经典场论新讲

现代导引

陈童

Copyright © 2021 陈童

Published by Publisher

下载网址：http://newquanta.com/

作者本人 (即陈童) 对本讲义保有所有版权，目前读者可在上面的网站上自由下载，也可以私自传播，但仅限用于学习或教学等非商业用途，禁止私自以本讲义的部分或全部来获利，一经发现，作者将保留诉诸法律的权利。如果你有任何反馈，或者发现书中的任何错误，请给作者发邮件，tongchen@ecut.edu.cn

2022 年 *1* 月

Contents

1 初识经典场论 9

1.1 经典场论的基本框架 10

1.1.1 从粒子到场 10

1.1.2 局域场论 12

1.2 粒子作为场方程的一种解 15

1.2.1 场位形的拓扑等价类 15

1.2.2 Bogomolny 能限和 Bogomolny 方程 17

1.2.3 sine-Gordon 模型和孤立子 18

2 相对性原理与场论 21

2.1 相对性原理 21

2.1.1 信息传播的最大速度 21

2.1.2 间隔不变性 22

2.1.3 洛伦兹变换 25

2.2 四维时空的矢量和张量 29

2.2.1 四维矢量和张量 29

2.2.2 四维时空中的微分形式 31

2.3 相对性原理与经典场论 35

3 对称性与对称性自发破缺 37
3.1 对称性与守恒定律 38
3.1.1 诺特定理 38
3.1.2 内部对称性 39
3.1.3 时空对称性 41
3.2 对称性自发破缺 45
4 规范对称性和麦克斯韦方程 49
4.1 规范不变性和麦克斯韦方程 49
4.1.1 局域化 $U(1)$ 整体对称性 (gauging $U(1)$ global symmetry) 49
4.1.2 “发现”麦克斯韦方程 51
4.1.3 光是一种电磁波 54
4.1.4 物理可观测量的规范不变性 55
4.2 电磁场的能量、动量以及角动量 56
4.2.1 电磁场的能量、动量以及角动量 56
4.2.2 与国际单位制的关系 59
4.3 外微分与麦克斯韦方程 61
4.3.1 麦克斯韦方程的外微分形式 61
4.3.2 电磁场的洛伦兹变换 62
5 超导的有效理论以及涡旋解 65
5.1 超导的金兹堡-朗道理论 65
5.1.1 金兹堡-朗道理论 65
5.1.2 涡旋线激发的初步讨论 69
5.2 涡旋解 71
5.2.1 Bogomolny 能限 71
5.2.2 BPS 方程和涡旋解 73
6 带电粒子与电磁场耦合 77
6.1 多粒子系统的能量动量张量 77
6.2 耦合到电磁场 80
7 运动电荷的电磁场 83
7.1 延迟格林函数和推迟势 83
7.2 带电粒子的电磁场 87
7.2.1 Lienard-Wiechert 势 87
7.2.2 Heaviside-Feynman 公式 89

7.2.3 运动电荷的电磁辐射 . . . 91
7.2.4 运动电荷的辐射功率 . . . 91
7.3 低速带电粒子体系的有效作用量 93

8 介质中的电磁场以及偶极辐射 . . . 97
8.1 偶极耦合 97
8.2 介质中的电磁场 100
8.2.1 介质中的电磁场方程 . . . 100
8.2.2 线性介质中电磁场的能量与动量 . . . 102
8.3 偶极子的场 104
8.3.1 静态偶极子的场 . . . 104
8.3.2 偶极辐射 . . . 105

9 磁单极子和 θ 项 . . . 107
9.1 电磁对偶与磁单极子 107
9.2 狄拉克与陈省身 109
9.3 θ 项 113
9.3.1 初识 θ 项 . . . 113
9.3.2 轴子电动力学 . . . 115
9.3.3 拓扑绝缘体 . . . 116
9.3.4 Witten 效应 . . . 117
9.3.5 空间反演，时间反演，以及 $\theta = \pi$ . . . 119

10 杨-米尔斯理论与't Hooft-Polyakov 磁单极 . . . 121
10.1 杨-米尔斯理论 121
10.1.1 $SU(N)$ 群 . . . 122
10.1.2 协变导数与规范场强 . . . 123
10.1.3 杨-米尔斯作用量 . . . 125
10.1.4 规范对称性是一种冗余 . . . 127
10.2 't Hooft-Polyakov 磁单极 128
10.2.1 有限能量场位形的拓扑分类 . . . 128
10.2.2 磁单极解 . . . 131
10.2.3 Bogomolnyi 能限以及 BPS 磁单极 . . . 131

前言

关于《经典场论新讲》。其实本来准备写一个电动力学新讲的，因为我好歹也教过两年电动力学。奈何实在想不出什么有新意的讲法。后来想到，经典力学、电动力学到研究生阶段的量子场论之间其实有一段空白，这段空白应该是用哈密顿力学和拉格朗日力学的方法来处理电磁场理论，也就是所谓的经典场论，因此才想到写这个《经典场论新讲》。

这个讲义面向的是学过经典力学和电动力学的学生的。因此诸如静电场静磁场之类电动力学书上已经处理得比较好的内容，这个讲义将不会涉及。但是也有一些电动力学的内容将会用场论的方法重新处理，比方说介质中的电磁场，本书将以一种全新的方法处理介质中的电磁场。总之，本讲义和电动力学知识会有一些交叉，主要在电动力学的那些适合用场论方法处理的主题上。

对称性将是本讲义的核心线索之一，我们利用对称性来限制场论系统的作用量，也利用对称性来导出守恒定律。特别的，我们详细讨论了 U(1) 整体对称性，以及如何通过将这个整体对称性局域化来导出 U(1) 规范场论，也就是电磁场的麦克斯韦方程。本书也详细讨论了时空对称性导致的能动量张量，并把对能动量张量的讨论和应用贯穿全书。本书也讨论了场论系统的对称性自发破缺，我们讨论了如何用场论系统来描述超导的宏观理论，超导的涡旋激发等等课题，也就是涉及通常所谓的规范对称性自发破缺的一些内容。

本书还将详细讨论狄拉克磁单极、电磁场的 theta 项、轴子电动力学、Witten 效应等等内容，也会简单介绍轴子电动力学在拓扑绝缘体中的应用。本书还将初步讨论非阿贝尔规范场论以及 tHooft-Polyakov 磁单极。

特别的，本书也将讨论如何通过消去系统的一部分自由度来得到剩下自由度的有效理论的基本思想。在现代物理学中，这种有效理论 (尤其是有效场论) 的思想是极为重要的。另外，本书涉及的现代物理思想还有，经典粒子作为场方程的一种特殊解，也就是孤立子的思想。据我所知，爱因斯坦晚年对这一思想是很着迷的。当然，本书只能对孤立子进行

一个极为初步的介绍。

我个人觉得要想透彻地讲清楚广义相对论以及相关的数学知识，恐怕一门单独的广义相对论课程是更合适的。而且在理论结构上，广义相对论与电磁场理论的联系也不是很紧密，没必要放在同一本书里讲。因此本书不会讲广义相对论。

总之，与市面上一些内容庞杂的经典场论教材不同，本书将始终把主线放在电磁场理论上。为了和此前的《量子力学新讲》、《经典力学新讲》凑成一个系列我给这个讲义取名《经典场论新讲》。考虑到经典场论方面的合适教材不多，我这个讲义也许能给读者多一种选择吧。

由于是草稿版，讲义中有一些插图是手绘的，还有一些插图直接取自网络或者是从其它资料里面截图出来的，文中并没有全部一一说明，后续版本会逐渐改过来。



1. 初识经典场论

[本书假定读者学过经典力学的必要知识，缺乏相关基础的读者可以先阅读我的《经典力学新讲》。]

法拉第和麦克斯韦最早引入了场的概念。场和粒子一样是一种物理实体，但与粒子不同，场是一种空间分布，通常称这种分布为场位形，场位形随时间的演化就构成了场的动力学。和经典粒子的动力学一样，经典场的动力学也可以用哈密顿力学或者拉格朗日力学的框架来处理，特别的，经典场也满足最小作用量原理。

从事后的观点来看，之所以要在物理学的基本定律中引入场，是因为我们的世界满足狭义相对论。根据狭义相对论，相互作用的传递速度有一个上限，即光速，特别的，相互作用不能瞬时传递，这就排除了超距作用的可能性，并进而将某种局域性原理强加在所有的相互作用上。而在一个连续的时空中，场是满足局域性原理的最简单机制。因此，狭义相对论会自然导向场的概念，而本书将要讲述的经典场论，也是指满足狭义相对论的经典场论，这就将流体力学这样的场论排除在外了。

不过，我们也需要指出，流体力学这样的理论其实是导向场论的第二条路径，即场论作为对一些多自由度系统 (在流体力学的例子中就是大量流体分子) 宏观大尺度行为的有效描述，这时候场其实是系统微观自由度的宏观集体表现。沿着这条路的一个重要例子就是万有引力，今天人们普遍相信爱因斯坦的广义相对论 (是一个经典场论)，包括由此而来的时空概念，都是对引力系统微观自由度的大尺度有效描述。只不过今天人们还不是很确定万有引力真正的基本自由度是什么。不过，本书并不会过多涉及导向场论的这一条路径，因此也不会详细讨论广义相对论这一重要的经典场论。

当然，最为人们熟知的经典场就是电磁场。但是，对于经典场论的学习来说，也许从数学上更为简单的标量场开始更为合适。不过，标量场和人们日常在宏观世界里感知到的电磁场以及引力场这两种基本力场无关。因此对于本章将要讲述的标量场理论，一个更为合适的看法也许是将之看成理论研究的玩具模型。在现代物理学研究中，面对复杂的世界或者数学上远为棘手的问题时，人们往往会首先研究一个更为简单的玩具模型。一方面，玩具模型的研究有可能揭示复杂世界背后简单的物理机制，另一方面，更为重要的是，人们可以在研究简单模型的过程中逐步发展出能够对付棘手问题的数学方法。基于这些原因，本章将从标量场的玩具模型开始，然后在后续的章节中逐步过渡到真正的电磁场理论。

1.1 经典场论的基本框架

1.1.1 从粒子到场

为了看清楚如何将经典力学框架从点粒子拓展到场，我们考察一个 n 自由度的点粒子系统，其广义坐标为 $q_i, i=1,2,3...,n$，广义动量为 $p_i, i=1,2,...,n$，系统的哈密顿量为 $H(q_i,p_i)$(表达式中的 q_i 和 p_i 分别代表所有的广义坐标和广义动量)。则相应的相空间作用量为

$$S[q_i(t),p_i(t)]=\int dt\Big[\sum_i p_i\dot{q}_i-H(q_i,p_i)\Big], \tag{1.1}$$

由相空间的最小作用量原理即可以得到哈密顿正则方程

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{1.2}$$

进一步，任意两个物理量的泊松括号则是

$$[A,B]=\sum_i\Big(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i}-\frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i}\Big). \tag{1.3}$$

现在，设想将上面的指标记号 i 替换成记号 σ，并设想 σ 可以连续取值 (因而这时自由度数目为无穷大)，从而根据《经典力学新讲》第二章关于变分法和泛函导数的相关讲述可以知道，我们应该将所有对 i 的求和替换成对连续变量 σ 的积分，将 $H(q_i,p_i)$ 重记为泛函 $H[q_\sigma,p_\sigma]$，将物理量 $A(q_i,p_i),B(q_i,p_i)$ 分别重记为泛函 $A[q_\sigma,p_\sigma],B[q_\sigma,p_\sigma]$，并将对 q_σ,p_σ 的偏导改写成泛函导数。因而即有相空间作用量

$$S[q_\sigma(t),p_\sigma(t)]=\int dt\Big[\int d\sigma p_\sigma\dot{q}_\sigma-H[q_\sigma,p_\sigma]\Big], \tag{1.4}$$

以及相应的哈密顿正则方程

$$\dot{q}_\sigma=\frac{\delta H}{\delta p_\sigma},\quad \dot{p}_\sigma=-\frac{\delta H}{\delta q_\sigma}. \tag{1.5}$$

式中的泛函导数可以由变分法计算，即

$$\delta H[q_\sigma,p_\sigma]=\int d\sigma\Big[\frac{\delta H}{\delta q_\sigma}\delta q_\sigma+\frac{\delta H}{\delta p_\sigma}\delta p_\sigma\Big], \tag{1.6}$$

请读者注意区分这里的变分和应用相空间最小作用量原理时涉及的变分，这里的变分是等 σ 变量的变分，时间 t 是给定的，因此不需要对 t 积分。进而泊松括号现在应该定义成

$$[A,B]=\int d\sigma\Big(\frac{\delta A}{\delta q_\sigma}\frac{\delta B}{\delta p_\sigma}-\frac{\delta A}{\delta p_\sigma}\frac{\delta B}{\delta q_\sigma}\Big). \tag{1.7}$$

注意到 q_σ,p_σ 均依赖于连续指标 σ，因此当然可以看成是 σ 的函数，从而我们可以再次改变一下记号，记

$$\phi(\sigma,t)=q_\sigma(t),\quad \pi(\sigma,t)=p_\sigma(t). \tag{1.8}$$

从而上一段的方程可以再次改写，其中相空间作用量应该改写为

$$S[\phi(\sigma,t),\pi(\sigma,t)]=\int dtd\sigma[\pi(\sigma,t)\dot{\phi}(\sigma,t)]-\int dtH[\phi(\sigma),\pi(\sigma)], \tag{1.9}$$

式中 $\dot{\phi}(\sigma,t)=\frac{\partial}{\partial t}\phi(\sigma,t)$。相应的哈密顿正则方程则是

$$\dot{\phi}(\sigma,t)=\frac{\delta H}{\delta\pi(\sigma)},\quad \dot{\pi}(\sigma,t)=-\frac{\delta H}{\delta\phi(\sigma)}. \tag{1.10}$$

在上面两个式子中，当操作不涉及固定时间 t 时，我们就省略了函数自变量中的 t。同样，这里的泛函导数可以由变分法计算，即

$$\delta H[\phi(\sigma),\pi(\sigma)]=\int d\sigma\Big[\frac{\delta H}{\delta\phi(\sigma)}\delta\phi(\sigma)+\frac{\delta H}{\delta\pi(\sigma)}\delta\pi(\sigma)\Big]. \tag{1.11}$$

而物理量的泊松括号就应该是

$$[A,B]=\int d\sigma\Big(\frac{\delta A}{\delta\phi(\sigma)}\frac{\delta B}{\delta\pi(\sigma)}-\frac{\delta A}{\delta\pi(\sigma)}\frac{\delta B}{\delta\phi(\sigma)}\Big). \tag{1.12}$$

特别的，利用 $\frac{\delta\phi(\sigma)}{\delta\phi(\sigma')}=\delta(\sigma-\sigma')$，$\frac{\delta\pi(\sigma)}{\delta\pi(\sigma')}=\delta(\sigma-\sigma')$，$\frac{\delta\phi(\sigma)}{\delta\pi(\sigma')}=\frac{\delta\pi(\sigma)}{\delta\phi(\sigma')}=0$，人们容易算得如下基本泊松括号

$$[\phi(\sigma,t),\pi(\sigma',t)]=\delta(\sigma-\sigma'),\quad [\phi(\sigma,t),\phi(\sigma',t)]=[\pi(\sigma,t),\pi(\sigma',t)]=0. \tag{1.13}$$

注意这里的第一个式子其实就是 $[q_i,p_j]=\delta_{ij}$ 在连续指标情形的对应物，即当指标为连续的 σ,σ' 时，就应该将克龙内克 δ 符号替换成狄拉克 δ 函数。进而则可以将哈密顿正则方程重写成如下熟悉的形式

$$\dot{\phi}(\sigma,t)=[\phi(\sigma,t),H],\quad \dot{\pi}(\sigma,t)=[\pi(\sigma,t),H]. \tag{1.14}$$

由于 σ 可以是任何连续变量，我们当然可以将之取成三维空间的坐标矢量 $\mathbf{x}$，则相应的 $\phi(\mathbf{x})$ 就是空间上的一个分布，也就是一个场，$\pi(\mathbf{x})$ 则是这个场的共轭动量，它同样也是场，而 $\phi(\mathbf{x},t)$、$\pi(\mathbf{x},t)$ 则分别描述的是这两个场随时间的演化，哈密顿正则方程则是这种时间演化的动力学。这样，我们就成功地将哈密顿力学的理论框架从点粒子系统延展到了场论系统。而注意到空间是三维的，因此场论系统泊松括号的更准确写法应该是

$$[A,B]=\int d^3\mathbf{x}\Big(\frac{\delta A}{\delta\phi(\mathbf{x})}\frac{\delta B}{\delta\pi(\mathbf{x})}-\frac{\delta A}{\delta\pi(\mathbf{x})}\frac{\delta B}{\delta\phi(\mathbf{x})}\Big). \tag{1.15}$$

1.1.2 局域场论

[从本小节开始，我们以 $x=(t,\mathbf{x})$ 代表时空点。]

不过，上一小节所说的场论系统过于一般性了，实际上人们更关心也更重要的场论系统是所谓的局域场论，即满足一定局域性要求的场论。简单来说，这样的局域性要求即是，要求系统的能量体现为局域性的能量密度分布。具体来说即是，要求描述系统能量的哈密顿量具有如下形式

$$H=\int d^3\mathbf{x}\mathscr{H}(\pi,\phi,\nabla\phi). \tag{1.16}$$

式中 $\mathscr{H}$ 称之为哈密顿密度，它描述局域场论系统的能量密度，并且通常是场变量 $\phi(x)$，其空间梯度 $\nabla\phi$，以及共轭动量 $\pi(x)$ 的一个函数 (注意，是普通函数而不是泛函)，因此记为 $\mathscr{H}(\pi,\phi,\nabla\phi)$。举例来说，$\mathscr{H}(\pi,\phi,\nabla\phi)$ 可以取如下形式，

$$\mathscr{H}(\pi,\phi,\nabla\phi)=\frac{1}{2}\Big[\pi^2+c^2(\nabla\phi)^2\Big], \tag{1.17}$$

式中 c 为真空中的光速，式中的 $\frac{1}{2}\pi^2$ 表示场的动能密度，而 $\frac{1}{2}c^2(\nabla\phi)^2$ 表示场的势能密度。

很显然，对于局域场论系统，其相空间作用量可以写成

$$\begin{aligned}S[\phi(x),\pi(x)]&=\int dtd^3\mathbf{x}[\pi(x)\dot{\phi}(x)]-\int dtH[\phi(x),\pi(x)]\\&=\int d^4x\Big[\pi(x)\dot{\phi}(x)-\mathscr{H}(\pi,\phi,\nabla\phi)\Big].\end{aligned} \tag{1.18}$$

式中 $\int d^4x=\int dtd^3\mathbf{x}$ 是对整个四维时空积分。而为了应用相空间最小作用量原理，我们需要考虑时空上的变分 $\delta\phi(x),\delta\pi(x)$，并且要满足边界条件，即，$\delta\phi(x)$ 在时空的无穷远边界上等于零!

从上面相空间作用量泛函的表达式可以看出，$\pi(x)\dot{\phi}(x)$ 具有能量密度的量纲，记为 $[\pi\dot{\phi}]=[EL^{-3}]$。这里以 [] 号表示取一个物理量的量纲，因此 $[E]$ 表示能量量纲，$[L]$ 表示空间长度量纲，$[t]$ 表示时间量纲。由 $[\pi\dot{\phi}]=[EL^{-3}]$ 很容易看出，

$$[\pi][\phi]=[EL^{-3}][t]. \tag{1.19}$$

从这种量纲分析中我们就能理解为什么 (1.17) 式中要引入常数 c，因为只有这样整个表达式的量纲才可能对。具体来说，对于 (1.17) 式给出的哈密顿密度，我们有

$$[\pi]=[EL^{-3}]^{\frac{1}{2}},\quad [\phi]=[\pi][t]. \tag{1.20}$$

但是，在进行理论推导时，人们常常通过重新选取时间的单位以使得光速 $c=1$，在这样的单位制中当然就有 $[L]=[t]$。不仅如此，这种重新选取单位的方法还可以推广，以使得给定场论系统哈密顿密度表达式中一些原本带量纲的常数成为 1，后文我们常常会这样做。

根据《经典力学新讲》第二章的知识可以知道，从相空间最小作用量原理出发，让作用量对共轭动量变分等于零，从而从作用量表达式中消去共轭动量，就可以得到所谓的“坐标空间最小作用量原理”。当然在场论的情形中用坐标空间这个词不太合适，更准确的说法是得到位形空间的最小作用量原理，或者就称为通常的最小作用量原理。

让 $S[\phi(x),\pi(x)]$ 对 $\pi(x)$ 变分等于零，得到的是

$$\dot{\phi}(x)=\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\pi}, \tag{1.21}$$

从这个式子反解出 $\pi(x)$ 并代入 $S[\phi(x),\pi(x)]$，就可以得到位形空间的作用量

$$S[\phi(x)]=\int d^4x\mathscr{L}(\phi,\dot{\phi},\nabla\phi). \tag{1.22}$$

式中 $\mathscr{L}(\phi,\dot{\phi},\nabla\phi)$ 称为拉格朗日密度，它其实就是在表达式 $\mathscr{L}(\phi,\dot{\phi},\nabla\phi)=\pi(x)\dot{\phi}(x)-\mathscr{H}(\pi,\phi,\nabla\phi)$ 中消去 $\pi(x)$ 而得到，更准确的写法应该是

$$\mathscr{L}(\phi,\dot{\phi},\nabla\phi)=\mathrm{extrem}_{\pi}\Big[\pi\dot{\phi}-\mathscr{H}(\pi,\phi,\nabla\phi)\Big]. \tag{1.23}$$

当然，这也就是勒让德变换，即**拉格朗日密度是哈密顿密度的勒让德变换**！反过来，哈密顿密度也是拉格朗日密度的勒让德变换，即

$$\mathscr{H}(\pi,\phi,\nabla\phi)=\mathrm{extrem}_{\dot{\phi}}\Big[\pi\dot{\phi}-\mathscr{L}(\phi,\dot{\phi},\nabla\phi)\Big]. \tag{1.24}$$

因此也有

$$\pi=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}}. \tag{1.25}$$

经过了对 $\pi(x)$ 求极值的操作以后，相空间的最小作用量就变成了位形空间的最小作用量原理，也就是通常的最小作用量原理。根据这条原理，场位形 $\phi(x)$ 应该使得作用量泛函 $S[\phi(x)]$ 取极值，即对于变分 $\delta\phi(x)$ 有如下方程

$$\delta S[\phi(x)]=0. \tag{1.26}$$

事实上，位形空间作用量泛函 $S[\phi(x)]$ 和对称性的关系更为直接，人们往往可以根据系统所须满足的对称性直接写出 $S[\phi(x)]$，然后再利用位形空间的最小作用量原理得出场 $\phi(x)$ 所满足的运动方程。(这也将是本书后续章节中将要采用的主要处理方式。) 从这个意义上看，位形空间的作用量泛函 $S[\phi(x)]$ 以及相应的最小作用量原理对于我们来说更重要，而前面的哈密顿力学框架以及相空间最小作用量原理则可以看成是为了自然地引出这些位形空间概念的前期准备。尤其是，通过这些准备工作，我们可以看清楚拉格朗日密度的物理含义，即，它是场论系统能量密度的勒让德变换。

根据 (1.22) 式，我们可以进行如下推导

$$\begin{aligned}\delta S[\phi(x)]&=\int d^4x\delta\mathscr{L}(\phi,\dot{\phi},\nabla\phi)\\&=\int d^4x\Big[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\delta\phi+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}}\delta\dot{\phi}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\nabla\phi)}\cdot\delta(\nabla\phi)\Big]\\&=\int d^4x\Big[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial t}\big(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}}\big)-\nabla\cdot\Big(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\nabla\phi)}\Big)\Big]\delta\phi\\&+\int d^4x\frac{\partial}{\partial t}\big(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}}\delta\phi\big)+\int d^4x\nabla\cdot\Big(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\nabla\phi)}\delta\phi\Big).\end{aligned} \tag{1.27}$$

很显然，最后一行的两项都是全微分项，因此积分可以算出来，结果为

$$\begin{aligned}&\int d^4x\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}}\delta\phi\Big)+\int d^4x\nabla\cdot\Big(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\nabla\phi)}\delta\phi\Big)\\&=\int d^3\mathbf{x}\Big(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}}\delta\phi\Big)|_{t=\infty}+\int dt\int d\mathbf{S}\cdot\Big(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\nabla\phi)}\delta\phi\Big)|_{r=\infty}.\end{aligned}\tag{1.28}$$

很明显，结果只在无穷远过去和无穷远将来的边界上，以及空间上无穷远处的边界上有贡献，总之，结果仅仅在四维时空的无穷远边界上有贡献。但是，前面我们提到过，在时空的边界上，$\delta\phi=0$，因此这两项的最终结果其实都等于零。从而即有

$$\delta S[\phi(x)]=\int d^4x\Big[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}}\Big)-\nabla\cdot\Big(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\nabla\phi)}\Big)\Big]\delta\phi(x),\tag{1.29}$$

进一步应用最小作用量原理 $\delta S[\phi(x)]=0$，即可得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}}\Big)+\nabla\cdot\Big(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\nabla\phi)}\Big)=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}.\tag{1.30}$$

这就是场 $\phi(x)$ 需要满足的微分方程，称之为场方程，它显然是经典力学中拉格朗日方程的推广。

举例

[**正如前面提到过的，从现在开始，我们假定选取了合适的时间单位，以使得光速** $c=1$。]

作为例子，下面考察一类特定的场论模型，我们假定场论系统的能量密度由下面的哈密顿密度描述

$$\mathscr{H}=\frac{1}{2}\Big[\pi^2+(\nabla\phi)^2\Big]+\mathscr{U}(\phi),\tag{1.31}$$

式中 $\mathscr{U}(\phi)$ 是一个关于场 ϕ 的函数。即是说，假定场论系统的动能 T 和势能 V 分别为

$$T=\int d^3\mathbf{x}\Big[\frac{1}{2}\pi^2\Big],\quad V=\int d^3\mathbf{x}\Big[\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2+\mathscr{U}(\phi)\Big].\tag{1.32}$$

在这里，关于场动能的假定是很通常的，至于势能，这个假设说的即是，场的空间梯度会产生一种势能，它由密度 $\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2$ 描述，另外，场的相互作用也会产生一种势能，它由密度 $\mathscr{U}(\phi)$ 描述，这两种密度加起来就是总的势能密度。

为了进行勒让德变换，我们容易求出 $\dot{\phi}=\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\pi}=\pi$, 从而有

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\Big[(\partial_t\phi)^2-(\nabla\phi)^2\Big]-\mathscr{U}(\phi),\tag{1.33}$$

式中 $\partial_t\phi=\dot{\phi}=\frac{\partial\phi}{\partial t}$。将这个拉格朗日密度代入拉格朗日方程 (1.30)，就可以得到场的运动方程，为

$$\partial_t^2\phi-\nabla^2\phi=-\frac{\partial\mathscr{U}}{\partial\phi}.\tag{1.34}$$

特别的，如果函数 $\mathscr{U}=0$，那上面的场方程就简化为

$$\partial_t^2\phi-\nabla^2\phi=0.\tag{1.35}$$

这是一个标准的波动方程，它描写的是以光速 $c=1$ 传播的一种波动。但这种波动并不是电磁波，因为这里考察的场 $\phi(x)$ 是一种标量场，而电磁波的场是矢量场。不过，这个例子使得我们自然想到，有可能用一个类似上面的拉格朗日密度描写电磁波和电磁场，当然，为此我们需要将上面的理论框架稍作推广，这种推广我们放到后续的章节中进行。

在下一章中，我们将看到，(1.33) 式给出的拉格朗日密度在很大程度上是由狭义相对论的洛伦兹对称性所决定的。实际上，从下一章开始我们就不再像这里一样通过有些任意性地假设场的哈密顿密度表达式来研究场论了，而是通过先猜测系统所须满足的对称性，然后根据这个对称性直接写出拉格朗日密度来进行研究。这时候场的能量密度是反过来通过对拉格朗日密度进行勒让德变换得到的。

1.2 粒子作为场方程的一种解

我们已经初步领略了场论的味道，场和粒子都可以用哈密顿力学以及拉格朗日力学的框架来描述，但是，在物理上，场和粒子似乎完全不同，场的能量是分布在整个空间的，而粒子的能量是集中在一个很小的空间区域上的。看起来似乎是，大自然同时给了我们两种完全不同的物理实体，一种是电子、质子这样的粒子，另一种是电磁场这样的场。然而，现代物理的研究表明，电子、质子同样可以用场来描述，场和粒子与其说是两种不同的物理实体，不如说是对物理实体的两种相互对偶的不同描述。

正确解释粒子与场的关系需要将场量子化，进而将粒子作为场的一种激发态，因此这是量子场论的主题。但是在经典场论的框架下也有可能给粒子提供一种解释 (虽然它不能解释所谓的基本粒子)，即将粒子看成是场方程的一种特殊解，通常称作孤立子解，在这种解中，场的能量主要集中在空间上一个很小的局部区域上，并且能够稳定地维持在这样的区域上不弥散，这样从更大的尺度来看，我们就可以把这个小局部区域当成一个粒子，而当这个稳定区域移动时，我们就可以认为是一个粒子在运动。本节就是要以 $1+1$ 维时空 (1 维空间 $+1$ 维时间) 中一个特殊场论模型为例，解释孤立子解是如何可能的。

这一节的下面一些内容都是在 $1+1$ 维时空中考察问题。我们以 σ 来表示一维空间坐标，以 $x=(\sigma,t)$ 来表示时空点，从而时空上的场为 $\phi(x)=\phi(\sigma,t)$。

1.2.1 场位形的拓扑等价类

假设我们考察的场论模型具有如下拉格朗日密度

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\left[(\partial_t\phi)^2-(\partial_\sigma\phi)^2\right]-\mathscr{U}(\phi), \tag{1.36}$$

式中 $\partial_\sigma\phi=\frac{\partial\phi}{\partial\sigma}$。从而场的动能和势能分别为

$$T=\int_{-\infty}^{+\infty}d\sigma\left[\frac{1}{2}(\partial_t\phi)^2\right],\quad V=\int_{-\infty}^{+\infty}d\sigma\left[\frac{1}{2}(\partial_\sigma\phi)^2+\mathscr{U}(\phi)\right]. \tag{1.37}$$

场的运动方程为

$$\partial_t^2\phi-\partial_\sigma^2\phi=-\frac{\partial\mathscr{U}}{\partial\phi}. \tag{1.38}$$

特别的，对于不依赖时间的静态场位形，场方程的相应解就是使得势能泛函取极值的位形，这可以通过 $\delta V[\phi(\sigma)]=0$ 导出方程来验证。

进一步，我们假设函数 $\mathscr{U}(\phi)$ 有下界 (这是为了确保系统的能量有下界)，而由于我们总可以通过给势能密度加上一个常数来调节这个下界的值，所以我们再假定，$\mathscr{U}(\phi)$ 的下确界为零，即 $\mathscr{U}(\phi)$ 的最小值为零。

我们称使得 $\mathscr{U}(\phi)$ 取最小值零的场位形为真空场位形，更严格地说，我们定义真空场位形的集合 Ω 为

$$\Omega=\{\phi|\partial_t\phi=\partial_\sigma\phi=0,\text{ and }\mathscr{U}(\phi)=0\}. \tag{1.39}$$

即是说，真空场位形是一种静态场位形，它在空间各点取值为常数，并且这个常数使得函数 $\mathscr{U}(\phi)$ 达到最小。很显然，真空场位形是场方程 (1.38) 的解，称作真空解。同样很显然，真空场位形的动能和势能都是零，从而真空场位形的总能量为零。而从动能 T 以及势能 V 的表达式也很容易看出，其它任何场位形的能量必定大于真空场位形的能量。从而，真空场位形就是使得场的总能量取最小值 (即零) 的场位形。

对于本节所要考察的模型来说，使得 $\mathscr{U}(\phi)$ 取最小值的 ϕ 并不唯一，从而真空场位形集合 Ω 中的元素多于 1 个，即是说，系统有多个真空。

另外，从 T 和 V 的表达式也可以看出，对于任何场位形，为了使得系统的总能量有限，它在空间无穷远处必须要趋于真空场位形，否则在无穷远区域的动能密度和势能密度就不等于零，积分的话就会贡献无穷大的总能量。我们记

$$\phi_\pm=\lim_{\sigma\to\pm\infty}\phi(\sigma), \tag{1.40}$$

则根据刚才的论述，必有

$$\phi_\pm\in\Omega. \tag{1.41}$$

如果 $\phi_+=\phi_-$，则我们可以在保持总能量始终有限的前提下连续地改变场位形，以使得最终 $\phi(x)=\phi_+$，即使得最终的场位形处处取同一个真空位形 ϕ_+。即是说，如果一个场位形满足 $\phi_+=\phi_-$，那它就可以连续地变形为真空解，我们称这种场位形拓扑上等价于真空位形。

反过来，如果 $\phi_+\neq\phi_-$，那任何将场位形连续变形为真空位形的过程都要至少改变其在 $\pm\infty$ 某一端的边界值，比方说将 $-\infty$ 区域的 ϕ_- 连续变形为 ϕ_+，但很显然，这会使得这个边界位形在变形过程中偏离真空，从而需要无穷大的总能量。因此，如果总能量始终有限，那么 $\phi_+\neq\phi_-$ 的这种场位形就不可能连续变形为真空场位形，我们称它和真空场位形拓扑不等价。假设以无穷远边界位形对 (ϕ_-,ϕ_+) 来标记一个场位形，那么完全类似上面的推理告诉我们，一般来说，两个 (ϕ_-,ϕ_+) 对不同的场位形不可能在保持总能量有限的情况下连续过渡，称之为拓扑不等价[1]。所以，一般来说，(ϕ_-,ϕ_+) 对标记的是场位形的拓扑等价类，同一类的就拓扑等价，不同类的就拓扑不等价。

[1]除非系统有某种对称性，比如后面 sine-Gordon 场论的例子讨论的那样，这时候某些 (ϕ_-,ϕ_+) 对不同的场位形可能等价。

特别的，我们可以将场位形随时间的演化看成是一种对场位形连续变形的过程，那上面的论证就告诉我们，不同拓扑等价类的场位形不可能相互演化，比方说，一个 $\phi_+ \neq \phi_-$ 的场位形不可能演化成一个真空场位形，反过来也一样，一个真空场位形也不可能演化成一个 $\phi_+ \neq \phi_-$ 的场位形。即是说，场位形的拓扑等价类在时间演化之下是稳定不变的。

人们通常称一个 $\phi_- \neq \phi_+$ 的场位形为扭结 (kinks)，这个名称来源于，这种场位形从 $-\infty$ 处的 ϕ_- 值过渡到 $+\infty$ 处的 ϕ_+，它在中间必定要扭一下。场方程 (1.38) 的扭结解其实就是一种孤立子，因为正如我们将要看到的，对于这种解，其能量将主要集中在场位形的扭结处，这通常是一个很小的空间区域。而且，扭结解拓扑等价类的稳定性正好相应于孤立子的稳定性。

1.2.2 Bogomolny 能限和 Bogomolny 方程

下面我们来考察每一个场位形拓扑等价类的能量下界，以及使得能量达到下界的场位形。很显然，为了使得能量 E 尽可能低，我们只需考察动能为零的场位形，也就是静态场位形，这时候 $E = V[\phi(\sigma)] = \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma \left[\frac{1}{2}(\partial_\sigma \phi)^2 + \mathscr{U}(\phi)\right]$。本小节下面都是默认考虑静态场位形。

首先，我们有下面不等式

$$\frac{1}{2}\left(\partial_\sigma \phi \pm \sqrt{2\mathscr{U}(\phi)}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(\partial_\sigma \phi)^2 + \mathscr{U}(\phi) \geq \pm\sqrt{2\mathscr{U}(\phi)}\partial_\sigma \phi. \tag{1.42}$$

将上面的结果对空间坐标 σ 进行积分，即有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma \left[\frac{1}{2}(\partial_\sigma \phi)^2 + \mathscr{U}(\phi)\right] \geq \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2\mathscr{U}(\phi)}\partial_\sigma \phi d\sigma. \tag{1.43}$$

因此有

$$E \geq \left| \int_{\phi_-}^{\phi_+} \sqrt{2\mathscr{U}(\phi)} d\phi \right|. \tag{1.44}$$

又由于我们假设 $\mathscr{U}(\phi)$ 的最小值为零，即 $\mathscr{U}(\phi) \geq 0$, 所以可以引入一个 $W(\phi)$，并令

$$\mathscr{U}(\phi) = \frac{1}{2}\left(\frac{dW}{d\phi}\right)^2. \tag{1.45}$$

代入上面的 (1.44) 式，即可以得到

$$E \geq |W(\phi_+) - W(\phi_-)|. \tag{1.46}$$

这就是场位形的能量下界，称之为 Bogomolny 能限，很显然，这个下限仅仅依赖于场位形的拓扑等价类 (ϕ_-, ϕ_+)。

从上面的推导过程不难看出，为了使得场位形的能量尽量低，以达到 Bogomolny 能限，我们不仅要限于考虑静态场位形，而且此静态场位形还应该满足

$$\partial_\sigma \phi = \pm\sqrt{2\mathscr{U}(\phi)}, \tag{1.47}$$

因为只有这样才能使得推导 Bogomolny 能限时的出发点不等式 $\frac{1}{2}\left(\partial_\sigma \phi \pm \sqrt{2\mathscr{U}(\phi)}\right)^2 \geq 0$ 取等于号。方程 (1.47) 就称为 Bogomolny 方程。

上面的推导告诉我们，一个静态场位形如果同时还满足 Bogomolny 方程，那它一定使得势能泛函 $V[\phi(\sigma)]$ 在给定拓扑等价类中取最小值，从而当然也就使得势能泛函 $V[\phi(\sigma)]$ 达到极小值，从而相应的场位形必定满足场方程 (1.38)。即，满足 Bogomolny 方程的静态场位形必定满足场方程 (1.38)，这个结论其实也不难直接验证。但是反之则不然，即满足场方程 (1.38) 的场位形可不一定满足 Bogomolny 方程。Bogomolny 方程相比场方程的巨大优点就在于，它是一个很简单的一阶微分方程，很容易积分出来！

1.2.3 sine-Gordon 模型和孤立子

这一节我们考察一个更加具体的场论模型，称之为 sine-Gordon 模型，这个模型即是在前面两个小节的基础上取 $\mathscr{U}(\phi)$ 为一个三角函数，比如取

$$\mathscr{U}(\phi) = 1 - \cos\phi = 2\sin^2(\phi/2). \tag{1.48}$$

从而系统的拉格朗日密度为

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial_t\phi)^2 - (\partial_\sigma\phi)^2\right] - \big(1-\cos\phi\big). \tag{1.49}$$

当这样取时，我们已经假定通过合适地选取长度和能量的单位来使得拉格朗日密度中的各带量纲参数取 1 了。

很显然，sine-Gordon 模型的真空场位形为，$\phi = 2\pi n$, 其中 n 为任意整数 $n \in \mathbb{Z}$。根据前两个小节，任何有限能量场位形的拓扑等价类一般来说可以由 (ϕ_-, ϕ_+) 来标记，$\phi_\pm$ 为空间无穷远处的渐近真空场位形，但是，上面的 sine-Gordon 模型有一种特殊的对称性，即它的拉格朗日密度在 $\phi \to \phi \pm 2\pi$ 的变换下保持不变，因此实际上，下面两类场位形是等价的，

$$(\phi_-, \phi_+) \sim (\phi_- + 2\pi n, \phi_+ + 2\pi n). \tag{1.50}$$

因此 sine-Gordon 模型场位形的拓扑等价类其实由 $\phi_+ - \phi_-$ 分类。人们常常定义场位形的拓扑荷 N 为

$$N = \frac{\phi_+ - \phi_-}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_{\phi_-}^{\phi_+} d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(\partial_\sigma\phi)d\sigma, \tag{1.51}$$

式中 $(\partial_\sigma\phi)/(2\pi)$ 称作拓扑荷密度。很显然，拓扑荷 N 是一个整数，而且完全分类了 sine-Gordon 场位形的拓扑等价类。

sine-Gordon 模型的 Bogomolny 能限为

$$E \geq \left|\int_0^{2\pi N} 2\sin(\phi/2)d\phi\right| = \int_0^{2\pi|N|} 2\,|\sin(\phi/2)|\,d\phi. \tag{1.52}$$

注意到函数 $|\sin(\phi/2)|$ 的周期为 2π，从而有

$$E \geq \int_0^{2\pi|N|} 2\,|\sin(\phi/2)|\,d\phi = 4|N|\big[-\cos(\phi/2)\big]_0^{2\pi} = 8|N|. \tag{1.53}$$

能限的等于号仅在静态且满足下面 Bogomolny 方程的场位形中取到，

$$\partial_\sigma \phi = \pm 2\sin(\phi/2). \tag{1.54}$$

很容易积分求解 Bogomolny 方程 (1.54)，比方说对于 (1.54) 式取 + 号的情形，我们容易积分得出

$$\phi(\sigma) = 4\tan^{-1}\left(e^{\sigma-a}\right), \tag{1.55}$$

式中 a 为积分常数。很显然，这个解满足，$\phi_- = \phi(-\infty) = 0$, $\phi_+ = \phi(+\infty) = 2\pi$，即这个解的拓扑荷 $N = 1$。我们称这种解为静态单扭结解 (single kink solution)。类似的，如果我们在 (1.54) 式取 − 号，相应的解很明显相当于将静态单扭结解作 $\sigma \to -\sigma$ 的替换，从而满足 $\phi_- = 2\pi$, $\phi_+ = 0$，因此是一个拓扑荷为 $N = -1$ 的解，称之为静态反单扭结解 (single anti-kink solution)。另外，很显然，Bogomolny 方程 (1.54) 还有 $\phi = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ 的真空解，这是方程 (1.54) 的特解，它相当于在上面的一般解 (1.55) 中取 $a \to \pm\infty$ 的极限。这种真空解的拓扑荷当然满足 $N = 0$。

下面我们来计算一下静态单扭结解的能量密度 $\mathscr{E}$，

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2}(\partial_\sigma \phi)^2 + (1 - \cos\phi) = 4\sin^2(\phi/2). \tag{1.56}$$

代入解 (1.55)，可以得到

$$\mathscr{E}(\sigma) = \frac{4}{\cosh^2(\sigma - a)}. \tag{1.57}$$

很显然，这个能量密度在 $\sigma = a$ 处达到最大，在 a 点的左右两侧都迅速衰减，很快就衰减为零。并且当然，解的总能量 $E = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{E}(\sigma) d\sigma = 8 \cdot |1| = 8$，刚好处于 Bogomolny 能限。我们可以画出静态单扭结解场位形和能量密度分布的示意图，如图 (1.1) 所示。很显然，静

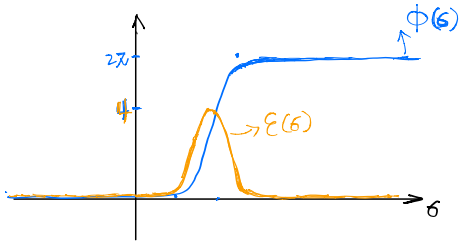

Figure 1.1: 静态单扭结解的场位形和能量密度分布。

态单扭结解的能量主要集中在 a 点附近的一个小区间内，因此从更大的尺度来看，人们可以等效地认为是在 a 点附近有一个粒子，这就是孤立子 (soliton) 这一名称的来源。我们常常称这个能量中心位置 a 为静态单扭结解的位置，这当然就是把它当成一个粒子来看待了。

不仅如此，对于一个静态单扭结解，假如我们换一个以速度 $-v$ 运动的参考系来看它，那这个解看起来就是以速度 v 在运动，即它的能量中心在以速度 v 朝前运动，看起来就像

是一个以速度 v 运动的粒子。这就说明，sine-Gordon 模型不仅存在静态的孤立子解，而且从这些静态解也很容易得到匀速运动的孤立子解。这就加强了将单扭结解和反单扭结解等效地看作粒子的看法。

另外，从前面的讨论可以知道，Bogomolny 方程 (1.54) 只有 $N=0,\pm1$ 的解，而没有 N 取其它值的静态多扭结解。这意味着 $N\neq0,\pm1$ 时 Bogomolny 能限是达不到的。而这又意味着，当我们将两个静态单扭结解叠加并做必要的修正，以试图得到场方程 (不是 Bogomolny 方程) 的一个 $N=2$ 的 2-扭结解时，这个 $N=2$ 场位形的总能量一定严格大于 $8\cdot|2|=16$，即 $E>8\cdot|2|$，其中多出来的能量 $E-16$ 可以解释为两个单扭结之间的相互作用势能，它依赖于两个扭结之间的距离 R，因此不妨记为 $V_I(R)$。另一方面，我们也知道，如果相互叠加的这两个单扭结之间的距离趋于无穷，那它们之间的相互影响就可以忽略，这时候场位形的总能量当然就趋于两个静态单扭结解的能量总和，也就是 $E=8\cdot2$, 从而 $V_I(\infty)=0$。直观上，这就说明，2-扭结解的相互作用势能是随着两个扭结之间距离的增加而减少的，从而有 $F_I=-\frac{\partial V_I}{\partial R}>0$，这说明 2-扭结解的两个扭结之间存在排斥力，在这个排斥力的作用下，这两个扭结不可能保持静止，它们最终一定会相互远离。

以上的分析说明, sine-Gordon 模型场方程的 2-扭结解必定不是静态解! 通常来说, 这种 2-扭结解应该描述的是两个运动着的单扭结之间的散射, 如图 (1.2) 所示。同样的道理,

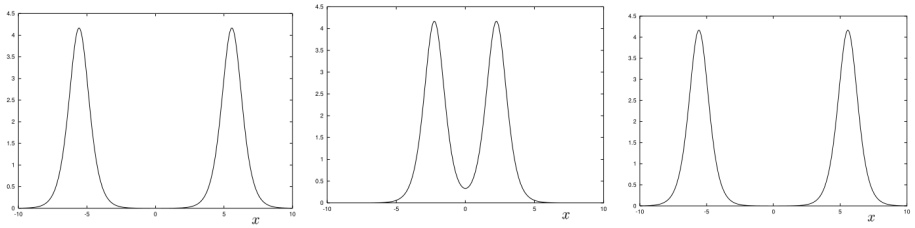

Figure 1.2: 2-扭结散射的能量密度分布，3 幅图的时间依次是 $t=-20,t=0,t=20$。

其它多扭结解也都不是静态解，而是描述多个单扭结之间的散射。1+1 维 sine-Gordon 模型的特殊之处在于，它是一个可积场论，从而原则上其实可以精确得到它的所有多扭结解! 不过，用可积系统的办法处理 sine-Gordon 模型超出了本书的范围。



2. 相对性原理与场论

上一章说过，我们主要考察满足狭义相对论的经典场论。本章就从相对论的基本原理出发，考察狭义相对论将给经典场论施加什么限制。

在本章中，对于一个带指标的量，将使用上、下两种指标，并且两者通常是有区别的。我们引入一个所谓的**求和约定**，即当一个表达式中某个上指标和某个下指标符号相同时，就默认对这个指标的所有可能性进行求和。

2.1 相对性原理

2.1.1 信息传播的最大速度

伽利略最早论述了相对性原理，它说的是，在所有惯性系中力学规律都是一样的。力学规律当然也要包括物体之间相互作用的规律，但是在伽利略和牛顿时代建立的理论中，两个物体之间的相互作用是瞬时进行的，比如牛顿的万有引力定律就是这样，这就是所谓的超距相互作用。正如牛顿已经注意到的，这肯定是有问题的，一个物体要和另一个物体相互作用，也就是要对另一个物体施加影响，这种影响不可能即时，而必定有一个时间的延迟，但是伽利略的力学相对性原理没有考虑到这一点。

爱因斯坦将相对性原理进行了推广，爱因斯坦提出，在所有惯性系中，一切物理规律——包括相互作用的传播规律——都是相同的。特别的，爱因斯坦提出，相互作用的传播速度不是无穷大，而是有限的。这个相互作用传播速度有限的相对性原理就是爱因斯坦的相对性原理，今天谈相对性原理时都默认指的是这条原理。

的确，按照今天对经典物理的理解，一个物体要对另一个物体施加作用，就要向它发出一个信号，而受作用的物体只是对这个信号进行响应，在场论中，这个传播相互作用的信号就是场的波动。总之，物体间的相互作用需要信息的传递，但是信息传递的速度不可能像超距作用说的那样是无穷大，而必定是有限的。不妨记信息传播的最大速度为 c(当然，正如后面的章节中将会证明的，c 就是真空中的光速)，按照相对性原理，c 必定不依赖于所选的惯性系，而是一个不变的常数，**因此我们当然可以合适地选择时间的单位，使得** $c=1$。

同时的相对性

信息传播的最大速度是常数的一个立即推论即是，两个不同地点的事件是否同时发生是依赖于参考系的，在一个惯性系中同时发生的两件事，在另一个惯性系中往往不同时，这就是同时的相对性。同时的相对性意味着，在狭义相对论中，时间不是绝对的，不同的惯性系将有不同的时间!

为了理解同时的相对性，让我们考虑两个惯性系，分别称为 S 系和 S' 系，假设 S' 沿着 S 的 x 轴正方向匀速运动。设想在 S 系的 x 轴上两个不同点 A 和 B(假设 $x_A<x_B$) 同时发生了两个事件，并且在事件发生的同时，A、B 两地分别向着 AB 的中点以最大传播速度 c 发出一个信号，很显然，在 S 系位于 AB 中点的观察者看来，这两束信号将同时到达。并且正是根据这两者的同时到达，这个观察者才可以推断 A、B 两点的事件是同时发生的。现在假设在 S' 系的 AB 中点也有一个观察者，同样的道理，这个观察者对 A、B 两地的事件是否同时发生的判断也是依据他是否同时接收到事件发生时发出的那两个信号。

那么 S' 系的这个观察者是否会同时接收到那两个信号呢? 根据 c 的不变性，答案将是否定的，实际上这个观察者将先接收到 B 地发出的信号。这是因为，根据最大信息传播速度的不变性，A、B 两地发出的信号在 S' 的观察者看来依然以同样的速度 c 传播，但是，现在这两个信号将要到达的目的地–也就是 AB 在 S' 系中的中点–在朝着 B 地发出的信号运动 (同时也在背着 A 地发出的信号运动)，因此 S' 系位于中点的这个观察者无疑会先接收到 B 地发出的信号。因此，在 S' 系的这个观察者就会进而得出结论，即 A、B 两地的这两个事件不是同时发生的，而是 B 点的事件先发生，A 点的事件后发生，因此同时是相对的。请千万要记住，在整个分析过程中，你心中绝对不能预设 A、B 两地的信号在 S' 系中也是同时发出的。

2.1.2 间隔不变性

依然考察 S 系和 S' 系这两个惯性系，假定同一事件在这两个参考系中的时空坐标分别是 (t,x,y,z) 和 $(t',x',y'.z')$。则，由于时空的均匀性，这两个参考系之间的坐标变换一定是一个**线性变换**。

现在，设想在 S 系中，从 (t,x,y,z) 点发出一束光到达 $(t+dt,x+dx,y+dy,z+dz)$ 点，由于 $c=1$，显然我们有

$$-dt^2+dx^2+dy^2+dz^2=0. \tag{2.1}$$

根据 c 的不变性，同样的两个事件在 S' 系看来也得满足

$$-dt'^2+dx'^2+dy'^2+dz'^2=0. \tag{2.2}$$

换言之，两个邻近事件在两不同参考系中的时空坐标必得满足一个约束关系，即当 (2.1) 成立时必有 (2.2) 成立，反之亦然。又由于两参考系之间的坐标变换是线性变换，因此，对任意的两个邻近事件，我们必有

$$-dt'^2+dx'^2+dy'^2+dz'^2=D(\mathbf{v})(-dt^2+dx^2+dy^2+dz^2), \tag{2.3}$$

式中 $\mathbf{v}$ 是 S' 系相对于 S 系的速度。同样的，由于 S 与 S' 地位平等，如果从 S' 变换到 S，就有

$$-dt^2+dx^2+dy^2+dz^2=D(-\mathbf{v})(-dt'^2+dx'^2+dy'^2+dz'^2). \tag{2.4}$$

换言之，我们必有 $D(-\mathbf{v})D(\mathbf{v})=1$。又由于空间的各向同性可知，$D$ 对相对速度 $\mathbf{v}$ 的依赖只能是依赖于其大小 v，而必定和其方向无关，因此我们必定有 $D(-\mathbf{v})=D(\mathbf{v})=D(v)$。因此，$D(-\mathbf{v})D(\mathbf{v})=(D(v))^2=1$，即 $D(v)=\pm1$。又由于 $D(v)$ 是 v 的连续函数，而且 $D(0)=1$(对应 S 和 S' 为同一个参考系的情形)，因此必有 $D(v)=1$。因此，对于任意两个邻近事件我们必有

$$-dt'^2+dx'^2+dy'^2+dz'^2=-dt^2+dx^2+dy^2+dz^2. \tag{2.5}$$

通常将 $-dt^2+dx^2+dy^2+dz^2$ 称为两个邻近事件的时空间隔的平方，简称间隔平方，并记为 ds^2，即

$$ds^2=-dt^2+dx^2+dy^2+dz^2=-dt^2+d\mathbf{x}^2. \tag{2.6}$$

用这个记号，方程 (2.5) 就可以简记成

$$ds'^2=ds^2, \tag{2.7}$$

称为两个事件的间隔不变性。

人们通常约定 $t=ct=x^0, x=x^1, y=x^2, z=x^3$，这样就把四个时空坐标统一地记成了 $x^\mu, \mu=0,1,2,3$。利用这个记号，我们就可以将间隔的计算公式重写为

$$ds^2=\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \tag{2.8}$$

式中我们默认了求和约定 (后文也都默认求和约定)，而 $\eta_{\mu\nu}$ 为，$-\eta_{00}=\eta_{11}=\eta_{22}=\eta_{33}=1$，其它指标分量都等于零。$\eta_{\mu\nu}$ 称为四维闵可夫斯基时空的度规张量，所谓的闵可夫斯基时空指的就是狭义相对论中的平直时空。值得注意的是，$\eta_{\mu\nu}$ 关于它的两个指标是对称的，即满足 $\eta_{\mu\nu}=\eta_{\nu\mu}$。

我们可以将 $\eta_{\mu\nu}$ 看成是一个 4×4 矩阵的分量形式 (记这个矩阵为 η)，进而引入这个矩阵的逆矩阵 η^{-1}，其分量形式记为 $\eta^{\mu\nu}$，

$$\eta_{\alpha\beta}\eta^{\beta\gamma}=\delta^\gamma_\alpha, \tag{2.9}$$

式中 δ^{γ}_{α} 为 4×4 单位矩阵的分量形式。很容易看出，$\eta^{\mu\nu}$ 也为，$-\eta^{00}=\eta^{11}=\eta^{22}=\eta^{33}=1$，其它指标分量都等于零。

假设我们考察的不是两个邻近时空点，而是两个有限间隔的时空点 x_1^{μ} 和 x_2^{μ}，记 $\Delta x^{\mu}=x_2^{\mu}-x_1^{\mu}$，记这两个事件的时空间隔为 Δs，则有

$$(\Delta s)^2=\eta_{\mu\nu}\Delta x^{\mu}\Delta x^{\nu}=-(\Delta t)^2+(\Delta\mathbf{x})^2. \tag{2.10}$$

同样，无论在哪个参考系中计算，间隔 Δs 都是不变的。1. 如果 $(\Delta s)^2<0$，我们就称 x_1^{μ} 和 x_2^{μ} 这两个事件**类时相间** (timelike separated)。由于这时候 $(\frac{\Delta\mathbf{x}}{\Delta t})^2<1$，所以我们总可以用信号将这两个事件联系起来，所以这两个事件就存在因果关系，而且正如马上就会看到的，在不同的惯性系中，事件的因果关系将会保持不变，先发生的事件在任何惯性系中都会先发生。2. 如果 $(\Delta s)^2=0$，我们就称这两个事件**类光相间** (lightlike separated)。这时候可以用光信号将两个事件联系起来。3. 如果 $(\Delta s)^2>0$，我们就称这两个事件**类空相间** (spacelike separated)。这时候两事件没有任何因果关系，不可能用任何信号将它们联系起来，同时它们的先后顺序也是相对的，在不同参考系中对哪个事件先发生会有不同的看法。

为了将上述两事件间的关系看得更清楚，我们取其中一个事件为 $x_1^{\mu}=0$，即位于时空图的坐标原点，另一个事件 $x_2^{\mu}=x^{\mu}$，记事件 x^{μ} 与原点事件的间隔为 s，则

$$s^2=-t^2+\mathbf{x}^2. \tag{2.11}$$

对于 $s^2=0$ 的类光相间情形，方程 $-t^2+\mathbf{x}^2=0$ 给出的是时空图上以原点为顶点的圆锥面，称之为光锥 (lightcone)，如图 (2.1) 所示。对于 $s^2<0$ 情形，这时候方程 $t^2-\mathbf{x}^2=-s^2>0$

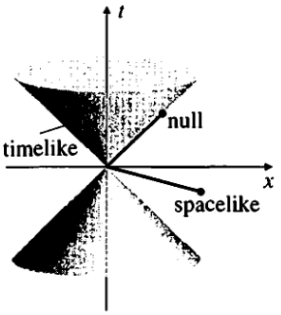

Figure 2.1: 时空图上原点处的光锥。

给出的是具有两支的双曲面，一支位于上半光锥所包围的内部区域，一支位于下半光锥所包围的内部区域，由于不同惯性系中 $t^2-\mathbf{x}^2=-s^2$ 保持不变，因此在不同惯性系中事件 2 的坐标 x^{μ} 只能在这个双曲面上变动。不过由于双曲面被光锥分隔成了两支，所以在不同惯性系中上半支的点只能在上半支上变动，即恒有 $t>0$，而下半支的点则恒有 $t<0$，即是说，处于原点未来的事件在任何惯性系中都保持在未来，而处于原点过去的事件在任何惯性系中都在过去，即，不同参考系不会改变事件间的因果关系。要让双曲面上半支的点变到下半支只能是经过一个 $t\to-t$ 的时间反演。最后，对于 $s^2>0$ 情形，方程 $\mathbf{x}^2-t^2=s^2>0$

给出的是一个连通的双曲面，原则上，这个双曲面上的任何点可以在一个合适的参考系中变到双曲面上的任何其它点，特别的，$t>0$ 的点可以变到 $t<0$，反之亦然。即是说，与原点类空相间的事件是先于原点发生还是后发生并没有绝对的意义！

固有时

假如原来有一个参考系，有一个粒子从参考系的 (t,x,y,z) 点运动到 $(t+dt,x+dx,y+dy,z+dz)$ 点，这两点 (它们当然类时相间) 间的间隔当然满足 $ds^2=\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$。现在，假设有一个钟固定在这个粒子上，记此钟走过的时间为 $d\tau$，并且我们依托这个钟建立一个固定在粒子上的参考系，那么在这个参考系中，粒子的空间位移当然是零，从而从这个固定在粒子的参考系看来，间隔 ds 应该满足，$ds^2=-d\tau^2$，即

$$\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu=-d\tau^2. \tag{2.12}$$

上式中的 τ 就称之为粒子走过的固有时，而 $x^0=t$ 则称之为坐标时。很显然，固有时就是固连在粒子上的钟所走过的时间。

假设粒子的速度为 $\mathbf{v}$，即 $d\mathbf{x}=\mathbf{v}dt$，则根据 (2.12) 式即有

$$d\tau^2=dt^2-d\mathbf{x}^2=dt^2(1-\mathbf{v}^2)\Rightarrow dt=\frac{d\tau}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}}. \tag{2.13}$$

即是说，坐标时总是比固有时长的。测固有时的钟当然是相对于原参考系运动的钟，所以这个结果常常也被人们说成是，运动的钟会变慢，因为对同一个参考系中的过程，它测出来的时间更短。

但是，这并非运动的钟本身有什么问题，而是从原参考系的静止观察者来看，运动的一切事物都变慢了，运动的人的生命过程也变慢了。不过，从运动的人自己来看，他自己的一切都是正常的，在他看来，反而是原参考系中的观察者在运动 (运动是相对的)，反而是这观察者的生命过程变慢了。

那么假设有两只钟，一只是静止的，另一只沿着闭合路径运动一圈再回到起点与静止的钟比较，那到底哪只钟慢了呢？回答是，运动的钟绝对地慢了。但是运动不是相对的吗？从运动钟来看，不是静止的钟在运动吗？但是，从这以运动的钟为参考系的后一种观点导不出静止的钟变慢的结论，因为这时候这个参考系不是一个惯性系，这是由于这个运动的钟是沿着闭合路径运动一圈而不是作匀速直线运动。

2.1.3 洛伦兹变换

狭义相对论中，两个参考系之间的时空坐标变换称作洛伦兹变换，根据前面所说，它是一个保持间隔不变性的线性变换，通常写成

$$x'^\mu=\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \tag{2.14}$$

式中 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 构成变换矩阵 Λ 的分量形式。根据间隔不变性，我们有

$$\eta_{\mu\nu}dx'^\mu dx'^\nu=\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta dx^\alpha dx^\beta=\eta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta, \tag{2.15}$$

从而即有

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}=\eta_{\alpha\beta}. \tag{2.16}$$

更一般地，人们也把任何满足上式的时空坐标变换 $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ 称作洛伦兹变换，哪怕它不是源于不同惯性系之间的变换。

我们当然可以将 (2.16) 式写成矩阵形式，即

$$\Lambda^{T}\eta\Lambda=\eta. \tag{2.17}$$

很容易验证，如果洛伦兹变换 Λ_1 满足上面式子，Λ_2 也满足上面式子，则 $\Lambda_1\Lambda_2$ 必定也满足上面式子，从而也是洛伦兹变换。即是说，所有洛伦兹变换的集合在矩阵乘法下封闭。另外，对 (2.17) 式两边求行列式，并注意到 $\det(\eta)=-1$, 从而即可得

$$[\det(\Lambda)]^2=1\Rightarrow\det(\Lambda)=\pm1. \tag{2.18}$$

由此可知矩阵 Λ 必定存在逆矩阵 Λ^{-1}，并且很明显 Λ^{-1} 也是洛伦兹变换，即任何洛伦兹变换都有逆变换。满足乘法封闭性，并且存在逆元素的元素集合就是数学上所谓的群，所以，所有洛伦兹变换的集合构成一个群，称作洛伦兹群，常常记作 $O(1,3)$。很明显，所有 $\det(\Lambda)=1$ 的洛伦兹变换也构成一个群，它是 $O(1,3)$ 的子群，通常记作 $SO(1,3)$，实际上，人们在谈到洛伦兹群的时候更多都是指的这个 $SO(1,3)$ 群。

进一步，在 (2.16) 式中取 $\alpha=\beta=0$, 即可得

$$(\Lambda^0{}_0)^2=1+\sum_{i=1,2,3}(\Lambda^i{}_0)^2\geq1\ \Rightarrow\ \Lambda^0{}_0\geq1\text{ or }\Lambda^0{}_0\leq-1. \tag{2.19}$$

从而根据 $\det(\Lambda)$ 的正负以及 $\Lambda^0{}_0$ 的正负，我们可以将洛伦兹变换的集合分成四个子集。其中所谓的正洛伦兹变换要求满足下面条件

$$\det(\Lambda)=1,\quad \Lambda^0{}_0\geq1. \tag{2.20}$$

容易验证，正洛伦兹变换的集合也构成一个群，称作正洛伦兹群，它是洛伦兹群的子群，通常记为 $SO^{+}(1,3)$。

一般来说，洛伦兹变换依赖于某些连续参数，比如两个参考系的相对速度以及坐标轴的相对角度等等。最简单的洛伦兹变换就是 $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}=\delta^{\mu}_{\nu}$ 的恒等变换，它描写两个始终完全重合的参考系。但是，我们可以设想连续地改变洛伦兹变换的参数，使得这两个参考系变得不再重合，从而使得恒等变换变成非平凡的洛伦兹变换。而正洛伦兹变换的集合正是能够由恒等变换连续地变化过来的所有洛伦兹变换。这是因为，恒等变换显然满足 $\det(\Lambda)=1$, $\Lambda^0{}_0\geq1$, 而连续的变化不可能使得 $\det(\Lambda)$ 从 $+1$ 突变到 -1, 也不可能使得 $\Lambda^0{}_0$ 从 ≥1 突变到 ≤-1，所以能和恒等变换连续过渡的洛伦兹变换一定是正洛伦兹变换。

另外，按照洛伦兹变换的一般定义，$t'=-t$, $\mathbf{x}'=\mathbf{x}$ 的时间反演变换显然也是一种洛伦兹变换，它的变换矩阵 Λ 显然满足，$\Lambda^0{}_0=-1$, $\det(\Lambda)=-1$。因此，在任何正洛伦兹变换的基础上再进行一个时间反演变换，得到的就是 $\det(\Lambda)=-1$, $\Lambda^0{}_0\leq-1$ 的洛伦兹变换。类似的，

空间反演变换 $t'=t,\mathbf{x}'=-\mathbf{x}$ 也是洛伦兹变换，它的变换矩阵满足 $\Lambda^0{}_0=1$, $\det(\Lambda)=-1$，因此，在正洛伦兹变换的基础上再进行一个空间反演变换，得到的就是 $\det(\Lambda)=-1$, $\Lambda^0{}_0\geq 1$ 的洛伦兹变换。而在正洛伦兹变换的基础上再同时进行时间和空间的反演，得到的就是 $\det(\Lambda)=1$, $\Lambda^0{}_0\leq -1$ 的洛伦兹变换。

正洛伦兹变换的一个例子就是三维空间旋转，即如下洛伦兹变换

$$\Lambda^0{}_0=1,\quad \Lambda^0{}_i=\Lambda^i{}_0=0,\quad \Lambda^i{}_j=R_{ij}, \tag{2.21}$$

式中 $i,j=1,2,3$，而 3×3 矩阵 R 是特殊正交矩阵，即满足 $R^TR=1,\det(R)=1$。不过，通常我们谈到洛伦兹变换的时候不是指这种旋转变换，虽然它的确很重要。

一些重要的洛伦兹变换

下面我们来构造一个最为通常而重要的洛伦兹变换。为此，让我们考虑一种特殊情况，假如 S' 系沿着 S 系的 x 轴正方向以匀速 v 运动。假设我们这么选取 S' 的坐标轴，以使得初始时两个坐标系的坐标轴完全重合。这样一来，由于两坐标系的相对运动只发生在 x 方向上，与 y,z 方向无关，所以显然有 $y'=y,z'=z$。因此，我们只需要考虑事件的 t 坐标和 x 坐标在参考系变换下如何变换，为此不妨暂时忽略间隔公式 (2.6) 中的 y,z 坐标，进而将间隔公式简化为

$$ds^2=-dt^2+dx^2=dx^+dx^-, \tag{2.22}$$

式中 $x^+=x+t,x^-=x-t$。间隔不变性告诉我们，参考系变换以后的 $x'^+=x'+t',x'^-=x'-t'$ 必然满足 $dx'^+dx'^-=dx^+dx^-$。显然这就意味着必定有某个参数 ω 使得 $x'^+=e^{-\omega}x^+$, $x'^-=e^{\omega}x^-$, 即有

$$x' = \cosh(\omega)x-\sinh(\omega)t, \tag{2.23}$$

$$t' = -\sinh(\omega)x+\cosh(\omega)t. \tag{2.24}$$

考虑 S' 系的坐标原点 $x'=0$，它在 S 中的运动速度为 v, 因此我们有 $\tanh(\omega)=v$，利用双曲函数的相关公式，容易得到 $\cosh(\omega)=1/\sqrt{1-v^2}$，$\sinh(\omega)=v/\sqrt{1-v^2}$, 也即是说，$x,t$ 坐标的变换公式为

$$\begin{aligned} t' &= \frac{t-vx}{\sqrt{1-v^2}},\\ x' &= \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}, \end{aligned} \tag{2.25}$$

再加上前面的 $y'=y,z'=z$，这四个式子就是最常用的一组洛伦兹变换。而且，反过来，S 系也在以 $-v$ 的速度相对 S' 系运动，所以必定有

$$\begin{aligned} t &= \frac{t'+vx'}{\sqrt{1-v^2}},\\ x &= \frac{x'+vt'}{\sqrt{1-v^2}}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

另外，也容易得到 $e^{-\omega}=\cosh\omega-\sinh\omega=\left(\frac{1-v}{1+v}\right)^{\frac{1}{2}}$，从而即有

$$x'+t'=\left(\frac{1-v}{1+v}\right)^{\frac{1}{2}}(x+t),\quad x'-t'=\left(\frac{1+v}{1-v}\right)^{\frac{1}{2}}(x-t). \tag{2.27}$$

如果先将 S 系变换到以速度 v_1 沿着 x 轴运动的 S' 系，从而即有 $x'+t'=\left(\frac{1-v_1}{1+v_1}\right)^{\frac{1}{2}}(x+t)$，接着再变换到以速度 v_2 相对 S' 系沿 x 运动的 S'' 系，即有 $x''+t''=\left(\frac{1-v_2}{1+v_2}\right)^{\frac{1}{2}}(x'+t')$。则 S'' 系相对 S 系的变换将是，$x''+t''=\left(\frac{1-v}{1+v}\right)^{\frac{1}{2}}(x+t)=\left(\frac{1-v_2}{1+v_2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1-v_1}{1+v_1}\right)^{\frac{1}{2}}(x+t)$，式中 v 为 S'' 系相对于 S 系的速度。从而即有，

$$\left(\frac{1-v}{1+v}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1-v_1}{1+v_1}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1-v_2}{1+v_2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.28}$$

很明显，只要 $v_1<1, v_2<1$，则上面等式右边就是两个正实数的乘积，因此结果也必定是正实数，从而必有 $v<1$，即是说，我们不可能通过多次洛伦兹变换使得相对运动速度大于光速。另外，从 (2.28) 式也容易得到

$$\frac{1-v}{1+v}=\frac{1-v_1-v_2+v_1v_2}{1+v_1+v_2+v_1v_2}. \tag{2.29}$$

也即有

$$v=\frac{v_1+v_2}{1+v_1v_2}, \tag{2.30}$$

这就是相对论的速度合成公式。

下面，我们对 (2.25) 式给出的洛伦兹变换进行一个推广。依然考虑两个参考系 S 与 S' 之间的变换，同样假设初始时这两个参考系的坐标轴完全重合。不过，现在 S' 系相对于 S 系以任意方向的速度 $\mathbf{v}$ 运动。以 $v=|\mathbf{v}|$ 表示速度的大小，以 $v_i, i=1,2,3$ 表示速度 $\mathbf{v}$ 的各分量。为了利用 (2.25) 式，我们将坐标矢量 $\mathbf{x}$ 正交分解成平行于速度 $\mathbf{v}$ 的 $\mathbf{x}_\parallel$ 和垂直于速度 $\mathbf{v}$ 的 $\mathbf{x}_\perp$ 两部分，它们满足

$$\mathbf{x}_\parallel=\frac{\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{x})}{v^2},\quad \mathbf{x}_\perp=\mathbf{x}-\mathbf{x}_\parallel. \tag{2.31}$$

则根据 (2.25) 式，容易写出下面洛伦兹变换关系

$$\begin{aligned} t'&=\frac{t-\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}}{\sqrt{1-v^2}},\\ \mathbf{x}'_\parallel&=\frac{\mathbf{x}_\parallel-\mathbf{v}t}{\sqrt{1-v^2}},\\ \mathbf{x}'_\perp&=\mathbf{x}_\perp. \end{aligned} \tag{2.32}$$

由此即可以得到，

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'&=\mathbf{x}'_\perp+\mathbf{x}'_\parallel=(\mathbf{x}-\mathbf{x}_\parallel)+\frac{\mathbf{x}_\parallel-\mathbf{v}t}{\sqrt{1-v^2}}\\ &=\mathbf{x}+\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}-1\right)\frac{\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{x})}{v^2}-\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}}t. \end{aligned} \tag{2.33}$$

将以上结果用洛伦兹变换矩阵 $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ 写出来即是，

$$\begin{aligned}\Lambda^{0}{}_{0} &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\\ \Lambda^{0}{}_{i} &= -\frac{v_i}{\sqrt{1-v^2}} = \Lambda^{i}{}_{0}\\ \Lambda^{i}{}_{j} &= \delta_{ij} + \Big(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} - 1\Big)\frac{v_i v_j}{v^2}.\end{aligned} \tag{2.34}$$

很显然，当速度 $\mathbf{v} \to 0$ 时，这种洛伦兹变换就退化为恒等变换，所以它可以与恒等变换连续过渡，从而必定是正洛伦兹变换。实际上，任何正洛伦兹变换都可以表示成以上洛伦兹变换和空间旋转变换 R 的乘积。

利用上面的洛伦兹变换，我们可以计算一下两个事件在不同参考系中的时间差，即有

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - v|\Delta \mathbf{x}_{\parallel}|}{\sqrt{1-v^2}} = \Delta t\Big(\frac{1 - v\frac{|\Delta \mathbf{x}_{\parallel}|}{\Delta t}}{\sqrt{1-v^2}}\Big). \tag{2.35}$$

如果两事件类时相间，则有 $|\Delta \mathbf{x}_{\parallel}| \le |\Delta \mathbf{x}| < |\Delta t|$，即 $\frac{|\Delta \mathbf{x}_{\parallel}|}{|\Delta t|} < 1$，从而

$$1 - v\frac{|\Delta \mathbf{x}_{\parallel}|}{\Delta t} \ge 1 - v\frac{|\Delta \mathbf{x}_{\parallel}|}{|\Delta t|} \ge 1 - \frac{|\Delta \mathbf{x}_{\parallel}|}{|\Delta t|} > 0. \tag{2.36}$$

从而，对于这种类时相间的情况，(2.35) 式子左边 $\Delta t'$ 的正负符号与右边 Δt 的正负符号相同，即是说，这时候洛伦兹变换不会改变事件的先后顺序，也就是会保持事件之间的因果关系！这个结论当然是我们已经知道了的。并且，从上面的讨论也可以看出，如果两事件类空相间，那它们之间的先后顺序就是相对的，在不同的参考系看来可能有不同的结论。

2.2 四维时空的矢量和张量

2.2.1 四维矢量和张量

上一节说过，在不同的参考系中，时空坐标按照下面的洛伦兹变换而变换，

$$dx'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} dx^{\nu}, \tag{2.37}$$

式中变换矩阵 Λ 满足

$$\Lambda^{T}\eta\Lambda = \eta \;\Leftrightarrow\; \Lambda^{-1} = \eta^{-1}\Lambda^{T}\eta. \tag{2.38}$$

类比于四分量的 dx^{μ}，假设一个任意的四分量量 $A^{\mu} = (A^0, \mathbf{A})$ 在参考系的变换下与 dx^{μ} 的变换规则相同，即满足

$$A'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu}, \tag{2.39}$$

则我们称 A^{μ} 为一个四维时空的矢量，简称四矢量，当然严格来讲 A^{μ} 是四矢量的分量形式。与时空间隔类似，我们可以定义四矢量的平方 A^2 为

$$A^2 = \eta_{\mu\nu} A^{\mu} A^{\nu} = -(A^0)^2 + \mathbf{A}^2 = -(A^0)^2 + (A^1)^2 + (A^2)^2 + (A^3)^2. \tag{2.40}$$

很明显，A^2 在洛伦兹变换下是不变的。

我们也可以定义下指标的四分量量 A_μ 为，

$$A_\mu = \eta_{\mu\nu}A^\nu, \tag{2.41}$$

写得更清楚一点就是

$$A_\mu = (A_0,A_1,A_2,A_3) = (-A^0,A^1,A^2,A^3) = (A_0,\mathbf{A}). \tag{2.42}$$

则 A^2 就可以写成 $A^2 = A_\mu A^\mu$，而 A^2 在洛伦兹变换下的不变性则意味着

$$A'_\mu A'^\mu = A_\mu A^\mu. \tag{2.43}$$

注意到 A^μ 在洛伦兹变换下按照 (2.39) 式变换，因此上式就意味着 A_μ 必然按照下式变换

$$A'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu A_\nu. \tag{2.44}$$

在洛伦兹变换下按照这样变换的量同样叫做四矢量。不过为了区分上指标的四矢量和下指标的四矢量，有时候人们称 A^μ 为四矢量的逆变分量，而称 A_μ 为四矢量的协变分量。利用 $\eta_{\mu\nu}$ 我们可以把上指标降下来，进而将逆变分量转化为协变分量，反过来，我们也可以利用 $\eta^{\mu\nu}$ 将下指标升上去，即

$$A^\mu = \eta^{\mu\nu}A_\nu. \tag{2.45}$$

假设记 $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$，则不难明白全微分 $d = dx^\mu\partial_\mu$ 是不依赖于坐标系的，由此即可以看出，偏导运算 ∂_μ 在洛伦兹变换下和协变四矢量的变换规则相同，即按下式变换

$$\partial'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu. \tag{2.46}$$

归纳一下即是，在洛伦兹变换下，四矢量的逆变分量和 dx^μ 的变换规则相同，而协变分量则和 ∂_μ 的变换规则相同。

很显然，任意一个逆变四矢量 A^μ 和任意一个协变四矢量 B_μ 都可以构成一个在洛伦兹变换下保持不变的量，这个量即是 $A^\mu B_\mu$，有时候也记作 $A\cdot B$，称作两个四矢量 A 和 B 的内积。两个四矢量的内积是洛伦兹不变的，称作一个四维标量，四维标量即是在洛伦兹变换下保持不变的量。

四维矢量是只有一个指标的量，我们当然可以进一步考察多个指标的量，比如 $B^{\mu\nu}$，如果这个量的每一个指标在洛伦兹变换下都按逆变矢量那样变，即是说

$$B'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta B^{\alpha\beta}, \tag{2.47}$$

我们就称 $B^{\mu\nu}$ 为一个 2 阶逆变张量，或者记作 $(2,0)$ 张量，$(2,0)$ 代表它有 2 个上指标 0 个下指标。类似的，我们也可以考察 $(0,2)$ 张量，它即是两个下指标，且在洛伦兹变换下按照下式变换的量，

$$B'_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu (\Lambda^{-1})^\beta{}_\nu B_{\alpha\beta}. \tag{2.48}$$

进一步，也可以考察混合型张量，比如 $(1,1)$ 张量，它即是一个上指标一个下指标，且在洛伦兹变换下按照下式变换的量，

$$B'^{\mu}{}_{\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}(\Lambda^{-1})^{\beta}{}_{\nu}B^{\alpha}{}_{\beta}. \tag{2.49}$$

类似的概念可以很容易推广到有 p 个上指标 q 个下指标的 (p,q) 张量。特别的，$(0,0)$ 张量就是四维标量，$(1,0)$ 张量就是四维逆变矢量，而 $(0,1)$ 张量则是四维协变矢量。

当然，完全类似于四矢量情形，我们同样可以用 $\eta_{\mu\nu}$ 来将张量的上指标降下来，也可以用 $\eta^{\mu\nu}$ 来将张量的下指标升上去。而且，对于一个 (p,q) 张量，我们可以让它的某个上指标和某个下指标相同，从而默认对这个指标求和，结果就是一个 $(p-1,q-1)$ 张量，这就叫做张量的缩并。比如说，对于 $(1,1)$ 张量 $B^{\mu}{}_{\nu}$，我们可以考察 $B^{\mu}{}_{\mu} = B^{0}{}_{0} + B^{1}{}_{1} + B^{2}{}_{2} + B^{3}{}_{3}$，注意它的上指标和下指标已经求和掉了，从而人们很容易验证它是洛伦兹不变的，即是一个 $(0,0)$ 张量，或者说是一个四维标量。

另外，比如说对于 $(2,0)$ 张量 $B^{\mu\nu}$，我们可以进一步要求它的两个指标对称，即满足 $B^{\mu\nu} = B^{\nu\mu}$，这就叫二阶对称张量。而如果我们要求两个指标反对称，即满足 $B^{\mu\nu} = -B^{\nu\mu}$，那就叫二阶反对称张量。对于反对称张量 $B^{\mu\nu}$，我们有 $B^{00} = B^{11} = B^{22} = B^{33} = 0$，这是因为比如说 $B^{00} = -B^{00}$，从而必有 $B^{00} = 0$。对于 $(0,p)$ 张量 $C_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p}$，如果它的任意两个指标均反对称，我们就称之为 p 阶反对称张量。但是在四维时空中，必定有 $p \leq 4$。这是因为，在四维时空中，任何指标都只能取 $0,1,2,3$，从而对于 $p > 4$ 的情形，$C_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p}$ 的任意 p 个下指标中必有两个取相同值，考虑到反对称这就意味着 $C_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p} = 0$，即高于 4 阶的反对称张量必定为零。进一步，由于 p 阶反对称张量场 p 个指标必须全不相同，所以在四维时空中，它的独立分量个数就是 $\frac{4!}{p!(4-p)!}$。

最后，四维张量的概念很容易推广到场，如果一个量既是一个四维张量，同时还是一个场，那就叫做张量场，比如一个 $(0,2)$ 型二阶张量场可以写成 $B_{\mu\nu}(x)$，式中 x 表示时空点。

2.2.2 四维时空中的微分形式

在《经典力学新讲》的第一章，我们介绍过微分形式和外微分的知识，实际上，微分形式与反对称张量场有密切的联系，这一小节就让我们从这个联系开始。具体来说，对于一个 p-形式 C，我们可以写出它的分量形式，

$$C = \frac{1}{p!}C_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p}dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \ldots. \wedge dx^{\mu_p}. \tag{2.50}$$

式中 $C_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p}$ 为这个 p 形式的分量，它的指标是两两反对称的。事实上，$C_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p}$ 必定是一个 p 阶反对称张量场。这是因为，p-形式本身不依赖于坐标系，因此洛伦兹变换到 x'^{μ} 坐标后必有

$$C'_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p}(x')dx'^{\mu_1} \wedge \ldots. \wedge dx'^{\mu_p} = C_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_p}(x)dx^{\nu_1} \wedge \ldots. \wedge dx^{\nu_p}. \tag{2.51}$$

由此易知 $C_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p}$ 在洛伦兹变换下必定按照 $(0,p)$ 张量的变换规则变换。从而 p-形式的分量和 p 阶反对称张量场一一对应。

在四维时空中，由于 p 阶反对称张量场必须满足 $p \leq 4$，因此在四维时空中最多考虑 4-形式，更高阶的微分形式自动为零。

有一个特殊的 4-形式值得专门讲一下，那就是所谓的四维时空的体积形式 Ω，

$$\Omega = dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz. \tag{2.52}$$

但这个四形式严格来说算不上一个微分形式，而是所谓的赝形式，原因在于它在坐标变换以后会相差一个雅可比行列式，因此洛伦兹变换以后

$$\Omega' = dt' \wedge dx' \wedge dy' \wedge dz' = \det(\Lambda)\Omega. \tag{2.53}$$

因此对于 $\det(\Lambda) = 1$ 的洛伦兹变换，它和一个真正的微分形式一样不依赖于坐标系。但是，对于 $\det(\Lambda) = -1$ 的洛伦兹变换，比如空间反演变换或时间反演变换，那它就要多出一个负号，而不是真正不依赖于坐标系。像这样的在空间反演和时间反演之下多出一个负号的“微分形式”就叫做赝形式。但是，对于物理学研究来说，由于主要考虑的是正洛伦兹变换，这时候自动有 $\det(\Lambda) = 1$, 因此我们常常将赝形式和真正的微分形式同等对待。

赝形式的分量也不是真正的反对称张量，而是所谓的赝张量，即它在空间反演或时间反演之下相比于真正张量的变换规则会多出一个负号。但是，和平等对待赝形式一样，在物理学中，我们也常常将赝张量和张量平等对待。因此，以后除非某些地方需要特别做出区分，否则我们就将赝形式同样称为微分形式，也将赝张量同样称为张量。

为了写出体积形式 Ω 所对应的反对称张量，我们引入如下定义

$$\varepsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \begin{cases} 1, & (\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4) \text{ 是 } (0123) \text{ 的偶置换} \\ -1, & (\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4) \text{ 是 } (0123) \text{ 的奇置换} \\ 0, & \text{其它情况} \end{cases} . \tag{2.54}$$

容易验证有，

$$\Omega = \frac{1}{4!}\varepsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge dx^{\mu_3} \wedge dx^{\mu_4}. \tag{2.55}$$

可见 $\varepsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ 正是体积形式所对应的四阶反对称张量 (赝张量)，不过，由于 $\varepsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ 的定义不依赖于坐标系，所以这个反对称张量实际上在洛伦兹变换下变换的结果是**保持原值不变**。

我们注意到 p 形式的独立分量个数与 $4-p$ 形式的独立分量个数相同，均为 $\frac{4!}{p!(4-p)!}$，这使得人们想到也许可以建立两者间的一一对映。的确，这样的对映是存在的，它叫做霍奇对偶 (Hodge duality)，通常用 $*$ 号来标记。具体来说，我们定义 $*$ 号为一个线性映射，它在微分形式上的作用如下

$$*(dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_p}) = \frac{1}{(4-p)!}\varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_p}{}_{\nu_{p+1}\ldots\nu_4} dx^{\nu_{p+1}} \wedge \ldots \wedge dx^{\nu_4}. \tag{2.56}$$

特别的，$*1$ 将映射到体积形式 Ω

$$*1 = \frac{1}{4!}\varepsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge dx^{\mu_3} \wedge dx^{\mu_4} = \Omega. \tag{2.57}$$

而对于任意的 p 形式 C,

$$C=\frac{1}{p!}C_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p}dx^{\mu_1}\wedge dx^{\mu_2}\wedge\ldots.\wedge dx^{\mu_p}, \tag{2.58}$$

根据线性性，我们有

$$\begin{aligned}*C&=\frac{1}{p!}C_{\mu_1\ldots\mu_p}*(dx^{\mu_1}\wedge\ldots.\wedge dx^{\mu_p})\\&=\frac{1}{(4-p)!p!}C_{\mu_1\ldots\mu_p}\varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_p}\quad{}_{\nu_{p+1}\ldots\nu_4}dx^{\nu_{p+1}}\wedge\ldots\wedge dx^{\nu_4},\end{aligned} \tag{2.59}$$

结果显然为 $(4-p)$ 形式。

特别的，2 形式的霍奇对偶依然为 2 形式！对于 2 形式，我们也常常可以等价地认为霍奇对偶是作用在它的分量上，这是通过定义 $*C_{\mu_1\mu_2}=(*C)_{\mu_1\mu_2}$。则根据 (2.59) 式，易有

$$*C_{\mu_1\mu_2}=\frac{1}{2}C_{\nu_3\nu_4}\varepsilon^{\nu_3\nu_4}\quad{}_{\mu_1\mu_2}. \tag{2.60}$$

定理：对于 p 形式 C,

$$**C=(-)(-)^{p(4-p)}C. \tag{2.61}$$

即，对于 $p=1,3$ 形式，有 $**C=C$; 对于 $p=0,2,4$ 形式，有 $**C=-C$; 特别的，对于 $p=2$ 形式，有 $**C=-C$。

证明如下。重复应用 $*$ 映射的作用，有

$$\begin{aligned}**C&=\frac{1}{(4-p)!p!}C_{\mu_1\ldots\mu_p}\varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_p}\quad{}_{\nu_{p+1}\ldots\nu_4}*(dx^{\nu_{p+1}}\wedge\ldots\wedge dx^{\nu_4})\\&=\frac{1}{(4-p)!p!p!}C_{\mu_1\ldots\mu_p}\varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_p}\quad{}_{\nu_{p+1}\ldots\nu_4}\varepsilon^{\nu_{p+1}\ldots\nu_4}\quad{}_{\rho_1\ldots\rho_p}dx^{\rho_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\rho_p}\\&=\frac{(-)^{p(4-p)}}{(4-p)!p!p!}C_{\mu_1\ldots\mu_p}\varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_p}\quad{}_{\nu_{p+1}\ldots\nu_4}\varepsilon_{\rho_1\ldots\rho_p}\quad{}^{\nu_{p+1}\ldots\nu_4}dx^{\rho_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\rho_p}\\&=\frac{(-)^{p(4-p)}}{(4-p)!p!p!}C_{\mu_1\ldots\mu_p}\varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_p\nu_{p+1}\ldots\nu_4}\varepsilon_{\rho_1\ldots\rho_p\nu_{p+1}\ldots\nu_4}dx^{\rho_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\rho_p}\\&=(-)(-)^{p(4-p)}\frac{1}{p!}C_{\mu_1\ldots\mu_p}dx^{\mu_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\mu_p}=(-)(-)^{p(4-p)}C.\end{aligned} \tag{2.62}$$

式中我们利用了恒等式

$$\begin{aligned}&\frac{1}{p!(4-p)!}\varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_p\nu_{p+1}\ldots\nu_4}\varepsilon_{\rho_1\ldots\rho_p\nu_{p+1}\ldots\nu_4}dx^{\rho_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\rho_p}\\=&(-)dx^{\mu_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\mu_p},\end{aligned} \tag{2.63}$$

这里的负号来自于 $\varepsilon^{0123}=-\varepsilon_{0123}\Rightarrow\varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_4}=(-)\varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_4}$。

霍奇对偶运算可以和外微分运算结合起来，为了本书后面章节的应用，让我们考察一个重要的例子。假设我们考察一个 2 形式 F,

$$F=\frac{1}{2}F_{\mu_1\mu_2}dx^{\mu_1}\wedge dx^{\mu_2}, \tag{2.64}$$

让我们来计算一下 $*d*F$ 的结果是什么。

$$\begin{aligned}
*d*F &= \frac{1}{2}\frac{1}{2} * d\Big(F_{\mu_1\mu_2}\varepsilon^{\mu_1\mu_2}{}_{\nu_3\nu_4}dx^{\nu_3}\wedge dx^{\nu_4}\Big)\\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{2}\partial_\rho F_{\mu_1\mu_2}\varepsilon^{\mu_1\mu_2}{}_{\nu_3\nu_4} * (dx^\rho\wedge dx^{\nu_3}\wedge dx^{\nu_4})\\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{2}\partial_\rho F_{\mu_1\mu_2}\varepsilon^{\mu_1\mu_2}{}_{\nu_3\nu_4}\varepsilon^{\rho\nu_3\nu_4}{}_{\sigma}dx^\sigma\\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{2}\partial^\rho F_{\mu_1\mu_2}\varepsilon^{\mu_1\mu_2\nu_3\nu_4}\varepsilon_{\rho\sigma\nu_3\nu_4}dx^\sigma\\
&= -\partial^\rho F_{\rho\sigma}dx^\sigma.
\end{aligned} \tag{2.65}$$

式中我们再次应用了前面用过的恒等式

$$\frac{1}{2}\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu_1\mu_2\nu_3\nu_4}\varepsilon_{\rho\sigma\nu_3\nu_4}F_{\mu_1\mu_2} = -F_{\rho\sigma}. \tag{2.66}$$

不妨小结一下推导的结果，即是

$$*d*F = \big(-\partial^\mu F_{\mu\nu}\big)dx^\nu, \tag{2.67}$$

是一个 1 形式。

完全类似的推导可以得到，对于 1 形式 $A = A_\mu dx^\mu$ 有

$$*d*A = -\partial^\mu A_\mu, \tag{2.68}$$

结果为 0 形式。而对于 3 形式 $C = \frac{1}{3!}C_{\mu_1\mu_2\mu_3}dx^{\mu_1}\wedge dx^{\mu_2}\wedge dx^{\mu_3}$，

$$*d*C = \frac{1}{2!}\big(-\partial^\mu C_{\mu\rho\sigma}\big)dx^\rho\wedge dx^\sigma. \tag{2.69}$$

结果为 2 形式。

实际上，无需计算即可知，对于任何 p 形式 C, $*d*C$ 必定为一个 $p-1$ 形式，原因其实很简单，我们留给读者自己思索。即是说，$*d*$ 运算的效果刚好与外微分运算相反，外微分运算会将微分形式升高 1 次，而 $*d*$ 运算则会将微分形式降低 1 次。

另外，也可以把霍奇对偶与外微分最漂亮的结论，即广义斯托克斯定理，结合起来。为此我们先回顾一下广义斯托克斯定理，它说的是，对于时空中任何一个 $p+1$ 维超曲面 D，其 p 维边界我们记为 ∂D，有

$$\int_{\partial D} C_p = \int_D dC_p, \tag{2.70}$$

式中 C_p 表示一个任意 p 形式。

下面取 D 为四维时空中的一个区域，∂D 为它的三维边界，则对于任意 1 形式 $A = A_\mu dx^\mu$ 我们有

$$\int_{\partial D} *A = \int_D d*A = -\int_D **d*A = \int_D \partial^\mu A_\mu *1 = \int_D (\partial^\mu A_\mu)\Omega. \tag{2.71}$$

式中第 2 个等号利用了对于 4 形式 C_4 有 $**C_4 = -C_4$(而 $d*A$ 正是一个 4 形式)，另外，式中第 3 个等号是代入了 (2.68) 式，最后一个等号是利用了 $*1 = \Omega$。不妨将最终的结果写清楚一点，即

$$\int_{\partial D} *A = \int_D (\partial^\mu A_\mu)\Omega. \tag{2.72}$$

这正是四维时空中的高斯定理。

2.3 相对性原理与经典场论

现在我们可以将相对性原理重新表述为，任何物理规律都应该在洛伦兹变换下保持不变。因此本书要考察的经典场论当然也要满足这种洛伦兹不变性，进一步，从第一章我们已经知道，经典场论的规律 (也就是场方程) 可以由最小作用量原理导出，因此这就意味着经典场论的作用量泛函必须在洛伦兹变换下保持不变！这就意味着经典场论的作用量泛函必须是洛伦兹标量。

另外，对于局域场论，作用量 S 总可以写成拉格朗日密度 $\mathscr{L}$ 的积分，即 $S=\int d^4x\mathscr{L}$，注意到体积元 d^4x 等价于体积形式 Ω，因此显然是洛伦兹不变的，因此 S 要是洛伦兹标量当且仅当拉格朗日密度 $\mathscr{L}$ 为洛伦兹标量！

进一步，假设我们考虑的是一个标量场论，场变量记为 ϕ，则从第一章可以知道 $\mathscr{L}=\mathscr{L}(\phi,\dot{\phi},\nabla\phi)$。很显然，场的时间导数 $\dot{\phi}$ 可以和空间导数 $\nabla\phi$ 结合成一个四维矢量 $\partial_\mu\phi=(\dot{\phi},\nabla\phi)$。所以拉氏密度实际上是 ϕ 和 $\partial_\mu\phi$ 的函数，记为 $\mathscr{L}=\mathscr{L}(\phi,\partial_\mu\phi)$。从而最小作用量原理导出来的场方程就是，

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}. \tag{2.73}$$

而 $\partial_\mu\phi$ 能构造出来的最简单洛伦兹标量就是

$$\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi=\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi=-(\partial_t\phi)^2+(\nabla\phi)^2. \tag{2.74}$$

要求动能项为正，并进一步通过将一个合适的常数吸收进场 ϕ 的定义之中，我们总能将 $\partial_\mu\phi$ 对拉氏密度最简单的贡献写作

$$-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi. \tag{2.75}$$

另外，很显然，ϕ 的任意函数 $-\mathscr{U}(\phi)$ 都是洛伦兹标量，因此可以加到拉氏密度中去，进而就得到如下最简单的洛伦兹不变的拉氏密度

$$\begin{aligned}\mathscr{L}&=-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-\mathscr{U}(\phi)\\&=\frac{1}{2}[(\partial_t\phi)^2-(\nabla\phi)^2]-\mathscr{U}(\phi).\end{aligned} \tag{2.76}$$

很显然，这给出的正是前面第一章中所考察的经典场论例子。所以，第一章的例子不是完全任意写出来的，它实际上是洛伦兹不变性限制下的最简单例子！

当然，洛伦兹不变性并不能完全决定拉氏密度，比如，读者很容易发现下面的拉氏密度同样洛伦兹不变，

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{2}g(\phi)\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-\mathscr{U}(\phi), \tag{2.77}$$

式中 $g(\phi)$ 为 ϕ 的任意函数。这也是一种很常见的标量场模型，虽然人们对它的研究可能比上面那个更简单的模型略少。在这个模型中取 $g(\phi)$ 为常数 g_0，然后再将 $\sqrt{g_0}$ 吸收到 ϕ 场的定义中去，就回到了上面那个更简单的模型。

读者可能会想为什么只用 ϕ 和 $\partial_\mu\phi$ 构造拉氏密度呢? 为什么不考虑二阶导数 $(\partial_\mu\partial_\nu\phi)$, 甚至更高阶导数呢? 的确, 考虑二阶导数也能轻易构造出洛伦兹不变的拉氏密度, 比如

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + f(\phi)(\partial_\mu\partial_\nu\phi)(\partial^\mu\partial^\nu\phi). \tag{2.78}$$

但实际上, 人们几乎不会研究这种场论模型, 原因有两个: 第一, 这种场论模型用最小作用量原理导出的场方程是四阶微分方程, 而我们通常要求物理系统的运动微分方程为二阶微分方程。第二, 可以证明, 这样含高阶导数的模型导出来的哈密顿量 (也就是能量) 没有下界, 即没有最低能量, 从而物理上是不允许的, 这就是所谓的 Ostrogradsky 不稳定性。

前面的标量场模型很容易推广, 比如说, 我们可以同时考察 n 个标量场, 记为 $\phi^a, a = 1,2,...,n$, 这时候很容易构造出如下拉氏密度,

$$\mathscr{L} = -g_{ab}(\phi)\partial_\mu\phi^a\partial^\mu\phi^b. \tag{2.79}$$

式中 $g_{ab}(\phi)$ 是 ϕ^a 的函数, 实际上人们通常让它是场空间的黎曼度规。这样的场论模型就是所谓的非线性 sigma 模型。之所以没有在非线性 sigma 模型的拉氏密度中加上 $-\mathscr{U}(\phi)$ 这样的项, 是因为我们还要求了场空间的微分同胚不变性, $\mathscr{U}(\phi)$ 这样的项会破坏这种不变性。

前面考察的标量场 ϕ 都是实数值的, 我们当然也可以考察复数值的标量场, 不过由于作用量和拉氏密度必须是实数值的, 所以这时候需要同时考虑 ϕ 以及它的复共轭场 $\overline{\phi}$。很显然, 这时候最简单的拉氏密度可以取下面的形式

$$\mathscr{L} = -\partial_\mu\overline{\phi}\partial^\mu\phi - \mathscr{U}(\overline{\phi}\phi). \tag{2.80}$$

很容易看出, 除了洛伦兹不变性之外, 这个拉氏密度还在下面变换下保持不变,

$$\phi \to e^{i\theta}\phi, \quad \overline{\phi} \to e^{-i\theta}\overline{\phi}. \tag{2.81}$$

式中 θ 为一个任意常数。

以上只考虑了四维时空中的标量场论。四维矢量场甚至高阶张量场当然也能构造相应的拉氏密度, 进而得到相应的经典场论。但这时候为了得到真正有用的经典场论, 往往需要在洛伦兹不变性之外进一步对系统加上更多的限制, 我们还是留到后面的章节中讨论吧。

3. 对称性与对称性自发破缺

上一章中我们已经看到洛伦兹不变性如何限制经典场论的作用量，更一般的，场论系统的任何对称性都限制着它的作用量，这种限制通过要求作用量在对称变换之下保持不变来完成。在现代物理中有一条构造作用量的基本原则，即首先猜测出场论系统的对称性，然后再写出这些对称性所允许的作用量的一般形式。物理学家杨振宁先生称这条原则为：“对称性决定相互作用”。

在现代物理中，对称性的重要性再怎么强调都不为过。比方说，对称性和守恒定律密切相关。每一种连续对称性都对应着一条守恒定律，这就是所谓的诺特定理。在《经典力学新讲》中，我们对于粒子系统证明过这条定理，现在，我们要将这个证明推广到场论系统。

在基本规律的层次上，我们的世界也许有很高的对称性，但是我们所生活的低能世界却没有那么高的对称性，它反而展现出千奇百怪的多样性。如何从基本层次的对称性到现实的多样性呢？回答是通过对称性的破缺，尤其是通过对称性的自发破缺。所谓对称性的自发破缺，指的就是作用量是对称的，但是运动微分方程的解没有那么高的对称性，作用量的对称性在解的层次上破缺了，特别的，场方程的真空解没有那么高的对称性，真空破缺了作用量的对称性，这就是对称性自发破缺。本章我们还将研究这种自发破缺是如何发生的。

为了简单起见，本章将限于考察标量场系统。

3.1 对称性与守恒定律

3.1.1 诺特定理

为了让读者看清楚诺特定理证明的关键思想，我们先限于考察不改变时空坐标的对称变换，后文在考察时空平移对称性和洛伦兹对称性时再推广到时空坐标跟着变换的对称性。

假设我们的场论系统由 n 个标量场组成，记为 $\phi^a(x), a=1,2,...,n$，相应的作用量泛函记为 $S[\phi]=\int d^4x\mathscr{L}(\phi,\partial_\mu\phi)$。假设 $S[\phi]$ 在某簇连续对称变换 $g(\theta)$ 的作用下保持不变，这里 θ 为这簇连续对称变换所依赖的连续参数，特别的，$\theta=0$ 对应恒等变换 (即不进行任何变换操作)。为了证明诺特定理，下面考察无穷小对称变换，即 $\theta=\varepsilon$ 的对称变换，ε 为无穷小量。假设在此变换之下，时空坐标保持不变，但是场位形 $\phi^a(x)$ 变换为 $\widetilde{\phi}^a(x)$,

$$\phi^a(x)\to\widetilde{\phi}^a(x)=\phi^a(x)+\varepsilon F^a(\phi(x)), \tag{3.1}$$

$F^a(\phi(x))$ 为场 ϕ 的某个函数，其具体形式取决于对称变换的定义。作用量的变换不变意味着，在此无穷小变换前后，作用量的改变量为零，即

$$\delta S=S[\widetilde{\phi}]-S[\phi]=\int d^4x\Big(\mathscr{L}(\widetilde{\phi},\partial_\mu\widetilde{\phi})-\mathscr{L}(\phi,\partial_\mu\phi)\Big)=0. \tag{3.2}$$

前面的无穷小量 ε 是一个常数，下面我们将它变成一个关于时空坐标 x 的任意函数 $\varepsilon(x)$, 同时要求 $\varepsilon(x)$ 在时空的无穷远处趋于零，则原来的无穷小对称变换就变成如下无穷小变换，

$$\phi^a(x)\to\widetilde{\phi}^a(x)=\phi^a(x)+\varepsilon(x)F^a(\phi(x)), \tag{3.3}$$

它在时空无穷远处保持 ϕ 不变。现在这个变换就不再是对称变换了，从而变换前后的作用量一定会发生改变。注意到拉格朗日密度里只含一阶偏导，从而容易知道变换前后作用量的改变量必定为

$$\delta S=\int d^4xJ^\mu\partial_\mu\varepsilon, \tag{3.4}$$

式中 J^μ 为 ϕ 和 $\partial_\nu\phi$ 的某个函数。特别的，作用量的改变量只能依赖于 $\partial_\mu\varepsilon$ 而不能依赖于 ε，这是因为，当我们将 $\varepsilon(x)$ 恢复为无穷小对称变换的常数 ε 时，作用量的改变量必须要恢复为零。

下面我们将表达式 (3.4) 分部积分，并丢掉无穷远处的边界项 (因为 $\varepsilon(x)$ 在无穷远处趋于零)，即有

$$\delta S=-\int d^4x\partial_\mu J^\mu\varepsilon(x). \tag{3.5}$$

下面，假设我们的无穷小变换是作用在满足运动微分方程的真实场位形上，则由于真实场位形必定满足最小作用量原理 $\delta S=0$，从而有

$$\delta S=-\int d^4x\partial_\mu J^\mu\varepsilon(x)=0. \tag{3.6}$$

注意到 $\varepsilon(x)$ 的任意性，从而必有

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0. \tag{3.7}$$

这就是四维时空的流守恒方程。从而任何连续对称性都意味着存在一个守恒流 J^μ，这就是场论系统的诺特定理。

记 $J^0(x) = \rho(x)$, $\mathbf{J} = (J^1, J^2, J^3)$, 则上面的流守恒方程可以重写成，

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \tag{3.8}$$

将上式对三维空间积分，并记 $\int d^3\mathbf{x}\rho(\mathbf{x},t) = Q$, 则有

$$\frac{dQ}{dt} = -\int d^3\mathbf{x}\nabla\cdot\mathbf{J} = -\int_\infty d\mathbf{S}\cdot\mathbf{J} = 0, \tag{3.9}$$

上式最后我们假定了在空间无穷远处 $\mathbf{J}$ 趋于零。因此，$Q = \int d^3\mathbf{x}\rho(\mathbf{x},t)$ 是一个守恒量，称之为守恒荷，而 $\rho(x)$ 就称作荷密度，$\mathbf{J}(x)$ 就是流密度。根据《经典力学新讲》第五章的相关知识可以知道，守恒荷 Q 作为场论相空间上的函数，它就是对称变换的生成元，即有如下泊松括号关系

$$\varepsilon[\phi^a, Q] = \delta\phi^a = \varepsilon F^a(\phi(x)). \tag{3.10}$$

现在，恢复光速 c，则 (7.26) 式就变成

$$\frac{\partial(\rho c)}{\partial(ct)} + \nabla\cdot\mathbf{J} = 0. \tag{3.11}$$

这意味着恢复量纲以后，实际上 $J^0 = \rho c$，从而守恒流四矢量为 $J^\mu = (\rho c, \mathbf{J})$。

3.1.2 内部对称性

其实，保持时空坐标不变的对称性就是所谓的内部对称性，现在让我们来考察两个具体的内部对称性。

$U(1)$ 对称性

我们将要考察的第一个内部对称性是所谓的相位不变性，也称作 $U(1)$ 不变性。具体来说，假设我们考察的场论系统由一个复标量场组成，并具有如下作用量

$$S[\phi] = -\int d^4x\left[\partial_\mu\overline{\phi}\partial^\mu\phi + \mathscr{U}(|\phi|^2)\right]. \tag{3.12}$$

显然，这个作用量在如下复标量场的相位变换 (也称作 $U(1)$ 变换) 下保持不变，

$$\phi(x) \to e^{i\theta}\phi(x), \quad \overline{\phi}(x) \to e^{-i\theta}\overline{\phi}(x). \tag{3.13}$$

取 θ 为无穷小量 $\theta = \varepsilon$, 则 $U(1)$ 变换前后场的改变量为

$$\delta\phi = i\varepsilon\phi, \quad \delta\overline{\phi} = -i\varepsilon\overline{\phi}. \tag{3.14}$$

现在，将上面无穷小参数 ε 变成依赖于时空坐标的 $\varepsilon(x)$，则变换前后作用量的改变量为

$$\begin{aligned}\delta S &= -\int d^4x\left[\partial^\mu\overline{\phi}\partial_\mu(\delta\phi)+\partial_\mu(\delta\overline{\phi})\partial^\mu\phi\right]\\ &= -i\int d^4x\left[\partial^\mu\overline{\phi}\phi-\overline{\phi}\partial^\mu\phi\right]\partial_\mu\varepsilon.\end{aligned}\tag{3.15}$$

根据诺特定理的证明过程可知，相应的守恒流 J^μ 为

$$J^\mu = i\left[\overline{\phi}\partial^\mu\phi-\partial^\mu\overline{\phi}\phi\right].\tag{3.16}$$

特别的，现实世界的电荷守恒就对应于这样一个 $U(1)$ 守恒流。

$U(N)$ 对称性

$U(1)$ 对称性的一种简单推广是所谓的 $U(N)$ 对称性。这时候我们的场论系统有 N 个复标量场 ϕ^i, $i=1,2,...,N$，它们组成列矢量 Φ,

$$\Phi=\begin{pmatrix}\phi^1\\ \phi^2\\ \vdots\\ \phi^N\end{pmatrix}.\tag{3.17}$$

所谓的 $U(N)$ 变换就是用一个 $N\times N$ 可逆复矩阵 U 作用在场 Φ 上，即是说场 Φ 变换为

$$\Phi(x)\to U\Phi(x),\quad \Phi^\dagger(x)\to\Phi^\dagger(x)U^\dagger.\tag{3.18}$$

式中符号 † 表示共轭转置，即将每一个矩阵元取复数共轭同时将整个矩阵转置，† 也称作厄密共轭。只不过，在上面变换中我们同时要求可逆矩阵 U 满足

$$U^\dagger U=1\Leftrightarrow U^{-1}=U^\dagger.\tag{3.19}$$

这样的矩阵也称之为幺正矩阵。

考虑到 $N\times N$ 复矩阵一共有 N^2 个复数矩阵元，对应 $2N^2$ 个实参数，而幺正性 $U^\dagger U=1$ 施加了 N^2 个限制，所以独立的实参数个数为 N^2 个。即是说，所有 $N\times N$ 幺正矩阵的集合可以由 N^2 个实参数刻画。实际上，任何幺正矩阵必定可以写成如下形式，

$$U=\exp(i\theta^aT_a),\tag{3.20}$$

式中 $\theta^a, a=1,2,...,N$ 为刻画幺正矩阵的 N^2 个实参数，T_a 为矩阵，式中要对重复指标 a 求和，从 1 求到 N^2。幺正性的 $U^{-1}=U^\dagger$ 意味着

$$\exp\left(-i\theta^aT_a\right)=\exp\left(-i\theta^aT_a^\dagger\right),\tag{3.21}$$

即

$$T_a^\dagger=T_a,\tag{3.22}$$

这样的矩阵称作厄密矩阵。

从而场 Φ 的 $U(N)$ 变换即如下变换，

$$\Phi(x)\to\exp(i\theta^aT_a)\Phi(x),\quad \Phi^\dagger(x)\to\Phi^\dagger(x)\exp(-i\theta^aT_a).\tag{3.23}$$

很明显，如下作用量 $S[\Phi]$ 在这种 $U(N)$ 变换下是不变的，

$$S[\Phi]=-\int d^4x\Big[\partial_\mu\Phi^\dagger\partial^\mu\Phi+\mathscr{U}(\Phi^\dagger\Phi)\Big], \tag{3.24}$$

我们称这样的场论具有 $U(N)$ 对称性。

为了导出上述具 $U(N)$ 对称性场论系统的守恒流，我们令 (3.23) 变换中的参数 θ^a 为无穷小量 ε^a，并进而将 ε^a 改变成依赖于时空坐标的 $\varepsilon^a(x)$，则在这种改变后的无穷小变换之下，场的改变量为

$$\delta\Phi(x)=i\varepsilon^a(x)T_a\Phi(x),\quad \delta\Phi^\dagger(x)=-i\varepsilon^a(x)\Phi^\dagger(x)T_a. \tag{3.25}$$

相应的作用量 $S[\Phi]$ 的改变量为

$$\begin{aligned}\delta S&=-\int d^4x\Big[\partial_\mu(\delta\Phi^\dagger)\partial^\mu\Phi+\partial_\mu\Phi^\dagger\partial^\mu(\delta\Phi)\Big]\\&=i\int d^4x\Big[\Phi^\dagger T_a\partial^\mu\Phi-\partial^\mu\Phi^\dagger T_a\Phi\Big]\partial_\mu\varepsilon^a.\end{aligned} \tag{3.26}$$

从而 $U(N)$ 对称性的相应守恒流为

$$J_a^\mu=i\Big[\Phi^\dagger T_a\partial^\mu\Phi-\partial^\mu\Phi^\dagger T_a\Phi\Big]. \tag{3.27}$$

3.1.3 时空对称性

前面我们考察的是保持时空坐标不变的内部对称性，下面我们来考察时空本身的对称性。为了简单起见，本节假定所考察的场论系统由一个实标量场组成。

时空平移对称性与能动量张量

首先我们考察时空平移对称性，假定在某个时空平移操作之下 $x^\mu\to x'^\mu=x^\mu+a^\mu$，其中 a^μ 为某常数四矢量，即假定整个场论系统反向 (向后) 平移了 a^μ，从而使得其时空坐标增加了 a^μ。假设在此平移之下，场 $\phi(x)$ 变换为 $\phi'(x)$，$\phi(x)\to\phi'(x)$，由于系统是向后平移，所以变换之后 x 点的场来源于变换之前 $x'=x+a$ 点的场，即有

$$\phi'(x)=\phi(x'). \tag{3.28}$$

很容易验证作用量 $S[\phi]=\int d^4x\mathscr{L}(\phi,\partial_\mu\phi)$ 在此平移之下保持不变，具体验证过程如下

$$\begin{aligned}S[\phi]&=\int d^4x\mathscr{L}(\phi(x),\partial_\mu\phi(x))\to\\S[\phi']&=\int d^4x\mathscr{L}(\phi'(x),\partial_\mu\phi'(x))\\&=\int d^4x\mathscr{L}(\phi(x'),\partial_\mu\phi(x'))=\int d^4x'\mathscr{L}(\phi(x'),\partial'_\mu\phi(x'))\\&=\int d^4x\mathscr{L}(\phi(x),\partial_\mu\phi(x))=S[\phi]\end{aligned} \tag{3.29}$$

式中倒数第二个等号只是将 x' 重记成了 x。

下面考察无穷小时空平移，即将 a^μ 取成无穷小量 ε^μ。进一步，根据诺特定理的证明过程，我们将 ε^μ 变成依赖于时空坐标 x 的无穷小量 $\varepsilon^\mu(x)$，即考察如下无穷小时空变换

$$x^\mu\to x'^\mu=x^\mu+\varepsilon^\mu(x). \tag{3.30}$$

记坐标变换的雅可比行列式为 $|\frac{\partial x'}{\partial x}|$, 利用矩阵恒等式 $\det(A)=e^{\mathrm{Tr}(\ln A)}$, 易得在一阶近似上有

$$|\frac{\partial x'}{\partial x}|=1+\partial_\mu\varepsilon^\mu(x)\Rightarrow|\frac{\partial x}{\partial x'}|=1-\partial_\mu\varepsilon^\mu. \tag{3.31}$$

从而变换以后的作用量 $S[\phi']$ 为

$$\begin{aligned}
S[\phi'] &= \int d^4x\mathscr{L}(\phi'(x),\partial_\nu\phi'(x))=\int d^4x\mathscr{L}(\phi(x'),\partial_\nu\phi(x'))\\
&=\int d^4x'|\frac{\partial x}{\partial x'}|\mathscr{L}(\phi(x'),\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\partial'_\mu\phi(x'))\\
&=\int d^4x'(1-\partial_\mu\varepsilon^\mu)\mathscr{L}\big(\phi(x'),\partial'_\nu\phi(x')+\partial_\nu\varepsilon^\mu\partial'_\mu\phi(x')\big)\\
&=\int d^4x'\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\big(\partial'_\nu\phi(x')\big)}\partial'_\mu\phi(x')\partial_\nu\varepsilon^\mu-\int d^4x'\partial_\mu\varepsilon^\mu\mathscr{L}\big(\phi(x'),\partial'_\nu\phi(x')\big)\\
&\quad+\int d^4x'\mathscr{L}\big(\phi(x'),\partial'_\nu\phi(x')\big)\\
&=\int d^4x\Big[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)}\partial_\mu\phi(x)-\delta^\nu_\mu\mathscr{L}\big(\phi(x),\partial_\rho\phi(x)\big)\Big]\partial_\nu\varepsilon^\mu\\
&\quad+\int d^4x\mathscr{L}\big(\phi(x),\partial_\nu\phi(x)\big).
\end{aligned} \tag{3.32}$$

式中最后一个等号是将时空坐标 x' 重记成了 x。由上面的推导易知，变换前后作用量的改变量为

$$\begin{aligned}
\delta S &= S[\phi'(x)]-S[\phi(x)]\\
&=\int d^4x\Big[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)}\partial_\mu\phi(x)-\delta^\nu_\mu\mathscr{L}\Big]\partial_\nu\varepsilon^\mu.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

完全类似于前面诺特定理证明过程的论证可知，时空平移对称性对应的守恒流为

$$T^\nu{}_\mu=-\Big[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)}\partial_\mu\phi(x)-\delta^\nu_\mu\mathscr{L}\Big]. \tag{3.34}$$

相应的流守恒方程为

$$\partial_\nu T^\nu{}_\mu=0. \tag{3.35}$$

注意到 $T^{00}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot\phi}\dot\phi(x)-\mathscr{L}=\pi\dot\phi-\mathscr{L}$ 正好是哈密顿密度，即能量密度，从而可知时间平移对称性对应的守恒荷正是系统的总能量，即

$$H=P^0=\int d^3\mathbf{x}T^{00}(x). \tag{3.36}$$

进而易知空间平移对称性对应的守恒荷是系统的总动量，即对于 $i=1,2,3$ 有，

$$P^i=\int d^3\mathbf{x}T^{0i}(x)=-\int d^3\mathbf{x}\pi(x)\partial^i\phi(x). \tag{3.37}$$

能量和动量一起构成了四矢量 $P^\mu=(H,\mathbf{P})$, 通常称 P^μ 为四动量。人们通常称 $T^{\mu\nu}$ 为能动量张量，其中 T^{00} 为能量密度，T^{i0} 为能量流密度，T^{0j} 为动量密度，T^{ij} 为动量流密度。

假设我们考虑 $\mathscr{L}=-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-\mathscr{U}(\phi)$ 的场论模型，则容易算得，

$$\begin{aligned}T^{\mu\nu}&=\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi+\eta^{\mu\nu}\mathscr{L}\\&=\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi-\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\rho\phi\partial^\rho\phi-\eta^{\mu\nu}\mathscr{U}(\phi).\end{aligned}\tag{3.38}$$

很明显，这个 $T^{\mu\nu}$ 的两个指标是对称的。实际上，可以证明，对于任何洛伦兹不变的标量场论，其 $T^{\mu\nu}$ 都必定是对称张量。但是当我们的考察范围超出标量场论时，其按照诺特定理求出来的 $T^{\mu\nu}$ 就不一定为对称张量了，比方说对于矢量场，它的 $T^{\mu\nu}$ 就不是对称张量。不过，$T^{\mu\nu}$ 的流守恒方程 $\partial_\mu T^{\mu\nu}=0$ 告诉我们，$T^{\mu\nu}$ 的定义不是唯一的，实际上人们很容易看出，对于任何 $X^{\rho\mu\nu}$，只要 $X^{\rho\mu\nu}=-X^{\mu\rho\nu}$，则 $T^{\mu\nu}+\partial_\rho X^{\rho\mu\nu}$ 同样满足流守恒方程，因此可以定义为新的能动量张量。从而只要我们合适地选取 $X^{\rho\mu\nu}$, 我们总可以让重新定义以后的能动量张量为一个对称张量。在广义相对论中，物质系统总是通过能动量张量和引力场相耦合，由于引力场由一个对称的度规场描述，因此相应的能动量张量必定是对称张量。因此，以后我们常常假定守恒的能动量张量 $T^{\mu\nu}$ 为对称张量。

洛伦兹对称性

上一章考察相对性原理时说过，我们考察的经典场论都是具有洛伦兹不变性的场论，即拉格朗日密度为洛伦兹标量的理论，具体来说即是拉氏密度在如下坐标变换下保持不变的理论，

$$x^\mu\to x'^\mu=\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu,\tag{3.39}$$

$\Lambda^\mu{}_\nu$ 就是所谓的洛伦兹变换。

为了利用诺特定理，我们需要考察无穷小洛伦兹变换，即取

$$\Lambda^\mu{}_\nu=\delta^\mu_\nu+\varepsilon^\mu{}_\nu,\tag{3.40}$$

式中 $\varepsilon^\mu{}_\nu$ 为无穷小量。很显然，无穷小洛伦兹变换由于可以和恒等变换连续过渡，从而必定是正洛伦兹变换，即满足[1]

$$\det(\Lambda)=1\Rightarrow\varepsilon^\mu{}_\mu=0.\tag{3.41}$$

进一步，利用洛伦兹变换的定义 $\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta=\eta_{\alpha\beta}$, 易得

$$\eta_{\mu\nu}(\delta^\mu_\alpha+\varepsilon^\mu{}_\alpha)(\delta^\nu_\beta+\varepsilon^\nu{}_\beta)=\eta_{\alpha\beta}\Rightarrow\varepsilon_{\alpha\beta}+\varepsilon_{\beta\alpha}=0.\tag{3.42}$$

即 $\varepsilon^{\mu\nu}$ 是一个二阶反对称张量。

为了利用诺特定理，我们将无穷小参数 $\varepsilon^\mu{}_\nu$ 变成依赖于时空坐标的 $\varepsilon^\mu{}_\nu(x)$，进而考察如下无穷小时空坐标变换，

$$x^\mu\to x'^\mu=x^\mu+\delta x^\mu,\quad \delta x^\mu=\varepsilon^\mu{}_\nu(x)x^\nu.\tag{3.43}$$

[1] 利用矩阵恒等式 $\det(A)=e^{\mathrm{Tr}(\ln A)}$.

则完全类似于前面从 (3.32) 式到 (3.33) 式的推导，可知在此时空变换之下作用量的改变量为

$$\begin{aligned}\delta S &= S[\phi'(x)] - S[\phi(x)] \\ &= \int d^4x \Big[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)}\partial_\mu \phi(x) - \delta^\nu_\mu \mathscr{L}\Big]\partial_\nu(\delta x^\mu) \\ &= -\int d^4x T^\nu{}_\mu \big(\varepsilon^\mu_\nu + x^\rho \partial_\nu \varepsilon^\mu_\rho\big).\end{aligned} \tag{3.44}$$

注意到 $\varepsilon_{\mu\nu}$ 关于指标反对称，从而有

$$\begin{aligned}\delta S &= -\frac{1}{2}\int d^4x \Big[(T^{\nu\mu} - T^{\mu\nu})\varepsilon_{\mu\nu} + (x^\rho T^{\nu\mu} - x^\mu T^{\nu\rho})\partial_\nu \varepsilon_{\mu\rho}\Big] \\ &= \frac{1}{2}\int d^4x \Big[(T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu})\varepsilon_{\mu\nu}\Big] + \frac{1}{2}\int d^4x \Big[(x^\mu T^{\rho\nu} - x^\nu T^{\rho\mu})\partial_\rho \varepsilon_{\mu\nu}\Big].\end{aligned} \tag{3.45}$$

如果我们将 $\varepsilon_{\mu\nu}$ 取回常数则 $\partial_\nu \varepsilon_{\mu\rho} = 0$, 从而上式最后一行只剩下前面那项，但是洛伦兹不变性告诉我们，当 $\varepsilon_{\mu\nu}$ 为常数时作用量应该不变，即这时候必有 $\delta S = 0$，由此可知

$$T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu} = 0, \tag{3.46}$$

即能动量张量必定是对称张量 (当然，这是因为我们考察的是标量场论)。在 (3.45) 式中代入 $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$，即有

$$\delta S = \frac{1}{2}\int d^4x \Big[(x^\mu T^{\rho\nu} - x^\nu T^{\rho\mu})\partial_\rho \varepsilon_{\mu\nu}\Big]. \tag{3.47}$$

根据诺特定理的证明，这意味着 $M^{\rho\mu\nu} = x^\mu T^{\rho\nu} - x^\nu T^{\rho\mu}$ 为守恒流，满足守恒方程

$$\partial_\rho M^{\rho\mu\nu} = 0. \tag{3.48}$$

以上我们证明了，对于标量场理论，按照诺特定理求出来的能动量张量必定是对称张量。但是，如果我们考察的不是标量场，而是比方说矢量场，那这个证明是不成立的。不过，仿照这个证明的思路人们可以证明，总能够选取到合适的 $X^{\rho\mu\nu}$, 使得可以将能动量张量重定义成一个对称张量。具体的证明过程参见 Weinberg 量子场论第一卷 7.4 节。有些时候人们也称这种对称的能动量张量为 Belinfante(贝林凡特) 张量。一旦人们将能动量张量取成对称张量，则 $M^{\rho\mu\nu} = x^\mu T^{\rho\nu} - x^\nu T^{\rho\mu}$ 就一定是守恒流 (即使我们不限于标量场论)，这是因为

$$\partial_\rho M^{\rho\mu\nu} = T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu} = 0. \tag{3.49}$$

通常记 $M^{\rho\mu\nu}$ 相应的守恒荷为 $J^{\mu\nu}$,

$$J^{\mu\nu} = \int d^3\mathbf{x} M^{0\mu\nu}. \tag{3.50}$$

根据诺特定理，$J^{\mu\nu}$ 当然是洛伦兹变换的生成元。实际上，当取 $i, j = 1,2,3$ 时，相应的

$$J^{ij} = \int d^3\mathbf{x}\big[x^i T^{0j} - x^j T^{0i}\big], \tag{3.51}$$

就是角动量，它和通常角动量矢量的关系是 $J_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}J^{ij}$。而 $K_i = J^{i0}$ 称作洛伦兹推动 (boost) 的生成元，

$$K_i = \int d^3\mathbf{x}\big[x^i T^{00} - x^0 T^{0i}\big]. \tag{3.52}$$

或者写得更清楚一点，

$$\mathbf{K} = -t\mathbf{P} + \int d^3\mathbf{x}\big[\mathbf{x}T^{00}(\mathbf{x},t)\big]. \tag{3.53}$$

3.2 对称性自发破缺

自然界中常常发生的是，基本物理规律具有某种对称性，但是它描述物理系统的某个特定解却没有那么高的对称性，这就是对称性自发破缺。特别的，对称性自发破缺尤其指场论系统的能量最低解 (即真空解) 没有那么高的对称性，仅管作用量的对称性比较高。

为了说清楚对称性自发破缺的机制，本节我们着重考察如下复标量场模型

$$\mathscr{L} = -\partial_\mu\overline{\phi}\partial^\mu\phi - \mathscr{U}(\phi), \quad \mathscr{U}(\phi) = \frac{g}{4}\big(|\phi|^2 - u\big)^2. \tag{3.54}$$

其中 $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ 为一个由两实标量场 ϕ_1, ϕ_2 所组成的复标量场，式中 u 为一个实常数。显然，这样的场论系统具有如下 $U(1)$ 对称性，

$$\phi \to e^{i\alpha}\phi, \quad \overline{\phi} \to e^{-i\alpha}\overline{\phi}. \tag{3.55}$$

我们可以画出势函数 $\mathscr{U}(\phi)$ 的样子，当 $u<0$ 时，很显然 $\mathscr{U}(\phi)$ 为一个倒放的钟形曲面，这时候它的最小值位置只有一个，即在 $\phi=0$ 处。而当 $u>0$ 时，$\mathscr{U}(\phi)$ 如图 (3.1) 所示，形如一个墨西哥帽，这时候 $\mathscr{U}(\phi)$ 的最小值位置有无穷多个，分布在 ϕ 复平面上 $|\phi| = \sqrt{u}$ 的圆周上。

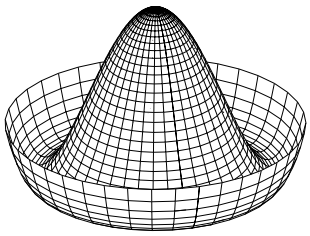

Figure 3.1: $u>0$ 时的 $\mathscr{U}(\phi)$，它的最小值有无穷多个，分布在 $|\phi| = \sqrt{u}$ 的圆周上。

容易求出上述复标量场系统的能动量张量，进而可得其总能量为

$$H = \int d^3\mathbf{x}\big[|\partial_t\phi|^2 + |\nabla\phi|^2 + \mathscr{U}(\phi)\big]. \tag{3.56}$$

所谓真空，即使指系统能量最低的场位形，显然，这样的场位形必然满足

$$\partial_t\phi = \nabla\phi = 0, \tag{3.57}$$

从而是一种常数场位形。其次，真空场位形还要使得势函数 $\mathscr{U}(\phi)$ 取最小值。因此，当 $u<0$ 时，系统的真空是唯一的，即 $\phi=0$，很显然这时候真空位形本身具有 $U(1)$ 对称性。但是，当 $u>0$ 时，真空场位形有无穷多个，分布在 $|\phi|=\sqrt{u}$ 的圆周上，换言之，这时候对于任何实数 α，下面的场位形均为真空位形，

$$\phi=\sqrt{u}e^{i\alpha}. \tag{3.58}$$

但是物理系统只可能处于这无穷多个真空中的某一个，比方说处于 $\phi=\sqrt{u}$，相应于在图 (3.1) 中那个最低能圆周上选定了一点，很显然，任何这样选定的点本身都不再具有 $U(1)$ 的相位不变性。因此，当 $u>0$ 时，虽然理论具有 $U(1)$ 对称性，但是系统的物理真空会自发破缺这种对称性，这就是所谓的对称性自发破缺！

假设最初时我们所考察的这个系统 $u<0$，因此其真空也具有 $U(1)$ 对称性，我们称这时候的系统处在对称相。设想随着某些物理条件的改变，参数 u 从小于零变成了大于零，那么系统的真空将会自发破缺 $U(1)$ 对称性，我们称这时候的系统处于对称破缺相。而从对称相到对称破缺相的转变过程就是相变。

Nambu 和 Goldstone 发现，对于发生了某种连续对称性 (比如这里的 $U(1)$ 对称性) 自发破缺的系统，其对称破缺相具有某种特殊的性质，具体来说就是系统中必定存在某种以光速传播的波动，在量子化以后这种光速传播的波动会给出一种零质量的粒子 (和光波量子化以后给出的光子质量为零类似)，通常称作 Nambu-Goldstone 玻色子。

下面回到本节的例子，我们将用它来说明这种光速传播的波动是如何出现的。为此假设处于对称破缺相的系统的真空位形 ϕ_0 如下

$$\phi_0=\sqrt{u}. \tag{3.59}$$

下面我们将复标量场重新写成两个实标量场 $\rho(x)$ 和 $\theta(x)$，即定义

$$\phi=(\sqrt{u}+\rho)e^{i\theta}. \tag{3.60}$$

这样定义的目的是使得真空对应于 $\rho=\theta=0$。将上式代入原来的拉格朗日密度 (3.54), 可得

$$\mathscr{L}=-(\sqrt{u}+\rho)^2\partial_\mu\theta\partial^\mu\theta-\partial_\mu\rho\partial^\mu\rho-gu\rho^2(x)-g\sqrt{u}\rho^3(x)-\frac{g}{4}\rho^4(x). \tag{3.61}$$

设想 $\theta(x)$ 场在真空上传播，从而可以取 $\rho=0$(它一定满足 $\rho(x)$ 场的运动微分方程)，这时候 θ 场的拉氏密度为

$$\mathscr{L}=-u\partial_\mu\theta\partial^\mu\theta. \tag{3.62}$$

从而很容易求出场 $\theta(x)$ 的运动微分方程，为

$$\partial_\mu\partial^\mu\theta=0\Leftrightarrow(\partial_t^2-\nabla^2)\theta(\mathbf{x},t)=0. \tag{3.63}$$

很显然，这正是一个以光速自由传播的波动方程。从而这就证明了对称破缺相的系统中存在一种以光速传播的波动。

对称性自发破缺对于粒子物理非常重要，比方说，同样是由夸克所组成，但相对于重子，π 介子之所以这么轻 (近似于无质量)，就是因为它是一种所谓手征对称性的连续对称性自发破缺所产生的 Nambu-Goldstone 玻色子。只不过由于手征对称性是一种近似对称性，而不是精确对称性，所以 π 介子才有很小的质量。

对称性自发破缺不仅对于粒子物理很重要，在非相对论性的凝聚态物理中它同样很重要。比方说，晶体的晶格结构自发破缺了空间平移 (指任意平移) 对称性，由此导致的波动就是声波，即以声速传播的一种波动 (在固体物理中声速就相当于相对论物理中的光速。)，声波量子化以后就是声子，所以声子就是一种平移对称性自发破缺所对应的 Nambu-Goldstone 玻色子。



4. 规范对称性和麦克斯韦方程

我们一直在强调对称性，但是到此为止我们讨论的对称性全都是所谓的整体对称性，这一章我们要开始讨论局域对称性，也称之为规范对称性。对于整体对称性来说，它在时空整体上的变换都完全一样，但是，对于规范对称性来说，不同时空点的对称变换可以相互独立。

为了将一个整体对称性局域化成一个规范对称性，我们往往需要引入规范场。最简单的规范场就是电磁场，它所对应的规范对称性就是所谓的 $U(1)$ 规范对称性，它是通过将上一章引入的 $U(1)$ 整体对称性局域化而得到的对称性。本章我们将着重讨论这种局域化 (通常称作 gauging) 是如何完成的，以及它如何自动给出电磁场所满足的著名的麦克斯韦方程。

4.1 规范不变性和麦克斯韦方程

4.1.1 局域化 $U(1)$ 整体对称性 (gauging $U(1)$ global symmetry)

假设我们考虑一个 $U(1)$ 不变的复标量场论，其拉氏密度如下

$$\mathscr{L} = -\partial_\mu \overline{\phi} \partial^\mu \phi - \mathscr{U}(\overline{\phi}\phi). \tag{4.1}$$

根据上一章可知，这个系统具有如下对称性，

$$\phi \to e^{ie\alpha}\phi, \quad \overline{\phi} \to e^{-ie\alpha}\overline{\phi}, \tag{4.2}$$

式中 e 为某个固定参数，α 为实变量。则相应的有守恒流 J^μ(与上一章的定义差了一个负号),

$$J^\mu = ie\big(\partial^\mu\overline{\phi}\phi - \overline{\phi}\partial^\mu\phi\big). \tag{4.3}$$

上一章对诺特定理的证明过程告诉我们，当我们考虑无穷小变换 $\alpha=\varepsilon$，并将无穷小变量局域化成依赖于时空点的 $\varepsilon(x)$ 时，系统的作用量在变换之下将不再保持不变，其变换前后的改变量将为 (与上一章的定义差了一个负号),

$$\delta S = -\int d^4x J^\mu \partial_\mu \varepsilon(x). \tag{4.4}$$

也就是说，当我们把原来整体的 $U(1)$ 变换局域化，使得不同时空点可以取不同的变换相位 $e^{ie\varepsilon(x)}$ 时，这个变换将不再是原来系统的对称性，原系统的作用量在这个变换之下的改变量由 (4.4) 式给出。

一个自然的想法是，可不可以通过给原来的作用量添加上一些项，并让它们在局域 $U(1)$ 变换之下的改变量正好抵消 (4.4) 式呢？如果可以，那我们就成功地将原来的整体 $U(1)$ 对称性局域化成了一个 $U(1)$ 规范对称性。

对上述问题的回答是肯定的。下面我们给出具体做法，那就是引入一个新的矢量场 A_μ, 让它耦合到原来的守恒流 J^μ 上，从而使得作用量多出如下耦合项

$$\int d^4x J^\mu A_\mu. \tag{4.5}$$

现在，我们只需要求，在复标量场按照上述局域 $U(1)$ 变换 $e^{ie\varepsilon(x)}$ 变换的同时，A_μ 同步地按照下式变换

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\varepsilon(x). \tag{4.6}$$

则上述耦合项 (4.5) 在变换前后的改变量是,

$$\int d^4x J^\mu \partial_\mu \varepsilon(x). \tag{4.7}$$

很显然，它正好抵消了原作用量在变换之下多出来的 $-\int d^4x J^\mu\partial_\mu\varepsilon(x)$ (即 (4.4) 式)！也就是说，添加上了新场 A_μ 与守恒流的耦合项之后的理论将在如下局域 $U(1)$ 变换之下保持不变,

$$\phi(x)\to e^{ie\varepsilon(x)}\phi(x),\quad A_\mu(x)\to A_\mu(x)+\partial_\mu\varepsilon(x). \tag{4.8}$$

不过，上述做法有一个细节的问题，那就是，守恒流 J^μ(由 (4.3) 式给出) 本身在 (7.28) 式的变换下不会保持不变！也就是说，J^μ 与 A_μ 的耦合项在 (7.28) 式变换之下的改变量其实不是正好抵消原来多出来的 (4.4) 式，从而上述做法其实还有些问题。不过，作为一个正确做法的导引，上述做法的大体思路是正确的，它让我们看到局域化 $U(1)$ 对称性并非不可完成的任务，但代价是要引入一个按照 (7.28) 式变换的矢量场 A_μ。而 (7.28) 式就是所谓的 $U(1)$ 规范变换，其中的 $\varepsilon(x)$ 可以不再是无穷小量。下面，我们将从要求理论在这一规范变换下保持不变出发，看真正的局域化 $U(1)$ 对称性的做法应该是怎么样的。

首先我们来看，如何修正守恒流 J^μ 的定义，以使得它在 (7.28) 式的规范变换下保持不变！为此只需注意到在 (7.28) 式的规范变换下，

$$\begin{aligned}(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi &\to e^{ie\varepsilon(x)}(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi \\ (\partial_\mu + ieA_\mu)\overline{\phi} &\to e^{-ie\varepsilon(x)}(\partial_\mu + ieA_\mu)\overline{\phi}.\end{aligned} \tag{4.9}$$

从而易知如下修正后的守恒流 J_A^μ 是规范不变的，

$$J_A^\mu = ie\big(\overline{D^\mu\phi}\phi - \overline{\phi}D^\mu\phi\big), \tag{4.10}$$

式中 D_μ 称作协变导数，当它作用在 ϕ 上时就是 $D_\mu\phi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi$，而 $\overline{D_\mu\phi} = (\partial_\mu + ieA_\mu)\overline{\phi}$。参数 e 就称作 A_μ 场与 ϕ 场的耦合常数。

有了协变导数以后，人们很容易进一步写出 $U(1)$ 规范不变的作用量 (常常记为 S_m，称作物质场的作用量)，为

$$S_m = -\int d^4x\big[\overline{D_\mu\phi}D^\mu\phi + \mathscr{U}(\overline{\phi}\phi)\big]. \tag{4.11}$$

将上述作用量对矢量场 A_μ 变分，就可以导出守恒流 J_A^μ 与 A_μ 场真正的耦合关系，为

$$\delta S_m = \int d^4x J_A^\mu \delta A_\mu, \tag{4.12}$$

人们很容易直接验证这个关系式。很显然，(4.12) 式正是前述 (4.5) 式的修正版！

到此为止，我们就成功地将 $U(1)$ 整体对称性 gauging 成了一个局域 $U(1)$ 规范对称性。代价是引入了一个额外的矢量场 A_μ，通常称之为规范场。问题是，规范场 A_μ 本身的动力学是怎样的呢？换言之，规范场 A_μ 本身的作用量是怎样的呢？

4.1.2 “发现”麦克斯韦方程

为了找到规范场 A_μ 本身的作用量，最重要的是要注意到这样的作用量必须保持规范不变性，即它得在 $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\varepsilon$ 的规范变换下保持不变！同时，当然，A_μ 的作用量还得洛伦兹不变，即得是洛伦兹标量。

为了满足规范不变性的要求，我们注意到如下反对称张量 $F_{\mu\nu}$ 在 $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\varepsilon$ 的规范变换下是不变的，

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{4.13}$$

因此，我们只要用 $F_{\mu\nu}$ 而不是直接用 A_μ 来构造作用量，就能自动满足规范不变性的要求。

利用 $F_{\mu\nu}$ 构造出来的最简单的洛伦兹标量有如下两个，

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad \text{and} \quad \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}, \tag{4.14}$$

式中 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 是第二章中引入的四维时空体积形式所对应的反对称张量。因此，最简单的规范场作用量可以写成如下形式，

$$S_g = -a\int d^4x\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + b\int d^4x\frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}, \tag{4.15}$$

式中 b 和 $a>0$ 为两个实常数，第一项的负号是为了使得 A_i(i=1,2,3) 场的动能项 (即 $(\partial_t A_i)^2$ 项) 为正。

注意到

$$\int d^4x \frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} = \int d^4x \partial_\mu\left(\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_\nu\partial_\rho A_\sigma\right) \tag{4.16}$$

为一个全微分项，因此只在时空的无穷远边界上对作用量有贡献。但是在利用最小作用量原理求场的运动微分方程时，无穷远边界上的场取值是固定不变的，因此这一项其实对场的运动微分方程没有任何贡献，所以常常可以忽略。因此人们通常将规范场的作用量取成，

$$S_g = -a\int d^4x \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{4.17}$$

习惯上，人们常常将作用量 (4.17) 中的正常数 a 吸收进 A_μ 场的定义中，即重新定义 $\sqrt{a}A_\mu$ 为 A_μ，同时重新定义耦合常数 e，以使得协变导数 D_μ 保持为 $\partial_\mu - ieA_\mu$ 的形式。因此，通过这种场和耦合常数的重新定义，我们总可以将规范场的作用量取成，

$$S_g = -\int d^4x \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{4.18}$$

将这个作用量对 A_μ 变分，可得

$$\begin{aligned}\delta S_g &= -\int d^4x \frac{1}{2}F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu} = -\int d^4x F^{\mu\nu}\partial_\mu \delta A_\nu \\ &= \int d^4x \partial_\mu F^{\mu\nu}\delta A_\nu.\end{aligned} \tag{4.19}$$

为了得出上式最后一行的结果，我们需要分部积分，并丢弃边界项 (因为假设无穷远边界上场的变分等于零)。

现在，整个场论系统既包括作为物质场的复标量场 ϕ，也包括规范场 A_μ，所以整个系统总的作用量 S 应该等于 $S = S_m + S_g$，即

$$S = -\int d^4x \left[\overline{D_\mu\phi}D^\mu\phi + \mathscr{U}(\overline{\phi}\phi) + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right]. \tag{4.20}$$

由 (4.12) 式和 (4.19) 式可得这个完整的作用量对 A_ν 的变分，为

$$\delta S = \delta S_g + \delta S_m = \int d^4x \left[\partial_\mu F^{\mu\nu} + J_A^\nu\right]\delta A_\nu. \tag{4.21}$$

根据最小作用量原理即可得规范场 A_μ 满足的运动微分方程，

$$-\partial_\mu F^{\mu\nu} = J_A^\nu. \tag{4.22}$$

另外，根据 $F_{\mu\nu}$ 的定义 (4.13)，很容易验证它还必然满足如下方程

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0. \tag{4.23}$$

以上两个方程，其实只有方程 (4.22) 是真正的 A_μ 场的动力学微分方程，因为根据 $F_{\mu\nu}$ 场的定义式 (4.13)，方程 (4.23) 其实是一个恒等式，是自动成立的。反过来，满足方程 (4.23) 的 $F_{\mu\nu}$ 场也必定可以写成 (4.13) 式的形式。

令人吃惊的是，方程 (4.22) 和方程 (4.23) 其实就是用一种更优雅的方式写出来的麦克斯韦方程组！为了看清楚这一点，对于 $i,j,k=1,2,3$，我们定义

$$F^{0i}=E_i,\quad F^{ij}=\varepsilon^{ijk}B_k. \tag{4.24}$$

特别的，根据 $F_{\mu\nu}$ 的定义 (4.13)，可以得到 $\mathbf{B}$ 与矢量势 $\mathbf{A}((\mathbf{A})_i=A_i)$ 的关系式

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}. \tag{4.25}$$

用 $\mathbf{E}$ 场和 $\mathbf{B}$ 场表达 $F_{\mu\nu}$ 以后，进而由方程 (4.22) 有

$$\begin{aligned}&-\partial_t F^{0j}-\partial_i F^{ij}=J_A^i\\ \Rightarrow&-\partial_t E_j-\varepsilon^{ijk}\partial_i B_k=J_A^j\\ \Rightarrow&-\partial_t\mathbf{E}+\nabla\times\mathbf{B}=\mathbf{J}_A\end{aligned} \tag{4.26}$$

或者写成更常见的形式，

$$\nabla\times\mathbf{B}=\mathbf{J}_A+\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}. \tag{4.27}$$

类似的，由方程 (4.22) 也有

$$\begin{aligned}&-\partial_i F^{i0}=J_A^0\\ \Rightarrow&\ \partial_i F^{0i}=\rho_A\\ \Rightarrow&\ \nabla\cdot\mathbf{E}=\rho_A.\end{aligned} \tag{4.28}$$

而由方程 (4.23) 有

$$\begin{aligned}&\partial_1 F_{23}+\partial_2 F_{31}+\partial_3 F_{12}=0\\ \Rightarrow&\nabla\cdot\mathbf{B}=0.\end{aligned} \tag{4.29}$$

同样由方程 (4.23)，也有

$$\begin{aligned}&\partial_0 F_{ij}+\partial_i F_{j0}+\partial_j F_{0i}=0\\ \Rightarrow&\partial_t F_{ij}+\partial_i F^{0j}-\partial_j F^{0i}=0.\end{aligned} \tag{4.30}$$

与 $\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}$ 进行指标收缩，即有

$$\begin{aligned}&\partial_t B_k+(\nabla\times\mathbf{E})_k=0\\ \Rightarrow&\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}.\end{aligned} \tag{4.31}$$

方程 (4.27)、(4.28)、(4.29)、(4.31) 就是人们熟悉的麦克斯韦方程组的四个方程！$\mathbf{E}$ 就是电场强度，$\mathbf{B}$ 就是磁场强度。当然，它们和国际单位制中的麦克斯韦方程组还有些微的系数出入，但这完全是单位制的问题，因为我们这里采用的不是国际单位制。至于如何与国际单位制中的相应方程联系起来，我们将在后面的小节中再来讨论。

就这样，从局域化 $U(1)$ 整体对称性出发，我们最终“独立发现”了著名的麦克斯韦方程 [1]！这说明，电磁场起源于 $U(1)$ 规范对称性，电场和磁场是一个整体，它们共同构成二阶反对称张量场 $F_{\mu\nu}$，因此电场和磁场在洛伦兹变换下会相互转变。而 $U(1)$ 对称性守恒流中的 $J_A^0 = \rho_A$ 正是电荷密度，$\mathbf{J}_A$ 则是电流密度，流守恒方程 $\partial_\mu J_A^\mu = 0$ 正是电荷守恒方程。

需要注明的是，真实世界中产生电磁场的电流四矢量 J_A^μ 通常并不是由某个复标量场产生的，实际上，除了超导情形中由库珀对所形成的场，宏观世界中并没有带电的复标量场。宏观世界中的电荷密度电流密度其实是由运动的带电粒子 (而不是场) 提供的。不过，在本章中，作为一个很好的理论模型，我们不妨先研究复标量场耦合电磁场的情形，然后在后面的章节中再转向带电粒子与电磁场耦合的情形。这样处理的原因，除了因为复标量场与电磁场的耦合更能说清楚规范场论的逻辑之外，也因为这一有趣的模型能够从宏观上描述超导。

4.1.3 光是一种电磁波

将 $F_{\mu\nu}$ 场的定义式 (4.13) 代入动力学方程 (4.22)，即可得

$$-\partial_\mu \partial^\mu (A^\nu) + \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = J_A^\nu. \tag{4.34}$$

而且，这个方程还可以进一步简化。简化的关键点就在于注意到 A_μ 场本身并非物理上可直接观测的，原因在于 A_μ 和它规范变换以后的 $A_\mu + \partial_\mu \varepsilon$ 描述的是同样的物理内容，换言之，对于同样物理上可测量的内容，描述它的 A_μ 不唯一，而是可以相差一个规范变换。因此 A_μ 本身并不是物理的，真正物理的场是规范不变的 $F_{\mu\nu}$。

由于 A_μ 有一个规范变换的自由度，因此对于同样的物理内容，我们总可以用一个合适的函数 $\varepsilon(x)$ 来对 A_μ 场进行一个合适的规范变换，使得 $\partial_\mu A^\mu + \partial_\mu \partial^\mu \varepsilon = 0$，即是说，总可以使得变换之后新的 A_μ 场满足下式

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \tag{4.35}$$

这个方程就称为一种规范选择，或者说规范固定，它有一个专门的名称，称为洛伦兹规范条件，额外满足这个方程的 A_μ 场就称作洛伦兹规范下的 A_μ 场。将洛伦兹规范条件代入上面的方程 (4.34), 即可得

$$-\partial_\mu \partial^\mu (A^\nu) = J_A^\nu. \tag{4.36}$$

[1] 类似的，如果我们局域化时空对称性，我们将发现爱因斯坦的广义相对论。这时候取代 (4.12) 式，将有

$$\delta S_m = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \tag{4.32}$$

式中对称张量 $g_{\mu\nu}$ 为所谓的度规场，在线性近似下，它在局域时空变换下的变换关系是

$$\delta g_{\mu\nu} = \partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu. \tag{4.33}$$

这就是所谓的微分同胚变换，相应的局域化规范对称性就是所谓的微分同胚对称性。

特别的，对于真空中的自由电磁场，即电流四矢量 J_A^μ 等于零时的电磁场，方程 (4.36) 将变成，

$$-\partial_\mu \partial^\mu (A^\nu) = 0, \Leftrightarrow (\partial_t^2 - \nabla^2) A^\nu = 0. \tag{4.37}$$

显然，对于 A^μ 场的每一个分量，这个方程描述的都是一种以 $c=1$ 的速度传播的波动，这就是电磁波！由于在我们的单位制中光速正是 $c=1$，这和电磁波的传播速度一样，因此，麦克斯韦提出光就是一种电磁波！麦克斯韦的这一设想是对历史上人们长期迷惑不解的光的本性的一次深刻洞察！这一设想后来被无数的实验证实，并在今天成为人们熟知的基本事实。同时，由于 $c=1$ 是相对论中的最大信息传播速度，所以这也证明光——或者更一般的电磁波——是以最大速度传播的。

4.1.4 物理可观测量的规范不变性

我们已经看到电流四矢量 J_A^μ 以及电磁场强 $F_{\mu\nu}$ 在如下规范变换下均是不变的，

$$\phi(x) \to e^{ie\varepsilon(x)}\phi(x), \quad A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu \varepsilon(x). \tag{4.38}$$

不仅如此，我们更看到电磁场的动力学微分方程 (麦克斯韦方程)——方程 (4.22) 和方程 (4.23)——在上述规范变换下是不变的。同样，人们也能验证与电磁场耦合的复标量场 ϕ 的动力学场方程在上述规范变换下也保持不变。进一步，人们发现，所有的物理可观测量都得规范不变！正因为如此，规范势 A_μ 本身才不可直接观测，但是规范场强 $F_{\mu\nu}$ 却是可观测的。

规范场强当然是一个局域可观测量，但是，一般来说，规范不变的物理可观测量却不一定是局域的，相反，它们很可能是非局域的物理量。为了看清楚这一点，我们不妨考虑规范势沿着某条时空路径的积分 $\int_a^b A_\mu dx^\mu$。容易验证，在 (7.32) 式的规范变换下，我们有如下变换

$$\exp\{ie\int_a^b A_\mu dx^\mu\} \to e^{ie\varepsilon(b)} \exp\{ie\int_a^b A_\mu dx^\mu\} e^{-ie\varepsilon(a)}. \tag{4.39}$$

从而易知，如下非局域量是规范不变的，

$$\overline{\phi}(b) \exp\{ie\int_a^b A_\mu dx^\mu\} \phi(a). \tag{4.40}$$

特别的，当路径的终点 b 与起点 a 重合，从而形成一条闭合路径时，我们有如下非局域的规范不变量

$$\exp\{ie\oint A_\mu dx^\mu\}. \tag{4.41}$$

有一种理解规范理论的观点认为，规范理论真正的物理自由度其实是非局域的，因此，当我们用局域的规范场 A_μ 来表达理论时，就会有变量的冗余，这种变量的冗余就反映为规范等价关系，即 (7.32) 式。

4.2 电磁场的能量、动量以及角动量

上一节中，我们已经写出了电磁场的作用量，即 (4.18) 式，那当然就可以根据上一章时空对称性导致相应守恒定律的办法，求出电磁场的能量动量张量，以及电磁场的角动量。不过，还是让我们先从回顾标量场的能量动量张量开始吧。

4.2.1 电磁场的能量、动量以及角动量

实标量场的能量、动量以及角动量

假设我们考察一个由拉氏密度 $\mathscr{L}(\phi,\partial\phi)$ 描述的实标量场论模型，则根据上一章的知识易知，

$$T^{\mu\nu}=-\Big[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial^\nu\phi(x)-\eta^{\mu\nu}\mathscr{L}\Big]. \tag{4.42}$$

特别的，场的动量密度 T^{0i} 为

$$T^{0i}(x)=-\pi(x)\partial^i\phi(x), \tag{4.43}$$

式中 $\pi(x)$ 为此标量场的正则动量，它由下式定义

$$\pi(x)=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_t\phi)}. \tag{4.44}$$

由能量密度的积分可以得到场的总能量，同样由场动量密度的积分可以得到场的总动量。

但是，关于上述实标量场的总角动量，我们想多说几句。首先，场的总角动量由下式给出

$$J^{ij}=\int d^3\mathbf{x}\big[x^iT^{0j}-x^jT^{0i}\big]. \tag{4.45}$$

为了和电流密度的符号相区分，我们将通常的角动量矢量记为 $\mathbf{L}$，它和 J^{ij} 的关系为 $L_k=\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}J^{ij}$。从而对此实标量场系统，可得

$$\mathbf{L}=-\int d^3\mathbf{x}\big[\pi(x)(\mathbf{x}\times\nabla)\phi(x)\big]. \tag{4.46}$$

通常称这一角动量为轨道角动量。

电磁场的能量、动量以及角动量

下面我们来考察一个自由电磁场的能量、动量以及角动量。所谓的自由电磁场就是不与其它任何东西耦合，单独只由拉氏密度 $\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ 描述的无源电磁场。我们已经知道标量场能动量张量的公式，为了得到电磁场的能动量张量，我们将 $A_\mu(\mu=0,1,2,3)$ 的每一个分量看成一个实标量场，从而容易给出电磁场能动量张量的公式

$$T^{\mu\nu}=-\Big[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A^\rho)}\partial^\nu A^\rho-\eta^{\mu\nu}\mathscr{L}\Big]. \tag{4.47}$$

代入自由电磁场的拉氏密度可以得到，

$$T^{\mu\nu}=F^\mu{}_\rho\partial^\nu A^\rho-\frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}. \tag{4.48}$$

很显然，这个能动量张量不是一个对称张量，而更为严重的问题是，它不是规范不变的！而作为物理可观测量，能动量张量必须规范不变！好在，正如上一章所说的，我们可以通过给它加上一个合适的 $\partial_\rho X^{\rho\mu\nu}$ 来重新定义能动量张量，使它成为一个对称张量。具体来说，我们可以给上述能动量张量加上 $\partial^\rho(-F^\mu{}_\rho A^\nu) = -F^\mu{}_\rho \partial^\rho A^\nu$ (注意到对于自由电磁场，电流四矢量等于零，从而方程 (4.22) 变成 $\partial^\rho F^\mu{}_\rho = 0$), 很显然，加上这一项修正以后，电磁场的能动量张量就变成了如下对称张量

$$T^{\mu\nu} = F^\mu{}_\rho F^{\nu\rho} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}. \tag{4.49}$$

这才是一个真正规范不变的量。这个能动量张量有一个重要的特征，即

$$T^\mu{}_\mu = 0. \tag{4.50}$$

如果用电场强度 $\mathbf{E}$ 磁场强度 $\mathbf{B}$ 来写，那电磁场的能量密度 $\mathscr{H} = T^{00}$ 就是，

$$\mathscr{H} = T^{00} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2). \tag{4.51}$$

电磁场的能量流密度通常称作坡印廷矢量，在 $c = 1$ 单位制中记作 $S_i = T^{i0}$。而电磁场的动量密度在 $c = 1$ 单位制中记作 $g_i = T^{0i}$。不过，由于能量动量张量为对称张量，所以在 $c = 1$ 单位制中 g_i 和 S_i 实际上是相等的。根据能动量张量的表达式 (4.49) 容易知道，坡印廷矢量 $\mathbf{S}$ 可以表达为

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \tag{4.52}$$

类似的，读者也可以写出动量流密度 T^{ij} 用电场 E_i 和磁场 B_i 的表达式。

将对称的能动量张量代入 $J^{ij} = \int d^3\mathbf{x}\left[x^i T^{0j} - x^j T^{0i}\right]$，即可以得到电磁场的总角动量 $\mathbf{L}$，为

$$\mathbf{L} = \int d^3\mathbf{x}\left[\mathbf{x} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})\right]. \tag{4.53}$$

将矢量叉乘用列维-西维塔符号 ε_{ijk} 表达出来，并利用如下恒等式 (请直接验证)

$$\varepsilon_{klm}\varepsilon_{mno} = \delta_{kn}\delta_{lo} - \delta_{ko}\delta_{ln}, \tag{4.54}$$

以及利用 $B_m = \varepsilon_{mno}\partial_n A_o$(即 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$), 进而即可以得到

$$\begin{aligned} L_i &= \int d^3\mathbf{x}\left[\varepsilon_{ijk} x_j \varepsilon_{klm} E_l \varepsilon_{mno} \partial_n A_o\right] \\ &= \int d^3\mathbf{x} \varepsilon_{ijk} x_j \left[E_l \partial_k A_l - E_l \partial_l A_k\right] \\ &= \int d^3\mathbf{x}\left[E_l (\mathbf{x} \times \nabla)_i A_l - \varepsilon_{ijk} x_j E_l \partial_l A_k\right] \end{aligned} \tag{4.55}$$

将最后一行的第二项分部积分，丢弃无穷远处的边界项，并利用自由电磁场的 $\partial_l E_l = 0$(即 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$), 即可得

$$L_i = \int d^3\mathbf{x}\left[E_l (\mathbf{x} \times \nabla)_i A_l + (\mathbf{E} \times \mathbf{A})_i\right]. \tag{4.56}$$

或者写成矢量形式，即是

$$\mathbf{L}=\int d^3\mathbf{x}\big[E_i(\mathbf{x}\times\nabla)A_i+(\mathbf{E}\times\mathbf{A})\big]. \tag{4.57}$$

为了理解 (4.57) 式的含义，我们注意到，根据自由电磁场的拉氏密度，可以知道它不含 A^0 的时间导数项 (因为 $F_{00}=0$), 换言之，A^0 场不是一个动力学变量，系统真正的动力学变量只有 $A_i, i=1,2,3$ 场，进而容易求出 A_i 场所对应的正则动量，为

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_t A_i)}=-F^{0i}=-E_i. \tag{4.58}$$

进一步，比较 (4.57) 式右边的第一项和标量场的轨道角动量表达式 (4.46), 不难发现，这一项描述的正是矢量场 $\mathbf{A}$ 的轨道角动量。但是 (4.57) 式右边还多出了第二项，即 $\int d^3\mathbf{x}[\mathbf{E}\times\mathbf{A}]$，这一项只能是反应了矢量场 $\mathbf{A}$ 的某种内禀角动量，通常称之为自旋角动量。

电磁场与复标量场耦合系统的能动量张量

以上讨论的是自由电磁场，那么如果将电磁场耦合到复标量场上，情况会怎样呢？这时候整个耦合系统的能量动量张量将是什么？为了讨论这个问题，我们先写出耦合系统的拉氏密度，

$$\mathscr{L}=-\big[\overline{D_\mu\phi}D^\mu\phi+\mathscr{U}(\overline{\phi}\phi)+\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\big]. \tag{4.59}$$

直接推广上一章的相关知识，可以得到这样一个耦合系统的能动量张量计算公式，

$$T^{\mu\nu}=-\Big[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A^\rho)}\partial^\nu A^\rho+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial^\nu\phi+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\overline{\phi})}\partial^\nu\overline{\phi}-\eta^{\mu\nu}\mathscr{L}\Big]. \tag{4.60}$$

代入拉氏密度 (4.59)，可以得到

$$\begin{aligned}T^{\mu\nu}=&F^\mu{}_\rho\partial^\nu A^\rho-\frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\\&+\overline{D^\mu\phi}\partial^\nu\phi+D^\mu\phi\partial^\nu\overline{\phi}-\eta^{\mu\nu}[\overline{D_\rho\phi}D^\rho\phi+\mathscr{U}(\overline{\phi}\phi)]\\=&F^\mu{}_\rho\partial^\nu A^\rho-\frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\\&+\overline{D^\mu\phi}D^\nu\phi+\overline{D^\nu\phi}D^\mu\phi-\eta^{\mu\nu}[\overline{D_\rho\phi}D^\rho\phi+\mathscr{U}(\overline{\phi}\phi)]+J_A^\mu A^\nu\end{aligned} \tag{4.61}$$

显然，这个能动量张量既不对称也不规范不变。但是，正如前面处理自由电磁场那样，我们可以给它加上一个 $\partial^\rho(-F^\mu{}_\rho A^\nu)$ 项进行修正，只不过，这时候我们有 $-\partial^\rho F^\mu{}_\rho=-J_A^\mu$(即方程 (4.22)), 从而加上的这一项其实等于

$$\partial^\rho(-F^\mu{}_\rho A^\nu)=-\partial^\rho F^\mu{}_\rho A^\nu-F^\mu{}_\rho\partial^\rho A^\nu=-J_A^\mu A^\nu-F^\mu{}_\rho\partial^\rho A^\nu. \tag{4.62}$$

从而，当将这一项加到之前 (4.61) 式的能动量张量以后，即可得如下修正后的能动量张量，

$$\begin{aligned}T^{\mu\nu}=&F^\mu{}_\rho F^{\nu\rho}-\frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\\&+\overline{D^\mu\phi}D^\nu\phi+\overline{D^\nu\phi}D^\mu\phi-\eta^{\mu\nu}[\overline{D_\rho\phi}D^\rho\phi+\mathscr{U}(\overline{\phi}\phi)].\end{aligned} \tag{4.63}$$

很明显，这既是一个对称张量，同时又是一个规范不变的量，它由两部分组成，一部分是纯的电磁场的能动量张量，这一部分显然和前面自由电磁场的相应结果完全一致，另一部分是通过将单纯的复标量场能动量张量中的时空导数替换成协变导数——从而使它规范不变并和 A_μ 场耦合——而得到。

4.2.2 与国际单位制的关系

以上推导电磁场的基本方程时用的不是国际单位制，现在让我们将它们与国际单位制中的形式联系起来。为此，首先引入真空中的磁导率 μ_0，并重新定义 A_μ 场为 $\frac{1}{\sqrt{\mu_0}}A_\mu$，从而将电磁场的拉氏密度重写成如下形式，

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{4.64}$$

如果还需要考虑电磁场与复标量场的耦合，那我们就同时重新定义耦合常数 e，以使得协变导数依然具有 $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ 的形式，从而使得电磁场与复标量场的耦合依然满足

$$\delta S_m = \int d^4x J_A^\mu \delta A_\mu. \tag{4.65}$$

如此一来，电磁场的动力学方程就应该重写成，

$$-\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J_A^\nu. \tag{4.66}$$

而电磁场的能动量张量就要重写成

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}\left[F^\mu{}_\rho F^{\nu\rho} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\right]. \tag{4.67}$$

下面我们恢复光速 c，这时候就可以引入电磁场的国际单位制了。在国际单位制中，$F_{\mu\nu}$ 所有分量的量纲都应该一样，而且和磁场强度的量纲相同，因此对磁场的定义还和以前一样，即 $B_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F^{ij}$。但是，在国际单位制中电场的量纲等于磁场量纲乘以速度量纲，所以电场的定义应该为

$$F^{0i} = \frac{1}{c}E_i. \tag{4.68}$$

从而如果将拉氏密度用电场和磁场写出来，即有

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\mu_0 c^2}\mathbf{E}^2 - \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}^2\right]. \tag{4.69}$$

通常将 $\frac{1}{\mu_0 c^2}$ 记作 ε_0 称作真空的介电常数，即

$$\frac{1}{\mu_0 c^2} = \varepsilon_0 \Leftrightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}. \tag{4.70}$$

从而，国际单位制中的拉氏密度即是，

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left[\varepsilon_0\mathbf{E}^2 - \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}^2\right]. \tag{4.71}$$

同样的，可以得到国际单位制中的能量密度为

$$\mathscr{H} = T^{00} = \frac{1}{2}\big[\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}^2\big]. \tag{4.72}$$

注意到恢复光速 c 以后，有 $J^0 = \rho c$，再加上 $F^{0i} = E_i/c$，进而根据方程 (4.66)，可知之前的方程 (4.28) 现在应该是，

$$\nabla \cdot \mathbf{E}/c = \mu_0 \rho c \Leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho. \tag{4.73}$$

类似的，方程 (4.27)、(4.31)、(4.29) 将分别变成

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}/c}{\partial (ct)} &\Leftrightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \\ \nabla \times \mathbf{E}/c = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial (ct)} &\Leftrightarrow \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \tag{4.74}$$

以上就是国际单位制中的麦克斯韦方程组。

能动量张量 $T^{\mu\nu}$ 所有分量的量纲当然要一致，也就是都取能量密度 T^{00} 的量纲。由于动量的量纲乘以速度的量纲结果等于能量量纲，所以恢复光速 c 以后，动量密度 g_i 应该定义成

$$cg_i = T^{0i} \Rightarrow \mathbf{g} = \big(\frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}/c \times \mathbf{B}\big)/c \Leftrightarrow \mathbf{g} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \tag{4.75}$$

由于能流密度衡量的是能量的流动，它的量纲应该等于能量密度的量纲乘以速度的量纲，从而恢复 c 以后能流密度的定义应该是

$$S_i = cT^{i0} \Rightarrow \mathbf{S} = c^2 \mathbf{g} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \times \mathbf{B}. \tag{4.76}$$

这就是所谓的坡印廷矢量!

通常还引入标量势 $\phi(\mathbf{x},t)$ (读者需要注意根据上下文将它和与电磁场耦合的复标量场区分开来)，它的定义是

$$A^0 = \frac{\phi}{c}. \tag{4.77}$$

利用标量势，并利用 $x_0 = -x^0 = -ct$, 可得

$$\begin{aligned} \frac{E_i}{c} = F^{0i} = \frac{\partial A^i}{\partial x_0} - \frac{\partial A^0}{\partial x_i} &= \frac{1}{c}\big(-\frac{\partial A^i}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x^i}\big) \\ \Rightarrow \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &- \nabla \phi. \end{aligned} \tag{4.78}$$

假如保留真空中的磁导率和真空中的介电常数的符号，但是与此同时取 $c = 1$，那么根据 (4.70) 式，将有

$$\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0}. \tag{4.79}$$

4.3 外微分与麦克斯韦方程

4.3.1 麦克斯韦方程的外微分形式

我们可以用外微分形式重新表达麦克斯韦方程——即方程 (4.22) 和方程 (4.23)。为此定义规范场 1 形式 A，它和规范势 A_μ 的关系是，

$$A = A_\mu dx^\mu. \tag{4.80}$$

对 A 外微分，可得到场强 2 形式 $F = dA$，容易看出

$$F = \partial_\mu A_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu. \tag{4.81}$$

因此，2 形式 F 的分量正好是规范场强 $F_{\mu\nu}$。

由于 $F = dA$，所以显然有

$$dF = 0. \tag{4.82}$$

这个方程正是方程 (4.23) 的外微分形式写法，因为它等价于

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}\partial_\rho F_{\mu\nu} dx^\rho \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \\ \Rightarrow 0 &= \frac{1}{6}\left(\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu}\right) dx^\rho \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \\ \Rightarrow 0 &= \partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu}. \end{aligned} \tag{4.83}$$

另外，根据第二章中介绍的外微分知识，有

$$*d*F = \left(-\partial^\mu F_{\mu\nu}\right) dx^\nu. \tag{4.84}$$

假设我们进一步定义电流 1 形式

$$J = J_\nu dx^\nu. \tag{4.85}$$

则很容易看出，方程 (4.22) 可以重写为

$$*d*F = J \Leftrightarrow d*F = *J. \tag{4.86}$$

即有

$$d*F = *J, \quad dF = 0, \tag{4.87}$$

这正是用外微分形式表达的麦克斯韦方程组。

4.3.2 电磁场的洛伦兹变换

下面考察电磁场的洛伦兹变换。为此，让我们考虑一种特殊情况，假设 S' 系沿着 S 系的 x 轴正方向以匀速 v 运动。假设我们这么选取 S' 的坐标轴，以使得初始时两个坐标系的坐标轴完全重合。这样一来，由于两坐标系的相对运动只发生在 x 方向上，与 y,z 方向无关，所以显然有

$$dy' = dy, \quad dz' = dz. \tag{4.88}$$

由第二章的知识，我们还知道

$$\begin{aligned} dt' &= \frac{dt - vdx}{\sqrt{1-v^2}}, \\ dx' &= \frac{dx - vdt}{\sqrt{1-v^2}}. \end{aligned} \tag{4.89}$$

根据第二章的知识可知，电磁势 A^μ 在洛伦兹变换下的变换规则与 dx^μ 相同，而 $F^{\mu\nu}$ 的变换规则则和 $dx^\mu \wedge dx^\nu$ 相同。而对于上一段的两个参考系，容易算得

$$dt' \wedge dx' = dt \wedge dx, \quad dy' \wedge dz' = dy \wedge dz. \tag{4.90}$$

以及

$$\begin{aligned} dt' \wedge dy' &= \frac{dt \wedge dy - vdx \wedge dy}{\sqrt{1-v^2}}, \\ dt' \wedge dz' &= \frac{dt \wedge dz + vdz \wedge dx}{\sqrt{1-v^2}}. \end{aligned} \tag{4.91}$$

以及

$$\begin{aligned} dz' \wedge dx' &= \frac{dz \wedge dx + vdt \wedge dz}{\sqrt{1-v^2}}, \\ dx' \wedge dy' &= \frac{dx \wedge dy - vdt \wedge dy}{\sqrt{1-v^2}}. \end{aligned} \tag{4.92}$$

进一步由 $F^{tx} = E_x, F^{ty} = E_y, F^{tz} = E_z$ 以及 $F^{xy} = B_z, F^{yz} = B_x, F^{zx} = B_y$, 即可以得到电磁场的变换关系，

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, \quad B'_x = B_x \\ E'_y &= \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1-v^2}}, \quad E'_z = \frac{E_z + vB_y}{\sqrt{1-v^2}}. \\ B'_y &= \frac{B_y + vE_z}{\sqrt{1-v^2}}, \quad B'_z = \frac{B_z - vE_y}{\sqrt{1-v^2}}. \end{aligned} \tag{4.93}$$

当相对运动的速度远远小于光速时，即 $v \ll 1$ 时，上述结果可以简化为

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E}. \tag{4.94}$$

我们看到，在洛伦兹变换之下，电场和磁场总是相互转化的。但是，我们可以定义如下矢量场 $\mathbf{G}$

$$\mathbf{G} = \mathbf{E} + i\mathbf{B}, \tag{4.95}$$

可以证明，$\mathbf{G}$ 在洛伦兹变换之下总是变回自身各分量的线性组合。以上述特殊的洛伦兹变换为例，根据上面的结果，不难得到

$$\begin{aligned} dt'\wedge dx'+idy'\wedge dz' &= dt\wedge dx+idy\wedge dz \\ dt'\wedge dy'+idz'\wedge dx' &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(dt\wedge dy+idz\wedge dx) \\ &\quad+\frac{iv}{\sqrt{1-v^2}}(dt\wedge dz+idx\wedge dy) \\ dt'\wedge dz'+idx'\wedge dy' &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(dt\wedge dz+idx\wedge dy) \\ &\quad-\frac{iv}{\sqrt{1-v^2}}(dt\wedge dy+idz\wedge dx). \end{aligned} \tag{4.96}$$

从而即有 $\mathbf{G}$ 场的变换关系，

$$\begin{aligned} G'_x = G_x,\quad G'_y &= \cos(i\omega)G_y+\sin(i\omega)G_z \\ G'_z &= \cos(i\omega)G_z-\sin(i\omega)G_y. \end{aligned} \tag{4.97}$$

式中 $\cosh(\omega)=1/\sqrt{1-v^2}$，$\sinh(\omega)=v/\sqrt{1-v^2}$，从而 $\cos(i\omega)=\cosh(\omega)$，$\sin(i\omega)=i\sinh(\omega)=iv/\sqrt{1-v^2}$。由此可见，洛伦兹变换相当于场 $\mathbf{G}$ 的一个三维空间旋转，只不过旋转角度为一个复数。

场 $\mathbf{G}$ 的另一个应用是，利用它我们可以把无源的自由电磁场 (即 $J^\mu=0$) 的麦克斯韦方程改写成如下方程

$$i\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial t}=\nabla\times\mathbf{G},\quad \nabla\cdot\mathbf{G}=0. \tag{4.98}$$

对于这个结果，我们请读者自己直接验证。

5. 超导的有效理论以及涡旋解

5.1 超导的金兹堡-朗道理论

5.1.1 金兹堡-朗道理论

本章我们接着讨论复标量场与电磁场的耦合系统。特别的，我们假定这个系统的作用量为

$$S=\int d^4x\Big[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\overline{D_\mu\phi}D^\mu\phi-\frac{g}{2}\big(|\phi|^2-u\big)^2\Big]. \tag{5.1}$$

式中 $u>0$ 为实参数，$D_\mu\phi=(\partial_\mu-ieA_\mu)\phi$，$\mu=0,1,2,3$。从这个作用量很容易看出，它其实就是将前面第三章讨论对称性自发破缺时的复标量场耦合到了电磁场。对称性自发破缺的原始思想源自于朗道有关二阶相变的理论，而将它推广到与电磁场耦合的情形就是所谓的金兹堡-朗道理论。

金兹堡-朗道理论是作为超导的长程有效理论而提出的，它的原始版本当然是一个非相对论性理论。而上面的复标量场与电磁场的耦合系统却是一个相对论性理论，当然，人们可以通过取上述理论的非相对论极限来得到原始的金兹堡-朗道理论。不过，假如我们关心的是平衡态，即是说，假如我们只关心静态场位形，那相对论性理论和非相对论理论的区别就无关紧要。正因为如此，本章中，**我们将主要关心静态场位形**。

不妨让我们写出上述系统的能量动量张量，

$$\begin{aligned}T^{\mu\nu}=&F^\mu{}_\rho F^{\nu\rho}-\frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\\&+\overline{D^\mu\phi}D^\nu\phi+\overline{D^\nu\phi}D^\mu\phi-\eta^{\mu\nu}[\overline{D_\rho\phi}D^\rho\phi+\frac{g}{2}\big(|\phi|^2-u\big)^2].\end{aligned} \tag{5.2}$$

从而可知系统的能量密度为

$$\mathscr{H} = T^{00} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) + |D_0\phi|^2 + |D_i\phi|^2 + \frac{g}{2}\big(|\phi|^2 - u\big)^2. \tag{5.3}$$

式中指标 $i = 1,2,3$。

上述系统具有 $U(1)$ 规范对称性，因此我们总可以通过选取合适的规范变换，使得

$$A^0 = 0. \tag{5.4}$$

通常称这之选取了轴规范。轴规范和第四章中介绍的洛伦兹规范一样，都只是一种规范条件，本身并不是一个物理上的要求。

很显然，在轴规范下，$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$，$D_0\phi = \partial_t\phi$，因此如果只考虑静态场位形的话，那将有 $\mathbf{E} = 0$, $D_0\phi = 0$。所以，对于静态场位形，系统的能量泛函可以写成，

$$H = \int d^3\mathbf{x}\Big[\frac{1}{2}\mathbf{B}^2 + |D_i\phi|^2 + \frac{g}{2}\big(|\phi|^2 - u\big)^2\Big]. \tag{5.5}$$

这就是所谓的金兹堡-朗道能量泛函 (Ginzburg-Landau energy functions)。而对于静态场位形，最小作用量原理就变成了能量泛函取极值的原理，即

$$\delta H = 0. \tag{5.6}$$

金兹堡和朗道称复标量场 ϕ 为序参量，起初人们并不知道它的微观起源是什么，后来，Lev Gor'kov 从超导的微观理论——BCS 理论 (Bardeen-Cooper-Schrieffer theory)——出发导出了金兹堡-朗道理论，这时人们才知道，ϕ 可以看作是库珀对的场。因此，金兹堡朗道理论中复标量场与电磁场的耦合常数 e 正比于库珀对的电荷 q_{cp}, 两者之间的关系是

$$e = \frac{q_{cp}}{\hbar}. \tag{5.7}$$

一个库珀对由两个配对的电子组成，而在很多书上常常把电子电量记作 e，进而库珀对的电荷就是 $2e$，如此一来库珀对场与电磁场的耦合常数就应该记作 $2e/\hbar$。不过，在本书中我们将坚持将这个耦合常数简单地记作 e，希望不会引起读者的混淆。

回到我们的物理讨论，我们记除磁能之外的能量为 H_m,

$$H_m = \int d^3\mathbf{x}\Big[|D_i\phi|^2 + \frac{g}{2}\big(|\phi|^2 - u\big)^2\Big]. \tag{5.8}$$

因此对于静态场位形，规范场与电流的耦合关系 $\delta S_m = \int d^4x J_A^\mu \delta A_\mu$ 就变成

$$\delta H_m = -\int d^3\mathbf{x}\mathbf{J}_A \cdot \delta\mathbf{A}. \tag{5.9}$$

由此可得电流密度的表达式

$$J_A^i = ie\big(\overline{D_i\phi}\phi - \overline{\phi}D_i\phi\big). \tag{5.10}$$

下面我们将复标量场 ϕ 分解为一个模长场 $|\phi|(x)$ 和一个相位场 $\theta(x)$,

$$\phi(x) = |\phi|e^{i\theta(x)}. \tag{5.11}$$

代入金兹堡-朗道能量泛函，即得

$$H_m = \int d^3\mathbf{x}\Big[(\partial_i|\phi|)^2 + |\phi|^2\big(\partial_i\theta - eA_i\big)^2 + \frac{g}{2}\big(|\phi|^2 - u\big)^2\Big]. \tag{5.12}$$

以及

$$\mathbf{J}_A = 2e|\phi|^2\big(\nabla\theta - e\mathbf{A}\big). \tag{5.13}$$

注意到在上面表达式 (5.12) 和 (5.13) 中 θ 场总以偏导的形式出现，且 $\partial_i\theta$ 总是和 $-eA_i$ 作为一个整体出现，由此再结合 $\delta H_m = -\int d^3\mathbf{x}J_A^i\delta A_i$，即知能量泛函 H 对 θ 的变分为

$$\begin{aligned}\delta H = \delta H_m &= \frac{1}{e}\int d^3\mathbf{x}J_A^i\delta(\partial_i\theta)\\ &= -\frac{1}{e}\int d^3\mathbf{x}\partial_i J_A^i\delta\theta.\end{aligned} \tag{5.14}$$

上式最后一行我们进行了分部积分，并扔掉了无穷远的边界项。进而根据最小作用量原理 $\delta H = 0$，即知 θ 场的运动微分方程正是

$$\partial_i J_A^i = 0 \Leftrightarrow \nabla\cdot\mathbf{J}_A = 0. \tag{5.15}$$

这也正是稳恒电流所满足的方程。另外，将能量泛函 H 对 $\mathbf{A}$ 变分，即可得场方程

$$\nabla\times\mathbf{B} = \mathbf{J}_A. \tag{5.16}$$

从 H_m 的表达式 (5.12) 容易看出，为了使得系统的能量尽可能低，表达式 (5.12) 中的每一项都应该取零，从而有

$$|\phi| = \sqrt{u}, \quad \partial_i\theta - eA_i = 0. \tag{5.17}$$

进而可知 $\mathbf{J}_A = 0$，同时

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{e}\nabla\times\nabla\theta = 0. \tag{5.18}$$

这时候我们称系统处于超导相。而 $|\phi| = 0, A_i \neq \partial_i\theta/e$, 从而 $\mathbf{B}$ 不一定等于零的相，则称作正常相。特别的，正常相的模长场等于零，而超导相的模长场非零，模长场的这种非零取值就是所谓的库珀对凝聚。

假设上述场论系统描述的是一块宏观材料，那上面的结果将意味着材料处于超导相时，内部的磁场必定为零。即使在它转变为超导相前内部有磁场线，在转变为超导相后，磁场线也会被排斥出去，这就是所谓的迈斯纳 (Meissner) 效应！同时，上面的结果也告诉我们，超导相的材料内部不会有超导电流，超导电流只能出现在材料表面的某个薄层里面。

为了考察这样的薄层到底有多厚，我们将 θ 场和 $\mathbf{A}$ 场在超导相 (5.17) 附近做一个扰动，记这样的扰动为 $\delta\theta$、$\delta\mathbf{A}$, 显然它们满足方程

$$\nabla\cdot\delta\mathbf{J}_A = 0, \quad \nabla\times\delta\mathbf{B} = \delta\mathbf{J}_A. \tag{5.19}$$

注意到 $\delta\mathbf{J}_A = 2eu\big(\nabla\delta\theta - e\delta\mathbf{A}\big)$, 即得

$$\begin{aligned}\nabla^2\delta\theta &= e\nabla\cdot\delta\mathbf{A}\\ \nabla\times(\nabla\times\delta\mathbf{A}) &= 2eu(\nabla\delta\theta - e\delta\mathbf{A}).\end{aligned}\tag{5.20}$$

假设选取如下规范固定条件

$$\nabla\cdot\delta\mathbf{A} = 2eu\delta\theta.\tag{5.21}$$

则稍微整理一下，即有如下 $\delta\theta$ 和 $\delta\mathbf{A}$ 脱耦的两个方程

$$\begin{aligned}\nabla^2\delta\theta &= 2e^2u\delta\theta\\ \nabla^2\delta\mathbf{A} &= 2e^2u\delta\mathbf{A}.\end{aligned}\tag{5.22}$$

这两个方程的解都是指数衰减的，典型地取作 $\delta\mathbf{A}\sim\delta\theta\sim e^{-x/\lambda}$，式中 x 为超导体内某点离表面的距离，而参数 λ 等于

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2e^2u}}.\tag{5.23}$$

λ 称作超导体的穿透深度，它衡量的是超导材料表面超导电流以及磁场非零的表面薄层的厚度。

另外，在超导相 (5.17) 附近对模长场作一个扰动，记扰动为 ρ, 即设

$$|\phi| = \sqrt{u}+\rho.\tag{5.24}$$

代入 (5.12) 式并保留到 ρ 的最低阶，即有

$$H_m \simeq \int d^3\mathbf{x}\Big[(\partial_i\rho)^2 + 2gu\rho^2\Big].\tag{5.25}$$

进而即可得 ρ 所满足的方程

$$\nabla^2\rho = 2gu\rho.\tag{5.26}$$

这个方程的解典型地取作 $\rho\sim e^{-x/\xi}$, 式中

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2gu}}.\tag{5.27}$$

ξ 称作关联长度，它表示的是模长场发生变化的典型距离。

朗道还引入了第三个参数来刻画超导体，那就是 λ 与 ξ 的比值，记作 κ, 很显然

$$\kappa = \frac{\lambda}{\xi} = \sqrt{\frac{g}{e^2}}.\tag{5.28}$$

$\kappa<1$ 称作第一类超导体 (除了铌以外的绝大多数纯金属)，$\kappa>1$ 称作第二类超导体 (铌以及绝大多数合金)。

从 (5.12) 式可以看到，$|\phi| = \sqrt{u}$ 超导相的能量比 $|\phi| = 0$ 正常相能量每单位体积要少

$$\Delta = \frac{g}{2}(0^2 - u)^2 = \frac{gu^2}{2} = \frac{1}{8e^2\lambda^2\xi^2}. \tag{5.29}$$

但是，假设超导材料原来处于外磁场中的话，那为了排出外磁场进而形成超导相，每单位体积需要能量 $\frac{1}{2}B^2$，B 为外磁场大小。因此，从能量上考虑，仅当下式满足时

$$\frac{1}{2}B^2 < \Delta \Rightarrow B < \sqrt{2\Delta}, \tag{5.30}$$

系统才会倾向于处于超导相。而当外磁场过强，即 $B > \sqrt{2\Delta}$，系统将倾向于处在正常相。

5.1.2 涡旋线激发的初步讨论

迈斯纳效应告诉我们，超导相内部磁场必定为 0。但是，有可能出现这样一种情况，即在超导态中间出现某个很小的管状区域，其管子中心处不处在超导态，而是处在通常态，所以它允许磁场通过，如图 (5.1) 所示。我们知道，在以从管子中心开始算起与周围超导

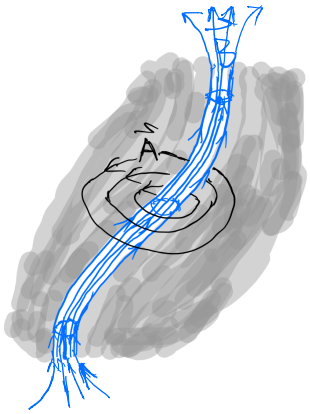

Figure 5.1: 超导体的磁通量子化。

态交界的一个横截半径为 λ 的管状区域内会有超导电流和磁场。而在离管子中心的横截距离大于 λ 时，磁场衰减为零。同时我们也知道，管子中心处由于处于通常态，所以其模长场取值为零，模长场在距离为 ξ 的尺度上变化，在离管子中心横截距离大于 ξ 时，模长场就要趋于超导态的 $\sqrt{u}$。这样一种处于超导体内部的磁通管子就称作超导体的涡旋线激发，因为从远处看，它就是一根内部有磁场线通过的细线。

由于中间有磁场通过，所以在如图 (5.1) 所示的这种情况下，超导态内部任何一条包围涡旋线的闭合回路上，矢量势 $\mathbf{A}$ 将不为 0，这是因为，沿着这样的闭合回路 $\oint_L \mathbf{A}\cdot\mathbf{dl} = \int_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{dS} = \Phi$，式中 S 表示回路 L 所包围的面积，Φ 就是这根涡旋线内部通过的磁通。

另一方面，根据 (5.17) 式，我们又知道，在超导态内部，有 $\nabla\theta = e\mathbf{A}$，从而 $\oint_L \mathbf{A}\cdot\mathbf{dl} = 1/e\oint_L \nabla\theta\cdot\mathbf{dl} = 1/e\oint_L d\theta$，但是由于 θ 是一个相角，因此围绕着闭合回路一周，θ 的改变量只可能取 $2N\pi(N\in\mathbb{Z})$，从而必有

$$\Phi = \oint_L \mathbf{A}\cdot\mathbf{dl} = N2\pi/e. \tag{5.31}$$

因此，涡旋线的磁通必然是量子化的，其量子化单位为

$$\Phi_0 = 2\pi/e, \tag{5.32}$$

称为一个磁通量子。而这里的整数 N 就称为相应涡旋线的拓扑量子数。这样的涡旋线激发实际上可以在超导体里面移动，不仅如此，两个不同拓扑量子数的涡旋线还可以合并成一个涡旋线，而一个高拓扑量子数的涡旋线也可能分裂成多个低拓扑量子数的涡旋线，但是，在整个这样的合并或分裂过程前后，总拓扑量子数是守恒的。

磁通量子化表明, 拥有最小磁通 Φ_0 的超导涡旋线是稳定的。拥有更高通量的涡旋线无法简单地凭空消失, 但是磁通量子化自身并不能阻止这个涡旋线分裂成多个通量更小的涡旋线。Bogomolnyi 证明了[1], 仅当 $\lambda > \xi$ 时 (即仅对于第二类超导体), 对于通量 $N\Phi_0$ 的涡旋线, 它分裂成 N 个通量为 Φ_0 的涡旋线会更稳定。

无论对于第一类超导体还是对于第二类超导体，涡旋解总是存在的，但是正如我们即将要看到的, 仅对于第二类超导体以及某个有限范围的外磁场强度, 从能量上看才是倾向于产生涡旋线的。

为了看清楚这一点，我们首先要注意到，在实际的条件下，涡旋线往往不是孤立存在的，而是同时有大量涡旋线平行地排布，不妨记 n 为超导体内单位横截面积上涡旋线的数目。根据上面所述，每个涡旋线为一个横截面积为 $\pi\xi^2$ 的管状区域，在区域之内，材料处于正常态或者接近正常态，而在区域之外，材料处于超导态。根据前面的分析，为了制造出这些涡旋线，单位体积需要能量 $n\pi\xi^2\Delta$。这里，涡旋线的密度限制在 $n < 1/(\pi\xi^2)$, 否则不同涡旋线的管状区域将会重叠，这时就可以将材料视作是处于正常态。如果同时有 $n < 1/(\pi\lambda^2)$, 则每单位横截面积上面积为 $1 - n\pi\lambda^2$ 区域内的磁场会被排斥出去，如果 $n > 1/(\pi\lambda^2)$, 则没有磁场会被排斥出去。所以，相对于没有磁场时的超导态，单位体积涡旋态 (vortex state) 的能量是

$$W_V \approx n\pi\xi^2\Delta + \frac{1}{2}B^2 \times \begin{cases} 1 - n\pi\lambda^2, & n < 1/(\pi\lambda^2) \\ 0, & n > 1/(\pi\lambda^2) \end{cases} . \tag{5.33}$$

另外，相较于超导态，正常态 (normal state) 每单位体积超出的能量是 $W_N \approx \Delta$, 而为了将所有的磁场都排斥出去，超导态 (super-conducting state) 每单位体积需要的能量是 $W_S \approx B^2/2$。对于给定外磁场，通过比较 W_V, W_N, W_S 中哪个最小，我们就能决定材料处于相应的哪种状态上。

对于第一类超导体，由于 $n < 1/(\pi\xi^2)$, 而对于第一类超导体又有 $\xi > \lambda$, 所以必有 $n < 1/(\pi\lambda^2)$。当 $B < \sqrt{2\Delta}$ 时，由 (5.33) 式即有, $W_V > \frac{1}{2}B^2 + n\pi(\xi^2 - \lambda^2)\Delta > W_S$, 所以不可能存在涡旋态!另一方面,当 $B > \sqrt{2\Delta}$ 时,由 (5.33) 式有, $W_V > \Delta\left[1 + n\pi(\xi^2 - \lambda^2)\right] > \Delta = W_N$, 所以同样不存在涡旋态。总之，从能量上考虑，对于第一类超导体，将不存涡旋态，只有超导态和正常态。

[1] E. B. Bogomol' nyi, Sov. J. Nucl. Phys. 24, 449 (1976). 关于数值计算, 参看 E. B. Bogomol' nyi and A. I. Vainshtein, Sov. J. Nucl. Phys. 23, 558 (1976).

对于第二类超导体，我们需要将磁场划分为如下三个区域，

$$B < B_{c1}, \quad B_{c1} < B < B_{c2}, \quad B > B_{c2}. \tag{5.34}$$

式中 B_{c1} 和 B_{c2} 分别为

$$B_{c1} \approx \sqrt{2\Delta}(\xi/\lambda), \quad B_{c2} \approx \sqrt{2\Delta}(\lambda/\xi). \tag{5.35}$$

根据 Bogomolnyi 的证明可知，仅当每个涡旋的磁通为最小磁通量子 Φ_0 时才是稳定的。由此可知，单位横截面积上涡旋线的数目必为 $n = B/\Phi_0$。对于 $B < B_{c1}$，即有 $n = B/\Phi_0 < \sqrt{2\Delta}(\xi/\lambda)(\frac{e}{2\pi})$，代入 (5.29) 式，即得 $n < \frac{1}{4\pi\lambda^2} \sim \frac{1}{\pi\lambda^2}$. 由 (5.33) 式即有，$W_V \approx n\pi\xi^2\Delta + \frac{1}{2}B^2(1-n\pi\lambda^2) = \frac{1}{2}B^2 + n\pi(\xi^2\Delta - \frac{1}{2}B^2\lambda^2) > \frac{1}{2}B^2 \approx W_S$。同时，这时也显然有 $W_N > W_S$，所以材料处于超导态，没有涡旋线。而当 $B > B_{c1}$ 时，我们有 $n = B/\Phi_0 > \frac{1}{4\pi\lambda^2} \sim \frac{1}{\pi\lambda^2}$，所以在涡旋态中，磁场完全穿透了超导体，由 (5.33) 式有，$W_V \approx n\pi\xi^2\Delta = (B/\Phi_0)\pi\xi^2\Delta = \frac{1}{2}eB\xi^2\Delta \sim (B/B_{c2})W_N \sim (B_{c1}/B)W_S$。由此可知，当 $B_{c1} < B < B_{c2}$ 时，$W_V < W_N$, $W_V < W_S$，所以材料处于涡旋态上。而当 $B > B_{c2}$ 时，我们依然有 $W_V < W_S$，但现在 $W_V > W_N$, 所以这时候 W_N 最小，材料处于正常态。

为了真正求解出涡旋解的场位形，我们需要完整求解 $\mathbf{A}$ 场和模长场 $|\phi|$ 的运动微分方程，由 (5.12) 式的变分，可得

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= 2e|\phi|^2(\nabla\theta - e\mathbf{A}) \\ \nabla^2|\phi| &= |\phi|(\nabla\theta - e\mathbf{A})^2 + g(|\phi|^2 - u)|\phi|. \end{aligned} \tag{5.36}$$

作为二阶偏微分方程，这组方程的求解并不容易，即使是数值求解都不容易。好在，正如后文将要看到的，对于 $\lambda = \xi \Rightarrow g = e^2$ 的临界类超导体，情况将可以大大简化。

5.2 涡旋解

本节我们具体讨论涡旋解。涡旋线是一根磁通细管，不妨假定这根管子沿着 x_3 方向排布，为此我们可以进一步假定整个场位形沿着 x_3 方向是均匀的，即所有场都不依赖于 x_3 坐标。这样一来，我们需要关心的，就只是横截方向，即 x_1, x_2 方向。很显然，在这个横截方向上，涡旋线就类似于一个有限尺寸的“粒子”。即是说，这时候系统有效地是一个二维系统 (考虑时间的话就是 $2+1$ 维系统)，涡旋解是这个二维系统的孤立子解。

由于只有第二类超导体才能够处于涡旋态，所以本节将仅限于考察这种情形，即假定 $g \geq e^2$。另外，在本节中，$i, j = 1, 2$。

5.2.1 Bogomolny 能限

对于我们实际关心的这个二维系统，考虑静态场位形，能量表达式为

$$H = \int d^2x \Big[\frac{1}{2}B^2 + |D_i\phi|^2 + \frac{g}{2}\big(|\phi|^2 - u\big)^2\Big]. \tag{5.37}$$

式中 $B = F_{12}$。很显然，为了让场位形的总能量有限，当空间趋于无穷远时，能量表达式的每一项都必须趋于零，从而可知，在空间无穷远处

$$\phi(x) \to \sqrt{u}e^{i\theta(x)}, \quad D_i\phi \to i\sqrt{u}(\partial_i\theta - eA_i)e^{i\theta(x)} \to 0. \tag{5.38}$$

特别的，根据上式，我们有，在空间无穷远边界上 $\partial_i\theta - eA_i \to 0$, 从而可知全空间的磁通必定满足，

$$\begin{aligned}\frac{\Phi}{2\pi} &= \frac{1}{2\pi}\int d^2xB = \frac{1}{2\pi}\int \frac{1}{2}F_{ij}dx^i\wedge dx^j \\ &= \frac{1}{2\pi}\oint_\infty A_j dx^j = \frac{1}{2\pi e}\oint_\infty \partial_j\theta dx^j \\ &= \frac{1}{2\pi e}2\pi N = \frac{N}{e}.\end{aligned} \tag{5.39}$$

式中 N 为当我们围绕着空间无穷远走一圈时，作为相角的 θ 场所绕过的圈数，N 当然为整数，这个结果就是上一节讨论过的磁通量子化关系。N 非零的静态场位形就称之为拓扑非平凡的静态场位形。

事实上，正如我们即将证明的，当 $g \geq e^2$ 时，对于拓扑非平凡的有限能量场位形，其总能量必定有一个正的下界。为了推导这个下界，我们注意到

$$\begin{aligned}|D_1\phi|^2 + |D_2\phi|^2 &= |(D_1 \pm iD_2)\phi|^2 \mp i\overline{D_1\phi}D_2\phi \pm i\overline{D_2\phi}D_1\phi \\ &= |(D_1 \pm iD_2)\phi|^2 \mp i\varepsilon^{ij}\overline{D_i\phi}D_j\phi.\end{aligned} \tag{5.40}$$

式中反对称张量 ε^{ij} 满足 $\varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} = 1$。进一步，

$$\begin{aligned}\mp i\varepsilon^{ij}\overline{D_i\phi}D_j\phi &= \mp i\varepsilon^{ij}\partial_i\overline{\phi}D_j\phi \pm \varepsilon^{ij}eA_i\overline{\phi}D_j\phi \\ &= \mp i\varepsilon^{ij}\partial_i(\overline{\phi}D_j\phi) \pm i\varepsilon^{ij}\overline{\phi}(\partial_i D_j\phi) \pm \varepsilon^{ij}eA_i\overline{\phi}D_j\phi \\ &= \mp i\varepsilon^{ij}\partial_i(\overline{\phi}D_j\phi) \pm i\varepsilon^{ij}\overline{\phi}(D_iD_j\phi).\end{aligned} \tag{5.41}$$

利用

$$\varepsilon^{ij}D_iD_j = \frac{1}{2}\varepsilon^{ij}[D_i, D_j] = \frac{1}{2}\varepsilon^{ij}(-ieF_{ij}) = -ieF_{12} = -ieB. \tag{5.42}$$

即得

$$\mp i\varepsilon^{ij}\overline{D_i\phi}D_j\phi = \mp i\varepsilon^{ij}\partial_i(\overline{\phi}D_j\phi) \pm eB|\phi|^2. \tag{5.43}$$

综合 (5.40) 式和 (5.43) 式，即有

$$|D_i\phi|^2 = |(D_1 \pm iD_2)\phi|^2 \mp i\varepsilon^{ij}\partial_i(\overline{\phi}D_j\phi) \pm eB|\phi|^2. \tag{5.44}$$

将 (5.44) 式代入静态场位形能量公式 (5.37)，即有

$$\begin{aligned}H &= \int d^2x\Big[|(D_1 \pm iD_2)\phi|^2 \pm eB(|\phi|^2 - u) + \frac{1}{2}B^2 + \frac{g}{2}\big(|\phi|^2 - u\big)^2\Big] \\ &\quad + \int d^2x\big[\pm euB \mp i\varepsilon^{ij}\partial_i(\overline{\phi}D_j\phi)\big] \\ &= \int d^2x\Big[|(D_1 \pm iD_2)\phi|^2 + \frac{1}{2}[B \pm e(|\phi|^2 - u)]^2 + \frac{(g-e^2)}{2}\big(|\phi|^2 - u\big)^2\Big] \\ &\quad + \int d^2x\big[\pm euB \mp i\varepsilon^{ij}\partial_i(\overline{\phi}D_j\phi)\big].\end{aligned} \tag{5.45}$$

注意到 $\varepsilon^{ij}d^2x=\varepsilon^{ij}dx^1dx^2=dx^i\wedge dx^j$, 从而

$$\begin{aligned}&\int d^2x\varepsilon^{ij}\partial_i(\overline{\phi}D_j\phi)=\int(dx^i\wedge dx^j)\partial_i(\overline{\phi}D_j\phi)\\&=\int d\left(\overline{\phi}D_j\phi dx^j\right)=\oint_\infty\overline{\phi}D_j\phi dx^j.\end{aligned}\tag{5.46}$$

结果为空间无穷远边界上的积分，但根据 (5.38) 式，在空间无穷远边界上，$D_j\phi\to 0$, 从而上式最终的积分等于零，即

$$\int d^2x\varepsilon^{ij}\partial_i(\overline{\phi}D_j\phi)=0.\tag{5.47}$$

再注意到总磁通的量子化，即 (5.39) 式，从而即知表达静态场位形总能量的 (5.45) 式可以写成

$$\begin{aligned}H=&\int d^2x\left[|(D_1\pm iD_2)\phi|^2+\frac{1}{2}[B\pm e(|\phi|^2-u)]^2\right]\\&+\frac{(g-e^2)}{2}\int d^2x\left(|\phi|^2-u\right)^2\pm 2\pi Nu.\end{aligned}\tag{5.48}$$

由这个式子很容易看出，只要 $g\geq e^2$，那么有限能量静态场位形的能量必定满足如下 Bogomolny 能限 (BPS bound)，

$$H\geq 2\pi|N|u.\tag{5.49}$$

5.2.2 BPS 方程和涡旋解

前面说了，我们可以求出涡旋解，且在本节的有效二维系统中，这些涡旋解就是拓扑非平凡的孤立子解。正如我们即将看到的，在 $g=e^2$ 的临界情况下对这些孤立子解的考察将会变得尤其容易。因此，本小节我们假定 $g=e^2$。

根据上一小节的讨论，这时候静态场位形的能量满足

$$H=\int d^2x\left[|(D_1\pm iD_2)\phi|^2+\frac{1}{2}[B\pm e(|\phi|^2-u)]^2\right]\pm 2\pi Nu.\tag{5.50}$$

即能量有一个大于零的下界 $2\pi|N|u$。下面我们不妨假定拓扑量子数 $N>0$, 从而上式中的 $\pm$ 号都取 $+$ 号，因此在给定拓扑等价类中，使得能量达到下界的场位形必定满足如下方程，

$$(D_1+iD_2)\phi=0,\quad B+e(|\phi|^2-u)=0.\tag{5.51}$$

这就是 BPS 方程，满足这个方程的场位形使得静态能量取极小值，而根据最小作用量原理，对于静态场位形，场的运动微分方程正是由能量的极值条件给出，从而满足 BPS 方程的场位形必定满足场的运动微分方程 (反之则不然)。但是场方程是二阶偏微分方程，而 BPS 方程只是一阶微分方程，所以求解起来当然要容易很多。

为了找到 BPS 方程 (5.51) 的一组拓扑非平凡的涡旋解，我们不妨假设涡旋的中心位于坐标原点，然后在两维空间平面上引入极坐标 (r,α)，

$$x_1=r\cos\alpha,\quad x_2=r\sin\alpha.\tag{5.52}$$

假设 $\phi(x)=|\phi|(x)e^{i\theta(x)}$, 则根据 (5.39) 式，对于拓扑量子数为 N 的场位形，相角 θ 在空间无穷远处必定围绕着原点转 N 圈，由此我们不妨进一步假设 $\theta(x)=N\alpha$, 同时假设 $|\phi|$ 只依赖于径向坐标 r。即，我们假设

$$\phi(x)=|\phi|(r)e^{i\theta},\quad \theta=N\alpha. \tag{5.53}$$

将上面的假设代入 BPS 方程 (5.51), 即有

$$(\partial_1+i\partial_2)|\phi|-ie(A_1+iA_2)|\phi|+i|\phi|(\partial_1+i\partial_2)\theta=0. \tag{5.54}$$

分离这个等式的实部和虚部，即有

$$A_1=\frac{1}{e}[\partial_2\ln|\phi|(r)+\partial_1\theta],\quad A_2=\frac{1}{e}[-\partial_1\ln|\phi|(r)+\partial_2\theta]. \tag{5.55}$$

或者利用二阶反对称张量 ε_{ij}，将这个结果写成

$$A_i=\frac{1}{e}[\varepsilon_{ij}\partial_j\ln|\phi|(r)+\partial_i\theta]. \tag{5.56}$$

即是说，只需求出 $|\phi|(r)$，就可以进一步根据这个结果得到规范场的场位形。

为了求出 $|\phi|(r)$，我们需要利用 BPS 方程 (5.51) 中的另一个方程。为此，我们注意到

$$\begin{aligned}B=F_{12}&=\varepsilon_{ij}\partial_iA_j\\&=\frac{1}{e}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{jk}\partial_i\partial_k\ln|\phi|+\frac{1}{e}\varepsilon_{ij}\partial_i\partial_j\theta\\&=-\frac{1}{e}\partial_i^2\ln|\phi|+\frac{1}{e}\varepsilon_{ij}\partial_i\partial_j\theta.\end{aligned} \tag{5.57}$$

式中 $\partial_i^2=\partial_1^2+\partial_2^2$, 也记作 ∇^2。为了得到上面的结果，我们代入了 (5.56) 式，并利用了恒等式 $\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kj}=\delta_{ik}$。

由于 $\partial_i\partial_j$ 关于指标 i,j 对称，所以 (5.57) 式中的 $\frac{1}{e}\varepsilon_{ij}\partial_i\partial_j\theta$ 项应该等于零。但，需要小心的是，这个结论只对除坐标原点之外的区域成立，因为在这样的区域上 $\theta=N\alpha$ 作为 x_i 的函数是光滑的，但是在坐标原点处，极角 α 作为 x_i 的函数却是奇异的！即是说，$\varepsilon_{ij}\partial_i\partial_j\alpha$ 在原点之外为零，但在原点处却是奇异的，从而必有

$$\varepsilon_{ij}\partial_i\partial_j\alpha=c\delta^2(x), \tag{5.58}$$

式中 $\delta^2(x)=\delta(x_1)\delta(x_2)$。为了定出待定常数 c 的值，我们将这个结果对以坐标原点为中心的一个小圆盘 D 积分，从而有

$$\begin{aligned}c&=\int_D d^2x\varepsilon_{ij}\partial_i\partial_j\alpha=\int_D dx^i\wedge dx^j\partial_i\partial_j\alpha\\&=\int_D d(\partial_j\alpha dx^j)=\oint_C\partial_j\alpha dx^j=2\pi.\end{aligned} \tag{5.59}$$

式中 C 表示圆盘 D 的边界。上面的结果告诉我们

$$\varepsilon_{ij}\partial_i\partial_j\alpha=2\pi\delta^2(x). \tag{5.60}$$

从而

$$B = -\frac{1}{e}\partial_i^2 \ln|\phi| + \frac{1}{e}2\pi N\delta^2(x). \tag{5.61}$$

代入 BPS 方程 (5.51) 中的另一个方程，即有

$$\nabla^2 \ln|\phi|(r) = 2\pi N\delta^2(x) + e^2(|\phi|^2 - u). \tag{5.62}$$

方程 (5.62) 通常没有解析解，但它可以数值求解，它的解 (以及相应的规范场 A_i 的解) 就描写电磁场与复标量场耦合系统的一个涡旋激发，涡旋的中心在坐标原点，涡旋的总磁通为量子化的 $2\pi N/e$。这样的涡旋场位形大体如图 (5.2) 所示。

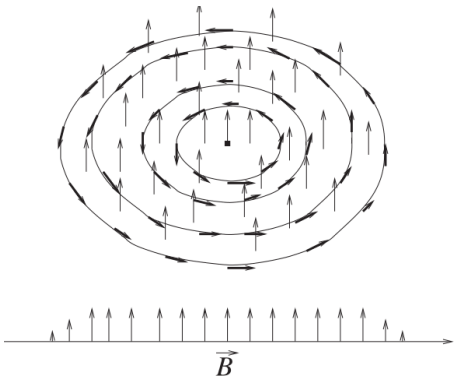

Figure 5.2: 涡旋解：其中复标量场在两维场空间的取向用一个小箭头表示，这样的小箭头围着坐标原点打转，所以称作涡旋。磁场的方向垂直于两维空间平面，并限制在涡旋中心的一个小区域内。

虽然无法得到涡旋的解析解，但是人们可以方便地考察这个解在 $r \to \infty$ 以及 $r \to 0$ 时的极限行为。首先，总能量有限的条件要求，

$$r \to \infty : \quad |\phi|(r) \to \sqrt{u}. \tag{5.63}$$

很显然，这是满足方程 (5.62) 的。这时候，规范场趋于一个纯规范，即

$$A_i \to \frac{1}{e}\partial_i\theta. \tag{5.64}$$

从而磁场 $B \to 0$, 当然这个结论也很容易从 BPS 方程的第二个方程中得到。

其次，当 $r \to 0$ 时，方程 (5.62) 右边的 δ 函数项将占主导地位，从而这时候方程本身可以近似成

$$r \to 0 : \quad \nabla^2 \ln|\phi|(r) = 2\pi N\delta^2(x). \tag{5.65}$$

这个方程的解是 $\ln|\phi|(r) = N\ln(r) + C$[2]，即是说，

$$r \to 0: \quad |\phi|(r) \to Ar^N, \tag{5.69}$$

式中 A 为积分常数。也即是说，

$$r \to 0: \quad \phi(x) \to Az^N, \tag{5.70}$$

式中 $z = re^{i\alpha} = x_1 + ix_2$ 为两维空间的复坐标。进一步，根据 BPS 方程的第二个方程，我们也可以得到涡旋中心的磁场强度，

$$r \to 0: \quad B = -e(|\phi|^2 - u) \to eu = \text{constant}. \tag{5.71}$$

[2]为了验证这个解，我们将方程在原点附近积分，从而有

$$\begin{aligned} 2\pi N &= \int_D d^2x(\partial_1^2 + \partial_2^2)\ln|\phi(r)| \\ &= \oint_C \big(\partial_1 \ln|\phi| dx_2 - \partial_2 \ln|\phi| dx_1\big), \end{aligned} \tag{5.66}$$

代入 $\ln|\phi|(r) = N\ln(r) + C$, 并利用 $\partial_i r = x_i/r$，即得

$$2\pi N = N\oint_C \frac{(x_1 dx_2 - x_2 dx_1)}{r^2}. \tag{5.67}$$

另一方面由极坐标定义 $x_1 = r\cos\alpha, x_2 = r\sin\alpha$, 可得 $r^2 d\alpha = x_1 dx_2 - x_2 dx_1$，从而上面的式子即是

$$2\pi N = N\oint_C d\alpha. \tag{5.68}$$

这显然成立！从而就验证了 $\ln|\phi|(r) = N\ln(r) + C$ 的确是方程 (5.65) 的解。

6. 带电粒子与电磁场耦合

前面的章节中我们考察了复标量场与电磁场的耦合系统。本章开始考察带电粒子与电磁场的耦合系统。对于电动力学在宏观世界的应用而言，这样的系统也许更为重要。因为宏观世界很少有机会出现一个复标量场来与电磁场相互作用，但却常常需要处理带电粒子与电磁场相互作用的问题。本章先考察自由粒子体系的能量动量张量，之后再进一步考察它们和电磁场的耦合。

6.1 多粒子系统的能量动量张量

考虑多个相对论性自由粒子所构成的系统，我们以 $n=1,2,...,N$ 来标记不同的粒子。根据《经典力学新讲》第三章的知识可以知道，这个系统的作用量可以写成

$$S[x(s)]=-\sum_n m_n\int d\tau_n=-\sum_n m_n\int ds_n\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dx_n^\mu}{ds_n}\frac{dx_n^\nu}{ds_n}}. \tag{6.1}$$

式中 x_n^μ 为粒子 n 的时空坐标，m_n 为它的质量，τ_n 为它的固有时，s_n 为它的世界线参数。由于上式在 $s_n\to\tilde{s}_n(s_n)$ 的重参数化之下保持不变，所以 s_n 的选择有很大的任意性，特别的，我们可以将 s_n 选作固有时 τ_n。

不妨以固有时参数 (即 $s_n = \tau_n$) 下的粒子作用量来进一步讨论。我们可以利用最小作用量原理求出上述自由粒子系统的运动微分方程，为此注意到

$$\begin{aligned}\delta S &= -\sum_n m_n \int \delta(d\tau_n) = -\sum_n m_n \int \frac{1}{2}\frac{\delta(d\tau_n^2)}{d\tau_n} \\ &= \sum_n m_n \int \frac{1}{2}\delta(\eta_{\mu\nu} dx_n^\mu dx_n^\nu)/d\tau_n \\ &= \sum_n m_n \int \frac{dx_n^\mu}{d\tau_n}\eta_{\mu\nu}\delta(dx_n^\nu) \\ &= \sum_n m_n \int \frac{dx_n^\mu}{d\tau_n}\eta_{\mu\nu} d(\delta x_n^\nu). \end{aligned} \tag{6.2}$$

将最后一行的结果分部积分，并利用在边界上 $\delta x_n^\mu = 0$, 即可得

$$\delta S = -\sum_n m_n \int d\tau_n \frac{d^2 x_n^\mu}{d\tau_n^2}\eta_{\mu\nu}\delta x_n^\nu. \tag{6.3}$$

根据最小作用量原理的 $\delta S = 0$，即可得

$$m_n \frac{d^2 x_n^\mu}{d\tau_n^2} = 0. \tag{6.4}$$

定义第 n 个粒子的四维动量 $p_n^\mu = (p_n^0, \mathbf{p}_n)$ 为

$$p_n^\mu = m_n \frac{dx_n^\mu}{d\tau_n}. \tag{6.5}$$

则上述运动微分方程可以重写成

$$\frac{dp_n^\mu}{d\tau_n} = 0. \tag{6.6}$$

另外，利用 $x_n^0 = t_n$, $d\tau_n = \sqrt{1-\mathbf{v}_n^2}dt_n$，我们也可以得到

$$p_n^0 = \frac{m_n}{\sqrt{1-\mathbf{v}_n^2}}, \quad \mathbf{p}_n = \frac{m_n \mathbf{v}_n}{\sqrt{1-\mathbf{v}_n^2}}. \tag{6.7}$$

进而也有

$$\mathbf{v}_n = \frac{\mathbf{p}_n}{p_n^0}. \tag{6.8}$$

作用量 (6.1) 显然具有 $x_n^\mu \to \tilde{x}_n^\mu = x_n^\mu + a^\mu$ (a^μ 为常矢量) 的时空坐标平移不变性。为了考察这一时空平移对称性所对应的能动量张量，我们考虑如下局域化的无穷小时空坐标变换

$$x_n^\mu \to \tilde{x}_n^\mu = x_n^\mu + \varepsilon^\mu(x_n) \Leftrightarrow \delta x_n^\mu = \varepsilon^\mu(x_n). \tag{6.9}$$

(从而 $\delta(dx_n^\mu)=d(\delta x_n^\mu)=\frac{\partial\varepsilon^\mu}{\partial x_n^\nu}dx_n^\nu$) 完全仿照 (6.2) 式，可得在此局域时空坐标变换下，作用量的改变量为

$$\begin{aligned}\delta S&=\sum_n m_n\int\frac{dx_n^\mu}{d\tau_n}\eta_{\mu\nu}d(\delta x_n^\nu)\\&=\sum_n m_n\int(\frac{dx_n^\mu}{d\tau_n})\frac{\partial\varepsilon_\mu}{\partial x_n^\nu}dx_n^\nu\\&=\sum_n m_n\int d\tau_n(\frac{dx_n^\mu}{d\tau_n}\frac{dx_n^\nu}{d\tau_n})\frac{\partial\varepsilon_\mu}{\partial x_n^\nu}.\end{aligned}\tag{6.10}$$

通过引入四维时空 δ 函数 $\delta^4\big(x-x_n(\tau_n)\big)=\prod_{\mu=0}^3\delta\big(x^\mu-x_n^\mu(\tau_n)\big)$, 可以进一步将上面结果写成

$$\begin{aligned}\delta S&=\sum_n m_n\int d\tau_n(\frac{dx_n^\mu}{d\tau_n}\frac{dx_n^\nu}{d\tau_n})\frac{\partial\varepsilon_\mu}{\partial x_n^\nu}\\&=\int d^4x\Big[\sum_n m_n\int d\tau_n(\frac{dx_n^\mu}{d\tau_n}\frac{dx_n^\nu}{d\tau_n})\delta^4\big(x-x_n(\tau_n)\big)\Big]\partial_\nu\varepsilon_\mu(x).\end{aligned}\tag{6.11}$$

从而易知，与时空平移对称性对应的能动量张量为

$$T^{\mu\nu}=\sum_n m_n\int d\tau_n(\frac{dx_n^\mu}{d\tau_n}\frac{dx_n^\nu}{d\tau_n})\delta^4\big(x-x_n(\tau_n)\big).\tag{6.12}$$

显然，这个能动量张量是一个对称张量。

为了看清楚上述能动量张量的意义，我们将它重写成，

$$T^{\mu\nu}=\sum_n m_n\int ds_n(\frac{dx_n^\mu}{ds_n}\frac{dx_n^\nu}{d\tau_n})\delta^4\big(x-x_n(s_n)\big).\tag{6.13}$$

然后取世界线参数 $s_n=x_n^0$, 则当我们做完对 s_n 的积分后，即有能动量密度

$$T^{0\mu}=\sum_n m_n(\frac{dx_n^\mu}{d\tau_n})\delta^3\big(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n(t)\big)=\sum_n p_n^\mu\delta^3\big(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n(t)\big).\tag{6.14}$$

式中 $\delta^3\big(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n(t)\big)=\prod_{i=1}^3\delta\big(x^i-x_n^i(t)\big)$。从而可知与时空平移对称性对应的守恒量为

$$\int d^3\mathbf{x}T^{0\mu}=\sum_n p_n^\mu,\tag{6.15}$$

即粒子系统总的四维动量守恒。类似的，在取 $s_n=x_n^0$ 并做完对 s_n 的积分以后，也有流密度

$$\begin{aligned}T^{i\mu}&=\sum_n m_n(\frac{dx_n^\mu}{d\tau_n}\frac{dx_n^i}{dt})\delta^3\big(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n(t)\big)\\&=\sum_n p_n^\mu v_n^i\delta^3\big(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n(t)\big).\end{aligned}\tag{6.16}$$

综合 (6.14) 式和 (6.16) 式，可知粒子系统的能动量张量可以表达成

$$T^{\mu\nu}=\Big[\sum_n\frac{p_n^\mu p_n^\nu}{p_n^0}\delta^3\big(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n(t)\big)\Big].\tag{6.17}$$

进一步，我们有

$$\begin{aligned}\partial_\mu T^{\mu\nu} &= \sum_n m_n \int d\tau_n \Big(\frac{dx_n^\mu}{d\tau_n}\frac{dx_n^\nu}{d\tau_n}\Big)\partial_\mu \delta^4\big(x - x_n(\tau_n)\big). \\ &= -\Big[\sum_n m_n \int d\tau_n \frac{dx_n^\nu}{d\tau_n}\frac{dx_n^\mu}{d\tau_n}\frac{\partial}{\partial x_n^\mu}\delta^4\big(x - x_n(\tau_n)\big)\Big] \\ &= -\Big[\sum_n \int d\tau_n p_n^\nu \frac{d}{d\tau_n}\delta^4\big(x - x_n(\tau_n)\big)\Big]. \end{aligned} \tag{6.18}$$

将上式分部积分，并丢弃 $\tau_n \to \infty$ 的边界项[1]，即可以得到

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \sum_n \int d\tau_n \frac{dp_n^\nu}{d\tau_n}\delta^4\big(x - x_n(\tau_n)\big). \tag{6.19}$$

对于我们所考察的自由粒子系统，$\frac{dp_n^\mu}{d\tau_n} = 0$，从而上式就给出自由粒子系统的能动量张量守恒方程。但是，即使对于相互作用的粒子系统，(6.19) 式依然是成立的，只不过，这时候方程 (6.19) 的右边将取决于粒子间的相互作用力场。

6.2 耦合到电磁场

现在，假设前面考察的粒子是带电粒子，因此可以耦合到电磁场。根据《经典力学新讲》第三章的知识可知，与电磁场耦合的带电粒子系统的作用量为

$$S[x(s)] = -\sum_n m_n \int d\tau_n + \sum_n q_n \int A_\mu dx_n^\mu. \tag{6.20}$$

式中 q_n 为粒子 n 的电荷。为了得到系统的运动微分方程，我们将这个作用量对粒子坐标变分，其中第一项的变分与 (6.2) 式完全相同，关键是要将第二项，即与规范势 A_μ 耦合的项进行变分，则有

$$\begin{aligned}\sum_n q_n \delta \int A_\mu dx_n^\mu &= \sum_n q_n \int \delta A_\nu dx_n^\nu + \sum_n q_n \int A_\mu d(\delta x_n^\mu) \\ &= \sum_n q_n \int \big(\partial_\mu A_\nu \delta x_n^\mu dx_n^\nu - dA_\mu \delta x_n^\mu\big) \\ &= \sum_n q_n \int \big(\partial_\mu A_\nu \delta x_n^\mu dx_n^\nu - \partial_\nu A_\mu dx_n^\nu \delta x_n^\mu\big) \\ &= \sum_n q_n \int d\tau_n F_{\mu\nu}\frac{dx_n^\nu}{d\tau_n}\delta x_n^\mu. \end{aligned} \tag{6.21}$$

其中第二个等号进行了分部积分，并注意到边界项等于零。从而即可得到与电磁场耦合的作用量 (6.20) 的变分，

$$\delta S[x(s)] = \sum_n \int d\tau_n \Big[-m_n \frac{d^2 x_n^\mu}{d\tau_n^2} + q_n F^\mu{}_\nu \frac{dx_n^\nu}{d\tau_n}\Big]\delta x_{n\mu}. \tag{6.22}$$

[1] 边界项 $-\Big[\sum_n p_n^\nu(\pm\infty)\delta^4\big(x - x_n(\pm\infty)\big)\Big]$ 之所以可以丢弃，是因为 $x_n(\pm\infty)$ 位于时空的无穷远过去和无穷远将来，而 x 点位于有限区域内，从而 $\delta^4\big(x - x_n(\pm\infty)\big) = 0$，即边界项其实等于零。

根据最小作用量原理，即可得粒子的运动微分方程，为

$$\frac{dp_n^\mu}{d\tau_n} = m_n \frac{d^2 x_n^\mu}{d\tau_n^2} = q_n F^\mu{}_\nu \frac{dx_n^\nu}{d\tau_n}. \tag{6.23}$$

很显然，方程 (6.23) 也可以写作

$$\frac{dp_n^\mu}{dt} = q_n F^\mu{}_\nu \frac{dx_n^\nu}{dt}. \tag{6.24}$$

从这里读者不难得到

$$\frac{d\mathbf{p}_n}{dt} = q_n(\mathbf{E} + \mathbf{v}_n \times \mathbf{B}). \tag{6.25}$$

这正是通常所谓的洛伦兹力公式。

将作用量 (6.20) 对规范势 A_μ 变分，即可得到

$$\begin{aligned} \delta S &= \sum_n q_n \int d\tau_n \frac{dx_n^\mu}{d\tau_n} \delta A_\mu \\ &= \int d^4x \Big[\sum_n q_n \int d\tau_n \frac{dx_n^\mu}{d\tau_n} \delta^4\big(x - x_n(\tau_n)\big) \Big] \delta A_\mu. \end{aligned} \tag{6.26}$$

将这个式子与标准的电流四矢量 J^μ 与规范势的耦合 $\delta S = \int d^4x J^\mu \delta A_\mu$ 进行比较，即可得到此带电粒子系统的电流四矢量，为

$$\begin{aligned} J^\mu(x) &= \sum_n q_n \int d\tau_n \frac{dx_n^\mu}{d\tau_n} \delta^4\big(x - x_n(\tau_n)\big) \\ &= \sum_n q_n \int ds_n \frac{dx_n^\mu}{ds_n} \delta^4\big(x - x_n(s_n)\big). \end{aligned} \tag{6.27}$$

为了看清楚 (6.27) 式的物理意义，我们取世界线参数 $s_n = x_n^0$, 并做出 (6.27) 式中的积分，则有

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_n q_n \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \\ \mathbf{J} &= \sum_n q_n \mathbf{v}_n \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)). \end{aligned} \tag{6.28}$$

很显然，结果正符合我们对电荷密度以及电流密度表达式的预期。

下面回到多粒子系统的能动量张量。当我们将 (6.23) 式代入 (6.19) 式，即有 (对与电磁场耦合的带电粒子系统)，

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \sum_n \int d\tau_n q_n F^\nu{}_\rho \frac{dx_n^\rho}{d\tau_n} \delta^4\big(x - x_n(\tau_n)\big). \tag{6.29}$$

注意到电流四矢量的定义式 (6.27)，即有

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = F^\nu{}_\rho J^\rho(x). \tag{6.30}$$

现在，假设电磁场本身就是这些带电粒子产生的，因此要将它包括进我们的系统之中。从而整个带电粒子与电磁场耦合系统的作用量为，

$$S[x(s),A_\mu]=-\int d^4x\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\sum_n m_n\int d\tau_n+\sum_n q_n\int A_\mu dx_n^\mu. \tag{6.31}$$

电磁场当然也会对系统的能动量张量有贡献，根据第四章的知识，电磁场贡献的能动量张量为

$$T^{\mu\nu}_{\rm em}=F^\mu{}_\rho F^{\nu\rho}-\frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}. \tag{6.32}$$

由于要和带电粒子耦合，$T^{\mu\nu}_{\rm em}$ 本身当然也是不守恒的，它满足

$$\begin{aligned}\partial_\mu T^{\mu\nu}_{\rm em}&=\partial_\mu F^\mu{}_\rho F^{\nu\rho}+F_{\mu\rho}\partial^\mu F^{\nu\rho}-\frac{1}{4}\partial^\nu\big(F_{\mu\rho}F^{\mu\rho}\big)\\&=\partial_\mu F^\mu{}_\rho F^{\nu\rho}+\frac{1}{2}F_{\mu\rho}\big(\partial^\mu F^{\nu\rho}-\partial^\rho F^{\nu\mu}\big)-\frac{1}{2}F_{\mu\rho}\partial^\nu F^{\mu\rho}\\&=\partial_\mu F^\mu{}_\rho F^{\nu\rho}+\frac{1}{2}F_{\mu\rho}\big(\partial^\mu F^{\nu\rho}+\partial^\nu F^{\rho\mu}+\partial^\rho F^{\mu\nu}\big).\end{aligned} \tag{6.33}$$

代入麦克斯韦方程组，即得

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}_{\rm em}=-F^\nu{}_\rho J^\rho. \tag{6.34}$$

联合前面的 (6.30) 式，即可知如下总的能动量张量是守恒的，

$$T^{\mu\nu}=F^\mu{}_\rho F^{\nu\rho}-\frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}+\sum_n m_n\int d\tau_n\big(\frac{dx_n^\mu}{d\tau_n}\frac{dx_n^\nu}{d\tau_n}\big)\delta^4\big(x-x_n(\tau_n)\big). \tag{6.35}$$

满足

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}=0. \tag{6.36}$$

另外，注意到 $T^\mu_{\mu\ \rm em}=0$, 以及 $\eta_{\mu\nu}\frac{dx_n^\mu}{d\tau_n}\frac{dx_n^\nu}{d\tau_n}=-1$ (即 $-d\tau_n^2=\eta_{\mu\nu}dx_n^\mu dx_n^\nu$), 即可知这个总能量动量张量满足如下特性

$$T^\mu{}_\mu=-\sum_n m_n\int d\tau_n\delta^4\big(x-x_n(\tau_n)\big)\le 0. \tag{6.37}$$



7. 运动电荷的电磁场

运动电荷会产生电磁场，本章就是要通过求解麦克斯韦方程，求出这个电磁场。和本书其它章节一样，本章也主要采用 $c=1$ 单位制，但与此同时，我们将保留公式中真空磁导率以及真空介电常数的符号，当然，由于 $c=1$，在恢复光速前即有 $\mu_0=1/\varepsilon_0$。另外，在各种推导结束以后，我们也常常通过恢复光速 c 来得到国际单位制中的相应公式。

7.1 延迟格林函数和推迟势

为了求解运动电荷所产生的电磁场，我们需要求解麦克斯韦方程。我们知道，在洛伦兹规范 $\partial_\mu A^\mu=0$ 之下，麦克斯韦方程等价于如下波动方程，

$$-\partial_\nu\partial^\nu A^\mu(x)=\mu_0 J^\mu(x). \tag{7.1}$$

式中 J^μ 为电流四矢量。为了求解这个方程，我们定义格林函数 $G(x,x')$，它满足如下方程

$$-\partial_\nu\partial^\nu G(x,x')=\delta^4(x-x') \tag{7.2}$$

式中 $x=(t,\mathbf{x}),x'=(t',\mathbf{x}')$ 为两个四维时空点，$\delta^4(x-x')=\delta(t-t')\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$。利用格林函数，我们可以得到方程 (7.1) 的解，

$$A^\mu(x)=\mu_0\int d^4x' G(x,x')J^\mu(x'). \tag{7.3}$$

注意到方程 (7.2) 在时空坐标平移下是不变的，从而即有 $G(x,x')=G(x-x')$, 进而就可以将 (7.2) 式改写成

$$-\partial_\nu\partial^\nu G(x)=\delta^4(x). \tag{7.4}$$

而方程 (7.1) 的解就可以写成，

$$A^\mu(x)=\mu_0\int d^4x' G(x-x')J^\mu(x'). \tag{7.5}$$

利用流守恒方程 $\partial_\mu J^\mu=0$ 以及关系式 $\partial_\mu G(x-x')=-\partial'_\mu G(x-x')$(式中 $\partial'_\mu=\frac{\partial}{\partial x'^\mu}$), 很容易验证这样的解一定满足洛伦兹规范。验证过程如下，

$$\begin{aligned}\partial_\mu A^\mu(x)&=\mu_0\int d^4x'\partial_\mu G(x-x')J^\mu(x')\\&=-\mu_0\int d^4x'\partial'_\mu G(x-x')J^\mu(x')\\&=\mu_0\int d^4x' G(x-x')\partial'_\mu J^\mu(x')=0,\end{aligned} \tag{7.6}$$

式中第 3 个等号我们进行了分部积分，并注意到 J^μ 在无穷远处等于零，从而扔掉了分部积分的边界项，同时，式中最后一个等号我们利用了流守恒方程 $\partial_\mu J^\mu=0$。

为了求出格林函数 $G(x)$ 的具体表达式，我们对 (7.4) 式进行傅里叶变换，注意到 $\delta^4(x)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{ik\cdot x}$，式中 $k^\mu=(\omega,\mathbf{k})$, $k\cdot x=k_\mu x^\mu=-\omega t+\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}$，并令

$$G(x)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\widetilde{G}(k)e^{ik\cdot x}, \tag{7.7}$$

进而即可得到

$$k^2\widetilde{G}(k)=1\quad\Rightarrow\quad\widetilde{G}(k)=\frac{1}{k^2}=\frac{1}{\mathbf{k}^2-\omega^2}=-\frac{1}{\omega^2-|\mathbf{k}|^2}. \tag{7.8}$$

从而

$$G(x)=-\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\int\frac{d\omega}{2\pi}\frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2-|\mathbf{k}|^2}. \tag{7.9}$$

我们可以将变量 ω 延拓到整个复平面来看待 (7.9) 这个积分。很明显，被积函数 $\frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2-|\mathbf{k}|^2}$ 在 ω 复平面上有两个极点，分别是 $\omega=\pm|\mathbf{k}|$。而对 ω 的积分是沿着实轴进行的，积分路径会经过这两个极点，因此为了让积分收敛，就必须给出积分路径在极点附近如何绕过的方案。这样的方案并非唯一，不同的绕行方案将给出不同的格林函数。但在经典场论中，最重要的绕行方案是从极点的上方绕过，如图 (7.1) 所示。这种绕行方案给出来的格林函数就是所谓的延迟格林函数 (retarded Green's function)，记作 $G_{\rm ret}(x)=G_{\rm ret}(\mathbf{x},t)$，这个函数的行为取决于 $t>0$ 还是 $t<0$。

我们首先来看 $t<0$ 情形。这时候被积函数中的指数因子 $e^{-i\omega t}$ 显然满足

$$\omega\to i\infty:\quad e^{-i\omega t}\to 0. \tag{7.10}$$

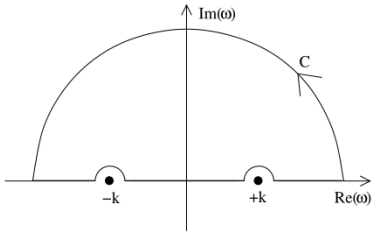

Figure 7.1: $t<0$ 时延迟格林函数在复 ω 平面的积分回路。

因此我们可以将 ω 的积分路径在复上半平面上添加一个无穷远半圆，如图 (7.1) 所示，因为在这个无穷远半圆上，被积函数等于零，从而对积分是没有贡献的。但这样一来，我们就使得 ω 的积分路径在复 ω 平面上形成了一个闭合围道，从而可以利用围道积分来计算积分结果。很明显，由于积分路径从极点的上方绕过，所以这个闭合围道并不包围任何极点，从而围道积分的结果必定为零，即

$$G_{\rm ret}(\mathbf{x},t)=0 \qquad t<0. \tag{7.11}$$

反过来，当 $t>0$ 时，有

$$\omega\to -i\infty: \quad e^{-i\omega t}\to 0. \tag{7.12}$$

从而我们只能给积分路径在复下半平面上添加无穷远处的半圆，从而在复下半平面形成闭合围道。那这时候积分围道将同时包围两个极点，围道积分的结果将给出

$$\oint \frac{d\omega}{2\pi}\frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2-|\mathbf{k}|^2}=\frac{1}{2\pi}(-2\pi i)\Big[\frac{e^{-i|\mathbf{k}|t}}{2|\mathbf{k}|}-\frac{e^{i|\mathbf{k}|t}}{2|\mathbf{k}|}\Big]. \tag{7.13}$$

代入 (7.9) 式，即有

$$\begin{aligned} G(x)&=-\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\int\frac{d\omega}{2\pi}\frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2-|\mathbf{k}|^2}\\ &=i\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2|\mathbf{k}|}\big[e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-|\mathbf{k}|t)}-e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+|\mathbf{k}|t)}\big]. \end{aligned} \tag{7.14}$$

下面以 $\mathbf{x}$ 的方向为 z 方向，在 3 维 $\mathbf{k}$ 空间引入球坐标，并记 $r=|\mathbf{x}|$, 即有

$$\begin{aligned} i\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2|\mathbf{k}|}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-|\mathbf{k}|t)}&=i\frac{1}{(2\pi)^3}(2\pi)\int_0^{+\infty}|\mathbf{k}|^2d|\mathbf{k}|\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\frac{1}{2|\mathbf{k}|}e^{i|\mathbf{k}|r\cos\theta}e^{-i|\mathbf{k}|t}\\ &=i\frac{1}{2(2\pi)^2}\int_0^{+\infty}|\mathbf{k}|d|\mathbf{k}|\frac{1}{i|\mathbf{k}|r}\big[e^{i|\mathbf{k}|r}-e^{-i|\mathbf{k}|r}\big]e^{-i|\mathbf{k}|t}\\ &=\frac{1}{2(2\pi)^2r}\int_0^{+\infty}d|\mathbf{k}|\big[e^{i|\mathbf{k}|(r-t)}-e^{-i|\mathbf{k}|(r+t)}\big]. \end{aligned} \tag{7.15}$$

类似的，也有

$$i\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2|\mathbf{k}|}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+|\mathbf{k}|t)}=\frac{1}{2(2\pi)^2r}\int_0^{+\infty}d|\mathbf{k}|\big[e^{i|\mathbf{k}|(r+t)}-e^{-i|\mathbf{k}|(r-t)}\big]. \tag{7.16}$$

将 (7.15) 式和 (7.16) 式代入 (7.14) 式，即有

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{2(2\pi)^2 r}\int_0^{+\infty} d|\mathbf{k}|\left[e^{i|\mathbf{k}|(r-t)} - e^{-i|\mathbf{k}|(r+t)} - e^{i|\mathbf{k}|(r+t)} + e^{-i|\mathbf{k}|(r-t)}\right] \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^2 r}\int_{-\infty}^{+\infty} d|\mathbf{k}|\left[e^{i|\mathbf{k}|(r-t)} - e^{-i|\mathbf{k}|(r+t)}\right] \\ &= \frac{1}{4\pi r}\left[\delta(t-r) - \delta(t+r)\right] = \frac{1}{2\pi}\delta(t^2-r^2) \\ &= \frac{1}{2\pi}\delta(x^2). \end{aligned} \tag{7.17}$$

即仅仅在光锥 $x^2=0$ 上，延迟格林函数才非零。

刚才我们计算的是 $t>0$ 情形，现在将 $t<0$ 和 $t>0$ 综合起来，即有

$$G_{\mathrm{ret}}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2\pi}\delta(x^2)\theta(t). \tag{7.18}$$

其中 $\theta(t)$ 是所谓的阶跃函数，当 $t>0$ 时，$\theta(t)=1$，当 $t<0$ 时 $\theta(t)=0$。(7.18) 式是延迟格林函数的明显协变的形式，它在正洛伦兹变换下明显保持不变。但实际上，当 $t>0$ 时，必有 (7.17) 式中的 $\delta(r+t)=0$, 从而延迟格林函数也可以写成如下不明显协变的形式

$$G_{\mathrm{ret}}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi r}\delta(t-r). \tag{7.19}$$

利用延迟格林函数，即可得到

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= \mu_0\int d^4x' G_{\mathrm{ret}}(x-x')J^\mu(x') \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi}\int d^4x'\delta((x-x')^2)\theta(t-t')J^\mu(x') \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^4x'\frac{\delta(t-t'-R)}{R}J^\mu(x'). \end{aligned} \tag{7.20}$$

式中

$$\mathbf{R} = \mathbf{x}-\mathbf{x}', \quad R = |\mathbf{R}|. \tag{7.21}$$

我们也常常将 (7.20) 式中的时间变量 t' 先积掉，进而得到

$$A^\mu(x) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3\mathbf{x}'\frac{J^\mu(\mathbf{x}',t-R)}{R} \tag{7.22}$$

从 (7.20) 式和 (7.22) 式可以清楚地看到，t 时刻的势场 A^μ 取决于更早的 $t-R$ 时刻的源，因此这两个式子又叫做**推迟势公式**。推迟的原因就在于场的传播需要时间，$t-R$ 时刻 $\mathbf{x}'$ 点源的运动情况经过时间 R 刚好在 t 时刻影响 $\mathbf{x}$ 点的势场。

其它格林函数

假如在计算 (7.9) 式的积分时我们让积分路径从两个极点的下方绕过，如图 (7.2) 所示，相应的积分结果将给出另一种可能的格林函数，即超前格林函数 (advanced Green's function)$G_{\mathrm{adv}}(\mathbf{x},t)$，为

$$G_{\mathrm{adv}}(\mathbf{x},t) = -\frac{1}{2\pi}\delta(x^2)\theta(-t) = \frac{1}{4\pi r}\delta(t+r)\theta(-t). \tag{7.23}$$

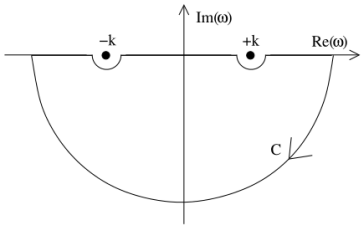

Figure 7.2: $t>0$ 时超前格林函数在复 ω 平面的积分回路。

利用超前格林函数，我们就能得到所谓的超前势，

$$A^{\mu}(x)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3\mathbf{x}'\frac{J^{\mu}(\mathbf{x}',t+R)}{R}. \tag{7.24}$$

超前势同样是方程 (7.1) 的解，但是这种解显然是非物理的，因为它 t 时刻的场值取决于未来的 $t+R$ 时刻的源分布，这显然违反了因果律。因此唯一合理的处理就是丢弃这种可能性。

最后，在量子场论中，(7.9) 式的积分围道还有另一种可能性，即从两个极点中左边极点的下方绕过，但却从右边极点的上方绕过，如图 (7.3) 所示，这时候相应的格林函数就称作费曼格林函数，或者称作费曼传播子。这种格林函数在量子场论中是最基本的，但它没有经典物理解释，从而当我们仅仅考虑经典场论时也应该丢弃它。

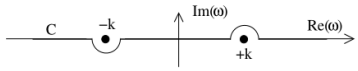

Figure 7.3: 费曼传播子。

7.2 带电粒子的电磁场

7.2.1 Lienard-Wiechert 势

现在考察一个带电的运动粒子，设电量为 q，粒子的世界线为 $\tilde{x}^{\mu}(\tau)=(\tilde{t}(\tau),\tilde{\mathbf{x}}(\tau))$，其中 τ 为世界线的参数，通常就取为粒子的固有时。记粒子的速度为 $\mathbf{v}(t)=\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt}$，则这个粒子贡献的电荷密度 $\rho(\mathbf{x},t)$ 以及电流密度 $\mathbf{J}(\mathbf{x},t)$ 分别为，

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{x},t)&=q\delta^3(\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}(t))\\ \mathbf{J}(\mathbf{x},t)&=q\mathbf{v}(t)\delta^3(\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}(t)).\end{aligned} \tag{7.25}$$

或者也可以写成明显协变的形式

$$J^{\mu}(x)=q\int d\tau\frac{d\tilde{x}^{\mu}(\tau)}{d\tau}\delta^4(x-\tilde{x}(\tau)). \tag{7.26}$$

在上式中将变量 τ 代换成 $\widetilde{t}$ 就可以得到前面不明显协变的电荷密度以及电流密度。

将 (7.26) 式代入 (7.20) 式，就可以得到这个运动电荷产生的场

$$\begin{aligned} A^{\mu}(x) &= \frac{\mu_0 q}{2\pi}\int d\tau \int d^4x' \frac{d\widetilde{x}^{\mu}}{d\tau}\delta^4(x'-\widetilde{x}(\tau))\delta((x-x')^2)\theta(t-t') \\ &= \frac{\mu_0 q}{2\pi}\int d\tau \frac{d\widetilde{x}^{\mu}}{d\tau}\delta((x-\widetilde{x})^2)\theta(t-\widetilde{t}) \\ &= \frac{\mu_0 q}{4\pi}\int d\tau \frac{d\widetilde{x}^{\mu}}{d\tau}\frac{\delta(t-\widetilde{t}-R)}{R}. \end{aligned} \tag{7.27}$$

式中 $\mathbf{R}(\tau)=\mathbf{x}-\widetilde{\mathbf{x}}(\tau)$ 为从带电粒子到场点 $\mathbf{x}$ 的位置矢量。在 (7.27) 式中将变量 τ 代换成变量 $\widetilde{t}$, 即有 (注意到在光速 $c=1$ 的单位制中有 $\mu_0=1/\varepsilon_0$)

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x},t) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int d\widetilde{t}\frac{\delta(t-\widetilde{t}-R(\widetilde{t}))}{R(\widetilde{t})} \\ \mathbf{A}(\mathbf{x},t) &= \frac{\mu_0 q}{4\pi}\int d\widetilde{t}\mathbf{v}(\widetilde{t})\frac{\delta(t-\widetilde{t}-R(\widetilde{t}))}{R(\widetilde{t})}. \end{aligned} \tag{7.28}$$

式中 $\mathbf{v}(\widetilde{t})=d\widetilde{\mathbf{x}}/d\widetilde{t}$。式中的 δ 函数将时间 $\widetilde{t}$ 约束为满足下式

$$t-\widetilde{t}-R(\widetilde{t})=0 \Leftrightarrow \widetilde{t}=t-R(\widetilde{t}). \tag{7.29}$$

满足这个式子的时间 $\widetilde{t}$ 称作迟缓时间 (retarded time)，通常记为 t_{ret}，很显然它是 t 时刻到达 $\mathbf{x}$ 点的光从带电粒子发出的时间。

利用

$$\delta(t-\widetilde{t}-R(\widetilde{t}))=\frac{\delta(\widetilde{t}-t_{\mathrm{ret}})}{|\frac{\partial}{\partial\widetilde{t}}(t-\widetilde{t}-R(\widetilde{t}))|}, \tag{7.30}$$

并注意到

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial\widetilde{t}}(\widetilde{t}+R(\widetilde{t})-t)=1+\frac{dR(\widetilde{t})}{d\widetilde{t}} \\ =&1-\frac{d\widetilde{\mathbf{x}}}{d\widetilde{t}}\cdot\nabla R=1-\mathbf{v}(\widetilde{t})\cdot\mathbf{n}(\widetilde{t}). \end{aligned} \tag{7.31}$$

式中 $\mathbf{n}(\widetilde{t})=\nabla R(\widetilde{t})=\frac{\mathbf{R}}{R}$ 为从带电粒子指向场点的单位矢量，通常称 $1-\mathbf{v}(\widetilde{t})\cdot\mathbf{n}(\widetilde{t})$ 为多普勒因子。利用这些结果，我们很容易将 (7.28) 式的积分算出来，得到

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x},t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{R-\mathbf{v}\cdot\mathbf{R}}\right]_{\mathrm{ret}} \\ \mathbf{A}(\mathbf{x},t) &= \frac{\mu_0 q}{4\pi}\left[\frac{q\mathbf{v}}{R-\mathbf{v}\cdot\mathbf{R}}\right]_{\mathrm{ret}}. \end{aligned} \tag{7.32}$$

其中下标 ret 表示方括号里的量在迟缓时刻 t_{ret} 计算。(7.32) 就是所谓的 Lienard-Wiechert 势。

为了得到运动带电粒子所产生的电场 $\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$ 和磁场 $\mathbf{B}(\mathbf{x},t)$, 我们利用

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t)=-\nabla\phi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t},\quad \mathbf{B}(\mathbf{x},t)=\nabla\times\mathbf{A}. \tag{7.33}$$

代入带电粒子的标势和矢势 (即 (7.28) 式)，即有

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t)=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\int d\widetilde{t}\frac{\delta(t-\widetilde{t}-R(\widetilde{t}))}{R(\widetilde{t})}-\frac{\mu_0 q}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int d\widetilde{t}\mathbf{v}(\widetilde{t})\frac{\delta(t-\widetilde{t}-R(\widetilde{t}))}{R(\widetilde{t})}.$$

利用 $\nabla R=\mathbf{n}$, $\nabla\left(\frac{1}{R}\right)=-\frac{\mathbf{R}}{R^3}$, 即有

$$\nabla\delta(t-\widetilde{t}-R(\widetilde{t}))=(-\nabla R)\frac{\partial}{\partial t}\delta(t-\widetilde{t}-R(\widetilde{t}))=-\mathbf{n}(\widetilde{t})\frac{\partial}{\partial t}\delta(t-\widetilde{t}-R(\widetilde{t})).$$

代入 $\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$ 的表达式，即有

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int d\widetilde{t}\delta(t-\widetilde{t}-R(\widetilde{t}))\frac{\mathbf{n}}{R^2}+\frac{\partial}{\partial t}\int d\widetilde{t}\delta(t-\widetilde{t}-R(\widetilde{t}))\frac{\mathbf{n}-\mathbf{v}}{R}\right].$$

将对 $\widetilde{t}$ 的积分积出来，即有

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\mathbf{n}}{(1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})R^2}\right]_{\mathrm{ret}}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d}{dt}\left[\frac{\mathbf{n}-\mathbf{v}}{(1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})R}\right]_{\mathrm{ret}}.\tag{7.34}$$

类似的，也可以得到磁场的表达式，为

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},t)=\frac{\mu_0 q}{4\pi}\left[\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{n}}{(1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})R^2}\right]_{\mathrm{ret}}+\frac{\mu_0 q}{4\pi}\frac{d}{dt}\left[\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{n}}{(1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})R}\right]_{\mathrm{ret}}.\tag{7.35}$$

7.2.2 Heaviside-Feynman 公式

以上关于带电粒子电场强度和磁场强度的结果虽然精确成立，但相关的公式应用起来却不够方便。为了得到更好用的表达式，我们将迟缓时间的定义式 $t_{\mathrm{ret}}=t-R(t_{\mathrm{ret}})$ 对 t_{ret} 求导，从而得到

$$\frac{dt}{dt_{\mathrm{ret}}}=1+\frac{dR_{\mathrm{ret}}}{dt_{\mathrm{ret}}}.\tag{7.36}$$

再利用 $\frac{dR}{dt}=-\frac{d\widetilde{\mathbf{x}}}{dt}\cdot\nabla R=-\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$, 即有

$$\frac{dt}{dt_{\mathrm{ret}}}=[1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}]_{\mathrm{ret}}.\tag{7.37}$$

类似的，也可以得到

$$\frac{dt_{\mathrm{ret}}}{dt}=1-\frac{dR_{\mathrm{ret}}}{dt}=\frac{1}{[1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}]_{\mathrm{ret}}}.\tag{7.38}$$

而且也有

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{\mathrm{ret}}&=-\frac{d\mathbf{R}_{\mathrm{ret}}}{dt_{\mathrm{ret}}}=-[1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}]_{\mathrm{ret}}\frac{d\mathbf{R}_{\mathrm{ret}}}{dt}\\ \Rightarrow\left[\frac{\mathbf{v}}{1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}\right]_{\mathrm{ret}}&=-\frac{d\mathbf{R}_{\mathrm{ret}}}{dt}.\end{aligned}\tag{7.39}$$

利用 (7.38) 式和 (7.39) 式消去 (7.34) 式中的 $\frac{1}{[1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}]_{\mathrm{ret}}}$ 和 $\left[\frac{\mathbf{v}}{1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}\right]_{\mathrm{ret}}$, 即可以得到

$$\mathbf{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{\mathbf{n}_{\mathrm{ret}}}{R_{\mathrm{ret}}^2}\left(1-\frac{dR_{\mathrm{ret}}}{dt}\right)+\frac{d}{dt}\left[\frac{\mathbf{n}_{\mathrm{ret}}}{R_{\mathrm{ret}}}\left(1-\frac{dR_{\mathrm{ret}}}{dt}\right)+\frac{1}{R_{\mathrm{ret}}}\frac{d\mathbf{R}_{\mathrm{ret}}}{dt}\right]\right\}.\tag{7.40}$$

经过一些运算就可以整理得

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\left[\frac{\mathbf{n}}{R^2}\right]_{\rm ret}+R_{\rm ret}\frac{d}{dt}\left[\frac{\mathbf{n}}{R^2}\right]_{\rm ret}+\frac{d^2\mathbf{n}_{\rm ret}}{dt^2}\right\}. \tag{7.41}$$

这个结果就是所谓的 Heaviside-Feynman 公式，这个公式的第一项就是库伦场项，第二项是时间延迟带来的修正项，第三项则可以描述运动电荷的电磁波辐射。通过简单的量纲分析，我们容易恢复 Heaviside-Feynman 公式中的光速 c，进而得到

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\left[\frac{\mathbf{n}}{R^2}\right]_{\rm ret}+\frac{R_{\rm ret}}{c}\frac{d}{dt}\left[\frac{\mathbf{n}}{R^2}\right]_{\rm ret}+\frac{1}{c^2}\frac{d^2\mathbf{n}_{\rm ret}}{dt^2}\right\}. \tag{7.42}$$

上面得到的 Heaviside-Feynman 公式是关于电场的，为了得到磁场的相应公式，我们将 $\mathbf{n}=\frac{\mathbf{R}}{R}$ 对 t 求导，并利用 $\frac{dR}{dt}=-\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$, 即可得

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt}=\frac{1}{R}[-\mathbf{v}+\mathbf{n}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})]=\frac{1}{R}\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{v}). \tag{7.43}$$

进而即有

$$\mathbf{n}_{\rm ret}\times\frac{d\mathbf{n}_{\rm ret}}{dt}=\mathbf{n}_{\rm ret}\times\frac{d\mathbf{n}_{\rm ret}}{dt_{\rm ret}}\frac{dt_{\rm ret}}{dt}. \tag{7.44}$$

代入 (7.38) 式和 (7.43) 式，即可得

$$\mathbf{n}_{\rm ret}\times\frac{d\mathbf{n}_{\rm ret}}{dt}=\left[\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{n}}{(1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})R}\right]_{\rm ret}. \tag{7.45}$$

将这个结果应用到 (7.35) 式，即得

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},t)=\frac{\mu_0 q}{4\pi}\left\{\left[\frac{\mathbf{n}}{R}\right]_{\rm ret}\times\frac{d\mathbf{n}_{\rm ret}}{dt}+\mathbf{n}_{\rm ret}\times\frac{d^2\mathbf{n}_{\rm ret}}{dt^2}\right\}. \tag{7.46}$$

这就是关于带电粒子磁场的 Heaviside-Feynman 公式，恢复光速 c，即有

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},t)=\frac{\mu_0 q}{4\pi}\left\{\left[\frac{\mathbf{n}}{R}\right]_{\rm ret}\times\frac{d\mathbf{n}_{\rm ret}}{dt}+\frac{\mathbf{n}_{\rm ret}}{c}\times\frac{d^2\mathbf{n}_{\rm ret}}{dt^2}\right\}. \tag{7.47}$$

比较 (7.42) 式和 (7.47) 式，容易看出

$$\mathbf{B}=\mathbf{n}_{\rm ret}\times\mathbf{E}/c. \tag{7.48}$$

除了公式本身非常简洁好记以外，Heaviside-Feynman 公式的好处还在于，它可以用于直观地讨论运动电荷的电磁辐射，关于这方面的内容，请读者阅读费曼物理学讲义第一卷第 34 章。这里我们想指出的是，Heaviside-Feynman 公式用于讨论场的频谱分析非常方便。比方说，对于运动电荷电场的辐射场部分 $\mathbf{E}_{\rm rad}$,

$$\mathbf{E}_{\rm rad}(t)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c^2}\frac{d^2\mathbf{n}_{\rm ret}}{dt^2}, \tag{7.49}$$

记其傅里叶变换为 $\widetilde{\mathbf{E}}_{\rm rad}(\omega)$,

$$\widetilde{\mathbf{E}}_{\rm rad}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}dt\mathbf{E}_{\rm rad}(t)e^{i\omega t}, \tag{7.50}$$

则很容易可以得到

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{E}}_{\mathrm{rad}}(\omega) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c^2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{d^2\mathbf{n}_{\mathrm{ret}}}{dt^2} e^{i\omega t} \\ &= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\omega^2}{c^2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt \mathbf{n}_{\mathrm{ret}} \exp(i\omega t).\end{aligned} \tag{7.51}$$

很显然，为了得到运动电荷电场的频谱分析，我们只需将从运动电荷的延迟点指向观察点的单位矢量进行傅里叶变换。

7.2.3 运动电荷的电磁辐射

另外，我们也可以直接用 (7.38) 式将 (7.34) 式中对 t 的导数变换成对迟缓时间 t_{ret} 的导数，进而有

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{x},t) =& \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Big[\frac{\mathbf{n}}{(1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})R^2} + \frac{1}{(1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})^2 R}\Big(\frac{d\mathbf{n}}{dt} - \frac{d\mathbf{v}}{dt}\Big) \\ & - \frac{\mathbf{n}-\mathbf{v}}{(1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})^3 R^2}\Big(R\frac{d}{dt}(1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) + (1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\frac{dR}{dt}\Big)\Big]_{\mathrm{ret}}.\end{aligned} \tag{7.52}$$

代入 (7.43) 式以及 $\frac{dR}{dt} = -\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt}\cdot\nabla R = -\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$ 即可以算得

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Big[\frac{(\mathbf{n}-\mathbf{v})(1-\mathbf{v}^2)}{(1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})^3 R^2} + \frac{\mathbf{n}\times\{(\mathbf{n}-\mathbf{v})\times\dot{\mathbf{v}}\}}{(1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})^3 R}\Big]_{\mathrm{ret}}. \tag{7.53}$$

通过简单的量纲分析恢复光速 c，即有

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Big[\frac{(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{v}}{c})(1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2})}{(1-\frac{\mathbf{v}}{c}\cdot\mathbf{n})^3 R^2} + \frac{\mathbf{n}\times\{(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{v}}{c})\times\dot{\mathbf{v}}\}}{c^2(1-\frac{\mathbf{v}}{c}\cdot\mathbf{n})^3 R}\Big]_{\mathrm{ret}}. \tag{7.54}$$

得到电场的这个表达式以后，进一步就可以由 (7.48) 式得到磁场的表达式。

带电粒子电场表达式 (7.54) 的两项中，随距离按照 $\frac{1}{R^2}$ 下降的第一项可以理解为是对静电荷库伦场的推广，而按 $\frac{1}{R}$ 下降的第二项则代表带电粒子加速运动所产生的辐射场，它正比于粒子的加速度 $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$，不妨记这一项为 $\mathbf{E}_a$，

$$\mathbf{E}_a = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Big[\frac{\mathbf{n}\times\{(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{v}}{c})\times\mathbf{a}\}}{c^2(1-\frac{\mathbf{v}}{c}\cdot\mathbf{n})^3 R}\Big]_{\mathrm{ret}}, \tag{7.55}$$

很显然有

$$\mathbf{n}_{\mathrm{ret}}\cdot\mathbf{E}_a = 0. \tag{7.56}$$

7.2.4 运动电荷的辐射功率

为了考察运动电荷的辐射功率，我们需要考虑坡印廷矢量 $\mathbf{S}$，

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(t) &= \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times(\mathbf{n}_{\mathrm{ret}}\times\mathbf{E})/c \\ &= \frac{1}{\mu_0 c}\mathbf{E}^2\mathbf{n}_{\mathrm{ret}} - \frac{1}{\mu_0 c}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}_{\mathrm{ret}})\mathbf{E}.\end{aligned} \tag{7.57}$$

为了考察辐射场的能流密度，我们在上式中取 $\mathbf{E}=\mathbf{E}_a$，从而即有

$$\mathbf{S}(t)=\varepsilon_0 c\mathbf{E}_a^2\mathbf{n}_{\rm ret}=\varepsilon_0 c\Big(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Big)^2\Big|\frac{\mathbf{n}\times\{(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{v}}{c})\times\mathbf{a}\}}{c^2(1-\frac{\mathbf{v}}{c}\cdot\mathbf{n})^3R}\Big|^2_{\rm ret}\mathbf{n}_{\rm ret}. \tag{7.58}$$

单位时间流过半径为 R 的球面立体角 $d\Omega$ 的能量为

$$dP(t)=\frac{dW}{dt}=R^2d\Omega\mathbf{S}(t)\cdot\mathbf{n}_{\rm ret}. \tag{7.59}$$

但这是远处观察者单位时间内测到的能量，它并不等于粒子附近观察者单位时间内测到的辐射能量。粒子附近观察者测到的辐射率为

$$\begin{aligned}dP(t_{\rm ret})&=\frac{dW}{dt_{\rm ret}}=\frac{dW}{dt}\frac{dt}{dt_{\rm ret}}\\&=\frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0c^3}\frac{|\mathbf{n}\times\{(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{v}}{c})\times\mathbf{a}\}|^2}{(1-\frac{\mathbf{v}}{c}\cdot\mathbf{n})^5}\Big|_{\rm ret}d\Omega.\end{aligned} \tag{7.60}$$

特别的，我们可以考虑上述辐射率公式 (7.60) 的非相对论极限 (即 $\mathbf{v}\ll c$ 的极限)，这时候 (7.60) 近似为

$$dP(t_{\rm ret})=\frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0c^3}|\mathbf{n}\times\{\mathbf{n}\times\mathbf{a}\}|^2_{\rm ret}d\Omega=\frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0c^3}|\mathbf{n}\times\mathbf{a}|^2_{\rm ret}d\Omega. \tag{7.61}$$

取带电粒子的位置为坐标原点，取粒子的瞬时加速度沿着 z 轴，则

$$dP(t_{\rm ret})=\frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0c^3}\mathbf{a}^2_{\rm ret}\sin^2\theta d\Omega. \tag{7.62}$$

显然，在垂直于粒子加速度的方向上辐射最强。进一步，将这个辐射率对立体角积分，就能得到带电粒子的辐射总功率，为

$$P(t_{\rm ret})=\frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}\mathbf{a}^2_{\rm ret}=\frac{2}{3}\frac{e_s^2}{c^3}\mathbf{a}^2_{\rm ret}. \tag{7.63}$$

这称之为拉莫公式，式中 $e_s^2=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}$。

另外，注意到 (7.62) 式关于粒子加速度 $\mathbf{a}_{\rm ret}$ 的轴对称性，可以知道，在非相对论极限下，dt 时间之内辐射的总动量为零，即

$$d\mathbf{P}_{\rm rad}=0. \tag{7.64}$$

我们可以将以上非相对论极限下的辐射功率推广到相对论情形。这就是要将 (7.60) 式对所有的立体角积分，这个积分算起来很麻烦，结果是

$$P(t_{\rm ret})=\frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}\gamma^6\big[\mathbf{a}^2-\big(\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{a}}{c}\big)^2\big]_{\rm ret}. \tag{7.65}$$

式中 $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. 好在我们有另一种办法推导这个结果，下面讲述推导过程。

首先，我们要证明，辐射总功率 $P(t)$ 是相对论不变量，它不依赖于参考系。为此我们选择一个特殊的 S' 系，使得带电粒子在这个参考系中的瞬时速度 $\mathbf{v}'=0$，从而 $0=\mathbf{v}'=$

$\frac{d\mathbf{x}'}{dt'} \Rightarrow d\mathbf{x}' = 0$。很显然在 S' 系中，粒子的辐射总功率完全由上面的非相对论极限的拉莫公式 (7.63) 描述。注意到辐射能量 dW 和辐射动量 $d\mathbf{P}$ 构成了一个四维矢量，并注意到在 S' 系中 $d\mathbf{P}'_{\mathrm{rad}} = 0$, 即有

$$P(t) = \frac{dW_{\mathrm{rad}}}{dt} = \frac{\gamma(dW'_{\mathrm{rad}} + \mathbf{v}\cdot d\mathbf{P}'_{\mathrm{rad}})}{\gamma(dt' + \mathbf{v}\cdot d\mathbf{x}'/c^2)} = \frac{dW'_{\mathrm{rad}}}{dt'} = P'(t'). \tag{7.66}$$

进一步，有

$$\frac{d\mathbf{P}_{\mathrm{rad}}}{dt} = \frac{\gamma(d\mathbf{P}'_{\mathrm{rad}} + \mathbf{v}dW'_{\mathrm{rad}}/c^2)}{\gamma(dt' + \mathbf{v}\cdot d\mathbf{x}'/c^2)} = \frac{\mathbf{v}}{c^2}\frac{dW'_{\mathrm{rad}}}{dt'} = \frac{\mathbf{v}}{c^2}\frac{dW_{\mathrm{rad}}}{dt}. \tag{7.67}$$

由此容易进一步证明，辐射总功率 $P(t)$ 在任何参考系中都是一样的。

所以，为了得到 $P(t)$ 的一般公式，我们只需要将非相对论极限的拉莫公式 (7.63) 推广成一个协变的形式。一个很明显的推广就是将加速度 $\mathbf{a}$ 推广成四维协变的加速度 a_μ, 从而得到

$$P(t_{\mathrm{ret}}) = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\left(a_\mu a^\mu\right)_{\mathrm{ret}}, \tag{7.68}$$

式中

$$a_\mu = \frac{1}{m}\frac{dp_\mu}{d\tau}, \tag{7.69}$$

m 为带电粒子质量，p_μ 为其四维动量，τ 是它的固有时。

注意到

$$\begin{aligned}\frac{dp_\mu}{d\tau}\frac{dp^\mu}{d\tau} &= \frac{d\mathbf{p}}{d\tau}\cdot\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dE}{d\tau}\right)^2 \\ &= (m\gamma)^2\left[\frac{d(\gamma\mathbf{v})}{dt}\cdot\frac{d(\gamma\mathbf{v})}{dt} - c^2\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2\right].\end{aligned} \tag{7.70}$$

利用

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3\frac{1}{c^2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}, \quad \frac{d(\gamma\mathbf{v})}{dt} = \gamma\mathbf{a} + \gamma^3\frac{1}{c^2}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})\mathbf{v}. \tag{7.71}$$

联合从 (7.68) 式开始的这四个式子，即得 (7.65) 式。

7.3 低速带电粒子体系的有效作用量

带电粒子体系可以通过电磁势 $(\phi, \mathbf{A})$ 而产生耦合。如果我们只关心带电粒子的运动，而不关心系统中的电磁场，则可以通过本章前几节的方法求解出电磁势，将它们用各粒子坐标变量表达出来，就可以得到一个以各粒子位置坐标为基本变量的有效拉格朗日量，形如下式

$$L = \sum_a\left[-m_a\sqrt{1-\mathbf{v}_a^2} - q_a\phi + q_a\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}_a\right], \tag{7.72}$$

式中 $\phi, \mathbf{A}$ 是需要代入具体表达式的电磁势解, m_a, q_a 分别是第 a 个粒子的质量和电荷，$\mathbf{v}_a$ 是第 a 个粒子的速度。一般来说，$\phi, \mathbf{A}$ 的表达式是非常复杂的，所以这个有效拉格朗日量

其实很复杂。不过，当各粒子的运动速度远小于光速时，即 $\mathbf{v}_a \ll 1$ 时，我们可以将上述有效拉格朗日量按照粒子速度 $\mathbf{v}_a$ 进行泰勒展开，而正如我们将要论证的，这一展开的低阶项 (到 $\mathbf{v}^2$ 阶) 有比较简单的表达式。

不过，值得说明的是，(7.72) 式实际是在 $c=1$ 的单位制中写的，因此按照无量纲的 $\mathbf{v}$ 进行泰勒展开在恢复常数 c 以后其实就是按照 $\mathbf{v}/c$ 进行展开，或者简化一点说就是按照 $1/c$ 进行展开，展开到 $\mathbf{v}^2$ 阶其实就是展开到 $\mathbf{v}^2/c^2$ 阶, 或者简单地说展开到 $1/c^2$ 阶。另一方面，(7.72) 式右边的第一项比较特殊，由于拉格朗日量要和能量量纲相同，因此恢复 c 以后这一项其实应该是 $-m_a c^2\sqrt{1-\mathbf{v}_a^2/c^2}$, 它展开到 $\mathbf{v}^2/c^2$ 阶就应该是

$$-m_a c^2 + \frac{1}{2}m_a\mathbf{v}_a^2 + \frac{1}{8}m_a\frac{\mathbf{v}_a^4}{c^2}. \tag{7.73}$$

其中领头的 $-m_a c^2$ 虽然值很“大”，但它是一个常数，可以从拉格朗日量中舍弃。总之，这个地方要保留 $\mathbf{v}^4$ 项。

下面我们来具体讨论有效拉格朗日量按照 $\mathbf{v}/c$ 的泰勒展开。首先，展开到 $(\mathbf{v}/c)^0$ 阶，这时候带电粒子运动对电磁势的影响可以完全忽略，带电粒子之间的电磁相互作用完全由库仑势描述，因此这时候的有效拉格朗日量为

$$L^{(0)} = \sum_a \frac{1}{2}m_a\mathbf{v}_a^2 - \sum_{a>b}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_a q_b}{R_{ab}}, \tag{7.74}$$

式中 R_{ab} 为第 a 个粒子与第 b 个粒子之间的距离，即 $R_{ab}=|\mathbf{x}_a-\mathbf{x}_b|$。

但是，如果想进一步展开到 $\mathbf{v}^2/c^2$ 阶，那电荷运动所产生的势的推迟效应就不可忽略！这时候我们就需要回到推迟势的公式 (7.22) 来讨论如何近似。我们恢复常数 c 以后将 (7.22) 式重写如下，

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{x},t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3\mathbf{x}'\frac{\rho(\mathbf{x}',t-R/c)}{R}.\\
\mathbf{A}(\mathbf{x},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3\mathbf{x}'\frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}',t-R/c)}{R}\\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c^2}\int d^3\mathbf{x}'\frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}',t-R/c)}{R}.
\end{aligned} \tag{7.75}$$

如果所有电荷的速度都远小于光速，则电荷的分布在时间 R/c 内不会有显著的变化，因此我们可以将 $\rho(\mathbf{x}',t-R/c),\mathbf{J}(\mathbf{x}',t-R/c)$ 按照 R/c 进行泰勒展开。由于我们是要得到有效拉格朗日量的 $1/c^2$ 阶，所以对于矢量势只需保留 R/c 泰勒展开的零阶项，而对于标量势，我们要保留到 $(R/c)^2$ 项，从而有

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{x},t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3\mathbf{x}'\frac{\rho(\mathbf{x}',t)}{R} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int d^3\mathbf{x}'\rho(\mathbf{x}',t)\\
&\quad + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int d^3\mathbf{x}' R\rho(\mathbf{x}',t).\\
\mathbf{A}(\mathbf{x},t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c^2}\int d^3\mathbf{x}'\frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}',t)}{R}.
\end{aligned} \tag{7.76}$$

注意到 $\int d^3\mathbf{x}'\rho(\mathbf{x}',t)$ 是整个体系的总电荷，它是一个与时间无关的常量，从而

$$\phi(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3\mathbf{x}'\frac{\rho(\mathbf{x}',t)}{R} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int d^3\mathbf{x}' R\rho(\mathbf{x}',t). \tag{7.77}$$

假设只有一个点电荷 q，则由 (7.76) 式和 (7.77) 式，有

$$\phi(\mathbf{x},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{2c^2}\frac{\partial^2 R}{\partial t^2},\quad \mathbf{A}(\mathbf{x},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c^2}\frac{q\mathbf{v}}{R}. \tag{7.78}$$

式中 R 为这个运动的点电荷到 $\mathbf{x}$ 点的距离，$\mathbf{v}$ 为这个点电荷的瞬时速度。$\phi,\mathbf{A}$ 本身不是物理的，我们可以对它进行任意规范变换而不改变物理内容，

$$\phi'=\phi-\frac{\partial\varepsilon}{\partial t},\quad \mathbf{A}'=\mathbf{A}+\nabla\varepsilon. \tag{7.79}$$

特别的，我们可以选取规范参数 ε 如下，

$$\varepsilon(\mathbf{x},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{2c^2}\frac{\partial R}{\partial t}. \tag{7.80}$$

则规范变换以后，有

$$\phi'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R},\quad \mathbf{A}'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c^2}\frac{q\mathbf{v}}{R}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{2c^2}\nabla\frac{\partial R}{\partial t}. \tag{7.81}$$

利用 $\nabla\frac{\partial R}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\nabla R$, 以及 $\nabla R=\mathbf{n}$, $\mathbf{n}$ 为从运动电荷指向场点 $\mathbf{x}$ 的单位矢量，即有

$$\mathbf{A}'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c^2}\frac{q\mathbf{v}}{R}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{2c^2}\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial t}. \tag{7.82}$$

前面 (7.43) 式我们曾经得到过

$$\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial t}=\frac{1}{R}[-\mathbf{v}+\mathbf{n}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})]. \tag{7.83}$$

代入 $\mathbf{A}'$ 的表达式，最后就得到

$$\phi'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R},\quad \mathbf{A}'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{2c^2}\frac{[\mathbf{v}+\mathbf{n}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})]}{R}. \tag{7.84}$$

简单的推广就可以告诉我们，对于多个带电粒子的系统，其余粒子在第 a 粒子处产生的势场为

$$\phi'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{b,b\neq a}\frac{q_b}{R_{ab}},\quad \mathbf{A}'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{b,b\neq a}\frac{q_b}{2c^2}\frac{[\mathbf{v}_b+\mathbf{n}_{ab}(\mathbf{v}_b\cdot\mathbf{n}_{ab})]}{R_{ab}}. \tag{7.85}$$

式中 $\mathbf{n}_{ab}$ 为从 q_b 指向 q_a 的单位矢量。

用上面式子给出的 $\phi',\mathbf{A}'$ 替换 $\phi,\mathbf{A}$(因为它们规范等价) 并代入有效拉格朗日量的 (7.72) 式，即可得

$$\begin{aligned}L=&\sum_a\Big[\frac{1}{2}m_a\mathbf{v}_a^2+\frac{1}{8}m_a\frac{\mathbf{v}_a^4}{c^2}\Big]-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{a>b}\frac{q_aq_b}{R_{ab}}\\&+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{a>b}\frac{q_aq_b}{2c^2}\frac{[\mathbf{v}_a\cdot\mathbf{v}_b+(\mathbf{v}_a\cdot\mathbf{n}_{ab})(\mathbf{v}_b\cdot\mathbf{n}_{ab})]}{R_{ab}}.\end{aligned} \tag{7.86}$$

这就是我们最终求得的精确到 $\mathbf{v}^2/c^2$ 阶的有效拉格朗日量。

由上面的有效拉格朗日量，还可以求出有效哈密顿量。为此我们注意到 (7.86) 式中的第二项和第四项是对零阶拉格朗日量 $L^{(0)}$ 的微扰修正。因此我们完全可以近似地用

$\mathbf{p}_a = \frac{\partial L^{(0)}}{\partial \mathbf{v}_a} = m_a \mathbf{v}_a$ 来定义正则动量，然后根据勒让德变换 $H = \sum_a \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{v}_a - L$ 来得到有效哈密顿量 H, 结果为

$$
\begin{aligned}
H = & \sum_a \frac{\mathbf{p}_a^2}{2m_a} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{a>b} \frac{q_a q_b}{R_{ab}} - \sum_a \left[\frac{\mathbf{p}_a^4}{8c^2 m_a^3}\right] \\
& - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{a>b} \frac{q_a q_b}{2c^2 m_a m_b} \frac{[\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{p}_b + (\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{n}_{ab})(\mathbf{p}_b \cdot \mathbf{n}_{ab})]}{R_{ab}}.
\end{aligned} \tag{7.87}
$$



8. 介质中的电磁场以及偶极辐射

本章将用统一的方法处理介质中的电磁场方程以及偶极辐射问题。本章将采用完整的国际单位制。本章中指标 $i,j,k=1,2,3$, 而指标 $\mu,\nu,\rho=0,1,2,3$。

8.1 偶极耦合

让我们从电荷体系与电磁场的偶极耦合开始。假设一个电荷为 q 质量为 m 的粒子围绕着空间坐标原点处的一个电荷为 $-q$ 的核运动。假设记核的时空坐标为 x_2^μ, 记围绕其运动的粒子的时空坐标为 x_1^μ, 则根据第 6 章的知识可知，整个系统作用量的电磁相互作用项 S_I 为

$$\begin{aligned} S_I &= -q\int A_\mu dx_2^\mu + q\int A_\mu dx_1^\mu \\ &= \int dt\left[q\phi(x_2) - q\mathbf{A}(x_2)\cdot\dot{\mathbf{x}}_2\right] + \int dt\left[-q\phi(x_1) + q\mathbf{A}(x_1)\cdot\dot{\mathbf{x}}_1\right]. \end{aligned} \tag{8.1}$$

假设核很重，只能在空间坐标原点附近作微小运动，同时由于核的束缚，粒子 1 也只能在空间坐标原点附近运动。因此我们可以将电磁势在空间坐标原点处泰勒展开，进而将上式近似成

$$\begin{aligned} S_I \approx &\int dt\left[q\mathbf{A}(t,0)\cdot(\dot{\mathbf{x}}_1-\dot{\mathbf{x}}_2)\right] + \int dt\left[-q\nabla\phi(t,0)\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)\right] \\ &+ \int dt\left[q\partial_i A_j(t,0)(x_1^i\dot{x}_1^j - x_2^i\dot{x}_2^j)\right]. \end{aligned} \tag{8.2}$$

将第一行右边的第一项分部积分，并丢弃边界项，即可得 $\int dt\big[-q\partial_t\mathbf{A}(t,0)\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)\big]$，注意到 $\mathbf{E}=-\partial_t\mathbf{A}-\nabla\phi$，从而易知上面 (8.2) 式的第一行正好是，

$$\int \mathbf{E}(t,0)\cdot\mathbf{p}. \tag{8.3}$$

式中 $\mathbf{p}=q(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)$ 为系统的电偶极矩。

为了处理 (8.2) 式的第二行，我们将注意力集中在下面这样的项

$$\int dt\partial_i A_j(t,0)x^i\dot{x}^j. \tag{8.4}$$

这一项处理起来比较微妙，不过，注意到最初的相互作用项 $\int A_\mu dx^\mu$ 是规范不变的 [1]，因此我们可以对上式进行如下规范变换

$$A_j\to A_j-\partial_j\varepsilon, \tag{8.5}$$

并选择规范变换参数为

$$\varepsilon=\frac{1}{2}\mathbf{A}(t,\mathbf{x})\cdot\mathbf{x}=\frac{1}{2}A_i(t,\mathbf{x})x^i, \tag{8.6}$$

从而 $\partial_i\varepsilon=\frac{1}{2}A_i(t,x)+\frac{1}{2}(\partial_iA_j)x^j$，$\partial_j\partial_i\varepsilon(t,0)=\frac{1}{2}[\partial_jA_i(t,0)+\partial_iA_j(t,0)]$。则在规范变换之后即有

$$\begin{aligned}\int dt\partial_iA_j(t,0)x^i\dot{x}^j&\to\int dt\big[\partial_iA_j(t,0)-\partial_j\partial_i\varepsilon(t,0)\big]x^i\dot{x}^j\\&=\frac{1}{2}\int dt\big[\partial_iA_j(t,0)-\partial_jA_i(t,0)\big]x^i\dot{x}^j\\&=\frac{1}{2}\int dtF_{ij}(t,0)x^i\dot{x}^j=\int dtB_k(t,0)\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}x^i\dot{x}^j.\end{aligned} \tag{8.7}$$

从而易知，(8.2) 式的第二行在上述规范变换之后将可以替换成

$$\int dt\big[B_k(t,0)q\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(x_1^i\dot{x}_1^j-x_2^i\dot{x}_2^j)\big]. \tag{8.8}$$

通常称

$$(\mathbf{m})_k=q\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(x_1^i\dot{x}_1^j-x_2^i\dot{x}_2^j)\Rightarrow\mathbf{m}=\frac{1}{2}(q\mathbf{x}_1\times\dot{\mathbf{x}}_1-q\mathbf{x}_2\times\dot{\mathbf{x}}_2). \tag{8.9}$$

为系统的磁偶极矩，简称磁矩。则由上可知，(8.2) 式的第二行可以替换成

$$\int dt\mathbf{B}(t,0)\cdot\mathbf{m}. \tag{8.10}$$

综上可知，当电荷的运动限制在空间坐标原点附近时，我们有

$$S_I\approx\int dt\big[\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}(t,0)+\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}(t,0)\big]. \tag{8.11}$$

[1]在规范变换下会多出一个全微分，因此只相差一个边界项，而我们要求边界处的变分为零，从而这样的项实际上是规范不变的。详细讨论参见《经典力学新讲》第三章的相关内容。

很明显，这个式子也可以推广到空间坐标原点附近任意一个整体呈电中性的偶极子情形(比如一个原子或分子)。假设这个偶极子由多个带电粒子组成，以 $\mathbf{x}_n$ 来表示组成这个偶极子的第 n 个粒子的坐标，q_n 为这个粒子的电荷，m_n 为它的质量，则这时候，偶极子的电偶极矩和磁偶极矩的定义将分别为

$$\mathbf{p}=\sum_n q_n\mathbf{x}_n,\quad \mathbf{m}=\frac{1}{2}\sum_n q_n\mathbf{x}_n\times\dot{\mathbf{x}}_n, \tag{8.12}$$

式中 $\sum_n q_n=0$。另外，根据粒子相对于空间原点轨道角动量的定义 $\mathbf{L}_n=m_n\mathbf{x}_n\times\dot{\mathbf{x}}_n$，易知

$$\mathbf{m}=\sum_n\frac{q_n}{2m_n}\mathbf{L}_n. \tag{8.13}$$

假设电磁场中有一个偶极子位于空间坐标原点，则根据上面的分析，偶极子拉格朗日量中与电磁场的相互作用项为

$$L_I=\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}(t,0)+\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}(t,0). \tag{8.14}$$

对带电粒子的完整拉格朗日量进行勒让德变换，就可以得到偶极子的哈密顿量，其中与外电磁场的相互作用项 H_I 为

$$H_I=-\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}(t,0)-\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}(t,0). \tag{8.15}$$

很显然，这正是我们在电磁学和电动力学课程中熟悉的形式。只不过，相比于电动力学中的推导，这里的推导具有更大的一般性，比方说，我们这里允许电磁场随时间变化，而不限于静电场和静磁场。

很显然，上述拉格朗日量的相互作用项 L_I 也可以写成如下形式

$$L_I=\int d^3\mathbf{x}\big[\mathbf{P}\cdot\mathbf{E}+\mathbf{M}\cdot\mathbf{B}\big], \tag{8.16}$$

式中 $\mathbf{P}(x)$ 称为极化强度, $\mathbf{M}(x)$ 称为磁化强度，在上述情况下它们分别为

$$\mathbf{P}(x)=\mathbf{p}\delta^3(\mathbf{x}),\quad \mathbf{M}(x)=\mathbf{m}\delta^3(\mathbf{x}). \tag{8.17}$$

并且类似的，我们也可以得到哈密顿量的相互作用项 H_I 为

$$H_I=\int d^3\mathbf{x}\big[-\mathbf{P}\cdot\mathbf{E}-\mathbf{M}\cdot\mathbf{B}\big]. \tag{8.18}$$

如果偶极子不是位于空间坐标原点，而是位于 $\mathbf{x}_0$ 点，则显然

$$\mathbf{P}(x)=\mathbf{p}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0),\quad \mathbf{M}(x)=\mathbf{m}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0). \tag{8.19}$$

现在

$$\mathbf{p}=\sum_n q_n\mathbf{r}_n,\quad \mathbf{m}=\frac{1}{2}\sum_n q_n\mathbf{r}_n\times\dot{\mathbf{r}}_n, \tag{8.20}$$

式中 $\mathbf{r}_n=\mathbf{x}_n-\mathbf{x}_0$ 为组成偶极子的第 n 个粒子相对于偶极子中心的坐标，对于上面那个位于空间原点的偶极子而言，即有 $\mathbf{r}_n=\mathbf{x}_n$。

如果有多个位于不同位置的偶极子，那就有

$$\mathbf{P}(x)=\sum_a \mathbf{p}_a\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}_a),\quad \mathbf{M}(x)=\sum_a \mathbf{m}_a\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}_a). \tag{8.21}$$

其中，$\mathbf{p}_a$,$\mathbf{m}_a$ 分别为 a 偶极子的电偶极矩和磁偶极矩，$\mathbf{x}_a$ 为 a 偶极子的位置。

另一方面，注意到本章最开始处作为推导出发点的作用量相互作用项 S_I 是明显协变的。因此，作偶极子近似以后的耦合项 S_I 必然依旧是协变的。这意味着下式必定可以写成明显协变的形式，

$$S_I=\int d^4x\big[\mathbf{P}\cdot\mathbf{E}+\mathbf{M}\cdot\mathbf{B}\big]. \tag{8.22}$$

为了看出这一点，我们引入四维极化-磁化张量 $M^{\mu\nu}$，它是一个二阶反对称张量，并且满足

$$M^{0i}(x)=-cP_i(x),\quad M^{ij}=\varepsilon_{ijk}M_k. \tag{8.23}$$

利用极化磁化张量 $M^{\mu\nu}$，并注意到 $F^{0i}=E_i/c$, $F^{ij}=\varepsilon^{ijk}B_k$，不难验证偶极子与电磁场耦合的作用量 S_I 可以写成如下明显协变的形式

$$S_I=\int d^4x\big[\mathbf{P}\cdot\mathbf{E}+\mathbf{M}\cdot\mathbf{B}\big]=\frac{1}{2}\int d^4x\big[M_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\big]. \tag{8.24}$$

8.2 介质中的电磁场

8.2.1 介质中的电磁场方程

现在考虑一块介质，它由许多分子组成，每一个分子整体都呈电中性，但是在电磁场的作用下，它们可能会被极化和磁化，也就是表现出非零的电偶极矩和非零的磁偶极矩，进而与电磁场产生偶极耦合。从上一节可以知道，相应作用量的耦合项为，

$$S_I=\frac{1}{2}\int d^4x\big[M_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\big]. \tag{8.25}$$

将这个耦合项对电磁势 A_μ 进行变分，在进行必要的分部积分并丢弃边界项后，即可得

$$\delta S_I=-\int d^4x(\partial_\mu M^{\mu\nu})\delta A_\nu. \tag{8.26}$$

与电流四矢量和电磁势的标准耦合形式 $\delta S_I=\int d^4xJ^\nu\delta A_\nu$ 比较，可知极化磁化张量会诱导出一个电流四矢量 J_I^ν，

$$J_I^\nu=-\partial_\mu M^{\mu\nu}. \tag{8.27}$$

分别取 $\nu=0,i$ 即可得诱导电荷密度 ρ_I 以及诱导电流密度 $\mathbf{J}_I$，分别为

$$\rho_I=-\nabla\cdot\mathbf{P},\quad \mathbf{J}_I=\partial_t\mathbf{P}+\nabla\times\mathbf{M}. \tag{8.28}$$

在电动力学书中常常称 ρ_I 为极化电荷密度，称 $\mathbf{J}_I$ 为极化磁化电流密度。

假设除了分子中的束缚电荷之外，系统中还存在一些可以自由运动的电荷，它们形成自由电流四矢量 J_f^μ。J_f^μ 同样要耦合到电磁场上，相应的耦合关系可以写成 $\delta S_f=\int d^4xJ_f^\mu\delta A_\mu$。

记电磁场自身的作用量为 $S_{em} = -\int d^4x \frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, 则除了分子自身的动能和势能之外，整个系统的作用量可以写成

$$S = S_{em} + S_I + S_f. \tag{8.29}$$

将这个作用量对电磁势 A_μ 变分，就能得到麦克斯韦方程

$$\begin{aligned} -\partial_\mu F^{\mu\nu} &= \mu_0 (J_f^\nu + J_I^\nu) \\ \Rightarrow -\partial_\mu \left(F^{\mu\nu} - \mu_0 M^{\mu\nu}\right) &= \mu_0 J_f^\nu. \end{aligned} \tag{8.30}$$

上式第二行我们代入了诱导电流的定义式 (8.27)。

人们常常引入一个 $H^{\mu\nu}$ 场，其定义为

$$H^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} F^{\mu\nu} - M^{\mu\nu}. \tag{8.31}$$

进而将 (8.30) 式写成

$$-\partial_\mu H^{\mu\nu} = J_f^\nu. \tag{8.32}$$

这个式子与 $F_{\mu\nu}$ 满足的如下恒等式一起，就构成了介质中的麦克斯韦方程组

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0. \tag{8.33}$$

通常还会引入电位移矢量 $\mathbf{D}$ 以及 H-场矢量 $\mathbf{H}$, 其定义为,

$$H^{0i} = cD_i, \quad H^{ij} = \varepsilon^{ijk} H_k. \tag{8.34}$$

代入 $H_{\mu\nu}$ 场的定义式 (8.31), 并注意到 $1/(\mu_0 c) = \varepsilon_0 c$, 即可知

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M}. \tag{8.35}$$

进而方程 (8.32) 又可以写成

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \partial_t \mathbf{D} + \mathbf{J}_f. \tag{8.36}$$

这组方程，再加上如下由 (8.33) 式给出的两个方程，就构成了通常用矢量形式写出来的介质中的麦克斯韦方程组，

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}. \tag{8.37}$$

但是由于引入了额外的 $\mathbf{D}$ 场和 $\mathbf{H}$ 场，介质中的麦克斯韦方程组本身是不完备的。为了求解它们，通常还要附加如下两组关系

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}, \mathbf{B}), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{E}, \mathbf{B}). \tag{8.38}$$

这两个方程实际上是描述介质的极化和磁化性质的方程，通常称作本构关系 (consitutive relations)。这样的本构关系可以通过实验来测定，也可以通过量子力学和统计力学中关于极化 (磁化) 强度对电磁场的响应的计算来得出。

如果电磁场不太强且变化不太迅速，则介质对电磁场的响应一般是线性的，在均匀各向同性介质内，这种线性关系可以写成 (限于介质整体静止的参考系)，

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \chi\varepsilon_0\mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \\ \mathbf{M} &= \kappa\mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}. \end{aligned} \tag{8.39}$$

χ 和 κ 分别称作介质的极化率和磁化率，ε 和 μ 则分别称作介质的介电常数和磁导率。根据上面的 (8.35) 式可知

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_0\varepsilon_r, \quad \varepsilon_r = 1+\chi, \\ \mu &= \mu_0\mu_r, \quad \mu_r = 1+\kappa. \end{aligned} \tag{8.40}$$

这里 ε_r 和 μ_r 分别称作介质的相对介电常数和相对磁导率。ε_r 通常大于等于 1，但是 μ_r 既可以大于 1 也可以小于 1，$\mu_r > 1$ 的介质称作顺磁质，$\mu_r < 1$ 的介质称作抗磁质。经典物理有可能解释介质是如何极化的，进而可以计算出极化率。但是，可以证明，经典物理无法正确地解释介质的磁化机制，为了正确地解释介质具体如何磁化并计算出磁化率，人们必须求助量子物理。关于极化和磁化机制的讨论和计算，初步的探讨参见《费曼物理学讲义第二卷》第 32 章至第 37 章的相关内容。

以上具有线性本构关系的介质就称作线性介质，但是，在铁电介质、铁磁介质，或者强场的情形下，线性的本构关系不再成立。

对于导电介质，则还要加上一个方程，即欧姆定律，在最简单的情形中，它取如下形式

$$\mathbf{J}_f = \sigma\mathbf{E}. \tag{8.41}$$

式中 σ 称作导体的电导率。

8.2.2 线性介质中电磁场的能量与动量

这一小节我们来讨论线性介质中电磁场能量和动量的守恒关系。根据第四章的知识，电磁场本身的能量-动量张量 $T^{\mu\nu}_{\text{em}}$ 为

$$T^{\mu\nu}_{\text{em}} = \frac{1}{\mu_0}\left[F^{\mu}{}_{\rho}F^{\nu\rho} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\right]. \tag{8.42}$$

根据第 6 章的知识，我们又有

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}_{\text{em}} = -F^{\nu}{}_{\rho}J^{\rho}, \tag{8.43}$$

式中 J^ρ 是总的电流四矢量，包括自由电流和极化磁化的诱导电流。现在，不妨先假设不存在自由电流，只有诱导电流，从而上式就可以写成

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}_{\text{em}} = -F^{\nu}{}_{\rho}J^{\rho}_I. \tag{8.44}$$

将前面的 (8.27) 式代入 (8.44) 式，可得

$$\begin{aligned}\partial_\mu T^{\mu\nu}_{\rm em} &= F^\nu{}_\rho \partial_\mu M^{\mu\rho} = \partial_\mu\big(F^\nu{}_\rho M^{\mu\rho}\big) - (\partial^\mu F^{\nu\rho}) M_{\mu\rho} \\ &= \partial_\mu\big(F^\nu{}_\rho M^{\mu\rho}\big) - \frac{1}{2}\big(\partial^\mu F^{\nu\rho} - \partial^\rho F^{\nu\mu}\big) M_{\mu\rho} \\ &= \partial_\mu\big(F^\nu{}_\rho M^{\mu\rho}\big) + \frac{1}{2}\big(\partial^\mu F^{\rho\nu} + \partial^\rho F^{\nu\mu}\big) M_{\mu\rho} \end{aligned} \tag{8.45}$$

代入麦克斯韦方程组中的恒等式方程 (8.33)，可得

$$\begin{aligned}&\partial_\mu\big[T^{\mu\nu}_{\rm em} - M^{\mu\rho}F^\nu{}_\rho\big] = -\frac{1}{2}(\partial^\nu F^{\mu\rho}) M_{\mu\rho} \\ =& -\frac{1}{4}\partial^\nu\big(F^{\mu\rho}M_{\mu\rho}\big) + \frac{1}{4}F^{\mu\rho}(\partial^\nu M_{\mu\rho}) - \frac{1}{4}(\partial^\nu F^{\mu\rho}) M_{\mu\rho}\end{aligned}$$

将上面的结果移一下项，即得

$$\partial_\mu\big[T^{\mu\nu}_{\rm em} - M^{\mu\rho}F^\nu{}_\rho\big] + \frac{1}{4}\partial^\nu\big(F^{\mu\rho}M_{\mu\rho}\big) = \frac{1}{4}\Big[F^{\mu\rho}(\partial^\nu M_{\mu\rho}) - (\partial^\nu F^{\mu\rho}) M_{\mu\rho}\Big]. \tag{8.46}$$

在上面的结果中取 $\nu = 0$，可得

$$\begin{aligned}&\partial_0\big(T^{00}_{\rm em} - M^{0i}F^0{}_i - \frac{1}{4}F^{\mu\rho}M_{\mu\rho}\big) + \partial_i\big(T^{i0}_{\rm em} - M^{ij}F^0{}_j\big) \\ =& -\frac{1}{2}\Big[\mathbf{E}\cdot(\partial_0\mathbf{P}) - (\partial_0\mathbf{E})\cdot\mathbf{P} + \mathbf{B}\cdot(\partial_0\mathbf{M}) - (\partial_0\mathbf{B})\cdot\mathbf{M}\Big].\end{aligned} \tag{8.47}$$

对于线性介质，$\mathbf{P}$ 与 $\mathbf{E}$ 成正比，$\mathbf{M}$ 与 $\mathbf{B}$ 成正比，从而等式的右边等于零，从而即有守恒方程

$$\partial_0\big(T^{00}_{\rm em} - M^{0i}F^0{}_i - \frac{1}{4}F^{\mu\rho}M_{\mu\rho}\big) + \partial_i\big(T^{i0}_{\rm em} - M^{ij}F^0{}_j\big) = 0. \tag{8.48}$$

根据第四章的相关讨论，可知

$$T^{00}_{\rm em} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}^2, \quad T^{i0} = \frac{1}{\mu_0 c}(\mathbf{E}\times\mathbf{B})_i. \tag{8.49}$$

进而不难算得

$$T^{00}_{\rm em} - M^{0i}F^0{}_i - \frac{1}{4}F^{\mu\rho}M_{\mu\rho} = \frac{1}{2}\big[\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\big] \tag{8.50}$$

以及

$$T^{i0}_{\rm em} - M^{ij}F^0{}_j = \frac{1}{c}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})_i. \tag{8.51}$$

从而守恒方程 (8.48) 可以写作

$$\partial_t\big[\frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \frac{1}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\big] + \nabla\cdot[\mathbf{E}\times\mathbf{H}] = 0. \tag{8.52}$$

上面这一结果清楚地告诉我们，在线性介质中，我们可以定义有效的电磁场能量密度 $\mathscr{H}$ 为

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}\big[\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\big], \tag{8.53}$$

同时可以定义有效的能流密度 $\mathbf{S}$ 为

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \tag{8.54}$$

它们满足局域的能量守恒方程

$$\partial_t \mathscr{H} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0. \tag{8.55}$$

类似的，通过在方程 (8.46) 中取 $\nu = i$，我们可以讨论线性介质中的局域动量守恒方程。具体的讨论还是留给读者自行练习吧。

8.3 偶极子的场

这一节求解单个偶极子所产生的电磁场，进而讨论偶极辐射。

8.3.1 静态偶极子的场

假设给定一个静态偶极子，其电偶极矩 $\mathbf{p}$ 和磁偶极矩 $\mathbf{m}$ 均为不随时间变化的定值，我们想求解这个静态偶极子所产生的静态电磁场。对于这样的静态问题，其拉格朗日量将仅仅依赖于场位形，而不依赖于场位形对时间的导数，因此这时候最小作用量原理就等价于拉格朗日量对场位形的变分取极值这一原理。

假设这个偶极子位于空间坐标原点，则根据 (8.16) 式可知，系统的拉格朗日量可以写成

$$L = \int d^3\mathbf{x} \big[\frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}^2 + \delta^3(\mathbf{x})\mathbf{p}\cdot\mathbf{E} + \delta^3(\mathbf{x})\mathbf{m}\cdot\mathbf{B} \big]. \tag{8.56}$$

由于考察的是静态场位形，所以 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 可以分别写成

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{8.57}$$

代入拉格朗日量 (8.56)，即有

$$L = \int d^3\mathbf{x} \big[\frac{1}{2}\varepsilon_0 (\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\mathbf{A})^2 - \delta^3(\mathbf{x})\mathbf{p}\cdot\nabla\phi + \delta^3(\mathbf{x})\mathbf{m}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) \big].$$

根据拉格朗日量取极值，将上式对 ϕ 以及 $\mathbf{A}$ 变分，即可得方程

$$\varepsilon_0 \nabla^2\phi = \mathbf{p}\cdot\nabla\delta^3(\mathbf{x}) \tag{8.58}$$

$$-\frac{1}{\mu_0}\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \mathbf{m}\times\nabla\delta^3(\mathbf{x}). \tag{8.59}$$

取如下库伦规范

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = 0, \tag{8.60}$$

从而即可把方程 (8.59) 改写成

$$\frac{1}{\mu_0}\nabla^2\mathbf{A} = \mathbf{m}\times\nabla\delta^3(\mathbf{x}). \tag{8.61}$$

下面要做的就是求解方程 (8.58) 和方程 (8.61)。这两个方程看起来有点复杂，但只要注意到

$$-\nabla^2\left(\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}\right)=\delta^3(\mathbf{x}), \tag{8.62}$$

则我们就能直接写出 (8.58) 和 (8.61) 的解，

$$\begin{aligned}\phi&=-\frac{1}{\varepsilon_0}\mathbf{p}\cdot\nabla\left(\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}\\ \mathbf{A}&=-\mu_0\mathbf{m}\times\nabla\left(\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}\right)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}.\end{aligned} \tag{8.63}$$

将这个结果代入 (8.57) 式，即可得

$$\begin{aligned}\mathbf{E}&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}-\mathbf{p}}{|\mathbf{x}|^3}\\ \mathbf{B}&=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\mathbf{m}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}-\mathbf{m}}{|\mathbf{x}|^3}.\end{aligned} \tag{8.64}$$

式中单位矢量 $\mathbf{n}=\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$。这个结果当然是电动力学中熟知的结果。

8.3.2 偶极辐射

还是考察位于空间坐标原点的这个偶极子，不过现在，我们假设其电偶极矩和磁偶极矩都随时间变化，分别记为 $\mathbf{p}(t),\mathbf{m}(t)$。那这时候它就会产生电磁波辐射，相应的就要求解麦克斯韦方程 $-\partial_\mu F^{\mu\nu}=\mu_0 J_I^\nu$ (J_I^μ 为偶极子的诱导电流四矢量)。根据上一章的知识，这个方程可以在洛伦兹规范中用推迟势来求解。因此我们可以根据学过的推迟势公式算出洛伦兹规范下的电磁势 A_μ，进而算出偶极子辐射出来的电磁场强。为了方便参考，我们将推迟势公式重写如下

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x},t)&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3\mathbf{x}'\frac{\rho(\mathbf{x}',t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/c)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}.\\ \mathbf{A}(\mathbf{x},t)&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3\mathbf{x}'\frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}',t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/c)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}.\end{aligned} \tag{8.65}$$

当然，现在代入上面 (8.65) 式的电流四矢量应该是偶极子的诱导电流四矢量，将 $\mathbf{P}=\mathbf{p}(t)\delta^3(\mathbf{x})$, $\mathbf{M}=\mathbf{m}(t)\delta^3(\mathbf{x})$ 代入 (8.28) 式，可以算得

$$\begin{aligned}\rho_I(\mathbf{x},t)&=-\mathbf{p}(t)\cdot\nabla\delta^3(\mathbf{x}),\\ \mathbf{J}_I(\mathbf{x},t)&=\dot{\mathbf{p}}(t)\delta^3(\mathbf{x})-\mathbf{m}(t)\times\nabla\delta^3(\mathbf{x}).\end{aligned} \tag{8.66}$$

将这个结果代入上面的推迟势公式，就可以算得电磁势 A_μ。比方说我们将 $\rho_I(\mathbf{x},t)$ 的结果

代入推迟势公式，即有 (下式中 ∇' 表示对 $\mathbf{x}'$ 求梯度)

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x},t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3\mathbf{x}'\frac{-\mathbf{p}(t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/c)\cdot\nabla'\delta^3(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3\mathbf{x}'\delta^3(\mathbf{x}')\nabla'\cdot\Big[\frac{\mathbf{p}(t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/c)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\Big]\\ &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3\mathbf{x}'\delta^3(\mathbf{x}')\nabla\cdot\Big[\frac{\mathbf{p}(t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/c)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\Big]\\ &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\cdot\Big[\frac{\mathbf{p}(t-|\mathbf{x}|/c)}{|\mathbf{x}|}\Big].\end{aligned} \tag{8.67}$$

类似的，可以求得

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi|\mathbf{x}|}\dot{\mathbf{p}}(t-|\mathbf{x}|/c) + \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\Big[\frac{\mathbf{m}(t-|\mathbf{x}|/c)}{|\mathbf{x}|}\Big]. \tag{8.68}$$

记 $\mathbf{p}(t-|\mathbf{x}|/c)=[\mathbf{p}]$, $\mathbf{m}(t-|\mathbf{x}|/c)=[\mathbf{m}]$, 并注意到

$$\partial_i[p_j] = -[\dot{p}_j]\partial_i\big(\frac{|\mathbf{x}|}{c}\big) = -\frac{1}{c}n_i[\dot{p}_j]. \tag{8.69}$$

式中 $n_i=(\mathbf{n})_i=\frac{x_i}{|\mathbf{x}|}$，以及完全类似的，

$$\partial_i[m_j] = -\frac{1}{c}n_i[\dot{m}_j]. \tag{8.70}$$

则根据 $\mathbf{E}=-\nabla\phi-\partial_t\mathbf{A}$, $\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$ 我们就能算出偶极子的电磁场强。比如说，假设我们仅关心 $|\mathbf{x}|$ 足够大足够远处的场，则保留到 $1/|\mathbf{x}|$ 阶为止 ($1/|\mathbf{x}|^2$ 阶及更高的 $1/|\mathbf{x}|^3$ 阶均忽略) 算出来的电场强度如下

$$\begin{aligned}E_i &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{n_in_j[\ddot{p}_j]-[\ddot{p}_i]}{|\mathbf{x}|}+\frac{\mu_0}{4\pi c}\varepsilon_{ijk}\frac{n_j[\ddot{m}_k]}{|\mathbf{x}|}\\ \Rightarrow\mathbf{E} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{n}\big(\mathbf{n}\cdot[\ddot{\mathbf{p}}]\big)-[\ddot{\mathbf{p}}]}{|\mathbf{x}|}+\frac{\mu_0}{4\pi c}\frac{\mathbf{n}\times[\ddot{\mathbf{m}}]}{|\mathbf{x}|}.\end{aligned} \tag{8.71}$$

类似的，我们也能算出磁场，为

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi c}\frac{\mathbf{n}\times[\ddot{\mathbf{p}}]}{|\mathbf{x}|}+\frac{\mu_0}{4\pi c^2}\frac{\mathbf{n}\big(\mathbf{n}\cdot[\ddot{\mathbf{m}}]\big)-[\ddot{\mathbf{m}}]}{|\mathbf{x}|}. \tag{8.72}$$

这个结果与电动力学教材上给出的结果完全一致，比如与 Andrew Zangwill 的 Modern Electrodynamics 第 20 章 20.7 节给出的结果一致。相比于电动力学书上的推导，这里的推导方法好处在于，原则上可以算出偶极子的精确的电磁场。至于偶极辐射功率等等结果的计算也请读者参考 Zangwill 这本书，我们这里不再赘述。

这一小节以及上一小节给出来的偶极子场均体现一种电磁对偶性，具体来说即是，在 $\varepsilon_0=\mu_0=c=1$ 的自然单位制中，这两小节的最终结果均在如下变换下保持不变

$$\mathbf{E}\to\mathbf{B},\quad \mathbf{p}\to\mathbf{m},\quad \mathbf{B}\to-\mathbf{E},\quad \mathbf{m}\to-\mathbf{p}. \tag{8.73}$$

我们将在下一章中进一步讨论麦克斯韦方程组的这种电磁对偶性质。

9. 磁单极子和 θ 项

本章将处理狄拉克磁单极子以及 θ 项的相关课题，本章的有些论证将超出经典场论的范畴，即是说，我们将使用一些可以归之为量子力学范畴的论证。本章将和本书的多数章节一样采用电磁学的自然单位制，即取 $\varepsilon_0 = \mu_0 = c = 1$。

9.1 电磁对偶与磁单极子

麦克斯韦方程组有一种深层次的对称性，称之为电磁对偶。这种对偶在无源的麦克斯韦方程中体现得最为清楚，这时候麦克斯韦方程可以写为

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\mathbf{E} = 0, \quad \nabla\times\mathbf{B} = \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \quad \nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{9.1}$$

显然这个方程组在如下变换下保持不变

$$\mathbf{E}\to\mathbf{B}, \quad \mathbf{B}\to-\mathbf{E}, \tag{9.2}$$

因为这个变换交换了电场和磁场，所以称作电磁对偶。

如果利用电磁场的外微分形式 (differential form) 表述，电磁对偶实际上就是电磁场的场强 2 形式 F 的霍奇对偶变换。为来看清楚这一点，我们首先注意到如下外微分形式表达的无源麦克斯韦方程在霍奇对偶下是保持不变的，

$$d(*F) = 0, \quad dF = 0, \tag{9.3}$$

在霍奇对偶下，这两个方程正好相交换，使得整体的方程组保持不变。其次，为了进一步看清楚霍奇对偶与电磁对偶的关系，我们定义对偶场强张量 $\widetilde{F}_{\mu\nu}$

$$\widetilde{F}_{\mu\nu} = (*F)_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}. \tag{9.4}$$

而 (9.3) 式的第二个方程又可以写成

$$\partial_\mu \widetilde{F}^{\mu\nu} = 0. \tag{9.5}$$

利用 $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ 的反对称性以及 $\varepsilon_{0123} = 1$，不难得出

$$\widetilde{\mathbf{E}} = -\mathbf{B}, \quad \widetilde{\mathbf{B}} = \mathbf{E}, \tag{9.6}$$

式中 $\widetilde{E}_i = \widetilde{F}^{0i}$, $\widetilde{B}_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\widetilde{F}^{ij}$。由此可见，霍奇对偶操作正好交换了电场和磁场，因此正是电磁对偶变换。

以上讨论的是无源麦克斯韦方程组的电磁对偶对称性，它是无源麦克斯韦方程组的一个很美妙的性质。为了将这种美妙性质拓展到有源情形，与电荷和电流密度对应的，就需要引入磁荷和磁流密度。为了以示区分，不妨记电荷密度为 ρ_e，电流密度为 $\mathbf{J}_e$，记磁荷密度为 ρ_m，磁流密度为 $\mathbf{J}_m$。进而将有源的麦克斯韦方程修改为

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\mathbf{E} &= \rho_e, \qquad \nabla\times\mathbf{B} = \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}_e \\ \nabla\cdot\mathbf{B} &= \rho_m, \quad -\nabla\times\mathbf{E} = \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{J}_m. \end{aligned} \tag{9.7}$$

显然，这组方程在如下电磁对偶变换下保持不变

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\to\mathbf{B}, \quad \rho_e\to\rho_m, \quad \mathbf{J}_e\to\mathbf{J}_m \\ &\mathbf{B}\to-\mathbf{E}, \quad \rho_m\to-\rho_e, \quad \mathbf{J}_m\to-\mathbf{J}_e. \end{aligned} \tag{9.8}$$

而一个带电荷 e 磁荷 g 的粒子 (称作双荷子) 在电磁场中受到的洛伦兹力公式就应该推广成

$$\mathbf{F} = e\big(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}\big) + g\big(\mathbf{B}-\mathbf{v}\times\mathbf{E}\big). \tag{9.9}$$

由此可见，为了将电磁对偶不变性拓展到有源的麦克斯韦方程组，我们就需要引入磁荷。在场论的层次上，引入磁荷的一种办法是引入带磁荷的物质场，并让它和电磁场耦合。但这里的问题是，在作用量的层次上，带磁荷的场与带电荷的场不容易兼容。具体来说即是，对于单独的带磁荷的场，我们可以用基本场变量写出它与电磁场的耦合，对于单独的带电荷的场，我们也可以用基本场变量写出它与电磁场的耦合，但是这两种写法中的基本场变量根本不同，一种写法中的基本场变量在另一种写法中根本不基本，从而使得我们无法用同一套基本场变量同时写出磁的耦合与电的耦合。这个困难到今天为止依然没有被克服。

当然，我们也可以不引入带电荷或磁荷的场，而仅仅引入粒子，带电荷的粒子比如电子，而带磁荷的粒子就是所谓的磁单极子。这时候上述困难要稍微弱一点，虽然要想在作

用量的层次上同时写出电子和磁单极子各自与电磁场的耦合项依然不容易。但是狄拉克证明了，同时兼容电子和磁单极子的量子力学理论是可以定义的，前提是电子的电荷 e 和磁单极子的磁荷 g 之间满足如下量子化条件，

$$eg = 2\pi n\hbar, \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{9.10}$$

我们将在下一小节详细讨论狄拉克的这一理论。

从历史的发展来看，狄拉克的磁单极子是手动引入的，理论上其存在并没有必然性，但是，1974 年 t'Hooft[1] 和 Polyakov[2]各自独立地发现，在一类具有 $SU(2)$ 非阿贝尔规范对称性的规范场论中，磁单极子将作为场方程的一种孤立子解而必然存在。1977 年[3]，Goddard, Nuyts 和 Olive 又进一步将 t'Hooft 和 Polyakov 的发现推广到一般的规范群，并且他们还研究了在这些非阿贝尔规范场论中，电磁对偶将是什么样子的。

关于磁单极子，尽管理论上有这么多漂亮的结果，但它最大的问题就是，直到今天，实验上依然没有发现磁单极子的存在。因此，和前面的一些章节不同，本章我们讨论的主要是一种理论结构，而不是试图发展理论来描述实验上的事实。

9.2 狄拉克与陈省身

假设我们引入一个位于空间坐标原点的磁单极子，其磁荷为 g，则磁场将满足如下方程

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = g\delta^3(\mathbf{x}), \tag{9.11}$$

类比于点电荷的库伦场，可知这个方程的解为

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi}\frac{g}{r^2}\mathbf{e}_r. \tag{9.12}$$

式中 $r = |\mathbf{x}|$，而 $\mathbf{e}_r = \mathbf{x}/r$ 为径向指向的单位矢量。这个解在空间坐标原点是奇异的。现在，设想将这个奇异的空间坐标原点去掉，进而考察方程 (9.11) 在 $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ 上的解。注意，$\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ 由于有一个洞，从而是拓扑非平庸的。

由于在 $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ 上，方程 (9.11) 变成了如下形式

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{9.13}$$

所以显而易见的想法是，在 $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ 上依然可以引入矢量势 $\mathbf{A}$，使得 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$。但这种想法其实是过于天真的，为了看清楚其问题，考察 $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ 上一个包围原点的球面 S^2，其包围的空间区域记为 V，若 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$，则有

$$\int_{S^2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S^2} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V d^3\mathbf{x} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0. \tag{9.14}$$

[1] G. ' t Hooft, "Magnetic Monopoles in Unified Gauge Theories," Nucl. Phys. B 79, 276 (1974).

[2] A. M. Polyakov, "Particle Spectrum in the Quantum Field Theory," JETP Lett. 20, 194 (1974) [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. 20, 430 (1974)].

[3] P. Goddard, J. Nuyts and D. I. Olive, "Gauge Theories and Magnetic Charge," Nucl. Phys. B 125, 1 (1977).

但在另一方面，根据方程 (9.11)，我们有

$$\int_{S^2}\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}=\int_V d^3\mathbf{x}\nabla\cdot\mathbf{B}=g\int_V d^3\mathbf{x}\delta^3(\mathbf{x})=g\neq 0. \tag{9.15}$$

这就说明，虽然在 $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ 上有 $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$, 但是由于 $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ 拓扑非平庸，我们并不能整体地有 $\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$。换言之，不可能存在一个在整个 $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ 上都定义良好的矢量势 $\mathbf{A}$，使得 $\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$。

但是由于 $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$，根据所谓的庞加莱引理可知，在 $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ 的任何一个拓扑平庸的开子集 U 上，必定都可以找到一个 $\mathbf{A}^U$, 使得在 U 上有 $\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}^U$。比方说，对于上面的磁单极子，在球坐标中我们可以构造一个 $\mathbf{A}^N$，

$$\mathbf{A}^N=A^N_\phi\mathbf{e}_\phi=\frac{g}{4\pi r}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\mathbf{e}_\phi, \tag{9.16}$$

式中 $\mathbf{e}_\phi$ 为周角 ϕ 增加方向的单位矢量。根据球坐标中的旋度运算，容易验证

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}^N=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A^N_\phi\sin\theta\right)\mathbf{e}_r-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rA^N_\phi\right)\mathbf{e}_\theta, \tag{9.17}$$

代入 (9.16) 式，即可得 $\mathbf{B}=\frac{g}{4\pi r^2}\mathbf{e}_r$, 正是磁单极子的磁场。这说明，(9.16) 式是一个正确的构造。

进而根据前面的讨论可知，$\mathbf{A}^N$ 必定不可能在整个 $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ 上都定义良好。事实上，(9.16) 式给出的 $\mathbf{A}^N$ 有奇异性，这个奇异性不仅在已经被扣掉了的坐标原点处，而且是沿着整个负 z 轴都是奇异的。这是因为 $\mathbf{A}^N$ 表达式 (9.16) 中的 $1/\sin\theta$ 因子，这个因子在 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 处都奇异，但是 $\theta=0$ 处的奇异性被分子的 $1-\cos\theta$ 经由 0 比 0 消去了，从而 $\mathbf{A}^N$ 仅在 $\theta=\pi$ 处奇异，也就是在整个负 z 轴上奇异。也即是说，$\mathbf{A}^N$ 在负 z 轴上没有定义，而在除此之外的区域都定义良好。限制在包围原点的球面 S^2 上来考察的话，即是，$\mathbf{A}^N$ 在南极处没有定义，在除南极之外的区域都定义良好，特别的，$\mathbf{A}^N$ 在整个北半球面都定义良好，事实上，这就是上标 N 所表示的含义。

现在考虑一个不同的规范势

$$\mathbf{A}^S=A^S_\phi\mathbf{e}_\phi=-\frac{g}{4\pi r}\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\mathbf{e}_\phi. \tag{9.18}$$

不难验证，它同样可以给出磁单极子的磁场 (9.12)。但是现在，这个规范势在北极 $\theta=0$ 处是奇异的，而在整个南半球都定义良好，这也就是上标 S 的含义。

很明显，在 S^2 球面赤道附近的区域，$\mathbf{A}^N$ 和 $\mathbf{A}^S$ 均有定义，因为它是南北半球的交叠区。在交叠区上，由于给出的场强相同，所以这两个不同的规范势当然只能相差一个规范变换。

谈到规范变换，这个里要做个注解。首先，以前我们都将协变导数写成 $D_\mu=\partial_\mu-ieA_\mu$ 并称 e 为带电荷的物质场与规范场的耦合常数。但是现在，由于我们用 e 来代表物质场的电荷了，所以就要将这个协变导数重记成

$$D_\mu=\partial_\mu-i\frac{e}{\hbar}A_\mu, \tag{9.19}$$

因为在量子力学中，电荷 e 与普朗克常数 $\hbar$ 的比值正是耦合常数。即是说，本章中的 $e/\hbar$ 相当于前面章节中的 e。从而现在物质场的 $U(1)$ 规范变换就应该为

$$e^{ie\varepsilon(x)/\hbar}, \tag{9.20}$$

同时规范场的规范变换为

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A} + \nabla\varepsilon. \tag{9.21}$$

根据 $\mathbf{A}^N$ 的表达式 (9.16)$\mathbf{A}^S$ 的表达式 (9.18)，再根据球坐标中的梯度运算，人们不难发现，在赤道附近的交叠区，$\mathbf{A}^N$ 与 $\mathbf{A}^S$ 间的规范变换为

$$A_\phi^N = A_\phi^S + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi\varepsilon, \quad \text{其中} \quad \varepsilon = \frac{g\phi}{2\pi}. \tag{9.22}$$

也即是说绕着赤道走一圈，我们有 $\varepsilon(2\pi) = \varepsilon(0) + g$。另一方面，根据 $U(1)$ 规范变换的 (9.20) 式，绕行一圈，必有

$$\begin{aligned} &e\varepsilon(2\pi)/\hbar = e\varepsilon(0)/\hbar + 2\pi n \\ \Rightarrow &\varepsilon(2\pi) = \varepsilon(0) + \frac{2\pi n\hbar}{e}, \end{aligned} \tag{9.23}$$

其中 n 为整数。综上即可知，

$$eg = 2\pi n\hbar, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{9.24}$$

这就是所谓的狄拉克量子化条件。

狄拉克量子化条件是一个理论中任意带电粒子的电荷与任意磁单极子的磁荷间都必须满足的条件。这里有两种可能性，第一，理论中所有带电粒子的电荷都是某个最小电荷单位的整数倍，显然，这时候只要最小电荷单位满足狄拉克量子化条件，就必然有任何电荷都满足它。假设记最小电荷单位为 e，则 (9.24) 告诉我们，

$$\int_{S^2} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = g = \frac{2\pi n\hbar}{e}. \tag{9.25}$$

即闭合球面上的磁通 (即磁单极子的磁荷) 是量子化的，最小的磁通 (磁荷) 为

$$\Phi_0 = \frac{2\pi\hbar}{e}, \tag{9.26}$$

称作磁通量子。

第二种可能性是，理论中带电粒子的电荷互相为无理数比例，比方说，理论中包含电荷为 e 以及电荷为 $\sqrt{3}e$ 的带电粒子。那这时候狄拉克量子化条件是不可能满足的，从而结论就是这样的理论中不可能存在磁单极子。好在，现实世界的理论满足的是第一种可能性，因此是允许磁单极子存在的，虽然我们到今天为止都没有发现它。

以上关于狄拉克量子化条件的推导还可以推广到更为一般的情形，比方说球面 S^2 内包围了多个磁单极子的情形。在这种更一般的情形中，庞加莱引理告诉我们，依然存在北

半球的规范势 $\mathbf{A}^N$, 以及南半球的规范势 $\mathbf{A}^S$，只不过这时候的 $\mathbf{A}^N$ 和 $\mathbf{A}^S$ 不是由 (9.16) 式和 (9.18) 式给出。但是在赤道附近的交叠区，我们依然有

$$\mathbf{A}^N = \mathbf{A}^S + \nabla\varepsilon, \tag{9.27}$$

虽然 ε 可能不再是 $\frac{g\phi}{2\pi}$, 不过，它将依然满足 (9.23) 式。

不妨以 $\int_N$ 表示在北半球面上的积分，以 $\int_S$ 表示在南半球面上的积分，以 C 表示赤道回路，从而我们将有

$$\begin{aligned}\int_{S^2}\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} &= \int_N(\nabla\times\mathbf{A}^N)\cdot d\mathbf{S} + \int_S(\nabla\times\mathbf{A}^S)\cdot d\mathbf{S}\\ &= \oint_C \mathbf{A}^N\cdot d\mathbf{x} - \oint_C \mathbf{A}^S\cdot d\mathbf{x}\\ &= \oint_C \nabla\varepsilon\cdot d\mathbf{x} = \varepsilon(2\pi)-\varepsilon(0),\end{aligned} \tag{9.28}$$

式中我们注意到了回路 C 与北半球的法向成右手关系，而与南半球的法向成左手关系。代入 (9.23) 式, 即有

$$\int_{S^2}\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = \frac{2\pi n\hbar}{e}. \tag{9.29}$$

这就是一般的磁通量子化关系，它实际上对任何两维闭合曲面 (不只是球面)Σ 均成立，因此也写作

$$\int_{\Sigma}\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = \frac{2\pi n\hbar}{e}. \tag{9.30}$$

它告诉我们，在两维闭合曲面上的磁通量必定为磁通量子 Φ_0 的整数倍。

注意到 $B_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F_{ij}$, 我们也可以将 (9.30) 式重写成 $\int_\Sigma \frac{1}{2}F_{ij}dx^i\wedge dx^j = 2\pi n\hbar/e$。这个式子的洛伦兹协变化推广即是

$$\int_\Sigma F = \frac{2\pi n\hbar}{e}. \tag{9.31}$$

式中 Σ 代表四维时空中任意一个两维闭合曲面，而 $F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu\wedge dx^\nu$。

(9.31) 式即使在纯数学上也是一个很著名的式子。只不过数学家的写法和我们略有不同。具体来说即是，数学家常常把 $\frac{e}{\hbar}A_\mu$ 的整体叫作规范联络，并依然记为 A_μ，也就是说，数学家的协变导数定义如下

$$D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu. \tag{9.32}$$

因此为了得到数学家的写法，我们需要做如下替换

$$\frac{e}{\hbar}A_\mu \to A_\mu, \quad \frac{e}{\hbar}F\to F. \tag{9.33}$$

从而按照数学家的写法，(9.31) 式就是

$$\int_\Sigma \frac{F}{2\pi} = n\in\mathbb{Z}. \tag{9.34}$$

通常称式中的 $\frac{F}{2\pi}$ 为第 1 陈类，因为它是陈省身首先引入的，也记作 c_1，

$$c_1 = \frac{F}{2\pi}. \tag{9.35}$$

因此 (9.34) 式说的就是，第 1 陈类在任何两维闭合曲面上的积分均为量子化的整数。

所以，数学上第 1 陈类的量子化，和物理上磁单极子的狄拉克量子化条件，它们本质是一样的，虽然两者的公式写法看起来很不相同。

以上考察狄拉克量子化条件的时候，我们考虑的是单纯的电荷和单纯的磁单极子。但是类似的考察可以推广到既带电荷同时又带磁荷的双荷子 (dyon) 情形，假设一个理论既包含一种 (e_1, g_1) 的双荷子，又包含另一种 (e_2, g_2) 的双荷子，则它们必定要满足如下 Dirac-Zwanziger 量子化条件

$$e_1 g_2 - e_2 g_1 \in 2\pi\hbar\mathbb{Z}. \tag{9.36}$$

这个条件当然是狄拉克量子化条件的推广。

9.3 θ 项

9.3.1 初识 θ 项

第四章引入电磁场作用量的时候，我们说过，最简单的电磁场作用量其实有如下两项

$$S = S_{\text{Maxwell}} + S_\theta \tag{9.37}$$

式中 $S_{\text{Maxwell}} = -\int d^4x \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$，而 S_θ 为

$$\begin{aligned} S_\theta &= \theta \frac{e^2}{\hbar} \frac{1}{4\pi^2} \int d^4x \mathbf{E}\cdot\mathbf{B} = \theta \frac{e^2}{\hbar} \frac{1}{4\pi^2} \int d^4x \frac{1}{4} \widetilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ &= \theta \frac{e^2}{\hbar} \frac{1}{4\pi^2} \int d^4x \frac{1}{8} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \\ &= \theta \frac{e^2}{\hbar} \frac{1}{2} \int \left(\frac{F}{2\pi}\right) \wedge \left(\frac{F}{2\pi}\right). \end{aligned} \tag{9.38}$$

式中最后一行我们利用了 $d^4x\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma$。这里的 S_θ 就是所谓的 θ 项，只不过，第四章我们说过，这一项其实是全微分项，对电磁场的运动微分方程没有影响。但是，详细的考察表明，当系统中存在磁单极子时，这一项其实是有物理效应的，所以现在我们要把这个 θ 项加上。

之所以将 θ 项写成具有如上 (9.38) 式那样的常数系数，原因有二：其一是使得参数 θ 为无量纲参数。其二是进一步使得参数 θ 为一个以 2π 为周期的角度变量。

现在我们来详细分析一下为什么 θ 无量纲。为了看清楚这个问题，我们不妨按照数学家的写法，进行如下替换

$$\frac{e}{\hbar} A_\mu \to A_\mu, \quad \frac{e}{\hbar} F \to F. \tag{9.39}$$

替换以后的协变导数为

$$D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu, \tag{9.40}$$

由此可见 A_μ 的量纲与 ∂_μ 量纲相同，均为长度的负 1 次方量纲，记作 $[A_\mu]=L^{-1}$。进而即知替换以后 $F_{\mu\nu}$ 的量纲为 $[F_{\mu\nu}]=L^{-2}$, 从而替换以后的 2 形式 F 的量纲为 $[F]=L^0$。

另一方面，替换以后作用量的麦克斯韦项为

$$S_{\text{Maxwell}}=-\big(\frac{\hbar}{e}\big)^2\int d^4x\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \tag{9.41}$$

而替换以后的 θ 项为，

$$S_\theta=\hbar\theta\frac{1}{2}\int\big(\frac{F}{2\pi}\big)\wedge\big(\frac{F}{2\pi}\big). \tag{9.42}$$

注意到作用量的量纲与普朗克常数 $\hbar$ 的量纲相同，从而即知：第一，参数 θ 无量纲，第二，$\frac{e^2}{\hbar}$ 也无量纲，因此可以引入无量纲常数

$$\alpha=\frac{e^2}{4\pi\hbar}, \tag{9.43}$$

称作精细结构常数，它大约等于 $1/137$。在国际单位制中，α 即是

$$\alpha=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}. \tag{9.44}$$

为了看清楚为什么参数 θ 是一个以 2π 为周期的角变量，我们将注意力集中在变量替换以后的 θ 项 (9.42) 上。我们记四维时空为 M, 并假设 M 可以分解成两个二维闭合曲面 (分别记作 Σ_1 和 Σ_2) 的笛卡尔积[4]，即设

$$M=\Sigma_1\times\Sigma_2. \tag{9.45}$$

又根据第 1 陈类的量子化公式 (9.34)，我们有

$$\int_{\Sigma_1}\frac{F}{2\pi}=n_1,\quad \int_{\Sigma_2}\frac{F}{2\pi}=n_2,\quad n_1,n_2\in\mathbb{Z}. \tag{9.46}$$

从而即有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_M\big(\frac{F}{2\pi}\big)\wedge\big(\frac{F}{2\pi}\big)&=\frac{1}{2}\Big(\int_{\Sigma_1}\frac{F}{2\pi}\cdot\int_{\Sigma_2}\frac{F}{2\pi}+\int_{\Sigma_2}\frac{F}{2\pi}\cdot\int_{\Sigma_1}\frac{F}{2\pi}\Big)\\&=\int_{\Sigma_1}\frac{F}{2\pi}\cdot\int_{\Sigma_2}\frac{F}{2\pi}=n_1n_2\in\mathbb{Z}.\end{aligned} \tag{9.47}$$

也即是说，其实 θ 项 (9.42) 为

$$S_\theta=\hbar\theta n_1n_2. \tag{9.48}$$

另一方面，根据量子场论的路径积分表述，θ 项对路径积分的贡献为

$$\exp\big(i\frac{S_\theta}{\hbar}\big)=\exp\big(i\theta n_1n_2\big), \tag{9.49}$$

由于结果必须是单值的，而 $n_1n_2\in\mathbb{Z}$, 从而即知 θ **必为以** 2π **为周期的角变量**。

[4]严格说来，我们要将场论系统作一个解析延拓，从四维闵可夫斯基时空延拓到四维欧氏流形，M 指的其实是这个延拓以后的欧氏流形。

9.3.2 轴子电动力学

回到如下作用量，

$$S=\int d^4x\Big[-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\frac{e^2}{\hbar}\frac{1}{32\pi^2}\theta(x)\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}\Big], \tag{9.50}$$

现在，我们假设参数 θ 依赖于时空坐标 x，从而是一个 θ 场，这种 θ 场通常称作轴子场 (axion field)，尽管这个场是额外给定的而不是动力学演化的，而真正物理的轴子场本身应该是动力学演化的。我们称作用量 (9.50) 描写的电动力学为轴子电动力学。

将上述作用量对 A_μ 变分，就能得到

$$\begin{aligned}\delta S&=\int d^4x\Big[\partial_\mu F^{\mu\nu}\delta A_\nu+\frac{e^2}{\hbar}\frac{1}{16\pi^2}\theta(x)\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}\delta F_{\rho\sigma}\Big]\\&=\int d^4x\Big[\partial_\mu F^{\mu\nu}\delta A_\nu+\frac{e^2}{\hbar}\frac{1}{4\pi^2}\theta(x)\widetilde{F}^{\rho\sigma}\partial_\rho(\delta A_\sigma)\Big],\end{aligned} \tag{9.51}$$

进行合适的分部积分并丢弃边界项，即可得

$$\delta S=\int d^4x\Big[\partial_\mu F^{\mu\nu}\delta A_\nu-\frac{e^2}{\hbar}\frac{1}{4\pi^2}\partial_\mu\big(\theta(x)\widetilde{F}^{\mu\nu}\big)\delta A_\nu\Big]. \tag{9.52}$$

根据最小作用量原理即得轴子电动力学的场方程

$$\partial_\mu\Big[F^{\mu\nu}-\frac{e^2}{\hbar}\frac{1}{4\pi^2}\theta(x)\widetilde{F}^{\mu\nu}\Big]=0. \tag{9.53}$$

注意到 $\partial_\mu\widetilde{F}^{\mu\nu}=0$, 这个方程也可以重写为

$$-\partial_\mu F^{\mu\nu}=-\frac{e^2}{\hbar}\frac{1}{4\pi^2}(\partial_\mu\theta)\widetilde{F}^{\mu\nu}. \tag{9.54}$$

我们有两种等价的观点来看待上面的方程。第一种观点是将 $\frac{e^2}{\hbar}\frac{1}{4\pi^2}\theta(x)\widetilde{F}^{\mu\nu}$ 看作磁化极化张量 $M^{\mu\nu}$，从而方程 (9.53) 可以看成 (注意 $\varepsilon_0=\mu_0=1$)

$$\partial_\mu H^{\mu\nu}=0,\quad H^{\mu\nu}=F^{\mu\nu}-\frac{\alpha}{\pi}\theta(x)\widetilde{F}^{\mu\nu}. \tag{9.55}$$

利用 $H^{0i}=D_i(c=1$ 单位制)，$H^{ij}=\varepsilon_{ijk}H_k$，即有

$$\mathbf{D}=\mathbf{E}+\frac{\alpha}{\pi}\theta\mathbf{B},\quad \mathbf{H}=\mathbf{B}-\frac{\alpha}{\pi}\theta\mathbf{E}. \tag{9.56}$$

而场方程 $\partial_\mu H^{\mu\nu}=0$ 则可以给出

$$\nabla\cdot\mathbf{D}=0,\quad \nabla\times\mathbf{H}=\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}. \tag{9.57}$$

再加上 $\partial_\mu\widetilde{F}^{\mu\nu}=0$ 给出的

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0,\quad \nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \tag{9.58}$$

这两组方程就构成轴子电动力学的麦克斯韦方程。

第 2 种看待方程 (9.54) 的观点是，将 $-\frac{e^2}{\hbar}\frac{1}{4\pi^2}(\partial_\mu\theta)\widetilde{F}^{\mu\nu}$ 看作诱导电流四矢量 J_I^ν，

$$J_I^\nu = -\frac{\alpha}{\pi}(\partial_\mu\theta)\widetilde{F}^{\mu\nu}. \tag{9.59}$$

进一步也可以写出诱导电荷密度 ρ_I 以及诱导电流密度 $\mathbf{J}_I$，分别为

$$\rho_I = -\frac{\alpha}{\pi}\nabla\theta\cdot\mathbf{B}, \quad \mathbf{J}_I = \frac{\alpha}{\pi}\left(\dot{\theta}\mathbf{B}+\nabla\theta\times\mathbf{E}\right). \tag{9.60}$$

进而场方程 (9.54) 也可以写作

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{E} &= -\frac{\alpha}{\pi}\nabla\theta\cdot\mathbf{B} = \rho_I \\ \nabla\times\mathbf{B}-\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{\alpha}{\pi}\left(\dot{\theta}\mathbf{B}+\nabla\theta\times\mathbf{E}\right) = \mathbf{J}_I.\end{aligned} \tag{9.61}$$

9.3.3 拓扑绝缘体

轴子电动力学并非理论上的空想，实际上它可以在一类奇妙的材料中实现，那就是所谓的拓扑绝缘体材料，典型的比方说 Bi_2Se_3 和 Bi_2Te_3。在拓扑绝缘体材料的内部 $\theta=\pi$，而在拓扑绝缘体材料的外部当然就是通常的 $\theta=0$($\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 有什么特殊性后文会进一步讨论)，因此在拓扑绝缘体与外界的交界面上 θ 不是常数，从而就需要考虑轴子电动力学。

考察一块拓扑绝缘体材料，假设其填满 $z<-\varepsilon$ 的下半空间 (这里 ε 为无穷小量)，其体内 $\theta=\pi$。假设 $z>+\varepsilon$ 的上半空间为真空，因此 $\theta=0$。从而在 $z\in[-\varepsilon,\varepsilon]$ 的交界区，有 $\partial_z\theta\neq 0$, 因此就需要考虑轴子电动力学。

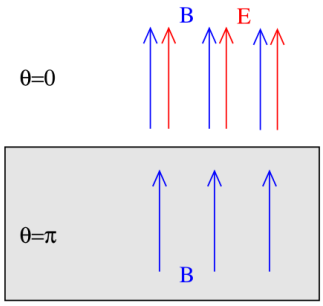

Figure 9.1: 朝着界面施加一个磁场。

首先，我们假设从下方沿着垂直界面的方向施加了一个磁场 $B_z=B$, 如图 (9.1) 所示。则根据 (9.60) 式可知，在界面上会聚集诱导电荷，电荷密度为 $\rho_I=-\frac{\alpha}{\pi}\partial_z\theta B$。即是说，每单位面积上的面电荷密度 σ 为

$$\sigma = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dz\rho_I = \alpha B. \tag{9.62}$$

这个面电荷密度当然要在拓扑绝缘体的外面产生一个电场，如图 (9.1) 所示。这里我们看到拓扑绝缘体材料表面的一种神奇性质：当朝着界面施加一个磁场，它就会在外面产生一个电场!

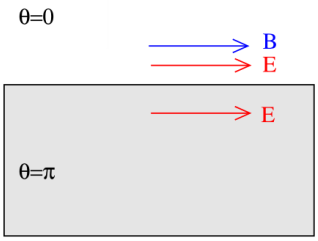

Figure 9.2: 沿着平行界面的方向施加一个电场。

反过来，我们也可以在材料内部沿着界面的平行方向施加一个电场 $E_y = E$，如图 (9.2) 所示。则根据 (9.60) 式可知，在界面上沿着 x 方向会诱导一个电流密度，$J_x = -\frac{\alpha}{\pi}\partial_z\theta E_y$，换言之，面电流密度 K_x 为

$$K_x = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dz J_x = \alpha E_y. \tag{9.63}$$

现在，这个 x 方向的面电流密度当然会在拓扑绝缘体外面产生一个沿着 y 方向的磁场，如图 (9.2) 所示。

以上面电流的公式 (9.63) 意味着我们可以定义一个横向电导 (指电场的方向和相应电流的方向相垂直)σ_{xy}，其定义是 $K_x = \sigma_{xy}E_y$，通常称 σ_{xy} 为霍尔电导。量子霍尔效应的标准结果告诉我们，霍尔电导 σ_{xy} 只能取 $\frac{e^2}{2\pi\hbar}$ 的有理数倍。在现在的例子中，由 (9.63) 式易见，

$$\sigma_{xy} = \alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{e^2}{2\pi\hbar}. \tag{9.64}$$

因此通常人们简称拓扑绝缘体表面的霍尔电导是 1/2!

以上讨论的电场诱导出磁场，磁场也诱导出电场的一般现象，就是所谓的拓扑磁电效应 (topological magneto-electric effect)。

以上对拓扑磁电效应的讨论也可以从轴子电动力学的边值关系来进行。为此注意到，根据标准的电动力学教科书，由方程 (9.57) 我们可以得到如下边值关系

$$\mathbf{n}\cdot\Delta\mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{n}\times\Delta\mathbf{H} = 0, \tag{9.65}$$

式中 $\mathbf{n}$ 表示界面的法向，Δ 表示界面两侧场值的差。类似的，由方程 (9.58)，又可以得到边值关系

$$\mathbf{n}\cdot\Delta\mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{n}\times\Delta\mathbf{E} = 0. \tag{9.66}$$

不难证明，通过应用以上两组边值关系，人们同样能得到本小节关于拓扑磁电效应的那些结论。

9.3.4 Witten 效应

当存在磁单极子时，θ 项会有一个重要的效应，它会使得磁单极子带上一定的电荷。这就是所谓的 Witten 效应。

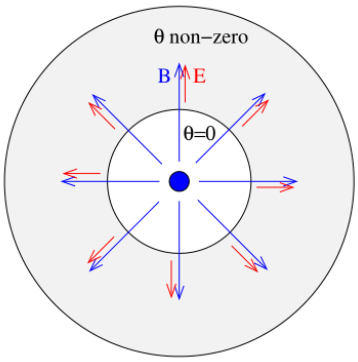

Figure 9.3: Witten 效应

设想把一个带磁荷 g 的磁单极子放在 $\theta = 0$ 的真空中，然后围绕着这个真空腔包裹上 $\theta \neq 0$ 的介质，如图 (9.3) 所示。则根据前面讨论过的拓扑磁电效应，我们很容易明白将会发生什么。首先，磁单极子的磁场在跨过真空与介质的交界面 (为球面) 以后，将会在介质内诱导出一个电场，因此使得介质内既有磁场又有电场，如图 (9.3) 所示。这是因为由于 θ 改变，在交界面上会诱导出一层电荷。这种诱导电荷满足 (9.60) 式的第一个方程。因此，从介质内部来看，就好像磁单极子也携带了一定的电荷 (所以在介质内产生了电场)，这个电荷量是

$$\begin{aligned} q &= \int d^3\mathbf{x}\rho_I = -\frac{\alpha}{\pi}\int d^3\mathbf{x}\nabla\theta\cdot\mathbf{B} \\ &= -\frac{\alpha}{\pi}\int dr(\partial_r\theta)\int_{S^2} d\mathbf{S}\cdot\mathbf{B} \\ &= -\frac{\alpha}{\pi}\theta g = -\frac{e^2}{4\pi\hbar}\frac{\theta}{\pi}g. \end{aligned} \tag{9.67}$$

这个结果不依赖于真空腔的大小，因此我们可以设想把真空腔的半径缩小为零，结果将依然成立。但是，真空腔缩小为零以后，这个电荷就真是由磁单极子携带的了！这时候正确的解释就变成，当 $\theta \neq 0$ 时，磁单极子会自动带上一份 q 的电荷，进而成为一个双荷子，这就是 Witten 效应!

现在，假设上面这个磁单极子携带的是狄拉克量子化条件所允许的最小磁荷，即 $g = \frac{2\pi\hbar}{e}$，则代入上面的 (9.67) 式，即有

$$q = \frac{\theta}{2\pi}e. \tag{9.68}$$

特别的，对于一个放置在拓扑绝缘体材料内部的磁单极子来说，它通过 Witten 效应携带的电荷将是 $q = \frac{1}{2}e$。

下面我们给出 Witten 效应的一个略有不同的推导。同样是先假定把一个磁单极子放置在 $\theta = 0$ 的介质中，但是现在，我们设想介质的 θ 随时间缓慢地增加！则这时候，根据轴子电动力学方程 (9.61) 的第二个方程可知，这个过程会激发出一个平行于磁场 $\mathbf{B}$ 的电

场，最终的电场将是

$$\mathbf{E} = -\frac{\alpha}{\pi}\int \dot{\theta} dt \mathbf{B} = -\frac{\alpha}{\pi}\theta \mathbf{B}. \tag{9.69}$$

很显然，这同样意味着磁单极子携带了一份由 (9.67) 式给出的电荷。

9.3.5 空间反演，时间反演，以及 $\theta = \pi$

下面我们来解释 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$ 有什么特殊性。简单概括的话，这个特殊性就在于：θ 项虽然同样有规范不变性和洛伦兹协变性，但是它破坏了空间反演对称性和时间反演对称性，除非 θ 刚好等于 0 或 π。

所谓的空间反演操作，记作 P，即是将空间位置矢量反向的操作，即

$$P: \quad \mathbf{x} \to -\mathbf{x}. \tag{9.70}$$

而所谓的时间反演操作，记作 T，即是将时间反向的操作，即

$$T: \quad t \to -t. \tag{9.71}$$

但是 P、T 在电磁场上是如何作用的呢？

为了搞清楚这个问题，我们回到带电粒子受洛伦兹力作用的方程

$$m\ddot{\mathbf{x}} = e(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}). \tag{9.72}$$

空间反演对称性和时间反演对称性意味着，这个方程在空间反演和时间反演下均要保持不变！不难看出，为了满足这一点，空间反演操作和时间反演操作在电磁场上的作用就必须为

$$P: \mathbf{E}(\mathbf{x},t) \to -\mathbf{E}(-\mathbf{x},t), \quad P: \mathbf{B}(\mathbf{x},t) \to \mathbf{B}(-\mathbf{x},t). \tag{9.73}$$

以及

$$T: \mathbf{E}(\mathbf{x},t) \to \mathbf{E}(\mathbf{x},-t), \quad T: \mathbf{B}(\mathbf{x},t) \to -\mathbf{B}(\mathbf{x},-t). \tag{9.74}$$

即是说，电场 $\mathbf{E}$ 在空间反演下为奇的，而在时间反演下则是偶的。与之相反，磁场 $\mathbf{B}$ 在空间反演下是偶的，而在时间反演下则是奇的。

根据 (9.38) 式，θ 项是

$$S_\theta = \theta \frac{e^2}{\hbar}\frac{1}{4\pi^2}\int d^4x \mathbf{E}\cdot\mathbf{B}. \tag{9.75}$$

很显然，它无论是在空间反演之下还是在时间反演之下，都是奇的！都相当于将 θ 变换成了 $-\theta$！所以 θ 项破坏了空间反演对称性和时间反演对称性，除非 $\theta = 0, \pi$。为什么 $\theta = \pi$ 也是例外呢？原因在于 θ 是一个以 2π 为周期的角变量，对它来说，$\theta = -\pi$ 和 $\theta = \pi$ 其实是等同的，因此 $\theta = \pi$ 时也有空间反演对称性和时间反演对称性。

拓扑绝缘体正是一种具有时间反演对称性的材料。根据上面的讨论可知，这样的材料可以分成两类，一类具有 $\theta = 0$，另一类具有 $\theta = \pi$。$\theta = 0$ 的材料就是普通的能带拓扑平凡的材料，而拓扑绝缘体是一种能带的拓扑不平凡的材料，因此对应 $\theta = \pi$。

10. 杨-米尔斯理论与't Hooft-Polyakov 磁单极

本章讨论杨-米尔斯理论，也就是非阿贝尔规范场论。同时我们也将讨论磁单极子如何可以作为一类非阿贝尔规范场的孤立子解而自动出现，这就是所谓的't Hooft-Polyakov 磁单极。

10.1 杨-米尔斯理论

前面的章节中，我们通过将 $U(1)$ 整体对称性局域化得到了电磁场理论，而在第三章中也讨论过更一般的 $U(N)$ 整体对称性，将之局域化得到的理论就是所谓的非阿贝尔规范场论，因为是杨振宁和米尔斯首先作了这样的推广，所以也称作杨-米尔斯理论。将 $U(1)$ 规范对称性推广到 $U(N)$ 规范对称性是一件高度非平凡的事情，因为 $U(1)$ 规范理论是一个满足线性叠加原理的线性理论，但是正如我们将要看到的，杨-米尔斯理论是非线性的！这种非线性甚至使得杨-米尔斯理论在量子层次上可以和电磁场有根本性的不同，导致出诸如夸克禁闭之类神奇的量子效应。

杨-米尔斯理论在整个现代物理中都举足轻重，它是描写强相互作用的量子色动力学的基础，也是整个粒子物理标准模型的基础。甚至通过全息对偶，它还可以用来非微扰地定义渐近 AdS 时空的量子引力理论。

10.1.1 $SU(N)$ 群

不过，由于一些群论的细节因素，人们讨论得更多的是 $SU(N)$ 规范理论而不是 $U(N)$ 规范理论。$SU(N)$ 和 $U(N)$ 一样都是群的名字，只不过 $U(N)$ 是所有 $N\times N$ 幺正矩阵的集合，而 $SU(N)$ 还额外要求这些幺正矩阵的行列式等于 1。

即是说，$SU(N)$ 里的元素 U 除了可以写成如下形式以外，

$$U=\exp(i\theta^a T_a). \tag{10.1}$$

还要求其中的厄密矩阵 T_a 满足

$$\mathrm{tr}(T_a)=0. \tag{10.2}$$

这是因为

$$1=\det(U)=\exp\left(i\theta^a \mathrm{tr}(T_a)\right)\Leftrightarrow \mathrm{tr}(T_a)=0. \tag{10.3}$$

独立的 $N\times N$ 厄密矩阵共有 N^2 个，加上额外的 (10.2) 式的要求，最后符合条件的独立 $N\times N$ 厄密矩阵就共有 N^2-1 个，记作 T_a, $a=1,2,...,N^2-1$，称之为 $SU(N)$ 群的生成元。为了具体确定这些生成元 T_a，我们还要求它们满足如下归一化条件

$$\mathrm{tr}(T_aT_b)=\frac{1}{2}\delta_{ab}. \tag{10.4}$$

记 $[A,B]=AB-BA$，称作矩阵 A,B 的对易子。不难验证 $-i[T_a,T_b]$ 结果依然是一个迹为零的厄密矩阵，从而必定可以写成不同 T_c 的线性组合。即是说，我们必定有

$$[T_a,T_b]=iC_{abc}T_c\Leftrightarrow[-iT_a,-iT_b]=C_{abc}(-iT_c). \tag{10.5}$$

这个式子称为 $SU(N)$ 群的李代数，式中

$$C_{abc}=-2i\mathrm{tr}\big([T_a,T_b]T_c\big). \tag{10.6}$$

利用 $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$ 不难证明，C_{abc} 关于 3 个指标 a,b,c 是全反对称的。

以 $SU(2)$ 群为例，它有 3 个独立的生成元，可以取为 $T_a=\frac{1}{2}\sigma_a$, $a=1,2,3$，式中 σ_a 为 3 个泡利矩阵，分别为

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}. \tag{10.7}$$

由此不难验证，

$$[T_a,T_b]=i\varepsilon_{abc}T_c\Leftrightarrow[-iT_a,-iT_b]=\varepsilon_{abc}(-iT_c). \tag{10.8}$$

式中 ε_{abc} 为列维-西维塔符号。

10.1.2 协变导数与规范场强

在第四章中我们看到，为了将复标量场 ϕ 的 $U(1)$ 整体对称性变成一个局域规范对称性，我们引入了协变导数

$$D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu, \tag{10.9}$$

并要求 $D_\mu\phi$ 在如下局域 $U(1)$ 变换下协变

$$\phi \to \phi' = e^{i\varepsilon(x)}\phi, \tag{10.10}$$

即要求 $D_\mu\phi$ 也和 ϕ 一样变换

$$D_\mu\phi \to D'_\mu\phi' = e^{i\varepsilon(x)}D_\mu\phi. \tag{10.11}$$

从而可知协变导数在规范变换下的变换规则为

$$\begin{aligned} D_\mu \to D'_\mu &= \partial_\mu - iA'_\mu = e^{i\varepsilon(x)}\cdot D_\mu \cdot e^{-i\varepsilon(x)} \\ \Rightarrow A_\mu &\to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\varepsilon(x). \end{aligned} \tag{10.12}$$

并且不难发现，$U(1)$ 规范场强 $F_{\mu\nu}$ 可以由下式给出，

$$-iF_{\mu\nu}\phi = [D_\mu, D_\nu]\phi. \tag{10.13}$$

[注意：和上一段不同，后文中的 A_μ 代表杨-米尔斯理论中的规范势，$F_{\mu\nu}$ 代表杨-米尔斯理论中的规范场强，它们均另有定义。]

为了将以上 $U(1)$ 规范理论的结果推广到 $SU(N)$ 规范理论，我们引入 N 维复标量场 Φ，它的 N 个分量一起构成一个 N 维列矢量。类似的，我们引入协变导数

$$D_\mu = \partial_\mu + A_\mu, \quad \text{这里} \quad A_\mu = -iT_aA^a_\mu. \tag{10.14}$$

式中 T_a 为 $SU(N)$ 群的生成元，A^a_μ 是实的规范场，类似于 $U(1)$ 规范理论中的 A_μ，因此也和 $A_\mu = -iT_aA^a_\mu$ 一样都称作规范势。类似的，我们要求 $D_\mu\Phi$ 在如下局域 $SU(N)$ 规范变换下协变

$$\Phi \to \Phi' = U(x)\Phi, \quad \text{这里} \quad U(x) = \exp\left(i\varepsilon_a(x)T_a\right). \tag{10.15}$$

即是说，在这样的规范变换下，

$$D_\mu\Phi \to D'_\mu\Phi' = U(x)D_\mu\Phi. \tag{10.16}$$

从而即知协变导数在 $SU(N)$ 规范变换下的变换规则为

$$D_\mu \to D'_\mu = \partial_\mu + A'_\mu = U(x)\cdot D_\mu \cdot U^{-1}(x). \tag{10.17}$$

进而可知规范势 A_μ 的变换规则为

$$A_\mu \to A'_\mu = UA_\mu U^{-1} + U\partial_\mu U^{-1}. \tag{10.18}$$

特别的，当规范变换参数 $\varepsilon_a(x)$ 为无穷小量时，我们将变换矩阵 U 按照 $\varepsilon_a(x)$ 展开，可得

$$\delta A_\mu = A'_\mu - A_\mu = \partial_\mu \varepsilon + [A_\mu, \varepsilon]. \tag{10.19}$$

式中 $\varepsilon = -iT_a\varepsilon_a(x)$。

仿照 $U(1)$ 情形，我们可以定义规范场强 $F_{\mu\nu} = -iT_aF^a_{\mu\nu}$ (常常也将 $F^a_{\mu\nu}$ 称作规范场强)，

$$F_{\mu\nu}\Phi = -iT_aF^a_{\mu\nu}\Phi = [D_\mu, D_\nu]\Phi. \tag{10.20}$$

通常也将这个式子简写成

$$[D_\mu, D_\nu] = F_{\mu\nu}. \tag{10.21}$$

根据协变导数的定义即有

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]. \tag{10.22}$$

我们发现，相比于 $U(1)$ 规范理论，现在的规范场强多了一个非线性项 $[A_\mu, A_\nu]$。正是这一项使得杨-米尔斯理论成为一个非线性理论，而 $U(1)$ 规范理论没有这样的项从而是一个线性理论。当然，我们也可以写出 $F^a_{\mu\nu}$ 的表达式，利用 $SU(N)$ 群的李代数，不难得到

$$F^c_{\mu\nu} = \partial_\mu A^c_\nu - \partial_\nu A^c_\mu + C_{abc}A^a_\mu A^b_\nu. \tag{10.23}$$

完全类似于 $U(1)$ 情形，我们也可以引入规范场 1-形式 $A = A_\mu dx^\mu$，以及场强 2-形式 $F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$。则根据 (10.22) 式不难得到，

$$F = dA + A \wedge A. \tag{10.24}$$

式中矩阵按照矩阵乘法相乘，而外微分形式则按照外代数乘法相乘。

但是，与 $U(1)$ 情形不同，在非阿贝尔的杨-米尔斯理论中，场强张量 $F_{\mu\nu}$ 不再是规范不变的了，根据 (10.18) 式，不难得到它在规范变换下的变换规则为

$$F_{\mu\nu} \to F'_{\mu\nu} = UF_{\mu\nu}U^{-1}. \tag{10.25}$$

所以，为了得到规范不变的量，我们不能仅仅考虑 $F_{\mu\nu}$，而是需要考虑诸如 $\mathrm{tr}\big(F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}\big)$ 这样的量！(注意，由于 $\mathrm{tr}(T_a) = 0$，所以 $\mathrm{tr}(F_{\mu\nu}) = 0$) 当然，如果加入物质场 Φ，那我们就可以构造更多规范不变量，比如有 $\Phi^\dagger\Phi$、$\Phi^\dagger D_\mu\Phi$、$(D_\mu\Phi)^\dagger D^\mu\Phi$、$\Phi^\dagger F_{\mu\nu}\Phi$ 等等。

以上我们是将物质场 Φ 取为 N 维列矢量，它在规范变换下按照 (10.15) 式变换。我们称这样的物质场取 $SU(N)$ 规范群的基础表示。但是，如果物质场本身是一个 $N\times N$ 的矩阵，记为 ϕ

$$\phi(x) = -iT_a\phi^a(x), \tag{10.26}$$

而它在规范变换的作用下变换为

$$\phi(x) \to U(x)\phi(x)U^{-1}(x), \tag{10.27}$$

那这时候我们就称物质场取 $SU(N)$ 规范群的伴随表示。这时候，协变导数在物质场 ϕ 上的作用关系应该定义成

$$D_\mu\phi = \partial_\mu\phi + [A_\mu, \phi] \tag{10.28}$$

容易验证这正好使得 $D_\mu\phi$ 协变，即在 (10.18) 式和 (10.27) 式的规范变换下，$D_\mu\phi$ 也按照 ϕ 同样的规则变换

$$D_\mu\phi \to U(x)D_\mu\phi U^{-1}(x). \tag{10.29}$$

特别的，根据这种定义，我们可以将规范势 A_μ 的无穷小规范变换式 ((10.19) 式) 写成

$$\delta A_\mu = D_\mu\varepsilon. \tag{10.30}$$

另外，利用如下雅可比恒等式

$$[D_\mu,[D_\nu,D_\rho]]+[D_\nu,[D_\rho,D_\mu]]+[D_\rho,[D_\mu,D_\nu]]=0, \tag{10.31}$$

并结合 $F_{\mu\nu}$ 的定义式 (10.21), 即可得到

$$D_\mu F_{\nu\rho} + D_\nu F_{\rho\mu} + D_\rho F_{\mu\nu} = 0, \tag{10.32}$$

通常称这为杨-米尔斯场的 Bianchi 恒等式。

用规范场 A_μ 和取伴随表示的物质场 ϕ,我们可以构造诸如 $\mathrm{tr}(\phi^2)$、$\mathrm{tr}\big(\phi D_\mu\phi\big)$、$\mathrm{tr}\big(D_\mu\phi D^\mu\phi\big)$ 等等这样的规范不变量。特别的，$\phi^a\phi^a = -2\mathrm{tr}(\phi^2)$ 是规范不变的。

值得注意的是，在数学文献中，通常称 A_μ 为 $SU(N)$ 向量丛上的联络，而称 $F_{\mu\nu}$ 为 $SU(N)$ 向量丛的曲率。相应的，1-形式 A 就是联络 1-形式，而 2-形式 F 就是曲率 2-形式。

10.1.3 杨-米尔斯作用量

为了构造杨-米尔斯理论的作用量，我们只需要求它在上文所讨论的 $SU(N)$ 规范变换下是不变的!

最简单的规范不变且洛伦兹不变的规范场作用量 S_g 取如下形式，

$$\begin{aligned} S_g &= a\int d^4x\frac{1}{2}\mathrm{tr}\big(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\big) + b\int \mathrm{tr}\big(F\wedge F\big) \\ &= -a\int d^4x\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} + b\int \mathrm{tr}\big(F\wedge F\big). \end{aligned} \tag{10.33}$$

和第四章中对 $U(1)$ 规范场的讨论一样，为了使得规范场的动能项为正，必有系数 $a>0$。通常将 a 写成 $a=\frac{1}{e^2}$，其中 e 就是所谓的规范场耦合常数。另外，对于 S_g 表达式中的第 2 项，注意到[1]

$$\mathrm{tr}\big(F\wedge F\big) = d\mathrm{tr}\big(A\wedge dA + \frac{2}{3}A\wedge A\wedge A\big), \tag{10.34}$$

[1]这个式子可以直接证明，但是为了证明它，你需要同时用到矩阵求迹的轮换性质以及外代数的反交换性质。比如你可以先证明 $\mathrm{tr}\big(dA\wedge A\wedge A\big) = -\mathrm{tr}\big(A\wedge dA\wedge A\big) = \mathrm{tr}\big(A\wedge A\wedge dA\big)$, 以及 $\mathrm{tr}(A\wedge A\wedge A\wedge A) = -\mathrm{tr}(A\wedge A\wedge A\wedge A) = 0$。

所以这是一个全微分项，它只在时空边界上对作用量有贡献，从而对规范场的场方程没有任何贡献。因此在经典场论的层次上常常可以将这一项忽略，就和第四章中忽略 $U(1)$ 规范场作用量中的相应项一样。因此，最终我们可以将规范场的作用量 S_g 写成

$$S_g = \int d^4x \frac{1}{2e^2}\mathrm{tr}\big(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\big) = -\int d^4x \frac{1}{4e^2}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}. \tag{10.35}$$

为了以后求规范场的场方程，我们需要将作用量 S_g 对 A_μ 进行变分。为了进行这样的变分，下面两个结果是很有用的 (请读者先证明它们)：第一个结果是

$$\delta F_{\mu\nu} = D_\mu \delta A_\nu - D_\nu \delta A_\mu, \tag{10.36}$$

式中 $D_\mu \delta A_\nu = \partial_\mu \delta A_\nu + [A_\mu, \delta A_\nu]$; 第二个有用的结果是，对于任何两个取伴随表示的场 $\mathscr{O}_1$ 以及 $\mathscr{O}_2$，有

$$\partial_\mu \mathrm{tr}\big(\mathscr{O}_1\mathscr{O}_2\big) = \mathrm{tr}\big(D_\mu\mathscr{O}_1\mathscr{O}_2\big) + \mathrm{tr}\big(\mathscr{O}_1 D_\mu \mathscr{O}_2\big), \tag{10.37}$$

这个结果常常可以用来进行分部积分。利用这两个结果，我们不难得到

$$\delta S_g = \frac{2}{e^2}\int d^4x \mathrm{tr}\big(-D_\mu F^{\mu\nu}\delta A_\nu\big) = \frac{1}{e^2}\int d^4x (D_\mu F^{\mu\nu})^a \delta A^a_\nu. \tag{10.38}$$

式中 $D_\mu F^{\mu\nu} = -iT_a (D_\mu F^{\mu\nu})^a$。

下面考察物质场的作用量。对于物质场取 $SU(N)$ 基础表示 Φ 的情形，通过将第三章中所讨论的具有 $SU(N)$ 整体对称性的 Φ 场作用量中的偏导 ∂_μ 替换成协变导数 D_μ，我们可以得到 Φ 与 $SU(N)$ 规范场的耦合作用量 S_m 为

$$S_m = -\int d^4x \Big[(D_\mu\Phi)^\dagger D^\mu \Phi + \mathscr{U}(\Phi^\dagger\Phi)\Big]. \tag{10.39}$$

将 S_m 对 A^a_μ 变分，易得

$$\delta S_m = i\int d^4x \big[(D^\mu\Phi)^\dagger T_a \Phi - \Phi^\dagger T_a D^\mu \Phi\big]\delta A^a_\mu. \tag{10.40}$$

由于系统完整的作用量为 $S = S_g + S_m$，所以结合 (10.38) 式和 (10.40) 式容易得到规范场的场方程

$$-\frac{1}{e^2}(D_\mu F^{\mu\nu})^a = i\big[(D^\mu\Phi)^\dagger T_a\Phi - \Phi^\dagger T_a D^\mu\Phi\big]. \tag{10.41}$$

为了得到场 Φ 的运动方程，我们需要将 S_m 分别对 Φ 和 $\Phi^\dagger$ 变分。为了进行这样的变分，我们需要用到下面的结果来进行分部积分：对于任何两个取基础表示的场 Φ_1 和 Φ_2，有

$$\partial_\mu(\Phi_1^\dagger\Phi_2) = (D_\mu\Phi_1)^\dagger\Phi_2 + \Phi_1^\dagger D_\mu\Phi_2. \tag{10.42}$$

结果不难得到，

$$D_\mu D^\mu\Phi = \frac{\partial\mathscr{U}}{\partial\Phi^\dagger}, \tag{10.43}$$

以及这个方程的厄密共轭方程。

而如果物质场 ϕ 取 $SU(N)$ 的伴随表示。则物质场作用量 S_m 可以取成诸如下面这样，

$$S_m = \int d^4x \Big[\frac{1}{e^2} \mathrm{tr}(D_\mu \phi D^\mu \phi) - \mathscr{U}(\phi^a \phi^a) \Big], \tag{10.44}$$

式中我们已经合适地标度化 ϕ 场，以使得前面出现的系数为 $\frac{1}{e^2}$。注意到 $\mathrm{tr}\big(A[B,C]\big) = \mathrm{tr}\big([A,B]C\big)$，由此不难得到

$$\delta S_m = \frac{2}{e^2} \int d^4x \mathrm{tr}\big([\phi, D^\mu \phi] \delta A_\mu\big). \tag{10.45}$$

结合 (10.38) 式，就可以得到这时候的规范场场方程

$$D_\mu F^{\mu\nu} = [\phi, D^\nu \phi]. \tag{10.46}$$

另外，将这时候的 S_m 对 ϕ^a 变分，就能得到 ϕ 场的场方程

$$\frac{1}{e^2} \big(D_\mu D^\mu \phi\big)^a = \frac{\partial \mathscr{U}}{\partial \phi^a}. \tag{10.47}$$

10.1.4 规范对称性是一种冗余

规范对称性实际上并不是一种真正的对称性，而是我们描述物理系统的方式中的冗余！这是因为，在规范场论中，我们要求所有的物理可观测量都是规范不变的！而在真正的对称性情形中，我们并不会要求所有的物理可观测量都在对称变换下保持不变，我们只是利用对称变换来将物理可观测量进行分类而已。由于要求所有的物理可观测量都规范不变，所以规范对称性只是我们用并非规范不变的量 (诸如 A_μ) 来描述物理系统时，蕴含在这样的描述方式中的冗余。

为什么要求所有的物理可观测量都规范不变呢？在量子层次上，这是因为只有这样我们才能去除系统的一些非物理的量子态 (诸如归一化模长为负数的态)，使得量子力学幺正性得以保持。在经典的层次上，这是因为：从上一小节的各种场方程可以看到，它们在规范变换下都是协变的，也即是在规范变换下都保持形式不变。因此我们每次求出场方程的一个解，就可以得到它的整个一类由规范变换相联系的解。要求物理可观测量规范不变就相当于说，这些解并不是物理上不同的解，而是解的一个等价类，规范场的场方程可以理解为是这样的规范等价类所满足的方程。

那么，为什么不直接用规范不变的量来描述物理系统呢？或者说，引入诸如规范场 A_μ 这样含有冗余的量来描述物理系统有什么好处呢？回答是，好处就在于这样的描述方式可以使得场论的局域性和量子力学幺正性都很明显，也可以使得理论的洛伦兹协变性很明显，而代价就是引入了冗余。为了去除这种描述方式上的冗余，我们就要求所有物理上可观测的量都规范不变。比方说对于电磁场情形，我们知道在物理上，电磁波只有两个横向偏振模式，那为什么不用一个两分量的场描写电磁场，而要用一个四分量的 A_μ 场描写电磁场呢？答案就是，只有这样才能使得理论的洛伦兹协变性变得明显。当然，这样的代价就是多了两个非物理的分量，而它们可以通过要求物理可观测量为规范不变的来进行去除。

10.2 't Hooft-Polyakov 磁单极

Dirac 磁单极需要手动地放入电磁场理论中，特别的，狄拉克磁单极的场在原点处是奇异的。但是 1974 年't Hooft 和 Polyakov 各自独立发现，在一类 $SU(2)$ 规范场论中，磁单极子可以作为系统场位形的处处非奇异的孤立子解而自动出现！他们的这一发现经由 Goddard, Nuyts 和 Olive 的重要推广，进而促成了电磁对偶观念在现代物理中的最终确立[2]。

[电磁对偶将一个以带电荷的场为基本物质场的“电”理论对偶到一个以带磁荷的场为基本物质场的“磁”理论，由于“电”理论的耦合常数 e 和“磁”理论的耦合常数 g 之间满足狄拉克量子化条件 $eg = 2\pi\hbar$，当电耦合常数 e 很大时，磁耦合常数 g 就很小，因此电磁对偶可以将一个强耦合的规范理论对偶到一个弱耦合的规范理论，从而是一种研究强耦合规范理论的利器。]

10.2.1 有限能量场位形的拓扑分类

下面我们来介绍't Hooft-Polyakov 磁单极解。为此我们考虑一个具有 $SU(2)$ 规范对称性的场论系统，它的作用量为

$$S = \int d^4x \Big[\frac{1}{2e^2} \mathrm{tr}\big(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\big) + \frac{1}{e^2}\mathrm{tr}(D_\mu\phi D^\mu\phi) - \frac{\lambda}{4}\big(|\phi|^2 - v^2\big)^2 \Big], \tag{10.48}$$

式中 $|\phi|^2 = \phi^a\phi^a$，$a = 1,2,3$。通常称这个系统中的标量场 ϕ 为**希格斯场**。所以这是一个 $SU(2)$ 规范场与取伴随表示的希格斯场耦合的系统。

仿照第四章中求规范场系统能动量张量的办法，我们可以得到这个系统的能动量张量

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} = {} & \frac{1}{e^2}\big[F^{a\mu}{}_\rho F^{a\nu\rho} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^a_{\rho\sigma}F^{a\rho\sigma}\big] \\ & + \frac{1}{e^2}(D^\mu\phi)^a(D^\nu\phi)^a + \eta^{\mu\nu}\big[\frac{1}{e^2}\mathrm{tr}(D_\mu\phi D^\mu\phi) - \frac{\lambda}{4}\big(|\phi|^2 - v^2\big)^2\big]. \end{aligned} \tag{10.49}$$

从而可得系统的能量密度 $\mathscr{H} = T^{00}$，为

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2e^2}\big[\mathbf{E}^a\cdot\mathbf{E}^a + \mathbf{B}^a\cdot\mathbf{B}^a + (D_0\phi)^a(D_0\phi)^a + (D_i\phi)^a(D_i\phi)^a\big] + \mathscr{U}(|\phi|), \tag{10.50}$$

式中 $\mathscr{U}(|\phi|) = \frac{\lambda}{4}\big(|\phi|^2 - v^2\big)^2$，而“电”场 $\mathbf{E}^a$ 与“磁”场 $\mathbf{B}^a$ 的定义分别为

$$E^a_{\ i} = F^{a0i}, \quad B^a_{\ i} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F^{ajk}. \tag{10.51}$$

很显然，$\mathscr{H} \geq 0$，等号当且仅当 $F^{a\mu\nu} = D^\mu\phi = \mathscr{U}(|\phi|) = 0$ 时才成立。由于使得 $\mathscr{H} = 0$ 的场位形具有最低的能量，所以也称之为真空，或者真空场位形。因此这个系统的真空具有取零值的规范场和一个满足 $|\phi|^2 = v^2$ 的常数希格斯场。不难看出，这种 ϕ 取常数的真空解在完整的 $SU(2)$ 规范变换下通常不能保持不变，而是要形成一个解的等价类。然而，由于

$$e^{-\alpha\frac{\phi}{v}}\phi e^{\alpha\frac{\phi}{v}} = \phi, \tag{10.52}$$

[2]值得注明的是，在现代物理中精确的电磁对偶是 C. Montonen and D. Olive, Phys. Lett. 72B (1977) 117. 提出的，但第 1 个在量子层次上实现这种对偶的例子要等到所谓的 $\mathscr{N} = 4$ 的超对称杨-米尔斯理论。

所以不难看出，对于取真空解的 ϕ，整个真空解在 $e^{-\alpha(x)\frac{\phi}{v}}$ 这种 $U(1)$ 规范变换下都保持不变！传统上人们称这种现象为发生了规范对称性的自发破缺，称真空解将规范对称性从 $SU(2)$ 破缺到了 $U(1)$[3]。

下面我们考察这个系统的有限能量的解。为此先把注意力集中在希格斯场 ϕ 上，很显然，为了使得系统的能量尽可能低，我们需要让 $\mathscr{U}(|\phi|)=0$。由此可以定义所谓的希格斯真空 $\mathscr{M}_H$(请和上一段讨论的真空区分开来)

$$\mathscr{M}_H=\big\{\phi:\mathscr{U}(|\phi|)=0\big\}. \tag{10.53}$$

很显然，$\mathscr{M}_H$ 其实就是由 $\phi^a\phi^a=v^2$ 定义的两维球面，记为 $\mathscr{M}_H=S^2$。

很明显，对于系统的有限能量场位形来说，虽然不需要它处处都处在希格斯真空上，但在空间无穷远处的场位形必须趋于希格斯真空，否则空间无穷远处 $\mathscr{U}(|\phi|)$ 的积分就会趋于无穷大，从而使得总能量发散。三维空间的无穷远为一个两维球面，记为 S^2_∞，因此对于有限能量场位形，其希格斯场在空间无穷远处就定义了一个从 S^2_∞ 到希格斯真空的映射

$$\phi:S^2_\infty\to\mathscr{M}_H=S^2. \tag{10.54}$$

根据覆盖 S^2 的次数，我们可以将这个映射进行拓扑学分类，每一个拓扑类里的映射都无法连续地变化成另一个不同拓扑类里的映射，因为它们覆盖 S^2 的次数不同。在拓扑学中有一个专门的概念描述这种拓扑分类，称为 S^2 的第二同伦群，记为 $\pi_2(S^2)$，根据不同的覆盖次数可知

$$\pi_2(S^2)=\mathbb{Z}. \tag{10.55}$$

给定一个到 S^2 的映射 ϕ，其覆盖 S^2 的次数 n 可以由下式计算，

$$n=\frac{1}{8\pi v^3}\int_{S^2_\infty}\varepsilon_{abc}\phi^a d\phi^b\wedge d\phi^c. \tag{10.56}$$

因此，有限能量场位形可以用 $\pi_2(S^2)$ 来进行拓扑分类！并且和真空场位形的对称性自发破缺类似，在无穷远处的希格斯真空上，规范对称性都从 $SU(2)$ 破缺到了 $U(1)$，这个 $U(1)$ 同样可以记为

$$U(1)=e^{-\alpha(x)\frac{\phi}{v}}, \tag{10.57}$$

与真空场位形的唯一不同是，这里的 ϕ 不是常数，而是到希格斯真空的映射。

另一方面，我们需要注意到，当希格斯场的覆盖次数 $n\neq 0$ 时，为了使得总能量有限，规范场 A_μ 必须取非零的场位形。这是因为，否则，假设 $A_\mu=0$，则这时候协变导数就是

[3]这种传统说法虽然有其方便之处，但也有误导之处，因为规范对称性并不是一种真的对称性，而是一种描述上的冗余，它本身并不会破缺！无非是要多考虑一个真空解的规范等价类而已。严格来说，所谓的规范对称性从 $SU(2)$ 破缺到了 $U(1)$，是指系统发生了相变，规范对称性依然是 $SU(2)$，不过它在“破缺”前后是处在两个不同的相。

普通导数，从而 $(D_i\phi)^2=(\partial_i\phi)^2\sim(\partial_\theta\phi)^2/r^2$，然而由于 $n\neq 0$，因此这时候球坐标极角方向的导数 $\partial_\theta\phi$ 在 S^2_∞ 上必定不为零。如此一来，场位形的总能量中必有如下项

$$\frac{1}{2e^2}\int d^3\mathbf{x}(\partial_i\phi^a)^2\sim\frac{1}{2e^2}\int_{S^2_\infty}d^2\Omega\int drr^2\frac{(\partial_\theta\phi^a)^2}{r^2},\tag{10.58}$$

这个积分是线性发散的，从而会使得场的总能量发散。

其实，从能量密度 $\mathscr{H}$ 的表达式可以看出，为了使得总能量有限，我们必须在空间无穷远处打开一个非零的规范场 A_μ，以抵消 $D_\theta\phi$ 中按 $1/r$ 降低的项，从而使得在空间无穷远处有

$$(D_\mu\phi)^a=\partial_\mu\phi^a+\varepsilon_{abc}A^b_\mu\phi^c\sim 0,\tag{10.59}$$

符号 $\sim$ 表示在空间无穷远处渐近地趋于。利用在空间无穷远处 $\phi^a\phi^a\sim v^2$，从而 $\phi^a\partial_\mu\phi^a\sim 0$，不难验证上面这个方程的一般解为

$$A^a_\mu\sim\frac{1}{v^2}\varepsilon_{abc}\phi^b\partial_\mu\phi^c+\frac{1}{v}\phi^a a_\mu(x),\tag{10.60}$$

式中场 $a_\mu(x)$ 是任意的。

我们可以利用上面 A^a_μ 场的渐近表达式计算规范场强的渐近行为，并得到其中未破缺的 $U(1)$ 部分的规范场强为

$$\mathscr{F}_{\mu\nu}\equiv\frac{\phi^a}{v}F^a_{\mu\nu}\sim f_{\mu\nu}+\frac{1}{v^3}\varepsilon_{abc}\phi^a\partial_\mu\phi^b\partial_\nu\phi^c,\tag{10.61}$$

这里 $f_{\mu\nu}=\partial_\mu a_\nu-\partial_\nu a_\mu$ 正是我们天真地期望的 $U(1)$ 规范场强。但是上面的结果表明，真正的未破缺 $U(1)$ 规范对称性的场强是 $\mathscr{F}_{\mu\nu}$。相比于 $f_{\mu\nu}$，它多了一个非平凡的额外项。正是这个额外项使得我们的解带上了 $U(1)$ 磁荷

$$g=\int_{S^2_\infty}\mathscr{F}=\frac{1}{2v^3}\int_{S^2_\infty}\varepsilon_{abc}\phi^a d\phi^b\wedge d\phi^c=4\pi n,\tag{10.62}$$

这里 n 正是希格斯场在空间无穷远处覆盖希格斯真空 S^2 的次数。

上面的分析告诉我们，任何拓扑非平凡的有限能量场位形都要携带非零的磁荷，因此从空间无穷远处的未破缺 $U(1)$ 规范对称性来看，这样的解就是一个磁单极子！因此通常称这样的解为't Hooft-Polyakov 磁单极。而且，利用 $SU(2)$ 规范场在空间无穷远处满足的方程 $D_\mu F^{\mu\nu}\sim 0$，不难证明 $\mathscr{F}_{\mu\nu}$ 正好满足无源电磁场的麦克斯韦方程，即满足 $\partial_\mu\mathscr{F}^{\mu\nu}=\partial_\mu(*\mathscr{F}^{\mu\nu})=0$，这正是一个狄拉克磁单极子在源点之外所要满足的电磁场方程。所以't Hooft-Polyakov 磁单极在空间足够远处看来，就像是一个狄拉克磁单极子。

我们发现，上面的磁单极子的磁荷满足量子化条件

$$\int\frac{\mathscr{F}}{2\pi}=2n,\tag{10.63}$$

即，它使得 $U(1)$ 规范场的第 1 陈类取偶数，而不是简单地取整数。这是因为，上述理论还允许引入取 $SU(2)$ 群基础表示的物质场，而这种物质场的电荷 $q=\frac{1}{2}$，这样正好满足 $\frac{1}{2}\cdot 2n=n\in\mathbb{Z}$，正如狄拉克量子化条件所要求的那样。

10.2.2 磁单极解

到现在为止，我们还没有真正求解杨-米尔斯场以及希格斯场的场方程，并得到带磁荷的单极子解。实际上，当覆盖次数 $n>1$ 时，人们并不能期望找到相应的静态场位形解，这是因为，$n>1$ 对应有多个磁单极，而这些磁单极之间通常都存在排斥力，从而整个系统不能保持静止。因此，为了将注意力集中在较为简单的静态解上，本小节我们将限于考虑 $n=1$ 情形。

我们可以选取 $A_0=0$ 的规范，从而对于静态场位形，进一步有 $D_0\phi=\partial_t\phi=0$，以及 $E_i^a=F^{a0i}=-\partial_t A_i^a=0$。因此静态场位形的总动能为零，总能量密度完全由势能提供

$$\mathscr{H}=\frac{1}{2e^2}\left[\mathbf{B}^a\cdot\mathbf{B}^a+(D_i\phi)^a(D_i\phi)^a\right]+\mathscr{U}(|\phi|). \tag{10.64}$$

下面，我们假设 $n=1$ 磁单极解的希格斯场取如下形式

$$\phi^a=\frac{x^a}{r^2}h(r),\quad \text{这里}h(r)=\begin{cases}0, & r\to 0\\ vr, & r\to\infty\end{cases}. \tag{10.65}$$

其中 $h(r)$ 在 $r\to 0$ 处的渐近形式是为了使得能量密度中的 $(D_i\phi)^a(D_i\phi)^a$ 项在 $r\to 0$ 处的积分有限。而 $h(r)$ 在无穷远处的渐近形式由 $\phi^a\phi^a\sim v^2$ 确定，并且代入覆盖次数 n 的计算公式 (10.56) 不难验证的确有 $n=1$。

相应的，我们假设规范场 A_i^a 取如下形式

$$A_i^a=-\varepsilon_{aij}\frac{x^j}{r^2}[1-k(r)],\quad \text{这里}k(r)=\begin{cases}1, & r\to 0\\ 0, & r\to\infty\end{cases}. \tag{10.66}$$

这里 $k(r)$ 在 $r\to 0$ 处的渐近形式是为了使得在原点附近规范场能量密度的积分有限。而 $k(r)$ 在 $r\to\infty$ 处的渐近形式是通过上一小节的 (10.60) 式得到的。

现在，我们将上述假设代入下面的场方程

$$D_\mu F^{\mu\nu}=[\phi,D^\nu\phi],\quad \frac{1}{e^2}\left(D_\mu D^\mu\phi\right)^a=\frac{\partial\mathscr{U}}{\partial\phi^a}, \tag{10.67}$$

结果就能得到一组有关于 $h(r)$ 和 $k(r)$ 的微分方程。这组微分方程通常没有解析解，但是人们不难求出它们的数值解。

10.2.3 Bogomolnyi 能限以及 BPS 磁单极

下面我们为每一个拓扑类的有限能量场位形推导一个能量下限，称之为 Bogomolnyi 能限。

首先，注意到能量密度的表达式可以写成

$$\begin{aligned}\mathscr{H}&=\frac{1}{2e^2}\left[(\mathbf{E}^a)^2+(\mathbf{B}^a)^2+(D_0\phi^a)^2+(D_i\phi^a)^2\right]+\mathscr{U}(|\phi|)\\&=\frac{1}{2e^2}\left[(E_i^a-D_i\phi^a\sin\theta)^2+(B_i^a-D_i\phi^a\cos\theta)^2+(D_0\phi^a)^2\right]+\mathscr{U}(|\phi|)\\&+\frac{1}{e^2}\left[E_i^aD_i\phi^a\sin\theta+B_i^aD_i\phi^a\cos\theta\right].\end{aligned} \tag{10.68}$$

其次，注意到 $D_iB_i=0$(Bianchi 恒等式)。从而

$$\frac{1}{v}\int d^3\mathbf{x}B_i^aD_i\phi^a=\frac{1}{v}\int d^3\mathbf{x}\partial_i(B_i^a\phi^a)=\frac{1}{v}\int_{S_\infty^2}(\mathbf{B}^a\phi^a)\cdot d\mathbf{S}, \tag{10.69}$$

结果正是系统在未破缺的 $U(1)$ 规范场中的总磁荷 g(为了强调它是磁荷，下面将改记为 g_m), 即是说

$$g_m=\frac{1}{v}\int d^3\mathbf{x}B_i^aD_i\phi^a. \tag{10.70}$$

类似的，我们可以定义系统的总电荷 (记为 q_e) 为

$$q_e=\frac{1}{v}\int d^3\mathbf{x}E_i^aD_i\phi^a. \tag{10.71}$$

根据以上关于总电荷和总磁荷的定义，以及能量密度的表达式 (10.68), 容易知道系统的总能量 $\mathscr{E}$ 满足

$$\begin{aligned}\mathscr{E}=&\int d^3\mathbf{x}\mathscr{H}=\frac{v}{e^2}\left[q_e\sin\theta+g_m\cos\theta\right]+\\&\frac{1}{2e^2}\int d^3\mathbf{x}\Big\{\left[(E_i^a-D_i\phi^a\sin\theta)^2+(B_i^a-D_i\phi^a\cos\theta)^2+(D_0\phi^a)^2\right]+\mathscr{U}(|\phi|)\Big\}.\end{aligned}$$

由于 $\mathscr{U}(|\phi|)\geq 0$，所以由上面的结果不难看出

$$\mathscr{E}\geq\frac{v}{e^2}\left[q_e\sin\theta+g_m\cos\theta\right]. \tag{10.72}$$

又由于 θ 是任意的，所以我们总可以选一个合适的 $\theta=\theta_m$ ($\tan\theta_m=\frac{q_e}{g_m}$), 使得上式右边等于 $\frac{v}{e^2}\sqrt{q_e^2+g_m^2}$。从而即有

$$\mathscr{E}\geq\frac{v}{e^2}\sqrt{q_e^2+g_m^2}. \tag{10.73}$$

这就是所谓的 Bogomolnyi 能限。

很显然，仅当势函数 $\mathscr{U}(|\phi|)\equiv 0$(即参数 $\lambda=0$) 时，我们才可能达到 Bogomolnyi 能限 (虽然 $\mathscr{U}(|\phi|)\equiv 0$，但依然人为地要求在空间无穷远处有 $\phi^a\phi^a\sim v^2$)。且在 Bogomolnyi 能限上必有如下 BPS 方程成立，

$$E_i^a=D_i\phi^a\sin\theta_m,\quad B_i^a=D_i\phi^a\cos\theta_m,\quad D_0\phi^a=0. \tag{10.74}$$

特别的，对于't Hooft-Polyakov 磁单极子解，我们有 $q_e=0$，从而 $\theta_m=0$, 从而 BPS 方程简化为，

$$E_i^a=0,\quad D_0\phi^a=0,\quad B_i^a=D_i\phi^a. \tag{10.75}$$

这组 BPS 方程的解就称之为 BPS 磁单极。由于以上 BPS 方程使得总能量取极值，因此它的解必定也是这时候 (即参数 $\lambda=0$ 时) 系统场方程的解！但是，场方程是一组二阶偏微分方程，而 BPS 方程是一阶偏微分方程，所以求解 BPS 方程当然是要远为容易的。事实上，对于 $n=1$ 的磁单极子，以上 BPS 方程的解析解为

$$h(r)=vr\coth(vr)-1,\quad k(r)=\frac{vr}{\sinh(vr)}. \tag{10.76}$$

这个解是 Prasad 和 Sommerfield 首先发现的。

势函数 $\mathscr{U}(|\phi|)\equiv 0$ 当然是一个很特殊的要求，它通常是无法满足的。但是，在一些超对称规范场论中，的确自动就有 $\mathscr{U}(|\phi|)\equiv 0$。事实上，BPS 方程和 BPS 磁单极子最自然出现的场合就是在这样的超对称规范场论中。这时候 BPS 磁单极会构成所谓的超对称代数的短多重态 (short multiplets), 从而是受到超对称性保护的。

参考文献

我将首先列举一些我参考过的，或者阅读过的经典场论相关教材和讲义，然后再针对本书讨论过的一些话题推荐进一步的阅读材料。

电动力学书

我主要参考了 Andrew Zangwill 的 Modern electrodynamics。此外也参考了一点 David Tong 的在线讲义 Electromagnetism
http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/em.html

此外中文里面周磊老师的《电动力学》讲义评价也很不错，一并推荐给读者朋友们。

经典场论书

首先当然是朗道的《场论》，虽然我并不推荐现在的读者去通读这本经典著作，因为真的稍微有些老旧了，但它肯定是值得参考的。

其次我稍微参考得多一点的是 Horatiu Nastase 的 Classical Field Theory。这本书的好处是内容足够多，当然坏处就是什么都想讲，导致内容庞杂，主线不清晰。

我还参考了一点 David Tong 的在线讲义 Gauge Theory
http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/gaugetheory.html 不过需要说明的是，这是一本量子场论 (而不是经典场论) 讲义。

专题文献

本书第六章的涉及能量动量张量的一些结论经过了和温伯格《引力论和宇宙学》第二章的相关结论进行对比验证。

本书的第五章参考了温伯格《量子场论》第二卷第 21 章关于超导的相关讨论。

关于磁单极子和电磁对偶，推荐 Jeffrey A. Harvey 的综述文章 Magnetic Monopoles, Duality, and Supersymmetry. 见 arXiv:hep-th/9603086

关于拓扑孤立子 Nicholas Manton 和 Paul Sutcliffe 写了一本不错的专著 Topological Solitons