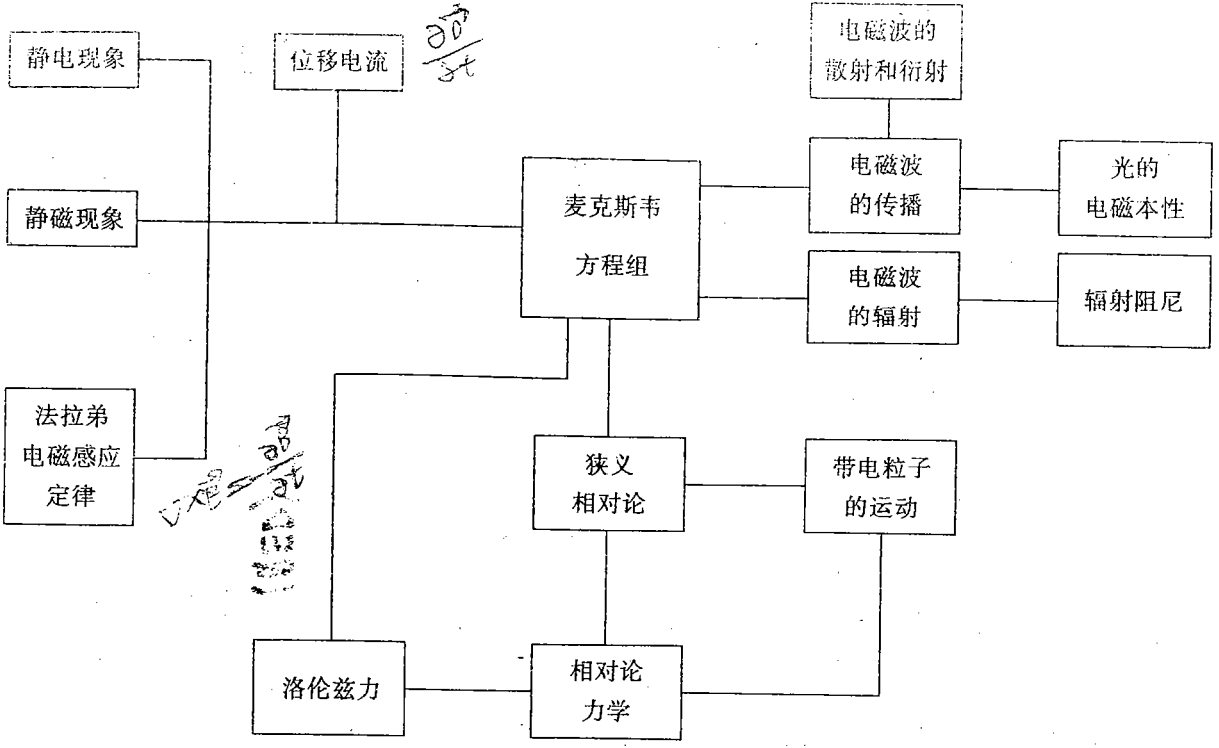
电 动 力 学

汪映海

兰州大学出版社

电动力学的主要内容及其相互联系图



目　录

引　言 …… (1)

第一章　数学复习和补充知识 …… (1)

§1.1　矢量和张量 …… (1)

1.坐标与求和记号（1）2.空间变换性质和物理量的分类（4）3.张量（8）

§1.2　δ 函数 …… (16)

1.δ函数的定义及主要性质（1）2.δ函数作为连续函数极限情形的几种形式（20）3.δ 函数的福氏表示（22）4.δ 函数与 θ 函数（阶跃函数）(25)

§1.3　泊松方程的格林函数 …… (27)

1.泊松方程的格林函数（27）2.泊松方程的解与其格林函数的关系（30）

习题一 …… (32)

第二章　静电场 …… (36)

§2.1　真空中静电场的基本方程 …… (36)

1.库仑定律和电场强度（36）2.静电场的散度和旋度（38）3.静电场的势及其微分方程（40）

§2.2　静电势的多极矩展开 …… (45)

1.静电势的多极矩展开表达式（45）2.电多极矩展开的物理意义（48）

§2.3　电介质中静电场的基本方程和边值关系 …… (58)

1.微观场和宏观场（58）2.介质中静电场的基本方程（59）3.静电场的边值关系（65）

§2.4 静电场的能量和力 …… (70)
1.真空中的静电能 (70) 2.介质中的静电能 (73) 3.静电场的力 (75)
§2.5 静电问题的解及其唯一性 …… (87)
1.静电学的基本问题 (87) 2.静电问题的唯一性定理 (89)
§2.6 分离变量法 …… (96)
1.分离变量法解静电问题的主要步骤 (96) 2.直角坐标系中的情形 (97) 3.球坐标系中的情形 (104) 4.平面极坐标系中的情形 (115) 5.回转椭球坐标系中的情形 (117)
§2.7 电像法 …… (121)
1.电像法的基本思想 (121) 2.点电荷和接地无限大导体平面的情形 (122) 3.点电荷和接地导体球的情形 (125) 4.点电荷和两种半无限均匀介质的情形 (138) 5.点电荷和均匀介质球的情形 (142)
§2.8 格林函数法 …… (144)
1.格林函数与一般边值问题的形式解 (144) 2.几种简单情形的格林函数 (147)
习题二 …… (158)
第三章 稳恒电流的磁场 …… (162)
§3.1 电流的实验定律及稳恒电场 …… (162)
1.电荷守恒定律和欧姆定律 (162) 2.稳恒电流的电场 (163)
§3.2 真空中静磁场的基本方程 …… (169)
1.毕奥-萨伐尔定律和静磁场的基本方程 (169) 2.矢量势和库仑规范条件 (171)
§3.3 磁偶极子 …… (175)
1.矢势的多极展开及磁偶极矩 (175) 2.磁偶极子在外磁场中所受的力和力矩 (179)
§3.4 磁介质中静磁场的基本方程和边值关系 …… (184)
1.磁介质中静磁场的基本方程 (184) 2.静磁场的边值关系 (188)
§3.5 磁矢势法 …… (190)

§3.6 磁标势法 …… (198)
§3.7 磁镜像法 …… (210)
习题三 …… (219)
第四章 电磁场的普遍规律和麦克斯韦方程组 …… (222)
§4.1 法拉弟电磁感应定律 …… (222)
§4.2 稳恒磁场的能量和力 …… (228)
1.磁场的能量 (228) 2.磁场力 (231)
§4.3 麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式 …… (234)
1.位移电流假设 (234) 2.麦克斯韦方程组 (238) 3.电磁场量的边值关系 (247) 4.洛伦兹力公式 (249)
§4.4 电磁场中的能量和动量守恒定律 …… (256)
1.能量守恒定律和坡印亭矢量 (256) 2.动量守恒定律和麦克斯韦张力张量 (261)
§4.5 电磁场的波动性和平面电磁波 …… (270)
1.电磁场的波动方程 (270) 2.平面电磁波 (272)
习题四 …… (274)
第五章 电磁波的传播 …… (279)
§5.1 单色平面电磁波 …… (279)
1.介质色散的影响 (279) 2.导电介质中的自由电荷分布 (281) 3.定态波动方程 (282) 4.单色平面电磁波 (284)
§5.2 电磁波在介质中的传播 …… (286)
1.绝缘介质中的电磁波 (286) 2.导电介质中的电磁波 (290)
§5.3 电磁波在介质界面上的反射和折射 …… (297)
1.反射和折射定律 (297) 2.菲涅耳公式 (300) 3.电磁波反射折射的能流关系 (304) 4.全内反射 (315)
§5.4 电介质、导体和等离子体的频率色散特性 …… (319)
1.简单的色散模型 (319) 2.反常色散和共振吸收 (320) 3.低频特性 电导率 (322) 4.高频极限 等离子体频率 (323)

§5.5 电磁波在波导管内的传播 …… (329)
1.有界空间的电磁波和理想导体的边界条件 (329) 2.长直波导管内的场 (331) 3.矩形波导管 (335) 4.波导管内能量的传输 (343)
§5.6 谐振腔内的电磁波 …… (349)
习题五 …… (352)
第六章 电磁波的辐射 …… (356)
§6.1 电磁场的矢势和标势 …… (356)
1.普遍情形下标势和矢势的引入 (356) 2.规范变换、规范不变性和规范条件 (357) 3.用势描写的电磁场方程 (359)
§6.2 推迟势 …… (367)
1.达朗伯方程的解和推迟势 (367) 2.定态情形下的推迟势及场的不同区域 (371)
§6.3 似稳场 …… (372)
1.似稳条件 (373) 2.似稳场方程 (374) 3.电工学中的电路方程 (375)
§6.4 电磁辐射 …… (381)
1.小区域运动电荷体系在远处产生的场 (381) 2.矢势的多极展开式 (382)
§6.5 电偶极辐射 …… (384)
1.辐射电磁场 (384) 2.辐射能流 角分布 辐射功率 (385) 3.短天线的辐射 辐射电阻 (386)
§6.6 磁偶极辐射和电四极辐射 …… (393)
1.磁偶极辐射 (393) 2.电四极辐射 (396) 3.多极辐射的对偶性和共同特性 (397)
§6.7 线型细天线辐射 …… (398)
1.天线电流为驻波形式 (399) 2.天线电流为行波形式 (401)
§6.8 电磁波的衍射 …… (403)
1.基尔霍夫公式 (404) 2.小孔衍射 (405)

习题六 …… (408)
第七章 狭义相对论基础 …… (413)
§7.1 狭义相对论的提出 …… (413)
1.伽利略变换及其困难 (413) 2.以太理论引起不可调和的矛盾 (415) 3.狭义相对论的基本原理 (415)
§7.2 洛伦兹变换 …… (416)
1.狭义相对论基本原理对时空变换的要求 (416) 2.闵可夫斯基空间及四维正交变换 (418) 3.洛伦兹变换 (419)
§7.3 相对论时空性质 …… (424)
1.运动棒的缩短 (424) 2.运动时钟的延缓 (425) 3.因果性 类时与类空间隔 (426) 4.速度合成公式 (428)
§7.4 相对论力学 …… (433)
1.四维速度矢量和四维加速度矢量 (433) 2.四维动量矢量和相对论力学方程 (435) 3.相对论的质能关系 (436) 4.相对论能量动量关系 (438)
§7.5 电动力学的协变形式 …… (449)
1.四维电流密度矢量和电荷守恒定律 (449) 2.四维势矢量和电磁势方程 (450) 3.电磁场张量和麦克斯韦方程组 (451) 4.电磁场的变换关系 (454) 5.洛伦兹力的变换性质 (457) 6.电磁场的两个不变量 (460) 7.相位不变性 多普勒红移和光行差 (462) 8.电磁场能量动量的协变形式 (467)
§7.6 电磁场中带电粒子的拉格朗日方程和哈密顿正则方程 … (469)
1.非相对论情形 (470) 2.相对论情形 (472)
习题七 …… (472)
第八章 带电粒子与电磁场的相互作用 …… (478)
§8.1 运动带电粒子的势和场 …… (478)
1.运动带电粒子的势 (李纳-维谢尔势) (478) 2.运动带电粒子的场 (480) 3.自有场和辐射场 (482)

§8.2 加速运动带电粒子的辐射 …… (483)
1.加速带电粒子的辐射能流、辐射功率及角分布 (483) 2.非相对论运动带电粒子的辐射 (485) 3.韧致辐射 (486) 4.同步加速辐射 (487)
§8.3 带电粒子辐射的频谱分析 …… (494)
1.加速带电粒子的辐射频谱 (494) 2.非相对论运动带电粒子的辐射频谱 (496)
§8.4 切伦柯夫辐射 …… (498)
§8.5 电磁质量与辐射阻尼 …… (502)
1.电磁质量和电子的经典半径 (503) 2.辐射阻尼 (504) 3.光谱线的自然宽度 (506)
§8.6 电磁波的散射与吸收 …… (509)
1.小散射体对长波电磁波的散射 (509) 2.自由电子对电磁波的散射(汤姆逊散射) (515) 3.束缚电子对电磁波的散射 (516) 4.总截面与偶极求和规则 (518)
§8.7 超导电性 …… (520)
1.超导现象 (520) 2.伦敦方程 (521) 3.磁通量子化 (523)
习题八 …… (525)
附录 …… (529)
一、数学公式 …… (529)
1.算符∇的运算公式 …… (529)
2.矢量的积分变换公式 …… (529)
3.张量运算公式 …… (530)
4.曲线正交坐标系中的矢量微分公式 …… (530)
二、国际单位制和高斯单位制中主要公式对照表 …… (532)
三、重要物理常数 …… (535)

第一章　数学复习和补充知识

§1.1　矢量和张量

1. 坐标与求和记号

在物理学中，我们经常遇到许多既有大小又有方向、且遵从平行四边形运算法则的物理量，它们属于矢量（矢量的严格定义后面讨论）。一般情况下，任意矢量$\vec{A}$可以是坐标与时间的函数，还可能通过坐标隐含时间，即

$$\vec{A}=\vec{A}\ (x\ (t)\ ,\ y\ (t)\ ,\ z\ (t)\ ;\ t)\ 。$$

为了较方便地表示一个矢量，常常引入正交坐标系，并且可以分为下列两类：

(a) 整体坐标系，最典型的是通常的直角坐标系。所谓"整体"，是指所选取的三个基矢$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$在空间任意点都不改变方向，因此全空间可以用一个统一的直角坐标系来描述。任何一个矢量$\vec{A}$都可以投影到它的基矢上，而用三个投影分量A_x、A_y、A_z来表示。

(b) 局域坐标系。物理规律可以用微分方程来描述，而微分方程反映物理规律在空间任意点附近的局部性质（通常称为局域性质），为了表示它，需要在空间任意点建立局域坐标系。典型的局域坐标系是球坐标系、圆柱坐标系等。局域坐标系与整体坐标系的区别在于，在空间不同点处，局域坐标系的基矢有不同

的方向，因而它可描述局域性质。为了强调这一特点，通常把这样的基矢称为“活动标架”，或简称为“标架”。例如球坐标系中的基矢$\vec{e}_r$、$\vec{e}_\theta$、$\vec{e}_\varphi$就是一种简单的活动标架。空间任意点p（$\vec{r}$）处的局域标架为$\vec{e}_r$（$\vec{r}$）、$\vec{e}_\theta$（$\vec{r}$）、$\vec{e}_\varphi$（$\vec{r}$），它们对于不同的p（$\vec{r}$）点方向是不同的，也就是说，它们是矢量$\vec{r}$端点的函数，简记为$\vec{r}$的函数。如果将它们向整体坐标系的基矢$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$投影，则有

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= \sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\vec{k},\\ \vec{e}_\theta &= \cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{j} - \sin\theta\vec{k},\\ \vec{e}_\varphi &= -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}。\end{aligned} \tag{1.1.1}$$

对空间任意点p处的矢量$\vec{A}$，可以把它投影到整体坐标系上

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k};$$

也可以把它投影到局域坐标系、例如球坐标系上

$$\vec{A} = A_r\vec{e}_r + A_\theta\vec{e}_\theta + A_\varphi\vec{e}_\varphi。$$

比较上述关系式可得

$$\begin{aligned}A_x &= A_r\sin\theta\cos\varphi + A_\theta\cos\theta\cos\varphi - A_\varphi\sin\varphi,\\ A_y &= A_r\sin\theta\sin\varphi + A_\theta\cos\theta\sin\varphi + A_\varphi\cos\varphi,\\ A_z &= A_r\cos\theta - A_\theta\sin\theta。\end{aligned}$$

容易验证

$$A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A_r^2 + A_\theta^2 + A_\varphi^2 = |\vec{A}|^2,$$

即在不同的坐标系中，矢量$\vec{A}$的模不变。

由上面的讨论可以看出，在空间任意点处总可以建立一组正交基矢$\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$、$\vec{e}_3$，它们按1、2、3顺序满足右手螺旋法则，再沿三个基矢方向选定坐标轴，便构成一个正交坐标系。

于是任意矢量$\vec{A}$可以向该坐标系的基矢投影，相应的分量可记为A_1、A_2、A_3:

$$\vec{A}=A_1\vec{e}_1+A_2\vec{e}_2+A_3\vec{e}_3。 \tag{1.1.2}$$

具体的$\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$、$\vec{e}_3$及投影分量有多种选择的可能性，例如:

对直角坐标系

$$\vec{e}_1=\vec{i},\ \vec{e}_2=\vec{j},\ \vec{e}_3=\vec{k};$$

$$A_1=A_x,\ A_2=A_y,\ A_3=A_z。$$

对球坐标系

$$\vec{e}_1=\vec{e}_r,\ \vec{e}_2=\vec{e}_\theta,\ \vec{e}_3=\vec{e}_\varphi;$$

$$A_1=A_r,\ A_2=A_\theta,\ A_3=A_\varphi。$$

对圆柱坐标系

$$\vec{e}_1=\vec{e}_\rho,\ \vec{e}_2=\vec{e}_\varphi,\ \vec{e}_3=\vec{e}_z;$$

$$A_1=A_\rho,\ A_2=A_\varphi,\ A_3=A_z。$$

为方便起见，还可将（1.1.2）式写成更简洁的形式

$$\vec{A}=\sum_{i=1}^{3}A_i\vec{e}_i=A_i\vec{e}_i, \tag{1.1.3}$$

这里约定凡是相重的指标代表从1到3求和，此运算称为指标的收缩，如果不代表求和需作特殊说明。

引入克罗内克记号δ_{ij}，定义如下:

$$\delta_{ij}=0,\ 当i\neq j \tag{1.1.4}$$

$$\delta_{ij}=1,\ 当i=j$$

其性质

$$\delta_{ij}=\delta_{ji},\quad \delta_{ii}=3,\quad \delta_{il}\delta_{lj}=\delta_{ij}。\tag{1.1.5}$$

δ_{ij}的矩阵形式是

$$[\delta_{ij}]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}。\tag{1.1.6}$$

结合相重指标代表求和的约定，可以得到以下的表示：

(a) 基矢正交归一性

$$\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=\delta_{ij},\tag{1.1.7}$$

例如

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=0,\quad \vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1=1。$$

(b) 矢量标积（也称点乘积或数量积）

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=(A_i\vec{e}_i)\cdot(B_j\vec{e}_j)=\delta_{ij}A_iB_j=A_iB_i,\tag{1.1.8}$$

即

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3。$$

例如对直角坐标系

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z。$$

(c) 凡是求和的指标可称为“哑标”，由于它们都代表从1到3求和，所以表示哑标的字母可任意改动而不影响求和，即

$$A_iB_i=A_jB_j=A_lB_l=\cdots,\quad (i、j、l=1,2,3)。\tag{1.1.9}$$

2. 空间变换性质和物理量的分类

(1) 三维空间的正交变换

当坐标原点不变、坐标变换时，空间长度不变的变换称为正交变换。由于坐标系作转动变换时，任意一点离开原点的距离（或者说任意一点的矢径的长度）保持不变，所以坐标系转动属

于正交变换。

首先讨论二维平面上的坐标系转动，如图 1.1 所示，设坐标系$\sum'$相对于坐标系$\sum$旋转了角 θ，平面上一点 P 的坐标在$\sum$系为 (x_1, x_2)，在$\sum'$系为 (x_1', x_2')。新旧坐标之间有线性变换关系

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1\cos\theta + x_2\sin\theta, \\ x_2' &= -x_1\sin\theta + x_2\cos\theta。 \end{aligned} \tag{1.1.10}$$

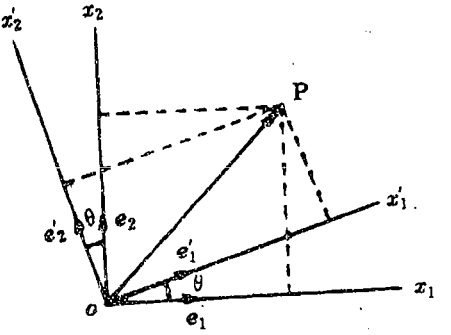


图 1.1

长度$\overline{OP}$的平方为

$$\begin{aligned} \overline{OP}^2 &= x_1^2 + x_2^2 \\ &= x_1'^2 + x_2'^2 = \text{不变量}, \end{aligned} \tag{1.1.11}$$

引入标记

$$\lambda_{\alpha\beta} = \cos(\vec{e}_\alpha', \vec{e}_\beta) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2)， \tag{1.1.12}$$

上述变换关系可表示为

$$\begin{aligned} x_1' &= \lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}x_2, \\ x_2' &= \lambda_{21}x_1 + \lambda_{22}x_2。 \end{aligned} \tag{1.1.13}$$

设$\vec{v}$为平面上的任意矢量，$\vec{v}$在$\sum$系和$\sum'$系中的分量分别为 v_x，v_y 和 v_x'，v_y'。容易得出，这些分量也满足形如 (1.1.10) 和 (1.1.11) 的关系式，说明矢量的分量与坐标具有相同的变换形式。

现在推广到三维空间的坐标系转动，坐标变换一般具有形式

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,$$

$$x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,$$ (1.1.14)

$$x'_2 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3,$$

式中系数依赖于转动轴和转动角。坐标系转动时空间距离保持不变，应有

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 = \text{不变量}。$$ (1.1.15)

利用前面引入的一些记号，三维转动的变换关系式可以写成

$$x'_i = a_{ij}x_j \qquad i、j = 1, 2, 3;$$ (1.1.16)

其不变量为

$$x'_i x'_i = x_i x_i。$$ (1.1.17)

把（1.1.16）式代入（1.1.17）式左端，注意（1.1.17）式右端可写成 $\delta_{jk}x_j x_k$，则

$$a_{ij}x_j a_{ik}x_k = \delta_{jk}x_j x_k,$$

比较两边系数得

$$a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk},$$ (1.1.18)

这就是正交变换的条件。对（1.1.16）式乘上 a_{il}，然后利用正交条件（1.1.18），可得（1.1.16）式的反变换式

$$x_l = a_{il}x'_i。$$ (1.1.19)

如将变换系数写成矩阵形式（正交矩阵）

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$ (1.1.20)

则坐标变换式（1.1.16）也有矩阵形式

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}。 \tag{1.1.21}$$

转置矩阵定义为：$\widetilde{a}_{ij} = a_{ji}$，于是正交条件（1.1.18）的矩阵形式为

$$\widetilde{a}a = I, \tag{1.1.22}$$

式中 I 是单位矩阵。在（1.1.22）式两边右乘 a^{-1}，得

$$\widetilde{a} = a^{-1}, \tag{1.1.23}$$

说明任何正交矩阵的转置矩阵等于其逆矩阵。

(2) 物理量按空间变换性质的分类

在正交变换中，不同的物理量具有不同的变换关系，实际上把物理量分为标量、矢量、张量等类别，就是根据物理量在空间转动下的变换性质来定义的。

如果一个物理量在空间没有取向关系，在坐标系转动时其数值不变，则称此量为标量。由标量不变性有

$$u' = u。$$

如果一个物理量在空间有一定的取向性，是由三个分量表示，在坐标按（1.1.16）式变换时，其三个分量按同一方式变换，即

$$v'_i = a_{ij} v_j, \tag{1.1.24}$$

则称此量为矢量，它也可用一个列矩阵表示。

如果一个物理量有更复杂的空间取向性质，是由九个分量表示，在坐标按（1.1.16）式变换时，其分量的变换关系为

$$T'_{ij}=a_{ik}a_{jl}T_{kl}, \tag{1.1.25}$$

则称此量为二阶张量，它也可用三行三列的矩阵表示。

同样可定义 n 阶张量，它有 3^n 个分量，在坐标系转动时，其分量的变换关系为

$$T_{ijk\cdots}=a_{ir}a_{js}a_{kt}\cdots T_{rst\cdots}, \tag{1.1.26}$$

由此，标量和矢量可作为零阶和一阶张量来统一讨论。并且在上面的表达式中，重复指标收缩后所剩下的自由指标很有规律：标量没有自由指标，矢量的分量有一个自由指标，二阶张量的分量有两个自由指标。这样，只要看某式有多少个自由指标，就可以判别它属于哪一类物理量。

高阶张量在本课程中很少用到，以后将二阶张量简称张量。

3. 张量

(1) 张量的概念和一些性质

两矢量并列，它们之间不作任何运算，称为并矢。如有两矢量

$$\vec{A}=A_i\vec{e}_i,\quad \vec{B}=B_j\vec{e}_j$$

则其并矢

$$\vec{A}\vec{B}=A_iB_j\vec{e}_i\vec{e}_j \tag{1.1.27}$$

它的分量为 A_iB_j，可见并矢就构成了张量，它是张量的一种特殊情形。

下面我们通过弹性体应力的讨论来说明张量的具体含义。

当弹性体受到外力时，它内部的分子之间存在着相当复杂的作用力，在宏观描述中，此内部力（应力）可用下面方式表示。在弹性体内，假想有一个通过 P 点的任意面元 $\mathrm{d}\vec{\sigma}$，面元两面的物质相互受到大小相等而方向相反的力，现用 $\mathrm{d}\vec{f}$ 表示 $\mathrm{d}\vec{\sigma}$

前方的物质通过此面元对后方物质的作用力。如图（1.2）所示取任一微小的四面体，设其斜面就是 $\mathrm{d}\vec{\sigma}$，方向自内向外。另三个面各为 $\mathrm{d}\sigma_x$，$\mathrm{d}\sigma_y$，$\mathrm{d}\sigma_z$，方向分别沿三个坐标轴，其大小各为

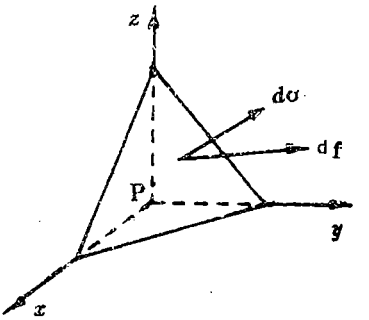


图 1.2

$$\mathrm{d}\sigma_x = \mathrm{d}\vec{\sigma} \cdot \vec{i},$$

$$\mathrm{d}\sigma_y = \mathrm{d}\vec{\sigma} \cdot \vec{j},\quad \mathrm{d}\sigma_z = \mathrm{d}\vec{\sigma} \cdot \vec{k},$$

相应的作用力分别是 $\mathrm{d}\vec{f}_x$，$\mathrm{d}\vec{f}_y$，$\mathrm{d}\vec{f}_z$。四面体内物质所受的合力为 $\mathrm{d}\vec{f} - \mathrm{d}\vec{f}_x - \mathrm{d}\vec{f}_y - \mathrm{d}\vec{f}_z$，由四面体处于力学平衡状态，得此合力为零，即

$$\mathrm{d}\vec{f} = \mathrm{d}\vec{f}_x + \mathrm{d}\vec{f}_y + \mathrm{d}\vec{f}_z$$

如令 $\mathrm{d}\sigma_x$ 上应力 $\mathrm{d}\vec{f}_x$ 的 x、y、z 分量为 $\mathrm{d}f_{xx}$、$\mathrm{d}f_{xy}$、$\mathrm{d}f_{xz}$，并考虑到 $\mathrm{d}\vec{f}_x$ 的大小与 $\mathrm{d}\sigma_x$ 成正比，则有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\vec{f}_x &= \mathrm{d}f_{xx}\vec{i} + \mathrm{d}f_{xy}\vec{j} + \mathrm{d}f_{xz}\vec{k} \\ &= \mathrm{d}\sigma_x \ (T_{xx}\vec{i} + T_{xy}\vec{j} + T_{xz}\vec{k}) \ ,\end{aligned}$$

同样

$$\mathrm{d}\vec{f}_y = \mathrm{d}\sigma_y \ (T_{yx}\vec{i} + T_{yy}\vec{j} + T_{yz}\vec{k}) \ ,$$

$$\mathrm{d}\vec{f}_z = \mathrm{d}\sigma_z \ (T_{zx}\vec{i} + T_{zy}\vec{j} + T_{zz}\vec{k}) \ 。$$

其中 T_{xy} 表示通过方向沿 x 轴的单位面积，其前方物质对后方物质作用力的 y 分量，其它各量含义类此。利用上面诸关系式可得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\vec{f} = {} & \mathrm{d}\vec{\sigma} \cdot \vec{i} \ (T_{xx}\vec{i} + T_{xy}\vec{j} + T_{xz}\vec{k}) \\ & + \mathrm{d}\vec{\sigma} \cdot \vec{j} \ (T_{yx}\vec{i} + T_{yy}\vec{j} + T_{yz}\vec{k})\end{aligned}$$

$$+ \mathrm{d}\vec{\sigma} \cdot \vec{k}\ (T_{zx}\vec{i} + T_{zy}\vec{j} + T_{zz}\vec{k})\ 。 \tag{1.1.28}$$

引入

$$\vec{\vec{T}} = T_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j, \tag{1.1.29}$$

并规定一矢量从左边点乘 $\vec{\vec{T}}$ 是点乘 $\vec{\vec{T}}$ 中第一个单位矢量，则

$$\mathrm{d}\vec{f} = \mathrm{d}\vec{\sigma} \cdot \vec{\vec{T}}。 \tag{1.1.30}$$

这里引入的 $\vec{\vec{T}}$ 就是一个张量，其分量是 T_{ij}，它的第一个下标表示考虑应力的某个面的方向，第二个下标表示应力的某一分量。对方向沿 x 轴的面来说，T_{xx} 描述法线应力，即张应力，而 T_{xy} 和 T_{xz} 描述切线应力，即切应力，其余类推。如果 T_{ij} 所包含的九个量已知，则对任意方向的 $\mathrm{d}\vec{\sigma}$ 所相应的 $\mathrm{d}\vec{f}$ 都可求出，于是 P 点处的应力情况就完全清楚了。由此将 $\vec{\vec{T}}$（或 T_{ij}）称为应力张量，后来把其它具有 T_{ij} 性质的量都称为张量，就是因为它最先是在讨论张力时引入的。

现在简单介绍张量的一些性质：

(a) 如果 $T_{ij} = T_{ji}$，则此张量称为对称张量，其矩阵形式为对称矩阵，它具有 6 个独立分量。

(b) 如果 $T_{ij} = -T_{ji}$，则此张量称为反对称张量，其矩阵形式为反对称矩阵。由于一个量等于它自身的负值时该量必为零，所以反对称张量的对角元素均为零，并且它只有三个独立分量。

(c) 由任何张量 T_{ij} 可以得到一个标量 T_{ii}，表示为

$$T_{ii} = Tr\ (T)\ = T_{11} + T_{22} + T_{33}。 \tag{1.1.31}$$

实际上它就是张量矩阵形式的对角元素之和，称为张量的“迹”。一个对称张量 T^{S} 与一个反对称张量 T^{A} 的乘积的矩阵迹为零，即

$$Tr\ (T^S T^A)\ = T^S_{ij}T^A_{ji} = T^S_{ji}T^A_{ij} = -T^S_{ij}T^A_{ji} = 0。 \tag{1.1.32}$$

(*d*) 任意一个张量可以分解为一个对称张量和一个反对称张量之和:

$$T_{ij}=\frac{1}{2}\ (T_{ij}+T_{ji})\ +\frac{1}{2}\ (T_{ij}-T_{ji})$$
$$=T^{S}_{ij}+T^{A}_{ij}, \tag{1.1.33}$$

其中

$$T^{S}_{ij}=\frac{1}{2}\ (T_{ij}+T_{ji})\ ,$$
$$\tag{1.1.34}$$
$$T^{A}_{ij}=\frac{1}{2}\ (T_{ij}-T_{ji})\ 。$$

(*e*) 张量

$$\vec{\vec{\mathrm{I}}}=\vec{e}_1\vec{e}_1+\vec{e}_2\vec{e}_2+\vec{e}_3\vec{e}_3 \tag{1.1.35}$$

称为单位张量，其分量是

$$\mathrm{I}_{ij}=\delta_{ij}。 \tag{1.1.36}$$

单位张量和任一矢量的点乘等于该矢量:

$$\vec{\vec{\mathrm{I}}}\cdot\vec{f}=\vec{f}\cdot\vec{\vec{\mathrm{I}}}=\vec{f}。 \tag{1.1.37}$$

(2) 全反对称张量

定义张量

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}+1 & \text{当}i、j、k\text{顺序为1、2、3，或}\\ & i、j、k\text{经偶次置换变为1、2、3时;}\\ -1 & \text{当}i、j、k\text{经奇次置换变为}\\ & 1、2、3\text{时。}\\ & (i、j、k=1，2，3)\end{cases} \tag{1.1.38}$$

例如

$\varepsilon_{123}=1$，$\varepsilon_{132}=-\varepsilon_{123}=-1$，…

ε_{ijk} 对指标 i、j、k 三者都是反对称的，所以称之为“全反对称张量”。只要 i、j、k 中有任意两个指标相同，则该张量必为零。当 i≠j≠k 时，才有 $\varepsilon_{ijk}\neq 0$。

(a) 矢量的叉乘积、混合积与全反对称张量

叉乘积（也称矢量积）$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$ 的分量形式是

$$C_1=A_2B_3-A_3B_2,\quad C_2=A_3B_1-A_1B_3,$$

$$C_3=A_1B_2-A_2B_1,$$

此矢量积的任意分量可表示为

$$C_i=\varepsilon_{ijk}A_jB_k, \tag{1.1.39}$$

例如 $C_1=\varepsilon_{1jk}A_jB_k$，注意对 j、k 求和，并且 j 和 k 只能取 2 或 3，则有

$$C_1=\varepsilon_{123}A_2B_3+\varepsilon_{132}A_3B_2=\varepsilon_{123}A_2B_3-\varepsilon_{123}A_3B_2,$$

所以

$$C_1=A_2B_3-A_3B_2,$$

其它分量类推。

混合积可写为

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=A_i(\vec{B}\times\vec{C})_i=\varepsilon_{ijk}A_iB_jC_k$$

$$=\varepsilon_{jki}B_jC_kA_i=\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})$$

$$=\varepsilon_{kij}C_kA_iB_j=\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}), \tag{1.1.40}$$

用行列式表示的关系式是

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\varepsilon_{ijk}A_iB_jC_k$$

$$=\begin{vmatrix}A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix}。 \tag{1.1.41}$$

(b) ε_{ijk} 的两个重要公式

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}=\delta_{jl}\delta_{km}-\delta_{jm}\delta_{lk}, \tag{1.1.42}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijm}=2\delta_{km}。 \tag{1.1.43}$$

证明：由（1.1.39）式

$$C_iC_i=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}A_jA_lB_kB_m,$$

由矢量运算公式

$$\begin{aligned}C_iC_i&=(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{A}\times\vec{B})\\&=\vec{A}^2\vec{B}^2-(\vec{A}\cdot\vec{B})(\vec{A}\cdot\vec{B})\\&=A_iA_iB_jB_j-A_iB_iA_jB_j\\&=(\delta_{lj}\delta_{km}-\delta_{jm}\delta_{lk})A_jA_lB_kB_m,\end{aligned}$$

比较此二式并注意到$\vec{A}$、$\vec{B}$为任意矢量，则得（1.1.42）式。

在（1.1.42）式中令l=j，然后求和，注意

$$\delta_{jj}=3,\quad \delta_{lm}\delta_{lk}=\delta_{mk}$$

则得（1.1.43）式。

(c) 由于ε_{ijk}对i、j、k中任意两个为反对称，所以它乘以任意对称张量其结果为零。例如，若$S_{jk}=S_{kj}$，可得

$$\varepsilon_{ijk}S_{jk}=\varepsilon_{ikj}S_{hj}=-\varepsilon_{ijk}S_{jk}=0; \tag{1.1.44}$$

同理，若$a_ja_k=a_ka_j$，则

$$\varepsilon_{ijk}a_ja_k=0。 \tag{1.1.45}$$

(*d*) 有关微商算子及梯度、散度、旋度的表示

哈密顿算子∇可表示为

$$\nabla=\vec{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}=\vec{e}_i\partial_i, \tag{1.1.46}$$

于是，拉普拉斯算子可表示为

$$\Delta=\nabla^2=\partial_i\partial_i, \tag{1.1.47}$$

标量场Φ的梯度可表示为

$$\nabla\Phi=\vec{e}_i\partial_i\Phi, \tag{1.1.48}$$

矢量场$\vec{A}$的散度可表示为

$$\nabla\cdot\vec{A}=\partial_iA_i, \tag{1.1.49}$$

矢量场$\vec{A}$的旋度可表示为

$$\nabla\times\vec{A}=\vec{e}_i\ (\nabla\times\vec{A})_i=\vec{e}_i\varepsilon_{ijk}\partial_jA_k$$

$$=\vec{e}_i\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\ (\partial_jA_k-\partial_kA_j)\ 。 \tag{1.1.50}$$

〔例1－1〕　求证$\nabla\cdot\ (\vec{A}\times\vec{B})\ =\vec{B}\cdot\ (\nabla\times\vec{A})$

$-\vec{A}\cdot\ (\nabla\times\vec{B})$ 。

证明：$\nabla\cdot\ (\vec{A}\times\vec{B})\ =\partial_i\ (\varepsilon_{ijk}A_jB_k)$

$$=\varepsilon_{ijk}B_k\partial_iA_j+\varepsilon_{ijk}A_j\partial_iB_k=B_k\varepsilon_{kij}\partial_iA_j-A_j\varepsilon_{jik}\partial_iB_k$$

$$=B_k\ (\nabla\times\vec{A})_k-A_j\ (\nabla\times\vec{B})_j=\vec{B}\cdot\ (\nabla\times\vec{A})$$

$-\vec{A}\cdot\ (\nabla\times\vec{B})$

〔例1－2〕　求证$\nabla\cdot\ (x_i\vec{A})\ =A_i+x_i\nabla\cdot\vec{A}$。

(1.1.52)

证明：$\nabla\cdot\ (x_i\vec{A})\ =\partial_j\ (x_iA_j)\ =\ (\partial_jx_i)\ A_j+x_i\partial_jA_j$

$$=\delta_{ij}A_j+x_i\partial_jA_j=A_i+x_i\nabla\cdot\vec{A}$$

〔例1－3〕　求证$\nabla\times\ (\nabla\times\vec{A})\ =\nabla\ (\nabla\cdot\vec{A})\ -\nabla^2\vec{A}$

(1.1.53)

证明：$\nabla\times\ (\nabla\times\vec{A})\ =\vec{e}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j\ (\nabla\times\vec{A})_k$

$$=\vec{e}_i\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\partial_j\partial_lA_m=\vec{e}_i\ (\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})\ \partial_j\partial_lA_m$$

$$=\vec{e}_i\partial_i\partial_mA_m-\vec{e}_i\partial_l\partial_lA_i=\nabla\ (\nabla\cdot\vec{A})\ -\nabla^2\vec{A}。$$

〔例 1–4〕　用上述记号表示高斯定理和斯托克斯定理。

解：高斯定理 $\int_V \nabla \cdot \vec{A} \mathrm{d}v = \oint_S \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$ 可表示为

$$\int_V \partial_i A_i \mathrm{d}v = \oint_S A_i \mathrm{d}s_i, \tag{1.1.54}$$

斯托克斯定理 $\int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \oint_L \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 可表示为

$$\varepsilon_{ijk} \int_S \partial_j A_k \mathrm{d}s_i = \oint_L A_i \mathrm{d}l_i。 \tag{1.1.55}$$

〔例1－5〕 求证 $\oint_S \Phi \mathrm{d}\vec{s} = \int_V \nabla \Phi \mathrm{d}v。$ (1.1.56)

证明：取一个任意常矢量 $\vec{A}$ 点乘 $\int_V \nabla \Phi \mathrm{d}v$：

$$\int_V \nabla \Phi \mathrm{d}v \cdot \vec{A} = \int_V (\partial_i \Phi) A_i \mathrm{d}v = \int_V \partial_i (\Phi A_i) \mathrm{d}v,$$

由高斯定理 (1.1.54)

$$\int_V \partial_i (\Phi A_i) \mathrm{d}v = \oint_S \Phi A_i \mathrm{d}s_i = \oint_S \Phi \mathrm{d}\vec{s} \cdot \vec{A},$$

则得

$$\int_V \nabla \Phi \mathrm{d}v \cdot \vec{A} = \oint_S \Phi \mathrm{d}\vec{s} \cdot \vec{A}。$$

由于 $\vec{A}$ 是任意矢量，所以

$$\int_V \nabla\Phi \mathrm{d}v = \oint_S \Phi \mathrm{d}\vec{s}。$$

〔例 1-6〕　试证标量场的梯度必为无旋场。

证明：$\nabla \times (\nabla\Phi) = \vec{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j (\nabla\Phi)_k = \vec{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \Phi$

$$= \vec{e}_i \varepsilon_{ikj} \partial_k \partial_j \Phi = -\vec{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \Phi = 0。 \tag{1.1.57}$$

式中 $\nabla\Phi$ 是一矢量记为 $\vec{f}$，(1.1.57) 即为 $\nabla \times \vec{f} = 0$。结合斯托克斯公式可以得出：$\vec{f}$ 为一位矢量的必要及充分条件是 $\nabla \times \vec{f} = 0$。因此，无旋场可表示为某标量场的梯度

$$\vec{f} = \nabla\Phi。 \tag{1.1.58}$$

〔例1－7〕　试证矢量场的旋度必为无源场。

与上例同法可证

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0。 \tag{1.1.59}$$

此外可以证明它的逆定理也存在，若 $\nabla \cdot \vec{f} = 0$，则可找到另一矢量 $\vec{A}$：

$$\vec{f} = \nabla \times \vec{A}, \tag{1.1.60}$$

即无源场可以表示为另一矢量场的旋度。

§1.2　δ 函数

1. δ 函数的定义及主要性质

δ 函数定义为同时满足以下两点的函数：

$$(a) \quad \delta(x - x_0) = \begin{cases} 0, & \text{当} x \neq x_0; \\ \infty, & \text{当} x = x_0。 \end{cases} \tag{1.2.1}$$

$$(b)\quad \int_a^b \delta\ (x-x_0)\ \mathrm{d}x=\begin{cases}1, & \text{当}a<x_0<b;\\ 0, & \text{当}x_0<a,\ x_0>b。\end{cases}\tag{1.2.2}$$

其中 (b) 实际上是限制当 $x\to x_0$ 时，$\delta\ (x-x_0)$ 为一阶无穷大。可以看出，δ 函数不是通常意义下定义的函数，它只是在积分号内经过求积分的运算后才给出数值，而这种积分也不能按通常积分定义去理解。因此，δ 函数是一种广义函数。

δ 函数最主要的性质有：

(a) 偶函数，即

$$\delta\ (x-x_0)\ =\delta\ (x_0-x)\ ,\tag{1.2.3}$$

$$(b)\quad \int_a^b f\ (x)\ \delta\ (x-x_0)\ \mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}f\ (x_0)\ , & \text{当}a<x_0<b;\\ 0, & \text{当}x_0<a,\ x_0>b。\end{cases}\tag{1.2.4}$$

$$(c)\quad x\delta\ (x-x_0)\ =x_0\delta\ (x-x_0)\tag{1.2.5}$$

$$f\ (x)\ \delta\ (x-x_0)\ =f\ (x_0)\ \delta\ (x-x_0)\tag{1.2.6}$$

$$(\mathrm{d})\quad \delta\ (ax)\ =\frac{\delta\ (x)}{|a|}。\tag{1.2.7}$$

上述是一维空间的 δ 函数，将其推广可得二维和三维空间的 δ 函数。

二维 δ 函数：

直角坐标中

$$\delta\ (\vec{\rho}-\vec{\rho}_0)\ =\delta\ (x-x_0)\ \delta\ (y-y_0)\ ,\tag{1.2.8}$$

平面极坐标中

$$\delta(\vec{\rho}-\vec{\rho}_0)=\frac{1}{\rho}\delta(\rho-\rho_0)\delta(\varphi-\varphi_0), \tag{1.2.9}$$

三维 δ 函数:

直角坐标中

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0), \tag{1.2.10}$$

圆柱坐标中

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)=\frac{1}{\rho}\delta(\rho-\rho_0)\delta(\varphi-\varphi_0)\delta(z-z_0), \tag{1.2.11}$$

球坐标中

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)=\frac{1}{r^2\sin\theta}\delta(r-r_0)\,\delta(\theta-\theta_0)\,\delta(\varphi-\varphi_0)。 \tag{1.2.12}$$

式中分母上的因子是为保证在不同坐标系中与相应的体积元相乘并积分后结果为 1，即为了满足 δ 函数归一的定义。

前述一维 δ 函数的各公式对高维 δ 函数也成立。比如:

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)=\begin{cases}0, & \text{当}\vec{r}\neq\vec{r}_0;\\ \infty, & \text{当}\vec{r}=\vec{r}_0。\end{cases} \tag{1.2.13}$$

$$\int_{\Delta V}\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\,\mathrm{d}v=1,\ \Delta v\text{ 是包围}\vec{r}_0\text{ 点的小体积,} \tag{1.2.14}$$

$$\int_{\Delta V}\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)f(\vec{r})\,\mathrm{d}v=f(\vec{r}_0),\ \Delta v\text{ 是包围}\vec{r}_0\text{ 点的小体积。} \tag{1.2.15}$$

引入 δ 函数后，就可以方便地表示点电荷的密度，下面将举

例说明。

〔例 1–8〕　点电荷 q 位于下列各点，试写出其电荷密度：

(1)　直角坐标中 (x_0, y_0, z_0) 点；

(2)　平面极坐标中 (a, φ_0) 点；

(3)　球坐标中 $(r_0, \cos\theta_0, \varphi_0)$ 点。

解：(1)　电荷密度为

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)\,\delta(z-z_0), \quad (1.2.16)$$

对包围 q 所在点的体积作积分

$$\int_V \rho(\vec{r})\,\mathrm{d}v$$

$$= \int_V q\delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)\,\delta(z-z_0)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = q,$$

其结果正好是总电荷 q。

(2)　电荷密度为

$$\rho(\vec{\rho}) = q\frac{\delta(\rho-a)}{\rho}\delta(\varphi-\varphi_0)$$

$$= \frac{q}{a}\delta(\rho-a)\,\delta(\varphi-\varphi_0), \quad (1.2.17)$$

作积分

$$\int_S \rho(\vec{\rho})\,\mathrm{d}s = \int_S \frac{q}{a}\delta(\rho-a)\,\delta(\varphi-\varphi_0)\,\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = q,$$

其结果即为总电荷 q。

(3)　电荷密度为

$$\rho(\vec{r}) = \frac{1}{r^2}q\delta(r-r_0)\,\delta(\cos\theta_0 - \cos\theta)\,\delta(\varphi-\varphi_0),$$

(1.2.18)

作积分

$$\int_V \rho\ (\vec{r})\ \mathrm{d}v = \int_V \frac{q}{r^2}\delta\ (r-r_0)\ \delta\ (\cos\theta_0 - \cos\theta)$$

$$\delta\ (\varphi-\varphi_0)\ r^2\sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = q$$

其结果即为总电荷 q。

〔例 1-9〕 一个半径为 R 的球面上有电荷 $\sigma\ (\theta)$，写出空间电荷密度。

解：用球坐标表示，电荷密度可写成

$$\rho\ (\vec{r})\ = \sigma\ (\theta)\ \delta\ (r-R)\ , \tag{1.2.19}$$

进行积分

$$\int_V \rho\ (\vec{r})\ \mathrm{d}v = \int_v \sigma\ (\theta)\ \delta\ (r-R)\ r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\Omega = \int_S \sigma\ (\theta)\ R^2\mathrm{d}\Omega$$

$$= \int_S \sigma\ (\theta)\ \mathrm{d}s = Q,$$

其结果正是球面上的总电荷 Q。

2. δ 函数作为连续函数极限情形的几种形式

δ 函数作为一种不连续函数，可以理解为某种含有参数的连续函数在参数趋于某一数值时的极限情形。因此，一般采取极限过渡的办法来构造 δ 函数，并且可以有许多不同的函数极限形式。即在构造 δ 函数时，虽然连续函数及其极限过渡的形式多种多样，但是只要其极限值满足 δ 函数的定义，则这些不同连续函数的极限都是 δ 函数。

〔例1－10〕　$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixk}\mathrm{d}k$。　　(1.2.20)

检验是否满足 δ 函数的定义。将（1.2.20）式写为

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}e^{ixk}\mathrm{d}k+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}e^{ixk}\mathrm{d}k,$$

将第一项中的 k 换为－k，可得

$$\delta(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos kx\mathrm{d}k,$$

引入极限过程

$$\delta(x)=\lim_{\alpha\to+0}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha k}\cos kx\mathrm{d}k,\qquad(\alpha>0)$$

则有

$$\delta(x)=\lim_{\alpha\to+0}\frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}。\qquad(1.2.21)$$

我们按 δ 函数的定义来讨论（1.2.21）式的极限值：

(a)　当 $x\neq0$ 时（1.2.21）式为零，当 $x=0$ 时为 ∞。

(b)　$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\alpha\to+0}\frac{\alpha}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\alpha^2+x^2}$$

$$=\lim_{\alpha\to+0}\frac{\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{\alpha}\mathrm{tg}^{-1}\frac{x}{\alpha}\Big|_{-\infty}^{\infty}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=1$$

可见，（1.2.21）式表示的极限符合 δ 函数的定义。

下面再列出几种常见的极限形式：

$$\delta(r) = \lim_{a\to 0} \frac{2}{\sqrt{\pi}\,a} e^{-r^2/a^2}, \tag{1.2.22}$$

$$\delta(x) = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin\alpha x}{x}, \tag{1.2.23}$$

$$\delta(x) = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{2\pi} \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha x}{2}\right)}{\alpha\left(\frac{x}{2}\right)^2}。 \tag{1.2.24}$$

3. δ 函数的福氏表示

上述 (1.2.20) 式

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixk}\,\mathrm{d}k$$

称为 δ 函数的福氏表示，现将它推广到三维空间。令

$$x_1 = x\ ,\ x_2 = y\ ,\ x_3 = z,$$

则有

$$\delta(\vec{r}) = \delta(x_1)\,\delta(x_2)\,\delta(x_3)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3)}\,\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2\mathrm{d}k_3。$$

引入 $\vec{k}$ 空间及其体积元

$$\vec{k} = (k_1,\ k_2,\ k_3)\ ,\ \mathrm{d}^3k = \mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2\mathrm{d}k_3,$$

可得

$$\delta(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\,\mathrm{d}^3k。 \tag{1.2.25}$$

对应 $\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \delta(x - x')\,\delta(y - y')\,\delta(z - z')$，当然

有

$$\delta\ (\vec{r}-\vec{r}')\ =\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\vec{k}\cdot\ (\vec{r}-\vec{r}')}\ \mathrm{d}^3k。\qquad(1.2.26)$$

所得 (1.2.25) 或 (1.2.26) 式就是三维 δ 函数的福氏表示。

借助于 δ 函数的基本性质和福氏表示，容易得到福氏变换的具体形式。由表达式

$$f\ (\vec{r})\ =\int f\ (\vec{r}')\ \delta\ (r'-\vec{r})\ \mathrm{d}v',$$

$$\delta\ (\vec{r}'-\vec{r})\ =\delta\ (\vec{r}-\vec{r}')\ =\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}\cdot\ (\vec{r}-\vec{r}')}\ \mathrm{d}^3k,$$

得到

$$f\ (\vec{r})\ =\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\left[\int f\ (\vec{r}')\ e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\mathrm{d}v'\right]\mathrm{d}^3k。$$

所以

$$f\ (\vec{r})\ =\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}F\ (\vec{k})\ \mathrm{d}^3k,$$

$$F\ (\vec{k})\ =\int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}f\ (\vec{r})\ \mathrm{d}v。\qquad(1.2.27)$$

这就是三维福氏变换。

δ 函数的福氏表示和福氏变换相结合，就可以解决某些问题。

〔**例** 1－11〕　已知 $\nabla^2\phi\ (\vec{r})\ =-\frac{1}{\varepsilon_0}\delta\ (\vec{r})$，求证 $\phi\ (\vec{r})$ 的一个特解为 $\phi\ (\vec{r})\ =\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$。

证明：将表达式

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} F(\vec{k})\, \mathrm{d}^3k$$

$$\delta(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \mathrm{d}^3k$$

代入已知方程，可求出

$$F(\vec{k}) = \frac{1}{\varepsilon_0 k^2},$$

注意到 $\mathrm{d}^3k = k^2\mathrm{d}k\mathrm{d}\Omega = k^2\sin\theta\mathrm{d}k\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$，得

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3\varepsilon_0}\int \mathrm{d}k\int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\mathrm{d}\Omega。$$

选$\vec{k}$坐标系的极轴方向沿$\vec{r}$方向，于是有

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi^2\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\mathrm{d}k\int_{-1}^{+1}\mathrm{d}\xi e^{ikr\xi},$$

式中 $\xi = cos\theta$。又因

$$\int_{-1}^{+1}\mathrm{d}\xi\int_0^{\infty}\mathrm{d}k e^{ikr\xi} = \int_{-1}^{+1}\mathrm{d}\xi\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}k e^{ikr\xi},$$

所以

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_{-1}^{+1}\mathrm{d}\xi\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}(kr)\, e^{i(kr)\xi}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_{-1}^{+1}\delta(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}。 \qquad (1.2.28)$$

问题得证。由此得

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r}), \tag{1.2.29}$$

$$\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}')。 \tag{1.2.30}$$

4. δ 函数与 θ 函数（阶跃函数）

定义 θ 函数：

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & 当 x > 0; \\ 0, & 当 x < 0。 \end{cases} \tag{1.2.31}$$

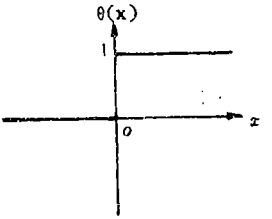


图 1.3

显然它与 δ 函数的关系是

$$\delta(x) = \frac{\mathrm{d}\theta(x)}{\mathrm{d}x}。 \tag{1.2.32}$$

此外，由 θ 函数定义性质可知

$$\theta(-x) = \begin{cases} 0, & 当 x > 0; \\ 1, & 当 x < 0。 \end{cases} \tag{1.2.33}$$

$$\theta(t-t_0) = \begin{cases} 1, & 当 t > t_0; \\ 0, & 当 t < t_0。 \end{cases} \tag{1.2.34}$$

$$\theta(t_0-t) = \begin{cases} 0, & 当 t > t_0; \\ 1, & 当 t < t_0。 \end{cases} \tag{1.2.35}$$

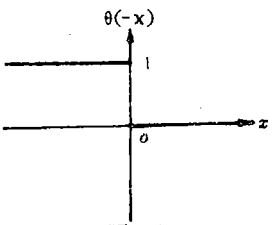


图 1.4

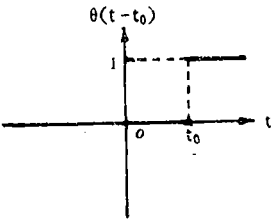


图 1.5

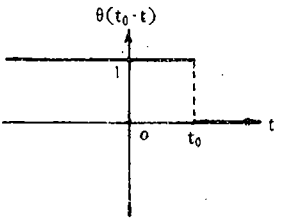


图 1.6

$\theta(-x)$ $\theta(t-t_0)$ $\theta(t_0-t)$

利用 δ 函数和 θ 函数的性质可以表示有关函数图形和电流密度。

〔例 1−12〕 (1) 利用 θ 函数表示图 1.7 的函数图形;

(2) 如在 xz 平面有一导电板，恒定电流 I 沿 z 轴流动，板宽为 a (图 1.8)，求空间电流密度 $\vec{J}$。

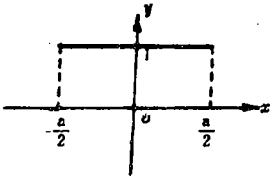


图 1.7

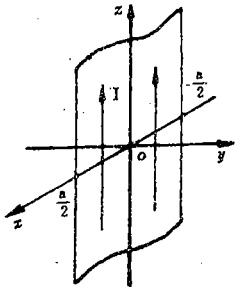


图 1.8

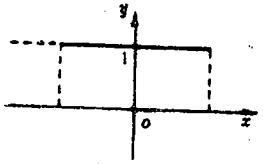


图 1.9

解: (1) 利用 θ 函数的上述性质，可将图 1.7 的函数表示为

$$y=\theta\left(\frac{a}{2}-x\right)-\theta\left(-\frac{a}{2}-x\right), \tag{1.2.36}$$

如图 1.9 所示，图中沿−x 方向延伸的虚线正是 (1.2.36) 式减去的部分。

(2) 对 x 方向而言通过单位长度的电流为 I／a，导电平面为 y＝0 的平面，导电板宽度可用 (1.2.36) 式表示，电流方向沿 z 轴，所以

$$\vec{J}\ (x,\ y,\ z)\ =\frac{I}{a}\delta\ (y)\ \left[\theta\left(\frac{a}{2}-x\right)-\theta\left(-\frac{a}{2}-x\right)\right]\vec{e}_z。 \tag{1.2.37}$$

§1.3 泊松方程的格林函数

格林函数又称源函数，在物理上它是一个点源在一定条件下产生的场，在数学上表现为一个含点源的偏微分方程在一定条件下的解。因此，不同的算符（或方程），不同的边界条件，就有不同的格林函数。这里复习无界空间中泊松方程（或算符△）的格林函数。

1. 泊松方程的格林函数

由泊松方程

$$\triangle\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1.3.1}$$

可知，位于$\vec{r}'$点的单位强度的正点源所产生的势$G(\vec{r}, \vec{r}')$满足方程

$$\triangle G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r}-\vec{r}'), \tag{1.3.2}$$

$G(\vec{r}, \vec{r}')$即为泊松方程所对应的格林函数。

根据求解非齐次线性微分方程的特解法，一个普遍边值问题的格林函数可分为两部分

$$G = G_0 + G_1, \tag{1.3.3}$$

其中

$$\triangle G_0 = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r}-\vec{r}'), \tag{1.3.4}$$

$$\triangle G_1 = 0, \tag{1.3.5}$$

G_0叫特解或基本解，是无界空间的格林函数，满足含δ函数的非齐次方程，具有奇异性。G_1则满足相应的齐次方程和一定的

边界条件，在整个区域内是正规的、无奇异性。

G 的具体形式取决于空间维数和坐标。

(a) 一维情况

$$G_0 = -\frac{1}{2\varepsilon_0}|x - x'|, \tag{1.3.6}$$

$$G_1 = c_1 x + c_2, \tag{1.3.7}$$

式中 c_1 和 c_2 为待定常数。

(b) 二维极坐标情况

$$G_0 = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln|\vec{\rho} - \vec{\rho}'|, \tag{1.3.8}$$

$$G_1 = C_0 + D_0\ln\rho + \sum_{m=1}^{\infty}(A_m\cos m\varphi + B_m\sin m\varphi)(C_m\rho^m + D_m\rho^{-m}), \tag{1.3.9}$$

式中 C_0、D_0、A_m、B_m、C_m、D_m 均为待定常数。取 α 为 $\vec{\rho}$ 与 $\vec{\rho}'$ 间的夹角，则

$$|\vec{\rho} - \vec{\rho}'| = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos\alpha}, \tag{1.3.10}$$

利用公式

$$\ln(1 + u^2 - 2u\cos\alpha) = -2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k\alpha}{k}u^k, \quad (u < 1) \tag{1.3.11}$$

可将 G_0 中的因子 $\ln|\vec{\rho} - \vec{\rho}'|$ 展开为

$$\ln|\vec{\rho} - \vec{\rho}'| = \ln\rho_> - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\rho_<}{\rho_>}\right)^k\frac{\cos k\alpha}{k}, \tag{1.3.12}$$

式中 $\rho_<$ ($\rho_>$) 是 $|\vec{\rho}|$ 与 $|\vec{\rho}'|$ 的较小者（较大者）。

(c) 三维球坐标情况

$$G_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}, \tag{1.3.13}$$

$$G_1 = \sum_{m,\ n}\ (A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}})\quad (C_m \cos m\varphi + D_m \sin m\varphi)\ P_n^m\ (\cos\theta)\ , \tag{1.3.14}$$

式中 A_n、B_n、C_m、D_m 为待定常数。G_0 中的因子

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\alpha}} \tag{1.3.15}$$

可用球函数展开

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}P_l\ (\cos\alpha)$$

$$= 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{1}{2l+1}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}Y_{lm}^*\ (\theta', \varphi')\ Y_{lm}\ (\theta,\ \varphi)\ , \tag{1.3.16}$$

式中 $r_<$（$r_>$）是 $|\vec{r}|$ 与 $|\vec{r}'|$ 的较小者（较大者），α 是 $\vec{r}$ 与 $\vec{r}'$ 之间的夹角，且

$$\cos\alpha = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\ (\varphi - \varphi')\ 。 \tag{1.3.17}$$

在具有轴对称而不依赖于 φ 角的问题中，展开式（1.3.16）简化为

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}P_l\ (\cos\theta)\ 。 \tag{1.3.18}$$

〔例 1－13〕　设 $\vec{r}$ 在半径为 R 的球外，求

$$I=\int_{\nu}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}\nu' \quad (\nu\text{为球体积})\ 。$$

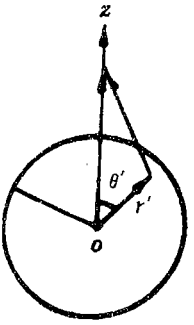


图 1.10

解：利用 (1.3.16) 式

$$I=\int r'^{2}\sin\theta'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\varphi'\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r'^{l}}{r^{l+1}}P_{l}\ (\cos\alpha)\ 。$$

若选$\vec{r}$沿 z 轴方向，则 $\alpha=\theta'$，并令 $\cos\theta'=x$，上式中对 θ' 的积分可写成

$$-\int P_{l}\ (\cos\theta')\ \mathrm{d}\ (\cos\theta')$$

$$=\int_{-1}^{+1}P_{l}\ (x)\ P_{0}\ (x)\ \mathrm{d}x=\frac{2}{2l+1}\delta_{l0}$$

所以

$$I=\frac{4\pi}{r}\int_{0}^{R}r'^{2}\mathrm{d}r'=\frac{1}{r}\frac{4\pi}{3}R^{3}=\frac{\nu}{r}。$$

2. 泊松方程的解与其格林函数的关系

格林函数满足方程

$$\triangle G\ (\vec{r}-\vec{r}')\ =-\frac{1}{\varepsilon_{0}}\delta\ (\vec{r}-\vec{r}')\ ,$$

由 δ 函数的性质，对任意函数 $f\ (\vec{r})$ 有

$$f\ (\vec{r})\ =\int f\ (\vec{r}')\ \delta\ (\vec{r}-\vec{r}')\ \mathrm{d}\nu',$$

则

$$f(\vec{r}) = -\varepsilon_0 \triangle \int f(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') \, dv',$$

所以

$$\triangle^{-1} f(\vec{r}) = -\varepsilon_0 \int f(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') \, dv', \qquad (1.3.19)$$

式中 $\triangle^{-1}$ 表示微分算符 $\triangle$ 的逆运算，是一个积分算符:

$$\triangle^{-1} = -\varepsilon_0 \int \cdots G(\vec{r}, \vec{r}') \, dv', \qquad (1.3.20)$$

$G(\vec{r}, \vec{r}')$ 则是此积分算符的核（或核函数）。

现在寻找这个积分算符与泊松方程的解之间的联系。泊松方程

$$\triangle \phi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

的解形式上可写成

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \triangle^{-1} \rho(\vec{r}),$$

将 (1.3.20) 式代入得

$$\phi(\vec{r}) = \int \rho(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') \, dv', \qquad (1.3.21)$$

此式的物理意义是，源产生场，$G(\vec{r}, \vec{r}')$ 给出位于点 $\vec{r}'$ 处的单位强度的源在点 $\vec{r}$ 处所产生的场，对所有源的分布积分，结果便得点 $\vec{r}$ 处的总场 $\phi(\vec{r})$。

对无界空间来说，$G = G_0$。因此在不同的空间和坐标中，泊松方程的解可以表示成下面的形式。

一维情况：将 (1.3.6) 式代入 (1.3.21) 式，并用 τ 表示电荷密度，得

$$\phi(x) = -\frac{1}{2\varepsilon_0} \int \tau(x') |x - x'| dx'。 \qquad (1.3.22)$$

二维极坐标情况：将（1.3.8）式代入（1.3.21）式，并用 σ 表示电荷密度，得

$$\phi(\vec{\rho}) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\int \sigma(\vec{\rho}')\ln|\vec{\rho}-\vec{\rho}'|\mathrm{d}s'。 \tag{1.3.23}$$

三维球坐标情况：将（1.3.13）式代入（1.3.21）式，得

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \rho(\vec{r}')\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}v'。 \tag{1.3.24}$$

习题一

1. 试求：

(1) 圆柱坐标系的局域基矢与直角坐标系的基矢之间的关系；

(2) 一矢量 $\vec{A}$ 在圆柱坐标系中的分量与在直角坐标系中的分量之间的关系。

2. 证明：

(1) $\nabla(\phi\Psi) = \phi\nabla\Psi + \Psi\nabla\phi$，

(2) $\nabla\cdot(\phi\vec{f}) = (\nabla\phi)\cdot\vec{f} + \phi\nabla\cdot\vec{f}$，

(3) $\nabla\times(\phi\vec{f}) = (\nabla\phi)\times\vec{f} + \phi\nabla\times\vec{f}$，

(4) $\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = (\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{B} - (\nabla\times\vec{B})\cdot\vec{A}$。

3. 证明：

(1) $\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{B}\times(\nabla\times\vec{A}) + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} + \vec{A}\times(\nabla\times\vec{B}) + (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$，

(2) $\vec{A}\times(\nabla\times\vec{A}) = \frac{1}{2}\nabla\vec{A}^2 - (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{A}$，

(3) $\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}(\nabla\cdot\vec{B}) - \vec{B}(\nabla\cdot\vec{A}) + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} - (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$。

4. 设源点的径矢为 $\vec{r}'(x', y', z')$，场点的径矢为 $\vec{r}(x, y, z)$，

且$\vec{r}-\vec{r}'=\vec{R}$，$\nabla=\vec{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}$，$\nabla'=\vec{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i'}$，证明：

(1) $\nabla R=-\nabla' R=\frac{\vec{R}}{R}$，

(2) $\nabla\frac{1}{R}=-\nabla'\frac{1}{R}=-\frac{\vec{R}}{R^3}$，

(3) $\nabla\times\frac{\vec{R}}{R}=0$，

(4) $\nabla\cdot\frac{\vec{R}}{R^3}=-\nabla'\cdot\frac{\vec{R}}{R^3}=0\quad(R\neq 0)$。

5. 设$\vec{A}$和$\vec{k}$均为常矢量，证明：

(1) $\nabla\cdot\vec{r}=3$，

(2) $\nabla\times\vec{r}=0$，

(3) $\nabla\phi(r)=\frac{\mathrm{d}\phi(r)}{\mathrm{d}r}\frac{\vec{r}}{r}$，

(4) $\nabla\times\vec{f}(\vec{r})=\frac{\vec{r}}{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{f}(\vec{r})}{\mathrm{d}r}$，

(5) $(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{r}=\vec{A}$，

(6) $\nabla(\vec{A}\cdot\vec{r})=\vec{A}$，

(7) $\nabla\cdot(\vec{A}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}})=i\vec{k}\cdot\vec{A}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$，

(8) $\nabla\times(\vec{A}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}})=i\vec{k}\times\vec{A}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$。

6. 应用高斯定理和斯托克斯定理分别证明

$$\int_V \mathrm{d}v\nabla\times\vec{f}=\oint_S \mathrm{d}\vec{s}\times\vec{f}$$

$$\int_S \mathrm{d}\vec{s}\times\nabla\phi=\oint_L \mathrm{d}\vec{l}\phi$$

7. 设S为区域V的边界面，$\vec{n}$为S的法线，且电流密度$\vec{J}$在S上的法向分量为零。

(1) 利用稳流条件 $\nabla \cdot \vec{J}=0$ 证明

$$\int_{v} \vec{J}(\vec{r}')\mathrm{d}v'=0;$$

(2) 利用电偶极矩定义 $\vec{P}(t)=\int_{v} \rho(\vec{r}',t)\vec{r}'\mathrm{d}v'$ 和电荷守恒定律 $\nabla \cdot \vec{J}+\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$ 证明

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\int_{v} \vec{J}(\vec{r}',t)\mathrm{d}v' \ 。$$

8. 若 $\vec{p}$ 和 $\vec{m}$ 是常矢量，证明：

(1) $$\nabla\left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}\right)=\frac{r^2\vec{p}-3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5}, \qquad (r\neq 0)$$

(2) $$\nabla\times\left(\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}\right)=\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r}-r^2\vec{m}}{r^5}。 \qquad (r\neq 0)$$

9. 令 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，$\vec{m}$ 为常矢量。

(1) 对球坐标求证

$$\nabla\times\left(\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}\right)=-\nabla\left(\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^3}\right); \qquad (r\neq 0)$$

(2) 对平面极坐标求证

$$\nabla\times\left(\frac{\vec{m}\times\vec{\rho}}{\rho^2}\right)=-\nabla\left(\frac{\vec{m}\cdot\vec{\rho}}{\rho^2}\right); \qquad (\rho\neq 0)$$

(3) 欲使 $\nabla\times[\vec{m}\times\vec{f}(\vec{r})]=-\nabla[\vec{m}\cdot\vec{f}(\vec{r})]$，则 $\vec{f}(\vec{r})$ 一般是什么函数？

10. 证明格林第一公式和第二公式：

$$\int_{v}(\phi\nabla^2\Psi+\nabla\Psi\cdot\nabla\phi)\,\mathrm{d}v=\oint_{s}\phi\frac{\partial\Psi}{\partial n}\mathrm{d}s,$$

$$\int_V (\phi\nabla^2\Psi - \Psi\nabla^2\phi)\,dv = \oint_s (\phi\frac{\partial\Psi}{\partial n} - \Psi\frac{\partial\phi}{\partial n})\,ds,$$

其中 ϕ、Ψ 为任意函数，V 为任意体积，S 为包围体积 V 的闭合曲面。

11. 由格林公式证明：调和函数沿闭合曲面 S 的法线的微商在该曲面上的积分为零。

12. 在球坐标中有两个方向矢量 $\vec{n}$ (θ, φ) 和 $\vec{n}'$ (θ', φ')，且 $\vec{n}$ 和 $\vec{n}'$ 之间的夹角为 α，求证

$$\cos\alpha = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi')$$

13. 证明 $\nabla^2\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r})$，并由此写出泊松方程在三维无界空间的格林函数。

14. 用将 $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ 展成勒让德多项式的方法证明：球形导体带有电荷时，球内的电场强度为零。

15. 若 $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\, e^{-i\omega t}\,d\omega$，且 $f(t)$ 为实函数，证明：

(1) $f(-\omega) = f^*(\omega)$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} |f(\omega)|^2\,d\omega$

16. 证明：一个矢量场被它的散度、旋度和边值条件（法线或切线分量）唯一确定。

17. 证明：一任意矢量场 $\vec{f}$ 可分解为非旋场（纵场）和无源场（横场）两部分之和，即

$$\vec{f} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2,$$

其中 $\vec{f}_1$ 和 $\vec{f}_2$ 各满足

$$\nabla\times\vec{f}_1 = 0, \qquad \nabla\cdot\vec{f}_2 = 0.$$

第二章　静 电 场

静电场是静止电荷所产生的、不随时间变化的电场。因此，静电现象所涉及的电荷和场的分布与时间无关。本章主要讨论静电场的基本规律和求解静电场的一些基本方法。第一节通过讨论静电场的基本性质，引入静电场的标势及其微分方程。第二节推导小范围内电荷分布所激发的电势在远处的级数展开式，讨论电多极矩的概念。第三节引入介质中微观量和宏观量的概念，用多极矩展开的方法推导介质中宏观场的方程，并导出场量的边值关系。第四节讨论静电能和静电力的概念及计算方法。后几节讨论静电场的边值问题，在对静电问题的解进行一般讨论的基础上，着重介绍求解静电场的几种最基本的解析方法——分离变量法、电像法和格林函数法。本章所介绍的静电问题的分析、处理方法，其中不少对于后几章讨论的其它电磁场也都适用。

§2.1　真空中静电场的基本方程

1. 库仑定律和电场强度

库仑定律是静电现象的基本实验定律，也是整个静电理论的基础。其具体表述是：真空中位于$\vec{r}'$的静止点电荷Q'对另一个位于$\vec{r}$的静止点电荷Q的作用力$\vec{F}$为

$$\vec{F}=\frac{QQ'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \tag{2.1.1}$$

式中$|\vec{r}-\vec{r}'|$为由Q'到Q的距离，ε_0是真空介电常数。

库仑定律揭示了静电现象的几个突出特点：彼此相对静止的两个点电荷的作用力与它们之间的距离平方成反比，即静电力的平方反比律；作用力的方向沿着这两个点电荷的连线，即静电力的有心性质；实验还证明了库仑力满足矢量迭加，即静电力也遵从一般的力的迭加原理。

上述静电力的平方反比律具有深刻的物理意义，它与光子的静止质量为零紧密联系。实验已经证实，大到宇宙空间，小到质子和中子的大小范围（10^{-13} 厘米），电的作用都保持平方反比律，高能电子—核子碰撞实验甚至还表明，在 10^{-15}cm 范围内平方反比律都是成立的，只不过由于不单纯是静电作用的简单形式，而以其它形式表现而已。

若电荷 Q 在电场$\vec{E}$中所受的力为

$$\vec{F}=Q\vec{E}, \tag{2.1.2}$$

则位于$\vec{r}'$点的静止点电荷 Q' 在$\vec{r}$ 点所产生的电场强度

$$\vec{E}=\frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}。 \tag{2.1.3}$$

对于（2.1.1）和（2.1.2）式，有两种不同的看法，一种是超距作用的观点，认为一个电荷 Q' 把作用力直接施加于另一个电荷 Q 上，当没有 Q 时就没有什么意义，只是一个电荷 Q' 存在。另一种是场的观点，认为空间放置一个电荷 Q'，在它周围即产生一个电场$\vec{E}$，至于它周围的另一电荷 Q 受到作用力那只是电场$\vec{E}$作用的一种表现，即使不放入 Q，这个电场$\vec{E}$也是客观存在。由此出发，所谓 Q' 对 Q 的作用并不是直接的，而是通过 Q' 所产生的电场来传递的。超距作用实际上意味着 Q' 通过自己产生的场作用于 Q 时不需要时间，即电荷之间相互作用的传播速度是无穷大。在静电情况下，由于电荷和场均与时间无

关，所以超距作用和场的观点不能区分，两者是等价的。在运动电荷的情况下，两电荷之间的直接超距作用与一个电荷通过自己的场对另一电荷的作用就不是一回事情。后面会看到，理论与实践证明，通过场来传递相互作用的观点是正确的，场的概念的引入对于电磁理论的发展具有重要的作用。

根据迭加原理，位于$\vec{r}_i$（$i=1, 2, \cdots n$）的一组点电荷Q_i在$\vec{r}$点所产生的电场强度为

$$\vec{E}=\sum_i \vec{E}_i=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{Q_i\ (\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}。\tag{2.1.4}$$

当电荷连续分布时，若电荷密度为$\rho\ (\vec{r}')$，则体积 V 内的电荷在$\vec{r}$点所产生的电场强度为

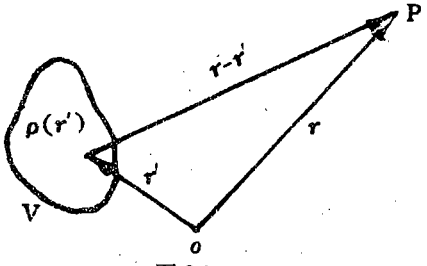


图 2.1

$$\vec{E}\ (\vec{r})\ =\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho\ (\vec{r}')\quad (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\mathrm{d}v',\tag{2.1.5}$$

式中 $\mathrm{d}v'$ 是在$\vec{r}'$处的一个三维体积元。对整个空间来讲，此积分应包括所有电荷分布的区域。

2. 静电场的散度和旋度

静电场是一个矢量场。由数学知识可知，只有矢量场的散度和旋度同时给定时，再加上边界条件，才能确定这个矢量场。因此，为了完全描述静电场，就必须讨论静电场的散度和旋度。

由于

$$\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}=-\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|},$$

(2.1.5) 式可以写为

$$\vec{E}(\vec{r})=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\int_V\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}v', \tag{2.1.6}$$

则

$$\nabla\cdot\vec{E}(\vec{r})=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\rho(\vec{r}')\nabla^2\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}v'$$

再利用 (1.2.30) 式，得

$$\nabla\cdot\vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r}), \tag{2.1.7}$$

此外由 (2.1.6) 式可得

$$\nabla\times\vec{E}(\vec{r})=0, \tag{2.1.8}$$

(2.1.7) 式和 (2.1.8) 式就是静电场的散度和旋度所满足的方程。其中散度方程与静电力是反平方律有关，而旋度方程反映了静电力的有心性质，并不依赖于反平方律。

对 (2.1.7) 式作体积分，并应用高斯公式可得

$$\oint_S\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=\frac{1}{\varepsilon_0}Q, \tag{2.1.9}$$

对 (2.1.8) 式作面积分，并应用斯托克斯公式可得

$$\oint_L\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0, \tag{2.1.10}$$

(2.1.9) 式和 (2.1.10) 式正是我们在电磁学中熟知的静电场的高斯定理和环路定理，是描述静电场的基本方程的积分形式。可见与其相对应的 (2.1.7) 式和 (2.1.8) 式，便是静电场基本方程的微分形式，由这些方程出发，可求解静电学问题。

微分方程(2.1.7)和(2.1.8)式描述电荷激发电场以及电场内部联系的规律性，反映了静电场的基本规律，表明静电场是有源无旋场。源就是电荷，电力线产生于正电荷，终止于负电荷(或无穷远)，在自由空间中电力线连续通过，不会形成封闭的环线。

(2.1.7) 式还描述电荷对电场作用的局域性质，即空间某点处场的散度只和该点的电荷密度有关，而和其它地点的电荷分布无关；电荷只直接激发其邻近的场，而远处的场则是通过场本身的内部作用传递出去的。这一方面反映了一个电荷和它邻近的电场是怎样相互作用的，另一方面又反映了空间一点上的电场和它邻近的电场又是怎样联系着的，从而有力地支持了电场传递互作用的观点。

3. 静电场的势及其微分方程

由于静电场是无旋的，所以从数学上讲，我们可以用一个标量势的梯度来表示它

$$\vec{E} = -\nabla\Phi。 \tag{2.1.11}$$

从物理上看，$\nabla \times \vec{E} = 0$ 的积分式是 $\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$，即电场力的功与路径无关，它为一个保守力。因此，电场力沿 $\mathrm{d}\vec{l}$ 对单位正电荷所作的功应当等于 $\mathrm{d}\vec{l}$ 的两端点间电势的变化，而由 (2.1.11) 式，此功可表示为

$$\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\nabla\Phi \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\mathrm{d}\Phi$$

可见，(2.1.11) 式引入的标量势 Φ 正是静电场的电势，其中负号表示若电场对电荷作正功，则电势下降。

将 (2.1.11) 式与 (2.1.6) 式进行比较，可得标势是通过下式而用电荷密度来表示的

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}v', \tag{2.1.12}$$

式中积分遍及全空间的一切电荷，而 Φ 具有一定程度的任意性，即在 (2.1.12) 式的右边可以加进一个任意常数。

标势的引入对于求解静电场带来很大的方便，前面已经提及，静电场的微分方程 (2.1.7) 和 (2.1.8) 本身就可以用来求解静电学问题，但遇到的是矢量函数的偏微分方程。我们从关系式 (2.1.11) 出发，将 E 的微分方程化为 Φ 的微分方程，就将处理矢量函数化为处理标量函数，显然使问题变得简单多了。

把 (2.1.11) 式代入 (2.1.7) 式，就得到了 Φ 满足的偏微分方程

$$\nabla^2\Phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r}) \quad 。 \tag{2.1.13}$$

这是用标势描写的静电场的基本方程，叫泊松方程，与用 $\vec{E}$ 描写的一组微分方程 (2.1.7) 和 (2.1.8) 是等价的。它既反应了静电力的有心性质，又反映了静电力的反平方律的性质及电荷激发电势的局域性质，$\nabla^2\Phi(\vec{r})$ 仅决定于同一个 $\vec{r}$ 处的电荷密度 $\rho(\vec{r})$，而不涉及其它点的电荷。

在 $\rho(\vec{r}) = 0$ 的空间区域内，标势满足

$$\nabla^2\Phi(\vec{r}) = 0, \tag{2.1.14}$$

称为拉普拉斯方程，它是泊松方程所对应的齐次方程。

由上所述，引入标势 Φ 之后，将静电场的基本方程由矢量函数 $\vec{E}$ 满足的两个一阶偏微分方程 (2.1.7) 和 (2.1.8) 化成了标量函数 Φ 满足的一个二阶偏微分方程 (2.1.13)，解方程 (2.1.13) 得到 Φ，再取其负梯度即可求出 $\vec{E}$。

需要指出，应用 δ 函数的关系式

$$\nabla^2\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}')$$

?证

即可证明（2.1.12）式是无界空间泊松方程的解。

〔例 2-1〕 试讨论如果静电力不是反平方律，则静电势的泊松方程将成什么形式？

解：设静电力不是反平方律，而是

$$\vec{F}\sim\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^{3+\varepsilon}}$$

相应的静电势即为

$$\Phi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}')\,\mathrm{d}v'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^{1+\varepsilon}}$$

用拉普拉斯算子作用，该静电势满足的微分方程成为

$$\nabla^2\Phi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\mathrm{d}v'\rho(\vec{r}')\nabla^2\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^{1+\varepsilon}}$$

下面计算 $\nabla^2\Phi(\vec{r})$ 。

为方便起见，选电荷所在点 $\vec{r}'$ 为坐标原点，先求 $\frac{1}{r^{1+\varepsilon}}$ 的表达式，考虑 $\vec{k}$ 空间的下列积分 I，并取 $\vec{r}$ 沿 Z 轴方向。

$$I=\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\,\frac{1}{k^n}\,\mathrm{d}\vec{k}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty\mathrm{d}k\frac{1}{k^{n-2}}\int_{-1}^{+1}\mathrm{d}x e^{ikrx}$$

$$=\frac{2}{(2\pi)^2}\frac{1}{r}\int_0^\infty\mathrm{d}k\cdot k^{(2-n)-1}\sin kr,$$

查积分表得

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}\sin(ax)\,\mathrm{d}x=\frac{\Gamma(\mu)}{a^\mu}-\sin\frac{\mu\pi}{2}$$

$$=\frac{\pi sec\frac{\mu\pi}{2}}{2a^{\mu}\Gamma\ (1-\mu)},\quad (a>0,\ 0<|Re\mu|<1)$$

当 $\varepsilon>0$ （令 2−n=ε），

$$I=\frac{2}{(2\pi)^2}\cdot\frac{1}{r}\frac{\Gamma\ (\varepsilon)}{r^{\varepsilon}}\sin\frac{\varepsilon\pi}{2},$$

则

$$\frac{1}{r^{1+\varepsilon}}=\frac{1}{\Gamma\ (\varepsilon)\ \sin\frac{\varepsilon\pi}{2}}\cdot\frac{1}{4\pi}\int d\vec{k}\ \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{k^{2-\varepsilon}},$$

$$\nabla^2\frac{1}{r^{1+\varepsilon}}=-\frac{1}{\Gamma\ (\varepsilon)\ \sin\frac{\varepsilon\pi}{2}}\cdot\frac{1}{4\pi}\int d\vec{k}\cdot k^{\varepsilon}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

在一般情形下，电荷所在点为$\vec{r}'$，得

$$\nabla^2\Phi\ (\vec{r})=-\frac{2\pi^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(2\pi)^{-3}}{\Gamma\ (\varepsilon)\ \sin\frac{\varepsilon\pi}{2}}$$

$$\cdot\int dv'\rho\ (\vec{r}')\int d\vec{k}\cdot k^{\varepsilon}e^{i\vec{k}\cdot\ (\vec{r}-\vec{r}')}。\qquad (2.1.15a)$$

引入

$$p\ (\vec{k})=\int dv'\rho\ (\vec{r}')\ e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$\nabla^2\Phi\ (\vec{r})=-\frac{2\pi^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\Gamma\ (\varepsilon)\ \sin\frac{\varepsilon\pi}{2}}$$

$$\cdot\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{k}\cdot k^{\varepsilon}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\rho\ (\vec{k})。\qquad (2.1.15b)$$

当 $\varepsilon<0$ 时，

$$\Gamma\ (\varepsilon)\ \sin\frac{\varepsilon\pi}{2}\to\frac{\pi}{2}\frac{sec\frac{\varepsilon\pi}{2}}{\Gamma\ (1-\varepsilon)}=\frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{i}}{\cos\frac{\varepsilon\pi}{2}\Gamma\ (1-\varepsilon)},$$

$$\frac{1}{r^{1+\varepsilon}}=\frac{2}{\pi}\cos\frac{\varepsilon\pi}{2}\Gamma\ (1-\varepsilon)\ \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}\vec{k}\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{k^{2-\varepsilon}},$$

$$\nabla^2\frac{1}{r^{1+\varepsilon}}=-\frac{2}{\pi}\frac{1}{4\pi}\cos\frac{\varepsilon\pi}{2}\Gamma\ (1-\varepsilon)\ \int \mathrm{d}\vec{k}\cdot k^{\varepsilon}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}。$$

如电荷在$\vec{r}'$点，则得

$$\nabla^2\Phi\ (\vec{r})\ =-\frac{4\pi}{4\pi\varepsilon_0}\cos\frac{\varepsilon\pi}{2}\Gamma\ (1-\varepsilon)$$

$$\cdot\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}v'\rho\ (\vec{r}')\ \int \mathrm{d}\vec{k}\cdot k^{\varepsilon}e^{i\vec{k}\cdot\ (\vec{r}-\vec{r}')}\ , \qquad (2.1.16a)$$

或

$$\nabla^2\Phi\ (\vec{r})\ =-\frac{4\pi}{4\pi\varepsilon_0}\cos\frac{\varepsilon\pi}{2}\Gamma\ (1-\varepsilon)$$

$$\cdot\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}\vec{k}\cdot k^{\varepsilon}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\rho\ (\vec{k})\ 。$$

(2.1.16b)

由 (2.1.15) 和 (2.1.16) 式可见，当$\varepsilon\neq 0$时，静电势满足的微分方程与通常的泊松方程不同，$\nabla^2\Phi\ (\vec{r})$不再仅仅由$\vec{r}$处的$\rho\ (\vec{r})$决定，而与全空间的$\rho\ (\vec{r})$都有关系，是非定域的。

当$\varepsilon>0$时，若$\varepsilon\to 0$，由于$k^{\varepsilon}\to 0$，

$$lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\Gamma\ (\varepsilon)\ \sin\frac{\varepsilon\pi}{2}}=\frac{2}{\pi},$$

(2.1.15) 式变为

$$\nabla^2\Phi(\vec{r}) = -\frac{\pi}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{2}{\pi}\int dv'\rho(\vec{r}')\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{k}e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon_0}\int dv'\rho(\vec{r}')\delta(\vec{r}-\vec{r}') = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

当 $\varepsilon<0$ 时，若 $\varepsilon\to 0$，由于

$$\Gamma(1)\to 1,\quad \cos\frac{\varepsilon\pi}{2}\to 1,$$

(2.1.16) 式也变为

$$\nabla^2\Phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r})。$$

说明当 $\varepsilon\to 0$ 时，上述静电势的微分方程又回到通常的泊松方程。

由此我们看到，泊松方程与静电力的反平方律之间有着深刻的联系。

§2.2 静电势的多极矩展开

1. 静电势的多极矩展开表达式

由上节可知，无界空间的静电势为

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dv'。$$

在许多物理问题中，电荷 $\rho(\vec{r}')$ 只分布于一个小区域内，而观测点 $\vec{r}$ 又距电荷 $\rho(\vec{r}')$ 比较远，即 $r>>r'$。在此情况下，可将上式展开，从而得出 Φ 的各级近似值。

当 $r>>r'$ 时，在直角坐标系中，$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ 可作台劳展开

$$\frac{1}{|r-\vec{r}'|}=\frac{1}{r}-x'_i\partial_i\frac{1}{r}+\frac{1}{2}x'_ix'_j\partial_i\partial_j\frac{1}{r}+\cdots,$$

$(i,\ j=1,\ 2,\ 3)$ 。 (2.2.1)

由于 $r>r'$，$r\neq0$，必有

$$\delta_{ij}\partial_i\partial_j\frac{1}{r}=\nabla^2\frac{1}{r}=0,$$

因此在上面展开式中可附加一项，得

$$\frac{1}{|r-\vec{r}'|}=\frac{1}{r}-x'_i\partial_i\frac{1}{r}+\frac{1}{6}\ (3x'_ix'_j-\delta_{ij}r'^2)\ \partial_i\partial_j\frac{1}{r}+\cdots,$$

则

$$\Phi\ (\vec{r})\ =\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{r}\int\rho\ (\vec{r}')\ \mathrm{d}v'-\partial_i\frac{1}{r}\int\rho\ (\vec{r}')\ x'_i\mathrm{d}v'\right.$$

$$\left.+\frac{1}{6}\partial_i\partial_j\frac{1}{r}\int\rho\ (\vec{r}')\ \ (3x'_ix'_j-\delta_{ij}r'^2)\ \mathrm{d}v'+\cdots\right\}$$

式中第一项积分结果显然是区域内总电荷：

$$q=\int\rho\ (\vec{r}')\ \mathrm{d}v'。 \tag{2.2.2}$$

现定义电荷体系的电偶极矩

$$p_i=\int\rho\ (\vec{r}')\ x'_i\mathrm{d}v',$$

$$\vec{p}=\int\rho\ (\vec{r})\ \ \vec{r}\mathrm{d}v; \tag{2.2.3}$$

电四极矩

$$Q_{ij}=\int\rho\ (\vec{r}')\ \ (3x'_ix'_j-\delta_{ij}r'^2)\ \mathrm{d}v',$$

$$\vec{Q}=\int\rho\ (\vec{r})\ \ (3\vec{r}\,\vec{r}-r^2\vec{I})\ \mathrm{d}v \tag{2.2.4}$$

这样，在直角坐标系中静电势的多极矩展开式就可写为

$$\partial_i \frac{1}{r} = -\frac{x_i}{r^3}$$

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q}{r} + \frac{p_i x_i}{r^3} + \frac{1}{6}Q_{ij}\partial_i\partial_j\frac{1}{r} + \cdots\right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q}{r} + \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} + \frac{1}{6}Q_{ij}\frac{3x_i x_j - \delta_{ij}r^2}{r^5} + \cdots\right\} \tag{2.2.5}$$

在球坐标系中，若任意电荷分布 $\rho(\vec{r}')$ 位于点 $\vec{r}'$ (r', θ', φ') 处，观测点为 $\vec{r}$ (r, θ, φ)，$\vec{r}$ 与 $\vec{r}'$ 的夹角是 α，当 $r > r'$ 时，

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{r'^l}{r^{l+1}}P_l(\cos\alpha)$$

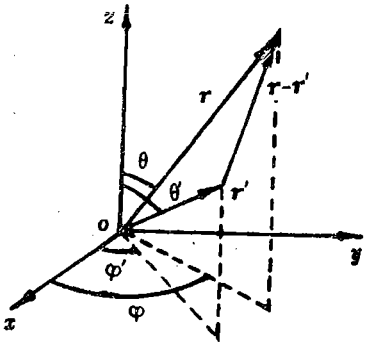


图 2.2

于是

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{r^{l+1}}\int\rho(\vec{r}')\,r'^l P_l(\cos\alpha)\,\mathrm{d}v',$$

其中

$$\cos\alpha = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi')$$

将

$$P_l(\cos\alpha) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}(\theta, \varphi)\,Y_{lm}^{*}(\theta', \varphi')$$

代入 $\Phi(\vec{r})$ 的表达式

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{1}{r^{l+1}}Y_{lm}(\theta, \varphi)\int\rho(\vec{r}')\,r'^l Y_{lm}^{*}(\theta', \varphi')\,\mathrm{d}v'。$$

引入

$$Q_{lm}=\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\int\rho(\vec{r}')\,r'^{l}Y_{lm}^{*}(\theta',\varphi')\,\mathrm{d}v', \tag{2.2.6}$$

则

$$\Phi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\frac{1}{r^{l+1}}Q_{lm}Y_{lm}(\theta,\varphi)\ 。 \tag{2.2.7}$$

这就是球坐标系中静电势的多极矩展开式，其中 Q_{lm} 由 (2.2.6) 式定义，称为 m、l 阶电极矩。$l=0$ 对应总电荷，叫单极项；$l=1$ 叫偶极项；$l=2$ 叫四极项，依此类推。如果把前几个多极矩用笛卡儿坐标表示出来，我们就会看到 Q_{lm} 是以直角坐标表示的相应多极矩的线性组合。

2. 电多极矩展开的物理意义

我们从直角坐标系中的表达式 (2.2.5) 出发，讨论静电势的多极矩展开所包含的物理内容。

展开式第一项

$$\Phi^{(0)}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}, \tag{2.2.8}$$

正是位于原点的点电荷 q 所产生的电势，因此初级近似忽略了 $\vec{r}$ 与 $\vec{r}-\vec{r}'$ 的区别，相当于将所有电荷都集中于原点。

展开式第二项

$$\Phi^{(1)}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}, \tag{2.2.9}$$

是位于原点的电偶极矩 $\vec{p}$ 所产生的电势。由 $\vec{p}$ 的定义式可知，如果 $\rho(\vec{r})=\rho(-\vec{r})$，即电荷分布具有对原点反射的对称性，则有

$$\int \rho\ (\vec{r})\ \vec{r}\mathrm{d}v = -\int \rho\ (\vec{r})\ \vec{r}\mathrm{d}v = 0,$$

此时不存在电偶极矩，象球对称分布、椭球对称分布的电荷体系都属于这种情形。

对于一个点电荷 q，当原点选在 q 所在点时，则电偶极矩为零。当原点选在另外的任一空间点时（如图 2.3），

$$\rho\ (\vec{r}) = q\delta\ (\vec{r} - \vec{a}),$$

$$\vec{p} = \int q\delta\ (\vec{r} - \vec{a})\ \mathrm{d}v = q\vec{a},$$

则电偶极矩不为零。

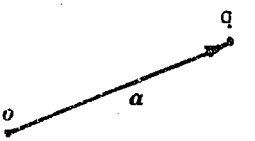


图 2.3

展开式第三项

$$\Phi^{(2)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}Q_{ij}\partial_i\partial_j\frac{1}{r}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}Q_{ij}\frac{3x_ix_j - \delta_{ij}r^2}{r^5}, \tag{2.2.10}$$

是位于原点的电四极矩 Q_{ij} 所产生的电势。由 Q_{ij} 的定义式可见，电四极矩是一个对称、无迹张量：

$$Q_{ij} = Q_{ji}, \tag{2.2.11}$$

$$Q_{ii} = Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} = 0,$$

因而其独立分量数为 5 个。

当电荷分布具有球对称性时，则

$$\int x_1^2\rho\mathrm{d}v = \int x_2^2\rho\mathrm{d}v = \int x_3^2\rho\mathrm{d}v = \frac{1}{3}\int r^2\rho\mathrm{d}v,$$

$$\int x_ix_j\rho\mathrm{d}v = 0 \qquad (i \neq j),$$

偶极

所以，$Q_{ij}=0$，此时不存在电四极矩。事实上球对称电荷分布没有各级电多极矩。

应当注意，当 $\rho=$常数时，如果坐标原点选定，则电四极矩完全决定于电荷分布区域的形状。例如以球心为原点，对球形区域电四极矩则为零，对椭球形状则不为零。

电势的多极矩展开式中，电四极矩项以后是八极矩和更高阶的多极矩，实际上很少用到，这里不再讨论。

由上所述，电多极矩已经对空间积分，不再是空间坐标的函数，当然可以是时间的函数，一般不仅与电荷密度及电荷分布区域的形状有关，而且与所在原点的位置即展开点的位置有关。

电势展开式

$$\Phi=\Phi^{(0)}+\Phi^{(1)}+\Phi^{(2)}+\cdots$$

表明，小区域内电荷体系在远处所产生的电势，可以表示为一系列位于原点的多极子所产生的电势的迭加，换言之，对远处的观测点来说，小区域内的电荷分布与位于原点的一系列多极子等效。单极项 $\Phi^{(0)}$ 是将电荷体系集中于原点而看作是一个点电荷，此项集中所引起的误差为一连续的偶极分布，增加的偶极项 $\Phi^{(1)}$ 正是对这项误差的修正。同样，将偶极分布集中为一个位于原点的偶极子所引起的误差为一个四极分布，展开式中增加的四极项 $\Phi^{(2)}$ 正是对此较高级误差的进一步的修正，其余类推。

在处理小区域内电荷分布所产生的电势时，作为零级近似，可以将整个电荷体系看作一个点电荷，而不考虑区域内部电荷分布的细微差别。但当体系的总电荷为零，或需要考虑电荷内部分布的效应时，作为一级近似，必须计及体系的电偶极矩，即把体系看作是一个点电荷和一个电偶极子的迭加。类似地，在体系的电偶极矩为零，或需要更高级的近似时，就要考

虑更高阶的电多极子的贡献。不难看出，后一级近似比前一级近似小一个因子$\frac{l}{r}$，l为电荷区域V的线度，在$\frac{l}{r}<<1$时，只须取前一、二项就够了。通常讨论小区域电荷体系在远处的电势时，此条件总满足，因而只考虑到电四极矩即可。

〔例 2-2〕 点电荷+q 和−q 相距为 a，设原点在其连线中点，求电偶极矩。

解：由定义式

$$\vec{p}=\int\rho\ (\vec{r})\ \vec{r}\mathrm{d}v,$$

这里

$$\rho\ (\vec{r})\ =q\delta\ (\vec{r}-\frac{\vec{a}}{2})\ -q\delta\ (\vec{r}+\frac{\vec{a}}{2})\ ,$$

所以

$$\vec{p}=q\frac{\vec{a}}{2}-q\ (-\frac{\vec{a}}{2})\ =q\vec{a}。$$

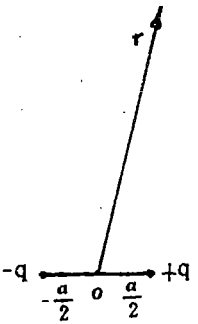


图 2.4

如果将原点取在−q 处，则

$$\rho\ (\vec{r})\ =q\delta\ (\vec{r}-\vec{a})\ -q\delta\ (\vec{r})\ ,$$

$$\vec{p}=q\vec{a}。\qquad(2.2.12)$$

〔例 2-3〕 电荷 q，−2q，q 沿 Z 轴排列，彼此间距离为 a（线四极子）。若原点取在−2q 上，求离此电荷系统很远处的电势。

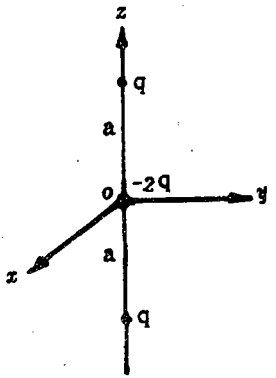


图 2.5

解：电荷系统的电荷密度

$$\rho\ (\vec{r})\ =q\delta\ (x)\ \delta\ (y)\ \delta\ (z-a)$$
$$+\ q\delta\ (x)\ \delta\ (y)\ \delta\ (z+a)$$

$$-2q\delta\ (x)\ \delta\ (y)\ \delta\ (z)\ ,$$

电总荷 $q=0$,

电偶极矩 $\vec{p}=\int\rho\ (\vec{r})\ \vec{r}\mathrm{d}v=0$。

电四极矩 $Q_{ij}=\int\rho\ (r)\ (3x_ix_j-\delta_{ij}r^2)\ \mathrm{d}v$,

$Q_{ij}=0$, 当$i\neq j$,

$$Q_{11}=\int\rho\ (3x^2-r^2)\ \mathrm{d}v=\int\rho\ (2x^2-y^2-z^2)\ \mathrm{d}v$$

$$=-2a^2q, \tag{2.2.13}$$

$$Q_{22}=\int\rho\ (3y^2-r^2)\ \mathrm{d}v=-2a^2q,$$

$$Q_{33}=-\ (Q_{11}+Q_{22})\ =4a^2q。$$

由 (2.2.10) 式, 在r>>a处的电势为

$$\Phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}Q_{ij}\frac{3x_ix_j-\delta_{ij}r^2}{r^5}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\left\{Q_{11}\frac{3x^2-r^2}{r^5}+Q_{22}\frac{3y^2-r^2}{r^5}+Q_{33}\frac{3z^2-r^2}{r^5}\right\}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a^2q}{r^5}\ (3z^2-r^2)\ =\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a^2q}{r^3}\ (3\cos^2\theta-1)$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a^2q}{r^3}P_2\ (\cos\theta)\ 。 \tag{2.2.14}$$

〔**例 2-4**〕 电荷±q位于一正方形的四个角顶上，相邻电荷具有不同符号（面四极子）。若坐标原点取在正方形的中心，x轴与y轴分别在正方形的两对角线上，每个电荷到原点的距离均为a（如图2.6所示）。求离此电荷系统很远处的电势。

解: 电荷系统的电势

$$\Phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{a}_i|}$$

$i=1,\ 2,\ 3,\ 4;\ q_1=-q,$

$q_2=+q,\ q_3=-q,\ q_4=+q。$

将因子$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}_i|}$按 P_l 展开

$$\Phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q_i\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a_i^l}{r^{l+1}}P_l\ (\cos\alpha_i)$$

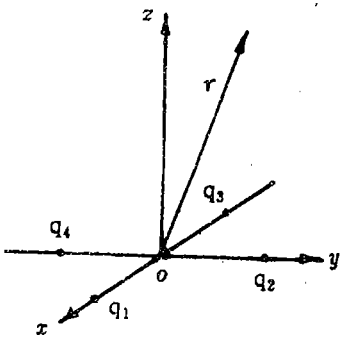


图 2.6

其中

$$\cos\alpha_i=\cos\theta\cos\theta'_i+\sin\theta\sin\theta'_i\cos\ (\varphi-\varphi'_i)$$

因

$$\theta'_i=\frac{\pi}{2},\ \varphi'_1=0,\ \varphi'_2=\frac{\pi}{2},\ \varphi'_3=\pi,\ \varphi'_4=\frac{3\pi}{2}。$$

所以

$$\cos\alpha_1=\sin\theta\cos\varphi\ ,\quad \cos\alpha_2=\sin\theta\sin\varphi,$$

$$\cos\alpha_3=-\sin\theta\cos\varphi\ ,\quad \cos\alpha_4=-\sin\theta\sin\varphi。$$

代入 Φ 的表达式，并因 $r>>a$，展开式只取到含 a^2/r^2 的项，即只取到 P_2，于是得

$$\Phi\approx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\ \left(-q\frac{a^2}{r^3}3\sin^2\theta\cos^2\varphi+q\frac{a^2}{r^3}3\sin^2\theta\sin^2\varphi\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3qa^2}{r^3}\sin^2\theta\ (-\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\ 。\qquad (2.2.15)$$

〔例 2-5〕 半轴为 a，b 和 c 的椭球体内均匀带电，总电量为 Q，求它的电偶极矩，四极矩以及准确到四极矩的电势。讨论回转椭球（a=b）和球体（a=b=c）的特殊情况。

解：应用广义球坐标

$$x=ar\sin\theta\cos\varphi\ ,\quad y=br\sin\theta\sin\varphi\ ,\quad z=cr\cos\theta,$$

体积元

$$\mathrm{d}v=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\left|\frac{\partial\ (x,\ y,\ z)}{\partial\ (r,\ \theta,\ \varphi)}\right|\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$=\begin{vmatrix} a\sin\theta\cos\varphi & ar\cos\theta\cos\varphi & -ar\sin\theta\sin\varphi \\ b\sin\theta\cos\varphi & br\cos\theta\sin\varphi & ar\sin\theta\cos\varphi \\ c\cos\theta & -cr\sin\theta & 0 \end{vmatrix}\cdot\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$=abcr^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi。$$

椭球体积

$$V=\int\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{1}abcr^2\mathrm{d}r=\frac{4\pi}{3}abc。$$

电荷密度

$$\rho=\frac{Q}{V}=\frac{3Q}{4\pi abc}。$$

电偶极矩

$$\vec{p}=\int\rho\ (\vec{r})\ \vec{r}\mathrm{d}v=\rho\left[\vec{e}_x\int x\mathrm{d}v+\vec{e}_y\int y\mathrm{d}v+\vec{e}_z\int z\mathrm{d}v\right],$$

式中三项积分均等于零，可得

$$\vec{p}=0。$$

电四极矩

$$Q_{ij}=\int\rho\ (\vec{r})\quad (3x_ix_j-\delta_{ij}r^2)\ \mathrm{d}v,$$

$$Q_{11}=\rho\int\ (3x^2-r^2)\ \mathrm{d}v=\rho\int\ (2x^2-y^2-z^2)\ \mathrm{d}v,$$

$$Q^{22}=\rho\int\ (3y^2-r^2)\ \mathrm{d}v=\rho\int\ (2y^2-x^2-z^2)\ \mathrm{d}v,$$

$$Q_{33}=-\ (Q_{11}+Q_{22})\ ,$$

$$Q_{12}=Q_{21}=\rho\int 3xy\mathrm{d}v=3\rho\int xy\mathrm{d}v,$$

$$Q_{23}=Q_{32}=3\rho\int yz\mathrm{d}v,$$

$$Q_{31}=Q_{13}=3\rho\int xz\mathrm{d}v。$$

积分

$$\int x^2\mathrm{d}v=\frac{a^2}{5}V,\quad \int y^2\mathrm{d}v=\frac{b^2}{5}V,$$

$$\int z^2\mathrm{d}v=\frac{c^2}{5}V,\quad \int xy\mathrm{d}v=\int yz\mathrm{d}v=\int xz\mathrm{d}v=0,$$

则

$$\begin{aligned}
&Q_{ij}=0\ \ (i\neq j)\ ,\\
&Q_{11}=\frac{Q}{5}\ \ (2a^2-b^2-c^2)\ ,\\
&Q_{22}=\frac{Q}{5}\ \ (2b^2-a^2-c^2)\ ,\\
&Q_{33}=\frac{Q}{5}\ \ (2c^2-a^2-b^2)\ 。
\end{aligned}\tag{2.2.16}$$

所以

$$\begin{aligned}
\Phi&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{r}+\frac{1}{6}Q_{ij}\frac{3x_ix_j-\delta_{ij}r^2}{r^5}\right]\\
&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{Q}{r}+\frac{Q}{10r^5}\left[a^2\ (3x^2-r^2)+b^2\ (3y^2-r^2)\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+c^2\ (3z^2-r^2)\right]\right\}。
\end{aligned}\tag{2.2.17}$$

对回转椭球：a＝b，则

$$Q_{11}=Q_{22}=\frac{Q}{5}\ (a^2-c^2)\ ,$$

$$Q_{33}=\frac{2Q}{5}\ (c^2-a^2)\ , \tag{2.2.18}$$

$$\Phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{r}+Q\frac{c^2-a^2}{5}\frac{P_2\ (\cos\theta)}{r^3}\right]。 \tag{2.2.19}$$

对球体，a＝b＝c，则

$$Q_{ij}=0,$$

$$\Phi=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}。 \tag{2.2.20}$$

由所得结果可以看出，球对称电荷分布没有各级电多极矩。电荷分布偏离球对称性，就会出现电四极矩。因此，测量远场的四极势项，就可以对电荷分布形状作出一定的推论。

〔例 2-6〕　二维电荷分布可用与坐标 z 无关的密度$\sigma\ (\vec{\rho})$来表征，如果在 xy 平面上的有限区域 S 内 $\sigma\ (\vec{\rho})\neq 0$，则可将电荷分布区域以外的电势 Φ 展开成多极子的形式（二维多极子）。求这个展开式。

解：由（1.3.23）式，二维电势的一般表达式为

$$\Phi\ (\vec{\rho})\ =-\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\int\sigma\ (\vec{\rho}')\ \ln|\rho-\vec{\rho}'|\mathrm{d}s', \tag{1.3.23}$$

其中$\vec{\rho}'$为源点矢径，$\vec{\rho}$为观测点矢径。再利用（1.3.12）式，有

$$\ln|\vec{\rho}-\vec{\rho}'|=\ln\rho-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^n\frac{\cos n\alpha}{n},$$

用 φ 和 φ' 分别表示$\vec{\rho}$和$\vec{\rho}'$在平面极坐标中的极角，则

$$\cos n\alpha=\cos n\ (\varphi-\varphi')$$

$$=\cos n\varphi\cos n\varphi' + \sin n\varphi\sin n\varphi'。$$

二维电势可写成

$$\Phi(\vec{\rho}) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\int\sigma(\vec{\rho}')\left[\ln\rho - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^n \frac{\cos n\varphi\cos n\varphi' + \sin n\varphi\sin n\varphi'}{n}\right]\mathrm{d}s'。 \tag{2.2.21}$$

令

$$\tau = \int\sigma(\vec{\rho}')\,\mathrm{d}s', \tag{2.2.22}$$

$$A_n = \int\sigma(\vec{\rho}')\,\rho'^n\cos n\varphi'\mathrm{d}s', \qquad B_n = \int\sigma(\vec{\rho}')\,\rho'^n\sin n\varphi'\mathrm{d}s', \tag{2.2.23}$$

得到电势的二维多极子展开式为

$$\Phi(\vec{\rho}) = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\rho + \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi}{n\rho^n}, \tag{2.2.24}$$

式中 τ 为电荷分布区域单位长度上的总电荷，A_n 和 B_n 是二维 n 级多极矩。特别是当 $n=1$ 时，可以得到二维偶极子的电势

$$\Phi = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{\rho}}{\rho^2}, \tag{2.2.25}$$

其中

$$\vec{p} = \int\sigma(\vec{\rho}')\,\vec{\rho}'\mathrm{d}s', \tag{2.2.26}$$

是分布在单位长度上的电偶极矩。

§2.3 电介质中静电场的基本方程和边值关系

1. 微观场和宏观场

以上我们讨论的是真空中的静电场，即没有其它有质媒质存在时的情况。由于空气是极稀薄的，以致当忽略其介电性质时不会引起明显的误差，所以前面所得结果对空气介质也是适用的。可是，许多静电学问题涉及有质媒质中的电荷和电场。如果把一个电场加到由大量原子或分子构成的媒质上，那么每个分子中的束缚电荷将对外场起反应，并将发生扰动。因此，在介质存在情况下，必须从微观电荷和电场出发，考虑有质媒质对电场的反应。

我们已经得到了真空中静电场的基本方程 (2.1.7) 和 (2.1.8) 式，对于象分子范围的大小它们是否也适用呢？原则上讲，对这样的微观范围，方程也应当成立。但实际上不能这样作。其原因是：第一，此时需要知道大量数目的分子电荷的位置。第二，当观测点位置那怕是原子、分子线度的变化时，按求势的关系式计算将会引起很大的差异。

所幸我们在宏观范围所观测到的电场是这些微观范围的电场的平均值。求平均的区域是满足下列两个要求的微观大、宏观小的体积元△V：其一，在微观看起来△V 很大，应包含大量媒质分子，它的线度比起媒质分子间的距离来是非常大的，因而比起媒质和场的微观不均匀性来也是非常大的。其二，在宏观看起来△V 却是很小，它的线度比起场和媒质的宏观不均匀性来应该是非常小的，换句话说，物理量在△V 中的平均值可视为恒定，并且△V 中的平均值和与它相邻的同类体积元中的平均值应相差甚微。一般情况下，这两个条件总是可以同时满足的。

今后，我们总是将宏观场理解为微观场在微观大、宏观小的体积元 $\triangle V$ 内的平均值。即任意物理量（标量或矢量）ψ（例如 Φ，$\vec{E}$，ρ 等等）在空间某点 p 的宏观值，将理解为这些量的微观值在包围 p 点的体积元 $\triangle V$ 内的平均值：

$$\psi_{宏观} = <\psi_{微观}> = \frac{1}{\triangle V}\int_{\triangle V}\psi_{微观}\,\mathrm{d}v。 \tag{2.3.1}$$

例如，所观测的电场强度及相应的电荷密度正是

$$\vec{E}\ (\vec{r}) = <\vec{\varepsilon}\ (\vec{r})> = \frac{1}{\triangle V}\int_{\triangle V}\varepsilon\ (\vec{r}+\vec{\zeta})\ \mathrm{d}^3\zeta, \tag{2.3.2}$$

$$\rho\ (\vec{r}) = <\eta\ (\vec{r})> = \frac{1}{\triangle V}\int_{\triangle V}\eta\ (\vec{r}+\vec{\zeta})\ \mathrm{d}^3\zeta, \tag{2.3.3}$$

式中 $\vec{\varepsilon}$，η 各为微观电场强度和微观电荷密度。

2. 介质中静电场的基本方程

我们从微观的观点出发，推导介质存在时静电场的宏观方程式。假定分子范围的微观静电现象所遵循的方程组仍与上述真空中的形式一样：

$$\nabla\cdot\vec{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon_0}\eta, \tag{2.3.4}$$

$$\nabla\times\vec{\varepsilon} = 0。 \tag{2.3.5}$$

这意味着微观电场仍可用微观电势 φ 来表述：

$$\vec{\varepsilon} = -\nabla\varphi。 \tag{2.3.6}$$

电场电荷的微观量与宏观量的关系已由（2.3.2）和（2.3.3）式给出，在△V 内可能存在剩余的（未被中和掉的）自由电荷，以及由于极化形成的分子束缚电荷，以下主要讨论束缚电荷 η' 的影响。

设$\vec{r}$为观测点的矢径，$\vec{r}'$存在区域为分子范围，$\vec{r}_j$是指向第j个分子的矢径，则第j个分子在观测点产生的微观电场为

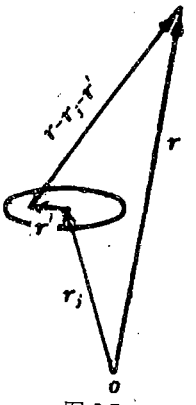


图 2.7

$$\vec{\varepsilon}_j\ (\vec{r}) = -\nabla\varphi_j$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\int_{分子}\eta'_j\ (\vec{r}')\ \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_j-\vec{r}'|}\mathrm{d}^3x',$$

因$|\vec{r}'|<<|\vec{r}-\vec{r}_j|$，可以将$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_j-\vec{r}'|}$作展开再代入上式

$$\vec{\varepsilon}_j\ (\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla$$

$$\cdot\left[\frac{\int\eta'_j\ (\vec{r}')\ \mathrm{d}^3x'}{|\vec{r}-\vec{r}_j|}+\nabla_j\ \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_j|}\cdot\int\vec{r}'\eta'_j\ (\vec{r}')\ \mathrm{d}^3x'+\cdots\right]$$

式中

$\int\eta'_j\ (\vec{r}')\ \mathrm{d}^3x'=e'_j$是第$j$个分子的电荷，

$\int\vec{r}'\eta'_j\ (\vec{r}')\ \mathrm{d}^3x'=\vec{p}_j$是第$j$个分子的电偶极矩，

后面是电四极矩及更高阶多极矩对应的项，则

$$\vec{\varepsilon}_j\ (\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\left[\frac{e'_j}{|\vec{r}-\vec{r}_j|} + \nabla_j\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_j|}\cdot\vec{p}_j + \cdots\right]$$

将所有分子的贡献加起来就是微观电场强度

$$\vec{\varepsilon}\ (\vec{r}) = \sum_j \vec{\varepsilon}_j\ (\vec{r})$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\left[\sum_j\frac{e'_j}{|\vec{r}-\vec{r}_j|} + \sum_j\nabla_j\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_j|}\cdot\vec{p}_j + \cdots\right]。$$

引入摩尔电荷密度和摩尔电偶极矩

$$\rho'_{mol}\ (\vec{r}) = \sum_j e'_j\delta\ (\vec{r}-\vec{r}_j)\ ,$$

$$\vec{\pi}_{mol}\ (\vec{r}) = \sum_j \vec{p}_j\delta\ (\vec{r}-\vec{r}_j)\ ,$$

得

$$\vec{\varepsilon}\ (\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\int d^3x''$$

$$\left[\frac{\rho'_{mol}\ (\vec{r}'')}{|\vec{r}-\vec{r}''|} + \vec{\pi}_{mol}\ (\vec{r}'')\cdot\nabla''\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}''|} + \cdots\right]。(2.3.7)$$

对体积元△V 内分子所产生的电场求平均，利用 (2.3.2) 式宏观电场为

$$<\vec{\varepsilon}\ (\vec{r})> = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla$$

$$\left\{\frac{1}{\triangle V}\int_{\triangle V} d^3\zeta\int d^3x''\left[\frac{\rho'_{mol}\ (\vec{r}'')}{|\vec{r}+\vec{\zeta}-\vec{r}''|}\right.\right.$$

$$\left.\left. + \vec{\pi}_{mol}\ (\vec{r}'')\cdot\nabla''\frac{1}{|\vec{r}+\vec{\zeta}-\vec{r}''|} + \cdots\right]\right\}。$$

作平移 $\vec{r}''=\vec{r}''+\vec{\zeta}$，上式变为

$$<\vec{\varepsilon}\ (\vec{r})\ > = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla$$

$$\left\{\frac{1}{\triangle V}\int_{\triangle V} \mathrm{d}^3\zeta \int \mathrm{d}^3 x'\right.$$

$$\left.\left[\frac{\rho'_{mol}\ (\vec{r}'+\vec{\zeta})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \vec{\pi}_{mol}\ (\vec{r}'+\vec{\zeta})\ \cdot \nabla' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \cdots\right]\right\}。$$

如用 $N\ (\vec{r}')$ 表示 $\vec{r}'$ 点附近宏观单位体积内分子数，$<e'_{mol}\ (\vec{r}')\ >$ 表示 $\vec{r}'$ 点附近 $\triangle V$ 内的分子平均电荷，$<\vec{p}_{mol}\ (\vec{r}')\ >$ 表示 $\vec{r}'$ 点附近 $\triangle V$ 内的分子平均电偶极矩，则 $N<e'_{mol}>$ 即为宏观单位体积内的平均分子电荷，$N<\vec{p}_{mol}>$ 即为宏观单位体积内的平均分子电偶极矩。于是可引入宏观电荷密度

$$\frac{1}{\triangle V}\int_{\triangle V} \mathrm{d}^3\xi \rho'_{mol}\ (\vec{r}'+\vec{\xi}) = \frac{1}{\triangle V}\sum e'_j$$

$$= N\ (\vec{r}')\ <e'_{mol}\ (\vec{r}')\ > = \rho'\ (\vec{r}')\ ,$$

宏观电极化强度

$$\frac{1}{\triangle V}\int_{\triangle V} \mathrm{d}^3\xi \vec{\pi}_{mol}\ (\vec{r}'+\vec{\xi}) = \frac{1}{\triangle V}\sum \vec{p}_j$$

$$= N\ (\vec{r}')\ <\vec{p}_{mol}\ (\vec{r}')\ > = \vec{P}\ (\vec{r}')\ ,$$

则微观电场强度的平均值

$$\vec{E}\ (\vec{r}) = <\vec{\varepsilon}\ (\vec{r})\ > = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\int \mathrm{d}^3 x' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\rho'\ (\vec{r}')$$

$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\int \mathrm{d}^3 x' \vec{P}\ (\vec{r}')\ \cdot \nabla' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \cdots。 \qquad (2.3.8)$$

由此可见，就求平均得到的结果来说，可以把分子看作位于分子中一固定点上的多极子的集合。当然，从微观的角度来看，分子电荷分布的细节是很重要的，但是就其效果来说，对于宏观现象可以用多极子的和来代替。

电四极矩及更高的多极矩对电场的贡献很小，我们可以忽略不计。对（2.3.8）式取散度，并利用关系式

$$\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -4\pi\delta\ (\vec{r}-\vec{r}')$$

及 δ 函数的性质，可得

$$\nabla \cdot \left[\varepsilon_0 \vec{E}\ (\vec{r}) + \vec{P}\ (\vec{r})\right] = \rho'\ (\vec{r})\ 。 \tag{2.3.9}$$

注意上式是仅仅考虑分子束缚电荷的影响而得到的结果。如果我们讨论的介质中存在“自由”电荷，这些电荷不是局限在任何特定分子的周围。那么上式右端应为同时包含平均分子束缚电荷和自由电荷贡献的宏观电荷密度 ρ:

$$\rho = \rho' + \rho_f,$$

通常分子是中性的，平均分子束缚电荷等于零，从而 ρ 就是 ρ_f，则

$$\nabla \cdot\ (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_f, \tag{2.3.10}$$

定义电位移矢量

$$\vec{D} = \varepsilon_0 E + \vec{P}, \tag{2.3.11}$$

(2.3.10) 式便可写为

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f。 \tag{2.3.12}$$

此外，因标量场的梯度必为无旋场，故由 (2.3.8) 式可得

$$\nabla \times \vec{E} = 0。 \tag{2.3.13}$$

(2.3.12) 和 (2.3.13) 式就是介质存在时静电场的微分方程式。

由 (2.3.10) 式，总电场$\vec{E}$的散度可写成

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_f - \nabla \cdot \vec{P}) ,$$

与真空中电场的散度 $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ 作比较，可见产生场的有效电荷密度中出现了 $\vec{P}$ 的散度。对此可以理解为，虽然介质的平均分子束缚电荷为零，但是如果极化是非均匀的，那么极化随空间的变化就会使离开一给定的小体积的分子电荷可能比进入该体积的多。这样，在任意的小体积内电荷可能有净增加或净减少，其极化（束缚）电荷密度应为

$$\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}。 \tag{2.3.14}$$

由于在基本方程中引入了辅助量 $\vec{D}$，我们必须给出 $\vec{E}$ 和 $\vec{D}$ 的实验关系才能解出电场强度 $\vec{E}$。实验指出，各种介质材料有不同的介电性能，$\vec{D}$ 和 $\vec{E}$ 的关系也有多种形式。

在铁电体以外的介质中，对于弱场，外电场感生的电极化强度其大小与外场成正比。我们说，此类介质对外场的反应是线性的，或者叫做线性介质。这种情况下，$\vec{P}$ 和 $\vec{E}$，$\vec{D}$ 和 $\vec{E}$ 的方向不一定相同，$\vec{P}$ 与 $\vec{E}$、$\vec{D}$ 与 $\vec{E}$ 均由较普遍的线性关系联系：

$$P_i = \varepsilon_0 \chi_{ij} E_j , \tag{2.3.15}$$

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j , \tag{2.3.16}$$

χ_{ij} 叫电极化率张量，ε_{ij} 叫介电张量。

对于简单的材料，线性反应在空间上往往是各向同性的，即称各向同性介质。这时，χ_{ij} 和 ε_{ij} 都是对角矩阵，各有三个相等的元素。从物理上讲 $\vec{P}$ 和 $\vec{E}$ 同向，且有一个与方向无关的比例系数

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}, \tag{2.3.17}$$

常数 χ_e 叫做介质的电极化率。将此式代入（2.3.11）式，便得电位移 $\vec{D}$ 与 $\vec{E}$ 成正比

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}, \tag{2.3.18}$$

其中

$$\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0\ ,\quad \varepsilon_r=1+\chi_e, \tag{2.3.19}$$

ε 称为介质的介电常数，ε_r 为相对介电常数。

如果电介质不仅是各向同性的，而且是均匀的，则 ε 是与位置无关的常数。此时介质中的场方程即可化简，（2.3.12）式可写成

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho_f}{\varepsilon}。 \tag{2.3.20}$$

而由（2.3.13）式仍可引入标势 Φ:

$$\vec{E}=-\nabla\Phi, \tag{2.3.21}$$

从而得到 Φ 满足的泊松方程

$$\nabla^2\Phi=-\frac{\rho_f}{\varepsilon}。 \tag{2.3.22}$$

可见在各向同性均匀介质中，所有问题都转化为类似真空中那样的静电问题，只是给定电荷产生的电场要减弱为原来的 $\frac{1}{\varepsilon_r}$。这种减弱说明分子极化产生的场与给定电荷产生的场反向。

需要指出，除上述线性介质而外，属于铁电体一类的电介质，$\vec{P}$ 和 $\vec{E}$ 具有复杂的非线性关系。并且，对弱场显示出线性反应的材料，在足够高的场强下，最后也会显示出非线性特征，线性关系（2.3.17）式要加以修正，例如

$$D_i=\varepsilon_{ij}E_j+\varepsilon_{ijk}E_jE_k+\cdots, \tag{2.3.23}$$

此式在非线性光学中有重要的应用。

3. 静电场的边值关系

描述静电场基本规律的微分方程（2.3.12）和（2.3.13）可以应用于任何连续介质内部。但在实际中通常遇到有介质交界面的情况（包括介质的表面，因表面可看作是介质与真空的界面）。在这种界面上，介质的性质有一突变，一般会出现电荷分布，此面电荷又产生附加的电场，从而使场量也发生突变。因此对于这些面上的各点，场方程的微分形式已失去意义，必须考虑用新的形式加以代替，这就是我们要讨论的场量的边值关系。而积分形式的场方程可以应用于任意不连续分布的电荷所产生的场，即积分形式的场方程在介质交界面上仍然成立，所以研究边值关系的基础是积分形式的场的基本方程。

由（2.3.12）和（2.3.13）式容易得到，场方程的积分形式为

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = Q_f, \qquad (2.3.24)$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0。 \qquad (2.3.25)$$

平行于介质交界面作一无限小的扁平柱体，并使它横跨界面。对此柱体运用方程式(2.3.24)，在柱体厚度趋于零的极限下，其侧面对积分没有贡献，设底面积为△S，则

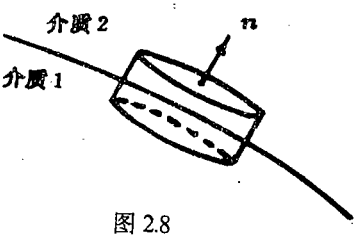


图 2.8

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = (\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\cdot \vec{n}\triangle S,$$

其中界面的法线矢量$\vec{n}$由介质 1 指向介质 2。同时，（2.3.24）式右边的 Q_f 可只计面电荷密度 σ_f 的贡献，其值等于 $\sigma_f\triangle S$。于是得

$$\vec{n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\sigma_f。 \tag{2.3.26}$$

按类似方法，作一无限小窄长回线，使其两条长边分别在界面两侧且与界面平行，并使回线所围面积 $\triangle\vec{S}$ 的法线 $\vec{n}'$ 与界面相切。对此回线运用方程式 (2.3.25)；一对短边对积分的贡献忽略不计，设一对长边的长度均为 $\triangle L$，则

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=(\vec{n}\times\vec{n})\cdot(\vec{E}_2-\vec{E}_1)\triangle L,$$

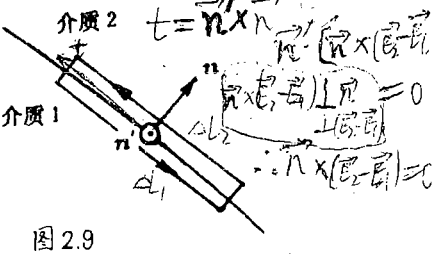


图 2.9

所以

$$\vec{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0。$$

$$\vec{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{\alpha}_f \tag{2.3.27}$$

(2.3.26) 和 (2.3.27) 就是介质中静电场的边值关系，说明 $\vec{D}$ 的法线分量在界面上没有自由面电荷时是连续的，否则将跃变 σ_f，而 $\vec{E}$ 的切线分量则永远是连续的。

如用标势 Φ 表示上述边值关系，(2.3.27) 式可以等价地表示为

$$\Phi_1=\Phi_2。 \tag{2.3.28}$$

利用 (2.3.18) 和 (2.3.21) 式，(2.3.26) 式可以化为

$$\varepsilon_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial n}-\varepsilon_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial n}=-\sigma_f, \tag{2.3.29}$$

在导体存在时，由于在静电条件下导体内部电场为零，所以导体表面的边值关系是

$$E_t=0, \tag{2.3.30}$$

$$D_n=\sigma_f; \tag{2.3.31}$$

或

$$\Phi = 常数, \tag{2.3.32}$$

$$\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial n} = -\sigma_f。 \tag{2.3.33}$$

由上所述，边值关系实际上是积分形式的场方程在介质界面上的等效表示。因此，它同介质中场的基本方程组相当，是场的基本方程组在介质界面上的表现形式，对于解决有介质分界面的实际问题是十分重要的。

此外，由（2.3.14）式的积分形式，也可得到两种介质（极化强度分别为$\vec{P}_1$和$\vec{P}_2$）交界面上束缚电荷密度为

$$\sigma_p = \vec{n}\cdot(\vec{P}_1 - \vec{P}_2)， \tag{2.3.34}$$

将（2.3.26）和（2.3.34）式相加，并利用（2.3.11）式，可得界面上总电荷密度σ与E_n的跃变相关

$$\vec{n}\cdot\varepsilon_0(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \sigma_f + \sigma_p = \sigma。 \tag{2.3.35}$$

〔例 2－7〕　证明均匀介质内部的体极化电荷密度ρ_P总是等于该点体自由电荷密度ρ_f的$-(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})$倍。

证：由定义

$$\rho_P = -\nabla\cdot\vec{P}，\quad \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E},$$

对于均匀介质$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$且$\varepsilon$是常数，则

$$\rho_P = -\nabla\cdot(\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E} = -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon}\nabla\cdot\vec{D},$$

利用方程$\nabla\cdot\vec{D} = \rho_f$得

$$\rho_P = -(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\rho_f。 \tag{2.3.36}$$

由此可见，在均匀介质内，极化电荷密度与自由电荷密度成正

比，符号相反。在均匀介质中，即使极化不均匀，即$\vec{P}\neq$常矢量，但只要在没有自由电荷的地方，就没有束缚电荷。如在均匀介质内部某处置一自由电荷构成的电偶极子$\vec{p}_f$，则由本题结果，该处将有一个极化电偶极子

$$\vec{p}_P=-\left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\vec{p}_f。\tag{2.3.37}$$

〔例 2－8〕　有一个充满电介质的平板电容器，电介质的介电常数按规律$\varepsilon=\varepsilon'\frac{x+a}{a}$变化，式中 a 是两板间的距离，x 轴的方向与平板垂直，平板的面积为 S，忽略边缘效应，如果两极的电势差为 V，求该电容器的电容 C 和板上束缚电荷的分布。

解：如图 2.10 选取坐标，并选 x＝a 处为电势零点，则

$$V=\int_0^a E\mathrm{d}x,$$

设极板上的自由电荷为 Q，由场的对称性，有

$$D=D_n=\sigma_f=\frac{Q}{S},$$

$$E=\frac{D}{\varepsilon}=\frac{Q}{\varepsilon S}=\frac{aQ}{S\varepsilon'}\frac{1}{x+a},$$

$$V=\int_0^a\frac{aQ}{\varepsilon' S}\frac{\mathrm{d}x}{x+a}=\frac{a\ln 2}{\varepsilon' S}Q。$$

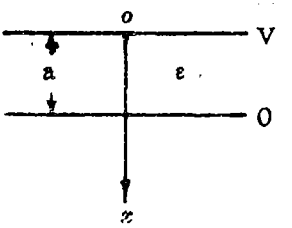


图 2.10

所以电容器的电容为

$$C=\frac{Q}{V}=\frac{\varepsilon' S}{a\ln 2}。$$

又

$$\vec{P}=\vec{D}-\varepsilon_0\vec{E}$$

$$=(\varepsilon-\varepsilon_0)E\vec{e}_x=\sigma_f\left[1-\frac{\varepsilon_0 a}{\varepsilon'(x+a)}\right]\vec{e}_x,$$

由此可求得束缚电荷的面密度。

当 x=0 时,

$$\sigma_p=\vec{n}\cdot(\vec{P}_1-\vec{P}_2)=\vec{e}_x\cdot(-\vec{P})\,|_{x=0}$$

$$=\sigma_f\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon'}-1\right),\tag{2.3.38}$$

当 x=a 时,

$$\sigma_p=-\vec{e}_x\cdot(-\vec{p})\,|_{x=a}=\sigma_f\left(1-\frac{\varepsilon_0}{2\varepsilon'}\right)。\tag{2.3.39}$$

束缚电荷的体密度

$$\rho_p=-\nabla\cdot\vec{P}=\frac{-\sigma_f\varepsilon_0 a}{\varepsilon'(x+a)^2}。\tag{2.3.40}$$

§2.4 静电场的能量和力

1. 真空中的静电能

设带电体系由若干个带电体组成，带电体系中的电荷可以无限分割为许多小部分，这些部分最初都分散在彼此相距无限远的位置上。通常规定，处于这种状态下的静电能为零。现有的带电体系的静电能是相对于这种初始状态而言的。即带电体系的静电能，等于把各部分电荷从无限分散的状态聚集成现有带电体系时抵抗静电力所作的功。把每一个带电体看作一个不可分割的整体，将各带电体从无限远移到现在位置所作的功，等于它们之间的相互作用能。把每一个带电体上的各部分电荷从无限分散的状

态聚集起来时所作的功，等于这个带电体的自能（或固有能）。所以，带电体系的总电能 W 由各个带电体之间的相互作用能 $W_{互}$ 和每个带电体的自能 $W_{自}$ 组成

$$W = W_{互} + W_{自}。$$

由 2.1 节可知，标势 Φ 就是静电场的电势，因此标势与点电荷的乘积可以解释为点电荷在场中的势能。更确切地说，如果有一个点电荷 q_i，把它从无穷远处移到由标势 Φ 所描述的定域电场区域内的一点 $\vec{r}_i$，那么对该电荷所作的功（从而电荷的势能）由下式给出

$$W_i = q_i \Phi(\vec{r}_i)， \tag{2.4.1}$$

势 Φ 可看作是由位于 $\vec{r}_j$ 的点电荷系所产生的：

$$\Phi(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_j \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}。 \tag{2.4.2}$$

则电荷 q_i 的势能是

$$W_i = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \sum_j \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}， \tag{2.4.3}$$

于是，由诸电荷间的所有相互作用力产生的全部电荷的总势能，是将各电荷的势能依次相加：

$$W = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ (i \neq j)}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}， \tag{2.4.4}$$

式中 $\frac{1}{2}$ 因子是因为 i，j 与 j，i 求和相重，在双重求和中略去的 $i=j$ 的项是无穷大的“自能”项。

对于连续的电荷分布，

$$W = \frac{1}{2} \iint \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho(\vec{r})\,\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \mathrm{d}v\mathrm{d}v'， \tag{2.4.5}$$

考虑到此式中有一个积分正是标势，便可写出与其等价的另一表示

$$W = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{r})\,\Phi(\vec{r})\,\mathrm{d}v。 \tag{2.4.6}$$

利用泊松方程 $\nabla^2\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ 上式可写成

$$W = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int \Phi \nabla^2 \Phi \mathrm{d}v,$$

由格林公式

$$\int (\Phi\nabla^2\Phi + |\nabla\Phi|^2)\ \mathrm{d}v = \oint \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n}\mathrm{d}S$$

无穷远界面上右端等于零，即得

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int |\vec{E}|^2 \mathrm{d}v, \tag{2.4.7}$$

式中积分遍及场存在的整个空间。

所得 (2.4.4) － (2.4.6) 式都是以电荷的位置来表示静电势能，因此强调了电荷间的相互作用是一种库仑作用。(2.4.7) 式将所有明显涉及电荷的地方都已去掉而用场量表示，所以强调了电场，并且可认为能量贮存在电荷周围的电场中；同时能量已被表示为正比于电场强度的平方对电场所在整个空间的积分，这样自然而然地推出被积函数等于能量密度

$$w = \frac{\varepsilon_0}{2}|\vec{E}|^2。 \tag{2.4.8}$$

应注意，由于同一电荷的各个电荷元有相同的符号，则每个带电体的自能 $W_{自}$ 总是正的；而各个带电体所带电荷可能是同号，也可能是异号，则各个带电体之间的相互作用能 $W_{互}$ 可正可负。(2.4.4) 所表示的总势能，由于略去了自能项，实际上是互作用能，它可以是正的，也可以是负的。(2.4.6) 和 (2.4.7) 表出的积分式，意味着带电体内的电荷已被无限分割，因而我们得到的已不是相互作用能，而是包括自能在内的总静电能了。如果只有一个带电体，此二式给出的就是自能。(2.4.7) 或 (2.4.8) 式表明，因为

包含了自能的贡献，总静电能必定不是负的，另外，由 $W_{互}$的存在，W 不是线性迭加的。当带电体移动时，如保持其电荷的大小和形状不变，则各带电体的 $W_{自}$不变，处理问题中可看作总静电能 W 中的附加常数，所以 W 的变化只决定于 $W_{互}$的变化。

在有些实际问题中，往往需要把带电体系中的某一部分电荷分离出来，把它们作为试探电荷看待。带电体系的其余部分产生的电场，对试探电荷来说是“外电场”，这样，就需要计算电荷分布 ρ 在给定外电场中的能量。以 φ_e 表示外电场的标势，ρ_e 表示产生该外电场的电荷分布。则总电荷分布为 $\rho+\rho_e$，总电场标势为 $\Phi+\Phi_e$，电场总能量为

$$W=\frac{1}{2}\int (\rho+\rho_e)\quad(\Phi+\varphi_e)\,\mathrm{d}v,$$

此式减去 ρ 和 ρ_e 分别单独存在时的能量$\frac{1}{2}\int\rho\Phi\mathrm{d}v$ 和$\frac{1}{2}\int\rho_e\Phi_e\mathrm{d}v$ 便得到 ρ 在外场中的作用能

$$W_i=\frac{1}{2}\int (\rho\Phi_e+\rho_e\Phi)\,\mathrm{d}v。$$

又因

$$\Phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho\ (\vec{r}')\ \mathrm{d}v'}{|\vec{r}-\vec{r}'|},\quad \Phi_e=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho_e\ (\vec{r}')\ \mathrm{d}v'}{|\vec{r}-\vec{r}'|},$$

上式中两项相等，所以

$$W_i=\int\rho\Phi_e\mathrm{d}v。\tag{2.4.9}$$

注意此式与 (2.4.6) 式差一个因子$\frac{1}{2}$。

2. 介质中的静电能

前面的讨论中认为，电荷的最终位形是由许多元电荷逐个积累而成，每一元电荷都是从无穷远处克服当时存在的电场而移进

来的，所做的功由 (2.4.6) 式所示。

在电介质存在时，不仅移动真实的宏观电荷要做功，而且对介质产生极化也要做功。因此，介质中的静电能还应包含介质的极化能，不能简单地将真空情形下的 (2.4.6) 式搬进电介质的宏观描述中去。

假设存在于空间的电荷分布为 $\rho_f(\vec{r})$，产生了静电势 $\Phi(\vec{r})$，根据 (2.4.1) 式，它们在 $\vec{r}$ 处的微分作用能

$$\mathrm{d}W=\rho_f\ (\vec{r})\ \Phi\ (\vec{r})\ \mathrm{d}v。 \tag{2.4.10}$$

当 $\rho_f\ (\vec{r})$ 发生变化 $\delta\rho_f$ 时，导致 $\mathrm{d}W$ 的微小变化为 $\mathrm{d}\ (\delta W)=\delta\rho_f\cdot\Phi\mathrm{d}v$，从而

$$\delta W=\int\delta\rho_f\ (\vec{r})\ \Phi\ (\vec{r})\ \mathrm{d}v, \tag{2.4.11}$$

由于 $\nabla\cdot\vec{D}=\rho_f$，存在关系

$$\delta\rho_f=\nabla\cdot\ (\delta\vec{D})\ , \tag{2.4.12}$$

于是

$$\delta W=\int\nabla\cdot\ (\delta\vec{D})\ \Phi\ (\vec{r})\ \mathrm{d}v=\int\partial_i\delta D_i\Phi\ (\vec{r})\ \mathrm{d}v$$

$$=\int\partial_i\ (\delta D_i\Phi)\ \mathrm{d}v-\int\delta D_i\partial_i\Phi\mathrm{d}v。$$

第一项利用高斯公式化为面积分 $\oint\delta D_i\Phi\mathrm{d}s_i$，对定域电荷分布此项等于零，第二项利用 $\vec{E}=-\nabla\Phi$，得

$$\delta W=\int\delta\vec{D}\cdot\vec{E}\mathrm{d}v, \tag{2.4.13}$$

现在，令 $\vec{D}$ 从初值 $\vec{D}=0$ 变到终值 $\vec{D}$，我们可以在形式上写下总静电能

$$W=\int \mathrm{d}v \int_0^D \vec{E}\cdot\delta\vec{D}。 \tag{2.4.14}$$

如果是各向同性线性介质

$$\vec{E}\cdot\delta\vec{D}=\frac{1}{2}\delta\ (\vec{E}\cdot\vec{D})\ ,$$

于是总静电能为

$$W=\frac{1}{2}\int \vec{E}\cdot\vec{D}\mathrm{d}v。 \tag{2.4.15}$$

式中积分遍及场存在的整个空间，其被积函数就是能量密度

$$w=\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} \tag{2.4.16}$$

利用$\vec{E}=-\nabla\Phi$和$\nabla\cdot\vec{D}=\rho_f$，或者回到（2.4.11）并假定$\rho$和$\Phi$有线性关系，都可以把（2.4.15）式变成（2.4.6）的形式。可见，只有当介质是各向同性线性介质时，（2.4.6）式才在宏观上有效。否则，只好用（2.4.14）式来计算最终位形的能量。

3. 静电场的力

电场对电荷有力的作用，这力就称为电场力。在静电场中，带电的导体会受到电场力的作用，介质在电场中极化后出现束缚电荷，它也会受到电场力的作用。

对于电场力的计算，原则上可以应用库仑定律，或者应用电场强度的定义公式。但是除在最简单的情形外，这种计算都很困难。这里我们主要讨论虚位移法，也简单介绍一下利用法拉弟的电位移管的观点计算力的方法。

处在一定位形的带电体系在外电场中具有一定的电势能，当它的位形发生微小变化时，电势能将相应地发生改变。若带电体系在外电场中受一广义力的作用，在位形变化时，对应一个广义

坐标的改变，外电场力（广义力）就做一定的功。

在电荷固定不变的情形下，我们设想带电体发生一个很小的广义位移 $\delta\zeta$，于是能量将改变 δW。因为电荷不变从而没有外来的能源，根据能量平衡关系，电场力所做的功应等于带电体系内能量的减少。由此电场力为

$$F_\zeta = -\left(\frac{\partial W}{\partial \zeta}\right)_Q 。 \tag{2.4.17}$$

偏导数后的下标 Q 表示电荷固定不变（场源固定不变）。

在带电体系的电势固定不变的情形下，意味着有外源供给能量。对于各向同性线性介质，(2.4.6) 式仍然有效，这时只要考虑原有位形的变化就够了。我们可以认为在电势不变时，由于移动电介质物体，改变介电性质（从而改变原有位形）的过程是分两步进行的。第一步，同外源断开，保持电荷不变 $\delta\rho=0$，在介电性质发生变化时，能量的变化是

$$\delta W_1 = \frac{1}{2}\int \rho \delta \Phi_1 \mathrm{d}v,$$

式中 $\delta\Phi_1$ 是所产生的电势的变化。第二步，再与外源接通，让电势回到原来的数值。随着电势的改变 $\delta\Phi_2 = -\delta\Phi_1$，将有电荷 $\delta\rho_2$ 流入，由 (2.4.6) 式，伴随着电势变化和电荷密度变化的能量变化是

$$\delta W_2 = \frac{1}{2}\int (\rho\delta\Phi_2 + \Phi\delta\rho_2)\ \mathrm{d}v。$$

因为式中两项的贡献相等，得

$$\delta W_2 = -2\delta W_1。$$

说明第二步中外电源引起的能量变化的情况与第一步相反，而数值是第一步的两倍。因此净变化是

$$\delta W = -\frac{1}{2}\int \rho \delta \Phi_1 \mathrm{d}v。$$

用符号表示：

$$\delta W_\nu = -\delta W_\varrho。$$

式中的下标表示保持不变的量。对于广义位移 $\delta\xi$ 来说，作用在这块电介质上的机械力是

$$F_\xi = (\frac{\partial W}{\partial \xi})_\nu。 \tag{2.4.18}$$

(2.4.17) 和 (2.4.18) 式就是分别在电荷不变和电势不变情形下用虚位移法求电场力的公式。

此外，按照法拉弟的观点，静电场中由电位移线构成的每一个电位移管沿轴线方向受到纵张力，而在垂直于轴线的方向受到侧压力。纵张力和侧压力的数值，在单位面积上都等于

$$f = \frac{1}{2}DE。 \tag{2.4.19}$$

法拉弟对电场力的这种看法，可给我们一个形象化的概念，不仅能定性地理解场图，而且有助于进行某些定量计算。(2.4.19) 式的根据将在后面讨论。

〔**例 2–9**〕 设带电荷为 q_1 和 q_2 的两个球的球心相距为 a，电荷是球对称分布的。求这两球间的相互作用能和相互作用力。

解：由高斯定理求得，A 球（带电荷 q_1）在 $\vec{r}$ 处的势

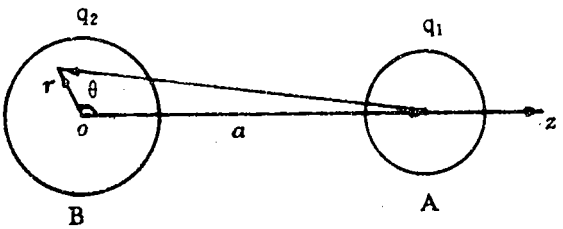


图 2.11

$$\Phi_a(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{|\vec{r}-\vec{a}|}$$

$$= \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 a}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\cos\theta),$$

两球的互作用能

$$W = \int \Phi_a(\vec{r})\,\rho_2(\vec{r})\,\mathrm{d}v_2。$$

将 $\Phi_a(\vec{r})$ 代入此式，注意 $\mathrm{d}v_2 = r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi(-\mathrm{d}\cos\theta)$，并利用勒让德函数的正交性，计算得

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{a}, \tag{2.4.20}$$

所以两球的互作用力为

$$F = -\frac{\partial W}{\partial a} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{a^2}, \tag{2.4.21}$$

结果相当于两个点电荷的互作用。

〔例 2－10〕　试讨论小区域电荷体系在外电场中的能量。若一个电矩为 $\vec{P}$ 的电偶极子位于点电荷 q 的场内，作用在电偶极子上的力和力矩有多大？

解：设外电场电势为 Φ_e，具有电荷分布 $\rho(\vec{r})$ 的体系在外电场中的能量是

$$W = \int \rho\Phi_e \mathrm{d}v$$

若电荷分布于小区域，取区域内任一点为坐标原点，把 $\Phi_e(\vec{r})$ 对原点展开

$$\Phi_e(\vec{r}) = \Phi_e(0) + x_i\partial_i\Phi_e(0)$$

$$+\frac{1}{2!}x_i x_j \partial_i \partial_j \Phi_e(0)+ \cdots,$$

代入 W，并如 (2.2.2) 式到 (2.2.4) 式定义 q、$\vec{P}$ 和 $\vec{Q}$ 则得小区域电荷体系在外电场中的能量展开式

$$\begin{aligned} W &= \int \rho\ (\vec{r})\ \left[\Phi_e(0)+ x_i \partial_j \Phi_e(0)+ \frac{1}{2!}x_i x_j \partial_i \partial_j \Phi_e(0)\right. \\ &\quad \left. + \cdots\right] \mathrm{d}v \\ &= q\Phi_e(0)+ P_i \partial_i \Phi_e(0)+ \frac{1}{6} Q_{ij} \partial_i \partial_j \Phi_e(0)+ \cdots \\ &= q\Phi_e(0)+ \vec{P} \cdot \nabla \Phi_e(0)+ \frac{1}{6}\vec{Q}:\ \nabla\nabla\Phi_e(0)+ \cdots。 \end{aligned} \tag{2.4.22}$$

展开式第一项

$$W^{(0)} = q\Phi_e(0) \tag{2.4.23}$$

是设想体系的电荷集中于原点上时在外电场中的能量。展开式第二项

$$W^{(1)} = \vec{P} \cdot \nabla \Phi_e(0) = -\vec{P} \cdot \vec{E}_e(0) \tag{2.4.24}$$

是体系的电偶极矩在外电场中的能量。第三项

$$W^{(2)} = \frac{1}{6}\vec{Q}:\ \nabla \vec{E}e \tag{2.4.25}$$

是体系的电四极矩在外电场中的能量，只有在非均匀场中该能量才不为零。

由此，电偶极子在外电场中所受的力 $\vec{F}$ 和力矩 $\vec{L}$ 分别为

$$\vec{F} = -\nabla W^{(1)} = \nabla\ (\vec{P} \cdot \vec{E}_e) = (\vec{P} \cdot \nabla)\ \vec{E}_e, \tag{2.4.26}$$

$$L_0 = -\frac{\partial W^{(1)}}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\ (PE_e \cos\theta) = -PE_e \sin\theta,$$

式中 θ 是 $\vec{P}$ 与 $\vec{E}$ 的夹角，计及力矩的方向，得

$$\vec{L}=\vec{P}\times\vec{E}_e。 \tag{2.4.27}$$

如图 2.12，若 $\vec{P}$ 位于点电荷 q 的场中，电荷 q 在 $\vec{P}$ 所在处 $\vec{r}$ 产生的场为

$$\vec{E}_e\ (\vec{r})\ =\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\vec{r},$$

q 与 $\vec{P}$ 的互作用能为

$$W=-\vec{P}\cdot\vec{E}_e\ (\vec{r})\ =-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P}\cdot\vec{r}}{r^3},$$

$\vec{P}$ 所受的力

$$\vec{F}=-\nabla W=\nabla\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P}\cdot\vec{r}}{r^3}\right)$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{r^2\vec{P}-3\ (\vec{P}\cdot\vec{r})\ \vec{r}}{r^5}\right],$$

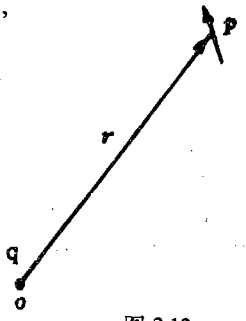


图 2.12

$\vec{P}$ 所受的力矩

$$\vec{L}=\vec{P}\times\vec{E}_e=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P}\times\vec{r}}{r^3}。$$

〔例 2－11〕　两个电偶极子 $\vec{P}_1$ 和 $\vec{P}_2$ 相距为 d，空间方向任意，求由两个偶极矩之间静电作用引起的互作用力。在 $\vec{P}_1$ 平行于两偶极子之间连线的特殊情况下，确定给出最大吸引力时 $\vec{P}_2$ 的指向。

解：取电偶极子 $\vec{P}_1$ 位于原点，$\vec{P}_2$ 位于 $\vec{r}$ 点。$\vec{P}_1$ 在 $\vec{r}$ 处产生的电势和场强各为

$$\Phi_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P}_1\cdot\vec{r}}{r^3},$$

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3(\vec{P}_1\cdot\vec{r})\vec{r}-r^2\vec{P}_1}{r^5},$$

则$\vec{P}_1$和$\vec{P}_2$的相互作用能是

$$W = -\vec{P}_2\cdot\vec{E}_1$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r^2\vec{P}_1\cdot\vec{P}_2-3(\vec{P}_1\cdot\vec{r})(\vec{P}_2\cdot\vec{r})}{r^5}。$$

$\vec{P}_1$的方向由球坐标θ_1、φ_1描述，$\vec{P}_2$由θ_2、φ_2描述。为方便起见，选$\vec{r}$沿z轴方向，则

$$\theta_1 = \angle(\vec{r},\ \vec{P}_1)\quad,\quad \theta_2 = \angle(\vec{r},\ \vec{P}_2)\ ,$$

两个平面$(\vec{r},\ \vec{P}_1)$和$(\vec{r},\ \vec{P}_2)$间的夹角$\varphi_2-\varphi_1=\varphi$，由此可得

$$\vec{P}_1\cdot\vec{P}_2 = P_1P_2\cos\alpha = P_1P_2\ (\cos\theta_1\cos\theta_2+$$
$$+\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi)\ ,$$

$$\vec{P}_1\cdot\vec{r} = P_1r\cos\theta_1\ ,\quad \vec{P}_2\cdot\vec{r} = P_2r\cos\theta_2,$$

$$W = \frac{P_1P_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi-2\cos\theta_1\cos\theta_2)}{r^3}。\qquad (2.4.28)$$

所以$\vec{P}_1$和$\vec{P}_2$的相互作用力

$$F = -\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3P_1P_2}{r^4}\cdot[\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi$$
$$-2\cos\theta_1\cos\theta_2]。\qquad (2.4.29)$$

代入两偶极子间距离 r=d，

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3P_1P_2}{d^4}\left[\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi-2\cos\theta_1\cos\theta_2\right]$$

当$\vec{P}_1 /\!/ \vec{r}$时，$\sin\theta_1=0$，$\cos\theta_1=1$，F的符号为负，表示互作用力是引力。如再取$\cos\theta_2=1$，即$\vec{P}_2 /\!/ \vec{r}$，则F有最大值。可见，在两偶极子同向平行的情形下，两者之间存在最大吸引力

$$F_{最大}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{6P_1P_2}{d^4}。\tag{2.4.30}$$

〔例 2-12〕 一半径为 a，极化率为 χ_e 的小球与另一半径为 b、电势为 U 的导体小球相距为 r，若 r>>a，求介质球受力的近似表达式。

解：因 r>>a，可忽略介质球极化对导体球电荷分布的影响，即将导体球视为孤立带电导体球。设无穷远处电势为零，导体球所带电荷为 Q，则

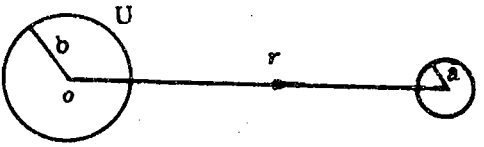


图 2.13

$$U=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b},\quad Q=4\pi\varepsilon_0 bU,$$

带电为 Q 的导体球在介质所在区域产生的电场均为

$$\vec{E}=\frac{Q\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{bU}{r^2}\vec{e}_r。$$

在此电场作用下介质球的极化强度

$$\vec{P}=\chi_e\varepsilon_0\vec{E}=\chi_e\varepsilon_0\frac{bU}{r^2}\vec{e}_r,$$

整个介质球的电偶极矩

$$\vec{p}=\vec{P}V=\frac{4\pi a^3 b\chi_e\varepsilon_0 U}{3r^2}\vec{e}_r。$$

介质球与导体球的相互作用能近似为

$$W=-\frac{1}{2}\vec{P}\cdot\vec{E}=-\frac{1}{2}PE=-\frac{2\pi a^3 b^2\chi_e\varepsilon_0 U^2}{3r^4},\qquad(2.4.31)$$

所以介质球受力的近似表达式为

$$F=-\frac{\partial W}{\partial r}=-\frac{8\pi a^3 b^2\chi_e\varepsilon_0 U^2}{3r^5},\qquad(2.4.32)$$

式中负号表示$\vec{F}$的方向指向导体球。

〔**例 2–13**〕 一个电容器由宽为 a，长为 b 的两块平面平行导体板组成，两极距离为 d ($d<<$a，b)，两板之间有介电常数为 ε 的电介质块。

(1) 电容器联接在电势差为 V 的电池上，将电介质块拉出一部分使得仍留在两极板之间的仅有长度 x。计算施加于介质块并趋向于将它拉回极板内的作用力。

(2) 电介质块完全在极板内部，电容器充电到两极板电势差为 V 之后，将电源断开，再次把介质块部分地拉出使得在极板内部仍有长度 x。计算施加于介质块并趋向于将它拉回极板内的作用力。

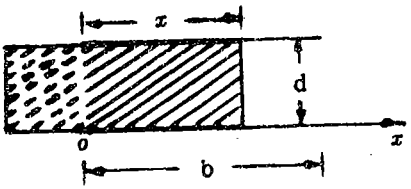


图 2.14

解：(1) 因 $d<<a$，b，所以可以忽略边缘效应，电容器连在电势差为 V 的电池上，即系统保持电压 V 不变。此时等效于两个电容器并联，系统的能量为

$$W=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}\ (C_1+C_2)\ V^2$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\varepsilon a x}{\mathrm{d}}+\frac{\varepsilon_0 a\ (b-x)}{\mathrm{d}}\right]V^2。\tag{2.4.33}$$

介质块受力

$$F=\frac{\partial W}{\partial x}=\frac{1}{2}\left[\frac{\varepsilon a}{\mathrm{d}}-\frac{\varepsilon_0 a}{\mathrm{d}}\right]V^2$$

$$=\frac{aV^2}{2\mathrm{d}}\ (\varepsilon-\varepsilon_0)\ =\frac{aV^2\varepsilon_0}{2\mathrm{d}}\ (\varepsilon_r-1)\ 。\tag{2.4.34}$$

$\varepsilon_r-1>0$，$\vec{F}$ 指向 $\vec{e}_x$ 方向，即指向电容器内部。

(2) 电容器充电后将电池断开，则系统保持电量不变。极板上的电量为

$$Q=CV=\frac{\varepsilon ab}{\mathrm{d}}V,$$

系统的能量

$$W=\frac{Q^2}{2C}=\frac{1}{2}\frac{1}{\left[\frac{\varepsilon a x}{\mathrm{d}}+\frac{\varepsilon_0 a\ (b-x)}{\mathrm{d}}\right]}\left(\frac{\varepsilon ab}{\mathrm{d}}V\right)^2$$

$$=\frac{b^2V^2\varepsilon_r\varepsilon a}{2\mathrm{d}}\cdot\frac{1}{b+\ (\varepsilon_r-1)\ x}。\tag{2.4.35}$$

介质块受力

$$F=-\frac{\partial W}{\partial x}=\frac{b^2V^2\varepsilon_r\varepsilon a}{2\mathrm{d}}\cdot\frac{\varepsilon_r-1}{[b+\ (\varepsilon_r-1)\ x]^2}。$$

(2.4.36)

$\vec{F}$也指向$\vec{e}_x$方向。

〔**例 2-14**〕 一长为 L，内导线半径为 a，外部薄导体壳半径为 b 的圆柱形电容器，其间充以介电常数为 ε 的非导电媒质。忽略边缘效应。

(1) 当电容器带电 Q 时，求作为径向位置的函数的电场强度。

(2) 求电容器的电容。

(3) 电容器与一电势差为 V 的电源联接，假设电介质从电容器中被拉出一部分，求维持电介质在这个位置所需要的力及其方向。

解：(1) 电容器极板上单位长度电量 $\tau=\dfrac{Q}{L}$，取单位长圆柱面为高斯面，由高斯定理有

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{s}=2\pi rD=\tau\ ,\quad D=\frac{\tau}{2\pi r},$$

则距圆柱轴线为 r 处的电场强度为

$$\vec{E}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon Lr}\vec{e}_r。 \tag{2.4.37}$$

(2) 以外圆柱为参考点，任一点 r 处电势

$$\Phi=\int_r^b \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_r^b \frac{Q}{2\pi\varepsilon L}\frac{\mathrm{d}r}{r}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon L}\ln\frac{b}{r},$$

两极间的电势差

$$V=\Phi|_{r=a}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon L}\ln\frac{b}{a},$$

电容器的电容

$$C=\frac{Q}{V}=\frac{2\pi\varepsilon L}{\ln\frac{b}{a}}。\tag{2.4.38}$$

(3) 我们用法拉弟电位移管的观点求力。作用于电容器内介质端面单位面积上的力为与 Z 轴同向的力$\frac{1}{2}\varepsilon E^2$ 和与 Z 轴反向的力$\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ 之合力

$$f=\frac{1}{2}\varepsilon E^2-\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2=\frac{1}{2}(\varepsilon-\varepsilon_0)E^2。\tag{2.4.39}$$

又由 $V=\frac{Q}{2\pi\varepsilon L}\ln\frac{b}{a}$ 得$\frac{Q}{2\pi\varepsilon L}=\frac{V}{\ln\frac{b}{a}}$，则

$$\vec{E}=\frac{V}{\ln\frac{b}{a}}\frac{1}{r}\vec{e}_r$$

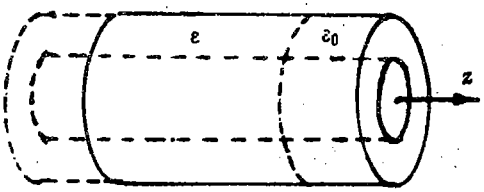


图 2.15

代入前式 $f=\frac{1}{2}(\varepsilon-\varepsilon_0)\frac{V^2}{\left(\ln\frac{b}{a}\right)^2}\frac{1}{r^2}$，

作用于整个介质端面的力

$$F=\int f\mathrm{d}s=\int_a^b f\cdot 2\pi r\mathrm{d}r=\frac{\pi V^2}{\ln\frac{b}{a}}\quad(\varepsilon-\varepsilon_0)\ 。\tag{2.4.40}$$

方向沿$\vec{e}_z$，即指向电容器内部。要维持电介质在此位置，就需施加与$\vec{F}$等值反向的力。

§2.5 静电问题的解及其唯一性

1. 静电学的基本问题

由前面的讨论可知，在各向同性的均匀介质中，静电场的基本规律可用泊松方程

$$\nabla^2\Phi=-\frac{\rho}{\varepsilon}\tag{2.3.22}$$

描述（以后我们以省去下标来表示自由电荷ρ，而束缚电荷仍用带有下标的ρ_P来表示）。真空中的静电场方程（2.1.13）可看作上式当$\varepsilon=\varepsilon_0$（即$\varepsilon_r=1$）时的特殊情形。因此，泊松方程(2.3.22)就是描写静电场基本规律的方程式。从原则上讲，静电学的基本问题就是利用这一规律解决有关问题，一般是：

已知Φ，由泊松方程求ρ，对此通过求微商就可解决。

给定ρ和边界条件，由泊松方程求Φ（再从Φ求$\vec{E}$），即求泊松方程满足给定场源ρ和边界条件的解，通常称为静电学中的边值问题。这是我们将要着重进行讨论的。

求边值问题时，经常遇到的边界条件有两类：

第一类边界条件，给定边界面上的势$\Phi|_S$；

第二类边界条件，给定边界面上势的法向导数（相当于给

定面电荷密度）$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_S$。

泊松方程（2.3.22）仅在各向同性均匀介质中成立。而实际问题中常常是整个区域的介质不均匀，但其内部分区均匀。在此情况下，就可以分区求解，各个均匀区域内的势由泊松方程（2.3.22）决定，不同区域的势由介质交界面上的边值关系（2.3.28）和（2.3.29）式联系。

因此，静电学的基本问题是：求出在各个均匀区域内满足泊松方程，在各个分界面上满足边值关系，在所研究的整个区域边界上满足边界条件的电势。

根据微分方程理论，泊松方程的解可以表示为它的一个特解 $\Phi'(\vec{r})$ 加上它所对应的齐次方程（拉普拉斯方程）的解 $F_0(\vec{r})$：

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi'(r) + F_0(\vec{r}) \text{。} \tag{2.5.1}$$

特解可利用 $\triangle$ 算子的逆运算找出，即由 $\triangle\Phi'(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon}\rho(\vec{r})$ 得

$$\Phi'(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon}\triangle^{-1}\rho(\vec{r}) = \int \rho(\vec{r}')\, G(\vec{r}\cdot\vec{r}')\, \mathrm{d}v'$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}v',$$

对照（2.1.12）式便知，此特解就是无界空间泊松方程的解，于是整个解为

$$\begin{aligned} &\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}v' + F_0(\vec{r})\text{；} \\ &\triangle F_0(\vec{r}) = 0\text{。} \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

式中特解部分就是求解区域内所有电荷在$\vec{r}$处产生的势，$F_0(\vec{r})$表示这个区域边界上或区域之外的电荷所产生的势以及外场的作用。由迭加原理，在$\vec{r}$处产生的总的势为两者之和。拉普拉斯方程的解只有给出具体的边界条件才能确定，不同的边界条件对应不同的齐次解。所以泊松方程的解之间可以差一个任意的调和函数$F_0(\vec{r})$，这个调和函数体现了求解区域之外的电荷分布及外场的影响。所谓边界条件的意义就是由它来确定这个未定函数$F_0(\vec{r})$。

2. 静电问题的唯一性定理

求解边值问题时，总希望在有界区域内存在一个唯一的，物理上合理的解。那么对此怎么判别呢？下面我们将证明：如在空间任意区域V内给定电荷分布$\rho(\vec{r})$，在V的边界S上给定第一类或第二类边界条件时，静电学泊松方程的解是唯一的，或者说它所对应的拉普拉斯方程的解是唯一的。

证：用反证法，若体积V内泊松方程为

$$\nabla^2\Phi=-\frac{\rho}{\varepsilon},$$

边界面S上给定第一类或第二类边界条件，我们假定存在两个满足相同边界条件的解Φ_1和Φ_2，即

$$\nabla^2\Phi_1=-\frac{\rho}{\varepsilon},$$

$$\nabla^2\Phi_2=-\frac{\rho}{\varepsilon}。\tag{2.5.3}$$

令

$$U=\Phi_2-\Phi_1,\tag{2.5.4}$$

于是在 V 内，U 满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 U = \nabla^2 \Phi_2 - \nabla^2 \Phi_1 = 0。 \tag{2.5.5}$$

由于边界条件相同，在边界 S 上第一类边界条件为

$$U|_S = \Phi_2|_S - \Phi_1|_S = 0, \tag{2.5.6}$$

第二类边界条件为

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_S = \left.\frac{\partial \Phi_2}{\partial n}\right|_S - \left.\frac{\partial \Phi_1}{\partial n}\right|_S = 0。 \tag{2.5.7}$$

由格林第一公式

$$\int_V \mathrm{d}v \left[\Phi \nabla^2 \psi + \nabla \Phi \cdot \nabla \psi\right] = \oint_S \Phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \mathrm{d}s,$$

令 $\Phi = \psi = U$，即得

$$\int_V (U \nabla^2 U + \nabla U \cdot \nabla U)\, \mathrm{d}v = \oint_S U \frac{\partial U}{\partial n} \mathrm{d}s。 \tag{2.5.8}$$

考虑到 U 的上述性质 (2.5.5) – (2.5.7) 式，上式对这两类边界条件都导致

$$\int_V |\nabla U|^2 \mathrm{d}v = 0。 \tag{2.5.9}$$

这就意味着 $\nabla U = 0$，因此在 V 内，U 是恒量。而电势可以差任意常数，所以两个解 Φ_1 和 Φ_2 等价。这就证明了，只要在求解区域的边界面上给定第一类或第二类边界条件，则静电问题唯一确定。

上述即为静电问题的唯一性定理，对于解决实际问题有重要的指导意义。它指出唯一地确定静电场的因素是什么，这就使求解有了理论依据。并且在某些情况下，可以通过分析提出一些尝

试解，用此定理能够判别哪一个是真正的解。

当边界趋于无穷远时，就是无界泊松方程问题。这时只考虑无界区域内电荷分布的贡献，而没有边界问题的影响。并且由(2.5.8)式看到，任何调和函数若在边界上为零，则它必在空间内处处为零。因此，(2.5.2)式中积分项所表示的特解就是该问题的解。在电荷分布具有某种对称性的简单情形下，往往采用各种简捷方法找出这个特解。如果求解区域内没有电荷分布，则特解为零，齐次解（拉普拉斯方程的解）就是整个问题的解。在界面形状规则而对称的问题中，往往用分离变量法（见§2.6）求齐次解。在求解区域只有一个点电荷或简单对称的电荷分布，同时边界是非常对称的导体或介质面时，可用电像法（见§2.7）求齐次解。

〔例2－15〕 在球坐标中，有一电荷产生的静电势是 $\Phi(r)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{-\alpha r}}{r}$，其中 q，α 均为常数，问相应的电荷怎样分布？

解：这种形式的作用势称为“汤川型势”，它在 $r\sim 0$ 处有一个排斥中心，而在 r 较大时迅速衰减为零，其力程以 $\frac{1}{\alpha}$ 来衡量。

利用泊松方程 $\nabla^2\Phi=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$，代入已知 $\Phi(r)$ 可求出 $\rho(r)$。已知势是球对称的，算符 ∇^2 只有 r 分量起作用：

$$\nabla^2\Phi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\nabla^2\left(\frac{e^{-\alpha r}}{r}\right)。$$

分开奇异部分，可改写为

$$\nabla^2\Phi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\nabla^2\left(\frac{1}{r}+\frac{e^{-\alpha r}-1}{r}\right),$$

利用 $\nabla^2\frac{1}{r}=-4\pi\delta(\vec{r})$ 得

$$\nabla^2\Phi=-\frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r})+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\alpha^2e^{-\alpha r}}{r},$$

所以电荷密度为

$$\rho(r)=q\delta(\vec{r})-\frac{q}{4\pi}\frac{\alpha^2e^{-\alpha r}}{r}。\tag{2.5.10}$$

结果表示在原点 $(r=0)$ 有一电荷 q，其外面有一层与它总电量相等、符号相反的电荷“云”分布；当$\frac{1}{\alpha}\to 0$时，第二项趋于 $-q\delta(\vec{r})$，表示负电荷分布缩至原点。

〔例 2－16〕 (1) 设电荷按球对称分布，即 $\rho=\rho(r)$，用 $\rho(r)$ 的积分形式将其电势 Φ 和电场强度$\vec{E}$表示出来。

(2) 设处于正常状态的氢原子中，除核而外，电荷的密度分布为

$$\rho(r)=-\frac{e}{\pi a^3}e^{-2r/a}\qquad(a\text{为玻尔半径}),$$

求该电荷分布的势与场。

解：(1) 由 $\nabla^2\Phi=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(r)$，必有 $\Phi=\Phi(r)$，于是取

$$\nabla^2\Phi=\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}\right),$$

代入原方程得

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}\right)=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho\ (r)\ ,$$

对此式进行积分，且令$f\ (r)\ =\int r^2\rho\ (r)\ \mathrm{d}r$，有

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}=-\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{f\ (r)}{r^2}+\frac{C}{r^2},$$

$$\Phi=-\frac{1}{\varepsilon_0}\int\frac{\mathrm{d}r}{r^2}f\ (r)\ +\frac{C_1}{r}+C_2,\quad (C_1,\ C_2\text{为任意常数})$$

再进行分部积分，注意到$f\ '(r)\ =r^2\rho\ (r)$，则

$$\Phi=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{r}\int_0^r r'^2\rho\ (r')\ \mathrm{d}r'+\frac{1}{\varepsilon_0}\int_r^\infty r'\rho\ (r')\ \mathrm{d}r'。\qquad (2.5.11)$$

上式中已规定了$\Phi\ (r)\ |_{r\to\infty}=0$，并且在$r$处能连接。对上式求负梯度得

$$\vec{E}\ (r)\ =\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}\int_0^r\rho\ (r')\ r'^2\mathrm{d}r'。\qquad (2.5.12)$$

所得Φ和$\vec{E}$的表达式，是电荷球对称分布，即密度ρ仅与r有关的情况下，电势和电场强度的一般表达式。

(2) 代入 (1) 中所得表达式，计算得

$$\Phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left[-\frac{e}{r}\ (1-e^{-2r/a})\ +\frac{e}{a}e^{-2r/a}\right],$$

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left\{-\frac{e}{r^2}\left[1-\left(\frac{2r}{a}+1\right)e^{-2r/a}\right]+\frac{2e}{a^2}e^{-2r/a}\right\}\frac{\vec{r}}{r}。$$

〔例 2－17〕　一个半径为 R 的球沿表面带电，其电荷分布为 $\sigma=\sigma_0\cos\theta$（$\sigma_0$ 为常数），求球外电势。

解：以球心为原点选取球坐标，θ 为极角，则电荷分布 $\sigma=\sigma_0\cos\theta$ 相当于沿 Z 轴正向紧密排列的许多同向电偶极子，在球外产生的电势即为一个迭加后的电偶极子的电势。

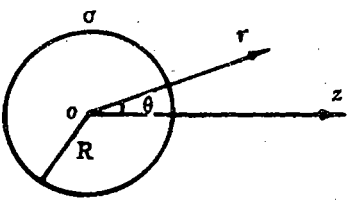


图 2.16

由 $\vec{P}=\int\rho\ (\vec{r})\ \vec{r}\mathrm{d}v$ 可求出总电偶极矩，其中

$$\rho\ (\vec{r})\ =\sigma\delta\ (r-R)\ =\sigma_0\cos\theta\delta\ (r-R)\ ,$$

得

$$\vec{P}=\int\sigma_0\delta\ (r-R)\ \vec{e}_r r^3\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi。$$

又

$$\vec{e}_r=\sin\theta\cos\varphi\vec{e}_x+\sin\theta\sin\varphi\vec{e}_y+\cos\theta\vec{e}_z,$$

$$\int_0^{\pi}\sin^2\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta=0,\quad\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{2}{3},$$

所以电偶极矩为

$$\vec{P}=2\pi\sigma_0R^3\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\vec{e}_z=\frac{4\pi}{3}\sigma_0R^3\vec{e}_z。\qquad(2.5.13)$$

由此可求出球外电势为

$$\Phi\ (\vec{r})\ =\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P}\cdot\vec{r}}{r^3}=\frac{\sigma_0R^3}{3\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2}。\qquad(2.5.14)$$

〔例 2－18〕　有一个半径为 R 的导电球，它的中心位于两

种均匀无限电介质的分界平面上，电介质的介电常数为 ε_1 和 ε_2，导电球的电荷为 q。求电场和电荷在球面上的分布。

解：此问题不同于只有一种介质的情形。我们在分析边界条件的基础上寻找尝试解，并用唯一性定理加以判断。

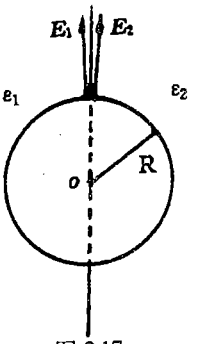


图 2.17

边界条件：

①两介质交界面上满足边值关系

$E_{1t}=E_{2t}$，　$D_{1n}=D_{2n}$。

②导电球是一等势体，球面为一等势面。

③电荷分布于有限区域，当 r→∞时，$\Phi=0$。

④导电球面上所带总电荷为 q。

假设电场$\vec{E}$仍保持球对称，左半球和右半球分别用$\vec{E}_1$和$\vec{E}_2$表示，即

$$\vec{E}_1=C\frac{\vec{r}}{r^3}\ ,\quad \vec{E}_2=C\frac{\vec{r}}{r^3}\quad (C\text{为待定常数})\ 。\qquad (2.5.15)$$

显然，这个尝试解满足了条件①至③，条件④即为下式成立(并且由此可决定常数 C)：

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{s}=\int_{S_1}\varepsilon_1\vec{E}_1\cdot \mathrm{d}\vec{s}+\int_{S_2}\varepsilon_2\vec{E}_2\cdot \mathrm{d}\vec{s}=q,\qquad (2.5.16)$$

式中 S_1、S_2 分别为左右半球面。代入 (2.5.15) 式，解出

$$C=\frac{q}{2\pi\ (\varepsilon_1+\varepsilon_2)},$$

由此则得

$$\vec{E}_1=\frac{q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\frac{\vec{r}}{r^3},\quad \vec{E}_2=\frac{q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\frac{\vec{r}}{r^3}\ 。\qquad (2.5.17)$$

此解满足诸边界条件，根据唯一性定理，它是唯一正确的解。

球面上的自由电荷面密度为

$$\sigma_{f1}=D_{1r}|_{r=R}=\varepsilon_1 E_{1r}|_{r=R}=\frac{\varepsilon_1 q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)R^2},$$
$$\sigma_{f2}=D_{2r}|_{r=R}=\varepsilon_2 E_{2r}|_{r=R}=\frac{\varepsilon_2 q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)R^2}。\tag{2.5.18}$$

极化电荷面密度为

$$\sigma_{P1}=-P_{1r}|_{r=R}=(\varepsilon_0 E_{1r}-D_{1r})|_{r=R}$$
$$=-\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_0)q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)R^2},$$
$$\sigma_{P2}=-P_{2r}|_{r=R}=(\varepsilon_0 E_{2r}-D_{2r})|_{r=R}$$
$$=-\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_0)q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)R^2}。\tag{2.5.19}$$

总电荷面密度 $\sigma=\sigma_f+\sigma_P$，即

$$\sigma_1=\sigma_2=\frac{\varepsilon_0 q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)R^2}。\tag{2.5.20}$$

可见，两半球上总电荷分布相同，因而所对应的$\vec{E}$保持球对称性。而 $\varepsilon_1\neq\varepsilon_2$，则极化电荷不同，自由电荷亦不同，所以$\vec{D}$并不具有球对称性。

§2.6 分离变量法

1. 分离变量法解静电问题的主要步骤

分离变量法是在对称的边界条件下解拉普拉斯方程的一种常用而有效的方法。当然对一些特殊问题，分离变量法也可以解泊

松方程。它的主要精神是把解偏微分方程的问题化为解常微分方程的问题。一般说来，能否应用分离变量法，除了与方程的形式有关之外，还与采用什么坐标系有关，而坐标系的选择则是根据边界的形状或者对称性来决定的。由数学物理方法可知，对于解拉普拉斯方程的问题，如果选适当的曲线正交坐标系，使问题的边界与一个坐标面或者几个坐标面的部分重合，那么方程本身和边界条件就都能进行变量的分离，从而将拉普拉斯方程化为三个含有未定参数的常微分方程。分别求解这三个方程，并将所有的特解进行线性迭加，便得一定坐标系中拉普拉斯方程的通解。然后由给定边界条件求出通解中的待定参数，就唯一地确定了解的具体形式。

因此，在用分离变量法求解静电问题时，其主要步骤可以归纳为:

(1) 分析场源的分布情况，确定满足拉普拉斯方程的求解区域。

(2) 根据区域边界的对称性选择适当的坐标系。例如，球形界面应选用球坐标，圆柱形界面应选用柱坐标。又如，问题具有旋转对称性时，则可选用球坐标并取对称轴为坐标系的极轴，等等。

(3) 求出所选坐标系中拉普拉斯方程的通解形式（其中含有待定常数)。

(4) 分析并列出问题的边界条件，包括第一类或第二类边界条件，不同介质交界面的边值关系，以及自然边界条件。

(5) 利用边界条件确定通解中的待定常数，于是便得拉普拉斯方程满足给定边界条件的解。

2. 直角坐标系中的情形

直角坐标系中的拉普拉斯方程是

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0。 \tag{2.6.1}$$

假定可将未知函数用三个函数的乘积表示，并且其中每一函数分别仅是一个坐标变量的函数：

$$\Phi\ (x、y、z)\ =X\ (x)\ Y\ (y)\ Z\ (z)\ , \tag{2.6.2}$$

将 (2.6.2) 代入 (2.6.1)，再用 (2.6.2) 除之，即得

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2}+\frac{1}{Z}\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2}=0; \tag{2.6.3}$$

欲使 (2.6.3) 式在独立坐标取任意值时都成立，那么式中的每一项必须分别等于常数。

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}=-K_x^2X, \tag{2.6.4}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2}=-K_y^2Y, \tag{2.6.5}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2}=+K_z^2Z, \tag{2.6.6}$$

式中 K_x、K_y、K_z 称为分离常数，都是待定常数，它们满足

$$K_x^2+K_y^2=K_z^2。 \tag{2.6.7}$$

这样，将拉普拉斯方程化成了三个常微分方程，(2.6.4) 和 (2.6.5) 式形式相同，解的形式也必然相同。以方程 (2.6.4) 为例讨论其解。

当 K_x^2 为零时，

$$X\ (x)\ =A_1x+A_2; \tag{2.6.8}$$

当 K_x^2 为正数时，

$$X\ (x)\ =B'_1e^{ik_xx}+B'_2e^{-ik_xx},$$

$$= B_1 \sin k_x x + B_2 \cos k_x x。 \tag{2.6.9}$$

在 k_x^2、k_y^2 均为正数（或者其中之一为零）的情况下，方程（2.6.6）的解为

$$Z(z) = C'_1 e^{\sqrt{k_x^2+k_y^2}\,z} + C'_2 e^{-\sqrt{k_x^2+k_y^2}\,z}$$

$$= C_1 \sinh\sqrt{k_x^2+k_y^2}\,z + C_2 \cosh\sqrt{k_x^2+k_y^2}\,z。 \tag{2.6.10}$$

将 X（x）、Y（y）、Z（z）的特解代入（2.6.2）式，通过线性迭加，便可得到 Φ（x、y、z）的通解。用给定边界条件求出待定常数、则得具体问题的唯一确定的解。

〔例 2-19〕 有一个长方形盒（如图 2.18），假设除了 z=C 的面（0≤x≤a，0≤y≤b）上电势为 V（x，y）而外，所有其它几个面的电势都等于零。求盒内各处的电势。

解：盒内势满足拉普拉斯方程，用分离变量法求解，X（x）的解可能有下面几种情形：

$$X(x) = A_1 x + A_2,$$

$$X(x) = A_1 \sin k_x x + A_2 \cos k_x x,$$

$$X(x) = A_1 \sinh|k_x|x + A_2 \cosh|k_x|x。$$

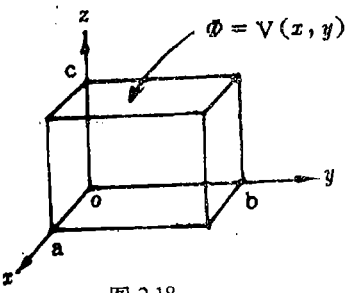


图 2.18

由边界条件

$$\Phi|_{x=0} = \Phi|_{x=a} = 0$$

即要求

$$X|_{x=0} = X|_{x=a} = 0$$

只有选择三角函数的解，才能满足此边界条件。同时，由 $X|_{x=0} = 0$，得 $A_2 = 0$。由 $X|_{x=a} = 0$，即 $\sin k_x a = 0$，得

$$k_x = \frac{n\pi}{a},\quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

所以

$$X(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{a}x。$$

同理，由 $Y|_{y=0} = Y|_{y=b} = 0$，可得

$$Y(y) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin\frac{m\pi}{b}y,$$

其中

$$k_y = \frac{m\pi}{b},\quad m = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

由 $X(x)$ 和 $Y(y)$ 的解，$Z(z)$ 应取

$$Z(z) = C_1 \sinh|k_z|z + C_2 \cosh|k_z|z。$$

由边界条件 $\Phi|_{z=0} = 0$，即 $Z|_{z=0} = 0$，得 $C_2 = 0$。并利用 (2.6.7) 式和所得 k_x、k_y 的表达式，有

$$Z(z) = \sum_{m,\ n=1}^{\infty} C_{nm} \sinh\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \right]^{1/2} z,$$

其中

$$\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = |k_z|。$$

这样，得到 Φ 的通解为

$$\Phi = \sum_{m,\ n=1}^{\infty} A_{nm} \sin\frac{n\pi}{a}x \cdot \sin\frac{m\pi}{b}y \cdot \sinh\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \right]^{1/2} z。 \quad (2.6.11)$$

最后，代入 $\Phi|_{z=c} = V\ (x,\ y)$ 的边界条件

$$V(x,\ y)=\sum_{m,\ n=1}^{\infty}A_{nm}\sin\frac{n\pi}{a}x\cdot\sin\frac{m\pi}{b}y\cdot$$

$$\sinh\left[\ \left(\frac{n\pi}{a}\right)^{2}+\ \left(\frac{m\pi}{b}\right)^{2}\right]^{\frac{1}{2}}C$$

这正是函数 $V(x,\ y)$ 的二重傅里叶级数，求 A_{nm} 的方法和将一个函数展成傅里叶级数时，求其系数的方法一样。例如求 $n=S,\ m=t$ 项的系数 C_{st}，我们用 $\sin\frac{s\pi}{a}x$ 和 $\sin\frac{t\pi}{b}y$ 乘上式两边，并对 x，y 取如下的积分

$$\int_0^a\int_0^b V\ (x,\ y)\ \sin\frac{s\pi}{a}x\cdot\sin\frac{t\pi}{b}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sum_{m,\ n=1}^{\infty}\int_0^a\int_0^b A_{nm}\sin\frac{n\pi}{a}x\cdot\sin\frac{s\pi}{a}x\cdot$$

$$\sin\frac{m\pi}{b}y\cdot\sin\frac{t\pi}{b}y\cdot\sinh|k_z|c\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

因为

$$\int_0^a\sin\frac{n\pi}{a}x\cdot\sin\frac{s\pi}{a}x\mathrm{d}x=0\qquad(n\neq s)\ ,$$

$$\int_0^b\sin\frac{m\pi}{b}y\cdot\sin\frac{t\pi}{b}y\mathrm{d}y=0\qquad(m\neq t)\ ,$$

而当 n＝s，m＝t 时有

$$\int_0^a\sin^2\frac{n\pi}{a}x\mathrm{d}x=\frac{a}{2}\ ,\quad\int_0^b\sin^2\frac{m\pi}{b}y\mathrm{d}y=\frac{b}{2},$$

则前式右端的求和、积分结果等于$\frac{ab}{4}A_{st}\sinh|k_z|_{st}C$，所以我们得到 Φ 的通解中包含的待定常数为

$$A_{nm}=\frac{4}{ab\sinh\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}C}\cdot$$

$$\int_0^a\int_0^b V\ (x,\ y)\ \sin\frac{n\pi}{a}x\cdot\sin\frac{m\pi}{b}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y。\qquad(2.6.12)$$

这样，Φ (x，y，z) 的解即可完全确定。

例如，若给出 $V\ (x,\ y)\ =V_0\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$，则由 (2.6.11) 式表示的 Φ 中除 $n=1$，$m=1$ 的项以外，其它的项都为零，

即 $\Phi=A_{11}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\sinh\left[\ (\frac{\pi}{a})^{\ 2}+\ (\frac{\pi}{b})^{\ 2}\ \right]^{\frac{1}{2}}z$

由 (2.6.12) 式得

$$A_{11}=\frac{4}{ab\sinh\left[\ (\frac{\pi}{a})^{\ 2}+\ (\frac{\pi}{b})^{\ 2}\ \right]^{\frac{1}{2}}C}$$

$$\int_0^a\int_0^b V_0\sin^2\frac{\pi x}{a}\sin^2\frac{\pi y}{b}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{V_0}{\sinh\left[\ (\frac{\pi}{a})^{\ 2}+\ (\frac{\pi}{b})^{\ 2}\ \right]^{\frac{1}{2}}C}$$

则盒内的电势为

$$\Phi=\frac{V_0}{\sinh\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}C}\cdot$$

$$\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\sinh\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}z。\qquad(2.6.13)$$

如果长方盒所有六个面的势都不等于零，我们就可通过六个解的线性迭加，得到盒内势的解。这六个解与（2.6.11）、(2.6.12) 式相当，每个解对应一个面。

例 2－20〕　在 $z=0$ 的平面上有面密度为 σ 的电荷，σ 按周期律 $\sigma=\sigma_0\sin\alpha x\sin\beta y$ 变化，式中 σ_0、α、β 是常数。求这个电荷系的电势 Φ。

解：除 z=0 的平面之外，上、下半空间均无电荷分布，满足拉普拉斯方程。用分离变量法，解的形式为

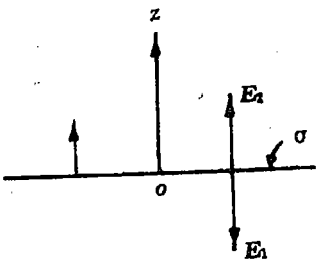


图 2.19

$$\Phi(x,\ y,\ z)=X(x)Y(y)Z(z),$$

$$X=A_1\cos k_x x+A_2\sin k_x x,$$

$$Y=B_1\cos k_y y+B_2\sin k_y y,$$

$$Z=C_1e^{|k_z|z}+C_2e^{-|k_z|z},\ |k_z|=\sqrt{k_x^2+k_y^2}。$$

边界条件：

1）因平面上电荷正负相间，按周期性分布，所以当 z→∞ 时，Φ→0。

2）给出 $z=0$ 平面上的 σ，实际上是给定了第二类边界条件，由对称性，$\vec{E}_1$ 与 $\vec{E}_2$ 等值反向，所以关系 $\vec{n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\sigma$ 变为 $2\varepsilon_0E_n=\sigma$，即

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|_{z=0} = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\sin\alpha x \sin\beta y。 \tag{2.6.14}$$

z>0 的情形（上半平面）：

由边界条件 1）得 $C_1=0$，再代入边界条件2），

$$-|k_z|C_2(A_1\cos k_x x + A_2\sin k_x x)(B_1\cos k_y y + B_2\sin k_y y)$$

$$= -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\sin\alpha x\sin\beta y,$$

比较系数，得

$$A_1 = B_1 = 0, \quad k_x = \alpha, \quad k_y = \beta,$$

令 $A_2B_2C_2 = A$，$-|k_z|A = -\dfrac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$，即

$$A = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\frac{1}{|k_z|} = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$

所以

$$\Phi = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}e^{-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z}\sin\alpha x\sin\beta y。 \tag{2.6.15}$$

同理，z<0 的情形（下半平面）

$$\Phi = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}e^{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z}\sin\alpha x\sin\beta y。 \tag{2.6.16}$$

注意：如果面电荷不是按三角函数规律分布，在定常数时就得和前例一样用傅里叶级数展开的方法。如果此问题中边界面下半部为整个导体，则

$$E_n = -\left.\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}。 \tag{2.6.17}$$

3. 球坐标系中的情形

球坐标中的拉普拉斯方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right)$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}=0 \tag{2.6.18}$$

用分离变量法解所得通解是

$$\Phi\ (r,\ \theta,\ \varphi)$$

$$=\sum_{n,m}\left(a_{n.m}r^n+\frac{b_{nm}}{r^{n+1}}\right)P_n^m\ (\cos\theta)\ \cos m\varphi$$

$$+\sum_{n,m}\left(c_{n.m}r^n+\frac{\mathrm{d}_{nm}}{r^{n+1}}\right)P_n^m\ (\cos\theta)\ \sin m\varphi \tag{2.6.19}$$

式中 a_{nm}、b_{nm}、c_{nm}、d_{nm} 为任意常数，在具体问题中由边界条件确定，$P_n^m\ (\cos\theta)$ 为缔合勒让德函数。

若问题中具有对称轴，取此轴为极轴，则 Φ 不依赖于方位角 φ，这时通解为

$$\Phi\ (r,\ \theta)\ =\sum_{n=0}^{\infty}\ (a_n r^n+\frac{b_n}{r^{n+1}})\ P_n\ (\cos\theta) \tag{2.6.20}$$

式中 $P_n\ (\cos\theta)$ 为勒让德函数，a_n 和 b_n 是任意常数，由边界条件定出。

下面通过一些例子来说明确定具体问题的解的方法。

✓〔例 2－21〕　一个半径为 R 的接地导体球，放在均匀外场 $\vec{E}_0$ 之中，球外为真空，求电场分布、导体上的电荷密度以及

导体球的等效电偶极矩。

解：导体球接地，球面上电势为零，球内外为两个不同区域。电荷只分布于球面，球内外均满足拉普拉斯方程。显然，球内电势处处为零，只需求球外区域的解，这个区域的边界面为球面和无穷远面。由于问题具有对称轴，取球坐标，球心为原点，极轴沿$\vec{E}_0$方向。

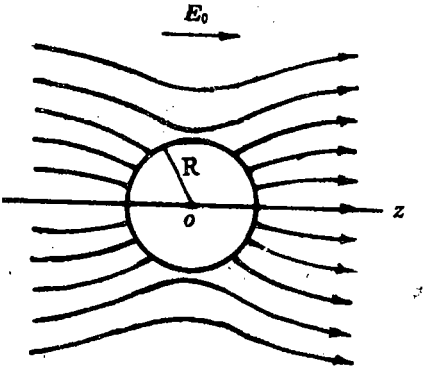


图 2.20

边界条件是：

1）在无穷远面上，即$r\to\infty$处，$\Phi=-E_0 r\cos\theta$（假设导体球引入以前，原点的电势恰好为零，即与地的电势相同）；

2）在导体球面上，即r=R处，$\Phi=0$。

球外电势应是（2.6.20）式所示球谐函数满足上述边界条件的一种组合。为满足条件1），含r正幂次的项只能是$-E_0 r\cos\theta$，于是$n=1$，这样

$$\Phi=-E_0 r\cos\theta+\frac{b_1}{r^2}\cos\theta,$$

再代入条件2），得$b_1=E_0R^3$，则球外电势

$$\Phi=-E_0 r\cos\theta+\frac{E_0R^3\cos\theta}{r^2}。\qquad(2.6.21)$$

球外电场强度

$$\vec{E}=-\nabla\Phi=-\frac{\partial\Phi}{\partial r}\vec{e}_r-\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta$$

$$= E_0\cos\theta\vec{e}_r + \frac{2E_0R^3}{r^3}\cos\theta\vec{e}_r$$

$$- E_0\sin\theta\vec{e}_\theta + \frac{E_0R^3}{r^3}\sin\theta\vec{e}_\theta$$

$$= \vec{E}_0 + \frac{E_0R^3}{r^3}\quad(2\cos\theta\vec{e}_r + \sin\theta\vec{e}_\theta)。\tag{2.6.22}$$

导体球上的面电荷密度

$$\sigma = -\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial n} = -\varepsilon_0\frac{\partial\Phi}{\partial r}\Big|_{r=R}$$

$$= 3\varepsilon_0E_0\cos\theta。\tag{2.6.23}$$

容易验证，整个球面上的总感应电荷应当为零

$$Q = \int_{球面}\sigma\mathrm{d}s = 3\varepsilon_0E_0\cdot 2\pi R^2\int_0^\pi\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta = 0。$$

由于面电荷密度 $\sigma\sim\cos\theta$，它在球外产生的场相当于一个电偶极子的贡献，利用〔例 2-17〕中的方法，可以求出感应电偶极矩

$$\vec{P} = 4\pi\varepsilon_0R^3\vec{E}_0。\tag{2.6.24}$$

此偶极矩的电势是

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P}\cdot\vec{r}}{r^3} = \frac{E_0R^3}{r^2}\cos\theta,\tag{2.6.25}$$

与 (2.6.21) 式中的第二项完全相同。如果将场强的表达式用 $\vec{P}$ 表示出来，则得与 (2.6.22) 式等价的表示式

$$\vec{E} = -\nabla\Phi = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\left(\frac{\vec{P}\cdot\vec{r}}{r^3}\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}-r^2\vec{p}}{r^5}。\qquad(2.6.26)$$

由上所述，均匀外场中接地导体球外的场，等于原来的均匀场迭加了一个电偶极子场，也就是说球面上的感应电荷对球外的影响相当于一个位于球心的电偶极子。

应当注意，如果已经分析到（2.6.21）式中第二项是偶极子的势，那么与$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P}\cdot\vec{r}}{r^3}$进行比较，即可简便地得到偶极矩（2.6.24）式。

〔例 2－22〕　半径为 R、介电常数为 ε 的均匀介质球放在均匀电场$\vec{E}_0$中，求球内外的电势分布。

解：本题求解区域的边界为无穷远面和 $r=0$ 点边界，球面是不同介质的分界面，分区求解可分为球内、球外两个区域。介质极化后产生的束缚电荷仅分布于球面。球内、外两区域均满足拉普拉斯方程。取球心为球坐标原点，极轴沿$\vec{E}_0$方向。球外和球内的电势可分别设为

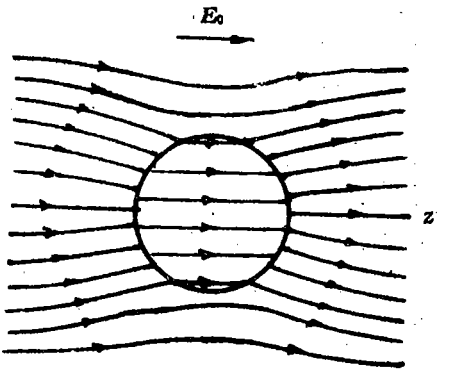


图 2.21

$$\Phi_1=\sum_n\left(a_n r^n+\frac{b_n}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta)，$$

$$\Phi_2 = \sum_n \left(C_n r^n + \frac{d_n}{r^{n+1}}\right) P_n \ (\cos\theta) \ ,$$

边界条件是:

(1) 在$r \to \infty$处，$\Phi_1 = -E_0 r P_1 \ (\cos\theta)$；

(2) 在$r = 0$处，Φ_2有限;

(3) 在$r = R$处（介质球面上），

$$\Phi_1 = \Phi_2, \qquad \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = \varepsilon \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} 。$$

由条件 (1) 可得

$$a_1 = -E_0, \qquad a_n = 0 \ (n \neq 1) 。$$

由条件 (2) 可得

$$d_n = 0。$$

由条件 (3) 可得

$$-E_0 R P_1 \ (\cos\theta) + \sum_n \frac{b_n}{R^{n+1}} P_n \ (\cos\theta)$$

$$= \sum_n C_n R^n P_n \ (\cos\theta)$$

和

$$-\varepsilon_0 \left[E_0 P_1 \ (\cos\theta) + \sum_n (n+1) \frac{b_n}{R^{n+2}} P_n \ (\cos\theta) \right]$$

$$= \varepsilon \sum_n n C_n R^{n-1} P_n \ (\cos\theta) \ ,$$

上面两式对所有可能的θ值都成立，等式两边$P_n \ (\cos\theta)$的系数必须分别相等。比较P_1的系数得

$$-E_0R+\frac{b_1}{R^2}=C_1R\ ,\quad -\varepsilon_0\ (E_0+\frac{2b_1}{R^3})\ =\varepsilon C_1,$$

此二式解出

$$b_1=\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0R^3\ ,\quad c_1=-\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0。$$

比较其他 P_n 的系数得

$$\frac{b_n}{R^{n+1}}=C_nR^n,\quad -\varepsilon_0\frac{(n+1)\ b_n}{R^{n+2}}=\varepsilon nc_nR^{n-1},$$

解出 $b_n=c_n=0\qquad (n\neq 1)$

所以，球外和球内的电势分别为

$$\Phi_1=-E_0r\cos\theta+\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\frac{E_0R^3\cos\theta}{r^2},\tag{2.6.27}$$

$$\Phi_2=-\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}E_0r\cos\theta。\tag{2.6.28}$$

现在讨论此解的物理意义。

(1) 当介质球的 $\varepsilon\to\infty$ 时，得到

$$\Phi_1=-E_0r\cos\theta+\frac{E_0R^3}{r^2}\cos\theta,$$

$$\Phi_2=0,$$

与上例接地导体球的结果相同。这表示当介质球的介电常数趋于 ∞ 时，其效果相当于一个导体球（未带电的）。一般来讲，实际上由于 $\vec{D}$ ($\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$) 的边界条件是有限的，因此在物体内部，甚至 $\varepsilon\to\infty$ 时，它也必须保持为有限的；但这表明了在这种场内 $\vec{E}=0$，这和导体的性质是一致的。因此，在静电学中，可以形式地把未带电的导体看作介电常数无限大的电介质。或

者说，导体对外电场的响应，和 $\varepsilon\to\infty$ 的相同形状的电介质所产生的响应相同。

(2) 介质球内的总电场

$$\vec{E}_{内}=\vec{E}_2=-\nabla\Phi_2=\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\vec{E}_0 \tag{2.6.29}$$

这是一个均匀电场，所以极化均匀。在球内总电场作用下，介质球的极化强度为

$$\vec{P}=\varepsilon_0\chi_e\vec{E}_{内}=(\varepsilon-\varepsilon_0)\vec{E}_2=\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}3\varepsilon_0\vec{E}_0, \tag{2.6.30}$$

介质球的总电偶极矩

$$\vec{p}=\frac{4\pi}{3}R^3\vec{P}=4\pi\varepsilon_0\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}R^3\vec{E}_0, \tag{2.6.31}$$

这个电偶极矩产生的势

$$\Phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}=\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\frac{E_0R^3\cos\theta}{r^2} \tag{2.6.32}$$

正是 (2.6.27) 式中的第二项，由此可见，介质球面上因极化而出现的束缚面电荷对于球外区域相当于一个位于球心的电偶极子，整个球外的势便是均匀外场的势和这个偶极子的势的迭加。当然$\vec{p}$也可由 (2.6.27) 式第二项与$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$进行比较而求得。

(3) 介质球内总场可表为

$$\vec{E}_2=\vec{E}_0+\vec{E}', \tag{2.6.33}$$

其中$\vec{E}'$为外场作用下介质极化而产生的附加电场。由 (2.6.29) 式，

$$\vec{E}' = \vec{E}_2 - \vec{E}_0 = -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\vec{E}_0,$$

与 (2.6.30) 式比较得

$$\vec{E}' = -\frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P}。$$

说明附加场$\vec{E}'$与$\vec{E}_0$方向相反，使球内电场比原外场$\vec{E}_0$为弱，$\vec{E}'$的数值正比于$\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$，可以写成

$$\vec{E}' = -L\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}, \tag{2.6.34}$$

其中L随电介质样品的形状而不同，称为退极化因子（对介质球等于$\frac{1}{3}$）。因此，通常将极化介质内部的电场表示为

$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \frac{L}{\varepsilon_0}\vec{P}。 \tag{2.6.35}$$

(4) 因介质球均匀极化，所以束缚电荷体密度$\rho_P = 0$

(此式也可通过$\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}$证明)

束缚电荷面密度为

$$\sigma_P = \vec{n} \cdot \vec{P}_1 = \vec{e}_r \cdot \vec{P} = \frac{3\varepsilon_0\ (\varepsilon - \varepsilon_0)}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\vec{e}_r \cdot \vec{E}_0$$

$$= \frac{3\varepsilon_0\ (\varepsilon - \varepsilon_0)}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}E_0\cos\theta。 \tag{2.6.36}$$

显然，由于$\varepsilon \neq \varepsilon_0$，介质球面上才有束缚电荷，并形成一个按$\cos\theta$变化的分布，所以对球外区域才表现为等效偶极子。

〔例 2－23〕　一个半径为a、带电量为q的导体球置于

均匀电场$\vec{E}_0$之中，求球内、球外的电势以及球面上感应电荷的偶极矩。在此问题中，球外电场包含的三项导致六项能量，试鉴定在这六项当中，哪个是有限的或等于零，哪个是无限的。

解：均匀电场中带电量为 q 的导体球的势应为〔例 2-21〕的结果与电荷 q 的势的迭加，考虑到电荷 q 在导体球表面均匀分布，则球内外的势为

$$\Phi_{内}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{a},$$

$$\Phi_{外}=-E_0 r\cos\theta+\frac{E_0 a^3}{r^2}\cos\theta+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}。\qquad(2.6.37)$$

并且，由例〔2-21〕可知，球面上感应电荷面密度为

$$\sigma'=3\varepsilon_0 E_0\cos\theta,$$

该电荷的电偶极矩是

$$\vec{P}=4\pi\varepsilon_0 a^3\vec{E}_0。$$

下面讨论球外场的静电能。将（2.6.37）式简写成

$$\Phi_{外}=\Phi_0+\Phi_p+\Phi_q,$$

相应的场强

$$\vec{E}_{外}=\vec{E}_0+\vec{E}_p+\vec{E}_q,$$

球外的静电能

$$W=\int\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}_{外}^2\mathrm{d}v=\int\frac{1}{2}\varepsilon_0\ (\vec{E}_0+\vec{E}_p+\vec{E}_q)^{\ 2}\mathrm{d}v$$

共包含六项，其中三个平方项表示自能，三个交叉项表示互作用能。

1）均匀场$\vec{E}_0$的自能

$$W_1 = \int_{\infty} \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}_0^2 \mathrm{d}v = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 \int_{\infty} \mathrm{d}v \to \infty。 \tag{2.6.38}$$

2）感应电荷的场$\vec{E}_p$的自能

$$W_2 = \frac{1}{2}\int \rho\Phi \mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_{\text{球面}} \sigma'\Phi_p|_S \mathrm{d}s$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\pi \int_0^{\pi} 3\varepsilon_0 E_0 \cos\theta \cdot \frac{E_0 a^3}{a^2} \cos\theta \cdot a^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta$$

$$= 2\pi\varepsilon_0 a^3 E_0^2, \tag{2.6.39}$$

此项有限。

3）电荷q的场$\vec{E}_q$的自能

$$W_3 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int \vec{E}_q^2 \mathrm{d}v = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \cdot 4\pi \int_a^{\infty} \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 r^2 \mathrm{d}r$$

$$= \frac{q_2}{8\pi\varepsilon_0 a}, \tag{2.6.40}$$

此项有限。

4）感应电荷的场$\vec{E}_p$与均匀场$\vec{E}_0$的互作用能

$$W_4 = -\frac{1}{2}\vec{P} \cdot \vec{E}_0 = -\frac{1}{2} \cdot 4\pi\varepsilon_0 a^3 \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0$$

$$= -2\pi\varepsilon_0 a^3 E_0^2, \tag{2.6.41}$$

此项有限。

5）电荷q的场$\vec{E}_q$与均匀场$\vec{E}_0$的互作用能

$$W_5 = \int \rho \Phi \mathrm{d}v = \int_{\text{球面}} \sigma_f \Phi_0 |_S \mathrm{d}s$$

$$= \int \frac{q}{4\pi a^2} \quad (-E_0 a\cos\theta) \quad a^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi = 0。 \qquad (2.6.42)$$

6) 感应电荷的场$\vec{E}_p$与电荷 q 的场$\vec{E}_q$的互作用能

$$W_6 = \int \rho \Phi \mathrm{d}v = \int_{\text{球面}} \sigma' \Phi_q |_S \mathrm{d}s$$

$$= \int 3\varepsilon_0 E_0 \cos\theta \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} a^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi = 0。 \qquad (2.6.43)$$

4. 平面极坐标系中的情形

在圆柱坐标系中，若场与变量 Z 无关，则为平面极坐标系中二维场（平面场）的问题。拉普拉斯方程为

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{2\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = 0, \qquad (2.6.44)$$

利用分离变量法求得通解

$$\Phi(\rho, \varphi) = C_0 + D_0 \ln\rho + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi)(C_m \rho^m + D_m \rho^{-m})。 \qquad (2.6.45)$$

其中 A_m、B_m、C_m、D_m 及 C_0、D_0 均为由边界条件决定的待定常数。

〔例 2－24〕　一个半径为 a、单位长度带电为 τ 的无限长圆柱形导体位于均匀电场$\vec{E}_0$之中，其轴线与$\vec{E}_0$垂直，试求圆柱内外的电势和电场。

解：如图 2.22 选取圆柱坐标、Z 轴沿圆柱体轴线，外场沿 x 轴方向。因圆柱体无限长，其场与 Z 无关，是二维平面场，解具有（2.6.45）式的形式。

由高斯定理可得，无外场时带电圆柱导体在柱外的场

$$\vec{E}' = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\rho}\vec{e}_\rho,$$

若选圆柱导体电势为零，则柱外电势为

$$\Phi' = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho}{a}。$$

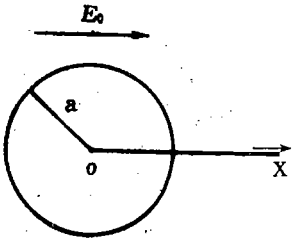


图 2.22

因此考虑均匀外场的作用后，圆柱内的势和场均为零，而圆柱外的势应具有形式

$$\Phi = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho}{a} + \sum_{m=1}^{\infty}(A_m\cos m\varphi + B_m\sin m\varphi)(C_m\rho^m + D_m\rho^{-m})。$$

边界条件是

（1）在$\rho\to\infty$处，$\Phi = -E_0\rho\cos\varphi - \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho}{a}$

（2）在$\rho = a$处，$\Phi = 0$。

由条件（1），并利用 $\ln\rho$ 与 ρ^m 的极限行为，可得

$$A_1C_1 = -E_0,\quad A_mC_m = 0\ (m\neq 1),\quad B_mC_m = 0。$$

由条件（2），可得

$$A_1D_1 = E_0a^2,\quad A_mD_m = 0\ (m\neq 1),\quad B_mD_m = 0。$$

所以，

$$\Phi = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho}{a} - E_0\rho\cos\varphi + \frac{E_0 a^2}{\rho}\cos\varphi, \tag{2.6.46}$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\vec{e}_\rho - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$= \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\rho}\vec{e}_\rho + \vec{E}_0 + \frac{\vec{E}_0 a^2}{\rho^2}(\cos\varphi\vec{e}_\rho + \sin\varphi\vec{e}_\varphi)。 \tag{2.6.47}$$

Φ 和 $\vec{E}$ 式中第一项是圆柱体所带电荷的贡献，第二项是均匀外场的贡献，第三项是感应电偶极子的贡献。这里是平面场中的二维偶极子，将 Φ 中第三项与二维偶极子的电势 $\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P}\cdot\vec{\rho}}{\rho^2}$ 相比较，则得其电偶极矩为

$$\vec{P} = 2\pi\varepsilon_0 a^2\vec{E}_0, \tag{2.6.48}$$

5. 回转椭球坐标系中的情形

对于一个长椭球，取其长轴沿圆柱坐标系的 Z 轴。当场对 Z 轴具有旋转对称性时，它的势 $\Phi=\Phi(\rho, z)$ 不是坐标 φ 的函数，圆柱坐标系的拉普拉斯方程简化为

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0。 \tag{2.6.49}$$

引入两个新的变量 u 和 θ:

$$\begin{aligned}\rho &= sh u\sin\theta\\ Z &= ch u\cos\theta\end{aligned} \tag{2.6.50}$$

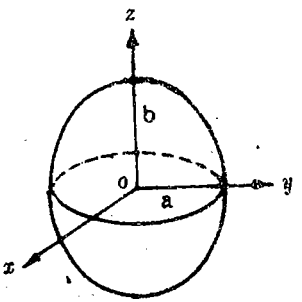


图 2.23

容易证明

$$d\rho^2 + dz^2 = (sh^2 u + \sin^2\theta)(du^2 + d\theta^2)。 \tag{2.6.51}$$

拉普拉斯方程（2.6.49）可化为

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}+ctghu\frac{\partial\Phi}{\partial u}+ctg\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}=0, \tag{2.6.52}$$

再引入两个新变量 x 和 y:

$$\begin{aligned} x&=cchu,\\ y&=\cos\theta。\end{aligned} \tag{2.6.53}$$

则 x、y 与 ρ、z 的关系为

$$\begin{aligned} \rho&=(x^2-c^2)^{1/2}(1-y)^{1/2},\\ z&=x\cdot y。\end{aligned} \tag{2.6.54}$$

拉普拉斯方程又可写为

$$\frac{1}{x^2-c^2y^2}\cdot\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[(x^2-c^2)\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[(1-y^2)\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right]\right\}=0 \tag{2.6.55}$$

分离变量 $\Phi=X(x)\ Y(y)$，可证明当考虑无穷远处 $\Phi\to0$ 时，(2.6.55) 式的特解为

$$\Phi=\sum_L\alpha_L Q_L\left(\frac{x}{c}\right)P_L(\cos\theta)。 \tag{2.6.56}$$

其中 $Q_L\left(\frac{x}{c}\right)$ 称为第二类勒让德函数。

我们考虑最简单的一种情况下（L=0）的各向同性解

$$\Phi=\alpha_0 Q_0\left(\frac{x}{c}\right)=\frac{\alpha_0}{2}\ln\frac{\left|1+\frac{x}{c}\right|}{\left|1-\frac{x}{c}\right|}。 \tag{2.6.57}$$

因为 $x>c$，$\Phi=\frac{\alpha_0}{2}\ln\frac{\left(1+\frac{c}{x}\right)}{\left(1-\frac{c}{x}\right)}$。当 $x\to\infty$ 时，椭球 → 球，$x=r$，并且

$$\ln\frac{\left(1+\frac{c}{x}\right)}{\left(1-\frac{c}{x}\right)}\approx\frac{2c}{r}, \tag{2.6.58}$$

在无穷远看是一个库仑势

$$\Phi=\frac{\alpha_0}{2}\frac{2c}{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}, \tag{2.6.59}$$

由此式可定出 α_0:

$$\alpha_0=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{c}, \tag{2.6.60}$$

则

$$\Phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{c}\frac{1}{2}\ln\frac{1+\frac{c}{x}}{1-\frac{c}{x}}。 \tag{2.6.61}$$

而

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+\frac{c}{x}}{1-\frac{c}{x}}=arcth\left(\frac{c}{x}\right), \tag{2.6.62}$$

所以又可写为

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{c}arcth\frac{c}{x}。 \tag{2.6.63}$$

由于 $\frac{\rho}{cshu}=\sin\theta$，$\frac{z}{cchu}=\cos\theta$，有

$$\frac{\rho^2}{c^2sh^2u}+\frac{z^2}{c^2ch^2u}=1。 \tag{2.6.64}$$

按椭球坐标定义，如引入

$$\begin{aligned} c^2ch^2u&=b^2+\xi \\ c^2sh^2u&=a^2+\xi \end{aligned} \tag{2.6.65}$$

则（2.6.64）式化为

$$\frac{\rho^2}{a^2+\xi}+\frac{Z^2}{b^2+\xi}=1, \tag{2.6.66}$$

这就是标准回转椭球方程。由

$$\begin{aligned} ch^2u-sh^2u&=1 \\ c^2&=b^2-a^2 \end{aligned} \tag{2.6.67}$$

式中 b 和 a 分别为椭球的长半轴和短半轴，势也可表示为标准椭球坐标下的表达形式（参看朗道《连续介质电动力学》，上册 P34）

$$\Phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{b^2-a^2}}arcth\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2+\xi}}。 \tag{2.6.68}$$

回转椭球的电容也可求出（当 $\xi=0$ 时）

$$C=\frac{4\pi\varepsilon_0\sqrt{b^2-a^2}}{arcch\frac{b}{a}}。 \tag{2.6.69}$$

以上讨论的是长椭球体（b>a）的情况。对扁椭球体，b<a，从上面的讨论我们看到，只要把 a 与 b 对换，函数 th 换成 tg 就可以了。

$$\Phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{a^2-b^2}}arctg\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2+\xi}}, \tag{2.6.70}$$

$$C=4\pi\varepsilon_0\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{arccos\frac{b}{a}}。 \tag{2.6.71}$$

当 b→0 时得圆盘的电容

$$c=4\pi\varepsilon_0\frac{2a}{\pi}。 \tag{2.6.72}$$

§2.7 电像法

1. 电像法的基本思想

如果空间只有点电荷，而边界是导体面或介质面，则在点电荷的场的作用下，边界面上出现感应或极化电荷。由迭加原理，空间区域内的总场应等于区域内点电荷的场加上边界面上感应或极化电荷的场。从静电场基本方程的角度来看，电势满足泊松方程

$$\nabla^2\Phi=-\frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r}-\vec{r}')。 \tag{2.7.1}$$

一般解可写成

$$\Phi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}'|}+F(\vec{r})；$$

$$\nabla^2F(\vec{r})=0。 \tag{2.7.2}$$

$\Phi(\vec{r})$ 中第一项是区域内的点电荷的贡献，已由确定的库仑定律形式给出，而第二项 $F(\vec{r})$ 正是边界面上感应或极化电荷的贡献，它是未被确定的。因此，解此类问题的关键是求

出 $F(\vec{r})$。$F(\vec{r})$ 满足拉普拉斯方程，应由整个 $\Phi(\vec{r})$ 满足的边界条件来定解。在边界面简单而对称的情形下，上一节讨论的分离变量法是求 $F(\vec{r})$ 的一种直接解方程的方法，本节所要介绍的电像法，不是直接解方程，而是对边界上的电荷作某种等效代替，从而较简便地找出 $F(\vec{r})$，它属于一种间接方法。

电像法的基本思想是，用假想的集中电荷来等效代替某些规则而对称的导体或介质面（如平面、球面、圆柱面）上感应电荷或极化电荷分布。所谓等效代替，是通过适当选取假想电荷的大小和位置，以保证仍然满足求解区域原来的方程和边界条件。因此，求解区域内的场便是原有点电荷产生的场与等效电荷产生的场的线性迭加。根据唯一性定理，由于求解区原来的方程和边界条件均得到满足，所以这样求出的解是唯一正确的解。计算结果表明，假想电荷所在点对于边界面来说总是原有电荷所在点的共轭点。如将边界面看成一面镜子，假想电荷就是原有电荷在"镜"中的"像"，因此将假想电荷称为像电荷。电像法也正是由此而得名。

应当注意，在电像法中边界面的效果被等效代替了，这就意味着用扩大的无界区域代替了原来的有界区域，把实际不均匀的介质看成了均匀介质。同时，因为像电荷在求解区内的势必须是拉普拉斯方程的解，所以像电荷必须在求解区之外。

2. 点电荷和接地无限大导体平面的情形

设在真空中距点荷 q 为 d 处有一接地的无限大导体平面。取导体表面为 Z＝0 的面，Z 轴通过 q，则点电荷 q 的位置矢量为 $\vec{d}$，整个空间以导体表面为界可分为两个区域分别求解。

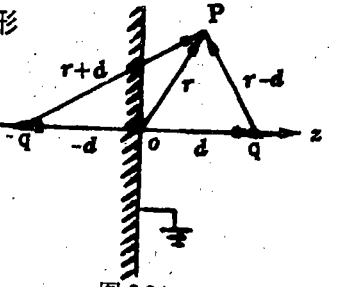


图 2.24

$Z<0$ 的半空间本来没有电荷，据静电屏蔽效应，它不受外界电场的影响，所以 $\Phi=0$。

$Z>0$ 的半空间，点电荷 q 发出的电力线终止在导体表面的感应电荷上，并与导体表面垂直。可见导体表面感应电荷对该区域的影响相当于该求解区外 $-\vec{d}$ 处点电荷 $-q$ 的贡献。由此我们提出尝试解

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{|\vec{r}-\vec{d}|} - \frac{q}{|\vec{r}+\vec{d}|}\right], \tag{2.7.3}$$

其中 $|\vec{r}-\vec{d}|$ 和 $|\vec{r}+\vec{d}|$ 各为 q 和 $-q$ 到观测点 P 的距离：

$$|\vec{r}-\vec{d}| = [x^2+y^2+(z-d)^2]^{1/2},$$

$$|\vec{r}+\vec{d}| = [x^2+y^2+(z+d)^2]^{1/2}。$$

而 $Z>0$ 的区域电势满足的方程和边界条件是

$$\nabla^2\Phi = -\frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r}-\vec{d}),$$

$\Phi=0$（在 $z=0$ 的面及无穷远面上）。

显然，尝试解（2.7.3）满足上述条件，根据唯一性定理，它就是 $Z>0$ 的求解区域的正确解。

由此可见，若 $Z>0$ 的区域内位置 $\vec{d}$ 处有一点电荷，则 $z=0$ 的接地无限大导体平面对于该区域的作用可用一个位于 $-\vec{d}$ 处的假想电荷 $-q$ 等效代替，这假想电荷就称为原电荷 q 的电像。

〔例 2－25〕　点电荷 q 与接地无限大导体平面相距为 d，求平面上的感应电荷分布，电荷 q 与平面的相互作用能及作用于电荷 q 的力。

解：导体平面上的感应面电荷密度

$$\sigma = D_n = \varepsilon_0 E_n 。$$

利用上述结果 (2.7.3) 式

$$E_n = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}\bigg|_{z=0} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{\mathrm{d}}|} - \frac{1}{|\vec{r}+\vec{\mathrm{d}}|}\right]\bigg|_{z=0}$$

$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{\mathrm{d}-z}{[x^2+y^2+(z-\mathrm{d})^2]^{3/2}} + \frac{\mathrm{d}+z}{[x^2+y^2+(z+\mathrm{d})^2]^{3/2}}\right\}\bigg|_{z=0}$$

$$= -\frac{q\mathrm{d}}{2\pi\varepsilon_0 (\rho^2+\mathrm{d}^2)^{3/2}} 。$$

其中 $\rho^2 = x^2 + y^2$，代入前式

$$\sigma_n = -\frac{q\mathrm{d}}{2\pi (\rho^2+\mathrm{d}^2)^{3/2}} 。 \tag{2.7.4}$$

导体平面上的总感应电荷

$$Q = \int_S \sigma \mathrm{d}s = -q\mathrm{d}\int_0^\infty \frac{\rho \mathrm{d}\rho}{(\rho^2+\mathrm{d}^2)^{3/2}} = -q \tag{2.7.5}$$

恰好等于像电荷。

点电荷 q 与导体平面的互作用能

$$W = \frac{1}{2}q\Phi = \frac{1}{2}q\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{2\mathrm{d}} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{4\mathrm{d}} 。 \tag{2.7.6}$$

点电荷 q 所受的作用力

$$F = -\frac{\partial W}{\partial \mathrm{d}} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{(2\mathrm{d})^2} 。 \tag{2.7.7}$$

其方向指向导体平面。此结果相当于点电荷 q 与像电荷−q 之间的库仑作用力。

〔例 2－26〕　无限长的两线输电线半径均为 R，相距 D，在地面高 h 处与地面平行，若 $h>>R$，$D>>R$，试求导体在地表面之上每单位长度的电容。

解：设两输电线每单位长度带电各为$+\tau$ 和$-\tau$，由题中近似条件，忽略两导线对其电荷分布的相互影响，将地面看作导体平面，并取为电势参考点，则地面对于上半空间的作用可用如图电像等效代替。

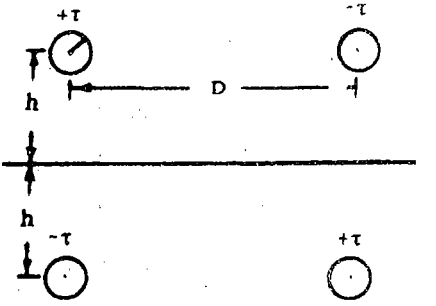


图 2.25

带电荷$+\tau$ 的导体的电势为

$$V_+ = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{h}{R} - \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{h}{D} - \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{h}{2h}$$

$$+ \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{h}{\sqrt{D^2+(2h)^2}}$$

$$= \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{D}{R\sqrt{1+\left(\frac{D}{2h}\right)^2}}$$

同理，带电荷$-\tau$ 的导线的电势为

$$V_- = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{D}{R\sqrt{1+\left(\frac{D}{2h}\right)^2}}$$

因此，两线输电线在地面之上每单位长度的电容为

$$C = \frac{\tau}{V_+ - V_-} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\{D/[R\sqrt{1+(D/2h)^2}]\}}。\quad (2.7.8)$$

3. 点电荷和接地导体球的情形

设一点电荷 q 和半径为 R 的接地导体球的球心相距为 a，取球心为原点，球心到点电荷 q 的方向为 Z 轴方向，则 q 的位置矢量 $\vec{a}=a\vec{e}_z$。球内区域的电势显然为零，下面讨论球外区域的电势。

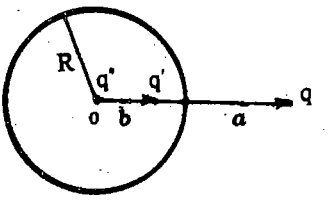


图 2.26

由对称性可知，像电荷 q' 应在 Z 轴上，且因 q 在球外，q' 的位置矢量 $\vec{b}=b\vec{e}_z$ 必在球内。这样球外区域的电荷分布未变，仍满足原来的泊松方程。现在再来适当选取 q' 和 b 的大小，使电荷 q 和 q' 产生的势满足在球面上电势为零的边界条件。

q 和 q' 在矢径为 $\vec{r}$ 的观测点产生的势

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{|\vec{r}-\vec{a}|}+\frac{q'}{|\vec{r}-\vec{b}|}\right]\\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{|r\vec{e}_r-a\vec{e}_z|}+\frac{q'}{|r\vec{e}_r-b\vec{e}_z|}\right]\\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{r\left|\vec{e}_r-\frac{a}{r}\vec{e}_z\right|}+\frac{q'}{b\left|\vec{e}_z-\frac{r}{b}\vec{e}_r\right|}\right]。\end{aligned}\tag{2.7.9}$$

在球面上的电势为

$$\Phi|_{r=R}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{R\left|\vec{e}_r-\frac{a}{R}\vec{e}_z\right|}+\frac{q'}{b\left|\vec{e}_z-\frac{R}{b}\vec{e}_r\right|}\right]。$$

由此式可见，如选取

$$\frac{q}{R}=-\frac{q'}{b},\qquad \frac{a}{R}=\frac{R}{b},$$

则对于任意的$\vec{e}_r$和$\vec{e}_z$都有$\Phi|_{r=R}=0$。因此像电荷的量值和位置分别为

$$q'=-\frac{R}{a}q,\qquad b=\frac{R^2}{a}。\tag{2.7.10}$$

由$\sigma=-\varepsilon_0\frac{\partial\Phi}{\partial r}\Big|_{r=R}$可计算球面上感应电荷面密度，并用直接积分可以证明球面上总感应电荷等于像电荷。分析电力线的分布，由q发出的电力线只有一部分收敛于球面上，其余部分伸至无穷远处，所以$|q'|<q$，(2.7.10)式正反映了这一点。

〔例 2–27〕 在半径为 R 的孤立导体球前面有一点电荷 q (q 与球心相距为 a)，求球外空间的电势。

解：这是导体球不接地，原来又不带电的情况，球外空间电势的方程是由点电荷 q 所决定的泊松方程，其边界条件是

(1) 球面所包围的净电荷为零；

(2) 导体球面为等势面；

(3) 在无穷远面上电势为零。

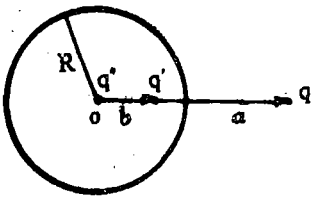


图 2.27

由前所述讨论已知，位于$\vec{a}$处的点电荷q和位于$\vec{b}$处的像电荷q'使导体球等势，现若又要满足球外区域的上述方程和边界条件，必须在导体球心再置一点电荷$q''=-q'=\frac{R}{a}q$。则球外任一点的电势为

$$\Phi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{|\vec{r}-\vec{a}|}+\frac{q'}{|\vec{r}-\vec{b}|}+\frac{q''}{|\vec{r}|}\right]$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{|\vec{r}-\vec{a}|}-\frac{Rq}{a\left|\vec{r}-\frac{R^2}{a^2}\vec{a}\right|}+\frac{\frac{R}{a}q}{r}\right] \quad (2.7.11)$$

实际上，此情况下必须考虑同时存在于球面上的正负两种感应电荷的作用，q′ 正是与 q 异号的感应电荷的等效代替，q″正是与 q 同号的感应电荷的等效代替。

由所得结果可知球面上的电势

$$\Phi|_{r=R}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q''}{R}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} \quad (2.7.12)$$

相当于点电荷 q 在球心的电势。如将 q 移至很远处（$a\to\infty$），同时增大 q，使在球心处的电场 $E_0=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^2}$ 保持有限，这时 $b=\frac{R^2}{a}\to 0$，像电荷 q' 将趋近球心，但 $q'b=-R^3\frac{q}{a^2}$ 仍保持有限，因而 q' 与 q'' 在球心形成一个电偶极子，其电矩

$$\vec{P}=4\pi\varepsilon_0 R^3\vec{E}_0。$$

无穷远处的一个无限大的点电荷在导体球附近产生的电场 $\vec{E}_0$ 可看作是均匀的，因此一个绝缘金属球在均匀电场中受感应后，它的感应电荷在球外空间的作用相当于一个处在球心、电矩为 $4\pi\varepsilon_0 R^3\vec{E}_0$ 的电偶极子，这与分离变量法中得到的结果相同。

〔例 2-28〕 半径为 R 的接地导体球外充满均匀介质 ε，离球心为 a 处（a＞R），置一点电荷 q，用分离变量法求空间各点电势，并证明所得结果与电像法结果相同。

解：如图 2.28 选取坐标。

球内势显然为零，球外势可写为

$$\Phi(r,\ \theta)$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{|\vec{r}-\vec{\alpha}|}$$

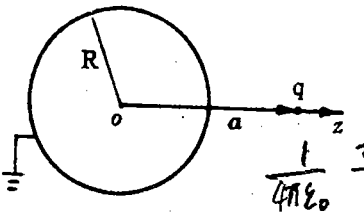


图 2.28

$$+\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l+B_l r^{-(l+1)}\right)P_l\ (\cos\theta)\ 。\qquad (2.7.13)$$

当 $r\to\infty$ 时，$\Phi\to 0$，得 $A_l=0$。当 $r=R$ 时，$\Phi=0$，为利用这一边界条件，将 (2.7.13) 式中的第一项在球面附近 $(r<a)$ 展开

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|}=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{a}\left(\frac{r}{a}\right)^l P_l\ (\cos\theta)\ 。$$

则由

$$\Phi|_{r=R}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{a}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{R}{a}\right)^l P_l\ (\cos\theta)$$

$$+\sum_{l=0}^{\infty}B_l R^{-(l+1)}P_l\ (\cos\theta)\ =0,$$

得

$$B_l=-\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{R}{a}q\left(\frac{R^2}{a}\right)^l,$$

所以

$$\Phi\ (r,\ \theta)\ =\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{|\vec{r}-\vec{a}|}$$

$$+\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(-\frac{R}{a}q\right)\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{R^2}{a}\right)^l}{r^{l+1}}P_l\ (\cos\theta)\ 。(2.7.14)$$

又

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{R^2}{a}\right)^l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta)=\frac{1}{\left|\vec{r}-\frac{R^2}{a}\vec{e}_z\right|},$$

令 $q'=-\frac{R}{a}q$，$\frac{R^2}{a}\vec{e}_z=\vec{b}$，球外电势就可写成

$$\Phi(r,\theta)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{q}{|\vec{r}-\vec{a}|}+\frac{q'}{|\vec{r}-\vec{b}|}\right]。\tag{2.7.15}$$

与 (2.7.9) 和 (2.7.10) 式对照，这正是点电荷与接地导体球系统的镜像法结果。

〔例 2－29〕　由距离 l 很小的正负点电荷 $\pm q$ 构成一个电偶极子，将它放在半径为 R 的接地球形导体空腔中心。

(1) 求空间各点的电势，对其表达式作多极展开，取到偶极项为止；

(2) 求空腔表面的电荷分布和空间各点的电场强度。

解：(1) 选取球坐标如图。由静电屏蔽，球外势为零，据习题二第 27 题的结果，球内势由下列电荷产生：

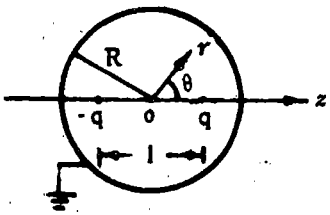


图 2.29

位于 $\vec{a}=\frac{l}{2}\vec{e}_z$ 的电荷 q，

位于 $\vec{b}=\frac{R^2}{a}\vec{e}_z=\frac{2R^2}{l}\vec{e}_z$ 的像电荷 $q'=-\frac{R^2}{a}q=-\frac{2R}{l}q$，

位于 $-\vec{a}$ 的电荷 $-q$，

位于 $-\vec{b}$ 的像电荷 $-q'$。

q和q'产生的势

$$\Phi_1(r,\theta)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{|\vec{r}-\vec{a}|}+\frac{q'}{|\vec{r}-\vec{b}|}\right]$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[q\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{r^{n+1}}P_n(\cos\theta)+q'\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{b^{n+1}}P_n(\cos\theta)\right]$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[q\left(\frac{1}{r}+\frac{a}{r^2}\cos\theta\right)+q'\left(\frac{1}{b}+\frac{r}{b^2}\cos\theta\right)\right]$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)+\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{ql}{r^2}\cos\theta-\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{ql}{R^3}r\cos\theta。$$

$-q$ 和 $-q'$ 产生的势（在 $\Phi_1(r,\theta)$ 的表达式中作代换 $q\to -q$，$l\to -l$ 即得）

$$\Phi_2(r,\theta)=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)+\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{ql}{r^2}\cos\theta$$

$$-\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{ql}{R^3}r\cos\theta。$$

所以球内总电势为

$$\Phi(r,\theta)=\Phi_1(r,\theta)+\Phi_2(r,\theta)$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{pr}{R^3}\cos\theta。\qquad(2.7.16)$$

(2) 球腔表面的电荷分布

$$\sigma=-\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial n}=\varepsilon_0\frac{\partial\Phi}{\partial r}\Big|_{r=R}$$

$$=-\frac{3p}{4\pi R^3}\cos\theta。\qquad(2.7.17)$$

球外电场强度为零，球内电场强度为

$$\vec{E}\ (r,\ \theta)\ = -\nabla\Phi = -\frac{\partial\Phi}{\partial r}\vec{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\ (2\cos\theta\vec{e}_r + \sin\theta\vec{e}_\theta) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}}{R^3}。 \qquad (2.7.18)$$

σ 正是在原有电偶极子的场作用下，接地导体球腔内表面产生的感应电荷分布。球内场$\vec{E}\ (r,\ \theta)$ 的第一项是电偶极子本身的场，第二项就是上述感应电荷的场，这是一个均匀场。

〔例 2-30〕 一半径为 a 的孤立导体球其球心到无限大接地导体平板的距离为 Z，假定 Z>>a，试求：

1）对导体球和导体平板之间电容的主要贡献。

2）当电容以$\frac{a}{Z}$ 的幂级数表示时，对上述电容值的第一项非零修正值。

3）当导体球携带电荷 Q 时，球与平板之间互作用力的主要项。球与平板完全分离时能量是多大？此能量同带电+Q 和-Q，开始相距 2Z 的两球完全分离的能量作比较，解释这两个值之间的差别。

解：1）设导体球带电量为 q，求出它的电势 Φ，系统的电容便是

$$C = \frac{q}{\Phi}。$$

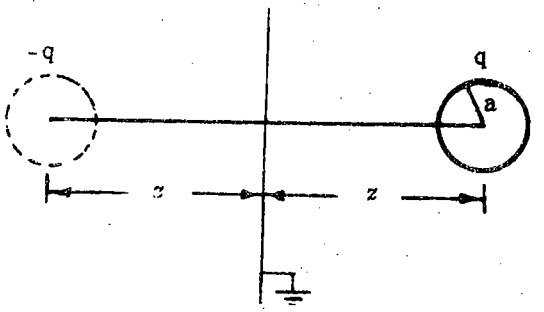


图 2.30

由镜像法，带电 q 的导体球对无限大接地导体平板的镜像是一个位于其共轭点的带电-q 的球（如图）。由于Z>>a，镜像电荷在导体球所在处的贡献可近似地看作一点电荷-q。则导体球面上电势的主要项是

$$\Phi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2Z-a}\right)\approx\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a},$$

对电容的主要贡献

$$C=\frac{q}{\Phi}\approx 4\pi\varepsilon_0 a \tag{2.7.19}$$

相当于一个孤立导体球的电容 C_0。

2）利用镜像法结果和 $Z>>a$ 的近似条件，如图所示，球 A' 对 A 的作用可看为点电荷 $-q$ 对球 A 的作用，球 A 对 A' 的作用可看为点电荷 q 对球 A' 的作用。由此导体球与导体平板的互作用等效为下列点电荷的互作用：球 A 中心的 $q+q'$，距 A 中心为 b 处的 $-q'$，球 A' 中心的 $-q-q'$，距球 A' 中心为 b 处的 q'。

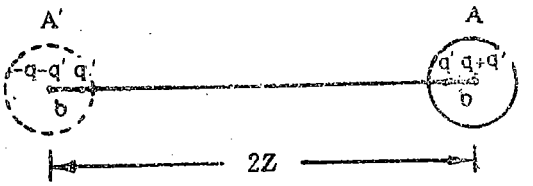


图 2.31

$$q'=-\frac{a}{2z}q\ ,\quad b=\frac{a^2}{2z},$$

于是导体球 A 的电势为

$$\Phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q+q'}{a}+\frac{-q'}{a-b}+\frac{-q-q'}{2Z-a}+\frac{q'}{2Z-a-b}\right]$$

$$\approx\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(1-\frac{a}{2Z}\right)。$$

所以

$$C=\frac{q}{\Phi}\approx 4\pi\varepsilon_0 a\left(1-\frac{a}{2Z}\right)^{-1}\approx C_0\left(1+\frac{a}{2Z}\right)。\qquad(2.7.20)$$

式中 $C_0=4\pi\varepsilon_0 a$ 为孤立导体球的电容，其第一项修正即 $C'=\frac{a}{2Z}C_0$，可见无限大导体板的存在使导体球的电容增大。

3）由前面的分析可知，当导体球携带电荷 Q 时，球与板之间互作用的主要贡献，可看作带电分别为 Q 和−Q，相距 2Z 的两个点电荷之间的互作用，因此互作用力的主要项为

$$F\approx-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{4Z^2}\qquad(2.7.21)$$

为相互吸引力。

球与板完全分离时的能量，即为将球从现有位置（距板为 Z）搬到无穷远处外力克服静电力所做的功。坐标原点选在平板上，则

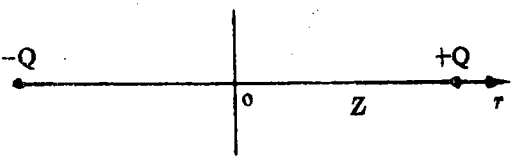


图 2.32

$$\mathrm{d}W=F\mathrm{d}r,$$

$$F = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{(2r)^2},$$

$$W = \int_z^\infty F\mathrm{d}r = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{4Z}。 \tag{2.7.22}$$

带电+Q 和−Q，开始相距 2Z 的两球完全分离能量：坐标原点选在−Q 上，与上同理有

$$F' = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^2},$$

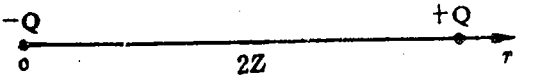


图 2.33

$$W' = \int_{2z}^\infty F'\mathrm{d}r$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{2Z}。 \tag{2.7.23}$$

在前一情形中，搬动带电 Q 的导体球，其像电荷 $-Q$ 也随之自然移动，坐标原点不能选在这样的变动点上，必须选在导体平板上。在后一情形中则不然，坐标原点可选在任一电荷上。由所得表达式可见，在任意一个位置 r 处，$F < F'$，从而导致 $W < W'$，其原因正是由于将电荷 Q 向 $+\infty$ 搬动时，其镜像电荷 $-Q$ 自动向 $-\infty$ 移动。

〔例 2－31〕 1）用绝缘架支撑的一个导电小球半径为 a 带电荷 q，第二个相似的小球不带电，两球心之间距离为 d，并且 $\mathrm{d} >> a$，计算两球之间的作用力（精确到$\frac{a}{\mathrm{d}}$ 的最低级非零项）。

2）现用导电良好的金属丝将第二个球接地，两球间的作用力是多大?

3）将两球都绝缘，每个球带电荷 q，求对于电荷之间作用力 $\frac{q^2}{\mathrm{d}^2}$ 值的最低级修正。

解：1）由于 $\mathrm{d} >> a$，带电 q 的小球对不带电的小球的作用可以近似地看成点电荷 q 对一个不带电的导体球的作用。根据镜像法，在不带电小球内有镜像电荷 $q' = -\frac{a}{\mathrm{d}}q$ 和 $-q'$，并两者相距为 $b = \frac{a^2}{\mathrm{d}}$。如将 $-q'$ 与 q' 组成的体系看成一个电矩为 $\vec{p} = q'b\ (-\vec{e}_{\mathrm{d}})$ 的偶极子，则两球间的作用力即为此偶极子和点电荷 q 的作用力

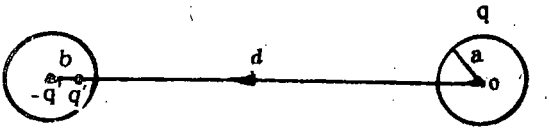


图 2.34

$$\vec{F} = \frac{1}{2}\nabla(\vec{p}\cdot\vec{E})$$

$$= \frac{1}{2}\nabla\left[q'b(-\vec{e}_{\mathrm{d}})\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\left(\mathrm{d}-\frac{b}{2}\right)^2}\vec{e}_{\mathrm{d}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\vec{e}_{\mathrm{d}}\frac{\partial}{\partial \mathrm{d}}\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2a^3}{\mathrm{d}^2}\frac{1}{\left(\mathrm{d}-\frac{a^2}{2\mathrm{d}}\right)^2}\right]$$

$$\approx \frac{1}{2}\vec{e}_{\mathrm{d}}\frac{q^2a^3}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial \mathrm{d}}\left[\frac{1}{\mathrm{d}^4}\left(1+\frac{a^2}{\mathrm{d}^2}\right)\right]$$

$$\approx -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a^3}{\mathrm{d}^5}\vec{e}_{\mathrm{d}}。 \tag{2.7.24}$$

此力为一吸引力。

2) 第二个（不带电的一个）接地，相当于在 1) 的分析结果中没有像电荷−q′，则两球间的作用力即为 q 与 q′ 间的作用力

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{(\mathrm{d}-b)^2}\approx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{\mathrm{d}^2}\left(1+\frac{2b}{\mathrm{d}}\right)$$

$$\approx -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a}{\mathrm{d}^3}\left(1+\frac{2a^2}{\mathrm{d}^2}\right)。 \tag{2.7.25}$$

和 1) 中结果相比，因少了 q 与−q′ 之间的排斥力，使得相互作用引力更大了。

3) 若将两球绝缘且均匀带电 q，则当忽略球的大小时两球的作用力为$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{\mathrm{d}^2}$。要对此进行修正，就需计及电荷的偶极分布，因 $d>>a$，可将一个球对另一个球的作用近似看成点电荷 q 对带电为 q 的导电球的作用。利用电像法可得，每个球除带电 q 外，球内均有相距为 b 的镜像电荷 q′ 和−q′，此二者形成一个电矩 p=q′ b 的电偶极子，如图 2.35 所示。如仅考虑对$\frac{q^2}{\mathrm{d}^2}$的最低级修正，则只需计算 q 与 p 的作用，注意到两球的 q 和 p 都各自相等，利用 1) 中结果我们将 1) 中的作用力记为F_1，最后得两球的互作用力近似为

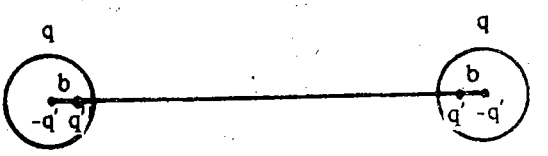


图 2.35

$$F \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{d^2} + 2F_1 \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{d^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4q^2a^3}{d^5}, \qquad (2.2.26)$$

式中第二项便是对$\frac{q^2}{d^2}$值的最低级修正。

4. 点电荷和两种半无限均匀介质的情形

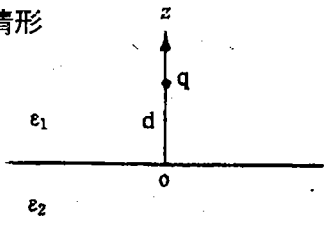


图 2.36

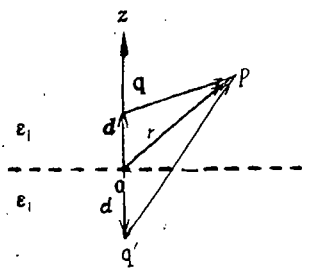
设上、下半空间各充满介电常数为 ε_1、ε_2 的均匀介质，其交界面为 $Z=0$ 的无限大平面，有一点电荷 q 位于介质 ε_1 中 Z 轴上距平面为 d 处，这样 $Z>0$ 区域的电势 Φ_1 满足由点电荷 q 决定的泊松方程，$Z<0$ 区域的电势 Φ_2 满足拉普拉斯方程。在 $Z=0$ 的介质交界面上，电势 Φ_1、Φ_2 必须满足边界条件

$$\Phi_1 = \Phi_2 \ , \quad \varepsilon_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = \varepsilon_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial n}。$$

根据对称性的分析，我们假定：如在 $Z>0$ 的区域求解，像电荷为位于 $-\vec{d}$ 处的 q'；如在 $Z<0$ 的区域求解，像电荷为位于 $\vec{d}$ 处的 q'''，它与原来的点电荷 q 重合，设 $q+q'''=q''$，即 q'' 包含了点电荷 q 与像电荷 q''' 两者的贡献，于是，上、下半空间的势各为

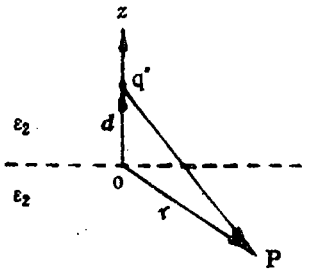
$$\Phi_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\left[\frac{q}{|\vec{r}-\vec{d}|} + \frac{q'}{|\vec{r}+\vec{d}|}\right], \qquad (2.7.27)$$

$$\Phi_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_2}\frac{q''}{|\vec{r}-\vec{d}|}。 \qquad (2.7.28)$$



(a)

图 2.37(a)



(b)

图 2.37(b)

这样假定的像电荷的位置保证了求解区域内的上述方程不变，下面通过适当选取像电荷的大小使边界条件得到满足。

因 $|\vec{r}-\vec{d}|=[x^2+y^2+(z-d)^2]^{1/2}$，

$|\vec{r}+\vec{d}|=[x^2+y^2+(z+d)^2]^{1/2}$，

在 $Z=0$ 的面上，$|\vec{r}-\vec{d}|=|\vec{r}+\vec{d}|=(\rho^2+d^2)^{1/2}$，要满足 $\Phi_1=\Phi_2$ 必须有

$$\frac{1}{\varepsilon_1}(q+q')=\frac{1}{\varepsilon_2}q''。 \tag{2.7.29}$$

又

$$\varepsilon_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial n}=\varepsilon_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\bigg|_{z=0}$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{-q(z-d)}{|\vec{r}-\vec{d}|^3}+\frac{-q'(z+d)}{|\vec{r}+\vec{d}|^3}\right]\bigg|_{z=0}$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{qd}{(\rho^2+d^2)^{3/2}}+\frac{-q'd}{(\rho^2+d^2)^{3/2}}\right],$$

$$\varepsilon_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial n}=\varepsilon_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\bigg|_{z=0}=\frac{1}{4\pi}\frac{-q''(z-d)}{|\vec{r}-\vec{d}|^3}\bigg|_{z=0}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \frac{q'' \mathrm{d}}{(\rho^2 + \mathrm{d}^2)^{3/2}},$$

需要满足 $\varepsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n}$，必须有

$$q - q' = q''。 \tag{2.7.30}$$

将(2.7.29)和(2.7.30)式联立求解，便得像电荷的大小为

$$q' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q \quad , \quad q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q。 \tag{2.7.31}$$

将此结果代入(2.7.27)和(2.7.28)，就可求出空间各点的电势。

应用上述结果时必须注意，我们是假定真实电荷所在区域的介质为介质 1，从而以 ε_1 标志；推导过程中又假定 q'、q'' 与 q 同号，由 (2.7.31) 可见，q'' 总是与 q 同号，而 q' 则不然。要看 $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ 的符号了。从物理上看，此情况下像电荷是不同介质交界面上极化电荷的等效代替，对于不同的求解区域，介质不同、所以像电荷也不同。

〔例 2－32〕　介电常数为 ε_1 和 ε_2 的两种均匀电介质充满整个空间，其界面是一个无限平面，电荷 q_1 和 q_2 在该平面的一条垂线上，且位于平面两边，与平面相距均为 d，求作用在各个电荷上的力。

解：根据迭加原理，问题可作如下分解

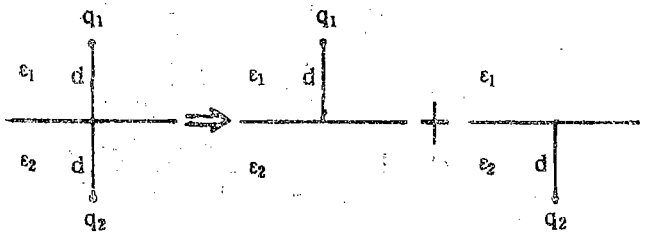


图 2.38

这样就可以利用上述结果进行求解，从而问题变成了

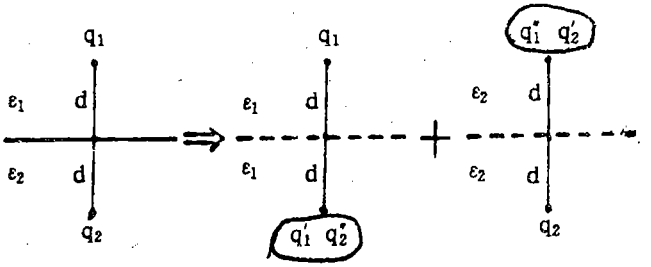


图 2.39

即就是说，上半空间的场是由 q_1、q'_1、q''_2 产生的，下半空间的场是由 q_2、q'_2、q''_1 产生的。由 (2.7.31) 式可知，这些像电荷的表示式为

$$q'_1=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q_1\ ,\quad q''_2=\frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q_2,$$

$$q'_2=\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}q_2\ ,\quad q''_1=\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}q_1。$$

所以电荷 q_1 所受的作用力为

$$F_1=q_1E_1=q_1\frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\frac{q'_1+q''_2}{(2d)^2}$$

$$=\frac{1}{4\pi}\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\frac{q_1^2}{4d^2}+\frac{1}{4\pi}\frac{q_1q_2}{2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)d^2},\qquad(2.7.32)$$

电荷 q_2 所受的作用力为

$$F_2=q_2E_2=q_2\frac{1}{4\pi\varepsilon_2}\frac{q'_2+q''_1}{(2d)^2}$$

$$=\frac{1}{4\pi}\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\frac{q_2^2}{4d^2}+\frac{1}{4\pi}\frac{q_1q_2}{2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)d^2}。\qquad(2.7.33)$$

两式中第二项表示 q_1 和 q_2 之间的相互作用力，第一项分别表示界面上的束缚电荷作用于 q_1、q_2 的力，正因为 q_1 和 q_2 本身没有形成一个封闭的力学系统，所以 $F_1 \neq F_2$，如果计及束缚电荷，那么作用于 q_1、q_2 及界面上束缚电荷的力的矢量和应等于零。

5. 点电荷和均匀介质球的情形

设介电常数为 ε_1、半径为 R 的均匀介质球位于介电常数为 ε_2 的均匀无限介质中，球外在距球心为 $\vec{a}$ 处放一点电荷 q。

选用球坐标，取球心为原点，极轴沿 $\vec{a}$ 的方向。利用分离变量法可以求得球外、球内的电势为

$$\Phi_{外}=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{q}{\varepsilon_2|\vec{r}-\vec{a}|}+q\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{l}{l\varepsilon_1+(l+1)\varepsilon_2}\frac{R^{2l+1}}{a^{l+1}}\frac{P_l(\cos\theta)}{r^{l+1}}\right], \tag{2.7.34}$$

$$\Phi_{内}=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{q}{\varepsilon_2|\vec{r}-\vec{a}|}+q\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{l}{l\varepsilon_1+(l+1)\varepsilon_2}\frac{r^l}{a^{l+1}}P_l(\cos\theta)\right]. \tag{2.7.35}$$

此二式中第一项为点电荷 q 及其附近极化电荷的贡献，第二项为球面上极化电荷的贡献。下面将球面极化电荷的势 Φ' 表示为等效的镜像电荷产生的势。令

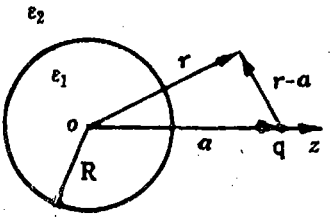


图 2.40

$$\alpha=\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\quad,\quad \beta=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2},$$

则 (2.7.34) 式中的第二项

$$\Phi'_{外}=\frac{\alpha q}{4\pi\varepsilon_2}\frac{R}{a}\cdot\left[\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{r}\left(\frac{R^2/a}{r}\right)^l-\beta\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l+\beta}\frac{1}{r}\left(\frac{R^2/a}{r}\right)^l\right]P_l\ (\cos\theta)\ .$$

利用参数积分

$$\frac{1}{l+\beta}=\int_0^{\infty}e^{-(l+\beta)t}\mathrm{d}t,$$

再作变量代换 $e^{-t}=x$，有

$$\Phi'_{外}=\frac{\alpha qR/a}{4\pi\varepsilon_2}\left[\frac{1}{|\vec{r}-(R^2/a)\vec{e}_z|}\right.$$

$$\left.-\beta\int_0^1\mathrm{d}x\cdot x^{\beta-1}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(R^2x/a)^l}{r^{-(l+1)}}P_l\ (\cos\theta)\right]$$

引入

$$q_1=\alpha q\frac{\beta}{a}\ ,\quad q_2\ (x)\ =q_1\beta x^{-(1-\beta)}\ ,$$

$$\vec{a}_1=\frac{R^2}{a}\vec{e}_z\ ,\quad \vec{a}_2\ (x)\ =\frac{R^2}{a}x\vec{e}_z,$$

球面上极化电荷在球外产生的势可写成

$$\Phi'_{外}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_2}\left[\frac{q_1}{|\vec{r}-\vec{a}_1|}-\int_0^1\mathrm{d}x\frac{q_2\ (x)}{|\vec{r}-\vec{a}_2\ (x)\ |}\right]。\qquad(2.7.36)$$

对 (2.7.35) 式中第二项作类似的处理，在利用参数积分后作变量代换 $e^t=y$，并引入

$$q'_1=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\alpha q\ ,\quad q'_2\ (y)\ =q'_1\beta y^{-\beta}\ ,\quad \vec{a}'_2\ (y)\ =ay\vec{e}_z,$$

球面上极化电荷在球内产生的势可写成

$$\Phi'_{内}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\left[\frac{q_1'}{|\vec{r}-\vec{a}|}-\int_1^{\infty}\mathrm{d}y\frac{q_2'(y)}{|\vec{r}-\vec{a}_2'(y)|}\right]。\qquad(2.7.37)$$

(2.7.36) 式的第一项可看作位于$\vec{r}=\vec{a}_1$处，大小为q_1/ε_2的镜像电荷的势；第二项可看作分布于原点到a_1点的线段上，线密度为$aq_2'(x)/\varepsilon_2R^2$的镜像电荷的势。可见对于球外电势来说，点电荷的镜像电荷是一个点电荷加上一条线电荷。同理，(2.7.37) 是用镜像点电荷和镜像线电荷表示的球内电势，并且当y从1变到∞时，$\vec{a}_2'$从$\vec{a}$变到∞，而$q_2'(y)$从$q_1'\beta$变到零。

可以证明，当介质球的介电常数趋于无穷大时，自然得到未带电的导体球的镜像法结果；当介质球半径趋于无穷大时，自然得到点电荷对于两种半无限介质交界平面的镜像法结果。

利用上述结果，可以得到电偶极子对于介质球面的镜像电荷分布，再与量子统计的方法相结合，就能够讨论原子同凝聚态介质平面、原子同凝聚态介质球面之间的范德瓦尔斯互作用。

§2.8 格林函数法

前面所讨论的分离变量法解决求解区域内电荷分布$\rho=0$的边值问题，电像法解决求解区域有一个点电荷的特殊边值问题。本节讨论的格林函数法是运用格林函数，借助于点电荷的较简单的边值问题而解决一般电荷分布的普遍边值问题，因此，格林函数法和电像法有着密切的联系。

1. 格林函数与一般边值问题的形式解

静电学的一般边值问题是：给定区域V内的电荷分布ρ，给定区域V的边界面S上的第一类边界条件$\Phi|_S$或第二类边界

条件$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_S$，需要求 V 内的电势分布。相应于第一类或第二类边界条件的上述边值问题，称为第一类边值问题或第二类边值问题。

与此对应的格林函数问题是：区域 V 内有一单位点电荷，其边界面 S 上给定电势值或电势的法向微商值，则 V 内电势的解就是格林函数 G。

利用格林公式可以把这两问题的解联系起来。将格林第二个公式

$$\oint_V (\psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi) \mathrm{d}v = \oint_S \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) \mathrm{d}s \qquad (2.8.1)$$

运用于区域 V，函数的变量设为（x′、y′、z′），并取 $\varphi = \Phi$，满足泊松方程

$$\nabla'^2 \Phi = -\frac{\rho(\vec{r}')}{\varepsilon_0}, \qquad (2.8.2)$$

$\psi = G$，满足方程

$$\nabla'^2 G(\vec{r}', \vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \delta(\vec{r}' - \vec{r}) \text{。} \qquad (2.8.3)$$

则有 $\oint_V \left[G(\vec{r}', \vec{r}) \nabla'^2 \Phi(\vec{r}') - \Phi(\vec{r}') \nabla'^2 G(\vec{r}', \vec{r}) \right] \mathrm{d}v'$

$$= \oint_S \left[G(\vec{r}', \vec{r}) \frac{\partial \Phi(\vec{r}')}{\partial n'} - \Phi(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r}', \vec{r})}{\partial n'} \right] \mathrm{d}s' \text{。}$$

由（2.8.3）式上式左边第二项为

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\oint_V \Phi\ (\vec{r}')\ \delta\ (\vec{r}'-\vec{r})\ \mathrm{d}v'=\frac{1}{\varepsilon_0}\Phi\ (\vec{r})\ ,$$

并将（2.8.2）式代入左边第一项，即得

$$\Phi\ (\vec{r})\ =\oint_V G\ (\vec{r}',\ \vec{r})\ \rho\ (\vec{r}')\ \mathrm{d}v'+$$

$$\varepsilon_0\oint_S\left[G\ (\vec{r}',\ \vec{r})\ \frac{\partial\Phi\ (\vec{r}')}{\partial n'}-\Phi\ (\vec{r}')\ \frac{\partial G\ (\vec{r}',\ \vec{r})}{\partial n'}\right]\mathrm{d}s'。$$

(2.8.4)

对于第一类边界条件，我们要求

$$G\ (\vec{r}',\ \vec{r})\ =0\ ,\quad 当\vec{r}'在S上。 \tag{2.8.5}$$

于是（2.8.4）中面积分的第一项等于零，第一类边值问题的解为

$$\Phi\ (\vec{r})\ =\oint_V G\ (\vec{r}',\ \vec{r})\ \rho\ (\vec{r}')\ \mathrm{d}v'$$

$$-\varepsilon_0\oint_S \Phi\ (\vec{r}')\ \frac{\partial G\ (\vec{r}',\ \vec{r})}{\partial n'}\mathrm{d}s'。 \tag{2.8.6}$$

对于第二类边界条件，如选择

$$\frac{\partial G\ (\vec{r}',\ \vec{r})}{\partial n'}=0,\ 当\vec{r}'在S上,$$

则（2.8.4）中面积分的第二项为零。可是将高斯定律用于（2.8.3）后得

$$\oint_S \frac{\partial G}{\partial n'}\mathrm{d}s'=-\frac{1}{\varepsilon_0}。$$

若作上述选择，就与此结果矛盾了，这说明定解方程

$$\nabla^2 G(\vec{r}', \vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r}' - \vec{r}),$$

$$\frac{\partial}{\partial n'} G(\vec{r}', \vec{r}) = 0, \text{ 当}\vec{r}'\text{在}S\text{上}$$

是没有解的，因此，所允许的最简单的边界条件是

$$\frac{\partial G(\vec{r}', \vec{r})}{\partial n'} = -\frac{1}{\varepsilon_0 S}, \text{ 当}\vec{r}'\text{在}S\text{上}, \tag{2.8.7}$$

式中 S 是边界面的总面积，所以第二类边值问题的解为

$$\Phi(\vec{r}) = <\Phi>_S + \int_V G(\vec{r}', \vec{r})\,\rho(\vec{r}')\,\mathrm{d}v'$$

$$+ \varepsilon_0 \oint_S G(\vec{r}', \vec{r}) \frac{\partial \Phi(\vec{r}')}{\partial n'} \mathrm{d}s' \tag{2.8.8}$$

其中 $<\Phi>_S$ 是整个曲面上势的平均值，通常的第二类边值问题是所谓“外域问题”，即体积 V 以两个曲面为界，一个是有限的闭合曲面，另一个是在无穷远处。于是曲面面积 S 是无穷大，边界条件 (2.8.7) 变成齐次的，平均值 $<\Phi>_S$ 化为零。

由 (2.8.6) 和 (2.8.8) 式可见，只要求出区域 V 内的格林函数，则一般边值问题就得到解决。但是，格林函数依赖于区域边界面 S 的形状，要求出它是颇为困难的，只有当区域具有简单几何形状时才能得出解析的解。上节介绍的电像法就是求格林函数的一种方法。

格林函数法也可以用来求拉普拉斯方程的边值问题，在 (2.8.6) 和 (2.8.8) 式中，令 $\rho=0$，就得拉普拉斯方程的相应边值问题的解。

2. 几种简单情形的格林函数

(1) 无界空间的格林函数

在数学复习和补充知识中，我们已经得到不同坐标系中的无界空间的格林函数。在一维直角坐标中是

$$G(x, x') = \frac{-1}{2\varepsilon_0}|x - x'|, \tag{2.8.9}$$

在二维极坐标中是

$$G(\vec{\rho}, \rho') = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln|\vec{\rho} - \vec{\rho}'|, \tag{2.8.10}$$

在三维球坐标中是

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}。 \tag{2.8.11}$$

(2) 上半空间的格林函数

当 $q=1$ 时，上节 (2.7.3) 式表示的势便为上半空间第一类边值问题的格林函数。以导体平面上任一点为坐标原点，设点电荷 q 所在点 $\vec{d}$ 的坐标为 (x', y', z')，镜像点 $-\vec{d}$ 的坐标为 $(x', y', -z')$，观测点 $\vec{r}$ 的坐标为 (x, y, z)，则用直角坐标表示的上半空间的格林函数为

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}}\right]。 \tag{2.8.12}$$

(3) 球外空间的格林函数

当 $q=1$ 时，上节 (2.7.9) 和 (2.7.10) 表示的势便为球外空间第一类边值问题的格林函数，以球心为坐标原点，设电荷 q 所在点的坐标为 (x', y', z')，观测点的坐标为 (x, y, z)，

则前述电荷所在点的矢径$\vec{a}$对应于$\vec{r}'$，镜像点的矢径$\vec{b}$对应于

$$b\frac{\vec{a}}{a}=\frac{b}{a}\vec{r}'=\frac{R^2}{a^2}\vec{r}'=\frac{R^2}{r'^2}\vec{r}',$$

观测点的矢径仍为$\vec{r}$。于是

$$G(\vec{r},\ \vec{r}')=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}-\frac{R/r'}{\left|\vec{r}-\left(\frac{R}{r'}\right)^2\vec{r}'\right|}\right]。$$

设$\vec{r}$与$\vec{r}'$的夹角α，

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}=\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\alpha}},$$

$$\frac{R/r'}{\left|\vec{r}-\left(\frac{R}{r'}\right)^2\vec{r}'\right|}=\frac{R}{r'\sqrt{r^2+\left(\frac{R}{r'}\right)^4r'^2-2rr'\left(\frac{R}{r'}\right)^2\cos\alpha}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{rr'}{R}\right)^2+R^2-2rr'\cos\alpha}}.$$

所以，用球坐标表示的球外空间的格林函数为

$$G(\vec{r},\ \vec{r}')=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'cos\alpha}}-\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{rr'}{R}\right)^2+R^2-2rr'\cos\alpha}}\right]。$$

(2.8.13)

〔例2－33〕　在无穷大导体平面上有半径为a的圆，圆内和圆外用极狭窄的绝缘环绝缘，设圆内电势为V_0，导体板其余部分电势为零，求上半空间的电势。

解：如图选取坐标系。矢径$\vec{r}$和$\vec{r}'$的直角坐标各为$\vec{r}$ $(\rho cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ z)$，$\vec{r}'$ $(\rho'\cos\varphi',\ \rho'\sin\varphi',\ z')$，则上半空间的格林函数 (2.8.12) 式可用圆柱坐标表示为

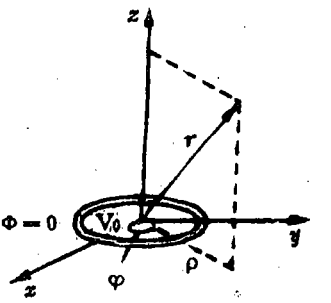


图 2.41

$$G\ (\vec{r},\ \vec{r}')\ =$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2+\rho'^2+z'^2-2zz'-2\rho\rho'\cos\ (\varphi-\varphi')}}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2+\rho'^2+z'^2+2zz'-2\rho\rho'\cos\ (\varphi-\varphi')}}\right]。$$

在 $z=0$ 的平面上，$G\ (\vec{r},\ \vec{r}')\ =0$，在 $z>0$ 的上半空间，$\rho=0$，因此本问题是拉普拉斯方程第一类边值问题，由 (2.8.6) 式，上半空间的电势为

$$\Phi\ (\vec{r})\ =-\varepsilon_0\oint_s\Phi\ (\vec{r}')\ \frac{\partial}{\partial n'}G\ (\vec{r}',\ \vec{r})\ \mathrm{d}s',$$

积分面 S 是 $z'=0$ 的无穷大平面，法线沿$-z'$方向

$$-\frac{\partial G}{\partial n'}=\frac{\partial G}{\partial z'}\bigg|_{z'=0}=$$

$$\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{z}{[\rho^2+z^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos\ (\varphi-\varphi')\ ]^{3/2}}。$$

因 S 上只有圆内部分电势不为零，所以上述面积分只需对 $r\leqslant a$ 积分，则有

$$\Phi\ (\vec{r})\ =\frac{V_0}{2\pi}\int_0^a\rho'\mathrm{d}\rho'\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi'$$

$$\cdot \frac{z}{[\rho^2+z^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\varphi-\varphi')]^{3/2}}$$

$$=\frac{V_0 Z}{2\pi}\int_0^a \rho' d\rho' \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{1}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} \cdot$$

$$\left[1+\frac{\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\varphi-\varphi')}{\rho^2+z^2}\right]^{-\frac{3}{2}}。$$

(2.8.14)

当 $R^2+Z^2>>a^2$ 时，被积函数中指数函数可作如下展开

$$\left[1+\frac{\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\varphi-\varphi')}{\rho^2+z^2}\right]^{-3/2}$$

$$=1-\frac{3}{2}\frac{\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\varphi-\varphi')}{\rho^2+z^2}$$

$$+\frac{15}{8}\frac{[\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\varphi-\varphi')]^2}{(\rho^2+z^2)^2}+\cdots,$$

代入原式积分得

$$\Phi(\vec{r})=\frac{V_0 a^2}{2}\frac{z}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} \cdot$$

$$\left[1-\frac{3}{4}\frac{a^2}{\rho^2+z^2}+\frac{15}{8}\frac{\rho^2 a^2}{(\rho^2+z^2)^2}+\cdots\right]。$$

(2.8.15)

〔**例** 2－34〕　半径为 R 的两个半球组成一导电球，这两个半球由小绝缘环隔开，并保持不同电势 $+V$ 和 $-V$，求球外的电势。

解：如右图选取坐标，绝缘环位于 $z=0$ 的平面，上、下半球的电势各为 $+V$ 和 $-V$。由（2.8.13）式，用球坐标表示的球外空间的格林函数为

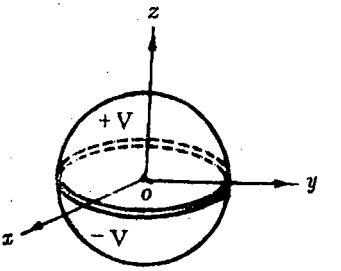


图 2.42

$$G(\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{rr'}{R}\right)^2+R^2-2rr'\cos\alpha}}\right],$$

式中 α 为 $\vec{r}$ 与 $\vec{r}'$ 的夹角，满足关系式

$$\cos\alpha=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')\ 。$$

若 r'（或 r）在球面上，就会有 $G|_S=0$，球外空间 $\rho=0$，于是该问题为拉普拉斯方程第一类边值问题，球外空间的电势为

$$\Phi(\vec{r}) = -\varepsilon_0\oint_S \Phi(\vec{r}')\frac{\partial}{\partial n'}G(\vec{r},\vec{r}')\,\mathrm{d}s',$$

积分面 S 是整个球面，$\vec{n}'$ 指向 $-\vec{r}'$ 的方向，则

$$\frac{\partial G}{\partial n'} = -\frac{\partial G}{\partial r'}\bigg|_{r'=R}$$

$$= -\frac{(r^2-R^2)}{4\pi\varepsilon_0 R\,(r^2+R^2-2rR\cos\alpha)^{3/2}},$$

所以当给定球面上的势时，球外的解是

$$\Phi\ (\vec{r}\ ) = \frac{V}{4\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi' \left[\int_0^1 \mathrm{d}\ (\cos\theta')\ - \int_{-1}^0 \mathrm{d}\ (\cos\theta')\ \right]$$

$$\frac{R\ (r^2 - R^2)}{(r^2 + R^2 - 2rR\cos\alpha)^{\ 3/2}}。 \tag{2.8.16}$$

对第二个积分中的变数作变换 $\theta' \to \pi - \theta'$，$\varphi' \to \pi + \varphi'$，得

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{VR(r^2 - R^2)}{4\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi' \int_0^1 \mathrm{d}(\cos\theta')$$

$$\cdot \left[(r^2 + R^2 - 2rR\cos\alpha)^{-3/2} - (r^2 + R^2 + 2rR\cos\alpha)^{-3/2} \right]。$$

从分母中提出 r^3，并作展开

$$\left(1 + \frac{R^2 - 2rR\cos\alpha}{r^2}\right)^{-3/2} - \left(1 + \frac{R^2 + 2rR\cos\alpha}{r^2}\right)^{-3/2}$$

$$= 6\left(\frac{R}{r}\right)\cos\alpha - 15\left(\frac{R}{r}\right)^3 + 35\left(\frac{R}{r}\right)^3 \cos^3\alpha + \cdots$$

积分

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi' \int_0^1 \mathrm{d}\ (\cos\theta')\ \cos\alpha = \pi\cos\theta,$$

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi' \int_0^1 \mathrm{d}\ (\cos\theta')\ \cos^3\alpha = -\frac{\pi}{4}\cos^3\theta + \frac{3\pi}{4}\cos\theta$$

代入整理，得球外空间电势

$$\Phi\ (\vec{r}\ ) = \frac{3V}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2 P_1\ (\cos\theta)\ - \frac{7V}{8}\left(\frac{R}{r}\right)^4 P_3\ (\cos\theta)$$

$$+ \cdots, \tag{2.8.17}$$

式中 $P_l\ (\cos\theta)$ 是勒让德多项式。

如要讨论正 Z 轴上的势，由于 $\theta = 0$ 时，$\cos\alpha = \cos\theta'$，

r=z，则积分结果为

$$\Phi(z) = V\left[1 - \frac{z^2 - R^2}{z\sqrt{z^2 + R^2}}\right]。 \tag{2.8.18}$$

当 Z=R 时，Φ (Z) =V，这正是预期的结果，当距离很大时，Z>>R，得

$$\Phi(Z) = V\left[1 - \frac{1 - R^2/Z^2}{\sqrt{1 + R^2/Z^2}}\right] \approx \frac{3V}{2}\frac{R^2}{Z^2}。 \tag{2.8.19}$$

〔例 2－35〕 最简单的禁闭模型的格林函数。李政道提出的夸克禁闭模型，在最简单的夸克 — 反夸克体系情形下对应这样一个经典电动力学问题：设半径为 R，介电常数为 ε_1 的均匀介质球置于介电常数为 ε_2 的均匀无限介质中，在球内点电荷 $+q$ 和 $-q$ 对称地放在距球心为 a 处。如果取 $\varepsilon_1 = 1$，$\varepsilon_2 = 0$，则均匀介质中静电场的边值关系 $\vec{n} \cdot (\varepsilon_2 \vec{E}_2 - \varepsilon_1 \vec{E}_1) = 0$ 就变成了 $\vec{n} \cdot \vec{E}_1 = 0$，即球内电场在界面上没有法向分量。于是电力线被完全限制在球内而不能穿出球面，这等效于一对电荷 $\pm q$ 被“禁闭”在球面内，若要把 $\pm q$ 拉出球外，将需要做无穷大的功。因此，通过求解这一经典问题就可得到禁闭模型的格林函数。

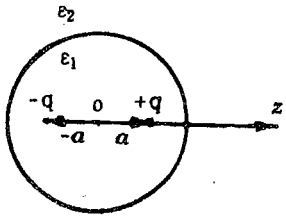


图 2.43

首先分别考虑 $\pm q$ 对球内势的贡献，然后将结果迭加。应用分离变量法，可以求出球内 $\pm \vec{a}$ 处的电荷 $\pm q$ 在球内的势分别为

$$\Phi_{+q}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\left[\frac{q}{|\vec{r}-\vec{a}|}+\right.$$
$$\left.(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\cdot q\sum_{l=0}^{\infty}\frac{l+1}{\varepsilon_1 l+\varepsilon_2\ (l+1)}\frac{(ar)^l}{R^{2l+1}}P_l\ (\cos\theta)\right], \tag{2.8.20}$$

$$\Phi_{-q}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\left[\frac{-q}{|\vec{r}+\vec{a}|}-\right.$$
$$\left.(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\cdot q\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(l+1)\ \ (-1)^l}{\varepsilon_1 l+\varepsilon_2\ \ (l+1)}\frac{(ar)^l}{R^{2l+1}}P_l\ (\cos\theta)\right], \tag{2.8.21}$$

在 φ_{+q} 表式中令 $\varepsilon_1=1$，$\varepsilon_2=0$，$q=1$，得

$$G_+=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|}+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\frac{l+1}{l}\ (ar)^l}{R^{2l+1}}P_l\ (\cos\theta)\right]。$$

引入参数积分，

$$\frac{1}{l}=\int_0^{\infty}\mathrm{d}t e^{-lt},$$

以便用镜像荷表示极化的效果，上式可写成

$$G_+=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|}+\frac{R}{a}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r^l}{\left(\frac{R^2}{a}\right)^{l+1}}P_l\ (\cos\theta)\right.$$
$$\left.+\int_0^{\infty}\mathrm{d}t\left(\frac{R}{a}\right)e^t\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r^l}{\left(\frac{R^2}{a}e^t\right)^{l+1}}P_l(\cos\theta)\right]$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|}+\frac{R}{a}\frac{1}{\left|\vec{r}-\frac{R^2}{a}\vec{e}_z\right|}\right.$$

$$\left.+\int_0^{\infty}\mathrm{d}t\left(\frac{R}{a}\right)e^t\frac{1}{\left|\vec{r}-\frac{R^2}{a}e^t\vec{e}_z\right|}\right].$$

进行变量代换，令 $\left(\frac{R}{a}\right)^2 e^t = x$，则

$$G_+ =\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|}+\frac{Ra}{|a^2\vec{r}-R^2\vec{a}|}+\frac{a}{R}\int_{\left(\frac{R}{a}\right)^2}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{|\vec{r}-x\vec{a}|}\right].$$

(2.8.22)

分析上面处理过程，可以看出对于 G_+ 的表式中各项乘以 -1，并将其中的 $\vec{a}$ 换为 $-\vec{a}$，即得位于 $-\vec{a}$ 处的 $-q$ 对应的格林函数

$$G_- =\frac{1}{4\pi}\left[\frac{-1}{|\vec{r}+\vec{a}|}-\frac{Ra}{|a^2\vec{r}+R^2\vec{a}|}-\frac{a}{R}\int_{\left(\frac{R}{a}\right)^2}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{|\vec{r}+x\vec{a}|}\right].$$

(2.8.23)

因此，所求格林函数

$$G=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|}-\frac{1}{|\vec{r}+\vec{a}|}+\frac{Ra}{|a^2\vec{r}+R^2\vec{a}|}-\frac{Ra}{|a^2\vec{r}+R^2\vec{a}|}\right.$$

$$\left.+\frac{a}{R}\int_{\left(\frac{R}{a}\right)^2}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{|\vec{r}-x\vec{a}|}-\frac{a}{R}\int_{\left(\frac{R}{a}\right)^2}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{|\vec{r}+x\vec{a}|}\right]. \qquad (2.8.24)$$

式中前两项是 $\pm q$ 的贡献，后四项是线分布的镜像荷的贡献。

利用上述格林函数和李政道提出的色介常数的观念，就可以

算出最简单的夸克禁闭位势—库仑势加线性势。

习题二

1. 中性氢原子内的电荷分布所产生的静电势可写为

$$\Phi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{-\alpha r}}{r}\left(1+\frac{\alpha r}{2}\right)$$

其中 q 为电子电荷，$\alpha = \frac{2}{a}$，a 为玻尔半径。试求电荷分布，并讨论其物理意义。

2. 在球形电容器两个球层间部分地充以电介质，电介质分布在立体角 Ω 内，立体角顶点在球层的球心上，球层的半径为 a 和 b，介电常数为 ε，求电容器的电容。

3. 证明调和函数的平均值定理：在无电荷空间中，任一点的静电势的值等于以该点为球心的任一球面上势的平均值。

4. 一均匀带电球的总电量为 $+Q$，设想用某种方式沿任意弦凿一隧道，一个带电为 $-q$，质量为 m 的质点以初速度为零落入该隧洞内。试证明质点将作简谐振动，且振动周期与弦的位置无关（忽略摩擦力与弦洞的半径）。

5. 证明：电中性系统的偶极矩与原点的选择无关。

6. 证明：轴对称分布电荷的四极矩张量只有一个独立分量。

7. 计算带电荷为 q 和 $-q$，半径为 a 和 b 的两个同心圆环的四极矩张量。

8. 均匀带电的长形旋转椭球体半长轴为 a，半短轴为 b，带总电荷 q，求它的四极矩和远处的电势。

9. 若有一电荷分布为 $\rho(\vec{r}) = -\frac{q}{64\pi a^5}r^2 e^{-r/a}\sin^2\theta$，其中 a 为玻尔

半径，求总电荷、偶极矩和四极矩（利用积分公式$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$）。

10. 求线电荷密度为$\lambda(\varphi) = \lambda_0(1+\sin\varphi)$，半径为$a$的圆环在空间远处产生的准确到四极矩项的电势。（$\lambda_0$为常数）。

11. 设真空中静电场的势为

$$\Phi = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} a\ln\frac{R_0}{R} & (R > R_0) \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a}{2}\left(1-\frac{R^2}{R_0^2}\right) & (R < R_0) \end{cases}$$

式中R_0和a是常数，求相应的电荷分布。R是离轴线的距离。

12. 设真空中电场的势为

$$\Phi = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} & (r > a) \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\alpha} & (r < a) \end{cases}$$

式中r是离坐标原点的距离。q和a是常数，求相应的电荷分布。

13. 求氢原子中原子核与电子云的相互作用能。电子的电荷是按体密度$\rho(r) = \frac{-e_0}{\pi a^3}e^{-2r/a}$分布在原子中，式中$e_0$是元电荷，$a$是恒量（原子的玻尔半径）。

14. 在某种近似下，可以认为氦原子中两个电子的电子云具有相同形式，并可由体密度$\rho = -\frac{8e_0}{\pi a^3}e^{-4r/a}$来表征，式中a是原子的玻尔半径，$e_0$是元电荷。求在这种近似下（微扰论的零级近似）氦原子中两个电子的相互作用能。

15. 有一个悬吊在开管上的肥皂泡，在表面张力作用下张紧（表面张力

系数为 a），设空气的介电强度（发生击穿时的电场强度）等于 E_0。试说明：强烈带电的肥皂泡能不能防止它本身的收缩？肥皂泡的最小平衡半径 R 有多大？

16. 有一个平板电容器，浸在不可压缩的液体中，并使平板竖直放置，液体的介电常数为 ε，密度为 τ，两板间的距离为 d，电势差为 V，求电容器内液体上升的高度 h。

17. 有一个导电球，它的中心位于两种均匀无限电介质的分界平面上，电介质的介电常数为 ε_1 和 ε_2，导电球的电荷为 q，求电场以及电荷在球上的分布 σ。

18. 电荷按周期律 $\rho=\rho_0\cos\alpha x\cos\beta y\cos\gamma z$ 分布在空间内，形成一个无限的周期性空间点阵，求电场的势 Φ。

19. 一个无限长的矩形区域，位置和边界情况如图 2.44 所示（沿 Z 方向的长度为无限大），求区域内的电势。

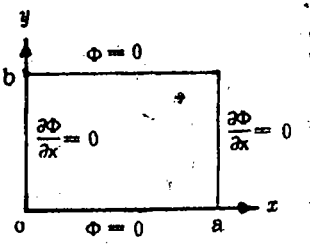


图 2.44

20. 一导体制成的矩形槽，在端面的中心（$x=\frac{a}{2}$）有一小缝，如图 2.45 所示，上板保持电位为 V_0，下板电位为零。求 $0<x<a$，$Z>0$ 的区间内电势的解。

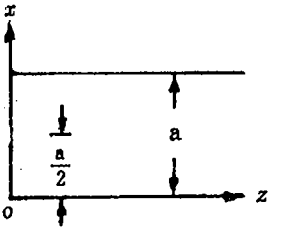


图 2.45

21. 在均匀外电场中置入半径为 R 的导体球，试用分离变量法求下列两种情况的电势：

(1) 导体上接有电池，使球与地保持电势差 Φ_0；

(2) 导体球上带总电荷 Q。

22. 均匀介质球（介电常数为 ε_1）的中心置一自由电偶极子 $\overline{p}_f$，球外充满了另一种介质（介电常数为 ε_2），求空间各点的电势和极化电荷分布。

23. 空心导体球壳的内外半径为 R_1 和 R_2，球中心置一偶极子 $\overline{P}$，球壳上带电 Q，求空间各点电势和电荷分布。

24. 一半径为 a，介电常数为 ε 的无限长介质圆柱体置于均匀外电场中，其轴线与外场 $\overline{E}_0$ 垂直。求圆柱内、外的电势和电场、以及极化电荷分布。

25. 试由半径 $R\to\infty$ 的方法，从点电荷与接地导体球的电像法结果，导出点电荷与接地无限大导体平板的电像法结果。

26. 两块接地的导体板间的夹角为 α，当在板间放一点电荷 q 时，试用电像法就 $\alpha=90°$，$60°$、$45°$ 的情形求其电场的势。

27. 点电荷 q 位于接地球形导体空腔内部，球形腔的半径为 R，q 与球心相距为 a，用镜像法求空间各点的电势。

28. 点电荷 q 和半径为 R 的导体球的球心相距为 a，在下列两种情形下求球外空间的电势：

① 导体球带有电荷 Q；

② 导体球的电势为 V。

29. 在接地的导电平面上有一个凸缘，其形状是半径为 a 的半球，球心在导电平面上，点电荷 q 位于系统的对称轴上，并与导电平面相距为 b $(b>a)$，试用电像法求空间电势，以及在凸缘上的感生电荷 q'。

30. 有一个电矩为 $\overline{P}$ 的偶极子。位于距无限大导体平面为 a 处，求偶极子与感生电荷间的相互作用能，作用在偶极子上的力及力矩。

31. 点电荷 q 位于半径为 R 的导体球之外，电荷与球心的距离为 a，整个系统在介电常数为 ε 的均匀电介质内。试求在下列两种情形下电荷与球的相互作用能与相互作用力：

① 导体球接地；

② 导体球绝缘，并带有电荷 Q。

32. 在真空中有一个半径为 a 的无限长接地导电圆柱体，离圆柱轴线为 l $(l>a)$ 处拉条与它平行的线，线上均匀带电，线密度为 λ。求带电线产生的电场和作用在带电线每单位长度上的力。

33. 用电像法讨论在内半径为 a 的中空接地导电球内的点电荷 q 的问题。试求：

① 球内的势；

② 感生面电荷密度；

③ q 所受作用力的大小与方向。

如果球保持一定的势 V，其解有何变化？如果在球的内外表面上带有总电荷 Q，其解有何变化？

34. 一点电荷 q 放在距接地导体球球心为 d 处，球半径 $R<d$，然后把球与地隔绝，再移走点电荷。

① 现将球劈裂为不连接的两半球，球上的电荷是多少？

② 两半球刚刚分开时，它们之间的排斥力有多大；

③ 假定在两半球分开之前所有的电荷是固定的（即两半球不再作为导体看待），然后分开两半球。当两半球分离一个大距离 r 时，它们之间的作用力如何？力的表达式中取到包含 $\frac{1}{r^3}$ 的项。

第三章　稳恒电流的磁场

磁现象完全不同于电现象。前面研究的静电场是有源无旋场，电力线发源于正电荷，终止于负电荷。也就是说，静电场中存在着单独的荷，它是静电场的源。但磁场却不是这样，到目前为止现实世界还未发现"自由磁荷"存在，我们看到的都是南北两极同时存在的"磁偶极子"。所以磁学中的基本单元不是"磁荷"，而是"磁偶极子"。这个原因在于，磁场是由于电荷的流动——电流而产生的，不是由类似于电荷的那样一种"磁荷"产生的。

本章着重讨论由稳恒电流产生的磁场，这种场也不随时间发生变化，所以又叫静磁场。我们先介绍稳恒电流的实验定律及其电场，再推导静磁场的场方程，并在引入矢量势的基础上讨论磁偶极子。然后讨论有磁介质存在时的情形，最后讨论静磁场边值问题的基本解法，主要介绍矢势法、标势法和镜像法。

§3.1　电流的实验定律及稳恒电场

1.电荷守恒定律和欧姆定律

电荷守恒定律是电磁理论的一条最基本的实验定律，也是到目前为止人们所知道的自然界精确规律之一。它告诉我们，物体所带的电荷是组成物体的基本粒子（电子、质子等）的一个属性，电荷不可能产生或消灭，不论发生何种变化过程，如化学反应、原子核反应甚至基本粒子的转化，一个系统的总电荷严格保持不变。电荷守恒定律在数学上用连续性方程表示，在空间一个确定体积内电荷随时间的减少量，必等于流出该体积表面的电荷量

$$-\int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}v = \oint_S \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{s}。 \tag{3.1.1}$$

这是电荷守恒定律的积分形式。利用高斯公式可得电荷守恒定律的微分形式

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \tag{3.1.2}$$

此式也称为电流的连续性方程，它表示了空间任一点的电荷密度与其邻域中电流密度的关系。

在稳恒电流情况下，一切物理量不随时间变化，则空间各处的净电荷密度不变，因而有

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0, \tag{3.1.3}$$

这一表达式称为稳流条件。它表示稳恒电流分布是无源的，其流线必为闭合曲线，没有发源点和终止点，即稳恒电流只能在闭合回路中通过。

由电磁学中的讨论可知，导体中每一点的电流密度$\vec{J}$与该点的电场强度$\vec{E}$成正比

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}, \tag{3.1.4}$$

其中σ是导体的电导率，这就是欧姆定律的微分形式。在非静电起源的外来场存在的情形下，电流是由电场$\vec{E}$与外来场$\vec{E}_e$共同形成的，所以$\vec{J}$与$\vec{E}+\vec{E}_e$成正比

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_e), \tag{3.1.5}$$

此式即为不均匀电路欧姆定律的微分形式。(3.1.4) 式和 (3.1.5) 式不仅适用于稳定情况，而且也适用于交变电流。

2.稳恒电流的电场

通常，把沿电路回路的积分

$$\oint_L (\vec{E} + \vec{E}_e) \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \varepsilon,$$

称为沿回路的电动势，它代表单位电荷沿此回路移动一周所作的功。由（3.1.5）式。

$$\mathcal{E}=\oint_L \frac{1}{\sigma}\vec{J}\cdot d\vec{l}=\frac{1}{\sigma}\oint_L Jdl=\oint_L \frac{Idl}{\sigma S}=RI,$$

式中 S 代表电路的横截面，R 为总电阻。此式说明电流与电动势成正比，只有在电动势不为零的条件下，才有稳定电流 I 存在。

由于电流稳定时，电荷分布不随时间变化，所以由这些电荷激发的电场（称为稳定电场）和固定电荷的静电场有些性质相同，它们也满足方程

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{D}&=\rho,\\ \nabla\times\vec{E}&=0,\end{aligned}\qquad(3.1.6)$$

后一式意味着 $\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$。这表明恒定电场$\vec{E}$对电动势毫无贡献，电动势完全是由与非静电力相应的外来场$\vec{E}_e$贡献的，因此可将它表示为

$$\mathcal{E}=\oint_L \vec{E}_e\cdot d\vec{l}。\qquad(3.1.7)$$

导体中稳定电流的存在是以外来电动势的存在为前提的，但是稳定电流的分布并不由外来电动势完全决定。在电源以外的导体中，每一点电荷的运动都是由该点的电场直接推动的；在电源内部电势跃变处，$\vec{E}$与电流的方向相反，因而电场对电流起抵制作用。可见电场对稳定电流的建立起着重要的调节作用，依靠这种调节，才能在导体中形成电荷的稳定流动。

下面我们讨论如何求达到稳定时的电场和电流分布。电场与导体是相互作用的，电场在导体中引起电流，电流引起电荷分布的改变，从而引起电场的变化。电流受电场的制约关系，由（3.1.5）式决定。即

$$\vec{J}=\sigma(\vec{E}+\vec{E}_e)。$$

而电场是由电荷分布按库仑定律确定的（显示了恒定电场的无旋性质）。即

$$\vec{E}=\int\frac{\rho(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dv'+\int\frac{\omega(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}ds', \tag{3.1.8}$$

(这里 ω 表示面电荷密度）这就是两者相互决定的关系。其电荷最终是按使电流保持稳定的条件分布，即

$$\nabla\cdot\vec{J}=0。$$

因此，在稳恒电流情况下，场量的基本方程是

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{J}&=0\\ \nabla\times\vec{E}&=0\\ \vec{J}&=\sigma(\vec{E}+\vec{E}_e)。\end{aligned}\tag{3.1.9}$$

由前二式的积分形式可得场量的边值关系

$$\begin{aligned}\vec{n}\cdot(\vec{J}_2-\vec{J}_1)&=0\\ \vec{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)&=0\end{aligned}\tag{3.1.10}$$

根据(3.1.9)中第二式，恒定电场仍可引入标势 Φ:$\vec{E}=-\nabla\Phi$。再由（3.1.9）中第一、三两式可得均匀介质内部的场方程是

$$\nabla\cdot\vec{E}=-\nabla\cdot\vec{E}_e \quad 或 \quad -\nabla^2\Phi=-\nabla\cdot\vec{E}_e。 \tag{3.1.11}$$

在没有外来电动势存在的区域，电势满足

$$\nabla^2\Phi=0。 \tag{3.1.12}$$

相应地，边值关系（3.1.10）可化成

$$\begin{aligned}\sigma_1\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial n}\right)&=\sigma_2\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial n}\right),\\ \Phi_1&=\Phi_2。\end{aligned}\tag{3.1.13}$$

(3.1.11)，(3.1.12)，(3.1.13) 即为稳定流动情况基本方程，利用它们可以确定电流和电场的分布。

$\vec{J}=\frac{\sigma}{\varepsilon}\vec{D}$

由 $\nabla\cdot\vec{D}=\rho$ 和 $\nabla\cdot\vec{J}=0$ 可求得导体内的电荷分布

$$\rho=\vec{J}\cdot\nabla(\frac{\varepsilon}{\sigma})。\tag{3.1.14}$$

可见在均匀导体内部是不会积累电荷的。对于分区均匀的导体，电荷只能分布在交界面上，利用 $\omega_f=\vec{n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)$ 和 $\vec{n}\cdot(\vec{J}_2-\vec{J}_1)=0$，得面电荷密度为

$$\omega_f=\left(\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2}-\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}\right)\vec{n}\cdot\vec{J}_。\tag{3.1.15}$$

因此，如交界面两侧各自的介电常数与电导率之比值相等，则交界面上也不存在电荷。

〔例 3-1〕 在内径及外径分别为 R_1、R_2，高为 L 的金属制的筒状容器中，装满了电导率为 σ 的电解液。当内外侧壁作为正负电极有电流流通时，试求其电阻。

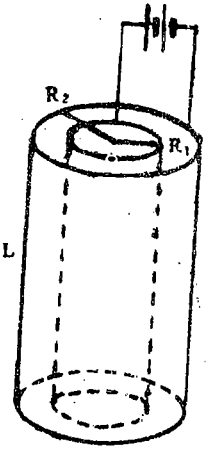


图 3.1

解：取圆柱坐标，由对称性可知，电流呈放射状流动，它的密度只与离中心轴线的距离 ρ 成函数关系。设电流密度为 $\vec{J}(\rho)$，则穿过半径为 $\rho(R_1<\rho<R_2)$ 的圆筒的电流为 $2\pi\rho LJ(\rho)$，它等于总电流 I，则

$$J(\rho)=\frac{I}{2\pi\rho L}。$$

离中心距离为 ρ 的点的电场强度大小为

$$E(\rho)=\frac{J(\rho)}{\sigma}=\frac{I}{2\pi L\sigma\rho},$$

电极间的电势差

$$\Phi_1-\Phi_2=\int_{R_1}^{R_2}E(\sigma)d\rho=\frac{I}{2\pi L\sigma}ln(\frac{R_2}{R_1}),$$

电阻 R 即为

$$R=\frac{\Phi_1-\Phi_2}{I}=\frac{1}{2\pi L\sigma}ln(\frac{R_2}{R_1})。$$

〔例 3-2〕 一个平行板电容器，两极板相距 d，其间充满两层材料（Ⅰ）和（Ⅱ）。两种材料的介电常数各为 ε_1、ε_2，电导率各为 σ_1、σ_2，厚度各为 d_1、d_2 ($d_1+d_2=d$) 电容器上所加电压是 V。忽略边缘效应，试求：

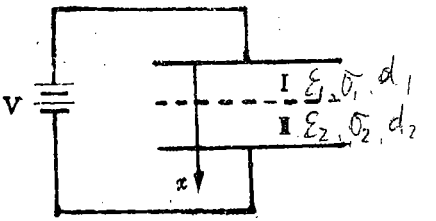


图 3.2

(1) 材料（Ⅰ）和（Ⅱ）中的电场；

(2) 流过电容器的电流；

(3) 材料（Ⅰ）和（Ⅱ）界面上的总电荷密度；

(4) 材料（Ⅰ）和（Ⅱ）界面上的“自由”电荷密度和“真实”电荷密度，并解释它们的含义。

解：(1) 如图选择坐标。材料（Ⅰ）和（Ⅱ）中的电势 Φ_1、Φ_2 满足方程

$$\frac{d^2\Phi_1}{dx^2}=0,\qquad \frac{d^2\Phi_2}{dx^2}=0。$$

其解

$$\Phi_1=a_1x+b_1,\qquad \Phi_2=a_2x+b_2。$$

由边界条件

$x=0$ 时，$\Phi_1=V$；

$x=d_1+d_2$ 时，$\Phi_2=0$；

$x=d_1$ 时，$\Phi_1=\Phi_2$，$\sigma_1\frac{d\Phi_1}{dx}=\sigma_2\frac{d\Phi_2}{dx}$

求得

$$a_1=\frac{-\sigma_2 V}{\sigma_2 d_1+\sigma_1 d_2}\ ,\qquad a_2=\frac{-\sigma_1 V}{\sigma_2 d_1+\sigma_1 d_2}\ 。$$

$$b_1=V\ ,\qquad b_2=\frac{\sigma_1(d_1+d_2)V}{\sigma_2 d_1+\sigma_1 d_2}\ 。$$

代入 Φ_1、Φ_2 表式后，求出场

$$\vec{E}_1=-\frac{d\Phi_1}{dx}\vec{i}=\frac{\sigma_2 V}{\sigma_2 d_1+\sigma_1 d_2}\vec{i},$$

$$\vec{E}_2=-\frac{d\Phi_2}{dx}\vec{i}=\frac{\sigma_1 V}{\sigma_2 d_1+\sigma_1 d_2}\vec{i}。$$

(2)流过电容器的电流

$$\vec{J}=\vec{J}_1=\vec{J}_2=\sigma_1\vec{E}_1=\sigma_2\vec{E}_2=\frac{\sigma_1\sigma_2 V}{\sigma_2 d_1+\sigma_1 d_2}\vec{i}。$$

(3)两种材料界面上的总电荷密度

$$\omega=\varepsilon_0(E_{2n}-E_{1n})=\frac{(\sigma_1-\sigma_2)\varepsilon_0}{\sigma_2 d_1+\sigma_1 d_2}V。$$

(4)两种材料界面上的“自由”电荷密度

$$\omega_f=D_{2n}-D_{1n}=\varepsilon_2 E_{2n}-\varepsilon_1 E_{1n}=\frac{\sigma_1\varepsilon_2-\sigma_2\varepsilon_1}{\sigma_2 d_1+\sigma_1 d_2}V,$$

极化电荷密度

$$\omega_p=\omega-\omega_f=-\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_0)\sigma_1-(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\sigma_2}{\sigma_2 d_1+\sigma_1 d_2}V。$$

这里所指的“自由”电荷是可以作宏观移动的。由于两种材料的导电性能不同($\sigma_1\neq\sigma_2$)，因而自由电荷在其界面上被积累而形成面分布，极化电荷是由于介质被极化而产生的。这两种电荷都是真正存在于介质界面上的电荷，两者之和就是总电荷，即“真

实”电荷。

§3.2 真空中静磁场的基本方程

1.毕奥–萨伐尔定律和静磁场的基本方程

实验指出，一个电流元 $\mathrm{Id}\vec{l}$ 在磁场中所受的力为

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}, \tag{3.2.1}$$

矢量 $\vec{B}$ 是电流元所在处的磁感应强度。稳恒电流激发磁场的规律由毕奥–萨伐尔定律给出：若空间 $\vec{r}'$ 点有电流密度 $\vec{J}(\vec{r}')$，则该电流分布在 $\vec{r}$ 点产生的磁场为

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} dv'。 \tag{3.2.2a}$$

如果电流集中于细导线上，由 $\vec{J}dv' \to Id\vec{l}$，得

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint \frac{Id\vec{l} \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}。 \tag{3.2.2b}$$

毕奥–萨伐尔定律是静磁学的基础，对表述它的（3.2.2）式求散度和旋度，即得静磁场的基本方程。

将(3.2.2a)式写成

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dv' \vec{J}(\vec{r}') \times \left(-\nabla \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right)$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int dv' \vec{e}_i \in_{ijk} J_j(\vec{r}') \partial_k \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int dv' \vec{e}_i \in_{ijk} \left[\partial_k \frac{J_j(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \partial_k J_j(\vec{r}') \right],$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{e}_i \varepsilon_{ijk} \int dv' \partial_k \frac{J_i(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|},$$

即

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'; \tag{3.2.3}$$

引入

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv', \tag{3.2.4}$$

则

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r})。 \tag{3.2.5}$$

对此式取散度得

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{3.2.6}$$

又

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dv' \vec{J}(\vec{r}') \nabla^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int dv' \vec{J}(\vec{r}') \left[-4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}') \right]$$

$$= -\mu_0 \vec{J}(\vec{r})$$

即

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{J}(\vec{r})。 \tag{3.2.7}$$

对(3.2.5)式取旋度，并利用 (3.2.7) 式

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

$$= \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) + \mu_0 \vec{J}$$

当 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$时有

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r})。 \tag{3.2.8}$$

所得（3.2.6）和（3.2.8）式就是静磁场的基本方程。（3.2.6）式表示静磁场是无源场，其物理意义是没有"自由磁荷"存在。（3.2.8）式表示静磁场是有旋场，磁力线呈旋涡状结构，并且方程具有定域性质，即空间某点磁感应强度的旋度只和同一点的电流密度有关。（3.2.6）和（3.2.8）式对应的积分形式分别为

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0, \tag{3.2.9}$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_0 \tag{3.2.10}$$

（3.2.9）式正是静磁场的"高斯定理"，亦即磁通连续性原理。（3.2.10）式正是安培环路定律。

2.矢量势和库仑规范条件

在（3.2.4）式中引入的$\vec{A}$叫做静磁场的矢量势。它和场量$\vec{B}$的关系由（3.2.5）式给出。（3.2.7）式是矢量势$\vec{A}$所满足的微分方程，它是用势来描述的静磁场的基本规律。在直角坐标系中，$\vec{A}$的每个分量A_i满足泊松方程

$$\nabla^2 A_i = -\mu_0 J_i。$$

若由$\vec{A}$的微分方程求出$\vec{A}$，再取旋度就得到$\vec{B}$了。

但是，矢势$\vec{A}$和磁感应强度$\vec{B}$并非一一对应。由于对任意一个标量场ψ总存在恒等式

$$\nabla \times \nabla \psi = 0,$$

故由与下面形式的变换所联系的$\vec{A}$均可得到同一个$\vec{B}$：

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \nabla \psi。 \tag{3.2.11}$$

可见矢势的选取有很大的不确定性，它可以相差一个任意标量函数的梯度。在这里，$\vec{B}$是物理上的可观测量，而$\vec{A}$不能从实验上直接观测。矢势$\vec{A}$可以通过（3.2.11）的形式变到$\vec{A}'$，而不影响物理结果，这种变换叫做"规范变换"。只要按照（3.2.11）的形

式作变换，总是对应着同样的磁感应强度，仍然得出同样的物理结果。这就是说，磁场具有规范变换下的不变性。既然如此，我们就可以挑选特殊的$\vec{A}$，使问题得以简化。即可以对$\vec{A}$加上一个限制条件（实际上就是对ψ的限制条件），这个限制条件称为“规范条件”。前面在推导（3.2.8）式时所取的条件

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \tag{3.2.12}$$

就是对$\vec{A}$的一种常用的限制条件，叫做库仑规范条件。

现在我们讨论两个问题：第一，为什么总可以规定(3.2.12)式表示的规范条件；第二，引入库仑规范条件之后，矢势$\vec{A}$是不是被完全确定了。

先看第一个问题。假若我们遇到了一个不满足（3.2.12）式的$\vec{A}$：

$$\nabla \cdot \vec{A} = \mu \neq 0。$$

这时，可以选择方程

$$\nabla^2 \psi = -\mu$$

的一个特解ψ'，用这样的ψ'去作规范变换（3.2.11），那么变换后的$\vec{A}'$满足关系

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi'$$

$$\nabla \cdot \vec{A}' = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla \cdot \nabla\psi' = \mu - \mu = 0。$$

这个$\vec{A}'$仍然合乎（3.2.12）式的要求，并且不影响物理结果。于是以后都采用这个$\vec{A}'$来处理就可以了。这就是说，我们总可以找到适合库仑规范条件的矢势$\vec{A}'$。

对第二个问题的回答是：引入了规范条件$\nabla \cdot \vec{A} = 0$以后，还可以进行规范变换。为使变换后的$\vec{A}'$也满足$\nabla \cdot \vec{A}' = 0$，只需选择满足下式的$\psi$：

$$\nabla \cdot \nabla\psi = \nabla^2 \psi = 0。 \tag{3.2.13}$$

总之，在库仑规范下，我们有

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{B},$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0。$$

但是，这仍然没有唯一地确定$\vec{A}$，或者说$\vec{A}$还有一定的不确定性。矢势$\vec{A}$和静电场中的标势Φ不同。一般说来，不能任意地取无穷远处的$\vec{A}$值为零，所以它有较为复杂的不确定性，选择余地相当大。

〔例 3-3〕试求匀强磁场三种以上的矢势形式，并讨论它们之间的联系。

解：设有一个沿 Z 轴方向的均匀磁场$\vec{B} = B_0\vec{k}$，我们可以用矢势

$$\vec{A}_1 = B_0 X\vec{j} \tag{3.2.14}$$

来描述。显然 $\nabla \times \vec{A}_1 = B_0\vec{k} = \vec{B}$ 并且$\vec{A}_1$满足库仑规范条件(3.2.12)

$$\nabla \cdot \vec{A}_1 = \frac{\partial}{\partial y}(B_0 X) = 0。$$

我们也可以采取另一个矢势$\vec{A}_2$

$$\vec{A}_2 = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r} = \frac{1}{2}(-B_0 y\vec{i} + B_0 X\vec{j})。 \tag{3.2.15}$$

很容易验证，对$\vec{A}_2$也有

$$\nabla \times \vec{A}_2 = \vec{B}, \qquad \nabla \cdot \vec{A}_2 = 0。$$

可见$\vec{A}$并不能唯一地确定，进而我们注意到

$$\vec{A}_1 - \vec{A}_2 = B_0 X\vec{j} - \frac{1}{2}(-B_0 y\vec{i} + B_0 X\vec{j})$$
$$= \frac{1}{2}B_0(X\vec{j} + y\vec{i}),$$

$$= \nabla(\frac{1}{2}B_0 Xy) = \nabla\psi$$

对照 (3.2.11)，可见$\vec{A}_1$可以由$\vec{A}_2$通过一个规范变换而获得。换句话说，描述同一个$\vec{B}$的两个$\vec{A}$之间，一定可以通过适当的规范变换联系起来，而且在库仑规范下的这个 ψ $(=\frac{1}{2}B_0xy)$必须满足 (3.2.13) 式。

我们再取

$$\vec{A}_3 = B_0 X\vec{j} + B_0 Z\vec{k},$$

它也对应同一个$\vec{B}$

$$\nabla \times \vec{A}_3 = B_0\vec{k} = \vec{B},$$

但是$\vec{A}_3$不符合库仑规范条件:

$$\nabla \cdot \vec{A}_3 = B_0 \neq 0。$$

为此可选择

$$\psi' = -\frac{B_0}{6}(X^2 + y^2 + Z^2)$$

来作规范变换(因为这个 ψ'满足前面提出的$\nabla^2\psi' = -B_0$的要求)，得到

$$\vec{A}_3' = \vec{A}_3 + \nabla\psi'$$

$$= B_0 X\vec{j} - \frac{1}{3}B_0 X\vec{i} - \frac{1}{3}B_0 y\vec{j} + \frac{2}{3}B_0 Z\vec{k} \quad (3.2.16)$$

这个$\vec{A}_3'$就满足库仑规范的要求，并且仍然对应同一个$\vec{B}_0$。

实际上，这里选择的 ψ 只要是$\nabla^2\psi = -B_0$ 的一个特解即可。如选得合适，还可以得到更简单的结果。比如改选

$$\psi'' = -\frac{1}{2}B_0 Z^2,$$

于是

$$\vec{A}_3'' = \vec{A}_3 + \nabla\psi'' = B_0 X\vec{j}。$$

$\vec{A}_3'$ 或 $\vec{A}_3''$(即 $\vec{A}_1$ 的形式) 也都可以作为在库仑规范下描述 $\vec{B} = B_0\vec{k}$ 的矢势形式。

§3.3 磁偶极子

1.矢势的多极展开及磁偶极矩

静磁场是由稳恒电流产生的，当电流定域在一个很小的空间区域内时，和对于静电场中电势所作的台劳展开相似，也可以对矢量势 $\vec{A}$ 作近似展开，从而引出磁偶极矩的概念。

设电流密度 $\vec{J}(\vec{r}')$ 分布在一个区域 v 内。它的线度远比计算 $\vec{B}$ (或 $\vec{A}$) 的点 P 到该区域的距离要小。如图 3.3 所示:

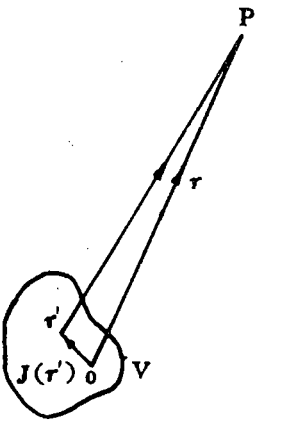


图 3.3

$$|\vec{r}| >> |\vec{r}'|$$

与以前一样有

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{|\vec{r}|} + \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}\cdot\vec{r}' + \cdots。 \qquad (3.3.1)$$

代入(3.2.4)式

$$A_i = \frac{\mu_0}{4\pi r}\int J_i(\vec{r}')dv' + \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\int J_i(\vec{r}')(\vec{r}\cdot\vec{r}')\ dv' + \cdots。$$

由矢量运算可得

$$J_i = \nabla \cdot (r_i \vec{J}) - r_i \nabla \cdot \vec{J}。 \tag{3.3.2}$$

对稳恒电流$\nabla \cdot \vec{J} = 0$.而由高斯定理可将$\nabla \cdot (r_i \vec{J})$ 的体积分化为面积分。在边界面上没有电流穿出，故 A_i 中第一项积分为零，表示不存在与点电荷相对应的磁单极项。

再看 A_i 的第二项积分

$$\int J_i (\vec{r} \cdot \vec{r}') dv' = \int dv' J_i r_j r_j' = r_j \int dv' J_i r_j'。$$

利用 (3.3.2) 式，并考虑到没有电流穿出边界面。可得

$$r_j \int dv' r_i' J_j = r_j \int dv' r_i' \nabla' \cdot (r_j' \vec{J})$$

$$= r_j \int dv' \left[\nabla' \cdot (r_i' r_j' \vec{J}) - r_j' J_i\right] = -r_j \int dv' r_j' J_i,$$

即

$$\int dv' \vec{r}' (\vec{r} \cdot \vec{J}) = -\int dv' \vec{J} (\vec{r} \cdot \vec{r}')。 \tag{3.3.3}$$

于是

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int \vec{J} (\vec{r} \cdot \vec{r}') dv' + \cdots$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \frac{1}{2} \int \left[\vec{J} (\vec{r} \cdot \vec{r}') - \vec{r}' (\vec{r} \cdot \vec{J})\right] dv' + \cdots$$

所以

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \frac{1}{2} \vec{r} \times \int dv' \vec{J} (\vec{r}') \times \vec{r}' + \cdots$$

现在定义磁偶极矩

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int dv' \vec{r}' \times \vec{J} (\vec{r}'), \tag{3.3.4}$$

则磁偶极子的矢势为

$$\vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3} \tag{3.3.5}$$

这是定域稳恒电流分布的$\vec{A}$的展开式中最低阶非零项。其磁偶极场可通过下式求出

$$\vec{B}^{(1)} = \nabla\times\vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\left(\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}\right) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\left(\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^3}\right) \tag{3.3.6}$$

即

$$\vec{B}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{n})\vec{n}-\vec{m}}{r^3}, \tag{3.3.7}$$

式中$\vec{n}=\frac{\vec{r}}{r}$是$\vec{r}$方向的单位向量。由 (3.3.6) 式可见，磁偶极子产生的$\vec{B}$是某一标量函数的负梯度，说明它类似静电场是一有势场，由此可定义磁偶极子的标量势

$$\Phi_m^{(1)} = \frac{1}{4\pi}\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^3}, \tag{3.3.8}$$

于是

$$\vec{B}^{(1)} = -\mu_0\nabla\Phi_m^{(1)} \tag{3.3.9}$$

如果电流在任一形状的平面回路内流动，由于对沿着线元$d\vec{l}$流动的恒定电流 I 有

$$\vec{J}dv \to Id\vec{l},$$

所以(3.3.4)式可表示为

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\oint\vec{r}\times Id\vec{l}。 \tag{3.3.10}$$

对于如图 3.4 所示的平面回路

$$\frac{1}{2}\vec{r}\times d\vec{l} = ds\vec{n},$$

则

$$\vec{m} = IS\vec{n} = I\vec{S}。 \tag{3.3.11}$$

不管回路的形状如何，此结果总是成立的。

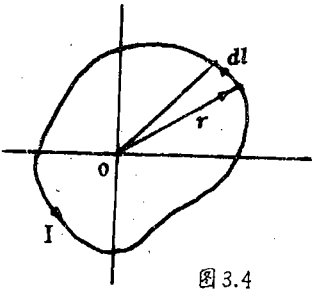


图 3.4

如果电流是荷电 q_i 的粒子以速度 $\vec{v}_i$ 运动而形成，则电流密度

$$\vec{J} = \sum_i q_i \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i), \tag{3.3.12}$$

式中 $\vec{r}_i$ 是第 i 个粒子的位置。这时磁矩 (3.3.4) 式变为

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\sum_i q_i(\vec{r}_i \times \vec{v}_i), \tag{3.3.13}$$

第 i 个粒子的轨道角动量

$$\vec{L}_i = M_i(\vec{r}_i \times \vec{v}_i)。$$

则

$$\vec{m} = \sum_i \frac{q_i}{2M_i}\vec{L}_i。 \tag{3.3.14}$$

对于荷质比相同的粒子，$\frac{q_i}{M_i} = \frac{q}{M}$，就可以用总轨道角动量 $\vec{L} = \Sigma \vec{L}_i$ 表示磁矩

$$\vec{m} = \frac{q}{2M}\vec{L} \quad \text{classical} \tag{3.3.15}$$

这就是著名的角动量与磁矩的经典关系式，表示粒子的磁矩与轨道角动量之比仅由其荷质比所确定。此关系式甚至对原子尺度上的轨道运动还有效。但由于没有考虑相对论和量子力学效应，它

不能应用在电子或其它基本粒子上。

2.磁偶极子在外磁场中所受的力和力矩

由(3.2.1)式，密度为$\vec{J}(\vec{r}')$的电流分布在外磁场$\vec{B}(\vec{r})$ 中所受的总力为

$$\vec{F}=\int \vec{J}(\vec{r}')\times\vec{B}(\vec{r})dv', \tag{3.3.16}$$

积分区域为电流$\vec{J}(\vec{r}')$存在的区域。如果这个区域比较小，在该区域内各点上$\vec{B}(\vec{r}')$之间的差别很小，那么对上式就可以作近似计算。取这个小区域内任意一点为原点，外场$\vec{B}$可对它作台劳展开

$$\vec{B}(\vec{r}')=\vec{B}(0)+\ \vec{r}'\cdot\nabla\vec{B}(0)+\ \cdots$$

于是

$$\vec{F}=\int \vec{J}(\vec{r}')\times\vec{B}(0)dv'+\int \vec{J}(\vec{r}')\times\vec{r}'\cdot\nabla\vec{B}(0)dv'+\ \cdots. \tag{3.3.17}$$

如上所述，稳恒电流$\vec{J}$的体积分等于零，因此对力的最低阶贡献是上式第二项，其分量形式为

$$F_i=\int \varepsilon_{ijk}J_j\vec{r}'\cdot\nabla B_k dv'。$$

利用磁矩定义式(3.3.4)和(3.3.3)式可得

$$\begin{aligned}(\vec{m}\times\nabla)_j&=\varepsilon_{jln}m_l\partial_n\\&=\frac{1}{2}\int\varepsilon_{jln}\varepsilon_{lst}\,r'_sJ_t\partial_n dv'\\&=\frac{1}{2}\int(-\delta_{js}\delta_{nt}+\ \delta_{jt}\delta_{ns})\ \ r'_sJ_t\partial_n dv'\\&=\frac{1}{2}\int(-r'_jJ_n\partial_n+r'_nJ_j\partial_n)dv'\\&=\int J_jr'_n\partial_n dv',\end{aligned}$$

则

$$F_i=\varepsilon_{ijk}(\vec{m}\times\nabla)_jB_k,$$

其矢量式为

$$\vec{F}=(\vec{m}\times\nabla)\times\vec{B}=\nabla(\vec{m}\cdot\vec{B})-\vec{m}(\nabla\cdot\vec{B})。$$

又 $\nabla\cdot\vec{B}=0$ ，所以

$$\vec{F}=\nabla(\vec{m}\cdot\vec{B})。 \tag{3.3.18}$$

这个结果对于随时间变化的外场也成立。对于稳恒外磁场，$\nabla\times\vec{B}=0$，这时力可以表示为另一种形式

$$\vec{F}=(\vec{m}\cdot\nabla)\vec{B}。 \tag{3.3.19}$$

从以上讨论看出，当一个电流范围很小时，它在外磁场中所受到的力的主要部分是多极展开式中磁偶极子所受到的力。(3.3.18) 式所表示的磁偶极子在外场中受到的力是一个保守力，由此可引入势函数 U:

$$U=-\vec{m}\cdot\vec{B}, \tag{3.3.20}$$

并且，之所以出现 (3.3.18) 式形式的互作用，是磁感应强度$\vec{B}$在受力作用的电流$\vec{J}$的有限区域内不均匀的结果。当在此区域内$\vec{B}$均匀时，只有力矩而无力的作用。

下面考虑一个小区域电流分布在磁场中受到的力矩。由力矩公式

$$d\vec{N}=\vec{r}'\times d\vec{F}=\vec{r}'\times(\vec{J}\times\vec{B})dv',$$

$$\vec{N}=\int dv'\,[\vec{r}'\times(\vec{J}\times\vec{B})]。 \tag{3.3.21}$$

将$\vec{B}$的展开式代入，这里零阶项有贡献。作为主要项，可只取$\vec{B}=\vec{B}(0)$ 的项。即当考虑力矩主要贡献项时，可以忽略$\vec{B}$在被作用的电流范围内的差异。于是

$$\vec{N}\approx\int dv'\left\{\vec{r}'\times[\vec{J}\times\vec{B}(0)]\right\}$$

$$\approx\int dv'\left\{[\vec{r}'\cdot\vec{B}(0)]\,\vec{J}-(\vec{r}'\cdot\vec{J})\vec{B}(0)\right\}。$$

与前面的处理相同，第一项可写出其值。第二项由于

$$\nabla \cdot (r^2 \vec{J}) = 2(\vec{r} \cdot \vec{J}) + r^2 \nabla \cdot \vec{J}$$

积分结果为零。则

$$\vec{N} \approx \vec{m} \times \vec{B}(0)。 \tag{3.3.22}$$

这正是磁偶极子在外磁场中所受力矩的表达式。可见小区域电流分布在外场中所受力矩的主要部分也是磁偶极子所受力矩。

〔例 3–4〕电荷 Q 均匀分布于半径为 R 的刚性小球之内，若此小球以角速度 ω 绕自身某一直径转动，求它的磁矩。

解法一：磁矩定义

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int \vec{r} \times \vec{J} dv。$$

选角速度$\vec{\omega}$沿 Z 轴方向，带电小球旋转即有电流密度

$$\vec{J} = \rho \vec{v} = kr\sin\theta \vec{e}_\varphi$$

其中 $k = \frac{3Q\omega}{4\pi R^3}$，代入$\vec{m}$的表达式

$$\vec{m} = -\frac{k}{2}\int \vec{e}_\theta r^4 \sin^2\theta dr d\theta d\varphi$$

又

$$\vec{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi \vec{e}_x + \cos\theta\sin\varphi \vec{e}_y - \sin\theta \vec{e}_z,$$

$$\int_0^\pi \cos\theta \sin^2\theta d\theta = 0,$$

则

$$\vec{m} = \vec{e}_z \frac{k}{2} \cdot 2\pi \int_0^R \int_0^\pi r^4 \sin^3\theta dr d\theta = \frac{4}{15} k\pi R^5 \vec{e}_z,$$

所以

$$\vec{m}=\frac{1}{5}QR^2\vec{\omega}, \tag{3.3.23}$$

此结果即为其圆心位于 Z 轴，圆面与 Z 轴垂直的许多圆形电流所产生的磁矩的迭加。

解法二：通过求矢势来求磁矩。由矢势方程 $\Delta\vec{A}=-\mu_0\vec{J}$ ，$(\Delta=\nabla^2)$，有

$$\Delta\vec{A}=-\mu_0 krsin\theta\vec{e}_\varphi, \tag{3.3.24}$$

其中

$$\vec{e}_\varphi=-sin\varphi\vec{i}+cos\varphi\vec{j}=cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)\vec{i}+sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)\vec{j}。$$

用复数表示成 $e^{i\pi/2}e^{i\varphi}$,相应地把势也看成复数势

$$\Delta A=-\mu_0 krsin\theta e^{i\pi/2}e^{i\varphi}。$$

利用 $Y_{1,1}(\theta,\varphi)=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}sin\theta e^{i\varphi}$ ，上式为

$$\Delta A=\mu_0 k\sqrt{\frac{8\pi}{3}}Y_{1,1}(\theta,\varphi)re^{i\pi/2}$$

运用△的逆算符$\triangle^{-1}$，积分变量加（′）表示：

$$A=\mu_0 ke^{i\pi/2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\Delta^{-1}r'Y_{1,1}(\theta',\varphi')$$

$$=-\mu_0 ke^{i\pi/2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\frac{1}{4\pi}\int r'^3Y_{1,1}(\theta',\varphi')/|\vec{r}-\vec{r}'|$$

$$dr'd\varphi'd\cos\theta。$$

在球外$(r>r')$，利用$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$的展开式，可得

$$A=\mu_0 k e^{i\pi/2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\frac{1}{3}\frac{1}{r^2}Y_{1,1}(\theta,\varphi)\int_0^R r^4\,dr$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{5}\omega Q R^2\frac{sin\theta}{r^2}e^{i(\pi/2+\varphi)},$$

即

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{5}\omega Q R^2\frac{sin\theta}{r^2}\vec{e}_\varphi。\tag{3.3.25}$$

与磁矩的矢势$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}$比较之,便求得所求磁矩为

$$\vec{m}=\frac{1}{5}QR^2\vec{\omega}。$$

实验测定电子的自旋磁矩的大小为 9.27×10^{-24} 焦尔／特斯纳。如果把此值以及电子的经典半径 2.8×10^{-15} 米和电子电荷 1.6×10^{-19} 库仑代入上式，可以估计出电子"赤道"面上的线速度是

$$v_0\approx10^{11}\text{ 米／秒}$$

这表明，把电子自旋理解为带电球的旋转，将导致电子赤道上线速度比光速大三个数量级的荒谬结论。换句话说，经典电动力学不能描述电子自旋这一量子现象。

〔**例 3–5**〕一半径为 R 的线圈绕直径 PQ 以角速度 ω 均匀转动，在它中心沿此直径放一偶极矩为$\vec{m}$的磁铁。求图中 p、k 之间的电动势 e_{pk}。

解：磁矩$\vec{m}$的标势是

$$\Phi m = \frac{1}{4\pi}\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi}\frac{m\cos\theta}{r^2}。$$

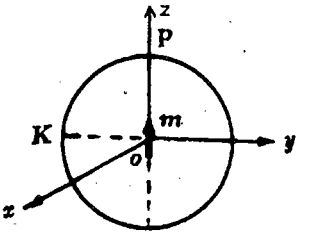


图 3.5

它所产生的磁场(偶极场)为

$$\vec{B} = -\mu_0 \nabla \Phi_m$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2m\cos\theta}{r^3}\vec{e}_r + \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m\sin\theta}{r^3}\vec{e}_\theta = \vec{B}_r + \vec{B}_0$$

线圈在该磁场中旋转时产生的电动势

$$\varepsilon_{pk} = \int_p^k (\vec{V}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}。$$

因$\vec{v}$沿$\vec{e}_\varphi$方向，$\vec{v}\times\vec{B}_\theta$与$d\vec{l}$垂直，所以只有$\vec{B}_r$对此积分有贡献

$$\varepsilon_{pk} = \int_p^k (\vec{v}\times\vec{B}_r)\cdot d\vec{l} = \int_p^k vB_r dl$$

$$= \int_0^{2/\pi} R\omega\sin\theta\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2m\cos\theta}{R^3}Rd\theta$$

$$= \frac{\mu_0\omega m}{4\pi R}。 \qquad (3.3.26)$$

§3.4 磁介质中静磁场的基本方程和边值关系

1.磁介质中静磁场的基本方程

与静电场类似，在磁介质存在的情形下，由于发生磁化效应，必须从微观电流和磁场出发，考虑介质对磁场的反应。然而，(3.2.6) 和 (3.2.8) 式所表示的静磁场方程对微观使用是有问题的。因为其中的$\vec{J}(\vec{r}')$是位置的函数，而分子、原子的电流

密度有很大的起伏。从宏观上看，有意义的仅是它们在宏观小体积内的平均。并且，电子（或基本粒子）都有自己的固有磁矩，这种磁矩无法在经典的概念下用相应的电流密度表示出来。这些磁矩也能产生在原子大小的范围内变化相当大的偶极场。

因此，必须像电介质中的情形那样，求微观场在微观大、宏观小体积元内的平均值。总电流可以分成两部分：由自由电荷引起的传导电流$\vec{J}$；有效原子电流密度$\vec{J}_a$，它的特点是束缚于原子或分子内部。首先，对方程$\nabla \cdot \vec{B}_{微观}=0$求平均，就得到形式相同的宏观磁感应强度的方程

$$\nabla \cdot \vec{B}=0 \tag{3.4.1}$$

这就说明仍可利用矢势的概念，并且它的旋度给出$\vec{B}$。

于是微观矢量势$\vec{a}$即为两部分的迭加

$$\vec{a}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{r}')dv'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}+\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}_a(\vec{r}')dv'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\quad , \tag{3.4.2}$$

关键在于讨论原子电流的贡献。先看某一分子的情况，如果第 j 个分子的中心矢径为$\vec{r}_j$，则按（3.3.5）式它在$\vec{r}$处所产生的矢量势近似为

$$\vec{a}_{Mol}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}_{Mol}\times(\vec{r}-\vec{r}_j)}{|\vec{r}-\vec{r}_j|^3}, \tag{3.4.3}$$

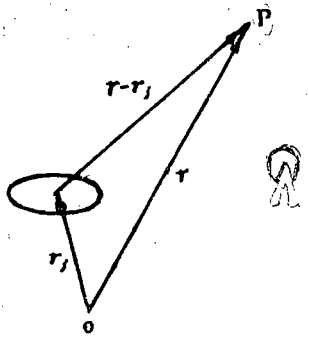


图 3.6

其中$\vec{m}_{Mol}$应理解为分子中所有的磁偶极矩之和，即分子总磁偶极矩。

像在静电一样，取平均则有

$$\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,dv'+\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{M}(\vec{r}')\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,dv'。 \tag{3.4.4}$$

其中$\vec{M}(\vec{r})$为宏观单位体积内的磁矩，即磁化强度。第二项的积分可改写为

$$\int \frac{\vec{M}(\vec{r}')\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dv' = \int \vec{M}(\vec{r}')\times\nabla'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dv'$$

利用$\nabla\times(\Phi\vec{A}) = \Phi(\nabla\times\vec{A}) + \nabla\Phi\times\vec{A}$，

$$\int \frac{\vec{M}(\vec{r}')\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dv'$$

$$= \int \frac{\nabla'\times\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dv' - \int \nabla'\times\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dv',$$

式中后一项

$$\int_v \nabla'\times\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dv' = \oint_s d\vec{S}'\times\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}。$$

若$\vec{M}(\vec{r}')$是有理的和定域的，则此面积分等于零。这时矢势(3.4.4)变成

$$\vec{A}(\vec{r}') = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}') + \nabla'\times\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dv', \tag{3.4.5}$$

可见介质中存在一等效的诱导电流$\vec{J}_m$，它由下式表式

$$\vec{J}_m = \nabla\times\vec{M}。 \tag{3.4.6}$$

这就意味着$\vec{J} + \vec{J}_m$在宏观等效方程中起着电流密度的作用，即

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \vec{J}_m)。 \tag{3.4.7}$$

引入磁场强度

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \qquad 即\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}), \tag{3.4.8}$$

则静磁场的宏观方程为

$$\begin{aligned} \nabla\times\vec{H} &= \vec{J}, \\ \nabla\cdot\vec{B} &= 0。 \end{aligned} \tag{3.4.9}$$

其积分形式

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I,$$
$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0, \tag{3.4.10}$$

即分别为安培环路定律和磁通连续性原理。

与 (3.4.9) 式相对应的静电学方程是

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho,$$
$$\nabla \times \vec{E} = 0,$$

因此，描述电场的基本场量是$\vec{E}$，描述磁场的基本场量是$\vec{B}$。而在存在介质情形下，为了方便，考虑到原子分子中电荷时，引入辅助量$\vec{D}$。考虑到原子分子电流时，引入辅助量$\vec{H}$。

与静电场类似，为了解出$\vec{B}$，还需要知道$\vec{H}$和$\vec{B}$之间的关系。实验指出，对于各向同性非铁磁物质，磁化强度$\vec{M}$和$\vec{H}$之间有简单的线性关系

$$\vec{M} = \chi_M \vec{H}, \tag{3.4.11}$$

χ_M 是介质的磁化率，是一个纯数。把此式代入 (3.4.8) 式，并令

$$\mu_r = 1 + \chi_M, \qquad \mu = \mu_r \mu_0, \tag{3.4.12}$$

则得

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \tag{3.4.13}$$

和

$$\vec{M} = \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu}\right)\vec{B}.$$

μ 和 μ_r 各称为介质的磁导率和相对磁导率。可见在非铁磁物质中$\vec{B}$和$\vec{H}$，$\vec{M}$和$\vec{B}$成正比。当 $\mu_r > 1$ 时为顺磁物质。$\mu_r < 1$ 时为反

磁物质。但典型的 μ_r 值和 1 只相差十万分之几。

对于铁磁物质，$\vec{B}$与$\vec{H}$是非线性的，并且磁滞现象还表明$\vec{B}$不是$\vec{H}$的单值函数，决定于材料的来历。这时$\vec{B}$与$\vec{H}$的关系常用微增磁导率 $\mu(\vec{H})$表示。当$\vec{B}$与$\vec{H}$平行时，$\mu\ (\vec{H})$ 定义为$\vec{B}$对$\vec{H}$的微商，也是$\vec{H}$的函数。高磁导率物质的 $\mu\ (\vec{H})$ 可达 10^6，在很小的磁场中，大多数未经处理的铁磁材料，$\vec{B}$与$\vec{H}$间仍存在线性关系 (3.4.13)。

为避免复杂化，通常还研究所谓的“理想铁磁质”。假定此类铁磁质的$\vec{M}$由两部分组成：一部分是感应磁化强度，它是磁场强度的函数，并且认为感应磁化强度和磁场强度成正比；另一部分是恒定磁化强度$\vec{M}_0$，它和磁场强度完全没有关系。于是有

$$\vec{M} = \vec{M}_0 + \chi_M \vec{H}。 \tag{3.4.14}$$

显然，(3.4.11) 式是 (3.4.14) 式在$\vec{M}_0 = 0$ 情况下的特例。$\vec{M}_0$ 不等于零的那些铁磁体称之为永久磁体。把 (3.4.14) 式代入 (3.4.8) 式得

$$\vec{B} = \mu\vec{H} + \mu_0\vec{M}_0。 \tag{3.4.15}$$

这就是理想铁磁质$\vec{B}$和$\vec{H}$之间的关系式，其中

$$\mu = (1 + \chi_M)\mu_0 \tag{3.4.16}$$

为理想铁磁质的磁导率。

2.静磁场的边值关系

与静电场同理，我们从静磁场方程的积分形式 (3.4.10) 出发，推导其场量的边值关系。

利用静电场中图示，将 (3.4.10) 中的第二式用于跨介质交界面的一扁平圆柱体。可得

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0。 \tag{3.4.17}$$

图 3.7 表示一个跨两介质交界面的无限小窄长回线，两长边

$\triangle l_1$、$\triangle l_2$ 分别位于界面两侧且与界面平行。界面法线方向$\vec{n}$由介质 1 指向介质 2，界面切线方向为$\vec{t}$。回线所围面积△S 的法线方向为 $\vec{n}'$。满足关系 $\vec{t}=\vec{n}\times\vec{n}'$，将 (3.4.10) 中第一式用于此回线，则

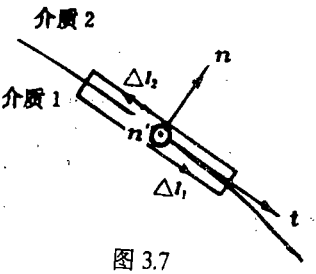


图 3.7

$$\oint_{\triangle L}\vec{H}\cdot d\vec{l}=\int_{\triangle L1}\vec{H}_1\cdot\vec{t}\,dl+\int_{\triangle L2}\vec{H}_2\cdot(-\vec{t})dl$$
$$=(\vec{H}_1-\vec{H}_2)\cdot\vec{t}\,\triangle L,$$
$$I=\int_{\triangle S}\vec{J}\cdot d\vec{S}=\vec{J}\cdot\vec{n}'\triangle S。$$

但 $\dfrac{\triangle S}{\triangle L}\vec{J}=\dfrac{\triangle\vec{I}}{\triangle L}=\vec{\alpha}_f$ 为垂直流过单位横截线的电流，即面电流密度，并由$\vec{n}'$的任意性，最后得

$$\vec{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{\alpha}_f \tag{3.4.18}$$

(3.4.17) 式和 (3.4.18) 式就是静磁场的边值关系，它描述了两介质交界面两侧的场和界面上电流的相互制约关系。

此外，由 (3.4.6) 的积分形式，也可得到两种介质（磁化强度分别为$\vec{M}_1$和$\vec{M}_2$）交界面上诱导电流面密度为

$$\vec{\alpha}_M=\vec{n}\times(\vec{M}_2-\vec{M}_1), \tag{3.4.19}$$

所得场方程 (3.4.9) 和边值关系 (3.4.17)、(3.4.18) 是下面几节讨论静磁场边值问题基本解法的基础。

〔**例 3-6**〕证明当两种线性磁介质的分界面上没有传导电流时，$\vec{B}$线(或$\vec{H}$线) 的偏折满足

$$\frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2}=\frac{\mu_1}{\mu_2}, \tag{3.4.20}$$

其中 μ_1 和 μ_2 分别为两种介质的磁导率，α_1 和 α_2 分别为界面两侧磁力线与法线的夹角。并讨论极限 $\frac{\mu_1}{\mu_2} \to \infty$ 下的情形。

证明：由磁场边值关系 $B_{1n}=B_{2n}$ 得 $B_1\cos\alpha_1=B_2\cos\alpha_2$ 由边值关系 $H_{1t}=H_{2t}$ 及关系式 $\vec{B}=\mu\vec{H}$ 得

$$\frac{B_1}{\mu_1}\sin\alpha_1=\frac{B_2}{\mu_2}\sin\alpha_2。$$

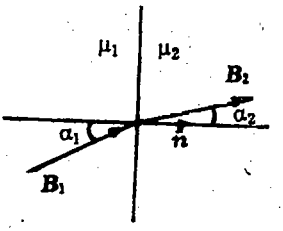


图 3.8

所得两式相比，则有

$$\frac{tq\alpha_1}{\mu_1}=\frac{tq\alpha_2}{\mu_2} \quad 即 \quad \frac{tq\alpha_1}{tq\alpha_2}=\frac{\mu_1}{\mu_2}。$$

在 $\frac{\mu_1}{\mu_2}\to\infty$ 的极限情形下，只要 $\alpha_1\neq 90°$，则得 $\alpha_2\to 0$，说明磁场 $\vec{B}_2$（或 $\vec{H}_2$）与边界面垂直。且与 $\vec{B}_1$（或 $\vec{H}_1$）的方向无关（$\vec{B}_1$ 完全平行于界面的例外情形除外）。所以，在磁导率很高的材料的表面上 $\vec{H}$ 的边界条件，与导体表面上电场的边界条件相同。因此，可以把静电势理论用到磁场上，认为高磁导率材料的表面是近似的“等势面”，$\vec{H}$ 线垂直于这些等势面。这种类比在许多磁铁设计中用到。先决定场的形式，然后把极面设计成等势面的形状。

§3.5 磁矢势法

由静磁场的基本方程（3.4.9）式，总可以引入矢势 $\vec{A}$。对于满足 $\vec{B}=\mu\vec{H}$ 的线性介质，若选取库仑规范 $\nabla\cdot\vec{A}=0$，在 μ 恒定不变的区域内可以得到方程

$$\nabla^2\vec{A}=-\mu\vec{J}。 \tag{3.5.1}$$

如果有磁导率 μ 不同的互相接触的两种以上介质，则在每一种均匀介质内，方程（3.5.1）成立，因此可以分区求解；而在它们的边界面上，必须满足场的边值关系。边值关系（3.4.18）用矢势表示即为

$$\frac{1}{\mu_2}(\nabla \times \vec{A}_2)_t - \frac{1}{\mu_1}(\nabla \times \vec{A}_1)_t = \vec{\alpha}_f。 \tag{3.5.2}$$

边值关系(3.4.17)意味着

$$A_{1t} = A_{2t}, \tag{3.5.3}$$

因为它们的突变表明磁感应强度$\vec{B}$在边界上变成无穷大。

这样，我们就可以解矢势$\vec{A}$的边值问题，并通过关系$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$而求出磁场。

如果在某一方向上(取为 Z 轴方向)介质为均匀且无限的，而且产生磁场的电流也处处指向 Z 轴方向，则求这种介质内的二维平面磁场问题，可使场方程和边值关系都大为简化。这种场的矢势也指向 Z 轴：$A_Z = A_Z(x, y)$。场方程由直角坐标中的

$$\nabla^2 A_i = -\mu J_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

变成

$$\nabla^2 A_Z(x,y) = -\mu J_Z(x,y)。 \tag{3.5.4}$$

相应地，边值关系（3.5.2）和（3.5.3）分别简化为下列形式

$$\frac{1}{\mu_2}\frac{\partial A_{Z2}}{\partial n} - \frac{1}{\mu_1}\frac{\partial A_{Z1}}{\partial n} = -\alpha_f, \tag{3.5.5}$$

$$A_{Z1} = A_{Z2}。 \tag{3.5.6}$$

可见，这种情形下的场方程和边值关系与静电场中的形式完全类似，因此可通过仿照类比进行求解。

〔**例 3-7**〕稳定电流 I 在半径为 a 的无限长圆柱导体中沿轴流动。设导体的磁导率为 μ_1，其外充满磁导率为 μ_2 的均匀介质。求导体内外的矢势和磁场。

解：选用圆柱坐标。以导体轴为 Z 轴，由于$\vec{J}$处处沿 Z 方向，则

$$\nabla^2 A_Z = -\mu_1 J$$

并且由对称性质，场和 φ、Z 均无关，仅为一个变量 ρ 的函数。导体内外的介质各自均匀，可分区求解。在柱内，$\rho < a$，方程为

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dA_1}{d\rho}\right) = -\mu_1\frac{I}{\pi a^2}$$

在柱外，$\rho > a$，方程为

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dA_2}{d\rho}\right) = 0。$$

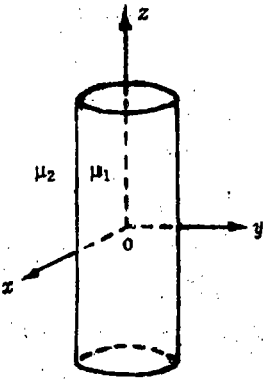


图 3.9

柱内外方程的解分别为

$$A_1 = -\frac{\mu_1 I}{4\pi a^2}\rho^2 + C_1 ln\rho + D_1,$$

$$A_2 = C_2 ln\rho + D_2。$$

其中常数由边界条件确定：

1)在 $\rho = 0$ 处，A_1 必须有限，得 $C_1 = 0$。

2)在 $\rho = a$ 处，$\frac{1}{\mu_1}\frac{dA_1}{d\rho} = \frac{1}{\mu_2}\frac{dA_2}{d\rho}$

即 $-\frac{I}{2\pi a^2}a = \frac{1}{\mu_2}\frac{C_2}{a}$ 得 $C_2 = -\frac{\mu_2 I}{2\pi}$，

3)在 $\rho = a$ 处，$A_1 = A_2$

即 $-\frac{\mu I}{4\pi} + D_1 = -\frac{\mu_2 I}{2\pi}lna + D_2$，

得 $D_2 = \frac{\mu_2 I}{2\pi}lna - \frac{\mu_1 I}{4\pi} + D_1$。

所以导体内外的矢势各为

$$A_1 = -\frac{\mu_1 I}{4\pi a^2}\rho^2 + D_1,$$

$$A_2 = -\frac{\mu_2 I}{2\pi}\ln\frac{\rho}{a^2} - \frac{\mu_1 I}{4\pi} + D_1, \tag{3.5.7}$$

导体内外的磁感强度为

$$\vec{B}_1 = \frac{dA_1}{d\rho}\vec{e}_\varphi = \frac{\mu_1}{4\pi}\frac{2I}{a^2}\rho\vec{e}_\varphi,$$

$$\vec{B}_2 = \frac{dA_2}{d\rho}\vec{e}_\varphi = \frac{\mu_2}{4\pi}\frac{2I}{\rho}\vec{e}_\varphi。 \tag{3.5.8}$$

〔例 3-8〕有一条无限长的直线带，它的宽度为 a，电流 I 沿着带流动，并且沿着带的宽度均匀分布（参见图 1.8），求磁场。

解:如图选取坐标，电流沿 Z 轴方向，矢势方程为

$$\nabla^2 A_Z(x,y) = -\mu_0 J_Z。$$

由数学准备知识可得

$$A_Z(x,y) = -\mu_0 \Delta^{-1} J_Z,$$

其中电流分布可表示成

$$J_Z = \frac{I}{a}\delta(y)\left[\theta\left(\frac{a}{2}-x\right) - \theta\left(-\frac{a}{2}-x\right)\right]。$$

在二维极坐标中

$$\Delta^{-1} = \frac{1}{2\pi}\int\cdots\cdots \ln|\vec{\rho}-\vec{\rho}'|ds',$$

$$A_Z = -\frac{\mu_0}{2\pi}\int J_Z \ln|\vec{\rho}-\vec{\rho}'|ds',$$

化为直角坐标

$$|\vec{\rho}-\vec{\rho}'| = \left[(x-x')^2 + (y-y')^2\right]^{\frac{1}{2}}, ds' = dx'dy',$$

$$A_z(x,y) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int dx'dy' ln\left[(x-x')^2+(y-y')^2\right]$$
$$\cdot \delta(y')\left[\theta\left(\frac{\theta}{2}-x'\right)-\theta\left(-\frac{a}{2}-x'\right)\right]$$
$$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx' ln\left[(x-x')^2+y^2\right]。$$

根据$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$，可直接求$\vec{B}$，在运算上将微商和积分的次序交换一下

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial Z} = \frac{\partial A_z}{\partial y}$$
$$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx' \frac{\partial}{\partial y} ln\left[(x-x')^2+y^2\right]$$
$$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx' \frac{2y}{(x-x')^2+y^2}$$
$$= -2\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left[arctg\frac{a-2x}{2y}+arctg\frac{a+2x}{2y}\right];$$

同理

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} ln\frac{(x-\frac{a}{2})^2+y^2}{(x+\frac{a}{2})^2+y^2},$$

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0。$$

我们考虑一下远处的磁场分布。为简单起见，取 x=0，y→∞的情形。这时，由于 $arctg\xi|_{\xi\to 0}=\xi$。所以

$$B_x = \frac{2\mu_0 I}{4\pi a}\left(\frac{a}{2y}+\frac{a}{2y}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{y},$$

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} ln1 = 0。 \qquad B_Z = 0$$

这和细直导线的结果完全一致。

〔例 3-9〕一个半径为 R，磁导率为 μ_1 的无限长圆柱体，放在均匀外磁场 $\vec{B}_0$ 之中，$\vec{B}_0$ 与圆柱体的轴线垂直。圆柱外充满磁导率为 μ_2 的均匀介质。求圆柱内外的磁场。

解：选取柱坐标。Z 轴沿圆柱轴线，外场 $\vec{B}_0$ 在 x 轴方向，由对称性，空间场分布与变量 Z 无关。仅为 ρ、φ 的函数，是二维平面场。

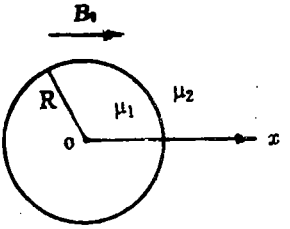


图 3.10

柱内外的矢势 A_Z 均满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 A_Z(\rho, \varphi) = 0$$

其通解为

$$A_Z(\rho,\varphi) = C_0 + D_0 ln\rho + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m cosm\varphi + B_m sinm\varphi)(C_m \rho^m + D_m \rho^{-m})。$$

圆柱体原来没有电流，柱外解不应包含 $\ln\rho$ 的项。当 $\rho \to 0$ 时，柱内解应有限，则柱内解不应包含 ρ^{-m} 和 $\ln\rho$ 的项。因此，圆柱内外的矢势分别为

$$A_{Z1} = D_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m (a_m cosm\varphi + b_m sinm\varphi),$$

$$A_{Z2} = \sum_{m=1}^{\infty} (c_m \rho^m cosm\varphi + d_m \rho^{-m} cosm\varphi + f_m \rho^m sinm\varphi + g_m \rho^{-m} sinm\varphi)。$$

边界条件

(1)$\rho = \infty$ 时，$\vec{B}_2 = \vec{B}_0$，$A_{Z2} = B_0 y = B_0 \rho sin\varphi$

(2)$\rho=R$ 处，$A_{Z1}=A_{Z2}$;

(3)$\rho=R$ 处，$\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial A_{z_1}}{\partial \rho}=\frac{1}{\mu_2}\frac{\partial A_{z_2}}{\partial \rho}$。

利用(1)，可得 $c_m=0$，$f_1=B_0$，$f_m=0(m\neq 1)$

$$A_{Z2}=B_0\rho sin\varphi+\sum_m(d_m\rho^{-m}cosm\varphi+g_m\rho^{-m}sinm\varphi)$$

利用(2)，可得:

$D_0=0$，　　$d_m=a_mR^{2m}$，

$g_m=b_mR^{2m}$　$(m\neq 1)$，　　$g_1=R^2b_1-B_0R^2$;

利用(3)，可得:

$$d_m=-\frac{\mu_2}{\mu_1}a_mR^{2m},$$

$$g_m=-\frac{\mu_2}{\mu_1}b_mR^{2m}\ (m\neq 1),\quad g_1=B_0R^2-\frac{\mu_2}{\mu_1}R^2b_1。$$

由上列表达式有

$$d_m=a_m=0,\qquad g_m=b_m=0\quad (m\neq 1),$$

$$b_1=\frac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2}B_0,\qquad g_1=\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}R^2B_0。$$

所以

$$A_{Z1}=\frac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2}B_0\rho sin\varphi,$$

$$A_{Z2}=B_0\rho sin\varphi+\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}R^2B_0\frac{sin\ \varphi}{\rho},\tag{3.5.9}$$

$$\vec{B}_1=\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_{Z1}}{\partial\varphi}\vec{e}_\rho-\frac{\partial A_{Z1}}{\partial\rho}\vec{e}_\varphi$$

$$=\frac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2}B_0(cos\varphi\vec{e}_\rho-sin\varphi\vec{e}_\varphi)=\frac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\vec{B}_0。\tag{3.5.10}$$

$$\vec{B}_2=\vec{B}_0+\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\frac{R^2B_0}{\rho^2}(cos\varphi\vec{e}_\rho+sin\varphi\vec{e}_\varphi)$$

圆柱内为一均匀场，圆柱外为外磁场迭加上由圆柱表面磁化电流产生的偶极场。与二维平面场中磁偶极子的矢势

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{\rho}}{\rho^2} \tag{3.5.11}$$

比较，可得产生上述偶极场的磁矩为

$$\vec{m}=\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_0(\mu_1+\mu_2)}4\pi R^2\vec{B}_0。 \tag{3.5.12}$$

〔**例 3–10**〕在上例的问题中，若有密度为$\vec{J}$的电流沿圆柱体轴线方向（Z 轴方向）均匀流动，求圆柱内外的磁场。

解：矢势所满足的方程

柱内　$\nabla^2 A_{Z1}=-\mu_1 J$,

柱外　$\nabla^2 A_{Z1}=0$。

由于圆柱中有电流存在，其柱内解应在上例的基础上加一有电流通过时的特解。利用〔例 3–7〕的结果，此解为$-\frac{\mu_1 J}{4}\rho^2$；柱外解应在上例基础上保留 $\ln\rho$ 的项，这样，

$$A_{Z1}=D_0-\frac{\mu_1 J}{4}\rho^2+\sum_{m=1}^{\infty}\rho^m\left(a_m cosm\varphi+b_m sinm\varphi\right)$$

$$A_{Z2}=C_0 ln\rho+\sum_{m=1}^{\infty}\left(c_m\rho_m cosm\varphi+d_m\rho^{-m}cosm\varphi+\right.$$

$$\left.f_m\rho^m sinm\varphi+g_m\rho^{-m}sinm\varphi\right)。$$

边界条件：

(1)$\rho\to\infty$时，$A_{Z2}=B_0\rho\sin\varphi$,

或　$\vec{B}_2=\vec{B}_0=B_0\vec{e}_x=B_0(cos\varphi\vec{e}_\rho-sin\varphi\vec{e}_\varphi)$;

(2)$\rho=R$ 处，$A_{Z1}=A_{Z2}$;

(3)$\rho=R$ 处，$\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial A_{Z1}}{\partial\rho}=\frac{1}{\mu_2}\frac{\partial A_{Z2}}{\partial\rho}$。

注意：因 A_{Z2} 中含 $\ln\rho$，所以在代入 $\rho\to\infty$ 的边界条件时，可利用 $\ln\rho$ 与 ρ^m 的极限性质，直接由 A_{Z2} 的表达式确定系数；也可以先求出 $\vec{B}_2$ 的表达式，然后代入上列条件 (1)，定出待定常数，与上例同法求得

$$A_{Z1}=D_0-\frac{\mu_1 J}{4}\rho^2+\frac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2}B_0\rho\sin\varphi; \tag{3.5.13}$$

$$A_{Z2}=-\frac{\mu_2}{2}JR^2\ln\rho+B_0\rho\sin\varphi+\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}R^2B_0\frac{\sin\varphi}{\rho},$$

其中 $D_0=\dfrac{JR^2}{2}\left(\dfrac{\mu_1}{2}-\mu_2\ln R\right)$;

$$\vec{B}_1=\frac{\mu_1}{2}J\rho\vec{e}_\varphi+\frac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\vec{B}_0; \tag{3.5.14}$$

$$\vec{B}_2=\vec{B}_0+\frac{\mu_2 JR^2}{2\rho}\vec{e}_\varphi$$

$$+\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\frac{R^2B_0}{\rho^2}(\cos\varphi\vec{e}_\rho+\sin\rho\vec{e}_\varphi)。$$

柱内外的场是在上例的结果中迭加了圆柱中电流在柱内外产生的场。

§3.6 磁标势法

磁场是涡旋场，一般情况下可引入矢势来描述，而不能引入标势。但因 $\vec{A}$ 是矢量，解 $\vec{A}$ 的边值问题比较复杂。因此，为简化计算，讨论在某些特殊条件下是否存在引入标势的可能性，仍然是有意义的。

如果在空间某区域内，到处有电流分布 $(\vec{J}=0)$，并且 $\oint_L\vec{H}\cdot d\vec{l}=0$，即该区域内任何回路都不被电流所链环，则这个区域内的磁场是无旋的，于是可引入磁标势。例如电磁铁两极之间的磁场、永久磁铁内外的磁场、载流线圈除去圈面之后空间区域的磁

场等，就属于上述情形。所以，在某区域内能够引入磁标势的条件是：(1) 该区域没有传导电流；(2) 该区域应为单连通区域。

在可以引入磁标势的研究区域内，静磁场的一般方程是

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= 0, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{B} &= \mu_0(\vec{H} + \vec{M}). \end{aligned} \tag{3.6.1}$$

由第一式引入磁标势 Φ_M:

$$\vec{H} = -\nabla \Phi_M, \tag{3.6.2}$$

由后二式得

$$\nabla \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot \vec{M}.$$

可见这时用 $\vec{H}$ 来描写的场是无旋而有源的，和静电场类似。由此我们令

$$\rho_M = -\nabla \cdot \vec{M}, \tag{3.6.3}$$

所以 $\vec{H}$ 所满足的方程

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{H} &= \rho_M. \\ \nabla \times \vec{H} &= 0, \end{aligned} \tag{3.6.4}$$

和静电场的方程

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho_f + \rho_p}{\varepsilon_0}, \\ \nabla \times \vec{E} &= 0 \end{aligned}$$

形式上完全相似，式中 ρ_M 与电场中的束缚电荷密度 $\rho_p = -\nabla \cdot \vec{p}$ 相对应，可称为假想磁荷体密度。由 (3.6.3) 可以推出，在介质分界面上可假定有磁荷面密度

$$\sigma_M = \vec{n} \cdot (\vec{M}_1 - \vec{M}_2) \tag{3.6.5}$$

这意味着如果把分子电流的贡献看作由一对假想磁荷组成的磁偶极子，则物质磁化时就出现假想磁荷分布。上述 $\vec{H}$ 满足的方程 (3.6.4) 用磁标势表示即为

$$\nabla^2\Phi_m = -\rho_m。 \tag{3.6.6}$$

对于分区均匀的线性介质，由于$\vec{H}$与$\vec{M}$满足简单的线性关系而有$\vec{B}=\mu\vec{H}$，所以在每个均匀区域中磁标势的方程是

$$\nabla^2\Phi_M = 0。 \tag{3.6.7}$$

边值关系 $H_{1t}=H_{2t}$ 和 $B_{1n}=B_{2n}$ 用磁标势可表示为

$$\Phi_{M1}=\Phi_{M2}$$

$$\mu_1\frac{\partial\Phi_{M1}}{\partial n}=\mu_2\frac{\partial\Phi_{M2}}{\partial n}。 \tag{3.6.8}$$

有一种实际情形是“硬”铁磁体的问题。硬铁磁体的磁化强度在适当的外场场强下基本上与外场无关，可以把这些材料看成具有固定的、已知的磁化强度$\vec{M}'(\vec{r})$来处理，这时$\vec{B}=\mu_0[\vec{H}+\vec{M}'(\vec{r})]$，相应的磁标势满足的方程为

$$\nabla^2\Phi_M = -\rho_M \quad (\rho_M=-\nabla\cdot\vec{M}'(\vec{r})) \tag{3.6.9}$$

边值关系(假定 $\alpha_f=0$)为

$$\Phi_{M1}=\Phi_{M2}, \tag{3.6.10}$$

$$\frac{\partial\Phi_{M2}}{\partial n}-\frac{\partial\Phi_{M1}}{\partial n}=-\sigma_M \quad (\sigma_M=\vec{n}\cdot(\vec{M}'_1-\vec{M}'_2))。$$

对于理想铁磁物质，由于$\vec{M}=\chi_m\vec{H}+\vec{M}_0$，而有$\vec{B}=\mu\vec{H}+\mu_0\vec{M}_0$，所以相应的磁标势满足的方程为

$$\nabla^2\Phi_M = \frac{-\mu_0}{\mu}\rho_M \quad (\rho_M=-\nabla\cdot\vec{M}_0) \tag{3.6.11}$$

边值关系(假定 $\alpha_f=0$)为

$$\Phi_{M1}=\Phi_{M2} \tag{3.6.12}$$

$$\mu_2\frac{\partial\Phi_{M2}}{\partial n}-\mu_1\frac{\partial\Phi_{M1}}{\partial n}=-\mu_0\sigma_M \quad (\sigma_M=\vec{n}\cdot(\vec{M}_{01}-\vec{M}_{02}))。$$

从上面讨论可以看出，静磁场和静电场的一些基本关系是一一对应的。唯一不同的是磁场没有自由磁荷，所有假想磁荷都是束缚的。因而可以把静电场的求解方法应用到静磁场中来。值得

注意的是，如果不同区域是不同类型的磁介质，则分区求解时，每一区域内的方程应是该类介质中的场方程；边值关系 $H_{1t}=H_{2t}(\alpha_f=0)$都是等价的 $\Phi_{M1}=\Phi_{M2}$。但对 $B_{1n}=B_{2n}$，应将不同类型介质的$\vec{B}$式代入。如果交界面上有传导电流分布，则要利用由 $H_{2t}-H_{1t}=\alpha_f$ 化出的磁标势表达式。

〔**例 3-11**〕将磁导率为 μ，半径为 R 的介质球放入均匀磁场$\vec{H}_0$内，求球内外的磁感应强度。

解：球内外处处没有传导电流，可引入磁标势 ϕ_M，并且在球内外均满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2\Phi_M=0$$

选取球坐标，原点在球心，极轴沿$\vec{H}_0$方向。考虑到球内势在 r=0 处有限，球外势当 r→∞时为均匀外场的势，则

$$\text{球内}\quad \Phi_{M1}=\sum_{l=0}^{\infty}a_l r^l P_l(\cos\theta)$$

$$\text{球外}\quad \Phi_{M2}=-H_0 r\cos\theta+\sum_{l=0}^{\infty}b_l r^{-(l+1)}P_l(\cos\theta)$$

其中系数由边界条件

$$H_{1t}=H_{2t}$$

$$\Phi_{M1}|_{r=R}=\Phi_{M2}|_{r=R}$$

$$\mu\frac{\partial\Phi_{m1}}{\partial r}\bigg|_{r=R}=\mu_0\frac{\partial\phi_{m2}}{\partial r}\bigg|_{r=R}$$

定出

$$a_1=-\frac{3\mu_0}{2\mu_0+\mu}H_0\qquad b_1=\frac{\mu-\mu_0}{2\mu_0+\mu}R^3H_0,$$

$$a_l=b_l=0\qquad (l\neq 1);$$

所以

$$\phi_{M1}=-\frac{3\mu_0}{2\mu_0+\mu}H_0 r\cos\theta=-\frac{3\mu_0}{2\mu_0+\mu}\vec{H}_0\cdot\vec{r};\tag{3.6.13}$$

$$\phi_{M2}=-H_0 r\cos\theta+\frac{\mu-\mu_0}{2\mu_0+\mu}\frac{H_0R^3}{r^2}\cos\theta$$

$$= -\vec{H}_0 \cdot \vec{r} + \frac{\mu-\mu_0}{2\mu_0+\mu} R^3 \frac{\vec{H}_0 \cdot \vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{B}_1 = \mu \vec{H}_1' = -\mu \nabla \phi_{M1} = \frac{3\mu_0 \mu}{2\mu_0+\mu} \vec{H}_0;$$

$$\vec{B}_2 = \mu_0 \vec{H}_2 = -\mu_0 \nabla \phi_{M2} \tag{3.6.14}$$

$$= \mu_0 \vec{H}_0 + \frac{\mu_0(\mu-\mu_0)}{2\mu_0+\mu} R^3 \left[\frac{3(\vec{H}_0 \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{H}_0}{r^3} \right]。$$

现将所得结果作一些讨论：

(1)根据所得球内场$\vec{H}_1 = \frac{3\mu_0}{2\mu_0+\mu}\vec{H}_0$。磁介质球的磁化强度矢量为

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}_1 = \frac{3\chi_m \mu_0}{2\mu_0+\mu}\vec{H}_0 = \frac{3(\mu-\mu_0)}{2\mu_0+\mu}\vec{H}_0, \tag{3.6.15}$$

由于介质球均匀磁化，所以总磁矩为

$$\vec{m} = \vec{M}V = 4\pi \frac{\mu-\mu_0}{2\mu_0+\mu} R^3 \vec{H}_0; \tag{3.6.16}$$

(2)球内场应为外场$\vec{H}_0$与由于介质磁化而产生的附加场$\vec{H}'$的迭加。$\vec{H}_1 = \vec{H}_0 + \vec{H}'$，则

$$\vec{H}' = \vec{H}_1 - \vec{H}_0 = -\frac{\mu-\mu_0}{2\mu_0+\mu}\vec{H}_0 = -\frac{1}{3}\vec{M}。$$

可见$\vec{H}'$与外磁场$\vec{H}_0$方向相反，起着削弱$\vec{H}_0$的作用，称为退磁场。并且正比于$\vec{M}$，比例系数称退磁因子 L，即

$$\vec{H}' = -L\vec{M}; \tag{3.6.17}$$

(3)由上述$\vec{M}$的表示，可得磁化体电流密度

$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M} = 0,$$

磁化面电流密度

$$\vec{\alpha}_M = \vec{M} \times \vec{n} = \frac{3(\mu-\mu_0)}{2\mu_0+\mu} H_0 \sin\theta \vec{e}_\varphi; \tag{3.6.18}$$

(4)当 $\mu \to 0$ 时，球内磁感应强度

"绝对"抗磁性

$$\vec{B}_1 = \frac{3\mu_0\mu}{2\mu_0+\mu}\vec{H}_0 \to 0,$$

这相当于超导球情况（迈斯纳效应，参看第八章§8.7和习题18），此时球内磁场强度

$$\vec{H}_1 = \frac{3\mu_0}{2\mu_0+\mu}\vec{H}_0 \to \frac{3}{2}\vec{H}_0;$$

又由球内$\vec{B}_1 = \mu_0(\vec{M}+\vec{H}_1) = 0$，可得

$$\vec{M} = -\vec{H}_1 = -\frac{3}{2}\vec{H}_0;$$

所以球面上的超导电流密度

$$\vec{\alpha}_s = -\vec{n}\times\vec{M} = \vec{n}\times\vec{H}_1 = \vec{e}_r \times \frac{3}{2}\vec{H}_0$$

$$= -\frac{3}{2}H_0 sin\theta\vec{e}_\varphi。 \tag{3.6.19}$$

〔例 3–12〕一个半径为R，均匀磁化的球形永久磁体，磁化强度为$\vec{M}_0$，球外为真空，求球内外的磁场。

解：各区域都没有传导电流。可引入磁标势。用假想磁荷的观点求解。球内由于均匀磁化，$\rho_M = -\nabla\cdot\vec{M}_0 = 0$，球外没有磁荷。因此磁荷只分布在球表面上，球内外的标势均满足拉普拉斯方程。取球坐标，原点在球心，极轴沿磁化方向。因r=0处球内势有限。r→∞时球外势趋于零，则

球内 $\Phi_{M1} = \sum_{l=0}^{\infty} a_l r^l P_l(cos\theta)$

球外 $\Phi_{M2} = \sum_{l=0}^{\infty} b_l r^{-(l+1)} P_l(cos\theta)$

其中系数由下列边界条件确定：

(1)$r = R$处，$\Phi_{M1} = \Phi_{M2}$；

(2)$r = R$处，$\frac{\partial\Phi_{M2}}{\partial r} - \frac{\partial\Phi_{M1}}{\partial r} = -\sigma_M$。

而

$$\sigma_M = M_r = M_0 cos\theta = M_0 P_1(cos\theta)$$

由此得到

$$a_1 = \frac{1}{3} M_0, \qquad b_{.1} = \frac{1}{3} M_0 R^3,$$

$$a_l = b_l = 0 \qquad (l \neq 1)。$$

所以

$$\Phi_{M1} = \frac{1}{3} M_0 r cos\theta = \frac{1}{3} \vec{M}_0 \cdot \vec{r},$$

$$\Phi_{M2} = \frac{1}{3} M_0 R^3 \frac{cos\theta}{r^2} = \frac{R^3}{3} \frac{\vec{M}_0 \cdot \vec{r}}{r^3}。$$

球外场是偶极场，与$\Phi_M = \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3}$比较，得磁矩

$$\vec{m} = \frac{4\pi}{3} R^3 \vec{M}_0。 \tag{3.6.20}$$

球内外的磁场强度

$$\vec{H}_1 = -\frac{1}{3} \vec{M}_0,$$

$$\vec{H}_2 = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right]。$$

利用关系式$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$，可得球内外的磁感应强度为

$$\vec{B}_1 = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}_0,$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right]。 \tag{3.6.21}$$

球内外的$\vec{B}$和$\vec{H}$如图 3.11 所示。球内的$\vec{B}$平行于$\vec{M}_0$，而$\vec{H}$反平行于$\vec{M}_0$，$\vec{B}$和$\vec{H}$反向。$\vec{B}$线是连续的闭合曲线。这是永

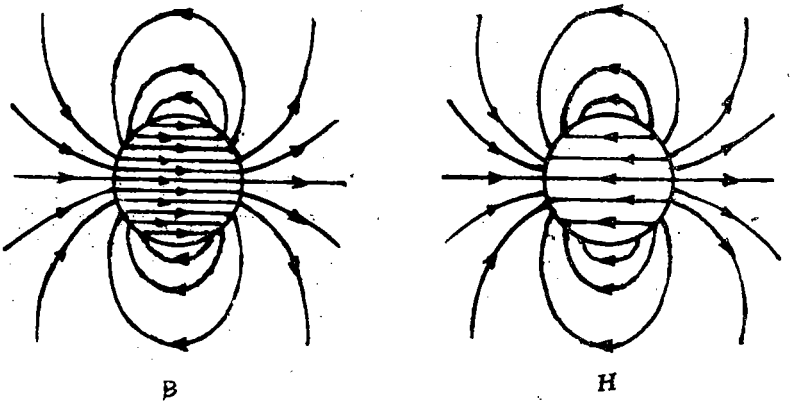


图 3.11

久磁体分子电流磁化的结果；而 $\vec{H}$ 线终止在球面上，因球面上有等效面磁荷密度 σ_M。可见磁铁内部的 B 和 H 有很大的差别，B 是磁铁内部的总宏观场。即物理小体积内对宏观场 的平均值，而 H 为用假想磁荷观点处理问题的一个辅助量。

〔例 3-13〕一个磁导率为 μ，内外半径分别为 b 和 a 的长直中空圆柱形磁介质，放在均匀外磁场 $\vec{H}_0$ 之中。$\vec{H}_0$ 的方向与圆柱体轴线垂直，介质内外都是空气。求空腔内（$\rho < b$）的磁场，并讨论其磁屏蔽效应。

解：用磁标势法，空间各个区域的标势均满足拉普拉斯方程。选圆柱坐标，Z 轴在圆柱轴线上，外场 $\vec{H}_0$ 沿 X 轴方向。由问题的对称性可知，空间场分布与 Z 无关，实际是二维平面场，拉氏方程的通解为

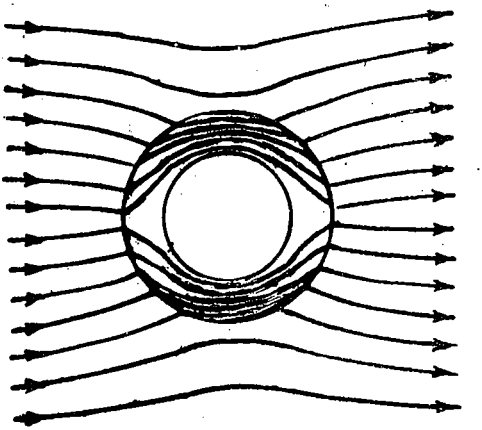


图 3.12

$$\Phi_m(\rho,\ \varphi)=\sum_{m=1}^{\infty}(A_m cosm\varphi+ B_m sinm\varphi)(C_m\rho^m + D_m\rho^{-m})。$$

考虑到场应为变量 φ 的偶函数,各区域的解不应有 sinmφ 的项;当 $\rho\to 0$ 时，空腔内的解有限，故不应有 ρ^{-m} 的项。所以各区域的标势为

空腔中 $\Phi_{M1}=\sum_{m=1}^{\infty}C_m\rho^m cosm\varphi$ ，

介质中 $\Phi_{M2}=\sum_{m=1}^{\infty}(d_m\rho^m+ e_m\rho^{-m})cosm\varphi,$

圆柱外 $\Phi_{M3}=\sum_{m=1}^{\infty}(f_m\rho^m+ g_m\rho^{-m})cosm\varphi。$

边界条件:

(1)$\rho\to\infty$时，$\Phi_{M3}=-H_0\rho cos\varphi;$

(2)$\rho=$b 处，$\Phi_{M1}=\Phi_{M2}$，$\mu_0\frac{\partial\Phi_{M1}}{\partial\rho}=\mu\frac{\partial\Phi_{M2}}{\partial\rho}$;

(3)$\rho=$a 处，$\Phi_{M2}=\Phi_{M3}$，$\mu\frac{\partial\Phi_{M2}}{\partial\rho}=\mu_0\frac{\partial\Phi_{M3}}{\partial\rho}$。

求空腔内的场，只需定出 C_m，由上述边界条件可得

$$C_1=\frac{4\frac{\mu}{\mu_0}H_0}{\left(\frac{\mu}{\mu_0}-1\right)^2\frac{b^2}{a^2}-\left(\frac{\mu}{\mu_0}+1\right)^2},$$

$C_m=0。\quad (m\neq 1)$

所以 $\Phi_{M1}=C_1\rho cos\varphi,$

$$\vec{H}_1=-\nabla\Phi_{M1}=-\frac{\partial\Phi_{M1}}{\partial\rho}\vec{e}_\rho-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi_{M1}}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$= C_1(-\cos\varphi\vec{e}_\rho + \sin\varphi\vec{e}_\varphi) = -C_1\vec{e}_\chi,$$

即 $$\vec{H}_1 = \frac{4\frac{\mu}{\mu_0}}{\left(\frac{\mu}{\mu_0}+1\right)^2 - \left(\frac{\mu}{\mu_0}-1\right)^2\frac{b^2}{a^2}}\vec{H}_0。$$

腔内磁场是均匀的。其方向与外磁场方向一致。

若 $\mu >> \mu_0$，比如中空圆柱体用铁磁材料做成，则腔内场近似为

$$\vec{H}_1 \approx \frac{4\vec{H}_0}{\frac{\mu}{\mu_0}\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)}, \tag{3.6.22}$$

其数值很小，意味着高磁导率的铁磁材料做成的壳层对外界磁场的影响有屏蔽作用，即磁屏蔽效应。可以证明，产生这种磁屏蔽效应，是因为 μ 值很大的圆柱层具有很强的聚集磁感线的作用，从而使外来的磁感线很少能穿过空腔内部。由 $\vec{H}_1$ 的表达式可以看出，$\frac{\mu}{\mu_0} = \mu_r$ 越大，屏蔽腔越厚。外磁场被屏蔽的程度越高。如

$$\frac{b}{a} = \frac{9}{10}, \qquad \mu_r = 600,$$

则

$$H_1 \approx 0.035H_0,$$

腔内场仅为外场的 3.5%。

〔例 3-14〕一个内半径为 a 外半径为 b 的厚半球壳（截面如图 3.13 所示）。沿 Z 轴被均匀磁化。试证明球心处的场为零。

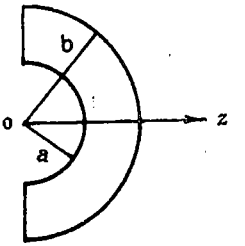


图 3.13

解：磁介质中一个体积元 dv′的标势

$$d\Phi_m = \frac{1}{4\pi}\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^3}dv'$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\vec{m}\cdot\left(\nabla\frac{1}{r}\right)dv'。$$

则体积 v 的标势

$$\Phi_m = -\frac{1}{4\pi}\int_v \vec{m}\cdot\left(\nabla\frac{1}{r}\right)dv' = \frac{1}{4\pi}\int_v \vec{m}\cdot\left(\nabla'\frac{1}{r}\right)dv'。$$

利用$\nabla'\cdot\left(\frac{\vec{m}}{r}\right) = \frac{1}{r}\nabla'\cdot\vec{m} + \vec{m}\cdot\left(\nabla'\frac{1}{r}\right)$和高斯定理。得

$$\Phi_m = \frac{1}{4\pi}\oint_s \frac{\vec{m}\cdot\vec{n}'}{r}ds' + \frac{1}{4\pi}\int_v \frac{-\nabla'\cdot\vec{m}}{r}dv'$$

$$= \frac{1}{4\pi}\oint_s \frac{\sigma_m}{r}ds' + \frac{1}{4\pi}\int_v \frac{\rho_m}{r}dv'。 \qquad (3.6.23)$$

磁场强度的表达式为

$$\vec{H} = -\nabla\Phi_m = \frac{1}{4\pi}\oint_s \frac{\sigma_m}{r^2}ds'\vec{e}_r + \frac{1}{4\pi}\int_v \frac{\rho_m}{r^2}dv'\vec{e}_r。$$

在本题情况下，由于均匀磁化，$\vec{m}$为常矢。

$$\rho_m = -\nabla'\cdot\vec{m} = 0,$$

只有半球壳内外表面上的 σ_m 对$\vec{H}$有贡献。并且

$$\sigma_{m外} = -\sigma_{m内} = m\cos\theta,$$

所以球心处的磁场为

$$H_0 = \frac{1}{4\pi}\left[\int_{s内}\frac{\sigma_{m内}ds}{r^2}\cos\theta + \int_{s外}\frac{\sigma_{m外}ds}{r^2}\cos\theta\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\sigma_{m内}\cos\theta\sin\theta d\theta d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\sigma_{m外}\cos\theta\sin\theta d\theta d\varphi\right]$$

$$= 0。$$

从这里还可以看出，上述公式（3.6.23）与静电学中公式

$$\Phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_s\frac{\sigma_p}{r}ds+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v\frac{\rho_p}{r}dv$$

具有完全相同的形式，用这公式还可以方便地计算有关硬铁磁体的问题。

〔例 3-15〕一个半径为 R 的薄球壳均匀带电，面电荷密度为 σ，球壳以角速度 ω 绕它的一条直径匀速旋转

(1) 利用 σ、ω、R 和其它有关常数写出球壳内外两侧的磁场满足的边界条件；

(2) 满足这些边界条件的磁场在球壳内是均匀场，在球壳外是偶极场，试决定球壳内外磁场的大小。

解：(1) 取球坐标系（如图 3.14），球内区域为 1，球外区域为 2，带电球壳旋转时产生面电流分布。其密度为

$$\vec{\alpha}_f=\sigma\vec{v}=\sigma\omega R\sin\theta\vec{e}_\varphi \qquad (3.6.24)$$

将此表面电流作为传导电流来处理，薄球壳内外磁场满足的边值关系为：当 r＝R 时，

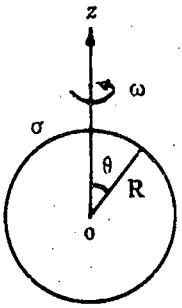


图 3.14

$$\vec{e}_r\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\sigma\omega R\sin\theta\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{e}_r\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0$$

(2)球壳内外可引入磁标势 Φ_m，满足方程 $\nabla^2\Phi_m=0$，其通解为

$$\Phi_m=\sum_{L=0}^{\infty}(A_l r^l+\frac{B_l}{r^{l+1}})P_l(\cos\theta)$$

将上述边值关系用磁标势表示

$$\vec{e}_r\times\vec{H}=-\vec{e}_r\times\nabla\Phi_m(r,\theta)=-\vec{e}_r\times\left(\frac{\partial\Phi_m}{\partial r}\vec{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_m}{\partial\theta}\vec{e}_\theta\right)$$

$$= -\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_m}{\partial \theta} \cdot \vec{e}_\varphi 。$$

因此，当 r＝R 时

$$\frac{\partial \Phi_{m1}}{\partial \theta} - \frac{\partial \Phi_{m2}}{\partial \theta} = \sigma \omega R^2 sin\theta \quad ,$$

$$\frac{\partial \Phi_{m1}}{\partial r} = \frac{\partial \Phi_{m2}}{\partial r} 。$$

由题意，球壳内为均匀场，$\Phi_{m1} \sim r\cos\theta$，球壳外为偶极场 $\Phi_{m2} \sim r^{-2}\cos\theta$，即通解中 $l=1$。

$$\Phi_{m1} = A_1 r cos\theta$$

$$\Phi_{m2} = B_1 r^{-2} cos\theta$$

代入边值关系可得

$$A_1 = -\frac{2}{3}\sigma\omega R \qquad B_1 = \frac{1}{3}\sigma\omega R^4,$$

$$\Phi_{m1} = -\frac{2}{3}\sigma\omega R r cos\theta,$$

$$\Phi_{m2} = \frac{1}{3}\sigma\omega R^4 \frac{cos\theta}{r^2} 。$$

则球壳内外的磁场为

$$\vec{B}_1 = \frac{2}{3}\mu_0\sigma\omega R(cos\theta\vec{e}_r - sin\theta\vec{e}_\theta) = \frac{2}{3}\mu_0\sigma R\omega\vec{e}_z,$$

$$\vec{B}_2 = \frac{1}{3}\mu_0\sigma\omega R^4\left(\frac{2cc_{\cdot\cdot}\cup}{r^3}\vec{e}_r + \frac{sin\theta}{r^3}\vec{e}_\theta\right)。$$

§3.7 磁镜像法

我们仅讨论两种磁介质的分界面为无限大平面的情形。在 $Z>0$ 的半空间充满磁导率为 μ_1 的介质。其中有电流分布 $\vec{J}(\vec{r}')$。在 $Z<0$ 的半空间充满磁导率为 μ_2 的介质。如图 3.15

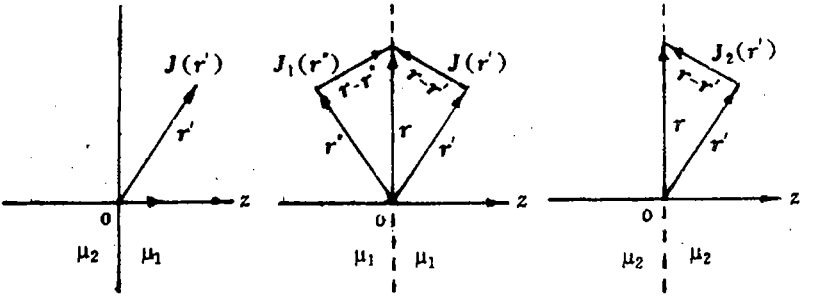


图 3.15

(a) 所示。空间任一点的磁场应为电流分布$\vec{J}(\vec{r}')$产生的场与介质交界面上磁化电流产生的场的迭加。与静电场中镜像法类似，对于 Z>0 空间的场，以位于电流$\vec{J}(\vec{r}')$的共轭点的镜像电流$\vec{J}_1(\vec{r}'')$等效代替交界面上磁化电流的贡献。如图 3.15 (b) 所示，对于 Z<0 空间的场，以位于电流$\vec{J}$处的镜像电流$\vec{J}_1'(\vec{r}')$等效代替交界面上磁化电流的贡献。且令$\vec{J}+\vec{J}_1'=\vec{J}_2$，如图 3.15 (c) 所示。

由毕奥—萨伐尔定律，交界面上任一点 P 紧靠介质 μ_1 一侧的磁场为

$$\vec{B}_1(\vec{r})=\frac{\mu_1}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{r}')\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dv'+$$

$$\frac{\mu_1}{4\pi}\int\frac{\vec{J}_1(\vec{r}'')\times(\vec{r}-\vec{r}'')}{|\vec{r}-\vec{r}''|^3}dv''^1, \tag{3.7.1}$$

P 点紧靠介质 μ_2 一侧的磁场为

$$\vec{B}_2(\vec{r})=\frac{\mu_2}{4\pi}\int\frac{\vec{J}_2(\vec{r}')\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dv'。 \tag{3.7.2}$$

让$\vec{B}_1$、$\vec{B}_2$满足下列边界条件，即可确定像电流$\vec{J}_1$和$\vec{J}_2$的大小。由 $H_{1t}=H_{2t}$，有

$$\frac{1}{\mu_1}B_{1x}=\frac{1}{\mu_2}B_{2x} \tag{3.7.3}$$

$$\frac{1}{\mu_1}B_{1y}=\frac{1}{\mu_2}B_{2Y} \tag{3.7.4}$$

由 $B_{1n}=B_{2n}$，有

$$B_{1Z}=B_{2Z} \tag{3.7.5}$$

将 (3.7.1)、(3.7.2) 代入 (3.7.3) 式

$$\int\frac{J_y(\vec{r}-\vec{r}')_Z-J_Z(\vec{r}-\vec{r}')_y}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dv'+$$

$$\int\frac{J_{1y}(\vec{r}-\vec{r}'')_Z-J_{1Z}(\vec{r}-\vec{r}'')_y}{|\vec{r}-\vec{r}''|^3}dv''$$

$$=\int\frac{J_{2y}(\vec{r}-\vec{r}')_Z-J_{2Z}(\vec{r}-\vec{r}')_y}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dv'$$

再利用

$$|\vec{r}-\vec{r}'|=|\vec{r}-\vec{r}''| \qquad (\vec{r}-\vec{r}')_x=(\vec{r}-\vec{r}'')_x$$

$$(\vec{r}-\vec{r}')_y=(\vec{r}-\vec{r}'')_y \qquad (\vec{r}-\vec{r}')_Z=-(\vec{r}-\vec{r}'')_Z$$

并且 dv′和 dv″的积分区域相等。得

$$J_y-J_{1y}=J_{2y} \tag{3.7.6}$$

$$J_Z+J_{1Z}=J_{2Z} \tag{3.7.7}$$

同理，将 (3.7.1)、(3.7.2) 代入 (3.7.4) 式，可得

$$J_Z+J_{1Z}=J_{2Z} \tag{3.7.8}$$

$$J_x-J_{1x}=J_{2x} \tag{3.7.9}$$

将(3.7.1)、(3.7.2) 代入 (3.7.5) 式，可得

$$\mu_1J_x+\mu_1J_{1x}=\mu_2J_{2x} \tag{3.7.10}$$

$$\mu_1J_y+\mu_1J_{1y}=\mu_2J_{2y} \tag{3.7.11}$$

求解 (3.7.9) 和 (3.7.10)，则

$$J_{1x}=\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+\mu_1}J_x \qquad J_{2x}=\frac{2\mu_1}{\mu_2+\mu_1}J_x$$

像电流的 Z 分量仅有一个关系式 (3.7.8)，说明在满足边界条件和求解区域电流分布不变的情况下，还有一定的选取 J_{1Z} 和 J_{2Z} 的任意性。如选取

$$J_{2Z}=\frac{2\mu_1}{\mu_2+\mu_1}J_Z,$$

则 $$J_{1Z}=-\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+\mu_1}J_Z。$$

所以，像电流$\vec{J}_1(\vec{r}'')$的位置在$\vec{J}(\vec{r}')$的共轭点上，其各分量为

$$J_{1x}=\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+\mu_1}J_x\ ,\qquad J_{1y}=\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+\mu_1}J_y \tag{3.7.12}$$

$$J_{1Z}=-\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+\mu_1}J_Z$$

$\vec{J}_2(\vec{r}')$的位置在$\vec{J}(\vec{r}')$处，其表达式是

$$J_2=\frac{2\mu_1}{\mu_2+\mu_1}\vec{J}。 \tag{3.7.13}$$

应当注意，在上面推导中，第一种介质（表示为 μ_1）是真实电流$\vec{J}$所在区域；并且原规定$\vec{J}_1$和$\vec{J}_2$的方向都与$\vec{J}$一致。从 (3.7.12) 和 (3.7.13) 式可见，$\vec{J}_2$的方向总和$\vec{J}$一致，但$\vec{J}_1$则不一定，要由$\mu_2-\mu_1$的正负来决定。

例 3-16 一条载有电流 I 的长直导线平行位于磁导率为 μ 的半无限磁介质之上，导线到介质平面的距离为 a。

(1)求空间的磁场强度；

(2)求导线单位长度所受的作用力；

(3)若 $\mu\to\infty$，讨论将载流导线置于空气中和置于磁介质中的两种情况。

解：(1)选介质表面为 xy 平面，Z 轴垂直于介质面方向向外。利用(3.7.12)和(3.7.13)式表示的结果，对于 Z>0 的空间。像电流

$$I' = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I = \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} I, \tag{3.7.14}$$

此空间区域任一点的磁场

$$\vec{H}' = \frac{I}{2\pi r_1}\vec{\alpha}_1 + \frac{I'}{2\pi r_2}\vec{\alpha}_2 \quad ;$$

对于 $Z<0$ 的空间，像电流

$$I'' = \frac{2\mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I = \frac{2\mu_0}{\mu + \mu_0} I, \tag{3.7.15}$$

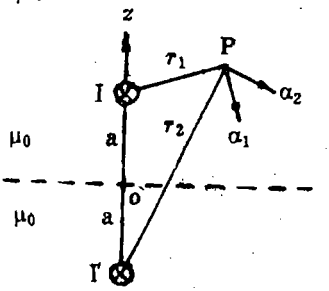


图 3.16

此空间区域任一点的磁场

$$\vec{H}_2 = \frac{I''}{2\pi r}\vec{\alpha}_3 。$$

(2)像电流 I' 在电流 I 所在处产生的场为

$$B' = \frac{\mu_0 I'}{2\pi(2a)} = \frac{\mu_0}{4\pi a}\frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} I,$$

电流 I 单位长度所受力

$$f = \frac{F'}{L} = B' I = \frac{\mu_0}{4\pi a}\frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} I^2,$$

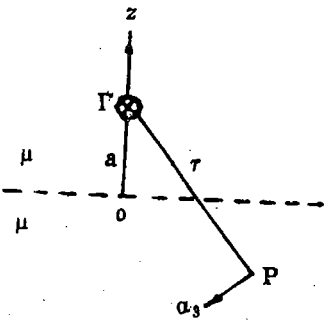


图 3.17

此力的方向指向磁介质平面，相当于两同向电流互相吸引。

(3)如载流导线置于空气中，$\mu_1 = \mu_0$，$\mu_2 = \mu \to \infty$，则

$$I' = \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} I \approx I,$$

$$I'' = \frac{2\mu_0}{\mu + \mu_0} I \approx 0,$$

此时磁介质中 $\vec{H}_2 = 0$，但 $\vec{B}_2$ 并不然：

$$B_2 = \mu_2 H_2 = \mu\frac{I''}{2\pi r} = \mu\left(\frac{2\mu_0}{\mu + \mu_0} I\right)\frac{1}{2\pi r}$$

$$= \frac{\mu\mu_0}{\mu + \mu_0}\frac{I}{\pi r} \approx \frac{\mu_0 I}{\pi r}。$$

如载流导线置于磁介质中，$\mu_1 = \mu \to \infty$，$\mu_2 = \mu_0$(注意：第一种介质 μ_1 为真实电流所在区域) 则

$$I' = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} I = \frac{\mu_0 - \mu}{\mu + \mu_0} I \approx -I,$$

$$I'' = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} I = \frac{2\mu}{\mu + \mu_0} I \approx 2I,$$

此情况下空气中的磁感强度与整个空间都充满空气时相比，增大了一倍 (设导线中的电流相同)。

〔例 3-17〕有一块磁矩为$\vec{m}$的小永磁体，位于距半无限铁磁介质平面为 a 处，小磁体在真空中，$\vec{m}$的方向与铁磁物质平面法线$\vec{n}$的夹角为 θ，求作用在小磁体上的力。

解：用镜像法求解。将小磁体看成一个环形电流产生的磁偶极子，根据 (3.7.12) 式及上例中 (3) 的结果，其镜像电流所产生的镜像磁矩$\vec{m}'$如图 3.18 所示，并且 $m' = m$。坐标也如图选取。令 $\vec{R} = 2\vec{a}$，$\vec{m}'$在$\vec{m}$所在处产生的势和场分别为

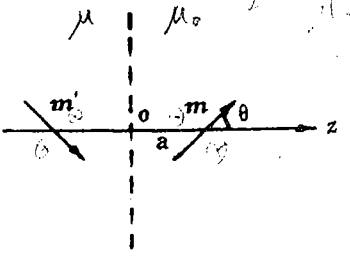


图 3.18

$$\Phi_m = \frac{1}{4\pi}\frac{\vec{m}' \cdot \vec{R}}{R^3},$$

$$\vec{B} = -\mu_0 \nabla \Phi_m ,$$

作用于$\vec{m}$上的力为

$$\vec{F} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}) = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}),$$

又

$$\vec{m}\cdot\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{m}\cdot\left[\frac{3(\vec{m}'\cdot\vec{R})\vec{R}}{R^5}-\frac{\vec{m}'}{R^3}\right]$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\vec{m}'\cdot\vec{R})(\vec{m}\cdot\vec{R})}{R^5}-\frac{\vec{m}\cdot\vec{m}'}{R^3}\right]$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3m^2\cos^2\theta}{R^3}-\frac{m^2\cos 2\theta}{R^3}\right]$$

$$=\frac{\mu_0}{64\pi}\frac{1+\cos^2\theta}{a^3}m^2,$$

所以小磁体所受的作用力

$$\vec{F}=\frac{\partial}{\partial R}\left[\frac{\mu_0}{64\pi}\frac{1+\cos^2\theta}{a^3}m^2\right]\vec{e}_z$$

$$=-\frac{3\mu_0 m^2}{64\pi a^4}(1+\cos^2\theta)\vec{e}_z, \qquad (3.7.16)$$

为一吸引力。

〔例 3–18〕在磁导率为 μ_2 的介质中有一直导线和一圆柱体，直导线上通有电流 I，且它与圆柱体的轴线平行，相距为 b。圆柱体半径为 a（a＜b），磁导率为 μ_1。试求圆柱体外任一点的矢势 $\vec{A}$。并将磁化电流的贡献用等效的镜像电流表示出来。

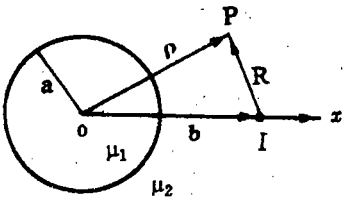


图 3.19

解：取柱坐标，其 Z 轴与圆柱体的轴线重合，且以电流 I 的方向为正向。Z 等于任一常数的平面如图 3.19 所示。

电流 I 在 P 点产生的矢势

$$A_Z^0 = -\frac{\mu_2}{4\pi} 2I\ln R,$$

$$A_\varphi^0 = A_\rho^0 = 0。$$

P 点处的矢势为电流所产生的势和因磁化而产生的感应势的迭加。感应势$\vec{A}'$满足拉氏方程。拉氏方程的通解为

$$A'_Z = a_0 + b_0 \ln\rho + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \rho^m + B_m \rho^{-m})$$
$$(C_m \cos m\varphi + D_m \sin m\varphi)。$$

在 $\rho \to \infty$处，$A'_Z \to 0$，所以 $A_m = 0$，$b_0 = 0$，a_0 亦可选为零。$\rho \to 0$ 时柱内解有限。于是在柱外

$$A'_z = \sum_{m=1}^{\infty} \rho^{-m} (a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi)$$

柱内

$$A'_Z = \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m (c_m \cos m\varphi + d_m \sin m\varphi)$$

注意到当 $\rho < b$(为在边界上应用，所以取 $\rho < b$ 情形)。有

$$\ln R = \ln(\rho^2 + b^2 - 2\rho b\cos\varphi)^{1/2}$$
$$= \frac{1}{2}\ln b^2 (1 + \frac{\rho^2}{b^2} - 2\frac{\rho}{b}\cos\varphi)$$
$$= \ln b + \frac{1}{2}\ln\left[1 + \left(\frac{\rho}{b}\right)^2 - 2\left(\frac{\rho}{b}\right)\cos\varphi\right]$$
$$= \ln b - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos m\varphi}{m} \left(\frac{\rho}{b}\right)^m$$

于是总的矢势为

$$A_{Z外} = -\frac{\mu_2}{4\pi} 2I\ln b + \frac{\mu_2}{4\pi} 2I \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos m\varphi}{m} (\frac{\rho}{b})^m$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\rho^{-m}(a_m cosm\varphi+ b_m sinm\varphi)$$

$$A_{Z内}=\sum_{m=1}^{\infty}\rho^{m}(c_m cosm\varphi+ d_m sinm\varphi)$$

现在用边值关系确定系数，由

$$\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial A_{Z1}}{\partial\rho}=\frac{1}{\mu_2}\frac{\partial A_{Z2}}{\partial\rho}\qquad(即H_{1t}=H_{2t})。$$

给出 $\frac{1}{\mu_1}c_m=\left(\frac{\mu_2}{4\pi}2I\frac{1}{mb^m}-a_m\frac{1}{a^{2m}}\right)\frac{1}{\mu_2}$；

由 $A_{Z1}=A_{Z2}\qquad(即B_{1n}=B_{2n})$

给出 $c_m=\frac{\mu_2}{4\pi}2I\frac{1}{mb^m}+a_m\frac{1}{a^{2m}}$，

$b_m=d_m=0$;

解得

$$a_m=\frac{\mu_2}{4\pi}2I\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\frac{1}{m}\frac{a^{2m}}{b^m},$$

$$c_m=\frac{\mu_2}{4\pi}2I\frac{2\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\frac{1}{m}\frac{a^{2m}}{b^m}。$$

令 $\beta=\frac{\mu_2}{4\pi}2I\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}$，

$a'=\frac{a^2}{b}$ （a′为 b 在圆内的共轭点）

圆柱外的矢势

$$A_{Z外}=-\frac{\mu_2}{4\pi}2IlnR+\beta\sum_{m=1}^{\infty}\rho^{-m}a'^{m}\frac{(cosm\varphi)}{m}$$

$$=-\frac{\mu_2}{4\pi}2IlnR+\beta\left[ln\rho-ln(\rho^2+a'^2-2\rho a'cos\varphi)^{1/2}\right]。$$

$$= -\frac{\mu_2}{4\pi}2IlnR - \frac{\mu_2}{4\pi}2I\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_1+\mu_2}ln\rho$$

$$-\frac{\mu^2}{4\pi}2I\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}ln(\rho^2+a'^2-2\rho a'cos\varphi)^{1/2}$$

由此结果可见，在引入了一个磁导率为 μ_1 的圆柱体之后，原先直导线产生的势改变了。这改变相当于加了两个镜像电流：一个位于圆柱的轴线处，如果 $\mu_1>\mu_2$，则此处是一反向电流

$$-I_1=\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}I$$

另一个位于直导线在圆柱内的共轭线处，是一同向电流

$$I_2=\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}I$$

对圆柱体外部区域来说，这样的镜像电流产生的矢势正等效于柱面上磁化电流产生的矢势。

习题三

1.由稳恒电场的边值关系证明：

(1) 在良导体与不良导体的分界面上，良导体外表面的电流线与其表面近似垂直（此良导体表面可近似看作等势面）；

(2) 在导体与绝缘介质的分界面上，导体内的电流线总是平行于导体表面。

2.两半径为 a 的小球状电极埋在电导率为 σ 的均匀无限媒质中，它们之间的距离为 d（d>>a）。求两电极之间的电阻（准确到$\frac{a}{d}$的一次幂）。

3.在电导率为 σ_0 的金属中有一块电导率为 σ_1 的杂质，干扰了另一恒定电场。求在远离杂质的地方扰动与距离的关系（只分析稳定情况）。

4.设有两平面围成的直角形无穷容器，其内充满电导率为 σ 的液体。取该两平面为 xz 面和 yz 面，在 (x_0, y_0, z_0)和$(x_0, y_0, -z_0)$ 两点分别置正负电极并通以电流 I。求导电液体中的电势。

5.有一根无限长圆柱形同轴电缆，它是由半径为 a 的圆截面导线和包围它的第二根同轴空心圆柱形导线构成的，空心导线的内、外半径分别为 b 和 c。设导线的电导率为 σ，导线间绝缘物质的介电常数为 ε，通过电缆的稳恒电流为 I，求电缆内的电场。

6.求在下列三种情况下匀强磁场的矢势。(a) 笛卡尔坐标；(b) 柱坐标；(c) 球坐标。媒质是磁导率 μ 不变的均匀媒质。

7.求下列两情况下的矢势$\vec{A}$和磁场$\vec{B}$:

$$\vec{A}=\frac{\mu}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(r')dV'}{|r-r'|}$$

(1) 一无限长直导线上流过电流 I;

(2) 相距为 2a 的两平行无线长直导线上流过大小相等、方向相反的电流 I。

8.设 $x<0$ 的半空间充满磁导率为 μ 的均匀介质，$x>0$ 的空间为真空。今有线电流 I 沿 Z 轴流动，求磁感应强度和磁化电流分布。

9.在一个无限长圆柱形导体内挖一个圆柱形空腔，求空腔内的磁场$\vec{H}$。设空腔和导体的半径分别为 a 和 b，它们的轴互相平行，两轴间的距离为 d ($b>a+d$)，电流 I 沿着截面均匀分布。

10.有面密度相同 (同为常数 α) 的电流沿着两块无限大平行板流动，求电流所产生的磁场$\vec{H}$，讨论两种情况:

(1) 两电流反向;

(2) 两电流同向。

11.证明两闭合的稳恒电流圈之间相互作用力大小相等，方向相反 (但两个电流元之间的相互作用力一般并不服从牛顿第三定律)。

12.有一长为 L，半径为 R 的长直螺线管，单位长度有 n 匝，每匝的电流为 I。若将该螺线管看成面电流密度$\vec{\alpha}=nI\vec{e}_{\varphi}$ 的环形电流层，试计算它的磁矩。

13.有一个均匀带电的导体球，其半径为 R，总电荷为 Q，今使球绕自

若 球内均匀场 $\phi = A r \cos\theta$

球外偶极场 $\phi = B\frac{\cos\theta}{r^2}$

身某一直径以角速度 ω 转动，试求其磁矩。

14.一个半径为 R 的无限长圆柱体均匀磁化，其磁化强度为

$$\vec{M} = (A\rho sin2\varphi + B\rho cos\varphi)\vec{e}_\rho + (\frac{1}{2}A\rho cos2\varphi - B\rho sin\varphi)\vec{e}_\varphi,$$

其中 A 和 B 是常数，求空间的磁场分布。

15.用磁标势法求解本章〔例 3-9〕

16.设理想铁磁体的磁化规律为 $\vec{B} = \mu\vec{H} + \mu_0\vec{M}_0$（$\vec{M}_0$ 是恒定的与 $\vec{H}$ 无关的量）。今将一理想铁磁体做成的均匀磁化球（$\vec{M}_0$ 为常值）浸入磁导率为 μ 的无限介质中，求磁感应强度和磁化电流分布。

17.求一均匀磁化的无限长圆柱体（半径为 a）所产生的磁场。磁化强度矢量 $\vec{M}_0$ 与圆柱体的轴垂直，圆柱体的磁导率为 μ_1，周围媒质的磁导率为 μ_2。

18.设磁针可以在与匀强磁场方向平行的平面内转动，磁针的磁矩为 $\vec{m}$，匀强磁场强度为 $\vec{H}$。求磁针在匀强磁场内的小振动周期。

19.已知以曲面 S 为界的体积 V 内的磁化强度为 $\vec{M}$，磁化电流的体密度和面密度分别为：$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}$，$\vec{\alpha}_M = \vec{M} \times \vec{n}$。试证：当没有宏观电流存在时，可以把物体所受的总磁力写成

$$\vec{F} = \int_v \rho_M \vec{B}_e dv + \int_S \sigma_M \vec{B}_e ds$$

其中 $\vec{B}_e$ 为外磁场，$\rho_M = -\nabla \cdot \vec{M}$，$\sigma_M = \vec{M} \cdot \vec{n}$ 分别为假想磁荷体密度和面密度。

20.设有磁导率为 μ_1 的均匀磁介质充满半空间，在另一半空间内充满磁导率为 μ_2 的均匀磁介质。在第一种媒质内有一电流强度为 I 的平面回路 L，该回路所在的平面与这两种媒质的分界面（平面）平行，并离分界面的距离为 h，求：

ERASER 12

(1) 该电流所产生的磁场；

(2) 回路所受的作用力。

第四章　电磁场的普遍规律和麦克斯韦方程组

前两章仅讨论了电学和磁学中与时间无关的问题，即稳恒态问题。当我们考虑与时间有关的问题时，电现象和磁现象的几乎独立的性质便会消失，电场和磁场相互联系，相互制约，形成一个矛盾的统一体即电磁场。这一章将从介绍法拉第电磁感应定律和磁场的能量入手，总结电磁现象的基本实验定律，引入位移电流假设，导出一组描述电磁场普遍规律的方程，即麦克斯韦方程组，它同洛伦兹力公式一起构成宏观电动力学的理论基础。在此基础上，讨论电磁场中关于运动在物质之间转移的两条守恒定律——能量守恒定律和动量守恒定律，并简单介绍麦克斯韦方程组的电磁波解，从而加深对场的物质性及其运动的波动性的认识。

§4.1　法拉弟电磁感应定律

自从发现了电流的磁效应之后，人们便研究是否存在相反的效应，即磁场能不能导致电流？开始一些人企图探测处于稳恒磁场中固定线圈上的感应电流，这些尝试都失败了。

1831 年法拉弟发现：当磁场发生变化时，其中的闭合线圈有电流通过。法拉弟把此电流解释为被电路所环绕的磁通量的变化所引起的，变化的磁通量在电路周围感生一个电场，其电场强度的线积分叫做电动势 $\mathcal{E}$，根据欧姆定律，该电动势引起电流。并且，由此总结出电磁感应定律：电路上的感生电动势与穿过电路的磁通量随时间的变化率成正比。考虑到感生电流（以及

伴随的磁通量）所沿方向，是使之对抗穿过电路的磁通量的变化，电磁感应定律的数学形式为

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Psi}{dt}, \tag{4.1.1}$$

即

$$\oint_L \vec{E}' \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}。 \tag{4.1.2}$$

式中曲面的正方向与线积分方向合乎右手螺旋关系。等式左端所定义的导电电路中的电动势，具体说来正是施于每单位电荷上之力的切向分量沿该电路环绕一周的线积分。等式右端用一个时间全微商表示磁通量的变化率，一般磁通量的变化包含下列两种情况：电路在一恒定磁场中移动（即改变回路的形状、取向或位置）而导致磁通量的变化；回路固定不动因改变磁场而引起磁通量的变化。普遍地说，对每单位电荷所施加的力为：

$$\frac{\vec{F}}{q} = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$$

所以在移动导线时有一个来自第二项的力，并且如果某处有一正在变化着的磁场，则也有电场$\vec{E}$。可见，以"通量法则"描述的电磁感应定律是两个独立的物理现象的混合效应。

应当注意，(4.1.2) 式中电场$\vec{E}'$是在对$d\vec{l}$静止的坐标系或媒质中$d\vec{l}$处的电场，因为当确实存在一个电路时，它就是引起电流的场；积分回路 L 可以是空间中任一闭合曲线，不需与某电路吻合，也不一定要位于导体内部。

在磁场$\vec{B}$随时间变化，回路 L 也可以运动的一般情况下，(4.1.2) 式的时间全微商必须计及这两个因素。若回路 L 以速度$\vec{v}$沿某一方向运动，则利用$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla$，有

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{B}$$

通常速度$\vec{v}$不依赖于$\vec{r}$，即$\nabla \times (\vec{B} \times \vec{v}) = (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{B} - \vec{v}(\nabla \cdot \vec{B})$
又$\nabla \cdot \vec{B} = 0$，于是

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{B} \times \vec{v})$$

代入(4.1.2)式，并利用斯托克斯公式，得

$$-\varepsilon = -\oint_L \vec{E}' \cdot d\vec{l} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \oint_L (\vec{B} \times \vec{v}) \cdot d\vec{l} \quad (4.1..)$$

这里的$\vec{B}$是在实验室坐标系中量得的，$\vec{E}'$是在另一坐标系中量得的。例如$\vec{E}$是在一个运动导体中感应出来的，$\vec{v}$是这个导体相对于实验室的速度，而$\vec{B}$是用相对于实验室固定的仪器测量的。

另一方面，考虑到电动势的定义和对每单位电荷所施加的力$\vec{F}/q = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$(实验室坐标系)，可得

$$-\varepsilon = -\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} + \oint_L (\vec{B} \times \vec{v}) \cdot d\vec{l}, \qquad (4.1.4)$$

比较上述$-\varepsilon$的两个表示式，则得到实验室系观测的场量之间的关系式

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}。 \qquad (4.1.5)$$

由此可见，(4.1.5) 式也正是回路 L 固定不动时电磁感应定律的积分形式。

借助斯托克斯公式，(4.1.5) 式可写为

$$\int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S},$$

由于此方程对任意曲面都成立，所以在每一点上被积函数都必定相等，于是便得到电磁感应定律的微分形式

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}。 \qquad (4.1.6)$$

(4.1.6) 式是磁场对电场作用的基本规律，说明变化的磁场产生感应电场，这种感应电场是一种涡旋场，它的电力线都是闭合的。当空间没有磁场或者只有稳定的磁场时，(4.1.6) 式变成

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

即为静电场的方程之一。这意味着 (4.1.6) 包括了静止和稳定的情况，或者说在非稳定的一般情况下，$\nabla \times \vec{E} = 0$ 必须推广为更普遍的 (4.1.6) 式。

〔例 4-1〕设由两个同轴圆筒导体组成同轴电缆。半径各为 a_1 和 a_2 的内筒和外筒上流过等量反向电流，其值为 I，假定电缆很长可忽略边缘效应。且电流以恒定速率增长，即 $\frac{dI}{dt}$ = 常数。试求其感应电场分布。

解：感应电场 $\vec{E}_i$ 满足的方程为

$$\nabla \cdot \vec{E}_i = 0 \quad , \quad \nabla \times \vec{E}_i = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{4.1.7}$$

由此可引入矢量势 $\vec{g}$：

$$\vec{E}_i = \nabla \times \vec{g}。 \tag{4.1.8}$$

如取限制条件 $\nabla \cdot \vec{g} = 0$，矢势满足的方程

$$\nabla^2 \vec{g} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}。 \tag{4.1.9}$$

利用 (4.1.7) 式的积分形式可推出边值关系

$$\vec{n} \cdot (\vec{E}_{i2} - \vec{E}_{i1}) = 0, \quad \vec{n} \times (\vec{E}_{i2} - \vec{E}_{i1}) = 0; \tag{4.1.10}$$

化成矢势满足的边值关系

$$g_{1t} = g_{2t}, \quad (\nabla \times \vec{g}_1)_t = (\nabla \times \vec{g}_2)_t。 \tag{4.1.11}$$

由此，求解变成了一个对于 $\vec{g}$ 的边值问题。

由对称性分析，在圆柱坐标系中，

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}=\frac{\partial B(\rho)}{\partial t}\vec{e}_{\varphi},\quad \vec{g}=g_{\varphi}(\rho)\vec{e}_{\varphi},\tag{4.1.12}$$

利用

$$\nabla^2\vec{g}=\nabla(\nabla\cdot\vec{g})-\nabla\times(\nabla\times\vec{g}),$$

有

$$(\nabla^2\vec{g})_{\rho}=\nabla^2 g_{\rho}-\frac{1}{\rho^2}g_{\rho}-\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial g_{\varphi}}{\partial\varphi},$$

$$(\nabla^2\vec{g})_{\varphi}=\nabla^2 g_{\varphi}-\frac{1}{\rho^2}g_{\varphi}-\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial g_{\rho}}{\partial\varphi},$$

$$(\nabla^2\vec{g})z=\nabla^2 gz;$$

方程 (4.1.9) 成为

$$\nabla^2 g_{\varphi}-\frac{1}{\rho^2}g_{\varphi}=\frac{\partial B}{\partial t}。\tag{4.1.13}$$

据安培环路定律

$$B=0\qquad(\rho<\alpha_1\text{和}\rho>\alpha_2),\tag{4.1.14}$$

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\qquad(\alpha_1<\rho<\alpha_2);\tag{4.1.15}$$

考虑到这里$\nabla^2=\partial^2/\partial\rho^2+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}$，并为简单取$g_{\varphi}\equiv g$，则由 (4.1.13) – (4.1.15)，得

$$\frac{\partial^2 g}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial g}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho^2}g=0\quad(\rho<\alpha_1\text{和}\rho>\alpha_2),\tag{4.1.16}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial g}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho^2}g=\frac{\mu_0}{2\pi\rho}\frac{dI}{dt}(\alpha_1<\rho<\alpha_2),\tag{4.1.17}$$

将 (4.1.16) 与标准贝塞尔方程

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR}{\partial\rho}-(\frac{m}{\rho^2}-k^2)R=0$$

比较，这里 m＝1，又因与 Z 无关，k＝0，退化为欧拉方程，故 (4.1.16) 式的解

$$g_1 = C_1\rho + C_2\rho^{-1}, \qquad (\rho < \alpha_1) \tag{4.1.18}$$

$$g_3 = C_3\rho + C_4\rho^{-1}, \qquad (\rho > \alpha_2) \tag{4.1.19}$$

对于方程 (4.1.17)，可找出一个特解 $g_0 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{dI}{dt}\rho ln\rho$ ，则通解为

$$g_2 = C_5\rho + C_6\rho^{-1} + \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{dI}{dt}\rho l_n\rho \quad (\alpha_1 < \rho < \alpha_2)。 \tag{4.1.20}$$

在圆柱坐标系中，边值关系 (4.1.11) 可化为

$$g_{1\varphi} = g_{2\varphi} \ , \ \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho g_{1\varphi}) = \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho g_{2\varphi}); \tag{4.1.21}$$

利用自然边界条件和边值关系 (4.1.21) 求出通解 (4.1.18) – (4.1.20) 中的待定常数，即得矢势

$$g_1 = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{dI}{dt} ln\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\rho, \tag{4.1.22}$$

$$g_2 = -\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{dI}{dt} ln\alpha_2 + \frac{\mu_0}{8\pi}\frac{dI}{dt}\right)\rho + \left(\frac{\mu_0\alpha_1^2}{8\pi}\right)\frac{dI}{dt}\rho^{-1} + \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{dI}{dt}\right)\rho\ ln\rho, \tag{4.1.23}$$

$$g_3 = -\left[\frac{\mu_0}{8\pi}\frac{dI}{dt}(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)\right]\rho^{-1}。 \tag{4.1.24}$$

最后，利用 $\vec{E}_i = \nabla \times \vec{g} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho g_\varphi)\vec{e}_z$ 求得感应电场：

$$\vec{E}_{i1} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{dI}{dt} ln\frac{\alpha_2}{\alpha_1}(-\vec{e}_z) \quad (\rho < \alpha_1) \tag{4.1.25}$$

$$\vec{E}_{i2}=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{dI}{dt}ln\frac{\alpha_2}{\rho}(-\vec{e}_z)\quad(\alpha_1<\rho<\alpha_2)\tag{4.1.26}$$

$$\vec{E}_{i3}=0\qquad(\rho>\alpha_2)\tag{4.1.27}$$

§4.2 稳恒磁场的能量和力

1.磁场的能量

场的能量应等于建立该场时所作的总功。要建立恒稳电流及有关的磁场，必定经过一段初始的瞬变过程，在这期间电流和磁场从零增加到终值。而存在这种随时变化的场，就存在使电流源作功的感生电动势。为此，在上一章讨论稳恒磁场时，我们避开了场能的问题，现在考虑上述贡献，讨论磁场的能量和能量密度。

假定有一个载有电流 I 的简单回路，如果通过电路的磁通量发生变化，那么在电路中就感生一个电动势 ε。要保持电流 I 恒定不变，电流源必须作功。给 (4.1.1) 式两端乘以电流 I，有

$$-I\varepsilon=I\frac{d\Psi}{dt}。$$

此式左端是克服感应电动势作的功率，也就是为保持电流不变，电流源所作的功率，它应等于场能量对时间的变化率$\frac{dw}{dt}$，因此

$$\frac{dw}{dt}=I\frac{d\Psi}{dt}$$

所以，如果通过一个载电流 I 的电路的磁通量变化是 $\delta\Psi$，那么电流源所作的功就是

$$\delta w=I\delta\Psi$$

现在，讨论在建立电流和场的一般稳恒态分布的过程中作功的问题。我们可以设想稳恒态的建立过程无限缓慢，以致 $\nabla \cdot \vec{J}=0$ 总是成立的。于是，可以把电流分布分割为许多元电流回路所组成的网路。典型的一种元电流回路是沿闭合回路 C 的元电流管，它的截面积是$\triangle\sigma$，C 上张着法线为$\vec{n}$的曲面 S，如图 4.1 所示。在 C 内部的那些元电流在所有线段上互相抵消，因此从物理上看，此元电流系统与原来的电流分布等价。

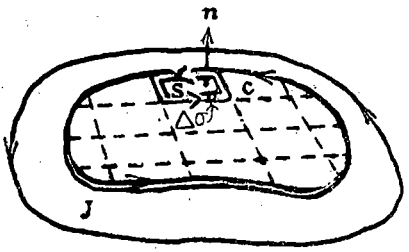


图 4.1

对于每一个元回路，我们可以用通过电流回路的磁感应强度的变化来表示克服感应电动势所作的功的增量

$$\triangle(\delta w)=J\triangle\sigma\int_S \vec{n}\cdot\delta\vec{B}ds。$$

用矢势$\vec{A}$表示$\vec{B}$，并利用斯托克斯公式有

$$\triangle(\delta w)=J\triangle\sigma\oint_C \delta\vec{A}\cdot d\vec{l}。$$

因为$d\vec{l}$和$\vec{J}$平行，所以$J\triangle\sigma d\vec{l}$等于$\vec{J}dv$，对所有这些元电流回路求和就是体积分。当矢势改变了$\delta\vec{A}(\vec{r})$时，外源作功的总增量是

$$\delta w=\int\delta\vec{A}\cdot\vec{J}dv。 \tag{4.2.1}$$

利用$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}$ 和有关矢量公式，有

$$\delta w=\int\left[\vec{H}\cdot(\nabla\times\delta\vec{A})+\nabla\cdot(\vec{H}\times\delta\vec{A})\right]dv。$$

如果假定场的分布区域是有限的，第二个积分必等于零，则

$$\delta w=\int\vec{H}\cdot\delta\vec{B}dv。 \tag{4.2.2}$$

此式是与静电学中（2.82）式相当的磁学关系式，适用于包括铁磁质在内的一切磁介质。

如果媒质是各向同性线性介质（顺磁质或抗磁质），$\vec{H}$和$\vec{B}$之间就存在线性关系$\vec{B}=\mu\vec{H}$，则

$$\vec{H}\cdot\delta\vec{B}=\frac{1}{2}\delta(\vec{H}\cdot\vec{B})。$$

现在使场从零增加到它的终值，总磁能则为

$$w=\frac{1}{2}\int\vec{H}\cdot\vec{B}dv, \tag{4.2.3}$$

这是类似于静电学中$w=\frac{1}{2}\int\vec{E}\cdot\vec{D}dv$的磁学公式,其磁能密度是

$$w=\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}。 \tag{4.2.4}$$

同理，如$\vec{J}$和$\vec{A}$之间存在着线性关系，由（4.2.1）式可推出磁能公式

$$w=\frac{1}{2}\int\vec{J}\cdot\vec{A}dv。 \tag{4.2.4}$$

对一个闭合的线电流 I，若 Ψ 表示通过它的磁通量，L 表示自感，磁能公式还可写为

$$w=\frac{1}{2}I\Psi=\frac{1}{2}LI^2。 \tag{4.2.6}$$

对于两个线状电路，磁能为

$$w=\frac{1}{2}L_aI_a^2+\frac{1}{2}L_bI_b^2+MI_aI_b \tag{4.2.7}$$

式中前两项是各自的电流与自身产生的磁场的作用形成的自有能量，第三项则是由互感而产生的相互作用能。

再利用与静电中相同的处理方法，可以得出电流$\vec{J}$在外场$\vec{A}_e$中的相互作用能为

$$w_i = \int \vec{J} \cdot \vec{A}_e dv。 \tag{4.2.8}$$

下面看小区域内的电流分布在外磁场中的能量。载电流 I 的小线圈在外磁场中的能量为

$$w_i = I \oint_L \vec{A}_e \cdot d\vec{L} = I \int_S \vec{B}_e \cdot d\vec{S}。$$

取原点在线圈所在区域适当点上，把$\vec{B}_e$在原点展开

$$\vec{B}_e(\vec{r}) = \vec{B}_e(0) + \vec{r} \cdot \nabla \vec{B}_e(0) + \cdots,$$

则

$$w_z = I\vec{B}_e(0) \cdot \int_S d\vec{S} + \cdots$$

$$= \vec{m} \cdot \vec{B}_e(0) + \cdots。$$

其中$\vec{m} = I\int_S d\vec{S}$ 为线圈的磁矩。上式对一般小区域电流分布也成立，其磁矩由普遍定义式给出。所以，磁偶极子在外磁场中的互作用能为

$$w_i = \vec{m} \cdot \vec{B}_e(0) \tag{4.2.9}$$

将它与势函数

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B} \tag{3.3.20}$$

所表示的势能相比较，差别的原因在于（4.2.9）式是产生该组态所需的总能，而 U 仅是将一固定磁矩放进磁场时所作的功，不包括产生磁矩并使之保持不变所作的功。

2.磁场力

与静电学中介绍电场力相似，这里主要讨论用虚位移法求磁场力的问题。上述（4.2.9）式是相当于静电学中$w = -\vec{P} \cdot \vec{E}_e$的关系式，符号的改变是由于(4.2.9) 表示的能量是导磁物体放入场内时总能量的变化，其中包括场源克服感生电动势所作的功。在这一方面，固定电流的磁学问题和具有固定电势的静电学问题类似。用相当于静电学中的分析方法可以证明：对于一个微

小的位移来说，克服感生电动势所做的功的数值为物体势能变化的 2 倍，而符号相反。所以，为了求出作用于物体上的力，我们考虑广义坐标 ξ，并计算能量对位移的正偏导数

$$F_\xi = \left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_J, \tag{4.2.10}$$

下角标 J 表示场源的电流固定不变。

假想在虚位移过程中，我们调节电流，使交链磁通量保持常数，从而感生电动势等于零，电源对系统不作功。于是，磁场力所做的功就等于磁场能的减少，由此可得

$$F_\xi = -\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_\Psi, \tag{4.2.11}$$

同样下角标 Ψ 表示磁通量表示不变。

此外，按照法拉弟的看法，静磁场中由磁感应线围成的每一磁感应强度管沿其轴线方向受有纵张力，同时在垂直于轴线方向受有侧压力。并且，纵张力和侧压力的数值在单位面积上都等于

$$f = \frac{1}{2}BH \tag{4.2.12}$$

利用这种看法，有时能较简便地算出磁场力，其理论根据亦在后面讨论。

〔例 4-2〕　磁偶极子在外磁场中的能量。

解：考虑一个由面积为 S，电流为 I 的小线圈构成的磁偶极子；其磁偶极矩 $\vec{m} = I\vec{S}$，将它置于外磁场 $\vec{B}$ 之中，并假定外场是由某一载流闭合回路激发的。

由第三章的讨论可知，磁偶极子在外磁场中的势能

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B}, \tag{3.3.20}$$

当把作为磁偶极子的小载流线圈移入磁场时，该线圈中的磁通量将发生变化从而产生感应电流，为保持小线圈中的电流不变必须

接上一个“电源”，并使这个电源的电动势 ε 恰与感应电动势相抵消，于是

$$\varepsilon = \frac{d\Psi}{dt}。$$

在 dt 时间内外电源作功

$$dA = \varepsilon I dt = I d\Psi,$$

可见，在电流 I 不变的情况下，把磁偶极子从磁场外移至磁场 $\vec{B}$ 处，外电源所作功为：

$$A = I\Psi = ISB = \vec{m} \cdot \vec{B}。 \tag{4.2.13}$$

当磁偶极子移动时，穿过激发外场的载流回路的磁通量也将发生变化，为了保持外场强度不变，同样需要在该回路上接一个“电源”，设 I'、Ψ' 表示该回路中的电流和磁通量，ε' 表示电源给该回路提供的电动势，M 表示该回路与小线圈间的互感系数。由 $\Psi' = MI$ ，有

$$\varepsilon' = \frac{d\Psi'}{dt} = I\frac{dM}{dt},$$

于是“电源”所作的功率

$$P' = I'\varepsilon' = II'\frac{dM}{dt},$$

另外，由 $\Psi = MI'$ ，相应地有

$$\varepsilon = \frac{d\Psi}{dt} = I'\frac{dM}{dt}。$$

$$P = I\varepsilon = II'\frac{dM}{dt}。$$

所得功率的两式对时间积分，则

$$A = A'$$

说明为了保持外场不变，接在外场源载流回路上的电源所作的功 A' 恰好等于 (4.2.13) 式中表示的功，即

$$A' = \vec{m} \cdot \vec{B}。 \tag{4.2.14}$$

磁偶极子在外磁场中的总能量 w 应等于 U，A 和 A' 的代数和，所以

$$w = \vec{m} \cdot \vec{B}。 \tag{4.2.15}$$

值得注意的是，对于永久的原子磁矩或非常小的磁铁，因为没有真正的传导电流，所以这样的磁偶极子与均匀外磁场的互作用能仅同施加于它的力矩相联系，于是此情形下的磁能

$$w = U = -\vec{m} \cdot \vec{B}。$$

§4.3 麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式

1.位移电流假设

将前面所讨论过的电磁现象的实验定律加以总结，用矢量分析的形式表示成下列微分方程

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \tag{4.3.1}$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0, \tag{4.3.2}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \tag{4.3.3}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}, \tag{4.3.4}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}。 \tag{4.3.5}$$

这些方程中，除法拉第电磁感应定律外，其余都是从稳恒状态下观测总结出来的，它们对普遍情况下随时间任意变化的电磁场是否都成立，需要加以认真考察。

麦克斯韦分析总结了上述方程式，受到法拉第观测结果的启

发，发现其中的矛盾，并提出科学假设，对方程作了修改。

首先，安培定律（4.3.4）式是不完善的。此定律是从稳恒电流（$\nabla \cdot \vec{J}=0$）现象中得出的，对（4.3.4）式两边取散度，得：

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \vec{J} = 0。$$

可见，对$\vec{J}$的散度的这个要求，本来就包含在安培定律之中，它只在稳恒情形下有效。在随时间变化的普遍情形下，$\vec{J}$的散度应满足电荷守恒定律

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0。 \tag{4.3.6}$$

显然在这里$\nabla \cdot \vec{J} \neq 0$，因此在普遍情形下，安培定律与电荷守恒定律发生矛盾，说明（4.3.4）式必须按（4.3.6）式的要求加以修改。

如将（4.3.1）式代入（4.3.6）式，得

$$\nabla \cdot (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) = 0。$$

从数学表达式看，对安培定律中的$\vec{J}$加上一项$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$之后，就与电荷守恒定律相一致了。从物理内容上看，$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$与变化的电场相联系，既然电磁感应定律表明变化的磁场能够激发电场，那么变化的电场也应能激发磁场。于是，麦克斯韦创造性地提出科学假设，将安培定律中的$\vec{J}$做了如下推广

$$\vec{J} \to \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}。$$

这样，安培定律被修改成了

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}。 \tag{4.3.7}$$

式中

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}_D \tag{4.3.8}$$

叫做位移电流密度，当$\vec{D}$不随时间变化时，又回到稳恒情形的结果。注意到$\vec{D}$的定义，位移电流可以写为

$$\vec{J}_D = \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}, \tag{4.3.9}$$

其中第一项来自变化的电场，第二项来自介质的极化，称为极化电流密度:

$$\vec{J}_P = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}。 \tag{4.3.10}$$

位移电流假设的正确性已经由后来有关电磁波的大量实践所证明。

〔例 4–3〕　比较导体中的位移电流和传导电流

解: 对于在导电率为 σ、介电常数为 ε 的物质中的交变电场 $\vec{E} = \vec{E}_0 cos\omega t$ ，其位移电流密度和传导电流密度分别为

$$\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\omega\varepsilon \vec{E}_0 sin\omega t,$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}_0 cos\omega t ,$$

两者的数值比是

$$\frac{|\vec{J}_D|}{|\vec{J}|} = \frac{\omega\varepsilon}{\sigma}。 \tag{4.3.11}$$

导体的相对介电常数 ε_r 是不容易测定出来的，因为极化效应常被导电性所掩盖。然而，为了估计数量级，可设 $\varepsilon_r = 1$，对一个

良导体 $\sigma \approx 10^7$（欧·米）$^{-1}$。于是有

$$\frac{|\vec{J}_D|}{|\vec{J}|} \approx 10^{-17} f,$$

其中 $f = \frac{\omega}{2\pi}$ 是频率。当频率低于光波频率 $f \approx 10^{15}$ 赫兹时，在良导体中，位移电流与传导电流相比是微不足道的。

另外，传导电流的相位与电场强度相同，而位移电流比电场强度超前 $\frac{\pi}{2}$ 弧度。

〔例 4-4〕 一圆柱形电容器，内导体半径为 a，外导体半径为 b，长为 l。外加一正弦电压 $V_0 \sin\omega t$，且 ω 不大，故电场分布和静态场情形相同，计算介质中的位移电流密度，穿过半径 r（a<r<b）的圆柱形表面的总位移电流。证明后者等于电容器引线中的传导电流。

解：选外圆柱面为电势参考点，设电容器单位长度上的电荷为 τ，总电荷为 Q，两极间电势差为 V，在柱坐标下，利用静电场关系，可得两极之间介质中电场和电势分布为

$$\vec{E} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon r}\vec{e}_r = \frac{V}{r\ln\frac{b}{a}}\vec{e}_r,$$

$$\Phi = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{b}{r} = \frac{V}{\ln\frac{b}{a}}\ln\frac{b}{r}。$$

电容器的电容为

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{b}{a}},$$

由此，介质中的位移电流密度为

$$\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \left(\varepsilon \omega V_0 \Big/ r \ln \frac{b}{a} \right) \cos\omega t \vec{e}_r, \qquad (4.3.12)$$

穿过半径为 r 的圆柱面的总位移电流

$$I_D = \int \vec{J}_D \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} J_D l r d\varphi = \frac{2\pi l \varepsilon \omega V_0}{\ln \frac{b}{a}} \cos\omega t。 \qquad (4.3.13)$$

另一方面，电容器的总电量为

$$Q = cV = \frac{2\pi l \varepsilon}{\ln \frac{b}{a}} V_0 \sin\omega t,$$

则电容器引线中的电流是

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{2\pi l \varepsilon \omega V_0}{\ln \frac{b}{a}} \cos\omega t。 \qquad (4.3.14)$$

可见，电容器介质中的总位移电流等于其引线中的传导电流。通常把包括传导电流、位移电流、有时还有运流电流（真空或气体中自由电荷运动引起的电流）在内的电流称为全电流。本题结果表示电容器中的全电流是连续的。

2.麦克斯韦方程组

现在我们讨论引入位移电流之后，上述电磁方程之间是否协调的问题。

由前面引入位移电流时的分析可以看到，方程式（4.3.1）、(4.3.6) 和 (4.3.7) 互不矛盾。

方程式（4.3.2）和（4.3.5）也不会产生矛盾，只需将 (4.3.5) 式中的$\vec{E}$理解为由下列两部分组成的总电场：一部分是静电场，它的旋度为零，另一部分是变化的磁场产生的感应电场，它的旋度等于$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$，这时只采用 (4.3.5) 式即可。

方程式（4.3.3）和（4.3.5）没有本质矛盾。因为对(4.3.5)式取散度有

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{B}) = 0,$$

从而选取 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ 是可以的。

上面理解的总场$\vec{E}$决定了$\vec{D}$之后，再求散度时，又只有静电那部分的电场对散度有贡献，由磁场变化引起的那部分电场对散度不会有贡献。于是，方程式（4.3.1）、（4.3.2）和（4.3.5）没有矛盾。

上述讨论表明，使这些方程互相协调的关键是引入位移电流。从物理上来说，在承认（4.3.1）式的情况下，由于起源于(4.3.5)式的电场是无散的，它所形成的电流本来就应包含在(4.3.4)式中。因此，要使（4.3.4）式对随时间变化的情况成立，就必须引入位移电流，并且该电流产生感生的有旋磁场。这就是引入位移电流之后，(4.3.4)式被修改为（4.3.7）式的必然性。同时这样一个循环求解的过程可以容许（4.3.3）式存在。

由此，对于随时间变化的电磁场，我们得到了一组自洽的方程组：

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \tag{4.3.15a}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{4.3.15b}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{4.3.15c}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{4.3.15d}$$

这就是著名的麦克斯韦方程组，于1864年总结完成。

麦克斯韦方程组深刻地揭示了电磁现象的本质，描述了一般情况下电荷、电流激发电磁场以及电磁场内部矛盾运动的规律。

它告诉我们，电场有两个来源，一是电荷产生的纵场（即无旋场，满足$\nabla \cdot \vec{E}_l = \rho$，二是变化的磁场产生的横场（即无源场），满足$\nabla \cdot \vec{E}_t = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$。磁场也有两个来源，一是电荷移动所形成的电流，二是变化的电场，两者激发的磁场都是横场，磁场无纵分量表示普遍情形下仍然没有自由磁荷。这样，不仅电荷、电流可以激发电磁场，而且变化的电场和磁场也可以互相激发。因此，只要某处发生电磁扰动，由于电磁场互相激发，它就会在空间运动传播，形成电磁波。麦克斯韦首先从这一方程组出发在理论上预言了电磁波，并指出光波就是一种电磁波。以后的赫兹实验和大量的无线电的、光学的实验证明了这种预言的正确性。不仅如此，麦克斯韦方程组还揭示了电磁场可以脱离电荷体系而独立地存在，这就加深了我们对电磁场物质性的认识。

麦克斯韦方程组在经典电动力学中的地位如同牛顿运动方程在经典力学中的地位一样，成为物理学史上一个光辉的里程碑。直到目前为止，在宏观范围内，从描述电磁作用这个角度来看，还没有一个实验同它相矛盾。

可以证明，如果对电磁体系给定初始条件和边界条件，则体系的电磁运动规律完全由麦克斯韦方程组唯一确定。这一性质通常称为麦克斯韦方程组作为电磁体系运动方程的完整性。此外，麦克斯韦方程组是线性方程组，它的解满足迭加原理。

麦克斯韦方程组中，电和磁的地位并不是完全对称的，原因在于没有磁荷（即磁单极）存在，多年来人们一直在探索磁单极存在的可能性，1982 年，B，Cabrera 报告了关于磁单极的第一个事例，但迄今未有更多的证据，实验上还没有确认磁单极的存在。

〔例 4–5〕　对称性理论中，电荷共轭变换 C 定义为

$$\rho \to -\rho,\quad \vec{r} \to \vec{r},\quad t \to t。 \tag{4.3.16}$$

试证明麦克斯韦方程组在C变换下是不变的。

解：根据C变换的定义，由$\vec{J}=\rho\vec{v}=\rho\frac{d\vec{r}}{dt}$ 可知，在C变换下有

$$\vec{J}\rightarrow -\vec{J}。 \tag{4.3.17}$$

由静态场的特例

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dv',$$

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{r}')\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dv'$$

可看出场量在C变换下有

$$\vec{E}\rightarrow -\vec{E},\ \vec{B}\rightarrow -\vec{B}; \tag{4.3.18}$$

另外，微商算符在C变换下有

$$\nabla\rightarrow\nabla,\ \frac{\partial}{\partial t}\rightarrow\frac{\partial}{\partial t}。 \tag{4.3.19}$$

将上述变换式代入麦克斯韦方程组，便可得到该方程组在C变换下保持不变。

类似地，可以证明，麦克斯韦方程组对空间反演P（$\vec{r}\rightarrow -\vec{r}$，$\rho\rightarrow\rho$，$t\rightarrow t$）和时间反演$T(t\rightarrow -t,\ \rho\rightarrow\rho,\ \vec{r}\rightarrow\vec{r})$保持不变，并且在CPT联合反演下也不变。

〔**例4-6**〕 讨论当$\rho=0$，$\vec{J}=0$ 时，麦克斯韦方程组对下列变换的变换性质：

$$\begin{aligned}\vec{E}' &= cos\theta\vec{E}+c\ sin\theta\vec{B}\\ \vec{B}' &= -sin\theta\frac{\vec{E}}{c}+cos\theta\vec{B}。\end{aligned} \tag{4.3.20}$$

式中θ是任意一个常数角度，$c^2=(\mu_0\varepsilon_0)^{-1}$。

解：当$\rho=0$，$\vec{J}=0$时，麦克斯韦方程组为

$$\nabla\cdot\vec{D}=0 \qquad \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0 \qquad \nabla\times\vec{H}=-\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}。$$

代入给出的变换关系，得：

$$\nabla\cdot\vec{D}'=\varepsilon_0(cos\theta\nabla\cdot\vec{E}+csin\theta\nabla\cdot\vec{B})=0,$$

$$\nabla\times\vec{E}'=\frac{\partial}{\partial t}(-cos\theta\vec{B}+c\mu_0 sin\theta\vec{D})=-\frac{\partial\vec{B}'}{\partial t},$$

$$\nabla\cdot\vec{B}'=-\frac{1}{c}sin\theta\nabla\cdot\vec{E}+cos\theta\nabla\cdot\vec{B}=0,$$

$$\nabla\times\vec{H}'=\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial t}(+\frac{1}{c}sin\theta\vec{B}+\mu_0 cos\theta\vec{D})=\frac{\partial\vec{D}'}{\partial t},$$

可见，当$\rho=0$，$\vec{J}=0$ 时，麦克斯韦方程组对上述变换是不变的。尤其当$\theta=\frac{\pi}{2}$时，有$\vec{E}'=c\vec{B}$，$\vec{B}'=-\vec{E}/c$ ，一般来说，在无源情形下，麦克斯韦方程组对变换

$$\begin{cases}\vec{E}\to\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\vec{H}'\\ \vec{B}'\to-\vec{E}/c\\ \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\vec{H}\to-\vec{E}'\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}\vec{D}\to\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\vec{B}'\\ \\ \sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\vec{B}\to-\vec{D}'\end{cases}\qquad(4.3.21)$$

保持不变。这种性质叫做电磁场的对偶性，称$\vec{E}'$和$\vec{B}'$是$\vec{E}$和$\vec{B}$的对偶场。而在有源的情形下，上述对称性被破坏。但是，如果引入磁单极，有源情形下电磁场的对偶性将仍然存在（见习题四第8题）。

〔例 4-7〕　(1) 设想存在孤立磁荷（磁单极）。若假定除了源之外，处处都是真空，试改写麦克斯韦方程组，以包括磁荷密度 ρ_m 及磁流密度 $\vec{J}_m$ 的贡献。

(2) 阿尔瓦雷斯（Alvarez）等人用许多块物质一个接一个地通过一个 n 匝的线圈来寻找磁单极。线圈的电阻为 R，并假定磁荷运动得足够慢，使得它的感应效应很小。计算当磁单极 q_m 流过线圈 N 周后有多少电荷 Q 流过线圈？

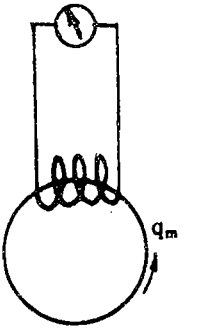


图 4.2

(3) 设想线圈是由超导体做成的，其电阻为零，只有它的电感限制了它的感生电流。假定线圈中初始电流为零，计算磁单极 q_m 流过线圈 N 周后，线圈上有多大的电流？

解：(1) 如果没有磁单极，麦斯韦方程组是

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_e \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_e$$

设想存在磁单极，其磁荷密度为 ρ_m，由对称性的考虑，$\vec{B}$的散度可写成

$$\nabla \cdot \vec{B} = \quad \rho_m 。$$

对上述$\vec{E}$的旋度的方程两边取散度，左、右两边分别是

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{E}) = 0 \qquad -\nabla \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\quad \frac{\partial \rho_m}{\partial t},$$

显然产生矛盾，需要对该方程进行修改。为此引入磁荷的连续性方程

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}_m = 0。$$

如果在上述$\vec{H}$的旋度的方程中将$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$修改为$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \quad \vec{J}_m$，问题就解决了。所以，当磁单极存在时，麦克斯韦方程组应改写为

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_e \tag{4.3.22a}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \quad \vec{J}_m, \tag{4.3.22b}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \quad \rho_m, \tag{4.3.22c}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_e。 \tag{4.3.22d}$$

(2) 对于 (4.3.22b) 式考虑一匝与线圈交连的环路 L 并在以环路为边界的曲面 S 上积分

$$\int_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{A} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} - \quad \int_S \vec{J}_m \cdot d\vec{A}。$$

用$I_m = \int_S \vec{J}_m \cdot d\vec{A}$ 表示通过环路的磁流，$V = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = IR$ 表示围绕环路的电位，$\Psi_L = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{A}$ 表示穿过环路的磁通量，上式即化成

$$IR = -\frac{\partial}{\partial t}\Psi - \quad I_m。$$

对时间积分

$$\int IR dt = QR,$$

$$\int \frac{\partial}{\partial t}\Psi_L dt = \Psi_L = 0 \qquad \text{(当磁单极远离环路时)}$$

$$- \quad \int I_m dt = - \quad q_m,$$

可得

$$Q = -\frac{q_m}{R}。$$

当通过 N 周而线圈为 n 匝时，则有

$$Q = -\frac{Nn}{R} q_m。$$

(3) 设 R=0，从而 $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ ，但这时必须建立一个磁通量以抵消磁单极产生的磁通量

$$-\Psi_L - q_m = 0。$$

对于 N 次 n 匝，有

$$-LI - q_m Nn = 0,$$

所以

$$I = -\frac{Nn}{L} q_m。$$

〔例 4-8〕 如果磁荷为 g 的磁单极位于坐标原点，则它所产生的磁场为

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q}{r^3} \vec{r}。 \tag{4.3.23}$$

设有一个速度为 $\vec{v}$、电荷为 e 的带电粒子与该磁单极碰撞，碰撞参数为 b，并在 t=0 时恰好飞过其顶部(如图 4.3 所示)。当参数 b 充分大时，可假定带电粒子不发生偏转，试用半经典方法证明狄拉克电荷量子化条

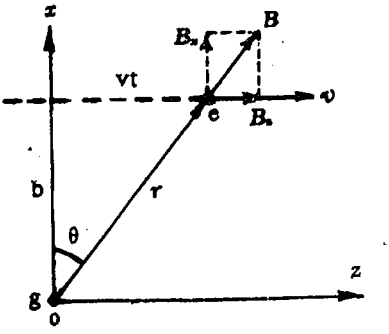


图 4.3

件为

$$eg=\frac{2\pi n\hbar}{\mu_0},\qquad n=\pm1,\ \pm2,\ \cdots。\tag{4.3.24}$$

式中$\hbar=h/2\pi$，h为普朗克常数。

解：带电粒子所受洛伦兹力

$$\vec{F}=e\vec{v}\times\vec{B},$$

其y分量是

$$F_y=evB_x=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{evgb}{(b^2+v^2t^2)^{3/2}}。$$

由碰撞引起的动量变化为

$$\triangle P_y=\int_{-\infty}^{\infty}F_y\,dt=\frac{\mu_0}{4\pi}evgb\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{(b^2+v^2t^2)^{3/2}}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2eg}{b},$$

相应的角动量变化为

$$\triangle L_z=b\triangle P_y=\frac{\mu_0}{2\pi}eg;$$

再利用量子论中角动量的量子化表达式

$$\triangle L_z=\triangle m\hbar\qquad\triangle m=\pm1,\ \pm2,\ \cdots,$$

可得$\frac{\mu_0}{2\pi}eg=\triangle m\hbar$，即

$$eg=\frac{2\pi\triangle m\hbar}{\mu_0}=\frac{2\pi nh}{\mu_0}\quad n=\pm1,\ \pm2,\ \cdots\cdots。$$

取n=1时，得到

$$e_0=\frac{2\pi\hbar}{\mu_0 g}。$$

狄拉克量子化条件告诉我们，如果存在磁单极，则一切电量都只能是某一最小值的整数倍，这就解释了自然界中电荷的量子化这一基本事实。吴大峻—杨振宁的磁单极理论所导出的电荷量

子化条件与狄拉克量子化条件结果一致。

3.电磁场量的边值关系

麦克斯韦方程组（4.3.15）式的积分形式为

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{s}=Q \tag{4.3.25a}$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \tag{4.3.25b}$$

$$\oint_S \vec{B}\cdot ds=0 \tag{4.3.25c}$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=\int_s \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}+I \tag{4.3.25d}$$

利用稳恒情况下求场量边值关系的方法，将（4.3.25a）和(4.3.25c）分别应用于跨介质分界面的扁平小圆柱体，即得相应的结果。将（4.3.25b）和（4.3.25d）分别应用于跨介质分界面的狭长形小回路，由于回路面积趋于零，而$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$和$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$都是有限量，因而它们的面积分都趋于零。于是可以得到变化电磁场场量的边值关系，与稳恒情况下场量的边值关系形式完全相同:

$$\vec{n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\sigma, \tag{4.3.26a}$$

$$\vec{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0, \tag{4.3.26b}$$

$$\vec{n}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0, \tag{4.3.26c}$$

$$\vec{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{\alpha}。 \tag{4.3.26d}$$

〔例 4-9〕如图 4.4 所示，两块金属圆板构成一个平行板电容器，并且通过无电阻的长直导线将电压 $V=V_0\cos\omega t$ 加在两极板之间，假定$d\ll a\ll\frac{c}{\omega}$，以致可以忽略边缘效应和推迟效应。

(1) 用麦克斯韦方程组和对称性论证，求区域 I 中作为时间的函数的电场和磁场。

(2) 求作为时间函数的导线中的电流，以及极板上的电流密度。

(3) 求出区域Ⅱ的磁场，并说明跨越极板的$\vec{B}$的不连续性与极板上面电流的关系。

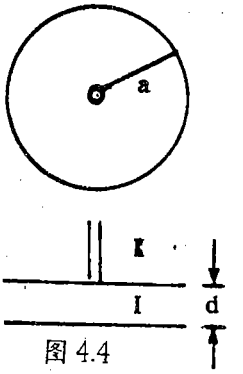


图 4.4

解：选用柱坐标，Z 轴沿导线向上。并约定电流，电压的正方向向下。

(1) 因忽略边缘效应，区域Ⅰ中的电场为均匀场，且只有 Z 分量，在时刻 t 取

$$E_{\mathrm{I}} = E_{\mathrm{I}z} = -\frac{V}{d} = -\frac{V_0}{d}\cos\omega t。$$

由于对称性，$\vec{B}$线是圆心位于 Z 轴的一系列同心圆。此区域传导电流$\vec{J}=0$，利用方程

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ 即 } \oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\varepsilon_0\int\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

有

$$2\pi r B_{\mathrm{I}\varphi} = \mu_0\varepsilon_0\pi r^2\left(\frac{V_0\omega}{d}\sin\omega t\right)$$

所以

$$B_{\mathrm{I}} = B_{\mathrm{I}\varphi} = \frac{\mu_0\varepsilon_0 V_0\omega}{2d} r\sin\omega t \qquad (4.3.27)$$

(2) 电容器的上极板上总电荷

$$Q = CV = \frac{\varepsilon_0\pi a^2}{d}V_0\cos\omega t,$$

导线中的电流

$$\mathrm{I} = \frac{dQ}{dt} = \left(-\varepsilon_0\pi a^2/d\right)\omega V_0\sin\omega t,$$

这个电流在极板上呈辐射状散开。

极板上忽略位移电流，只有传导电流，电荷均匀分布，其面密度$\sigma=\frac{Q}{\pi a^2}=\frac{\varepsilon_0 V_0}{d}\ cos\omega t$，极板上大于半径为 r 的部分的电荷是

$$Q'=\sigma\pi(a^2-r^2)=\frac{\varepsilon_0 V_0}{d}\pi(a^2-r^2)cos\omega t,$$

流过以 r 为半径的圆周线的电流

$$I'=\frac{dQ'}{dt}=\left[-\varepsilon_0\pi(a^2-r^2)/d\right]\omega V_0 sin\omega t。$$

因此，通过以 r 为半径的圆周线上单位截线的电流，即极板上的面电流密度为

$$\alpha=\frac{I'}{2\pi r}=\left[-\varepsilon_0\pi(a^2-r^2)/2\pi rd\right]\omega V_0 sin\omega t。\quad (4.3.28)$$

(3) 区域Ⅱ中只有流经导线的传导电流，由对称性，利用 $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=+\mu_0 I$，并考虑到 I 沿 -Z 方向，得

$$B_{\mathrm{II}}=B_{\mathrm{II}\varphi}=-\mu_0 I/2\pi r=\frac{\mu_0\varepsilon_0\pi a^2}{2\pi rd}\omega V_0 sin\omega t。\quad (4.3.29)$$

考虑到本题中约定的方向，边值关系(4.3.26d)式$\vec{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{\alpha}$ 在此应为

$$\vec{e}_z\times\left(\frac{1}{\mu_0}B_{\mathrm{II}\varphi}\vec{e}_\varphi-\frac{1}{\mu_0}B_{\mathrm{I}\varphi}\vec{e}_\varphi\right)=\alpha\vec{e}_r。\quad (4.3.30)$$

将前面求得的 $B_{I\varphi}$、$B_{II\varphi}$ 和 α 代入，正好满足这个条件。

4.洛伦兹力公式

上面讨论的麦克斯韦方程组反映了电荷体系对电磁场的作用及场内部运动的规律，现在我们要来讨论电磁场反过来对电荷体系的作用。

在稳恒情形下，库仑定律和安培定律已经分别给出了场对电荷和电流的作用力。静止电荷 Q 受到静电场的作用力 $\vec{F}=Q\vec{E}$，稳恒电流元 $I\,d\vec{l}$ 受到静磁场的作用力 $d\vec{F}=I\,d\vec{l}\times\vec{B}$。如果是连续分布的电荷体系，其电荷密度是 ρ，电流密度是 $\vec{J}$，则静电场作用于静止电荷的力密度为 $\vec{f}=\rho\vec{E}$，静磁场作用于稳恒电流的力密度为 $\vec{f}=\vec{J}\times\vec{B}$。

在变化电磁场的情形下，场对电荷体系的作用力是怎样的呢？洛伦兹将上述公式推广到带电体系在变化电磁场中运动的普遍情形。对于运动的带电体系，由于电荷和电流同时存在，因此将同时受到电场和磁场的作用。洛伦兹假定，不论带电体系的运动形态如何，力密度由下式决定

$$\vec{f}=\rho\vec{E}+\vec{J}\times\vec{B}。\tag{4.3.31}$$

此式称为洛伦兹力密度公式，其中第一项表示单位体积中的电荷所受的电场力，第二项表示上述电荷运动形成的电流所受的磁场力。并且式中的 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 为该单位体积处总的电场和磁场，包括带电体本身所激发的场在内。

对于带电粒子系统来说，若粒子带电量为 q，速度为 $\vec{v}$，则据 (4.3.31) 式，一个带电粒子受电磁场的作用力是

$$\vec{F}=q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}),\tag{4.3.32}$$

此式称为洛伦兹力公式。

与麦克斯韦方程组类似，洛伦兹力公式的建立也经历了推广的步骤，这种推广当初只是一个假定，其正确性要靠实践来检验。后来，大量的物理实验证实了洛伦兹力公式对任意运动速度的带电体都是适用的。现代的带电粒子加速器、电子光学设备等的设计，都以洛伦兹力公式作为十分重要的理论根据。

将实验结果总结推广为理论公式，以后又经过实践检验的麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式，正确地描述了电磁场的运动规律

以及它和带电物质的相互作用规律，成为电动力学的理论基础。将它们结合起来，再加上一定的力学规律，就可以完全决定电磁场和电荷的运动。就是说，把麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式结合起来，构成封闭方程组，就可给出相互作用的荷电粒子和电磁场的经典动力学的全部描述。

〔例 4-10〕 一长为 L，半径为 R 的圆柱体，沿轴线流有电流 I。

(1) 忽略圆柱两端的边缘效应，求柱内任一点的$\vec{B}$。

(2) 由具有电量+q 和动量 p 的粒子组成粒子束沿圆柱轴线从左端射入圆柱体。证明粒子束通过圆柱体以后将会聚于一点，计算焦距的长度。(假设柱长远小于焦距，因而可作为"薄透镜"近似，并忽略由于圆柱物质作用所引起的粒子速度的减慢与散射)。

解：(1) 由题意将圆柱体看成一无限长截流圆柱体，由磁场的环路定理

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 \mathrm{I}' \quad , \quad \mathrm{I}'=\frac{\pi r^2}{\pi R^2}\mathrm{I}=\frac{r^2}{R^2}I \quad ,$$

故圆柱体内离轴 r 远处一点的磁场为

$$B=\frac{\mu_0 \mathrm{I}}{2\pi R^2}r \tag{4.3.33}$$

如选柱坐标，Z 轴沿圆柱轴线并指向粒子束方向，则$\vec{B}$的方向沿$\vec{e}_\varphi$。

(2) 依题意，在考虑问题和进行计算时利用"薄透镜"近似。如图 (4.5) 所示，设某粒子在距轴线为 r 处入射到圆柱内，由于受指向轴线的洛伦兹力的作用，当粒子离开柱体时获得一附加动量$\vec{p}_r$。我们只要证明

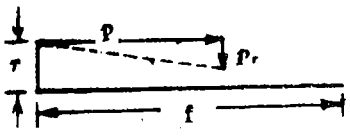


图 4.5

$\frac{p_r}{p}=\frac{r}{f}$ （f 为焦距，因 p、f 为常量，即证明 $p_r \sim r$），则粒子束通过柱体后将会聚于一点。由 $d\vec{p}=\vec{f}dt$ ，有 $\vec{p}_r=\int \vec{f}dt$ 。可以近似为

$$p_r=\int q|\vec{v}\times\vec{B}|\ dt=qvB\int dt$$

$$=qvB\frac{L}{v}=qL\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2}r$$

即 $p_r \sim r$ ，所以其焦距

$$f=\frac{p}{p_r}r=\frac{2\pi R^2 p}{\mu_0 qL I}。\tag{4.3.34}$$

〔例 4--11〕 将运动电子引入互相垂直的均匀恒定电磁场之中，取 $\vec{E}=E\vec{e}_x$，$\vec{B}=B\vec{e}_z$.

(1) 为保持电子速度的大小和方向都不变，其初速度应为如何?

(2) 考虑任意速度分布的一束电子同时射入垂直电场的一个平面，求所有电子又回到这一平面的时间。

解：(1) 设电子速度为 $\vec{v}$，则它在电磁场中受到的洛伦兹力

$$\vec{F}=-e\left[\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right]。$$

欲使 $\vec{v}$ 的大小和方向都不变，必要求 $\vec{F}=0$，即 $\vec{v}\times\vec{B}=-\vec{E}$，所以

$$\vec{v}=-\frac{E}{B}\vec{e}_y。\tag{4.3.35}$$

(2)电子束中具有任意速度 $\vec{v}$ 的电子满足方程

$$m\ddot{\vec{r}}=-e\left[\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right]\tag{4.3.36}$$

注意到 $\vec{E}=E\vec{e}_x$，$\vec{B}=B\vec{e}_z$，方程的分量形式为

$$m\ddot{x}=m\dot{v}_x=-e(E+v_y B)$$

$$m\ddot{y} = m\dot{v}_y = ev_x B$$

$$m\ddot{z} = m\dot{v}_z = 0$$

适当选取坐标系，使得在 t=0 的初始时刻，电子位于原点，其速度$\vec{v} = (0,\ V_{0y},\ v_{0z})$.

引入$v_+ = v_x + iv_y$ ，有

$$\dot{v}_+ = \dot{v}_x + i\dot{v}_y = -\frac{e}{m}\left[(E + v_y B) - iv_x B\right]$$

$$= i\frac{eB}{m}\left(v_+ + i\frac{E}{B}\right)。$$

因$\vec{E}$、$\vec{B}$都是恒定场，上式可写为

$$\frac{d}{dt}\left(v_+ + i\frac{E}{B}\right) = i\frac{eB}{m}\left(v_+ + i\frac{E}{B}\right)$$

解此方程得

$$v_+ + i\frac{E}{B} = Ce^{ieBt/m}$$

式中 c 为复常数$c = Ae^{i\alpha}$ (A，α 均为实数，由初始条件决定)。

若令$\frac{eB}{m} = \omega$ ，则

$$v_+ = v_x + iv_y = Ae^{i(\omega t + \alpha)} - i\frac{E}{B}$$

其实部与虚部各自为

$$v_x = A\cos(\omega t + \alpha),$$

$$v_y = A\sin(\omega t + \alpha) - \frac{E}{B}。$$

代入 t=0 时，$v_x = 0$，$v_y = v_{0y}$ 的初始条件得

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \qquad A = v_{0y} + \frac{E}{B}。$$

由此，电子的速度为

$$v_x = -(v_{0y} + \frac{E}{B})\sin\omega t,$$

$$v_y = (v_{0y} + \frac{E}{B})cos\omega t - \frac{E}{B}。 \tag{4.3.37}$$

对此二式积分，并且令$(v_{0y} + \frac{E}{B}) / \omega = a$

$$x = acos\omega t + D_1,$$

$$y = asin\omega t - \frac{E}{B}t + D_2。$$

代入 t=0 时，x=y=0 的初始条件，得

$$D_1 = -a, \qquad D_2 = 0。$$

所以

$$x = a(cos\omega t - 1),$$

$$y = asin\omega t - \frac{E}{B}t。 \tag{4.3.38}$$

电子又回到初始平面的条件是

$$x = 0 \quad 即 \quad cos\omega t = 1$$

因此可求出相应的时间为

$$t = \frac{2\pi}{\omega}n = \frac{2\pi m}{eB}k \quad (k = \quad 1, 2, \cdots)。 \tag{4.3.39}$$

此结果仅与电子的电量、质量及磁场的大小有关，而与电子的速度无关，说明这就是任意速度分布的电子又回到初始位置所需的时间。

〔例 4-12〕 有一半径为 R，不带电的磁化导体球，球内的磁场为 $\vec{B}(\vec{r}) = Ar_\perp^2\vec{k}$，式中 A 是一个常数，$\vec{k}$是通过球心的单位矢量，$r_\perp$是$\vec{r}$处到$\vec{k}$轴的距离，如图 4.6 所示（在笛卡儿坐标系中，单位矢量$\vec{k}$沿 Z 轴方向，球心位于坐标原点，$r_\perp^2 = x^2 + y^2$）假设导体球以角速度 ω 绕 Z 轴作非相对论性旋转。

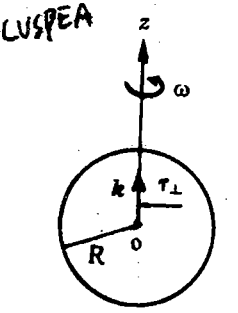


图 4.6

(1) 求旋转球内的电场(在实验室参考系内观测)。

(2) 求球内的电荷分布(不计算球面电荷)。

(3) 如图 4.7 所示，把直流伏特计 V 的一端接在导体球的极地上，另一端通过电刷接到旋转导体球的赤道上，问此伏特计测得的电势差 V 是多少?

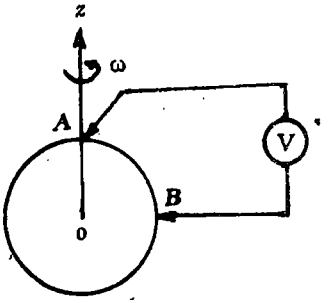


图 4.7

解: (1) 当导体球转动时，球内自由电子受洛伦兹力

$$\vec{f} = -e\vec{v} \times \vec{B},$$

因此旋转球内的感应电场

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B};$$

又

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega\vec{e}_z \times \vec{r},$$

$$\vec{B} = Ar^2_{\perp}\vec{k} = Ar^2_{\perp}\vec{e}_z,$$

所以

$$\vec{E} = -A\omega r^2_{\perp}(\vec{e}_z \times \vec{r}) \times \vec{e}_z = -A\omega r^2_{\perp} r\sin\theta\vec{e}_\rho$$

$$= -A\omega r^2_{\perp}\vec{\rho}。$$

它在圆柱坐标系中的表达式为

$$\vec{E} = -A\omega\rho^3\vec{e}_\rho, \qquad (4.3.40a)$$

在直角坐标系中的表达式

$$\vec{E} = -A\omega(x^2 + y^2)(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y), \qquad (4.3.40b)$$

在球坐标系中的表达式

$$\vec{E} = -A\omega r^3\sin^3\theta(\sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta)。 \qquad (4.3.40c)$$

(2)由方程 $\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \varepsilon_0$ 利用直角坐标系可得球内的体电荷密度

$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0 + 0$

$$\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = -4\varepsilon_0 A\omega(x^2 + y^2) = -4\varepsilon_0 A\omega r_\perp^2 。 \quad (4.3.41)$$

(3)图中 4.7 中 A、B 两点的电势差为

$$V = U_B - U_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} 。$$

在球坐标系中，$\vec{E}$取球面上的值，并且$d\vec{l} = Rd\theta\vec{e}_\theta$因此

$$V = A\omega R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3\theta cos\theta d\theta = \frac{1}{4} A\omega R^4 。 \quad (4.3.42)$$

§4.4 电磁场中的能量和动量守恒定律

能量和动量是物理学中用来描述物质运动的最基本的物理量，对于一种新的能量形态或动量形态的认识，总是通过它们与已经熟知的能量或动量形态的相互转化并守恒的关系来达到的。我们将通过考察电磁过程中其它运动形态的能量和动量的变化来认识电磁能量和动量及其能量流和动量流。

1.能量守恒定律和坡印亭矢量

由洛伦兹力密度公式

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \rho\vec{v} \times \vec{B}$$

可知单位时间内场对电荷系统单位体积所作的功为

$$\vec{f} \cdot \vec{v} = \vec{J} \cdot \vec{E} 。 \quad (4.4.1)$$

下面我们从麦克斯韦方程组出发，推导电磁力所作的这个功（它使带电体系的总机械能发生变化）所满足的能量转换关系。

麦克斯韦方程组给出

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

对此第一式左点乘$\vec{H}$，第二式左点乘$\vec{E}$，得

$$\vec{H}\cdot(\nabla\times\vec{E})=-\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

$$\vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{H})=\vec{E}\cdot\vec{J}+\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t},$$

由于 $\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H})=\vec{H}\cdot(\nabla\times\vec{E})-\vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{H})$

前面两式相减得

$$\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H})=-\vec{E}\cdot\vec{J}-\left(\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right).$$

引入

$$\boxed{\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H},} \tag{4.4.2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \tag{4.4.3}$$

则

$$-\frac{\partial w}{\partial t}=\vec{E}\cdot\vec{J}+\nabla\cdot\vec{S}. \tag{4.4.4}$$

将 (4.4.4) 式化为积分形式，用 Σ 表示任意闭合曲面，v 表示此曲面所包围的体积，可得

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_v w\,dv=\int_v\vec{E}\cdot\vec{J}dv+\oint_\Sigma\vec{S}\cdot d\vec{\sigma}. \tag{4.4.5}$$

现在，我们通过对 (4.4.5) 式中原来熟知的物理量的分析，讨论新引入的物理量 w 和$\vec{S}$的意义。

由 (4.4.1) 式可知，(4.4.5) 式右边第一项表示单位时间场对体积 v 内的电荷所作的功。如果体积 v 内的介质是导电的，且遵从唯象的欧姆定律$\vec{J}=\sigma\vec{E}$，则这一项正表示在单位时间体积 v 内电流所消耗的焦耳热。

对于线性介质，(4.4.3) 式可写成

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}+\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}\right),$$

由静止和稳恒场的结果可知，$\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$ 是电场能量密度，$\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}$ 是磁场能量密度，所以

$$w=\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}+\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B} \tag{4.4.6}$$

是线性介质情形下电磁场的能量密度。于是可以推知 (4.4.3) 式代表电磁场能量密度随时间的变化率。(4.4.5) 式左边表示体积 v 内电磁场具有的总能量随时间的减少。

这样我们看到 (4.4.5) 式中两项是描述电磁场的能量变化的，那么另外一项也必然表示电磁场的能量性质。并且根据能量守恒和转化定律，对 (4.4.5) 式右边第二项唯一可能的解释是，它表示由包围体积 v 的封闭曲面 Σ 内流出的电磁能，因此，可以认为 $\vec{S}$ 在数值上等于单位时间垂直流过单位横截面的电磁能量，其方向代表能量传输方向，它描述电磁能量在场内的传播，称为电磁场的能流密度或乌莫夫–坡印亭矢量。

从以上讨论可以看出，(4.4.5) 式或 (4.4.4) 式就是电磁场中能量守恒定律的具体形式，它表示在空间任意区域内单位时间电磁场能量的减少，等于该区域内电磁场对电荷所作的功率，再加上通过该区域表面单位时间流出去的电磁能，若 (4.4.5) 式中的体积 v 包括整个空间，则流出无限远界面的能量应为零，因而

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_{\infty} w\,dv=\int_{\infty}\vec{E}\cdot\vec{J}\,dv。 \tag{4.4.7}$$

这表示场对电荷所作的总功率（即带电体机械能的增加率）等于场的总能量的减小率，因此场和电荷的总能量守恒。若是没有传导电流的非导体，则 (4.4.4) 式变为

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{S}=0, \tag{4.4.8}$$

与流体力学中的连续性方程，电流的连续性方程完全类似，也可称为电磁能流的连续性方程，表示电磁场能也像流体一样具有流动的性质。这个能量的流动是由于场内所贮藏的电能和磁能本身的运动而产生的。如果考察电磁场中有外来电动势的有限区域 v，并利用欧姆定律$\vec{J}=\sigma(\vec{E}+\vec{E}_e)$，则能量守恒定律（4.4.5）式为

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_v w dv+\int_v\frac{J^2}{\sigma}dv=\int_v\vec{J}\cdot\vec{E}_e dv-\oint_\Sigma\vec{S}\cdot d\vec{\sigma}, \tag{4.4.9}$$

它表示体积为 v 的电磁场中,单位时间增加的电磁能量与导体内消耗的能量必由外来电动势对传导电流所作的功率与单位时间流入体积 v 内的电磁能流共同供给。

以上讨论的均是所述物理量的瞬时值，而实际上一般所观测的是在一个周期的平均值。因此在计算实际观测量时应取 w 和$\vec{S}$等物理量的实部（如果为方便起见将这些物理量用复数表示）在一个周期内的平均值。设有任意两个复量

$$f(t)=f_0e^{-i\omega t},$$

$$g(t)=g_0e^{-i\omega t+i\varphi},$$

φ 是 f(t)和 g(t)的位相差。fg 对一周期的平均值为

$$<f\ g>=\frac{1}{2}f_0g_0\cos\varphi=\frac{1}{2}Re(f^*g) \tag{4.4.10}$$

例如

$$<\vec{S}>=\frac{1}{2}Re(\vec{E}^*\times\vec{H}). \tag{4.4.11}$$

〔例 4-13〕 半径为 R，导电率为 σ 的无穷长直圆柱导线，沿轴向通以均匀稳恒电流 I，导线表面上有均匀的面电荷 σ_f，

(1) 求导线表面外侧的能流密度$\vec{S}$;

(2) 求导线内的能流密度$\vec{S}_1$；

(3) 证明：由导线表面进入导线内的电磁能量，刚好等于导线的焦耳热损耗。

解：(1) 选用圆柱坐标系，Z 轴沿导线轴线，电流$\vec{J}=J\vec{e}_z$。由对称性可知，电场没有φ分量，导线表面外侧的电场应为$\vec{E}=E_r\vec{e}_r+E_z\vec{e}_z$。利用欧姆定律求得导线内电场$\vec{E}_1=\frac{\vec{J}}{\sigma}=\frac{I}{\sigma\pi R^2}\vec{e}_z$由边值关系$\vec{e}_r\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0$，得

$$E_2=\frac{I}{\sigma\pi R^2};$$

又因导线表面有σ_f，利用高斯定理得

$$E_r=\frac{\sigma_f}{\varepsilon_0}。$$

另外，由安培环路定律，可求得导线表面外侧的磁场

$$\vec{H}=\frac{I}{2\pi R}\vec{e}_\varphi。$$

因此，导线表面外侧的能流密度为

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=-E_Z H\vec{e}_r+E_r H\vec{e}_Z$$

$$=-\frac{I^2}{2\pi^2\sigma R^3}\vec{e}_r+\frac{I\sigma_f}{2\pi\varepsilon_0 R}\vec{e}_z。\qquad(4.4.12)$$

(2)导线内离轴线 r 处的磁场

$$\vec{H}_1=\frac{Ir}{2\pi R^2}\vec{e}_\varphi,$$

则导线内离轴线 r 处的能流密度为

$$\vec{S}_1=\vec{E}_1\times\vec{H}_1=-\frac{I^2 r}{2\pi^2\sigma R^4}\vec{e}_r\quad。\qquad(4.4.13)$$

(3)单位时间进入长度为 L 的一段导线内的电磁能量

$$-\oint_\Sigma\vec{S}\cdot d\vec{\Sigma}=\frac{I^2}{2\pi^2\sigma R^3}2\pi RL=\frac{I^2}{\pi\sigma R^2}L。$$

这一段导线内的传导电流$\vec{J}=\frac{I}{\pi R^2}\vec{e}_z$在单位时间内引起的焦耳热损耗为

$$\int_v \vec{J}\cdot\vec{E}_1 dv=\frac{I}{\pi R^2}\frac{I}{\sigma\pi R^2}\pi R^2 L=\frac{I^2}{\sigma\pi R^2}L。$$

由此可见，进入导线内的电磁能量，刚好等于导线的焦耳热损耗。

由此例还可以看出，在导线外部，能量既通过轴向分量沿导线方向向前传输，又通过径向分量向导体内部传输，而从导线外部经其表面流入内部的能量，没有沿导线方向的流动，仅有沿导线横截面从表面向轴心的流动。并且愈深入导体，S_1的数值愈小，当r=0时，$S_1=0$，表示能量逐渐损失，以不断地补偿导体中的焦耳热损耗。这就说明，电磁能量并不是在导线内部由电流传递，而是在导线附近的电磁场中沿导线方向传输的，并且，导线中的焦耳热也是直接由其附近的电磁场能量流入导体而转化的。

2.动量守恒定律和麦克斯韦张力张量

一定的电荷系统总要受到电磁场的作用力，此作用力又与电荷系统的机械动量变化率相联系。因此我们从洛伦兹力公式和麦克斯韦方程组出发，推导由于场和电荷之间的相互作用而发生的动量转移所满足的关系，具体地说下面将利用麦克斯韦方程组把洛伦兹力公式用场量表出。

真空中的麦克斯韦方程组给出

$$\rho=\varepsilon_0\nabla\cdot\vec{E},$$

$$\vec{J}=\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{B}-\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}。$$

将二式代入洛伦兹力密度公式

$$\vec{f}=\varepsilon_0(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E}+\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\vec{B})\times\vec{B}-\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\vec{B},$$

为了把此式写成对$\vec{E}$和$\vec{B}$对称的形式，利用另外两个麦氏方程

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0,$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

可得

$$\vec{f} = \varepsilon_0(\nabla \cdot \vec{E})\vec{E} + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \cdot \vec{B})\vec{B} + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B}$$

$$+ \varepsilon_0(\nabla \times \vec{E}) \times \vec{E} - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \times \vec{B})。$$

由矢量和张量运算公式

$$(\nabla \times \vec{E}) \times \vec{E} = (\vec{E} \cdot \nabla)\vec{E} - \frac{1}{2}\nabla E^2,$$

$$\nabla \cdot (\vec{E}\vec{E}) = (\nabla \cdot \vec{E})\vec{E} + (\vec{E} \cdot \nabla)\vec{E}$$

得

$$(\nabla \cdot \vec{E})\vec{E} + (\nabla \times \vec{E}) \times \vec{E} = \nabla \cdot (\vec{E}\vec{E} - \frac{1}{2}\vec{\vec{I}}\nabla E^2),$$

其中$\vec{\vec{I}}$是单位张量。同理

$$(\nabla \cdot \vec{B})\vec{B} + (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} = \nabla \cdot (\vec{B}\vec{B} - \frac{1}{2}\vec{\vec{I}}B^2)。$$

因此

$$f = \nabla \cdot (\varepsilon_0 \vec{E}\vec{E} - \frac{1}{2}\vec{\vec{I}}\varepsilon_0 E^2) + \nabla \cdot (\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\vec{B} - \frac{1}{2}\vec{\vec{I}}\frac{1}{\mu_0}B^2)$$

$$- \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B})。$$

引入

$$\vec{\vec{T}} = -\varepsilon_0 \vec{E}\vec{E} - \frac{1}{\mu_0}\vec{B}\vec{B} + \frac{1}{2}\vec{\vec{I}}(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2) \quad , \tag{4.4.14}$$

$$\vec{g} = \varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} \quad , \tag{4.4.15}$$

则

$$\vec{f}+\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}=-\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}, \tag{4.4.16}$$

此式的积分形式为

$$\int_v \vec{f}dv+\frac{\partial}{\partial t}\int_v \vec{g}dv=-\oint_\Sigma d\vec{\sigma}\cdot\overleftrightarrow{T}。 \tag{4.4.17}$$

应用经典力学中的关系式

$$\vec{F}=\frac{\partial \vec{p}}{\partial t}, \tag{4.4.18}$$

(4.4.17)式可以写成

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_v \vec{g}_m dv+\frac{\partial}{\partial t}\int_v \vec{g}dv=-\oint_\Sigma d\vec{\sigma}\cdot\overleftrightarrow{T}。 \tag{4.4.19}$$

式中$\vec{g}_m$为电荷系的机械动量密度。这就是电磁场和电荷体系的动量转移所遵从的关系。

下面讨论（4.4.19）式及新引入的物理量的意义。

若区域V为全空间，则（4.4.19）中面积分趋于零，得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_\infty \vec{g}_m dv+\int_\infty \vec{g}dv\right]=0。 \tag{4.4.20}$$

括号中第一项是电荷系的动量。对于电荷系与场这个大体系来说，其总动量应为电荷系的动量与电磁场的动量之和，在全空间总动量守恒，（4.4.20）式正反映了这一点。所以该表达式括号中第二项应为电磁场的动量，$\vec{g}$为电磁场的动量密度。

对于有限区域V，（4.4.19）式左端表示单位时间体积v内电荷系动量和电磁场动量的增加，当然等式右端也应是表征电磁场动量的物理量，并且在数学形式上正是通过体积v的表面Σ流入v内的一个通量，因此（4.4.19）式右端应表示通过封闭面Σ流入体积v内的电磁动量流，$\overleftrightarrow{T}$为电磁场的动量流密度。

由此可见，（4.4.19）式就是电磁场中动量守恒定律的具体形式，它说明空间任意区域内部电荷系和电磁场的总动量随时间

的增加率等于单位时间通过该区域表面流入的电磁动量流。电磁场的动量密度和能流密度之间有一般关系式

$$\vec{g}=\frac{1}{c^2}\vec{S}, \tag{4.4.21}$$

并且能量守恒定律和动量守恒定律的微分形式（4.4.4）式与（4.4.16）式完全相似；w 和$\vec{g}$、$\vec{s}$和$\vec{\sigma}$各自处于对应位置，但注意 w 是标量，$\vec{g}$是矢量，$\vec{s}$是矢量，$\vec{\sigma}$是张量。

在物理效果上，动量流和张力是等效的。如气体的内压力，乃是气体分子运动所对应的动量流的等效代替，在电磁现象中也是如此，由前所述，（4.4.19）式左端表示在区域 v 内电荷和场的组合系统的总动量随时间的变化率，对照（4.4.18）式，（4.4.19）式右端应为 Σ 面外的电磁场通过 Σ 面对 v 内电荷和场所施的力，$-d\vec{\sigma}\cdot\vec{\sigma}$ 是面元$d\vec{\sigma}$正向一侧的场通过该面元施于负向一侧的场和电荷上的力，$\vec{\sigma}$为通过垂直于它的单位面积所施的力。因此，$\vec{\sigma}$是一个描述电磁场张力分布的张量，也叫做麦克斯韦张力张量或电磁场的张力张量，其分量 T_{ij} 表示作用于垂直 i 轴的单位面积上的力的 j 分量。这就说明电磁场也象弹性体一样，其内部存在着各部分之间的相互作用，它既能施力于电荷和电磁场，也能承受电荷和电磁场对它的作用力。

如果场是稳定的，$\frac{\partial}{\partial t}\int_v \vec{g}dv=0$ ，则由（4.4.17）式得到

$$\vec{F}_m=\int_v \vec{f}dv=-\oint_\Sigma d\vec{\sigma}\cdot\vec{\sigma}\ 。 \tag{4.4.22}$$

此式告诉我们，不论 Σ 面内的电荷分布如何，这些电荷所受到的合力只与 Σ 面上$\vec{\sigma}$有关，换句话说，如果我们已知$\vec{\sigma}$在空间各点的值，那么任一封闭面内电荷所受到的合力就可以完全由作用在该面上的力 $-\oint_\Sigma d\vec{\sigma}\cdot\vec{\sigma}$ 决定。同理，若 v 内没有电荷，$\frac{\partial}{\partial t}\int_v \vec{g}_m dv=0$，则由（4.4.19）式可得

$$\vec{F}=\frac{\partial}{\partial t}\int_V \vec{g}dv=-\oint_\Sigma d\vec{\sigma}\cdot\vec{J}, \tag{4.4.23}$$

说明 V 内电磁场所受作用力的合力也可以由 $-\oint_\Sigma d\vec{\sigma}\cdot\vec{\mathcal{T}}$ 决定。这就为我们提供了通过计算$\vec{\mathcal{T}}$来计算场力的方法。

〔例 4-14〕 讨论电场中几个特殊面上的力

(1)若面法线方向的单位矢$\vec{n}$平行于电场$\vec{E}$。则单位面积上的电场力为

$$\vec{p}=-\vec{n}\cdot\vec{\mathcal{T}}=-\vec{n}\cdot\left(-\varepsilon_0\vec{E}\vec{E}+\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{\mathrm{I}}E^2\right)$$

$$=\varepsilon_0E^2\vec{n}-\frac{\varepsilon_0}{2}E^2\vec{n}=\frac{\varepsilon_0}{2}E^2\vec{n}。 \tag{4.4.24}$$

这说明力$\vec{p}$沿电场方向，正值说明是张力，它代表单位面积外侧(与$\vec{n}$同侧) 的电场对内侧电场的作用，故沿电力线方向电场之间有张力。

(2) 若面法线方向的单位矢$\vec{n}$垂直于电场$\vec{E}$，则单位面积上的力为

$$\vec{p}=-\vec{n}\cdot\vec{\mathcal{T}}=-\frac{1}{2}\varepsilon_0(\vec{n}\cdot\vec{\mathrm{I}})E^2=-\frac{\varepsilon_0}{2}E^2\vec{n}。 \tag{4.4.25}$$

力的大小与(1)中一样，方向垂直于电场，负值表示压力，故垂直于电力线方向电场之间有推斥力。

(3)若$\vec{n}$指向任意方向，则单位面积上的力为

$$\vec{p}=-\vec{n}\cdot\vec{\mathcal{T}}=\vec{n}\cdot\varepsilon_0\vec{E}\vec{E}-\frac{\varepsilon_0}{2}\vec{n}\cdot\vec{\mathrm{I}}E^2。$$

因

$$\vec{p}\cdot\vec{p}=\varepsilon_0^2(\vec{n}\cdot\vec{E})^2E^2-2\frac{\varepsilon_0^2}{2}(\vec{n}\cdot\vec{E})\vec{E}\cdot(\vec{n}\cdot\vec{\mathrm{I}})E^2$$

$$+\left(\frac{\varepsilon_0}{2}E^2\vec{n}\right)^2=\left(\frac{\varepsilon_0}{2}E^2\vec{n}\right)^2$$

所以

$$p=\frac{\varepsilon_0}{2}E^2。\tag{4.4.26}$$

可见力的大小与（1）、（2）中相同，即电场之间通过单位面积的互作用力的数值总是$\frac{\varepsilon_0}{2}E^2$，与面的方向无关。

又

$$\vec{p}\cdot\vec{E}=(-\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\cdot\vec{E}$$

$$=\frac{\varepsilon_0}{2}E^2(\vec{n}\cdot\vec{E}),$$

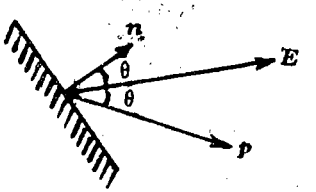


图 4.8

可得

$$\vec{e}_p\cdot\vec{E}=\vec{n}\cdot\vec{E},\tag{4.4.27}$$

即$\vec{p}$与$\vec{E}$之间的夹角等于$\vec{n}$与$\vec{E}$之间的夹角，如图 4.8 所示。

上述（1）、（2）两情况可以看成是这里的特例：当$\vec{n}\parallel\vec{E}$时，也有$\vec{p}\parallel\vec{E}$；当$\vec{n}\perp\vec{E}$时，也有$\vec{p}\perp\vec{E}$，并且$\vec{p}$和$\vec{n}$的方向相反。

将上述结果与§ 1.4 中所介绍的法拉弟对电场力的观点相对照，可以认为此例是对法拉弟观点的理论解释。磁场的情况与电场相同，这里不再重述。

〔例 4—15〕 设一半径为 R 的导体球位于均匀外电场$\vec{E}$。内，由垂直于场方向的平面将球切为两半。假定两半球的电势相同，求两半球之间斥力。

解：设两半球被无限狭窄的小缝分开，因为是导体球，所以狭缝内电场为零。利用〔例 2—24〕的结果，球外电场

$$\vec{E}_{外}=\left(1+\frac{2R^3}{r^3}\right)E_0\cos\theta\vec{e}_r-\left(1-\frac{R^3}{r^3}\right)E_0\sin\theta\vec{e}_\theta。$$

在球面上(r＝R 处)

$$\vec{E}=3E_0\cos\theta\vec{e}_r。$$

由麦氏张力张量，两半球作用力(斥力)为

$$\vec{F}=-\int_s\vec{\overleftrightarrow{T}}\cdot d\vec{s}=\int_s\left(\varepsilon_0\vec{E}\vec{E}-\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{\overleftrightarrow{I}}E^2\right)\vec{e}_r ds,$$

$$=\int_s\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2\vec{e}_r ds$$

式中积分区域 s 是半球面。由于对称性，该作用力仅有 Z 分量，即

$$F=F_Z=\int_s\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2\cos\theta ds$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{9}{2}\varepsilon_0E_0^2\cos^3\theta R^2\sin\theta d\theta d\varphi$$

$$=\frac{9\pi}{4}\varepsilon_0E_0^2R^2。\qquad(4.4.28)$$

〔例 4-16〕 利用磁场的压力说明太阳黑子的平衡问题。

解：天文观测结果表明，在太阳赤道两边纬度 5°～25° 的区域，有一些大大小小的黑斑和黑点成群出现，这就是太阳黑子。黑子的温度约为 4500K，比太阳表面普遍温度要低 1300K。若把构成太阳的电离气体当作经典理想气体，则物态方程为 $p=nkT$。如黑子内外压力相同，则黑子内部的物质密度就要比其外大，将使黑子很快下沉而从太阳表面消失；反之，如黑子内外物质密度相同，则黑子内外的压力差必然导致黑子不可能稳定存在。事实上，太阳黑子的寿命可长达几个月之久。考虑到场的压力，可解释黑子的平衡问题。

根据观察，黑子内部有强达 10^{-1} 特斯纳的磁场，比太阳表面磁场高一个数量级。我们假定黑子是柱状的，其轴向沿黑子内部的均匀磁场方向（取作 Z 轴方向），则其侧面的单位面积上所受内部磁场的压力为

$$\vec{f} = -\vec{e}_\rho \cdot \vec{\sigma} = -\vec{e}_\rho \cdot \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{1}{2}B^2\vec{I} - \vec{B}\cdot\vec{B}\right)$$

$$= -\frac{1}{2\mu_0}B^2\vec{e}_\rho \,。 \qquad (4.4.29)$$



图 4.9

类似地，[illegible]面和顶面上受一张力$\frac{B^2}{2\mu_0}$，可见黑[illegible]须是细柱状的，这样可以认为黑子[illegible]密度相同，而压力差则由磁场压力补偿:

$$p_{外} = p_{内} + \frac{1}{2\mu_0}B^2 \ ,$$

于是保证了黑子相对稳定的存在。为估计黑子处于力学平衡时的内外温度差，代入物态方程

$$nk(T_{外} - T_{内}) = \frac{1}{2\mu_0}B^2 \ , \qquad (4.4.30)$$

取 B～10^{-1} 特斯拉，n～3×10^{17} 克／厘米^3，$\frac{1}{2\mu_0}B^2 = 4\times10^3$ 牛顿／米^2，k 为玻尔兹曼常数，可得

$$\triangle T = 1000\ \mathrm{K}$$

与实验观察基本符合。

〔例 4–17〕 用静场中的特例说明电磁场的角动量。

考虑一个放在均匀磁场$\vec{H}$中的圆柱形电容器，$\vec{H}$的方向和电容器的轴平行，如图 4.10，在电容器两复面之间的空间中，除磁场以外，还有电场$\vec{E}$。在该空间

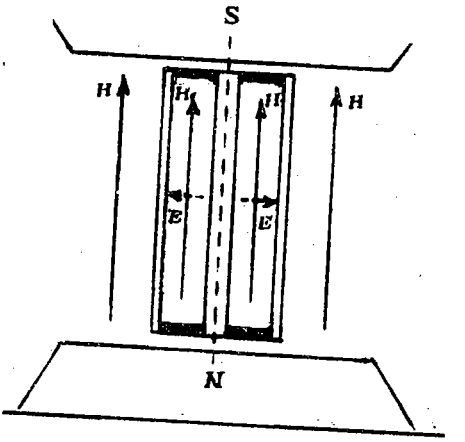


图 4.10

中，存在能流密度

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=EH\vec{e}_{\varphi},$$

即坡印亭矢量线是许多同心圆圈，它们的平面和电容器轴线垂直。由关系式$\vec{g}=\frac{1}{c^2}\vec{S}$，我们肯定地说，一定的动量以体密度$\vec{g}$定域在所研究的静场中。

整个静场的总动量必须等于零。然而，电磁场有角动量密度

$$\vec{l}=\vec{r}\times\vec{g}=\frac{1}{c^2}\vec{r}\times(\vec{E}\times\vec{H}) \tag{4.4.31}$$

和角动量

$$\vec{L}=\int_v\vec{l}dv=\frac{1}{c^2}\int_v\left[\vec{r}\times(\vec{E}\times\vec{H})\right]dv, \tag{4.4.32}$$

式中积分遍及全空间。

如果我们使电容器放电，并且所研究的系统在放电时间内不受外力作用或合外力矩等于零。这条件容易满足，比如电容器的放电是由放射性物质（它引起电容器两复面之间的气体电离）移近电容器而发生的，则电场$\vec{E}$和电磁场角动量$\vec{L}$都消失。根据角动量守恒定律，我们应该得出结论：电容器加上产生场$\vec{H}$的磁铁这一系统在放电过程中获得机械角动量$\vec{L}$。如果磁铁固定不动，而电容器可以绕它的轴自由转动，则在放电过程中，电容器应该获得转动角速度$\omega=\frac{L}{\mathrm{I}}$，式中I是电容器对其轴线的转动惯量。

此结论已取得了实验的验证，也可以用直接计算来肯定，所以电磁场是具有角动量的。在原子现象的领域内，光和实物之间角动量的交换具有重要意义。例如，受激原子的辐射光，一般说来是和原子内电子的角动量的改变有联系的，而且在数量级上这一改变和原子的角动量的绝对值差不多。

§4.5 电磁场的波动性和平面电磁波

麦克斯韦方程组的一个最重要的特点，就是它揭示出在不稳定情况下，电磁场的变化具有波动的性质。这种以波动形式传播的电磁场就称为电磁波。本节从麦氏方程所得到的波动方程说明电磁场的波动性质，并介绍最基本最简单的行波解即平面电磁波。

1.电磁场的波动方程

为方便起见，我们从真空中的麦氏方程组

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho, \tag{4.5.1a}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{4.5.1b}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \tag{4.5.1c}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0\vec{J} \tag{4.5.1d}$$

出发，寻找电磁场随时间的变化与随空间的变化的关系。在(4.5.1b)和(4.5.1d)中消去$\vec{B}$，就可得到一个关于$\vec{E}$的偏微分方程。为此对(4.5.1b)式取旋度，并利用(4.5.1d)式，有

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2\vec{E}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{B}) = -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0\frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$$

再将(4.5.1a)代入得

$$\nabla^2\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\rho + \mu_0\frac{\partial \vec{J}}{\partial t}。 \tag{4.5.2}$$

同样，从(4.5.1b)和(4.5.1d)中消去$\vec{E}$，可得

$$\nabla^2\vec{B} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t_2} = -\mu_0\nabla \times \vec{J}。 \tag{4.5.3}$$

(4.5.2) 和 (4.5.3) 式都是非齐次的波动方程，非齐次项（即方程右端的项）代表波动的源。这表明在不稳定情况下，$\vec{E}$和$\vec{B}$都是以波的形式运动，而变化的电荷电流是激发波动的源。根据波动的通性可知，已经激发并传播出去的电磁波，即使激发它的源消失后仍然继续存在并向前传播。这就是说，电磁场可以脱离电荷和电流而单独存在，并在一般情况下以波的形式运动。

因此，我们可以考虑没有电荷电流，而只有电磁波存在的情况，这种情况下的电磁波称为自由电磁波，意思是说它没有受到电荷电流的作用。此时，方程 (4.5.2) 和 (4.5.3) 式成为

$$\nabla^2\vec{E}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0, \tag{4.5.4}$$

$$\nabla^2\vec{B}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=0. \tag{4.5.5}$$

这就是齐次波动方程，说明麦氏方程组在自由空间所描写的物理过程是一种电磁波动，脱离了场源的电磁场在变化时相互激发。并在空间逐点传播而形成电磁波。如果没有电场和磁场的变化，(4.5.4) 和 (4.5.5) 式变为拉普拉斯方程

$$\nabla^2\vec{E}=0 \qquad \nabla^2\vec{B}=0$$

这与波动方程有着本质的不同.假定它们在全部空间都成立，而无限远处$\vec{E}$和$\vec{B}$都为零，则拉氏方程的解只能是

$$\vec{E}=0 \qquad \vec{B}=0$$

表示整个空间都没有场。所以在稳定情况下，场与源(电荷和电流)之间有着密切的联系，没有源就没有场；而当场迅速变化时，在没有源的同样条件下，齐次波动方程仍有不为零的解。这一方面表明电磁波的形成与传播必须同时有电场和磁场的变化，并且$\vec{E}$和$\vec{B}$随时间的改变率也必须是变化的(即$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\neq 0,\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}\neq 0$)；

另一方面也说明了变化的电磁场可以与电荷电流相互作用，但是它的存在并不依赖于电荷电流。

值得注意的是，并不能根据（4.5.4）和（4.5.5）式说电场和磁场之间是无关的，它们彼此独立地进行运动和变化。实际上，波动方程作为麦氏方程组的推论，只反映了它的一部分内容，要概括麦氏方程组的全部推论，还必须补充一个散度方程和一个旋度方程。例如在自由电磁波情况下，与麦氏方程组等价的是方程组

$$\begin{aligned} &\nabla^2\vec{E}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t}=0,\\ &\nabla\cdot\vec{E}=0,\\ &\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \end{aligned} \tag{4.5.6}$$

或

$$\begin{aligned} &\nabla^2\vec{B}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=0,\\ &\nabla\cdot\vec{B}=0,\\ &\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}。 \end{aligned} \tag{4.5.7}$$

2.平面电磁波

我们来求波动方程的一个特解，即平面电磁波。如果在任意时刻，与波传播方向垂直的任一平面内的所有各点，场矢量具有相同的值，这种波称为平面波，其波阵面（等相位点组成的面）为垂直于传播方向的面。例如太阳发出的光波虽然是一种具有球形对称性的球面波，但在远处的局部区域看到的，只是整个波面的极小部分，这一部分可以近似看成平面波。

波动方程（4.5.4）和（4.5.5）是两个矢量方程，如果写成分量形式，就有

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0, \tag{4.5.8}$$

其中

$$C = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \quad 。 \tag{4.5.9}$$

这里 ψ 代表 E_x、E_y、E_z，和 B_x、B_y、B_z，方程 (4.5.8) 代表六个分量形式的波动方程，如考虑传播方向平行 Z 轴的平面波，则场量应与x，y 无关，只随 Z、t 变化，方程 (4.5.8) 成为

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0。 \tag{4.5.10}$$

为了解这个方程，我们将改写为下面形式

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\Psi = 0$$

并且引入新变数

$$\zeta = Z - ct \quad , \quad \eta = Z + ct。$$

容易证明

$$\frac{\partial}{\partial\zeta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right),$$

因而 Ψ 的方程变为

$$\frac{\partial^2}{\partial\zeta\partial\eta}\Psi = 0。$$

将这个方程对 ζ 积分，其积分常数应与 ζ 无关，可设为 $F(\eta)$，则有

$$\frac{\partial\psi}{\partial\eta} = F(\eta)$$

再对 η 积分，就得到行波解

$$\Psi = f_1(z - ct) + f_2(z + ct), \tag{4.5.11}$$

这就是波动方程的平面波解的一般形式。式中 f_1，f_2 分别是变量

(Z−ct) 和 (Z+ct) 的任意函数，它们的具体形式决定于波源的电磁扰动，当扰动是简谐形式时，它们就是余弦或正弦函数。

现在来说明解的物理意义，设 $f_2=0$，则 $\psi=f_1(Z-ct)$。在空间坐标 Z＝常数的任一平面上，场将随时间而变化；在任意给定的时刻（即 t＝常数），场将随 Z 的不同而取不同的值，因此，只有当时间与空间坐标满足关系式 Z−ct＝常数时，场才有相同的值，即

$$Z=\text{常数}+ct$$

这就表明，假如在某一瞬时 t＝0，场在某一点 Z 有一个一定的值，那么在过了时间 t 之后，场在沿 Z 轴与原来的点相距 ct 处有同样的值，说明场以速度 c 在空间沿 Z 轴传播。因此，$f_1(Z-ct)$是向 Z 轴正方向行进的平面波。同理可以判断，$f_2(Z+ct)$是沿着相反的方向，即沿着 Z 轴的负方向行进的平面波。

应该指出，表达式 (4.5.9) 把三个电磁学基本常数联系起来了：电磁波的速度 c，真空中的介电常数 ε_0 和真空中的磁导率 μ_0。由于 $\varepsilon_0=1/(4\pi\times9\times10^9)$法拉／米，$\mu_0=4\pi\times10^{-7}$ 享利／米，代入(4.5.9)式可得

$$C=3\times10^8 \text{ 米／秒}, \tag{4.5.12}$$

它恰好在数值上等于光在真空中的传播速度，光波与电磁波在传播速度上的一致是光的电磁理论的重要根据之一。

习题四

1.一个面积为 s，法线方向为$\vec{n}$的矩形线圈置于均匀磁场$\vec{B}$之中，选坐标原点在线圈中心，Z 轴与$\vec{B}$平行，X 轴与线圈长边平行。

(1) 若线圈固定，磁场以规律$\vec{B}_0\sin\omega t$ 随时间变化，$\vec{B}$与$\vec{n}$的夹角为 θ，求线圈中的感应电动势。

(2) 若磁场恒定，线圈以角速度 ω 绕X轴转动，求感应电动势。

(3) 若线圈以角速度 ω 在磁场 $\vec{B}_0 \sin\omega t$ 中绕 x 轴转动，求证感应电动势为：$-B_0 S\omega\cos 2\omega t$。

2.包含着分布在有限体积内的电流的电路的自感，是由贮存在系统内的能量来定义的

$$W=\frac{1}{2\mu_0}\int_{\infty} B^2 dV=\frac{1}{2}LI^2$$

现有一同轴线，由长直导线和套在它外面的同轴圆套筒构成，导线半径为 a，圆筒内半径为 b，外半径为 c，电流 I 由圆筒流去，由导线流回，在它们的横截面上，电流均匀分布。忽略边缘效应，求该同轴线单位长度的电感。

3.两个长度不同而直径近乎相等的同轴螺线管，小的伸进大的里面的长度为 l，设两者的绕线密度分别是 N_a 和 N_b，电流分别是 I_a 和 I_b，且方向相同。忽略边缘效应，在电流保持恒定和磁通量保持恒定的条件下，分别计算磁力。

4.由麦克斯韦方程组出发，推导库仑定律和电荷守恒定律。

5.证明：在介质存在时，自由电荷和束缚电荷分别满足表示电荷守恒定律的连续性方程。

6.证明：麦克斯韦方程组中的四个方程是不独立的（即由其中两个可以导出另两个）。

7.在对称性理论中，空间反演 p 定义为 $\vec{r}\to -\vec{r}$，$\rho\to\rho$，$t\to t$，时间反演 T 定义为 $t\to -t$，$\rho\to\rho$，$\vec{r}\to\vec{r}$，证明麦克斯韦方程组在 p、T 变换下是不变的。

8.证明：在引入磁荷以后，电磁场的对偶性这一对称性不再破缺。也就是说，场作变换

$$\vec{E}=\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}\ \vec{H}' \quad , \quad \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}\ \vec{H}=-\vec{E}'$$

源作相应的变换

$$\rho_e=\rho'_m/c \quad 和 \quad \vec{J}_e=\vec{J}'_m/c$$

$$\rho_m=-\rho'_e/c \quad 和 \quad \vec{J}_m=-\vec{J}'_e/c$$

为包含磁荷贡献而修改的麦克斯韦方程组是保持不变的。

9.如果存在磁单极，试用包含磁单极的电磁场方程组讨论：

(1) 相应的电磁场能量守恒关系（坡印亭矢量、电磁场能量等）。

(2) 在此情形下是否可引入势？

10.在强度为 g 的固定磁单极附近，建立一个带电粒子的非相对论运动方程，并求运动恒量。

11.一束完全平行的质子流，以半径为 R 的圆柱形式通过空间，其速度 v，单位体积的质子数为 n。求距射束轴线为 r 处的一个质子所受的力，并定性说明质子束的稳定性。如果质子的能量可以使周围的剩余气体电离，简单讨论这类"气体聚焦"形式的"集束"效应（即磁力把离子束集中到轴附近）。

12.一个电荷为 e，质量为 m 的非相对论粒子，在交叉的均匀恒定电场 $\vec{E}=(0,\ E_y,\ E_z)$ 和磁场 $\vec{B}=(0,\ 0,\ B)$ 内运动。在 t=0 的初始时刻，粒子位于坐标原点，其速度 $\vec{v}=(v_{0x},\ 0,\ v_{0z})$，试确定关系式：x(t)，y(t)，z(t)，并画出粒子的各种可能轨迹。

提示：为简化求解，可引入新变数 $r_+=x+iy$。

13.一个磁控管由半径为 R_0 的圆筒状阳极和具有小半径为 a 的同轴圆筒状阴极构成，沿圆筒轴向有一磁场 H_Z，假定电子以无穷小的速度垂直于其表面离开热阴极，阳极对于阴极的电压为 V_0。

(1) 定性说明电子离开阴极后的轨迹将是怎样的？

(2) 证明：对于给定的 H_Z，电子能达到阳极的条件是

$$V_0=\frac{eB^2}{8m}R_0^2\left(1-\frac{e^2}{R_0^2}\right)^2。$$

14.设有一半径为 R 的介质球，置于一均匀磁场中，且绕通过球心的某固定轴以角速度 ω 旋转，已知旋转轴与磁场 $\vec{B}_0$ 方向平行，试求感应极化电荷。

15.利用反证法和坡印亭定理证明麦克斯韦方程组的完整性：在给定电荷、电流分布，和初始条件、边界条件都已确定的条件下，麦克斯韦方程组的解是唯一的。

16.一个正在缓慢充电的电容器由两块圆形导体平板构成，其间距为h，每块板半径为a，其中电场为E（t），忽略边缘效应，试求：

(1) 电容器中能量的增加率。

(2) 电容器中的能量流密度矢量。

(3) 通过电容器的侧面流入电容器的能量。

17.面积为s，间距为d的两块圆形板构成平行板电容器，其中介质为非理想的，具有电导率σ、介电常数ε、磁导率μ，并且忽略边缘效应。

(1) 若两极板所加电压$U=U_m\sin\omega t$，求电容器中任一点的磁场$\vec{B}$；

(2) 若电容器由直流供电，求电容器中任一点的坡印亭矢量$\vec{S}$，并验证其中消耗的功率由电源供给。

18.对于静电场和稳恒电流磁场同时并存的情形，仍然可以按照定义写出坡印亭矢量。试证明：对于场中的任意闭合曲面，坡印亭矢量的面积分为零。并对这一结果作简单解释。

19.设f(t)和g(t)有复数表示

$$f(t)=f_0e^{-i\omega t}\quad,\quad g(t)=g_0e^{-i\omega t+i\varphi},$$

φ是f(t)和g(t)的相位差。试证：fg对一周期的平均值为

$$<f\ g>=\frac{1}{2}f_0g_0\cos\varphi=\frac{1}{2}Re(f^*g)$$

20.写出静电场的张力张量。如果静电场是沿x方向的均匀电场，试求在电场中法线方向为$\vec{n}$的一个小面元上的作用力，并讨论以下几种情况：

(1) $\vec{n}$指向$\vec{e}_x$方向；

(2) $\vec{n}$与$\vec{e}_x$方向或45°角；

(3) $\vec{n}$与$\vec{e}_x$方向或90°角；

(4) $\vec{n}$与$\vec{e}_x$方向或135°角；

(5) $\vec{n}$指向$-\vec{e}_x$方向。

21.用静电场的张力张量讨论两个点电荷之间的相互作用力。

(1) 如$q_1=q_2=+q$；

(2) 如$q_1=-q_2=+q$.

22.设一半径为 R 的介电球位于均匀的外电场$\vec{E}$内，由垂直于场方向的平面将球切为两半。试求两个半球之间的吸力。

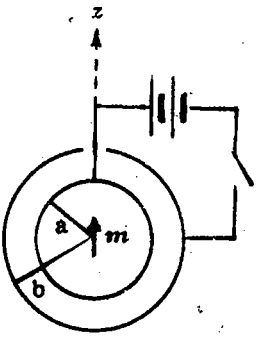
23.设有两个带电粒子 q_1 和 $q_2(q_1, q_2>0)$分别以$\vec{v}_1$和$\vec{v}_2$的速度运动 $(v_1, v_2<<c)$，在某一时刻$\vec{v}_2 \perp \vec{v}_1$，且$\vec{v}_2$在 q_1 和 q_2 的连线上并指向 q_1。求 q_1 和 q_2 所受的力，讨论结果与牛顿第三定律是否矛盾？

24.质量为 m，带电量为 q 的粒子在磁场中运动，试求稳定情况下带电粒子在磁场中的总动量。

25.由电磁场存在时的动量守恒定律导出角动量守恒定律。

26.用直接计算证明：对于〔例 4–17〕中的装置，电容器在磁场中放电时，电磁角动量和机械角动量之和不随时间而发生改变。

27.如图 4.11 所示，半径为 a 和 b 的同心导体球壳组成一个球形电容器，在大球上开一很小的洞以便通过导线与小球连接，球心是一个大小为 m，指向沿 Z 轴的永久磁偶极子。起初电容器不带电，利用开关使电池接在电容器上,当内球带有电荷 Q，外球带有电荷–Q 后再断开电路。充电过程使电流保持到足够小，以致磁场依然基本上由永久磁偶极子产生。



4.11

(1) 当充电过程结束时，两球壳之间区域内任意一点电磁场的动量密度是多大？

(2) 在此区域里电磁场的角动量密度是多大？

(3) 在此区域电磁场的总角动量是多大？

(4) 假定球壳是自由转动的（但开始没有转动）。当充电过程完成时，每个球壳将朝什么方向转动？如果两个球壳的惯性矩相等，哪一个将转得较快？为什么？

第五章　电磁波的传播

在迅变情况下，变化着的电磁场以波动形式存在，形成在空间传播的电磁波。本章介绍电磁波在介质中传播的最基本的理论。先讨论交变电磁场存在的一种最基本的形式，即单色平面电磁波。然后讨论无界空间中，单色平面电磁波在不导电介质和导电介质中的传播性质。用边值关系研究电磁波在介质界面上的反射和折射，从电磁理论出发导出光学中的反射定律、折射定律和菲涅耳公式，讨论有关物理推论。并且用经典模型讨论了电介质，导体和等离子体的频率色散特性。最后以波导管和谐振腔为例讨论有界空间的电磁波及其边值问题的解法。

§5·1　单色平面电磁波

1.介质色散的影响

研究介质中电磁波传播的问题时，必须给出$\vec{D}$和$\vec{E}$的关系以及$\vec{B}$和$\vec{H}$的关系。在很多实际情况下，电磁波的激发往往以大致确定的频率作正弦振荡，因而辐射出的电磁波也以确定的频率作正弦振荡。当以一定角频率ω作正弦振荡的电磁波入射于介质内时，介质内的束缚电荷受电场作用，也以相同频率作正弦振动，在这频率下介质的极化率$\chi_e(\omega)$为极化强度$\vec{P}$与$\varepsilon_0\vec{E}$之比，于是此频率下的介电常数$\varepsilon(\omega)$在线性介质中有关系

$$\vec{D}(\omega)=\varepsilon(\omega)\vec{E}(\omega), \qquad (5\cdot1\cdot1)$$

同样

$$\vec{B}(\omega)=\mu(\omega)\vec{H}(\omega) \qquad (5\cdot 1\cdot 2)$$

由介质的微观结构可以推知，对不同频率的电磁波，介质的介电常数是不同的，即 ε 和 μ 是 ω 的函数（见§5·4中有关介质频率色散特性的讨论）

$$\varepsilon=\varepsilon(\omega), \qquad \mu=\mu(\omega), \qquad (5\cdot 1\cdot 3)$$

ε 和 μ 随频率而变的现象称为介质的色散。

由于色散，对一般非正弦变化的电场$\vec{E}$ (t)，关系式$\vec{D}$(t)=$\varepsilon\vec{E}$(t)不成立，下面我们给予证明。作福氏变换

$$\begin{aligned}\vec{D}(t)&=\frac{1}{2\pi}\int e^{-i\omega t}\vec{D}(\omega)\mathrm{d}\omega,\\ \vec{E}(t)&=\frac{1}{2\pi}\int e^{-i\omega t}\vec{E}(\omega)\mathrm{d}\omega,\\ \varepsilon(t)&=\frac{1}{2\pi}\int e^{-i\omega t}\varepsilon(\omega)\mathrm{d}\omega.\end{aligned} \qquad (5\cdot 1\cdot 4)$$

利用$\vec{E}$(t)的逆变换

$$\vec{E}(\omega)=\int e^{i\omega t'}\vec{E}(t')\mathrm{d}t',$$

及(5·1·1)式，有

$$\begin{aligned}\vec{D}(t)&=\frac{1}{2\pi}\int e^{-i\omega t}\varepsilon(\omega)\vec{E}(\omega)\mathrm{d}\omega\\ &=\frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}\omega\varepsilon(\omega)\int \mathrm{d}t' e^{-i\omega(t-t')}\vec{E}(t'),\end{aligned}$$

交换积分次序并利用（5·1·4）的第三式，得

$$\vec{D}(t)=\int \mathrm{d}t'\vec{E}(t')\varepsilon(t-t'). \qquad (5\cdot 1\cdot 5)$$

此式表明，色散介质中 t 时刻的$\vec{D}$与所有时刻的$\vec{E}$都有关（而实际上为保证因果关系，上式积分限应限制在 t>t'）。因此在介质内不能推出$\vec{E}$和$\vec{B}$的一般波动方程，即不能简单地把真空中波动

方程（4·5·4）、（4·5·5）式里的 $\mu_0\varepsilon_0$ 换成 $\mu\varepsilon$，就认为是介质中的波动方程。但是，对于线性均匀介质和某一频率的正弦波而言，$\varepsilon(\omega)$ ＝常数 ε，$\mu(\omega)$ ＝常数 μ，所以把 $\mu_0\varepsilon_0$ 换成 $\mu\varepsilon$，形式上仍是对的。

下面我们只讨论一定频率的正弦电磁波在线性均匀介质中的传播。例如无线电广播或通讯的载波，激光器辐射出来的光束等，都接近于正弦波。这种以一定频率作正弦振荡的波称为定态电磁波（单色波）。在一般情况下，即便电磁波不是单色波，它也可以用傅里叶分析（频谱分析）的方法分解为不同频率的正弦波的迭加。因此，讨论单色波并没有失去其普遍意义。利用复数形式，单色波可以表示为

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t},$$
$$\vec{B}(\vec{r},t)=\vec{B}(\vec{r})e^{-i\omega t}. \qquad (5\cdot1\cdot6)$$

2.导电介质中的自由电荷分布

在静电情形下，导体内部不带电，自由电荷只能分布于导体表面上。在迅变场中是否仍然具有这种特性呢？我们通过推导自由电荷所满足的方程来回答这个问题。

在导电介质中（绝缘介质可作为导电率等于零的特殊情况），电磁场会引起电荷电流，这些电荷电流反过来又产生电磁场，它们相互作用，彼此制约。对于单色波和线性均匀介质，自由电荷密度 ρ 和电场 $\vec{E}$ 满足方程

$$\varepsilon\nabla\cdot\vec{E}=\rho, \qquad (5\cdot1\cdot7)$$

在电场 $\vec{E}$ 作用下，导体内引起传导电流 $\vec{J}$，并满足欧姆定律

$$\vec{J}=\sigma\vec{E}. \qquad (5\cdot1\cdot8)$$

代入(5·1·7)式得

$$\nabla\cdot\vec{J}=\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho. \qquad (5\cdot1\cdot9)$$

此式表示当导体中某处有电荷密度 ρ 时，就有电流从该处向外流出。由于电荷外流，每一体积元内的电荷密度减少。ρ 的变化率由电荷守恒定律确定

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho, \qquad (5 \cdot 1 \cdot 10)$$

解此方程得

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-\sigma t/\varepsilon}, \qquad (5 \cdot 1 \cdot 11)$$

式中 ρ_0 为 t=0 时的电荷密度。一般情况下，导体内部当初是不带电荷的，即使当初存在电荷，该电荷总是随时间指数地衰减，并且衰减的速度只与介质的 σ 与 ε 有关，同电磁场的具体分布无关。衰减速度依赖于电流的散度，即 σ 与 $\nabla \cdot \vec{E}$ 的乘积，于是 σ 增大，衰减就变快。而 ε 增大时，由于极化电荷对 ρ 的屏蔽作用增强而使得 $\nabla \cdot \vec{E}$ 减小，因而衰减就变慢了。ρ 衰减到初始值的 1／e 所需要的时间

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma} \qquad (5 \cdot 1 \cdot 12)$$

通常称为特征时间或弛豫时间。对于金属导体，$\sigma \approx 10^7$／（欧·米），$\varepsilon \approx 10^{-10}$ 法／米，故 $\tau \approx 10^{-17}$ 秒，衰减极快，只要电磁波的周期远大于 10^{-17}，即频率远小于 10^{17} 赫，就可认为 $\rho = 0$。

由此我们得到一个重要结论：对于 $\vec{J}$ 和 $\vec{D}$ 皆与瞬时 $\vec{E}$ 成正比的导体（即 σ 和 ε 皆为实常数，而且 $\sigma \neq 0$），无论电磁场的状态如何，其内部都不会积累电荷；如果原来内部带有电荷，该电荷亦将随时间以指数规律迅速衰减。此结果意味着，由于场和导体的相互作用，使得电荷只能积累在这种导体表面上。

3.定态波动方程

根据上面的讨论，对于单色波和线性均匀的导电介质，麦氏方程组变为

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \sigma \vec{E}, \qquad (5 \cdot 1 \cdot 13)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0.$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0.$$

约定$\vec{E}(\vec{r}) \equiv \vec{E}$, $\vec{B}(\vec{r}) \equiv \vec{B}$将定态波的表达式 (5 · 1 · 6) 代入 (5 · 1 · 13) 式，消去共同因子 $e^{-i\omega t}$，并注意$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$,可得

$$\nabla \times \vec{E} = i\omega\mu \vec{H},$$

$$\nabla \times \vec{H} = -i\omega\varepsilon \vec{E} + \sigma \vec{E}, \qquad (5 \cdot 1 \cdot 14)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0,$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0.$$

如果形式上引入“复介电常数”

$$\varepsilon' = \left(\varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega}\right), \qquad (5 \cdot 1 \cdot 15)$$

则(5 · 1 · 14)第二式可写为

$$\nabla \times \vec{H} = -i\omega\varepsilon' \vec{E} \qquad (5 \cdot 1 \cdot 16)$$

对 (5 · 1 · 14) 第一式取旋度并用 (5 · 1 · 16) 式有

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \omega^2 \mu \varepsilon' \vec{E},$$

由 $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$, 上式变为

$$\nabla^2 \vec{E} + k'^2 \vec{E} = 0, \qquad (5 \cdot 1 \cdot 17)$$

其中

$$k' = \omega\sqrt{\mu\varepsilon'}, \qquad (5 \cdot 1 \cdot 18)$$

方程(5 · 1 · 17)式即为亥姆霍兹方程，它正是定态波动方程。但必须注意，(5 · 1 · 17)式的解只有加上条件$\nabla \cdot \vec{E} = 0$ 以后才代表电磁波的解，在解出$\vec{E}$后，磁场$\vec{B}$可由 (5 · 1 · 14) 第一式

求出。概括起来，在一定频率下，线性均匀导电介质中的麦氏方程组化为以下方程

$$\begin{aligned}&\nabla^2\vec{E}+k'^2\vec{E}=0,\\&\nabla\cdot\vec{E}=0,\\&\vec{B}=-\frac{i}{\omega}\nabla\times\vec{E}.\end{aligned}\qquad(5\cdot1\cdot19)$$

亥姆霍兹方程（5·1·17）的每一个满足$\nabla\cdot\vec{E}=0$的解都代表一种可能存在的波型。

类似地，也可以把麦氏方程组在一定频率下化为

$$\begin{aligned}&\nabla^2\vec{B}+k'^2\vec{B}=0,\\&\nabla\cdot\vec{B}=0,\\&\vec{E}=\frac{i}{\omega\mu\varepsilon'}\nabla\times\vec{B}.\end{aligned}\qquad(5\cdot1\cdot20)$$

4.单色平面电磁波

对于沿Z方向传播的平面波，由于$\vec{E}$与x、y无关，定态波动方程（5·1·17）变为

$$(\mathrm{d}^2/\mathrm{d}z^2)\vec{E}(z)+k'^2\vec{E}(z)=0,\qquad(5\cdot1\cdot21)$$

这是具有常系数的二阶常微分方程，它的一个解是

$$\vec{E}(z)=\vec{E}_0e^{ik'z}.\qquad(5\cdot1\cdot22)$$

由（5·1·6）式，场强的全表示式为

$$\vec{E}(z,t)=\vec{E}_0e^{i(k'Z-\omega t)}\qquad(5\cdot1\cdot23)$$

由条件$\nabla\cdot\vec{E}=0$得$ik'\vec{e}_z\cdot\vec{E}=0$，即要求$E_z=0$。因此，只要$\vec{E}_0$与z轴垂直，（5·1·23）就代表一种可能的模式。式中$\vec{E}_0$是电场的振幅。$e^{i(k'z-\omega t)}$代表振荡的相位因子。

在（5·1·23）式中，我们选择了一个特殊坐标系，它的Z轴沿电磁波传播方向。在一般坐标系下平面波的表示式应是

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r}-\omega t)}, \qquad (5\cdot1\cdot24)$$

式中$\vec{k}'$是沿电磁波传播方向的一个矢量，称为波矢量，其量值为$k'=\omega\sqrt{\mu\varepsilon'}$，称为圆波数。同理，对磁场$\vec{B}$有表示式

$$\vec{B}=\vec{B}_0 e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r}-\omega t)}. \qquad (5\cdot1\cdot25)$$

所得（5·1·24）和（5·1·25）式就是单色平面电磁波的表达式，实验上能观测到的真实的场是它们的实数部分。由于任意形式的电磁波可用福里叶分析展成多种频率简谐波的迭加，所以这样描述的电磁波在真空情形下就是上一章（4·5·11）形式的平面电磁波的一个组成部分。后面所讲的电磁波，除特别声明而外，都是指这种单色平面电磁波。

[例 5-1] 对于导电率为 σ，介电常数为 ε 的线性均匀导电介质，假定扰动是随时间周期性地依赖于 $e^{i\omega t}$，证明其电荷密度为零。

解：在入射电磁波

$$\vec{E}=\vec{E}(\vec{r})e^{i\omega t}, \qquad \vec{H}=\vec{H}(\vec{r})e^{i\omega t}$$

作用下，介质中的电荷、电流以同一规律随时间变化，即

$$\rho=\rho(\vec{r})e^{i\omega t}, \qquad \vec{J}=\vec{J}(\vec{r})e^{i\omega t}$$

将上述表式代入麦氏方程 $\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$，有

$$\nabla\times\vec{H}(\vec{r})=\vec{J}(\vec{r})+i\omega\vec{D}(\vec{r})$$

对此式取散度，并利用欧姆定律和方程$\nabla\cdot\vec{D}(\vec{r})=\rho(\vec{r})$,得

$$\nabla\cdot\vec{J}(\vec{r})=\sigma\nabla\cdot\vec{E}(\vec{r})=\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho(\vec{r}),$$

$$i\omega\nabla\cdot\vec{D}(\vec{r})=i\omega\rho(\vec{r}),$$

则

$$\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho(\vec{r})+ i\omega\rho(\vec{r})=\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}+ i\omega\right)\rho(\vec{r})=0$$

所以

$$\rho(\vec{r})=0, \qquad \rho=0。$$

§5·2 电磁波在介质中的传播

1.绝缘介质中的电磁波

在绝缘介质情形下，$\sigma=0$，而 ρ 可能不为零。但由于 ρ 是不随时间变化的，它只产生一个迭加在电磁波上的静电场，对电磁波本身并无影响，因此我们可以只讨论 $\rho=0$ 的情况。这样，电磁波所满足的方程在形式上仍为 (5·1·19) 式，其解在形式上仍为 (5·1·24) 和 (5·1·25) 式，所不同的仅是这里 k 为实数

$$k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}. \qquad (5\cdot 2\cdot 1)$$

电磁波 $\vec{E}(\vec{r}\cdot t)=\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ 沿传播方向相距为 $\frac{2\pi}{k}$ 的两点有相位差 2π，因此 $\frac{2\pi}{k}$ 是电磁波的波长 λ:

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}. \qquad (5\cdot 2\cdot 2)$$

电磁波传播的相速度

$$v=\lambda f=\frac{\omega}{k}=\frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}=\frac{c}{n}, \qquad (5\cdot 2\cdot 3)$$

式中 n 是介质的折射率，它由下式表示

$$n=\frac{c}{v}=\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}, \qquad (5\cdot 2\cdot 4)$$

对一般非磁性介质 $\mu_r \approx 1$，这时就有

$$n \approx \sqrt{\varepsilon_r}. \qquad (5 \cdot 2 \cdot 5)$$

上面讲过，$\vec{E}$需满足$\nabla \cdot \vec{E} = 0$，将 $(5 \cdot 1 \cdot 24)$ 式代入得

$$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = i\vec{k} \cdot \vec{E},$$

因此

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0, \qquad (5 \cdot 2 \cdot 6)$$

同理

$$\vec{k} \cdot \vec{B} = 0. \qquad (5 \cdot 2 \cdot 7)$$

这表示电磁场的振动方向与传播方向垂直，所以电磁波是横波。我们知道，光波也是一种横波，因此这个结论也是光的电磁理论的一个重要依据。$\vec{E}$可处在与$\vec{k}$垂直的任意方向，它的取向就是波的偏振（或极化）方向。我们可任取与$\vec{k}$正交的两个互相垂直的方向作为电磁波的两个独立的偏振方向，故对应于每一波矢量$\vec{k}$，存在两个相互独立的偏振波。

平面电磁波的磁场可由$(5 \cdot 1 \cdot 19)$第三式求出：利用$\nabla \times \vec{E} = i\vec{k} \times \vec{E}$，得

$$\vec{B} = \sqrt{\mu\varepsilon}\frac{\vec{k}}{k} \times \vec{E} = \sqrt{\mu\varepsilon}\,\vec{e}_k \times \vec{E}, \qquad (5 \cdot 2 \cdot 8)$$

式中$\vec{e}_k$为传播方向的单位矢量。由此式可见$\vec{B}$也与$\vec{E}$垂直，所以$\vec{E}$、$\vec{B}$和$\vec{k}$这三个矢量互相垂直，并且形成右手螺旋关系，$\vec{E} \times \vec{B}$沿波矢$\vec{k}$方向。由于 μ 和 ε 都是实数，所以$\vec{E}$和$\vec{B}$的相位相同，振幅比为

$$\left|\frac{\vec{E}}{\vec{B}}\right| = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = v. \qquad (5 \cdot 2 \cdot 9)$$

在某些实际问题中还经常用到参数

$$\frac{E_0}{H_0}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \qquad (5\cdot 2\cdot 10)$$

因 E 与 H 的单位各为伏／米和安／米，此比值的单位为欧，具有电阻的量纲，所以将它称为波阻抗（或内阻抗）。在真空中

$$Z_0=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=120\pi\approx 377(\Omega) \qquad (5\cdot 2\cdot 11)$$

叫做真空的特征阻抗。

据（4·4·6）式，电磁场的能量密度为

$$w=\frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{H}\cdot\vec{B})=\frac{1}{2}\left(\varepsilon E^2+\frac{1}{\mu}B^2\right)$$

由（5·2·9）式有 $\varepsilon E^2=\frac{1}{\mu}B^2$，平面电磁波中电场能量和磁场能量相等，即

$$w=\varepsilon E^2=\frac{1}{\mu}B^2 \qquad (5\cdot 2\cdot 12)$$

利用（4·4·2）及（5·2·8）、（5·2·6）式，有

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\vec{E}\times(\vec{e}_k\times\vec{E})=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E^2\vec{e}_k,$$

再与(5·2·12)式比较，得平面电磁波的能流密度

$$\vec{S}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}w\vec{e}_k=vw\vec{e}_k. \qquad (5\cdot 2\cdot 13)$$

$\vec{S}$是携带能量密度的矢量，单位体积中的电磁能以速度 v、沿着 $\vec{k}$的方向传送出去。因此$\vec{S}$的方向与波的传播方向一致，能量的传播速度与波的传播速度相同。

计算 w 和$\vec{S}$的瞬时值时，应把实数表示代入得

$$w=\varepsilon E_0^2\cos^2(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t), \qquad (5\cdot 2\cdot 14)$$

$$\vec{S}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_0^2\cos^2(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)\vec{e}_k, \qquad (5\cdot2\cdot15)$$

实际上常常用到的是它们的时间平均值，利用（4·4·10）和（4·4·11）式，能量密度和能流密度的平均值为

$$<w>=\frac{1}{2}\varepsilon E_0^2=\frac{1}{2\mu}B_0^2, \qquad (5\cdot2\cdot16)$$

$$<\vec{S}>=\frac{1}{2}Re(\vec{E}^*\times\vec{H})=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_0^2\vec{e}_k. \qquad (5\cdot2\cdot17)$$

[例 5-2] 地面上测得太阳光能流密度的周期平均值为 1300 瓦／米^2。设太阳光是定态平面线偏振光（实际上太阳光既不是偏振光，也不是单色光）。

(1) 试估计太阳光中电场和磁场的振幅；

(2) 求太阳的平均辐射功率，已知日地距离为 1.5×10^{11} 米。

(3) 估计太阳表面阳光中电磁场的振幅，已知太阳半径为 7×10^8 米。

解：(1) 利用（5·2·17）式，真空中电磁场的能流密度为 $<S>=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0^2$，则电场和磁场的振幅各为

$$E_0=\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{4}}\left(2<S>\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{4\pi\times10^{-7}}{8.85\times10^{-12}}\right)^{\frac{1}{4}}\left(2\times1300\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=10^3\text{伏／米},$$

$$B_0=\frac{1}{c}E_0=\frac{10^3}{3\times10^8}=3.3\times10^{-6}\text{特斯拉}=0.033\text{高斯}。$$

(2) 以太阳为中心，日地距离为半径的大球面积为

$$A=4\pi R^2=4\pi\times(1.5\times10^{11})^2=2.83\times10^{23}\text{米}^2,$$

所以单位时间内太阳向四周辐射的能量为

$$< P > = < S > A = 1300 \times 2.83 \times 10^{23} = 3.68 \times 10^{26} \text{瓦}$$

(3) 太阳表面积为

$$A' = 4\pi R_{\odot}^2 = 4\pi \times (7 \times 10^8)^2 = 6.15 \times 10^{16} \text{米}^2$$

所以太阳表面阳光中的能流密度为

$$< S' > = \frac{P}{A'} = \frac{3.68 \times 10^{26}}{6.15 \times 10^{16}} = 6 \times 10^9 \text{瓦}/\text{米}^2,$$

电场和磁场的振幅各为

$$E_0' = \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{4}} \left(2 < S' >\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{4\pi \times 10^{-7}}{8.85 \times 10^{-12}}\right)^{\frac{1}{4}} \left(2 \times 6 \times 10^9\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2.1 \times 10^6 \text{伏}/\text{米},$$

$$B_0' = \frac{1}{c} E_0' = \frac{2.1 \times 10^6}{3 \times 10^8} = 7 \times 10^{-3} \text{特斯拉} = 70 \text{高斯}.$$

2.导电介质中的电磁波

电磁波通过导体时，由于电磁场的作用，引起导体中自由电子作周期运动，形成周期性的传导电流，以致有焦耳热不断地放出。这种焦耳热当然是由电磁波的能量转变的，所以导体内部的电磁波是一种衰减波。对于电导率很大的金属，这种衰减非常快。下面我们用导体中电磁波满足的方程及其解来说明这种传播特点。

导体中的电磁波方程正是前述 (5 · 1 · 19) 或 (5 · 1 · 20) 式，其中

$$k' = \omega\sqrt{\mu\varepsilon'}, \qquad (5 \cdot 2 \cdot 18)$$

$$\varepsilon' = \varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega}. \qquad (5 \cdot 2 \cdot 19)$$

复介电常数 ε' 的实数部分来自 (5 · 1 · 14) 第二式中的位移电流，虚数部分来自传导电流。传导电流与电场同相，它的耗散功

率密度为$\frac{1}{2}Re(\vec{J}^* \cdot \vec{E}) = \frac{1}{2}\sigma E_0^2$；位移电流与电场有 90° 的相位差，它不消耗功率。

导体中方程（5·1·19）的解是由（5·1·24）式给出：

$$\vec{E}(\vec{r}\cdot t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r}-\omega t)}.$$

由于 k′是复数，因此$\vec{k}'$是一个复矢量，设

$$\vec{k}' = \vec{\beta} + i\vec{\alpha}, \qquad (5\cdot 2\cdot 20)$$

则导体中电磁波的表示式为

$$\vec{E}(\vec{r}\cdot t) = \vec{E}_0 e^{-\vec{\alpha}\cdot\vec{r}} e^{i(\vec{\beta}\cdot\vec{r}-\omega t)}, \qquad (5\cdot 2\cdot 21)$$

这正是一个衰减波，波矢量的实部描述波传播的相位关系，β 称为相位常数，虚部描述波幅的衰减，α 称为衰减常数，它与电导率 σ 有关。对于绝缘介质，$\sigma=0$，从而 $\alpha=0$，所以绝缘介质中传播的电磁波，其振幅不变。

矢量$\vec{\alpha}$和$\vec{\beta}$满足一定的关系，把（5·2·20）和（5·1·15）式代入（5·1·18）式有

$$k'^2 = \beta^2 - \alpha^2 + 2i\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \omega^2\mu(\varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega}), \qquad (5\cdot 2\cdot 22)$$

比较式中的实部和虚部得

$$\begin{cases} \beta^2 - \alpha^2 = \omega^2\mu\varepsilon, \\ \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \frac{1}{2}\omega\mu\sigma. \end{cases} \qquad (5\cdot 2\cdot 23)$$

$\vec{\alpha}$和$\vec{\beta}$的方向常不一致，由边值关系和（5·2·23）式可以解出$\vec{\alpha}$和$\vec{\beta}$。为简单起见，我们只考虑电磁波垂直入射于导体表面的情形。设导体表面为 xy 平面，Z 轴指向导体内部。这时，$\vec{\alpha}$和$\vec{\beta}$都沿 Z 方向，（5·2·21）式变成

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\alpha Z} e^{i(\beta Z-\omega t)}. \qquad (5\cdot 2\cdot 24)$$

由（5·2·23）式可解出 α 和 β:

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}+1\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$
$$\alpha = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}-1\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (5\cdot2\cdot25)$$

由(5·2·24)式的相位因子可以得到，电磁波传播的相速度为

$$v = \frac{\omega}{\beta}. \qquad (5\cdot2\cdot26)$$

又由（5·2·25）式可知，β 和 ω 之间有一复杂关系，则 v 也随 ω 而变化。因此，即使 σ、ε 和 μ 都与 ω 无关，导体中的波也将有色散效应。

（5·2·24）式表示，一个平面电磁波沿 Z 轴方向传播，在 $Z>0$ 的区域内由于存在 $\vec{J}=\sigma\vec{E}$，波将按指数律衰减。波幅降至原值 1/e 的传播距离称为穿透深度 δ:

$$\delta = \frac{1}{\alpha}. \qquad (5\cdot2\cdot27)$$

现在讨论两种极限情形。

（1）$\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\ll1$的情形。此条件意味着导体中的传导电流比位移电流小得多。这种情形只出现在不良导体，或导电性虽然较好但电磁波的频率很高的时候。例如$\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}$要达到 10^{-2} 量级，对于淡水频率约需到 10^7 赫，而对于海水约需要到 10^{11} 赫。将（5·1·15）代入（5·1·18）式展开只取到$\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}$的一次项，有

$$k' = \beta + i\alpha \approx \sqrt{\mu\varepsilon}\,\omega + i\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \qquad (5\cdot2\cdot28)$$

在这个极限下，$\mathrm{Re}k>>\mathrm{Im}k$，波的衰减大体与频率无关，穿透深度

$$\delta=\frac{1}{\alpha}\approx\frac{2}{\sigma}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \qquad (5\cdot2\cdot29)$$

也大体上与频率 ω 无关。但导体的 σ 越大，δ 就越小，波幅衰减越快。

(2) $\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}>>1$ 的情形。这时传导电流远大于位移电流，对于金属导体，总是属于这种情形。因为金属的 $\sigma/\varepsilon\sim10^{17}$ / 秒，故要到频率达 10^{17} 周 / 秒,位移电流才与传导电流同一数量级。而到这样高的频率时，物质的原子性和量子效应都很显著，宏观的和经典的理论已不适用。利用 $\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}>>1$，由 $(5\cdot2\cdot25)$ 式可得

$$\alpha\approx\beta\approx\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}, \qquad (5\cdot2\cdot30)$$

于是穿透深度为

$$\delta=\frac{1}{\alpha}\approx\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}. \qquad (5\cdot2\cdot31)$$

由此式可知，σ 愈大，δ 愈小，衰减愈快，对于理想导体，$\sigma\to\infty$，$\delta\to0$。ω 愈大，δ 也愈小，衰减愈快。当导体中通过稳定电流，即 $\omega=0$ 时，$\delta\to\infty$，电流才能均匀地分布在导体中。例如对于铜来说 $\sigma\sim5\times10^{7}$ 西 / 米，当频率为 50 赫时，$\delta\approx0.9$ 厘米；当频率为 100 兆赫时，$\delta\approx0.7\times10^{-3}$ 厘米。由此可见，对入射于良导体的高频电磁波，电磁场以及和它相作用的高频电流仅集中于表面很薄一层内，这种现象称为趋肤效应。利用良导体能阻止高频电磁波透入的特性，可以作成电磁屏蔽装置。例如电子仪器中常用铝质屏蔽罩，由于金属的 $\sigma\approx10^{7}$ / 欧 · 米，当频率

为兆赫数量级时，穿透深度 $\delta \approx 10^{-2}$ 毫米，所以只要用很薄的铝罩，就可达到屏蔽的目的。

我们再看在垂直入射情形下，导体中磁场和电场的关系。由 $(5 \cdot 1 \cdot 19)$ 第三式

$$\vec{H} = \frac{1}{\omega\mu}\vec{k} \times \vec{E} = \frac{1}{\omega\mu}(\beta + i\alpha)\vec{e}_k \times \vec{E}, \qquad (5 \cdot 2 \cdot 32)$$

式中 $\vec{e}_k$ 为指向导体内部的法线。对于良导体，由 $(5 \cdot 2 \cdot 30)$ 式有

$$\vec{H} \approx \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}}\, e^{i\pi/4}\vec{e}_k \times \vec{E}. \qquad (5 \cdot 2 \cdot 33)$$

说明 $\vec{H}$、$\vec{E}$、$\vec{e}_k$ 三者仍然是互相垂直，但与绝缘介质中不同的是磁场相位比电场相位滞后 45°，而且

$$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left|\frac{\vec{H}}{\vec{E}}\right| = \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}} \gg 1, \qquad (5 \cdot 2 \cdot 34)$$

而在真空或绝缘介质情形，此比值为 1[见$(5 \cdot 2 \cdot 9)$式]。因此在金属导体中，电磁波的能量主要是磁场能量。

最后需要指出，衰减的平面波不仅在导体中有，而且在绝缘介质或真空中也是可能出现的。并且波的衰减并不一定是同能量损耗联系在一起，后面将要讨论的全反射，就是一个波虽然衰减但无能量损耗的例子。

[例 5–3] 平面电磁波垂直入射到金属表面，试证明透入金属的电磁能量全部转化为焦耳热。

解：设 $Z>0$ 的半无界空间为金属导体，透入电磁波的场强为

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\alpha Z} e^{i(\beta Z - \omega t)},$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\omega\mu}\vec{k} \times \vec{E}.$$

金属导体情况下有

$$k \approx \sqrt{i\omega\mu\sigma} \qquad \alpha \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

单位时间内通过金属表面单位面积透入其内部的平均电磁能量是

$$\langle \vec{S} \rangle|_{z=0} = \frac{1}{2} Re(\vec{E}^* \times \vec{H})|_{z=0} = \frac{1}{2} Re\left(\frac{E_0^2}{\omega\mu} e^{-2\alpha z} \vec{k} \right)\Big|_{z=0}$$

$$= \frac{1}{2} Re\left(E_0^2 \sqrt{\frac{i\sigma}{\omega\mu}} \right) \vec{e}_z = \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}}\, \vec{e}_z . \quad (5 \cdot 2 \cdot 35)$$

单位时间在金属表面单位面积下的体积内产生的平均焦耳热是

$$\langle Q \rangle = \int_0^\infty \frac{1}{2} Re(\vec{J}^* \cdot \vec{E})\, dz = \int_0^\infty \frac{1}{2} Re(\sigma \vec{E}^* \cdot \vec{E})\, dz$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{2} \sigma E_0^2 e^{-2\alpha z} dz$$

$$= \frac{\sigma}{4\alpha} E_0^2 = \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}}, \quad (5 \cdot 2 \cdot 36)$$

所以

$$\langle S \rangle|_{z=0} = \langle Q \rangle 。$$

[例 5—4] 计算高频电磁波透入时良导体的表面电阻。

解:由于高频情况下的趋肤效应,导体中的电流 $\vec{J}$ 仅在其表面厚度为 δ 的薄层内通过，所以可将此电流看作面电流分布，面电流密度等于在薄层内把 $\vec{J}$ 对 Z 积分。深入到导体内部 $(Z >> \delta)$ 时，$\vec{J}$ 的数值已很小，也可把积分限取为 0—∞，其空间部分为

$$\vec{\alpha}_f = \int_0^\infty \vec{J} dz = \sigma \vec{E}_0 \int_0^\infty e^{-\alpha Z + i\beta z} dz = \frac{\sigma \vec{E}_0}{\alpha - i\beta}$$

$$= \frac{\sigma \vec{E}_0}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} e^{i\varphi}, \qquad \left(\mathrm{tg}\varphi = \frac{\beta}{\alpha} \right) \quad (5 \cdot 2 \cdot 37)$$

导体表面单位面积平均损耗功率正是由 $(5 \cdot 2 \cdot 36)$ 式给出:

$$P_L = \frac{\sigma}{4\alpha} E_0^2.$$

取$\overline{\alpha}_f$的峰值 $\alpha_{f0} = \frac{\sigma E_0}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$，并与 P_L 比较可得

$$P_L = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4\alpha\sigma} \alpha_{f0}^2,$$

把 $\alpha \approx \beta \approx \frac{1}{\delta}$ 代入，则

$$P_L = \frac{1}{2\sigma\delta} \alpha_{f0}^2. \qquad (5 \cdot 2 \cdot 38)$$

引入表面电阻 R_L，由此可见导体在高频下单位面积的表面电阻相当于厚度为 δ 的薄层的直流电阻：

$$R_L = \frac{1}{\sigma\delta}. \qquad (5 \cdot 2 \cdot 39)$$

[例 5-5] 对于频率为 100 兆赫（米波）、10 千兆（厘米波）及 10^{15} 赫（光波）的电磁波来说，铜和海水是否为良导体？已知铜的电导率为 $\sigma = 5 \times 10^7$（欧·米）$^{-1}$，海水 $\sigma = 5$（欧·米）$^{-1}$；铜的相对介电常数 $\varepsilon_r = 1$；海水的相对介电常数对于无线电波和微波 $\varepsilon_r \approx 80$，对于光波 $\varepsilon_r \approx 1.33$。

解：良导体的条件是 $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} >> 1$，下表列出各种情况下 $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}$ 的值。

材料 \ 频率（赫）	100 兆	10 千兆	10^{15}
铜	9×10^9	9×10^7	9×10^2
海水	11.3	0.113	$\sim 10^{-6}$

由此可以看出，铜在上述频率下都是良导体。海水对无线电

波及米波来说是良导体，但对厘米波则是不良导体，对于光波则可看作非导电介质。

§5·3 电磁波在介质界面上的反射和折射

上节讨论了电磁波在同一种介质中传播的性质，实际上还往往遇到经过不同介质的情况，这就需要研究电磁波在不同介质交界面上的传播，即反射和折射的规律。电磁波的反射折射规律是由场量的边值关系决定的。本节从单色平面波满足的定态边值关系出发，由入射、反射和折射波的位相因子满足的关系导出反射和折射定律，由振幅关系导出菲涅耳公式，并且讨论它们的物理意义及有关推论。

1.反射和折射定律

对于一定频率的电磁波，容易证明场的四个边值关系式并不是互相独立的，由

$$\vec{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0,$$
$$\vec{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{\alpha} \qquad (5\cdot3\cdot1)$$

可以导出其它两式。因此，在讨论定态电磁波时，介质界面上的边值关系只需考虑上述两式。

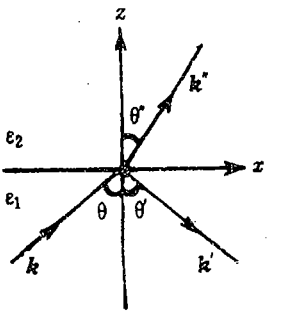


图 5.1

设介质 1 和介质 2 的分界面为无穷大平面，单色平面波从介质 1 入射到界面上。如图 5.1 我们选择 xy 平面为介质分界面，其 Z 轴沿界面的法线方向。

设入射波、反射波与折射波的电场分别为$\vec{E}$、$\vec{E}'$和$\vec{E}''$,波矢

量分别为$\vec{k}$、$\vec{k}'$和$\vec{k}''$，频率分别为ω、ω'和ω'':

$$\begin{aligned}\vec{E}&=\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)},\\ \vec{E}'&=\vec{E}'_0 e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r}-\omega' t)},\\ \vec{E}''&=\vec{E}''_0 e^{i(\vec{k}''\cdot\vec{r}-\omega'' t)}.\end{aligned}\qquad(5\cdot3\cdot2)$$

在绝缘介质界面上，$\sigma=0$，$\vec{\alpha}=0$，由边值关系（5·3·1）式有

$$\vec{n}\times(\vec{E}+\vec{E}')=\vec{n}\times\vec{E}'',\qquad(5\cdot3\cdot3)$$

将(5·3·2)式代入得

$$\begin{aligned}&\vec{n}\times[\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}+\vec{E}'_0 e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r}-\omega' t)}]|_{Z=0}\\ &=\vec{n}\times\vec{E}''_0 e^{i(\vec{k}''\cdot\vec{r}-\omega'' t)}|_{Z=0}.\end{aligned}\qquad(5\cdot3\cdot4)$$

此式对 z=0 的平面上的任何一点和任意时刻都要满足，必须要求各个指数因子相等。于是可以得到如下结论:

（1）入射波、反射波和折射波的频率必须相同，$\omega=\omega'=\omega''$。这意味着，作为麦氏方程组的单色平面电磁波解，任何电磁波（包括光）在界面反射、折射时均不会改变频率。如果在此情形下一旦发生频率改变，便是对宏观电动力学的挑战。频率相同的物理原因在于，它们都是由波源发射的波与介质 1 和 2 中作受迫振动的电子所发射的波的迭加，从力学中可知受迫振动与外力的频率相同。

（2）三个波矢量对分界面的位置的函数关系必须相同(z=0)，即

$$k_x x+k_y y=k'_x x+k'_y y=k''_x x+k''_y y,$$

由于 x 和 y 是任意的，它们的系数应各自相等

$$\begin{aligned}k_x&=k'_x=k''_x,\\ k_y&=k'_y=k''_y.\end{aligned}\qquad(5\cdot3\cdot5)$$

当取入射波矢量在 xz 平面上时,$k_y=0$，由上式 $k'_y=k''_y=0$，因此反射波矢和折射波矢都在同一平面上。

以 θ，θ'和 θ''分别代表入射角、反射角和折射角，有

$$k_x = k\sin\theta, \qquad k'_x = k'\sin\theta' \qquad k''_x = k''\sin\theta''. \quad (5\cdot 3\cdot 6)$$

设 v_1 和 v_2 为电磁波在两介质中的相速，由（5·2·3）式有

$$k = k' = \frac{\omega}{v_1}, \qquad k'' = \frac{\omega}{v_2}. \qquad (5\cdot 3\cdot 7)$$

把(5·3·6)和(5·3·7)式代入(5·3·5)式得

$$\theta = \theta', \qquad \frac{\sin\theta}{\sin\theta''} = \frac{v_1}{v_2} \qquad (5\cdot 3\cdot 8)$$

对电磁波来说，相速度$v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$，因此

$$\theta = \theta', \qquad (5\cdot 3\cdot 9)$$

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta''} = \frac{\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}}{\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}} = n_{21}.$$

这就是光学中的反射和折射定律，n_{21} 为介质 2 相对于介质 1 的折射率。一般非铁磁物质都有 $\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0$，可认为$\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}$就是两介质的相对折射率。

[例 5–6] 证明对于良导体，非垂直入射情形有

$$\alpha_Z \approx \beta_Z \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}, \qquad \beta_X \ll \beta_Z.$$

解：由前所述，复数波矢量$\vec{k'} = \vec{\beta} + i\vec{\alpha}$，其中$\vec{\alpha}$,$\vec{\beta}$可由此式实部、虚部满足的两个方程和边值关系确定。设电磁波从空间入射到导体表面，$\vec{k}^0$ 表示入射波矢，$\vec{k}$表示导体内的波矢，入射面为 XZ 面；Z 轴为指向导体内部的法线。由边值关系推出的（5·3·5）式，在此有

$$k_x^{(0)} = k_x = \beta_x + i\alpha_x, \quad k_y^{(0)} = k_y = \beta_y + i\alpha_y = 0.$$

空间中波矢$\vec{k}^0$为实数，于是由上式得

$$\alpha_x = 0, \qquad k_y^{(0)} = \beta_x. \qquad (5\cdot 3\cdot 10)$$

导体内波数平方由（5·2·22）式给出

$$k^2=\beta^2-\alpha^2+2i\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\omega^2\mu\left(\varepsilon+i\frac{\sigma}{\omega}\right) \qquad (5\cdot3\cdot11)$$

良导体情形下，$\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\gg1$，因而 k^2 的实部可忽略，即

$$\beta^2-\alpha^2\approx0 \quad 或\ \beta_x^2+\beta_z^2-\alpha_z^2=0 \qquad (5\cdot3\cdot12)$$

将 $\alpha_x=0,\beta_y=\alpha_y=0$ 代入(5·3·11)式，考虑到 $\mu=\mu_0$，ε 与 ε_0 同级，$k^{(0)2}=\omega^2\mu_0\varepsilon_0$，由（5·3·11）式的虚部得

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\alpha_z\beta_z=\frac{1}{2}\omega\mu\sigma=\frac{1}{2}\omega^2\mu_0\varepsilon_0\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}\gg\frac{1}{2}k^{(0)2} \qquad (5\cdot3\cdot13)$$

由（5·3·10）和（5·3·13）式，有 $\alpha_z\beta_z\gg\beta_x^2$，所以，可在（5·3·12）式中略去 β_x^2，而与（5·3·13）式联立求解，最后得

$$\alpha_z\approx\beta_z\approx\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}},\quad \beta_x\ll\beta_z. \qquad (5\cdot3\cdot14)$$

由此可见,在任意入射角情形下,对良导体来说，$\vec{\alpha}$垂直于表面，$\vec{\beta}$亦接近法线方向，穿透深度仍由（5·2·31）式给出。

2.菲涅耳公式

为求出入射、反射和折射波的振幅关系，利用边值关系(5·3·1）式（$\vec{\alpha}=0$），有

$$\vec{n}\times(\vec{E}+\vec{E}')=\vec{n}\times\vec{E}'', \qquad (5\cdot3\cdot15)$$

$$\vec{n}\times(\vec{H}+\vec{H}')=\vec{n}\times\vec{H}''. \qquad (5\cdot3\cdot16)$$

并注意在每一种介质中单色平面波的关系

$$\vec{H}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\vec{e}_k\times\vec{E}. \qquad (5\cdot3\cdot17)$$

由于对每一波矢$\vec{k}$有两个独立的偏振波,所以需要分别讨论$\vec{E}$垂直于入射面和$\vec{E}$平行于入射面两种情形。

垂直入射

(1) $\vec{E}\perp$入射面（图 5.2a)

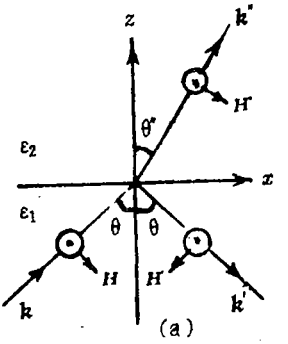
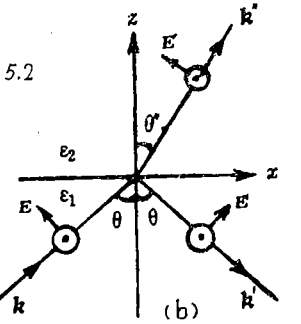


图 5.2



此情形下 (5 · 3 · 15) 和 (5 · 3 · 16) 式为

$$E+E'=E'', \tag{5·3·18}$$

$$H\cos\theta-H'\cos\theta'=H''\cos\theta''. \tag{5·3·19}$$

利用(5 · 3 · 17)式，取$\mu\approx\mu_0$,(5 · 3 · 19)式可写为

$$\sqrt{\varepsilon_1}\,(E-E')\cos\theta=\sqrt{\varepsilon_2}\,E''\cos\theta''. \tag{5·3·20}$$

由(5 · 3 · 18)和(5 · 3 · 20)式可得

$$\frac{E'_\perp}{E_\perp}=\frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta-\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta''}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta+\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta''}, \tag{5·3·21}$$

$$\frac{E''_\perp}{E_\perp}=\frac{2\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta+\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta''}.$$

利用折射定律(5 · 3 · 9)式得

$$\frac{E'_\perp}{E_\perp}=-\frac{\sin(\theta-\theta'')}{\sin(\theta+\theta'')}, \tag{5·3·22}$$

$$\frac{E''_\perp}{E_\perp}=\frac{2\cos\theta\sin\theta''}{\sin(\theta+\theta'')}.$$

(2) $\vec{E}$// 入射面(图 5.2b)，相当于$\vec{H}\perp$入射面(向外)。此情形下 (5 · 3 · 15) 和 (5 · 3 · 16) 式为

$$E\cos\theta-E'\cos\theta=E''\cos\theta'', \tag{5·3·23}$$

$$H+H'=H''. \qquad (5\cdot3\cdot24)$$

取 $\mu\approx\mu_0$，(5·3·24) 式可用电场表示为

$$\sqrt{\varepsilon_1}\,(E+E')=\sqrt{\varepsilon_2}\,E'',$$

此式与(5·3·23)式联立解得

$$\frac{E'_{//}}{E_{//}}=\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta-\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta''}{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta+\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta''},$$
$$\frac{E''_{//}}{E_{//}}=\frac{2\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta}{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta+\sqrt{\varepsilon_1}\,\mathrm{Cos}\theta''}. \qquad (5\cdot3\cdot25)$$

利用折射定律(5·3·9)式得

$$\frac{E'_{//}}{E_{//}}=\frac{tg(\theta-\theta'')}{\mathrm{tg}(\theta+\theta'')},$$
$$\frac{E''_{//}}{E_{//}}=\frac{2\cos\theta\sin\theta''}{\sin(\theta+\theta'')\cos(\theta-\theta'')}. \qquad (5\cdot3\cdot26)$$

(5·3·22)和(5·3·26)式就是菲涅耳公式，和光学中结果一致。一般情况下，如果入射波为自然光，由于两个偏振分量的反射和折射波强度不同，因而反射波和折射波都变为部分偏振光。在 $\theta+\theta''=\frac{\pi}{2}$的特殊情况下，由 (5·3·26) 第一式可知 $E'_{//}\to0$，而由(5·3·22)第一式可知 $E'_{\perp}\neq0$。说明入射的自然光经反射后，其反射光成为垂直于入射面偏振的完全偏振光，此时反射线和折射线互相垂直，这就是布儒斯特定律，对应的入射角为起偏振角，叫布儒斯特角 θ_B:

$$\mathrm{tg}\theta_B=\frac{\sin\theta_B}{\cos\theta_B}=\frac{\sin\theta}{\sin\theta''},$$

利用折射定律得

$$\mathrm{tg}\theta_B\approx\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}=n_{21}. \qquad (5\cdot3\cdot27)$$

需要指出，由前一节的讨论可知，单色波在导电介质和非导

电介质中所满足的方程形式上相同，差别仅在于导电介质的介电常数为复数 $\varepsilon'=\varepsilon+i\frac{\sigma}{\omega}$，非导电介质为实数 ε。因此导体面上的反射和折射公式同介质面上的反射和折射公式形式上也完全一样，即就是说，对于导电介质，反射、折射定律以及菲涅耳公式的形式保持不变，只需把其中的 ε、k 用 ε'、k′代入即可。另外，这里我们是由电磁场的边值关系导出光学中的反射定律、折射定律和菲涅耳公式，这又一次有力地说明了光就是电磁波。因此，光现象和电磁现象可以用统一的电磁理论来描述。

[例 5-7] 试讨论在 $\vec{E}$ 上入射面的情形下，当电磁波垂直入射时，入射波、反射波和折射波之间的位相关系。

解：利用菲涅耳公式（5 · 3 · 21）式，当电磁波垂直入射时，$\theta=\theta''=0$，可得

$$\frac{E'}{E}=\frac{\sqrt{\varepsilon_1}-\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}+\sqrt{\varepsilon_2}},$$
$$\frac{E''}{E}=\frac{2\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_1}+\sqrt{\varepsilon_2}}. \qquad (5\cdot 3\cdot 28)$$

若 ε_1 和 ε_2 为实数(透明介质)，这些公式的 E′、E″和 E 之间的比例系数为实数，则波的位相或者不变，或者改变 π，视比例系数的正负号而定。折射波的位相总是和入射波的位相相同。但对于反射波，如果 $\varepsilon_1>\varepsilon_2$，则位相不变；如果 $\varepsilon_1<\varepsilon_2$，位相改变 π，反射波电场与入射波电场反相，这种现象称为反射过程中的半波损失。

若 ε_1 为实数，ε_2 为虚数（不透明介质），对于非磁性介质，介质 2 相对于介质 1 的折射率 $n'_{21}(\omega)=\sqrt{\frac{\varepsilon'_2}{\varepsilon_1}}$ 也是复的，可以写成 $n'_{21}=\beta+i\alpha$，由此可得

$$\frac{E'}{E}=\frac{1-n'_{21}(\omega)}{1+n'_{21}(\omega)}=\frac{(1-\beta)-i\alpha}{(1+\beta)+i\alpha}$$
$$=\frac{1-\beta^2-\alpha^2-i2\alpha}{(1+\beta)^2+\alpha^2},$$
$$\frac{E''}{E}=\frac{2}{1+n_{21}(\omega)}=\frac{2}{(1+\beta)+i\alpha}=\frac{2(1+\beta)-i2\alpha}{(1+\beta)^2+\alpha^2}.$$

于是反射波的位相改变 φ' 为

$$\mathrm{tg}\varphi'=-\frac{2\alpha}{1-\alpha^2-\beta^2},\qquad (5\cdot 3\cdot 29)$$

折射波的位相改变 φ'' 为

$$\mathrm{tg}\varphi''=-\frac{\alpha}{1+\beta}.\qquad (5\cdot 3\cdot 30)$$

上述讨论都是在垂直入射之下，且不考虑全反射情况。在非垂直入射下，情况就比较复杂了。但是，当 ε_1、ε_2 是实数时，折射波的位相总是和入射波的相同，反射波的位相不仅依赖于 $n_{21}(\omega)$，而且依赖于入射角 θ 和折射角 θ''。

3.电磁波反射折射的能流关系

(1) 平均法向能流守恒

我们从能量角度来看电磁波在界面上的反射折射问题，讨论入射，反射和折射波能流之间的关系。

由 $(5\cdot 2\cdot 17)$ 式可知，单色平面波的平均能流密度可写为

$$<\vec{S}>=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\vec{E}^2(\vec{r})\vec{e}_k,\qquad (5\cdot 3\cdot 31)$$

其中 $\vec{e}_k$ 就是能流的方向。而我们拿掉了取实部的记号，这样 $(5\cdot 3\cdot 31)$ 式在 ε 为复数时可同时反应位相差，现在的 ε 可以是复数。设 $\vec{n}$ 为 xy 平面的法向单位矢量（参看图 5.1），我们可以写出入射、反射和折射波的平均法向能流密度：

$$\vec{n}\cdot<\vec{S}>=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}}\vec{E}^2(\vec{r})\cos\theta,$$

$$\vec{n}\cdot<\vec{S'}>=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}}\vec{E}'^2(\vec{r})\cos\theta, \qquad (5\cdot3\cdot32)$$

$$\vec{n}\cdot<\vec{S''}>=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_0}}\vec{E}''^2(\vec{r})\cos\theta'',$$

其中我们考虑了非磁介质，取 $\mu_1\approx\mu_2\approx\mu_0$，以下我们证明关系式

$$\vec{n}\cdot(<\vec{S}>+<\vec{S'}>)=\vec{n}\cdot<\vec{S''}> \qquad (5\cdot3\cdot33)$$

即电磁波在介质界面发生反射折射时，平均法向能流密度是守恒的。

把 $(5\cdot3\cdot32)$ 式代入 $(5\cdot3\cdot33)$ 式，得

$$\vec{E}^2(\vec{r})=\vec{E}'^2(\vec{r})+\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\frac{\cos\theta''}{\cos\theta}\vec{E}''^2(\vec{r}). \qquad (5\cdot3\cdot34)$$

欲证明 $(5\cdot3\cdot33)$ 式，等价于证明 $(5\cdot3\cdot34)$ 式，又因任何一个矢量$\vec{E}$都可分解成垂直于入射面的分量 $E_{\perp}$ 和平行于入射面的分量 $E_{//}$ 两部分，所以下面就分别在此两种情况下证明$(5\cdot3\cdot34)$式成立。证明的基础还是电磁场的边值关系。

对$\vec{E}$垂直入射面的情况，由界面上$\vec{E}$的切向分量和$\vec{H}$的切向分量的要求可得

$$E+E'=E'',$$

$$E-E'=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\frac{\cos\theta''}{\cos\theta}E''.$$

此二式相乘，就证明了 $(5\cdot3\cdot34)$ 式的垂直于入射面的分量成立。对$\vec{E}$平行入射面的情况，由边值关系可得

$$E+E'=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}E'',$$

$$E - E' = \frac{\cos\theta''}{\cos\theta} E''.$$

此二式相乘，又证明了（5·3·34）式平行于入射面分量成立。因为$\vec{E}^2(\vec{r}) = \vec{E}^2_{\perp}(\vec{r}) + \vec{E}^2_{/\!/}(\vec{r})$。上述两情况综合起来就证明了（5·3·34）式。

（2）反射系数和透射系数

反射系数 R 定义为界面所反射的（对时间）平均能流与入射能流之比：

$$R = \left| \frac{\vec{n} \cdot <\vec{S}'>}{\vec{n} \cdot <\vec{S}>} \right|, \qquad (5 \cdot 3 \cdot 35)$$

透射系数 T 定义为分界面上所折射的平均能流与入射能流之比：

$$T = \left| \frac{\vec{n} \cdot <\vec{S}''>}{\vec{n} \cdot <\vec{S}>} \right|. \qquad (5 \cdot 3 \cdot 36)$$

将（5·3·32）式代入（5·3·35）和（5·3·36）式，得

$$\begin{aligned} R &= \left| \frac{\vec{E}'^2(\vec{r})}{\vec{E}^2(\vec{r})} \right|, \\ T &= \left| \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \frac{\cos\theta''}{\cos\theta} \frac{\vec{E}''(\vec{r})}{\vec{E}^2(\vec{r})} \right|. \end{aligned} \qquad (5 \cdot 3 \cdot 37)$$

当倾斜入射时，反射系数按（5·3·22）第一式和（5·3·26）第一式由下式给出：

$$\begin{aligned} R_{\perp} &= \frac{\sin^2(\theta - \theta')}{\sin^2(\theta + \theta')}, \\ R_{/\!/} &= \frac{\mathrm{tg}^2(\theta - \theta')}{\mathrm{tg}^2(\theta + \theta')}. \end{aligned} \qquad (5 \cdot 3 \cdot 38)$$

当交换 θ 和 θ'' 时，(5·3·38)式不变。这意味着以 θ 从介质 1 入

射的波的反射系数，等于以 θ''从介质 2 入射的波的反射系数。另外 $R_{\perp}$和 $R_{//}$与入射角的关系完全不同。

在垂直入射时，$\theta=0$，两种偏振等效，ε_2 为实数（透明介质）情况下

$$R=\left|\frac{\sqrt{\varepsilon_1}-\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}+\sqrt{\varepsilon_2}}\right|^2,$$
$$T=\frac{4\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}{(\sqrt{\varepsilon_1}+\sqrt{\varepsilon_2})^2}. \qquad (5\cdot3\cdot39)$$

由此可见 R+T=1，这是可以料到的。

若 ε_2 为复数(非透明介质)，非磁介质的$n_{21}(\omega)=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$也是复数

$$n'\equiv n_{21}(\omega)=\mathrm{Re}n'+iI_m n'.$$

在垂直入射时($\theta=0$)

$$R=\left|\frac{1-n'}{1+n'}\right|^2=\frac{(1-\mathrm{Re}n')^2+(I_m n')^2}{(1+\mathrm{Re}n')^2+(I_m n')^2}, \qquad (5\cdot3\cdot40)$$

如果介质 2 无吸收，由能量守恒仍有 R+T=1，则

$$T=1-R=\frac{4\mathrm{Re}n'}{|1+n'(\omega)|^2} \qquad (5\cdot3\cdot41)$$

如果电磁波由真空入射于导体表面，经界面时产生反射波和透入导体内部的折射波。在此情况下

$$\varepsilon_2'=\varepsilon_2+i\frac{\sigma}{\omega}, \qquad (5\cdot3\cdot42)$$

其中 σ 为导体的电导率。令$\sqrt{\varepsilon_2'}=\xi+i\eta$，则

$$\eta=\sqrt{\mathrm{Re}\varepsilon_2}\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\mathrm{Re}\varepsilon_2}\right)^2}-1\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\xi=\sqrt{\mathrm{Re}\varepsilon_2}\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\mathrm{Re}\varepsilon_2}\right)^2}+1\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5\cdot3\cdot43)$$

对良导体，$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_2}>>1$(传导电流>>位移电流)我们得到

$$\eta\approx\xi\approx\sqrt{\frac{\sigma}{2\omega}},$$

$$n'\approx\sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_1}}(1+i). \quad (5\cdot3\cdot44)$$

当垂直入射时，反射系数

$$R=\left|\frac{1-n'}{1+n'}\right|^2\approx1-2\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_1}{\sigma}}. \quad (5\cdot3\cdot45)$$

此式表明，电导率愈高，频率愈小，则反射系数愈接近于 1。例如光频波段的电磁波从空气入射到银表面时，$\omega=4\times10^{15}$／秒，$\varepsilon_1=\varepsilon_0$，$\sigma=6\times10^7$(欧·米)$^{-1}$，反射系数 R＝0.93。在较低频率下，反射更完全，当频率为 1MHz 时，R＝0.999994。在波长较长的微波或无线电波入射于金属导体的情形下，绝大部分电磁能量被反射出去，只有很小部分能量透入导体内部而被吸收。

对不良导体或绝缘漏电介质，$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_2}\ll1$,

$$\eta\approx\frac{1}{2}\frac{\sigma}{\omega}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}},\qquad \xi\approx\sqrt{\varepsilon_2},$$

$$\sqrt{\varepsilon_2'}\approx\sqrt{\varepsilon_2}+i\frac{\sigma}{2\omega}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}}. \quad (5\cdot3\cdot46)$$

垂直入射时的反射系数为

$$R=\left|\frac{\sqrt{\varepsilon_1}-\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}+\sqrt{\varepsilon_2}}\right|^2$$

$$\approx \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1}-\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}+\sqrt{\varepsilon_2}}\right)^2+\left(\frac{\sigma}{\omega}\right)^2\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\frac{1}{(\sqrt{\varepsilon_1}+\sqrt{\varepsilon_2})^4} \qquad (5\cdot 3\cdot 47)$$

[例 5–8] 频率为 ω 的平面单色电磁波，在真空中垂直入射到折射率为 $n=\sqrt{\varepsilon_r}$ 的介质膜上（设 $\mu=\mu_0$），膜的厚度为 d。为了完全消除膜的反射，d、n 和 ω 之间应满足什么关系？

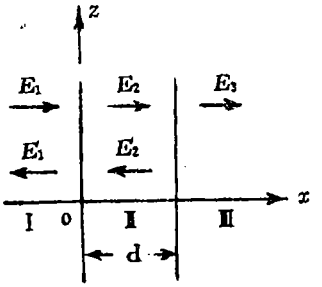


图5.3

解：如图 5.3 所示，区域Ⅰ、Ⅲ为真空，区域Ⅱ为介质膜。在区域Ⅰ中，存在入射波和反射波，设入射波电矢量偏振方向沿 Z 方向，于是有入射波

$$\vec{E}_1=\vec{e}_z E_{10}e^{i(k_1x-\omega t)},$$

$$\vec{H}_1=-\vec{e}_y H_{10}e^{i(k_1x-\omega t)},$$

反射波

$$\vec{E}'_1=\vec{e}_z E'_{10}e^{i(-k_1x-\omega t)}$$

$$\vec{H}'_1=\vec{e}_y H'_{10}e^{i(-k_1x-\omega t)},$$

式中

$$k_1=\frac{\omega}{c},\qquad H_{10}=\frac{B_{10}}{\mu_0}=\frac{E_0}{\mu_0 c},\qquad H'_{10}=\frac{E'_0}{\mu_0 c}.$$

在区域Ⅱ中存在透射波

$$\vec{E}_2=\vec{e}_z E_{20}e^{i(k_2x-\omega t)},$$

$$\vec{H}_2=-\vec{e}_y H_{20}e^{i(k_2x-\omega t)},$$

和反射波

$$\vec{E}'_2=\vec{e}_z E'_{20}e^{i(-k_2x-\omega t)},$$

$$\vec{H}'_2=\vec{e}_y H'_{20}e^{i(-k_2x-\omega t)},$$

式中

$$k_2=\frac{n\omega}{c},\qquad H_{20}=\frac{nE_{20}}{\mu_0 c},\qquad H'_{20}=\frac{nE'_{20}}{\mu_0 c}.$$

在区域Ⅲ中仅有透射波

$$\vec{E}_3=\vec{e}_z E_{30}e^{i(K_3x-\omega t)},$$
$$\vec{H}_3=-\vec{e}_y H_{30}e^{i(K_3x-\omega t)},$$

式中

$$k_3=k_1,\qquad H_{30}=\frac{E_{30}}{\mu_0 c}.$$

在边界 x=0 和 x=d 上，$\vec{E}$和$\vec{H}$的切向分量各自连续,即满足下列边值关系,

$$(\vec{E}_1+\vec{E}'_1)\cdot\vec{e}_z|_{x=0}=(\vec{E}_2+\vec{E}'_2)\cdot\vec{e}_z|_{x=0},$$
$$(\vec{H}_1+\vec{H}'_1)\cdot\vec{e}_y|_{x=0}=(\vec{H}_2+\vec{H}')\cdot\vec{e}_y|_{x=0},$$
$$(\vec{E}_2+\vec{E}'_2)\cdot\vec{e}_z|_{x=d}=(\vec{E}_3\cdot\vec{e}_z)|_{x=d},$$
$$(\vec{H}_2+\vec{H}'_2)\cdot\vec{e}_y|_{x=d}=(\vec{H}_3\cdot\vec{e}_y)|_{x=d}.$$

化简后有

$$\begin{aligned}&E_{10}+E'_{10}=E_{20}+E'_{20},\\&-E_{10}+E'_{10}=-nE_{20}+nE'_{20},\\&E_{20}e^{ik_2d}+E'_{20}e^{-ik_2d}=E_{30}e^{ik_1d},\\&-nE_{20}e^{ik_2d}+nE'_{20}e^{-ik_2d}=-E_{30}e^{ik_1d}.\end{aligned}\qquad(5\cdot3\cdot48)$$

联立求解 (5·3·48) 包含的四式，并引入$\gamma=\frac{1-n}{1+n}$得

$$\frac{E'_{10}}{E_{10}}=\frac{\gamma(1-e^{i2k_2d})}{(1-\gamma^2e^{i2k_2d})}.\qquad(5\cdot3\cdot49)$$

反射系数$R=\left|\frac{E'_{10}}{E_{10}}\right|^2$,完全消除膜的反射的条件为 R=0，要求

$$|1-e^{i2k_2d}|=0 \quad 或 \quad 1-\cos 2k_2 d=0,$$

于是得

$$k_2 d=m\pi, \qquad m=0,1,2,\cdots$$

即

$$\omega n d=m\pi c. \tag{5·3·50}$$

[例 5–9] 讨论穿过金属片的电磁波。

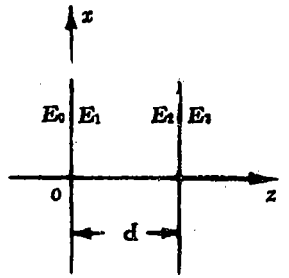


图 5.4

设振幅$E_0\vec{e}_x$、频率ω的电磁波垂直入射于电导率为σ_c，厚度为 d 的银片，且厚度大到可以忽略多次反射。银片前后内表面的电场的振幅各为$E_1\vec{e}_x$和$E_2\vec{e}_x$，透过银片的电场的振幅为$E_3\vec{e}_x$。这些振幅能够利用边界条件以入射振幅表示出来。

垂直入射时，在 (5·3·25) 式中取$\theta=0$，有

$$\frac{E'}{E}=\frac{\sqrt{\varepsilon_2}-\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_1}+\sqrt{\varepsilon_2}}, \qquad \frac{E''}{E}=\frac{2\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_1}+\sqrt{\varepsilon_2}}. \tag{5·3·51}$$

另外在此情况下，$\dfrac{\sigma_c}{\omega\varepsilon_2}\gg 1$，由 (5·3·44) 式可知银的复数折射率为

$$n_2(\omega)=(1+i)\sqrt{\frac{\sigma_c}{2\omega\varepsilon_0}}=\sqrt{\frac{\sigma_c}{\varepsilon_0\omega}}\,e^{i\pi/4}. \tag{5·3·52}$$

运用本题约定的符号可得

$$\frac{E_1}{E_0}=\frac{2}{n_2(\omega)+1}=\frac{2}{1+\sqrt{\frac{\sigma_c}{\varepsilon_0\omega}}e^{i\pi/4}}$$

由于电磁波在金属银中传播，它必然服从由其穿透深度$\delta=\sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma_c\omega}}$所支配的指数衰减规律:

$$\frac{E_2}{E_1}=e^{-d/\delta}.$$

由（5·3·51）式穿过银片的场满足

$$\frac{E_3}{E_2}=\frac{2n_2(\omega)}{n_2(\omega)+1}=\frac{2}{1+\sqrt{\frac{\varepsilon_0\omega}{\sigma_c}}e^{-i\pi/4}}$$

若 $\omega=400\pi\times10^6$／秒，$\sigma_c=61.7\times10^6$(欧·米)$^{-1}$ 和 d$=10^{-5}$ 米，我们得到

$$\sqrt{\frac{\sigma_c}{\varepsilon_0\omega}}=7.45\times10^3,\qquad \delta=4.5\times10^{-6}\text{米}$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{E_1}{E_0}&=2.68\times10^{-5}e^{-i\pi/4},\\ \frac{E_2}{E_0}&=2.9\times10^{-6}e^{-i\pi/4},\\ \frac{E_3}{E_0}&=0.57\times10^{-5}e^{-i\pi/4}.\end{aligned}\qquad(5\cdot3\cdot53)$$

由此我们看到，穿入和透过银片的场相对于入射场有位相差45°，并且所计算的穿透深度和折射率表明忽略银片内的多次反射是合理的。

[例 5–10] 一束可见光激光正入射于平面半导体表面，在一

定温度下半导体的导电性能明显提高，其电导率从 $\sigma\sim 10$（欧·米）$^{-1}$ 变到 $\sigma\sim 10^3$（欧·米）$^{-1}$。通过计算反射光的强度和位相，探索如何检测此电导率转变的方法，位相和强度之中何者对 σ 的大小更敏感?

解：设入射光电场的偏振方向平行于导体表面，则正入射情况下反射光电场与入射光电场之比由（5·3·51）式给出：

$$\frac{E'}{E}=\frac{\sqrt{\varepsilon_2}-\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_1}+\sqrt{\varepsilon_2}}.$$

又因可见光 $\omega\sim 10^{16}$ 秒$^{-1}$,$\sigma\sim 10—10^3$(欧·米)$^{-1}$，满足条件$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_2}\ll 1$,所以利用(5·3·46)式对半导体有

$$\sqrt{\varepsilon'_{2r}}=\sqrt{\varepsilon_{2r}}+i\frac{\sigma}{2\omega}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{2r}}}=n+i\frac{\sigma}{2\omega n},$$

式中$n=\sqrt{\varepsilon_{2r}}$是通常测定的半导体的折射率。令$\frac{\sigma}{2\omega n}=\delta$，于是

$$\frac{E'}{E}=\frac{n+i\delta-1}{n+i\delta+1}=\sqrt{\frac{(n-1)^2+\delta^2}{(n+1)^2+\delta^2}}\,e^{i\varphi}$$

$$\approx\sqrt{\frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}}\,e^{i\varphi}\qquad(5\cdot3\cdot54)$$

另一方面

$$\frac{E'}{E}=\frac{(n-1)+i\delta}{(n+1)+i\delta}=\frac{(n^2+\delta^2-1)+i2\delta}{(n+1)^2+\delta^2},$$

则得

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{2\delta}{n^2+\delta^2-1}\approx\frac{2\delta}{n^2-1}=\frac{1}{n^2-1}\frac{\sigma}{\omega n}\propto\sigma.\qquad(5\cdot3\cdot55)$$

所以反射光的强度对 σ 不敏感，位相 $\mathrm{tg}\varphi\approx\varphi\propto\sigma$ 可作为电导率发生转变的检测手段。

例 5-11 由于电磁波具有动量，它入射于物体上时会对物

体施加一定的压力，这种压力称为辐射压力。若平面电磁波入射于理想导体表面上而被全部反射，设入射角为 θ，求导体表面所受的辐射压力。

解：我们利用动量流密度张量 $\overleftrightarrow{T}$ 进行计算。设入射波电场 $\vec{E}_i$ 垂直入射面，在完全反射情形中 $\vec{E}_i$ 与反射波电场有关系 $\vec{E}_r = -\vec{E}_i$，因而界面上总电场强度 $\vec{E}=0$。

考虑到平面电磁波中 $\vec{E}$ 与 $\vec{B}$ 的关系，可得界面上总磁场为

$$B = 2B_i\cos\theta,$$

其方向与界面相切。设 $\vec{n}$ 为指向导体内的法线，有

$$\vec{n}\cdot\vec{E} = \vec{n}\cdot\vec{B} = 0,$$

则

$$\vec{n}\cdot\overleftrightarrow{T} = \frac{1}{2}\vec{n}\left(\frac{1}{\mu_0}B^2\right) = \frac{2}{\mu_0}B_i^2\cos^2\theta\vec{n} = 2<w_i>\cos^2\theta\vec{n},$$

其中 $<w_i>$ 为入射波平均能量密度。因而导体面受到一个压力(辐射压力)

$$P = 2<w_i>\cos^2\theta. \qquad (5\cdot 3\cdot 56)$$

对通常的辐射强度，辐射压力是很小的。在地球表面上，太阳光的坡印亭矢量大约是 1.4 千瓦／米^2，它在金属反射面上的辐射压力约为 9.3×10^{-6} 牛顿／米^2 或 0.1 毫克／厘米^2。要求出太阳表面的辐射压力，还要把上述数字乘以

$$\left(\frac{\text{地球至太阳的平均距离}}{\text{太阳的半径}}\right)^2 = \left(\frac{1.5\times10^{11}}{7\times10^8}\right)^2 = 4.6\times10^4,$$

得出的数值仍然只有 4.4 毫克／厘米^2，或 4.3×10^{-6} 大气压。在天文领域，辐射压力（光压）起着重要作用，光压力在星体内部可以和万有引力相抗衡，从而对星体构造和发展起着重要作用。在波导和谐振腔中,能获得更高的功率密度和压力。如波导管中坡印亭矢量可达～10^9 瓦／米^2；则辐射压力～0.1 克

/厘米^2；在功率密度为10^{11}瓦／米^{2}的激光束中，辐射压力是10克／厘米^2。

4.全内反射

如果入射是由光密介质到光疏介质，$\varepsilon_2<\varepsilon_1$，相应的折射角$\theta''$必大于入射角$\theta$。当入射角$\theta=\theta_c$时

$$\sin\theta_c=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}=n_{21}, \qquad (5\cdot3\cdot57)$$

折射角θ''变为$\pi/2$，折射波沿分界面传播。当$\theta>\theta_c$时，折射角为一虚数，入射波在界面上将全部被反射，这正是所谓全反射现象，θ_c称全反射临界角。新兴的纤维光学就是由全反射的原理发展起来的。

当$\theta>\theta_c$时，$\sin\theta>n_{21}$,有

$$k_z''=k\sqrt{n_{21}^2-\sin^2\theta}$$

是纯虚数,令

$$k_Z''=iK, \qquad K=k\sqrt{\sin^2\theta-n_{21}^2}, \qquad (5\cdot3\cdot58)$$

则折射波的电场表示式变为

$$\vec{E}''=\vec{E}''_0e^{-Kz}e^{i(k_x''x-\omega t)}. \qquad (5\cdot3\cdot59)$$

此式代表介质2中传播的一种可能波型。它是沿x轴方向传播的电磁波，其场强沿Z轴方向指数衰减。只存在于界面附近厚度约为K^{-1}的一薄层内，由（5·3·58）式

$$K^{-1}=\frac{1}{k\sqrt{\sin^2\theta-n_{21}^2}}=\frac{\lambda_1}{2\pi\sqrt{\sin^2\theta-n_{21}^2}}. \qquad (5\cdot3\cdot60)$$

λ_1为介质1中的波长。一般来说，透入介质2中的薄层厚度与波长同数量级。所以，全反射的折射波是一种表面波。

在$\theta>\theta_c$情况下，由（5·3·21）第一式和（5·3·25）第一式，$\vec{E}'$和$\vec{E}$间的比例系数变成$\frac{a-ib}{a+ib}$形式的复数（它的模为

1)，即可写成

$$E'_{\perp} = e^{-i\delta_{\perp}} E_{\perp}, \qquad E''_{\parallel} = e^{-i\delta_{\parallel}} E_{\parallel},$$

容易求出

$$\mathrm{tg}\frac{\delta_{\perp}}{2} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1 \sin^2\theta - \varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta}, \mathrm{tg}\frac{\delta_{\parallel}}{2} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1(\varepsilon_1 \sin^2\theta - \varepsilon_2)}}{\varepsilon_2 \cos\theta} \quad (5 \cdot 3 \cdot 61)$$

由此可见，全反射时反射波相对于入射波振幅不变，但位相有变化，并且这种位相改变在入射波是线偏振时，反射波的垂直分量与平行分量间的位相差为 $\delta = \delta_{\perp} - \delta_{\parallel}$，由此可得

$$tg\frac{\delta}{2} = \frac{\cos\theta\sqrt{\varepsilon_1 \sin^2\theta - \varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}\sin^2\theta}. \quad (5 \cdot 3 \cdot 62)$$

若 $\delta = 0$，则表示入射波是线偏振，反射波亦是线偏振；若 $\delta \neq 0$，则反射波的偏振与入射波的偏振不同。光学中可以利用上述位相变化把一种偏振转换成另一种偏振。

下面粗略讨论全反射时的能流关系。为方便起见，考虑 $\vec{E}''$ 垂直入射面的情况($E'' = E''_y$)，由 $(5 \cdot 3 \cdot 59)$ 式，折射波电场为

$$\vec{E}'' = E''_0 \vec{e}_y \cos(k''_x x - \omega t) e^{-KZ}, \quad (5 \cdot 3 \cdot 63)$$

折射波磁场由关系式 $\vec{H}'' = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \frac{\vec{k}''}{k''} \times \vec{E}''$ 求得

$$\begin{aligned} H''_Z &= \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \frac{k''_x}{k''} E''_y = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \frac{\sin\theta}{n_{21}} E'', \\ H''_x &= -\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \frac{k''_Z}{k''} E''_y = -i\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \sqrt{\frac{\sin^2\theta}{n_{21}^2} - 1}\, E'' \end{aligned} \quad (5 \cdot 3 \cdot 64)$$

H''_Z 与 E'' 同相，但 H''_x 与 E'' 有 $\frac{\pi}{2}$ 相位差。折射波的能流密度

$$S''_x = \frac{E''^2_0}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \frac{\sin\theta}{n_{21}} e^{-2KZ}[1 + \cos 2(k''_x x - \omega t)],$$

$$S''_Z = \frac{E''^2_0}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{n_{21}^2}-1}\,e^{-2KZ}\sin 2(k''_x x-\omega t),$$

式中，$k''_x = k\sin\theta = \frac{k''}{n_{21}}\sin\theta$，其平均能流密度

$$\langle S''_Z\rangle = 0 \qquad (5\cdot 3\cdot 65)$$

$$\langle S''_x\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\,|E''_0|^2 e^{-2kZ}\frac{\sin\theta}{n_{21}}.$$

由此，折射波平均能流密度只有 x 分量，沿 Z 轴方向透入第二介质的平均能流密度为零。虽然 S''_Z 的平均值为零，其瞬时值却不为零。这就说明在全反射过程中第二介质是起作用的，在半周内，电磁能量透入第二介质，在界面附近薄层内储存起来，在另一半周内，该能量释放出来变为反射波能量。

第二介质中的能流矢量线，可由方程 $\frac{dx}{S''_x} = \frac{dz}{S''_z}$ 积分后得到：

$$Z = \left[\left(\frac{\sin^2\theta}{n_{21}^2}-1\right)^{\frac{1}{2}}\Big/\frac{\sin^2\theta}{n_{21}^2}\right]\ln\frac{|\cos[(k''\sin\theta)x]|}{C},\ (Z\geqslant 0).$$

$$(5\cdot 3\cdot 66)$$

其中 C 是积分常数，图 5.5 表示出这些线的大致情形。



图 5.5

[例 5–11] 设玻璃的折射率为 n＝1.5，

(1) 求光线自玻璃到空气的全反射临界角 θ_c 和布儒斯特角 θ_B，证明在一般情况下总有 $\theta_c > \theta_B$。

(2) 真空中波长为 $\lambda_0=5000$Å的光波以 45° 入射角自玻璃进入空气，求折射波传播矢量、相速度以及分布层厚度。

解: (1)由$\sin\theta_C=\frac{n_2}{n_1}=\frac{1}{1.5}$，得 $\theta_C=41°49'$;

又 $\mathrm{tg}\theta_B=\frac{n_2}{n_1}=\frac{1}{1.5}$，所以 $\theta_B=33°41'$.

在一般情况下，由于 $tg\theta_B=\sin\theta_c\equiv\frac{n_2}{n_1}$，即

$$\frac{\sin\theta_B}{\cos\theta_B}=\sin\theta_c,$$

而 $\cos\theta_B<1$，则 $\sin\theta_B<\sin\theta_c$，所以 $\theta_c>\theta_B$。

(2) 由 (1) 可知 $\theta_c=41°49'$，所以 45° 角入射时将发生全反射。设入射面为 y=0 的平面，折射波的传播矢量

$$\vec{k}''=k_x''\vec{e}_x+k_z''\vec{e}_z$$

由于

$$k=\frac{\omega}{c}n=\frac{2\pi}{\lambda_0}n=\frac{2\pi\times1.5}{5000\times10^{-10}}=1.88\times10^7\text{米}^{-1},$$

则

$$k_x''=k\sin\theta=(1.88\times10^7)\ \sin45°=1.33\times10^7\text{米}^{-1},$$

$$k_Z''=iK=ik\sqrt{\sin^2\theta-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$$

$$=i(1.88\times10^7)\left[\sin^245°-\left(\frac{1}{1.5}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=i(0.44\times10^7)\text{米}^{-1},$$

其中 k_x'' 为实数，表明折射光将沿 x 方向传播，其相速度为

$$v=\omega/k_x''=\frac{2\pi c}{\lambda_0k_x''}=2.84\times10^{10}\text{米}/\text{秒}.$$

k_z'' 为纯虚数，表明折射光沿 Z 方向衰减，其分布层厚度

$$\delta = \frac{1}{K} = 0.23 \times 10^{-6}\text{米} = 0.23\text{微米}.$$

§5·4 电介质、导体和等离子体的频率色散特性

所有的媒质都具有某些色散性质。当然，在前面的讨论中只涉及的单个频率分量的结果，在有色散时也是成立的，只要把 μ 和 ε 的值解释为所考虑的频率对应的值。可是，当对一个频率范围进行迭加时，就引起了新的效应。

1.简单的色散模型

我们采用经典的谐振子模型。在稀薄气体近似下，忽略分子之间的相互作用。又考虑 $v \ll c$，从而振荡的振幅足够小，可以在电子的平均位置上计算电场；并且磁场力和电场力之比 $\sim v/c \ll 1$，可以忽略入射波的磁场对电子的作用力，设入射波的电场强度 $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$，振子的固有频率为 ω_0，而 γ 量度唯象阻尼力，则电子的运动方程为

$$\ddot{\vec{r}} + \gamma\dot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = \frac{e}{m}\vec{E}(\vec{r}\cdot t). \qquad (5\cdot4\cdot1)$$

该方程的解为

$$\vec{r} = \frac{e\vec{E}}{m[\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma]}, \qquad (5\cdot4\cdot2)$$

一个电子的偶极矩为

$$\vec{P} = e\vec{r} = \frac{e^2\vec{E}}{m[\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma]}. \qquad (5\cdot4\cdot3)$$

假定介质中单位体积电子数为 N，然而不是所有电子都有相同的固有频率 ω_0，设单位体积固有频率为 ω_j 的电子数为 Nf_j，其中 f_j 为一分数，满足 $\sum_j f_j = 1$，于是单位体积中的总偶极矩为

$$\vec{P}=\sum_j \frac{Nf_j(\frac{e^2}{m})}{\omega_j^2-\omega^2-i\omega\gamma_j}\vec{E}, \qquad (5\cdot 4\cdot 4)$$

其中 γ_j 是第 j 个束缚群振荡电子的阻尼因子。

对于一般各向同性线性介质，极化强度$\vec{P}$与$\vec{E}$之间有简单的线性关系$\vec{P}=\chi_e\varepsilon_0\vec{E}$而 $\varepsilon=\varepsilon_0+\varepsilon_0\chi_e$，故介电常数

$$\varepsilon(\omega)=\varepsilon_0+\sum_j \frac{Ne^2}{m}\frac{f_j}{\omega_j^2-\omega^2-i\omega\gamma_j} \qquad (5\cdot 4\cdot 5)$$

由$n^2(\omega)=\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0}$介质的折射率

$$n^2(\omega)=1+\sum_j \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\frac{f_j}{\omega_j^2-\omega^2-i\omega\gamma_j} \qquad (5\cdot 4\cdot 6)$$

结果表明，ε（ω）、n（ω）都与外场的频率有关，这就是由振子模型所得到的介质的频率色散性质。

2.反常色散和共振吸收

根据（5·4·5）式，可以把 ε（ω）分解成实部和虚部

$$\varepsilon(\omega)=\mathrm{Re}\varepsilon(\omega)+iIm\varepsilon(\omega)$$

$$=\varepsilon_0\left\{1+\sum_j \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}f_j\frac{\omega_j^2-\omega^2+i\omega\gamma_j}{(\omega_j^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma_j^2}\right\} \qquad (5\cdot 4\cdot 7)$$

一般说来，阻尼因子 γ_j 比固有频率 ω_j 小得多，这意味着对于大多数频率 ε（ω）近似为实数。因子 $(\omega_j^2-\omega^2)^{-1}$ 对 $\omega<\omega_j$ 为正，对 $\omega>\omega_j$ 为负。因此，在低频下 ω 小于最小的 ω_j，（5·4·7）式中求和的各项贡献相同的正号，并且 ε（ω）大于 1。当频率逐渐增大超过这个 ω_j 值时，求和号下出现的负号越来越多，直到最后总和变成负的，并且 ε（ω）小于 1。图 5.6 画出了 $\mathrm{Re}\varepsilon(\omega)$ 和 $\mathrm{Im}\varepsilon(\omega)$图线。在任一 ω_j 的邻域内,特性急剧改变，当 $\omega=\omega_j$ 时，（5·4·7）式中第 j 项是纯虚数，且数值很大。$\mathrm{Re}\varepsilon(\omega)$曲线

中有两个相继的共振频率 ω_1 和 ω_2，在 $\omega_2-\omega_1=\Delta\omega$ 的范围内 $\mathrm{Re}\varepsilon(\omega)$随 ω 增大而减小，相应的折射率 $\mathrm{Re}n(\omega)$也是如此。此范围内较短波长的射线比较长波长的射线折射得小，所以称为反常色散。在频率间隔 $\Delta\omega$ 两边，$\mathrm{Re}\varepsilon(\omega)$随 ω 的增大而增大,称为正常色散。

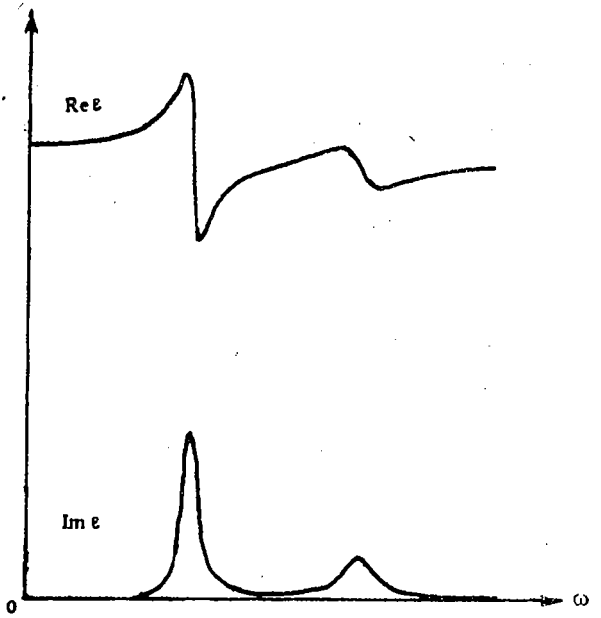


图 5.6

由 $k=\dfrac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r}=\dfrac{\omega}{c}(R_e n+iI_m n)$，如电磁波前进的方向为 Z 方向，则有

$$\vec{E}=\vec{E}_0 e^{i(kz-\omega t)}=\vec{E}_0 e^{-\frac{\omega I_m n}{c}z} e^{i\omega(\frac{R_e n}{c}-t)} \qquad (5\cdot 4\cdot 8)$$

可见 Ren 决定电磁波的相速度，而 Imn 决定电磁波振幅的衰

减，它表示介质对电磁波有吸收，称为吸收系数。这就意味着 n（和 ε）的一个正虚部的出现，表示能量从电磁波逸散到介质。反常色散区域 $\mathrm{Im}\varepsilon$ 是相当大的,所以伴随着强烈的吸收效应。当 $\omega=\omega_j$ 时，$\varepsilon(\omega)$ 是纯虚数，且数值达极大，对应吸收最大。因此，反常色散区又叫做共振吸收区，ω_j 叫共振频率。在频带 $\Delta\omega$ 范围内，介质对辐射实际上是完全不透明的。无色透明的气体、液体和固体物质的特征频率在可见光范围之外，为此 $\omega\approx\omega_j$ 处发生的反常现象，在这些物质内不能用肉眼来观察。

3.低频特性，电导率

在 $\omega\to0$ 的极限下，介质具有其低频特性。而这些特性又因最低共振频率 ω_{j0} 是否等于零而不同。

当 $\omega_{j0}\neq0$ 时，电子为束缚态，即绝缘介质情形。取 $\omega=0$ 的极限，由 $(5\cdot4\cdot5)$ 式得

$$\varepsilon_r(\omega)=1+\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\sum_j\frac{f_j}{\omega_j{}^2}. \qquad (5\cdot4\cdot9)$$

如单位体积中电子只有一种振荡频率 ω_0，则

$$\varepsilon_r(\omega)=1+\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m\omega_0^2}, \qquad (5\cdot4\cdot10)$$

可得介质极化率

$$\chi_e=\varepsilon_r-1=\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m\omega_0^2}. \qquad (5\cdot4\cdot11)$$

当 $\omega_{j0}=0$ 时，部分电子是自由的，即金属导体情形。如单位体积中有 Nf_0 个电子是自由的，把这部分电子的贡献分出来考虑，$(5\cdot4\cdot5)$ 式变成

$$\varepsilon(\omega)=\varepsilon_0'+\frac{iNf_0e^2}{m\omega(\gamma_0-i\omega)}, \qquad (5\cdot4\cdot12)$$

其中 ε_0' 是其它偶极矩的贡献。如果考虑下面方程中的场量是定

态的电磁波:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

并假定介质遵从欧姆定律$\vec{J} = \sigma \vec{E}$，且具有一个正常的介电常数ε_0'，则

$$\nabla \times \vec{H} = -i\omega\left(\varepsilon_0' + i\frac{\sigma}{\omega}\right)\vec{E} \qquad (5 \cdot 4 \cdot 13)$$

把介质的所有性质都归之于介电常数，令（5·4·13）式右端括号中的量为$\varepsilon(\omega)$，与（5·4·12）比较，有

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0' + i\frac{\sigma}{\omega} = \varepsilon_0' + \frac{iNf_0e^2}{m\omega(\gamma_0 - i\omega)},$$

由此得电导率的表达式

$$\sigma(\omega) = \frac{Nf_0e^2}{m(\gamma_0 - i\omega)}. \qquad (5 \cdot 4 \cdot 14)$$

这就是电导率的德鲁特模型。在频率ω低于微波频率的特殊情形下，电导率基本是实数且与频率无关。由以上讨论可见，我们可以把导电介质的色散性质归因于一个复介电常数，也可归因于一个与频率有关的电导率加上一个正常的介电常数。

4.高频极限，等离子体频率

频率远远大于最高共振频率时，介电常数（5·4·5）式成为

$$\varepsilon(\omega) \approx \varepsilon_0\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right), \qquad (5 \cdot 4 \cdot 15)$$

其中

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}. \qquad (5 \cdot 4 \cdot 16)$$

频率 ω_p 与单位体积内总电子数 N 有关，称为介质的等离子体频率。在这个极限下，波数由下式给出

$$ck=\sqrt{\omega^2-\omega_p^2} \quad 或 \quad \omega^2=\omega_p^2+c^2k^2, \qquad (5\cdot4\cdot17)$$

这个表式称为 $\omega=\omega$ (k) 的色散关系或色散方程，它与波导中的关系 $ck_\lambda=\sqrt{\omega^2-\omega_\lambda^2}$ 相似，ω_p 与 ω_λ 相对应。

对于一般介质，(5·4·15) — (5·4·17) 仅在条件 $\omega^2>>\omega_p^2$ 下成立，但对于等离子体却不然。等离子体由离子和电子组成，整体是电中性的。当电磁波在等离子体中传播时，我们略去离子的运动和磁场的作用，加之电子是自由的，并且阻尼力也可忽略。因此这时没有上述条件限制，上列三式在包括 $\omega<\omega_p$ 的一个宽广的频率范围内成立，当 $\omega<\omega_p$ 时，k 为一纯虚数，电磁场是衰减的，入射到等离子体上的电磁波都将反射回去。电磁波透入的深度为

$$\delta=\sqrt{\frac{c^2}{\omega_p^2-\omega^2}}, \qquad (5\cdot4\cdot18)$$

这是受控热核过程中的一种效应，并试图用来约束热等离子体。当 $\omega>\omega_p$ 时，k 为实数，电磁波可以在等离子体中传播。由 (5·4·15) 式得等离子体的折射率

$$n=\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (5\cdot4\cdot19)$$

显然，在 $\omega>\omega_p$ 时，n<1，等离子体成为比真空还要"光疏"的介质，电磁波在其中传播的相速度将大于 c。

金属导体的介电常数由 (5·4·12) 式给出，在高频时 $\omega>>\gamma_0$，它取近似形式

$$\varepsilon(\omega)\approx\varepsilon_0'-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \qquad (5\cdot4\cdot20)$$

其中 $\omega_p^2=Ne^2/\varepsilon_0 m^*$ 为传导电子的等离子体频率，假定有效质

量 m^* 已部分地计及结合效应。当 $\omega \ll \omega_p$ 时，入射于金属的光仅透入很薄的一层，几乎全部被反射了，与等离子体近似相同。但是当频率增加到使 $\varepsilon(\omega)>0$ 时，金属容许光透射过去，成为透明的。这种特性典型地出现在紫外波段，因而称作金属紫外透明性。

[例 5-13] 大气的上层受太阳紫外线的照射，空气分子电离，产生了自由电子与离子，形成等离子区，叫做电离层。简单讨论电离层中的电磁波。

解：在高频外场作用下，因一般离子质量比电子大得多，可近似认为它们不动，而只讨论电子运动的情况。并假定自由电子不受阻力，只受外加电场的作用。对于迅变电磁场，电子的位移相对于波长很小，可认为外加电场为 $\vec{E}=\vec{E}_0 e^{-i\omega t}$，于是电子的运动方程是

$$m\ddot{\vec{r}} = e\vec{E}_0 e^{-i\omega t}$$

解此方程得

$$\vec{r}=\vec{r}_0 e^{-i\omega t}, \qquad \vec{r}_0 = -\frac{e\vec{E}_0}{m\omega^2}.$$

于是极化强度为

$$\vec{P}=Ne\vec{r}=-\frac{e^2N}{m\omega^2}\vec{E},$$

再由关系式

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}=\left(\varepsilon_0-\frac{e^2N}{m\omega^2}\right)\vec{E}=\varepsilon'\vec{E},$$

得到等效介电常数

$$\varepsilon'=\varepsilon_0-\frac{e^2N}{m\omega^2}=\varepsilon_0\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right),$$

式中 $\omega_p^2=\dfrac{e^2N}{\varepsilon_0 m}$ 叫等离子体频率。

按定义，等离子体折射率$n'=\sqrt{\frac{\mu'\varepsilon'}{\mu_0\varepsilon_0}}\approx\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\varepsilon_0}}$所以

$$n'^2=1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}.$$

若入射波的$\omega>\omega_p$，则折射率为实数，电磁波自由地穿过电离层，故在地面上与人造卫星通讯须用短波。若$\omega<\omega_p$，则n′为纯虚数，波从电离层表面反射，即进入层内的场依指数规律衰减，其穿透深度

$$d=\frac{c}{\sqrt{\omega_p^2-\omega^2}},$$

若$\omega\ll\omega_p$，则$d\approx\frac{c}{\omega_p}$。

在电离层中自由电子的最大密度约为$N\approx10^{10}$—10^{12}个/m^3，相应的等离子体角频率的数量级为$\omega_p\approx6\times10^6$—$6\times10^7$赫/秒，例如典型的日间等离子体频率$\gamma_p(=\omega_p/2\pi)$为10—30兆赫。若入射的无线电载波的频率$\gamma$为1000千赫，则因$\gamma\ll\gamma_p$，波指数地衰减，进入层内只有几米。但因电子的速度$\vec{v}=\frac{e\vec{E}}{\omega m}i$与电场相位相差$\pi/2$，波的能量并未损耗，而是被全反射回来。所以只要所用电磁波的$\omega<\omega_p$，就可利用电离层与远方通讯。而频率的数量级为100兆赫的广播电视波，由于$\omega>\omega_p$，电离层对于它是"透明的"，就不能利用电离层反射的方法传播。

[例 5～14] 讨论圆频率ω的电磁波通过电离化介质的传播。取下列近似：1）作用在电子上的洛伦兹力的磁分量$e\vec{v}\times\vec{B}$可以忽略；2）电磁场与原子离子的相互作用可以完全忽略（由于它们的大质量）；3）电子—电子和电子—离子相互作用可以忽略，令e,m,n分别为电子的电荷、质量和数密度。

(1) 证明只有在某一临界"等离子体"频率 ω_p 以上的频率 ω 才能传播，推导 ω_p 的表示式。

(2) 对 $\omega > \omega_p$，证明相速度大于真空中的光速 c。这会引起矛盾吗？试讨论这一结果。

解：(1) 设入射波的电场 $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$，则电子的运动方程为

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E}_0 e^{-i\omega t},$$

电子的运动速度

$$\vec{v} = \frac{e\vec{E}}{\omega m} i,$$

电子运动形成的电流密度

$$\vec{J} = ne\vec{v} = \frac{ne^2 i}{m\omega}\vec{E}. \qquad (5 \cdot 4 \cdot 21)$$

根据欧姆定律 $\vec{J} = \sigma\vec{E}$，等效电导率为

$$\sigma = \frac{ne^2}{m\omega} i. \qquad (5 \cdot 4 \cdot 22)$$

将此式代入复波数的表示式 $k'^2 = \varepsilon\mu\omega^2(1 + i\frac{\sigma}{\varepsilon\omega})$，取近似 $\varepsilon \approx \varepsilon_0$，$\mu \approx \mu_0$，有

$$k'^2 \approx \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m\omega^2}\right) = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \qquad (5 \cdot 4 \cdot 23)$$

式中 $\omega_p^2 = \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m}$ 叫等离子体角频率。由此式可见，当 $\omega > \omega_p$ 时，k′为实数，电磁波才能在该介质中传播；当 $\omega < \omega_p$ 时，k 为纯虚数，电磁波在该介质中按指数规律衰减，不能传播。

(2) 在 $\omega > \omega_p$ 的情形下，由 (1) 中所得 k′的表示式 $c^2k'^2 = \omega^2 - \omega_p^2$，电磁波在该介质中传播的相速度为

$$V_p = \frac{\omega}{k'} = c\left(\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_p^2}\right)^{\frac{1}{2}} > c, \qquad (5 \cdot 4 \cdot 24)$$

但群速度

$$V_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = c\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}} < c, \qquad (5 \cdot 4 \cdot 25)$$

因此不会引起矛盾。

[例 5-15] 设电离层中单位体积的自由电子数 N 和折射率 n_p 随高度连续变化，N 随高度的增加而增大，n_p 随高度的增加而减小。现有频率为 ω 的电磁波由折射率为 n_a 的空气以入射角 θ_i 入射到该电离层，且从电离层表面透入的电磁波穿过厚度 Z_m 之后又返回空气，如图 5.7 所示，电子的电荷和质量分别用 e 和 m 表示。试求厚度 Z_m 处电子的数密度 N (Z_m)。

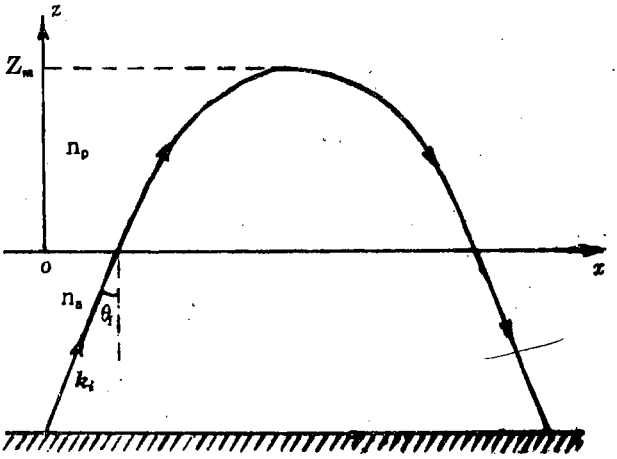


图 5.7

解：由[例 5-13]结果可知，等离子体的折射率

$$n_p = \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left[1 - \frac{e^2 N(Z)}{\varepsilon_0 m \omega^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

根据折射定律，在电离层中任一高度 Z 有

$$n_a \sin\theta_i = n_p(Z)\sin\theta_p(Z),$$

依题意，在高度 Z_m 上，$\theta_p(Z_m)=\frac{\pi}{2}$，则

$$n_a \sin\theta_i = n_p(Z_m),$$

代入折射率表达式，解得

$$N(Z_m)=\frac{\varepsilon_0 m\omega^2}{e^2}(1-n_a^2 sin^2\theta_i). \qquad (5\cdot 4\cdot 26)$$

§5·5 电磁波在波导管内的传播

1.有界空间的电磁波和理想导体的边界条件

前面我们讨论了单色平面电磁波在无限区域内的传播以及在不同介质界面上的反射和折射，现在研究电磁波在有界空间的传播。

由前面的结果可知，电磁波主要是在导体以外的空间或绝缘介质内传播的，只有很小部分电磁能量透入导体表层内。在理想导体（电导率 $\sigma\to\infty$）极限情形下，进入导体的穿透深度趋于零，电磁波全部被导体反射。因此，导体表面自然构成电磁波存在的边界，而形成有界空间中传播的电磁波，典型的例子是波导管和谐振腔。波导管是中空的金属管，内部是真空或均匀介质，电磁波在其内空间传播，而金属管壁作为电磁场存在的边界制约着管内电磁波的存在形式，在微波技术中，常用它来传输电磁能量。谐振腔是中空的金属腔，电磁波在腔内以某些特定频率振荡，在高频技术中，常用它来产生一定频率的电磁振荡。这类有界空间中电磁波的传播问题属于边值问题，导体表面边界条件起着重要作用。

实际导体虽然不是理想导体，但是象银或铜等金属导体，对无线电波来说，透入其内而损耗的电磁能量一般很小，接近于理想导体。因此分析实际问题时，在第一级近似下，可以先把金属看作理想导体，把问题解出来，然后在第二级近似下，再考虑有限电导率引起的损耗。

在理想导体情况下，导体内没有电磁场，$\vec{E}_1 = \vec{B}_1 = 0$(取角标 1 代表理想导体，角标 2 代表真空或绝缘介质，界面法线由导体指向介质)。$\vec{E}_1 = 0$是显然的，因理想导体 $\sigma \to \infty$，如 $\vec{E}_1 \neq 0$，则必然出现无穷大的电流，这与事实不符。当$\vec{E}_1 = 0$时，由$\nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$可知，如存在$\vec{B}$的话，它必然不依赖于时间，一旦有了$\vec{B}$，则$\vec{B}$永远不为零，这也与事实不符。因此，理想导体的边界条件可以归结为

$$\begin{aligned} \vec{n} \times \vec{E} = 0, \quad & \vec{n} \cdot \vec{B} = 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{D} = \sigma, \quad & \vec{n} \times \vec{H} = \vec{\alpha}. \end{aligned} \tag{5 · 5 · 1}$$

可见在理想导体表面，电力线与界面正交，磁力线与界面相切。上式中，真正制约电磁波存在形式的是前二式。后二式反映介质中的电磁场与导体表面上面电荷和面电流的相互关系，解出介质中的电磁场后，可用此二式求出导体表面的电荷电流分布。

根据上述讨论，对于以理想导体为边界的有界空间的电磁波来说，亥姆霍兹方程的解加上区域内的条件$\nabla \cdot \vec{E} = 0$(或 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$)再加上边界条件$\vec{n} \times \vec{E} = 0$ 或 $(\vec{n} \cdot \vec{B} = 0)$之后，就得到该问题中可能存在的电磁波型。

作为求解这类边值问题，还可利用一种简捷可行的方法，将方程

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

用于求解区域邻近边界的薄层 Δd 区域（如图 5.8 所示）。设边界面为 xy 平面，则由边界条件 $E_t=0$ 以及$\vec{E}$的连续可微性推知，在 Δd 薄层有 $E_x=E_y=0$ 和$\frac{\partial E_z}{\partial Z}=0$，推广到一般情形，得

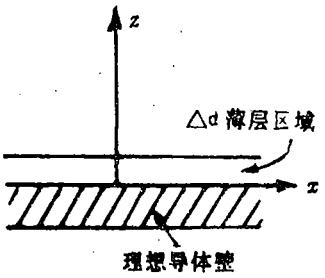


图 5.8

$$\frac{\partial E_n}{\partial n}=0, \qquad (5\cdot 5\cdot 2)$$

将此式作为“附加边界条件”，在实际求解中往往是方便的。

2.长直波导管内的场

我们研究截面为任意形状并沿长度方向都是一样的直波导管，假定波导管壁是理想导体，管内充以均匀介质，介电常数和磁导率分别为 ε 和 μ。选择波导管长度方向为 Z 轴，一束频率为 ω 的单色平面电磁波沿 Z 方向进入管内。

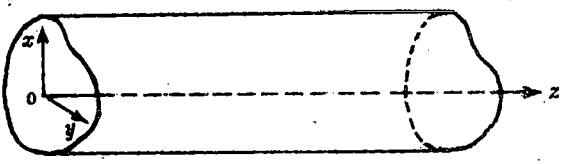


图 5.9

如前所述，管内电磁波是亥姆霍兹方程

$$(\nabla^2+\mu\varepsilon\omega^2)\vec{E}=0, \qquad (5\cdot 5\cdot 3)$$
$$(\nabla^2+\mu\varepsilon\omega^2)\vec{B}=0$$

满足$\nabla \cdot \vec{E}=0$、$\nabla \cdot \vec{B}=0$及边界条件（5·5·1）式的解。由于考虑沿 Z 轴方向传播的单色平面波，它应有传播因子$e^{i(k_z Z-\omega t)}$，因此我们寻求下面形式的$\vec{E}$和$\vec{B}$:

$$\begin{aligned}\vec{E}&=\vec{E}(x,y)e^{i(k_z Z-\omega t)},\\ \vec{B}&=\vec{B}(x,y)e^{i(k_z Z-\omega t)}.\end{aligned}\qquad(5\cdot5\cdot4)$$

定义拉普拉斯算符的横向部分∇_t^2:

$$\nabla t^2=\nabla^2-\frac{\partial^2}{\partial z^2},\qquad(5\cdot5\cdot5)$$

显然在直角坐标下

$$\nabla t=\vec{i}\partial_x+\vec{j}\partial_y,\qquad \nabla_t^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

将此算符和（5·5·4）式代入（5·5·3）式，得$\vec{E}$和$\vec{B}$的二维形式的波动方程。

$$\begin{aligned}[\nabla_t^2+(\mu\varepsilon\omega^2-k_z^2)]\vec{E}&=0,\\ [\nabla_t^2+(\mu\varepsilon\omega^2-k_z^2)]\vec{B}&=0.\end{aligned}\qquad(5\cdot5\cdot6)$$

矢量$\vec{E}=(E_x,\ E_y,\ E_z)$，$\vec{B}=(B_x,\ B_y,\ B_z)$各有三个分量，（5·5·6）式实际是六个标量方程，联立解这六个方程，可得到$\vec{E}$和$\vec{B}$，但是，实际上我们不这样做。下面可以证明 E_x、E_y 和 B_x、B_y，可以用 E_z 和 B_z 表示出来，所以只要解出 E_z 和 B_z，然后利用与其他分量的关系，可得到整个$\vec{E}$和$\vec{B}$。

我们把场也分解成平行于和垂直于 Z 轴的两部分，称为纵向部分和横向部分

$$\begin{aligned}\vec{E}&=\vec{E}_t+\vec{E}_z,\\ \vec{B}&=\vec{B}_t+\vec{B}_z,\end{aligned}\qquad(5\cdot5\cdot7)$$

其中

$$\begin{aligned}\vec{E}_z&=E_z\vec{e}_3\\ E_t&=\vec{E}-\vec{E}_z=(\vec{e}_3\times\vec{E})\times\vec{e}_3\end{aligned}\qquad(5\cdot5\cdot8)$$

$\vec{e}_3$是Z方向的单位矢量。类似地，$\vec{B}_z$和$\vec{B}_t$也可写出相应的表达式。利用$\nabla_t = \vec{e}_1\partial_x + \vec{e}_2\partial_y$，有

$$\vec{e}_3 \times \nabla_t B_z = \vec{e}_3 \times (\partial_x B_z \vec{e}_1 + \partial_y B_z \vec{e}_2). \qquad (5\cdot5\cdot9)$$

由$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = i\omega\vec{B}(\vec{r})$，仅考虑它的Z分量

$$i\omega B_z = \partial_x E_y - \partial_y E_x, \qquad (5\cdot5\cdot10)$$

把（5·5·10）式代入（5·5·9）式，并利用基矢之间的关系$e_i = \varepsilon_{ijk}e_j e_k$，得

$$i\omega\vec{e}_3 \times \nabla_t B_z = (\partial_y^2 Ex - \partial_x\partial_y E_y)\vec{e}_1 + (\partial_x^2 E_y - \partial_x\partial_y E_x)\vec{e}_2. \qquad (5\cdot5\cdot11)$$

由$\nabla \cdot \vec{E} = 0$，即$\partial_z E_z = -\partial_x E_x - \partial_y E_y$，有

$$-\nabla_t \partial_z E_z = (\partial_x^2 E_x + \partial_x\partial_y E_y)\vec{e}_1 + (\partial_x\partial_y E_x + \partial_y^2 E_y)\vec{e}_2. \qquad (5\cdot5\cdot12)$$

将(5·5·11)和(5·5·12)两式相加，注意$\vec{E}_t = E_x\vec{e}_1 + E_y\vec{e}_2$得

$$\nabla_t^2 \vec{E}_t = -\nabla_t(\partial_z E_z) + i\omega(\vec{e}_3 \times \nabla_t B_z). \qquad (5\cdot5\cdot13)$$

把（5·5·13）和（5·5·6）第一式比较，并引入$r^2 = \mu\varepsilon\omega^2 - k_z^2$就可以把$\vec{E}_t$用$E_z$和$B_z$表达出来

$$\vec{E}_t = \frac{1}{r^2}\left(\nabla_t \frac{\partial E_z}{\partial z} - i\omega\vec{e}_2 \times \nabla_t B_z\right). \qquad (5\cdot5\cdot14)$$

利用类似的步骤，或者用单色平面波所满足的麦氏方程组的对称性

$$\nabla \times \vec{E} = i\omega\vec{B}, \qquad \nabla \times \vec{B} = -i\mu\varepsilon\omega\vec{E},$$

只要把有$\vec{E}$处换成$\vec{B}$，有$\vec{B}$处换成$-\mu\varepsilon\vec{E}$，就可得

$$\vec{B}_t = \frac{1}{r^2}\left(\nabla_t \frac{\partial B_z}{\partial z} + i\mu\varepsilon\omega\vec{e}_3 \times \nabla_t E_z\right). \qquad (5\cdot5\cdot15)$$

由此可见，$\vec{E}$和$\vec{B}$的横向分量可以用其纵向分量来表示。

因此，我们只需要解E_z和B_z的下列二维形式的波动方程

$$(\nabla_t^2 + r^2)\begin{Bmatrix} E_z \\ B_z \end{Bmatrix} = 0, \qquad (5\cdot5\cdot16)$$

这组方程的边界条件，根据（5·5·1）式，在波导管壁上，$\vec{E}$的切向分量变为零，$\vec{B}$的法向分量变为零。由于$\vec{n}\times\vec{e}_3\neq 0$，由$\vec{n}\times\vec{E}=\vec{n}\times\vec{E}_z=0$，可导出在管壁面上

$$E_z|_s=0 \qquad (5\cdot 5\cdot 17)$$

而要保证$\vec{n}\cdot\vec{B}=\vec{n}\cdot\vec{B_t}=0$，根据（5·5·15）式，必须$\vec{n}\cdot\nabla_t\frac{\partial Bz}{\partial z}\Big|_s=0$，亦即在管壁面上选

$$\frac{\partial Bz}{\partial n}\Big|_s=0. \qquad (5\cdot 5\cdot 18)$$

所以，确定波导管内的电磁场的问题，归结为求二维波动方程$(\nabla_t^2+r^2)\psi=0$的解，ψ就是E_z或B_z，其边界条件为$\psi|_s=0$（对应于E_z，第一类边界条件），或$\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_s=0$（对应于$B_z$，第二类边界条件）。

下面分三种情况讨论。

（1）最简单的解是$B_z=0$，$E_z=0$，根据（5·5·14）和（5·5·15）式，要使$\vec{E_t}$和$\vec{B_t}$不为零，必须$r^2=0$，即$k_z^2=\mu\varepsilon\omega^2$，这是熟知的单色平面波的关系。它就是沿Z方向传播的平面波，波矢$\vec{k}=k_z\vec{e}_3$，传播速度$V=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$，$\vec{E}$和$\vec{B}$没有纵分量，是典型的横波，通常称为TEM波。它有如下重要性质：

TEM波的磁场与电场之间关系如同无穷大介质中平面电磁波的关系一样

$$\vec{B}_{TEM}=\sqrt{\mu\varepsilon}\,\vec{e}_3\times\vec{E}_{TEM},$$

TEM波的偏振方向，及波数和频率之间的关系都同无穷大介质中传播的单色平面波一样。

由$\nabla\times\vec{E}(\vec{r})=i\omega B(\vec{r})$和$\nabla\cdot\vec{E}(\vec{r})=0$式看到，$E_z=0$，

$B_z=0$ 意味着 $\vec{E}_t=\vec{E}_{TEM}$ 满足

$$\nabla_t\times\vec{E}_{TEM}=0,\qquad \nabla_t\cdot\vec{E}_{TEM}=0.$$

这就是说 $\vec{E}_{TEM}$ 是二维静电问题的一个解，所以波导管表面是一等势面，里面的电场为零，TEM 波不能在电导率为无穷大的单个中空柱形导体内存在。要传播 TEM 波，必须有两个或两个以上的侧表面，同轴电缆和平行导线传输线就是这种情况。

另外，TEM 波对任意频率 ω 来说，k_z 是实数。由后面讨论可知，这意味着 TEM 波不存在截止频率。

(2) 横磁波（TM 波），B_z 处处为零，$\vec{B}$ 没有纵向分量。而 $E_z\neq0$，故 TM 波又叫做 E 波，代表 $\vec{E}$ 有纵向分量。它相应的边界条件是 $E_z|_s=0$，通过解波动方程 $(\nabla_t^2+r^2)E_z=0$ 可得到 E_z，再代入（5·5·14）和（5·5·15）式，可得

$$\vec{E}_t=i\frac{k_z}{r^2}\nabla_t E_z,$$

$$\vec{B}_t=i\frac{k}{cr^2}\vec{e}_3\times\nabla_t E_z. \qquad (5\cdot5\cdot19)$$

(3) 横电波（TE 波），处处 $E_z=0$ 而 $B_z\neq0$，故又叫 H 波。相应的边界条件 $\left.\frac{\partial B_z}{\partial n}\right|_s=0$，解波动方程 $(\nabla_t^2+r^2)B_z=0$，可求得 B_z，代入（5·5·15）和（5·5·14）式，可得

$$\vec{B}_t=i\frac{k_z}{r^2}\nabla_t B_z$$

$$\vec{E}_t=-i\frac{ck}{r^2}\vec{e}_3\times\nabla_t B_z \qquad (5\cdot5\cdot20)$$

3.矩形波导管

现在求矩形波导内的电磁波解，选一直角坐标系。如图 5.10，取波导管内壁面为 x=0 和 a，

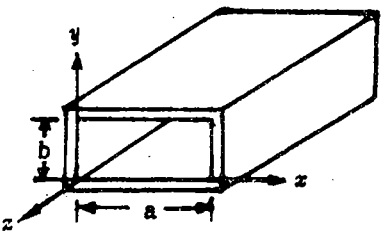


图 5.10

y=0 和 b，Z 轴沿传播方向。如上所述，确定波导管内的电磁场的问题，归结为求二维波动方程

$$(\nabla_t^2 + r^2)\psi = 0 \qquad (5 \cdot 5 \cdot 21)$$

的解,其中 $r^2=\mu\varepsilon\omega^2-k_z^2=k^2-k_z^2$ 即

$$k_z^2 = \mu\varepsilon\omega^2 - r^2. \qquad (5 \cdot 5 \cdot 22)$$

对一定的边界面，方程 $(5 \cdot 5 \cdot 21)$ 只对 r 的一定本征值 r_λ 才存在解，对一定的 r_λ，给定了一定的波型。相应有

$$k_\lambda^2 = \mu\varepsilon\omega^2 - r_\lambda^2.$$

引入

$$\omega_\lambda^2 = \frac{r_\lambda^2}{\mu\varepsilon}, \qquad (5 \cdot 5 \cdot 23)$$

故

$$k_\lambda^2 = \mu\varepsilon(\omega^2 - \omega_\lambda^2). \qquad (5 \cdot 5 \cdot 24)$$

只有当激发频率 $\omega^2>\omega_\lambda^2$ 时，即 $k_\lambda^2>0$，才能使波导管内的电磁波沿 Z 方向传播。而 $\omega^2<\omega_\lambda^2$ 时，即 $k_\lambda^2<0$，k_z 变为虚数，这时传播因子 e^{ikzZ} 变为衰减因子。在这种情形下，电磁场不再是沿波导管传播的波，而是沿 Z 轴方向振幅不断衰减的电磁波振荡。或者说，电磁波被全部反射回来，根本传不过去。能够在波导管内传播的波的最低频率 ω_λ 称作该波型的截止频率。

TM 波

在直角坐标系中，$(5 \cdot 5 \cdot 21)$ 式可写为

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2 + r^2)\psi = 0, \qquad (5 \cdot 5 \cdot 25)$$

相应的 TM 波的边界条件是 $\psi|_s=0$，分离变量，设

$$\psi(x,y)=X(x)Y(y),$$

代入(5 · 5 · 25)式有

$$\frac{d^2X}{dx^2}+p^2X=0,$$
$$\frac{d^2Y}{dy^2}+q^2Y=0, \qquad (5\cdot5\cdot26)$$
$$r^2=p^2+q^2.$$

解(5·5·26)式得

$$X=A\sin px+B\cos px,$$
$$Y=C\sin qy+D\cos qy, \qquad (5\cdot5\cdot27)$$

其中 A、B、C、D 为待定系数，由边界条件 $\psi|_s=0$ 确定，该边界条件也可写为

$$\psi|_{x=0}=\psi|_{x=a}=\psi|_{y=0}=\psi|_{y=b}=0. \qquad (5\cdot5\cdot28)$$

由 $X|_{x=0}=0$ 和 $Y|_{y=0}=0$，容易定出 B=0，D=0，再考虑 $X|_{x=a}$ 和 $Y|_{y=b}=0$，得

$$p=\frac{m\pi}{a}, \qquad m=1,2,3,\cdots$$
$$q=\frac{n\pi}{b}, \qquad n=1,2,3,\cdots \qquad (5\cdot5\cdot29)$$

m 和 n 分别代表沿矩形两边的半波数目,相应地

$$r=r_{mn}=\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}} \qquad (5\cdot5\cdot30)$$

是由边界条件决定的一系列本征值。

把 B=0，D=0 和 (5·5·29) 代入 (5·5·27) 式，可得

$$\psi=AC\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}ye^{i(kzZ-\omega t)}.$$

因为 TM 波中 $\psi=E_z$，则常数 $AC=E_0$，最后得

$$\psi_{mn} = E_z = E_0 \sin\frac{m\pi}{a}x \sin\frac{n\pi}{b}y e^{i(k_z Z - \omega t)}$$

$$(m、n = 1,2,3,\cdots) \qquad (5 \cdot 5 \cdot 31)$$

给定一对 m、n，就给定了 TM 波的一定波型，通常叫做 TM_{mn} 波。将此式代入（5 · 5 · 19）式，得出 TM 波场的全部分量

$$E_x = i\frac{m\pi}{a}\frac{k_z}{r^2}E_0 \cos(\frac{m\pi x}{a})\sin(\frac{n\pi y}{b})e^{i(k_z Z - \omega t)},$$

$$E_y = i\frac{n\pi}{b}\frac{k_z}{r^2}E_0 \sin(\frac{m\pi x}{a})\cos(\frac{n\pi y}{b})e^{i(k_z Z - \omega t)},$$

$$E_z = E_0 \sin(\frac{m\pi x}{a})\sin(\frac{n\pi y}{b})e^{i(k_z Z - \omega t)}, \qquad (5 \cdot 5 \cdot 32)$$

$$B_x = -i\frac{n\pi}{b}\frac{k}{cr^2}E_0 \sin(\frac{m\pi x}{a})\cos(\frac{n\pi y}{b})e^{i(k_z Z - \omega t)},$$

$$B_y = i\frac{m\pi}{a}\frac{k}{cr^2}E_0 \cos(\frac{m\pi x}{a})\sin(\frac{n\pi y}{b})e^{i(k_z Z - \omega t)},$$

$$B_z = 0.$$

TE 波

根据类似地的讨论，并用边界条件 $\left.\frac{\partial B_z}{\partial n}\right|_s = 0$ 得

$$\psi_{mn} = B_z = B_0 \cos\frac{m\pi}{a}x \cos\frac{n\pi}{b}y e^{i(kzZ - \omega t)}$$

$(m、n = 0,1,2,\cdots$；但m与n不能同时为零$)$. $\qquad (5 \cdot 5 \cdot 33)$

将此式代入（5 · 5 · 20）式，得出 TE 波场的全部分量

$$E_x = -i\frac{n\pi}{b}\frac{ck}{r^2}B_0 \cos(\frac{m\pi x}{a})\sin(\frac{n\pi y}{b})e^{i(kzZ - \omega t)},$$

$$E_y = i\frac{m\pi}{a}\frac{ck}{r^2}B_0 \sin(\frac{m\pi x}{a})\cos(\frac{n\pi y}{b})e^{i(kzZ - \omega t)},$$

$$E_z = 0,$$

$$B_x = -i\frac{m\pi}{a}\frac{k_z}{r^2}B_0\sin(\frac{m\pi x}{a})\cos(\frac{n\pi y}{b})e^{i(kzZ-\omega t)},$$

$$B_y = -i\frac{n\pi}{b}\frac{k_z}{r^2}B_0\cos(\frac{m\pi x}{a})\sin(\frac{n\pi y}{b})e^{i(kzZ-\omega t)},$$

$$B_z = B_0\cos(\frac{m\pi x}{a})\cos(\frac{n\pi y}{b})e^{i(kzZ-\omega t)} \qquad (5\cdot5\cdot34)$$

由此可以看出，波导管内的电磁波（称作导波）具有下列几点性质:

第一，波导管内的电磁波是以频率 ω 沿 Z 方向传播的行波、但在 xy 截面上由于边界条件制约而形成驻波。不同的 m 和 n 的组合对应不同的场结构，称为不同的波型或模式。一组(m,n)的值组成一个波型，记为 TM_{mn} 或 TE_{mn}。实际问题中，总是选取一个特定的波型来传送电磁波的。

对应一定波型的最低截止频率$\omega_{mn}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}r_{mn}$，则

$$\omega_{mn}=\frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (5\cdot5\cdot35)$$

相应的临界波长

$$\lambda_{mn}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{2\pi}{\omega_{mn}}=\frac{2}{\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}} \qquad (5\cdot5\cdot36)$$

对一定波型，临界波长仅由波导管尺寸所决定，欲使 Z 方向有传播的行波，必须使 k_z 为实的,即要求外来电磁波的频率 $\omega>\omega_{mn}$，或它的波长 $\lambda<\lambda_{mn}$。也就是说，对于一定频率 ω 的外来电磁波，波导管只能传播一定 ω_{mn} 波型的波，意味着波导管有一定的选择性，只允许 $\lambda<\lambda_{mn}$ 的波在其中通过。由于对 TM 波 m,n 中任一个都不可为零，对 TE 波 m,n 中可取一个为零，因此具有最低截止频率的是 TM_{11} 和 TE_{10}(或 TE_{01}) 波型。

第二，虽然在波导管内的电磁波整个振荡频率是 ω，但是它有三种不同波长和速度

$$(1)\quad \lambda_0=\frac{2\pi}{k}=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\omega}c, \tag{5·5·37}$$

λ_0 是相应于频率 ω 的真空中单色平面波的波长，它对应的传播速度是光速 c。

(2) 垂直于波导方向的波长（横向）

$$\lambda_{\perp mn}=\frac{2\pi}{|\vec{k}_\perp|}=\frac{2}{\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}}=\lambda_{mn} \tag{5·5·38}$$

就是波导管所允许给定的波型的临界波长。

(3) 平行于波导方向的波长

$$\lambda_{//}=\frac{2\pi}{k_z}=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}-k_\perp^2}}=\frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{\perp mn}}\right)^2}}, \tag{5·5·39}$$

相应的相速度

$$V_{//}=\frac{\omega}{k_z}=\frac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_{mn}}{\omega}\right)^2}}=\frac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{\perp mn}}\right)^2}} \tag{5·5·40}$$

上面谈到，形成 Z 方向行波的条件是 $\omega>\omega_{mn}$，因此 $V_{//}>c$。下面我们将会看到，这并不与狭义相对论的结论有矛盾。

由（5·5·40）式看到，对不同波型 ω_{mn} 是不同的，因此 $V_{//}$ 也是不同的。在波导管中电磁波频率虽然都是 ω，但有不同的相速度 $V_{//}$，说明波导管中会自动发生色散。

第三，以 TM 波为例，看看电磁波在波导管内是怎样传播的。对 TM 波，$B_z=0$，并且

$$\vec{E}_{tmn}^{TM} = \frac{ik_z}{r_{mn}^2} \nabla_t \psi_{mn},$$

$$\psi_{mn} = E_0 \sin\frac{m\pi}{a} x \sin\frac{n\pi}{b} y e^{i(k_z Z - \omega t)}.$$

由上两式当仅考虑 x=0 的截面上时，得

$$\vec{E}_t^{TM} = A_0 \vec{e}_1 \sin\frac{n\pi}{b} y e^{i(kzZ - \omega t)}, \qquad (5 \cdot 5 \cdot 41)$$

这是沿 Z 方向传播的波，但电场是沿 x 方向振动。其中 A_0 是 $\vec{E}_t^{TM}$ 的振幅，将上式用复数形式来表示，有

$$\vec{E}_t^{TM} = \frac{A_0}{2i} \vec{e}_1 \left\{ e^{i\left[\left(\frac{n\pi}{b}\right)y + kzZ - \omega t\right]} - e^{i\left[-\left(\frac{n\pi}{b}\right)y + k_z Z - \omega t\right]} \right\} \qquad (5 \cdot 5 \cdot 42)$$

定义波矢

$$\vec{k}_1 = \frac{n\pi}{b} \vec{e}_2 + k_z \vec{e}_3$$

$$\vec{k}_2 = -\frac{n\pi}{b} \vec{e}_2 + k_z \vec{e}_3$$

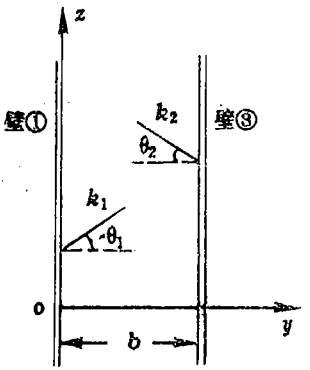


图 5.11

将(5 · 5 · 42)看成两个平面波的迭加，第一个的波矢为 $\vec{k}_1$，第二个的为 $\vec{k}_2$。这两个波矢的相对方向如图 5.11 所示。$\vec{k}_1$ 和 $\vec{k}_2$ 有相同的 Z 分量，而 y 分量仅差一个负号，所以它们与波导管有相同的夹角

$$\theta_1 = \theta_2 = tg^{-1}\frac{k_z b}{n\pi} \qquad (5 \cdot 5 \cdot 43)$$

因此，我们认为其中一个波是另一个波在波导管壁反射而来的。电磁波的某一波型在波导管内以频率 ω 振动，沿着它固有的波矢 $\vec{k}$（由波型和边界条件而定）方向向前传播，当它碰到管壁①时就反射，再沿反射后的波矢继续前进，碰到管壁③时又反射，

波矢$\vec{k}$曲折前进，碰到管壁①时再次反射。如此波导内的电磁波不断地在管壁①和③被多次反射，从而曲折向前（沿 Z 方向）传播。如图 5.12 所示。但是不同波型的波反射角度不同。由（5 · 5 · 43）式看出波型数 n 愈大或者愈接近截止频率，反射角愈小。沿波导管单位长度，高波型数的波的反射次数比低波型数的波多。某一波型在其截止频率时 $k_z=0$，（5 · 5 · 43）式给出 $\theta_1=\theta_2=0$，相当于图 5.12 中两个波是垂直于管壁①和③射入，$\vec{k}_1$ 和 $\vec{k}_2$ 没有平行于波导管轴向方向（Z 方向）的分量，该波型的波只是垂直于管壁来回反射，而不能沿 Z 轴向前传播。

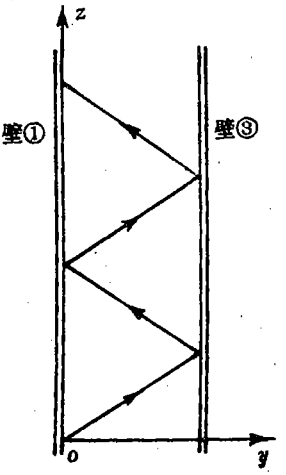


图 5.12

[例 5–16] 对于内壁面为 x＝0 和 a、y＝0 和 b 的矩形波导，求 TE_{10}、TE_{01}、TE_{11} 波的截止频率和临界波长。

解：矩形波导管对应一定波型的最低截止频率和临界波长由（5 · 5 · 35）和（5 · 5 · 36）式给出：

$$\omega_{mn}=\frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\lambda_{mn}=\frac{2}{\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

对 TE_{10} 波，m＝1，n＝0，

$$\omega_{10}=\frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{1}{a},\qquad \lambda_{10}=2a;$$

对 TE_{01} 波，m＝0，n＝1，

$$\omega_{01}=\frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{1}{b},\qquad \lambda_{01}=2b$$

对 TE_{11} 波，m＝1，n＝1，

$$\omega_{11}=\frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}},\quad \lambda_{11}=\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}.$$

由此看到，波导管横截面边长$a=\frac{\lambda_{10}}{2}$，$b=\frac{\lambda_{01}}{2}$，分别等于 TE_{10} 波和 TE_{01} 波的半波长，TE_{10} 或 TE_{01} 波具有最低截止频率，它是实际应用中最常用的波型。

[例 5-17] 对边长 a＝7cm，b＝3cm 的矩形波导管，我们计算得下列波型的临界波长：

波型	TE_{10}	TE_{20}	TE_{30}	TE_{01}	TE_{02}	TE_{11}	TE_{21}	TE_{31}	TE_{22}
λ(cm)	14	7	4.7	6	3	5.5	4.6	3.7	2.8

可见对于这种尺寸的波导，$\lambda>14$cm 的电磁波完全不能传播；$\lambda<14$cm 时，TE_{10} 波可以传输；$\lambda<7$cm 时，TE_{20} 和 TE_{10} 波都可传输；故波长范围在 7cm＜λ＜14 cm 时，只能传输 TE_{10} 波，而其他波均被截止，这样就可以实现单一波型传输。

4.波导管内能量的传输

对已知的$\vec{E}_t$，磁场由下式给出

$$\vec{H}=-\frac{i}{\mu\omega}\nabla\times\vec{E}_t. \qquad (5\cdot5\cdot44)$$

将（5·5·41）式代入（5·5·44）式得

$$\vec{H}=-\left\{\frac{k_z}{\omega\mu}A_0(\sin\frac{n\pi}{b}y)e^{i(kzZ-\omega t)}\vec{e}_2\right.$$

$$+\frac{A_0}{\omega\mu}\left(\frac{n\pi}{b}\right)\left(\cos\frac{n\pi}{b}y\right)e^{i(kzZ-\omega t)}\vec{e}_3\Big\}, \quad (5\cdot5\cdot45)$$

式中的$\vec{H}$可分为两部分：$\vec{H}=\vec{H}_\perp+\vec{H}_z$，其中

$$\vec{H}_\perp=\frac{1}{\omega\mu}\vec{k}_z\times\vec{E}_t. \quad (5\cdot5\cdot46)$$

因(5·5·41)式中$\vec{E}_t$是沿 x 方向的，$\vec{e}_1\times\vec{e}_3=-(\vec{e}_2)$,故$\vec{H}_z$部分对能流密度$\vec{S}$没有贡献，我们只考虑

$$\vec{E}_t\times\vec{H}_\perp^*=\frac{1}{\omega\mu}\vec{E}_t\times(\vec{k}_z\times\vec{E}_t)^*=\frac{\vec{k}_z}{\omega\mu}(\vec{E}_t)^2,$$

所以平均能流密度为

$$<\vec{S}>=\frac{1}{2}Re(\vec{E}_t\times\vec{H}_\perp)=\frac{k_z}{2\omega\mu}\vec{e}_3|\vec{A}_0|^2\sin^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right). \quad (5\cdot5\cdot47)$$

由(5·5·41)式得

$$\vec{E}^*\cdot\vec{D}=\varepsilon|\vec{E}_t^{TM}|^2=|A_0|^2\varepsilon\sin^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right).$$

由(5·5·45)式得

$$\vec{B}^*\cdot\vec{H}=\mu|\vec{H}|^2=|A_0|^2\Big\{\frac{k_z^2}{\omega^2\mu}sin^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right)+\frac{1}{\omega^2\mu}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\cos^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\Big\},$$

所以平均能量密度为

$$<w_{EM}>=\frac{1}{4}[\vec{B}^*\cdot\vec{H}+\vec{E}^*\cdot\vec{D}]$$

$$=\frac{1}{4}|A_0|^2\left\{\left(\varepsilon+\frac{k_z^2}{\omega^2\mu}\right)\sin^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right)+\frac{1}{\omega^2\mu}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\cos^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\right\} \quad (5\cdot5\cdot48)$$

由 (5·5·47) 和 (5·5·48) 式看出能流密度和能量密度对波导管截面而言是不均匀的,将$<\vec{S}>$对截面积分，得波导管内的总

功率流

$$P=\int <\vec{S}> \cdot d\vec{\sigma}=\int <\vec{S}> \cdot a\mathrm{d}y\vec{e}_3,$$

即

$$P=\int_0^b \frac{k_z|A_0|^2}{2\omega\mu}\sin^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right)a\mathrm{d}y=\frac{abk_z|A_0|^2}{4\omega\mu}. \qquad (5\cdot5\cdot49)$$

类似地，单位长度波导管内的场能

$$U=\int_0^b <w_{EM}>a\mathrm{d}y=\frac{1}{4}ab\varepsilon|A_0|^2 \qquad (5\cdot5\cdot50)$$

如果我们认为单位长度波导管所储存能量以速度 V_g 沿波导管传输，则有

$$V_g=\frac{k_z}{\omega\mu\varepsilon}, \qquad (5\cdot5\cdot51)$$

因为 $V_{//}=\frac{\omega}{k_z}$,所以

$$V_g=\frac{1}{\mu\varepsilon}\frac{1}{V_{//}} \qquad (5\cdot5\cdot52)$$

在真空中 $V_g=\frac{k_z}{\omega\mu_0\varepsilon_0}=\frac{c^2}{V_{//}}$,得

$$V_{//}V_g=c^2. \qquad (5\cdot5\cdot53)$$

由前面讨论可知 $V_{//}>c$,所以 $V_g<c$，即真空中能量传输速度是小于 c 的。狭义相对论要求物理讯号的传播速度小于 c，现在正是这一要求的结果。

下面证明上述 V_g 就是群速度。群速度定义

$$V_g=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k_\lambda}, \qquad (5\cdot5\cdot54)$$

由(5·5·24)式

$$k_\lambda=\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\omega^2-\omega_\lambda^2},$$

此式两边对k_λ进行微商

$$1=\sqrt{\mu\varepsilon}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k_\lambda}\Big/\sqrt{1-\frac{\omega_\lambda^2}{\omega^2}},$$

所以

$$V_g=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k_\lambda}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{1-\left(\frac{\omega_\lambda}{\omega}\right)^2} \qquad (5\cdot5\cdot55)$$

这正是（5·5·52）式，说明这里的群速度和波动理论中定义的完全相同。

[例 5-18] 对于 2 厘米×2 厘米方波导中频率为 15 千兆赫的 TE_{10} 波，(1) 求波矢$\vec{k}$；(2) 写出电磁场各分量表式；(3) 求波长；(4) 求电磁波的相速和群速。

解：(1)波模为 (m,n)= (1，0) 所以$\vec{k}$的各分量为

$$k_x=\frac{m\pi}{a}=50\pi\text{米}^{-1},\quad k_y=0,$$

$$K_z=\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-k_x^2-k_y^2}=\sqrt{\left(\frac{2\pi\times15\times10^9}{3\times10^8}\right)^2-(50\pi)^2}$$

$$=86.6\pi\text{米}^{-1}$$

(2)电磁分量

$$E_x=0,\qquad E_y=A_2\sin k_x x e^{i(kzZ-\omega t)},$$

$$E_z=0;$$

$$H_x=-\frac{k_z}{\omega\mu_0}A_2\sin k_x x e^{i(kzZ-\omega t)},\quad H_y=0$$

$$H_z=-\frac{i}{\omega\mu_0}k_x A_2\cos k_x x e^{i(k_z Z-\omega t)}$$

(3)波长$\lambda=\frac{2\pi}{k_z}=\frac{2\pi}{86.6\pi}=0.023$米，作为比较，该频率的电磁波在自由空间的波长

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{2\pi(3\times10^8)}{2\pi(15\times10^9)} = 0.02\text{米},$$

可见 $\lambda > \lambda_0$。

(4) $V_p = \frac{\omega}{k_z} = f\lambda = (15\times10^9)\times(0.023) = 3.45\times10^8$ 米／秒,

$$V_g = \frac{c^2}{V_p} = \frac{(3\times10^8)^2}{3.45\times10^8} = 2.61\times10^8\text{米／秒},$$

注意在此 $V_p > c$, 但 $V_g < c$，且恒有 $V_p V_g = c^2$。

例 5–19 矩形波导管宽为 a，高为 b，在其中传播的 TE_{10} 波为

$$E_x = 0,$$

$$E_y = \frac{i\omega\mu a}{\pi} H_0 \sin\frac{\pi x}{a} e^{-i(\omega t - kzZ)}, \quad (5\cdot5\cdot56)$$

$$E_z = 0,$$

求 TE_{10} 波的传输功率和管壁上的电荷与电流。

解: 由 $\vec{H} = -\frac{i}{\omega\mu}\nabla\times\vec{E}$ 可得矩形波导中 TE_{10} 波的磁场为

$$H_x = -\frac{ik_z a}{\pi} H_0 \sin\frac{\pi x}{a} e^{-i(\omega t - kzZ)},$$

$$H_y = 0, \quad (5\cdot5\cdot57)$$

$$H_z = H_0 \cos\frac{\pi x}{a} e^{-i(\omega t - kzZ)}.$$

于是平均能流密度

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{E}^* \times \vec{H}) = \frac{1}{2}\left(\frac{aH_0}{\pi}\right)^2 \omega\mu k_z \sin^2(\frac{\pi}{a}x)\vec{e}_z,$$

传输功率

$$P = \int_0^a\int_0^b \langle S \rangle \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{a^3 b\omega\mu k_z H_0^2}{4\pi^2} \quad (5\cdot5\cdot58)$$

波导壁面上的电荷分布决定于关系式 $\sigma_f=\vec{n}\cdot\vec{D}$。在 x=0 和 x=a 的面上电场为零，则

$$\sigma_f|_{x=0}=\sigma_f|_{x=a}=0.$$

另外两个面上

$$\begin{aligned}\sigma_f|_{y=0}&=\vec{e}_y\cdot\varepsilon E_y\vec{e}_y=\varepsilon E_y\\&=\frac{i\omega\varepsilon\mu a}{\pi}H_0\sin\frac{\pi x}{a}e^{-i(\omega t-kzZ)}.\\\sigma_f|_{y=b}&=-\vec{e}_y\cdot\varepsilon E_y\vec{e}_y=-\varepsilon E_y\\&=-\frac{i\omega\varepsilon\mu a}{\pi}H_0\sin\frac{\pi x}{a}e^{-i(\omega t-kzZ)}.\end{aligned}\qquad(5\cdot5\cdot59)$$

管壁电流由 $\vec{\alpha}_f=\vec{n}\times\vec{H}$ 求得：

$$\begin{aligned}&\vec{\alpha}_f|_{x=0}=\vec{e}_x\times(H_z\vec{e}_z)=-H_0e^{-i(\omega t-kzZ)}\vec{e}_y,\\&\vec{\alpha}_f|_{x=a}=-\vec{e}_x\times(H_z\vec{e}_z)=-H_0e^{-i(\omega t-kzZ)}\vec{e}_y,\\&\vec{\alpha}_f|_{y=0}=\vec{e}_y\times(H_x\vec{e}_x+H_z\vec{e}_z)\\&=(\frac{ik_zaH_0}{\pi}\sin\frac{\pi x}{a}\vec{e}_z+H_0\cos\frac{\pi x}{a}\vec{e}_x)e^{-i(\omega t-kzZ)},\\&\vec{\alpha}_f|_{y=b}=-\vec{e}_y\times(H_x\vec{e}_x+H_z\vec{e}_z)\\&=-(\frac{ik_zaH_0}{\pi}\sin\frac{\pi x}{a}\vec{e}_z+H_0\cos\frac{\pi x}{a}\vec{e}_x)e^{-i(\omega t-kzZ)}.\end{aligned}\qquad(5\cdot5\cdot60)$$

TE_{10} 波的电磁场如图 5.13 所示，图中带箭头的实线表示 $\vec{H}$，叉、点和虚线表示 $\vec{E}$。TE_{10} 波的管壁电流分布如图 5.14 所示。在 x=0 和 x=a 的面上，仅有横向电流而没有纵向电流。在 y=0 和 y=b 的面的中线上（即 $x=\frac{a}{2}$ 处），横向电流为零。因此，开在此中线上的纵向裂缝不会影响 TE_{10} 波的传播，这种裂缝广泛地应用于探针测量波导内物理量的技术中。

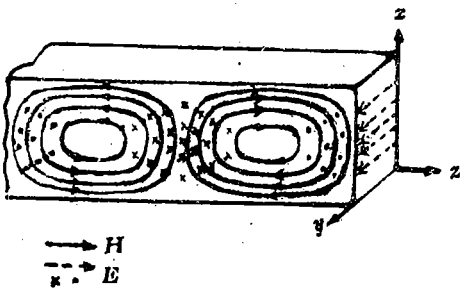


图 5.13

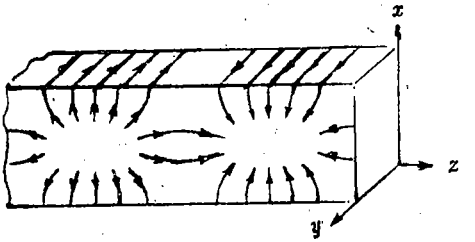


图 5.14

§5·6 谐振腔内的电磁波

低频电磁波是利用 LC 电路组成的振荡器激发的。当频率增高时，这种振荡回路有强烈的辐射损耗和焦耳热损耗，不能有效地产生高频振荡。在微波范围，必须用良导体为壁的谐振腔来激发高频电磁波，在光学中，也采用由反射镜组成的光学谐振腔来产生激光束。

讨论谐振腔内的电磁振荡，也就是求亥姆霍兹方程

$$\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=0$$

满足 $\nabla\cdot\vec{E}=0$ 及理想导体边界条件的解。当腔的形状和大小给定时，只对 ω 的某些完全一定的值有解，这些值称为谐振腔电磁振荡的本征频率。为简单起见，我们分析矩形谐振腔内的电磁

振荡（如图 5.15）。腔内电场和磁场的任一直角分量都满足方程

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0 \qquad (5\cdot 6\cdot 1)$$

其中

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2\mu\varepsilon. \qquad (5\cdot 6\cdot 2)$$

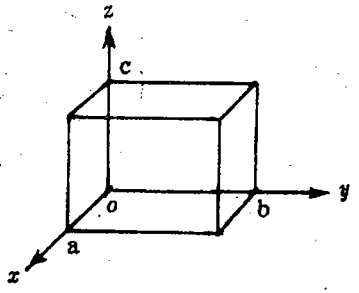


图 5.15

利用分离变量法求得ψ的驻波解

$$\psi(x,y,z) = (C_1\cos k_x x + D_1\sin k_x x)\cdot(C_2\cos k_y y + D_2\sin k_y y)\cdot(C_3\cos k_z z + D_3\sin k_z z) \qquad (5\cdot 6\cdot 3)$$

代入 x＝0,y＝0,z＝0 面上的边界条件$\frac{\partial E_n}{\partial n}=0$和$\vec{n}\times\vec{E}=0$，可得电场的三个分量为

$$\begin{aligned} E_x &= A_1\cos k_x x\sin k_y y\sin k_z z,\\ E_y &= A_2\sin k_x x\cos k_y y\sin k_z z,\\ E_z &= A_3\sin k_x x\sin k_y y\cos k_z z, \end{aligned} \qquad (5\cdot 6\cdot 4)$$

再考虑 x＝a, y＝b, z＝c 面上的边界条件$\vec{n}\times\vec{E}=0$，得

$$k_x = \frac{m\pi}{a},\quad k_y = \frac{n\pi}{b},\quad k_z = \frac{l\pi}{c}, \qquad (5\cdot 6\cdot 5)$$

$$m、n、l = 0,1,2\cdots$$

由（5·6·4）式看出，m、n、l 中不能两个同时为零,三者分别代表沿矩形三边所含的半波数目。再由方程$\nabla\cdot\vec{E}=0$得

$$k_x A_1 + k_y A_2 + k_z A_3 = 0, \qquad (5\cdot 6\cdot 6)$$

因此，A_1，A_2 和 A_3 中只有两个是独立的。

当满足关系（5·6·5）和（5·6·6）式时，（5·6·4）式

代表谐振腔内的一种谐振波型，或称为腔内电磁场的一种本征振荡。对每一组 (m,n,l)值，谐振频率由 (5·6·2) 和 (5·6·5) 式给出

$$\omega_{mnl}=\frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2+\left(\frac{l}{c}\right)^2}, \qquad (5\cdot6\cdot7)$$

ω_{mnl} 称为谐振腔的本征频率。若 a≥b≥c，则最低频率的谐振波型为 (1，1，0)，其谐振频率为

$$f_{110}=\frac{1}{2\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}, \qquad (5\cdot6\cdot8)$$

相应的电磁波波长为

$$\lambda_{110}=\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}, \qquad (5\cdot6\cdot9)$$

此波长与谐振腔的线度同一数量级。在微波技术中通常用谐振腔的最低波型来产生特定频率的电磁振荡。

对于每一组 (m,n,l)值，有两种独立的偏振波型，它们的$\vec{E}$互相垂直。对于 TE 波来说，$E_z=0$，利用 (5·6·4) 式和$\vec{B}=-\frac{i}{\omega}\nabla\times\vec{E}(\omega=ck)$，可以求出场的全部分量，注意 (5·6·6) 式中 $A_3=0$，并取

$$\frac{1}{\omega}(A_1k_y-A_2k_x)=B_0,\quad r^2=k_x^2+k_y^2, \qquad (5\cdot6\cdot10)$$

得到

$$A_1=B_0\left(\frac{n\pi}{b}\right)\frac{\omega}{r^2};\quad A_2=-B_0\left(\frac{m\pi}{a}\right)\frac{\omega}{r^2}. \qquad (5\cdot6\cdot11)$$

因此TE波场的空间部分为

$$B_z=iB_0\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{l\pi z}{c},$$

$$B_x = -iB_0\left(\frac{m\pi}{a}\right)\frac{k_z}{r^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\cos\frac{l\pi z}{c},$$

$$B_y = -iB_0\left(\frac{n\pi}{b}\right)\frac{k_z}{r^2}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\cos\frac{l\pi z}{c},$$

$$E_x = B_0\left(\frac{n\pi}{b}\right)\frac{ck}{r^2}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{l\pi z}{c}, \qquad (5\cdot 6\cdot 12)$$

$$E_y = -B_0\left(\frac{m\pi}{a}\right)\frac{ck}{r^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{l\pi z}{c},$$

$$E_z = 0.$$

对于同一组 (m,n,l)值来说，谐振腔内另一种独立的偏振波型(TM 波)，可以用类似的方法求出。由所得结果可知，$\vec{B}$和$\vec{E}$的表达式之间相差一个因子 i,表明电场和磁场在时间上存在 $\pi/2$ 的位相差。另外，由 m,n,l 的不同组合对应的同一个谐振频率，显然可以有一个以上的波型，这些波型叫简并波型。

习 题 五

1.试推导 $\rho\neq 0$，$\vec{J}\neq 0$ 时，线性均匀导电介质中的波动方程。

2.运用麦克斯韦方程组证明洛伦兹引理：如果两个场 a 和 b 是简谐的而且频率相同，则在线性各向同性介质中源区以外的地方

$$\nabla\cdot(E_a\times H_b - E_b\times H_a) = 0$$

3.空间中有两个互相独立的单色平面波，其频率相同，振幅相同，都沿 Z 轴正方向传播，它们的场量分别为(E_x,H_y)和(E_y,H_x)，假定这两个波在空间任意一点都有相同的位相差 φ，以电场为例，分下列三种情况说明电磁波的偏振(极化)特性：(1) $\varphi=0$；(2) $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$；(3)φ 为某一确定值。

4.在定态情形下，证明：

(1) 麦氏方程组中四个方程不是独立的，由场量的旋度的两个方程可

导出其它两个；

(2) 电磁场的四个边值关系式也不是独立的，由界面法向单位矢$\vec{n}$与场量叉乘的两个关系式可导出其它两个。

5.求频率为ω的电磁波在绝缘介质、良导体、不良导体中传播时的相速度。

6.已知铜的电导率为$\sigma=5\times10^{7}$(欧·米)$^{-1}$,海水$\sigma=5$(欧·米)$^{-1}$，铜的相对介电常数$\varepsilon_r=1$，海水$\varepsilon_r\approx80$(对无线电波和微波)。并设$\mu=\mu_0$，试求：

(1) 频率为20千赫的电磁波在铜和海水中的穿透深度；

(2) 频率为20千赫的电磁波在真空中、海水中或铜中传播时的波阻抗(E/H)。

7.一张薄导体片，与电磁波传播的方向垂直。面积是ab平方米，厚度是ΔZ米。证明薄片中电磁波的平均能量损耗恰好等于薄片中产生的热能。

8.平面电磁波由真空斜入射到导电介质表面上，入射角为θ。求导电介质中电磁波的相速度和衰减长度。若导电介质为金属，结果如何？

9.有一沿Z轴方向传播的单色平面电磁波正入射到两绝缘介质交界平面上，证明在此两种介质中，电磁波的能流密度对时间的平均值相等。

10.电磁波垂直地入射于折射率为n的电介质。证明：在电介质上敷一层另一种电介质，其折射率是$n^{1/2}$，厚度是$(1/4)\lambda$（λ为波长），则反射波就可以消除。

11.频率为ω的平面电磁波从真空正入射到复折射率为$n(\omega)$的半无限介质平面上。

(1) 求反射系数和透射系数；

(2) 计算作为(x，y，z)的一个函数的值

$$Re[i\omega(\vec{E}\cdot\vec{D}^{*}-\vec{B}\cdot\vec{H}^{*})/2]$$

证明：用这个每单位体积能量的变化率可以解释透射系数。

12.一列频率为ω的简谐平面波垂直入射到折射率为n_1和n_2的介质界面上，能量的一部分被反射，并且反射波和入射波迭加而形成驻波。对于

$n_2 > n_1$ 的情况，电场反射回来时有一位相变化 π。

(1) 求总电场作为到界面的距离 d 的函数的表达式，确定 $<E^2>$ 的最大值和最小值的位置。

(2) 由电场的行为，确定磁场反射时的位相变化，并求 B (d, t) 和 $<B^2>$。

(3) 在 1890 年，O. Wiener 利用照相板作了一个实验，找出 d = 0 时板上极小的暗带。暗带起因于电场还是磁场?

13.有一单色平面电磁波，从介质 1 (ε_1, μ_0) 正入射到介质 2 (ε_2, μ_0) 上，两介质的交界面为平面，求反射率和透射率，以及电磁波在交界面上施于介质 2 的光压。

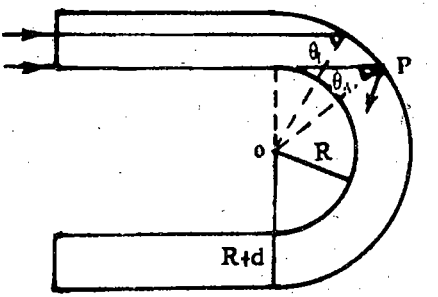


图 5.16

14.右图 (图 5.16) 表示一段弯曲成半圆形的光导纤维 (如很细的玻璃丝，折射率为 n) 半圆的内半径为 R，光导纤维横截面的直径为 d。证明：当满足条件 $\frac{R}{d} \geqslant \frac{1}{n-1}$ 时，光从空气 ($n_0 \approx 1$) 正入射到光导纤维的端面 A 时，透入纤维内的光线将沿这条弯曲路径前进，而不会折射到光导纤维外面去。

15. (1) 假定金属中单位体积内包含几个自由电子，当 x 射线以大于临界角的入射角投射到金属表面时，它被全部反射，计算作为 x 射线频率 ω 的函数的临界角。

(2) 如果 ω 与 θ 不能使 x 射线被全部反射，计算有多少入射波被反射。为简单计，假设 x 射线的偏振方向垂直入射面。

16.考虑频率为 ω 的电磁波在自由电子密度为 n_e 的介质中。

(1) 求由 $\vec{E}$ 感应的电流密度 (忽略电子间的互作用)；

(2) 由麦氏方程组出发，写出该介质中频率 ω 的波对空间依赖关系的

微分方程;

(3) 由这些方程求出电磁波在这样的无限介质中传播的必要充分条件。

17.在太空中的一无线电源发射一个包含宽频带的"噪音"脉冲，由于星际间介质的散射，该脉冲作为频率随时间变化的哨声到达地球。如果频率随时间的变化率可以测定，到波源的距离 D 已知，证明：可以推出星际间介质（假定完全电离）中的平均电子密度。

提示：考察自由电子对高频电场的反应，推出频率和波数 $(\frac{2\pi}{\lambda})$之间的关系。

18.已知一"稀薄"的等离子体由质量是 m，电荷 e 的自由电荷所组成，每单位体积中含有 n 个电荷。如果存在一个外磁场$\vec{B}_0$，单色平面电磁波沿$\vec{B}_0$方向传播，证明：对左旋与右旋的圆偏振波有不同的介电常数（法拉弟效应）。

19.论证两平行无穷大导体平面之间可传播一种偏振的 TEM 电磁波。

20.一对无限大的平行理想导体板，相距为 b，电磁波沿平行于板面的 Z 方向传播，设波在 x 方向是均匀的，求可能传播的波型及其截止频率。

21.无限长的矩形波导管，在 $Z=0$ 处被一块垂直插入的理想导体平板完全封闭，求在 $Z=-\infty$至 $Z=0$ 这段管内可能存在的波型。

22.论证矩形波导管内不存在 TM_{m0} 或 TM_{on} 波。

23.频率为 30×10^9 赫的微波，在 0.7cm × 0.4 cm 的矩形波导管中能以什么波型传播？在 0.7 cm × 0.6 cm 的矩形波导管中能以什么波型传播？

24.求出矩形波导管中电磁波的相速度 V_p 和群速度 V_g，并验证 $V_pV_g=c^2$。

25.证明：充满电介质（相对介电常数为 ε_r)的矩形波导管，其截止频率比空心的要低$\sqrt{\varepsilon_r}$倍。

第六章　电磁波的辐射

上一章讨论了电磁波的传播性质，本章研究小区域(线度<<波长)内电荷电流分布辐射电磁波的规律。辐射问题本质上也是一个边值问题。辐射天线上的电流和空间电磁波是相互作用的两个方面，需要应用天线表面的边界条件，同时确定空间中的电磁波形式和天线上的电流分布。这种问题的求解一般是比较复杂的。我们仅限于对简单辐射系统，讨论由给定电流分布如何计算辐射电磁波的问题。首先将势的概念推广到一般变化电磁场的情况，推导在常用规范下用势描写的电磁场方程及其解，即推迟势，并且简单讨论似稳条件和似稳电磁场。然后以推迟势为基础，研究多极辐射，其中电偶极辐射是最基本的一种辐射，它在宏观无线电辐射和微观带电粒子辐射中都占重要地位。最后简单讨论电磁波的衍射，用电磁理论推导惠更斯原理。

§6.1　电磁场的矢势和标势

在稳定情况下，我们曾引入标势描写静电场和稳恒电场，引入磁矢势描写稳恒磁场。现在我们在普遍情况下引入势来描述电磁场，进一步讨论这种描述方式的一个重要性质——规范不变性，以及用势所表示的电磁场方程。

1.普遍情形下标势和矢势的引入

普遍情况下，电磁场满足麦克斯韦方程组(4.3.15)式。由其中的方程式$\nabla \cdot \vec{B}=0$，$\vec{B}$可以用一个矢量$\vec{A}$来描述:

$$\vec{B}(\vec{r},t)=\nabla\times\vec{A}(\vec{r},t). \qquad (6\cdot1\cdot1)$$

与稳恒磁场的情形唯一不同的是现在的$\vec{A}$是一个随时间变化的量。电场与静止和稳定情形时有很大的不同，由(4·3·15)式中的另一齐次方程$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$可见，此时$\nabla\times\vec{E}\neq0$，但是利用(6·1·1)式可得

$$\nabla\times\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0,$$

即$\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$为一无旋场，它可以表示成一个标量的梯度，则

$$\vec{E}(\vec{r},t)=-\nabla\Phi(\vec{r},t)-\frac{\partial\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} \qquad (6\cdot1\cdot2)$$

$\Phi(\vec{r},t)$和$\vec{A}(\vec{r},t)$分别称为电磁场的标势和矢势，两者都是随时间变化的量。

对于变化电磁场来说，电场既有纵场部分，又有横场部分，不可能只用标势描写，并且电场和磁场直接发生联系，所以这里的$\vec{E}$不仅与标势Φ有关，而且与矢势$\vec{A}$有关。由于现在的电场$\vec{E}$不再是保守力场，一般不存在势能的概念，所以标势Φ失去作为电场中势能的意义，从而高频系统中电压的概念也失去确切的意义。

2.规范变换、规范不变性和规范条件

如果我们把$\vec{E}$和$\vec{B}$分解成横场和纵场的迭加，则(6·1·1)和(6·1·2)式可写成

$$\begin{aligned}\vec{B}_t&=\nabla\times\vec{A}_t,\\ \vec{B}_l&=\nabla\times\vec{A}_l=0,\\ \vec{E}_t&=-\frac{\partial\vec{A}_t}{\partial t},\end{aligned} \qquad (6\cdot1\cdot3)$$

$$\vec{E}_t = -\nabla\Phi - \frac{\partial \vec{A}_t}{\partial t}. \qquad (6\cdot 1\cdot 4)$$

(6 · 1 · 3)式表明，(6 · 1 · 1)式引入的$\vec{A}$只是其横场部分具有确定的意义，其纵场部分可以任意选取。(6 · 1 · 4)式表明，$\vec{E}$的横场部分只与$\vec{A}$的横场部分有关，而$\vec{E}$的纵场部分与 Φ 和$\vec{A}$的纵场部分两者相联系。即对于一定的$\vec{E}_t$，Φ 和$\vec{A}_t$不是分别确定的。这就意味着，对于确定的$\vec{B}$和$\vec{E}$，其$\vec{A}_t$可以任意选取，随之 Φ 也不是唯一的，或者说，用矢势$\vec{A}$和标势 Φ 描述电磁场不是唯一的。

显然，所有满足下式的$\vec{A}$都对应同一个$\vec{B}$，即$\vec{B}$在下列变换下保持不变：

$$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi. \qquad (6\cdot 1\cdot 5)$$

为了使(6 · 1 · 2)式表示的$\vec{E}$也不变，标势必须同时作如下变换：

$$\Phi \to \Phi' = \Phi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \qquad (6\cdot 1\cdot 5')$$

说明($\vec{A}'$，Φ′)与($\vec{A}$，Φ)描述同一电磁场，由于 ψ 可以是任意标量函数，所以$\vec{A}'$和 Φ′的取值是很多的。但只要是在(6 · 1 · 5)式的变换下，势($\vec{A}$，Φ)变为许许多多新的势($\vec{A}'$，Φ′)，变换前后的势总是对应同一电磁场，这种变换叫做规范变换。由于表示电磁场客观属性的可观测量是$\vec{E}$和$\vec{B}$，而由规范变换相联系的势又对应着相同的$\vec{E}$和$\vec{B}$，因此如果用势来描述电磁场，客观规律应和势的特殊选择无关。当势作规范变换时，所有物理量和物理规律都应该保持不变，这种不变性称为规范不变性。

在经典电动力学中，势$\vec{A}$和 Φ 的引入仅是出于数学上的方便。在量子力学中，它们是更为重要的物理的场。阿哈朗诺夫——玻姆效应(1956 年提出，60 年代实验上证实)表明，$\vec{A}$的物理效应是可观测的，它可以直接影响体系的量子行为。并且，规范变换是由量子力学的基本原理引入的，规范不变性是一条重要的物

理原则。

因为一个矢量场由它的散度、旋度和边值条件(法线或切线分量)所确定，而势的定义式(6·1·1)和(6·1·2)式只给出$\vec{A}$的旋度，没有给出$\vec{A}$的散度，所以导致了势的任意性和规范变换自由度的存在。因此，作为限制势的辅助条件，可以取$\nabla\cdot\vec{A}$为任意值，每一种选择就对应一种规范，从简化基本方程和计算方便考虑，常用的是库仑规范和洛伦兹规范。

(1) 库仑规范　辅助条件为

$$\nabla\cdot\vec{A}=0, \tag{6·1·6}$$

结合规范变换(6·1·5)式，可得出标量函数ψ满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2\psi=0 \tag{6·1·7}$$

(2) 洛伦兹规范　辅助条件为

$$\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0, \tag{6·1·8}$$

结合规范变换，ψ满足齐次波动方程

$$\nabla^2\psi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0. \tag{6·1·9}$$

可以看出，库仑规范条件、洛伦兹规范条件还没有把$\vec{A}$和Φ完全确定，还可以作形如(6·1·5)式的规范变换，只是变换式中的ψ要受到一定的限制，即要满足(6·1·7)式或(6·1·9)式。因此，(6·1·7)、(6·1·9)式的ψ对应在选定库仑规范或洛伦兹规范下还可能存在的剩余规范变换，而(6·1·5)式的ψ则对应更普遍的规范变换(例如从库仑规范变到洛伦兹规范)。

3.用势描写的电磁场方程

为简单起见，我们讨论真空中的场方程。根据(6·1·1)和(6·1·2)式，用势$\vec{A}$和Φ定义的$\vec{B}$和$\vec{E}$满足麦氏方程组(4·3·15)式

中的两个齐次方程。$\vec{A}$和 Φ 的动力学特性则由(4 · 3 · 15)式中的两个非齐次方程决定。将(6 · 1 · 1)和(6 · 1 · 2)式代入(4 · 3 · 15a)和(4 · 3 · 15b)，并应用$\mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$，可得

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \nabla(\nabla\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}) = -\mu_0\vec{J},$$

$$\nabla^2\Phi + \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad 。 \qquad (6\cdot 1\cdot 10)$$

现在已经把麦氏方程组的四个一阶偏微分方程化为两个二阶偏微分方程，但这两个方程仍然是耦合方程组，并不独立。联立解它，有时是相当繁杂的运算。选取特殊的规范，就可使(6 · 1 · 10)式变成 A 和 Φ 各自满足的不耦合的一组方程。

(1) 采用库仑规范，将(6 · 1 · 6)式代入(6 · 1 · 10)式，得

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\nabla\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \mu_0\vec{J},$$

$$\nabla^2\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \qquad (6\cdot 1\cdot 11)$$

$$(\nabla\cdot\vec{A} = 0)$$

由此可见标势仍满足泊松方程，不过这里的 Φ 和 ρ 都是随时间变化的量，它的解为

$$\Phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r'},t)}{|\vec{r}-\vec{r'}|}d^3x', \qquad (6\cdot 1\cdot 12)$$

这正是由电荷密度 $\rho(\vec{r'}, t)$产生的瞬时库仑势。这就是"库仑规范"名称的由来。(6 · 1 · 11)式右端第一项可认为是和势有关的"电流"项，原则上可以从(6 · 1 · 12)式计算出来。因为该项是无旋项，即为一矢量场的纵向部分，可以证明，它恰好与(6 · 1 · 11)式右端第二项中纵向电流的贡献相抵消(见例 7–1)，所以，$\vec{A}$ 的波动方程(6 · 1 · 11)式的源完全可以用横向电流来表示：

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{J}_t, \qquad (6\cdot1\cdot13)$$

这当然就是把库仑规范又称"横向规范"的由来。

库仑规范中，A 为无源场(横场)，由(6 · 1 · 4)式得

$$\vec{E}_l=-\nabla\Phi,$$

$$\vec{E}_l=-\frac{\partial\vec{A}_l}{\partial t}\text{或}\nabla\times\vec{E}_l=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}.$$

可见瞬时库仑势 Φ 仅对纵向电场$\vec{E}_l$有贡献，而矢势$\vec{A}$只对横向电场$\vec{E}_t$有贡献,即电场$\vec{E}$的纵向部分是受电荷的激发而产生的，是近场，有源场，亦叫库仑场。$\vec{E}$的横向部分是受变化磁场激发的，它是有旋场、亦叫感应场。物理上，辐射电磁波中电场永远与传播(辐射)方向垂直，即与波矢$\vec{k}$垂直，所以，库仑规范又叫"辐射规范"。这种规范在量子电动力学中特别有用，光子的量子力学描写只需要矢势的量子化，即量子化$\vec{E}_t$分量，而$\vec{E}_l$部分是瞬时作用，不能量子化。

(2) 采用洛伦兹规范，将(6 · 1 · 8)式代入(6 · 1 · 10)式，得

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{J},$$

$$\nabla^2\Phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \qquad (6\cdot1\cdot14)$$

$$\left(\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0\right).$$

前二式分别是 A 和 Φ 满足的两个互相独立的方程，形式简单对称，称为达朗伯方程。利用达朗伯算符$\Box=\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$，可写为

$$\Box\vec{A}=-\mu_0\vec{J},$$

$$\Box\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \qquad (6\cdot 1\cdot 14')$$

$$(\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0).$$

这是一组非齐次波动方程，电荷产生标势波动，电流产生矢势波动。达朗伯方程以及洛伦兹条件组成一个与麦克斯韦方程组完全等效的方程组。由达朗伯方程求得势的解之后，电磁场$\vec{E}$和$\vec{B}$由(6·1·1)和(6·1·2)式给出。

可以证明，在洛伦兹规范下，在给出$\vec{E}$的(6·1·2)式中，矢势纵向部分的贡献与标势的效应相抵消了，因此只有矢势的横向分量才对物理上的电场有贡献(见例 6-2)。对于平面电磁波总是有$\vec{E}\perp\vec{k}$，$\vec{E}$只有两个偏振方向，即两个自由度。但是$\vec{A}=\vec{A}_l+\vec{A}_t$，有三个自由度。$\vec{A}_l$自由度是多出来的、不定的。在洛伦兹规范中正好让它的效应与$\nabla\Phi$相抵消。(读者可联想一下，在库仑规范中，多出的$\vec{A}_l$部分自由度是怎样处理的？)

在后面讲述的相对论中可以看到，洛伦兹规范与坐标系选择无关，因而该规范条件连同达朗伯方程可以很自然地推广为相对论协变形式。在量子电动力学中，电磁场是可以量子化的，矢势$\vec{A}$有三个自由度，标势Φ有一个自由度。所以量子化后出现四种光子：由$\vec{A}_t$决定的光子称为横光子，它们的偏振方向垂直于波矢$\vec{k}$的方向，是物理上实在的光子；而由$\vec{A}_l$决定的光子称为纵光子，它的偏振方向沿$\vec{k}$的方向；由标势Φ决定的光子称为时间光子，因为在相对论中Φ对应四维矢势的时间部分。后两种光子是非物理的，洛伦兹条件正好使时间光子和纵光子相抵消，非物理效应不出现。这正是物理上喜欢用洛伦兹规范的原因。

[例 6-1] 证明：在库仑规范下，矢势满足的非齐次波动方程中，标势部分作为流的贡献正好与电流密度纵向分量的贡献相抵消。

解：库仑规范下，矢势满足的方程由(6·1·11)式给出

$$\nabla^2\vec{A}(\vec{r}\cdot t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}(\vec{r},\ t)}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{J}(\vec{r},\ t)$$
$$+\frac{1}{c^2}\nabla\frac{\partial\Phi(\vec{r},\ t)}{\partial t},\qquad(6\cdot1\cdot11)$$

借助福氏展开

$$\vec{A}(\vec{r},\ t)=\frac{1}{2\pi}\int e^{-i\omega t}\vec{A}(\vec{r},\ \omega)d\omega,$$
$$\vec{J}(\vec{r},\ t)=\frac{1}{2\pi}\int e^{-i\omega t}\vec{J}(\vec{r},\ \omega)d\omega,$$
$$\Phi(\vec{r},\ t)=\frac{1}{2\pi}\int e^{-i\omega t}\Phi(\vec{r},\ \omega)d\omega,$$

上述方程化为

$$\nabla^2\vec{A}(\vec{r},\ \omega)+\frac{\omega^2}{c^2}\vec{A}(\vec{r},\ \omega)=-\mu_0\vec{J}(\vec{r},\ \omega)$$
$$-\frac{i\omega}{c^2}\nabla\Phi(\vec{r},\ \omega).$$

再作福氏展开

$$\vec{A}(\vec{r},\ \omega)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\vec{A}(\vec{k},\ \omega)d^3\vec{k},$$
$$\vec{J}(\vec{r},\ \omega)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\vec{J}(\vec{k},\ \omega)d^3\vec{k},$$
$$\Phi(\vec{r},\ \omega)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\Phi(\vec{k},\ \omega)d^3\vec{k},$$

可得矢势$\vec{A}$的方程在动量空间的表达式

$$\left(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)\vec{A}\left(\vec{k},\ \omega\right)=\mu_0\vec{J}(\vec{k},\ \omega)-\frac{\omega}{c^2}\vec{k}\Phi(\vec{k},\ \omega).$$

如将电流密度的福氏分量分解为

$$\vec{J}(\vec{k},\ \omega)=\vec{J}_t(\vec{k},\ \omega)+\vec{J}_l(\vec{k},\ \omega),$$

其中$\vec{J}_l=J_l\frac{\vec{k}}{k}$称为纵向分量；而$\vec{J}_t$称为横向分量$\vec{k}\cdot\vec{J}_t=0$，它的福氏反演就是$\nabla\cdot\vec{J}_t=0$。这样，矢势的方程又可写为

$$\left(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)\vec{A}(\vec{k},\ \omega)=\mu_0\vec{J}_t(\vec{k},\ \omega)+\mu_0\vec{J}_l(\vec{k},\ \omega)$$

$$-\frac{\omega}{c^2}\vec{k}\Phi(\vec{k},\ \omega). \qquad (6\cdot1\cdot15)$$

库仑规范条件$\nabla\cdot\vec{A}=0$的福氏表示为$i\vec{k}\cdot\vec{A}(\vec{k},\ \omega)=0$将(6·1·15)式左右两边点乘$\vec{k}$，并利用$\vec{k}\cdot\vec{J}_t=0$，$\vec{k}\cdot\vec{A}=0$，有

$$\vec{k}\cdot\left[\mu_0\vec{J}_l\left(\vec{k},\ \omega\right)-\frac{\omega}{c^2}\vec{k}\Phi\left(\vec{k},\ \omega\right)\right]=0,$$

又$\vec{k}$是任意矢量，所以

$$\mu_0\vec{J}_l(\vec{k},\ \omega)-\frac{\omega}{c^2}\vec{k}\Phi(\vec{k},\ \omega)=0, \qquad (6\cdot1\cdot16)$$

即在动量空间$\vec{A}$方程的非齐次项中，含$\vec{J}_l$的项与含Φ的项互相抵消。当然，在其它表象中此结论也成立。所以，矢势$\vec{A}$的波动方程的源完全可以用横向电流密度来表示：

$$\nabla^2\vec{A}(\vec{r},\ t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}(\vec{r},\ t)}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{J}_t(\vec{r},\ t).$$

[例 6—2] 证明：在洛伦兹规范下，只有矢势的横向分量$\vec{A}_t$才对电场$\vec{E}$有贡献，矢势的纵向部分与标势的效应相抵消。

解：洛伦兹条件和电场的表示式分别为(6·1·8)和(6·1·2)式：

$$\nabla\cdot\vec{A}(\vec{r},\ t)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0, \qquad (6\cdot1\cdot8)$$

$$\vec{E}(\vec{r},\ t)=-\nabla\Phi(\vec{r},\ t)-\frac{\partial\vec{A}(\vec{r},\ t)}{\partial t} \qquad (6\cdot1\cdot2)$$

引入福氏变换

$$\vec{A}(\vec{r},\ t)=\frac{1}{2\pi}\int e^{-i\omega t}\vec{A}(\vec{r},\ \omega)d\omega,$$

$$\Phi(\vec{r},\ t)=\frac{1}{2\pi}\int e^{-i\omega t}\Phi(\vec{r},\ \omega)d\omega,$$

$$\vec{E}(\vec{r},\ t)=\frac{1}{2\pi}\int e^{-i\omega t}\vec{E}(\vec{r},\ \omega)d\omega.$$

将此变换式代入(6·1·8)和(6·1·2)式，有

$$\nabla\cdot\vec{A}(\vec{r},\ \omega)-\frac{i\omega}{c^2}\Phi(\vec{r},\ \omega)=0, \qquad (6\cdot1\cdot17)$$

$$\vec{E}(\vec{r},\ \omega)=-\nabla\Phi(\vec{r},\ \omega)+i\omega\vec{A}(\vec{r},\ \omega). \qquad (6\cdot1\cdot18)$$

将∇作用于(6·1·17)式，并代入(6·1·18)式

$$\vec{E}(\vec{r},\ \omega)=(ic^2/\omega)\nabla[\nabla\cdot\vec{A}(\vec{r},\ \omega)]+i\omega\vec{A}(\vec{r},\ \omega),$$

其分量形式为

$$E_i(\vec{r},\ \omega)=i\omega[A_i(\vec{r},\ \omega)+\frac{1}{k^2}\partial_i\partial_j A_j(\vec{r},\ \omega)]. \qquad (6\cdot1\cdot19)$$

再作福氏展开:

$$E_i(\vec{r},\ \omega)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}E_i(\vec{k},\ \omega)d^3\vec{k},$$

$$A_i(\vec{r},\ \omega)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}A_i(\vec{k},\ \omega)d^3\vec{k},$$

将这些变换代入(6·1·19)式，可得

$$E_i(\vec{k},\ \omega)=i\omega(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k^2})A_j(\vec{k},\ \omega)$$

$$(j=1,\ 2,\ 3). \qquad (6\cdot1\cdot20)$$

定义横向投射算符

$$P_{ij}=\delta_{ij}-\frac{k_i k_j}{k^2}, \qquad (6\cdot 1\cdot 21)$$

这是一个对称张量算符：$P_{ij}=P_{ji}$，并有性质：

$$k_i P_{ij}=k_j-k_j=0. \qquad (6\cdot 1\cdot 22)$$

当然(6 · 1 · 20)式也可表示成

$$E_i(\vec{k},\ \omega)=i\omega P_{ij}A_j(\vec{k},\ \omega). \qquad (6\cdot 1\cdot 23)$$

如将$\vec{A}$分解成平行于波矢$\vec{k}$的纵向分量$\vec{A}_l$和垂直$\vec{k}$的横向分量$\vec{A}_t$，即

$$\vec{A}=\vec{A}_t+\vec{A}_l=\vec{A}_t+\frac{\vec{k}}{k}A_l,$$

$$A_j=(A_t)_j+\frac{A_l}{k}k_j. \qquad (6\cdot 1\cdot 24)$$

将(6 · 1 · 24)式代入(6 · 1 · 23)式，并利用(6 · 1 · 22)式和关系式$\vec{k}\cdot\vec{A}_l=0$，得

$$E_i(\vec{k},\ \omega)=i\omega[A_t(\vec{k},\ \omega)]_i,$$

$$\vec{E}(\vec{k},\ \omega)=i\omega\vec{A}_t(\vec{k},\ \omega). \qquad (6\cdot 1\cdot 25)$$

还原到坐标表象

$$\vec{E}(\vec{r},\ t)=-\frac{\partial\vec{A}_t(\vec{r},\ t)}{\partial t}, \qquad (6\cdot 1\cdot 26)$$

此式表明，洛伦兹规范下，电场$\vec{E}$仅决定于矢势$\vec{A}$的横向部分。

再将(6 · 1 · 24)式代入(6 · 1 · 2)式

$$\vec{E}(\vec{r},\ t)=-\nabla\Phi(\vec{r},\ t)-\frac{\partial\vec{A}_l(\vec{r},\ t)}{\partial t}-\frac{\partial\vec{A}_t(\vec{r},\ t)}{\partial t} \qquad (6\cdot 1\cdot 27)$$

比较(6 · 1 · 26)式和(6 · 1 · 27)式，则得

$$\nabla\Phi(\vec{r},\ t)+\frac{\partial\vec{A}_l(\vec{r},\ t)}{\partial t}=0, \qquad (6\cdot 1\cdot 28)$$

由此可见，在确定电场$\vec{E}$的表示式中，矢势纵向部分的贡献与标势的贡献互相抵消了。

§6·2 推 迟 势

1.达朗伯方程的解和推迟势

现在来求上一节给出的达朗伯方程

$$\begin{aligned}\nabla^2\Phi(\vec{r},t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi(\vec{r},\ t)}{\partial t^2}&=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r},\ t),\\ \nabla^2\vec{A}(\vec{r},t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}(\vec{r},\ t)}{\partial t^2}&=-\mu_0\vec{J}(\vec{r},\ t)\end{aligned}\qquad(6\cdot1\cdot14)$$

的解。这组方程包含四个标量方程，这些标量方程都是下列形式

$$\nabla^2\psi(\vec{r},\ t)-\frac{1}{c^2}\partial^2\psi(\vec{r},\ t)/\partial t^2\ =-f(\vec{r},\ t),\ (6\cdot2\cdot1)$$

其中$f(\vec{r},\ t)$是已知的源函数，c是电磁波的传播速度。

为了解(6·2·1)方程，应找其格林函数G的解

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G(\vec{r},\ t;\ \vec{r'},t')=-\delta(\vec{r}-\vec{r'})\delta(t-t').(6\cdot2\cdot2)$$

下面先证明，若找到格林函数$G(\vec{r},\ t;\ \vec{r'},\ t)$，则方程(6·2·1)的解的形式为

$$\psi(\vec{r},\ t)=\psi_0(\vec{r},t)+\int G(\vec{r},\ t;\ \vec{r'},\ t')f(\vec{r'},\ t')dv'dt',\ (6\cdot2\cdot3)$$

其中$\psi_0(\vec{r},\ t)$对应相应于(6·2·1)方程的齐次方程解，它体现边界及初始时刻的影响。将达朗伯算符作用在(6·2·3)式两边，根据$\psi_0(r,\ t)$是齐次方程的解，于是有

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(\vec{r},\ t)$$

$$=\int\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G(\vec{r},\ t;\ \vec{r'},t')f(\vec{r'},\ t')dv'dt'.$$

再利用(6·2·2)式得

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(\vec{r},\ t)$$
$$=-\int\delta(\vec{r}-\vec{r'})\delta(t-t')f(\vec{r'},\ t')d\ v'dt'=-f(\vec{r},\ t),$$

可见(6·2·3)式的 $\psi(\vec{r},\ t)$确实满足方程(6·2·1)。

我们考虑没有边界的情况，并且为了消去与时间的明显依赖关系，引入对 ω 的傅氏变换:

$$G(\vec{r},\ t;\ \vec{r'},\ t')=\frac{1}{2\pi}\int g(\vec{r},\ \vec{r'};\ \omega)e^{-i\omega(t-t')}d\omega,\qquad(6\cdot2\cdot4)$$

$$\delta(t-t')=\frac{1}{2\pi}\int e^{-i\omega(t-t')}d\omega.\qquad(6\cdot2\cdot5)$$

将(6·2·4)和(6·2·5)式代入(6·2·2)式，得 $g(\vec{r},\ \vec{r'};\ \omega)$满足的非齐次亥姆霍兹波动方程

$$(\nabla^2+k^2)g(\vec{r},\ \vec{r'};\ \omega)=\delta(\vec{r}-\vec{r'}).\qquad(6\cdot2\cdot6)$$

在无界问题中，格林函数 $g(\vec{r},\vec{r};\omega)$是球对称的且仅仅是 $R=|\vec{R}|=|\vec{r}-\vec{r'}|$的函数，由球坐标中拉氏算符形式，显然 $g(R,\omega)$满足:

$$\frac{1}{R}\frac{d^2}{dR^2}[Rg(R,\omega)]+k^2g(R,\omega)=-\delta(\vec{R}).\qquad(6\cdot2\cdot7)$$

当 $k^2=0$ 时，(6·2·6)和(6·2·7)就是泊松方程，除了 $R=0$ 外，函数 $Rg(R,\omega)$处处满足齐次方程

$$\frac{d^2}{dR^2}[Rg(R,\ \omega)]+k^2[Rg(R,\ \omega)]=0,\qquad(6\cdot2\cdot8)$$

它的解为

$$Rg(R,\ \omega)=Ae^{ikR}+\ Be^{-ikR},$$

或

$$g(R,\ \omega)=A\frac{e^{ikR}}{R}+\ B\frac{e^{-ikR}}{R}. \qquad (6\cdot 2\cdot 9)$$

我们看到(6 · 2 · 7)式右边的 δ 函数仅仅在 R→0 时，才有影响。在这个极限下，因为 kR<<1，(6 · 2 · 7)方程退化为泊松方程，由静电中知道

$$\nabla^2\frac{1}{R}=-4\pi\delta(R). \qquad (6\cdot 2\cdot 10)$$

选择系数 A 和 B 为 $A=B=\frac{1}{4\pi}$，即

$$g(R,\ \omega)=\frac{1}{4\pi}\frac{e^{\pm ikR}}{R}, \qquad (6\cdot 2\cdot 11)$$

使在 R→0 时，g(R，ω)满足

$$\nabla^2 g(R,\ \omega)=-4\pi\delta(R). \qquad (6\cdot 2\cdot 12)$$

很容易证明，(6 · 2 · 11)式形式的 g(R，ω)的确是方程(6 · 2 · 6)的解，并且在 R→0 极限下，它满足(6 · 2 · 12)式的要求。(6 · 2 · 11)形式的解代表向外发散和向内收敛的球面波。

将(6 · 2 · 11)式代入(6 · 2 · 4)式，得

$$G^{\pm}(\vec{R},\ t-t')=\frac{1}{4\pi}(1/2\pi)\int\frac{e^{\pm i\omega R/c}}{R}e^{-i\omega(t-t')}d\omega$$

$$=\frac{1}{4\pi R}\frac{1}{2\pi}\int d\omega e^{\mp i\omega(t-t'\mp R/c)}. \qquad (6\cdot 2\cdot 13)$$

我们看出无界格林函数仅仅是源和观测者之间相对距离 $R=\vec{r}-\vec{r'}$和相对时间 t-t'的函数。(6 · 2 · 13)中积分是一个 δ 函数，故

$$G^{\pm}(\vec{R},\ t-t')=\frac{1}{4\pi}\delta(t-t'\mp\frac{R}{c})\Big/R. \qquad (6\cdot 2\cdot 14)$$

G^+的 δ 函数中宗量表示空间$\vec{r}$处，t 时刻观测到的效应是由离它

的距离为$\vec{R}$，较早时刻 $t'=t-\frac{R}{c}$的源所引起的；时间差$\frac{R}{c}$正是扰动通过该距离的传播时间，这反映了电磁扰动的因果关系。所以格林函数 G^{+}称作推迟格林函数，类似地，G^{-}称作超前格林函数。

现在，我们将(6·2·14)式的格林函数代入(6·2·3)式得

$$\psi(\vec{r},\ t)=\psi_0(\vec{r},\ t)+\frac{1}{4\pi}\int\frac{f(\vec{r'},\ t')}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\delta(t-t'\mp\frac{R}{c})dv'dt'$$

$$=\psi_0(\vec{r},\ t)+\frac{1}{4\pi}\int\frac{f\left(\vec{r'},\ t\mp\frac{|\vec{r}-\vec{r'}|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r'}|}dv'. \quad (6\cdot2\cdot15)$$

在无界物理问题中，常常取 $\psi_0(\vec{r},\ t)=0$，如果源函数$f(\vec{r'},\ t')=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r'},\ t')$，得到标势的解

$$\Phi(\vec{r},\ t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho\left(\vec{r'},\ t\mp\frac{|\vec{r}-\vec{r'}|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r'}|}dv'. \quad (6\cdot2\cdot16)$$

如果源函数$f(\vec{r'},\ t)=\mu_0 J(\vec{r'},\ t')$，得到矢势的解

$$\vec{A}(\vec{r},\ t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}\left(\vec{r'},\ t\mp\frac{|\vec{r}-\vec{r'}|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r'}|}dv'. \quad (6\cdot2\cdot17)$$

对应 $t-\frac{R}{c}$的称为推迟势，对应 $t+\frac{R}{c}$的称为超前势，物理上常常取推迟势解，它的物理意义就更清楚了。推迟势表明，空间某点$\vec{r}$在某时刻 t 的势不是依赖于同一时刻 t 的电荷电流分布，而是决定于较早时刻$t-\frac{|\vec{r}-\vec{r'}|}{c}$的电荷电流分布。$\vec{r'}$处在 t′时刻 ρ 和$\vec{J}$的变化，要在$\frac{|\vec{r}-\vec{r'}|}{c}$时间以后才能影响$\vec{r}$处在 t 时刻的势。由此可见，电磁作用是以有限速度传播的，在真空中这个速度就是

c。即就是说，电荷电流产生的物理作用不能瞬时地传到观测点，而是在较晚的时刻才传至观测点，所推迟的时间$\frac{|\vec{r}-\vec{r'}|}{c}$正是电磁作用从电荷电流所在点$\vec{r'}$传至观测点$\vec{r}$所需要的时间。实验证明，除了电磁作用之外，其他一切作用都通过物质以有限速度传播，瞬时的超距作用在自然界中是不存在的。在下一章中将看到，这一点正是相对论时空观的基础。

2.定态情形下的推迟势及场的不同区域

考虑推迟势公式

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{r'},t-\frac{R}{c})}{R}dv', \qquad (6\cdot2\cdot18)$$

式中 $R=|\vec{R}|=|\vec{r}-\vec{r'}|$。若电流是一定频率的交变电流

$$\vec{J}(\vec{r'},t')=\vec{J}(\vec{r'})e^{-i\omega t'}, \qquad (6\cdot2\cdot19)$$

代入(6·2·18)。注意$k=\frac{\omega}{c}$，有

$$\vec{A}(\vec{r},\ t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{r'})}{R}e^{i(kR-\omega t)}dv', \qquad (6\cdot2\cdot20)$$

$\vec{A}(\vec{r},\ t)$也以相应的规律依赖于时间:

$$\vec{A}(\vec{r},\ t)=\vec{A}(\vec{r})e^{-i\omega t},$$

则得

$$\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{r'})e^{ikR}}{R}dv'. \qquad (6\cdot2\cdot21)$$

式中因子 e^{ikR} 表示电磁波从源点传至观测点时有相位滞后 kR，所以称 e^{ikR} 为推迟作用因子。

给定电流分布$\vec{J}(\vec{r'})$以后，至少在原则上可以通过计算(6·2·21)式的积分来确定场的分布。磁场可直接由$\vec{A}$求出:

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}, \qquad (6\cdot2\cdot22)$$

源外($\vec{J}=0$)电场通过真空中的麦克斯韦方程组得到:

$$\vec{E}=\frac{ic}{k}\nabla\times\vec{B}. \qquad (6\cdot 2\cdot 23)$$

所以矢势$\vec{A}$就可以完全确定电磁场。现在我们先讨论在电流源被局限于小区域的极限情形下，场所具有的一些简单而普通的性质。小区域是指其线度 l 与波长和观测距离 R 相比确实很小，即

$$l<<\lambda, \qquad l<<\mathrm{R}.$$

再联系 R 和 λ 的关系，可以分为三个空间区域:

近 (静态) 区, $l<<\mathrm{R}<<\lambda$;
中间 (感应)区, $l<<\mathrm{R}\sim\lambda$;
远 (辐射区)区, $l<<\lambda<<\mathrm{R}$.

在不同区域内场具有不同的性质。

在近区内，kR<<1, (6 · 2 · 21) 式中的推迟作用因子 $e^{ikR}\sim 1$, 矢势的空间部分$\vec{A}(\vec{r})$和第三章静磁场中讨论过的形式完全相同。因而该区域内场保持稳恒场的主要特点，即电场具有静电场的纵向形式，磁场也和稳恒场相似。也就是说，近场是准静态的，除了按 $e^{-i\omega t}$ 方式作简谐振荡外，其它性质都是静态的。在远区内，kR>>1, (6 · 2 · 21) 式中的指数快速振荡，因而它决定矢势的特性。这个区域的电磁场变为横向的辐射场，我们在下面作较详细的讨论。中间区是从静态区到辐射区的一个过渡区域，上两个区域的特点兼而有之，场的性质比较复杂，在后面要讲的实例中可看到这一点。

§6 · 3 似 稳 场

由推迟势的讨论可知，电荷电流源和它们所激发的场在随时

间变化时不是瞬时关系。但是，如果一个可变场(或源)随时间变化足够慢，以致在每一给定的时刻，该场充分精密地和某一稳定场的对应的量相同，并且假定这一稳定场的源与所要研究的可变电荷电流的瞬时值相等，则可近似地认为该可变场和源有瞬时关系，这样的可变场称为似稳场。这一节简单讨论似稳场的条件和似稳场方程。

1. 似稳条件

由推迟势的表达式可以看到，对似稳场来说，首先必须满足下面的条件：在时间$t=\frac{R}{c}$内，即在电磁波传播通过距离 R 所必须的时间内，ρ 和$\vec{J}$的改变应微不足道，R 为场中所要研究的点到最远的电荷元或电流元的距离。设场(或源)以一定频率谐变，联系到上一节所讨论的定态情形下的推迟势，上述条件就是忽略推迟作用因子的条件：

$$kR<<1.$$

利用场的波长 λ 或周期 T 表示，即

$$R<<\frac{\lambda}{2\pi} \quad 或 \quad \frac{R}{c}<<T. \tag{6·3·1}$$

这一条件意味着，当观测点到源的距离远小于场的波长时，忽略推迟效应是合理的。由此可以估计似稳场存在范围的大小，例如在工频下，$f=50$ 赫，$\lambda=6000$ 公里，所以在分析一般有限范围内的电磁场时，都可使用似稳场的方法和公式。工频下电气设备的电容、电感等参数，正是据此原理计算而得的。

在有电流存在的情况下，由于在推导稳定磁场的定律时，恒定电流的闭合性起着重大的作用。因此，场的"完全的"似稳定，只有在上述"基本的"似稳条件和"附加的"似稳条件同时满足时才能实现，"附加的"似稳条件要求位移电流的密度比传导电流的密度小得多，以致可以将传导电流看成闭合的。设场以一定频率

谐变，此条件要求

$$\frac{|\vec{J}_D|}{|\vec{J}_f|}=\frac{\varepsilon\omega}{\sigma}<<1,$$

即

$$\omega<<\frac{\sigma}{\varepsilon}. \qquad (6\cdot 3\cdot 2)$$

这就是说，忽略位移电流要求场的频率与 σ 比较要足够低，例如在金属导体中，正象我们在[例 4–2]讨论的，当场的频率低于光波频率时，位移电流与传导电流相比是可以忽略的。

当然，(6 · 3 · 1)和(6 · 3 · 2)所表示的两个似稳条件是相互联系的，并且似稳条件是相对的。

2. 似稳场方程

电磁场的基本方程是麦克斯韦方程组，似稳电磁场是一般迅变电磁场的一种近似，所以将似稳条件代入麦克斯韦方程组，就可得到似稳场方程。

对于不导电介质，略去位移电流后的似稳场方程为

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot\vec{D}=\rho,\\&\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\\&\nabla\cdot\vec{B}=0,\\&\nabla\times\vec{H}=\vec{J}.\end{aligned} \qquad (6\cdot 3\cdot 3)$$

与静态场的方程相比，在形式上仅是将 $\nabla\times\vec{E}=0$ 换成了电磁感应方程，但现在的场包含纵分量和横分量，是依赖于时间的。如果引入电磁势，即

$$\begin{aligned}&\vec{B}=\nabla\times\vec{A},\\&\vec{E}=-\nabla\Phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}.\end{aligned} \qquad (6\cdot 3\cdot 4)$$

并采用库仑规范$\nabla \cdot \vec{A}=0$，则得用势描述的似稳场方程：

$$\begin{aligned}\nabla^2\Phi&=\frac{-\rho}{\varepsilon},\\ \nabla^2\vec{A}&=-\mu\vec{J},\end{aligned}\qquad(6\cdot3\cdot5)$$

式中 ε，μ 是均匀的。这一组方程在形式上和静态场完全一样，但不同的是现在的势都依赖于时间，并且电场需由标势和矢势同时确定。

对于导电介质，其内部电荷密度 $\rho=0$，传导电流满足$\vec{J}=\sigma\vec{E}$，似稳场方程成为

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot\vec{E}=0,\\ &\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\\ &\nabla\cdot\vec{B}=0,\\ &\nabla\times\vec{H}=\sigma\vec{E}.\end{aligned}\qquad(6\cdot3\cdot6)$$

如果在这一组方程的第二、四式中消去$\vec{H}$，便得$\vec{E}$的方程：

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\frac{1}{\mu\sigma}\nabla^2\vec{E},\qquad(6\cdot3\cdot7)$$

如消去$\vec{E}$，便得$\vec{H}$的方程：

$$\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}=\frac{1}{\mu\sigma}\nabla^2\vec{H}.\qquad(6\cdot3\cdot8)$$

可见在导电介质中，用场量$\vec{E}$，$\vec{H}$描述的似稳场方程是扩散方程，其扩散系数$\frac{1}{\mu\sigma}$与介质的电导率 σ 有关，σ 越大扩散越慢，对于理想导体，扩散系数为零。这与我们在第五章中讨论的趋肤效应和穿透深度是一致的。

3. 电工学中的电路方程

电工学中常涉及低频电磁场，似稳条件一般都可满足。因此

电工学中的电路问题是似稳电磁场的一个典型例子。电路是在一定条件下由电磁场简化得到，这些条件主要是：电路的尺寸远小于电磁波的波长；除电容器极板之间以外，位移电流都可以忽略；磁场只限于电感线圈内等。在这些条件下，由电磁场方程可以导出电路的方程。

由麦克斯韦方程组，略去位移电流时，$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$，由此可得$\nabla \cdot \vec{J} = 0$，其积分形式为

$$\int_v \nabla \cdot \vec{J} dv = \oint_s \vec{J} \cdot d\vec{s} = 0. \qquad (6 \cdot 3 \cdot 9)$$

如在电路中围绕任一节点作一封闭面，如图 6 · 1 所示，应用上式：

$$\oint_s \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int_{s1} \vec{J}_1 \cdot d\vec{s} + \int_{s2} \vec{J}_2 \cdot d\vec{s} + \int_{s3} \vec{J}_3 \cdot d\vec{s} = 0,$$

亦即

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0,$$

其一般形式为

$$\sum_{k=1}^{m} I_k = 0, \qquad (6 \cdot 3 \cdot 10)$$

这就是基尔霍夫电流定律，式中 m 为通向该结点的支路数。

考虑一个与电源串联的 R−L−C 电路，如图 6 · 2，根据电磁场方程，在导电媒质中有外加电源电场$\vec{E}_e$时，其电流

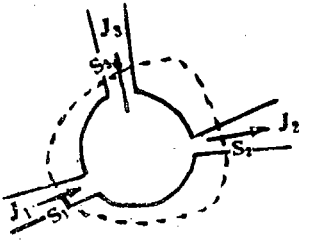


图 6−1

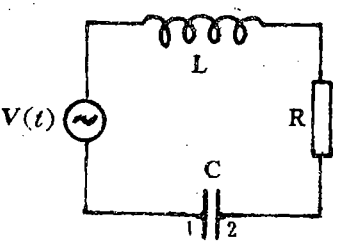


图 6.2

$$\vec{J}=\sigma(\vec{E}_e+\vec{E}),$$

而$\vec{E}$可用电磁场的势表示

$$\vec{E}=-\nabla\Phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}.$$

由上二式，有

$$\vec{E}_e=\frac{\vec{J}}{\sigma}+\nabla\Phi+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}. \qquad (6\cdot3\cdot11)$$

将此式两边沿电路的导电部分积分

$$\int_1^2\vec{E}_e\cdot d\vec{l}=\int_1^2\frac{\vec{J}}{\sigma}\cdot d\vec{l}+\int_1^2\nabla\Phi\cdot d\vec{l}+\int_1^2\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\cdot\vec{dl}, \qquad (6\cdot3\cdot12)$$

其中$\int_1^2\vec{E}e\cdot d\vec{l}=\mathcal{E}(t)$为电源电动势，$\int_1^2\frac{\vec{J}}{\sigma}\cdot d\vec{l}=IR$为电路中的电流强度与电阻的乘积。此外

$$\int_1^2\nabla\Phi\cdot d\vec{l}=\Phi_2-\Phi_1=U_{21}=\frac{1}{C}\int Idt$$

为电容器两极板间的电压，利用电磁感应定律和导线自感$L=\frac{\Phi}{I}$，最后一项为

$$\int_1^2\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\cdot d\vec{l}=\frac{\partial}{\partial t}\int\vec{B}\cdot d\vec{s}=\frac{d\psi}{dt}=L\frac{dI}{dt}.$$

将以上关系式代入(6·3·12)式，就得到

$$\mathcal{E}(t)=RI+L\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}\int Idt. \qquad (6\cdot3\cdot13)$$

此即基尔霍夫电压定律，因此求低频情况下导线的电磁场，可归结为解一个电流强度的方程。

[例 6-3] (1)在位移电流可以忽略时，证明电导率为 σ，磁

导率为 μ_0 的静止等离子体中的磁场$\vec{B}$满足方程

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = D\nabla^2\vec{B},\ (D=\frac{1}{\mu\sigma})$$

(2) 假如上述等离子体以速度$\vec{V}$运动，证明

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = D\nabla^2\vec{B} + \nabla\times(\vec{V}\times\vec{B}).$$

(3) 设在 t=0 时静止等离子体内的磁场由下式描述:

$$\vec{B} = B_z(x)\vec{e}_z$$

$$B_z(x)=\begin{cases} B_0, & |x|<L \\ 0, & |x|>L \end{cases}$$

式中 B_0 为一常数。试求等离子体保持静止时，内部磁场随时间的演化。

(4)地球的平均电导率约为 $\sigma\sim10^6$ 西／米，试问地球的磁场是否为大约 5×10^9 年前太阳系形成时所产生的磁场的残余?

解: (1)参见(6·3·8)式的推导，即得

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = D\nabla^2\vec{B}, \qquad (D=\frac{1}{\mu_0\sigma}) \qquad (6\cdot3\cdot14)$$

(2) 等离子体以速度$\vec{v}$运动时，

$$\vec{J}=\sigma(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$$

$$\nabla\times\vec{B}=\mu\sigma(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$$

对此式取旋度

$$\nabla(\nabla\cdot\vec{B})-\nabla^2\vec{B}=\mu\sigma[\nabla\times\vec{E}+\nabla\times(\vec{v}\times\vec{B})]$$

$$=-\mu\sigma\left[\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\nabla\times(\vec{v}\times\vec{B})\right]$$

所以

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\frac{1}{\mu\sigma}\nabla^2\vec{B}+\nabla\times(\vec{v}\times\vec{B})$$

$$=D\nabla^2\vec{B}+\nabla\times(\vec{v}\times\vec{B}) \qquad (6\cdot3\cdot15)$$

(3) 静止等离子体内的磁场由方程(6·3·14)式决定，由初始条件

$$\vec{B}|_{t=0}=B_z(x)\vec{e}_z|_{t=0}=\begin{cases}B_0\ \vec{e}_z, & |x|<L\\ 0, & |x|>L\end{cases} \qquad (6\cdot 3\cdot 16)$$

可把(6·3·14)式化为一维扩散方程

$$\frac{\partial B_z(x,\ t)}{\partial t}=D\frac{\partial^2 B_z(x,\ t)}{\partial x^2}. \qquad (6\cdot 3\cdot 17)$$

对此方程用分离变量法求解，令 $B_z(x,\ t)=X(x)T(t)$，则有

$$\frac{T'}{DT}=\frac{X''}{X}=-\omega^2,$$

求出

$$T(t)=Ae^{-\omega^2 Dt},\qquad X(x)=ce^{i\omega x}.$$

磁场的特解为

$$B_z(x,\ t,\ \omega)=A(\omega)e^{-\omega^2 Dt}e^{i\omega x},$$

通解为

$$B_z(x,\ t)=\int_{-\infty}^{\infty}A(\omega)e^{-\omega^2 Dt}e^{i\omega x}\,d\omega \qquad (6\cdot 3\cdot 18)$$

当 t=0 时，(6·3·18)式化为

$$B_z(x)=\int_{-\infty}^{\infty}A(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega. \qquad (6\cdot 3\cdot 19)$$

由傅氏变换可知

$$A(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}B_z(\zeta)e^{-i\omega\zeta}d\zeta,$$

则

$$B_z(x,\ t)=\int_{-\infty}^{\infty}B_z(\zeta)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\omega^2 Dt}e^{i\omega(x-\zeta)}\,d\omega\right]d\zeta.$$

已知定积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\omega^2 Dt}e^{i\omega(x-\zeta)}\,d\omega=\sqrt{\frac{\pi}{Dt}}\,e^{-(x-\zeta)^2/4Dt},$$

再代入

$$B_z(\zeta)=\begin{cases}B_z & ,\text{当}|\zeta|\leqslant L,\\ 0 & ,\text{当}|\zeta|>L,\end{cases}$$

最后得磁场随 t 的变化为

$$B_z(x,\ t)=\frac{B_0}{\sqrt{4\pi Dt}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{-(x-\zeta)^2/4Dt}d\zeta. \qquad (6\cdot 3\cdot 20)$$

(4)地磁场不可能是 5×10^9 年前太阳系形成时的初始地磁场 B_0 残余至今的遗迹，因为 B_0 会很快扩散而消失。半定量估算如下:

已知地球电导率 $\sigma\approx10^6$ 西 / 米，故地磁场扩散系数

$$D=\frac{1}{\mu_0\sigma}\approx10^5(\text{厘米}^2/\text{秒}),$$

又 $t=5\times10^9$ 年 $=1.5\times10^{17}$ 秒，$Dt\approx10^{22}$ 厘米^2，地球线度 $L\approx10^9$ 厘米，有

$$\frac{(x-\zeta)^2}{4Dt}\approx\frac{L^2}{4Dt}\approx10^{-4},\quad e^{-(x-\zeta)^2/4Dt}\approx1,$$

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{-(x-\zeta)^2/4Dt}d\zeta\approx L,$$

则得

$$B_z(x,\ t)\approx\frac{LB_0}{\sqrt{4\pi Dt}}\approx10^{-2}B_0.$$

这表明如果今日地磁是原始磁场 B_0 残存下来的，则今日地磁场强度 B 应为初始 B_0 的 1%。今日地磁场数量级约为 1 高斯，则原始 $B_0\sim10^2$ 高斯，这数值远高于目前已知的各种天体系等离子体中的磁场值。

§6·4 电磁辐射

1.小区域运动电荷体系在远处产生的场

我们考虑下列推迟势的表达式

$$\vec{A}(\vec{r},\ t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{r}',t-\frac{R}{c})}{R}dv', \qquad (6\cdot4\cdot1)$$

式中 $R=|\vec{R}|=|\vec{r}-\vec{r}'|$，$\vec{r}'$和$\vec{r}$分别是源点和场点的径矢。在与运动电荷体系相距甚远之处，$|\vec{r}|>>|\vec{r}'|$，可将 R 展开为

$$R\approx r-\vec{n}\cdot\vec{r}', \qquad (6\cdot4\cdot2)$$

其中$\vec{n}$是$\vec{r}$方向的单位矢量。将(6·4·2)代入(6·4·1)，在被积函数分母内，$\vec{n}\cdot\vec{r}'$与 r 比较起来可以略去。然而在 $t-\frac{R}{c}$中，这种省略一般是不行的；在这里，是否可作这种省略，并不决定于$\frac{r}{c}$与$\vec{r}'\cdot\frac{\vec{n}}{c}$的相对值，而决定于源$\vec{J}$在时间$\vec{r}'\cdot\frac{\vec{n}}{c}$内的变化多少。因此我们得到

$$\vec{A}(\vec{r},\ t)=\frac{\mu_0}{4\pi r}\int\vec{J}(\vec{r}',\ t-\frac{r}{c}+\frac{\vec{r}'\cdot n}{c})dv'. \qquad (6\cdot4\cdot3)$$

这表示在远区内矢势的特性如同一个发散的球面波，该波带有一个与角度有关的系数，如果在一个不很大的空间区域内观测，场可以当作平面波。为此，场点的距离不仅必须比运动电荷体系的线度大很多，而且还要比体系所产生的电磁波的波长大很多，空间的这个区域称辐射的波区。

对于辐射区的平面波来说，场量有关系式

$$\vec{E}=c\vec{B}\times\vec{n}, \qquad (6\cdot4\cdot4)$$

而$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$，所以为了完全确定辐射场，只需求出矢势$\vec{A}$。引入变量$t'=t-\frac{r}{c}$，(6·4·3)式成为

$$\vec{A}(\vec{r},\ t)=\frac{\mu_0}{4\pi r}\int\vec{J}(\vec{r'},t'+\frac{\vec{r'}\cdot\vec{n}}{c})dv', \qquad (6\cdot4\cdot5)$$

或者写成

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi r}\vec{f}(t'), \qquad (6\cdot4\cdot6)$$

这里$\vec{f}(t')$是 t′的函数。因此我们通过$\vec{B}=\nabla\times\frac{\mu_0}{4\pi r}\vec{f}(t')$而求$\vec{B}$。如果忽略与$\frac{1}{r^2}$成比例的项，则有

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi r}\nabla\times\vec{f}(t') \qquad (6\cdot4\cdot7)$$

利用矢量运算公式

$$\nabla\times\vec{f}(t')=\nabla t'\times\frac{d\vec{f}}{dt'}=-\frac{1}{c}\vec{n}\times\frac{d\vec{f}}{dt'},$$

并代入(6·4·6)式，得到辐射区的磁场

$$\vec{B}=\frac{1}{c}(\dot{\vec{A}}\times\vec{n}), \qquad (6\cdot4\cdot8)$$

式中$\vec{A}$上面圆点所表示的微商是对 t′的微商。再由(6·4·4)式，辐射区的电场为

$$\vec{E}=(\dot{\vec{A}}\times\vec{n})\times\vec{n}. \qquad (6\cdot4\cdot9)$$

于是，知道了$\vec{A}$，就可以从(6·4·8)和(6·4·9)求出辐射电磁场。

2.矢势的多极展开式

将矢势的表达式展开，即将

$$\vec{A}(\vec{r},\ t)=\frac{\mu_0}{4\pi r}\int\vec{J}\left(\vec{r'},\ t'+\frac{\vec{r'}\cdot\vec{n}}{c}\right)dv' \qquad (6\cdot4\cdot5)$$

展开为$\vec{r'}\cdot\vec{n}/c$的幂级数，取到一阶项，得

$$\vec{A}(\vec{r},\ t)=\frac{\mu_0}{4\pi r}\int\vec{J}_{t'}dv'+\frac{\mu_0}{4\pi cr}\frac{\partial}{\partial t'}\int(\vec{r'}\cdot\vec{n})\vec{J}_{t'}dv', \quad (6\cdot4\cdot10)$$

将$\vec{J}=e\vec{v}$代入，上式改写成

$$\vec{A}(\vec{r},\ t)=\frac{\mu_0}{4\pi r}\Sigma e\vec{v}_{t'}+\frac{\mu_0}{4\pi cr}\frac{\partial}{\partial t'}\Sigma e\vec{v}_{t'}(\vec{r'}\cdot\vec{n}). \qquad (6\cdot4\cdot11)$$

第一项中的求和部分是体系的电偶极矩的时间微商

$$\Sigma e\vec{v}_{t'}=\dot{\vec{P}} \qquad (6\cdot4\cdot12)$$

第二项的求和中

$$\vec{v}_{t'}(\vec{r'}\cdot\vec{n})=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t'}\left[\vec{r'}(\vec{r'}\cdot\dot{\vec{n}})\right]+\frac{1}{2}\vec{v}(\vec{r'}\cdot\vec{n})-\frac{1}{2}\vec{r'}(\vec{v}\cdot\vec{n})$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t'}[\vec{r'}(\vec{r'}\cdot\vec{n})+\frac{1}{2}(\vec{r'}\times\vec{v})\times\vec{n},$$

而这个体系的磁偶极矩是

$$\vec{m}=\frac{1}{2}\Sigma e\vec{r'}\times\vec{v}, \qquad (6\cdot4\cdot13)$$

代入$\vec{A}$的表示式

$$\vec{A}(\vec{r},\ t)=\frac{\mu_0}{4\pi r}\dot{\vec{p}}+\frac{\mu_0}{4\pi cr}\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\Sigma e\vec{r'}(\vec{r'}\cdot\vec{n})+\frac{\mu_0}{4\pi cr}(\dot{\vec{m}}\times\vec{n}).$$

由(6·4·8)和(6·4·9)可以看到，将与$\vec{n}$成比例的任意矢量加到$\vec{A}$上，并不改变场。于是我们将矢量$-\frac{1}{6}\frac{\mu_0}{4\pi cr}\vec{n}(\partial^2/\partial t'^2)\Sigma er'^2$加到$\vec{A}$上，与其中第二项合并，结果为

$$\vec{A}(\vec{r},\ t)=\frac{\mu_0}{4\pi r}\dot{\vec{p}}$$

$$+\frac{1}{6}\frac{\mu_0}{4\pi cr}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\Sigma e\left[3\vec{r'}(\vec{r'}\cdot\vec{n})-r'^2\vec{n}\right]+\frac{\mu_0}{4\pi cr}(\dot{\vec{m}}\times\vec{n})$$

而$\frac{\partial^2}{\partial t'^2}$后面正是电四极矩张量

$$\vec{\vec{Q}}=\Sigma e(3\vec{r}\vec{r}-r^2\vec{\vec{I}}) \qquad (6\cdot4\cdot14)$$

与矢量$\vec{n}$的积。引入矢量$\vec{Q}$：$\vec{Q}=\vec{\vec{Q}}\cdot\vec{n}$，其分量为$Q_i=Q_{ij}n_j$，便得到矢势的多极展开式

$$\vec{A}(\vec{r},\ t)=\frac{\mu_0}{4\pi r}\dot{\vec{p}}+\frac{1}{6}\frac{\mu_0}{4\pi cr}\ddot{\vec{Q}}+\frac{\mu_0}{4\pi cr}(\dot{\vec{m}}\times\vec{n}) \qquad (6\cdot4\cdot15)$$

所得结果中第二项和第三项来自$\vec{r'}\cdot\vec{n}/c$的幂级数的同一项，属于同一数量级。表达式右端各量的时间变量为t′，自然对时间的微商是对t′微商。展开式中取第一项就得到电偶极辐射，第二项和第三项分别对应电四极辐射和磁偶极辐射，其具体内容在下两节介绍。

§6·5 电偶极辐射

1.辐射电磁场

考虑(6·4·15)式中的偶极项

$$\vec{A}(\vec{r},\ t)=\frac{\mu_0}{4\pi r}\dot{\vec{p}}_{t'},$$

注意$\dot{\vec{P}}_{t'}$中的时间变量$t'=t-\frac{r}{c}$，若电流$\vec{J}$以一定频率ω作简谐变化，则上式可写成以t为时间变量的表示式

$$\vec{A}(\vec{r},\ t)=\frac{\mu_0}{4\pi r}e^{ikr}\dot{\vec{P}}_{\cdots} \qquad (6\cdot5\cdot1)$$

将(6·5·1)代入(6·4·8)和(6·4·9)式

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 e^{ikr}}{4\pi cr}\ddot{\vec{P}}\times\vec{n},$$
$$\vec{E}=\frac{\mu_0 e^{ikr}}{4\pi r}(\ddot{\vec{P}}\times\vec{n})\times\vec{n}, \qquad (6\cdot5\cdot2)$$

取球坐标原点在电荷分布区内，$\vec{P}$沿 Z 轴方向，偶极辐射的电磁场便为

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi cr}\ddot{p}e^{ikr}\sin\theta\vec{e}_\varphi,$$
$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\ddot{p}e^{ikr}\sin\theta\vec{e}_\theta. \qquad (6\cdot5\cdot3)$$

可见辐射电磁场正比于$\frac{1}{r}$，电场只有$\vec{e}_\theta$方向的分量，磁场只有$\vec{e}_\varphi$方向的分量。在偶极子的轴线方向上场为零，在垂直于偶极子轴线方向上场最大。

2.辐射能流　角分布　辐射功率

辐射能流的平均值通过下式求出

$$<S>=\frac{1}{2}Re(\vec{E}^*\times\vec{H})=\frac{c}{2\mu_0}Re[(\vec{B}^*\times\vec{n})\times\vec{B}]$$
$$=\frac{c}{2\mu_0}|\vec{B}|^2\vec{n}=\frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3 r^2}\sin^2\theta\vec{n}. \qquad (6\cdot5\cdot4)$$

此式表明辐射能流除正比于$\frac{1}{r^2}$之外，还与空间方向有关。一般用角分布来描述体系向空间不同方向辐射能量的情况，定义为在单位立体角内所辐射的功率的时间平均值

$$\frac{d<P>}{d\Omega}=\frac{<\vec{S}>\cdot d\vec{\sigma}}{d\Omega} \qquad (6\cdot5\cdot5)$$

对于偶极辐射来说

$$\frac{d<P>}{d\Omega}=\frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3}\sin^2\theta \qquad (6\cdot5\cdot6)$$

由(6·5·6)式看出，偶极辐射在 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 的平面上最强，而在 $\theta=0$，π 的方向上没有辐射，如图 6·3 所示。

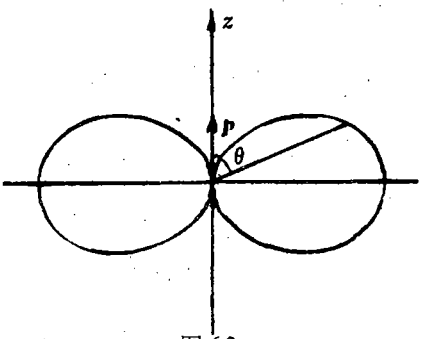


图 6.3

把 $<\vec{S}>$ 对球面积分即得总辐射功率

$$<P>=\oint<S>r^2d\Omega=\frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3}\oint\sin^2\theta d\Omega$$
$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{3c^3} \qquad (6\cdot5\cdot7)$$

对于随时间以一定频率而变化的 $\vec{P}$，即 $\vec{P}\sim e^{i\omega t}$，辐射功率正比于频率的四次方。频率变高时，辐射功率迅速增大。

3. 短天线的辐射　辐射电阻

由上面讨论看到，电偶极辐射的关键在于系统有电偶极矩且 $\ddot{\vec{P}}(t)$ 不为零。如果可以找出一个系统的等效偶极矩，就可以通过求 $\ddot{\vec{P}}$ 计算该系统的电偶极辐射。当直天线的长度 d 远小于波长时，它的辐射就是这种电偶极辐射。

图 6·4 表示一个中央馈电的平直短天线，天线沿 Z 轴，从 Z=d/2 延伸至 Z=−(d/2)，中央有一窄隙以供激发之用，天线两半段上电流方向相同。其电流在中心间隙处有最大值 I_0，沿两端近乎线性地下降，在两端为零：

$$I(Z)e^{-i\omega t}=I_0\left(1-\frac{2|z|}{d}\right)e^{-i\omega t}. \qquad (6\cdot5\cdot8)$$

由电荷守恒定律，沿天线每一臂线电荷密度 τ 为

$$\tau(z,t)=\pm\frac{2iI_0}{\omega d}e^{-i\omega t},\qquad(6\cdot5\cdot9)$$

上方的(下方的)符号相当于 Z 为正(负)值，偶极矩与 Z 平行，其量值为

$$\begin{aligned}P(z,\ t)&=\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}z\tau(z,\ t)dz\\&=\frac{iI_0d}{2\omega}e^{-i\omega t}\qquad(6\cdot5\cdot10)\end{aligned}$$

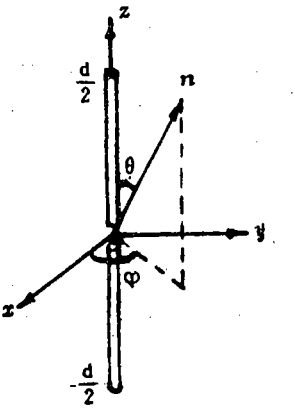


图 6.4

代入(6·5·7)式，得短天线的辐射功率

$$<P>=\frac{\mu_0I_0^2\omega^2d^2}{48\pi c}=\frac{\pi}{12}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}I_0^2\left(\frac{d}{\lambda}\right)^2.\qquad(6\cdot5\cdot11)$$

式中$\frac{I_0^2}{2}$的系数具有电阻的量纲，可看成因辐射而损耗功率的等效电阻，称为天线的辐射电阻，其表示式是

$$R_r=\frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{d}{\lambda}\right)^2=197\left(\frac{d}{\lambda}\right)^2(\text{欧})\qquad(6\cdot5\cdot12)$$

于是辐射功率

$$<P>=\frac{1}{2}R_rI_0^2\qquad(6\cdot5\cdot13)$$

在一定的输入电流下，天线的辐射电阻越大，辐射功率越大，在这个意义上讲，辐射电阻是表征天线辐射能力的一个物理量，由于短天线 $R_r\sim\left(\frac{d}{\lambda}\right)^2$，而 $d\ll\lambda$，所以短天线的辐射能力很弱。

要提高辐射能力，必须使天线长度增大到最小与波长同级，但这时天线的辐射已不能用电偶极辐射来表示。

[例 6-4] 元天线(偶极子天线)是在一个很短的导线内通有可变电流的装置。其两端一般有等量异号的电荷，所以可视为一电偶极子。假设元天线位于坐标原点，长度为 l，电流 $I=I_0e^{i\omega t}$ 沿 Z 轴均匀分布(图 6·5)。试求：

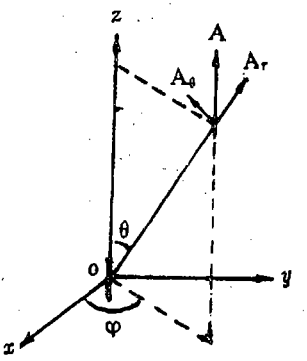


图 6.5

(1) 空间任一点 $\vec{r}$ 的推迟势；

(2) 空间的电磁场分布；

(3) 讨论近区，远区和中间区的电磁场。

解：(1)推迟势由(6·4·1)式给出

$$\vec{A}(\vec{r},\ t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{r}',\ t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV',$$

在此 $\vec{r}'=0$，利用代换关系 $\vec{J}\mathrm{d}V\to\mathrm{Id}\vec{l}$，并将电流 $I=I_0e^{i\omega t}$ 代入，得

$$\vec{A}(\vec{r},\ t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_0le^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r}\vec{e}_z,$$

这里 $\vec{A}$ 只有 Z 分量，所以

$$A=A_z=\frac{\mu_0}{4\pi r}Ile^{-ikr}. \qquad (6\cdot5\cdot14)$$

它在球坐标中的分量为

$$A_r = A\cos\theta = \frac{\mu_0 Il\cos\theta}{4\pi r} e^{-ikr},$$
$$A_\theta = -A\sin\theta = -\frac{\mu_0 Il\sin\theta}{4\pi r} e^{-ikr}, \qquad (6\cdot 5\cdot 15)$$
$$A_\varphi = 0,$$

式中的负号表示 A_θ 沿 θ 减小的方向(如图 6.5 中所示)。

(2) 由 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$，求得磁场为

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 Ilk^2}{4\pi}\left(\frac{1}{(kr)^2} + \frac{i}{kr}\right)e^{-ikr}\sin\theta, \qquad (6\cdot 5\cdot 16)$$
$$B_r = B_\theta = 0.$$

电场 $\vec{E}$ 可由电流分布区外面($\vec{J}=0$)的麦氏方程求出。由真空中的麦氏方程

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{i\omega}{c^2}\vec{E},$$

有

$$\vec{E} = \frac{ic}{k}\nabla \times \vec{B} \qquad (6\cdot 5\cdot 17)$$

利用(6 · 5 · 17)式可求得电场分布为

$$E_r = \frac{Ilk^3}{2\pi\omega\varepsilon_0}\left[\frac{1}{i(kr)^3} + \frac{1}{(kr)^2}\right]e^{-ikr}\cos\theta,$$

$$E_\theta = \frac{Ilk^3}{4\pi\omega\varepsilon_0}\left[\frac{1}{i(kr)^3} + \frac{1}{(kr)^2} + \frac{i}{kr}\right]e^{-ikr}\sin\theta, \qquad (6\cdot 5\cdot 18)$$
$$E_\varphi = 0.$$

由此可见，元天线激发的偶极场由三个部分组成，它们与 r 之间的关系为

$$\frac{1}{(kr)^3} : \frac{1}{(kr)^2} : \frac{1}{kr}.$$

(3) 现在我们讨论各个区域的场的性质。

(a) 近区场：因 kr<<1 或 r<<$\frac{\lambda}{2\pi}$，我们得到

$$H_\varphi \approx \frac{Il}{4\pi r^2} e^{-ikr} \sin\theta,$$

$$E_r \approx (Il/2\pi)\left(\frac{1}{i\omega\varepsilon_0 r^3}\right) e^{-ikr} \cos\theta, \qquad (6\cdot 5\cdot 19)$$

$$E_\theta \approx \frac{Il}{4\pi}\left(\frac{1}{i\omega\varepsilon_0 r^3}\right) e^{-ikr} \sin\theta.$$

由于 kr 很小，相位因子 e^{-ikr} 可略去不计，这样上列第一式与稳定电流所产生的磁场强度公式(即毕奥－萨伐尔定律)完全相似。又由于

$$q = \int I dt = \int I_0 e^{i\omega t} dt = \frac{I}{i\omega},$$

所以在位相因子略去后，电场强度为

$$E_r \approx \frac{ql}{2\pi\varepsilon_0 r^3} \cos\theta,$$

$$E_\theta \approx \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \sin\theta. \qquad (6\cdot 5\cdot 20)$$

此结果与正负二点电荷 q 相距 l 构成的电偶极子所产生的静电场完全相似。

电场和磁场之间有位相差，并且电场落后于磁场 90°，因此能量在电场与磁场之间相互交换，平均坡印亭矢量为零，所以这个区域的场不代表向外辐射的部分，又称为静态场。

(b) 远区场：因 k>>1，或 r>>$\frac{\lambda}{2\pi}$，我们得到

$$H_\varphi \approx \frac{Il}{4\pi}\frac{ik}{r}e^{-ikr}\sin\theta,$$
$$E_\theta \approx \frac{Il}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ik^2}{\omega r}e^{-ikr}\sin\theta, \qquad (6\cdot5\cdot21)$$

这正是我们已经讨论过的电偶极辐射场。

(C) 中间区：因 $kr\approx1$ 或 $r\approx\frac{\lambda}{2\pi}$，我们不能略去前面所得电磁场分量中的任何一项。实际上，在此条件下，(6·5·16)和(6·5·18)两式中电磁场的分量内每一项的绝对值都相等，这就是说，在这个区域内的静态场和辐射场的强度大致相等。

应该注意，不论近区场或远区场，都同时有静态场和辐射场存在，不过二者比较起来，在近区内，静态场强，辐射场可以忽略；在远区内，辐射场强，静态场几乎减小到零。因而近区主要显示感应场的性质，而远区主要显示辐射场的性质。并且，尽管在近区内的辐射场较静态场小，可是仍然比远区的辐射场大得多，否则就要得出辐射场愈到远处愈强的错误结论。(这是违背能量守恒原则的)。实际上，辐射场是由近及远随距离的反比而逐渐衰减的。

[例 6-5] 证明：由具有相同荷质比$\left(\frac{q}{m}=常数\right)$的粒子所组成的孤立系统，不会有电偶极辐射。

解：对于粒子所组成的系统，若所有粒子的荷质比都是相同的，则电偶极矩为

$$\vec{p}=\Sigma q_i\vec{r}_i=\frac{q}{m}\Sigma m_i\vec{r}_i \qquad (6\cdot5\cdot22)$$

而

$$\Sigma m_i\vec{r}_i=\vec{R}\Sigma m_i,$$

式中$\vec{R}$是系统的惯性中心的矢径，代入(6·5·22)式得

$$\vec{p}=\frac{q}{m}\vec{R}\Sigma m_i. \qquad (6\cdot5\cdot23)$$

由(6·5·2)式可知，电偶极辐射的电磁场均与$\ddot{\vec{P}}$有关。又根据(6·5·23)式有

$$\ddot{\vec{p}}\sim\ddot{\vec{R}}.$$

对孤立系统而言，质心加速度$\ddot{\vec{R}}=0$，从而辐射场

$$\vec{E}=\vec{B}=0, \qquad (6\cdot5\cdot24)$$

即该系统没有电偶极辐射。

[例 6-6] 一电偶极矩大小为 P_0 的电偶极子位于 x–y 平面内的坐标原点，以匀角速度 ω 绕通过其中心的 Z 轴转动。如图 6·6 所示，求它在空间一点 P(r, θ, φ)所产生的辐射场平均辐射能流和平均辐射功率。

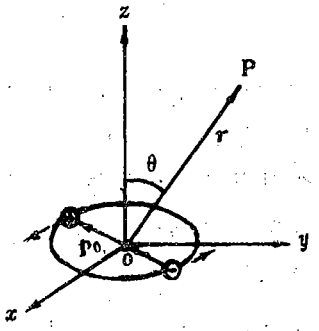


图 6.6

解：旋转偶极子的电偶极矩可写成

$$\vec{P}=P_0(\vec{e}_x+i\vec{e}_y)e^{-i\omega t}. \qquad (6\cdot5\cdot25)$$

由球坐标系和直角坐标系基矢的关系

$$\vec{e}_x=\sin\theta\cos\varphi\vec{e}_r+\cos\theta\cos\varphi\vec{e}_\theta-\sin\varphi\vec{e}_\varphi,$$

$$\vec{e}_y=\sin\theta\sin\varphi\vec{e}_r+\cos\theta\sin\varphi\vec{e}_\theta+\cos\varphi\vec{e}_\varphi,$$

可得

$$\vec{e}_x + i\vec{e}_y = e^{i\varphi}(\sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta + i\vec{e}_\varphi) \qquad (6\cdot5\cdot26)$$

代入(6·5·25)式，有

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{P}} &= -\omega^2 P_0(\vec{e}_x + i\vec{e}_y)e^{-i\omega t} \\ &= -\omega^2 P_0 e^{i(\varphi-\omega t)})(\sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta + i\vec{e}_\varphi), \quad (6\cdot5\cdot27)\end{aligned}$$

故得旋转电偶极子的辐射场为

$$\begin{aligned}\vec{E} &= (e^{ikr}/4\pi\varepsilon_0 c^2 r)(\ddot{\vec{P}}\times\vec{e}_r)\times\vec{e}_r \\ &= \frac{\omega^2 p_0}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}e^{i(kr-\omega t+\varphi)}(\cos\theta\vec{e}_\theta + i\vec{e}_\varphi), \qquad (6\cdot5\cdot28)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{1}{c}\vec{e}_r\times\vec{E} \\ &= \frac{\omega^2 p_0}{4\pi\varepsilon_0 c^3 r}e^{i(kr-\omega t+\varphi)}(-i\vec{e}_\theta + \cos\theta\vec{e}_\varphi). \qquad (6\cdot5\cdot29)\end{aligned}$$

平均辐射能流为

$$\begin{aligned}\langle\vec{S}\rangle &= \frac{1}{2}Re(\vec{E}^*\times\vec{H}) \\ &= \frac{\omega^4 p_0^2}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3 r^2}(1+\cos^2\theta)\vec{e}_r \qquad (6\cdot5\cdot30)\end{aligned}$$

平均辐射功率为

$$\langle P\rangle = \oint\langle\vec{S}\rangle\cdot d\vec{\sigma} = \frac{\omega^4 p_0^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}. \qquad (6\cdot5\cdot31)$$

*§6·6 磁偶极辐射和电四极辐射

现在讨论矢势的多极展开式(6·4·15)中第二项和第三项对电磁辐射的贡献。当运动电荷体系的电偶极矩为零时，这两项变为主要项。

1. 磁偶极辐射

前面(6·4·15)式中磁偶极子产生的势是

$$\vec{A}(\vec{r},\ t)=\frac{\mu_0}{4\pi cr}(\dot{\vec{m}}_{t'}\times\vec{n}).$$

与电偶极辐射同理，写成以 t 为时间变量的表示式

$$A(\vec{r},\ t)=\frac{\mu_0}{4\pi cr}e^{ikr}(\dot{\vec{m}}\times\vec{n}),\qquad(6\cdot6\cdot1)$$

代入(6·4·8)和(6·4·9)式，得磁偶极辐射的电磁场

$$\begin{aligned}\vec{B}&=\frac{\mu_0 e^{ikr}}{4\pi c^2 r}(\ddot{\vec{m}}\times\vec{n})\times\vec{n},\\ \vec{E}&=-\frac{\mu_0 e^{ikr}}{4\pi cr}(\ddot{\vec{m}}\times\vec{n})\end{aligned}\qquad(6\cdot6\cdot2)$$

如果选$\vec{m}$位于球坐标原点，$\vec{m}$的方向沿 Z 轴方向，θ 表示极角，$|\vec{m}|$表示磁矩的振幅，则磁偶极辐射的平均能流密度为

$$<\vec{S}>=\frac{c}{2\mu_0}|\vec{B}|^2\vec{n}=\frac{\mu_0\omega^4|\vec{m}|^2}{32\pi^2c^3r^2}\sin^2\theta\vec{n}\qquad(6\cdot6\cdot3)$$

总辐射功率为

$$<P>=\oint<S>r^2d\Omega=\frac{\mu_0\omega^4|\vec{m}|^2}{12\pi c^3}.\qquad(6\cdot6\cdot4)$$

[例 6–7] 证明下列体系不存在磁偶极辐射:

(1) 荷质比都相同的带电运动粒子体系;

(2) 任何只包含两个带电运动粒子的体系。

解: (1)由第三章(3·3·15)式可知，若体系内所有带电的运动粒子都有相同的荷质比，则体系的磁矩为

$$\vec{m}=\frac{q}{2M}\vec{L},\qquad(6\cdot6\cdot5)$$

式中 q／M 为带电粒子的荷质比，$\vec{L}$为体系的总轨道角动量。

假如体系是不受外力作用的封闭体系(或所受合外力为零),

那么该体系的角动量守恒，即$\vec{L}$为常矢量，$\dot{\vec{L}}=0$。于是

$$\dddot{\vec{m}}=\frac{q}{2M}\ddot{\vec{L}}=0, \qquad (6\cdot 6\cdot 6)$$

又根据(6 · 6 · 2)式，磁偶极辐射的电场与磁场均与$\dddot{\vec{m}}$成正比。所以，在此情况下其辐射场

$$\vec{E}=0, \qquad \vec{B}=0, \qquad (6\cdot 6\cdot 7)$$

即表示该体系没有磁偶极辐射。

(2) 对于任何只包含两个粒子的体系，选质心为坐标原点，可证$\vec{m}\sim\vec{L}$(请读者自己证明)，与上式同理，再由体系角动量守恒得$\dddot{\vec{m}}=0$，从而不存在磁偶极辐射。

[例 6–8] 一电流线圈半径为 α，激发电流振幅为 I_0，角频率为 ω，求辐射功率和辐射电阻。

解：电流线圈磁矩的振幅为

$$m=I_0\pi\alpha^2,$$

代入(6 · 6 · 4)式得辐射功率

$$<P>=\frac{\mu_0\omega^4 I_0^2(\pi a^2)^2}{12\pi c^3}=\frac{4\pi^5}{3}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 I_0^2. \qquad (6\cdot 6\cdot 8)$$

当 I_0 和线圈面积不变时，辐射功率$\sim\left(\frac{a}{\lambda}\right)^4$，因此磁偶极辐射比电偶极辐射小$\left(\frac{a}{\lambda}\right)^2$数量级，小线圈的辐射能力比短天线更低。

辐射电阻是<P>表达式中$\frac{I_0^2}{2}$的系数:

$$R_r=\frac{8\pi^5}{3}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{a}{\lambda}\right)^4=197\left(\frac{2\pi\alpha}{\lambda}\right)^4(\text{欧姆}). \qquad (6\cdot 6\cdot 9)$$

可见磁偶极辐射的电阻与频率的四次方成比例，而电偶极辐射的

则与频率的二次方成比例，见(6·5·12)式。

2. 电四极辐射

与前同理，电四极子的矢势

$$\vec{A}(\vec{r},\ t)=\frac{\mu_0}{24\pi cr}e^{ikr}\dddot{\vec{Q}}. \qquad (6\cdot 6\cdot 10)$$

辐射电磁场

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{r},\ t)&=\frac{\mu_0 e^{ikr}}{24\pi c^2 r}\dddot{\vec{Q}}\times\vec{n},\\ \vec{E}(\vec{r},\ t)&=\frac{\mu_0 e^{ikr}}{24\pi cr}(\dddot{\vec{Q}}\times\vec{n})\times\vec{n}.\end{aligned} \qquad (6\cdot 6\cdot 11)$$

辐射的平均能流密度

$$<\vec{s}>=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{288\pi\ c^5 r^2}(\dddot{\vec{Q}}\times\vec{n})^2\vec{n}. \qquad (6\cdot 6\cdot 12)$$

辐射功率

$$<P>=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\omega^6}{360c^5}\sum_{ij}|Q_{ij}(\omega)|^2. \qquad (6\cdot 6\cdot 13)$$

[例 6-9] 有一振荡的直线电四极子，如图 6·7，设上下两导体用细导线与中间一个导体相连，当两导线上有反向交变电流时，上下导体出现同号电荷 Q，中间导体出现电荷−2Q，求它以频率 ω 振荡时的辐射功率和角分布。

解：取坐标原点在−2Q 处，Z 轴沿直线向上，该体系的电四极矩张量为

$$\vec{Q}=6Ql^2\vec{e}_z\vec{e}_z,$$

$$\vec{Q}=\vec{n}\cdot\vec{Q}=6Ql^2\vec{n}\cdot\vec{e}_z\vec{e}_z=6Ql^2\cos\theta\vec{e}_z,$$

$$\dddot{\vec{Q}}\times\vec{n}=6Ql^2\cos\theta\vec{e}_z\times\vec{n}=6Ql^2\cos\theta\sin\theta\vec{e}_\varphi,$$

$$(\dddot{\vec{Q}}\times\vec{n})^2=36Q^2l^4\omega^6\cos^2\theta\sin^2\theta.$$

辐射角分布由因子$\cos^2\theta\sin^2\theta$确定，方向图如图 6·8 所示。辐射功率为

$$<P>=\oint <S> r^2 d\Omega=\frac{Q^2 l^4 \omega^6}{60\pi\varepsilon_0 c^5}$$
$$=\frac{4}{15}\pi^3 Q^2\omega^2\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^4.$$

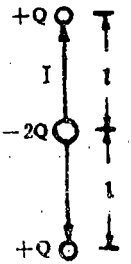


图 6.7

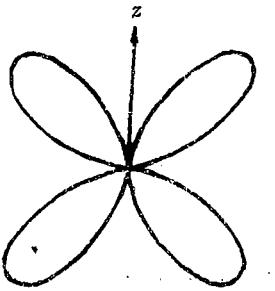


图 6.8

由所得结果可以看出，沿着 Z 轴，$\theta=0$ 或 π，是不可能有电四极辐射的，因为构成四极子的两个偶极子在这个方向上都不辐射能量。沿赤道平面，$\theta=\frac{\pi}{2}$，辐射也是零，因为在这里，两个偶极子给出大小相等而方向相反的场。辐射功率$\sim\omega^2\left(\frac{l}{\lambda}\right)^4$，即电四极辐射与磁偶极辐射同级，比电偶极辐射小$\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$数量级。

3. 多极辐射的对偶性和共同特性

将电偶极辐射场(6·5·2)式和磁偶极辐射场(6·6·2)式相比较，就会发现这两个场具有十分相似的形式，如果作如下变换

$$\vec{P}\to\frac{\vec{m}}{c},\quad \vec{E}\to c\vec{B},\ c\vec{B}\to -\vec{E} \qquad (6\cdot 6\cdot 14)$$

就可由电偶极辐射场得到磁偶极辐射场，这是求磁偶极辐射场的更为简便的方法。回忆第四章[例 4–5]中关于麦克斯韦方程组的对偶性的讨论，利用对偶关系(4 · 3 · 21)式，立即会得到上述变换式(6 · 6 · 14)。同理，只要对(6 · 6 · 11)式作同样的变换，就会从电四极矩的辐射场公式得出磁四极矩的辐射场公式，多极辐射的这种对偶性，正是电磁场的对偶原理的典型例证。

另外，比较上面讨论的电偶极辐射、磁偶极辐射和电四极辐射，就会看到这三种电磁辐射具有如下两点共同特性:

第一、略去了$\frac{1}{r}$高次项的这三种辐射场都是 TEM 波，其电磁场由$\ddot{\vec{P}}(t)$、$\ddot{\vec{m}}(t)$和$\dddot{\vec{Q}}(t)$决定，如果一个运动电荷体系没有加速度，则它的$\ddot{\vec{P}}(t)$、$\ddot{\vec{m}}(t)$和$\dddot{\vec{Q}}(t)$均为零，从而就没有电磁辐射。

第二，这三种辐射的场量$\vec{E}$和$\vec{B}$的振幅都与$\frac{1}{r}$成比例，坡印亭矢量$<\vec{S}>=\frac{1}{2}Re(\vec{E}^{*}\times\vec{H})$都与$\frac{1}{r^2}$成比例，致使$<\vec{S}>$对球面积分后的总辐射功率与球半径无关，这正是能量守恒的要求。

多极辐射在原子核物理中有重要应用，由辐射几率(正比于经典辐射功率)和角分布可以推知辐射的电磁多极性质，由此提供关于原子核内部运动的一些知识。

§6 · 7　线型细天线辐射

上面的讨论表明，对于小区域(区域线度 $l<<$波长 λ)内高频电流产生的辐射，其辐射功率为$(l/\lambda)^2$数量级或更小。因此要得到较大的辐射功率，必须使天线长度至少达到与波长同数量

级。由于天线上的电流是受到场作用的，因此对于天线的辐射，严格的方法应该是把导线作为半径为有限大小的柱体，将麦克斯韦方程组，介质方程和电荷守恒定律联立起来，根据边界条件求解。这是一个很复杂的边值问题，我们不打算讨论，这里仅考虑简单情形，即导线上的电荷电流分布可以近似地先确定，从而根据推迟势公式求出辐射电磁场。

当天线为线型细导线时，天线中的电流可近似地看作随时间和空间作正弦形式的变化。下面就细天线电流为驻波形式和行波形式，分别进行讨论。

1.天线电流为驻波形式

类似图 6 · 4 所示，设沿 Z 方向有一中心馈电的细直天线，天线两臂是对称的，总长度是 $2l$，天线上的电流分布近似为驻波形式，两端为波节，故电流密度

$$\vec{J}(\vec{r}) = \vec{e}_z I_0 \delta(x')\delta(y') sink(l - |z'|), \quad |z'| \leqslant l. \tag{6 · 7 · 1}$$

知道了电流分布便可计算矢势$\vec{A}$，注意到

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{z'}, \quad R \approx r - z' cos\theta,$$

并代入$\vec{J}(\vec{r'})$有

$$\begin{aligned}
\vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r'})e^{ikR}}{R} dV' \\
&= \vec{e}_z \frac{\mu_0 I_0}{4\pi}\int_{-l}^{l} (e^{ikR} / R)\sin k(l - |z'|)dz' \\
&\approx \vec{e}_z \frac{\mu_0 I_0}{4\pi r} e^{irk}\int_{-l}^{l} e^{-ikz'\cos\theta}\sin k(l - |z'|)dz' \\
&= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} e^{ikr}\left[\frac{cos(kl\cos\theta) - \cos kl}{k\sin^2\theta}\right]\vec{e}_z .
\end{aligned} \tag{6 · 7 · 2}$$

由此算出辐射区的电磁场是

$$\vec{H}(\vec{r}) = ik\vec{n} \times \vec{A}(\vec{r})$$

$$= -i\frac{I_0}{2\pi r}e^{ikr}\left[\frac{\cos(kl\cos\theta) - \cos kl}{\sin\theta}\right]\vec{e}_\varphi \qquad (6\cdot 7\cdot 3)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = c\mu_0\vec{H}(\vec{r}) \times \vec{n}$$

$$= -i\frac{I_0}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{e^{ikr}}{r}\left[\frac{cos(kl\cos\theta) - \cos kl}{\sin\theta}\right]\vec{e}_\theta. \qquad (6\cdot 7\cdot 4)$$

辐射能流密度

$$<\vec{S}> = \frac{1}{2}Re(\vec{E}^* \times \vec{H}) = \frac{1}{2}\frac{I_0^2}{(2\pi)^2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{1}{r^2}[F(\theta)]^2\vec{e}_r, \qquad (6\cdot 7\cdot 5)$$

其中因子

$$F(\theta) = \frac{\cos(kl\cos\theta) - \cos kl}{\sin\theta}, \qquad (6\cdot 7\cdot 6)$$

它影响电磁辐射的角分布，本身由天线上的具体电流分布所决定。平均角分布为

$$<f(\theta,\varphi)> = <\vec{S}\cdot d\vec{\sigma}/d\Omega> = \frac{1}{2}\frac{I_0^2}{(2\pi)^2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,[F(\theta)]^2 \qquad (6\cdot 7\cdot 7)$$

由所得结果可以看出，辐射的极化方向在天线与观测点矢径的平面内，角分布因子 $F(\theta)$与 kl 有关。在长波极限下($kl<<1$)，因为

$$\cos kl \approx 1 - \frac{1}{2}(kl)^2, \qquad \cos(kl\cos\theta) \approx 1 - \frac{1}{2}(kl)^2\cos^2\theta,$$

所以 $F(\theta) \approx \frac{1}{2}(kl)^2\sin^2\theta$，导致电偶极辐射的结果。

当天线长度 $2l = \frac{\lambda}{2}$时，称为半波天线，此时天线的平均角分布为

$$<f(\theta,\ \varphi)> = \frac{1}{2}\frac{I_0^2}{(2\pi)^2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left[\frac{\cos^2(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin^2\theta}\right], \quad (6\cdot 7\cdot 8)$$

它与偶极辐射角分布相似，但较集中于 $\theta=90°$ 平面上。总辐射功率

$$\begin{aligned}<P> &= \int <f(\theta,\ \varphi)>\, d\Omega \\ &= \frac{1}{2}\frac{I_0^2}{(2\pi)^2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\int\left[\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)\Big/\sin^2\theta\right]2\pi\sin\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2}\frac{I_0^2}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,(ln2\pi\gamma - C_i 2\pi).\end{aligned} \quad (6\cdot 7\cdot 9)$$

式中 $\gamma=1.781\cdots$ 为尤拉常数，$C_i(x)=-\int_x^\infty \frac{\cos v}{v}dv$ 为积分余弦函数，查表得出

$$<P> = 2.44\,\frac{I_0^2}{8\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}, \quad (6\cdot 7\cdot 10)$$

则辐射电阻为

$$R_r = 2.44\frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 73.2(欧), \quad (6\cdot 7\cdot 11)$$

由此可见半波天线的辐射能力较强。

半波天线对极角有一定的方向性，对方位角没有方向性。在实际应用中，常把一系列天线排布成天线阵，利用干涉效应来获得更好的辐射方向性。

2. 天线电流为行波形式

假定沿长度为 $2l$ 的细天线有一个行波形式的电流分布

$$\vec{J}(\vec{r'}) = \vec{e}_z I_0\delta(x')\delta(y')e^{ipkz'} \quad (-l\leqslant z\leqslant l), \quad (6\cdot 7\cdot 12)$$

其中 p 是光速与沿天线电流的行波传播速度之比值，其物理意

义后面解释。与前同理，矢势$\vec{A}$为

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{e}_z \frac{\mu_0 I_0}{4\pi r} e^{ikr} \int_{-l}^{l} e^{-ikz'\cos\theta} e^{ip\,kz'} dz'$$
$$= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} e^{ikr} \frac{\sin[kl(\mathcal{P} - \cos\theta)]}{k(\mathcal{P} - \cos\theta)}. \qquad (6 \cdot 7 \cdot 13)$$

令辐射角分布因子

$$F(\theta) = \frac{\sin[kl(\mathcal{P} - \cos\theta)]}{(\mathcal{P} - \cos\theta)}, \qquad (6 \cdot 7 \cdot 14)$$

则辐射区的电磁场可表示为

$$\vec{H}(\vec{r}) = -i\frac{I_0 e^{ikr}}{2\pi r} F(\theta)\sin\theta \vec{e}_\varphi, \qquad (6 \cdot 7 \cdot 15)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -i\frac{\mu_0 c I_0 e^{ikr}}{2\pi r} F(\theta)\sin\theta \vec{e}_\theta. \qquad (6 \cdot 7 \cdot 16)$$

辐射平均能流密度

$$<\vec{S}> = \frac{I_0^2}{8\pi^2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{1}{r^2}[F(\theta)]^2 \sin^2\theta \vec{e}_r. \qquad (6 \cdot 7 \cdot 17)$$

当 $kl << 1$ 时，即短天线情况，$F(\theta)$与前面天线中电流分布为驻波形式没有多大差别。然而在一般情况下，显著的不同在于驻波形式电流的 $F(\theta)$对赤道平面($\theta = \frac{\pi}{2}$)是对称的，而行波形式电流的 $F(\theta)$是不对称的，行波形式电流的最大辐射出现在辐射方向与行波传播方向夹角为 θ 的锥面上，锥角随 p 或 kl 的增大而减小，这种辐射与带电粒子在介质内运动时产生的切伦柯夫辐射类似。

在真空中，匀速运动带电粒子不产生辐射电磁场。但是带电粒子在介质内运动时，介质内产生诱导电流，这些诱导电流激发次波；当带电粒子的速度超过介质内的光速 c／n 时，这些次波与原来粒子的电磁场互相干涉，形成切伦柯夫辐射。辐射方向与

粒子运动方向的夹角 θ 由下式确定:

$$\cos\theta = \frac{c}{nv}. \qquad (6\cdot 7\cdot 18)$$

现在再来看因子 p 的物理意义，当 $l\to\infty$时，(6 · 7 · 13)式中的积分是一个 δ 函数，有

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{e}_z \frac{\mu_0 I_0}{4\pi r} e^{ikr} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(p-\cos\theta)kz'} dz'$$

$$= \vec{e}_z \frac{\mu_0 I_0}{2r} e^{ikr} \delta[(p-\cos\theta)k].$$

根据 δ 函数的性质 $\delta(\alpha x) = \frac{1}{a}\delta(x)$，上式可写成

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{e}_z \frac{\mu_0 I_0}{2kr} e^{ikr} \delta(p-\cos\theta). \qquad (6\cdot 7\cdot 19)$$

当 θ 不为零时，则有 $p<1$，并且对于不为零的矢势 $\vec{A}$，还有关系式

$$p = \cos\theta, \qquad (6\cdot 7\cdot 20)$$

比较(6 · 7 · 18)与(6 · 7 · 20)式，得

$$p = \frac{c}{nv}. \qquad (6\cdot 7\cdot 21)$$

所以在(6 · 7 · 12)式右边指数上 k 前面乘一个因子 p，相当于一束电磁波在介质中传播,要改变其传播速度。因为这时它的传播速度不是真空中的 c，而是 c / n，这也正是我们把天线中行波形式电流分布产生的辐射与带电粒子在介质内产生的切伦柯夫辐射类比的原因。

§6 · 8　电磁波的衍射

在光学中惠更斯原理是研究衍射问题的基础，本节从电动力

学基本方程出发，导出惠更斯原理。衍射理论的一般问题是要计算电磁波通过障碍物或小孔后的角分布，即求出衍射图样。该问题严格来说应作为边值问题求解，但这是相当复杂的。实际上都是用一些近似解法，即假设求解区域边界面上的值为已知，从而把区域内的电磁场用其边界上的值表示出来。并且在衍射角不大的情况下，可近似地用标量衍射理论求解。

1. 基尔霍夫公式

设电磁场具有一定的频率 ω，于是电磁场强的任一直角分量可表示为

$$\psi(\vec{r},\ t)=\psi(\vec{r})e^{-i\omega t},$$

其中 $\psi(\vec{r})$满足亥姆霍兹方程

$$\nabla^2\psi+k^2\psi=0. \qquad (6\cdot 8\cdot 1)$$

如果忽略电磁场其它分量的影响，而孤立地把 ψ 看作一个标量场，用边界上的 ψ 和$\frac{\partial\psi}{\partial n}$值表示出区域内的 ψ，这种理论就是标量衍射理论。

我们用格林函数方法把区域内的 ψ 用边界上的值来表示。由§6·2中的讨论可知，亥姆霍兹方程的具有出射波形式的格林函数

$$G(\vec{r},\ \vec{r'})=\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r'}|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r'}|}=\frac{e^{ikR}}{4\pi R} \qquad (6\cdot 8\cdot 2)$$

满足

$$(\nabla^2+k^2)G(\vec{r},\ \vec{r'})=-\delta(\vec{r}-\vec{r'}). \qquad (6\cdot 8\cdot 3)$$

在格林第二公式

$$\int_v(\psi\nabla^2\Phi-\Phi\nabla^2\psi)dv=\oint_s(\psi\nabla\Phi-\Phi\nabla\psi)\cdot d\vec{s} \qquad (6\cdot 8\cdot 4)$$

中以打撇号的量表示积分变量，令 $\psi=\psi$，$\Phi=G$，设$\vec{n}$是指向区域V内的法线，即$d\vec{s}=-\vec{n}ds$，再代入(6·8·1)—(6·8·3)式，

即得

$$\psi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\oint_s \left[\psi(\vec{r'})\nabla'\frac{e^{ikR}}{R} - \frac{e^{ikR}}{R}\nabla'\psi(\vec{r'})\right]\cdot d\vec{s'}$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\oint_s \frac{e^{ikR}}{R}\vec{n}\cdot\left[\nabla'\psi(\vec{r'}) + (ik - \frac{1}{R})\frac{\vec{R}}{R}\psi(\vec{r'})\right]ds'. \quad (6\cdot 8\cdot 5)$$

此公式称为基尔霍夫公式。被积式中因子 e^{ikR}/R 表示由曲面 S 上的点 $\vec{r'}$ 向 V 内点 $\vec{r}$ 传播的球面波，传播所需时间即为 R／c，波源的强度由点 $\vec{r'}$ 上的 ψ 和 $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ 值确定，积分意味着区域内任一点的波是 S 上发出的这样的球面波的迭加。这就是说，当电磁波的波面达到某一位置时，波面上的各点可以被认为是新的波源，它们激发起新的球面波，这些新球面波干涉的结果，决定着这个波面继续前进的方式。所以，基尔霍夫公式就是惠更斯原理的数学表示。

2. 小 孔 衍 射

现在以小孔衍射为例，说明如何应用基尔霍夫公式讨论衍射问题。考虑单色波在传播过程中通过不透明平面屏上的一个小孔，假定小孔的线度比波长大，但比观测点与波源之间的距离要小得多。设屏面 S_1，孔面 S_0，和半球面 S_2 围成一区域 V，如图 6.9 所示，在求区域 V 中任一点场强时，应对封闭曲面($S_0+S_1+S_2$)积分。

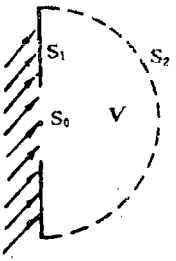


图 6.9

当半径趋于无穷大时，对 S_2 上的积分为零，于是只需对孔面 S_0 和无穷平面 S_1 积分就行了。但实际上事先并不知道 S_0 和 S_1 上的 ψ 和 $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ 的值。为了进行计算，基尔霍夫提出下列近似假定:

在屏面S_1上，$\psi=\frac{\partial\psi}{\partial n}=0$，

在孔面S_0上，ψ和$\frac{\partial\psi}{\partial n}$等于原来的入射波的值，　(6·8·6)

这称为基尔霍夫边界条件，是基尔霍夫衍射理论的基础。由此(6·8·5)式的封闭曲面积分成为仅对孔面 S_0 积分。

在孔面上，ψ 和 $\partial\psi/\partial n$ 可取入射波的值。设入射波 ψ_i 是平面波，其波矢为$\vec{k}_1$，即

$$\psi_i(\vec{r}')=\psi_0 e^{i\vec{k}_1\cdot\vec{r}'}, \qquad (6\cdot8\cdot7)$$

$$\nabla'\psi_i(\vec{r}')=i\vec{k}_1\psi_0 e^{i\vec{k}_1\cdot\vec{r}'}. \qquad (6\cdot8\cdot8)$$

若衍射波矢为$\vec{k}_2$，我们在远处一点$\vec{r}$观察衍射波，$\vec{r}'$为小孔面上一点，$\vec{k}_2$沿$\vec{r}$方向，如图 6.10 所示，令

$$R=|\vec{r}-\vec{r}'|\approx r-\frac{\vec{k}_2}{k}\cdot\vec{r}',$$

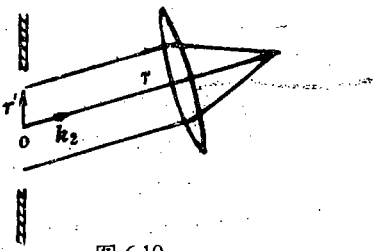


图 6.10

在(6·8·5)式中略去 1/R 的高次项，得

$$\psi(\vec{r})=-\frac{i\psi_0 e^{ikr}}{4\pi r}\int_{S_0}e^{i(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\cdot\vec{r}'}(\vec{k}_1+\vec{k}_2)\cdot\vec{n}ds'$$

$$=-\frac{i\psi_0 e^{ikr}}{4\pi r}\int_{S_0}e^{i(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\cdot\vec{r}'}(\cos\theta_1+\cos\theta_2)ds'. \qquad (6\cdot8\cdot9)$$

式中 θ_1 为入射波矢$\vec{k}_1$与法线$\vec{n}$的夹角，θ_2为衍射波矢$\vec{k}_2$与$\vec{n}$的夹角，$(\cos\theta_1+\cos\theta_2)$称为倾斜因子，它描写子波振幅随方向的变化。$|\psi|^2$ 代表衍射光波的强度，由(6·8·9)式可算出衍射光强与 θ_2 的关系，从而得到衍射图样。对于小孔衍射实验测得的衍射图样与计算结果相符，说明基尔霍夫假设的边界条件是近似正确

的。

[例 6–10] 波长为 λ 的平面电磁波入射于屏幕的长方形小孔上，设小孔边长为 a 和 b，(a，$b>>\lambda$)，求夫琅和费衍射图样。

解：据(6·8·9)式求解。取小孔中心为原点，z′轴与孔面垂直，入射波沿 z′轴方向，则 $\cos\theta_1=1$。孔面上 $z'=0$，$\vec{k_1}\cdot\vec{r'}=0$，并且 θ_2 与积分变量无关。因此(6·8·9)式化为

$$\psi(\vec{r})=-\frac{ik\psi_0 e^{ikr}}{4\pi r}(1+\cos\theta_2)\int_{S_0}e^{-i\vec{k}_2\cdot\vec{r'}}d\sigma',\quad(6\cdot8\cdot10)$$

其中积分因子

$$I=\int_{S_0}e^{-i\vec{k}_2\cdot\vec{r'}}d\sigma'=\int_{-a}^{a}e^{-ik_{2x}x'}dx'\int_{-b}^{b}e^{-ik_{2y}y'}dy'$$

$$=\frac{4}{k_{2x}k_{2y}}\sin k_{2x}a\sin k_{2y}b\qquad(6\cdot8\cdot11)$$

设 α 和 β 分别为衍射波偏离 YZ 面和 XZ 面的角，即 $\vec{k}_2$ 与 x 轴的夹角为 $\frac{\pi}{2}-\alpha$，与 y 轴的夹角为 $\frac{\pi}{2}-\beta$。又因 α 和 β 都为小角，有

$$\begin{aligned}k_{2x}&=k\sin\alpha\approx k\alpha,\\ k_{2y}&=k\sin\beta\approx k\beta.\end{aligned}\qquad(6\cdot8\cdot12)$$

将(6·8·12)式代入(6·8·11)式

$$I=\frac{4}{k^2}\frac{\sin ka\alpha}{\alpha}\frac{\sin kb\beta}{\beta}.\qquad(6\cdot8\cdot13)$$

$|\psi|^2$ 为光强 I，以 I_0 表示沿 Z 轴的光(即 $\theta_2=0$，$\alpha=\beta=0$ 的情形)，则由(6·8·10)式和(6·8·13)式衍射光强为

$$I=I_0\left(\frac{1+\cos\theta_2}{2}\right)^2\left(\frac{\sin ka\alpha}{ka\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin kb\beta}{kb\beta}\right)^2$$

$$\approx I_0\left(\frac{\sin ka\alpha}{ka\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin kb\beta}{kb\beta}\right)^2. \qquad (6\cdot 8\cdot 14)$$

光强与 α 的关系如图 6.11 所示。第一条暗纹出现在 $ka\alpha=\pi$ 处，即 $\alpha=\frac{\lambda}{2a}$。说明波长愈短，衍射条纹愈密。(6 · 8 · 14)式已相当好地为光学实验所证实。

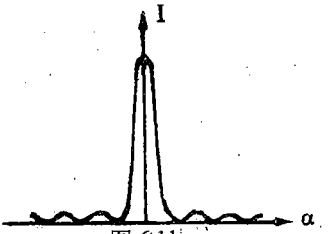


图 6.11

习题六

1. 利用电荷守恒定律，验证 $\vec{A}$ 和 Φ 的推迟势满足洛伦兹条件。

2. 验证推迟势满足达朗伯方程。

3. 一个球形电容器，内径为 $\mathbf{R}_1$，外径为 $\mathbf{R}_2$，填以微弱导电的电介质，利用洛伦兹条件计算当电容器通过本身的电介质放电时的磁感应强度 $\vec{B}$。

4. 一无限大的平面上均匀分布着随时间变化的面电流，其密度为 $\vec{\alpha}(t)$，求这面电流产生的电磁场。

5. 证明若电磁场的势 Φ 和 $\vec{A}$ 用赫兹矢量 Z 表示，使

$$\Phi=-\nabla\cdot\vec{Z} \qquad \vec{A}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t}$$

则洛伦兹条件恒能满足；若依电荷守恒定律定义一矢量 $\vec{P}$，使电荷体密度 ρ 和电流体密度 $\vec{J}$ 各满足

$$\rho=-\nabla\cdot\vec{P} \qquad \vec{J}=\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}$$

式中 $\vec{P}$ 具有极化矢量的意义。则赫兹矢量 $\vec{Z}$ 满足方程

$$\nabla^2\vec{Z}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{z}}{\partial t^2}=-\frac{\vec{p}}{\varepsilon_0}。$$

6. 试对线电流这一极限情况写出连续性方程。

7. 设有频率为ω的电流通过一直线形理想导体。利用边界条件和上题的连续性方程，证明：电流沿导线呈正弦分布。

8. 设随时间变化的电荷 $\pm Q$ 位于一对小球上，球之间用一根长度为 l，电阻和电容都可忽略的导线联结起来，于是构成一个电偶极子。如果 $Q=Q_0e^{i\omega t}$，$\vec{P}=\vec{P}_0e^{i\omega t}$，$(\vec{P}_0=Q_0\vec{l})$，计算此振荡电偶极子的推迟势。

9. 一个半径为 a，用交流电源供电的圆形线圈，通有电流 $I=I_0e^{-iwt}$。若 $r>>\lambda>>a$，试求此振荡磁偶极子的推迟势，并讨论频率很低和频率很高时的结果。

10. 一交变磁场 $H=H_0e^{i\omega t}$ 加在磁导率为 μ，电导率为 σ 的半无限大铁磁性导体表面。设 x 轴由铁磁体表面垂直指向其内部，$\vec{H}_0$ 沿 y 轴方向，试由麦克斯韦方程组 $\nabla\times\vec{H}=\vec{J}$ 及 $\nabla\times\vec{J}=-\mu\sigma\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$，求铁磁导体内的磁场分布，并说明趋肤深度的物理意义。

11. 半径为 **R**、磁导率为 μ、电导率为 σ 的金属球置于均匀的变化磁场 $\vec{H}=\vec{H}_0e^{-i\omega t}$ 之中，其频率较低，试求球内的傅科电流分布以及由球吸收的功率（取一级近似）。

12. 有一质量为 m 电荷为 q 的粒子以速度 $\vec{V}$ 从静止电荷 q_1 旁边飞过，瞄准距离为 a，假设运动粒子的速度很大，以致可以认为基本上不偏离直线运动，试计算运动粒子因电磁辐射而损失的能量。

13. 有一个带电粒子 q_1 以很大的速度从另一个带电粒子 q_2 旁边飞过，以致可以认为基本上不偏离直线运动，试求在质心系中偶极辐射总能量的角分布。

如果在所得结果中令 $m_2=\infty$，并对所有方向积分，则结果如何？

14. 对于两个具有相同频率 ω、相同振幅 p_0 的电偶极子，有

$\frac{\pi}{2}$ 的相角差，且两个偶极矩矢量成 ψ_0 角（使 $\vec{P}_1$ 沿 x 轴，$\vec{P}_2$ 在 xy 平面里），对于原点的振子 $\vec{P}$，在辐射范围内的磁场为 $\vec{B}=K^2\frac{e^{ikr}}{r}(\vec{e}_r\times\vec{p})$。试求：(1)平均角分布；(2)在辐射区域里总的平均辐射强度。

15. 有两个相互吸引的带电粒子（m_1，q_1）和（m_2，q_2）作椭圆运动，试计算偶极辐射的平均强度。在质心系中粒子的能量和动量矩是已知的。

16. 半径为 R 的均匀永磁球，磁化强度为 $\vec{M}_0$，球以恒定角速度 ω 绕通过球心而垂直于 $\vec{M}_0$ 的轴旋转，设 $R\omega<<c$，求辐射场和能流。

17. 设有一电矩振幅为 p_0，频率为 ω 的电偶极子位于距理想导体平面为 $\frac{a}{2}$ 处，$\vec{p}_0$ 平行于导体平面。设 $a<<\lambda$，求在 $r>>\lambda$ 处的电磁场及辐射能流。

电偶极辐射

18. 设有线偏振平面波 $\vec{E}=\vec{E}_0e^{i(kx-\omega t)}$ 照射到一个绝缘介质球上（$\vec{E}_0$ 在 Z 方向），引起介质球极化，极化矢量 $\vec{P}$ 是随时间变化的，因而产生辐射。设平面波的波长 $\frac{2\pi}{K}$ 远大于球半径 R，求介质球所产生的辐射场和能流。

球内似稳场

19. 设电荷 q 球对称地分布在一有限区域内，并作径向脉动。试求出在电荷分布区以外的电磁场 $\vec{H}$，$\vec{E}$。

20. 有两个电量为 e 的点电荷位于长为 $2l$ 的线段的两端，该线段以恒定角速度 $\frac{\omega}{2}$ 绕与线垂直且通过它中心的轴旋转。(1)求出电偶极矩，磁偶极矩和电四极矩。(2)该系统的辐射是什么类型？频率为多少？(3)若在远离电荷、与转轴成 θ 角的方向上观察辐射，当 $\theta=0°$，90 °和 $0<\theta<90°$ 时偏振如何？

21. 试求出沿着半径为 a 的圆周作匀速运动的电荷 e 所辐射的电磁场 $\vec{H}$，$\vec{E}$。设运动是非相对论的，角速度为 ω，到观察点的距离 $r>>a$。

求出辐射角分布的时间平均值和辐射总强度的时间平均值，并分析辐射的偏振。

22. 证明电四极矩的辐射功率可表示为　　经

$$<P>=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{1}{360c^5}\sum_{ij}\left|\dddot{Q}_{ij}\right|^2$$

23. 由基尔霍夫衍射积分

$$\psi(\vec{r})=-\frac{1}{4\pi}\int_s \frac{e^{ikR}}{R}\vec{n}\cdot\left[\nabla'\psi(\vec{r}')+\left(ik-\frac{1}{R}\right)\vec{e}_R\psi(\vec{r}')\right]ds'$$

出发，证明：

(1) 若光源离屏较近，ψ 为球面波：$\psi(\vec{r}')=A\frac{e^{ikr'}}{r'}$，

上式化为菲涅耳衍射积分：

$$\psi(\vec{r})=-i\frac{Ak}{4\pi}\int_s \frac{e^{ik(R+r')}}{Rr'}(\vec{e}_{r'}+\vec{e}_R)\cdot\vec{n}ds'$$

其中 $\vec{e}_{r'}$ 为自然坐标原点（可建立在光源处）指向界面 S 上某点（次波源）方向上的单位矢量，$\vec{e}_R$ 为界面上自该点指向场点方向上的单位矢量。

(2) 若光源离屏较远，ψ 可作为平面波，上式可化为夫琅和费衍射积分：

$$\psi(r)=-i\frac{\psi_0}{2\lambda}\int_s \frac{e^{ikR}}{R}(1+\cos\theta)ds'$$

其中 $\cos\theta=e_R\cdot n$。

24. 圆孔菲涅耳衍射。在无限大完全吸收平面上有一半径为 a 的小孔，设波源在圆孔左侧对称轴上距圆孔中心为 R_0 处，它在圆孔中心处产生的强度为 I_0，求圆孔右侧轴上距圆孔中心同样为 R_0 处的强度（设

$R_0 >> \lambda$)。

25. 矩形孔的夫琅和费衍射：(1)单缝衍射，若无限大完全吸收平面上有一 2a × 2b 的细长矩形孔，求远处的衍射强度。(2)双缝衍射，若在上述平面上有两条宽度为 2a 的细长狭缝，狭缝中线间相距 2d，求远处的衍射强度。

第七章　狭义相对论基础

在前面几章里讨论电磁运动的规律时，一直回避了参照系的问题。本章从麦克斯韦方程组是否适用于惯性系的问题出发，介绍狭义相对论基本原理的提出，并讨论与其相联系的洛伦兹变换和狭义相对论的时空性质。然后研究相对论力学和相对论形式的电动力学，以及物理规律的协变性。最后介绍电磁场中带电粒子的拉格朗日方程和哈密顿正则方程。

§7.1　狭义相对论的提出

1、伽利略变换及其困难

物理规律总是在一定的参照系中表述的，麦克斯韦方程组也不例外。那么它是适用于某个特定的参照系呢，还是象经典力学里那样，对所有的惯性系都成立？

先回忆一下牛顿力学中的相对性原理。它告诉我们，不可能用任何力学实验来判断一个封闭的惯性系统处于静止状态还是作匀速直线运动。这个原理的数学表述是和伽利略变换相联系的。所谓伽利略变换，即考虑两个坐标系$\sum$ (OXYZ) 和$\sum'$ (O′X′Y′Z′)，在 t=0 时刻，两者重合在一起，其后$\sum'$系沿 X 轴方向相对$\sum$系以匀速 V 运动，其坐标之间有如下关系（图 7.1）

$$\begin{aligned} x' &= x - vt, \\ y' &= y, \\ z' &= z。 \end{aligned} \tag{7.1.1}$$

事实上，这里还暗含了“全宇宙有一个统一的时间”这一假定：

$$t' = t. \tag{7.1.1'}$$

由上述变换关系式，我们得到

$$\dot{x}' = \dot{x} - v, \quad \dot{y}' = \dot{y}, \quad \dot{z}' = \dot{z}, \tag{7.1.2}$$

$$\ddot{x}' = \ddot{x}, \quad \ddot{y}' = \ddot{y}, \quad \ddot{z}' = \ddot{z}, \tag{7.1.3}$$

所以，牛顿力学方程在两个坐标系下有完全同样的形式(称之为“协变”)：

$f_x = m\ddot{x} \rightarrow f'_x = m\ddot{x}'$，对 y、z 亦同，$\vec{f} = \vec{f}'$。现在我们可以将力学相对性原理表述为：牛顿力学的规律对于伽利略变换是协变的。

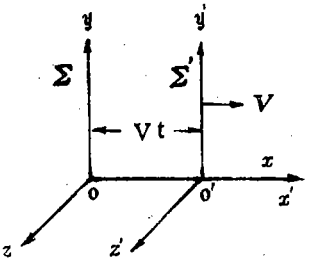


图 7.1

但是，麦克斯韦方程组在伽利略变换下并不保持协变。在这样的矛盾之下，如坚持电磁理论要满足伽利略变换下的协变性，那就势必要修改麦克斯韦方程组。但是，麦克斯韦方程组获得很大的成功，修改它未必是一个妥善的途径。于是当时的大多数物理学家愿意认为，伽利略的相对性原理仅适用于经典力学，而电磁学中也许存在一个特殊的绝对参考系。

除了理论上的分析外，光学上的两类观测实验也与上述伽利略的相对性原理相冲突。以牛顿力学的观点，光速应与光源的速度有关，但是双星实验否定了这一点。因为，若光速依赖于光源的速度，那么在双星绕其质心运动的过程中，向地球运动的一颗星发出的光传播快，背离地球运动的另一颗星发出的光传播就慢，我们在地球上观测双星运动的轨道就将发生“失真”，实际观测中未发现这种情况，可见两颗星发出的光具有同样的传播速

度。另外，光行差的实验否定了光速依赖于所穿过的稀薄介质的运动的观念。这些事实从实验方面似乎也支持"绝对坐标系"的存在。这样的认识对不对，需要由实验来检验。

2、以太理论引起不可调和的矛盾

当时人们认为，电磁波是在某种充满空间的弹性媒质（以太）中的波动现象。以太是一种具有许多奇异性质的弹性媒质，它即构成电磁波传播的特殊参考系，真空中电磁波的传播速度只有在该系中才等于 c。如果我们能精确测定光速在各方向上的差异，就可以确定运动物质相对于这个绝对参考系的运动，或者说地球相对于"以太"的运动。

我们看最有代表性的三个实验的结果。迈克尔逊 —— 莫雷实验表明地球在以太中的运动速度为零，即认为以太完全被地球牵曳；而斐索实验认为以太部分地被流水所带动；星体的光行差现象则支持以太完全不被地球所带动的观点。可见。如果有以太存在的话，那么运动物体究竟带不带着以太运动，三个实验各支持一种可能性，产生了无法调和的矛盾。为此，需要一个能使这些矛盾在新的基础上得以解决的革命性理论。

3、狭义相对论的基本原理

在当时的形势下，要解决上述各种矛盾有以下几种可能性：

i) 承认伽利略相对性原理，那么麦克斯韦电磁理论需要修改；

ii) 承认麦克斯韦方程组，认为伽利略相对性原理适用于经典力学，但电磁学有一绝对参考系，在这参考系里以太是静止的。

iii) 存在一种既适合经典力学，又适合电磁学的相对性原理，但它不是伽利略相对性原理。

爱因斯坦科学地选择了第三种可能性，于 1905 年创造性地提出了狭义相对论的两条基本原理：

①相对性原理　所有惯性参考系都是等价的，包括力学现象、电磁现象或其他现象的物理学规律对所有惯性系都可表述为相同的形式。从另一个角度说，即电磁学的方程（以后又推广到任何物理学方程）都和力学方程一样，不能确定一个封闭的惯性系统静止着还是在作匀速直线运动。

②光速不变原理　真空中不同惯性系沿任一方向的光速都恒为 c，并与光源运动无关。

爱因斯坦创立的狭义相对论，圆满地解释了当时的所有实验，并为以后一系列的科学实验所证实。它和量子论一起奠定了现代物理学的基础，使基本物理概念发生了深刻的、根本性的改变。

§7.2　洛伦兹变换

1、狭义相对论基本原理对时空变换的要求

相对性原理讨论物理量在不同惯性系之间的关系，以及物理规律对任意惯性系的协变性。而惯性系的概念本身要求从一惯性系到另一惯性系的时空坐标变换必须是线性的。

下面考察光速不变原理对时空变换的要求。我们从物质运动中抽象出事件的概念，将物质运动看作一系列事件发展的过程。而每一事件总是在一定的地点和一定的时刻发生的，因此就用一组四个坐标 (x, y, z, t) 代表一个事件。

首先考虑由光讯号联系的两事件。例如发出光讯号是第一事件，接收该光讯号是第二事件，在惯性系 $\sum$ 中分别表示为 (x_1, y_1, z_1, t_1) 和 (x_2, y_2, z_2, t_2)，在另一惯性系 $\sum'$ 中分别表示为 (x_1', y_1', z_1', t_1') 和 (x_2', y_2', z_2', t_2')，由于两参考系中的光速都是 c，因而有

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2-c^2(t_2-t_1)^2=0, \quad (7.2.1)$$

$$(x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2+(z_2'-z_1')^2-c^2(t_2'-t_1')^2=0. \quad (7.2.2)$$

这两个式子左端二次式的负值称为两事件之间的间隔，表示为

$$S^2=c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2 \quad (7.2.3)$$

或微分形式

$$ds^2=c^2dt^2-(dx^2+dy^2+dz^2). \quad (7.2.4)$$

其次考虑不由光讯号联系的两事件。此情况下，二次式(7.2.1)和(7.2.2)不一定为零，可取任意值，但我们感兴趣的是二者有何关系。这两个二次式可以通过线性变换由一个得到另一个，并且上述结果表明为 ds=0，则 ds′=0，可见 ds 与 ds′为同阶无穷小量，所以 dS 与 dS′必须彼此成比例

$$ds=ads'。$$

其中 a 具有这样的性质：由时间与空间的均匀性，a 不可能与位置坐标或时间有关；由空间的各向同性，a 不可能与惯性系之间相对速度的方向有关，所以 a 仅与两惯性系的相对速度的数值有关。另方面，因两惯性系彼此间相对运动的速率相同，与上同理可写出

$$ds'=ads,$$

由此得 $a^2=1$，$a=\pm 1$。在这里，a 要么只取+1，要么只取−1，因为假如 a(v)真的对某些速度为+1，对另外某些速度为−1，那么就一定有些速度存在，与这些速度相应的 a (v) 是在+1 与−1 之间，而这是不可能的，又因在光讯号联系的特例下有 ds′=ds，所以 a 应该取+1，最后得

$$ds'=ds. \quad (7.2.5)$$

说明两个事件的间隔在所有惯性参考系中都是相同的，即由一个

惯性系变到任意另一个惯性系时，间隔保持不变。(7.2.5) 式就是光速不变原理的数学表示，换句话说，光速不变原理要求惯性系之间的线性变换保持间隔不变。

2、闵可夫斯基空间及四维线性正交变换

对于上述空间、时间坐标，用记号

$$x_1=x,\quad x_2=y,\quad x_3=z, \tag{7.2.6}$$

并引入

$$x_4=ict, \tag{7.2.6'}$$

推广三维欧氏空间，x_1，x_2，x_3，x_4 的组合就可看作一个虚构的四维空间，叫做闵可夫斯基空间或世界。在这个空间内，事件可用一个点来表示，此点叫做世界点。约定重复指标代表求和，且希腊字母代表求和的范围为 1 到 4，间隔可表示为(取事件 1 在原点)

$$s^2=-x_\mu x_\mu \text{ 或 } ds^2=-dx_\mu dx_\mu. \tag{7.2.7}$$

这样，$-s^2$ 可理解为闵氏空间两点之间距离的平方，$-ds^2$ 可理解为线元的平方。于是间隔不变性可表示为

$$x'_\mu x'_\mu=x_\mu x_\mu \text{ 或 } dx'_\mu dx'_\mu=dx_\mu dx_\mu. \tag{7.2.8}$$

由于在这样虚构的四维空间中，保持了四个坐标的二次型不变性，因此就存在与欧氏空间相对应的关系。(x_1，x_2，x_3，x_4)可看作四维空间的一个矢量的四个分量，(7.2.8)表明，该矢量的长度在四维空间不同惯性系之间的变换中是不变的。这意味着(7.2.8)所对应的坐标变换是一个四维正交变换，因而我们可以将三维正交变换的关系形式上推广到四维正交变换中去。四维坐标变换式

$$x'_\mu=a_{\mu\nu}x_\nu, \tag{7.2.9}$$

正交条件

$$a_{\mu\gamma}a_{\mu\lambda}=\delta_{\gamma\lambda}, \tag{7.2.10}$$

反变换式

$$x_\lambda=a_{\mu\lambda}x'_\mu. \tag{7.2.11}$$

把三维情形推广，我们也可以按照物理量在四维正交变换下的变换性质对物理量进行分类。在正交变换(7.2.9)式下，保持不变的物理量称为四维标量或不变量，即

$$U'=U. \tag{7.2.12}$$

如其四个分量 V_μ 与坐标有相同的变换关系

$$V'_\mu=a_{\mu\nu}V_\nu \tag{7.2.13}$$

它就称为四维矢量。满足变换关系

$$T'_{\mu\gamma}=a_{\mu\lambda}a_{\gamma\tau}T_{\lambda\tau} \tag{7.2.14}$$

的物理 $T_{\mu\gamma}$ 称为四维张量。这些四维标量，矢量和张量在正交变换下具有确定的变换性质，称为四维协变量。

3、洛伦兹变换

现在寻求狭义相对论所要求的四维正交变换(7.2.9)的具体形式。正交变换包含坐标系的平移与转动变换，平移我们不感兴趣，所以要寻找的是四维坐标系统的转动变换。三维空间中，一切转动可分解为三个不同坐标平面内的旋转。类似地，四维空间中，一切转动可分解为六个不同坐标平面内的旋转，其中不包含 x_4 的旋转没有新的内容，不予考虑。我们研究 x_1x_4 平面内的旋转，仿照三维空间中的平面旋转变换式，这里可写为

$$\begin{aligned} x'_1&=x_1\cos\theta+x_4\sin\theta,\\ x'_2&=x_2,\\ x'_3&=x_3, \end{aligned} \tag{7.2.15}$$

$$x_4' = -x_1\sin\theta + x_4\cos\theta。$$

把最后一式重新写出：

$$ict' = -x_1\sin\theta + ict\cos\theta,$$

由等式两边各项的虚实性考虑，可知 $\cos\theta$ 为实，$\sin\theta$ 为纯虚，于是令

$$\mathrm{tg}\theta = i\beta \ (\beta\text{为实数}), \tag{7.2.16}$$

则

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{tg}\theta}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\theta}} = \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

代回(7.2.15)的第一、四式，有

$$\begin{aligned} x_1' &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(x_1 - \beta ct), \\ t' &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(-\frac{\beta}{c}x_1 + t\right). \end{aligned} \tag{7.2.17}$$

下面从物理考虑来确定 β。我们考虑惯性系$\sum'$以速度 V 沿 X 轴相对于$\sum$系运动的情形，这时显然只有 x_1 和 x_4 发生变化，而又要保持间隔不变，其变换必为(7.2.15)的形式。反过来说，x_1x_4 平面旋转的物理意义就是两个惯性系在 X 方向有相对运动。研究$\sum'$系的原点在$\sum$系中的运动。对$\sum'$系本身来说，它的坐标是 $x_1' = 0$，而对于$\sum$系来说，其坐标为 $x_1 = vt$。

代入(7.2.17)第一式，即解得：

$$\beta = \frac{v}{c}。 \tag{7.2.18}$$

参量 β 将仅决定于两个惯性系的相对速度 v，这从物理上考虑是完全合理的。

现在，我们得出了四维正交变换的具体表述形式:

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(x-vt),\\
y' &= y,\\
z' &= z,\\
t' &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(t-\frac{v}{c^2}x\right)。
\end{aligned}
\tag{7.2.19}
$$

由于运动的相对性，其逆变换显然只要在代换

$$(x,\ t)\rightleftharpoons(x',\ t')$$

的同时，把 v 改为 $-v$ 即可:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(x'+vt'),\\
y &= y',\\
z &= z',\\
t &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(t'+\frac{v}{c^2}x'\right)。
\end{aligned}
\tag{7.2.20}
$$

这两组变换关系就是洛伦兹变换(也叫沿 X 轴方向的特殊洛伦兹变换)。由(7.2.19)可以看出，当 $v \ll c$(或者说 $c\to\infty$，即电磁波具有无限传播速度)时，洛伦兹变换立即回到伽利略变换(7.1.1)。这表明，相对论的效应在 $v/c\sim 1$ 的时候尤为显著；而在另一极限，即 $v \ll c$ 的时候，伽利略变换就是它的一种很好的近似。

变换关系(7.2.9)可写成矩阵形式，其特殊洛伦兹变换(7.2.19)式的变换矩阵为

$$a=\begin{bmatrix}\gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma\end{bmatrix} \tag{7.2.21}$$

式中

$$\beta=\frac{v}{c},\qquad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{7.2.22}$$

逆变换(7.2.20)式的变换矩阵为

$$a^{-1}=\tilde{a}=\begin{bmatrix}\gamma & 0 & 0 & -i\beta\gamma\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma\end{bmatrix} \tag{7.2.23}$$

当然，a 满足正交条件

$$\tilde{a}a=I \tag{7.2.24}$$

[例 7-1] 在图 7.2 中,有一光源和一些接收器，设闪光从 o 点发出。在$\sum$系观察，光讯号于 1 秒之后同时被 P_1 和 P_2 接收到。$\sum'$系相对于$\sum$系的运动速度为 0.8c，求在$\sum$和$\sum'$上观察到 P_1 和 P_2 接收到讯号这两事件之间的时间差别，空间距离和间隔。

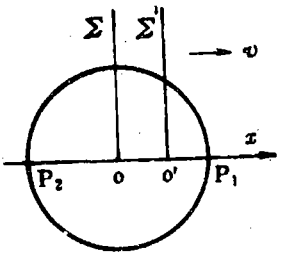


图 7.2

解：将水平轴上的两点接收到讯号作为两个事件。在$\sum$系上观察，此二事件的四维坐标分别为(c, 0, 0, ic)和(–c, 0, 0, ic),

则四维坐标之差 Δx_ν 是(2c，0，0，0)。在$\sum'$系上观察，此二事件的四维坐标之差为 $\Delta x'_\mu$。而 $\Delta x'_\mu$ 和 Δx_ν 由洛伦变换相联系：

$$\Delta x'_\mu = a_{\mu\nu}\Delta x_\nu,$$

写成矩阵形式进行运算

$$\begin{bmatrix} \Delta x'_1 \\ \Delta x'_2 \\ \Delta x'_3 \\ \Delta x'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$= \begin{bmatrix} 2c\gamma \\ 0 \\ 0 \\ -i2c\beta\gamma \end{bmatrix}.$$

由此得

$$\Delta x'_1 = \Delta x' = 2c\gamma = \frac{10}{3}c,$$

$$\Delta x'_2 = \Delta y' = 0,$$

$$\Delta x'_3 = \Delta z' = 0,$$

$$\Delta x'_4 = ic\Delta t' = -i2c\beta\gamma \quad \text{即} \Delta t' = -2\beta\gamma = -\frac{8}{3}$$

所以这两事件在$\sum$和$\sum'$系上看有如下结果：

$$\sum: \quad \Delta t = 0, \quad \Delta x = 2c, \quad \Delta S^2 = -4c^2;$$

$$\sum': \quad \Delta t' = \frac{-8}{3}, \quad \Delta x' = \frac{10}{3}c, \quad \Delta S^2 = -4c^2.$$

由此看来，原来在$\sum$上观察到同时发生的两事件(P_1 和 P_2 同时接收到讯号)，在$\sum'$上看来变为不同时，P_1 接收到讯号的时刻早于 P_2 接收到的时刻。在$\sum$系和$\sum'$系中看，接收到讯号的两地点之间的距离也是不同的。但是两事件的间隔却是相同的。

§7.3 相对论时空性质

洛伦兹变换集中反映了新的相对论的时空观，本节以洛伦兹变换为基础，讨论相对论的时空理论。

1、运动棒的缩短

测定一个物体的长度就是同时测定其两端点的坐标。但是我们已经知道，对不同的观测者，同时的观念不同。这就导致了同一物体在不同的惯性系看来长度不同。

设$\sum'$系以速度 v 相对于$\sum$系沿 x 轴方向运动，而这$\sum'$系即为固连于所讨论的棒上的参照系，那么，相对于棒为静止的观测者看到棒的长度为

$$l' = x_2' - x_1', \tag{7.3.1}$$

这里 x_2' 和 x_1' 为棒的两个端点在$\sum'$系中的坐标，而 l'称之为“固有长度”。按照洛伦兹变换式，我们分别有

$$\begin{aligned} x_2' &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(x_2 - vt_2), \\ x_1' &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(x_1 - vt_1)。 \end{aligned} \tag{7.3.2}$$

在$\sum$系中，如取 $t_1 = t_2$，那么

$$l = x_2 - x_1 \qquad (t_1 = t_2) \tag{7.3.3}$$

就是棒在$\sum$系中的长度，由上列几式立即得到

$$l' = \frac{l}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}},$$

或者

$$l = l' \cdot \sqrt{1 - v^2 / c^2} \quad 。 \tag{7.3.4}$$

由此得到的结果是：棒在相对于其为静止的坐标系里最长(固有长度)，而运动的坐标系下，这个棒在运动方向的长度缩短了。这个结果称为洛伦兹收缩。物体的横向（垂直于运动方向）尺度都不会发生洛伦兹收缩，所以物体的体积也按相似的公式收缩。需要指出，因为尺缩是根据同时测量（同时进行拍照）而得到的，所以当人们观测一个高速运动的立体物时，由于尺缩效应而观察到的物体形状并非变扁，只是相对于它静止时的形状略有转动。

2、运动时钟的延缓

两个不同坐标系里的时间如何加以比较？我们设想在一个"静止"系$\sum$里复制无穷多个钟，它们安放在各个地点，并且指示着相同的时间。运动的钟走到哪里，就与哪里放着的一个钟作比较。

设$\sum'$为沿 x 方向相对$\sum$系以速度 v 运动的坐标，与它相联系着的有一个钟(它的空间位置 x'为恒定)。当该钟指示时间为 t_1'时，$\sum$系里可供比较(即在空间同一位置)的某钟指示时间为 t_1，而当该钟指示 t_2' 时刻时，$\sum$系中另一个供比较的钟指示着时间 t_2，按洛伦兹变换

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}},$$

$$t_2 = \frac{t_2' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}。 \tag{7.3.5}$$

两式相减，$t_2 - t_1$ 就是在$\sum$系中的时间间隔:

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{7.3.6}$$

等式右边的$(t_2' - t_1')$即$\sum'$系中的时间间隔，称为“固有时间”。(7.3.6)式告诉我们，在不同的惯性参照系下，时间间隔不一致，固有时间为最短，在另外的系里看，钟有所运动，而运动着的钟总是走得慢些(时间间隔变长些)。

时钟的延缓和长度的缩短这两个相对论的效应已经得到了大量实验的证实。例如宇宙线中有许多高能 μ 子，它们产生于离地面 6000 米以上的高空。这些 μ 子静止时的平均寿命 $\tau_0 = 2.197 \times 10^{-6}$ 秒，即使它们以光速运动，最多不过飞越 660 米的距离，那就不可能到达地面。实际上，上面给出的寿命值是以固有时间来说的，从地面参照系看，由于相对论效应，μ 子的寿命延长为 $\tau = \tau_0 / \sqrt{1 - \beta^2}$，若 $\beta^2 = 0.99$,$\tau \simeq 2.2 \times 10^5$ 秒、则 μ 子可通过 6600 米的距离，所以它可能到达地面。这个例子还可以说明时钟延缓和长度缩短是相关的，从固定于 μ 子的参照系看，它的寿命不会增加，但是它观察到大气层相对于它有高速的运动，因而大气层的厚度缩小了相应的倍数，μ 子也就可能在寿命期内飞跃大气层。

3、因果性，类时与类空间隔

由前面的讨论可知，时空具有相对性，同一个时间或空间间隔，从不同参照系来看，结果就不一样。但是，事物发展有一定的前因后果，这种因果关系应该是绝对的，不随坐标系的不同选择而遭破坏，下面就来讨论保证绝对因果性的条件。

假定在$\sum'$系中，t_1'时刻在x_1'处发生第一事件。而由此引起其后的t_2'时刻在x_2'处发生第二事件。这里$t_2'>t_1'$，而在$\sum$系中，能否保证相应地$t_2>t_1$?

根据洛伦兹变换，有:

$$t_2'-t_1'=\frac{t_2-t_1-\frac{v}{c^2}(x_2-x_1)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{7.3.7}$$

由于$t_2'>t_1'$，所以:

$$t_2-t_1-\frac{v}{c^2}(x_2-x_1)>0,$$

现在寻求$t_2>t_1$，即保证因果性为绝对的条件。当$t_2>t_1$时，上式可化为

$$\frac{c^2}{v}>\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=V_s,$$

这里V_s就是在$\sum$系里信号的传播速度。上式可改写为

$$V_s\cdot v<c^2 \tag{7.3.8}$$

$\sum'$与$\sum$系间的相对速度v也可以看成是一种作用的传递速度，所以可以得出

$$v<c,\quad V_s<c. \tag{7.3.9}$$

说明传播物理讯号(相互作用)的速度必小于其真空中的光速，这个结论来自因果性的要求。

根据间隔的概念，如第一事件O的坐标是(0，0，0，0)，第二事件P的坐标是(x，y，z，t)，则这两个事件的间隔为

$$s^2=c^2t^2-(x^2+y^2+z^2)=c^2t^2-r^2. \tag{7.3.10}$$

如果$s^2=0$，则$r=ct$，为简单起见，我们仅考虑二维空间

(坐标 x，y）与一维空间（取时间轴为 ct），这样方程 r＝ct 就在所考虑的三维时空中决定了以○为顶点的锥面，如图 7.3 所示，这个锥面称为光锥。P 点在光锥面上，它可以和○点用光讯号联系。

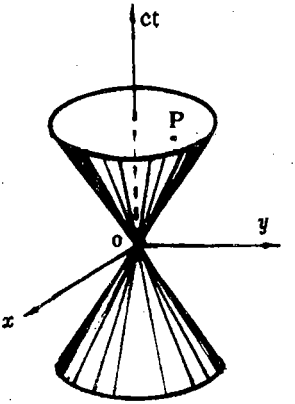


图 7.3

如果 $s^2>0$，则 r＜ct，P 点在光锥之内。两事件可用低于光速的作用来联系，从而因果律成立，这类间隔称为类时间隔。上半光锥内的区域相对于光锥顶点来说是绝对将来，而下半光锥内则为绝对过去。

如果 $s^2<0$，则 r＞ct，P 点在光锥外，两事件不能用光波或低于光速的作用来联系，因果律不成立。这类间隔称为类空间隔。P 与 O 绝对远离。

由以上讨论可以看到，时空结构划分为三类间隔区域是绝对的，相对于光锥顶点的过去和将来也是绝对的。这是相对论时空性质中的绝对性。而时空任意点可以建立光锥，所以这个概念带有局域的性质。

4、速度合成公式

在$\sum$坐标系中，速度的定义为

$$u_x=\frac{dx}{dt}\quad,\quad u_y=\frac{dy}{dt}\quad,\quad u_z=\frac{dz}{dt} \tag{7.3.11}$$

而在$\sum'$系中的速度则为：

$$u'_x=\frac{dx'}{dt'}\quad,\quad u'_y=\frac{dy'}{dt'}\quad,\quad u'_z=\frac{dz'}{dt'} \tag{7.3.12}$$

现在根据洛伦兹变换式(7.2.19)，有

$$\begin{aligned} dx' &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(dx - vdt), \\ dy' &= dy, \\ dz' &= dz, \\ dt' &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right). \end{aligned} \tag{7.3.13}$$

于是，用(7.3.13)式中的第四式分别去除前三式，并代入(7.3.11)和(7.3.12)式

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}, \\ u'_y &= u_y \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}, \\ u'_z &= u_z \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}, \end{aligned} \tag{7.3.14}$$

这就是相对论中的速度合成的公式。其反变换式只需将上式中的 v 换为$-v$ 就可得到。

在经典力学中，速度合成律是$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}$；而对于光速，c=不变量。这两条是矛盾的，但各自又都是正确的。显然一个更完整的理论应当把二者统一起来，完成了这个任务的便是(7.3.14)式。如果 $v \ll c$，(7.3.14)立即回到牛顿力学的简单情形。并且，从(7.3.14)很容易证实，只要在一个参照系里 u=c，那么在另一个系里永远是 u=c；如果在一个系里 u<c，那么在另外的参照系里也永远是 u<c。所以，(7.3.14)式是既包含了牛顿力

学又包含了光速不变性的新的速度合成律。另外，虽然$\sum$系与$\sum'$系间的相对速度仅沿 x 轴方向，但是 $u_y' \neq u_y$，$u_z' \neq u_z$，这是因为两个系里的时间标度不一样了。

♣ [例 7-2] 若光在匀速运动介质中传播(斐索实验),求其速度。

解：如果介质沿 x 轴方向以速度 v 运动，$\sum'$坐标系建立在这个运动的介质上，于是介质中各方向的光速

$$u_x' = \frac{c}{n},$$

根据速度变换公式，沿介质运动方向的光速

$$u_x = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + v/cn}$$

如果 $v \ll c$(一般介质运动速度是比较小的)，上式就可以简化：

$$u_x = \left(\frac{c}{n} + v\right)(1 - v/cn + \cdots) \approx \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)v \quad (7.3.15)$$

这相当于折射率改变了，由 n 变成了$\bar{n}$：

$$u_x = \frac{c}{\bar{n}},$$

就是说，在相对论的观点下，介质的折射率(从而介电常数)与坐标系的选择密切有关。

[例 7-3] 光束在坐标系$\sum'$里张立体角元 $d\Omega'$，试求在另一惯性系$\sum$里立体角元的表示。

解：以二坐标系相对运动的方向为 x 轴，而把 θ 角定义为与 x 轴方向的夹角，φ 角则为在 yz 平面上投影的方位角,所以

$$\varphi = \varphi', \quad d\varphi = d\varphi'$$

在速度变换公式

$$u\cos\theta = \frac{u'\cos\theta' + v}{1 + \frac{vu'\cos\theta'}{c^2}}$$

中令 u＝u′＝c，故

$$\cos\theta=\frac{\cos\theta'+\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}\cos\theta'}.$$

取微分，得

$$-\sin\theta\mathrm{d}\theta=\left(\frac{v^2}{c^2}-1\right)\Big/\left(1+\frac{v}{c}\cos\theta'\right)^2\quad\sin\theta'\mathrm{d}\theta',$$

结合 $\mathrm{d}\varphi=\mathrm{d}\varphi'$，就得到：

$$\mathrm{d}\Omega=\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\left(1+\frac{v}{c}\cos\theta'\right)^2}\mathrm{d}\Omega'。\tag{7.3.16}$$

[例 7-4] 在恒星惯性参考系中看到一宇宙飞船沿着 x 轴运动，在 t 时刻位置为 x(t)，在这个参考系中速度和加速度自然是 $v=\frac{dx}{dt}$ 和 $a=\frac{d^2x}{dt^2}$，设想飞船的运动情况是这样：其中的乘客所测定的加速度是与时间无关的常数。即就是说，在任何一个瞬间，都可变换到一个惯性系去，飞船在其中是瞬时静止的。令 g 表示飞船在该惯性系中该瞬间的加速度，并且假定这样一个瞬间接一个瞬间定义的加速度 g 是常数。如果常数 g 已给定，在恒星参考系中，宇宙飞船从 x＝0 处以初速度 $v_0=0$ 开始运动。问当它的速度达到 v 时经过的距离 x 是多少？

解：设某一瞬间飞船(运动坐标系)以速度 V 相对于恒星坐标系运动，x′，t′是飞船中的空间、时间变量，令 $v'=\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}$，$a'=\frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}t'}$，则由速度变换公式，有

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{v'+V}{1+\dfrac{Vv'}{c^2}},$$

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{3/2}\frac{a'}{1+\dfrac{Vv'}{c^2}}。$$

代入 V=v（所以 v′=0）及 a′=g=常数，得

$$a=g\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2},$$

$$x=\int_0^v v\mathrm{d}t=\int_0^v\frac{v}{a}\mathrm{d}v=\frac{1}{g}\int_0^v\frac{v\mathrm{d}v}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}$$

$$=\frac{c^2}{g}\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right).$$

对于 v≪c，$x\to\frac{v^2}{2g}$，这正是通常的非相对论结果。

[例 7-5] 如果∑′系相对于∑系的速度$\vec{v}$不沿着 x 轴方向，求两个系之间的洛伦兹变换式。

解：考虑矢径$\vec{r}$，把它按垂直和平行于$\vec{v}$而分成两部分：

$$\vec{r}=\vec{r}_\perp+\vec{r}_{/\!/},$$

其中

$$\vec{r}_\perp=\frac{\vec{v}\times(\vec{r}\times\vec{v})}{v^2},$$

$$\vec{r}_{/\!/}=(\vec{r}\cdot\vec{v})\frac{\vec{v}}{v^2}。$$

注意到$\vec{r}_\perp$垂直于$\vec{v}$，它在两个坐标系里不发生改变：$\vec{r}_\perp=\vec{r}'_\perp$，而$\vec{r}_{/\!/}$则顺着速度$\vec{v}$的方向，所以它的变换形式和过去沿 x 轴方向的洛伦兹变换一样：

$$\vec{r}_{\parallel}=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(\vec{r}'_{\parallel}+\vec{v}t'),$$

则

$$\vec{r}=\vec{r}_{\parallel}+\vec{r}_{\perp}=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(\vec{r}'_{\parallel}+\vec{v}t')+\vec{r}'_{\perp}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(\vec{r}'-\vec{r}'_{\perp}+\vec{v}t')+\vec{r}'_{\perp}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(\vec{r}'+\vec{v}t')+\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)\vec{r}'_{\perp},$$

所以

$$\vec{r}=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(\vec{r}'+\vec{v}t')$$

$$+\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right)\frac{(\vec{r}'\times\vec{v})\times\vec{v}}{v^2}. \qquad (7.3.17)$$

并且还可以得到

$$t=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(t'+\frac{\vec{r}'\cdot\vec{v}}{c^2}\right). \qquad (7.3.18)$$

§7.4 相对论力学

经典力学的方程不满足洛伦兹变换下不变的要求，应当修改为满足相对论协变性的力学方程，用以描述高速运动的规律。并且，在低速情形下相对论力学应自然过渡到经典力学。为此，我们在讨论四维速度、加速度和动量的基础上，建立相对论力学方程。

1、四维速度矢量和四维加速度矢量

首先寻找四维速度矢量的合理形式，dx_μ 是一个四维矢量，

可理解为四维位移。而由运动时钟延缓效应可知，dt 并不是一个四维标量。注意到

$$ds^2 = c^2dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = c^2dt^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right),$$

而固有时

$$d\tau = dt\sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{dt}{\gamma}, \tag{7.4.1}$$

所以

$$ds = cd\tau. \tag{7.4.2}$$

可见固有时 $d\tau$ 是一个四维标量，于是定义四维速度矢量

$$U_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau}. \tag{7.4.3}$$

当然，$U_\mu U_\mu$ 是一个不变量:

$$U_\mu U_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau}\frac{dx_\mu}{d\tau} = \frac{-ds^2}{d\tau^2} = -c^2. \tag{7.4.4}$$

四维速度的分量是

$$U_\mu = \gamma(u_1,\ u_2,\ u_3,\ ic) = \gamma(\vec{u},\ ic), \tag{7.4.5}$$

其中$\vec{u}$为通常意义下的三维速度，因此 U_μ 的前三个分量和普通速度相联系着，当 $v \ll c$ 时即为$\vec{u}$，这也说明了定义(7.4.3)的合理性。

类似地，可以定义四维加速度矢量

$$A_\mu = \frac{dU_\mu}{d\tau} = \frac{d^2x_\mu}{d\tau^2}。 \tag{7.4.6}$$

将(7.4.4)式对 $d\tau$ 微商，即可证明

$$U_\mu A_\mu = 0. \tag{7.4.7}$$

2、四维动量矢量和相对论力学方程

有了四维速度矢量 U_μ，再引入四维标量 m_0，我们定义四维动量矢量

$$P_\mu = m_0 U_\mu, \tag{7.4.8}$$

其中前三个分量

$$\vec{P} = m_0 \gamma \vec{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \vec{v}, \tag{7.4.9}$$

当 $v \ll c$ 时，$\vec{P}$趋于经典动量$m_0\vec{v}$，因此可以认为$\vec{P}$是相对论中物体的动量，其中

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{7.4.10}$$

是物体运动速度为 v 时所具有的质量，可称为运动质量，m_0 为速度为零时的质量，叫静止质量。

四维动量随固有时的变化率$\frac{dP_\mu}{d\tau}$仍是一个四维矢量，如果外界对物体的作用可以用一个四维力矢量 F_μ 描述，则可写出协变形式的力学方程

$$F_\mu = \frac{dP_\mu}{d\tau}. \tag{7.4.11}$$

F_μ 的第四分量 F_4 和空间分量$\vec{F}$有一定的关系。由(7.4.8)和(7.4.4)，有

$$P_\mu P_\mu = -m_0^2 c^2, \tag{7.4.12}$$

将此式对 $d\tau$ 微商，得

$$P_\mu F_\mu = 0 \quad \text{即} \vec{P} \cdot \vec{F} = -P_4 F_4, \tag{7.4.13}$$

把$\vec{P}$和 P_4 的表达式代入，F_4 可写成

$$F_4 = i \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c}, \tag{7.4.14}$$

于是相对论协变的力学方程包括下列两个方程

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}\tau},$$
$$\vec{F}\cdot\vec{v}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(mc^2)。 \tag{7.4.15}$$

若定义三维力为

$$\vec{f}=\frac{\vec{F}}{\gamma}, \tag{7.4.16}$$

并用参考系时间 $\mathrm{d}t$ 量度的变化率表述，则相对论力学方程成为

$$\vec{f}=\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t},$$
$$\vec{f}\cdot\vec{v}=\frac{\mathrm{d}(mc^2)}{\mathrm{d}t}。 \tag{7.4.17}$$

当 $v\ll c$ 时，$\vec{P}$成为经典动量，(7.4.17)的第一式便过渡到牛顿力学方程，这正是我们所期望的。需要指出，$\vec{f}$不是一个四维矢量的分量，它的变换关系应通过四维力矢量 F_μ 的变换关系导出。至于(7.4.17)的第二式的物理含义我们作为下一个问题讨论。

3、相对论的质能关系

上述(7.4.17)的第二式左边表示力$\vec{f}$对物体所作的功率，它应等于物体能量的增加率，即就是说，等式右边被时间微商的量代表物体的相对论能量:

$$W=mc^2=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}c^2, \tag{7.4.18}$$

这就是相对论的质量能量关系。在低速近似下也可以看出这一点，当 $v\ll c$ 时作展开

$$W = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2 + \cdots, \tag{7.4.19}$$

式中第二项正是经典力学中的动能。

在 $v=0$ 时物体的动能为零，其动能表达式可写为

$$T = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - m_0c^2,$$

$$W = T + m_0c^2。 \tag{7.4.20}$$

总能量 W 中，除动能 T 之外，另一部分

$$W_0 = m_0c^2 \tag{7.4.21}$$

是物体静止时仍然存在的能量，称为静止能量。这一项的出现是相对论协变性要求的结果，它深刻地揭示出静止粒子内部仍然存在着运动。一定质量的粒子具有一定的内部运动能量，反过来，带有一定内部运动能量的粒子就表现有一定的惯性质量。

对于由许多粒子组合而成的复合体(如原子核等)，在它整体静止(即质心静止)时的总内部能量 W_0 与其总的静质量 M_0 有关系 $W_0=M_0c^2$，但由于复合体中的粒子之间具有相互作用能及相对运动的动能，所以 W_0 不等于所有粒子的静能量之和，即 $W_0 \neq \sum_i m_{0i}c^2$，式中 m_{0i} 是第 i 个粒子的静质量。两者之间的差

$$\Delta W = W_0 - \sum_i m_{oi}c^2 \tag{7.4.22}$$

称为复合体的结合能，相应的质量差

$$\Delta M = M_0 - \sum_i m_{oi} \tag{7.4.23}$$

称为质量亏损。显然

$$\Delta W = (\Delta M)c^2。 \tag{7.4.24}$$

质能关系式在原子核和基本粒子物理中被大量实验证实，它是原子能利用的主要理论根据。

4、相对论能量动量关系

四维动量的第四分量

$$P_4 = i\gamma m_0 c = i\frac{W}{c},$$

于是四维动量的分量可写为

$$P_\mu = \left(\vec{P},\ i\frac{W}{c}\right). \tag{7.4.25}$$

利用(7.4.12)式，有

$$P_\mu P_\mu = \vec{P}\cdot\vec{P} + P_4 P_4 = P^2 - \frac{W^2}{c^2} = -m_0^2 c^2,$$

因此得

$$W^2 = P^2 c^2 + m_0^2 c^4, \tag{7.4.26}$$

这是关于物体的能量、动量和质量的一个重要关系式。

对于静止质量 $m_0 = 0$ 的粒子，必有

$$P = \frac{W}{c},\quad v = c. \tag{7.4.27}$$

例如，对于光子来说，令普朗克常数$h = 2\pi\hbar$，其能量为

$$W = h\nu = \hbar\omega, \tag{7.4.28}$$

真空中动量为

$$P = \frac{h\nu}{c} = \frac{\hbar\omega}{c} \text{或} \vec{P} = \hbar\vec{k}, \tag{7.4.29}$$

其中$\vec{k}$为波矢，且$k = \frac{\omega}{c}$，如将光子的四维动量记为 K_μ，由(7.4.12)式可知

$$K_\mu K_\mu = 0. \tag{7.4.30}$$

另外，光子没有静止质量，而惯性质量$m = \frac{h\nu}{c^2}$不为零，根据等

效原理，光子的引力质量也是$\frac{h\nu}{c^2}$，所以光线经过强引力源(如太阳)时会发生偏折，但由狭义相对论计算的偏折角太小，广义相对论的计算结果才与实验观测相符合。实际上所有广义相对论的效应在狭义相对论中也都有，只不过数量不够而已。

[例 7-6] 问一个静止质量为 m_0，电荷为 e 的粒子通过加速电位差 u 后获得多大的速度?

解：设粒子的初速度为零，则它的初始能量 $W_0=m_0c^2$，通过加速电位差 u 后，粒子的能量变为

$$W=W_0+eu.$$

由于 $W=\frac{W_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$，故

$$v=c\sqrt{1-\left(\frac{W_0}{W}\right)^2}=c\sqrt{1-\left(\frac{W_0}{W_0+eu}\right)^2}$$

$$=\frac{c}{m_0c^2+eu}\sqrt{eu(eu+2m_0c^2)}$$

$$=\sqrt{\frac{2eu}{m_0}}\sqrt{1+\frac{eu}{2m_0c^2}}\Big/\left(1+\frac{eu}{m_0c^2}\right)。$$

当 $eu\ll m_0c^2$，加速电场给予粒子的能量很小，则 $v\approx\sqrt{\frac{2eu}{m_0}}$，这就是熟知的非相对论结果。但当 $eu\gg m_0c^2$，加速电场很强时，$v\approx c$，这时为极端相对论性粒子。验证电荷 e 是一个不随惯性系而改变的量，最早的实验就是测量通过加速电位差后在各种惯性系中粒子的速度。

[例 7-7] 一个质量为 M 的粒子衰变成质量各自为 m_1 和 m_2 的两个粒子

$$M\rightarrow m_1+m_2,$$

求 M 粒子质心系中 m_1 和 m_2 粒子各自获得的能量。

解：设 M、m_1 和 m_2 各粒子的四维动量分别为 P、P_1 和 P_2，由动量守恒定律

$$P=P_1+P_2,$$

其平方为不变量

$$P^2=P_1^2+P_2^2+2(P_1\cdot P_2).$$

利用关系式 $P_\mu P_\mu=-m_0^2c^2$ 和 $P_\mu=\left(\vec{P},\ i\frac{W}{c}\right)$，有

$$-M^2c^2=-m_1^2c^2-m_2^2c^2+2\left(\vec{P}_1\cdot\vec{P}_2-\frac{W_1W_2}{c^2}\right),$$

其中 $W_1=\sqrt{P_1^2c^2+m_1^2c^4}$，$W_2=\sqrt{P_2^2c^2+m_2^2c^4}$ 分别为 m_1、m_2 粒子的能量，上式也可写为

$$\frac{1}{c^2}(W_1W_2)-(\vec{P}_1\cdot\vec{P}_2)=\frac{1}{2}(M^2-m_1^2-m_2^2)c^2,$$

注意上式与坐标系选择无关。为方便起见，我们选 M 粒子的质心系，则动量和能量守恒关系变得简单了：

$$\vec{P}_1+\vec{P}_2=0,$$

$$W_1+W_2=MC^2.$$

由上式第一式得 $|\vec{P}_1|=|\vec{P}_2|=P$ 和 $\vec{P}_1\cdot\vec{P}_2=-P^2$，最后求出

$$W_1=\frac{M^2+m_1^2-m_2^2}{2M}c^2,$$

$$W_2=\frac{M^2+m_2^2-m_1^2}{2M}c^2. \tag{7.4.31}$$

讨论：1) π 介子的衰变：$\pi^+\to\mu^++\nu_\mu$ 或 $\pi^-\to\mu^-+\bar{\nu}_\mu$，因为中微子与反中微子的静止质量 $m_\nu=m_{\bar{\nu}}=0$，在 π 介子的质心

系中，μ 粒子和中微子各自获得的能量为

$$W_\mu = W_1 = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi} c^2,$$

$$W_\nu = W_2 = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} c^2。$$

μ 粒子所获得的动量 $P_{(\mu)}^2 = P_1^2 = \frac{W_\mu^2}{c^2} - m_\mu^2 c^2$，即

$$P_{(\mu)} = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} c。$$

2) π^0 衰变成二个 ν 光子，$\pi^0 \to 2\nu$。因光子的静止质量为零 $m_1 = m_2 = m_\nu = 0$，由(7.4.31)式得 ν 光子所获得的能量为

$$W_\nu = \frac{1}{2} m_\pi \cdot c^2$$

[例 7–8] 切伦柯夫辐射. 在介质中，一个自由电子可以放出一个光子，从经典角度看，这是一个带电粒子在折射率为 n 的介质中作匀速直线运动时所激发的电磁辐射。

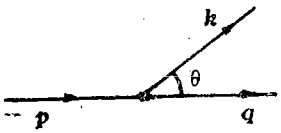


图 7.4

在真空中，光子的四维动量 $K^2 = 0$，但在介质中光子的四维动量

$$K = \left(\frac{\hbar\omega}{c} n \frac{\vec{K}}{|\vec{K}|}, \ i\frac{\hbar\omega}{c} \right), \tag{7.4.32}$$

因此

$$K^2 = \vec{K}^2 - \frac{W^2}{c^2} = \frac{\hbar^2\omega^2}{c^2}(n^2 - 1) \neq 0. \tag{7.4.32'}$$

设自由电子的初、末态质量分别为 m_P、m_q，初末态动量分别为 P、q。由动量守恒关系

$$P=q+K \text{ 或 } q=P-K,$$

其不变量(即上式两边平方)是

$$P^2+K^2-2(P\cdot K)=q^2.$$

代入关系 $P_\mu P_\mu=-m_0^2c^2$，得

$$-m_p^2c^2+(n^2-1)\frac{\hbar^2\omega^2}{c^2}=-m_q^2c^2+2(P\cdot K). \quad (7.4.33)$$

另一方面，

$$(P\cdot K)=\vec{P}\cdot\vec{k}+\left(\frac{iW_p}{c}\right)\left(\frac{i\omega\hbar}{c}\right)=\vec{P}\cdot\vec{K}-\frac{W_p\omega h}{c^2},$$

其中 W_p 为初态电子的能量，设 θ 为光子三维动量$\vec{K}$与初态电子三维动量$\vec{P}$之间夹角。则上式又可写成

$$(P\cdot K)=|\vec{P}||\vec{K}|\cos\theta-\frac{W_p\omega\hbar}{c^2}$$

$$=|\vec{P}|\frac{\hbar\omega n}{c}\cos\theta-\frac{W_p\omega\hbar}{c^2}$$

把上式代入(7.4.33)式，经整理，得

$$\cos\theta=\frac{1}{n\beta}\left[1+\frac{\hbar\omega}{2W_p}(n^2-1)-\frac{c^4}{2\hbar\omega W_p}(m_p^2-m_q^2)\right], \quad (7.3.34)$$

其中$\beta=\frac{|\vec{v}|}{c}<1$，$\vec{v}$为自由电子初始速度。

讨论：1) 当 $m_p=m_q$ 时，在真空中 n=1，永远有 $\cos\theta>1$，说明一个自由电子不能放出一个光子。因为放出光子就意味着有电磁辐射，真空中的自由电子没有加速度，当

然不会产生电磁辐射。

2) 当 $m_p=m_q$ 时，在介质中 $n>1$，可能有 $\cos\theta<1$，因而可能放出光子产生辐射。

3) W_p 为电子初态能量、$\hbar\omega$ 是光子能量。所以(7.4.34)式右方括号中第二项依赖于辐射光子能量与电子能量之比，而第三项代表电子本身质量亏损效应的贡献。注意这两项中出现了 $\hbar$ 这个量，它们代表了量子效应的修正。

为了更明显地看出量子效应的影响，我们把(7.4.34)式作如下处理。引入静止质量为 m_0 粒子的康普顿波长

$$\lambda=\frac{\hbar}{m_0c}$$

和辐射的光波在介质中的波长 $\lambda=\frac{2\pi c}{\omega n}$，并利用 $W_p=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$，则

$$\frac{\hbar\omega}{2m_0c^2}=\frac{\hbar}{m_0c}\Big/\frac{2c}{\omega}=\frac{\lambda\pi}{\lambda n},$$

所以

$$\frac{\hbar\omega}{2W_p}(n^2-1)=\frac{\hbar\omega}{2m_0c^2}(n^2-1)\sqrt{1-\beta^2}\cdot$$

$$=\frac{\pi}{n}\frac{\lambda}{\lambda}(n^2-1)\sqrt{1-\beta^2}\quad . \tag{7.4.35}$$

若我们把 $(m_p-m_q)c^2=\Delta mc^2=\hbar\omega_0$ 看作由于粒子内部结构能量的改变(比如电子在原子中由高能级跃迁到低能级而产生的能量的变化)而放出光子的能量，又认为切伦柯夫辐射过程中电子的质量改变很小，从而 $m_p+m_q\approx 2m_p$，那么

$$(m_p^2-m_q^2)c^2=(m_p+m_q)(m_p-m_q)c^2\approx 2m_p\hbar\omega_0. \qquad (7.4.36)$$

把(7.4.35)和(7.4.36)两式代入(7.4.34)式，得

$$\cos\theta=\frac{1}{\beta n}\left[1+\frac{\pi}{n}\frac{\lambda}{\lambda}(n^2-1)\sqrt{1-\beta^2}-\frac{\omega_0}{\omega}\sqrt{1-\beta^2}\right]. \qquad (7.4.37)$$

(7.4.37)式右方的第二项在粒子的康普顿波长 λ 与辐射光波的波长 λ 可以相比的情形下才有贡献，而第三项里含因子 ω_0，它取决于电子内部结构的改变，这两项都属于量子效应的修正。当一个物质粒子的康普顿波长 λ 远远小于它辐射的光波波长 λ，并且粒子内部能级跃迁效应可忽略时，(7.4.37)式就简化为经典的切伦柯夫辐射公式:

$$\cos\theta=\frac{1}{\beta n}=\frac{c}{nv}, \qquad (7.4.38)$$

θ 就是辐射方向与粒子运动方向的夹角。

[例 7-9] 求反应的阈能，例如用一个质子 p 去轰击靶粒子 p(也是质子)产生质子、反质子及中子、反中子的反应

$$p+p\rightarrow p+p+p+\bar{p}+n+\bar{n}$$

如果预期反应后产生一定个数的粒子，问入射粒子中最低的动能 T。多大？这个 T。就称为阈能。粗略看，因为靶粒子是静止的，核子的能量大约 1Gev 左右。所以有人认为若反应后产生如上述六个粒子，则入射粒子的阈能应是 6Gev，这种想法对吗？

我们不妨先考虑广泛一点，设入射粒子和靶粒子的动量分别为 p'和 P，反应后产生 i 个粒子，每个粒子的动量为 P^i，由动量守恒关系得

$$p'+P=\sum_i p^i。$$

还是采用前几例的处理方法，找不变量

$$(p'+P)^2=(\sum_i p^i)^2,$$

即

$$p'^2+P^2+2(p'\cdot P)=(\sum_i p^i)^2,$$

代入动量的相应关系，得

$$-m_0^2c^2-M^2c^2+2\left(\vec{p}'\cdot\vec{P}-\frac{W_0W}{c^2}\right)=(\sum_i p^i)^2. \quad (7.4.39)$$

其中 m_0 和 W_0 是入射粒子的静止质量和能量，M 和 W 是靶粒子的静止质量和能量，因为(7.4.39)式与坐标选择无关，所以，我们选择等式右边在质心系，使得$\sum_i \vec{p}^i=0$，故

$$(\sum_i p^i)^2=-(\sum_i m^i)^2c^2=-\mu^2c^2,$$

其中$\mu=\sum_i m^i$是反应后所有粒子质量之和。而在等式左边选实验室坐标系。在该坐标系下靶粒子是静止的，$\vec{p}=0$，$W=Mc^2$，因此(7.4.39)式变为:

$$m_0^2+M^2+\frac{2MW_0}{c^2}=\mu^2=(\sum_i m^i)^2.$$

入射粒子能量 $W_0=m_0c^2+T_0$，T_0 为入射粒子的最低动能（阈能），把它代入上式，得入射粒子的阈能

$$T_0=\frac{\mu^2-(m_0+M)^2}{2M}c^2. \quad (7.4.40)$$

考虑前面给出的具体反应，可得入射质子的阈能 $T_0=\frac{36-4}{2}=16\text{Gev}$，为什么阈能远远超过反应粒子的能量之和呢？原因是分裂出来的六个粒子都在运动，它们以动能的形式

带走了入射粒子的一部分能量。

[例 7-10] 中心势场中相对论性粒子的运动。

相对论协变的力学方程的空间部分是$\vec{F}=\frac{d\vec{P}}{d\tau}$，利用我们定义的三维力$\vec{f}=\vec{F}/\gamma$，并注意

$$\vec{P}=m_0\gamma\vec{v}=m_0\frac{d\vec{r}}{d\tau},$$

则上述方程可写为

$$m_0\frac{d^2\vec{r}}{d\tau^2}=\frac{\vec{f}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{7.4.41}$$

如果运动粒子受的是引力，则上式变为

$$m_0\frac{d^2\vec{r}}{d\tau^2}=-\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{GMm_0\vec{r}}{r^3}, \tag{7.4.42}$$

其中 G 为引力常数，M 是中心物体的质量。m_0 是运动粒子质量，解 (7.4.42) 方程最常用的方法是找运动积分，为方便起见取 $m_0=1$(单位质量)，故

$$J=\frac{GM\vec{r}}{r^3},$$

由于$\frac{dW}{dt}=\vec{v}\cdot\vec{f}=\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\vec{f}$，所以第一个运动积分是总能量 E 守恒

$$W-\frac{GM}{r}=E, \tag{7.4.43}$$

其中 $W=m_0c^2+T$ 为粒子的能量，由(7.4.42)式得

$$\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{d\tau^2}=0,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\vec{r}\times \mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}\tau\ \ )=0,$$

我们找到了第二个运动积分是角动量守恒

$$r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}=K_\varphi. \tag{7.4.44}$$

采用柱坐标，它的线元表达式是

$$\mathrm{d}s^2=c^2\mathrm{d}\tau^2=c^2(\mathrm{d}t)^2-r^2(\mathrm{d}\varphi)^2-(\mathrm{d}r)^2, \tag{7.4.45}$$

其中我们考虑了因为中心势场中粒子的运动在一个平面内，线元与 z 方向无关，用 $c^2\mathrm{d}\tau^2$ 去除(7.4.45)式两边，得

$$1=\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left[r^2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2\right]. \tag{7.4.46}$$

代入(7.4.43)式有

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}=\frac{W}{m_0c^2}=\frac{E+\dfrac{GM}{r}}{m_0c^2}=\frac{E}{m_0c^2}+\frac{GM}{m_0c^2}\frac{1}{r}.$$

取 $m_0=1$(单位质量)则

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}=\frac{E}{c^2}+\frac{GM}{c^2}\frac{1}{r},$$

再考虑$\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}=\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\varphi}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}$并代入(7.4.44)式，把这些结果都代入(7.4.46)式，整理得

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2=c^2\frac{r^2}{K_\varphi^2}\left[\frac{E+\dfrac{GM}{r}}{c^2}-1\right]-r^2, \tag{7.4.47}$$

这就是相对论性粒子在引力场中的运动方程。引入 $r=u^{-1}$，(7.4.47)式又可化为

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+\left(1-\frac{G^2M^2}{m_0^2K_\varphi^2c^2}\right)u=\frac{GME}{m_0^2c^2K_\varphi^2}。\tag{7.4.48}$$

如果研究一个荷电粒子在静电场中运动，只要在(7.4.48)式中 GM 换成 e^2 就行了。

下面我们考虑(7.4.48)式的解，令

$$\omega_0^2=1-\frac{G^2M^2}{m_0^2K_\varphi^2c^2},\quad K=\frac{GME}{m_0^2c^2K_\varphi^2}$$

(7.4.48)式化成

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+\omega_0^2u=K,$$

该方程的解

$$\frac{1}{r}=u=K\{1+\epsilon\cos\omega_0(\varphi-\omega)\}.\tag{7.4.49}$$

如果 $\omega_0=1$，这是一个椭圆轨道，ϵ 为偏心率，ω 为初相，(为方便起见可选 $\omega=0$)这就是牛顿力学的结果。φ 的周期为 2π，而现在

$$\omega_0=\sqrt{1-\frac{G^2M^2}{m_0^2K_\varphi^2c^2}}\approx1-\frac{G^2M^2}{2m_0^2K_\varphi^2c^2},$$

所以变成为:

$$\omega_0(2\pi+\Delta)=2\pi,$$

即椭圆轨道有一个进动角(这一点是牛顿力学所没有的)

$$\Delta=2\pi\frac{G^2M^2}{2m_0^2K_\varphi^2c^2}.\tag{7.4.50}$$

进动角与引力常数 G 及中心物体质量 M 有关，天文上观测到水星轨道的确有进动现象存在，但是由狭义相对论算出的 Δ 是实际观测值的 1／6，而广义相对论的理论计算值与实际值符合。

§7.5 电动力学的协变形式

根据爱因斯坦相对论原理，电磁现象的基本规律可以写成协变形式。即在不同惯性系中，电磁现象的基本方程可以表示为相同形式。如果一个方程的每一项属于同类协变量，在参考系变换下，每一项都按相同方式变换，结果方程的形式保持不变。因此，我们通过考察电磁物理量的变换性质，来讨论电磁规律方程的相对论协变性。

1、四维电流密度矢量和电荷守恒定律

电荷守恒定律要求带电体的总电荷不因运动速度而改变，因此物体的总电荷是一个四维标量，不因参考系变换而改变，总电荷可表示为

$$Q=\int \rho dV。$$

带电粒子以速度 v 运动时，产生洛伦兹收缩。体积的收缩因子是$\sqrt{1-v^2/c^2}=\gamma^{-1}$，所以电荷密度相应增大 γ 倍，运动粒子的电荷密度 ρ 与静止粒子的电荷密度 ρ_0 之间有关系式

$$\rho=\gamma\rho_0, \tag{7.5.1}$$

其电流密度

$$\vec{J}=\rho\vec{v}=\gamma\rho_0\vec{v}。 \tag{7.5.2}$$

注意到四维速度$U_\mu=\gamma(\vec{v},\ ic)$如果引入 $J_4=ic\rho$，则可以合成一个四维电流密度矢量

$$J_\mu=\rho_0 U_\mu=(\vec{J},\ ic\rho). \tag{7.5.3}$$

电荷守恒定律的表示式是

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{J}=0,$$

利用$x_4=ict$和$J_4=ic\rho$，以及记号$\partial_\mu=\frac{\partial}{\partial x_\mu}$，可将上式写成四维形式

$$\partial_\mu J_\mu = 0。 \tag{7.5.4}$$

此式左边是一四维标量，即洛伦兹变换下的不变量，因而具有协变性。

2、四维势矢量和电磁势方程

用四维形式表示达朗伯算符

$$\Box \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \partial_\mu \partial_\mu, \tag{7.5.5}$$

在洛伦兹规范下用势描写的电磁场方程就可写成

$$\begin{aligned} \Box \vec{A} &= -\mu_0 \vec{J}, \\ \Box \Phi &= -\mu_0 c^2 \rho \end{aligned} \tag{7.5.6}$$

和洛伦兹条件

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \tag{7.5.7}$$

若引入一个四维势矢量

$$A_\mu = \left(\vec{A}, \frac{i}{c}\Phi\right), \tag{7.5.8}$$

则电磁势方程可合并为

$$\Box A_\mu = -\mu_0 J_\mu. \tag{7.5.9}$$

算符□是一个不变量，此式两边都是四维矢量，因而有明显的协变性。洛伦兹条件(7.5.7)也可写成四维形式

$$\partial_\mu A_\mu = 0, \tag{7.5.10}$$

此式与(7.5.4)式一样具有协变性。方程(7.5.9)和(7.5.10)是用势来表示的麦克斯韦方程组的协变形式。

在参考系作洛伦兹变换时，四维电流密度 J_μ 和四维势 A_μ 都

按矢量变换规律变换。例如对 A_μ，其变换规律为

$$A'_\mu = a_{\mu\nu}A_\nu.$$

若$\sum'$相对于$\sum$沿 x 方向以速度 v 运动，利用洛伦兹变换矩阵进行计算，得

$$\begin{aligned} A'_x &= \gamma\left(A_x - \frac{v}{c^2}\Phi\right), \\ A'_y &= A_y, \\ A'_z &= A_z, \\ \Phi' &= \gamma(\Phi - vA_x)。 \end{aligned} \tag{7.5.11}$$

3、电磁场张量和麦克斯韦方程组

电磁场$\vec{E}$和$\vec{B}$可以用势表示出来

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A},$$

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}。$$

为了把$\vec{E}$和$\vec{B}$也写成统一的四维形式，我们引入一个四维的电磁场张量

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,\ (\mu,\ \nu = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \tag{7.5.12}$$

其中 A_μ 为四度势，很明显 $F_{\mu\nu}$ 是一个四维二阶的反对称张量，$F_{\mu\nu} = -F_{\mu\nu}$，独立分量只有 6 个，把它用矩阵形式表示出来：

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ -F_{12} & 0 & F_{23} & F_{24} \\ -F_{13} & -F_{23} & 0 & F_{34} \\ -F_{14} & -F_{24} & -F_{34} & 0 \end{bmatrix}。 \tag{7.5.13}$$

将 A_μ 的各分量代入(7.5.12)式，我们看到

$$F_{ij}=\partial_i A_j-\partial_j A_i \quad (i,\ j=1,\ 2,\ 3)$$

$$\varepsilon_{ijk}F_{ij}=\varepsilon_{kij}(\partial_i A_j-\partial_j A_i)=2\varepsilon_{kij}\partial_i A_j=2B_k,$$

故

$$B_k=\frac{1}{2}\varepsilon_{kij}F_{ij}.$$

具体表示出来：$B_1=F_{23}$，$B_2=-F_{13}$，$B_3=F_{12}$。又

$$F_{4i}=\partial_4 A_i-\partial_i A_4=\frac{1}{ic}\left(\partial_i\varphi+\frac{\partial A_i}{\partial t}\right)=\frac{+i}{c}E_i,$$

具体表示出来：$F_{14}=-\frac{i}{c}E_1$，$F_{24}=-\frac{i}{c}E_2$，$F_{34}=-\frac{i}{c}E_3$。

把这些值填到(7.5.13)矩阵中：

$$F_{\mu\nu}=\begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -\frac{i}{c}E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{i}{c}E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{i}{c}E_3 \\ \frac{iE_1}{c} & \frac{i}{c}E_2 & \frac{i}{c}E_3 & 0 \end{bmatrix}。 \tag{7.5.14}$$

由此可见，电场强度和磁感应强度的分量是四度电磁张量的分量，张量 $F_{\mu\nu}$ 的空间分量同磁场相联系的，就是说磁感应强度$\vec{B}$的分量构成一个三维二阶反对称张量，这意味着$\vec{B}$是一个轴矢量，电场$\vec{E}$的分量是 $F_{\mu\nu}$ 的时间分量，显然$\vec{E}$是一个普通矢量。

用电磁场张量可以把麦克斯韦方程组写为更明显、更简捷的

协变形式，其中的一对方程

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0,$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad ,$$

可以合写为

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} = 0 \quad , \tag{7.5.15}$$

叫做第一对麦克斯韦方程组，它是由麦克斯韦方程组中一对无源方程而来。几何上把(7.5.15)式叫做扁西恒等式，麦克斯韦方程组的另一对

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho,$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

可以合写为

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} = \mu_0 J_\mu, \tag{7.5.16}$$

叫做第二对麦克斯韦方程组，它是由麦克斯韦方程组中一对有源方程而来。

可以验证：对于第一对方程组，当 $\mu \neq \nu \neq \lambda$ 时，若 μ、ν、$\lambda = i, j, k (i \neq j \neq k)$，可以导出 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$；若 μ、λ、ν 中有一个指标为 4，例如 $\lambda = 4$，可以导出 $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$。对于第二对方程组，当 μ，ν 中一个指标为 4，而另一个是 1，2，3，例如取 $\mu = 4$ 时，可得 $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$，而当 μ、ν 中一个取 1，2，3 时，例如 $\mu = 1, 2, 3$，可得

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}。$$

4、电磁场的变换关系

由张量变换公式

$$F'_{\mu\nu} = a_{\mu\lambda} a_{\nu\tau} F_{\lambda\tau}$$

导出电磁场的变换关系

$$\begin{aligned} E'_1 &= E_1, & B'_1 &= B_1, \\ E'_2 &= \gamma(E_2 - vB_3), & B'_2 &= \gamma\left(B_2 + \frac{v}{c^2} E_3\right), \\ E'_3 &= \gamma(E_3 + vB_2), & B'_3 &= \gamma\left(B_3 - \frac{v}{c^2} E_2\right). \end{aligned} \tag{7.5.17}$$

或写为更紧凑的形式:

$$\begin{aligned} \vec{E}'_{/\!/} &= \vec{E}_{/\!/}, & \vec{B}'_{/\!/} &= \vec{B}_{/\!/}, \\ \vec{E}'_{\perp} &= \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})_{\perp}, & \vec{B}'_{\perp} &= \gamma\left(\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}\right)_{\perp}; \end{aligned} \tag{7.5.18}$$

式中 // 与 ⊥ 分别表示与相对速度 $\vec{v}$ 平行和垂直分量。当 Σ' 参考系对 Σ 参考系的变换速度 $\vec{v}$ 为任意方向时，有

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) + (1-\gamma)\left(\frac{\vec{E} \cdot \vec{v}}{v^2}\right)\vec{v}, \\ \vec{B}' &= \gamma\left(\vec{B} - \frac{1}{c^2}\vec{v} \times \vec{E}\right) + (1-\gamma)\left(\frac{\vec{B} \cdot \vec{v}}{v^2}\right)\vec{v}. \end{aligned} \tag{7.5.19}$$

因此，电场和磁场是一种物质的两个方面，它们在不同参考系中有不同的特性。就特殊情形而言，电场或磁场在一个参考系中可以等于零，而同时在另外一个参考系中却又存在。另一方面，矢势和标势统一为四维矢量，电场和磁场统一为四维张量，这些结

果反映出电磁场的统一性和相对性。

把(7.5.18)或(7.5.19)式代入麦克斯韦方程组，可验证三维形式的表克斯韦方程组对洛伦兹变换是协变的。

[例 7-11] 求匀速运动带电粒子的电磁场。

解：设带电荷 e 的粒子以速度$\vec{v}$运动，取$\sum'$系原点固定于粒子上，x′轴沿$\vec{v}$方向，场点相对于粒子的径矢在$\sum$系为$\vec{r}$，在$\sum'$系为$\vec{r}'$，粒子经过$\sum$系原点的时刻 t=0，我们就在这一时刻在$\sum$系观测空间场，由洛伦兹变换，有

$$x' = \gamma x, \qquad y' = y, \qquad z' = z. \tag{7.5.20}$$

在$\sum'$系中

$$\vec{E}' = \frac{e\vec{r}'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}, \qquad \vec{B}' = 0. \tag{7.5.21}$$

利用场的变换关系

$$E_x = \frac{ex'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}, \qquad B_x = 0,$$

$$E_y = \gamma\frac{ey'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}, \qquad B_y = -\gamma\frac{v}{c^2}\frac{ez'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3},$$

$$E_z = \gamma\frac{ez'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}, \qquad B_z = \gamma\frac{v}{c^2}\frac{ey'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}.$$

由(7.5.20)式，式中 r′可写成

$$r' = (1-\beta^2)^{-1/2}\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)r^2 + \frac{x^2v^2}{c^2}\right]^{\frac{1}{2}},$$

设$\vec{r}$与$\vec{v}$的夹角为 θ，则

$$r' = (1-\beta^2)^{-1/2}\, S,\ S = \left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)r^2 + \left(\frac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{c}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{7.5.22}$$

所以电场和磁场为

$$\vec{E}=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 s^3}(1-\beta^2)\vec{r},$$
$$\vec{B}=\frac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{B}. \tag{7.5.23}$$

由此看到，匀速运动带电粒子的场有如下特点:

1) 式中 S 可改写成 $S=r(1-\beta^2\sin^2\theta)^{1/2}$，所以

$$\vec{E}=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}. \tag{7.5.24}$$

可见场强与 θ 有关，在 x 轴上($\theta=0$)，$E<E_{静止}$，比例因子是 $1-\beta^2$；在 $x=0$ 的面上 ($\theta=\frac{\pi}{2}$)，$E>E_{静止}$。比例因子是 $(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$；速度增大时，比例因子的效应显著，电磁场向通过粒子并垂直于轨道的平面集中，当 V→c 时，整个场差不多都集中在上述平面内，(如图 7.5)所示。

2) 能流密度

$$\vec{S}=\varepsilon_0[E^2\vec{v}-(\vec{E}\cdot\vec{v})\vec{E}]$$

由于$\vec{E}$与$\vec{v}$近似垂直，所以

$$\vec{S}\approx\varepsilon_0 E^2\vec{v}=w\vec{v}$$

说明能流仍以速度$\vec{v}$伴随粒子一起运动。

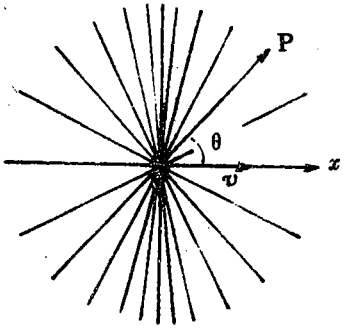


图 7.5

3) 如 $v\ll c$,有 $\beta\to 0$, S→r，电磁场成为

$$\vec{E}=\frac{e\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3},\qquad \vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}.$$

其电场与库仑场相同，磁场遵从稳定情况下的毕奥–萨伐尔定律。

5、洛伦兹力的变换性质

考虑力密度形式的洛伦兹力公式

$$\vec{f}=\rho\vec{E}+\vec{J}\times\vec{B}, \tag{7.5.26}$$

如电荷运动的速度$\vec{v}$，则洛伦兹力的功率，即场对电荷系统所作的功率为

$$\vec{f}\cdot\vec{v}=\rho\vec{v}\cdot\vec{E}=\vec{J}\cdot\vec{E}. \tag{7.5.27}$$

如设法用电磁场张量构成一个四维矢量，其第四分量为$f_4=i\dfrac{\vec{E}\cdot\vec{J}}{c}$，则上两式可合写成

$$f_\mu=F_{\mu\nu}J_\nu. \tag{7.5.28}$$

容易验证，在(7.5.28)式中，取$\mu=1$，2，3，就可得(7.5.26)；取$\mu=4$，就可得(7.5.27)。

可见，由(7.5.28)定义的四维矢量是

$$f_\mu=\left(\vec{f},\ i\frac{\vec{f}\cdot\vec{v}}{c}\right). \tag{7.5.29}$$

将此式与(7.4.14)比较，就会看到这里的f_μ与协变形式的力学方程中的F_μ类似，区别为仅差一个因子γ。再联系(7.4.16)式，则明显地看出洛伦兹力$\vec{f}$与(7.4.17)式中的$\vec{f}$具有相同的变换性质。因此，洛伦兹力公式满足相对论协变性的要求。至此我们已经阐明，电动力学的基本规律，包括麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式，是适用于一切惯性参考系的物理学基本规律。

按照(7.4.17)式，电荷系统在电磁场中的运动方程

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\rho\vec{E}+\vec{J}\times\vec{B} \tag{7.5.30}$$

适用于任意惯性系，因而能够描述高速带电物体的运动。(7.5.30)式和相对论的能量动量表达式是研究高速带电粒子在电磁场中运动问题的基础。

[例 7--12] 求电荷为 e，质量为 m 的粒子在均匀恒定电场$\vec{E}$内的运动轨迹，设初始时刻(t=0)粒子位于坐标原点，其初始动量为$\vec{P}_0$。

解：选 x 轴为$\vec{E}$方向，此情况下洛伦兹力$\vec{f}=e\vec{E}$，其运动方程是$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=e\vec{E}$，因此有

$$\frac{\mathrm{d}P_x}{\mathrm{d}t}=eE,\qquad \frac{\mathrm{d}P_y}{\mathrm{d}t}=0,$$

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\vec{v}\cdot e\vec{E}=eEv_x=eE\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}. \tag{7.5.31}$$

解这些方程，得

$$P_x=eEt+P_{ox},\quad P_y=P_{oy},\quad W=eEx+W_0 \tag{7.5.32}$$

注意这是一个平面运动问题，与 z 方向无关，三维速度$\vec{v}^2=v_x^2+v_y^2$，利用动量定义可写成

$$\frac{m_0v_x}{\sqrt{1-\frac{v_x^2+v_y^2}{c^2}}}=eEt+P_{ox},\qquad \frac{m_0v_y}{\sqrt{1-\frac{v_x^2+v_y^2}{c^2}}}=P_{oy},$$

$$W=eEx+W_0.$$

这组表示式前两式又可化为

$$\left[m_0^2c^2+(P_{ox}+eEt)^2\right]v_x^2+(eEt+P_{ox})^2v_y^2$$

$$=c^2(eEt+P_{ox})^2, \tag{7.5.33}$$

$$P_{oy}^2 v_x^2 + (m_0^2 c^2 + P_{oy}^2) v_y^2 = c^2 P_{oy}^2,$$

消去 v_x^2，有

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{cP_{oy}}{\sqrt{(P_{ox} + eEt)^2 + m_0^2 c^2 + P_{0y}^2}}, \tag{7.5.34}$$

积分，并考虑初始条件：t=0 时，y=0，得

$$y(t) = \frac{cP_{oy}}{eE} \ln\left[\frac{P_{ox} + eEt + \sqrt{(P_{ox} + eEt)^2 + m_0^2 c^2 + P_{oy}^2}}{P_{ox} + w_0 / c}\right] \tag{7.5.35}$$

如果(7.5.33)式中消去 v_y^2，同理有

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{(eEt + P_{0x})c}{\sqrt{(P_{ox} + eEt)^2 + m_0^2 c^2 + P_{0y}^2}}, \tag{7.3.36}$$

积分，并考虑初始条件：t=0 时，x=0，得

$$x(t) = \frac{c}{eE}\left[\sqrt{(eEt + P_{ox})^2 + m_0^2 c^2 + P_{0y}^2} - \frac{w_0}{c}\right]. \tag{7.5.37}$$

所得(7.5.35)和(7.5.37)式就是粒子在均匀恒定电场$\vec{E}$内的运动轨迹。

讨论：1) 当初始动量 $P_0 \ll m_0 c$ 且 $eEt \ll m_0 c$(即开始时从加速电场获得能量还很小)，此时可作非相对论处理

$$x(t) \approx \frac{P_{0x}}{m_0} t + \frac{1}{2}\left(\frac{eE}{m_0}\right) t^2, \qquad y(t) \approx \frac{P_{0y}}{M_0} t,$$

这是熟知的经典力学结果。

2) 经过很长时间加速后，使得 $eEt \gg m_o c$，

由(7.5.34)和(75.36)两式得

$$v_x \approx \frac{eEt}{eEt} \cdot c = c, \qquad v_y \approx \frac{cP_{0y}}{eEt} \to 0,$$

即在 x 方向电场$\vec{E}$将会把粒子加速到速度为 c，而粒子的 y 方向速度逐渐趋近于零，由(7.5.35)和(7.5.37)式看到

$$x(t) \approx ct - \frac{m_0 c^2}{eE}, \qquad y(t) \approx (cP_{0y} / eE)\ln\frac{2eEt}{m_0 c}。$$

3) 若 $P_{0y}=0$，则 $v_y=0$，粒子完全沿 x 方向运动，它的能量为 $W=\sqrt{P_{0x}^2c^2+m_0^2c^4}$。此时我们欲求粒子在与初速度方向平行的均匀电场$\vec{E}$的制动下所通过的距离，假设粒子运动了，距离 $x=l$ 后就停止下来，此时 $v_x=0$，即 $eEt+P_{ox}=0$，将它代入(7.5.37)式得

$$l = \frac{W_o - m_o c^2}{eE} = \frac{T_o}{eE},$$

其中 $T_0=W_0-m_0c^2$ 就是入射粒子的动能，这个结果与非相对论结果相同。

6、电磁场的两个不变量

电场和磁场可以用电磁场张量统一描述，而四维张量的标积可以构成不变量，因此我们能够从电磁场张量的标积得到两个洛伦兹不变量。将不变量 $-\frac{c^2}{2}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 利用(7.5.14)式写成三维形式，得到

$$\vec{E}^2 - c^2\vec{B}^2 = \text{不变量}. \tag{7.5.38}$$

将不变量 $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}$(其中 $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ 是一个四阶全反对称张量)写成三维形式，得到

$$\vec{E}\cdot\vec{B}=\text{不变量}。\tag{7.5.39}$$

由上面所得两个量的不变性，可以得到一些重要结论。假如电场和磁场在任意一个惯性系中是相互垂直的，即$\vec{E}\cdot\vec{B}=0$，那么，它们在任何其它惯性系中也是相互垂直的。假如在任意一个参考系中$|\vec{E}|=c|\vec{B}|$，那么，在任何其它惯性系中也满足此关系。平面电磁波就是这样，所以平面电磁波对任何惯性系都有$\vec{E}\perp\vec{B}$及$|\vec{E}|=c|\vec{B}|$。

假如在任意一个参考系中$|\vec{E}|>c|\vec{B}|$(或$|\vec{E}|<c|\vec{B}|$)，那么，在任何其它惯性系中也会有$|\vec{E}|>c|\vec{B}|$(或$|\vec{E}|<c|\vec{B}|$)。如果在任意一个惯性系中矢量$\vec{E}$和$\vec{B}$的夹角是锐角(或钝角)，那么它们在任何其它惯性系中的夹角也是锐角(或钝角)。

利用洛伦兹变换，总可以使$\vec{E}$和$\vec{B}$取不同的值，只要满足$\vec{E}^2-c^2\vec{B}^2$及$\vec{E}\cdot\vec{B}$两个量有固定值的条件就可以了。

如果$\vec{E}\cdot\vec{B}=0$，则总能找到一个惯性系，使其中只有电场或只有磁场(依$E^2>c^2B^2$还是$E^2<c^2B^2$而定)，反之，如果在任意一个惯性系中$\vec{E}=0$或$\vec{B}=0$，那么，在所有其它惯性系中$\vec{E}$和$\vec{B}$都是相互垂直的。

[例 7-13] 设在$\sum$参考系内$\vec{E}\perp\vec{B}$，试问，$\sum'$系应当以什么样的速度相对于$\sum$系运动才能使其中只有$\vec{E}$或只有$\vec{B}$?

解：在$\sum$参考系内$\vec{E}\perp\vec{B}$，利用$\vec{E}\cdot\vec{B}=0$和$\vec{E}^2-c^2\vec{B}^2=$不变量的条件，当$|\vec{E}|>c|\vec{B}|$时，应当有一个$\vec{B}'=0$，$|\vec{E}'|=\sqrt{E^2-c^2B^2}$的参考系$\sum'$；当$|\vec{E}|<c|\vec{B}|$时，则应有一个$\vec{E}'=0$，$|\vec{B}'|=\sqrt{c^2B^2-E^2}$的参考系$\sum'$。

如果$|\vec{E}|>c|\vec{B}|$，可以证明

$$\vec{V}=\frac{c^2}{|\vec{E}|^2}\vec{E}\times\vec{B},\tag{7.5.40}$$

$$\vec{E}' = \frac{\vec{E}}{|\vec{E}|}\sqrt{E^2 - c^2B^2}\ 。$$

在以任意速度沿$\vec{E}'$运动的任何参考系$\sum''$内，同样不存在磁场。

如果$|\vec{E}| < c|\vec{B}|$，有

$$\vec{V} = \frac{\vec{B} \times \vec{E}}{|\vec{B}|^2},$$

$$\vec{B}' = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}\sqrt{c^2B^2 - E^2}. \tag{7.5.41}$$

7、位相不变性与多普勒红移和光行差

一个平面波经历的位相与通过观察者的波峰数成正比，因此只要计算一个波列中的波峰数就能确定位相。而这种计数操作与坐标系无关，在一切惯性系中必定得到相同的结果，所以一个波的位相是一个不变量，可以表示为

$$\varphi = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = \vec{k}' \cdot \vec{r}' - \omega' t' = 不变量 \tag{7.5.42}$$

基于不变量可以看作是两个四维矢量的标积，并且注意到$(\vec{r},\ ict)$构成四维矢量x_μ，我们可将$\left(\vec{k},\ i\frac{\omega}{c}\right)$构成另一个四维矢量$k_\mu$。于是，位相的不变性(7.5.42)就是这两个四维矢量标积的不变性：

$$k_\mu x_\mu = k'_\mu x'_\mu = 不变量 \tag{7.5.43}$$

由此我们得到一个四维波矢量

$$k_\mu = \left(\vec{k},\ i\frac{\omega}{c}\right) \tag{7.5.44}$$

按照四维矢量的变换规律，可得在洛伦兹变换下k_μ的变换关系

$$
\begin{aligned}
k_1' &= \gamma(k_1 - \frac{v}{c^2}\omega), \\
k_2' &= k_2, \\
k_3' &= k_3, \\
\omega' &= \gamma(\omega - vk_1).
\end{aligned}
\tag{7.5.45}
$$

设$\vec{k}$与 x 轴夹角 θ，$\vec{k}'$ 与 x 轴夹角 θ'，有

$$
k_1 = \frac{\omega}{c}\cos\theta, \qquad k_1' = \frac{\omega'}{c}\cos\theta',
$$

代入(7.5.45)式可解出

$$
\omega' = \omega\gamma\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right), \tag{7.5.46}
$$

$$
\mathrm{tg}\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma\left(\cos\theta - \frac{v}{c}\right)}. \tag{7.5.47}
$$

若$\sum'$为光源静止的参考系，ω'为静止光源的辐射频率，由(7.5.46)式，运动光源的辐射频率

$$
\omega = \frac{\omega'}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)}. \tag{7.5.48}
$$

式中 v 为光源的运动速度，θ 为$\sum$系观察者看到辐射方向与光源运动方向的夹角。(7.5.48)式表明，频率 $\omega < \omega'$，从而波长 $\lambda > \lambda'$，这种由光源运动所导致的波长变长现象叫多普勒红移，当 $v \ll c$ 时，(7.5.48)式变为经典多普勒效应的公式。在垂直于光源运动的方向上($\theta = \frac{\pi}{2}$)，没有经典的频移；但是(7.5.48)式给出

$$\omega_{\perp} = \omega' \sqrt{1 - v^2 / c^2}\,. \tag{7.5.49}$$

这就是在相对论中特有的横向多普勒效应，已为伊凡斯–斯惕韦耳实验所证实(1938 年)。

由(7.5.47)式，$\theta' \neq \theta$，说明当光源与观察者有相对运动时，观察者所测得的光的传播方向也发生改变，这种现象称为光行差，早在 1728 年为天文观测所发现。当$\frac{v}{c} \to 1$时，$\mathrm{tg}\theta' \to 0$，从而$\theta' \to 0$，即就是说，在相对于光源作高速运动的惯性系中，光的传播方向总是与光源运动方向平行的。当$\frac{v}{c} \ll 1$时，$\theta' \approx \theta$，这表明光行差现象也仅是一种相对论性效应。

[例 7–14] 一平面镜以匀速$\vec{v}$运动，$\vec{v}$的方向垂直于平面镜的法线方向。频率为ν的一束光入射到这平面镜上，入射角为θ。

(1) 求反射光的频率和反射角。(提示：你知道在镜子静止的参考系中如何确定反射光的频率和反射角。)

(2) 假设镜子速度$\vec{v}$的方向平行于平面镜的法线方向，求反射光的频率。

解：(1) 设$\sum'$为镜子在其中静止的参考系，由四维波矢的变换关系得

$$k'_{i\perp} = k_{i\perp}, \qquad k'_{i//} = \gamma(k_{i//} - \frac{v}{c^2}\omega_i),$$

$$\omega'_i = \gamma(\omega_i - v k_{i//}),$$

式中下标 i 表示入射光，$\perp$和 // 分别表示$\vec{k}$和$\vec{k}'$垂直于和平行于镜了表面的相应分量。

在$\sum'$系中反射定律成立，反射光的相应分量为

$$k'_{r\perp} = -k'_{i\perp}, \qquad k'_{r\parallel} = k'_{i\parallel}, \qquad \omega'_r = \omega'_i,$$

反射光从$\sum'$系到$\sum$系的变换

$$k_{r\perp} = k'_{r\perp}, \qquad k_{r\parallel} = \gamma(k'_{r\parallel} + \frac{v}{c^2}\omega'_r),$$

$$\omega_r = \gamma(\omega'_r + vk'_{r\parallel}).$$

将有关量代入，则

$$k_{r\parallel} = \gamma\left(k'_{r\parallel} + \frac{v}{c^2}\omega'_r\right) = \gamma\left(k'_{i\parallel} + \frac{v}{c^2}\omega'_i\right)$$

$$= \gamma\left[\gamma\left(k_{i\parallel} - \frac{v}{c^2}\omega_i\right) + \frac{v}{c^2}\gamma(\omega_i - vk_{i\parallel})\right]$$

$$= \gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)k_{i\parallel} = k_{i\parallel}$$

于是反射角 θ_r 满足

$$\mathrm{tg}\theta_r = \left|\frac{k_{r\parallel}}{k_{r\perp}}\right| = \left|\frac{k_{i\parallel}}{k_{i\perp}}\right| = \mathrm{tg}\theta,$$

所以

$$\theta_r = \theta, \tag{7.5.50}$$

即在$\sum$系中观测，反射角等于入射角。同理，将有关量代入，频率表示式

$$\omega_r = \gamma(\omega'_r + vk'_{r\parallel}) = \gamma(\omega'_i + vk'_{i\parallel})$$

$$= \gamma\left[\gamma(\omega_i - vk_{i\parallel}) + v\gamma\left(k_{i\parallel} - \frac{v}{c^2}\omega_i\right)\right]$$

$$= \gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\omega_i = \omega_i, \tag{7.5.51}$$

即在$\sum$系中观测，反射光的频率等于入射光的频率。

(2) 这时对于入射光四维波矢的变换关系为

$$k'_{i\perp}=\gamma\left(k_{i\perp}-\frac{v}{c^2}\omega_i\right),\qquad k'_{i\parallel}=k_{i\parallel},$$

$$\omega'_i=\gamma(\omega_i-vk_{i\perp}).$$

在$\sum'$中反射定律成立，反射光的相应分量仍为

$$k'_{r\perp}=-k'_{i\perp},\quad k'_{r\parallel}=k'_{i\parallel},\quad \omega'_r=\omega'_i。$$

反射光从$\sum'$系到$\sum$系的变换为

$$k_{r\perp}=\gamma\left(k'_{r\perp}+\frac{v}{c^2}\omega'_r\right),\qquad k_{r\parallel}=k'_{r\parallel},$$

$$\omega_r=\gamma(\omega'_r+vk'_{r\perp}).$$

将有关量代入频率表达式，得

$$\begin{aligned}\omega_r&=\gamma(\omega'_r+vk'_{r\perp})=\gamma(\omega'_i-vk'_{i\perp})\\&=\gamma\left[\gamma(\omega_i-vk_{i\perp})-v\gamma\left(k_{i\perp}-\frac{v}{c^2}\omega_i\right)\right]\\&=\gamma^2\left[\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)\omega_i-2vk_{i\perp}\right].\end{aligned}$$

注意到$k_{i\perp}=-\dfrac{\omega_i}{c}\cos\theta$，则

$$\omega_r=\gamma^2\omega_i\left(1+\frac{v^2}{c^2}+2\frac{v}{c}\cos\theta\right)\tag{7.5.52}$$

即在$\sum$系观测，反射光的频率ν_r与入射光的频率ν的关系为

$$\nu_r=\nu\left[\left(1+\frac{v^2}{c^2}+2\frac{v}{c}\cos\theta\right)\Big/\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\right]。\tag{7.5.52'}$$

*8、电磁场的能量动量的协变形式

在第四章中，我们得到了电磁场的能量守恒和动量守恒方程:

$$\nabla \cdot \vec{S} + \frac{\partial w}{\partial t} = -\vec{J} \cdot \vec{E} \tag{4.4.4}$$

$$\nabla \cdot \vec{\sigma} + \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} = -\vec{f}。 \tag{4.4.16}$$

在上一节，我们已经把此二式右端的洛伦兹力密度和它的功率构成一个四维矢量

$$f_\mu = F_{\mu\nu} J_\nu。 \tag{7.5.28}$$

现在设法把其左端的w、$\vec{g}$(或$\vec{s}$)和$\vec{\sigma}$也统一为一个四维量。由麦克斯韦方程(7.5.16)可得到

$$J_\nu = \frac{1}{\mu_0} \partial_\lambda F_{\nu\lambda}, \tag{7.5.53}$$

所以力密度公式可以写成

$$\mu_0 f_\mu = F_{\mu\nu} \partial_\lambda F_{\nu\lambda} = \partial_\lambda (F_{\mu\nu} F_{\nu\lambda}) - F_{\nu\lambda} \partial_\lambda F_{\mu\nu}。 \tag{7.5.54}$$

考虑式中最后一项，由于ν、λ都是求和指标，因而交换其记号不会影响结果，于是

$$F_{\nu\lambda} \partial_\lambda F_{\mu\nu} = F_{\lambda\nu} \partial_\nu F_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} (F_{\nu\lambda} \partial_\lambda F_{\mu\nu} + F_{\lambda\nu} \partial_\nu F_{\mu\lambda}),$$

利用$F_{\mu\nu}$的反对称性质

$$F_{\nu\lambda} \partial_\lambda F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} F_{\nu\lambda} (\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\lambda\mu}),$$

将麦克斯韦方程(7.5.15)式代入此式，得

$$F_{\nu\lambda}\partial_\lambda F_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}F_{\nu\lambda}\partial_\mu F_{\nu\lambda} = -\frac{1}{4}\partial_\mu(F_{\nu\tau}F_{\nu\tau}), \tag{7.5.55}$$

所以力密度公式成为

$$\mu_0 f_\mu = \partial_\lambda(F_{\mu\nu}F_{\nu\lambda}) + \frac{1}{4}\partial_\mu(F_{\nu\tau}F_{\nu\tau}). \tag{7.5.56}$$

引入

$$T_{\mu\lambda} = \frac{1}{\mu_o}(F_{\mu\nu}F_{\nu\lambda} + \frac{1}{4}\delta_{\mu\lambda}F_{\nu\tau}F_{\nu\tau}), \tag{7.5.57}$$

则

$$f_\mu = \partial_\lambda T_{\mu\lambda}。 \tag{7.5.58}$$

容易证明，$T_{\mu\lambda}$ 是一个无迹对称张量，即

$$T_{\mu\lambda} = T_{\lambda\mu}, \qquad T_{\mu\mu} = 0。 \tag{7.5.59}$$

$T_{\mu\lambda}$ 的矩阵形式是

$$T_{\mu\lambda} = \begin{bmatrix} \mathcal{T}_{11} & \mathcal{T}_{12} & \mathcal{T}_{13} & -icg_1 \\ \mathcal{T}_{21} & \mathcal{T}_{22} & \mathcal{T}_{23} & -icg_2 \\ \mathcal{T}_{31} & \mathcal{T}_{32} & \mathcal{T}_{33} & -icg_3 \\ -icg_1 & -icg_2 & -icg_3 & w \end{bmatrix}. \tag{7.5.60}$$

式中 w 是电磁场的能量密度，g_1，g_2，g_3 是电磁场的动量密度，$\mathcal{T}_{11}$ 等九个量是麦克斯韦应力张量的各个分量，所以 $T_{\mu\lambda}$ 称为电磁场的能量动量张量。

在不同的惯性系中，w、$\vec{g}$(或能流密度$\vec{s}$)和$\vec{f}$的变换关系应由能量动量张量 $T_{\mu\lambda}$ 的变换关系导出。

*§ 7.6 电磁场中带电粒子的拉格朗日方程和哈密顿正则方程

把力学系统的动力学方程表示为分析力学的形式，具有更普

遍的意义。并且，在微观领域里，量子力学是用哈密顿量或拉氏量来描述粒子系统的力学性质的。因此在经典电动力学中引入带电粒子在电磁场中运动的拉格朗日函数和哈密顿函数，不仅提供了求解经典运动的一种方法，同时还为过渡到量子理论提供必要的基础。

1、非相对论情形

在非相对论力学里，系统是用广义坐标 $q_i(t)$和广义速度 $\dot{q}_i(t)$来描写的，拉氏量 L 是各个 q_i 和 $\dot{q}_i$ 的一个泛函，也许还显含时间 t: $L=L[q_i(t),\ \dot{q}_i(t),\ t]$，作用量 S 则定义为 L 沿该体系的一条可能途径的时间积分:

$$S=\int_{t1}^{t2} L[q_i(t),\ \dot{q}_i(t),\ t]\mathrm{d}t, \tag{7.6.1}$$

对于真实路径，应有变分 $\mathrm{d}S=0$，这就是哈密顿最小作用量原理。由此就得到了拉格朗日方程:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=0, \quad (i=1,\ 2,\ \cdots) \tag{7.6.2}$$

系统的广义动量定义为

$$P_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \tag{7.6.3}$$

而系统的哈密顿量 H 定义为

$$H(p_i,\ q_i,\ t)=p_i\dot{q}_i-L. \tag{7.6.4}$$

通过微分可得到哈密顿正则方程:

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial P_i},\ \dot{p}_i=\frac{-\partial H}{\partial q_i}. \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{7.6.5}$$

在经典力学里，处于保守场中粒子的拉氏量是

$$L = T - V, \tag{7.6.6}$$

这里 T 是粒子的动能，而 V 为保守场的势能。对于电磁场中的带电粒子不能用 V 描述，需要引入一个适当的量代替 V，用以保持运动方程为拉氏方程的形式。

设拉氏量为

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - e(\Phi - \vec{v}\cdot\vec{A}) \tag{7.6.7}$$

其中 Φ 和 $\vec{A}$ 是电磁势。现在取广义坐标 $q_i = x_i$(笛卡儿坐标)，则 $\dot{q}_i = v_i$ 即为普通的速度。而

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -e\partial_i\Phi + ev_j\partial_i A_j$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial L}{\partial v_i}\right)\frac{\partial x_j}{\partial t}$$

$$= m\dot{v}_i + e\frac{\partial A_i}{\partial t} + e(\partial_j A_i)\cdot v_j。$$

(注意，这里 x_i 和 v_i 是互相独立的)于是，代入拉氏方程(7.6.2)并整理，得

$$m\ddot{x}_i = -e\partial_i\Phi - e\frac{\partial A_i}{\partial t} + ev_j\partial_i A_j - e(\partial_j A_i)v_j。 \tag{7.6.8}$$

注意到

$$E_i = -\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t},$$

$$(\vec{v}\times\vec{B})_i = [\vec{v}\times(\nabla\times\vec{A})]_i = \varepsilon_{ijk}v_j\varepsilon_{klm}\partial_l A_m$$

$$= v_j\partial_i A_j - v_j\partial_j A_i,$$

(7.6.8)式成为

$$m\ddot{x}_i = eE_i + e(\vec{v}\times\vec{B})_i \tag{7.6.9}$$

或

$$m\ddot{\vec{r}} = e\vec{E} + e\vec{v} \times \vec{B}, \tag{7.6.10}$$

这就是我们熟知的荷电粒子在电磁场中的运动方程，从而也说明了(7.6.7)的拉氏量形式是合适的。由(7.6.7)，粒子的正则动量为

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial v_i} = mv_i + eA_i \tag{7.6.11}$$

或

$$\vec{P} = m\vec{v} + e\vec{A} = \vec{P}(m) + e\vec{A} \tag{7.6.12}$$

这表明，在有电磁场存在的情形下，正则动量$\vec{P}$不同于粒子的力学动量$\vec{P}(m) = m\vec{v}$。由(7.6.4)和(7.6.12)式可得哈密顿量

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{P} - e\vec{A})^2 + e\Phi。 \tag{7.6.13}$$

2、相对论情况

考察在非相对情况下的拉格朗日量(7.6.7)式，其中第一项是自由粒子的能量，第二项是电磁相互作用能，在相对论情况下，电磁相互作用能是相同的，只是自由粒子的能量部分改变了，必须用$-m_0c^2\sqrt{1 - v^2/c^2}$来代之，故得相对论情形下体系的拉格朗日量为

$$L = -m_0c^2\sqrt{1 - v^2/c^2} - e(\Phi - \vec{v} \cdot \vec{A})。 \tag{7.6.14}$$

相对论情形下粒子的三维动量$\vec{P}(m) = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$，正则动量

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \vec{P}(m) + e\vec{A}, \tag{7.6.15}$$

哈密顿量

$$H = v_i\frac{\partial L}{\partial v_i} - L = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + e\Phi。 \tag{7.6.16}$$

利用相对论的能量动量关系式和(7.6.15)式，

$$\left[\frac{-m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right]^2 = \vec{P}(m)^2c^2 + m_0^2c^4$$

$$= (\vec{P} - e\vec{A})^2c^2 + m_0^2c^4,$$

因此可用正则动量表示为

$$H = \sqrt{(\vec{P} - e\vec{A})^2c^2 + m_0^2c^4} + e\Phi。 \tag{7.6.17}$$

若令体系的正则动量第四分量$P_4 = i\frac{H}{C}$，即

$$P_\mu = (\vec{P},\ \frac{i}{c}H), \tag{7.6.18}$$

则 $H = -icP_4$，由于 $A_4 = i\frac{\Phi}{c}$，所以

$$(H - e\Phi)^2 = (-ic)^2(P_4 - eA_4)^2 = -(P_4 - eA_4)c^2,$$

(7.6.17)式可写为

$$-(P_4 - eA_4)c^2 - (\vec{P} - e\vec{A})^2 = m_0^2c^2,$$

用四维正则动量$P_\mu = (\vec{P},\ \frac{i}{c}H)$和四度势 $A_\mu = (\vec{A},\ i\frac{\Phi}{c})$来写出：

$$(P_\mu - eA_\mu)^2 = -m_0c^2. \tag{7.6.19}$$

我们看到四维动量与四维正则动量之间关系为

$$P_\mu(m) = P_\mu - eA_\mu \quad (\mu = 1,\ 2,\ 3,\ 4). \tag{7.6.20}$$

习 题 七

1、证明牛顿定律在伽俐略变换下是协变的，麦克斯韦方程在伽俐略变换下不是协变的。

2、设有两根互相平行的尺，在各自静止的参考系中长度均为 l_0，它们以相同速率 V 相对于某一参考系运动，但运动方向相反，且平行于尺子。求站在一根尺上测量另一根尺的长度。

3、静止长度为 l_0 的车厢，以速度 $\vec{V}$ 相对于地面 s 运行，车厢的后壁以速度 $\vec{u}_0$ 向前推出一个小球，求地面观察者看到小球从后壁到前壁的运动时间。

4、试直接证明：两个沿相同方向的相继的洛伦兹变换等效于速度为

$$V=\frac{V_1+V_2}{1+\left(\frac{V_1V_2}{C^2}\right)}$$

的单个洛伦兹变换。这就是推导两个平行速度相加定律的另一种方法。

5、试对分速度为任意取向的普遍情况，导出速度合成的相对论规律，证明合速度的绝对值为

$$\frac{\sqrt{(\vec{u}'+\vec{V})^2-(\vec{u}'\times\frac{\vec{V}}{C})^2}}{1+\frac{1}{c^2}(\vec{u}'\cdot\vec{V})}.$$

6、已知在 $\sum'$ 系中，速度 $\vec{V}'$ 在(x′，y′)平面上，与 x′轴夹角 θ'：

$$V'_x=V'\cos\theta',\qquad V'_y=V'\sin\theta'$$

求在 $\sum$ 系中相应的速度 $\vec{V}$ 与 x 轴的夹角 θ 与上述 θ' 角的关系。由所得结果简单说明光行差。

7、有一光源 S 与接收器 R 相对静止，距离为 l_0，S–R 装置浸在均匀无限的液体介质(静止折射率 n)中。试对下列三种情况计算光源发出讯号到接收器接到讯号所经历的时间。

(1)液体介质相对于 S–R 装置静止；

(2)液体沿着 S–R 连线方向以速度 V 流动；

(3)液体垂直于 S–R 连线方向以速度 V 流动。

8、在惯性系$\sum$中观测到两个宇宙飞船，它们正沿直线向相反方向运动，轨道平行，相距为 d(如图 7.6 所示)每个飞船的速度均为$\frac{c}{2}$(c 为光速)。

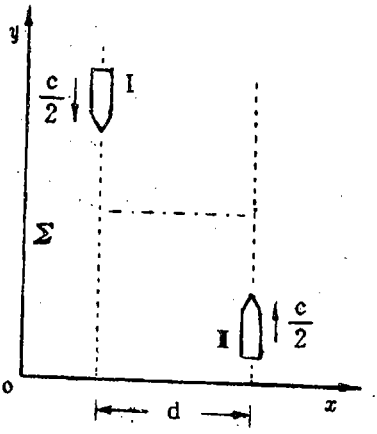


图 7.6

(1)当两个飞船处于最接近位置(如图中点虚线表示)的时刻，飞船 I 以$\frac{3}{4}$c(也是在$\sum$系测量的)发射一个小包。问从飞船 I 上的观察者来看，为了让飞船 II 接到这个小包，应以什么样的角度瞄准？设飞船 I 上的观察者所用的坐标系其轴都对应平行于$\sum$系的轴，且运动方向平行于 y 轴。

(2)在飞船 I 上的观察者看来，小包的速度是多少？

9、如果两事件在同一参考系的不同地点同时发生，试证明：

(1)这两个事件之间不可能存在因果关系；

(2)在任何相对于该参考系作惯性运动的其它参考系看来，这两个事件的发生并不同时。

10、试求出下列各量的变换规律：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_\mu}, \qquad \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}, \qquad T_{\mu\nu} A_\nu$$

其中 Φ 是标量，A_μ 是矢量，而 $T_{\mu\nu}$ 是张量。

11、导出质点三维加速度矢量的变换规律。

12、当作用力分别与运动方向平行或垂直时，力与粒子加速度之比叫做“纵向”或“横向”质量。试计算相对论粒子的“纵向”和“横向”质量。

13、一个静止质量为 m_0、能量为 W 的粒子，它的速度 V 多大？并由此讨论判别一个粒子的运动是否是相对论性的标准。

14、考虑一个康普顿散射的过程，一个波长为 λ 的光子被一个初始静止的自由电子所散射，假定被散射到 θ 方向的光子波长为 λ'。

(1)计算 λ'，由 λ、θ 及普适常数表示。

(2)计算反冲电子的动能。

15、一个质量为 m_1，速度为 V_1 的粒子同一个静止的粒子 m_2 碰撞，碰撞以后就合为一体了。求这个合成粒子的质量 M_0 及速度 V。

16、电子对效应。试证明电子-正电子对转化为两个光子的湮灭反应是可能的。

17、一个总质量为 M_0 的激发原子，对所选定的坐标系静止。它在跃迁到能量比之低 ΔW 的基态时，发射一个光子(能量 $\hbar\omega$，动量 $\hbar\vec{k}$)，同时受到光子的反冲，因此光子的频率不能正好是 $\nu=\frac{\Delta W}{h}$，而要略小一些。证明这个频率

$$\nu=\frac{\Delta W}{h}\left(1-\frac{\Delta W}{2M_0c^2}\right)。$$

18、η'介子(令 m 表示它的质量)能衰变成 ρ^0 介子(质量 m)和光子(质量为 0)：$\eta'\to\rho^0+\gamma$。

在原 η'介子的静止系中衰变是各向同性的。现假设单能 η'介子束在实验室系中以速率 v 运行，并令 θ 为光子相对于粒子束的角度，如图 7.7 所示，令 $P(\theta)d(\cos\theta)$是 $\cos\theta$ 处在 $d(\cos\theta)$间隔内的归一化几率。

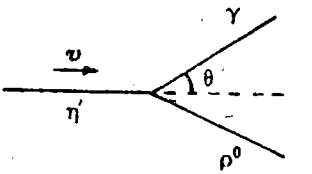


图 7.7

(1)计算 $P(\theta)$;

(2)令 $E(\theta)$是光子以 θ 角射出的实验室能量，计算 $E(\theta)$。

19、两静质量为 M 的粒子发生高能碰撞，求质心系总能量 E_c 与实验室系(其中一个粒子静止)总能量 E_L 之间的关系。由此说明高能"对撞机"的

优点。

20、试证明，只有当静止质量 $m_1 \neq 0$ 的粒子(这个粒子不发生任何变化，它的作用在于接收一部分能量和动量，以使守恒定律成立)参加反应时，一个 γ 量子转化为一个电子 —— 正子偶才是可能的。试求出产生电子偶的阈能 T_0。

21、Λ 在飞行中衰变成 $p+\pi^-$，如果 Λ 的速度为 0.8c，求

(1)实验室坐标系中 π^- 的最大能量;

(2)实验室坐标系中 π^- 的最大横向动量。

22、我们的宇宙充满温度 T=2.7K 的黑体辐射，即光子，依照现代宇宙学理论，这是大爆炸以后，宇宙早期演化中，当温度为 4000K 时脱耦的光子气体，平均光子能量为 10^{-3}ev，我们把它叫做微波背景辐射，于 1965 年发现。考虑宇宙线中的高能质子与一个微波背景光子的正碰撞，试求对于产生过程 $p+\lambda \rightarrow p+\pi^0$，质子所必须具有的最小能量。

23、一个电荷为 e，质量为 m 的相对论粒子在均匀磁场 $\vec{B}$ 内运动，初始时刻(t=0)时，粒子位于径矢为 $\vec{r}_0$ 的点上，初始动量为 $\vec{p}_0$，试确定该粒子的运动规律。

24、有一条截面积可忽略不计的无限长的直导线，在惯性参照系 $\sum'$ 中这条导线是静止的，并且有均匀的线电荷密度 q_0。参照系 $\sum'$(和导线)相对于实验参照系 $\sum$ 以速度 $\vec{v}$ 平行于导线方向而运动。

(1)写出在导线的静止参照系中用柱坐标表示的电场和磁场，利用场的洛伦兹变换性质，求出实验室中电场和磁场的诸分量。

(2)在导线的静止参照系中与导线有关联的电荷和电流密度是多少？在实验室中是多少？

(3)由实验室的电荷和电流密度，直接计算实验室中的电场和磁场。与(1)的结果比较。

25、有一半径为 a 和 b 的空气圆柱形电容器，两极板上加有恒定电压 V，内极板上通有沿轴向的恒定电流 I。试问：在怎样的参考系内和什么条件下，电容器中才只有磁场？其强度是多少？忽略内极板的电阻。

26、有两个相同的足够长带电导体圆柱面，其线密度分别为$+\tau$和$-\tau$，并且两根轴线平行。在各圆柱面内安放一根导线，在导线上沿相反方向通有强度为I的恒定电流，电流的位置是使所产生磁场的力线在所述的圆柱面上。试找出圆柱面间没有磁场的参考系。忽略导线上的电压降。

27、求一个以$\vec{V}$作匀速直线运动的电偶极矩$\vec{p}_0$产生的势。

28、设电介质不动时的折射率为n_0，如果电介质以恒定速度$\vec{V}$运动，问其折射率将如何变化？

在介质折射率为n_0的情况下，推导多普勒效应公式和光行差公式。

29、在地球上看来，某颗星发出波长为6400Å的红光，一宇宙飞船正向那颗星飞去，飞船中的宇航员看到该星发出的是波长为4800Å的蓝光。问这飞船相对于地球的速度是多少？

30、把光波看作是一颗颗具有等效质量的光子，当它飞离引力场时，必须克服引力而作功，从而使它的能量减少，导致光子频率降低，波长变长，这就是引力红移。设引力源质量M，万有引力常数G，当光子离开引力源距离为r时，求出频移的相对值$\frac{\Delta\nu}{\nu}$。

第八章　带电粒子与电磁场的相互作用

以上各章讨论了宏观电磁现象的规律。在微观领域中，经典电动力学已不能适用，必须用量子电动力学。然而，一些物理现象和经典模型近似符合，一些物理概念用经典电动力学容易建立。因此，本章利用狭义相对论的结果讨论任意运动带电粒子的电磁场，及带电粒子的场对粒子本身的反作用。并且用经典振子模型讨论电磁波的散射和吸收。

§8.1　运动带电粒子的势和场

1、运动带电粒子的势(李纳–维谢尔势)

设带电荷 q 的粒子在 t' 时刻位于 $\vec{r}'$ 处，以速度 $\vec{v}$ 运动，我们推导它在 $\vec{r}$ 处(P 点)于 $t = t' + \dfrac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} = t' + \dfrac{R}{c}$ 时刻产生的势(如图 8.1 所示)。

由推迟势的一般公式 (6.2.16)和 (6.2.17)可知，势与电荷体系的电荷、电流分布及位置有关。对带电粒子来说，电流 $\vec{J} = \rho\vec{v}$，这里 $\vec{v}$ 为粒子在辐射时刻 $t' = t - \dfrac{R}{c}$ 的速度。可见势依赖于粒子运动的速度，但不依赖于

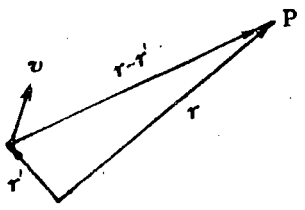


图 8.1

加速度。因此，对任意运动的带电粒子可在某一瞬时作洛伦兹变换。在粒子辐射时刻相对静止的参考系$\sum'$中观测粒子的标势和矢势分别为:

$$\Phi' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R'}, \qquad \vec{A}' = 0. \tag{8.1.1}$$

式中 R′为在$\sum'$系中粒子与观测点之间的距离，$R' = c(t_2' - t_1')$。

再到参考系$\sum$(比如实验室坐标系)上观测，$\sum'$系相对于$\sum$系以速度$\vec{v}$运动，若选瞬时$\vec{v}$方向为 x 轴方向，则可对势(8.1.1)式应用第七章中的变换关系(7.5.11)式。变换结果得

$$\vec{A} = \frac{\vec{v}\Phi'}{c^2\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{q\vec{v}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R'},$$

$$\Phi = \frac{\Phi'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R'}. \tag{8.1.2}$$

用洛伦兹变换(7.2.20)式，将 R′用$\sum$系中的距离表示出来:

$$R' = c(t_2' - t_1') = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(R - \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{c} \right),$$

代入(8.1.2)式中，则

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{q}{R - \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{c}} \right],$$

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{q\vec{v}}{c^2 \left(R - \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{c} \right)} \right] = \frac{\vec{v}}{c^2} \Phi. \tag{8.1.3}$$

式中方括号表示是时刻

$$t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} = t - \frac{R}{c} \tag{8.1.4}$$

的值，即其中粒子的坐标$\vec{r}'$，速度$\vec{v}$都是t′时刻的值，它表明带电粒子在$\vec{r} - \vec{r}'$处产生势，需要经过一段时间$t - t' = \frac{R}{c}$，所以(8.1.3)式中的标势和矢势都是推迟势，通常叫做李纳–维谢尔势，是相对论情形下讨论任意运动带电粒子辐射电磁场的出发点。需要注意，带电粒子的速度是$\vec{v} = \frac{\partial \vec{r}'(t')}{\partial t'}$，带电粒子到观测点之间的距离$R(t') = R(x, y, z, t') = |\vec{r} - \vec{r}'|$显含 x，y，z，还通过 t′隐含 x，y，z 和 t 。由于推迟作用，在非匀速运动情况下，用推迟时间$t - \frac{R}{c}$的运动来表示时刻 t 的场往往是方便的。

2、运动带电粒子的场

为了用公式

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{8.1.5}$$

计算运动带电粒子的场，必须将 Φ 和$\vec{A}$对点坐标 x，y，z 和观测时刻 t 微分。但是公式(8.1.3)是用 t′的函数来表示势，只有通过关系式(8.1.4)才能将势表示为 x，y，z，t 的隐函数。因此，为了计算所需要的导数，必须先计算对 t′的导数，将(8.1.4)式对 t 的微商

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c}\frac{\partial R}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c}\frac{\partial R}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}$$

由恒等式$R^2 = \vec{R}^2$对 t′微商，有$\frac{\partial R}{\partial t'} = \frac{\vec{R}}{R} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial t'} = -\frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{R}$，代入上式得

$$\frac{\partial t'}{\partial t}=\frac{1}{1-\dfrac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{cR}}。\tag{8.1.6}$$

将(8.1.4)对坐标微商

$$\nabla t'=-\frac{1}{c}\nabla R=-\frac{1}{c}\left(\nabla R|_{t'不变}+\frac{\partial R}{\partial t'}\nabla t'\right)$$

$$=-\frac{1}{c}\left(\frac{\vec{R}}{R}-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{R}\nabla t'\right),$$

可得

$$\nabla t'=-\frac{\vec{R}}{c\left(R-\dfrac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)}。\tag{8.1.7}$$

利用(8.1.3)和(8.1.6)，并令

$$R-\frac{\vec{v}\cdot\vec{R}}{c}=S,\tag{8.1.8}$$

可以算得

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=\frac{\partial\vec{A}}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R}{c^2s^3}\left[R\dot{\vec{v}}-\frac{v^2}{c}\vec{v}+\right.$$

$$\left.\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{R}\vec{v}+\vec{R}\times\left(\frac{\vec{v}}{c}\times\dot{\vec{v}}\right)\right]\tag{8.1.9}$$

利用(8.1.3)和(8.1.7)，可以算得

$$\nabla\Phi=\nabla\Phi|_{t'不变}+\frac{\partial\Phi}{\partial t'}\nabla t'$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{s^3}\left[-\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\vec{R}-\frac{1}{c^2}(\dot{\vec{v}}\cdot\vec{R})\vec{R}\right.$$

$$-\frac{1}{c^2}(\vec{v}\cdot\vec{R})\vec{v}+\frac{R}{c}\dot{\vec{v}}\Big]. \tag{8.1.10}$$

将(8.1.9)和(8.1.10)代入(8.1.5)式，得到电场强度

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Bigg[\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{s^3}\left(\vec{R}-\frac{\vec{v}}{c}R\right)$$

$$+\frac{1}{c^2 s^3}\vec{R}\times\left\{\left(\vec{R}-\frac{\vec{v}}{c}R\right)\times\dot{\vec{v}}\right\}\Bigg]. \tag{8.1.11}$$

同理，可以求得磁感应强度

$$\vec{B}=\frac{\vec{R}}{cR}\times\vec{E}。 \tag{8.1.12}$$

这里$\dot{\vec{v}}=\frac{\partial\vec{v}}{\partial t'}$为带电粒子的加速度，方括号表示其中所有的量都是取在t'瞬间的值。

3、自有场和辐射场

由(8.1.11)和(8.1.12)可见，运动带电粒子的电磁场由两部分组成。第一部分可表示为

$$\vec{E}_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{s^3}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\frac{\vec{v}}{c}R\right)\right],$$

$$\vec{B}_1=\frac{\vec{R}}{cR}\times\vec{E}_1, \tag{8.1.13}$$

这部分场与粒子的加速度无关，且$\vec{E}_1$和$\vec{B}_1$都与距离R的平方成反比。因此场的能量主要集中在粒子附近，并随粒子一起运动，所以叫做自有场或感应场。自有场可由库仑场通过洛伦兹变换求出，对此已经在上一章§7.5节中讨论过。

运动带电粒子的电磁场的第二部分为

$$\vec{E}_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left[\frac{1}{s^3}\vec{R}\times\left\{\left(\vec{R}-\frac{\vec{v}}{c}R\right)\times\dot{\vec{v}}\right\}\right],$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\vec{R}}{cR}\times\vec{E}_2, \tag{8.1.14}$$

这部分场与加速度有关，且$\vec{E}_2$和$\vec{B}_2$都与距离 R 的一次方成反比，其总能流一定与 R 无关。这意味着场可以脱离源而独立存在，场的能量分布在较大的范围内，由粒子所在处向外辐射，所以叫做辐射场或加速度场。辐射场是横向的，其$\vec{E}$，$\vec{B}$，$\vec{R}$的方向满足右手螺旋法则。这些结果与第六章中辐射电磁场的性质完全一致。可见，真空中的带电粒子作加速运动时，就会产生电磁辐射。更详细的性质在下一节讨论。

§8.2 加速运动带电粒子的辐射

我们先讨论带电粒子任意运动的一般情况下，辐射电磁场的能流和功率，然后讨论低速近似和高速运动时的辐射特性。

1、加速带电粒子的辐射能流、辐射功率及角分布

用$\vec{e}_R = \frac{\vec{R}}{R}$表示$\vec{R}$方向的单位矢量，$\vec{a} = \dot{\vec{v}}$表示粒子的加速度，辐射场(8.1.14)式可写成

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left[\frac{\vec{e}_R\times\left\{\left(\vec{e}_R-\frac{\vec{v}}{c}\right)\times\vec{a}\right\}}{R(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{e}_R}{c})^3}\right],$$

$$\vec{H} = \varepsilon_0 c\vec{e}_R\times\vec{E}。 \tag{8.2.1}$$

则辐射能流密度

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=\frac{1}{\mu_0 c}\vec{E}\times(\vec{e}_R\times\vec{E})=\varepsilon_0 c\vec{E}^2\vec{e}_R, \tag{8.2.2}$$

代入(8.1.14)式中的电场，得

$$\vec{S}=\frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\left[\frac{\{\vec{e}_R\times[(\vec{e}_R-\frac{\vec{v}}{c})\times\vec{a}]\}^2}{R^2(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{e}_R}{c})^6}\vec{e}_R\right]$$

$$=\frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\left[\frac{1}{R^2}\left\{\frac{\vec{a}^2}{(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{e}_R}{c})^4}+\frac{2(\vec{e}_R\cdot\vec{a})(\vec{v}\cdot\vec{a})}{c(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{e}_R}{c})^5}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{(1-\frac{v^2}{c^2})(\vec{e}_R\cdot\vec{a})^2}{(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{e}_R}{c})^6}\right\}\right]\vec{e}_R, \tag{8.2.3}$$

表明$\vec{S}$与 R^2 成反比，因而总辐射能量可以传播到任意远处。

辐射场的能量密度为

$$w=\frac{1}{2}(\varepsilon_0\vec{E}^2+\mu_0\vec{H}^2)=\varepsilon_0\vec{E}^2=\frac{S}{c}。 \tag{8.2.4}$$

由于$\vec{S}$沿$\vec{e}_R$方向，则单位时间在半径为 R 的球面上通过立体角 dΩ 所辐射出去的能流应等于系统能量的相应减少，即

$$-\mathrm{d}W=SR^2\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t,$$

其中 dt 是观测时间，但 S、R 及 dΩ 都是以粒子辐射时间 t′为变量的，所以也应将 dt 换成 dt′：

$$\mathrm{d}t=\frac{\partial t}{\partial t'}\mathrm{d}t'=\left(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{e}_R}{c}\right)\mathrm{d}t', \tag{8.2.5}$$

则通过立体角 dΩ 辐射出去的功率

$$dP(t') = \left|\frac{-dW(t')}{dt'}\right| = S\left(1 - \frac{\vec{v}\cdot\vec{e}_R}{c}\right)R^2 d\Omega, \qquad (8.2.6)$$

辐射的总功率

$$P(t') = \oint S\left(1 - \frac{\vec{v}\cdot\vec{e}_R}{c}\right)R^2 d\Omega$$

$$= \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{\vec{a}^2 - \frac{1}{c^2}(\vec{v}\times\vec{a})^2}{(1 - v^2/c^2)^3}。 \qquad (8.2.7)$$

辐射的角分布

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = S\left(1 - \frac{\vec{v}\cdot\vec{e}_R}{c}\right)R^2。 \qquad (8.2.8)$$

2、非相对论运动带电粒子的辐射

当粒子运动速度远小于光速，即 $v \ll c$ 时，(8.2.1)式中含有 v/c 的项均可略去，这时辐射场近似为

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left[\frac{\vec{e}_R\times(\vec{e}_R\times\vec{a})}{R}\right]$$

$$\vec{H} = \varepsilon_0 c\vec{e}_R\times\vec{E}. \qquad (8.2.9)$$

令带电粒子的电偶极矩为 $\vec{p} = q\vec{r}'$，则 $\ddot{\vec{p}} = q\dot{\vec{v}} = q\vec{a}$，并考虑到这里是在 t' 时刻取值，可以看出(8.2.9)式与第六章中电偶极辐射场的公式(6.5.2)完全一致。因此，加速运动的低速带电粒子激发电偶极辐射。

与上同理，由(8.2.3)可得辐射能流的近似式为

$$\vec{S} = \frac{q^2\vec{a}^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3 R^2}\sin^2\theta\vec{e}_R, \qquad (8.2.10)$$

式中 θ 为$\vec{a}$与$\vec{e}_R$的夹角(取$\vec{a}$沿 z 轴方向)，由(8.2.7)式得总辐射功率

$$P(t') = \frac{q^2\vec{a}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}. \tag{8.2.11}$$

此式通常称为拉莫尔公式，显然，(8.2.10)和(8.2.11)式都与第六章中电偶极辐射的相应结果相一致。

3、韧致辐射

韧致辐射是指在$\vec{v}\parallel\vec{a}$的情形带电粒子的辐射，例如在直线加速器中带电粒子的辐射，高能粒子在库仑场中的辐射，以及高能电子打击金属靶时产生的连续谱部分的 x 光都属于这种辐射。

此时有$\vec{a}\times\vec{v}=0$，由(8.2.1)式，辐射场为

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left[\frac{\vec{e}_R\times(\vec{e}_R\times\vec{a})}{R\left(1-\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{e}_R}{c}\right)^3}\right]$$

$$\vec{H} = \varepsilon_0 c\vec{e}_R\times\vec{E}。 \tag{8.2.12}$$

令$\vec{v}$沿 z 轴方向，且$\vec{v}$与$\vec{e}_R$的夹角为 θ，可得辐射的能流密度

$$\vec{S} = \varepsilon_0 cE^2\vec{e}_R = \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\left[\frac{\vec{a}^2\sin^2\theta}{R^2\left(1-\dfrac{v}{c}\cos\theta\right)^6}\right]\vec{e}_R. \tag{8.2.13}$$

由(8.2.8)式，得辐射角分布

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\frac{\vec{a}^2\sin^2\theta}{(1-\dfrac{v}{c}\cos\theta)^5}. \tag{8.2.14}$$

此角分布与方位角 φ 无关，绕$\vec{v}$方向(z 轴)旋转对称，由于分母中出现因子$\left(1-\dfrac{v}{c}\cos\theta\right)^5$，随着 v/c 的增大，最大辐射的方向

逐渐移向前方。如图 8.2 所示。

据(8.2.7)式，利用积分结果

$$\int \frac{\sin^2\theta \mathrm{d}\theta}{(1-\frac{v}{c}\cos\theta)^5} = \frac{4}{3}\frac{1}{(1-v^2/c^2)^3},$$

总辐射功率为

$$P(t') = \frac{q^2\vec{a}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3(1-v^2/c^2)^3}。 \tag{8.2.15}$$

可见，辐射功率与加速度符号无关，即加速和减速时辐射的能量一样，加速度数值愈大辐射愈强。另外，由式中分母可知，速度愈大，辐射也愈强。在非相对论极限下，上式即化为拉莫尔公式。

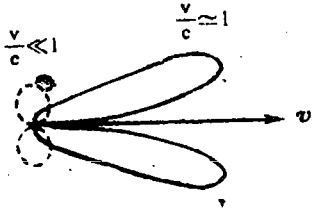


图 8.2

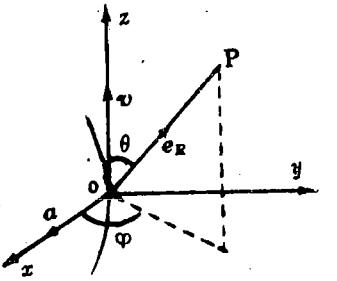


图 8.3

4、同步加速辐射

在这种辐射中，速度总是与加速度垂直，即$\vec{v} \perp \vec{a}$，因首先在同步加速器中被观察到而得名。带电粒子在磁场中的运动就属这种情形，最典型的例子是高能加速器中回旋运动的带电粒子。

设在时刻 t′粒子的瞬时速度$\vec{v}$沿 z 轴，加速度$\vec{a}$沿 x 轴(如图 8.3)，$\vec{e}_R$ 与$\vec{v}$的夹角为 θ，则

$$\vec{e}_R \cdot \vec{v} = v\cos\theta, \quad \vec{v} \cdot \vec{a} = 0,$$

$$\vec{e}_R \cdot \vec{a} = a\sin\theta\cos\varphi. \tag{8.2.16}$$

代入(8.2.1)式，得场的分布为

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left[\frac{a\sin\theta\cos\varphi\left(\vec{e}_R - \frac{\vec{v}}{c}\right) - \left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)\vec{a}}{R\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)^3}\right]. \tag{8.2.17}$$

由(8.2.3)式，辐射能流密度为

$$\vec{S} = \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\left[\frac{a^2}{R^2(1-\frac{v}{c}\cos\theta)^6}\left\{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)^2 - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\sin^2\theta\cos^2\varphi\right\}\right]\vec{e}_R。 \tag{8.2.18}$$

由(8.2.8)式，辐射的角分布为

$$\frac{\mathrm{d}P(t')}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\frac{a^2}{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)^5}\left\{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)^2 - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\sin^2\theta\cos^2\varphi\right\}. \tag{8.2.19}$$

可见角分布不仅与 θ 有关，还与 φ 有关，较为复杂。若限定在 $\varphi=0$ 的平面内观测，上式可简化为

$$\frac{\mathrm{d}p(t')}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\frac{a^2\left\{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)^2 - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\sin^2\theta\right\}}{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)^5}. \tag{8.2.20}$$

(8.2.20)式表明，在 $\theta=0$ 处，辐射最强；在$\cos\theta_0=\frac{v}{c}$对应的方向无辐射。可见辐射集中在 $2\theta_0$ 范围内，且 v 越大能量分布越集中，分布情况如图 8.4 所示。同步加速辐射的这一角分布与轫致辐射的角分布(8.2.14)形式完全不同，但在粒子前进的方向上具有相对论性的峰值这一特点却是相同的。



图 8.4

考虑到$\vec{v}\perp\vec{a}$，由(8.2.7)式即得辐射的总功率

$$P(t')=\frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{a^2}{(1-v^2/c^2)^2}, \tag{8.2.21}$$

与前面轫致辐射的情况仅差一因子$(1-\frac{v^2}{c^2})$，所以其定性结果与前相同。

同步加速辐射中的方向性在天体物理中被用来解释脉冲星的出现。脉冲星是人们观测到的一种间断发光的星，本身为一种致密天体，其中存在着很强的磁场。正是在这种磁场作用下，带电粒子发出具有明显方向性的同步加速辐射。随着星体的转动，辐射的方向也在变化，当它指向地球时，人们便观察到这种脉冲星的存在。

. [例 8–1] 在回旋加速器中运动的非相对论带电粒子有辐射能量损失，现对一个最初在加速器的均匀磁场中作圆周运动，且其质量、电荷与初动能已知的粒子说明这一事实。(1)将粒子动能表示成时间的函数；(2)如粒子的初动能为 T_0，从半径为 R

的轨道出发，求它辐射掉 10%的能量所需的时间。

解：(1) 由于粒子是非相对论的，运动一周的辐射损失远小于动能，这样可设在 t 时刻粒子仍作圆周运动，其辐射功率由(8.2.11)式给出：

$$P=\frac{q^2a^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}。$$

在均匀磁场 B 中作圆周运动的带电粒子的运动方程为

$$ma=\frac{mv^2}{R}=qvB,$$

粒子的非相对论动能$T=\frac{1}{2}mv^2$，故 P 可用 T 表示

$$P=\frac{q^4B^2T}{3\pi\varepsilon_0c^3m^3}。$$

磁场力对粒子不作功，P 即为单位时间内粒子动能的减少，即

$$P=-\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=\frac{q^4B^2T}{3\pi\varepsilon_0c^3m^3}。$$

由 t=0 时 $T=T_0$，解上式得

$$T=T_0e^{-(q^4B^2T/3\pi\varepsilon_0c^3m^3)t}, \tag{8.2.22}$$

可见粒子的动能随时间而指数衰减。

(2) 由(8.2.22)式，粒子的能量辐射掉 10%所需时间为

$$\tau=\frac{3\pi\varepsilon_0c^3m^3}{q^4B^2}\ln\left(\frac{10}{9}\right),$$

又$B^2=\frac{2mT_0}{R^2q^2}$，代入上式，得

$$\tau=\frac{3\pi\varepsilon_0c^3m^2q^2R^2}{2T_0q^4}\ln\left(\frac{10}{9}\right)。 \tag{8.2.23}$$

[例 8-2] 两个互相吸引的带电粒子作近似圆周运动时产生辐射，求两粒子间的距离与时间的关系。

解：设两个粒子的电量分别是 q_1，q_2，矢径分别是 $\vec{r}_1$，$\vec{r}_2$，这样系统的电偶极矩

$$\vec{p}=q_1\vec{r}_1+q_2\vec{r}_2。 \tag{8.2.24}$$

体系的惯性中心作匀速运动，不产生辐射，为此只讨论粒子的相对运动，引入相对坐标，$\vec{r}=\vec{r}_1-\vec{r}_2$，则

$$\vec{r}_1=\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r},\qquad \vec{r}_2=-\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}, \tag{8.2.25}$$

从而有

$$\vec{p}=\frac{q_1m_2-q_2m_1}{m_1+m_2}\vec{r}, \tag{8.2.26}$$

$$\ddot{\vec{p}}=\frac{q_1m_2-q_2m_1}{m_1+m_2}\ddot{\vec{r}}。 \tag{8.2.27}$$

利用 $\vec{P}=q\vec{r}$，当 $v\ll c$ 时加速运动带电粒子的辐射功率可写为

$$P=\frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}. \tag{8.2.28}$$

因此，系统能量随时间的减小率为

$$-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=P=\frac{1}{6\pi\varepsilon_0c^3}\left(\frac{q_1m_2-q_2m_1}{m_1+m_2}\right)^2(\ddot{\vec{r}})^2. \tag{8.2.29}$$

在相对坐标表示下，可以把整个体系看成一个粒子绕另一个粒子作近似圆周运动，其库仑力满足方程

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}=\frac{(m_1m_2)}{(m_1+m_2)}\frac{v^2}{r}=\left(\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\right)\ddot{\vec{r}}\ . \tag{8.2.30}$$

整个系统的总能量

$$W=\frac{1}{2}\left(\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\right)v^2-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r}=-\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r}, \quad (8.2.31)$$

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial W}{\partial r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}。 \quad (8.2.32)$$

将(8.2.30)式中的$\ddot{r}$代入(8.2.29)式，又有

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{6\pi\varepsilon_0c^3}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{q_1q_2}{r^2}\right)^2\left(\frac{q_1}{m_1}-\frac{q_2}{m_2}\right)^2, \quad (8.2.33)$$

比较(8.2.32)和(8.2.33)式，得

$$-\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{q_1q_2}{12\pi^2\varepsilon_0^2c^3}\left(\frac{q_1}{m_1}-\frac{q_2}{m_2}\right)^2\frac{1}{r^2}。 \quad (8.2.34)$$

为方便起见，令

$$k=\frac{q_1q_2}{12\pi^2\varepsilon_0^2c^3}\left(\frac{q_1}{m_1}-\frac{q_2}{m_2}\right)^2,$$

则

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-\frac{k}{r^2}。 \quad (8.2.35)$$

这里$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$是两个带电粒子径向互相靠近的速度。如两个粒子从开始时刻距离为 R 直到最后靠在一起，所需时间可由(8.2.35)的积分求出；

$$t_0=-\frac{1}{k}\int_R^0 r^2\mathrm{d}r=\frac{R^3}{3k} \quad (8.2.36)$$

例如氢原子中电子因受原子核的库仑力而环绕核运动，若 t=0 时电子的轨道半径为 $R=a_0=5.3\times10^{-11}\mathrm{m}$，则可算出 $t_0\simeq1.6\times$

10^{-11}s。即经过约 10^{-11} 秒电子将落到原子核上去，这时氢原子就不再存在了，这种结果显然不符合客观实际，说明经典电动力学不能解释微观领域的一些物理现象。

[例 8-3] 一静质量为 m，电荷为 e 的电子在垂直于均匀磁场的平面上运动。如果由辐射引起的能量损失可以忽略，则轨道是某一半径为 R 的圆。考虑相对论效应，电子的总能量 $W \gg mc^2$。

(1) 用上述参数解析表示出所需磁场 B，若 $R=30\text{m}$，$W=2.5\times10^9\text{eV}$，求 B 的数值。

(2) 实际上，由于电子被磁场加速，它将辐射电磁能量。假定电子转动一周所损失的能量 ΔW 与 W 相比很小。用参数解析表示比 $\Delta W / W$，并用上述数据计算其数值。

解：(1) 相对论电子的运动方程

$$\mathrm{d}\vec{P}/\mathrm{d}t = e\vec{v}\times\vec{B}, \tag{8.2.37}$$

式中 $\vec{P}=m\gamma\vec{v}=\dfrac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$，由此方程成为

$$\frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left|\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right| = evB。$$

因 v 为一常数，有 $\left|\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right|=\dfrac{v^2}{R}$，代入上式得

$$B=\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{1}{eR}=\frac{p}{eR}。 \tag{8.2.38}$$

当 $W \gg mc^2$ 时，$pc=\sqrt{W^2-m^2c^4}\simeq W$，所以

$$B\approx\frac{W}{ceR}=0.28(T), \tag{8.2.39}$$

(2) 当 $\vec{V}\perp\vec{a}$，时，辐射功率由(8.2.21)式给出

$$P(t') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2a^2}{3c^3}\gamma^4,$$

把$a = \frac{v^2}{R}$ 和$\gamma = \frac{W}{mc^2}$代入，得

$$P(t') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2c}{3R^2}\left(\frac{v}{c}\right)^4\left(\frac{W}{mc^2}\right)^4。 \tag{8.2.40}$$

在一周内辐射的能量为

$$\Delta W = P(t')\frac{2\pi R}{v} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\pi e^2}{3R}\left(\frac{v}{c}\right)^3\left(\frac{W}{mc^2}\right)^4, \tag{8.2.41}$$

所以

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\pi}{3}\left(\frac{v}{c}\right)^3\left(\frac{e^2}{mc^2R}\right)\left(\frac{W}{mc^2}\right)^3。 \tag{8.2.42}$$

因 $W \gg mc^2$，故 $v/c \simeq 1$，于是

$$\frac{\Delta W}{W} \simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2R}\right)\left(\frac{W}{mc^2}\right)^3 \simeq 4.6\times10^{-5}。 \tag{8.2.43}$$

§8.3 带电粒子辐射的频谱分析

对于带电粒子辐射的能量，往往还需要知道所含的各个频率分量，或某一频率范围内辐射出去的能量。因此辐射的频谱分析是一个重要问题，第一章讨论的傅立叶变换及其习题中证明的公式正是处理这一问题的工具。

1、加速带电粒子的辐射频谱

由(8.2.8)式可知，将辐射角分布表示为观察时刻 t 的函数即为

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = (\vec{S}\cdot\vec{e}_R)R^2, \tag{8.3.1}$$

由(8.2.2)式，$\vec{S}=\varepsilon_0 c\vec{E}^2\vec{e}_R$，故上式又可写成

$$\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}\Omega}=\varepsilon_0 c\vec{E}^2R^2。\tag{8.3.2}$$

此式右端是 t 的函数，令

$$\vec{f}(t)=\sqrt{\varepsilon_0 c}\,\vec{E}R,\tag{8.3.3}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}\Omega}=[\vec{f}(t)]^2.\tag{8.3.4}$$

对时间 t 积分，即得通过单位立体角的总辐射能量

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Omega}=\int_{-\infty}^{\infty}[\vec{f}(t)]^2\mathrm{d}t=4\pi\int_{-\infty}^{\infty}|\vec{f}(\omega)|^2\mathrm{d}\omega.\tag{8.3.5}$$

于是对频率为 ω 的单位频率间隔辐射能量的角分布为

$$\frac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\omega}=4\pi|\vec{f}(\omega)|^2=4\pi\varepsilon_0 cR^2|\vec{E}(\omega)|^2,\tag{8.3.6}$$

式中的$|\vec{f}(\omega)|^2$将由加速带电粒子的辐射场$\vec{E}(t')$导出。

由傅里叶变换

$$\vec{E}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\vec{E}(t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t,\tag{8.3.7}$$

而加速带电粒子的辐射场$\vec{E}$由(8.2.1)式给出，令$\frac{v}{c}=\beta$，$\left(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{e}_R}{c}\right)=\alpha$，则

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left[\frac{\vec{e}_R\times\{(\vec{e}_R-\vec{\beta})\times\vec{a}\}}{R\alpha^3}\right].\tag{8.3.8}$$

由于(8.3.8)式中的$\vec{E}$是 t′的函数，所以需要把(8.3.7)式中的积分变

量换成 t′:

$$t = t' + \frac{R}{C},\quad \mathrm{d}t = \frac{\partial t}{\partial t'}\mathrm{d}t' = \left(1 - \frac{\vec{v}\cdot\vec{e}_R}{c}\right)\mathrm{d}t' = \alpha \mathrm{d}t', \quad (8.3.9)$$

于是

$$\vec{E}(\omega) = \frac{q}{8\pi^2\varepsilon_0 c^2 R}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t'+\frac{R}{c})} \frac{\vec{e}_R \times [(\vec{e}_R - \vec{\beta}) \times \vec{a}]}{\alpha^2}\mathrm{d}t'. \quad (8.3.10)$$

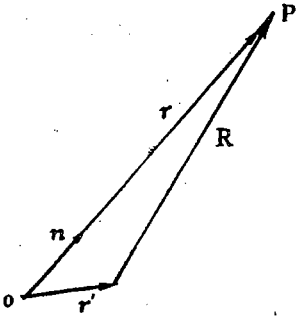


图 8.5

若粒子在有限小区域内运动，而我们在很远处观测辐射场，由图 8.5，有

$$R \simeq r - \vec{r}' \cdot \frac{\vec{r}}{r} = r - \vec{r}' \cdot \vec{n}, \quad (8.3.11)$$

其中$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$，在远处$\vec{n}$与$\vec{e}_R = \frac{\vec{R}}{R}$不再区分。这样(8.3.10)式可写为

$$\vec{E}(\omega) = \frac{q}{8\pi^2\varepsilon_0 c^2}\frac{e^{ikr}}{r}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t' - \frac{\vec{r}'\cdot\vec{n}}{c})}\frac{\vec{n}\times[(\vec{n}-\vec{\beta})\times\vec{a}]}{\alpha^2}\mathrm{d}t' \quad (8.3.12)$$

式中$k = \frac{\omega}{c}$，为该频率分量的波数，考虑到积分结果与积分变量无关，将上式 t′换为 t，代入(8.3.6)式即得

$$\frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}\Omega \mathrm{d}\omega} = \frac{q^2}{16\pi^3\varepsilon_0 c^3}\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t - \frac{\vec{n}\cdot\vec{r}'}{c})}\frac{\vec{n}\times[(\vec{n}-\vec{\beta})\times\vec{a}]}{\alpha^2}\mathrm{d}t\right|^2, \quad (8.3.13)$$

这是频谱分析的主要公式。

2、非相对论运动带电粒子的辐射频谱

对于非相对论运动带电粒子，v≪c，$\beta \to 0$，$\alpha \approx 1$，同时由于$\vec{r}'(t) \sim \vec{v}t$，相因子中的$\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}'}{c}$可忽略。在实际过程中粒子是在很

短时间 τ 内加速或减速。若 $\omega\tau \ll 1$，并用 $\Delta\beta$ 表示加速一段时间 τ 之后速度的改变。在这些近似条件下，(8.3.13)式成为

$$\frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}\Omega \mathrm{d}\omega} = \frac{q^2}{16\pi^3 \varepsilon_0 c}\left|\int_\tau \vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{a})\mathrm{d}t\right|^2$$

$$= \frac{q^2}{16\pi^3 \varepsilon_0 c}|\vec{n}\times(\vec{n}\times\Delta\vec{\beta})|^2 。$$

设$\vec{n}$与$\Delta\vec{\beta}$的夹角为 θ，有

$$\frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}\Omega \mathrm{d}\omega} = \frac{q^2}{16\pi^3 \varepsilon_0 c}|\Delta\beta|^2 \sin^2\theta, \tag{8.3.14}$$

对 $\mathrm{d}\Omega$ 进行积分，得总辐射能量的频率分布为

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\omega} = \frac{q^2}{6\pi^2 \varepsilon_0 c}|\Delta\beta|^2 . \tag{8.3.15}$$

此式表明当 $\omega\tau \ll 1$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\omega}$与频率 ω 近似无关。

当 $\omega\tau \gg 1$ 时，因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ 迅速振荡，(8.3.13)式的积分近似为零，因此

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\omega} = 0。 \tag{8.3.16}$$

辐射频谱分布如图 8.6 所示。

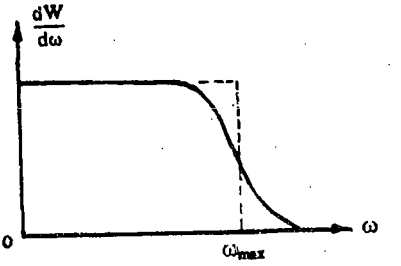


图 8.6

由 $\omega = 2\pi c/\lambda$，辐射能量按波长的分布为

$$\frac{\mathrm{d}W(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\omega}\left|\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\lambda}\right| \simeq \frac{q^2}{3\pi\varepsilon_0}(\Delta\beta)^2\frac{1}{\lambda^2}, \quad (\lambda \gg c\tau) \tag{8.3.17}$$

$$\frac{\mathrm{d}W(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} \simeq 0, \quad (\lambda \ll c\tau) \tag{8.3.18}$$

当 λ 较大时，实验所测得的辐射能量按波长的分布和经典公

式(8.3.17)相符合。但在短波范围，实验结果有一个尖锐的截止波长，相应的截止频率 $\omega_{\max}$ 由电子的动能决定

$$\frac{1}{2}mv^2 = \hbar\omega_{max} \tag{8.3.19}$$

这里 $h=2\pi\hbar$ 为普朗克常数，此关系只有用量子理论才能解释，它表示电磁能量是量子化的，频率为 ω 的光子具有能量 $\hbar\omega$，当 ω 小时，光子数目很多，经典电磁理论近似成立。当 ω 大时，在过程中只涉及小量光子，电磁场的量子化性质比较显著，因而经典电磁理论不再适用。利用普朗克假定，(8.3.15)式还可用光子数表示，若 $N(\omega)$表示频率为 ω 的光子数，则有

$$\frac{dW}{d\omega}d\omega = \hbar\omega N(\omega)d\omega,$$

于是

$$N(\omega)d\omega = \frac{q^2}{3\pi\varepsilon_0 c}|\Delta\beta|^2\frac{d\omega}{\hbar\omega} = \frac{1}{137}\frac{2}{3\pi}|\Delta\beta|^2\frac{d\omega}{\omega}, \tag{8.3.20}$$

其中 $\alpha = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} \simeq \dfrac{1}{137}$ 称为精细结构常数。(8.3.20)式表示低能光子数目与光子能量成反比，当 $\omega\to 0$ 时，总能量虽是有限的，但发射零能量的光子数却是无限的。

§8.4 切伦柯夫辐射

前两章已经提及切伦柯夫辐射，现在我们利用频谱分析对其辐射条件、辐射强度等进行讨论。

在真空中，匀速运动带电粒子不产生辐射电磁场，然而在透明介质中运动的快速带电粒子，即使是匀速运动，在一定条件下也会产生一种辐射，即为切伦柯夫辐射。由于只有作加速运动的

带电粒子才有辐射，因而切伦柯夫辐射实质上是涉及到大量介质原子的一种合作效应：当带电粒子穿过介质时，它所激发的电磁场使介质中的电子被加速，从而发生辐射。而在宏观现象中，微观电荷电流产生的宏观效应可以归结为介电常数 ε 和磁导率 μ，因此在研究切伦柯夫辐射时，我们可以对介质作宏观描述，即用 ε 和 μ 两参量来描述介质。

频谱分析的公式由(8.3.13)式给出，它还可改写成另一形式。由于$\vec{n}$与 t 无关，$\alpha = 1 - \vec{n}\cdot\vec{\beta}$，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{\beta})}{\alpha}\right] = \frac{1}{\alpha}\vec{n}\times(\vec{n}\times\dot{\vec{\beta}}) + \frac{1}{\alpha^2}\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{\beta})(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}})$$

$$= \frac{1}{\alpha^2}\{\vec{n}\times(\vec{n}\times\dot{\vec{\beta}}) - \vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{\beta})(\vec{n}\cdot\vec{\beta}) + \vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{\beta})(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}})\}$$

$$= \frac{1}{\alpha^2}\{\vec{n}\times(\vec{n}\times\dot{\vec{\beta}}) + (\vec{n}\cdot\vec{\beta})\dot{\vec{\beta}} - (\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}})\vec{\beta}\}$$

$$= \frac{1}{\alpha^2}\{\vec{n}\times[(\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}]\}。 \tag{8.4.1}$$

将这一结果代入(8.3.13)式：

$$\frac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\omega} = \frac{q^2}{16\pi^3\varepsilon_0 c}\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}'}{c})}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{\beta})}{\alpha}\right]\mathrm{d}t\right|^2,$$

进行分部积分，注意到$\dot{\vec{r}}' = \vec{v}$，得到

$$\frac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\omega} = \frac{q^2\omega^2}{16\pi^3\varepsilon_0 c}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{\beta})e^{i\omega(t-\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}'}{c})}\mathrm{d}t\right|^2。 \tag{8.4.2}$$

此即(8.3.13)式的另一表达形式，与$\dot{\vec{\beta}}$(或$\vec{a}$)无显示关系，这对于处理某些问题是方便的。

为简单起见，假设 ε 和 μ 是不依赖于频率 ω 的常数，并设 $\mu=\mu_0$，因而介质内的光速为$c/n = c/\sqrt{\varepsilon_r}$，对(8.4.2)式作代

换，即得介质中的辐射频谱公式

$$\frac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\omega}=\frac{q^2\omega^2 n}{16\pi^3\varepsilon_0 c}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{\beta})e^{i\omega(t-\frac{n}{c}\vec{n}\cdot\vec{r}')}\mathrm{d}t\right|^2. \quad (8.4.3)$$

把上式中的速度$\vec{v}$取作匀速运动带电粒子的速度，从而 $\mathrm{r}'=v\mathrm{t}$，上式可写成

$$\frac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\omega}=\frac{q^2 n}{4\pi\varepsilon_0 c^3}|\vec{n}\times\vec{v}|^2\cdot\left|\frac{\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t(1-\frac{n}{c}\vec{n}\cdot\vec{v})}\mathrm{d}t\right|^2, \quad (8.4.4)$$

上述积分是一个 δ 函数：

$$\frac{\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t(1-\frac{n}{c}\vec{n}\cdot\vec{v})}\mathrm{d}t=\delta(1-\beta n\cos\theta), \quad (8.4.5)$$

于是在频率 ω 附近单位频率间隔、单位立体角内的辐射能量为

$$\frac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\omega}=\frac{q^2\beta^2 n\sin^2\theta}{4\pi\varepsilon_0 c}\left|\delta(1-\beta n\cos\theta)\right|^2, \quad (8.4.6)$$

式中 θ 为$\vec{n}$与带电粒子速度$\vec{v}$之间的夹角。

在(8.4.6)式中出现了两个 δ 函数，其中一个限制了辐射方向与粒子运动方向的夹角 θ_c。即发射角满足

$$\cos\theta_c=\frac{c}{nv}=\frac{c}{v\sqrt{\varepsilon_r}}, \quad (8.4.7)$$

θ_c 是一个有物理意义的角，其余弦小于 1：

$$v>\frac{c}{n} \quad (8.4.8)$$

可见，当粒子的速度超过介质中的光速时就会产生辐射。再注意到 n 实际上是 ω 的函数，于是为了发射频率为 ω 的切伦柯夫辐射，粒子的速度必须大于频率为 ω 的电磁波的相速度。用“冲击”波阵面可以定性解释发射角 θ_c，如图 8.7 画出的波阵面，是

从一个以恒速v运动的粒子的相继瞬时位置上发出的相继球面子波，它们以速率c/n运动；且$v>c/n$，这些子波相互干涉，以致在粒子后面产生冲击波阵面。冲击波阵面与粒子运动方向的夹角是θ_c的余角，静止观察者看到波阵面沿θ_c方向运动。

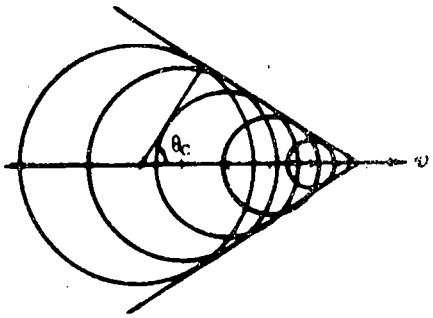


图 8.7

(8.4.6)式中的另一个δ函数则意味着辐射能量为无穷大，这是自然的，因为我们上面的计算意味着带电粒子永远在介质中运动，从而持续不断地发出辐射。为了得出有限结果，我们作如下处理。(8.4.4)式含有两个因子:

$$\left|\frac{\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t(1-\frac{n}{c}\vec{n}\cdot\vec{v})}\mathrm{d}t\right|^2$$

将其中一个变为δ函数(8.4.5)式，于是有

$$(1-\frac{n}{c}\vec{n}\cdot\vec{v})=0,$$

另一因子成为$\frac{\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t$，因此

$$\left|\frac{\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t(1-\frac{n}{c}\vec{n}\cdot\vec{v})}\mathrm{d}t\right|^2=\frac{\omega}{2\pi}\delta(1-\beta n\cos\theta)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t。\qquad(8.4.9)$$

假定粒子在一段时间2T内穿过一块介质平板，且θ_c存在。当

$\omega T \gg 1$ 时，以上计算仍近似适用，但是 $\int_{-\infty}^{\infty} dt$ 应代为 2T，则

$$\frac{d^2W}{d\Omega d\omega} = \frac{q^2\beta^2 n\sin^2\theta}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{T\omega}{\pi}\delta(1-\beta n\cos\theta)。$$

注意到 $L=2T\beta c$ 代表介质平板的厚度，当粒子穿过介质平板中单位距离时，在频率为 ω 附近每单位频率间隔辐射能量角分布应为

$$\frac{d^2W}{d\Omega d\omega}\Big/L = \frac{q^2\beta\ n\omega\sin^2\theta}{8\pi^2\varepsilon_0 c^2}\delta(1-\beta n\cos\theta)$$

$$= \frac{q^2\beta n\omega}{8\pi^2\varepsilon_0 c^2}\left(1-\frac{1}{n^2\beta^2}\right)\delta(1-\beta n\cos\theta), \qquad (8.4.10)$$

因而，单位距离单位频率间隔的辐射能量是

$$\frac{dW}{d\omega}\Big/L = \frac{q^2\beta n\omega}{8\pi^2\varepsilon_0 c^2}\left(1-\frac{1}{n^2\beta^2}\right)\oint\delta(1-\beta n\cos\theta)d\Omega$$

$$= \frac{q^2\omega}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left(1-\frac{c^2}{n^2v^2}\right)。 \qquad (8.4.11)$$

若计及折射率对频率的依赖关系，可得

$$\frac{dW}{d\omega}\Big/L = \frac{q^2\omega}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left[1-\frac{c^2}{v^2\varepsilon_r(\omega)}\right]. \qquad (8.4.12)$$

如果已知介质的介电常数 ε_r，那么由(8.4.7)式，可以通过对切伦柯夫角 θ_c 的测定来测量快速带电粒子的速度。

§8.5 电磁质量与辐射阻尼

带电粒子和电磁场是相互作用的，一方面带电粒子激发电磁

场，另一方面电磁场又对带电粒子有反作用。带电粒子的自有场对粒子的反作用表现为电磁质量，辐射场对粒子的反作用表现为辐射阻尼。

1、电磁质量和电子的经典半径

由前面讨论可知，带电粒子的自有场是库仑场，与粒子形成一个不可分割的整体。它的能量 W_e 主要集中在粒子附近，不能从粒子运动能量中分离出去。因此，当我们测量一个粒子的能量时，总是把这部分能量包括在内。根据相对论质能关系，一定的能量与一定的惯性质量相联系；所以，测量出的粒子质量也包括自有场的质量在内。这部分质量通常叫做该粒子的电磁质量，可表示为

$$m_{em}=\frac{W_e}{c^2}. \tag{8.5.1}$$

因带电粒子库仑场的总能量与粒子内部的电荷分布有关，所以电磁质量也就与粒子所带电荷的分布有关。假定粒子所带电荷 q 均匀分布在半径为 r 的球面上，有

$$m_{em}=\frac{W_e}{c^2}=\frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}; \tag{8.5.2}$$

假定电荷 q 均匀分布在半径为 r 的球体内，有

$$m_{em}=\frac{W_e}{c^2}=\frac{3}{5}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}. \tag{8.5.3}$$

以 m_0 表示非电磁起源的质量，则带电粒子的质量为

$$m=m_0+m_{em}. \tag{8.5.4}$$

对于象电子这样的微观客体来说，经典理论已不适用，需要用量子理论处理。如果知道电子的内部结构，m_{em} 是可以算出来的，从质量实验值 m 中减去 m_{em}，便可得到 m_0，但即使从粒子物理的角度看，到目前为止，这一点还没有解决。尽管对于强子

的内部结构的研究取得了可喜的进展，但是对于包括电子的轻子，现有实验还不能定出它们的内部结构。并且，为了满足相对论不变性的要求，对于包括电子在内的一切基本粒子，都必须采用点模型，这样便有 $w_e \to \infty$，即所谓电子自能的发散困难。在量子电动力学中这一困难仍然存在。

为了用经典理论对电子大小作一粗略估计，假定所观测到的电子质量(9.11×10^{-31} 千克)显著部分是电磁质量，则由(8.5.2)或(8.5.3)式可估计电子半径。由于目前并不知道电子内部的电荷分布，所以就略去上二式右边的系数，定义电子的经典半径为

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}, \tag{8.5.5}$$

在高斯单位制中

$$r_e = \frac{e^2}{mc^2} = 2.817938 \times 10^{-13} \text{厘米}。 \tag{8.5.6}$$

r_e 是由基本常数 e、m、c 构成的具有长度量纲的一个量，在原子物理学中常引用到。当然，电子的经典半径根本不能正确反映电子内部结构的线度，主要是作为一个具有长度量纲的量来引用。

2、辐射阻尼

我们在前面讨论带电粒子的辐射问题时，先是在忽略所放出的辐射波的条件下，确定粒子在外场中的运动，然后由粒子的加速度计算出辐射电磁场。这种处理方法显然是近似的，因为外场中的带电粒子只要有加速度，就必然发生辐射，一部分能量和动量被辐射场带走，从而粒子的运动受到阻尼。所以，为了完全解出粒子的运动和它辐射出的电磁场，必须在粒子的动力学方程中包括辐射场的反作用力在内。

我们以非相对论带电粒子的能量守恒为根据，推导辐射反作用力。如果忽略辐射，一个受外力$\vec{F}_e$作用的质量为m、电荷为q的带电粒子就按牛顿运动方程而运动

$$m\dot{\vec{v}}=\vec{F}_e. \tag{8.5.7}$$

因为粒子被加速，它就发出辐射波，其辐射功率由拉莫尔公式给出

$$P(t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q^2(\dot{\vec{v}})^2}{3c^3}。 \tag{8.5.8}$$

为考虑这种辐射能量损失及其对粒子运动的影响，将(8.5.7)式加以修正，在其中加进辐射反作用力$\vec{F}_s$:

$$m\dot{\vec{v}}=\vec{F}_e+\vec{F}_s \tag{8.5.9}$$

我们要求力$\vec{F}_s$在时间间隔$t_1<t<t_2$内对粒子所作的功等于在这段时间内辐射能量的负值，并由此来确定$\vec{F}_s$的形式。这样，在间隔(t_1, t_2)上能量是守恒的。利用(8.5.8)式，这个要求是

$$\int_{t1}^{t2}\vec{F}_s\cdot\vec{v}\mathrm{d}t=-\int_{t1}^{t2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q^2}{3c^3}\dot{\vec{v}}\cdot\dot{\vec{v}}\mathrm{d}t, \tag{8.5.10}$$

进行分部积分

$$\int_{t1}^{t2}\vec{F}_s\cdot\vec{v}\mathrm{d}t=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q^2}{3c^3}\int_{t1}^{t2}\ddot{\vec{v}}\cdot\vec{v}\mathrm{d}t-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q^2}{3c^3}(\dot{\vec{v}}\cdot\vec{v})\Big|_{t1}^{t2}。$$

如果运动是周期性的，或在$t=t_1$和$t=t_2$时满足$(\dot{\vec{v}}\cdot\vec{v})=0$，可得

$$-\int_{t1}^{t2}(\vec{F}_s-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q^2}{3c^3}\ddot{\vec{v}})\cdot\vec{v}\mathrm{d}t=0。$$

于是，可以令辐射反作用力为

$$\vec{F}_s = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q^2}{3c^3}\dddot{\vec{r}}\ , \tag{8.5.11}$$

$\vec{F}_s$ 称为粒子的辐射阻尼力或自作用力。由推导过程可知，上式不是对每一瞬时成立的，它是某种近似的对时间取平均的结果。

由于辐射反作用效应也涉及到基本粒子的内部结构，所以对此问题的完全处理目前依然存在根本性的困难。

3、光谱线的自然宽度

辐射反作用效应对原子系统的细致特性是极其重要的，虽然完善的讨论需要量子电动力学，但是从经典处理中还是可以了解到定性的特征。作为一个典型的例子，我们讨论谐振子辐射谱线的自然宽度。实验结果表明，原子的光谱线总是有一定宽度的。造成谱线宽度的原因是多种多样的，而轨道电子的辐射阻尼所导致的谱线宽度则是一切光谱线所共有的宽度，故称自然宽度。在经典物理中，通常对原子应用谐振子模型。一个谐振子，不受任何阻尼力时辐射频率即是其振荡频率。但是，辐射阻尼的存在，谐振子将作阻尼振动，于是它的辐射频率不再是单一的，而成一个频谱，从而谱线有一个宽度。

设一个振子在弹性恢复力和辐射阻尼力作用下在 x 轴上运动，其运动方程为

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 mc^3}\dddot{x}, \tag{8.5.12}$$

相应的特征方程是

$$k^2 + \omega_0^2 = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 mc^3}k^3。 \tag{8.5.13}$$

由于辐射阻尼力比弹性恢复力小得多，我们可用逐次近似法求解(8.5.13)式，在零级近似，可略去方程(8.5.13)式右边部分，这时 $k \approx k_0 = \pm i\omega_0$。在一级近似下，用 k_0 代替(8.5.13)式右边的 k

值，并引入记号

$$\gamma=\frac{e^2\omega_0^2}{6\pi\varepsilon_0 mc^3}, \tag{8.5.14}$$

可得$k\approx k_1=\pm i\omega_0-\frac{\gamma}{2}$。取与负号对应的解

$$x=x_0e^{-\gamma t/2}e^{-i\omega_0 t}, \tag{8.5.15}$$

这个解在$\gamma\ll\omega_0$时是正确的，并且具有阻尼振动的特点。由(8.5.14)和(8.5.5)式，条件$\gamma\ll\omega_0$可写为$(r_e\omega_0/c)\ll 1$，或

$$r_e\ll\frac{\lambda}{2\pi}, \tag{8.5.16}$$

其中λ为辐射波长。由于$r_e\sim10^{-13}$厘米，而对于原子辐射，$\lambda\sim10^{-5}$厘米，所以条件(8.5.16)总是满足的。

由(8.5.15)式可见，振子的运动是一种阻尼振动。振子能量衰减到原值$\frac{1}{e}$的时间称为振子的寿命，而振子能量正比于振幅的平方，因此振子的寿命为

$$\tau=\frac{1}{\gamma}。 \tag{8.5.17}$$

利用(8.3.13)式求通过单位立体角单位频率间隔的辐射能，考虑到原子中的轨道电子速度很慢，即$\beta\ll1$，$\alpha\approx1$，$\frac{r'}{c}=\frac{vt}{c}\ll t$，(8.3.13)式给出

$$\frac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\omega}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{4\pi^2c}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\vec{n}\times(\vec{n}\times\dot{\vec{\beta}})e^{i\omega t}\,\mathrm{d}t\right|^2,$$

注意到$\beta=\frac{\dot{x}}{c}$，有

$$\dot{\vec{\beta}}=\dot{\vec{\beta}}_0e^{-\gamma t/2}e^{-i\omega_0 t},$$

假定 t<0 时 $\dot{\beta}_0=0$，上式成为

$$\frac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\omega}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{4\pi^2c}|\dot{\beta}_0|^2\sin^2\theta\left|\int_0^\infty e^{[i(\omega-\omega_0)-\frac{\gamma}{2}]t}\mathrm{d}t\right|^2,$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\omega}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{4\pi^2c}|\dot{\beta}_0|^2\sin^2\theta\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2+(\gamma/2)^2}. \quad (8.5.18)$$

将上式对立体角积分，得到单位频率间隔内的辐射能量

$$I(\omega)=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\omega}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2|\dot{\beta}_0|^2}{3\pi c}\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2/4}. \quad (8.5.19)$$

从上式看到，当 $\omega=\omega_0$ 时，I(ω)有一峰值

$$I_0=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{8e^2|\dot{\beta}_0|^2}{3\pi c\gamma^2},$$

这样(8.5.19)式可写成

$$I(\omega)=I_0\frac{\gamma^2}{4}\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2+\frac{\gamma^2}{4}}. \quad (8.5.20)$$

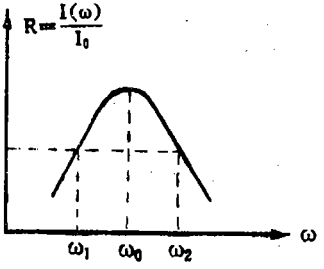


图 8.8

(8.5.20)式的结果如图 8.8 所示，纵轴代表相对强度 R=I(ω)/I₀，横轴代表频率 ω。由图可见，当$\omega=\omega_{1,2}=\omega\mp\frac{\gamma}{2}$时，光强降到极大值的一半。如果就在这里切断，则得到光谱线的自然宽度

$$\Delta\omega=\gamma, \quad (8.5.21)$$

或者用波长表示出来:

$$\Delta\lambda = \frac{e^2}{3\varepsilon_0 mc^2} \approx 1.2 \times 10^{-4}\,\text{Å}. \tag{8.5.22}$$

这与量子力学中的频移或能级移动相对应。(8.5.22)式告诉我们，光谱线的自然宽度与其波长无关。

§8.6 电磁波的散射与吸收

这一节研究外来电磁波与电荷体系的相互作用。当电磁波投射到电荷体系上时，电荷在洛伦兹力的作用下以入射波的频率作强迫振动，而振动着的电荷必然向各个方向辐射电磁波。即就是说，在入射波作用下作加速运动的电荷，把入射波的部分能量辐射到其它方向上去，这种现象称为电磁波的散射。

1、小散射体对长波电磁波的散射

当外来电磁波的波长大于散射物体的线度时，入射电磁场在散射物体(介质)中感生振荡电磁多极子，并沿各方向辐射能量。如果辐射的波长远大于散射体的尺寸，则只有电偶极子和磁偶极子的贡献是重要的。并且，在这种情况下，感生偶极矩可以根据似稳场来计算。

为简单起见，设一束单色平面电磁波入射到一个小散射物体上，物体周围是真空，入射方向单位矢量是$\vec{n}_0$，入射偏振矢量是$\vec{e}_0$，则入射电磁波的场强 (空间部分)为

$$\begin{aligned} \vec{E}_i &= \vec{e}_0 E_0 e^{ik\vec{n}_0 \cdot \vec{r}} \\ \vec{B}_i &= \frac{1}{c}\vec{n}_0 \times \vec{E}_i \end{aligned} \tag{8.6.1}$$

其中$k = \frac{\omega}{c}$是入射波的波数。由第六章可知，如感生的电、磁偶极子以频率ω随时间振荡，则其辐射(散射)场为

$$\vec{E}_s = \frac{k^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{ikr}}{r}[(\vec{n}\times\vec{p})\times\vec{n} - \frac{1}{c}(\vec{n}\times\vec{m})],$$

$$\vec{B}_s = \frac{1}{c}\vec{n}\times\vec{E}, \tag{8.6.2}$$

式中$\vec{r}$为观测点的位矢，$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$为$\vec{r}$方向的单位矢量。

注意到$\vec{e}_0^* \cdot \vec{n}_0 = 0$，入射电磁波的平均能流密度为

$$<\vec{S}_i> = \frac{1}{2}Re(\vec{E}_i^* \times \vec{H}_i) = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}(\vec{e}_0^* \cdot \vec{e}_0)\vec{n}_0, \tag{8.6.3}$$

单位面积的入射功率

$$P_i = <\vec{S}_i> \cdot \vec{n}_0 = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}(\vec{e}_0^* \cdot \vec{e}_0) = \frac{\varepsilon_0 c}{2}|\vec{e}_0^* \cdot \vec{E}_i|^2. \tag{8.6.4}$$

同理，若$\vec{e}$为散射波的偏振方向矢量，则散射波场强也可表示成

$$\vec{E}_s = \vec{e}Ee^{ik\vec{n}\cdot\vec{r}},$$

$$\vec{B}_s = \frac{1}{c}\vec{n}\times\vec{E}_s. \tag{8.6.5}$$

单位面积的散射功率

$$P = \frac{\varepsilon_0 c}{2}|\vec{e}^* \cdot \vec{E}_s|^2。 \tag{8.6.6}$$

将$\vec{n}$方向上每单位立体角内偏振矢量为$\vec{e}$的辐射功率与$\vec{n}_0$方向上偏振矢量为$\vec{e}_0$的每单位面积的入射功率之比定义为微分散射截面：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vec{n},\ \vec{e};\ \vec{n}_0,\ \vec{e}_0)$$

$$= \frac{\text{辐射能 / 单位时间 / 单位立体角}}{\text{入射能 / 单位时间 / 单位面积}} \tag{8.6.7}$$

利用(8.6.4)和(8.6.6)，有

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vec{n},\ \vec{e};\ \vec{n}_0,\ \vec{e}_0) = \frac{|\vec{e}^{\,*} \cdot \vec{E}_s|^2}{|\vec{e}_0^{\,*} \cdot \vec{E}_i|^2} r^2, \tag{8.6.8}$$

由于$|\vec{e}_0^{\,*} \cdot \vec{E}_i|^2 = E_0^2$，并且

$$\vec{e}^{\,*} \cdot \vec{E}_s = \frac{k^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^{ikr}}{r} \left[\vec{e}^{\,*} \cdot \vec{p} - \frac{1}{c} (\vec{e}^{\,*} \times \vec{n}) \cdot \vec{m} \right],$$

则得微分散射截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vec{n},\ \vec{e};\ \vec{n}_0,\ \vec{e}_0) = \frac{k^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 E_0^2}$$

$$\left| \vec{e}^{\,*} \cdot \vec{p} + \frac{1}{c} (\vec{n} \times \vec{e}^{\,*}) \cdot \vec{m} \right|^2. \tag{8.6.9}$$

散射截面对$\vec{n}_0$和$\vec{e}_0$的依赖关系隐含在$\vec{p}$和$\vec{m}$之中，它正比于k^4(即正比于ω^4)是长波电磁波被有限大小物体散射的普遍特征，这种关系被称为瑞利散射定律。

[例 8-4] 一个电介质小球引起的散射。考虑一个半径为R、磁导率$\mu = \mu_0$、具有各向同性均匀介电常数$\varepsilon(\omega)$的电介质小球。根据似稳场的讨论，在入射场$\vec{E}_i$作用下，该小球的电偶极矩（空间部分）为

$$\vec{p} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} R^3 \vec{E}_i, \tag{8.6.10}$$

磁偶极矩等于零。由(8.6.9)式，微分散射截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = k^4 R^6 \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \right)^2 |\vec{e}^{\,*} \cdot \vec{e}_0|^2。 \tag{8.6.11}$$

入射波一般不是偏振的，微分散射截面必须对初态偏振矢量 $\vec{e}_0$ 求平均。图 8.9 表示一组可能的偏振矢量，散射平面由矢量 $\vec{n}_0$ 和 $\vec{n}$ 确定，我们可以将 $\vec{e}_0$ 分解成平行于和垂直于散射平面的矢量：

$$\vec{e}_0 = \vec{e}_{\beta}^{(1)} + \vec{e}_{\beta}^{(2)}.$$

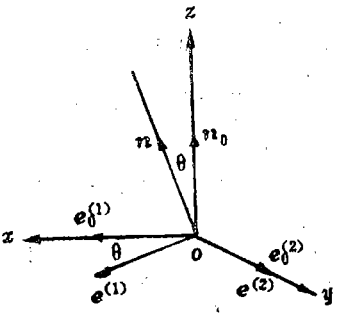


图 8.9

同样 $\vec{e}$ 也是这样分解，$\vec{e} = \vec{e}^{(1)} + \vec{e}^{(2)}$，为方便起见，使 $\vec{e}_{\beta}^{(1)}$ 和 $\vec{e}^{(1)}$ 在散射平面内，而 $\vec{e}_{\beta}^{(2)} = \vec{e}^{(2)}$ 垂直于散射平面。设 $\vec{n}$ 与 $\vec{n}_0$ 之间夹角为 θ，则 $\vec{e}^{(1)}$ 与 $\vec{e}_{\beta}^{(1)}$ 之间夹角也为 θ，而

$$|\vec{e}^{\,*} \cdot \vec{e}_0|^2 = |\vec{e}^{\,*(1)} \cdot \vec{e}_{\beta}^{(1)}|^2 + |\vec{e}^{\,*(2)} \cdot \vec{e}_{\beta}^{(2)}|^2,$$

因此，偏振矢量为 $\vec{e}^{(1)}$ 和 $\vec{e}^{(2)}$ 的微分散射截面对初态偏振矢量的平均值是

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{/\!/}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{k^4 R^6}{2}\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\right)^2 \cos^2\theta,$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{\perp}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{k^4 R^6}{2}\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\right)^2. \tag{8.6.12}$$

式中下角标 // 和 $\perp$ 分别表示偏振矢量平行于和垂直于散射平面。

对两个散射偏振态求和，得微分散射截面

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\mathrm{d}\sigma_{/\!/}}{\mathrm{d}\Omega} + \frac{\mathrm{d}\sigma_{\perp}}{\mathrm{d}\Omega} = k^4 R^6 \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\right)^2 \frac{1 + \cos^2\theta}{2} \tag{8.6.13}$$

微分散射截面对立体角积分，得总散射截面

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{8\pi}{3} k^4 R^6 \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \right)^2 . \tag{8.6.14}$$

定义散射波的偏振度

$$\Pi(\theta) = \left(\frac{d\sigma_\perp}{d\Omega} - \frac{d\sigma_{//}}{d\Omega} \right) \Big/ \left(\frac{d\sigma_\perp}{d\Omega} + \frac{d\sigma_{//}}{d\Omega} \right), \tag{8.6.15}$$

于是电介质小球(电偶极子)的散射的偏振度为

$$\Pi(\theta) = \frac{\sin^2\theta}{1 + \cos^2\theta} \tag{8.6.16}$$

当$\theta = \frac{\pi}{2}$时，$\frac{d\sigma_{//}}{d\Omega} = 0$。此时偏振度达到最大值$\Pi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$，散射波是百分之百的线偏振波，其偏振矢量与散射平面垂直。

[例 8-5] 一个理想导电小球引起的散射。考虑一个半径为R的理想导电小球，在入射波作用下，小球的电偶极矩为

$$\vec{p} = 4\pi\varepsilon_0 R^3 \vec{E}_i , \tag{8.6.17}$$

同时也具有磁偶极矩。对于一个理想导电球，磁场的边界条件是r=R处，$\vec{B}$的法向分量等于零。按照均匀电场中电介质球的计算，并令$\varepsilon = 0$类推之，或者根据导磁球的计算结果并令$\mu = 0$，或者通过直接计算，都可求得小球的磁矩为

$$\vec{m} = -\frac{2\pi}{\mu_0} R^3 \vec{B}_i 。 \tag{8.6.18}$$

对于一个线偏振入射波，由于$\vec{E}_i \perp \vec{B}_i$，两种偶极子互相垂直，且都垂直于入射方向$\vec{n}_0$。

由(8.6.17)，(8.6.18)和$\vec{B}_i = \frac{1}{c}\vec{n}_0 \times \vec{E}_i$，微分散射截面(8.6.9)可以写成

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=k^4R^6\left|\vec{e}^{\,*}\cdot\vec{e}_0-\frac{1}{2}(\vec{n}\times\vec{e}^{\,*})\cdot(\vec{n}_0\times\vec{e}_0)\right|^2。\quad(8.6.19)$$

以非偏振波入射时，同样要对初态偏振方向求平均，与上例一样取式中各矢量的方向并分解$\vec{e}_0$和$\vec{e}$，有

$$\vec{n}\times\vec{e}^{\,*}=\vec{e}^{\,*(2)}-\vec{e}^{\,*(1)},\quad \vec{n}_0\times\vec{e}_0=\vec{e}^{(2)}-\vec{e}^{(1)},$$

$$\frac{1}{2}(\vec{n}\times\vec{e}^{\,*})\cdot(\vec{n}_0\times\vec{e}_0)=\frac{1}{2}(\vec{e}^{\,*}\cdot\vec{e}_0)\cos\theta+\frac{1}{2}\sin^2\theta,$$

$$\vec{e}^{\,*}\cdot\vec{e}_0=\cos\theta+1,$$

$$\vec{e}^{\,*}\cdot\vec{e}_0-\frac{1}{2}(\vec{n}\times\vec{e}^{\,*})\cdot(\vec{n}_0\times\vec{e}_0)$$

$$=(\cos\theta-\frac{1}{2})+(1-\frac{1}{2}\cos\theta).\quad(8.6.20)$$

(8.6.20)式右端第一个因子是平行于散射平面的分量，第二个因子是垂直于散射平面的分量。由此，对于散射波的平行于和垂直于散射平面的两个偏振态来说，可得微分散射截面对初态偏振矢量的平均值为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{/\!/}}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{k^4R^6}{2}(\cos\theta-\frac{1}{2})^2,$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{\perp}}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{k^4R^6}{2}(1-\frac{1}{2}\cos\theta)^2。\quad(8.6.21)$$

于是微分散射截面为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{\mathrm{d}\sigma_{/\!/}}{\mathrm{d}\Omega}+\frac{\mathrm{d}\sigma_{\perp}}{\mathrm{d}\Omega}=k^4R^6\left[\frac{5}{8}(1+\cos^2\theta)-\cos\theta\right],\quad(8.6.22)$$

总散射截面为

$$\sigma=\int\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\mathrm{d}\Omega=\frac{10}{3}\pi k^4R^6。\quad(8.6.23)$$

如果$\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}$不是很小的话，此结果与电介质小球的 σ 同数量数。而偏振度(8.6.15)是

$$\Pi(\theta)=\frac{3\sin^2\theta}{5(1+\cos^2\theta)-8\cos\theta}. \tag{8.6.24}$$

在 $\theta=60^0$ 时，$\Pi(60^0)=1$.

2、自由电子对电磁波的散射(汤姆逊散射)

设一束场强为 (8.6.1) 式的单色平面电磁波投射到自由电子上。假定电子运动的速度远小于光速，则可略去磁力作用；同时导致电子运动范围的线度远小于入射波长，可以用一固定点（比如坐标原点）上的场强来代表作用于电子上的场强。并且对于一般入射电磁波来说，其波长远大于电子经典半径，即可忽略辐射阻尼力。如果入射波的电场强度为 $\vec{e}_0E_0e^{i\omega t}$，则自由电子的运动方程为

$$m\ddot{\vec{r}}=e\vec{e}_0E_0e^{-i\omega t}。 \tag{8.6.25}$$

从而电子作强迫振动:

$$\vec{r}=\frac{-e\vec{e}_0E_0}{m\omega^2}e^{-i\omega t}, \tag{8.6.26}$$

产生的电偶极矩为

$$\vec{p}=e\vec{r}=\frac{e^2}{m\omega^2}\vec{e}_0E_0e^{-i\omega t}。 \tag{8.6.27}$$

[例 8–4]中的处理方法是具有普遍性的，与(8.6.10)式相比较，只要将原式中因子$4\pi\varepsilon_0\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}R^3$换成$\frac{e^2}{m\omega^2}$，就可利用上述方法得到自由电子的散射关系式

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{k^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\left(\frac{e^2}{m\omega^2}\right)^2|\vec{e}^{\,*}\cdot\vec{e}_0|^2。 \tag{8.6.28}$$

注意到 k＝ω／c，电子经典半径$r_e=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{mc^2}$，可得

$$\frac{d\sigma_{//}}{d\Omega}=\frac{k^4}{2}\frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\left(\frac{e^2}{m\omega^2}\right)^2\cos^2\theta=\frac{1}{2}r_e^2\cos^2\theta, \tag{8.6.29}$$

$$\frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega}=\frac{k^4}{2}\frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\left(\frac{e^2}{m\omega^2}\right)^2=\frac{1}{2}r_e^2。$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{d\sigma_{//}}{d\Omega}+\frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega}=\frac{1}{2}r_e^2(1+\cos^2\theta), \tag{8.6.30}$$

这就是著名的汤姆逊散射公式。总散射截面为

$$\sigma=\frac{1}{2}r_e^2\int(1+\cos^2\theta)d\Omega=\frac{8\pi}{3}r_e^2, \tag{8.6.31}$$

此结果表示自由电子将相当于入射到面积$\frac{8\pi}{3}r_e^2$上的电磁波能量散射到各个方向上去了。

3、束缚电子对电磁波的散射

我们用经典谐振子作为原子内束缚电子的模型，假定振子除受线性恢复力$m\omega_0^2\vec{r}$(ω_0 为电子的固有频率)而外，还有辐射阻尼力$\frac{2}{3}\frac{mr_e}{c}\dddot{\vec{r}}$，以及其它耗散过程引起的阻尼力$m\Gamma'\dot{\vec{r}}$，$\Gamma'$是衰减常数，具有频率的量纲。如果电子速度仍远小于光速，在入射波电场$\vec{e}_0E_0e^{-i\omega t}$作用下，束缚电子的运动方程为

$$\ddot{\vec{r}}+\omega_0^2\vec{r}-\frac{2}{3}\frac{r_e}{c}\dddot{\vec{r}}+\Gamma'\dot{\vec{r}}=\frac{e}{m}\vec{e}_0E_0e^{-i\omega t}。 \tag{8.6.32}$$

设$\vec{r}=\vec{r}_0e^{-i\omega t}$，由(8.6.32)式解得

$$\vec{r}=\frac{e}{m}\frac{\vec{e}_0E_0e^{-i\omega t}}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\Gamma}, \tag{8.6.33}$$

或者表示为

$$\vec{r}=\frac{e}{m}\frac{\vec{e}_0E_0e^{-i(\omega t-\alpha)}}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2]^{1/2}},$$
$$\mathrm{tg}\alpha=\omega\Gamma/(\omega_0^2-\omega^2). \tag{8.6.34}$$

式中$\Gamma=\Gamma'+\frac{2}{3}\frac{r_e}{c}\omega^2$，于是，束缚电子产生的电偶极矩为

$$\vec{p}=\frac{e^2}{m}\frac{\vec{e}_0E_0}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2]^{1/2}}e^{-i(\omega t-\alpha)}. \tag{8.6.35}$$

这里仍然利用对于电介质小球(电偶极子)散射问题的处理方法，不过现在需将$4\pi\varepsilon_0\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}R^3$代换为$\frac{e^2}{m}\frac{1}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2]^{1/2}}$，并且利用k和$r_e$的关系式，可得

$$\frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega}=\frac{k^4}{2}\frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\left(\frac{e^2}{m}\right)^2\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2}\cos^2\theta$$
$$=\frac{1}{2}r_e^2\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2}\cos^2\theta,$$
$$\frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega}=\frac{1}{2}r_e^2\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2},$$
$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{r_e^2}{2}\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2}(1+\cos^2\theta), \tag{8.6.36}$$
$$\sigma=\frac{8\pi}{3}r_e^2\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2}. \tag{8.6.37}$$

下面讨论(8.6.37)式在几个不同频率范围的情形

(1)当$\omega\ll\omega_0$时，即强束缚态的情形，有

$$\sigma=\frac{8\pi}{3}r_e^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4. \tag{8.6.38}$$

总散射截面与ω^4成正比，遵从瑞利散射定律，这是长波散射的

普遍特性。

(2)当 $\omega \gg \omega_0$ 时，即弱束缚态的情形，有

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2, \tag{8.6.39}$$

与自由电子的散射相同，这是短波散射的特点。

(3)当 $\omega = \omega_0$ 时，有

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \left(\frac{\omega_0}{\Gamma}\right)^2。 \tag{8.6.40}$$

由于 $\omega_0 \gg \Gamma$，所以此散射截面远大于汤姆逊散射截面，即在这频率下散射截面有尖锐的极大值，称为共振散射。在量子力学中，与此对应的是原子的受激辐射。

4、总截面与偶极求和规则

从能量观点看，束缚电子从入射电磁波得到能量，并转换成振子的机械运动。此能量的一部分又发射出来，即就是上面讨论过的散射部分；还有一些能量通过其它方式耗散掉，这些方式已由(8.6.32)式简略描述，即为真吸收部分。因此，总能量就是散射和非辐射性耗散的总和，可以引入总截面这一物理量来描述。

为了计算总截面，我们先计算入射电磁波对束缚电子所作的总功。功率 $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \int \vec{E} \cdot \vec{J} \mathrm{d}V'$，则总功

$$\Delta W = \int \mathrm{d}t \int \vec{E} \cdot \vec{J} \mathrm{d}v'$$

束缚电子的电流密度 $\vec{J} = e\dot{\vec{r}}\delta(\vec{r}' - \vec{r}(t))$，代入上式得

$$\Delta W = \int e\vec{E} \cdot \dot{\vec{r}} \mathrm{d}t,$$

一个周期内的平均值为

$$< \Delta W > = \frac{1}{T} \int_0^T e\vec{E} \cdot \dot{\vec{r}} \mathrm{d}t = \frac{1}{2} Re(e\vec{E}^* \cdot \dot{\vec{r}})。 \tag{8.6.41}$$

式中$\vec{E}$为入射波，$\vec{E}^{*}=\vec{e}_0^{*}E_0e^{i\omega t}$，$\dot{\vec{r}}$可由(8.6.33)式求出，代入(8.6.41)式得

$$<\Delta W>=\frac{1}{2}Re\left[\frac{e^2E_0^2}{m}\frac{\omega^2\Gamma-i\omega(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2}\right]$$

$$=\frac{e^2E_0^2}{2m}\frac{\omega^2\Gamma}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2}。\tag{8.6.42}$$

而入射波的平均能流值是

$$<S_0>=\frac{\varepsilon_0c}{2}E_0^2,\tag{8.6.43}$$

于是，我们定义总截面为

$$\sigma_t=\frac{<\Delta W>}{<S_0>}=\frac{e^2}{\varepsilon_0mc}\frac{\omega^2\Gamma}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2}。\tag{8.6.44}$$

根据能量守恒，总截面和散射截面之差是吸收截面：

$$\sigma_a=\sigma_t-\sigma_s=\left(\frac{e^2}{\varepsilon_0mc}\omega^2\Gamma-\frac{8\pi}{3}r_e^2\omega^4\right)$$

$$\Big/[(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2]$$

$$=\frac{e^2}{\varepsilon_0mc}\frac{\omega^2\Gamma'}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2}。\tag{8.6.45}$$

在实际问题中，入射电磁波并不是单色的，我们需将总截面对所有频率积分：

$$\int_0^\infty\sigma_t(\omega)d\omega=\frac{e^2}{\varepsilon_0mc}\int_0^\infty\frac{\omega^2\Gamma}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2}d\omega.\tag{8.6.46}$$

辐射阻尼力比起由碰撞等产生的一般阻尼力小得多，可以忽略不计，使(8.6.46)式中Γ变成了Γ'，与ω无关。利用留数定理，求得

$$\int_0^\infty\sigma_t(\omega)d\omega=\frac{\pi e^2}{2\varepsilon_0m}.\tag{8.6.47}$$

此式为总截面遍及所有频率的积分结果，也代表了系统从外场得到的总能量，它只与粒子的电荷和质量有关，而不依赖于其它任何性质。这就是所谓偶极求和规则，在经典电动力学和量子电动力学中都是有效的。应当注意，这一求和规则只适用于偶极近似。

§8.7 超导电性

1、超导现象

许多金属和合金，当样品冷却到足够低的温度时，电阻率突然降到零，这种现象称为超导电性，具有超导电性的金属就是超导体。正如我们惯于把电阻为零的导体叫做理想导体，超导体电阻率为零的性质可叫做理想导电性。出现超导现象的那个温度叫做临界温度 T_c，在 T_c 以上超导体具有电阻时的状态叫做正常态，在 T_c 以下电阻消失后的状态叫做超导态。

实验结果表明，磁场和超导体所带的电流都会对超导体的状态产生影响。在临界温度以下，一定强度的磁场或电流都可以使超导电性遭到破坏，这时的磁场强度或电流强度分别被称为临界磁场或临界电流。

实验结果还表明，如果样品已经处于超导态，当外加磁场时，磁场不会进入样品内部。如果样品处于正常态，外加磁场将进入样品；而当样品温度降到 T_c 以下使其转入超导态后，样品中的磁场将被完全排斥出来。因此，样品一旦进入超导态，则其内部的磁场 $\vec{B}$ 总是等于零。这一特性与超导体在何种条件下转变为超导态无关，称为完全逆磁性或迈斯纳效应。

理想导电性和完全逆磁性分别是超导体最主要的电性质和磁性质，并且是两个完全相互独立的特性。对这些性质的严密阐明必须要用量子理论，但是我们仍然可以从经典电动力学的角度作

唯象近似的描述。下面介绍最简单的二流体模型及其伦敦方程。

2、伦敦方程

对于描述超导体的电磁性质，我们不希望修改麦克斯韦方程组本身，而是修改描写介质电磁性质的本构关系。因此，把超导体看作具有特殊性质的导体，将欧姆定律作某些修改。依照BCS理论，超导体内的电子可分为两类：一类是作杂乱运动的正常电子，另一类是结合成电子对(叫做库柏对)的超导电子。从而超导体内存在两种电流：一种是正常电子产生的电流$\vec{J}_n$，另一种是超导电子产生的电流$\vec{J}_s$。超导态就是库柏电子对的作用所形成的有序态。

由于超导电子没有相应的电阻，所以在电场$\vec{E}$作用下将作加速运动。如用e、m、$\vec{v}$分别表示超导电子的电荷、质量和速度，则其运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -e\vec{E}, \tag{8.7.1}$$

若单位体积内的超导电子数为n_s，则超导电流

$$\vec{J}_s = -en_s\vec{v}, \tag{8.7.2}$$

将(8.7.2)代入(8.7.1)式，得

$$\vec{E} = \frac{m}{n_s e^2}\frac{\mathrm{d}\vec{J}_s}{\mathrm{d}t}。 \tag{8.7.3}$$

(8.7.3)称为伦敦第一方程，表明当$\vec{E}=0$时，$\vec{J}_s$为一不随时间变化的常矢量，可见该方程反映了超导体的理想导电性。

把(8.7.3)代入麦克斯韦方程$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$，得到

$$\nabla\times\left(\frac{m}{n_s e^2}\frac{\partial\vec{J}_s}{\partial t}\right) = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

此式对 t 积分，给出

$$\frac{m}{n_s e^2}\nabla\times\vec{J}_s+\vec{B}=\text{常矢量},$$

假定此常矢量为零，可得

$$\nabla\times\vec{J}_s=-\frac{n_s e^2}{m}\vec{B}。\tag{8.7.4}$$

(8.7.4)式称为伦敦第二方程。伦敦第一方程和第二方程描写了超导电流与电场、磁场之间的关系，与普通导体中的欧姆定律相对应。

对麦克斯韦方程$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}_s$两边取旋度,注意到$\nabla\cdot\vec{B}=0$,有

$$\nabla^2\vec{B}+\mu_0\nabla\times\vec{J}_s=0,$$

代入伦敦第二方程(8.7.4)式，得

$$\nabla^2\vec{B}-\alpha^2\vec{B}=0,\tag{8.7.5}$$

式中$\alpha^2=\frac{\mu_0 n_s e^2}{m}$。如果设超导体位于 Z>0 的半无限空间，其表面是 Z=0 的平面，且磁场方向与表面平行，则由对称性可知$\vec{B}$与 x、y 无关，(8.7.5)式成为

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{B}}{\mathrm{d}z^2}-\alpha^2\vec{B}=0,$$

其解为

$$\vec{B}=\vec{B}_0 e^{-\alpha z}.$$

显然，磁场随着 Z 的增加而指数衰减，不能深入到超导体内部，其穿透深度为

$$\delta_L=\frac{1}{\alpha}=\left(\frac{m}{\mu_0 n_s e^2}\right)^{1/2},\tag{8.7.6}$$

这就表明伦敦第二方程(8.7.4)式反映了完全逆磁性。

3、磁通量子化

给一个超导环在临界温度以上加上外磁场，使一定量的磁通穿过环孔。当温度降到临界温度以下时，环孔中的磁通量保持不变，然后除去外磁场，磁通量仍被保留在环内，此现象叫磁通俘获。磁通量子化是俘获磁通的一个重要性质，也是长程量子效应的一个优美例证。这里我们以超导环为例，用半经典方法进行讨论。

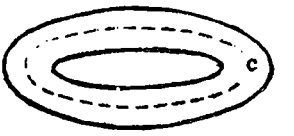


图 8.10

在图 8.10 表示的超导环内取封闭曲线 C，将电磁感应定律应用于 C 围成的任意曲面 S 上，作面积分

$$\int_s (\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0,$$

代入伦敦第一方程，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_s \left[\nabla \times \left(\frac{m}{n_s e^2}\vec{J}_s\right) + \vec{B}\right] \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0, \tag{8.7.7}$$

对时间积分，可得

$$\oint_s \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \oint_c \frac{m}{n_s e^2}\vec{J}_s \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \Psi. \tag{8.7.8}$$

Ψ 表示穿过超导环的磁通，其中第一项是外场的贡献，第二项是环表面超导电流的贡献。

在磁场中一个带电粒子的正则动量是$m\vec{v} - q\vec{A}$，因此超导电子对的动量应为

$$\vec{P}_s = 2m\vec{v}_s - 2e\vec{A}。$$

将此式用于图 8.10 中的封闭曲线 C 作线积分，利用

7、带电荷e的粒子在xy平面上绕Z轴作匀速率圆周运动，角频率为 ω，半径为a。设 $\omega a << c$，试计算辐射场及其能流密度，讨论 $\theta=0$、$\frac{\pi}{4}$、$\frac{\pi}{2}$ 及 π 处电磁场的偏振。

8、一个 μ^- 介子（其质量 $m_\mu \sim 210m_e$，m_e 是电子质量）被一质子俘获，从而在围绕质子的圆轨道上运动。它的初始半径R等于电子绕质子运动的玻尔半径。用经典理论中非相对论性的带电粒子在加速运动时辐射功率表达式，估计经过多长时间 μ^- 介子才能辐射出足够的能量，从而达到它的基态。

9、塞曼效应。设一电子（质量为m，电荷为 $-e$）在弹性恢复力 $f=-m\omega_0^2\vec{r}$ 的作用下，作频率为 ω_0 的简谐振动。现在加上外磁场 B。设 $\frac{eB}{m} << \omega_0$，且相对论效应和辐射阻尼力都可忽略不计。(1)求电子运动方程的角；(2)讨论沿 $\vec{B}$ 的方向上和垂直于 $\vec{B}$ 的方向上，辐射场的频率和偏振状态。

10、设电子在均匀外磁场 $\vec{B_0}$ 中运动，取磁场的方向为Z轴方向，已知t=0时，$x=R_0$，$y=z=0$，$x=z=0$，$y=v_0$，设非相对论条件满足，求

(1) 考虑辐射阻尼力的电子运动轨道；

(2) 电子单位时间内的辐射能量。

11、一电子在一维谐振子势阱中运动，频率 $\omega=10_5 rad/s$，振幅 $x_0=10^{-8}cm$。若计及辐射阻尼，试求：(1)每周辐射的能量；(2)每周损失的能量与平均机械能之比；(3)损失掉一半能量所需要的时间。

12、经典原子中有质量为m、电荷为e、处于简谐势中的电子，该电子还受到辐射阻尼作用。(1)设t=0时，$\vec{x}=\vec{x_0}$，$\dot{\vec{x}}=0$，求随后电子的运动；(2)求出辐射电磁场，并确定辐射强度与频率的关系；(3)如振子的能量按 $w=w_0e^{-\Gamma t}$ 衰减，假定在一次振荡中电子只损失很小部分能量，试导出 Γ 的表示式。

13、设一个电荷以恒定速度 V 穿过某种物质，该物质的介电常数 $\varepsilon_r(\omega)=1+\frac{\omega_p^2}{\omega_p^2-\omega^2}$（$\omega_p \approx 10^{15}$ 秒$^{-1}$），试问该电荷在单位距离上切伦柯夫辐射的能量为多大？辐射集中在多大的角度范围内？

14、当高能带电粒子在介质中运动，其运动速度超过电磁波在该介质内的传播速度时，就产生切伦柯夫辐射。

(1) 设切伦柯夫辐射方向和粒子的飞行路线夹角为 θ，导出粒子的速度 $V=\beta c$，介质折射率 n 以及角 θ 之间的关系；

(2) 一个大气压的氢气在 20℃ 时折射率为 $n=1+1.35\times10^{-4}$。为了使一个电子（质量为 0.511MeV/c^2）穿过这样的氢气而发出切伦柯夫辐射，问所需的最小动能是多少 MeV？

(3) 充有一个大气压、20℃ 的氢气的长管和一个能探测光辐射并测量发射角（精确到 $\delta\theta=10^{-3}$ 弧度）的光学系统装配起来，就构成一个切伦柯夫辐射粒子探测器。设有一束动量为 100GeV/c 的带电粒子穿过该计数器，由于动量已知，所以测量切伦柯夫角，在效果上就是测量粒子的静止质量 m_0。对于 m_0 接近 1GeV/c^2 的粒子，在用切伦柯夫计数器测定 m_0 时的相对误差 $\delta m_0/m_0$ 是多少（准确到一级小量）？

15、已知一束波长为 λ 的线偏振电磁波被一个介电常数为 ε、半径为 a、高为 h 的小电介质圆柱体所散射。已知 $a<<h<<\lambda$，柱轴与入射波矢垂直，且入射波电场方向平行于柱轴，求散射总截面。

16、真空中有一光波入射到自由电子上，如忽略辐射阻尼力和相对论效应，计算下列情况下自由电子对单色波的微分有效散射截面：

(1) 入射波是线偏振的；(2) 入射波是椭圆偏振的；(3) 入射波不是偏振的（自然光）。

17、由伦敦第二方程和麦克斯韦方程推导超导电流 $\vec{J}_s$ 的方程，并与磁场 B 的方程比较，讨论超导电流的分布。

18、如果把超导体看成一种特殊的磁介质，由迈斯纳效应 $\vec{B}=\mu_0\vec{H}+\mu_0\vec{M}=0$ 和 $\vec{M}<\chi_M\vec{H}$，可得超导体的 $\vec{M}=-\vec{H}$，$\mu_r=0$，

$\chi_M = -1$。所以超导体是一种完全抗磁体，超导电流就是磁化电流。现有一无限长的圆柱形超导体置于均匀外磁场 $\vec{B}_0$ 之中，磁场方向与圆柱轴线垂直，试求磁场和超导电流的分布。

附　录

一、数学公式

1、算符∇的运算公式

$$\nabla \times (\nabla \Phi) = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

$$\nabla \cdot \nabla \Phi = \nabla^2 \Phi$$

$$\nabla(\Phi\psi) = \Phi\nabla\psi + \psi\nabla\Phi$$

$$\nabla \cdot (\Phi\vec{A}) = (\nabla\Phi) \cdot \vec{A} + \Phi\nabla \cdot \vec{A}$$

$$\nabla \times (\Phi\vec{A}) = (\nabla\Phi) \times \vec{A} + \Phi\nabla \times \vec{A}$$

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} + (\nabla \cdot \vec{B})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} - (\nabla \cdot \vec{A})\vec{B}$$

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

2、矢量的积分变换公式

$$\int_v \mathrm{d}v \nabla \cdot \vec{A} = \oint_s \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{A}$$

$$\int_v \mathrm{d}v \nabla \times \vec{A} = \oint_s \mathrm{d}\vec{S} \times \vec{A}$$

$$\int_v \mathrm{d}v \nabla \Phi = \oint_s \mathrm{d}\vec{S}\Phi$$

$$\int_s \mathrm{d}\vec{S} \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \oint_L \mathrm{d}\vec{l} \cdot \vec{A}$$

$$\int_s \mathrm{d}\vec{S} \times \nabla \Phi = \oint_L \mathrm{d}\vec{l}\Phi$$

$$\int_v (\Phi \nabla^2 \psi + \nabla\Phi \cdot \nabla\psi) \mathrm{d}v = \oint_s \Phi \nabla\psi \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\int_v (\Phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \Phi) \mathrm{d}v = \oint_s (\Phi \nabla\psi - \psi \nabla\Phi) \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

3、张量运算公式

$$(\vec{A}\vec{B}) \cdot \vec{C} = \vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C})$$

$$\vec{C} \cdot (\vec{A}\vec{B}) = (\vec{C} \cdot \vec{A})\vec{B}$$

$$\vec{I} \cdot \vec{A} = \vec{A} \cdot \vec{I} = \vec{A} \quad (\vec{I}\text{为单位张量})$$

$$\vec{A}\vec{B} : \vec{C}\vec{D} = (\vec{B} \cdot \vec{C})(\vec{A} \cdot \vec{D})$$

$$\vec{A} \times \vec{e}_i \vec{e}_j = (\vec{A} \times \vec{e}_i)\vec{e}_j$$

$$\vec{e}_i \vec{e}_j \times \vec{A} = \vec{e}_i (\vec{e}_j \times \vec{A})$$

$$\nabla \cdot (\vec{A}\vec{B}) = (\nabla \cdot \vec{A})\vec{B} + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B}$$

$$\nabla \times (\vec{A}\vec{B}) = (\nabla \times \vec{A})\vec{B} - (\vec{A} \times \nabla)\vec{B}$$

$$\int_v \mathrm{d}v \nabla \cdot \vec{\vec{T}} = \oint_s \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{\vec{T}}$$

$$\int_v \mathrm{d}v \nabla \times \vec{\vec{T}} = \oint_s \mathrm{d}\vec{S} \times \vec{\vec{T}}$$

$$\int_v \mathrm{d}v \nabla \vec{A} = \oint_s \mathrm{d}\vec{S}\vec{A}$$

4、曲线正交坐标系中的矢量微分公式

(1)直角坐标系

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{k}$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

(2)圆柱坐标系

$$\nabla\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\vec{e}_{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\vec{e}_{\varphi}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{e}_{z}$$

$$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_{\rho})+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_{\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_{Z}}{\partial z}$$

$$\nabla\times\vec{A}=\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_{z}}{\partial\varphi}-\frac{\partial A_{\Phi}}{\partial z}\right)\vec{e}_{\rho}+\left(\frac{\partial A_{\rho}}{\partial z}-\frac{\partial A_{Z}}{\partial\rho}\right)\vec{e}_{\varphi}$$

$$+\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_{\varphi})-\frac{\partial A_{\rho}}{\partial\varphi}\right]\vec{e}_{Z}$$

$$\nabla^{2}\Phi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^{2}}\frac{\partial^{2}\Phi}{\partial\varphi^{2}}+\frac{\partial^{2}\Phi}{\partial z^{2}}$$

(3)球坐标系

$$\nabla\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial r}\vec{e}_{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\vec{e}_{\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\vec{e}_{\varphi}$$

$$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{1}{r^{2}}\frac{\partial}{\partial r}(r^{2}A_{r})+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_{\theta}\sin\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_{\Phi}}{\partial\varphi}$$

$$\nabla\times\vec{A}=\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(A_{\varphi}\sin\theta)-\frac{\partial A_{\theta}}{\partial\varphi}\right]\vec{e}_{r}+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_{r}}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial r}(rA_{\varphi})\right]\vec{e}_{\theta}$$

$$+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_{\theta})-\frac{\partial A_{r}}{\partial\theta}\right]\vec{e}_{\varphi}$$

$$\nabla^{2}\Phi=\frac{1}{r^{2}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{2}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^{2}\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^{2}\sin^{2}\theta}\frac{\partial^{2}\Phi}{\partial\varphi^{2}}$$

二、国际单位制和高斯单位制中主要公式对照表

	国际单位制	高斯单位制
真空中电荷的电场	$\mathbf{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\mathbf{r}$	$\mathbf{E}=\frac{Q}{r^3}\mathbf{r}$
真空中电流的磁场	$\mathbf{B}=\int\frac{\mu_0\mathbf{J}(\mathbf{x}')\times\mathbf{r}}{4\pi r^3}dV'$	$\mathbf{B}=\int\frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')\times\mathbf{r}}{cr^3}\mathrm{d}V'$
洛伦兹力	$\mathbf{F}=Q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})$	$\mathbf{F}=Q(\mathbf{E}+\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B})$
麦克斯韦方程组	$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$ $\nabla\times\mathbf{H}=\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{J}$ $\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho$ $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$	$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$ $\nabla\times\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$ $\nabla\cdot\mathbf{D}=4\pi\rho$ $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$
边值关系	$\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1)=0$ $\mathbf{n}\times(\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1)=\boldsymbol{\alpha}$ $\mathbf{n}\cdot(\mathbf{D}_2-\mathbf{D}_1)=\sigma$ $\mathbf{n}\cdot(\mathbf{B}_2-\mathbf{B}_1)=0$	$\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1)=0$ $\mathbf{n}\times(\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1)=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{\alpha}$ $\mathbf{n}\cdot(\mathbf{D}_2-\mathbf{D}_1)=4\pi\sigma$ $\mathbf{n}\cdot(\mathbf{B}_2-\mathbf{B}_1)=0$
介质电磁性质	$\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}$ $\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H}+\mu_0\mathbf{M}$	$\mathbf{D}=\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P}$ $\mathbf{B}=\mathbf{H}+4\pi\mathbf{M}$
电磁能流密度	$\mathbf{S}=\mathbf{E}\times\mathbf{H}$	$\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H}$

续表

	国际单位制	高斯单位制
电磁能量密度	$dw=\mathbf{E}\cdot d\mathbf{D}+\mathbf{H}\cdot d\mathbf{B}$	$dw=\frac{1}{4\pi}(\mathbf{E}\cdot d\mathbf{D}+\mathbf{H}\cdot d\mathbf{B})$
电磁动量密度	$\mathbf{g}=\varepsilon_0\mathbf{E}\times\mathbf{B}$	$\mathbf{g}=\frac{1}{4\pi c}\mathbf{E}\times\mathbf{B}$
场和势关系	$\mathbf{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$ $\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$	$\mathbf{E}=-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$ $\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$
势方程	$\nabla^2\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\mathbf{J}$ $\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\nabla^2\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$ $\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-4\pi\rho$
洛伦兹条件	$\nabla\cdot\mathbf{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$	$\nabla\cdot\mathbf{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$
推迟势	$\mathbf{A}=\int\frac{\mu_0\mathbf{J}\left(\mathbf{x}',t-\frac{r}{c}\right)}{4\pi r}dV'$ $\varphi=\int\frac{\rho\left(\mathbf{x}',t-\frac{r}{c}\right)}{4\pi\varepsilon_0 r}dV'$	$\mathbf{A}=\int\frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{x}',t-\frac{r}{c}\right)}{cr}dV'$ $\varphi=\int\frac{\rho\left(\mathbf{x}',t-\frac{r}{c}\right)}{r}dV'$
电磁场张量	$F_{\mu\nu}=\begin{bmatrix}0 & B_3 & -B_2 & -\frac{iE_1}{c}\\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{iE_2}{c}\\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{iE_3}{c}\\ \frac{iE_1}{c} & \frac{iE_2}{c} & \frac{iE_3}{c} & 0\end{bmatrix}$	$F_{\mu\nu}=\begin{bmatrix}0 & B_3 & -B_2 & -iE_1\\ -B_3 & 0 & B_1 & -iE_2\\ B_2 & -B_1 & 0 & -iE_3\\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0\end{bmatrix}$

续表

	国际单位制	高斯单位制
四维势矢量	$A_\mu=\left(\mathbf{A},\frac{i}{c}\varphi\right)$	$A_\mu=(\mathbf{A},i\varphi)$
四维电流密度	$J_\mu=(\mathbf{J},ic\rho)$	$J_\mu=(\mathbf{J},ic\rho)$
运动带电粒子的势	$\mathbf{A}=\frac{e\mathbf{v}}{4\pi\varepsilon_0 c^2\left(r-\frac{\mathbf{v}}{c}\cdot\mathbf{r}\right)}$ $\varphi=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0\left(r-\frac{\mathbf{v}}{c}\cdot\mathbf{r}\right)}$	$A=\frac{e\mathbf{v}}{c\left(r-\frac{\mathbf{v}}{c}\cdot\mathbf{r}\right)}$ $\varphi=\frac{e}{r-\frac{\mathbf{v}}{c}\cdot\mathbf{r}}$
偶极辐射	$\mathbf{E}=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{v}})$ $\mathbf{B}=\frac{1}{c}\mathbf{n}\times\mathbf{E}$ $P=\frac{e^2\dot{\mathbf{v}}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}$	$\mathbf{E}=\frac{e}{c^2 r}\dot{\mathbf{n}}\times(\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{v}})$ $\mathbf{B}=\mathbf{n}\times\mathbf{E}$ $P=\frac{2e^2\dot{\mathbf{v}}^2}{3c^3}$
精细结构常数	$\alpha=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}$	$\alpha=\frac{e^2}{\hbar c}$
电子经典半径	$r_e=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}$	$r_e=\frac{e^2}{mc^2}$
辐射阻尼力	$\mathbf{F}_s=\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\ddot{\mathbf{v}}$	$\mathbf{F}_s=\frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}}$

三、重要物理常数(国际单位制)

真空光速	c	3.00×10^{8} 米
真空介电常数	ε_0	8.85×10^{-12} 法拉／米
真空磁导率	μ_0	1.26×10^{-6} 亨利／米
玻尔兹曼常数	k	1.38×10^{-23} 焦耳／分子·开
普朗克常数	h	6.63×10^{-34} 焦耳·秒
电子电荷	e	1.60×10^{-19} 库仑
电子静质量	m_e	9.11×10^{-31} 千克
电子荷质比	e/m_e	1.76×10^{11} 库仑／千克
电子磁矩	μ_e	9.27×10^{-24} 焦耳／特斯拉
质子静质量	m_p	1.67×10^{-27} 千克
质子磁矩	μ_p	1.41×10^{-26} 焦耳／特斯拉
玻尔磁子	μ_B	9.27×10^{-24} 焦耳／特斯拉
精细结构常数	α	1／137.04
电子经典半径	r_e	2.82×10^{-15} 米
玻尔半径	a	5.29×10^{-11} 米