经典电动力学讲义

2007 年秋季

郑汉青

北京大学物理学院

December 17, 2007

前言

经典电动力学所研究的对象是电磁场的基本性质，运动规律以及它和带电粒子之间的相互作用。电磁场是物质世界的重要组成部分。按照人们现在的理解，物质分为实体（或粒子）以及场两部分，两者的区分不是绝对的，两者之间可以互相转化。

经典电动力学是在 19 世纪建立的。法拉第在 1831 年提出电磁感应定律。据说在他讲演解释自己的发现时，听众中有官员质疑这些发现的用处。法拉第回答道："我还不知道它们有什么用，但是我确信将来你可以因为它而收税。"用现在的话说，科学技术就是生产力。从那时起到 1864 年 Maxwell 提出 Maxwell 方程组，人们从理论上完成了经典电动力学的建立。整个理论中最重要的预言是电磁波的存在，其意义是不言而喻的。

到了二十世纪，人类创立了相对论和量子力学，并在此基础上发展了量子电动力学（ Maxwell 场方程的量子化），从而更进一步发展出了量子规范场论。这些理论在描述自然界的基本规律方面发挥了巨大的威力。根据现今的认识，自然界有四种已知的相互作用：强相互作用（短程力）、电磁相互作用（长程力）、弱相互作用（短程力）和引力相互作用（长程力）。其中，我们已得知电磁相互作用由电动力学或量子电动力学所描述，而对至少除引力外的另外两种相互作用的认识是建立在对量子电动力学的推广上。由此看来，学习电动力学不仅对于从事应用与实践，对于未来继续从事基础科学的前沿探索都具有十分重要的意义。

本课程分为一、二两个部分，大致对应于上、下半学期讲授的内容。第一部分包括了宏观、经典电动力学的基础内容，由五章组成： 1 ）经典电动力学基础， 2 ）静电场问题， 3 ）静磁场问题， 4 ）电磁波的传播， 5 ）电磁波的激发。第二部分涉及到了微观电动力学（包括狭义相对论、运动电荷的场）以及连续介质电动力学、经典场论的一些基础知识。在讲义中加了 * 号的章节不作为基本要求。

这份讲义是根据近年来作者在北京大学讲授电动力学 A 或 B 类课程的讲课笔记以及心得整理而成。感谢北京大学物理学院已退休的张承福教授在我开始讲授这门课时给与的热心的指导和帮助，感谢朱守华、陈晓林、俞允强、刘川、周智勇等同事对于教学内容的许多热心、有益的建议，批评和帮助。

在准备本讲义的过程中主要参考了如下的经典电动力学教材：

1. 郭硕鸿，《电动力学》，第二版，高等学校教材，高等教育出版社， 1997 。
2. 俞允强，《电动力学简明教程》，北京大学物理学从书（教材），北京大学出版社，北京， 1999 。
3. J. D. Jackson, 《经典电动力学》第一版，朱培豫译，人民教育出版社， 1978 。

4. 蔡圣善、朱耘、徐建军，《电动力学》第二版，高等教育出版社， 2002 。
5. 汪映海，《电动力学》第一版，兰州大学出版社， 1995 。

目　录

第一章　经典电动力学基础 **1**

§1.1　静电场方程式 1

§1.1.1　静电场的散度 1

§1.1.2　静电场的旋度 3

§1.2　静磁场方程 4

§1.2.1　静磁场的电流本源与电荷守恒定律 4

§1.2.2　毕奥 – 萨伐尔定律 5

§1.2.3　磁场的散度与旋度 5

§1.3　Maxwell 方程组 6

§1.3.1　电磁感应定律 6

§1.3.2　位移电流 7

§1.3.3　麦克斯韦方程组与 Lorentz 力 7

§1.4　电磁作用下的能、动量守恒 8

§1.4.1　能量守恒 8

§1.4.2　动量守恒 10

§1.5　介质的电磁性质 12

§1.5.1　介质的极化 13

§1.5.2　介质的磁化 14

§1.5.3　介质中的麦克斯韦方程组与介质界面上的电磁规律 17

§1.6　习题 18

第二章　静电场问题 **20**

§2.1　静电势及其微分方程 20

§2.2　偶极子与四极子，多极展开 22

§2.2.1　偶极子与四级子 22

§2.2.2　静电场的多极展开 23

§2.2.3　多级子在外场中的势能 24

§2.3　静电场边值问题的唯一性定理 25

§2.4　静电镜像法 27

§2.5　特解叠加法 30

§2.6　求解静电问题的格林函数方法 32

§2.7　习题 34

第三章 静磁场问题 35
§3.1 磁场的矢势 . . . 35
§3.2 圆电流圈的磁场、磁偶极子 . . . 36
§3.3 静磁场的多极展开 . . . 38
§3.4 磁偶极子在外场中的受力和力矩 . . . 39
§3.5 磁标势 . . . 41
§3.6 习题 . . . 45

第四章 电磁波的传播 46
§4.1 平面电磁波 . . . 46
§4.2 电磁波在介质上的反射与折射 . . . 48
§4.2.1 反射与折射定律 . . . 48
§4.2.2 振幅关系，菲涅耳公式 . . . 50
§4.3 导电介质中的电磁波 . . . 52
§4.3.1 导体中的 Maxwell 方程与电磁波 . . . 52
§4.3.2 趋肤效应与穿透深度，导体表面上的反射 . . . 53
§4.4 有界空间中电磁波的传播 . . . 55
§4.4.1 理想导体边界条件 . . . 55
§4.4.2 谐振腔 . . . 56
§4.4.3 波导管 . . . 57
§4.5 习题 . . . 60

第五章 电磁波的辐射与激发 61
§5.1 电磁场的矢势与标势 . . . 61
§5.2 电磁势的物理意义 * . . . 63
§5.2.1 定域的规范变换 . . . 63
§5.2.2 Aharonov–Bohm 效应 . . . 64
§5.2.3 磁单极的奇异性与电荷量子化 . . . 65
§5.3 推迟势 . . . 67
§5.4 谐振荡电流的电磁场 . . . 68
§5.5 电偶极辐射 . . . 70
§5.6 习题 . . . 72

第六章 狭义相对论基础 73
§6.1 狭义相对论的实验基础 . . . 73
§6.2 相对论的基本原理 . . . 74

§6.2.1 Lorentz 变换 74
§6.2.2 速度合成公式 76
§6.3 时空的物理性质 77
§6.3.1 同时性的相对性 77
§6.3.2 动尺的缩短 78
§6.3.3 动钟变慢 78
§6.3.4 对 Lorentz 变换的实验检验 81
§6.3.5 因果性对速度的限制 81
§6.4 相对论的四维表述 82
§6.5 电磁理论的四维协变形式 84
§6.6 相对论力学 85
§6.7 质能关系与 4- 动量守恒 87
§6.8 习题 90

第七章 运动电荷产生的电磁场 92
§7.1 李纳 – 维谢尔势 92
§7.2 运动电荷的电磁场 94
§7.3 辐射功率 96
§7.3.1 非相对论性带电粒子的辐射 97
§7.3.2 相对论性的辐射 98
§7.4 运动带电粒子辐射的频谱分析 99
§7.5 切伦科夫辐射 * 101
§7.6 辐射阻尼力 103
§7.7 阻尼力的微分积分方程、微观因果性 * 105
§7.8 习题 107

第八章 电磁波在介质中的传播 108
§8.1 自由电子对电磁波的散射 108
§8.2 束缚电子对电磁波的散射 110
§8.3 吸收截面、总截面与光学定理 * 111
§8.3.1 总截面与吸收截面 111
§8.3.2 光学定理 113
§8.4 介质的谐振子模型、对电磁波的吸收与色散 115
§8.5 群速度 118
§8.6 $\vec{D}$ 和 $\vec{E}$ 的关系中的因果性， Kramers–Krönig 关系 120

§8.6.1　因果性导致的介电系数的解析性质 120
§8.6.2　介电系数的渐进行为与色散关系 122
§8.6.3　求和规则 123
§8.7　信号通过色散介质的传播过程 124
§8.8　习题 127

附录一　若干数学准备知识 **1**
§A.1　矢量与二阶张量的基本运算规则 1
§A.2　矢量场论 2
§A.3　球坐标与柱坐标下的梯度算符公式 4
§A.3.1　球坐标 4
§A.3.2　柱坐标 5
§A.4　Dirac δ 函数 5

附录二　电磁场理论的拉格朗日形式 * **8**
§B.1　带电粒子的拉格朗日量与哈密顿量 8
§B.2　电磁场的拉格朗日描述 12

附录三　左手材料 **14**
§C.1　什么是左手材料？ 14
§C.2　负的介电系数、负磁导率以及负的折射率 15
§C.3　左手材料的电磁性质 16

第一章　经典电动力学基础

§1.1　静电场方程式

从电磁学中我们得知，描述静电现象的基本规律是 库仑 定律：

$$\vec{F} = \frac{QQ'\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \ 。 \tag{1.1}$$

它描述了真空中位置差为 $\vec{r}$(距离为 r) 的分别带电量 Q 和 Q' 的两个点电荷之间的相互作用力。其中 ε_0 为真空中的介电系数。在国际单位制中，$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.988\times10^9 I.U.$ 。对于电荷 Q' 来说它所受到的力可以写为 $\vec{F} = Q'\vec{E}$ ，其中

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \tag{1.2}$$

是电荷 Q 所产生的电场强度，是一个与（探测电荷） Q' 无关的量。分析 1.1 式我们也许可以总结出两个结论， 1 ）点电荷之间的相互作用是通过场来传递的； 2 ）场的传播速度是无穷大（又叫做超距作用）。随着我们对电磁规律的认识的逐步加深，我们将认识到第一个结论总是对的。而第二个结论并不正确。原因是方程 1.1 仅仅在描述静态相互作用时才成立，并不能够从里面得到任何关于场的传播速度的正确信息。在后面讨论电磁波的传播时我们将更清楚的看到这一点。

实验表明电场服从线性叠加原理。因此对于多个点电荷所产生的电场强度我们可以把它写成

$$\vec{E} = \sum_i \frac{Q_i\vec{r}_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^3} \ 。 \tag{1.3}$$

不难把上式继续推广到电荷连续分布的情形：

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r'})(\vec{r}-\vec{r'})}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r'}|^3}dV' \ , \tag{1.4}$$

其中 $\rho(\vec{r'})$ 表示在 $\vec{r'}$ 处的电荷分布密度， $dQ(\vec{r'}) = \rho(\vec{r'})dV'$ 。方程 1.4 如图 1.1 表示。

§1.1.1　静电场的散度

我们首先考虑单个点电荷 Q 所产生的电场 $\vec{E}$ ，要求其电场通量

$$\oint_V \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

的值（见图 1.2 ），易知

$$\vec{E}\cdot d\vec{S} = E\cos\theta dS = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta dS \ 。$$

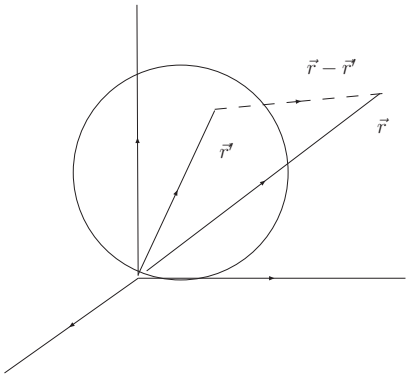


图 1.1: 连续分布的荷电系统在 $\vec{r}$ 处所产生的电场强度。

而

$$\frac{\cos\theta dS}{r^2} = d\Omega$$

恰好为立体角元，[1] 所以

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\oint d\Omega = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{1.5}$$

从上面的推导不难看出，在图 1.2 中如果点电荷处于积分所包含的区间之外，则 $\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0$ 。 不难把 1.5 式推广到多电荷的情形：

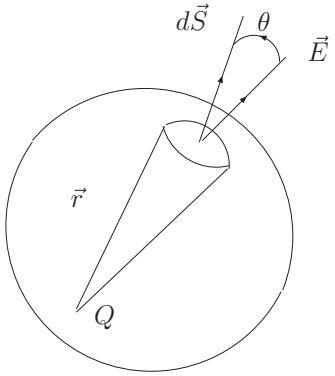


图 1.2: 电场通量的计算。

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i Q_i \ ;$$

以及电荷连续分布的情形：

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV \ 。 \tag{1.6}$$

[1]不难看出在这里平方反比定律起到了关键的作用。如果 $\vec{E}\propto\frac{1}{r^{2+\varepsilon}}$ 我们的推导就不再成立，$\varepsilon\neq 0$ 相当于光子质量不为零的情形，现在光子质量的实验上限对应于 $\epsilon < 10^{-16}$ 。

对于后一式，利用 Gauss 定理 A.8 式，并认识到体积 V 是任意的，我们推出

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \ 。 \tag{1.7}$$

这个方程是由静电场库仑定律 1.4 式导致的微分形式。[2] 值得指出的是，虽然 1.7 式是由 1.4 式得出的，但前者并不与后者等价。原因是 1.7 式只涉及电场强度的散度，作为一个描述矢量场的方程并不是完备的。要完全描述一个矢量场，还需要旋度的知识。这在随后就要讨论。最后我们指出 1.7 式虽然是由静电情况下得到的，但实验上表明它对于一般情况仍然是对的。因此比起 1.4 式， 1.7 式是更适于推广到一般情况下的描述电场的方程。

§1.1.2 静电场的旋度

对于 1.1 式所描述的电场强度，我们来计算它的环量（见图 1.3 ）：

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\oint \frac{\vec{r}\cdot d\vec{l}}{r^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\oint \frac{r\cos\theta dl}{r^3} \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\oint \frac{rdr}{r^3} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\oint d\left(\frac{1}{r}\right) = 0 \ 。 \end{aligned} \tag{1.8}$$

又由于场的叠加性，上式对于一般情况下的静电场也总是成立的。由 Stokes 定理

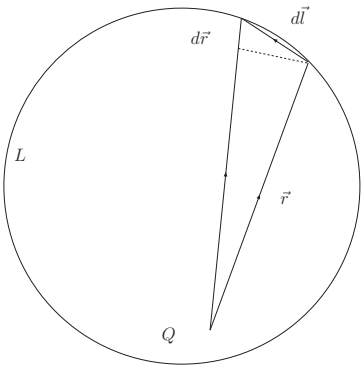


图 1.3: 电场环量的计算。

知道对任意一个曲面 S 都有 $\oint_S(\nabla\times\vec{E})\cdot d\vec{S} = 0$ ，也即

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \ 。 \tag{1.9}$$

[2]利用 δ 函数的性质和 A.16 式，它也可以由如下方法简单地得到

$$\nabla\cdot\vec{E} = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dV' = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r}-\vec{r}')dV' = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \ 。$$

与方程 1.7 式不同的是，这个方程仅在静电场情况下成立。它也可以简单地由下面的推导得到：

$$\nabla \times \vec{E} = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0} \nabla \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' = 0 \ 。$$

方程 1.7 与方程 1.9 一起（由于是微分方程，还要加上无穷远电场强度为零的边界条件）与库仑定律 1.4 等价。这两个方程构成了第 2 章讨论静电问题的基础，也是进一步讨论一般电磁学问题的出发点之一。

例题 *1*：电荷 Q 均匀分布于半径为 a 的球内，求各点 $\vec{E}$ 及 $\nabla \cdot \vec{E}$ 的值。

解答：由对称性，各点 $\vec{E} \propto \vec{r}$，其数值只与 r 有关。 $r > a$ 时，

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

或者

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \ , \quad (r > a)$$

当 $r < a$ 时，半径为 r 球面所包电荷为 $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho = \frac{Qr^3}{a^3}$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E = \frac{Qr^3}{\varepsilon_0 a^3} \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 a^3} \ , \quad (r < a)$$

利用上面结论不难求得电场的散度。请读者自行计算。另外也可以在球坐标系下解微分方程 *1.7* 式，也请读者自行分析。

§1.2 静磁场方程

§1.2.1 静磁场的电流本源与电荷守恒定律

在电磁学中我们知道 安培 的分子电流假说，它认为电流是产生静磁场的唯一来源。而电流与电荷满足一个电磁理论中的基本定律，即电荷守恒定律。事实上，在已知的所有过程中，包括核反应、化学反应、基本粒子过程，电荷守恒定律都是成立的。定义电流密度

$$\vec{j} = \sum_i \rho_i \vec{v}_i \ , \tag{1.10}$$

则通过某曲面的总电流强度为

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \ 。$$

电荷守恒定律的数学表示积分形式是

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \ 。 \tag{1.11}$$

利用 Gauss 定理得到其微分形式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{j}=0\ 。\tag{1.12}$$

若 V 为全空间，则 $\oint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}=0$ ， $\frac{d}{dt}\int_V \rho dV=0$ ，即 **全空间电荷守恒** 。对于稳恒电流情形， $\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$ ，推出 $\nabla\cdot\vec{j}=0$ ，即 **稳恒电流场是无源场** 。

§1.2.2 毕奥 – 萨伐尔定律

毕奥 – 萨伐尔定律说的是，电流之间有作用力，此力由场传递，称为磁场。电流元 $Id\vec{l}$ 在磁场中受力

$$d\vec{F}=Id\vec{l}\times\vec{B}\ 。\tag{1.13}$$

设 $\vec{f}$ 是载荷体所受到的力密度，则上式也可改写为 $\vec{f}=\vec{j}\times\vec{B}$ ，此即 Lorentz 力公式，而 $\vec{B}$ 叫做 **磁感应强度** 。而 $\vec{B}(\vec{r})$ 与（稳恒）电流分布间的关系为

$$\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec{j}(\vec{r}')\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dV'\ 。\tag{1.14}$$

此即毕奥 – 萨伐尔定律。若电流集中在细线圈上， $\vec{j}dV'=\vec{j}dS_ndl=jdS_nd\vec{l}$ 对截面积分得 $Id\vec{l}$ 。此时公式 1.14 改写为

$$\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_L\frac{Id\vec{l}\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\ 。\tag{1.15}$$

与对静电场方程的讨论类似，下一节我们求 $\vec{B}(\vec{r})$ 的旋度与散度，即微分形式。

§1.2.3 磁场的散度与旋度

利用公式 A.15 式中的第 5 式来研究 1.14 式 可以证明

$$\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\int_V\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'\equiv\nabla\times\vec{A}\ 。\tag{1.16}$$

也就是说， $\vec{B}$ 是一个无源场，一定可以写成一个矢量场 $\vec{A}$ 的旋度的形式。 $\vec{A}$ 叫做磁矢势，定义为

$$\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'\ 。\tag{1.17}$$

由式 1.16 式知

$$\nabla\cdot\vec{B}=0\ 。\tag{1.18}$$

这个式子表示磁感应强度是无源的，并且在一般情况下（非稳恒电流）也对。

由 1.17 给出的磁矢势在稳恒电流（ $\nabla\cdot\vec{j}=0$ ）的情况下，具有如下性质：

$$\nabla\cdot\vec{A}=0\ ,\quad \nabla^2\vec{A}=-\mu_0\vec{j}\ 。$$

利用这两个结果可以证明

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \ 。 \tag{1.19}$$

从证明过程可以看出，与 1.18 式不同， 1.19 式只对稳恒电流才成立。在一般条件下，必须加以改造，这在后面会讨论到。

例题 2：电流 I 均匀分布于半径为 a 的无穷长直导线内，求空间磁场的分布及散度和旋度。

解答：在 $r \geq a$ 时，

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\theta \ , \quad \nabla \times \vec{B} = 0$$

$r < a$ 时，

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}\vec{e}_\theta \ , \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \frac{I}{\pi a^2} = \mu_0 \vec{j} \ 。$$

对于旋度的计算验证了我们求得的 $\vec{B}$ 的表达式的正确性。

§1.3 Maxwell 方程组

§1.3.1 电磁感应定律

在前面两节的讨论中，我们分别得到了静电和稳恒电流情形下电场所满足的微分方程

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \ , \quad \nabla \times \vec{E} = 0 \ 。$$

以及磁场（磁感应强度）所满足的微分方程：

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \ , \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \ 。$$

现在的问题是，上面的这些方程在一般情形下仍然对吗？历史上的研究表明，当电荷、电场、电流、磁场不稳恒，而随时间 t 改变时， $\vec{E}$ 与 $\vec{B}$ 可互相激发和转换，构成统一整体 – 电磁场。 Faraday 在 1831 年通过实验发现，变化的磁场可以激发电场。 1864 年 Maxwell 提出了位移电流假说，指出变化的磁场也可以激发电场，最终导致了 Maxwell 方程组的建立。

电磁感应定律说的是：设 $\mathcal{E} = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l}$ 是任意闭路的感应电动势， $\int\int \vec{B} \cdot d\vec{S}$ 是以此闭路为界的曲面上的磁感应通量，则

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int\int \vec{B} \cdot d\vec{S} \ 。 \tag{1.20}$$

由于回路 L 是任取的，可以得到电磁感应定律的微分形式

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \ 。 \tag{1.21}$$

它是 1.9 式在一般情况下的推广形式，它说明 $\vec{E}$ 一般是有旋度的。

§1.3.2 位移电流

我们知道对于稳恒电流有 $\nabla\cdot\vec{j}=0$，而一般情况下 $\nabla\cdot\vec{j}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}\neq 0$。然而方程 1.19 说 $\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}$，两边同时做散度，由于 $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{B})\equiv 0$，我们得到 $\nabla\cdot\vec{j}\equiv 0$，显然在一般情况下是不对的。所以必须对方程 1.19 式加以修改，为此我们尝试在式子的右边加上一项：

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0(\vec{j}+\vec{j}_D)\ .$$

其中的 $\vec{j}_D$ 叫做位移电流，形式待定。那么怎样得到它的具体形式呢？首先我们有

$$\nabla\cdot(\vec{j}+\vec{j}_D)=0\ .$$

另一方面，由流守恒公式 1.12 式知 $\nabla\cdot\vec{j}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$；又由 1.7 式知 $\rho=\varepsilon_0\nabla\cdot\vec{E}$ 推出

$$\nabla\cdot(\vec{j}_D-\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t})=0\ .$$

这个方程的解并不唯一，可以猜测

$$\vec{j}_D=\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\ , \tag{1.22}$$

最终要靠实验来确定。位移电流 1.22 式的物理意义在于它指出了电场变化也能改变磁场。最后我们有

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\ . \tag{1.23}$$

§1.3.3 麦克斯韦方程组与 Lorentz 力

总结前面的讨论，并归纳所有的在一般情况下都成立的方程如下：

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{E}&=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\ ,\\ \nabla\times\vec{B}&=\mu_0\vec{j}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\ ,\\ \nabla\cdot\vec{E}&=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\ ,\\ \nabla\cdot\vec{B}&=0\ .\end{aligned} \tag{1.24}$$

这一组方程式就叫做 麦克斯韦 方程组。它强调了电场与磁场的整体性，预言了电磁波的存在，后者在 1887 年为 Hertz 实验所验证。它也指出了电场和磁场可独立于电荷单独存在，场也具有物质性。麦克斯韦方程组的建立具有划时代的重大意义。

关于麦克斯韦方程组的解，具有如下的唯一性定理[3]： **任意给定区间 V ，给定任意时刻的电荷、电流分布，给定 $\vec{E}$ 、 $\vec{B}$ 的初始和边界条件，则可证明方程组 1.24 的解是唯一的**。证明我们将在 1.4 节讨论电磁场的能量守恒时给出。

Lorentz 力公式在一般地情况下描述场与荷电系统的作用，设力密度为 $\vec{f}$ ，

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} \ 。 \tag{1.25}$$

若是作用到带电点粒子上，则

$$\vec{F} = e\vec{E} + e\vec{v} \times \vec{B} \ 。 \tag{1.26}$$

它适用于任意带电粒子，为实验所证实。

Maxwell 方程组和 Lorentz 力公式一起构成了经典电动力学的理论基础，具有普遍的指导意义和正确性。其他的一些电磁定律如 欧姆 定律、介质极化、磁化规律等都与物质具体结构有关，原则上可用物质结构模型、量子力学等导出，一般来说有近似性。

§1.4 电磁作用下的能、动量守恒

§1.4.1 能量守恒

在 1.3.3 节中，我们指出电磁场也是一种物质形态。那么既然是一种物质形态，它亦应具有能量、动量等等，而且可以和别的能动量相互转化。为了认清电磁场应该具有的这方面性质，我们首先分析一下能量守恒与能量转化定理的一般形式。

引入场能密度 $w = w(\vec{r}, t)$ 表示单位体积场能，场能流密度 $\vec{S}(\vec{r}, t)$ 表示单位时间内垂直流过单位面积的能量。考虑区域 V（边界 S ）内有电荷分布 ρ 、 $\vec{j}$ 。则能量守恒的积分形式应该写为

$$-\oint \vec{S} \cdot d\vec{\sigma} = \int \vec{f} \cdot \vec{v} dV + \frac{d}{dt} \int w dV \ 。 \tag{1.27}$$

它的微分形式是

$$\nabla \cdot \vec{S} + \frac{\partial w}{\partial t} = -\vec{f} \cdot \vec{v} \ 。 \tag{1.28}$$

下面我们试图从麦克斯韦方程出发尝试写出 $w, \vec{S}$ 的表达式。

利用 Lorentz 力公式 1.25 式，有

$$\vec{f} \cdot \vec{v} = (\rho\vec{E} + \rho\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = \rho\vec{v} \cdot \vec{E} = \vec{j} \cdot \vec{E} \tag{1.29}$$

[3]为简化问题起见，这里仅讨论真空中的情形。

注意到磁场并不做功，将 $\vec{j}=\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{B}-\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ 带入上式并整理得

$$\vec{j}\cdot\vec{E}=-\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{B})-\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}-\varepsilon_0\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

将此式与式 1.28 、 1.29 比较不难得出

$$w=\frac{1}{2}(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2)\ ,\quad \vec{S}=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}\ 。\tag{1.30}$$

其中 $\vec{S}$ 亦叫做 Poynting 矢量。

我们得到的结论是，电磁场本身具有能量，电磁作用下能量守恒。最重要的是，电磁能可以通过对带电粒子做功的形式转化为其他形式的能量。对于电磁波，能量是在场中传播的。并且只有同时存在 $\vec{E},\vec{B}$ 时才能够有能流。稳恒情形也可能有能流，比如同轴电缆。最后要注意的是，能量密度与能流密度均为场强的二次函数，并不满足线形叠加原理。

例题 3：电容器缓慢充电。$U=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2\pi a^2h$ ， $\vec{E}=E(t)\vec{e}_z$ ， $\frac{dU}{dt}=\pi\varepsilon_0a^2hE\frac{dE}{dt}$ 。其中 a 是半径， h 是高度。分析一下能量是如何流入的？

解答：利用 1.23 式的积分形式得到 $\vec{B}$ 及能流 $\vec{S}$ ，发现 $\vec{S}$ 是从电容器侧面流入的，并且单位时间内侧面流入的总能量恰好等于 U 对时间的变化率。

关于在 1.3.3 节中提到的麦克斯韦方程组 1.24 式的解的唯一性定理，证明如下：利用反证法，假设存在两组解 $\vec{E}'$ 、 $\vec{B}'$ 和 $\vec{E}''$ 、 $\vec{B}''$ 。根据定理成立的条件得知 $\vec{E}\equiv\vec{E}'-\vec{E}''$ 及 $\vec{B}\equiv\vec{B}'-\vec{B}''$ 满足如下的自由麦克斯韦方程组：

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\ ,\ \nabla\times\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\ ,$$
$$\nabla\cdot\vec{E}=0\ ,\ \nabla\cdot\vec{B}=0\ 。$$

现在讨论场 $\vec{B}$ 、 $\vec{E}$ 组成的系统的能量及其随时间的变化：

$$\begin{aligned}I&=\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_V(\varepsilon_0\vec{E}\cdot\vec{E}+\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\cdot\vec{B})dV\right]\\&=\frac{1}{\mu_0}\int_V\left[\vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{B})-\vec{B}\cdot(\nabla\times E)\right]dV\\&=-\frac{1}{\mu_0}\int_V\nabla\cdot\left[\vec{E}\times\vec{B}\right]dV=\frac{1}{\mu_0}\oint_S(\vec{B}\times\vec{E})\cdot d\vec{S}\ 。\end{aligned}$$

由于 $\vec{B}_{\text{边界}}=\vec{E}_{\text{边界}}=0$ ，推出 $I=0$ ，所以总能量 w 是一个运动积分。由于初条件 $\vec{E}(t=0)=\vec{B}(t=0)=0$ 又得到 $w\equiv0$ 。又由于能量密度是处处正定的，最后推出 $\vec{E}$ ， $\vec{B}$ 恒等于零。

从以上证明可以看出能量的正定性条件起到了关键的作用。这在第 2 章证明静电问题的唯一性定理时还会起到关键的作用。

§1.4.2 动量守恒

电磁场作为一种物质形态，其动量的变化与守恒亦应成立。电磁场的动量与动量流密度应该满足如下形式的方程：

$$\vec{f}+\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}=-\nabla\cdot\vec{\vec{\mathcal{T}}}\ 。 \tag{1.31}$$

其中 $\vec{f}$ 是 Lorentz 力密度，这里也代表场与带电粒子之间的动量交换率，$\vec{g}$ 是场本身的动量密度，$\vec{\vec{\mathcal{T}}}$ 是动量流密度，注意它需要用一个二阶张量来刻画。为得到电磁场的 $\vec{g}$ 与 $\vec{\vec{\mathcal{T}}}$ 的表达式，我们首先将 $\rho,\vec{j}$ 用场量来表示：

$$\begin{aligned}\rho &= \varepsilon_0\nabla\cdot\vec{E}\ ,\\ \vec{j} &= \frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{B}-\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\ ,\end{aligned}$$

并将其带入 1.25 式的右边，得

$$\begin{aligned}\vec{f} &= \varepsilon_0(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E}+\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\vec{B})\times\vec{B}-\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\vec{B}\\ &= \left[\varepsilon_0(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E}+\frac{1}{\mu_0}(\nabla\cdot\vec{B})\vec{B}+\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\vec{B})\times\vec{B}+\varepsilon_0(\nabla\times\vec{E})\times\vec{E}\right]\\ &\quad -\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B})\ 。\end{aligned} \tag{1.32}$$

在上面第二行式右我们加入了 $\nabla\cdot\vec{B}$（ $\equiv 0$ ）一项，这是为了做关于电场和磁场的对称化的运算。分析上式推测出应有 $\vec{g}=\varepsilon_0\vec{E}\times\vec{B}$ 。[4] 如果这个猜测是对的那么上式中方括号的项应代表场的动量转移。具体的计算证实了这一点 $[\cdots]=-\nabla\cdot\vec{\vec{\mathcal{T}}}$，且

$$\vec{\vec{\mathcal{T}}}=-\varepsilon_0\vec{E}\vec{E}-\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\vec{B}+\frac{1}{2}\vec{\vec{I}}\,(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2) \tag{1.34}$$

是一个对称张量。

例题 4：质量为 m 带电量为 q 的粒子在稳恒磁场中运动，试求带电粒子在磁场中的总动量。

解答：电磁动量为

$$\vec{p}_{e.m.}=\int_V\varepsilon_0(\vec{E}\times\vec{B})dV'=\int_V\varepsilon_0\vec{E}\times(\nabla\times\vec{A})dV'\ 。$$

[4]我们发现动量密度与能流密度之间有一个简单的关系：

$$\vec{g}=\frac{1}{c^2}\vec{S}\ 。 \tag{1.33}$$

利用 $\nabla\times\vec{E}=0$（稳恒），$\nabla\cdot\vec{A}=0$，A.15 式中的第二式以及 $\nabla\cdot(\vec{A}\vec{E}+\vec{E}\vec{A})=(\nabla\cdot\vec{A})\vec{E}+\vec{A}\cdot\nabla\vec{E}+(\nabla\cdot\vec{E})\vec{A}+\vec{E}\cdot\nabla\vec{A}$ 推出

$$\vec{E}\times(\nabla\times\vec{A})=\nabla(\vec{A}\cdot\vec{E})-\nabla\cdot(\vec{A}\vec{E}+\vec{E}\vec{A})+\vec{A}(\nabla\cdot\vec{E})$$

注意前两项在作体积分后化为面积分无穷远处趋于零，因此

$$\vec{p}_{e.m.}=\varepsilon_0\int_V\vec{A}(\nabla\cdot\vec{E})dV'=\varepsilon_0\int_V\vec{A}(\rho/\varepsilon_0)dV'=\int_V\vec{A}q\delta(\vec{r}-\vec{r}')dV'=q\vec{A}\ 。$$

所以带电粒子 q 的总动量为

$$\vec{p}=m\vec{v}+q\vec{A}\ 。\tag{1.35}$$

对于动量流密度张量，可写出

$$\frac{d}{dt}\int_V(\vec{p}+\vec{g})dV=-\oint\overrightarrow{\overrightarrow{T}}\cdot d\vec{S}\ 。\tag{1.36}$$

其中 $\vec{p}$ 项表示 V 内机械动量，$\vec{g}$ 项表示电磁动量，所以 $-\oint\overrightarrow{\overrightarrow{T}}\cdot d\vec{S}$ 解释为单位时间内由 V 外电磁场传递给 V 内的动量。由于此动量转移是通过面积分的形式表现的，所以 $-\oint\overrightarrow{\overrightarrow{T}}\cdot d\vec{S}$ 可以理解为 V 外电磁场对 V 的应力。

$$\vec{f}_n\equiv-\vec{n}\cdot\overrightarrow{\overrightarrow{T}}\tag{1.37}$$

表示外法线方向为 $\vec{n}$ 的单位面积上所受的应力。$\overrightarrow{\overrightarrow{T}}$ 也叫做麦克斯韦应力张量。

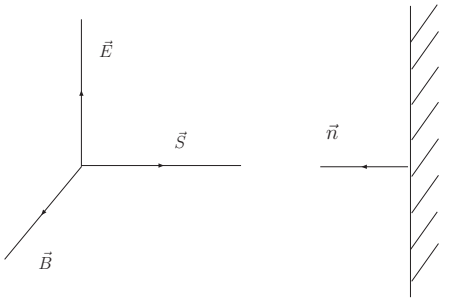


图 1.4: 垂直入射的能流产生的光压。

例题 5: 如图 1.4 所示的均匀电磁流垂直打到一个平面上，完全吸收，求平面所受应力。

解答：

$$\vec{f}_n\ =\ -\vec{n}\cdot\overrightarrow{\overrightarrow{T}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \varepsilon_0(E_n\vec{E} - \frac{1}{2}\vec{n}E^2) + \frac{1}{\mu_0}(B_n\vec{B} - \frac{1}{2}\vec{n}B^2) \\
&= -\frac{1}{2}(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2)\vec{n} = -w\vec{n}
\end{aligned}
$$

即使仅有静电场或静磁场的情形下， $\vec{\vec{\mathcal{T}}}$ 也是存在的。比如仅有静磁场则 $\vec{\vec{\mathcal{T}}} = -\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\vec{B} + \frac{1}{2\mu_0}\vec{\vec{I}}B^2$ 。见图 1.5: a) $\vec{f}_n = -\vec{n}\cdot\vec{\vec{\mathcal{T}}} = \frac{B^2}{2\mu_0}\vec{n} > 0$ 为张力; b) $\vec{f}_n = -\frac{B^2}{2\mu_0}\vec{n} < 0$ 为压力。

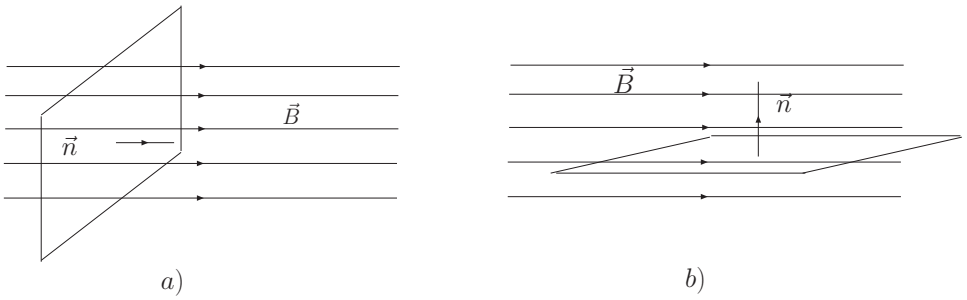


图 1.5: 在静磁场情形下麦克斯韦应力的一个例子。

1900 年 Lebedev 实验上证实了光压的存在。一般情况下的光压非常弱，比如晴天时太阳在黑体表面的压强 $\sim 0.4\mathrm{mg/m}^2$ ，但是强激光或恒星内部等极端物质条件下压强可以很大。

§1.5 介质的电磁性质

介质由大量分子（原子）组成，原子由核与电子组成。所以介质一般由大量带电粒子组成。因此介质内部存在着迅变的不规则电磁场。介质电磁性质的微观机制超出了本课程的范围，虽然我们在本课程后面会作更详细的一些讨论。在这里我们仅从宏观、平均的角度来看待介质。在没有外场时，由于微观运动的无规性，在很多情况下可认为宏观电荷、电流、电磁场等均为零。在存在外场时，介质中正负电荷产生相对位移，极性分子及分子电流的取向产生一定的规则性。这导致了介质中产生了宏观电荷（束缚电荷）和宏观电流（诱导电流），进而导致了宏观电磁场的产生。介质极化、磁化的产生与物质结构有关。 [5]

[5]介质电磁性质的较为详细的介绍可以参见比如北京大学物理学院王稼军老师所写的关于电磁学的 ppt 讲稿。

§1.5.1 介质的极化

对于介质中的非极性分子，没有外场时，正负电荷中心重合（如 CO_2 分子）；而极性分子在没有外场时正负电荷中心不重合（如 H_2O 分子），但取向是随机的。在外场的作用下，两者都会产生宏观电偶极矩。定义 **极化强度**

$$\vec{p} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\triangle V} \ 。 \tag{1.38}$$

不失严格性，设介质中每分子由一对 $\pm q_p$ 的电荷构成，相距为 l 。则极化强度

$$\vec{p} = N q_p \vec{l} = \rho_p \vec{l} \ , \tag{1.39}$$

其中 N 表示单位体积内的偶极子数，$q_p\vec{l}$ 是每一个偶极子的偶极矩，ρ_p 因而是等效的电荷密度、即 **束缚电荷密度** 。

束缚电荷密度与极化强度之间存在关系：

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{p} \ , \ 或积分形式 \ \int_V \rho_p dV = -\oint_S \vec{p} \cdot d\vec{\sigma} \ 。 \tag{1.40}$$

它是电荷守恒的结果。因为对任意面元 $d\vec{\sigma}$ ，$\vec{p} \cdot d\vec{\sigma} = \rho_p \vec{l} \cdot d\vec{\sigma}$ 是偶极子通过面元 $d\vec{\sigma}$ 伸出面元外的电量。注意 $\vec{p}$ 的方向是由负电到正电的方向，与外电场的方向一致。对于非均匀介质，介质内部都出现 ρ_p 。而对于均匀介质，仅在自由电荷附近及介质界面上才出现 ρ_p 。

现在我们讨论一下两种介质分界面上的面束缚电荷密度。见图 1.6 ，在分界面上取面元 $d\vec{\sigma}$ ，两侧一定厚度处取薄层 $\delta l << \sqrt{d\sigma}$ 。 有 $\rho_p dV = \rho_p \delta l d\sigma \equiv \sigma_p d\sigma$ 。

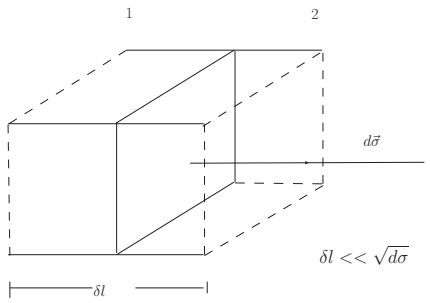


图 1.6: 两个介质界面上的面束缚电荷密度。

而另一方面 $-\oint_S \vec{p} \cdot d\vec{\sigma} = -\vec{p}_2 \cdot d\vec{\sigma} + \vec{p}_1 \cdot d\vec{\sigma}$（侧面可忽略），利用 1.40 式得到：

$$\sigma_p = -\vec{n} \cdot (\vec{p}_2 - \vec{p}_1) \ , \tag{1.41}$$

如果介质 2 为真空时，

$$\sigma_p = \vec{n} \cdot \vec{p} \ , \tag{1.42}$$

其中 $\vec{n}$ 为介质指向真空的法线方向。

方程 1.7 在介质中写为

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_f + \rho_p) \ ,$$

其中 ρ_f 代表作自由电荷密度，定义 **电位移矢量**

$$\vec{D} \equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{p} \ , \tag{1.43}$$

则方程 1.7 在介质中的形式可改写为，

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \ 。 \tag{1.44}$$

$\vec{D}$ 仅是一个辅助量最根本的场仍然是 $\vec{E}$ ， $\vec{D}$ 与 $\vec{E}$ 的关系与物质的结构有关。我们这里仅仅讨论各向同性线形介质，它满足

$$\vec{p} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E} \tag{1.45}$$

和 [6]

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \ 。 \tag{1.46}$$

其中 $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ ， $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$ 叫做 **相对介电系数** ， χ_e 叫做 **介质极化率** 。 在这里不难理解对于所有的介质，有 $\varepsilon_r > 1$ 。

§1.5.2 介质的磁化

电流强度为 i 面积为 $\vec{a}$ 的分子电流分子磁矩为 $\vec{m} = i\vec{a}$ (详细讨论见第三章)，则定义 **磁化强度**

$$\vec{M} = \frac{\sum_i \vec{m}_i}{\triangle V} \ 。 \tag{1.47}$$

当介质中存在外磁场时，分子电流会出现有规则的取向，这样大量的微观分子电流会形成宏观的剩余电流，称为 **磁化电流** 。

类似于 ρ_p 与 $\vec{p}$ 的关系，也可以建立 **磁化电流密度**$\vec{j}_M$ 与 $\vec{M}$ 的关系。计算穿过边界为环线 L 的曲面 S 的磁化电流 I_M ，显然只有挂在 L 上的电流圈有贡献

$$I_M = \int_S \vec{j}_M \cdot d\vec{S} = \oint_L ni\vec{a} \cdot d\vec{l} \ ,$$

在上式中 n 代表单位体积中分子磁矩密度。显然上式中 $\vec{a} \cdot d\vec{l}$ 代表体积元，而落在其中的每一个分子电流环都会对等号左边的积分产生贡献，故上式成立。而上式右边又

$$= \oint n\vec{m} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{M} \cdot d\vec{l} \ ,$$

[6] 如果不是各向同性，则有 $\vec{D} = \overleftrightarrow{\varepsilon} \cdot \vec{E}$ 。

这导致

$$\vec{j}_M = \nabla \times \vec{M} \ 。 \tag{1.48}$$

值得注意的是在介质中，除了磁化电流外，还有因极化强度随时间的变化而产生的 **极化电流** ，

$$\vec{p} = \frac{\sum_i e_i \vec{r}_i}{\triangle V} \ , \ \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \frac{\sum_i e_i \dot{\vec{r}}_i}{\triangle V} \ 。 \tag{1.49}$$

也就是说，在介质中总的电流密度为

$$\vec{j} = \vec{j}_f + \vec{j}_M + \vec{j}_p \ 。 \tag{1.50}$$

在介质中关于磁场的方程也需要做修改。由 1.50 式知

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} = \vec{j}_f + \vec{j}_M + \vec{j}_p + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \ 。$$

由其得到

$$\nabla \times (\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}) = \vec{j}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \ 。$$

令

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \tag{1.51}$$

叫做 **磁场强度** ，则

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \ 。 \tag{1.52}$$

$\vec{H}$ 与 $\vec{B}$ 的关系，与介质的微观结构有关。在这里我们用唯像的方法处理。对各向同性、线形、非铁磁介质有

$$\vec{M} = \chi_M \vec{H} \ , \tag{1.53}$$

其中 χ_M 叫 **磁化率** 。这推出

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \ , \quad \mu = \mu_0 \mu_r \ , \quad \mu_r = 1 + \chi_M \ 。 \tag{1.54}$$

其中 μ 叫做 **磁导率** ， μ_0 叫做 **真空磁导率** 。对于顺磁物质 $\mu_r > 1$, 逆磁物质 $\mu_r < 1$ ，对于一般物质来说 $\mu_r \simeq 1$ 。对于铁磁物质一般来说 $\vec{M} = \vec{M}_0 + \chi_M \vec{H}$ ，$M_0 \neq 0$ 且 χ_M 很大。对于铁磁物质， $\vec{B} = F(\vec{H})$ 有非线性的依赖关系且与历史有关（磁滞现象）。若 $\vec{B} // \vec{H}$ ，可定义 $\mu(H) = \frac{\partial B}{\partial H}$ ，它远远大于 μ_0 ，一般来说 $\mu_r \sim 10^4 - 10^6$, 对于高磁导物质可达 10^6 。

在 1.5.1 一节中，我们讨论过在两种介质的界面上可以引入面极化电荷密度。在这里类似地可以引入 **面磁化电流密度** ，计做 $\vec{\alpha}_M$ 。 取回路如图 1.7 所示， $\vec{k} =$

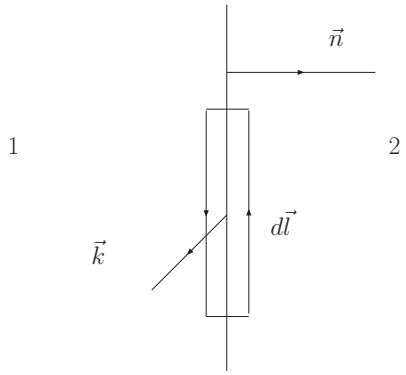


图 1.7: 两个介质界面上的面磁化电流密度。

$\vec{n} \times d\vec{l} \propto d\vec{S}/dS$,

$$\vec{k} \cdot \vec{\alpha}_M = \int_S \vec{j}_M \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l} = d\vec{l} \cdot (\vec{M}_2 - \vec{M}_1)$$

而式左等于 $d\vec{l} \cdot (\vec{\alpha}_M \times \vec{n})$ ，所以上式给出 $\vec{\alpha}_M \times \vec{n} = \vec{M}_2 - \vec{M}_1$ 两边同时叉乘 $\vec{n}$ ，注意根据定义 $\alpha_M \cdot \vec{n} = 0$ ，推出

$$\vec{\alpha}_M = \vec{n} \times (\vec{M}_1 - \vec{M}_2) \text{ 。} \tag{1.55}$$

从微观的角度来看分子磁矩， $\vec{m} = \vec{m}_L + \vec{m}_S$ ，

$$\vec{m}_L = \frac{e}{2m_e}\vec{L} \text{ ， } \vec{L} \text{ 是电子角动量;}$$

$$\vec{m}_S = \frac{e}{m_e}\vec{S} \text{ ， } \vec{S} \text{ 是电子自旋 。}$$

如果 $m = m_L + m_S \neq 0$ ，则称为顺磁质。分子在外磁场作用下趋向于沿外磁场方向排列。抗磁质分子的固有磁矩 $m = m_L + m_S = 0$ ，并不存在由非零的分子固有磁矩规则取向引起的顺磁效应。抗磁质磁性起源于由于电子在外磁场下受洛伦兹力作用，轨道运动在外磁场下的变化，引起角速度进而轨道角动量、进而磁矩的变化。可以证明磁矩的变化总是与外磁场的方向相反因而引起抗磁性。

铁磁质的磁性主要来源于电子自旋磁矩。在没有外磁场的条件下铁磁质中电子自旋磁矩可以在小范围内“自发地”排列起来，形成一个个小的“自发磁化区”——磁畴。自发磁化的原因是由于相邻原子中电子之间存在着一种交换作用（一种量子效应），使电子的原子磁矩平行排列起来而达到自发磁化。[7]

[7]关于铁磁材料性质的介绍可以参见 韦丹 所著《材料的电磁基础》，科学出版社， 2005 年 7 月第一版。

§1.5.3 介质中的麦克斯韦方程组与介质界面上的电磁规律

总结前面的讨论，写出在介质中麦克斯韦方程组为

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\ ,\\ \nabla\times\vec{H} &= \vec{j}_f+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\ ,\\ \nabla\cdot\vec{D} &= \rho_f\ ,\\ \nabla\cdot\vec{B} &= 0\ 。\end{aligned}\tag{1.56}$$

这里强调一下在上面的方程组中电荷密度与电流密度都是自由的。且修改后的麦克斯韦方程组并不完备，因为还需要知道 $\vec{D}$ 与 $\vec{E}$ ， $\vec{H}$ 与 $\vec{B}$ 的关系（在导体中 $\vec{j}=\sigma\vec{E}$ ）等才是完备的。

在不同介质的界面上，由于存在面电荷、面电流密度，两边的场量将产生突变，微分形式的方程组 1.56 不再合适。此时使用积分形式的方程组才是恰当的：

$$\begin{aligned}&\oint_S\vec{D}\cdot d\vec{S}=Q_f\ ,\\ &\oint_L\vec{E}\cdot d\vec{l}=-\int_S\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}\\ &\oint_S\vec{B}\cdot d\vec{S}=0\\ &\oint_L\vec{H}\cdot d\vec{l}=\int_S(\vec{j}_f+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t})\cdot d\vec{S}\ 。\end{aligned}\tag{1.57}$$

由这一组方程出发，可以得到介质分界面上的电磁规律的表达式，这些规律可以看成是麦克斯韦方程组积分形式的简化表现。注意到在界面上可以存在自由的面电荷密度（ σ_f ）和自由的面电流密度（ $\vec{\alpha}_f$ ），得到的结果如下：

$$\begin{aligned}&\vec{n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\sigma_f\ ,\\ &\vec{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0\ ,\\ &\vec{n}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0\ ,\\ &\vec{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{\alpha}_f\ 。\end{aligned}\tag{1.58}$$

从这些式子得知， **电场的切线方向与磁场的法线方向连续** 。前三个式子的证明省略，请读者自行验证。在图 1.8 中分别画出了为证明这 4 个公式所取的路径。由 1.58 式中的第 4 式和图 1.8d 知，由于取薄层，$\int_S\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}=\frac{d}{dt}\int_S\vec{D}\cdot d\vec{S}\to 0$ 。$\vec{k}=\vec{n}\times d\vec{l}$，$\int_S\vec{j}\cdot d\vec{S}=\vec{\alpha}_f\cdot(\vec{n}\times d\vec{l})=(\vec{\alpha}_f\times\vec{n})\cdot d\vec{l}$ 。另一方面又有 $\oint_L\vec{H}\cdot d\vec{l}=(\vec{H}_2-\vec{H}_1)\cdot d\vec{l}$，由于 $d\vec{l}$ 可取垂直于 $\vec{n}$ 的平面上的任意方向，所以得到 $\vec{\alpha}_f\times\vec{n}=\vec{H}_{2t}-\vec{H}_{1t}$ ，或 1.58 式。

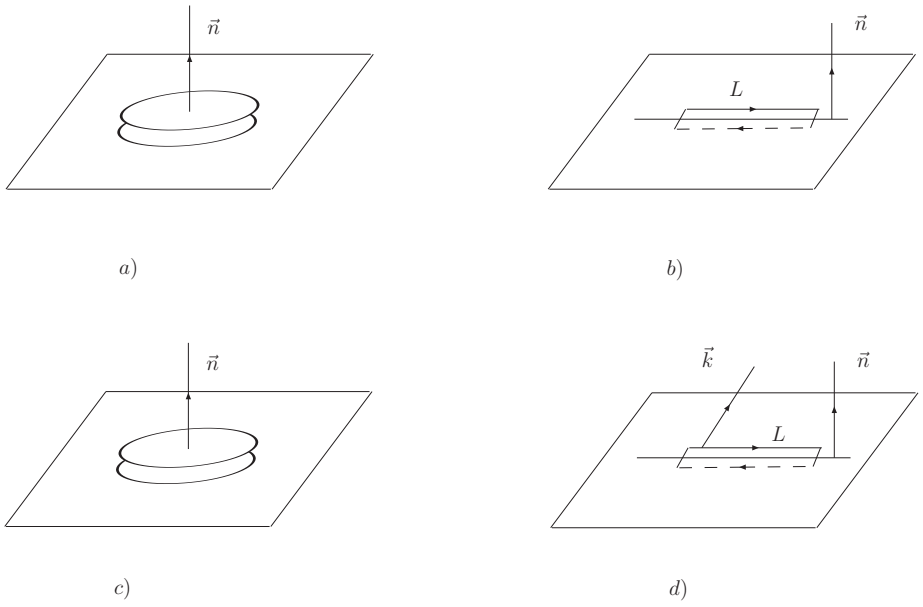


图 1.8: 介质界面上的电磁规律。

在介质中存在外电磁场时，介质的极化和磁化也需要能量，一般将其归结为场能的一部分，称为总电磁能。在介质中也可以建立电磁场的能动量守恒关系式，在这里我们不再给出推导，而仅仅满足于给出结论。

介质中的能量守恒关系式是

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \vec{E}\times\vec{H}\ , \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= \vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\ 。 \end{aligned} \tag{1.59}$$

对于线性各向同性介质，$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$，$\vec{B}=\mu\vec{H}$，有

$$w=\frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{H}\cdot\vec{B})\ 。 \tag{1.60}$$

动量守恒关系式为

$$\begin{aligned} \vec{g} &= \vec{D}\times\vec{B}\ , \\ \vec{\vec{\mathcal{T}}} &= \frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{B}\cdot\vec{H})\,\vec{\vec{I}}-\vec{D}\vec{E}-\vec{B}\vec{H}\ 。 \end{aligned} \tag{1.61}$$

§1.6 习题

1. 请证明附录中的 A.14 、 A.15 、 A.16 诸式。

2. 有中心为 O，半径为 R 的均匀带电球，电荷密度为 ρ，在 O' 处挖去一个半径为 $R/2$ 的空洞，$OO' = R/2$，试算出空洞内的电场强度。(提示：用迭加原理)
3. 应用高斯定理证明
$$\int_V dv \nabla \times \vec{f} = \oint_S d\vec{a} \times \vec{f}.$$
利用斯托克斯定理 (用曲面 S 积分来表示其边界 L 上的曲线积分)
$$\oint_L \vec{f} \bullet d\vec{l} = \int_S \nabla \times \vec{f} \bullet d\vec{a},$$
证明
$$\int_S d\vec{a} \times \nabla\varphi = \oint_L d\vec{l}\varphi$$
4. 证明均匀介质内部的束缚电荷密度 $\rho_p = -(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\rho_f$，其中 ρ_f 为自由电荷密度。
5. 已知一个电荷系统的偶极矩定义为
$$\vec{p}(t) = \int_V \rho(\vec{r}', t)\vec{r}' dv',$$
利用电荷守恒定律 $\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ 证明 $\vec{p}$ 的变化率为
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \int_V \vec{J}(\vec{r}', t) dv'.$$
6. 平行板电容器内有两层介质，厚度分别为 l_1, l_2，介电系数为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$，加在两板上的电动势为 $\mathcal{E}$，

(1) 求出电容器两极上的自由电荷面密度;

(2) 若介质漏电，电导率分别为 σ_1, σ_2，试求在电流达到稳恒时两极上及介质间的自由电荷面密度。
7. 一截面半径为 a 的无限长圆柱形直导线，电导率为 σ，其内的电流密度 $\vec{J}$ 均匀、稳定。证明单位时间流入导线的电磁能量等于导线内单位时间消耗的 Joule 热 (即为 $Q = I^2R$, 其中 $R = l/(\pi a^2\sigma)$)。
8. 试推导在线性、各向同性介质中的能量密度， Poynting 矢量 (能流密度)、动量密度和 Maxwell 胁强张量的表达式为： $w = \frac{1}{2}(\epsilon E^2 + \mu H^2)$, $\vec{S} = E \times H$, $\vec{g} = \mu\epsilon\vec{E} \times H$, $\mathcal{T}_{ij} = \epsilon E_i E_j + \mu H_i H_j - \delta_{ij} w$ 。

第二章　静电场问题

所谓静电问题，指的是 $\vec{B}=0$，其余别的物理量与时间无关的问题。所以我们讨论的是一个稳定系统中的静电场的相互作用。有意思的是存在着一个简单的定理，指出仅靠静电力不可能维持一个系统的稳定。

证明：不失一般性我们讨论在多个点电荷组成的静电系统里某一个带电 q 的点电荷粒子的受力稳定性问题。由于静电力是保守力，可以写出带电粒子 q 在外电场中的势能，[1] 为 $U(\vec{x})=q\varphi(\vec{x})$ 其中 $\vec{x}$ 是 q 的坐标，现在将粒子 q 作一虚位移 $\delta\vec{x}$，则

$$\delta U=\sum_i\frac{\partial U}{\partial x_i}\delta x_i+\sum_{i,j}\frac{\partial^2U}{\partial x_i\partial x_j}\delta x_i\delta x_j+\cdots$$

根据稳定性要求，$\frac{\partial U}{\partial x_i}=0$，$\operatorname{trace}\left(\frac{\partial^2U}{\partial x_i\partial x_j}\right)>0$。而后者是一个 3×3 矩阵求迹，等于 $\nabla^2\varphi(x)$，由于 $\varphi(x)$ 是由点电荷的库仑势叠加而成的，所以 $\nabla^2\varphi(x)=0$。也就是说，点电荷 q 不可能在静电场中达到稳定平衡。

所以我们所说的静电场问题，都是在宏观、唯像学水平上的讨论。并不去管是什么使得静电系统可以稳定存在这一问题。

§2.1　静电势及其微分方程

静电问题的出发点是方程

$$\nabla\times\vec{E}=0\,,\quad \nabla\cdot\vec{D}=\rho\,。\tag{2.1}$$

由 $\nabla\times\vec{E}=0$ 知 $\int\vec{E}\cdot d\vec{l}=0$，所以可引入势

$$\varphi(p_2)-\varphi(p_1)\equiv=-\int_{p_1}^{p_2}\vec{E}\cdot d\vec{l}\,。\tag{2.2}$$

显然这一定义与路径无关，同时我们看出 φ 在某一点的绝对值没有意义，仅其变化才有物理意义。由 2.2 式知 $\delta\varphi=\nabla\varphi\cdot d\vec{l}=-\vec{E}\cdot d\vec{l}$ 并由此得到

$$\vec{E}=-\nabla\varphi\,。\tag{2.3}$$

若令 $\varphi(\infty)=0$，则 $\varphi(\vec{r})=\int_r^\infty\vec{E}\cdot d\vec{l}$。由此可得到点电荷所产生的势为

$$\varphi(\vec{r})=\int_{\vec{r}}^\infty\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0r'^3}\vec{r}'\cdot d\vec{r}'=\int_{\vec{r}}^\infty\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0r'^2}dr'=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0r}\,。$$

[1] 我们在 2.2.3 节中将会对势能这一概念有更深刻的认识。

或则直接把 $\vec{E}$ 写成梯度的形式也可得到上面结果。对于一般电荷分布的情况

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}')dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \ 。 \tag{2.4}$$

例题 *1*：无限长直导线上均匀分布线电荷密度 τ，求它产生的电势。
解答：以直导线为 z 轴，设距直导线的垂直距离为 R 则利用 *2.4* 式得

$$\varphi(R) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau dz}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2+R^2}} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln(z+\sqrt{z^2+R^2})|_{-\infty}^{+\infty} \to \infty!$$

得到无穷大的结果是因为在本题条件下，场强在无穷远处（沿 z 方向）并不趋于零，造成电势的发散。但这并不成为问题，因为我们曾指出只有电势差才有物理意义，因此我们求相对于某一固定点 R_0 的电势差： $\varphi(R)-\varphi(R_0)$ 这个量可以算出来，结果为 $-\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R}{R_0}$ 。这样 $E_R = -\frac{\partial\varphi}{\partial R} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 R}$ ，别的分量为零。事实上，利用高斯定理和柱对称性可以很容易的得到这个结果。

引入了电势后，可以把 2.1 改写成 φ 的微分方程：由 $\nabla\cdot\vec{D}=\rho$ 和 $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ 得到泊松方程：

$$\nabla^2\varphi = -\rho_f/\varepsilon \ 。 \tag{2.5}$$

为了利用泊松方程求解静电问题，我们还需要建立 φ 场在不同介质界面上的连接条件。首先在介质 1 和介质 2 的界面两侧电势是连续的，即

$$\varphi_1 = \varphi_2 \ 。 \tag{2.6}$$

原因是 $\delta\varphi = -\vec{E}\cdot d\vec{l}$，当 $1\to 2$ 时 $d\vec{l}\to 0$，由于场是有限的（因而做功趋于零），电势不可能是间断的。但是 $\vec{E}$ 的法线方向不连续，由方程组 1.58 中的第一式出发，易得（ $\vec{n}$ 从介质 1 指向介质 2 ）：

$$\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} - \varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = -\sigma_f \ 。 \tag{2.7}$$

上式也可以写成对称的形式， $\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n_2}+\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n_1}=\sigma_f$ 。此时 $\vec{n}_1$ 、 $\vec{n}_2$ 分别指向 “外”。

对于导体，由欧姆定律知道

1. 导体内部 $\vec{E}=0$ 。
2. 导体内部不带电，电荷只能分布在导体表面上。
3. 导体表面 $\vec{E}=\vec{E}_n$ ， $\vec{E}_t=0$ ，所以整个导体表面为等势面，亦即整个导体等势。

对于导体 – 介质界面电势的连接条件是 $\varphi=$ 常数， $\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial n}=-\sigma$ 。在建立了边界条件以后，结合泊松方程就可以求解各种静电问题。

§2.2 偶极子与四极子，多极展开

一个总体电中性的系统，由于电荷分布的存在，仍然可以有剩余的电场和相互作用。这一节中我们简略地讨论一下这种情况。

§2.2.1 偶极子与四级子

假设存在两个点电荷（ $q,\vec{r}_+$ ）和（ $-q,\vec{r}_-$ ），则

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_+|}-\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_-|}\right),$$

在 $\vec{r}>>\vec{r}_+,\vec{r}_-$ 的距离上观测其效应，由于 $\vec{r}>>\vec{r}_+$ ，可以对第一项在 $\vec{r}_+=0$ 处作 Taylor 展开。一般的三维 Taylor 展开的公式是

$$f(\vec{r}-\vec{r}_0)=f(\vec{r})-\vec{r}_0\cdot\nabla f(\vec{r})+\frac{1}{2}\vec{r}_0\vec{r}_0:\nabla\nabla f(\vec{r})+\cdots\ 。\tag{2.8}$$

现在 $f=\frac{1}{r}$ ，利用 A.16 式可得 $\nabla\frac{1}{r}=-\frac{\vec{r}}{r^3}$ ， $\nabla\nabla\frac{1}{r}=\frac{1}{r^5}(3\vec{r}\vec{r}-r^2\overrightarrow{\overrightarrow{I}})$ ，于是

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}=\frac{1}{r}+\frac{\vec{r}_0\cdot\vec{e}_r}{r^2}+\frac{(3\vec{r}_0\vec{r}_0-r_0^2\overrightarrow{\overrightarrow{I}}):\vec{e}_r\vec{e}_r}{2r^3}+\cdots\ 。\tag{2.9}$$

同理可展开 $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_-|}$ ，得 **偶极子** 的电势的表达式（ $\vec{e}_r\equiv\frac{\vec{r}}{r}$ ）：

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{e}_r}{r^2}\ ,\tag{2.10}$$

其中 $\vec{p}=q(\vec{r}_+-\vec{r}_-)=q\vec{a}$ 与坐标原点的选取无关。此时电场强度为

$$\vec{E}=-\nabla\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\vec{p}\cdot\vec{e}_r\vec{e}_r-\vec{p}}{r^3}\ 。\tag{2.11}$$

也可以讨论偶极子连续分布的情况（如介质情形）。此时

$$\begin{aligned}\varphi&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\vec{p}(\vec{r}')\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dV'\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint\frac{\vec{p}(\vec{r}')\cdot d\vec{S}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{-\nabla'\cdot\vec{p}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'\ 。\end{aligned}\tag{2.12}$$

第二个等式右边第一项表示面电荷密度的贡献，第二项表示体电荷密度的贡献。上式说明两种描述方法的等价性（不要重复考虑同一效应）。

四级子可以认为是由两个大小相等方向相反的近邻偶极子构成，可有不同的排列方法。图 2.1 给出了两种基本位形： a 和 b 。对电势作多极展开后（必须展开到第三项，前面两项严格相消为零）整理可得

$$a)\ \varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\vec{x}_0\vec{x}_1+\vec{x}_1\vec{x}_0):(3\vec{e}_r\vec{e}_r-\overrightarrow{\overrightarrow{I}})}{2r^3}\ ,\quad b)\ \varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\vec{x}_0\vec{y}_0+\vec{y}_0\vec{x}_0):(3\vec{e}_r\vec{e}_r-\overrightarrow{\overrightarrow{I}})}{2r^3}\ 。$$

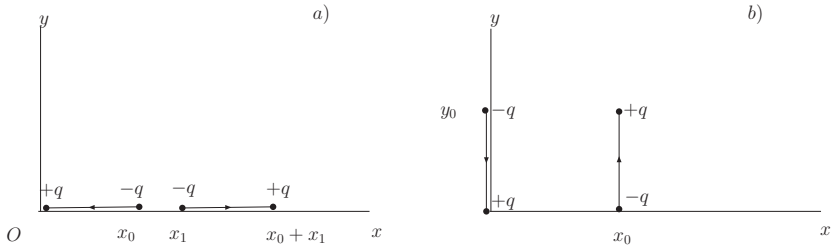


图 2.1: 电四级矩的两个例子。

定义二极矩 $\vec{\vec{\mathcal{D}}} \equiv \sum_n q_n \vec{r}_n \vec{r}_n$ ，可以把上面两式写成统一的表达式

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{\vec{\mathcal{D}}} : (3\vec{e}_r\vec{e}_r - \vec{\vec{I}})}{2r^3} \ 。 \tag{2.13}$$

事实上这一表达式可以直接从三维 Taylor 展开公式得出。显然， $\vec{\vec{\mathcal{D}}}$ 是一个对称张量， $\mathcal{D}_{ij} = \mathcal{D}_{ji}$ ，即只有六个独立分量。对于上面讨论的两种特殊情况， a) $\mathcal{D}_{xx} = 2qx_0x_1$ ，其余分量为零， b) $\mathcal{D}_{xy} = \mathcal{D}_{yx} = qx_0y_0$, 其余分量为零。二阶张量可以看成一个矩阵，一般来说此二阶张量的迹并不为零。但是在 $\vec{\vec{\mathcal{D}}}$ 中加上一项正比于单位张量的项并不对物理产生任何影响，因为 $a\vec{\vec{I}} : (3\vec{e}_r\vec{e}_r - \vec{\vec{I}}) = a(3\vec{e}_r\vec{e}_r - 3) = 0$ 。所以可以改造 $\vec{\vec{\mathcal{D}}}$ 的定义使其变成无迹的，以移去一个多余的自由度。定义

$$\vec{\vec{D}} \equiv 3\vec{\vec{\mathcal{D}}} - \mathrm{tr}\{\vec{\vec{\mathcal{D}}}\}\vec{\vec{I}} \ 。 \tag{2.14}$$

此时 $\mathrm{tr}\vec{\vec{D}} = 0$ ，所以只有五个独立分量，

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{\vec{D}} : \vec{e}_r\vec{e}_r}{2r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{\vec{D}} \cdot \vec{e}_r}{2r^3} \ 。 \tag{2.15}$$

§2.2.2 静电场的多极展开

假设电荷分布在有限区域，讨论它在远处产生的场，可证

$$\text{总场} = \text{单极场} + \text{偶极场} + \text{四极场} + \cdots \ 。$$

上面结论可以通过对静电势 2.4 式作如 2.9 式的多极展开得到。结果是

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots \ ,$$

其中

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} \ , \ \ Q = \int \rho(\vec{r}')dV'; \tag{2.16}$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{e}_r}{r^2}\ ,\ \ \vec{p} = \int \rho(\vec{r}')\vec{r}'dV'; \tag{2.17}$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{\overrightarrow{D}} : \vec{e}_r\vec{e}_r}{2r^3}\ ,\ \ \overrightarrow{\overrightarrow{D}} = \int \rho(\vec{r}')(3\vec{r}'\vec{r}' - r'^2\overrightarrow{\overrightarrow{I}})dV'\ 。 \tag{2.18}$$

其中 2.17 式中的 $\vec{p}$ 是以前的特例的推广， $\vec{p} = \sum_n q_n\vec{r}_n$ 。对于多极展开，需要选取一个参考点来做展开，这个选取有一定的任意性，当 $Q = 0$ 时 $\vec{p}$ 值与参考点选取无关，但 $Q \neq 0$ 时， $\vec{p}$ 的值与参考点有关。当然总的电势仍然是不变的。选取好的参考点可以使多极展开的收敛性变的更好。 2.18 式中的四极矩的表达式也是在一般电荷情况下的推广。关于多极展开的收敛性可以做一个简单的定性分析，设 r_0 是带电系统的尺度，则

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_0} \sim \frac{\varphi_2}{\varphi_1} \sim \cdots \sim \frac{r_0}{r}\ 。 \tag{2.19}$$

所以仅当 $r_0 << r$ 时多极展开才是好的，此时通常在前面的场均为零时才考虑后面的项，一般也不再用到八极场。

§2.2.3 多级子在外场中的势能

在力学中我们学习过，因为静电场是保守力场可以引入势能 $V = q\varphi$ 。利用现在的观点我们可以分析一下此能量是什么？事实上此静电势能是总场能的一部分。设点电荷在 $\vec{E}_{外}$ 中，则

$$\begin{aligned} U &= \frac{\varepsilon}{2}\int_\infty |\vec{E}_{外} + \vec{E}|^2 dV \\ &= \frac{\varepsilon}{2}\int_\infty |\vec{E}_{外}|^2 dV + \frac{\varepsilon}{2}\int_\infty |\vec{E}|^2 dV + \varepsilon\int_\infty \vec{E}_{外}\cdot\vec{E}dV\ 。 \end{aligned} \tag{2.20}$$

注意前两项是恒定的可以忽略不考虑，而 $\varepsilon\vec{E}_{外}\cdot\vec{E} = -\varepsilon\vec{E}\cdot\nabla\varphi_{外} = -\varepsilon\nabla\cdot(\varphi_{外}\vec{E}) + \varepsilon\varphi_{外}\nabla\cdot\vec{E}$ 。全散度项带回积分后没有贡献，又利用 $\varepsilon\nabla\cdot\vec{E} = \rho$ ，得到

$$U = \int_\infty \rho(\vec{r})\varphi_{外}dV + const.\ 。 \tag{2.21}$$

对于点电荷推出 $U = q\varphi_{外} + const.$ 。应该指出的是 2.21 式仅对任意刚性电荷系统才对。否则自作用的势能也会变化即 2.20 式中的 E^2 项会有变化。对于非刚性分布的电荷系统，应该把 2.21 式中的第二项找补回来：

$$\begin{aligned} U_{自} &= \frac{\varepsilon}{2}\int_\infty E^2 dV = -\frac{\varepsilon}{2}\int_\infty \vec{E}\cdot\nabla\varphi_{自}dV \\ &= \frac{\varepsilon}{2}\int \varphi_{自}\nabla\cdot\vec{E}dV + 表面项\ , \\ &= \frac{1}{2}\int_\infty \rho\varphi_{自}dV\ , \end{aligned}$$

或

$$U = \int_\infty \rho(\varphi_{外} + \frac{1}{2}\varphi_{自})dV \ 。 \tag{2.22}$$

下面我们讨论多极场在外场中的运动。

假设电荷分布区域很小，坐标原点设在该区域内，在该区外场缓变。对外场在坐标原点作展开：

$$\varphi_{外}(\vec{r}) = \varphi_{外}(0) + \vec{r}\cdot(\nabla\varphi_{外})_0 + \frac{1}{2}\vec{r}\vec{r} : (\nabla\nabla\varphi_{外})_0 + \cdots$$

带入势能表达式 2.20 式，

$$\begin{aligned} U &= Q\varphi_{外}(0) + \vec{p}\cdot(\nabla\varphi_{外})_0 + \frac{1}{2}\vec{\vec{\mathcal{D}}} : (\nabla\nabla\varphi_{外})_0 + \cdots \ , \\ &= Q\varphi_{外}(0) + \vec{p}\cdot(\nabla\varphi_{外})_0 + \frac{1}{6}\vec{\vec{D}} : (\nabla\nabla\varphi_{外})_0 + \cdots \ 。 \end{aligned} \tag{2.23}$$

最后一个等式成立是因为 $\vec{\vec{I}} : (\nabla\nabla\varphi_{外})_0 = (\nabla^2\varphi_{外})_0 = 0$ 。

从 2.23 式读出

$$\begin{aligned} U_{偶} &= \vec{p}\cdot(\nabla\varphi_{外})_0 = -\vec{p}\cdot\vec{E}_{外} \ , \\ U_{四} &= -\frac{1}{6}\vec{\vec{D}} : \nabla\vec{E}_{外} \ 。 \end{aligned} \tag{2.24}$$

这些形式的近似常用于微观系统。

在 2.24 式基础上还可以讨论偶极子在外场中的受力和力矩。 $\vec{F} = -\nabla U = \nabla(\vec{p}\cdot\vec{E}_{外})$ 。利用 A.15 式第二式，由于 $\vec{p}$ 是常矢量，对 $\vec{p}$ 的微分等于零，且 $\nabla\times\vec{E} = 0$，得到

$$\vec{F} = \vec{p}\cdot\nabla\vec{E}_{外} \ , \tag{2.25}$$

也就是说，仅当外电场不均匀时偶极子才会受力（此原理可用于选矿）。而力矩则与 $\vec{p}$ 的取向有关。设 $\vec{p}$ 与 $\vec{E}_{外}$ 的夹角为 θ ， $U = -pE\cos\theta$ ，而力矩 $N = -\frac{\partial U}{\partial\theta} = -pE\sin\theta$ ，即

$$\vec{N} = \vec{p}\times\vec{E}_{外} \ 。 \tag{2.26}$$

§2.3 静电场边值问题的唯一性定理

定理：设 V 内给定自由电荷分布 $\rho(\vec{r})$ ，边界 S 上给定边界条件 1 ） $\varphi|_S$ ，或者 2 ） $\frac{\partial\varphi}{\partial n}|_S$ ，则 V 内场唯一确定。

证明：首先来看 V 仅由（各种）介质组成的情形。设存在 φ'， φ'' 两组解，即它们都满足静电场方程 2.5 式，令 $\Phi = \varphi' - \varphi''$ 则在全空间 Φ 满足

$$\nabla^2 \Phi = 0 \ ,$$

在介质内边界上（因为区域 V 可能是由不同介质所组成的）有

$$\Phi_i = \Phi_j \ , \quad \textbf{且} \quad \varepsilon_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} = \varepsilon_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} \ 。 \tag{2.27}$$

而在 V 的外边界 S 上，有

$$\Phi|_S = 0 \ , \quad 或 \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n}|_S = 0 \ 。 \tag{2.28}$$

现考虑在由介质 i 组成的子区域 V_i（边界为 S_i ）上的积分，

$$\int_{V_i} \varepsilon_i (\nabla \Phi)^2 dV = \int_{V_i} \nabla \cdot (\varepsilon_i \Phi \nabla \Phi) dV = \oint_{S_i} \varepsilon_i \Phi \nabla \Phi \cdot d\vec{S} \ 。$$

把所有子区域加起来，得

$$\sum_i \int_{V_i} \varepsilon_i (\nabla \Phi)^2 dV = \sum_i \oint_{S_i} \varepsilon_i \Phi \nabla \Phi \cdot d\vec{S} = \sum_i \oint \varepsilon_i \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS \ 。 \tag{2.29}$$

思考一分钟后得出结论，上式右边为零。因而左边的积分为零，因而 $\nabla \Phi \equiv 0$!。也就是说不同的 φ 仅仅相差一常数，而这没有任何物理意义。

在有导体时的证明仅仅需要作少许修改。注意此时唯一性定理的证明条件中并不需要知道导体表面上的自由电荷分布。而仅仅需要知道导体的电势 (1)， **或者** 导体上的总电荷 (2)。

1. 导体上的 φ 给定时，有 $\Phi = 0$ 。由于电势的连续性条件，与金属导体 V_i 贴在一起的那些 2.29 式中出现的介质界面上的积分均为零。
2. 设某 V_i 是导体， S_i 是其表面。利用 $\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_f$ 推出 $-\oint \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = Q_f$ 。注意积分是围绕着导体表面进行的，在第二个积分中， ε 在金属与不同介质相交的界面上可以不一样。根据证明条件得知 $-\oint \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS = 0$ ，也即

   $$-\oint \varepsilon \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS = -\Phi \oint \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS = 0 \ 。$$

   而介质金属之间界面的介质面积分由于 $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$ ，也为零。

例题 *2*：如图 *2.2* 所示，两同心导体球壳间，充满介质 ε_1 、 ε_2 ，内球壳带电 Q ，外壳接地。求电场与球壳上的电荷分布。

解答：写出尝试解

$$\vec{E}_1 = \frac{A}{r^3} \vec{r} = \vec{E}_2 \ ,$$

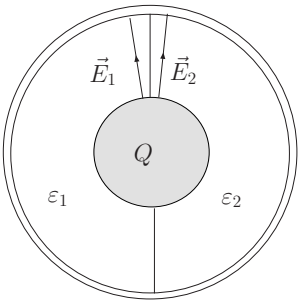


图 2.2: 同心导体球壳之间的电场。

其中 A 待定, 内部满足 $\nabla\cdot\vec{D}=0$ 的条件和两种介质界面上的边界条件：$E_{1t}=E_{2t}$, $D_{1n}=D_{2n}(=0)$ 。由

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S}=\int_{S_1}\varepsilon_1\vec{E}_1\cdot d\vec{S}+\int_{S_2}\varepsilon_2\vec{E}_2\cdot d\vec{S}=Q$$

得知 $2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)A=Q$ 即

$$\vec{E}_1=\frac{Q\vec{r}}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^3}=\vec{E}_2 \text{ 。}$$

唯一性定理保证了此解得正确性。在这个解中， $\vec{E}$ 是对称的，而 $\vec{D}$ 不是：

$$\sigma_{1,f}=D_{1r}=\varepsilon_1E_{1r}=\frac{\varepsilon_1Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a^2} \text{ ,}$$

$$\sigma_{2,f}=D_{2r}=\varepsilon_2E_{2r}=\frac{\varepsilon_2Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a^2} \text{ 。}$$

内导体表面上自由电荷密度不相等，但实际上不难验证 $\sigma_f+\sigma_p$ 却是相等的。

§2.4 静电镜像法

求解静电问题，需求解泊松方程，若区域内有自由电荷一般来说比较困难。但如果边界是较规则的情形可以有较简单的解法。静电镜像法的基本思想是用假想电荷模拟边界面的作用 – 只要符合求解区域内的方程、边条件即可。我们这一节用几个简单的例子来说明这一解法。

例题 *3*：如图 *2.3* 所示无穷大接地导体平板，距平面 a 处有点电荷 Q ，求电势等等。

解答：导体上 $\phi=0$ ，电力线垂直于界面。根据对称性，设想在 $z=-a$ 处有假想电荷 $Q'=-Q$ 代替导体。则

$$\varphi(p)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{Q}{r}-\frac{Q'}{r'}) \text{ ,} \tag{2.30}$$

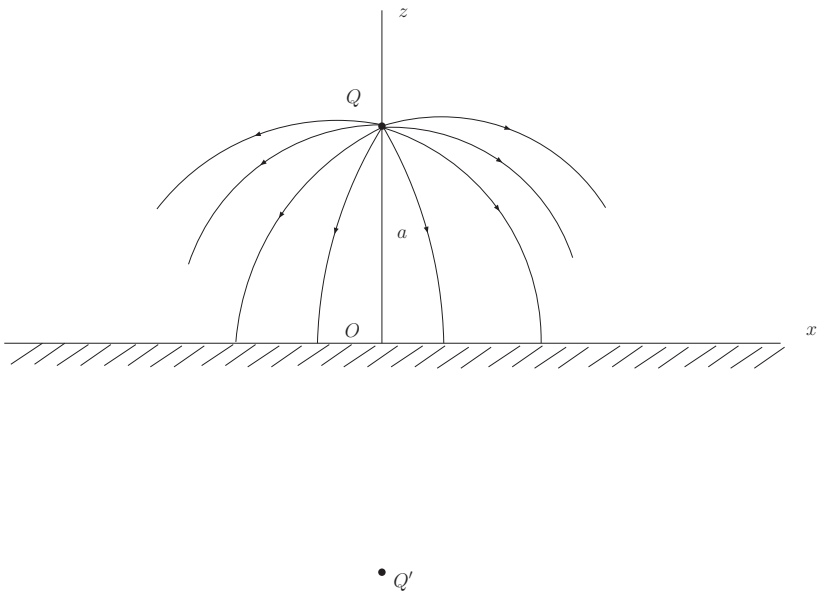


图 2.3: 无穷大平板金属诱导的电场。

其中 r 是场点 P 到 Q 的距离， r' 是 P 到 Q' 的距离。显然对于 P 落在上半平面时有

$$\nabla^2\varphi = Q\delta(x)\delta(y)\delta(z-a)\ ,$$
$$\varphi|_{z=0} = 0\ 。$$

根据唯一性定理， *2.30* 式就是此问题的解。所以

$$\varphi(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}\right]\ 。$$

由此可求出

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{(\vec{r}-a\vec{e}_z)/|\vec{r}-a\vec{e}_z|}{x^2+y^2+(z-a)^2} - \frac{(\vec{r}+a\vec{e}_z)/|\vec{r}+a\vec{e}_z|}{x^2+y^2+(z+a)^2}\right]$$

而导体上的自由电荷密度

$$\sigma(x,y,0) = \varepsilon_0 E_z(x,y,0) = \frac{1}{2\pi}\frac{-aQ}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}\ 。$$

导体上总电荷 $= \int_\infty \sigma(x,y,0)dxdy = -Q$ ，这是一个预期之中的结果。

$$V_{外} = Q\varphi_{外}(0,0,a) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{2a}\ 。$$

点电荷受导体的作用力

$$\vec{F}_{外} = Q\vec{E}_{外}(0,0,a) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{4a^2}\vec{e}_z \ 。$$

对于点电荷的受力问题，还可以有别的求解办法。比如，计算导体上的电荷对 Q 的作用，做积分；计算导体表面受到的场的应力，再做积分等。

细心的读者会从上面的结果发现，把点电荷从无穷远缓慢推到 a 点。利用上面给出的电场的公式得 $-\int_\infty^a \vec{F}_{外}\cdot d\vec{a} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{4a}$ ，只为 $V_{外}$ 的一半！原因是像电荷也在移动，还需要考虑像电荷移动所做的功！

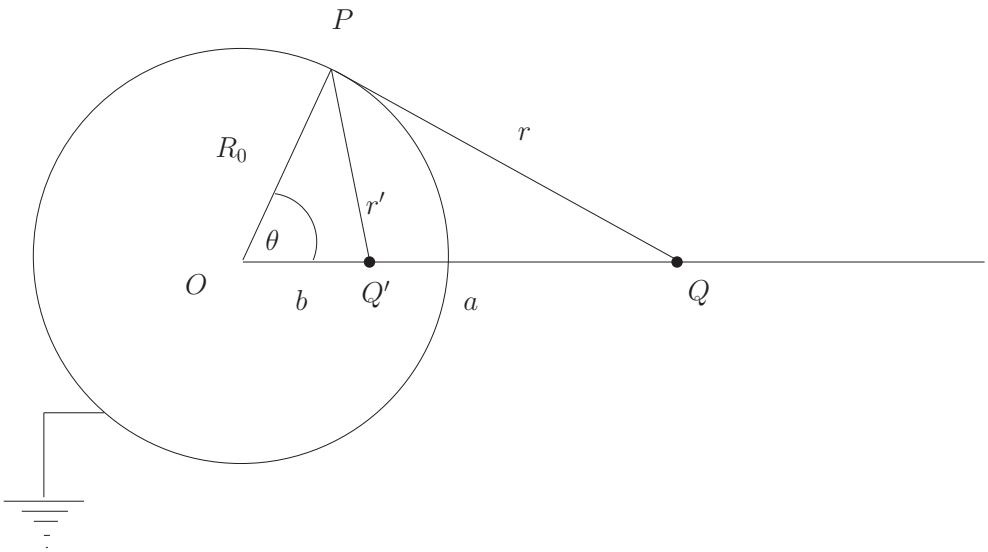


图 2.4: 导体球作为边界的静电镜像法。

例题 *4*：真空中，半径为 R_0 的导体球接地，如图 *2.4* 所示。在 $a > R_0$ 处放一点电荷 Q ，求空间电势。

解答：假想在球内线 $\overline{OQ}$ 上有一点电荷 Q' ，看一看能否选取适当的位置 b 和 Q' 使得点电荷 Q 和像电荷 Q' 在球面上任意一处 P 产生的电势恒为零。由 $\frac{Q}{r}+\frac{Q'}{r'}=0$ 知需要有 $r'/r = -Q'/Q = const$ 。这一条件很容易满足：只要三角形 $OQ'P$ 与三角形 OQP 相似就有 $r'/r = R_0/a = const$ 。而三角形相似条件要求 $b/R_0 = R_0/a$ ，所以得到

$$\begin{aligned} b &= \frac{R_0^2}{a}\ ,\ Q' = -\frac{R_0}{a}Q \\ \varphi &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r}-\frac{R_0 Q}{ar'}\right) \end{aligned}$$

此时 Q' 表示收敛于球面上的感应电荷， $|Q'/Q|<1$ 表示部分电场线 $\to\infty$ 。

例题 5：同上，但球不接地，而是 a ）导体表面 φ_0 已知，或 b ）导体上的总电量 Q_0 已知。求 φ 。
解答：只需要对上一例题的解答 φ 作一点修改即可： $a)$ 只需在球心处另放上 $Q''=4\pi\varepsilon_0 R_0\varphi_0$ ； b ）类似，只需在球心放另一像电荷 $Q''=Q_0-Q'$ 即可。此时如果对电荷 Q 做受力分析， Q 电荷受力等于 Q' 场的力 $+Q''$ 场的力即

$$4\pi\varepsilon_0 F=\frac{QQ''}{a^2}+\frac{QQ'}{(a-b)^2}=\frac{QQ_0}{a^2}-\frac{Q_0^2R_0^3(2a^2-R_0^2)}{a^3(a^2-R_0^2)^2}\ 。$$

其中式右第二项小于零，是吸引力！

§2.5 特解叠加法

静电问题的方程是

$$\begin{aligned}&\nabla^2\varphi=-\rho/\varepsilon\ ,\\&\varphi|_s\text{已知}\ \ ,\ \ \text{或}\ \ \frac{\partial\varphi}{\partial n}|_s\text{已知}\ 。\end{aligned}\tag{2.31}$$

对于如上的非其次方程的通解 = 特解 + 齐次方程通解。因此如果存在通解 $\varphi_c=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int dV'\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ ，则令 $\Phi=\varphi-\varphi_c$ ，则关于 φ 的方程变成齐次方程

$$\begin{aligned}&\nabla^2\Phi=0\ ,\\&\Phi|_s\text{已知}\ \ ,\ \ \text{或}\ \ \frac{\partial\Phi}{\partial n}|_s\text{已知}\ 。\end{aligned}\tag{2.32}$$

线形齐次方程可由特解叠加法求解。在球坐标下上式化为，

$$\nabla^2\Phi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}=0\ 。\tag{2.33}$$

若体系具有轴对称性， Φ 与 ϕ 角无关，则

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)=0\ 。\tag{2.34}$$

由分离变量法可知存在两系列特解：

$$\begin{aligned}\Phi(r,\theta)&=r^lP_l(\cos\theta)\ ,\\\Phi(r,\theta)&=r^{-l-1}P_l(\cos\theta)\ ,\end{aligned}\tag{2.35}$$

其中 $l=0,1,2,\cdots$， $P_l(\cos\theta)$ 是 勒让德 多项式，满足正交归一条件：

$$\int_{-1}^{+1} P_m(\cos\theta)P_n(\cos\theta)d\cos\theta=\frac{2}{2n+1}\delta_{mn}\ 。 \tag{2.36}$$

于是，方程 2.34 式的通解为

$$\phi(r,\theta)=\sum_l[A_l r^l P_l(\cos\theta)+B_l r^{-l-1}P_l(\cos\theta)]\ 。 \tag{2.37}$$

于是剩下的问题是由边条件定出 A_l 和 B_l 来。如果界面是球面（半径为 R ），则有

$$A_l R^l+B_l R^{-l-1}=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{+1}\Phi(R,\theta)P_l(\cos\theta)d\cos\theta\ 。 \tag{2.38}$$

显然上述边界条件还不足以确定方程的解。为了唯一地确定电势的解，还需要利用 $r=0$ 和 $r=\infty$ 处的“边界”条件。在 $r=0$ 处有两种可能：

1. $\varphi(0)=$有限, 如果 $r=0$ 处无电荷或电荷连续分布。
2. $\varphi(r\to 0)\propto\frac{1}{r}$ ，如果 $r=0$ 处有点电荷。

对于 $r\to\infty$ 时的情形，依赖于具体问题或题意，比如可以有 $\Phi\to 0$ 或者 $\Phi\propto z$ 等。

例题 6：对于无穷大均匀介质， z 方向有均匀电场 $\vec{E}_0=E_0\vec{e}_z$ 。若在其中挖出半径为 R 的球形空穴，求场分布。

解答：设介质中电势为 φ_1 ，空穴中为 φ_2 。由于 $\nabla^2\varphi_1=\nabla^2\varphi_2=0$ 有

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \sum_l(A_l r^l+B_l r^{-l-1})P_l(\cos\theta)\ ,\\ \varphi_2 &= \sum_l(C_l r^l+D_l r^{-l-1})P_l(\cos\theta)\ 。\end{aligned}$$

而 $r=R$ 的边界上有

$$\phi_1=\phi_2\ ,\quad \varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}=\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\ 。$$

无穷远处边界条件为：

$$\nabla\varphi_1=-\vec{E}_0\ ,\quad 即\quad \varphi_1|_\infty=-E_0 z\ 。$$

原点的边界条件：

$$\varphi_2(0)=有限。$$

由 2.37 式出发，由零点边界条件，知 $D_l=0$ ，又由无穷远处边界条件得知只有 $A_1=-E_0\neq 0$ ，其余全部 $A_l=0$ 。所以

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= -E_0 r\cos\theta+\sum_l B_l r^{-l-1}P_l(\cos\theta)\ ,\\ \varphi_2 &= \sum_l C_l r^l P_l(\cos\theta)\ 。\end{aligned}$$

最后再利用球面 R 上的边界条件得

$$-E_0R\cos\theta+\sum_l B_lR^{-l-1}B_l(\cos\theta)=\sum_l C_lP_l(\cos\theta)R^l\ ,$$
$$-\varepsilon_1E_0\cos\theta-\varepsilon_1\sum_l(l+1)B_lR^{-l-2}P_l(\cos\theta)=\varepsilon_0\sum_l lC_lR^{l-1}P_l(\cos\theta)$$

利用 P_l 的正交性，对于每一个 $l=0,1,2,\cdots$ 都可以抽出相应的关系式。对于 $l\neq 1$ 有

$$B_lR^{-l-1}=C_lR^l\ ,$$
$$-\varepsilon_1(l+1)B_lR^{-l-2}=\varepsilon_0lC_lR^{l-1}\ 。$$

上式唯一的解是 $B_l=C_l=0$ 。对于 $l=1$ 的情形有

$$-E_0R+B_1R^{-2}=C_1R\ ,\quad -\varepsilon_1(E_0+2B_1R^{-3})=\varepsilon_0C_1\ 。$$

即

$$B_1=-\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{2\varepsilon_1+\varepsilon_0}E_0R^3\ ,\quad C_1=-\frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1+\varepsilon_0}E_0\ 。$$

于是最后的解是

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= -E_0z+\frac{B_1\cos\theta}{r^2}=-\vec{E}_0\cdot\vec{r}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\frac{\vec{p}\cdot\vec{e}_r}{r^2}\ ,\\ \varphi_2 &= C_1z\ 。\end{aligned}\tag{2.39}$$

从上式可以看出，球内是均匀场，$\vec{E}=-C_1\vec{e}_z=\frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_0+\varepsilon_1}\vec{E}_0$ 。显然 $E_{内}>E_0$ 。它的原因是因为空穴表面的附加电荷所产生的附加电场的结果。而球外的是均匀场 $\vec{E}_0$ 加上偶极场，偶极矩为 $\vec{p}=4\pi\varepsilon_1B_1\vec{e}_z$ 。

类似上面例题的讨论可以用于比如介质球放在均匀场的情况。

§2.6 求解静电问题的格林函数方法

格林函数方法的目的是将具有一般电荷分布的边值问题化为一个点电荷的边值问题，而后者往往相对简单。

问题的提法：给定 V 内的 $\rho(\vec{r})$ 及 V 边界 S 上的边条件： I ） $\varphi|_S$ 已知，或 II ） $\frac{\partial\varphi}{\partial n}|_S$ 已知，求 V 内的 $\varphi(\vec{r})$ 。为了求解这一问题我们首先来看另一问题（求解格林函数问题）：

$$\nabla^2G(\vec{r},\vec{r}')=-\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r}-\vec{r}')\ ,$$
$$G|_S=0\ ,\quad 或\quad \frac{\partial G}{\partial n}|_S=-\frac{1}{\varepsilon_0S}\ ,（保持\ S\ 内总电荷为\ 1\ ）。\tag{2.40}$$

可以利用求解 格林 函数来进一步求解 φ，原因是利用格林公式

$$\int_V(\psi\nabla^2\varphi-\varphi\nabla^2\psi)dV=\oint_S(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n})dS$$

可以简单的得到 φ 与 G 的关系。现在 $\nabla^2\varphi=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$， $\varphi|_S$ 已知或者 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}|_S$ 已知。令 $\psi=G$ 并代入格林公式得

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\varphi(\vec{r})-\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V G(\vec{r}',\vec{r})\rho(\vec{r}')dV'=\oint_S[G(\vec{r}',\vec{r})\frac{\partial\varphi(\vec{r}')}{\partial n'}-\varphi(\vec{r}')\frac{\partial}{\partial n'}G(\vec{r}',\vec{r})]dS' \text{ 。} \quad (2.41)$$

对于第一类边界条件，即已知 $G|_S=0$ 和 $\varphi|_S$，可得

$$\varphi(\vec{r})=\int_V G(\vec{r}',\vec{r})\rho(\vec{r}')dV'-\varepsilon_0\oint_S\varphi(\vec{r}')\frac{\partial}{\partial n'}G(\vec{r}',\vec{r})dS' \text{ 。} \quad (2.42)$$

对于第二类边界条件： $\frac{\partial\varphi}{\partial n'}|_S$ 及 $\frac{\partial G}{\partial n'}|_S=-\frac{1}{\varepsilon_0 S}$ 。

$$\varphi(\vec{r})=\int_V G(\vec{r}'-\vec{r})\rho(\vec{r}')dV'+\varepsilon_0\oint_S G(\vec{r}',\vec{r})\frac{\partial}{\partial n'}\varphi(\vec{r}')dS'+<\varphi>_S \text{ ,} \quad (2.43)$$

其中最后一项代表 φ 场在表面 S 上的平均值。

例题 7：无穷大导体平面中间有一半径为 a 的绝缘环，且

$$\varphi=V_0 \text{ ,} \quad (r<a) \text{ ,}$$
$$\varphi=0 \text{ ,} \quad (r>a) \text{ 。}$$

求上半空间电势。

解答：这个问题如果用一般方法来处理，由于边条件复杂，求解困难。如果利用格林函数方法，由于 $G|_S=0$，且仅仅是一个点电荷的边值问题，所以转化成了一个简单的问题。设 $\vec{r}$ 为坐标变量， $\vec{r}'$ 为点电荷位置，则

$$\begin{aligned}G(\vec{r},\vec{r}') &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}[\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2+R'^2+z'^2-2zz'-2RR'\cos(\phi-\phi')}}\\ &\quad -\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2+R'^2+z'^2+2zz'-2RR'\cos(\phi-\phi')}}] \text{ 。}\end{aligned} \quad (2.44)$$

由于上半平面 $\rho=0$ 所以 *2.42* 式给出（ $\vec{n}'$ 的方向朝下）：

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}) &= -\varepsilon_0\int_S\varphi(\vec{r}')\frac{\partial}{\partial n'}G(\vec{r}',\vec{r})dS'\\ &= \frac{V_0}{2\pi}\int_0^a R'dR'\int_0^{2\pi}d\phi'\frac{z}{[R^2+z^2+R'^2-2RR'\cos(\phi-\phi')]^{3/2}} \text{ 。}\end{aligned} \quad (2.45)$$

注意在上面表达式中的第二个等式是因为仅在 $R'<a$ 的范围内 $\varphi\neq0$ 有贡献。

除了格林函数方法，还有一些别的有用的方法。比如对于平面问题，可以用复变函数中的保角变换方法。这里限于课时就不再介绍了。

§2.7 习题

1. 由 $\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\mathbf{p}\bullet\mathbf{e}_r}{r^2}$, 通过梯度运算导出偶极子的电场强度公式。
2. 在原点有一个 $\mathbf{p}=p\,\mathbf{e}_x$ 的偶极子，另在 $x=0,y=0,z=l$ 处有一个偶极矩为 $-\mathbf{p}$ 的偶极子。算出它们在 $r\gg l$ 处产生的电势。
3. 对如下两个电荷系统：(1) 点电荷 $-2q$ 位于坐标原点，另一个点电荷 $+q$ 位于 $x=l_1,y=z=0$ 处，第三个点电荷 $+q$ 位于 $y=l_2,x=z=0$ 处；(2) 前两个电荷不变，第三个点电荷放在 $x=l_1,y=l_2,z=0$ 处；试算出它们的总电量，电偶极矩及电四极矩，并算出它们在远处的所产生的电势的领头项。问电场强度与 r 几次方成反比。
4. 有一均匀带电旋转对称椭球，总电量为 Q，其边界为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$, 试证明其四极矩张量的非对角分量为 0，并计算其对角分量。
5. 以 O 为心，R 为半径的球面上, 已知电势分布为 $\varphi(r=R,\theta)=\varphi_0(1+\cos\theta)^2$，其中 θ 为球坐标极角，用分离变量法求出球面外的电势分布。
6. 在 $x=0$ 处和 $y=0$ 处有两个互相垂直的无限导体面。设有一点电荷从无穷远处准静态地移至 $x=a,y=b,z=0$ 处。试求电荷在这位置上所受的电场力和及在移动中外力所做的功。
7. $z=0$ 处有一无限导体面，它在 $x=0,y=0,z=0$ 处有一向上的半球面凸起，半径为 R。另在 $x=y=0,z=l>R$ 处有一点电荷 q，试求出上半无限空间内的电势分布。
8. 有一半径为 R 的导体薄球壳，带电量为 Q。壳内距中心 a 处有一点电荷 q，求壳上的电荷分布。
9. 半径为 a 的球面，在球坐标 $0<\theta<\pi/2$ 的半球面上的电势为 V，在球坐标 $\pi/2<\theta<\pi$ 的半球面上的电势为 $-V$，用 Green 函数方法求球外的电势分布的积分表达式。

第三章　静磁场问题

§3.1　磁场的矢势

在讨论稳恒问题时，由于 $\vec{E}$ 、 $\vec{B}$ 脱耦，可以分开处理。静磁场满足的方程是

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \vec{j} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \text{ 。} \end{aligned} \tag{3.1}$$

由 $\vec{B}$ 无源， $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ 。可引入矢势， $\vec{A}(\vec{r})$ ，使 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ 。 $\vec{A}$ 的环量等于 $\vec{B}$ 的通量。 $\vec{A}$ 本身并没有直接的物理意义。[1] 由 $\vec{A}$ 可以得到 $\vec{B}$ ，但反过来由 $\vec{B}$ 并不能唯一确定 $\vec{A}$ 。因为若有 $\vec{A}$ 满足 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ 则对任意 ψ ， $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi$ 均满足 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}'$ 。数学上可证任何场可分解为纵场与横场之和。所以说 $\vec{A}$ 的纵场（无旋场）部分是完全任意的。

既然纵场部分是完全任意的，于是可以适当地限制 $\vec{A}$ ，消除其纵场自由度的任意性，来简化计算。这样的限制条件也叫做 **规范条件** 。在现在的情形下，可以选取规范条件为

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \text{ 。} \tag{3.2}$$

这个条件叫做 **库仑规范** 条件。显然这个方程对 $\vec{A}$ 的横场部分没有任何影响，并且总可以适当地选取纵场使得 3.2 式成立。因为若有 $\vec{A}$ 满足 $\nabla \cdot \vec{A} = u \neq 0$ 。令 $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi$ ， $\nabla \cdot \vec{A}' = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla^2\psi = u + \nabla^2\psi$ 。所以只要选取满足方程 $\nabla^2\psi = -u$ 的 ψ 即可使 $\nabla \cdot \vec{A}' = 0$ 。

可以从方程 3.1 式和库仑规范出发建立 $\vec{A}$ 本身所满足的方程。若 $\vec{B} = \mu\vec{H}$, 则

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2\vec{A} = -\nabla^2\vec{A} = \mu\vec{j} \text{ 。}$$

所以

$$\nabla^2\vec{A} = -\mu\vec{j} \text{ 。} \tag{3.3}$$

注意这个方程是泊松方程，且其解还需同时满足 3.2 一式。对于全空间问题， 3.3 的解为

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \text{ 。} \tag{3.4}$$

由 1.16 式知，从上式得到的 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ 就是满足毕奥 - 萨伐定律的磁感应强度。前面也已证明过对于此 $\vec{A}$ 也有 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ 。

[1] 或者，并不是直接可观测量。然而见第五章第二节的讨论。

对于静磁场问题也可以讨论解的唯一性定理： **若存在关系 $\vec{B}=\mu\vec{H}$ ，则体系内磁场由电流与介质的分布，以及边界上 $\vec{A}$ 或 $\vec{H}$ 的切向分量唯一确定**。证明如下：

设存在两组解 $\vec{B}'$ ， $\vec{B}''$ 分别有 $\vec{B}'=\nabla\times\vec{A}'$ ， $\vec{B}'=\mu(\vec{r})\vec{H}'$ 和 $\vec{B}''=\nabla\times\vec{A}''$ ， $\vec{B}''=\mu(\vec{r})\vec{H}''$ 以及 $\nabla\times\vec{H}'=\nabla\times H''=\vec{j}$ 。令 $\vec{B}=\vec{B}'-\vec{B}''$, $\vec{H}=\vec{H}'-\vec{H}''$ ，相应地 $\vec{A}=\vec{A}'-\vec{A}''$ 。现要证 $\vec{B}=0$ 。为此计算场能

$$\begin{aligned} U_m &= \frac{1}{2}\int_V \vec{B}\cdot\vec{H}dV=\frac{1}{2}\int_V(\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{H}dV \\ &= \frac{1}{2}\int_V[\nabla\cdot(\vec{A}\times H)+\vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{H})]dV \\ &= \frac{1}{2}\oint_S(\vec{A}\times\vec{H})\cdot d\vec{S}=\frac{1}{2}\oint_S(\vec{n}\times\vec{A})\cdot\vec{H}dS=-\frac{1}{2}\oint_S(\vec{n}\times\vec{H})\cdot\vec{A}dS \ 。 \end{aligned}$$

所以边界上无论是 $\vec{n}\times\vec{A}=0$ 或者是 $\vec{n}\times\vec{H}=0$ 均可得出 $U_m=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\mu}B^2dV=0$ ，也即 $\vec{B}$ 恒等于零。

§3.2 圆电流圈的磁场、磁偶极子

考虑半径为 a 的电流为 I 的小圈取如图 3.1 所示的坐标。

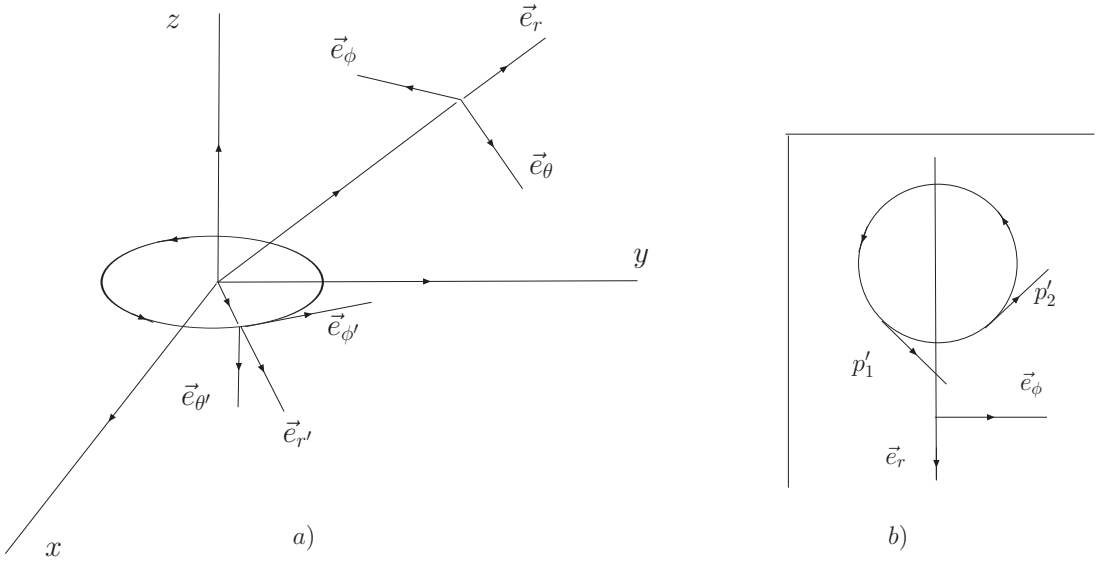


图 3.1: a) 小电流环产生的磁场； b) 对电流环积分的对称性分析。

$$\vec{j}(\vec{r}')=j_{\phi'}\vec{e}_{\phi'}=C\delta(r'-a)\delta(\theta'-\frac{\pi}{2})\vec{e}_{\phi'} \ ,$$

常数 C 可由如下方式定出：

$$I = \int\int\vec{j}(\vec{r}')\cdot d\sigma'$$

$$= C\int_0^\infty \delta(r'-a)r'dr'\int_0^\pi \delta(\theta'-\frac{\pi}{2})d\theta' = Ca\ , \tag{3.5}$$

所以 $C = I/a$ 。另一方面

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}(r')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV' = \frac{\mu Ia}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\vec{e}_{\phi'}d\phi'}{|\vec{r}-a\vec{e}_{r'}|}\ ,\ (\text{利用 } dV' = r'^2dr'\sin\theta'd\theta'd\phi')$$

由对称性分析（见图 3.1b））知 $\vec{A} = A_\phi\vec{e}_\phi$ ，所以

$$A_\phi = \frac{\mu Ia}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\vec{e}_\phi\cdot\vec{e}_{\phi'}}{|\vec{r}-a\vec{e}_{r'}|}\ 。$$

又由于对称性， $A_\phi = A_\phi(r,\theta)$ 与 ϕ 无关，所以总可以取 $\phi = 0$ 作计算。所以

$$\vec{e}_\phi\cdot\vec{e}_{\phi'} = \cos\phi'\ ,\ |\vec{r}-a\vec{e}_{r'}| = (r^2+a^2-2ra\sin\theta\cos\phi')^{1/2}\ 。$$

所以

$$A_\phi = \frac{\mu Ia}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\phi'd\phi'}{(r^2+a^2-2ra\sin\theta\cos\phi')^{1/2}}\ 。$$

这个积分可以化为勒让德椭圆积分。但我们这里更关心的是 $r >> a$ 的情形，此时可以做 a/r 的展开，

$$(r^2+a^2-2ra\sin\theta\cos\phi')^{-1/2} = \frac{1}{r}+\frac{a\sin\theta\cos\phi'}{r^2}+O(\frac{a^2}{r^3})\ 。$$

展开式的第一项并不对电流环积分有贡献，第二项的贡献为

$$A_\phi = \frac{\mu IS}{4\pi}\frac{\sin\theta}{r^2}\ ,\ (S=\pi a^2 \text{ 为圆面积})\ 。$$

令 $\vec{m} = IS\vec{n}$（现 $\vec{n} = \vec{e}_z$ ）则

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}\ 。 \tag{3.6}$$

而 $\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}[\vec{m}(\nabla\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}) - (\vec{m}\cdot\nabla)\frac{\vec{r}}{r^3}]$ 。因为是远场，第一项贡献为零。利用 $\nabla(\vec{m}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}) = \vec{m}\times(\nabla\times\frac{\vec{r}}{r^3}) + (\vec{m}\cdot\nabla)\frac{\vec{r}}{r^3}$ 得

$$\vec{B} = -\frac{\mu}{4\pi}\nabla(\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^3})\ 。 \tag{3.7}$$

这个式子告诉我们，远处的静磁场是有势的！若令 $\vec{B} = -\mu\nabla\varphi_m$ （ $\vec{H} = -\nabla\varphi_m$ ），则

$$\varphi_m = \frac{1}{4\pi}\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^3}\ , \tag{3.8}$$

与电偶极子公式类似。又可得到

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{3\vec{m}\cdot\vec{e}_r\vec{e}_r - \vec{m}}{r^3} \ 。 \tag{3.9}$$

因此可以定义 **磁偶极子** 为磁矩为 $\vec{m}$ ，半径 $a \to 0$ 的圆电流圈。若 a 有限则必须 $a/r << 1$ 。

这一节的讨论是对圆电流圈作的，在下一节我们将对任意的小电流系统进行讨论，可以看到许多在这里得到的结论在下一节仍然成立或者得到推广。

§3.3 静磁场的多极展开

若电流集中在 $\sim r_0$ 的范围内。考虑 $r >> r_0$ 处的场，可以证明总场 $=$ 磁偶极场 $+$ 磁四极场 $+\cdots$ 。由于没有磁荷的存在，单极场为零。

对 3.4 式中的 $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ 在 $\vec{r}'$ 处作展开： $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}'\cdot\vec{r}}{r^3} + \cdots$ 。所以 $\vec{A} = \vec{A}_0 + \vec{A}_1 + \cdots$ ，

$$\begin{aligned} \vec{A}_0 &= \frac{\mu}{4\pi}\frac{1}{r}\int_V \vec{j}(\vec{r}')dV' \ , \\ \vec{A}_1 &= \frac{\mu}{4\pi}\frac{1}{r^2}\vec{e}_r \cdot \int_V \vec{r}'\vec{j}(\vec{r}')dV' \ 。 \end{aligned} \tag{3.10}$$

因为此处的积分是对全空间作的，没有电流的流入与流出，且 $\nabla\cdot\vec{j} = 0$ ，所以电流构成封闭的流管，第一个式子的积分一定为零。 [2] 所以只需考虑磁偶极项 $\vec{A}_1$ 。先证明公式

$$\int_V (\vec{r}'\vec{j} + \vec{j}\vec{r}')dV' = 0 \ 。$$

证明：

$$\begin{aligned} \nabla'\cdot(\vec{j}\vec{r}'\vec{r}') &= (\nabla'\cdot\vec{j})\vec{r}'\vec{r}' + \vec{j}\cdot(\nabla'\vec{r}')\vec{r}' + \vec{r}'\vec{j}\cdot(\nabla'\vec{r}') \\ &= 0 + \vec{j}\cdot\overleftrightarrow{I}\vec{r}' + \vec{r}'\vec{j}\cdot\overleftrightarrow{I} = \vec{j}\vec{r}' + \vec{r}'\vec{j} \ 。 \end{aligned}$$

作体积分，由于边界上无电流，所以等式右边的体积分为零。所以 3.10 式可以写成

$$\begin{aligned} \vec{A}_1 &= \frac{\mu}{4\pi}\frac{1}{2r^2}\vec{e}_r \cdot \int (\vec{r}'\vec{j} - \vec{j}\vec{r}')dV' \\ &= -\frac{\mu}{4\pi}\frac{1}{2r^2}\vec{e}_r \times \int_V (\vec{r}'\times\vec{j})dV' \ 。 \end{aligned}$$

定义

$$\vec{m} \equiv \frac{1}{2}\int \vec{r}'\times\vec{j}dV' \ 。 \tag{3.11}$$

[2] 从数学上看 $\nabla\cdot(\vec{j}\vec{r}) = (\nabla\cdot\vec{j})\vec{r} + \vec{j}\cdot\nabla\vec{r} = 0 + \vec{j}\cdot\overleftrightarrow{I} = \vec{j}$ ，所以对 $\vec{j}$ 的体积分化为一个全散度的积分，而后者在化为面积分后在表面上恒为零（没有电流的流入与流出）。

则

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{e}_r}{r^2} \text{ 。} \tag{3.12}$$

与上一节讨论小电流圈的磁场结果一样！这个公式和磁矩的定义 3.11 式是上一节的结论的推广。对于一个任意电流圈（既不一定是圆，也不一定是平面的），$\vec{m}_{偶} = \frac{1}{2}\int \vec{r}'\times\vec{j}dV' = \frac{I}{2}\oint \vec{r}'\times d\vec{l}'$ 。定义

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\oint \vec{r}'\times d\vec{l}' \text{ ,}$$

则 $\vec{m} = I\vec{S}$ 。

§3.4 磁偶极子在外场中的受力和力矩

受力

$$\vec{F} = \int_V \vec{j}(\vec{r})\times\vec{B}(\vec{r})dV \tag{3.13}$$

若电流区域较小，取 o 为原点，$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_o + \vec{r}\cdot\nabla\vec{B}_o + \cdots$ 。已经知道电流密度的体积分为零，所以

$$\vec{F} = \int \vec{j}\times(\vec{r}\cdot\nabla\vec{B}_o)dV = (\int \vec{j}\vec{r}dV\cdot\nabla)\times\vec{B}_o \text{ 。}$$

又因为 $\int \vec{j}\vec{r}dV = \frac{1}{2}\int(\vec{j}\vec{r}-\vec{r}\vec{j})dV$ 且 $(\vec{j}\vec{r}-\vec{r}\vec{j})\cdot\nabla = (\vec{r}\times\vec{j})\times\nabla$; $\vec{F} = (\vec{m}\times\nabla)\times\vec{B}_o = \nabla(\vec{m}\cdot\vec{B}_o) - \vec{m}(\nabla\cdot\vec{B}_o)$ ，后一项为零，所以

$$\vec{F} = \nabla(\vec{m}\cdot\vec{B}) \text{ 。} \tag{3.14}$$

令

$$U = -\vec{m}\cdot\vec{B} \text{ ，则 } \vec{F} = -\nabla U \text{ 。} \tag{3.15}$$

U 可以理解为偶极子在外场中的平动势能。

力矩 $\vec{N} = \int \vec{r}\times(\vec{j}(\vec{r})\times\vec{B})dV$ ，对 $\vec{B}(\vec{r})$ 在 $\vec{r}=0$ 点展开，现在首次贡献不为零。所以

$$\begin{aligned}\vec{N} &= \int \vec{r}\times(\vec{j}(\vec{r})\times\vec{B}_0)dV \\ &= \vec{B}_o\cdot\int_V \vec{r}\vec{j}dV - \vec{B}_o\int_V \vec{r}\cdot\vec{j}dV\end{aligned}$$

由于 $\nabla\cdot(\vec{j}r^2) = r^2\nabla\cdot\vec{j} + \vec{j}\cdot\nabla r^2 = 0 + 2\vec{j}r\cdot\nabla r = 2\vec{j}\cdot\vec{r}$ 得知 $\int \vec{j}\cdot\vec{r}dV = 0$ ，最后可证

$$\vec{N} = \vec{m}\times\vec{B} \text{ 。} \tag{3.16}$$

设 $\vec{m}$ 、 $\vec{B}$ 夹角为 θ, $N=-mB\sin\theta$ ，力矩在 $\vec{m}$ 转动时作功

$$W=-mB\sin\theta d\theta=d(\vec{m}\cdot\vec{B})=-dU \text{ 。} \tag{3.17}$$

U 代表 $\vec{m}$ 平动、转动时的势能。

在这一节的最后再讨论一下稳恒电流的磁场能量的计算问题：

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2}\int \vec{B}\cdot\vec{H} \\ &= \frac{1}{2}\int(\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{H}=\frac{1}{2}\int[\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{H})+\vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{H})]dV \\ &= \frac{1}{2}\int\vec{A}\cdot\vec{j}dV \end{aligned} \tag{3.18}$$

可以用这个公式作计算。但应注意并不能把 $\vec{A}\cdot\vec{j}$ 视为场能密度，因为即使在 $\vec{j}=0$ 的地方也有场能存在。根据上式小电流系统在外场中运动的相互作用能为 [3]

$$w_i=\int\vec{j}\cdot\vec{A}_e dV \text{ 。} \tag{3.19}$$

对于小电流圈

$$w_i=I\oint_L\vec{A}_e\cdot d\vec{l}=I\int\vec{B}_e\cdot d\vec{S} \text{ 。}$$

令 $\vec{B}_e(\vec{r})=\vec{B}_{e0}+\cdots$ 则第一项的贡献为

$$w_i=I\vec{B}_{e0}\cdot\int d\vec{S}+\cdots=\vec{m}\cdot\vec{B}_{e0}+\cdots \text{ 。} \tag{3.20}$$

它与势能 U 不同，原因是 $\vec{m}$ 运动时有感生电动势，要保持 $\vec{m}$ 不变必须有外源作功。

上面磁偶极子在外场中的受力公式与能量守恒并不矛盾，设磁偶极子在外场中移动了 $\delta\vec{r}$,所受的功 $\vec{F}\cdot\delta\vec{r}\neq-\delta w_i$,但能量守恒实际上要求 $\vec{F}\cdot\delta\vec{r}=-\delta w_i+\delta w_{\text{外源}}$ 。下面就简化的情形证明 $\delta w_{\text{外源}}=2\delta w_i$ 。所以就回到以前的公式 $\vec{F}\cdot\delta\vec{r}=\delta w_i=\nabla w_i\cdot\delta\vec{r}$ 。

设电流体系和外场的源都只有一个电流圈，

$$w_i=\frac{1}{2}\int(\vec{A}_e\cdot\vec{j}+\vec{A}\cdot\vec{J}_e)dV=\frac{1}{2}(I_e\Phi+I\Phi_e) \text{ ,}$$

其中 Φ_e 和 Φ 分别是外场通过电流体系环路和体系磁场通过外场电流环路的磁通量。在时间间隔 dt 内，当线圈运动时，如果外源和体系的电流都不变，则相互作用能的改变为：

$$\delta w_i=\frac{1}{2}(I\delta\Phi_e+I_e\delta\Phi) \text{ 。}$$

[3]认为外磁场也是由电流引起的，由式 3.4 易证 $\int\vec{j}_e\cdot\vec{A}dV=\int\vec{j}\cdot\vec{A}_e dV$ 。

但磁通量的变化会产生感生电动势，后者将对电流作用，改变电流的大小，感生电动势的大小为：

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_e}{dt}\ ,\ \ \mathcal{E}_e = -\frac{d\Phi}{dt}\ 。$$

在时间间隔 dt 内，感生电动势所做的功为：

$$I\mathcal{E}\delta t + I_e\mathcal{E}_e\delta t = -I\delta\Phi_e - I_e\delta\Phi\ 。$$

电源为保持电流不变，必须克服感生电动势做功：

$$\delta w_{\ 外源} = I\delta\Phi_e + I_e\delta\Phi = 2\delta w_i\ ,$$

这就证明了前面的结论。

§3.5 磁标势

我们知道磁场问题一般是求解 $\vec{A}$，比求标量场复杂。在某些情况下可以用求标量场的方法求解。这一点可能做到，是因为由 $\nabla\times\vec{H} = \vec{j}_f$ 知，只要区域 V 内 $\vec{j}_f = 0$ 则线积分 $\oint\vec{H}\cdot d\vec{l} = \int\vec{j}\cdot d\vec{S} = 0$，与路径无关，可以在 V 内引入势。当然，此时 V 必须是单连通区域，即不能有穿过电流圈的环路出现。

对于普通磁介质（顺磁、抗磁），$\vec{B} = \mu\vec{H}$；铁磁介质一般不存在 $\vec{B} = \mu\vec{H}$（对于软铁磁 $\vec{B} = \mu\vec{H},\ \mu/\mu_0 \simeq 10^4$），磁化矢量 $\vec{M}$ 与磁场 $\vec{H}$ 的关系是非齐次、非线性的。

对于磁标势问题，区域中无电流。在普通磁介质中，由

$$\nabla\times\vec{H} = 0\ ,\ \ \nabla\cdot\vec{B} = 0\ ,\ \ \vec{B} = \mu\vec{H}\ 。 \tag{3.21}$$

可得（ $\vec{H} = -\nabla\varphi_m$ ）

$$\begin{aligned}&\nabla^2\varphi_m = 0\ ,\\ &\varphi_{m1} = \varphi_{m2}\ ,\ \ (\vec{H}\text{界面上有限})\\ &\mu_1\frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial n} = \mu_2\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial n}\ ,(\vec{B}\text{在法线方向上连续})\end{aligned} \tag{3.22}$$

除了没有面自由磁荷密度外，普通磁性介质的静磁性质与第二章中静电势场方程情形类似。

在铁磁体中静磁场所满足的方程是

$$\nabla\times\vec{H} = 0\ ,\ \ \nabla\cdot\vec{B} = 0\ ,\ \ \vec{B} = \mu_0(\vec{H}+\vec{M})\ 。 \tag{3.23}$$

如果 $\vec{M}$ 已知，如永磁体，则 $\nabla\cdot\vec{H}=-\nabla\cdot\vec{M}$ 。引入 **等效磁荷** 概念：

$$\rho_M=-\mu_0\nabla\cdot\vec{M}\ , \tag{3.24}$$

则

$$\nabla\cdot\vec{H}=\frac{1}{\mu_0}\rho_m\ 。 \tag{3.25}$$

ρ_m 仅在非均匀磁化时不为零，均匀磁化时边界上不为零。同样可以引入 **面磁荷密度** 概念：

$$\Sigma_m=\mu_0\vec{M}\cdot\vec{n}\ 。 \tag{3.26}$$

这样推出在有铁磁体时磁标势所满足的方程和边界条件

$$\nabla^2\varphi_{1m}=-\rho_m/\mu_0\ , \tag{3.27}$$

$$\varphi_{m1}=\varphi_{m2}\ , \tag{3.28}$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\vec{n}\cdot(\vec{M}_2-\vec{M}_1)\quad\text{(两种铁磁体之间)}, \tag{3.29}$$

$$\text{或}\quad\mu_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}-\mu_0\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=-\mu_0\vec{n}\cdot\vec{M}_1\quad\text{(铁磁体 1 与介质 2 之间)}\ 。 \tag{3.30}$$

以下我们通过几个例子来熟悉一下铁磁体的性质。

例题 *1*：证明 $\mu\to\infty$ 的磁性物质表面等磁势。
解答：边界上有

$$\begin{aligned}&\vec{n}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0\ ,\\&\vec{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=0\ 。\end{aligned} \tag{3.31}$$

不失一般性，设介质 *2* 是真空。得到

$$\begin{aligned}&\mu_0H_{2n}=\mu H_{1n}\\&H_{2t}=H_{1t}\ 。\end{aligned} \tag{3.32}$$

得 $\frac{H_{2t}}{H_{2n}}=\frac{\mu_0}{\mu}\frac{H_{1t}}{H_{1n}}\to0$，即 $H_{2n}>>H_{2t}$ 或 $\vec{H}_2\perp\vec{n}$。所以表面等磁势（相比于 H_{2n} 的大小，H_{2t}、H_{1n}、H_{1t} 的大小均可忽略）。

例题 *2*：求均匀磁化铁磁球，半径为 a，磁化强度 $\vec{M}$，所产生的场。
解答：因为是均匀磁化，球内 $\rho_m=0$，“面磁荷密度” $\sigma_m=\mu_0\vec{M}\cdot\vec{n}$。于是

$$\varphi_m=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\vec{M}(\vec{r}')\cdot d\vec{S}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\ ,$$

可积。但是这里建议用分离变量法求解，结果为：

$$\varphi_m = \frac{1}{3}\frac{Ma^3}{r^2}\cos\theta \ , \ (r \geq a)$$
$$\varphi_m = \frac{1}{3}Mr\cos\theta \ , \ (r \leq a) \ 。$$

所以

$$\vec{H}_{内} = -\nabla\varphi_m = -\frac{\vec{M}}{3} \ , \ 反向！$$
$$\vec{B}_{内} = \mu_0(\vec{H}_{内} + \vec{M}) = \frac{2}{3}\mu_0\vec{M} \ 。$$

在外区令 $\vec{m} = \frac{4}{3}\pi a^3\vec{M}$ (总磁偶极矩)，则

$$\varphi_m = \frac{1}{4\pi}\frac{\vec{m}\cdot\vec{e}_r}{r^2} \ ,$$
$$\vec{B}_{外} = \mu_0\vec{H}_{外} = -\mu_0\nabla\varphi_m = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\vec{m}\cdot\vec{e}_r\vec{e}_r - \vec{m}}{r^3} \ 。 \tag{3.33}$$

$\vec{H}$ 线从“正磁荷”到“负磁荷”， $\vec{B}$ 线磁力线封闭无散。

例题 3：一个内径为 R_1，外径为 R_2 的 $\mu >> 1$ 的软铁磁体球壳，放在均匀外磁场 $\vec{B}$ 中，讨论静磁屏蔽。

解答：考虑了原点和无穷远处边界条件后，

$$\begin{aligned}
\varphi_{m1} &= -\frac{B}{\mu_0}r\cos\theta + \sum_l a_l r^{-l-1}P_l(\cos\theta) \ , \ (r > R_2) \\
\varphi_{m2} &= \sum_l (b_l r^{-l-1} + c_l r^l)P_l(\cos\theta) \ , \ (R_1 < r < R_2) \\
\varphi_{m3} &= \sum_l d_l r^l P_l(\cos\theta) \ , \ (r < R_1) \ 。
\end{aligned}$$

利用边界条件

$$r = R_2 : \ \varphi_{m1} = \varphi_{m2} \ , \ \mu_0\frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial n} = \mu\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial n} \ ;$$
$$r = R_1 : \ \varphi_{m2} = \varphi_{m3} \ , \ \mu\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial n} = \mu_0\frac{\partial\varphi_{m3}}{\partial n} \ 。$$

得到

$$\begin{aligned}
\varphi_{m1} &= -\frac{B}{\mu_0}r\cos\theta + \frac{a_1\cos\theta}{r^2} \ , \\
\varphi_{m2} &= c_1 r\cos\theta + \frac{b_1\cos\theta}{r^2} \ , \\
\varphi_{m3} &= d_1 r\cos\theta \ 。
\end{aligned}$$

各个系数为 (已考虑 $\mu >> \mu_0$)：

$$a_1 = \frac{R_2^3 B}{\mu_0} \ , \ b_1 = -\frac{3R_1^3 B}{2\mu(1-(\frac{R_1}{R_2})^3)} \ ,$$
$$c_1 = -\frac{6B}{2\mu(1-(\frac{R_1}{R_2})^3)} \ , \ d_1 = -\frac{9B}{2\mu(1-(\frac{R_1}{R_2})^3)} \ 。$$

从上面的解可以得到以下结论：

1. 静磁屏蔽：

$$\frac{B_{内}}{B} = \frac{9\mu_0}{2\mu(1-(\frac{R_1}{R_2})^3)} \simeq \frac{3\mu_0}{2\mu}\frac{R_2}{\triangle R} << 1 \ 。$$

2. 磁力线集中：由 $\vec{B}_{壳} = -\mu\nabla\varphi_{m2} =$ 均匀项 + 偶极项 。得出

$$\frac{B_{壳}}{B} \sim \frac{R_2}{\triangle R} > 1 \ 。$$

3.

$$\frac{B_{壳}}{B_{内}} \sim \frac{\mu}{\mu_0} >> 1 \ 。$$

4.

$$\frac{H_{壳}}{H} \sim \frac{\mu_0}{\mu}\frac{R_2}{\triangle R} << 1$$

即壳内 $H \sim 0$ ， $\Rightarrow$ 等磁势面。

其它形状的屏蔽壳各个场的量级与本例题类似。

例题 4：超导球处于均匀外场 $\vec{H}_0$ 中，求磁场及超导电流分布。

解答：对于正常态 $\vec{B} = \mu\vec{H}$ ，超导态可以看成某种磁介质： $\vec{B} = 0$ 。所以内部 $\vec{j} = \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \vec{B} = 0$ ，但存在着面磁化电流密度 $\vec{\alpha}_M$ 。设 $\vec{n}$ 为由真空 1 指向超导介质 2 ，则 (见 1.55) 式

$$\alpha_M = -\vec{n} \times \vec{M} \ 。$$

边条件：在无穷远处 $\varphi_1 \to -H_0 R\cos\theta$ ，所以 $\varphi_1 = -H_0 R\cos\theta + \frac{b}{R^2}\cos\theta$ 。在原点 $\varphi_2 = 0$ ，所以 $\varphi_2 = aR\cos\theta$ 。由在 $r = R_0$ 处的连接条件

$$\varphi_1 = \varphi_2 \ , \ \frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = 0 \ ,$$

进一步得出

$$\varphi_1 = -H_0 r\cos\theta - \frac{H_0 R_0^3}{2r^2}\cos\theta \ ,$$
$$\varphi_2 = -\frac{3H_0}{2}r\cos\theta \ ,$$

和 $\vec{H}_2 = \frac{3}{2}\vec{H}_0$ ， $\vec{M} = -\vec{H}_2$ 。由上式可以看出外场是原来的均匀场与一个磁偶极场的叠加， $\vec{m} = \frac{4\pi R_0^3}{3}\vec{M} = -2\pi R_0^3 \vec{H}_0$ 。面磁化电流密度

$$\vec{\alpha}_M = -\vec{n} \times \vec{M} = -\frac{3}{2} H_0 \sin\theta \vec{e}_\phi \text{ 。}$$

§3.6 习题

1. 设 $z < 0$ 的半空间有磁导率为 μ 的均匀介质， $z > 0$ 的半空间为真空。有一无限长的电流 I 沿 z 轴流动。求磁感应强度和磁化电流的分布。
2. 有一个均匀，无限长直的圆柱形螺线管，单位长度有线圈 n 匝，电流强度为 I ，全空间为真空。求管内外的磁感应强度。
3. 物质密度和电荷密度都均匀的刚性小球以角速度 ω 转动，小球的半径为 R ，总质量为 M ，总电量为 Q 。求它的磁矩和回磁比 (即角动量与磁矩之比)
4. 设理想铁磁体的磁化规律为 $\mathbf{B} = \mu_1 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}_0$ ，其中 μ_1 为常量， $\mathbf{M}_0$ 是与 $\mathbf{H}$ 无关的常矢量。求用这种材料作成的半径为 R 的铁球放在磁导率为 μ' 的线性、均匀、各向同性介质中，求球内外的磁感应强度和球内磁化电流的分布。
5. 将一磁导率为 μ ，半径为 a 的球体置于均匀外磁场 $\mathbf{H}_0$ 中，求球内外的磁场强度 $\mathbf{H}$ ，球内的磁化强度 $\mathbf{M}$ 和球体的总磁矩 $\mathbf{m}$ 。
6. 设 $z < 0$ 处有磁导率很大的介质， $z = a > 0$ 处有一块磁矩为 $\mathbf{m}$ 的小永磁体，它的磁矩方向与界面法向的夹角为 θ 求这小永磁体所受到的力。

第四章　电磁波的传播

我们在第一章曾指出过 Maxwell 方程组预言了电磁波的存在，具有巨大的意义。这一章我们将集中讨论电磁波的性质：其中包括无界空间中传播的平面波；电磁波在介质界面上的反射、折射; 导体界面上的穿透问题; 有界空间中的传播问题, 波导管，谐振腔等等。

§4.1　平面电磁波

讨论自由空间（无源）中电磁波的传播问题。由电磁场的基本方程出发，设 $\rho = 0$ ，　$\vec{j} = 0$, 得

$$\begin{aligned} &\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \ , \ \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \ , \\ &\nabla \cdot \vec{D} = 0 \ , \ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \ 。 \end{aligned} \tag{4.1}$$

在真空中，　$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ ，　$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{B} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ ，又 $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$ ，所以 $\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$ 。同理 $\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$ 。令

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \ , \tag{4.2}$$

得

$$\begin{aligned} &\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \ , \\ &\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \ 。 \end{aligned} \tag{4.3}$$

这是一个波动方程, 因而预言了电磁波的存在。在介质中, 一般不存在 $\vec{D}(t) = \varepsilon \vec{E}(t)$ 的简单关系，不能简单地将 $\mu_0 \varepsilon_0 \to \mu \varepsilon$ 。由于存在色散 ε 、 μ 与电磁波的频率 ω 有关（我们在第八章中将讨论色散的微观机制）:

$$\begin{aligned} &\vec{D}(\omega) = \varepsilon(\omega) \vec{E}(\omega) \ , \\ &\vec{B}(\omega) = \mu(\omega) \vec{H}(\omega) \ 。 \end{aligned} \tag{4.4}$$

可以讨论固定 ω 的电磁波在介质中的传播。

对于 ω 固定的单色波，可以得到定态波动方程。做 Fourier 分析,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) e^{-i\omega t} \ , \ \ \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(\vec{r}) e^{-i\omega t} \ 。$$

此时有 $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ ， $\vec{B}=\mu\vec{H}$, 代入方程 4.1 式中，消去 $e^{-i\omega t}$ 因子得

$$\begin{aligned}&\nabla\times\vec{E}=i\omega\mu\vec{H}\ ,\ \nabla\times\vec{H}=-i\omega\varepsilon\vec{E}\ ;\\&\nabla\cdot\vec{E}=0\ ,\ \nabla\cdot\vec{H}=0\ 。\end{aligned}\tag{4.5}$$

观察上式得到一个重要的结论，即仅前两式是独立的，后两式并不独立，可以从前两式推出。由上式出发容易得到所谓的 Helmholtz 方程组

$$\begin{aligned}&\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=0\ ,\ (k=\omega\sqrt{\mu\epsilon})\\&\nabla\cdot\vec{E}=0\ ,\\&\vec{B}=-\frac{i}{\omega}\nabla\times\vec{E}=-\frac{i}{k}\sqrt{\mu\varepsilon}\nabla\times\vec{E}\ 。\end{aligned}\tag{4.6}$$

类似的可推出

$$\begin{aligned}&\nabla^2\vec{B}+k^2\vec{B}=0\ ,\\&\nabla\cdot\vec{B}=0\ ,\\&\vec{E}=\frac{i}{\omega\mu\varepsilon}\nabla\times\vec{B}=\frac{i}{k\sqrt{\mu\varepsilon}}\nabla\times\vec{B}\ 。\end{aligned}\tag{4.7}$$

容易从 Helmholtz 方程出发得到平面波解。设 $\vec{E}=\vec{E}(x,t)$ 、 $\vec{B}=\vec{B}(x,t)$ ，与 y 、 z 无关。得 $\vec{E}(x,t)=\vec{E}_0e^{i(kx-\omega t)}$ 。由 $\nabla\cdot\vec{E}=0$ 得 $ik\vec{e}_x\cdot\vec{E}_0=0$ 即 $E_{0x}=0$ 。

相速度

$$v=\frac{\omega}{k}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}=v(\omega)\ ,$$

可能有色散。

在一般坐标情形下 $\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ ， $(|\vec{k}|=\omega\sqrt{\mu\varepsilon})$ ， $\vec{k}$ 叫做 **波矢量** 。 $\vec{k}\cdot\vec{r}$ 为常数的面叫做等相面。波长 $\lambda=\frac{2\pi}{k}$ ， $\nabla\cdot\vec{E}=0$ 给出 $\vec{k}\cdot\vec{E}=0$ ，所以电磁波是 **横波** ，有两个独立方向或偏振。此时可算出

$$\vec{B}=\sqrt{\mu\varepsilon}\,\frac{\vec{k}}{k}\times\vec{E}=\sqrt{\mu\varepsilon}\,\vec{n}\times\vec{E}\ ,\tag{4.8}$$

$\vec{k}$ 、 $\vec{E}$ 、 $\vec{B}$ 互相正交， $\vec{E}\times\vec{B}\propto\vec{k}$ 且 $\vec{E}$ 、 $\vec{B}$ 同位相， $|\frac{E}{cB}|=\frac{v}{c}$ 。

电场有两个独立的偏振方向。定义 $\vec{e}_1=\vec{e}_x\,e^{i(kz-\omega t)}$ ， $\vec{e}_2=\vec{e}_y\,e^{i(kz-\omega t)}$ 为两个基本的线偏振，则任意的电场 $\vec{E}$ 均可表成 $\vec{e}_1$ 、 $\vec{e}_2$ 的线性叠加

$$\vec{E}=E_1\vec{e}_1+E_2\vec{e}_2\ ,\tag{4.9}$$

其中 E_1 、 E_2 为任意复常数。虽然 $\vec{e}_1$ 、 $\vec{e}_2$ 为线偏振，但对于 $\vec{E}$ 来说，仅在 E_1 、 E_2 相对幅角为 0 或 π 时才是线偏振的。因为

$$\mathrm{Re}E_x=|E_1|\cos(kz-\omega t+\alpha_1)\ ,\ \mathrm{Re}E_y=|E_2|\cos(kz-\omega t+\alpha_2)\ ,$$

而仅当

$$\frac{\mathrm{Re}E_y(t)}{\mathrm{Re}E_x(t)} = \pm\left|\frac{E_2}{E_1}\right|$$

为常数时电场强度 $\vec{E}$ 才作直线振动，即线偏振。对于 $|E_1| = |E_2|$， $\alpha_2 = \alpha_1 \pm \frac{\pi}{2}$ 的特殊情况，偏振为简单的园偏振形式。此时又分为两种情况：如 $\alpha_2 = \alpha_1 - \frac{\pi}{2}$，此时迎着波的传播方向来看，电场向右旋转（或螺旋度为负）；如 $\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$，时迎着波的传播方向来看，电场向左旋转（或螺旋度为正）。也可以把一般情况下的电场写成这两个基本的园偏振形式的叠加。

平面电磁波有能量密度 $w = \frac{1}{2}(\varepsilon E^2 + \frac{1}{\mu}B^2)$ 且电场和磁场的贡献相同。简单计算也可得能流密度 $\vec{S} = vw\vec{n}$。 ω 、 $\vec{S}$ 是时间的迅变函数，在实际应用中往往只需考虑它们的时间平均值。如

$$w = \varepsilon E_0^2 \cos^2(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) = \frac{1}{2}\varepsilon E_0^2(1 + 2\cos 2(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t))$$

其对时间的平均值 $\overline{w} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2$。

往往用复数来表示场量，比如 $f(t) = f_0 e^{-i\omega t}$， $g(t) = g_0 e^{-i\omega t + i\phi}$。然而必须注意的是物理上的场必须是实的，对于线性计算，如积分、求导、相加等，运算不会导致实部和虚部的混合，但如果计算场的乘积时，比如计算能流密度时，则要注意用实部计算。所以，

$$\begin{aligned}\overline{fg} &\equiv f_0 g_0 \overline{\mathrm{Re}[e^{-i\omega t}]\mathrm{Re}[e^{-i\omega t + i\phi}]} \\ &= \frac{1}{2}f_0 g_0 \cos\phi = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[f^* g] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[f g^*]\ 。\end{aligned} \tag{4.10}$$

这一公式在计算中常会用到。比如由此可以立刻得出

$$\overline{\vec{S}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{E}^* \times \vec{H}) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_0^2\vec{n}\ 。$$

§4.2 电磁波在介质上的反射与折射

§4.2.1 反射与折射定律

在光学中所知道的反射和折射定律可由如下边界条件导出：

$$\vec{n}\times(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0\ , \tag{4.11}$$

$$\vec{n}\times(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0\ , \tag{4.12}$$

$$\vec{n}\cdot(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 0\ , \tag{4.13}$$

$$\vec{n}\cdot(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0\ 。 \tag{4.14}$$

注意在介质表面 $\vec{\alpha}_f = 0, \vec{\sigma} = 0$ 。对于固定 ω 的波前两式独立，后两式是冗余的、并不独立。这一点可以在稍后的讨论中澄清。

由于在经典理论中，波的反射与折射不会改变原入射波的频率（要求边界条件对任意时间都成立）所以对于入射、反射和折射波可设如下尝试解

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \text{ (入射)}, \\ \vec{E}' &= \vec{E}'_0 e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r}-\omega t)} \text{ (反射)}, \\ \vec{E}'' &= \vec{E}''_0 e^{i(\vec{k}''\cdot\vec{r}-\omega t)} \text{ (折射)}。 \end{aligned} \tag{4.15}$$

相应的 $\vec{B}$ 、 $\vec{B}'$ 、 $\vec{B}''$ 由 4.8 式给出。设 $z = 0$ 面为界面，由 4.11 式得

$$\vec{n} \times (\vec{E} + \vec{E}') = \vec{n} \times \vec{E}'' \text{ 。} \tag{4.16}$$

为了保证在整个平面边界上此式满足，要求

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \vec{k}' \cdot \vec{r} = \vec{k}'' \cdot \vec{r} \quad (z = 0) \text{ 。}$$

这给出

$$k_x = k'_x = k''_x \text{ ,} \quad k_y = k'_y = k''_y \text{ 。} \tag{4.17}$$

取入射波 $k_y = 0$ 则也有 $k'_y = k''_y = 0$ ，即 $\vec{k}$ 、 $\vec{k}'$ 、 $\vec{k}''$ 在同一平面上，如图 4.1 所示。 由

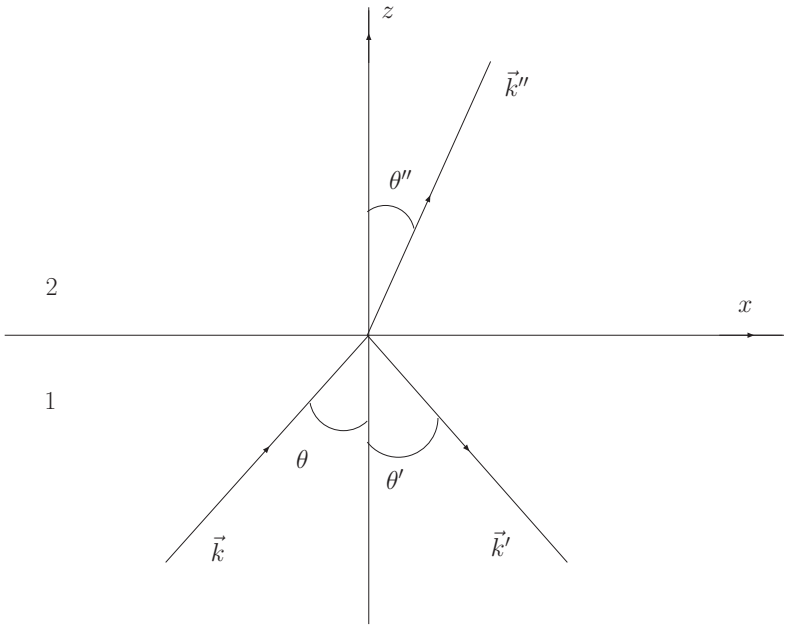


图 4.1: 电磁波在介质表面的反射与折射。

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \ (= \frac{c}{n})$$

即

$$k = k' = \frac{\omega}{v_1},\quad k'' = \frac{\omega}{v_2}\ ,$$

以及 $k_x = k\sin\theta = k'_x = k'\sin\theta' = k''\sin\theta''$ 推出 **折射定律**：

$$\theta = \theta'\ ,\quad \frac{\sin\theta}{\sin\theta''} = \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\mu_2\varepsilon_2}{\mu_1\varepsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1}\ 。 \tag{4.18}$$

n_2/n_1 也写作 n_{21} 叫做 **相对折射率**。一般来说 n_{21} 依赖于 ω，因而引起色散。

§4.2.2 振幅关系，菲涅耳公式

我们知道每一个入射的电磁波 $\vec{k}$ 可以有两个独立的偏振方向，分为 $\vec{E}$ 垂直于入射面（即 xz 平面）和 $\vec{E}$ 平行于入射面两种情况，见图 4.2 所示。下面分别作讨论

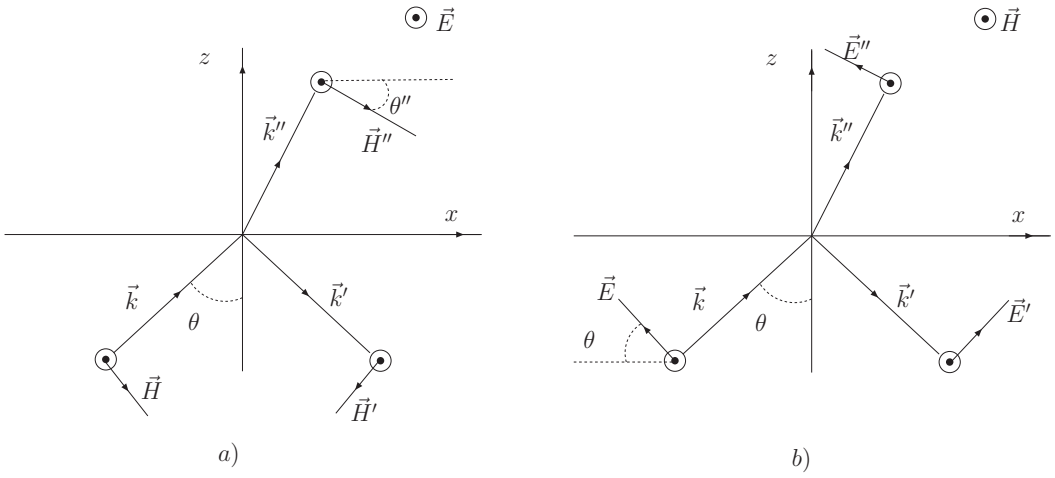


图 4.2: a ）入射电场垂直于入射面； b ）入射电场平行于入射面。

1 ） $\vec{E}$ 垂直于入射面。

图 4.2 a), 利用切线方向上场的连续性条件

$$\begin{aligned} &E + E' = E''\ ,\\ &H\cos\theta - H'\cos\theta' = H''\cos\theta''\ 。 \end{aligned} \tag{4.19}$$

因为 $H = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E$, $\theta = \theta'$，由上面第二式得

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}(E - E')\cos\theta = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}E''\cos\theta''\ 。$$

代入折射公式 4.18 式，并利用 μ_1 、 μ_2 近似等于真空磁导率，得到

$$\begin{aligned}\frac{E'}{E} &= \frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta - \sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta''}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta + \sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta''} = -\frac{\sin(\theta-\theta'')}{\sin(\theta+\theta'')}\ ,\\ \frac{E''}{E} &= \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta + \sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta''} = \frac{2\cos\theta\sin\theta''}{\sin(\theta+\theta'')}\ 。\end{aligned} \tag{4.20}$$

此时 4.13 式平庸的满足，也不难证明可由折射定律 4.18 式和 4.11 式得到 4.14 式。

2) $\vec{E}$ 平行于入射面。

见图 4.2 b) ，

$$\begin{aligned}&E\cos\theta - E'\cos\theta = E''\cos\theta''\ ,\\ &H + H' = H''\ 。\end{aligned} \tag{4.21}$$

其中第二式推出 $\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}(E+E') = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}E''$ 。利用 μ_1 、 $\mu_2 \simeq \mu_0$ 得

$$\begin{aligned}\frac{E'}{E} &= \frac{\tan(\theta-\theta'')}{\tan(\theta+\theta'')}\ ,\\ \frac{E''}{E} &= \frac{2\cos\theta\sin\theta''}{\sin(\theta+\theta'')\cos(\theta-\theta'')}\ 。\end{aligned} \tag{4.22}$$

在情形 2 ）时， $\vec{n}\cdot(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$ ， $\vec{n}\cdot(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 0$ 可由折射定律和方程 4.21 中第二式得到。

分析以上结果我们得到如下重要物理结论：

1. $\vec{E}_\perp$ 与 $\vec{E}_\parallel$ 的折、反强度不同，所以由自然光可产出部分偏振光。
2. $\theta + \theta'' = \frac{\pi}{2}$ 时， $\vec{E}_\parallel$ 光的 $E' = 0$ 。所以反射光只有垂直分量，为全偏振光。于此现象相关的有一个定律（ Brewster ）：发生全偏振反射时的角度（ **Brewster 角** ）满足

$$\tan\theta = n_{21}\ 。 \tag{4.23}$$

3. 入射波是 $\vec{E}_\perp$ 时，若 $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ ，则 $\theta > \theta''$ ， $E'/E < 0$ 。也就是说，反射波与入射波相比反相（“半波损失”）。

实验结果完全与理论一致，证明了光的电磁理论的正确性。

从光密到光疏物质时（ $\varepsilon_1 > \varepsilon_2,\ n_{21} < 1$ ）， $\theta'' > \theta$ 。当 $\sin\theta = n_{21} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$ 时 $\theta'' = \frac{\pi}{2}$ 。那么当 $\sin\theta > n_{21}$ 又会发生什么情况呢？这时需要重新审视一下前面的推导过程。仍可令 $k_y = 0$ 以简化讨论，边条件 4.16 仍应满足，所以仍可以得到

$k_x = k'_x = k''_x$ 。因此仍然有 $k''_x = k_x = k\sin\theta$ 。但是此时 $k'' = k\frac{v_1}{v_2} = kn_{21}$（入射、折射波的角频率相同），所以推出 $k''_x > k''$ 。这意味着 k''_z 分量必须为虚数：

$$k''_z = \sqrt{k''^2 - k''^2_x} = ik\sqrt{\sin^2\theta - n^2_{21}} \equiv i\kappa \ 。$$

此时 $\vec{E}'' = \vec{E}''_0 e^{-\kappa z} e^{i(k''_x x - \omega t)}$ 沿 x 方向传播，沿 z 方向衰减。衰减的特征长度为 κ^{-1} 。此时可认为 $\vec{E}'' = 0$ ，于是 $|\frac{E'}{E}| = 1$ ，为全反射。

§4.3 导电介质中的电磁波

§4.3.1 导体中的 Maxwell 方程与电磁波

在导体中电磁波的传播规律与在介质中时很不一样。原因是电波在导体内会产生传导电流，因而产生 **焦耳热** 。所以波在导体内出现阻尼。另一个特点是在金属内部可以认为不出现电荷。利用焦耳定律 $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ 以及 $\nabla\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon$ 知

$$-\frac{\partial\rho}{\partial t} = \nabla\cdot\vec{j} = \frac{\sigma}{\varepsilon}\rho \ 。$$

其解为 $\rho = \rho_0 e^{-\sigma/\varepsilon t}$ 。对于一般金属 $\tau = \varepsilon/\sigma \sim 10^{-17}s$ ，所以即使有电荷也会很快的衰减掉。于是在导体中有 $\rho = 0$ 及 $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ 。

对于一定频率 ω 的波， $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \vec{B} = \mu\vec{H}$ ， Maxwell 方程组可以写为

$$\nabla\times\vec{E} = i\omega\mu\vec{H} \ , \tag{4.24}$$

$$\nabla\times\vec{H} = -i\omega\varepsilon\vec{E} + \sigma\vec{E} \tag{4.25}$$

$$\nabla\cdot\vec{E} = 0 \ , \tag{4.26}$$

$$\nabla\cdot\vec{H} = 0 \ 。 \tag{4.27}$$

其中 4.25 式等号右边第一项为位移电流项，第二项为传导电流项。定义

$$\varepsilon' = \varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega} \ 。 \tag{4.28}$$

除了把 ε 换成了 ε' 以外，导体中的场方程组与在介质中的情形（ 4.1 式）一样。

复介电系数ε' 的物理意义是清楚的：

$$\text{耗散功率} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{j}^*\cdot\vec{E}) = 0 + \frac{1}{2}\sigma E_0^2 \ 。$$

位移电流与电场 $\vec{E}$ 有 90° 的相位差，因而不做功。而传导电流与 $\vec{E}$ 同相位，所以做功。所以复介电系数 ε' 的虚部代表了传导电流所引起的耗散。

类似于介质中的推导, 同样可以写出在金属中传播的电磁场所满足的 Helmholtz 方程:

$$\begin{aligned}&\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=0\ ,\quad k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon'}\ ,\\&\nabla\cdot\vec{E}=0\ ,\\&\vec{H}=\frac{-i}{\omega\mu}\nabla\times\vec{E}\ 。\end{aligned}\tag{4.29}$$

在求解导电介质中的 Helmholtz 方程时，波矢 $\vec{k}$ 是复的，可令为 $\vec{k}=\vec{\beta}+i\vec{\alpha}$,

$$\vec{E}=\vec{E}_0e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}=\vec{E}_0e^{-\vec{\alpha}\cdot\vec{r}}e^{i(\vec{\beta}\cdot\vec{r}-\omega t)}\ 。$$

所以 $\vec{\beta}$ 代表位相， $\vec{\alpha}$ 代表衰减。

求解 $\vec{\alpha}$ ， $\vec{\beta}$ 的一般方法是由 $k^2=\omega^2\mu\varepsilon'=\omega^2\mu(\varepsilon+i\frac{\sigma}{\omega})$ 得到

$$\begin{aligned}&\beta^2-\alpha^2=\omega^2\mu\varepsilon\ ,\\&\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\frac{1}{2}\omega\mu\sigma\ 。\end{aligned}\tag{4.30}$$

当然在求解时还应加上边界条件。[1] 比如讨论真空（ 1 ）与导体（ 2 ）的折射时, 由 4.17 式知道波矢的 x 分量都相等。故 $k_x=k_x''=\beta_x+i\alpha_x$ 。也就是说 $\alpha_x=0$, $\beta_x=k_x$ ， 再由

$$\begin{aligned}&(k_x^2+\beta_z^2)-\alpha_z^2=\omega^2\mu\varepsilon\ ,\\&\alpha_z\beta_z=\frac{1}{2}\omega\mu\sigma\ ,\end{aligned}\tag{4.31}$$

来求出 α_z 、 β_z 。

§4.3.2 趋肤效应与穿透深度，导体表面上的反射

上一节我们介绍了，电磁波由于传导电流引起的阻尼的存在，在导体中的传播是指数衰减的。这里继续对方程 4.31 作讨论，为简化问题起见，只考虑垂直入射的情形。对于折射波， $\alpha_x=\beta_x=0$ ，令 $\alpha=\alpha_z$ ， $\beta=\beta_z$ ，则由 4.31 式解得

$$\beta=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}+1\right)\right]^{\frac{1}{2}}\ ,\alpha=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}-1\right)\right]^{\frac{1}{2}}\ 。\tag{4.32}$$

若 $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}>>1$（ **良导体条件** ），则得

$$\beta\simeq\alpha\simeq\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}\ ,$$

[1] 与介质界面稍有不同的是，在这里电场平行分量的连续性条件仍然是对的。但金属表面有面自由电流密度和面自由电荷密度。所以 4.12 式和 4.13 式需要修改。

而穿透深度为

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \simeq \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \propto \frac{1}{\sqrt{\omega\sigma}} \ 。$$

穿透深度的尺度与频率的平方根成反比。以金属铜为例在频率为 100 兆赫时 $\delta \sim 0.7 \times 10^{-3}\text{cm}$ ， 50Hz 时 $\delta \sim 0.9\text{cm}$ 。

在解出了 $\vec{\beta}$ 、 $\vec{\alpha}$ 后，可以求出 $\vec{E}''$ 和 $\vec{H}''$ 的关系：

$$\vec{H}'' = \frac{1}{\omega\mu}\vec{k}'' \times \vec{E}'' = \frac{1}{\omega\mu}(\beta + i\alpha)\vec{e}_z \times \vec{E}'' \simeq \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}} e^{i\frac{\pi}{4}} \vec{e}_z \times \vec{E}'' \tag{4.33}$$

即 $\vec{E}''$ 与 $\vec{H}''$ 有 $\frac{\pi}{4}$ 的相差。

在普通介质中 $\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}|\frac{H}{E}| \equiv 1$ ，而在金属中

$$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}|\frac{H}{E}| = \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}} >> 1 \ 。 \tag{4.34}$$

所以在金属中磁场更重要。

考虑由真空到金属的入射，见图 4.2a) 。考虑 $\theta \to 0$ ， $\vec{E}$ 垂直于入射面的简单情形。此时边条件为

$$E + E' = E'' \ , \ H - H' = H'' \ 。$$

在导体内 $\vec{H}''$ 与 $\vec{E}''$ 的关系为 4.33 式，真空中 $\vec{H} = \frac{1}{\omega\mu_0}\vec{k} \times \vec{E}$ ，代入边界条件第二式并利用 $\mu \simeq \mu_0$ 得

$$E - E' = \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0}}(1+i)E'' \ 。$$

于是

$$\frac{E'}{E} = \frac{1 + i - \sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}}{1 + i + \sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}} \ 。$$

反射系数

$$R = |\frac{E'}{E}|^2 \simeq 1 - 2\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}} < 1 \ 。$$

对于微波或无线电波， $R \simeq 1$ ，金属导体可视为良导体。

例题：计算高频下的良导体的表面电阻。

解答：金属内

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} = \sigma E_0(x,y)e^{-\alpha z + i\beta z - i\omega t} \ 。$$

平均损耗功率密度 $= \frac{1}{2}Re(\vec{j}^* \cdot \vec{E}) = \frac{1}{2}\sigma E_0^2 e^{-2\alpha z}$ 。单位表面积平均耗功

$$P_L = \frac{1}{2}\sigma E_0^2 \int_0^\infty e^{-2\alpha z} dz = \frac{\sigma E_0^2}{4\alpha} \ 。$$

自由面电流密度

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}_f &= \int_0^\infty \vec{j}dz = \sigma\vec{E}_0\int_0^\infty e^{-\alpha z+i\beta z}dz \\ &= \frac{\sigma\vec{E}_0}{\alpha-i\beta} = \frac{\sigma\vec{E}_0}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}e^{i\phi} \quad (\tan\phi=\frac{\beta}{\alpha}) \\ &= \alpha_{f0}\frac{\vec{E}_0}{E_0}e^{i\phi}\ 。\end{aligned}$$

其中 $\alpha_{f0}=\frac{\sigma E_0}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ 为面峰值电流。由 $P_L=\frac{R}{2}\alpha_{f0}^2$ 得 $R=\frac{1}{\sigma\delta}$ 。

§4.4 有界空间中电磁波的传播

由于导体表面可成为电磁波的边界，所以可以讨论有界空间的电磁波。利用这些性质，导体可用于产生高频电磁振荡（谐振腔）和用于传输电磁波（波导管）等。

§4.4.1 理想导体边界条件

所谓理想导体，指的是 $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\to\infty$ 的理想情况。此时 $|\frac{E''}{E}|\propto\frac{\omega\varepsilon}{\sigma}\to 0$ 可认为金属内部 $\vec{E}\,,\vec{H}=0$ 并忽略损耗。所以对于固定 ω 的波，理想导体的边界条件可以写为

$$\vec{n}\times\vec{E}=0\ ,\quad \vec{n}\times\vec{H}=\vec{\alpha}_f \tag{4.35}$$

（另外两条件 $\vec{n}\cdot\vec{D}=\sigma_f,\vec{n}\cdot\vec{B}=0$ 自然满足）。即 $\vec{E}\perp$ 表面，$\vec{H}//$ 表面。此时电磁规律所满足的方程为

$$\begin{aligned}&\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=0\ ,\\ &\nabla\cdot\vec{E}=0\ ,\\ &\vec{n}\times\vec{E}=0\ 。\end{aligned}\tag{4.36}$$

由此得到 $\vec{E}$ 后，可由

$$\vec{H}=\frac{1}{\omega\mu}\vec{k}\times\vec{E}$$

求出 $\vec{H}$（因为 $\vec{E}$ 垂直于表面，所以 $\vec{n}\cdot\vec{H}=0$ ），再由 $\vec{n}\times\vec{H}=\vec{\alpha}$ 求出面电流分布以及用 $\sigma_f=\varepsilon E_n$ 求面电荷分布。又由于 $E_{//}=0$ ，所以在边界上 $\nabla\cdot\vec{E}=0$ 表现为 $\frac{\partial E_n}{\partial n}=0$ 。

例题：证明在两个平行的无穷大导体平面之间，只能传播一种偏振的 TEM 波。

解答：取坐标如图 *4.3a* 所示。 $\vec{E}=E\vec{e}_y,\ \vec{H}=H\vec{e}_x$ 可能，而另一种偏振 $\vec{E}=E\vec{e}_x$ 不可能。

§4.4.2 谐振腔

要形成振荡电磁波，对于低频波用 LC 回路 $f=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ 。高频时要求 L, C 很小，此时辐射、焦耳热损耗都增加使得实际操作不可行。因此在微波范围内需要使用谐振

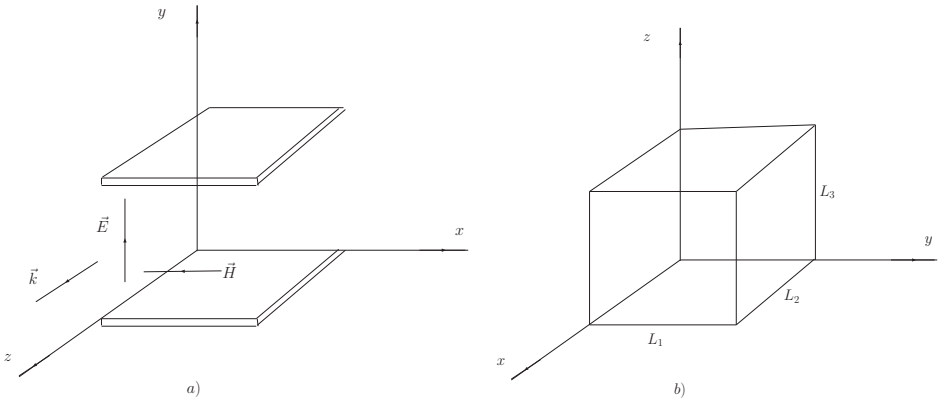


图 4.3: a) 无穷大平行金属板之间的场； b ）谐振腔。

如图 4.3b) 所示，对于长方形金属边界面，设 $u(x,y,z)$ 为 $\vec{E}$ 、 $\vec{H}$ 的任一分量，则

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \text{ 。}$$

用分离变量法求解，令 $u(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z)$ 得

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2X}{dx^2}+k_x^2X=0\ ,\\
&\frac{d^2Y}{dy^2}+k_y^2Y=0\ ,\\
&\frac{d^2Z}{dz^2}+k_z^2Z=0\ ,
\end{aligned}\tag{4.37}$$

其中 $k_x^2+k_y^2+k_z^2=k^2=\omega^2\mu\varepsilon$ 。于是有

$$u=(C_1\cos k_x x+D_1\sin k_x x)(C_2\cos k_y y+D_2\sin k_y y)(C_3\cos k_z z+D_3\sin k_z z)\text{ 。}$$

考虑边条件，以 $u=E_x$ 为例，有

$$\begin{aligned}
&x=0\ ,\ \ \frac{\partial E_x}{\partial x}|_{x=0}=0\ ,\ \ \Rightarrow D_1=0\ ,\\
&y=0\ ,\ \ E_x|_{y=0}=0\ ,\ \ \Rightarrow C_2=0\ ,\\
&z=0\ ,\ \ E_x|_{z=0}=0\ ,\ \ \Rightarrow C_3=0\ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&x=L_1\ ,\ \ \frac{\partial E_x}{\partial x}|_{x=L_1}=0\ ,\ \ \Rightarrow k_x=\frac{\pi m}{L_1}\ ,\\
&y=L_2\ ,\ \ E_x|_{y=L_2}=0\ ,\ \ \Rightarrow k_y=\frac{\pi n}{L_2}\ ,\\
&z=L_3\ ,\ \ E_x|_{z=L_3}=0\ ,\ \ \Rightarrow k_z=\frac{\pi p}{L_3}\ ,
\end{aligned}$$

对于 E_y 、 E_z 可以作类似讨论，最后得

$$\begin{aligned}
E_x &= A_1 \cos k_x x \, \sin k_y y \, \sin k_z z \ , \\
E_y &= A_2 \sin k_x x \, \cos k_y y \, \sin k_z z \ , \\
E_z &= A_3 \sin k_x x \, \sin k_y y \, \cos k_z z \ , \\
k_x &= \frac{\pi m}{L_1}, \ \ k_y = \frac{\pi n}{L_2} \ , \ \ k_z = \frac{\pi p}{L_3} \ , \quad m,n,p = 0,1,2,\cdots \ 。
\end{aligned} \tag{4.38}$$

这个表达式还不是全部，由 $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ 得知 [2]

$$k_x A_1 + k_y A_2 + k_z A_3 = 0 \ 。$$

即只有两个 A_i 是独立的，即每组 (m,n,p) 有两个独立偏振。

$$\omega_{mnp} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{(\frac{m}{L_1})^2 + (\frac{m}{L_2})^2 + (\frac{p}{L_3})^2} \ 。$$

最低频率为 (1,1,0) (设 $L_1 > L_2 > L_3$),

$$f_{110} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2}} \ , \ \ \lambda_{110} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2}}} \ (\sim L) \ 。$$

§4.4.3 波导管

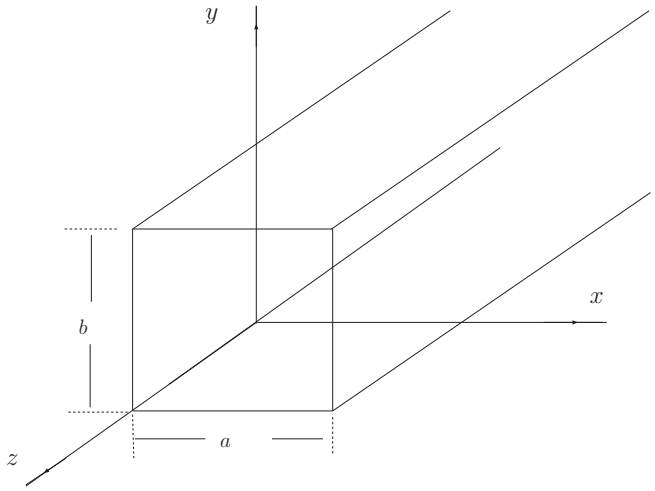


图 4.4: 矩形波导管。

考虑电磁波沿 z 方向在如图 4.4 波导管此时方程仍然为 4.36 式。而边条件为：

$$\begin{aligned}
x = 0, a \ , \ \ E_y = E_z = 0 \ , \ \ \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \ , \\
y = 0, b \ , \ \ E_x = E_z = 0 \ , \ \ \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \ 。
\end{aligned} \tag{4.39}$$

[2]这一约束实际上也保证了在方程式 4.38 中电场的三个分量具有同样的波矢分量 (k_x, k_y, k_z) 。

为求解 4.36 式，令 $\vec{E}=\vec{E}(x,y)e^{ik_z z-i\omega t}$，得到

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})\vec{E}(x,y)+(k^2-k_z^2)\vec{E}(x,y)=0\ 。$$

再令 $\vec{E}(x,y)$ 的任一分量为 $u(x,y)=X(x)Y(y)$，得

$$\begin{aligned}&\frac{d^2X}{dx^2}+k_x^2X=0\ ,\\&\frac{d^2Y}{dy^2}+k_y^2Y=0\ ,\\&k_x^2+k_y^2+k_z^2=k^2=\omega^2\mu\varepsilon\ 。\end{aligned}\tag{4.40}$$

其解的形式为

$$u(x,y)=(C_1\cos k_x x+D_1\sin k_x x)(C_2\cos k_y y+D_2\sin k_y y)\ 。$$

再由边条件 4.39 式得到解为

$$\begin{aligned}&E_x=A_1\cos k_x x\ \sin k_y y\ ,\\&E_y=A_2\sin k_x x\ \cos k_y y\ ,\\&E_z=A_3\sin k_x x\ \sin k_y y\ ;\\&k_x=\frac{m\pi}{a}\ ,\ \ k_y=\frac{n\pi}{b}\ ,\ \ (m,n=0,1,2,\cdots)\ 。\end{aligned}\tag{4.41}$$

当然还要加上限制 $\nabla\cdot\vec{E}=0$。后者给出

$$k_xA_1+k_yA_2-ik_zA_3=0\ ,\tag{4.42}$$

也就是说，只有两个 A_i 分量独立：

- TE 波：$E_z=0(H_z\neq0)$，即 $A_3=0,\ A_1/A_2=-k_y/k_x$。
- TM 波：$H_z=0(E_z\neq0)$，即 $H_z\propto\frac{\partial}{\partial x}E_y-\frac{\partial}{\partial y}E_x\propto A_2k_x-A_1k_y=0,\ A_1/A_2=k_x/k_y$。

一般来说是 $\mathrm{TE}_{m,n}$ 与 $\mathrm{TM}_{m,n}$ 的混合。

在波导管传播的电磁波存在着最小频率或截止频率。$k^2=\omega^2\mu\varepsilon$ 由 ω 决定。若 $k^2<k_x^2+k_y^2=(\frac{m\pi}{a})^2+(\frac{n\pi}{b})^2$ 则 k_z 是虚数，$e^{ik_zz}\to e^{-|k_z|z}$ 衰减、不传播。所以截止频率为

$$\omega_{c,mn}=\frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{(\frac{m}{a})^2+(\frac{n}{b})^2}\ 。$$

也就是说 $\omega<\omega_{c,mn}$ 时场不传播。设 $a>b$，TE_{10} 波的

$$\begin{aligned}&f_{c,10}=\frac{1}{2\pi}\omega_{c,10}=\frac{1}{2a\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{c}{2a}\ (\text{真空})\ ,\\&\lambda_{c,10}=2a\ 。\end{aligned}\tag{4.43}$$

即波导内能传播的最大波长为 $2a$ 。

在利用波导时常用的是 TE_{10} 波，它具有如下性质：

$$m=1,n=0,k_x=\frac{\pi}{a},k_y=0,E_z=0,A_3=0\ 。$$

由 4.42 式得 $A_1=0$ ，仅 $A_2\neq 0$ 。 $E_y=A_2\sin k_x x$ ， $E_x=E_z=0$ 。

$$H_z=-\frac{i}{\omega\mu}\frac{\partial}{\partial x}E_y=-\frac{i\pi}{\mu\omega a}A_2\cos k_x x\equiv H_0\cos k_x x\ 。$$

以 H_0 为参数，利用 $\vec{H}=-\frac{i}{\mu\omega}\nabla\times\vec{E}$ 得

$$\begin{aligned}
H_z &= H_0\cos\frac{\pi x}{a}\ ,\\
H_x &= -\frac{ik_z a}{\pi}H_0\sin\frac{\pi x}{a}\ ,\\
E_y &= \frac{i\omega\mu a}{\pi}H_0\sin\frac{\pi x}{a}\ ,\\
E_x &= E_z=H_y=0\ 。
\end{aligned}\tag{4.44}$$

由其可计算面电流（ $\vec{\alpha}=\vec{n}\times\vec{H}$ ），比如在 $y=b$ 面上：

$$\alpha_x=-H_0\cos\frac{\pi x}{a}\ ,\ \alpha_z=-\frac{ik_z a}{\pi}H_0\sin\frac{\pi x}{a}\ 。$$

在 $x=a/2$ 处， $\alpha_x=0,\alpha_z\neq 0$ 。因此如果在宽边中间的 z 方向上作割逢则不会影响内部电磁波的蹿波，这一方法可以用来探测波导管内的物理量。而在窄边上，由于 $\vec{\alpha}\propto\vec{e}_y$ ，只有横向电流。

相速度与群速度：

在波导管中传播的电磁波的形式为

$$\vec{E}=\vec{E}(x,y)e^{ik_z z-i\omega t}\ ,$$

其相速度为 $v_p=\frac{\omega}{k_z}=\frac{ck}{k_z}>c$ ，但是相速度一般来说并不代表能量或信号传递速度。此时能量传递速度由群速度来描述：

$$v_g=\frac{d\omega}{dk_z}=\frac{cdk}{dk_z}=\frac{ck_z}{k}<c\ 。\tag{4.45}$$

不难理解上面的群速度的表达式，以 T_{10} 波为例，

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= E_y\vec{e}_y e^{ik_z z-i\omega t}=\frac{A_2}{2i}(e^{ik_x x}-e^{-ik_x x})e^{ik_z z-i\omega t}\\
&= \frac{A_2}{2i}\vec{e}_y\left[e^{i(k_x x+k_z z)-i\omega t}-e^{i(-k_x x+k_z z)-i\omega t}\right]\ 。
\end{aligned}\tag{4.46}$$

也就是说，在波导管中行进的 T_{10} 波可以看作是两束平面波的叠加，两束波在 z 方向的速度均为 $c_z=c\frac{k_z}{k}=c\frac{k_z}{\sqrt{k_x^2+k_z^2}}=v_g$ 。

§4.5 习题

1. 有一沿 z 方向传播的平面电磁波，其电场矢量在 x, y 平面上沿 $y = x$ 沿直线振动，振幅为 E_R ，试写出这波的解析式，并把它分解为圆偏振波的叠加。
2. 在光从光密介质向光疏介质入射的情况下， (1) 写出入射、反射和折射的能流密度； (2) 能量的守恒性要求这三个能流满足什么关系？ (3) 讨论全反射情况下的能量守恒。
3. 平面波从真空斜向射入表面为平面的良导体。试求出透射波的传播矢量 $\mathbf{k_t}$ 和衰减长度 δ 。
4. 写出矩形波导管内磁场 $\mathbf{H}$ 满足的方程及其边界条件。
5. 论证矩形波导管内不能存在 TM_{m0} 和 TM_{0n} 型波。
6. 无限长的 z 向矩形波导管，在 $z = 0$ 处被一垂直的理想导体板所封闭。求在 $z = -\infty$ 至 $z = 0$ 间的管内能存在的波型。
7. 频率 $\nu(\omega = 2\pi\nu)$ 为 3×10^{10}Hz 的微波，在 0.7cm×0.4cm 的矩形波导管中能以什么波型传播？在 0.7cm×0.6cm 的矩形波导管中能以什么波型传播？

第五章　电磁波的辐射与激发

由麦克斯韦方程组知，源与场互相耦合，构成了一个复杂的系统。源可以产生场，反过来场也可以改变源的运动状态。[1] 由于两者的互相耦合，使得在一般的情况下求解困难。本章的主要目的是讨论一个简化了的问题：已知源的分布，或给定 $\vec{j}(\vec{r},t)$ ，如何计算辐射场？在研究这一问题时人们发现，引入电磁场的矢势和标势来讨论辐射，可以使问题变得更简单。所以我们首先讨论电磁场的矢势和标势。注意这里的矢势和标势是以前所讨论的静场情况下的矢势和标势的推广，适用于任意（与时间有关）情况。

§5.1　电磁场的矢势与标势

首先由真空中的麦克斯韦方程组 1.24 出发，由于 $\vec{B}$ 是无散的，所以

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}\,, \tag{5.1}$$

代入 1.24 式中的第一式，得到 $\nabla\times(\vec{E}+\frac{\vec{\partial}A}{\partial t})=0$ 也就是说

$$\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi\ 。$$

或

$$\vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \tag{5.2}$$

注意在得到 5.1 和 5.2 式时，并不需要场量与时间无关的假设。显然这里的 $\vec{A}$ 与 φ 是以前的矢势与标势的推广，统称 **电磁势** 。而需要注意的是此时的 φ 已经失去了一般电势的意义。利用电磁势来讨论电磁问题的好处是显然的，因为 $\vec{E}$ 、 $\vec{B}$ 有六个分量而电磁势只有 4 个分量。

像 $\vec{B}$ 与 $\vec{E}$ 一样， $\vec{A}$ 与 φ 是作为一个整体而存在的。对于电磁势，有一个重要的特点，即在作如下变换时（对于任给的可微函数 ψ ），

$$\begin{aligned}\vec{A}\to\vec{A}'&=\vec{A}+\nabla\psi\ ,\\ \varphi\to\varphi'&=\varphi-\frac{\partial\psi}{\partial t}\ 。\end{aligned} \tag{5.3}$$

电磁场 $\vec{E}$ 、 $\vec{B}$ 进而整个电磁规律都是不变的。变换 5.3 式叫做 **规范变换** ，因此电磁势也叫做规范势，或规范场。物理规律在变换 5.3 式下不变的性质叫做变换 **规范不变性** 。

[1]在量子场理论中，场甚至可以生成源，而在经典理论中则不行。

在量子力学或量子场论中，规范势具有比电磁场更基本的意义。由于规范不变性的存在，用 $\vec{A}$ 、φ 场来描述电磁规律时，存在着多余的自由度。因此可以对规范势作一些额外的限制来固定住多余的自由度。这种限制条件叫做 **规范条件** 。这个现象我们在第三章已开始时已经涉及到，讨论了所谓的库仑规范条件，即 $\nabla\cdot\vec{A}=0$ 。除此以外另一种常用的规范条件是所谓的 Lorentz 规范：

$$\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0\ 。\tag{5.4}$$

我们可以直接建立规范势所满足的方程。将 5.1 式、 5.2 式代入 $\nabla\times\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\mu_0\vec{j}$ 中，得

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\nabla(\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t})=-\mu_0\vec{j}\ 。\tag{5.5}$$

又将 5.1 式、 5.2 式代入 $\nabla\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_0$ 中可得

$$-\nabla^2\varphi-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{A}=\rho/\varepsilon_0\ 。\tag{5.6}$$

5.5 和 5.6 式构成了关于 $\vec{A}$ 、 φ 的一般方程。

若取库仑规范则 5.5 和 5.6 式给出

$$\begin{aligned}&\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi=-\mu_0\vec{j}\ ,\\&\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\ 。\end{aligned}\tag{5.7}$$

如若取 Lorentz 规范，则得到达朗贝尔方程

$$\begin{aligned}&\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{j}\ ,\\&\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\ 。\end{aligned}\tag{5.8}$$

这是一个线性、非齐次的波动方程。

例题：求平面电磁波的电磁势。

解答： $\rho=0$ ， $\vec{j}=0$ ， $\omega^2=c^2k^2$ ，波动方程 5.8 式的平面波解为

$$\vec{A}=\vec{A}_0e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\ ,\ \varphi=\varphi_0e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\ 。\tag{5.9}$$

由 *Lorentz* 规范条件，得

$$\varphi_0=\frac{c^2}{\omega}\vec{k}\cdot\vec{A}_0\ 。$$

电场和磁场也可得出

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \nabla\times\vec{A} = i\vec{k}\times\vec{A}\,,\\ \vec{E} &= -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -i\vec{k}\varphi + i\omega\vec{A} = -i\frac{c^2}{\omega}\vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{A}) = -\frac{c^2}{\omega}\vec{k}\times\vec{B}\ 。\end{aligned}\tag{5.10}$$

值得一提的是，虽然我们在上面推导中应用了 *Lorentz* 规范条件，但得到的规范势仍然有一定的冗余自由度：

$$\vec{A}_0 \to \vec{A}_0 + \alpha\vec{k}\ ,\ \ \varphi_0 \to \varphi_0 + \frac{c^2}{\omega}\alpha k^2 = \varphi_0 + \alpha\omega\ 。$$

为了进一步消除这个多余自由度，可以假设 $\vec{A}$ 只有横向部分即 $\nabla\cdot\vec{A}=0$ 或 $\vec{k}\cdot\vec{A}=0$，由 *Lorentz* 规范条件得 $\varphi =$ 常数 $=0$。其实这个进一步的限制就是库仑规范条件。这可以从库仑规范条件下 $\vec{A}$ 和 φ 场满足的方程 5.7 式看出。

§5.2 电磁势的物理意义 *

§5.2.1 定域的规范变换

上一节中我们指出电磁规律在规范变换 5.3 式下不变。隐含在其中的假设是，流或源在规范变换下是不变的。这一点需要更加仔细的判断。在电磁理论中流是由带电的物质（场）组成的，而在量子理论中，物质场方程是所谓的 Schrödinger 方程：

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{x},t) = [\frac{1}{2m}(i\nabla + q\vec{A})^2 + q\varphi]\Psi(\vec{x},t)\ 。\tag{5.11}$$

仅由 5.3 式定义的规范变换并不使得 5.11 式不变。因此需要把 5.3 式做推广。不难验证，如果波函数在规范变换下作如下变换，

$$\Psi \to e^{iq\psi}\Psi(\vec{x},t)\ 。\tag{5.12}$$

则 Schrödinger 方程具有电磁规范变换下的不变性。在这里我们的逻辑是由电磁场的规范不变性出发引伸出波函数的规范变换以保证整个理论的规范不变性。而在量子理论中，波动方程在波函数的 **定域位相变换**（定域规范变换）下的不变性被认为是更基本的。为此不得不引入（电磁）相互作用，以保证理论的定域规范不变性。这一观察导致了人类对微观世界相互作用的认识上的巨大进步（杨振宁、Mills 1954 ）：已知的四种基本相互作用中至少有三种是可以通过定域规范不变性这一原则导引出来。

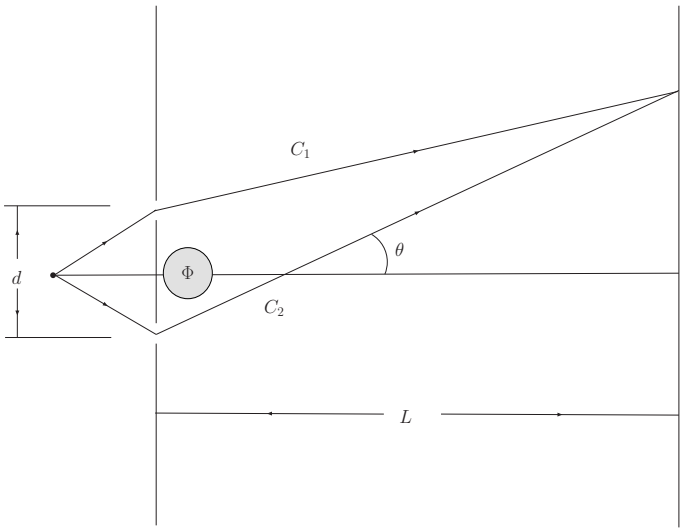


图 5.1: 揭示 Aharonov – Bohm 效应 (1963) 的实验原理， $d << L$ 。

§5.2.2 Aharonov–Bohm 效应

在 3.1 节引入矢量势 $\vec{A}$ 时我们曾指出 $\vec{A}$ 本身并没有直接的物理意义，它的所有效应仅仅是通过 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ 来起作用。[2] 换句话说，只有 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 才是真正的物理量。然而 Aharonov – Bohm 效应的发现使我们认识到这结论是有问题的。

如图 5.1 所示，在仪器的中央是一个 (无限长) 带电螺线管，磁通为 Φ ，根据第三章练习 2 的答案，通电时螺线管内 $\vec{B} \neq 0$ 、 $\vec{A} \neq 0$ ，管外磁场为零、矢势 $\vec{A}$ 并不为零。不通电时所有场都为零。在管上加上电压，以使电子不能穿过螺线管。

在不通电的情况下，从源点辐射出电子束，通过两个间距为 d 的窄缝再投射到远处 $L >> d$ 的壁上，形成干涉条纹。电子波函数的位相为

$$\phi = \int \vec{p} \cdot d\vec{r}/\hbar \ , \ \ \vec{p} = m\vec{v} = \hbar\vec{k} \ 。$$

电子通过不同路径 C_2 和 C_1 的位相是不一样的，位相差为

$$\phi_2 - \phi_1 = kd \sin\theta \ 。$$

当 $\phi_2 - \phi_1 = (2n+1)\pi$ 时两束电子波相消，所以屏上暗纹的位置为

$$y = L \tan\theta \simeq \frac{(2n+1)\pi L}{kd} \ 。$$

通电后，管外 $\vec{B} = 0$ ，但是 $\vec{A} \neq 0$ ， $\vec{p} = m\vec{v} - e\vec{A}$ ，

$$\phi_1 = \int_{C_1} (\frac{m\vec{v}}{\hbar} - \frac{e\vec{A}}{\hbar}) \cdot d\vec{r} \ , \ \ \phi_2 = \int_{C_2} (\frac{m\vec{v}}{\hbar} - \frac{e\vec{A}}{\hbar}) \cdot d\vec{r} \ 。$$

[2]当然从 5.1 节我们知道，对于非静磁问题 $\vec{A}$ 还会通过 $\vec{E}$ 起作用。

所以

$$\phi_2 - \phi_1 = kd\sin\theta - \frac{e}{\hbar}\oint \vec{A}\cdot d\vec{r} = kd\sin\theta - \frac{e}{\hbar}\Phi \ 。$$

也就是说当 $kd\sin\theta = (2n+1)\pi + \frac{e}{\hbar}\Phi$ 时两束电子干涉相消。新的暗纹的位置为

$$y' = L\tan\theta \simeq \frac{[(2n+1)\pi + \frac{e}{\hbar}\Phi]L}{kd}$$

暗纹位置的移动为

$$\triangle y = y' - y = \frac{e\Phi L}{\hbar kd} \ 。$$

这一结论为实验所验证。

A–B 效应明确地显示了 $\vec{B}$ 本身不能够完备的描述物理系统。而 $\vec{A}$ 又包含非物理的自由度。所以恰当的描述物理的量是（吴大峻、杨振宁 1971 ）

$$e^{ie\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l}/\hbar} \ 。$$

若 C 可缩小为一点，上式表述的是一个局域量；若 C 不能收缩为一点，则相因子所包含的物理信息不能用局域场描述。

§5.2.3 磁单极的奇异性与电荷量子化

引入假想磁荷（单极） g 放在原点，所以

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r^3}g \ 。 \tag{5.13}$$

此时 $\vec{B}$ 不再是无散的！且有

$$\nabla\cdot\vec{B} = \mu_0 g\delta(\vec{r}) \tag{5.14}$$

由于矢量势被认为更基本，所以第一个要问的问题是能否引入矢势使得 $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$ ？如果可以做到，则（见图 5.2 ）

$$\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_S \nabla\times\vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} \equiv \Omega(\theta) \ 。 \tag{5.15}$$

由 5.13 式得知 $\Omega(\theta) = \frac{1}{2}\mu_0 g(1-cos\theta)$ 。所以 $\theta = 0$ 时， $\Omega(0) = 0$ ，而 $\theta = \pi$ 时，$\Omega(\pi) = \mu_0 g$ ，结论是 $\vec{A}$ 必有奇异性。否则 5.15 式中左边环路 C 在 $\theta = \pi$ 因此收缩成一点时， $\Omega(\pi) = 0$ 。所以若想要从 $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$ 中引入矢势 $\vec{A}$ 则 $\vec{A}$ 必含有奇异性！

Dirac 找到了一个这样的单弦奇异势：

$$\begin{aligned} A_r &= 0 \ , \\ A_\theta &= 0 \ , \\ A_\phi &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{g(1-\cos\theta)}{r\sin\theta} \ 。 \end{aligned} \tag{5.16}$$

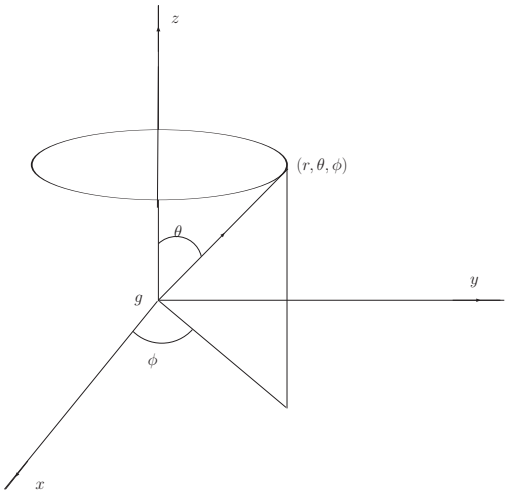


图 5.2: Dirac 磁单极。

这个势显然满足 $\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l}=\Omega(\theta)$ 。并且可以证明

$$\nabla\times\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r^3}g+\vec{B}_h \ 。 \tag{5.17}$$

其中

$$\vec{B}_h=\mu_0 g\delta(x)\delta(y)\Theta(-z)\vec{e}_z \tag{5.18}$$

是一个奇异弦，沿负 z 轴到无穷远。 $\nabla\times\vec{A}$ 存在奇异部分，是因为矢势在 $\theta=\pi$ 时是奇异的，称为奇异弦。而

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}-\vec{B}_h \ 。 \tag{5.19}$$

所以一开始提到的问题，即是否能引入矢势，以如上式的方式解决了，即需要把奇异弦扣掉。

磁单极的奇异势的选取并不唯一，奇异弦在空间的位置也不唯一。但是可以证明，奇异弦在空间位置的变动等价于做一个规范变换。

由奇异势出发可以建立电荷的量子化条件。如 Dirac 指出的，考察一个电子在磁场中的运动，奇异弦所对应的那一部分场是非物理的，对电子运动状态不应该产生影响。所以电子绕奇异弦运动一周时相位变化应该是 2π 的整数倍：

$$\vec{p}\to\vec{p}-e\vec{A} \ ,$$

$$\begin{aligned}\triangle\Phi &= \oint_l \frac{e\vec{A}}{\hbar}\cdot d\vec{l}=\frac{\mu_0 eg}{4\pi\hbar}\oint_l\frac{1-\cos\theta}{r\sin\theta}r\sin\theta d\phi \\ &= \frac{\mu_0 eg}{4\pi\hbar}2\pi(1-\cos\theta)|_{\theta=\pi}=\frac{\mu_0 eg}{\hbar}=2n\pi \ 。\end{aligned} \tag{5.20}$$

于是得到了 Dirac 电荷量子化条件：

$$eg = \frac{2n\pi\hbar}{\mu_0} \ , \ (n = \pm1, \pm2, \pm3\cdots) \ 。 \tag{5.21}$$

曾经做过很多努力试图从实验上寻找磁单极存在的证据，但到目前为止所有的努力都失败了。

§5.3 推迟势

求解满足 Lorentz 规范条件的达朗贝尔方程 5.8 式，以 φ 为例。先考虑简单情况，设 $\rho(\vec{r},t) = Q(t)\delta(\vec{r})$（原点、点电荷）。则

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{5.22}$$

由对称性分析知 $\varphi = \varphi(r,t)$，利用球坐标得

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0}Q(t)\delta(\vec{r}) \ 。 \tag{5.23}$$

$r \neq 0$ 时右端等于零。令

$$\varphi(r,t) = \frac{u(r,t)}{r} \ 。$$

推出 u 满足的一个一维波动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \ 。$$

其通解为 $u(r,t) = f(t-\frac{r}{c}) + g(t+\frac{r}{c})$ 。所以

$$\varphi = \frac{f(t-\frac{r}{c})}{r} + \frac{g(t+\frac{r}{c})}{r} \ 。$$

其中第一项代表扩散球面波。第二项代表汇聚球面波，因为不合理，故弃之。在静电时，$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ 。所以推测一般情况时

$$\varphi(r,t) = \frac{Q(t-\frac{r}{c})}{4\pi\varepsilon_0 r} \ 。 \tag{5.24}$$

显然 $r \neq 0$ 时此尝试解满足方程，而当 $\vec{r} \to 0$ 时，

$$(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})\frac{Q(t-r/c)}{4\pi\varepsilon_0 r} \to \frac{Q(t)}{4\pi\varepsilon_0}\nabla^2\frac{1}{r}|_{r\to0} \to -\frac{Q(t)}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r})$$

所以 5.24 式的确是正确的解。可以将 5.24 式稍做推广：若电荷在 $\vec{r}'$ 处，则

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{Q(\vec{r}', t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|} \ 。 \tag{5.25}$$

对于一般电荷分布

$$\varphi(\vec{r},t)=\int\frac{\rho(\vec{r}',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'\ 。\tag{5.26}$$

完全类似的可以得到 $\vec{A}$ 所满足的解：

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'\ 。\tag{5.27}$$

推迟势的建立导致了一个重要的物理观察： **即电磁作用具有一定的传播速度** c 。**在时刻** t 、 $\vec{r}$ **处的场由** $t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$ **时刻的源提供**。

§5.4 谐振荡电流的电磁场

研究单频谐振电流 $\vec{j}(\vec{r},t)=\vec{j}_0(\vec{r})e^{-i\omega t}$ 所产生的场（此时 $\rho(\vec{r},t)$ 一般不为零，因为 $i\omega\rho_0=\nabla\cdot\vec{j}_0$ ），则（ $R=|\vec{r}-\vec{r}'|$ ）

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}_0(\vec{r}')e^{i\omega R/c}}{R}dV'e^{-i\omega t}\ 。\tag{5.28}$$

此物理问题有几个特征尺度：

$$r:\ \text{源到场的距离}\ ,\ \ d:\ \text{源的大小}\ ,\ \ \lambda:\ \text{波长}\ 。$$

我们感兴趣场的辐射性质，所以只关心远处的场。要求：

$$\begin{aligned}&r>>d\ ,\qquad r'/r<<1\ ,\\&r>>\lambda\ ,\qquad kr>>1\ ,\\&r>>d^2/\lambda\ ,\ \ kr'^2/r<<1\ 。\end{aligned}\tag{5.29}$$

于是我们有

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{r}+\frac{\vec{r}'\cdot\vec{e}_r}{r^2}+\cdots\ 。$$

其中第二项并不对辐射场贡献，可以舍去。又

$$\omega R/c=kR=kr-\vec{k}\cdot\vec{r}'-\frac{(\vec{k}\cdot\vec{r}')^2+k^2r'^2}{2kr}+\cdots$$

其中 $\vec{k}=k\vec{e}_r$ 为球面波的波矢，且第三项可以略去。于是得到：

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r},t)&=\vec{A}_0(\theta,\phi)\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\ ,\\\varphi(\vec{r},t)&=\varphi_0(\theta,\phi)\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\ ,\end{aligned}\tag{5.30}$$

且（ ρ_0 由 $\vec{j}_0$ 决定）

$$\begin{aligned}\vec{A}_0(\theta,\phi) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{j}_0(\vec{r}')e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'}dV' \ , \\ \varphi_0(\theta,\phi) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \rho_0(\vec{r}')e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'}dV' \ 。\end{aligned} \tag{5.31}$$

辐射场有如下性质：

1. 等相面是球面,
2. 各项异性,
3. 波幅 $\propto \frac{1}{r}$ 。

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \nabla\times\vec{A} = i\vec{k}\times\vec{A}_0\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \ , \\ \vec{E} &= \frac{ic}{k}\nabla\times\vec{B} = c\vec{B}\times\vec{e}_r \ 。\end{aligned} \tag{5.32}$$

注意在上式中 ∇ 只作用于 e^{ikr} 相因子（否则仅仅是给出了一些正比于 $\sim 1/r^2$ 的项）。能流

$$\begin{aligned}\overline{\vec{S}} &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{E}^*\times\vec{H}) = \frac{c}{2\mu_0}\mathrm{Re}[(\vec{B}^*\times\vec{n})\times\vec{B}] = \frac{c}{2\mu_0}|B|^2\vec{n} \ , \\ P &= \oint d\Omega|\vec{S}|r^2 \ 。\end{aligned} \tag{5.33}$$

由上式可以看出，只有辐射场（正比于 $\frac{1}{r}$ 的场）能向远处传播能量。其余的叫自有场，仅在源附近流动。

例题：求中心馈电的直天线的辐射场。电流分布为（驻波、单频）

$$\begin{aligned}\vec{j}(\vec{r}',t) &= I(z')\delta(x')\delta(y')e^{-i\omega t}\vec{e}_z \ , \\ I(z') &= I_0\sin k(\frac{d}{2}-|z'|) \ 。\end{aligned} \tag{5.34}$$

解答：

$$\begin{aligned}\vec{A}_0 &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{j}_0(\vec{r}')e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'}dV' \\ &= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi}\int_{-d/2}^{+d/2}\sin(k(\frac{d}{2}-|z'|))e^{-ikz'\cos\theta}dz'\vec{e}_z \\ &= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi k}\frac{\cos(\frac{kd}{2}\cos\theta)-\cos\frac{kd}{2}}{\sin^2\theta}\vec{e}_z \ 。\end{aligned} \tag{5.35}$$

$\vec{B}_0 = i\vec{k}\times\vec{A}_0$ ， $|B_0| = k|\vec{A}_0|\sin\theta$ 。

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi^2}\left[\frac{\cos(\frac{kd}{2}\cos\theta)-\cos\frac{kd}{2}}{\sin\theta}\right]^2 \ 。$$

对于短天线（ $d << \lambda$ ）

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 I_0^2}{512\pi^2 c^3}\omega^4 d^4 \sin^2\theta \ ,$$

$$P = \frac{\mu_0 I_0^2}{48\pi c^3}\omega^4 d^4 \ 。$$

辐射总功率正比于 ω^4 、 d^4（ $d << \lambda$ ）。

§5.5 电偶极辐射

进一步考虑 kr' 为小量的情形，即 $d << \lambda$ 。于是可以进一步作多极展开：

$$e^{ikr'} = 1 - ikr' + \cdots \ 。 \tag{5.36}$$

下面我们可看到，展开的第一项对应于偶极辐射，第二项对应于电四极和磁偶极辐射。偶极辐射在物理学中是一个非常重要的概念，原子、分子体系的辐射可以近似为偶极辐射，一般情况下总有 $d << \lambda$、r ，所以偶极展开对原子、分子系统总是好的近似。

偶极辐射是 5.36 式中展开的最低级项，

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0 e^{ikr}}{4\pi r}\int \vec{j}(\vec{r}',t)dV' \ , \ \ (\vec{j}(\vec{r}',t) = \vec{j}_0(\vec{r}')e^{-i\omega t}) \ , \tag{5.37}$$

而 $\int \vec{j}(\vec{r}',t)dV' = \sum e\vec{v} = \frac{d}{dt}\sum e\vec{r} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}}$ ，其中 $\vec{p}$ 为电偶极矩。所以

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0 e^{ikr}}{4\pi r}\dot{\vec{p}} \ 。 \tag{5.38}$$

由此可计算 $\vec{B}$ 和 $\vec{E}$ 。由于只保留到 $1/r$ 的最低阶项， ∇ 只作用于 e^{ikr} 因子：

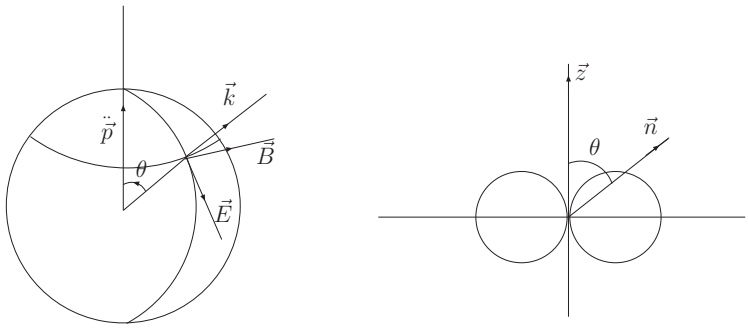
$$\nabla \to ik\vec{n} \ , \ \ \frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega \ , \ \ (\vec{n} = \vec{e}_r) \ 。 \tag{5.39}$$

所以

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} = \frac{i\mu_0 k}{4\pi r}e^{ikr}\vec{n} \times \dot{\vec{p}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3 r}e^{ikr}\ddot{\vec{p}} \times \vec{n} \ , \\ \vec{E} &= \frac{ic}{k}\nabla \times \vec{B} = c\vec{B} \times \vec{n} = \frac{e^{ikr}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}(\ddot{\vec{p}} \times \vec{n}) \times \vec{n} \ 。 \end{aligned} \tag{5.40}$$

取坐标如图 5.3 所示。 则

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3 r}|\ddot{\vec{p}}|e^{ikr}\sin\theta\vec{e}_\phi \ , \\ \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}|\ddot{\vec{p}}|e^{ikr}\sin\theta\vec{e}_\theta \ 。 \end{aligned} \tag{5.41}$$



a) *b)*

图 5.3: a) 偶极辐射的场分布， b) 能流分布。

能流为

$$\begin{aligned}\overline{\vec{S}} &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{E}^*\times\vec{H}) = \frac{c}{2\mu_0}\mathrm{Re}[(\vec{B}^*\times\vec{n})\times\vec{B}] \\ &= \frac{c}{2\mu_0}|B|^2\vec{n} = \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3 r^2}\sin^2\theta\,\vec{n} \\ &\propto \frac{\omega^4}{r^2},\ \sin^2\theta\ 。\end{aligned} \tag{5.42}$$

见图 5.3b) 所示能流分布。而辐射功率为

$$P = \oint |\vec{S}|r^2 d\Omega = \frac{1}{12\pi\varepsilon_0 c^3}|\ddot{\vec{p}}|^2\ 。 \tag{5.43}$$

最后我们再来看一下电四极辐射和磁偶极辐射，它们由 5.36 式中的第二项给出：

$$\vec{A}_0 = -i\frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{k}\cdot\vec{r}'\vec{j}_0(\vec{r}')dV'\ 。 \tag{5.44}$$

我们有

$$\vec{r}'\vec{j}_0 = \frac{1}{2}(\vec{r}'\vec{j}_0 - \vec{j}_0\vec{r}') + \frac{1}{2}(\vec{r}'\vec{j}_0 + \vec{j}_0\vec{r}')\ 。 \tag{5.45}$$

其中第一项化为

$$\vec{k}\cdot(\vec{r}'\vec{j}_0 - \vec{j}_0\vec{r}') = (\vec{r}'\times\vec{j}_0)\times\vec{k}\ 。$$

给出磁偶极辐射的结果如下

$$\vec{A}_{0\,(m_2)} = i\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{k}\times\vec{m}_0\ ,\ \ \vec{m}_0 = \frac{1}{2}\int \vec{r}'\times\vec{j}_0(\vec{r}')dV'\ 。 \tag{5.46}$$

$$\vec{B}_0 = -\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{m}_0)\ ,\ \ |B_0| = \frac{\mu_0 m_0 k^2}{4\pi}\sin\theta\ 。 \tag{5.47}$$

$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{\mu_0 m_0^2\omega^4}{32\pi^2c^3}\sin^2\theta\ ,\quad P=\frac{\mu_0 m_0^2\omega^4}{12\pi c^3}\ 。\tag{5.48}$$

发现磁偶极辐射与电偶极辐射的形式类似（ $m_0\leftrightarrow cp_0$ ）。

由

$$c|\vec{p}_0|=\frac{c}{\omega}|\int\vec{j}_0dV'|\ ,\quad |\vec{m}_0|=\frac{1}{2}|\int\vec{r}'\times\vec{j}_0dV'|$$

可得到量级估计：

$$\frac{m_0}{cp_0}\propto O(\frac{d}{\lambda})\ 。$$

5.45 式中的第二项给出的是电四级辐射：

$$\begin{aligned}\propto\ & \vec{k}\cdot\int\frac{1}{2}(\vec{r}'\vec{j}+\vec{j}\vec{r}')dV'=\frac{1}{2}\vec{k}\cdot\sum_i e_i(\vec{r}_i'\frac{d\vec{r}'}{dt}+\frac{d\vec{r}_i'}{dt}\vec{r}_i')\\ =\ & \frac{1}{2}\vec{k}\cdot\frac{d}{dt}\overrightarrow{\overrightarrow{\mathcal{D}}}\ 。\end{aligned}\tag{5.49}$$

记得 $\overrightarrow{\overrightarrow{D}}=3\overrightarrow{\overrightarrow{\mathcal{D}}}-\overrightarrow{\overrightarrow{I}}\,\mathrm{tr}\overrightarrow{\overrightarrow{\mathcal{D}}}$ ，得

$$\vec{A}_{0\,(e4)}=-\frac{\mu_0 ck^2}{24\pi}(\vec{e}_r\cdot\overrightarrow{\overrightarrow{D}}_0-\vec{e}_r\mathrm{tr}\overrightarrow{\overrightarrow{D}}_0)\ 。\tag{5.50}$$

其中第二项是纵场旋度为零，可通过规范变换消去。最后可得电四极矩的总功率为

$$P_{(e4)}=\frac{\mu_0\omega^6}{1440\pi c^3}\overrightarrow{\overrightarrow{D}}_0:\overrightarrow{\overrightarrow{D}}_0\ 。\tag{5.51}$$

简单总结如下：当 $kr'<<1$ 时，对辐射场可作多极展开：

$$\vec{A}=\vec{A}_{(e2)}+(\vec{A}_{(m2)}+\vec{A}_{(e4)})+\cdots\ 。\tag{5.52}$$

后一项比前一项是 $O(d/\lambda)$ 的量级，而辐射功率是二次运算，不能简单相加。

§5.6 习题

1. 通有稳定电流 I 的圆线圈，半径为 a 。当它绕其直径以角速度 ω 匀速转动时，求它的辐射场。
2. 在半径为 a 的圆形线圈上通有电流 $I=I_0e^{-i\omega t}$ 。已知 $ka\ll 1$ ，求辐射场的分布，总辐射功率及其方向分布的周期平均值。
3. 有一以频率 ω 振动的电偶极子，振幅为 $\mathbf{p}_0$ 在距离它为 a 处有一与它平行的理想导体面。设 $\lambda\gg a$ ，求在 $r\gg\lambda$ 处的辐射场，辐射能流的周期平均值。

第六章　狭义相对论基础

§6.1　狭义相对论的实验基础

物理规律需要用一定的参考系来描述。我们知道在经典力学中，力学规律对所有的惯性系都成立，这一性质叫做力学的相对性原理。不同惯性系坐标之间的变换 (伽利略变换) 规律是：

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \ , \\ y' &= y \ , \\ z' &= z \ , \\ t' &= t \ 。 \end{aligned} \tag{6.1}$$

我们也可以问电磁规律适用于什么样的参考系？我们已经知道麦克斯韦方程是一个波动方程，电磁波以速度 c 传播，显然这些结论仅对某一特殊参考系（历史上叫做以太）才成立。另外我们过去所知道的所有波的传播，包括声波、水波、弹性波等，都是在某种介质中的机械振动。那么电磁波是否也是在某种介质（ **以太** ）中的振动？

在变换 6.1 式下，达朗贝尔方程形式变为

$$[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2}{c^2}\vec{v}\cdot\nabla\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c^2}(\vec{v}\cdot\nabla)(\vec{v}\cdot\nabla)]\varphi = 0 \ 。 \tag{6.2}$$

既然方程 6.2 式的形式不一样，那么原则上可以通过实验测 $\vec{v}$ 。为了回答是否存在某种特殊参考系，地球相对于以太的速度为何等问题的答案，1887 年 Michelson 和 Morley 设计了如图 6.1 所示的实验。 其中 $MM_1 = MM_2 = l$ 。设地球相对于“以太” 速度 $\vec{v}$ 在 MM_1 方向，光在以太参考系中的速度为光速 c 。那么由（伽利略）速度叠加原理得在地球参考系中的光速 $\vec{u} = \vec{c} - \vec{v}$ ，且 $c^2 = u^2 + v^2 + 2uv\cos\theta$ 或

$$u = \sqrt{c^2 - v^2\sin^2\theta} - v\cos\theta \ 。$$

那么光束往返 MM_1 所需时间计算如下：

$$\begin{aligned} &\theta = 0 \ , \ \ M \to M_1 \ , \ \ u = c - v \ , \\ &\theta = \pi \ , \ \ M_1 \to M \ , \ \ u = c + v \ , \\ &t_1 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} \simeq \frac{2l}{c}(1 + \frac{v^2}{c^2}) \ 。 \end{aligned}$$

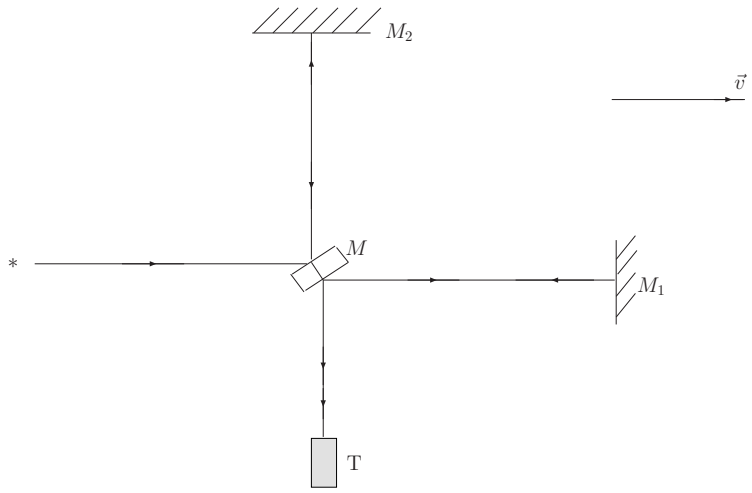


图 6.1: Michelson–Morley 实验， * 是光源。

而光束往返 MM_2 所需时间计算如下：

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\pi}{2}\ ,\ M \leftrightarrow M_2\ ,\ u = \sqrt{c^2 - v^2}\ , \\ t_2 &= \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}} \simeq \frac{2l}{c}(1 + \frac{v^2}{2c^2})\ 。 \end{aligned} \tag{6.3}$$

于是光程差为 $c\triangle t \simeq l\frac{v^2}{c^2}$ 。把仪器转 $90°$ ，两束光位置互换，干涉条纹移动个数为 $\frac{2c\triangle t}{\lambda} = \frac{2l}{\lambda}\frac{v^2}{c^2}$ 。若 $l = 10m$ ， $\lambda = 5 \times 10^{-7}m$ ， $(\frac{v}{c})^2 \sim 10^{-8}$ ，则估算出干涉条纹移动 0.4 个，但实验没有观测到移动。

一系列的试验表明，不存在地球相对于以太的运动，光速不依赖于观测者的参考系， [1] 而且光速也与光源的速度无关。除了“双星实验”外，对于后者最有力的证据来自于高能物理实验。比如对于高速运动的 π^0 粒子（速度可以高达比如 $v = 0.9975c$ ），它衰变到两个光子。测定沿 π^0 运动方向的光速，发现其仍然是不变的。

§6.2 相对论的基本原理

§6.2.1 Lorentz 变换

1905 年 Einstein 提出了两条基本假设：

1. **狭义相对性原理** ：即物理规律对所有惯性系等价；

[1] 如果认为以太随地球一起运动（拖曳理论），则即可以解释 Michelson–Morley 实验，也可以保持 6.1 式。但是这样的假设不能解释 Fizeau 实验。详见比如 张宗燧 ，《电动力学及狭义相对论》，第二版，北京大学出版社， 2004 年 2 月。

2. **光速不变原理**：真空中光速相对于任何惯性系沿任意方向传播时速率恒为 c，并与光源速度无关;

并建立了狭义相对论。对于上述的光速不变原理，实际上是对我们认识到的电磁理论的规律的总结。它显然与 6.1 式所代表的旧时空观矛盾。

我们从这两条基本假设出发导出狭义相对论下不同参考系之间的变换规律。假设不同惯性系 S 与 $\overline{S}$ 的坐标（ t, x, y, z ）和（ $\overline{t}, \overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ ）之间满足一线性变换规律，并且在 $t = \overline{t} = 0$ 时两坐标系原点重合。于是

$$\begin{pmatrix} \overline{t} \\ \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} 。 \tag{6.4}$$

又设 $\overline{S}$ 系相对 S 系以速度 v 沿正 x 轴运动，则应该有

$$\begin{aligned} \overline{t} &= \alpha t + \beta x \ , \\ \overline{x} &= \gamma x + \delta t \ , \\ \overline{y} &= y \ , \\ \overline{z} &= z \ 。 \end{aligned} \tag{6.5}$$

S 系看 $\overline{S}$ 的速度为 v，反过来 $\overline{S}$ 看 S 系的运动速度为 $-v$。前者说的是对于 $\overline{S}$ 系中的静止点 $d\overline{x} = d\overline{y} = d\overline{z} = 0$ 在 S 系中有

$$\frac{d\,x}{dt} = -\delta/\gamma = v \ ,$$

而后者说的是对 S 中的静止点 $dx = dy = dz = 0$，在 S 系中满足

$$\frac{d\,\overline{x}}{d\overline{t}} = \delta/\alpha = -v \ 。$$

又令 $\beta = -\eta\gamma$，则 6.5 式简化为

$$\begin{aligned} \overline{t} &= \gamma(t - \eta x) \ , \\ \overline{x} &= \gamma(x - vt) \ , \\ \overline{y} &= y \ , \\ \overline{z} &= z \ 。 \end{aligned} \tag{6.6}$$

推导出不同系中坐标的变换规律的最关键一步是它必须要满足光速不变原理。设在 $t = \overline{t} = 0$ 时 S 、 $\overline{S}$ 的公共原点放出一个光信号，其传播应该满足

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 &= 0 \ , \\ \overline{x}^2 + \overline{y}^2 + \overline{z}^2 - c^2\overline{t}^2 &= 0 \ 。 \end{aligned}$$

(6.7)

如在 S 系中 $x = ct$ ， $y = z = 0$ 并将 6.6 式代入上面第二个等式得

$$\eta = \frac{v}{c^2} \text{ 。}$$

如在 S 系中取 $x = z = 0$ ， $y = ct$ 则推出

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ 。}$$

所以最终得到满足光速不变原理的 Lorentz 变换规律：

$$\begin{aligned} \overline{t} &= \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} , \\ \overline{x} &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} , \\ \overline{y} &= y , \\ \overline{z} &= z \text{ 。} \end{aligned} \tag{6.8}$$

我们最后再把上式改写成在 $t = 0$ 时刻两标架重合，且 S' 以任意速度 $\vec{v}$ 相对于 S 运动的 Lorentz 变换公式

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \vec{r} + (\gamma - 1)\frac{\vec{v}}{v^2}(\vec{v} \cdot \vec{r}) - \gamma \vec{v} t , \\ t' &= \gamma(t - \frac{1}{c^2}\vec{v} \cdot \vec{r}) \text{ 。} \end{aligned} \tag{6.9}$$

它又可以写成如下更简易的形式，

$$\begin{aligned} \vec{r}'_{//} &= \gamma(\vec{r}_{//} - \vec{v}t) , \\ \vec{r}'_{\perp} &= \vec{r}_{\perp} , \\ t' &= \gamma(t - \frac{1}{c^2}\vec{v} \cdot \vec{r}) \text{ 。} \end{aligned} \tag{6.10}$$

§6.2.2 速度合成公式

由 Lorentz 变换公式 6.8 式出发可以推出速度合成公式

$$\begin{aligned} \overline{u}_x &= \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2} , \\ \overline{u}_y &= \frac{u_y}{\gamma(1 - u_x v/c^2)} , \\ \overline{u}_z &= \frac{u_z}{\gamma(1 - u_x v/c^2)} \text{ 。} \end{aligned} \tag{6.11}$$

它具有如下性质：

- 伽利略速度合成公式是上式的低能极限。
- 光速不变：如果 $|u| = c$ ， 则 $|\overline{u}| = c$ 。
- 速度之和永远不会超过光速。

§6.3 时空的物理性质

§6.3.1 同时性的相对性

上一节最后的例子已经揭示了“同时性”这一概念在不同的参考系中不具有绝对的意义，二者可由 Lorentz 变换公式 6.8 式加以理解。假定有两个事件 P 和 Q，在 $\overline{S}$ 系中同时发生，$\overline{t}_P = \overline{t}_Q$。而在 S 系中就有

$$t_P = \gamma(\overline{t}_P + \frac{v}{c^2}\overline{x}_P)\ ,\ \ t_Q = \gamma(\overline{t}_Q + \frac{v}{c^2}\overline{x}_Q)\ 。$$

所以 $t_Q - t_P = \gamma\frac{v}{c^2}(\overline{x}_Q - \overline{x}_P)$ 不同时。

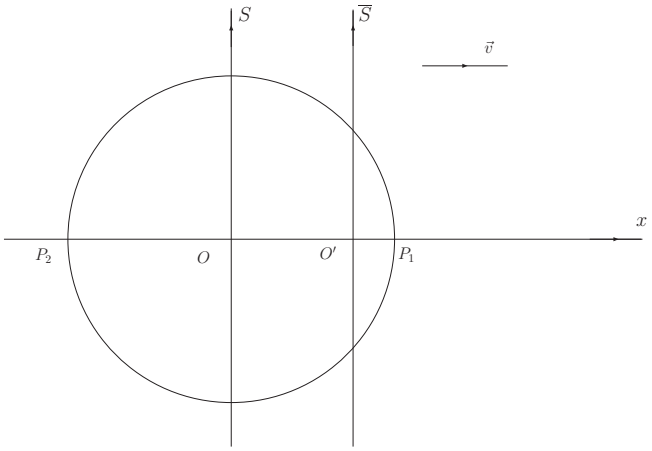


图 6.2: 同时性的相对性。

例题 *1*：如图 *6.2* 所示，$t = 0$ 时 O、O' 重合并发射出光线，$t = 1$ 时在 S 系中 P_1、P_2 同时接受到光，$v = 0.8c$。分析在 $\overline{S}$ 系中所发生的情况，理解 P_1 先、P_2 后吸收到光，不同时。

解答：利用 *6.8* 式求 P_1、P_2 事件在 $\overline{S}$ 上的时空点：对于 $P_1 = (c, 0, 0, 1)$，$\overline{P}_1 = (x', 0, 0, t')$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{c - v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{c}{3}\ ,\ \ t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = x'/c = \frac{1}{3}\ 。$$

光速 $= x'/t' = c$。对于 $P_2 = (-c, 0, 0, 1)$ 类似可得 $\overline{P}_2 = (-3c, 0, 0, 3)$，光速仍然为 $3c/3 = c$。在 S 系上，P_1、P_2 同时，分析结果说明在 $\overline{S}$ 系上光到达 P_1 的时间早于到达 P_2 的时间。然而光线到达 P_1 与到达 P_2 这两个事件的时空间隔 $\triangle s^2 \equiv \triangle t^2 - \triangle x^2$ 是不变的均为 $-4c^2$。

如果利用伽利略变换 6.1 式，上面的例子中光信号到达 P_1 和 P_2 的时间，不论在哪一个参考系中都是同时的。正如 Einstein 指出的，“同时”这一物理概念必须要有可操作的定义，在光信号作为最大信号传递速度的情况下，这个例子说明“同时性”的概念要发生变化，已经不再有与参考系无关的性质。

§6.3.2 动尺的缩短

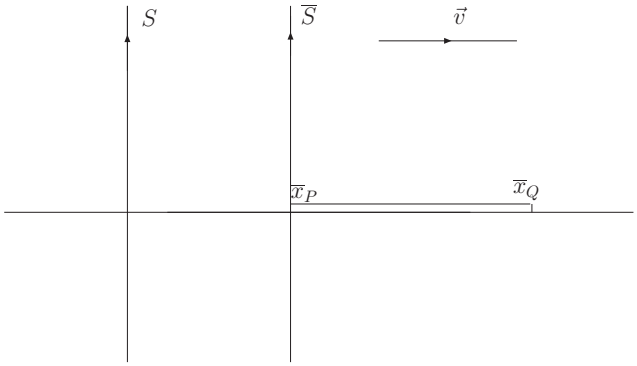


图 6.3: 动尺缩短。

见图 6.3 ，

$$\overline{x}_P = \gamma(x_P - vt_P) \ , \ \overline{x}_Q = \gamma(x_Q - vt_Q) \ 。 \tag{6.12}$$

静止在 $\overline{S}$ 系中的尺子 PQ 的长度 $L_0 = \overline{x}_Q - \overline{x}_P$ 。在 S 系中测量尺子的长度时，需要条件 $t_P = t_Q$ ！带入 6.12 式得

$$L = L_0/\gamma \ 。 \tag{6.13}$$

所以在 S 系中看来运动中的尺子缩短了。当然在事实上尺子并没有真正的物理上的收缩。其作用的仍然是同时性的相对性。在 $\overline{S}$ 系中看来， S 系中的观测者把 Q 端测早了，所以导致了收缩。由

$$\overline{t}_P = \gamma(t_P - \frac{v}{c^2}x_P) \ , \ \overline{t}_Q = \gamma(t_Q - \frac{v}{c^2}x_Q)$$

和 $t_P = t_Q$ 推出

$$\overline{t}_P - \overline{t}_Q = \frac{\gamma v}{c^2}(x_Q - x_P) > 0 \ 。$$

§6.3.3 动钟变慢

见图 6.4 ，在 $\overline{S}$ 系中放置一静钟，测量时间间隔为 $T_0 = \overline{t}_2 - \overline{t}_1$ 。在 S 系中，

$$t_1 = \gamma(\overline{t}_1 + \frac{v}{c^2}\overline{x}_1) \ , \ t_2 = \gamma(\overline{t}_2 + \frac{v}{c^2}\overline{x}_2) \ 。$$

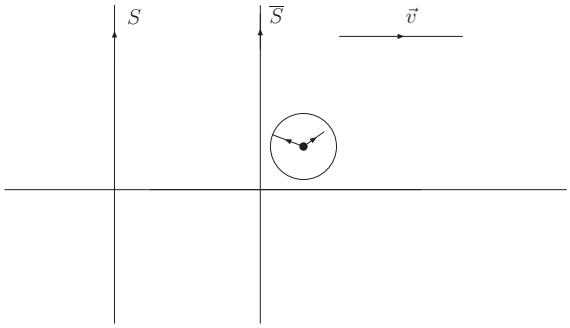


图 6.4: 动钟变慢。

由于 $\overline{x}_1 = \overline{x}_2$ ，得

$$t_2 - t_1 = \gamma(\overline{t}_2 - \overline{t}_1) = \gamma T_0 > T_0 \ 。 \tag{6.14}$$

如果在 S 、 $\overline{S}$ 系中各放一个静止的钟，动钟变慢效应是否是使得两个参考系都看见对方的钟走慢了？为了理解这一点，首先应指出在一个系里校准的钟，在另一个系里看并不一样。见图 6.5 ， 在 S 系有两只钟 $A_1(t_1, x_1)$ 、 $A_2(t_2, x_2)$ ，且

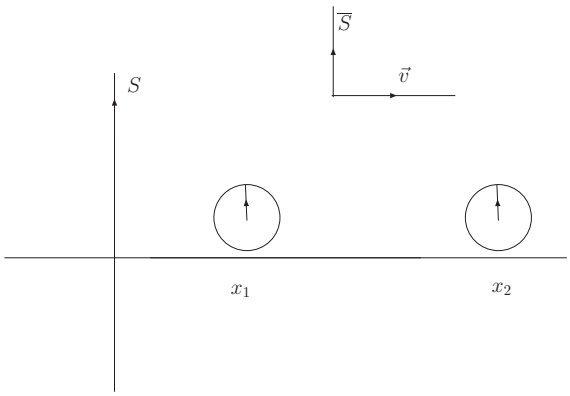


图 6.5: 动钟变慢。

$t_1 = t_2$ 。则

$$\overline{t}_1 - \overline{t}_2 = \gamma v/c^2(x_2 - x_1) > 0 \ 。 \tag{6.15}$$

也就是说，在 $\overline{S}$ 系中来看， A_2 钟指向 $t_2 = t_1$ 时的时间为 $\overline{t}_2$ ；而在过了时间间隔 $\overline{t}_1 - \overline{t}_2$ 后 A_1 钟才指向 t_1 时刻。也就是说在 $\overline{S}$ 系中来看， A_1 变慢了。这里所揭示的物理规律实际上与例题 1 所揭示的相同。

需要指出的是动钟变慢并不是两只钟之间的比较而是一只动钟与一系列同步的钟相比较走慢了。见图 6.6，在 S 系中不同位置 A 、 B 、 C 有校准好的三只钟，$t_A = t_B = t_C$ 。由对图 6.5 的分析知，在 $\overline{S}$ 系中（以 M 钟来测量）看 $t'_A > t'_B > t'_C$ ，即 B 钟比 A 钟快， C 钟又比 B 钟快。所以如图 6.7 所示，动钟变慢并不是两只

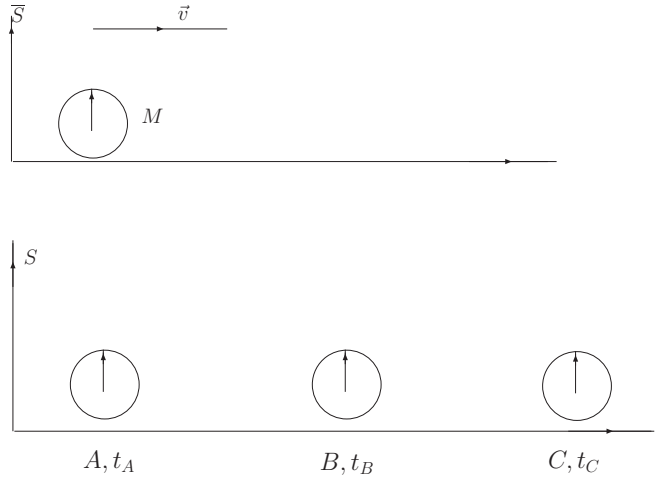


图 6.6: 对动钟变慢效应的理解。 $t_A = t_B = t_C$ ， $t'_A > t'_B > t'_C$ （参考 6.15 式）。

钟之间的比较，而是一只动钟与一系列同步的钟相比走慢了。当 M 与 B 相遇时，在 S 系中看动钟 M 比静钟 B 确实慢了，而对于 $\overline{S}$ 系中的 M 来说，“动钟” B 指针更快仅仅是一个假象，原因是由于一开始 B 钟就被调快了。动钟变慢效应满

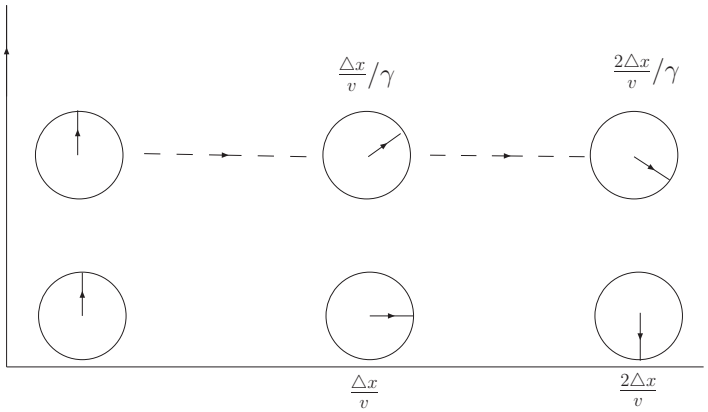


图 6.7: 当 M 分别与 A 、 B 、 C 钟相遇时的比较（参考 6.14 式）。

足相对性原理，每个惯性系都测得相对它运动的钟变慢了。

§6.3.4 对 Lorentz 变换的实验检验

讨论一个现代加速器实验的例子： π^+ 介子的静止质量为 $m_{\pi^+}=0.14\text{GeV}$，静止系中的寿命为 $\tau_0\simeq 2.56\times 10^{-8}s$。由于 π^+ 介子不稳定，粒子数以 $N=N_0e^{-t/\tau}$ 随时间指数衰减。现在 π^+ 粒子高速运动，设 $E_{\pi^+}=10\text{GeV}$（这样高速的粒子在现代加速器实验中很容易产生），相当于 $\gamma=E/E_0\simeq 71$。在实验室系中观察，由于 π 介子高速运动， $\tau=\gamma\tau_0$（动钟变慢效应，寿命增加）。当 π^+ 介子花费时间 $t\simeq l/c$ 飞行过一段长 l 的距离后，剩下的粒子数为

$$N/N_0=e^{-\frac{l/c}{\gamma\tau_0}}\ 。$$

而在 π^+ 介子的静止系中，本身的寿命仍然是 τ_0，但是飞行距离却缩短了，为 $L=l/\gamma$， $t=l/c\gamma$（动尺缩短），剩下的粒子数为，

$$N/N_0=e^{-\frac{l/(c\gamma)}{\tau_0}}\ 。$$

也就是说在不同的参考系中看到的剩余的粒子数是相同的，这是一个合理的结果。在这个例子中，动钟变慢与动尺缩短的角色在不同参考系中互相转换，而真正的物理结果不依赖于参考系的选取。

§6.3.5 因果性对速度的限制

在 S 系中的两个事件 $P:(t_P,x_P)$， $Q:(t_Q,x_Q)$， $t_P<t_Q$。在 $\overline{S}$ 系中，$\overline{t}_Q-\overline{t}_P=\gamma[(t_Q-t_P)-\frac{v}{c^2}(x_Q-x_P)]$。这个等式的后果之一是如果 $t_Q-t_P<\frac{v}{c^2}(x_Q-x_P)$ 则可以有时序颠倒： $\overline{t}_Q<\overline{t}_P$。这就提出了一个因果律是否会破坏的问题。

在 S 系中， P 和 Q 有因果联系的必要条件是 $t_Q-t_P\geq\frac{x_Q-x_P}{u}$ 其中 u 是信号传递速度。所以要颠倒因果律则需

$$u>\frac{c^2}{v}>c\ ,\ (\text{Lorentz 变换要求 } v<c)\ 。$$

因果律必须满足，由此得出的结论是光速是任何信号传递的上限。

所以一般来说 P 与 Q 有因果关系的必要条件是

$$t_Q-t_P\geq\frac{x_Q-x_P}{c}\ , \tag{6.16}$$

或

$$\triangle s^2=\triangle x^2+\triangle y^2+\triangle z^2-c^2\triangle t^2\leq 0\ 。 \tag{6.17}$$

也就是说， P 和 Q 的时空间隔是类时的或类光的。

如果 P 和 Q 的间隔是类空的（ $\triangle s^2>0$ ），或没有因果关系，则在 Lorentz 变换下时序有可能颠倒。

§6.4 相对论的四维表述

定义 **四维距离**

$$\triangle s^2 = \triangle x^2 + \triangle y^2 + \triangle z^2 - c^2\triangle t^2 \ 。$$

Lorentz 变换是保证四维距离不变的变换。定义 $(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv (x, y, z, ict)$ 则

$$\triangle s^2 = \triangle x_1^2 + \triangle x_2^2 + \triangle x_3^2 + \triangle x_4^2 \ ,$$

形式上与四维欧氏空间的距离一样，则 Lorentz 变换可以写成一个紧凑的形式，

$$\overline{x}_\mu = L_{\mu\nu}x_\nu \ , \ \ (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4) \ , \tag{6.18}$$

且

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\gamma v/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\gamma v/c & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} 。 \tag{6.19}$$

变换矩阵 L 满足性质

$$L^{-1} = L^T = L(-v) \ 。 \tag{6.20}$$

在新的表述中，狭义相对性原理说的是，**物理量是四维 Minkowski 空间的张量，物理规律满足四维张量方程**。

下面举几个四维张量的例子：

- $dx_\mu = (d\vec{r}, icdt)$ 是 4 维矢量。
- $d\tau^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2}d\vec{r}^2 = -\frac{1}{c^2}dx_\mu dx_\mu$ 是不变量、即标量。 $d\tau$ 叫做 **固有时** 。
- **四维速度** ：

$$U_\mu = \frac{d\,x_\mu}{d\tau} = (\frac{d\,\vec{r}}{d\tau}, ic\frac{d\,t}{d\tau}) = \frac{d\,t}{d\tau}(\vec{v}, ic) = \gamma(\vec{v}, ic) \ 。 \tag{6.21}$$

  四维速度满足 $U_\mu U_\mu = -c^2$ 。
- 四维微商算符

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = (\nabla, \frac{1}{ic}\frac{\partial}{\partial t}) \ 。$$

$$\Box \equiv \partial_\mu\partial_\mu = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \ 。$$

- 电磁波的相位（由于表示波节数）也是一个标量，即 $\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t = k_\mu x_\mu$ 是一个不变量。因此得， $k_\mu = (\vec{k}, i\omega/c)$ 为 4 维矢量，称为 4 维波矢。根据这一性质可以得到光子的频率及波矢在不同参考系之间的变换规律。

刻画物理量的张量在 Lorentz 变换下的变换规律为：

$$\begin{aligned} \overline{S}(\overline{x}) &= S(x) \ , \\ \overline{V}_\mu(\overline{x}) &= L_{\mu\nu}A_\nu(x) \ , \\ \overline{T}_{\mu\nu}(\overline{x}) &= L_{\mu\mu'}L_{\nu\nu'}T_{\mu'\nu'}(x) \ 。 \end{aligned} \tag{6.22}$$

定义 $j_\mu = (\vec{j}, ic\rho)$ ， $A_\mu = (\vec{A}, i\varphi/c)$ 达朗贝尔方程 5.8 可以改写成明显协变的形式：

$$\begin{aligned} \Box A_\mu &= -\mu_0 j_\mu \ , \\ \partial_\mu A_\mu &= 0 \ 。 \end{aligned} \tag{6.23}$$

流守恒条件改写为

$$\partial_\mu j_\mu = 0 \ 。 \tag{6.24}$$

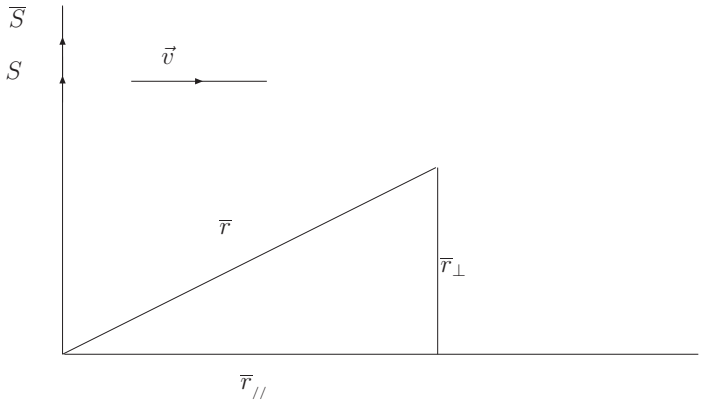


图 6.8: 匀速运动的点电荷产生的电场。

例题 *2*：如图 *6.8*， S 系中有一沿 x 方向运动的点电荷，求电势。

解答： $\overline{S}$ 系中，

$$\overline{\varphi} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{\overline{r}} \ , \ A_i = 0 \ 。$$

于是

$$\begin{aligned} \varphi &= \gamma(\overline{\varphi} + v\overline{A}_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma e}{\overline{r}} \ , \\ A_1 &= \gamma(\overline{A}_1 + \frac{v}{c^2}\overline{\varphi}) = \frac{v}{c^2}\varphi \ , \\ & A_2 = A_3 = 0 \ 。 \end{aligned}$$

但上面得到的场量是由 $\overline{x}$ 或 x' 、 t' 表示的。为了方便还需要把它们用 x ， t 表示。由 $\overline{r}'_{\perp}=r_{\perp}$ ， $\overline{r}'_{//}=\gamma\, r_{//}$ 。最后得到

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r},t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{\sqrt{r_{\perp}^2(1-\frac{v^2}{c^2})+r_{//}^2}}\ ,\\ \vec{A}(\vec{r},t) &= \frac{\vec{v}}{c^2}\varphi\ 。\end{aligned}\tag{6.25}$$

此问题也可用推迟势求解。

§6.5 电磁理论的四维协变形式

由 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$ 和 $\vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\nabla\varphi$ 可以定义协变场强，它是一个二阶反对称张量：

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu\ ,\tag{6.26}$$

则 $F_{\mu\nu}$ 与 $\vec{E}$ 、 $\vec{B}$ 的关系为

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -\frac{i}{c}E_x\\ -B_z & 0 & B_x & -\frac{i}{c}E_y\\ B_y & -B_x & 0 & -\frac{i}{c}E_z\\ \frac{i}{c}E_x & \frac{i}{c}E_y & \frac{i}{c}E_z & 0\end{pmatrix}。\tag{6.27}$$

由此可以得到麦克斯韦方程组的协变形式

$$\begin{aligned}&\partial_\mu F_{\mu\nu}=\mu_0 j_\nu\ ,\\ &\partial_\lambda F_{\mu\nu}+\partial_\mu F_{\nu\lambda}+\partial_\nu F_{\lambda\mu}=0\ 。\end{aligned}\tag{6.28}$$

可以验证前一个式子给出了麦克斯韦方程组 1.24 式中与源有关的两项，而后一个式子给出 1.24 式中与原无关的两项。 $F_{\mu\nu}$ 的变换规律也可以写成矩阵形式：

$$\overline{F}=LFL^{-1}\ 。\tag{6.29}$$

或化为分量形式：

$$\begin{aligned}&\overline{E}_x=E_x\ ,\ \overline{E}_y=\gamma(E_y-vB_z)\ ,\ \overline{E}_z=\gamma(E_z+vB_y)\ ;\\ &\overline{B}_x=B_x\ ,\ \overline{B}_y=\gamma(B_y+\frac{v}{c^2}E_z)\ ,\ \overline{B}_z=\gamma(B_z-\frac{v}{c^2}E_y)\ 。\end{aligned}\tag{6.30}$$

写为矢量形式：

$$\begin{aligned}\overline{\vec{E}} &= \gamma(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})-\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\frac{\vec{v}}{c}(\frac{\vec{v}}{c}\cdot\vec{E})\ ,\\ \overline{\vec{B}} &= \gamma(\vec{B}-\frac{\vec{v}\times\vec{E}}{c^2})-\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\frac{\vec{v}}{c}(\frac{\vec{v}}{c}\cdot\vec{B})\ 。\end{aligned}\tag{6.31}$$

例题 *3:* 证明 $E^2-c^2B^2$ 及 $\vec{E}\cdot\vec{B}$ 是 *Lorentz* 不变量。
解答：略。可以把上两式写为 $F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 和 $F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}$ 。其中 $\tilde{F}_{\mu\nu}=\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ ， $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ 是四阶全反对称张量， $\varepsilon_{1234}=1$ 。

例题 *4*： S 系中有一均匀电场 $\vec{E}$ ，没有磁场。研究 $\overline{S}$ 系中的情况。
解答：若 $\vec{E}//\vec{v}$ 则 S 、$\overline{S}$ 系中的情况一样。如 $\vec{E}\perp\vec{v}$ 则 $\overline{\vec{E}}=\gamma\vec{E}$ ， $\overline{\vec{B}}=-\gamma\frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E}$ 。从这个例子看出电磁场是一整体，可以互相转换。

例题 *5*： S 系中 $\vec{E}\perp\vec{B}$ ，是否存在 $\overline{S}$ 使得其中只存在 $\vec{E}$ 或 $\vec{B}$ ？
解答： $E^2-c^2B^2$ 是不变量。如果它大于零，则可找到只存在电场的参考系，反之则可找到只存在磁场的参考系。比如对前者可选 $\vec{v}//\vec{E}\times\vec{B}$ ， $v=|\frac{c^2B}{E}|$ 。

三维 Lorentz 力密度的表达式 $\vec{f}=\rho\vec{E}+\vec{j}\times\vec{B}$ 也可以推广到 4 维情形：

$$f_\mu=F_{\mu\nu}j_\nu\ , \tag{6.32}$$

μ、ν=1,2,3 时它就是 Lorentz 力公式。第四维给出 $f_4=\frac{i}{c}\vec{E}\cdot\vec{j}=\frac{i}{c}W$ ， W 是电磁力对载流体的功率密度。所以引入

$$f_\mu=(\vec{f},\frac{i}{c}W)\ . \tag{6.33}$$

也可以给出能动量张量的四维协变表达式。由能量、动量守恒公式：

$$\begin{aligned} W &= -\frac{\partial w}{\partial t}-\nabla\cdot\vec{S}\ , \\ \vec{f} &= -\frac{\partial\vec{g}}{\partial t}-\nabla\cdot\overrightarrow{\overrightarrow{T}}\ , \end{aligned} \tag{6.34}$$

推出

$$f_\nu=-\partial_\mu T_{\mu\nu}\ , \tag{6.35}$$

且

$$T_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}\overrightarrow{\overrightarrow{T}} & \frac{i}{c}\vec{S}\\ ic\vec{g} & -w\end{pmatrix}. \tag{6.36}$$

能量动量张量 $T_{\mu\nu}$ 是一个对称张量。

§6.6 相对论力学

牛顿第二定律说

$$\vec{F}=\frac{d}{dt}(m_0\vec{v})\ . \tag{6.37}$$

现在我们来讨论如何把它推广到四维协变形式。

已知四维速度的表达式 6.21 ，所以猜测 6.37 式右侧推广为

$$\frac{d}{dt}(m_0\vec{v}) \to \frac{d}{d\tau}(m_0 U_\mu) \ 。 \tag{6.38}$$

那么四维力的表达式应该写成什么形式呢？电磁力密度 $f_\mu = (\vec{f}, \frac{i}{c}W)$ 是四矢量，所以四维力的表达式应该是

$$F_\mu = \int f_\mu(\gamma dV) \ 。 \tag{6.39}$$

对于质点得

$$F_\mu = \gamma(\vec{F}, \frac{i}{c}P) \ , \tag{6.40}$$

其中 P 是功率， $\vec{F}$ 是 6.37 式左定义的三维力。

例题 *6* ：求运动带电粒子在电磁场中所受的力。

解答：设电荷 q 沿 x 方向以速度 v 运动，取 S' 系固定在带电粒子上。由 *6.40* 式知

$$F'_\mu = (\vec{F}', 0) = (q\vec{E}', 0) \ 。$$

在 S 系中， $F_\mu = \gamma(\vec{F}, \frac{i}{c}\vec{F}\cdot\vec{v})$ ，由于 F_μ 是 *4-* 矢量，可以套用 *6.10* 式

$$(\gamma\vec{F})_{//} \quad = \quad \gamma(\vec{F}'_{//} - i\beta F'_4) = \gamma q\vec{E}'_{//} = \gamma q\vec{E}_{//} \ , \tag{6.41}$$

$$\tag{6.42}$$

其中第一个等式用的是 *4-* 矢量的变换性质，最后一个等式用的是电场的张量变换性质 *6.31* 式。类似的

$$(\gamma\vec{F})_\perp = \vec{F}'_\perp = q\vec{E}'_\perp = q\gamma(\vec{E}_\perp + \vec{v}\times\vec{B}) \tag{6.43}$$

合并上面两个结果得

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) \ 。$$

这个例子可以帮助我们更深刻的认识 Lorentz 力的本质、物理定律的相对论协变性和力的三维形式 $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ 的意义。 [2]

由 6.38 、 6.39 式可以推测牛顿第二定律的协变推广为

$$F_\mu = \frac{d}{d\tau}(m_0 U_\mu) \tag{6.44}$$

[2]根据下面的 6.46 和 6.54 式， $\vec{p} = m\vec{v} = \gamma m_0\vec{v}$ 是 4- 动量的空间分量。

这个表达式满足相对性原理，并且在 $v << c$ 时回到牛顿第二定律。当然到目前为止这个公式还仅仅是一个猜测，其是否正确还须经实验检验。

利用 6.44 式的三维形式（并不是回到低速情形）：

$$\begin{aligned} \gamma\vec{F} &= \frac{d}{d\tau}(\gamma m_0\vec{v}) \ , \ (\gamma = \frac{dt}{d\tau}) \\ \gamma P &= \frac{d}{d\tau}(\gamma m_0 c^2) \ 。 \end{aligned} \tag{6.45}$$

首先推出

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(\gamma m_0\vec{v}) \ 。 \tag{6.46}$$

它与牛顿第二定律 6.37 的唯一区别是静质量 m_0 被替换成了 **动质量** m:

$$m \equiv \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \ , \tag{6.47}$$

也就是说动质量才是惯性质量，它不仅仅是质点的固有性质也与质点的速度有关。

由 6.45 式中的第二项又得

$$P = \frac{d}{dt}(\gamma m_0 c^2) = \frac{d}{dt}(mc^2) \ 。 \tag{6.48}$$

我们知道功率为能量的变化率，所以得到了著名的质能关系式：

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \ 。 \tag{6.49}$$

可以定义 $E = E_0 + K$ ，即把能量中的 **静止能量**$E_0 = m_0c^2$ 分出来，剩下的 K 叫做动能。在低速时

$$K \simeq \frac{1}{2}m_0 v^2 \ 。$$

现在要问的问题是，静能有无物理意义？是否它仅仅是无关紧要的常数？显然仅仅在静能可以转化为其它能量时才有意义。这是我们下一节讨论的问题。静能量可以转化的发现，验证了我们在这一节所做的所有猜测的合理性，也给人类对世界的认识带来了巨大的改变。

§6.7 质能关系与 4- 动量守恒

当质子与中子结合成氘核时，

$$p + n \to d \ , \ m_p + m_n > m_d \ , \tag{6.50}$$

即有静质量亏损，并释放出能量

$$\triangle E = (m_p + m_n - m_d)c^2 \ \ (\simeq 2.2\text{MeV} = 3.6 \times 10^{-13} J) \ 。 \tag{6.51}$$

这证实了静能量是总能量的一部分。

p 和 n 结合成氘核的微观机制是清楚的。氘核是一个由 p 、 n 组成的束缚态。p 、 n 具有核力，强度很大、力程很短，并且是吸引力。为了保证氘核稳定，结合能 B 是负的，即 $K_p + K_n + V < 0$ 。所以

$$E_d = m_d c^2 = m_p c^2 + m_n c^2 + K_P + K_n + V \ , \tag{6.52}$$

在这里把氘核看成了一个质点。它的“静质量”实际上由很复杂的机制产生。

可以定义质点的四维动量

$$p_\mu = m_0 U_\mu = (\vec{p}, \frac{iE}{c}) \ , \tag{6.53}$$

其中

$$\vec{p} = m\vec{v} = \gamma m_0 \vec{v} \ , \ \ E = mc^2 = \gamma m_0 c^2 \ 。 \tag{6.54}$$

我们对 4- 动量 6.53 式并不陌生，在牛顿第二定律的推广 6.44 式中我们已经用到了它：

$$F_\mu = \frac{d}{d\tau} p_\mu \ 。$$

那么这样定义的 4- 动量是否守恒呢？要回答这一问题首先应该指出的是，不能够再用牛顿第三定律来论证 4- 动量守恒。因为牛顿第三定律以瞬时性观念为前提，而在我们这门课中已经了解到，“力”是由场来传播的，而场的传播速度是有限的，且场本身携带动量！所以质点之间的作用和反作用并不满足牛顿第三定律。但是电动力学已证明，考虑到辐射场的能量与动量，整个系统的能、动量都是守恒的。[3]

虽然可以一般的证明能、动量守恒或 4- 动量守恒，但是仍然需要在微观系统检验它。在具有确定 4- 动量的微观粒子（质点）散射时，粒子通过场的辐射与吸收交换动量。在相互作用区，粒子并不是 4- 动量的本征态。然而在发生完相互作用，粒子飞离相互作用区以后，由于不再有相互作用，微观粒子（重新）成为粒子的本征态。如果 4- 动量是守恒的，那么入射（初态）粒子的总的 4- 动量应该与出射（末态）粒子的总 4- 动量相等。所以，不需关心相互作用的具体细节，我们仍然可以通过对初、末态粒子的测量检验动量守恒的正确性。

一个静质量为 m_0 的粒子，其能量与 3- 动量的关系是

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} \tag{6.55}$$

[3]一般可以证明能量动量守恒是空间、时间均匀性的反映，是普遍成立的。比如在质点的拉格朗日力学中我们所见过的那样。

且

$$p_\mu p_\mu = -m_0^2 c^2 \ 。 \tag{6.56}$$

对于零质量的粒子 $E = pc$ 。下面我们通过几个例子来讨论粒子散射过程中的 4- 动量守恒。

先来看一下一个不稳定粒子的两体衰变（ $A \to 1 + 2$ ），如图 6.9 所示。 最简

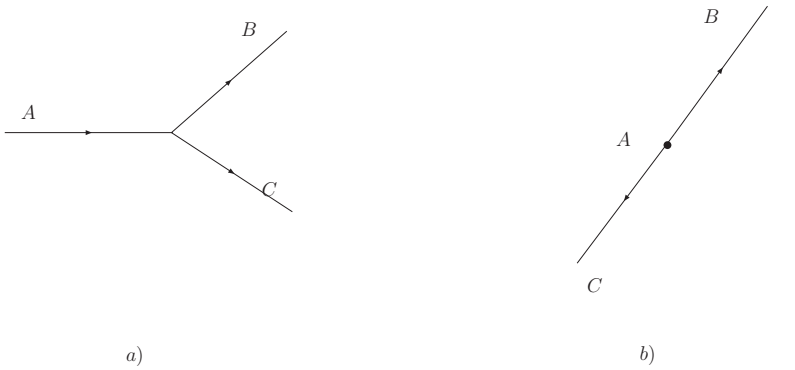


图 6.9: 两体衰变过程的四动量守恒； a)A 粒子运动的系中； b)A 的静止系中。

单的方法是在 A 的静止系中作计算（质量为 M ）。由能、动量守恒得

$$\begin{aligned} Mc &= \sqrt{m_1^2 c^2 + p_1^2} + \sqrt{m_2^2 c^2 + p_2^2} \ , \\ p_1 &= p_2 \ 。 \end{aligned} \tag{6.57}$$

解出动量为

$$|p_1| = |p_2| = \sqrt{\frac{(M^2 - (m_1 + m_2)^2)(M^2 - (m_1 - m_2)^2)}{4M^2}} \ , \tag{6.58}$$

能量为

$$E_1 = \frac{M^2 - m_2^2 + m_1^2}{2M} \ 。 \tag{6.59}$$

历史上最著名的例子是中子的 β 衰变：

$$n \to p + e^- + \nu_e \ 。$$

ν_e 是电子中微子，质量非常微小（可以认为是零）。由于 ν_e 只参加弱作用，所以很难探测到它。在人们最早发现 β 衰变时，（由于中微子的丢失）曾经引起了能量不守恒的推测。历史上是 pauli 首先提出了中微子假说以挽救能量守恒。以后这一假说为实验所证实。对于粒子衰变过程，作为一般规律，初态粒子的（静止）质量必须大于末态粒子的（静止）质量之和。 [4]

[4]比如不管入射电子能量如何 $e \to e\gamma$ 不可能发生，除非辐射的是零能光子。但是在介质中情形有所不同。在入射电子的 $\beta = \frac{v}{c} > \frac{1}{n}$ 时这个过程可以发生且光子的散射角 $\cos\theta = \frac{1}{n\beta}$ 。这个现象叫做 Cerenkov 辐射，并且这一原理被用来制作带电粒子探测器。详见 7.5 节。

最后我 Compton 散射），见图 6.10 。

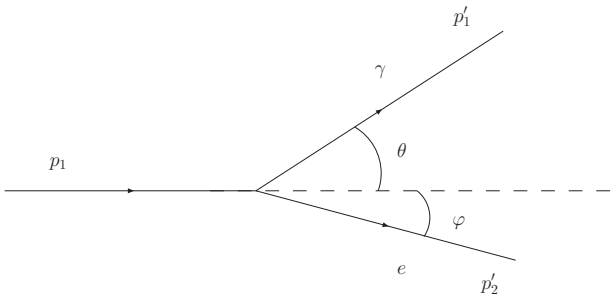


图 6.10: Compton 散射：一个动量为 p_1 的光子打到静止的电子上出射一个动量为 p_1' 的光子和一个动量为 p_2' 的电子。

$$\begin{aligned} p_1 &= p_1' \cos\theta + p_2' \cos\varphi \ , \\ 0 &= p_1' \sin\theta - p_2' \sin\varphi \ , \\ p_1 + m_e c &= p_1' + \sqrt{m_e^2 c^2 + p_2'^2} \ 。 \end{aligned} \tag{6.60}$$

把出射光子的散射角 θ 作为参量，解出

$$\frac{E_1'}{E_1} = \frac{1}{1 + \frac{E_1}{m_e c^2}(1 - \cos\theta)} \ 。 \tag{6.61}$$

从这个结果得到一个重要结论即出射光子的能量（在电子的静止系中），除了朝前散射外，能量必有减少。而能量 $\hbar\nu$ 减少意味着光子的频率减少，这与经典电动力学冲突。仅当 $E_1 << m_e c^2$ 时，经典电动力学给出一个好的近似。

§6.8 习题

1. S 系中有一静长为 l_0 的管子沿 x 方向以速率 v 运动。从管尾向前射出一高速粒子，它相对于管子的速率为 u ，求它到达管子前端所需的时间。
2. 有一光源 S 与接收器 R 相对静止，距离为 l_0 ， $S-R$ 装置浸在均匀无限的液体介质 (静止折射率 n) 中。试对下列三种情况计算光源发出讯号到接收器接到讯号所经历的时间。
   (1) 液体介质相对于 $S-R$ 装置静止。
   (2) 液体沿着 $S-R$ 连线方向以速度 v 流动。
   (3) 液体垂直于 $S-R$ 连线方向以速度 v 流动。

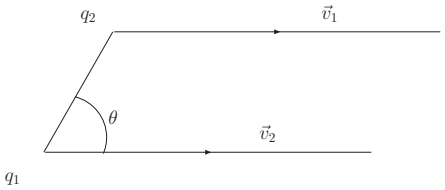


图 6.11: 求外力垂直于速度方向的分量。

3. 一平面镜向垂直镜面方向以速度 v 对 S 系运动，一平面波从镜子前方（即入射波矢与镜子运动速度成钝角）向镜子斜向入射，入射角为 θ_i，求在 S 系中测到的反射角 θ_r。
4. 用四维速度 u_μ 的洛伦兹变换导出三维速度 $\mathbf{v}$ 的变换公式。
5. 试由电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 的洛伦兹变换式导出电场强度 $\mathbf{E}$ 和磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的变换公式。
6. 两个带电粒子以同样的速度 $\mathbf{v}$ 相对 S 系飞行。它们之间的连线与速度方向如图 (Fig. 6.11) 所示。要保持它们作匀速直线运动，须给两电子分别施加外力，求外力垂直于速度方向的分量。
7. 若按氢原子的经典模型，电子绕核作圆周运动，半径为 r_0。试导出这模型原子的结合能和质量亏损对 r_0 的依赖关系。当已测得其结合能 $B = 13.6eV$，相应地算出其半径 r_0 和其质量亏损 ΔM 的大小。
8. 设实验室中运动质子的能量 $E_p \gg m_n c^2$，其中 m_n 是中子的静止质量。证明这时质子衰变成中子加其他粒子必违反能量的守恒。
9. 动量为 $\hbar\mathbf{k}$，能量为 $\hbar\omega$ 的光子撞在静止的电子上，散射到与入射方向夹角为 θ 的方向上。证明散射光子的频率变化量为
$$\omega - \omega' = \frac{2\hbar}{m_0 c^2}\omega\omega' \sin^2\frac{\theta}{2}.$$
10. 一个总质量为 M 的激发原子，对所选定的参考系静止。它在跃迁到能量比之低 ΔE 的基态时，发射一个光子 (能量 $\hbar\omega$，动量 $\hbar\mathbf{k}$)。同时受到光子的反冲，因此光子的频率不能正好是 $\nu = \Delta E/h$，而要略小一些。证明这个频率
$$\nu = (\Delta E/h)(1 - \Delta E/2Mc^2).$$

第七章　运动电荷产生的电磁场

§7.1　李纳 – 维谢尔势

考虑一个具有任意运动轨迹 $\vec{r}=\vec{r}_e(t)$ 的带电粒子,

$$\begin{aligned}\rho(\vec{r},t) &= e\delta(\vec{r}-\vec{r}_e(t))\ ,\\ \vec{j}(\vec{r},t) &= e\vec{v}\delta(\vec{r}-\vec{r}_e(t))\ 。\end{aligned}\tag{7.1}$$

电子的速度

$$\vec{v}(t)=\frac{d\vec{r}_e(t)}{dt}\ 。\tag{7.2}$$

推迟势 5.26 、 5.27 两式变为

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{e\vec{v}(t^*)\delta(\vec{r}'-\vec{r}_e(t^*))}{R}dV'\ ,\\ \varphi(\vec{r},t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{e\delta(\vec{r}'-\vec{r}_e(t^*))}{R}dV'\ ,\\ &\quad (R=|\vec{r}-\vec{r}'|\ ,t^*=t-\frac{R}{c})\ 。\end{aligned}\tag{7.3}$$

现计算上面的积分。利用

$$\begin{aligned}&e\vec{v}(t^*)\delta(\vec{r}'-\vec{r}_e(t^*))=e\vec{v}(t')\delta(\vec{r}'-\vec{r}_e(t'))|_{t'=t-R/c}\\ =\ &\int_{-\infty}^{t}e\vec{v}(t')\delta(\vec{r}'-\vec{r}_e'(t'))\delta(t'-t+\frac{R}{c})dt'\end{aligned}\tag{7.4}$$

带回 7.3 式，并交换积分次序（先对 dV' 积分），得

$$\vec{A}\ =\ \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{t}\frac{e\vec{v}(t')}{|\vec{r}-\vec{r}_e(t')|}\delta(t'-t+\frac{|\vec{r}-\vec{r}_e'(t')|}{c})dt'\ 。\tag{7.5}$$

利用公式 $\int f(x)\delta(\phi(x))dx=\sum_i\frac{f(x_i)}{|\varphi'(x_i)|}|_{\varphi(x_i)=0}$ ，计算上面积分得（令 $R(t')=|\vec{r}-\vec{r}_e(t')|$ ）

$$\begin{aligned}\vec{A}\ &=\ \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{t}\frac{e\vec{v}(t')}{R(t')}\delta(t'-t+\frac{R(t')}{c})dt'\\ &=\ \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e\vec{v}(t')}{R(t')|\frac{d}{dt'}(t'-t+\frac{R(t')}{c})|}\ |_{t'=t-\frac{R(t')}{c}}\ 。\end{aligned}\tag{7.6}$$

注意由于光速是最大信号传递速度、函数 $t'-t+\frac{R(t')}{c}$ 只可能有唯一的零点。由 $\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}_e(t')$ 得

$$\begin{aligned}&\frac{d\vec{R}(t')}{dt'}=-\frac{d\vec{r}_e(t')}{dt'}=-\vec{v}(t')\ ,\\ &\vec{R}\cdot\frac{d\vec{R}}{dt'}=-\vec{R}\cdot\vec{v}\ ,\ \ R\frac{dR}{dt'}=\vec{R}\cdot\frac{d\vec{R}}{dt'}\ ,\ \ \dot{R}=-\frac{\vec{v}\cdot\vec{R}}{R}\ 。\end{aligned}\tag{7.7}$$

于是得到 **李纳 – 维谢尔势**：

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e\vec{v}(t')}{R\left(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{R}}{cR}\right)}\Big|_{t'=t-\frac{R}{c}=t-\frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}_e(t')|}\ ,\\ \varphi &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{R\left(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{R}}{cR}\right)}\Big|_{t'=t-\frac{R}{c}}\ 。\end{aligned}\tag{7.8}$$

其中 $\frac{e}{1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{R}}{R}}$ 有时叫做有效电荷量，$(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{R}}{cR})$ 称为改正因子。

我们再讨论另一种推导方法。首先注意到 $\vec{r},t$ 处观测到的场是由 $\vec{r}_e(t'),t'$ 处发出的且满足

$$R(t')=|\vec{r}-\vec{r}_e(t')|=c(t-t')\ 。\tag{7.9}$$

在 t' 时刻选取一个速度为 $\vec{v}(t')$ 的（瞬时）惯性系 $\overline{S}$，[1] 坐标原点取在带电粒子上。于是在 $\overline{S}$ 上看

$$\overline{\vec{A}}=0\ ,\ \ \overline{\varphi}=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0\overline{R}}\ \ (\overline{R}=c(\overline{t}-\overline{t'}))\ 。\tag{7.10}$$

由第 6 章的例题 2 的结果得

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \frac{\vec{v}e\gamma}{4\pi\varepsilon_0c^2\overline{R}}\ ,\\ \varphi &= \frac{e\gamma}{4\pi\varepsilon_0c^2\overline{R}}\ ,\end{aligned}\tag{7.11}$$

其中 $\vec{v}=\vec{v}(t')$，$\gamma=1/\sqrt{1-v^2/c^2}$。$\overline{R}$ 也需要变回到 S 系中。利用 6.9 式

$$\overline{t}\ =\ \gamma(t-\vec{r}\cdot\vec{v}/c^2)\ ,\ \overline{t}'=\gamma(t'-\vec{r}_e\cdot\vec{v}/c^2)\ ,$$

即

$$\overline{R}=c(\overline{t}-\overline{t}')=\gamma(R-\vec{R}\cdot\vec{v}/c)\ 。\tag{7.12}$$

最终得到

$$\begin{aligned}&\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R-\vec{R}\cdot\vec{v}/c}\ ,\\ &\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e\vec{v}}{R-\vec{R}\cdot\vec{v}/c}\ ,\\ &(t'=t-\frac{R(t')}{c}=t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}_e(t')|}{c}\ ,\ \ \vec{v}=\frac{d\vec{r}_e(t')}{dt'})\ 。\end{aligned}\tag{7.13}$$

[1] 瞬时惯性系与惯性系得到同样的结果，是因为 φ 和 $\vec{A}$ 只依赖于辐射时刻的速度！

§7.2 运动电荷的电磁场

这一节我们由李纳－维谢尔势出发来计算任意运动电荷所辐射的电磁场。为此我们首先给出几个有用的公式。由 7.9 式认识到 t' 是 t 和 $\vec{r}$ 的函数： $t'=t'(t,\vec{r})$, 有

$$\frac{\partial t'}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(t-\frac{R}{c})=1-\frac{\partial R}{c\partial t}=1-\frac{1}{c}\frac{\partial R}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}\ ,$$

也即 $\frac{\partial t'}{\partial t}(1+\frac{1}{c}\frac{\partial R}{\partial t'})=1$ 。又由

$$\frac{\partial R}{\partial t'}=\frac{\partial}{\partial t'}|\vec{r}-\vec{r}_e(t')|=-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}(t')}{R}$$

得到

$$\frac{\partial t'}{\partial t}=\frac{1}{1-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{cR}}\ . \tag{7.14}$$

令 $K=R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}$ ，则 $\frac{\partial t'}{\partial t}=\frac{R}{K}$ 或

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{R}{K}\frac{\partial}{\partial t'}\ . \tag{7.15}$$

也可以计算 t' 对坐标的微分

$$\begin{aligned}\nabla t' &= \nabla(t-\frac{R}{c})=-\frac{1}{c}\nabla R=-\frac{1}{c}\{\nabla R|_{t'\ 不变}+\frac{\partial R}{\partial t'}\nabla t'\}\\ &= -\frac{\vec{R}}{cR}+\frac{\vec{v}\cdot\vec{R}}{cR}\nabla t'\ ,\end{aligned}$$

给出

$$\nabla t'=-\frac{\vec{R}}{cK}\ . \tag{7.16}$$

或者运算规则

$$\nabla=\nabla|_{t'\ 不变}-\frac{\vec{R}}{cK}\frac{\partial}{\partial t'}\ . \tag{7.17}$$

以下利用上面得到的运算规则通过方程

$$\vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\ ,\ \ \vec{B}=\nabla\times\vec{A} \tag{7.18}$$

来计算由推迟量表达的电磁场。结果如下：

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{(R-\vec{R}\cdot\vec{v}/c)^3}\{(\vec{R}-\frac{R\vec{v}}{c})(1-\frac{v^2}{c^2})+\frac{1}{c^2}\vec{R}\times\left[(\vec{R}-\frac{R\vec{v}}{c})\times\dot{\vec{v}}\right]\}\ ,\\ \vec{B} &= \frac{\vec{R}}{c\,R}\times\vec{E}\ .\end{aligned} \tag{7.19}$$

上式中等号右边所有的量都理解为推迟量，即 t' 的函数。分析 7.19 式得到一个重要的结论，即电场（和磁场）分为两部分：

- 第一部分：场与距离平方成反比，本质上是静止场，没有辐射。
- 第二部分：加速场， $\propto \dot{\vec{v}}, \frac{1}{R}$ ，总能流与 R 无关。故可以辐射，为辐射场。

例题 *1* ：求匀速运动的点电荷的场。

解答：

$$\vec{E} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\vec{R}-R\vec{\beta})(1-\beta^2)}{(R-\vec{R}\cdot\vec{\beta})^3}\Big|_{\text{推迟}} 。$$

然而，上述表示是以推迟量来表示的，并不方便。所以需将它改为用 $\vec{r}, t$ 来表示。见图 *7.1* 所示。以 t 时刻的点电荷坐标为原点。 定义 $\vec{R}(t') = \vec{R}_0 = c(t-t')$ 我们有

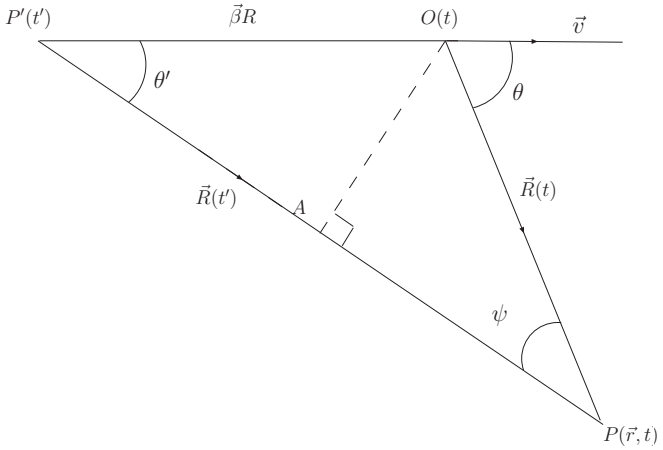


图 7.1: 以速度 $\vec{v}$ 匀速运动的点电荷产生的电场的计算。

$\overline{OP'} = v(t-t') = \beta R_0$, $\vec{R}(t') - \vec{\beta}R(t') = \vec{R}(t)$ 和

$$R - \vec{R}\cdot\vec{v}/c|_{t'} = \overline{AP} = R_0 - R_0\beta\cos\theta'$$

因为 $\sin\psi/\sin\theta = \beta$（正弦定理），用 O 系中的量表示

$$R - \vec{R}\cdot\vec{v}/c|_{t'} = R\sqrt{1-\sin^2\psi} = R\sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta} 。$$

于是电场为

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{R}}{R^3}\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}} 。 \tag{7.20}$$

而磁场则为

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}\times\vec{E}\Big|_{\text{推迟}} = \frac{1}{cR_0}\left[\vec{\beta}R_0 + \vec{R}(t)\right]\times\vec{E} = \frac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{E} 。 \tag{7.21}$$

此题的另外一种解法是由 Lorentz 变换直接得出

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma e\vec{R}}{(R_\perp^2+\gamma^2R_{//}^2)^{3/2}}\ ,\\ \vec{B} &= \frac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{E}\ 。\end{aligned}\tag{7.22}$$

由 7.20 、 门发现

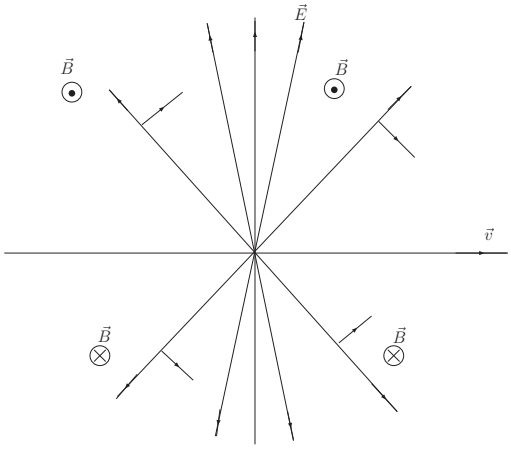


图 7.2: 以速度 $\vec{v}$ 匀速运动的点电荷产生的电场和磁场。

1. 由 7.20 式得知 $\vec{E}\propto\vec{R}$，即没有径向流出的能流，没有辐射，只反映了场的能量随电荷的运动而迁移（否则与牛顿第一定律矛盾）。 [2]
2. 非相对论极限下 7.20 式回到库仑定律，且

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e\vec{v}\times\vec{R}}{R^3}\ 。\tag{7.23}$$

这个公式形式上就是毕奥 – 萨伐尔定律，但是注意电流并不是稳定的。

§7.3 辐射功率

仅仅考虑辐射场，

$$\vec{S}=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}\ =\ \frac{1}{\mu_0 c}\vec{E}\times(\vec{e}_R\times\vec{E})=\frac{1}{\mu_0 c}|\vec{E}|^2\vec{e}_R\ 。\tag{7.24}$$

[2]由这里的分析知，电子的质量应该分为两部分： $m_e=m_{\text{场}}+m_0$，但点电荷的场能确是发散的！若认为电子是一个均匀带电的小球，则当 $r_e\sim10^{-13}\text{cm}$, $m_{\text{场}}\simeq m_e\simeq0.5\text{MeV}$ 。

在 $\triangle t$ 时间间隔内穿过 $d\vec{S}$ 面的能量是

$$\triangle w = \vec{S}\cdot d\vec{\sigma}\triangle t = S_n R^2 d\Omega \triangle t \ 。 \tag{7.25}$$

$\triangle t$ 是观测者的时间间隔，但这些能量 $\triangle w$ 是带电粒子在 $\triangle t'$ 的时间间隔内发出的。现在我们仅关心的是带电粒子在单位时间间隔内辐射出去的能量，即

$$\frac{\triangle w}{\triangle t'} = S_n R^2 d\Omega \frac{\triangle t}{\triangle t'} \ 。 \tag{7.26}$$

即单位时间内沿 $d\Omega$ 方向辐射出去的能量（或辐射功率的角分布）为

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\vec{S}\cdot d\vec{\sigma}\triangle t}{d\Omega \triangle t'} = \frac{1}{\mu_0 c} E^2 R K \ 。 \tag{7.27}$$

而辐射总功率为

$$P = \int d\Omega \, \frac{dP}{d\Omega} \ 。 \tag{7.28}$$

例题 *2*：证明辐射总功率是 *Lorentz* 不变量。

解答：设 p_μ 是带电粒子固有系中的 *4-* 动量，$\overline{p}_\mu = L_{\mu\nu}p_\nu$ 。由 $p_\nu = (0,0,0,p_4)$，得 $\overline{p}_4 = L_{4\nu}p_\nu = \gamma p_4$，或 $d\overline{p}_4 = \gamma dp_4$，同理 $d\overline{t} = \gamma d\tau$ 。所以

$$\frac{dp_4}{d\tau} = \frac{d\overline{p}_4}{d\overline{t}}$$

是 *Lorentz* 不变量。即能量的变化率或辐射功率是 *Lorentz* 不变量。

§7.3.1 非相对论性带电粒子的辐射

$v << c$，$\dot{\vec{v}} \neq 0$ 。

$$\begin{aligned} \vec{E} &\simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{c^2 R^3}\vec{R}\times(\vec{R}\times\dot{\vec{v}}) \ , \\ \vec{B} &= \frac{\vec{R}}{cR}\times\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{c^3 R^2}\left[\vec{R}\times\dot{\vec{v}}\right] \ 。 \end{aligned} \tag{7.29}$$

取 $\dot{\vec{v}}$ 方向为 z 轴，从上式给出

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{e\dot{v}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R}\sin\theta\,\vec{e}_\theta \ , \\ \vec{B} &= \frac{e\dot{v}}{4\pi\varepsilon_0 c^3 R}\sin\theta\,\vec{e}_\phi \ 。 \end{aligned} \tag{7.30}$$

辐射功率的角分布为

$$\frac{d\,P}{d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\dot{v}^2\sin^2\theta \ , \tag{7.31}$$

辐射的总功率为（ 拉莫尔 公式）

$$P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2\dot{v}^2}{3c^3} \ 。 \tag{7.32}$$

例题 3：分析电子绕氢原子核的运动。

解答：

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} \ ,$$
$$U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r} \ 。$$

结合能 $B = -U \simeq 13.6eV$，估算出 $r_0 \simeq 0.52\times10^{-10}m$， $v_0 \simeq 2.2\times10^6 m/s$，得出 $a = v_0^2/r_0$ 。由 $P = -\frac{dU}{dt}$ 和拉莫尔公式得

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{e^4}{12\pi^2\varepsilon_0^2 c^3 m^2 r^2} \ ,$$

由此得到电子落到原子核中心的时间约为 $\tau = 1.5\times10^{-11}s$ 。

§7.3.2 相对论性的辐射

首先我们分两种情况讨论： 1 ） $\vec{v}//\dot{\vec{v}}$， **轫致辐射**； 2 ） $\vec{v}\perp\dot{\vec{v}}$， **同步辐射** 。

1 ） $\vec{v}//\vec{a}$ ：

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^2c^3\varepsilon_0}\frac{a^2\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5} \ 。 \tag{7.33}$$

在 $\beta\to0$ 时上式回到偶极辐射的情形。随着 v 的增加辐射越来越朝前倾。总功率

$$P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\frac{|\dot{v}|^2}{(1-\beta^2)^3} \propto \gamma^6 \ 。 \tag{7.34}$$

2 ） $\vec{v}\perp\vec{a}$（如带电粒子在磁场中的运动）：此时 $\frac{dP}{d\Omega}$ 与 θ 、 ϕ 均有关（设 $\vec{v}$ 为 z 轴、 $\dot{\vec{v}}$ 为 x 轴）： [3]

$$\frac{dP(\theta,\phi)}{d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^2c^3\varepsilon_0}\frac{\left[(1-\beta\cos\theta)^2\dot{\beta}^2 - (1-\beta^2)\dot{\beta}^2\sin^2\theta\cos^2\phi\right]}{(1-\beta\cos\theta)^5} \ 。 \tag{7.35}$$

总功率

$$P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\frac{|\dot{\vec{v}}^2|}{(1-\beta^2)^2} \propto \gamma^4 \ 。 \tag{7.36}$$

[3]详细推导可见虞福春，郑春开著《电动力学》（修订版）北京大学出版社 2003 年 9 月。

对于一般情况，如果拆分成 $\vec{v}\perp\vec{a}$ 和 $\vec{v}//\vec{a}$ 两种情形，则可以证明只有总功率具有可加性，$P=P_{\perp}+P_{//}$，而 $\frac{dP}{d\Omega}$ 不能。总功率为（李纳公式）

$$P=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\gamma^6\left[\dot{\beta}^2-(\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}})^2\right]\ 。\tag{7.37}$$

其证明如下：
首先，根据本章例题 2，总功率是 Lorentz 不变量，可以在 $\vec{v}=0\,(\vec{v}(t')=0)$ 的系中计算。此时 P 等价于非相对论近似中的拉莫尔公式 7.32 式，注意此时拉莫尔公式是严格的。由速度变换公式

$$\vec{u}=\frac{\vec{u}'+\vec{v}+(\gamma-1)\frac{\vec{v}}{v^2}[\vec{u}'\cdot\vec{v}+v^2]}{\gamma(1+\vec{u}'\cdot\vec{v}/c^2)}\tag{7.38}$$

得到加速度的变换公式

$$\begin{aligned}\dot{\vec{u}}\ &=\ \frac{\dot{\vec{u}}'}{\gamma^2s^2}-\frac{(\dot{\vec{u}}'\cdot\vec{v})\vec{u}'}{\gamma^2s^3c^2}-\frac{(\gamma-1)(\dot{\vec{u}}'\cdot\vec{v})\vec{v}}{\gamma^3s^3v^2}\ ,\\ &\quad(s=1+\vec{u}'\cdot\vec{v}/c^2)\ 。\end{aligned}\tag{7.39}$$

由 $\dot{\vec{u}}=\vec{a}$，$\dot{\vec{u}}'=\vec{a}'$，$\vec{u}'=0$，$s=1$ 带入上式得

$$\vec{a}=\frac{\vec{a}'}{\gamma^2}-\frac{(\gamma-1)(\vec{a}'\cdot\vec{v})\vec{v}}{\gamma^3v^2}\ ,\tag{7.40}$$

或

$$a_{//}=a'_{//}/\gamma^3\ ,\ \ a_{\perp}=a'_{\perp}/\gamma^2\ 。\tag{7.41}$$

于是

$$\begin{aligned}(\vec{a}')^2\ &=\ \gamma^6a_{//}^2+\gamma^4a_{\perp}^2=\gamma^6\left[a^2(1-\beta^2)+\beta^2a_{//}^2\right]\\ &=\ \gamma^6c^2\left[(\dot{\vec{\beta}})^2(1-\beta^2)+(\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}})^2\right]=\gamma^6c^2[(\dot{\vec{\beta}})^2-(\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}})^2]\ 。\end{aligned}\tag{7.42}$$

由此即可得到李纳公式，它是拉莫尔公式的相对论性推广。

§7.4 运动带电粒子辐射的频谱分析

上节得到的辐射能量表达式包含了各种辐射频率，我们常常还要关心在某一频率范围内的辐射出去的能量。为作频谱分析，我们首先首先回顾一下付立叶变换的基本性质。

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{-i\omega t}d\omega \ , \\ F(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\omega t}dt \ 。 \end{aligned} \tag{7.43}$$

由付立叶变换和反变换的定义可推出，若 $f(t)=f^*(t)$ 则 $F^*(\omega)=F(-\omega)$ 。对于实函数 $f(t)$ ，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt = 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)F(-\omega)d\omega = 4\pi\int_0^{+\infty}|F(\omega)|^2d\omega \ 。 \tag{7.44}$$

与上一节不同，这里我们改成从观测者的时间间隔来考察辐射功率

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\vec{S}\cdot d\vec{\sigma}}{d\Omega} = \frac{1}{\mu_0 c}E^2R^2|_{\text{推迟}} \ 。 \tag{7.45}$$

即其中不出现 $\frac{\triangle t}{\triangle t'}$ 因子。上式代表着观测者在单位时间内发现的从立体角 $d\Omega$ 内流出的（而不是带电粒子辐射出的）能流。令 $\vec{f}(t)=\sqrt{\frac{1}{\mu_0 c}}\vec{E}R$ ，即 $\frac{\vec{S}\cdot d\vec{\sigma}}{d\Omega}=|\vec{f}^2(t)|$ 。将其对时间积分，即得单位立体角的总辐射能

$$\frac{dw}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{+\infty}|\vec{f}(t)|^2dt = 4\pi\int_0^{+\infty}|F(\omega)|^2d\omega \ 。 \tag{7.46}$$

于是单位立体角、单位频率的辐射能为

$$\frac{d^2w}{d\omega d\Omega} = 4\pi|\vec{F}(\omega)|^2 \ 。 \tag{7.47}$$

由 7.19 式的电场表达式出发经过计算得

$$F(\omega) = \frac{1}{8\pi^2\varepsilon_0}\sqrt{\frac{e^2}{\mu_0 c^3}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t'+\frac{R}{c})}\frac{1}{(1-\beta\cos\theta)^2}\{\vec{e}_R\times[(\vec{e}_R-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}]\}dt' \ , \tag{7.48}$$

在其中我们已经把对 t 的积分换成了对 t' 的积分：由 $t'=t-\frac{R}{c}$ 得

$$dt = (1-\beta\cos\theta)dt' \equiv \alpha dt' \ 。 \tag{7.49}$$

若观测点距粒子加速区很远，取坐标原点为加速区中某一点 O 。

$$R \doteq R_0 - \vec{r}'\cdot\frac{\vec{R}_0}{R_0} = R_0 - \vec{e}_{R_0}\cdot\vec{r}' \ ,$$

这里 $\vec{r}'(t')$ 为粒子相对于原点的位置。 $\vec{e}_{R_0}\equiv\frac{\vec{R}_0}{R_0}\simeq\vec{e}_R$ 。这些条件可以进一步简化 7.48 式，

$$\frac{d^2w}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^3\varepsilon_0 c}|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-\frac{\vec{r}'\cdot\vec{e}_{R_0}}{c})}\frac{\vec{e}_{R_0}\times[(\vec{e}_{R_0}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}]}{\alpha^2}dt|^2 \tag{7.50}$$

进一步考虑非相对论性运动带电粒子的能谱，取近似 $v << c$ ， $\beta \to 0$ ，并考虑到 $|\vec{r}' \cdot \vec{e}_R| << ct$ 得

$$\frac{d^2w}{d\omega d\Omega} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{4\pi^2 c}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{e}_{R_0} \times [\vec{e}_{R_0} \times \dot{\vec{\beta}}]\, e^{i\omega t}\, dt\right|^2 。 \tag{7.51}$$

设粒子的加速和减速在一个时间间隔 τ 内发生。在 $\omega\tau << 1$ 时， $e^{i\omega t} \simeq 1$,

$$\begin{aligned}\frac{d^2w}{d\omega d\Omega} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{4\pi^2 c}\left|\int_{\tau} \vec{e}_{R_0} \times [\vec{e}_{R_0} \times \dot{\vec{\beta}}]\, dt\right|^2 \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{4\pi^2 c}|\vec{e}_{R_0} \times [\vec{e}_{R_0} \times \triangle\vec{\beta}]|^2 \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{4\pi^2 c}|\triangle\beta|^2 \sin^2\theta 。\end{aligned} \tag{7.52}$$

其中 θ 是 $\vec{e}_R$ 与 $\triangle\beta$ 的夹角。所以

$$\frac{dw}{d\omega} = \frac{e^2}{6\pi^2\varepsilon_0 c}|\triangle\beta|^2 。 \tag{7.53}$$

与频率无关。而在 $\omega\tau >> 1$ 时， $e^{i\omega\tau}$ 很快振荡，积分 7.51 式趋于零。电子辐射有一最大频率， $\hbar\omega_{max} \simeq E_{\text{电子}} = \frac{1}{2}mv^2$ 。根据测不准关系 $\triangle E \triangle t \simeq \hbar$ 知 $\omega_{max}\tau \sim 1$ 。所以 $\frac{dw}{d\omega}$ 可以粗略地看成是一个阶梯函数，在 $\omega < \omega_{max}$ 时约为一常数，在在 $\omega > \omega_{max}$ 时约为零。

根据光的量子理论，设 $N(\omega)d\omega$ 为辐射出的能量在 ω 到 $\omega + d\omega$ 之间的光子数，得

$$\frac{dw}{d\omega}d\omega = N(\omega)\hbar\omega d\omega 。$$

即

$$N(\omega) \propto \frac{1}{\omega} 。 \tag{7.54}$$

也就是说 $\omega \to 0$ 时总能量虽然有限，但光子数确发散！

§7.5 切伦科夫辐射 *

在真空中由于 4- 动量守恒的限制，匀速运动带电粒子不产生辐射电磁场。然而在透明介质中运动的快速带电粒子，即使是匀速运动，在一定条件下也会产生一种辐射，叫做 切伦科夫 辐射。由于在实际上只有作加速运动的带电粒子才会产生辐射，因而切伦科夫辐射实际上是涉及到大量介质原子的一种集体效应。当带电粒子穿过介质时，它激发的电磁场使介质中的电子被加速，从而发生辐射。实际上切伦科夫辐射的主要性质可以通过简单的运动学分析方法得到。

我们来分析一下一个带电粒子在折射率为 n 的介质中作匀速直线运动时所激发的电磁辐射。

在真空中，光子的 4- 动量 $k^2=0$ 但在介质中 $k_\mu=(\hbar\vec{k},i\frac{\hbar\omega}{c})$ ， $|\vec{k}|=\omega n/c$ 。$k^2=k_\mu k_\mu=\frac{\hbar^2\omega^2}{c^2}(n^2-1)\neq 0$ 。设自由电子的初、末态 4- 动量为 p 、q, 有 $p=q+k$ 。由此得 $q^2=p^2+k^2-2(\vec{p}\cdot\vec{k}-E_p\omega)$ 。令出射光子与入射电子之间的夹角为 θ ，则可得到 [4]

$$\cos\theta=\frac{1}{n\beta}\left[1+\frac{\hbar\omega}{2E_p}(n^2-1)\right] \tag{7.55}$$

由于在介质中 $n>1$ ，因此可能有切伦科夫辐射， $\cos\theta<1$ 。上面式中方括号内的第二项可以改写为

$$\frac{\pi}{n}\frac{\lambda_e}{\lambda}(n^2-1)\sqrt{1-\beta^2}$$

其中 $\lambda_e=\frac{\hbar}{m_ec}$ 是电子的 Compton 波长。也就是说当辐射的波长远大于电子的 Compton 波长时，这一项可以忽略，回到经典的切伦科夫辐射公式

$$\cos\theta=\frac{1}{n\beta}\ . \tag{7.56}$$

折射率 n 是 ω 的函数，上式说明为了辐射出频率为 ω 的光，电子速度必须大于频率为 ω 的电磁波的相速度。

7.50 式是频谱分析的主要公式, 它也可以改写为另一种形式。由 $\alpha=1-\vec{e}_{R_0}\cdot\dot{\vec{r}'}=1-\vec{e}_{R_0}\cdot\vec{v}$ （ α 的定义见 7.49 式），易证

$$\frac{1}{\alpha^2}\{\vec{e}_{R_0}\times[(\vec{e}_{R_0}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}]\}=\frac{d}{dt}\left[\frac{\vec{e}_{R_0}\times(\vec{e}_{R_0}\times\vec{\beta})}{\alpha}\right]\ . \tag{7.57}$$

将其带入 7.50 式，并作分部积分得

$$\frac{d^2w}{d\omega d\Omega}=\frac{e^2\omega^2}{16\pi^3\varepsilon_0 c}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{e}_{R_0}\times(\vec{e}_{R_0}\times\vec{\beta})\,e^{i\omega(t-\vec{e}_{R_0}\cdot\vec{r}'/c)}dt\right|^2\ . \tag{7.58}$$

在这个表达式中，辐射的谱分布与加速度没有显式的依赖关系，适合于用来讨论切伦科夫辐射（为此还需将公式中的 c 换为 c/n ）。注意 $\vec{\beta}$ 为常数，积分可以积出来，

$$\frac{d^2w}{d\omega d\Omega}=\frac{e^2\beta^2 n\,\sin^2\theta}{4\pi\varepsilon_0 c}|\delta(1-n\beta\cos\theta)|^2\ , \tag{7.59}$$

其中出现了两个 δ 函数，意义各不相同。其中一个限制了辐射方向与粒子运动方向的夹角为 $\cos\theta=\frac{c}{nv}$ 。而另一个 δ 函数意味着辐射能量为无穷大，这一不合理的结

[4]为简化讨论起见，这里没有考虑出射与入射电子的等效质量的不同造成的效应。

果是由于以上计算隐含着一个假设，即电子从 $t=-\infty$ 到 $t=+\infty$ 一直在运动和辐射着。为了得到有限结果我们做以下改进

$$|\frac{\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\alpha\omega t}dt|^2=\frac{\omega}{2\pi}\delta(1-\beta n\cos\theta)\int_{-\infty}^{+\infty}dt\ 。\tag{7.60}$$

这样，替代 7.59 式，可以考虑电子飞行单位距离、单位频率间隔内辐射的能量的角分布：

$$\frac{d^2\overline{w}}{d\omega d\Omega}=\frac{e^2\beta n\omega}{8\pi^2\varepsilon_0c^2}(1-\frac{1}{n^2\beta^2})\delta(1-\beta n\cos\theta)\ ,\tag{7.61}$$

或者单位距离单位频率间隔内辐射的能量：

$$\frac{d\overline{w}}{d\omega}=\frac{e^2\omega}{4\pi\varepsilon_0c^2}(1-\frac{1}{\varepsilon_r\beta^2})\ 。\tag{7.62}$$

在实际情况中，由于有辐射的存在，由于能量守恒，带电粒子并不能够一直以匀速直线运动。但是能够辐射 Cerenkov 光的带电粒子都具有很高的能量，其由辐射引起的能量损失可以忽略不计，故在上面的讨论中近似地将电子的运动认为是匀速的以简化计算。[5]

§7.6 辐射阻尼力

带电粒子受外力作用作加速运动时必有辐射，带走能量和动量。对于粒子来说相当于受到了一个辐射阻尼力（是一个自作用力）。

为简单起见，仅考虑非相对论情形。根据拉莫尔公式辐射阻尼力所做的功为

$$\vec{F}_r\cdot\vec{v}dt=-dU=-Pdt=-m\tau a^2dt\ ,\tag{7.63}$$

其中

$$\tau=\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0c^3m}$$

具有时间量纲（对于电子 $\tau=\frac{2r_e}{3c}\simeq10^{-23}$s，相当于光穿过 2/3 个电子经典半径所花的时间）。于是

$$\vec{F}_r\cdot\vec{v}+m\tau a^2=0\ 。$$

由于 $\vec{v}$ 和 $\dot{\vec{v}}$ 互相独立，显然由上式不可能得到 $\vec{F}_r$ 的解。因此只能从对时间的平均的意义上求解。如果是周期运动或加速度只存在一段时间，则

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_r\cdot\vec{v}dt=-m\tau\vec{a}\cdot\vec{v}|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}m\tau\dot{\vec{a}}\cdot\vec{v}dt\ 。$$

[5]关于 Cerenkov 辐射的详细介绍以及在实验高能物理领域中的应用，请参阅唐孝威著《粒子物理实验方法》，人民教育出版社， 1982 年，第一版；以及 W.-M.Yao et al. (Particle Data Group), J. Phys. G 33, 1 (2006) 。

在设定的条件下等式右边的第一项为零，所以在平均的意义下

$$\vec{F}_r = m\tau\ddot{\vec{v}} \ 。 \tag{7.64}$$

这是一个非相对论近似，但是可以做相对论推广。

现在我们来分析一下辐射阻尼力对简谐振子的影响。此时带电粒子所满足的方程为

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x + m\tau\frac{d^3x}{dt^3} \ 。 \tag{7.65}$$

设辐射阻尼力远小于简谐力因而可以对其作微扰。对于零级近似 $x^{(0)} = A_0 e^{\pm i\omega_0 t}$ ，可认为 $\frac{d^3x}{dt^3} = -\omega_0^2\frac{dx}{dt}$ 。于是可以把方程 7.65 式改写为

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \omega_0^2\tau\dot{x} \ 。 \tag{7.66}$$

这是一个标准的阻尼运动方程，其解为

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t/2} e^{\pm i\omega_0 t} \ 。 \tag{7.67}$$

其中 $\gamma = \omega_0^2\tau << \omega_0$ 。这个不等式成立，是因为假设了辐射阻尼力远小于简谐力。而这一假设很容易满足，因为 $\tau \sim 10^{-23}\mathrm{s}$ ，所以不等式意味着 $\omega << 10^{22}s^{-1}$ 。换算成辐射波长为 $\lambda >> 10^{-4}\mathrm{A}$ ，而 X 射线波长为 $0.1 \sim 100\mathrm{A}$ 。

事实上，要求辐射阻尼力远小于外力这一条件相当于要求 λ 远大于电子的经典半径 r_e 。在 Lorentz 力的作用下，非相对论性电子的运动方程为（忽略磁力）

$$m\dot{\vec{v}} = e\vec{E} + m\tau\ddot{\vec{v}} \ 。$$

要求辐射阻尼力很小给出 $\dot{\vec{v}} \simeq \frac{e}{m}\vec{E}$ ，又由 $\dot{\vec{E}} \simeq \omega\vec{E}$ 推出 $\vec{F}_r \simeq m\tau\frac{e\omega}{m}\vec{E} << e\vec{E}$ 。于是这在量级上等价于 $\lambda >> r_e$ ，其中

$$r_e \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{mc^2} \ 。 \tag{7.68}$$

电子的经典半径这一概念可以按如下方式理解：设电子电荷均匀分布在半径为 R 的球面上，

$$w = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2 dV = \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{e^2}{r^4}dV = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{R} \ 。 \tag{7.69}$$

电子的静质量为 m_0 ，假设电子的固有能 w 与 m_0c^2 同量级，则 $R \sim r_e$ 。数值上

$$r_e = 2.82 \times 10^{-13}\mathrm{cm} \ 。 \tag{7.70}$$

另一方面，目前在实验上发现即使在 10^{-15}cm 内电子仍然没有显示出任何有结构的迹象，而这一点从经典力学的角度来看是完全无法理解的。当然我们知道在量级为 $\frac{\hbar}{mc} = 137\, r_e$ 的距离上经典力学已经开始失效。

方程 7.65 式可以看成是描述原子中电子运动的经典模型方程，原子中的电子运动可以认为是非相对论性的。由于有辐射阻尼的存在，轨道电子的辐射频谱并不单一，而是有一定的分布。为求谱分布形式，由 7.67 式得 $\dot{\beta}$ ，带入 7.51 式，并设 $t < 0$ 时 $\dot{\beta}_0 = 0$ 得

$$\frac{d^2w}{d\omega d\Omega} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{4\pi^2 c}\dot{\beta}_0^2 \sin^2\theta \left| \int_0^\infty e^{[i(\omega-\omega_0)-\frac{\gamma}{2}]t}\, dt \right|^2 。 \tag{7.71}$$

对角度积分得单位频率间隔内的辐射能

$$I(\omega) = \frac{dw}{d\omega} \propto \frac{1}{(\omega-\omega_0)^2 + \gamma^2/4} 。 \tag{7.72}$$

从经典理论中推出的这个公式并不正确。除了不存在稳定的原子态这一灾难外，在数值上前面推导出的谱线宽度也太窄。但是值得指出的是上式给出的 $I(\omega)$ 对 ω 的依赖形式还是对的，只是在量子理论中对谱线宽度有着完全不同的理解。

§7.7 阻尼力的微分积分方程、微观因果性 *

在上一节我们给出了辐射阻尼力所满足的微分方程，它是一个三阶的微分方程。并且我们指出如果辐射阻尼力的效应很小，则可以用微扰方法来求解。尽管如此，由于此三阶微分方程含有奇怪的奔离解，我们希望能够对方程作修改使得它具有适当的微分阶数、不出现非物理解，并且在微扰的意义下能够回到以前的结果。[6]

辐射阻尼力所满足的微分方程为

$$m(\dot{\vec{v}} - \tau\ddot{\vec{v}}) = \vec{F}_{外} 。 \tag{7.73}$$

$\vec{F}_{外} = 0$ 时有两个解： $\dot{\vec{v}} = 0$ 为物理解，除此以外还有一个解 $\dot{\vec{v}} = \vec{a}_0 e^{t/\tau}$ 。后者在没有外力的情况下无限加速，无法接受，因此试图改造 7.73 式。令 $\dot{\vec{v}}(t) = e^{t/\tau}u(t)$ 带回方程 7.73 式得

$$\dot{u} = -\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\vec{F}_{外}(t) 。$$

对其作一次积分就可以得到

$$m\dot{\vec{v}}(t) = \frac{1}{\tau}\int_t^C e^{-\frac{(t'-t)}{\tau}}\vec{F}(t')dt' 。 \tag{7.74}$$

[6]这里我们仅限于讨论非相对论情形，虽然也可以将其推广到相对论协变的情形。

C 是任意的积分限。 7.74 式与普通的力学运动方程之最大不同之处在于：粒子的加速度并不依赖于外力的瞬时值，而是依赖于作用力对时间的加权平均。但因子 $e^{-(t'-t)/\tau}$ 意味着只需考虑数量级为 τ 的微小时间间隔。参数 τ 是一个小量， $\tau \to 0$ 时运动方程应该回到牛顿方程。由

$$\begin{aligned}
&\frac{e^{t/\tau}}{\tau}\int_t^C e^{-t'/\tau}\vec{F}(t')dt' = -e^{t/\tau}\int_t^C \vec{F}(t')de^{-t'/\tau} \\
&= \vec{F}(t')e^{-(t'-t)/\tau}|_C^t + \int_t^C e^{-(t'-t)/\tau}\frac{d\vec{F}(t')}{dt'}dt' \\
&= \vec{F}(t) - \vec{F}(C)e^{-\frac{C-t}{\tau}} + \cdots ,
\end{aligned} \tag{7.75}$$

知道取 $C=\infty$ 是适当的。令 $s=\frac{t'-t}{\tau}$ ，可以将 7.74 式改造为

$$m\dot{\vec{v}}(t) = \int_0^\infty e^{-s}\vec{F}(t+\tau s)ds \ 。 \tag{7.76}$$

它的解就是 7.73 式的解，但没有奔离解。方程 7.76 等价于

$$m\dot{\vec{v}}(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\tau^n\frac{d^n\vec{F}(t)}{dt^n} \ 。 \tag{7.77}$$

它在 $\tau=0$ 时回到牛顿方程，在 $\tau\neq 0$ 时，明显破坏因果性。假设在 $t\geq 0$ 加一常力，上式给出

$$m\dot{\vec{v}}(t) = \vec{F}\int_{-t/\tau}^{\infty} ds = \vec{F}e^{-|t|/\tau} \ , \ (t<0) \ 。$$

所以 $t<0$ 时，粒子已经开始加速但在 $t=0$ 时才有外力出现！但是因果性的破坏仅出现在微观的尺度。因为在 $|t|<\tau$ 时，因果性破坏才显著。而 $\tau\sim 10^{-24}s$ ，相当于光传播电子经典半径大小量级的距离所需的时间。这种因果性的破坏不可能以宏观方法加以探测。

另外，辐射阻尼力的积分微分方程是一个经典模型，在 $r >> r_e$ ， $t >> \tau$ 时已经失效。根据量子理论，在时间间隔 $\triangle t$ 内加上外力意味着存在能量测不准度 $\triangle E\sim\frac{\hbar}{\triangle t}$ ，如果 $\triangle E\sim m_ec^2$ ，则粒子的特性与经典时就大不相同。这就给出了时间间隔的量子力学界限： $\tau_Q\sim\frac{\hbar}{mc^2}\sim 137\tau >> \tau$ 。所以，在所预料的经典方程成立范围内，积分微分方程的因果破坏效应极不显著。

例题：用辐射阻尼力的微分积分方程研究一维振子的谱线宽度。

解答：

$$\ddot{x}+\omega_0^2\int_0^\infty e^{-s}x(t+\tau s)ds = 0 \ 。$$

设解的形式为 $x(t)\sim e^{-\alpha t}$ ， α 为复。带回运动方程得

$$\alpha^2+\omega_0^2\int_0^\infty e^{-(1+\alpha\tau)s}ds = 0 \ 。$$

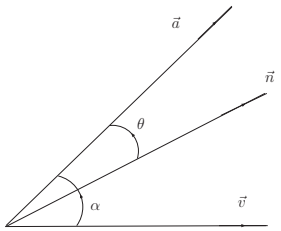


图 7.3: 7.1 题图

解的形式自动要求 $\mathrm{Re}(1+\alpha\tau)>0$ 且

$$\tau\alpha^3+\alpha^2+\omega_0^2=0\ 。$$

这个方程实际上与 *7.73* 式相同，但是由 $\mathrm{Re}(1+\alpha t)>0$ 消除了奔离解 $\alpha\simeq-\frac{1}{\tau}-\omega_0^2\tau$ 。剩下的物理解为

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\Gamma}{2}\pm i(\omega_0+\triangle\omega)\ ,\\ \Gamma &= \omega_0^2\tau\ ,\\ \triangle\omega &= -\frac{5}{8}\omega_0^3\tau^2\ 。\end{aligned}$$

这个解准确到 $(\omega_0\tau)^2$ 阶。

§7.8 习题

1. 带电粒子 q 的速度 $\vec{v}$ 与加速度 $\vec{a}$ 的夹角为 α ， (Fig. 7.3) 证明在 $\vec{v}$ 与 $\vec{a}$ 构成的平面内，与 $\vec{a}$ 的夹角为 θ 的方向 $\vec{n}$ 上的辐射场为 0 ，其中 θ 由下式确定：$\sin\theta=\beta\sin\alpha$.
2. 带电荷 q 的粒子在 xy 平面上绕 z 轴作匀速圆周运动，角频率为 ω ，圆半径为 d 。运动满足 $\omega d<<c$ ，计算辐射电磁场和平均能流密度，并分别指出在 $\theta=0,\pi/4,\pi/2,\pi$ 方向电场的偏振情况。
3. 一个相对论性的电子在均匀恒定磁场 $\mathbf{B}$ 中作圆周运动，已知其动量大小为 p ，求它的轨道半径和辐射总功率。
4. 计算考虑辐射阻尼后的谐振子的周期平均能量，并证明这平均能量的的变化率与拉莫尔公式给出的辐射功率一致。

第八章　电磁波在介质中的传播

§8.1　自由电子对电磁波的散射

在前一章中我们讨论了任意运动带电粒子所产生的辐射场，而不管是什么外力驱使电子的运动。我们也讨论了由于电子的辐射对电子运动产生的反作用力、即辐射阻尼力的问题。在这一章里我们将进一步讨论带电粒子受到外场（平面电磁波）的作用产生加速运动、进而产生辐射的问题。

首先我们考虑自由电子对电磁波的散射问题。所谓自由电子指的是或者电子在真空中运动、或者电子在介质中运动但是可以忽略介质中其他粒子对电子的作用力。并且我们假设自由电子是非相对论性的。

由于 $v_e << c$，所以首先可以忽略磁力的作用。因为在介质中 $|\frac{E}{B}| = c/n$，或在真空中 $|\frac{E}{B}| = c$，由 Lorentz 力的表达式知 $\frac{f_B}{f_E} \propto O(\frac{v}{c})$。这样电子的运动方程可以改写为

$$m\dot{\vec{v}} = e\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\vec{v}} \ . \tag{8.1}$$

由于 $|\vec{k}\cdot\triangle\vec{r}| \sim |kv_e\triangle t| \sim \omega t\left(\frac{v_e}{c}\right) << \omega t$，所以可以忽略上式中电子运动引起的 $\vec{k}\cdot\vec{r}$ 的变化。于是电子的运动方程可以简化为

$$m\dot{\vec{v}} = e\vec{E}_0 e^{-i\omega t} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\vec{v}} \ . \tag{8.2}$$

令 $r = \vec{r}_0 e^{-i\omega t}$ 带回上式求特解，得

$$\vec{r}_0 = \frac{-e\vec{E}_0}{m\omega(\omega + i\Gamma)} \ .$$

而 $\Gamma = \frac{2\omega^2}{3c}r_e = \frac{4\pi}{3}\omega\frac{r_e}{\lambda}$。在 $\lambda >> r_e$ 时 $i\Gamma$ 项可以忽略。这样 8.2 式的一般解为 [1]

$$\vec{r} = -\frac{e\vec{E}_0}{m\omega^2}e^{-i\omega t} + \vec{v}_0 t + \vec{r}(0) \ . \tag{8.3}$$

其中第一项表示电子在外场作用下所作的谐振动，后面的项表示匀速运动。强迫振动引起的辐射就是散射波。谐振动的电子相当于偶极子：

$$\vec{p} = \vec{p}_0 e^{-i\omega t} = -\frac{e^2\vec{E}_0}{m\omega^2}e^{-i\omega t} \ . \tag{8.4}$$

由 5.42 式，知电子辐射的功率的角分布为（已对时间求了平均）

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^4 E_0^2}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3 m^2}\sin^2\alpha \ , \tag{8.5}$$

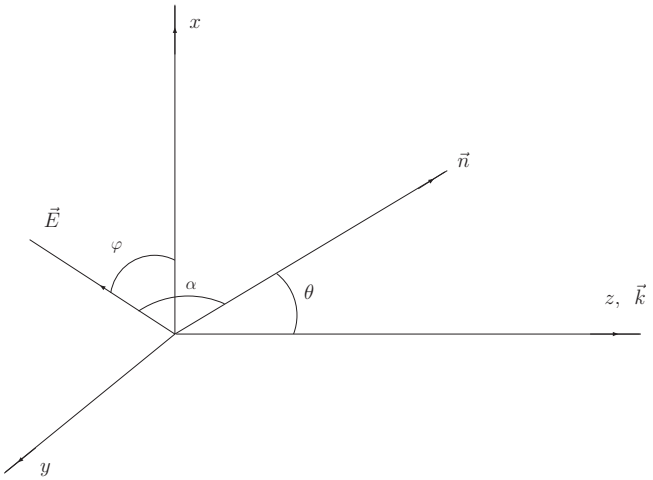


图 8.1: 自由电子对电磁波的散射。z 轴表示入射波（波矢 $\vec{k}$）的方向。辐射的方向为 $\vec{n}$，取在 xz 平面上

其中 α 是辐射方向与入射电场的夹角。见图 8.1， 对于完全非偏振的入射波， φ 角是随机的，需要对 φ 角求平均：由 $E\cos\alpha = \vec{E}\cdot\vec{n} = E\cos\varphi\sin\theta$ 知 $\overline{\sin^2\alpha} = 1-\overline{\cos^2\alpha} = 1-\frac{1}{2}\sin^2\theta$ 。于是此时的

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^4E_0^2}{64\pi^2\varepsilon_0c^3m^2}(1+\cos^2\theta)\ 。 \tag{8.6}$$

总功率

$$P = \frac{e^4E_0^2}{12\pi\varepsilon_0c^3m^2}\ 。 \tag{8.7}$$

此时入射波的能流密度的大小为

$$S_{\text{入}} = |<\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}>| = \frac{1}{2}\varepsilon_0E_0^2c\ 。 \tag{8.8}$$

由此引入一个重要的物理量即 **散射截面**:

$$P \equiv \sigma S_{\text{入}}\ , \tag{8.9}$$

和 **微分散射截面**:

$$\frac{dP(\theta,\phi)}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega}S_{\text{入}}\ 。 \tag{8.10}$$

散射截面 σ 具有面积量纲： $[P]=[E]/[T]$ ， $[S_{\text{入}}]=[E]/[L^2][T]$ 。不难算出电子的总散射截面的 汤姆森 公式为

$$\sigma_T = \frac{e^4}{6\pi\varepsilon_0^2c^4m^2} = \frac{8}{3}\pi\, r_e^2 \simeq 6.65\times10^{-25}\text{cm}^2\ , \tag{8.11}$$

[1] 8.2 式相应的线性齐次方程有 $\dot{\vec{v}}=0$ 和 $\dot{\vec{v}}=e^{t/\tau}$ 两个解，后者是非物理的所以舍去。

它的物理意义为电子把相当于入射到 $\frac{8}{3}\pi r_e^2$ 面积上的电磁波能量散射到各个方向上了。它的特点是

1. 散射波与入射波有相同的频率。
2. 截面的大小与入射波的频率无关。

在讨论相对论物理一章时我们得到过 Compton 散射公式

$$\frac{\omega'}{\omega}=\frac{1}{1+\frac{\hbar\omega}{m_ec^2}(1-\cos\theta)}\ 。\tag{8.12}$$

由此得知汤姆森公式仅在低能时才是好的近似。对于可见光，$\hbar\omega << m_ec^2$，对于 X 射线，其能量变化范围为 $10^{-4}\sim 10^{-1}\mathrm{MeV}$，而电子能量为 $\sim 0.51\mathrm{MeV}$。

§8.2 束缚电子对电磁波的散射

考虑一个束缚在回旋频率为 ω_0 的谐振子势中的电子在外电场 $\vec{E}=\vec{E}_0e^{-i\omega t}$ 作用下的散射过程，其运动方程为

$$m\ddot{\vec{r}}+m\omega_0^2\vec{r}-m\tau\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}=e\vec{E}_0e^{-i\omega t}\ 。\tag{8.13}$$

此式是一个典型的强迫振动方程。出现在这个方程中有两个频率，本征振动将被阻尼掉，所以只讨论强迫振动解。由 8.13 式得出

$$\vec{p}=\frac{e^2}{m}\frac{\vec{E}}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma}\ ,\tag{8.14}$$

和

$$\sigma=\sigma_T\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}\ ,\tag{8.15}$$

其中 ω_0 是电子的回旋频率，ω 是电磁波的频率。这里对辐射阻尼力做了近似处理，把 γ 看作常数。值得指出的是经典理论的解 8.15 能够正确地给出截面对散射频率的依赖形式，但并不能够给出正确的共振频率和宽度。在量子理论对原子的描述中，稳定的基态能量为 E_1 的原子可以有激发态，其能量可以写为比如 E_2，则本征频率可以写为 $\hbar\omega_0=E_2-E_1$，在 $\omega\simeq\omega_0$ 时原子容易吸收光子，并从基态跃迁到激发态。经过了一段时间后，激发态会辐射出频率为 ω_0 的光子重新回到基态。由于激发态有寿命、不稳定，根据测不准原理能量也应有一定的不确定性，即能级有一定宽度、散射频谱是共振谱形式。

公式 8.15 具有如下定性的物理特征：

1. 当 $\omega << \omega_0$ 时

$$\sigma=\sigma_T\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4\ 。\tag{8.16}$$

这个式子叫做 瑞利 公式。瑞利曾用它解释了为什么太阳辐射以黄光为主，但天空看起来确是蓝色的问题。

2. 存在共振散射：在 $\omega \simeq \omega_0$ 时散射截面得到了很大的增强。
3. 在 $\omega >> \omega_0$ 时，对于高能入射光子来说，可以完全忽略电子的束缚能，并认为电子是自由的。因此 8.15 式回到了自由电子散射的 Tompson 散射公式。当然，在光子的能量高到其波长可以与电子的 Compton 波长（ $\sim 3.9 \times 10^{-11}$cm ）可比拟时， Tompson 散射公式就会失效，而必须利用 Compton 散射。

§8.3 吸收截面、总截面与光学定理 *

§8.3.1 总截面与吸收截面

在 8.2 节中，通过计算束缚电子所满足的运动方程 8.13 式得到的解为，

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \frac{e^2}{m}\frac{\vec{E}_0 e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma(\omega)} , \\ \Gamma(\omega) &= \omega^2\tau 。 \end{aligned} \tag{8.17}$$

这个解中 $\Gamma(\omega)$ 对于 ω 的依赖与 8.14 有所不同，但不会对下面得到的任何主要物理结果起影响，在需要小心的时候我们会特别的加以注意。利用偶极辐射公式推出辐射总功率为

$$P = \oint |\overline{S}|_{\text{辐射}} r^2 d\Omega = \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3} 。 \tag{8.18}$$

它与非相对论性自由带电粒子的辐射公式（拉莫尔公式）7.32 式非常类似，但是这里多了一个 $\frac{1}{2}$ 的因子。散射截面的公式已由 8.15 式给出，只是那里的 γ 换成了这里的 $\Gamma(\omega)$ 。

辐射阻尼力 $\vec{F}_r = m\tau\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}$ 对电子所做的功为 $\vec{F}_r \cdot \vec{v} = -P = -m\tau a^2$ ，而这仅在平均的意义下才成立。在强迫振动中，电子吸收辐射后在辐射出去，但是也有可能存在其他耗散过程，如热运动耗散或在量子力学中除了光子的再发射过程以外的其他衰变方式。设耗散力为

$$\vec{F}_d = -\Gamma'\dot{\vec{r}} 。 \tag{8.19}$$

则电子的运动方程改变为

$$m\ddot{\vec{r}} + m\omega_0^2\vec{r} = e\vec{E}_0 e^{-i\omega t} - \Gamma'\dot{\vec{r}} + m\tau\frac{d^3\vec{r}}{dt^3} = \vec{F}_{\text{外}} + \vec{F}_d + \vec{F}_r 。 \tag{8.20}$$

其解为

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \frac{e}{m}\frac{\vec{E}_0 e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_{tot}(\omega)} , \\ \Gamma^{tot} &= \Gamma' + \Gamma(\omega) 。 \end{aligned} \tag{8.21}$$

可以定义吸收截面、散射截面和总截面

$$\begin{aligned} P_a &= \sigma_a \overline{S}_{\text{入}} = < -\vec{F}_d \cdot \vec{v} > , \\ P_s &= \sigma_s \overline{S}_{\text{入}} = < -\vec{F}_r \cdot \vec{v} > , \\ P_t &= \sigma_t \overline{S}_{\text{入}} = < \vec{F}_{\text{外}} \cdot \vec{v} > 。 \end{aligned} \tag{8.22}$$

为计算各种散射截面，把方程 8.20 式的稳态解 8.21 式代入各种力的表达式中再对时间求平均。对于稳态解 8.20 式左边 $\cdot\vec{v}$ 后对时间求平均等于零：

$$(8.20\text{ 式左}) \cdot \vec{v} = (-\omega^2 + \omega_0^2) m < \vec{r} \cdot \vec{v} > \propto < \vec{r} \cdot \vec{v} > = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(-i\omega \vec{r} \cdot \vec{r}^*) = 0 。$$

所以得到

$$\sigma_t = \sigma_a + \sigma_s 。 \tag{8.23}$$

这个方程是能量守恒的反映：电子吸收的入射电场的能量，一部分被重新辐射出去，而剩下的部分则耗散掉了。各种散射截面可以通过简单的计算得到：

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \frac{e^2}{mc\varepsilon_0} \frac{\omega^2 \Gamma_t(\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_t^2(\omega)} , \\ \sigma_a &= \frac{e^2}{mc\varepsilon_0} \frac{\omega^2 \Gamma'(\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_t^2(\omega)} , \\ \sigma_s &= \frac{e^2}{mc\varepsilon_0} \frac{\omega^2 \Gamma(\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_t^2(\omega)} 。 \end{aligned} \tag{8.24}$$

下面我们以 σ_t 为例来做一下具体计算，即计算入射电磁波对束缚电子所做的功。首先有

$$\frac{dw}{dt} = \int \vec{E} \cdot \vec{j} dV' ,$$

由 $\vec{j} = e\dot{\vec{r}}\delta(\vec{r}' - \vec{r}(t))$ 得 $\triangle w = \int dt \int \vec{E} \cdot \vec{j} dV' = \int e\vec{E} \cdot \dot{\vec{r}} dt$ 。我们感兴趣的是一个周期内的平均值：

$$\begin{aligned} < \triangle w > &= \frac{1}{T} \int e\vec{E} \cdot \dot{\vec{r}} dt = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[e\vec{E} \cdot \dot{\vec{r}}^*] \\ &= \frac{1}{2m}\mathrm{Re}\left[e\vec{E}_0^* \frac{-ie\omega \vec{E}_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega\Gamma_t(\omega)} \right] \\ &= \frac{e^2}{mc\varepsilon_0} \frac{\omega^2 \Gamma_t(\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_t^2(\omega)} \overline{S}_{\text{入}} 。 \end{aligned} \tag{8.25}$$

除了由于处理辐射阻尼力的不同导致的一些细微的差别， 8.24 式中的一组表达式完全可以看成是 8.15 式的推广：无论是否有耗散力， 8.2 节中的 $\sigma = \sigma_s$ ，而后者在没有耗散时 $= \sigma_t$ 。

偶极求和规则

考虑散射总截面的如下积分：

$$\int_0^\infty \sigma_t(\omega)d\omega = \frac{e^2}{m\,c\,\varepsilon_0}\int_0^\infty \frac{\omega^2\Gamma_t(\omega)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma_t^2(\omega)}d\omega \ 。$$

式左代表束缚电子从外场得到的总能量。如果将 $\Gamma_t(\omega)=\Gamma'+\Gamma(\omega)=\Gamma'+\tau\omega^2$ 带入上式计算，则得到的结果是不对的。因为在高频下 $\Gamma(\omega)$ 的 ω 的依赖关系失效。我们知道正确使用阻尼力的条件是外场力远大于辐射阻尼力，或等价的 $\Gamma' >> \tau\omega^2$ 。在忽略辐射阻尼力后（或者将辐射阻尼力效应看成是与频率无关的一常数）发现

$$\int_0^\infty \sigma_t(\omega)d\omega = \frac{e^2}{m\,c\,\varepsilon_0}\int_0^\infty \frac{\omega^2\Gamma'}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma'^2}d\omega \ 。$$

右边的积分有限并可以积出来，得到

$$\int_0^\infty \sigma_t(\omega)d\omega = \frac{\pi e^2}{2m\,c\varepsilon_0} \ 。 \tag{8.26}$$

积分结果与本征频率无关、与阻尼力也无关，而只与电子的质量电荷有关。8.26 式叫做偶极求和规则（仅在偶极近似下才成立），实际上它是一种普遍的表述，在经典与量子电动力学中都是正确的。

在得到上述偶极求和规则的时候，我们忽略了辐射阻尼力的效应。根据 7.7 节的讨论，这从因果性的角度看是必要的，无物理意义的奔离解的极点对应于 $\omega\sim i/\tau$ 在上半平面，虽然它很远但对积分的贡献却很大。

§8.3.2 光学定理

在上一节中我们得知，入射波的能量损失即等于被散射的能量和被吸收的能量之和，或 $\sigma_t=\sigma_a+\sigma_s$ 。现设有一平面波被一物体散射，远离散射体的电场

$$\vec{E} = E_0[\vec{e}\,e^{ikz}+\vec{F}(\vec{e}_r)\frac{e^{ikr}}{r}] \ , \tag{8.27}$$

其中 $\vec{e}$ 是入射波的偏振矢量，$E_0\vec{F}(\vec{e}_r)$ 是沿 $\vec{e}_r$ 方向的散射振幅。利用 $\nabla\times\vec{E}+\mu_0\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}=0$ 可得

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0\{(\vec{e}_z\times\vec{e})e^{ikz}+\left[\vec{e}_r\times\vec{F}(\vec{e}_r)\right]\frac{e^{ikr}}{r}\} \ 。 \tag{8.28}$$

$$\sigma_a = -\frac{1}{\varepsilon_0 cE_0^2}\int \mathrm{Re}(\vec{E}\times\vec{H}^*)\cdot\vec{e}_r r^2 d\Omega \ 。 \tag{8.29}$$

此吸收是非辐射性吸收，所吸收的能量被真正的耗散掉了，且吸收截面正比于通过球面流向球心方向的能流。对于这个表达式也可以理解为：电磁力（包括外场力与辐射阻尼力）对电子所做的功等于（差一个常数）$\sigma_t-\sigma_s$，所以也等于 σ_a 。而又有

$$\overline{\nabla\cdot\vec{S}}+\overline{\frac{\partial w}{\partial t}} = -\overline{\vec{f}\cdot\vec{v}} \ 。 \tag{8.30}$$

其中 $\vec{f}$ 是电磁力，又由于是稳态 $\frac{\partial w}{\partial t}$ 对时间的平均为零。

回到 8.29 式，利用 $\vec{e}_r \cdot \vec{F}(\vec{e}_r) = 0$ 得

$$\begin{aligned}\sigma_a &= -\int \vec{e}_z \cdot \vec{e}_r \, r^2 \, d\Omega - \int |\vec{F}|^2 d\Omega \\ &- \frac{1}{2}\int \left[\vec{e}^* \cdot \vec{F} + (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_r)(\vec{e}^* \cdot \vec{F}) - (\vec{e}^* \cdot \vec{e}_r)(\vec{e}_z \cdot \vec{F})\right] \frac{e^{ik(r-z)}}{r} r^2 d\Omega \\ &- \frac{1}{2} c.c. \ 。\end{aligned} \tag{8.31}$$

上式等式右边的第一项为零，第二项积分 $\int |\vec{F}|^2 d\Omega = -\sigma_s$ 。后面的项可以统一地写为 $\int d\Omega \, r e^{ik(r-z)} f(\vec{e}_r)$ 的形式，其中 $f(\vec{e}_r) = f(\theta, \phi)$ 。对于这样的积分我们有

$$\begin{aligned}&\int d\Omega \, r e^{ik(r-z)} f(\vec{e}_r) = \frac{1}{ik}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\left(e^{ikr(1-\cos\theta)}\right) f(\vec{e}_r) \\ &= \frac{1}{ik}\int_0^{2\pi} d\phi \{e^{2ikr} f(-\vec{e}_z) - f(\vec{e}_z) - \int_0^{\pi} \frac{\partial f(\vec{e}_r)}{\partial \cos\theta} e^{ikr(1-\cos\theta)} d\cos\theta\} \\ &= -\frac{2\pi}{ik} f(\vec{e}_z) \ 。\end{aligned} \tag{8.32}$$

得到最后一个等式的原因是因为当 $r \to \infty$ 时 e^{ikr} 是一个高度振荡的函数，而任何单色波实际上都是分布在一个狭窄的频率间隔内，且一个高度振荡的函数与一个可积函数在一起进行积分结果为零。[2] 利用这个结果和横波条件 $\vec{e}^* \cdot \vec{e}_z = 0 = \vec{e}_z \cdot \vec{F}^*(\vec{e}_z)$ 得

$$\sigma_t = \sigma_a + \sigma_s = \frac{4\pi}{k} \mathrm{Im}\left[\vec{e}^* \cdot \vec{F}(\vec{e}_z)\right] \ 。 \tag{8.33}$$

这就是著名的光学定理。它说的是散射总截面与散射波的朝前振幅在入射波的偏振方向上的投影的虚部成正比。这个公式实际上对任意散射物体都是对的。在经典电动力学中光学定理是能量守恒的推论。在量子理论中也有类似的定理，在那里它是几率守恒的结果。

例题：对于非相对论性的电子散射，验证光学定理。

解答：

$$\vec{E}_{\text{辐射}} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{1}{r} \vec{e}_r \times (\vec{e}_r \times \dot{\vec{v}})|_{\text{推迟}}$$

[2] 比如说，由

$$\lim_{t\to\infty} \sin(\alpha t) = \int_0^{\infty} dt \frac{d}{dt} \sin(\alpha t) = \frac{\alpha}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\alpha t} = \pi\alpha\delta(\alpha)$$

和 $\lim_{t\to\infty} \cos(\alpha t) = 0$ 推出，

$$\lim_{t\to\infty} e^{i\alpha t} = i\pi\alpha\delta(\alpha) \ 。$$

这个公式说明了一个高度振荡的函数实际上是一个分布，也说明了一个高度振荡的函数与一个可积函数在一起进行积分结果为零。

$$\vec{B}_{\text{辐射}} = \frac{1}{c}\vec{e}_r \times \vec{E}_{\text{辐射}} 。 \tag{8.34}$$

其中 $\dot{\vec{v}} \propto \vec{E}_{\text{入}} \propto \vec{e}$， $\vec{e} = \vec{e}_x$ 。由电子的运动方程

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{e}eE_0e^{-i\omega t} + m\tau\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}$$

得

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{e}{m}\frac{\omega\vec{E}_0e^{-i\omega t}}{\omega + i\Gamma(\omega)} 。$$

将其推迟的表达式带回辐射电场的表达式得

$$\vec{F}(\vec{e}_z) = -\vec{e}_x\frac{e}{4\pi\varepsilon_0c^2}\frac{e}{m}\frac{\omega}{\omega + i\Gamma(\omega)} ,$$

得

$$\frac{4\pi}{k}\mathrm{Im}(\vec{e}^* \cdot \vec{F}(\vec{e}_z)) = \frac{e^2}{mc\varepsilon_0}\frac{\Gamma(\omega)}{\omega^2 + \Gamma^2(\omega)} , \tag{8.35}$$

即验证了光学定理。利用这个例题的方法，对于束缚电子也很容易证明上式是对的。

§8.4 介质的谐振子模型、对电磁波的吸收与色散

介质的谐振子模型认为，介质是由大量的谐振子组成的，振子将入射波的能量部分地转化成为散射波能，因此入射波在传播过程中出现了变化。

首先忽略磁力影响，且设 $\mu = \mu_0$ 。设介质中振子的固有频率为 ω_0 ，单位体积内振子个数为 N ，则极化强度或单位体积内的偶极矩为

$$\vec{P} = \frac{Ne^2}{m}\frac{\vec{E}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} , \tag{8.36}$$

$\vec{P}$ 与 $\vec{E}$ 成正比。由 $\vec{P} = \chi_e\varepsilon_0\vec{E}$ 、 $\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi_e) = \varepsilon_0\varepsilon_r$ ，得

$$\varepsilon_r = 1 + \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} 。 \tag{8.37}$$

于是我们在微观层次上导出了介电系数所满足的表达式。显然 8.37 式指出，在介质中一般来说存在着色散也存在着耗散。由 $k = \frac{1}{c}n\omega$ ， $n = \sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}$ 是复系数。如设 ω 为实，则波矢 k 为复。令复折射率 $n = n_0 + in_1$ ，

$$k_0 = \frac{1}{c}n_0\omega , \quad \tau = \frac{1}{c}n_1\omega 。$$

在介质中传播的电场为

$$\vec{E} = \vec{E}_0e^{-\tau z}e^{i(k_0z - \omega t)} 。 \tag{8.38}$$

因此电场在传播方向上有衰减！原因是如果介质是导体，则介质吸收的能量转换成了自由电子的动能。进一步通过与离子的碰撞转化成了焦耳热。在非导电介质中则是振子吸收了能量并将其转化成了辐射能。

电磁波在介质中传播时的相速度为 c/n_0 ，而 n_0 是频率 ω 的函数。当相速度随频率的增加而减少时，叫做 **正常色散** 。此时 $n_0(\omega)$ 是 ω 的上升函数。一般说来，当 ω 远离 ω_0 或介质的固有频率时，色散是正常的。而吸收区的色散是反常的。

- $\omega < \omega_0$ 时， $n_0(\omega) > 1$ ， $v_p < c$ 。
- $\omega > \omega_0$ 时， $n_0(\omega) < 1$ ， $v_p > c$ 。

然而，波的相速度是波相的运动，并不是能量的运动，也并不导致因果性的破坏。这一点我们将在本章后面几节中加以详细讨论。在图 8.2 中画出了复介电系数 ε 和复折射率 n 的示意图。

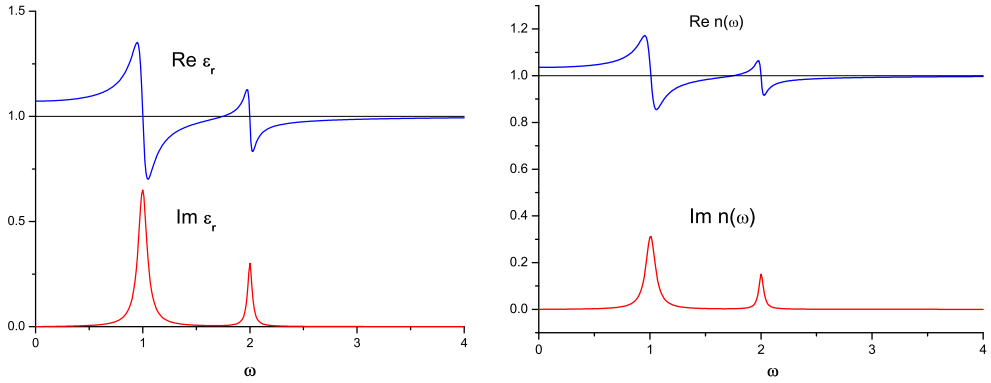


图 8.2: 复介电系数 ε 和复折射率 n 随频率 ω 的变化关系。

对于一般情况下的介质情况类似：

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{e^2}{m\varepsilon_0} \sum_j \frac{N_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j} \ 。 \tag{8.39}$$

γ_j 通常比共振频率小很多，即 $\gamma_j << \omega_j$ 。 ω_j 和 γ_j 由量子理论给出， 8.39 式成为对 $\varepsilon(\omega)$ 的非常精确的描述。

从 8.39 式可以看出，对于大多数的 ω ， $\varepsilon(\omega)$ 大致为实数。在频率很低时， ω 小于最小的 ω_j ， 8.39 式中每一项都为正数，即 $\varepsilon_r > 1$ 。随着 ω 的增大。越来越多的项变为负， $\varepsilon_r(\omega)$ 变为小于一。正常色散在除了共振频率以外的区域处处出现。

导体与电导率

导体是一种特殊的介质，可以将其看成是最小的 $\omega_j = \omega_0 = 0$ ，即没有束缚。此时可以将其介电常数的表达式写为

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + i\frac{N_0 e^2}{m} \frac{1}{\omega(\gamma_0 - i\omega)} \ , \tag{8.40}$$

其中 N_0 表示单位体积中自由电子的个数，ε_0 代表所有其余的贡献。金属的介电系数在 $\omega = 0$ 是奇异的，有一个单极点。将上式与在讨论金属在电磁波中的传播时给出的公式 $\varepsilon = \varepsilon_0 + i\frac{\sigma}{\omega}$ 作比较得

$$\sigma = \frac{N_0 e^2}{m(\gamma_0 - i\omega)} \ . \tag{8.41}$$

这就是金属电导率的 Drude 模型（ 1900 年）。在低频时上式指出电导率与频率无关、且为实数。以常温下的金属铜为例，一直到微波波段（ $\omega < 10^{11} s^{-1}$ ）金属的电导率都可以看成是实数且与频率无关。在红外和红外以上的更高的频率，电导率是复数，并且电导率随频率的依赖关系与 Drude 模型定性一致。系数 γ_0 可以简单的理解为表示自由电子与晶格碰撞产生的热运动或耗散。

以上的讨论表明介质与导体的区分不是绝对的，并且可以用一个统一的介质的谐振子模型来描述。在低频时，如果介质中有自由电子，它就是一个导体，反之就是绝缘体。当频率变高时，介质与金属之间的区别就会变得模糊起来。

高频极限与等离子体频率

当入射电磁波的频率远远超过最高共振频率时，介电系数 8.39 的渐进形式如下：

$$\varepsilon_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \ , \quad \omega_P^2 = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \ , \tag{8.42}$$

其中 ω_P 叫做介质的 **等离子体频率** ，它仅依赖于每单位体积中的总电子数。 8.42 式仅在 $\omega >> \omega_P$ 时适用。此时介电系数略小于 1 ，相速大于光速，但群速度确是小于光速的。

在某些特殊情况下，比如在电离层中，电子是自由的，而且阻尼可以忽略不计，那么 8.42 式对入射频率的适用范围就要宽广得多。此时如果入射频率低于等离子体频率，则波数 k 为纯虚数。电磁波在等离子体表面会被反射，其穿透等离子体内部的场按指数下降。超短波远距通信就是通过电离层的反射来实现的。 [3]

在光频和高于光频时，金属的反射性质与稀薄等离子体的性质很类似。此时介电系数 8.40 式可近似为（ $\omega >> \gamma_0$ ）

$$\varepsilon_(\omega) \simeq \varepsilon_0(\omega) - \frac{\omega_P^2}{\omega^2} \ , \tag{8.43}$$

其中 $\omega_P = N_0 e^2/m$ 。当 $\omega << \omega_P$ 时，入射到金属的光的特性与 8.42 式所描写的等离子体近似相似，即光几乎被完全反射回去。但是当频率增加到 $\omega >> \omega_P$ 时，金属就会突然对光透明（开始于紫外波段）。

[3]而微波就可以通过电离层。对于频率更小的中短波，由于在大气中传播时衰减的更快，因而不适合于长距离通信。

在 Jackson 的书中，对水和海水的吸收系数也作了仔细介绍，并讨论了与其相关的一些有趣的性质。

§8.5 群速度

介质中电磁波的传播有如下一般特征：

1. 色散：不同频率分量的相速度不相等，相对位相引起改变。
2. 色散介质中能流速度与相速度大不相同甚至能流速度没有确切的定义。
3. 耗散：脉冲在行进时无论有无畸变都会衰减。

下面我们通过研究一维波动方程来理解能流速度与相速度、群速度的关系。

波数谱

对于单色波的一维平面波解为

$$u(x,t) = Ae^{ikx-i\omega t} + Be^{-ikx-i\omega t} \ ,$$

其中 $k = \frac{\omega}{v} = \sqrt{\mu\varepsilon}\frac{\omega}{c} = n\frac{\omega}{c}$ 。对于色散情况， $\omega = \omega(k)$ ，且因为色散与波包向左或向右无关，即一定有 $\omega(k) = \omega(-k)$ 。

一般情况下的波是单色波的叠加。

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} A(k)e^{ikx-i\omega t}dk \ 。 \tag{8.44}$$

这样

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,0)e^{-ikx}dx \ 。 \tag{8.45}$$

如果 $u(x,0) = e^{ik_0x}$ ，则 $A(k) = \sqrt{2\pi}\delta(k-k_0)$ ， $u(x,t) = e^{ik_0x-i\omega(k_0)t}$ 为单色行波。如果 $u(x,0)$ 为一长度为 $\triangle x$ 的有限波列，则在波数谱空间中 $A(k)$ 的分布也有一宽度，且

$$|\triangle x||\triangle k| \geq \frac{1}{2} \ 。 \tag{8.46}$$

对于大多数非猛然切断的有规则脉冲或波包来说 $|\triangle x||\triangle k|$ 仅略大于 $1/2$ 。从 8.46 式知，对于短波列，波数谱分布很宽，而反过来正弦形长波列则几乎是单色的。下面给出 8.46 式证明的简单步骤。

由

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x,0)|^2 \, xdx \Big/ \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x,0)|^2 \, dx \ , \\ \overline{k} &= \int_{-\infty}^{+\infty} |A(k)|^2 \, kdk \Big/ \int_{-\infty}^{+\infty} |A(k)|^2 \, dk \ 。 \end{aligned}$$

定义

$$
\begin{aligned}
|\triangle x| &\equiv \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x,0)|^2 (x-\overline{x})^2 dx / \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x,0)|^2 dx\right]^{1/2} , \\
|\triangle k| &\equiv \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |A(k)|^2 (k-\overline{k})^2 dk / \int_{-\infty}^{+\infty} |A(k)|^2 dk\right]^{1/2} 。
\end{aligned}
$$

可以证明如下有用的等式

$$
\begin{aligned}
\overline{f(k)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} |A(k)|^2 f(k) dk \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} u^*(x,0) f(-i\frac{\partial}{\partial x}) u(x,0)\, dx 。
\end{aligned} \tag{8.47}
$$

由此可以证明关系式 8.46 式。此证明在技术上与量子力学中著名的测不准关系的证明是雷同的。步骤如下：首先选取适当的参照系使 $\overline{x} = \overline{p} = 0$；然后构造一个变量 ξ 的二阶多项式

$$
P_2(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\xi x\psi(x) + \frac{d\psi(x)}{dx}|^2 dx \geq 0 。
$$

因此 $P_2(\xi)$ 的判别式 $\triangle \leq 0$，就给出了 8.46 式的证明。

群速度

脉冲在介质中传播时，其速度与其分量波的相速度有所不同。对于波数谱不太宽的的脉冲（即长波列），并且 $\omega(k)$ 随 k 缓变的情形下，可以作近似处理（暂时不考虑耗散）。假设 $A(k)$ 集中在 k_0 附近，则可作展开

$$
\omega(k) \simeq \omega_0 + \frac{d\omega}{dk}|_0 (k-k_0) ,
$$

带回 8.44 式，

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &\simeq \frac{e^{i[k_0 \frac{d\omega}{dk}|_0 - \omega_0]t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ik[x - \frac{d\omega}{dk}|_0 t]} dk \\
&\simeq u(x - \frac{d\omega}{dk}|_0 t, 0) e^{i[k_0 \frac{d\omega}{dk}|_0 - \omega_0]t} 。
\end{aligned} \tag{8.48}
$$

不考虑仅于时间有关的相位，脉冲以所谓群速度 $v_g = \frac{d\omega}{dk}|_0$ 前进且没有畸变，能量正比于 $|u|^2$，所以能量以群速度前进。一般来说波可以是很多窄 $A(k)$ 的叠加，每一个波包有自己的群速度，也即能量传递速度。

在远离耗散区时，n 约为实，$\omega(k) = \frac{ck}{n(k)}$，$v_p = \frac{c}{n(k)}$ 可以大于或小于 c！而

$$
v_g = \frac{c}{n(\omega) + \omega \frac{dn}{d\omega}} 。 \tag{8.49}
$$

对于正常色散， $\frac{dn}{d\omega} > 0$ ， $n > 1$ ，此时 $v_g < v_p$ 并且也小于 c 。在反常色散区域（ n 变为 n_0 ），已经有耗散，此时 $\frac{dn_0}{d\omega}$ 很大且为负值。这样定义的群速度可以变得很大、远大于 c 。大的 $\frac{dn_0}{d\omega}$ 相当于 ω 作为 k 的函数发生了很快的变化，群速度作为能量的传播速度已失去了意义。

在既有耗散又有色散的介质中的波包传输问题是相当复杂的，有些方面可以用解析函数的理论来研究。

§8.6 $\vec{D}$ 和 $\vec{E}$ 的关系中的因果性， Kramers–Krönig 关系

§8.6.1 因果性导致的介电系数的解析性质

在第四章中我们讨论过，在介电系数与频率有依赖关系时，

$$D(\vec{x},\omega) = \varepsilon(\omega)\vec{E}(\vec{x},\omega) \ 。$$

由 ε 对频率的依赖关系，可推出 $\vec{D}(\vec{x},t)$ 与 $\vec{E}(\vec{x},t)$ 之间对时间的非定域依赖关系。我们有

$$\vec{D}(\vec{x},t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{D}(\vec{x},\omega)e^{-i\omega t}d\omega \ 。 \tag{8.50}$$

其反变换为

$$\vec{D}(\vec{x},\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{D}(\vec{x},t')e^{i\omega t'}dt' \ 。 \tag{8.51}$$

对于 $\vec{E}$ 可以给出类似的方程。于是

$$\begin{aligned}
\vec{D}(\vec{x},t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(\omega)\vec{E}(\vec{x},\omega)e^{-i\omega t}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \varepsilon(\omega)e^{-i\omega t}\int_{-\infty}^{+\infty} dt'\, \vec{E}(\vec{x},t')e^{i\omega t'} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dt'\, \vec{E}(\vec{x},t')\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \varepsilon(\omega)e^{-i\omega(t-t')} \ 。
\end{aligned} \tag{8.52}$$

这给出

$$\vec{D}(\vec{x},t) = \varepsilon_0\vec{E}(\vec{x},t) + \int_{-\infty}^{+\infty} G(\tau)\varepsilon_0\vec{E}(\vec{x},t-\tau)d\tau \ , \tag{8.53}$$

其中 $G(\tau)$ 的定义为

$$G(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{-i\omega\tau}(\varepsilon_r(\omega) - 1) \ 。 \tag{8.54}$$

上面的两个等式给出了 $\vec{D}$ 和 $\vec{E}$ 之间的非定域关系，即 t 时刻的 $\vec{D}$ 与其它时刻的电场强度有关。如果 $\varepsilon(\omega)$ 与 ω 无关则 $G(\tau) \propto \delta(\tau)$ ，得到 $\vec{D}$ 与 $\vec{E}$ 之间的瞬时关系。以下我们通过一个简单的模型来了解 $G(\tau)$ 的定性行为。

讨论一个单一吸收频率的模型：

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \ 。 \tag{8.55}$$

则

$$G(\tau) = \frac{\omega_p^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \ 。 \tag{8.56}$$

见图 8.3 。在 $\tau < 0$ 时，可以对上半平面作围道积分，结果为零。在 $\tau > 0$ 时在下半平面作闭合围道积分，结果等于 $-2\pi i$ 乘以两个极点的留数，得出

$$G(\tau) = \omega_p^2 e^{-\gamma\tau/2}\frac{\sin\nu_0\tau}{\nu_0}\Theta(\tau) \ 。 \tag{8.57}$$

通过分析此表达式得知， $G(\tau)$ 以介质的特征频率振荡，并按电子振子的阻尼常数

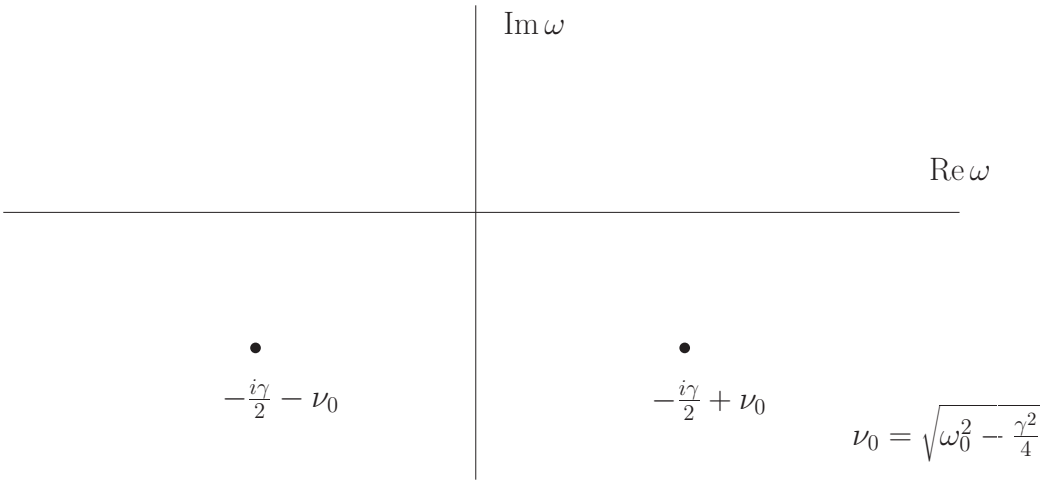


图 8.3: 单一吸收频率模型中 $G(\tau)$ 的行为。

随时间衰减。所以 $\vec{D}$ 和 $\vec{E}$ 的关系的时间上的非定域性被限制在 $10^{-7} \to 10^{-9}s$ (这是 γ^{-1} 的典型值)。

因此， $G(\tau)$ 的最基本特征是 $\tau < 0$ 时 $G(\tau) = 0$ ，也就是说只有 t 时刻前的那些电场强度参与确定 t 时刻的电位移矢量，这是因果性的要求！所以

$$\vec{D}(\vec{x},t) = \varepsilon_0\vec{E}(\vec{x},t) + \int_0^{+\infty} G(\tau)\varepsilon_0\vec{E}(\vec{x},t-\tau)d\tau \ 。 \tag{8.58}$$

这个方程是对均匀各向同性介质中的 $\vec{D}$ 和 $\vec{E}$ 写出的最普遍的空间上定域的线性因果关系，它的有效范围远远超过了任何具体的 $\varepsilon(\omega)$ 的模型。可以把上式反过来写，得到

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \int_0^{\infty} G(\tau)e^{i\omega\tau}d\tau \ , \tag{8.59}$$

从这个式子和 8.58 式出发可以得到一些 $\varepsilon_r(\omega)$ 的一些一般的、模型无关的性质：

- 由于 $\vec{D}$ 、 $\vec{E}$ 为实函数，所以 8.58 式中的 $G(\tau)$ 也为实函数，由 8.59 式知对于复 ω

$$\varepsilon_r(-\omega) = \varepsilon_r^*(\omega^*) \tag{8.60}$$

- 只要 $G(\tau)$ 有限则 $\varepsilon_r(\omega)$ 是复 ω 平面上半平面的解析函数。
- 如果 $\tau \to \infty$ 时 $G(\tau)$ 趋于零足够快，则 $\varepsilon_r(\omega)$ 在实轴上也是解析的。这对于一般介质是对的，但对于导体则不成立。
- 对于导体， $\omega \to 0$ 时 $\varepsilon_r \to \frac{i\sigma}{\omega\varepsilon_0}$ ， $\varepsilon_r(\omega)$ 在 $\omega = 0$ 处有一个一阶极点。 $\tau \to \infty$ 时 $G(\tau) \to \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ 。

为了利用 8.54 式计算 $\omega \to 0$ 时 $\varepsilon_r(\omega)$ 的行为，我们首先设金属的极点位置在 $\omega = -i\epsilon$ ，然后再让 $\epsilon \to 0$ 。则在 $\tau > 0$ 时，金属极点对 $G(\tau)$ 的贡献是

$$\begin{aligned} G(\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega\tau}\frac{i\sigma}{\varepsilon_0(\omega+i\epsilon)} \\ &= -i\frac{i\sigma}{\varepsilon_0}e^{-i(-i\epsilon)\tau} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}e^{-\tau\epsilon} \to \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (\epsilon \to 0\ , \tau \to +\infty)\ 。 \end{aligned} \tag{8.61}$$

§8.6.2 介电系数的渐进行为与色散关系

如果不管金属情形，在 ω 很大时，介电系数的谐振子模型告诉我们

$$\mathrm{Re}[\varepsilon_r(\omega) - 1] = O(\frac{1}{\omega})\ ,\ \ \mathrm{Im}[\varepsilon_r(\omega)] \propto O(\frac{1}{\omega^3})\ 。 \tag{8.62}$$

由于 $\varepsilon_r(z)$ 在上半平面解析，则利用柯西定理可写出

$$\varepsilon_r(z) = 1 + \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{\varepsilon_r(\omega') - 1}{\omega' - z}d\omega'\ 。 \tag{8.63}$$

其中 C 是上半平面的包含 z 的任意闭合轨道。取 C 为实轴和上半平面无穷远处的大半圆，令 $z = \omega + i\epsilon$ ，从上式可得（利用渐进行为 8.62 式）

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon_r(\omega') - 1}{\omega' - \omega - i\epsilon}d\omega'\ 。 \tag{8.64}$$

利用

$$\frac{1}{\omega' - \omega - i\epsilon} = \mathcal{P}\frac{1}{\omega' - \omega} + i\pi\delta(\omega' - \omega)\ , \tag{8.65}$$

推出所谓的 Kramers–Krönig 关系或色散关系

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{1}{\pi i}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon_r(\omega') - 1}{\omega' - \omega}d\omega'\ 。 \tag{8.66}$$

或

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\,\varepsilon_r(\omega) &= -\frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{Re}\,\varepsilon_r(\omega') - 1}{\omega' - \omega}d\omega'\ , \\ \mathrm{Re}\,\varepsilon_r(\omega) &= 1 + \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{Im}\,\varepsilon_r(\omega')}{\omega' - \omega}d\omega'\ 。 \end{aligned} \tag{8.67}$$

由 8.60 式知 $\mathrm{Re}\,\varepsilon_r(\omega)$ 是 ω 的偶函数，$\mathrm{Im}\,\varepsilon_r(\omega)$ 是 ω 的奇函数，因此进一步可得出

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,\varepsilon_r(\omega) &= 1+\frac{2}{\pi}\mathcal{P}\int_0^{+\infty}\frac{\omega'\mathrm{Im}\,\varepsilon_r(\omega')}{\omega'^2-\omega^2}d\omega' ,\\ \mathrm{Im}\,\varepsilon_r(\omega) &= -\frac{2\omega}{\pi}\mathcal{P}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{Re}\,\varepsilon_r(\omega')-1}{\omega'^2-\omega^2}d\omega' 。\end{aligned} \tag{8.68}$$

在对导体时 8.68 式中的第一个方程不变、第二个方程需要修改为

$$\mathrm{Im}\,\varepsilon_r(\omega)=\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}-\frac{2\omega}{\pi}\mathcal{P}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{Re}\,\varepsilon_r(\omega')-1}{\omega'^2-\omega^2}d\omega' 。 \tag{8.69}$$

可以通过对 $\varepsilon_r(\omega)-\frac{i\sigma}{\omega\varepsilon_0}$ 的柯西积分来建立这最后一个关系。

色散关系是我们所遇到的一种新的类型的物理关系。利用色散关系可以从吸收得到的 $\mathrm{Im}\,\varepsilon_r(\omega)$ 的经验数据来计算 $\mathrm{Re}\,\varepsilon_r(\omega)$ 。由于在得到色散关系时，我们仅仅利用了极化与电场之间的因果关系和少数几个很一般的假定，所以色散关系具有非常普遍的有效性或普适性，也因此具有广泛的应用。

§8.6.3 求和规则

根据

$$\omega_p^2=\lim_{\omega\to\infty}\{\omega^2[1-\varepsilon_r(\omega^2)]\} \tag{8.70}$$

得到第一求和规则：

$$\omega_p^2=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\omega\mathrm{Im}\,\varepsilon_r(\omega)d\omega 。 \tag{8.71}$$

这个求和规则与在 8.3.1 节中得到的偶极求和规则 8.26 式本质上是等价的。$\mathrm{Im}\,\varepsilon_r$ 代表了吸收，而光学定理把它与散射截面联系到了一起。

第二个求和规则与 $\varepsilon_r(\omega)$ 的实部的积分有关。设在 $\omega>N$ 时 $\mathrm{Re}\,\varepsilon_r(\omega')-1=-\omega_p^2/\omega'^2+O(1/\omega'^4)$ ，则从 8.68 式中的第二个等式可以证明，当 $\omega>N$ 时，

$$\mathrm{Im}\,\varepsilon_r(\omega)=\frac{2}{\pi\omega}\{-\frac{\omega_p^2}{N}+\int_0^N[\mathrm{Re}\,\varepsilon(\omega')-1]d\omega'\}+O(\frac{1}{\omega^3}) 。 \tag{8.72}$$

由于在大的 ω 时 $\mathrm{Im}\,\varepsilon_r(\omega)\propto O(\frac{1}{\omega^3})$ ，所以在上式中的大括号里的项必有

$$1+\frac{\omega_p^2}{N^2}=\frac{1}{N}\int_0^N\mathrm{Re}\,\varepsilon_r(\omega)d\omega 。 \tag{8.73}$$

这个关系有时也叫做 **超收敛性关系**（ super convergence relation ）。令 $N\to\infty$ ，上式的一个推论是 $\mathrm{Re}\,\varepsilon_r(\omega)$ 对所有的频率的平均值比为 1 。

对于导体来说第一个求和规则仍然成立，但对于第二个求和规则左边要加上一项 $-\frac{\pi\sigma}{2\varepsilon_0 N}$ 。

§8.7 信号通过色散介质的传播过程

电磁波在介质中传播时，存在着耗散和色散。在吸收区群速度甚至可以大于光速。如果相速度或群速度大于光速，那么什么是信号传递速度？后者可以比因果性和相对论所允许的速度快吗？这一节我们的目的是来定性的探讨这些问题。

考虑一个平面波列，从真空垂直照射到 $x>0$，折射率为 $n(\omega)$ 的半无限均匀介质上。由 Fresnel 公式

$$\frac{E''}{E}=\frac{2}{1+n(\omega)}\ 。\tag{8.74}$$

透射的 $\vec{E}$ 或 $\vec{B}$ 的某一分量

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{1+n(\omega)}A(\omega)e^{ik(\omega)x-i\omega t}d\omega\ ,\tag{8.75}$$

其中

$$A(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}u(0,t)e^{i\omega t}dt\ ,\tag{8.76}$$

是在介质外 $x=0^-$ 处计算的（实）入射电场的付立叶变换。在这里我们把 ω 而不是 k 作为基本变量，$k(\omega)=\frac{\omega}{c}n(\omega)$。

$A(\omega)$ 的一般性质

假设入射波有完全确定的前沿，$t=0$ 时到达 $x=0$，即 $t<0$ 时 $u(0,t)=0$，则 $A(\omega)$ 是上半平面的解析函数。下半平面的行为由 $u(0,t)$ 的具体形式确定。

复平面内 $n(\omega)$ 的一般性质

波的传播特性与 $n(\omega)$ 的具体模型有关。讨论一个最简单的、只有一个共振频率的模型：

$$\varepsilon_r(\omega)=n^2(\omega)=1+\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma}\ ,\ (\gamma\geq 0)\ 。\tag{8.77}$$

由其可解得 $n^2(\omega)$ 的极点（为 ε_r 的极点）

$$\omega_c=\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}-\frac{i\gamma}{2}\ ,\ \omega_d=-\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}-\frac{i\gamma}{2}\ ,$$

和零点

$$\omega_a=\sqrt{\omega_0^2+\omega_p^2-\frac{\gamma^2}{4}}-\frac{i\gamma}{2}\ ,\ \omega_b=-\sqrt{\omega_0^2+\omega_p^2-\frac{\gamma^2}{4}}-\frac{i\gamma}{2}\ 。$$

发现它们也都落在下半平面。于是

$$n(\omega)=\left[\frac{(\omega-\omega_a)(\omega-\omega_b)}{(\omega-\omega_c)(\omega-\omega_d)}\right]^{1/2}\ 。\tag{8.78}$$

由于 $\omega \to \infty$ 时 $n(\omega) \to 1$，所以我们按图 8.4 所示选取割线使 $|\omega| \to \infty$ 时 $n(\omega) \to 1$。

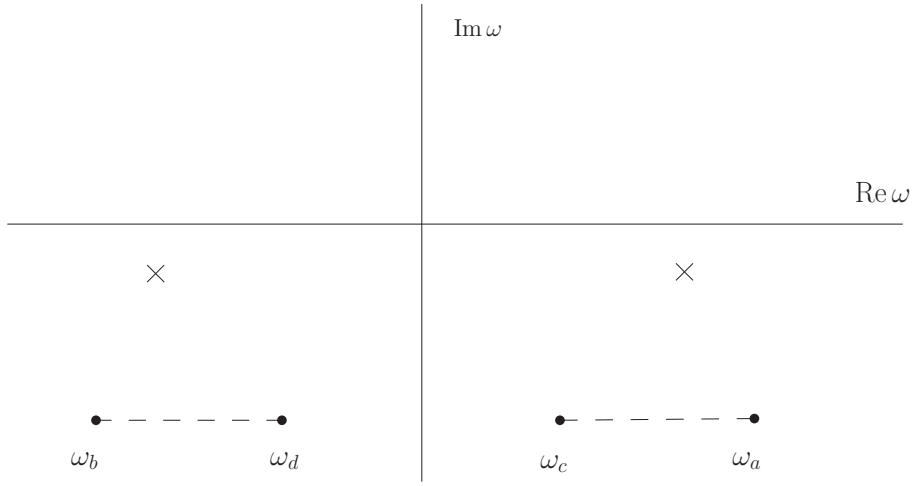


图 8.4: $n(\omega)$ 的奇异结构。下半平面的 $\times$ 号示意 $A(\omega)$ 的奇点。

更实际的 $n(\omega)$ 有更复杂的奇异结构，但一般来说所有的割线都在下半平面（上半平面没有零点）。

光速作为信号传播速度的上限

回到 8.75 式，由于 $n(\omega)$、$A(\omega)$ 是上半平面的解析函数，$|\omega| \to \infty$ 时 $n(\omega) \to 1$ 所以 $i(k(\omega)x - \omega t) \to i\frac{\omega}{c}(x - ct)$，当 $x > ct$ 时在上半平面作围道积分，反之则在下半平面作围道积分。因此我们证明了，当 $x > ct$ 时 $u(x,t) = 0$，也就是说，**没有信号速度大于 c ！**

利用稳相法来估算 $t > x/c$ 时的振幅

除了证明介质中没有信号速度能够大于光速外，我们甚至可以作的更多。下面我们再利用稳相法这一近似方法定性地估计一下在介质中信号的传播行为。

估算一个积分

$$I = \int F(\omega) e^{i\phi(\omega)} d\omega \ , \tag{8.79}$$

其中 F 是一个缓变函数，而 $\phi(\omega)$ 通常大而且快速振荡。这样这个积分通常仅在 $\frac{d\phi}{d\omega} = 0$ 附近不为零。由

$$\phi = \phi_s + \frac{1}{2}\phi_s''(\omega - \omega_s)^2 + \cdots \ ,$$

得

$$I_s \simeq F(\omega_s) e^{i\phi_s} \int e^{\frac{i}{2}\phi_s''(\omega-\omega_s)^2} d\omega \simeq \left(\frac{2\pi i}{\phi_s''}\right)^{1/2} F(\omega_s) e^{i\phi(\omega_s)} \ 。 \tag{8.80}$$

其中 ω_s 满足 $\frac{\partial\phi}{\partial\omega}|_s = 0$，而如果有多于一个 ω_s 则 $I = \sum_s I_s$。这个近似在 ϕ 为实函数时较好，若有较强的吸收即 ϕ 为复函数时有可能出错。

现在 $\phi(\omega) = k(\omega)x - \omega t$，由 $\frac{\partial\phi}{\partial\omega} = 0$ 推出 $\frac{cdk}{d\omega}(= \frac{c}{v_g}) = \frac{ct}{x}$。对于 $\gamma = 0$ 的单一共振吸收模型

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\ ,\quad n = \sqrt{\frac{\omega_p^2 + \omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

群速度 v_g 在除 $\omega_0 < \omega < \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}$ 外都小于 c（如果 $\gamma \neq 0$ 则情况更复杂，这里不予考虑）。利用稳相法对波的传播的分析在图 8.5 中表示了出来。

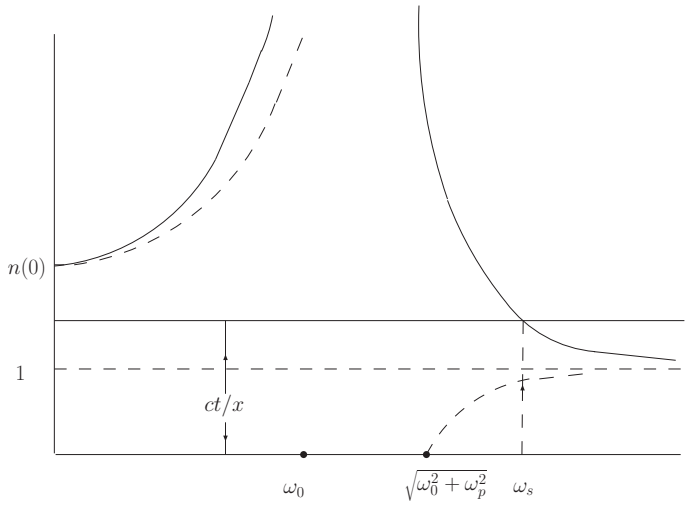


图 8.5: 利用稳相法分析在介质中波的传播。其中用实线画出的两条曲线表示 $c\frac{dk}{d\omega} = \frac{c}{v_g}$，点虚线画出的两条曲线表示 $\frac{ck}{\omega} = n(\omega) = \frac{c}{v_p}$。

可对主要结论总结如下：

1. 对于固定的 x，$t = t_0 = \frac{x}{c}$ 时出现第一个稳相点（$\omega \to \infty$），振幅很小并以很高的频率振荡。此频率只依赖于 ω_p 和 ct_0 与入射波频率无关，叫做第一波峰（或索末菲波峰），以光速传播。稍后时间随着 t 的增加，稳相点朝低频方向移动，此时需要 $n(\omega)$ 的具体形式才能给出波的具体行为但一般说来振幅很小。
2. $t = t_1 = \frac{n(0)x}{c}$ 时，波的传播行为有定性改变，出现了第二个稳相点。频率在 $\omega = 0$ 附近出现了第二波峰（布里渊波峰），具有较大振幅周期（此时由于 $\phi_s'' = 0$ 用稳相法计算并不可靠）。定性地在 $t < t_1$ 时按指数衰减，$t > t_1$ 振荡。
3. 在 $t > t_1$ 时，最后进入与入射波相关的稳恒态。如果有吸收则还有振幅的衰减。

§8.8 习题

1. （ 1 ）在计入辐射阻尼力作用情况下，求平面线偏振波被自由电子散射时，电波对电子所作的平均功率，并证明这平均功率等于平均散射功率。（ 2 ）如果不计入辐射阻尼力，平均功率是多少？如何从物理上理解这个结果？
2. 频率为 ω 的平面线偏振波入射到一个极化率为 α 的原子上（即原子的电偶极矩与外电场的关系为： $\vec{p}=\epsilon_0\alpha\vec{E}$ ），试按经典理论算出散射波的电场和磁场，辐射功率的角分布，辐射总功率，微分散射截面和总散射截面。

附录一　若干数学准备知识

§A.1　矢量与二阶张量的基本运算规则

张量的定义是由其在空间转动下的变换性质所给出的。以三维空间的正交转动(转动矩阵为 R) 为例：

- 矢量的变换规律为

$$A'_i = \sum_{j=1}^{3} R_{ij} A_j \ 。 \tag{A.1}$$

- 二阶张量的变换规律为

$$T'_{ij} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} R_{ik} R_{jl} T_{kl} \ 。 \tag{A.2}$$

以此类推不难给出任意阶的张量的变化规律。下面我们给出一些本课程常用的矢量与张量计算的公式。

对于矢量我们用黑体字母或者字母上带箭头 $\rightarrow$ 来表示。对于矢量的三重积运算我们有

- $$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C} \tag{A.3}$$

  它代表以 $\vec{A}$ 、 $\vec{B}$ 、 $\vec{C}$ 为边的平行六面体的体积。

- $$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B}) \tag{A.4}$$

并矢：并矢 $\vec{a}\,\vec{b}$ 是一种特殊的二阶张量：

$$(\vec{a}\,\vec{b})_{ij} = a_i b_j \ , \ \text{或} \ \vec{a}\,\vec{b} = \sum_{i,j} a_i b_j \, \vec{e_i}\vec{e_j} \ 。$$

一般来说 $\vec{a}\,\vec{b} \neq \vec{b}\,\vec{a}$ (因为 $a_i b_j \neq b_i a_j$) 。任意二阶张量总可以用并矢之和表示：

$$\vec{\vec{A}} = \sum_i \sum_j A_{ij} \vec{e_i}\vec{e_j} \ 。$$

并矢与矢量的点乘规则为，

$$\begin{aligned} &(\vec{a}\,\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c}) \ , \\ &\vec{c}\cdot(\vec{a}\,\vec{b}) = (\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b} \ 。 \end{aligned} \tag{A.5}$$

一般地 $(\vec{a}\,\vec{b})\cdot\vec{c}\neq\vec{c}\cdot(\vec{a}\,\vec{b})$ 。对于更一般的二阶张量与矢量的混合运算我们有如下性质：

- $$\vec{\vec{A}}\cdot\vec{a}=\vec{b}\quad\text{等价于}\quad b_i=\sum_j A_{ij}a_j\ 。$$

  一般来说，$\vec{\vec{A}}\cdot\vec{a}\neq\vec{a}\cdot\vec{\vec{A}}$，除非 $\vec{\vec{A}}$ 是对称张量，即 $A_{ij}=A_{ji}$ 。

- $$\vec{\vec{A}}\cdot\vec{\vec{B}}=\vec{\vec{C}}\quad\text{等价于}\quad C_{ij}=\sum_k A_{ik}B_{kj}\ 。$$

- 引入双点乘的运算规则如下：

  $$\vec{\vec{A}}:\vec{\vec{B}}=\phi\quad\text{等价于}\quad \phi=\sum_{i,j}A_{ij}B_{ji}\ ,$$

  我们有 $\vec{\vec{A}}:\vec{\vec{B}}\equiv\vec{\vec{B}}:\vec{\vec{A}}$ 。

- 单位二阶张量用 $\vec{\vec{I}}$ 来表示，用矩阵表示二阶张量即为一个单位矩阵，$\vec{\vec{I}}=\mathrm{diag}(1,1,1)$ 。它具有如下运算性质：

  $$\begin{aligned}&\vec{a}\cdot\vec{\vec{I}}=\vec{\vec{I}}\cdot\vec{a}=\vec{a}\ ,\ \ \vec{\vec{A}}\cdot\vec{\vec{I}}=\vec{\vec{I}}\cdot\vec{\vec{A}}=\vec{\vec{A}}\ ,\\&\vec{\vec{A}}:\vec{\vec{I}}=\vec{\vec{I}}:\vec{\vec{A}}=\sum_{ii}=\mathrm{trace}(\vec{\vec{A}})\ 。\end{aligned}\tag{A.6}$$

- 任何张量可以分解为对称张量与反对称张量之和：

  $$\vec{\vec{A}}\equiv\frac{1}{2}(\vec{\vec{A}}+\vec{\vec{A}}^T)+\frac{1}{2}(\vec{\vec{A}}-\vec{\vec{A}}^T)\ ,$$

  其中 $(\vec{\vec{A}}^T)_{ij}=(\vec{\vec{A}})_{ji}$ 为转置矩阵。

§A.2 矢量场论

这里的“矢量”是广义的，可以表示标量、矢量和张量。这里只考虑矢量的空间变化，对时间参数 t 的依赖这里不考虑。引入梯度算子：

$$\nabla\equiv\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\ ,$$

它具有双重性质，既是矢量，也是一个微商算子。对于一个场量可以给出其散度、旋度或梯度运算：$\nabla\cdot\vec{f}\equiv div\vec{f}$，$\nabla\times\vec{f}\equiv rot\vec{f}$，$\nabla\phi\equiv grad\,\phi$ 。它们具有如下性质：

1) 散度：

$$\nabla\cdot\vec{f}\equiv\frac{\partial}{\partial x}f_x+\frac{\partial}{\partial y}f_y+\frac{\partial}{\partial z}f_z=\lim_{\triangle V\to 0}\frac{\oint_S\vec{f}\cdot d\vec{S}}{\triangle V}\ 。\tag{A.7}$$

矢量场积分的 Gauss 公式：

$$\oint_S \vec{f}\cdot d\vec{S}=\int_V \nabla\cdot\vec{f}dV \text{ 。} \tag{A.8}$$

2) 旋度：

$$\nabla\times\vec{f}=\lim_{\triangle S\to 0}\frac{\oint_L \vec{f}\cdot d\vec{l}}{\triangle S} \text{ 。} \tag{A.9}$$

Stokes 定理：

$$\oint_L \vec{f}\cdot d\vec{l}=\oint_S(\nabla\times\vec{f})\cdot d\vec{S} \tag{A.10}$$

3) 标量场的梯度：

$$\int_V \nabla\phi\, dV=\oint_S \phi\, d\vec{S} \text{ 。} \tag{A.11}$$

4)Green 公式

$$\begin{aligned}&\oint \psi\nabla\phi\cdot d\vec{S}=\int_V(\psi\nabla^2\phi+\nabla\psi\cdot\nabla\phi)dV\\&\oint(\psi\nabla\phi-\phi\nabla\psi)\cdot d\vec{S}=\int_V(\psi\nabla^2\phi-\phi\nabla^2\psi)dV \text{ 。}\end{aligned} \tag{A.12}$$

5) 无旋场必可表为标量场的梯度。即若 $\nabla\times\vec{f}=0$，则 $\vec{f}=\nabla\phi$。无源场必可表示为另一矢量的旋度。即若 $\nabla\cdot\vec{f}=0$，则 $\vec{f}=\nabla\times\vec{A}$。亥姆霍兹定理：任意矢量必可以分解为无源场与无旋场之和。即

$$\vec{f}=\nabla\phi+\nabla\times\vec{A} \text{ 。} \tag{A.13}$$

梯度与旋度运算具有如下简单性质：

$$\begin{aligned}&\nabla^2\phi=(\nabla\cdot\nabla)\phi\\&\nabla^2\vec{f}=\nabla(\nabla\cdot\vec{f})-\nabla\times(\nabla\times\vec{f})\\&\nabla\times\nabla\phi=0\ ,\ \ \nabla\cdot(\nabla\times\vec{f})=0 \text{ 。}\end{aligned} \tag{A.14}$$

下面我们列出一些常用公式，请读者自行验证其正确性

$$\begin{aligned}&\nabla(\phi\psi)=\phi\nabla\psi+\psi\nabla\phi\\&\nabla(\vec{f}\cdot\vec{g})=\vec{f}\times(\nabla\times\vec{g})+\vec{g}\times(\nabla\times\vec{f})+(\vec{f}\cdot\nabla)\vec{g}+(\vec{g}\cdot\nabla)\vec{f}\\&\nabla\cdot(\phi\vec{f})=\phi(\nabla\cdot\vec{f})+\vec{f}\cdot(\nabla\phi)\\&\nabla\cdot(\vec{f}\times\vec{g})=\vec{g}\cdot(\nabla\times\vec{f})-\vec{f}\cdot(\nabla\times\vec{g})\\&\nabla\times(\phi\vec{f})=\phi(\nabla\times\vec{f})-\vec{f}\times(\nabla\phi)\\&\nabla\times(\vec{f}\times\vec{g})=(\vec{g}\cdot\nabla)\vec{f}-(\vec{f}\cdot\nabla)\vec{g}+\vec{f}(\nabla\cdot\vec{g})-\vec{g}(\nabla\cdot\vec{f}) \text{ 。}\end{aligned} \tag{A.15}$$

最后我们再给出一些有用的简单公式

$$\begin{aligned}
&\nabla\cdot\vec{r}=3\ ,\ \ \nabla r=\frac{\vec{r}}{r}\ ,\ \ \nabla\times\vec{r}=0\ ,\\
&\nabla\frac{1}{r}=-\frac{\vec{r}}{r^3}\ ,\ \ \nabla f(r)=f'(r)\frac{\vec{r}}{r}\ ,\ \ \nabla^2\frac{1}{r}=-4\pi\delta(\vec{r})\ ,\\
&\nabla\times(f(r)\vec{r})=0\ ,\ \ \nabla\vec{r}=\overrightarrow{\overrightarrow{I}}\ ,\ \ \nabla(\vec{a}\cdot\vec{r})=(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{r}=\vec{a}\ ,\\
&\nabla e^{i\vec{a}\cdot\vec{r}}=i\vec{a}e^{i\vec{a}\cdot\vec{r}}\ 。
\end{aligned}\tag{A.16}$$

其中与 δ 函数有关的一项公式的证明，在阅读了 A.4 节后，请读者自行给出。

§A.3 球坐标与柱坐标下的梯度算符公式

§A.3.1 球坐标

$$\nabla=\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}+\vec{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\vec{e}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\ ,$$
$$\vec{A}=A_r\vec{e}_r+A_\theta\vec{e}_\theta+A_\phi\vec{e}_\phi\ ,$$

坐标变量为 r,θ,ϕ 且

$$\vec{e}_r\equiv\hat{r}=\sin\theta\cos\phi\,\vec{e}_x+\sin\theta\sin\phi\,\vec{e}_y+\cos\theta\vec{e}_z\ ,$$

$$\vec{e}_\theta=\cos\theta\cos\phi\vec{e}_x+\cos\theta\sin\phi\vec{e}_y-\sin\theta\vec{e}_z\ ,$$

$$\vec{e}_\phi=-\sin\phi\,\vec{e}_x+\cos\phi\,\vec{e}_y\ 。$$

在球坐标系中我们有

$$\begin{aligned}
\nabla\psi &= \frac{\partial\psi}{\partial r}\vec{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\vec{e}_\phi\ ,\\
\nabla\cdot\vec{A} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(A_\phi)\ ,\\
\nabla\times\vec{A} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\phi)-\frac{\partial}{\partial\phi}(A_\theta)\right]\vec{e}_r+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(A_r)-\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right]\vec{e}_\theta\ ,\\
&+ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\vec{e}_\phi\\
\nabla^2\psi &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\ 。
\end{aligned}\tag{A.17}$$

§A.3.2 柱坐标

$$\nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \ 。$$

坐标变量为 r, θ, z 。

$$\vec{e}_r = \cos\phi \vec{e}_x + \sin\phi \vec{e}_y \ ,$$

$$\vec{e}_\phi = -\sin\phi \vec{e}_x + \cos\phi \vec{e}_y \ ,$$

$$\vec{e}_z = \vec{e}_z \ 。$$

$$\begin{aligned}
&\nabla\psi = \vec{e}_r \frac{\partial\psi}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \ , \\
&\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \vec{e}_z \frac{\partial A_z}{\partial z} \ , \\
&\nabla \times \vec{A} = \vec{e}_r(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}) + \vec{e}_\theta(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}) + \vec{e}_z \frac{1}{r}(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}) \\
&\nabla^2\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\psi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \ 。
\end{aligned} \tag{A.18}$$

§A.4 Dirac δ 函数

Dirac 引入的 delta 函数 $\delta(x)$ 从严格的意义上来说并不是一个函数，而是一个“分布”，只能在积分的意义下定义。如果不管数学上的严格性，我们可以按如下方式定义 δ 函数：

$$\begin{aligned}
&\delta(x) = 0 \ \ (\text{如果} x \neq 0) \ , \ \ \delta(x) = \infty \ \ (\text{如果} x = 0) \ , \\
&\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \delta(x) = 1 \ 。
\end{aligned} \tag{A.19}$$

由此可以得出 δ 函数的如下的一些性质：

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x)\delta(x) = f(0) \ , \ \ \delta(x) = \delta(-x) \ , \\
&\delta\left[f(x)\right] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|} = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{f'(x)} \ ,
\end{aligned} \tag{A.20}$$

其中 x_i 是 $f(x) = 0$ 的实单根。

二维 δ 函数：

$$\delta^{(2)}(\vec{r} - \vec{r}') = \delta(x - x')\delta(y - y') \ 。 \tag{A.21}$$

在二维空间中，有

$$\nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^2} \right) = 2\pi \, \delta(\vec{r} - \vec{r}') \ 。 \tag{A.22}$$

为了证明上式，可以利用如下“二维空间的 Gauss 定理”（可利用三维空间的 Stokes 定理证明）：

$$\int_S \nabla \cdot \vec{f} \, dS = \oint f_n \, dl \ , \tag{A.23}$$

其中 $f_n = \vec{f} \cdot \vec{n}$, n 为区域 S 的边界（为闭曲线 L ）的外法线方向。

三维 δ 函数：

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z') \ 。$$

满足公式

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r}) \ 。 \tag{A.24}$$

球坐标下：

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{r^2}\delta(r - r')\delta(\phi - \phi')\delta(\cos\theta - \cos\theta');$$

柱坐标下：

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{r}\delta(r - r')\delta(\phi - \phi')\delta(z - z') \ 。$$

点电荷系的电荷密度可以写为

$$\rho(\vec{r}) = \sum_i q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i') \ 。$$

且 $\int_V f(\vec{r})\delta(\vec{r} - \vec{r}')dV = 0$ ，如果 $\vec{r}'$ 不落在 V 内； $\int_V f(\vec{r})\delta(\vec{r} - \vec{r}')dV = f(r')$ ，如果 $\vec{r} \in V$ 。

δ 函数可以有许多种逼近函数，形式并不唯一。比如一维 δ 函数可以写为

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \ ,$$

或者

$$\delta(x) = \lim_{\triangle \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\triangle} e^{-\frac{x^2}{2\triangle^2}} \ ,$$

及

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} dt$$

等等。

还可以定义阶梯函数，在本讲义中用 $\Theta(x)$ 表示：

$$\begin{aligned} \Theta(x) &= 1 \ , \ (x > 0) \ , \\ \Theta(x) &= 0 \ , \ (x < 0) \ 。 \end{aligned} \tag{A.25}$$

函数 $\frac{\partial}{\partial x}\Theta(x)$ 在 $x \neq 0$ 时等于零。而

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial}{\partial x}\Theta(x) = \Theta(+\infty) - \Theta(-\infty) = 1 \text{ 。}$$

所以 $\frac{\partial}{\partial x}\Theta(x) = \delta(x)$ 。

附录二　电磁场理论的拉格朗日形式 *

§B.1　带电粒子的拉格朗日量与哈密顿量

这一节的目的是试图建立一个拉氏量，使得能够从其导出带电粒子在电磁场中的运动方程。找到这样的拉氏量的方法并不唯一，比如可以用三维坐标 x 、 y 、 z 作为正则坐标，它们对时间 t 的微商作为速度。这一方法的好处是比较直观、简单，缺点是中间步骤没有保持明显的协变形，虽然最后的结果仍然是协变的（即完全可以导出协变的运动方程）。另一方面，由于已经掌握了电动力学的协变形式，我们也完全可以用一个每一中间步骤都是明显协变的方法来得到拉氏量。

由相对论力学知，粒子的四维坐标可以看成是原时 τ 的函数： $x_\mu = x_\mu(\tau)$ 在三维空间中 $x_i = x_i(t)$ ， $v_i = \frac{dx_i}{dt}$ 。四维时空时，时间 t 也成了四维坐标的一部分，$x_4 = ict$ 。与坐标 x_μ 相对应的是四维速度 $U_\mu = \frac{dx_\mu(\tau)}{d\tau}$ ，其中 $d\tau = dt/\gamma$ 为固有系中的时间间隔。

我们试图提出一个协变形式的作用量原理：**存在四维标量函数** $L(x_\mu(\tau), \dot{x}_\mu(\tau), \tau)$ ，**粒子运动的真正轨迹** $x_\mu(\tau)$ **是使作用量** $S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L(x_\mu(\tau), \dot{x}_\mu(\tau), \tau)d\tau$ **取极值，其中积分端点上变分为零**。在这以后我们实际上并不再考虑拉氏量显含 τ 的情形。

相对论协变性带来了一个问题是， 4- 速度满足一个约束：

$$\dot{x}_\mu \dot{x}_\mu = -c^2 \ 。$$

为此需要利用拉格朗日乘子法：

$$L' = L + \frac{1}{2}\lambda(\tau)(\dot{x}_\mu \dot{x}_\mu + c^2) \ 。$$

对作用量求变分得

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L'}{\partial x_\mu} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_\mu}\right) = 0 \ , \\ &\dot{x}_\mu \dot{x}_\mu = -c^2 \ 。 \end{aligned} \tag{B.1}$$

上面方程组包括了五个方程和五个未知变量。可以首先解出不定乘子

$$\lambda(\tau) = \frac{1}{c^2}(\dot{x}_\mu \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\mu} - L) \ 。$$

所以正则动量

$$p'_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\mu} + \dot{x}_\mu \lambda(\tau) \ 。$$

而运动方程则为

$$\dot{p}'_\mu = \frac{\partial L}{\partial x_\mu} \ 。 \tag{B.2}$$

对于自由粒子可选

$$L = -m_0 c^2 \ 。 \tag{B.3}$$

这样 $p'_\mu = m_0 U_\mu$ ，运动方程化为 $\frac{d}{d\tau}(m_0 U_\mu) = 0$ 。根据 $\int L d\tau = \int L\gamma^{-1} dt$ 得到 L 的经典对应为 $L^c = \gamma^{-1} L$ 。于是对于自由粒子的 L 可得 $\gamma^{-1} L$ 对 v/c 展开的领头项为 $\frac{1}{2} m_0 v^2$ 。也即 B.3 式中符号的选取，因为导致了正确的经典极限，是正确的。

当带电粒子在外电场中运动时，自由粒子的拉格朗日函数修改为

$$L = L_0 + L_{int} = L_0 + q A_\mu U_\mu \ 。 \tag{B.4}$$

此时

$$p'_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\mu} + \dot{x}_\mu \lambda(\tau) = m_0 U_\mu + q A_\mu \tag{B.5}$$

而运动方程 B.2 给出

$$\frac{d}{d\tau}(m_0 U_\mu + q A_\mu) = q \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} U_\nu$$

或

$$\frac{d}{d\tau}(m_0 U_\mu) = q F_{\mu\nu} U_\nu$$

这与以前讨论相对论物理时得到的结果是一致的，这证明了 B.4 式是合理的。 B.4 是规范不变的，如 $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \Lambda(x)$ ，则

$$L' \to L' + (\partial_\mu \Lambda) U_\mu = L' + \frac{d\Lambda}{d\tau} \ 。$$

由 $\Lambda(\tau_1) = \Lambda(\tau_2) = 0$ 知 L' 是规范不变的。

以上的讨论以明显相对论协变的方式讨论了带电运动粒子的拉格朗日力学。然而如果试图按同样思路构造哈密顿量时，却会遇到困难：

$$H = U_\mu p'_\mu - L \equiv 0 \ 。$$

事实上可以证明上式右边是一个（恒为零）的运动积分。所以按上式定义的 H 已经失去了通常分析力学中所具有的能量的意义。所以我们不得不改变方法，回到三维形式的拉格朗日力学。

利用

$$\begin{aligned} L^c &= \gamma^{-1} L \\ &= -m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} + q A_\mu \gamma^{-1} \frac{dx_\mu}{d\tau} \\ &= -m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} + q A_\mu \frac{dx_\mu}{dt} \\ &= -m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} + q \vec{A} \cdot \vec{v} - q\varphi \ 。 \end{aligned} \tag{B.6}$$

得

$$\vec{p}=\frac{\partial L^c}{\partial \vec{v}}=\gamma m_0\vec{v}+q\vec{A}\ , \tag{B.7}$$

和

$$H=\vec{p}\cdot\vec{v}-L\ 。 \tag{B.8}$$

需要从 H 中消掉 $\vec{v}$ 。由 B.7 式反解出

$$\vec{v}=\frac{(\vec{p}-q\vec{A})c}{\sqrt{(\vec{p}-q\vec{A})^2+m_0^2c^2}}\ 。 \tag{B.9}$$

带回 B.8 式得

$$H=c\sqrt{(\vec{p}-q\vec{A})^2+m_0^2c^2}+q\varphi\ 。 \tag{B.10}$$

不难验证上面给出的 $H=-icp_4$ ，所以虽然它不是非明显协变的，但却实是对相对论系统的一个恰当的描述。

在非相对论近似下，有

$$H=m_0c^2+q\varphi+\frac{(\vec{p}-q\vec{A})^2}{2m_0}\ 。 \tag{B.11}$$

以上的讨论局限于电磁场是外场的情况。如果要写出比如两个带电粒子的相互作用哈密顿量，则会碰到很大的困难。因为场的传播速度有限，推迟势依赖于带电粒子的历史轨迹。因此对系统的一个完备的描述似乎不得不引入非定域的拉氏函数，因此很难用同一时刻的粒子坐标和速度来刻画相互作用拉氏量。但是当 $v<<c$ 时可以忽略推迟效应，给出准确到 v^2/c^2 阶的体现相对论修正的拉格朗日函数和哈密顿函数。[1]

只考虑由两个带电粒子组成的体系，其中一个粒子在空间中的场产生的电势为

$$\phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho'}{R}dV'\ ,\quad \vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}'}{R}dV'\ ,$$

其中的被积函数是由 5.26 、5.27 式所给出的推迟量，$t'=t-R/c=t-|\vec{r}-\vec{r}'|$ ，且

$$\rho'=e\delta(\vec{r}'-\vec{r}_e(t'))\ ,\quad \vec{j}'=e\vec{v}_e\delta(\vec{r}'-\vec{r}_e(t'))\ 。$$

由于粒子的速度远小于光速，故我们可以把推迟量用 t 展开。利用 7.8 式作展开，仅保留到 v^2/c^2 阶，得到

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{e}{R_0}+\frac{e}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}R_0)\ ,\\ \vec{A} &= \frac{\mu_0 e}{4\pi}\frac{\vec{v}}{R_0}\ ,\end{aligned} \tag{B.12}$$

[1]事实上如何在（不管是经典的还是量子的）相对论性系统中准确地描述粒子间的相互作用，尤其是束缚系统内的相互作用，一直是一个没有彻底解决的问题。

其中 $R_0 = |\vec{r} - \vec{r}_e(t)|$ 。为了方便下面我们略去下标 0 。对 ϕ 、 $\vec{A}$ 作一规范变换

$$\begin{aligned} \phi' &= \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} , \\ \vec{A} &= \vec{A} + \nabla \Lambda , \end{aligned} \tag{B.13}$$

并取 $\Lambda = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{2c^2}\frac{\partial R}{\partial t}$ ，得

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{R} , \\ \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{e\vec{v}}{R} + \frac{e}{2}\nabla\frac{\partial R}{\partial t}\right] , \end{aligned} \tag{B.14}$$

其中 $\vec{A}$ 可以改写为

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{8\pi}\frac{e}{R}[\vec{v} + \frac{(\vec{v}\cdot\vec{R})\vec{R}}{R^2}] 。 \tag{B.15}$$

利用下标 1 表示粒子 1 、下标 2 表示粒子 2 ，则第二个粒子在第一个粒子所在处激发的场为

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e_2}{R_{12}} , \\ \vec{A} &= \frac{\mu_0}{8\pi}\frac{e_2}{R_{12}}\left[\vec{v}_2 + \frac{(\vec{v}_2\cdot\vec{R}_{12})\vec{R}_{12}}{R_{12}^2}\right] 。 \end{aligned} \tag{B.16}$$

因此粒子 1 与粒子 2 之间的相互作用可写为

$$\begin{aligned} w_{12} &= e_1\vec{A}\cdot\vec{v}_1 - e_1\phi , \\ &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e_1e_2}{R_{12}}\{1 - \frac{1}{2c^2}\left[\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 + \frac{(\vec{v}_1\cdot\vec{R}_{12})(\vec{v}_2\cdot\vec{R}_{12})}{R_{12}^2}\right]\} 。 \end{aligned} \tag{B.17}$$

这样，我们不难写出准确到 $O(v^2/c^2)$ 阶的双粒子体系的拉格朗日量：

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{8c^2}m_1v_1^4 + \frac{1}{8c^2}m_2v_2^2 \\ &\quad -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\{\frac{e_1e_2}{R_{12}} - \frac{e_1e_2}{2c^2R_{12}}\left[\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 + \frac{(\vec{v}_1\cdot\vec{R}_{12})(\vec{v}_2\cdot\vec{R}_{12})}{R_{12}^2}\right]\} , \end{aligned} \tag{B.18}$$

和哈密顿量（取质心系 $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 = \vec{p}$ ）：

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2})p^2 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e_1e_2}{R} \\ &\quad -(\frac{1}{m_1^3} + \frac{1}{m_2^3})\frac{p^4}{8c^2} + \frac{e_1e_2}{8\pi\varepsilon_0m_1m_2c^2R}\left[p^2 + (\vec{p}\cdot\frac{\vec{R}}{R})^2\right] 。 \end{aligned} \tag{B.19}$$

这个公式是我们在通常非相对论性量子力学中所常见的（电）库仑场的哈密顿量的到领头阶的相对论性修正。也不难把此式推广到多体电磁相互作用的情形。

§B.2 电磁场的拉格朗日描述

对于有限多自由度的力学系统，拉格朗日函数 $L = L(q_i, \dot{q}_i)$ 。描述一个粒子的运动状态需要 6 个参数（三个坐标、三个动量），而描述在整个空间分布的一个场 $\psi(\vec{x}, t)$ 则需要无穷多个自由度。

所以拉氏量是场和其一阶导数的泛函：

$$L = \int d^3\vec{x}\,\mathcal{L}(\psi(\vec{x},t), \nabla\psi(\vec{x},t), \dot{\psi}(\vec{x},t)) \ 。 \tag{B.20}$$

与经典力学作类比，定义广义正则坐标 $\psi(x)$ ，于是正则动量为 $\Pi(x) = \frac{\delta L}{\delta\dot{\psi}(x)}$ 运动方程为

$$\dot{\Pi(x)} = \frac{\delta L}{\delta\psi(x)} \ 。 \tag{B.21}$$

对 L 作变分得

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta\psi} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \nabla\cdot\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\psi)} \ , \\ \frac{\delta L}{\delta\dot{\psi}} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} \ (\equiv \Pi(x)) \ 。 \end{aligned} \tag{B.22}$$

作用量

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, L = \int d^4x\mathcal{L}[\psi(x), \partial_\mu\psi(x)] \ 。 \tag{B.23}$$

要求作用量是 Lorentz 标量，所以 **拉氏密度**$\mathcal{L}$ 也是一个标量。下面我们首先以实标量场 ψ 为例作一下讨论。

运动方程 B.21 式可改写为

$$\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = 0 \ 。 \tag{B.24}$$

即场的 Euler – Lagrange 方程，它也可以通过直接对作用量 B.23 作变分得到。定义

$$H = \int d^3\vec{x}\Pi(x)\dot{\psi}(x) - L \tag{B.25}$$

则可得到正则方程

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\psi(x)}H &= -\dot{\Pi}(x) \ , \\ \frac{\delta}{\delta\Pi(x)}H &= \dot{\psi(x)} \ 。 \end{aligned} \tag{B.26}$$

有矢量场 A_α 时，对作用量作变分

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x\,\delta\mathcal{L} \\ &= \int d^4x\{\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\alpha} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)}\right)\right]\delta A_\alpha + \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)}\delta A_\alpha\right]\} \end{aligned} \tag{B.27}$$

利用四维高斯定理知四维散度项为零，得 Euler–Langrange 方程为

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)} \right) = 0 \text{ 。} \tag{B.28}$$

下面我们给出几个例子来讨论 $\mathcal{L}$ 的形式：

- 自由光子场的 Lagrange 函数为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{\mu_0} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \text{ 。} \tag{B.29}$$

易证

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = 0 \text{ ，} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)} = -\frac{1}{\mu_0} F_{\mu\alpha} \text{ 。} \tag{B.30}$$

带入 Euler–Lagrange 方程得 $-\frac{1}{\mu_0}\partial_\alpha F_{\alpha\beta} = 0$ 。在 Lorentz 规范条件下进一步得到达朗贝尔方程（严格的说应利用不定乘子法把规范固定项放进 $\mathcal{L}$ 中去）

- 有源电磁场的拉氏函数：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{\mu_0} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + A_\alpha j_\alpha \tag{B.31}$$

运动方程为

$$-\frac{1}{\mu_0}\partial_\alpha F_{\alpha\beta} = j_\beta \quad (\text{Lorentz 规范：} \Box A_\alpha = -\mu_0 j_\alpha) \text{ 。} \tag{B.32}$$

- 有质量矢量场的拉氏函数。有质量矢量场应该有色散关系 $\omega = \sqrt{m^2 + k^2}$（令 $\hbar = c = 1$ ）。所以其自由场方程应为

$$(\Box + m^2) A_\mu = 0 \text{ 。} \tag{B.33}$$

对于静止场 $\omega = 0$ ， $k = im$ ，所以场的传播是指数衰减的。静“电”势（ 汤川势 ）的解为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} e^{-mr} \text{ 。} \tag{B.34}$$

它的形式偏离库仑定律，且平面电磁波存在纵向分量。 [2]

[2]光子质量测量可以通过对地磁场的测量得到，其上限为 10^{-10}cm（ $\sim 4 \times 10^{-52}$kg ）。

附录三　左手材料

§C.1　什么是左手材料？

在经典电动力学理论中，介电材料的电磁特性由介电常量 ε 和磁导率 μ 两个宏观参数来描述。对于一般介质来说总有 ε 、 $\mu > 0$ 。 对于电磁波在真空或一般物质中的传播，电场矢量、磁场矢量和波矢量三者构成右手关系，这样的物质被称为右手材料。 1968 年， Veselago 预言， [1] 在一个具有负的介电系数和负的磁导率的介质中，电磁波传播的相速度方向与能流的方向是相反的，于是电磁波的电场矢量、磁场矢量和波矢量构成左手螺旋关系，这样一种材料被称为左手材料。 [2]

关于 ε 、 μ 的符号与电磁定律的关系，基本的 Maxwell 方程给出：

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \ , \ \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \ ,$$
$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \ , \ \vec{B} = \mu \vec{H} \ 。 \tag{C.1}$$

对于单色波有：

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \mu \vec{H} \ , \ \vec{k} \times \vec{H} = -\omega \varepsilon \vec{E} \ 。 \tag{C.2}$$

可见，当 $\varepsilon > 0$ 和 $\mu > 0$ 时， $\vec{E}$ 、 $\vec{H}$ 和波矢 $\vec{k}$ 形成一右手系；而当 $\varepsilon < 0$ 和 $\mu < 0$ 时， $\vec{E}$ 、 $\vec{H}$ 和波矢 $\vec{k}$ 形成一左手手系。由于决定电磁波能量传递行为的是坡印亭矢量 $\vec{S} = (\vec{E} \times \vec{H})$ ，所以 $\vec{S}$ 与 $\vec{E}$ 、 $\vec{H}$ 总是形成右手关系。在常规介质 (右手材料) 中能量传递的方向 $\vec{S}$ 跟波前进的方向 $\vec{k}$ 总是同方向；然而当系统为左手材料时，这两个向量就会反向。

Veselago 进一步论证了左手材料的折射率是负的。同时指出，电磁波在左手材料中的行为与在右手材料中相反，比如有光的负折射、负的 Cerenkov 效应、逆多普勒效应等等。

在自然界中并不存在天然的左手材料。 Pendry[3] 从电磁场 Maxwell 方程和物质本构方程出发，通过理论计算指出： (1) 间距在毫米级的金属细线构成的格子结构具有类似等离子体的物理行为，共振频率在 GHz ，低于此频率时介电常数出现

[1] V. G . Veselago, *The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of* ε *and* μ, Sov. Phys Usp , 1968 , 10 : 509-514 。

[2]本节主要参考文献：徐耿钊、张伟华、朱星， *奇妙的左手材料*, **物理**33 卷 (2004 年)11 期；谢诒成， *左手材料和光子晶体*, **物理教学**29 卷第 4 期；张海燕，马红孺， *左手材料和负折射率* ，《大学物理》第 25 卷第 12 期， 2006 年 12 月。

[3]J. B. Pendry et al., Phys . Rev . Lett.76 (1996)4773; J. B. Pendry et a1., J . Phys . Condens . Matter 10(1998)4785.

负值；(2) 利用非磁性导电金属薄片构成开环共振器 (split ring resonators ， SRRs) 并组成方阵，可以实现负的有效磁导率，而且负的磁导率是可调的，这是自然界的物质无法达到的。

对于开环共振器 (SRRs) 和细金属导线构成的复合微结构而言，磁导率为：

$$\mu_r(\omega) = 1 - \frac{F\omega^2}{\omega^2 - \omega_m^2 + i\Gamma\omega} \text{ 。} \tag{C.3}$$

其中 ω_m 是体系的磁共振频率， F 表示金属占据格子的体积分数， Γ 为损耗频率 (远小于 ω_m) 。在大于共振频率 ω_m 的范围内体系出现负的磁导率。介电常数满足以下的数学形式：

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma\omega)} \text{ 。} \tag{C.4}$$

其中 ω_p 为电子的等离子体共振频率，而 γ 为损耗频率。可见当 $\omega < \omega_p$ 时出现负的介电常数。

§C.2 负的介电系数、负磁导率以及负的折射率

我们来研究一下为什么负的介电系数和负的磁导率一定给出负的折射率。[4] 我们知道描述无源电磁波在介质中的传播的 Helmholtz 方程是

$$\nabla^2\vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2}n^2\vec{E} = 0 \text{ 。} \tag{C.5}$$

其中折射率 n 定义为

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu} \text{ 。} \tag{C.6}$$

对于方程 C.5 式来说， C.6 式中折射率 n 取正号和负号都是可以的。但是我们将证明 n 的取法并不是任意的。

我们知道对于频率为 ω 的电磁波，有

$$\vec{D}(\omega) = \varepsilon(\omega)\vec{E}(\omega) \text{ 。} \tag{C.7}$$

对于 $\vec{B}$ 和 $\vec{H}$ ，也可以写出类似的关系：

$$\vec{B}(\omega) = \mu(\omega)\vec{H}(\omega) \text{ ,} \tag{C.8}$$

[4] D. R. Smith, N. Kroll, *Negative refractive index in left — handed materials*, Phys. Rev. Lett. ， 2000 ， 85 ： 2933 — 2936 。

其中 ε 和 μ 一般是复数： $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$, $\mu = \mu' + i\mu''$ 。根据介质的谐振子模型，永远有 $\mathrm{Im}\varepsilon = \varepsilon'' > 0$ ，对于磁导率也有类似的关系， $\mathrm{Im}\mu = \mu'' > 0$ 。复折射率 $n = n_1 + i\kappa$ （ $\kappa > 0$ ）。于是有

$$n_1 + i\kappa = \sqrt{\varepsilon\mu}$$

设耗散是一个小量（ $\varepsilon' >> \varepsilon''$ ， $\mu' >> \mu''$ ），则有

$$\begin{aligned} n_1^2 - \kappa^2 &\simeq \varepsilon'\mu' \ , \\ 2n_1\kappa &\simeq \varepsilon'\mu'' + \varepsilon''\mu' \ 。 \end{aligned} \tag{C.9}$$

利用 $\kappa > 0$ 、 $\varepsilon'' > 0$ 、 $\mu'' > 0$ 的限制，分析上述方程的解得知

1. $\varepsilon' > 0$ ， $\mu' > 0$ 时， $n_1 > 0$ ， κ 是小量；
2. $\varepsilon'\mu' < 0$ 时， $\kappa = \sqrt{-\varepsilon''\mu''}$ ，而 n_1 为小量；
3. $\varepsilon' < 0$ ， $\mu' < 0$ 时，则 $n < 0$ ， κ 为小量。

也就是说具有负的介电系数和负的磁导率的介质同时也具有负的折射率 n 。换句话说左手材料的折射率必须取负值，其物理根源还在于电磁波能量存在耗散的性质。

§C.3 左手材料的电磁性质

上面已经提到，电磁波在左手材料中传播时，坡印亭矢量与波矢量反向，这就意味着，能量是与波的前进方向逆向传播的。我们知道波矢量 k 代表的是相位传播方向，而能量以群速度传播，由此推理，在左手材料中将出现逆多普勒效应。见图 C.1 ， 假设在左手材料中有一辐射源，发出固定频率 ω_0 且固定相位的电磁波，当其迎着监测器相对运动时，监测器接受到的频率将会小于 ω_0 ，而不是像在常规介质中那样当波源迎着监测器相对运动时接受到的频率会增大。更有负折射现象。见图 C.2 。光从常规介质入射到左手材料的界面时，光线将折向界面法线的与入射光线相同的那一侧，即发生负折射现象。

对于平行于光轴入射的电磁波，利用常规的材料制成的凸透镜有汇聚作用，凹透镜则有发散作用。然而若用负折射介质材料，凸透镜反而会使入射平行光发散，凹透镜使平行光汇聚。利用这样的性质，利用一个平板状左手材料就可以构成所谓的完美透镜。如图 C.3 所示，考虑一个无限小电偶极子置于透镜跟前，选 z 为光轴，将它发出的电磁波沿 x - y 平面做二维傅里叶展开：

$$E(\vec{r}, t) = \sum_{\sigma, k_x, k_y} E(k_x, k_y) \exp[i(k_z z + k_x x + k_y y - \omega t)] \ , \tag{C.10}$$

对应其中每一个分量 (k_x, k_y) ，有

$$k_z = +\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k_x^2 - k_y^2} \ , \ \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 > k_x^2 + k_y^2 \ 。 \tag{C.11}$$

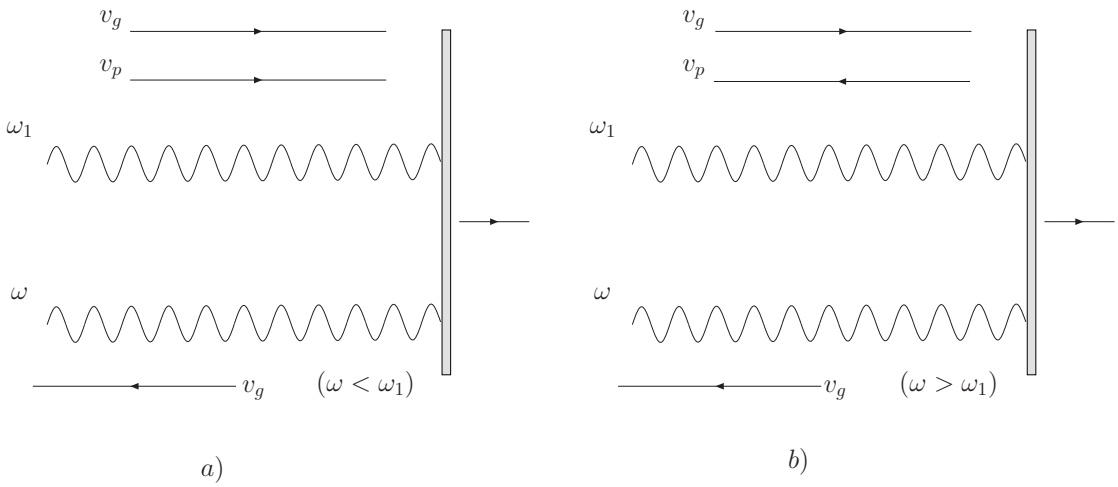


图 C.1: 一列电磁波垂直射向正相对于波源后退的边界。其中 v_g 代表群速， v_p 代表相速， ω_1 代表入射波频率， ω 代表反射波频率。 a ）正常材料中，反射波频率会[illegible]

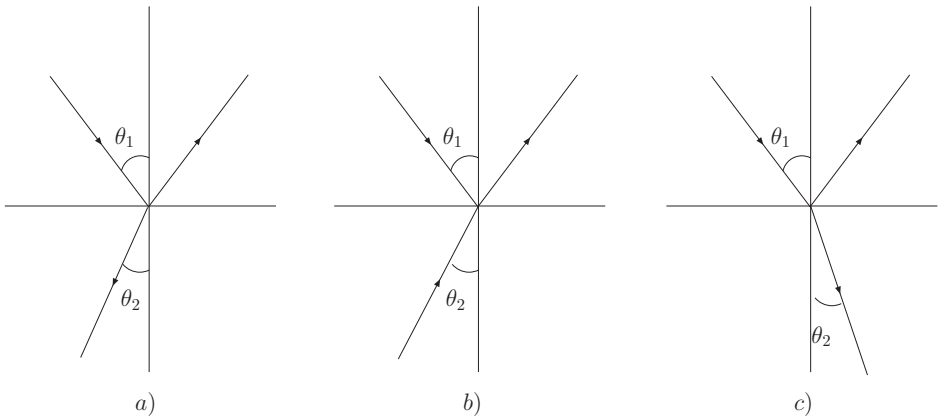


图 C.2: a ）从正常材料到左手材料能流的折射； b ）从正常材料到左手材料波矢的折射； c ）从正常材料到正常材料的折射。

透镜的作用就在于在一段距离以外再将这些分量重新集合起来. 但在这个过程当中，反映物平面细节信息的分量，也就是 k_x 和 k_y 的大分量丢失了，因为这时

$$k_z = +i\sqrt{k_x^2 + k_y^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2}\ ,\quad \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 < k_x^2 + k_y^2\ 。 \tag{C.12}$$

这些分量随将距离的增加而指数衰减，无法传播到像平面，只能在物点附近形成隐失场（ evanescent wave ）。因此光学透镜成像的分辨率总有一个可以和波长 λ 相比拟的极限。而左手材料透镜将不会丢失这些信息，会将所有能量，包括隐失场在内，完全复制到像点。这正是因为在 ε 和 μ 全为负值的时候，能流方向和波矢方向总是相反的，因而在这种介质内，

$$\begin{aligned} k_z &= -\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k_x^2 - k_y^2}\ ,\quad \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 > k_x^2 + k_y^2\ , \\ k_z &= -i\sqrt{k_x^2 + k_y^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2}\ ,\quad \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 < k_x^2 + k_y^2\ 。 \end{aligned} \tag{C.13}$$

如图 C.3 所示， 平板结构的负折射介质优点在于它们能够放大隐失波，这部分信

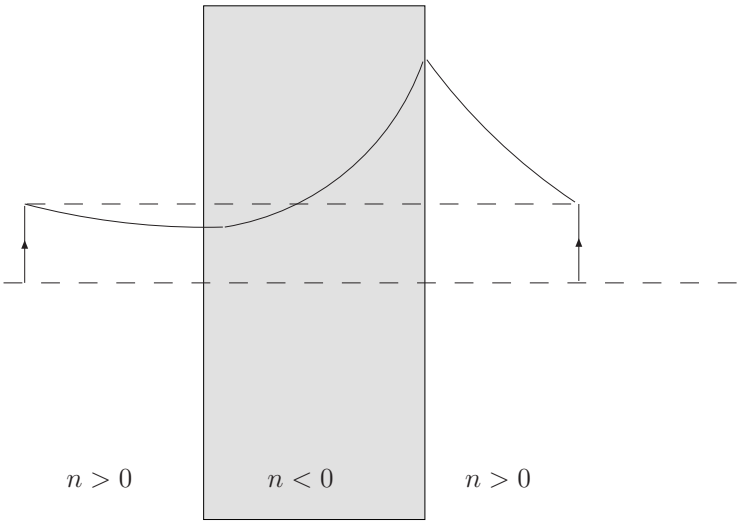


图 C.3: 负折射率介质透镜隐失场成分成像示意图。

息不会丢失，与传播 (propagating) 波同时复制到像点。从而还原了点光源辐射出的电磁波的所有分量的相位和振幅，极大地提高透镜成像的分辨率。这将在核磁共振成像、光存储和超大规模集成电路中的光刻技术等诸多方面得到应用。利用左手材料制成平板微波透镜被美国物理学会评选为 2004 年度国际物理学最具影响的研究进展之一。

近年来在实验室中成功地做出了左手材料，[5] 使得左手材料在固体物理、材料科学、光学和应用电磁学领域内受到了愈来愈广泛的重视。

[5]D. R. Smith，et al.，*Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity*, Phys. Rev. Lett.，2000，84：4184 — 4187。