☆电磁理论导引 ☆

作者: 方能航
出版社: 科学出版社
出版日期: 1986年1月第1版

页数: 438

目　　录

第一章　▽算子运算法和某些积分关系式…… 1

1.1　含有▽算子的式子的定义 …… 4

1.2　$(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}$ 的意义 …… 8

1.3　T(▽)的性质 …… 10

1.4　正确应用▽算子进行运算的例子 …… 18

1.5　辅助公式 …… 21

1.6　运算举例 …… 26

1.7　积分关系式 …… 34

1.8　二重▽算子的定义 …… 39

1.9　T(▽,▽)的性质…… 42

1.10　二重▽算子的运算例题 …… 44

1.11　格林积分定理 …… 50

1.12　复矢量代数 …… 56

1.13　两种特殊情况的定义 …… 60

1.14　复矢量的微积分 …… 61

1.15　麦克斯韦方程组的复数形式 …… 65

第二章　磁流和磁荷的概念及其应用…… 69

2.1　磁流和磁荷的定义 …… 70

2.2　磁流麦克斯韦方程组的解法。对偶原理 …… 74

2.3　磁流麦克斯韦方程组解的物理意义 …… 76

2.4　广义麦克斯韦方程组解的物理意义。一般等效定理 … 81

2.5　一般等效定理的两种特殊情况 …… 93

2.6　一般等效定理的推广 …… 96

2.7　场源为周期性函数时等效定理的推广 …… 97

2.8　电流源和磁流源在同一位置时的等效问题 …… 103

2.9 只利用面电流或面磁流的等效定理 …… 112
2.10 感应定理 …… 117
2.11 应用感应定理的例子 …… 121
2.12 波导中的等效定理 …… 124
2.13 巴比内特原理 …… 128
第三章 麦克斯韦方程组的一般性质 …… 137
3.1 麦克斯韦方程组及其边界条件 …… 137
3.2 坡印廷定理 …… 140
3.3 电磁场中的二次关系式 …… 143
3.4 广义麦克斯韦方程组情况下的推广 …… 146
3.5 唯一性定理 …… 150
3.6 唯一性定理的另一形式 …… 154
3.7 周期性电磁场的唯一性定理 …… 158
3.8 无限区域内的唯一性定理 …… 160
3.9 周期性电磁场唯一性定理的另一证明 …… 162
3.10 **E** 和 **H** 所满足的方程 …… 168
3.11 复坡印廷矢量的两种定义 …… 173
3.12 非理想导体边界上的近似边界条件 …… 176
3.13 近似边界条件的适用范围 …… 187
第四章 电磁位 …… 193
4.1 电磁位的普遍定义 …… 193
4.2 几种电磁位 …… 197
4.3 对应于复数麦克斯韦方程组的复电磁位 …… 207
4.4 关于复电磁位的几个结果 …… 210
4.5 磁流麦克斯韦方程组的电磁位 …… 219
4.6 广义麦克斯韦方程组的电磁位 …… 222
4.7 电偶极子的场 …… 225
4.8 磁偶极子的场 …… 231
4.9 小电流环的场 …… 232
4.10 在积分号下微分的定理 …… 236

4.11 波动方程解的证明 …… 242
4.12 泊松方程解的证明 …… 248
4.13 对滞后矢量位与滞后标量位关系的证明 …… 253
第五章 由已知场源求辐射场的公式…… 263
5.1 用矢量格林定理求解 …… 263
5.2 非封闭曲面情况下的近似处理方法 …… 271
5.3 辐射场公式的另一形式 …… 282
5.4 用矢量-标量格林公式求解 …… 286
5.5 用洛伦兹引理求解 …… 289
5.6 辐射场公式的又一形式——弗朗兹公式 …… 300
5.7 标量克希霍夫公式 …… 306
5.8 用等效原理和电磁位求解 …… 308
5.9 无限区域的情况 …… 314
5.10 单由电流、磁流表示的场强公式 …… 317
5.11 远区场的结构 …… 319
5.12 镜象原理 …… 325
第六章 口径场的三种模型和方向图公式…… 333
6.1 口径场的三种模型 …… 333
6.2 方向图公式 …… 334
6.3 不同口径场模式的方向图公式的比较 …… 345
结束语…… 347
参考文献…… 349
附录I 单位制的换算和麦克斯韦方程组在不同单位制中的形式 …… 350
I.1 电磁单位制中的四个基本单位 …… 351
I.2 单位制换算的关键和基本规则 …… 352
I.3 电磁学中的物理量单位换算比的定义 …… 355
I.4 常用电磁量的单位换算比 …… 358
I.5 有理化单位制 …… 364
I.6 麦克斯韦方程组在不同单位制中的形式 …… 366

I.7 公式和数值换算举例 …… 373
附录 II 并矢微积中的▽算子 …… 377
II.1 T(▽)的定义 …… 377
II.2 T(▽)的性质 …… 387
II.3 运算举例 …… 389
II.4 T(▽,▽)的定义和性质 …… 397
II.5 对 T(▽,▽)的运算举例 …… 398
II.6 积分关系式 …… 400
II.7 圆柱坐标系中 grada、div$\vec{A}$、rot$\vec{A}$及 $\nabla^2\vec{A}$ 的表达式 … 406
II.8 球坐标系中 grada、div$\vec{A}$、rot$\vec{A}$及 $\nabla^2\vec{A}$ 的表达式 …… 412
II.9 几个基本定义与某些并矢恒等式 …… 418
附录 III 各种单位制之间的换算表 …… 421
表 III.1 高斯厘米-克-秒制至米-千克-秒制换算表 …… 421
表 III.2 米-千克-秒制至高斯厘米-克-秒制换算表 …… 422
表 III.3 静电厘米-克-秒制至米-千克-秒制换算表 …… 424
表 III.4 电磁厘米-克-秒制至米-千克-秒制换算表 …… 425
表 III.5 实用厘米-克-秒制至米-千克-秒制换算表 …… 426
表 III.6 米-千克-秒制至静电厘米-克-秒制换算表 …… 428
表 III.7 米-千克-秒制至电磁厘米-克-秒制换算表 …… 429
表 III.8 米-千克-秒制至实用厘米-克-秒制换算表 …… 430
表 III.9 赫维赛厘米-克-秒制至米-千克-秒制换算表 …… 432
表 III.10 米-千克-秒制至赫维赛厘米-克-秒制换算表 …… 433
表 III.11 Mie 厘米-克-秒制至米-千克-秒制换算表 …… 435
表 III.12 米-千克-秒制至 Mie 厘米-克-秒制换算表 …… 436
表 III.13 物理量换算比公式汇集 …… 437

第一章　▽算子运算法和某些积分关系式

研究电磁场的基本出发点是麦克斯韦方程组．麦克斯韦方程组中有旋度、散度、梯度等矢量函数，因此，在对麦克斯韦方程组进行数学运算时必然会碰到运算上述矢量函数的数学问题．本章先介绍一种运算矢量函数的数学方法——▽算子运算法，作为以后各章中的数学运算工具．

▽算子运算法的优点在于可以把对矢量函数的微分运算转变成矢量代数运算，从而明显地简化运算过程，而且由于代数运算规则的数目是有限的，因此通过▽算子运算法还可以得到矢量恒等式所有可能的形式．通常，在数学手册中都会列出一些重要或常用的矢量函数恒等式，然后用证明两边分量相等的方法来证明它们；这样做虽然没有什么不对的地方，可是这种做法不能告诉人们这些恒等式是怎样推导出来的，它们还有没有其他表示形式，而且其证明过程也相当繁复．用▽算子运算法可以很自然和清楚地看出各种恒等式是怎样得到的以及有几种可能的形式，而且证明过程一般是比较简单的．

通常，▽算子定义为一个“符号”矢量，即从形式上定义为

$$\nabla = \mathbf{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{u}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

式中 $\mathbf{u}_x$、$\mathbf{u}_y$、$\mathbf{u}_z$ 为直角坐标系中沿 x、y 和 z 轴的三个单位矢量．

然后规定，可以把▽的各个分量看成普通矢量的分量(数

8610476

量)一样进行形式上的运算,而 $\frac{\partial}{\partial x}$ 和函数 φ 的乘积则理解为对 φ 的偏微分,即 $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$.

根据这样的定义和规定,有

$$\begin{aligned}
\nabla\varphi &= \left(\mathbf{u}_x\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{u}_y\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{u}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi \\
&= \mathbf{u}_x\frac{\partial}{\partial x}\varphi+\mathbf{u}_y\frac{\partial}{\partial y}\varphi+\mathbf{u}_z\frac{\partial}{\partial z}\varphi \\
&= \mathbf{u}_x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\mathbf{u}_y\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\mathbf{u}_z\frac{\partial\varphi}{\partial z} \\
&= \mathrm{grad}\varphi \\
\nabla\cdot\mathbf{R} &= \left(\mathbf{u}_x\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{u}_y\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{u}_z\frac{\partial}{\partial z}\right) \\
&\quad\cdot(\mathbf{u}_xR_x+\mathbf{u}_yR_y+\mathbf{u}_zR_z) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}R_x+\frac{\partial}{\partial y}R_y+\frac{\partial}{\partial z}R_z \\
&= \frac{\partial R_x}{\partial x}+\frac{\partial R_y}{\partial y}+\frac{\partial R_z}{\partial z} \\
&= \mathrm{div}\mathbf{R} \\
\nabla\times\mathbf{R} &= \left(\mathbf{u}_x\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{u}_y\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{u}_z\frac{\partial}{\partial z}\right) \\
&\quad\times(\mathbf{u}_xR_x+\mathbf{u}_yR_y+\mathbf{u}_zR_z) \\
&= \mathbf{u}_z\frac{\partial}{\partial x}R_y-\mathbf{u}_y\frac{\partial}{\partial x}R_z-\mathbf{u}_z\frac{\partial}{\partial y}R_x \\
&\quad+\mathbf{u}_x\frac{\partial}{\partial y}R_z+\mathbf{u}_y\frac{\partial}{\partial z}R_x-\mathbf{u}_x\frac{\partial}{\partial z}R_y \\
&= \mathbf{u}_x\left(\frac{\partial R_z}{\partial y}-\frac{\partial R_y}{\partial z}\right)+\mathbf{u}_y\left(\frac{\partial R_x}{\partial z}-\frac{\partial R_z}{\partial x}\right) \\
&\quad+\mathbf{u}_z\left(\frac{\partial R_y}{\partial x}-\frac{\partial R_x}{\partial y}\right)
\end{aligned}$$

$= \mathrm{rot}\mathbf{R}$

可见，这种定义和规定的确可以把 $\mathrm{grad}\varphi$、$\mathrm{div}\mathbf{R}$ 和 $\mathrm{rot}\mathbf{R}$ 分别表示为 $\nabla\varphi$、$\nabla\cdot\mathbf{R}$ 和 $\nabla\times\mathbf{R}$.

还可以进一步对含有 ∇ 的表达式规定一些运算的方法或规则，形成一套完整的运算方法. 可是，问题在于利用规定方法进行运算虽然可以得到正确的结果，但这并不等于从数学上证明了这些运算的规则，从而无法保证不会出现例外的情况. 因此，一般还要对所得到的结果进行验算.

为了使 ∇ 算子运算法真正成为可靠的数学工具，必须从定义开始加以修改，给出可以进行数学论证的定义，然后严格证明 ∇ 算子的运算规则. 在这之后就可以有把握地进行数学运算而不需要再对结果进行验算.

在以下各节中我们将先针对含有 ∇ 算子的式子下定义，然后证明 ∇ 算子的运算规则，最后给出各种运算实例，包括对各种积分关系式的推导.

下面对所采用的矢量代数符号作一些说明.

矢量 $\mathbf{a}$ 用粗黑字体表示.

两矢量 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 的点积或标量积，在不引起误会的情况下，用 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ 表示. 当与其他函数混在一起容易引起误会时，则用 $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$ 表示.

两矢量 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 的叉积或矢量积用 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 表示，也可用 $[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]$ 表示之.

三矢量的乘积 $\mathbf{a}\cdot[\mathbf{b}\times\mathbf{c}]$ 有时也用 $(\mathbf{abc})$ 表示之.

$\mathbf{r}$ 表示一点的矢径.

在未特别指明的情况下，所有矢量都表示矢量场，即 $\mathbf{r}$ 的函数.

脚注 c 表示微分时视为常数，例如 $\mathbf{a}_c$ 表示 $\mathbf{a}$ 在微分时应视为常数.

矢量函数本身既可用通常的 grad、div 和 rot 等符号表示，也可用∇算子表示。在本书中，我们将同时采用两种表示方法。

1.1 含有∇算子的式子的定义

任何一个含有∇算子并对∇为线性的式子 $T(\nabla)$，都可定义如下：

(1) $T(\nabla)$ 定义为

$$T(\nabla) = \frac{\partial}{\partial x} T(\mathbf{u}_x) + \frac{\partial}{\partial y} T(\mathbf{u}_y) + \frac{\partial}{\partial z} T(\mathbf{u}_z) \quad (1.1)$$

式中 $T(\mathbf{u}_x)$、$T(\mathbf{u}_y)$ 和 $T(\mathbf{u}_z)$ 分别为在含有∇算子的式子 $T(\nabla)$ 内把∇分别换成直角座标系中沿 x、y 和 z 轴的三个单位矢量的结果。

(2) 在 $T(\nabla)$ 中，如果有某些函数位于∇算子的前面，那么在微分和对 $T(\nabla)$ 积分时这些函数应视为常数，不受微分和积分的影响。

所谓线性的 $T(\nabla)$，指的是若在 $T(\nabla)$ 中将∇换成两个矢量之和，即 $\alpha_1\mathbf{p}_1 + \alpha_2\mathbf{p}_2$，其中 α_1 和 α_2 为常数，$\mathbf{p}_1$ 和 $\mathbf{p}_2$ 为任意两矢量，则

$$T(\alpha_1\mathbf{p}_1 + \alpha_2\mathbf{p}_2) = \alpha_1 T(\mathbf{p}_1) + \alpha_2 T(\mathbf{p}_2)$$

这里，假定所有的函数都具有一阶以上的连续导数。下面举几个例子来说明某些线性的 $T(\nabla)$ 的含义。

例 1 试说明 $T(\nabla) = \nabla\varphi$ 的含义，式中 φ 为某标量场。

先验证 $T(\nabla)$ 的线性：

$$\begin{aligned} T(\alpha_1\mathbf{p}_1 + \alpha_2\mathbf{p}_2) &= (\alpha_1\mathbf{p}_1 + \alpha_2\mathbf{p}_2)\varphi \\ &= \alpha_1\mathbf{p}_1\varphi + \alpha_2\mathbf{p}_2\varphi \\ &= \alpha_1 T(\mathbf{p}_1) + \alpha_2 T(\mathbf{p}_2) \end{aligned}$$

故 $T(\nabla)=\nabla\varphi$ 为线性. 按照定义

$$\begin{aligned}T(\nabla)=\nabla\varphi&=\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{u}_x\varphi+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{u}_y\varphi+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{u}_z\varphi\\&=\mathbf{u}_x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\mathbf{u}_y\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\mathbf{u}_z\frac{\partial\varphi}{\partial z}\\&=\mathrm{grad}\varphi\end{aligned}$$

由此可见

$$\boxed{\nabla\varphi=\mathrm{grad}\varphi}\tag{1.2}$$

例 2 试说明 $T(\nabla)=(\nabla\cdot\mathbf{R})$ 的含义, 式中 $\mathbf{R}(x,y,z)$ 为某矢量场.

先验证 $T(\nabla)$ 的线性:

$$\begin{aligned}T(\alpha_1\mathbf{p}_1+\alpha_2\mathbf{p}_2)&=((\alpha_1\mathbf{p}_1+\alpha_2\mathbf{p}_2)\cdot\mathbf{R})\\&=\alpha_1(\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{R})+\alpha_2(\mathbf{p}_2\cdot\mathbf{R})\\&=\alpha_1T(\mathbf{p}_1)+\alpha_2T(\mathbf{p}_2)\end{aligned}$$

故 $T(\nabla)=(\nabla\cdot\mathbf{R})$ 为线性. 按照定义

$$\begin{aligned}T(\nabla)=(\nabla\cdot\mathbf{R})&=\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{u}_x\cdot\mathbf{R})+\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{u}_y\cdot\mathbf{R})\\&\quad+\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{u}_z\cdot\mathbf{R})\\&=\frac{\partial R_x}{\partial x}+\frac{\partial R_y}{\partial y}+\frac{\partial R_z}{\partial z}\\&=\mathrm{div}\mathbf{R}\end{aligned}$$

式中 R_x、R_y 和 R_z 为 $\mathbf{R}$ 在三个坐标轴上的分量. 由此可见

$$\boxed{(\nabla\cdot\mathbf{R})=\mathrm{div}\mathbf{R}}\tag{1.3}$$

例 3 试说明 $T(\nabla)=[\nabla\times\mathbf{R}]$ 的含义.

先验证 $T(\nabla)$ 的线性:

$$\begin{aligned}T(\alpha_1\mathbf{p}_1+\alpha_2\mathbf{p}_2)&=[(\alpha_1\mathbf{p}_1+\alpha_2\mathbf{p}_2)\times\mathbf{R}]\\&=\alpha_1[\mathbf{p}_1\times\mathbf{R}]+\alpha_2[\mathbf{p}_2\times\mathbf{R}]\end{aligned}$$

$$= \alpha_1 T(\mathbf{p}_1) + \alpha_2 T(\mathbf{p}_2)$$

故 $T(\nabla) = [\nabla \times \mathbf{R}]$ 为线性. 按照定义

$$T(\nabla) = [\nabla \times \mathbf{R}]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}[\mathbf{u}_x \times \mathbf{R}] + \frac{\partial}{\partial y}[\mathbf{u}_y \times \mathbf{R}]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}[\mathbf{u}_z \times \mathbf{R}]$$

式中 $\mathbf{R} = \mathbf{u}_x R_x + \mathbf{u}_y R_y + \mathbf{u}_z R_z$ 为矢量场,但

$$[\mathbf{u}_x \times \mathbf{R}] = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ 1 & 0 & 0 \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix} = -\mathbf{u}_y R_z + \mathbf{u}_z R_y$$

同理

$$[\mathbf{u}_y \times \mathbf{R}] = \mathbf{u}_x R_z - \mathbf{u}_z R_x$$

$$[\mathbf{u}_z \times \mathbf{R}] = -\mathbf{u}_x R_y + \mathbf{u}_y R_x$$

于是

$$T(\nabla) = \frac{\partial}{\partial x}[\mathbf{u}_x \times \mathbf{R}] + \frac{\partial}{\partial y}[\mathbf{u}_y \times \mathbf{R}]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}[\mathbf{u}_z \times \mathbf{R}]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(-\mathbf{u}_y R_z + \mathbf{u}_z R_y) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{u}_x R_z - \mathbf{u}_z R_x)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}(-\mathbf{u}_x R_y + \mathbf{u}_y R_x)$$

$$= \mathbf{u}_x\left(\frac{\partial R_z}{\partial y} - \frac{\partial R_y}{\partial z}\right) + \mathbf{u}_y\left(\frac{\partial R_x}{\partial z} - \frac{\partial R_z}{\partial x}\right)$$

$$+ \mathbf{u}_z\left(\frac{\partial R_y}{\partial x} - \frac{\partial R_x}{\partial y}\right)$$

$$= \mathrm{rot}\mathbf{R}$$

由此可见

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{R} = \mathrm{rot}\mathbf{R}} \tag{1.4}$$

例 4 试说明 $T(\nabla) = (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}$ 的含义. 式中

$$\mathbf{a} = \mathbf{u}_x a_x + \mathbf{u}_y a_y + \mathbf{u}_z a_z, \quad \mathbf{b} = \mathbf{u}_x b_x + \mathbf{u}_y b_y + \mathbf{u}_z b_z$$

为两矢量场.

先验证 $T(\nabla)$ 的线性:

$$\begin{aligned} T(\alpha_1\mathbf{p}_1 + \alpha_2\mathbf{p}_2) &= (\mathbf{a} \cdot (\alpha_1\mathbf{p}_1 + \alpha_2\mathbf{p}_2))\mathbf{b} \\ &= \alpha_1(\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}_1)\mathbf{b} + \alpha_2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}_2)\mathbf{b} \\ &= \alpha_1 T(\mathbf{p}_1) + \alpha_2 T(\mathbf{p}_2) \end{aligned}$$

故 $T(\nabla) = (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}$ 为线性. 按照定义

$$\begin{aligned} T(\nabla) &= (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_x)\mathbf{b} + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_y)\mathbf{b} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_z)\mathbf{b} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} a_x\mathbf{b} + \frac{\partial}{\partial y} a_y\mathbf{b} + \frac{\partial}{\partial z} a_z\mathbf{b} \end{aligned}$$

由于 $\mathbf{a}$ 在 ∇ 前面,按定义在微分时应视为常数,故 a_x、a_y 和 a_z 都可移到微分号外,由此可得

$$T(\nabla) = a_x \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{b} + a_y \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{b} + a_z \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{b} \tag{1.5}$$

下一节将证明 $T(\nabla)=(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}$ 是矢量 $\mathbf{b}$ 在矢量 $\mathbf{a}$ 方向上的导数乘以矢量 $\mathbf{a}$ 的幅值.

从上面所举的例子中可以看出,场论中的几种函数如 grad、div 和 rot 等,都可以用某个 $T(\nabla)$ 来表示. 这样,上面所定义的 $T(\nabla)$ 就有了实用价值.

实际运算时,通常都是先将含有 grad、div 和 rot 等符号的式子写成 $T(\nabla)$ 形式,然后利用 $T(\nabla)$ 的性质进行矢量代数运算,最后再将运算结果重新写成 grad、div 和 rot 等符号形

式，以达到对矢量函数进行运算的目的.

在 $T(\nabla)$ 的定义中，要求 $T(\nabla)$ 为线性的目的在于免得使某些特殊 $T(\nabla)$ 的含义与其他文献中所通用的含义相矛盾.

例如，对于 $\nabla^2 f(x,y,z)$ 来说，因为 $\mathbf{u}_x^2=1,\mathbf{u}_y^2=1,\mathbf{u}_z^2=1$，所以按本节的定义，其意义为

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{u}_x^2 f(x,y,z)+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{u}_y^2 f(x,y,z)+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{u}_z^2 f(x,y,z)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}f(x,y,z)+\frac{\partial}{\partial y}f(x,y,z)+\frac{\partial}{\partial z}f(x,y,z)$$

可是，通用的 $\nabla^2 f(x,y,z)$ 的定义是

$$\nabla^2 f(x,y,z)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y,z)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y,z)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}f(x,y,z)$$

这与上述意义不一致.

显然，$\nabla^2 f(x,y,z)$ 不满足线性条件，因

$$T(\alpha_1\mathbf{p}_1+\alpha_2\mathbf{p}_2)=(\alpha_1\mathbf{p}_1+\alpha_2\mathbf{p}_2)^2 f(x,y,z)$$

$$=(\alpha_1^2\mathbf{p}_1^2+2\alpha_1\alpha_2\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_2+\alpha_2^2\mathbf{p}_2^2)f(x,y,z)$$

而

$$\alpha_1 T(\mathbf{p}_1)+\alpha_2 T(\mathbf{p}_2)=\alpha_1\mathbf{p}_1^2 f(x,y,z)+\alpha_2\mathbf{p}_2^2 f(x,y,z)$$

故

$$T(\alpha_1\mathbf{p}_1+\alpha_2\mathbf{p}_2)\neq\alpha_1 T(\mathbf{p}_1)+\alpha_2 T(\mathbf{p}_2)$$

因此对这种 $T(\nabla)$ 不加考虑. 以后，在讨论二重 ∇ 算子时，将专门讨论 ∇^2 的问题.

1.2 $(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}$ 的意义

根据 $(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}$ 的定义，有

$$(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}=\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}_x)\mathbf{b}+\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}_y)\mathbf{b}$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}_z)\mathbf{b}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}a_x\mathbf{b}+\frac{\partial}{\partial y}a_y\mathbf{b}+\frac{\partial}{\partial z}a_z\mathbf{b}$$

因 $\mathbf{a}$ 在 ∇ 前面，微分时应视为常数，故

$$(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}=a_x\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{b}+a_y\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{b}+a_z\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{b}$$

将 $\mathbf{a}$ 写成 $\mathbf{a}=|\mathbf{a}|\mathbf{u}_a$，式中 $|\mathbf{a}|$ 表示矢量 $\mathbf{a}$ 的长短；$\mathbf{u}_a$ 表示与矢量 $\mathbf{a}$ 同方向的单位矢量．代入上式得

$$(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}=(|\mathbf{a}|\mathbf{u}_a)_x\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{b}+(|\mathbf{a}|\mathbf{u}_a)_y\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{b}$$

$$+(|\mathbf{a}|\mathbf{u}_a)_z\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{b}$$

式中 $(|\mathbf{a}|\mathbf{u}_a)_x$ 表示矢量 $|\mathbf{a}|\mathbf{u}_a$ 在 x 轴上的分量，即 a_x，余类同．但

$$(\mathbf{u}_a)_x=\cos(\mathbf{u}_a,x)$$
$$(\mathbf{u}_a)_y=\cos(\mathbf{u}_a,y)$$
$$(\mathbf{u}_a)_z=\cos(\mathbf{u}_a,z)$$

式中 $\cos(\mathbf{u}_a,x)$ 表示 $\mathbf{u}_a$ 与 x 轴之间夹角的余弦，即 $\mathbf{u}_a$ 在 x 轴上的投影．$\cos(\mathbf{u}_a,y)$ 和 $\cos(\mathbf{u}_a,z)$ 的意义与此相似，所以

$$(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\left(\cos(\mathbf{u}_a,x)\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial x}+\cos(\mathbf{u}_a,y)\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial y}\right.$$

$$\left.+\cos(\mathbf{u}_a,z)\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial z}\right)$$

另一方面，如果通过 $M(x,y,z)$ 点作一曲线，使其在 M 点的切线方向为 $\mathbf{u}_a$，并在曲线上沿 $\mathbf{u}_a$ 方向取与 M 邻近的一点

M'，又令弧 $\overset{\frown}{MM'}$ 的长短为 Δs，那么

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\mathbf{b}(M')-\mathbf{b}(M)}{\Delta s} \tag{1.6}$$

称为矢量 $\mathbf{b}$ 在 M 点 $\mathbf{u}_a$ 方向上的导数.

若弧长从 M 点算起并用 s 表示之，则 $\mathbf{b}(x, y, z)$ 将是 s 的复合函数. 根据复合函数的微分规则

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\mathbf{b}(M')-\mathbf{b}(M)}{\Delta s}=\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial z}\frac{dz}{ds}$$

考虑到

$$\frac{dx}{ds}=\cos(\mathbf{u}_a, x)$$

$$\frac{dy}{ds}=\cos(\mathbf{u}_a, y)$$

$$\frac{dz}{ds}=\cos(\mathbf{u}_a, z)$$

故

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\mathbf{b}(M')-\mathbf{b}(M)}{\Delta s}=\cos(\mathbf{u}_a, x)\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x}+\cos(\mathbf{u}_a, y)\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial y}+\cos(\mathbf{u}_a, z)\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial z}$$

因此

$$(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\mathbf{b}(M')-\mathbf{b}(M)}{\Delta s} \tag{1.7}$$

也就是说，$(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}$ 是矢量 $\mathbf{b}$ 在 $\mathbf{u}_a$ 方向上的导数乘上矢量 $\mathbf{a}$ 的长短或幅值.

1.3 $T(\nabla)$ 的性质

在这一节中，我们来证明 $T(\nabla)$ 在一定条件下的四种性

质. 这些性质很重要，因为它们是对 $T(\nabla)$ 进行运算的理论依据.

性质 1 对于任何 $T(\nabla)$，可将 ∇ 看作矢量进行恒等变换，所得结果不变；但在变换时不可将 ∇ 后面的函数搬到 ∇ 前面(微分时视为常数的函数例外)，而在把 ∇ 前面的函数搬到后面时则要注上表示微分时视为常数的脚注 c.

例如，应用性质 1 立即可得

$$\nabla(\varphi_1+\varphi_2)=\nabla\varphi_1+\nabla\varphi_2$$
$$\nabla\cdot(\mathbf{R}_1+\mathbf{R}_2)=\nabla\cdot\mathbf{R}_1+\nabla\cdot\mathbf{R}_2$$
$$\nabla\times(\mathbf{R}_1+\mathbf{R}_2)=\nabla\times\mathbf{R}_1+\nabla\times\mathbf{R}_2$$

证 对于任何 $T_1(\nabla)$，将 ∇ 看成普通矢量进行恒等变换而得 $T_2(\nabla)$，这意味着

$$T_1(\mathbf{u}_x)=T_2(\mathbf{u}_x)\qquad T_1(\mathbf{u}_y)=T_2(\mathbf{u}_y)$$
$$T_1(\mathbf{u}_z)=T_2(\mathbf{u}_z)$$

而附加的条件则保证了

$$\frac{\partial}{\partial x}T_1(\mathbf{u}_x)=\frac{\partial}{\partial x}T_2(\mathbf{u}_x)\qquad \frac{\partial}{\partial y}T_1(\mathbf{u}_y)=\frac{\partial}{\partial y}T_2(\mathbf{u}_y)$$
$$\frac{\partial}{\partial z}T_1(\mathbf{u}_z)=\frac{\partial}{\partial z}T_2(\mathbf{u}_z)$$

因为附加的条件保证原来不微分的函数仍然不微分，原来要微分的函数仍然微分，由此可得

$$\begin{aligned}T_1(\nabla)&=\frac{\partial}{\partial x}T_1(\mathbf{u}_x)+\frac{\partial}{\partial y}T_1(\mathbf{u}_y)+\frac{\partial}{\partial z}T_1(\mathbf{u}_z)\\&\equiv\frac{\partial}{\partial x}T_2(\mathbf{u}_x)+\frac{\partial}{\partial y}T_2(\mathbf{u}_y)+\frac{\partial}{\partial z}T_2(\mathbf{u}_z)\\&\equiv T_2(\nabla)\end{aligned}$$

这一性质表明，对 $T(\nabla)$ 作矢量代数的恒等变换不影响其结果，但要注意满足附加条件的要求.

性质 2 如果 $T(\nabla)$ 式子中在 ∇ 后边有两个函数的乘积(数积,标量积或矢量积),那么 $T(\nabla)$ 可表示为两项之和:在一项中,一个函数视为常数,不受微分影响;而在另一项中,另一函数视为常数,不受微分影响.

例如,应用性质 2 立即可得

$$\nabla\varphi_1\varphi_2 = \nabla\varphi_{1c}\varphi_2 + \nabla\varphi_1\varphi_{2c} = \varphi_1\nabla\varphi_2 + \varphi_2\nabla\varphi_1$$

式中 φ_{1c}、φ_{2c} 表示 φ_1、φ_2 在微分时视为常数.

$$\begin{aligned}(\nabla\cdot\varphi\mathbf{R}) &= (\nabla\cdot\varphi_c\mathbf{R}) + (\nabla\cdot\varphi\mathbf{R}_c)\\ &= \varphi(\nabla\cdot\mathbf{R}) + (\nabla\varphi\cdot\mathbf{R}_c)\\ &= \varphi(\nabla\cdot\mathbf{R}) + (\mathbf{R}\cdot\nabla\varphi)\end{aligned}$$

式中 φ_c、$\mathbf{R}_c$ 表示 φ、$\mathbf{R}$ 在微分时视为常数. 同样,

$$\begin{aligned}[\nabla\times\varphi\mathbf{R}] &= [\nabla\times\varphi_c\mathbf{R}] + [\nabla\times\varphi\mathbf{R}_c]\\ &= \varphi[\nabla\times\mathbf{R}] + [\nabla\varphi\times\mathbf{R}_c]\\ &= \varphi[\nabla\times\mathbf{R}] - [\mathbf{R}\times\nabla\varphi]\end{aligned}$$

我们以 $(\nabla\cdot[\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2])$ 为例来证明性质 2. 对其他情况可作同样的证明.

需证

$$\begin{aligned}(\nabla\cdot[\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2]) = &(\nabla\cdot[\mathbf{R}_{1c}\times\mathbf{R}_2])\\ &+(\nabla\cdot[\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_{2c}])\end{aligned}$$

式中 $\mathbf{R}_{1c}$、$\mathbf{R}_{2c}$ 表示 $\mathbf{R}_1$、$\mathbf{R}_2$ 在微分时视为常数.

证 按 $T(\nabla)$ 的定义,

$$\begin{aligned}&(\nabla\cdot[\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2])\\ &= \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{u}_x\cdot[\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2]) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{u}_y\cdot[\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2])\\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{u}_z\cdot[\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2])\\ &= \left(\mathbf{u}_x\cdot\frac{\partial}{\partial x}[\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2]\right) + \left(\mathbf{u}_y\cdot\frac{\partial}{\partial y}[\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2]\right)\end{aligned}$$

$$+\left(\mathbf{u}_z\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left[\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2\right]\right)$$

由矢量微积分学知

$$\left(\mathbf{u}_x\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2\right]\right)=\left(\mathbf{u}_x\cdot\left[\frac{\partial\mathbf{R}_1}{\partial x}\times\mathbf{R}_2\right]\right)+\left(\mathbf{u}_x\cdot\left[\mathbf{R}_1\times\frac{\partial\mathbf{R}_2}{\partial x}\right]\right)$$

$$\left(\mathbf{u}_y\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left[\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2\right]\right)=\left(\mathbf{u}_y\cdot\left[\frac{\partial\mathbf{R}_1}{\partial y}\times\mathbf{R}_2\right]\right)+\left(\mathbf{u}_y\cdot\left[\mathbf{R}_1\times\frac{\partial\mathbf{R}_2}{\partial y}\right]\right)$$

$$\left(\mathbf{u}_z\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left[\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2\right]\right)=\left(\mathbf{u}_z\cdot\left[\frac{\partial\mathbf{R}_1}{\partial z}\times\mathbf{R}_2\right]\right)+\left(\mathbf{u}_z\cdot\left[\mathbf{R}_1\times\frac{\partial\mathbf{R}_2}{\partial z}\right]\right)$$

将三式相加，得

$$\begin{aligned}&(\nabla\cdot[\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2])\\&=\left\{\left(\mathbf{u}_x\cdot\left[\frac{\partial\mathbf{R}_1}{\partial x}\times\mathbf{R}_2\right]\right)+\left(\mathbf{u}_y\cdot\left[\frac{\partial\mathbf{R}_1}{\partial y}\times\mathbf{R}_2\right]\right)\right.\\&\quad\left.+\left(\mathbf{u}_z\cdot\left[\frac{\partial\mathbf{R}_1}{\partial z}\times\mathbf{R}_2\right]\right)\right\}\\&\quad+\left\{\left(\mathbf{u}_x\cdot\left[\mathbf{R}_1\times\frac{\partial\mathbf{R}_2}{\partial x}\right]\right)+\left(\mathbf{u}_y\cdot\left[\mathbf{R}_1\times\frac{\partial\mathbf{R}_2}{\partial y}\right]\right)\right.\\&\quad\left.+\left(\mathbf{u}_z\cdot\left[\mathbf{R}_1\times\frac{\partial\mathbf{R}_2}{\partial z}\right]\right)\right\}\\&=(\nabla\cdot[\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_{2c}])+(\nabla\cdot[\mathbf{R}_{1c}\times\mathbf{R}_2])\end{aligned}$$

用数学归纳法很容易将此性质推广到几个函数乘积的情况。

性质 3 对线性的 $T(\nabla)$ 有下列积分公式：

$$\iiint_V T(\nabla)dv = \oiint_\Sigma T(\mathbf{n})d\sigma \tag{1.8}$$

式中 $\iiint_V$ 表示对某一体积 V 的三重积分；$\oiint_\Sigma$ 表示对包围此体积 V 的封闭曲面 Σ 的曲面积分；$\mathbf{n}$ 表示曲面 Σ 上某一点朝体积 V 外部伸展的单位法向量.

证 此公式分三步证明. 先假定 $T(\mathbf{p})$（$\mathbf{p}$ 为任意矢量）取标量值，而且 ∇ 前面没有其他函数. 引入矢量函数

$$\mathbf{R} = \{T(\mathbf{u}_x), T(\mathbf{u}_y), T(\mathbf{u}_z)\} = \{R_x, R_y, R_z\}$$

式中大括号内的三个数值表示 $\mathbf{R}$ 的三个直角坐标分量.

运用场论中熟知的高斯公式

$$\iiint_V \mathrm{div}\mathbf{R}dv = \oiint_\Sigma \mathbf{R}\cdot\mathbf{n}d\sigma$$

即

$$\iiint_V \left(\frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z}\right)dv = \oiint_\Sigma (R_x\cos\alpha + R_y\cos\beta + R_z\cos\gamma)\,d\sigma$$

式中 $\cos\alpha = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}_x)$、$\cos\beta = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}_y)$ 和 $\cos\gamma = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}_z)$ 为单位法向量 $\mathbf{n}$ 的方向余弦. 由此得

$$\iiint_V \left\{\frac{\partial T(\mathbf{u}_x)}{\partial x} + \frac{\partial T(\mathbf{u}_y)}{\partial y} + \frac{\partial T(\mathbf{u}_z)}{\partial z}\right\}dv = \oiint_\Sigma \{T(\mathbf{u}_x)\cos\alpha + T(\mathbf{u}_y)\cos\beta + T(\mathbf{u}_z)\cos\gamma\}d\sigma$$

但

$$\frac{\partial T(\mathbf{u}_x)}{\partial x} + \frac{\partial T(\mathbf{u}_y)}{\partial y} + \frac{\partial T(\mathbf{u}_z)}{\partial z} = T(\nabla)$$

$$T(\mathbf{u}_x)\cos\alpha + T(\mathbf{u}_y)\cos\beta + T(\mathbf{u}_z)\cos\gamma = T(\mathbf{u}_x\cos\alpha) + T(\mathbf{u}_y\cos\beta) + T(\mathbf{u}_z\cos\gamma)$$

$$= T(\mathbf{u}_x\cos\alpha + \mathbf{u}_y\cos\beta + \mathbf{u}_z\cos\gamma)$$
$$= T(\mathbf{n})$$

这里两次运用了 $T(\nabla)$ 为线性的条件以及

$$\mathbf{n} = \mathbf{u}_x\cos\alpha + \mathbf{u}_y\cos\beta + \mathbf{u}_z\cos\gamma$$

则

$$\iiint_V T(\nabla)dv = \oiint_\Sigma T(\mathbf{n})d\sigma$$

现在假定 $T(\mathbf{p})$ 取矢量值. 为了明确起见，把它写成 $\mathbf{T}(\mathbf{p})$. 将 $\mathbf{T}(\mathbf{p})$ 分解成三个座标轴上的分量之和，可写出

$$\mathbf{T}(\mathbf{p}) = T_1(\mathbf{p})\mathbf{u}_x + T_2(\mathbf{p})\mathbf{u}_y + T_3(\mathbf{p})\mathbf{u}_z$$

式中 $T_1(\mathbf{p})$、$T_2(\mathbf{p})$ 和 $T_3(\mathbf{p})$ 取标量值. 但上面已经证明

$$\iiint_V T_1(\nabla)dv = \oiint_\Sigma T_1(\mathbf{n})d\sigma$$
$$\iiint_V T_2(\nabla)dv = \oiint_\Sigma T_2(\mathbf{n})d\sigma$$
$$\iiint_V T_3(\nabla)dv = \oiint_\Sigma T_3(\mathbf{n})d\sigma$$

将以上三式分别乘以 $\mathbf{u}_x$、$\mathbf{u}_y$ 和 $\mathbf{u}_z$ 并相加，得

$$\iiint_V \mathbf{T}(\nabla)dv = \oiint_\Sigma \mathbf{T}(\mathbf{n})d\sigma$$

这是因为

$$\mathbf{u}_xT_1(\mathbf{n}) + \mathbf{u}_yT_2(\mathbf{n}) + \mathbf{u}_zT_3(\mathbf{n}) = \mathbf{T}(\mathbf{n})$$

及

$$T_1(\nabla)\mathbf{u}_x + T_2(\nabla)\mathbf{u}_y + T_3(\nabla)\mathbf{u}_z$$
$$= \left\{\frac{\partial}{\partial x}T_1(\mathbf{u}_x) + \frac{\partial}{\partial y}T_1(\mathbf{u}_y) + \frac{\partial}{\partial z}T_1(\mathbf{u}_z)\right\}\mathbf{u}_x$$
$$+ \left\{\frac{\partial}{\partial x}T_2(\mathbf{u}_x) + \frac{\partial}{\partial y}T_2(\mathbf{u}_y) + \frac{\partial}{\partial z}T_2(\mathbf{u}_z)\right\}\mathbf{u}_y$$

$$+\left\{\frac{\partial}{\partial x}T_3(\mathbf{u}_x)+\frac{\partial}{\partial y}T_3(\mathbf{u}_y)+\frac{\partial}{\partial z}T_3(\mathbf{u}_z)\right\}\mathbf{u}_z$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\{T_1(\mathbf{u}_x)\mathbf{u}_x+T_2(\mathbf{u}_x)\mathbf{u}_y+T_3(\mathbf{u}_x)\mathbf{u}_z\}$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\{T_1(\mathbf{u}_y)\mathbf{u}_x+T_2(\mathbf{u}_y)\mathbf{u}_y+T_3(\mathbf{u}_y)\mathbf{u}_z\}$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\{T_1(\mathbf{u}_z)\mathbf{u}_x+T_2(\mathbf{u}_z)\mathbf{u}_y+T_3(\mathbf{u}_z)\mathbf{u}_z\}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{T}(\mathbf{u}_x)+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{T}(\mathbf{u}_y)+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{T}(\mathbf{u}_z)$$

$$=T(\nabla)$$

最后，假定在∇前还有其他函数．我们将$T(\nabla)$写成如下形式·

$$T(\nabla)=\mathbf{a}\times T_1(\nabla)$$

式中$\mathbf{a}$应从广义上理解，即理解为∇之前的所有函数．×号也应从广义上理解，即可为数量积、标量积或矢量积．$T_1(\nabla)$表示∇本身及其之后的所有函数．

因为$\mathbf{a}$在∇之前，所以根据$T(\nabla)$的定义$\mathbf{a}$在积分时应视为常数．上面已经证明

$$\iiint_V T_1(\nabla)dv=\oiint_\Sigma T_1(\mathbf{n})d\sigma$$

由此

$$\mathbf{a}\times\iiint_V T_1(\nabla)dv=\mathbf{a}\times\oiint_\Sigma T_1(\mathbf{n})d\sigma$$

但由于$\mathbf{a}$在积分时视为常数，故可移入积分号内，于是得

$$\iiint_V \mathbf{a}\times T_1(\nabla)dv=\oiint_\Sigma \mathbf{a}\times T_1(\mathbf{n})d\sigma$$

但

$$\mathbf{a}\times T_1(\nabla)=T(\nabla)$$

$$\mathbf{a} \times T_1(\mathbf{n}) = T(\mathbf{n})$$

因此

$$\iiint_V T(\nabla)dv = \oiint_\Sigma T(\mathbf{n})d\sigma$$

这样，我们对所有可能的情况都作了证明．特别应该指出，∇符号和$\mathbf{n}$之前的函数积分时都应视为常数，也就是说它们与积分元的位置无关．在一般的情况下，应取所研究点(x, y, z)上的值，即$\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z)$，$x, y, z$为所研究之点的坐标．

性质4 $T(\nabla)$在某固定点P上之值与坐标系的选择无关，即

$$T(\nabla) = \lim_{V \to P} \frac{1}{V} \oiint_\Sigma T(\mathbf{n})d\sigma \tag{1.9}$$

证 因

$$\iiint_V T(\nabla)dv = \oiint_\Sigma T(\mathbf{n})d\sigma$$

等式两边各除以V，并将体积V缩小成点P，则应用中值定理得

$$\lim_{V \to P} \frac{1}{V} \iiint_V T(\nabla)dv = T(\nabla)|_P$$

即$T(\nabla)$在P点之值．由此在P点，

$$T(\nabla) = \lim_{V \to P} \frac{1}{V} \oiint_\Sigma T(\mathbf{n})d\sigma$$

但此式右边与坐标系的选择无关，因此固定点P处的$T(\nabla)$之值亦与坐标系的选择无关．

根据这一性质可知，grad、div、rot和$(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}$等都与具体坐标系的选择无关．这一性质使$T(\nabla)$可称为微分不变量：虽然定义为对某一具体直角坐标系的微分量，但是，若换

一个坐标系，则对空间某一固定点 P 来说 $T(\nabla)$ 的值不变.

1.4 正确应用 ∇ 算子进行运算的例子

例 1 试指出下列运算中的错误.

设 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 均为变矢量，则

$$\mathbf{a}\mathrm{div}\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b} = (\nabla\cdot\mathbf{b})\mathbf{a} - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}$$
$$= \nabla\times[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]$$

这里有两个错误. 首先，$\mathbf{a}\mathrm{div}\mathbf{b}$ 不能写成 $(\nabla\cdot\mathbf{b})\mathbf{a}$，而只能写成 $\mathbf{a}(\nabla\cdot\mathbf{b})$，因为按定义在 $(\nabla\cdot\mathbf{b})\mathbf{a}$ 中对 $\mathbf{a}$ 也要进行微分:

$$(\nabla\cdot\mathbf{b})\mathbf{a} = \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{u}_x\cdot\mathbf{b})\mathbf{a} + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{u}_y\cdot\mathbf{b})\mathbf{a}$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{u}_z\cdot\mathbf{b})\mathbf{a}$$
$$= \mathbf{a}\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{u}_x\cdot\mathbf{b}) + (\mathbf{u}_x\cdot\mathbf{b})\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial x}$$
$$+ \mathbf{a}\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{u}_y\cdot\mathbf{b}) + (\mathbf{u}_y\cdot\mathbf{b})\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial y}$$
$$+ \mathbf{a}\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{u}_z\cdot\mathbf{b}) + (\mathbf{u}_z\cdot\mathbf{b})\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial z}$$
$$= \mathbf{a}\mathrm{div}\mathbf{b} + (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a} \neq \mathbf{a}\mathrm{div}\mathbf{b}$$

其次，即使将 $\mathbf{a}\mathrm{div}\mathbf{b}$ 写成 $\mathbf{a}(\nabla\cdot\mathbf{b})$，$\mathbf{a}(\nabla\cdot\mathbf{b})-(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}$ 也不等于 $\nabla\times[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]$，因为根据性质 2，

$$\nabla\times[\mathbf{a}\times\mathbf{b}] = \nabla\times[\mathbf{a}_c\times\mathbf{b}] + \nabla\times[\mathbf{a}\times\mathbf{b}_c]$$
$$= \mathbf{a}(\nabla\cdot\mathbf{b}) - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a}$$
$$- \mathbf{b}(\nabla\cdot\mathbf{a})$$

可见，在 $\nabla\times[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]$ 中还有最后两项要考虑. 因此本例的正确解是

$$\begin{aligned}&\mathbf{a}\mathrm{div}\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}\\&=\mathbf{a}(\nabla\cdot\mathbf{b})-(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}\\&=\nabla\times[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]-(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a}+\mathbf{b}\mathrm{div}\mathbf{a}\end{aligned}$$

只有在 **a** 是常矢量的条件下，$\mathbf{a}\mathrm{div}\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}$ 才等于 $\nabla\times[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]$，因此时 $(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a}=0$，$\mathrm{div}\mathbf{a}=0$。本例在 **a** 等于常矢量时也可直接推导如下：

$$\begin{aligned}&\mathbf{a}\mathrm{div}\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}\\&=\mathbf{a}(\nabla\cdot\mathbf{b})-(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}\\&=\nabla\times[\mathbf{a}_c\times\mathbf{b}]=\nabla\times[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]\end{aligned}$$

此处由第二步写出第三步的根据是 **a** 为常矢量，否则不可将脚注 c 略去。

例 2 试指出下列运算中的错误：

$$\begin{aligned}\nabla\times[\mathbf{b}\times\mathbf{c}]&=\mathbf{b}(\nabla\cdot\mathbf{c})-\mathbf{c}(\nabla\cdot\mathbf{b})\\&=\mathbf{b}\mathrm{div}\mathbf{c}-\mathbf{c}\mathrm{div}\mathbf{b}\end{aligned}$$

b、**c** 均为变矢。

此处错误在第一步上。根据性质 2，

$$\begin{aligned}\nabla\times[\mathbf{b}\times\mathbf{c}]&=\nabla\times[\mathbf{b}_c\times\mathbf{c}]+\nabla\times[\mathbf{b}\times\mathbf{c}_c]\\&=\mathbf{b}(\nabla\cdot\mathbf{c})-(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{c}+(\mathbf{c}\cdot\nabla)\mathbf{b}\\&\quad-\mathbf{c}(\nabla\cdot\mathbf{b})\\&=\mathbf{b}\mathrm{div}\mathbf{c}-\mathbf{c}\mathrm{div}\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{c}\\&\quad+(\mathbf{c}\cdot\nabla)\mathbf{b}\end{aligned}$$

原答案中少了最后两项。

例 3 试指出下列运算中的错误：

$$\mathbf{a}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{a}=\mathbf{a}\cdot[\nabla\times\mathbf{a}]=\nabla\cdot[\mathbf{a}\times\mathbf{a}]=0\ (\text{因}\ \mathbf{a}\times\mathbf{a}=0)$$

把 $\mathbf{a}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{a}$ 写成 $\mathbf{a}\cdot[\nabla\times\mathbf{a}]$ 当然是正确的。问题在于第二步：

$$\mathbf{a}\cdot[\nabla\times\mathbf{a}]=\nabla\cdot[\mathbf{a}\times\mathbf{a}_c]$$

这里第二个 **a** 要加上脚注 c，即在微分时要看作常数，因为它

是从∇号前面移到后面去的，按定义它不受微分的影响，而第一个$\mathbf{a}$则要对它微分，这两个$\mathbf{a}$在$T(\nabla)$的展开式中是不同的，不可能相等，故$\mathbf{a}\times\mathbf{a}_c\neq 0$，因此

$$\mathbf{a}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{a}\neq 0$$

从具体演算来看，

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot[\mathbf{a}\times\mathbf{a}_c]\\&=\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{u}_x\cdot[\mathbf{a}\times\mathbf{a}_c]+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{u}_y\cdot[\mathbf{a}\times\mathbf{a}_c]\\&\quad+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{u}_z\cdot[\mathbf{a}\times\mathbf{a}_c]\\&=\mathbf{u}_x\cdot\left[\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial x}\times\mathbf{a}\right]+\mathbf{u}_y\cdot\left[\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial y}\times\mathbf{a}\right]\\&\quad+\mathbf{u}_z\left[\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial z}\times\mathbf{a}\right]\end{aligned}$$

因

$$\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial x}\neq\mathbf{a},\qquad\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial y}\neq\mathbf{a}\text{ 和 }\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial z}\neq\mathbf{a}$$

故

$$\nabla\cdot[\mathbf{a}\times\mathbf{a}_c]\neq 0$$

本例的正确解是

$$\mathbf{a}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{a}=\mathbf{a}\cdot[\nabla\times\mathbf{a}]=\nabla\cdot[\mathbf{a}\times\mathbf{a}_c]\neq 0$$

实际上，因

$$\mathbf{a}=\mathbf{u}_xa_x+\mathbf{u}_ya_y+\mathbf{u}_za_z$$

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\mathbf{a}=&\mathbf{u}_x\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)+\mathbf{u}_y\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\\&+\mathbf{u}_z\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\end{aligned}$$

故

$$\mathbf{a}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{a}$$

$$= a_x\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + a_y\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + a_z\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)$$

在一般情况下显然不等于零.

由上面三例可见,对含有∇的式子,一方面可以将∇看成矢量进行恒等变换,另一方面又要考虑它具有微分的特性,即同时要运用性质 1 和性质 2, 决不可随意将∇后面的函数搬到它的前面去. 同样,如果将∇前面的函数搬到后面,一定要加上表示视为常数的脚注 c, 例如 $\mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) = (\nabla \cdot \mathbf{b})\mathbf{a}_c$, 否则就要犯错误.

但是,只要我们根据定义和已经严格证明的性质 1、2 正确地进行运算,就一定可以得到正确的结果,而不需用其他方法再进行验证. 为了说明如何正确运用∇算子并且显示∇算子运算法的简便性,在下面两节中将举出运算的实例. 从例题可以看出,用其他方法不容易得到的结果,用∇算子运算法可既直接而又简便地得到.

1.5 辅 助 公 式

为了避免重复运算, 现将几个常用的辅助公式推导出来供以后引证用.

辅助公式 1

$$\mathrm{grad}\varphi(f(r)) = \frac{d\varphi}{df}\,\mathrm{grad}f(r) \tag{1.10}$$

证

$$\mathrm{grad}\varphi(f(r)) = \nabla\varphi(f(r))$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\,\mathbf{u}_x\varphi(f(r)) + \frac{\partial}{\partial y}\,\mathbf{u}_y\varphi(f(r))$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{u}_z\varphi(f(r))$$

$$=\mathbf{u}_x\frac{d\varphi}{df}\frac{\partial f(r)}{\partial x}+\mathbf{u}_y\frac{d\varphi}{df}\frac{\partial f(r)}{\partial y}$$

$$+\mathbf{u}_z\frac{d\varphi}{df}\frac{\partial f(r)}{\partial z}$$

$$=\frac{d\varphi}{df}\nabla f(r)$$

$$=\frac{d\varphi}{df}\mathrm{grad}f(r)$$

辅助公式 2

$$\mathrm{grad}f(r)=f'(r)\mathrm{grad}r \tag{1.11}$$

证

$$\mathrm{grad}f(r)=\nabla f(r)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{u}_x f(r)+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{u}_y f(r)+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{u}_z f(r)$$

$$=f'(r)\mathbf{u}_x\frac{\partial r}{\partial x}+f'(r)\mathbf{u}_y\frac{\partial r}{\partial y}+f'(r)\mathbf{u}_z\frac{\partial r}{\partial z}$$

$$=f'(r)\nabla r$$

$$=f'(r)\mathrm{grad}r$$

辅助公式 3

$$\mathrm{grad}r=\frac{\mathbf{r}}{r}\ \text{或}\ \nabla r=\frac{\mathbf{r}}{r} \tag{1.12}$$

证

$$\mathrm{grad}r=\nabla r=\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{u}_x r+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{u}_y r+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{u}_z r$$

但

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{x^2+y^2+z^2})=\frac{2x}{2r}=\frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}\qquad\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}$$

由此

$$\mathrm{grad}r=\frac{\mathbf{u}_x x+\mathbf{u}_y y+\mathbf{u}_z z}{r}=\frac{\mathbf{r}}{r}$$

辅助公式 4

$$\mathrm{grad}\varphi(f(r))=\frac{\partial\varphi}{\partial f}f'(r)\frac{\mathbf{r}}{r}\tag{1.13}$$

证 将以上三个公式合并后即得此结果.

辅助公式 5

$$\mathrm{grad}\varphi(f(\mathbf{r}))=\frac{d\varphi}{df}\mathrm{grad}f(\mathbf{r})\tag{1.14}$$

式中 $\mathbf{r}$ 为自变量，$f(\mathbf{r})$ 为标量.

证 证明同辅助公式 1.

辅助公式 6

$$(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{r}=\mathbf{a}\tag{1.15}$$

证

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{r}&=\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{a}_c\cdot\mathbf{u}_x)\mathbf{r}+\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{a}_c\cdot\mathbf{u}_y)\mathbf{r}\\&\quad+\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{a}_c\cdot\mathbf{u}_z)\mathbf{r}\\&=\frac{\partial}{\partial x}(a_x)_c\mathbf{r}+\frac{\partial}{\partial y}(a_y)_c\mathbf{r}+\frac{\partial}{\partial z}(a_z)_c\mathbf{r}\\&=a_x\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}+a_y\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}+a_z\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z}\\&=a_x\mathbf{u}_x+a_y\mathbf{u}_y+a_z\mathbf{u}_z\\&=\mathbf{a}\end{aligned}$$

辅助公式 7

$$\mathrm{rot}\mathbf{r}=0\ \text{或}\ \nabla\times\mathbf{r}=0\tag{1.16}$$

证

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\mathbf{r} &= \nabla \times \mathbf{r} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}[\mathbf{u}_x \times \mathbf{r}] + \frac{\partial}{\partial y}[\mathbf{u}_y \times \mathbf{r}] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z}[\mathbf{u}_z \times \mathbf{r}]\end{aligned}$$

因

$$\mathbf{r} = x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{u}_x \times \mathbf{r} = y\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_z = y\mathbf{u}_z - z\mathbf{u}_y$$

$$\mathbf{u}_y \times \mathbf{r} = x\mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_x + z\mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_z = -x\mathbf{u}_z + z\mathbf{u}_x$$

$$\mathbf{u}_z \times \mathbf{r} = x\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_y = x\mathbf{u}_y - y\mathbf{u}_x$$

则

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\mathbf{r} &= \frac{\partial}{\partial x}(y\mathbf{u}_z - z\mathbf{u}_y) + \frac{\partial}{\partial y}(-x\mathbf{u}_z + z\mathbf{u}_x) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z}(x\mathbf{u}_y - y\mathbf{u}_x) \\ &= 0\end{aligned}$$

辅助公式 8

$$\mathrm{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}) = \mathbf{a} \text{ 或 } \nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}) = \mathbf{a} \qquad (1.17)$$

式中 $\mathbf{a}$ 为常矢量.

证 根据 $\nabla \times \mathbf{r} = 0$ 和 $(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{r} = \mathbf{a}$, 得

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}) &= \nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}) = \mathbf{a} \times [\nabla \times \mathbf{r}] + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{r} \\ &= \mathbf{a}\end{aligned}$$

注意, $\mathbf{a}$ 不是常矢量就不能作如上的变换.

辅助公式 9

$$\mathrm{div}\mathbf{r} = 3 \text{ 或 } \nabla\cdot\mathbf{r} = 3 \qquad (1.18)$$

证

$$\mathrm{div}\mathbf{r} = \nabla\cdot\mathbf{r}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{r} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{u}_y \cdot \mathbf{r} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{r}$$

$$= \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}$$

$$= 3$$

辅助公式 10

$$\mathrm{div}\mathbf{A}(f(\mathbf{r})) = \frac{d\mathbf{A}}{df} \cdot \mathrm{grad}f(\mathbf{r}) \tag{1.19}$$

式中 $f(\mathbf{r})$ 为标量函数；$\mathbf{A}(f(\mathbf{r}))$ 为矢量函数.

证

$$\mathrm{div}\mathbf{A}(f(\mathbf{r})) = \nabla \cdot \mathbf{A}(f(\mathbf{r}))$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{A} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{u}_y \cdot \mathbf{A} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{A}$$

$$= \mathbf{u}_x \cdot \frac{d\mathbf{A}}{df}\left(\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial x}\right) + \mathbf{u}_y \cdot \frac{d\mathbf{A}}{df}\left(\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial y}\right) + \mathbf{u}_z \cdot \frac{d\mathbf{A}}{df}\left(\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{d\mathbf{A}}{df} \cdot \left(\mathbf{u}_x \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial x} + \mathbf{u}_y \cdot \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial y} + \mathbf{u}_z \cdot \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{d\mathbf{A}}{df} \cdot \mathrm{grad}f(\mathbf{r})$$

辅助公式 11

$$\mathrm{rot}\mathbf{A}(f(\mathbf{r})) = -\frac{d\mathbf{A}}{df} \times \mathrm{grad}f(\mathbf{r}) \tag{1.20}$$

证

$$\mathrm{rot}\mathbf{A}(f(\mathbf{r})) = \nabla \times \mathbf{A}(f(\mathbf{r}))$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{u}_x \times \mathbf{A} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{u}_y \times \mathbf{A} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{u}_z \times \mathbf{A}$$

$$= \mathbf{u}_x \times \frac{d\mathbf{A}}{df}\left(\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial x}\right) + \mathbf{u}_y \times \frac{d\mathbf{A}}{df}\left(\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial y}\right)$$
$$+ \mathbf{u}_z \times \frac{d\mathbf{A}}{df}\left(\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial z}\right)$$
$$= -\frac{d\mathbf{A}}{df} \times \left(\mathbf{u}_x \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial x} + \mathbf{u}_y \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial y} + \mathbf{u}_z \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial z}\right)$$
$$= -\frac{d\mathbf{A}}{df} \times \mathrm{grad} f(\mathbf{r})$$

1.6 运 算 举 例

这里列举一些常用关系式的证明供以后查阅用.

例 1 证明

$$\mathrm{grad}(\varphi\psi) = \varphi\mathrm{grad}\psi + \psi\mathrm{grad}\varphi \tag{1.21}$$

证

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}(\varphi\psi) &= \nabla(\varphi\psi)\\ &= \nabla\varphi_c\psi + \nabla\varphi\psi_c\\ &= \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi\\ &= \varphi\mathrm{grad}\psi + \psi\mathrm{grad}\varphi\end{aligned}$$

例 2 证明

$$\mathrm{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a} + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b} + \mathbf{b}\times\mathrm{rot}\mathbf{A} + \mathbf{a}\times\mathrm{rot}\mathbf{b} \tag{1.22}$$

证

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) &= \nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\\ &= \nabla(\mathbf{a}_c\cdot\mathbf{b}) + \nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_c)\\ &= \mathbf{a}\times[\nabla\times\mathbf{b}] + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}\\ &\quad + \mathbf{b}\times[\nabla\times\mathbf{a}] + (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a}\\ &= (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a} + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b} + \mathbf{b}\times\mathrm{rot}\mathbf{a}\\ &\quad + \mathbf{a}\times\mathrm{rot}\mathbf{b}\end{aligned}$$

此处用到公式 $\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})=\mathbf{A}\times[\mathbf{B}\times\mathbf{C}]+\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$.

例 3 证明

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{c}=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot[\mathbf{a}\times \mathrm{rot}\mathbf{c}]$$
$$=\mathbf{b}\cdot\mathrm{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{c}\cdot(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a} \quad (1.23)$$

证

(1) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{c}=(\mathbf{b}\cdot\nabla)(\mathbf{a}_c\cdot\mathbf{c})$
$$=\mathbf{b}\cdot[\mathbf{a}\times[\nabla\times\mathbf{c}]+(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{c}]$$
$$=\mathbf{b}\cdot[\mathbf{a}\times \mathrm{rot}\mathbf{c}]+\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{c}$$

(2) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{c}=(\mathbf{b}\cdot\nabla)(\mathbf{a}_c\cdot\mathbf{c})$
$$=(\mathbf{b}\cdot\nabla)(\mathbf{a}_c\cdot\mathbf{c})+(\mathbf{b}\cdot\nabla)(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}_c)$$
$$-(\mathbf{b}\cdot\nabla)(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}_c)$$
$$=(\mathbf{b}\cdot\nabla)(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-(\mathbf{b}\cdot\nabla)(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}_c)$$
$$=\mathbf{b}\cdot\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{c}\cdot(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a}$$
$$=\mathbf{b}\cdot\mathrm{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{c}\cdot(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a}$$

例 4 证明

$$\mathrm{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}\varphi(r))=\mathbf{a}\varphi(r)+(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\frac{\mathbf{r}\varphi'(r)}{r} \quad (1.24)$$

式中 $\mathbf{a}$ 为常矢量.

证

$$\mathrm{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}\varphi(r))$$
$$=\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}\varphi(r))$$
$$=\nabla((\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})_c\varphi(r))+\nabla((\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\varphi_c(r))$$
$$=\varphi(r)\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})+(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\nabla\varphi(r)$$
$$=\varphi(r)\mathbf{a}+(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\varphi'(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$$

(用式(1.17)、(1.11)和(1.12))

例 5 设 $\varphi=\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}$, $\mathbf{a}=$ 常矢量,求 $\mathrm{grad}\varphi$.

解

$$\mathrm{grad}\varphi=\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{p})$$

$$= \mathbf{a} \times [\nabla \times \mathbf{p}] + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{p}$$
$$= \mathbf{a} \times \mathrm{rot}\mathbf{p} + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{p}$$

例 6 证明

$$\mathrm{grad}\frac{\mathbf{p}^2}{2} = \mathbf{p} \times \mathrm{rot}\mathbf{p} + (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{p} \qquad (1.25)$$

证

$$\mathrm{grad}\frac{\mathbf{p}^2}{2} = \frac{1}{2}\mathrm{grad}\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}$$
$$= \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p})$$
$$= \frac{1}{2}[\nabla(\mathbf{p}_c \cdot \mathbf{p}) + \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}_c)]$$
$$= \nabla(\mathbf{p}_c \cdot \mathbf{p})$$
$$= \mathbf{p} \times [\nabla \times \mathbf{p}] + (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{p}$$
$$= \mathbf{p} \times \mathrm{rot}\mathbf{p} + (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{p}$$

例 7 设 $\varphi(\mathbf{r}) = (\mathbf{arb})^2 + \mathbf{a}^2[\mathbf{b} \times \mathbf{r}]^2$，式中 $\mathbf{a}$ 为常矢，$\mathbf{b}$ 为常矢．试求 $\mathrm{grad}\varphi(\mathbf{r})$．

解

$$\mathrm{grad}\varphi(\mathbf{r}) = \nabla\{(\mathbf{arb})^2 + \mathbf{a}^2[\mathbf{b} \times \mathbf{r}]^2\}$$
$$= \nabla(\mathbf{arb})^2 + \nabla(\mathbf{a}^2[\mathbf{b} \times \mathbf{r}]^2)$$

但由于

$$\nabla(\mathbf{arb})^2 = 2(\mathbf{arb})\nabla(\mathbf{a} \cdot [\mathbf{r} \times \mathbf{b}])$$
$$= 2(\mathbf{arb})\nabla(\mathbf{r} \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{a}])$$
$$= 2(\mathbf{arb})[\mathbf{b} \times \mathbf{a}] \qquad (\text{用式}(1.17))$$
$$\nabla(\mathbf{a}^2[\mathbf{b} \times \mathbf{r}]^2) = \mathbf{a}^2\nabla([\mathbf{b} \times \mathbf{r}] \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{r}])$$
$$= \mathbf{a}^2\nabla(\mathbf{b}^2\mathbf{r}^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{b})^2)$$
$$= \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 2\mathbf{r} - \mathbf{a}^2 \cdot 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b}$$
$$= 2\mathbf{a}^2[\mathbf{r}\mathbf{b}^2 - \mathbf{b}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{b})]$$
$$= 2\mathbf{a}^2([\mathbf{b} \times \mathbf{r}] \cdot \mathbf{b})$$

故

$$\mathrm{grad}\varphi(\mathbf{r}) = 2\{(\mathbf{arb})[\mathbf{b}\times\mathbf{a}] + \mathbf{a}^2[\mathbf{b}\times\mathbf{r}]\cdot\mathbf{b}\}$$

例 8 证明

$$\mathrm{div}(\varphi\mathbf{a}) = \varphi\mathrm{div}\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot\mathrm{grad}\varphi \tag{1.26}$$

证

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\varphi\mathbf{a}) &= \nabla\cdot(\varphi\mathbf{a})\\ &= \nabla\cdot(\varphi_c\mathbf{a}) + \nabla\cdot(\varphi\mathbf{a}_c)\\ &= \varphi\nabla\cdot\mathbf{a} + \nabla\varphi\cdot\mathbf{a}_c\\ &= \varphi\mathrm{div}\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot\mathrm{grad}\varphi\end{aligned}$$

例 9 证明

$$\mathrm{div}[\mathbf{a}\times\mathbf{b}] = \mathbf{b}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{b} \tag{1.27}$$

证

$$\begin{aligned}\mathrm{div}[\mathbf{a}\times\mathbf{b}] &= \nabla\cdot[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]\\ &= \nabla\cdot[\mathbf{a}_c\times\mathbf{b}] + \nabla\cdot[\mathbf{a}\times\mathbf{b}_c]\\ &= -\mathbf{a}_c\cdot[\nabla\times\mathbf{b}] + \mathbf{b}_c\cdot[\nabla\times\mathbf{a}]\\ &= \mathbf{b}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{b}\end{aligned}$$

例 10 证明

$$\mathrm{div}\mathbf{r}\varphi(r) = r\varphi'(r) + 3\varphi(r) \tag{1.28}$$

证

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\mathbf{r}\varphi(r)) &= \nabla\cdot(\mathbf{r}\varphi(r))\\ &= \nabla\cdot(\mathbf{r}_c\varphi(r)) + \nabla\cdot\mathbf{r}\varphi_c(r)\\ &= \mathbf{r}_c\cdot\nabla\varphi(r) + \varphi_c(r)\nabla\cdot\mathbf{r}\\ &= \mathbf{r}\cdot\mathrm{grad}\varphi(r) + \varphi(r)\mathrm{div}\mathbf{r}\\ &= \mathbf{r}\cdot\varphi'(r)\frac{\mathbf{r}}{r} + 3\varphi(r)\\ &= r\varphi'(r) + 3\varphi(r)\end{aligned}$$

例 11 设 $\mathbf{p}(\mathbf{r}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r} - \mathbf{r}^2\mathbf{b}$，式中 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 均为常矢量，求 $\mathrm{div}\mathbf{p}(\mathbf{r})$。

解

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\mathbf{p}(\mathbf{r}) &= \nabla\cdot((\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}-\mathbf{r}^2\mathbf{b})\\ &= \nabla\cdot(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}-\nabla\cdot\mathbf{r}^2\mathbf{b}\end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r} &= \nabla\cdot(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}_c)\mathbf{r}+\mathbf{r}_c\cdot\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\\ &= 3(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})+\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}\quad\text{(用式(1.18)及(1.17))}\\ &= 4(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\\ \nabla\cdot\mathbf{r}^2\mathbf{b} &= \nabla\mathbf{r}^2\cdot\mathbf{b}\\ &= 2r\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\mathbf{b}\\ &= 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{b}\end{aligned}$$

由此

$$\mathrm{div}\mathbf{p}(\mathbf{r}) = 4(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})-2(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})$$

例 12 证明

$$\mathrm{div}\mathbf{p}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}) = (\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})\mathrm{div}\mathbf{p}+(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})+\mathbf{r}\cdot(\mathbf{p}\cdot\nabla)\mathbf{q}\quad(1.29)$$

证

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\mathbf{p}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}) &= \nabla\cdot\mathbf{p}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})\\ &= \nabla\cdot\mathbf{p}_c(\mathbf{q}_c\cdot\mathbf{r})+\nabla\cdot\mathbf{p}_c(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_c)\\ &\quad+\nabla\cdot\mathbf{p}(\mathbf{q}_c\cdot\mathbf{r}_c)\\ &= \nabla(\mathbf{q}_c\cdot\mathbf{r})\cdot\mathbf{p}_c+\nabla(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_c)\cdot\mathbf{p}_c\\ &\quad+\nabla\cdot\mathbf{p}(\mathbf{q}_c\cdot\mathbf{r}_c)\end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{p}(\mathbf{q}_c\cdot\mathbf{r}_c) &= (\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})\mathrm{div}\mathbf{p}\\ \nabla(\mathbf{q}_c\cdot\mathbf{r})\cdot\mathbf{p}_c &= \mathbf{p}\cdot\mathbf{q}\\ \nabla(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_c)\cdot\mathbf{p}_c &= \mathbf{p}_c\cdot\nabla(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_c)\\ &= (\mathbf{p}_c\cdot\nabla)(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_c)\\ &= \mathbf{r}_c\cdot(\mathbf{p}_c\cdot\nabla)\mathbf{q}\\ &= \mathbf{r}\cdot(\mathbf{p}\cdot\nabla)\mathbf{q}\end{aligned}$$

由此

$$\mathrm{div}\mathbf{p}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})=(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})\mathrm{div}\mathbf{p}+(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})+\mathbf{r}\cdot(\mathbf{p}\cdot\nabla)\mathbf{q}$$

例 13 证明

$$\mathrm{div}\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a}^2}=\frac{\mathrm{div}\mathbf{a}}{\mathbf{a}^2}-\frac{2\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{a}}{(\mathbf{a}^2)^2} \tag{1.30}$$

证

$$\mathrm{div}\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a}^2}=\frac{1}{\mathbf{a}^2}\nabla\cdot\mathbf{a}+\nabla\cdot\frac{\mathbf{a}_c}{\mathbf{a}^2}$$

$$=\frac{\mathrm{div}\mathbf{a}}{\mathbf{a}^2}+\nabla\frac{1}{\mathbf{a}^2}\cdot\mathbf{a}_c$$

但

$$\nabla\frac{1}{\mathbf{a}^2}=-\frac{\nabla\mathbf{a}^2}{(\mathbf{a}^2)^2}=-\frac{2\nabla(\mathbf{a}_c\cdot\mathbf{a})}{(\mathbf{a}^2)^2}$$

$$=-2\frac{\mathbf{a}\times[\nabla\times\mathbf{a}]+(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{a}}{(\mathbf{a}^2)^2}$$

两边从左边点乘 $\mathbf{a}_c$，因

$$\mathbf{a}\cdot[\mathbf{a}\times[\nabla\times\mathbf{a}]]=[\mathbf{a}\times\mathbf{a}]\cdot[\nabla\times\mathbf{a}]=0$$

因此

$$\nabla\frac{1}{\mathbf{a}^2}\cdot\mathbf{a}_c=-\frac{2\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{a}}{(\mathbf{a}^2)^2}$$

最后得

$$\mathrm{div}\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a}^2}=\frac{\mathrm{div}\mathbf{a}}{\mathbf{a}^2}-\frac{2\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{a}}{(\mathbf{a}^2)^2}$$

例 14 证明

$$\mathrm{rot}(\varphi\mathbf{a})=\varphi\mathrm{rot}\mathbf{a}+\mathrm{grad}\varphi\times\mathbf{a} \tag{1.31}$$

证

$$\mathrm{rot}(\varphi\mathbf{a})=\nabla\times\varphi\mathbf{a}$$

$$=\nabla\times\varphi_c\mathbf{a}+\nabla\times\varphi\mathbf{a}_c$$

$$=\varphi_c\nabla\times\mathbf{a}+\nabla\varphi\times\mathbf{a}_c$$

$$= \varphi \mathrm{rot}\mathbf{a} + \mathrm{grad}\varphi \times \mathbf{a}$$

例 15 证明

$$\mathrm{rot}[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + \mathbf{a}\mathrm{div}\mathbf{b} - \mathbf{b}\mathrm{div}\mathbf{a} \tag{1.32}$$

证

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] &= \nabla \times [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \\ &= \nabla \times [\mathbf{a}_c \times \mathbf{b}] + \nabla \times [\mathbf{a} \times \mathbf{b}_c] \\ &= \mathbf{a}_c(\nabla \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a}_c \cdot \nabla)\mathbf{b} \\ &\quad + (\mathbf{b}_c \cdot \nabla)\mathbf{a} - \mathbf{b}_c(\nabla \cdot \mathbf{a}) \\ &= (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} \\ &\quad + \mathbf{a}\mathrm{div}\mathbf{b} - \mathbf{b}\mathrm{div}\mathbf{a}\end{aligned}$$

例 16 证明

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \cdot \mathrm{rot}\mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{c} - \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{c} \tag{1.33}$$

证

$$\begin{aligned}[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \cdot \mathrm{rot}\mathbf{c} &= [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \cdot [\nabla \times \mathbf{c}] \\ &= (\mathbf{a} \cdot \nabla)(\mathbf{b}_c \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{b} \cdot \nabla)(\mathbf{a}_c \cdot \mathbf{c}) \\ &= \mathbf{b}_c \cdot (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{c} - \mathbf{a}_c \cdot (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{c} \\ &= \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{c} - \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{c}\end{aligned}$$

例 17 设$\mathbf{a}$ = 常矢量，证明

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} = \mathrm{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{a} \times \mathrm{rot}\mathbf{b} \tag{1.34}$$

证

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathrm{rot}\mathbf{b} &= \mathbf{a} \times [\nabla \times \mathbf{b}] \\ &= \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} \\ &= \mathrm{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}\end{aligned}$$

移项后即得所需结果.

例 18 证明

$$[\mathbf{a} \times \nabla] \times \mathbf{b} = (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathrm{rot}\mathbf{b} - \mathbf{a}\mathrm{div}\mathbf{b} \tag{1.35}$$

证

$$[\mathbf{a}\times\nabla]\times\mathbf{b}=\nabla(\mathbf{a}_c\cdot\mathbf{b})-\mathbf{a}(\nabla\cdot\mathbf{b})$$
$$=\mathbf{a}\times[\nabla\times\mathbf{b}]+(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}-\mathbf{a}\mathrm{div}\mathbf{b}$$
$$=(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathrm{rot}\mathbf{b}-\mathbf{a}\mathrm{div}\mathbf{b}$$

例 19 证明

$$[\nabla\times\mathbf{a}]\times\mathbf{b}=-\mathbf{a}\times\mathrm{rot}\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}+\mathrm{rot}\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\mathrm{div}\mathbf{b}\qquad(1.36)$$

证

$$[\nabla\times\mathbf{a}]\times\mathbf{b}=[\nabla\times\mathbf{a}_c]\times\mathbf{b}+[\nabla\times\mathbf{a}]\times\mathbf{b}_c$$
$$=-[\mathbf{a}\times\nabla]\times\mathbf{b}+\mathrm{rot}\mathbf{a}\times\mathbf{b}$$
$$=-\mathbf{a}\times\mathrm{rot}\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}+\mathbf{a}\mathrm{div}\mathbf{b}+\mathrm{rot}\mathbf{a}\times\mathbf{b}\qquad(\text{用式}(1.35))$$

例 20 证明

$$(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{a}=\frac{1}{2}\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})-\mathbf{a}\times\mathrm{rot}\mathbf{a}\qquad(1.37)$$

证 因

$$(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{a}=(\mathbf{a}_c\cdot\nabla)\mathbf{a}$$

利用公式 $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}=-\mathbf{A}\times[\mathbf{B}\times\mathbf{C}]+\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})$, 得

$$(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{a}=-\mathbf{a}\times[\nabla\times\mathbf{a}]+\nabla(\mathbf{a}_c\cdot\mathbf{a})$$
$$=-\mathbf{a}\times\mathrm{rot}\mathbf{a}+\frac{1}{2}\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})$$

例 21 设 $\mathbf{V}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$, $\boldsymbol{\omega}=$ 常矢量, 求证

$$\mathrm{grad}\mathbf{V}^2=\mathbf{V}\times\mathrm{rot}\mathbf{V}\qquad(1.38)$$

证

$$\mathrm{grad}\mathbf{V}^2=\mathrm{grad}[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}]^2$$
$$=\mathrm{grad}(\boldsymbol{\omega}^2\mathbf{r}^2-(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r})^2)$$
$$=\nabla(\boldsymbol{\omega}^2\mathbf{r}^2-(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r})^2)$$
$$=\boldsymbol{\omega}^2\nabla\mathbf{r}^2-2(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r})\nabla(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r})$$
$$=2\boldsymbol{\omega}^2\mathbf{r}-2(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r})\boldsymbol{\omega}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}\times\mathrm{rot}\mathbf{V}&=[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}]\times[\nabla\times[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}]]\\&=[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}]\times(\boldsymbol{\omega}(\nabla\cdot\mathbf{r})-(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\mathbf{r})\\&=[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}]\times(3\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\omega})\quad(\text{用式(1.17)})\\&=[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}]\times 2\boldsymbol{\omega}\\&=2(\boldsymbol{\omega}^2\mathbf{r}-(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r})\boldsymbol{\omega})\end{aligned}$$

与 $\mathrm{grad}\mathbf{V}^2$ 比较即得证.

例 22 设 $\mathbf{V}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$，$\boldsymbol{\omega}$ 为常矢量,求证

$$(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}=\frac{1}{2}\mathrm{rot}\mathbf{V}\times\mathbf{V}\tag{1.39}$$

证 由例 20、21 得

$$\begin{aligned}(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}&=\frac{1}{2}\nabla(\mathbf{V}\cdot\mathbf{V})-\mathbf{V}\times\mathrm{rot}\mathbf{V}\\&=\frac{1}{2}\mathrm{grad}\mathbf{V}^2-\mathbf{V}\times\mathrm{rot}\mathbf{V}\\&=\frac{1}{2}\mathbf{V}\times\mathrm{rot}\mathbf{V}-\mathbf{V}\times\mathrm{rot}\mathbf{V}\\&=-\frac{1}{2}\mathbf{V}\times\mathrm{rot}\mathbf{V}\\&=\frac{1}{2}\mathrm{rot}\mathbf{V}\times\mathbf{V}\end{aligned}$$

1.7 积分关系式

利用公式

$$\iiint_V T(\nabla)dv=\oiint_\Sigma T(\mathbf{n})d\sigma\tag{1.8}$$

可以得到一系列积分关系式. 现举例如下:

例 1 取 $T(\nabla)$ 为 $\nabla\varphi$,即得

$$\iiint_V \mathrm{grad}\varphi dv=\iiint_V\nabla\varphi dv=\oiint_\Sigma \mathbf{n}\varphi d\sigma\tag{1.40}$$

例 2 取 $T(\nabla)$ 为 $\nabla \cdot \mathbf{a}$，即得

$$\iiint_V \mathrm{div}\mathbf{a}dv = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{a}dv = \oiint_\Sigma \mathbf{n} \cdot \mathbf{a}d\sigma \tag{1.41}$$

例 3 取 $T(\nabla)$ 为 $\nabla \times \mathbf{a}$，即得

$$\iiint_V \mathrm{rot}\mathbf{a}dv = \iiint_V \nabla \times \mathbf{a}dv = \oiint_\Sigma [\mathbf{n} \times \mathbf{a}]d\sigma \tag{1.42}$$

例 4 取 $T(\nabla)$ 为 $\nabla \cdot [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$，即得

$$\iiint_V \mathrm{div}[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]dv = \iiint_V \nabla \cdot [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]dv$$

$$= \oiint_\Sigma \mathbf{n} \cdot [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]d\sigma = \oiint_\Sigma (\mathbf{nab})d\sigma \tag{1.43}$$

例 5 取 $T(\nabla)$ 为 $\nabla \times [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$，即得

$$\iiint_V \mathrm{rot}[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]dv = \oiint_\Sigma \mathbf{n} \times [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]d\sigma \tag{1.44}$$

例 6 取 $T(\nabla)$ 为 $(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}$，即得

$$\iiint_V (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}dv = \oiint_\Sigma (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})\mathbf{b}d\sigma \tag{1.45}$$

这个积分关系式左右两边中的 $\mathbf{a}$ 在积分时应视为常数．如果积分时 $\mathbf{a}$ 也当作被积函数，那么上列公式就不能用．当 $\mathbf{a}$ 为被积函数时，

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} = (\nabla \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} - (\nabla \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}_c$$
$$= (\nabla \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} - \mathbf{b}\mathrm{div}\mathbf{a}$$

于是

$$\iiint_V (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}dv = \iiint_V ((\nabla \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} - \mathbf{b}\mathrm{div}\mathbf{a})dv$$

$$= \oiint_\Sigma (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}d\sigma - \iiint_V \mathbf{b}\mathrm{div}\mathbf{a}dv \tag{1.46}$$

下面推导几个有关线积分的积分关系式．通常，这些线

积分关系式称作斯托克斯定理.

首先,我们引用矢量场论中的斯托克斯定理:

$$\iint_S \mathbf{n}\cdot \mathrm{rot}\mathbf{a}\,d\sigma = \oint_l \mathbf{a}\cdot d\mathbf{l}$$

式中 $\mathbf{a}$ 为矢量函数; l 为封闭环路; S 为张于环路上的曲面; $d\sigma$ 为面积元; $d\mathbf{l}$ 为沿环路方向的线积分元. 环路方向与曲面上任一点的单位法向量 $\mathbf{n}$ 成右手螺旋关系.

现在分别来证明几个常用的公式.

公式 1

$$\oint_l \varphi d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{n}\times \mathrm{grad}\varphi d\sigma$$

$$= \iint_S [\mathbf{n}\times\nabla]\varphi d\sigma \qquad (1.47)$$

证 令 $\mathbf{g}$ 为任意常矢量,则

$$\mathbf{c}\cdot\oint_l \varphi d\mathbf{l} = \oint_l \mathbf{g}\cdot\varphi d\mathbf{l} = \oint_l (\varphi\mathbf{g})\cdot d\mathbf{l}$$

$$= \iint_S \mathrm{rot}(\varphi\mathbf{g})\cdot\mathbf{n}d\sigma$$

$$= \iint_S \mathbf{n}\cdot[\nabla\times\varphi\mathbf{g}]d\sigma$$

$$= \iint_S \mathbf{n}\times[\nabla\varphi\times\mathbf{g}]d\sigma$$

$$= \iint_S \mathbf{g}\cdot[\mathbf{n}\times\nabla\varphi]d\sigma$$

$$= \mathbf{g}\cdot\iint_S [\mathbf{n}\times\nabla\varphi]d\sigma$$

由于 $\mathbf{g}$ 是任意常矢量,因此

$$\oint_l \varphi d\mathbf{l} = \iint_S [\mathbf{n} \times \nabla\varphi] d\sigma = \iint_S \mathbf{n} \times \mathrm{grad}\varphi d\sigma$$
$$= \iint_S [\mathbf{n} \times \nabla]\varphi d\sigma$$

公式 2

$$\oint_l \mathbf{a} \times d\mathbf{l} = -\iint_S [\mathbf{n} \times \nabla] \times \mathbf{a} d\sigma \qquad (1.48)$$

证

$$\oint_l \mathbf{a} \times d\mathbf{l} = \oint_l (a_x\mathbf{u}_x + a_y\mathbf{u}_y + a_z\mathbf{u}_z) \times d\mathbf{l}$$
$$= \mathbf{u}_x \times \oint_l a_x d\mathbf{l} + \mathbf{u}_y \times \oint_l a_y d\mathbf{l}$$
$$+ \mathbf{u}_z \times \oint_l a_z d\mathbf{l}$$
$$= \mathbf{u}_x \times \iint_S [\mathbf{n} \times \nabla] a_x d\sigma + \mathbf{u}_y \times \iint_S [\mathbf{n}$$
$$\times \nabla] a_y d\sigma + \mathbf{u}_z \times \iint_S [\mathbf{n} \times \nabla] a_z d\sigma$$
$$= -\iint_S [\mathbf{n} \times \nabla] \times (\mathbf{u}_x a_x + \mathbf{u}_y a_y + \mathbf{u}_z a_z) d\sigma$$
$$= -\iint_S [\mathbf{n} \times \nabla] \times \mathbf{a} d\sigma$$

公式 3

$$\oint_l \varphi \mathrm{grad} b \cdot d\mathbf{l} = \iint_S [\mathrm{grad}\varphi \times \mathrm{grad} b] \cdot \mathbf{n} d\sigma$$
$$= -\oint_l b\mathrm{grad}\varphi \cdot d\mathbf{l} \qquad (1.49)$$

证

$$\oint_l \varphi \mathrm{grad} b \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{n} \cdot \mathrm{rot}(\varphi \mathrm{grad} b) d\sigma$$

$$= -\iint_S \mathbf{n}\cdot[\nabla\times\varphi\mathrm{grad}b]d\sigma$$

$$= \iint_S \mathbf{n}\cdot[\nabla\varphi\times(\mathrm{grad}b)_c]d\sigma$$

$$+\iint_S \mathbf{n}\cdot[\nabla\times\mathrm{grad}b]\varphi_c d\sigma$$

因 $\nabla\times\mathrm{grad}b=\mathrm{rotgrad}b=0$（见式(1.62)），故

$$\oint_l \varphi\mathrm{grad}b\cdot d\mathbf{l}=\iint_S[\mathrm{grad}\varphi\times\mathrm{grad}b]\cdot\mathbf{n}d\sigma$$

将式中的 φ、b 对换，即得

$$\iint_S[\mathrm{grad}\varphi\times\mathrm{grad}b]\cdot\mathbf{n}d\sigma=-\oint_l b\mathrm{grad}\varphi\cdot d\mathbf{l}$$

所以

$$\oint_l \varphi\mathrm{grad}b\cdot d\mathbf{l}=\iint_S[\mathrm{grad}\varphi\times\mathrm{grad}b]\cdot\mathbf{n}d\sigma$$

$$=-\oint_l b\mathrm{grad}\varphi\cdot d\mathbf{l}$$

公式 4

$$\oint_l(\mathbf{a}\cdot d\mathbf{l})\mathrm{grad}b=\iint_S([\mathbf{n}\times\nabla]\cdot\mathbf{a})\mathrm{grad}b d\sigma \quad (1.50)$$

证 令 $\mathbf{c}$ 为任意常矢量，则

$$\mathbf{c}\cdot\oint_l(\mathbf{a}\cdot d\mathbf{l})\mathrm{grad}b=\oint_l(\mathbf{a}\cdot d\mathbf{l})(\mathbf{c}\cdot\mathrm{grad}b)$$

$$=\iint_S[\nabla\times\mathbf{a}(\mathbf{c}\cdot\mathrm{grad}b)]\cdot d\sigma$$

$$=\iint_S\mathbf{n}\cdot[\nabla\times\mathbf{a}(\mathbf{c}\cdot\mathrm{grad}b)]d\sigma$$

$$=\iint_S([\mathbf{n}\times\nabla]\cdot\mathbf{a})(\mathbf{c}\cdot\mathrm{grad}b)d\sigma$$

$$= \mathbf{c} \cdot \iint_S ([\mathbf{n} \times \nabla] \cdot \mathbf{a}) \mathrm{grad} b d\sigma$$

因 $\mathbf{c}$ 为任意常矢量，故最后得

$$\oint_l (\mathbf{a} \cdot d\mathbf{l}) \mathrm{grad} b = \iint_S ([\mathbf{n} \times \nabla] \cdot \mathbf{a}) \mathrm{grad} b d\sigma$$

1.8 二重 ∇ 算子的定义

在运算矢量函数过程中，经常会碰到 divgradφ、rotgradφ、graddiv$\mathbf{R}$、divrot$\mathbf{R}$ 和 rotrot$\mathbf{R}$（φ、$\mathbf{R}$ 为标量场及矢量场）等函数．为了处理这些函数，需要引入二重∇算子概念．我们先给出二重∇算子的定义，然后再研究它的性质，最后通过具体例题来介绍其运算方法．

定义 对任何在一个表达式中含有两个∇和对每个∇分别为线性的表达式 $T(\nabla, \nabla)$，作如下的理解：

(1) 先将一个∇看作固定的矢量，例如将前一个∇看作固定的矢量 $\mathbf{p}$，再按一般的定义理解 $T(\mathbf{p}, \nabla)$．这里，$T(\mathbf{p}, \nabla)$ 简写为 $T_1(\mathbf{p})$．

(2) 在 $T_1(\mathbf{p})$ 中将 $\mathbf{p}$ 换成∇，再按一般的定义来理解 $T_1(\nabla)$，所得结果即为 $T(\nabla, \nabla)$．

具体来说，设给定一含有两个∇的表达式 $T(\nabla, \nabla)$，则按照定义，先将一个∇换成固定矢量 $\mathbf{p}$，然后再按定义写出 $T(\mathbf{p}, \nabla)$ 的表达式

$$\begin{aligned} T_1(\mathbf{p}) &= T(\mathbf{p}, \nabla) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} T(\mathbf{p}, \mathbf{u}_x) + \frac{\partial}{\partial y} T(\mathbf{p}, \mathbf{u}_y) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} T(\mathbf{p}, \mathbf{u}_z) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
T(\nabla,\nabla) &= T_1(\nabla)\\
&= \frac{\partial}{\partial x}T_1(\mathbf{u}_x)+\frac{\partial}{\partial y}T_1(\mathbf{u}_y)+\frac{\partial}{\partial z}T_1(\mathbf{u}_z)\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial x}T(\mathbf{u}_x,\mathbf{u}_x)+\frac{\partial}{\partial y}T(\mathbf{u}_x,\mathbf{u}_y)\right.\\
&\quad\left.+\frac{\partial}{\partial z}T(\mathbf{u}_x,\mathbf{u}_z)\right\}\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial}{\partial x}T(\mathbf{u}_y,\mathbf{u}_x)+\frac{\partial}{\partial y}T(\mathbf{u}_y,\mathbf{u}_y)\right.\\
&\quad\left.+\frac{\partial}{\partial z}T(\mathbf{u}_y,\mathbf{u}_z)\right\}\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial}{\partial x}T(\mathbf{u}_z,\mathbf{u}_x)+\frac{\partial}{\partial y}T(\mathbf{u}_z,\mathbf{u}_y)\right.\\
&\quad\left.+\frac{\partial}{\partial z}T(\mathbf{u}_z,\mathbf{u}_z)\right\}\\
&= \frac{\partial^2}{\partial x^2}T(\mathbf{u}_x,\mathbf{u}_x)+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}T(\mathbf{u}_x,\mathbf{u}_y)\\
&\quad+\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}T(\mathbf{u}_x,\mathbf{u}_z)+\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}T(\mathbf{u}_y,\mathbf{u}_x)\\
&\quad+\frac{\partial^2}{\partial y^2}T(\mathbf{u}_y,\mathbf{u}_y)+\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}T(\mathbf{u}_y,\mathbf{u}_z)\\
&\quad+\frac{\partial^2}{\partial z\partial x}T(\mathbf{u}_z,\mathbf{u}_x)+\frac{\partial^2}{\partial z\partial y}T(\mathbf{u}_z,\mathbf{u}_y)\\
&\quad+\frac{\partial^2}{\partial z^2}T(\mathbf{u}_z,\mathbf{u}_z)
\end{aligned}
$$

因

$$
\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\quad\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2}{\partial z\partial y}\quad\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2}{\partial z\partial x}
$$

故上式又可写成

$$T(\nabla,\nabla)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}T(\mathbf{u}_x,\mathbf{u}_x)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}T(\mathbf{u}_y,\mathbf{u}_y)$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial z^2}T(\mathbf{u}_z,\mathbf{u}_z)$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(T(\mathbf{u}_x,\mathbf{u}_y)+T(\mathbf{u}_y,\mathbf{u}_x))$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}(T(\mathbf{u}_y,\mathbf{u}_z)+T(\mathbf{u}_z,\mathbf{u}_y))$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial z\partial x}(T(\mathbf{u}_z,\mathbf{u}_x)+T(\mathbf{u}_x,\mathbf{u}_z)) \quad (1\,51)$$

下面通过具体的例子来说明 $T(\nabla,\nabla)$ 的含意. 我们只考虑所有函数都处于 ∇,∇ 之后的情况.

例 1 试说明 $T(\nabla,\nabla)=(\nabla\cdot\nabla)\varphi$ 的含义.

按上述 $T(\nabla,\nabla)$ 的定义,

$$T_1(\mathbf{p})=(\mathbf{p}\cdot\nabla)\varphi=(\mathbf{p}\cdot\nabla\varphi)$$
$$=(\mathbf{p}\cdot\mathrm{grad}\varphi)$$

故

$$T(\nabla,\nabla)=T_1(\nabla)=(\nabla\cdot\mathrm{grad}\varphi)$$
$$=\mathrm{divgrad}\varphi$$

由此可见

$$(\nabla\cdot\nabla)\varphi=\mathrm{divgrad}\varphi \qquad (1.52)$$

例 2 试说明 $T(\nabla,\nabla)=\nabla\times\nabla\varphi$ 的含义.

按上述 $T(\nabla,\nabla)$ 的定义,

$$T_1(\mathbf{p})=\mathbf{p}\times\nabla\varphi=\mathbf{p}\times\mathrm{grad}\varphi$$
$$T(\nabla,\nabla)=T_1(\nabla)=\nabla\times\mathrm{grad}\varphi=\mathrm{rotgrad}\varphi$$

由此可见

$$\nabla\times\nabla\varphi=\mathrm{rotgrad}\varphi \qquad (1.53)$$

例 3 试说明 $T(\nabla,\nabla)=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{R})$ 的含义.

按上述 $T(\nabla,\nabla)$ 的定义

$$T_1(\mathbf{p}) = \mathbf{p}(\nabla \cdot \mathbf{R}) = \mathbf{p}\mathrm{div}\mathbf{R}$$

$$T(\nabla, \nabla) = T_1(\nabla) = \nabla\mathrm{div}\mathbf{R} = \mathrm{graddiv}\mathbf{R}$$

由此可见

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{R}) = \mathrm{graddiv}\mathbf{R} \tag{1.54}$$

例 4 试说明 $T(\nabla, \nabla) = \nabla \cdot [\nabla \times \mathbf{R}]$ 的含义.

按上述 $T(\nabla, \nabla)$ 的定义

$$T_1(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot [\nabla \times \mathbf{R}] = \mathbf{p} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{R}$$

$$T(\nabla, \nabla) = \nabla \cdot \mathrm{rot}\mathbf{R} = \mathrm{divrot}\mathbf{R}$$

由此可见

$$\nabla \cdot [\nabla \times \mathbf{R}] = \mathrm{divrot}\mathbf{R} \tag{1.55}$$

例 5 试说明 $T(\nabla, \nabla) = \nabla \times [\nabla \times \mathbf{R}]$ 的含义.

按上述 $T(\nabla, \nabla)$ 的定义

$$T_1(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \times [\nabla \times \mathbf{R}] = \mathbf{p} \times \mathrm{rot}\mathbf{R}$$

$$T(\nabla,\nabla) = T_1(\nabla) = \nabla \times \mathrm{rot}\mathbf{R} = \mathrm{rotrot}\mathbf{R}$$

由此可见

$$\nabla \times [\nabla \times \mathbf{R}] = \mathrm{rotrot}\mathbf{R} \tag{1.56}$$

1.9 $T(\nabla, \nabla)$ 的性质

性质 1 对 $T(\nabla,\nabla)$ 可将 ∇,∇ 看成普通矢量进行矢量代数恒等变换,所得结果不变. 但应注意, 不要把 ∇, ∇ 后面的函数搬到任何一个 ∇ 的前面来.

证 $T(\nabla, \nabla)$ 经过变换后变为 $W(\nabla, \nabla)$ 意味着 $T(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_x) \equiv W(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_x)$. 又因为原来所有的函数都在 ∇, ∇ 后面, 需要微分,变换后它们仍然在 ∇,∇ 后面,仍然需要微分,所以

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} T(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_x) \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} W(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_x) \cdots$$

于是

$$T(\nabla,\nabla)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}T(\mathbf{u}_x,\mathbf{u}_x)+\cdots$$
$$=\frac{\partial^2}{\partial x^2}W(\mathbf{u}_x,\mathbf{u}_x)+\cdots$$
$$=W(\nabla,\nabla)$$

性质 2 若 $T(\mathbf{p},\mathbf{q})\equiv 0$，则 $T(\nabla,\nabla)\equiv 0$，式中 $\mathbf{p},\mathbf{q}$ 为任意两矢量场.

证 $T(\mathbf{p},\mathbf{q})\equiv 0$ 意味着 $T(\mathbf{u}_x,\mathbf{u}_x)\equiv 0\cdots T(\mathbf{u}_x,\mathbf{u}_y)\equiv 0$ 等等，由表达式(1.51)直接可知

$$T(\nabla,\nabla)\equiv 0$$

性质 3 若 $T(\mathbf{p},\mathbf{p})\equiv 0$，则 $T(\nabla,\nabla)\equiv 0$，式中 $\mathbf{p}$ 为任意矢量场.

证 考虑 $T(\mathbf{p}+\mathbf{q},\mathbf{p}+\mathbf{q})$，其中 $\mathbf{q}$ 为另一任意矢量场，由于 $T(\nabla,\nabla)$ 对 ∇,∇ 分别为线性，故可写成

$$T(\mathbf{p}+\mathbf{q},\mathbf{p}+\mathbf{q})=T(\mathbf{p},\mathbf{p}+\mathbf{q})+T(\mathbf{q},\mathbf{p}+\mathbf{q})$$
$$=T(\mathbf{p},\mathbf{p})+T(\mathbf{p},\mathbf{q})$$
$$+T(\mathbf{q},\mathbf{p})+T(\mathbf{q},\mathbf{q})$$

根据假设

$$T(\mathbf{p}+\mathbf{q},\mathbf{p}+\mathbf{q})\equiv 0\quad T(\mathbf{p},\mathbf{p})\equiv 0\quad T(\mathbf{q},\mathbf{q})\equiv 0$$

因此

$$T(\mathbf{p},\mathbf{q})+T(\mathbf{q},\mathbf{p})\equiv 0$$

即

$$T(\mathbf{u}_x,\mathbf{u}_y)+T(\mathbf{u}_y,\mathbf{u}_x)\equiv 0$$
$$T(\mathbf{u}_y,\mathbf{u}_z)+T(\mathbf{u}_z,\mathbf{u}_y)\equiv 0$$
$$T(\mathbf{u}_z,\mathbf{u}_x)+T(\mathbf{u}_x,\mathbf{u}_z)\equiv 0$$

由 $T(\nabla,\nabla)$ 的表达式直接可知

$$T(\nabla,\nabla)\equiv 0$$

性质 4 $T(\nabla,\nabla)$ 之值与坐标系的选择无关.

证 按照 $T(\nabla,\nabla)$的定义，因 $T_1(\mathbf{p})=T(\mathbf{p},\nabla)$和 $T_1(\nabla)$都与坐标系无关，故 $T(\nabla,\nabla)=T_1(\nabla)$ 也与坐标系无关。

1.10 二重 ∇ 算子的运算例题

例 1 试写出 $(\nabla\cdot\nabla)\varphi$ 在直角坐标系中的表达式。

解 因

$$(\mathbf{u}_x\cdot\mathbf{u}_x)=1 \qquad (\mathbf{u}_y\cdot\mathbf{u}_y)=1 \qquad (\mathbf{u}_z\cdot\mathbf{u}_z)=1$$

$$(\mathbf{u}_y\cdot\mathbf{u}_x)=0 \qquad (\mathbf{u}_y\cdot\mathbf{u}_z)=0 \qquad (\mathbf{u}_z\cdot\mathbf{u}_x)=0$$

按 $(\nabla\cdot\nabla)\varphi$ 的定义

$$(\nabla\cdot\nabla)\varphi=\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\mathbf{u}_x\cdot\mathbf{u}_x)\varphi+\cdots$$

$$=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \tag{1.57}$$

在数学中，$(\nabla\cdot\nabla)$ 用 ∇^2 或 Δ 表示。以后凡碰到 ∇^2 或 Δ，都应理解为 $(\nabla\cdot\nabla)$。

例 2 试写出 $(\nabla\cdot\nabla)\mathbf{R}$ ($\mathbf{R}$ 为矢量场) 在直角坐标系统中的表达式。

解 与上例相同，仅将 φ 换成 $\mathbf{R}$ 即可：

$$(\nabla\cdot\nabla)\mathbf{R}=\frac{\partial^2\mathbf{R}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathbf{R}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathbf{R}}{\partial z^2}$$

即

$$\nabla^2\mathbf{R}=\Delta\mathbf{R}=\frac{\partial^2\mathbf{R}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathbf{R}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathbf{R}}{\partial z^2}$$

若将 $\mathbf{R}$ 写成 $\mathbf{R}=R_x\mathbf{u}_x+R_y\mathbf{u}_y+R_z\mathbf{u}_z$，则

$$\nabla^2\mathbf{R}=\Delta\mathbf{R}=\left(\frac{\partial^2R_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2R_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2R_x}{\partial z^2}\right)\mathbf{u}_x$$

$$+\left(\frac{\partial^2R_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2R_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2R_y}{\partial z^2}\right)\mathbf{u}_y$$

$$+\left(\frac{\partial^2 R_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 R_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 R_z}{\partial z^2}\right)\mathbf{u}_z$$

$$=\Delta R_x\mathbf{u}_x+\Delta R_y\mathbf{u}_y+\Delta R_z\mathbf{u}_z \tag{1.58}$$

例 3 证明

$$\text{rotrot}\mathbf{R}=\text{graddiv}\mathbf{R}-\nabla^2\mathbf{R} \tag{1.59}$$

证

$$\begin{aligned}\text{rotrot}\mathbf{R}&=\nabla\times[\nabla\times\mathbf{R}]\\&=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{R})-(\nabla\cdot\nabla)\mathbf{R}\\&=\text{graddiv}\mathbf{R}-\nabla^2\mathbf{R}\end{aligned}$$

例 4 证明

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)=0\quad(r\neq 0) \tag{1.60}$$

证

$$\begin{aligned}\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)&=(\nabla\cdot\nabla)\frac{1}{r}\\&=\left(\nabla\cdot\nabla\frac{1}{r}\right)\\&=\left(\nabla\cdot\frac{-\mathbf{r}}{r^3}\right)\\&=-\frac{1}{r^3}\nabla\cdot\mathbf{r}-\left(\mathbf{r}\cdot\nabla\frac{1}{r^3}\right)\\&=\frac{-3}{r^3}-\left(\mathbf{r}\cdot\frac{-3r^2\mathbf{r}}{r^6 r}\right)\\&=-\frac{3}{r^3}+\frac{3}{r^3}\\&=0\end{aligned}$$

例 5 证明

$$\text{divrot}\mathbf{R}=0 \tag{1.61}$$

证

$$\mathrm{divrot}\mathbf{R} = \nabla \cdot [\nabla \times \mathbf{R}]$$

但

$$\mathbf{p} \cdot [\mathbf{p} \times \mathbf{R}] = [\mathbf{p} \times \mathbf{p}] \cdot \mathbf{R} = 0 \cdot \mathbf{R} = 0$$

由性质 3 知

$$\nabla \cdot [\nabla \times \mathbf{R}] = 0$$

即

$$\mathrm{divrot}\mathbf{R} = 0$$

例 6 证明

$$\mathrm{rotgrad}\varphi = 0 \tag{1.62}$$

证 由于

$$\mathrm{rotgrad}\varphi = [\nabla \times \nabla\varphi]$$

但

$$[\mathbf{p} \times \mathbf{p}\varphi] = 0$$

由性质 3 知

$$[\nabla \times \nabla\varphi] = 0$$

即

$$\mathrm{rotgrad}\varphi = 0$$

例 7 若 $\mathrm{div}\mathbf{a} = 0$，则

$$\mathrm{rotrotrotrot}\mathbf{a} = \nabla^2(\nabla^2\mathbf{a})$$

证 由于

$$\mathrm{rotrot}\mathbf{a} = \mathrm{graddiv}\mathbf{a} - \nabla^2\mathbf{a}$$

但已知 $\mathrm{div}\mathbf{a} = 0$，故

$$\mathrm{rotrot}\mathbf{a} = -\nabla^2\mathbf{a}$$

于是

$$\begin{aligned}\mathrm{rotrot}(\mathrm{rotrot}\mathbf{a}) &= -\mathrm{rotrot}(\nabla^2\mathbf{a}) \\ &= -\mathrm{graddiv}(\nabla^2\mathbf{a}) + \nabla^2(\nabla^2\mathbf{a})\end{aligned}$$

而

$$\mathrm{div}(\nabla^2\mathbf{a}) = -\mathrm{divrot}(\mathrm{rot}\mathbf{a}) = 0$$

所以

$$\mathrm{rotrotrotrot}\mathbf{a} = \nabla^2(\nabla^2\mathbf{a})$$

例 8 证明

$$\nabla^2 AB = A\nabla^2 B + 2\mathrm{grad}A \cdot \mathrm{grad}B + B\nabla^2 A \quad (1.63)$$

证

$$\begin{aligned}
\nabla^2 AB &= (\nabla \cdot \nabla)AB \\
&= (\nabla \cdot \nabla AB) \\
&= \nabla \cdot (\nabla A_c B + \nabla A B_c) \\
&= \nabla \cdot (A\nabla B + B\nabla A) \\
&= \nabla \cdot (A\mathrm{grad}B + B\mathrm{grad}A) \\
&= \nabla \cdot A_c \mathrm{grad}B + \nabla \cdot A(\mathrm{grad}B)_c \\
&\quad + \nabla \cdot B_c \mathrm{grad}A + \nabla \cdot B(\mathrm{grad}A)_c \\
&= A\nabla \cdot \mathrm{grad}B + \nabla A \cdot (\mathrm{grad}B)_c \\
&\quad + B\nabla \cdot \mathrm{grad}A + \nabla B \cdot (\mathrm{grad}A)_c \\
&= A\nabla^2 B + 2\mathrm{grad}A \cdot \mathrm{grad}B + B\nabla^2 A
\end{aligned}$$

例 9 证明

$$\nabla^2(A\mathbf{a}) = A\nabla^2\mathbf{a} + \mathbf{a}\nabla^2 A + 2(\mathrm{grad}A \cdot \nabla)\mathbf{a} \quad (1.64)$$

证

$$\begin{aligned}
\nabla^2(A\mathbf{a}) &= (\nabla \cdot \nabla)A\mathbf{a} \\
&= \mathbf{u}_x\nabla^2 A a_x + \mathbf{u}_y\nabla^2 A a_y + \mathbf{u}_z\nabla^2 A a_z \\
&= \mathbf{u}_x(A\nabla^2 a_x + 2\mathrm{grad}A \cdot \mathrm{grad}a_x + a_x\nabla^2 A) \\
&\quad + \mathbf{u}_y(A\nabla^2 a_y + 2\mathrm{grad}A \cdot \mathrm{grad}a_y + a_y\nabla^2 A) \\
&\quad + \mathbf{u}_z(A\nabla^2 a_z + 2\mathrm{grad}A \cdot \mathrm{grad}a_z + a_z\nabla^2 A) \\
&= A\nabla^2(\mathbf{u}_x a_x + \mathbf{u}_y a_y + \mathbf{u}_z a_z) \\
&\quad + 2(\mathrm{grad}A \cdot \nabla)(\mathbf{u}_x a_x + \mathbf{u}_y a_y + \mathbf{u}_z a_z) \\
&\quad + (\mathbf{u}_x a_x + \mathbf{u}_y a_y + \mathbf{u}_z a_z)\nabla^2 A \\
&= A\nabla^2\mathbf{a} + \mathbf{a}\nabla^2 A + 2(\mathrm{grad}A \cdot \nabla)\mathbf{a}
\end{aligned}$$

变换过程中应用了例 8 的结果。

例 10 证明

$$\mathrm{graddiv}(A\mathbf{a}) = (\mathrm{grad}A)\mathrm{div}\mathbf{a} + A\mathrm{graddiv}\mathbf{a} + \mathrm{grad}A \times \mathrm{rot}\mathbf{a} + (\mathbf{a} \quad \nabla)\mathrm{grad}A + (\mathrm{grad}A \cdot \nabla)\mathbf{a} \tag{1.65}$$

证

$$\begin{aligned}
\mathrm{graddiv}(A\mathbf{a}) &= \mathrm{grad}(\nabla \quad A\mathbf{a}) \\
&= \mathrm{grad}(\nabla \quad A_c\mathbf{a} + \nabla A \cdot \mathbf{a}_c) \\
&= \mathrm{grad}(A\mathrm{div}\mathbf{a} + \mathbf{a} \quad \mathrm{grad}A) \\
&= \nabla(A\mathrm{div}\mathbf{a}) + \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathrm{grad}A) \\
&= \nabla(A_c\mathrm{div}\mathbf{a}) + (\nabla A)\mathrm{div}A \\
&\quad + \nabla(\mathbf{a}_c \cdot \mathrm{grad}A) + \nabla(\mathbf{a} \cdot (\mathrm{grad}A)_c) \\
&= A\nabla\mathrm{div}\mathbf{a} + (\mathrm{grad}A)\mathrm{div}\mathbf{A} \\
&\quad + \mathbf{a} \times [\nabla \times \mathrm{grad}A] + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathrm{grad}A \\
&\quad + \mathrm{grad}A \times [\nabla \times \mathbf{a}] + (\mathrm{grad}A \quad \nabla)\mathbf{a} \\
&= A\mathrm{graddiv}\mathbf{a} + (\mathrm{grad}A)\mathrm{div}\mathbf{a} \\
&\quad + \mathrm{grad}A \times \mathrm{rot}\mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathrm{grad}A \\
&\quad + (\mathrm{grad}A \cdot \nabla)\mathbf{a}
\end{aligned}$$

$$(\nabla \times \mathrm{grad}A = \mathrm{rotgrad}A = 0)$$

例 11 证明

$$\mathrm{rotrot}(A\mathbf{a}) = \mathrm{grad}A \times \mathrm{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a}\nabla^2 A + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathrm{grad}A + A\mathrm{rotrot}\mathbf{a} + (\mathrm{grad}A)\mathrm{div}\mathbf{a} - (\mathrm{grad}A \cdot \nabla)\mathbf{a} \tag{1.66}$$

证

$$\begin{aligned}
\mathrm{rotrot}(A\mathbf{a}) &= \mathrm{rot}[\nabla \times A\mathbf{a}] \\
&= \mathrm{rot}[\nabla \times A_c\mathbf{a} + \nabla A \times \mathbf{a}_c] \\
&= \mathrm{rot}[A\mathrm{rot}\mathbf{a} + \mathrm{grad}A \times \mathbf{a}] \\
&= \nabla \times (A\mathrm{rot}\mathbf{a}) + \nabla \times [\mathrm{grad}A \times \mathbf{a}] \\
&= \nabla \times (A_c\mathrm{rot}\mathbf{a}) + \nabla A \times (\mathrm{rot}\mathbf{a})_c \\
&\quad + \nabla \times [(\mathrm{grad}A)_c \times \mathbf{a}]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\nabla\times[\mathrm{grad}A\times\mathbf{a}_c]\\
&=A\nabla\times\mathrm{rot}\mathbf{a}+\mathrm{grad}A\times\mathrm{rot}\mathbf{a}\\
&\quad+(\mathrm{grad}A)(\nabla\quad\mathbf{a})-(\mathrm{grad}A\cdot\nabla)\mathbf{a}\\
&\quad+(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathrm{grad}A-\mathbf{a}(\nabla\cdot\mathrm{grad}A)\\
&=\mathrm{grad}A\times\mathrm{rot}\mathbf{a}+A\mathrm{rotrot}\mathbf{a}\\
&\quad+(\mathrm{grad}A)\mathrm{div}\mathbf{a}-(\mathrm{grad}A\cdot\nabla)\mathbf{a}\\
&\quad+(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathrm{grad}A-\mathbf{a}\nabla^2A
\end{aligned}
$$

例 12 证明

$$\nabla^2\mathbf{r}=0 \tag{1.67}$$

证 由例 2 得

$$\nabla^2\mathbf{r}=\mathbf{u}_x\nabla^2x+\mathbf{u}_y\nabla^2y+\mathbf{u}_z\nabla^2z=0$$

例 13 证明

$$\nabla^2r=\frac{2}{r} \tag{1.68}$$

证

$$
\begin{aligned}
\nabla^2r&=\mathrm{divgrad}r\\
&=\mathrm{div}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)\\
&=\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)\\
&=\frac{1}{r}\nabla\cdot\mathbf{r}+\mathbf{r}\quad\nabla\frac{1}{r}\\
&=\frac{3}{r}+\mathbf{r}\cdot\left(\frac{-\mathbf{r}}{r^2r}\right)\\
&=\frac{3}{r}-\frac{1}{r}\\
&=\frac{2}{r}
\end{aligned}
$$

1.11 格林积分定理

利用公式

$$\iiint_V T(\nabla)dv = \oiint_\Sigma T(\mathbf{n})d\sigma \tag{1.8}$$

取不同的 $T(\nabla)$，还可以推导出一系列电磁场理论中常用的所谓格林积分定理：

格林积分定理 1

$$\iiint_V [A\nabla^2 B + (\mathrm{grad}A \cdot \mathrm{grad}B)]dv$$

$$= \oiint_\Sigma A \frac{\partial B}{\partial n} d\sigma \tag{1.69}$$

式中 $\frac{\partial B}{\partial n}$ 为法线方向上的导数。

证 取 $T(\nabla) = \nabla \cdot (A\mathrm{grad}B)$，则

$$\begin{aligned} T(\nabla) &= \nabla \cdot (A\mathrm{grad}B) \\ &= \nabla \cdot (A_c \mathrm{grad}B) + \nabla A \cdot (\mathrm{grad}B)_c \\ &= A\nabla \cdot \mathrm{grad}B + \mathrm{grad}A \cdot \mathrm{grad}B \\ &= A\mathrm{divgrad}B + \mathrm{grad}A \cdot \mathrm{grad}B \\ &= A\nabla^2 B + \mathrm{grad}A \cdot \mathrm{grad}B \end{aligned} \tag{1.70}$$

$$T(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot A\mathrm{grad}B = A\mathrm{grad}_n B = A\frac{\partial B}{\partial n}$$

代入公式(1.8)即得所需结果。公式(1.69)通常称为第一标量格林定理。

格林积分定理 2

$$\iiint_V (A\nabla^2 B - B\nabla^2 A)dv$$

$$= \oiint_{\Sigma} \left(A \frac{\partial B}{\partial n} - B \frac{\partial A}{\partial n} \right) d\sigma \qquad (1.71)$$

证 将公式(1.69)中之 A 换成 B 和 B 换成 A 得

$$\iiint_{V} (B\nabla^2 A + (\mathrm{grad}B \cdot \mathrm{grad}A))dv = \oiint_{\Sigma} B \frac{\partial A}{\partial n} d\sigma \quad (1.72)$$

式(1.69)减式(1.72)即得所需结果. 公式(1.71)通常称为第二标量格林定理.

格林积分定理 3

$$\iiint_{V} (\mathrm{rot}\mathbf{a} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \mathrm{rotrot}\mathbf{b})dv$$

$$= \oiint_{\Sigma} [\mathbf{a} \times \mathrm{rot}\mathbf{b}] \cdot \mathbf{n} d\sigma \qquad (1.73)$$

证 取 $T(\nabla) = \nabla \cdot [\mathbf{a} \times \mathrm{rot}\mathbf{b}]$, 则

$$\begin{aligned} T(\nabla) &= \nabla \cdot [\mathbf{a} \times \mathrm{rot}\mathbf{b}] = [\nabla \times \mathbf{a}] \cdot \mathrm{rot}\mathbf{b} \\ &= [\nabla \times \mathbf{a}_c] \cdot \mathrm{rot}\mathbf{b} + [\nabla \times \mathbf{a}] \cdot (\mathrm{rot}\mathbf{b})_c \\ &= \mathrm{rot}\mathbf{a} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot [\nabla \times \mathrm{rot}\mathbf{b}] \\ &= \mathrm{rot}\mathbf{a} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \mathrm{rotrot}\mathbf{b} \end{aligned}$$

$$T(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot [\mathbf{a} \times \mathrm{rot}\mathbf{b}]$$

代入公式(1.8)即得所需结果. 这一公式通常称为第一矢量格林定理.

格林积分定理 4

$$\iiint_{V} (\mathbf{b} \cdot \mathrm{rotrot}\mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathrm{rotrot}\mathbf{b})dv$$

$$= \oiint_{\Sigma} ([\mathbf{n} \times \mathbf{a}] \cdot \mathrm{rot}\mathbf{b} - [\mathbf{n} \times \mathbf{b}] \cdot \mathrm{rot}\mathbf{a})d\sigma \quad (1.74)$$

证 交换公式(1.73)中的 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$,将所得结果与式(1.73)相减即得所需结果. 这一公式通常称为第二矢量格林定理.

格林积分定理 5

$$\iiint_V (\mathrm{div}\mathbf{a}\cdot\mathrm{div}\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathrm{graddiv}\mathbf{a})dv$$

$$=\oiint_\Sigma (\mathrm{div}\mathbf{a})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{n})d\sigma \tag{1.75}$$

证 取 $T(\nabla)=\nabla\cdot(\mathbf{b}\mathrm{div}\mathbf{a})$，则

$$\begin{aligned}T(\nabla)&=\nabla\cdot(\mathbf{b}\mathrm{div}\mathbf{a})\\&=\nabla\cdot(\mathbf{b}(\mathrm{div}\mathbf{a})_c)+\nabla\cdot(\mathbf{b}_c\mathrm{div}\mathbf{a})\\&=(\mathrm{div}\mathbf{a})(\mathrm{div}\mathbf{b})+\mathbf{b}\cdot\nabla\mathrm{div}\mathbf{a}\\&=\mathrm{div}\mathbf{a}\cdot\mathrm{div}\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathrm{graddiv}\mathbf{a}\end{aligned}$$

$$T(\mathbf{n})=\mathbf{n}\cdot(\mathbf{b}\mathrm{div}\mathbf{a})=(\mathrm{div}\mathbf{a})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{n})$$

代入公式(1.8)即得所需结果.

格林积分定理 6

$$\iiint_V (\mathbf{a}\cdot\mathrm{graddiv}\mathbf{b}-\mathbf{b}\cdot\mathrm{graddiv}\mathbf{a})dv$$

$$=\oiint_\Sigma [(\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})\mathrm{div}\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{n})\mathrm{div}\mathbf{a}]d\sigma \tag{1.76}$$

证 交换公式(1.75)中的 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$，将所得结果与式(1.75)相减即得所需结果.

格林积分定理 7

$$\iiint_V [\mathbf{a}\cdot\nabla^2\mathbf{b}+\mathrm{rot}\mathbf{a}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{b}+\mathrm{div}\mathbf{a}\mathrm{div}\mathbf{b}]dv$$

$$=\oiint_\Sigma [[\mathbf{n}\times\mathbf{a}]\cdot\mathrm{rot}\mathbf{b}+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{a})\mathrm{div}\mathbf{b}]d\sigma \tag{1.77}$$

证 取 $T(\nabla)=[\nabla\times\mathbf{a}]\cdot\mathrm{rot}\mathbf{b}+(\nabla\cdot\mathbf{a})\mathrm{div}\mathbf{b}$，则

$$\begin{aligned}T(\nabla)&=[\nabla\times\mathbf{a}]\cdot\mathrm{rot}\mathbf{b}+(\nabla\cdot\mathbf{a})\mathrm{div}\mathbf{b}\\&=[\nabla\times\mathbf{a}]\cdot(\mathrm{rot}\mathbf{b})_c+[\nabla\times\mathbf{a}_c]\cdot\mathrm{rot}\mathbf{b}\\&\quad+(\nabla\cdot\mathbf{a})(\mathrm{div}\mathbf{b})_c+(\nabla\cdot\mathbf{a}_c)\mathrm{div}\mathbf{b}\\&=\mathrm{rot}\mathbf{a}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{b}-[\nabla\times\mathrm{rot}\mathbf{b}]\cdot\mathbf{a}_c\end{aligned}$$

$$+ \mathrm{div}\mathbf{a}\mathrm{div}\mathbf{b} + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathrm{div}\mathbf{b}$$
$$= \mathrm{rot}\mathbf{a}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{b} + \mathrm{div}\mathbf{a}\mathrm{div}\mathbf{b} - [\mathrm{grad}\mathrm{div}\mathbf{b} - \nabla^2\mathbf{b}]\cdot\mathbf{a}_c + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathrm{div}\mathbf{b}$$

但

$$\mathrm{grad}\mathrm{div}\mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}_c = (\mathbf{a}\cdot\nabla)(\nabla\cdot\mathbf{b}) = (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathrm{div}\mathbf{b}$$

故

$$T(\nabla) = \mathrm{rot}\mathbf{a}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{b} + \mathrm{div}\mathbf{a}\cdot\mathrm{div}\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\nabla^2\mathbf{b}$$
$$T(\mathbf{n}) = [\mathbf{n}\times\mathbf{a}]\cdot\mathrm{rot}\mathbf{b} + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{a})\mathrm{div}\mathbf{b}$$

代入公式(1.8)即得所需结果.

格林积分定理 8

$$\iiint_V (\mathbf{a}\cdot\nabla^2\mathbf{b} - \mathbf{b}\cdot\nabla^2\mathbf{a})dv = \oiint_\Sigma [(\mathbf{n}\cdot\mathbf{a})\mathrm{div}\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{n})\mathrm{div}\mathbf{a} + [\mathbf{n}\times\mathbf{a}]\cdot\mathrm{rot}\mathbf{b} - [\mathbf{n}\times\mathbf{b}]\cdot\mathrm{rot}\mathbf{a}]d\sigma \tag{1.78}$$

证 交换公式(1.77)中的 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$,将所得结果与式(1.77)相减即得所需结果.

格林积分定理 9

$$\iiint_V [\mathbf{a}\mathrm{div}\mathbf{b} + \mathbf{b}\mathrm{div}\mathbf{a} - \mathbf{a}\times\mathrm{rot}\mathbf{b} - \mathbf{b}\times\mathrm{rot}\mathbf{a}]dv = \oiint_\Sigma [\mathbf{a}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{b}) + \mathbf{b}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{a}) - \mathbf{n}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})]d\sigma \tag{1.79}$$

证 取 $T(\nabla) = (\nabla\cdot\mathbf{b})\mathbf{a} + (\nabla\cdot\mathbf{a})\mathbf{b} - \nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$, 则

$$T(\nabla) = (\nabla\cdot\mathbf{b})\mathbf{a}_c + (\nabla\cdot\mathbf{b}_c)\mathbf{a} + (\nabla\cdot\mathbf{a}_c)\mathbf{b} + (\nabla\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}_c - \nabla(\mathbf{a}_c\cdot\mathbf{b}) - \nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_c)$$
$$= \mathbf{a}\mathrm{div}\mathbf{b} + \mathbf{b}\mathrm{div}\mathbf{a} + (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a} + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}$$

$$-\mathbf{a}\times[\nabla\times\mathbf{b}]-(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}$$
$$-\mathbf{b}\times[\nabla\times\mathbf{a}]-(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a}$$
$$=\mathbf{a}\mathrm{div}\mathbf{b}+\mathbf{b}\mathrm{div}\mathbf{a}-\mathbf{a}\times\mathrm{rot}\mathbf{b}-\mathbf{b}\times\mathrm{rot}\mathbf{a}$$
$$T(\mathbf{n})=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{b})\mathbf{a}+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}-\mathbf{n}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$$

代入公式(1.8)即得所需结果.

格林积分定理 10

$$\iiint_V[\mathbf{b}\mathrm{div}\mathbf{a}+(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}]dv=\oiint_\Sigma(\mathbf{n}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}d\sigma \quad (1.80)$$

证 取 $T(\nabla)=(\nabla\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}$, 则

$$T(\nabla)=(\nabla\cdot\mathbf{a}_c)\mathbf{b}+(\nabla\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}_c=\mathbf{b}\mathrm{div}\mathbf{a}+(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}$$
$$T(\mathbf{n})=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}$$

代入公式(1.8)即得所需结果.

格林积分定理 11

$$\iiint_V\mathrm{grad}A\cdot\mathrm{rot}\mathbf{v}dv=\oiint_\Sigma\mathbf{n}\cdot A\mathrm{rot}\mathbf{v}d\sigma$$
$$=\oiint_\Sigma\mathbf{n}\cdot[\mathbf{v}\times\mathrm{grad}A]d\sigma \quad (1.81)$$

证 取 $T(\nabla)=\nabla\cdot[\mathbf{v}\times\mathrm{grad}A]$, 则

$$T(\nabla)=\nabla\cdot[\mathbf{v}_c\times\mathrm{grad}A]+\nabla\cdot[\mathbf{v}\times(\mathrm{grad}A)_c]$$
$$=\mathrm{grad}A\cdot[\nabla\times\mathbf{v}]-\mathbf{v}\cdot[\nabla\times\mathrm{grad}A]$$
$$=\mathrm{grad}A\cdot\mathrm{rot}\mathbf{v}\ (\nabla\times\mathrm{grad}A=0)$$

另一方面,

$$\nabla\cdot A\mathrm{rot}\mathbf{v}=\nabla\cdot A_c\mathrm{rot}\mathbf{v}+\nabla A\cdot(\mathrm{rot}\mathbf{v})_c$$
$$=A\mathrm{divrot}\mathbf{v}+\mathrm{grad}A\cdot\mathrm{rot}\mathbf{v}$$
$$=\mathrm{grad}A\cdot\mathrm{rot}\mathbf{v}\ (\mathrm{divrot}\mathbf{v}=0)$$
$$=T(\nabla)$$

故

$$T(\mathbf{n})=\mathbf{n}\cdot[\mathbf{v}\times\mathrm{grad}A]=\mathbf{n}\cdot A\mathrm{rot}\mathbf{v}$$

代入公式(1.8)即得所需结果.

格林积分定理 12

$$\iiint_V [A\mathrm{rotrot}\mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla^2 A + (\mathrm{div}\mathbf{v})\mathrm{grad}A]dv$$

$$= \oiint_\Sigma [A\mathbf{n} \times \mathrm{rot}\mathbf{v} + [\mathbf{n} \times \mathbf{v}] \times \mathrm{grad}A + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathrm{grad}A]d\sigma \tag{1.82}$$

证 取 $T(\nabla) = \nabla A \times \mathrm{rot}\mathbf{v} + [\nabla \times \mathbf{v}] \times \mathrm{grad}A + (\nabla \cdot \mathbf{v})\mathrm{grad}A$，则

$$\begin{aligned}
T(\nabla) &= \nabla A_c \times \mathrm{rot}\mathbf{v} + \nabla A \times (\mathrm{rot}\mathbf{v})_c + [\nabla \times \mathbf{v}_c] \times \mathrm{grad}A \\
&\quad + [\nabla \times \mathbf{v}] \times (\mathrm{grad}A)_c + (\nabla \cdot \mathbf{v}_c)\mathrm{grad}A \\
&\quad + (\nabla \cdot \mathbf{v})(\mathrm{grad}A)_c \\
&= A\mathrm{rotrot}\mathbf{v} + \mathrm{grad}A \times \mathrm{rot}\mathbf{v} - \mathrm{grad}A \times \mathrm{rot}\mathbf{v} \\
&\quad + \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathrm{grad}A) - \nabla(\mathbf{v}_c \cdot \mathrm{grad}A) + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathrm{grad}A \\
&\quad + (\mathrm{grad}A)(\mathrm{div}\mathbf{v}) \\
&= A\mathrm{rotrot}\mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla^2 A + (\mathrm{div}\mathbf{v})(\mathrm{grad}A) \\
&\quad - \mathbf{v} \times [\nabla \times \mathrm{grad}A] - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathrm{grad}A \\
&\quad + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathrm{grad}A \\
&= A\mathrm{rotrot}\mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla^2 A + (\mathrm{div}\mathbf{v})(\mathrm{grad}A) \\
&\qquad (\nabla \times \mathrm{grad}A = 0)
\end{aligned}$$

故

$$T(\mathbf{n}) = A\mathbf{n} \times \mathrm{rot}\mathbf{v} + [\mathbf{n} \times \mathbf{v}] \times \mathrm{grad}A + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathrm{grad}A$$

代入公式(1.8)即得所需结果.

格林积分定理 13

$$\iiint_V [A\nabla \times \mathrm{rot}\mathbf{a} + \mathbf{a}\nabla^2 A - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathrm{grad}A]dv$$

$$= \oint\!\!\!\!\!\!\int_{\Sigma} [A\mathbf{n} \times \mathrm{rot}\mathbf{a} + [\mathbf{n} \times \mathbf{a}] \times \mathrm{grad}A] d\sigma \quad (1.83)$$

证 取 $T(\nabla) = \nabla A \times \mathrm{rot}\mathbf{a} + [\nabla \times \mathbf{a}] \times \mathrm{grad}A$，则

$$\begin{aligned} T(\nabla) &= \nabla A_c \times \mathrm{rot}\mathbf{a} + \nabla A \times (\mathrm{rot}\mathbf{a})_c \\ &\quad + [\nabla \times \mathbf{a}_c] \times \mathrm{grad}A + [\nabla \times \mathbf{a}] \times (\mathrm{grad}A)_c \\ &= A\mathrm{rotrot}\mathbf{a} + \mathrm{grad}A \times \mathrm{rot}\mathbf{a} + \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathrm{grad}A) \\ &\quad - \nabla(\mathbf{a}_c \cdot \mathrm{grad}A) + \mathrm{rot}\mathbf{a} \times \mathrm{grad}A \\ &= A\mathrm{rotrot}\mathbf{a} + \mathbf{a}\nabla^2 A - \mathbf{a} \times [\nabla \times \mathrm{grad}A] \\ &\quad - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathrm{grad}A \\ &= A\mathrm{rotrot}\mathbf{a} + \mathbf{a}\nabla^2 A - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathrm{grad}A \\ &\qquad (\mathbf{a} \times [\nabla \times \mathrm{grad}A] = \mathbf{a} \times \mathrm{rotgrad}A = 0) \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} T(\mathbf{n}) &= \mathbf{n}A \times \mathrm{rot}\mathbf{a} + [\mathbf{n} \times \mathbf{a}] \times \mathrm{grad}A \\ &= A\mathbf{n} \times \mathrm{rot}\mathbf{a} + [\mathbf{n} \times \mathbf{a}] \times \mathrm{grad}A \end{aligned}$$

代入公式(1.8)即得所需结果. 这一公式通常称为矢量-标量格林定理.

通过选择其他的 $T(\nabla)$ 还可以推导出许多公式，以上仅仅是一些常用的情况. 格林定理在电磁场理论中有重要的应用，读者在第五章中可见到一些具体应用的例子.

1.12 复矢量代数

在讨论麦克斯韦方程组时，为了便于运算，人们广泛地使用着所谓麦克斯韦方程组的复数形式. 在复数麦克斯韦方程组中，经常用到复矢量并经常对复矢量进行微积分运算. 因此，有必要对复矢量的性质及其运算方法加以研究. 下面的讨论表明：从运算的角度来看，复矢量的运算规则与实矢量的运算规则是一样的. 但是，从几何角度而言，多数复矢量及其运算却没有明显的几何意义.

1.12.1 复矢量的定义和复矢量的加减法

三维复矢量定义为以一定顺序给出的三个复数，用 $\mathbf{A}=(A_x, A_y, A_z)$ 表示.

A_x 是复矢量 $\mathbf{A}$ 在 x 轴上的投影，为复数；A_y 是 $\mathbf{A}$ 在 y 轴上的投影，为复数；A_z 是 $\mathbf{A}$ 在 z 轴上的投影，也为复数.

两个复矢量只有在各分量(投影)均分别相等的情况下才认为它们是相等的，即 $\mathbf{A}=\mathbf{B}$ 意味着

$$A_x = B_x \qquad A_y = B_y \qquad A_z = B_z \tag{1.84}$$

矢量乘以数(复数)定义为所有分量均乘以此数，即

$$\lambda\mathbf{A} = (\lambda A_x, \lambda A_y, \lambda A_z) \tag{1.85}$$

x 轴上的单位矢量定义为 $\mathbf{u}_x=(1,0,0)$；y 轴上的单位矢量定义为 $\mathbf{u}_y=(0,1,0)$；z 轴上的单位矢量定义为 $\mathbf{u}_z=(0,0,1)$.

两矢量之和定义为以各分量之和为分量的矢量，即

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z) \tag{1.86}$$

两矢量之差定义为以各分量之差为分量的矢量，即

$$\mathbf{A}-\mathbf{B} = (A_x - B_x, A_y - B_y, A_z - B_z) \tag{1.87}$$

根据数乘、矢量和及矢量差的定义直接可以写出

$$\mathbf{A} = \mathbf{u}_x A_x + \mathbf{u}_y A_y + \mathbf{u}_z A_z$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{u}_x(A_x + B_x) + \mathbf{u}_y(A_y + B_y) + \mathbf{u}_z(A_z + B_z)$$

$$\mathbf{A}-\mathbf{B} = \mathbf{u}_x(A_x - B_x) + \mathbf{u}_y(A_y - B_y) + \mathbf{u}_z(A_z - B_z)$$

根据加法和数乘的定义立即可得出它们的下列性质：

$$\begin{cases} \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = (\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} \\ \mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{B}+\mathbf{A} \\ (\lambda_1+\lambda_2)\mathbf{A} = \lambda_1\mathbf{A} + \lambda_2\mathbf{A} \\ \lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B} \\ \lambda_1(\lambda_2\mathbf{A}) = \lambda_1\lambda_2\mathbf{A} \end{cases} \tag{1.88}$$

另外，由 $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{C}$ 可得 $\mathbf{A}=\mathbf{C}-\mathbf{B}, \mathbf{B}=\mathbf{C}-\mathbf{A}$. 由 $\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{C}$ 可得 $\mathbf{A}=\mathbf{B}+\mathbf{C}$.

1.12.2 复矢量的点积(标量积)

两复矢量的点积定义为

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z \tag{1.89}$$

在不引起误解的情况下，$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$ 也可用 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ 表示. 由定义可见

(1) $(\mathbf{u}_x\cdot\mathbf{u}_x)=1 \quad (\mathbf{u}_y\cdot\mathbf{u}_x)=0 \quad (\mathbf{u}_z\cdot\mathbf{u}_x)=0$

$(\mathbf{u}_x\cdot\mathbf{u}_y)=0 \quad (\mathbf{u}_y\cdot\mathbf{u}_y)=1 \quad (\mathbf{u}_z\cdot\mathbf{u}_y)=0$

$(\mathbf{u}_x\cdot\mathbf{u}_z)=0 \quad (\mathbf{u}_y\cdot\mathbf{u}_z)=0 \quad (\mathbf{u}_z\cdot\mathbf{u}_z)=1$

(2) $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})$

$(\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}))=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})+(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})$

(3) $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$ 的表达式可通过下列点积运算得出：

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})&=(\mathbf{u}_xA_x+\mathbf{u}_yA_y+\mathbf{u}_zA_z)\\&\quad\cdot(\mathbf{u}_xB_x+\mathbf{u}_yB_y+\mathbf{u}_zB_z)\\&=(\mathbf{u}_x\cdot\mathbf{u}_x)A_xB_x+(\mathbf{u}_y\cdot\mathbf{u}_y)A_yB_y\\&\quad+(\mathbf{u}_z\cdot\mathbf{u}_z)A_zB_z\\&=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z\end{aligned}$$

注意：在复矢量情况下，$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$ 没有 $\mathbf{A}$ 在 $\mathbf{B}$ 上投影这样的几何意义，$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A})=\mathbf{A}^2$ 也没有几何意义，但它们的表达式与实矢量的情况是一样的.

1.12.3 复矢量的叉积(矢量积)

两个复矢量 $\mathbf{A}=\mathbf{u}_xA_x+\mathbf{u}_yA_y+\mathbf{u}_zA_z$ 和 $\mathbf{B}=\mathbf{u}_xB_x+\mathbf{u}_yB_y+\mathbf{u}_zB_z$ 的叉积(矢量积)(用 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ 或 $[\mathbf{A}\times\mathbf{B}]$ 表示)定义为

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathbf{u}_x(A_yB_z-A_zB_y)+\mathbf{u}_y(A_zB_x-A_xB_z)$$

$$+\mathbf{u}_z(A_xB_y - A_yB_x)$$

或

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix} \tag{1.90}$$

(注意：对复矢量来说，$\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ 没有几何意义.)

由此定义立即可得

(1) $\mathbf{A}\times\mathbf{A}=0$

(2) $\mathbf{B}\times\mathbf{A}=-\mathbf{A}\times\mathbf{B}$

(3) $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\mathbf{C}$

(4) $\lambda[\mathbf{A}\times\mathbf{B}]=\lambda\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathbf{A}\times\lambda\mathbf{B}$

(5) $\mathbf{u}_x\times\mathbf{u}_x=0\quad \mathbf{u}_y\times\mathbf{u}_x=-\mathbf{u}_z\quad \mathbf{u}_z\times\mathbf{u}_x=\mathbf{u}_y$

$\mathbf{u}_x\times\mathbf{u}_y=\mathbf{u}_z\quad \mathbf{u}_y\times\mathbf{u}_y=0\quad \mathbf{u}_z\times\mathbf{u}_y=-\mathbf{u}_x$

$\mathbf{u}_x\times\mathbf{u}_z=-\mathbf{u}_y\quad \mathbf{u}_y\times\mathbf{u}_z=\mathbf{u}_x\quad \mathbf{u}_z\times\mathbf{u}_z=0$

(6)

$$\mathbf{A}\cdot[\mathbf{B}\times\mathbf{C}]=\begin{vmatrix}A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix} \tag{1.91}$$

因为展开行列式后得

$$A_xB_yC_z+A_yB_zC_x+A_zB_xC_y-A_zB_yC_x$$
$$-A_yB_xC_z-A_xB_zC_y$$

而

$$\mathbf{B}\times\mathbf{C}=\mathbf{u}_x(B_yC_z-B_zC_y)+\mathbf{u}_y(B_zC_x-B_xC_z)$$
$$+\mathbf{u}_z(B_xC_y-B_yC_x)$$

$$\mathbf{A}\cdot[\mathbf{B}\times\mathbf{C}]=A_xB_yC_z-A_xB_zC_y+A_yB_zC_x$$
$$-A_yB_xC_z+A_zB_xC_y-A_zB_yC_x$$

与行列式相同. 由此可得

$$\mathbf{A}\cdot[\mathbf{B}\times\mathbf{C}]=\mathbf{B}\cdot[\mathbf{C}\times\mathbf{A}]=\mathbf{C}\cdot[\mathbf{A}\times\mathbf{B}]\cdots$$

(7)

$$\mathbf{A}\times[\mathbf{B}\times\mathbf{C}]=\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) \quad (1.92)$$

证法同上.

1.12.4 结论

实矢量代数中的所有运算公式在复矢量情况下都成立. 但对复矢量来说，下列各量没有几何意义：(1) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$；(2) $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$；(3) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}$；(4) $\mathbf{A}\cdot[\mathbf{B}\times\mathbf{C}]$. 另外，下面的两个公式不成立：

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|\cos(\mathbf{A}\hat{}\mathbf{B})$$

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|=|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|\sin(\mathbf{A}\hat{}\mathbf{B})$$

式中 $\mathbf{A}\hat{}\mathbf{B}$ 表示矢量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 之间的夹角. 在复矢量情况下，$\mathbf{A}\hat{}\mathbf{B}$ 没有意义，因此以上两个公式也不成立.

1.13 两种特殊情况的定义

1.13.1 复矢量的方向

一般来说，复矢量谈不上具有什么方向. 但是，从电磁场理论的需要出发，可以给它定义一个方向(只在电磁场理论中适用).

首先，复矢量的实数部分 $\mathrm{Re}\mathbf{A}$ 定义为以 $\mathbf{A}$ 的各分量的实数部分为分量的实矢量，而虚数部分 $\mathrm{Im}\mathbf{A}$ 定义为以 $\mathbf{A}$ 的各分量的虚数部分为分量的实矢量，即

$$\mathrm{Re}\mathbf{A}=\mathbf{u}_x\mathrm{Re}A_x+\mathbf{u}_y\mathrm{Re}A_y+\mathbf{u}_z\mathrm{Re}A_z$$

$$\mathrm{Im}\mathbf{A}=\mathbf{u}_x\mathrm{Im}A_x+\mathbf{u}_y\mathrm{Im}A_y+\mathbf{u}_z\mathrm{Im}A_z$$

因此

$$\mathbf{A}=\mathrm{Re}\mathbf{A}+i\mathrm{Im}\mathbf{A}\ (i=\sqrt{-1}) \quad (1.93)$$

现在定义复矢量的方向为其实数部分的方向.

例如，若 $\mathbf{E}$ 为实矢量；φ 为实数，则 $\mathbf{E}e^{i\varphi}$ 的方向仍为 $\mathbf{E}$ 的方向，因为它的实数部分为 $\mathbf{E}\cos\varphi$.

同理 $\mathbf{E}e^{i(\omega t+\varphi)}$（$\omega$、$t$ 和 φ 均为实数）的实数部分为 $\mathbf{E}\times\cos(\omega t+\varphi)$，故其方向仍为 $\mathbf{E}$ 的方向.

1.13.2 复矢量的长度

关于复矢量的长度问题，我们不讨论普遍情况而只对一种特殊的复矢量加以定义.

若 $\mathbf{E}^0$ 为实矢量，则 $\mathbf{E}^0e^{i\varphi}$ 的长度定义为 $\mathbf{E}^0$ 的长度，与 $\mathbf{E}^0\cos(\omega t+\varphi)$ 相比，$\mathbf{E}^0e^{i\varphi}$ 的长度就是 $\mathbf{E}^0\cos(\omega t+\varphi)$ 的幅值（ω、t 和 φ 均为实数）.

需要指出的是，复矢量 $\mathbf{E}$ 在一般情况下不能表示成 $\mathbf{E}^0e^{i\varphi_E}$，式中 $\mathbf{E}^0$ 为实矢量，φ_E 为实数.

因为

$$\begin{aligned}\mathbf{E}&=\mathbf{u}_xE_x+\mathbf{u}_yE_y+\mathbf{u}_zE_z\\&=\mathbf{u}_x|E_x|e^{i\varphi_x}+\mathbf{u}_y|E_y|e^{i\varphi_y}+\mathbf{u}_z|E_z|e^{i\varphi_z}\end{aligned}$$

式中 $|E_x|$ 为 E_x 的幅值；φ_x 为 E_x 的相角，余类推. 在一般情况下，φ_x、φ_y 和 φ_z 不一定相等，因此$\mathbf{E}$通常不能表示成 $\mathbf{E}^0e^{i\varphi_E}$，只有当 $\varphi_x=\varphi_y=\varphi_z$ 时，

$$\mathbf{E}=(|E_x|\mathbf{u}_x+|E_y|\mathbf{u}_y+|E_z|\mathbf{u}_z)e^{i\varphi_E}=\mathbf{E}^0e^{i\varphi_E}$$

式中 $\varphi_E=\varphi_x$ 和 $\mathbf{E}^0=|E_x|\mathbf{u}_x+|E_y|\mathbf{u}_y+|E_z|\mathbf{u}_z$ 为实矢量.

1.14 复矢量的微积分

1.14.1 复矢量函数的梯度、散度、旋度的定义

若 $\varphi(x,y,z)$ 为复函数，$\mathbf{E}(x,y,z)$、$\mathbf{a}(x,y,z)$ 为复矢量函数（即各分量均为复函数），则定义

$$\mathrm{grad}\varphi = \mathbf{u}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{u}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{u}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$(\mathbf{E} = \mathbf{u}_x E_x + \mathbf{u}_y E_y + \mathbf{u}_z E_z)$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\mathbf{u}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\mathbf{u}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\mathbf{u}_z$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

$$(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{E} = a_x \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{E} + a_y \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{E} + a_z \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{E}$$

$$(\mathbf{a} = \mathbf{u}_x a_x + \mathbf{u}_y a_y + \mathbf{u}_z a_z) \qquad (1.94)$$

从形式上看，复函数与实函数的情况完全相同，区别仅在于失去了几何意义.

1.14.2 复矢量的 $T(\nabla)$ 的定义

对任何一个含有 ∇ 和对 ∇ 为线性的表达式 $T(\nabla)$ 都可作如下理解：

(1) $T(\nabla)$ 定义为

$$T(\nabla) = \frac{\partial}{\partial x} T(\mathbf{u}_x) + \frac{\partial}{\partial y} T(\mathbf{u}_y) + \frac{\partial}{\partial z} T(\mathbf{u}_z) \qquad (1.95)$$

式中 $T(\mathbf{u}_x)$、$T(\mathbf{u}_y)$ 和 $T(\mathbf{u}_z)$ 为在含有 ∇ 的式子中将 ∇ 换成 $\mathbf{u}_x$、$\mathbf{u}_y$ 和 $\mathbf{u}_z$ 的结果.

(2) 在 $T(\nabla)$ 中，如果在 ∇ 算子的前面有复函数，那么在微分或对 $T(\nabla)$ 积分时这些函数应视为常数，不受微分或积

分的影响.

由此定义可得

$$1)\ \nabla\varphi = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{u}_x\varphi + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{u}_y\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{u}_z\varphi$$

$$= \mathbf{u}_x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{u}_y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{u}_z\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

$$= \mathrm{grad}\varphi \tag{1.96}$$

式中φ为复函数. 因 $\varphi = \mathrm{Re}\varphi + i\mathrm{Im}\varphi$, 故

$$\nabla\varphi = \nabla\mathrm{Re}\varphi + i\nabla\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{gradRe}\varphi + i\mathrm{gradIm}\varphi$$

$$2)\ \nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{u}_x\cdot\mathbf{E}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{u}_y\cdot\mathbf{E}) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{u}_z\cdot\mathbf{E})$$

$$= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \mathrm{div}\mathbf{E}$$

$$= \mathrm{divRe}\mathbf{E} + i\mathrm{divIm}\mathbf{E} \tag{1.97}$$

$$3)\ \nabla\times\mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial x}[\mathbf{u}_x\times\mathbf{E}] + \frac{\partial}{\partial y}[\mathbf{u}_y\times\mathbf{E}]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}[\mathbf{u}_z\times\mathbf{E}]$$

$$= \mathrm{rot}\mathbf{E} = \mathrm{rotRe}\mathbf{E} + i\mathrm{rotIm}\mathbf{E} \tag{1.98}$$

$$4)\ (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}_x)\mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}_y)\mathbf{E}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}_z)\mathbf{E}$$

$$= a_x\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{E} + a_y\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{E} + a_z\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{E} \tag{1.99}$$

式中**a**为复矢量函数.

1.14.3 $T(\nabla)$的性质

运用与实函数情况相同的方法，可以证明(证明过程同

前）$T(\nabla)$ 具有下列性质：

（1）对任何 $T(\nabla)$ 都可将 ∇ 看作矢量进行恒等变换，所得结果不变；但在变换时不可将 ∇ 后面的函数搬到 ∇ 前面（微分时视为常数的函数例外），而在把 ∇ 前面的函数搬到后面时则要注上表示视为常数的脚注 c.

（2）如果在式子 $T(\nabla)$ 中 ∇ 后边有两个函数的乘积（数积、标量积或矢量积），那么 $T(\nabla)$ 可表示成两项之和. 在一项中，一个函数视为常数，不受微分影响；而在另一项中，另一函数视为常数，也不受微分影响.

（3）对 $T(\nabla)$ 有下列积分公式：

$$\iiint_V T(\nabla)dv = \oiint_\Sigma T(\mathbf{n})d\sigma \tag{1.100}$$

式中 Σ 为包含 V 之封闭曲面；$\mathbf{n}$ 为朝向 V 外部的单位法向量.

（4）$T(\nabla)$ 在某固定点 P 上之值与坐标系的选择无关.

（5）另外，还有

$$\mathrm{grad}\varphi(f(\mathbf{r})) = \frac{\partial\varphi}{\partial f}\mathrm{grad}f(\mathbf{r}) \tag{1.101}$$

$$\mathrm{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}) = \mathbf{a}$$

式中 $\mathbf{a}$ 为常矢量.

例 1 如 $\mathbf{b}$ 为常矢量，证明 $\nabla e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}} = e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}\mathbf{b}$.

证

$$\begin{aligned}\nabla e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}} &= \mathrm{grad}e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}\\ &= \frac{\partial e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}}{\partial(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})}\mathrm{grad}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})\\ &= e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}\mathbf{b}\end{aligned} \tag{1.102}$$

例 2 如 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 均为常矢量，试证

$$\nabla\cdot(\mathbf{a}e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}})$$

证

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\mathbf{a}e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}) &= \nabla e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}\cdot\mathbf{a}\\ &= \mathbf{a}\cdot\nabla e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}\\ &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}\ (\text{由式(1.102)})\\ &= \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}(e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}) \qquad (1.103)\end{aligned}$$

若 **a** 为变矢量，**b** 仍为常矢量，则

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{a}e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}} &= \nabla e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}\cdot\mathbf{a}_c+\nabla\cdot\mathbf{a}(e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}})_c\\ &= \mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}})+e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}\mathrm{div}\mathbf{a} \qquad (1.104)\end{aligned}$$

例 3 如 **a** 为变矢量，**b** 为常矢量，试证

$$\nabla\times\mathbf{a}e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}=\mathbf{b}\times\mathbf{a}e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}+e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}\mathrm{rot}\mathbf{a}$$

证

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{a}e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}} &= \nabla\times\mathbf{a}_c e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}+\nabla\times\mathbf{a}(e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}})_c\\ &= -\mathbf{a}\times\nabla e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}+e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}\mathrm{rot}\mathbf{a}\\ &= -\mathbf{a}\times\mathbf{b}e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}+e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}\mathrm{rot}\mathbf{a}\\ &= \mathbf{b}\times\mathbf{a}e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}+e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}\mathrm{rot}\mathbf{a} \qquad (1.105)\end{aligned}$$

若 **a**、**b** 均为常矢量，则

$$\nabla\times\mathbf{a}e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}=\mathbf{b}\times\mathbf{a}e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}} \qquad (1.106)$$

结论 关于 $T(\nabla)$ 的所有理论和公式在复矢量情况下均成立.

1.15 麦克斯韦方程组的复数形式

由于任何连续和有导数的函数都可以展开成有限或无限个正弦或余弦函数之和，再考虑到一般连续波振荡器的振荡电压都是正弦的时间函数，因此，研究麦克斯韦方程组在时间关系为正弦时间函数关系条件下的求解问题，具有重大实际意义.

我们注意到任何正弦函数都可写成 $\cos(\omega t+\varphi)$ 的形式，因为

$$\sin(\omega t+\varphi_1)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\omega t+\varphi_1)\right)$$
$$=\cos\left\{-\left[\omega t+\left(\varphi_1-\frac{\pi}{2}\right)\right]\right\}$$
$$=\cos(\omega t+\varphi)$$

式中 $\varphi=\varphi_1-\pi/2$.

因此,对任何正弦函数,只要研究与时间关系具有

$$\cos(\omega t+\varphi)$$

的形式这一特殊情况就可以了.

具体来说,需要求解下列麦克斯韦方程组:

$$\begin{cases}\mathrm{rot}\mathbf{E}\cos(\omega t+\varphi_E)=-\mu\dfrac{\partial\mathbf{H}\cos(\omega t+\varphi_H)}{\partial t}\\ \mathrm{rot}\mathbf{H}\cos(\omega t+\varphi_H)=\varepsilon\dfrac{\partial\mathbf{E}\cos(\omega t+\varphi_E)}{\partial t}+\mathbf{i}\cos(\omega t+\varphi_i)\end{cases}\tag{1.107}$$

式中 $\mathbf{E}=\mathbf{E}(x,y,z)$、$\mathbf{H}=\mathbf{H}(x,y,z)$、$\mathbf{i}=\mathbf{i}(x,y,z)$、$\varepsilon=\varepsilon(x,y,z)$ 和 $\mu=\mu(x,y,z)$为与时间无关的位置的实函数;φ_E、φ_H 和 φ_i 分别为电场强度、磁场强度和电流密度的初始相位;ω 为角频率;t 为时间.

实际上,只要解出下列复矢量方程组,就得到了上列方程组的解,因为此解就是下列复矢量方程组解的实数部分:

$$\begin{cases}\mathrm{rot}\mathbf{E}e^{i(\omega t+\varphi_E)}=-\mu\dfrac{\partial\mathbf{H}e^{i(\omega t+\varphi_H)}}{\partial t}\\ \mathrm{rot}\mathbf{H}e^{i(\omega t+\varphi_H)}=\varepsilon\dfrac{\partial\mathbf{E}e^{i(\omega t+\varphi_E)}}{\partial t}+\mathbf{i}e^{i(\omega t+\varphi_i)}\end{cases}\tag{1.108}$$

式中 $\mathbf{E}$、$\mathbf{H}$、ε、μ、$\mathbf{i}$、φ_E、φ_H、φ_i 和 t 的意义不变. 因复矢量方程组可写成

$$\mathrm{rct}\mathbf{E}\cos(\omega t+\varphi_E)+i\mathrm{rot}\mathbf{E}\sin(\omega t+\varphi_E)$$

$$= -\mu \frac{\partial \mathbf{H}\cos(\omega t + \varphi_H)}{\partial t} - i\mu \frac{\partial \mathbf{H}\sin(\omega t + \varphi_H)}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{H}\cos(\omega t + \varphi_H) + i\,\mathrm{rot}\mathbf{H}\sin(\omega t + \varphi_H)$$
$$= \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}\cos(\omega t + \varphi_E)}{\partial t} + \mathbf{i}\cos(\omega t + \varphi_i)$$
$$+ i\left(\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}\sin(\omega t + \varphi_E)}{\partial t} + \mathbf{i}\sin(\omega t + \varphi_i)\right)$$

根据两个复数相等则实数部分和虚数部分分别相等的原理，立即就能证明上述论断.

对方程组(1.108)的右边微分并从两边约去公因子 $e^{i\omega t}$ 后，得到与它等效的方程组:

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\mathbf{E}e^{i\varphi_E} = -i\omega\mu\mathbf{H}e^{i\varphi_H} \\ \mathrm{rot}\mathbf{H}e^{i\varphi_H} = i\omega\varepsilon\mathbf{E}e^{i\varphi_E} + \mathbf{i}e^{i\varphi_i} \end{cases} \tag{1.109}$$

令 $\mathbf{E}e^{i\varphi_E} = \dot{\mathbf{E}}$, $\mathbf{H}e^{i\varphi_H} = \dot{\mathbf{H}}$, $\mathbf{i}e^{i\varphi_i} = \dot{\mathbf{i}}$, 代入式(1.109)，得

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\dot{\mathbf{E}} = -i\omega\mu\dot{\mathbf{H}} \\ \mathrm{rot}\dot{\mathbf{H}} = i\omega\varepsilon\dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{i}} \end{cases} \tag{1.110}$$

这个方程组称为对应于 $e^{i\omega t}$ 的复数麦克斯韦方程组. 从推导过程中可以看出，对它的解乘上 $e^{i\omega t}$ 再取实数部分，可得到满足方程组的正弦函数形式解，这就是麦克斯韦方程组的正弦函数解. 为了书写方便，下面我们将把 $\dot{\mathbf{E}}$、$\dot{\mathbf{H}}$ 和 $\dot{\mathbf{i}}$ 上面的点号略去，而把 $\mathbf{E}$、$\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{i}$ 理解为复函数. 在这个条件下，复数麦克斯韦方程组的形式是

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H} \\ \mathrm{rot}\mathbf{H} = i\omega\varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{i} \end{cases} \tag{1.111}$$

式中 $\mathbf{E}$、$\mathbf{H}$、$\mathbf{i}$、ε 和 μ 都是位置的函数.

这里要注意的一点是，推导过程中我们假定了各个矢量在某一个坐标系各坐标轴上的各分量都是同相的(具有公共的 $e^{i\varphi}$). 用几何的语言来说，也就是只考虑了线极化的情况.

如果方程组中的已知函数在坐标轴上的分量不同相(椭圆极化情况),那么我们可以利用方程组的线性性质单独地考虑一个分量的解,最后再将对应于各分量的解相加,我们就是这样来处理已知函数各分量不同相的情况的. 因此,在一般情况下,若复数麦克斯韦方程组解的各分量不同相,则将出现椭圆极化的情况.

如果将方程组(1.111)中的 i 换成 $-i$,然后再进行完全同样的推导,那么将得到下列形式的麦克斯韦方程组:

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\dot{\mathbf{E}} = i\omega\mu\dot{\mathbf{H}} \\ \mathrm{rot}\dot{\mathbf{H}} = -i\omega\varepsilon\dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{i}} \end{cases} \tag{1.112}$$

这个方程组称为对应于 $e^{-i\omega t}$ 的复数麦克斯韦方程组,而方程组(1.111)则称为对应于 $e^{i\omega t}$ 的复数麦克斯韦方程组. 把方程组(1.112)的解乘上 $e^{-i\omega t}$ 再取实数部分,就可以得到麦克斯韦方程组的正弦函数解. 注意,这里 $\dot{\mathbf{i}} = \mathbf{i}e^{-i\varphi_i}$.

为了写起来方便,$\dot{\mathbf{E}}$、$\dot{\mathbf{H}}$ 和 $\dot{\mathbf{i}}$ 上的点号可以略去,而把 $\mathbf{E}$、$\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{i}$ 理解为复函数. 在这个条件下,对应于 $e^{-i\omega t}$ 的复数麦克斯韦方程组的形式为

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H} \\ \mathrm{rot}\mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{i} \end{cases} \tag{1.113}$$

第二章　磁流和磁荷的概念及其应用

在现代有关天线或微波理论的文献中广泛地应用着磁流、磁荷的概念．引进磁流、磁荷的一般的方法是在麦克斯韦方程组中加上两个称为磁流密度和磁荷密度的函数，然后默认这个方程组仍然能正确地描述电磁场，于是便从数学上对带有磁流密度和磁荷密度的方程组进行分析，并从中得出物理上的结论．应当指出：麦克斯韦方程组作为描述宏观电磁场的方程组是一个完整的方程组．它包含了所有有关电磁场的信息．任何在麦克斯韦方程组中添加函数的作法都必须加以论证，以证明在什么条件下所得到的结果仍然是对电磁场的描述，而不仅仅是一些数学上的结论．只有从理论上弄清了磁流、磁荷的含意以及磁流、磁荷激发的场与电磁场的关系之后，才有可能正确地应用磁流、磁荷的概念来解决电磁场的问题．本章的主要内容就是系统地介绍有关磁流、磁荷、磁流麦克斯韦方程组和广义麦克斯韦方程组的概念，然后从等效场的观点证明几个把广义麦克斯韦方程组解或磁流麦克斯韦方程组解与麦克斯韦方程组解联系起来的等效定理，从而为磁流、磁荷概念的应用打下理论基础．

目前，客观世界中究竟存在不存在类似于电子但又能产生磁场的单独的物质微粒问题还没有解决．但这并不影响磁流、磁荷概念的引入，因为从下文中读者可以看出：磁流、磁荷的概念是数学上的概念，并不需要以客观上存在磁流、磁荷为依据．另一方面，假如物理学家发现了磁荷这样的物质微粒，那么磁荷产生磁场的规律也还需要从理论和实验两方面

加以探讨，在目前还没有根据说一定会象电荷那样符合库仑定律．换句话说，即使发现了磁流、磁荷，也没有理由把表述它们的数学函数加到麦克斯韦方程组中去．有些物理学家根据麦克斯韦方程组从数学上来看不太对称这一事实，从而推测会发现磁流、磁荷并可把它们加到麦克斯韦方程组中去从而使麦克斯韦方程组对称起来．目前这只是一种猜想．将来能否发现磁流、磁荷，还有待于物理学的发展来证实．

2.1 磁流和磁荷的定义

在麦克斯韦方程组中，加上两个数学函数 $-\mathbf{i}_m$ 和 ρ_m 后，就得到下列形式方程组：

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{i}_m - \dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m \\ \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \end{cases} \tag{2.1}$$

这个方程组通常称为广义麦克斯韦方程组． 加进去的函数 $\mathbf{i}_m$ 和 ρ_m 分别称为磁流密度和磁荷密度．应当指出，目前还没有发现象点电荷那样单独存在并产生磁场的物质微粒（磁荷），当然更谈不上什么磁荷的流动（磁流）．因此，必须从其他方面来研究 $\mathbf{i}_m$ 和 ρ_m 的意义并论证广义麦克斯韦方程组的解与麦克斯韦方程组之解的关系．

由于取旋度、散度和微分都是线性运算，因此方程组(2.1)实际上是下列两方程组之和：

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{i} + \dfrac{\partial \mathbf{D}_1}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E}_1 = -\dfrac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D}_1 = \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0 \\ \mathbf{D}_1 = \varepsilon \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{B}_1 = \mu \mathbf{H}_1 \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H}_2 = \dfrac{\partial \mathbf{D}_2}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E}_2 = -\mathbf{i}_m - \dfrac{\partial \mathbf{B}_2}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D}_2 = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B}_2 = \rho_m \\ \mathbf{D}_2 = \varepsilon \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{B}_2 = \mu \mathbf{H}_2 \end{cases} \tag{2.3}$$

将这两个方程组中相对应的方程相加，并令

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 \qquad \mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$$
$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2 \qquad \mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$$

就能得到原先的广义麦克斯韦方程组.

方程组(2.2)是一般的麦克斯韦方程组，它表示电流密度 $\mathbf{i}$ 和电荷密度 ρ 与它们所产生的场之间的关系. 方程组 (2.3) 因为多了两项在麦克斯韦方程组中所没有的函数 $\mathbf{i}_m$ 和 ρ_m，所以与麦克斯韦方程组不同. 为了分清两者之间的区别，称方程组(2.3)为磁流麦克斯韦方程组. 方程组 (2.3) 中的 ε 和 μ 与方程组(2.2)中的 ε 和 μ 相同. 这是一条不必要的限制. 一般，可以考虑下列形式的方程组：

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H}_m = \dfrac{\partial \mathbf{D}_m}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E}_m = -\mathbf{i}_m - \dfrac{\partial \mathbf{B}_m}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D}_m = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B}_m = \rho_m \\ \mathbf{D}_m = \varepsilon_m \mathbf{E}_m \\ \mathbf{B}_m = \mu_m \mathbf{H}_m \end{cases} \tag{2.4}$$

这个方程组称之为磁流麦克斯韦方程组．方程组中的矢量函数 $\mathbf{i}_m$ 称为磁流密度；标量函数 ρ_m 称为磁荷密度；$\mathbf{E}_m$、$\mathbf{H}_m$、$\mathbf{B}_m$、$\mathbf{D}_m$ 称为由 $\mathbf{i}_m$ 和 ρ_m 激发的电磁场；ε_m、μ_m 分别称为磁流空间的介质常数和导磁率．

$$Q_m = \iiint_V \rho_m dv$$

称为在体积 V 内的磁荷．

$$I_m = \iint_S \mathbf{i}_m \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

称为通过曲面 S 的磁流．式中 $\mathbf{n}$ 为 S 上 $d\sigma$ 处的单位法向量．

广义麦克斯韦方程组是 $\varepsilon_m = \varepsilon$、$\mu_m = \mu$ 时麦克斯韦方程组和磁流麦克斯韦方程组之和，但在单独研究磁流麦克斯韦方程组时，完全可以独立地取定 ε_m 和 μ_m 的数值．

方程组 (2.4) 中的 $\mathbf{i}_m$ 和 ρ_m 不能独立地给定，因为根据磁流麦克斯韦方程组，对第二方程取散度后得

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [\nabla \times \mathbf{E}_m] &= -\nabla \cdot \mathbf{i}_m - \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{B}_m}{\partial t} \right) \\ &= -\nabla \cdot \mathbf{i}_m - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B}_m) \\ &= -\nabla \cdot \mathbf{i}_m - \frac{\partial \rho_m}{\partial t} \end{aligned}$$

但

$$\nabla \cdot [\nabla \times \mathbf{E}_m] = [\nabla \times \nabla] \cdot \mathbf{E}_m = 0$$

故

$$\nabla \cdot \mathbf{i}_m = -\frac{\partial \rho_m}{\partial t} \tag{2.5}$$

因此 $\mathbf{i}_m$ 和 ρ_m 之间互相有联系，不能分别独立地给定．在解磁流麦克斯韦方程组之前必须先验证这个条件是否得到满足．与麦克斯韦方程组一样，条件(2.5)称为连续性方程．

我们可以把广义麦克斯韦方程组的概念再推广一些．

数学上具有下列形式的方程组称为广义麦克斯韦方程组：

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{i}_m - \dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m \\ \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \end{cases} \tag{2.6}$$

式中 $\mathbf{i}$ 和 $\mathbf{i}_m$ 分别称为电流密度和磁流密度；它们是纯数学的量．$\mathbf{i}$ 不一定与传导电流有联系．ρ 和 ρ_m 分别称为电荷密度与磁荷密度．ρ 和 ρ_m 必须满足连续性方程

$$\nabla \cdot \mathbf{i} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{i}_m = -\frac{\partial \rho_m}{\partial t}$$

ε、μ 称为广义电磁流空间的介质常数和导磁率．$\mathbf{E}$、$\mathbf{H}$、$\mathbf{B}$、$\mathbf{D}$ 称为由 $\mathbf{i}$、ρ 和 $\mathbf{i}_m$、ρ_m 激发的电磁场．

在一般的情况下，ε、μ 可分别取为所研究媒质的介电常

数和导磁率，但也可以根据需要取为另外的数值，例如在空间的一部分取为所研究媒质的 ε、μ，而在空间的其余部分则取为其它的数值。

2.2 磁流麦克斯韦方程组的解法。对偶原理

由方程组(2.2)和(2.4)可见，它们在形式上是很相似的。因此，可以预料，在它们的解之间存在着一定的联系。弄清它们的关系后，只要会解一个方程组，也就不难把另一个方程组的解写出来了。

事实上，假定我们会解方程组(2.2)，也就是说，我们能在已知 $\mathbf{i}$ 和 ρ 条件下求出满足方程组(2.2)的 $\mathbf{E}$、$\mathbf{H}$、$\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{D}$ 来。我们的目的是要通过解方程组 (2.2) 来解方程组(2.4)。为此在方程组(2.2)中取 $\mathbf{i}=\mathbf{i}_m$、$\rho=\rho_m$、$\varepsilon=\mu_m$ 和 $\mu=\varepsilon_m$，再在此条件下求出相应的 $\mathbf{E}$、$\mathbf{H}$、$\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{D}$ 值。

现在来证明：如果取 $\mathbf{H}_m=\mathbf{E}$、$\mathbf{E}_m=-\mathbf{H}$、$\mathbf{B}_m=\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{D}_m=-\mathbf{B}$，那么 $\mathbf{H}_m$、$\mathbf{E}_m$、$\mathbf{B}_m$ 和 $\mathbf{D}_m$ 满足方程组(2.4)。

证明如下：

$$\nabla\times\mathbf{H}_m=\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=\frac{\partial\mathbf{D}_m}{\partial t}$$

$$\nabla\times\mathbf{E}_m=-\nabla\times\mathbf{H}=-\mathbf{i}-\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}=-\mathbf{i}_m-\frac{\partial\mathbf{B}_m}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{D}_m=-\nabla\cdot\mathbf{B}=0$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}_m=\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho=\rho_m$$

$$\mathbf{D}_m=-\mathbf{B}=-\mu\mathbf{H}=\varepsilon_m\mathbf{E}_m$$

$$\mathbf{B}_m=\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}=\mu_m\mathbf{H}_m$$

即方程组 (2.4) 中的所有方程都得到满足。由此可以得出这样一条规则：只要在麦克斯韦方程组解的表达式中将 $\mathbf{E}$ 换

成 $\mathbf{H}_m$，$\mathbf{H}$ 换成 $-\mathbf{E}_m$，$\mathbf{D}$ 换成 $\mathbf{B}_m$，$\mathbf{B}$ 换成 $-\mathbf{D}_m$，$\mathbf{i}$ 换成 $\mathbf{i}_m$，ρ 换成 ρ_m，ε 换成 μ_m，μ 换成 ε_m，就可以得到以 ε_m、μ_m 和 ρ_m、$\mathbf{i}_m$ 为已知量的磁流麦克斯韦方程组中未知量 $\mathbf{E}_m$、$\mathbf{H}_m$、$\mathbf{D}_m$ 和 $\mathbf{B}_m$ 的表达式。这条规则通常称作对偶原理。它说明不必重新去求磁流麦克斯韦方程组的解，只要利用麦克斯韦方程组的解就行了。

为便于查阅，把这种对应关系列入表 2.1 中。

表 2.1　方程组(2.2)和(2.4)中各量的对应关系

$\mathbf{E} \longleftrightarrow \mathbf{H}_m$	$\mathbf{i} \longleftrightarrow \mathbf{i}_m$
$\mathbf{H} \longleftrightarrow -\mathbf{E}_m$	$\rho \longleftrightarrow \rho_m$
$\mathbf{D} \longleftrightarrow \mathbf{B}_m$	$\varepsilon \longleftrightarrow \mu_m$
$\mathbf{B} \longleftrightarrow -\mathbf{D}_m$	$\mu \longleftrightarrow \varepsilon_m$

根据表中的对应关系，磁流、磁荷所激发的场很容易从相应电流、电荷所激发的场中想象出来。只要把磁流密度和磁荷密度当成电流密度和电荷密度，并把 ε 值取成 μ_m 值，把 μ 值取成 ε_m 值，这样求出来的电场强度 $\mathbf{E}$ 就是磁流和磁荷所产生的磁场强度 $\mathbf{H}_m$，电位移 $\mathbf{D}$ 就是磁感应强度 $\mathbf{B}_m$，磁场强度 $\mathbf{H}$ 就是电场强度 $-\mathbf{E}_m$，磁感应强度 $\mathbf{B}$ 就是电位移 $-\mathbf{D}_m$. 简单地说，它们的关系是

强度对强度　$(\mathbf{E} \to \mathbf{H}_m, \mathbf{H} \to -\mathbf{E}_m)$;

位移对感应　$(\mathbf{B} \to -\mathbf{D}_m, \mathbf{D} \to \mathbf{B}_m)$;

电变磁不变号　$(\mathbf{E} \to \mathbf{H}_m, \mathbf{D} \to \mathbf{B}_m)$;

磁变电加负号　$(\mathbf{H} \to -\mathbf{E}_m, \mathbf{B} \to -\mathbf{D}_m)$.

另外应当记住，解题时磁流当电流，磁荷当电荷，ε 取成 μ_m，μ 取成 ε_m.

正是由于电流、磁流场之间的这种简单对偶关系，使磁流的概念和等效定理得到了广泛的应用。

解电磁场问题时，除了要满足麦克斯韦方程组外，有时还

要同时满足所谓边界条件，例如要求在波导内表面上电场的切线分量($\mathbf{n}\times\mathbf{E}$)等于零等等．在应用对偶原理时，由于$\mathbf{E}$变成了$\mathbf{H}_m$，因此原先在某一曲面上的$\mathbf{n}\times\mathbf{E}=0$变成了在同一曲面上$\mathbf{n}\times\mathbf{H}_m=0$．可见，如果磁流麦克斯韦方程组的边界条件是$\mathbf{n}\times\mathbf{H}_m=0$(在同一曲面上)，那么对偶原理仍然成立．由此可得出结论：如果麦克斯韦方程组的解是在一定边界条件下得到的，那么对同一边界，在对边界条件也按表2.1进行对偶变换的条件下(即$\mathbf{n}\times\mathbf{E}=0$变成$\mathbf{n}\times\mathbf{H}_m=0$等)，对偶原理仍然成立．

在无限区域情况下，例如要求解电偶极子在无限均匀媒质中的辐射场，由于没有明显的边界条件(只有所谓辐射条件)，只需考虑满足麦克斯韦方程组本身和辐射条件，当然可直接应用对偶原理而无需考虑边界条件的对偶变换问题．

至于辐射条件，只要原先的场满足麦克斯韦方程组的辐射条件，那么对偶场也必然满足磁流麦克斯韦方程组的辐射条件，因此不必专门加以考虑．关于这一点，可参考第三章中唯一性定理的证明．

这里要再一次强调指出，对偶场指的是麦克斯韦方程组的解和磁流麦克斯韦方程组的解之间的对偶关系，而不是指两个麦克斯韦方程组解之间的对偶关系．如果不明确地引入磁流麦克斯韦方程组的概念，那就很难将对偶原理说清楚．在解边值问题时，如果不同时考虑边界条件的对偶变换，就将得到错误的结果，这一点必须时刻注意．

2.3 磁流麦克斯韦方程组解的物理意义

上一节讨论了磁流麦克斯韦方程组在数学上的解法．现在来探讨磁流麦克斯韦方程组解的物理意义．所谓磁流麦克

斯韦方程组解的物理意义指的是，什么条件下麦克斯韦方程组解与磁流麦克斯韦方程组解才在全空间的一部分区域内数学上恒等．为了把问题说清楚，这里先引入几个概念．

首先引入等效电磁场的概念． 假定有这样两组数学函数： $\mathbf{E}_1, \mathbf{D}_1, \mathbf{H}_1, \mathbf{B}_1$ 和 $\mathbf{E}_2, \mathbf{D}_2, \mathbf{H}_2, \mathbf{B}_2$，它们在空间（不是全空间）的某一部分 v 中都满足麦克斯韦方程组，而且相等，但在空间的其他部分则不一定相同，我们就称这两个电磁场在 v 中是等效的．

根据这个定义，不但磁流麦克斯韦方程组的解，而且广义麦克斯韦方程组的解，在一定条件下都可以于空间的某一部分 v 中与麦克斯韦方程组解等效，因为在没有磁流、磁荷的地方，磁流麦克斯韦方程组和广义麦克斯韦方程组都退化为麦克斯韦方程组了，只要适当地选择磁流、磁荷，就可以使它们的解等效．

证明两个场等效的方法有两种．一种是证明这两个场之差（差场）在空间的一定区域 v 内恒等于零．另一种是在区域 v 内既求出麦克斯韦方程组的解，又求出磁流（或广义）麦克斯韦方程组的解，然后加以比较，如果是相同的，那么就证明了两组解是等效的． 在区域 v 内自然不允许有磁流及磁荷存在．

其次，我们将位于磁流麦克斯韦方程组中的磁偶极子定义为与电偶极子相同的数学函数；也就是说，磁偶极子与电偶极子一样，具有偶极子矩和方向，并可看成是两个点函数之间的距离趋向于零的极限情况．磁偶极子一般用 $\mathbf{m}$ 来表示．

与此相似，磁流麦克斯韦方程组中的线磁流定义为与线电流相同的数学函数，也就是说，线磁流与线电流一样只在空间的一条曲线上定义，而在其他部分等于零，同时它在曲线上每一点的大小和方向都是一定的．

依次类推，面磁流密度定义为与面电流密度相同的数学函数，也就是说，面磁流密度与面电流密度一样，只在空间的某一曲面或平面上有定义，而在其他部分等于零，同时它在曲面上每一点都有一定的大小和方向。

线磁流或面磁流的方向，与线电流或面电流一样，限制在切线或切平面的范围之内。

磁荷体积密度与磁流体积密度的定义与相应电荷体积密度和相应电流体积密度的定义方式相同。

现在来证明磁偶极子场与位于同一位置的无限小电流环的场在除去电流环或磁偶极子所在地的空间其余部分中是等效的。

由 4.7 节知，电偶极子场（为简单起见，考虑正弦电磁场情况）等于

$$\begin{cases} E_r = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon}\left(\dfrac{1}{r^3}+\dfrac{ik}{r^2}\right)(\cos\theta)p_0 e^{i(\omega t-kr)} \\ E_\theta = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\dfrac{1}{r^3}+\dfrac{ik}{r^2}-\dfrac{k^2}{r}\right)(\sin\theta)p_0 e^{i(\omega t-kr)} \\ H_\varphi = \dfrac{i\omega}{4\pi}\left(\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{ik}{r}\right)(\sin\theta)p_0 e^{i(\omega t-kr)} \end{cases} \tag{2.7}$$

式中 p_0 为偶极子矩的幅值；r、θ 和 φ 为球坐标系中的三个坐标变量。偶极子矩的方向是球坐标中极轴（z轴）的正方向（见图 2.1）。

现在来考虑位于空间同一位置（坐标原点）和具有同样方向（z 轴正方向）的磁偶极子场。磁偶极子矩的幅值用 m_0 表示。根据 2.2 节的对偶原理，立即可以写出偶极子矩幅值为 m_0 的磁偶极子的场

$$\begin{cases} H_r = \dfrac{1}{2\pi\mu}\left(\dfrac{1}{r^3}+\dfrac{ik}{r^2}\right)(\cos\theta)m_0 e^{i(\omega t-kr)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_\theta = \dfrac{1}{4\pi\mu}\left(\dfrac{1}{r^3}+\dfrac{ik}{r^2}-\dfrac{k^2}{r}\right)(\sin\theta)m_0 e^{i(\omega t-kr)} \\ E_\varphi = \dfrac{-i\omega}{4\pi}\left(\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{ik}{r}\right)(\sin\theta)m_0 e^{i(\omega t-kr)} \\ \quad = \dfrac{k^2}{4\pi}\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{i}{kr^2}\right)(\sin\theta)m_0 e^{i(\omega t-kr)} \end{cases} \tag{2.8}$$

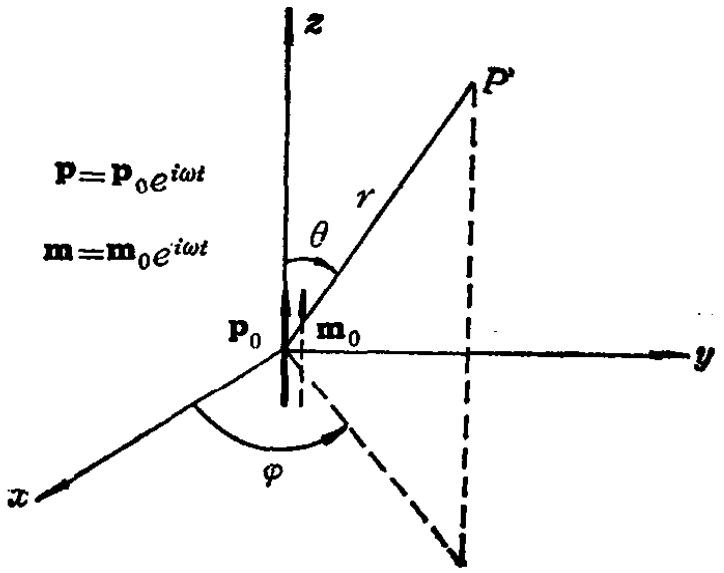

图 2.1　电偶极子和坐标系

再考虑一个位于坐标原点、矩的幅值为 n_0 ($n_0 = iS$，i 为电流幅值，S 为电流环面积)的小电流环．电流环的矩的方向(S 的法线方向) 也取为 z 轴的正方向．S 的法线方向和电流方向应成右手螺旋关系．根据 4.9 节，当电流环面积趋于零而 n_0 的大小保持不变时，电流环的场可写为

$$\begin{cases} H_r = \dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{1}{r^3}+\dfrac{ik}{r^2}\right)(\cos\theta)n_0 e^{i(\omega t-kr)} \\ H_\theta = \dfrac{1}{4\pi}\left(\dfrac{1}{r^3}+\dfrac{ik}{r^2}-\dfrac{k^2}{r}\right)(\sin\theta)n_0 e^{i(\omega t-kr)} \\ E_\varphi = \dfrac{k^2}{4\pi}\dfrac{\mu}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{i}{kr^2}\right)(\sin\theta)n_0 e^{i(\omega t-kr)} \end{cases} \tag{2.9}$$

比较公式(2.8)和(2.9)可以看出，具有同样方向并处于空间同一位置的磁偶极子与小电流环（这里方向指的是偶极子的矩和电流环的矩的方向)的场，其结构是完全相同的；如果取

$$m_0 = \mu n_0 \tag{2.10}$$

那么场的大小也完全一样．由此可以得出下列结论：若在空间的同一点上有一磁偶极子或无限小电流环，它们的矩的方向相同，并且 $m_0 = \mu_0 n_0$，则在不包含磁偶极子或电流环的其余空间部分，二者的场是等效的． 这就是磁偶极子场的物理意义．换句话说，磁偶极子场（数学函数）与无限小电流环场(同样是数学函数，但物理上可通过一面积趋向于零的小电流环实现)在没有场源的地方是一样的，而磁偶极子场与电偶极子场之间又存在着对偶关系．正是由于小电流环所激励的场与电偶极子的对偶场其场结构相同这个原因，有时就直接把小电流环称为磁偶极子．但是必须指出，小电流环场和磁偶极子场在本质上是有区别的．

小电流环场在全空间内满足麦克斯韦方程组，物理上可以通过小电流环实现．磁偶极子场不能在全空间满足麦克斯韦方程组，而只能在全空间满足磁流麦克斯韦方程组，它主要是一个数学上的函数，物理上则无法实现，因为到目前为止还没有发现如磁荷、磁偶极子之类能产生满足磁流麦克斯韦方程组的场的物质． 可是，由于数学上在场源之外电流环场和磁偶极子场是等效的，因此从研究场结构的观点来看，这两种场也可以不加区分． 但必须指出，两种场在全空间内所满足的方程组是不一样的．

由于线电流可以看成是电偶极子的组合，因此线磁流可以看成是磁偶极子的组合．由此可以立即得出结论：线磁流的场与处于同样位置的无限细螺线管的场在螺线管外部是等

效的． 螺线管的电流方向与磁流方向应符合右手螺旋定则，以保证电流矩和磁偶极子矩的方向一致． 同样，由于面电流可以看成是线电流的组合，因此面磁流可以看成是线磁流的组合，由此可见面磁流的场与处于同样地位的无限细螺线管组合的场在面磁流外部是等效的．

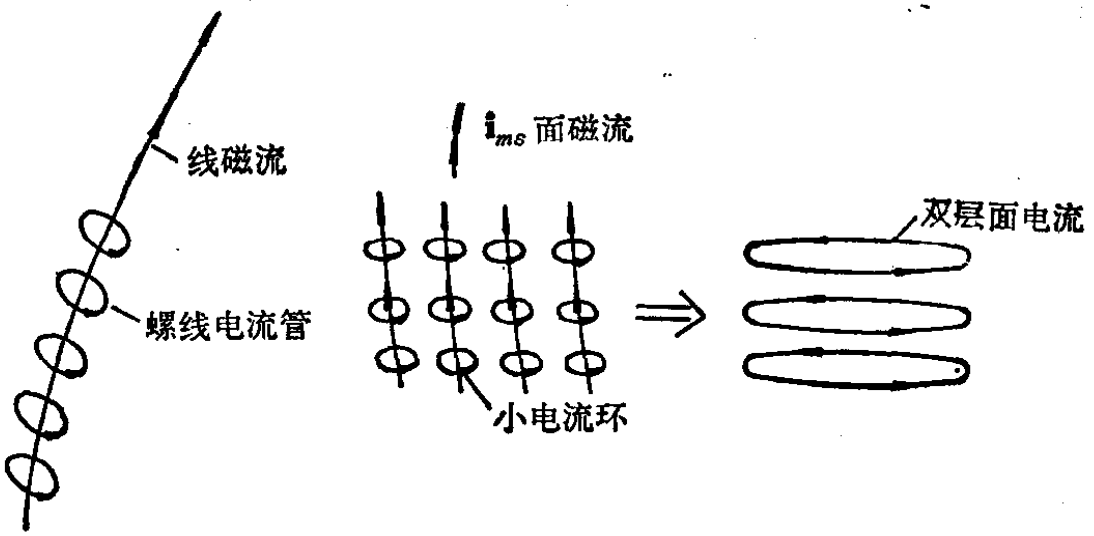

图 2.2 线磁流与细螺线电流管等效，面磁流与双层面电流等效

2.4 广义麦克斯韦方程组解的物理意义．一般等效定理

我们把任意时间关系条件下的广义麦克斯韦方程组重写一遍：

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{i}_m - \dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \end{cases}$$

它表示 **E**、**H**、**B** 和 **D** 四个矢量与 ε、μ、ρ、ρ_m、**i** 和 $\mathbf{i}_m$ 之间的

关系。在 2.1 节中已经指出，$\mathbf{i}_m$ 和 ρ_m 不能相互独立地给定，而要满足下列所谓连续性方程：

$$\nabla \cdot \mathbf{i}_m = -\frac{\partial \rho_m}{\partial t} \tag{2.11}$$

同样，$\mathbf{i}$ 和 ρ 也必须满足连续性方程

$$\nabla \cdot \mathbf{i} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{2.12}$$

在给出 $\mathbf{i}$、ρ、$\mathbf{i}_m$ 和 ρ_m 的具体函数后，必须对它们是否满足上述连续性方程加以验证。

假设在空间分别给定了两组互不相关的交变场源 $\mathbf{i}_1$、ρ_1 和 $\mathbf{i}_2$、ρ_2。令 $\mathbf{i}_1$、ρ_1 在媒质参数为 ε_1、μ_1 的条件下所产生的场为 $\mathbf{E}_1$、$\mathbf{H}_1$、$\mathbf{B}_1$ 和 $\mathbf{D}_1$。令 $\mathbf{i}_2$、ρ_2 在媒质参数为 ε_2、μ_2 的条件下所产生的场为 $\mathbf{E}_2$、$\mathbf{H}_2$、$\mathbf{B}_2$ 和 $\mathbf{D}_2$。这两个场分别满足麦克斯韦方程组：

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E}_1 = -\dfrac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H}_1 = \dfrac{\partial \mathbf{D}_1}{\partial t} + \mathbf{i}_1 \\ \nabla \cdot \mathbf{D}_1 = \rho_1 \qquad \mathbf{D}_1 = \varepsilon_1 \mathbf{E}_1 \\ \nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0 \qquad \mathbf{B}_1 = \mu_1 \mathbf{H}_1 \end{cases} \tag{2.13}$$

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E}_2 = -\dfrac{\partial \mathbf{B}_2}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H}_2 = \dfrac{\partial \mathbf{D}_2}{\partial t} + \mathbf{i}_2 \\ \nabla \cdot \mathbf{D}_2 = \rho_2 \qquad \mathbf{D}_2 = \varepsilon_2 \mathbf{E}_2 \\ \nabla \cdot \mathbf{B}_2 = 0 \qquad \mathbf{B}_2 = \mu_2 \mathbf{H}_2 \end{cases} \tag{2.14}$$

在空间作一封闭曲面 S 如图 2.3 所示。

$\mathbf{i}_1$ 和 ρ_1 的一部分位于 S 之外，另一部分位于 S 之内。$\mathbf{i}_2$ 和 ρ_2 的一部分位于 S 之外，另一部分位于 S 之内。

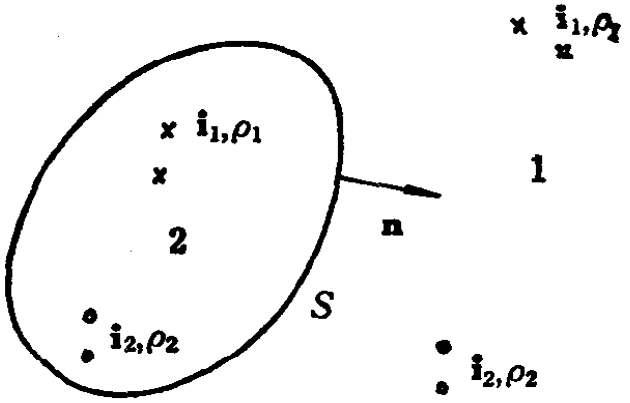

图 2.3　两组场源产生互相独立的两个场

现在在 S 之外取由所有的 $\mathbf{i}_1$ 和 ρ_1 形成的场 $\mathbf{E}_1$、$\mathbf{H}_1$、$\mathbf{D}_1$ 和 $\mathbf{B}_1$，媒质参数取为 ε_1、μ_1；在 S 之内则取由所有的 $\mathbf{i}_2$、ρ_2 所形成的场 $\mathbf{E}_2$、$\mathbf{H}_2$、$\mathbf{D}_2$ 和 $\mathbf{B}_2$，媒质参数取为 $\varepsilon_2\mu_2$。这样，我们就在空间的不同区域（S 之内及 S 之外）取了两个互不相关的场 $\mathbf{E}_1$、$\mathbf{H}_1$、$\mathbf{D}_1$、$\mathbf{B}_1$ 和 $\mathbf{E}_2$、$\mathbf{H}_2$、$\mathbf{D}_2$、$\mathbf{B}_2$。

我们来证明，如果作为广义麦克斯韦方程组的场源在 S 之外取 $\mathbf{i}_1$ 和 ρ_1 在 S 之外的部分，媒质参数取为 ε_1、μ_1；而在 S 之内取场源为 $\mathbf{i}_2$ 和 ρ_2 在 S 之内的部分，媒质参数则取为 ε_2、μ_2，并且在 S 上适当地引入表面的 ρ_s、ρ_{ms}、$\mathbf{i}_s$ 和 $\mathbf{i}_{ms}$，那么就可以使广义麦克斯韦方程组的解在 S 之外与 $\mathbf{E}_1$、$\mathbf{H}_1$、$\mathbf{D}_1$ 和 $\mathbf{B}_1$ 等效，而在 S 之内则与 $\mathbf{E}_2$、$\mathbf{H}_2$、$\mathbf{D}_2$ 和 $\mathbf{B}_2$ 等效。具体地说，我们可以通过证明下列一般等效定理来阐明广义麦克斯韦方程组的物理意义。

一般等效定理　如果在 S 之外取广义麦克斯韦方程组中的 $\mathbf{i}$ 和 ρ 为 $\mathbf{i}_1$ 和 ρ_1 在 S 之外的部分，而在 S 之内则取 $\mathbf{i}$ 和 ρ 为 $\mathbf{i}_2$ 和 ρ_2 在 S 之内的部分。在 S 之上则取 $\mathbf{i}$（令为 $\mathbf{i}_s$）为

$$\mathbf{i}_s = \mathbf{n} \times [\mathbf{H}_1^e - \mathbf{H}_2^i]$$

并取 ρ_m（令为 ρ_{ms}）为

$$\rho_{ms} = B_{1n}^e - B_{2n}^i$$

式中 $\mathbf{H}_1^e$ 和 $\mathbf{B}_1^e$ 为 $\mathbf{H}_1$ 和 $\mathbf{B}_1$ 由 S 外向 S 接近时的极限值；$\mathbf{H}_2^i$ 和 $\mathbf{B}_2^i$ 为 $\mathbf{H}_2$ 和 $\mathbf{B}_2$ 由 S 内向 S 接近时的极限值；B_{1n}^e 为 $\mathbf{B}_1$ 的法线分量由 S 外向 S 接近时的极限值；B_{2n}^i 为 $\mathbf{B}_2$ 的法线分量由 S 内向 S 接近时的极限值。单位法向量 $\mathbf{n}$ 指向封闭曲面 S 外部，如图 2.3 所示。法线分量指的是位于 S 上的极限点的法线方向上的分量。

再在 S 上取 $\mathbf{i}_m$（令为 $\mathbf{i}_{ms}$）为

$$\mathbf{i}_{ms} = [\mathbf{E}_1^e - \mathbf{E}_2^i] \times \mathbf{n}$$

取 ρ（令为 ρ_s）为

$$\rho_s = D_{1n}^e - D_{2n}^i$$

式中 $\mathbf{E}_1^e$ 为 $\mathbf{E}_1$ 由 S 外向 S 接近时的极限值；$\mathbf{E}_2^i$ 为 $\mathbf{E}_2$ 由 S 内向 S 接近时的极限值；D_{1n}^e 为 $\mathbf{D}_1$ 的法线分量由 S 外向 S 接近时的极限值；D_{2n}^i 为 $\mathbf{D}_2$ 的法线分量由 S 内向 S 接近时的极限值。

在上述条件下，在 S 之外广义麦克斯韦方程组的解等于 $\mathbf{E}_1$、$\mathbf{H}_1$、$\mathbf{D}_1$ 和 $\mathbf{B}_1$，而在 S 之内则等于 $\mathbf{E}_2$、$\mathbf{H}_2$、$\mathbf{D}_2$ 和 $\mathbf{B}_2$。广义麦克斯韦方程中的 ε 和 μ 假定只为空间坐标的函数，而且在 S 内 $\varepsilon = \varepsilon_2, \mu = \mu_2$；在 S 外 $\varepsilon = \varepsilon_1, \mu = \mu_1$。

另外，这里的 $\mathbf{E}_1$、$\mathbf{H}_1$、$\mathbf{D}_1$、$\mathbf{B}_1$ 和 $\mathbf{E}_2$、$\mathbf{H}_2$、$\mathbf{D}_2$、$\mathbf{B}_2$ 以及广义麦克斯韦方程组的解，指的都是这样的解，即在有限时间内由位于有限区域内的场源所产生，并以有限速度（不大于光速 c）向无穷远传播。

证明等效定理之前，我们必须先验证在 S 上给定的 $\mathbf{i}_s$、ρ_s、ρ_{ms} 和 $\mathbf{i}_{ms}$ 是否都满足连续性方程。

当体积退化成面时，电（磁）流的连续性方程退化为由单位面积内通过边界流出的总电（磁）流等于单位面积内电（磁）荷（即面电（磁）荷密度）的变化率。

拿磁流的情况来说，可写为（见图 2.4）

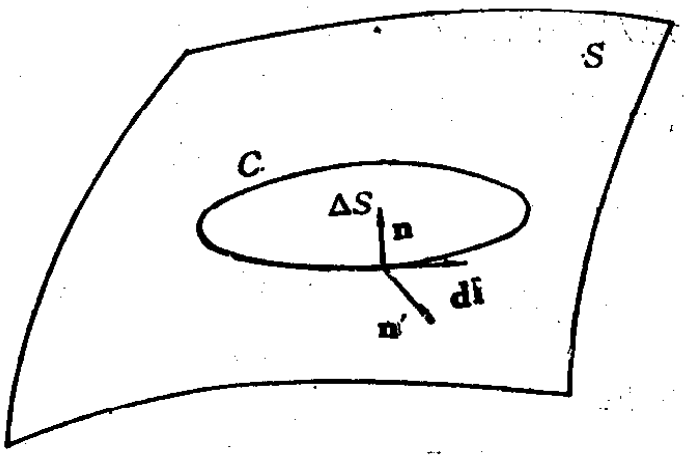

图 2.4　曲面 S 及各矢量的意义

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_C \mathbf{i}_{ms}\cdot\mathbf{n}'dl}{\Delta S}=-\frac{\partial\rho_{ms}}{\partial t} \tag{2.15}$$

式中 $\mathbf{n}$ 为 S 上的封闭曲线 C 中某一点的单位法向量（S 的法线）；$d\mathbf{l}$ 为 C 的切线，与 $\mathbf{n}$ 之方向成右手螺旋关系（$d\mathbf{l}$ 位于 S 的切平面内）；$\mathbf{n}'$ 为垂直于 $d\mathbf{l}$ 的 S 的单位切线（同样处于切平面内），指向 C 的外部；ρ_{ms} 为单位面积上的磁荷，即面磁荷密度。

下面以磁流情况为例进行讨论。对电流情况可作同样讨论。

对于磁流情况，因为 $\mathbf{E}_1$、$\mathbf{B}_1$、$\mathbf{E}_2$ 和 $\mathbf{B}_2$ 都满足麦克斯韦方程组，所以在 S 所在地，

$$\nabla\times\mathbf{E}_1=-\frac{\partial\mathbf{B}_1}{\partial t} \tag{2.16}$$

$$\nabla\times\mathbf{E}_2=-\frac{\partial\mathbf{B}_2}{\partial t} \tag{2.17}$$

式(2.16)减式(2.17)得

$$\nabla\times(\mathbf{E}_1-\mathbf{E}_2)=-\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{B}_1-\mathbf{B}_2)$$

（在 S 上 $\mathbf{i}_1=\mathbf{i}_2=0$，$\rho_1=\rho_2=0$）。

将此式两边对小曲面 ΔS 求通量，得

$$\iint_{\Delta S} \nabla \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{n} d\sigma = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Delta S} (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

应用斯托克斯定理，得

$$\oint_C (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Delta S} (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

由图 2.4 可见

$$d\mathbf{l} = \mathbf{n} \times \mathbf{n}' dl$$

因此

$$\begin{aligned}(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot d\mathbf{l} &= (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot [\mathbf{n} \times \mathbf{n}'] dl \\ &= [(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \mathbf{n}] \cdot \mathbf{n}' dl\end{aligned}$$

即

$$\oint_C [(\mathbf{E}_1^e - \mathbf{E}_2^i) \times \mathbf{n}] \cdot \mathbf{n}' dl = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Delta S} (\mathbf{B}_1^e - \mathbf{B}_2^i) \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

（在 S 上 $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_1^e$, $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_2^i$, $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_1^e$, $\mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_2^i$，因麦克斯韦方程组的解是连续函数）。

两边除以 ΔS 并取 $\Delta S \to 0$ 的极限，即得

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_C [(\mathbf{E}_1^e - \mathbf{E}_2^i) \times \mathbf{n}] \cdot \mathbf{n}' dl}{\Delta S} &= -\frac{\partial}{\partial t} \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\iint_{\Delta S} (\mathbf{B}_1^e - \mathbf{B}_2^i) \cdot \mathbf{n} d\sigma}{\Delta S} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B}_1^e - \mathbf{B}_2^i) \cdot \mathbf{n}\end{aligned}$$

因 $\mathbf{i}_{ms} = [(\mathbf{E}_1^e - \mathbf{E}_2^i) \times \mathbf{n}]$, $\rho_{ms} = (\mathbf{B}_1^e - \mathbf{B}_2^i) \cdot \mathbf{n}$，代入上式，得

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_C \mathbf{i}_{ms} \cdot \mathbf{n}' dl}{\Delta S} = -\frac{\partial \rho_{ms}}{\partial t}$$

此即连续性方程．用完全相同的方法可以证明

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_C \mathbf{i}_s\cdot\mathbf{n}'dl}{\Delta S}=-\frac{\partial\rho_s}{\partial t}$$

式中 $\mathbf{i}_s=\mathbf{n}\times(\mathbf{H}_1^e-\mathbf{H}_2^i)$，$\rho_s=(\mathbf{D}_1^e-\mathbf{D}_2^i)\cdot\mathbf{n}$。

下面证明等效定理．

令广义麦克斯韦方程组的解为 **E**、**H**、**B** 和 **D**．在 S 之外令

$$\begin{cases}\delta\mathbf{H}=\mathbf{H}-\mathbf{H}_1\\ \delta\mathbf{E}=\mathbf{E}-\mathbf{E}_1\end{cases}\qquad\begin{cases}\delta\mathbf{B}=\mathbf{B}-\mathbf{B}_1\\ \delta\mathbf{D}=\mathbf{D}-\mathbf{D}_1\end{cases}$$

而在 S 之内则令

$$\begin{cases}\delta\mathbf{H}=\mathbf{H}-\mathbf{H}_2\\ \delta\mathbf{E}=\mathbf{E}-\mathbf{E}_2\end{cases}\qquad\begin{cases}\delta\mathbf{B}=\mathbf{B}-\mathbf{B}_2\\ \delta\mathbf{D}=\mathbf{D}-\mathbf{D}_2\end{cases}$$

在 S 之外，

$$\begin{cases}\nabla\times\mathbf{H}=\dfrac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{i}_1\\ \nabla\times\mathbf{E}=-\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_1\qquad\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}\\ \nabla\cdot\mathbf{B}=0\qquad\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}\end{cases}\tag{2.18}$$

$$\begin{cases}\nabla\times\mathbf{H}_1=\dfrac{\partial\mathbf{D}_1}{\partial t}+\mathbf{i}_1\\ \nabla\times\mathbf{E}_1=-\dfrac{\partial\mathbf{B}_1}{\partial t}\\ \nabla\cdot\mathbf{D}_1=\rho_1\qquad\mathbf{D}_1=\varepsilon_1\mathbf{E}_1\\ \nabla\cdot\mathbf{B}_1=0\qquad\mathbf{B}_1=\mu_1\mathbf{H}_1\end{cases}\tag{2.19}$$

注意，在 S 之外 $\mathbf{i}_s$、$\mathbf{i}_{ms}$、ρ_s 和 ρ_{ms} 均为零，且 $\varepsilon=\varepsilon_1$，$\mu=\mu_1$。

式(2.18)减式(2.19)后，得在 S 之外，

$$\begin{cases} \nabla \times \delta\mathbf{H} = \dfrac{\partial}{\partial t}(\delta\mathbf{D}) & \nabla \cdot \delta\mathbf{B} = 0 \quad \delta\mathbf{B} = \mu\delta\mathbf{H} \\ \nabla \times \delta\mathbf{E} = -\dfrac{\partial}{\partial t}(\delta\mathbf{B}) & \nabla \cdot \delta\mathbf{D} = 0 \quad \delta\mathbf{D} = \varepsilon\delta\mathbf{E} \end{cases} \tag{2.20}$$

同理，在 S 之内，

$$\begin{cases} \nabla \times \delta\mathbf{H} = \dfrac{\partial}{\partial t}(\delta\mathbf{D}) & \nabla \cdot \delta\mathbf{B} = 0 \quad \delta\mathbf{B} = \mu\delta\mathbf{H} \\ \nabla \times \delta\mathbf{E} = -\dfrac{\partial}{\partial t}(\delta\mathbf{B}) & \nabla \cdot \delta\mathbf{D} = 0 \quad \delta\mathbf{D} = \varepsilon\delta\mathbf{E} \end{cases} \tag{2.21}$$

这里 $\varepsilon = \varepsilon_2$，$\mu = \mu_2$。

在曲面 S 上，根据推导麦克斯韦方程组边界条件的一般方法可知

$$\begin{cases} B_n^e - B_n^i = \rho_{ms} = B_{1n}^e - B_{2n}^i \\ D_n^e - D_n^i = \rho_s = D_{1n}^e - D_{2n}^i \\ \mathbf{n} \times [\mathbf{H}^e - \mathbf{H}^i] = \mathbf{i}_s = \mathbf{n} \times [\mathbf{H}_1^e - \mathbf{H}_2^i] \\ [\mathbf{E}^e - \mathbf{E}^i] \times \mathbf{n} = \mathbf{i}_{ms} = [\mathbf{E}_1^e - \mathbf{E}_2^i] \times \mathbf{n} \end{cases} \tag{2.22}$$

此处 B_n^e 是 $\mathbf{B}$ 在 S 之外侧法线上的投影；B_n^i 是 $\mathbf{B}$ 在 S 之内侧法线上之投影；D_n^e 是 $\mathbf{D}$ 在 S 之外侧法线上的投影；$\mathbf{D}_n^i$ 是 $\mathbf{D}$ 在 S 之内侧法线上之投影；$\mathbf{H}^e$ 是 $\mathbf{H}$ 由 S 之外侧向 S 靠近之极限值；$\mathbf{H}^i$ 是 $\mathbf{H}$ 由 S 之内侧向 S 靠近之极限值；$\mathbf{E}^e$ 是 $\mathbf{E}$ 由 S 之外侧向 S 靠近之极限值；$\mathbf{E}^i$ 是 $\mathbf{E}$ 由 S 之内侧向 S 靠近之极限值。

现在我们来证明在 S 之内和 S 之外的 $\delta\mathbf{H} \equiv 0$，$\delta\mathbf{B} \equiv 0$，$\delta\mathbf{E} \equiv 0$，$\delta\mathbf{D} \equiv 0$，即在 S 之外 $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1$，$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1$，$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1$，$\mathbf{D} = \mathbf{D}_1$，而在 S 之内 $\mathbf{H} = \mathbf{H}_2$，$\mathbf{B} = \mathbf{B}_2$，$\mathbf{E} = \mathbf{E}_2$，$\mathbf{D} = \mathbf{D}_2$。

为此在 S 之外取离 S 无限近的 S_1，在 S 之内取离 S 无限近的 S_2，并在极远的地方取封闭曲面 S_3，如图 2.5 所示。

首先可以证明 $\delta\mathbf{E}$、$\delta\mathbf{H}$ 的切线分量在 S 面上连续。例如

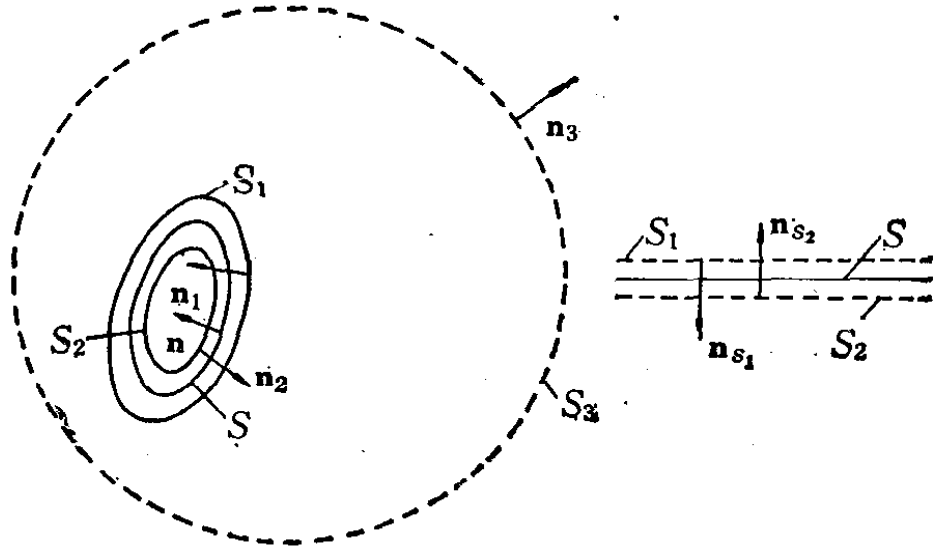

图 2.5　各矢量的相互位置

若令 $\delta\mathbf{H}$ 从 S 之外向 S 接近时的极限值为 $\delta\mathbf{H}^e$，从 S 之内向 S 接近时的极限值为 $\delta\mathbf{H}^i$，则 $\delta\mathbf{H}^e = \mathbf{H}^e - \mathbf{H}_1^e$，$\delta\mathbf{H}^i = \mathbf{H}^i - \mathbf{H}_2^i$. 式中 $\mathbf{H}^e$ 和 $\mathbf{H}^i$ 为 $\mathbf{H}$ 从 S 之外或之内向 S 接近时的极限值. 因为

$$\mathbf{n} \times [\mathbf{H}^e - \mathbf{H}^i] = \mathbf{i}_S = \mathbf{n} \times [\mathbf{H}_1^e - \mathbf{H}_2^i]$$

所以

$$\mathbf{n} \times [\mathbf{H}^e - \mathbf{H}_1^e] = \mathbf{n} \times [\mathbf{H}^i - \mathbf{H}_2^i]$$

即

$$\mathbf{n} \times \delta\mathbf{H}^e = \mathbf{n} \times \delta\mathbf{H}^i$$

这意味着 $\delta\mathbf{H}$ 之切线分量连续. 用同样的方法可以证明 $\delta\mathbf{E}$ 的切线分量在 S 上也是连续的.

观察一下位于 S_1 和 S_3 之间及位于 S_2 之内的空间. 可以看出所有单位法线 $\mathbf{n}_1$、$\mathbf{n}_2$ 和 $\mathbf{n}_3$ 的指向都是朝"外"的，如图 2.5 所示. 令这个空间为 V，又令 $S_\Sigma = S_1 + S_2 + S_3$. S_Σ 是包含 V 的曲面. 于是在空间 V 中有

$$\nabla \times \delta\mathbf{H} = \frac{\partial}{\partial t}(\delta\mathbf{D}) \qquad (2.23)$$

$$\nabla \times \delta\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\delta\mathbf{B}) \tag{2.24}$$

$$\nabla \cdot \delta\mathbf{B} = 0 \tag{2.25}$$

$$\nabla \cdot \delta\mathbf{D} = 0 \tag{2.26}$$

$$\delta\mathbf{B} = \mu\delta\mathbf{H} \tag{2.27}$$

$$\delta\mathbf{D} = \varepsilon\delta\mathbf{E} \tag{2.28}$$

由式(2.23)和(2.24)得

$$\delta\mathbf{E} \cdot [\nabla \times \delta\mathbf{H}] = \delta\mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\delta\mathbf{D})$$

$$\delta\mathbf{H} \cdot [\nabla \times \delta\mathbf{E}] = -\delta\mathbf{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\delta\mathbf{B})$$

即

$$\delta\mathbf{E} \cdot [\nabla \times \delta\mathbf{H}] - \delta\mathbf{H} \cdot [\nabla \times \delta\mathbf{E}] = \delta\mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\delta\mathbf{D}) + \delta\mathbf{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\delta\mathbf{B})$$

因为

$$\nabla \cdot [\delta\mathbf{E} \times \delta\mathbf{H}] = \delta\mathbf{H} \cdot [\nabla \times \delta\mathbf{E}] - \delta\mathbf{E} \cdot [\nabla \times \delta\mathbf{H}]$$

及

$$\begin{aligned}
&\delta\mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\delta\mathbf{D}) + \delta\mathbf{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\delta\mathbf{B}) \\
&= \delta\mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\delta\mathbf{E}) + \delta\mathbf{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\mu\delta\mathbf{H}) \\
&= \varepsilon\left(\delta\mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\delta\mathbf{E})\right) + \mu\left(\delta\mathbf{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\delta\mathbf{H})\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\delta\mathbf{E}^2 + \mu\delta\mathbf{H}^2)
\end{aligned}$$

所以，将 $\delta\mathbf{E}$ 的幅值写成 δE，将 $\delta\mathbf{H}$ 的幅值写成 δH 后有

$$\nabla \cdot [\delta\mathbf{E} \times \delta\mathbf{H}] + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon\delta E^2 + \mu\delta H^2}{2}\right) = 0$$

对体积 V 积分，得

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \frac{\varepsilon\delta E^2+\mu\delta H^2}{2}dv=-\oiint_{S_\Sigma}[\delta\mathbf{E}\times\delta\mathbf{H}]\cdot\mathbf{n}d\sigma \quad (2.29)$$

在 $t_0\sim t>t_0$ 时间内对式(2.29)积分：

$$\iiint_V \frac{\varepsilon\delta E^2+\mu\delta H^2}{2}\Big|_t dv=-\int_{t_0}^{t}dt\oiint_{S_\Sigma}[\delta\mathbf{E}\times\delta\mathbf{H}]\cdot\mathbf{n}d\sigma$$

$$+\iiint_V \frac{\varepsilon\delta E^2+\mu\delta H^2}{2}\Big|_{t_0} dv \quad (2.30)$$

先考察积分

$$\oiint_{S_\Sigma}[\delta\mathbf{E}\times\delta\mathbf{H}]\cdot\mathbf{n}d\sigma=\oiint_{S_1+S_2}[\delta\mathbf{E}\times\delta\mathbf{H}]\cdot\mathbf{n}d\sigma$$

$$+\oiint_{S_3}[\delta\mathbf{E}\times\delta\mathbf{H}]\cdot\mathbf{n}d\sigma$$

在 S_1 和 S_2 无限接近 S 情况下它们变得与 S 重合．这时可取 $d\sigma_1=d\sigma_2=d\sigma$，可是单位法线的方向正好相反．由于 $\delta\mathbf{E}$ 和 $\delta\mathbf{H}$ 的切线分量已在前面证明是连续函数，因此对 S_1+S_2 的积分来说，当 S_1 和 S_2 无限接近 S 时，$\delta\mathbf{E}\times\delta\mathbf{H}$ 趋向同一值，$d\sigma_1$ 和 $d\sigma_2$ 重合，而法线方向相反，结果当 S_1、S_2 趋向 S 时，

$$\oiint_{S_1+S_2}[\delta\mathbf{E}\times\delta\mathbf{H}]\cdot\mathbf{n}d\sigma\to 0\quad(S_1,S_2\to S) \quad (2.31)$$

注意 $\delta\mathbf{E}$ 及 $\delta\mathbf{H}$ 的法线分量在式(2.31)中不起作用，因法线分量又乘 $\mathbf{n}$ 后等于零．

由于我们只考虑以有限速度(不大于光速 c)向无限远处传播的解，因此在任意时刻 t 内，总可将 S_3 选择得位于能传播到的范围之外．这时在 S_3 上 $\delta\mathbf{E}=\delta\mathbf{H}=0$，于是

$$\oiint_{S_3}[\delta\mathbf{E}\times\delta\mathbf{H}]\cdot\mathbf{n}d\sigma=0 \quad (2.32)$$

显然，当 S_3 趋向无穷远时积分仍为零．这样

$$\oiint_{S_\Sigma} [\delta\mathbf{E} \times \delta\mathbf{H}] \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0 \qquad (2.33)$$

($S_1, S_2 \to S$, $S_3 \to \infty$, 时间在 t_0 到 t 的范围内). 因此

$$-\int_{t_0}^{t} dt \oiint_{S_\Sigma} [\delta\mathbf{E} \times \delta\mathbf{H}] \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0 \qquad (2.34)$$

(对零的积分恒等于零).

另外,由于我们只考虑有限时间内产生的场,因此总可以将 t_0 选得处于场产生之前. 这时 $\delta\mathbf{E} = \delta\mathbf{H} = 0$ ($t = t_0$), 结果

$$\iiint_V \left. \frac{\varepsilon\delta E^2 + \mu\delta H^2}{2} \right|_{t_0} dv = 0 \qquad (2.35)$$

将式(2.34)和(2.35)代入式(2.30), 得

$$\iiint_V \left. \frac{\varepsilon\delta E^2 + \mu\delta H^2}{2} \right|_{t} dv = 0$$

由于积分号内的函数是正数,而积分等于零,因此 $\delta\mathbf{E} = 0, \delta\mathbf{H} = 0$. 相应地 $\delta\mathbf{D} = 0$, $\delta\mathbf{B} = 0$, 即在 S 之外 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1$, $\mathbf{D} = \mathbf{D}_1$, 而在 S 之内 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_2$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_2$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_2$, $\mathbf{D} = \mathbf{D}_2$. 这就是我们要证明的一般等效定理.

必须指出,我们是在下列条件下证明的: (1)电磁场在有限时刻产生;(2)电磁场在有限区域内产生并以有限速度向无穷远传播. 由于任何实际电磁场都满足这两个条件,因此可以说,等效定理适用于任何实际情况.

另外还要指出, 一般等效定理中广义麦克斯韦方程组的解, 在不同区域内分别与两个互不相关的麦克斯韦方程组的解等效. 根据不同情况选择两组麦克斯韦方程的解, 就可以得到各种特殊形式的等效定理.

2.5 一般等效定理的两种特殊情况

在一般等效定理中，取 $\mathbf{E}_2$、$\mathbf{H}_2$、$\mathbf{D}_2$ 和 $\mathbf{B}_2$ 均为零（即 $\mathbf{i}_2$ 和 ρ_2 均为零）. 我们之所以可以这样做，是因为零场也满足麦克斯韦方程组，它是无源麦克斯韦方程组的一个特殊解. ε_2 和 μ_2 可以任意选定，因为在任何媒质中都可以存在零场. 以后将根据具体情况具体地选零场媒质的 ε 和 μ. 目前我们选 S 内的 $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$，$\mu_2 = \mu_1$；$\varepsilon_1$、$\mu_1$ 为产生 $\mathbf{E}_1$、$\mathbf{H}_1$ 的媒质在 S 内部的介质常数和导磁率. 其次，取 $\mathbf{E}_1$、$\mathbf{H}_1$ 为这样一个电磁场，它的源 i_1 和 ρ_1 只处于 S 之内，在 S 之外无源. 在上述条件下，

$$\begin{cases} \mathbf{i}_s = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_1^e \\ \mathbf{i}_{ms} = \mathbf{E}_1^e \times \mathbf{n} \\ \rho_{ms} = B_{1n}^e = \mu_1 H_{1n}^e \\ \rho_s = D_{1n}^e = \varepsilon_1 E_{1n}^e \end{cases} \tag{2.36}$$

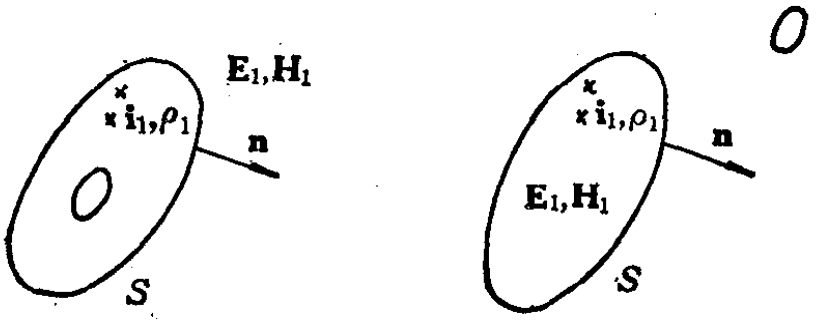

图 2.6 两种特殊情况

由于 $\mathbf{E}_1$、$\mathbf{H}_1$ 在 S 之外无源，$\mathbf{E}_2$、$\mathbf{H}_2$（零场）在 S 之内无源，因此根据一般等效定理，广义麦克斯韦方程组只在 S 上有源，如图 2.6 所示，而且它所产生的场在 S 之外与 $\mathbf{E}_1$ 和 $\mathbf{H}_1$ 等效，而在 S 之内则得到零场，如图 2.6 所示.

一般等效定理的这种特殊情况在文献中通常称为洛弗（Love）等效定理或谢昆诺夫（Schelkunoff）等效定理. 它的

特点是在空间的一个区域内可以得到零场，而且在边界上 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 的切线分量同时有阶跃.

必须强调指出，一般情况下只有广义麦克斯韦方程组的解可以在空间的一个区域内为零，其原因是在 S 面上同时存在电流源和磁流源，这两种源所产生的场在空间的某一个区域内互相抵消，从而得到零场.

如果考虑的是麦克斯韦方程组，由于方程组内只有电流源，对于例如均匀媒质来说，电流源的辐射场到处存在，在一般情况下不可能在空间的某一区域内得到零场. 当然，如果媒质不均匀，例如有块理想导体，则在导体内部可以是零场.

现在用另外一种方式选取 S 内、外的两个电磁场. 为与上一情况相区别，令 S 外的电磁场为 $\mathbf{E}_1'$、$\mathbf{H}_1'$; S 内的电磁场为 $\mathbf{E}_2'$、$\mathbf{H}_2'$. 取 $\mathbf{E}_1' = \mathbf{H}_1' = 0$，而 S 之内的 $\mathbf{E}_2'$、$\mathbf{H}_2'$ 的场源 $\mathbf{i}_2'$ 和 ρ_2' 则取为上一种情况下的 $\mathbf{i}_1$ 和 ρ_1，并假定 $\mathbf{i}_2'$ 和 ρ_2' 在 S 之外等于零. 整个空间的介质常数和导磁率选为 ε_1 和 μ_1. 显然，在上述条件下 $\mathbf{E}_2' = \mathbf{E}_1$，$\mathbf{H}_2' = \mathbf{H}_1$（在 S 之内）. 根据一般等效定理，在 S 上广义麦克斯韦方程组的源为

$$
\begin{cases}
\mathbf{i}_s' = \mathbf{n} \times (-\mathbf{H}_2'^{i}) = -\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1^{i} = -\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1^{e} \\
\qquad （因 \mathbf{H}_1 的切线分量连续） \\
\mathbf{i}_{ms}' = (-\mathbf{E}_2'^{i}) \times \mathbf{n} = -\mathbf{E}_1^{i} \times \mathbf{n} = -\mathbf{E}_1^{e} \times \mathbf{n} \\
\qquad （因 \mathbf{E}_1 的切线分量连续） \\
\rho_{ms}' = -B_{2n}'^{i} = -B_{1n}^{i} = -B_{1n}^{e} \\
\qquad （因 \mathbf{B}_1 的法线分量连续） \\
\rho_s = -D_{2n}'^{i} = -D_{1n}^{i} = -D_{1n}^{e} \\
\qquad （因 \mathbf{D}_1 的法线分量连续）
\end{cases}
$$

这正好与上一情况下的源反号. 另外，在此情况下，广义麦克斯韦方程组在 S 之内有源，等于 $\mathbf{i}_1$ 和 ρ_1. 它所产生的场在 S 之外等于零（指由广义麦克斯韦方程组解形成的场），而在 S 之内等于由 $\mathbf{i}_1$ 和 ρ_1 所产生的场（给定的 $\mathbf{E}_2'$ 和 $\mathbf{H}_2'$）.

现在来分析一下这两种情况之间的关系．场源反号会使所产生的场反号．因此，第二种情况下面上场源所产生的场，其符号正好与第一种情况下面上场源所产生的场相反，即在 S 之外产生 $-\mathbf{E}_1$ 和 $-\mathbf{H}_1$ 场，而在 S 之内仍然产生零场．可是，第二种情况下的 $\mathbf{i}_1$ 和 ρ_1 在 S 之外产生 $\mathbf{E}_1$ 和 $\mathbf{H}_1$（$\mathbf{E}_1$、$\mathbf{H}_1$ 正是这样产生的）．因此，最后 S 之外的总场正好等于零．而在 S 之内得到 $\mathbf{i}_1$ 和 ρ_1 在 S 之内产生的场 $\mathbf{E}_1$ 和 $\mathbf{H}_1$．

我们由此可以得出一个很重要的结论：如果一个封闭曲面上的电磁场其值为 $\mathbf{E}$、$\mathbf{H}$、$\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{B}$，而且 $\mathbf{E}$、$\mathbf{H}$、$\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{B}$ 的源位于 S 之内，那么表面电流、电荷、磁流和磁荷

$$\begin{cases} \mathbf{i}_s = \mathbf{n} \times \mathbf{H} & \rho_s = \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{i}_{ms} = \mathbf{E} \times \mathbf{n} & \rho_{ms} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \end{cases} \tag{2.37}$$

（$\mathbf{n}$ 指向无源区域）所产生的场在 S 之内（有源区域内）始终恒等于零，而在 S 之外则等于电磁场场源所产生的场．由此可见，等效定理在这种特殊情况下可以用来解电磁场的边值问题．在边值问题中，要根据给定边界上的给定场值来求由边界所包区域中的场．这正好是由边界上的面电流、磁流、电荷和磁荷通过广义麦克斯韦方程组所产生的场．

另一方面，若 $\mathbf{n}$ 指向有源区域，则在无源区域内可得与源所产生场反号的场，而在有源区域内仍然得到零场．总而言之，如果 S 把空间分成有源区和无源区两部分的话，那么在有源区域内表面源（式(2.37)）始终产生零场．

由此可知，在电磁场理论问题中，若在一个封闭曲面 S 上给出了电磁场的值，则 S 上的电磁场可以分为两部分：一部分是由 S 外部的源形成的，另一部分则是由 S 内部的源形成的．对 S 内部来说，只有 S 外部的源在 S 上形成的场才对 S 内部的场有贡献，而对 S 外部来说，只有 S 内部的源在 S 上形成的场才对 S 外部的场有贡献．因此，如果在 S 上给出了电

磁场的总边界值，那么根据观察点的位置，例如观察点在 S 的内部，可以只考虑由 S 外部的源在 S 上形成的场值；若观察点在 S 的外部，则可以只考虑由 S 内部的源在 S 上所形成的场值．从物理概念来说，这个结果很容易理解．对于一个处于 S 内部的观察点而言，S 内部的源直接对这一点的场作出贡献．S 外部的源数学上通过 S 上的场值对 S 内部观察点的场作出贡献．S 内部的源在 S 上所形成的场通过 S 向外辐射而不可能倒过来向 S 内部辐射．

2.6 一般等效定理的推广

在叙述一般等效定理时，我们的出发点是想通过解广义麦克斯韦方程组使它的解在空间的一个区域内与一个麦克斯韦方程组的解等效，而在空间的其余部分则和另一个麦克斯韦方程组的解等效．这两个麦克斯韦方程组之间可以毫无联系．现在看看能否通过解一个广义麦克斯韦方程组使它的解在空间的一个区域内与一个广义麦克斯韦方程组的解等效，而在空间的其余部分则和另一个广义麦克斯韦方程组的解等效．这两个广义麦克斯韦方程组之间也可以毫无联系．回答是肯定的．只要在一般等效定理中把麦克斯韦方程组改成广义麦克斯韦方程组就可以了．具体地说，就是只要把电流源改成电流源和磁流源，其余部分可以不作任何改动．证明的过程也可以逐字逐句重复．读者可以作为一个练习再证明一次．

在实际应用中推广的一般等效定理用得并不多．但是在理论分析中，如果一开始就给定电流源和磁流源，那么就需要应用推广了的一般等效定理．如果令磁流源等于零，则又可回过来得到一般等效定理的情况．有些文献所采用的就是这

样的叙述方法．在对广义麦克斯韦方程组的意义和等效场的概念有明确认识之后，这样的叙述方式自然不会带来什么困难．在以后的几节中我们将顺便来应用推广了的一般等效定理，以便读者了解如何应用它，从而减少阅读有关文献的困难．

2.7 场源为周期性函数时等效定理的推广

如果给定的场源为时间的周期性函数，但仍位于空间的有限区域内，由于周期性函数没有时间的起点，那么在 2.4 节对等效定理的证明中关于电磁场在有限时间内产生这一先决条件就不成立了．我们必须认真探讨在什么样的新条件下等效定理照旧成立．下面将证明：这个新的条件就是，不论是广义麦克斯韦方程组还是麦克斯韦方程组都要取向无穷远传播的滞后位的解．对滞后位来说（见第四章），若所有的源都位于空间的有限区域内，则空间某一点 P 在时间 t 上的场值只取决于场源在 $t-t_s$ 时的值，其中 t_s 为从场源到 P 点的传播时间，与场源在 $t-t_s$ 以前的值无关．因此，只要场源位于有限区域内，t_s 的最大值 $t_{s\max}$（指由观察点至不同场源点的 t_s 值中的最大值）总是有限的．这样，如果我们把场源换成在 $t-t_{s\max}$ 之前为零而在 $t-t_{s\max}$ 之后与周期性场源重合的源，那么在任意时刻 t 的情况下，所得的场不变，但这时可以采用等效定理．这样，对周期性函数场源来说，等效定理仍然适用，但必须考虑上述限制条件，即只取向无穷远传播的滞后位的解．

考虑到周期性电磁场在实际中有重要的应用，下面给出在正弦电磁场情况下一般等效定理的直接数学证明．从证明过程中读者可以清楚地看出附加限制条件的必要性．这样，

可以更明确地了解在什么样的条件下才能应用等效定理.

先在媒质的导电率 $\sigma \neq 0$ 的条件下写出复数广义麦克斯韦方程组

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{i}_m - i\omega\mathbf{B} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \sigma\mathbf{E} + i\omega\mathbf{D} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m \\ \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \end{cases} \tag{2.38}$$

其中 $\mathbf{i}_m$、ρ_m 和 $\mathbf{i}$、ρ 之间有下列关系(连续性方程):

$$\nabla \cdot \mathbf{i}_m = -i\omega\rho_m$$

$$\nabla \cdot \mathbf{i} = -i\omega\rho$$

在给出 $\mathbf{i}$、ρ、$\mathbf{i}_m$、ρ_m 的具体函数时必须对它们是否满足上列连续性方程加以验证.

设有两组场源 $\mathbf{i}_1$、ρ_1 和 $\mathbf{i}_2$、ρ_2. 它们的场在不同的媒质中满足麦克斯韦方程组

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E}_1 = -i\omega\mathbf{B}_1 \\ \nabla \times \mathbf{H}_1 = i\omega\mathbf{D}_1 + \mathbf{i}_1 \\ \nabla \cdot \mathbf{D}_1 = \rho_1 \\ \nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0 \\ \mathbf{D}_1 = \varepsilon_1\mathbf{E}_1 \\ \mathbf{B}_1 = \mu_1\mathbf{H}_1 \end{cases} \tag{2.39}$$

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E}_2 = -i\omega\mathbf{B}_2 \\ \nabla \times \mathbf{H}_2 = i\omega\mathbf{D}_2 + \mathbf{i}_2 \\ \nabla \cdot \mathbf{D}_2 = \rho_2 \\ \nabla \cdot \mathbf{B}_2 = 0 \\ \mathbf{D}_2 = \varepsilon_2\mathbf{E}_2 \\ \mathbf{B}_2 = \mu_2\mathbf{H}_2 \end{cases} \tag{2.40}$$

在某一封闭曲面 S 之外取广义麦克斯韦方程组中的 $\mathbf{i}$、ρ 为 $\mathbf{i}_1$、ρ_1 在 S 之外的部分，而在 S 之内则取 $\mathbf{i}$、ρ 为 $\mathbf{i}_2$、ρ_2 在 S 之内的部分。在 S 上则取 $\mathbf{i}$（令为 $\mathbf{i}_s$）为

$$\mathbf{i}_s = \mathbf{n} \times [\mathbf{H}_1^e - \mathbf{H}_2^i]$$

并取 ρ_m（令为 ρ_{ms}）为

$$\rho_{ms} = B_{1n}^e - B_{2n}^i$$

式中 $\mathbf{H}_1^e$ 为 $\mathbf{H}_1$ 由 S 外向 S 接近时的极限值；$\mathbf{H}_2^i$ 为 $\mathbf{H}_2$ 由 S 内向 S 接近时的极限值；B_{1n}^e 为 $\mathbf{B}_1$ 的法线分量由 S 外向 S 接近时的极限值；B_{2n}^i 为 $\mathbf{B}_2$ 的法线分量由 S 内向 S 接近时的极限值。

再在 S 上取 $\mathbf{i}_m$（令为 $\mathbf{i}_{ms}$）为

$$\mathbf{i}_{ms} = [\mathbf{E}_1^e - \mathbf{E}_2^i] \times \mathbf{n}$$

取 ρ（令为 ρ_s）为

$$\rho_s = D_{1n}^e - D_{2n}^i$$

式中 $\mathbf{E}_1^e$ 为 $\mathbf{E}_1$ 由 S 外向 S 接近时的极限值；$\mathbf{E}_2^i$ 为 $\mathbf{E}_2$ 由 S 内向 S 接近时的极限值；D_{1n}^e 为 $\mathbf{D}_1$ 的法线分量由 S 外向 S 接近时的极限值；D_{2n}^i 为 $\mathbf{D}_2$ 的法线分量由 S 内向 S 接近时的极限值。

在上述条件下，在 S 之外广义麦克斯韦方程组的解等于 $\mathbf{E}_1$、$\mathbf{H}_1$、$\mathbf{D}_1$ 和 $\mathbf{B}_1$，而在 S 之内则等于 $\mathbf{E}_2$、$\mathbf{H}_2$、$\mathbf{D}_2$ 和 $\mathbf{B}_2$。ε、μ 假定只为空间坐标的函数，而且在 S 内 $\varepsilon = \varepsilon_2$，$\mu = \mu_2$；在 S 之外则 $\varepsilon = \varepsilon_1$，$\mu = \mu_1$。

另外，这里 $\mathbf{E}_1$、$\mathbf{H}_1$、$\mathbf{D}_1$、$\mathbf{B}_1$ 和 $\mathbf{E}_2$、$\mathbf{H}_2$、$\mathbf{D}_2$ 和 $\mathbf{B}_2$ 以及广义麦克斯韦方程组的解，指的都是由位于有限区域内的周期性场源所产生，并在无穷远处满足条件

$$\lim_{r\to\infty} r\mathbf{H} = 0 \tag{2.41}$$

$$\lim_{r\to\infty} r\mathbf{E} = 0 \tag{2.42}$$

的解(不考虑任何其他的解). 式中 r 表示由坐标原点至观察点的距离.

应用与 2.4 节中完全一样的方法 $\left(\text{只需将 } \frac{\partial}{\partial t} \text{ 换成 } i\omega\right)$, 就可证明(参看图 2.4)

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_c \mathbf{i}_{ms}\cdot\mathbf{n}'dl}{\Delta S}=-i\omega\rho_{ms}$$

应用与 2.4 节中一样的符号和图形, 可知在空间 V 中有

$$\nabla\times\delta\mathbf{H}=i\omega\delta\mathbf{D}+\sigma\delta\mathbf{E} \tag{2.43}$$

$$\nabla\times\delta\mathbf{E}=-i\omega\delta\mathbf{B} \tag{2.44}$$

$$\nabla\cdot\delta\mathbf{B}=0 \tag{2.45}$$

$$\nabla\cdot\delta\mathbf{D}=0 \tag{2.46}$$

$$\delta\mathbf{B}=\mu\delta\mathbf{H} \tag{2.47}$$

$$\delta\mathbf{D}=\varepsilon\delta\mathbf{E} \tag{2.48}$$

现在证明 $\delta\mathbf{H}=\delta\mathbf{E}=0$.

将式(2.43)取共轭并点乘 $-\delta\mathbf{E}$, 再将式(2.44)点乘 $\delta\mathbf{H}^*$ ($*$ 号表示共轭), 然后相加并利用式(2.47)和式(2.48)有

$$\begin{aligned}&\delta\mathbf{H}^*\cdot\nabla\times\delta\mathbf{E}-\delta\mathbf{E}\cdot\nabla\times\delta\mathbf{H}^*\\&=-i\omega\mu\delta\mathbf{H}\cdot\delta\mathbf{H}^*-\sigma\delta\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{E}^*+i\omega\varepsilon\delta\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{E}^*\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&-\nabla\cdot[\delta\mathbf{E}\times\delta\mathbf{H}^*]\\&=\sigma\delta\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{E}^*+i\omega(\mu\delta\mathbf{H}\cdot\delta\mathbf{H}^*-\varepsilon\delta\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{E}^*)\end{aligned}$$

对体积 V 积分, 得

$$\begin{aligned}&-\iiint_V\nabla\cdot[\delta\mathbf{E}\times\delta\mathbf{H}^*]dv\\&=\iiint_V\sigma\delta\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{E}^*dv+\iiint_V i\omega(\mu\delta\mathbf{H}\cdot\delta\mathbf{H}^*\\&\quad-\varepsilon\delta\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{E}^*)dv\end{aligned} \tag{2.49}$$

在式(2.49)左边应用高斯定理，得

$$-\oiint_{S_1+S_2}[\delta\mathbf{E}\times\delta\mathbf{H}^*]\cdot\mathbf{n}d\sigma-\oiint_{S_3}[\delta\mathbf{E}\times\delta\mathbf{H}^*]\cdot\mathbf{n}d\sigma$$
$$=\iiint_V\sigma\delta\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{E}^*dv+\iiint_V i\omega(\mu\delta\mathbf{H}\cdot\delta\mathbf{H}^*$$
$$-\varepsilon\delta\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{E}^*)dv \tag{2.50}$$

当 S_1 和 S_2 无限接近 S 时，它们变得与 S 重合．这时可取 $d\sigma_1=d\sigma_2=d\sigma$，可是单位法向量的方向正好相反．由于 $\delta\mathbf{E}$、$\delta\mathbf{H}$ 在 2.4 节中已证明是连续的，因此对 S_1+S_2 的积分当 S_1、S_2 无限接近 S 时 $\delta\mathbf{E}\times\delta\mathbf{H}^*$ 趋向同一值，$d\sigma_1$、$d\sigma_2$ 重合，而单位法向量方向相反，因此当 S_1、S_2 趋向 S 时，

$$\oiint_{S_1+S_2}[\delta\mathbf{E}\times\delta\mathbf{H}^*]\cdot\mathbf{n}d\sigma\to 0\qquad(S_1,S_2\to S) \tag{2.51}$$

考虑到条件式(2.41)和(2.42)，得

$$\oiint_{S_3}[\delta\mathbf{E}\times\delta\mathbf{H}^*]\cdot\mathbf{n}d\sigma\to 0\quad(r\to\infty) \tag{2.52}$$

由此得在全空间内，

$$\iiint_V\sigma\delta\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{E}^*dv+i\omega\iiint_V(\mu\delta\mathbf{H}\cdot\delta\mathbf{H}^*-\varepsilon\delta\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{E}^*)dv=0 \tag{2.53}$$

由于式(2.53)中的两个积分都是实数，因此它们分别等于零，即

$$\iiint_V\sigma\delta\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{E}^*dv=0 \tag{2.54}$$

$$\iiint_V(\mu\delta\mathbf{H}\cdot\delta\mathbf{H}^*-\varepsilon\delta\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{E}^*)dv=0 \tag{2.55}$$

式(2.54)中的被积函数在整个空间是非负数(因 $\sigma>0$，$\delta\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{E}^*=|\delta\mathbf{E}|^2\geqslant 0$)，由此可得它恒等于零，即

$$\sigma\delta\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{E}^*=0 \tag{2.56}$$

由于假定了 $\sigma \neq 0$，得

$$\delta \mathbf{E} = 0 \tag{2.57}$$

将式(2.57)代入式(2.55)，得

$$\delta \mathbf{H} = 0 \tag{2.58}$$

即在 S 之外 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1, \mathbf{B} = \mathbf{B}_1, \mathbf{H} = \mathbf{H}_1, \mathbf{D} = \mathbf{D}_1$，而在 S 之内 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_2, \mathbf{B} = \mathbf{B}_2, \mathbf{H} = \mathbf{H}_2, \mathbf{D} = \mathbf{D}_2$.

注意，我们是在下列条件下进行证明的：

(1) $\sigma \neq 0$，否则由式 (2.54) 得不出 $\delta \mathbf{E} = 0$ 的结论。$\sigma = 0$的情况要单独处理.

(2) $\lim\limits_{r \to \infty} r \delta \mathbf{E} = 0$;

$\lim\limits_{r \to \infty} r \delta \mathbf{H} = 0$.

这个条件在 $\sigma \neq 0$ 时排除了由无穷远处传播至场源的波作为麦克斯韦方程组及广义麦克斯韦方程组之解的可能性，因为 $\sigma \neq 0$ 时只有在无穷远处幅值为无限大的波才有可能在有限远处形成有一定幅值的场值。实际上条件式 (2.41) 和 (2.42) 意味着只能取方程组的滞后位的解。对于滞后位的解来说，式(2.41)和(2.42)是满足的，因为除了分母中的 r 之外(参看第四章)，在分子的指数函数 e^{-ikr} 中，当 $\sigma \neq 0$ 时 ikr 还含有负的实数部分 $-k''r$，从而得 $e^{-k''r}$，它随 r 以指数规律衰减.

(3) 所有的场源都处于空间的有限范围内。没有这一条，条件式(2.41)和(2.42)就可能得不到满足.

$\sigma = 0$ 时，我们规定只取 $\sigma \neq 0$ 时的解在条件 $\sigma \to 0$ 下的极限值作为方程组的解。由于 $\sigma \neq 0$ 时 $\delta \mathbf{E} = 0, \delta \mathbf{H} = 0$，因而其极限值也等于零。从物理意义上来说，就是我们规定只取滞后位的解。在这个条件下，即使 $\sigma = 0$，在 S 之外仍有 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1$ 等，而在 S 之内则有 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_2$ 等.

小结 根据上文中引入的磁流、磁荷概念和已被证明了的等效定理，可以说，由口径上电磁场所决定的电磁波的任何一种辐射，都能看成是等效面电流、电荷和面磁流、磁荷的辐射．这些电流、电荷、磁流和磁荷的辐射场满足广义麦克斯韦方程组．由于电流、电荷、磁流和磁荷都满足连续性方程，电荷和磁荷都可以用电流和磁流表示．因此又可以说，由口径场决定的电磁波的辐射等效于面电流和面磁流的辐射．

例如，面天线的口径场可以看成是面电流和面磁流的组合．利用唯一性定理，通过适当的等效变换(改变媒质参数)，还可以证明口径场的辐射等效于单纯面电流或面磁流的辐射(见 2.9 节)．

在使用面电流和面磁流情况下，辐射场的 **E**、**H** 满足广义麦克斯韦方程组，而不是麦克斯韦方程组．在只使用面磁流情况下，辐射场的 **E**、**H** 满足磁流麦克斯韦方程组，而不是麦克斯韦方程组．只有在只使用面电流情况下，辐射场的 **E**、**H** 才满足麦克斯韦方程组．

对封闭曲面 S 给定总的场边界值 **E**、**H** 后，对 S 内部的观察点来说，真正起作用的只是由 S 外部源所引起的 **E**、**H** 中的分量．其余的 **E**、**H** 分量在 S 内部只引起零场，即不起作用．因此，当 S 包含所有场源和观察点的时候，可以完全不考虑 S 上的场的贡献．注意，这里的场源指的都是局外源．

2.8 电流源和磁流源在同一位置时的等效问题

在 2.4 节所证明的一般等效定理中，体电流和面磁流处于空间的不同位置．所得广义麦克斯韦方程的解，可以在空间的两个区域内与两个互相独立的电磁场等效．在这一节

中，我们针对体电流和体磁流位于空间同一位置的情况来讨论麦克斯韦方程组和磁流麦克斯韦方程组解的等效问题.

为简单起见，假定 ε 和 μ 都是常数，而且只讨论正弦电磁场的情况.

由麦克斯韦方程组

$$\begin{cases}\mathrm{rot}\mathbf{H}_e = i\omega\varepsilon\mathbf{E}_e + \mathbf{i} \\ \mathrm{rot}\mathbf{E}_e = -i\omega\mu\mathbf{H}_e\end{cases} \tag{2.59}$$

(式中 $\mathbf{E}_e$ 和 $\mathbf{H}_e$ 为麦克斯韦方程组的解；ε 和 μ 为常数)得

$$\begin{aligned}\mathrm{rotrot}\mathbf{H}_e &= i\omega\varepsilon\mathrm{rot}\mathbf{E}_e + \mathrm{roti} \\ &= i\omega\varepsilon(-i\omega\mu\mathbf{H}_e) + \mathrm{roti} \\ &= \omega^2\varepsilon\mu\mathbf{H}_e + \mathrm{roti} \\ &= k^2\mathbf{H}_e + \mathrm{roti} \quad (k^2 = \omega^2\varepsilon\mu)\end{aligned}$$

即

$$\mathrm{rotrot}\mathbf{H}_e - k^2\mathbf{H}_e = \mathrm{roti} \tag{2.60}$$

同理

$$\begin{aligned}\mathrm{rotrot}\mathbf{E}_e &= -i\omega\mu\mathrm{rot}\mathbf{H}_e \\ &= -i\omega\mu(i\omega\varepsilon\mathbf{E}_e + \mathbf{i}) \\ &= \omega^2\varepsilon\mu\mathbf{E}_e - i\omega\mu\mathbf{i} \\ &= k^2\mathbf{E}_e - i\omega\mu\mathbf{i}\end{aligned}$$

即

$$\mathrm{rotrot}\mathbf{E}_e - k^2\mathbf{E}_e = -i\omega\mu\mathbf{i} \tag{2.61}$$

利用对偶原理，可对下列磁流麦克斯韦方程组作类似的变换：

$$\begin{cases}\mathrm{rot}\mathbf{H}_m = i\omega\varepsilon\mathbf{E}_m \\ \mathrm{rot}\mathbf{E}_m = -i\omega\mu\mathbf{H}_m - \mathbf{i}_m\end{cases}$$

式中 $\mathbf{E}_m$、$\mathbf{H}_m$ 为磁流麦克斯韦方程组的解；ε、μ 为常数. 对方程组两边取旋度后得

$$\mathrm{rotrot}\mathbf{E}_m - k^2\mathbf{E}_m = -\mathrm{roti}_m \tag{2.62}$$

$$\mathrm{rotrot}\mathbf{H}_m - k^2\mathbf{H}_m = -i\omega\varepsilon\mathbf{i}_m \tag{2.63}$$

由式(2.61)和(2.62)可见，$\mathbf{E}_e$、$\mathbf{E}_m$ 满足同样形式的方程。如果两个方程式的右边相等，并且规定只取由方程右边的源所产生的解，即只考虑有限时间和有限区域内由这些源产生并向无穷远传播的解，那么由唯一性定理(见第三章)可知，这时 $\mathbf{E}_e$ 必然等于 $\mathbf{E}_m$，因此

$$-i\omega\mu\mathbf{i} = -\mathrm{roti}_m$$

是场源区域外 $\mathbf{E}_e = \mathbf{E}_m$ 的充分条件，即

$$\mathbf{i} = \frac{1}{i\omega\mu}\mathrm{roti}_m \tag{2.64}$$

由此式可见，已知 $\mathbf{i}_m$ 就可求出产生等效场的 $\mathbf{i}$. 因此，任何 $\mathbf{i}_m$ 通过磁流麦克斯韦方程组所产生的场，都可以看成是由式(2.64)所确定的电流密度通过麦克斯韦方程组所产生的电磁场.

由式(2.60)和(2.63)可得场源区域外 $\mathbf{H}_e = \mathbf{H}_m$ 的充分条件：

$$\mathrm{roti} = -i\omega\varepsilon\mathbf{i}_m$$

即

$$\mathbf{i}_m = \frac{-1}{i\omega\varepsilon}\mathrm{roti} \tag{2.65}$$

由此式可见，已知 $\mathbf{i}$ 即可求出产生等效场的 $\mathbf{i}_m$. 因此，任何 $\mathbf{i}$ 通过麦克斯韦方程组所产生的电磁场，都可以看成是由式(2.65)所确定的 $\mathbf{i}_m$ 通过磁流麦克斯韦方程组所产生的场.

在没有场源的地方，

$$\begin{cases}\mathrm{rot}\mathbf{E}_e = -i\omega\mu\mathbf{H}_e & (2.66)\\ \mathrm{rot}\mathbf{H}_e = i\omega\varepsilon\mathbf{E}_e & (2.67)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\mathrm{rot}\mathbf{E}_m = -i\omega\mu\mathbf{H}_m & (2.68)\\ \mathrm{rot}\mathbf{H}_m = i\omega\varepsilon\mathbf{E}_m & (2.69)\end{cases}$$

由此可见，在无源的地方，根据式(2.66)和(2.68)，$\mathbf{E}_e = \mathbf{E}_m$ 必然导致 $\mathbf{H}_e = \mathbf{H}_m$；同理，根据式(2.67)和(2.69)，$\mathbf{H}_e = \mathbf{H}_m$ 必然导致 $\mathbf{E}_e = \mathbf{E}_m$，因此式(2.64)和(2.65)的确是无源地方两组场等效的充分条件.

利用电磁位的理论，可以对公式(2.64)和(2.65)进行如下证明.

由方程组

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\mathbf{E}_e = -i\omega\mu\mathbf{H}_e \\ \mathrm{rot}\mathbf{H}_e = i\omega\varepsilon\mathbf{E}_e + \mathbf{i} \end{cases}$$

根据 4.4 节中的公式(4.47)和(4.45)可直接写出

$$\mathbf{H}_e = \frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\mathbf{A} = \mathrm{rot}\frac{1}{4\pi}\iiint_V \frac{\mathbf{i}e^{-ikr}}{r}dv \tag{2.70}$$

式中

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \frac{\mathbf{i}e^{-ikr}}{r}dv \tag{2.71}$$

由方程组

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\mathbf{E}_m = -i\omega\mu\mathbf{H}_m - \mathbf{i}_m \\ \mathrm{rot}\mathbf{H}_m = i\omega\varepsilon\mathbf{E}_m \end{cases}$$

根据 4.5 节中的公式(4.81)，在无源的地方可直接写出

$$\mathbf{H}_m = \mathrm{rotrot}\mathbf{Z}_m \tag{2.72}$$

式中

$$\mathbf{Z}_m = \frac{1}{4\pi\mu}\iiint_V \frac{\mathbf{i}_m}{i\omega}\frac{e^{-ikr}}{r}dv \tag{2.73}$$

即

$$\mathbf{H}_m = \mathrm{rot}\left(-\frac{1}{4\pi i\omega\mu}\mathrm{rot}\iiint_V \frac{\mathbf{i}_m e^{-ikr}}{r}dv\right) \tag{2.74}$$

但

$$\mathrm{rot}\iiint_V \mathbf{i}_m\frac{e^{-ikr}}{r}dv = \nabla\times\iiint_V \mathbf{i}_m\frac{e^{-ikr}}{r}dv$$

$$= \iiint_V \nabla \times \mathbf{i}_m \frac{e^{-ikr}}{r} dv \tag{2.75}$$

式中∇为在观察点的微分运算.

如果用∇'表示在场源点的微分运算,则

$$\nabla' \times \mathbf{i}_m \frac{e^{-ikr}}{r} = \frac{e^{-ikr}}{r} \nabla' \times \mathbf{i}_m - \mathbf{i}_m \times \nabla' \frac{e^{-ikr}}{r}$$

$$= \frac{e^{-ikr}}{r} \nabla' \times \mathbf{i}_m + \mathbf{i}_m \times \nabla \frac{e^{-ikr}}{r} \tag{2.76}$$

但

$$\nabla \times \mathbf{i}_m \frac{e^{-ikr}}{r} = \nabla \frac{e^{-ikr}}{r} \times \mathbf{i}_{mc} = -\mathbf{i}_m \times \nabla \frac{e^{-ikr}}{r} \tag{2.77}$$

将式(2.76)代入式(2.77)得

$$\nabla \times \mathbf{i}_m \frac{e^{-ikr}}{r} = \frac{e^{-ikr}}{r} \nabla' \times \mathbf{i}_m - \nabla' \times \left(\mathbf{i}_m \frac{e^{-ikr}}{r} \right) \tag{2.78}$$

将式(2.78)代入式(2.75)得

$$\iiint_V \nabla \times \mathbf{i}_m \frac{e^{-ikr}}{r} dv = \iiint_V (\mathrm{rot}\mathbf{i}_m) \frac{e^{-ikr}}{r} dv$$

$$- \iiint_V \nabla' \times \left(\mathbf{i}_m \frac{e^{-ikr}}{r} \right) dv$$

但

$$\iiint_V \nabla' \times \left(\mathbf{i}_m \frac{e^{-ikr}}{r} \right) dv = \oiint_S \mathbf{n} \times \mathbf{i}_m \frac{e^{-ikr}}{r} d\sigma \tag{2.79}$$

当S足够大时，S上的$\mathbf{i}_m = 0$(因场源位于有限区域内)，因此整个体积分等于零.

最后得

$$\iiint_V \nabla \times \mathbf{i}_m \frac{e^{-ikr}}{r} dv = \iiint_V (\mathrm{rot}\mathbf{i}_m) \frac{e^{-ikr}}{r} dv \tag{2.80}$$

由此

$$\mathbf{H}_m = \mathrm{rot}\left[\frac{1}{4\pi}\iiint_V \left(\frac{\mathrm{roti}_m}{i\omega\mu}\right)\frac{e^{-ikr}}{r}dv\right] \tag{2.81}$$

比较 $\mathbf{H}_e$ 和 $\mathbf{H}_m$ 的公式可见，如果

$$\mathbf{i} = \frac{\mathrm{roti}_m}{i\omega\mu}$$

则 $\mathbf{H}_e = \mathbf{H}_m$. 由方程组 (2.67) 和 (2.69) 立即可得在无源区 $\mathbf{E}_e = \mathbf{E}_m$.

由式(4.78)得

$$\mathbf{E}_m = -\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{rot}\mathbf{F} = -\mathrm{rot}\frac{1}{4\pi}\iiint_V \mathbf{i}_m\frac{e^{-ikr}}{r}dv \tag{2.82}$$

式中

$$\mathbf{F} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\iiint_V \mathbf{i}_m\frac{e^{-ikr}}{r}dv \tag{2.83}$$

由式(4.54)、(4.53)和(4.52)得，在无源区，

$$\mathbf{E}_e = \mathrm{rotrot}\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V \frac{\mathbf{i}}{i\omega}\frac{e^{-ikr}}{r}dv \tag{2.84}$$

上面已经证明，在场源处于有限区域时，

$$\mathrm{rot}\iiint_V \mathbf{i}\frac{e^{-ikr}}{r}dv = \iiint_V (\mathrm{roti})\frac{e^{-ikr}}{r}dv$$

故

$$\mathbf{E}_e = \mathrm{rot}\frac{1}{4\pi}\iiint_V \frac{\mathrm{roti}}{i\omega\varepsilon}\frac{e^{-ikr}}{r}dv \tag{2.85}$$

比较 $\mathbf{E}_m$ 和 $\mathbf{E}_e$ 的公式可见，若

$$\mathbf{i}_m = -\frac{\mathrm{roti}}{i\omega\varepsilon}$$

则 $\mathbf{E}_e = \mathbf{E}_m$. 由方程组 (2.66) 和 (2.68) 立即可知，在无源区 $\mathbf{H}_e = \mathbf{H}_m$.

注意，推导是在下列条件下进行的：

(1) $\mathbf{i}$、$\mathbf{i}_m$ 处于同一位置.

(2) $\mathbf{i}$、$\mathbf{i}_m$ 均位于空间的有限区域内.

(3) 只取滞后位的解.

(4) $\mathbf{i}$、$\mathbf{i}_m$ 有连续导数.

用普遍公式(2.64)和(2.65),可以推导出我们已经知道的特殊情况.

首先假定磁流均匀地分布在无限平面 $x=0$ 上. 这时磁流密度可写成(见图 2.7)

$$\mathbf{i}_m = \mathbf{u}_z i_{mzs}\delta(x) \tag{2.86}$$

式中 $\mathbf{u}_z$ 为 z 轴方向的单位矢量; i_{mzs} 是面磁流密度(常数); $\delta(x)$ 是狄拉克函数.

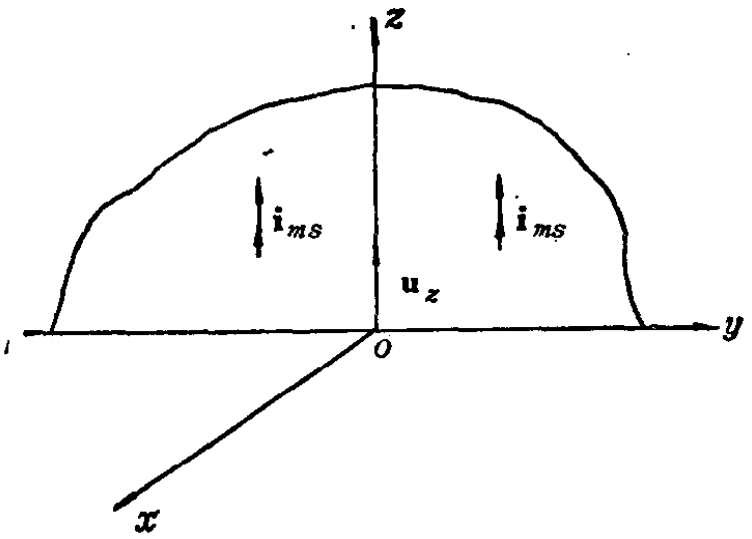

图 2.7 均匀面磁流与 z 轴平行

应用式(2.64),得

$$\mathbf{i} = \frac{1}{i\omega\mu}\,\mathrm{rot}\mathbf{i}_m$$

$$= \frac{1}{i\omega\mu}\begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & i_{mzs}\delta(x) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{i\omega\mu}\left(\mathbf{u}_x i_{mzs}\frac{\partial}{\partial y}\delta(x) - \mathbf{u}_y i_{mzs}\frac{\partial}{\partial x}\delta(x)\right)$$

$$= -\frac{\mathbf{u}_y i_{mzs}}{i\omega\mu}\delta'(x) \qquad (2.87)$$

式中 $\delta(x)$ 与 y 无关，因而 $\frac{\partial}{\partial y}\delta(x) = 0$.

从 $\delta(x)$ 和 $\delta'(x)$ 的图形（见图 2.8）中直接可以看出，产

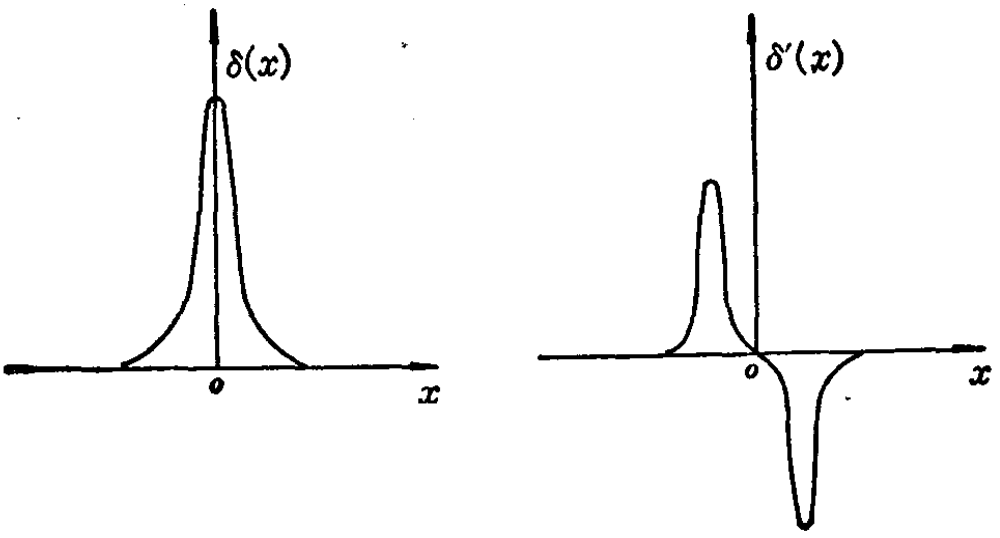

图 2.8 $\delta(x)$ 及 $\delta'(x)$ 的图形

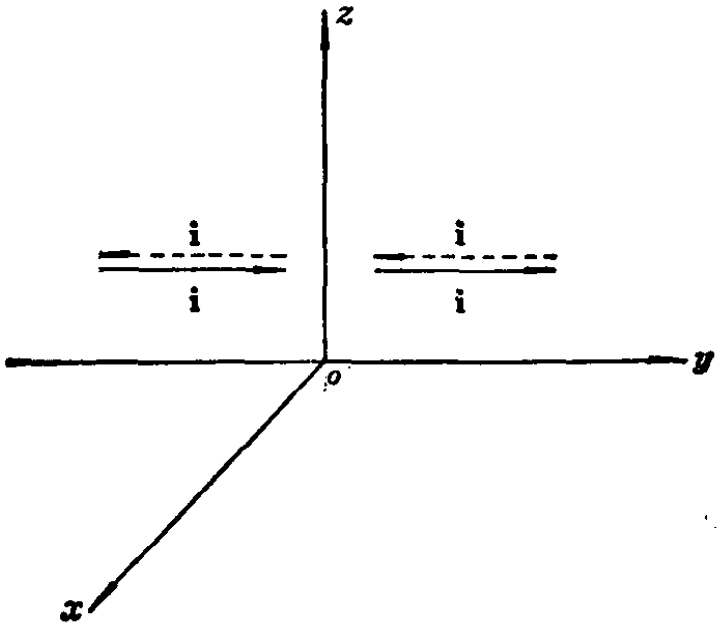

图 2.9 等效双层面电流

生等效场的电流是位于 $x=0$ 平面上的双层面电流(见图2.9).

现在假定磁流均匀地分布在一根无限长的直线(z 轴)上.

此时磁流密度可写成

$$\mathbf{i}_m = \mathbf{u}_z M\delta(x)\delta(y) \tag{2.88}$$

式中的M为常数,它表示线磁流的大小.

应用式(2.64),得

$$\begin{aligned}\mathbf{i} &= \frac{1}{i\omega\mu}\mathrm{rot}\mathbf{i}_m \\ &= \frac{1}{i\omega\mu}\begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & M\delta(x)\delta(y) \end{vmatrix} \\ &= \frac{M}{i\omega\mu}[\mathbf{u}_x\delta(x)\delta'(y) - \mathbf{u}_y\delta'(x)\delta(y)] \end{aligned} \tag{2.89}$$

考虑到在 x 轴上 $y=0$, 从而 $\delta'(y)=0$, 而且

$x>0$ 时, $\delta'(x)<0$ $\quad\delta(y)>0$ $\quad\delta'(x)\delta(y)<0$

$x<0$ 时, $\delta'(x)>0$ $\quad\delta(y)>0$ $\quad\delta'(x)\delta(y)>0$

在 y 轴上则 $\delta'(x)=0$, 而且

$y>0$ 时, $\delta'(y)<0$ $\quad\delta(x)>0$ $\quad\delta'(y)\delta(x)<0$

$y<0$ 时, $\delta'(y)>0$ $\quad\delta(x)>0$ $\quad\delta'(y)\delta(x)>0$

由此可见, 等效场电流源是一根沿 z 轴方向的无限细电流螺线管(见图2.10).

最后, 压缩成一点的无限短磁流元(磁偶极子)可表示为

$$\mathbf{i}_m = \mathbf{u}_z m\delta(x)\delta(y)\delta(z) \tag{2.90}$$

式中 m 为磁偶极子矩;$\mathbf{u}_z$ 是偶极子矩的方向. 应用式(2.64),得

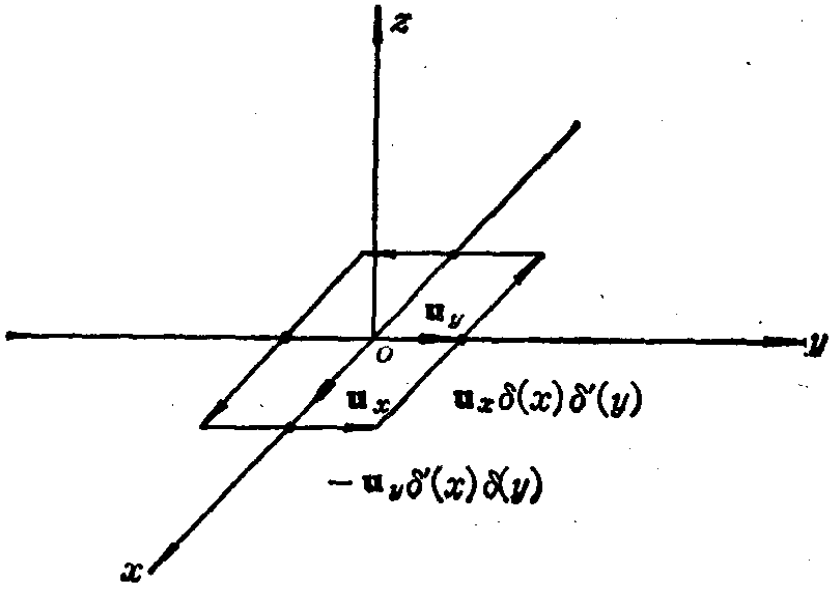

图 2.10　等效电流螺线管

$$\mathbf{i}=\frac{1}{i\omega\mu}\begin{vmatrix}\mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & m\delta(x)\delta(y)\delta(z)\end{vmatrix}$$

$$=\frac{m}{i\omega\mu}[\mathbf{u}_x\delta(x)\delta'(y)-\mathbf{u}_y\delta'(x)\delta(y)]\delta(z)\quad(2.91)$$

与式 (2.89) 相比可以看出，$\mathbf{i}$ 是通过 $\delta(z)$ 将螺线管压缩成位于 xy 平面内的一个小电流环.

由式(2.65)可见，与面电流等效的是双层面磁流，与线电流等效的是无限长细磁流螺线管，而与电偶极子等效的则是小磁流环，同时所有磁流方向都与图 2.7—图 2.10 中的电 流方向相反.

2.9　只利用面电流或面磁流的等效定理

在某些特殊情况下，只需考虑一般等效定理中的面电(磁)流，也就是说面磁(电)流的辐射等于零. 这个结果有时可以大大简化计算的过程. 这一节所要探讨的就是在什么条

件下可以只考虑面电流和面磁流中的一项，并给出证明。

假定一个电磁场的场源在 V 之外，如图 2.11 所示。这个电磁场在 V 内用 $\mathbf{E}$、$\mathbf{H}$ 表示。它在边界 S 上的电场切线分量为 $\mathbf{E}\times\mathbf{n}$，磁场切线分量为 $\mathbf{n}\times\mathbf{H}$，$\mathbf{n}$ 指向 V 内部。

根据一般等效定理，如果在 V 内取 $\mathbf{E}$、$\mathbf{H}$，而在 V 外(S内)部取零场，并且 S 内部的媒质取成理想导体（零场的媒质可任意选取），则面电流 $\mathbf{n}\times\mathbf{H}$ 和面磁流 $\mathbf{E}\times\mathbf{n}$ 通过广义麦克斯韦方程组在 V 内产生 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$，而在 S 内产生零场，如图 2.12 所示。

现在应用唯一性定理来考虑此问题。根据 3.5 节中证明的唯一性定理，如果空间某一区域 V(边界为 S)内的两个电磁场具有同样的场源，且边界上电场或磁场的切线分量 $\mathbf{E}\times\mathbf{n}$ 或 $\mathbf{n}\times\mathbf{H}$ 相同，那么这两个电磁场在区域 V 内是一样的。

现在在 S 内部是理想电导体的情况下，在 V 内靠近 S 的地方放一磁流片，片上每一点的磁流密度是

$$\mathbf{i}_{ms}=\mathbf{E}\times\mathbf{n}$$

从数学上来说，为了求磁流片的辐射场，就需要解 $\mathbf{i}_{ms}=\mathbf{E}\times\mathbf{n}$ 的磁流麦克斯韦方程组，边界条件是 S 上的 $\mathbf{E}\times\mathbf{n}=$

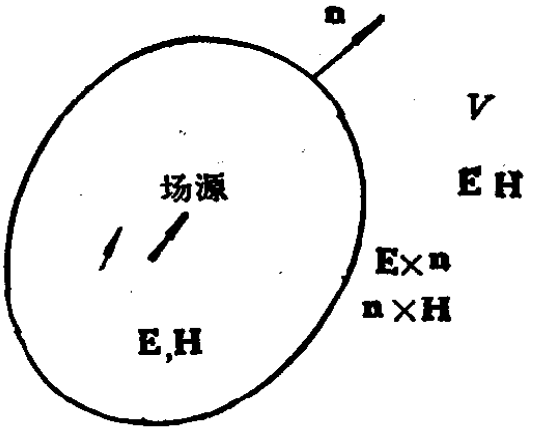

图 2.11　场源在 V 之外

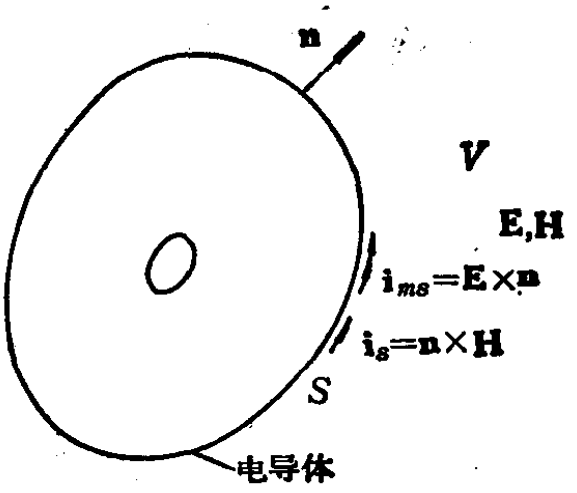

图 2.12　面电流与面磁流产生等效场

0．然后取磁流片向 S 无限靠近时的极限．原先磁流片两边的电场切线分量之差为

$$[\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2] \times \mathbf{n} = \mathbf{i}_{ms}$$

这里 $\mathbf{E}_1$、$\mathbf{E}_2$ 是磁流片两边的电场；$\mathbf{n}$ 指向 $\mathbf{E}_1$ 那边，$\mathbf{E}_2$ 取为靠近 S 一边的场．在极限情况下，因为 $\mathbf{E}_2$ 的所在地是理想导体，所以 $\mathbf{E}_2 \times \mathbf{n} = 0$．这样，磁流片另一边的场变为

$$\mathbf{E}_1 \times \mathbf{n} = \mathbf{i}_{ms} = \mathbf{E} \times \mathbf{n}$$

等于给定场 $\mathbf{E}$ 的切线分量．因此，根据唯一性定理可以断定 $\mathbf{i}_{ms}$ 的辐射场在 V 内与所给定的场相同(见图 2.13)．

在 S 内侧 $\mathbf{E}_2 \times \mathbf{n} = 0$，这与零场的边界条件相同，所以在 S 内得到零场．

这里要强调一点，就是我们在曲面 S 上给出了面电流及面磁流，因此 S 是一个场源面，谈不上 S 本身是什么样的媒质的问题．但是，在 S 外部的空间其媒质参数是给定的电磁场 $\mathbf{E}$、$\mathbf{H}$ 的媒质参数 ε 和 μ，而在 S 内部我们选了理想导体这样一种媒质．当然，由于 S 内部是零场，还可以选其他的媒质作为 S 内部的媒质．

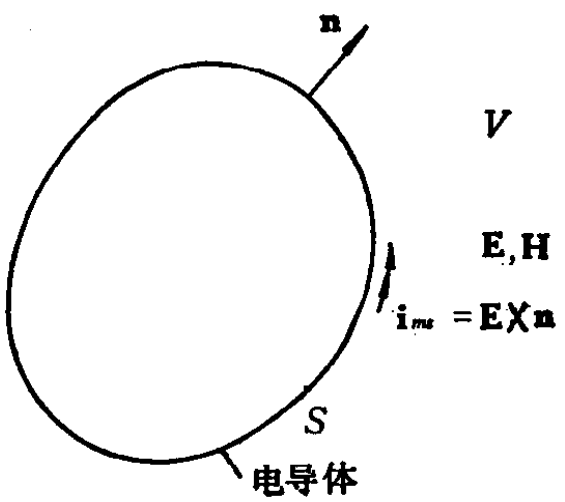

图 2.13　单由面磁流即可产生等效场

由上述情况可见，S 面上的磁流在 S 内部是理想电导体的情况下已经在 V 内产生了给定的电磁场 $\mathbf{E}$、$\mathbf{H}$．可是根据图 2.12，还应考虑面电流 $\mathbf{i}_s = \mathbf{n} \times \mathbf{H}$ 在 S 内部是理想电导体条件下的辐射．

由于 $\mathbf{i}_{ms} = \mathbf{E} \times \mathbf{n}$ 的辐射已经在 V 内产生了给定的电磁场，而根据等效定理 $\mathbf{i}_{ms}$ 加上 $\mathbf{i}_s$ 的辐射才能产生给定的电磁场

$\mathbf{E}$、$\mathbf{H}$，因此只能得出 $\mathbf{i}_s$ 在 S 内是理想导体条件下其辐射场等于零的结论。

这是一个很重要的结果。我们将其归纳如下：如在封闭曲面 S 上有面电流，而 S 内部或外部是理想电导体，则不论面电流的大小、方向如何，其辐射场均等于零。

这样，在 S 一侧的媒质是理想导体的条件下，只考虑面磁流就够了。

现在把 S 内部的媒质换成理想磁导体，并在 V 内靠近 S 的地方置一电流片，片上每一点的电流密度为

$$\mathbf{i}_s = \mathbf{n} \times \mathbf{H}$$

从数学上来说，为了求电流片的辐射场，就需要解 $\mathbf{i}_s = \mathbf{n} \times \mathbf{H}$ 的麦克斯韦方程组，边界条件是 S 上 $\mathbf{n} \times \mathbf{H} = 0$。然后取电流片向 S 无限靠近时的极限。原先电流片两边的磁场切线分量之差为

$$\mathbf{n} \times [\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2] = \mathbf{i}_s$$

这里 $\mathbf{H}_1$、$\mathbf{H}_2$ 是电流片两边的磁场，$\mathbf{n}$ 指向 $\mathbf{H}_1$ 那边，$\mathbf{H}_2$ 是靠近 S 那一边的磁场。在极限情况下，因为 $\mathbf{H}_2$ 的所在地是理想磁导体，所以 $\mathbf{n} \times \mathbf{H}_2 = 0$。这样，电流片另一边的场变为

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{i}_s = \mathbf{n} \times \mathbf{H}$$

等于给定场 $\mathbf{H}$ 的切线分量。因此，根据唯一性定理，可以断定 $\mathbf{i}_s$ 的辐射场在 V 内与所给定的场相同（见图 2.14）。

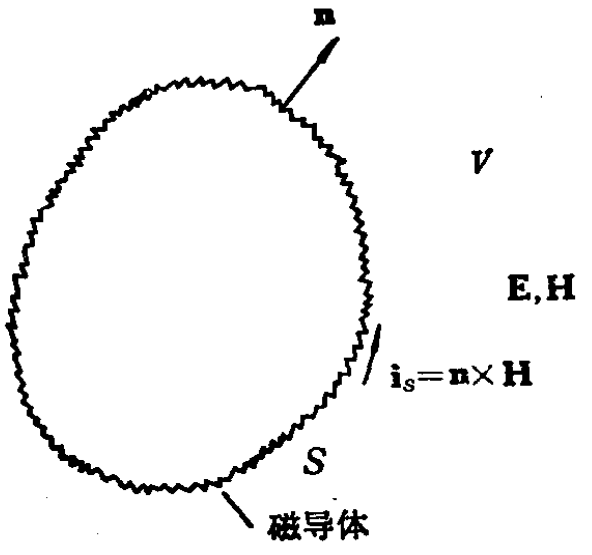

图 2.14　单由面电流即可产生等效场

用本节所述的证明方法，可得出结论：如果在封闭曲面 S 上有面磁流，而 S 内部或外部是理想磁

导体，则不论面磁流的大小、方向如何，其辐射场均等于零.

这样，在 S 内部的媒质是理想磁导体的情况下，只考虑面电流就够了.

以上结果在理想导体是一块无限大的平板时很容易理解. 以理想电导体为例，根据映象原理，电流元的映象正好是大小相等、方向相反(指平行于表面的电流)的电流元，当电流元与平板的距离无限近时，电流元及其映象的场正好互相抵消.

如果在 V 内有场源，那么在进行等效变换时保留场源即可，如图 2.15 所示.

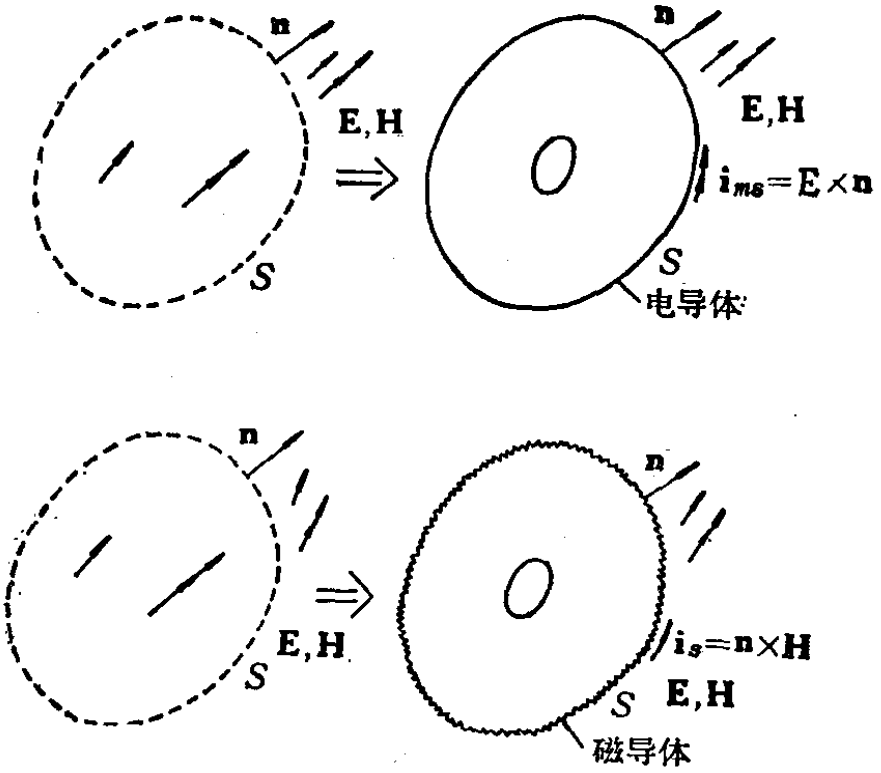

图 2.15 V 内有场源时的等效变换

只利用面电流或面磁流的等效定理，从数学角度来看，必须在有电导体或磁导体的条件下求解，因而即使在 S 外是均匀媒质，也不能用矢量位公式(见第四章).

2.10 感 应 定 理

当因均匀媒质内存在着某一物体（例如在空气中有飞机飞行）而对入射电磁波引起反射或散射时，如何根据已知的入射场求反射或散射场，这是工程实践中的一个重要问题。在雷达技术中，求目标散射面积就是这类问题的一个具体例子。

在研究这类问题时，经常用到下述感应定理。现在先来明确几个有关名词的定义。

不存在物体时由给定场源（电流源和磁流源）所产生的电磁场称为入射场，用 $\mathbf{E}^i$ 和 $\mathbf{H}^i$ 表示。

给定场源和物体同时存在情况下空间内（包括物体内）的电磁场称为总场，用 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 表示。

总场与入射场之差称为散射场，用 $\mathbf{E}^s$ 和 $\mathbf{H}^s$ 表示：

$$\mathbf{E}^s = \mathbf{E} - \mathbf{E}^i \qquad \mathbf{H}^s = \mathbf{H} - \mathbf{H}^i \tag{2.92}$$

因此

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s \qquad \mathbf{H} = \mathbf{H}^i + \mathbf{H}^s \tag{2.93}$$

由式 (2.93) 可以看出，散射场实际上是物体对入射场的影响或修正，它取决于由入射场所激发的物体上的传导电流或介质的极化现象。在物体外部，总场和入射场具有同样的给定场源，所以，散射场作为总场和入射场之差在物体外部是无源的，而总场在物体内部是无源的，因为它的源就是入射场的源，集中在物体外部。这里的源指的都是局外源。

现在来应用 2.4 节中证明的一般等效定理。根据此等效定理，可以在空间的两个区域内取互相独立的两个场。第一个区域取为物体以外的空间。第一个区域内的场取作散射场 $\mathbf{E}^s$ 和 $\mathbf{H}^s$。理所当然，媒质特性为散射场所处的媒质的特性，

即不存在物体时的原有媒质特性.

第二个区域取作物体在空间所占据的部分. 第二个区域内的场取物体内所存在的总场 **E** 和 **H**. 当然, 媒质特性应取物体的媒质特性.

总场在物体内部无源. 散射场在物体外部无源. 因此, 根据等效定理, 产生与这两个场等效的场的广义麦克斯韦方程组的源集中在物体表面上(**n** 指向物体外部), 并为

$$\mathbf{i}_s = \mathbf{n} \times (\mathbf{H}^s - \mathbf{H}) \qquad \mathbf{i}_{ms} = (\mathbf{E}^s - \mathbf{E}) \times \mathbf{n} \tag{2.94}$$

但

$$\mathbf{H}^s - \mathbf{H} = -\mathbf{H}^i \qquad \mathbf{E}^s - \mathbf{E} = -\mathbf{E}^i$$

代入式 (2.94), 得

$$\mathbf{i}_s = \mathbf{n} \times (-\mathbf{H}^i) = \mathbf{H}^i \times \mathbf{n} \tag{2.95}$$

$$\mathbf{i}_{ms} = (-\mathbf{E}^i) \times \mathbf{n} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}^i \tag{2.96}$$

由此可以得出这样的结论: 由式(2.95) 及 (2.96)所确定的面电流密度和面磁流密度, 在媒质中存在物体的条件下, 通过广义麦克斯韦方程组在物体内部产生总场 **E**、**H**, 而在物体外部则产生散射场 $\mathbf{E}^s$、$\mathbf{H}^s$. 这就是所谓的感应定理 (见图 2.16).

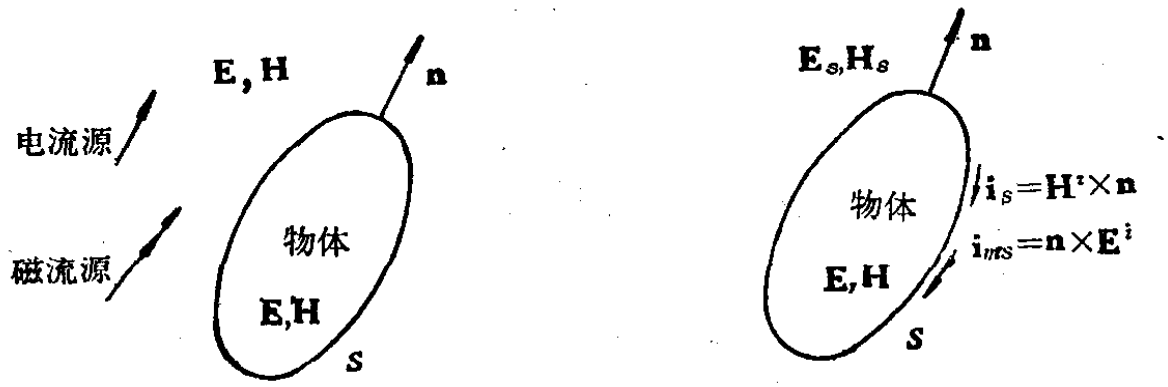

图 2.16 产生散射场的等效源

换句话说, 如果已知入射场 $\mathbf{E}^i$ 和 $\mathbf{H}^i$, 为在障碍物外求散射场而在障碍物内求总场, 那么只需假定障碍物表面上存在

面电流密度　$\mathbf{i}_s = \mathbf{H}^i \times \mathbf{n}$

面磁流密度　$\mathbf{i}_{ms} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}^i$

并在有障碍物条件下求解广义麦克斯韦方程组即可.

这种方法的优点在于面电流和面磁流都是已知的，物理模型比较清楚. 但是，由于有障碍物存在，即使外部是均匀媒质，也无法使用矢量位公式来求解广义麦克斯韦方程. 因此，从数学的观点来看，问题并没有简化. 在某些特殊情况下，可以根据已知的电流、磁流近似地把场求出来，下面将举例说明这一点.

现在再一次来应用普遍等效定理. 假定物体为一均匀媒质，其内部的场取为总场 **E**、**H**. 物体外部的场则取为零场（零场满足麦克斯韦方程组），物体外部的媒质现在取与物体一样的均匀媒质（零场的媒质可任意选定）. 根据普遍等效定理，能够产生与这两个场等效之场的广义麦克斯韦方程组的源也集中在物体表面上并为

$$\mathbf{i}_s = \mathbf{n} \times (0 - \mathbf{H}) = \mathbf{H} \times \mathbf{n} \tag{2.97}$$

$$\mathbf{i}_{ms} = (0 - \mathbf{E}) \times \mathbf{n} = \mathbf{n} \times \mathbf{E} \tag{2.98}$$

这些电流和磁流在全空间都是均匀媒质条件下确定物体内的总场，而在物体外部则产生零场，如图 2.17 所示.

由于全空间都是均匀媒质，因此可以应用矢量位公式. 但是，因为 **E**、**H** 是未知的量，所以问题并未解决，只不过得到了一组积分方程而已. 在某些特殊情况下，可以先近似地求出物体表面的 **E**、**H**，从而确定 $\mathbf{i}_s$、$\mathbf{i}_{ms}$，然后再用

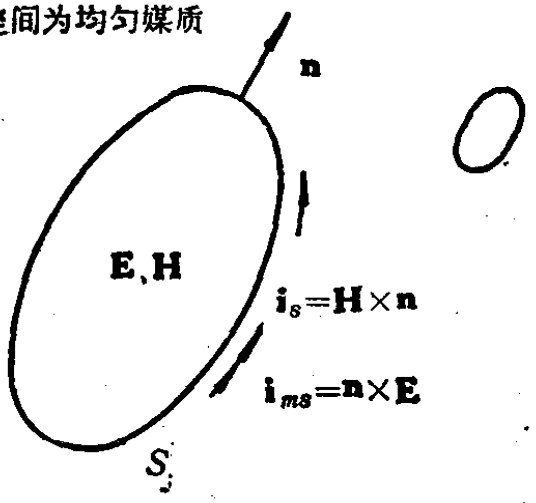

图 2.17　物体内产生总场的等效源

矢量位公式近似地求出物体内部的 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 来.

我们也可以取物体外部的场为散射场 $\mathbf{E}^s$、$\mathbf{H}^s$，媒质为散射场所处地的媒质(即空气或真空)，而在物体所占据的空间则取零场，媒质则取与外部一样的均匀媒质. 这时广义麦克斯韦方程组的源为

$$\mathbf{i}_s = \mathbf{n} \times \mathbf{H}^s \tag{2.99}$$

$$\mathbf{i}_{ms} = \mathbf{E}^s \times \mathbf{n} \tag{2.100}$$

可是，由于物体表面上的 $\mathbf{E}^s$、$\mathbf{H}^s$ 是未知的量，因此即使应用矢量位公式，还是得到一组积分方程，而无法直接求出物体外部的 $\mathbf{E}^s$ 和 $\mathbf{H}^s$ 来(见图 2.18).

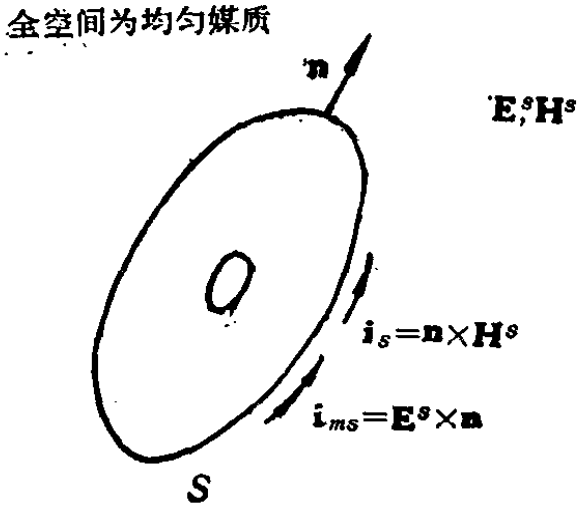

图 2.18 另一种产生散射场的等效源

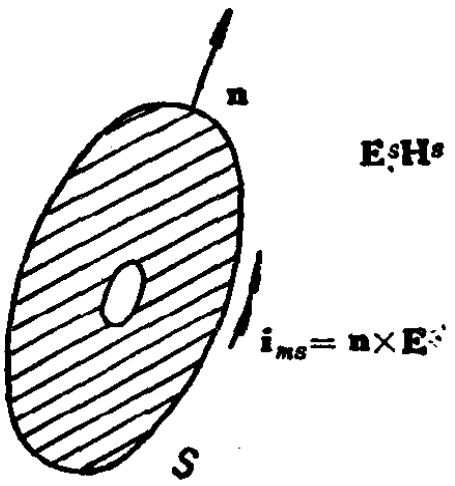

图 2.19 理想电导体的情况

如果物体是一块理想电导体，则在考虑到理想电导体内部总场为零和物体外表面上面电流不辐射这两个特殊条件之后，可得如图 2.19 所示的模型.

注意，这里所谓“理想电导体外表面上的面电流”指的是在导体表面之外的面电流至表面距离趋于零的极限情况，而不是指导体表面上电流的流动. 这一点必须明确. 这时，数学上的困难是要在存在理想导体的情况下求解磁流麦克斯韦

方程组．在理想导体是一块无限大的平板时问题可以简化．

由本节所叙述的内容可见，感应定理只不过是一般等效定理在特殊情况下的应用．但是它把 S 上的场源转换成已知的函数，在某些特殊情况下，这对求解问题是有利的．

2.11 应用感应定理的例子

本节以一块大的理想电导体平板的背向散射或雷达回波问题作为感应定理的一个应用实例． 其坐标系统如图 2.20 所示．

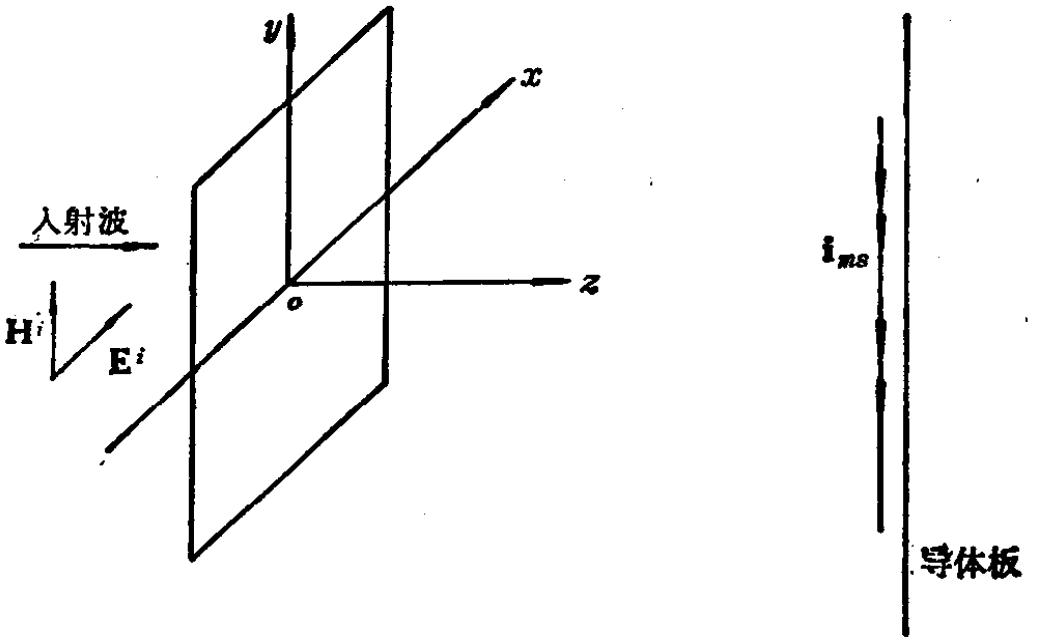

图 2.20 大理想电导体平板的散射

假定入射波是个平面波，它垂直地入射到位于 $z=0$ 平面内的导体板上．令入射波的电场方向为沿 x 轴的方向．此时入射波可表示成

$$\mathbf{E}^i = \mathbf{u}_x E_x^i = E_0 e^{-ikz}\mathbf{u}_x \tag{2.101}$$

式中 $\mathbf{u}_x$、$\mathbf{u}_y$、$\mathbf{u}_z$ 为沿 x、y、z 轴的单位矢量；E_x^i 为平面波电场的 x 轴分量；E_0 为其幅值；e^{-ikz} 为不同 z 时平面波的相

位，$k=\frac{2\pi}{\lambda}$ 为波数，λ 为媒质中的波长.

根据感应定理，散射场由 $\mathbf{i}_{ms}=\mathbf{n}\times\mathbf{E}^i$ 决定. 在导体板面对入射波的一面 $\mathbf{n}$ 指向 z 轴负方向，在背向入射波的一面 $\mathbf{n}$ 指向 z 轴正方向.

在面向入射波(场源)的一面 $z=0$，

$$\mathbf{i}_{ms}=\mathbf{n}\times\mathbf{E}^i=\begin{vmatrix}\mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z\\ 0 & 0 & -1\\ E_0 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$=-\mathbf{u}_y\begin{vmatrix}0 & -1\\ E_0 & 0\end{vmatrix}=-\mathbf{u}_yE_0=\mathbf{u}_yi_{my}$$

式中

$$i_{my}=-E_0$$

在背向入射波的一面，z 的坐标仍然等于零，但 $\mathbf{n}$ 的方向相反，$\mathbf{i}_{ms}$ 可表示为

$$\mathbf{i}_{ms}=\mathbf{n}\times\mathbf{E}^i=\begin{vmatrix}\mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z\\ 0 & 0 & 1\\ E_0 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$=\mathbf{u}_yE_0=\mathbf{u}_yi_{my}$$

此处

$$i_{my}=E_0$$

现在问题归结到求已知磁流的辐射上. 由于导体板比较大，因此能近似地用无限大的平板来代替有限尺寸的平板，即可假定磁流的反射面为无限大的平面. 在此假定条件下可以应用镜象原理，也就是说每个磁流元可用两倍大小的磁流元代替，同时去掉反射板，在 $z<0$ 区域内的场不变(证明见第五章).

另外，由于导体板比较大，我们假定背向场源那一面上磁

流的辐射在 $z<0$ 区域内为零.

这样，只有面向场源方向磁流 $\mathbf{i}_{ms}=-\mathbf{u}_y 2E_0$ 的辐射才会产生朝向场源方向的辐射(已考虑平板的镜象).

根据后面第四章中的式 (4.136)，球坐标系统中磁偶极子的远区场为

$$E_\varphi=\frac{-i\omega ik}{4\pi r}(\sin\theta)m_0 e^{-ikr} \tag{2.102}$$

式中 m_0 为磁偶极子矩. 根据第四章中的式 (4.116)，磁偶极子矩与磁流的关系为

$$m_0=\frac{i_{ms}dxdy}{i\omega}$$

这里，对于 z 轴负方向上的点，可以很容易看出 $\theta=90°$，$\sin\theta=1$，$E_x=-E_\varphi$ (因 $\mathbf{u}_\varphi$ 与 $\mathbf{u}_x$ 方向相反，故 $\theta=0$ 的轴取为 y 轴)，代入式(2.102)得

$$\begin{aligned}dE_x&=\frac{ik}{4\pi r}i_{ms}dxdy e^{-ikr}\\&=\frac{ik(-2E_0)d\sigma}{4\pi r}e^{-ikr}\\&=\frac{-ikE_0 d\sigma}{2\pi r}e^{-ikr}\end{aligned}$$

式中 r 为从原点至 z 轴上观察点的距离；$d\sigma=dxdy$ 为面积元. 对整个平板进行面积分，得总的后向散射场为

$$E_x=\iint_{\text{平板}}dE_x=\frac{-ikE_0A}{2\pi r}e^{-ikr} \tag{2.103}$$

式中 A 为平板面积.

障碍物的雷达截面积定义为这样的一个面积，它乘上入射波的功率密度后产生各向均匀的辐射，并在接收点形成同实际情况一样的散射场功率密度.

令入射波的功率密度为 S^i，接收点散射场的功率密度为

S^s，雷达截面积为 A_e，则根据上述定义

$$\frac{S^i \cdot A_e}{4\pi r^2} = S^s$$

因此

$$A_e = 4\pi r^2 \frac{S^s}{S^i} \tag{2.104}$$

因

$$S^s = \alpha \frac{1}{r^2} S^i$$

式中 α 为常比例系数，故 S^s/S^i 与 r^2 成反比，A_e 与 r 无关，因此式(2.104)又可写成

$$A_e = \lim_{r\to\infty}\left(4\pi r^2 \frac{S^s}{S^i}\right)$$

在我们所讨论的问题中，因

$$S^i = \frac{|E_0|^2}{\eta}$$

$$S^s = \frac{1}{\eta}|E_s|^2 = \frac{1}{\eta}\left|\frac{kE_0A}{2\pi r}\right|^2$$

(η 为空间的波阻抗) 故

$$A_e = 4\pi r^2 \cdot \frac{1}{\eta}\frac{k^2E_0^2A^2}{4\pi^2r^2}\cdot\frac{\eta}{E_0^2}$$

$$= \frac{k^2A^2}{\pi} = \frac{4\pi^2A^2}{\lambda^2\pi} = \frac{4\pi}{\lambda^2}A^2 \tag{2.105}$$

此公式近似地适用于比波长大许多倍的平板以及其入射波需垂直入射这一特殊情况。

2.12 波导中的等效定理

在一般等效定理中，适当地选取 S 的几何形状，使它能适

合波导的情况，再适当地选取 S 内外的场，就可以推导出两条波导中的等效定理．它们都是一般等效定理的具体应用．我们分别叙述如下．

假设有一根半无限长的波导，它不一定是直的，而且截面形状可以是任意的．在波导的某一横截面有一金属隔板，隔板上开有一个孔 S_a，以便左边的电磁波能通过 S_a 传输到右边去．波导的左端在某处短路．激发电磁波的场源假设在孔径 S_a 左边的波导段内．这根波导的示意图见图 2.21．为了作图方便，画出了一根矩形直波导．

令孔径 S_a 被理想电导体盖住时由给定的场源在左边腔体中所激发的场为 $\mathbf{E}_0$、$\mathbf{H}_0$．由于 S_a 处是理想电导体，在 S_a 上 $\mathbf{n}\times\mathbf{E}_0=0$．$S_a$ 上的面电流密度为 $-\mathbf{n}\times\mathbf{H}_0$（$\mathbf{n}$ 指向腔体外部，故 $\mathbf{n}\times\mathbf{H}_0$ 前有负号）．把盖住 S_a 的理想电导体移去后，由给定的源产生的电磁场穿过孔径 S_a 辐射到右边去．这时在左边波导内的场令为 $\mathbf{E}_1$、$\mathbf{H}_1$，在右边波导段内的场令为 $\mathbf{E}_2$、$\mathbf{H}_2$．$\mathbf{E}_1$、$\mathbf{E}_2$ 是一个电磁场在空间不同部分的符号．显然，在 S_a 上它们的切线分量连续，即

$$\mathbf{n}\times\mathbf{E}_1=\mathbf{n}\times\mathbf{E}_2 \tag{2.106}$$

同理

$$\mathbf{n}\times\mathbf{H}_1=\mathbf{n}\times\mathbf{H}_2 \tag{2.107}$$

如果把 $\mathbf{E}_1$、$\mathbf{H}_1$ 写成

$$\mathbf{E}_1=\mathbf{E}_0+\mathbf{E}_s \tag{2.108}$$

$$\mathbf{H}_1=\mathbf{H}_0+\mathbf{H}_s \tag{2.109}$$

那么 $\mathbf{E}_s$ 和 $\mathbf{H}_s$ 可以看成是对 $\mathbf{E}_0$ 和 $\mathbf{H}_0$ 的扰动，它类似于电磁波中的散射场．现在如图 2.21 所示那样来选择 S．

在 S_a 处 S 和 S_a 重合，在其余地方 S 穿过隔板内部和波导壁内部．在 S 内部取电磁场为 $\mathbf{E}_s$ 和 $\mathbf{H}_s$．注意 $\mathbf{E}_s$、$\mathbf{H}_s$ 在 S 内部是无源的，因为它是 $\mathbf{E}_1$、$\mathbf{H}_1$ 和 $\mathbf{E}_0$、$\mathbf{H}_0$ 的差，而这两个场都

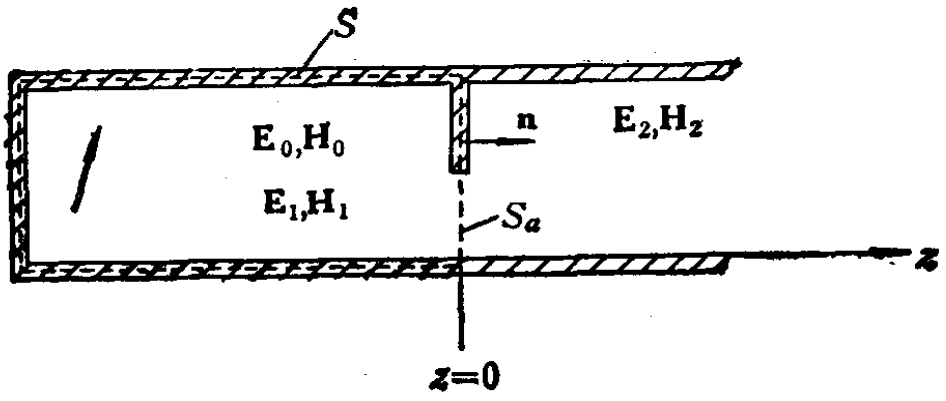

图 2.21　波导中 S 的选择

以给定的场源为自己的源．在 S 外部我们取场 $\mathbf{E}_2$ 和 $\mathbf{H}_2$．由波导的具体结构可见，实际上 $\mathbf{E}_2$、$\mathbf{H}_2$ 只存在于波导的右半段内．为在 S 内产生 $\mathbf{E}_s$、$\mathbf{H}_s$，在 S 外产生 $\mathbf{E}_2$、$\mathbf{H}_2$，在 S 上需有表面电流

$$\mathbf{i}_s = \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_s) \tag{2.110}$$

和表面磁流

$$\mathbf{i}_{ms} = (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_s) \times \mathbf{n} \tag{2.111}$$

由于在 S_a 以外的地方 S 均处于理想导体内部，因此 $\mathbf{E}_s = \mathbf{E}_2 = 0$，$\mathbf{H}_s = \mathbf{H}_2 = 0$（$S_a$ 处除外），所以 $\mathbf{i}_s$ 和 $\mathbf{i}_{ms}$ 只存在于 S_a 上．

现将式 (2.110) 变换如下：由式 (2.107) 和 (2.109)，式 (2.110) 可变换为

$$\begin{aligned}\mathbf{i}_s &= \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_s)\\ &= \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_s)\\ &= \mathbf{n} \times \mathbf{H}_0\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}\mathbf{i}_{ms} &= (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_s) \times \mathbf{n}\\ &= (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_s) \times \mathbf{n}\\ &= \mathbf{E}_0 \times \mathbf{n}\\ &= 0 \quad (\text{因 } S_a \text{ 上 } \mathbf{n} \times \mathbf{E}_0 = 0)\end{aligned}$$

由此得定理 1。

定理 1 S_a 上的面电流 $\mathbf{i}_s = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_0$ 在左半段波导中产生 $\mathbf{E}_s$ 和 $\mathbf{H}_s$，在右半段波导中产生 $\mathbf{E}_2$ 和 $\mathbf{H}_2$。

现在假定 S_a 由理想磁导体盖住，并令此时由给定的场源在左边腔体中所激发的场为 $\mathbf{E}_{0m}$、$\mathbf{H}_{0m}$。由于 S_a 处是理想磁导体，因此在 S_a 上 $\mathbf{n} \times \mathbf{H}_{0m} = 0$。$\mathbf{E}_1$、$\mathbf{H}_1$，$\mathbf{E}_2$、$\mathbf{H}_2$ 的意义不变。

如果把 $\mathbf{E}_1$、$\mathbf{H}_1$ 写成

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{0m} + \mathbf{E}_{sm} \tag{2.112}$$

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_{0m} + \mathbf{H}_{sm} \tag{2.113}$$

那么 $\mathbf{E}_{sm}$ 和 $\mathbf{H}_{sm}$ 可以看成是对 $\mathbf{E}_{0m}$ 和 $\mathbf{H}_{0m}$ 的扰动。如图 2.21 那样选 S。为在 S 内产生 $\mathbf{E}_{sm}$、$\mathbf{H}_{sm}$，在 S 外产生 $\mathbf{E}_2$、$\mathbf{H}_2$，在 S 上需有表面电流

$$\mathbf{i}_s = \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_{sm}) \tag{2.114}$$

和表面磁流

$$\mathbf{i}_{ms} = (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_{sm}) \times \mathbf{n} \tag{2.115}$$

$\mathbf{i}_s$ 和 $\mathbf{i}_{ms}$ 只存在于 S_a 上。

现将式(2.114)、(2.115)变换如下：

$$\begin{aligned}\mathbf{i}_s &= \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_{sm}) \\ &= \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_{sm}) \\ &= \mathbf{n} \times \mathbf{H}_{0m} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{i}_{ms} &= (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_{sm}) \times \mathbf{n} \\ &= (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_{sm}) \times \mathbf{n} \\ &= \mathbf{E}_{0m} \times \mathbf{n}\end{aligned}$$

由此得定理 2。

定理 2 S_a 上的面磁流 $\mathbf{E}_{0m} \times \mathbf{n}$ 在左半段波导内产生 $\mathbf{E}_{sm}$、$\mathbf{H}_{sm}$，在右半段波导内产生 $\mathbf{E}_2$、$\mathbf{H}_2$。

通过对感应定理和波导中的等效定理的叙述，我们可以看出，实质上它们都是一般等效定理的具体应用。各种应用

的差别仅仅在于 S 内外取了什么样的电磁场. 实际上，用得最多的是一个场取为零场、另一个场取为待求场的情况. 在现代天线和波导理论中，一般等效定理有着广泛的应用. 由于这个原因，我们对有关的材料作了比较详细的介绍.

2.13 巴比内特原理

巴比内特 (Babinet) 原理，是我们研究裂缝天线时经常要用到的一种基础理论. 在这一节中，我们先来说明什么是巴比内特原理，然后再加以证明.

巴比内特原理讨论的是电磁波通过一个由理想导体组成的无限大、无限薄平面上的口径后所形成的场的问题.

我们先给出几个讨论巴比内特原理时所必须掌握的定义.

(1) 导电屏——一块无限大并带有洞眼 (孔径) 的平面，在此平面上电场的切线分量等于零，用数学公式可表示成

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0 \text{ (不包括孔径)} \qquad (2.116)$$

式中 $\mathbf{E}$ 表示该平面上的总场.

(2) 导磁屏——一块有限大的平面，在此平面上磁场的切线分量等于零，即

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = 0 \qquad (2.117)$$

这里要注意两点：第一，导磁屏的尺寸是有限的；第二，导磁屏上电场的切线分量不等于零，即 $\mathbf{n} \times \mathbf{E} \neq 0$.

(3) 导电屏和导磁屏互补——二者放在一起互不重叠，而且组成一个完整的无限大的平面，即导磁屏把导电屏的洞眼全部补上.

(4) 磁流空间——解磁流麦克斯韦方程组时自变量所占据的几何空间. 磁流麦克斯韦方程组中的 ε_m 和 μ_m 称为磁流

空间的介质常数和导磁率。

(5) 空间波阻抗——空间的波阻抗 η 定义为

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

式中 ε 和 μ 为麦克斯韦方程组中的介质常数和导磁率。

(6) 磁流空间波阻抗——磁流空间的波阻抗 η_m 定义为

$$\eta_m = \sqrt{\frac{\mu_m}{\varepsilon_m}}$$

式中 ε_m 和 μ_m 为磁流空间的介质常数和导磁率。

(7) 对偶空间——设空间 1 的介质常数为 ε_1，导磁率为 μ_1，空间 2 的介质常数为 ε_2，导磁率为 μ_2。如 $\varepsilon_2 = \mu_1$，$\mu_2 = \varepsilon_1$，则称空间 2 为空间 1 的对偶空间。

对磁流空间和真空来说，如果

$$\varepsilon_m = \mu_0 \qquad \mu_m = \varepsilon_0$$

(ε_0 和 μ_0 为真空的介质常数和导磁率)，那么此时磁流空间为真空的对偶空间。

(8) 对偶源——电流源的对偶源是大小相等、方向相同的磁流源。

在以上定义基础上，现在我们来讨论巴比内特原理。

对一组给定的电流源考虑下列三种辐射情况：

(a) 对自由空间辐射；(b) 在有导电屏的情况下辐射；(c) 在有导磁屏的情况下辐射。

我们来考虑导电屏和导磁屏为互补的情况，并取这样的坐标系统，使导电屏和导磁屏位于 $y = 0$ 的平面内，如图 2.22 所示。

向自由空间辐射时，$y > 0$ 区域内的场用 $\mathbf{E}^i$、$\mathbf{H}^i$ 表示。自由空间的介质常数和导磁率用 ε_0、μ_0 表示。自由空间的波阻抗

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

在自由空间内有导电屏情况下辐射时，$y > 0$ 区域中的场用 $\mathbf{E}^e$、$\mathbf{H}^e$ 表示。

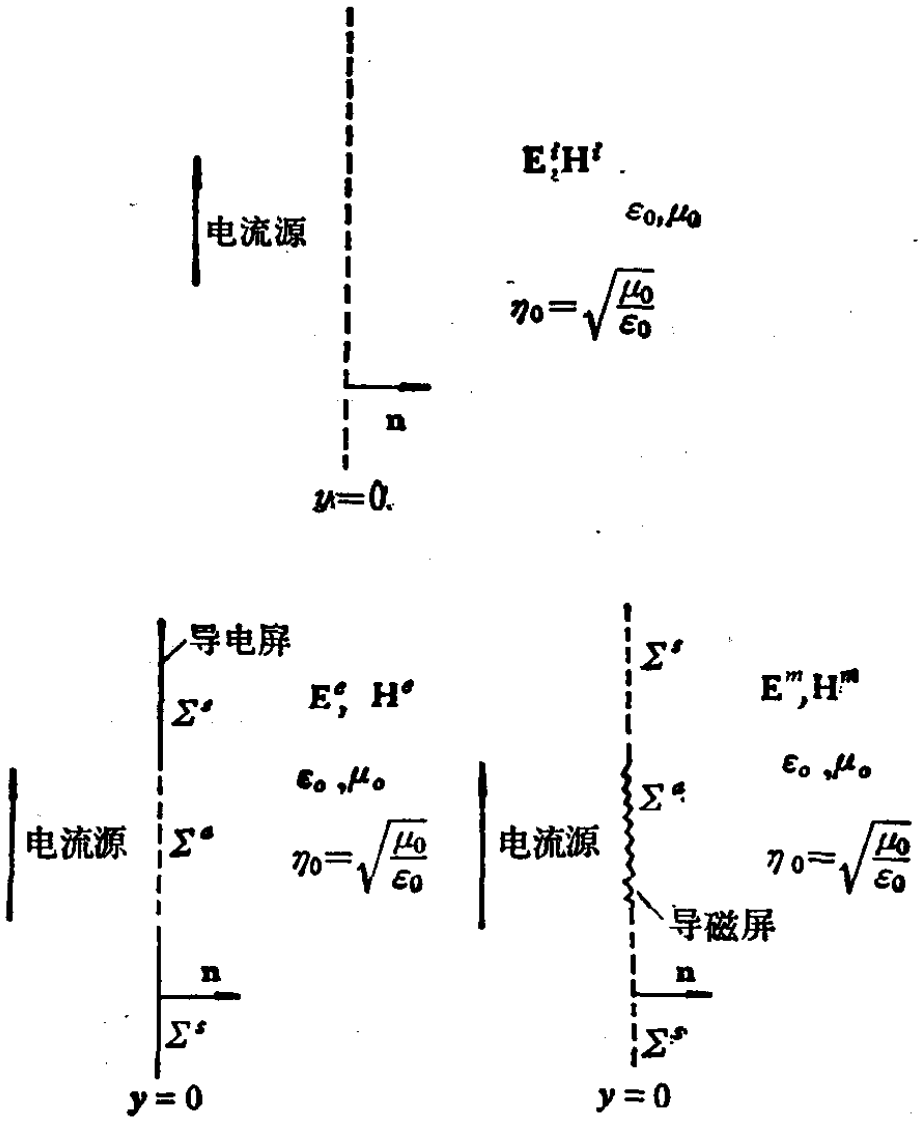

图 2.22　电流源在不同情况下的辐射场

在自由空间内有与导电屏互补的导磁屏情况下辐射时，$y > 0$ 区域中的场用 $\mathbf{E}^m$、$\mathbf{H}^m$ 表示。

现在来证明巴比内特原理的下列表示形式：

$$\begin{cases}\mathbf{E}^e + \mathbf{E}^m = \mathbf{E}^i \\ \mathbf{H}^e + \mathbf{H}^m = \mathbf{H}^i\end{cases} \tag{2.118}$$

$\mathbf{E}^e$、$\mathbf{H}^e$、$\mathbf{E}^m$ 和 $\mathbf{H}^m$ 都是总场．它们等于入射场 $\mathbf{E}^i$、$\mathbf{H}^i$ 与散射场之和．在导电屏情况下，散射场由屏上的电流即磁场的切线分量确定．这时屏上无磁流，因为电场的切线分量等于零．在导磁屏情况下，散射场由屏上的磁流即电场的切线分量确定．这时屏上无电流，因为磁场的切线分量等于零．

但导电屏上感应出来的电流元在包含此电流元的任何平面内都不产生散射磁场的切线分量，也就是说，在 $y = 0$ 平面内，

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}^e = \mathbf{n} \times \mathbf{H}^i \quad (\text{在 } \Sigma^a \text{ 部分}) \tag{2.119}$$

而在导电屏上，

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}^e = 0 \quad (\text{在 } \Sigma^s \text{ 部分}) \tag{2.120}$$

对互补的导磁屏来说，利用对偶原理，可以求出导磁屏上磁流元在 $y = 0$ 平面内不产生电场的切线分量，因此

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}^m = \mathbf{n} \times \mathbf{E}^i \quad (\text{在 } \Sigma^s \text{ 部分}) \tag{2.121}$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}^m = 0 \quad (\text{在 } \Sigma^a \text{ 部分}) \tag{2.122}$$

于是在 Σ^s 上的任一点

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}^e + \mathbf{E}^m) = \mathbf{n} \times \mathbf{E}^i$$

而在 Σ^a 上的任一点

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}^e + \mathbf{H}^m) = \mathbf{n} \times \mathbf{H}^i$$

因此，有导电屏和导磁屏时的电场之和在 Σ^s 上与 $\mathbf{E}^i$ 具有同样的切线分量，而磁场之和在 Σ^a 上与 $\mathbf{H}^i$ 具有同样的切线分量．

根据唯一性定理(见第三章)，电磁场由边界上电场或磁场的切线分量唯一地确定，所以在 $y > 0$ 的区域内，

$$\mathbf{E}^e + \mathbf{E}^m = \mathbf{E}^i \tag{2.123}$$

$$\mathbf{H}^e + \mathbf{H}^m = \mathbf{H}^i \tag{2.124}$$

下面讨论巴比内特原理的另一种表示形式.

考虑一个磁流麦克斯韦方程组. 取磁流空间的介质常数 $\varepsilon_m = \mu_0$, 导磁率 $\mu_m = \varepsilon_0$, 这时磁流空间的波阻抗

$$\eta_m = \sqrt{\frac{\mu_m}{\varepsilon_m}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} = \frac{1}{\eta_0}$$

磁流源取给定电流源的对偶源, 即与给定电流源的大小相等、方向相同. 另外, 将原来的导磁屏换成同样大小的导电板, 如图 2.23 所示.

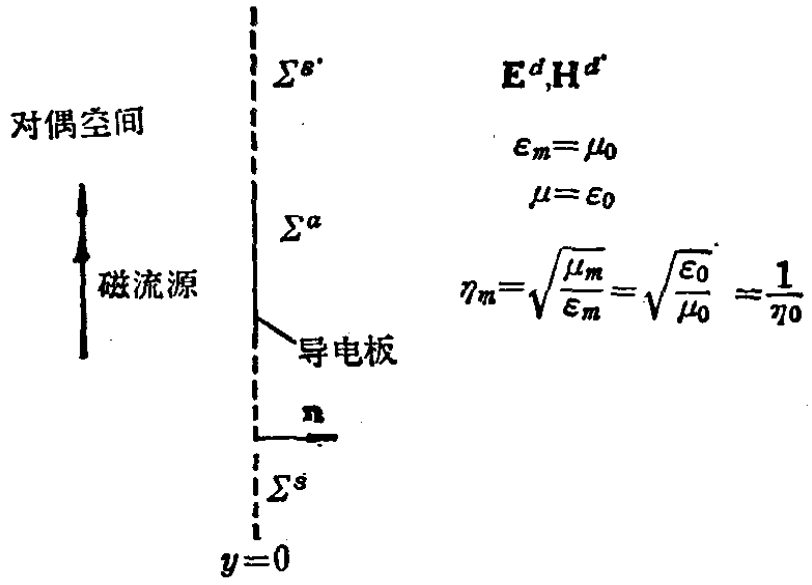

图 2.23 磁流源在对偶空间中的辐射

令上述条件下磁流麦克斯韦方程组的解为 $\mathbf{E}^d$、$\mathbf{H}^d$. 根据对偶原理, $\mathbf{E}^d$ 可从 $-\mathbf{H}^m$ 的表达式中得出, 不过此时需将 ε_0 换成 μ_m、μ_0 换成 ε_m 和 $\mathbf{i}$ 换成 $\mathbf{i}_m$. 但在我们所讨论的情况下, $\varepsilon_0 = \mu_m$, $\mu_0 = \varepsilon_m$, $\mathbf{i} = \mathbf{i}_m$; 而且 $\mathbf{E}^d$ 在导电板上的边界条件 (等于零) 与 $\mathbf{H}^m$ 在导磁屏上的边界条件 (等于零) 相同, 因此可以断言

$$\mathbf{E}^d = -\mathbf{H}^m \tag{2.125}$$

同理

$$\mathbf{H}^d = \mathbf{E}^m \tag{2.126}$$

将式(2.125)、(2.126)代入式(2.123)和(2.124)，得

$$\begin{cases} \mathbf{E}^e + \mathbf{H}^d = \mathbf{E}^i & (2.127) \\ \mathbf{H}^e - \mathbf{E}^d = \mathbf{H}^i & (2.128) \end{cases}$$

这是巴比内特原理的第二形式.

注意，求 $\mathbf{E}^m$、$\mathbf{H}^m$ 时的场源与有导电屏时的相同，解的是麦克斯韦方程组，空间为真空，但导电屏上的孔径处有导磁屏.

求 $\mathbf{E}^d$、$\mathbf{H}^d$ 时的场源是有导电屏时的对偶源(即大小相等、方向相同的磁流源)，解的是磁流麦克斯韦方程组，空间为真空的对偶空间，但导电屏上的孔径处有导电板. 现在让我们来探讨巴比内特原理的意义.

令有导磁屏时导磁屏的散射场为 $\mathbf{E}^{ms}$ 和 $\mathbf{H}^{ms}$，根据散射场定义

$$\mathbf{E}^m = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^{ms} \qquad \mathbf{H}^m = \mathbf{H}^i + \mathbf{H}^{ms}$$

由此可得

$$\mathbf{E}^e = \mathbf{E}^i - \mathbf{E}^m = -\mathbf{E}^{ms}$$

$$\mathbf{H}^e = \mathbf{H}^i - \mathbf{H}^m = -\mathbf{H}^{ms}$$

也就是说，在场源相同的条件下，通过导电屏后的总场等于与之互补的导磁屏散射场的负值.

将巴比内特原理的第二形式稍加变化后，可以获得它的第三种形式.

根据对偶原理，磁流源(电流源的对偶源)在真空的对偶空间中在无导电板时所产生的场 $\mathbf{E}^{id}$ 和 $\mathbf{H}^{id}$ 与 $\mathbf{E}^i$、$\mathbf{H}^i$ 的关系为

$$\mathbf{E}^{id} = -\mathbf{H}^i \qquad (2.129)$$

$$\mathbf{H}^{id} = \mathbf{E}^i \qquad (2.130)$$

这个场可以看成是对偶磁流源在对偶空间中有导电板时的入射场. 将式(2.129)、(2.130)代入式(2.127)和(2.128)，得

$$\mathbf{E}^c + \mathbf{H}^a = \mathbf{H}^{id}$$
$$\mathbf{H}^c - \mathbf{E}^d = -\mathbf{E}^{id}$$

或

$$\mathbf{E}^c = -(\mathbf{H}^d - \mathbf{H}^{id})$$
$$\mathbf{H}^c = \mathbf{E}^d - \mathbf{E}^{id}$$

令磁流源情况下导电板的散射场为 $\mathbf{E}^{sd}$ 和 $\mathbf{H}^{sd}$. 根据散射场定义

$$\mathbf{H}^d - \mathbf{H}^{id} = \mathbf{H}^{sd}$$
$$\mathbf{E}^d - \mathbf{E}^{id} = \mathbf{E}^{sd}$$

可得

$$\mathbf{E}^c = -\mathbf{H}^{sd} \tag{2.131}$$
$$\mathbf{H}^c = \mathbf{E}^{sd} \tag{2.132}$$

这就是巴比内特原理的第三形式. 此形式表明，通过导电屏后总场的电场（即电场的方向图）等于把场源换成对偶源，空间换成对偶空间，导电屏换成与之互补的导电板后散射场中磁场的负值. 与此相应，通过导电屏后总场的磁场等于导电板散射场中的电场.

注意，如果导电屏场源所产生的场是平面波，那么对偶源的场也是平面波，只不过场的极化方向转了 90° 而已（见图 2.24）.

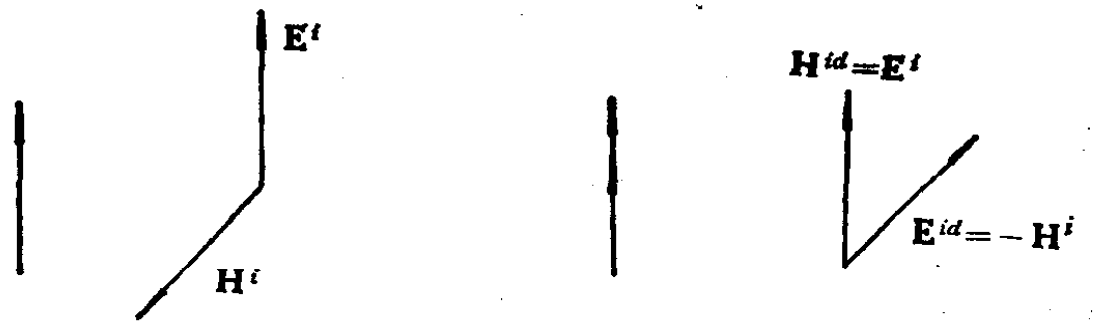

图 2.24 对偶源之场的极化方向转 90°

为了便于讨论起见，我们在上面假定了有导电屏情况下场源是纯粹的电流源。事实上，各种结论也都适用于场源是电流源加上磁流源的情况，因为所有磁流源的场都可以用式(2.64)换算成等效的电流源的场。因此，仍然可以先把场源看成纯电流源，然后再转变成对偶源。具体地说，如果原先的场源由电流源和磁流源两部分组成：

$$\mathbf{i}^{\Sigma} = \mathbf{i}^{e} + \mathbf{i}^{m}$$

(式中 $\mathbf{i}^{e}$ 为电流源，$\mathbf{i}^{m}$ 为磁流源)，那么可按公式(2.64)将 $\mathbf{i}^{m}$ 换算成等效的电流源 $\mathbf{i}^{q}$：

$$\mathbf{i}^{q} = \frac{1}{i\omega\mu_0}\,\mathrm{rot}\mathbf{i}^{m}$$

相应的对偶源（磁流源）由两部分组成：一部分等于 $\mathbf{i}^{e}$，另一部分等于 $\mathbf{i}^{q}$，即

$$\mathbf{i}^{m\Sigma} = \mathbf{i}^{e} + \mathbf{i}^{q}$$

这里 $\mathbf{i}^{e}$ 和 $\mathbf{i}^{q}$ 都是磁流。考虑到对偶空间的 $\varepsilon = \mu_0$，因此 $\mathbf{i}^{q}$ 可写成

$$\mathbf{i}^{q} = \frac{1}{i\omega\varepsilon}\,\mathrm{rot}\mathbf{i}^{m}$$

根据公式(2.65)，对偶空间中的磁流 $\mathbf{i}^{q}$ 可以等效于对偶空间中的电流 $-\mathbf{i}^{m}$。这样，对偶源 $\mathbf{i}^{m\Sigma}$ 又可等效于由电流 $-\mathbf{i}^{m}$ 和磁流 $\mathbf{i}^{e}$ 组成，也就是说，当同时存在电流源和磁流源时，电流源变成磁流源，而磁流源反号后变成电流源。上面的其余结论不变。

最后来讨论一个特殊情况。若导电屏孔径是一条极窄的缝隙(从理论上来说是一条无限窄的缝隙)，则相应的导电板就是一极窄的金属条。由于在极窄金属条上电流只能沿金属条的长度方向流动，因而散射场中的磁场在金属条表面上与

金属条长度方向垂直. 从巴比内特原理的第三形式可知，这时缝隙上的电场与缝隙长度方向垂直，而且缝隙的方向图就是金属条的散射方向图，同时这一切与入射场的具体形式无关。

第三章　麦克斯韦方程组的一般性质

本章主要叙述麦克斯韦方程组的一般性质，目的是为其他各章提供必要的预备知识，因此从内容上看带有辅助的特性。对于一般书中常见的内容我们只作简要的回顾，对一些细节则作些补充说明，使读者对有关内容能有进一步的了解。本章的主要内容是唯一性定理和导体表面电磁场的近似边界条件。这两个内容在进行理论分析时经常需要用到，可是一般电磁场理论书籍中都讲得不够详细。在本章中我们用较多的篇幅加以介绍，以便读者能很好地掌握。其余内容带有备查的性质，供读者需要时查阅，不一定按顺序阅读。

3.1　麦克斯韦方程组及其边界条件

麦克斯韦方程组由下列第一和第二两方程组成。第一方程：

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{3.1}$$

式中 $\mathbf{H}$ 为磁场强度；$\mathbf{D}$ 为电通量密度；$\mathbf{i}$ 为体积电流密度；t 为时间。

若

$$\mathbf{D} = \varepsilon(x, y, z)\mathbf{E} \tag{3.2}$$

（$\mathbf{E}$ 为电场强度；$\varepsilon(x,y,z)$ 为介质常数，一般情况下它是位置的标量函数），则式(3.1)可写成

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{i} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{3.3}$$

在媒质导电率不等于零的条件下，

$$\mathbf{i} = \sigma\mathbf{E} + \mathbf{i}^{i} \tag{3.4}$$

其中 $\sigma\mathbf{E}$ 称为总电流密度 $\mathbf{i}$ 中的感应电流部分，它是由总电场决定的传导电流；$\mathbf{i}^{i}$ 称为局外电流密度，它是由非电磁能源产生的电流密度或者是式 (3.4) 中的一个给定的数学函数。第二方程：

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{3.5}$$

式中 $\mathbf{E}$ 为电场强度；$\mathbf{B}$ 为磁通量密度。若

$$\mathbf{B} = \mu(x, y, z)\mathbf{H} \tag{3.6}$$

则式(3.5)可写成

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{3.7}$$

$\mu(x,y,z)$ 是媒质的导磁率，一般情况下是位置的标量函数。

因为 divrota = 0，所以由式(3.1)得

$$\mathrm{div}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\mathbf{D} = 0 \tag{3.8}$$

将下列连续性方程（ρ 为体积电荷密度）

$$\mathrm{div}\mathbf{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{3.9}$$

代入式 (3.8)，得

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\mathbf{D} - \rho) = 0$$

即

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = \rho + f(x, y, z)$$

式中 $f(x, y, z)$ 为任一与时间无关的位置的函数。如果场是

在有限时刻内产生的(任何实际的场都这样)，那么在场产生之前的时刻，

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = 0 \qquad \rho = 0$$

因此

$$f(x, y, z) = 0$$

最后可得

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = \rho \tag{3.10}$$

由此可见，在连续性方程成立和场在有限时刻内产生这两个条件下，式(3.10)是第一方程的推论。

由式(3.5)得

$$\mathrm{div}\left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) = \mathrm{divrot}\mathbf{E} = 0$$

即

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$$

或

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = f_1(x, y, z)$$

式中 $f_1(x, y, z)$ 为任一与时间无关的位置的函数。若场在有限时刻内产生，则在场产生之前的时刻 $\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$，因此 $f_1(x, y, z) = 0$。

最后得

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0 \tag{3.11}$$

由此可见，式(3.11)是第二方程的直接结果。

对于没有时间起点的周期性场来说，如果只考虑场的交变分量，那么式(3.10)和(3.11)仍然成立，因为 f、f_1 都与时间无关，都不是交变分量。

下面讨论在两媒质交界面处电磁场矢量应满足的边界条件。

若媒质 1 和 2 的分界面为 S，S 上某一点 P 指向媒质 1

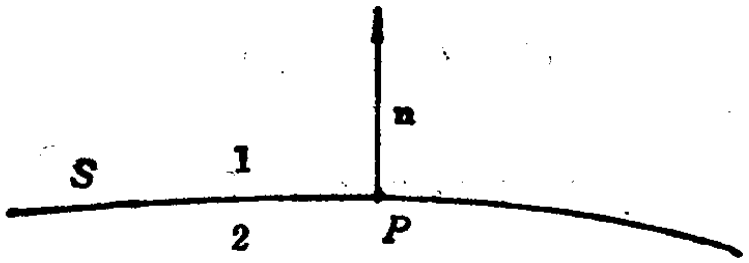

图 3.1　两媒质交界面示意图

的单位法向量为 $\mathbf{n}$，则对满足麦克斯韦方程组的场来说，在这一点上有下列关系式：

$$\begin{cases}(\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1)\times\mathbf{n}=\mathbf{i}_s\\(\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1)\times\mathbf{n}=0\\D_{n1}-D_{n2}=\rho_s\\B_{n1}-B_{n2}=0\end{cases}\tag{3.12}$$

式中 $\mathbf{H}_2$ 为媒质 2 中的 $\mathbf{H}$ 向 P 点逼近时 $\mathbf{H}$ 的极限值；$\mathbf{H}_1$ 为媒质 1 中的 $\mathbf{H}$ 向 P 点逼近时 $\mathbf{H}$ 的极限值（这里媒质中的 $\mathbf{H}$ 指的是媒质中某一向 P 点逼近的动点的 $\mathbf{H}$ 值）；$\mathbf{E}_2$、$\mathbf{E}_1$ 为相应于 $\mathbf{E}$ 的极限值；D_{n1}、D_{n2} 为媒质 1、2 中的 $\mathbf{D}$ 向 P 点逼近时 $\mathbf{D}$ 之极限值的法线分量，即 $\mathbf{n}$ 方向上的投影；B_{n1}、B_{n2} 为相应于 $\mathbf{B}$ 的 $\mathbf{n}$ 方向上的投影．$\mathbf{i}_s$ 为只存在于 S 面上的表面电流密度，它是体积电流密度的极限情况；ρ_s 为只存在于 S 面上的表面电荷密度，它是体积电荷密度的极限情况．

关系式 (3.12) 在一般电磁场理论书中都有证明，这里就不重复了．

3.2　坡印廷定理

由麦克斯韦方程组

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{i} + \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \mathrm{rot}\mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{cases}$$

得

$$\mathbf{E} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{i} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{3.13}$$

$$\mathbf{H} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{E} = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{3.14}$$

式(3.13)减式(3.14)得

$$\mathbf{E} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{i} \cdot \mathbf{E}$$

因为

$$\mathrm{div}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}] = \mathbf{H} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{H}$$

以及

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \varepsilon \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) + \mu \left(\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) + \frac{1}{2} \mu \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2) \end{aligned}$$

由此可得

$$\mathrm{div}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}] + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\varepsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2}{2} + \mathbf{i} \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{3.15}$$

这就是坡印廷定理的微分形式。

对空间以 S 为周界的某一区域 V 积分（$\mathbf{n}$ 为朝 V 外部的单位法线，见图 3.2），得

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \frac{\varepsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2}{2} dv = -\iiint_V (\mathbf{i} \cdot \mathbf{E}) dv$$

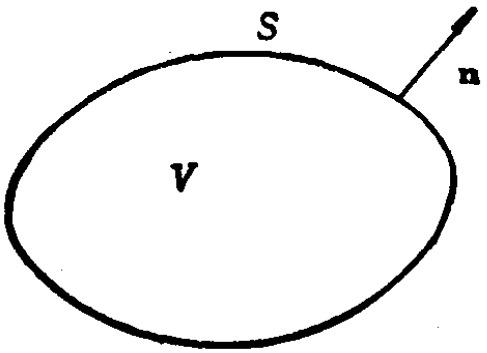

图 3.2　空间的有限区域

$$-\oiint_S [\mathbf{E}\times\mathbf{H}]\cdot\mathbf{n}d\sigma \tag{3.16}$$

这是坡印廷定理的积分形式.

由于事先已知 $\mathbf{i}\cdot\mathbf{E}$ 是电源消耗的功率，

$$\iiint_V \frac{\varepsilon\mathbf{E}^2+\mu\mathbf{H}^2}{2}dv$$

是电磁场内积聚的能量,因此，根据能量不灭定律可以断定 $\oiint_S [\mathbf{E}\times\mathbf{H}]\cdot\mathbf{n}d\sigma$ 表示通过 S 向外辐射的功率,而实验证明 $\mathbf{E}\times\mathbf{H}$ 恰好是通过单位面积向外辐射的功率密度.

以上证明是针对交变电磁场而言的. 对于静电场和静磁场来说,由于 $\mathbf{i}=0$，$\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\varepsilon\mathbf{E}^2+\mu\mathbf{H}^2}{2}\right)=0$，故得

$$\mathrm{div}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]=0$$

或

$$\oiint_S [\mathbf{E}\times\mathbf{H}]\cdot\mathbf{n}d\sigma=0 \tag{3.17}$$

这个式子与表示能量或功率的任何量都不发生关系，于是无法引用能量不灭定律来说明静电和静磁情况下公式

$$\mathrm{div}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]=0$$

或

$$\oint\!\!\!\!\!\!\int_S [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0$$

或 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 在能量或功率方面的意义. 由此可见，认为 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 在静电和静磁场情况下仍然表示通过单位面积的功率是没有根据的. 这一情况表明了交变电磁场与静电和静磁场之间的本质区别：交变电磁场不断地辐射能量，而静电、静磁场则不辐射能量.

在恒磁场情况下，

$$\mathbf{i} = \text{常数} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2}{2}\right) = 0$$

于是

$$\oint\!\!\!\!\!\!\int_S [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] \cdot \mathbf{n} d\sigma = -\iiint_V \mathbf{i} \cdot \mathbf{E} dv$$

由于等式右边是一表示电源消耗功率的量，我们又可以引用能量不灭定律来说明： 在恒磁场情况下 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 仍然表示通过单位面积的功率，即坡印廷定理仍然成立.

3.3 电磁场中的二次关系式

在本节中我们将要推导任意两个电磁场所满足的关系式. 这些关系式在电磁场理论中有着重要的应用. 例如当一个电磁场取为某一已知电磁场时，利用这些关系式就可以将另一未知的电磁场通过已知的电磁场表示出来，从而达到求解电磁场问题的目的. 电磁场理论中常用的所谓洛仑兹引理等都是这些关系式的特殊形式.

令 $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)$、$\mathbf{H}_1(\mathbf{r}, t)$ 及 $\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t)$、$\mathbf{H}_2(\mathbf{r}, t)$ 分别满足下列麦克斯韦方程组：

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\mathbf{H}_1 = \varepsilon \dfrac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} + \mathbf{i}_1 \\ \mathrm{rot}\mathbf{E}_1 = -\mu \dfrac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial t} \end{cases} \tag{3.18}$$

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\mathbf{H}_2 = \varepsilon \dfrac{\partial \mathbf{E}_2}{\partial t} + \mathbf{i}_2 \\ \mathrm{rot}\mathbf{E}_2 = -\mu \dfrac{\partial \mathbf{H}_2}{\partial t} \end{cases} \tag{3.19}$$

也就是说，它们是 ε、μ 值相同(同一媒质)，但电流密度 $\mathbf{i}_1(\mathbf{r}, t)$、$\mathbf{i}_2(\mathbf{r}, t)$ 不同的麦克斯韦方程组的解. 其中，$\mathbf{r} = x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z$ 为场点位置的矢径，t 表示时间.

由式(3.18)及(3.19)得

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}_1 \cdot \mathrm{rot}\mathbf{H}_2 + \mathbf{E}_2 \cdot \mathrm{rot}\mathbf{H}_1 \\ &= \varepsilon \mathbf{E}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{E}_2}{\partial t} + \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{i}_2 + \varepsilon \mathbf{E}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} + \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{i}_1 \\ &= \varepsilon \left(\mathbf{E}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{E}_2}{\partial t} + \mathbf{E}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} \right) + (\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{E}_2 + \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{E}_1) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2) + \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{E}_2 + \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{E}_1 \end{aligned} \tag{3.20}$$

同理

$$\begin{aligned} &\mathbf{H}_1 \cdot \mathrm{rot}\mathbf{E}_2 + \mathbf{H}_2 \cdot \mathrm{rot}\mathbf{E}_1 \\ &= -\mu \left(\mathbf{H}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{H}_2}{\partial t} + \mathbf{H}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial t} \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} (\mu \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2) \end{aligned} \tag{3.21}$$

从式(3.20)中减去式(3.21)，得

$$\begin{aligned} &(\mathbf{E}_1 \cdot \mathrm{rot}\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_2 \cdot \mathrm{rot}\mathbf{E}_1) + (\mathbf{E}_2 \cdot \mathrm{rot}\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_1 \cdot \mathrm{rot}\mathbf{E}_2) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 + \mu \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2) + \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{E}_2 + \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{E}_1 \end{aligned}$$

利用公式

$$\mathrm{div}[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]=\mathbf{b}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{a}-\mathbf{a}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{b}$$

可得

$$\mathrm{div}([\mathbf{E}_1\times\mathbf{H}_2]+[\mathbf{E}_2\times\mathbf{H}_1])+\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2+\mu\mathbf{H}_1\cdot\mathbf{H}_2)+\mathbf{i}_1\cdot\mathbf{E}_2+\mathbf{i}_2\cdot\mathbf{E}_1=0 \tag{3.22}$$

这就是所谓的二次关系式．它表示任意两个电磁场之间的关系．当 $\mathbf{i}_1=\mathbf{i}_2$，从而 $\mathbf{E}_1=\mathbf{E}_2$、$\mathbf{H}_1=\mathbf{H}_2$ 时，它退化为坡印廷定理．

对任意两个满足复数麦克斯韦方程组的正弦电磁场可作类似的推导．

我们有

$$\begin{cases}\mathrm{rot}\mathbf{H}_1=i\omega\varepsilon\mathbf{E}_1+\mathbf{i}_1\\ \mathrm{rot}\mathbf{E}_1=-i\omega\mu\mathbf{H}_1\end{cases} \tag{3.23}$$

$$\begin{cases}\mathrm{rot}\mathbf{H}_2=i\omega\varepsilon\mathbf{E}_2+\mathbf{i}_2\\ \mathrm{rot}\mathbf{E}_2=-i\omega\mu\mathbf{H}_2\end{cases} \tag{3.24}$$

由式(3.23)及(3.24)可得

$$\mathbf{E}_1\cdot\mathrm{rot}\mathbf{H}_2\pm\mathbf{E}_2\cdot\mathrm{rot}\mathbf{H}_1=i\omega\varepsilon\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2\pm i\omega\varepsilon\mathbf{E}_2\cdot\mathbf{E}_1+(\mathbf{i}_2\cdot\mathbf{E}_1\pm\mathbf{i}_1\cdot\mathbf{E}_2)$$

及

$$\mathbf{H}_1\cdot\mathrm{rot}\mathbf{E}_2\pm\mathbf{H}_2\cdot\mathrm{rot}\mathbf{E}_1=-i\omega\mu\mathbf{H}_1\cdot\mathbf{H}_2\pm(-i\omega\mu\mathbf{H}_2\cdot\mathbf{H}_1)$$

从而可得

$$\mathrm{div}([\mathbf{E}_1\times\mathbf{H}_2]+[\mathbf{E}_2\times\mathbf{H}_1])+2i\omega(\varepsilon\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2+\mu\mathbf{H}_1\cdot\mathbf{H}_2)+\mathbf{i}_1\cdot\mathbf{E}_2+\mathbf{i}_2\cdot\mathbf{E}_1=0 \tag{3.25}$$

或

$$\mathrm{div}([\mathbf{E}_1\times\mathbf{H}_2]-[\mathbf{E}_2\times\mathbf{H}_1])-\mathbf{i}_1\cdot\mathbf{E}_2+\mathbf{i}_2\cdot\mathbf{E}_1=0 \tag{3.26}$$

式(3.25)仍称为二次关系式．式(3.26)则称为洛伦兹引理的微分形式．

将式(3.26)对空间任一体积V积分并利用高斯定理，得

$$\oint\!\!\!\!\!\!\diagup_{S}\{[\mathbf{E}_1\times\mathbf{H}_2]-[\mathbf{E}_2\times\mathbf{H}_1]\}\cdot\mathbf{n}d\sigma$$

$$=\iiint_V(\mathbf{i}_1\cdot\mathbf{E}_2-\mathbf{i}_2\cdot\mathbf{E}_1)dv \tag{3.27}$$

式中S为包含V的封闭曲面；$\mathbf{n}$为S面上指向V外部的单位法向量．式(3.27)称为洛伦兹引理的积分形式．

如果将V取为全空间并且只考虑满足下列条件的电磁场：

$$\lim_{r\to\infty}r\mathbf{E}\to 0 \tag{3.28}$$

$$\lim_{r\to\infty}r\mathbf{H}\to 0 \tag{3.29}$$

式中r为坐标原点至场点的距离，则对S面的积分等于零，式(3.27)变为

$$\iiint_V(\mathbf{i}_1\cdot\mathbf{E}_2-\mathbf{i}_2\cdot\mathbf{E}_1)dv=0 \tag{3.30}$$

条件(3.28)和(3.29)的物理意义是所有的场源位于空间的有限区域内，$\mathbf{E}$、$\mathbf{H}$是麦克斯韦方程组的滞后位的解．注意，洛伦兹引理只对正弦电磁场才成立．

3.4 广义麦克斯韦方程组情况下的推广

对于广义麦克斯韦方程组，可以把坡印廷定理加以推广，证明所谓广义坡印廷定理．由方程组

$$\mathrm{rot}\mathbf{H}=\mathbf{i}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{i}_m$$

得

$$\mathbf{E} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{i} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\mathbf{H} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{E} = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{i}_m$$

因此

$$\mathbf{E} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{i} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{i}_m$$

或

$$\mathrm{div}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}] + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2}{2}\right) + \mathbf{i} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{i}_m \cdot \mathbf{H} = 0 \tag{3.31}$$

这就是所谓的广义坡印廷定理. 它的积分形式是

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \frac{\varepsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2}{2} dv = \iiint_V (-\mathbf{i} \cdot \mathbf{E}) dv + \iiint_V (-\mathbf{i}_m \cdot \mathbf{H}) dv - \oiint_S [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] \cdot \mathbf{n} d\sigma \tag{3.32}$$

式(3.31) 或式 (3.32)的意义是: 如果广义麦克斯韦方程组的解在区域 V 内与某麦克斯韦方程组解等效，那么它们就表示通过 S 面的辐射功率和 V 内储存能量的时间变化率与等效电流源和磁流源的关系.

应用与证明广义坡印廷定理同样的方法，可以证明所谓广义二次关系式.

由方程组

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\mathbf{H}_1 = \varepsilon \dfrac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} + \mathbf{i}_1 \\ \mathrm{rot}\mathbf{E}_1 = -\mu \dfrac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial t} - \mathbf{i}_{1m} \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\mathbf{H}_2 = \varepsilon \dfrac{\partial \mathbf{E}_2}{\partial t} + \mathbf{i}_2 \\ \mathrm{rot}\mathbf{E}_2 = -\mu \dfrac{\partial \mathbf{H}_2}{\partial t} - \mathbf{i}_{2m} \end{cases}$$

得

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathrm{rot}\mathbf{H}_2 + \mathbf{E}_2 \cdot \mathrm{rot}\mathbf{H}_1 = \varepsilon\left(\mathbf{E}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{E}_2}{\partial t} + \mathbf{E}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t}\right) + \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{i}_2 + \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{i}_1 \quad (3.33)$$

及

$$\mathbf{H}_1 \cdot \mathrm{rot}\mathbf{E}_2 + \mathbf{H}_2 \cdot \mathrm{rot}\mathbf{E}_1 = -\mu\left(\mathbf{H}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{H}_2}{\partial t} + \mathbf{H}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial t}\right) - \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{i}_{2m} - \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{i}_{1m} \quad (3.34)$$

由式(3.33)和(3.34)得

$$(\mathbf{E}_1 \cdot \mathrm{rot}\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_2 \cdot \mathrm{rot}\mathbf{E}_1) + (\mathbf{E}_2 \cdot \mathrm{rot}\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_1 \cdot \mathrm{rot}\mathbf{E}_2) = \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 + \mu \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2) + \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{E}_2 + \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{E}_1 + \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{i}_{2m} + \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{i}_{1m}$$

即

$$\mathrm{div}(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 + \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 + \mu \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2) + \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{E}_2 + \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{E}_1 + \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{i}_{2m} + \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{i}_{1m} = 0 \quad (3.35)$$

这就是所谓的广义二次关系式．它表示任意两个满足广义麦克斯韦方程组的电磁场之间的关系．当 $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2$、$\mathbf{i}_{1m} = \mathbf{i}_{2m}$，

从而 $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2$、$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2$ 时，它退化为广义坡印廷定理.

对任意两个满足复数广义麦克斯韦方程组的正弦电磁场有下列结果：

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 + \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) + 2i\omega(\varepsilon\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 + \mu\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2)\\ + \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{E}_2 + \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{E}_1 + \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{i}_{2m} + \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{i}_{1m} = 0 \qquad (3.36)\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) = \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{E}_2\\ - \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{E}_1 - \mathbf{i}_{1m} \cdot \mathbf{H}_2 + \mathbf{i}_{2m} \cdot \mathbf{H}_1 \qquad (3.37)\end{aligned}$$

证明方法与 3.3 节完全相同.

式(3.36)仍称为广义二次关系式. 式 (3.37) 则称为广义洛伦兹引理的微分形式.

将式(3.37)对空间任一体积 V 积分并利用高斯定理，得

$$\begin{aligned}&\oiint_S (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{n} d\sigma\\ &= \iiint_V (\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{E}_2 - \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{E}_1 - \mathbf{i}_{1m} \cdot \mathbf{H}_2 + \mathbf{i}_{2m} \cdot \mathbf{H}_1) dv \qquad (3.38)\end{aligned}$$

式中 S 为包含 V 的封闭曲面； $\mathbf{n}$ 为 S 面上指向 V 外部的单位法向量. 式(3.38)称为广义洛伦兹引理的积分形式.

如果将 V 取为全空间并且只考虑满足下列条件的电磁场：

$$\lim_{r\to\infty} r\mathbf{E} \to 0 \qquad (3.39)$$

$$\lim_{r\to\infty} r\mathbf{H} \to 0 \qquad (3.40)$$

式中 r 为坐标原点至场点的距离，则对 S 面的积分等于零，式 (3.38) 变为

$$\iiint_V (\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{E}_2 - \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{E}_1 - \mathbf{i}_{1m} \cdot \mathbf{H}_2 + \mathbf{i}_{2m} \cdot \mathbf{H}_1) dv = 0$$

条件(3.39) 和 (3.40)的物理意义是所有场源都位于空间

的有限区域内，**E**、**H** 是广义麦克斯韦方程组滞后位的解．注意，广义洛伦兹引理只对正弦电磁场才成立。

以上所讨论的各种关系式的应用，主要是解广义麦克斯韦方程组时的应用，请看第五章．

3.5 唯一性定理

自然界中所存在的各种电磁场，都是由一定场源产生的．电磁场的场源一旦确定后，由场源产生的电磁场也就随之而确定了．换句话说，一组场源只能产生一种电磁场．要是我们把考察范围局限于空间的某一部分，例如一个有限区域之内，那么这个有限区域内的电磁场，除了由处于这个区域之内的源产生外，还可以由这个区域之外的源产生．这时，单单知道这个区域之内的场源并不能完全确定这个区域内的场．为了彻底确定这个区域内的场，还必须知道区域外部场源的影响．外部场源的影响反映在区域边界处由外部源所形成的场值上．因此在已知内部源和边界上外部源场值条件下，区域内的场就唯一地确定了．

顺便提一下，不同的外部场源可以在区域内形成相同的场．这正是各种等效定理的基础．它与全空间内一组场源只能产生一种电磁场的论断并无矛盾．

分析电磁场问题的理论依据是麦克斯韦方程组．从数学上来说，在什么条件下和在什么范围内取解才能得到唯一的答案，是一件需要证明的事情．当然，麦克斯韦方程组如果确实能反映客观现实的话，那么，毫无疑问，在上述条件下一定会给出唯一解答的．但是，这决不能代替数学上的证明．

下面就从数学角度出发来探讨这个问题，并推导出麦克斯韦方程组解是唯一的充分和必要条件。

令 $\mathbf{E}_1$、$\mathbf{H}_1$ 和 $\mathbf{E}_2$、$\mathbf{H}_2$ 为下列麦克斯韦方程组的两组解:

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\mathbf{H} = \varepsilon \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{i}^{i} \\ \mathrm{rot}\mathbf{E} = -\mu \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \end{cases} \tag{3.41}$$

式中 $\varepsilon(x,y,z)$、$\mu(x,y,z)$ 和 $\sigma(x,y,z)$ 为体积 V 内的已知函数，并分别表示媒质的介质常数、导磁率和导电率；$\mathbf{i}^{i}$ 表示在体积 V 内起作用的已知局外电流．现在需要弄清楚的问题是：在什么条件下，这两组解之差 $\mathbf{E}' = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2$、$\mathbf{H}' = \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2$ 在任意时刻和体积 V 内的任一点上恒等于零．这样得出的结果便是麦克斯韦方程组解唯一性的最普遍条件．

将 $\mathbf{E}_1$、$\mathbf{H}_1$ 和 $\mathbf{E}_2$、$\mathbf{H}_2$ 分别代入式 (3.41) 并将所得结果相减，得

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\mathbf{H}' = \varepsilon \dfrac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t} + \sigma \mathbf{E}' \\ \mathrm{rot}\mathbf{E}' = -\mu \dfrac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t} \end{cases}$$

由此方程组可见，矢量 $\mathbf{E}'$、$\mathbf{H}'$ 满足电流为 $\mathbf{i}' = \sigma \mathbf{E}'$ 的麦克斯韦方程组，根据坡印廷定理即可写出

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \frac{\varepsilon \mathbf{E}'^2 + \mu \mathbf{H}'^2}{2} dv + \iiint_V \sigma \mathbf{E}'^2 dv = -\oiint_S [\mathbf{E}' \times \mathbf{H}'] \cdot \mathbf{n} d\sigma \tag{3.42}$$

(S 为 V 之边界)．

将式(3.42)在 t_0 至 $t > t_0$ 时间内积分，得

$$\iiint_V \frac{\varepsilon \mathbf{E}'^2 + \mu \mathbf{H}'^2}{2}\Big|_t dv + \int_{t_0}^{t} dt \iiint_V \sigma \mathbf{E}'^2 dv = -\int_{t_0}^{t} dt \oiint_S [\mathbf{E}' \times \mathbf{H}'] \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

$$+\iiint_V \frac{\varepsilon \mathbf{E}'^2+\mu \mathbf{H}'^2}{2}\Big|_{t_0} dv \qquad (3.43)$$

这里，面积分号下的 $\mathbf{E}'$、$\mathbf{H}'$ 可用它们在 S 上的切线分量代替，其理由是，若

$$\mathbf{E}'=\mathbf{E}'_t+\mathbf{E}'_n, \qquad \mathbf{H}'=\mathbf{H}'_t+\mathbf{H}'_n$$

式中 $\mathbf{E}'_t$、$\mathbf{H}'_t$ 为切线分量；$\mathbf{H}'_n$、$\mathbf{E}'_n$ 为法线分量，则

$$[\mathbf{E}'\times\mathbf{H}']\cdot\mathbf{n}=[\mathbf{E}'_t\times\mathbf{H}'_t]\cdot\mathbf{n}+[\mathbf{E}'_n\times\mathbf{H}'_t]\cdot\mathbf{n}$$
$$+[\mathbf{E}'_n\times\mathbf{H}'_n]\cdot\mathbf{n}+[\mathbf{E}'_t\times\mathbf{H}'_n]\cdot\mathbf{n}$$

但

$$[\mathbf{E}'_n\times\mathbf{H}'_t]\cdot\mathbf{n}=-[\mathbf{E}'_n\times\mathbf{n}]\cdot\mathbf{H}'_t=0$$
$$[\mathbf{E}'_n\times\mathbf{H}'_n]\cdot\mathbf{n}=-[\mathbf{E}'_n\times\mathbf{n}]\cdot\mathbf{H}'_n=0$$
$$[\mathbf{E}'_t\times\mathbf{H}'_n]\cdot\mathbf{n}=[\mathbf{H}'_n\times\mathbf{n}]\cdot\mathbf{E}'_t=0$$

（$\mathbf{E}'_n$、$\mathbf{H}'_n$ 与 $\mathbf{n}$ 同向）。

故

$$[\mathbf{E}'\times\mathbf{H}']\cdot\mathbf{n}=[\mathbf{E}'_t\times\mathbf{H}'_t]\cdot\mathbf{n}$$

假如方程(3.43)的右边等于零，那么方程(3.43)的左边也随之而等于零。但左边只有当 $\mathbf{E}'$、$\mathbf{H}'$ 在任意时刻 t 和 V 内的任意一点等于零时才有可能等于零。因此，方程 (3.43) 右边等于零就是 $\mathbf{E}'$、$\mathbf{H}'$ 在任意时刻 t 和 V 内的任意一点等于零的充分条件。反之，如果 $\mathbf{E}'$、$\mathbf{H}'$ 等于零，那么方程(3.43)的右边必须等于零。可见方程(3.43)右边等于零又是 $\mathbf{E}'$、$\mathbf{H}'$ 等于零的必要条件。

从上面的情况来看，全部问题都集中在弄清方程 (3.43) 右边为零的条件上，即

$$\int_{t_0}^{t} dt \oiint_S [\mathbf{E}'_t\times\mathbf{H}'_t]\cdot\mathbf{n}\,d\sigma=\iiint_V \frac{\varepsilon \mathbf{E}'^2+\mu \mathbf{H}'^2}{2}\Big|_{t_0} dv \qquad (3.44)$$

的条件。

先假定式(3.44)成立。然后将式(3.44)对 t 微分，对任意

时间 t 得

$$\oint\!\!\!\!\!\!\int_S [\mathbf{E}'_t \times \mathbf{H}'_t] \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0 \tag{3.45}$$

将式(3.45)代入式(3.44),得

$$\iiint_V (\varepsilon \mathbf{E}'^2 + \mu \mathbf{H}'^2)\,|_{t_0} dv = 0$$

这仅仅在体积 V 内的任一点

$$\mathbf{E}'|_{t_0} = 0 \qquad \mathbf{H}'|_{t_0} = 0$$

即

$$\begin{cases} \mathbf{E}_1(x, y, z, t_0) = \mathbf{E}_2(x, y, z, t_0) \\ \mathbf{H}_1(x, y, z, t_0) = \mathbf{H}_2(x, y, z, t_0) \end{cases} \tag{3.46}$$

时才有可能.

反之,如果

$$\mathbf{E}'|_{t_0} = 0 \qquad \mathbf{H}'|_{t_0} = 0$$

同时

$$\oint\!\!\!\!\!\!\int_S [\mathbf{E}'_t \times \mathbf{H}'_t] \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0$$

那么式(3.44)得到满足,因而 $\mathbf{E}' = 0$, $\mathbf{H}' = 0$.

最后的结论是: $\mathbf{E}' = 0$、$\mathbf{H}' = 0$ 的充要条件如下:

(1) 初始条件:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_1(x, y, z, t_0) = \mathbf{E}_2(x, y, z, t_0) \\ \mathbf{H}_1(x, y, z, t_0) = \mathbf{H}_2(x, y, z, t_0) \end{cases} \tag{3.47}$$

即在初始时刻 t_0 两组解在体积 V 内的任一点都相等.

(2) 边界条件:

$$\oint\!\!\!\!\!\!\int_S [\mathbf{E}'_t \times \mathbf{H}'_t] \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0 \tag{3.48}$$

也就是说,在任意时刻 t 内,$\mathbf{E}$、$\mathbf{H}$ 的切线分量应使式(3.48)等于零.

满足了条件(1)和(2),两组解就恒等,意即麦克斯韦方程组只有一组唯一的解.

那么究竟在什么情况下(1)和(2)这个充要条件才能得到满足呢? 显然,使(1)和(2)得到满足的充分条件是:

1) 在 $t = t_0$ 时要求任何解都能满足初始条件(3.47),即

$$\mathbf{E}(x, y, z, t_0) = \mathbf{E}_0(x, y, z)$$

$$\mathbf{H}(x, y, z, t_0) = \mathbf{H}_0(x, y, z)$$

式中 $\mathbf{E}_0$、$\mathbf{H}_0$ 为给定的函数; $\mathbf{E}$、$\mathbf{H}$ 为任意解.

2) 在 S 上 $\mathbf{E}_t'$ 或 $\mathbf{H}_t'$ 为零,即任意解的切线分量在 S 上取定值. 这里又可分三种情况:

① 在 S 上对任意的时刻 $t > t_0$ 给定电场的切线分量 $\mathbf{E}_t$ ($\mathbf{E}$ 边值问题).

② 在 S 上对任意的时刻 $t > t_0$ 给定磁场的切线分量 $\mathbf{H}_t$ ($\mathbf{H}$ 边值问题).

③ 在 S 上的部分范围 (S_E) 内给定电场的切线分量, 而在其余部分 (S_H) 内给定磁场的切线分量($\mathbf{EH}$ 边值问题).

正是条件 (2) 反映了本节开始时所讲到的体积外部源的影响. 我们将以上结果归纳成这样的唯一性定理: 既满足条件(3.47)和(3.48)又满足麦克斯韦方程组的解只有一个.

在实际解题过程中, 不管采用了什么样的方法和得到了什么样的解的表达形式,只要满足了唯一性条件,那么所有不同形式的解在区域 V 内肯定是恒等的. $\sigma = 0$ 时结论不变.

3.6 唯一性定理的另一形式

在具体解电磁场问题的时候,除了初始条件外,有时给定的不是边界上的电场或磁场的切线分量 (因为通常电场或磁场的切线分量也是待求的未知量),而是电场切线分量和磁场

切线分量之间的一定关系（例如非理想导体上的边界条件）。那么，既满足麦克斯韦方程组又满足初始条件和边界上一定关系的解是不是唯一的呢？下面将证明在某种情况下上述之解是唯一的。

定义 若 $\mathbf{J}(0)=0$，$\mathbf{J}(c\mathbf{A})=c\mathbf{J}(\mathbf{A})$（$c$ 为常数），则称 $\mathbf{J}(\mathbf{A})$ 为 $\mathbf{A}$ 的齐次线性函数。

定理 假设电磁场满足初始条件且在边界 S 上，

$$[\mathbf{n}\times\mathbf{E}_t]=\mathbf{J}^h(\mathbf{H}_t) \tag{3.49}$$

或

$$[\mathbf{H}_t\times\mathbf{n}]=\mathbf{J}^e(\mathbf{E}_t) \tag{3.50}$$

式中 $\mathbf{E}_t$ 和 $\mathbf{H}_t$ 为电、磁场在边界 S 上的切线分量；$\mathbf{J}^e$、$\mathbf{J}^h$ 为齐次线性函数。此外，对任意函数 $\mathbf{A}$ 有

$$\oiint_S(\mathbf{A}\cdot\mathbf{J}^h(\mathbf{A}))d\sigma=\alpha^h+\frac{d\beta^h}{dt} \tag{3.51}$$

或

$$\oiint_S(\mathbf{A}\cdot\mathbf{J}^e(\mathbf{A}))d\sigma=\alpha^e+\frac{d\beta^e}{dt} \tag{3.52}$$

式中 α^h、β^h 和 α^e、β^e 当 $\mathbf{A}\neq 0$ 时便大于零，只有当 $\mathbf{A}=0$ 时，才等于零。这一条件是对 $\mathbf{J}^h$ 或 $\mathbf{J}^e$ 的进一步限制。在上述初始条件和式(3.49)至(3.52)的条件下，麦克斯韦方程组解是唯一的。

在证明定理之前，先举一个满足式(3.49)和(3.51)的边界条件的例子。

在 3.12 节中将证明：在非理想导体表面上，正弦电磁场的 $\mathbf{E}_t$ 和 $\mathbf{H}_t$ 近似地满足下列边界条件：

$$[\mathbf{n}\times\mathbf{E}_t]=\frac{\mu\omega d}{2}\mathbf{H}_t+\frac{\mu d}{2}\frac{\partial\mathbf{H}_t}{\partial t} \tag{3.53}$$

式中 μ 为媒质的导磁率；ω 为角频率；d 为一与 ω、μ、σ 有关

的正数(集肤深度)；σ 为导体的导电率；$\mathbf{n}$ 为指向导体内部的单位法向量.

由式 (3.53) 可见

$$\mathbf{J}^h(\mathbf{H}_t)=\left(\frac{\mu\omega d}{2}+\frac{\mu d}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\mathbf{H}_t$$

当 $\mathbf{H}_t=0$ 时，$\mathbf{J}^h(0)=0$；另外，

$$\begin{aligned}J^h(c\mathbf{H}_t)&=\left(\frac{\mu\omega d}{2}+\frac{\mu d}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)c\mathbf{H}_t\\&=c\left(\frac{\mu\omega d}{2}+\frac{\mu d}{2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\mathbf{H}_t\\&=c\mathbf{J}^h(\mathbf{H}_t)\end{aligned}$$

故 $\mathbf{J}^h$ 为齐次线性函数.

此外，对任意的矢量函数 $\mathbf{A}$，

$$\begin{aligned}&\iint_S\mathbf{A}\cdot\mathbf{J}^h(\mathbf{A})d\sigma\\&=\iint_S\mathbf{A}\cdot\left(\frac{\mu\omega d}{2}\mathbf{A}+\frac{\mu d}{2}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}\right)d\sigma\\&=\iint_S\frac{\mu\omega d}{2}\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}d\sigma+\iint_S\frac{\mu d}{4}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A})d\sigma\\&=\iint_S\frac{\mu\omega d}{2}|\mathbf{A}|^2d\sigma+\iint_S\frac{\mu d}{4}\frac{\partial}{\partial t}|\mathbf{A}|^2d\sigma\\&=\alpha^h+\frac{d\beta^h}{dt}\end{aligned}\tag{3.54}$$

式中

$$\alpha^h=\iint_S\frac{\mu\omega d}{2}|\mathbf{A}|^2d\sigma$$

$$\beta^h=\iint_S\frac{\mu d}{4}|\mathbf{A}|^2d\sigma$$

可见，当 $\mathbf{A}\neq 0$ 时 $\alpha^h>0$，$\beta^h>0$，而当 $\mathbf{A}=0$ 时 $\alpha^h=\beta^h=$

0，即在非理想导体表面上，对正弦电磁场，式(3.49)和(3.51)都得到满足.

下面就来证明定理. 我们以 $\mathbf{J}^h$ 的情况为例. 对 $\mathbf{J}^e$ 的情况可作同样的证明.

在式(3.49)和(3.51)条件下，式(3.42)可写成

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \frac{\varepsilon \mathbf{E}'^2 + \mu \mathbf{H}'^2}{2} dv + \iiint_V \sigma \mathbf{E}'^2 dv \\
&= -\oiint_S [\mathbf{E}'_t \times \mathbf{H}'_t] \cdot \mathbf{n} d\sigma \\
&= -\oiint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{E}'_t] \cdot \mathbf{H}'_t d\sigma \\
&= -\oiint_S \mathbf{J}^h(\mathbf{H}'_t) \cdot \mathbf{H}'_t d\sigma \\
&= -\left(\alpha^h + \frac{\partial}{\partial t}\beta^h\right)
\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\beta^h + \iiint_V \frac{\varepsilon \mathbf{E}'^2 + \mu \mathbf{H}'^2}{2} dv\right) \\
&\quad + \left(\alpha^h + \iiint_V \sigma \mathbf{E}'^2 dv\right) = 0
\end{aligned} \tag{3.55}$$

将此式对从 t_0 至 $t > t_0$ 的时间进行积分，得

$$\begin{aligned}
&\left(\beta^h + \iiint_V \frac{\varepsilon \mathbf{E}'^2 + \mu \mathbf{H}'^2}{2} dv\right)\Bigg|_t + \int_{t_0}^{t}\left(\alpha^h + \iiint_V \sigma \mathbf{E}'^2 dv\right) dt \\
&= \left(\beta^h + \iiint_V \frac{\varepsilon \mathbf{E}'^2 + \mu \mathbf{H}'^2}{2} dv\right)\Bigg|_{t_0}
\end{aligned} \tag{3.56}$$

由式(3.56)可见，右边等于零必然导至左边为零，而左边为零又必然导至 $\mathbf{E}' = 0$ 和 $\mathbf{H}' = 0$ (因左边全是大于零的正量，左边为零意味着所有这些正量均为零，其中包括 $\mathbf{E}'$、$\mathbf{H}'$).

反之，$\mathbf{E}'=0$、$\mathbf{H}'=0$ 必然导至式(3.56)的右边为零．因此，式(3.56)的右边为零是在式(3.49)和(3.51)的条件下，$\mathbf{E}'=0$、$\mathbf{H}'=0$ 的充要条件．

但式(3.56)的右边只有当

$$\mathbf{E}'|_{t_0}=0 \qquad \mathbf{H}'|_{t_0}=0 \text{（在 } V \text{ 内）}$$

和在 S 上

$$\mathbf{H}'_t|_{t_0}=0 \text{（此时 } \beta^h=0\text{）}$$

时才可能等于零．

第一个条件就是初始条件．如果 $t=t_0$ 时在整个体积(包括 S)内给出 $\mathbf{E}$、$\mathbf{H}$，那么，$\mathbf{E}_t$、$\mathbf{H}_t$ 也被给出，因此第二个条件得到满足，于是式(3.49)和(3.51)导至式(3.56)中的 β^h 等于零，从而式(3.56)右边为零，即 $\mathbf{E}'=0$、$\mathbf{H}'=0$，从而定理得证．

3.7 周期性电磁场的唯一性定理

假如电磁场的场源随时间呈周期性变化，那么稳态状况下的电磁场也随时间作周期性变化．对于周期性的电磁场，只要给出边界条件(不必给出初始条件)，就可以保证解的唯一性．下面给出必要的证明．

假定已知周期性电磁场满足边界条件，即给定了 $\mathbf{E}_t$ 和 $\mathbf{H}_t$．这时在 S 上 $\mathbf{E}'_t$、$\mathbf{H}'_t$ 都等于零，于是方程(3.42)变成

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \frac{\varepsilon\mathbf{E}'^2+\mu\mathbf{H}'^2}{2}dv+\iiint_V \sigma\mathbf{E}'^2dv=0$$

如果在体积 V 内导电率 $\sigma\neq 0$，那么 $\frac{\partial}{\partial t}$ 号后的积分将单调地随时间而递减．但对周期性的场来说，这是不可能的事，因此 $\mathbf{E}'$ 在整个体积 V 内都必须等于零．$\mathbf{E}'$ 等于零必然

导至 $\mathbf{H}' = 0$ 或 $\mathbf{H}' =$ 常数，这是因为

$$\mu \frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t} = -\mathrm{rot}\mathbf{E}' = 0$$

当然，对周期性场来说 $\mathbf{H}'$ 只能等于零，因为 $\mathbf{H}'$ 等于常数意味着在 $\mathbf{H}$ 中有直流分量，而直流分量(静磁场)在求解交变电磁场的问题中总是略去的.

这样，我们证明了在周期性电磁场条件下给出电磁场的边界值就可以保证解的唯一性.

这里要注意在任何解中都不得含有直流分量这一先决条件.

对于满足式(3.49)和(3.51)条件的周期性电磁场，可写出式 (3.55).

因为场是周期性的，$\frac{\partial}{\partial t}$ 后面的函数不可能随时间单调变化，因此第二个括号中的函数只可能是零(一般来说，$\alpha^h \geqslant 0$，$\sigma\mathbf{E}'^2 \geqslant 0$)，而我们又假定了 $\sigma \neq 0$，这样，在体积 V 内必然 $\mathbf{E}' = 0$，而 $\alpha^h = 0$ 又意味着在 S 上磁场之差 $\mathbf{H}'_t$ 等于零. 上面已经证明 $\mathbf{E}' = 0$ 会导至 $\mathbf{H}' = 0$. 因此对周期性电磁场来说，只要满足条件(3.49)和(3.51)就可以保证解是唯一的，不需要什么初始条件. 周期性代替了初始条件.

在 $\sigma = 0$ 时，上面的讨论不成立，也就是说，得不出解是唯一的结论. 这是因为 $\sigma\mathbf{E}'^2 = 0$ 在 $\sigma = 0$ 时推不出 $\mathbf{E}' = 0$ 的结论. 但是，如果规定在 $\sigma = 0$ 时任何解都取为 $\sigma \neq 0$ 的解的极限值 (指 $\sigma \to 0$ 时的极限)，那么用这种方式得到的解仍然是唯一的，因为唯一的解的极限只有一个. 如果去掉这条取解规定而单纯从数学上求 $\sigma = 0$ 时的麦克斯韦方程组的解，那么解就不是唯一的，而可能有好多个. 例如，腔体内的自由振荡就属于这种现象. 不同幅度的振荡都可以存在，这

就意味着解有好多个. 对于非周期性的场，由于有了初始条件，从推导过程中可以看出 $\sigma = 0$ 时解的唯一性并不受到影响.

3.8 无限区域内的唯一性定理

如果所考虑的区域 V 是一个无限大区域，即在有限范围内存在一个或几个封闭的边界面 S 而不再有其他边界，如图 3.3 所示.

为了研究无限区域情况，可以用某一定点为球心，作一半径为 r 的大球面 S_r. 先考虑包含在 S_r 和 S 之内的区域 V_r，再令 $r \to \infty$，如果存在一定的极限，那么这个极限的结果就作为无限区域 V 的结果. 一般对于无限区域 V 只给出 S 上的边界条件，如电场或磁场的切线分量等，对于电磁场在大球面 S_r 上的情况并没有明确的信息. 从 3.5 节内关于唯一性定理的证明中可以看出，如果解是唯一的，那么

$$\oint\!\!\!\!\!\!\iint_{S_r} [\mathbf{E}_t' \times \mathbf{H}_t'] \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0 \tag{3.57}$$

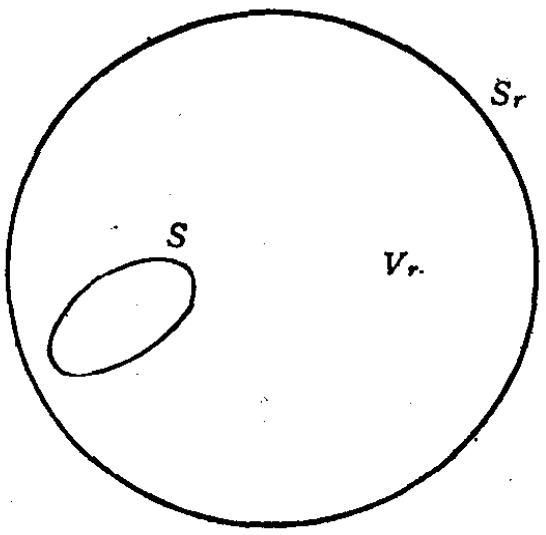

图 3.3 无限区域示意图

关键是在什么条件下这个积分等于零. 从 S 上给出的边界条件不能对这个积分作出判断，还必须给出一些附加条件才行. 附加条件实质上是指进一步限制选择解的范围. 现在来讨论满足下列附加条件的解：

(1) 所有场源都位于空间的有限区域内；

（2）电磁场在有限时刻产生；

（3）只以有限速度向无穷远处传播.

满足以上三个附加条件的解只有一个（S 上的边界条件和初始条件当然还需要满足）. 其唯一性可以这样来证明：若 r 取得足够大，使 S_r 能位于在规定的时刻 $t > t_0$ 电磁波所能到达的范围之外，则式(3.57)显然就等于零，于是唯一性得证.

从数学角度来看，不满足上面三个附加条件的解是完全可能存在的，因为我们仅仅证明了一定范围内的解只有一个，而不是说各种解的总数只有一个.

从物理意义考虑，确定以上三个限制条件的基础是：所有人工场源总位于空间有限区域内，总在有限时刻产生，并且总是产生向外辐射的电磁波的.

有时，为了数学上便于计算起见，假定场源是周期性的. 这样，上面的第二个附加条件便不成立，于是接下去的讨论也就不再成立了. 对于这种特殊情况，要在保留第 1 和第 3 这两个附加条件前提下，提出新的附加条件来保证解的唯一性. 新的附加条件就是只取向无穷远传播的滞后位之解. 我们知道，对于滞后位的解来说，如果所有场源都位于空间有限区域内，那么空间某一观察点 P 在时刻 t 内其场之值只取决于场源在 $t - t_s$ 时的值，其中 t_s 为从场源到 P 点的传播时间，而与场源在 $t - t_s$ 以前的值无关. 因此，只要场源位于有限区域内，t_s 的最大值 $t_{s\max}$（指从观察点到不同场源点的 t_s 值中的最大值）总是有限的. 这样，我们若把场源换成在 $t - t_{s\max}$ 之前为零的场源，而在 $t - t_{s\max}$ 之后与周期性场源重合，则在任意时刻 t 内所得的场不变（指等于由滞后位公式所得的场）. 但这时由于场源变成了在有限时刻产生的场源，从前面的证明来看只有一个解，而这个解在时刻 t 内又与取滞后位解的周期性场源的解重合. 由此可见，在取向无穷远传播的滞后位解

条件下，周期性场源的解只有一个。

3.9 周期性电磁场唯一性定理的另一证明

在这一节中我们对周期性电磁场的唯一性问题直接从数学上进行讨论. 我们将在一定的条件下证明场的唯一性. 最后再证明滞后位的解满足唯一性的条件，因而就是本节中的满足唯一性条件的唯一的解.

我们先假定媒质是有损耗的，即 $\sigma \neq 0$.

先写出复数形式的麦克斯韦方程组:

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\mathbf{H} = (\sigma + i\omega\varepsilon)\mathbf{E} + \mathbf{i} \\ \mathrm{rot}\mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H} \end{cases} \tag{3.58}$$

式中 $\mathbf{i}$ 表示局外电流，即激发电磁场的电流.

如果媒质是由几种参数不同的均匀媒质组成的，则在不同媒质的交界面上电磁场应满足边界条件

$$E_{ta} = E_{tb} \quad H_{ta} = H_{tb}$$

式中 E_{ta}、H_{ta} 为在媒质 a 边界上的电磁场切线分量；E_{tb}、H_{tb} 为在媒质 b 边界上的电磁场切线分量. 媒质 a 与媒质 b 交界，如图 3.4 所示.

假定所考虑的无限空间由几种不同的均匀媒质所组成. 为简单起见，设由两种媒质组成. 一种媒质所占空间为 V_1，

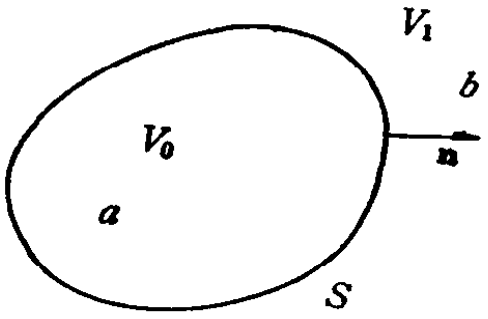

图 3.4 媒质 a 所占空间为 V_0，媒质 b 所占空间为 V_1

扩展至无穷远处，另一种媒质所占空间为 V_0（在图上 V_0 是有限的，实际上 V_0 亦可为无限，并不影响证明的过程）. 每种媒质的 ε、μ 令为已知数值.

先证明一条引理.

引理 如果电场与磁场的切线分量 E_t 和 H_t 在媒质的分界面上连续，而在无穷远处，

$$\lim_{r\to\infty} r\mathbf{H} = 0 \tag{3.59}$$

$$\lim_{r\to\infty} r\mathbf{E} = 0 \tag{3.60}$$

（式中 r 为自坐标原点至场点的距离），则在每一媒质内满足方程组

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\mathbf{H} = (\sigma + i\omega\varepsilon)\mathbf{E} \\ \mathrm{rot}\mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H} \end{cases} \tag{3.61}$$

的解

$$\mathbf{H} = \mathbf{E} = 0$$

证 将式 (3.61) 中的第一方程取共轭并点乘 $-\mathbf{E}$，再将第二方程点乘 $\mathbf{H}^*$（$*$ 号表示共轭），然后相加，得

$$\mathbf{H}^* \cdot \mathrm{rot}\mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{H}^*$$

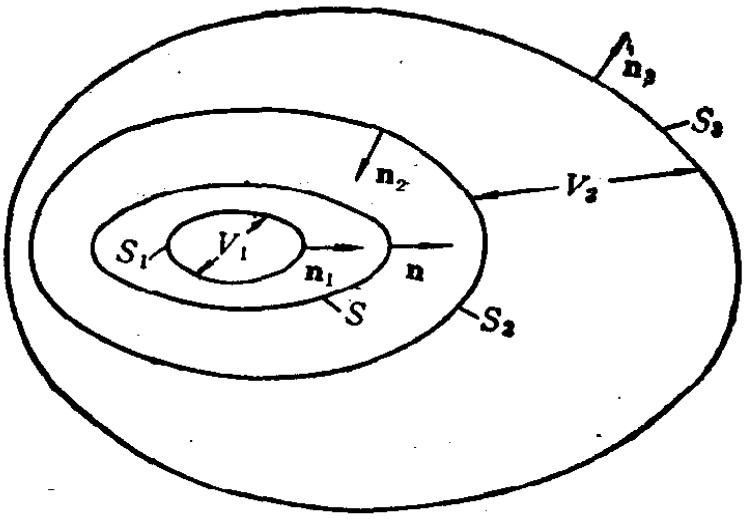

图 3.5 $\mathbf{n}_1$、$\mathbf{n}_2$、$\mathbf{n}_3$ 指向 V_1、V_2 外部

$$= \mathrm{div}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*]$$
$$= -i\omega\mu\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* - \sigma\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* + i\omega\varepsilon\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*$$

即

$$-\mathrm{div}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*] = \sigma\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* + 2i\omega\left(\frac{\mu\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*}{2} - \frac{\varepsilon\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*}{2}\right) \tag{3.62}$$

在空间作三个封闭曲面，如图 3.5 所示.

将式 (3.62) 对体积 V_1 (S_1 所包体积) 和 V_2(S_2 和 S_3 所包体积)进行体积分，得

$$-\iiint_{V_1} \mathrm{div}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*]dv = \iiint_{V_1} \sigma\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* dv + 2i\omega \iiint_{V_1} \left(\frac{\mu\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*}{2} - \frac{\varepsilon\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*}{2}\right) dv \tag{3.63}$$

$$-\iiint_{V_2} \mathrm{div}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*]dv = \iiint_{V_2} \sigma\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* dv + 2i\omega \iiint_{V_2} \left(\frac{\mu\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*}{2} - \frac{\varepsilon\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*}{2}\right) dv \tag{3.64}$$

对式(3.63)和(3.64)左边应用高斯定理，得

$$\begin{cases} -\oiint_{S_1} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*] \cdot \mathbf{n}_1 d\sigma = \iiint_{V_1} \sigma\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* dv \\ \qquad + 2i\omega \iiint_{V_1} \left(\frac{\mu\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*}{2} - \frac{\varepsilon\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*}{2}\right) dv \\ -\oiint_{S_2} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*] \cdot \mathbf{n}_2 d\sigma - \oiint_{S_3} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*] \cdot \mathbf{n}_3 d\sigma \\ \qquad = \iiint_{V_2} \sigma\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* dv + 2i\omega \iiint_{V_2} \left(\frac{\mu\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*}{2} - \frac{\varepsilon\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*}{2}\right) dv \end{cases} \tag{3.65}$$

式中 $\mathbf{n}_1$、$\mathbf{n}_2$、$\mathbf{n}_3$ 为 S_1、S_2、S_3 的单位法向量，指向 V_1、V_2 外部，

在式 (3.65) 中令 S_1、S_2 向 S 无限逼近，直至与 S 重合为止。同时令 S_3 扩展至无穷远。这时，考虑到条件 (3.59) 和 (3.60)，可知对 S_3 的积分的极限是零，对 S_1、S_2 的积分变成对 S 的积分。式(3.65)变为

$$\begin{cases} -\oiint_S [\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*]\cdot\mathbf{n}d\sigma = \iiint_{V_0}\sigma\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*dv \\ \qquad + 2i\omega\iiint_{V_0}\left(\dfrac{\mu\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^*}{2} - \dfrac{\varepsilon\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*}{2}\right)dv \\ \oiint_S [\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*]\cdot\mathbf{n}d\sigma = \iiint_{V}\sigma\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*dv \\ \qquad + 2i\omega\iiint_{V}\left(\dfrac{\mu\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^*}{2} - \dfrac{\varepsilon\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*}{2}\right)dv \end{cases} \tag{3.66}$$

式(3.66)中第二个方程左边改变了符号是因为 $\mathbf{n}_2$ 的方向与 $\mathbf{n}$ 的方向相反。对 S 积分时在第一个方程中的 $\mathbf{E}$、$\mathbf{H}^*$ 应理解为 $\mathbf{E}$、$\mathbf{H}^*$ 由 S 内部向 S 逼近时的极限值，而第二个方程中 S 上的 $\mathbf{E}$、$\mathbf{H}^*$ 应理解为 $\mathbf{E}$、$\mathbf{H}^*$ 由 S 外部向 S 逼近时的极限值。

最后，将式(3.66)中的两方程相加，考虑到 $\mathbf{E}$、$\mathbf{H}$ 切线分量的连续性(引理的先决条件)，式 (3.66) 左边的两个面积分抵消，得

$$\iiint_{V_0+V}\sigma\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*dv + 2i\omega\iiint_{V_0+V}\left(\frac{\mu\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^*}{2} - \frac{\varepsilon\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*}{2}\right)dv = 0 \tag{3.67}$$

积分时应注意在 V_0 和 V 中 σ、ε、μ 的数值是不同的。

因式 (3.67) 中的两个积分都是实数，因此它们分别等于零，即

$$\iiint_{V_0+V}\sigma\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*dv = 0 \tag{3.68}$$

$$\iiint_{V_0+V}\left(\frac{\mu\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^*}{2}-\frac{\varepsilon\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*}{2}\right)dv=0 \tag{3.69}$$

式(3.68)中的被积函数在整个空间是非负数(因 $\sigma>0$, $\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*\geqslant 0$),由此可知它恒等于零,即

$$\sigma\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*=0 \tag{3.70}$$

由于假定了 $\sigma\neq 0$,立即可得

$$\mathbf{E}\equiv 0 \tag{3.71}$$

将式(3.71)代入式(3.69),得

$$\iiint_{V_0+V}\frac{\mu\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^*}{2}dv=0 \tag{3.72}$$

因 $\mu\neq 0$,得

$$\mathbf{H}\equiv 0 \tag{3.73}$$

式(3.71)、(3.73)即为所需证明的结果. 如果 $\sigma=0$,则由式(3.70)得不出 $\mathbf{E}=0$ 的结论,引理不成立. 因此 $\sigma=0$ 的情况要单独处理. 另外要注意 ω 为实数,否则得不到式(3.71)、(3.73).

如果只考虑有限区域内的场,即 S_3 不趋向于无穷大,为使

$$\oiint_{S_3}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*]\cdot\mathbf{n}_3 d\sigma=0 \tag{3.74}$$

只需要求在 S_3 上 $\mathbf{E}$ 或 $\mathbf{H}$ 的切线分量为零即可. 在这个条件下证明的其余部分不变,引理的结论仍然成立.

证明了上述引理之后,就可以接下去进行唯一性定理的证明.

唯一性定理: 假定在任一无限空间内给定的场源是时间的周期性函数,而且所有的场源都处于空间的有限范围内(否则 $\lim\limits_{r\to\infty} r\mathbf{E}$ 可能不趋向于零). 在上述条件下,满足麦克斯

韦方程组

$$\begin{cases}\mathrm{rot}\mathbf{H}=(\sigma+i\omega\varepsilon)\mathbf{E}+\mathbf{i}\\ \mathrm{rot}\mathbf{E}=-i\omega\mu\mathbf{H}\end{cases}\tag{3.75}$$

并在媒质分界面上切线分量连续，而在无穷远处满足条件

$$\lim_{r\to\infty}r\mathbf{E}=0\qquad\lim_{r\to\infty}r\mathbf{H}=0\tag{3.76}$$

的解 $\mathbf{E}$、$\mathbf{H}$ 只有一组.

如果只考虑有限区域内的场，则条件 (3.76) 应改为：在给定区域的边界面上给定了 $\mathbf{E}$ 或 $\mathbf{H}$ 的切线分量.

证 用反证法. 假定存在两组满足定理所有条件的解 $\mathbf{E}_1$、$\mathbf{H}_1$ 和 $\mathbf{E}_2$、$\mathbf{H}_2$，则它们之差

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_1-\mathbf{E}_2\qquad\mathbf{H}=\mathbf{H}_1-\mathbf{H}_2$$

在全空间内满足方程组

$$\begin{cases}\mathrm{rot}\mathbf{H}=\sigma\mathbf{E}+i\omega\varepsilon\mathbf{E}\\ \mathrm{rot}\mathbf{E}=-i\omega\mu\mathbf{H}\end{cases}$$

而且 $\mathbf{E}$、$\mathbf{H}$ 的切线分量在两媒质的交界面上连续（因 $\mathbf{E}_1$、$\mathbf{H}_1$、$\mathbf{E}_2$、$\mathbf{H}_2$ 的切线分量连续），而在无穷远处满足条件

$$\lim_{r\to\infty}r\mathbf{E}=0\qquad\lim_{r\to\infty}r\mathbf{H}=0$$

因此根据上文中证明的引理可得

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_1-\mathbf{E}_2=0\qquad\mathbf{H}=\mathbf{H}_1-\mathbf{H}_2=0$$

即

$$\mathbf{E}_1=\mathbf{E}_2\qquad\mathbf{H}_1=\mathbf{H}_2$$

此即所需证明的结果.

最后说明一下：在 $\sigma\neq 0$ 时式(3.76)这个条件排除了由无穷远处传播至场源的波作为方程组解的可能性，因为 $\sigma\neq 0$ 时只有在无穷远处幅值为无限大的波才有可能在有限远处形成有限幅值的场值. 对于均匀媒质来说，条件 (3.76) 意味着只能取方程组的滞后位的解. 对于滞后位的解来说（见第四

章)，式(3.76)是满足的，因为除了分母中的 r 之外，分子中指数函数的指数 $-ik_1r$ 在 $\sigma \neq 0$ 时还含有负的实数部分，从而有 $e^{-k''r}$，它随 r 以指数规律衰减.

由此可见，滞后位的解是满足唯一性条件的唯一的解.

$\sigma = 0$ 时，我们规定只取 $\sigma \neq 0$ 解在 $\sigma \to 0$ 条件下的极限值作为麦克斯韦方程组的解. 由于 $\sigma \neq 0$ 时解是唯一的，因而其极限值也是唯一的. 这样规定的理由是实际上任何媒质都具有一点损耗，因此把 $\sigma \to 0$ 时的极限值作为小损耗媒质的代表是合理的，偏差不会太大.

3.10 E 和 H 所满足的方程

从广义麦克斯韦方程组出发，消去 **E** 就可以得到 **H** 满足的方程，反之，消去 **H** 就可以得到 **E** 满足的方程. 这些方程通常称为波动方程，因为它们的解表示在媒质中的一种波动(静电或静磁场情况例外). 在方程中令磁流密度等于零，就可以得到麦克斯韦方程组中 **E**、**H** 所满足的方程，不需另行推导.

在广义麦克斯韦方程组

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{i}_m & (3.77) \\ \mathrm{rot}\mathbf{H} = \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{i} & (3.78) \end{cases}$$

中，对式(3.77)取旋度，得

$$\mathrm{rot\ rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\mathbf{B} - \mathrm{rot}\mathbf{i}_m$$

在 μ 等于常数的条件下，考虑到 $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$，将式(3.78)代入，得

$$\mathrm{rotrot}\mathbf{E} = -\mu \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t} - \mathrm{roti}_m$$

又考虑到 $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$，最后得

$$\mathrm{rotrot}\mathbf{E} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\mu \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t} - \mathrm{roti}_m \qquad (3.79)$$

这是 $\mathbf{E}$ 满足的方程．它成立的条件是 $\mu =$ 常数．

同理，由式(3.78)得

$$\begin{aligned}\mathrm{rotrot}\mathbf{H} &= \frac{\partial \mathrm{rot}\mathbf{D}}{\partial t} + \mathrm{roti} \\ &= \varepsilon \frac{\partial \mathrm{rot}\mathbf{E}}{\partial t} + \mathrm{roti} \\ &= -\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\partial \mathbf{i}_m}{\partial t} + \mathrm{roti}\end{aligned}$$

或

$$\mathrm{rotrot}\mathbf{H} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\varepsilon \frac{\partial \mathbf{i}_m}{\partial t} + \mathrm{roti} \qquad (3.80)$$

这是 $\mathbf{H}$ 所满足的方程．它成立的条件是 $\varepsilon =$ 常数．

如果 ε 和 μ 同时等于常数，则式 (3.79) 和式 (3.80) 同时成立．下面的讨论在这个前提下进行．

考虑到

$$\begin{aligned}\mathrm{rotrot}\mathbf{E} &= \nabla \times [\nabla \times \mathbf{E}] \\ &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{E} \\ &= \nabla \frac{\rho}{\varepsilon} - \nabla^2 \mathbf{E} \\ &= \mathrm{grad} \frac{\rho}{\varepsilon} - \nabla^2 \mathbf{E}\end{aligned}$$

(此处利用了 $\varepsilon =$ 常数的条件)及

$$\mathrm{rotrot}\mathbf{H} = \mathrm{grad} \frac{\rho_m}{\mu} - \nabla^2 \mathbf{H}$$

(此处利用了 μ = 常数的条件). 将以上两式代入式(3.79)和(3.80), 得

$$\nabla^2\mathbf{E} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t} + \mathrm{roti}_m + \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{grad}\rho \tag{3.81}$$

$$\nabla^2\mathbf{H} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} = \varepsilon\frac{\partial \mathbf{i}_m}{\partial t} - \mathrm{roti} + \frac{1}{\mu}\mathrm{grad}\rho_m \tag{3.82}$$

从以上的推导过程可以看出,式(3.81)和(3.82)成立的条件是 ε 和 μ 同时等于常数.

在空间的无源区域中, $\mathbf{i} = \mathbf{i}_m = 0$, $\rho = \rho_m = 0$, 方程(3.81)和(3.82)退化为

$$\nabla^2\mathbf{E} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{3.83}$$

$$\nabla^2\mathbf{H} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \tag{3.84}$$

这是众所周知的齐次波动方程. 它的解是以 $v = \dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ 速度传播的波(证明详见有关数理方程教材).

对复数广义麦克斯韦方程组

$$\begin{cases}\mathrm{rot}\mathbf{E} + i\omega\mu\mathbf{H} = -\mathbf{i}_m & (3.85)\\ \mathrm{rot}\mathbf{H} - i\omega\varepsilon\mathbf{E} = \mathbf{i} & (3.86)\end{cases}$$

在 ε 和 μ 都等于常数的前提下,可作同样的推导.

取式(3.85)的旋度, 得

$$\mathrm{rotrot}\mathbf{E} + i\omega\mu\mathrm{rot}\mathbf{H} = -\mathrm{roti}_m$$

将式(3.86)代入上式,得

$$\mathrm{rotrot}\mathbf{E} + i\omega\mu(i\omega\varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{i}) = -\mathrm{roti}_m$$

即

$$\mathrm{rotrot}\mathbf{E} - \omega^2\varepsilon\mu\mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{i} - \mathrm{roti}_m \tag{3.87}$$

取式(3.86)的旋度, 得

$$\mathrm{rotrot}\mathbf{H} - i\omega\varepsilon\mathrm{rot}\mathbf{E} = \mathrm{roti}$$

将式(3.85)代入上式，得

$$\mathrm{rotrot}\mathbf{H} - \omega^2\mu\varepsilon\mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{i}_m + \mathrm{roti} \tag{3.88}$$

现在令

$$k^2 = \omega^2\mu\varepsilon$$

式(3.87)和(3.88)就可写成

$$\mathrm{rotrot}\mathbf{E} - k^2\mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{i} - \mathrm{roti}_m \tag{3.89}$$

$$\mathrm{rotrot}\mathbf{H} - k^2\mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{i}_m + \mathrm{roti} \tag{3.90}$$

$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ 称为传播常数.

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{3.91}$$

式中 f 为频率；λ 为媒质中的波长. 将

$$\mathrm{rotrot}\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{grad}\rho - \nabla^2\mathbf{E}$$

$$\mathrm{rotrot}\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathrm{grad}\rho_m - \nabla^2\mathbf{H}$$

代入式(3.89)和(3.90)，得

$$\nabla^2\mathbf{E} + k^2\mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{i} + \mathrm{roti}_m + \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{grad}\rho \tag{3.92}$$

$$\nabla^2\mathbf{H} + k^2\mathbf{H} = i\omega\varepsilon\mathbf{i}_m - \mathrm{roti} + \frac{1}{\mu}\mathrm{grad}\rho_m \tag{3.93}$$

在无源区域中式(3.92)和(3.93)退化为

$$\nabla^2\mathbf{E} + k^2\mathbf{E} = 0 \tag{3.94}$$

$$\nabla^2\mathbf{H} + k^2\mathbf{H} = 0 \tag{3.95}$$

由此可见，$\mathbf{E}$、$\mathbf{H}$ 的每一个直角坐标分量都满足下列方程：

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0 \tag{3.96}$$

方程(3.96)称为标量赫姆霍尔兹(Helmholtz)方程，而方程(3.92)和(3.93)则称为矢量赫姆霍尔兹方程.

下面顺便推导一个常用的结果：

如果令

$$A = \frac{e^{-ikr}}{r} \quad (r \neq 0) \tag{3.97}$$

则函数 A 满足方程

$$\nabla^2 A + k^2 A = 0 \tag{3.98}$$

即 A 满足标量赫姆霍尔兹方程. r 是由原点至观察点或动点的矢径.

证明过程如下：

$$\nabla^2 A = (\nabla \cdot \nabla) A = \nabla \cdot (\nabla A)$$

但

$$\nabla A = \nabla\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right) = -\frac{e^{-ikr}}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{1}{r}(-ik)\, e^{-ikr} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$= \mathbf{C} + \mathbf{B}$$

式中

$$\mathbf{C} = -\frac{e^{-ikr}}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \qquad \mathbf{B} = \frac{-ik}{r^2} e^{-ikr} \cdot \mathbf{r}$$

故

$$\nabla^2 A = \nabla \cdot (\mathbf{C} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{C} + \nabla \cdot \mathbf{B}$$

又因

$$\nabla \cdot \mathbf{C} = \nabla \cdot \left(-\frac{e^{-ikr}}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}\right)$$

$$= -\frac{e^{-ikr}}{r^3} 3 - \mathbf{r} \cdot \nabla \frac{e^{-ikr}}{r^3} \qquad (\nabla \cdot \mathbf{r} = 3)$$

$$= -3\frac{e^{-ikr}}{r^3} - \mathbf{r} \cdot \left[\frac{1}{r^3}(-ike^{-ikr})\frac{\mathbf{r}}{r} + e^{-ikr}\left(-\frac{3r^2\mathbf{r}}{r^6 r}\right)\right]$$

$$= ik\frac{e^{-ikr}}{r^2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \left(\frac{-ike^{-ikr}}{r^2}\mathbf{r}\right)$$

$$= -ik\left(3\frac{e^{-ikr}}{r^2} + \mathbf{r} \cdot \nabla \frac{e^{-ikr}}{r^2}\right)$$

$$= -3ik\frac{e^{-ikr}}{r^2} - ik\mathbf{r} \cdot \left[\frac{1}{r^2}(-ik)\, e^{-ikr}\frac{\mathbf{r}}{r}\right.$$

$$\left. + e^{-ikr} \cdot \frac{-2r\mathbf{r}}{r^4 r}\right]$$

$$= -ik\frac{e^{-ikr}}{r^2} - k^2\frac{e^{-ikr}}{r}$$

所以

$$\nabla^2 A = -k^2\frac{e^{-ikr}}{r} = -k^2 A$$

即

$$\nabla^2 A + k^2 A = 0$$

3.11 复坡印廷矢量的两种定义

我们知道，角频率为 ω 的正弦电磁场 $\mathbf{E}(t)$ 和 $\mathbf{H}(t)$ 可通过复矢量表示：

$$\mathbf{E}(t) = \mathrm{Re}\mathbf{E}(\omega)e^{i\omega t}$$

$$\mathbf{H}(t) = \mathrm{Re}\mathbf{H}(\omega)e^{i\omega t}$$

式中 $\mathbf{E}(\omega)$、$\mathbf{H}(\omega)$ 为下列复麦克斯韦方程组的解：

$$\mathrm{rot}\mathbf{E}(\omega) = -i\omega\mu\mathbf{H}(\omega)$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{H}(\omega) = i\omega\varepsilon\mathbf{E}(\omega) + \mathbf{i}(\omega)$$

方程组中，$\mathbf{i}(\omega)$ 为对应于场源函数 $\mathbf{i}(t)$ 的复矢量（$\mathbf{i}(t) = \mathrm{Re}\mathbf{i}(\omega)e^{i\omega t}$）；Re 表示复数的实数部分。

表征通过单位面积的电磁辐射功率的矢量是坡印廷矢量

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{E}(t) \times \mathbf{H}(t) \qquad (3.99)$$

与此相对应，可以有两种不同的所谓复坡印廷矢量的定义：

$$\mathbf{P}_1(\omega) = \mathbf{E}(\omega) \times \mathbf{H}(\omega)^* \tag{3.100}$$

$$\mathbf{P}_2(\omega) = \mathbf{E}(\omega) \times \mathbf{H}(\omega) \tag{3.101}$$

它们之间的差别在于对 $\mathbf{H}(\omega)$ 是否取共轭.

我们来探讨一下 $\mathbf{P}_1(\omega)$、$\mathbf{P}_2(\omega)$ 和 $\mathbf{P}(t)$ 之间的关系. 为此需要引入周期性函数的直流分量和交变分量的概念.

直流分量： 周期性函数 $\mathbf{A}(t)$ 在一个周期内的平均值称为它的直流分量，用 $\overline{\mathbf{A}(t)}$ 表示.

$$\overline{\mathbf{A}(t)} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{A}(t)dt \tag{3.102}$$

式中 T 为周期.

对坡印廷矢量 $\mathbf{P}(t)$ 来说，直流分量表示在一个周期中辐射功率的平均值. 它反映了实际通过单位面积辐射出去或进入的电磁功率的平均值.

交变分量 周期性函数 $\mathbf{A}(t)$ 减去它的直流分量称为它的交变分量，用 $\widetilde{\mathbf{A}(t)}$ 表示.

$$\widetilde{\mathbf{A}(t)} = \mathbf{A}(t) - \overline{\mathbf{A}(t)} \tag{3.103}$$

交变分量的平均值为零：

$$\overline{\widetilde{\mathbf{A}(t)}} = \overline{\mathbf{A}(t)} - \overline{\mathbf{A}(t)} = 0 \tag{3.104}$$

对坡印廷矢量来说，交变分量反映在辐射过程中电磁功率的大小(与平均值相比)变化情况.

因任意复数的实数部分 $\mathrm{Re}z$ (z 为任意复数) 可表示为

$$\mathrm{Re}z = \frac{1}{2}(z + z^*)$$

式中 z^* 为 z 的共轭数. 故

$$\mathrm{Re}\mathbf{E}(\omega)e^{i\omega t}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{E}(\omega)e^{i\omega t}+\mathbf{E}(\omega)^{*}e^{-i\omega t}\right)$$

$$\mathrm{Re}\mathbf{H}(\omega)e^{i\omega t}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{H}(\omega)e^{i\omega t}+\mathbf{H}(\omega)^{*}e^{-i\omega t}\right)$$

由此

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}(t)\times\mathbf{H}(t)\\&=\left(\mathrm{Re}\mathbf{E}(\omega)e^{i\omega t}\right)\times\left(\mathrm{Re}\mathbf{H}(\omega)e^{i\omega t}\right)\\&=\frac{1}{4}\left(\mathbf{E}(\omega)e^{i\omega t}+\mathbf{E}(\omega)^{*}e^{-i\omega t}\right)\\&\quad\times\left(\mathbf{H}(\omega)e^{i\omega t}+\mathbf{H}(\omega)^{*}e^{-i\omega t}\right)\\&=\frac{1}{4}\left[\mathbf{E}(\omega)\times\mathbf{H}(\omega)^{*}+\mathbf{E}(\omega)^{*}\times\mathbf{H}(\omega)\right.\\&\quad\left.+\mathbf{E}(\omega)\times\mathbf{H}(\omega)e^{2i\omega t}+\mathbf{E}(\omega)^{*}\times\mathbf{H}(\omega)^{*}e^{-2i\omega t}\right]\end{aligned}\tag{3.105}$$

由式(3.105)可见

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{E}(t)\times\mathbf{H}(t)}&=\frac{1}{4}\left[\mathbf{E}(\omega)\times\mathbf{H}(\omega)^{*}+\mathbf{E}(\omega)^{*}\times\mathbf{H}(\omega)\right]\\&=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\mathbf{E}(\omega)\times\mathbf{H}(\omega)^{*}\end{aligned}\tag{3.106}$$

即

$$\overline{\mathbf{P}(t)}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\mathbf{P}_{1}$$

式(3.106)的意义是坡印廷矢量的直流分量(平均值)可通过复坡印廷矢量 $\mathbf{P}_1$ 的实数部分表示。

根据交变分量的定义和式(3.105)、(3.106)得

$$\begin{aligned}&\widetilde{\mathbf{E}(t)\times\mathbf{H}(t)}\\&=\mathbf{E}(t)\times\mathbf{H}(t)-\overline{\mathbf{E}(t)\times\mathbf{H}(t)}\\&=\frac{1}{4}\left[\mathbf{E}(\omega)\times\mathbf{H}(\omega)e^{2i\omega t}+\mathbf{E}(\omega)^{*}\times\mathbf{H}(\omega)^{*}e^{-2i\omega t}\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\mathbf{E}(\omega) \times \mathbf{H}(\omega)e^{2i\omega t}] \tag{3.107}$$

即

$$\widetilde{\mathbf{P}(t)} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\mathbf{P}_2(\omega)e^{2i\omega t}) \tag{3.108}$$

式(3.108)的意义是坡印廷矢量的交变分量，可通过复坡印廷矢量 $\mathbf{P}_2$ 乘上 $e^{2i\omega t}$ 后的实数部分表示.

由上述情况可见，$\mathbf{P}_1 = \mathbf{E}(\omega) \times \mathbf{H}(\omega)^*$ 反映 $\mathbf{P}(t)$ 的平均值，而 $\mathbf{P}_2 = \mathbf{E}(\omega) \times \mathbf{H}(\omega)$ 反映 $\mathbf{P}(t)$ 的交变分量，二者各有各的用处，不可混为一谈. 在文献中用得最多的是 $\mathbf{P}_1(\omega)$，但 $\mathbf{P}_2(\omega)$ 也有应用.

3.12 非理想导体边界上的近似边界条件

在非理想导体表面上电场的切线分量不等于零，通常的边界条件 $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$ 不再成立，在边界面上同时存在着电场和磁场的切线分量. 近似地表达这两个切线分量之间关系的表达式称为非理想导体表面的近似边界条件(以下简称近似边界条件). 近似边界条件在有耗波导和腔体理论中有着重要的应用. 本节的内容就是推导出近似边界条件的表达式. 我们的思路是先分析边界是无限大平面，均匀非理想导体占据半空间这一特殊情况，所得结果再近似地应用到其它形状的边界面上去.

令均匀非理想导体(ε = 常数，μ = 常数，σ = 常数)所占据的空间为 $z > 0$ 的空间，如图 3.6 所示. 又假定在 $z > 0$ 区域内没有局外源. $z = 0$ 是非理想导体(以下简称导体)的边界面.

令边界面上的磁场值为 $\mathbf{H}(x', y', 0)$. 式中 x'、y' 为边

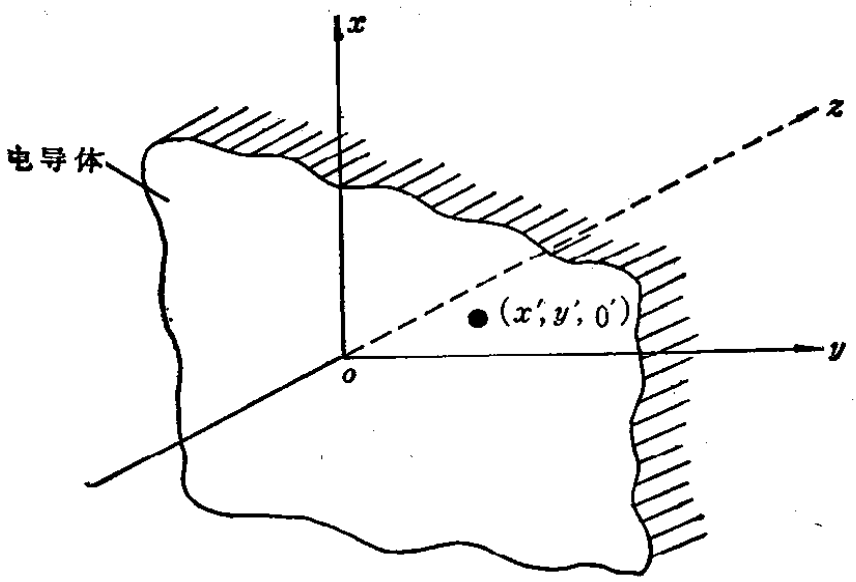

图 3.6　坐标系统

界上动点的坐标.

根据只用面电流的等效定理，$z>0$ 区域内的场由面电流 $\mathbf{u}_z \times \mathbf{H}(x', y', 0)$ 决定,而且在边界面下方,即 $z=-0$ 处应有理想磁导体. 此处 $\mathbf{u}_z$ 为 z 轴正方向的单位矢量. 根据第五章中的镜象原理，理想磁导体对面电流的影响可用大小相等、方向相同的面电流代替. 因此在上半空间的场可由 $\mathbf{i}_s = 2\mathbf{u}_z \times \mathbf{H}(x', y', 0)$ 在均匀媒质(全空间均为非理想导体)中的辐射求得.

根据均匀媒质中的电磁位公式(见第四章)，在上半空间中，

$$\mathbf{H}(x, y, z) = \frac{1}{\mu}\mathbf{B}$$

$$= \frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot}\mathbf{A}$$

$$= \mathrm{rot}\iint_{x'=0} \mathbf{i}_s \frac{e^{-ikr}}{4\pi r}\,d\sigma$$

$$= \mathrm{rot} \iint_{z'=0} \mathbf{u}_z \times \mathbf{H}(x', y', 0) \frac{e^{-ikr}}{2\pi r} d\sigma \quad (3.109)$$

式中

$$k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon'} \quad (3.110)$$

$$\varepsilon' = \varepsilon - i\frac{\sigma}{\omega} \quad (3.111)$$

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2}$$

r 为边界面上的电流元至场点的距离。

现将 k 分为实数与虚数两部分。

令 $k = k_1 + ik_2$，得

$$k = k_1 + ik_2 = \omega \sqrt{\mu\left(\varepsilon - i\frac{\sigma}{\omega}\right)}$$

两边平方，得

$$k_1^2 - k_2^2 + 2ik_1k_2 = \omega^2\mu\left(\varepsilon - i\frac{\sigma}{\omega}\right)$$

由此

$$\begin{cases} k_1^2 - k_2^2 = \omega^2\mu\varepsilon & (3.112) \\ 2k_1k_2 = -\omega\mu\sigma & (3.113) \end{cases}$$

由式 (3.113)

$$k_2 = -\frac{\omega\mu\sigma}{2k_1}$$

代入式(3.112)，得

$$4(k_1^2)^2 - 4\omega^2\mu\varepsilon(k_1^2) - (\omega\mu\sigma)^2 = 0$$

由此

$$k_1^2 = \frac{\omega^2\mu\varepsilon \pm \sqrt{(\omega^2\mu\varepsilon)^2 + (\omega\mu\sigma)^2}}{2}$$

$$k_1 = \pm \sqrt{\frac{\omega^2\mu\varepsilon \pm \sqrt{(\omega^2\mu\varepsilon)^2 + (\omega\mu\sigma)^2}}{2}} \quad (3.114)$$

考虑到 $\sigma = 0$ 时 k_1 应为 $\omega\sqrt{\mu\varepsilon} > 0$，最后得

$$k_1 = \sqrt{\frac{\omega^2\mu\varepsilon + \sqrt{(\omega^2\mu\varepsilon)^2 + (\omega\mu\sigma)^2}}{2}} \tag{3.115}$$

将 k_1 值代入式(3.113)，得

$$\begin{aligned} k_2 &= -\frac{\omega\mu\sigma}{2k_1} \\ &= -\frac{\omega\mu\sigma}{2}\sqrt{\frac{2}{\omega^2\mu\varepsilon + \sqrt{(\omega^2\mu\varepsilon)^2 + (\omega\mu\sigma)^2}}} \\ &= -\frac{\omega\mu\sigma}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\sqrt{(\omega^2\mu\varepsilon)^2 + (\omega\mu\sigma)^2} - \omega^2\mu\varepsilon}{(\omega\mu\sigma)^2}} \\ &= -\sqrt{\frac{\sqrt{(\omega^2\mu\varepsilon)^2 + (\omega\mu\sigma)^2} - \omega^2\mu\varepsilon}{2}} \end{aligned} \tag{3.116}$$

由式(3.115)和(3.116)可见，$k_1 > 0$，$k_2 < 0$，而且

$$|e^{-ikr}| = |e^{-ik_1r + k_2r}| = e^{k_2r}$$

随距离 r 之增加成指数式减小（因 $k_2 < 0$，$r > 0$）。在距离 $d = \frac{1}{|k_2|}$ 上减小 e 倍。这一距离通常称为电磁场的集肤深度。导电率 σ 越大，集肤深度越小。$\sigma \to \infty$ 时，$d \to 0$，得到理想电导体的情况。

对于良好的导体通常 $\sigma\mu\omega \gg \varepsilon\mu\omega^2$，在 k_1、k_2 的表达式中可忽略 $\varepsilon\mu\omega^2$ 和 $(\varepsilon\mu\omega^2)^2$，因而

$$|k_1| \approx |k_2| \approx \sqrt{\frac{\sigma\mu\omega}{2}} = \frac{1}{d} \tag{3.117}$$

或

$$k = k_1 + ik_2 = \frac{1}{d}(1 - i) \tag{3.118}$$

在微波波段中 d 值通常是很小的，例如铜的 $\sigma = 5.80 \times 10^7$，在 $\omega = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^9$（自由空间波长 10 厘米）时，$\mu = 1$，

$d = 1.2 \times 10^{-6}$ 米 $= 1.2$ 微米。

下面针对良导体的情况(d 很小),求出 $\mathbf{H}(x, y, z)$ 的近似表达式,再利用麦克斯韦方程

$$i\varepsilon'\omega\mathbf{E} = \mathrm{rot}\mathbf{H} \tag{3.119}$$

求出 $\mathbf{E}(x,y,z)$ 和 $\mathbf{H}(x, y, z)$ 的关系,最后再令 $z = 0$,就可以得到近似边界条件。

在边界面 ($z = 0$) 上引入极坐标系,其原点取为观察点 $P(x, y, z)$ 在 xy 平面上的投影 $P_0(x, y, 0)$,如图 3.7 所示。

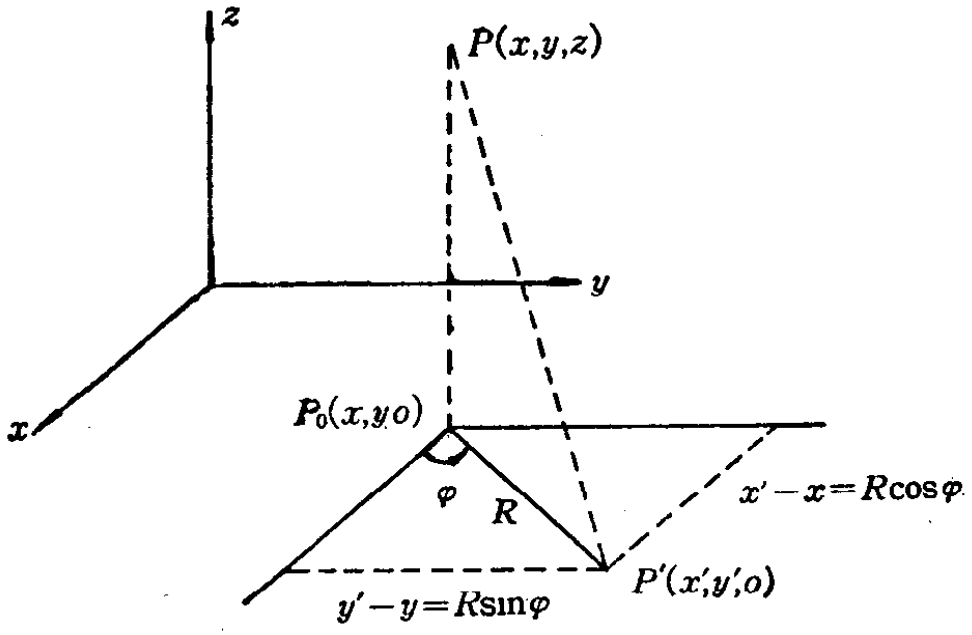

图 3.7　坐标系统

由图 3.7 可见下列关系式成立:

$$x' = R\cos\varphi + x \tag{3.120}$$

$$y' = R\sin\varphi + y \tag{3.121}$$

另外

$$d\sigma = RdRd\varphi$$

代入式(3.109),得

$$\mathbf{H}(x,y,z) = \mathrm{rot}\left[\mathbf{u}_z \times \int_0^{\infty} RdR \int_0^{2\pi}\right.$$

$$\cdot \mathbf{H}(x + R\cos\varphi, y + R\sin\varphi, 0)\frac{e^{-ikr}}{2\pi r}\,d\varphi\Big]$$

因 $R = \sqrt{r^2 - z^2}$，由此 $RdR = rdr$，$\mathbf{H}$ 的表达式可写成($R = 0$ 时 $r = z$)

$$\mathbf{H}(x, y, z) = \mathrm{rot}\left[\mathbf{u}_z \times \int_z^\infty \mathbf{H}_1(x, y, R)e^{-ikr}dr\right] \quad (3.122)$$

式中

$$\mathbf{H}_1(x, y, R) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathbf{H}(x + R\cos\varphi, y + R\sin\varphi, 0)d\varphi \quad (3.123)$$

式(3.123)表示 $\mathbf{H}(x', y', 0)$ 在圆周 $R =$ 常数上的平均值.

令 $ik = 1/\delta$ 并对式(3.122)中的积分进行分部积分:

$$\begin{aligned}
&\int_z^\infty \mathbf{H}_1(x, y, R)e^{-ikr}dr \\
&\quad = -\delta\int_z^\infty \mathbf{H}_1(x, y, R)de^{-\frac{r}{\delta}} \\
&\quad = -\delta e^{-\frac{r}{\delta}}\mathbf{H}_1(x, y, R)\Big|_{r=z}^{+\infty} + \delta\int_z^\infty e^{-\frac{r}{\delta}}\frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial r}dr \\
&\quad = \delta e^{-\frac{z}{\delta}}\mathbf{H}_1(x, y, 0) - \delta^2\int_z^\infty \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial r}de^{-\frac{r}{\delta}} \qquad (3.124)
\end{aligned}$$

($r = z$ 时 $R = 0$，$r \to \infty$ 时 $e^{-r/\delta} \to 0$).

由于积分后所得的积分形式与原先的积分仅仅在被积函数上不一样，即 $\mathbf{H}_1$ 换成了 $\mathbf{H}_1$ 的偏导数 $\frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial r}$，因此可用同样的方式进行分部积分，一步步进行下去，可得级数

$$\begin{aligned}
&\int_z^\infty \mathbf{H}_1(x, y, R)e^{-ikr}dr \\
&\quad = \delta e^{-\frac{z}{\delta}}[\mathbf{H}_1(x, y, 0) + \delta\mathbf{H}_1' + \delta^2\mathbf{H}_1'' + \cdots] \quad (3.125)
\end{aligned}$$

式中 $\mathbf{H}_1'$、$\mathbf{H}_1''$ 等为 $\frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial r}$、$\frac{\partial^2 \mathbf{H}_1}{\partial r^2}\cdots$在 $R=0$ 时的极限值，而

$$\mathbf{H}_1(x, y, 0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathbf{H}(x, y, 0)d\varphi$$
$$= \mathbf{H}(x, y, 0) \tag{3.126}$$

将式(3.125)代入式(3.122)，得

$$\mathbf{H}(x, y, z) = \delta \mathrm{rot}([\mathbf{u}_z \times \mathbf{H}_{1\Sigma}]e^{-\frac{z}{\delta}}) \tag{3.127}$$

式中

$$\mathbf{H}_{1\Sigma} = \mathbf{H}(x, y, 0) + \delta\mathbf{H}_1' + \delta^2\mathbf{H}_1'' + \cdots \tag{3.128}$$

对式(3.127)进行变换，得

$$\begin{aligned}
&\mathbf{H}(x, y, z)\\
&= \delta\nabla \times [\mathbf{u}_z \times \mathbf{H}_{1\Sigma}]e^{-\frac{z}{\delta}}\\
&= \delta\nabla e^{-\frac{z}{\delta}} \times [\mathbf{u}_z \times \mathbf{H}_{1\Sigma}]_c + \delta e^{-\frac{z}{\delta}}\nabla \times [\mathbf{u}_z \times \mathbf{H}_{1\Sigma}]\\
&= -e^{-\frac{z}{\delta}}[\mathbf{u}_z \times [\mathbf{u}_z \times \mathbf{H}_{1\Sigma}]]\\
&\quad + \delta e^{-\frac{z}{\delta}}(\mathbf{u}_z(\nabla \cdot \mathbf{H}_{1\Sigma}) - (\mathbf{u}_z \cdot \nabla)\mathbf{H}_{1\Sigma})\\
&= e^{-\frac{z}{\delta}}(-\mathbf{u}_z(\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{H}_{1\Sigma}) + \mathbf{H}_{1\Sigma}(\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_z))\\
&\quad + \delta e^{-\frac{z}{\delta}}\left(\mathbf{u}_z \mathrm{div}\mathbf{H}_{1\Sigma} - \frac{\partial \mathbf{H}_{1\Sigma}}{\partial z}\right)
\end{aligned} \tag{3.129}$$

即

$$\mathbf{H}(x,y,z) = \left(\mathbf{H}_{1\Sigma t} - \delta\frac{\partial \mathbf{H}_{1\Sigma}}{\partial z} + \delta(\mathrm{div}\mathbf{H}_{1\Sigma})\mathbf{u}_z\right)e^{-\frac{z}{\delta}} \tag{3.130}$$

式中

$$\mathbf{H}_{1\Sigma t} = \mathbf{H}_{1\Sigma} - (\mathbf{H}_{1\Sigma} \cdot \mathbf{u}_z)\mathbf{u}_z \tag{3.131}$$

它是 $\mathbf{H}_{1\Sigma}$ 减去 $\mathbf{u}_z$ 方向上的分量的结果，即 $\mathbf{H}_{1\Sigma}$ 在垂直于 z 轴的平面内的分量.

利用 $\mathbf{H}_{1\Sigma}$ 的表达式(3.128)，式(3.130)可展开成 δ 的幂级

数：

$$\mathbf{H}(x, y, z) = \left\{\mathbf{H}_t(x, y, 0) + \delta[\mathbf{H}'_{1t} + \mathbf{u}_z \mathrm{div}\mathbf{H}(x, y, 0)] + \delta^2\left(\mathbf{H}''_{1t} + \mathbf{u}_z \mathrm{div}\mathbf{H}'_1 - \frac{\partial \mathbf{H}'_1}{\partial z}\right) + \cdots\right\} e^{-z/\delta} \quad (3.132)$$

对于良导体，由于 δ 很小，故可近似地忽略式 (3.132) 中所有含有 δ 的项. δ 很小可由下式看出：

$$\delta = \frac{1}{ik} = \frac{d}{i(1-i)} = \frac{d}{1+i} \quad (3.133)$$

故

$$|\delta| = \frac{d}{\sqrt{2}} \quad (3.134)$$

d 很小自然使 $|\delta|$ 也很小.

在上述近似条件下，式(3.132)可写成

$$\mathbf{H}(x, y, z) = \mathbf{H}_t(x, y, 0) e^{-\frac{z}{\delta}} \quad (3.135)$$

由此式可见，在良导体边界附近磁场平行于边界面.

由麦克斯韦方程

$$i\omega\varepsilon' \mathbf{E} = \mathrm{rot}\mathbf{H}$$

得

$$\begin{aligned} i\omega\varepsilon' \mathbf{E}(x, y, z) &= \mathrm{rot}\mathbf{H}(x, y, z) \\ &= \nabla \times \mathbf{H}_t(x, y, 0) e^{-\frac{z}{\delta}} \\ &= \nabla e^{-z/\delta} \times \mathbf{H}_t(x, y, 0)_e \\ &\quad + e^{-\frac{z}{\delta}} \nabla \times \mathbf{H}_t(x, y, 0) \\ &= -\frac{1}{\delta} e^{-\frac{z}{\delta}} \mathbf{u}_z \times \mathbf{H}_t(x, y, 0) \\ &\quad + e^{-\frac{z}{\delta}} \mathbf{u}_z \left(\frac{\partial H_{ty}}{\partial x} - \frac{\partial H_{tx}}{\partial y}\right) \end{aligned}$$

因第一项中有因子 $-\frac{1}{\delta}$，第二项比第一项要小得多，可以忽略，又因

$$-\frac{1}{\delta}=-ik=-i\omega\sqrt{\mu\varepsilon'}$$

最后得

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x,y,z)&=\frac{1}{i\omega\varepsilon'}\mathrm{rot}\mathbf{H}(x,y,z)\\&=\frac{1}{i\omega\varepsilon'}(-i\omega\sqrt{\mu\varepsilon'})[\mathbf{u}_z\times\mathbf{H}_t(x,y,0)]e^{-\frac{z}{\delta}}\\&=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}}[\mathbf{H}_t(x,y,0)\times\mathbf{u}_z]e^{-z/\delta}\end{aligned}\tag{3.136}$$

可见 $\mathbf{E}(x,y,z)$ 也平行于边界面.

在边界面上 $z=0$，代入上式就得到我们要推导的近似边界条件：

$$\mathbf{E}_t(x,y,0)=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}}[\mathbf{H}_t(x,y,0)\times\mathbf{u}_z]\tag{3.137}$$

令 $\mathbf{n}$ 为边界上指向导体内部的单位法向量，则 $\mathbf{n}=\mathbf{u}_z$，上式可写成

$$\mathbf{E}_t(x,y,0)=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}}[\mathbf{H}_t(x,y,0)\times\mathbf{n}]\tag{3.138}$$

式中

$$\varepsilon'=\varepsilon-i\frac{\sigma}{\omega}$$

由于 $\mathbf{E}_t$ 和 $\mathbf{H}_t$ 在通过边界面时是连续的，因此上式不论对边界面的内侧或者外侧都是成立的.

由于 $\mathbf{E}$ 以及 $\mathbf{H}$ 的法线方向的分量与法线的叉积等于零，近似边界条件又可写成

$$\mathbf{E}(x,y,0)\times\mathbf{n}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}}[\mathbf{H}(x,y,0)\times\mathbf{n}]\times\mathbf{n}\quad(3.139)$$

或

$$\mathbf{n}\times\mathbf{E}(x,y,0)=-\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}}\mathbf{n}\times[\mathbf{n}\times\mathbf{H}(x,y,0)]\quad(3.140)$$

在我们所选定的直角坐标系统中，

$$\mathbf{n}\times\mathbf{E}=-E_y\mathbf{u}_x+E_x\mathbf{u}_y$$

$$\mathbf{n}\times[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]=-H_x\mathbf{u}_x-H_y\mathbf{u}_y$$

因此近似边界条件的坐标表达式为

$$\begin{cases}E_y=-\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon'}}H_x & (3.141)\\[2ex] E_x=\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon'}}H_y & (3.142)\end{cases}$$

这里坐标原点位于边界面上，z 轴垂直于边界面且指向导体内部．由于

$$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}}\approx\sqrt{\frac{\mu\omega}{-i\sigma}}=\sqrt{\frac{\mu\omega}{\sigma}}e^{i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{\frac{\mu\omega}{2\sigma}}(1+i)$$

$$=\frac{\mu\omega}{2}\sqrt{\frac{2}{\sigma\mu\omega}}(1+i)=\frac{\mu\omega d}{2}(1+i)\quad(3.143)$$

于是式(3.137)可写成

$$\mathbf{E}_t(x,y,0)=\sqrt{\frac{\mu\omega}{\sigma}}e^{i\frac{\pi}{4}}[\mathbf{H}_t(x,y,0)\times\mathbf{n}]\quad(3.144)$$

或

$$\mathbf{n}\times\mathbf{E}_t=\frac{\mu\omega d}{2}(1+i)[\mathbf{n}\times[\mathbf{H}_t\times\mathbf{n}]]$$

$$=\frac{\mu\omega d}{2}(1+i)[\mathbf{H}_t(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})-\mathbf{n}(\mathbf{H}_t\cdot\mathbf{n})]\quad(3.145)$$

但 $\mathbf{H}_t\cdot\mathbf{n}=0$，$\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}=1$，最后得

$$[\mathbf{n}\times\mathbf{E}_t(x,y,0)]=\frac{\mu\omega d}{2}(1+i)\mathbf{H}_t(x,y,0)\quad(3.146)$$

而 $i=\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial t}$，上式又可写成

$$\mathbf{n}\times\mathbf{E}_t(x,y,0)=\frac{\mu\omega d}{2}\left(1+\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial t}\right)\mathbf{H}_t(x,y,0)\quad(3.147)$$

根据上文中的推导，对于良导体（$\sigma\mu\omega\gg\varepsilon\mu\omega^2$），边界附近的场可以作以下的描述：

（1） 导体中的电场和磁场 **E**、**H** 与边界面平行且随离边界面的距离成指数式衰减.

（2） 电场 **E** 的大小与磁场 **H** 成正比，而 **E** 的相位比 **H** 的相位超前 45°. 另外，**H** 比 **E** 大很多(因 $\sigma\gg\mu\omega$).

虽然以上的推导是在导体占据了半空间的前提下进行的，但实际上如果导体占据的不是半空间（$z>0$），而仅仅是 $0<z<z_0$，那么在 $z_0\gg d$ 的条件下，近似边界条件（在 $z=0$ 处）仍然适用，因为从 $z=0$ 处进入导体的场很快地衰减，在 $z=z_0$ 处实际上是零，$z=z_0$ 的边界面已经不起作用. 对于非平面、尺寸有限的导体，只要导体的尺寸和边界面上每一点的曲率半径比 d 大得多，近似边界条件仍然适用.

最后，举一个应用近似边界条件的简单例子. 假定有一腔体，其内壁曲面为 S，在无耗前提下内部的磁场为 $\mathbf{H}^0$，现要求内壁有耗时 S 所吸收的功率的平均值.

首先，用 $\mathbf{H}_t^0$ 近似地代替 $\mathbf{H}_t$. 然后，用 3.11 中关于直流分量的公式，得总吸收功率 P_t 的平均值为

$$\overline{P_t}=\mathrm{Re}\frac{1}{2}\oiint_S[\mathbf{E}_t\times\mathbf{H}_t^*]\cdot\mathbf{n}d\sigma$$

$$=\mathrm{Re}\frac{1}{2}\oiint_S[\mathbf{n}\times\mathbf{E}_t]\cdot\mathbf{H}_t^*d\sigma$$

$$= \mathrm{Re}\frac{\mu\omega d}{4}(1+i)\iint_S \mathbf{H}_t \cdot \mathbf{H}_t^* d\sigma$$

$$= \frac{\mu\omega d}{4}\iint_S \mathbf{H}_t^0 \cdot \mathbf{H}_t^{0*} d\sigma \tag{3.148}$$

($\mathbf{H}_t^0 \cdot \mathbf{H}_t^{0*}$ 为实数)

3.13 近似边界条件的适用范围

在上一节的推导中，从式(3.132)过渡到式(3.135)和(3.136)时，我们曾假定 δ 很小时在 δ 的幂级数(3.128)中可以只保留第一项. 因为这一假定是以后推导的基础，因此有必要来分析一下在什么条件下可以这样做. 为此首先需要算出 $\mathbf{H}_1(x, y, R)$，然后算出

$$\mathbf{H}_1' = \left.\frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial r}\right|_{R=0} \tag{3.149}$$

$$\mathbf{H}_1'' = \left.\frac{\partial^2 \mathbf{H}_1}{\partial r^2}\right|_{R=0} \tag{3.150}$$

因为这些量是 δ 幂级数中的系数，分析时都要用到.

为计算 $\mathbf{H}_1$，我们将积分式(3.123)中的函数 $\mathbf{H}(x', y', 0) = \mathbf{H}(x + R\cos\varphi, y + R\sin\varphi, 0)$ 在点 $(x, y, 0)$ 上展开成泰勒级数:

$$\mathbf{H}(x + R\cos\varphi, y + R\sin\varphi, 0)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(R\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + R\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}\right)^n \mathbf{H}(x, y, 0)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{n!}\sum_{m=0}^{n} \frac{\partial^n \mathbf{H}(x, y, 0)}{\partial x^m \partial y^{n-m}} \frac{n!}{m!(n-m)!}\cos^m\varphi\sin^{n-m}\varphi$$

于是积分式(3.123)成为

$$\mathbf{H}_1(x,y,R)=\sum_{n=0}^{\infty}R^n\sum_{m=0}^{n}\frac{\overline{\cos^m\varphi\sin^{n-m}\varphi}}{m!(n-m)!}\frac{\partial^n\mathbf{H}(x,y,0)}{\partial x^m\partial y^{n-m}} \tag{3.151}$$

式中

$$\overline{\cos^m\varphi\sin^{n-m}\varphi}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^m\varphi\sin^{n-m}\varphi d\varphi$$

$$=J_{m,n} \tag{3.152}$$

现在证明 m、n 中只要有一个是奇数，$J_{m,n}$ 就等于零。证明如下。

将 $J_{m,n}$ 的积分写成 $\int_0^{\pi}+\int_{\pi}^{2\pi}$，在区间 $(\pi,2\pi)$ 中作变量置换

$$\varphi'=\varphi-\pi$$

考虑到

$$\cos\varphi=\cos(\pi+\varphi')=-\cos\varphi'$$
$$\sin\varphi=\sin(\pi+\varphi')=-\sin\varphi'$$
$$d\varphi=d\varphi'$$

得

$$J_{m,n}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\cos^m\varphi\sin^{n-m}\varphi d\varphi+\frac{(-1)^n}{2\pi}\int_0^{\pi}\cos^m\varphi'\sin^{n-m}\varphi' d\varphi'$$

由此式可见，当 n 是奇数时 $J_{m,n}=0$，因此时 $(-1)^n=-1$。当 $n=2p$ 是偶数时 $(-1)^n=+1$，于是

$$J_{m,2p}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^m\varphi\sin^{2p-m}\varphi d\varphi \qquad (0\leqslant m\leqslant 2p) \tag{3.153}$$

式中 p 为非负整数。当 $m=2q+1$ 是奇数时，对式(3.153)进行分部积分；此时令

$$u=\cos^{m-1}\varphi$$
$$dv=\cos\varphi\sin^{2p-m}\varphi d\varphi$$
$$=d\left(\frac{\sin^{2p-m+1}\varphi}{2p-m+1}\right)$$

于是

$$J_{m,2p}=\left(\frac{\cos^{m-1}\varphi\sin^{2p-m+1}\varphi}{\pi(2p-m+1)}\right)\Bigg|_0^{\pi}+\frac{m-1}{\pi(2p-m+1)}\int_0^{\pi}\sin^{2p-m+2}\varphi\cos^{m-2}\varphi d\varphi$$

$$=\frac{m-1}{\pi(2p-m+1)}\int_0^{\pi}\cos^{m-2}\varphi\sin^{2p-m+2}\varphi d\varphi$$

由此可见，分部积分后得到一个与原先积分形式一样的积分，但 $\cos\varphi$ 的阶数降低 2，$\sin\varphi$ 的阶数增加 2。因此，连续进行 q 次分部积分后可以把 $\cos\varphi$ 的阶数降低 $2q$，即得到下列形式的积分：

$$\int_0^{\pi}\sin^{2p-m+2q}\varphi\cos^{m-2q}\varphi d\varphi$$

$$=\int_0^{\pi}\sin^{2p-1}\varphi\cos\varphi d\varphi \qquad (m=2q+1)$$

$$=\frac{\sin^{2p}\varphi}{2p}\Bigg|_0^{\pi}=0$$

可见，当 m、n 中只要有一个是奇数，$J_{m,n}$ 就等于零。

当 $n=2p$、$m=2q$ $(0\leqslant q\leqslant p)$ 都是偶数时，

$$J_{2p,2q}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^{2q}\varphi\sin^{2(p-q)}\varphi d\varphi$$

显然大于零。

因此在式(3.151)中只有 $m=2q$、$n=2p$ 的项才不等于零，即

$$\mathbf{H}_1(x,y,R)=\mathbf{H}(x,y,0)+R^2\mathbf{W}_2(x,y)+R^4\mathbf{W}_4(x,y)+R^6\mathbf{W}_6(x,y)+\cdots \tag{3.154}$$

式中

$$\mathbf{W}_{2p}=\sum_{q=0}^{p}\frac{\overline{\cos^{2q}\varphi\sin^{2(p-q)}\varphi}}{(2q)!(2p-2q)!}\frac{\partial^{2p}\mathbf{H}(x,y,0)}{\partial x^{2q}\partial y^{2(p-q)}} \tag{3.155}$$

现求出 $\frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial r}$、$\frac{\partial^2 \mathbf{H}_1}{\partial r^2}$ 等，以进一步求出

$$\left.\frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial r}\right|_{R=0} \qquad \left.\frac{\partial^2 \mathbf{H}_1}{\partial r^2}\right|_{R=0}$$

我们有

$$\frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial r} = \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial r} = \sum_{p=1}^{\infty} 2pR^{2p-1}\mathbf{W}_{2p}(x, y)\frac{\partial R}{\partial r}$$

但

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\sqrt{r^2 - z^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - z^2}} = \frac{r}{R}$$

故

$$\frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial r} = r\sum_{p=1}^{\infty} 2pR^{2p-2}\mathbf{W}_{2p}(x, y)$$

继续对 r 微分，得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \mathbf{H}_1}{\partial r^2} &= \sum_{p=1}^{\infty} 2pR^{2p-2}\mathbf{W}_{2p}(x, y) \\ &\quad + r\sum_{p=1}^{\infty} 2p(2p-2)R^{2p-3}\frac{\partial R}{\partial r}\mathbf{W}_{2p}(x, y) \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} 2pR^{2p-2}\mathbf{W}_{2p}(x, y) \\ &\quad + r^2\sum_{p=2}^{\infty} 2p(2p-2)R^{2p-4}\mathbf{W}_{2p}(x, y)\end{aligned}$$

等。

由此可得

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_1' &= \left.\frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial r}\right|_{R=0} = 2z\mathbf{W}_2(x, y) \\ \mathbf{H}_1'' &= \left.\frac{\partial^2 \mathbf{H}_1}{\partial r^2}\right|_{R=0} = 2\mathbf{W}_2(x, y) + 8z^2\mathbf{W}_4(x, y)\end{aligned} \tag{3.156}$$

等.

因此,根据式(3.128)

$$\mathbf{H}_{1\Sigma}=\mathbf{H}(x,y,0)+2\delta z\mathbf{W}_2(x,y)+\delta^2[2\mathbf{W}_2(x,y)+8z^2\mathbf{W}_4(x,y)]+\cdots$$

由(3.155)式知,式中的 $\mathbf{W}_2(x,y)$ 和 $\mathbf{W}_4(x,y)$ 为

$$\mathbf{W}_2(x,y)=\overline{\sin^2\varphi}\,\frac{\partial^2\mathbf{H}(x,y,0)}{2!\,\partial y^2}+\overline{\cos^2\varphi}\,\frac{\partial^2\mathbf{H}(x,y,0)}{2\,\partial x^2}$$

$$\mathbf{W}_4(x,y)=\overline{\sin^4\varphi}\,\frac{\partial^4\mathbf{H}(x,y,0)}{4!\,\partial y^4}+\overline{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}\,\frac{\partial^4\mathbf{H}(x,y,0)}{2!(4-2)!\,\partial x^2\partial y^2}+\overline{\cos^4\varphi}\,\frac{\partial^4\mathbf{H}(x,y,0)}{4!\,\partial x^4}$$

因

$$\overline{\sin^2\varphi}=\overline{\cos^2\varphi}=\frac{1}{2}$$

$$\overline{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}=\frac{\overline{\sin^2 2\varphi}}{4}=\frac{1}{8}$$

$$\overline{\sin^4\varphi}=\overline{\sin^2\varphi-\sin^2\varphi\cos^2\varphi}=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

$$\overline{\cos^4\varphi}=\overline{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\cos^2\varphi}=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

故

$$\mathbf{W}_2(x,y)=\frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2\mathbf{H}(x,y,0)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathbf{H}(x,y,0)}{\partial y^2}\right]$$

$$\mathbf{W}_4(x,y)=\frac{1}{64}\left[\frac{\partial^4\mathbf{H}(x,y,0)}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\mathbf{H}(x,y,0)}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\mathbf{H}(x,y,0)}{\partial y^4}\right] \tag{3.157}$$

有了以上的结果后，现在不难看出在 $\mathbf{H}_{1\Sigma}$ 以及包含 $\mathbf{H}_{1\Sigma}$ 的表达式中忽略高次项的条件．首先，只有在 z 很小的地方，也就是说靠近边界的地方才能忽略高次项，因为 $\mathbf{H}_1'$、$\mathbf{H}_1''$ 都是 z 的多项式．对于近似边界来说，因为在边界上 $z=0$，因此这一点对边界条件没有什么影响．$z=0$ 时我们有

$$\mathbf{H}_{1\Sigma}=\mathbf{H}(x,y,0)+\frac{\delta^2}{2}\left[\frac{\partial^2\mathbf{H}(x,y,0)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathbf{H}(x,y,0)}{\partial y^2}\right]+\cdots \tag{3.158}$$

由此可见，为了有可能略去高次项，必须使

$$\frac{d^2}{4}\left|\frac{\partial^2\mathbf{H}(x,y,0)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathbf{H}(x,y,0)}{\partial y^2}\right|\ll\mathbf{H}(x,y,0) \tag{3.159}$$

这里，我们把 $|\delta|^2$ 换成了 $\frac{d^2}{2}$，因为

$$\delta=\frac{1}{ik}=\frac{d}{i(1-i)}=\frac{d}{1+i}$$

故

$$|\delta|^2=\frac{d^2}{2}$$

这一不等式要求在边界上（$z=0$）磁场相对于 x 和 y 两座标的变化率是慢的，也就是说，当 x 或 y 的数值变了 d 之后，磁场的变化很小．显然，只要在与导体相交界的媒质中电磁波的波长比 d 大得多，这一条件就可满足．

第四章　电 磁 位

电磁场理论的中心内容之一是求解麦克斯韦方程组．从本章开始我们将比较深入和详细地探讨这个问题．解麦克斯韦方程组的方法不止一种．用矢量格林定理或标量-矢量格林定理可以直接求解麦克斯韦方程组．这种方法将在下章中叙述．本章所讨论的是解麦克斯韦方程组的间接方法．所谓间接方法，指的是先求出一些本身并不满足麦克斯韦方程组的辅助函数，接着对这些辅助函数进行微分运算，从而获得麦克斯韦方程组的解．一般说来，求辅助函数的过程比直接求解简单．这正是我们用辅助函数的方法求解麦克斯韦方程组的原因．在本章中只讨论均匀媒质的情况．

4.1　电磁位的普遍定义

定义　凡是用来求解麦克斯韦方程组的辅助函数统称为电磁位．

首先需要对辅助函数本身给出明确的定义．例如可以直接给出辅助函数的数学表达式，或者给出它应满足的微分方程和求解微分方程的条件．如果辅助函数不止一个，还可以给出它们之间应具有的相互关系．

其次需要明确地给出由辅助函数计算 **E**、**H**、**B**、**D** 的公式．如果辅助函数相同，但计算的公式不同，我们就认为电磁位(辅助函数和计算公式的集合)是不同的．由此可见，只给出辅助函数本身还不能最后确定电磁位．

最后需要证明算出来的 **E**、**H**、**D**、**B** 确实满足麦克斯韦方程组. 这一步是必不可少的，因为不管用什么样的辅助函数和用什么公式算出了 **E**、**H**、**D**、**B**，只要它们不满足麦克斯韦方程组，就不能称辅助函数为电磁位. 这种证明只需进行一次. 在实际应用电磁位的时候，只要用公式具体计算就行了，用不到每次都去证明算出来的 **E**、**H**、**D**、**B** 是否满足麦克斯韦方程组.

电磁场理论中常用的电磁位有六种. 在叙述这六种电磁位之前先来回顾一下需要用到的数学基础知识. 某些证明将在本章最后几节中给出.

(1) 方程

$$\nabla^2\mathbf{A}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\mu\mathbf{i} \tag{4.1}$$

在 ε、μ 等于常数条件下的解为

$$\mathbf{A}=\frac{\mu}{4\pi}\iiint_V\frac{\mathbf{i}\left(\mathbf{r}',\ t-\dfrac{r}{v}\right)}{r}dv' \tag{4.2}$$

式中 $v=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ 为常数；$\mathbf{r}'$ 为自坐标原点至积分体积元 dv' 的矢径；r 为自观察点至 dv' 的距离；V 为包含有限空间范围内所有 $\mathbf{i}$ 的任一体积. 证明见 4.11 节. 坐标系统见图 4.1.

方程

$$\nabla^2\varphi-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\rho/\varepsilon \tag{4.3}$$

在 ε、μ 等于常数条件下的解为

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V\frac{\rho\left(\mathbf{r}',\ t-\dfrac{r}{v}\right)}{r}dv' \tag{4.4}$$

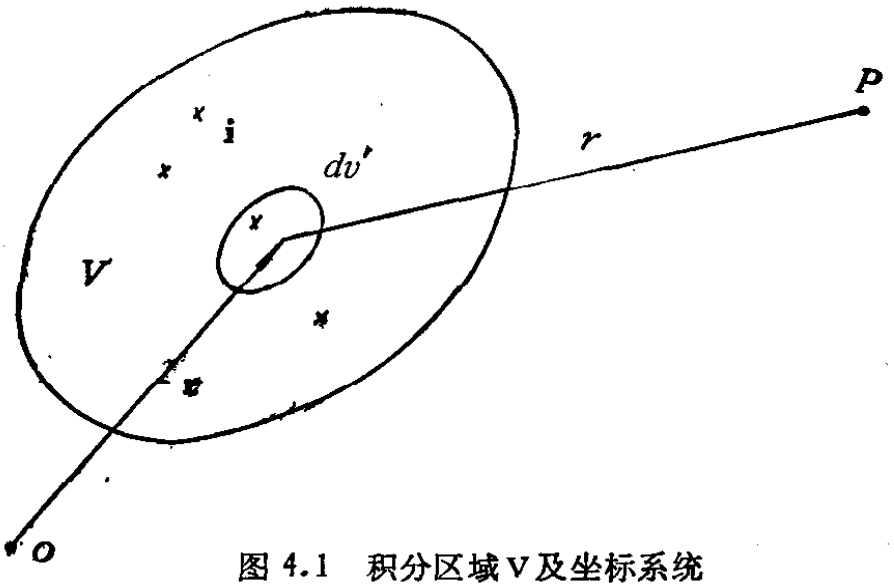

图 4.1　积分区域V及坐标系统

其中 v、$\mathbf{r}'$、r、dv' 和 V 的意义与上相同. 证明见 4.11 节.

$\mathbf{A}$ 和 φ 之间有下列关系:

$$\mathrm{div}\mathbf{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \tag{4.5}$$

这一关系称为洛伦兹规范条件. 从电磁位的观察来看，它是辅助函数 $\mathbf{A}$、φ 所应具有的关系，或者可以说是对 $\mathbf{A}$、φ 的一种限制条件. 这个关系成立的证明见 4.13 节.

(2) 方程

$$\nabla^2\mathbf{Z} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{Z}}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{e}}{\varepsilon} \tag{4.6}$$

的解为

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V \frac{\mathbf{e}\left(\mathbf{r}', t - \dfrac{r}{v}\right)}{r}dv' \tag{4.7}$$

(3) 方程

$$\nabla^2\mathbf{Z}_h - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{Z}_h}{\partial t^2} = -\mathbf{m} \tag{4.8}$$

的解为

$$\mathbf{Z}_h = \frac{1}{4\pi}\iiint_V \frac{\mathbf{m}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{v}\right)}{r} dv' \tag{4.9}$$

(4) 方程

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{4.10}$$

的解为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{r} dv' \tag{4.11}$$

证明见 4.12 节.

(5) 方程

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\left(\mathbf{i} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad}\varphi\right) \tag{4.12}$$

的解为

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \frac{\mathbf{i}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{v}\right) - \left[\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad}\varphi\right]_{t=t-\frac{r}{v}}}{r} dv' \tag{4.13}$$

方程中，

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{r} dv'$$

$\left[\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad}\varphi\right]_{t=t-\frac{r}{v}}$ 的含义是 $\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad}\varphi$ 作为 t 的函数，再将 t 换成 $t - \frac{r}{v}$ 后所得的结果.

$\mathbf{A}$ 具有下列性质:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = 0 \tag{4.14}$$

这一性质通常称为库仑规范条件. 从电磁位的观点看，它是对辅助函数 $\mathbf{A}$ 的一种限制条件. $\mathbf{A}$ 满足这一条件的证明见

4.13 节.

4.2 几种电磁位

在这一节中，我们将证明六种辅助函数可成为电磁位.证明的思路是先给出辅助函数的定义，再给出计算 **E**、**H**、**D**、**B** 的公式，最后证明 **E**、**H**、**D**、**B** 满足麦克斯韦方程组.

电磁位不止这六种. 我们这里所列举的是最常用的. 读者在其他文献中还可以找到其他各种电磁位.

(1) 若函数 **A**、φ 由下列表达式确定:

$$\mathbf{A}=\frac{\mu}{4\pi}\iiint_V\frac{\mathbf{i}\left(\mathbf{r}',t-\frac{r}{v}\right)}{r}dv'$$

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V\frac{\rho\left(\mathbf{r}',t-\frac{r}{v}\right)}{r}dv' \tag{4.15}$$

式中 **i** 和 ρ 为给定的电流密度和电荷密度；ε 和 μ 为常数，则

$$\begin{cases}\mathbf{E}=-\dfrac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\operatorname{grad}\varphi\\ \mathbf{B}=\operatorname{rot}\mathbf{A}\\ \mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}\\ \mathbf{H}=\dfrac{1}{\mu}\mathbf{B}\end{cases} \tag{4.16}$$

满足下列麦克斯韦方程组:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \tag{4.17}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\mathbf{i} \tag{4.18}$$

$$\begin{cases} \mathrm{div}\mathbf{B} = 0 & (4.19) \\ \mathrm{div}\mathbf{D} = \rho & (4.20) \end{cases}$$

证 根据式(4.3)、(4.1)和(4.5)，$\mathbf{A}$和φ分别满足下列方程：

$$\nabla^2\mathbf{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{i}$$

$$\nabla^2\varphi - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

而且

$$\mathrm{div}\mathbf{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$

因此

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\mathbf{E} &= \mathrm{rot}\left(-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\varphi\right) \\ &= -\frac{\partial\mathrm{rot}\mathbf{A}}{\partial t} \qquad (\mathrm{rotgrad}\varphi = 0) \\ &= -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \qquad (\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A}) \end{aligned}$$

式(4.17)得证

$$\begin{aligned} \varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{i} &= \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\varphi\right) + \mathbf{i} \\ &= -\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \varepsilon\mathrm{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathbf{i} \end{aligned}$$

代入公式 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = -\dfrac{\mathrm{div}\mathbf{A}}{\varepsilon\mu}$ 得

$$\begin{aligned} \varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{i} &= \frac{1}{\mu}\left[-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \varepsilon\mu\mathrm{grad}\left(-\frac{\mathrm{div}\mathbf{A}}{\varepsilon\mu}\right)\right] + \mathbf{i} \\ &= \frac{1}{\mu}\left(-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} + \nabla^2\mathbf{A} + \mathrm{rotrot}\mathbf{A}\right) + \mathbf{i} \end{aligned}$$

代入公式 $\mathrm{rotrot}\mathbf{A} = \mathrm{graddiv}\mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A}$ 得

$$\varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}+\mathbf{i}=\frac{1}{\mu}(-\mu\mathbf{i}+\mathrm{rotrot}\mathbf{A})+\mathbf{i}$$

$$=\frac{1}{\mu}\mathrm{rotrot}\mathbf{A}-\mathbf{i}+\mathbf{i}=\mathrm{rot}\mathbf{H}$$ 式(4.18)得证

$$\mathrm{div}\mathbf{B}=\mathrm{divrot}\mathbf{A}=0$$ 式(4.19)得证

$$\mathrm{div}\mathbf{D}=\varepsilon\mathrm{div}\mathbf{E}$$

$$=\varepsilon\left(-\mathrm{div}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}-\mathrm{divgrad}\varphi\right)$$

$$=-\varepsilon\left(\frac{\partial \mathrm{div}\mathbf{A}}{\partial t}+\nabla^2\varphi\right)$$

$$=-\varepsilon\left(-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\nabla^2\varphi\right)$$

$$=-\varepsilon\left(-\frac{\rho}{\varepsilon}\right)$$

$$=\rho$$ 式(4.20)得证

这里 $\mathbf{A}$ 通常称为电磁场的滞后矢量位；φ 通常称为电磁场的滞后标量位.

(2) 若函数 $\mathbf{e}$、$\mathbf{Z}$ 由下列表达式确定:

$$\mathbf{e}=\int_0^t \mathbf{i}(x,y,z,t)dt$$

$$\mathbf{Z}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V\frac{\mathbf{e}\left(\mathbf{r}',t-\frac{r}{v}\right)}{r}dv' \tag{4.21}$$

则

$$\begin{cases}\mathbf{H}=\varepsilon\dfrac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\mathbf{Z} & (4.22)\\ \mathbf{E}=\mathrm{rotrot}\mathbf{Z}-\dfrac{\mathbf{e}}{\varepsilon} & (4.23)\\ \quad=-\varepsilon\mu\dfrac{\partial^2\mathbf{Z}}{\partial t^2}+\mathrm{graddiv}\mathbf{Z}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}\\ \mathbf{B}=\mu\mathbf{H}\end{cases}$$

满足麦克斯韦方程组.

证 根据式(4.6)和(4.7), $\mathbf{Z}$ 满足方程

$$\nabla^2\mathbf{Z}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{Z}}{\partial t^2}=-\frac{\mathbf{e}}{\varepsilon}$$

因此

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\mathbf{E}&=\mathrm{rot}\left(-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{Z}^2}{\partial^2 t}+\mathrm{graddiv}\mathbf{Z}\right)\\&=-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathrm{rot}\mathbf{Z}}{\partial t^2}\\&=-\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\mathbf{Z}\right)\\&=-\mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\\&=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\end{aligned}$$

式(4.17)得证

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\mathbf{H}&=\mathrm{rot}\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\mathbf{Z}\right)\\&=\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rotrot}\mathbf{Z}\\&=\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E}+\frac{\mathbf{e}}{\varepsilon}\right)\\&=\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{\partial\mathbf{e}}{\partial t}\\&=\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\mathbf{i}\end{aligned}$$

式(4.18)得证

$$\mathrm{div}\mathbf{B}=\mu\mathrm{div}\mathbf{H}=\varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{divrot}\mathbf{Z})=0$$

$$(\mathrm{divrot}\mathbf{Z}=0)$$

式(4.19)得证

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\mathbf{D} &= \varepsilon\mathrm{div}\mathbf{E} = -\mathrm{div}\mathbf{e}\\ &= -\int_0^t \mathrm{div}\mathbf{i}\,dt\\ &= -\int_0^t -\frac{\partial\rho}{\partial t}dt\\ &= \rho \qquad \text{式(4.20)得证}\end{aligned}$$

式中 $\mathrm{div}\mathbf{i} = -\dfrac{\partial\rho}{\partial t}$，为连续性方程.（设 $t = 0$ 时 $\rho = 0$.）

注

$$\begin{aligned}\mathrm{rotrot}\mathbf{Z} - \frac{\mathbf{e}}{\varepsilon} &= \mathrm{graddiv}\mathbf{Z} - \nabla^2\mathbf{Z} - \frac{\mathbf{e}}{\varepsilon}\\ &= \mathrm{graddiv}\mathbf{Z} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{Z}}{\partial t^2} + \frac{\mathbf{e}}{\varepsilon} - \frac{\mathbf{e}}{\varepsilon}\\ &= -\varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{Z}}{\partial t^2} + \mathrm{graddiv}\mathbf{Z}\end{aligned}$$

即式(4.23). 这里，$\mathbf{Z}$ 通常称为电赫兹矢量位.

(3) 若函数 $\mathbf{m}$、$\mathbf{Z}_h$ 由下列表达式确定:

$\mathrm{rot}\mathbf{m} = \mathbf{i}$ ($\mathrm{div}\mathbf{i} = 0$，$\rho = 0$ 的特例)

$$\mathbf{Z}_h = \frac{1}{4\pi}\iiint_V \frac{\mathbf{m}\left(\mathbf{r}', t - \dfrac{r}{v}\right)}{r}dv' \tag{4.24}$$

则

$$\begin{cases}\mathbf{H} = \mathrm{rotrot}\mathbf{Z}_h\\ \mathbf{E} = -\mu\dfrac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\mathbf{Z}_h\\ \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}\\ \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}\end{cases} \tag{4.25}$$

满足麦克斯韦方程组.

注 $\mathbf{i} = \mathrm{rot}\mathbf{m}$ 意味着 $\mathrm{div}\mathbf{i} = \mathrm{divrot}\mathbf{m} = 0$，因此 $\mathrm{div}\mathbf{i} =$

$-\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$，$\rho=$常数．如果在某时刻之前 $\rho=0$，那么 $\rho\equiv 0$．由此可见，$\mathbf{Z}_h$ 只适用于 $\mathrm{div}\mathbf{i}=0$ 的特殊情况或 $\mathrm{div}\mathbf{D}=0$ 的特殊情况．在应用 $\mathbf{Z}_h$ 之前要先验证一下

$$\mathbf{i}=\mathrm{rot}\mathbf{m}$$

证 根据式(4.8)和(4.9)，$\mathbf{Z}_h$ 满足方程

$$\nabla^2\mathbf{Z}_h-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{Z}_h}{\partial t^2}=-\mathbf{m}$$

因此

$$\mathrm{rot}\mathbf{E}=-\mu\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rotrot}\mathbf{Z}_h$$

$$=-\mu\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$ 式(4.17)得证

$$\mathrm{rot}\mathbf{H}=\mathrm{rot}(\mathrm{rotrot}\mathbf{Z}_h)$$

$$=\mathrm{rot}(\mathrm{graddiv}\mathbf{Z}_h-\nabla^2\mathbf{Z}_h)$$

$$=\mathrm{rot}\left(-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{Z}_h}{\partial t^2}+\mathbf{m}\right)$$

$$=\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\left(-\mu\frac{\partial \mathbf{Z}_h}{\partial t}\right)+\mathrm{rot}\mathbf{m}$$

$$=\varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}+\mathbf{i}$$ 式(4.18)得证

$$\mathrm{div}\mathbf{B}=\mu\mathrm{div}\mathbf{H}=\mu\mathrm{divrot}(\mathrm{rot}\mathbf{Z}_h)=0$$ 式(4.19)得证

$$\mathrm{div}\mathbf{D}=\varepsilon\mathrm{div}\mathbf{E}=\varepsilon\left(-\mu\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{divrot}\mathbf{Z}_h\right)=0$$

式(4.20)得证

$\mathbf{Z}_h$ 通常称为磁赫兹矢量位．

(4) 若函数 φ、$\mathbf{A}$ 由下列表达式确定：

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V\frac{\rho(\mathbf{r}',t)}{r}dv'$$

$$\mathbf{A}=\frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \frac{\mathbf{i}\left(\mathbf{r}',t-\frac{r}{v}\right)-\left[\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi\right]_{t=t-\frac{r}{v}}}{r}dv' \tag{4.26}$$

则

$$\begin{cases}\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}\\ \mathbf{H}=\dfrac{1}{\mu}\mathbf{B}\\ \mathbf{B}=\operatorname{rot}\mathbf{A}\\ \mathbf{E}=-\dfrac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\operatorname{grad}\varphi\end{cases} \tag{4.27}$$

满足麦克斯韦方程组.

证 根据式(4.12)、(4.13)、(4.10)和(4.11)，$\mathbf{A}$、φ 分别满足下列方程:

$$\nabla^2\mathbf{A}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\mu\left(\mathbf{i}-\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi\right)$$

$$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon}$$

而且

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=0$$

因此

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{A}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$ 式(4.17)得证

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{1}{\mu}\operatorname{rotrot}\mathbf{A}=\frac{1}{\mu}(\operatorname{graddiv}\mathbf{A}-\nabla^2\mathbf{A})$$

$$=-\frac{1}{\mu}\nabla^2\mathbf{A}$$

$$=-\frac{1}{\mu}\left[\varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}-\mu\left(\mathbf{i}-\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi\right)\right]$$

$$= \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\varphi\right) + \mathbf{i}$$

$$= \varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{i} \qquad \text{式(4.18)得证}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = \mathrm{divrot}\mathbf{A} = 0 \qquad \text{式(4.19)得证}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = \varepsilon\mathrm{div}\mathbf{E}$$

$$= \varepsilon\left(-\frac{\partial \mathrm{div}\mathbf{A}}{\partial t} - \mathrm{divgrad}\varphi\right)$$

$$= -\varepsilon\nabla^2\varphi = -\varepsilon\left(-\frac{\rho}{\varepsilon}\right)$$

$$= \rho \qquad \text{式(4.20)得证}$$

A、φ 通常称为库仑矢量位和库仑标量位.

(5) 若 **e** 满足方程

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon}\mathbf{e} = \mathbf{i} \tag{4.28}$$

式中 σ 为媒质的导电率; **i** 为局外电流,而 **Z** 满足方程

$$\nabla^2\mathbf{Z} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{Z}}{\partial t^2} - \sigma\mu\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t} = -\frac{\mathbf{e}}{\varepsilon} \tag{4.29}$$

方程中的 ε、μ 和 σ 均为常数,则

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \mathrm{rotrot}\mathbf{Z} - \dfrac{\mathbf{e}}{\varepsilon} \\ \quad = -\varepsilon\mu\dfrac{\partial^2\mathbf{Z}}{\partial t^2} - \sigma\mu\dfrac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t} + \mathrm{graddiv}\mathbf{Z} \\ \mathbf{H} = \varepsilon\dfrac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\mathbf{Z} + \sigma\mathrm{rot}\mathbf{Z} \\ \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \end{cases} \tag{4.30}$$

满足麦克斯韦方程组.

证

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\mathbf{Z} + \sigma\mathrm{rot}\mathbf{Z}\right)$$

$$= -\mu\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \qquad \text{式(4.17)得证}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rotrot}\mathbf{Z} + \sigma\mathrm{rotrot}\mathbf{Z}$$

$$= \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{rotrot}\mathbf{Z} - \frac{\mathbf{e}}{\varepsilon}\right) + \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \sigma\mathrm{rotrot}\mathbf{Z}$$

$$= \varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \sigma\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{e}}{\varepsilon}\right)$$

$$= \varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma\mathbf{E} + \left(\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon}\mathbf{e}\right)$$

$$= \varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma\mathbf{E} + \mathbf{i}$$

$$= \varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{i}_s \qquad \text{式(4.18)得证} \qquad (4.31)$$

式中 $\mathbf{i}_s = \sigma\mathbf{E} + \mathbf{i}$ 为总电流。

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = \mu\mathrm{div}\mathbf{H}$$

$$= \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{divrot}\mathbf{Z} + \sigma\mathrm{divrot}\mathbf{Z}$$

$$= 0 \qquad \text{式(4.19)得证}$$

由式(4.31)得

$$0 = \mathrm{divrot}\mathbf{H} = \varepsilon\frac{\partial \mathrm{div}\mathbf{E}}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{i}_s$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\mathrm{div}\mathbf{E} - \rho) \quad \left(\mathrm{div}\mathbf{i}_s = -\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)$$

因此，$\varepsilon\mathrm{div}\mathbf{E} - \rho = f(x,y,z)$ 与时间无关。

如果在某一时刻之前 $\mathbf{E} = 0$，$\rho = 0$，那么 $f \equiv 0$，于是得

$$\varepsilon\mathrm{div}\mathbf{E} = \rho$$

即

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = \rho \qquad \text{式(4.20)得证}$$

这里，$\mathbf{Z}$ 称为媒质有耗时的电赫兹位.

(6) 若 $\mathbf{A}$ 满足方程

$$\nabla^2\mathbf{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \sigma\mu\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\mu\mathbf{i} \tag{4.32}$$

式中 $\mathbf{i}$ 为局外电流，而 φ 满足方程

$$\nabla^2\varphi - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \sigma\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{4.33}$$

方程中的 ε、μ 和 σ 均为常数，则在

$$\mathrm{div}\mathbf{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \sigma\mu\varphi = 0 \tag{4.34}$$

的条件下，

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A} \\ \mathbf{E} = -\dfrac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\varphi \\ \mathbf{H} = \dfrac{1}{\mu}\mathbf{B} \\ \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \end{cases} \tag{4.35}$$

满足麦克斯韦方程组.

证

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathrm{rot}\mathbf{A}}{\partial t} - \mathrm{rotgrad}\varphi$$

$$= -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \qquad \text{式(4.17)得证}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathrm{rotrot}\mathbf{A}$$

$$= \frac{1}{\mu}(\mathrm{graddiv}\mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A})$$

$$= \frac{1}{\mu}\left[\mathrm{grad}\left(-\varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\sigma\mu\varphi\right)-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}\right.$$

$$\left.-\sigma\mu\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+\mu\mathbf{i}\right]$$

$$= \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\mathrm{grad}\varphi\right)-\sigma\mathrm{grad}\varphi$$

$$-\sigma\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+\mathbf{i}$$

$$= \varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\mathbf{i}+\sigma\left(-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\mathrm{grad}\varphi\right)$$

$$= \varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\mathbf{i}+\sigma\mathbf{E}$$

$$= \varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\mathbf{i}_s(\mathbf{i}_s=\mathbf{i}+\sigma\mathbf{E}) \qquad \text{式(4.18)得证}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{B}=\mathrm{divrot}\mathbf{Z}=0 \qquad \text{式(4.19)得证}$$

$\mathrm{div}\mathbf{D}=\rho$ 的证明与第 5 种情况相同.

这里的 $\mathbf{A}$、φ 称为有损耗时的洛伦兹矢量位和标量位.

4.3 对应于复数麦克斯韦方程组的复电磁位

我们已经证明，麦克斯韦方程组对时间的正弦函数解可以通过解复数麦克斯韦方程组来获得. 与此相应，对复数麦克斯韦方程组同样可以引入电磁位概念. 也就是说，复电磁位是通过它们可以求复麦克斯韦方程组解的这样一些辅助函数. 复电磁位理论与实电磁位的十分相似.

在本节中将先证明几个辅助性的数学结果，为下节中有关复电磁位的证明作好证明前的准备.

首先来证明一个数学公式:

若

$$\mathbf{A}=\frac{\mu}{4\pi}\iiint_V\frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')e^{-ikr}}{r}dv' \tag{4.36}$$

则 $\mathbf{A}$ 满足方程

$$\nabla^2\mathbf{A}+k^2\mathbf{A}=-\mu\mathbf{i}(\mathbf{r}) \tag{4.37}$$

式中 $k=\frac{\omega}{v}=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$；$\omega$ 为角频率；ε、μ 为媒质的介质常数和导磁率，都是常数；$\mathbf{r}'$ 为原点至积分元的矢径；r 为自积分元至观察点的距离；$v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ 为电磁波在媒质中的相速；$\mathbf{r}$ 为原点至观察点的矢径。

现证明如下。满足方程

$$\nabla^2\mathbf{A}'-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}'}{\partial t^2}=-\mu\mathbf{i}(\mathbf{r})e^{i\omega t}$$

的解为

$$\begin{aligned}\mathbf{A}'&=\frac{\mu}{4\pi}\iiint_V\frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')e^{i\omega\left(t-\frac{r}{v}\right)}}{r}dv'\\&=e^{i\omega t}\frac{\mu}{4\pi}\iiint_V\frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')e^{-ikr}}{r}dv'\\&=e^{i\omega t}\mathbf{A}\end{aligned}$$

即

$$\nabla^2\mathbf{A}e^{i\omega t}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{A}e^{i\omega t}=-\mu\mathbf{i}(\mathbf{r})e^{i\omega t}$$

或

$$\nabla^2\mathbf{A}e^{i\omega t}+\omega^2\varepsilon\mu\mathbf{A}e^{i\omega t}=-\mu\mathbf{i}(\mathbf{r})e^{i\omega t}$$

两边约去 $e^{i\omega t}$，并考虑到 $\omega^2\varepsilon\mu=k^2$，得

$$\nabla^2\mathbf{A}+k^2\mathbf{A}=-\mu\mathbf{i}(\mathbf{r})$$

这就是要证明的公式。

用完全相同的方法可以证明：

若函数 φ 由下列表达式确定：

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}')e^{-ikr}}{r}\,dv' \tag{4.38}$$

则 φ 满足方程

$$\nabla^2\varphi + k^2\varphi = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon} \tag{4.39}$$

式中的 $\rho(\mathbf{r})$ 为电荷密度。

若函数 $\mathbf{Z}$ 由下列表达式确定：

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V \frac{\mathbf{e}(\mathbf{r}')e^{-ikr}}{r}\,dv' \tag{4.40}$$

则 $\mathbf{Z}$ 满足方程

$$\nabla^2\mathbf{Z} + k^2\mathbf{Z} = -\frac{\mathbf{e}(\mathbf{r})}{\varepsilon} \tag{4.41}$$

若函数 $\mathbf{Z}_h$ 由下列表达式确定：

$$\mathbf{Z}_h = \frac{1}{4\pi}\iiint_V \frac{\mathbf{m}(\mathbf{r}')e^{-ikr}}{r}\,dv' \tag{4.42}$$

则 $\mathbf{Z}_h$ 满足方程

$$\nabla^2\mathbf{Z}_h + k^2\mathbf{Z}_h = -\mathbf{m}(\mathbf{r}) \tag{4.43}$$

前面已经证明(见式 (4.3) 和 (4.4))，在 $\mathbf{i}(\mathbf{r})e^{i\omega t}$ 表示电流密度和 $\rho(\mathbf{r})e^{i\omega t}$ 表示电荷密度条件下，相应矢量位 $\mathbf{A}e^{i\omega t}$ 与标量位 $\varphi e^{i\omega t}$ 之间存在下列关系(见式(4.5))：

$$\mathrm{div}(\mathbf{A}e^{i\omega t}) = -\varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}(\varphi e^{i\omega t})$$

因此

$$e^{i\omega t}\mathrm{div}\mathbf{A} = -i\omega\varepsilon\mu\varphi e^{i\omega t}$$

即

$$\mathrm{div}\mathbf{A} = -i\omega\varepsilon\mu\varphi$$

另外，还证明了下列情况[见式(4.11)和(4.13)]：若

$$\varphi e^{i\omega t}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V\frac{\rho(\mathbf{r}')e^{i\omega t}}{r}\,dv'$$

则

$$\mathbf{A}'=\frac{\mu}{4\pi}\iiint_V\frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')e^{\,i\omega\left(t-\frac{r}{v}\right)}-\left[\varepsilon\dfrac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi e^{i\omega t}\right]_{t=t-\frac{r}{v}}}{r}\,dv'$$

满足

$$\operatorname{div}\mathbf{A}'=0$$

和

$$\nabla^2\mathbf{A}'+k^2\mathbf{A}'=-\mu(\mathbf{i}(\mathbf{r})e^{i\omega t}-i\omega\varepsilon\operatorname{grad}\varphi e^{i\omega t})$$

即

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=0$$

和

$$\nabla^2\mathbf{A}+k^2\mathbf{A}=-\mu(\mathbf{i}(\mathbf{r})-i\omega\varepsilon\operatorname{grad}\varphi)$$

式中

$$\mathbf{A}=\frac{\mu}{4\pi}\iiint_V\frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')e^{-ikr}-i\omega\varepsilon\operatorname{grad}\varphi e^{-ikr}}{r}\,dv'$$

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V\frac{\rho(\mathbf{r}')}{r}\,dv'$$

上述结果在下一节中都要用到.

4.4 关于复电磁位的几个结果

(1) 若函数 $\mathbf{A}$、φ 满足下列方程组：

$$\begin{cases}\nabla^2\mathbf{A}+k^2\mathbf{A}=-\mu\mathbf{i} & (\mathbf{i}\text{ 为电流密度})\\ \nabla^2\varphi+k^2\varphi=-\dfrac{\rho}{\varepsilon} & (\rho\text{ 为电荷密度})\\ \operatorname{div}\mathbf{A}+i\omega\varepsilon\mu\varphi=0 & (\varepsilon、\mu\text{ 为常数})\end{cases}\tag{4.44}$$

即

$$\mathbf{A}=\frac{\mu}{4\pi}\iiint_V\frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')e^{-ikr}}{r}dv' \tag{4.45}$$

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V\frac{\rho(\mathbf{r}')e^{-ikr}}{r}dv' \tag{4.46}$$

则

$$\begin{cases}\mathbf{E}=-i\omega\mathbf{A}-\mathrm{grad}\varphi\\ \mathbf{B}=\mathrm{rot}\mathbf{A}\\ \mathbf{H}=\dfrac{1}{\mu}\mathbf{B}\\ \mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}\end{cases} \tag{4.47}$$

满足下列麦克斯韦方程组：

$$\begin{cases}\mathrm{rot}\mathbf{E}=-i\omega\mu\mathbf{H} & (4.48)\\ \mathrm{rot}\mathbf{H}=i\omega\varepsilon\mathbf{E}+\mathbf{i} & (4.49)\\ \mathrm{div}\mathbf{B}=0 & (4.50)\\ \mathrm{div}\mathbf{D}=\rho & (4.51)\end{cases}$$

证

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\mathbf{E}&=\mathrm{rot}(-i\omega\mathbf{A}-\mathrm{grad}\varphi)\\&=-i\omega\mathrm{rot}\mathbf{A}=-i\omega\mathbf{B}\\&=-i\omega\mu\mathbf{H}\end{aligned}$$

式(4.48)得证

$$\begin{aligned}i\omega\varepsilon\mathbf{E}+\mathbf{i}&=i\omega\varepsilon(-i\omega\mathbf{A}-\mathrm{grad}\varphi)+\mathbf{i}\\&=\frac{1}{\mu}(k^2\mathbf{A}-i\omega\varepsilon\mu\mathrm{grad}\varphi)+\mathbf{i}\\&=\frac{1}{\mu}(k^2\mathbf{A}+\mathrm{grad}(-i\omega\varepsilon\mu\varphi))+\mathbf{i}\\&=\frac{1}{\mu}(k^2\mathbf{A}+\mathrm{graddiv}\mathbf{A})+\mathbf{i}\\&=\frac{1}{\mu}(k^2\mathbf{A}+\nabla^2\mathbf{A}+\mathrm{rotrot}\mathbf{A})+\mathbf{i}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\mu}(-\mu\mathbf{i}) + \frac{1}{\mu}\mathrm{rotrot}\mathbf{A} + \mathbf{i}$$

$$= \frac{1}{\mu}\mathrm{rotrot}\mathbf{A}$$

$$= \mathrm{rot}\mathbf{H} \qquad \text{式(4.49)得证}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = \mathrm{divrot}\mathbf{A} = 0 \qquad \text{式(4.50)得证}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = \varepsilon\mathrm{div}\mathbf{E}$$

$$= \varepsilon(-i\omega\mathrm{div}\mathbf{A} - \mathrm{divgrad}\varphi)$$

$$= \varepsilon(-i\omega(-i\omega\varepsilon\mu\varphi) - \nabla^2\varphi)$$

$$= \varepsilon\left(-k^2\varphi + k^2\varphi + \frac{\rho}{\varepsilon}\right)$$

$$= \rho \qquad \text{式(4.51)得证}$$

(2) 若函数 $\mathbf{Z}$ 满足下列方程:

$$\nabla^2\mathbf{Z} + k^2\mathbf{Z} = -\frac{\mathbf{e}}{\varepsilon}\left(\mathbf{e} = \frac{\mathbf{i}}{i\omega}\right) \tag{4.52}$$

即

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V \frac{\mathbf{e}(\mathbf{r}')e^{-ikr}}{r}\,dv' \tag{4.53}$$

则

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \mathrm{rotrot}\mathbf{Z} - \dfrac{\mathbf{e}}{\varepsilon} = k^2\mathbf{Z} + \mathrm{graddiv}\mathbf{Z} \\ \mathbf{H} = i\omega\varepsilon\mathrm{rot}\mathbf{Z} \\ \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \end{cases} \tag{4.54}$$

满足麦克斯韦方程组.

证

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = \mathrm{rot}(k^2\mathbf{Z} + \mathrm{graddiv}\mathbf{Z})$$

$$= k^2\mathrm{rot}\mathbf{Z} = (-i\omega\mu)(i\omega\varepsilon\mathrm{rot}\mathbf{Z})$$

$$= -i\omega\mu\mathbf{H} \qquad \text{式(4.48)得证}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = i\omega\varepsilon\,\mathrm{rotrot}\mathbf{Z}$$

$$= i\omega\varepsilon\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{e}}{\varepsilon}\right)$$

$$= i\omega\varepsilon\mathbf{E} + i\omega\varepsilon\frac{\mathbf{e}}{\varepsilon}$$

$$= i\omega\varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{i} \qquad \text{式(4.49)得证}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = \mu\,\mathrm{div}\mathbf{H} = i\omega\mu\varepsilon\,\mathrm{divrot}\mathbf{Z} = 0 \qquad \text{式(4.50)得证}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = \varepsilon\,\mathrm{div}\mathbf{E} = \varepsilon\left(\mathrm{divrot}(\mathrm{rot}\mathbf{Z}) - \frac{1}{\varepsilon}\,\mathrm{div}\mathbf{e}\right)$$

$$= -\frac{1}{i\omega}\,\mathrm{div}\mathbf{i}$$

$$= -\frac{1}{i\omega}(-i\omega\rho)\left(\mathrm{div}\mathbf{i} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} = -i\omega\rho\right)$$

$$= \rho \qquad \text{式(4.51)得证}$$

(3) 若函数 $\mathbf{Z}_h$、$\mathbf{m}$ 满足下列方程组:

$$\begin{cases} \nabla^2\mathbf{Z}_h + k^2\mathbf{Z}_h = -\mathbf{m} \\ \mathrm{rot}\mathbf{m} = \mathbf{i} \quad (\mathrm{div}\mathbf{i} = 0) \end{cases} \tag{4.55}$$

即

$$\mathbf{Z}_h = \frac{1}{4\pi}\iiint_V \frac{\mathbf{m}(\mathbf{r}')\,e^{-ikr}}{r}\,dv' \tag{4.56}$$

则

$$\begin{cases} \mathbf{E} = -i\omega\mu\,\mathrm{rot}\mathbf{Z}_h \\ \mathbf{H} = \mathrm{rotrot}\mathbf{Z}_h \\ \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \end{cases} \tag{4.57}$$

满足麦克斯韦方程组.

证

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -i\omega\mu\,\mathrm{rotrot}\mathbf{Z}_h = -i\omega\mu\mathbf{H}$$

式(4.48)得证

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\mathbf{H} &= \mathrm{rot}(\mathrm{graddiv}\mathbf{Z}_h - \nabla^2\mathbf{Z}_h)\\ &= \mathrm{rotgrad}(\mathrm{div}\mathbf{Z}_h) - \mathrm{rot}\nabla^2\mathbf{Z}_h\\ &= -\mathrm{rot}(-k^2\mathbf{Z}_h - \mathbf{m})\\ &= \omega^2\varepsilon\mu\mathrm{rot}\mathbf{Z}_h + \mathrm{rot}\mathbf{m}\\ &= i\omega\varepsilon(-i\omega\mu\mathrm{rot}\mathbf{Z}_h) + \mathbf{i}\\ &= i\omega\varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{i}\end{aligned}$$

式(4.49)得证

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = \mu\mathrm{div}\mathbf{H} = \mu\mathrm{divrot}(\mathrm{rot}\mathbf{Z}_h) = 0$$

式(4.50)得证

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = \varepsilon\mathrm{div}\mathbf{E} = -i\omega\varepsilon\mu\mathrm{divrot}\mathbf{Z}_h = 0$$

式(4.51)得证

(因为假设了 $\mathrm{div}\mathbf{i} = 0$，而 $\mathrm{div}\mathbf{i} = -i\omega\rho$，所以 $\rho = 0$，与假设条件一致).

(4) 若函数 φ、$\mathbf{A}$ 满足下列方程组:

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon}\\ \nabla^2\mathbf{A} + k^2\mathbf{A} = -\mu(\mathbf{i} - i\omega\varepsilon\mathrm{grad}\varphi)\\ \mathrm{div}\mathbf{A} = 0\end{cases} \tag{4.58}$$

即

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r}\,dv' \tag{4.59}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')e^{-ikr} - i\omega\varepsilon\mathrm{grad}(\varphi e^{-ikr})}{r}\,dv' \tag{4.60}$$

则

$$\begin{cases}\mathbf{E} = -i\omega\mathbf{A} - \mathrm{grad}\varphi\\ \mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A}\\ \mathbf{H} = \dfrac{1}{\mu}\mathbf{B}\\ \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}\end{cases} \tag{4.61}$$

满足麦克斯韦方程组.

证

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\mathbf{E} &= \mathrm{rot}(-i\omega\mathbf{A} - \mathrm{grad}\varphi) \\
&= -i\omega\mathrm{rot}\mathbf{A} = -i\omega\mu\mathbf{H} \qquad \text{式(4.48)得证} \\
\mathrm{rot}\mathbf{H} &= \frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\mathbf{B} \\
&= \frac{1}{\mu}\mathrm{rotrot}\mathbf{A} \\
&= \frac{1}{\mu}(\mathrm{graddiv}\mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A}) \\
&= -\frac{1}{\mu}\nabla^2\mathbf{A} \quad (\mathrm{div}\mathbf{A} = 0) \\
&= \frac{1}{\mu}(k^2\mathbf{A} + \mu(\mathbf{i} - i\omega\varepsilon\mathrm{grad}\varphi)) \\
&= i\omega\varepsilon(-i\omega\mathbf{A} - \mathrm{grad}\varphi) + \mathbf{i} \\
&= i\omega\varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{i} \qquad \text{式(4.49)得证} \\
\mathrm{div}\mathbf{B} &= \mathrm{divrot}\mathbf{A} = 0 \qquad \text{式(4.50)得证} \\
\mathrm{div}\mathbf{D} &= \varepsilon\mathrm{div}\mathbf{E} \\
&= -i\omega\varepsilon\mathrm{div}\mathbf{A} - \varepsilon\mathrm{divgrad}\varphi \\
&= -\varepsilon\nabla^2\varphi = \rho \qquad \text{式(4.51)得证}
\end{aligned}$$

在以上证明中我们所讨论的都是无耗媒质（$\sigma = 0$）情况．下面转入对有耗媒质的讨论．从数学上来说，有耗媒质的特点是 $\sigma \neq 0$.

这时复麦克斯韦方程组可写成

$$\begin{cases}
\mathrm{rot}\mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H} \\
\mathrm{rot}\mathbf{H} = i\omega\varepsilon\mathbf{E} + \sigma\mathbf{E} + \mathbf{i} \\
\mathrm{div}\mathbf{B} = 0 \\
\mathrm{div}\mathbf{D} = \rho
\end{cases} \tag{4.62}$$

方程组中 $\mathbf{i}$ 为局外电流.

令

$$\varepsilon_c = \varepsilon - i\frac{\sigma}{\omega}$$

ε_c 称为复介质常数. 作为一个整体,它只有数学上的意义.但是它的实部 ε 表示媒质的介质常数, 虚部$-\sigma/\omega$ 则反映媒质的导电率 σ 与角频率 ω 之比.

引入 ε_c 后,方程组(4.62)即可写成

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H} & (4.63) \\ \mathrm{rot}\mathbf{H} = i\omega\varepsilon_c\mathbf{E} + \mathbf{i} & (4.64) \\ \mu\mathrm{div}\mathbf{H} = 0 & (4.65) \\ \varepsilon\mathrm{div}\mathbf{E} = \rho & (4.66) \end{cases}$$

与无耗媒质的复麦克斯韦方程组形式几乎完全一致. 但要注意在第二方程中是 ε_c,而在第四方程中则是 ε.

对于有耗媒质,我们有下述两种电磁位的结果.

(5) 若函数 $\mathbf{Z}$ 满足下列方程:

$$\nabla^2\mathbf{Z} + k_c^2\mathbf{Z} = -\frac{\mathbf{i}}{i\omega\varepsilon_c} \qquad (4.67)$$

即

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{4\pi i\omega\varepsilon_c}\iiint_V \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')e^{-ik_c r}}{r}\,dv' \qquad (4.68)$$

(式中 $k_c^2 = \omega^2\mu\varepsilon_c$, 为媒质的复波数)则

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \mathrm{rotrot}\mathbf{Z} - \dfrac{\mathbf{i}}{i\omega\varepsilon_c} \\ \quad = \mathrm{graddiv}\mathbf{Z} + k_c^2\mathbf{Z} \\ \mathbf{H} = i\omega\varepsilon_c\mathrm{rot}\mathbf{Z} \\ \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu H \end{cases} \qquad (4.69)$$

满足复麦克斯韦方程组(4.63)—(4.66)。

证

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\mathbf{E} &= k_c^2\mathrm{rot}\mathbf{Z} \\
&= -i\omega\mu(i\omega\varepsilon_c\mathrm{rot}\mathbf{Z}) \\
&= -i\omega\mu\mathbf{H} && \text{式(4.63)得证} \\
\mathrm{rot}\mathbf{H} &= i\omega\varepsilon_c\mathrm{rotrot}\mathbf{Z} \\
&= i\omega\varepsilon_c\left(\mathrm{rotrot}\mathbf{Z} - \frac{\mathbf{i}}{i\omega\varepsilon_c}\right) + \mathbf{i} \\
&= i\omega\varepsilon_c\mathbf{E} + \mathbf{i} && \text{式(4.64)得证} \\
\mathrm{div}\mathbf{B} &= \mu\mathrm{div}\mathbf{H} \\
&= \mu i\omega\varepsilon_c\mathrm{divrot}\mathbf{Z} \\
&= 0 && \text{式(4.65)得证} \\
\mathrm{div}\mathbf{D} &= \varepsilon\mathrm{div}\mathbf{E}
\end{aligned}$$

由式(4.69)，

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = -\frac{\mathrm{div}\mathbf{i}}{i\omega\varepsilon_c}$$

而

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\mathbf{i} &= \mathrm{div}(\mathbf{i}_s - \sigma\mathbf{E}) \\
&= -i\omega\rho - \sigma\mathrm{div}\mathbf{E} \\
&= -i\omega\rho - \mathrm{div}\mathbf{D}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)
\end{aligned}$$

式中 $\mathbf{i}_s = \mathbf{i} + \sigma\mathbf{E}$，为总电流；$\mathrm{div}\mathbf{i}_s = -i\omega\rho$（连续性方程）。

将以上两式代入，得

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\mathbf{D} &= -\varepsilon\frac{\mathrm{div}\mathbf{i}}{i\omega\varepsilon_c} \\
&= -\varepsilon\frac{-i\omega\rho - \mathrm{div}\mathbf{D}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)}{i\omega\varepsilon_c}
\end{aligned}$$

即

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = \rho \qquad \text{式(4.66)得证}$$

(6) 若函数 $\mathbf{A}$、φ 满足下列方程组:

$$\begin{cases} \nabla^2\mathbf{A} + k_c^2\mathbf{A} = -\mu\mathbf{i} \\ \nabla^2\varphi + k_c^2\varphi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon} \\ \mathrm{div}\mathbf{A} + i\omega\varepsilon_c\mu\varphi = 0 \end{cases} \tag{4.70}$$

($\mathbf{i}$ 为局外电流)即

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')e^{-ik_c r}}{r}\,dv' \tag{4.71}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}')e^{-ik_c r}}{r}\,dv' \tag{4.72}$$

(证明见 4.11 节和 4.13 节)则

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A} \\ \mathbf{E} = -i\omega\mathbf{A} - \mathrm{grad}\varphi \\ \mathbf{H} = \dfrac{1}{\mu}\mathbf{B} \\ \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \end{cases} \tag{4.73}$$

满足复麦克斯韦方程组(4.63)—(4.66)。

证

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -i\omega\mathrm{rot}\mathbf{A} = -i\omega\mathbf{B} = -i\omega\mu\mathbf{H} \qquad \text{式(4.63)得证}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathrm{rotrot}\mathbf{A}$$

$$= \frac{1}{\mu}(\mathrm{graddiv}\mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A})$$

$$= \frac{1}{\mu}(\mathrm{grad}(-i\omega\varepsilon_c\mu\varphi) + k_c^2\mathbf{A} + \mu\mathbf{i})$$

$$= -i\omega\varepsilon_c\mathrm{grad}\varphi + \omega^2\varepsilon_c\mathbf{A} + \mathbf{i}$$

$$= -i\omega\varepsilon_c(-\mathbf{E} - i\omega\mathbf{A}) + \omega^2\varepsilon_c\mathbf{A} + \mathbf{i}$$

$$= i\omega\varepsilon_c\mathbf{E} + \mathbf{i} \qquad \text{式(4.64)得证}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = \mathrm{divrot}\mathbf{A} = 0 \qquad \text{式(4.65)得证}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = \varepsilon\mathrm{div}\mathbf{E}$$

$$= \varepsilon(-i\omega\mathrm{div}\mathbf{A} - \mathrm{divgrad}\varphi)$$

$$= \varepsilon(-i\omega(-i\omega\varepsilon_c\mu\varphi) - \nabla^2\varphi)$$

$$= \varepsilon\left(-k_c^2\varphi + k_c^2\varphi + \frac{\rho}{\varepsilon}\right)$$

$$= \rho \qquad \text{式(4.66)得证}$$

至此，我们对几种常用的电磁位都作了详细的证明．在实际应用的时候只需先求出电磁位，再利用相应的公式求出 **E**、**H**、**D**、**B** 即可．实际应用的例子将在 4.7 节和 4.9 节中给出．在下两节中我们将把电磁位的理论推广到磁流麦克斯韦方程组和广义麦克斯韦方程组的情况，从而获得一个完整的电磁位系统．在第五章中我们将利用电磁位和等效定理来处理由已知场源和边界值求辐射场的问题．读者将会看到，用这种方法来处理问题比用其他方法简便得多．这正是电磁位和等效原理获得广泛应用的主要原因．

4.5 磁流麦克斯韦方程组的电磁位

对于复磁流麦克斯韦方程组

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\mathbf{E}_m = -i\omega\mu_m\mathbf{H}_m - \mathbf{i}_m \\ \mathrm{rot}\mathbf{H}_m = i\omega\varepsilon_m\mathbf{E}_m \\ \mathrm{div}\mathbf{B}_m = \rho_m \\ \mathrm{div}\mathbf{D}_m = 0 \\ \mathbf{B}_m = \mu_m\mathbf{H}_m \\ \mathbf{D}_m = \varepsilon_m\mathbf{E}_m \end{cases} \tag{4.74}$$

可以利用对偶原理立即写出它的有关电磁位结果，而不需要另加证明．为便于查阅起见，现将有关结果列举如下．

(1) 若函数 $\mathbf{F}$、φ_m 满足下列方程组：

$$\begin{cases} \nabla^2\mathbf{F} + k^2\mathbf{F} = -\varepsilon_m\mathbf{i}_m \quad (k^2 = \omega^2\varepsilon_m\mu_m) \\ \nabla^2\varphi_m + k^2\varphi_m = -\dfrac{\rho_m}{\mu_m} \\ \mathrm{div}\mathbf{F} + i\omega\mu_m\varepsilon_m\varphi_m = 0 \end{cases} \tag{4.75}$$

(式中 $\mathbf{i}_m$ 为磁流密度；ρ_m 为磁荷密度；ε_m、μ_m 为常数)即

$$\mathbf{F} = \frac{\varepsilon_m}{4\pi}\iiint_V \frac{\mathbf{i}_m(\mathbf{r}')e^{-ikr}}{r}dv' \tag{4.76}$$

$$\varphi_m = \frac{1}{4\pi\mu_m}\iiint_V \frac{\rho_m(\mathbf{r}')e^{-ikr}}{r}dv' \tag{4.77}$$

则

$$\begin{cases} \mathbf{H}_m = -i\omega\mathbf{F} - \mathrm{grad}\varphi_m \\ \mathbf{D}_m = -\mathrm{rot}\mathbf{F} \\ \mathbf{E}_m = \dfrac{1}{\varepsilon_m}\mathbf{D}_m \\ \mathbf{B}_m = \mu_m\mathbf{H}_m \end{cases} \tag{4.78}$$

满足复磁流麦克斯韦方程组．

(2) 若函数 $\mathbf{Z}_m$ 满足下列方程：

$$\nabla^2\mathbf{Z}_m + k^2\mathbf{Z}_m = -\frac{\mathbf{e}_m}{\mu_m} \quad \mathbf{e}_m = \frac{\mathbf{i}_m}{i\omega} \tag{4.79}$$

即

$$\mathbf{Z}_m = \frac{1}{4\pi\mu_m}\iiint_V \frac{\mathbf{e}_m(\mathbf{r}')e^{-ikr}}{r}dv \tag{4.80}$$

则

$$\begin{cases} \mathbf{H}_m = \text{rotrot}\mathbf{Z}_m - \dfrac{\mathbf{e}_m}{\mu_m} \\ \quad\ = k^2\mathbf{Z}_m + \text{graddiv}\mathbf{Z}_m \\ \mathbf{E}_m = -i\omega\mu_m\text{rot}\mathbf{Z}_m \\ \mathbf{B}_m = \mu_m\mathbf{H}_m \\ \mathbf{D}_m = \varepsilon_m\mathbf{E}_m \end{cases} \tag{4.81}$$

满足复磁流麦克斯韦方程组.

(3) 若函数 $\mathbf{Z}_{hm}$、$\mathbf{m}_m$ 满足下列方程组:

$$\begin{cases} \nabla^2\mathbf{Z}_{hm} + k^2\mathbf{Z}_{hm} = -\mathbf{m}_m \\ \text{rot}\ \mathbf{m}_m = \mathbf{i}_m \quad (\text{div}\ \mathbf{i}_m = 0) \end{cases} \tag{4.82}$$

即

$$\mathbf{Z}_{hm} = \frac{1}{4\pi}\iiint_V \frac{\mathbf{m}_m(\mathbf{r}')e^{-ikr}}{r}\,dv' \tag{4.83}$$

则

$$\begin{cases} \mathbf{H}_m = -i\omega\varepsilon_m\ \text{rot}\,\mathbf{Z}_{hm} \\ \mathbf{E}_m = -\text{rotrot}\ \mathbf{Z}_{hm} \\ \mathbf{B}_m = \mu_m\mathbf{H}_m \\ \mathbf{D}_m = \varepsilon_m\mathbf{E}_m \end{cases} \tag{4.84}$$

满足复磁流麦克斯韦方程组.

(4) 若函数 φ_m、$\mathbf{F}$ 满足下列方程组:

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi_m = -\dfrac{\rho_m}{\mu_m} \\ \nabla^2\mathbf{F} + k^2\mathbf{F} = -\varepsilon_m(\mathbf{i}_m - i\omega\mu_m\text{grad}\varphi_m) \\ \text{div}\mathbf{F} = 0 \end{cases} \tag{4.85}$$

即

$$\varphi_m = \frac{1}{4\pi\mu_m}\iiint_V \frac{\rho_m(\mathbf{r}')}{r}\,dv' \tag{4.86}$$

$$\mathbf{F}=\frac{\varepsilon_m}{4\pi}\iiint_V\frac{\mathbf{i}_m(\mathbf{r}')e^{-ikr}-i\omega\mu_m\mathrm{grad}(\varphi_m e^{-ikr})}{r}dv' \tag{4.87}$$

则

$$\begin{cases}\mathbf{H}_m=-i\omega\mathbf{F}-\mathrm{grad}\varphi_m\\ \mathbf{D}_m=-\mathrm{rot}\mathbf{F}\\ \mathbf{E}_m=\dfrac{1}{\varepsilon_m}\mathbf{D}_m\\ \mathbf{B}_m=\mu_m\mathbf{H}_m\end{cases} \tag{4.88}$$

满足复磁流麦克斯韦方程组.

4.6 广义麦克斯韦方程组的电磁位

将 4.4 节和 4.5 节中的电磁位相应地相加，并令 $\varepsilon=\varepsilon_m$ 和 $\mu=\mu_m$，就可得到广义麦克斯韦方程组的电磁位. 现将有关结果列举如下.

(1)

$$\begin{cases}\mathbf{E}=-i\omega\mathbf{A}-\mathrm{grad}\varphi-\dfrac{1}{\varepsilon}\mathrm{rot}\mathbf{F}\\ \mathbf{B}=\mathrm{rot}\mathbf{A}-i\omega\mu\mathbf{F}-\mu\mathrm{grad}\varphi_m\\ \mathbf{H}=\dfrac{1}{\mu}\mathbf{B}\\ \mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}\end{cases} \tag{4.89}$$

满足广义麦克斯韦方程组，式中

$$\mathbf{A}=\frac{\mu}{4\pi}\iiint_V\frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')e^{-ikr}}{r}dv' \tag{4.90}$$

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V\frac{\rho(\mathbf{r}')e^{-ikr}}{r}dv' \tag{4.91}$$

$$\mathbf{F}=\frac{\varepsilon}{4\pi}\iiint_V\frac{\mathbf{i}_m(r')e^{-ikr}}{r}dv' \tag{4.92}$$

$$\varphi_m=\frac{1}{4\pi\mu}\iiint_V\frac{\rho_m(\mathbf{r}')e^{-ikr}}{r}dv' \tag{4.93}$$

(2)

$$\begin{cases}\mathbf{E}=\mathrm{rotrot}\mathbf{Z}-\dfrac{\mathbf{e}}{\varepsilon}-i\omega\mu\mathrm{rot}\mathbf{Z}_m\\[2ex]\mathbf{H}=i\omega\varepsilon\mathrm{rot}\mathbf{Z}+\mathrm{rotrot}\mathbf{Z}_m-\dfrac{\mathbf{e}_m}{\mu}\end{cases} \tag{4.94}$$

或

$$\begin{cases}\mathbf{E}=k^2\mathbf{Z}+\mathrm{graddiv}\mathbf{Z}-i\omega\mu\mathrm{rot}\mathbf{Z}_m\\\mathbf{H}=i\omega\varepsilon\mathrm{rot}\mathbf{Z}+k^2\mathbf{Z}_m+\mathrm{graddiv}\,\mathbf{Z}_m\end{cases} \tag{4.95}$$

满足广义麦克斯韦方程组，式中

$$\mathbf{e}=\frac{\mathbf{i}}{i\omega}\qquad\mathbf{e}_m=\frac{\mathbf{i}_m}{i\omega}$$

$$\mathbf{Z}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V\frac{\mathbf{e}(\mathbf{r}')e^{-ikr}}{r}dv' \tag{4.96}$$

$$\mathbf{Z}_m=\frac{1}{4\pi\mu}\iiint_V\frac{\mathbf{e}_m(\mathbf{r}')e^{-ikr}}{r}dv' \tag{4.97}$$

(3) 若

$$\begin{cases}\nabla^2\mathbf{Z}_h+k^2\mathbf{Z}_h=-\mathbf{m}\\\mathrm{rot}\mathbf{m}=\mathbf{i}\quad(\mathrm{divi}=0)\end{cases} \tag{4.98}$$

即

$$\mathbf{Z}_h=\frac{1}{4\pi}\iiint_V\frac{\mathbf{m}(\mathbf{r}')e^{-ikr}}{r}dv' \tag{4.99}$$

以及

$$\begin{cases}\nabla^2\mathbf{Z}_{hm}+k^2\mathbf{Z}_{hm}=-\mathbf{m}_m\\\mathrm{rot}\mathbf{m}_m=\mathbf{i}_m\qquad(\mathrm{divi}_m=0)\end{cases} \tag{4.100}$$

即

$$\mathbf{Z}_{hm}=\frac{1}{4\pi}\iiint_V\frac{\mathbf{m}_m(\mathbf{r}')e^{-ikr}}{r}dv' \tag{4.101}$$

则

$$\begin{cases}\mathbf{E}=-i\omega\mu\mathrm{rot}\mathbf{Z}_h-\mathrm{rotrot}\mathbf{Z}_{hm}\\ \mathbf{H}=\mathrm{rotrot}\mathbf{Z}_h-i\omega\varepsilon\mathrm{rot}\mathbf{Z}_{hm}\\ \mathbf{B}=\mu\mathbf{H}\\ \mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}\end{cases} \tag{4.102}$$

满足广义麦克斯韦方程组。

(4) 若

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi=-\dfrac{\rho}{\varepsilon}\\ \nabla^2\mathbf{A}+k^2\mathbf{A}=-\mu(\mathbf{i}-i\omega\varepsilon\mathrm{grad}\varphi)\\ \mathrm{div}\mathbf{A}=0\end{cases} \tag{4.103}$$

即

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V\frac{\rho(\mathbf{r}')}{r}dv' \tag{4.104}$$

$$\mathbf{A}=\frac{\mu}{4\pi}\iiint_V\frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')e^{-ikr}-i\omega\varepsilon\mathrm{grad}(\varphi e^{-ikr})}{r}dv' \tag{4.105}$$

以及

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi_m=-\dfrac{\rho_m}{\mu}\\ \nabla^2\mathbf{F}+k^2\mathbf{F}=-\varepsilon(\mathbf{i}_m-i\omega\mu\mathrm{grad}\varphi_m)\\ \mathrm{div}\mathbf{F}=0\end{cases} \tag{4.106}$$

即

$$\varphi_m=\frac{1}{4\pi\mu}\iiint_V\frac{\rho_m(\mathbf{r}')}{r}dv' \tag{4.107}$$

$$\mathbf{F}=\frac{\varepsilon}{4\pi}\iiint_{V}\frac{\mathbf{i}_m(\mathbf{r}')e^{-ikr}-i\omega\mu\mathrm{grad}(\varphi_m e^{-ikr})}{r}dv' \tag{4.108}$$

则

$$\begin{cases}\mathbf{E}=-i\omega\mathbf{A}-\mathrm{grad}\varphi-\dfrac{1}{\varepsilon}\mathrm{rot}\mathbf{F}\\ \mathbf{B}=\mathrm{rot}\mathbf{A}-i\omega\mu\mathbf{F}-\mu\mathrm{grad}\varphi_m\\ \mathbf{H}=\dfrac{1}{\mu}\mathbf{B}\\ \mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}\end{cases} \tag{4.109}$$

满足广义麦克斯韦方程组.

本节中广义麦克斯韦方程组指的都是广义麦克斯韦方程组的复数形式,即

$$\begin{cases}\mathrm{rot}\mathbf{E}=-i\omega\mu\mathbf{H}-\mathbf{i}_m\\ \mathrm{rot}\mathbf{H}=i\omega\varepsilon\mathbf{E}+\mathbf{i}\\ \mathrm{div}\mathbf{D}=\rho\\ \mathrm{div}\mathbf{B}=0\\ \mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}\\ \mathbf{B}=\mu\mathbf{H}\end{cases}$$

对于一般时间关系下的广义麦克斯韦方程组，可以用同样的方法处理，即将麦克斯韦方程组的电磁位和磁流麦克斯韦方程组的电磁位相加就行了.

4.7 电偶极子的场

电偶极子定义为一组电量大小相等符号相反的两个点电荷. 这两个点电荷之间的距离很小，但电荷量与距离的乘积为有限值(不等于零). 在电磁场理论中所考虑的是距离趋于

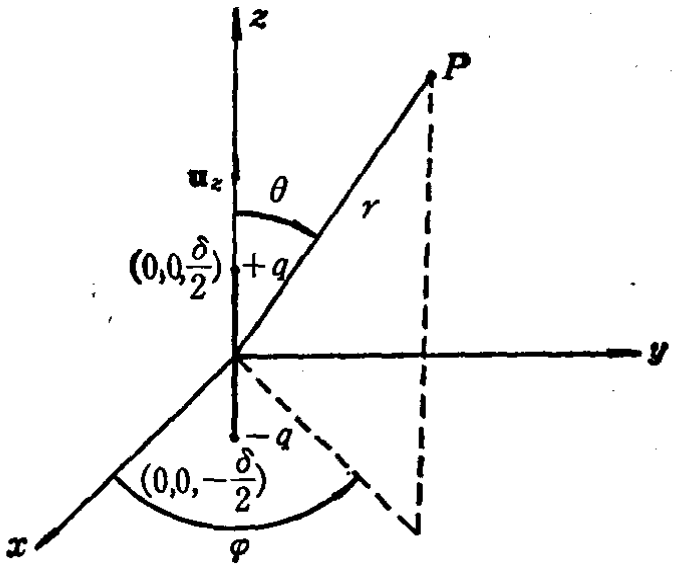

图 4.2　电偶极子及坐标系统

零，同时电荷趋于无穷大，而它们的乘积的极限为一不等于零的有限值这样一种极限情况。

选取如图 4.2 所示的坐标系统。

令电荷量为 q，两电荷之间的距离为 δ，又令 $\boldsymbol{\delta}=\mathbf{u}_z\delta$，$\mathbf{u}_z$ 的方向从负电荷指向正电荷并与 z 轴的正向上的单位矢量重合，则偶极子的矩定义为

$$\mathbf{p}_e = q\boldsymbol{\delta} \tag{4.110}$$

在电磁场理论中所考虑的是极限情况，即

$$\mathbf{p}_e = \lim_{\substack{q\to\infty \\ \delta\to 0}} q\boldsymbol{\delta} \tag{4.111}$$

并假定此极限取有限值。在正弦电磁场情况下，

$$q = q_0 e^{i\omega t} \tag{4.112}$$

式中 q_0 为电荷量的幅值。此时偶极子矩的值

$$p_e = q\delta = q_0\delta e^{i\omega t} = p_{e0}e^{i\omega t} \tag{4.113}$$

之幅值为

$$p_{e0} = q_0\delta \tag{4.114}$$

两点电荷之间的电流为

$$\mathbf{I} = \frac{dq}{dt}\mathbf{u}_z = i\omega q_0 e^{i\omega t}\mathbf{u}_z = I_0 e^{i\omega t}\mathbf{u}_z \tag{4.115}$$

因此

$$p_{e0} = q_0\delta = \frac{I_0}{i\omega}\delta \tag{4.116}$$

在上述情况下，显然，在电赫兹位公式中应取

$$\begin{cases} \mathbf{i} = \mathbf{I}_0 \\ \mathbf{e} = \dfrac{\mathbf{I}_0}{i\omega} \end{cases} \tag{4.117}$$

由此

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V \frac{\mathbf{I}_0}{i\omega}\frac{e^{-ikr}}{r}dv' \tag{4.118}$$

因为 $\mathbf{I}_0$ 集中在一条线（z 轴）上，所以体积积分退化为线积分．又因偶极子无限小，$\dfrac{e^{-ikr}}{r}$ 可提到积分号外，最后得

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{-\delta/2}^{\delta/2}\frac{I_0}{i\omega r}e^{-ikr}dz\cdot\mathbf{u}_z \\ &= \frac{1}{4\pi i\omega\varepsilon}\frac{I_0\delta}{r}e^{-ikr}\mathbf{u}_z \\ &= \frac{\mathbf{p}_{e0}}{4\pi\varepsilon r}e^{-ikr} \end{aligned} \tag{4.119}$$

式中

$$\mathbf{p}_{e0} = \lim_{\substack{\delta\to 0\\ q_0\to\infty}}\frac{\mathbf{I}_0\delta}{i\omega} = \lim_{\substack{q_0\to\infty\\ \delta\to\infty}} q_0\delta\mathbf{u}_z$$

为偶极子矩的幅度．

在求出矢量位 $\mathbf{Z}$ 的表达式之后，代入 $\mathbf{E}$、$\mathbf{H}$ 的公式中即可得偶极子的 $\mathbf{E}$、$\mathbf{H}$ 表达式．

根据式(4.54)，

$$\mathbf{H} = i\omega\varepsilon\,\mathrm{rot}\mathbf{Z} = i\omega\varepsilon\,\mathrm{rot}\frac{\mathbf{p}_{e0}}{4\pi\varepsilon r}e^{-ikr}$$

$$= \frac{i\omega\varepsilon}{4\pi\varepsilon}\,\mathrm{rot}\mathbf{p}_{e0}\frac{e^{-ikr}}{r}$$

即

$$\mathbf{H} = \frac{i\omega}{4\pi}\,\mathrm{rot}\mathbf{p}_{e0}\frac{e^{-ikr}}{r} = \frac{i\omega}{4\pi}\mathrm{rot}(\mathbf{p}_{e0}\varphi) \tag{4.120}$$

式中

$$\varphi = \frac{e^{-ikr}}{r}$$

同理，在场源(偶极子)之外由式(4.54)得

$$\mathbf{E} = \mathrm{rotrot}\mathbf{Z} = \mathrm{rotrot}\,\frac{\mathbf{p}_{e0}}{4\pi\varepsilon r}\,e^{-ikr}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\,\mathrm{rotrot}\left(\mathbf{p}_{e0}\frac{e^{-ikr}}{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\mathrm{rotrot}(\mathbf{p}_{e0}\varphi) \tag{4.121}$$

式中

$$\varphi = \frac{e^{-ikr}}{r}$$

现在根据以上公式来进行具体计算.

先计算 **H**. 这里

$$\mathbf{H} = \frac{i\omega}{4\pi}\mathrm{rot}(\mathbf{p}_{e0}\varphi) = \frac{i\omega}{4\pi}\nabla\times\mathbf{p}_{e0}\frac{e^{-ikr}}{r}$$

$$= \frac{i\omega}{4\pi}\nabla\times p_{e0}\frac{e^{-ikr}}{r}\mathbf{u}_z = \frac{i\omega}{4\pi}\nabla\times\mathbf{A} \tag{4.122}$$

式中

$$\mathbf{A} = p_{e0}\frac{e^{-ikr}}{r}\mathbf{u}_z$$

在球座标系统中，**A** 之 $\mathbf{u}_\theta$ 方向的分量是

$$\mathbf{A}_\theta = -p_{e0}\frac{e^{-ikr}}{r}\sin\theta\mathbf{u}_\theta \tag{4.123}$$

它只与 r 和 θ 有关.

$\mathbf{u}_r$ 方向上的分量是

$$\mathbf{A}_r = p_{c0}\frac{e^{-ikr}}{r}\cos\theta\mathbf{u}_r \tag{4.124}$$

它也只与 r 和 θ 有关.

因为 $\mathbf{A}$ 与 xy 平面垂直,所以 $\mathbf{u}_\varphi$ 方向上的分量

$$\mathbf{A}_\varphi = 0 \tag{4.125}$$

根据球坐标中 rot$\mathbf{A}$ 的表达式

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\mathbf{A} = {} & \mathbf{u}_r\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\varphi\sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right] \\ & + \mathbf{u}_\theta\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right] \\ & + \mathbf{u}_\varphi\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\end{aligned} \tag{4.126}$$

得

$$\mathrm{rot}_r\mathbf{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\varphi\sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right] = 0$$

$$\mathrm{rot}_\theta\mathbf{A} = \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right] = 0$$

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}_\varphi\mathbf{A} = {} & \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right] \\ = {} & -\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(-p_{c0}\frac{e^{-ikr}}{r}\sin\theta\right)\right]\right. \\ & \left. -\frac{\partial}{\partial\theta}\left(p_{c0}\frac{e^{-ikr}}{r}\cos\theta\right)\right\} \\ = {} & \frac{1}{r}\left[-p_{c0}\sin\theta(-ik)e^{-ikr} + p_{c0}\sin\theta\frac{e^{-ikr}}{r}\right] \\ = {} & \frac{1}{r}\left[p_{c0}\sin\theta(ik)e^{-ikr} + p_{c0}\sin\theta\frac{e^{-ikr}}{r}\right]\end{aligned}$$

最终,将时间关系 $e^{i\omega t}$ 也考虑进去后得

$$\begin{cases} H_r = 0 \\ H_\theta = 0 \end{cases} \tag{4.127}$$

$$H_\varphi = \frac{i\omega}{4\pi} e^{i\omega t} \cdot \frac{1}{r}\left[p_{c0} \sin\theta (ik) e^{-ikr} + p_{c0} \sin\theta \frac{e^{-ikr}}{r} \right]$$

$$= \frac{i\omega}{4\pi}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r}\right) \sin\theta \cdot p_{c0} e^{i(\omega t - kr)} \tag{4.128}$$

H_φ 只与 r 和 θ 有关.

再计算 **E**. 由麦克斯韦方程组知

$$\mathbf{E} = \frac{1}{i\omega\varepsilon} \mathrm{rot}\mathbf{H}$$

由于 **H** 只有 $\mathbf{u}_\varphi$ 方向上的分量,将时间关系 $e^{i\omega t}$ 也考虑进去后,利用球坐标中 rot**H** 的公式得

$$E_r = \frac{1}{i\omega\varepsilon} \cdot \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{i\omega}{4\pi}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r}\right) \sin\theta p_{c0} e^{i(\omega t - kr)} \right)\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r}\right) p_{c0} e^{i(\omega t - kr)} 2\sin\theta\cos\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r^3} + \frac{ik}{r^2}\right) \cos\theta p_{c0} e^{i(\omega t - kr)} \tag{4.129}$$

$$E_\theta = \frac{1}{i\omega\varepsilon}\frac{1}{r}\left[-\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{i\omega}{4\pi}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r}\right) \sin\theta p_{c0} e^{i(\omega t - kr)} \right)\right]$$

$$= \frac{-\sin\theta p_{c0} e^{i\omega t}}{4\pi\varepsilon r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r} e^{-ikr}\right) + ik \frac{\partial}{\partial r} e^{-ikr}\right]$$

$$= \frac{-\sin\theta p_{c0} e^{i\omega t}}{4\pi\varepsilon r}\left[-\frac{1}{r^2} e^{-ikr} + \frac{1}{r}(-ik) e^{-ikr} + ik(-ik) e^{-ikr}\right]$$

$$= \frac{-\sin\theta p_{c0} e^{i(\omega t - kr)}}{4\pi\varepsilon r}\left[-\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r} + k^2\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r^3}+\frac{ik}{r^2}-\frac{k^2}{r}\right)\sin\theta p_{e0}e^{i(\omega t-kr)} \tag{4.130}$$

因为

$$H_\theta = H_r = 0$$

所以

$$E_\varphi = 0 \tag{4.131}$$

4.8 磁偶极子的场

根据电偶极子场的表达式，可以直接用对偶原理写出磁偶极子场的表达式。

由

$$\mathbf{H} = \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\mathbf{Z}$$

得

$$-\mathbf{E}_m = \mu_m\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\mathbf{Z}_m$$

或

$$\mathbf{E}_m = -\mu_m\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\mathbf{Z}_m \tag{4.132}$$

此处

$$\begin{cases}\mathbf{Z}_m = \dfrac{\mathbf{p}_{m0}}{4\pi\mu_m r}e^{-ikr} = \dfrac{\mathbf{p}_{m0}}{4\pi\mu_m}\varphi \\ \varphi = \dfrac{e^{-ikr}}{r}\end{cases} \tag{4.133}$$

在正弦电磁场情况下，若 $\mu_m = \mu =$ 常数，则

$$\mathbf{E}_m = -\mu i\omega\mathrm{rot}\left(\frac{\mathbf{p}_{m0}}{4\pi\mu}\varphi\right)$$

$$= -\frac{i\omega}{4\pi}\,\mathrm{rot}(\mathbf{p}_{m0}\varphi) \tag{4.134}$$

由

$$\mathbf{E} = \mathrm{rotrot}\mathbf{Z} - \frac{\mathbf{p}_{e0}}{\varepsilon}$$

得

$$\mathbf{H}_m = \mathrm{rotrot}\mathbf{Z}_m - \frac{\mathbf{p}_{m0}}{\mu_m}$$

$$= \frac{1}{4\pi\mu}\,\mathrm{rotrot}(\mathbf{p}_{m0}\varphi) - \frac{\mathbf{p}_{m0}}{\mu} \tag{4.135}$$

由

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V \frac{\mathbf{p}_{e0}(\mathbf{r}')e^{-ikr}}{r}\,dv'$$

得

$$\mathbf{Z}_m = \frac{1}{4\pi\mu}\iiint_V \frac{\mathbf{p}_{m0}(\mathbf{r}')e^{-ikr}}{r}\,dv'$$

利用对偶原理立即可写出下列磁偶极子的场：

$$\begin{cases} H_{mr} = \dfrac{1}{2\pi\mu}\left(\dfrac{1}{r^3} + \dfrac{ik}{r^2}\right)\cos\theta \cdot p_{m0}e^{i(\omega t - kr)} \\ H_{m\theta} = \dfrac{1}{4\pi\mu}\left(\dfrac{1}{r^3} + \dfrac{ik}{r^2} - \dfrac{k^2}{r}\right)\sin\theta \cdot p_{m0}e^{i(\omega t - kr)} \\ E_{m\varphi} = -\dfrac{i\omega}{4\pi}\left(\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{ik}{r}\right)\sin\theta \cdot p_{m0}e^{i(\omega t - kr)} \\ E_{mr} = E_{m\theta} = 0 \\ H_{m\varphi} = 0 \end{cases} \tag{4.136}$$

4.9 小电流环的场

利用 4.4 节复电磁位的结果 2，可以很快地求出小电流环

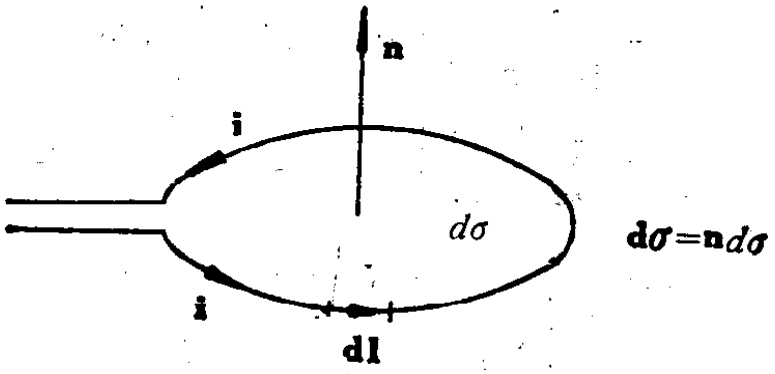

图 4.3 小电流环

(指无限小电流环)的场(见图 4.3).

因为

$$\mathbf{e}=\frac{\mathbf{i}}{i\omega} \tag{4.137}$$

所以

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}&=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V\frac{\mathbf{e}(\mathbf{r}')e^{-ikr}}{r}dv'\\&=\frac{1}{4\pi i\omega\varepsilon}\iiint_V\frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')e^{-ikr}}{r}dv'\end{aligned} \tag{4.138}$$

但 i 集中在线形的环上，因此体积积分退化为对环的线积分. 另外，由于环很小，故可认为环上电流是均匀且同相分布的，幅度与 $\mathbf{r}'$ 无关为常数 I，于是 $\mathbf{Z}$ 的表达式变成

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}&=\frac{1}{4\pi i\omega\varepsilon}\oint_l I\frac{e^{-ikr}}{r}d\mathbf{l}\\&=\frac{I}{4\pi i\omega\varepsilon}\oint_l\frac{e^{-ikr}}{r}d\mathbf{l}\end{aligned} \tag{4.139}$$

参照第一章中的公式(1.47)

$$\oint_l\varphi d\mathbf{l}=\iint_s[\mathbf{n}\times\nabla'\varphi]d\sigma$$

得

$$\mathbf{Z} = \frac{I}{4\pi i\omega\varepsilon}\iint_S \left[\mathbf{n}\times\nabla'\frac{e^{-ikr}}{r}\right]d\sigma$$
$$= \frac{-1}{4\pi i\omega\varepsilon}\iint_S \left[\mathbf{n}\times\nabla I\frac{e^{-ikr}}{r}\right]d\sigma$$
$$= \frac{1}{4\pi i\omega\varepsilon}\nabla\times I\iint_S \mathbf{n}\frac{e^{-ikr}}{r}d\sigma$$
$$= \frac{1}{4\pi i\omega\varepsilon}\mathrm{rot}\left(I\iint_S \mathbf{n}\frac{e^{-ikr}}{r}d\sigma\right) \qquad (4.140)$$

式中的 ∇' 表示对场源点微分，∇ 表示对观察点微分。当环很小时，

$$I\iint_S \frac{\mathbf{n}e^{-ikr}}{r}d\sigma \approx I\frac{e^{-ikr}}{r}\iint_S \mathbf{n}d\sigma$$
$$= \frac{e^{-ikr}}{r}\mathbf{m} \qquad (4.141)$$

式中

$$\mathbf{m} = I\iint_S \mathbf{n}d\sigma \qquad (4.142)$$

表示环的电流矩。最后可得

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{4\pi i\omega\varepsilon}\mathrm{rot}\left(\mathbf{m}\frac{e^{-ikr}}{r}\right) \qquad (4.143)$$

将 $\mathbf{Z}$ 值代入求 $\mathbf{E}$、$\mathbf{H}$ 的公式(4.54)中得

$$\mathbf{H} = i\omega\varepsilon\mathrm{rot}\mathbf{Z}$$
$$= \frac{i\omega\varepsilon}{4\pi i\omega\varepsilon}\mathrm{rotrot}\left(\mathbf{m}\frac{e^{-ikr}}{r}\right)$$
$$= \frac{1}{4\pi\mu}\mathrm{rotrot}\left(\mu\mathbf{m}\frac{e^{-ikr}}{r}\right) \qquad (4.144)$$

在无源处 $(r \neq 0)$，

$$\mathrm{div}\mathbf{Z} = \frac{1}{4\pi i\omega\varepsilon}\mathrm{divrot}\left(\mathbf{m}\frac{e^{-ikr}}{r}\right) = 0$$

于是

$$\mathbf{E} = k^2\mathbf{Z} + \text{graddiv}\mathbf{Z} = k^2\mathbf{Z}$$
$$= \frac{\omega^2\varepsilon\mu}{4\pi i\omega\varepsilon}\,\text{rot}\left(\mathbf{m}\frac{e^{-ikr}}{r}\right)$$
$$= \frac{-i\omega\mu}{4\pi}\,\text{rot}\left(\mathbf{m}\frac{e^{-ikr}}{r}\right)$$
$$= \frac{-i\omega}{4\pi}\,\text{rot}\left(\mu\mathbf{m}\frac{e^{-ikr}}{r}\right) \qquad (4.145)$$

从式(4.134)、(4.135)、(4.144)和(4.145)的比较中可以看出，如果

$$\mathbf{p}_{m0} = \mu\mathbf{m} \qquad (4.146)$$

那么，电流环的场（电流矩为 $\mathbf{m}$）与磁偶极子矩为 $\mathbf{p}_{m0}$ 的磁偶极子场等效．因此，利用式(4.136)可直接写出电流环的场：

$$H_r = \frac{1}{2\pi\mu}\left(\frac{1}{r^3} + \frac{ik}{r^2}\right)\cos\theta\mu m e^{i(\omega t-kr)}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{r^3} + \frac{ik}{r^2}\right)\cos\theta m e^{i(\omega t-kr)} \qquad (4.147)$$

$$H_\theta = \frac{1}{4\pi\mu}\left(\frac{1}{r^3} + \frac{ik}{r^2} - \frac{k^2}{r}\right)\sin\theta\mu m e^{i(\omega t-kr)}$$
$$= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r^3} + \frac{ik}{r^2} - \frac{k^2}{r}\right)\sin\theta m e^{i(\omega t-kr)} \qquad (4.148)$$

$$E_\varphi = \frac{-i\omega}{4\pi}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r}\right)\sin\theta\mu m e^{i(\omega t-kr)}$$
$$= \frac{-i\omega\mu}{4\pi}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r}\right)\sin\theta\cdot m\cdot e^{i(\omega t-kr)} \qquad (4.149)$$

但是

$$\frac{-i\omega\mu}{4\pi}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r}\right)$$
$$= \frac{-i\omega\mu}{4\pi}ik\left(\frac{1}{ikr^2} + \frac{1}{r}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{r} - \frac{i}{kr^2}\right)\frac{1}{4\pi}\omega\mu \cdot \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r} - \frac{i}{kr^2}\right)\omega^2\varepsilon\mu\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{\varepsilon}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r} - \frac{i}{kr^2}\right)k^2\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}$$

因此 E_φ 的表达式又可写成

$$E_\varphi = \frac{k^2}{4\pi}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{r} - \frac{i}{kr^2}\right)\sin\theta m e^{i(\omega t - kr)} \quad (4.150)$$

在电磁场理论中，电偶极子、磁偶极子和电流环的场经常被用作已知的标准场，因此有关的公式也经常被引用．我们对此作了详细的推导，供读者查阅之用．

4.10 在积分号下微分的定理

这一节主要是为以下几节中的证明提供数学上的预备知识．如果读者对有关在积分号下微分的数学内容很熟悉，可以略去本节往下读，不影响对以后章节的理解．

引理 1 若

$$|f(M)| \leqslant C\frac{1}{[r(M,P)]^{3-\rho}} \quad (\rho > 0) \quad (4.151)$$

式中 M、P 为空间两点；$r(M,P)$ 为 M 与 P 点之间的距离，则积分

$$\iiint_V f(M)dv' \quad (4.152)$$

存在；C 为常数．V 为包含 P 点的某一体积．

证 如图 4.4 所示，作包围 P 点的小球系列 V_n，其半径 ε_n 随 $n\to\infty$ 而趋于零.

只需证明数列

$$I_n=\iiint_{V-V_n}|f(M)|dv' \tag{4.153}$$

满足柯西准则即可.

当 $m>n$ 时，

$$I_m-I_n=\iiint_{V_n-V_m}|f(M)|dv'$$

利用球坐标系统并考虑已知条件，得

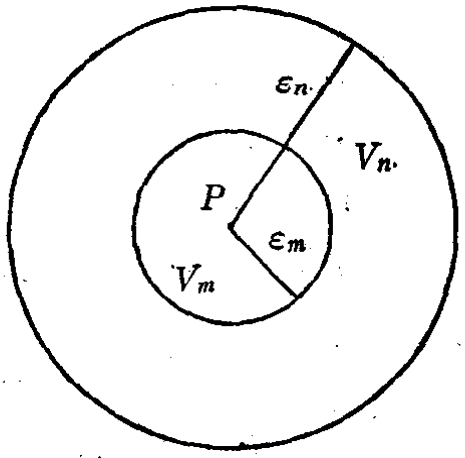

图 4.4 包围 P 点的小球及符号的意义

$$0\leqslant I_m-I_n\leqslant C\int_{r=\varepsilon_m}^{\varepsilon_n}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{1}{r^{3-\rho}}r^2\sin\theta d\theta d\varphi dr$$

$$=C\int_{\varepsilon_m}^{\varepsilon_n}\frac{dr}{r^{1-\rho}}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi$$

$$=\frac{4\pi C}{\rho}(\varepsilon_n^{\rho}-\varepsilon_m^{\rho})$$

当 m、n 足够大时 I_m-I_n 趋向于零，因此数列有极限，积分收敛.

引理 2 若函数 $f(M)$ 满足下列条件：

$$|f(M)|\leqslant C\frac{1}{[r(M,P)]^{3-\rho}} \tag{4.154}$$

($\rho>0$，C 为常数)，则对任意 $\varepsilon>0$ 都可指出 $\delta>0$，使

$$\iiint_{u}|f(M)|dv'<\varepsilon \tag{4.155}$$

式中 u 为半径不超过 δ 的某个球.

证 假设球心正好在 P 点，当 δ 足够小时，利用式(4.151)得

$$\iiint_{u(P)} |f(M)|\,dv' \leqslant C\int_0^{\delta}\frac{dr}{r^{1-\rho}}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi$$

$$=\frac{4\pi C}{\rho}\rho^{\delta}<\varepsilon$$

现在来考虑球心位于其他位置的情况. 这时在球心附近 $f(M)$ 取有限值,因此只要球的半径足够小,对 $f(M)$ 的积分必然小于 ε, 于是引理得证.

引理 3 若 P 沿数轴变化 (例如 P 代表时间 t), $f(M,P)\equiv f(M,t)$ 且导数 $\dfrac{\partial f(M,t)}{\partial t}$ 对 M、t 连续,则

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V f(M,t)dv'=\iiint_V\frac{\partial f(M,t)}{\partial t}dv' \tag{4.156}$$

证明可在任何一本高等数学的教科书中找到.

定理 设函数

$$f(M,P)=f(x,y,z,x',y',z')=\frac{\mu(M,P)}{r^k(M,P)} \tag{4.157}$$

式中 $\mu(M,P)$ 为 (x',y',z',x,y,z) 的连续函数(见图 4.5);

$$r(M,P)=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

如果 $\mu(M,P)$ 对 x、y、z 有连续偏导数,而且 $k<2$, 那么对以 x、y、z 为自变量的函数

$$F(x,y,z)=\iiint_V f(x,y,z,x',y',z')dv'$$

的偏微分可直接在积分号内进行,即

$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}=\iiint_V\frac{\partial f(x,y,z,x',y',z')}{\partial x}dv' \tag{4.158}$$

证 因为

$$\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{1}{r^k}=-\frac{k}{r^{k+1}}\cdot\frac{\partial}{\partial x}r$$

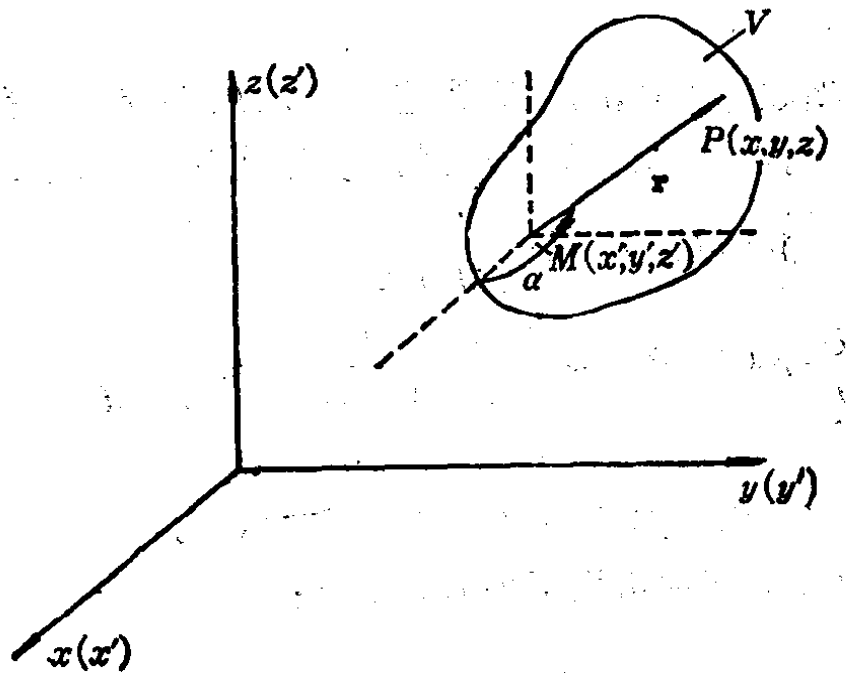

图 4.5　空间区域 V 及坐标系统

$$= -\frac{k}{r^{k+1}} \cdot \frac{x-x'}{r} = \frac{-k}{r^{k+1}} \cos\alpha$$

(式中 α 为矢量 $\mathbf{r}$ 与 x 轴之夹角)，所以

$$\frac{\partial}{\partial x} f(M,P) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\mu(M,P)}{r^k}$$

$$= \frac{-k\cos\alpha}{r^{k+1}} \mu(M,P) + \frac{1}{r^k} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \mu(M,P)$$

由于 $\mu(M,P)$ 和 $\dfrac{\partial \mu(M,P)}{\partial x}$ 根据已知条件都是连续函数，因而有限，故

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} f(M,P)\right| \leqslant \frac{k|\mu(M,P)|}{r^{k+1}} + \frac{1}{r^k}\left|\frac{\partial}{\partial x} \mu(M,P)\right|$$

$$\leqslant \frac{C_1}{r^{k+1}} \qquad (4.159)$$

式中 C_1 为某个常数。

由此可见，$\dfrac{\partial}{\partial x} f(M,P)$ 的积分当 $k < 2$ 时绝对收敛(引

理 1)。

引入函数 $\rho_\delta(M,P)$，使其当 $r(M,P)\geqslant\delta$ 时等于 $1/r(M,P)$，而当 $r(M,P)\leqslant\delta$ 时连续并具有连续导数，而且

$$|\rho_\delta(M,P)|\leqslant\frac{1}{r(M,P)}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\rho_\delta(M,P)\right|\leqslant\left|\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r(M,P)}\right|\leqslant\frac{1}{r^2(M,P)} \tag{4.160}$$

这里的思路是用一连续函数代替 $1/r(M,P)$。

$\rho_\delta(M,P)$ 例如可用下列方式给出：

$$\rho_\delta(M,P)=\begin{cases}\dfrac{1}{r(M,P)} & (r(M,P)\geqslant\delta\text{ 时})\\ Ar^2(M,P)+B & (r(M,P)\leqslant\delta\text{ 时})\end{cases}$$

常数 A 和 B 由 $r=\delta$ 时 ρ_δ 连续、导数也连续的条件决定。

现令

$$f_\delta(M,P)=\rho_\delta^k(M,P)\mu(M,P)$$

由此可得

$$f_\delta(M,P)\leqslant f(M,P)$$

这时

$$\frac{\partial}{\partial x}f_\delta(M,P)=\left[k\rho_\delta^{k-1}(M,P)\frac{\partial}{\partial x}\rho_\delta(M,P)\right]\mu(M,P)$$

$$+\rho_\delta^k(M,P)\frac{\partial}{\partial x}\mu(M,P)$$

由不等式(4.159)得

$$\left|f_\delta(M,P)\right|\leqslant\frac{|\mu(M,P)|}{r^k(M,P)}\leqslant\frac{C_2}{r^k(M,P)} \tag{4.161}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}f_\delta(M,P)\right|\leqslant\frac{k}{r^{k-1}(M,P)}\cdot\frac{1}{r^2(M,P)}|\mu(M,P)|$$

$$+\frac{1}{r^k(M,P)}\left|\frac{\partial}{\partial x}\mu(M,P)\right|$$

$$\leqslant \frac{C_3}{r^{k+1}(M,P)}+\frac{C_4}{r^k(M,P)}$$

$$\leqslant \frac{C_5}{r^{k+1}(M,P)} \tag{4.162}$$

式中 C_2、C_3、C_4 和 C_5 均为常数.

令

$$\iiint_V f_\delta(M,P)dv' = F_\delta(P) \tag{4.163}$$

显然

$$|F(P)-F_\delta(P)| = \left|\iiint_V [f(M,P)-f_\delta(M,P)]dv'\right|$$

$$= \left|\iiint_{U_\delta(P)} [f(M,P)-f_\delta(M,P)]dv'\right|$$

$$\leqslant \iiint_{U_\delta(P)} |f(M,P)|dv'$$

$$+\iiint_{U_\delta(P)} |f_\delta(M,P)|dv'$$

$$\leqslant 2\iiint_{U_\delta(P)} |f(M,P)|dv' \leqslant \varepsilon$$

(δ 足够小时) (4.164)

式中 $U_\delta(P)$ 为以 P 为球心、δ 为半径的小球; ε 为任一小数, 这里引用了引理 2.

由于 $F_\delta(P)$ 是正常的积分, 因而对它的微分可在积分号内进行

$$\frac{\partial}{\partial x}F_\delta(P) = \iiint_V \frac{\partial}{\partial x} f_\delta(M,P)dv'$$

前面已经证明,积分

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial x} f(M,P)dv' = \tilde{F}(P)$$

绝对收敛. 显然，当 ε 为任一小数且当 δ 足够小时，利用式(4.159)和(4.163)可得

$$\begin{aligned}
&\left| \tilde{F}(P) - \frac{\partial}{\partial x} F_\delta(P) \right| \\
&= \left| \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x} f(M,P) - \frac{\partial}{\partial x} f_\delta(M,P) \right] dv' \right| \\
&= \left| \iiint_{U_\delta(P)} \left[\frac{\partial}{\partial x} f(M,P) - \frac{\partial}{\partial x} f_\delta(M,P) \right] dv' \right| \\
&\leqslant \iiint_{U_\delta(P)} \left| \frac{\partial}{\partial x} f(M,P) \right| dv' + \iiint_{U_\delta(P)} \left| \frac{\partial}{\partial x} f_\delta(M,P) \right| dv' \\
&\leqslant C_6 \iiint_{U_\delta(P)} \frac{dv'}{r^{k+1}} \leqslant \varepsilon
\end{aligned}$$

式中 C_6 为常数.

由此可见，当 $\delta \to 0$ 时，$F_\delta(P)$ 一致收敛于 $F(P)$，而 $\frac{\partial}{\partial x} F_\delta(P)$ 一致收敛于 $\tilde{F}(P)$. 用对一致收敛级数逐项微分的定理，得

$$\tilde{F}(P) = \frac{\partial}{\partial x} F(P) \tag{4.165}$$

此即所需证明的结果.

4.11 波动方程解的证明

现在来证明函数

$$\varphi(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V\frac{\rho\left(x',y',z',t-\dfrac{r}{v}\right)}{r(x,y,z,x',y',z')}dv' \tag{4.166}$$

满足波动方程

$$\Delta\varphi-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho(x,y,z,t)}{\varepsilon} \tag{4.167}$$

式中 ε、v 均为常数；ρ 是空间一点的坐标 x,y,z 与时间 t 的函数．另外，V 是积分的体积，它包含所有位于有限范围内的 ρ，而

$$r=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

其中 x,y,z 表示观察点的坐标；x',y',z' 表示积分元(场源) dv' 所在地的坐标．

证明可分几步进行：

(1) 令观察点 P 的坐标为 x,y,z，时间为 t．把 P 点用一半径为 r_0、体积为 V_0 的小球面 S 包起来(见图 4.6)．于是积分式(4.166)可写成两个积分之和，一个积分的范围是 V_0，另一个积分的范围是 $V_r=V-V_0$．

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2$$

$$\varphi_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_{V_0}\frac{\rho\left(x',y',z',t-\dfrac{r}{v}\right)}{r}dv'$$

$$\varphi_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_{V_r}\frac{\rho\left(x',y',z',t-\dfrac{r}{v}\right)}{r}dv'$$

在 φ_2 中，r 始终比 r_0 大，因此可直接在积分号内微分，于是

$$\Delta\varphi_2-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_{V_r}\left[\Delta\left(\frac{\rho}{r}\right)\right.$$

$$-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\rho}{r}\right)\Big]dv'=0$$

这是因为

$$\Delta\left(\frac{\rho}{r}\right)-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\rho}{r}\right)=0$$

其证明如下：因为

$$\Delta f(r)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)$$

式中 $f(r)$ 为任一 r 之函数，故

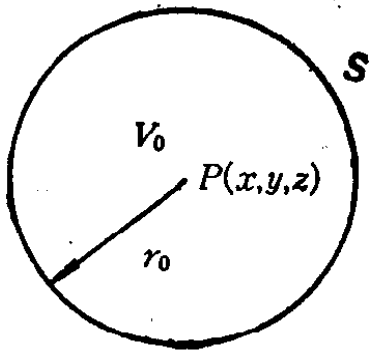

图 4.6　符号意义

$$\Delta\left(\frac{\rho}{r}\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\rho}{r}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\rho}{\partial r}+\rho\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\right)\right]$$

$$=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\left(\frac{1}{r}\rho'\left(-\frac{1}{v}\right)-\frac{\rho}{r^2}\right)\right]$$

式中

$$\rho'=\frac{\partial\rho\left(x',y',z',t-\dfrac{r}{v}\right)}{\partial\left(t-\dfrac{r}{v}\right)}$$

现继续进行运算

$$\Delta\left(\frac{\rho}{r}\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{-r\rho'}{v}-\rho\right)$$

$$=\frac{1}{r^2}\left[-\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho')+\frac{\rho'}{v}\right]$$

$$=\frac{1}{r^2}\left[-\frac{1}{v}r\frac{\partial\rho'}{\partial r}-\frac{\rho'}{v}+\frac{\rho'}{v}\right]$$

$$=\frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{v^2}r\rho''\right]=\frac{1}{r}\frac{1}{v^2}\rho''$$

另一方面，

$$-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\rho}{r}\right)=-\frac{1}{rv^2}\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}=-\frac{1}{rv^2}\rho''$$

最后得

$$\Delta\left(\frac{\rho\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r}\right)-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\rho\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r}\right)=0$$

（2）其次，对 φ_1 有

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}=\frac{1}{v^2}\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_{V_0}\frac{1}{r}\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}dv'$$

当 $r_0\to 0$ 时，由于 $\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}$ 为有限值，以及

$$\iiint_{V_0}\frac{1}{r}dv'=\iiint_{V_0}\frac{1}{r}4\pi r^2dr=4\pi\int_0^{r_0}rdr$$

$$=\frac{4\pi r_0^2}{2}\to 0$$

因此

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}\to 0\qquad(V_0\to 0)$$

故式(4.167)的左边变为

$$\Delta\varphi-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\Delta\varphi_1=\mathrm{divgrad}\varphi_1$$

$$=\lim_{V_0\to 0}\frac{\oiint_S \mathrm{grad}\varphi_1\cdot d\boldsymbol{\sigma}}{V_0}\qquad(4.168)$$

等式的最后一项是散度的定义．注意，这里的 $\mathrm{grad}\varphi_1$ 是在 S 面上的 $\mathrm{grad}\varphi_1$ 的值．

（3）因为

$$\mathrm{grad}\varphi_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_{V_0}\mathrm{grad}\frac{\rho}{r}dv'$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_{V_0}\left(\frac{1}{r}\operatorname{grad}\rho + \rho\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)dv'$$

式中 r 表示点 (x', y', z') 与 S 面上某一点之间的距离. 当 $V_0 \to 0$ 时，用上文中同样的方法可证

$$\iiint_{V_0}\frac{1}{r}\operatorname{grad}\rho dv' \to 0 \qquad (V_0 \to 0)$$

因此

$$\oiint_S \operatorname{grad}\varphi_1 \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_{V_0} dv' \oiint_S \rho\operatorname{grad}\frac{1}{r}\cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_{V_0} dv' \oiint_S \frac{\rho\mathbf{r}}{r^3}\cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

这里用到了

$$\operatorname{grad}\frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

各符号的意义可参看图 4.7.

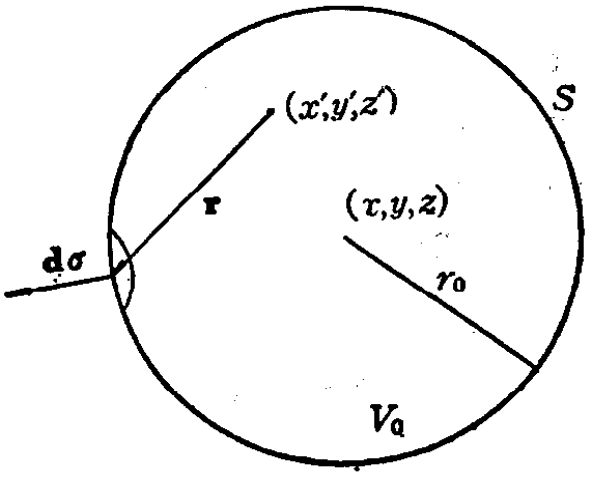

图 4.7 坐标系

(4) 当 $V_0 \to 0$ 时 $S \to 0$，于是在 S 面上的函数值

$$\rho\left(x', y', z', t - \frac{r}{v}\right) \to \rho(x', y', z', t)$$

因为这时 $r_0 \to 0$，而 r 为点 (x', y', z') 与 S 面上点之间的

距离，所以 $r \leqslant 2r_0 \to 0$。将 $\rho(x',y',z',t)$（与 S 面上的点无关）抽到对 S 的积分号外，得

$$\oiint_S \mathrm{grad}\varphi_1 \cdot d\sigma = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_{V_0}\rho(x',y',z',t)dv'\oiint_S \frac{\mathbf{r}\cdot d\sigma}{r^3}$$

$$= -\frac{4\pi}{4\pi\varepsilon}\iiint_{V_0}\rho(x',y',z',t)dv'$$

这里用到了

$$\oiint_S \frac{\mathbf{r}\cdot d\sigma}{r^3} = 4\pi$$

当 V_0 趋向于零时 $(x',y',z') \to (x,y,z)$，因此上式中的积分可表示为

$$-\frac{1}{\varepsilon}\rho(x,y,z,t)V_0$$

最后得

$$\mathrm{divgrad}\varphi_1 = \lim_{V_0\to 0}\frac{\oiint_S \mathrm{grad}\varphi_1 \cdot d\sigma}{V_0}$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon}\rho(x,y,z,t)$$

由式(4.168)得

$$\Delta\varphi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon}\rho(x,y,z,t)$$

此即所需证明的结果。

从证明全过程来看，v^2 也可以是复数 $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_c\mu}}$，对证明过程无任何影响。对正弦场来说，$\frac{\partial}{\partial t}$ 对应于乘上 $i\omega$，因此约去时间因子 $e^{i\omega t}$ 后可得

$$\Delta\varphi + \omega^2\varepsilon_c\mu\varphi = -\frac{1}{\varepsilon}\rho(x,y,z)$$

或

$$\Delta\varphi + k_c^2\varphi = -\frac{1}{\varepsilon}\rho(x,y,z)$$

式中

$$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V \frac{\rho(x',y',z')e^{-ik_c r}}{r}\,dv'$$

对于矢量方程

$$\Delta^2\mathbf{A} + k_c^2\mathbf{A} = -\mu\mathbf{i}$$

同样可证

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \frac{\mathbf{i}(x',y',z')e^{-ik_c r}}{r}\,dv'$$

4.12 泊松方程解的证明

现在来证明函数

$$V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_{V_1} \frac{\rho(x',y',z')}{r(x,y,z,x',y',z')}\,dv' \tag{4.169}$$

满足下列方程:

$$\Delta V(x,y,z) = -\frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon} \tag{4.170}$$

式中 ε 为常数,而

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

积分的范围是包含所有 ρ 的空间 V_1。

证明如下:

(1) 如果在观察点 P 及其附近 $\rho = 0$，那么在整个积分

区域内 r 取有限值. 这样可直接在积分号内微分. 因为 x', y',z' 和 x,y,z 互不相关,加上 $\Delta\frac{1}{r}=0$ [见(1.60)式],所以

$$\Delta V(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_{V_1}\rho(x',y',z')\Delta\frac{1}{r}dv'=0$$

(2) 如果在观察点 P 处 $\rho\neq 0$, 那么在计算 $\Delta V=$ divgrad$V$ 过程中只能在积分号下直接微分一次,原因在于 V 的表达式内 r 在分母中为一次方,从而可以微分,但微分后分母中的 r 变为二次方,再微分就没有根据了.

因

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{1}{2r}\cdot 2(x-x')=\frac{x'-x}{r^3}$$

这里取 $x'-x$ 而不是 $x-x'$ 的原因是 x 增加时 $\frac{1}{r}$减小. 于是

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_{V_1}\frac{\rho}{r^3}(x'-x)dv' \qquad (4.171)$$

将 $\frac{\partial V}{\partial x}$ 再微分一次,得

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_{V_1}\frac{\rho}{r^3}\left(\frac{3(x'-x)^2}{r^2}-1\right)dv' \qquad (4.172)$$

这里用到了

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{(x'-x)}{r^3}=-\frac{3r^2}{r^6}\cdot\frac{dr}{dx}\cdot(x'-x)+\frac{1}{r^3}(-1)$$

$$=-\frac{3r^2}{r^6}\cdot\frac{1}{2r}\cdot 2(x-x')(x'-x)$$

$$-\frac{1}{r^3}$$

$$-\frac{1}{r^3}\left[\frac{(x'-x)^2\cdot 3}{r^2}-1\right]$$

因 x 增加时 r 加大，故在 $\frac{dr}{dx}$ 的结果中取 $x-x'$。

但是，这样做的根据是不足的，因为在 $\frac{\partial V}{\partial x}$ 表达式中积分号内函数的分母至少为 r 的二次方（$x'-x$ 与 r 成正比，可约去一次方），$k<2$ 的条件不满足[见式(4.157)]. 事实上，直接微分是不允许的，这可从下面的计算中看出.

如图 4.8 所示，取一球坐标系，其原点在 (x,y,z) 上，

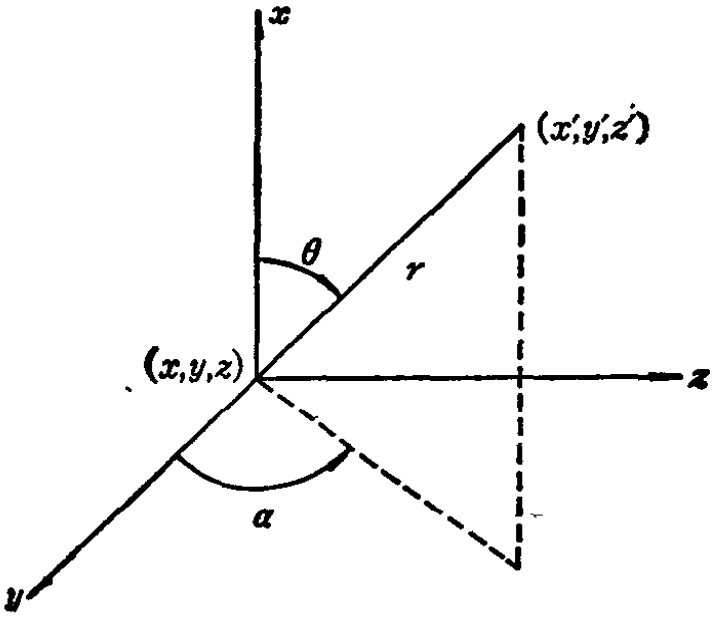

图 4.8　球坐标系统与直角坐标系

坐标系的极轴与 x 轴方向重合.

大家知道，在球坐标系中，

$$dv'=r^2\sin\theta d\theta d\alpha dr$$
$$=r^2 dr d\Omega$$

式中 $d\Omega=\sin\theta d\theta d\alpha$，于是

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_{V_1}\frac{\rho r\cos\theta}{r^3}r^2 dr d\Omega$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_{V_1}\rho\cos\theta dr d\Omega$$

$(x'-x=r\cos\theta)$ 取有限值.

若再在积分号内微分一次,则得(见式(4.172))

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_{V_1}\frac{\rho}{r^3}\left(\frac{3r^2\cos^2\theta}{r^2}-1\right)r^2 dr d\Omega$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_{V_1}\frac{\rho}{r}(3\cos^2\theta-1)dr d\Omega$$

当 $r=0$ 时,$\frac{\rho}{r}(3\cos^2\theta-1)$ 变成无限大,积分是否存在成了问题,因此不能直接在积分号内微分,结果只好直接用 div 的定义来计算 ΔV. 这样,

$$\Delta V = \mathrm{divgrad}V$$

先写出 $\mathrm{grad}V$

$$\mathrm{grad}V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_{V_1}\rho(x',y',z')\mathrm{grad}\frac{1}{r}dv'$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_{V_1}\frac{\rho(x',y',z')}{r^3}\mathbf{r}dv'$$

$$= \mathbf{a}(x,y,z)$$

式中 $\mathbf{r}$ 为由 (x',y',z') 指向 (x,y,z) 的矢径. 根据散度定义,我们再写出 div**a** 的表达式.

$$\mathrm{div}\mathbf{a} = \lim_{V_0\to 0}\frac{\oiint_S \mathbf{a}(x,y,z)\cdot d\boldsymbol{\sigma}}{V_0}$$

式中 S 为包含 P 点的小体积 V_0 的外表面.

在我们的情况下,因为

$$\mathbf{a} = \mathrm{grad}V$$

所以

$$\Delta V = \lim_{V_0 \to 0} \frac{\oiint_S \mathrm{grad}V \cdot d\boldsymbol{\sigma}}{V_0}$$

但

$$\oiint_S \mathrm{grad}V \cdot d\boldsymbol{\sigma} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon} \oiint_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot \iiint_{V_1} \frac{\rho(x',y',z')\mathbf{r}}{r^3} dv'$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint_{V_1} \rho(x',y',z')dv' \oiint_S \frac{\mathbf{r} \cdot d\boldsymbol{\sigma}}{r^3}$$

此处将积分的先后顺序作了调换.

在积分 $\oiint_S \frac{\mathbf{r} \cdot d\boldsymbol{\sigma}}{r^3}$ 中,由于点 (x,y,z) 位于 $d\boldsymbol{\sigma}$ 上，故 $\mathbf{r}$ 是从点 (x',y',z') 指向面积元 $d\boldsymbol{\sigma}$ 的矢量(见图 4.9).

由静电学中高斯定理的证明可知，若 (x',y',z') 位于 S 之外，则此积分为零；若 (x',y',z') 位于 S 之内，则此积分为 4π. 由此可得

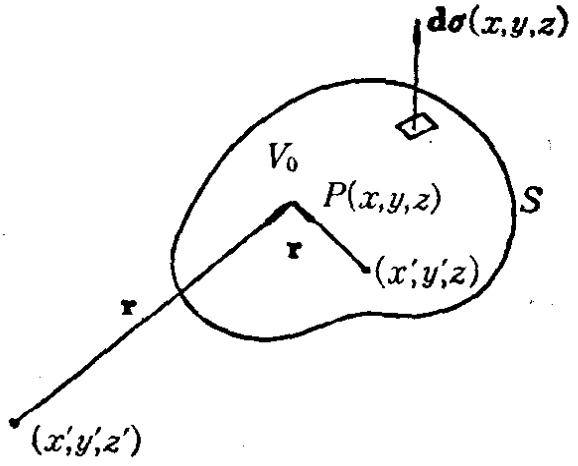

图 4.9 (x',y',z') 的两种可能位置

$$\oiint_S \mathrm{grad}V \cdot d\boldsymbol{\sigma} = -\frac{4\pi}{4\pi\varepsilon} \iiint_{V_0} \rho(x',y',z')dv'$$

最后得

$$\Delta V = -\frac{4\pi}{4\pi\varepsilon}\lim_{V_0\to 0}\frac{\iiint_{V_0}\rho(x',y',z')dv'}{V_0}$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon}\rho(x,y,z) \tag{4.173}$$

因此，我们证明了

$$\Delta V(x,y,z) = -\frac{1}{\varepsilon}\rho(x,y,z)$$

式中

$$V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_{V_1}\frac{\rho(x',y',z')dv'}{r(x,y,z,x',y',z')}$$

如果 ρ 还与时间 t 有关，$\rho = \rho(x,y,z,t)$，则对任一固定的时刻 t 证明的过程完全一样，于是得方程

$$\Delta V(x,y,z,t) = -\frac{1}{\varepsilon}\rho(x,y,z,t) \tag{4.174}$$

的解为

$$V(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_{V_1}\frac{\rho(x',y',z',t)}{r}dv' \tag{4.175}$$

4.13 对滞后矢量位与滞后标量位关系的证明

定理 1 函数

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_{V}\frac{\mathbf{i}\left(x',y',z',t-\frac{r}{v}\right)}{r}dv' \tag{4.176}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_{V}\frac{\rho\left(x',y',z',t-\frac{r}{v}\right)}{r}dv' \tag{4.177}$$

满足下列关系：

$$\mathrm{div}\mathbf{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \tag{4.178}$$

式中 ε、μ 为常数；$v = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$；$\mathbf{i}$ 和 ρ 为电流密度和电荷密度，均处于空间有限范围内；(x',y',z') 为场源点的坐标；r 为自场源点至观察点 (x,y,z) 之间的距离(见图 4.10)

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

对包含所有 $\mathbf{i}$、ρ 的空间进行积分.

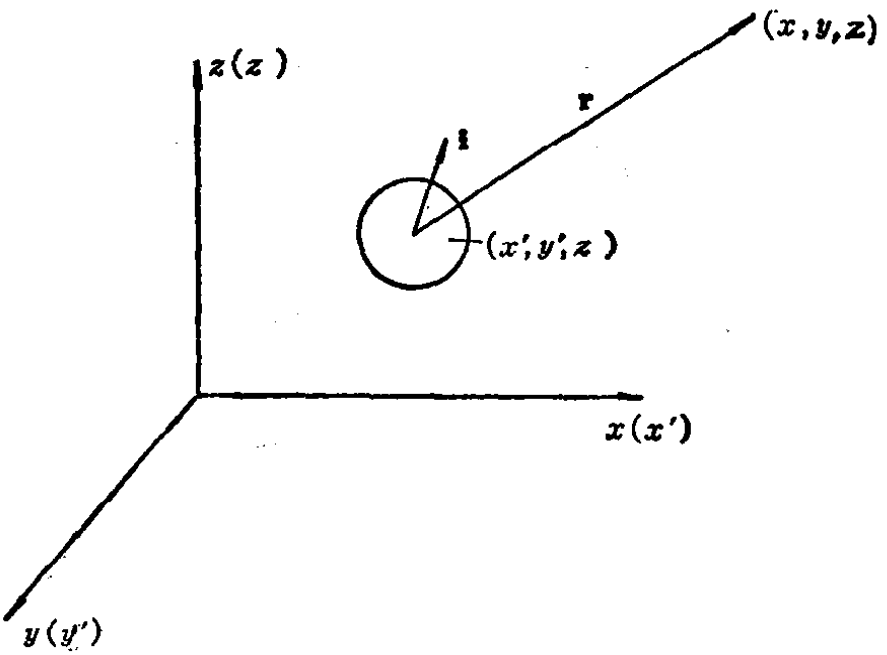

图 4.10 坐标系

证 考虑到电流密度 $\mathbf{i}$ 通过 r 与 x，y，z 有关，并令 $t' = t - \dfrac{r}{v}$，则

$$\frac{\partial}{\partial x} i_x\left(x',y',z',t-\frac{r}{v}\right) = \frac{\partial}{\partial x} i_x(x',y',z',t')$$

$$= \frac{\partial i_x}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial x} = -\frac{x - x'}{vr} \frac{\partial i_x}{\partial t'}$$

式中

$$\mathbf{i} = i_x \mathbf{u}_x + i_y \mathbf{u}_y + i_z \mathbf{u}_z$$
$$\mathbf{r} = (x - x')\mathbf{u}_x + (y - y')\mathbf{u}_y + (z - z')\mathbf{u}_z$$

由此可得，在观察点 (x, y, z)，

$$\mathrm{div}\ \mathbf{i} = -\frac{\mathbf{r}}{vr} \cdot \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t'}$$

式中 $\mathbf{r}$ 由场源点指向观察点.

如果在场源点取散度(用 div′ 表示)，那么因 $\mathbf{i}$ 还直接与 x', y', z' 有关，所以

$$\begin{aligned}\mathrm{div}'\ \mathbf{i} = {} & \frac{\partial i_{x'}(x', y', z', t)}{\partial x'} + \frac{\partial i_{x'}(x', y', z', t')}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial x'} \\ & + \frac{\partial i_{y'}(x', y', z', t')}{\partial y'} + \frac{\partial i_{y'}(x', y', z', t')}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial y'} \\ & + \frac{\partial i_{z'}(x', y', z', t')}{\partial z'} \\ & + \frac{\partial i_{z'}(x', y', z', t')}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial z'} \\ = {} & \mathrm{div}_0' \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t'} \cdot \frac{\mathbf{r}}{vr}\end{aligned}$$

式中

$$\mathrm{div}_0' \mathbf{i} = \frac{\partial i_{x'}\left(x', y', z', t - \frac{r}{v}\right)}{\partial x'} + \frac{\partial i_{y'}\left(x', y', z', t - \frac{r}{v}\right)}{\partial y'}$$

$$+\frac{\delta i_{z'}\left(x',y',z',t-\frac{r}{v}\right)}{\partial z'}$$

在观察点，利用公式

$$\mathrm{div}\varphi\mathbf{a}=\varphi\mathrm{div}\mathbf{a}+\mathbf{a}\cdot\mathrm{grad}\varphi$$

得

$$\mathrm{div}\frac{\mathbf{i}}{r}=\mathbf{i}\cdot\mathrm{grad}\frac{1}{r}+\frac{1}{r}\mathrm{div}\mathbf{i}$$

$$=\mathbf{i}\cdot\mathrm{grad}\frac{1}{r}-\frac{\mathbf{r}}{vr^2}\cdot\frac{\partial\mathbf{i}}{\partial t'}\qquad(4.179)$$

在场源点 (x',y',z')，

$$\mathrm{div}'\frac{\mathbf{i}}{r}=\mathbf{i}\cdot\mathrm{grad}'\frac{1}{r}+\frac{1}{r}\mathrm{div}'\mathbf{i}$$

$$=\mathbf{i}\cdot\mathrm{grad}'\frac{1}{r}+\frac{1}{r}\left(\mathrm{div}_0'\mathbf{i}+\frac{\mathbf{r}}{vr}\cdot\frac{\partial\mathbf{i}}{\partial t'}\right)$$

$$=\mathbf{i}\cdot\mathrm{grad}'\frac{1}{r}+\frac{1}{r}\mathrm{div}_0'\mathbf{i}+\frac{\mathbf{r}}{vr^2}\cdot\frac{\partial\mathbf{i}}{\partial t'}\qquad(4.180)$$

式中 grad′ 表示在场源点取梯度．考虑到

$$\mathrm{grad}\frac{1}{r}=-\mathrm{grad}'\frac{1}{r}$$

将(4.179)和(4.180)两式相加，得

$$\mathrm{div}\frac{\mathbf{i}}{r}=\frac{1}{r}\mathrm{div}_0'\mathbf{i}-\mathrm{div}'\frac{\mathbf{i}}{r}$$

考虑到在 $\mathbf{A}$ 的表达式中积分号内分母上的 r 为一次方，对 $\mathbf{A}$ 可直接在积分号内微分，于是可进行下列运算：

$$\mathrm{div}\mathbf{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

$$=\frac{\mu}{4\pi}\iiint_V\mathrm{div}\frac{\mathbf{i}}{r}\,dv'+\frac{\varepsilon\mu}{4\pi\varepsilon}\iiint_V\frac{1}{r}\frac{\partial\rho}{\partial t}\,dv'$$

$$= \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \left(\frac{1}{r}\,\mathrm{div}_0'\mathbf{i} - \mathrm{div}'\frac{\mathbf{i}}{r}\right)dv' + \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \frac{1}{r}\frac{\partial\rho}{\partial t}\,dv'$$

$$= \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \frac{1}{r}\left(\mathrm{div}_0'\mathbf{i} + \frac{\partial\rho}{\partial t}\right)dv' - \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \mathrm{div}'\frac{\mathbf{i}}{r}\,dv'$$

但当体积足够大时，包围体积的曲面 S 上 $\mathbf{i}=0$，故

$$\iiint_V \mathrm{div}'\frac{\mathbf{i}}{r}\,dv' = \oiint_S \mathbf{n}\cdot\frac{\mathbf{i}}{r}d\sigma = 0$$

另一方面，

$$\mathrm{div}_0'\mathbf{i} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

因这个式子表示在 $t-\frac{r}{v}$ 时刻的电荷和电流密度所满足的连续性方程，所以最后可得

$$\mathrm{div}\mathbf{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$

此即所需证明的定理.

定理 2 若函数

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V \frac{\rho(x',y',z',t)}{r}\,dv' \tag{4.181}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \frac{\mathbf{i}\left(x',y',z',t-\frac{r}{v}\right) - \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{grad}\varphi\Big|_{t=t-\frac{r}{v}}}{r}\,dv' \tag{4.182}$$

则

$$\mathrm{div}\mathbf{A} = 0 \tag{4.183}$$

式中所有符号的意义与定理 1 中的相同.

证 矢量 $\mathbf{A}$ 可分为两部分：

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$$

其中

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \frac{\mathbf{i}\left(x',y',z',t-\frac{r}{v}\right)}{r}dv'$$

$$\mathbf{A}_2 = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \frac{-\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{grad}\varphi\Big|_{t=t-\frac{r}{v}}}{r}dv'$$

在定理 1 中已经证明

$$\mathrm{div}\mathbf{A}_1 = -\varepsilon\mu\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}$$

式中

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V \frac{\rho\left(x',y',z',t-\frac{r}{v}\right)}{r}dv'$$

现在来求 $\mathrm{div}\mathbf{A}_2$.

在积分 $\mathbf{A}_2$ 中 $\varphi = \varphi(x',y',z',t)$. 令

$$-\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{grad}'\varphi = \mathbf{f}(x',y',z',t)$$

('号表示在场源点微分),则

$$-\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{grad}'\varphi\Big|_{t=t-\frac{r}{v}} = \mathbf{f}\left(x',y',z',t-\frac{r}{v}\right)$$

于是

$$\mathbf{A}_2 = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \frac{\mathbf{f}\left(x',y',z',t-\frac{r}{v}\right)}{r}dv'$$

$$\mathrm{div}\mathbf{A}_2 = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \mathrm{div}\left(\frac{\mathbf{f}\left(x',y',z',t-\frac{r}{v}\right)}{r}\right)dv'$$

用证明定理 1 中的同样方法,得

$$\mathrm{div}\mathbf{A}_2 = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \frac{\mathrm{div}_0'\mathbf{f}}{r}\,dv' - \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \mathrm{div}'\left(\frac{\mathbf{f}}{r}\right)dv'$$

但

$$\iiint_V \mathrm{div}'\left(\frac{\mathbf{f}\left(x',y',z',t-\frac{r}{v}\right)}{r}\right)dv'$$

$$= \oiint_S \mathbf{n}\cdot\frac{\mathbf{f}\left(x',y',z',t-\frac{r}{v}\right)}{r}d\sigma \qquad (4.184)$$

当 r 很大时，

$$\varphi \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon r}\iiint_V \rho dv$$

于是

$$\mathrm{grad}'\varphi \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon r^2}\iiint_V \rho dv$$

$$\frac{\mathbf{f}}{r} = -\frac{\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{grad}'\varphi}{r} \approx -\frac{1}{4\pi r^3}\iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\,dv'$$

代入式(4.184)，得

$$\oiint_S \mathbf{n}\cdot\frac{\mathbf{f}}{r}\,d\sigma \approx \oiint_S -\frac{1}{4\pi r^3}\left(\iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\,dv'\right)r^2 d\Omega \to 0$$

式中 $d\Omega$ 为立体角．最后得

$$\mathrm{div}\mathbf{A}_2 = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V -\frac{\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}_0'\mathrm{grad}'\varphi\Big|_{t=t-\frac{r}{v}}}{r}\,dv'$$

但

$$\mathrm{div}_0'\mathrm{grad}'\varphi\Big|_{t=t-\frac{r}{v}} = -\frac{1}{\varepsilon}\rho\left(x',y',z',t-\frac{r}{v}\right)$$

(见式 (4.174)), $\dfrac{\partial\left(t-\dfrac{r}{v}\right)}{\partial t}=1$, 代入得

$$\mathrm{div}\mathbf{A}_2=\frac{\mu}{4\pi}\iiint_V\frac{1}{r}\frac{\partial\rho\left(x',y',z',t-\dfrac{r}{v}\right)}{\partial(t-r/v)}dv'$$

或

$$\mathrm{div}\mathbf{A}_2=\varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\rho\left(x',y',z',t-\dfrac{r}{v}\right)}{r}dv'=\varepsilon\mu\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}$$

由此

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\mathbf{A}&=\mathrm{div}\mathbf{A}_1+\mathrm{div}\mathbf{A}_2\\&=-\varepsilon\mu\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}+\varepsilon\mu\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\\&=0\end{aligned}$$

此即所需证明的结果.

定理 3 如 $\mathbf{i}$ 为局外电流, 则

$$\mathrm{div}\ \mathbf{A}+i\omega\varepsilon\mu\varphi+\sigma\mu\varphi=0 \tag{4.185}$$

或

$$\mathrm{div}\mathbf{A}+i\omega\mu\varepsilon_c\varphi=0 \tag{4.186}$$

式中

$$\mathbf{A}=\frac{\mu}{4\pi}\iiint_V\frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')e^{-ik_cr}}{r}dv' \tag{4.187}$$

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V\frac{\rho(\mathbf{r}')e^{-ik_cr}}{r}dv' \tag{4.188}$$

$$\varepsilon_c=\varepsilon-i\frac{\sigma}{\omega}$$

证 令 $\mathbf{i}_s$ 为总电流, 即

$$\mathbf{i}_s=\mathbf{i}+\sigma\mathbf{E}$$

由定理 1

$$\mathrm{div}\mathbf{A}' + i\omega\varepsilon\mu\varphi = 0 \tag{4.189}$$

式中

$$\mathbf{A}' = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \frac{\mathbf{i}_s(\mathbf{r}')e^{-ik_c r}}{r}\,dv'$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}')e^{-ik_c r}}{r}\,dv'$$

$\mathbf{A}'$ 可写成

$$\mathbf{A}' = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')e^{-ik_c r}}{r}\,dv' + \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \frac{\sigma\mathbf{E}(\mathbf{r}')e^{-ik_c r}}{r}dv'$$

代入式(4.189)得

$$\mathrm{div}\mathbf{A} + i\omega\varepsilon\mu\varphi + \frac{\sigma\mu}{4\pi}\,\mathrm{div}\iiint_V \frac{\mathbf{E}(\mathbf{r}')e^{-ik_c r}}{r}\,dv' = 0 \tag{4.190}$$

考虑到

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\left(\frac{E(\mathbf{r}')e^{-ik_c r}}{r}\right) &= \nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}')\,\frac{e^{-ik_c r}}{r}\\ &= E(\mathbf{r}')\cdot\nabla\left(\frac{e^{-ik_c r}}{r}\right)\\ &= -E(\mathbf{r}')\cdot\nabla'\left(\frac{e^{-ik_c r}}{r}\right)\end{aligned}$$

式中 ∇' 表示对场源点的微分，以及

$$\begin{aligned}&\mathrm{div}'\left(\frac{\mathbf{E}(\mathbf{r}')e^{-ik_c r}}{r}\right)\\ &= \nabla'\cdot\left(\frac{\mathbf{E}(\mathbf{r}')e^{-ik_c r}}{r}\right)\\ &= \mathbf{E}(\mathbf{r}')\cdot\nabla'\left(\frac{e^{-ik_c r}}{r}\right) + \frac{e^{-ik_c r}}{r}\nabla'\mathbf{E}(\mathbf{r}')\end{aligned}$$

$$= -\mathrm{div}\left(\frac{\mathbf{E}(\mathbf{r}')e^{-ik_c r}}{r}\right) + \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\varepsilon}\frac{e^{-ik_c r}}{r}$$

得

$$\mathrm{div}\left(\frac{\mathbf{E}(\mathbf{r}')e^{-ik_c r}}{r}\right) = \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\varepsilon}\frac{e^{-ik_c r}}{r} - \mathrm{div}'\left(\frac{\mathbf{E}(\mathbf{r}')e^{-ik_c r}}{r}\right)$$

代入式(4.190),得

$$\mathrm{div}\mathbf{A} + i\omega\varepsilon\mu\varphi + \sigma\mu\varphi - \iiint_V \mathrm{div}'\left(\frac{\mathbf{E}(\mathbf{r}')e^{-ik_c r}}{r}\right)dv' = 0$$

但

$$\iiint_V \mathrm{div}'\left(\frac{\mathbf{E}(\mathbf{r}')e^{-ik_c r}}{r}\right)dv' = \oiint_S \frac{\mathbf{E}(\mathbf{r}')e^{-ik_c r}}{r}d\sigma'$$

当 r 趋于∞时趋向于零,因此最后得

$$\mathrm{div}\mathbf{A} + i\omega\varepsilon\mu\varphi + \sigma\mu\varphi = 0$$

或

$$\mathrm{div}\mathbf{A} + i\omega\varepsilon_c\mu\varphi = 0$$

第五章　由已知场源求辐射场的公式

在天线和微波理论中，经常会碰到由精确或近似的已知场源求辐射场的问题．这个问题是天线和微波理论中的一个基本问题．本章介绍求解这个问题的各种方法，目的在于使读者明确推导时所依据的基本原理、数学工具和了解详细的推导过程，以便阅读有关资料时参考．

推导过程中一开始就假定同时存在电流源和磁流源，求解广义麦克斯韦方程组．实际上，磁流源既可以表示电场在曲面上的切线分量，也可以表示某种特殊的电流源，因为在第二章中已经详细证明任何磁流源所产生的场都与某种电流源所产生的场等效，所以从产生电磁场的观点来看，电流源与磁流源没有差别．当然，磁流源属于数学概念，而电流源则可具体实现，在这一点上两者是有区别的．

为了与大多数现有文献相一致，在本章中曲面上的单位法向量一律取为指向积分区域内部或观察点所在的区域．在应用格林定理时，在面积分前将出现负号．为了彻底理解推导过程，我们可先复习一下∇算子的运算规则和例题．读者会发现，有些推导看上去很繁，实际上只是一些简单的矢量代数运算．所有媒质都假定为均匀媒质．

5.1　用矢量格林定理求解

用矢量格林定理求解广义麦克斯韦方程组是文献中常用

的方法。这种方法的思路是在表示两个矢量函数所满足的关系式(矢量格林定理)中,把一个函数取为待求的矢量函数,例如电场强度 $\mathbf{E}$,而把另一个矢量函数取为已知的一种函数,例如 $\frac{e^{-ikr}}{r}\mathbf{c}$($\mathbf{c}$ 为常矢量),然后进行数学变换,在变换中当然要利用 $\mathbf{E}$ 满足麦克斯韦方程组这一性质;最后得到一个表示观察点的 $\mathbf{E}$ 与场源、边界值之间关系的表达式。如果场源和场的边界值都是已知函数,那么这个表达式就解决了由已知场源和边界值求观察点场的问题.如边界值也是未知的量,那么这个表达式就是 $\mathbf{E}$ 的一个积分方程,还需进一步用其他方法(例如矩量法等)求解。下面就来进行具体的推导。比用矢量格林定理更简便的方法将在本章稍后的章节中介绍。

在矢量格林定理

$$\iiint_V (\mathbf{b}\cdot \mathrm{rotrot}\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot \mathrm{rotrot}\mathbf{b})\,dv$$

$$= -\oiint_S ([\mathbf{n}\times\mathbf{a}]\cdot \mathrm{rot}\mathbf{b} - [\mathbf{n}\times\mathbf{b}]\cdot \mathrm{rot}\mathbf{a})\,d\sigma$$

$$= -\oiint_S ([\mathbf{a}\times \mathrm{rot}\mathbf{b}] - [\mathbf{b}\times \mathrm{rot}\mathbf{a}])\cdot\mathbf{n}\,d\sigma \qquad (5.1)$$

中,取 $\mathbf{a}=\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{b}=\frac{e^{ikr}}{r}\mathbf{c}=A\mathbf{c}$,式中

$$A=\frac{e^{-ikr}}{r}$$

其余各符号意义见图 5.1。另外,r 是从位于 (x,y,z) 处的体积元到观察点 $P(x',y',z')$ 的距离

$$r=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

$\mathbf{c}$ 为一任意常矢量。积分区域 V 包含观察点 P,但这不是必须的,在某些情况下积分区域 V 也可以不包含观察点 P。

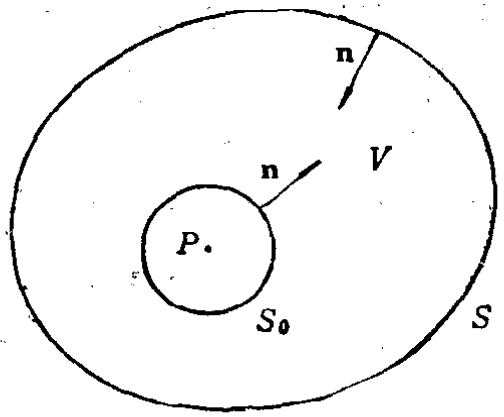

图 5.1　积分区域及符号意义

除 P 点外，$\mathbf{b}$ 均满足连续性要求。为了应用矢量格林定理，将 P 点用一半径为 r_0 的小球面包住(用 S_0 表示)，并考虑由 S_0、S 所包的体积 V'(V 内去掉 S_0 包的体积)。

应用公式(5.1)，得

$$\iiint_{V'}(A\mathbf{c}\cdot \mathrm{rotrot}\mathbf{E}-\mathbf{E}\cdot \mathrm{rotrot}A\mathbf{c})dv$$

$$=-\oiint_{S}(\mathbf{E}\times \mathrm{rot}A\mathbf{c}-A\mathbf{c}\times \mathrm{rot}\mathbf{E})\cdot \mathbf{n}d\sigma \qquad (5.2)$$

先变换上式中的体积积分，以便将含有 $\mathbf{E}$ 的函数通过场源来表示。利用公式

$$\nabla\times[\nabla\times\mathbf{p}]=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{p})-\nabla^2\mathbf{p}$$

考虑到 A 满足标量方程(3.98)和(3.97)，即

$$\nabla^2A+k^2A=0 \qquad A=\frac{e^{-ikr}}{r}$$

以及 $\mathbf{c}$ 是一个常矢量，因此

$$\begin{aligned}\mathrm{rotrot}A\mathbf{c}&=\nabla\times[\nabla\times A\mathbf{c}]\\&=\nabla(\nabla\cdot A\mathbf{c})-\nabla^2(A\mathbf{c})\\&=\nabla(\mathbf{c}\cdot\nabla A)-\mathbf{c}\nabla^2A\\&=\nabla(\mathbf{c}\cdot\nabla A)+\mathbf{c}k^2A \quad (-\nabla^2A=k^2A)\end{aligned}$$

再利用公式(3.89)：

$$\mathrm{rotrot}\mathbf{E} - k^2\mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{i} - \nabla \times \mathbf{i}_m$$

就可以把体积积分内的被积函数写成

$$\begin{aligned} &A\mathbf{c} \cdot \mathrm{rotrot}\mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \mathrm{rotrot}A\mathbf{c} \\ &= \mathbf{c} \cdot (-i\omega\mu\mathbf{i}A - A\nabla \times \mathbf{i}_m) + A\mathbf{c} \cdot k^2\mathbf{E} \\ &\quad - \mathbf{E} \cdot \nabla(\mathbf{c} \cdot \nabla A) - \mathbf{E} \cdot \mathbf{c}k^2\mathbf{A} \\ &= \mathbf{c} \cdot (-i\omega\mu\mathbf{i}A - A\nabla \times \mathbf{i}_m) - \mathbf{E} \cdot \nabla(\mathbf{c} \cdot \nabla A) \end{aligned} \tag{5.3}$$

此式中还有一个含 $\mathbf{E}$ 的项. 继续对它进行变换得

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} \cdot \nabla(\mathbf{c} \cdot \nabla A) \\ &= \nabla \cdot [\mathbf{E}(\mathbf{c} \cdot \nabla A)] - (\mathbf{c} \cdot \nabla A)(\nabla \cdot \mathbf{E}) \\ &= \nabla \cdot [\mathbf{E}(\mathbf{c} \cdot \nabla A)] - \frac{\rho}{\varepsilon}\mathbf{c} \cdot \nabla A \end{aligned} \tag{5.4}$$

这里用到 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$. 另外,

$$A\nabla \times \mathbf{i}_m = \nabla \times \mathbf{i}_m A + \mathbf{i}_m \times \nabla A \tag{5.5}$$

将式(5.4)和(5.5)代入式(5.3)后,即可将式(5.2)写成

$$\begin{aligned} &-\mathbf{c} \cdot \iiint_{V'} \left(i\omega\mu\mathbf{i}A + \mathbf{i}_m \times \nabla A - \frac{\rho}{\varepsilon}\nabla A\right) dv \\ &-\mathbf{c} \cdot \iiint_{V'} \nabla \times \mathbf{i}_m A - \iiint_{V'} \nabla \cdot [\mathbf{E}(\mathbf{c} \cdot \nabla A)] dv \\ &= -\oiint_{S_0+S} (\mathbf{E} \times \mathrm{rot}A\mathbf{c} - A\mathbf{c} \times \mathrm{rot}\mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} d\sigma \end{aligned} \tag{5.6}$$

现将上式第二和第三个体积积分用对 $T(\nabla)$ 的积分公式(见式(1.8))化成面积分:

$$\mathbf{c} \cdot \iiint_{V'} \nabla \times \mathbf{i}_m A dv = -\mathbf{c} \cdot \oiint_{S_0+S} A\mathbf{n} \times \mathbf{i}_m d\sigma \tag{5.7}$$

式中右边的负号是由于使用了朝向 V' 内部的单位法向量而出现的. 其次,

$$\iiint_{V'}\nabla\cdot[\mathbf{E}(\mathbf{c}\cdot\nabla A)]dv=-\oiint_{S_0+S}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})(\mathbf{c}\cdot\nabla A)d\sigma$$
$$=-\mathbf{c}\cdot\oiint_{S_0+S}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})\nabla A d\sigma \tag{5.8}$$

对式(5.6)右边的面积分作如下变换:

$$\begin{aligned}\mathbf{n}\cdot[\mathbf{E}\times\mathrm{rot}A\mathbf{c}]&=[\mathbf{E}\times[\nabla\times A\mathbf{c}]]\cdot\mathbf{n}\\&=[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\cdot[\nabla A\times\mathbf{c}]\\&=[[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\times\nabla A]\cdot\mathbf{c}\end{aligned}\tag{5.9}$$

$$\begin{aligned}A[\mathbf{c}\times\mathrm{rot}\mathbf{E}]\cdot\mathbf{n}&=A[\mathbf{c}\times[\nabla\times\mathbf{E}]]\cdot\mathbf{n}\\&=A\{\mathbf{c}\times[-i\omega\mu\mathbf{H}-\mathbf{i}_m]\}\cdot\mathbf{n}\\&=-i\omega\mu A[\mathbf{c}\times\mathbf{H}]\cdot\mathbf{n}\\&\quad-A[\mathbf{c}\times\mathbf{i}_m]\cdot\mathbf{n}\\&=i\omega\mu A\mathbf{c}\cdot[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\\&\quad+A\mathbf{c}\cdot[\mathbf{n}\times\mathbf{i}_m]\end{aligned}\tag{5.10}$$

此两式中循环置换两次,目的在于抽出 $\mathbf{c}$ 来.

将式(5.7)—(5.10)代入式(5.6),由于每项都有 $\mathbf{c}$ 的点积,最后便可把 $\mathbf{c}$ 去掉,从而得到一个与 $\mathbf{c}$ 无关的等式:

$$\mathbf{c}\cdot\iiint_{V'}\left(i\omega\mu\mathbf{i}A+\mathbf{i}_m\times\nabla A-\frac{\rho}{\varepsilon}\nabla A\right)dv$$
$$=\mathbf{c}\cdot\oiint_{S_0+S}\mathbf{n}\times\mathbf{i}_m A d\sigma+\mathbf{c}\cdot\oiint_{S_0+S}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})\nabla A d\sigma$$
$$+\mathbf{c}\cdot\oiint_{S_0+S}\{[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\times\nabla A-i\omega\mu A[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]$$
$$-A\mathbf{n}\times\mathbf{i}_m\}d\sigma$$
$$=\mathbf{c}\cdot\oiint_{S_0+S}[-i\omega\mu A[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})\nabla A$$

$$+[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\times\nabla A]d\sigma \tag{5.11}$$

(含有 $A\mathbf{n}\times\mathbf{i}_m$ 的两项互约)。因为此式对任意 $\mathbf{c}$ 都成立，故积分本身必须相等，所以得

$$\begin{aligned}&\oiint_{S_0}[-i\omega\mu A[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]+[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\times\nabla A\\&\quad+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})\nabla A]d\sigma\\&=-\oiint_{S}[-i\omega\mu A[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]+[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\times\nabla A\\&\quad+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})\nabla A]d\sigma\\&\quad+\iiint_{V'}\left(i\omega\mu\mathbf{i}A+\mathbf{i}_m\times\nabla A-\frac{\rho}{\varepsilon}\nabla A\right)dv\end{aligned} \tag{5.12}$$

这里，为了便于进一步推导起见，特地将对 S_0 之面积分单独写出来。

令 S_0 趋于零，在此情况下可得到一个与 P 点之场有关的值。这样，我们就能求出 P 点之场与对场源的体积分和对场值的面积分的关系式。现在来考虑对 S_0 的积分问题。在图 5.2 所示的球面上，

$$\nabla A=\left[\frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)\right]_{r=r_0}(\mathbf{n})$$

$\left(\mathbf{n}\text{与}\dfrac{\mathbf{r}}{r}\text{方向相同，从}Q\text{点沿半径朝向}S_0\text{之外}\right)$，

$$\begin{aligned}\nabla A&=\left[\frac{1}{r}(-ik)e^{-ikr}+e^{-ikr}\left(-\frac{1}{r^2}\right)\right]_{r=r_0}\mathbf{n}\\&=-\frac{e^{-ikr_0}}{r_0}\left(ik+\frac{1}{r_0}\right)\mathbf{n}\end{aligned} \tag{5.13}$$

令 $d\sigma$ 所张的立体角为 $d\Omega$。在 S_0 上，由于

$$A=\frac{e^{-ikr_0}}{r_0}\qquad\nabla A=\frac{-e^{-ikr_0}}{r_0}\left(ik+\frac{1}{r_0}\right)\mathbf{n}$$

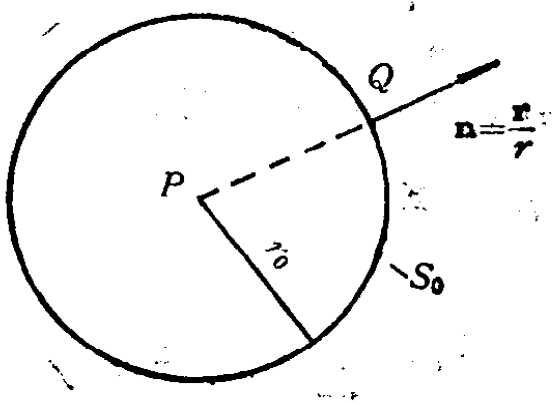

图 5.2　$\mathbf{n}$ 与 $\mathbf{r}$ 的关系

$$d\Omega = \frac{d\sigma}{r_0^2} \qquad d\sigma = r_0^2 d\Omega$$

故

$$Ad\sigma = \frac{e^{-ikr_0}}{r_0} r_0^2 d\Omega = r_0 e^{-ikr_0} d\Omega \tag{5.14}$$

$$\nabla A d\sigma = -ik\mathbf{n} r_0 e^{-ikr_0} d\Omega - \mathbf{n} e^{-ikr_0} d\Omega \tag{5.15}$$

代入对 S_0 的积分式中，得

$$\begin{aligned}
&\oiint_{S_0} [-i\omega\mu A[\mathbf{n}\times\mathbf{H}] + [\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\times\nabla A \\
&\quad + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})\nabla A]d\sigma \\
&= -i\oiint_{S_0} \omega\mu[\mathbf{n}\times\mathbf{H}] r_0 e^{-ikr_0} d\Omega \\
&\quad + \oiint_{S_0} [\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\times(-ik\mathbf{n} r_0 e^{-ikr_0} - \mathbf{n} e^{-ikr_0}) d\Omega \\
&\quad + \oiint_{S_0} (\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})(-ik\mathbf{n} r_0 e^{-ikr_0} - \mathbf{n} e^{-ikr_0}) d\Omega \\
&= -ir_0 e^{-ikr_0} \oiint_{S_0} \{\omega\mu[\mathbf{n}\times\mathbf{H}] + k[[\mathbf{n}\times\mathbf{E}] \\
&\quad \times\mathbf{n} + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})\cdot\mathbf{n}]\} d\Omega
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- e^{-ikr_0} \iint_{S_0} [[\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \mathbf{n} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})\mathbf{n}] d\Omega \\
&= -i4\pi r_0 e^{-ikr_0} (\omega\mu \overline{[\mathbf{n} \times \mathbf{H}]} + \overline{k\mathbf{E}}) \\
&- 4\pi e^{-ikr_0} \bar{\mathbf{E}} \qquad (5.16)
\end{aligned}
$$

这里用到了等式

$$
[\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \mathbf{n} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})\mathbf{n} = \mathbf{E}
$$

另外，式中矢量上的横线表示球面上函数的平均值．若将球的半径缩小至零，由于假定 P 点的场有限，则含 r_0 的项就趋于零，而 $\mathbf{E} \to \mathbf{E}_P$，即在 P 点之 $\mathbf{E}$ 值．因此

$$
\lim_{r_0 \to 0} \iint_{S_0} [\qquad] d\sigma = -4\pi \mathbf{E}_P
$$

当 $r_0 \to 0$ 时，$V' \to V$，式(5.12)就变为

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_P = &- \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(i\omega\mu \mathbf{i} A + \mathbf{i}_m \times \nabla A - \frac{\rho}{\varepsilon} \nabla A \right) dv \\
&+ \frac{1}{4\pi} \iint_S [-i\omega\mu [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] A + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \\
&\times \nabla A + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \nabla A] d\sigma \qquad (5.17)
\end{aligned}
$$

这就是我们要推导的公式．通常这个公式称为斯特拉顿-朱(Stratton-Chu)公式．如果在矢量格林公式中取 $\mathbf{a} = \mathbf{H}$，$\mathbf{b} = \frac{e^{-ikr}}{r}\mathbf{c} = A\mathbf{c}$，$\mathbf{c}$ 为任意常矢量，那么用同样的方法可得

$$
\begin{aligned}
\mathbf{H}_P = &- \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(i\omega\varepsilon \mathbf{i}_m A - \mathbf{i} \times \nabla A - \frac{\rho_m}{\mu} \nabla A \right) dv \\
&+ \frac{1}{4\pi} \iint_S [i\omega\varepsilon [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] A + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \times \nabla A \\
&+ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \nabla A] d\sigma \qquad (5.18)
\end{aligned}
$$

5.2 非封闭曲面情况下的近似处理方法

在用矢量格林定理求解的时候，假定了曲面 S 上的所有等效面电流、电荷、面磁流和磁荷都是连续函数，并且相互之间满足连续性方程。在研究天线问题时，经常近似地假定电流、电荷只存在于封闭曲面上的一部分。例如假定抛物面天线的口径场范围是有限的，电流、电荷等只存在于口径面上，一出口径面就突降为零。这不过是种近似的假定，严格地说，与客观现实显然不符。把公式(5.17)和(5.18)简单地用于非封闭曲面情况，除了得到的解是个近似结果之外，在数学上还产生了所得的解不能满足麦克斯韦方程组这样的问题。这是因为假定了口径场在非封闭曲面边缘突降为零从而破坏了连续性方程的缘故。为了使所得的解满足麦克斯韦方程，需作如下处理。但是，应该指出，这种处理方法并不能解决与严格解之间究竟相差多少的问题。从数学上来说，它完全是以满足连续性方程为前提的一种处理方法。由后面的5.5节可见，运用洛伦兹引理进行推导可以得到同样的结果。

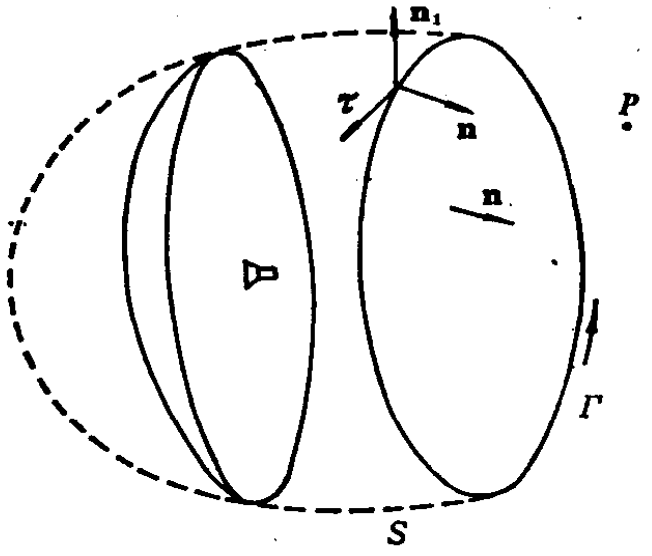

图 5.3 非封闭曲面示意图

设曲面上电流突降至零的边界为 Γ. 根据连续性方程，Γ 上应当存在线电荷分布. 当然，事实上电流既不会突降至零，也不存在什么线电荷分布. 我们所以要在设电流突降至零的同时又作出存在线电荷的假定，目的在于保证连续性方程的成立，从而保证所得的解满足麦克斯韦方程组.

令 $\boldsymbol{\tau}$ 为沿边界线 Γ 的单位矢量，它的指向与 $\mathbf{n}$ 的指向成右手螺旋关系，又令 $\mathbf{n}_1$ 为与 $\boldsymbol{\tau}$ 垂直且位于切平面内的单位矢量，它指向电流为零的区域（见图 5.4）. $\mathbf{n}$ 为曲面的单位法向量. 沿 Γ 的线电荷密度用 ρ_l 表示. 现在来考虑一块长、宽分别为 dl 和 ds 的小面积（线段 dl 与 $\mathbf{n}_1$ 垂直，ds 与 $\boldsymbol{\tau}$ 垂直），根据流入小面积的电流等于小面积内边缘上电荷的增加率（电流在边缘上突降至零，电荷只在边缘上堆积）这一连续性原理，得

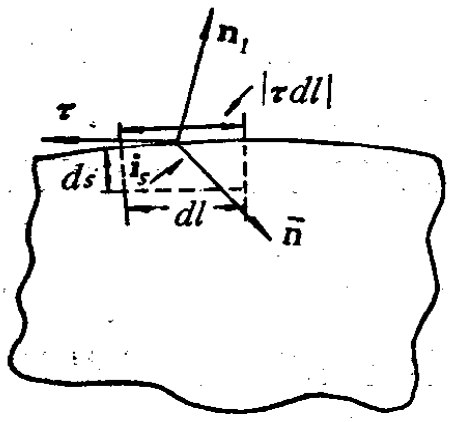

图 5.4　曲面边缘各矢量的相互关系

$$dl(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{i}_s) = \frac{\partial \rho_l}{\partial t} dl$$

式中 $\mathbf{i}_s$ 为面电流密度；ρ_l 为线电荷密度. 通过 ds 的电流随 $ds \to 0$ 而趋于零，故可忽略不计，因此

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{i}_s = \frac{\partial \rho_l}{\partial t} \tag{5.19}$$

同理，根据连续性方程，面磁流密度与线磁荷密度的关系为

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{i}_{ms} = \frac{\partial \rho_{ml}}{\partial t} \tag{5.20}$$

式中 $\mathbf{i}_{ms}$ 为面磁流密度；ρ_{ml} 为线磁荷密度.

由一般等效定理可知，磁场的切线分量等效于面电流密

度，电场的切线分量等效于面磁流密度，将

$$\mathbf{n}\times\mathbf{H}=\mathbf{i}_s$$

$$\mathbf{E}\times\mathbf{n}=\mathbf{i}_{ms}$$

代入式(5.19)和(5.20)，得

$$\frac{\partial\rho_l}{\partial t}=\mathbf{n}_1\cdot[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]=[\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}]\cdot\mathbf{H}=-\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{H}$$

$$\frac{\partial\rho_{ml}}{\partial t}=\mathbf{n}_1\cdot[\mathbf{E}\times\mathbf{n}]=-[\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}]\cdot\mathbf{E}=\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{E}$$

在正弦电磁场情况下，对时间的导数相当于乘以因子 $i\omega$，最后得

$$\rho_l=-\frac{1}{i\omega}(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{H}) \tag{5.21}$$

$$\rho_{ml}=\frac{1}{i\omega}(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{E}) \tag{5.22}$$

将观察点场的表达式分成由等效面电流、面电荷和线电荷产生的两部分，同时为简单起见假定没有体积电流和体积电荷(需要时可以加上)，由此得

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_P=\frac{1}{4\pi}\iint_S&[-i\omega\mu[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]A+[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\\&\times\nabla A+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})\nabla A]d\sigma\\&-\frac{1}{4\pi i\omega\varepsilon}\oint_\Gamma(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{H})\nabla A dl\end{aligned} \tag{5.23}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_P=\frac{1}{4\pi}\iint_S&[i\omega\varepsilon[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]A+[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\times\nabla A\\&+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{H})\nabla A]d\sigma\\&+\frac{1}{4\pi i\omega\mu}\oint_\Gamma(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{E})\nabla A dl\end{aligned} \tag{5.24}$$

式中 Γ 为非封闭曲面 S 的边界；

$$A = \frac{e^{-ikr}}{r}$$

式 (5.23) 和 (5.24) 中的线积分可变换如下. 由公式 (1.50),

$$\oint_\Gamma (\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{H})\nabla A dl = \iint_S ([\mathbf{n}\times\nabla]\cdot\mathbf{H})\nabla A d\sigma$$

$$= \iint_S ([\mathbf{n}\times\nabla]\cdot\mathbf{H})(\nabla A)_c d\sigma + \iint_S ([\mathbf{n}\times\nabla]\cdot\mathbf{H}_c)\nabla A d\sigma$$

$$= \iint_S \nabla A(\mathbf{n}\cdot[\nabla\times\mathbf{H}])d\sigma - \iint_S ([\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\cdot\nabla)\nabla A d\sigma$$

$$= \iint_S i\omega\varepsilon(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})\nabla A d\sigma - \iint_S ([\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\cdot\nabla)\nabla A d\sigma \tag{5.25}$$

同理可证

$$\oint_\Gamma (\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{E})\nabla A dl$$

$$= \iint_S -i\omega\mu(\mathbf{n}\cdot\mathbf{H})\nabla A d\sigma - \iint_S ([\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\cdot\nabla)\nabla A d\sigma \tag{5.26}$$

将式(5.25)和(5.26)代入式(5.23)和(5.24),得

$$\mathbf{E}_P = -\frac{1}{4\pi}\iint_S \left\{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})\nabla A - \frac{1}{i\omega\varepsilon}([\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\cdot\nabla)\nabla A + i\omega\mu[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]A - [\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\times\nabla A - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})\nabla A\right\}d\sigma$$

$$= \frac{1}{4\pi i\omega\varepsilon}\iint_S \{(-i\omega\varepsilon)(i\omega\mu)[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]A + ([\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\cdot\nabla)\nabla A + i\omega\varepsilon[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\times\nabla A\}d\sigma$$

$$= \frac{1}{4\pi i\omega\varepsilon}\iint_S \{k^2[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]A + ([\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\cdot\nabla)\nabla A$$

$$+ i\omega\varepsilon[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\times\nabla A\}d\sigma \tag{5.27}$$

同理，

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_P &= \frac{1}{4\pi i\omega\mu}\iint_S\{-i\omega\mu(\mathbf{n}\cdot\mathbf{H})\nabla A-([\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\cdot\nabla)\nabla A\\&\quad+(i\omega\mu)(i\omega\varepsilon)[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]A+i\omega\mu[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\times\nabla A\\&\quad+i\omega\mu(\mathbf{n}\cdot\mathbf{H})\nabla A\}d\sigma\\&=-\frac{1}{4\pi i\omega\mu}\iint_S\{k^2[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]A+([\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\cdot\nabla)\nabla A\\&\quad-i\omega\mu[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\times\nabla A\}d\sigma\end{aligned} \tag{5.28}$$

以上是从满足连续性方程出发引入了修正项。下一步是要直接证明式 (5.23) 和 (5.24) 所决定的 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 满足麦克斯韦方程组。

对一任意点 (x',y',z') 计算 $\mathrm{div}\mathbf{E}(x',y',z')=\nabla'\cdot\mathbf{E}$ 并证明它等于零(在观察点无场源)。

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\mathbf{E}(x',y',z')&=\nabla'\cdot\mathbf{E}\\&=-\frac{1}{4\pi i\omega\varepsilon}\oint_\Gamma(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{H})\nabla'\cdot\nabla A dl\\&\quad+\frac{1}{4\pi}\iint_S[-i\omega\mu[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\cdot\nabla' A+\nabla'\\&\quad\cdot[[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\times\nabla]\mathbf{A}+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})\nabla'\cdot\nabla A]d\sigma\end{aligned}$$

考虑到

$$\nabla'=-\nabla\qquad\nabla'\cdot\nabla=-\nabla^2$$

以及

$$\begin{aligned}&\nabla'\cdot[[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\times\nabla]A\\&\quad=-[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\cdot[\nabla'\times\nabla]A\\&\quad=[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\cdot[\nabla\times\nabla]A\\&\quad=0\\&\nabla^2A+k^2A=0\end{aligned}$$

代入上式得

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\mathbf{E}(x',y',z') &= \frac{1}{4\pi i\omega\varepsilon}\oint_\Gamma(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{H})\nabla^2 A dl \\ &\quad+\frac{1}{4\pi}\iint_S[i\omega\mu[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\cdot\nabla A-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})\nabla^2 A]d\sigma \\ &=-\frac{k^2}{4\pi i\omega\varepsilon}\oint_\Gamma(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{H})A dl \\ &\quad+\frac{k^2}{4\pi}\iint_S(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})A d\sigma+\frac{i\omega\mu}{4\pi}\iint_S[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\cdot\nabla A d\sigma\end{aligned} \tag{5.29}$$

但根据等式

$$\begin{aligned}[\nabla\times A\mathbf{H}]\cdot\mathbf{n} &= A[\nabla\times\mathbf{H}]\cdot\mathbf{n}-[\mathbf{H}\times\nabla A]\cdot\mathbf{n} \\ &= A[\nabla\times\mathbf{H}]\cdot\mathbf{n}-[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\cdot\nabla A\end{aligned}$$

可写出

$$\begin{aligned}&\iint_S[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\cdot\nabla A d\sigma \\ &=\iint_S A[\nabla\times\mathbf{H}]\cdot\mathbf{n}d\sigma-\iint_S[\nabla\times A\mathbf{H}]\cdot\mathbf{n}d\sigma \\ &=\iint_S A[\nabla\times\mathbf{H}]\cdot\mathbf{n}d\sigma-\oint_\Gamma A(\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\tau})dl\end{aligned} \tag{5.30}$$

注意，式(5.30)中的线积分在 S 为封闭曲面时等于零，而当 S 非封闭时正好被式 (5.29) 中的线积分所抵消，这也正是只有向式(5.23)中引入线积分后 $\mathbf{E}$ 才能满足麦克斯韦方程组的原因．将式(5.30)代入式(5.29)得

$$\begin{aligned}&\mathrm{div}\mathbf{E}(x',y',z') \\ &=-\frac{k^2}{4\pi i\omega\varepsilon}\oint_\Gamma(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{H})A dl+\frac{k^2}{4\pi}\iint_S(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})A d\sigma\end{aligned}$$

$$+\frac{i\omega\mu}{4\pi}\iint_S A[\nabla\times\mathbf{H}]\cdot\mathbf{n}d\sigma-\frac{i\omega\mu}{4\pi}\oint_\Gamma(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{H})Adl$$

考虑到

$$-\frac{k^2}{4\pi i\omega\varepsilon}=-\frac{\omega^2\varepsilon\mu}{4\pi i\omega\varepsilon}=\frac{i\omega\mu}{4\pi}$$

$$\nabla\times\mathbf{H}=i\omega\varepsilon\mathbf{E}$$

将此代入上式后线积分抵消，最后可得

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\mathbf{E}(x',y',z')&=\frac{k^2}{4\pi}\iint_S(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})Ad\sigma+\frac{i\omega\mu}{4\pi}\iint_S A(i\omega\varepsilon)(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})d\sigma\\&=\frac{\omega^2\varepsilon\mu}{4\pi}\iint_S(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})Ad\sigma-\frac{\omega^2\varepsilon\mu}{4\pi}\iint_S(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})Ad\sigma\\&=0\end{aligned}$$

故麦克斯韦方程 $\mathrm{div}\mathbf{E}=0$ 得到满足。

同理，因为

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(x',y',z')&=\frac{1}{4\pi i\omega\mu}\oint_\Gamma(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{E})\nabla Adl\\&+\frac{1}{4\pi}\iint_S[i\omega\varepsilon[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]A+[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\times\nabla A\\&+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{H})\nabla A]d\sigma\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\mathbf{H}(x',y',z')&=\nabla'\cdot\mathbf{H}(x',y',z')\\&=\frac{-1}{4\pi i\omega\mu}\oint_\Gamma(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{E})\nabla^2Adl\\&-\frac{1}{4\pi}\iint_S[i\omega\varepsilon[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\cdot\nabla A+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{H})\nabla^2A]d\sigma\end{aligned}$$

考虑到

$$\nabla^2A+k^2A=0$$

以及

$$\iint_S [\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\cdot\nabla A d\sigma = \iint_S A[\nabla\times\mathbf{E}]\cdot\mathbf{n}d\sigma - \oint_\Gamma A(\mathbf{E}\cdot\tau)dl$$

$$= -\iint_S A(i\omega\mu\mathbf{H})\cdot\mathbf{n}d\sigma - \oint_\Gamma A(\mathbf{E}\cdot\tau)dl$$

代入后得

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\mathbf{H}(x',y',z') &= \frac{k^2}{4\pi i\omega\mu}\oint_\Gamma(\tau\cdot\mathbf{E})Adl - \frac{k^2}{4\pi}\iint_S(\mathbf{n}\cdot\mathbf{H})Ad\sigma \\ &\quad + \frac{i\omega\varepsilon}{4\pi}\oint_\Gamma(\tau\cdot\mathbf{E})Adl + \frac{k^2}{4\pi}\iint_S(\mathbf{n}\cdot\mathbf{H})Ad\sigma \\ &= 0\end{aligned}$$

所以方程 $\mathrm{div}\mathbf{H}=0$ 得到满足.

现再来证明方程组

$$\begin{cases}\nabla'\times\mathbf{E}+i\omega\mu\mathbf{H}=0\\ \nabla'\times\mathbf{H}-i\omega\varepsilon\mathbf{E}=0\end{cases}$$

也得到满足.

因为

$$\begin{aligned}&\nabla'\times\mathbf{H}(x',y',z') \\ &= \frac{1}{4\pi i\omega\mu}\oint_\Gamma(\tau\cdot\mathbf{E})\nabla'\times\nabla A dl + \frac{1}{4\pi}\iint_S i\omega\varepsilon\nabla' \\ &\quad\times[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]Ad\sigma \\ &\quad + \frac{1}{4\pi}\iint_S\nabla'\times[[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\times\nabla A]d\sigma + \frac{1}{4\pi}\iint_S\nabla' \\ &\quad\times(\mathbf{n}\cdot\mathbf{H})\nabla A d\sigma \qquad (5.31)\end{aligned}$$

考虑到

$$\nabla'\times\nabla A = -[\nabla\times\nabla]A = 0$$

$$\nabla'\times[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]A = \nabla' A\times[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]$$

$$= -[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\times\nabla' A$$

$$\nabla'\times(\mathbf{n}\cdot\mathbf{H})\nabla A = -(\mathbf{n}\cdot\mathbf{H})[\nabla\times\nabla]A = 0$$

$$\nabla' A = -\nabla A$$

$$\nabla'\times[[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\times\nabla A]$$

$$= [\mathbf{n}\times\mathbf{H}](\nabla'\cdot\nabla)A - ([\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\cdot\nabla')\nabla A$$

$$= -[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\nabla^2 A + ([\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\cdot\nabla)\nabla A$$

$$= [\mathbf{n}\times\mathbf{H}]k^2 A + ([\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\cdot\nabla)\nabla A$$

代入式(5.31),得

$$\nabla'\times\mathbf{H}(x',y',z')$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\iint_S i\omega\varepsilon[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\times\nabla A d\sigma + \frac{1}{4\pi}\iint_S k^2 A[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]d\sigma$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iint_S([\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\cdot\nabla)\nabla A d\sigma \qquad (5.32)$$

由于

$$([\mathbf{n}\times\nabla]\cdot\mathbf{H})\nabla A$$

$$= ([\mathbf{n}\times\nabla]\cdot\mathbf{H}_c)\nabla A + ([\mathbf{n}\times\nabla]\cdot\mathbf{H})(\nabla A)_c$$

$$= ([\mathbf{H}\times\mathbf{n}]\cdot\nabla)\nabla A + (\nabla A)(\mathbf{n}\cdot[\nabla\times\mathbf{H}])$$

$$= -([\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\cdot\nabla)\nabla A + (\nabla A)(\mathbf{n}\cdot[\nabla\times\mathbf{H}])$$

即

$$([\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\cdot\nabla)\nabla A$$

$$= (\nabla A)(\mathbf{n}\cdot[\nabla\times\mathbf{H}]) - ([\mathbf{n}\times\nabla]\cdot\mathbf{H})\nabla A$$

$$= i\omega\varepsilon(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})\nabla A - ([\mathbf{n}\times\nabla]\cdot\mathbf{H})\nabla A$$

代入式(5.32),得

$$\nabla'\times\mathbf{H}(x',y',z')$$

$$= \frac{i\omega\varepsilon}{4\pi}\iint_S[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\nabla A d\sigma + \frac{k^2}{4\pi}\iint_S A[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]d\sigma$$

$$+\frac{i\omega\varepsilon}{4\pi}\iint_S(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})\nabla A d\sigma$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iint_S([\mathbf{n}\times\nabla]\cdot\mathbf{H})\nabla A d\sigma \tag{5.33}$$

积分 $\iint_S([\mathbf{n}\times\nabla]\cdot\mathbf{H})\nabla A d\sigma$ 可变换如下。

令 $\mathbf{a}$ 为任意常矢量，则

$$\begin{aligned}
&\mathbf{a}\cdot\oint_\Gamma(\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\tau})\mathrm{grad}A dl\\
&=\oint_\Gamma(\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\tau})(\mathbf{a}\cdot\mathrm{grad}A)dl\\
&=\iint_S[\nabla\times\mathbf{H}(\mathbf{a}\cdot\mathrm{grad}A)]\cdot\mathbf{n}d\sigma\\
&=\iint_S([\mathbf{n}\times\nabla]\cdot\mathbf{H})(\mathbf{a}\cdot\mathrm{grad}A)d\sigma\\
&=\mathbf{a}\cdot\iint_S([\mathbf{n}\times\nabla]\cdot\mathbf{H})\mathrm{grad}A d\sigma
\end{aligned}$$

由于 $\mathbf{a}$ 是任意常矢量，故

$$\iint_S([\mathbf{n}\times\nabla]\cdot\mathbf{H})\nabla A d\sigma=\oint_\Gamma(\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\tau})\nabla A dl$$

代入式(5.33)，最后得

$$\begin{aligned}
&\nabla'\times\mathbf{H}(x',y',z')\\
&=i\omega\varepsilon\left\{\frac{1}{4\pi}\iint_S[-i\omega\mu[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]A+[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\times\nabla A\right.\\
&\quad\left.+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})\nabla A]d\sigma\right.\\
&\quad\left.-\frac{1}{4\pi i\omega\varepsilon}\oint_\Gamma(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{H})\nabla A dl\right\}\\
&=i\omega\varepsilon\mathbf{E}(x',y',z')\qquad(\text{根据式(5.23)})
\end{aligned}$$

此即所需证明的第一方程。

其次，

$$\nabla' \times \mathbf{E}(x',y',z')$$
$$= -\frac{1}{4\pi i\omega\varepsilon}\oint_\Gamma (\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{H})\nabla'\times\nabla A dl + \frac{1}{4\pi}\iint_S (i\omega\mu)[\mathbf{n}$$
$$\times \mathbf{H}]\times\nabla' A d\sigma$$
$$+\frac{1}{4\pi}\iint_S \nabla'\times[[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\times\nabla A]d\sigma + \frac{1}{4\pi}\iint_S \nabla'$$
$$\times(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})\nabla A d\sigma$$
$$= -\frac{1}{4\pi}\iint_S i\omega\mu[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\times\nabla A d\sigma + \frac{1}{4\pi}\iint_S k^2 A[\mathbf{n}$$
$$\times\mathbf{E}]d\sigma$$
$$+\frac{1}{4\pi}\iint_S ([\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\cdot\nabla)\nabla A d\sigma$$

但

$$([\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\cdot\nabla)\nabla A = -i\omega\mu(\mathbf{n}\cdot\mathbf{H})\nabla A$$
$$-([\mathbf{n}\times\nabla]\cdot\mathbf{E})\nabla A$$

代入得

$$\nabla'\times\mathbf{E}(x',y',z')$$
$$= -\frac{i\omega\mu}{4\pi}\iint_S [\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\times\nabla A d\sigma + \frac{k^2}{4\pi}\iint_S A[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]d\sigma$$
$$-\frac{i\omega\mu}{4\pi}\iint_S (\mathbf{n}\cdot\mathbf{H})\nabla A d\sigma - \frac{1}{4\pi}\iint_S ([\mathbf{n}\times\nabla]$$
$$\cdot\mathbf{E})\nabla A d\sigma$$
$$= -i\omega\mu\left\{\frac{1}{4\pi}\iint_S [[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\times\nabla A + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{H})\nabla A\right.$$
$$\left. + i\omega\varepsilon[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]A]d\sigma\right\}$$
$$-\frac{1}{4\pi}\iint_S ([\mathbf{n}\times\nabla]\cdot\mathbf{E})\nabla A d\sigma \qquad (5.34)$$

但

$$\iint_S ([\mathbf{n}\times\nabla]\cdot\mathbf{E})\nabla A d\sigma = \oint_\Gamma (\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\tau})\nabla A dl$$

代入式(5.34)，最后得

$$\begin{aligned}
&\nabla'\times\mathbf{E}(x',y',z')\\
&= -i\omega\mu\left\{\frac{1}{4\pi}\iint_S [[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\times\nabla A + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{H})\nabla A\right.\\
&\quad + i\omega\varepsilon[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]A]d\sigma\\
&\quad \left.+\frac{1}{4\pi i\omega\mu}\oint_\Gamma (\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\tau})\nabla A dl\right\}\\
&= -i\omega\mu\mathbf{H} \qquad \text{(根据(5.24)式)}
\end{aligned}$$

此即所需证明的第二方程。

由上可见，引入线积分后 $\mathbf{E}$、$\mathbf{H}$ 的确满足麦克斯韦方程组。这正是本节所要证明的主要结果。

5.3 辐射场公式的另一形式

公式 (5.23) 和(5.24)可用解析方法转换成另一常用的形式，现将推导过程列举如下。

将 $-i\omega\mu\mathbf{H} = \mathrm{rot}\mathbf{E}$ 代入式(5.23) (在口径面上假定 $\mathbf{i}=\mathbf{i}_m=0$)，得

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_P &= \frac{1}{4\pi}\iint_S [[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\times\nabla A]d\sigma + \frac{1}{4\pi}\iint_S (\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})\nabla A d\sigma\\
&\quad + \frac{1}{4\pi}\iint_S [\mathbf{n}\times[\nabla\times\mathbf{E}]]A d\sigma - \frac{1}{4\pi i\omega\varepsilon}\oint_\Gamma (\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{H})\nabla A dl
\end{aligned} \tag{5.35}$$

考虑到

$$\mathbf{n}\times[\nabla\times\mathbf{E}] = \nabla(\mathbf{n}_c\cdot\mathbf{E}) - (\mathbf{n}\cdot\nabla)\mathbf{E}$$

$$= \nabla(\mathbf{n}_c \cdot \mathbf{E}) - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial n} \tag{5.36}$$

其中 $\mathbf{n}_c \cdot \mathbf{E}$ 表示 $\mathbf{E}$ 在一固定 $\mathbf{n}$ 上的投影，同时

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \nabla A = -\mathbf{n}(\mathbf{E} \cdot \nabla A) + \mathbf{E}(\mathbf{n} \cdot \nabla A)$$

$$= -\mathbf{n}(\mathbf{E} \cdot \nabla A) + \mathbf{E}\frac{\partial A}{\partial n} \tag{5.37}$$

将式(5.36)和(5.37)代入式(5.35)，得

$$\mathbf{E}_P = -\frac{1}{4\pi i\omega\varepsilon}\oint_\Gamma (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{H})\nabla A dl + \frac{1}{4\pi}\iint_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})\nabla A d\sigma$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\iint_S \left(\mathbf{E}\frac{\partial A}{\partial n} - A\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial n}\right) d\sigma - \frac{1}{4\pi}\iint_S \mathbf{n}(\mathbf{E} \cdot \nabla A) d\sigma$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\iint_S A\nabla(\mathbf{n}_c \cdot \mathbf{E}) d\sigma \tag{5.38}$$

利用下式

$$\nabla[A(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_c)] = A\nabla(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_c) + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_c)\nabla A$$

将式(5.38)中的第二个积分与最后两个合并，得

$$\mathbf{E}_P = -\frac{1}{4\pi i\omega\varepsilon}\oint_\Gamma (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{H})\nabla A dl$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\iint_S \left(\mathbf{E}\frac{\partial A}{\partial n} - A\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial n}\right) d\sigma$$

$$- \frac{1}{4\pi}\iint_S \{\mathbf{n}(\mathbf{E} \cdot \nabla A) - \nabla[A(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_c)]\} d\sigma \tag{5.39}$$

再利用下式(证明见本节末。注意，此式只在 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 条件下成立)

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S \{\mathbf{n}(\mathbf{E} \cdot \nabla A) - \nabla[A(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_c)]\} d\sigma$$

$$= \frac{1}{4\pi}\oint_\Gamma A[\mathbf{E} \times \boldsymbol{\tau}] dl \tag{5.40}$$

将式(5.40)代入式(5.39)即得

$$\mathbf{E}_P = -\frac{1}{4\pi i\omega\varepsilon}\oint_\Gamma (\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{H})\nabla A dl - \frac{1}{4\pi}\oint_\Gamma A[\mathbf{E}\times\boldsymbol{\tau}]dl$$
$$+\frac{1}{4\pi}\iint_S\left(\mathbf{E}\frac{\partial A}{\partial n} - A\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial n}\right)d\sigma \qquad (5.41)$$

这就是我们要证明的公式.

对 $\mathbf{H}_P$ 可作类似的推导. 将公式

$$i\omega\varepsilon\mathbf{E} = \nabla\times\mathbf{H}$$

$$\mathbf{n}\times[\nabla\times\mathbf{H}] = \nabla(\mathbf{H}\cdot\mathbf{n}_c) - \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial n}$$

$$[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\times\nabla A = -\mathbf{n}(\mathbf{H}\cdot\nabla A) + \mathbf{H}\frac{\partial A}{\partial n}$$

代入式(5.24),得

$$\mathbf{H}_P = \frac{1}{4\pi i\omega\mu}\oint_\Gamma (\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{E})\nabla A dl + \frac{1}{4\pi}\iint_S(\mathbf{n}\cdot\mathbf{H})\nabla A d\sigma$$
$$+\frac{1}{4\pi}\iint_S\left[\mathbf{H}\frac{\partial A}{\partial n} - \mathbf{n}(\mathbf{H}\cdot\nabla A)\right]d\sigma$$
$$+\frac{1}{4\pi}\iint_S A\left(\nabla(\mathbf{H}\cdot\mathbf{n}_c) - \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial n}\right)d\sigma$$
$$= \frac{1}{4\pi i\omega\mu}\oint_\Gamma (\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{E})\nabla A dl$$
$$+\frac{1}{4\pi}\iint_S\left(\mathbf{H}\frac{\partial A}{\partial n} - A\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial n}\right)d\sigma$$
$$-\frac{1}{4\pi}\iint_S\{\mathbf{n}(\mathbf{H}\cdot\nabla A) - A\nabla(\mathbf{H}\cdot\mathbf{n}_c)\}d\sigma$$
$$+\frac{1}{4\pi}\iint_S(\mathbf{n}\cdot\mathbf{H})\nabla A d\sigma$$

利用公式

$$(\mathbf{H}\cdot\mathbf{n})\nabla A + A\nabla(\mathbf{H}\cdot\mathbf{n}_c) = \nabla[A(\mathbf{H}\cdot\mathbf{n}_c)]$$

得

$$\mathbf{H}_P = \frac{1}{4\pi i\omega\mu}\oint_\Gamma (\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{E})\nabla A dl$$
$$+\frac{1}{4\pi}\iint_S\left(\mathbf{H}\frac{\partial A}{\partial n} - A\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial n}\right)d\sigma$$
$$-\frac{1}{4\pi}\iint_S\{\mathbf{n}(\mathbf{H}\cdot\nabla A) - \nabla[A(\mathbf{H}\cdot\mathbf{n}_c)]\}d\sigma$$

在 $\nabla\cdot\mathbf{H}=0$ 条件下,再用公式

$$\oint_\Gamma A[\mathbf{H}\times\boldsymbol{\tau}]dl = \iint_S\{\mathbf{n}(\mathbf{H}\cdot\nabla A) - \nabla[A(\mathbf{H}\cdot\mathbf{n}_c)]\}d\sigma \tag{5.42}$$

最后可得

$$\mathbf{H}_P = \frac{1}{4\pi i\omega\mu}\oint_\Gamma (\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\tau})\nabla A dl - \frac{1}{4\pi}\oint_\Gamma A[\mathbf{H}\times\boldsymbol{\tau}]dl$$
$$+\frac{1}{4\pi}\iint_S\left(\mathbf{H}\frac{\partial A}{\partial n} - A\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial n}\right)d\sigma \tag{5.43}$$

现将公式(5.40)证明如下.

为了利用斯托克斯公式,令 $\mathbf{a}$ 为一任意常矢量,则

$$\mathbf{a}\cdot\oint_\Gamma A[\mathbf{E}\times\boldsymbol{\tau}]dl = \oint_\Gamma \mathbf{a}\cdot[A\mathbf{E}\times\boldsymbol{\tau}]dl$$
$$= \oint_\Gamma [\mathbf{a}\times A\mathbf{E}]\cdot\boldsymbol{\tau}dl$$
$$= \iint_S \mathbf{n}\cdot[\nabla\times[\mathbf{a}\times A\mathbf{E}]]d\sigma$$

但是

$$\mathbf{n}\cdot[\nabla\times[\mathbf{a}\times A\mathbf{E}]]$$
$$= \mathbf{n}\cdot\{\mathbf{a}(\nabla\cdot A\mathbf{E}) - (\mathbf{a}\cdot\nabla)A\mathbf{E}\}$$
$$= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})(\nabla\cdot A\mathbf{E}) - (\mathbf{a}\cdot\nabla)(\mathbf{n}_c\cdot A\mathbf{E})$$
$$= \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}[(\nabla A\cdot\mathbf{E}_c) + A\nabla\cdot\mathbf{E}] - \mathbf{a}\cdot\nabla(\mathbf{n}_c\cdot A\mathbf{E})$$
$$= \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}(\mathbf{E}\cdot\nabla A) - \mathbf{a}\cdot\nabla[A(\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}_c)]$$

(利用 $\nabla\cdot\mathbf{E}=0$ 的先决条件),因此

$$\mathbf{a}\cdot\oint_\Gamma A[\mathbf{E}\times\boldsymbol{\tau}]dl$$

$$=\mathbf{a}\cdot\left\{\iint_S[\mathbf{n}(\mathbf{E}\cdot\nabla A)-\nabla[A(\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}_c)]]d\sigma\right\}$$

如上所设，由于 $\mathbf{a}$ 是任意常矢量，故最后可得

$$\frac{1}{4\pi}\oint_\Gamma A[\mathbf{E}\times\boldsymbol{\tau}]dl$$

$$=\frac{1}{4\pi}\iint_S\{\mathbf{n}(\mathbf{E}\cdot\nabla A)-\nabla[A(\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}_c)]\}d\sigma$$

对 $\nabla\cdot\mathbf{H}=0$ 条件下的矢量 $\mathbf{H}$ 可作同样的证明。

5.4 用矢量-标量格林公式求解

我们在第一章的公式 (1.83) 中证明了所谓的矢量-标量格林公式：

$$\iiint_V[A\nabla\times\mathrm{rot}\mathbf{a}+\mathbf{a}\nabla^2A-(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathrm{grad}A]dv$$

$$=-\oiint_{S_0+S}[A\mathbf{n}\times\mathrm{rot}\mathbf{a}+[\mathbf{n}\times\mathbf{a}]\times\mathrm{grad}A]d\sigma$$

式中 $\mathbf{n}$ 为朝体积 V 内部指向的单位法向量；A、$\mathbf{a}$ 分别为在 V 内和 S_0、S 上具有二阶连续导数的函数。

考虑到

$$(\nabla\cdot\mathbf{a})\mathrm{grad}A=(\nabla\cdot\mathbf{a}_c)\mathrm{grad}A+(\nabla\cdot\mathbf{a})(\mathrm{grad}A)_c$$

$$=(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathrm{grad}A+(\mathrm{div}\mathbf{a})(\mathrm{grad}A)$$

即

$$-(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathrm{grad}A=(\mathrm{div}\mathbf{a})(\mathrm{grad}A)-(\nabla\cdot\mathbf{a})\mathrm{grad}A$$

及

$$\iiint_V(\nabla\cdot\mathbf{a})\mathrm{grad}Adv=-\oiint_{S_0+S}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{a})\mathrm{grad}Ad\sigma$$

上式又可写成

$$\iiint_V [A\nabla \times \mathrm{rot}\mathbf{a} + \mathbf{a}\nabla^2 A + (\mathrm{div}\mathbf{a})\mathrm{grad}A]dv$$

$$= -\oiint_{S_0+S} [A\mathbf{n} \times \mathrm{rot}\mathbf{a} + [\mathbf{n} \times \mathbf{a}] \times \mathrm{grad}A + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})\mathrm{grad}A]d\sigma \tag{5.44}$$

在式(5.44)中取 $\mathbf{a} = \mathbf{E}$, $A = \frac{e^{-ikr}}{r}$, 并考虑到

$$\nabla^2 A + k^2 A = 0 \tag{3.98}$$

$$\nabla \times \mathrm{rot}\mathbf{E} = k^2\mathbf{E} - i\omega\mu\mathbf{i} - \nabla \times \mathbf{i}_m \tag{3.90}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

就可将体积积分内的被积函数写成

$$A\nabla \times \mathrm{rot}\mathbf{E} + \mathbf{E}\nabla^2 A + (\mathrm{div}\mathbf{E})(\mathrm{grad}A)$$

$$= A(k^2\mathbf{E} - i\omega\mu\mathbf{i} - \nabla \times \mathbf{i}_m) - \mathbf{E}k^2 A + \frac{\rho}{\varepsilon}\mathrm{grad}A$$

$$= -i\omega\mu\mathbf{i}A - A\nabla \times \mathbf{i}_m + \frac{\rho}{\varepsilon}\mathrm{grad}A$$

$$= -i\omega\mu\mathbf{i}A + \frac{\rho}{\varepsilon}\mathrm{grad}A - \nabla \times \mathbf{i}_m A - \mathbf{i}_m \times \nabla A$$

(因 $A\nabla \times \mathbf{i}_m = \nabla \times \mathbf{i}_m A + \mathbf{i}_m \times \nabla A$). 这样写的目的是将含有 $\mathbf{E}$ 的函数通过场源来表示。代入式(5.44),得

$$\iiint_V \left(-i\omega\mu\mathbf{i}A + \frac{\rho}{\varepsilon}\mathrm{grad}A - \mathbf{i}_m \times \nabla A\right)dv$$

$$= \iiint_V \nabla \times \mathbf{i}_m A dv - \oiint_{S_0+S} [A\mathbf{n} \times \mathrm{rot}\mathbf{E} + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \mathrm{grad}A + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})\mathrm{grad}A]d\sigma$$

$$= -\oiint_{S_0+S} (\mathbf{n} \times \mathbf{i}_m A + A\mathbf{n} \times \mathrm{rot}\mathbf{E} + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \mathrm{grad}A$$

$$+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})\mathrm{grad}A)d\sigma$$

但

$$A\mathbf{n}\times\mathrm{rot}\mathbf{E}-A\mathbf{n}\times[-i\omega\mu\mathbf{H}-\mathbf{i}_m]$$
$$=-i\omega\mu A[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]-A\mathbf{n}\times\mathbf{i}_m$$

代入后约去一 $A\mathbf{n}\times\mathbf{i}_m$，得

$$\iiint_V\left(-i\omega\mu\mathbf{i}A+\frac{\rho}{\varepsilon}\mathrm{grad}A-\mathbf{i}_m\times\nabla A\right)dv$$
$$=-\oiint_{S_0+S}\{[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\times\mathrm{grad}A+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})\mathrm{grad}A$$
$$-i\omega\mu A[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\}d\sigma$$

下面的推导与用矢量格林定理时相同．分出包含观察点 P 的 S_0 后，令 S_0 趋向于零，得

$$\oiint_{S_0}\{[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\times\mathrm{grad}A+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})\mathrm{grad}A$$
$$-i\omega\mu A[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\}d\sigma$$

趋向于 $-4\pi\mathbf{E}_P$，$\mathbf{E}_P$ 为 $\mathbf{E}$ 在 P 点之值．因此

$$4\pi\mathbf{E}_P-\oiint_S\{[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\times\mathrm{grad}A+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})\mathrm{grad}A$$
$$-i\omega\mu A[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\}d\sigma$$
$$=\iiint_V\left(-i\omega\mu\mathbf{i}A+\frac{\rho}{\varepsilon}\mathrm{grad}A-\mathbf{i}_m\times\nabla A\right)dv$$

最后得

$$\mathbf{E}_P=-\frac{1}{4\pi}\iiint_V\left(i\omega\mu\mathbf{i}A+\mathbf{i}_m\times\mathrm{grad}A-\frac{\rho}{\varepsilon}\mathrm{grad}A\right)dv$$
$$+\frac{1}{4\pi}\oiint_S[-i\omega\mu A[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})\mathrm{grad}A$$
$$+[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\times\mathrm{grad}A]d\sigma \qquad (5.45)$$

上式与式(5.17)完全一致。如果取 $\mathbf{a}=\mathbf{H}$ 和 $A=\frac{e^{-ikr}}{r}$，那么用同样的方法就可得到与式（5.18）完全一样的关于 $\mathbf{H}$ 的公式。

5.5 用洛伦兹引理求解

洛伦兹引理是一种表示满足广义麦克斯韦方程组的两组函数之间相互关系的公式。从都是表示函数之间的关系这一点来说，差别仅在于这里的函数要满足广义麦克斯韦方程组，而格林定理中的函数只要求它们是连续的以及具有连续的导数。

假定有 $\mathbf{E}$、$\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{E}_1$、$\mathbf{H}_1$ 这样两组函数，它们分别满足下列广义麦克斯韦方程组：

$$\begin{cases}\mathrm{rot}\mathbf{H}=i\omega\varepsilon\mathbf{E}+\mathbf{i}\\ \mathrm{rot}\mathbf{E}=-i\omega\mu\mathbf{H}-\mathbf{i}_m\end{cases}\tag{5.46}$$

$$\begin{cases}\mathrm{rot}\mathbf{H}_1=i\omega\varepsilon\mathbf{E}_1+\mathbf{i}_1\\ \mathrm{rot}\mathbf{E}_1=-i\omega\mu\mathbf{H}_1-\mathbf{i}_{m1}\end{cases}\tag{5.47}$$

将方程组中各方程的左右两边分别按顺序点乘以 $\mathbf{E}_1$、$\mathbf{H}_1$、$-\mathbf{E}$ 和 $-\mathbf{H}$，再将所得到的四个方程加起来，得

$$\begin{aligned}&(\mathbf{E}_1\cdot\mathrm{rot}\mathbf{H})+(\mathbf{H}_1\cdot\mathrm{rot}\mathbf{E})-(\mathbf{E}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{H}_1)-(\mathbf{H}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{E}_1)\\&=(\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{i})-(\mathbf{H}_1\cdot\mathbf{i}_m)-(\mathbf{E}\cdot\mathbf{i}_1)+(\mathbf{H}\cdot\mathbf{i}_{m1})\end{aligned}\tag{5.48}$$

利用公式

$$\mathrm{div}[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]=\mathbf{b}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{a}-\mathbf{a}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{b}\tag{1.27}$$

式(5.48)可写成

$$\begin{aligned}&\mathrm{div}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}_1]+\mathrm{div}[\mathbf{H}\times\mathbf{E}_1]\\&=(\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{i})-(\mathbf{H}_1\cdot\mathbf{i}_m)-(\mathbf{E}\cdot\mathbf{i}_1)+(\mathbf{H}\cdot\mathbf{i}_{m1})\end{aligned}\tag{5.49}$$

这就是洛伦兹引理。

在应用洛伦兹引理时，一组函数取为待求的场，而另一组函数则取为满足广义麦克斯韦方程组的已知函数，例如电偶极子的场或磁偶极子的场，然后对包含所有场源和观察点的某一体积进行积分（假定所有场源都处于空间的有限区域内），这样便可求出观察点的场与场源和场边界值的关系。

在不影响普遍性的前提下，为了便于书写起见，假定只有一个封闭曲面 S_1 包含了某些场源，S_1 上的总场值 $\mathbf{E}$、$\mathbf{H}$ 为已知（$\mathbf{E}$、$\mathbf{H}$ 包含 S_1 内的源所形成的场值和 S_1 外部的源所形成的场值，由磁流和磁荷理论可知，真正起作用的是由 S_1 内部的源所形成的场值）。包含观察点 P 的小球面用 S_0 表示，其内部空间用 V_0 表示。包含观察点和所有场源的大球面用 S_2 表示，其内部空间（除去 S_1 所包含的空间）用 V_a 表示。这时 S_1 和 V_0 外部的空间为 $V_a - V_0$（见图 5.5）。$\mathbf{n}$ 表示朝向 $V_a - V_0$ 内部的单位法向量。

$\mathbf{E}_1$、$\mathbf{H}_1$ 取为置于观察点 P 的电偶极子的场。电偶极子的矩用 $\mathbf{p}$ 表示。电偶极子的电流用 $\mathbf{i}_1$ 表示。因为是电偶极子，所以没有任何磁流，即 $\mathbf{i}_{m1} = 0$。

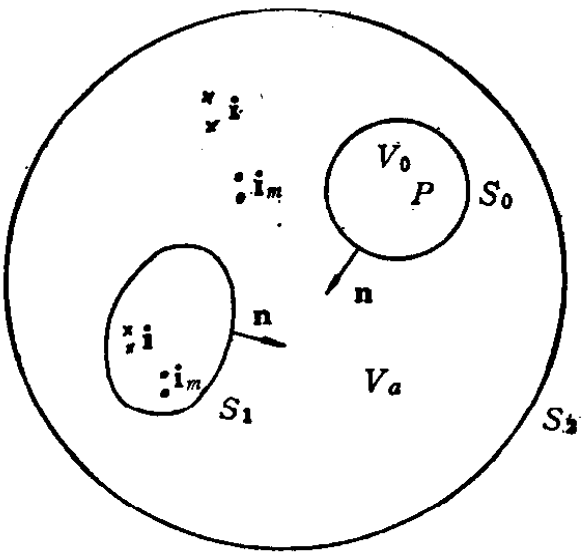

图 5.5　积分区域及各符号意义

$\mathbf{E}$、$\mathbf{H}$ 取为待求的场。 V_a 中的场源用 $\mathbf{i}$、$\mathbf{i}_m$ 表示。 将 $\mathbf{E}$、$\mathbf{H}$、$\mathbf{E}_1$ 和 $\mathbf{H}_1$ 代入洛伦兹引理中并对空间 $V_a - V_0$ 进行体积积分，得

$$\iiint_{V_a-V_0} (\mathrm{div}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}_1] + \mathrm{div}[\mathbf{H} \times \mathbf{E}_1])dv$$

$$= \iiint_{V_a-V_0} [(\mathbf{i} \cdot \mathbf{E}_1) - (\mathbf{i}_m \cdot \mathbf{H}_1)]dv \qquad (5.50)$$

(在 $V_a - V_0$ 内 $\mathbf{i}_1 = 0$，因电偶极子位于 P 点)。

应用高斯定理，将体积积分化为面积分，得

$$- \oiint_{S_0+S_1+S_2} \{\mathbf{n} \cdot [\mathbf{E} \times \mathbf{H}_1] + \mathbf{n} \cdot [\mathbf{H} \times \mathbf{E}_1]\}d\sigma$$

$$= \iiint_{V_a-V_0} [(\mathbf{i} \cdot \mathbf{E}_1) - (\mathbf{i}_m \cdot \mathbf{H}_1)]dv \qquad (5.51)$$

对 S_0 的面积分可用下列方式求出，即将洛伦兹引理应用于 S_0 及其所含的空间 V_0 (由于假定在观察点没有场源，故 V_0 内 $\mathbf{i} = 0$，$\mathbf{i}_m = 0$) 时，得

$$\oiint_{S_0} \{\mathbf{n} \cdot [\mathbf{E} \times \mathbf{H}_1] + \mathbf{n} \cdot [\mathbf{H} \times \mathbf{E}_1]\}d\sigma$$

$$= \iiint_{V_0} -(\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{E})dv \qquad (5.52)$$

面积分前的正号是因为单位法向量指向 V_0 外部。 将 V_0 缩成一点时，体积积分号下的 $\mathbf{E}$ 趋向于 $\mathbf{E}_P$，于是得

$$\iiint_{V_0} (\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{E})dv = \mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{E}_P = i\omega\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_P \qquad (5.53)$$

式中 $\mathbf{I}_1$ 为偶极子电流的矩，即电流乘偶极子长度的极限值；$\mathbf{p}$ 为偶极子矩，$\mathbf{I}_1 = i\omega\mathbf{p}$ (见式(4.116))，$\mathbf{p}$ 为常矢量。

将式 (5.53) 代入式 (5.51)，由于 $V_0 \to 0$，于是 $V_a - V_0 \to V_a$，因此得

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}_P=\frac{1}{i\omega}\oiint_{S_1+S_2}\{\mathbf{n}\cdot[\mathbf{E}\times\mathbf{H}_1]+\mathbf{n}\cdot[\mathbf{H}\times\mathbf{E}_1]\}d\sigma$$
$$+\frac{1}{i\omega}\iiint_{V_a}[(\mathbf{i}\cdot\mathbf{E}_1)-(\mathbf{i}_m\cdot\mathbf{H}_1)]dv \qquad (5.54)$$

在 4.7 节中已经证明，电偶极子的场 $\mathbf{E}_1$、$\mathbf{H}_1$ 与偶极子矩的关系为

$$\mathbf{E}_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\,\mathrm{rotrot}\left(\mathbf{p}\frac{e^{-ikr}}{r}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\,\mathrm{rotrot}(\mathbf{p}A) \qquad (5.55)$$

$$\mathbf{H}_1=\frac{i\omega}{4\pi}\,\mathrm{rot}\left(\mathbf{p}\frac{e^{-ikr}}{r}\right)=\frac{i\omega}{4\pi}\,\mathrm{rot}(\mathbf{p}A) \qquad (5.56)$$

式中 $A=\dfrac{e^{-ikr}}{r}$；r 为观察点与积分元之间的距离，即偶极子至积分元的距离。

将 $\mathbf{E}_1$、$\mathbf{H}_1$ 的表达式代入式 (5.54) 后对所得的积分进行下列变换(目的是将 $\mathbf{p}$ 抽至积分号外)：

(1) 首先

$$\oiint_{S_1+S_2}(\mathbf{n}\cdot[\mathbf{E}\times\mathbf{H}_1])d\sigma$$
$$=\frac{i\omega}{4\pi}\oiint_{S_1+S_2}(\mathbf{n}\cdot[\mathbf{E}\times\mathrm{rot}(\mathbf{p}A)])d\sigma$$
$$=\frac{i\omega}{4\pi}\oiint_{S_1+S_2}(\mathbf{n}\cdot[\mathbf{E}\times[\mathrm{grad}A\times\mathbf{p}]])d\sigma$$

(因 $\mathrm{rot}(\mathbf{p}A)=\nabla\times(\mathbf{p}A)$

$=\nabla A\times\mathbf{p}=\mathrm{grad}(A\times\mathbf{p})$)

$$=\frac{i\omega}{4\pi}\oiint_{S_1+S_2}[\mathrm{grad}A\times\mathbf{p}]\cdot[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]d\sigma$$
$$=\frac{i\omega}{4\pi}\oiint_{S_1+S_2}\mathbf{p}\cdot[[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\times\mathrm{grad}A]d\sigma$$

$$= \frac{i\omega}{4\pi}\mathbf{p}\cdot\oiint_{S_1+S_2}[[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\times\mathrm{grad}A]d\sigma \qquad (5.57)$$

(2) 其次

$$\oiint_{S_1+S_2}(\mathbf{n}\cdot[\mathbf{H}\times\mathbf{E}_1])d\sigma$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\oiint_{S_1+S_2}(\mathbf{n}\cdot[\mathbf{H}\times\mathrm{rotrot}(\mathbf{p}A)])d\sigma$$

因

$$\mathrm{rotrot}(\mathbf{p}A) = \mathrm{graddiv}(\mathbf{p}A) - \nabla^2\mathbf{p}A$$

$$\nabla^2 A + k^2 A = 0 \qquad (3.98)$$

故

$$\oiint_{S_1+S_2}(\mathbf{n}\cdot[\mathbf{H}\times\mathbf{E}_1])d\sigma$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\oiint_{S_1+S_2}(\mathbf{n}\cdot[\mathbf{H}\times\mathbf{p}k^2A])d\sigma$$

$$+ \frac{1}{4\pi\varepsilon}\oiint_{S_1+S_2}(\mathbf{n}\cdot[\mathbf{H}\times\mathrm{graddiv}(\mathbf{p}A)])d\sigma \qquad (5.58)$$

$$= \frac{k^2}{4\pi\varepsilon}\oiint_{S_1+S_2}\mathbf{n}\cdot[\mathbf{H}\times\mathbf{p}]Ad\sigma$$

$$+ \frac{1}{4\pi\varepsilon}\oiint_{S_1+S_2}\mathbf{n}\cdot[\mathbf{H}\times\mathrm{grad}(\mathbf{p}\cdot\mathrm{grad}A)]d\sigma \qquad (5.59)$$

这里用到了

$$\mathrm{div}(\mathbf{p}A) = \nabla\cdot\mathbf{p}A = \nabla A\cdot\mathbf{p} = \mathrm{grad}A\cdot\mathbf{p}$$

进一步考虑到

$$\mathbf{n}\cdot[\nabla\times\mathbf{H}(\mathbf{p}\cdot\mathrm{grad}A)]$$

$$= \mathbf{n}\cdot[\nabla\times\mathbf{H}_c(\mathbf{p}\cdot\mathrm{grad}A)] + \mathbf{n}\cdot[\nabla\times\mathbf{H}(\mathbf{p}\cdot\mathrm{grad}A)_c]$$

$$= -\mathbf{n}\cdot[\mathbf{H}\times\nabla(\mathbf{p}\cdot\mathrm{grad}A)]$$

$$+(\mathbf{n}\cdot[\nabla\times\mathbf{H}])(\mathbf{p}\cdot\mathrm{grad}A)_c\cdot$$
$$=-\mathbf{n}\cdot[\mathbf{H}\times\mathrm{grad}(\mathbf{p}\cdot\mathrm{grad}A)]+(\mathbf{n}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{H})(\mathbf{p}\cdot\mathrm{grad}A)_c$$

因此

$$\mathbf{n}\cdot[\mathbf{H}\times\mathrm{grad}(\mathbf{p}\cdot\mathrm{grad}A)]$$
$$=(\mathbf{n}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{H})(\mathbf{p}\cdot\mathrm{grad}A)-\mathbf{n}\cdot\mathrm{rot}[\mathbf{H}(\mathbf{p}\cdot\mathrm{grad}A)]$$

代入式(5.59)，根据 S_1 和 S_2 上 $\mathbf{i}=0$、$\mathrm{rot}\mathbf{H}=i\omega\varepsilon\mathbf{E}$ 得

$$\oiint_{S_1+S_2}(\mathbf{n}\cdot[\mathbf{H}\times\mathbf{E}_i])d\sigma$$
$$=\frac{k^2}{4\pi\varepsilon}\oiint_{S_1+S_2}\mathbf{p}\cdot[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]Ad\sigma$$
$$+\frac{1}{4\pi\varepsilon}\oiint_{S_1+S_2}(\mathbf{n}\cdot i\omega\varepsilon\mathbf{E})(\mathbf{p}\cdot\mathrm{grad}A)d\sigma$$
$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon}\oiint_{S_1+S_2}\mathbf{n}\cdot\mathrm{rot}[\mathbf{H}(\mathbf{p}\cdot\mathrm{grad}A)]d\sigma \qquad (5.60)$$

最后一个面积分在 S_1 和 S_2 都是封闭曲面情况下等于零，原因是若在封闭曲面上取一封闭曲线，根据斯托克斯定理，则该封闭曲面的积分等于以相反方向环行两次对此封闭曲线的线积分。

S_2 是一个大球面，在此球面上电磁场总是连续和有导数的，因此对 S_2 的积分始终等于零。

如果在 S_1 上正确地给出连续和有导数的 $\mathbf{H}$ 值，那么对 S_1 的积分当然也等于零。不过，在工程分析中，有时假定在 S_1 上的一部分 $\mathbf{H}$ 值不等于零，然后在某一封闭曲线 l 上（例如在抛物面天线口径的边缘上）$\mathbf{H}$ 突然降到零。这当然是一个不合乎实际情况的假定。但是，如果正是这样假定的话，根据斯托克斯定理，那么对 S_1 的积分将不等于零，而为

$$\oiint_{S_1}\mathbf{n}\cdot\mathrm{rot}[\mathbf{H}(\mathbf{p}\cdot\mathrm{grad}A)]d\sigma$$

$$= \oint_l (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l})(\mathbf{p} \cdot \mathrm{grad} A)$$

由此可见，只要作出上述假定，那么对 l 的线积分便是数学上的一种自然结果，不需要用物理概念来论证. 这是此方法的优点. 要不要线积分直接与对 $\mathbf{H}$ 的假设有关，而不是以满足连续性方程确定的. 因此，在对 $\mathbf{H}$ 作了上述假定（在封闭曲线 l 上突降至零）的情况下，可以写出下式：

$$\begin{aligned}
&\iint_{S_1+S_2} (\mathbf{n} \cdot [\mathbf{H} \times \mathbf{E}_1]) d\sigma \\
&= \frac{k^2}{4\pi\varepsilon} \iint_{S_1+S_2} \mathbf{p} \cdot [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] A d\sigma \\
&\quad + \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iint_{S_1+S_2} (\mathbf{p} \cdot \mathrm{grad} A)(\mathbf{n} \cdot \imath\omega\varepsilon \mathbf{E}) d\sigma \\
&\quad - \frac{1}{4\pi\varepsilon} \oint_l (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l})(\mathbf{p} \cdot \mathrm{grad} A)
\end{aligned} \tag{5.61}$$

其中的 l 表示 S_1 上的一条封闭曲线，一过 l 后 $\mathbf{H}$ 就突降至零. 在 S_1 上给定的 $\mathbf{H}$，如果是连续函数的话，那么其最后一个线积分等于零.

(3) 第(2)点中的积分还可变换成下面这种形式：

$$\begin{aligned}
&\iint_{S_1+S_2} \mathbf{n} \cdot [\mathbf{H} \times \mathbf{E}_1] d\sigma = \frac{k^2}{4\pi\varepsilon} \iint_{S_1+S_2} (\mathbf{p} \cdot [\mathbf{n} \times \mathbf{H}]) A d\sigma \\
&\quad + \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iint_{S_1+S_2} \mathbf{n} \cdot [\mathbf{H} \times \mathrm{grad}(\mathbf{p} \cdot \mathrm{grad} A)] d\sigma \\
&= \frac{k^2}{4\pi\varepsilon} \iint_{S_1+S_2} (\mathbf{p} \cdot [\mathbf{n} \times \mathbf{H}]) A d\sigma + \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iint_{S_1+S_2} ([\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \\
&\quad \cdot (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathrm{grad} A) d\sigma
\end{aligned} \tag{5.62}$$

这是因为

$$\begin{aligned}
\mathrm{grad}(\mathbf{p} \cdot \mathrm{grad} A) &= \nabla(\mathbf{p} \cdot \nabla A) = \nabla(\mathbf{p} \cdot \nabla) A \\
&= (\mathbf{p} \cdot \nabla) \nabla A
\end{aligned}$$

$$= (\mathbf{p}\cdot\nabla)\mathrm{grad}A$$

(4) 再有

$$\iiint_{V_a}(\mathbf{i}\cdot\mathbf{E}_1)dv=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_{V_a}(\mathbf{i}\cdot\mathrm{rotrot}(\mathbf{p}A))dv$$

因为

$$\mathrm{rotrot}(\mathbf{p}A)=\mathrm{graddiv}(\mathbf{p}A)-\nabla^2\mathbf{p}A$$

而

$$\nabla^2A+k^2A=0$$

$$\mathrm{div}(\mathbf{p}A)=\nabla\cdot(\mathbf{p}A)=\mathbf{p}\cdot\nabla A=\mathbf{p}\cdot\mathrm{grad}A$$

所以

$$\mathrm{rotrot}(\mathbf{p}A)=k^2\mathbf{p}A+\mathrm{grad}(\mathbf{p}\cdot\mathrm{grad}A)$$

代入积分公式,得

$$\iiint_{V_a}(\mathbf{i}\cdot\mathbf{E}_1)dv=\frac{k^2}{4\pi\varepsilon}\iiint_{V_a}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{i})Ad\sigma$$

$$+\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_{V_a}(\mathbf{i}\cdot\mathrm{grad}(\mathbf{p}\cdot\mathrm{grad}A))dv \qquad (5.63)$$

考虑到

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\mathbf{i}(\mathbf{p}\cdot\mathrm{grad}A))&=\nabla\cdot(\mathbf{i}(\mathbf{p}\cdot\nabla A))\\&=\mathbf{i}\cdot\nabla(\mathbf{p}\cdot\nabla A)+(\nabla\cdot\mathbf{i})(\mathbf{p}\cdot\nabla A)_c\\&=\mathbf{i}\cdot\mathrm{grad}(\mathbf{p}\cdot\mathrm{grad}A)+(\mathbf{p}\cdot\mathrm{grad}A)\mathrm{div}\mathbf{i}\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\mathbf{i}\cdot\mathrm{grad}(\mathbf{p}\cdot\mathrm{grad}A)&=-(\mathbf{p}\cdot\mathrm{grad}A)\mathrm{div}\mathbf{i}\\&\quad+\mathrm{div}(\mathbf{i}(\mathbf{p}\cdot\mathrm{grad}A))\end{aligned}$$

代入式(5.63),得

$$\iiint_{V_a}(\mathbf{i}\cdot\mathbf{E}_1)dv=\frac{k^2}{4\pi\varepsilon}\iiint_{V_a}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{i})Ad\sigma$$

$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_{V_a}(\mathbf{p}\cdot\mathrm{grad}A)\mathrm{div}\mathbf{i}d\sigma$$

$$+\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_{V_a}\mathrm{div}(\mathbf{i}(\mathbf{p}\cdot\mathrm{grad}A))dv$$

代入连续性方程 $\mathrm{div}\mathbf{i}=-i\omega\rho$，并对最后一个积分应用高斯定理，得

$$\iiint_{V_a}(\mathbf{i}\cdot\mathbf{E}_1)dv=\frac{k^2}{4\pi\varepsilon}\iiint_{V_a}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{i})Adv+\frac{i\omega}{4\pi\varepsilon}\iiint_{V_a}(\mathbf{p}\cdot\mathrm{grad}A)\rho dv-\frac{1}{4\pi\varepsilon}\oiint_{S_1+S_2}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{i})(\mathbf{p}\cdot\mathrm{grad}A)d\sigma \quad (5.64)$$

因假定 S_1、S_2 上无源，最后一个面积分等于零.

(5) 第(4)点的积分式也可变换成另一种形式:

$$\iiint_{V_a}(\mathbf{i}\cdot\mathbf{E}_1)dv=\frac{k^2}{4\pi\varepsilon}\iiint_{V_a}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{i})Adv+\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_{V_a}(\mathbf{i}\cdot\mathrm{grad}(\mathbf{p}\cdot\mathrm{grad}A))dv$$

但

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}(\mathbf{p}\cdot\mathrm{grad}A)&=\nabla(\mathbf{p}\cdot\nabla A)=\nabla(\mathbf{p}\cdot\nabla)A=(\mathbf{p}\cdot\nabla)\nabla A\\&=(\mathbf{p}\cdot\nabla)\mathrm{grad}A\end{aligned}$$

最后可得

$$\iiint_{V_a}(\mathbf{i}\cdot\mathbf{E}_1)dv=\frac{k^2}{4\pi\varepsilon}\iiint_{V_a}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{i})Adv+\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_{V_a}(\mathbf{i}\cdot(\mathbf{p}\cdot\nabla)\mathrm{grad}A)dv \quad (5.65)$$

(6) 最后

$$\iiint_{V_a}(\mathbf{i}_m\cdot\mathbf{H}_1)dv=\frac{i\omega}{4\pi}\iiint_{V_a}\mathbf{i}_m\cdot\mathrm{rot}(\mathbf{p}A)dv$$

但

$$\mathrm{rot}(\mathbf{p}A)=\nabla\times\mathbf{p}A=\nabla A\times\mathbf{p}=\mathrm{grad}A\times\mathbf{p}$$

代入后得

$$\iiint_{V_a}(\mathbf{i}_m\cdot\mathbf{H}_1)dv=\frac{i\omega}{4\pi}\iiint_{V_a}\mathbf{i}_m\cdot[\mathrm{grad}A\times\mathbf{p}]dv$$

$$=\frac{i\omega}{4\pi}\iiint_{V_a}\mathbf{p}\cdot[\mathbf{i}_m\times\mathrm{grad}A]dv \tag{5.66}$$

将第(1)、(2)、(4)、(6)点的结果代入式(5.54)，即得

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}_p=\mathbf{p}\cdot\left\{\frac{1}{4\pi}\oiint_{S_1+S_2}[[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\times\mathrm{grad}A]d\sigma\right.$$

$$-\frac{i\omega\mu}{4\pi}\oiint_{S_1+S_2}[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]Ad\sigma$$

$$+\frac{1}{4\pi}\oiint_{S_1+S_2}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})\mathrm{grad}Ad\sigma$$

$$-\frac{1}{4\pi i\omega\varepsilon}\oint_l(\mathrm{grad}A)(\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l})$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iiint_{V_a}[\mathbf{i}_m\times\mathrm{grad}A]dv+\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_{V_a}\rho\mathrm{grad}Adv$$

$$\left.-\frac{i\omega\mu}{4\pi}\iiint_{V_a}\mathbf{i}\cdot Adv\right\}$$

由于 $\mathbf{p}$ 是任意常矢量，因此最后可得

$$\mathbf{E}_p=\frac{1}{4\pi}\oiint_{S_1+S_2}[[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\times\mathrm{grad}A]d\sigma$$

$$+\frac{1}{4\pi}\oiint_{S_1+S_2}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})\mathrm{grad}Ad\sigma$$

$$-\frac{i\omega\mu}{4\pi}\oiint_{S_1+S_2}[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]Ad\sigma$$

$$-\frac{1}{4\pi i\omega\varepsilon}\oint_l(\mathrm{grad}A)(\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l})$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iiint_{V_a}[\mathbf{i}_m\times\mathrm{grad}A]dv+\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_{V_a}\rho\mathrm{grad}Adv$$

$$-\frac{i\omega\mu}{4\pi}\iiint_{V_a}\mathbf{i}\cdot A dv \tag{5.67}$$

与式(5.23)完全相同.

如果将第(1)、(3)、(5)、(6)点的结果代入式(5.54)，那么就能得到 $\mathbf{E}_P$ 的另一公式:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_P=&\frac{1}{4\pi}\oiint_{S_1+S_7}[[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\times\mathrm{grad}A]d\sigma\\&+\frac{1}{4\pi i\omega\varepsilon}\oiint_{S_1+S_2}([\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\cdot\nabla)\mathrm{grad}A d\sigma\\&-\frac{i\omega\mu}{4\pi}\oiint_{S_1+S_2}[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]A d\sigma-\frac{1}{4\pi}\iiint_{V_a}[\mathbf{i}_m\times\mathrm{grad}A]dv\\&+\frac{1}{4\pi i\omega\varepsilon}\iiint_{V_a}(\mathbf{i}\cdot\nabla)\mathrm{grad}A dv-\frac{i\omega\mu}{4\pi}\iiint_{V_a}\mathbf{i}A dv\end{aligned} \tag{5.68}$$

这里，在代入过程中要应用下列公式:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot(\mathbf{p}\cdot\nabla)\nabla A&=(\mathbf{a}\cdot\nabla)(\mathbf{p}\cdot\nabla A)\\&=\mathbf{p}\cdot(\mathbf{a}\cdot\nabla)\nabla A\\&=\mathbf{p}\cdot(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathrm{grad}A\end{aligned}$$

式中 $\mathbf{p}$ 为常矢量. 若 $\mathbf{a}=[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]$，则

$$[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\cdot(\mathbf{p}\cdot\nabla)\mathrm{grad}A=\mathbf{p}\cdot([\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\cdot\nabla)\mathrm{grad}A$$

如 $\mathbf{a}=\mathbf{i}$，则

$$\mathbf{i}\cdot(\mathbf{p}\cdot\nabla)\mathrm{grad}A=\mathbf{p}\cdot(\mathbf{i}\cdot\nabla)\mathrm{grad}A$$

如果取 $\mathbf{E}_2$、$\mathbf{H}_2$ 为位于观察点的磁偶极子所辐射的场，那么

$$\begin{cases}\mathbf{E}_2=\dfrac{-i\omega}{4\pi}\mathrm{rot}(\mathbf{p}_m A)\\[2ex]\mathbf{H}_2=\dfrac{1}{4\pi\mu}\mathrm{rotrot}(\mathbf{p}_m A)\end{cases} \tag{5.69}$$

式中 $\mathbf{p}_m$ 为磁偶极子矩 $A=\dfrac{e^{-ikr}}{r}$. 用同样的推导方法可得磁场下列表达式:

$$\mathbf{H}_P = \frac{1}{4\pi}\oiint_{S_1+S_2}[[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\times\mathrm{grad}A]d\sigma$$
$$+\frac{1}{4\pi}\oiint_{S_1+S_2}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{H})\mathrm{grad}A d\sigma+\frac{i\omega\varepsilon}{4\pi}\oiint_{S_1+S_2}[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]A d\sigma$$
$$+\frac{1}{4\pi i\omega\mu}\oint_l(\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l})\mathrm{grad}A+\frac{1}{4\pi}\iiint_{V_a}[\mathbf{i}\times\mathrm{grad}A]dv$$
$$+\frac{1}{4\pi\mu}\iiint_{V_a}\rho_m\mathrm{grad}A dv-\frac{i\omega\varepsilon}{4\pi}\iiint_{V_a}\mathbf{i}_m A dv \qquad (5.70)$$

或

$$\mathbf{H}_P=\frac{1}{4\pi}\oiint_{S_1+S_2}[[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\times\mathrm{grad}A]d\sigma$$
$$-\frac{1}{4\pi i\omega\mu}\oiint_{S_1+S_2}([\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\cdot\nabla)\mathrm{grad}A d\sigma$$
$$+\frac{i\omega\varepsilon}{4\pi}\oiint_{S_1+S_2}[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]A d\sigma+\frac{1}{4\pi}\iiint_{V_a}[\mathbf{i}\times\mathrm{grad}A]dv$$
$$-\frac{i\omega\varepsilon}{4\pi}\iiint_{V_a}\mathbf{i}_m A dv+\frac{1}{4\pi i\omega\mu}\iiint_{V_a}(\mathbf{i}_m\cdot\nabla)\mathrm{grad}A dv \qquad (5.71)$$

与式(5.24)完全相同.

5.6 辐射场公式的又一形式
——弗朗兹公式

我们在 5.1 节中证明了下列辐射场公式:

$$\mathbf{E}_P=-\frac{1}{4\pi}\iiint_V\left(i\omega\mu\mathbf{i}A+\mathbf{i}_m\times\nabla A-\frac{\rho}{\varepsilon}\nabla A\right)dv$$
$$+\frac{1}{4\pi}\oiint_S[-i\omega\mu[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]A+[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\times\nabla A$$

$$+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})\nabla A]d\sigma \quad (5.17)$$

$$\mathbf{H}_P=-\frac{1}{4\pi}\iiint_V\left(i\omega\varepsilon\mathbf{i}_m A-\mathbf{i}\times\nabla A-\frac{\rho_m}{\mu}\nabla A\right)dv$$

$$+\frac{1}{4\pi}\oiint_S[i\omega\varepsilon[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]A+[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\times\nabla A$$

$$+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{H})\nabla A]d\sigma \quad (5.18)$$

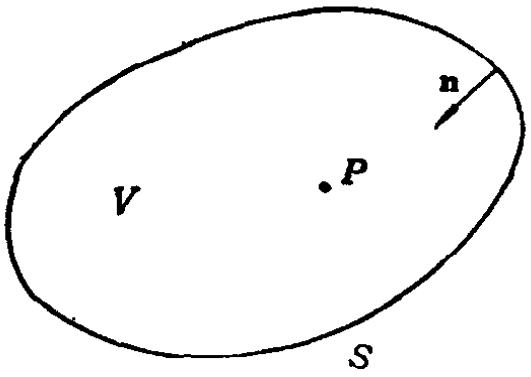

图 5.6　V 及 $\mathbf{n}$ 的意义

式中 S 为封闭曲面，$A=\dfrac{e^{-ikr}}{r}$，$\mathbf{n}$ 为朝向 S 内部的单位法向量(见图 5.6).

为了简单起见，假定所有场源都处于 S 外部. 这时 S 内的场完全由 S 面上的边界值决定. 公式(5.17)和(5.18)退化为

$$\mathbf{E}_P=\frac{1}{4\pi}\oiint_S[-i\omega\mu[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]A+[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\times\nabla A$$

$$+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})\nabla A]d\sigma \quad (5.72)$$

$$\mathbf{H}_P=\frac{1}{4\pi}\oiint_S[i\omega\varepsilon[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]A+[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\times\nabla A$$

$$+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{H})\nabla A]d\sigma \quad (5.73)$$

对(5.73)式在 P 点取旋度. 为与在场源点进行微分相区

别，下面对场源点的微分运算一律在右上角加上′号.

$$\nabla \times \mathbf{H}_P = \frac{1}{4\pi}\nabla \times \iint_S [i\omega\varepsilon[\mathbf{n} \times \mathbf{E}]A + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \times \nabla' A + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H})\nabla' A]d\sigma$$

因为

$$\nabla \times \left[\nabla \times \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{H}]Ad\sigma\right]$$

$$= \nabla \times \iint_S \nabla A \times [\mathbf{n} \times \mathbf{H}]_c d\sigma \qquad (\mathbf{n}\times\mathbf{H} \text{ 与 } P \text{ 无关})$$

$$= \nabla \times \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \times \nabla' A d\sigma \qquad (\nabla A = -\nabla' A) \tag{5.74}$$

及

$$\nabla \times \iint_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H})\nabla' A d\sigma$$

$$= \iint_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H})\nabla \times \nabla' A d\sigma$$

$$= -\iint_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H})\nabla' \times \nabla' A d\sigma = 0 \tag{5.75}$$

所以

$$\nabla \times \mathbf{H}_P = \frac{1}{4\pi}\nabla \times \iint_S i\omega\varepsilon[\mathbf{n} \times \mathbf{E}]Ad\sigma + \frac{1}{4\pi}\nabla \times \left[\nabla \times \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{H}]Ad\sigma\right] \tag{5.76}$$

由于 $\mathbf{E}_P$、$\mathbf{H}_P$ 满足下列麦克斯韦方程组:

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\mathbf{H}_P = i\omega\varepsilon\mathbf{E}_P \\ \mathrm{rot}\mathbf{E}_P = -i\omega\mu\mathbf{H}_P \end{cases}$$

故 $\mathbf{E}_P$ 可表示为

$$\mathbf{E}_P = \frac{-i}{\omega\varepsilon}\,\mathrm{rot}\mathbf{H}_P$$
$$= \left(\frac{-i}{\omega\varepsilon}\right)\left(\frac{1}{4\pi}\right)\nabla \times \iint_S i\omega\varepsilon[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]A d\sigma$$
$$+ \left(\frac{-i}{\omega\varepsilon}\right)\left(\frac{1}{4\pi}\right)\nabla \times \left[\nabla \times \iint_S [\mathbf{n}\times\mathbf{H}]A d\sigma\right] \tag{5.77}$$

即

$$\mathbf{E}_P = \frac{1}{4\pi}\nabla \times \iint_S [\mathbf{n}\times\mathbf{E}]A d\sigma$$
$$- \frac{i}{4\pi\omega\varepsilon}\nabla \times \left[\nabla \times \iint_S [\mathbf{n}\times\mathbf{H}]A d\sigma\right] \tag{5.78}$$

这是要证明的第一个公式.

同理

$$\mathbf{H}_P = \frac{i}{\omega\mu}\,\mathrm{rot}\mathbf{E}_P = \frac{i}{\omega\mu}\nabla \times \mathbf{E}_P$$
$$= \frac{i}{4\pi\omega\mu}\nabla \times \iint_S [-i\omega\mu[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]A$$
$$+ [\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\times\nabla' A + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})\nabla' A]d\sigma$$
$$= \frac{1}{4\pi}\nabla \times \iint_S [\mathbf{n}\times\mathbf{H}]A d\sigma$$
$$+ \frac{i}{4\pi\omega\mu}\nabla \times \iint_S [\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\times\nabla' A d\sigma$$
$$+ \frac{i}{4\pi\omega\mu}\nabla \times \iint_S (\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})\nabla' A d\sigma$$

根据式(5.74)和(5.75)得

$$\mathbf{H}_P = \frac{1}{4\pi}\nabla \times \iint_S [\mathbf{n}\times\mathbf{H}]A d\sigma$$

$$+\frac{i}{4\pi\omega\mu}\nabla\times\left[\nabla\times\oint\!\!\!\!\!\!\iint_S[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]Ad\sigma\right] \tag{5.79}$$

这是要证明的第二个公式．公式(5.78)和(5.79)统称为弗朗兹（Franz）公式．它的优点是当 S 不是封闭曲面时 $\mathbf{E}_P$、$\mathbf{H}_P$ 仍满足麦克斯韦方程组，因而不需要修正．证明如下：

首先验证

$$\mathbf{E}_P=\frac{-i}{\omega\varepsilon}\nabla\times\mathbf{H}_P$$

是否成立．

$$-\frac{i}{\omega\varepsilon}\nabla\times\mathbf{H}_P=\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{-i}{\omega\varepsilon}\nabla\times\left[\nabla\times\oint\!\!\!\!\!\!\iint_S[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]Ad\sigma\right]\right.$$
$$\left.+\left(\frac{-i}{\omega\varepsilon}\right)\left(\frac{i}{\omega\mu}\right)\nabla\times\left[\nabla\times\left[\nabla\times\oint\!\!\!\!\!\!\iint_S[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]Ad\sigma\right]\right]\right\}$$

由于 $k^2=\omega^2\varepsilon\mu$，所以

$$\frac{1}{k^2}\nabla\times\left[\nabla\times\left[\nabla\times\oint\!\!\!\!\!\!\iint_S[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]Ad\sigma\right]\right]$$
$$=\frac{1}{k^2}\left\{\nabla\left(\nabla\cdot\left[\nabla\times\oint\!\!\!\!\!\!\iint_S[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]Ad\sigma\right]\right)\right.$$
$$\left.-(\nabla\cdot\nabla)\left[\nabla\times\oint\!\!\!\!\!\!\iint_S[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]Ad\sigma\right]\right\}$$
$$=-\frac{1}{k^2}\left[\nabla\times\oint\!\!\!\!\!\!\iint_S[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\nabla^2Ad\sigma\right]$$
$$=-\frac{k^2}{k^2}\left[\nabla\times\oint\!\!\!\!\!\!\iint_S[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]Ad\sigma\right]$$
$$=\nabla\times\oint\!\!\!\!\!\!\iint_S[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]Ad\sigma$$

这里用到了

$$\nabla \cdot \left[\nabla \times \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] A d\sigma \right]$$

$$= [\nabla \times \nabla] \cdot \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] A d\sigma = 0$$

及

$$\nabla^2 A + k^2 A = 0$$

于是

$$\frac{-i}{\omega\varepsilon} \nabla \times \mathbf{H}_P = \frac{-i}{4\pi\omega\varepsilon} \nabla \times \left[\nabla \times \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] A d\sigma \right]$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \nabla \times \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] A d\sigma = \mathbf{E}_P$$

再验证

$$\mathbf{H}_P = \frac{i}{\omega\mu} \nabla \times \mathbf{E}_P$$

是否成立。

$$\frac{i}{\omega\mu} \nabla \times \mathbf{E}_P = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{i}{\omega\mu} \nabla \times \left[\nabla \times \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] A d\sigma \right] \right.$$

$$+ \left(\frac{i}{\omega\mu} \right) \left(\frac{-i}{\omega\varepsilon} \right) \nabla$$

$$\left. \times \left[\nabla \times \left[\nabla \times \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] A d\sigma \right] \right] \right\}$$

因

$$\frac{1}{k^2} \nabla \times \left[\nabla \times \left[\nabla \times \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] A d\sigma \right] \right]$$

$$= \frac{1}{k^2} \left\{ \nabla \left(\nabla \cdot \left[\nabla \times \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] A d\sigma \right] \right) \right.$$

$$\left. - (\nabla \cdot \nabla) \left[\nabla \times \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] A d\sigma \right] \right\}$$

$$= -\frac{1}{k^2}\nabla \times \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{H}]\nabla^2 A d\sigma$$

$$= \nabla \times \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] A d\sigma$$

故

$$\frac{i}{\omega\mu}\nabla \times \mathbf{E}_P = \frac{i}{4\pi\omega\mu}\nabla \times \left[\nabla \times \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] A d\sigma\right]$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\nabla \times \iint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] A d\sigma = \mathbf{H}_P$$

5.7 标量克希霍夫公式

在 5.3 节中我们对式 (5.41) 和(5.43)作了证明。如果曲面 S 是一封闭曲面，那么式(5.41)和(5.43)中的环路积分都等于零，于是公式可分别简化为

$$\mathbf{E}_P = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left(\mathbf{E}\frac{\partial A}{\partial n} - A\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial n}\right) d\sigma \tag{5.80}$$

$$\mathbf{H}_P = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left(\mathbf{H}\frac{\partial A}{\partial n} - A\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial n}\right) d\sigma \tag{5.81}$$

由此可见，公式(5.80)和(5.81)仅当 S 为封闭曲面时才是精确的，否则只是近似公式，误差为略去的两个环积分。

如果将 $\mathbf{E}_P$ 写成三个直角坐标分量之和：

$$\mathbf{E}_P = E_{xP}\mathbf{u}_x + E_{yP}\mathbf{u}_y + E_{zP}\mathbf{u}_z$$

代入公式(5.80)后，再将 $A = \frac{e^{-ikr}}{r}$ 代入，得

$$E_{xP} = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left[E_x\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right) - \frac{e^{-ikr}}{r}\frac{\partial E_x}{\partial n}\right] d\sigma$$

$$E_{yP}=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left[E_y\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)-\frac{e^{-ikr}}{r}\frac{\partial E_y}{\partial n}\right]d\sigma$$

$$E_{zP}=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left[E_z\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)-\frac{e^{-ikr}}{r}\frac{\partial E_z}{\partial n}\right]d\sigma$$

(5.82)

同理

$$H_{xP}=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left[H_x\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)-\frac{e^{-ikr}}{r}\frac{\partial H_x}{\partial n}\right]d\sigma$$

$$H_{yP}=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left[H_y\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)-\frac{e^{-ikr}}{r}\frac{\partial H_y}{\partial n}\right]d\sigma$$

$$H_{zP}=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left[H_z\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)-\frac{e^{-ikr}}{r}\frac{\partial H_z}{\partial n}\right]d\sigma$$

(5.83)

公式(5.82)和(5.83)称为标量克希霍夫公式．它们的特点是场的直角坐标分量，如 x 分量，只与口径场的相应直角坐标分量即 x 分量有关，因此当口径场为线极化和口径为平面时，用标量克希霍夫公式就特别方便．

但是，如果所用的不是直角坐标系统，例如是球坐标系统，那么电磁场在球坐标系统中的各个分量并不能用类似于式(5.82)和(5.83)的公式来计算．在特殊情况下，例如当口径面的尺寸比波长大好多倍时，辐射场基本上集中在空间的一个小角度范围内．在这个小角度范围内，场的某一直角坐标分量与某一球坐标分量相差很小，这时就可以用标量克希霍夫公式来计算直角坐标分量，并用它来代替球坐标分量．这样一种近似方法在微波天线理论中是经常用到的．必须强调指出，这种方法只在小角度范围（主瓣）内才能给出较精确的结果，在大的角度范围内误差就很大了．

由于 **E**、**H** 的每一分量都满足标量赫姆霍尔兹方程

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$$

由式(5.82)和(5.83)可见标量赫姆霍尔兹方程的解是

$$\psi = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left[\psi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right) - \frac{e^{-ikr}}{r}\frac{\partial \psi}{\partial n}\right] d\sigma \qquad (5.84)$$

这个公式通常也称为标量克希霍夫公式.

5.8 用等效原理和电磁位求解

假定所有的场源 $\mathbf{i}$、ρ 和 $\mathbf{i}_m$、ρ_m 都处于空间的有限范围内. 又假定在空间有一封闭曲面 S，在 S 上的场的切线分量是 $\mathbf{n}\times\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{E}\times\mathbf{n}$. 如图 5.7 所示，$S$ 所包含的体积用 V_0 表示，S 外部的空间用 V 表示，单位法向量 $\mathbf{n}$ 指向观察点 P 所在的 V 内部. 整个空间的媒质假定是均匀的，即 ε 等于常数，μ 等于常数.

这里要特别强调的一点是空间媒质的均匀性这个假定. 正是在这个前提下才有可能利用电磁位的公式，因为所有电磁位的公式都是在均匀媒质的前提下推导出来的. 对于非均匀的媒质，情况要复杂得多，因为到处都可能有电磁波的反

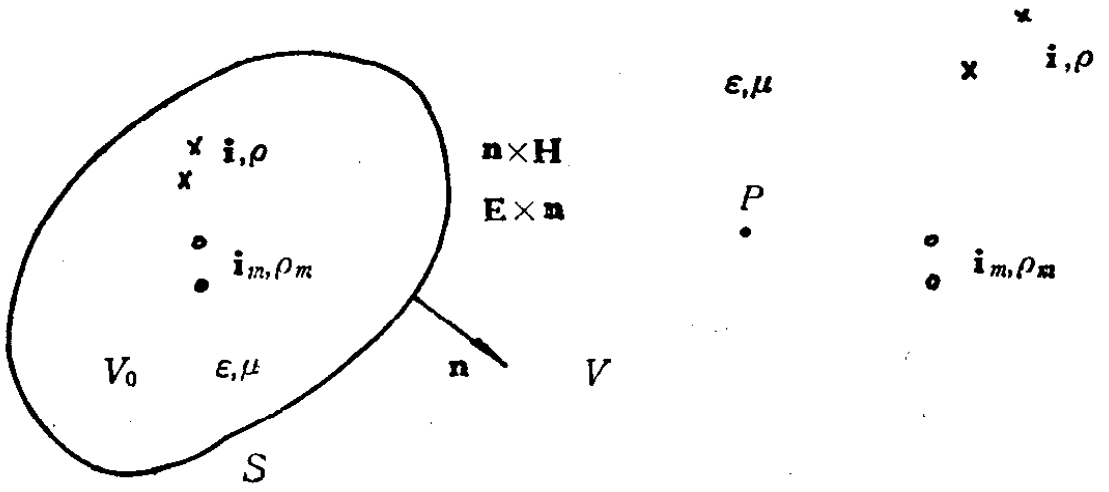

图 5.7 曲面 S 包含部分场源

射、折射和散射现象，一般性的讨论已超出本书的范围.

我们的目的是要求出在 P 点的场的表达式.

根据等效原理，如果在 V 中的场取为待求的场，而在 V_0 中取零场，则在 P 点的场为 $\mathbf{i}$、ρ 和 $\mathbf{i}_m$、ρ_m 的辐射场加上在 S 上的面电流 $\mathbf{i}_s$、面电荷 ρ_s、面磁流 $\mathbf{i}_{ms}$ 和面磁荷 ρ_{ms} 的辐射场之和，而且

$$\begin{cases} \mathbf{i}_s = \mathbf{n} \times \mathbf{H} \\ \mathbf{i}_{ms} = \mathbf{E} \times \mathbf{n} \\ \rho_s = \varepsilon(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \\ \rho_{ms} = \mu(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \end{cases} \tag{5.85}$$

由于整个空间是均匀媒质，因此可以利用电磁位的公式直接把场的表达式写出来. 利用不同的电磁位就可以得到不同形式的场的表达式. 当然它们都是相等的，只不过形式上不同而已.

首先我们利用电赫兹位来求 P 点的场. 根据电磁位理论，电赫兹位的表达式是

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V \frac{\mathbf{i}}{i\omega}\frac{e^{-ikr}}{r}dv + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iint_S \frac{\mathbf{i}_s}{i\omega}\frac{e^{-ikr}}{r}d\sigma$$

$$\mathbf{Z}_m = \frac{1}{4\pi\mu}\iiint_V \frac{\mathbf{i}_m}{i\omega}\frac{e^{-ikr}}{r}dv + \frac{1}{4\pi\mu}\iint_S \frac{\mathbf{i}_{ms}}{i\omega}\frac{e^{-ikr}}{r}d\sigma$$

这里既考虑了体积电流密度，也考虑了面电流密度.

由电赫兹位求场的公式是

$$\mathbf{E} = k^2\mathbf{Z} + \text{grad div}\mathbf{Z} - i\omega\mu\,\text{rot}\mathbf{Z}_m \tag{4.95}$$

$$\mathbf{H} = i\omega\varepsilon\,\text{rot}\mathbf{Z} + k^2\mathbf{Z}_m + \text{grad div}\mathbf{Z}_m$$

$$= i\omega\varepsilon\,\text{rot}\mathbf{Z} + \text{rot rot}\mathbf{Z}_m \tag{4.94}$$

现在作一些数学上的变换. 令 $'$ 号表示在观察点的微分，而不带 $'$ 号的微分运算表示在场源点的微分，则

$$\mathrm{rot}\mathbf{Z}_m = \frac{1}{4\pi\mu}\mathrm{rot}\iiint_V \frac{\mathbf{i}_m}{i\omega}\frac{e^{-ikr}}{r}dv + \frac{1}{4\pi\mu}\mathrm{rot}\oiint_S \frac{\mathbf{i}_{ms}}{i\omega}\frac{e^{-ikr}}{r}d\sigma$$

$$= \frac{1}{4\pi\mu i\omega}\nabla' \times \iiint_V \mathbf{i}_m \frac{e^{-ikr}}{r}dv + \frac{1}{4\pi\mu i\omega}\nabla' \times \oiint_S \mathbf{i}_{ms}\frac{e^{-ikr}}{r}d\sigma$$

$$= \frac{1}{4\pi\mu i\omega}\left(\iiint_V \nabla' \times \left(\frac{\mathbf{i}_m e^{-ikr}}{r}\right)dv + \oiint_S \nabla' \times \left(\frac{\mathbf{i}_{ms}e^{-ikr}}{r}\right)d\sigma\right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\mu i\omega}\left(\iiint_V \mathbf{i}_m \times \nabla'\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)dv + \oiint_S \mathbf{i}_{ms} \times \nabla'\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)d\sigma\right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\mu i\omega}\left(\iiint_V \mathbf{i}_m \times \nabla\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)dv + \oiint_S \mathbf{i}_{ms} \times \nabla\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)d\sigma\right)$$

最后得

$$\mathrm{rot}\mathbf{Z}_m = \frac{1}{4\pi\mu i\omega}\left(\iiint_V \mathbf{i}_m \times \mathrm{grad}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)dv + \oiint_S \mathbf{i}_{ms} \times \mathrm{grad}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)d\sigma\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\mu i\omega}\left(\iiint_V \mathbf{i}_m \times \nabla A dv + \oiint_S \mathbf{i}_{ms} \times \nabla A d\sigma\right)$$

式中 $A = \frac{e^{-ikr}}{r}$.

$$\mathrm{div}\mathbf{Z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon i\omega}\left(\mathrm{div}\iiint_V \mathbf{i}A dv + \mathrm{div}\oiint_S \mathbf{i}_s A d\sigma\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon i\omega}\left(\iiint_V \nabla' \cdot \mathbf{i} A dv + \oiint_S \nabla' \cdot \mathbf{i}_s A d\sigma\right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon i\omega}\left(\iiint_V (\mathbf{i} \cdot \nabla) A dv + \oiint_S (\mathbf{i}_s \cdot \nabla) A d\sigma\right)$$

$$\text{grad div}\mathbf{Z} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon i\omega}\nabla'\left(\iiint_V (\mathbf{i} \cdot \nabla) A dv + \oiint_S (\mathbf{i}_s \cdot \nabla) A d\sigma\right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon i\omega}\left(\iiint_V \nabla'(\mathbf{i} \cdot \nabla) A dv + \oiint_S \nabla'(\mathbf{i}_s \cdot \nabla) A d\sigma\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon i\omega}\left(\iiint_V (\mathbf{i} \cdot \nabla)\nabla A dv + \oiint_S (\mathbf{i}_s \cdot \nabla)\nabla A d\sigma\right)$$

代入 $\mathbf{E}$ 的表达式中，最后得

$$\mathbf{E} = -\frac{i}{4\pi\omega\varepsilon}\iiint_V [(\mathbf{i} \cdot \nabla)\nabla + k^2\mathbf{i} - i\omega\varepsilon\mathbf{i}_m \times \nabla] A dv$$

$$-\frac{i}{4\pi\omega\varepsilon}\oiint_S [(\mathbf{i}_s \cdot \nabla)\nabla + k^2\mathbf{i}_s - i\omega\varepsilon\mathbf{i}_{ms} \times \nabla] A d\sigma$$

即

$$\mathbf{E} = -\frac{i}{4\pi\omega\varepsilon}\iiint_V [(\mathbf{i} \cdot \nabla)\nabla + k^2\mathbf{i} - i\omega\varepsilon\mathbf{i}_m \times \nabla] A dv$$

$$-\frac{i}{4\pi\omega\varepsilon}\oiint_S \{([\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \cdot \nabla)\nabla + k^2[\mathbf{n} \times \mathbf{H}] - i\omega\varepsilon[\mathbf{E} \times \mathbf{n}] \times \nabla\} A d\sigma \qquad (5.86)$$

这个公式的特点是只利用了面电流和面磁流．用同样的方法可得

$$\mathbf{H} = -\frac{i}{4\pi\omega\mu}\iiint_V [(\mathbf{i}_m \cdot \nabla)\nabla + k^2\mathbf{i}_m + i\omega\mu\mathbf{i} \times \nabla] A dv$$

$$-\frac{i}{4\pi\omega\mu}\iint_S[([\mathbf{E}\times\mathbf{n}]\cdot\nabla)\nabla+k^2[\mathbf{E}\times\mathbf{n}]+i\omega\mu[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\times\nabla]A\,d\sigma \tag{5.87}$$

下面考察一个特例.

如果在 V 内没有场源,即 $\mathbf{i}=\mathbf{i}_m=0$, 则

$$\text{rot rot}\mathbf{Z}=-\frac{i}{4\pi\omega\varepsilon}\nabla'\times\left[\nabla'\times\iint_S\mathbf{i}_s\frac{e^{-ikr}}{r}d\sigma\right]$$

$$=-\frac{i}{4\pi\omega\varepsilon}\nabla'\times\nabla'\times\iint_S[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\frac{e^{-ikr}}{r}d\sigma$$

$$-i\omega\mu\text{rot}\mathbf{Z}_m=-\frac{1}{4\pi}\nabla'\times\iint_S[\mathbf{E}\times\mathbf{n}]\frac{e^{-ikr}}{r}d\sigma$$

由此

$$\mathbf{E}=\text{rot rot}\mathbf{Z}-i\omega\mu\text{rot}\mathbf{Z}_m$$

$$=-\frac{i}{4\pi\omega\varepsilon}\nabla'\times\left[\nabla'\times\iint_S[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\frac{e^{-ikr}}{r}d\sigma\right]$$

$$-\frac{1}{4\pi}\nabla'\times\iint_S[\mathbf{E}\times\mathbf{n}]\frac{e^{-ikr}}{r}d\sigma \tag{5.88}$$

用同样方法可得

$$\mathbf{H}=\frac{1}{4\pi}\nabla'\times\iint_S[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\frac{e^{-ikr}}{r}d\sigma-\frac{i}{4\pi\omega\mu}\nabla'$$

$$\times\nabla'\times\iint_S[\mathbf{E}\times\mathbf{n}]\frac{e^{-ikr}}{r}d\sigma \tag{5.89}$$

这两个公式就是 5.6 节中的弗朗兹 (Franz) 公式.

下面利用洛伦兹位来求观察点 P 的场. 我们以电场 $\mathbf{E}$ 为例.

根据洛伦兹位的定义

$$\mathbf{A}=\frac{\mu}{4\pi}\left(\iiint_V \mathbf{i}\,\frac{e^{-ikr}}{r}\,dv+\iint_S \mathbf{i}_s\,\frac{e^{-ikr}}{r}\,d\sigma\right)$$

$$\mathbf{F}=\frac{\varepsilon}{4\pi}\left(\iiint_V \mathbf{i}_m\,\frac{e^{-ikr}}{r}\,dv+\iint_S \mathbf{i}_{ms}\,\frac{e^{-ikr}}{r}\,d\sigma\right)$$

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\iiint_V \rho\,\frac{e^{-ikr}}{r}\,dv+\iint_S \rho_s\,\frac{e^{-ikr}}{r}\,d\sigma\right)$$

$$\mathrm{div}\mathbf{A}=-i\omega\varepsilon\mu\varphi$$

求电场 $\mathbf{E}$ 的公式是

$$\mathbf{E}=-i\omega\mathbf{A}-\mathrm{grad}\varphi-\frac{1}{\varepsilon}\,\mathrm{rot}\mathbf{F}$$

现

$$\mathrm{grad}\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\iiint_V \nabla'\rho\,\frac{e^{-ikr}}{r}\,dv+\iint_S \nabla'\rho_s\,\frac{e^{-ikr}}{r}\,d\sigma\right)$$

$$=-\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\iiint_V \rho\nabla\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)dv+\iint_S \rho_s\nabla\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)d\sigma\right)$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{F}=\frac{\varepsilon}{4\pi}\left(\iiint_V \nabla'\times\left(\mathbf{i}_m\,\frac{e^{-ikr}}{r}\right)dv+\iint_S \nabla'\times\left(\mathbf{i}_{ms}\,\frac{e^{-ikr}}{r}\right)d\sigma\right)$$

$$=-\frac{\varepsilon}{4\pi}\left(\iiint_V \mathbf{i}_m\times\nabla'\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)dv+\iint_S \mathbf{i}_{ms}\times\nabla'\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)d\sigma\right)$$

$$=\frac{\varepsilon}{4\pi}\left(\iiint_V \mathbf{i}_m\times\nabla\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)dv+\iint_S \mathbf{i}_{ms}\times\nabla\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)d\sigma\right)$$

代入求 $\mathbf{E}$ 的公式中，得

$$\mathbf{E} = -i\omega\mu\frac{1}{4\pi}\iiint_V \mathbf{i}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)dv + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V \rho\nabla\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)dv$$
$$-\frac{1}{4\pi}\iiint_V \mathbf{i}_m \times \nabla\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)dv - \frac{i\omega\mu}{4\pi}\iint_S \mathbf{i}_s\frac{e^{-ikr}}{r}d\sigma$$
$$+\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iint_S \rho_s\nabla\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)d\sigma - \frac{1}{4\pi}\iint_S \mathbf{i}_{ms} \times \nabla\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)d\sigma$$

将

$$\mathbf{i}_s = \mathbf{n} \times \mathbf{H} \qquad \mathbf{i}_{ms} = \mathbf{E} \times \mathbf{n}$$
$$\rho_s = \varepsilon(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})$$

代入，最后得

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi}\iiint_V \left[i\omega\mu\mathbf{i} + \mathbf{i}_m \times \nabla - \frac{\rho}{\varepsilon}\nabla\right]\frac{e^{-ikr}}{r}dv$$
$$+\frac{1}{4\pi}\iint_S [-i\omega\mu[\mathbf{n} \times \mathbf{H}] + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \nabla$$
$$+(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})\nabla]\frac{e^{ikr}}{r}d\sigma \tag{5.90}$$

这就是 5.1 节中的斯特拉顿-朱（Stratton-Chu）公式.

5.9 无限区域的情况

假定所有的场源都处于有限区域内并都已明确给出，并且式(5.17)和(5.18)中的曲面是一个包含所有场源的 S. 为便于讨论起见，假定它是一个球面，其半径为 R，用 $S(R)$ 表示之.

由式(5.17)可见，对 $S(R)$ 的积分所表示的实际上就是等效面电流和面磁流的辐射. 在场源和观察点都处于空间固定的且在有限范围内的位置上这个前提下，只要把 R 取得足够大(但不要求 $R \to \infty$)，就可以使 $S(R)$ 包含所有的源和观察

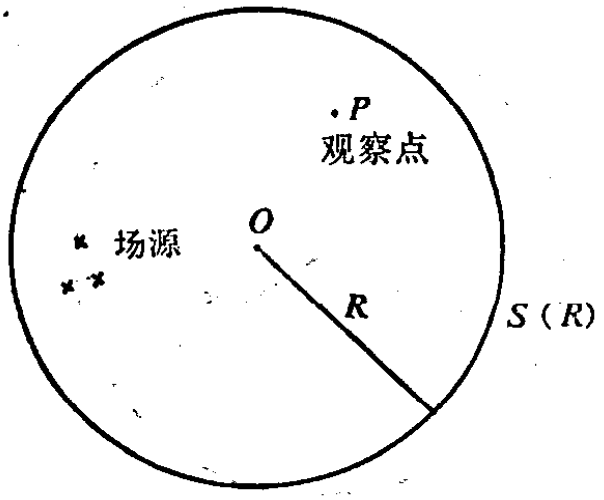

图 5.8 $S(R)$ 包含所有场源和观察点

点，如图 5.8 所示.

这时，根据等效定理，对在 $S(R)$ 内部的观察点，面积分形成零场，也就是说，对空间任一个固定的观察点 P，当 R 取得足够大，使 $S(R)$ 包含 P 点和所有场源的时候，面积分

$$\frac{1}{4\pi}\oint\!\!\!\oint_{S(R)}[-i\omega\mu[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]+[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\times\nabla + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})\nabla]\frac{e^{-ikr}}{r}d\sigma = 0 \tag{5.91}$$

由此可见，并不需要 $R\to\infty$ 才能使对 $S(R)$ 的面积分趋向于零. 在有限远处，对 $S(R)$ 的面积分就等于零. 从物理概念上看，这个结果容易理解，因为在无限大的均匀媒质中，电磁波从场源辐射出去不会反射回来，因此大球面上的场值不会对内部观察点的场有影响.

反过来，如果观察点取在 $S(R)$ 之外，如图 5.9 所示，那么 R 再大，对观察点来说，对 $S(R)$ 的积分也不等于零. 根据等效定理，这个积分等于所有的场源在 P 点所形成的场值.

当 R 趋于无穷大，相应观察点趋于无穷远时，由于观察点离有限场源的距离趋于无穷大，观察点的场值趋于零，这时对无限大的 $S(R)$ 的积分(对 $S(R)$ 外的观察点)趋于零.

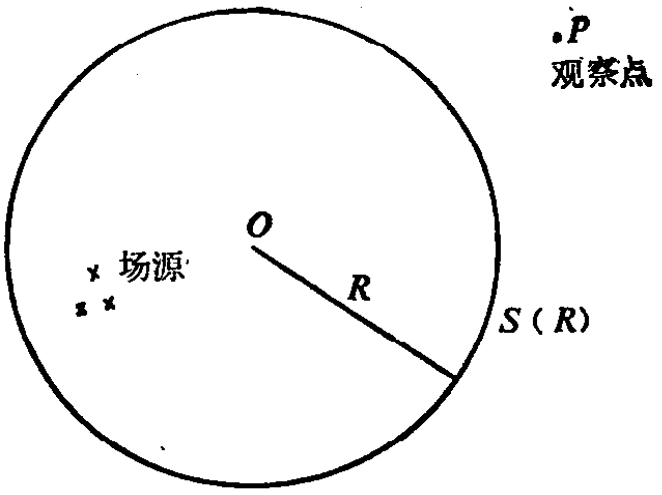

图 5.9　观察点 在 $S(R)$ 之外

由此可见，笼统地说当 $R \to \infty$ 时对 $S(R)$ 的面积分趋向于零的说法是不精确的．应该说如果观察点的位置固定，而且场源都位于空间的有限区域内，那么当 R 大得足以使 $S(R)$ 能包含所有场源和观察点的时候，对 $S(R)$ 的积分式(5.91)就等于零．另一方面，如果观察点的位置始终在 $S(R)$ 之外，则对 $S(R)$ 的积分不等于零，只有当 $R \to \infty$ 时，对 $S(R)$ 的积分才趋于零．这里的先决条件是所有场源要位于有限区域内．如果在无穷远处有场源，则在任何情况下，不论观察点在何处，也不论 R 是否趋于无穷大，对 $S(R)$ 的积分都可以不等于零．

在以上的讨论中，关键的一点是要明确地指出观察点的位置，因为 r 表示由观察点至积分元的距离，它与观察点的位置有关．对于不同的观察点，相对于 $S(R)$ 的位置就有不同的结论．

最后的结论是：如果 V 包含了所有的位于有限区域内的场源，则在任一固定点 P 的场由下列公式表示：

$$\mathbf{E}_P = -\frac{1}{4\pi}\iiint_V \left(i\omega\mu\mathbf{i} + \mathbf{i}_m \times \nabla - \frac{\rho}{\varepsilon}\nabla \right) \frac{e^{-ikr}}{r}\, dv \tag{5.92}$$

$$\mathbf{H}_P = -\frac{1}{4\pi}\iiint_V \left(i\omega\varepsilon \mathbf{i}_m - \mathbf{i} \times \nabla - \frac{\rho_m}{\mu}\nabla \right) \frac{e^{-ikr}}{r} dv \tag{5.93}$$

5.10 单由电流、磁流表示的场强公式

利用连续性方程

$$\mathrm{div}\mathbf{i} + i\omega\rho = 0$$

$$\mathrm{div}\mathbf{i}_m + i\omega\rho_m = 0$$

可以在式 (5.92) 和 (5.93) 中把有 ρ 和 ρ_m 的项去掉，从而得到只与电流、磁流有关的场强公式．具体推导过程如下：

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_P &= -\frac{1}{4\pi}\iiint_V \left[i\omega\mu\mathbf{i} + \mathbf{i}_m \times \nabla - \frac{\rho}{\varepsilon}\nabla \right] \frac{e^{-ikr}}{r} dv \\ &= -\frac{i}{4\pi\omega\varepsilon}\iiint_V \left[i\omega\mu \frac{\omega\varepsilon}{i}\mathbf{i} + \frac{\omega\varepsilon}{i}\mathbf{i}_m \times \nabla \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega\varepsilon\rho}{i\varepsilon}\nabla \right] \frac{e^{-ikr}}{r} dv \\ &= \frac{i}{4\pi\omega\varepsilon}\iiint_V \left[-k^2\mathbf{i} + i\omega\varepsilon\mathbf{i}_m \times \nabla - i\omega\rho\nabla \right] \frac{e^{-ikr}}{r} dv\end{aligned}$$

但

$$-i\omega\rho\nabla\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right) = \mathrm{div}\mathbf{i}\left(\nabla\frac{e^{-ikr}}{r}\right)$$

因

$$\begin{aligned}(\nabla\cdot\mathbf{i})\nabla\frac{e^{-ikr}}{r} &= (\nabla\cdot\mathbf{i})\left(\nabla\frac{e^{-ikr}}{r}\right)_c + (\mathbf{i}\cdot\nabla)\nabla\frac{e^{-ikr}}{r} \\ &= \mathrm{div}\mathbf{i}\left(\nabla\frac{e^{-ikr}}{r}\right) + (\mathbf{i}\cdot\nabla)\nabla\frac{e^{-ikr}}{r}\end{aligned}$$

故

$$\iiint_V -i\omega\rho\nabla\frac{e^{-ikr}}{r}dv = \iiint_V \mathrm{div}\mathbf{i}\left(\nabla\frac{e^{-ikr}}{r}\right)dv$$

$$= \iiint_V (\nabla\cdot\mathbf{i})\nabla\frac{e^{-ikr}}{r}dv - \iiint_V (\mathbf{i}\cdot\nabla)\nabla\frac{e^{-ikr}}{r}dv$$

但是

$$\iiint_V (\nabla\cdot\mathbf{i})\nabla\frac{e^{-ikr}}{r}dv = \oiint_S (\mathbf{n}\cdot\mathbf{i})\nabla\frac{e^{-ikr}}{r}d\sigma = 0$$

(在足够大的 S 上 $\mathbf{i}=0$)，故

$$\iiint_V -i\omega\rho\nabla\frac{e^{-ikr}}{r}dv = -\iiint_V (\mathbf{i}\cdot\nabla)\nabla\frac{e^{-ikr}}{r}dv$$

由此可得

$$\mathbf{E}_P = -\frac{i}{4\pi\omega\varepsilon}\iiint_V [(\mathbf{i}\cdot\nabla)\nabla + k^2\mathbf{i} - i\omega\varepsilon\mathbf{i}_m\times\nabla]\frac{e^{-ikr}}{r}dv \tag{5.94}$$

同理，因 $-\frac{\rho_m}{\mu} = -i\omega\rho_m\frac{-i}{\omega\mu}$，式(5.93)可写为

$$\mathbf{H}_P = \frac{i}{4\pi\omega\mu}\iiint_V\left[\frac{i\omega^2\mu\varepsilon}{-i}\mathbf{i}_m - \frac{\omega\mu}{-i}\mathbf{i}\times\nabla - i\omega\rho_m\nabla\right]\frac{e^{-ikr}}{r}dv$$

$$= -\frac{i}{4\pi\omega\mu}\iiint_V\left[k^2\mathbf{i}_m\frac{e^{-ikr}}{r} + i\omega\mu\mathbf{i}\times\nabla\frac{e^{-ikr}}{r} - (\nabla\cdot\mathbf{i}_m)\left(\nabla\frac{e^{-ikr}}{r}\right)_c\right]dv$$

利用推导式(5.94)的方法直接可得

$$\mathbf{H}_P = -\frac{i}{4\pi\omega\mu}\iiint_V [(\mathbf{i}_m\cdot\nabla)\nabla + k^2\mathbf{i}_m + i\omega\mu\mathbf{i}\times\nabla]\frac{e^{-ikr}}{r}dv \tag{5.95}$$

这与式(5.86)、(5.87)完全相同.

5.11 远区场的结构

在本节中，我们在场源位于有限空间的先决条件下，研究远区场的结构. 所谓远区场，指的是离所有场源都很远处的场. 这个名词本身实际上已经包含了场源位于有限空间的前提. 从下文的推导中可以看出，任何有限场源所辐射的电磁波，在远区的局部范围内与平面波相同，而从大范围来说，则是球面波. 这里距离要远的前提是很重要的. 对于近距离来说，以上结论就不成立了. 近区场的结构要比远区场复杂得多. 对各种辐射系统近区场的研究，是电磁场理论或天线理论的专门课题之一. 关于这方面的内容，有大量文献可供参考.

取如图 5.10 所示的坐标系.

对于图 5.10 来说，令 $\boldsymbol{\rho}$ 为从原点到场源点的矢量；$R\mathbf{R}_1$ 为从原点到观察点 P 的矢量；$\mathbf{R}_1$ 为单位矢量；$r\mathbf{r}_1$ 为从场源点到观察点 P 的矢量；$\mathbf{r}_1$ 为单位矢量；$\mathbf{r}$ 为从 P 点至场源点的矢量.

推导的出发点是表示观察点的场与场源、距离之间关系

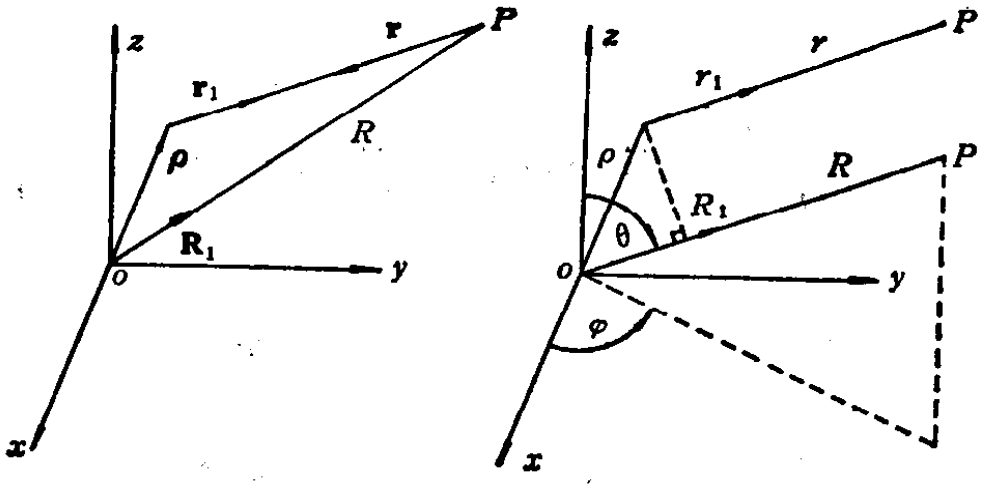

图 5.10 坐标系

的公式(5.94)和(5.95). 在这两个公式中,微分运算都是对场源点坐标进行的,而 P 点则是固定的(原点),例如

$$\nabla\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)=-\left(ik+\frac{1}{r}\right)\frac{e^{-ikr}}{r}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$=\left(ik+\frac{1}{r}\right)\frac{e^{-ikr}}{r}\mathbf{r}_1$$

注意,$\mathbf{r}_1$ 不是常矢量,它随场源点之变动而变化. 当然,$\mathbf{r}$ 也不是常矢量. 其次,

$$(\mathbf{i}\cdot\nabla)\nabla\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)=(\mathbf{i}\cdot\nabla)\left(ik+\frac{1}{r}\right)\frac{e^{-ikr}}{r}\mathbf{r}_1$$

$$=(\mathbf{i}\cdot\nabla)ik\frac{e^{-ikr}}{r}\mathbf{r}_1+(\mathbf{i}\cdot\nabla)\frac{1}{r}\frac{e^{-ikr}}{r}\mathbf{r}_1$$

等式右边的两项还可进一步变换. 我们有

$$(\mathbf{i}\cdot\nabla)ik\frac{e^{-ikr}}{r}\mathbf{r}_1=-(\mathbf{i}\cdot\nabla)ik\frac{1}{r^2}e^{-ikr}\mathbf{r}$$

$$=-\frac{\mathbf{r}}{r^2}ik(\mathbf{i}\cdot\nabla)e^{-ikr}-\mathbf{r}e^{-ikr}ik(\mathbf{i}\cdot\nabla)\frac{1}{r^2}$$

$$-e^{-ikr}ik\frac{1}{r^2}(\mathbf{i}\cdot\nabla)\mathbf{r}$$

$$=-\frac{\mathbf{r}}{r^2}ik(-ik)e^{-ikr}\left(\mathbf{i}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}\right)-\mathbf{r}e^{-ikr}ik\left(\mathbf{i}\cdot\frac{-2r\mathbf{r}}{r^4r}\right)$$

$$-ik\frac{1}{r^2}e^{-ikr}\mathbf{i}$$

$$=\frac{e^{-ikr}}{r}\left[-k^2(\mathbf{i}\cdot\mathbf{r}_1)\mathbf{r}_1+\frac{2\mathbf{r}_1}{r}(ik)(\mathbf{i}\cdot\mathbf{r}_1)-\frac{\mathbf{i}}{r}ik\right]$$

以及

$$(\mathbf{i}\cdot\nabla)\frac{1}{r}\frac{e^{-ikr}}{r}\mathbf{r}_1=-(\mathbf{i}\cdot\nabla)\frac{1}{r^3}e^{-ikr}\mathbf{r}$$

$$=-\frac{1}{r^3}e^{-ikr}(\mathbf{i}\cdot\nabla)\mathbf{r}-\frac{\mathbf{r}}{r^3}(\mathbf{i}\cdot\nabla)e^{-ikr}$$

$$
\begin{aligned}
&-\mathbf{r}e^{-ikr}(\mathbf{i}\cdot\nabla)\frac{1}{r^3}\\
&=-\frac{\mathbf{i}}{r^3}e^{-ikr}-\frac{\mathbf{r}}{r^3}(-ik)e^{-ikr}\left(\mathbf{i}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}\right)\\
&\quad-\mathbf{r}e^{-ikr}\left(\mathbf{i}\cdot\frac{-3r^2\mathbf{r}}{r^6r}\right)\\
&=\frac{e^{-ikr}}{r}\left[-\frac{\mathbf{i}}{r^2}+\frac{ik}{r}(\mathbf{i}\cdot\mathbf{r}_1)\mathbf{r}_1+\frac{3\mathbf{r}_1}{r^2}(\mathbf{i}\cdot\mathbf{r}_1)\right]
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{i}\cdot\nabla)\nabla\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)&=\frac{e^{-ikr}}{r}\left[-k^2(\mathbf{i}\cdot\mathbf{r}_1)\mathbf{r}_1\right.\\
&\left.+\frac{3\mathbf{r}_1}{r}\left(ik+\frac{1}{r}\right)(\mathbf{i}\cdot\mathbf{r}_1)-\frac{\mathbf{i}}{r}\left(ik+\frac{1}{r}\right)\right]
\end{aligned}
$$

由上面的情况可见，被积函数能展开成 r^{-1} 的级数．在远区（r 很大）条件下，可忽略高次项，只保留 r^{-1} 项．由此可得

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_P=-\frac{i}{4\pi\omega\varepsilon}\iiint_V&[k^2\mathbf{i}-k^2(\mathbf{i}\cdot\mathbf{r}_1)\mathbf{r}_1+k\omega\varepsilon\mathbf{i}_m\\
&\times\mathbf{r}_1]\frac{e^{-ikr}}{r}dv
\end{aligned}
\tag{5.96}
$$

同理

$$
\begin{aligned}
\mathbf{H}_P=-\frac{i}{4\pi\omega\mu}\iiint_V&[k^2\mathbf{i}_m-k^2(\mathbf{i}_m\cdot\mathbf{r}_1)\mathbf{r}_1-k\omega\mu\mathbf{i}\\
&\times\mathbf{r}_1]\frac{e^{-ikr}}{r}dv
\end{aligned}
\tag{5.97}
$$

在计算这些积分的时候必须考虑到 $\mathbf{r}_1$ 和 $\mathbf{r}$ 都是随场源位置而变化的，因而积分进行起来是很困难的．但是，若观察点很远，则问题就简化了．原因如下：

第一，$\mathbf{r}_1$ 与 $\mathbf{R}_1$ 之间的夹角随 R 之增加而趋于零，因而可近似地认为两者相互平行（见图 5.11）．

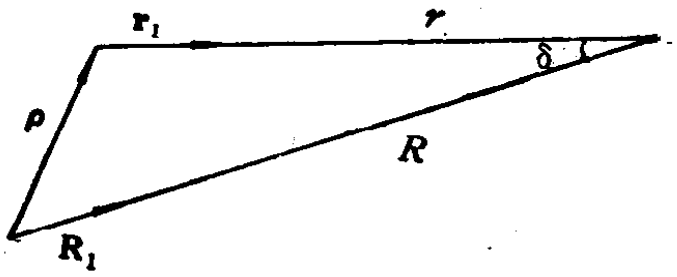

图 5.11　各矢量的意义

这是因为

$$\delta < \frac{\rho_{\max}}{r_{\min}} < \frac{\rho_{\max}}{R - \rho_{\max}}$$

$$= \frac{\rho_{\max}}{R} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{\rho_{\max}}{R}\right)}$$

$$\approx \frac{\rho_{\max}}{R} \to 0 \qquad (R \to \infty)$$

式中因为 $r_{\min} + \rho > R$，所以

$$r_{\min} > R - \rho > R - \rho_{\max}$$

第二，r^{-1} 可用 R^{-1} 代替，误差是 R^{-1} 的二次项和三次项：

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R\left(1 + \frac{1}{R^2}(\rho^2 - 2\cos(\rho R)\rho R)\right)^{1/2}}$$

$$\approx \frac{1}{R}\left(1 - \frac{\rho^2 - 2\cos(\rho R)\rho R}{R^2}\right)^{1/2}$$

$$\approx \frac{1}{R}\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{\rho^2 - 2\cos(\rho R)\rho R}{R^2}\right)$$

式中 $\cos(\rho R)$ 表示 $\boldsymbol{\rho}$ 和 $\mathbf{R}_1$ 之间的夹角.

但是，在 e^{-ikr} 中不能忽略 r 的变化，因为即使 r 的变化很小，也可引起相位反相，从而使符号相反.

利用上面所证明的 $\mathbf{r}_1$ 和 $\mathbf{R}_1$ 近似平行的原理，就可以写

出下式：

$$r = R - \rho \cdot \mathbf{R}_1$$

再用 R^{-1} 代替 r^{-1}，用 $\mathbf{R}_1$ 代替 $\mathbf{r}_1$，并将 R（常数）移至积分号外，式 (5.96) 和(5.97)即可写成

$$\mathbf{E}_P = -\frac{i\omega\mu}{4\pi R} e^{-ikR} \iiint_V \left[\mathbf{i} - (\mathbf{i} \cdot \mathbf{R}_1)\mathbf{R}_1 + \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{i}_m \times \mathbf{R}_1 \right] e^{ik\rho \cdot \mathbf{R}_1} dv + 0\left(\frac{1}{R^2}\right) \tag{5.98}$$

$$\mathbf{H}_P = -\frac{i\omega\varepsilon}{4\pi R} e^{-ikR} \iiint_V \left[\mathbf{i}_m - (\mathbf{i}_m \cdot \mathbf{R}_1)\mathbf{R}_1 - \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{i} \times \mathbf{R}_1 \right] e^{ik\rho \cdot \mathbf{R}_1} dv + 0\left(\frac{1}{R^2}\right) \tag{5.99}$$

现在根据式 (5.98) 和 (5.99) 来讨论远区场的结构. 式(5.98)和(5.99)中的积分与 R 无关. 由此可见，当 R 趋向于∞时，$R\mathbf{E}_P$ 和 $R\mathbf{H}_P$ 有限. 另外，可看出 $\mathbf{E}_P$ 和 $\mathbf{H}_P$ 总是与 $\mathbf{R}_1$ 垂直的，这是因为 $\mathbf{i}$、$\mathbf{i}_m$ 在 $\mathbf{R}_1$ 方向上的分量总由被积函数的第二项所抵消，而 $\mathbf{i} \times \mathbf{R}_1$ 和 $\mathbf{i}_m \times \mathbf{R}_1$ 总与 $\mathbf{R}_1$ 相垂直.

由于

$$\begin{aligned}
&\mathbf{R}_1 \times \mathbf{H} + \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{E} \\
&= \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} \iiint_V \{ -i\omega\varepsilon \mathbf{R}_1 \times \mathbf{i}_m + i\omega\varepsilon(\mathbf{i}_m \cdot \mathbf{R}_1)\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_1 \\
&\quad + i\omega(\varepsilon\mu)^{\frac{1}{2}} \mathbf{R}_1 \times [\mathbf{i} \times \mathbf{R}_1] - i\omega\varepsilon \mathbf{i}_m \times \mathbf{R}_1 \\
&\quad - i\omega(\varepsilon\mu)^{\frac{1}{2}}(\mathbf{i} - (\mathbf{i} \cdot \mathbf{R}_1)\mathbf{R}_1) \} e^{ik\rho \cdot \mathbf{R}_1} dv \\
&= 0
\end{aligned}$$

以及

$$\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} [\mathbf{R}_1 \times \mathbf{E}] - \mathbf{H}$$

$$= \frac{e^{-ikR}}{4\pi R}\iiint_V \{-i\omega(\mu\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\mathbf{R}_1 \times \mathbf{i} + i\omega(\mu\varepsilon)^{\frac{1}{2}}(\mathbf{i}\cdot\mathbf{R}_1)\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_1$$
$$- i\omega\varepsilon\mathbf{R}_1 \times [\mathbf{i}_m \times \mathbf{R}_1] + i\omega\varepsilon[\mathbf{i}_m - (\mathbf{i}_m \cdot \mathbf{R}_1)\mathbf{R}_1]$$
$$- i\omega(\mu\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\mathbf{i} \times \mathbf{R}_1\}e^{ik\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{R}_1}dv$$
$$= 0$$

即

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \left(\dfrac{\mu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}[\mathbf{H} \times \mathbf{R}_1] \\ \mathbf{H} = \left(\dfrac{\varepsilon}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}[\mathbf{R}_1 \times \mathbf{E}] \end{cases} \tag{5.100}$$

由此可见，在远场区 $\mathbf{E}$、$\mathbf{H}$ 互相垂直并与 $\mathbf{R}_1$ 垂直，在局部范围内与平面波一样.

引入球坐标系 R,θ,φ 和直角坐标系 x,y,z，并令球坐标系的极轴与 z 轴重合.

又令球坐标系中坐标线上的单位矢量为 $\mathbf{u}_R$、$\mathbf{u}_\theta$ 和 $\mathbf{u}_\varphi$.

在直角坐标系中，

$$\boldsymbol{\rho} = x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z$$
$$\mathbf{R}_1 = \sin\theta\cos\varphi\mathbf{u}_x + \sin\theta\sin\varphi\mathbf{u}_y + \cos\theta\mathbf{u}_z$$

(x,y,z 为场源坐标)，因此

$$\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{R}_1 = (x\cos\varphi + y\sin\varphi)\sin\theta + z\cos\theta$$

电场 $\mathbf{E}_P$ 在 $\mathbf{u}_\theta$ 和 $\mathbf{u}_\varphi$ 方向上的分量为

$$E_\theta = -\frac{i\omega\mu}{4\pi R}e^{-ikR}\iiint_V\left[\mathbf{i}\cdot\mathbf{u}_\theta + \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}(\mathbf{i}_m\cdot\mathbf{u}_\varphi)\right]e^{ik\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{R}_1}dv$$
$$= -\frac{i\omega\mu}{4\pi R}e^{-ikR}F_1(\theta,\varphi) \qquad (\mathbf{R}_1\times\mathbf{u}_\theta = \mathbf{u}_\varphi) \tag{5.101}$$
$$E_\varphi = -\frac{i\omega\mu}{4\pi R}e^{-ikR}\iiint_V\left[\mathbf{i}\cdot\mathbf{u}_\varphi - \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}\mathbf{i}_m\cdot\mathbf{u}_\theta\right]e^{ik\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{R}_1}dv$$

$$= -\frac{i\omega\mu}{4\pi R} e^{-ikR} F_2(\theta,\varphi) \qquad (\mathbf{R}_1 \times \mathbf{u}_\varphi = -\mathbf{u}_\theta)$$

(5.102)

式(5.101)和(5.102)中的积分与 r、R 无关，只为 θ 和 φ 的函数，故分别用 $F_1(\theta,\varphi)$ 和 $F_2(\theta,\varphi)$ 表示.

因为 $F_1(\theta,\varphi)$ 和 $F_2(\theta,\varphi)$ 不一定是实数，可以带相位因子，所以 E_θ、E_φ 不一定表示从点源发出的球面波.

在天线理论中，$F_1(\theta,\varphi)$ 或 $F_2(\theta,\varphi)$ 通常称为辐射系统(天线)的场强 E_θ 分量或 E_φ 分量的方向图，因为它们表示场强随方向的变化.

5.12 镜 象 原 理

对工程实践来说，经常会碰到在以理想电导体或磁导体为半空间分界面(无限大平面)条件下求已知场源(电流源及磁流源)的辐射场问题. 大家知道，在理想电导体上 $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$ ($\mathbf{n}$ 为导体表面的单位法向量)，而在磁导体上 $\mathbf{n} \times \mathbf{H} = 0$.

根据唯一性定理，在场源所在的半空间内由场源及边界条件，例如 $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$ 所决定的场只有一个.

镜象原理的实质就是在相对于分界面与实际场源对称的位置上适当地另放一个场源，使两组场源的合成场在边界上满足 $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$ 或 $\mathbf{n} \times \mathbf{H} = 0$ 的条件 ($\mathbf{E}$ 为合成场值). 这样，这两组场源在实际场源所在的半空间内的合成场(求合成场时去掉理想导体)就是原先待求的场，因为合成场在实际场源所在的半空间内以实际场源为源，而在边界上则满足边界条件，根据唯一性定理，这样的场只有一个，也就是说等于原先待求的场.

我们先写出由已知场源求辐射场的公式，然后再以理想

导体作为分界面，看在对称的位置上需要放什么样的场源才可使两组场源的合成场在边界上满足边界条件.

先取理想导体为电导体，并考察边界面上电场的情况.

由式(5.94)知，已知场源 $\mathbf{i}$、$\mathbf{i}_m$ 所辐射的电场为

$$\mathbf{E}_p = -\frac{i}{4\pi\omega\varepsilon}\iiint_V [(\mathbf{i}\cdot\nabla)\nabla + k^2\mathbf{i} - i\omega\varepsilon\mathbf{i}_m \times \nabla]\frac{e^{-ikr}}{r}dv$$

我们对被积函数中的电流项和磁流项分别考虑. 先考虑电流项:

$$((\mathbf{i}\cdot\nabla)\nabla + k\mathbf{i})\frac{e^{-ikr}}{r}dv$$

由图 5.12 可见，对互为对称的两个点来说，对于对称平面上的任何一点，都有

$$\frac{e^{-ikr}}{r}dv = \frac{e^{-ikr'}}{r'}dv$$

式中 r、r' 为从场源和场源的对称点至对称平面上任一点的距离，$r = r'$.

先假定 $\mathbf{i}$ 平行于对称平面. $\mathbf{i}$ 在对称平面上的切线分量为

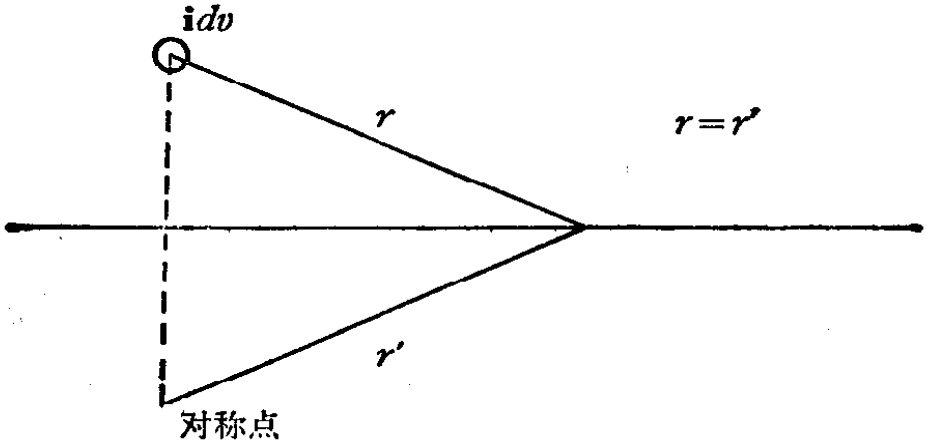

图 5.12　由互为对称的两点至对称平面上任一点的距离总是相等的

$$\mathbf{n}\times\mathbf{i}$$

令在对称点上的场源为 $\mathbf{i}'$，则 $\mathbf{i}'$ 在对称平面上的切线分量为

$$\mathbf{n}\times\mathbf{i}'$$

式中 $\mathbf{n}$ 为垂直于分界面的单位法向量.

为使两组场源的切线分量大小相等而方向相反，需要

$$\mathbf{n}\times\mathbf{i}=-\mathbf{n}\times\mathbf{i}'$$

由此

$$\mathbf{i}'=-\mathbf{i}$$

这样的 $\mathbf{i}'$ 称为 $\mathbf{i}$ 平行边界面时的镜象.

现在考虑 $(\mathbf{i}\cdot\nabla)\nabla\frac{e^{-ikr}}{r}$ 及其镜象 $(\mathbf{i}'\cdot\nabla)\nabla\frac{e^{-ikr'}}{r'}$ 的切线分量问题. 注意，微分是对场源点进行的. 因

$$\begin{aligned}\nabla\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)&=\frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)\nabla r\\&=\frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)\frac{\mathbf{r}}{r}\\&=f(r)\mathbf{r}\end{aligned}$$

式中

$$f(r)=\frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)\frac{1}{r}$$

$\mathbf{r}$ 为从边界面上任一固定点至场源点的矢量，如图 5.13 所示，于是可得

$$\begin{aligned}(\mathbf{i}\cdot\nabla)\nabla\frac{e^{-ikr}}{r}&=(\mathbf{i}\cdot\nabla)f(r)\mathbf{r}\\&=\mathbf{r}(\mathbf{i}\cdot\nabla f(r))+f(r)(\mathbf{i}\cdot\nabla)\mathbf{r}\\&=\mathbf{r}(\mathbf{i}\cdot f_1(r)\mathbf{r})+f(r)\mathbf{i}\end{aligned}$$

式中

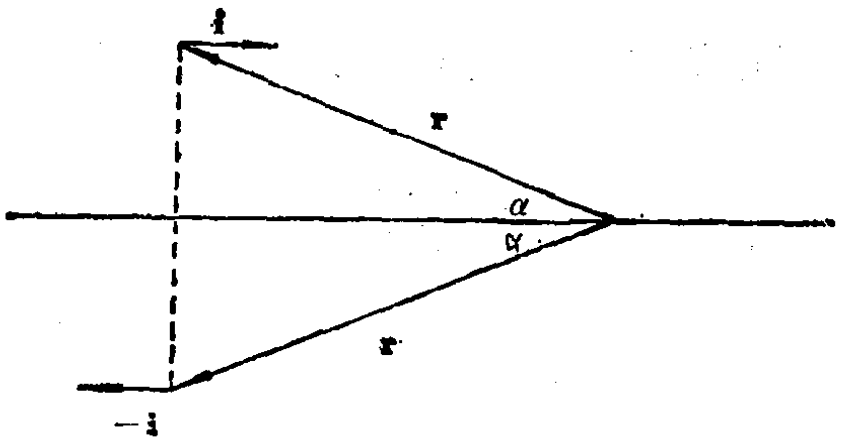

图 5.13　r、r′ 的意义

$$f_1(r) = \frac{df(r)}{dr}\frac{1}{r}$$

在 $r = r'$ 和 $\mathbf{i}' = -\mathbf{i}$ 的条件下，

$$(\mathbf{i}' \cdot \nabla)\nabla\frac{e^{-ikr'}}{r'} = \mathbf{r}'(\mathbf{i}' \cdot f_1(r')\mathbf{r}') + f(r')\mathbf{i}'$$

$$= -\mathbf{r}'(\mathbf{i} \cdot f_1(r)\mathbf{r}') - f(r)\mathbf{i}$$

式中 $\mathbf{r}'$ 为从边界上同一点至场源镜象点的矢量.

由图 5.13 可见，

$$(\mathbf{i} \cdot \mathbf{r}) = |\mathbf{i}|r\cos(\pi - \alpha) = -|\mathbf{i}|r\cos\alpha$$

$$(\mathbf{i}' \cdot \mathbf{r}') = (-\mathbf{i} \cdot \mathbf{r}') = |\mathbf{i}|r'\cos\alpha = |\mathbf{i}|r\cos\alpha$$

故

$$(\mathbf{i} \cdot \nabla)\nabla\frac{e^{-ikr}}{r} = -|\mathbf{i}|rf_1(r)\cos\alpha\mathbf{r} + f(r)\mathbf{i}$$

$$(\mathbf{i}' \cdot \nabla)\nabla\frac{e^{-ikr}}{r} = |\mathbf{i}|rf_1(r)\cos\alpha\mathbf{r}' - f(r)\mathbf{i}$$

但是 $\mathbf{n} \times \mathbf{r} = \mathbf{n} \times \mathbf{r}'$，因 $\mathbf{r}$、$\mathbf{r}'$ 在分界面上的分量是相等的，而垂直于边界面上的分量与 $\mathbf{n}$ 的叉乘等于零（平行于 $\mathbf{n}$）.

最后得在 $r' = r$、$\mathbf{i}' = -\mathbf{i}$ 的条件下，

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{i}\cdot\nabla)\nabla\frac{e^{-ikr}}{r}=-\mathbf{n}\times(\mathbf{i}'\cdot\nabla)\nabla\frac{e^{-ikr}}{r}$$

即 $(\mathbf{i}\cdot\nabla)\nabla\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)$ 及其镜象的切线分量大小相等，方向相反；因此二者的合成场的切线分量在边界面上等于零.

结论 当 i 平行于分界面时，其镜象为 $-\mathbf{i}$.

其次，假定 i 垂直于对称平面（分界面）. 这时 $k\mathbf{i}$ 项没有切线分量，因而无法通过它判断对称场源的情况. 但

$$(\mathbf{i}\cdot\nabla)\nabla\frac{e^{-ikr}}{r}=(\mathbf{i}\cdot f_1(r)\mathbf{r})\mathbf{r}+f(r)\mathbf{i}$$

$$(\mathbf{i}'\cdot\nabla)\nabla\frac{e^{-ikr}}{r}=(\mathbf{i}'\cdot f_1(r)\mathbf{r}')\mathbf{r}'+f(r')\mathbf{i}'$$

$$\mathbf{n}\times\mathbf{r}=\mathbf{n}\times\mathbf{r}'\qquad\mathbf{n}\times\mathbf{i}=\mathbf{n}\times\mathbf{i}'=0$$

（n 与 i、i′ 平行）. 如果取 $\mathbf{i}'=\mathbf{i}$，则（见图 5.14）

$$(\mathbf{i}\cdot\mathbf{r})=|\mathbf{i}|r\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=|\mathbf{i}|r\sin\alpha$$

$$(\mathbf{i}'\cdot\mathbf{r}')=|\mathbf{i}|r\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-|\mathbf{i}|r\sin\alpha$$

因此在 $\mathbf{i}'=\mathbf{i}$ 的条件下，

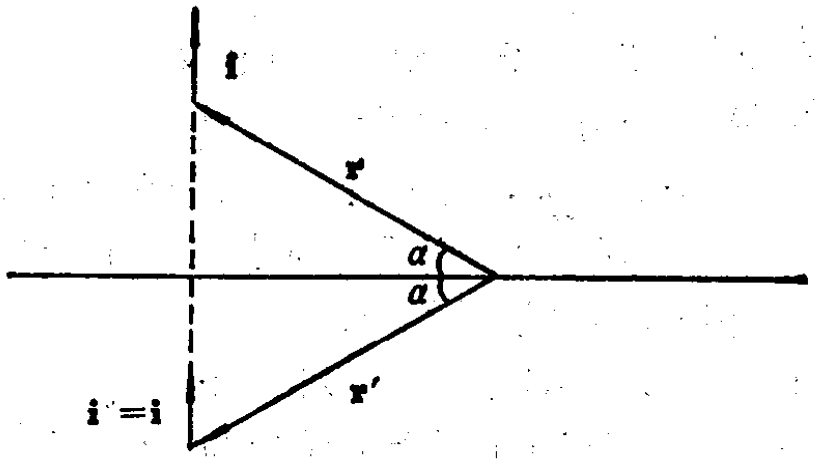

图 5.14 i 垂直于分界面时的镜象

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{i}\cdot\nabla)\nabla\frac{e^{-ikr}}{r}=-\mathbf{n}\times(\mathbf{i}'\cdot\nabla)\nabla\frac{e^{-ikr'}}{r'}$$

结论 i垂直于分界面时，其镜象应为 **i**.

对于任意方向的 **i**，可把它先分解为平行于和垂直于分界面的两个分量，对每一个分量分别求镜象，再把镜象矢量相加，即得 **i** 的镜象.

最后，考虑磁流项的情况：

$$\mathbf{i}_m\times\nabla\frac{e^{-ikr}}{r}=\mathbf{i}_m\times f(r)\mathbf{r}$$

$$\mathbf{i}'_m\times\nabla\frac{e^{-ikr'}}{r'}=\mathbf{i}'_m\times f(r)\mathbf{r}'$$

由图 5.13 可见，如果 $\mathbf{i}_m$ 平行于分界面，则 $\mathbf{i}'_m=\mathbf{i}_m$ 时，

$$\mathbf{i}_m\times\mathbf{r}=-\mathbf{i}'_m\times\mathbf{r}'$$

这时

$$\mathbf{n}\times\left[\mathbf{i}_m\times\nabla\frac{e^{-ikr}}{r}\right]=-\mathbf{n}\times\left[\mathbf{i}'_m\times\nabla\frac{e^{-ikr'}}{r'}\right]$$

即磁流项的切线分量大小相等方向相反.

结论 $\mathbf{i}_m$ 平行分界面时其镜象为 $\mathbf{i}_m$.

由图 5.14 可见：$\mathbf{i}_m$ 垂直分界面时，如果取 $\mathbf{i}'_m=-\mathbf{i}_m$，则

$$\mathbf{i}_m\times\mathbf{r}=-\mathbf{i}'_m\times\mathbf{r}'$$

这时磁流项的切线分量大小相等方向相反.

结论 $\mathbf{i}_m$ 垂直分界面时其镜象为 $-\mathbf{i}_m$.

对于任意方向的 $\mathbf{i}_m$，可把它先分解为平行于和垂直于分界面的两个分量，对每一个分量分别求镜象，再把所求得的两个镜象矢量相加，即得 $\mathbf{i}_m$ 的镜象.

利用对偶原理立即可得出下列结论：

（1）磁流 $\mathbf{i}_m$ 平行于磁导体时镜象为 $-\mathbf{i}_m$；

（2）磁流 $\mathbf{i}_m$ 垂直磁导体时镜象为 $\mathbf{i}_m$；

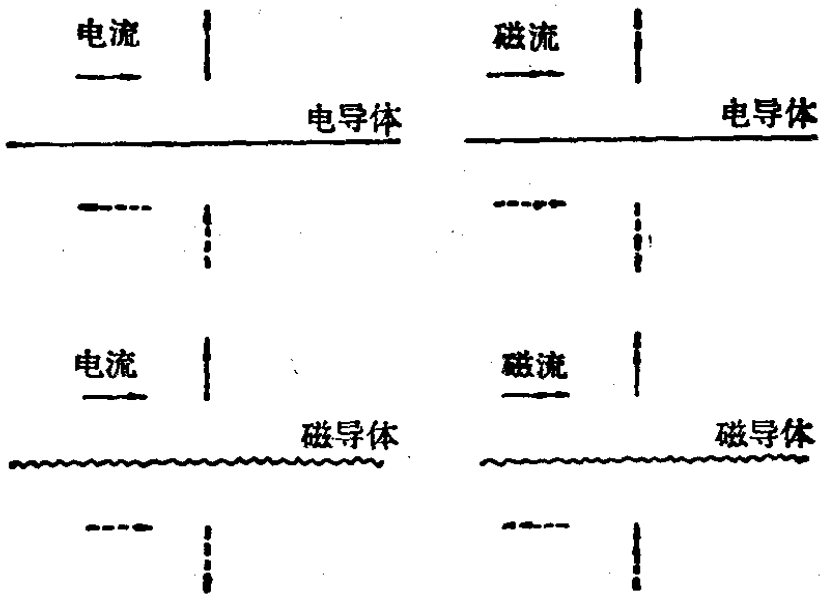

图 5.15　电流和磁流的镜象

(3) 电流 i 平行于磁导体时镜象为 i;

(4) 电流 i 垂直磁导体时镜象为 $-\mathbf{i}$.

以上结果的汇总情况见图 5.15.

如果在场的表达式中明显地出现电荷密度 ρ 或磁荷密度 ρ_m，则应用和上文中同样的方法可求出 ρ 或 ρ_m 的镜象.

举理想电导体为例. 由公式(5.17)，

$$\mathbf{E}_p = -\frac{1}{4\pi}\iiint_V \left[i\omega\mu\mathbf{i}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right) + \mathbf{i}_m \times \nabla\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right) - \frac{\rho}{\varepsilon}\nabla\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)\right] dv$$

可见 ρ 出现在表达式

$$\frac{\rho}{\varepsilon}\nabla\frac{e^{-ikr}}{r}$$

中，因

$$\frac{\rho}{\varepsilon}\nabla\frac{e^{-ikr}}{r} = \frac{\rho}{\varepsilon}f(r)\mathbf{r}$$

$$\frac{\rho'}{\varepsilon}\nabla\frac{e^{-ikr}}{r}=\frac{\rho'}{\varepsilon}f(r)\mathbf{r}'$$

又因

$$\mathbf{n}\times\mathbf{r}=\mathbf{n}\times\mathbf{r}'$$

可见只要取 $\rho'=-\rho$ 就可保证合成场的切线分量为零. 由此得结论: ρ 对理想电导体的镜象是$-\rho$.

同理可知 ρ_m 对理想磁导体的镜象是$-\rho_m$.

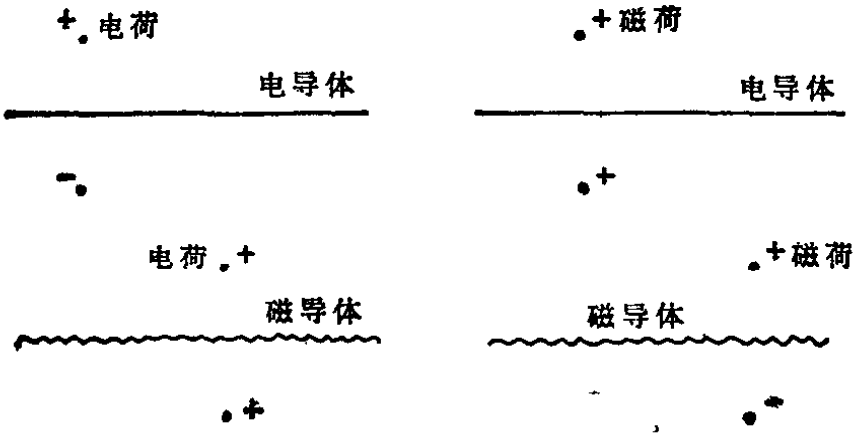

图 5.16 电荷、磁荷的镜象

由图 5.15 还可看出, ρ 对理想磁导体的镜象是 ρ, 因镜象电流分布和原象完全一样, 故知电荷分布也完全一样. 同理 ρ_m 对理想电导体的镜象是 ρ_m. 以上结果示于图 5.16 中.

第六章　口径场的三种模型和方向图公式

6.1　口径场的三种模型

在设计微波面天线的时候，工程上往往总是先选择一个有限或无限大的平面来作为所谓的口径面，接着在口径面上近似地给出电场和磁场的分布情况，最后根据给定的口径场分布计算出天线的远区方向图。口径场的不同分布模式确定了它的不同模型。严格地说，所有的模型都是对实际情况的近似。根据具体情况适当地选取口径场的模型是天线设计工作中的一个重要步骤，需要认真地加以考虑。以喇叭天线为例（见图 6.1）。取包含喇叭口并与喇叭轴线相垂直的无限大平面为口径面，可以用下列三种方式近似地给出口径面上的场分布。

模式 1　假定 $\mathbf{n}\times\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{n}\times\mathbf{H}$ 只存在于喇叭口上，喇

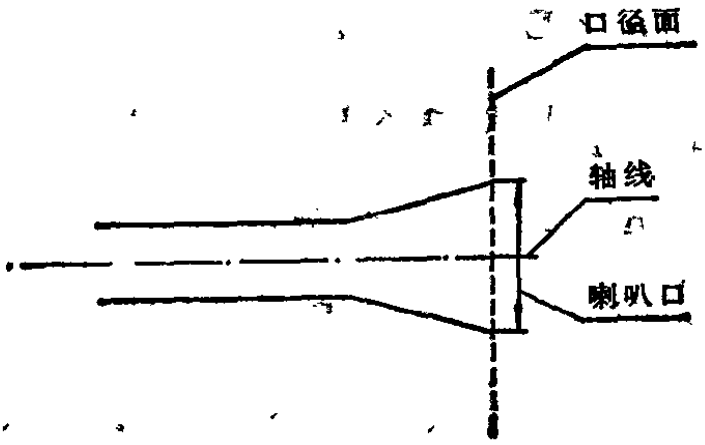

图 6.1　喇叭天线及其口径面

叭口外口径面上其余部分的 $\mathbf{n}\times\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{n}\times\mathbf{H}$ 都等于零.

模式 2 假定 $\mathbf{n}\times\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{n}\times\mathbf{H}$ 同时存在于喇叭口上，在喇叭口外口径面上其余部分的 $\mathbf{n}\times\mathbf{E}=0$，而 $\mathbf{n}\times\mathbf{H}\neq 0$.

这一模式相当于假定喇叭口外的口径面是一个由理想电导体组成的平面(在理想电导体上 $\mathbf{n}\times\mathbf{E}=0$).

模式 3 假定 $\mathbf{n}\times\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{n}\times\mathbf{H}$ 同时存在于喇叭口上，喇叭口外口径面上其余部分的 $\mathbf{n}\times\mathbf{H}$ 等于零，而 $\mathbf{n}\times\mathbf{E}\neq 0$.

这一模式相当于假定喇叭口外的口径面是一个由理想磁导体组成的平面(在理想磁导体上 $\mathbf{n}\times\mathbf{H}=0$).

6.2 方向图公式

根据给定的口径场模式和一些附加条件，就可以推导出相应的远场区方向图公式. 本书对不同的模式分别进行推导.

我们的出发点是根据已知口径场求观察点 P 的辐射场公式

$$\mathbf{E}_P=\frac{1}{4\pi i\omega\varepsilon}\iint_{\Sigma}[k^2[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]A+([\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\cdot\nabla)\nabla A+i\omega\varepsilon[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\times\nabla A]d\sigma \tag{6.1}$$

$$\mathbf{H}_P=-\frac{1}{4\pi i\omega\mu}\iint_{\Sigma}[k^2[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]A+([\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\cdot\nabla)\nabla A-i\omega\mu[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\times\nabla A]d\sigma \tag{6.2}$$

式中 Σ 为口径面；$A=\dfrac{e^{-ikr}}{r}$；$\mathbf{n}$ 为垂直于口径面的单位法向量，指向观察点所在区域，如图 6.2 所示. 在以上的公式中忽略了对口径边缘的环积分(见式(5.23)). 在工程实践中，

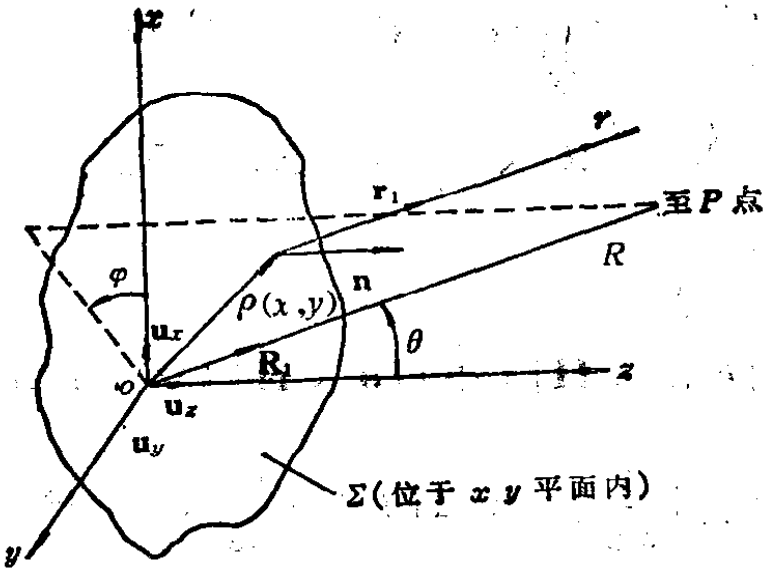

图 6.2　坐标系

虽然口径边缘的场不等于零，但通常比口径中心的场要弱得多，因此忽略环积分不致于对结果有大的影响.

在图 6.2 中，$\boldsymbol{\rho}$ 为自坐标系原点至口径面面积元 $d\sigma$ 的矢量；$\mathbf{R}_1$ 是从原点至观察点方向的单位矢量. 在球坐标系中，表示方向的角度为 θ 和 φ (图 6.2)；$\mathbf{r}_1$ 为自 $d\sigma$ 至观察点方向的单位矢量. 在观察点 P 处于远场条件下，$\mathbf{r}_1$ 与 $\mathbf{R}_1$ 平行，因此 $\mathbf{r}_1$ 方向的角度亦为 θ 和 φ ，R、r 为从原点和 $d\sigma$ 至 P 点的距离. 由图 6.2 可见

$$r = R - \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{R}_1 \tag{6.3}$$

将式(6.3)代入式(6.1)后式(6.1)可化为另一形式，这是因为

$$\frac{1}{4\pi i\omega\varepsilon}\iint_{\Sigma} i\omega\varepsilon[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\times\nabla A\,d\sigma$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\times\nabla\frac{e^{-ikr}}{r}d\sigma$$

$$\approx\frac{1}{4\pi R}\iint_{\Sigma}[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\times(-ik)e^{-ik(R-\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{R}_1)}(-\mathbf{R}_1)d\sigma$$

$$= \frac{ik}{4\pi R} e^{-ikR} \iint_{\Sigma} [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \mathbf{R}_1 e^{ik\rho \cdot \mathbf{R}_1} d\sigma$$

$$= -\frac{ike^{-ikR}}{4\pi R} \mathbf{R}_1 \times \iint_{\Sigma} [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] e^{ik\rho \cdot \mathbf{R}_1} d\sigma \tag{6.4}$$

以及

$$\frac{1}{4\pi i\omega\varepsilon} \iint_{\Sigma} [k^2[\mathbf{n} \times \mathbf{H}]A + ([\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \cdot \nabla)\nabla A] d\sigma$$

$$= -\frac{ik}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\frac{k}{\omega\varepsilon} [\mathbf{n} \times \mathbf{H}]A + \frac{1}{k\omega\varepsilon} ([\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \cdot \nabla)\nabla A \right] d\sigma$$

$$= -\frac{ik}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\frac{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{\omega\varepsilon} [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \frac{e^{-ikr}}{r} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{k\omega\varepsilon} ([\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \cdot \nabla)\nabla \frac{e^{-ikr}}{r} \right] d\sigma$$

$$\approx -\frac{ik}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \frac{e^{-ikR}}{R} e^{ik\rho \cdot \mathbf{R}_1} (\mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_1) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{k\omega\varepsilon} ([\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \cdot \nabla)\left(ik \frac{e^{-ikr}}{r} \mathbf{R}_1 \right) \right] d\sigma$$

$$= -\frac{ik}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-ikR}}{R} e^{ik\rho \cdot \mathbf{R}_1} [\mathbf{n} \times \mathbf{H}](\mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_1) \right.$$

$$\left. + \frac{i\mathbf{R}_1}{\omega\varepsilon} \left([\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \cdot \mathbf{R}_1 \frac{e^{-ikr}}{r} (ik) \right) \right] d\sigma$$

$$\approx \frac{ik}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-ikR}}{R} e^{ik\rho \cdot \mathbf{R}_1} [\mathbf{n} \times \mathbf{H}](\mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_1) \right.$$

$$\left. - \mathbf{R}_1 \frac{e^{-ikR}}{R} \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} (\mathbf{R}_1 \cdot [\mathbf{n} \times \mathbf{H}]) e^{ik\rho \cdot \mathbf{R}_1} \right] d\sigma$$

$$= -\frac{ike^{-ikR}}{4\pi R} \iint_{\Sigma} \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} e^{ik\rho \cdot \mathbf{R}_1} [[\mathbf{n} \times \mathbf{H}](\mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_1)$$

$$- \mathbf{R}_1(\mathbf{R}_1 \cdot [\mathbf{n} \times \mathbf{H}])] d\sigma$$

$$= -\frac{ik e^{-ikR}}{4\pi R}\iint_{\Sigma}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} e^{ik\rho\cdot\mathbf{R}_1}[-\mathbf{R}_1\times[\mathbf{R}_1\times[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]]]d\sigma$$

$$= -\frac{ik e^{-ikR}}{4\pi R}\mathbf{R}_1\times\iint_{\Sigma}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} e^{ik\rho\cdot\mathbf{R}_1}[-\mathbf{R}_1\times[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]]d\sigma \tag{6.5}$$

将式(6.4)和(6.5)代入式(6.1)，最后可得

$$\mathbf{E}_p = -\frac{ik e^{-ikR}}{4\pi R}\mathbf{R}_1\times\iint_{\Sigma}\left[[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]-\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}\mathbf{R}_1\times[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\right]e^{ik\rho\cdot\mathbf{R}_1}d\sigma \tag{6.6}$$

令 $\mathbf{s}$ 表示坡印亭矢量方向上的单位矢量。在天线问题中，通常

$$\mathbf{H} = \alpha[\mathbf{s}\times\mathbf{E}] \tag{6.7}$$

举例来说，对在自由空间中传播的平面波，α 取$\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}$值，而对在矩形波导或圆波导中传播的主模，$\alpha$ 则取另外的数值。

将式(6.7)代入式(6.6)，得

$$\mathbf{E}_p = -\frac{ik}{4\pi R}e^{-ikR}\mathbf{R}_1\times\iint_{\Sigma}\left\{\mathbf{n}\times\mathbf{E}-\alpha\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}[\mathbf{R}_1\times[\mathbf{n}\times[\mathbf{s}\times\mathbf{E}]]]\right\}e^{ik\rho\cdot\mathbf{R}_1}d\sigma \tag{6.8}$$

现在来讨论一种假定 $\mathbf{s}=\mathbf{n}$ 的特殊情况。这意味着口径场为一由沿 z 轴方向传播的平面波所形成的场。

此时因为

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}=0 \qquad \mathbf{s}\cdot\mathbf{n}=1$$

式(6.8)变成

$$\mathbf{E}_P = -\frac{ik}{4\pi R} e^{-ikR}\mathbf{R}_1 \times \iint_\Sigma \left\{\mathbf{n}\times\mathbf{E} - \alpha\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}[\mathbf{R}_1\times[\mathbf{n}\times[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]]]\right\} e^{ik\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{R}_1}d\sigma \tag{6.9}$$

因为

$$\begin{aligned}&\mathbf{R}_1\times[\mathbf{n}\times[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]]\\ &\quad=\mathbf{R}_1\times[\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})-\mathbf{E}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})]\\ &\quad=-\mathbf{R}_1\times\mathbf{E}\end{aligned} \tag{6.10}$$

所以式(6.9)变成

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_P &= -\frac{ike^{-ikR}}{4\pi R}\mathbf{R}_1\times\iint_\Sigma\left[\mathbf{n}\times\mathbf{E}+\alpha\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}\mathbf{R}_1\times\mathbf{E}\right]e^{ik\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{R}_1}d\sigma\\ &= -\frac{ike^{-ikR}}{4\pi R}\mathbf{R}_1\times\left[\left(\mathbf{n}+\alpha\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}\mathbf{R}_1\right)\times\iint_\Sigma\mathbf{E}e^{ik\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{R}_1}d\sigma\right]\\ &= -\frac{ike^{-ikR}}{4\pi R}\mathbf{R}_1\times\left[\left(\mathbf{n}+\alpha\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}\mathbf{R}_1\right)\times\mathbf{N}\right]\end{aligned} \tag{6.11}$$

式中

$$\mathbf{N} = \iint_\Sigma \mathbf{E}e^{ik\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{R}_1}d\sigma \tag{6.12}$$

由于

$$\boldsymbol{\rho} = x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y$$

$$\mathbf{R}_1 = \sin\theta\cos\varphi\mathbf{u}_x + \sin\theta\sin\varphi\mathbf{u}_y + \cos\theta\mathbf{u}_z$$

故

$$\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{R}_1 = x\sin\theta\cos\varphi + y\sin\theta\sin\varphi$$

代入式(6.12),得

$$\mathbf{N}=\iint_{\Sigma}\mathbf{E}e^{ik(x\sin\theta\cos\varphi+y\sin\theta\sin\varphi)}d\sigma \tag{6.13}$$

下面再求 $\mathbf{E}$ 的 θ 和 φ 分量.

因为下列关系式成立:

$$\begin{cases}\mathbf{R}_1=\mathbf{u}_x\sin\theta\cos\varphi+\mathbf{u}_y\sin\theta\sin\varphi+\mathbf{u}_z\cos\theta\\ \mathbf{n}=\mathbf{u}_z\\ \mathbf{u}_\theta=\mathbf{u}_x\cos\theta\cos\varphi+\mathbf{u}_y\cos\theta\sin\varphi-\mathbf{u}_z\sin\theta\\ \mathbf{u}_\varphi=-\mathbf{u}_x\sin\varphi+\mathbf{u}_y\cos\varphi\\ \mathbf{N}=\mathbf{u}_xN_x+\mathbf{u}_yN_y\end{cases} \tag{6.14}$$

式中

$$N_x=\iint_{\Sigma}E_xe^{ik(x\sin\theta\cos\varphi+y\sin\theta\sin\varphi)}d\sigma \tag{6.15}$$

$$N_y=\iint_{\Sigma}E_ye^{ik(x\sin\theta\cos\varphi+y\sin\theta\sin\varphi)}d\sigma \tag{6.16}$$

所以

$$\begin{cases}\mathbf{u}_\theta\cdot\mathbf{n}=-\sin\theta\qquad\mathbf{u}_\varphi\cdot\mathbf{n}=0\\ \mathbf{u}_\theta\cdot\mathbf{N}=\cos\theta(N_x\cos\varphi+N_y\sin\varphi)\\ \mathbf{u}_\varphi\cdot\mathbf{N}=-N_x\sin\varphi+N_y\cos\varphi\\ \mathbf{R}_1\cdot\mathbf{N}=\sin\theta(N_x\cos\varphi+N_y\sin\varphi)\\ \mathbf{R}_1\cdot\mathbf{n}=\cos\theta\end{cases} \tag{6.17}$$

进一步可得

$$\begin{aligned}E_{P\theta}&=\mathbf{E}_P\cdot\mathbf{u}_\theta\\ &=-\frac{ike^{-ikR}}{4\pi R}\mathbf{u}_\theta\cdot\left(\mathbf{R}_1\times\left[\left(\mathbf{n}+\alpha\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}\mathbf{R}_1\right)\times\mathbf{N}\right]\right)\\ &=\frac{ike^{-ikR}}{4\pi R}\left[1+\alpha\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\theta\right](N_x\cos\varphi+N_y\sin\varphi)\end{aligned} \tag{6.18}$$

同理

$$E_{P\varphi} = \mathbf{u}_\varphi \cdot \mathbf{E}_P$$
$$= -\frac{ike^{-ikR}}{4\pi R}\left[\cos\theta + \alpha\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}\right](N_x \sin\varphi - N_y \cos\varphi) \tag{6.19}$$

最后

$$\mathbf{E}_P = \mathbf{u}_\theta E_{P\theta} + \mathbf{u}_\varphi E_{P\varphi} \quad (E_{Pr} = \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{E}_P = 0) \tag{6.20}$$

下面来考虑一种特殊情况。

假定口径场是线极化的，而且极化方向为 y 轴的方向，即

$$\mathbf{E} = f(x,y)\mathbf{u}_y \tag{6.21}$$

这时 $E_x = 0$，$N_x = 0$，只有 N_y 不等于零，即

$$N_y = \iint_\Sigma f(x,y)e^{ik\sin\theta(x\cos\varphi + y\sin\varphi)}dxdy \tag{6.22}$$

在由沿 z 轴方向传播的平面波形成口径场的条件下，

$$\alpha = \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \alpha\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 \tag{6.23}$$

此时

$$E_{P\theta} = \frac{ike^{-ikR}}{4\pi R}(1 + \cos\theta)N_y \sin\varphi \tag{6.24}$$

$$E_{P\varphi} = \frac{ike^{-ikR}}{4\pi R}(1 + \cos\theta)N_y \cos\varphi \tag{6.25}$$

$$\mathbf{E}_P = \mathbf{u}_\theta E_{P\theta} + \mathbf{u}_\varphi E_{P\varphi}$$
$$= \frac{ike^{-ikR}}{4\pi R}(1 + \cos\theta)N_y(\mathbf{u}_\theta \sin\varphi + \mathbf{u}_\varphi \cos\varphi) \tag{6.26}$$

其幅值为

$$|\mathbf{E}_P| = \frac{k}{4\pi R}(1 + \cos\theta)|N_y| \tag{6.27}$$

以上讨论的是模式 1 的情况，即口径场只存在于一个有

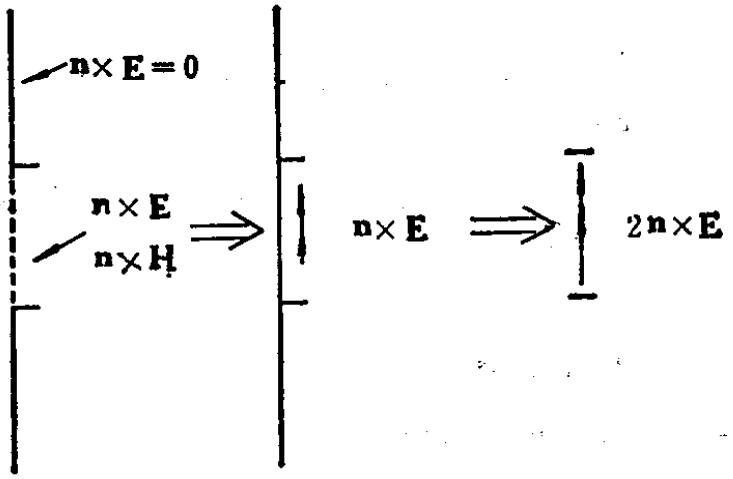

图 6.3　模式 2 的等效场

限范围内的情况.

下面要讨论的是模式 2 的情况.

根据模式 2 的定义，可以认为喇叭口内同时存在 $\mathbf{n}\times\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{n}\times\mathbf{H}$，而在喇叭口外有一无限大的理想电导体平板，如图 6.3 所示.

根据只用磁流的等效定理，模式 2 的场等效于由一无限大导电平板上的磁流片所形成的场，而根据镜象原理，这又在半空间内等效于由两倍大小的磁流片所形成的场.

因此，模式 2 的辐射场可以看成是喇叭口内只存在 $2\mathbf{n}\times\mathbf{E}$ 的磁流时通过辐射而形成的场. 这个辐射场的公式可以根据模式 1 的公式获得，此时只需将 $\mathbf{n}\times\mathbf{E}$ 换成 $2\mathbf{n}\times\mathbf{E}$ 并令 $\mathbf{n}\times\mathbf{H}$ 等于零即可.

在式 (6.11) 中，令 $\alpha=0$ 并引入系数 2 即得模式 2 的辐射场公式:

$$\mathbf{E}_P=-\frac{2ik}{4\pi R}e^{-ikR}\mathbf{R}_1\times[\mathbf{n}\times\mathbf{N}]$$

$$\mathbf{N}=\iint_{\Sigma}\mathbf{E}e^{ik\rho\cdot\mathbf{R}_1}d\sigma \tag{6.28}$$

此时

$$E_{P\theta} = \frac{2ik}{4\pi R} e^{-ikR}(N_x \cos\varphi + N_y \sin\varphi) \tag{6.29}$$

$$E_{P\varphi} = -\frac{2ik}{4\pi R} e^{-ikR}\cos\theta(N_x \sin\varphi - N_y \cos\varphi) \tag{6.30}$$

$$\mathbf{E}_P = \mathbf{u}_\theta E_{P\theta} + \mathbf{u}_\varphi E_{P\varphi}$$

在 $\mathbf{E} = f(x,y)\mathbf{u}_y$ 的特殊情况下，

$$E_{P\theta} = \frac{2ik}{4\pi R} e^{-ikR} N_y \sin\varphi \tag{6.31}$$

$$E_{P\varphi} = \frac{2ik}{4\pi R} e^{-ikR} N_y \cos\theta\cos\varphi \tag{6.32}$$

$$\mathbf{E} = \frac{2ike^{-ikR}}{4\pi R}(\mathbf{u}_\theta \sin\varphi + \mathbf{u}_\varphi \cos\theta\cos\varphi)N_y \tag{6.33}$$

其幅值为

$$|\mathbf{E}| = \frac{2k}{4\pi R}|N_y|\sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\theta\cos^2\varphi} \tag{6.34}$$

令 β 为 $\mathbf{R}_1$ 与 x 轴之夹角，则

$$\cos\beta = \sin\theta\cos\varphi$$

$$\sin\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta}$$

$$= \sqrt{\cos^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}$$

因此

$$|\mathbf{E}| = \frac{2k}{4\pi R}|N_y|\sin\beta \tag{6.35}$$

下面来讨论模式 3 的情况。

根据模式 3 的定义，可以认为喇叭口内同时存在 $\mathbf{n}\times\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{n}\times\mathbf{H}$，而在喇叭口外有一无限大的理想磁导体平板，如图 6.4 所示。

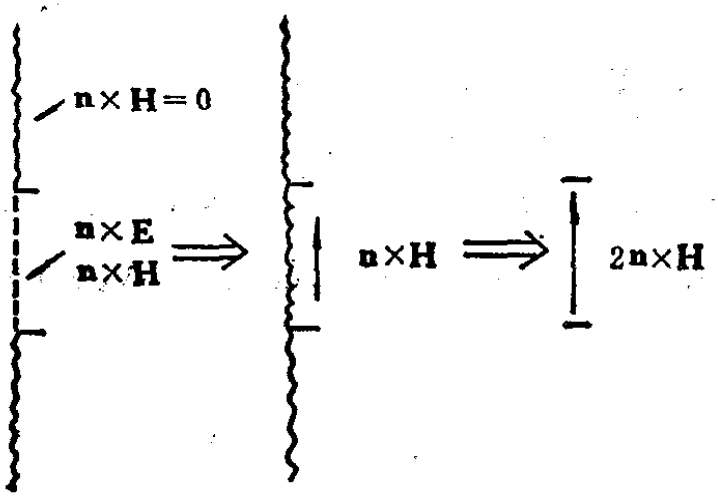

图 6.4　模式 3 的等效场

根据只用电流的等效定理，模式 3 的场等效于由一无限大导磁平板上的电流片所形成的场，而根据镜象原理，这又在半空间内等效于由两倍大小的电流片所形成的场。因此，模式 3 的辐射场可以看成是喇叭口内仅存在 $2\mathbf{n}\times\mathbf{H}$ 的电流时通过辐射而形成的场。

这个辐射场的公式可以借助于模式 1 的公式获得，此时只需将 $\mathbf{n}\times\mathbf{H}$ 换成 $2\mathbf{n}\times\mathbf{H}$ 并且令 $\mathbf{n}\times\mathbf{E}=0$ 即可。

在公式 (6.11) 中，去掉 $\mathbf{n}$ 并引入系数 2 即得模式 3 的辐射场公式：

$$\mathbf{E}_P=-\frac{2ik}{4\pi R}e^{-ikR}\mathbf{R}_1\times\left(\alpha\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}\right)[\mathbf{R}_1\times\mathbf{N}] \tag{6.36}$$

式中

$$\mathbf{N}=\iint_{\Sigma}\mathbf{E}e^{ik\rho\cdot\mathbf{R}_1}d\sigma$$

此时

$$E_{P\theta}=\mathbf{u}_\theta\cdot\mathbf{E}_P$$

$$=-\frac{2ik}{4\pi R}e^{-ikR}\left(\alpha\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\mathbf{u}_\theta\cdot[\mathbf{R}_1\times[\mathbf{R}_1\times\mathbf{N}]]$$

但

$$\begin{aligned}&\mathbf{u}_\theta \cdot [\mathbf{R}_1 \times [\mathbf{R}_1 \times \mathbf{N}]]\\&\quad = \mathbf{u}_\theta \cdot (\mathbf{R}_1(\mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{N}) - \mathbf{N})\\&\quad = (\mathbf{u}_\theta \cdot \mathbf{R}_1)(\mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{N}) - (\mathbf{u}_\theta \cdot \mathbf{N}) \quad (\mathbf{u}_\theta \cdot \mathbf{R}_1 = 0)\\&\quad = -\mathbf{u}_\theta \cdot \mathbf{N} = -\cos\theta(N_x \cos\varphi + N_y \sin\varphi)\end{aligned}$$

因此最后可得

$$E_{P\theta} = \frac{2ik}{4\pi R} e^{-ikR}\left(\alpha\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\cos\theta(N_x \cos\varphi + N_y \sin\varphi) \tag{6.37}$$

同理

$$\begin{aligned}&E_{P\varphi} = \mathbf{u}_\varphi \cdot \mathbf{E}_P\\&\quad = -\frac{2ik}{4\pi R} e^{-ikR}\left(\alpha\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\mathbf{u}_\varphi \cdot [\mathbf{R}_1 \times [\mathbf{R}_1 \times \mathbf{N}]]\end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned}&\mathbf{u}_\varphi \cdot [\mathbf{R}_1 \times [\mathbf{R}_1 \times \mathbf{N}]]\\&\quad = (\mathbf{u}_\varphi \cdot \mathbf{R}_1)(\mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{N}) - (\mathbf{u}_\varphi \cdot \mathbf{N}) \quad (\mathbf{u}_\varphi \cdot \mathbf{R}_1 = 0)\\&\quad = N_x \sin\varphi - N_y \cos\varphi\end{aligned}$$

故最后得

$$E_{P\varphi} = -\frac{2ik}{4\pi R} e^{-ikR}\left(\alpha\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}\right)(N_x \sin\varphi - N_y \cos\varphi) \tag{6.38}$$

$$\mathbf{E}_P = \mathbf{u}_\theta E_{P\theta} + \mathbf{u}_\varphi E_{P\varphi}$$

在 $\mathbf{E} = f(x,y)\mathbf{u}_y$ 的特殊情况下，并假定口径场为由沿 z 轴传播的平面波所形成，此时

$$N_x = 0 \qquad \alpha\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} = 1$$

于是可得

$$E_{P\theta} = \frac{2ik}{4\pi R} e^{-ikR}\cos\theta \sin\varphi N_y \tag{6.39}$$

$$E_{P\varphi} = \frac{2ik}{4\pi R} e^{-ikR} \cos\varphi N_y \tag{6.40}$$

$$\mathbf{E}_P = \frac{2ik}{4\pi R} e^{-ikR}(\mathbf{u}_\theta \cos\theta \sin\varphi + \mathbf{u}_\varphi \cos\varphi) N_y \tag{6.41}$$

其幅值为

$$|\mathbf{E}| = \frac{2k}{4\pi R} |N_y| \sqrt{\cos^2\theta \sin^2\varphi + \cos^2\varphi} \tag{6.42}$$

令 α 为 $\mathbf{R}_1$ 与 y 轴之夹角，则

$$\cos\alpha = \sin\theta \sin\varphi$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \sin^2\theta\sin^2\varphi}$$

$$= \sqrt{1 - (1 - \cos^2\theta)\sin^2\varphi}$$

$$= \sqrt{\cos^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}$$

这样，最后可得

$$|\mathbf{E}| = \frac{2k}{4\pi R} |N_y| \sin\alpha \tag{6.43}$$

6.3 不同口径场模式的方向图公式的比较

这一节中，我们要在 $\mathbf{E} = f(x, y)\mathbf{u}_y$ 和口径场为由沿 z 轴方向传播的平面波所形成的特殊情况下来比较不同口径场模式的方向图公式。令

$$C = \frac{ik}{4\pi R} e^{-ikR}$$

$$G(\theta,\varphi) = N_y = \iint_\Sigma f(x,y) e^{ik\rho\cdot\mathbf{R}_1} dxdy$$

在此情况下模式 1、2 和 3 分别为：

模式 1

$$\mathbf{E} = (1 + \cos\theta) C(\mathbf{u}_\theta \sin\varphi + \mathbf{u}_\varphi \cos\varphi) G(\theta,\varphi)$$

$$|\mathbf{E}| = (1 + \cos\theta)|C||G(\theta,\varphi)|$$

模式 2

$$\mathbf{E} = 2C(\mathbf{u}_\theta \sin\varphi + \mathbf{u}_\varphi \cos\theta\cos\varphi)G(\theta,\varphi)$$

$$\begin{aligned}|\mathbf{E}| &= 2|C|\sqrt{\cos^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\,|G(\theta,\varphi)| \\ &= 2|C|\sin\beta|G(\theta,\varphi)|\end{aligned}$$

模式 3

$$\mathbf{E} = 2C(\mathbf{u}_\theta \cos\theta\sin\varphi + \mathbf{u}_\varphi \cos\varphi)G(\theta,\varphi)$$

$$\begin{aligned}|\mathbf{E}| &= 2|C|\sqrt{\cos^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}\,|G(\theta,\varphi)| \\ &= 2|C|\sin\alpha|G(\theta,\varphi)|\end{aligned}$$

如果方向图的主瓣方向为 $\theta = 0$，那么在主瓣附近 $\alpha \approx \pi/2$，$\beta \approx \pi/2$，$\sin\alpha \approx 1$，$\sin\beta \approx 1$，$\cos\theta \approx 1$．三种模式的方向图形状基本上是一致的，选用哪一种模式都不会影响方向图主瓣的形状．

但是在远离主瓣即 θ 比较大的区域内，三种模式的方向图公式就不一样了．这时哪一种模式最接近实际情况就要根据具体条件进行具体分析．

例如，当喇叭带有比较大的法兰盘时，选用第二种口径场模式比较接近实际情况．当喇叭口径比波长大许多倍时，由于喇叭外表面上的场很弱，选用第一种口径场模式比较接近实际情况．其它情况下则要根据实验来选择．

结　束　语

本书对电磁场理论中的一些基本问题作了比较深入的探讨．掌握这些问题，对进一步学习微波和天线理论是非常有益的．

这些问题可以大致归纳如下：

（1）▽算子运算法，

（2）磁流、磁荷概念及等效定理，

（3）唯一性定理，

（4）电磁位，

（5）广义麦克斯韦方程组的各种求解方法，

（6）口径场模型，

（7）单位制换算．

为了便于读者在此基础上进一步深造，下面介绍几本值得一阅的有关参考书籍（详见参考文献）．

若要全面了解电磁场理论，则可参考 J. A. Stratton 的“Electromagnetic Theory”；

在微波理论方面，可参考黄宏嘉的《微波原理》和林为干的《微波理论与技术》；

关于天线理论，可参考 Silver 的“Microwave Antenna Theory and Design”、Collin and Zucker 的“Antenna Theory”、任朗的《天线理论基础》和 Fradin 的“Microwave Antennas”．

其他有用的参考书列在参考文献中，读者可自行选阅．

著者希望本书能尽量为读者扫清学习道路上的障碍．但是，由于受篇幅限制，诸如电磁场问题数值解法、并矢格林函

数理论和几何绕射法等问题未能涉及，请读者见谅。

随着计算机技术的发展，大量工程设计工作都要靠计算机辅助设计来完成，因此对工程技术人员来说，掌握基础理论的要求不是降低而是更高了。

显然，没有牢靠的理论基础，拿不出供计算机计算的公式，也就谈不上什么计算机辅助设计了。这一点正在被越来越多的人所认识。盲目地套用现成公式而不知其来龙去脉，同样是不行的。只有通过刻苦学习掌握好基础理论并踏踏实实地做到理论与实践相结合，才可能在真正掌握前人成果的基础上有所发展和创新。

在阅读本书之后，如果读者感到对掌握基础理论的确有点帮助的话，那么著者编写本书的目的也就达到了。

参 考 文 献

[1] 任朗，天线理论基础，人民邮电出版社，1980 年。

[2] 林为干，微波理论与技术，科学出版社，1979 年。

[3] 黄宏嘉，微波原理，科学出版社，1963 年。

[4] Becker, R., Electromagnetic Fields and Interactions, Vol. 1, Blaisdell Publishing, 1964.

[5] Born, M. and Wolf, E., Principles of Optics, 4th Edition, Pergamon Press, 1970.

[6] Harrington, R. F., Time-Harmonic Electromagnetic Fields, McGraw-Hill, 1961.

中译本：正弦电磁场，上海科学技术出版社，1964 年。

[7] Jordan, E. C. and Balmain, K. G., Electromagnetic Waves and Radiating Systems, Prentice-Hall, 1968.

[8] Plonsey, R. and Collin, R. E., Principles and Applications of Electromagnetic Fields, McGraw-Hill, 1961.

[9] Ramo, S., Whinnery, J. R. and Van Duzer, T., Fields and Waves in Communication Electronics, John Wiley and Sons, 1965.

[10] Schelkunoff, S. A., Electromagnetic Waves. Van Nostrand, 1943.

[11] Silver, S., Microwave Antenna Theory and Design, McGraw-Hill, 1949.

[12] Stratton, J. A., Electromagnetic Theory, McGraw-Hill, 1941.

[13] Fradin, A. Z., Microwave Antennas, Pergamon Press, 1961.

中译本：特高频天线，国防工业出版社，1962 年。

[14] Collin, R. E. and Zucker, F. J., Antenna Theory, Part I, Part II, McGraw-Hill, 1969.

[15] Collin, R. E., Field Theory of Guided Waves, McGraw-Hill, 1960.

[16] Вайнштейн, Л. А., Электромагнитные Волны, Советское Радио, 1957.

[17] Кисунько, Г. В., Электродинамика Полых Систем, ВКАС, 1949.

[18] Шилов, Г. Е., Лекции по Векторному Анализу, Гостехиздат, 1954.

[19] 约旦，电磁波与辐射系统，人民邮电出版社，1959 年。

附录Ⅰ　单位制的换算和麦克斯韦方程组在不同单位制中的形式

由于历史上的或其他的原因，目前存在着多种电磁单位制.人们往往出于不同的考虑而采用不同的单位制．近年来，电磁学领域中使用的单位制主要有两种：高斯单位制和有理化米-千克-秒-库仑单位制（以下简称米-千克-秒单位制或MKSQ 单位制）.

为了便于阅读使用不同电磁单位制的参考资料和便于利用其中的数据或公式，首先必须学会单位制的换算方法．下面就来讨论这个问题.

从实用的观点来看，单位不过是测量物理量的一个标准.就这个意义而言，所有单位制都是可取的．人们所希望的仅仅是采用某种单位后测出来的物理量值不要太大或太小就行了.

例如，电解电容的电容量通常以微法作单位，这是因为常用电解电容的电容量大约在 1—10000 微法之间．在电子管收音机中，电容量范围是 10—100 微法．而在晶体管收音机中则是 10—5000 微法．如果用微微法作电容量单位，那么数值就太大了：1 微法等于 10^6 微微法，1 微法就要以 1000000 微微法计算；若用法拉作单位，则数值又太小了：1法拉等于 10^6 微法，1 微法就要以 0.000001 法拉表示．显然，数值太大和太小使用起来都是不方便的.

然而，这无非是使用上方便不方便的问题，而不是什么原则性问题．有人认为某种单位制的物理意义明显一些．其

实，那不过是对某些量而言的。例如，一米大致等于赤道至北极距离的千万分之一。而对于大多数的量来说，单位的物理意义并不明显。只要会换算，用哪一种单位制都可以。

I.1 电磁单位制中的四个基本单位

电磁单位制中的四个基本物理量单位指的是长度、质量、时间和电荷。这里，我们不去讨论历史上这四个基本单位是如何确定的，只把它们在几种不同单位制内的大小列于表 I.1 中，以供单位变换时计算用。

表 I.1 四个基本物理量单位的大小

单位制	单位大小			
	长度	质量	时间	电荷
米-千克-秒 MKSQ	1 米	1 千克	1 秒	1 库
静电 c.g.s.	1 厘米	1 克	1 秒	$3^{-1}10^{-9}$ 库
电磁 c.g.s.	1 厘米	1 克	1 秒	10 库
高斯	1 厘米	1 克	1 秒	$3^{-1}10^{-9}$ 库（对电学量） 10 库（对磁学量）
实用	1 厘米	1 克	1 秒	1 库
Mie	1 厘米	10^4 千克	1 秒	1 库
赫维赛-洛仑兹	1 厘米	1 克	1 秒	$\frac{3^{-1}10^{-9}}{\sqrt{4\pi}}$ 库（对电学量） $\frac{10}{\sqrt{4\pi}}$ 库（对磁学量）

表 I.1 中电荷单位的大小一律以库仑作为比较的基准。电学量指的是名词中带有"电"字的量，如电荷、电感、电导率、电流和电动势等。磁学量指的是名词中带有"磁"字的量，如磁通量、磁矩、导磁率和磁极强度等。

注意，在高斯单位制中，确定电学量单位的时候，所用的电荷单位是 $3^{-1} \times 10^{-9}$ 库，而在确定磁学量单位时，所用的电荷单位是 10 库。高斯单位制中的电学量与静电单位制中的电学量完全相同，因此，对电学量来说，它们的电荷单位都是 $3^{-1} \times 10^{-9}$ 库；而高斯单位制中的磁学量又和电磁单位制中的磁学量完全相同，因此，对磁学量来说，它们的电荷单位都是 10 库。一般称高斯单位制为混合单位制的原因就在于此。因为赫维赛-洛伦兹单位制是从高斯单位制中演化出来的，所以它的电学量和磁学量也采用了大小不一的电荷单位。在赫维赛-洛伦兹单位制中，对于电学量来说，其电荷单位是 $3^{-1} \times 10^{-9}/\sqrt{4\pi}$ 库，而对于磁学量来说，其电荷单位是 $10/\sqrt{4\pi}$ 库。

I.2 单位制换算的关键和基本规则

本节通过几个简单的例子来说明单位制换算的关键问题，并从这些例子中归纳出单位制换算的一些基本规则。

(1) 如果一个物理量 P 用单位制 A 测量是 a 个单位，那么问这个物理量用另一单位制 B 测量是多少个单位（用 b 表示)?

例如，南京长江大桥的长度用公里表示是 4 公里，问用公尺表示应是多少公尺?

用 $[A]$ 表示单位制 A 中的长度单位，这里 $[A]$ = 公里。

用 $[B]$ 表示单位制 B 中的长度单位，这里 $[B]$ = 公尺。由于 1 公里等于 1000 公尺，故

$$[A] = 1000[B]$$

另外，由例题可得

$$a = 4 \qquad b = 4000$$

或

$$b = 4 \times \frac{[A]}{[B]}$$

推广到一般的情况，若已知

$$[A] = k[B]$$

又知在单位制 A 中 $P = a[A]$，则在单位制 B 中 $P = a \cdot k$个 $[B] = b[B]$，即

$$b = a \cdot k$$

由此得出规则：同一个物理量，如果在单位制 A 中等于 a 个单位 $[A]$，那么在从单位制 A 变换成单位制 B 时，这个物理量在单位制 B 中将等于 a 乘 k 个 $[B]$；$k = [A]/[B]$，或 k 表示 $[A]$ 比 $[B]$ "大"(从代数意义上理解)几倍。可见，关键是要知道比值 k。

(2) 如果一个物理量 P 在单位制 A 中是 a 个 $1/[A]$，那么问这个物理量在单位制 B 中如何表示？

例如，一列火车每小时的速度为 160 公里，问每分钟的速度为多少公里？

在以小时为时间单位的单位制中，

$$\text{速度} = a\frac{\text{公里}}{\text{小时}} = 160\,\frac{\text{公里}}{\text{小时}}\ (a = 160)$$

在以分钟为时间单位的单位制中，

$$\text{速度} = b\,\frac{\text{公里}}{\text{分钟}} = \frac{160}{60}\,\frac{\text{公里}}{\text{分钟}}\left(b = \frac{160}{60}\right)$$

一般情况下，若 $[A]=k[B]$，又知在单位制 A 中 P 等于 a 个 $1/[A]$，则在单位制 B 中 P 等于 b 个 $1/[B]$ 或 $(a/k)(1/[B])$.

由此而得规则：如果单位在分母中，那么在从单位制 A 变换成单位制 B 时，应将分母乘以 k. 可见，关键仍然是要知道比值 k.

(3) 若有一方程式，其中的某一物理量原先是用单位制 A 表示的，现在改用单位制 B 来表示，问此方程式应作何改变？

例如，在米-千克-秒单位制中，$s=v\cdot t$，式中 s 为距离(米)；v 为速度(米/秒)；t 为时间(秒). 现在 v 和 t 的单位都不变，而 s 改用厘米为单位，问方程式应作何改变？

由于 v 和 t 的单位不变，故方程式的右边不起任何变化. 而在左边，因为距离单位改用了厘米，所以，s 的数值将增大 100 倍. 为了使方程式的两边仍相等，必须在左边除以 100 才行，由此可得下列方程式：

$$\frac{s}{100}=vt\quad\left(100=\frac{\text{米}}{\text{厘米}}=k\right)$$

在此方程式中，s 以厘米为单位，v 以米/秒为单位，t 以秒为单位.

一般情况下，如果方程式中的某一物理量 P 用单位制 A 表示，那么在改用单位制 B 表示时，这一物理量的符号要除以 k，其中 $k=[A]/[B]$.

上述情况表明，单位制换算问题的关键是先要知道同一物理量的不同单位之间的大小比值. 只要学会查找或计算比值的方法，并把查找到或算出来的常用比值列成表格备用，就不会有什么困难了.

I.3 电磁学中的物理量单位换算比的定义

一个电磁学中的物理量单位换算比定义为在一个单位系统中的该物理量的单位与另一个单位系统中同一物理量单位的比值. 它是一个四元函数. 它的四个自变量是: (1)长度单位的比值,用 L 表示;(2)质量单位的比值,用 M 表示;(3)时间单位的比值,用 T 表示;(4)电荷单位的比值,用 Q 表示.

物理量 P 的单位的比值用 $[P]$ 表示.

单位换算比的物理意义是: 如果有两个单位制 A 和 B,而且 A 中长度单位与 B 中长度单位的比值为 L,A 中质量单位与 B 中质量单位的比值为 M,A 中时间单位与 B 中时间单位的比值为 T,A 中电荷单位与 B 中电荷单位的比值为 Q,那么当我们把 L、M、T 和 Q 代入物理量 P 的单位换算比公式中去的时候,就会得到 P 在单位制 A 中的单位与 P 在单位制 B 中的单位之比值(即 P 在 A 中的单位比在 B 中的单位"大"几倍).

在特殊情况下,单位换算比可以退化为一元、二元或三元的函数.

I.3.1 基本物理量的单位换算比

基本物理量指的是长度、质量、时间和电荷. 按照定义,长度的换算比应当表示两个单位制中长度单位的比值,而这就是 L. 同理,质量的单位换算比就是 M;时间的单位换算比就是 T;电荷的单位换算比就是 Q.

I.3.2 派生物理量的单位换算比

(1) 如果一个物理量 P 在某一单位制中的数值 p 定义为

另外两个物理量Q和R在同一单位制中的数值q和r之乘积(在任何单位制中都这样定义)，那么P的单位换算比等于Q和R单位换算比的积:

$$[P]=[Q][R]$$

证 令单位制A中P的数值是p_A; Q的数值是q_A; R的数值是r_A. 又令单位制B中P的数值是p_B; Q的数值是q_B; R的数值是r_B.

根据定义

$$p_A=q_Ar_A \tag{I.1}$$

$$p_B=q_Br_B \tag{I.2}$$

用式(I.1)除式(I.2)，得

$$\frac{p_B}{p_A}=\frac{q_B}{q_A}\cdot\frac{r_B}{r_A}$$

由于用一定单位测量出来的物理量数值与单位大小成反比，故p_B/p_A等于物理量P在单位制A中的单位与P在单位制B中的单位之比值,这正好是P的单位换算比$[P]$，因此

$$\frac{p_B}{p_A}=[P] \tag{I.3}$$

同理

$$\frac{q_B}{q_A}=[Q] \qquad \frac{r_B}{r_A}=[R]$$

代入式(3)后得

$$[P]=[Q][R] \tag{I.4}$$

此即所需结果.

用数学归纳法很容易将此结果推广到N个因子的乘积情况.

(2) 如果一个物理量P在某一单位制中的数值P定义为另外两个物理量Q和R在同一单位制中的数值q和r之商

(在任何单位制中都这样定义)，那么 P 的单位换算比等于 Q 和 R 单位换算比的商：

$$[P]=\frac{[Q]}{[R]} \tag{I.5}$$

证 令单位制 A 中 P 的数值是 p_A；Q 的数值是 q_A；R 的数值是 r_A. 又令单位制 B 中 P 的数值是 p_B；Q 的数值是 q_B；R 的数值是 r_B. 根据定义

$$p_A=\frac{q_A}{r_A} \tag{I.6}$$

$$p_B=\frac{q_B}{r_B} \tag{I.7}$$

用式 (I.6) 除式 (I.7) 得

$$\frac{p_B}{p_A}=\frac{q_B}{r_B}\Big/\frac{q_A}{r_A}=\frac{q_B}{q_A}\Big/\frac{r_B}{r_A} \tag{I.8}$$

由于物理量数值与单位大小成反比，故 p_B/p_A 等于物理量 P 在单位制 A 中的单位与 P 在单位制 B 中的单位之比值，这正好是 P 的单位换算比 $[P]$，因此

$$\frac{p_B}{p_A}=[P]$$

同理

$$\frac{q_B}{q_A}=[Q] \qquad \frac{r_B}{r_A}=[R]$$

代入式 (I.8) 后得

$$[P]=\frac{[Q]}{[R]} \tag{I.9}$$

此即所需结果.

(3) 如果一个物理量 P 在某一单位制中的数值 p 定义为另一个物理量 Q 在同一单位制中的数值 q 的 n 次方，那么 P 的单位换算比等于 Q 的单位换算比之 n 次方：

$$[P] = [Q]^n \tag{I.10}$$

证明同 1。

I.4 常用电磁量的单位换算比

有了以上预备知识，我们就可以根据各种电磁量的定义，一步一步地把它们的单位换算比公式推导出来。这将使我们有机会复习一下各种电磁量的定义。注意，推导的前提是在不同单位制中电磁量具有同样的定义，否则要另加修正系数。

(1) 长度 l　换算比：L。

(2) 质量 m　换算比：M。

(3) 时间 t　换算比：T。

(4) 电荷 q　换算比：Q。

(5) 速度 v　定义：速度定义为距离与时间之商，即 $v = s/t$（s 表示距离），但距离的换算比就是长度的换算比。由此可得

$$[v] = \frac{[s]}{[t]} = L/T = LT^{-1}$$

(6) 加速度 a　定义：加速度定义为速度与时间之商，即 dv/dt，但 $[dv] = [v] = LT^{-1}$，$[dt] = [t] = T$。由此可得

$$[a] = \frac{LT^{-1}}{T} = LT^{-2}$$

(7) 力 F　定义：力定义为质量与加速度的乘积，即 $F = ma$。由此可得

$$[F] = [m][a] = MLT^{-2}$$

(8) 能量(功) A　定义：能量定义为力与距离的乘积，

即 $A = Fs$. 由此可得

$$[A] = [F][s] = MLT^{-2} \cdot L = ML^2T^{-2}$$

(9) 功率 P　定义：功率定义为能量与时间之商，即 $P = A/t$. 由此可得

$$[P] = \frac{[A]}{[t]} = \frac{ML^2T^{-2}}{T} = ML^2T^{-3}$$

(10) 表面电荷密度 σ　定义：表面电荷密度定义为电荷与面积之商，即 $\sigma = q/S$ (S 为面积). 由此可得

$$[\sigma] = \frac{[q]}{[S]}$$

但因

$$[S] = L^2$$

所以最后得

$$[\sigma] = \frac{Q}{L^2} = QL^{-2}$$

(11) 电荷密度(体积) ρ　定义：电荷密度(体积)定义为电荷与体积之商，即 $\rho = \frac{q}{\text{体积}}$. 由此可得

$$[\rho] = \frac{[q]}{[\text{体积}]} = \frac{Q}{L^3} = QL^{-3}$$

(12) 电位差 V　定义：电位差定义为功与电荷之商，即 $V = A/q$. 由此可得

$$[V] = \frac{[A]}{[q]} = \frac{ML^2T^{-2}}{Q} = ML^2T^{-2}Q^{-1}$$

(13) 电容量 C　定义：电容量定义为电荷与电位差之商：即 $C = \frac{q}{V}$. 由此可得

$$[C] = \frac{[q]}{[V]} = \frac{Q}{ML^2T^{-2}Q^{-1}} = M^{-1}L^{-2}T^2Q^2$$

(14) 电流 I　定义：电流定义为电荷与时间之商，即 $I=q/t$. 由此可得

$$[I]=\frac{[q]}{[t]}=\frac{Q}{T}=T^{-1}Q$$

(15) 电阻 R　定义：电阻定义为电位差与电流之商，即 $R=V/I$. 由此可得

$$[R]=\frac{[V]}{[I]}=\frac{ML^2T^{-2}Q^{-1}}{T^{-1}Q}=ML^2T^{-1}Q^{-2}$$

(16) 电导 G　定义：电导定义为电阻的倒数，即 $G=1/R$. 由此可得

$$[G]=[R]^{-1}=M^{-1}L^{-2}TQ^2$$

(17) 电场强度 E　定义：电场强度定义为电位差与距离之商，即 $E=V/s$. 由此可得

$$[E]=\frac{[V]}{[s]}=\frac{ML^2T^{-2}Q^{-1}}{L}=MLT^{-2}Q^{-1}$$

(18) 介质常数 ε　定义：根据库仑定律

$$F=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon l^2}$$

由此可得

$$\varepsilon=\frac{q_1q_2}{4\pi Fl^2}\qquad[\varepsilon]=\frac{[q]^2}{MLT^{-2}L^2}=M^{-1}L^{-3}T^2Q^2$$

注意：若在某个单位制中库仑定律的形式为

$$F=\frac{q_1q_2}{\varepsilon l^2}$$

则根据换算比公式算出来的 ε 值要乘上 4π 才能得到该单位制中的 ε 值，这是因为换算比公式是在各单位制中公式形式不变条件下推导出来的，而这里 $F=q_1q_2/\varepsilon l^2$ 与 $F=q_1q_2/4\pi\varepsilon l^2$ 相比差了 4π. 关于这一点下文将另作详细说明.

(19) 电通量密度 D　定义：电通量密度定义为 ε 与 E

的乘积，即 $D = \varepsilon E$. 由此可得

$$[D] = [\varepsilon][E] = M^{-1}L^{-3}T^2Q^2 \cdot MLT^{-2}Q^{-1}$$
$$= L^{-2}Q$$

(20) 电通量 N_e 定义：电通量定义为 D 与面积 S 的乘积，即 $N_e = D \cdot S$，由此可得

$$[N_e] = [D] \cdot [S] = L^{-2}Q \cdot L^2 = Q$$

(21) 表面电流密度 i_s 定义：表面电流密度定义为通过表面上单位长截线的电流，即 $i_s = I/l$. 由此可得

$$[i_s] = \frac{[I]}{[l]} = \frac{QT^{-1}}{L} = L^{-1}T^{-1}Q$$

(22) 体积电流密度 i 定义：体积电流密度定义为通过某体积内单位截面积的电流，即 $i = I/s$. 由此可得

$$[i] = \frac{[I]}{[S]} = \frac{QT^{-1}}{L^2} = L^{-2}T^{-1}Q$$

(23) 表面电阻率 s 定义：表面电阻率定义为表面上单位长度的电压与通过表面上单位长截线的电流之比，即 $s = \frac{V/l_1}{I/l_2}$. 由此可得

$$[s] = \frac{[V] \cdot [l_2]}{[I] \cdot [l_1]} = \frac{[V]}{[I]} = ML^2T^{-1}Q^{-2}$$

(24) 表面电导率 γ_s 定义：表面电导率定义为表面电阻率的倒数，即 $\gamma_s = 1/s$. 由此可得

$$[\gamma_s] = \frac{1}{[s]} = M^{-1}L^{-2}TQ^2$$

(25) 体积电阻率 τ 定义：体积电阻率定义为某体积内单位长度上的电压与通过单位截面积的电流之比，即 $\tau = \frac{V/l_1}{I/S}$. 由此可得

$$[\tau]=\frac{[V]\cdot[S]}{[I]\cdot[l]}=\frac{[V]}{[I]}\cdot L=ML^3T^{-1}Q^{-2}$$

(26) 体积电导率 γ　定义：体积电导率定义为体积电阻率的倒数，即 $\gamma=1/\tau$。由此可得

$$[\gamma]=\frac{1}{[\tau]}=M^{-1}L^{-3}TQ^2$$

(27) 磁通量 N_m　定义：根据公式 $V=\frac{dN_m}{dt}$ 得 $dN_m=Vdt$。由此可得

$$[N_m]=[V][t]=ML^2T^{-2}Q^{-1}T=ML^2T^{-1}Q^{-1}$$

(28) 磁通量密度 B　定义：磁通量密度定义为通过单位面积的磁通量，即 $B=N_m/S$。由此可得

$$[B]=\frac{[N_m]}{[S]}=\frac{ML^2T^{-1}Q^{-1}}{L^2}=MT^{-1}Q^{-1}$$

(29) 导磁率 μ　定义：由公式

$$F=\frac{\mu}{2\pi}\frac{l}{a}\cdot I^2$$

(式中 F 为力；l、a 为长度；I 为电流)得

$$[\mu]=\frac{[F]}{[I]^2}=\frac{MLT^{-2}}{Q^2T^{-2}}=MLQ^{-2}$$

(30) 磁场强度 H　定义：磁场强度定义为磁通量密度与导磁率之比，即 B/μ。由此可得

$$[H]=\frac{[B]}{[\mu]}=\frac{MT^{-1}Q^{-1}}{MLQ^{-2}}=L^{-1}T^{-1}Q$$

(31) 电感系数 L　定义：电感系数定义为磁通量与电流之比，即 N_m/I。由此可得

$$[L]=\frac{[N_m]}{[I]}=\frac{ML^2T^{-1}Q^{-1}}{QT^{-1}}=ML^2Q^{-2}$$

(32) 电流环磁矩 p_i　定义：电流环磁矩定义为电流乘

上环的面积，即 $p_i = I \cdot S$。由此可得

$$[p_i] = [I] \cdot [S] = QT^{-1}L^2 = L^2T^{-1}Q$$

(33) 电流环磁化强度 M'　定义：电流环磁化强度定义为单位体积内的电流环磁矩，即 $M' = p_i$/体积。由此可得

$$[M'] = \frac{[p_i]}{[\text{体积}]} = \frac{L^2T^{-1}Q}{L^3} = L^{-1}T^{-1}Q$$

(34) 磁极强度 m　定义：由公式

$$F = \frac{m_1m_2}{4\pi\mu r^2}$$

(式中 F 为力；r 为距离)得

$$[m] = \sqrt{[\mu][F]}[r] = M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}Q^{-1}M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}T^{-1}L$$
$$= ML^2T^{-1}Q^{-1}$$

(35) 磁偶极子矩 p_m　定义：磁偶极子矩定义为磁极强度与距离的乘积，即 $p_m = ml$。由此可得

$$[p_m] = [m] \cdot [l] = ML^2T^{-1}Q^{-1}L = ML^3T^{-1}Q^{-1}$$

(36) 磁偶极子磁化强度 M　定义：磁偶极子磁化强度定义为单位体积内的磁偶极子矩，即 $M = p_m$/体积。由此可得

$$[M] = \frac{[p_m]}{[\text{体积}]} = \frac{ML^3T^{-1}Q^{-1}}{L^3} = MT^{-1}Q^{-1}$$

(37) 磁动势 Ω　定义：磁动势定义为电流与匝数的乘积，即 $\Omega = I \cdot$ 匝数。由此可得

$$[\Omega] = [I] = T^{-1}Q$$

(38) 磁阻 R'　定义：磁阻定义为磁动势与磁通量之比，即 Ω/N_m。由此可得

$$[R'] = \frac{[\Omega]}{[N_m]} = \frac{T^{-1}Q}{ML^2T^{-1}Q^{-1}} = M^{-1}L^{-2}Q^2$$

(39) 磁势 A　定义：磁势定义为满足方程 $\mathrm{rot}\mathbf{A} = \mathbf{B}$

的 **A**. 由此可得

$$[A] = [l][B] = LMT^{-1}Q^{-1}$$

(40) 坡印廷矢量 **P** 定义：坡即廷矢量定义为单位面积上的电磁功率，即 $P = \frac{A}{ST}$. 由此可得

$$[P] = \frac{[A]}{[S]T} = \frac{ML^2T^{-2}}{L^2T} = MT^{-3}$$

其他物理量的换算比公式可以根据需要来推导. 以上物理量换算比公式汇集于附录 III 中的表 III.13. 数值计算结果见附录 III 中的表 III.1—III.12.

I.5 有理化单位制

在目前所通用的单位制中，米-千克-秒制和赫维赛制是有理化单位制. 其他单位制都是非有理化单位制. 所谓有理化单位制，指的是在这种单位制中库仑定律具有下列形式：

$$F = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon l^2}$$

而在非有理化单位制中库仑定律的形式为

$$F = \frac{q_1q_2}{\varepsilon l^2}$$

由此可见，当 F、l 和 q 的单位都一样时，有理化单位制中的 ε 的单位要比非有理化单位制中的 ε 的单位大 4π 倍. 因为换算比公式是在各单位制中公式形式不变前提下推导出来的，所以在从非有理化单位制向有理化单位制的数值换算中，ε 的换算系数要除以 4π. 因此，与 ε 有关的量，其数值换算系数也要除以 4π. 例如 **D** 的数值换算系数就要除以 4π($\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$).

两平行电流元之间的作用力公式在有理化单位制中是

$$F = \mu\frac{I_1 I_2 l}{2\pi r} = \frac{2\mu I_1 I_2 l}{4\pi r}$$

而在非有理化单位制中是

$$F = \frac{2\mu I_1 I_2 l}{r}$$

由此可见，当 F、I 和 $l(r)$ 的单位都一样时，有理化单位制中的 μ 的单位要比非有理化单位制中的 μ 的单位小 4π 倍。同理，因为换算比公式是在各单位制中公式形式不变前提下推导出来的，所以在从非有理化单位制向有理化单位制的数值换算中，μ 的换算系数要乘以 4π。因此，与 μ 有关的量 H（磁场强度）、Ω（磁动势）和 R'（磁阻）的换算系数要除以 4π。这从下列公式中可以看出

$$H = \frac{B}{\mu} \qquad \Omega = \int Hdl \qquad R' = \frac{\Omega}{N_m}$$

由于 H 与 μ 成反比，因此 μ 的换算系数乘以 4π 时 H 的换算系数必须除以 4π。Ω 和 R' 的换算系数要除以 4π 是因为它们都与 H 成正比的缘故。

另一些与 μ 有关的量 m（磁极强度）、p_m（磁偶极子矩）和 M（磁偶极子的磁化强度）的数值换算系数在从非有理化单位制换算至有理化单位制时则要乘以 4π，这是因为在非有理化单位制中

$$F = \frac{m_1 m_2}{\mu r^2}$$

而在有理化单位制中

$$F = \frac{m_1 m_2}{4\pi\mu r^2}$$

上两式中 F（力）的单位是一样的，而在有理化单位制中，μ 的数值增大了 4π 倍，加上分母中的系数 4π，于是有理化单

位制公式的分母比非有理化单位制的分母大$(4\pi)^2$倍，因此m的数值也必须增大4π倍才行，换句话说，有理化单位制中m的单位要缩小4π倍。由于$p_m = ml$和$M = \Sigma p_m/V$都与m成正比，因此p_m和M的换算系数也要乘以4π。

I.6 麦克斯韦方程组在不同单位制中的形式

我们从米-千克-秒单位制中的麦克斯韦方程组出发，推导出麦克斯韦方程组在其他单位制中的形式，作为应用单位换算表的练习。所得结果可以帮助我们大致判断（以方程组形式完全一致为准则）各类书籍中用的是哪种单位制。

大家知道，在米-千克-秒单位制中，麦克斯韦方程组的形式如下：

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & (\mathrm{I}.11) \\ \mathrm{rot}\mathbf{H} = \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{i} & (\mathrm{I}.12) \\ \mathrm{div}\mathbf{D} = \rho & (\mathrm{I}.13) \\ \mathrm{div}\mathbf{B} = 0 & (\mathrm{I}.14) \end{cases}$$

现在分别来求不同单位制中的麦克斯韦方程组的形式。

I.6.1 高斯单位制

利用后面附表中的表2，将 rot 改成10^2rot、$\mathbf{E}$改成$3\times10^4\mathbf{E}$、$\mathbf{B}$改成$10^{-4}\mathbf{B}$，由式（I.11）得

$$10^2\mathrm{rot}(3\times10^4\mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(10^{-4}\mathbf{B})$$

或

$$3\times10^{6}\mathrm{rot}\mathbf{E}=-10^{-4}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

即

$$\mathrm{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{3\times10^{10}}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

式中，$c=3\times10^{10}$ 为一数值系数.

同理，将 $\mathbf{H}$ 改成 $(4\pi)^{-1}\times10^{3}\mathbf{H}$、$\mathbf{D}$ 改成 $(12\pi)^{-1}\times10^{-5}\mathbf{D}$、$\mathbf{i}$ 改成 $3^{-1}\times10^{-5}\mathbf{i}$，由式 (I.12) 得

$$10^{2}\mathrm{rot}[(4\pi)^{-1}\times10\,\mathbf{H}]=\frac{\partial}{\partial t}[(12\pi)^{-1}\times10^{-5}\mathbf{D}]+3^{-1}\times10^{-5}\mathbf{i}$$

或

$$\frac{10^{5}}{4\pi}\mathrm{rot}\mathbf{H}=\frac{1}{12\pi\times10^{5}}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\frac{1}{3\times10^{5}}\mathbf{i}$$

即

$$\mathrm{rot}\mathbf{H}=\frac{1}{3\times10^{10}}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\frac{4\pi}{3\times10^{10}}\mathbf{i}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{i}$$

将 div 改成 $10^{2}\mathrm{div}$、$\mathbf{D}$ 改成 $(12\pi)^{-1}\times10^{-5}\mathbf{D}$、$\rho$ 改成 $3^{-1}\times10^{-3}\rho$，由式 (I.13) 得

$$10^{2}\mathrm{div}[(12\pi)^{-1}\times10^{-5}\mathbf{D}]=3^{-1}\times10^{-3}\rho$$

或

$$10^{-3}(12\pi)^{-1}\mathrm{div}\mathbf{D}=3^{-1}\times10^{-3}\rho$$

即

$$\mathrm{div}\mathbf{D}=\frac{12\pi}{3}\rho=4\pi\rho$$

显然，$\mathrm{div}\mathbf{B}=0$ 的形式不变. 由此可见，高斯单位制中麦克斯韦方程组的形式如下：

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\mathbf{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \mathrm{rot}\mathbf{H} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \dfrac{4\pi}{c}\mathbf{i} \\ \mathrm{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho & \mathrm{div}\mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

I.6.2 静电单位制

利用附录 III 中的表 III. 6，由式 (I.11) 得

$$10^2\mathrm{rot}(3\times 10^4\mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(3\times 10^6\mathbf{B})$$

即

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

由式 (I.12) 得

$$10^2\mathrm{rot}[(12\pi)^{-1}\times 10^{-7}\mathbf{H}] = \frac{\partial}{\partial t}[(12\pi)^{-1}\times 10^{-5}\mathbf{D}] + 3^{-1}\times 10^{-5}\mathbf{i}$$

即

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + 4\pi\mathbf{i}$$

由式 (I.13) 得

$$10^2\mathrm{div}[(12\pi)^{-1}10^{-5}\mathbf{D}] = 3^{-1}10^{-3}\rho$$

即

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho$$

显然，$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$ 的形式不变．由此可见，静电单位制中麦克斯韦方程组的形式如下：

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \mathrm{rot}\mathbf{H} = \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + 4\pi\mathbf{i} \\ \mathrm{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho & \mathrm{div}\mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

I.6.3 电磁单位制

利用附录 III 中的表 III. 7，由式 (I.11) 得

$$10^{2}\mathrm{rot}(10^{-6}\mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(10^{-4}\mathbf{B})$$

即

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

由式 (I.12) 得

$$10^{2}\mathrm{rot}[(4\pi)^{-1} \times 10^{3}\mathbf{H}] = \frac{\partial}{\partial t}[(4\pi)^{-1} \times 10^{5}\mathbf{D}] + 10^{5}\mathbf{i}$$

即

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + 4\pi\mathbf{i}$$

由式 (I.13) 得

$$10^{2}\mathrm{div}[(4\pi)^{-1} \times 10^{5}\mathbf{D}] = 10^{7}\rho$$

即

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho$$

显然，$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$ 的形式不变．由此可见，电磁单位制中麦克斯韦方程组的形式如下：

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \mathrm{rot}\mathbf{H} = \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + 4\pi\mathbf{i} \\ \mathrm{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho & \mathrm{div}\mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

I.6.4 实用单位制

利用附录 III 中的表 III. 8，由式 (I.11) 得

$$10^{2}\mathrm{rot}(10^{2}\mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(10^{-4}\mathbf{B})$$

即

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -10^{6}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

由式(I.12)得

$$10^{2}\mathrm{rot}[(4\pi)^{-1} \times 10^{3}\mathbf{H}] = \frac{\partial}{\partial t}[(4\pi)^{-2} \times 10^{4}\mathbf{D}] + 10^{4}\mathbf{i}$$

即

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi \times 10}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{10}\mathbf{i}$$

由式(I.13)得

$$10^{2}\mathrm{div}[(4\pi)^{-2} \times 10^{4}\mathbf{D}] = 10^{6}\rho$$

即

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = (4\pi)^{2}\rho$$

显然，$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$ 的形式不变. 由此可见，实用单位制中麦克斯韦方程组的形式如下：

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\mathbf{E} = -10^{-8}\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \mathrm{rot}\mathbf{H} = \dfrac{1}{4\pi \times 10}\dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \dfrac{4\pi}{10}\mathbf{i} \\ \mathrm{div}\mathbf{D} = (4\pi)^{2}\rho & \mathrm{div}\mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

I.6.5 Mie 单位制

利用附录 III 中的表 III. 12，由式(I.11)得

$$10^{2}\mathrm{rot}(10^{2}\mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(10^{4}\mathbf{B})$$

即

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

由式(I.12)得

$$10^2\mathrm{rot}[(4\pi)^{-1}\times 10^2\mathbf{H}]=\frac{\partial}{\partial t}[(4\pi)^{-1}\times 10^4\mathbf{D}]+10^4\mathbf{i}$$

即

$$\mathrm{rot}\mathbf{H}=\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+4\pi\mathbf{i}$$

由式 (I.13) 得

$$10^2\mathrm{div}[(4\pi)^{-1}\times 10^4\mathbf{D}]=10^6\rho$$

即

$$\mathrm{div}\mathbf{D}=4\pi\rho$$

显然，$\mathrm{div}\mathbf{B}=0$ 的形式不变. 由此可见，在 Mie 单位制中麦克斯韦方程组的形式如下：

$$\begin{cases}\mathrm{rot}\mathbf{E}=-\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} & \mathrm{rot}\mathbf{H}=\dfrac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+4\pi\mathbf{i}\\ \mathrm{div}\mathbf{D}=4\pi\rho & \mathrm{div}\mathbf{B}=0\end{cases}$$

I.6.6 赫维赛单位制

利用附录 III 中的表 III. 10，由式 (I.11) 得

$$10^2\mathrm{rot}(\sqrt{4\pi}\,3\times 10^4\mathbf{E})=-\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{4\pi}\times 10^{-4}\mathbf{B})$$

即

$$\mathrm{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{3\times 10^{10}}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

由式 (I.12) 得

$$10^2\mathrm{rot}[(\sqrt{4\pi})^{-1}\times 10^3\mathbf{H}]=\frac{\partial}{\partial t}[(\sqrt{4\pi})^{-1}\times 3^{-1}\times 10^{-5}\mathbf{D}]+(\sqrt{4\pi})^{-1}\times 3^{-1}\times 10^{-5}\mathbf{i}$$

即

$$\mathrm{rot}\mathbf{H}=\frac{1}{3\times10^{10}}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\frac{1}{3\times10^{10}}\mathbf{i}=\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{i}\right)$$

由式 (I.13) 得

$$10^{2}\mathrm{div}[(\sqrt{4\pi})^{-1}\times3^{-1}\times10^{-5}\mathbf{D}]=(\sqrt{4\pi})^{-1}\times10^{-3}\times3^{-1}\rho$$

即

$$\mathrm{div}\mathbf{D}=\rho$$

显然，$\mathrm{div}\mathbf{B}=0$ 之形式不变．由此可见，赫维赛单位制中麦克斯韦方程组的形式如下：

$$\begin{cases}\mathrm{rot}\mathbf{E}=-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} & \mathrm{rot}\mathbf{H}=\dfrac{1}{c}\left(\dfrac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{i}\right)\\ \mathrm{div}\mathbf{D}=\rho & \mathrm{div}\mathbf{B}=0\end{cases}$$

我们将以上结果汇总如下：

米-千克-秒单位制

$$\begin{cases}\mathrm{rot}\mathbf{E}=-\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\\ \mathrm{rot}\mathbf{H}=\dfrac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{i}\\ \mathrm{div}\mathbf{D}=\rho\\ \mathrm{div}\mathbf{B}=0\end{cases}$$

高斯单位制

$$\begin{cases}\mathrm{rot}\mathbf{E}=-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\\ \mathrm{rot}\mathbf{H}=\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\dfrac{4\pi}{c}\mathbf{i}\\ \mathrm{div}\mathbf{D}=4\pi\rho\\ \mathrm{div}\mathbf{B}=0\end{cases}$$

静电单位制

$$\begin{cases}\mathrm{rot}\mathbf{E}=-\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\\ \mathrm{rot}\mathbf{H}=\dfrac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+4\pi\mathbf{i}\\ \mathrm{div}\mathbf{D}=4\pi\rho\\ \mathrm{div}\mathbf{B}=0\end{cases}$$

电磁单位制

$$\begin{cases}\mathrm{rot}\mathbf{E}=-\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\\ \mathrm{rot}\mathbf{H}=\dfrac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+4\pi\mathbf{i}\\ \mathrm{div}\mathbf{D}=4\pi\rho\\ \mathrm{div}\mathbf{B}=0\end{cases}$$

实用单位制

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\mathbf{E} = -10^{-8}\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \mathrm{rot}\mathbf{H} = \dfrac{1}{4\pi \times 10}\dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \dfrac{4\pi}{10}\mathbf{i} \\ \mathrm{div}\mathbf{D} = (4\pi)^2\rho \\ \mathrm{div}\mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

Mie 单位制

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \mathrm{rot}\mathbf{H} = \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + 4\pi\mathbf{i} \\ \mathrm{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho \\ \mathrm{div}\mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

赫维赛单位制

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\mathbf{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \mathrm{rot}\mathbf{H} = \dfrac{1}{c}\left(\dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{i}\right) \\ \mathrm{div}\mathbf{D} = \rho \\ \mathrm{div}\mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

可以看出，麦克斯韦方程组在静电、电磁和 Mie 单位制中的形式相同，而在其它各单位制中形式都不一样．因此，我们可以根据方程组形式基本上判断出用的是哪一种单位制．

I.7 公式和数值换算举例

本节举几个公式和数值换算的例子，以进一步明确各单位制之间如何相互换算．

例 1 将高斯制中的库仑定律以米-千克-秒制表示之．

解 在高斯制中，库仑定律具有下列形式：

$$F = \frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2}$$

式中 F 为力；q_1、q_2 为电荷；ε 为介质常数；r 为距离．

利用附录 III 中的表 III. 1 得

$$10^5F=\frac{3\times10^9q_1\times3\times10^9q_2}{36\pi\times10^9\varepsilon\times10^4r^2}=\frac{9\times10^{18}q_1q_2}{36\pi\times10^{13}\varepsilon r^2}$$

或

$$F=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon r^2}$$

例 2 将高斯制中的高斯定律以米-千克-秒制表示之.

解 在高斯制中,高斯定律具有下列形式:

$$N_e=4\pi\sum_i q_i$$

式中 N_e 为电通量; q_i 为电荷.

因电通量等于 **D** 乘以面积,故公式的换算系数为 $12\pi\times10^5\times10^4$, 也就是 **D** 的换算系数乘上面积的换算系数. 由附录 III 中的表 III. 1 得

$$12\pi\times10^5\times10^4N_e=4\pi\sum_i3\times10^9q_i$$

即

$$N_e=\frac{4\pi\times3\times10^9}{12\pi\times10^9}\sum_i q_i=\sum_i q_i$$

例 3 将高斯制中的平面电容公式以米-千克-秒制表示之.

解 在高斯制中,平面电容公式为

$$C=\frac{\varepsilon S}{4\pi d}$$

式中 C 为电容量; ε 为介质常数; S 为面积; d 为电极间距离. 由附录 III 中的表 III. 1 得

$$9\times10^{11}C=\frac{36\pi\times10^9\varepsilon\times10^4S}{4\pi\times10^2d}$$

即

$$C = \frac{\varepsilon S}{d}$$

例 4 将高斯制中的集肤深度以-米-千克-秒制表示之.

解 在高斯制中集肤深度的公式为

$$\delta = \sqrt{\frac{c^2}{2\pi\mu\gamma\omega}}$$

式中 δ 为距离(深度); $c = 3 \times 10^{10}$; μ 为导磁率; γ 为导电率(体积); ω 为角频率. 由附录 III 中的表 III. 1 得

$$10^2\delta = \sqrt{\frac{(3 \times 10^{10})^2}{2\pi(4\pi)^{-1} \times 10^7\mu \times 9 \times 10^9\gamma\omega}} = \sqrt{\frac{2 \times 10^4}{\mu\gamma\omega}}$$

故

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\gamma\omega}}$$

例 5 将米-千克-秒制中的坡印廷矢量公式以高斯制表示之.

解 在米-千克-秒制中,坡印廷矢量公式为

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

式中 $\mathbf{P}$ 为单位面积上的功率; $\mathbf{E}$ 为电场强度; $\mathbf{H}$ 为磁场强度. 由附录 III 中的表 III. 2 得

$$\frac{10^{-7}}{10^{-4}}\mathbf{P} = 3 \times 10^4\mathbf{E} \times (4\pi)^{-1} \times 10^3\mathbf{H}$$

即

$$\mathbf{P} = \frac{1}{4\pi} \times 3 \times 10^{10}\mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

下面举几个数值变换的例子:

例 6 300 高斯的磁通量密度 (高斯制) 在米-千克-秒制中是多少?

解 由附录 III 中的表 III. 1 得

$$300 \times 10^{-4} = 3 \times 10^{-2} \text{ 韦/米}^2$$

例 7 800 麦克斯韦的磁通量（高斯制）在米-千克-秒制中是多少？

解 由附录 III 中的表 III. 1 得

$$800 \times 10^{-8} = 8 \times 10^{-6} \text{ 韦}$$

例 8 500 奥斯特的磁场强度（高斯制）在米-千克-秒制中是多少？

解 由附录 III 中的表 III. 1 得

$$500 \times (4\pi)^{-1} \times 10^{3} = \frac{5}{4\pi} \times 10^{5} \text{ 安匝/米}$$

另外，这里需说明几个问题：

（1） c 是常数，等于 3×10^{10}，在单位制换算中不起变化。

（2）若要将静电制变换成实用制，由于不能直接查表，则可先将静电制变换成米-千克-秒制，然后再换算成实用制。实际上实用制的变换系数是两次变换系数的乘积。

（3）为了避免因单位制混用而造成的错误，最好是统一用一种单位制。例如在解题时，题中所有的量应当都用同一单位制中的单位来表示，然后在适合于这种单位制的公式中应用。

（4）单位法向量在公式中一般以与其他矢量点乘或叉乘的形式出现，最终以角度的余弦或正弦出现，在这个前提之下，在单位制变换过程中不作变换。

附录 II　并矢微积中的 ∇ 算子

在微波与天线理论中，并矢格林函数的概念正得到越来越广泛的应用．并矢格林函数的数学基础是并矢代数和并矢微积.在并矢微积中,如果正确和严格地引入∇算子,就可以使计算大大简化．从一般文献中关于∇算子和另一矢量的并矢的定义出发,或从两个∇算子构成的并矢的定义出发,不能证明可以把 ∇ 算子看成普通矢量一样进行并矢代数运算的规则．这就使∇算子并矢运算法的严格性受到影响．

现在将第一章中 $T(\nabla)$ 的定义推广以论证并矢微积中的∇算子运算法．

II. 1　$T(\nabla)$ 的定义

在这一节中我们先给出一个含有∇以及对∇进行矢量代数和并矢代数运算的表达式 $T(\nabla)$ 的定义．然后证明所有矢量微积中和并矢微积中可能出现的微分运算，如梯度、散度、旋度等都可以通过一定形式的 $T(\nabla)$ 来表示．在下一节中将证明对 $T(\nabla)$ 进行运算的规则．

定义　对任何一个含有∇和其他函数并对∇为线性的表达式 $T(\nabla)$（$T(\nabla)$ 中包含矢量代数运算和并矢代数运算的形式),可理解如下:

(1) 首先

$$T(\nabla)=\frac{\partial}{\partial x}T(\mathbf{u}_x)+\frac{\partial}{\partial y}T(\mathbf{u}_y)+\frac{\partial}{\partial z}T(\mathbf{u}_z)\quad(\text{II}.1)$$

式中 $T(\mathbf{u}_x)$，$T(\mathbf{u}_y)$，$T(\mathbf{u}_z)$ 为在 $T(\nabla)$ 中将 ∇ 分别换成 $\mathbf{u}_x$，$\mathbf{u}_y$，$\mathbf{u}_z$ 的结果；$\mathbf{u}_x$，$\mathbf{u}_y$，$\mathbf{u}_z$ 为直角坐标系中沿 x，y，z 轴正方向的三个单位矢量。

(2) 在 $T(\nabla)$ 中如果某些函数在微分时需视为常数，则需要对这些函数加上微分时视为常数的角注 c，否则不论函数位于 ∇ 前面或后面，都要对它们进行微分。

下面证明用某些具体的 $T(\nabla)$ 可以表示所有矢量微积中和并矢微积中常用的微分运算。

先列举一下矢量微积中和并矢微积中常用微分运算的定义。

令 $\varphi = \varphi(x,y,z)$ 为标量函数。

$$\begin{cases} \mathbf{a} = \mathbf{a}(x,y,z) = a_x\mathbf{u}_x + a_y\mathbf{u}_y + a_z\mathbf{u}_z \\ \mathbf{b} = \mathbf{b}(x,y,z) = b_x\mathbf{u}_x + b_y\mathbf{u}_y + b_z\mathbf{u}_z \\ \mathbf{R} = \mathbf{R}(x,y,z) = R_x\mathbf{u}_x + R_y\mathbf{u}_y + R_z\mathbf{u}_z \end{cases}$$

为矢量函数。

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{\mathbf{A}} &= \mathbf{u}_x\mathbf{a}_x + \mathbf{u}_y\mathbf{a}_y + \mathbf{u}_z\mathbf{a}_z \\ &= \mathbf{a}'_x\mathbf{u}_x + \mathbf{a}'_y\mathbf{u}_y + \mathbf{a}'_z\mathbf{u}_z \\ &= a_{xx}\mathbf{u}_x\mathbf{u}_x + a_{xy}\mathbf{u}_x\mathbf{u}_y + a_{xz}\mathbf{u}_x\mathbf{u}_z \\ &\quad + a_{yx}\mathbf{u}_y\mathbf{u}_x + a_{yy}\mathbf{u}_y\mathbf{u}_y + a_{yz}\mathbf{u}_y\mathbf{u}_z \\ &\quad + a_{zx}\mathbf{u}_z\mathbf{u}_x + a_{zy}\mathbf{u}_z\mathbf{u}_y + a_{zz}\mathbf{u}_z\mathbf{u}_z \end{aligned}$$

为并矢函数。式中 $\mathbf{a}_x$、$\mathbf{a}_y$、$\mathbf{a}_z$、$\mathbf{a}'_x$、$\mathbf{a}'_y$、$\mathbf{a}'_z$ 为矢量函数；a_{xx} 等为标量函数。

矢量微积和并矢微积中常用的微分运算定义如下：

梯度 $\mathrm{grad}\varphi = \mathbf{u}_x\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{u}_y\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{u}_z\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$

散度 $\mathrm{div}\mathbf{R} = \dfrac{\partial R_x}{\partial x} + \dfrac{\partial R_y}{\partial y} + \dfrac{\partial R_z}{\partial z}$

旋度 $\mathrm{rot}\mathbf{R} = \mathbf{u}_x\left(\frac{\partial R_z}{\partial y} - \frac{\partial R_y}{\partial z}\right) + \mathbf{u}_y\left(\frac{\partial R_x}{\partial z} - \frac{\partial R_z}{\partial x}\right) + \mathbf{u}_z\left(\frac{\partial R_y}{\partial x} - \frac{\partial R_x}{\partial y}\right)$

方向导数

$$(\mathbf{a}\cdot\mathrm{grad})\mathbf{b} = a_x\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x} + a_y\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial y} + a_z\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial z}$$

矢量的梯度

$$\mathrm{grad}\mathbf{a} = (\mathrm{grad}a_x)\mathbf{u}_x + (\mathrm{grad}a_y)\mathbf{u}_y + (\mathrm{grad}a_z)\mathbf{u}_z = \mathbf{u}_x\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} + \mathbf{u}_y\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} + \mathbf{u}_z\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z}$$

并矢的散度

$$\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = (\mathrm{div}\mathbf{a}'_x)\mathbf{u}_x + (\mathrm{div}\mathbf{a}'_y)\mathbf{u}_y + (\mathrm{div}\mathbf{a}'_z)\mathbf{u}_z = \frac{\partial \mathbf{a}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{a}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial z}$$

转置并矢的散度

如 $\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{A}}}$ 为 $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 的转置并矢，则

$$\mathrm{div}\,\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{A}}} = \mathbf{u}_x\mathrm{div}\mathbf{a}_x + \mathbf{u}_y\mathrm{div}\mathbf{a}_y + \mathbf{u}_z\mathrm{div}\mathbf{a}_z$$

并矢的旋度

$$\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = (\mathrm{rot}\mathbf{a}'_x)\mathbf{u}_x + (\mathrm{rot}\mathbf{a}'_y)\mathbf{u}_y + (\mathrm{rot}\mathbf{a}'_z)\mathbf{u}_z = \mathbf{u}_x\left(\frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{a}_y}{\partial z}\right) + \mathbf{u}_y\left(\frac{\partial \mathbf{a}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial x}\right) + \mathbf{u}_z\left(\frac{\partial \mathbf{a}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{a}_x}{\partial y}\right)$$

求方向导数用的并矢

$$\mathbf{a}\mathrm{grad} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x}\mathbf{u}_x + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y}\mathbf{u}_y + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z}\mathbf{u}_z$$

$$= \mathbf{u}_x\mathrm{grad}a_x + \mathbf{u}_y\mathrm{grad}a_y + \mathbf{u}_z\mathrm{grad}a_z$$

按照 $T(\nabla)$ 的定义(参看第一章),立即可以推导出:

(1) $\nabla\varphi = \varphi\nabla = \mathrm{grad}\varphi$

(2) $\nabla \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \nabla = \mathrm{div}\mathbf{R}$

(3) $\nabla \times \mathbf{R} = -\mathbf{R} \times \nabla = \mathrm{rot}\mathbf{R}$

(4) $(\mathbf{a}_c \cdot \nabla)\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{a}_c \cdot \nabla) = (\mathbf{a} \cdot \mathrm{grad})\mathbf{b}$

(5) $$\nabla\mathbf{a} = \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{u}_x\mathbf{a}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{u}_y\mathbf{a}) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{u}_z\mathbf{a})$$

$$= \mathbf{u}_x\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} + \mathbf{u}_y\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} + \mathbf{u}_z\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z}$$

$$= \mathbf{u}_x\frac{\partial}{\partial x}(a_x\mathbf{u}_x + a_y\mathbf{u}_y + a_z\mathbf{u}_z)$$

$$+ \mathbf{u}_y\frac{\partial}{\partial y}(a_x\mathbf{u}_x + a_y\mathbf{u}_y + a_z\mathbf{u}_z)$$

$$+ \mathbf{u}_z\frac{\partial}{\partial z}(a_x\mathbf{u}_x + a_y\mathbf{u}_y + a_z\mathbf{u}_z)$$

$$= \frac{\partial a_x}{\partial x}\mathbf{u}_x\mathbf{u}_x + \frac{\partial a_y}{\partial x}\mathbf{u}_x\mathbf{u}_y + \frac{\partial a_z}{\partial x}\mathbf{u}_x\mathbf{u}_z$$

$$+ \frac{\partial a_x}{\partial y}\mathbf{u}_y\mathbf{u}_x + \frac{\partial a_y}{\partial y}\mathbf{u}_y\mathbf{u}_y + \frac{\partial a_z}{\partial y}\mathbf{u}_y\mathbf{u}_z$$

$$+ \frac{\partial \mathbf{a}_x}{\partial z}\mathbf{u}_z\mathbf{u}_x + \frac{\partial a_y}{\partial z}\mathbf{u}_z\mathbf{u}_y + \frac{\partial a_z}{\partial z}\mathbf{u}_z\mathbf{u}_z$$

$$= \left(\frac{\partial a_x}{\partial x}\mathbf{u}_x + \frac{\partial a_x}{\partial y}\mathbf{u}_y + \frac{\partial a_x}{\partial z}\mathbf{u}_z\right)\mathbf{u}_x$$

$$+ \left(\frac{\partial a_y}{\partial x}\mathbf{u}_x + \frac{\partial a_y}{\partial y}\mathbf{u}_y + \frac{\partial a_y}{\partial z}\mathbf{u}_z\right)\mathbf{u}_y$$

$$+ \left(\frac{\partial a_z}{\partial x}\mathbf{u}_x + \frac{\partial a_z}{\partial y}\mathbf{u}_y + \frac{\partial a_z}{\partial z}\mathbf{u}_z\right)\mathbf{u}_z$$

$$= (\mathrm{grad}a_x)\mathbf{u}_x + (\mathrm{grad}a_y)\mathbf{u}_y + (\mathrm{grad}a_z)\mathbf{u}_z$$

$$= \mathrm{grad}\mathbf{a}$$

由此可见

$$\boxed{\nabla \mathbf{a} = \mathrm{grad}\mathbf{a}} \tag{II.2}$$

$$\begin{aligned}
(6)\ \nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}} &= \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{u}_x \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{u}_y \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}}) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{u}_z \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}}) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{u}_x \cdot (\mathbf{a}'_x\mathbf{u}_x + \mathbf{a}'_y\mathbf{u}_y + \mathbf{a}'_z\mathbf{u}_z)) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{u}_y \cdot (\mathbf{a}'_x\mathbf{u}_x + \mathbf{a}'_y\mathbf{u}_y + \mathbf{a}'_z\mathbf{u}_z)) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{u}_z \cdot (\mathbf{a}'_x\mathbf{u}_x + \mathbf{a}'_y\mathbf{u}_y + \mathbf{a}'_z\mathbf{u}_z)) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{a}'_x)\mathbf{u}_x + \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{a}'_y)\mathbf{u}_y \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{a}'_z)\mathbf{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{u}_y \cdot \mathbf{a}'_x)\mathbf{u}_x \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{u}_y \cdot \mathbf{a}'_y)\mathbf{u}_y + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{u}_y \cdot \mathbf{a}'_z)\mathbf{u}_z \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{a}'_x)\mathbf{u}_x + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{a}'_y)\mathbf{u}_y \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{a}'_z)\mathbf{u}_z \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{a}'_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{u}_y \cdot \mathbf{a}'_x)\right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{a}'_x)\right)\mathbf{u}_x \\
&\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{a}'_y) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{u}_y \cdot \mathbf{a}'_y)\right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{a}'_y)\right)\mathbf{u}_y
\end{aligned}$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{u}_x\cdot\mathbf{a}'_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{u}_y\cdot\mathbf{a}'_x)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{u}_z\cdot\mathbf{a}'_x)\right)\mathbf{u}_x$$

$$=(\mathrm{div}\mathbf{a}'_x)\mathbf{u}_x+(\mathrm{div}\mathbf{a}'_y)\mathbf{u}_y+(\mathrm{div}\mathbf{a}'_z)\mathbf{u}_z$$

$$=\mathrm{div}\,\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$$

另一方面，

$$\nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}=\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{u}_x\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}})+\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{u}_y\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}})$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{u}_z\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}})$$

因为

$$\overleftrightarrow{\mathbf{A}}=\mathbf{u}_x\mathbf{a}_x+\mathbf{u}_y\mathbf{a}_y+\mathbf{u}_z\mathbf{a}_z$$

故

$$\mathbf{u}_x\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}=\mathbf{u}_x\cdot(\mathbf{u}_x\mathbf{a}_x+\mathbf{u}_y\mathbf{a}_y+\mathbf{u}_z\mathbf{a}_z)$$

$$=(\mathbf{u}_x\cdot\mathbf{u}_x)\mathbf{a}_x+(\mathbf{u}_x\cdot\mathbf{u}_y)\mathbf{a}_y$$

$$+(\mathbf{u}_x\cdot\mathbf{u}_z)\mathbf{a}_z$$

$$=\mathbf{a}_x$$

$$(\mathbf{u}_x\cdot\mathbf{u}_x=1,\ \mathbf{u}_x\cdot\mathbf{u}_y=\mathbf{u}_x\cdot\mathbf{u}_z=0)$$

同理

$$\mathbf{u}_y\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}=\mathbf{a}_y\qquad\mathbf{u}_z\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}=\mathbf{a}_z$$

代入 $\nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 的表达式，得

$$\nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}=\frac{\partial\mathbf{a}_x}{\partial x}+\frac{\partial\mathbf{a}_y}{\partial y}+\frac{\partial\mathbf{a}_z}{\partial z}=\mathrm{div}\,\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$$

由此可见

$$\boxed{\nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}=\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}}\qquad(\mathrm{II}.3)$$

$$
\begin{aligned}
(7)\ \nabla \times \vec{\mathbf{A}} &= \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{u}_x \times \vec{\mathbf{A}}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{u}_y \times \vec{\mathbf{A}}) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{u}_z \times \vec{\mathbf{A}}) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{u}_x \times (\mathbf{a}'_x\mathbf{u}_x + \mathbf{a}'_y\mathbf{u}_y + \mathbf{a}'_z\mathbf{u}_z)) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{u}_y \times (\mathbf{a}'_x\mathbf{u}_x + \mathbf{a}'_y\mathbf{u}_y \\
&\quad + \mathbf{a}'_z\mathbf{u}_z)) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{u}_z \times (\mathbf{a}'_x\mathbf{u}_x + \mathbf{a}'_y\mathbf{u}_y \\
&\quad + \mathbf{a}'_z\mathbf{u}_z)) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{u}_x \times \mathbf{a}'_x)\mathbf{u}_x + \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{u}_x \times \mathbf{a}'_y)\mathbf{u}_y \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{u}_x \times \mathbf{a}'_z)\mathbf{u}_z \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{u}_y \times \mathbf{a}'_x)\mathbf{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{u}_y \\
&\quad \times \mathbf{a}'_y)\mathbf{u}_y + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{u}_y \times \mathbf{a}'_z)\mathbf{u}_z \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{u}_z \times \mathbf{a}'_x)\mathbf{u}_x + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{u}_z \\
&\quad \times \mathbf{a}'_y)\mathbf{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{u}_z \times \mathbf{a}'_z)\mathbf{u}_z \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{u}_x \times \mathbf{a}'_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{u}_y \right. \\
&\quad \left. \times \mathbf{a}'_x) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{u}_z \times \mathbf{a}'_x)\right)\mathbf{u}_x \\
&\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{u}_x \times \mathbf{a}'_y) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{u}_y \right.
\end{aligned}
$$

$$\times \mathbf{a}'_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{u}_z \times \mathbf{a}'_y)\Big)\mathbf{u}_y$$

$$+\Big(\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{u}_x \times \mathbf{a}'_z) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{u}_y$$

$$\times \mathbf{a}'_z) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{u}_z \times \mathbf{a}'_z)\Big)\mathbf{u}_z$$

$$= (\mathrm{rot}\mathbf{a}'_x)\mathbf{u}_x + (\mathrm{rot}\mathbf{a}'_y)\mathbf{u}_y + (\mathrm{rot}\mathbf{a}'_z)\mathbf{u}_z$$

$$= \mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$$

另一方面,我们有

$$\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \mathbf{u}_x\mathbf{a}_x + \mathbf{u}_y\mathbf{a}_y + \mathbf{u}_z\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{u}_x \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \mathbf{u}_x \times (\mathbf{u}_x\mathbf{a}_x + \mathbf{u}_y\mathbf{a}_y + \mathbf{u}_z\mathbf{a}_z)$$

$$= \mathbf{u}_z\mathbf{a}_y - \mathbf{u}_y\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{u}_y \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \mathbf{u}_y \times (\mathbf{u}_x\mathbf{a}_x + \mathbf{u}_y\mathbf{a}_y + \mathbf{u}_z\mathbf{a}_z)$$

$$= -\mathbf{u}_z\mathbf{a}_x + \mathbf{u}_x\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{u}_z \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \mathbf{u}_z \times (\mathbf{u}_x\mathbf{a}_x + \mathbf{u}_y\mathbf{a}_y + \mathbf{u}_z\mathbf{a}_z)$$

$$= \mathbf{u}_y\mathbf{a}_x - \mathbf{u}_x\mathbf{a}_y$$

故

$$\nabla \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{u}_z\mathbf{a}_y - \mathbf{u}_y\mathbf{a}_z) + \frac{\partial}{\partial y}(-\mathbf{u}_z\mathbf{a}_x$$

$$+ \mathbf{u}_x\mathbf{a}_z) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{u}_y\mathbf{a}_x - \mathbf{u}_x\mathbf{a}_y)$$

$$= \mathbf{u}_x\Big(\frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{a}_y}{\partial z}\Big) + \mathbf{u}_y\Big(\frac{\partial \mathbf{a}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial x}\Big)$$

$$+ \mathbf{u}_z\Big(\frac{\partial \mathbf{a}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{a}_x}{\partial y}\Big) = \mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$$

由此可见

$$\boxed{\nabla \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}} \qquad (\mathrm{II}.4)$$

$$(8)\ \mathbf{a}\nabla = \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{a}\mathbf{u}_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{a}\mathbf{u}_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{a}\mathbf{u}_z)$$

$$= \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x}\mathbf{u}_x + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y}\mathbf{u}_y + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z}\mathbf{u}_z$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}((a_x\mathbf{u}_x + a_y\mathbf{u}_y + a_z\mathbf{u}_z)\mathbf{u}_x)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}((a_x\mathbf{u}_x + a_y\mathbf{u}_y + a_z\mathbf{u}_z)\mathbf{u}_y)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}((a_x\mathbf{u}_x + a_y\mathbf{u}_y + a_z\mathbf{u}_z)\mathbf{u}_z)$$

$$= \frac{\partial a_x}{\partial x}(\mathbf{u}_x\mathbf{u}_x) + \frac{\partial a_y}{\partial x}(\mathbf{u}_y\mathbf{u}_x) + \frac{\partial a_z}{\partial x}(\mathbf{u}_z\mathbf{u}_x)$$

$$+ \frac{\partial a_x}{\partial y}(\mathbf{u}_x\mathbf{u}_y) + \frac{\partial a_y}{\partial y}(\mathbf{u}_y\mathbf{u}_y)$$

$$+ \frac{\partial a_z}{\partial y}(\mathbf{u}_z\mathbf{u}_y) + \frac{\partial a_x}{\partial z}(\mathbf{u}_x\mathbf{u}_z)$$

$$+ \frac{\partial a_y}{\partial z}(\mathbf{u}_y\mathbf{u}_z) + \frac{\partial a_z}{\partial z}(\mathbf{u}_z\mathbf{u}_z)$$

$$= \mathbf{u}_x\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}\mathbf{u}_x + \frac{\partial a_x}{\partial y}\mathbf{u}_y + \frac{\partial a_x}{\partial z}\mathbf{u}_z\right)$$

$$+ \mathbf{u}_y\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}\mathbf{u}_x + \frac{\partial a_y}{\partial y}\mathbf{u}_y + \frac{\partial a_y}{\partial z}\mathbf{u}_z\right)$$

$$+ \mathbf{u}_z\left(\frac{\partial a_z}{\partial x}\mathbf{u}_x + \frac{\partial a_z}{\partial y}\mathbf{u}_y + \frac{\partial a_z}{\partial z}\mathbf{u}_z\right)$$

$$= \mathbf{u}_x\mathrm{grad}a_x + \mathbf{u}_y\mathrm{grad}a_y + \mathbf{u}_z\mathrm{grad}a_z$$

$$= \mathbf{a}\mathrm{grad}$$

由此可见

$$\boxed{\mathbf{a}\nabla = \mathbf{a}\mathrm{grad}} \qquad (\mathrm{II}.5)$$

$$(9)\ \overleftrightarrow{\mathbf{A}} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial x}(\overleftrightarrow{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{u}_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\overleftrightarrow{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{u}_y)$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\partial}{\partial z}(\vec{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{u}_z)\\
&=\frac{\partial}{\partial x}((\mathbf{u}_x\mathbf{a}_x+\mathbf{u}_y\mathbf{a}_y+\mathbf{u}_z\mathbf{a}_z)\cdot\mathbf{u}_x)\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial y}((\mathbf{u}_x\mathbf{a}_x+\mathbf{u}_y\mathbf{a}_y+\mathbf{u}_z\mathbf{a}_z)\cdot\mathbf{u}_y)\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial z}((\mathbf{u}_x\mathbf{a}_x+\mathbf{u}_y\mathbf{a}_y+\mathbf{u}_z\mathbf{a}_z)\cdot\mathbf{u}_z)\\
&=\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{u}_x(\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{u}_x)+\mathbf{u}_y(\mathbf{a}_y\cdot\mathbf{u}_x)\\
&\quad+\mathbf{u}_z(\mathbf{a}_z\cdot\mathbf{u}_x))\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{u}_x(\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{u}_y)+\mathbf{u}_y(\mathbf{a}_y\cdot\mathbf{u}_y)\\
&\quad+\mathbf{u}_z(\mathbf{a}_z\cdot\mathbf{u}_y))\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{u}_x(\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{u}_z)+\mathbf{u}_y(\mathbf{a}_y\cdot\mathbf{u}_z)\\
&\quad+\mathbf{u}_z(\mathbf{a}_z\cdot\mathbf{u}_z))\\
&=\mathbf{u}_x\left(\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{u}_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{u}_y)\right.\\
&\quad\left.+\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{u}_z)\right)\\
&\quad+\mathbf{u}_y\left(\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{a}_y\cdot\mathbf{u}_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{a}_y\cdot\mathbf{u}_y)\right.\\
&\quad\left.+\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{a}_y\cdot\mathbf{u}_z)\right)\\
&\quad+\mathbf{u}_z\left(\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{a}_z\cdot\mathbf{u}_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{a}_z\cdot\mathbf{u}_y)\right.\\
&\quad\left.+\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{a}_z\cdot\mathbf{u}_z)\right)\\
&=\mathbf{u}_x\mathrm{div}\mathbf{a}_x+\mathbf{u}_y\mathrm{div}\mathbf{a}_y+\mathbf{u}_z\mathrm{div}\mathbf{a}_z
\end{aligned}
$$

$$= \mathrm{div}\,\tilde{\tilde{\mathbf{A}}}$$

由此可见

$$\boxed{\tilde{\tilde{\mathbf{A}}} \cdot \nabla = \mathrm{div}\tilde{\tilde{\mathbf{A}}}} \qquad (\mathrm{II}.6)$$

由以上的推导可以看出，所有矢量微积和并矢微积中常用的微分运算都可以用一种适当的 $T(\nabla)$ 来表示。现在将本附录中 $T(\nabla)$ 的新定义与矢量微积(不包括并矢微积，见第一章)中 $T(\nabla)$ 的定义之比较列于表 II. 1 中。

表 II. 1　两种 $T(\nabla)$ 定义的比较

矢量或并矢函数	新定义表示式	矢量微积中定义表示式
$\mathrm{grad}\varphi$	$\nabla\varphi$ 或 $\varphi\nabla$	$\nabla\varphi(\varphi\nabla = 0)$
$\mathrm{div}\mathbf{R}$	$\nabla \cdot \mathbf{R}$ 或 $\mathbf{R} \cdot \nabla$	$\nabla \cdot \mathbf{R}(\mathbf{R} \cdot \nabla = 0)$
$\mathrm{rot}\mathbf{R}$	$\nabla \times \mathbf{R}$ 或 $-\mathbf{R} \times \nabla$	$\nabla \times \mathbf{R}(\mathbf{R} \times \nabla = 0)$
$(\mathbf{a} \cdot \mathrm{grad})\mathbf{b}$	$(\mathbf{a}_c \cdot \nabla)\mathbf{b}$ 或 $\mathbf{b}(\mathbf{a}_c \cdot \nabla)$	$(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}(\mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \nabla) = 0)$
$\mathrm{grad}\mathbf{a}$	$\nabla\mathbf{a}$	无
$\mathrm{div}\tilde{\mathbf{A}}$	$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{A}}$	无
$\mathrm{div}\tilde{\tilde{\mathbf{A}}}$	$\tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla$	无
$\mathrm{rot}\tilde{\mathbf{A}}$	$\nabla \times \tilde{\mathbf{A}}$	无
agrad	$\mathbf{a}\nabla$	无

将两种定义相比较，可见主要差别在于新定义中取消了位于∇前面的函数微分时自动视为常数的限制。

II. 2　$T(\nabla)$ 的性质

在这一节中证明 $T(\nabla)$ 的两条性质。它们是对 $T(\nabla)$ 进行运算的理论依据。

(1) 对 $T(\nabla)$ 可将∇看成普通矢量一样进行矢量代数和

并矢代数的运算，所得结果不变.

证 对任何 $T_1(\nabla)$，将 ∇ 看成普通矢量进行恒等变换而得到 $T_2(\nabla)$，意味着：

$$T_1(\mathbf{u}_x) \equiv T_2(\mathbf{u}_x) \qquad T_1(\mathbf{u}_y) \equiv T_2(\mathbf{u}_y)$$
$$T_1(\mathbf{u}_z) \equiv T_2(\mathbf{u}_z)$$

而关于微分的规定则保证了

$$\frac{\partial}{\partial x} T_1(\mathbf{u}_x) \equiv \frac{\partial}{\partial x} T_2(\mathbf{u}_x) \qquad \frac{\partial}{\partial y} T_1(\mathbf{u}_y) \equiv \frac{\partial}{\partial y} T_2(\mathbf{u}_y)$$
$$\frac{\partial}{\partial z} T_1(\mathbf{u}_z) \equiv \frac{\partial}{\partial z} T_2(\mathbf{u}_z)$$

因为关于微分的规定保证了原来不微分的函数仍然不微分，原来要微分的函数仍然微分.

由此

$$\begin{aligned} T_1(\nabla) &= \frac{\partial}{\partial x} T_1(\mathbf{u}_x) + \frac{\partial}{\partial y} T_1(\mathbf{u}_y) + \frac{\partial}{\partial z} T_1(\mathbf{u}_z) \\ &\equiv \frac{\partial}{\partial x} T_2(\mathbf{u}_x) + \frac{\partial}{\partial y} T_2(\mathbf{u}_y) + \frac{\partial}{\partial z} T_2(\mathbf{u}_z) \\ &= T_2(\nabla) \end{aligned}$$

这一性质表明，对 $T(\nabla)$ 可作矢量代数和并矢代数的恒等变换而不影响其结果，但要注意，不要漏写视为常数的角注 c.

(2) 如果在表达式 $T(\nabla)$ 中在 ∇ 前边或后边有两个函数的乘积或并矢，则 $T(\nabla)$ 可表示为两项之和；在一项中，一个函数或并矢中的一个矢量视为常数，不受微分影响；而在另一项中，另一函数或并矢中的另一矢量视为常数，不受微分影响.

证 证明方法和第一章完全一样.现以 $\nabla\cdot(\mathbf{ab})$ 为例来证明：

$$\nabla\cdot(\mathbf{ab})=\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{u}_x\cdot(\mathbf{ab}))+\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{u}_y\cdot(\mathbf{ab}))$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{u}_z\cdot(\mathbf{ab}))$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{u}_x\cdot(\mathbf{a}_c\mathbf{b}))+\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{u}_y\cdot(\mathbf{a}_c\mathbf{b}))$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{u}_z\cdot(\mathbf{a}_c\mathbf{b}))$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{u}_x\cdot(\mathbf{ab}_c))+\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{u}_y\cdot(\mathbf{ab}_c))$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{u}_z\cdot(\mathbf{ab}_c))$$
$$=\nabla\cdot(\mathbf{a}_c\mathbf{b})+\nabla\cdot(\mathbf{ab}_c)$$
$$=(\nabla\cdot\mathbf{a}_c)\mathbf{b}+(\nabla\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}_c$$
$$=(\mathbf{a}_c\cdot\nabla)\mathbf{b}+\mathbf{b}_c(\nabla\cdot\mathbf{a})$$
$$=(\mathbf{a}\cdot\mathrm{grad})\mathbf{b}+\mathbf{b}\mathrm{div}\mathbf{a}$$

同理可证

$$\nabla\times(\mathbf{ab})=\nabla\times(\mathbf{a}_c\mathbf{b})+\nabla\times(\mathbf{ab}_c)$$

II. 3 运 算 举 例

在这一节中，我们应用 $T(\nabla)$ 的运算规则进行各种具体的运算，以熟悉 $T(\nabla)$ 的运算方法.

例 1 试证

$$\mathrm{grad}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=(\mathrm{grad}\mathbf{a})\times\mathbf{b}-(\mathrm{grad}\mathbf{b})\times\mathbf{a}\quad(\mathrm{II}.7)$$

证

$$\mathrm{grad}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\nabla(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$
$$=\nabla(\mathbf{a}\times\mathbf{b}_c)+\nabla(\mathbf{a}_c\times\mathbf{b})$$
$$=(\nabla\mathbf{a})\times\mathbf{b}_c-(\nabla\mathbf{b})\times\mathbf{a}_c$$

$$= (\text{grad}\mathbf{a}) \times \mathbf{b} - (\text{grad}\mathbf{b}) \times \mathbf{a}$$

例 2 试证

$$\text{grad}(\varphi\mathbf{b}) = (\text{grad}\varphi)\mathbf{b} + \varphi\text{grad}\mathbf{b} \tag{II.8}$$

证

$$\begin{aligned}\text{grad}(\varphi\mathbf{b}) &= \nabla(\varphi\mathbf{b}) \\ &= \nabla(\varphi\mathbf{b}_c) + \nabla(\varphi_c\mathbf{b}) \\ &= (\nabla\varphi)\mathbf{b}_c + \varphi_c\nabla\mathbf{b} \\ &= (\text{grad}\varphi)\mathbf{b} + \varphi\text{grad}\mathbf{b}\end{aligned}$$

例 3 试证

$$(\mathbf{a} \cdot \text{grad})\vec{\mathbf{A}} = a_x\frac{\partial\vec{\mathbf{A}}}{\partial x} + a_y\frac{\partial\vec{\mathbf{A}}}{\partial y} + a_z\frac{\partial\vec{\mathbf{A}}}{\partial z} \tag{II.9}$$

证

$$(\mathbf{a} \cdot \text{grad})\vec{\mathbf{A}} = (\mathbf{a}_c \cdot \nabla)\vec{\mathbf{A}}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{a}_c \cdot \mathbf{u}_x)\vec{\mathbf{A}} + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{a}_c \cdot \mathbf{u}_y)\vec{\mathbf{A}} + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{a}_c \cdot \mathbf{u}_z)\vec{\mathbf{A}}$$

$$= a_x\frac{\partial\vec{\mathbf{A}}}{\partial x} + a_y\frac{\partial\vec{\mathbf{A}}}{\partial y} + a_z\frac{\partial\vec{\mathbf{A}}}{\partial z}$$

例 4 试证

$$d\mathbf{r} \cdot \text{grad}\mathbf{a} = d\mathbf{a} \tag{II.10}$$

证

$$\begin{aligned}d\mathbf{r} \cdot \text{grad}\mathbf{a} &= (d\mathbf{r})_c \cdot (\nabla\mathbf{a}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(d\mathbf{r}_c \cdot \mathbf{u}_x)\mathbf{a} + \frac{\partial}{\partial y}(d\mathbf{r}_c \cdot \mathbf{u}_y)\mathbf{a} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z}(d\mathbf{r}_c \cdot \mathbf{u}_z)\mathbf{a} \\ &= dr_x\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial x} + dr_y\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial y} + dr_z\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial z} \\ &= \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial x}dx + \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial y}dy + \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial z}dz\end{aligned}$$

$$= d\mathbf{a}$$

例 5 试证

$$\mathrm{div}(\mathbf{ab}) = (\mathrm{div}\mathbf{a})\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathrm{grad}\mathbf{b} \qquad (\mathrm{II}.11)$$

证

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\mathbf{ab}) &= \nabla\cdot(\mathbf{ab})\\ &= \nabla\cdot(\mathbf{ab}_c) + \nabla\cdot(\mathbf{a}_c\mathbf{b})\\ &= (\nabla\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}_c + (\nabla\cdot\mathbf{a}_c)\mathbf{b}\\ &= \mathbf{b}_c(\nabla\cdot\mathbf{a}) + (\mathbf{a}_c\cdot\nabla)\mathbf{b}\\ &= \mathbf{b}\mathrm{div}\mathbf{a} + \mathbf{a}_c\cdot(\nabla\mathbf{b})\\ &= (\mathrm{div}\mathbf{a})\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathrm{grad}\mathbf{b}\end{aligned}$$

例 6 试证

$$\mathrm{div}(\varphi\vec{\mathbf{A}}) = \mathrm{grad}\,\varphi\cdot\vec{\mathbf{A}} + \varphi\mathrm{div}\,\vec{\mathbf{A}} \qquad (\mathrm{II}.12)$$

证

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\varphi\vec{\mathbf{A}}) &= \nabla\cdot(\varphi\vec{\mathbf{A}})\\ &= \nabla\cdot(\varphi\vec{\mathbf{A}}_c) + \nabla\cdot(\varphi_c\vec{\mathbf{A}})\\ &= \nabla\varphi\cdot\vec{\mathbf{A}}_c + \varphi_c\nabla\cdot\vec{\mathbf{A}}\\ &= \mathrm{grad}\varphi\cdot\vec{\mathbf{A}} + \varphi\mathrm{div}\vec{\mathbf{A}}\end{aligned}$$

例 7 试证

$$\mathrm{div}(\mathbf{a}\times\vec{\mathbf{A}}) = (\mathrm{rot}\mathbf{a})\cdot\vec{\mathbf{A}} - \mathbf{a}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{\mathbf{A}} \qquad (\mathrm{II}.13)$$

证

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\mathbf{a}\times\vec{\mathbf{A}}) &= \nabla\cdot(\mathbf{a}\times\vec{\mathbf{A}})\\ &= \nabla\cdot(\mathbf{a}\times\vec{\mathbf{A}}_c) + \nabla\cdot(\mathbf{a}_c\times\vec{\mathbf{A}})\\ &= [\nabla\times\mathbf{a}]\cdot\vec{\mathbf{A}}_c - \mathbf{a}_c\cdot[\nabla\times\vec{\mathbf{A}}]\\ &= (\mathrm{rot}\mathbf{a})\cdot\vec{\mathbf{A}} - \mathbf{a}\cdot\mathrm{rot}\vec{\mathbf{A}}\end{aligned}$$

例 8 试证

$$\mathrm{div}(\mathbf{ab}-\mathbf{ba})=-\mathrm{rot}[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]=\mathrm{rot}[\mathbf{b}\times\mathbf{a}] \tag{II.14}$$

证

$$\begin{aligned}
&\mathrm{rot}[\mathbf{b}\times\mathbf{a}]=-\mathrm{rot}[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]\\
&=-\nabla\times[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]\\
&=-\nabla\times[\mathbf{a}\times\mathbf{b}_c]-\nabla\times[\mathbf{a}_c\times\mathbf{b}]\\
&=-(\nabla\cdot\mathbf{b}_c)\mathbf{a}+(\nabla\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}_c-(\nabla\cdot\mathbf{b})\mathbf{a}_c\\
&\quad+(\nabla\cdot\mathbf{a}_c)\mathbf{b}\\
&=-(\nabla\cdot\mathbf{b})\mathbf{a}+(\nabla\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}\\
&=-\nabla\cdot(\mathbf{ba})+\nabla\cdot(\mathbf{ab})\\
&=\nabla\cdot(\mathbf{ab}-\mathbf{ba})\\
&=\mathrm{div}(\mathbf{ab}-\mathbf{ba})
\end{aligned}$$

例 9 试证

$$\mathrm{div}(\varphi\ddot{\mathbf{I}})=\mathrm{grad}\varphi \tag{II.15}$$

式中 $\ddot{\mathbf{I}}$ 为恒等并矢.

证

$$\begin{aligned}
&\mathrm{div}(\varphi\ddot{\mathbf{I}})=\nabla\cdot(\varphi\ddot{\mathbf{I}})\\
&=\nabla\varphi\cdot\ddot{\mathbf{I}}=\nabla\varphi=\mathrm{grad}\varphi
\end{aligned}$$

例 10 试证

$$\mathrm{div}[\ddot{\mathbf{I}}\times\mathbf{a}]=\mathrm{rot}\mathbf{a} \tag{II.16}$$

式中 $\ddot{\mathbf{I}}$ 为恒等并矢.

证

$$\begin{aligned}
&\mathrm{div}[\ddot{\mathbf{I}}\times\mathbf{a}]=\nabla\cdot[\ddot{\mathbf{I}}\times\mathbf{a}]\\
&=(\nabla\cdot\ddot{\mathbf{I}})\times\mathbf{a}\\
&=\nabla\times\mathbf{a}=\mathrm{rot}\mathbf{a}
\end{aligned}$$

例 11 试证

$$\mathrm{rot}(\mathbf{ab}) = (\mathrm{rot}\mathbf{a})\mathbf{b} - \mathbf{a} \times \mathrm{grad}\mathbf{b} \tag{II.17}$$

证

$$\begin{aligned}
&\mathrm{rot}(\mathbf{ab}) = \nabla \times (\mathbf{ab}) \\
&= \nabla \times (\mathbf{ab}_c) + \nabla \times (\mathbf{a}_c\mathbf{b}) \\
&= [\nabla \times \mathbf{a}]\mathbf{b}_c + [\nabla \times \mathbf{a}_c]\mathbf{b} \\
&= (\mathrm{rot}\mathbf{a})\mathbf{b} - [\mathbf{a}_c \times \nabla]\mathbf{b} \\
&= (\mathrm{rot}\mathbf{a})\mathbf{b} - \mathbf{a}_c \times (\nabla\mathbf{b}) \\
&= (\mathrm{rot}\mathbf{a})\mathbf{b} - \mathbf{a} \times \mathrm{grad}\mathbf{b}
\end{aligned}$$

例 12 试证

$$\mathrm{rot}(\varphi \overleftrightarrow{\mathbf{A}}) = \mathrm{grad}\varphi \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}} + \varphi \mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} \tag{II.18}$$

证

$$\begin{aligned}
&\mathrm{rot}(\varphi\overleftrightarrow{\mathbf{A}}) = \nabla \times (\varphi\overleftrightarrow{\mathbf{A}}) \\
&= \nabla \times (\varphi\overleftrightarrow{\mathbf{A}}_c) + \nabla \times (\varphi_c\overleftrightarrow{\mathbf{A}}) \\
&= \nabla\varphi \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}}_c + \varphi_c\nabla \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}} \\
&= \mathrm{grad}\varphi \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}} + \varphi\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}
\end{aligned}$$

例 13 试证

$$\mathrm{rot}(\varphi\ddot{\mathbf{I}}) = \mathrm{grad}\varphi \times \ddot{\mathbf{I}} \tag{II.19}$$

式中 $\ddot{\mathbf{I}}$ 为恒等并矢.

证

$$\begin{aligned}
&\mathrm{rot}(\varphi\ddot{\mathbf{I}}) = \nabla \times (\varphi\ddot{\mathbf{I}}) \\
&= \nabla\varphi \times \ddot{\mathbf{I}} = \mathrm{grad}\varphi \times \ddot{\mathbf{I}}
\end{aligned}$$

例 14 试证

$$\mathrm{rot}[\ddot{\mathbf{I}} \times \mathbf{a}] = \mathbf{a}\mathrm{grad} - \ddot{\mathbf{I}}\,\mathrm{div}\mathbf{a} \tag{II.20}$$

证

$$\mathrm{rot}[\ddot{\mathbf{I}} \times \mathbf{a}] = \nabla \times [\ddot{\mathbf{I}} \times \mathbf{a}]$$

$$= \nabla \times [\mathbf{a} \times \ddot{\mathbf{I}}]\ (\text{用公式}\ \ddot{\mathbf{I}} \times \mathbf{a} = \mathbf{a} \times \ddot{\mathbf{I}})$$

$$= \mathbf{a}(\nabla \cdot \ddot{\mathbf{I}}) - (\nabla \cdot \mathbf{a})\ddot{\mathbf{I}}$$

$$= \mathbf{a}\nabla - (\mathrm{div}\mathbf{a})\ddot{\mathbf{I}}$$

例 15 试证

$$\mathrm{rot}(\ddot{\mathbf{A}} \times \mathbf{a}) = \mathrm{rot}\ddot{\mathbf{A}} \times \mathbf{a} - \mathrm{grad}\mathbf{a} \overset{\times}{\underset{\times}{}} \ddot{\mathbf{A}} \qquad (\text{II}.21)$$

证

$$\mathrm{rot}(\ddot{\mathbf{A}} \times \mathbf{a}) = \nabla \times [\ddot{\mathbf{A}} \times \mathbf{a}]$$

$$= \nabla \times [\ddot{\mathbf{A}} \times \mathbf{a}_c] + \nabla \times [\ddot{\mathbf{A}}_c \times \mathbf{a}]$$

$$= [\nabla \times \mathbf{A}] \times \mathbf{a}_c + \nabla \times [\mathbf{A}_c \times \mathbf{a}]$$

$$= \mathrm{rot}\ddot{\mathbf{A}} \times \mathbf{a} + \nabla \times [\ddot{\mathbf{A}}_c \times \mathbf{a}]$$

现在令 $\ddot{\mathbf{A}} = \mathbf{ef}$，即将 $\ddot{\mathbf{A}}$ 明显地写成并矢形式，则

$$\nabla \times [\ddot{\mathbf{A}}_c \times \mathbf{a}] = \nabla \times [(\mathbf{ef})_c \times \mathbf{a}]$$

$$= \nabla \times [\mathbf{e}_c\mathbf{f}_c \times (a_x\mathbf{u}_x + a_y\mathbf{u}_y + a_z\mathbf{u}_z)]$$

$$= \nabla \times [\mathbf{e}_c\mathbf{f}_c \times a_x\mathbf{u}_x + \mathbf{e}_c\mathbf{f}_c \times a_y\mathbf{u}_y + \mathbf{e}_c\mathbf{f}_c \times a_z\mathbf{u}_z]$$

$$= \nabla a_x \times [\mathbf{e}_c\mathbf{f}_c \times \mathbf{u}_x] + \nabla a_y \times [\mathbf{e}_c\mathbf{f}_c \times \mathbf{u}_y] + \nabla a_z \times [\mathbf{e}_c\mathbf{f}_c \times \mathbf{u}_z]$$

$$= \nabla a_x \times (\mathbf{e}_c[\mathbf{f}_c \times \mathbf{u}_x]) + \nabla a_y \times (\mathbf{e}_c[\mathbf{f}_c \times \mathbf{u}_y]) + \nabla a_z \times (\mathbf{e}_c[\mathbf{f}_c \times \mathbf{u}_z])$$

$$= -[\nabla a_x \times \mathbf{e}_c][\mathbf{u}_x \times \mathbf{f}_c] - [\nabla a_y \times \mathbf{e}_c][\mathbf{u}_y \times \mathbf{f}_c] - [\nabla a_z \times \mathbf{e}_c][\mathbf{u}_z \times \mathbf{f}_c]$$

$$= -[\mathrm{grad}a_x \times \mathbf{e}][\mathbf{u}_x \times \mathbf{f}] - [\mathrm{grad}a_y \times \mathbf{e}][\mathbf{u}_y \times \mathbf{f}] - [\mathrm{grad}a_z \times \mathbf{e}][\mathbf{u}_z \times \mathbf{f}]$$

$$= -\mathrm{grad}\mathbf{a} \overset{\times}{\underset{\times}{}} \overleftrightarrow{\mathbf{A}}$$

最后一步成立是因为按照两并矢双叉乘的定义

$$(\mathbf{cd}) \overset{\times}{\underset{\times}{}} (\mathbf{ef}) = (\mathbf{c} \times \mathbf{e})(\mathbf{d} \times \mathbf{f})$$

因此如 $\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \mathbf{ef}$，则

$$\mathrm{grad}\mathbf{a} \overset{\times}{\underset{\times}{}} \overleftrightarrow{\mathbf{A}}$$

$$= (\mathrm{grad}a_x\mathbf{u}_x + \mathrm{grad}a_y\mathbf{u}_y + \mathrm{grad}a_z\mathbf{u}_z) \overset{\times}{\underset{\times}{}} \mathbf{ef}$$

$$= (\mathrm{grad}a_x \times \mathbf{e})(\mathbf{u}_x \times \mathbf{f}) + (\mathrm{grad}a_y \times \mathbf{e})(\mathbf{u}_y \times \mathbf{f}) + (\mathrm{grad}a_z \times \mathbf{e})(\mathbf{u}_z \times \mathbf{f})$$

由此最后得

$$\mathrm{rot}[\overleftrightarrow{\mathbf{A}} \times \mathbf{a}] = \mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} \times \mathbf{a} - \mathrm{grad}\mathbf{a} \overset{\times}{\underset{\times}{}} \overleftrightarrow{\mathbf{A}}$$

例 16 试证

$$\mathrm{grad}\mathbf{r} = \ddot{\mathbf{I}} \tag{II.22}$$

$\ddot{\mathbf{I}}$ 为恒等并矢

证

$$\mathrm{grad}\mathbf{r} = \nabla\mathbf{r}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{u}_x\mathbf{r}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{u}_y\mathbf{r}) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{u}_z\mathbf{r})$$

$$= (\mathbf{u}_x\mathbf{u}_x) + (\mathbf{u}_y\mathbf{u}_y) + (\mathbf{u}_z\mathbf{u}_z)$$

$$= \ddot{\mathbf{I}}$$

例 17 试证

$$\mathrm{div}(\overleftrightarrow{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{a}) = (\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{a}) + |\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{A}}} \cdot \mathrm{grad}\mathbf{a}| \tag{II.23}$$

式中 $|\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{A}}} \cdot \mathrm{grad}\mathbf{a}|$ 为并矢 $\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{A}}} \cdot \mathrm{grad}\mathbf{a}$ 的迹。

证

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{a}) &= \nabla\cdot(\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{a})\\ &= \nabla\cdot(\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{a}_c)+\nabla\cdot(\overleftrightarrow{\mathbf{A}}_c\cdot\mathbf{a})\\ &= (\nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}})\cdot\mathbf{a}_c+(\nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}_c)\cdot\mathbf{a}\\ &= \mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{a}+(\nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}_c)\cdot\mathbf{a}\end{aligned}$$

现在对 $(\nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}_c)\cdot\mathbf{a}$作下列变换:

$$\begin{aligned}(\nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}_c)\cdot\mathbf{a} &= (\nabla\cdot(\mathbf{a}'_{xc}\mathbf{u}_x+\mathbf{a}'_{yc}\mathbf{u}_y+\mathbf{a}'_{zc}\mathbf{u}_z))\cdot\mathbf{a}\\ &= ((\nabla\cdot\mathbf{a}'_{xc})\mathbf{u}_x+(\nabla\cdot\mathbf{a}'_{yc})\mathbf{u}_y\\ &\quad+(\nabla\cdot\mathbf{a}'_{zc})\mathbf{u}_z)\cdot\mathbf{a}\\ &= ((\mathbf{a}'_{xc}\cdot\nabla)\mathbf{u}_x+(\mathbf{a}'_{yc}\cdot\nabla)\mathbf{u}_y\\ &\quad+(\mathbf{a}'_{zc}\cdot\nabla)\mathbf{u}_z)\cdot\mathbf{a}\\ &= (\mathbf{a}'_{xc}\cdot\nabla)a_x+(\mathbf{a}'_{yc}\cdot\nabla)a_y\\ &\quad+(\mathbf{a}'_{zc}\cdot\nabla)a_z\\ &= \mathbf{a}'_x\cdot\mathrm{grad}a_x+\mathbf{a}'_y\cdot\mathrm{grad}a_y\\ &\quad+\mathbf{a}'_z\cdot\mathrm{grad}a_z\end{aligned}$$

另一方面,按照并矢的迹的定义

$$\begin{aligned}|\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{A}}}\cdot\mathrm{grad}\mathbf{a}| &= |(\mathbf{u}_x\mathbf{a}'_x+\mathbf{u}_y\mathbf{a}'_y+\mathbf{u}_z\mathbf{a}'_z)\cdot\mathrm{grad}\mathbf{a}|\\ &= |(\mathbf{u}_x\mathbf{a}'_x+\mathbf{u}_y\mathbf{a}'_y+\mathbf{u}_z\mathbf{a}'_z)\cdot(\mathrm{grad}a_x\mathbf{u}_x+\mathrm{grad}a_y\mathbf{u}_y\\ &\quad+\mathrm{grad}a_z\mathbf{u}_z)|\\ &= \mathbf{a}'_x\cdot\mathrm{grad}a_x+\mathbf{a}'_y\cdot\mathrm{grad}a_y+\mathbf{a}'_z\cdot\mathrm{grad}a_z\\ &= (\nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}_c)\cdot\mathbf{a}\end{aligned}$$

故最后得

$$\mathrm{div}(\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{a})=(\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}})\cdot\mathbf{a}+|\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{A}}}\cdot\mathrm{grad}\mathbf{a}|$$

II. 4 $T(\nabla,\nabla)$ 的定义和性质

定义 对在一个表达式中含有两个 ∇，并分别对每一个 ∇ 为线性的任何表达式 $T(\nabla,\nabla)$ 可理解如下：

(1) 先将一个 ∇ 看作固定的矢量，例如将前一个 ∇ 看作是固定的矢量 $\mathbf{p}$，按 II.1 节的定义，理解 $T(\mathbf{p},\nabla)$. $T(\mathbf{p},\nabla)$ 简写为 $T_1(\mathbf{p})$.

(2) 在 $T_1(\mathbf{p})$ 中将 $\mathbf{p}$ 换成 ∇，按 II.1 节的定义，理解 $T_1(\nabla)$，所得结果即为 $T(\nabla,\nabla)$.

根据上述定义并参考第一章和 II.1 节，立即可得到下列结果：

(1) $(\nabla\cdot\nabla)\varphi = \mathrm{divgrad}\varphi$;

(2) $(\nabla\cdot\nabla)\mathbf{a} = \mathrm{divgrad}\mathbf{a}$;

(3) $\nabla\times(\nabla\varphi) = \mathrm{rotgrad}\varphi$;

(4) $\nabla\times\nabla\mathbf{a} = \mathrm{rotgrad}\mathbf{a}$;

(5) $\nabla(\nabla\cdot\mathbf{R}) = \mathrm{graddiv}\mathbf{R}$;

(6) $\nabla(\nabla\cdot\ddot{\mathbf{A}}) = \mathrm{graddiv}\ddot{\mathbf{A}}$;

(7) $\nabla\cdot[\nabla\times\mathbf{R}] = \mathrm{divrot}\mathbf{R}$;

(8) $\nabla\cdot[\nabla\times\ddot{\mathbf{A}}] = \mathrm{divrot}\ddot{\mathbf{A}}$;

(9) $\nabla\times[\nabla\times\mathbf{R}] = \mathrm{rotrot}\mathbf{R}$;

(10) $\nabla\times[\nabla\times\ddot{\mathbf{A}}] = \mathrm{rotrot}\ddot{\mathbf{A}}$.

应用与第一章中完全相同的方法，就可证明 $T(\nabla,\nabla)$ 具有下列性质：

(1) 对 $T(\nabla,\nabla)$ 可将每一个 ∇ 看成普通矢量一样进行矢量代数和并矢代数的运算，其结果不变。

(2) 如$T(\mathbf{p},\mathbf{p}) \equiv 0$，则 $T(\nabla,\nabla) \equiv 0$.

因证明过程与第一章中的证明过程全部相同，这里就不重复了.

II.5 对 $T(\nabla,\nabla)$ 的运算举例

下面举几个运算例子.

例 1 试证

$$\mathrm{divrot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = 0 \tag{II 24}$$

证

$$\begin{aligned}\mathrm{divrot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} &= \nabla \cdot [\nabla \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}}] \\ &= [\nabla \times \nabla] \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}} \\ &= 0 \quad (\text{因}[\mathbf{p} \times \mathbf{p}] = 0)\end{aligned}$$

例 2 试证

$$\mathrm{rotgrad}\mathbf{a} = 0 \tag{II 25}$$

证

$$\begin{aligned}\mathrm{rotgrad}\mathbf{a} &= \nabla \times \nabla\mathbf{a} \\ &= [\nabla \times \nabla]\mathbf{a} \\ &= 0 \quad (\text{因 } [\mathbf{p} \times \mathbf{p}] = 0)\end{aligned}$$

例 3 如定义 $\nabla^2\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = (\nabla \cdot \nabla)\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$，试证

$$\nabla^2\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \mathrm{graddiv}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} - \mathrm{rotrot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} \tag{II 26}$$

证

$$\begin{aligned}\mathrm{rotrot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} &= \nabla \times [\nabla \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}}] \\ &= \nabla(\nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}}) - (\nabla \cdot \nabla)\overleftrightarrow{\mathbf{A}} \\ &= \mathrm{graddiv}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} - \nabla^2\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\end{aligned}$$

即

$$\nabla^2\vec{A} = \text{graddiv}\vec{\mathbf{A}} - \text{rotrot}\vec{\mathbf{A}}$$

例 4 试写出 $\nabla^2\vec{\mathbf{A}}$ 在直角坐标系中的表达式.

答 $\nabla^2\vec{\mathbf{A}}$ 按定义为 $(\nabla\cdot\nabla)\vec{\mathbf{A}}$, 而 $(\nabla\cdot\nabla)\vec{\mathbf{A}}$ 按定义又可写成

$$(\nabla\cdot\nabla)\vec{\mathbf{A}} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\mathbf{u}_x\cdot\mathbf{u}_x)\vec{\mathbf{A}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\mathbf{u}_y\cdot\mathbf{u}_y)\vec{\mathbf{A}}$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\mathbf{u}_z\cdot\mathbf{u}_z)\vec{\mathbf{A}} + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\mathbf{u}_x\cdot\mathbf{u}_y)\vec{\mathbf{A}} + \cdots$$

$$= \frac{\partial^2\vec{\mathbf{A}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{\mathbf{A}}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vec{\mathbf{A}}}{\partial z^2} \tag{II.27}$$

此即 $\nabla^2\vec{\mathbf{A}}$ 在直角坐标系中的表达式.

例 5 试证

$$\text{rotrot}(\varphi\ddot{\mathbf{I}}) = \text{rot}(\text{grad}\varphi\times\ddot{\mathbf{I}}) = \text{gradgrad}\varphi - \nabla^2(\varphi\ddot{\mathbf{I}}) \tag{II.28}$$

证

$$\text{rotrot}(\varphi\ddot{\mathbf{I}}) = \nabla\times[\nabla\times(\varphi\ddot{\mathbf{I}})]$$

$$= \nabla\times[\nabla\varphi\times\ddot{\mathbf{I}}]$$

$$= \nabla\times[\text{grad}\varphi\times\ddot{\mathbf{I}}]$$

$$= \text{rot}(\text{grad}\varphi\times\ddot{\mathbf{I}})$$

另一方面,对 $\text{rotrot}(\varphi\ddot{\mathbf{I}})$ 可作另一种变换:

$$\text{rotrot}(\varphi\ddot{\mathbf{I}}) = \nabla\times[\nabla\times(\varphi\ddot{\mathbf{I}})]$$

$$= \nabla(\nabla\cdot(\varphi\ddot{\mathbf{I}})) - \nabla^2(\varphi\ddot{\mathbf{I}})$$

$$= \nabla(\nabla\varphi\cdot\ddot{\mathbf{I}}) - \nabla^2(\varphi\ddot{\mathbf{I}})$$

$$= \text{gradgrad}\varphi - \nabla^2(\varphi\ddot{\mathbf{I}})$$

这就是要证明的第二种形式.

II.6 积分关系式

对于含有并矢的 $T(\nabla)$，可以证明一条类似于矢量微积中的关于 $T(\nabla)$ 的积分定理.

定理 如并矢 $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 位于 $T(\nabla)$ 中每一项的最后(最右边)，则公式

$$\iiint_V T(\nabla)dv = \oiint_S T(\mathbf{n})d\sigma \tag{II.29}$$

仍然成立;式中 $\iiint_V$ 表示对某一体积 V 的三重积分，$\oiint_S$ 表示对包围此体积 V 的封闭曲面 S 的曲面积分. $\mathbf{n}$ 表示曲面 S 上某一点朝向体积 V 外部的单位法向量.

证 因 $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 处于每一项的最后，$T(\nabla)$ 可写成

$$T(\nabla) = T_1(\nabla)\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = T_1(\nabla)(\mathbf{a}'_x\mathbf{u}_x + \mathbf{a}'_y\mathbf{u}_y + \mathbf{a}'_z\mathbf{u}_z)$$

于是

$$\iiint_V T(\nabla)dv = \iiint_V T_1(\nabla)\overleftrightarrow{\mathbf{A}}dv$$

$$= \iiint_V T_1(\nabla)(\mathbf{a}'_x\mathbf{u}_x + \mathbf{a}'_y\mathbf{u}_y + \mathbf{a}'_z\mathbf{u}_z)dv$$

$$= \iiint_V T_1(\nabla)\mathbf{a}'_x\mathbf{u}_x dv + \iiint_V T_1(\nabla)\mathbf{a}'_y\mathbf{u}_y dv$$

$$+ \iiint_V T_1(\nabla)\mathbf{a}'_z\mathbf{u}_z dv$$

$$= \left(\iiint_V T_1(\nabla)\mathbf{a}'_x dv\right)\mathbf{u}_x + \left(\iiint_V T_1(\nabla)\mathbf{a}'_y dv\right)\mathbf{u}_y$$

$$+\left(\iiint_V T_1(\nabla)\mathbf{a}'_z dv\right)\mathbf{u}_z$$

$$=\left(\oiint_S T_1(\mathbf{n})\mathbf{a}'_x d\sigma\right)\mathbf{u}_x+\left(\oiint_S T_1(\mathbf{n})\mathbf{a}'_y d\sigma\right)\mathbf{u}_y$$

$$+\left(\oiint_S T_1(\mathbf{n})\mathbf{a}'_z d\sigma\right)\mathbf{u}_z$$

$$=\oiint_S T_1(\mathbf{n})\mathbf{a}'_x\mathbf{u}_x d\sigma+\oiint_S T_1(\mathbf{n})\mathbf{a}'_y\mathbf{u}_y d\sigma$$

$$+\oiint_S T_1(\mathbf{n})\mathbf{a}'_z\mathbf{u}_z d\sigma$$

$$=\oiint_S T_1(\mathbf{n})(\mathbf{a}'_x\mathbf{u}_x+\mathbf{a}'_y\mathbf{u}_y+\mathbf{a}'_z\mathbf{u}_z)d\sigma$$

$$=\oiint_S T_1(\mathbf{n})\overleftrightarrow{\mathbf{A}}d\sigma=\oiint_S T(\mathbf{n})d\sigma \qquad \text{(II.30)}$$

下面举几个应用这条定理的例子。

例 1 取 $T(\nabla)$ 为 $\nabla\mathbf{a}$，得

$$\iiint_V \operatorname{grad}\mathbf{a}dv=\iiint_V \nabla\mathbf{a}dv=\oiint_S \mathbf{n}\mathbf{a}d\sigma \qquad \text{(II.31)}$$

例 2 取 $T(\nabla)$ 为 $\nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$，得

$$\iiint_V \operatorname{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}dv=\iiint_V \nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}dv=\oiint_S \mathbf{n}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}d\sigma \qquad \text{(II.32)}$$

例 3 取 $T(\nabla)$ 为 $\nabla\times\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$，得

$$\iiint_V \operatorname{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}dv=\iiint_V \nabla\times\overleftrightarrow{\mathbf{A}}dv=\oiint_S \mathbf{n}\times\overleftrightarrow{\mathbf{A}}d\sigma \qquad \text{(II.33)}$$

例 4 试证

$$\iiint_V [\mathbf{a}\cdot\operatorname{graddiv}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}-(\operatorname{graddiv}\mathbf{a})\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}]dv$$

$$= \oiint_S [(\mathbf{n}\cdot\mathbf{a})\mathrm{div}\vec{\mathbf{A}} - \mathrm{div}\mathbf{a}(\mathbf{n}\cdot\vec{\mathbf{A}})]d\sigma \qquad \text{(II.34)}$$

证 取$T(\nabla) = (\nabla\cdot\mathbf{a})\mathrm{div}\vec{\mathbf{A}} - (\nabla\cdot\vec{\mathbf{A}})\mathrm{div}\mathbf{a}$，则

$$T(\mathbf{n}) = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{a})\mathrm{div}\vec{\mathbf{A}} - (\mathbf{n}\cdot\vec{\mathbf{A}})\mathrm{div}\mathbf{a}$$

而 $T(\nabla)$ 本身又可写成

$$\begin{aligned}
T(\nabla) &= (\nabla\cdot\mathbf{a})\mathrm{div}\vec{\mathbf{A}} - (\nabla\cdot\vec{\mathbf{A}})\mathrm{div}\mathbf{a} \\
&= (\nabla\cdot\mathbf{a}_c)\mathrm{div}\vec{\mathbf{A}} + (\nabla\cdot\mathbf{a})(\mathrm{div}\vec{\mathbf{A}})_c \\
&\quad - (\nabla\cdot\vec{\mathbf{A}}_c)\mathrm{div}\mathbf{a} - (\nabla\cdot\vec{\mathbf{A}})(\mathrm{div}\mathbf{a})_c \\
&= (\mathbf{a}_c\cdot\nabla)\mathrm{div}\vec{\mathbf{A}} + \mathrm{div}\mathbf{a}\mathrm{div}\vec{\mathbf{A}} \\
&\quad - (\nabla\mathrm{div}\mathbf{a})\cdot\mathbf{A}_c - \mathrm{div}\mathbf{a}\mathrm{div}\vec{\mathbf{A}} \\
&= \mathbf{a}\cdot\mathrm{graddiv}\vec{\mathbf{A}} - (\mathrm{graddiv}\mathbf{a})\cdot\vec{\mathbf{A}}
\end{aligned}$$

代入公式 (II.29) 即得所需证明的等式。

例 5 试证

$$\begin{aligned}
&\iiint_V [(\mathrm{rotrot}\mathbf{a})\cdot\vec{\mathbf{A}} - \mathbf{a}\cdot\mathrm{rotrot}\vec{\mathbf{A}}]dv \\
&= \oiint_S d\sigma\mathbf{n}\cdot(\mathbf{a}\times\mathrm{rot}\vec{\mathbf{A}} + \mathrm{rot}\mathbf{a}\times\vec{\mathbf{A}}) \\
&= \oiint_S [(\mathbf{n}\times\mathbf{a})\cdot\mathrm{rot}\vec{\mathbf{A}} + (\mathbf{n}\times\mathrm{rot}\mathbf{a})\cdot\vec{\mathbf{A}}]d\sigma \\
&= -\oiint_S [\mathbf{a}\cdot(\mathbf{n}\times\mathrm{rot}\vec{\mathbf{A}} +)\mathrm{rot}\mathbf{a}\cdot(\mathbf{n}\times\vec{\mathbf{A}})]d\sigma
\end{aligned} \qquad \text{(II.35)}$$

证 取 $T(\nabla) = [\nabla\times\mathbf{a}]\cdot\mathrm{rot}\vec{\mathbf{A}} + \nabla\cdot[\mathrm{rot}\mathbf{a}\times\vec{\mathbf{A}}]$，则

$$T(\nabla) = [\nabla\times\mathbf{a}]\cdot(\mathrm{rot}\vec{\mathbf{A}})_c + [\nabla\times\mathbf{a}_c]\cdot\mathrm{rot}\vec{\mathbf{A}}$$

$$+\nabla\cdot[\mathrm{rot}\mathbf{a}\times\overleftrightarrow{\mathbf{A}}_c]+\nabla\cdot[(\mathrm{rot}\mathbf{a})_c\times\overleftrightarrow{\mathbf{A}}]$$

$$=\mathrm{rot}\mathbf{a}\cdot\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}-\mathbf{a}_c\cdot[\nabla\times\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}]+[\nabla\times\mathrm{rot}\mathbf{a}]\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}_c$$

$$-(\mathrm{rot}\mathbf{a})_c\cdot[\nabla\times\overleftrightarrow{\mathbf{A}}]$$

$$=\mathrm{rot}\mathbf{a}\cdot\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}-\mathbf{a}\cdot\mathrm{rotrot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}+(\mathrm{rotrot}\mathbf{a})\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$$

$$-\mathrm{rot}\mathbf{a}\cdot\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$$

$$=(\mathrm{rotrot}\mathbf{a})\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}-\mathbf{a}\cdot\mathrm{rotrot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$$

另一方面，在 $T(\nabla)$ 中将∇换成 $\mathbf{n}$，有

$$T(\mathbf{n})=[\mathbf{n}\times\mathbf{a}]\cdot\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}+\mathbf{n}\cdot[\mathrm{rot}\mathbf{a}\times\overleftrightarrow{\mathbf{A}}]$$

$$=[\mathbf{n}\times\mathbf{a}]\cdot\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}+[\mathbf{n}\times\mathrm{rot}\mathbf{a}]\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$$

$$=-[\mathbf{a}\times\mathbf{n}]\cdot\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}-[\mathrm{rot}\mathbf{a}\times\mathbf{n}]\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$$

$$=-\mathbf{a}\cdot[\mathbf{n}\times\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}]-\mathrm{rot}\mathbf{a}\cdot[\mathbf{n}\times\overleftrightarrow{\mathbf{A}}]$$

$$=\mathbf{n}\cdot[\mathbf{a}\times\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}]+\mathbf{n}\cdot[\mathrm{rot}\mathbf{a}\times\overleftrightarrow{\mathbf{A}}]$$

$$=\mathbf{n}\cdot(\mathbf{a}\times\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}+\mathrm{rot}\mathbf{a}\times\mathbf{A})$$

代入公式（II.29）即得所需证明结果。

例 6 试证

$$\iiint_V[\mathbf{a}_c\cdot\nabla^2\overleftrightarrow{\mathbf{A}}-(\nabla^2\mathbf{a})\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}_c]dv$$

$$=-\oiint_S[(\mathbf{n}\cdot\mathbf{a})\mathrm{div}\ \overleftrightarrow{\mathbf{A}}-\mathrm{div}\,\mathbf{a}(\mathbf{n}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}})$$

$$+(\mathbf{n}\times\mathbf{a})\cdot\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}-\mathrm{rot}\mathbf{a}\cdot(\mathbf{n}\times\overleftrightarrow{\mathbf{A}})]d\sigma \quad (\mathrm{II}.36)$$

证 取

$$T(\nabla)=(\nabla\cdot\mathbf{a})\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}-(\nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}})\mathrm{div}\mathbf{a}$$

$$+[\nabla\times\mathbf{a}]\cdot\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}+\nabla\cdot[\mathrm{rot}\mathbf{a}\times\overleftrightarrow{\mathbf{A}}]$$

则

$$
\begin{aligned}
T(\nabla) &= (\nabla \cdot \mathbf{a}_c)\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} + (\nabla \cdot \mathbf{a})(\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}})_c - (\nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}}_c)\mathrm{div}\mathbf{a} \\
&\quad - (\nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}})(\mathrm{div}\mathbf{a})_c + [\nabla \times \mathbf{a}_c] \cdot \mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} \\
&\quad + [\nabla \times \mathbf{a}] \cdot (\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}})_c \\
&\quad + \nabla \cdot [(\mathrm{rot}\mathbf{a})_c \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}}] + \nabla \cdot [\mathrm{rot}\mathbf{a} \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}}_c] \\
&= \mathbf{a} \cdot \mathrm{graddiv}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} + (\mathrm{div}\mathbf{a})\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} - (\mathrm{graddiv}\mathbf{a}) \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}} \\
&\quad - (\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}})\mathrm{div}\mathbf{a} - \mathbf{a}_c \cdot [\nabla \times \mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}] + \mathrm{rot}\mathbf{a} \cdot \mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} \\
&\quad - \mathrm{rot}\mathbf{a} \cdot \mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} + [\nabla \times \mathrm{rot}\mathbf{a}] \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}}_c \\
&= \mathbf{a} \cdot \mathrm{graddiv}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} - \mathrm{graddiv}\mathbf{a} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}} - \mathbf{a}_c \cdot [\mathrm{graddiv}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} \\
&\quad - \nabla^2\overleftrightarrow{\mathbf{A}}] + [\mathrm{graddiv}\mathbf{a} - \nabla^2\mathbf{a}] \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}}_c \\
&= \mathbf{a}_c \cdot \nabla^2\overleftrightarrow{\mathbf{A}} - (\nabla^2\mathbf{a}) \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}}_c
\end{aligned}
$$

而

$$
\begin{aligned}
T(\mathbf{n}) &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} - (\mathbf{n} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}})\mathrm{div}\mathbf{a} + [\mathbf{n} \times \mathbf{a}] \cdot \mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} \\
&\quad + \mathbf{n} \cdot [\mathrm{rot}\mathbf{a} \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}}] \\
&= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} - (\mathrm{div}\mathbf{a})(\mathbf{n} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}}) + (\mathbf{n} \times \mathbf{a}) \cdot \mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} \\
&\quad - \mathrm{rot}\mathbf{a} \cdot [\mathbf{n} \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}}]
\end{aligned}
$$

代入公式（II.29）即得所需证明之结果。

下面我们再证明几个有关线积分的公式。

（1）试证

$$\oint_l d\mathbf{l} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \iint_S \mathbf{n} \cdot \mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\, d\sigma \qquad \text{(II.37)}$$

l 为某一封闭环路；S 为张于此环路上的任一曲面；$\mathbf{dl}$ 为线元；$\mathbf{n}$ 为单位法向量。$d\mathbf{l}$ 与 $\mathbf{n}$ 成右手螺旋关系。

证 将 $\vec{\mathbf{A}}$ 写成分量形式，有

$$\oint_l d\mathbf{l}\cdot\vec{\mathbf{A}}=\left(\oint_l d\mathbf{l}\cdot\mathbf{a}'_x\right)\mathbf{u}_x+\left(\oint_l d\mathbf{l}\cdot\mathbf{a}'_y\right)\mathbf{u}_y$$

$$+\left(\oint_l \mathbf{dl}\cdot\mathbf{a}'_z\right)\mathbf{u}_z$$

$$=\left(\iint_S \mathbf{n}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{a}'_x d\sigma\right)\mathbf{u}_x+\left(\iint_S \mathbf{n}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{a}'_y d\sigma\right)\mathbf{u}_y$$

$$+\left(\iint_S \mathbf{n}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{a}'_z d\sigma\right)\mathbf{u}_z$$

$$=\left(\iint_S \mathbf{n}\cdot[\nabla\times\mathbf{a}'_x]\mathbf{u}_x d\sigma\right)+\left(\iint_S \mathbf{n}\cdot[\nabla\times\mathbf{a}'_y]\mathbf{u}_y d\sigma\right)$$

$$+\left(\iint_S \mathbf{n}\cdot[\nabla\times\mathbf{a}'_z]\mathbf{u}_z d\sigma\right)$$

$$=\iint_S \mathbf{n}\cdot[\nabla\times(\mathbf{a}'_x\mathbf{u}_x+\mathbf{a}'_y\mathbf{u}_y+\mathbf{a}'_z\mathbf{u}_z)]d\sigma$$

$$=\iint_S \mathbf{n}\cdot[\nabla\times\vec{\mathbf{A}}]d\sigma=\iint_S \mathbf{n}\cdot\mathrm{rot}\vec{\mathbf{A}}d\sigma$$

(2) 试证

$$\oint_l d\mathbf{l}\mathbf{a}=\iint_S \mathbf{n}\times\mathrm{grad}\mathbf{a}d\sigma \qquad \text{(II.38)}$$

证 应用公式

$$\oint_l d\mathbf{l}\varphi=\iint_S \mathbf{n}\times\mathrm{grad}\varphi d\sigma$$

及用证明式 (II.37) 的方法，即可得证。

(3) 试证

$$\oint_l d\mathbf{l}\times\mathbf{a}=\iint_S(\mathbf{n}\cdot\mathbf{agrad}\mathbf{a}-\mathbf{ndiv}\mathbf{a})d\sigma \qquad \text{(II.39)}$$

证 应用第二章中的公式(48)，有

$$\oint_l d\mathbf{l}\times\mathbf{a}=\iint_S[\mathbf{n}_c\times\nabla]\times\mathbf{a}d\sigma$$

$$=\iint_S[(\mathbf{n}_c\cdot\mathbf{a})\nabla-\mathbf{n}_c(\nabla\cdot\mathbf{a})]d\sigma$$

$$=\iint_S[\mathbf{n}_c\cdot(\mathbf{a}\nabla)-\mathbf{n}\mathrm{div}\mathbf{a}]d\sigma$$

$$=\iint_S[\mathbf{n}\cdot\mathbf{a}\mathrm{grad}\mathbf{a}-\mathbf{n}\mathrm{div}\mathbf{a}]d\sigma$$

(4) 试证

$$\int_M^N d\mathbf{l}\cdot\mathrm{grad}\mathbf{a}=\mathbf{a}(N)-\mathbf{a}(M)\qquad(\text{II.40})$$

式中 M、N为空间任意两点,沿连接此两点的任意曲线进行积分.

证 用公式

$$\int_M^N d\mathbf{l}\cdot\mathrm{grad}\varphi=\varphi(N)-\varphi(M)$$

及用证明公式 (II.37) 的方法,即可得证.

II.7 圆柱坐标系中 grad**a**、div$\vec{\mathbf{A}}$、rot$\vec{\mathbf{A}}$ 及 $\nabla^2\vec{\mathbf{A}}$ 的表达式

在这一节中我们分别求出 grad**a**、div$\vec{\mathbf{A}}$、rot$\vec{\mathbf{A}}$ 及 $\nabla^2\vec{\mathbf{A}}$ 在圆柱坐标系中的表达式,供读者需要时查阅用.

令坐标轴上的单位矢量为 $\mathbf{u}_r$、$\mathbf{u}_\varphi$、$\mathbf{u}_z$,则 $\vec{\mathbf{A}}$ 可写成

$$\vec{\mathbf{A}}=\mathbf{a}'_r\mathbf{u}_r+\mathbf{a}'_\varphi\mathbf{u}_\varphi+\mathbf{a}'_z\mathbf{u}_z=\mathbf{u}_r\mathbf{a}_r+\mathbf{u}_\varphi\mathbf{a}_\varphi+\mathbf{u}_z\mathbf{a}_z$$

a 可写成

$$\mathbf{a} = a_r\mathbf{u}_r + a_\varphi\mathbf{u}_\varphi + a_z\mathbf{u}_z$$

(1) 求 grad**a** 的表达式

$$\begin{aligned}
\text{grad}\mathbf{a} &= \nabla\mathbf{a} \\
&= \nabla(a_r\mathbf{u}_r + a_\varphi\mathbf{u}_\varphi + a_z\mathbf{u}_z) \\
&= \nabla(a_r\mathbf{u}_r) + \nabla(a_\varphi\mathbf{u}_\varphi) + \nabla(a_z\mathbf{u}_z) \\
&= \nabla a_r(\mathbf{u}_r)_c + \nabla a_{rc}\mathbf{u}_r + \nabla a_\varphi\mathbf{u}_{\varphi c} + \nabla a_{\varphi c}\mathbf{u}_\varphi + (\nabla a_z)\mathbf{u}_z \\
&= (\text{grad}a_r)\mathbf{u}_r + (\text{grad}a_\varphi)\mathbf{u}_\varphi + (\text{grad}a_z)\mathbf{u}_z \\
&\quad + a_{rc}\nabla\mathbf{u}_r + a_{\varphi c}\nabla\mathbf{u}_\varphi
\end{aligned}$$

现先写出 $\nabla\mathbf{u}_r$ 在直角坐标系中的表达式

$$\begin{aligned}
\nabla\mathbf{u}_r &= \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{u}_x\mathbf{u}_r) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{u}_y\mathbf{u}_r) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{u}_z\mathbf{u}_r) \\
&= \mathbf{u}_x\frac{\partial\mathbf{u}_r}{\partial x} + \mathbf{u}_y\frac{\partial\mathbf{u}_r}{\partial y}
\end{aligned}$$

式中 $\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{u}_z\mathbf{u}_r) = 0$，因 $\mathbf{u}_x$、$\mathbf{u}_r$ 均与 z 无关。

在圆柱坐标系中，

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_x\cos\varphi + \mathbf{u}_y\sin\varphi$$

$$\mathbf{u}_\varphi = -\mathbf{u}_x\sin\varphi + \mathbf{u}_y\cos\varphi$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$\frac{\partial\mathbf{u}_r}{\partial r} = 0 \qquad \frac{\partial\mathbf{u}_r}{\partial\varphi} = \mathbf{u}_\varphi \qquad \frac{\partial\mathbf{u}_\varphi}{\partial\varphi} = -\mathbf{u}_r$$

由此

$$\frac{\partial\mathbf{u}_r}{\partial x} = \cos\varphi\frac{\partial\mathbf{u}_r}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial\mathbf{u}_r}{\partial\varphi} = -\frac{\sin\varphi}{r}\mathbf{u}_\varphi$$

$$\frac{\partial\mathbf{u}_r}{\partial y} = \sin\varphi\frac{\partial\mathbf{u}_r}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial\mathbf{u}_r}{\partial\varphi} = \frac{\cos\varphi}{r}\mathbf{u}_\varphi$$

$$a_{rc}\nabla\mathbf{u}_r = \frac{a_r}{r}(-\mathbf{u}_x\sin\varphi + \mathbf{u}_y\cos\varphi)\mathbf{u}_\varphi = \frac{a_r}{r}\mathbf{u}_\varphi\mathbf{u}_\varphi$$

同理

$$a_{\varphi c}\nabla\mathbf{u}_\varphi = -\frac{a_\varphi}{r}\mathbf{u}_\varphi\mathbf{u}_r$$

最后得

$$\mathrm{grad}\mathbf{a} = \left(\mathrm{grad}a_r - \frac{a_\varphi\mathbf{u}_\varphi}{r}\right)\mathbf{u}_r + \left(\mathrm{grad}a_\varphi + \frac{a_r\mathbf{u}_\varphi}{r}\right)\mathbf{u}_\varphi + (\mathrm{grad}a_z)\mathbf{u}_z \tag{II.41}$$

另一方面，

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{u}_x + a_y\mathbf{u}_y + a_z\mathbf{u}_z$$

$$\mathrm{grad}\mathbf{a} = \nabla a_x\mathbf{u}_x + \nabla a_y\mathbf{u}_y + \nabla a_z\mathbf{u}_z \tag{II.42}$$

而在圆柱坐标系中，

$$\nabla a_x = \frac{\partial a_x}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial a_x}{\partial\varphi}\mathbf{u}_\varphi + \frac{\partial a_x}{\partial z}\mathbf{u}_z$$

$$\nabla a_y = \frac{\partial a_y}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial a_y}{\partial\varphi}\mathbf{u}_\varphi + \frac{\partial a_y}{\partial z}\mathbf{u}_z$$

$$\nabla a_z = \frac{\partial a_z}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial\varphi}\mathbf{u}_\varphi + \frac{\partial a_z}{\partial z}\mathbf{u}_z$$

代入式（II.42），即得 grad**a** 的另一表达式

$$\mathrm{grad}\mathbf{a} = \mathbf{u}_r\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial r} + \mathbf{u}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\varphi} + \mathbf{u}_z\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial z} \tag{II.43}$$

由式（II.41）可见

$$\mathrm{grad}\mathbf{u}_r = \frac{\mathbf{u}_\varphi\mathbf{u}_\varphi}{r} \tag{II.44}$$

$$\mathrm{grad}\mathbf{u}_\varphi = -\frac{\mathbf{u}_\varphi\mathbf{u}_r}{r} \tag{II.45}$$

$$\mathrm{grad}\mathbf{u}_z = 0 \tag{II.46}$$

（2）求 div$\vec{\mathbf{A}}$ 的表达式

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\vec{\mathbf{A}} &= \nabla\cdot\vec{\mathbf{A}} = \nabla\cdot(\mathbf{a}'_r\mathbf{u}_r + \mathbf{a}'_\varphi\mathbf{u}_\varphi + \mathbf{a}'_z\mathbf{u}_z)\\ &= \mathrm{div}\mathbf{a}'_r\mathbf{u}_r + \mathrm{div}\mathbf{a}'_\varphi\mathbf{u}_\varphi + \mathrm{div}\mathbf{a}'_z\mathbf{u}_z\\ &\quad + (\mathbf{a}'_{rc}\cdot\nabla)\mathbf{u}_r + (\mathbf{a}'_{\varphi c}\cdot\nabla)\mathbf{u}_\varphi\end{aligned}$$

但是

$$(\mathbf{a}'_{rc}\cdot\nabla)\mathbf{u}_r = \mathbf{a}'_r\cdot\mathrm{grad}\mathbf{u}_r = \frac{(\mathbf{a}'_r\cdot\mathbf{u}_\varphi)}{r}\mathbf{u}_\varphi = \frac{\mathbf{a}'_{r\varphi}}{r}\mathbf{u}_\varphi$$

$$= \frac{a_{\varphi r}}{r}\mathbf{u}_\varphi$$

$$(\mathbf{a}'_{\varphi c}\cdot\nabla)\mathbf{u}_\varphi = \mathbf{a}'_{\varphi c}\cdot\nabla\mathbf{u}_\varphi = \mathbf{a}'_\varphi\cdot\mathrm{grad}\mathbf{u}_\varphi$$

$$= -\frac{a_{\varphi\varphi}\mathbf{u}_r}{r}$$

最后得

$$\mathrm{div}\vec{\mathbf{A}} = \left(\mathrm{div}\mathbf{a}'_r - \frac{a_{\varphi\varphi}}{r}\right)\mathbf{u}_r + \left(\mathrm{div}\mathbf{a}'_\varphi + \frac{a_{\varphi r}}{r}\right)\mathbf{u}_\varphi + (\mathrm{div}\mathbf{a}'_z)\mathbf{u}_z \tag{II.47}$$

另一方面，我们有

$$\vec{\mathbf{A}} = \mathbf{u}_x\mathbf{a}_x + \mathbf{u}_y\mathbf{a}_y + \mathbf{u}_z\mathbf{a}_z$$

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\vec{\mathbf{A}} &= \nabla\cdot\vec{\mathbf{A}}\\ &= \nabla\cdot(\mathbf{u}_x\mathbf{a}_x + \mathbf{u}_y\mathbf{a}_y + \mathbf{u}_z\mathbf{a}_z)\\ &= \mathbf{u}_x\cdot\nabla\mathbf{a}_x + \mathbf{u}_y\cdot\nabla\mathbf{a}_y + \mathbf{u}_z\cdot\nabla\mathbf{a}_z\end{aligned}$$

利用式 (II.43)，即得

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\vec{\mathbf{A}} &= \mathbf{u}_x\cdot\left(\mathbf{u}_r\frac{\partial\mathbf{a}_x}{\partial r} + \mathbf{u}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial\mathbf{a}_x}{\partial\varphi} + \mathbf{u}_z\frac{\partial\mathbf{a}_x}{\partial z}\right)\\ &\quad + \mathbf{u}_y\cdot\left(\mathbf{u}_r\frac{\partial\mathbf{a}_y}{\partial r} + \mathbf{u}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial\mathbf{a}_y}{\partial\varphi} + \mathbf{u}_z\frac{\partial\mathbf{a}_y}{\partial z}\right)\\ &\quad + \mathbf{u}_z\cdot\left(\mathbf{u}_r\frac{\partial\mathbf{a}_z}{\partial r} + \mathbf{u}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial\mathbf{a}_z}{\partial\varphi} + \mathbf{u}_z\frac{\partial\mathbf{a}_z}{\partial z}\right)\\ &= \mathbf{u}_r\cdot\frac{\partial\vec{\mathbf{A}}}{\partial r} + \mathbf{u}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial\vec{\mathbf{A}}}{\partial r} + \mathbf{u}_z\cdot\frac{\partial\vec{\mathbf{A}}}{\partial z}\end{aligned}$$

现分别求出各导数

1)

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial r}=\left(\frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial r}\right)\mathbf{a}_r+\mathbf{u}_r\frac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial r}+\left(\frac{\partial \mathbf{u}_\varphi}{\partial r}\right)\mathbf{a}_\varphi+\mathbf{u}_\varphi\frac{\partial \mathbf{a}_\varphi}{\partial r}$$

$$+\mathbf{u}_z\frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial r}=\mathbf{u}_r\frac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial r}+\mathbf{u}_\varphi\frac{\partial \mathbf{a}_\varphi}{\partial r}+\mathbf{u}_z\frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial r}$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial r}=0,\ \frac{\partial \mathbf{u}_\varphi}{\partial r}=0\right)$$

故

$$\mathbf{u}_r\cdot\frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial r}=\frac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial r}$$

2)

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial \varphi}=\left(\frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial \varphi}\right)\mathbf{a}_r+\mathbf{u}_r\frac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial \varphi}+\left(\frac{\partial \mathbf{u}_\varphi}{\partial \varphi}\right)\mathbf{a}_\varphi+\mathbf{u}_\varphi\frac{\partial \mathbf{a}_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$+\mathbf{u}_z\frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial \varphi}=\mathbf{u}_\varphi\mathbf{a}_r+\mathbf{u}_r\frac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial \varphi}-\mathbf{u}_r\mathbf{a}_\varphi$$

$$+\mathbf{u}_\varphi\frac{\partial \mathbf{a}_\varphi}{\partial \varphi}+\mathbf{u}_z\frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial \varphi},$$

因

$$\frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial \varphi}=\mathbf{u}_\varphi\qquad\frac{\partial \mathbf{u}_\varphi}{\partial \varphi}=-\mathbf{u}_r$$

于是

$$\mathbf{u}_\varphi\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial \varphi}=\frac{\mathbf{a}_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \mathbf{a}_\varphi}{\partial \varphi}$$

3)

$$\mathbf{u}_z\cdot\frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial z}=\frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial z}$$

最后得 $\mathrm{div}\vec{\mathbf{A}}$ 的另一形式:

$$\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{a}_r}{r} + \frac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathbf{a}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial z} \qquad \text{(II.48)}$$

(3) 求 $\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 的表达式

$$\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \nabla \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \nabla \times (\mathbf{u}_x\mathbf{a}_x + \mathbf{u}_y\mathbf{a}_y + \mathbf{u}_z\mathbf{a}_z)$$
$$= -\mathbf{u}_x \times \nabla\mathbf{a}_x - \mathbf{u}_y \times \nabla\mathbf{a}_y - \mathbf{u}_z \times \nabla\mathbf{a}_z$$

利用式(43),即得

$$\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \mathbf{u}_r \times \frac{\partial \overleftrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial r} + \mathbf{u}_\varphi \times \frac{1}{r}\frac{\partial \overleftrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial \varphi} + \mathbf{u}_z \times \frac{\partial \overleftrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial z}$$

但是

$$\mathbf{u}_r \times \frac{\partial \overleftrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial r} = \mathbf{u}_z\frac{\partial \mathbf{a}_\varphi}{\partial r} - \mathbf{u}_\varphi\frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial r}$$

$$\frac{1}{r}\mathbf{u}_\varphi \times \frac{\partial \overleftrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial \varphi} = \frac{1}{r}\left(-\mathbf{u}_z\frac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial \varphi} + \mathbf{u}_z\mathbf{a}_\varphi + \mathbf{u}_r\frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial \varphi}\right)$$

$$\mathbf{u}_z \times \frac{\partial \overleftrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial z} = \mathbf{u}_\varphi\frac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial z} - \mathbf{u}_r\frac{\partial \mathbf{a}_\varphi}{\partial z}$$

于是得 $\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 的一种表达式:

$$\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \mathbf{u}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \mathbf{a}_\varphi}{\partial z}\right) + \mathbf{u}_\varphi\left(\frac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial r}\right)$$
$$+ \mathbf{u}_z\left(\frac{\mathbf{a}_\varphi}{r} + \frac{\partial \mathbf{a}_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial \varphi}\right) \qquad \text{(II.49)}$$

我们还可以推导出 $\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 的另一种表达式:

$$\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \nabla \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \nabla \times (\mathbf{a}'_r\mathbf{u}_r + \mathbf{a}'_\varphi\mathbf{u}_\varphi + \mathbf{a}'_z\mathbf{u}_z)$$
$$= (\mathrm{rot}\mathbf{a}'_r)\mathbf{u}_r + (\mathrm{rot}\mathbf{a}_\varphi)\mathbf{u}_\varphi + (\mathrm{rot}\mathbf{a}'_z)\mathbf{u}_z$$
$$- \mathbf{a}'_r \times \mathrm{grad}\mathbf{u}_r - \mathbf{a}'_\varphi \times \mathrm{grad}\mathbf{u}_\varphi$$

但是

$$-\mathbf{a}'_r \times \mathrm{grad}\mathbf{u}_r = -\left(\frac{\mathbf{a}_r \times \mathbf{u}_\varphi}{r}\right)\mathbf{u}_\varphi$$

$$-\mathbf{a}'_\varphi \times \mathrm{grad}\mathbf{u}_\varphi = \frac{\mathbf{a}'_\varphi \times \mathbf{u}_\varphi}{r}\mathbf{u}_r$$

代入后得

$$\mathrm{rot}\vec{\mathbf{A}} = \left(\mathrm{rot}\mathbf{a}'_r + \frac{\mathbf{a}'_\varphi \times \mathbf{u}_\varphi}{r}\right)\mathbf{u}_r + \left(\mathrm{rot}\mathbf{a}_\varphi - \frac{\mathbf{a}'_r \times \mathbf{u}_\varphi}{r}\right)\mathbf{u}_\varphi + (\mathrm{rot}\mathbf{a}'_z)\mathbf{u}_z \tag{II.50}$$

(4) 求 $\nabla^2\vec{\mathbf{A}}$ 的表达式. 我们已经证明 $\nabla^2\vec{\mathbf{A}} = \mathrm{graddiv}\vec{\mathbf{A}} - \mathrm{rotrot}\vec{\mathbf{A}}$, 而 $\mathrm{div}\vec{\mathbf{A}}$、$\mathrm{rot}\vec{\mathbf{A}}$ 的表达式在 $\mathbf{u}_r$、$\mathbf{u}_\varphi$、$\mathbf{u}_z$ 都是并矢的前项这一条件下，形式上与 $\mathrm{div}\mathbf{a}$、$\mathrm{rot}\mathbf{a}$ 的表达式完全相同，差别仅仅是标量投影换成了矢量投影，而这并不影响微分运算过程，因此可直接写出 $\nabla^2\vec{\mathbf{A}}$ 的表达式:

$$\nabla^2\vec{\mathbf{A}} = \mathbf{u}_r\left(\nabla\mathbf{a}_r - \frac{\mathbf{a}_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial\mathbf{a}_\varphi}{\partial\varphi}\right) + \mathbf{u}_\varphi\left(\nabla^2\mathbf{a}_\varphi - \frac{\mathbf{a}_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial\mathbf{a}_r}{\partial\varphi}\right) + \mathbf{u}_z\nabla^2\mathbf{a}_z \tag{II.51}$$

II.8 球坐标系中 $\mathrm{grad}\mathbf{a}$、$\mathrm{div}\vec{\mathbf{A}}$、$\mathrm{rot}\vec{\mathbf{A}}$ 及 $\nabla^2\vec{\mathbf{A}}$ 的表达式

在球坐标系中所用的推导方法与上一节相同，因此我们将只写出推导过程中的主要步骤而不作详细的证明.

$\vec{\mathbf{A}}$ 可写成

$$\vec{\mathbf{A}} = \mathbf{a}'_r\mathbf{u}_r + \mathbf{a}'_\theta\mathbf{u}_\theta + \mathbf{a}'_\varphi\mathbf{u}_\varphi = \mathbf{u}_r\mathbf{a}_r + \mathbf{u}_\theta\mathbf{a}_\theta + \mathbf{u}_\varphi\mathbf{a}_\varphi$$

$\mathbf{a}$ 可写成

$$\mathbf{a} = a_r\mathbf{u}_r + a_\theta\mathbf{u}_\theta + a_\varphi\mathbf{u}_\varphi$$

(1) 求 grad**a** 的表达式

$$\begin{aligned}\text{grad}\mathbf{a} &= \nabla\mathbf{a}\\ &= \nabla(a_r\mathbf{u}_r + a_\theta\mathbf{u}_\theta + a_\varphi\mathbf{u}_\varphi)\\ &= (\nabla a_r)\mathbf{u}_{rc} + (\nabla a_\theta)\mathbf{u}_{\theta c} + (\nabla a_\varphi)\mathbf{u}_{\varphi c}\\ &\quad + a_{rc}\nabla\mathbf{u}_r + a_{\theta c}\nabla\mathbf{u}_\theta + a_{\varphi c}\nabla\mathbf{u}_\varphi\\ &= \text{grad}a_r\mathbf{u}_r + \text{grad}a_\theta\mathbf{u}_\theta + \text{grad}a_\varphi\mathbf{u}_\varphi\\ &\quad + a_r\text{grad}\mathbf{u}_r + a_\theta\text{grad}\mathbf{u}_\theta + a_\varphi\text{grad}\mathbf{u}_\varphi\end{aligned}$$

先求出 grad$\mathbf{u}_r$. 按定义

$$\begin{aligned}\text{grad}\mathbf{u}_r = \nabla\mathbf{u}_r &= \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{u}_x\mathbf{u}_r) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{u}_y\mathbf{u}_r) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{u}_z\mathbf{u}_r)\\ &= \mathbf{u}_x\frac{\partial\mathbf{u}_r}{\partial x} + \mathbf{u}_y\frac{\partial\mathbf{u}_r}{\partial y} + \mathbf{u}_z\frac{\partial\mathbf{u}_r}{\partial z}\end{aligned} \tag{II.52}$$

在球坐标系中，

$$\frac{\partial\mathbf{u}_r}{\partial x} = \sin\theta\cos\varphi\,\frac{\partial\mathbf{u}_r}{\partial r} + \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\,\frac{\partial\mathbf{u}_r}{\partial\theta} - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\,\frac{\partial\mathbf{u}_r}{\partial\varphi}$$

$$= \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\mathbf{u}_\theta - \frac{\sin\varphi}{r}\mathbf{u}_\varphi$$

$$\frac{\partial\mathbf{u}_r}{\partial y} = \sin\theta\sin\varphi\,\frac{\partial\mathbf{u}_r}{\partial r} + \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\,\frac{\partial\mathbf{u}_r}{\partial\theta} + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\,\frac{\partial\mathbf{u}_r}{\partial\varphi}$$

$$= \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\mathbf{u}_\theta + \frac{\cos\varphi}{r}\mathbf{u}_\varphi$$

$$\frac{\partial\mathbf{u}_r}{\partial z} = \cos\theta\frac{\partial\mathbf{u}_r}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial\mathbf{u}_r}{\partial\theta} = -\frac{\sin\theta}{r}\mathbf{u}_\theta$$

代入式 (II.52)，得

$$\text{grad}\mathbf{u}_r = \frac{1}{r}\mathbf{u}_\theta\mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r}\mathbf{u}_\varphi\mathbf{u}_\varphi$$

用同样方法，可以得到

$$\text{grad}\mathbf{u}_\theta = -\frac{1}{r}\mathbf{u}_\theta\mathbf{u}_r + \frac{1}{r\tan\theta}\mathbf{u}_\varphi\mathbf{u}_\varphi$$

$$\mathrm{grad}\mathbf{u}_\varphi = -\frac{1}{r}\mathbf{u}_\varphi\mathbf{u}_r - \frac{1}{r\tan\theta}\mathbf{u}_\varphi\mathbf{u}_\theta$$

最后得

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\mathbf{a} = &\left(\mathrm{grad}a_r - \frac{a_\varphi\mathbf{u}_\varphi}{r} - \frac{a_\theta\mathbf{u}_\theta}{r}\right)\mathbf{u}_r \\ &+ \left(\mathrm{grad}a_\theta + \frac{a_r\mathbf{u}_\theta}{r} - \frac{a_\varphi\mathbf{u}_\varphi}{r\tan\theta}\right)\mathbf{u}_\theta \\ &+ \left(\mathrm{grad}a_\varphi + \left(\frac{a_r}{r} + \frac{a_\theta}{r\tan\theta}\right)\mathbf{u}_\varphi\right)\mathbf{u}_\varphi \quad \text{(II.53)}\end{aligned}$$

我们还可求出 grad**a** 的另一种表达式:

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\mathbf{a} = \nabla\mathbf{a} &= \nabla(a_x\mathbf{u}_x + a_y\mathbf{u}_y + a_z\mathbf{u}_z) \\ &= (\nabla a_x)\mathbf{u}_x + (\nabla a_y)\mathbf{u}_y + (\nabla a_z)\mathbf{u}_z\end{aligned}$$

在球坐标系中,

$$\nabla a_x = \frac{\partial a_x}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial a_x}{\partial\theta}\mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_x}{\partial\varphi}\mathbf{u}_\varphi$$

$$\nabla a_y = \frac{\partial a_y}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial a_y}{\partial\theta}\mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_y}{\partial\varphi}\mathbf{u}_\varphi$$

$$\nabla a_z = \frac{\partial a_z}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial\theta}\mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_z}{\partial\varphi}\mathbf{u}_\varphi$$

代入上式,即得

$$\mathrm{grad}\mathbf{a} = \mathbf{u}_r\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial r} + \frac{1}{r}\mathbf{u}_\theta\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\mathbf{u}_\varphi\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\varphi} \quad \text{(II.54)}$$

(2) 求 $\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 的表达式

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}} &= \mathrm{div}\mathbf{a}'_r\mathbf{u}_r + \mathrm{div}\mathbf{a}'_\theta\mathbf{u}_\theta + \mathrm{div}\mathbf{a}'_\varphi\mathbf{u}_\varphi \\ &+ \mathbf{a}'_r\cdot\mathrm{grad}\mathbf{u}_r + \mathbf{a}'_\theta\cdot\mathrm{grad}\mathbf{u}_\theta + \mathbf{a}'_\varphi\cdot\mathrm{grad}\mathbf{u}_\varphi\end{aligned}$$

但是

$$\mathbf{a}'_r\cdot\mathrm{grad}\mathbf{u}_r = \frac{a_{\theta r}\mathbf{u}_\theta}{r} + \frac{a_{\varphi r}\mathbf{u}_\varphi}{r}$$

$$\mathbf{a}'_\theta \cdot \mathrm{grad}\mathbf{u}_\theta = -\frac{a_{\theta\theta}\mathbf{u}_\theta}{r} + \frac{a_{\varphi\theta}}{r\tan\theta}\mathbf{u}_\varphi$$

$$\mathbf{a}'_\varphi \cdot \mathrm{grad}\mathbf{u}_\varphi = -\frac{a_{\varphi\varphi}}{r}\mathbf{u}_r - \frac{a_{\varphi\varphi}}{r\tan\theta}\mathbf{u}_\theta$$

代入上列 $\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 的公式，得

$$\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \left(\mathrm{div}\mathbf{a}'_r - \frac{a_{\theta\theta}+a_{\varphi\varphi}}{r}\right)\mathbf{u}_r + \left(\mathrm{div}\mathbf{a}'_\theta + \frac{a_{\theta r}}{r} - \frac{a_{\varphi\varphi}}{r\tan\theta}\right)\mathbf{u}_\theta + \left(\mathrm{div}\mathbf{a}'_\varphi + \frac{a_{\varphi r}}{r} + \frac{a_{\varphi\theta}}{r\tan\theta}\right)\mathbf{u}_\varphi \qquad (\mathrm{II}.55)$$

我们还可求出 $\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 的另一形式：

$$\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \mathbf{u}_x\cdot\nabla a_x + \mathbf{u}_y\cdot\nabla a_y + \mathbf{u}_z\cdot\nabla a_z$$

$$= \mathbf{u}_r\cdot\frac{\partial\overleftrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial r} + \mathbf{u}_\theta\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial\overleftrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial\theta} + \mathbf{u}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial\overleftrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial\varphi}$$

但是

$$\mathbf{u}_r\cdot\frac{\partial\overleftrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial r} = \frac{\partial\mathbf{a}_r}{\partial r}$$

$$\frac{1}{r}\mathbf{u}_\theta\cdot\frac{\partial\overleftrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial\theta} = \frac{1}{r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\mathbf{a}_\theta}{\partial\theta}$$

$$\frac{1}{r\sin\theta}\mathbf{u}_\varphi\cdot\frac{\partial\overleftrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial\varphi} = \frac{1}{r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\mathbf{a}_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{1}{r\tan\theta}\mathbf{a}_\theta$$

最后得

$$\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \frac{\partial\mathbf{a}_r}{\partial r} + 2\frac{\mathbf{a}_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\mathbf{a}_\theta}{\partial\theta} + \frac{\mathbf{a}_\theta}{r\tan\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\mathbf{a}_\varphi}{\partial\varphi} \qquad (\mathrm{II}.56)$$

(3) 求 $\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 的表达式

$$\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \nabla \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}}$$
$$= (\mathrm{rot}\mathbf{a}'_r)\mathbf{u}_r + (\mathrm{rot}\mathbf{a}'_\theta)\mathbf{u}_\theta + (\mathrm{rot}\mathbf{a}'_\varphi)\mathbf{u}_\varphi$$
$$- \mathbf{a}'_r \times \mathrm{grad}\mathbf{u}_r - \mathbf{a}'_\theta \times \mathrm{grad}\mathbf{u}_\theta - \mathbf{a}'_\varphi \times \mathrm{grad}\mathbf{u}_\varphi$$

将三个叉乘求出后代入上式，即得

$$\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \left(\mathrm{rot}\mathbf{a}'_r + \frac{\mathbf{a}'_\theta \times \mathbf{u}_\theta}{r} + \frac{\mathbf{a}'_\varphi \times \mathbf{u}_\varphi}{r}\right)\mathbf{u}_r$$
$$+ \left(\mathrm{rot}\mathbf{a}'_\theta - \frac{\mathbf{a}'_r \times \mathbf{u}_\theta}{r} + \frac{\mathbf{a}'_\varphi \times \mathbf{u}_\varphi}{r\tan\theta}\right)\mathbf{u}_\theta$$
$$+ \left(\mathrm{rot}\mathbf{a}'_\varphi - \frac{\mathbf{a}'_r \times \mathbf{u}_\varphi}{r} - \frac{\mathbf{a}'_\theta \times \mathbf{u}_\varphi}{r\tan\theta}\right)\mathbf{u}_\varphi \tag{II.57}$$

我们还可求出 $\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 的另一表达式：

$$\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \nabla \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}} = -\mathbf{u}_x \times \nabla a_x - \mathbf{u}_y \times \nabla a_y - \mathbf{u}_z \times \nabla a_z$$
$$= \mathbf{u}_r \times \frac{\partial \overleftrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial r} + \mathbf{u}_\theta \times \frac{1}{r}\frac{\partial \overleftrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial \theta} + \mathbf{u}_\varphi \times \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \overleftrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial \varphi}$$

但是

$$\frac{1}{r}\mathbf{u}_\theta \times \frac{\partial \overleftrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial \theta} = \frac{-\mathbf{u}_\varphi}{r}\frac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial \theta} + \frac{\mathbf{u}_\varphi}{r}\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r}\mathbf{u}_r\frac{\partial \mathbf{a}_\varphi}{\partial \theta}$$

$$\mathbf{u}_r \times \frac{\partial \overleftrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial r} = \mathbf{u}_\varphi\frac{\partial \mathbf{a}_\theta}{\partial r} - \mathbf{u}_\theta\frac{\partial \mathbf{a}_\varphi}{\partial r}$$

$$\frac{1}{r\sin\theta}\mathbf{u}_\varphi \times \frac{\partial \overleftrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial \varphi} = \frac{1}{r\sin\theta}\mathbf{u}_\theta\frac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial \varphi} - \frac{\mathbf{u}_r}{r\sin\theta}\frac{\partial \mathbf{a}_\theta}{\partial \varphi}$$
$$- \frac{\mathbf{u}_\theta}{r}\mathbf{a}_\varphi + \frac{\mathbf{u}_r}{r\tan\theta}\mathbf{a}_\varphi$$

代入上式，最后得

$$\mathrm{rot}\vec{\mathbf{A}} = \mathbf{u}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \mathbf{a}_\varphi}{\partial\theta} + \frac{\mathbf{a}_\varphi}{r\tan\theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \mathbf{a}_\theta}{\partial\varphi}\right)$$

$$+ \mathbf{u}_\theta\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial \mathbf{a}_\varphi}{\partial r} - \frac{\mathbf{a}_\varphi}{r}\right)$$

$$+ \mathbf{u}_\varphi\left(\frac{\partial \mathbf{a}_\theta}{\partial r} + \frac{\mathbf{a}_\theta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial\theta}\right) \qquad \text{(II.58)}$$

(4) 求 $\nabla^2\vec{\mathbf{A}}$ 的表达式

根据在圆柱坐标系中求 $\nabla^2\vec{\mathbf{A}}$ 的理由，我们可以立即写出：

$$\nabla^2\vec{\mathbf{A}} = \mathrm{graddiv}\vec{\mathbf{A}} - \mathrm{rotrot}\vec{\mathbf{A}}$$

$$= \mathbf{u}_r\left(\nabla^2\mathbf{a}_r - \frac{2\mathbf{a}_r}{r^2} - \frac{2\cot\theta}{r^2}\mathbf{a}_\theta - \frac{2}{r^2}\frac{\partial \mathbf{a}_\theta}{\partial\theta} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial \mathbf{a}_\varphi}{\partial\varphi}\right)$$

$$+ \mathbf{u}_\theta\left(\nabla^2\mathbf{a}_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial\theta} - \frac{\mathbf{a}_\theta}{r^2\sin^2\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial \mathbf{a}_\varphi}{\partial\varphi}\right)$$

$$+ \mathbf{u}_\varphi\left(\nabla^2\mathbf{a}_\varphi + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial\varphi} - \frac{\mathbf{a}_\varphi}{r^2\sin^2\theta}\right.$$

$$\left. + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial \mathbf{a}_\theta}{\partial\varphi}\right) \qquad \text{(II.59)}$$

(5) 求 $\mathrm{grad}\mathbf{u}_r$、$\mathrm{grad}\mathbf{u}_\theta$、$\mathrm{grad}\mathbf{u}_\varphi$ 的表达式

在公式 (II.53) 中将 $\mathbf{a}$ 分别换成 $\mathbf{u}_r$、$\mathbf{u}_\theta$、$\mathbf{u}_\varphi$ 立即可得

$$\mathrm{grad}\mathbf{u}_r = \frac{\mathbf{u}_\theta\mathbf{u}_\theta}{r} + \frac{\mathbf{u}_\varphi\mathbf{u}_\varphi}{r} \qquad \text{(II.60)}$$

$$\mathrm{grad}\mathbf{u}_\theta = -\frac{\mathbf{u}_\theta\mathbf{u}_r}{r} + \frac{\mathbf{u}_\varphi\mathbf{u}_\varphi}{r\tan\theta} \qquad \text{(II.61)}$$

$$\mathrm{grad}\mathbf{u}_\varphi = -\frac{\mathbf{u}_\varphi\mathbf{u}_r}{r} - \frac{\mathbf{u}_\varphi\mathbf{u}_\theta}{r\tan\theta} \qquad \text{(II.62)}$$

II.9 几个基本定义与某些并矢恒等式

为了便于读者查阅，现将并矢代数中的几个基本定义和恒等式汇集如下。

II.9.1 几个基本定义

(1) (**ab**) 和 (**cd**) 两个并矢的点积为另一并矢:

$$(\mathbf{ab})\cdot(\mathbf{cd})=\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{d}=(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{ad}$$

(2) 并矢 (**ab**) 与矢量 **c** 的点积为另一矢量:

$$(\mathbf{ab})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$$

$$\mathbf{c}\cdot(\mathbf{ab})=(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}$$

(3) 并矢 (**ab**) 与矢量 **c** 的叉积为另一并矢:

$$(\mathbf{ab})\times\mathbf{c}=\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$$

$$\mathbf{c}\times(\mathbf{ab})=(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\mathbf{b}$$

(4) 两个并矢的双点积为一标量:

$$(\mathbf{ab}):(\mathbf{cd})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})$$

(5) 两个并矢的双叉积为一并矢:

$$(\mathbf{ab})\overset{\times}{\times}(\mathbf{cd})=(\mathbf{a}\times\mathbf{cb}\times\mathbf{d})$$

(6) 并矢 $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 的迹 $|\overleftrightarrow{\mathbf{A}}|$ 由下式表示:

$$|\overleftrightarrow{\mathbf{A}}|=a_{xx}+a_{yy}+a_{zz}$$

II.9.2 某些并矢恒等式

令 **a**、**b** 为矢量，$\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$、$\overleftrightarrow{\mathbf{B}}$ 为并矢，$\overleftrightarrow{\mathbf{I}}$ 为恒等并矢。下列恒等式成立:

(1) $(\mathbf{a}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}})\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot(\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{b}$;

(2) $[\mathbf{a}\times\overleftrightarrow{\mathbf{A}}]\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times[\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\times\mathbf{b}]=\mathbf{a}\times\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\times\mathbf{b}$;

(3) $[\mathbf{a}\times\overleftrightarrow{\mathbf{A}}]\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\times(\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{b})=\mathbf{a}\times\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{b}$;

(4) $(\mathbf{a}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}})\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot[\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\times\mathbf{b}]=\mathbf{a}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\times\mathbf{b}$;

(5) $\mathbf{a}\cdot\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{A}}}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{A}}}\cdot\mathbf{a}$($\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{A}}}$为$\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$的转置并矢);

(6) $(\mathbf{a}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}})\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{B}}=\mathbf{a}\cdot(\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{B}})=\mathbf{a}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{B}}$;

(7) $(\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{B}})\cdot\mathbf{a}-\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\cdot(\overleftrightarrow{\mathbf{B}}\cdot\mathbf{a})=\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{B}}\cdot\mathbf{a}$;

(8) $(\mathbf{a}\times\overleftrightarrow{\mathbf{A}})\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{B}}=\mathbf{a}\times(\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{B}})=\mathbf{a}\times\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{B}}$;

(9) $(\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{B}})\times\mathbf{a}=\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\cdot[\overleftrightarrow{\mathbf{B}}\times\mathbf{a}]=\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{B}}\times\mathbf{a}$;

(10) $\mathbf{a}\times[\mathbf{b}\times\overleftrightarrow{\mathbf{A}}]=\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}})-\overleftrightarrow{\mathbf{A}}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$;

(11) $[\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\times\mathbf{a}]\cdot\mathbf{b}=\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\cdot[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]=-\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\cdot[\mathbf{b}\times\mathbf{a}]$

$=-[\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\times\mathbf{b}]\cdot\mathbf{a}$;

(12) $[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}=\mathbf{a}\cdot[\mathbf{b}\times\overleftrightarrow{\mathbf{A}}]=-\mathbf{b}\cdot[\mathbf{a}\times\overleftrightarrow{\mathbf{A}}]$;

(13) $[\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\times\mathbf{a}]\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{B}}=\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\cdot[\mathbf{a}\times\overleftrightarrow{\mathbf{B}}]$;

(14) $[\mathbf{b}\times\mathbf{a}]\times\mathbf{c}=\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})$

$=(\mathbf{ab})\cdot\mathbf{c}-(\mathbf{ba})\cdot\mathbf{c}$

$=(\mathbf{ab}-\mathbf{ba})\cdot\mathbf{c}$;

(15) $[\overleftrightarrow{\mathbf{I}}\times\mathbf{a}]\cdot\mathbf{b}=\overleftrightarrow{\mathbf{I}}\cdot[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$

$=(\mathbf{a}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{I}})\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot[\overleftrightarrow{\mathbf{I}}\times\mathbf{b}]$;

(16) $\overleftrightarrow{\mathbf{I}}\times[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]=(\overleftrightarrow{\mathbf{I}}\cdot\mathbf{b})\mathbf{a}-(\overleftrightarrow{\mathbf{I}}\cdot\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}$

$=\mathbf{ba}-\mathbf{ab}$;

(17) $[\overleftrightarrow{\mathbf{I}}\times\mathbf{a}]\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}=\overleftrightarrow{\mathbf{I}}\cdot[\mathbf{a}\times\overleftrightarrow{\mathbf{I}}]=\mathbf{a}\times\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$

$$= \mathbf{a} \times (\ddot{\mathbf{I}} \cdot \vec{\ddot{\mathbf{A}}}(= [\mathbf{a} \times \ddot{\mathbf{I}}] \cdot \vec{\ddot{\mathbf{A}}};$$

(18) $\ddot{\mathbf{I}} \times \mathbf{a} = [\ddot{\mathbf{I}} \times \mathbf{a}] \cdot \ddot{\mathbf{I}} = \ddot{\mathbf{I}} \cdot [\mathbf{a} \times \ddot{\mathbf{I}}] = \mathbf{a} \times \ddot{\mathbf{I}};$

(19) $\ddot{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \ddot{\mathbf{I}};$

(20) $\ddot{\mathbf{I}} \cdot \vec{\ddot{\mathbf{A}}} = \vec{\ddot{\mathbf{A}}} \cdot \ddot{\mathbf{I}}.$

附录 III　各种单位制之间的换算表

表 III. 1　高斯厘米-克-秒制至米-千克-秒制换算表

物 理 量	公式变换时改用符号	数值变换时乘以系数
力 F(达因)	10^5F	10^{-5}牛
长度 l(厘米)	10^2l	10^{-2}米
质量 m(克)	10^3m	10^{-3}千克
功率 P(尔格/秒)	10^7P	10^{-7}瓦
电容量 C	$9\times10^{11}C$	$9^{-1}\times10^{-11}$法
介质常数 ε	$36\pi\times10^9\varepsilon$	$(36\pi)^{-1}\times10^{-9}$法/米
电荷 q	3×10^9q	$3^{-1}\times10^{-9}$ 库
电荷密度(体积) ρ	$3\times10^3\rho$	$3^{-1}\times10^{-3}$ 库/米^3
电导 G	$9\times10^{11}G$	$9^{-1}\times10^{-11}$ 姆
电导率(面积) γ_s	$9\times10^{11}\gamma_s$	$9^{-1}\times10^{-11}$ 姆
电导率(体积) γ	$9\times10^9\gamma$	$9^{-1}\times10^{-9}$ 姆/米
电流 I	3×10^9I	$3^{-1}\times10^{-9}$ 安
电流密度(面积) i_s	3×10^7i_s	$3^{-1}\times10^{-7}$ 安/米
电流密度(体积) i	3×10^5i	$3^{-1}\times10^{-5}$ 安/米^2
电通量密度 D	$12\pi\times10^5D$	$(12\pi)^{-1}\times10^{-5}$库/米^2
电动势 $\mathscr{E}$	$(300)^{-1}\mathscr{E}(\varphi)$	300 伏
电场强度 E	$3^{-1}\times10^{-4}E$	3×10^4 伏/米
磁场强度 H	$4\pi\times10^{-3}H$	$(4\pi)^{-1}\times10^3$安匝/米
磁通量 N_m	10^8N_m	10^{-8} 韦
阻抗 Z	$9^{-1}\times10^{-11}Z$	9×10^{11} 欧
电感系数 L	$9^{-1}\times10^{-11}L$	9×10^{11} 亨
磁通量密度 B	10^4B	10^{-4} 韦/米^2
磁矩(偶极子) p_m	$(4\pi)^{-1}\times10^{10}p_m$	$4\pi\times10^{-10}$ 韦米
磁矩(电流环) p_i	10^3p_i	10^{-3} 安米^2
磁化强度(偶极子) M	$(4\pi)^{-1}10^4M$	$4\pi\times10^4$ 韦/米^2
磁化强度(电流环) M'	$10^{-3}M'$	10^3安/米

续表 III. 1

物 理 量	公式变换时改用符号	数值变换时乘以系数
磁动势 Ω	$4\pi \times 10^{-1}\Omega$	$(4\pi)^{-1} \times 10$ 安匝
导磁率 μ	$(4\pi)^{-1} \times 10^{7}\mu$	$4\pi \times 10^{-7}$ 亨/米
磁极强度 m	$(4\pi)^{-1} \times 10^{8}m$	$4\pi \times 10^{-8}$ 韦
电位差 V	$(300)^{-1}V$	300 伏
磁势 A	$10^{6}A$	10^{-6} 韦/米
电抗 X	$9^{-1} \times 10^{-11}X$	9×10^{11} 欧
磁阻 R'	$4\pi \times 10^{-9}R'$	$(4\pi)^{-1} \times 10^{9}$ 安匝/韦
电阻 R	$9^{-1} \times 10^{-11}R$	9×10^{11} 欧
电阻率(表面) s	$9^{-1} \times 10^{-11}s$	9×10^{11} 欧
电阻率(体积) τ	$9^{-1} \times 10^{-9}\tau$	9×10^{9} 欧
rot	10^{-2}rot	
div	10^{-2}div	
grad	10^{-2}grad	
∇	$10^{-2}\nabla$	

表 III. 2 米-千克-秒制至高斯厘米-克-秒制换算表

物 理 量	公式变换时改用符号	数值变换时乘以系数
力 F	$10^{-5}F$	10^{5} 达因
长度 l	$10^{-2}l$	10^{2} 厘米
质量 m	$10^{-3}m$	10^{3} 克
功率 P	$10^{-7}P$	10^{7} 尔格
电容量 C	$9^{-1} \times 10^{-11}C$	9×10^{11}
介质常数 ε	$(36\pi)^{-1} \times 10^{-9}\varepsilon$	$36\pi \times 10^{9}$
电荷 q	$3^{-1} \times 10^{-9}q$	3×10^{9}
电荷密度(体积) ρ	$3^{-1} \times 10^{-3}\rho$	3×10^{3}
电荷密度(面积) ρ_s	$3^{-1} \times 10^{-5}\rho_s$	3×10^{5}
电导 G	$9^{-1} \times 10^{-11}G$	9×10^{11}
电导率(面积) γ_s	$9^{-1} \times 10^{-11}\gamma_s$	9×10^{11}
电导率(体积) γ	$9^{-1} \times 10^{-9}\gamma$	9×10^{9}
电流 I	$3^{-1} \times 10^{-9}I$	3×10^{9}
电流密度(面积) i_s	$3^{-1} \times 10^{-7}i_s$	3×10^{7}
电流密度(体积) i	$3^{-1} \times 10^{-5}i$	3×10^{5}

续表 III. 2

物 理 量	公式变换时改用符号	数值变换时乘以系数
电通量密度 D	$(12\pi)^{-1} \times 10^{-5}D$	$12\pi \times 10^{5}$
电动势 $\mathscr{E}$，标量位 φ	$300\mathscr{E}(\varphi)$	$(300)^{-1}$
电场强度 E	$3 \times 10^{4}E$	$3^{-1}\times10^{-4}$
磁场强度 H	$(4\pi)^{-1} \times 10^{3}H$	$4\pi \times 10^{-3}$ 奥斯特
磁通量 N_m	$10^{-8}N_m$	10^{8} 麦克斯韦
阻抗 Z	$9 \times 10^{11}Z$	$9^{-1}\times10^{-11}$
电感系数 L	$9 \times 10^{11}L$	$9^{-1}\times10^{-11}$
磁通量密度 B	$10^{-4}B$	10^{4} 高斯
磁矩(偶极子) p_m	$4\pi \times 10^{-10}p_m$	$(4\pi)^{-1} \times 10^{10}$
磁矩(电流环) p_i	$10^{-3}p_i$	10^{3}
磁化强度(偶极子) M	$4\pi \times 10^{-4}M$	$(4\pi)^{-1} \times 10^{4}$
磁化强度(电流环) M'	$10^{3}M'$	10^{-3}
磁动势 Ω	$(4\pi)^{-1} \times 10\Omega$	$4\pi \times 10^{-1}$
导磁率 μ	$4\pi \times 10^{-7}\mu$	$(4\pi)^{-1} \times 10^{7}$
磁极强度 m	$4\pi \times 10^{-8}m$	$(4\pi)^{-1} \times 10^{8}$
电位差 V	$300V$	$(300)^{-1}$
磁势 A	$10^{-6}A$	10^{6}
电抗 X	$9 \times 10^{11}X$	$9^{-1}\times10^{-11}$
磁阻 R'	$(4\pi)^{-1} \times 10^{9}R'$	$4\pi \times 10^{-9}$
电阻 R	$9 \times 10^{11}R$	$9^{-1}\times10^{-11}$
电阻率(表面) s	$9 \times 10^{11}s$	$9^{-1}\times10^{-11}$
电阻率(体积) τ	$9 \times 10^{9}\tau$	$9^{-1}\times10^{-9}$
rot	10^{2}rot	
div	10^{2}div	
grad	10^{2}grad	
∇	$10^{2}\nabla$	

表 III. 3　静电厘米-克-秒制至米-千克-秒制换算表

物 理 量	公式变换时改用符号	数值变换时乘以系数
力 F	10^5F	10^{-5}
长度 l	10^2l	10^{-2}
质量 m	10^3m	10^{-3}
功率 P	10^7P	10^{-7}
电容量 C	$9\times10^{11}C$	$9^{-1}\times10^{-11}$
介质常数 ε	$36\pi\times10^9\varepsilon$	$(36\pi)^{-1}\times10^{-9}$
电荷 q	3×10^9q	$3^{-1}\times10^{-9}$
电荷密度(体积) ρ	$3\times10^3\rho$	$3^{-1}\times10^{-3}$
电导 G	$9\times10^{11}G$	$9^{-1}\times10^{-11}$
电导率(面积) γ_s	$9\times10^{11}\gamma_s$	$9^{-1}\times10^{-11}$
电导率(体积) γ	$9\times10^9\gamma$	$9^{-1}\times10^{-9}$
电流 I	3×10^9I	$3^{-1}\times10^{-9}$
电流密度(面积) i_s	3×10^7i_s	$3^{-1}\times10^{-7}$
电流密度(体积) i	3×10^5i	$3^{-1}\times10^{-5}$
电通量密度 D	$12\pi\times10^5D$	$(12\pi)^{-1}\times10^{-5}$
电动势 $\mathscr{E}$	$(300)^{-1}\mathscr{E}$	300
电场强度 E	$3^{-1}\times10^{-4}E$	3×10^4
磁场强度 H	$12\pi\times10^7H$	$(12\pi)^{-1}\times10^{-7}$
磁通量 N_m	$(300)^{-1}N_m$	300
阻抗 Z	$9^{-1}\times10^{-11}Z$	9×10^{11}
电感系数 L	$9^{-1}\times10^{-11}L$	9×10^{11}
磁通量密度 B	$3^{-1}\times10^{-6}B$	3×10^6
磁矩(偶极子) p_m	$(12\pi)^{-1}p_m$	12π
磁矩(电流环) p_i	$3\times10^{13}p_i$	$3^{-1}\times10^{-13}$
磁化强度(偶极子) M	$(12\pi)^{-1}\times10^{-6}M$	$12\pi\times10^6$
磁化强度(电流环) M'	$3\times10^7M'$	$3^{-1}\times10^{-7}$
磁动势 Ω	$12\pi\times10^9\Omega$	$(12\pi)^{-1}\times10^{-9}$
导磁率 μ	$(36\pi)^{-1}\times10^{-13}\mu$	$36\pi\times10^{13}$
磁极强度 m	$(1200\pi)^{-1}m$	1200π
电位差 V	$(300)^{-1}V$	300
磁势 A	$3^{-1}\times10^{-4}A$	3×10^4
电抗 X	$9^{-1}\times10^{-11}X$	9×10^{11}
磁阻 R'	$36\pi\times10^{11}R'$	$(36\pi)^{-1}\times10^{-11}$

续表 III. 3

物 理 量	公式变换时改用符号	数值变换时乘以系数
电阻 R	$9^{-1} \times 10^{-11}R$	9×10^{11}
电阻率(表面) s	$9^{-1} \times 10^{-11}s$	9×10^{11}
电阻率(体积) r	$9^{-1} \times 10^{-9}r$	9×10^{9}
rot	10^{-2}rot	
div	10^{-2}div	
grad	10^{-2}grad	

表 III. 4　电磁厘米-克-秒制至米-千克-秒制换算表

物 理 量	公式变换时改用符号	数值变换时乘以系数
力 F	$10^{5}F$	10^{-5}
长度 l	$10^{2}l$	10^{-2}
质量 m	$10^{3}m$	10^{-3}
功率 P	$10^{7}P$	10^{-7}
电容量 C	$10^{-9}C$	10^{9}
介质常数 ε	$4\pi \times 10^{-11}\varepsilon$	$(4\pi)^{-1} \times 10^{11}$
电荷 q	$10^{-}q$	10
电荷密度(体积) ρ	$10^{-7}\rho$	10^{7}
电导 G	$10^{-9}G$	10^{9}
电导率(面积) γ_s	$10^{-9}\gamma_s$	10^{9}
电导率(体积) γ	$10^{-11}\gamma$	10^{11}
电流 I	$10^{-1}I$	10
电流密度(面积) i_s	$10^{-3}i_s$	10^{3}
电流密度(体积) i	$10^{-5}i$	10^{5}
电通量密度 D	$4\pi \times 10^{-5}D$	$(4\pi)^{-1} \times 10^{5}$
电动势 $\mathscr{E}$	$10^{8}\mathscr{E}$	10^{-8}
电场强度 E	$10^{6}E$	10^{-6}
磁场强度 H	$4\pi \times 10^{-3}H$	$(4\pi)^{-1} \times 10^{3}$
磁通量 N_m	$10^{8}N_m$	10^{-8}
阻抗 Z	$10^{9}Z$	10^{-9}
电感系数 L	$10^{9}L$	10^{-9}
磁通量密度 B	$10^{4}B$	10^{-4}

续表 III. 4

物 理 量	公式变换时改用符号	数值变换时乘以系数
磁矩(偶极子) p_m	$(4\pi)^{-1} \times 10^{10} p_m$	$4\pi \times 10^{-10}$
磁矩(电流环) p_i	$10^3 p_i$	10^{-3}
磁化强度(偶极子) M	$(4\pi)^{-1} \times 10^4 M$	$4\pi \times 10^{-4}$
磁化强度(电流环) M'	$10^{-3} M'$	10^3
磁动势 Ω	$4\pi \times 10^{-1} \Omega$	$(4\pi)^{-1} \times 10$
导磁率 μ	$(4\pi)^{-1} \times 10^7 \mu$	$4\pi \times 10^{-7}$
磁极强度 m	$(4\pi)^{-1} \times 10^8 m$	$4\pi \times 10^{-8}$
电位差 V	$10^8 V$	10^{-8}
磁势 A	$10^6 A$	10^{-6}
电抗 X	$10^9 X$	10^{-9}
磁阻 R'	$4\pi \times 10^{-9} R'$	$(4\pi)^{-1} \times 10^9$
电阻 R	$10^9 R$	10^{-9}
电阻率(表面) s	$10^9 s$	10^{-9}
电阻率(体积) τ	$10^{11} \tau$	10^{-11}
rot	10^{-2}rot	
div	10^{-2}div	
grad	10^{-2}grad	
∇	$10^{-2} \nabla$	

表 III. 5 实用厘米-克-秒制至米-千克-秒制换算表

物 理 量	公式变换时改用符号	数值变换时乘以系数
力 F	$10^5 F$	10^{-5}
长度 l	$10^2 l$	10^{-2}
质量 m	$10^3 m$	10^{-3}
功率 P	$10^7 P$	10^{-7}
电容量 C	$1C$	1
介质常数 ε	$(4\pi)^2 \times 10^{-2} \varepsilon$	$(4\pi)^{-2} \times 10^2$
电荷 q	$1q$	1
电荷密度(体积) ρ	$10^{-6} \rho$	10^6
电导 G	$1G$	1
电导率(面积) γ_s	$1\gamma_s$	1
电导率(体积) γ	$10^{-2} \gamma$	10^2

续表 III. 5

物 理 量	公式变换时改用符号	数值变换时乘以系数
电流 I	$1I$	1
电流密度(面积) i_s	$10^{-2}i_s$	10^2
电流密度(体积) i	$10^{-4}i$	10^4
电通量密度 D	$4\pi \times 10^{-4}D$	$(4\pi)^{-1} \times 10^4$
电动势 $\mathscr{E}$	$1\mathscr{E}$	1
电场强度 E	$10^{-2}E$	10^2
磁场强度 H	$4\pi \times 10^{-3}H$	$(4\pi)^{-1} \times 10^3$
磁通量 N_m	10^8N_m	10^{-8}
阻抗 Z	$1Z$	1
电感系数 L	$1L$	1
磁通量密度 B	10^4B	10^{-4}
磁矩(偶极子) p_m	$10^{10}p_m$	10^{-10}
磁矩(电流环) p_i	10^4p_i	10^{-4}
磁化强度(偶极子) M	10^4M	10^{-4}
磁化强度(电流环) M'	$10^{-2}M'$	10^2
磁动势 Ω	$4\pi \times 10^{-1}\Omega$	$(4\pi)^{-1} \times 10$
导磁率 μ	$(4\pi)^{-1} \times 10^7\mu$	$4\pi \times 10^{-7}$
磁场强度 m	10^8m	10^{-8}
电位差 V	$1V$	1
磁势 A	10^6A	10^{-6}
电抗 X	$1X$	1
磁阻 R'	$4\pi \times 10^{-9}R'$	$(4\pi)^{-1} \times 10^9$
电阻 R	$1R$	1
电阻率(表面) s	$1s$	1
电阻率(体积) τ	$10^2\tau$	10^{-2}
rot	10^{-2}rot	
div	10^{-2}div	
grad	10^{-2}grad	
∇	$10^{-2}\nabla$	

表 III. 6　米-千克-秒制至静电厘米-克-秒制换算表

物 理 量	公式变换时改用符号	数值变换时乘以系数
力 F	$10^{-5}F$	10^{5}
长度 l	$10^{-2}l$	10^{2}
质量 m	$10^{-3}m$	10^{3}
功率 P	$10^{-7}P$	10^{7}
电容量 C	$9^{-1}\times10^{-11}C$	9×10^{11}
介质常数 ε	$(36\pi)^{-1}\times10^{-9}\varepsilon$	$36\pi\times10^{9}$
电荷 q	$3^{-1}\times10^{-9}q$	3×10^{9}
电荷密度(体积) ρ	$3^{-1}\times10^{-3}\rho$	3×10^{3}
电导 G	$9^{-1}\times10^{-11}G$	9×10^{11}
电导率(面积) γ_s	$9^{-1}\times10^{-11}\gamma_s$	9×10^{11}
电导率(体积) γ	$9^{-1}\times10^{-9}\gamma$	9×10^{9}
电流 I	$3^{-1}\times10^{-9}I$	3×10^{9}
电流密度(面积) i_s	$3^{-1}\times10^{-7}i_s$	3×10^{7}
电流密度(体积) i	$3^{-1}\times10^{-5}i$	3×10^{5}
电通量密度 D	$(12\pi)^{-1}\times10^{-5}D$	$12\pi\times10^{5}$
电动势 $\mathscr{E}$	$300\mathscr{E}$	$(300)^{-1}$
电场强度 E	$3\times10^{4}E$	$3^{-1}\times10^{-4}$
磁场强度 H	$(12\pi)^{-1}\times10^{-7}H$	$12\pi\times10^{7}$
磁通量密度 B	$3\times10^{6}B$	$3^{-1}\times10^{-6}$
磁通量 N_m	$300N_m$	$(300)^{-1}$
阻抗 Z	$9\times10^{11}Z$	$9^{-1}\times10^{-11}$
电感系数 L	$9\times10^{11}L$	$9^{-1}\times10^{-11}$
磁矩(偶极子) p_m	$12\pi p_m$	$(12\pi)^{-1}$
磁矩(电流环) p_i	$3^{-1}\times10^{-13}p_i$	3×10^{13}
磁化强度(偶极子) M	$12\pi\times10^{6}M$	$(12\pi)^{-1}\times10^{-6}$
磁化强度(电流环) M'	$3^{-1}\times10^{-7}M'$	3×10^{7}
磁动势 Ω	$(12\pi)^{-1}\times10^{-9}\Omega$	$12\pi\times10^{9}$
导磁率 μ	$36\pi\times10^{13}\mu$	$(36\pi)^{-1}\times10^{-13}$
磁极强度 m	$1200\pi m$	$(1200\pi)^{-1}$
电位差 V	$300V$	$(300)^{-1}$
磁势 A	$3\times10^{4}A$	$3^{-1}\times10^{-4}$
电抗 X	$9\times10^{11}X$	$9^{-1}\times10^{-11}$
磁阻 R'	$(36\pi)^{-1}\times10^{-11}R'$	$36\pi\times10^{11}$

续表 III. 6

物 理 量	公式变换时改用符号	数值变换时乘以系数
电阻 R	$9\times10^{11}R$	$9^{-1}\times10^{-11}$
电阻率(表面) s	$9\times10^{11}s$	$9^{-1}\times10^{-11}$
电阻率(体积) τ	$9\times10^{9}\tau$	$9^{-1}\times10^{-9}$
rot	10^{2}rot	
div	10^{2}div	
grad	10^{2}grad	
∇	$10^{2}\nabla$	

表 III. 7　米-千克-秒制至电磁厘米-克-秒制换算表

物 理 量	公式变换时改用符号	数值变换时乘以系数
力 F	$10^{-5}F$	10^{5}
长度 l	$10^{-2}l$	10^{2}
质量 m	$10^{-3}m$	10^{3}
功率 P	$10^{-7}P$	10^{7}
电容量 C	$10^{9}C$	10^{-9}
介质常数 ε	$(4\pi)^{-1}\times10^{11}\varepsilon$	$4\pi\times10^{-11}$
电荷 q	$10q$	10^{-1}
电荷密度(体积) ρ	$10^{7}\rho$	10^{-7}
电导 G	$10^{9}G$	10^{-9}
电导率(面积) γ_s	$10^{9}\gamma_s$	10^{-9}
电导率(体积) γ	$10^{11}\gamma$	10^{-11}
电流 I	$10I$	10^{-1}
电流密度(面积) i_s	$10^{3}i_s$	10^{-3}
电流密度(体积) i	$10^{5}i$	10^{-5}
电通量密度 D	$(4\pi)^{-1}\times10^{5}D$	$4\pi\times10^{-5}$
电动势 $\mathscr{E}$	$10^{-8}\mathscr{E}$	10^{8}
电场强度 E	$10^{-6}E$	10^{6}
磁场强度 H	$(4\pi)^{-1}\times10^{3}H$	$4\pi\times10^{-3}$
磁通量 N_m	$10^{-8}N_m$	10^{8}
阻抗 Z	$10^{-9}Z$	10^{9}
电感系数 L	$10^{-9}L$	10^{9}
磁通量密度 B	$10^{-4}B$	10^{4}

续表 III. 7

物 理 量	公式变换时改用符号	数值变换时乘以系数
磁矩(偶极子) p_m	$4\pi \times 10^{-10} p_m$	$(4\pi)^{-1} \times 10^{10}$
磁矩(电流环) p_i	$10^{-3} p_i$	10^3
磁化强度(偶极子) M	$4\pi \times 10^{-4} M$	$(4\pi)^{-1} \times 10^4$
磁化强度(电流环) M'	$10^3 M'$	10^{-3}
磁动势 Ω	$(4\pi)^{-1} \times 10\Omega$	$4\pi \times 10^{-1}$
导磁率 μ	$4\pi \times 10^{-7} \mu$	$(4\pi)^{-1} \times 10^7$
磁极强度 m	$4\pi \times 10^{-8} m$	$(4\pi)^{-1} \times 10^8$
电位差 V	$10^{-8} V$	10^8
磁势 A	$10^{-6} A$	10^6
电抗 X	$10^{-9} X$	10^9
磁阻 R'	$(4\pi)^{-1} \times 10^9 R'$	$4\pi \times 10^{-9}$
电阻 R	$10^{-9} R$	10^9
电阻率(表面) s	$10^{-9} s$	10^9
电阻率(体积) τ	$10^{-11} \tau$	10^{11}
rot	10^2rot	
div	10^2div	
grad	10^2grad	
∇	$10^2 \nabla$	

表 III. 8 米-千克-秒制至实用厘米-克-秒制换算表

物 理 量	公式变换时改用符号	数值变换时乘以系数
力 F	$10^{-5} F$	10^5
长度 l	$10^{-2} l$	10^2
质量 m	$10^{-3} m$	10^3
功率 P	$10^{-7} P$	10^7
电容量 C	$1C$	1
介质常数 ε	$(4\pi)^{-2} \times 10^2 \varepsilon$	$(4\pi)^2 \times 10^{-2}$
电荷 q	$1q$	1
电荷密度(体积) ρ	$10^6 \rho$	10^{-6}
电导 G	$1G$	1
电导率(面积) γ_s	$1\gamma_s$	1
电导率(体积) γ	$10^2 \gamma$	10^{-2}

续表 III. 8

物 理 量	公式变换时改用符号	数值变换时乘以系数
电流 I	$1I$	1
电流密度(面积) i_s	$10^2 i_s$	10^{-2}
电流密度(体积) i	$10^4 i$	10^{-4}
电通量密度 D	$(4\pi)^{-2} \times 10^4 D$	$(4\pi)^2 \times 10^{-4}$
电动势 $\mathscr{E}$	$1\mathscr{E}$	1
电场强度 E	$10^2 E$	10^{-2}
磁场强度 H	$(4\pi)^{-1} \times 10^3 H$	$4\pi \times 10^{-3}$
磁通量 N_m	$10^{-8} N_m$	10^8
阻抗 Z	$1Z$	1
电感系数 L	$1L$	1
磁通量密度 B	$10^{-4} B$	10^4
磁矩(偶极子) p_m	$10^{-10} p_m$	10^{10}
磁矩(电流环) p_i	$10^{-4} p_i$	10^4
磁化强度(偶极子) M	$10^{-4} M$	10^4
磁化强度(电流环) M'	$10^2 M'$	10^{-2}
磁动势 Ω	$(4\pi)^{-1} \times 10\Omega$	$4\pi \times 10^{-1}$
导磁率 μ	$4\pi \times 10^{-7}\mu$	$(4\pi)^{-1} \times 10^7$
磁极强度 m	$10^{-8} m$	10^8
电位差 V	$1V$	1
磁势 A	$10^{-6} A$	10^6
电抗 X	$1X$	1
磁阻 R'	$(4\pi)^{-1} \times 10^9 R'$	$4\pi \times 10^{-9}$
电阻 R	$1R$	1
电阻率(表面) s	$1s$	1
电阻率(体积) τ	$10^{-2}\tau$	10^2
rot	10^2rot	
div	10^2div	
grad	10^2grad	
∇	$10^2\nabla$	

表 III. 9　赫维赛厘米-克-秒制至米-千克-秒制换算表

物 理 量	公式变换时改用符号	数值变换时乘以系数
力 F	$10^{5}F$	10^{-5}
长度 l	$10^{2}l$	10^{-2}
质量 m	$10^{3}m$	10^{-3}
功率 P	$10^{7}P$	10^{-7}
电容量 C	$36\pi \times 10^{11}C$	$(36\pi)^{-1} \times 10^{-11}$
介质常数 ε	$36\pi \times 10^{9}\varepsilon$	$(36\pi)^{-1} \times 10^{-9}$
电荷 q	$\sqrt{4\pi} \times 3 \times 10^{9}q$	$(\sqrt{4\pi})^{-1} \times 3^{-1} \times 10^{-9}$
电荷密度(体积) ρ	$\sqrt{4\pi} \times 3 \times 10^{3}\rho$	$(\sqrt{4\pi})^{-1} \times 3^{-1} \times 10^{-3}$
电导 G	$36\pi \times 10^{11}G$	$(36\pi)^{-1} \times 10^{-11}$
电导率(面积) γ_s	$36\pi \times 10^{11}\gamma_s$	$(36\pi)^{-1} \times 10^{-11}$
电导率(体积) γ	$36\pi \times 10^{9}\gamma$	$(36\pi)^{-1} \times 10^{-9}$
电流 I	$\sqrt{4\pi} \times 3 \times 10^{9}I$	$(\sqrt{4\pi})^{-1} \times 3^{-1} \times 10^{-9}$
电流密度(面积) i_s	$\sqrt{4\pi} \times 3 \times 10^{7}i_s$	$(\sqrt{4\pi})^{-1} \times 3^{-1} \times 10^{-7}$
电流密度(体积) i	$\sqrt{4\pi} \times 3 \times 10^{5}i$	$(\sqrt{4\pi})^{-1} \times 3^{-1} \times 10^{-5}$
电通量密度 D	$\sqrt{4\pi} \times 3 \times 10^{5}D$	$(\sqrt{4\pi})^{-1} \times 3^{-1} \times 10^{-5}$
电动势 $\mathscr{E}$	$(\sqrt{4\pi})^{-1} \times 3^{-1} \times 10^{-2}\mathscr{E}$	$\sqrt{4\pi} \times 3 \times 10^{2}$
电场强度 E	$(\sqrt{4\pi})^{-1} \times 3^{-1} \times 10^{-4}E$	$(\sqrt{4\pi}) \times 3 \times 10^{4}$
磁场强度 H	$\sqrt{4\pi} \times 10^{-3}H$	$(\sqrt{4\pi})^{-1} \times 10^{3}$
磁通量 N_m	$(\sqrt{4\pi})^{-1} \times 10^{8}N_m$	$\sqrt{4\pi} \times 10^{-8}$
阻抗 Z	$(36\pi)^{-1} \times 10^{-11}Z$	$36\pi \times 10^{11}$
电感系数 L	$(36\pi)^{-1} \times 10^{-11}L$	$36\pi \times 10^{11}$
磁通量密度 B	$(\sqrt{4\pi})^{-1} \times 10^{4}B$	$\sqrt{4\pi} \times 10^{-4}$
磁矩(偶极子) p_m	$(\sqrt{4\pi})^{-1} \times 10^{10}p_m$	$\sqrt{4\pi} \times 10^{-10}$
磁矩(电流环) p_i	$\sqrt{4\pi} \times 10^{3}p_i$	$(\sqrt{4\pi})^{-1} \times 10^{-3}$
磁化强度(偶极子) M	$(\sqrt{4\pi})^{-1} \times 10^{4}M$	$\sqrt{4\pi} \times 10^{-4}$
磁化强度(电流环) M'	$\sqrt{4\pi} \times 10^{-3}M'$	$(\sqrt{4\pi})^{-1} \times 10^{3}$
磁动势 Ω	$\sqrt{4\pi} \times 10^{-1}\Omega$	$(\sqrt{4\pi})^{-1} \times 10$
导磁率 μ	$(4\pi)^{-1} \times 10^{7}\mu$	$4\pi \times 10^{-7}$

续表 III. 9

物 理 量	公式变换时改用符号	数值变换时乘以系数
磁极强度 m	$(\sqrt{4\pi})^{-1} \times 10^{8} m$	$\sqrt{4\pi} \times 10^{-8}$
电位差 V	$(\sqrt{4\pi})^{-1} \times 3^{-1} \times 10^{-7} V$	$\sqrt{4\pi} \times 3 \times 10^{2}$
磁势 A	$(\sqrt{4\pi})^{-1} \times 10^{6} A$	$\sqrt{4\pi} \times 10^{-6}$
电抗 X	$(36\pi)^{-1} \times 10^{-11} X$	$36\pi \times 10^{11}$
磁阻 R'	$(4\pi) \times 10^{-9} R'$	$(4\pi)^{-1} \times 10^{9}$
电阻 R	$(36\pi)^{-1} \times 10^{-11} R$	$36\pi \times 10^{11}$
电阻率(表面) s	$(36\pi)^{-1} \times 10^{-11} s$	$36\pi \times 10^{11}$
电阻率(体积) τ	$(36\pi)^{-1} \times 10^{-9} \tau$	$36\pi \times 10^{9}$
rot	10^{-2}rot	
div	10^{-2}div	
grad	10^{-2}grad	
∇	$10^{-2}\nabla$	

表 III. 10　米-千克-秒制至赫维赛厘米-克-秒制换算表

物 理 量	公式变换时改用符号	数值变换时乘以系数
力 F	$10^{-5} F$	10^{5}
长度 l	$10^{-2} l$	10^{2}
质量 m	$10^{-3} m$	10^{3}
功率 P	$10^{-7} P$	10^{7}
电容量 C	$(36\pi)^{-1} \times 10^{-11} C$	$(36\pi) \times 10^{11}$
介质常数 ε	$(36\pi)^{-1} \times 10^{-9} \varepsilon$	$36\pi \times 10^{9}$
电荷 q	$(\sqrt{4\pi})^{-1} \times 3^{-1} \times 10^{-9} q$	$\sqrt{4\pi} \times 3 \times 10^{9}$
电荷密度(体积) ρ	$(\sqrt{4\pi})^{-1} \times 3^{-1} \times 10^{-3} \rho$	$\sqrt{4\pi} \times 3 \times 10^{3}$
电导 G	$(36\pi)^{-1} \times 10^{-11} G$	$36\pi \times 10^{11}$
电导率(面积) γ_s	$(36\pi)^{-1} \times 10^{-11} \gamma_s$	$36\pi \times 10^{11}$
电导率(体积) γ	$(36\pi)^{-1} \times 10^{-9} \gamma$	$36\pi \times 10^{9}$
电流 I	$(\sqrt{4\pi})^{-1} \times 3^{-1} \times 10^{-9} I$	$\sqrt{4\pi} \times 3 \times 10^{9}$
电流密度(面积) i_s	$(\sqrt{4\pi})^{-1} \times 3^{-1} \times 10^{-7} i_s$	$\sqrt{4\pi} \times 3 \times 10^{7}$
电流密度(体积) i	$(\sqrt{4\pi})^{-1} \times 3^{-1} \times 10^{-5} i$	$\sqrt{4\pi} \times 3 \times 10^{5}$

续表 III. 10

物 理 量	公式变换时改用符号	数值变换时乘以系数
电通量密度 D	$(\sqrt{4\pi})^{-1}\times 3^{-1}\times 10^{-5}D$	$\sqrt{4\pi}\times 3\times 10^{5}$
电动势 $\mathscr{E}$	$\sqrt{4\pi}\times 3\times 10^{2}\varepsilon$	$(\sqrt{4\pi})^{-1}\times 3^{-1}\times 10^{-2}$
电场强度 E	$\sqrt{4\pi}\times 3\times 10^{4}E$	$(\sqrt{4\pi})^{-1}\times 3^{-1}\times 10^{-4}$
磁场强度 H	$(\sqrt{4\pi})^{-1}\times 10^{3}H$	$(\sqrt{4\pi})\times 10^{-3}$
磁通量 N_m	$(\sqrt{4\pi})\times 10^{-8}N_m$	$(\sqrt{4\pi})^{-1}\times 10^{8}$
阻抗 Z	$(36\pi)\times 10^{11}$	$(36\pi)^{-1}\times 10^{-11}$
电感系数 L	$36\pi\times 10^{11}L$	$(36\pi)^{-1}\times 10^{-11}$
磁通量密度 B	$\sqrt{4\pi}\times 10^{-4}B$	$(\sqrt{4\pi})^{-1}\times 10^{4}$
磁矩(偶极子) p_m	$\sqrt{4\pi}\times 10^{-10}p_m$	$(\sqrt{4\pi})^{-1}\times 10^{10}$
磁矩(电流环) p_i	$(\sqrt{4\pi})^{-1}\times 10^{-3}p_i$	$\sqrt{4\pi}\times 10^{3}$
磁化强度(偶极子) M	$\sqrt{4\pi}\times 10^{-4}M$	$(\sqrt{4\pi})^{-1}\times 10^{4}$
磁化强度(电流环) M'	$(\sqrt{4\pi})^{-1}\times 10^{3}M'$	$\sqrt{4\pi}\times 10^{-3}$
磁动势 Ω	$(\sqrt{4\pi})^{-1}\times 10\Omega$	$\sqrt{4\pi}\times 10^{-1}$
导磁率 μ	$4\pi\times 10^{-7}\mu$	$(4\pi)^{-1}\times 10^{7}$
磁极强度 m	$\sqrt{4\pi}\times 10^{-8}m$	$(\sqrt{4\pi})^{-1}\times 10^{8}$
电位差 V	$\sqrt{4\pi}\times 3\times 10^{2}V$	$(\sqrt{4\pi})^{-1}\times 3^{-1}\times 10^{-2}$
磁势 A	$\sqrt{4\pi}\times 10^{-6}A$	$(\sqrt{4\pi})^{-1}\times 10^{6}$
电抗 X	$36\pi\times 10^{11}X$	$(36\pi)^{-1}\times 10^{-11}$
磁阻 R'	$(4\pi)^{-1}\times 10^{9}R'$	$4\pi\times 10^{-9}$
电阻 R	$36\pi\times 10^{11}R$	$(36\pi)^{-1}\times 10^{-11}$
电阻率(表面) s	$36\pi\times 10^{11}s$	$(36\pi)^{-1}\times 10^{-11}$
电阻率(体积) τ	$36\pi\times 10^{9}\tau$	$(36\pi)^{-1}\times 10^{-9}$
rot	10^{2}rot	
div	10^{2}div	
grad	10^{2}grad	
∇	$10^{2}\nabla$	

表 III. 11　Mic 厘米-克-秒制至米-千克-秒制换算表

物 理 量	公式变换时改用符号	数值变换时乘以系数
力 F	$10^{-2}F$	10^{2}
长度 l	$10^{2}l$	10^{-2}
质量 m	$10^{-4}m$	10^{4}
功率 P	$1P$	1
电容量 C	$1C$	1
介质常数 ε	$4\pi \times 10^{-2}\varepsilon$	$(4\pi)^{-1} \times 10^{2}$
电荷 q	$1q$	1
电荷密度(体积) ρ	$10^{-6}\rho$	10^{6}
电导 G	$1G$	1
电导率(面积) γ_s	$1\gamma_s$	1
电导率(体积) γ	$10^{-2}\gamma$	10^{2}
电流 I	$1I$	1
电流密度(面积) i_s	$10^{-2}i_s$	10^{2}
电流密度(体积) i	$10^{-4}i$	10^{4}
电通量密度 D	$4\pi \times 10^{-4}D$	$(4\pi)^{-1} \times 10^{4}$
电动势 $\mathscr{E}$	$1\mathscr{E}$	1
电场强度 E	$10^{-2}E$	10^{2}
磁场强度 H	$4\pi \times 10^{-2}H$	$(4\pi)^{-1} \times 10^{2}$
磁通量 N_m	$1N_m$	1
阻抗 Z	$1Z$	1
电感系数 L	$1L$	1
磁通量密度 B	$10^{-4}B$	10^{4}
磁矩(偶极子) p_m	$(4\pi)^{-1} \times 10^{2}p_m$	$4\pi \times 10^{-2}$
磁矩(电流环) p_i	$10^{4}p_i$	10^{-4}
磁化强度(偶极子) M	$(4\pi)^{-1} \times 10^{-4}M$	$4\pi \times 10^{4}$
磁化强度(电流环) M'	$10^{-2}M'$	10^{2}
磁动势 Ω	$4\pi\Omega$	$(4\pi)^{-1}$
导磁率 μ	$(4\pi)^{-1} \times 10^{-2}\mu$	$4\pi \times 10^{2}$
磁极强度 m	$(4\pi)^{-1}m$	4π
电位差 V	$1V$	1
磁势 A	$10^{-2}A$	10^{2}
电抗 X	$1X$	1
磁阻 R'	$4\pi R'$	$(4\pi)^{-1}$

续表 III. 11

物 理 量	公式变换时改用符号	数值变换时乘以系数
电阻 R	$1R$	1
电阻率(表面) s	$1s$	1
电阻率(体积) τ	$10^{2}\tau$	10^{-2}
rot	10^{-2}rot	
div	10^{-2}div	
grad	10^{-2}grad	
∇	$10^{-2}\nabla$	

表 III. 12 米-千克-秒制至 Mie 厘米-克-秒制换算表

物 理 量	公式变换时改用符号	数值变换时乘以系数
力 F	$10^{2}F$	10^{-2}
长度 l	$10^{-2}l$	10^{2}
质量 m	$10^{4}m$	10^{-4}
功率 P	$1P$	1
电容量 C	$1C$	1
介质常数 ε	$(4\pi)^{-1}\times 10^{2}\varepsilon$	$4\pi\times 10^{-2}$
电荷 q	$1q$	1
电荷密度(体积) ρ	$10^{6}\rho$	10^{-6}
电导 G	$1G$	1
电导率(面积) γ_s	$1\gamma_s$	1
电导率(体积) γ	$10^{2}\gamma$	10^{-2}
电流 I	$1I$	1
电流密度(面积) i_s	$10^{2}i_s$	10^{-2}
电流密度(体积) i	$10^{4}i$	10^{-4}
电通量密度 D	$(4\pi)^{-1}\times 10^{4}D$	$4\pi\times 10^{-4}$
电动势 $\mathscr{E}$	$1\mathscr{E}$	1
电场强度 E	$10^{2}E$	10^{-2}
磁场强度 H	$(4\pi)^{-1}\times 10^{2}H$	$4\pi\times 10^{-2}$
磁通量 N_m	$1N_m$	1
阻抗 Z	$1Z$	1
电感系数 L	$1L$	1

续表 III. 12

物 理 量	公式变换时改用符号	数值变换时乘以系数
磁通量密度 B	10^4B	10^{-4}
磁矩(偶极子) p_m	$4\pi \times 10^{-2}p_m$	$(4\pi)^{-1} \times 10^2$
磁矩(电流环) p_i	$10^{-4}p_i$	10^4
磁化强度(偶极子) M	$4\pi \times 10^4M$	$(4\pi)^{-1} \times 10^{-4}$
磁化强度(电流环) M'	$10^2M'$	10^{-2}
磁动势 Ω	$(4\pi)^{-1}\Omega$	4π
导磁率 μ	$4\pi \times 10^2\mu$	$(4\pi)^{-1} \times 10^{-2}$
磁极强度 m	$4\pi m$	$(4\pi)^{-1}$
电位差 V	$1V$	1
磁势 A	10^2A	10^{-2}
电抗 X	$1X$	1
磁阻 R'	$(4\pi)^{-1}R'$	4π
电阻 R	$1R$	1
电阻率(表面) s	$1s$	1
电阻率(体积) τ	$10^{-2}\tau$	10^2
rot	10^2rot	
div	10^2div	
grad	10^2grad	
∇	$10^2\nabla$	

表 III. 13 物理量换算比公式汇集

物 理 量	换算比公式	物 理 量	换算比公式
力 F	MLT^{-2}	阻抗 Z	$ML^2T^{-1}Q^{-2}$
长度 l	L	电感系数 L	ML^2Q^{-2}
质量 m	M	磁通量密度 B	$MT^{-1}Q^{-1}$
功率 P	ML^2T^{-3}	磁矩(偶极子) p_m	$ML^3T^{-1}Q^{-1}$
电容量 C	$M^{-1}L^{-2}T^2Q^2$	磁矩(电流环) p_i	$L^2T^{-1}Q$
介质常数 ε	$M^{-1}L^{-3}T^2Q^2$	磁化强度(偶极子) M	$MT^{-1}Q^{-1}$
电荷 q	Q	磁化强度(电流环) M'	$L^{-1}T^{-1}Q$
电荷密度(体积) ρ	QL^{-3}	磁动势 Ω	$T^{-1}Q$
电导 G	$M^{-1}L^{-2}TQ^2$	导磁率 μ	MLQ^{-2}
电导率(面积) γ_s	$M^{-1}L^{-2}TQ^2$	磁极强度 m	$ML^2T^{-1}Q^{-1}$
电导率(体积) γ	$M^{-1}L^{-3}TQ^2$	电位差 V	$ML^2T^{-2}Q^{-1}$

续表 III. 13

物 理 量	换算比公式	物 理 量	换算比公式
电流 I	$T^{-1}Q$	磁势 A	$LMT^{-1}Q^{-1}$
电流密度(面积) i_s	$L^{-1}T^{-1}Q$	电抗 X	$ML^2T^{-1}Q^{-2}$
电流密度(体积) i	$L^{-2}T^{-1}Q$	磁阻 R'	$M^{-1}L^{-2}Q^2$
电通量密度 D	$L^{-2}Q$	电阻 R	$ML^2T^{-1}Q^{-2}$
电动势 $\mathscr{E}$	$ML^2T^{-2}Q^{-1}$	电阻率(表面) s	$ML^4T^{-1}Q^{-2}$
电场强度 E	$MLT^{-2}Q^{-1}$	电阻率(体积) τ	$ML^3T^{-1}Q^{-2}$
磁场强度 H	$L^{-1}T^{-1}Q$	坡印廷矢量 $\mathbf{P}$	MT^{-3}
磁通量 N_m	$ML^2T^{-1}Q^{-1}$		