦氏方程的新表示方法：

$$\nabla\times\vec{E}_T=-\frac{\partial\vec{B}_T}{\partial t};\qquad \nabla\cdot\vec{E}_L=\rho/\varepsilon_0$$

$$\nabla\times\vec{B}_T=\mu_{0=}\vec{J}_T+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}_T}{\partial t};\qquad \mu_0\vec{J}_L+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}_L}{\partial t}=0\ ;\quad \vec{B}_L=0$$

证明电场的无旋部分对应库仑场：

电场的无旋部分表达式为：$\nabla\cdot\vec{E}_L=\rho/\varepsilon_0$

引入 $\vec{E}_L=-\nabla\varphi$　于是有：$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ 此泊松方程的解，即是静止电荷在真空中产生的电势分布，那么 $\vec{E}_L$ 即对应静止电荷产生的库仑场。

2. 证明在线性各向同性均匀非导电介质中，若 $\rho=0,\vec{J}=0,$ 则 E 和 B 可完全由矢势 A 决定，若取 $\varphi=0,$ 这时 A 满足哪两个方程？

解：在线性各向同性均匀非导电介质中，如果令，$\vec{J}=0,\rho=0$，麦氏方程表示为：

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t};\qquad \nabla\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t};\quad \nabla\cdot\vec{D}=0;\quad \nabla\cdot\vec{B}=0$$

其中 $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$，$\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu}$

由：$\nabla\cdot\vec{B}=0$　引入矢势 $\vec{A}$，使 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$

则　$\nabla\cdot\vec{B}=\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})=0$ 故，$\vec{B}$ 由矢势 $\vec{A}$ 完全决定。

把 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$ 代入 $\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t};$ 有：

$$\nabla\times(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t})=0\ \text{令}\ \vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi\qquad \text{则：}\ \nabla\times(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t})=\nabla\times(-\nabla\varphi)=0$$

则：　$\vec{E}=-\partial\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$　　故 $\vec{E}$ 有标势 $\vec{A}$ 完全决定。

如果取 $\varphi = 0$，有：$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$　　代入方程　$\nabla \times \vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \nabla \cdot \vec{D} = 0$$

有：　1>$\nabla \times \vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$：　$\nabla \times \vec{B} = \varepsilon\mu \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\Rightarrow \quad \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = -\varepsilon\mu \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t})$$

$$\Rightarrow \quad \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

2>$\nabla \cdot \vec{D} = 0$：　$\dfrac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{A}) = 0$

由于取 $\varphi = 0$，库仑规范 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$，与洛伦兹规范 $\nabla \cdot \vec{A} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ 相同

∴由 1>2>得：$\vec{A}$ 满足的方程有：

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t} = 0$$

3. 证明沿 z 轴方向传播的平面电磁波可用矢势 $\vec{A}(\omega\tau)$ 表示，其中 $\tau = t - z/c$，A 垂直于 z 轴方向。

证：对于沿 z 轴传播的任意一平面电磁波 $\vec{E}, \vec{B}$，可写作：

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_x e^{i(kz-\omega t)}$$
$$\vec{B} = B_0 \vec{e}_y e^{i(kz-\omega t)}$$

满足：1）$\vec{E}, \vec{B}$ 均垂直于传播方向 $\vec{e}_z$

2）$\vec{E}, \vec{B}$ 相互垂直，$\vec{E} \times \vec{B}$ 沿 $\vec{k}$ 方向

3）$\vec{E}, \vec{B}$ 同相，振幅比为 υ（真空中为 c）

故，不妨取 $\vec{A} = A_0 \vec{e}_x e^{-i\omega(t-\frac{z}{c})} = A_0 \vec{e}_x e^{i(kz-\omega t)}$，　　$k = \dfrac{\omega}{c}$

$$\therefore \vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial z}\vec{e}_y = ikA_0\vec{e}_y e^{i(kz-\omega t)} \qquad (1)$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial A}{\partial t} = i\omega A_0\vec{e}_x e^{i(kz-\omega t)} \qquad (2)$$

可见，如果令$kA_0 = B_0, \omega A_0 = E_0$，表达式（1）（2）可表示的波正是符合条件的平面波，所以命题得证。

4. 设真空中矢势$\vec{A}(\vec{x},t)$可用复数傅立叶展开为$\vec{A}(\vec{x},t) = \sum_k [a_k(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a_k^*(t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}]$,其中$\vec{a}_k^*$是$\vec{a}_k$的复共轭。

（1）证明$\vec{a}_k$满足谐振子方程$\frac{d^2\vec{a}_k(t)}{dt^2} + k^2c^2\vec{a}_k(t) = 0$。

（2）当选取规范$\nabla\cdot\vec{A} = 0, \varphi = 0$时，证明$\vec{k}\cdot\vec{a}_k = 0$。

（3）把$\vec{E}$和$\vec{B}$用$\vec{a}_k$和$\vec{a}_k^*$表示出来。

解：（1）证明：$\because \vec{A}(\vec{x},t) = \sum_k [\vec{a}_k(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \vec{a}_k^*(t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}]$

$\therefore$ 根据傅立叶级数得正交性，必有：

$$\vec{a}_k(t) = \int \vec{A}(\vec{x},t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}d\vec{x}$$

$$\therefore \frac{d^2a_k(t)}{dt^2} = \int \frac{\partial^2\vec{A}(\vec{x},t)}{\partial t^2}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}d\vec{x} \qquad (1)$$

而洛仑兹变换时，矢势$\vec{A}$满足方程$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J}$

在真空中，$\vec{J} = 0$，故，$\nabla^2\vec{A} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}$

$\therefore$ （1）式化为 $\frac{d^2\vec{a}_k(t)}{dt^2} = \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}(c^2\nabla^2\vec{A})d\vec{x}$

而$k^2c^2\vec{a}_k(t) = \int k^2c^2\vec{A}(\vec{x},t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}d\vec{x}$

于是：$\frac{d^2\vec{a}_k(t)}{dt^2} + k^2c^2\vec{a}_k(t) = \int [c^2\nabla^2\vec{A}(\vec{x},t) + k^2c^2\vec{A}(\vec{x},t)]e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}d\vec{x}$ （2）

$\because \vec{A}(\vec{x},t) = \sum_k [\vec{a}_k(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \vec{a}_k^*(t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}]$

$\therefore \nabla^2 \vec{A}(\vec{x},t) = -k^2 \vec{A}(\vec{x},t)$

$\therefore$ （2）式右边的积分式中，被积函数为 0，积分为 0。

$\therefore \dfrac{d^2 \vec{a}_k(t)}{dt^2} + k^2 c^2 \vec{a}_k(t) = 0$，亦即 $\vec{a}_k$ 满足谐振子方程。

2）选取规范 $\nabla \cdot \vec{A} = 0, \varphi = 0$，于是有

$$\nabla \cdot \vec{A} = \nabla \cdot \sum_k [\vec{a}_k(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \vec{a}_k(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}] = \sum_k [\vec{a}_k(t) \nabla \cdot e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \vec{a}_k^*(t) \nabla \cdot e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}]$$

$$= \sum_k [\vec{k} \cdot \vec{a}_k(t) \cdot i e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - \vec{k} \cdot \vec{a}_k^*(t) \cdot i e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}] = 0$$

$\because \vec{a}_k(t), \vec{a}_k^*(t)$ 是线性无关的正交组

$\therefore$ 要使上式成立，仅当 $\vec{k} \cdot \vec{a}_k = \vec{k} \cdot \vec{a}_k^* = 0$ 时

$\therefore$ 故，证得当取 $\nabla \cdot \vec{A} = 0, \varphi = 0$ 时，$\vec{k} \cdot \vec{a}_k = 0$

3）已知 $\vec{A}(\vec{x},t) = \sum_k [\vec{a}_k(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \vec{a}_k^*(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}]$

$\therefore \vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \sum_k [i\vec{k} \vec{a}_k(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - ik\vec{a}_k^*(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}]$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\sum_k [\frac{d\vec{a}_k(t)}{dt} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \frac{d\vec{a}_k^*(t)}{dt} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}] \quad （取规范 \nabla \cdot \vec{A} = 0, \varphi = 0）$$

5. 设 $\vec{A}$ 和 φ 是满足洛伦兹规范的矢势和标势。

（1）引入一矢量函数 $\vec{Z}(\vec{x},t)$（赫兹矢量），若令 $\varphi = \nabla \cdot \vec{Z}$，证明 $\vec{A} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{Z}}{\partial t}$。

（2）若令 $\rho = -\nabla \cdot \vec{P}$ 证明 $\vec{Z}$ 满足方程 $\nabla^2 \vec{Z} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2} = -c^2 \mu_0 \vec{P}$，写出在真空中的推迟解。

（3）证明 $\vec{E}$和$\vec{B}$ 可通过 $\vec{Z}$ 用下列公式表出，$\vec{E} = \nabla \times (\nabla \times \vec{Z}) - c^2 \mu_0 \vec{P}, \vec{B} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{Z}$

解：1）证明：$\vec{A}$ 与 φ 满足洛仑兹规范，故有 $\nabla \cdot \vec{A} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$

$\because \varphi = -\nabla \cdot \vec{Z}$ 代入洛仑兹规范，有：

$\nabla \cdot \vec{A} + \dfrac{1}{c^2} \cdot \dfrac{\partial}{\partial t}(-\nabla \cdot \vec{Z}) = 0$，即 $\nabla \cdot \vec{A} = \nabla \cdot (\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{Z}}{\partial t})$

$$\therefore \vec{A}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{Z}}{\partial t}$$

2）证明：∵标势φ在满足洛仑兹规范得条件下有方程：$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

而$\varphi=-\nabla\cdot\vec{Z}$，故：$\nabla^2\varphi=\nabla^2(-\nabla\cdot\vec{Z})=-\nabla\cdot(\nabla^2\vec{Z})$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}(-\nabla\cdot\vec{Z})=-\nabla\cdot(\frac{\partial^2\vec{Z}}{\partial t^2})$$

代入原方程：

$$-[\nabla\cdot(\nabla^2\vec{Z})-\frac{1}{c^2}\nabla\cdot(\frac{\partial^2\vec{Z}}{\partial t^2})]=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

令$\rho=-\nabla\cdot\vec{P}$，则上式化为：

$$\nabla\cdot(\nabla^2\vec{Z})-\frac{1}{c^2}\nabla\cdot(\frac{\partial^2\vec{Z}}{\partial t^2})=-\frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\cdot\vec{P}$$

即：$\nabla^2\vec{Z}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{Z}}{\partial t^2}=-c^2\mu_0\vec{P}$　　（2）

由于矢势$\vec{A}$：$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{J}$在真空中的推迟势为：

$$\vec{A}(\vec{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{x}',t-\frac{r}{c})}{r}dV'$$

故，可类比得出，方程（2）在真空中的推迟势解为：

$$\vec{Z}(\vec{x},t)=\frac{c^2\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{P}(\vec{x}',t-\frac{r}{c})}{r}dV'$$

3）∵$\vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$，代入$\varphi=-\nabla\cdot\vec{Z},\vec{A}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t}$有：

$$\vec{E}=\nabla(\nabla\cdot\vec{Z})-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{Z}}{\partial t^2}=\nabla\times(\nabla\times\vec{Z})+\nabla^2\vec{Z}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{Z}}{\partial t^2}=\nabla\times(\nabla\times\vec{Z})-c^2\mu_0\vec{P}$$

同理：$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\vec{Z}$

$$\therefore \vec{E} = \nabla \times (\nabla \times \vec{Z}) - c^2 \mu_0 \vec{P}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \vec{Z}$$

6. 两个质量，电荷都相同的粒子相向而行发生碰撞，证明电偶极辐射和磁偶极辐射都不会发生。

证明：电偶极矩与磁偶极矩产生的辐射场分别是：

1>由电偶极矩产生的辐射场：

$$\vec{E} = \frac{e^{ikR}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R}(\ddot{\vec{p}} \times \vec{n}) \times \vec{n}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} ik\vec{n} \times \ddot{\vec{p}}$$

2>由磁偶极矩产生的辐射场：

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi cR}(\ddot{\vec{m}} \times \vec{n})$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi c^2 R}(\ddot{\vec{m}} \times \vec{n}) \times \vec{n}$$

现有两个质量，电荷都相同的粒子相向而行，发生磁撞，在此过程中，取两个电荷的连线为 x 轴，于是，此系统的电偶极矩是：

$$\vec{p} = q\vec{x}_1 + q\vec{x}_2 = q(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)$$

由此可发现：　$\ddot{\vec{p}} = \frac{d^2}{dt^2}[q(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)] = q(\ddot{\vec{x}}_1 + \ddot{\vec{x}}_2)$

由于两个粒子质量相同，电量也相同，故当其运动时 $\ddot{\vec{x}}_1 = -\ddot{\vec{x}}_2$（牛顿第二定律）

即：$\ddot{\vec{p}} = 0$

于是，系统的电偶极矩辐射场为 0

又由于，此系统的磁偶极矩 $\vec{m} = 0$，　于是，系统的磁偶极矩辐射场为 0。

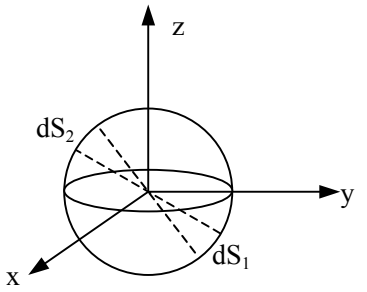
综上，两个质量，电荷都相同的粒子同向而行发生磁撞，不会发生电偶极辐射和磁偶极辐射。

7. 设有一个球对称的电荷分布，以频率 ω 沿径向做简谐振动，求辐射场，并对结果给以物理解释。

解：

设球面上均匀分布了总电量为 Q 的电荷，此假设满足题目中的球对称分布，于是，球面电荷密度与球面半径的关系是：

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$



取如图相对的两块小面元 dS_1, dS_2，由于两块小面元对应相同的立体角，故有相同的面积

$dS_1 = dS_2$，

于是　$\Delta Q_1 = \sigma dS_1 = \dfrac{Q}{4\pi R^2} dS_1 = \dfrac{Q}{4\pi R^2} dS_2 = \sigma dS_2 = \Delta Q_2$

考虑到两电荷元$\Delta Q_1, \Delta Q_2$，由于是球对称，又以相同的频率ω作沿径向的简谐振动

$$\therefore \quad \vec{p} = \Delta Q_1 \cdot R \cdot \vec{e}_r + \Delta Q_1 \cdot R \cdot (-\vec{e}_r) = 0$$

$$\vec{m} = I \cdot \Delta \vec{S} = 0$$

故，此两电荷元的振动不能产生辐射场。

根据场的叠加原理，整个球对称分布的电荷体系沿径向的简谐振荡是不能产生辐射场的振动，辐射场为 0。

8. 一飞轮半径为 R，并有电荷均匀分布在其边缘上，总电量为 Q。设此飞轮以恒定角速度ω旋转，求辐射场。

解：

设飞轮边缘的厚度为 d,于是，边缘上的电荷面密度$\sigma = \dfrac{Q}{2\pi R d}$

体系的电偶极矩为：　$\vec{p} = \oint \dfrac{Q}{2\pi R d} \cdot d \cdot dl \cdot \vec{x} = \dfrac{Q}{2\pi R} \oint \vec{x} \cdot dl$

$$= \frac{Q}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} \sin\theta \cdot d\theta \cdot \vec{e}_x + \int_0^{2\pi} \cos\theta \cdot d\theta \cdot \vec{e}_y\right] = 0$$

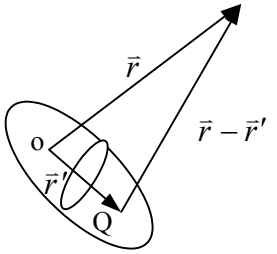
体系的此偶极矩：$\vec{m} = I \cdot \Delta \vec{S} = \dfrac{Q\omega}{2\pi} \cdot \pi R^2 \cdot \vec{e}_z = \dfrac{Q\omega R^2}{2} \vec{e}_z$

由此得：$\ddot{\vec{p}} = 0 \quad \ddot{\vec{m}} = 0$

故，辐射场为 0。

9. 利用电荷守恒定律，验证$\vec{A}$和φ的推迟势满足洛伦兹条件。

证明：如右图所示，O 是坐标原点，Q 是源点，P 是场点



于是，$\vec{A}$与φ的推迟势可写作：

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}',t')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'$$

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\tilde{V}} \frac{\rho(\vec{r}',t')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d\vec{V}$$，其中，$t' = t - \dfrac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$

因为在空间中有一个固定点，有$\dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t'}$, 故：

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\frac{\partial}{\partial t'}\rho(\vec{r}',t')dV'$$

而 $\nabla\cdot\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\nabla\cdot[\frac{\vec{J}(\vec{r}',t')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}]dV'$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\vec{J}\cdot(\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|})dV'+\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\nabla\cdot\vec{J}dV' \qquad (*)$$

当算符∇作用于$|\vec{r}-\vec{r}'|$的 n 次幂时，可写作：

$$\nabla|\vec{r}-\vec{r}'|^n=-\nabla'|\vec{r}-\vec{r}'|^n$$

其中∇'只作用于$\vec{r}'$，因为$\vec{J}(\vec{r}',t')$中的变量$t'=t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$，其中含有$\vec{r}$，故：

$$\nabla\cdot\vec{J}=\frac{\partial\vec{J}}{\partial t'}\cdot(\nabla t')=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{J}}{\partial t'}\cdot(\nabla|\vec{r}-\vec{r}'|)=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{J}}{\partial t'}\cdot(\nabla'|\vec{r}-\vec{r}'|)$$

另一方面，有：$\nabla'\cdot\vec{J}=(\nabla'\cdot\vec{J})_{t'=const}-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{J}}{\partial t'}\cdot(\nabla'|\vec{r}-\vec{r}'|)$

对此上两式，有：$\nabla'\cdot\vec{J}=(\nabla'\cdot\vec{J})_{t'=const}-\nabla\cdot\vec{J}$

即：$\nabla\cdot\vec{J}=(\nabla'\cdot\vec{J})_{t'=const}-\nabla'\cdot\vec{J}$

代入*式，有：

$$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\vec{J}\cdot(\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|})dV'+\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}(\nabla'\cdot\vec{J})_{t'=const}-\nabla'\cdot\vec{J})dV'$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\vec{J}\cdot(\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|})dV'-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\nabla'\cdot\vec{J}dV'+$$

$$+\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}(\nabla'\cdot\vec{J})_{t'=const})dV'$$

$$=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\nabla'\cdot[\frac{\vec{J}(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}]dV'+\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}(\nabla'\cdot\vec{J})_{t'=const}dV'$$

因为 $\int_{V'}\nabla'\cdot[\frac{\vec{J}(\vec{r}',t')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}]dV'=\oint_{S'}\frac{\vec{J}(\vec{r}',t')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d\vec{S}'$

只要把V'取得足够大，就可以使$\vec{J}(\vec{r}',t')$在V'的边界面上处处为零，结果上式便为零。

于是　$\nabla\cdot\vec{A}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}(\nabla'\cdot\vec{J})_{t'=const}dV'$

$$\therefore\nabla\cdot\vec{A}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}[(\nabla'\cdot\vec{J})_{t'=const}+\frac{\partial\rho}{\partial t}]dV'$$

由电荷守恒定律有：

$(\nabla'\cdot\vec{J})_{t'=const}+\dfrac{\partial\rho}{\partial t'}=0$，　式中$t'$是$\vec{r}'$点的局域时间，由以上两式有：

$$\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

由此可见，只要电荷守恒定律成立，则推迟势$\vec{A}$和φ就满足洛仑兹规范。

10. 半径为 R_0 的均匀永磁体，磁化强度为$\vec{M}_0$，求以恒定角速度ω绕通过球心而垂直于$\vec{M}_0$的轴旋转，设$R_0\omega$<<c，求辐射场和能流。

解：

本题相当于一个位于原点的磁偶子的旋转振荡，此磁偶极子为：

$$\vec{M}=\frac{4}{3}\pi R_0^2\vec{M}_0$$

其振荡可分解为 x，y 方向上相位差为$\pi/2$的简谐振荡的合成。

$$\vec{M}_x=\frac{4}{3}\pi R_0^3M_0\cos(\omega t)\vec{e}_x$$

$$\vec{M}_y=\frac{4}{3}\pi R_0^3M_0\sin(\omega t)\vec{e}_y=\frac{4}{3}\pi R_0^3M_0\cos(\omega t-\frac{\pi}{2})\vec{e}_y$$

用复数形式表达为：

$$\vec{M}_x=\frac{4}{3}\pi R_0^3M_0e^{-i(\omega t)}\vec{e}_x$$

$$\vec{M}_y=\frac{4}{3}\pi R_0^3M_0ie^{-i(\omega t)}\vec{e}_y$$

$$\vec{E}=-\frac{\mu_0e^{ikR}}{4\pi cR}(\ddot{\vec{m}}\times\vec{n})$$

根据磁偶极矩辐射场公式：$\vec{B}=\dfrac{\mu_0e^{ikR}}{4\pi c^2R}(\ddot{\vec{m}}\times\vec{n})\times\vec{n}$

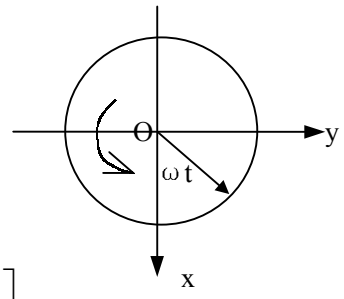
$$\vec{S}=\frac{\mu_0\omega^4|\vec{m}|^2}{32\pi^2c^3R^2}\sin^2\theta\vec{n}$$

1>求$\vec{B}$

在 x 方向作简谐振荡的分量，

$$\vec{B}_x = \frac{\mu_0}{4\pi c^2 R}\cdot e^{ikR}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 M_0\omega^2 e^{-i\omega t}(\vec{e}_x\times\vec{e}_r)\times\vec{e}_r$$

$$= \frac{\mu_0\omega^2 R_0^3 M_0}{3c^2 R}(\vec{e}_x\times\vec{e}_r)\times\vec{e}_r\cdot e^{i(kR-\omega t)}$$



在 y 方向的分量，

$$\vec{B}_y = \frac{\mu_0\omega^2 R_0^3 M_0}{3c^2 R}(\vec{e}_y\times\vec{e}_r)\times\vec{e}_r\cdot e^{i(kR-\omega t)}$$

根据：$\begin{bmatrix}\vec{e}_x\\ \vec{e}_y\\ \vec{e}_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi\\ \cos\theta & -\sin\phi & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{e}_R\\ \vec{e}_\theta\\ \vec{e}_\phi\end{bmatrix}$

得：$$\vec{B} = \frac{\mu_0\omega^2 R_0^3 M_0}{3cR}(\vec{e}_\theta\cos\theta + i\vec{e}_\phi)e^{i(kR-\omega t+\phi)}$$

同理可得：$\vec{E} = \frac{\mu_0\omega^2 R_0^3 M_0}{3cR}(i\vec{e}_\theta - \vec{e}_\phi\cos\theta)e^{i(kR-\omega t+\phi)}$

$$\vec{S} = \frac{\mu_0\omega^4 R_0^6 M_0^2}{18c^3 R^2}(1+\cos^2\theta)\vec{e}_r$$

11. 带电粒子 e 作半径为 a 的非相对论性圆周运动，回旋频率为 ω。求远处的辐射电磁场和辐射能流。

解：由题意，得右图

本题所研究的系统的磁偶极矩 $\vec{m}$ 是一个常量，因此不产生电磁辐射，但此系统的电偶极矩是一旋转的变化量

$$\vec{p} = ea\vec{e}_r$$

同 10 题的解法，把此旋转量分解到 x，y 方向上的两个简谐振荡是：

$$\vec{p}_x = ea\cos\omega t\vec{e}_x = eae^{-i\omega t}\vec{e}_x$$

$$\vec{p}_y = ea\cos(\omega t-\pi/2)\vec{e}_y = eae^{-i(\omega t+\frac{\pi}{2})}\vec{e}_y$$

$$= -eaie^{-i\omega t}\vec{e}_y$$

根据公式：$\vec{B} = \frac{i\mu_0 k}{4\pi R}e^{ikR}(\vec{n}\times\vec{p})$

$$\vec{E} = \frac{i\mu_0 kc}{4\pi R}e^{ikR}(\vec{n}\times\vec{p})\times\vec{n}$$

$$\vec{S}=\frac{\left|\ddot{\vec{p}}\right|^2}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3R^2}\sin\theta\vec{n}$$

有：　　$\dot{\vec{p}}_x=-i\omega eae^{-i\omega t}\vec{e}_x,\ \ddot{\vec{p}}_x=\omega^2 eae^{-i\omega t}\vec{e}_x$

$$\dot{\vec{p}}_y=i\omega eaie^{-i\omega t}\vec{e}_y,\ \ddot{\vec{p}}_y=-\omega^2 eaie^{-i\omega t}\vec{e}_y$$

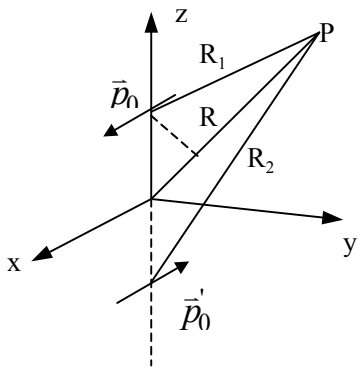
分别代入上式，可得：

$$\vec{B}=\frac{\mu_0\omega^2 ea}{4\pi cR}(\vec{e}_\phi\cos\theta-i\vec{e}_\theta)e^{i(kR-\omega t+\phi)}$$

$$\vec{E}=\frac{\mu_0\omega^2 ea}{4\pi R}(\vec{e}_\theta\cos\theta+i\vec{e}_\phi)e^{i(kR-\omega t+\phi)}$$

$$\vec{S}=\frac{\mu_0\omega^4 e^2a^2}{32\pi^2cR^2}(1+\cos^2\theta)\vec{e}_r$$

12. 设有一电矩振幅为 $\vec{p}_0$，频率为 ω 的电偶极子距理想导体平面为 a/2 处，$\vec{p}_0$ 平行于导体平面。设 $a<<\lambda$，求在 $R>>\lambda$ 处电磁场及辐射能流。



解：由题，如图所示，设平面 xoy 式导体平面，

利用镜像法，构造图中的像电偶极子。

由图：$\vec{p}_0=p_0e^{-i\omega t}\vec{e}_x$

$\vec{p}_o'=-\vec{p}_0=-p_0e^{-i\omega t}\vec{e}_x$

分别计算它们在场点 P 处产生的辐射场 $\vec{B}$

1）$\ddot{\vec{p}}_0=-\omega^2p_0e^{-i\omega t}\vec{e}_x$

$$\vec{B}_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0c^3R}e^{ik(R-\frac{a}{2}\cos\theta)}\cdot\ddot{\vec{p}}_0\times\vec{e}_r=-e^{-i\frac{ka\cos\theta}{2}}\cdot\frac{\omega^2p_0}{4\pi\varepsilon_0c^3R}\cdot\vec{e}_x\times\vec{e}_r\cdot d^{i(kR-\omega t)}$$

2）$\ddot{\vec{p}}_0'=\omega^2p_0e^{-i\omega t}\vec{e}_x$

$$\vec{B}_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0c^3R}\cdot e^{ik(R+\frac{a}{2}\cos\theta)}\cdot\ddot{\vec{p}}_0'\times\vec{e}_r=e^{i\frac{ka\cos\theta}{2}}\cdot\frac{\omega_2p_0}{4\pi\varepsilon_0c^3R}\cdot\vec{e}_x\times\vec{e}_r\cdot d^{i(kR-\omega t)}$$

故：$\vec{B}=\vec{B}_1+\vec{B}_2$

$$=\frac{\omega^2p_0}{4\pi\varepsilon_0c^3R}\cdot\vec{e}_x\times\vec{e}_r\cdot e^{i(kR-\omega t)}\cdot[e^{i\frac{ka\cos\theta}{2}}-e^{-i\frac{ka\cos\theta}{2}}]$$

$$\approx \frac{ika\omega^2 p_0}{4\pi\varepsilon_0 c^3 R} e^{i(kR-\omega t)} \cdot \cos\theta(-\cos\theta\cos\phi\vec{e}_\phi - \sin\phi\vec{e}_\theta)$$

$$= -\frac{i\mu_0\omega^3 p_0 a}{4\pi c^3} \cdot \frac{e^{i(kR-\omega t)}}{R}(\cos\theta\sin\phi\vec{e}_\theta + \cos^2\theta\cos\phi\vec{e}_\phi)$$

$$\therefore \vec{B}(\vec{R},t) = -\frac{i\mu_0\omega^3 p_0 a}{4\pi c^3} \cdot \frac{e^{i(kR-\omega t)}}{R}(\cos\theta\sin\phi\vec{e}_\theta + \cos^2\theta\cos\phi\vec{e}_\phi)$$

$$\vec{E}(\vec{R},t) = c\vec{B}\times\vec{e}_r = \frac{i\mu_0\omega^3 p_0 a}{4\pi c} \cdot \frac{e^{i(kR-\omega t)}}{R}(\cos\theta\sin\phi\vec{e}_\phi - \cos^2\theta\cos\phi\vec{e}_\theta)$$

$$\vec{S} = \frac{c}{2\mu_0}\left|\vec{B}\right|^2\vec{n} = \frac{\mu_0\omega^6 p_0^2 a^2}{32\pi^2 c^3 R^2}(\cos^2\theta\sin^2\phi + \cos^4\theta\cos^2\phi)\vec{e}_r$$

13. 设有线偏振平面波 $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kx-\omega t)}$ 照射到一个绝缘介质球上（$\vec{E}_0$ 在 z 方向），引起介质球极化，极化矢量 $\vec{P}$ 是随时间变化的，因而产生辐射。设平面波的波长 $2\pi/k$ 远大于球半径 R_0，求介质球所产生的辐射场和能流。

解：本题相当于电偶极矩

$$\vec{p} = \frac{4\pi\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\varepsilon+2\varepsilon_0} R_0^3 E_0 e^{-i\omega t}\vec{e}_z$$ 的辐射。

$$\therefore \ddot{\vec{p}} = -\frac{4\pi\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\omega^2 R_0^3 E_0 e^{-i\omega t}\vec{e}_z$$

∴介质球产生的辐射场为：

$$\vec{B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 cR} \cdot e^{ikR} \cdot \frac{4\pi\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\varepsilon+2\varepsilon_0} R_0^3 E_0 e^{-i\omega t}(-\vec{e}_z)\times\vec{e}_r$$

$$= -\frac{\omega^2 R_0^3 E_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}{(\varepsilon+2\varepsilon_0)c^3 R}\sin\theta e^{i(kR-\omega t)}\vec{e}_\phi$$

$$\vec{E} = c\vec{B}\times\vec{e}_r = -\frac{\omega^2 R_0^3 E_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}{2\mu_0(\varepsilon+2\varepsilon_0)c^5 R^2}\sin^2\theta\vec{e}_r$$

$$\vec{S} = \frac{1}{2\mu_0}c\left|\vec{B}\right|^2\vec{e}_r = \frac{\omega^4 R_0^6 E_0^2(\varepsilon-\varepsilon_0)^2}{2\mu_0(\varepsilon+2\varepsilon_0)c^5 R^2}\sin^2\theta\vec{e}_r$$