目　录

序……1
前言……1
第一章　绪论……1
1.1　量子力学的成就……1
1.2　量子力学的解释……4
1.3　量子力学的教学……8
1.4　量子力学和哲学……13
第二章　量子力学的基本假设……20
2.1　引言……20
2.2　量子力学的基本假设……26
2.3　进一步的讨论……40
2.4　其他……55
第三章　从波动-微粒疑难到态函数的几率诠释……62
3.1　引言……62
3.2　de Broglie 波和 Schrödinger 的物质波……67
3.3　态函数的几率诠释……73
3.4　微观现象的统计性……80
3.5　几率幅的意义……97
3.6　小结……105
第四章　态叠加原理……110
4.1　经典物理学中的叠加原理……110
4.2　量子力学中的叠加原理……116
4.3　态叠加原理的非经典特征……123
4.4　态叠加原理的直接例证……133
4.5　态叠加原理的物理要求……146
第五章　不确定关系……154

5.1 不确定关系的提出……154
5.2 不确定关系的例子……160
5.3 不确定关系的证明……165
5.4 所谓"同时测量"……173
5.5 对γ射线显微镜的再考查……182
5.6 关于时间-能量不确定关系……189
第六章 态的概念……201
6.1 态的制备……201
6.2 态和测量……208
6.3 波包和经典近似……219
6.4 再谈经典对应……226
第七章 新近的一些进展……235
7.1 Bell 不等式及其检验……235
7.2 Aharonov-Bohm 效应……244
7.3 中子干涉术……251
7.4 光的相干性……259

第一章　绪　　论

1.1　量子力学的成就

非相对论性量子力学是在本世纪二十年代中期建立起来的一种物理学理论。在这个基础上，不久又陆续发展了相对论性量子力学和量子场论。为了与本世纪初叶的旧量子论相区别，我们把上面所讲的这些理论统称为量子理论。本书主要讨论非相对论性量子力学中的基本概念，然而它们同时也在相对论性量子力学和量子场论中具有根本的意义，虽然后面那些更高深的理论也许还需要一些深入一步的基本概念。所以，可以认为本书的主要内容适合于整个量子理论。然而，作为初步的讨论，本书只在个别章节里提到相对论性量子力学和场的量子化等有关问题，而不做详细讨论。

大家知道，量子力学理论起初是为解决原子光谱问题的需要而发展起来的。例如，氢原子光谱(Balmer 系)公式的动力学推导，以及在电场和磁场影响之下这些谱线的分裂结果，乃是关于量子力学最早的令人信服的有力证据。后来，又相继解决了氦原子、氢分子等的能级以及各种光谱线强度的计算等等，为整个原子和分子光谱以及化学键的理论打下了坚实的基础。

可是，由于现代光谱测量技术的不断改进，很快发现了非相对论性量子力学的一些缺点。就拿最简单的氢原子来说，先是发现了对同一主量子数 n 的能级的精细结构，即按不同总角动量 j 的

能级分裂，这一事实很快在Dirac的相对论性电子理论里得到圆满解释。后来，又发现了更进一步的“Lamb 移动”，即解除了对总角动量 j 的能级简并。例如，对 $n=2$ 的 $P_{1/2}$ 和 $S_{1/2}$ 两子能级之间约有 7.0×10^{-7}eV 的裂距，折算成相应的(微波)辐射频率的精确测量值是[1]：

$$1057.862(20)\text{MHz},$$

括号内的若干位数字表示测量值最后若干位数字的误差。这一能级移动在量子电动力学里得到很好的解释。

据说，在光谱学实验里最精确的测量数据，要算氢原子基态($n=1$)的超精细结构(核自旋 $F=0$ 同 $F=1$ 之间)的裂距了，它的频率数值是[2]：

$$1420.405751768(1)\text{MHz}.$$

可是，这一长串十三位有效数字，目前只有前五六位数字得到理论上的验证。如果我们注意到，精细结构常数 $\alpha=e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$ 最近公认的测量值[3]

$$\alpha^{-1}=137.03604(11)$$

的精确度只有 10^{-6} 的数量级，上面所讲的这种理论预言值同实验测量值两者有效数字位数的重大差别，就可以得到理解了。可见，即使氢原子问题，也不是那么简单的。

量子力学可以说明原子的不同能级之间发生跃迁的选择定则，并且从跃迁几率的计算得出光谱线的强度以及有关状态的平均寿命或衰变宽度等结果。虽然理论值的精确度不象上面两个例子那么高，但也足以对付一般不超过三四位有效数字的这方面的实验数据了。

至于原子核和粒子物理学，它们一开始就建筑在量子力学和量子场论的基础之上，在这些领域内的一切成就，都应归功于量子理论。

此外，在凝聚态物理学等方面，也早已广泛地运用了量子理论。在这方面，量子力学除了作为有效的基础理论方法之外，还陆续发现了诸如超导、超流、Josephson 效应和量子 Hall 效应等，直接在宏观水平上显示出量子行为的"宏观量子现象"[4]。至于量子力学在化学、生物学等学科的成功应用，就不一一列举了。

以上所提到的，多是关于束缚态的量子理论。束缚态是系统能量较低因而只能局限在一定空间区域内的状态。相反的情况是散射态，那是系统的不同成员可以分离到无限远的情形。量子理论可以计算出各种散射过程的总截面或反应率，以及不同的微分截面，即散射产物对于不同的能量、出射角度和自旋(极化)的分布等等。

现代物理学的发展，使散射问题所占的比重变得愈来愈大。人们耗费巨大的财力物力，建造一台又一台的高能加速器，为的就是通过对各种散射过程的研究，不断深入探索物质之间的相互作用。甚至化学家们也已经开始运用散射过程来研究化学反应的性质。李远哲等在这方面进行的分子束实验，新近获得了最具权威性的承认——1986 年 Nobel 化学奖，就是一个明证。

在物理学方面，一个很好的例子是电子反常磁矩的存在。大家知道，Dirac 的相对论性电子方程，预言了电子的内禀磁矩是一个 Bohr 磁子。后来，发现了电子磁矩比 Dirac 值约大 1/1000，这多出来的就是"反常"部分。现在，电子磁矩的精确数据，就不是来自束缚态，而来自对自由电子的测量。它的最新实验值是(以 Bohr 磁子为单位)[5]

$$1.001\ 159\ 652\ 209(31).$$

根据量子电动力学、即处理电磁相互作用的量子场论方法，计算出的电子磁矩是[6]

$$1.001\ 159\ 652\ 460(127)(43).$$

上述数据后面第一个括号，表示由所采用的精细结构常数的新观察值[$\alpha^{-1}=137.035963(15)$]的误差($\approx 10^{-7}$)所产生的误差；第二个括号表示计算过程本身所产生的误差(实际上，测量和计算的都只是反常磁矩部分)。我们看到，观察值和理论值在两个标准差的范围内相符合。电子反常磁矩在10^{-7}量级上的符合，被认为是现代物理学理论的最精确检验之一。尽管如此，物理学家们仍然为这组数据最末两三位数字的差异绞尽脑汁，希望找出合理的说明。

以上扼要叙述了今天的量子理论运用的范围和它能解决哪些类型的问题。至少，这些就是在一般的量子力学教科书里所涉及的主要内容。微观粒子的行为必须用量子理论来描写，而宏观物质的性质又是由组成它们的微观粒子的结合和运动决定的。所以，可以毫不犹豫地讲，原则上整个物理学都属于量子物理学，包括量子统计物理学在内。虽然，对于复杂的系统，还有许多细节需要弄清楚，有效的计算技巧也需要不断改进，但基本的理论工具无疑就是量子动力学，量子理论的基本概念就是我们了解物理世界的钥匙。

除了量子力学在物理学各分支的应用外，还进行着对量子力学理论体系本身的研究。除了其中所用到的数学方法以外，主要指对量子力学基本原理和基本概念的探讨，这些正是本书要讨论的主要内容。这种讨论并不是空洞的纸上谈兵，已经设计了好些实验来检验量子力学的一些基本假设是否正确，其中有些试验已经得出了比较明确的结果[7]。所以，我们在对量子力学理论体系进行一般讨论的同时，还着重介绍近年来完成的这一类实验的若干进展。

1.2 量子力学的解释

上一节扼要地叙述了量子力学的运用范围和它所取得的成

就。而量子力学本身，同任何物理学理论一样，不外指它的一套数学表达形式以及对这套数学形式的物理内容的解释。这里的数学形式指理论的整个数学体系和结构，为方便起见，我们有时把它简称为量子力学的程式(formalism)。虽然量子力学的数学表达可以采取几种不同的方式，例如 Heisenberg 的矩阵力学、Schrödinger 的波动力学以及后来 Feynman 的路径积分等等，但已经得到证明，这几种表达方式都是互相等价的，它们含有相同的一些基本概念。我们以下主要使用最经常运用的 Schrödinger 形式。

物理学家们对于量子力学的数学程式都抱着肯定的态度。这就是说，他们都采用一些同样的数学式子，通过相同或等价的运算，得出一致的结果。可是，他们对这套程式的理解是很不相同的。事实上，从六十年前量子力学诞生之日起，一直到现在，都存在着关于量子力学解释的没有停息过的激烈争论。

这也难怪。正象 Engels 当年所讲："大多数人进行微分和积分，并不是由于他们懂得他们在做什么，而是出于单纯的相信，因为直到现在得出的结果总是正确的。"[8]量子力学的情况也是如此。当初 Schrödinger 建立后来以他的姓氏命名的波动方程时，根本没弄清楚其中的 ψ 函数是个什么东西。仅仅由于从这一方程解出了正确的氢原子能级等结果，人们才相信它是对的。事实上，Schrödinger 一直坚持认为，ψ 代表一种象电磁波那样的、在三维空间中传播的真实的物理波动，一颗颗的粒子不过是这种波动的凝聚、即波包的体现。他用大小不同的电子轨道正好容纳整数个驻波的条件去说明氢原子的不同状态，企图用波的干涉和共振等性质去说明一切，摒弃象粒子、跃迁和定态那样的基本概念。[9,10]

在 Born 提出 ψ 函数的几率诠释，即将 ψ 看做几率幅从而把它的模方 $|\psi|^2$ 认做是粒子波发现的几率（密度）之后，绝大多数

物理学家都接受了这种诠释，并且有效地推广运用到例如散射等问题中去。

然而，企图在经典物理学框架的基础上建造起量子力学理论的种种努力并不因此就消声匿迹了。Schrödinger 对他的电磁波式的"唯波动论"至死不悔。后来又有 Landè 别树一帜，主张一种"唯粒子论"，不承认有什么基本的波动性质。[11]此外，还存在着形形色色的企图用流体力学或者随机过程等方法，来将量子力学还原为经典理论的尝试，至今仍然不衰。[11]

另一方面，既然承认了 ψ 函数的统计意义，或者象 Born 早年所宣称的那样："量子力学只回答适当提出的统计问题，关于个别现象的问题是不说什么的。"[12]那么，我们的认识是否到此为止了呢？我们在量子力学里了解到的统计规律后面，是否还存在着更深刻的、主宰着个别粒子运动的规律呢？是不是还有一种隐藏在更深层次的变量决定着个别粒子的运动，而现今的量子力学只反映了对大量这样的运动的统计规律呢？依照这种想法，已经提出了有名的"隐变量理论"。此外，还有古怪的"多世界理论"等等，不一而足。[11]

我们首先应该肯定，任何时候都不可能有充分的根据断定某一种理论是最后的理论或终极的真理。不论是闯入崭新的层次或者退到原先的领地，深入一步的探讨都会是有益的。不过，如果目前还没有可能进行适当的实验工作来判明它们谁是谁非的话，那些五花八门的解释是没有必要在教学中加以介绍的。事实上，在一般的量子力学教科书里，很少提到上面所说的几种量子力学的非正统解释。我们只在本书第七章里介绍对隐变量理论的实验检验。

ψ 函数的几率诠释是经得住考验的一种具有基本意义的诠释。在这一基础上逐渐形成了量子力学的统计解释，它主张量子

力学只解决对大量测量结果的统计平均或统计涨落问题，一般说来无法对单次测量的结果做出预言。于是，很自然地有人从经典统计物理学里搬过来统计系综的概念，认为量子力学里的波函数(态矢)的描写对象是由许多处在相同物理条件下的系统为成员而组成的系综，而不是个别物理系统。

上面已经提到，其实 Born 在一开始提出 ψ 函数的几率诠释时就抱有这种观点。1936 年，Einstein 更明确地声言："ψ 函数所描述的无论如何不能是单个系统的状态；它所涉及的是许多个体系，从统计力学的意义来说，就是'系综'。"[13]Born 后来多次表示同意 Einstein 的这种看法。例如，Born 这样说过："Einstein 认为，如果假定 ψ 函数同系综而不是同单个事例相联系的话，就可以把'几率性'的量子理论看做最终的理论。这也一直是我的假定，并且我将一个实验的多次重复看成是系综的实现。这同实验物理学家们的实际步骤是严格相符合的，他们正是通过对相同的一些实验的数据积累而获得他们在原子和亚原子领域内的数据的。"[14]

虽然这种统计观点早期曾受到著名物理学家 Langevin 和 Slater 等人的支持，但终究敌不住 Bohr 和 Heisenberg 等大师们关于量子力学还可以对单个微观过程的结果做出预言这种占着主流地位的所谓"哥本哈根学派"观点的势力，因而没有引起太多的注意。在我国，恐怕还是由于五十年代初期统一采用的 Blokhintsev 的《量子力学原理》教科书里关于量子力学统计系综的论述，[15] 方才在物理学界里产生了广泛的影响。

其实，早在三十年代，Popper 就在《科学发现的逻辑》一书中[16]，对 Bohr 和 Heisenberg 等主张不确定关系是对单个过程测量结果的限制这种看法提出了责难，并且几十年来一直坚持和发展了自己的观点。[17]后来，Margenau、Bunge 和 Bohm 等人也相

继对哥本哈根学派关于量子力学可以预言个别系统行为的传统解释展开了全面的批评[18]。我们将在论述不确定关系的意义的第五章里，再来详细讨论这些问题。

在这里我们着重指出，近一二十年来，量子力学的统计解释不再是一些个别人的意见，而是已经成为一种不可忽视的观点，并且在国际物理学文献上占有重要的地位。按照被认为具有代表意义的 Ballentine 的说法：[19]量子力学的统计解释主张："一个纯态提供了对由同样地制备出来的一些系统所组成的系综的某些统计性质的描写，而不一定提供对一个别系统的完全描写。"与之相对立的观点可以叫做量子力学的非统计解释，这种解释主张"一个纯态提供了对一个别系统的完全和穷尽的描写。"

Ballentine 认为，量子力学的统计解释是"包含了量子理论所有可证实预言的、接近于最省事的一种解释。"而非统计解释则"对量子理论来说是不必要的，它还会导致一些严重的困难。"[19]已经有愈来愈多的物理学家表示同意 Ballentine 这种基本看法。[20]而比较经济省事的概念体系，无疑是每一位理论课教师所刻意追求的。然而，在大多数量子力学教科书里，仍然沿用着几十年前的传统解释。在本书里，我们将以量子力学的统计解释为基础，系统地分析量子力学教学上经常遇到的基本概念，并且着重讨论同传统的非统计解释之间的分歧。

1.3 量子力学的教学

上面说过，为计算出可与实验数据相比较的能级、跃迁率和散射截面等结果所需要的量子力学的数学程式，是得到大家共同承认的。所以，在这些方面的叙述，在各种量子力学教科书里没有多大实质性的不同，有的只是深浅、粗细、宽窄、繁简和巧拙等等具体的差别。当你从一本教科书那里掌握了一个问题的推导和演算之

后，再换本别的书看，你会发现一般是大同小异的，有时你会为了见到一些巧妙简捷的推理而欣悦，但很难看到互相抵触的方法和结果。

可是，在量子力学基本概念的叙述上，不同的教科书各有千秋，莫衷一是。例如，有的教科书从波动-粒子二象性讲起[21]，有的从不确定原理讲起[22,23]，有的则从叠加原理讲起[24]；此外还有什么互补(并协)原理，对应原理等等，随时都会冒出来。此外，教科书里还常常概括出量子力学的几条基本假设[25,26]。那么，这些不确定原理、叠加原理、对应原理、互补原理和波粒二象性等等，彼此之间有些什么关系呢？它们究竟是完全互相独立的还是哪怕在一定程度上互相包含的呢？还有，这些原理同后来概括的几条基本假设之间又有什么关系呢？这种种纵横交错的疑问，每每使初学者如堕五里雾中，而成为理解量子力学的严重障碍。

狭义相对论里虽然也存在着一些超越日常经验的基本概念，如象同时的相对性等等；但它的逻辑结构还是比较清楚的。Einstein 把狭义相对论的出发点概括为光速不变原理和相对性原理这两条基本假设，并且条理清楚地从这两条基本原理推演出整个理论体系来。相形之下，量子力学的理论体系就显然既不精炼又不干净，一些重复甚至多余的命题被当做必不可少的基本假定，其效果只能是掩盖了理论的精髓所在。

譬如，量子力学里首要的概念是什么？关于这个问题，曾经有过几种不同的答案。大家知道，Bohr 坚持认为量子力学里最本质的概念是由波动-微粒二象性而引伸出来的“互补原理”，这已成为正宗哥本哈根解释的出发点。至于 Heisenberg，他当然认为自己所提出的不确定原理是具有根本意义的，但也说过在他创立的矩阵力学里首次出现的非零的对易关系“对于量子力学是头等重要的。”[27]在 Dirac 早年的文章里，我们也读到有“以力学变量不遵

守乘法交换律的假设为基础的新量子理论"[28]这样的话。那时候，他刚刚得意地找到了量子对易关系的经典对应物——Poisson括号，自然会对它们有一种偏爱之情。直到六十年代初期的讲演中，在讨论基本的量子概念时，Dirac仍然把坐标和动量之间的对易关系当做第一个基本的假设[29]。

可是，仅仅过了几年之后，年近古稀的Dirac竟勇敢地宣布他改变了自己的观点。在1970年的一次讲话里，他说道："不可对易性果真是量子力学主要的新概念吗？以前我一直认为是的，但近来我开始怀疑，并且开始猜想：从物理学的观点来看，也许不可对易性并不是唯一的重要观念，说不定另有某种更深一层的观念，量子力学在我们通常的概念中引起的某种更深一层的变革。……我相信，几率幅这个概念也许是量子理论的最基本的概念。""如果要问量子力学的主要特征是什么，我现在倾向于要说：这个特征并不是不可对易代数，而是几率幅的存在，它乃是一切原子过程的基础。"[30]

啊！这就是Dirac经过漫长几十年的反复思索所得出的结论。我们由衷的敬佩他这种不断追求真理的严格科学精神。我们还注意到，1972年Heisenberg在题为《量子论历史中概念的发展》的一次发言中，并没有着重讲不确定原理和对易关系，他讲的中心论题是态的概念。其中讲到：量子力学里"态的定义，对自然现象的描述作了一个巨大变革，或者如Dirac所说是一个巨大的跳跃。""它是只有在量子力学和波动力学发展了以后才能理解的概念。"[31]看来，量子力学的创始者们后来并不都是墨守成规固步自封的。我们要向他们学习的正是这种毕生探索不止的精神，而不应当把他们早期的一些论点当做是僵死凝固的信条。

Feynman一贯主张几率幅是量子力学里最重要的基本概念。他在1948年那篇提出路径积分方法的文章里，就是从讨论几率幅

的概念开始的[32]。1951 年在一次关于数理统计和概率论的会议上所做的题为《量子力学中的几率概念》的报告中，Feynman 明确表示，量子力学里不可对易性并不是最基本的新发现，“更基本的是，发现了在自然界中几率组合的定律并不是在 Laplace 经典概率论中的那种规律。”[33]1961 年，他在概括量子力学的原理时又说：“首先我们讨论量子力学的观念，这主要指几率幅的概念，并且强调指出，其他的东西……多半都是这一概念的结论。”[34]

Feynman 才二十几岁时，年长的 Wigner 就赞扬过：“他是第二个 Dirac，只是这一个时代的人物。”[35]Feynman 的挚友 Dyson 曾经这样描写过：Feynman“是个极有独创性的科学家。他不把任何人的话当真，这就意味着他得自己去重新发现或发明几乎全部物理学。为了重新发明量子力学，他专心致志地工作了五年。他说他不能理解教科书中所教的量子力学的正规解释，所以他必须从头开始，这实在是个壮举。”[36]的确，对于喜欢刨根问底的读者说来，流行的教科书里关于量子力学基本原理的某些阐述，往往是经不住推敲的。在 Feynman 的眼里，这一问题是那样严重，以至于他断言道：“我想我可以放心地说，没有谁理解量子力学。”[37]

Feynman 不迷信任何权威，他独立地从头钻研全部量子力学的结果，一方面写出了可供我们借鉴的对量子力学原理独树一帜的讲法；另一方面，基于对几率幅叠加的研究，他发展出继 Schrödinger 的波动力学和 Heisenberg 的矩阵力学之后，量子力学的第三种表达形式——路径积分方法。还有使他获得 1965 年 Nobel 物理奖的、著名的量子场论 Feynman 图方法，也无疑地得益于他对量子力学的基本研究。

Feynman 关于量子力学基本概念的系统阐述，除了在《物理学定律的特征》[37]里的通俗讲解以外，主要见于他的《物理学讲义》第三卷[38]和专著《量子力学和路径积分》[33]。Feynman 的这

几本著作在六十年代中期接连出版之后，其中关于量子力学原理的陈述引起了广泛的注意。我们觉得，Feynman 的陈述形式事实上筛去了常见的一些对量子力学数学程式说来可有可无的“原理”和“假说”，可能确实是一种比较接近于最省事的教学方案。

Feynman 在这几本书里，都从对几率和几率幅的讨论开始，这种讲法同量子力学的统计解释显然是彼此相容的。我们十分欣赏 Feynman 这种别出心裁的简洁表述，觉得它可以作为我们进一步仔细琢磨的基础。

量子力学是这样地超出人们的日常思考习惯，以致于被认为是最难于理解的一种理论。既然如此，对于量子力学概念的深入研究，对它的理论体系另辟蹊径的表述，甚至把它还原为经典规律的努力，都不仅是允许的，而且对于加深对量子理论的理解，都会是有益的。话说回来，在量子力学的教学中，我们没有必要提倡每名学生都必须去专门钻研基本概念问题。对于大多数学生讲来，晓得怎么样运用就算不错了。在上一节里我们讲过，对于量子力学有过五花八门的解释，关于它的概念基础仍然是物理学期刊里长盛不衰的论题，并且已经出版了为数不少的专著，我们没有力量也没有可能在这里做详尽的介绍。

然而，象任何一门基本理论一样，量子力学毕竟不仅仅是一套计算的工具，它还是我们对自然界规律的一种理解。因此，也象任何一门基本理论的教学一样，在引进这门理论特有的新概念时，必须使学生有机会了解这些新概念的深刻含义，并且对学生启发进一步思考的途径。正是在这种意义上，我们努力为量子力学介绍一套比较清楚而简洁的概念系统，同时对各种教科书上经常提到的一些基本原理或基本假设进行整理，尽量弄清楚它们之间的关系，并且适当介绍近年来国际上对有关问题讨论的发展，特别是一些重大争议的情况，希望能对这些方面的教学和研究提供一点有

益的帮助。

1.4 量子力学和哲学

量子力学和相对论的出现，不仅给现代物理学提供了强有力的理论武器，促进了自然科学的发展，而且也对人们的世界观发生了深远的影响。特别是量子力学由于深入到微观领域而呈现的全新特征，在主客观的区分和联系，因果性和决定论，以及场和物质的观念等等一系列的哲学问题上引起了活跃的讨论。各个派别的哲学家们都希望成功了的自然科学理论给他们提供有利的论据，从而强调他们那派的观点对于自然科学研究是必不可少的。而一些功成名就的物理学家也跃跃欲试，到处发表从新理论得到启迪的哲学议论，甚至象 Bohr 那样去创立一种新的“互补哲学”。到了近年，不仅哲学家，而且更广大的社会科学界，例如历史学家、社会学家等等，都已经开始热衷于谈论量子力学里的新观念同他们学科之间的联系了。

然而，虽然本书作者对于物理学的哲学问题不无兴趣，却不想在这方面展开。这本书讲的是物理学本身，主要为了说明教学中出现的概念问题。况且，谈到哲学观点，分歧或模糊之处可能太多。例如，人们常讲的“哥本哈根解释”或“哥本哈根学派”，就没有一个明确的界限。上面已经引述过，被公认为这个学派主要代表人物 Bohr、Heisenberg、Dirac 和 Born 等人，在好些基本问题上的观点各不相同；而且，即使是同一个人，前后所讲的话也会有很大的差别。正象 Jammer 所讲的那样：“哥本哈根解释不是一组单纯、明晰而清楚的确定观念，而是由一些彼此相关的观点凑合而成的一个笼统称谓。……它可以，而且已经被许多背道而驰的哲学观点的信徒们所接纳；从严格的主观主义和纯粹的唯心主义，经由新康德主义、批判实在主义，一直到实证主义和辩证唯物主

义。”[39]既然如此，我们在下面将尽量避免使用“哥本哈根学派”或“哥本哈根解释”这些称呼，也不拟分析其中的哲学意义。我们有时提到量子力学的“传统解释”，指的是在五十年代初期以前，在大多数流行的量子力学教科书里所习惯采用的具体讲法。

当然，任何人都不可能完全弃绝哲学思维。一般说来，一位自然科学家如果不热心信奉什么哲学观点，那么在他正确地处理科学工作的时候，所使用的就是一种朴素的哲学。用辩证唯物主义大师的话说来，就是自然科学家的“自发唯物主义”或者“自然科学的唯物主义”[40]。这种自然科学家的自发而朴素的哲学观点，经常被哲学家们视为“庸俗哲学”，即不那么精细、不那么深刻的哲学。其实“庸俗”一词，撇开指低级趣味的贬义不谈，它的本义就是平庸和通俗，平庸和通俗固然失之粗浅，但却是大量存在着的东西。譬如，就是“下里巴人”，只要是正派而健康的，例如有些流行音乐，不也是大量存在着并且受到普通群众的欢迎吗？

对量子力学的哲学观点的分歧，集中表现在对测量问题的看法上。按照Bunge的分类[41]，他把大多数物理学家对这一问题所持的朴素而自然的态度称之为“教科书哲学”即“朴素操作论”，或者更直接的“朴素实在论”（这一名称听起来同“自发的唯物主义”差不多）。这两种观点都认为微观物理学的测量过程是自明的而不需要专门的测量理论。Bunge把他自己的系统观点称为“批判实在论”，与其相对立的则是以Bohr为代表的“严格哥本哈根观点”和以von Neumann为代表的“标准观点”等等。

测量理论是一块尚未成熟且远未取得一致意见的研究领域。除了已臻成熟的量子力学数学程式所必需的一些基本假设之外，不同的测量理论必定要加上各种额外的假设。例如，在“标准”的测量理论里，就需要有“波包编缩”这个独立于量子力学所必需的基本假设之外的附加假设。因为在教科书里常常提到波包编缩这

个问题，我们将在第六章里对它做简单的讨论。除此以外，我们在本书里基本上不涉及测量理论。

我们不想武断地说测量理论是徒劳无益的，但我们觉得那是深入一步的钻研，在一定的程度上是可以而且应当同现阶段的量子物理学区分开来的。绕开这一块还没有弄清楚的研究领域，并不妨碍我们就量子力学教科书上所涉及的内容，或者说对物理学所研究的绝大多数问题，进行理论和实验这两方面的比较。上面说过了，广大的物理学家凭着他们朴素的实在论信念或者还有直觉的实证论方法，一直就是这样走过来的。事实上，在测量理论里讨论的常常是一些虚拟的"思想实验"或者专门设计来检验某些基本假设的物理实验。还没有听说因为未曾学过测量理论，而对运用量子力学所解决的实际问题，发生过理论同实验错误比较的例子。关于这个问题，Wichmann 就曾经讲过："公正地说，物理学家，除了他们讲授关于这一主题的引论教材外，很少想过量子力学中的测量理论。"[42]

其实，大多数物理学家不仅持有平庸而通俗的哲学观点，而且也运用着平庸而通俗的数学方法。例如，对付一个无穷级数，数学家首先要证明其收敛性，否则是无意义的；而物理学家只要看到这级数一项比一项小，就禁不住先拿前面几项甚至一项"领头项"去同实验比较。又譬如，对一种方程，数学家首先要弄清楚它的解的存在性和唯一性等等，而物理学家更关心的是找到它的合乎需要的解。所以，如果数学家指责物理学家用的是"庸俗数学"的话，物理学家们也不必为此感到羞愧。历史上，象 Dirac 的 δ 函数，就曾经历过由不被数学家承认的无定义的地位上升为严格的广义函数的进程。应当看到，数学和物理学虽然从不同的角度研究问题，但两者确有互相补充和互相促进的关系。

物理学同哲学也应当有这种关系。自然科学本身有它的发展

规律和检验标准，不需要哲学来充当裁判员和辩护人。哲学应当从自然科学的发展吸取丰富的养料，不断进行新的概括，才能保持自身的活力。自然科学无疑应当从正确的哲学原则中得到启迪和指引。但这种指引不应当是教条式的。Born 在评论关于光的二象性的一种看法时说道："Newton 的正命题("光是由微粒所组成")，和Hwygens的反命题("光是由波所组成")构成了对立面，直到两者在量子力学这个综合体中统一起来。这都是很好而无所争论的，虽则有点浅薄。"[48]我们不准备在本书里把物理学问题概括成这种"浅薄"的哲学论断。我们宁可采取接近于就事论事的方法去阐明有关的物理学内容，不怕被认为只有平庸的哲学。

总之，象纯粹数学的研究很值得尊敬一样，对于量子力学测量理论的研究和对其中哲学问题的研究，也是很值得尊敬的。特别是，怎么样正确运用辩证唯物主义的观点，剖析现代物理学所揭示的自然界的新规律，这方面的工作迫切需要物理学家和哲学家的合作。这是一项严肃的任务，超出了本书的范围，这乃是我们不在这方面展开讨论的主要原因。

另一方面，如果哲学家们要谈论物理学的哲学问题，特别是谈论现代物理学的哲学问题的话，那么只了解庸俗的物理学是肯定不行的。事实上，上文提到的一些有造诣的科学哲学研究者，如 Popper、Margenau、Bohm 和 Bunge 等人，都受过严格的物理学训练，大多得过物理学的高级学位，本身就已经是够资格的物理学家，然后再去从事哲学研究。如果只凭对物理学的一知半解就去大发议论，其结果只能是既糟蹋了物理学，又败坏了哲学。

所以，作者希望，本书讲的首先不是庸俗的物理学。这样，除了可以对量子力学这门课程的教学有所裨益之外，还可以帮助物理学界以外的读者，弄清楚量子力学到底是怎么回事。

参 考 文 献

[1] W. E. Lamb, R. C. Retherford, *Phys. Rev.* **72** (1947), 241。此处数据引自: D. A. Andrews, G. Newton, *Phys. Rev. Lett.* **37** (1976), 1254.

[2] 引自: C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Quantum Mechanics*, John Wiley (1977), p. 1232.

[3] Particle Data Group, *Phys. Lett.* **170B** (1986), 1.

[4] 参阅: D. Rogovin, M. Scully, *Phys. Reports* **25** (1976), 175; 曹烈兆, 物理 **7** (1978), 198; 庞小峰, 自然杂志 **5** (1982), 254; 管惟炎, 物理 **14** (1985), 193.

[5] H. M. Foley, P. Kusch, *Phys. Rev.* **73** (1948), 412; 此处数据引自[3].

[6] 据 M. Bordog, *Phys. Lett.* **171B** (1986), 113, 所引 T. Kinoshita 和 W. B. Lindquist 的结果。

[7] 参阅: F. M. Pipkin, in *Advances in Atomic and Molecular Physics*, Vol. 14 (1978), pp. 281—340.

[8] 马克思恩格斯全集, 第 20 卷, 人民出版社 (1971), 96 页。

[9] 参看 M. Born, *Physics in my Generation*, Pergamon (1956); 中文版: 我这一代的物理学, 侯德彭等译, 商务印书馆 (1964), 147—157, 169—181 页。

[10] 又参看: M. Jammer, *The Philosophy of Quantum Mechanics*, John Wiley (1974), pp. 24—33.

[11] 参看[10], Chapters 2、7、9、10.

[12] 见[9], 15 页。

[13] 爱因斯坦文集, 第一卷, 许良英等编译, 商务印书馆 (1976), 366—367 页。

[14] The Born-Einstein Letters, Walker (1971), p. 210.

[15] Д. И. Блохинцев, 量子力学原理, 叶蕴理等译, 高等教育出版社, 上册 (1956); 下册 (1959)。据 1949 年俄文版译出。

[16] K. Popper, *The Logic of Scientific Discovery*, Basic Books (1959)。据 1935 年德文版译出。中文本: 科学发现的逻辑, 查汝强,

邱仁宗译，科学出版社(1986)。
[17] K. Popper, *Quantum Theory and the Schism in Physics*, Rowman and Littlefield (1982).
[18] 见[10]。
[19] L. E. Ballentine, *Rev. Mod. Phys.* 42 (1970), 358.
[20] F. J. Belinfante, *Measurement and Time Reversal in Objective Quantum Theory*, Pergamon (1975), Chapter 1.
[21] A. P. French, E. F. Taylor, *An Introduction to Quantum Physics*, Thomas Nelson (1978).
[22] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics*, Pergamon (1958)；中文版：量子力学，上、下册，严肃译，人民教育出版社(1980).
[23] W. Pauli, *General Principles of Quantum Mechanics*, Springer (1980)。据 1958 年德文版译出。
[24] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford (1930)；中文版：量子力学原理，陈咸亨译，科学出版社(1965)，据 1958 年英文第四版译出。
[25] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, McGraw-Hill (1968)；中译本：量子力学，人民教育出版社(1982)，§ 10.
[26] 见[2], Chapter III.
[27] W. Heisenberg，量子论的物理原理，王正行等译，科学出版社(1983)，92 页，据 1930 年德文版译出。
[28] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* A114 (1927), 243.
[29] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Field Theory*, Yeshiva Univ. (1966), § 2.
[30] P. A. M. Dirac, *Fields and Quanta*, 3 (1972), 139；又载：*The Past Decade in Particle Theory*, E. C. G. Sudarshan, Y. Ne'eman ed., Gordon and Breach (1973), pp. 747—772。中译文载：现代物理学参考资料，第三集，科学出版社(1978)，37—44 页，许良英译。
[31] W. Heisenberg, in *The Physicist's Conception of Nature*, J. Mehra ed., D. Reidel (1973), pp. 264—274；中译文载：现代物理学参考资料，第三集，科学出版社(1978)，9—15 页，侯德彭译。
[32] R. P. Feynman, *Rev. Mod. Phys.* 20 (1948), 267.

[33] 见: R. P. Feynman, A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill (1965), p. 2; 中文版: 量子力学与路径积分, 张邦固, 韦秀清译, 科学出版社 (1986)。

[34] R. P. Feynman, *Theory of Fundamental Processes*, Benjamin (1962), p. 1.

[35] S. S. Schweber, *Rev. Mod. Phys.* **58** (1986), 449.

[36] F. Dyson, 宇宙波澜, 陈式苏等译, 上海科技文献出版社 (1982), 60—61 页。

[37] R. P. Feynman, *The Character of Physical Law*, MIT (1963), p. 129.

[38] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. 3, Addison-Wesley (1965).

[39] 见[10], p. 87.

[40] 列宁全集, 第 14 卷, 人民出版社 (1957), 292, 366 页。

[41] M. Bunge, *Philosophy of Physics*, D. Reidel (1973), § 3. 1.

[42] E. H. Wichmann, 量子物理学, 复旦大学物理系译, 科学出版社 (1978), 325 页。

[43] 见[9], 276 页。

第二章　量子力学的基本假设

2.1 引　言

一般量子力学教科书多数先从历史的角度开始，介绍上世纪末本世纪初经典物理学所面临的危机，说明建立新的物理学理论的必要性；同时分别介绍原子光谱、黑体辐射、光电效应、电子衍射等等实验现象，再从这些方面的归纳，引出一套量子力学的基本原理来。

本书不是一本教科书，其目的在于讨论和整理量子力学的基本概念。所以，我们不采取归纳而采取演绎的方法来叙述量子力学的原理。我们着重于讨论这些原理的物理学内容，为了使初学者读起来不会感到困难，我们在基本的陈述里只使用普通必需的数学表达，而尽量避免运用较深奥的数学工具。我们也不去专门发挥这些基本概念里所可能含有的哲学意义，这已在上一章里讲清楚了。

本章要讨论的量子力学的基本假设，指的就是在量子力学通常应用的范围，例如在教科书里所涉及的范围内，为了计算出可与实验比较的结果，所需要用到的一套量子力学的数学程式以及它同物理学事实的对应所依据的一组作为理论出发点的基本假设。这组基本假设是整个理论体系的前提，人们常常称之为公设（postulate），以同为了解决具体问题所作的假设或假定（hypothesis，assumption）相区别。

在公理化的理论体系里，也把作为逻辑前提的这些少数基本假定或公设称为公理(axiom)，整个理论体系，都必须能够从这一组公理通过演绎而推导出来。在各种自然科学理论里，经常出现的情况是，理论开始创立的时候主要着眼于能够建造起一座完整的理论大厦，不大注意逻辑上的简洁性。结果，在所提出来的理论体系里，往往包含有一些互相重复的、意义暧昧的甚至是完全多余的基本假定。与此同时，理论的创立者们也常常在运用直观的具体论证之后，缺乏根据地推广为一般性的结论，从而隐蔽了暗含着的进一步的假设。例如，长期以来被认为具有无懈可击的逻辑严密性的 Euclid 几何学，早就被证明存在着种种逻辑上的毛病[1]。

量子力学的理论体系也不例外。因为量子力学是经过经典物理学阶段而发展起来的。它的创始者们不可避免地仍然使用一些经典的概念或者同经典物理学的比拟，例如波粒二象性和对应原理等等。当时这样做是可以理解的，因为他们手中暂时还缺乏全新的概念体系。但这种情况毕竟只是过渡时期的产物，新的理论体系应当建立在新的概念基础之上，不应该老是停留在旧理论的阴影下面。

我们在本章里要做的工作，就是整理出几条量子力学的基本假设，主要阐述它们的物理学内容，也包含了必要的数学表达，以及它们之间的逻辑关系的讨论。可是，我们要做的不是严格的公理化的理论体系，而只是对量子力学理论结构所必须的基本假设的一般性的概括。为了适于教学的需要，常常需要反复讨论一些重要的定义或假设，以及一些未经严格定义的基本概念的意义。所以，我们并不夸口说要拿出一套逻辑上最节省的概念体系，而只是写出人们常常采用的一套比较节省的基本假设，并且对一些更加节省的可能性进行简单的讨论。至于对量子力学理论体系的逻辑学研究，包括建立一套公理化体系的工作，已经形成了一门叫做

"量子逻辑"的研究领域[2]，不属于我们讨论的范围。

现代的科学哲学早就弄清楚了，每一门基础学科，总要从一些未加定义，或者无法精确定义的基本概念开始；除非是空洞的同义反复，否则不可能先严格定义好几个作为出发点的原始概念，然后通过逻辑演绎建立起一套天衣无缝的理论体系来[3]。因此，我们在陈述量子力学的一组基本假设之前，先要对几个未加定义的原始概念进行初步的讨论。它们是：物理系统、力学变量和态。

首先是物理系统的概念。本来，物理系统就是物理学所研究的客观对象，好象不应该有什么问题。我们知道，宏观系统是由大量微观粒子组成的，量子力学就是一种微观领域的动力学理论，凭它可以研究微观粒子的运动和相互作用，并从此导出宏观物质的性质。所以，量子力学的研究对象就是由微观粒子组成的物理系统。这一系统可以仅含少数甚至一两个粒子，也可以含有大量的微观粒子。

那么，问题又来了。什么是微观粒子？说到这里，我们只好假定大家都对此有足够的经验，以达到恰当而一致的理解。但是要提醒一下，我们虽然把这些对象叫做粒子(particle)，但它们不是经典物理学里的质点或者微粒(corpuscle)，我们不可以预先设想它们具有经典质点的性质。例如电子、质子、光子等等，都是量子理论研究对象的微观客体，它们取了什么什么"子"的粒子名称，但却远不是经典微粒(实际上，在量子力学理论里并没有把电磁场当做光子处理，详细讨论见第 7.4 节)。

为了强调微观粒子同经典微粒的差异，曾经有人为量子力学的研究对象专门创造出新的名词，叫做什么 wavicle(波动粒子)或者 quanton(量子粒子)[4]。我们觉得没有必要那样做。因为，随着科学的不断进步，好些名词都已经更改了原先的意思。所以，只要赋予了新的意义，并不妨碍我们继续使用那些旧有的名词。不

过为了明确起见，下面我们一般把微观物理学研究的对象称为粒子(particle)，而将经典物理学里哪怕是宏观尺寸很小的颗粒称为微粒(corpuscle)。这样，谈到微粒性就代表经典物理学里对质点的描写，包括有确定的运动轨道，可以明确地辨认等等。而微观粒子的精确描写，需要例如静止质量、电荷、自旋、宇称……等等的一组特征值(量子数)，并不需要具有经典微粒的其他一些性质。

这里提到的质量、电荷、自旋、宇称等等，常被称为在量子力学里描写物理系统或微观粒子所需要的各种力学变量(dynamical variable)。力学变量就是我们在陈述量子力学基本假设之前引进的第二个未加定义的原始概念。与力学变量意义相近的，还有可观察量(observable)的概念。可观察量这一名词是 Dirac 最先引进来的，他的原话是："我们称那些其本征态组成完全集的力学变量为可观察量。于是，任何可以测量的量都是可观察量。"[5]可见，可观察量是从力学变量引伸出来的一个概念，它的定义要用到本征态等等知识，我们觉得，它是不适宜于作为一个作为量子力学出发点的基本概念的。事实上，在许多教科书里没有严格遵从上述 Dirac 对可观察量的定义，只是笼统地把可观察量当成力学变量的同义词来使用。在一些著名的教科书里，只使用力学变量的概念，根本没有提到可观察量这一概念。[6,7]所以，我们认为在力学变量之外，没有必要再引进可观察量这一概念。至于可观察量这种叫法所受到的直接批评[8]，我们就不再细说了。

什么是力学变量？Dirac 书上的说法是："力学变量意指……经典力学借以建立起来的那些变量。"[9]这也是有问题的。首先应当指出，并不是所有经典物理学里的物理量都对应于量子力学里的力学变量。例如，在经典物理学里，特别突出地表现在相对论里，空间坐标和时间变量的地位是平等的，它们都是基本的物理量，而且可以合并成一个四维矢量。可是，在现今的量子理论里，

空间坐标依然是力学变量，而时间不是。在量子力学里，时间具有特殊的地位，它是描写任何系统演化进程的一个普适的参数，而不是描写每个系统物理性质的力学变量。时间当然可以被测量，但它不是“可观察量”，而只是在观察中指示过程演进的一个参量。这样，在相对论里争得同空间坐标平等地位的时间变量，在量子力学里又落到了一个特殊的位置。我们将在第五章比较详细地讨论这个问题。在这里我们限于指出，力学变量原意不是描写机械运动的量，而是“动力学变量”，本身就含有随时间而变化的意义。那么，把描写这种变化的时间参数不计入力学变量，就是一件很自然的事了。

其次，应当强调，描写一个物理系统需要多少个力学变量，原则上没有什么限制，特别是不受对这一系统的经典描写的限制。例如，很简单的一个质子，在经典力学里，只有固有质量和固有电荷这两个特征量。在量子理论的描写里，质子还具有固有的角动量——自旋。自旋角动量是人们发现的第一个不可以用经典的坐标和动量等力学变量表示的量子理论特有的力学变量。随着粒子物理学的发展，我们又陆续给质子添上了重子数、超荷、粲数……等一串可加量子数，同时又有空间宇称、同位旋宇称等反演量子数和同位旋、幺正旋等推广的“角动量”。由此可见，没有什么先验的原则来决定描写一个质子需要多少个量子数，或者对应于这些量子数的多少个力学变量。事实上，我们对物理系统的描写的复杂程度，取决于我们对它们认识的深入程度。谁也不能说，我们今天已经走到了认识的终点。就已经达到的认识说来，我们看到，在量子物理学里，微观粒子活动的舞台比在经典物理学里宽广得多，不是普通的三维空间所包容得了的。只要有需要，就不仅可以在原有的空间自由度内引进新的力学变量，而且可以扩充到前所未闻的、同旧的空间自由度完全独立的新的自由度、新的空间，以及引进在

新的空间自由度内的全新的力学变量。这就是量子理论里的力学变量同经典理论里的物理量之间的实质性差别。

我们要讨论的最后一个原始概念是态的概念。这也是一个很难预先精确定义的概念。如上所述，Dirac 对可观察量的规定需要用到态的概念。更常见的一种做法是，用一组力学变量的取值(本征值)来规定一个特殊的状态。实际上，具体先引入态还是先引入力学变量，都是可以的。我们在这里把它们一起作为未经严格定义的原始概念先拿出来，在讨论量子力学基本原理的过程中反复对它们加深理解。

量子力学用 Schrödinger 方程里的 ψ 函数来描写系统的状态。起初谁也不知道 ψ 是个什么东西，只是因为 Schrödinger 方程形式上同经典物理学的波动方程很相象,所以把 ψ 叫做波函数，这个名称一直沿用到现在。当然,还可以把 ψ 函数当做是 de Broglie 波的波函数,Schrödinger 正是在这一概念的基础上提出他的方程的。可是,当时 de Broglie 和Schrödinger 对于这种同物质粒子(电子)相联系的波动,持着不同的解释。直到 Born 的几率诠释提出来之后，才确定 ψ 函数是发现粒子的几率幅；微观粒子的状态,就是由几率幅 ψ 来描写的。所以,在下面我们一般把 ψ 叫做态函数而不用波函数的叫法。

必须强调,量子力学里的态函数 ψ,同经典物理学里描写系统的状态方程有着根本的区别。在经典物理学里，总是通过系统的一些不同物理量之间所满足的确定关系,来描写物理系统的状态。例如，描写质点简谐振动的 $x=A\sin(\omega t+\varphi)$，描写理想气体的 $pV=NRT$ 等等状态方程，都是用有关的物理量所满足的关系来表示系统的状态及其变化。然而，量子力学里的态函数 ψ 本身不是力学变量，它不具有任何经典物理学中的物理量的意义。

可以说,这一点是量子理论里最惊人的特征,是掌握量子力学

基本概念的关键。系统的状态并不由物理量之间的关系直接确定，态函数本身并不是物理量。如果按照经典物理学的习惯，认为 ψ 函数描写一种物理波动，或者把对于物理量的种种要求强加到 ψ 函数身上，就难免要生出许多不必要的麻烦来。量子力学的所有神秘之处，所有理解上的障碍，都同这一点有密切的关系。

既然态函数本身不描写物理量之间的关系，那么态函数的演化也不直接描写物理量随时间的变化。在这种意义上说来，态好象是某种超越于物理世界的东西。态函数确实是超越于经典物理学的，但它却是量子理论里首要的概念。态本身不是物理量，但它提供了各种力学变量的取值及其变化的知识。关于这一点，最好的办法是先不要问为什么会是这样，而简单地把它接受下来。用 Feynman 的话说就是："谁也不知道它怎么会象那个样子。"如果一定要钻牛角尖，那就会"陷进谁也逃不出来的死胡同里去。"[10]

以上对物理系统、力学变量和态这几个原始概念做了初步的讨论，主要目的在于强调它们同经典物理学概念的区别。做了这些准备，下一节我们就将详细陈述量子力学的基本假设。以上的讨论不是什么定义，我们也不认为在陈述作为理论出发点的基本假设之前，有可能对任何基本概念作出严格的定义。我们说过，对这几个原始概念的认识，需要反复讨论、逐步深入。特别是对于态的概念，我们将在第六章再作进一步的详细讨论。

2.2 量子力学的基本假设

从物理系统、力学变量和态这几个原始概念出发，就可以构造出一套量子力学的基本假设。为了把注意力集中在其中的物理学内容上，我们尽可能简化数学表述，采用一种简明的陈述方式。下面要介绍的一套量子力学的基本假设，基本上以 Margenau 的讲法[11,12]为蓝本，细节上做了一些改动，并且进行我们自己认为适

当和必要的说明和讨论。

对量子力学的理论体系作出公理式的表述，首先要归功于 von Neumann 在二十年代末的工作[18]。后来，他把这些工作，总结在《量子力学的数学基础》这本已成为经典的著作里[14]。von Neumann 的公理体系比较抽象，以 Hilbert 空间的数学为基础，又包含了我们不准备接受的"波包编缩"假设。因而，我们比较倾向于 Margenau 的比较简单明瞭的一套公理基础。事实上，这是被绝大多数物理学家承认并且使用的一套起码的基本假设。例如，在我国广为流行的由国内外作者撰写的不同的几本教科书[15-17]，都明确地概括出同 Margenau 的陈述实际上彼此等价或者非常接近的一些基本假设。既然如此，我们并不认为以下的陈述是一成不变、无法改动的。采用以上所指的几本教科书中任何一本里的基本假设，对本书以下的讨论不会产生实质性的影响。

量子力学的基本假设可以概括为一组五条公设的形式：

公设(I)　描写物理系统的每一个力学变量都对应于一个线性算符。

算符代表施加在态函数上的一种数学运算，运算的结果得到另一个态函数。例如，算符 A 作用在态函数 ψ 上，结果得到另一个态函数 φ。用式子表示，就是

$$A\psi=\varphi. \tag{1}$$

首先要注意的是，这里把态函数同力学变量的地位截然分开来了。力学变量表现为对态函数施加作用的算符，而不直接是描写态函数的变量。这样，就给对态函数的解释留下了余地，也引起了无穷的误解和争议。

其次，既然每个力学变量总同一定的算符相对应，我们常常对它们不加区分，使用同一个符号去表示，运用同一个名称去称呼它们。例如，坐标 r、动量 p，还有角动量 J 等等，这些符号都可以同时

表示有关的力学变量以及同它们相对应的算符。有一个例外是，与系统能量E相对应的算符，称为哈密顿算符H，这是由经典力学传下来的叫法。至于时间t，上一节已经讲过，它不是量子力学里的力学变量，因而没有对应的算符表示。

不同的算符所施行的运算，可以是对态函数简单地乘上某一函数，可以是对态函数的微分运算，也可以是以矩阵形式表示的某种变换，包括连续的和不连续的变换，例如在坐标空间中的平移、转动和反射、反演等等，还可以是在自旋空间和同位旋(电荷)空间中的运算……。至于如何确定与每一力学变量相对应的算符的具体形式，是通过一些特定的具体假定而实现的。这一部分内容不必放到基本假设(公设)里面去。

最后，线性算符的意思是，算符对态函数的运算是线性的，或者说算符对态函数施行的是线性变换。设算符A作用在态函数ψ_1和ψ_2上，分别得到φ_1和φ_2，即$A\psi_1=\varphi_1$，$A\psi_2=\varphi_2$；那么，对线性算符A总有$A(\psi_1+\psi_2)=\varphi_1+\varphi_2$。再普遍些，设$c_1$和$c_2$是两个任意(复)常数，算符$A$是线性的条件是

$$A(c_1\psi_1+c_2\psi_2)=c_1A\psi_1+c_2A\psi_2. \qquad (2)$$

上面举例的乘以一指定函数或者施行微分等运算，都明显地是线性运算，所以表示这些运算的算符就是线性算符。假使有一个算符A，它作用到态函数ψ上，结果得到ψ的平方，即$A\psi=\psi^2$，那样的算符就不是线性的，它不满条件(2)，在量子力学里用不到那样的算符。

公设(II)　每次测量一个力学变量所得到的结果，只可能是与该力学变量相对应的算符的所有本征值当中的一个。

算符A的本征值是由下述本征值方程决定的：

$$Au_n=\alpha_nu_n \qquad (3)$$

式中常数α_n称为算符A的本征值，而u_n则为相应的本征函数，n

为本征值的序号。α_n 的取值可能是连续的，也可能是不连续即分立的。当 α_n 取分立值时，它的数目可以是有限的，也可以是无限的。

由于公设(II)规定了算符的本征值同相应力学变量的可能测量值之间的直接对应，而任何物理量的测量值总是实数，这就要求与力学变量相对应的算符只能有实数的本征值。

在详细讨论这一点之前，我们首先指出，公设(II)之所以有意义，在于它隐含了算符的分立本征值、亦即相应力学变量测量值的"量子化"现象的存在。反过来，如果象在经典物理学里那样，每个粒子的坐标、动量和角动量等等力学变量的每个分量，都是可以连续变化的；如果没有受到外界约束的话，上述每个力学量的分量的取值范围都布满了从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的整条实数轴。在那样的情况下，公设(II)就变成一种平庸的陈述。换句话说，只有当力学变量的每次测量值的范围比实数轴要小时，才有必要通过公设(II)那样的规定来对可能的测量值加以限制。

为了下面的需要，我们先介绍一下内积的规定。在 Schrödinger 图象里，任意两个态函数 φ 和 ψ 的内积即标(量)积定义为

$$(\varphi, \psi) = \int \varphi^* \psi \mathrm{d}\tau. \tag{4}$$

式中 $\mathrm{d}\tau$ 为积分的相空间体积元。星号表示复数共轭，因为量子力学里的态函数一般是复函数。

容易验证，由(4)式定义的内积满足以下诸条件：

$$(\psi, \psi) \geqslant 0, \tag{5a}$$

$$(\varphi, \psi) = (\psi, \varphi)^*, \tag{5b}$$

$$(\varphi, c_1\psi_1 + c_2\psi_2) = c_1(\varphi, \psi_1) + c_2(\varphi, \psi_2), \tag{5c}$$

其中 c_1 和 c_2 为任意复常数。由(5b)和(5c)两式还可导出

$$(c_1\varphi_1+c_2\varphi_2,\psi)=c_1^*(\varphi_1,\psi)+c_2^*(\varphi_2,\psi). \qquad (5d)$$

当内积的定义不取(4)式的积分形式而取例如矩阵形式的其他形式时，条件(5a)—(5d)仍然成立。

算符 A 的伴随算符、或称厄密共轭算符记为 $A^\dagger$，它是由下式定义的，

$$(\varphi,A\psi)=(A^\dagger\varphi,\psi). \qquad (6)$$

这里 φ 和 ψ 仍是任意的两个态函数。如果对任意的 φ 和 ψ，算符 A 都满足条件

$$(\varphi,A\psi)=(A\varphi,\psi), \qquad (7)$$

则称 A 为厄密自共轭算符，简称厄密算符。

令(7)式里的 $\varphi=\psi=u_n$，并运用本征值方程(3)和内积的性质(4)或(5)，便可求得

$$\alpha_n=\alpha_n^*, \qquad (8)$$

即厄密算符的本征值必为实数。这是厄密算符的第一个性质。于是，由上面所讲公设(II)所暗含的用具有实本征值的算符去描写力学变量的要求，就自然都选用厄密算符同力学变量相对应。

厄密算符的第二个性质是它的相应于不同本征值的本征函数的正交性。证明如下：

设厄密算符 A 的本征值 $\alpha_m\neq\alpha_n$，取(7)式中的 $\varphi=u_m$，$\psi=u_n$，运用本征值方程(3)和实本征值条件(8)，以及内积的性质(4)或(5)，便得

$$\alpha_m(u_m,u_n)=\alpha_n(u_m,u_n),$$

于是有

$$(u_m,u_n)=0, \quad \text{当 } \alpha_m\neq\alpha_n. \qquad (9)$$

这就是本征函数组的正交条件。

为了方便起见，我们对每一个本征函数乘上适当的常数，使它与自己的内积为 1：

$$(u_n, u_n) = 1. \tag{10}$$

这步手续叫做归一化。这样做显然不会影响对 u_n 来说是齐次的本征值方程(3)的有效性。最后，我们可以把正交性条件(9)和归一化条件(10)合在一起，写成

$$(u_m, u_n) = \delta_{mn}. \tag{11}$$

这就是厄密算符的本征函数组所满足的正交归一关系。

一般说来，对应于 A 的一个本征值 α_n，可以有不止一个独立的本征函数。对应于同一本征值的线性无关的本征函数的数目称为简并度，记为 d。$d>1$ 时，我们称相应的本征值是简并的。在这种情况下，也总可以把那 d 个简并的本征函数适当地重新组合，使它们仍然满足象(11)式那样的正交归一关系。所以，我们的讨论对简并和非简并的情况都是适用的。不过，为了简单起见，如未特别声明，以下讲的都是非简并情况，对于简并的情况，只需要有时对具体的表述做些补充就可以了。

另外，我们以上所讲的都是分立本征值，或者说本征值只有分立谱的情况。考虑内积的定义(4)，这种情况下的归一化条件(10)式，实际上要求分立谱本征函数 u_n 是平方可积的。可是，连续谱的本征函数一般不是平方可积的，因而写不出(10)式那样的归一化条件。因此，对于本征值只有连续谱，或者分立谱和连续谱兼而有之的情况，归一化条件等等要做一些修改。也是为了简单起见，以下的讨论基本上是对分立谱的情况来讲的，但这些讨论原则上也适用于连续谱的情形。况且，在一般的教科书里都不难找到含有连续谱时的修改了的表述形式，我们就不再一一写明了。

厄密算符的第三个，也是我们要在这里讲的最后一个性质是：厄密算符的本征函数组一般是完备的。完备性是指，任意一个具有足够良好连续行为的态函数 ψ，都可以表示为由这些本征函数适当组合起来的和：

$$\psi = \sum_n c_n u_n. \tag{12}$$

这种展开式可以看做是 Fourier 级数的推广。利用正交归一关系(11)，容易求出(12)式里的展开系数是

$$c_n = (u_n, \psi), \tag{13}$$

从而把(12)式重新写成

$$\psi = \sum_n (u_n, \psi) u_n. \tag{12'}$$

细心的读者也许已经注意到，我们对厄密算符本征函数组的完备性，叙述得不那么干脆利落。这正是在一般量子力学教科书里的笼统而含糊的讲法。这里面有两个问题。第一，并不是所有态函数，而只是"连续行为足够良好"的那些态函数，才可以进行(12)式的展开。所谓连续行为，包含 ψ 函数本身以及它的一些低阶微商的连续性，也许还要满足一定的边界条件。关于这点的严格数学陈述，请参看有关的文献[18]。我们在这里只是提醒一下，即使在大家比较熟悉的 Fourier 级数展开里，也对被展开函数的连续性和边界条件有一定的要求。

第二个问题常常被物理学家们忽略。这就是自伴算符同厄密算符之间的微妙差别。自伴算符一定是厄密算符，而厄密算符不一定是自伴算符。数学上可以证明，满足某些条件的自伴算符的本征函数组是完备的，亦即是可以提供一种"本征函数展开"的基[19]。而对于厄密算符，就没有相应的定理。所以，在一些比较严格的陈述里，同力学变量相对应的是自伴算符而不是厄密算符。例如，在 Dirac 的书里，先说对应于力学变量的是自伴算符[20]；但后来又说，要从数学上决定一个力学变量的本征函数是否完备因而满足他的"可观察量"的条件，"往往是非常困难的"。因此，Dirac 只好"合理地假定"，上述条件总是被满足的，"虽然缺乏数学上的

证明”[21]。这确实代表了大多数物理学家所采取的实际态度。事实上，自伴算符同厄密算符之间的差别，以及本征函数展开的条件等等数学问题，不是几句话能够讲清楚的。在一般情况下，我们采取物理学上认为合理的马虎做法，也不会有什么大问题。可是，在处理例如半轴上或者球坐标径向上的动量算符时，就会因为不注意数学上的严格性而出现一些意想不到的麻烦[22]。因为本书讲的是量子力学的概念基础而不是它的数学基础，我们只限于指出这方面存在着些什么问题，有兴趣的读者请参阅有关的文献。

让我们小结一下。公设(I)把力学变量同算符对应起来，只是一种抽象的理论命题，还没有同经验事实发生什么联系。公设(II)开始同物理学测量挂上了钩。注意这里并未述及测量过程的性质，而只是一般地假定力学变量的测量值谱就是相应算符的本征值谱。对于测量过程自然有许多值得研究的东西。但是，承认了公设(II)，也可以在把理论结果同实验数据相比较的时候，暂时不去理会或者有意回避诸如测量过程中仪器对系统的干扰，测量前后系统状态的具体变化，甚至人的意识在测量过程中的参预等等棘手的问题。下面也是一样，我们将尽量避开那些在量子力学基本假设里没有提到或者同它们没有直接关系的内容，集中讨论那些对量子力学数学程式必不可少的东西。

公设(II)同经验事实的联系只是初步的。因为，它所规定的力学变量测量值的谱，只是一种一般的可能性，还不是具体的现实性。为要了解处在确定状态的物理系统的具体性质，还必须知道测量值在规定的谱上是怎么样分布的。这就使我们进到更重要的公设(III)。

公设(III)　当系统处在态ψ时，对与算符A对应的力学变量进行足够多次的测量，所得到的平均值$\langle A\rangle$是ψ与$A\psi$的内积$(\psi, A\psi)$同ψ与自身的内积(ψ,ψ)的商：

$$\langle A\rangle = (\psi, A\psi)/(\psi, \psi). \tag{14}$$

平均值也称为期待值。同一般的平均值公式一样，(14)式右方的分母(ψ, ψ)只是一个归一化因子。我们通常使用已经归一化的态函数ψ，它满足

$$(\psi, \psi) = 1. \tag{15}$$

对归一化了的ψ，(14)式具有较简单的形式：

$$\langle A\rangle = (\psi, A\psi). \tag{14'}$$

公设(III)的实质是引进了与经典决定论有别的统计决定论的概念。我们只在公设(II)里为单次测量的结果假定了一般的可能取值。而在为确定现实的具体测量取值的公设(III)里，只对多次测量结果的平均值做了假定，对单次测量的具体取值没有再做出任何假定。

为了显示平均值的统计意义，我们将(14')式里的ψ按(12')式展开，运用本征值方程(3)和本征函数的正交归一关系(11)，得到：

$$\begin{aligned}(\psi, A\psi) &= \sum_m \sum_n (\psi, u_m)(u_m, Au_n)(u_n, \psi) \\ &= \sum_m \sum_n (\psi, u_m)\alpha_n \delta_{mn}(u_n, \psi) = \sum_n |(u_n, \psi)|^2 \alpha_n.\end{aligned} \tag{16}$$

根据公设(II)，每次对A的测量值总是α_n当中的一个。那么，在(16)式最后的求和式里，很自然把α_n项的系数$|(u_n, \psi)|^2$理解为测量力学变量A而得到结果α_n的几率。如果我们把这一几率记为w_n：

$$w_n = |(u_n, \psi)|^2, \tag{17}$$

就可将(16)式改写为

$$\langle A\rangle = \sum_n w_n \alpha_n. \tag{18}$$

这里所说的几率，即指多次测量中α_n出现的相对频度(relativefre-

quency)，它同实验工作里对多次测量值取平均的做法是一致的。

以上的说明，本质上就是 Born 对态函数的统计诠释。为了得出这一诠释的通常形式，我们再在普通空间(坐标表象)里把这过程演出一次。

设 $\psi(x)$是用坐标 x 表示的态函数(为简单起见，只取一维情形)，即坐标表象中的态函数。在这一表象里，力学变量 x 的本征值方程(3)取下述形式：

$$x\delta(x-\xi)=\xi\delta(x-\xi)$$

本征值 ξ 取整个定义域上的连续分布，本征函数是 $\psi_\xi=\delta(x-\xi)$。将 ψ_ξ 代入(17)式，求得测量粒子坐标 x 取 ξ 值的几率(确切地讲，对连续谱说来是几率密度)是

$$w_\xi=|(\psi_\xi,\psi)|^2=\left|\int\delta(x-\xi)\psi(x)dx\right|^2=|\psi(\xi)|^2. \quad (19)$$

这样，就直接给出了 ψ 函数的模的平方表示发现粒子的几率（密度)这一基本的解释。根据这一解释，ψ 函数便赋有几率幅度的意义。如果说，在公设(I)和(II)里，态函数起的作用还不那么明显的话，公设(III)则明确地肯定，态函数就是几率幅。这一个在量子力学里最要紧的新概念的地位，就这样确立起来了。

对于单粒子系统说来，以上(I)—(III)三条公设实际上已经组成了量子力学的主要的甚至是全部的概念基础，亦即量子力学本质上区别于经典物理学的全部理论前提。谈到这里，本来可以暂时停下来，先对以上三条公设的意义进行较深入的讨论，并且得出一些有益的推论来，好些教科书就是这样做的[23]。然而，为了叙述的完整性，我们先介绍完同以上三条公设也许结合得不那么紧的其余两条公设，下一节再来做进一步的讨论。

公设(IV)　态函数随时间的演化，遵从 Schrödinger 方程

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi \quad H\psi. \quad (20)$$

其中的H是系统的哈密顿算符。

一种经常遇到的情况是，哈密顿算符不显含时间参数t，即

$$\frac{\partial}{\partial t}H=0 \tag{21}$$

的情形。这时，通过分离坐标变数q(它可以包括普通空间的坐标变数和自旋坐标变数等等)和时间变数t，可以将满足Schrödinger方程(20)的态函数$\psi(q,t)$写成

$$\psi(q,t)=e^{-iEt/\hbar}\psi_E(q), \tag{22}$$

式中的ψ_E仅含坐标变数q，它满足方程

$$H\psi_E(q)=E\psi_E(q). \tag{23}$$

上式称为定态Schrödinger方程，实际上即哈密顿算符的本征值方程，它的解$\psi_E(q)$是定态函数，对应的本征值E即系统的能量。

公设(Ⅳ)的实质在于确认系统的能量算符也负责系统随时间的演化。换句话说，哈密顿算符H负有双重的任务，它既通过(22)式确定系统的能量，又通过(20)式决定系统的演化。

在经典力学里，例如在Hamilton正则运动方程或者Poisson括号等形式的动力学方程里，我们已经见到过哈密顿函数的形式决定了系统的演化，对这一点不应当感到陌生。在量子力学里真正惊人的不是Schrödinger方程的形式，而是满足这一方程的主体。试回忆一下，在经典力学的Newton运动方程或者Hamilton正则方程里，满足方程的是质点的坐标或者还有动量；在流体力学里我们为密度和速度等等物理量建立运动方程；在电磁学里处理的是电场和磁场满足的运动方程……。经典物理学的所有基本动力学方程，描写的都是各种不同的物理量的演化规律。在Schrödinger方程里，满足方程的主体竟然是一个非物理量的几率幅ψ，这是一次真正的飞跃。在量子理论里，不是象在经典力学里那样为质点的坐标和动量建立起动力学方程，因此原则上无从谈论粒

子运动的轨道。在量子力学里，满足动力学方程的是几率幅 ψ，了解了系统的哈密顿算符和初始时刻的几率幅，就可以通过 Schrödinger 方程解出 ψ 函数随时间的演化。所以，在量子力学里有直接因果依赖的是几率幅 ψ，而不是任何象粒子坐标和动量那样的力学变量。因此，对于这些力学变量来说，只存在着一种与几率幅描写相配合的统计决定论。我们接受了 Schrödinger 方程，就不要老是想把经典运动的因果性概念硬套到微观粒子头上来。

Schrödinger 方程(20)，是非相对论性量子力学的基本动力学方程，其中的哈密顿算符，在单粒子情况下具有形式：

$$H=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V, \tag{24}$$

其中 $\hbar$ 是 Planck 常数，m 是粒子质量，∇^2 是三维 Laplace 微分算符，V 是势函数。

将(24)式代入(20)，可见 Schrödinger 方程的形式同经典物理学里的波动方程很相似。它们也存在着许多相似的解。例如，都有平面波或球面波等等形式的“行波解”，也有满足一定边界条件的“驻波解”；又如，量子力学里动量本征函数的箱归一化问题，同谐振腔里的电磁波问题具有相同形式的解等等。因此，在 Schrödinger 方程建立之初，人们就把它称为量子力学里的波动方程，同时把 ψ 函数称为波函数。

由 Schrödinger 方程(20)和(24)式，还可以推出相关的守恒定律，即“几率守恒定律”

$$\frac{\partial}{\partial t}w+\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0 \tag{25}$$

其中的 w 和 $\boldsymbol{j}$ 分别是几率密度和几率流密度：

$$\begin{aligned} w&=\psi^*\psi,\\ \boldsymbol{j}&=\frac{i\hbar}{2m}(\psi\nabla\psi^*-\psi^*\nabla\psi). \end{aligned} \tag{26}$$

然而，必须强调，这里的 w 和 j 不是任何物理量的密度标量和流密度矢量，而只是粒子在某处存在和流动的几率。事实上，Schrödinger 方程的“行波”和“驻波”解，都不能当做物理量的波动，而只是描写了几率幅的空间分布和时间演化的行为。所以，我们完全没有必要把对于声波、光波、电磁波等等物理学波动的理解，照搬到态函数 ψ 上来。只要克服了那种习惯于经典概念的心理学障碍，不用任何你所熟知的东西去作简单的类比，而站在全新的概念基础之上，对量子力学的理解就不会有什么困难[24]。

对于单粒子系统或者所含粒子都不相同的系统，以上(I)—(IV)四条公设已经组成了一套完整的基本假设。对于含有两个或两个以上全同粒子的系统，还必须再加上第五条公设。

公设(V)　系统内任意两个全同粒子互相交换，都不改变系统的状态。

这一公设也称为全同性原理。它的意思是指，不可能辨认出全同粒子当中的任何一个，因为它们是完全一样的。这也是微观粒子在根本上不同于宏观物体的一个重要特征。

据说，Leibniz 有一次在给公主们讲哲学课时，断言世上没有完全相同的两片树叶。他这番话引得宫女们在御花园里到处搜寻，结果当然找不到两片完全没有差别的叶子。任何事物之间的差异性，绝对同一的不存在，确是宏观对象的一个重要特征。

古代的原子论就曾为此受到过责难。原子被设想成一些在虚空中不断运动并且彼此碰撞的微粒。那么，在经过许多次撞击之后，它们难道不会变得缺损甚至破碎了吗？一块由“崭新”原子组成的物质，经过一段时间之后，其中的原子必然都变得“残旧”了，它还能表现出从前那样的宏观性质吗？为了抵挡这种看来不无道理的批评，Newton 只好这样辩护说：“在我看来，上帝开始造物时，很可能先造结实、沉重、坚硬、不可入而易于运动的粒子……由于

这些原始粒子是实心的，所以它们比任何由它们合成的多孔的物体都要坚硬得无可比拟；它们甚至坚硬得永远不会磨损或碎裂；没有任何普通的力量能把上帝在他第一次创世时自己造出来的那种物体分裂。当这些粒子继续保持完整的时候，它们可以组成性质和结构在任何时期都是一样的物体；但是如果这些粒子可以磨损或者碎裂，那末由它们组成的物体的性质就将改变。"[25]

上面所讲这些对原子论的批判和反驳，不可避免地都是运用经典物理学的概念而进行的论证。而今，全同性原理宣告微观粒子总是崭新而不可辨认的，它永远不会陈旧；每个电子都是相同的，今天的电子也同昨天相同，哪怕它们经过了千百万次的碰撞。微观粒子没有新旧，没有阻尼，没有耗散，也没有冷热，那是一个全新的世界。全同性原理完全超越了经典物理学的观念，才解决了关于原子论的千载疑难。

全同性原理还包含了不可能给任何一个电子带上独特的标记，因而也不可能进行跟踪的意思，否则电子就是可以辨认的了。事实上，微观粒子的状态是由一组力学变量的本征值——量子数确定的。只要其中的质量、电荷、自旋、宇称、重子数、轻子数……等等一组内部量子数完全相同，我们就认为是同一种粒子，它们都是彼此一样而不可辨认的。

最后要强调的是，按照公设(V)，粒子的全同性表现在系统态函数的变换性质上，这也体现了量子理论同经典理论的根本差别。我们将在下一节进一步讨论这种态函数的交换对称性，现在先举一个经典全同性的例子。

设想有一对双生子要受到监视。他们的长相、举止、言谈和衣着等等都完全一样，侦探没有办法认出来谁是哥哥谁是弟弟。于是，侦探只能把他们不论是谁出现的次数都算在一起。假定他们的行动受同样一些规律支配的话，唯一的办法就是把总的出现次

数除以2，算做是每人出现的次数。实际上这就是一种出现几率的简单对称性。

可是，在量子力学的基本假设(V)里，规定的不是出现几率的对称性，而是态函数——几率幅的交换对称性。由此会产生出一些同经典情况差别很大的实际结果，我们在第四章讲到叠加原理时还要回过头来谈谈这个问题。

2.3 进一步的讨论

上一节写出了在一般的量子力学教科书里常见的几条基本假设。那些讲法是读者比较容易理解和接受的。还有一些程度较高的教科书和专论[26-28]，作了一些比较严格的陈述和仔细的讨论。

首先必须肯定，上一节列出的五条公设，对于建立量子力学的理论体系以及它同一般经验事实的联系来说，已经完全足够了。我们在这里暂时不讨论那些对上述目的来说不是必需的或者是重复的各种原理和假定，而是放到后面几章里进行逐个的分析。此外，仅仅搭起了基本框架，尚未能进行有效的工作，还必须再加上一些不可缺少的具体假设或假定，这一部分内容要在下一节里讨论。在这一节里，我们要讲的是对这五条公设的比较普遍或者比较严格的陈述，它们同一般原理的关系，以及它们之间是否在逻辑上完全独立等等。这样做，不可避免地要用到较多的数学工具，但我们只限于简单地提到存在着这些方面的问题，介绍有关的参考文献，而不详细展开诸如Hilbert空间、概率论和置换群等数学方法。还有，我们虽然尝试把这几条公设之间可能存在的从属关系整理得清楚一些，但决不是企图建立一个逻辑上最完善的公理式体系。并且，我们认为，即使能够建立起那样的公理体系，上一节里虽然不那么

完善的陈述方式，也许仍然是物理学家们、特别是初学者所乐意采用和接受的。

在公设(I)里，引进了线性算符的数学工具来表示力学变量。实际上，事情没有这么简单。这些算符作用在什么上面？它总要有个施展活动的舞台。上一节我们说了，算符 A 是作用在态函数上的，它按照一定的运算规则，把一个态函数 ψ 变成另一个态函数 $A\psi$。按照算符的这一基本特性，设有两个态函数 ψ_1 和 ψ_2，由算符 A 满足的线性条件(2)式，我们看到，受算符 A 作用的由 ψ_1 和 ψ_2 线性组合而成的 $c_1\psi_1+c_2\psi_2$，必定也是一个态函数；同时，算符 A 对这一个态函数作用的结果，即由 $A\psi_1$ 和 $A\psi_2$ 线性组合而成的 $c_1A\psi_1+c_2A\psi_2$，也必定是一个态函数。因此，由全体态函数组成的集合，或者叫做态空间，必定对于线性运算是封闭的。不然的话，线性算符的定义(2)式，将是无意义的。

线性空间是一种对线性运算闭合的空间。这样说来，线性算符 A 正是定义在由态函数 ψ 张开的态空间这个(复)线性空间之上的。线性空间的元素叫做矢量。于是，每一个态函数 ψ 就对应于线性空间中的一个矢量，"态矢"的名称就是由此得来的。

量子力学里的态空间不仅是一般的线性矢量空间。在这空间里，如上节所述，还定义了满足条件(5)的两个矢量之间的内积。量子力学里的态空间就是这样一个具有内积的线性矢量空间，或称内积空间。满足一定数学要求的内积空间叫做Hilbert 空间。所以，我们常说量子力学里的态空间是一个 Hilbert 空间。

以上只是一种粗略的说法，远不是严格的数学定义。关于量子力学里的态空间，即具有内积的复数线性空间的详尽讨论，可以参看 Dirac 的书。如果要了解关于 Hilbert 空间以及线性算符等等的较严格的数学描述，则要参考进一步的文献[28,29]。大体说来，对于分立本征值谱的情况，量子力学里的态空间就是数学家们所

说的 Hilbert 空间。但量子力学里还有稍为麻烦一点的连续谱情况，也已经得到妥当的处理，推广了 Hilbert 空间的概念，我们就不细述了。

总之，公设(I)的本质意义在于选定了量子力学的基本数学构造。我们在量子力学里面需要处理的是 Hilbert 空间里的态矢量和力学变量算符。线性空间里的矢量自然满足叠加原理，算符的运算是对态矢进行的，它们的乘法一般是不可交换的……等等，这些都是在 Hilbert 空间里的基本性质。所以，数学上比较严格的一种做法，可以在上节所述的五条基本假设之前，首先作出规定："系统的态用 Hilbert 空间中的一个矢量表示。"[30]或者，也可以将这一点归并到公设(I)里去，改写成[31]：

公设(I′)　物理系统的态由 Hilbert 空间中的矢量描写，力学变量由对这些态矢量施加作用的线性算符描写。

为了简单起见，我们在下面基本上不使用 Hilbert 空间的数学语言，尽量使用物理学上比较直观的叙述。但是必须清楚的是：第一，谈论算符必须明确它作用在什么空间上面；第二，既然态空间是一个线性的函数空间，那么态函数就必定表现出线性的叠加性质。这意味着，即使在公设(I)里没有明显说出态空间的性质，它都已经隐含了态叠加原理。因为，态叠加原理的核心，在于认定叠加的对象是态函数！关于这一点，我们还要在第四章里进行详细的讨论。

公设(I)或者(I′)规定了使用什么样的基本数学框架来描写量子力学里的物理系统。而公设(II)和(III)则是这套抽象的数学程式同物理学的经验事实发生联系的关键所在。后两条公设之间存在着密切的关系，因此我们把它们放到一起来讨论。

公设(II) 假定了力学变量测量值的谱就是同它相对应的线性算符的本征值谱。这一假定提供了反映分立的量子化能级以及其

他分立谱的可能性。由于力学变量的测量值总是实数，所以公设(II)实际上要求表示力学变量的必须是线性厄密算符，因为只有厄密算符才肯定具有完全是实数的本征值。有一些教科书把算符的厄密性要求明白地写进公设(I)里，而我们的做法则把这一要求暗含在公设(II)里，这一差别并不是实质性的。

公设(III)一般称为平均值公设，是对于同经验事实具体联系的进一步假定。很明显，只知道测量值谱是不够的，还必须知道系统处在不同状态时测量值的谱分布规律。在上一节里，我们对公设(III)的分析得到(17)式，并且根据公设(II)，知道这是一种几率性的规律。有些教科书不用平均值假定而直接用(17)式的几率规定来表述公设(III)，把它改写成[32]：

公设(III′)　当物理系统处在态 ψ 时，对与算符 A 对应的力学变量进行测量，每次测量的结果取 A 的某一本征值 a_n 的几率 w_n，等于 ψ 对 A 的本征函数展开式中相应于本征函数 u_n 那项的系数 (u_n, ψ) 的模方：

$$w_n = |(u_n, \psi)|^2. \tag{17}$$

由于公设(III′)是从公设(III)，利用了公设(II)而推出来的结论；因此，承认了公设(II)之后，采用公设(III)还是(III′)两种表述的随便哪一种，好象都是一样的。然而，这里却存在着往往不被注意的微妙差别。事实上，可以仅仅从公设(III)出发，推导出公设(II)的内容。亦即是说，从平均值公设出发就可以确定，力学变量的测量值谱就是对应算符的本征值谱。于是，公设(II)就不再是一条独立的假设，它同公设(III′)的陈述一起，成为公设(III)的两条推论(定理)。

这一证明需要用到概率论里概率分布的特征函数(characteristic function)这一数学工具，我们在这里不便叙述，具体的推导过程可参看文献[33]。不过，我们可以举一个物理学的例子做

个比方来加以定性的说明。

这一结论初看起来难以接受，(14)式只是平均值$\langle A\rangle$的一种表达式，并不排斥另有别的表达式，也能得到同样的$\langle A\rangle$值。这就好象平均年龄相同的两组人，可以有相差甚远的年龄分布情况一样。因此，只凭(14)式，决不能直接得出A的测量值谱就是其本征值α_n的谱的结论。

以上的想法当然不错，然而，(14)式含有比它表面看来更深的意义。我们先讲一个大家比较熟悉的静电学例子。假定有两块细小的带电体，它们各自都有稳定的电荷分布。当我们只知道这两块带电体的总电荷相同时，当然不能断言两者的电荷分布是相同的。因为，总电荷只是电荷密度的全空间积分，正象(14)式那样是一种总体的或者平均的效应。可是，如果两块带电体不仅总电荷相同，而且它们的电偶极矩、电四极矩、电八极矩……以至任意高阶多极矩(2^N多极矩，$N\to\infty$)都完全相同，我们就可以下结论说，这两块带电体具有相同形式的电荷分布。

注意到总电荷是零极矩，即坐标矢量的零次幂以电荷密度为权重的积分，而各阶多极矩则不外是由各坐标分量组成的高于零的各阶适当的多项式以电荷密度为权重的积分[34]。我们在(14)式之外，再去考察算符A的任意幂次A^N的平均值。由A的本征值方程(3)，马上可以得知

$$A^N u_n=\alpha_n^N u_n, \tag{27}$$

亦即算符A^N的本征值是α_n^N，相应的本征函数仍是A的本征函数u_n。那么，重复对(16)式的推导，我们得出算符A^N的平均值是

$$\langle A^N\rangle=\sum_n|(u_n,\psi)|^2\alpha_n^N. \tag{28}$$

我们看到(28)式同(16)式的差别只在于将算符A换成A^N的同时，要将平均值求和式里的本征值α_n换成α_n^N，而几率因子$w_n=$

$|(u_n, \psi)|^2$ 是相同的。

从(28)式的结果看到，当 $N=1$ 时，它退化为(16)式。对于任何 $N>1$ 的高阶算符 A^N，其平均值皆可解释为测量值取与本征函数 u_n 相对应的本征值 α_n^N 的几率为 $w_n=|(u_n, \psi)|^2$。换句话说，为了同静电学的情形比拟，我们将算符 A^N 看做是一种高阶的"矩"，它在 A 的本征值 α_n 谱上取值 α_n^N 的几率 w_n 是与 N 无关的。亦即是说，不仅 A 的测量值，而且对任意 N 的 A^N 的测量值，都可以认为是只在 α_n 谱上实现的。象在静电学里，从总电荷(零极矩)到任意高阶多极矩的全体可以确定电荷密度分布一样，在量子力学里，从 A 到任意高阶的 A^N 的全体，亦足以确定测量值分布的谱就是 α_n 谱了。

以上就是我们对从公设(III)可以推导出公设(II)的定性说明。在 d' Espagnat 书上的严格证明[33]，也确实运用了(28)式表示的高阶"矩"性质作为重要的依据。事实上，由公设(III)导出的(16)式，还含有"原则上每一个本征值都可能是测量值"这一层比公设(II)更强一些的意义。因为，只凭公设(II)，不能排除算符 A 还可能存在一些同测量值对应不起来的本征值。平均值公设(III)在逻辑上的这些好处，是我们在上节不采取公设(III')陈述方式的主要原因。

我们偏重平均值公设的第二个理由，是由于平均值本身具有无歧义的规定

$$\langle A\rangle=\lim_{N\to\infty}\sum_n\frac{\nu_n\alpha_n}{N}, \tag{29}$$

其中 ν_n 为测量值 α_n 出现的次数，$N=\sum_n\nu_n$ 为总测量次数，$N\to\infty$ 的极限表示测量次数足够多的要求。(29)式就是普通算术平均值的公式，在实验数据的统计处理中也正是这样做的。在这种定义下，

单次测量的平均值是无意义的。除了处在用 u_n 描写的本征态的系统，每次测量都得到其本征值 α_n 以外，一般说来，量子力学只能预言对同样处在 ψ 状态的系统的多次测量中的平均值，以及由此进一步求出的统计涨落。的确，在公设(I)—(V)中并不包含对单次测量结果的确定预言，这是量子理论的基本特征。正象 Pauli 所说："量子力学的陈述仅涉及到可能性，而不涉及到现实性。"[35]

比较(29)式同(18)式，可见我们将测量值取本征值 α_n 的几率 w_n 认做

$$w_n=\lim_{N\to\infty}\nu_n/N \tag{30}$$

即某一测量结果出现的几率等于它在多次测量中出现的相对频度。这就是概率论中关于几率概念的频度解释。我们采用的就是这样一种简单明了、与实验数据处理直接相关的解释。

可是，频度解释并不是对几率的一种唯一可能的解释[36]。并且，频度解释也不是没有缺点的，例如(30)式写出的极限是否存在，并没有得到严格的证明，而只是一种一般的信念。这里有一个关键的问题是：可不可以谈论单个事件的几率？或者说：几率是描写多次测量还是描写单次测量的？关于这个问题发生过许多争论。

对于宏观事件的统计，这一种分歧也许只是语言用法的不同。例如，Reichenbach 在讨论这个问题时，虽然首先声明"关于一个单独事件的几率的陈述是无意义的"。但马上又做了让步："说几率对于单独事件亦具有意义是无害的，甚而是有益的习惯，因为它引导人对于未来作出正确估价，只要这种语言被翻译为一个关于一系列事件的陈述。"同时指出，这种说法只是"一种省略的说话方式。"[37]

我们觉得，由于对宏观系统所处状态的描写没有什么分歧，所以如果大家理解上述两种说法实质上都指多次测量的表现的话，

那是不会引起什么混乱的。可是，对于微观情况，则会引起一些麻烦。我们强调过，微观系统的态函数 ψ 本身不是物理量，对它不可能有一种直观的理解。因此，关于几率是属于对多次测量的描写还是可以描述单个事件的性质的分歧，就转移成态函数 ψ 描写的对象是什么，它可不可以描写个别微观系统的这一分歧。在上一章我们已经指出，这正是量子力学的传统解释同量子力学的统计解释之间的争论的关键所在。

关于以上两种解释会导致什么不同的结论，以及系统处在 ψ 状态是什么意思等等问题，将在第六章做比较详细的讨论。在这里，我们只是再次强调，按照量子力学的统计解释，态函数 ψ 不是描写个别微观系统而是描写由许多个同样的系统组成的统计系综这种主张，是同公设(III)里只预言对处在 ψ 状态的系统多次测量的结果相一致的。实际上，公设(III)里的平均值，指的正是上述意义下的系综平均，或者象我们在上一章里引述过的 Born 的话那样："…将一个实验的多次重复看成是系综的实现。"[38]

我们看到，一些量子力学教科书里已经明确地引进了量子系综的概念[39]，并且对于几率的理解，就是建立在(31)式表示的频度解释的基础之上的。又如，在 d'Espagnat 的专著里，先在系综的定义中说："量子力学本质上是一种统计理论。除特殊情况外，它不对个别系统作出预言。相反，它预言的是统计频度。"然后，在第一条公设里，他明确宣称，Hilbert 空间的一个元素——态矢，是描写由同样类型的一些物理系统组成的一个系综的[40]。Belinfante 也说道："态矢确定系综中的几率分布：态矢是系综的性质，而量子理论则是关于系综性质的理论。"[41]这些都表明，量子力学的统计解释早就不是少数人的看法，它已经得到了相当广泛的承认。

需要注意的是，量子力学里的系综概念虽然是从经典统计物理学那里移过来的，但两者之间存在着原则的不同。在经典统计

力学里，统计系综只是一种设想的计算工具；它可以采取正则系综、微正则系综和巨正则系综等几种不同形式；最后，计算出关于系统宏观物理性质的结果，是适用于每一个个别系统的。换句话说，统计系综在经典统计力学里，只是一种被借助来进行计算的想象物，它是不需要"实现"的。然而，在量子力学里，以 ψ 描写的系综是确定而不容选择的，由它计算出来的平均值等结果，只能适用于系综本身，而不适用于个别系统。这里的根本区别在于：经典系综的每个成员都是一个宏观系统，尽管它们的微观行为设想为各不相同，但都表现着同样的宏观性质和规律，因而每一个个别的宏观系统都应当显示出计算的结果；可是，量子系综里的每个成员都是一个微观系统，除了特殊的情况，不能指望它们会有相同的表现。因此，量子系综是需要通过多次测量来实现的，只要每次测量的都是处在态 ψ 的系统。因而，ψ 函数的性质，一般不可能在单次测量中得到体现。这就意味着态函数 ψ 描写的是系综的性质而不是个别系统的性质。

总之，对经典物理学系统的实际描写总是一种宏观描写，微观状态的描写只存在于想象的系综计算之中。因为，对经典系统的测量都是对它的宏观性质的测量，一般并不直接测量它的微观参数。因此，每个经典系统的测量数据都体现了对系综的统计平均。反之，对量子力学系统的描写本身是一种微观描写，对它的测量也是微观参数的测量。所以，对于个别量子系统的测量，一般不能提供以 ψ 函数描写的微观状态的全貌，无从体现力学变量的统计平均。要了解状态 ψ，必须对同样的系统进行多次测量，即执行量子系综的实现。例如，对于散射态函数的了解，需要积累众多具有不同角分布的事件，其中每一事件中出射的粒子都是一个新的粒子。这些事件的全体就是量子系综的实现[42]。

我们接着讨论公设(IV)，即 Schrödinger 方程。上一节已经

讲过，公设(IV)规定了动力学方程，即由系统的哈密顿算符负责态函数的演化。在Schrödinger 方程(20)里的哈密顿算符取(24)式的形式时，只适用于非相对论性的单粒子情况，并且没有反映粒子的自旋自由度。我们知道，在相对论性量子力学里，要用 Dirac 方程代替 Schördinger 方程来描写电子或者其他自旋为 1/2 的粒子的运动。对于其他自旋值的粒子，也已经分别建立起相应的相对论性运动方程。所以，从基本原理的角度看来，运动方程的具体形式是不重要的，它会随着粒子的不同自旋、相对论性还是非相对论性运动、还有是单粒子还是多粒子等等情况而改变。重要的在于，在量子力学里的动力学方程是为态函数而不是为力学变量建立的微分方程。

因而，有的文献在相应于 (IV) 的公设里，并不写出 Schrödinger 方程的具体形式，而是采用一种较普遍的表述方式[42]：

公设(IV′) 动力学定律即运动方程的具体形式取决于物理系统的情况，但它总可以写成

$$\psi(t)=U(t,t_0)\psi(t_0), \tag{31}$$

其中 $U(t,t_0)$ 是一个幺正算符。

幺正算符也是作用于态空间这个 Hilbert 空间的一种线性算符，自然也满足线性算符的一般条件(2)。幺正算符 U 的特别条件是：它的伴随算符 $U^\dagger$ 等于它的逆算符 U^{-1}。也就是说，幺正算符 U 是满足条件

$$UU^\dagger=U^\dagger U=1 \tag{32}$$

的算符，式中 1 代表单位算符。

(31)式里的幺正算符 $U(t,t_0)$ 称为演化算符，因为它把 t_0 时的态函数 $\psi(t_0)$ 变换为时刻 t 的 $\psi(t)$。容易验证，对应于 Schrödinger 方程(20)的演化算符是

$$U(t,t_0)=e^{-iH(t-t_0)/\hbar}. \tag{33}$$

演化算符U要满足幺正性条件(32)，是为了要保持(31)式变换前后的态函数$\psi(t_0)$和$\psi(t)$的总几率不变，或者说都满足归一化条件(15)。因为，按照(31)式，有

$$(\psi(t),\psi(t))=(U\psi(t_0),U\psi(t_0))=(U^{\dagger}U\psi(t_0),\psi(t_0)), \tag{34}$$

将(32)式代入(34)，便可证明$\psi(t)$的归一化不随时间而变。

在(33)式里，哈密顿算符H的厄密性，保证了演化算符U的幺正性。但演化算符U取(33)式的具体形式，需要在公设(IV′)之外，还加上适当的假定[43]。这一事实也体现了公设(IV′)是比具体写出 Schrödinger 方程的公设(IV)更普遍的一个规定。

公设(IV′)的实质，在于确定从初始时刻t_0的态矢到任意时刻t的态矢之间，仍然是 Hilbert 空间中的一种线性变换关系。例如，假定在时刻t_0时有线性叠加关系

$$\psi(t_0)=c_1\psi_1(t_0)+c_2\psi_2(t_0), \tag{35}$$

其中的c_1和c_2为复常数。由于U是线性算符，运用(31)式和线性条件(2)，马上得到

$$\psi(t)=c_1\psi_1(t)+c_2\psi_2(t), \tag{36}$$

即同样的线性叠加关系在任何时刻t都保持成立。那么，公设(IV′)不外是这一种“线性演化关系”的另外一种说法，或者再加上为保证总几率守恒而对U算符所要求的幺正性条件(32)。

确实是这样。d'Espagnant 对于态演化公设的叙述正是：“描写由仅受到外界影响的系统所组成的系综的态矢随时间的演化是因果性和线性的。”[44]这里所讲的因果性就指运动方程是为态函数ψ建立的，由ψ的演化决定物理系统的性质随时间的变化。关于直线性，指的就是如果在t_0时刻有(35)式，那么在后来的任意时刻t就有(36)式。这也正是 Messiah 书上讲的：“态的线性叠加在时间进程中保持不变。”[43]这一种线性演化关系意味着ψ满

足的是线性的运动方程。于是，我们可以把公设(IV′)里的(31)式或者(35)—(36)式的线性演化关系的实质，归结为简明扼要的一句话："在量子力学里的动力学方程，是态函数 ψ 满足的齐次线性方程。"这样，在随时间的演化进程里，再一次体现了态函数、即几率幅 ψ 是量子力学里最重要的概念。

回顾在关于公设(I)的讨论里我们说过，态空间是 Hilbert 空间这件事，已经意味着在量子力学里满足叠加原理的是态函数 ψ 而不是别的任何东西。既然量子理论的基本数学框架是态函数张开的线性空间以及定义在这空间上的线性算符，那么很自然要求不仅用线性厄密算符去表示各种力学变量，而且也用一个线性(幺正)算符去描写态的演化。这就象在静电学里我们掌握了场或者势的叠加规律之后，很自然在讨论演化问题时，又为这些场和势建立线性微分方程一样。关键问题是选定在物理学理论中扮演主要角色的量。在成熟的物理学理论里，这些基本量都是满足线性叠加关系的，包括满足线性的演化关系(即线性的运动方程)。

基于这样的认识，我们就不难理解，为什么 d'Espagnat 把普通意义下(不含时间)的态叠加原理称为"静态线性关系"，而认为(35)—(36)式表示的线性演化关系不过是态叠加原理的一个推论[45]。也许，反过来讲更容易接受：普遍的叠加原理本来就指随时间演化的线性关系，表现为基本的动力学定律都是线性微分方程；而在指定时刻的"静态"叠加关系，乃是普遍的(含时间的)叠加原理的特殊情况。在这里，我们只是指出公设(I)同公设(III)之间的这种内在联系，而不去深入计较它们在多大程度上是互相独立的。在第四章里，还要对叠加原理进行详细的讨论。

公设(V)即全同性原理。它说的是全同粒子的交换不改变系统的状态。因为态函数满足的 Schrödinger方程(20)或者可能满足的本征值方程(23)或(3)等都是齐次方程，特别是因为平均值公式(14)

的形式，ψ 函数乘上一个任意复常数，不会有任何影响。所以我们说，描写一个指定状态的 ψ 函数确定到差一个任意复常数的程度。亦即是说，如果 c 是任意复常数，则 ψ 和 $c\psi$ 都描写同一状态。不过，如果约定采用满足归一化条件(15)的 ψ 函数，相应的平均值公式简化为(14′)，那么，ψ 函数只确定到差一个模为 1 的复常数，亦即差一个相因子 $e^{i\delta}$（δ 为实数）。因此，按照公设(V)，全同粒子交换时，ψ 函数可以改变一个常数相因子。

由粒子交换运算的性质，可以确定这一常数相因子的可能取值。例如，如果系统仅含两个全同粒子 1 和 2，则只有一种粒子交换。设 P_{12} 是将态函数中两粒子指标交换的算符，称为置换算符，q_1 和 q_2 分别是粒子 1 和 2 的一般坐标，则有

$$P_{12}\psi(q_1,q_2)=\psi(q_2,q_1). \tag{37}$$

再交换一次，得到

$$P_{12}^2\psi(q_1,q_2)=P_{12}\psi(q_2,q_1)=\psi(q_1,q_2), \tag{38}$$

即

$$P_{12}^2=1. \tag{39}$$

设置换算符 P_{12} 的本征函数为 φ，相应本征值为 λ，即

$$P_{12}\varphi=\lambda\varphi. \tag{40}$$

将(39)式运用于(40)式，得

$$P_{12}^2\varphi=\lambda^2\varphi=\varphi. \tag{41}$$

由此可知，P_{12} 的本征值为 $\lambda=\pm1$，相应的本征函数记为 φ_+ 与 φ_-，容易写出本征值方程(40)的解：

$$\begin{gathered}P_{12}\varphi_\pm=\pm\varphi_\pm,\\ \varphi_\pm=\frac{1}{\sqrt{2}}[\psi(q_1,q_2)\pm\psi(q_2,q_1)].\end{gathered} \tag{42}$$

事实上，φ_+ 和 φ_- 就分别是对 q_1 和 q_2 交换对称和反对称的态函数。

于是，在这种情况下，要满足全同性公设(V)，只允许选取对两粒子交换对称的 φ_+ 或反对称的 φ_-。我们知道，这就分别属于玻色子和费密子的情况。

然而，当全同粒子的数目 N 大于 2 时，就没有那么简单。虽然在这种情况下，对于每一个将任意第 i 个粒子同第 j 个粒子交换的算符 P_{ij}，都可以重复以上的讨论；但不同的两个置换算符 P_{ij}，只要有共同的一个序号指标，就是互相不可对易的。例如，在 $N=3$ 的情况，P_{13} 和 P_{12} 这一对置换算符就是不可对易的，因为

$$P_{13}P_{12}\psi(q_1,q_2,q_3)=P_{13}\psi(q_2,q_1,q_3)=\psi(q_2,q_3,q_1),$$

$$P_{12}P_{13}\psi(q_1,q_2,q_3)=P_{12}\psi(q_3,q_2,q_1)=\psi(q_3,q_1,q_2),$$

可见两算符作用次序不同，会产生不同的结果。

任何一本量子力学教科书都告诉我们，只有互相对易的算符，才具有完备的共同本征函数组。反过来说，一个算符的本征函数，一般说来不是另一个与它不对易的算符的本征函数。不过，也不排斥两个不相对易的算符，存在着一些特定的共同本征函数。在 $N>2$ 的全同粒子系统，就正是这种情况。虽然各对置换算符 P_{ij} 之间不一定是对易的，因而不存在它们的完备的共同本征函数组；但是我们可以找到一些特殊的共同本征函数，它们对每一个置换算符都有相同的本征值 $+1$ 或者 -1。这就是全对称态函数 φ_s 和全反对称态函数 φ_a，它们满足

$$\begin{aligned} &P_{ij}\varphi_s=\varphi_s,\\ &P_{ij}\varphi_a=-\varphi_a, \end{aligned} \qquad \text{对任意 } i\neq j. \tag{43}$$

并且，可以证明，这种置换对称性质是不随时间变化的。

实际上，φ_s 和 φ_a 就是我们分别为玻色子和费密子选取的态函数。当 $N=2$ 时，它们就是(42)式里的 φ_+ 和 φ_-，并且是全同性公设(V)所允许的全部可能的选择。但当 $N>2$ 时，φ_s 和 φ_a 仅仅是两种特定的选择，不能排斥还有其他选择也有可能满足公设

(V)。因此，为了反映这种特殊性，常常把一般的全同性公设(V)的陈述，换成对称化公设(V′)的陈述[46]：

公设(V′)　由全同粒子组成的系统，按照这些粒子的本性，或者总由对任意两个粒子交换都是对称的全对称态函数描写，或者总由对任意两个粒子交换都是反对称的全反对称态函数描写。

这里所谓"粒子的本性"，即指对全同玻色子总用全对称态函数φ_s描写，对全同费密子总用全反对称态函数φ_a描写。φ_s和φ_a在不同情况下的一些具体形式，一般教科书上都可以找到，我们不再详述。

对称化公设(V′)是至今行之有效的一条原则。正象 Schiff 所说，有别于全对称和全反对称的其他对称性也是可能的，"但自然界中没有发现与之对应的粒子。"[47]在这方面出现过一次引人注意的尝试是，在夸克概念提出之初，为了解决对称性方面的困难，曾经提出过夸克满足一种与费密统计和玻色统计都不相同的"综合统计"(parastatistics)[48]。后来，夸克的"颜色"自由度方案的引进，以及在这基础上建立起来的"量子色动力学"(QCD)的成功，仍然维护了对称化公设的权威。可是，全同性原理和对称化公设毕竟是有区别的。关于综合统计以及它的可能应用的详细情况，请参阅有关的文献[49]。

我们对量子力学基本假设的讨论到这里就告一段落了。最后让我们再小结一下：公设(I)或(I′)指定了量子力学的基本数学框架。平均值公设(III)规定了理论同实验的联系方式，由它可以推演出公设(II)和(III′)。态演化公设(IV′)同公设(I)有密切的联系，Schrödinger 方程(IV)是它的具体化。最后，对多体问题还有对称化公设(V′)，它是建立在全同性原理(V)的基础之上的一种特殊假设。这些就是全部量子力学的出发点。

2.4 其　他

以上两节所讲的几条公设，给量子力学提供了一个理论基础，为了这套理论体系能够实际运行，还需要加上一些比较具体的假定。在这一节里，我们要讨论的就是这些常常也当做普遍原则，而没有被放到几条公设里面的一些假定。

首先是关于算符的具体形式，即用什么样的一些算符去代表各种不同的力学变量。大家知道，事实上量子力学最早就是从对坐标 x 和动量 p 这两个算符的研究开始的。Heisenberg 和 Born 等在他们的矩阵力学里发现这两组算符是不可交换的，并把下述对易关系称为"基本的量子力学关系"或者"量子条件"[50]：

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{44}$$

式中 δ 下标的 $i, j = 1, 2, 3$，指的是普通空间中的三个分量。在上一章我们讲过，Dirac 和他们都曾经长期认为，坐标和动量之间的这种不可对易性，是量子力学里最重要的基本假定[51]。

诚然，由于算符之间的对易关系，和其他代数关系一样，在幺正变换下不改变其形式，因而在各种不同的表象里都保持成立，这无疑体现了一种普遍的特性。事实上，量子力学里就是用各个算符之间的对易关系来定义它们自己的。换句话说，掌握了各个算符之间的对易关系，就完全了解了这些算符的性质，例如它们的本征值和本征态等等。至于在什么表象里把这些性质明白地表示出来，则不是最重要的问题。例如，运用对易关系(44)，就可以解出谐振子或氢原子系统的能级来，又如，将(44)式运用于由坐标和动量算符组成的轨道角动量算符 $L = r \times p$，就可以求出刚性转子的能级等等。这些问题正是量子力学最早成功解决的一些例子。在这些例子里，坐标和动量的对易关系的确起到举足轻重的作用。

可是，在量子理论里，并不是任何算符都可以用坐标和动量

来表示的。就拿角动量算符说来，除了上述的轨道角动量之外，还有不可以用坐标和动量表示的自旋角动量算符，它的本征值谱比轨道角动量宽，可以有 $\hbar$ 的半整数倍的量子数。在亚原子领域，人们还定义了电荷空间里的同位旋算符，以及不同空间里的各种反演算符等等，它们所满足的对易关系，都同(44)式的"基本量子条件"无关。

不仅如此，在量子场论里，玻色子场算符所满足的是同(44)式相对应的对易关系，而费密子场算符满足的却不是对易关系，而是同(44)式对应不起来的反对易关系。由此可见，"基本量子条件"(44)式不仅管不了自旋和同位旋等自由度，而且也不能提供费密子场量子化的依据，当初对于坐标和动量的对易关系在量子理论里所摆的地位，早就显得不恰当了。所以，我们不把对易关系(44)当做有普遍意义的基本假设，而看做是对于有关算符的具体规定。

其实，代表力学变量的算符的形式，并没有一定之规。特别是，随着认识的深入，我们还会不断开拓新的领域，发现新的力学变量和相应的算符形式。当然，在有经典对应的情况，使用经典比拟去建立量子力学算符形式的方法往往是有效的。因此，在一些教科书里，常常写出把经典力学的坐标和动量变量替换为量子力学里的坐标和动量算符的对应法则，作为从经典力学变量的形式建立相应的量子力学算符的窍门，甚至把这一内容写进几条基本假设里去[52]。基于上面讲过的理由，我们觉得这种与经典情况相对应的方法，它的局限性是很明显的，不宜放到应当有普遍意义的基本假设里去。

例如，量子力学里一个关键的问题是系统哈密顿算符的确定。如果说，在早期量子理论解决的那些比较简单的问题里，使用经典对应的办法用坐标和动量算符构造哈密顿算符，不失为一种行之有效的方法的话，自旋自由度的引入，已经开始发生困难。这个

道理很简单，Dirac 方程是不可能象 Schrödinger 方程那样仅仅依靠对平面波的运算，和经典的哈密顿函数相对应而写出来的。对于崭新的研究领域，更是没有现成的经典对应物可供我们参考。例如，核力问题或者原子核结构的问题，早期想用通过介子传递作用的汤川势解决问题的希望早就破灭了。事实上，经过几十年的努力，现在仍然未能写出关于核力或者核结构的一个普遍适用的哈密顿算符。除了在一些特殊情况下，采用一些可以或者不可以有经典对应的模型之外，实际上主要靠满足一定的对称性考虑去构造哈密顿算符，通过计算结果同实验数据的比较而不断修改和完善。总之，在一般情况下，哈密顿算符具体形式的选择，视问题的性质而异，还要经过试探和摸索，决不可误会成存在着事先保证其正确性的什么普遍原则。

退一步讲，即使在有经典对应的情况，把经典哈密顿函数的形式照搬过来，到底靠不靠得住，也不能先验地下结论。物理系统哈密顿算符的具体形式，实际上都是有待确定的。当然，这里所讲的未确定的是指哈密顿算符的相互作用部分，即势函数的形式。至于哈密顿算符的动能部分 $p^2/2m$，应当认为是经受过足够多的考验而值得信赖的。

这里的问题在于，在经典物理学里，宏观物体之间的相互作用力或相互作用势，是可以直接用实验测量的。把经过实验证实的势函数形式写到运动方程里，是理所当然的。可是，在微观尺度内，势函数的形式无法直接测量。实际上，我们只能够从物理系统的能级分布和散射相移等等数据，反过去推测势函数的形式，没有什么可以先验地认为必定正确的根据。例如，在原子尺度内，我们预先无法断定静电作用是否仍然取宏观 Coulomb 势 $-Ze^2/r$ 的形式。只是我们把这一项写进氢原子的哈密顿算符里，求出与实验数据相符合的能级分布与跃迁几率时，才初步证明了将宏观

势的形式搬到微观领域来的有效性。后来又经过复杂原子能级分布、原子能级在电磁场中的分裂，以及散射过程等等一系列的研究，终于使我们确信经典电磁相互作用的基本形式是适用于量子力学的(至于在量子电动力学里处理电磁相互作用的进一步的问题，不在这里深究)。

另一方面，万有引力和静电力都是反平方力，即是说，引力势和静电势具有相同的形式。那么，把哈密顿算符里的 Coulomb 势换成只差一个常数因子的引力势，是不是可以恰当地解决量子力学的引力问题呢？在量子力学诞生后的近半个世纪里，由于缺乏有效的检验手段，这个问题长期以来是悬而未决的。直到七十年代中期，中子干涉技术的发展，才对这个问题作出了肯定的回答，有关情况将在第七章里介绍。

总之，物理系统的各个力学变量用什么样形式的算符表示，特别是哈密顿算符采取什么具体形式，是要根据系统的性质、对称性原则、经典比拟或者其他物理模型的要求……最后还有个人的经验和运气等等综合考虑来决定的。力学变量一定要用算符表示，在这普遍基础之上采用什么形式的算符，则是次一步的具体问题。这就是本节里要说明的主要之点[53]。

最后还要交代一下。除了本书只讨论非相对论性量子力学的概念基础(基本上不涉及相对论性量子力学或者量子场论特有的概念)之外，我们所讲的态也仅指纯态，不讲混合态的情况。这样做主要是为了集中讨论一些具有基本意义的问题，不在枝节上多费笔墨。纯态是只用一个态函数 ψ 描写的。混合态则是两个或两个以上纯态的混合，需要用密度矩阵来描写。使用密度矩阵这套方法，可以重新表述量子力学的几条基本假设以至整个数学程式，有兴趣的读者请参阅有关的文献[54]。

参 考 文 献

[1] M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford Univ. Press (1972); 中文版: 古今数学思想, 第四册, 上海科学技术出版社 (1981), 第 42 章。

[2] 见 [1.10], Chapter 8.

[3] 关洪, 大学物理, 1984 年 11 期。

[4] 见 [1.17], p. 52; [1.41], p. 108.

[5] 见 [1.24], 中文版, 35 页。

[6] 见 [1.25]。

[7] R. Shankar, *Principles of Quantum Mechanics*, Plenum (1980).

[8] 见 [1.17], p. 85; [1.41], p. 95.

[9] 见 [1.24], 中文版, 24 页。

[10] 见 [1.37]

[11] R. B. Lindsay, H. Margenau, *Foundation of Physics*, Wiley (1946); 中文版, 物理学的基础, 许良英译, 商务印书馆 (1964), 第九章。

[12] H. Margenau, *Fundamental Principles of Quantum Mechanics*, in *Quantum Theory, I. Elements*, D. R. Bates ed., Academic (1961), pp. 31—80.

[13] 见 [1.10], Chapter 1.

[14] J. von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton Univ. Press (1955), 据 1932 年德文版译出。

[15] 见 [1.25]。

[16] 见 [1.15], § 137.

[17] 周世勋, 量子力学教程, 人民教育出版社 (1979), 242 页。

[18] R. Courant, D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. I, Interscience (1955); 中文版, 数学物理方法, 第I卷, 钱敏, 郭敦仁译, 科学出版社 (1958), §14.3.

[19] P. Roman, *Some Modern Mathematics for Physicists and Other Outsiders*, Vol. 2, Pergamon (1975), Chapter 13.

[20] 见 [1.24], 中文版 25 页。

[21] 同上, 38 页。

[22] J. M. Domingos, M. H. Caldeira, *Found. Phys.* **14** (1984) 147, 中译文见大学物理, 1988 年第 2 期。
[23] 见[12], §3; [7], § 4.2.
[24] 见[1.37]。
[25] 牛顿自然哲学著作选, 上海人民出版社 (1974), 209页。
[26] 见[1.2], Chapter III; [1.19]; 和[7]Chapter 4.
[27] P. Roman, *Advanced Quantum Theory*, Addison-Wesley (1965), Chapter 1.
[28] B. d'Espagnant, *Conceptual Foundations of Quantum Mechanics*, W. A. Benjamin (1976), pt. I.
[29] J. M. Jauch, *Foundations of Quantum Mechanics*, Addison-Wesley (1968).
[30] 见[7], p. 119.
[31] 见[27], p. 11.
[32] 见[1.25], 和[7], [17], [28]等。
[33] 见[28], § 5.1.
[34] 胡宁, 电动力学, 人民教育出版社 (1963), § 31.
[35] W. Pauli, *Nobel Lectures, Physics*, 1942—1962, Elsevier (1964), p. 30.
[36] 见[1.10], § 10.3; [1.17], pp. 64—74; 桂起权, 自然辩证法通讯, 1986 年第 6 期。
[37] H. Reichenbach, 科学哲学的兴起, 伯尼译, 商务印书馆 (1983), 184—185 页。据 1954 年英文版译出。
[38] 见[1.14].
[39] 见[1.15], § 14, 和[7], § 4.2.
[40] 见[28], p. 15.
[41] 见[1.20], pp. 7—8.
[42] 见[1.19].
[43] A. Messiah, *Quantum Mechanics*, Vol. I, North-Holland (1972), Chapter VIII, § 8.
[44] 见[28], p. 16.
[45] 同上, p. 10.

[46] 见[1.2], p. 1386, 和[27], p. 57; [43], p. 595.

[47] 见[1.25], 中文版, 420—421 页。

[48] O. W. Greenberg, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964), 598.

[49] K. Ohnuki, S. Kamefuchi, *Quantum Field Theory and Parastatistis*, Univ. Tokyo Press (1982).

[50] *Sources of Quantum Mechanics*, B. L. van der Waerden ed., North-Holland (1967), pp. 313, 327.

[51] 见[1.27—29].

[52] 见[7], p. 120.

[53] 事实上, 即使是可以用坐标和动量表示的力学变量, 采取什么规则去构造同经典表式相对应的量子力学算符, 仍然是一个没有完全解决的问题。参看: E. P. Wigner, *Interpretation of Quantum Mechanics*, in *Quantum Theory and Measurement*, J. A. Wheeler, W. H. Zurek ed., Princeton (1983), pp. 260—314; J. R. Shewell, *Am. J. Phys.* **27** (1959) 16; 钱尚武, 黄湘友, 大学物理, 1987 年第 2 期; 王正行, 大学物理, 1988 年第 1 期。

[54] 例如: [28], pt. II.

第三章　从波动-微粒疑难到态函数的几率诠释

3.1 引　言

现在广泛使用的量子力学教科书，不少都是一开始从光电效应等现象引进光的波动-微粒二象性，接着介绍 de Broglie 波，过渡到电子的波动-微粒二象性，然后再讲 Schrödinger 方程等基本原理。物质的这种波动-微粒二象性，简称波粒二象性，常常以这样的方式被当做量子力学的出发点，或者当做量子力学的实验基础，或者当做“量子理论最有代表性的特点之一，”[1]甚至把整个量子力学说成是关于这种波粒二象性的理论。

二象性是 duality 或dualism 的译名，也可以称做二重性或二元论。关于物质粒子的波粒二象性，并没有一种统一的精确表述。经常见到的有这样一些说法：电子既象波动，又象微粒，它同时表现了波动和微粒这两方面的性质；电子或者象波动，或者象微粒，它有时呈现波动的性质，有时呈现微粒的性质；在衍射实验中，电子表现得象波动，在散射实验中，电子表现得象微粒；在坐标表象里，我们得到微粒图象，在动量表象里，我们得到波动图象……等等。总之，在许多教科书或有关文献里，关于波粒二象性的这些不同的说法，常常被运用来解释量子理论的特征，甚至当做是它的概念基础，是理解量子力学原理的钥匙等等。然而，在上一章我们所阐述的量子力学基本假设里，却对波粒二象性只字不提，这是怎么

回事呢？

原来，波粒二象性里指的波动和微粒性质，都是经典物理学里的波动和微粒的性质。所以，波粒二象性实质上是一种运用经典物理学的概念去理解量子力学原理的做法。波粒二象性的解释一开始就不可避免地包含有这样那样的矛盾和毛病，因而至多只能看做是一种局限意义下的类比，而决不是一种普遍性的原理。在量子力学创立之初，虽然波粒二象性的概念曾经起到过积极的作用，但即使在当时，人们也清楚地意识到其中存在着无法克服的困难。在量子力学创始人的眼里，波粒二象性与其说是一种肯定的原则，不如说是一种古怪的特征，一种自相矛盾的疑难，或者是一种似是而非的悖谬。

例如，早在 1930 年 Bohr 第一次提出“互补原理”这一思想时，就曾经这样说过：“只要我们坚持经典概念，我们在物质的本性这一问题中也就必然地要面对一种不可避免的左右为难的困境，这种两难困境必须认为恰恰是实验证据的表现。”[2]这里的“左右为难的困境”或“两难困境”，所用的英语名词是 dilemma，这个词完全没有一点积极的意义。在 Bohr 看来，互补原理就是解决这一疑难的唯一出路。他接着说道：“事实上，我们这里所处理的，又不是现象的一些矛盾图象而是一些互补图象；只有所有这些互补图象的全体，才能提供经典描述方式的一种自然的推广。”[2]

Bohr 在 1949 年说得更清楚：“把惯常的一些物理属性硬加给原子客体，就塞进了一种含混不清的基本要素。在关于电子和光子的微粒性和波动性的左右为难的困境中，这一点立刻就明显了；在那里我们必须对付两种对立的图象，其中每一种图象都关系到经验证据的一个本质方面。”[3]可见，在 Bohr 看来，电子和光子的波粒二象性是对微观客体不适当地运用经典物理学概念而产生的一种必须克服的困难。Bohr 还说过：“所有真正理解量子理论的人，

做梦都不会把它叫做二元论。”[4]Bohr 认为，只有在他的“互补原理”或者“互补哲学”里，才能对微观现象作出统一的描述，从而克服了这种二重性或二元论。至于什么是互补原理，按照 Jammer 的说法，“Bohr 从来没有给出过关于‘互补性’这一名词的清晰明白的定义。”[5]而且，“它是一种并不必须同量子力学的解释箍在一起的观点。”[6]的确，Bohr 没有把他的互补原理局限于量子力学的范围内，他不仅把它运用到热力学，生物学，甚至用到社会问题上去，上升到了一种“互补哲学”的高度。而且，互补原理也确实同量子力学的数学程式没有必要的确定联系；即使局限在量子力学的范围内，互补原理也只是一种哲理性的议论。因此，我们觉得没有必要把互补原理当做量子力学的基本假设来讨论。

事实上，一些有识之士早就明确指出，在 1926 年由 Born提出态函数的统计诠释之日起，波粒二象性的疑难已不复存在。例如，Feynman 在阐述量子力学的基本原理时，开始就这样写道：“为新的现象构造理论体系的尝试，一开头就引起了一场大混乱。在那里光和电子看起来有时候表现得象波动而有时候表现得象粒子。1926 和 1927 年在称为量子力学的理论中，完全消除了这一表观上的自相矛盾。”[7]在谈到波粒二象性时，Popper 明确指出：“当 Born 将波幅的平方看做发现粒子的几率这一解释被接受之时，Bohr 关于‘互补性原理’同‘粒子-波动二象性’之间的联接就断开了。从此刻起，支配着哥本哈根阵营的是一片混乱。”[8]Bunge 也说道：“1905 年打破了电磁理论统一性的波动-粒子二象性，激励了消除这种二象性的另一种理论——量子电动力学的创立。……因而光的二象性乃是 1905 年到 1927 年这一空白时期的遗迹。”以及“现在应当放弃这种曾经用来作为重要假定的光学-力学类比，因为它已经变成混乱的源泉而早就过时了。[9]

以上所举的几位学者，当然都是赞成关于态函数的几率诠释

的，只是不赞成在此之外还要加上什么“二象性”或者“互补性”等等常常会引起混乱的概念。不过，对于习惯于许多教科书上把二象性当成起着积极作用的原理的读者，以上几段引文也许会显得太惊世骇俗而难于接受了。那么，让我们再引述 Born 在 1967 年题为《量子理论中的二象性》的文章里的两段话。仍然承认波粒二象性的 Born 一方面说：“光不可能只用波动或者只用粒子来描写。光并不既是波动又是粒子，但光同波动和粒子又都有些关系。我们不可能在经典物理学的水平上来理解这一事实。”另一方面又说：“关于二象性还是非二象性的讨论看来是多余的。自然界不能仅用粒子或者仅用波动来描写，而要用一种更加精致的数学理论来描写。这就是量子理论，它取代了[波动和粒子]两个模型，而且仅在某些极限下表现得象这样或那样。”[10] 如果说，光或电子的波粒二象性的含意就是以上两段话所讲的内容，那是我们所欣然接受的。不过，Born 也讲了，赞成或者反对二象性的争论是“多余”的。我们的理解是，只要掌握了取代经典物理学概念的量子理论，那么说有或者没有二象性，只是一种语言形式的不同而已。那么，按照 Born 的意思，起码我们可以说波粒二象性不是量子力学里必须有的概念。于是，在我们所陈述的关于量子力学的一套尽量节省的概念体系里，不把波粒二象性当做必要的基本概念，也就完全合情合理了。

以上就是我们对波粒二象性的基本看法。总之，我们为了避免不必要的争论，不说二象性是一种错误的概念，也不反对别人运用和坚持这一概念。我们只是说，在我们的概念体系里，不需要二象性的基本概念。在这一章里，我们主要从历史的角度，回顾关于电子的波粒二象性的提出到态函数的几率诠释这一段时期有关概念的发展，以及站在今天的立场对有关问题做一些进一步的分析。

年幼的儿童在开始学习走路时，总是需要保姆的扶持或者拐棍的支撑。但当他已经从蹒跚的孑子逐渐形成自己的步伐后，就应当及时丢掉拐棍和扶持，才能够开始成熟而独立的进程。Bunge也说过[11]，在量子力学建立之初起到过启发作用的波动-微粒类比，就象建设房屋的脚手架一样，应当及时拆除，不然就会妨碍理论大厦的美观和进一步的发展。

话说回来，如果有人毕生坚持柱着拐棍走路，或者有座房屋坚持不拆除原先的脚手架，那也是一种可能的选择。虽然这样做会受到很大的局限，但也说不定在某些情况下会有好处。所以，我们虽然不把波粒二象性当做量子力学必须的基本概念，但也不否认运用这一概念有时会受到有益的启发而得出正确的结果。

不仅如此，甚至在错误观念的指导下也会做出重要的成果。Bunge就曾举过这样的例子[12]：Columbus发现了新大陆，而他却认为到了亚洲的印度，他并没有认识到自己发现的意义。在物理学的发展历史中，也常有在错误观念下做出重大发现的例子：Kepler从天界的谐和音乐发现了行星运动定律；Galvani从动物电的研究创制了化学电池；Carnot在热质说的基础上提出了他的重要定理；Becquerel从荧光物质的研究发现了放射性这一全新的现象。他们因为受错误的旧观念的支配，起初都不清楚自己的发现的意义。从这些故事里得到的教训是两方面的：既不要因为先驱者所抱有的错误观念而否定他们做出的伟大发现，也不要由于他们的功绩而盲目地相信他们自己作出的解释。

Heisenberg讲得好："Planck在一次关于物理学发展的讲演中说过：'在科学史中，一个新概念决不会一下子就以其完整的和最终的形式冒出来'……当我们进入一个新的领域时，经常需要新的概念。照例，新概念总是以不怎么清楚和不成熟的形式提出来。然后它们被修改，有时几乎被完全抛弃，并为一些更好的概念所取

代，最后才成为清晰而明确的概念。”[13]量子力学已经有六十多年的历史，早就应该用清楚明晰的新概念去代替当初那些不成熟和过时的概念了。

3.2 de Broglie 波和 Schrödinger 的物质波

大家知道，Einstein 在 1905 年最早提出了光量子的概念，光的波粒二象性就是从此发展起来的。不过，在量子力学里并没有把光当做粒子来处理，满足 Schrödinger 方程的是电子而不是光子。因此，对于量子力学理论体系真正有意义的只是电子或者一切非零静质量的(实物)粒子的波粒二象性。我们这里先从电子波动性的提出谈起，间或也举一些光子实验为例子，说明一些具有共同性的问题。而关于光的二象性的进一步讨论，则放到书末的第七章里。

当初，Einstein 的光量子概念，并没得到普遍的赞同。关于光的能量和动量的分立值以及每一份能量和动量集中在空间中很小区域的观念，同 Maxwell 电磁场理论是那样地不协调，使许多物理学家都觉得这种二重性是迟早要克服掉的一种暂时的困难。de Broglie 的“相位波”假设，正是在这样的背景上提出来的。

一般教科书里，把 de Broglie 的假设简单说成是把光量子的能量动量关系搬过来，从而使电子本身具有波动性质。其实这是同他的原意不符的。我们想在这里花一点笔墨扼要介绍他原来的工作。

根据 1923 年 de Broglie 发表的一系列工作[14]，他当初提出的不是说电子的行为表现得象波动，而是假定具有微小静质量 m_0 的质点，存在着一种由 Einstein 关系 $h\nu_0 = m_0c^2$ 决定的周期性现象，同时，空间中有一种波动伴随着这质点的运动，两者之间呈现着相位上的一致性。de Broglie 的原话是：“运动点同位于同一点

上的波具有相同的内在相，因此称此波为'相波'。"[14]

当时正是 Einstein 的相对论名扬天下之际，大家都相信真正的物理学理论必定是相对论性的。因此，de Broglie 也很自然地运用相对论性力学的定律来做出他的论证。这一论证的大致步骤是这样的：在静止坐标系，如上所述，假定存在着全空间的同步的振动 $\sin(2\pi\nu_0 t')$，$\nu_0 = m_0c^2/h = E_0/h$ 是由电子本身决定的振动频率。换到电子以速度 v 运动的坐标系，按照相对论里能量和频率的变换关系 $E = E_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$，$\nu = \nu_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$，正好仍然满足 Einstein 关系 $E = h\nu$。再把原来的振动函数里的 t'，用 Lorentz 变换公式写成 $t' = \left(t - \frac{v}{c^2}x\right)\Big/\sqrt{1-v^2/c^2}$，其中 t 是运动坐标系里的时间。于是，便得到运动坐标系里有如下形式

$$\sin\left[2\pi\nu\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)\right] \tag{1}$$

的波动过程。从(1)式马上看出，这种被 de Broglie 称为"相位波"的波动的相速度是 $u = c^2/v$，于是可以求出这种波动的波长 λ 是

$$\lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{c^2}{v\nu} = \frac{hc^2}{Ev} = \frac{h}{m_0 v\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{h}{p}. \tag{2}$$

这就是著名的 de Broglie 公式，推导中运用了质点动量 p 的相对论公式 $p = m_0 v\sqrt{1-v^2/c^2}$。由此可见，de Broglie 并不是简单地把光子的波长公式套到电子上来，而是做了认真的具体论证的。

由于这种相位波的相速 $u > c$，所以 de Broglie 说："这种[相]速度大于[光速] c 的波不可能对应于能量的转移，我们仅把它视为一种与动点运动相缩合的假想的波。"[14] de Broglie 还进一步说，如果这种相位波不是严格单频的而是由接近于单频的不同成分叠加而成的波群的话，那就可以证明这一波群的群速度正好等于质点的运动速度[15]。于是，de Broglie 的结论是："必须假定，总能量已给定的动点的相波在每一点上具有一定的频率和[群]速

度，这一速度恰为处在这点的物体速度值所决定。”[14]

总之，按照 de Broglie 的原始假定，所谓电子的波动性，不是指电子既有微粒性又有波动性这样的二重性或二象性，而是指总有一个相位波伴随着电子的运动。在他眼里，电子不是波，波也不是电子；电子是物理的粒子，而波是非物理的假想物；它们是互相依存着的两件东西，而不是同一件东西的两个方面。直到 1929 年，de Broglie 在 Nobel 演讲里还坚持说：“可以这样来概括波动力学的意义：‘每一个微粒必然和一个波缔合，只要研究波的传播，就能为我们提供有关微粒在空间中的递次位置的信息’。”[16]

形象地说，de Broglie 设想的电子和波的关系，就好象飞行中的飞机同为它导航的无线电波一样。飞机受到雷达的指引而航行，但雷达波并不是飞机本身，它只提供有关航线的信息。正是在类似思想的基础上，不久之后 de Broglie 提出了他的“双解理论”，认为 ψ 函数就代表那种引导电子的波动。[17]可是，由于这一不成熟的理论在数学方面的困难，抵挡不住 Pauli 等人的严励批评，1927 年之后 de Broglie 曾经收起了他的想法，心安理得地接受众人封他为电子的“二象性”或者“物质波”创始人的荣誉。可是，当 1952 年 Bohm 提出了新的隐变量理论之后，又使 de Broglie 的双解理论死灰复燃，觉得他自己原先还是对的。[17]由此可见，de Broglie 的基本观念，同一般所讲的波粒二象性是大相迳庭的。

在 de Broglie 最初提出双解理论的同一段时间里，Einstein 也有过类似的想法。Einstein 把电子运动的波动性归之于一种非物理的鬼场(Gespensterfelder)，他认为 Schrödinger 方程描写的是这种鬼场的运动。鬼场本身不携带能量和动量，但却指引着电子的运动。这说明了 Einstein 也对波粒二象性存在着疑惑。虽然如此，他还是觉得这种想法太不成熟，所以从来没有公开发表过[18]。

我们知道，de Broglie 的工作是通过 Einstein 的赏识和介绍，才引起物理学界注意的。而在 de Broglie 的文章里，已经将 Bohr-Sommerfeld 的原子轨道解释为相位波形成的可能的驻波解，第一次揭示出量子条件的动力学含义。这也是它能够得到欢迎的重要原因。不过，电子在原子内部的运动情况是不能直接观察的，所以，de Broglie 和 Einstein 先后指出，穿过小孔的电子束或分子束，将会表现出象光那样的衍射现象，并把这当做证实 de Broglie 波存在的可能的实验手段[14,19]。

由于当时还不掌握制作适当的衍射装置的技术，最早的电子衍射是利用天然晶体的点阵来实现的。1927 年，Davisson 和 Germer 首先发现了低能电子束在单晶镍点阵面上的散射，得到同 x 射线在相同条件下的 Laue 束相似的结果，由此验证了 de Broglie 波长公式的正确性。接着，1928 年 G. P. Thomson 又得到电子束穿透金箔的多晶衍射图象，结果与 x 射线的 Debye 象相同。这已经是大家所熟知的了。后来，1929 年 Stern 等又成功地对氢、氦等分子束实现了 Davisson 型的衍射实验。到了五十年代以后，还陆续观察到中子束和 α 射线等通过晶体或者原子核的衍射图象[20]。这些实验有力地证实了，不仅电子，而且其它微观粒子的束流，都会产生象光那样的衍射现象。包括电子在内的微观粒子的这种性质，就是所谓电子或其他粒子的波动性。

要注意的是，象在光的干涉和衍射实验里直接测量到的只是光的波长而不是频率一样，在上面所述的各种粒子的衍射实验里，根据射束方位和晶格常数计算出来的，正是相应的 de Broglie 波的波长。上面所说的 de Broglie 波得到证实，也指 $\lambda=h/p$ 的波长公式(2)而言。由于de Broglie波的相速度 u 大于光速 c，所以显然不是物理上可以测量的。因此，由相速度决定的 de Broglie 波的频率 $\nu=u/\lambda$，也是没有测量意义的。虽然我们现在对 de Broglie

波的理解，没有必要仍然依附于他当初的一套推导，但有测量意义的仍然只是 de Broglie 的波长公式 $\lambda=h/p$。对于电子等非零静质量的物质粒子说来，与 de Broglie 波的相速度密切相关的频率 ν 是没有测量意义的，一般说来它只是一个虚拟的参数。于是，在 de Broglie 原来推导里使用过的 Einstein 关系 $E=h\nu$，一般说来也只是一种虚拟的关系，其中的 ν 并没有什么物理意义。实际上，在描写粒子的态函数里时常出现的频率 ν 或角频率 ω 参数，只是能量的一种表示。仅仅在牵涉到两个状态之间的能量差值 ΔE 时，才会出现真实的有测量意义的频率 $\nu=\Delta E/h$，下一章里我们将会举出一些有关的例子来具体说明这一点。

Schrödinger 在 de Broglie 波的概念的基础上，建立了以他的姓氏命名的方程。这一方程同经典物理学里的波动方程是那样相象，很自然把其中的 ψ 称为波函数。不过，对于这种波动的本性，Schrödinger 有他自己独特的看法，在第一章我们已经简单提到过了[21]。与 de Broglie 的相位波和 Einstein 的鬼场不同，Schrödinger 认为 ψ 函数描写的不是虚拟的而是真实的物理场，就象 Maxwell 方程里的电磁场那样。所以，他对 ψ 函数的这种看法也叫做“电磁解释”。按照 Schrödinger 的这种解释，所谓粒子不外是由作为物理实体的 ψ 波场集中积聚在微小空间内而形成的波群——即后来所说的波包。这就是说，只有波动是具有根本意义的存在，而粒子不过是波包，是由波场派生出来的表现效应。因此，Born 曾经恰当地把 Schrödinger 称为“保波派”(wave defender)或“唯波动论者”(wave-totaller)的首席代表[21]。

的确，Schrödinger 早就曾以谐振子为例，证明由适当的波动叠加而成的波包，它的行为就象一个经典物理学的粒子。他认为 $|\psi|^2$ 代表真实的电荷密度，在氢原子里出现的只是由 $|\psi|^2$ 描写的一片电子云，在这里粒子的概念不再适用。他还认为所谓能级不

过是波动的分立本征频率的表现，甚至说在微观领域里只有振动频率是基本的，从宏观经验得出的能量概念不适用于微观情况等等。

Schrödinger 把他自己的看法叫做“物质波理论”。他在 1933 年的 Nobel 演讲的题目是《波动力学的基本思想》，里面只字未提到他所建立的运动方程及其成功的结果，甚至全文没有一条数学公式。他觉得更重要的是宣传他的“物质波动理论”。他把波动力学同质点力学的关系，类比于波动力学同几何光学的关系。Schrödinger 说道：“旧的力学理论相当于光学中用彼此孤立的光线处理问题，新的波动力学相当于光的波动理论。从旧的观点转变到新的观点的结果是概括了衍射现象。”于是，他宣布：“我们肯定地说，原子实际上纯粹是被原子核俘获的电子波的衍射现象。”[22]由此可以看出，Schrödinger 在否定粒子概念的道路上已经走得多远。

事实上，Schrödinger 这种偏于直觉的唯波动论存在着一些不可避免的困难。首先，从 de Broglie 波相速度和群速度的差异，我们知道总存在着色散现象。那么，组成波包的不同频率成分的行进速度会各不相同，经过一段时间与经典粒子对应的波包总要弥散开来，怎么能保持稳定的粒子状态呢？其次，如果在氢原子里没有作为粒子的电子，而只有一团弥漫在原子核周围的电子云，那又有什么理由在哈密顿算符里写上点电荷相互作用的 Coulomb 势？还有，如果对单粒子问题，还可以用三维几何空间中的物理波动去解释态函数 ψ 的话，在多体问题里，态函数是用由各粒子的位形空间组合而成的多维位形空间描写的，又怎么能同在只有三维的普通空间里的物质波相对应呢？

Schrödinger 的物质波理论，实质上是要恢复到一种否定微粒说的经典场理论，对以上的这些问题都无法做出合理的回答。已经登上物理学舞台大显身手的 ψ 函数，仍是个神秘莫测的角色，

怎么样去弄清它的身分呢？看来必须突破经典观念的限制，创立出适应于量子力学理论的别开生面的新概念。

3.3 态函数的几率诠释

同 Schrödinger 认为ψ波场是唯一的原始物理实体，而粒子只是这种波动的聚集的观点相反，在 de Broglie 的相位波或者后来的双解理论里，只有粒子才是真实的存在，虚拟的非物理的波场并不携带能量和动量，它只起到引导粒子运动的作用。在 Schrödinger 那里，ψ 波场实际上是一种经典场，只不过满足的波动方程有所不同。只要给定了某一时刻的波场，就可以通过 Schrödinger 方程决定其后任何时刻的波场。ψ 场可以聚集成表现为粒子的波包，也可以象在氢原子里那样保持其浮云状的渺漫状态，无论如何，它都是真实的物理场。而在 de Broglie 那里，只有粒子是原始的实体，只不过它的运动不受经典动力学的支配，而由一种非物理的波场引导。只要给定了某一时刻粒子的位置，就可以从波场的变化决定其后任何时刻粒子的位置。如果粒子束在通过特定的区域后表现出衍射图象，那也只是由于在这空间区域内的某种波动分布使得这些粒子各自奔向适当的位置，使得总体上形成一幅衍射图象。其实，其中每一个粒子的运动都是有着确定轨道的。

由此可见，尽管 Schrödinger 的“唯波动论”和 de Broglie 的“唯粒子论”各执一端，在波动还是微粒是基本的物理实体这一点上存在分歧，可是无论 Schrödinger 的波场还是 de Broglie 的粒子，都仍然遵从经典物理学的因果律，或者说都受 Laplace 决定论的支配，因而都只能算做是一类半经典的解释。

所谓 Laplace 决定论，是从 Newton 力学的基础上生长出来的一种简单的因果性观点。1820 年，Laplace 在他的《概率分析论》一书序言中写道：“我们应当将宇宙的目前状态看做是它以前

状态的结果以及后来状态的原因。如果有一位神灵了解了在给定时刻支配着自然界的所有的力，以及宇宙中万物的瞬时位置，只要他的聪明才智足以分析处理所有这些数据，就可以从一条单一的公式中完全知晓世界上从最大的天体到最小的原子的运动；对他说来没有什么是不清楚的，从他眼里可预知未来，亦可回溯过去。"[23]

的确，在经典物理学里，反映随时间演化的因果关系的各种基本运动方程的主体，都是直接描写物理系统的各种物理量。例如，在经典力学里掌握了初始时刻各质点的位置和速度，在流体力学(包括声学)里掌握了初始时刻空间各点的密度或速度，在电磁学(包括光学)里掌握了初始时刻的电场和磁场分布，就可以分别通过各自的运动方程，求出在不同物理条件下这些质点位置、流体密度或者电磁场等等物理量的随时间变化的解。换句话说，在这些领域内，具有因果意义的是描写系统状态的一些物理量，无论是质点沿着轨道的行进，还是波场掠过空间的传播，都遵循着有直接物理意义的因果律。对自然界的这种简单的因果性理解，就叫做Laplace 决定论或者机械决定论。我们已经看到，无论是 Schrödinger 的波场还是de Broglie的粒子的运动，都没有离开这种机械决定论的窠臼。

大家知道，从 Bohr 的早期量子论开始，人们的注意力就集中在原子光谱等束缚态问题上。对于后来相继出现的 de Broglie 波和 Schrödinger 方程里的 ψ 函数，人们也是致力于解释这些波场在原子内部所可能起到的作用。虽然 de Broglie 一开始就指出有可能在电子束穿过小孔后的衍射现象中证实电子波动性的存在，而 Elsasser 在 1925 年进一步指明用晶体点阵当做衍射光栅以检验这种波动性的途径[24]，但上一节所讲的肯定的实验结果在 1927 年才得以完成。并且，就是这种对 de Broglie 波的实验检

验，也只使用了同光学、具体说是同 x 射线衍射现象的类比就足够了，并不需要对衍射过程作出量子力学的描写。

正是在这样的背景上，Born 机智地运用对散射过程的量子力学描述，作出了他关于 ψ 函数意义的论证。因为，如果停留在束缚态 ψ 函数意义的话，是很难得出明确的结论的。例如，在 Heisenberg 矩阵力学里的坐标算符的矩阵元 x_{mn}，只是作为电偶极跃迁振幅的分量而出现的，本身并没有直接的测量意义，测量到的只是平均的跃迁率。又如，在氢原子、谐振子等问题里的电子波函数 $\psi(x)$，同电子在这些束缚态里的位置有什么关系，也是不能通过实验直接确定的。在第五章里我们将进一步说明，事实上我们至今没有测量过电子在小于原子尺度内的绝对位置。结果，如果我们局限于对束缚态的研究的话，将无法判明关于 ψ 函数的不同解释究竟谁是谁非。

1926 年 Born 的短文《散射过程的量子力学》[25]，正是从这一话题开始的。Born 写道："许多人假定现今形式的量子力学不包括跃迁问题，而必定要在这方面作出新的概念性发展。我自己……则假设量子力学的理论是完备的，因而它必定能包括跃迁问题。" Born 指出，在处理散射问题时，曾经有效地处理分立定态的 Heisenberg 矩阵力学显得无能为力，而 Schrödinger 波动力学的数学程式则不仅适用于束缚态，而且能够胜任对散射态的描写。Born 说："问题在于以数学方式写出散射粒子的渐近行为"，而且"在碰撞中我们用量子力学程式处理的不是神秘的波场，而只是物质粒子的系统"。这关键性的一句话，揭示了散射过程初末态的渐近波函数同入射和出射粒子的对应关系，就是对 ψ 函数理解的钥匙。

Born 在这篇文章里写出的散射过程的渐近波函数，用现代形式写出来就是

$$\psi = e^{ikz} + f(\theta, \varphi)\frac{1}{r}e^{ikr}. \qquad (3)$$

式中的 $f(\theta, \varphi)$ 就是我们熟知的散射振幅，Born 原文的符号是 $\Phi(\alpha, \beta, \gamma)$。假定了定态波函数由代表入射粒子束的平面波加上代表沿不同方向出射的散射粒子的球面波两项之和的渐近形式描写之后，Born 便断言道："如果换用粒子的语言表述，只可能有一种解释。$\Phi(\alpha, \beta, \gamma)$ 给出从 z 方向入射的电子沿以角度 (α, β, γ) 表示的方向射出的几率。"注意到这里 Born 没有一下子找到确切的几率表达。只是在校对这篇文篇的清样时，Born 加了一条注解说："更仔细的考虑表明，几率正比于量 Φ 的平方。"后来又在同年的一篇文章里，他把这里的平方改成正确的模方、即绝对值的平方。并且，Born 在这后一篇文章里，把他关于跃迁几率的解释，直接运用到态函数上，将态函数 ψ 对于本征函数组 u_n 的展开式 (2.12) 里的系数 c_n 的模方 $|c_n|^2$，解释为系统处在状态 u_n 的几率。于是，Born 就这样基本上完成了他对态函数的几率诠释[26]。

无论如何，虽然在细节上不够精确，Born 在第一篇文章里已经掌握了问题的实质所在。Born 一直不相信 Schrödinger 的物质波理论。据他自己说，其中很重要的原因是："我的研究所和 Franck 的研究所都处在哥廷根大学的同一幢建筑物里。Franck 和他的助手们所进行的每一项电子碰撞实验，在我看来都是电子的微粒性的一个新证据。"[27] 对散射实验的注意使他认为："只考虑束缚电子是不可能解释清楚 ψ 函数的。"[28] 人类的认识注定要分两步走。Schrödinger 敢于为谁也不知道是什么的 ψ 建立起新的动力学方程，而他对于 ψ 函数的半经典解释，又要被 Born 的几率诠释所取代。

Born 对自己走出这一步的根本意义是很清醒的。他在将散射振幅认做几率之后，马上写道："我们得出的不是对'碰撞后的状

态是什么’这一问题，而只是对‘碰撞后的一种指定结果有多大可能’的问题的答案。”“这就碰到了整个决定论问题。从我们的量子力学观点看来，在一个个别事例里因果性地确定结果的量并不存在。……我自己倾向于在原子世界里放弃决定论。”[25]不久，在Wentzel，Oppenheimer 和 Dirac 等人依据几率诠释成功地处理了 Rutherfold 散射和光的色散等过程之后，Born 又一次宣称：“所有这些结果，都最动人地证实了量子力学的统计观点。经典物理学中所一直公认的自然过程的基本决定性，现在必须放弃掉。”[29]

我们讲过，在经典物理学里起支配作用的是物理量演化因果联系的 Laplace 决定性。在经典统计物理学里虽然也运用统计决定性来计算系统的宏观性质，但系统中每个微粒或者每个个别过程都被认为遵从 Laplace 式的因果性，宏观性质正是对这些个别过程统计平均的结果。而按照 ψ 函数的几率诠释，在量子力学里根本不存在 Laplace 决定性，一开始占支配地位的就是统计决定性。用 Born 自己的话说：在量子力学里“满足波动方程的波完全不代表物质粒子的运动，它们仅仅决定物质的可能运动，或者不如说仅仅决定物质的可能状态。”以及“经典理论引进了决定个别过程的微观坐标，但又由于对其无知而通过对它们取值的平均而消去这些微观坐标；而新的理论根本不用引进这些坐标就可得到相同的结果。……我们解除了由力直接决定粒子运动的经典职务，而只让它们去决定状态的几率。”[30]因此，Born 把 ψ 函数描写的波动称为“几率波”，明确地区别于 Schrödinger 的“物质波”。总之，在量子力学里必须放弃粒子运动的 Laplace 决定性，而代之以一开始就使用几率描写的统计决定性。“粒子运动遵循几率定律，而几率本身按照因果律传播。”[26]Born 这句话很好地概括了量子力学的统计本性，也是几率波概念的极好注解。

至于 Born 对 ψ 函数的几率诠释的思想根源，据他自己后来说，是得益于 Einstein 的启示。Born 在Nobel 演讲里说："Einstein 的观念给我以指引。他曾经把光波振幅的平方解释为光子出现的几率密度，以使光量子的波粒二象性得以理解。这一观念可以马上推广到 ψ 函数上：$|\psi|^2$ 应当是电子（或其他粒子）的几率密度。"[28]的确，光子的数目同光的能量或光强成比例，而强度则是满足场方程的波动振幅函数的平方，把关于光子和光波的这种对应推广到电子的情况，似乎是理所当然的。

可是，Pais 的研究[26]指出，事情没有那么简单。如果真的是那样的话，为什么起初 Born 把几率直接同 ψ 对应而不是同它的平方对应呢？Pais 认为，当 Born 迈出这一步时，他主要受到 Einstein 另一个观念、即关于鬼场观点的影响。因为，1926 年 11 月 Born在写给 Einstein 的信上明确地说："我把 Schrödinger 的波场看成是你所说的那种意义上的一个'鬼场'。"我们反复说过，Born 一直不同意 Schrödinger 把 ψ 函数当做一种真实的物质波的解释，那么，他倾向于 Einstein 的观点，把 ψ 波场当成一种非物理的鬼场，就是一件很自然的事了。

当时，也许有不少的物理学家都抱着微观过程描写的统计性的概念。例如，Bohr 等就多次提出，在微观领域内，能量和动量等守恒定律对单个过程并不严格成立，而只在统计平均的意义上满足守恒定律。[31]虽然这种猜测后来被证明为不正确，不过这里已经提出了统计决定性会在原子物理学中起支配作用的想法。抱有这种想法的物理学家，当然不会对 ψ 函数的几率解释感到惊奇。可是，Born 的工作同笼统的统计性概念或几率性想法不同。首先，我们强调过了，Born 没有停留在一般想法的水平上，而是独具慧眼地通过碰撞过程这个可直接受实验检验的手段，去证明他对 ψ 函数的几率诠释。在 Born 以前，还没有人用量子力学的数学程式

去描写散射问题。正是 Born 开始建立这种描写，解决了 ψ 函数同散射截面(散射振幅的模方)的几率性联系。在科学研究中，重要的不是只提出想法，而是提出实现或检验这些想法的手段。将入射束流和散射截面用 ψ 函数表示出来，就提供了检验 ψ 函数的几率解释是否正确的这种手段。

其次，更重要的是，Born 提出几率不简单地对应于 ψ，而是对应于它的模方 $|\psi|^2$。亦即是说，ψ 函数不是几率，而是几率幅，它的模方 $|\psi|^2$ 才是几率。这一点是前无古人的。Pais 评论道：这一步"完全是他自己迈出的。与电磁场不同，ψ 本身没有直接的物理实在性，因而我们要把这种开创性的洞察力归之于 Born。"[26] 在量子力学里的状态函数竟是对应于几率平方根的一个非物理量，这才是真正惊人之处。Pais 还说道："这一贡献导致了量子革命的终结。"[26] 认识到 ψ 是几率幅就使已经初步建立起来的量子力学数学程式同物理学的经验事实获得可靠的对应关系，从而基本上完成了量子力学的概念体系，剩下的只是细节的补充和形式上的完善。从此，关于唯波动论同唯粒子论的争论已经过时，波粒二象性的疑难不复存在。量子力学终于找到了适合于自己的独特的基本概念，从而完全摆脱了经典物理学观念的荫蔽，走上了成熟的发展阶段。

可惜的是，照顾到教学的顺序，一般都是在量子力学课程的后面部分才讲到散射问题，并且常常只是当做基本理论的一种应用。虽然讲散射问题时必定要介绍 Born 近似这种方法，但却很少去强调散射问题同态函数几率解释的关系。事实上，Born 正是在1926年上述第二篇关于碰撞问题的论文中提出这种近似方法的，后来便以他的姓氏命名。如果局限在束缚态情况，很难把 ψ 函数的几率诠释讲清楚。经常出现的误解是，以为现代物理学已经承认了 Schrödinger 的物质波和电子云的概念。其实，按照 Born 对态函

数的几率诠释，那只是没有直接物理意义的几率波和“几率云”，并不反映电子的真实位置和运动。对于这一种基本的分歧，Pauli 曾经在一封致 Born 的信中作过一种中肯的裁决：“我肯定 ψ 函数的统计本性，从而自然规律的统计本性——同 Schrödinger 相反，你一开始就很强调这一点——至少在几个世纪内将决定着规律的格式。……梦想回到 Newton-Maxwell 的经典格式，我看是无望的，是误入歧途和不合时宜的。”[32]

3.4 微观现象的统计性

Born 对 ψ 函数的几率诠释，无疑受到经典统计方法的影响。而且我们也已经看到[30]，他早就清楚地指出，与经典统计理论建筑在对决定个别过程的微观坐标的平均不同，量子理论根本不承认个别过程的确定性，它一开始就是一种统计性的理论。Born 还这样说过：“在这方面量子理论是和实验者一致的，因为对实验者说来，微观坐标也是力所不及的，所以他仅仅数出事例的数目，并且满足于统计学。这表明量子力学同样只回答适当提出的统计问题，关于个别现象的过程是不说什么的。因此，量子力学乃是力学和统计学的一种奇特的融合。”[30]

经典统计里的每个事件，都是受到因果律支配的。举例说，假定有一个开口容器，里面盛着加热了的液体，那么，我们从其中分子速率的分布等等，可以估算出平均的蒸发率，即单位时间内有多少个分子越出液体界面。虽然由于没有掌握其中每一个分子的运动情况，我们说不出哪一些分子将在什么时刻蒸发出去，但同时我们却确信，凡是越出界面的每个分子，必定是由于它先前同其他分子碰撞之后，获得了较大速率的结果。

推而广之，在医学或者社会学里使用的统计方法，这种作为集体统计性基础的个别因果关系就显得更清楚了。例如，运用统计

方法，可以估算出不同年龄阶层的人口的平均寿命，或者确定某种疾病患者的平均存活期。同时，每一个别人体生命的结束，都是存在着原则上可以查明的原因的。即使患了癌症，最后的具体死因总可以归结为身体的某个或某些系统的失效。

然而，微观现象的统计性与此不同。量子理论里的统计性是有根本意义的。一般地说，我们认识到的只是平均的结果，其中个别现象的发生无法归结为某种确定的原因。

回顾上一章里所列出的量子力学的几条基本假设，我们记得，只有在公设(II) 里给出每次测量力学变量时测量值的谱就是相应算符的本征值，而没有关于单次测量中为什么得到某一确定取值的任何假定。公设(III)说的是平均值，即多次测量取值按本征值谱的几率分布。而其他的基本假设可以笼统地看做是关于这种几率分布的动力学演化定律。总之，量子力学只给几率幅 ψ 函数规定了因果定律，确实没有对单次测量的取值作出任何因果性的规定。

微观现象里最简单的例子，就是放射性物质的放射性衰变。[33] 从 1896 年 Becquerel 发现放射性现象之后的几年里，Curie 夫妇和 Rutherfold 等很快就发现了各种放射性的平均值都随时间指数衰减。用指定类型的放射性原子的数目 $N(t)$，可以将这一指数规律表示为

$$N(t)=N(0)e^{-\lambda t}. \tag{4}$$

式中的衰变常数 λ(或平均寿命 $\tau=1/\lambda$) 不受放射性原子的年龄、浓度、化学结合情况以及外界温度及电磁场等等物理和化学条件的影响。

接着很快弄清楚了，这种指数衰变规律可以仅仅运用几率计算的基本规则导出，而无需对其中动力学过程的性质做任何假定。对于衰变数目偏离其平均值的统计涨落的研究，也进一步证实了一块放射性物质所发生的各个单独过程，在空间和时间上都完全

是随机的。正如 Amaldi 所讲："大多数工作在这一领域的物理学家都接受了这一已被确认的事实：计数器咯嗒咯嗒的声音，以及在荧光屏的背景上看到的一个个小光点都是随机分布的。"[33]

假设有一块放射性物质，按照指数衰减规律(4)衰变，我们可以(在统计涨落的范围内)精确地预言在每段时间内将有多少比例的放射性核发生衰变，但却无法确切预言某一个核在什么时刻发生衰变。并且，先后发生的个别核衰变过程是完全没有空间和时间关联的随机事件。例如，设在某一时刻观察到从这块物质的左半部分发生一次衰变过程，我们完全不知道下一次的衰变应当来自左半还是右半部分；并且，所有衰变事件在接收时间上显示出一个纯随机序列，并没有互相更靠拢些或更隔开些的倾向。这即是说，每个单个的核衰变过程是彼此无关的过程。

1928 年 Gamow 等首次成功地运用量子力学里的势垒穿透效应去解释 α 衰变，所能够预言的也只是平均衰变率，或者在单位时间内发生衰变的几率。现在的量子理论没有对单个原子核的确切行为作过预言。因为，量子力学的几条基本假设对单次测量即个别过程的预言是无能为力的。量子力学只能做出统计性的预言，例如说预言一个放射性核在某一时间间隔发生衰变的几率，而这里的几率又被理解成在多次测量中出现的比例。

由此可见，根据量子理论，微观现象只受统计性的因果律支配；也就是说，只有过程发生的几率表现出因果性，对每一个别过程说来，不存在 Laplace 决定论意义上的因果性。例如，假使我们观察到处在某一固定位置、譬如在晶格上某一点的一个放射性核在某一时刻发生了衰变。我们只知道，如果将类似的许多事件累计在一起，肯定满足平均值的指数衰减规律(4)，但却完全说不出来某一个核为什么会在某一时刻发生衰变。这并不是因为我们不了解那个核的运动状况，这种无知是原则性的，我们从来就不曾掌

握过关于个别衰变过程为什么会在某一时刻发生的具体原因。

形象地说，某一个核发生了衰变，变成了另一个核，同时放出射线粒子，可以看做是旧核的死亡和新核诞生的过程。在量子场论里就是这样描写的。我们只知道这一转变过程是由某种相互作用引起的，但不知道它为什么刚好在被观测到的那一时刻发生衰变。是不是到了那个时刻，它已经衰老得要死亡了呢？显然不是，在上一章里我们讲过，根据全同性原理，同一种粒子是完全一样的，没有新老之分。只要没有发生衰变等过程，它仍然是原先的那种粒子，不需要考虑它的"历史"。只有通过空间上的分隔，才使粒子成为可以辨认的。那么，是不是存在着更深一层的超微观的动力学机制，可以解释放射性核为什么在某一时刻发"急病"而死亡呢？所谓"隐变量理论"，就是这样一种企图发现掩盖在量子力学统计本性下面的更深层次的因果规律的努力。这种未知的隐变量同通常的量子力学描写的关系，就象决定个别过程的微观坐标同经典统计物理学对宏观平均性质的描写一样。然而，近一二十年来的研究已经证明，隐变量理论在一定程度上是一种过分的奢望，通常量子力学的理论体系，即建筑在上一章所述的几条基本假设之上而否定个别过程因果性的理论体系，仍然是站得住的。详细情况将在第七章介绍。

总之，每一种放射性衰变的平均进程，是不受环境因素的影响的，每一个别衰变过程的发生完全是随机的和不可预测的，理论上只可能预言大量过程的统计平均性质。这样看来，在这方面工作的物理学家不象能够控制疾病发展和延缓病人生命的医生，他所起的作用就好象一名医学或人口学的统计工作者那样，只满足于对大量病例的记录和统计；或者如 Born 所说，象一位实验工作者那样"仅仅数出事例的数目，并且满足于统计学。"[30]

综上所述，量子理论里几率概念的运用，或者说量子力学的统

计解释，一方面是对经典统计力学的继承；另一方面则不是简单的再现，从放射性现象的研究那里，微观过程本质上的统计性，无疑对量子力学里的几率概念起到过积极的影响。然而，仅仅有这两方面的思路是不够的。正象 Amaldi 所说："量子力学最惊人的特点，即'几率幅'的概念……没有从放射性的研究中得到过任何启发。……支持采用'几率幅'的明白的实验数据，只来自电子对晶体或分子的衍射实验。"[33]

在谈到衍射实验之前，让我们再稍为仔细地讨论一下微观现象统计性的基础，即一般说来对什么样的基本观察结果进行统计的问题。例如，当我们使用不同的计数器、光电管或者云室去检测放射性元素辐射出的射线时，只要运用分辨率足够高的仪器，或者在射线足够弱的情况下，我们发现计数器或光电管输出的总是一个个分隔开来的电脉冲信号，云室里出现的总是一条条分开的径迹。这表明了，无论放射线粒子是电子、光子还是 α 粒子等等，都是一个一个地到达检测器的。我们把这种每一次检测到的响应称为一个事件(event)。微观物理学实验的观察数据，就是由这样的一个个事件的结果组成的。

检测器对光子或电子等微观客体的响应，总是只发生在短促的时间间隔和(或)微小的空间区域之内。这一事实就是常说的光子或电子所表现的微粒性。注意，检测器里所出现的时间脉冲的宽度或者空间斑点的大小，并不就是光子或电子等粒子通过的时间长短或者它们占有空间的大小。这些脉冲和斑点虽然都是由粒子所触发的，但它们的大小长短都是由检测器的性能所决定的，并不直接反映粒子的时间空间分布的细节。

例如，在光电倍增管或者 Geiger 计数器一类的检测装置里，每一测量事件的输出脉冲的长短，是由检测器以及配套的电子设备的弛豫时间或时间分辨率决定的。在短于分辨时间的间隔里，

仪器不可能对多于一个的对象做出分别的响应。事实上，在这类检测仪器里，总是用电子学的手段把被检测粒子参加的单个微观过程(如光电效应和电离过程等)的效果放大许多倍，才形成一个便于观察的脉冲信号。

在空间分辨方面，例如在云室里，带电粒子通过所留下的径迹当然不是一条几何学曲线，它是由许多一颗颗分开的液滴串接而成的。电子在行进过程中，会使云室中的过冷蒸汽的一个个分子发生电离。然后就以这些电离分子为凝结核，逐渐长成一颗颗球形的液滴。开始时是电子参与的单个电离过程，而接着触发的液滴凝聚，实际上是一种在超临界状态下通过相变而产生的放大效应。这种放大效应使愈来愈多的蒸汽分子附着在凝结核上，到适宜于照相记录时，液滴的直径约为 10^{-5} 米的数量级，它当然要比电子或者 α 粒子的实际大小大好些个数量级。

又如，在普通的照相底片或者核乳胶里，射入的电子或光子开始只使得单个溴化银分子发生化学变化。在显影过程中，为了得到便于观察的图象，进行了一种化学放大作用，使感光分子附近的其他分子也随着发生变化，结果聚集了譬如说 10^{10} 个游离银原子，形成大小约为 10^{-6} 米的可见颗粒。我们在乳胶里观察记录的径迹，就是由这一个个颗粒串接而成的。至于光子或者电子撞击到硫化锌荧光屏上所激发的可见光斑的尺寸，相信不会比这些颗粒还小。

综上所述，电子或光子先同检测器工作物质的单个原子或分子起作用，这点已经通过对光电效应或电离等过程的研究而充分地肯定了。我们观察到的脉冲时间或光斑尺寸，尽管比光子或电子本身所占的时间空间区域要大得多，在宏观上仍然是相当小的。因此，我们从一个个脉冲或光斑的事件记录，知道光子或电子是一个个地到达的，每个事件一般只是接受到的单个粒子引起的。靠

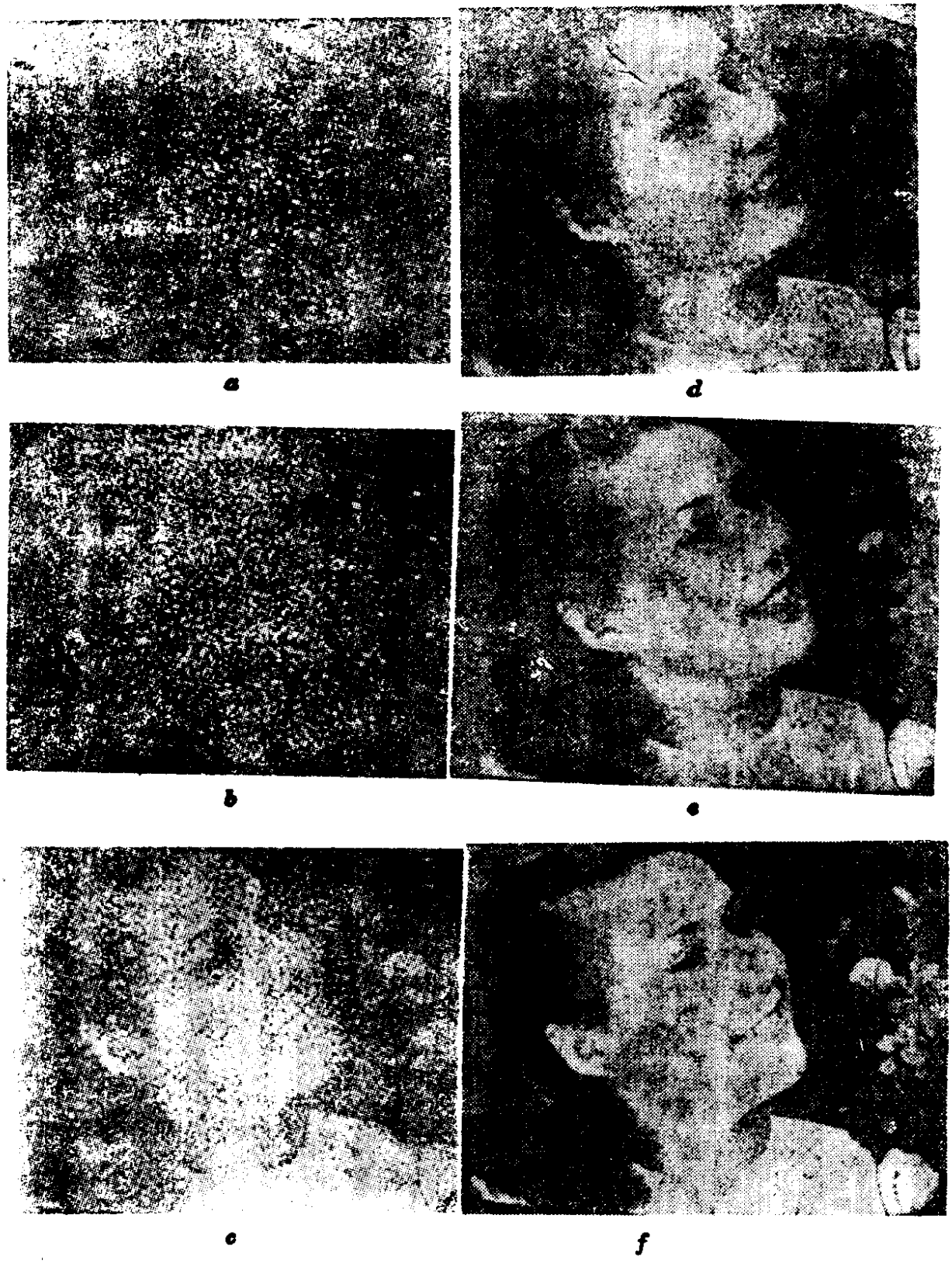


图1　一组显示与不同光子数目相对应的图象。每张相片的光子数目大概是：*a*) 3×10^{3}, *b*) 1.2×10^{4}, *c*) 9.3×10^{4}, *d*) 7.6×10^{5}, *e*) 3.6×10^{6}, *f*) 2.8×10^{7}。

少数事件的观察，只能在荧光屏或感光乳胶上看到少数光斑或颗粒，必须积累了大量的事件，这些光斑或颗粒才能形成一幅幅可与平均值相对应的完整细致的图象。

回顾频度解释的几率公式(2.31)，仅在总事件数N足够大时才有意义。只靠少数事件，得到的不是一幅冲淡了的完整图象，而是一幅粗糙的图象，甚至是一幅千疮百孔或者象满天星斗那样不成样子的图象。因此，只有积累了大量的测量数据，才能谈论譬如按$|\psi|^2$分布的几率密度，对少数测量数据或者单次测量的结果，谈论几率密度$|\psi|^2$是没有意义的。图1的一组照片，显示了当接受的光子数从少到多变化时，所得到的各种质量不同的图象[84]。这些相片上的人像，就相当于某种$|\psi|^2$的分布。对于光子数目很少的情况，是完全看不出面目来的。这样，我们就从实验观察的角度，说明了为什么量子力学只预言多次测量事件的统计分布，而不对单个过程的结果做确定的预言，或者，象在上一章所介绍的那样，量子力学里的态函数ψ是描写系综性质，而不是描写单个系统的性质的。

我们平常所讲的电子的波动性质，其实就是由大量测量事件所显示出来的一种按$|\psi|^2$的几率分布。在上一节里我们讲了，无论对电子还是中子等粒子，关于它们的波动性的早期证据，都是利用晶体点阵作为衍射光栅而取得的。这里面一方面运用了同物理光学的对比，一方面依赖着对晶体结构的认识，而后者又要靠x射线衍射的分析。因此，这些实验只是关于电子或中子的波动性的比较间接的初步证据。

我们知道，关于光的波动性的最典型的直接证据是Young的双针孔或双狭缝衍射实验，在那里可以直接看到光的振幅叠加的效应。所以，电子的双缝衍射实验，应当是显示电子波动性的最典型的例子。通过对这一实验的分析，应当能够完全弄清楚电子和

其他微观粒子的行为。正象 Feynman 所说：电子双缝衍射是“绝对不可能用任何经典方式说明的现象。”[35] 和：“这一实验设计得包含了量子力学的一切秘密之处，它把自然界的疑难、特异和神奇性，百分之百地摆在你的面前。”[36]在本节后一半内容，专门通过对电子双缝衍射实验的分析，深入揭露微观现象的统计本性，特别是几率幅概念的意义，从而再一次体现量子力学的基本原理。

如图2(a)所示，由左边源A发射的单能量电子束，穿过开了两条平行狭缝 1 和 2 的障板 D，最后落到右边的荧光屏 B 上。假若将电子束的强度调低到足以分开每一个事件，我们将发现电子是逐个到达屏 B 上的，每个事件只观察到荧光屏上出现一个小的亮斑，而不会出现多于一个亮斑或者一大片光晕。积累记录了大量事件，结果会呈现某种衍射图象。

首先，当我们封闭缝 2，只开放缝 1 时，每一事件的亮斑位置是不确定的，但积累了大量事件，就观察到图 2(b)用曲线 P_1 表示的事件数目对垂直坐标 z 的分布。P_1 分布曲线非零的区域，两侧各有一部分落在缝 1 的几何阴影区内，这就表现了单缝衍射效应。

其次，让我们反过来封闭缝 1，只开放缝 2。每一事件的亮斑位置当然也是不确定的，但它们都明显落在靠下一方。大量事件的积累效应，显示出图2(b)用曲线 P_2 表示的分布。如果这套装置是完全上下对称的，则曲线 $P_1(z)$ 和 $P_2(z)$ 对坐标轴的中点 $z=0$ 也是完全对称的。

最后，当我们同时打开缝 1 和缝 2 时，发现单个事件亮斑的位置更不确定，散布的范围更广。而大量事件的积累，显示出图 2(c)用曲线 P 表示的分布。曲线 P 沿着坐标 z 表现出强烈的起伏，这就是双缝衍射条纹。图上用虚点线表示的是曲线 P 的包迹，它是对于 $z=0$ 点上下对称的。

按照几率的频度解释，根据观察到的事件数目对坐标 z 的分

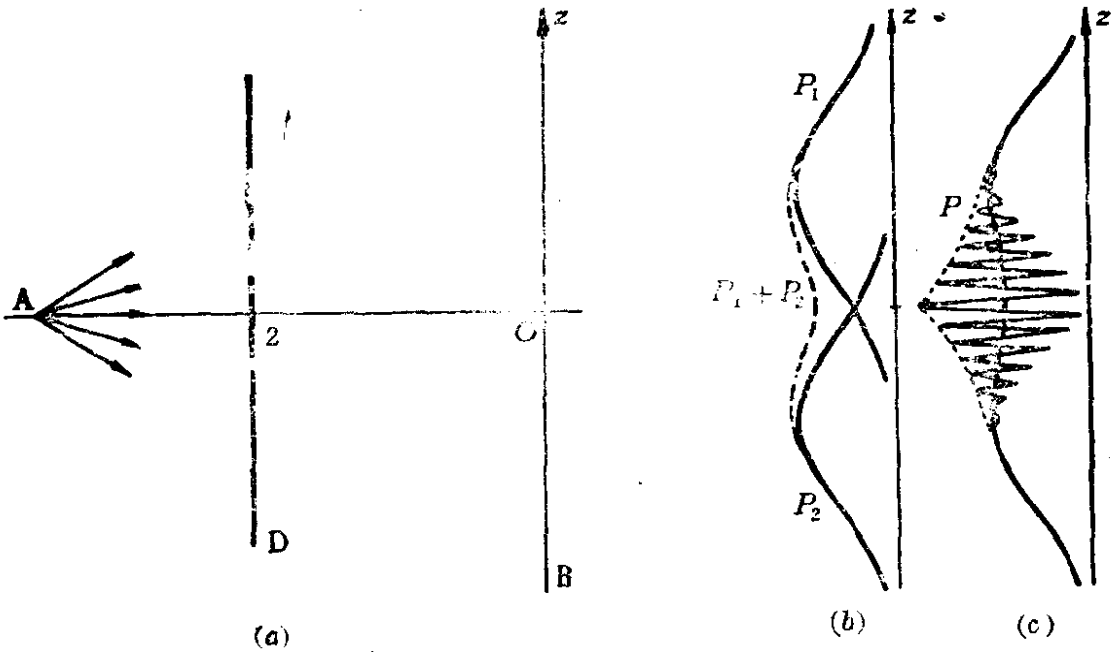


图 2　电子双缝衍射实验示意图

布描绘出来的曲线 P_1、P_2 和 P，分别表示在各自情况下荧光屏上电子出现的几率分布。微观现象里最令人感到意外的是，两条狭缝都打开时，电子到达的几率曲线 $P(z)$ 并不等于分别单独开放缝 1 和 2 时的几率曲线 $P_1(z)$ 和 $P_2(z)$ 的和，即不满足几率叠加规则。在图 2(b) 里，用虚划线表示的就是几率和 P_1+P_2 的曲线，它不存在着强烈的起伏。

如果仔细观察譬如在 $z=0$ 点各曲线的取值，我们就可以发现，在满足对称条件 $P_1(0)=P_2(0)$ 的情况下，简单的几率之和 $P_1(0)+P_2(0)$ 当然等于 $2P_1(0)$ 或 $2P_2(0)$，图上的虚划线就是这样描出来的。可是，实际上的几率曲线的包迹线，即图上的虚点线，在这一点上明显超出简单的几率和 $P_1(0)+P_2(0)$，而大约等于它的两倍，即 $4P_1(0)$ 或 $4P_2(0)$。考虑到 $4=2^2$，这就提示了满足叠加原则的量不是几率本身，而可能是几率的平方根。因为，如果有几率平方根的叠加关系

$$\sqrt{P(0)}=\sqrt{P_1(0)}+\sqrt{P_2(0)}, \qquad (5)$$

运用对称条件，就马上可以解释为什么有 $P(0)=4P_1(0)$ 的结果。

然而，过于简单的公式(5)事实上只适用于几率分布 $P(z)$ 的包迹线，它没有反映实际分布曲线的强烈起伏所表现的衍射条纹效应。从电学和光学里我们知道，可以用由模和相位因子的乘积表示的复振幅的叠加，来描写这种在极大值和极小值之间振荡的结果。于是，我们就把(5)式右方的两项换成带相位因子的函数：

$$\begin{aligned}\psi_1(z)&=\sqrt{P_1(z)}e^{i\delta_1(z)},\\ \psi_2(z)&=\sqrt{P_2(z)}e^{i\delta_2(z)}.\end{aligned}\tag{6}$$

这时显然有

$$\begin{aligned}P_1(z)&=|\psi_1(z)|^2,\\ P_2(z)&=|\psi_2(z)|^2.\end{aligned}\tag{7}$$

也就是说，ψ 函数模方代表几率分布；因此，ψ 就是几率的振幅，简称几率幅。

现在，假定同时开放缝 1 和 2 时的几率幅，由分别开放缝 1 和缝 2 的几率幅叠加而成，便可写出：

$$\begin{aligned}P(z)&=|\psi_1(z)+\psi_2(z)|^2,\\ &=P_1(z)+P_2(z)+2\sqrt{P_1(z)P_2(z)}\cos(\delta_1-\delta_2).\end{aligned}\tag{8}$$

(8)式的结果与(5)式不同之处，在于它的右方末项多了一个振荡因子 $\cos(\delta_1-\delta_2)$。靠这个因子就可以描写由于振幅叠加而产生的强度干涉效应，所以相应的末项就称为干涉项。把在经典物理学里熟知的这套描写搬到量子力学来，现在的强度量就是粒子分布的几率，相应的振幅就是几率幅 ψ。

使用几率幅概念，可以用统一的形式把(8)式改写成

$$P(z)=|\psi(z)|^2,\tag{9}$$

$$\psi(z)=\psi_1(z)+\psi_2(z).\tag{10}$$

由(9)和(10)两式即可推得：

$$P(z)=|\psi_1(z)|^2+|\psi_2(z)|^2+2\mathrm{Re}[\psi_1^*(z)\psi_2(z)].\tag{11}$$

考虑到(6)、(7)两式，可见(11)式同(8)式的结果是一样的，而(11)式是几率幅叠加结果的较普遍的形式。

由以上对于电子双缝衍射实验的讨论，可以概括出以下几条原则：

(*A*) 在每个观察事件里，电子都是逐个到达的，每次事件都只引起很小空间区域内的响应。

(*B*) 大量观察事件的积累，显示出反映确定的衍射图象的几率分布。

(*C*) 每种情况下的电子到达几率，等于相应几率幅的模方。当电子可能通过不同的途径到达时，其几率幅等于分别通过每一种途径到达的几率幅之和。

回顾第 2.2 节，我们看到，从电子双缝衍射实验分析得来的这几条原则，正好体现了量子力学的几条基本假设的实质性内容。以上的(*A*)点正是在坐标表象里表示的，电子位置测量值只能是某一坐标本征值的公设 (II) 的要求。(*B*)点则相应于平均值公设(III)，即只有通过大量的测量事件才能了解$|\psi|^2$几率分布。最后，(*C*) 点关键之处在于确定了几率幅的线性叠加原则，而这正是公设(I)的精髓所在。所以，虽然以上的(*A*)、(*B*)、(*C*)各点只是通过具体例子引出的粗线条的原则，但它们和量子力学的基本假设是相通的，实际上已经包含了公设(I)、(II)、(III)的本质内容。

以上对电子双缝衍射实验的讨论及由此概括得到的 (*A*)、(*B*)、(*C*)三条原则，本质上就是 Feynman 对量子力学基本原理的论证[37]。所以，Feynman 对量子力学基本概念的独特陈述，是同绝大多数物理学家所承认的一套基本假设(I)、(II)、(III)彼此相容的；两者之间没有实质性的差别，只有表述方式的差异。

然而，Feynman 对量子力学原理的阐述，并没有以光子或电子的波粒二象性为基础。在他的《讲义》里最接近于二象性陈述的

只有这一句话:“电子象粒子那样一颗颗地到达，而这些一颗颗的到达几率的分布又好象波动强度的分布一样。正是在这种意义上，电子表现得‘有时候象粒子，有时候象波动。’”[37]但是，Feynman又反复强调过:“尽管历史上电子被设想成表现得象粒子，后来又发现在好些方面它表现得象波。而它实际上表现得两者都不象。现在我们不那样说了。现在我们说:‘它两者都不象。’”[37] 还有:“这一日益增长的混乱，当1925或1926年出现了量子力学的正确方程时就解决了。现在我们知道电子和光表现得怎么样。但我们怎么样去说它呢?如果我说它们表现得象粒子，我就得出错误的印象;如果我说它们表现得象波动，也是一样。它们以自有的无可比拟的方式行事，……它们表现得不象你以前曾经见到过的任何东西。”[38]

由此可见，按照Feynman的意见，虽然有时也把以上(*A*)点和(*B*)点的内容，分别称为电子微粒性和波动性的表现，但这毕竟是一种过时的语言。起码可以说，现在的量子力学原理不需要什么波粒二象性。所谓电子的波动性，不过是几率幅叠加所造成的一种统计效果。正象French所讲:“波动性质乃是巨大数目的同样制备的粒子的几率性或统计性行为的表述——如此而已，岂有他哉!”[39]

事实上，几率幅叠加不仅表现为时间上的拍频或者空间上的干涉条纹等可与经典波动相比拟的性质，而且一般讲来，还可以表现为观察事件数目随某一物理参数周期性地起伏振荡的效应。我们将在下一章介绍几个明显的例子。在这里要强调的是，所谓电子的波动性不过是大量观察事件的有局限意义的表面效果。而且，只要从几率幅叠加的原理出发，根本不需要什么波动性的概念。相反，如果滥用波动性的概念于少数观察事件甚至单次测量上去，就不免要产生出许多误解来。到第五章我们再回过头来谈这个问题。

关于电子的微粒性，也不可以作经典性的理解。注意到(*A*)、(*B*)、(*C*)各点没有提到电子在到达荧光屏被检测之前的行为，我们在公设(I)至(V)里，也没有对这一点做过任何假定，只是在公设(IV)里，假设 ψ 的演化遵从 Schrödinger 方程。这意味着，受因果律支配的只是描写系综性质的态函数 ψ，它只是几率幅而不描写个别电子的运动。即是说，根据量子力学的基本假设，电子只在接受测量时表现出微粒的性质，从测量之前到测量发生的时刻随时间演化的是几率幅 ψ，而不是作为微粒看待的电子。因此，要问测量时发现的那个电子早先从哪里过来，这个问题一般是没有意义的。总之，在量子力学里不仅不可以象在经典力学里那样用轨道去描写电子的轨道，而且在不做测量的时候，电子的微粒性是一个很不可靠的概念，也许根本不应该采用它。

例如，在这方面经常碰到的问题是，在双缝衍射实验里，电子到底是穿过哪一条狭缝到达荧光屏的？一种常见的说法是，电子同时穿过两条狭缝。我们觉得这不是一个好的答案，因为它隐含了对个别电子运动的因果性联系，而量子力学里并不存在这样的基本假设。此外，作为微粒的电子竟然可以同时穿过两条隔着宏观距离的狭缝，毕竟令人太难以想象了。我们倾向于，在量子理论里没有必要回答这种按经典方式提出的问题。如果一定要问是怎样通过狭缝的话，我们可以回答说，是几率幅 ψ 同时穿过两条狭缝。遵从因果律的 ψ 提供了对系统演化的描写，它既不是实在的物理波场，更不反映电子微粒的踪迹。

另一方面，我们当然有办法测定电子是从哪一条狭缝通过的，只要在每条狭缝旁边装上一些适当的检测器。而根据原则 (*A*)，到达这些检测器的电子当然是一颗颗的，并且分别符合于各自的几率分布。但是，经过中间测量确认了是从缝 1 还是缝 2 通过的两种电子不再是相干的，它们分别属于两个新的状态 ψ_1 和 ψ_2。在

这种情况下，荧光屏出现的是图 2 里用虚划线表示的几率和P_1+P_2曲线的分布。只有当两条途径都是可能的而且不加区分时，才会得到双缝衍射的图象。

人们受到经典微粒概念的影响太深了，很自然有这样的想法：既然测量时发现电子是一颗颗的，想必它一直就是一颗颗地走过来的。这种很可疑的观念，即使是 Einstein 那样的大师有时亦未能免。例如，他在 1905 年提出光量子概念的文章，本来标题就是《关于光的产生和转化的一个启发性观点》。Einstein 在引言中写道："……有关光的产生和转化现象的观察，如果用光的能量在空间中不是连续分布的这种假说来解释，似乎就更好理解一些。按照这里所设想的假设，从点光源发射出来的光束的能量在传播中不是连续分布在越来越大的空间之中，而是由个数有限的、局限在空间各点的能量子所组成……"[40]在这段话里，Einstein 从光的产生和转化过程所显示的量子性质，推广到光的传播过程上去，看来确是缺乏根据的。

现在的量子力学并没有假设光束或者电子束在传播过程中的微粒性，而只是假设在测量时出现这种微粒性。而且，量子力学也没有给予测量发现的微粒性以因果意义。因此，在 Einstein 以后，认为光束就是传播着的光子流，或者电子束就是电子流的观念，不是量子理论所固有的观念。这种观念一开始就引起了不少麻烦。例如，Lorentz 在 1910 年就批评说："如果假定一束光线是一股光子流，那么怎样可能说明干涉和衍射等现象呢？……例如，一支光束通过一块半透镜，那就必定要么假定一个光子分成两半，这两部分互相干涉，要么假定不同的相干光子之间进行干涉。第一个假定是难于接受的，因为已经了解到存在着哪怕大到一米数量级的光程差的干涉。由此要求光子必须有同一数量级的尺寸，而这是显然不合理的。第二个假定也会带来困难，……因为它立刻提出

这样的问题，为什么有些光子被反射而另外一些被折射呢，或者为什么到达屏幕上同一处的两个光子会在暗条纹处互相湮灭呢？”[41]

在提出电子的波粒二象性后，这里的问题就更严重了。正如Bohr所说，坚持微粒性的观念必然导致这样的佯谬：“一个电子或光子的行为依赖于障板上它所不会通过的一条狭缝的存在。”[42]虽然我们认为互补原理对量子力学说来不是必需的，但Bohr关于只承认因果性的几率幅，拒绝承认因果性的粒子轨道概念，并且把未经测量的粒子看成在空间中非定域化的思想，现在看来确是经得起考验的。到第七章我们还要回头谈这个问题。

大家知道，在Dirac的书里，多次出现：“只有光子部分地在一光束，部分地在另一光束时，才能在两束光叠加起来时出现干涉，”和“每一个光子都部分地进入两分束中的每一束。这样，每一个光子只同它自己发生干涉”[42]等等说法。必须明确指出，Dirac的这些主张，都是从光束等于光子流的观念出发的。为了维护这一观念，他不得不采取光子分身的说法。而在我们看来，具有弥漫空间分布的是几率幅ψ而不是光子或电子，在测量之前没有必要讨论他们是如何作为微粒而运动的。而且，近年来双激光干涉实验的新进展，已经使Dirac书上的这些名言受到了公开的批评，详细情况将在第七章介绍。

最后，关于电子双缝衍射实验有两点需要说明：

第一点是，早在1927年，Bohr和Einstein就开始用电子双缝衍射作为例子来讨论量子力学的基本原理。后来这一例子又被数不清的教科书引用。可是，由于电子束相干长度比光小得多等等技术上的困难，长期以来，电子双缝衍射还只是一种未能实现的“理想实验”或“思想实验”，即一种纸上谈兵的手段。直到五十年代中期，才开始真刀真枪地用不同的方法成功地完成了这种实验。

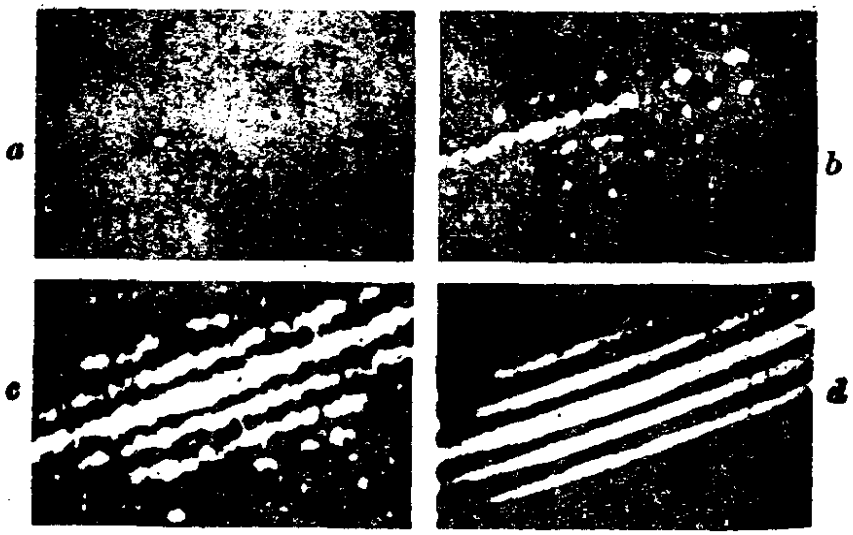


图 3　从电视监察器观察的电子衍射条纹图象。
a) —*d*) 对应于递增的电流强度。

这是一个从思想实验发展到真实实验的一个很好的例子。有关实验的详细情况将在第七章介绍。我们在这里先要说的是，已经用电子双缝衍射做出了相应于图 1 那样用光学手段显示的微观现象统计性的一组图象，如图 3 所示。[43]图 3 *a*)—*d*) 分别显示了事件数由少渐次增多时得到的图象，可以看做是对本节里从电子双缝衍射现象概括出来的(*A*)、(*B*)、(*C*) 诸原则的极好的直接的形象说明。

虽然已经得到了电子衍射图样，但实验上可能还没有精确到足以比较图 2 上所画的几种几率分布曲线的程度。所以，以上关于几率平方根的估计那一段，看来还只是一种纸面上的议论。因此，我们这里所谈的电子衍射，还没有完全摆脱思想实验的味道。

第二点是，象几乎所有文献一样，我们这里谈的电子双缝衍射，基本上只运用了同光学衍射现象的类比。即使实验证实了这种类比是正确的，但还没有看到哪一本教科书从量子力学的数学程式，例如从 Schrödinger 方程解出电子双缝衍射问题的答案。这是一个漏洞。

事实上，电子受到宏观障碍边界条件约束下的运动是不容易

处理的。我们所做的分析，更象是使用 Feynman 路径积分理论中，关于一切可能路径的几率幅相加的方法。的确，在 Feynman 关于路径积分的专著里，开始处理了电子单缝衍射问题[44]。后来又有人用路径积分方法计算了电子双缝衍射[45]。那么，既然路径积分方法已被证明为量子力学在矩阵力学和波动力学之外的第三种等价形式，我们可以放心相信，满足 Schrödinger 方程的电子同样会显示出与光波衍射形式相同的图样了。

近年有作者直接用 Schrödinger 方程求解电子受宏观物体的衍射，包括双缝衍射问题。[46]他们的结果保证了，当电子受到满足一定条件的宏观势区的衍射时，"会得出象 Fraunhofer 衍射相同的角分布。"这就更圆满地填补了一般论证中存在着的这个不大为人注意的漏洞。文献[46]还引述了这方面的一些早期工作，有兴趣的读者可以进一步了解。[47]

3.5 几率幅的意义

按照 Feynman 的意见："在量子力学里几率的概念没有改变。……改变了而且剧烈地改变了的是计算几率的方法。"[47]这种新的方法就是几率幅叠加的方法。的确，在过去的统计方法里，简单使用几率相加的法则。而量子力学第一次使用几率幅的叠加，是Born 关于态函数的几率诠释使人们认识到这一点。事实上，概率论的数学框架可以容纳几率相加和几率幅相加这两种不同的计算方法。所以，量子力学并没有使概率论这种数学理论失效，而只是发展了它的新形式和运用[48]。

既然电子的波动性不过是大量测量事件总体表现的统计行为，这就激起了有些物理学家想从电子几率的概率论讨论出发，建立起量子力学的概念体系。这种做法完全不需要 de Broglie 的相位波，Einstein 的鬼场或者 Bohm 的量子势，摒弃了作为原始概念

的波场，被认为是一种更加彻底的“唯粒子论”。

在这方面自成一派的是Landé的工作[49]。他先引入描写不同状态之间跃迁的几率矩阵，假定了矩阵元的对称条件和相当于几率幅叠加的幺正变换之后，就可以得到量子力学的基本原理而无需波粒二象性概念的帮助。Landé的这种离经叛道的主张以及他咄咄逼人的挑战态度，使他的理论受到或褒或贬的评价。

近年来还有Accardi的工作[50]。他认为需要发展概率论的一个新分支——量子概率，其中引进了一些新原理，例如与态叠加原理等价的振幅组合原理。他还认为，量子力学中的所有佯谬都是误用了几率组合原理的结果。

我们觉得，在不同方向上对量子力学原理的探索都会是有益的。然而，无论在哪一种方案里，都未能从更根本的原则推导出几率幅叠加原理来。亦即是说，现在还讲不出为什么在量子力学里要舍弃几率叠加而采用几率幅叠加的原则，而只能把这一点当做必需的和不可约简的基本假设。正如Feynman所讲：“谁也不知道它怎么会象那个样子。”“谁也不能给你一种更进一步的解释。”[51]

所以，在这一节里讨论几率幅的意义时，我们不去枉费心机地试图给出“为什么对微观现象要用几率幅的叠加？”这一问题的答案。我们想，最好的办法是先接受这一点，认识到自然界就是如此。我们在这里只是举出物理学其他方面的几个例子作比拟，说明满足线性叠加的量的不同选取以及几率幅概念的可能意义。我们希望这些内容能使几率幅的叠加原理变得在观念上容易接受一些，但决不是对必须使用几率幅概念的严格论证。

这里的关键问题是，动力学定律对哪一个量是线性的？或者说，要在由哪个物理量所张开的线性空间里描写物质的运动？Wheeler曾说过：“时间定义得使运动显得简单。”[52] 同样也可以

说，任何物理学理论选取作为演出舞台的空间，也要使动力学定律显得最简单。在 Newton 力学里，这一点似乎是平庸而不足道的。在那里，使用与人们日常生活经验相接近的 Euclid 空间里的坐标矢量或速度矢量来表示的运动定律是线性的，这好象是理所当然的事。

在 Newton 力学里，不同惯性系之间施行变换时的速度合成定律，对其中的速度参数是线性的。而且，质点速度同它的动量也有简单的线性关系，说明我们用速度这个物理量来描写质点的运动状态是很合适的。

可是，到了狭义相对论，原来这种基于直观的描写就显得不方便了。由于 Lorentz 变换对速度参数说来不是线性的，结果得到了 Einstein 的非线性速度合成法则。同时，在狭义相对论里，质点的动量和能量同速度都没有简单的线性关系。当质点的速度 v 接近于光速 c 时，它的动量和能量变化甚至是奇异的。由此可见，直观上容易理解的速度，在这种情况下不是描写质点运动的合适的物理量。

由于质点的能量 $E=\gamma m_0c^2$ 同参数 $\gamma=(1-v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$ 成比例，所以，在谈论质点能量时，用 γ 表示要比用 v 表示自然得多。在高能物理学里，还常常使用快度 (rapidity) 这个量，快度用 $Y=\tanh^{-1}(v/c)$ 表示。可以证明，将Einstein 速度合成公式改写而成的“快度合成公式”，对于其中的快度参数具有简单的线性关系，就象Newton 力学里坐标系变换时把速度直接加减一样，在相对论里可以直接加减的是快度这个量[53]。于是，使用快度去描写粒子的相对运动或者动量和能量的变换，都有比速度描写简单得多的关系，因而被物理学家们乐于使用。

从 Newton 力学过渡到相对论力学，为了适应于新的运动学和动力学定律，把描写质点运动缓疾的物理量从速度换成快度。由

此可看出，采用什么量描写系统的状态，不是一成不变的，在不同的动力学里可以不一样；怎样选择基本的量，主要由使用方便，尤其是希望得到基本定律的线性表示的要求来决定。

再举一个例子。我们对两个音的音高，即其频率 ν_1 和 ν_2 的听觉比较，不是感受它们的算术差 $\nu_2-\nu_1$，而是感受它们之间的比例 ν_2/ν_1。即是说，由人类听觉感受的两音之间的音程，由两音的频率比 ν_2/ν_1 决定，而与其频率差 $\nu_2-\nu_1$ 的绝对数值无关。可是，如果我们直接用频率比去表示两音之间的音程，在计算两个以上音高之间的相互关系时，就不可避免地要进行不那么方便的一些乘法或除法运算。不难看出，如果我们采用频率比的对数 $\log(\nu_2/\nu_1)$ 来表示音程，那么在涉及多个音程的计算时，原来的乘除运算就变成简单的加减运算。换句话说，在对数频率 $\log\nu$ 的空间里，音程的运算法则是线性的。直接使用频率 ν 的空间，就没有这种方便的好处。实际上，音乐家们就是在对数频率的线性空间里谈论他们的八度、五度、三度……等等音程的。

不仅如此，试验指出，人们对两个纯音频率的相对频差 $\Delta\nu/\nu$ 的分辨率，虽然随不同音强和音高有所变化，但在中等强度的中音区，分辨率接近于常数，在 0.2% 左右[54]。假定这一相对频率的分辨率为 ϵ。那么，在对数频率标度里，仅可分辨的这一最小音程就是 $\delta=\log(1+\epsilon)$。于是，用 δ 作为可区分度 (distinguishability) 的单位，就可以把在对数频率标度里的任意音程 $\Delta=\log(\nu_2/\nu_1)$ 的大小，看做是这一音程里有多少个仅可分辨的纯音的量度。或者说，任意音程 Δ 的可区分度的数目简单地等于 Δ/δ。

实际上，音乐家们就是这样考虑问题的。例如，不论在高音键盘还是在低音键盘，每个八度都含有十二个半音。而在十二等程律里，每个半音的频率比是 $\sqrt[12]{2}\approx1.0595$。同分辨率 ϵ 相比，我们知道对一位受过训练的音乐家，他在每一个半音内都能听出将

近 30 个可以区分的纯音。特别是，采用对数频率坐标后，音程的计算服从线性规则，我们可把音程的大小直接看做是用可区分度 δ 来量度的“距离”。即是说，在对数频率空间中表示音程的距离就是可区分性的量度。

以上所举的经典物理学里的两个例子，说明了选择什么量来表述基本定律，决不是随便的。适宜于表述线性关系的量，往往不是起初凭直观选择的物理量。而且，在后来表达出线性规律的空间标度里，两点之间的距离起码可以近似地看做可区分性的量度。不仅音程的对数标度是这样，其实在相对论里的 γ 标度或者 Y 标度的描写里，共同的特点都是把 $|v/c|$ 接近于 1 时的不易分辨开来的速度区域充分拉开，使得使用 γ 或 Y 参数时可以比较清楚地区分高速粒子动量和能量的大小。

几年前 Wootters 的工作[55]，正是运用统计上的可区分性，引入“统计距离”的概念，从这个角度说明量子力学里使用几率幅的 Hillert 空间的好处。为了节省篇幅，我们只用一个简化了的例子来介绍他的做法。

设有一个只有两种可能测量结果的系统，它可以是具有正反两面的一块重心不在对称中心的硬币，可以是具有沿 z 轴上下两种取向的粒子自旋，也可以是存在高低两条能级的束缚系统。我们对由满足一定物理条件的这种系统为其成员的统计系综进行 N 次试验。当 $N\to\infty$ 时，就能够确切地测定硬币出现正面的几率 p 和出现反面的几率 $q=1-p$；在量子系综里，p 和 q 也可以分别指自旋朝上和朝下或者高低能级的几率。

实际的试验次数当然不是无限而是有限的，结果总会出现非零的统计涨落。大家知道，在上述情况下，涨落量用二项分布的均方根偏差(标准差)

$$\Delta p=\sqrt{pq/N},\quad q=1-p \tag{12}$$

表示。

对于用两种不同状态描写的统计系综，例如铸造时具有不同质量分布的两批硬币，或者对 z 轴呈不同角度的两种粒子自旋，或者在不同温度下的能级分布等等，应当分别对应于两种不同的几率分布 p_1, q_1 和 p_2, q_2。如果对两批样品都只做有限的 N 次试验，那就显然难以区分 p_1 和 p_2 的差 $|p_1-p_2|$ 小于涨落量 Δp 的两种状态。

由此可引入可区分性的概念，即相邻的两个状态，当它们的相应几率 p_1 和 p_2 相隔两个标准差以内，即

$$|p_2-p_1|\leqslant 2\Delta p \tag{13}$$

时，两种统计系综是不可区分的。实质上，这种定义相似于光学仪器分辨本领的 Rayleigh 判据。(13) 式中的因子 2 是为了方便而写上的，没有绝对的意义。

下面再引入统计距离的概念。在只有两种可能的测量结果的情况，以 p_1 和 p_2 标志的两个状态之间的统计距离，等于在 p_1 和 p_2 之间所能容纳的可区分的状态数目。由于公式(12) 里的 Δp 随几率 p 而变化，统计距离 $d(p_1, p_2)$ 的定义由下述积分式给出：

$$d(p_1, p_2)=\frac{1}{\sqrt{N}}\int_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{2\Delta p}. \tag{14}$$

(14) 式右方的 $1/\sqrt{N}$ 是归一化常数，并且假定了积分限 $p_2>p_1$。积分号内的分母 $2\Delta p$ 即(13)式里的单位可区分度。将 (12) 式代入(14)式，便得到统计距离公式

$$d(p_1, p_2)=\int_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{2\sqrt{p(1-p)}}=\cos^{-1}(\sqrt{p_1p_2}+\sqrt{q_1q_2}). \tag{15}$$

在(15)式的反余弦函数里的宗量，明显出现了几率的平方根 $\sqrt{p}$ 和 $\sqrt{q}$，我们可以把它们叫做(实)几率幅。这一结果暗示了，如果在几率幅空间中进行描写，会有简单的解释。如图 4 所示，分

别以$\sqrt{q}$和$\sqrt{p}$为纵横坐标，则几率和条件 $p+q=1$ 表现为$\sqrt{p}$和$\sqrt{q}$平面上第一象限里半径为 1 的一段圆弧，所有不同的统计状态都应该落在这条弧上。设 A 点代表 p_1 状态，B 点代表 p_2 状态，其坐标分别是$\sqrt{p_1}$，$\sqrt{q_1}$和$\sqrt{p_2}$，$\sqrt{q_2}$。再设与 AB 弧对应的角度为 α，由差角的余弦公式，可将(15)式改写为

$$d(p_1, p_2)=\alpha. \tag{16}$$

于是，在几率幅所张开的空间里，两状态 A 和 B 之间的统计距离，简单地等于 A 和 B 两点间的弧长。这表明了几率幅空间的几何性质，正好适宜于反映由统计涨落决定的可区分性。

例如，图 4 中 A、B 两点的坐标分别是 $(1/2,\ \sqrt{3}/2)$ 和 $(\sqrt{3}/2,\ 1/2)$，即圆弧$\overset{\frown}{MN}$的两点三等分处。$\overset{\frown}{MA}$、$\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{BN}$三段圆弧的等长，就直接表示它们在统计上是等距离的，即其间包含的可区分的状态数目是一样的。

如果把这些图象映射到几率空间，就没有这么方便了。如图 5 所示，在以几率 q 和 p 为纵横坐标的平面里，条件 $p+q=1$ 表示的是一条倾斜直线 MN。把图 4 里圆弧$\overset{\frown}{MN}$上的三等分点 A 和

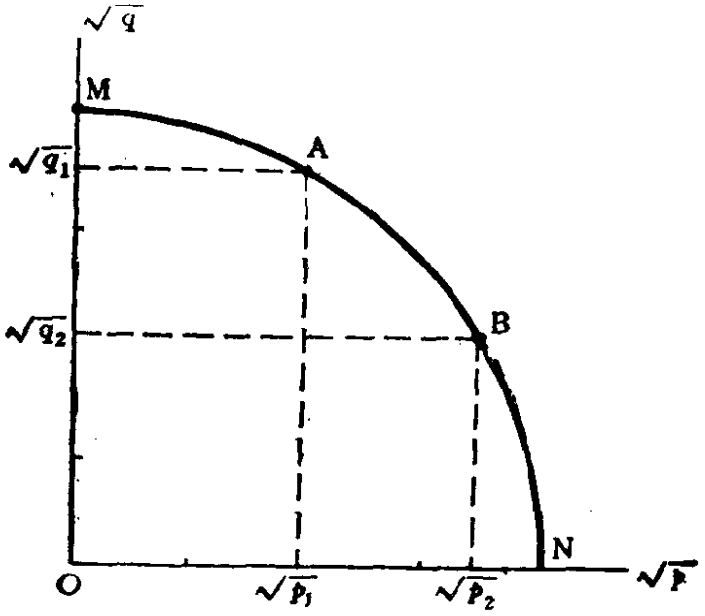


图 4　几率幅空间中的统计距离

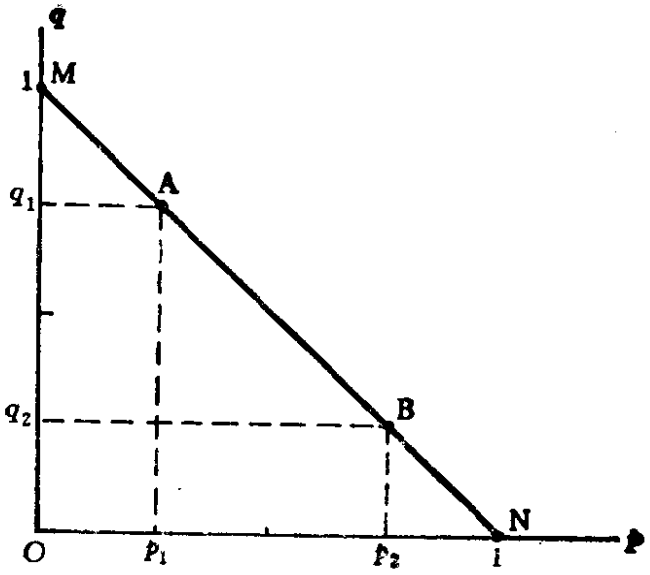


图 5　几率空间中的描写

B 映射到图 5 的直线 MN 上，可见 MA、AB 和 BN 三段线段不再保持等距离关系。(事实上，AB 的长度两倍于 MA 和 BN)这表明了，直接用几率的描写，不便反映各状态之间的可区分性。

将以上对两能级系统的讨论推广到多能级的普遍情形，经过较复杂的定义步骤，Wootters 按可区分性证明了量子力学里以 ψ_1 和 ψ_2 描写的两个量子系综之间的统计距离等于

$$d(\psi_1, \psi_2) = \cos^{-1}|(\psi_1, \psi_2)|, \qquad (17)$$

即等于相应的 Hilbert 空间里两态矢之间的“夹角”。这一简单明确的对应关系使他得出这样的结论：“测量结果的统计涨落性质，可能在一定程度上对量子力学的 Hilbert 空间结构有决定性的意义。”[55]

Wootters 还指出，其实遗传学家 Fisher 早在 1922 年就引进了几率的平方根（实几率幅），来定量地描写遗传漂变(*genetic drift*)，即各世代遗传下来的性状差异的统计性质。例如，在 Mendel 的豌豆遗传实验中，假若只观察到开红花和开白花这两种结果，那么在以红花的几率为 p_i(同时，白花的几率为 $1-p_i$)为

表征的各种杂交世代两两之间的统计距离（这一距离被遗传学家们称为“遗传距离”），实际上就采取(15)式的形式。这意味着，在实几率幅空间中的距离可以用来线性地描写遗传漂变现象。

由此可见，几率幅的使用并非始自量子力学，虽然量子力学创始人并没有由此受到过启发。遗传学和量子力学都以统计性质为基础，这件事决不是偶然的。

Wootters 还举过其他一些有趣的例子，来说明在几率幅空间中可以得到最简单的描述，以及其他一些深入一步的讨论。当然，量子力学里使用的是复几率幅，因而会发生几率幅的干涉，这是同包括遗传学在内的经典统计情况不同的。我们到下一章再详细讨论这个问题。这一节所讲的只是从一个新的角度来考察使用几率幅概念的好处，相信会丰富我们对于这一概念的认识。至于沿着这一条思路可以走多远呢？Wheeler 曾经这样说过：“能否从可区分性再深入一步，并从中导出整个量子理论呢？还没有人知道答案。”[56]

3.6 小　结

1927 年，Dirac 发表了《辐射的发射和吸收的量子理论》一文[57]，把电磁场看成是具有无穷多自由度的振子，首次对它进行量子化，引进 Bose 场(吸收和产生)算符。同时，对电子进行“二次量子化”，用 Fermi 场的算符表示。同量子力学里把电磁场只看做影响电子运动的外场不一样，在 Dirac 的理论里，系统的哈密顿算符里包含有自由电子项、自由电磁场项以及它们两者之间的相互作用项。他使用微扰论，首次不借助于 Einstein 的热平衡关系，独立地从量子理论计算出原子的自发辐射。这一工作是量子电动力学的开始，突破了量子力学里对光仍然停留在经典描写的局限，把实物粒子(电子)和电磁波场(光子)摆到了完全平等的地位上。

这样一来，不论光子还是电子，都是场激发的量子。这就重新体现了 Einstein 关于具有确定动量和能量的光量子的概念，而且这回不仅适用于电磁场，也可用于任何微观场。不过，在量子电动力学里光子和电子尽管具有确定的动量、能量和自旋等等，都不可以理解为总是在空间中定域在微小体积内的经典微粒。在量子电动力学里，粒子不外是场的激发状态，粒子和场都是物理实体，它们是同一事物的两个侧面。波动性和微粒性超越了经典的二象性悖谬，在场的量子化这个新的基础上取得了统一。

在量子力学里，把 ψ 函数看成描写粒子几率分布的几率幅。这里先要有粒子概念，然后才好谈它们的几率。所谓波动不过是粒子的几率波。脱离了粒子，几率就失去意义。所以，在量子力学里的波粒二象性，不是一种在物理学上真正平等的二重性，而是建筑在经典粒子概念之上的一种几率描写。正如 Schwinger 所说的那样：量子力学里对微观系统的描写："起始是用经典粒子的语言描述的，又补充了从经典的波动图象得到的特征。"[58]

总而言之，量子力学里所说的微粒性和波动性，都摆脱不了经典观念的束缚。我们不准备在这里详细讨论量子电动力学里的新概念的意义，仅仅再摘引在量子电动力学的建立和应用中做过重要贡献的 Fermi 在 1932 年的一段话来作为印证："直到几年之前，还不可能建立一种关于辐射的理论，可以同时满意地处理干涉现象和物质对光的发射和吸收的现象。第一类现象要用波动论解释，而第二类现象则由光量子论解释。一直到 1927 年由 Dirac 建立了一种辐射的量子理论，才不是那个样子了。Dirac 的理论能够以一种统一的方式解释这两类现象。"[59]这同 Feynman 认为到 1926 和 1927 年以后，关于波粒二象性的表观上的自相矛盾已经完全解决的观点[7]是完全符合的。

最后，我们觉得虽然不必象 Landé 那样刻薄地说："波粒二象

性早已被敲响了末日的丧钟，”但至少应当接受他的争辩对手Born所说的“关于二象性或者非二象性的争论看来是多余的……”[10]从而允许各人按照自己的口味，在讲授量子力学时使用或者不使用波粒二象性的概念；并且，在讲到波粒二象性的时候，必须避免不适当的经典观念。

作为本章的结束，我们再引用Margenau的一段论述。他在指出了对于波粒二象性的一些常见的误解后说道：“电子既不是粒子也不是波动。”“按照今天被最广泛地持有并且同已经建立起来的量子力学理论程式相协调的观点，一个电子是一件抽象的事物，它不再能使用日常经验所熟悉的样子去直觉地理解，而是要通过运用数学算符、可观察量和态等等形式上的步骤去确定的。”[60]这也就是我们的基本态度。

参考文献

[1] D. Bohm, *Quantum Theory*, Prentice-Hall (1951)；中译本：量子理论，侯德彭译，商务印书馆(1982)，138页。

[2] N. Bohr，原子论和自然的描述，郁韬译，商务印书馆(1964)，42页。

[3] N. Bohr, in *Albert Einstein: Philosopher-Scientist*, P. A. Schilpp ed., Tudor (1949), p. 210；中译本：原子物理学和人类知识，郁韬译，商务印书馆(1964)，45页。

[4] W. Heisenberg，原子物理学的发展和社会，马名驹等译，中国社会科学出版社(1985)，228页。

[5] 见[1.10], p. 95.

[6] 同上, p. 87.

[7] 见[1.33], p. 1.

[8] 见[1.17], p. 10.

[9] 见[1.41], p. 114.

[10] M. Born, W. Biem, *Phys. Today* **21** (1968), No.8.

[11] 见[1.41], p. 126.

[12] 同上，p. 117.
[13] 见[1.31].
[14] L. de Broglie, *Comptes Rendus*, **177** (1923), 507; 548; 630. 中译本：量子力学原始论文选编，复旦大学物理系(1985)，吴以义译。
[15] 参看：吴蕴崑，大学物理，1986 年第 9 期；朱洪玉，大学物理，1986 年第 10期。
[16] 诺贝尔奖获得者演讲集，物理学，第二卷，宋玉升等译，科学出版社(1984)，218 页。
[17] 见[1.10]，§§2.5，7.5.
[18] 参看：F. Selleri, in *The Wave-Particle Dualism*, S. Diner *et al.* ed., D. Reidel Pub. Co. (1984), pp. 101-128; F. Selleri, *Found. Phys.* **12** (1982) 1087; 万柏坤，刘世清，大学物理，1984 年第 4 期。
[19] 爱因斯坦文集，第二卷，范岱年等译，商务印书馆(1977)，420—421页。
[20] 参看[1.21]，Chapter 2.
[21] 见[1.9].
[22] 见[16]，263—273 页。
[23] 转引自：E. Nagel, *The Structure of Science*, Hackett Pub. Co. (1979), p. 281.
[24] 参看：M. Jammer, *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*, McGraw-Hill (1966), § 5.3.
[25] M. Born, *Z. Physik* **37** (1926) 863; 英译本：J. A. Wheeler, W. H. Zurek ed., [2.53] pp. 52—55.
[26] 参看：A. Pais, *Science*, **218** (1982) 1193; 中译文载：科学史译丛，1986 年第 2 期。
[27] 见[1.10]，p. 39.
[28] 见[1.9]，220 页。
[29] 同上，23 页。
[30] 同上，15—16 页。
[31] N. Bohr, H. A. Kramers, J. C. Slater, *Phil. Mag.* **47** (1924), 785.
[32] 见[1.9]，181 页。
[33] E. Amaldi, in *Problems in the Foundations of Physics*, G. T. di Francia ed., North-Holland (1979), pp. 1—28.

[34] A. Rose, *J. Opt. Soc. Am.* **43** (1953), 715.
[35] 见[1.38], p. 1-1.
[36] 见[1.37], p. 130.
[37] 见[1.33], Chapter 1; [1.38], Chapter 1.
[38] 见[1.37], p. 128.
[39] 见[1.21], p. 254.
[40] 见[19], 38页。
[41] 转引自: B. I. Spasskiĭ, A. V. Moskovskiĭ, *Sov. Phys. Usp.* **27** (1984), 273.
[42] 见[3], 52 页。
[43] P. G. Merli *etal.*, *Am. J. Phys.* **44** (1976), 306.
[44] 见[1.33], § 3-2.
[45] D. H. Kobe, *Ann. Physics* **123** (1979), 381.
[46] G. Anido, D. J. Miller, *Am. J. Phys.* **52** (1984), 49.
[47] 陆埮, 科大研究生院学报专集(1986)79.
[48] L. E. Ballentine, *Am. J. Phys.* **54** (1986), 883.
[49] 见[1.10], § 10.3.
[50] L. Accardi, in[18], pp. 297—330.
[51] 见[1.37], pp. 129, 145.
[52] J. A. Wheeler, *Found. Phys.* **16** (1986), 79.
[53] 参看: 章乃森, 粒子物理学, 上册, 科学出版社(1986), § 2.1.3.
[54] 马大猷, 沈嵘编, 声学手册, 科学出版社(1983), 442 页。
[55] W. K. Wootters, *Phys. Rev.* **D23** (1981), 357; W. K. Wootters, *Ph. D. Dissertation*, Univ. of Texas at Austin (1930).
[56] J. A. Wheeler 演讲集, 物理学和质朴性, 方励之编, 安徽科学技术出版社(1982), 27 页。
[57] P. A. M. Dirac, *Proc. Royal Soc.* **A114** (1927), 243.
[58] J. Schwinger ed., *Selected Papers on Quantum Electrodynamics*, Dover (1958), p. vii.
[59] E. Fermi, *Rev. Mod. Phys.* **4** (1932), 87.
[60] 见[2.12], p. 6.

第四章　态叠加原理

4.1　经典物理学中的叠加原理

大家知道，齐次线性微分方程的任意两个解的线性组合，仍然是同一方程的解。推而广之，任意数目个解的叠加，也是方程的解。这就是线性方程的解的叠加性质。[1,2]在物理学各个分支里的基本运动方程，象 Newton 第二定律，Maxwell 方程组和 Schrödinger 方程，Dirac 方程等等，差不多都是线性微分方程，大概只有广义相对论里的 Einstein 方程是个例外。所以，叠加原理无疑在物理学里起着非常重要的作用。但是，人们常常在几种不尽相同的意义上来谈论叠加。我们试图先弄清楚叠加原理在经典物理学里的含义，到下一节再讲量子力学的情形。

首先，在 Newton 力学里，单位质量的质点满足的动力学定律是

$$\frac{d^2x}{dt^2}=F(t). \tag{1}$$

为简单起见，我们只写出了一维运动的情形。一般说来，(1)式是对质点坐标 x 的非齐次线性微分方程。因为，微分运算对于 x 的线性是明显的。设 x_1 和 x_2 是两个独立的坐标，c_1 和 c_2 是两个任意常数，显然有

$$\frac{d^2}{dt^2}(c_1x_1+c_2x_2)=c_1\frac{d^2}{dt^2}x_1+c_2\frac{d^2}{dt^2}x_2. \tag{2}$$

因此，如果已经知道两个力 F_1 和 F_2 分别单独对质点作用时方程

的解 x_1 和 x_2：

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=F_1,\qquad \frac{d^2x_2}{dt^2}=F_2, \tag{3}$$

那么，根据方程(1)，质点同时受到两个力 F_1 和 F_2，即是说受到它们的合力 $F=F_1+F_2$ 作用时的解就是

$$x=x_1+x_2. \tag{4}$$

这一例子被称为叠加原理的运用[1]。合力作用下的运动等于各分力单独作用下的各种运动之和，这一陈述也常称为“力的独立作用原理”。

例如，在用自由落体测量重力加速度的一个实验里，重锤在铅直方向受到恒定的重力，在它上面的音叉受到水平方向上的恢复力，后者从静止开始的运动就是自由落体运动同简谐振动的叠加。为了便于想象，这里使用了二维运动，即在两个正交自由度上叠加的例子。其实这些讨论也适用于两种运动发生在同一方向的情形。

一种重要的情况是(3)式里 $F_1=0$ 的情形，即自由运动同受迫运动的叠加。例子是大家也很熟悉的抛体运动等于水平方向的自由运动同铅直方向的落体运动的叠加。用数学语言说就是，非齐次线性方程的特解加上相应齐次线性方程的通解，就组成非齐次线性方程的解。

以上的讨论，不仅适用于象(1)式那样左方只有描写自由粒子动能项的情形。还可以同样适用于方程左边是较为复杂的几项线性项的情形。例如，描写阻尼振子等线性系统的方程，就属于这种情形[1]。

以无阻尼的简谐振子为例，这一系统满足方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0, \tag{5}$$

这是一则齐次线性方程，它的任意两个解

$$x_1=A_1\sin(\omega t+\alpha_1),\quad x_2=A_2\sin(\omega t+\alpha_2)$$

之和 $x=x_1+x_2$，显然保持相同的函数形式：

$$x=A\sin(\omega t+\alpha),\tag{6}$$

其中的常数 $A=[A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)]^{1/2}$，$\alpha=\alpha_1-\alpha_2$。(6)式当然也是方程(5)的解。这种解的叠加性质是由分立元件组成的线性电路理论的基础。在那里，每个元件上的电压或电流，都按(6)式表示的同一频率的谐振动形式随时间变化。在这一基础上，我们可以在(5)式左方加上齐次的阻尼项，又在(5)式右方写上非齐次的强迫力，讨论系统的各种响应[1]。

以上讲的相当于质点力学的范围，其中起到重要作用的是力的独立作用原理。这些例子表明了，我们选用质点的坐标 x 来描写它的运动是合适的，由此建立的运动方程，它的解满足线性叠加的关系。假若一开始选取了坐标的平方及其对时间的微商来描写质点的运动，即使行得通的话，所得到的解也不满足叠加原理，将会给我们带来极大的麻烦。所以，如果做得到的话，我们总是尽量找到满足线性微分方程的那个量，就会有相应的叠加原理。譬如说，在电磁学里，满足 Maxwell 方程的电场和磁场，就存在线性叠加关系。特别是，当从分立元件电路转到分布参数或者更一般的情形，就需要从相当于质点力学的情况转到波动现象的研究。从力的独立作用过渡到场的叠加，将会使我们对叠加原理的意义达到更深一步的认识。

为简单起见，我们先以弦的自由振动这种一维运动为例。设有一根在 $x=0$ 和 $x=l$ 两端固定的张紧的柔软弦线，振动幅度为 u。弦线各点的振动满足对于 u 的齐次线性波动方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=0,\tag{7}$$

式中 c 代表波速。

运用分离变数法，设

$$u(x,t)=X(x)T(t), \tag{8}$$

得到两个(5)式型的常微分方程：

$$\frac{d^2}{dx^2}X+k^2X=0, \tag{9}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}T+\left(\frac{k}{c}\right)^2T=0.$$

其中 k^2 是待定常数。由边界条件 $x(0)=x(l)=0$，可确定

$$k_n=n\pi/l, n=1,2,\cdots, \tag{10}$$

对于每一个 n 值，得到的特解是

$$u_n(x,t)=A_n\cos(\omega_n t-\delta_n)\sin k_n x,$$

$$\omega_n=k_n/c=n\pi/lc. \tag{11}$$

每个 u_n 代表一种振荡模，或称本征振荡。

由于三角函数组的完备性，我们可以用 Fourier 级数写出方程(7)满足上述边界条件的通解是

$$u(x,t)=\sum_n u_n(x,t)$$

$$=\sum_n A_n\cos(\omega_n t-\delta_n)\sin k_n x. \tag{12}$$

式中常数 A_n 和 δ_n 由初始条件决定。以上从(11)式到(12)式的最后一步，就运用了适用于(7)式解的叠加原理。

对(12)式以及它的一阶时间导数式取 $t=0$，得

$$u(x,t)|_{t=0}=\sum_n A_n\cos\delta_n\sin k_n x, \tag{13}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)|_{t=0}=-\sum_n A_n\omega_n\sin\delta_n\sin k_n x. \tag{14}$$

(13) 式实际上就是满足指定边界条件的任意函数 $u(x)$ 的Fourier级数展开式。由此可见，从方程(7)解的叠加性能够证明，弦可以

采取任意的初始形状。换句话说，只要能将初值条件写成（13)式那样的 Fourier 展开，就能保证对应着相同系数的（12)式便是问题的解。

当然，上面所说的“任意”函数，指的是物理学上一般可能实现的函数形式。从数学上严格地讲，应该是初始条件(13)和（14)式的两个函数满足 Fourier 展开的收敛条件，即要求它们本身和它们的低阶导数具有一定的连续性质[3]。进一步还可以依法处理象弦的强迫振动那样的非齐次线性方程，或者特定的非齐次边界条件等问题，我们不再详细讨论。

需要强调的是，虽然(12)到(14)式对振幅 $u(x,t)$ 以及它的导数运用了 Fourier 级数展开，但叠加原理不能归结为 Fourier 级数的运用。因为，描写任何物理量的任意函数，只要它的连续性行为足够好，都可以作 Fourier 级数展开。例如，振幅 $u(x,t)$ 的平方 $u^2(x,t)$，甚至任意 n 次方 $u^n(x,t)$，都有可能作 Fourier级数展开，也可以写出相应初始条件的展开式。可是，由于基本的运动方程(7)，是为 u 而不是为 u^2 等等而设立的，我们无法象从(13)和（14)式到(12)式的过渡那样，从 u^2 的初始条件的展开式写出 $u^2(x,t)$ 随时间的演化。因而，u^2 的 Fourier 级数展开式，即使写出来了，也只是一种纯形式的数学表示，在物理学上是没有意义的。

总之，波动的叠加原理的根据是波动振幅满足齐次线性微分方程的事实。在这里，叠加的是波幅而不是波动的强度、位相等等。换句话说，叠加原理确定了描写波动的一种振幅空间，在其中表示的动力学定律是线性的。假若换用别的物理量，虽然在运动学上的叠加描写也许是可能的，但却无缘得到线性的动力学方程，因而在物理学上是没有意义的。

在进一步讨论波的叠加之前，我们再看看电磁场的例子。先讨论有源静电场的情况。设有电荷分布 ρ_1 和 ρ_2，由它们产生的

静电势 φ_1 和 φ_2 分别由 Poisson 方程

$$\nabla^2\varphi_1=-4\pi\rho_1,\nabla^2\varphi_2=-4\pi\rho_2 \tag{15}$$

给出。那么，当同时存在 ρ_1 和 ρ_2，即总电荷分布为 $\rho=\rho_1+\rho_2$ 时，场方程

$$\nabla^2\varphi=-4\pi\rho \tag{16}$$

的解 φ，当然是 ρ_1 和 ρ_2 单独产生的势的和

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2. \tag{17}$$

在数学形式上，这不过是前面所讲的非齐次线性微分方程的解的叠加(1)—(4)式的重演。原来讲的力的独立作用原理，现在表现为静电场的叠加原理，即空间中任意指定点的总电场，等于由空间中所有各项电荷分布在这一点上所产生的场的叠加。这一结果来源于 Poisson 方程里 Laplace 算符 ∇^2 的线性，即

$$\nabla^2(c_1\varphi_1+c_2\varphi_2)=c_1\nabla^2\varphi_1+c_2\nabla^2\varphi_2. \tag{18}$$

可以将上述讨论很自然地引伸到随时间变化的电磁场。由于 Maxwell 方程组对于电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{B}$ 是线性的，场的叠加原理无疑仍然是有效的。并且，虽然静场总是有源的，但变动的电磁场可以脱离电荷和电流等场源而存在，它本身是独立的物质运动方式。这样，当我们谈论某一指定点的总场时，只需要计及从各方面传播到来的场，而不必问它们的源泉。也就是说，只需要考虑在空间中自由传播的电磁场的叠加。在这种情况下，支配电场和磁场的每个分量的动力学定律，都是如下形式的齐次线性的Helmholtz波动方程：

$$\nabla^2u-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u=0. \tag{19}$$

(19)式实际上就是(7)式的三维推广。于是，我们可以仿照上面弦的振动的情形，讨论满足一定边界条件下自由电磁场的解，例如在谐振腔或波导管里的电磁场表示成各种单模解的叠加等等。

电磁场就是电磁波动的振幅。场的叠加原理的有效性，通过波导或者传输线里的驻波，通过空中的无线电信号传播等等无数现象而表现出来。由各种频率的广播信号叠加而成的电磁波，并没有产生新的频率；其中每一频率的信号，又可以藉助线性共振系统逐一被检测出来，这就是场的叠加原理的一个极好例证。

在可见光频段，我们可以更直接地观察到波的干涉和衍射效应，即观察到由场的叠加而形成的合成光强的分布在空间中出现强烈起伏的明暗相间的条纹图样。因为观察到的是光强 I，而它是同以复数表示的电场 E 即波辐的绝对值平方成正比的。因而，当到达同一点的两波幅 E_1 和 E_2 叠加时，合成波的强度是

$$I\propto|E_1+E_2|^2=|E_1|^2+|E_2|^2+2\mathrm{Re}(E_1{}^*E_2). \tag{20}$$

上式最后一项就是干涉项。或者，对于两支同频率的光束的干涉，有

$$I=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos(\delta_2-\delta_1)。 \tag{21}$$

式中 $\delta_2-\delta_1$ 是两光束的相位差。当有确定的相位差关系时，就会呈现出空间中有明暗分布的干涉条纹。

按 Jackson 的估计[2]，对于以上所讲的那些类型的宏观现象，所有的实验在 0.1% 的精确度肯定了电磁场线性叠加的有效性。只是在量子电动力学里，才需要考虑由于真空极化等机制而引起的一般是很微小的非线性效应。

4.2 量子力学中的叠加原理

由上一节的讨论可知，因为 Schrödinger 方程也是齐次线性微分方程，所以叠加原理必定也在量子力学里占着支配的地位。然而，翻一下各种不同的教科书就会发现，对这一原理叙述的简繁以及所摆位置的高低，往往有很大的差别。

据说，量子力学里的叠加原理的明确陈述，首次出现在 Dirac

的《量子力学原理》1930 年第一版上。我们看到，在该书里的确把“态的叠加原理”作为开宗明义的第一章的标题[4]。

那么，从反面看来，在量子力学刚刚诞生的那几年里，叠加原理也许根本没有被一些创始人认真讨论过，或者简直被忽视了。我们看到，即使是到了后来，在一些大师所写的量子力学教科书里，或者全然没有明显提到这条原理[5]，或者只用寥寥数语轻轻带过[6]。

在这方面有典型意义的是 Wichmann 写的教本。在这本书里只有一小段话讲到：“我们最重要的假定是，描写……单个粒子的波动方程将是线性微分方程。其意义是该方程的解满足叠加原理：方程的两个解的任意线性组合仍是方程的解。……”[7] 似乎认为不值得在这上面多费笔墨了。

与此成为对照的是，在我国曾经产生过巨大影响的一本苏联教科书里。是这样陈述作为“量子力学的基础之一”的态叠加原理的：“如果任何一体系(粒子或粒子集合) 能在由波函数 ψ_1 表示的态中找到，又能在由 ψ_2 所表示的态中找到，则它也可能在由波函数 $\psi=c_1\psi_1+c_2\psi_2$ 所表示的态中找到。”[8]这一段绕口令式的文字，每每使得教师和学生们伤透脑筋。事实上，类似于“可能在 ψ 状态找到”或者“ψ 是一个可能的状态”的陈述，使用了未经精确定义的用语，因而不可避免地使人感到费解。

按照我们反复强调过的基本观点，量子力学里的态叠加原理的根本意义，在于确定了满足线性叠加关系的对象是态函数。正象 Dirac 所讲：“量子力学的普遍叠加原理，适用于任何力学系统的态。”[9]在讨论态叠加原理时，人们常常只着重阐述叠加的数学关系，而忽视了叠加对象的意义。在量子力学里，叠加原理适用于态函数即几率幅，而不是对粒子的坐标、动量、自旋等力学变量或者对几率本身的叠加。把握了这一点，就弄清了态叠加原理的实

质。

在 Heisenberg 的矩阵力学里，跃迁振幅也具有与态函数相当的几率幅的意义。但这一点当时还隐藏在普遍感到陌生的矩阵形式里，没有受到足够的注意。只有在 Schrödinger 的波动力学里，揭示出波动方程的对象竟然不是经典物理学里的弹性位移或者电磁场强等等描写波动的物理量，而是从来没有听说过的 ψ 函数。只要有人率先冲破经典物理学观念的束缚，敢于为几率幅这个非物理量建立基本的动力学定律，不愁找不到合适的运动方程。所以，Dirac 评论说："Heisenberg 和 Schrödinger 的真正天才是发现了几率幅，……由于它隐藏得非常好，所以人们不可能在更早的时候想出量子力学。"[10]

我们在第二章里讲过，在规定了力学变量用作用于态函数的线性算符表示的公设(I)里，隐含着每个态函数对应于 Hilbert 空间的一个矢量，即态矢。态叠加原理的本质就是指，量子力学的数学程式是建筑在由态矢所张开的线性空间之上的。并且，从这种静态的叠加原理，很自然要求态随时间的演化也服从线性叠加的规律，即是说(2,32)式里的演化算符 U 也是一个线性算符。或者，用 Dirac 的话说，满足叠加原理的态："可能指某一特定时刻的态，或者也可能指……全部时间的态。"[11]这样，量子力学里的态叠加原理，同量子力学里的基本运动方程是为态函数设立的线性微分方程这两种讲法，说的就是一回事了。

为了便于具体的讨论，让我们考察 Schrödinger方程

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi$$

的解。首先我们看到，这一方程总是对 ψ 函数的齐次线性微分方程。无论哈密顿算符采取什么形式，它总不会出现非齐次项。所以，在量子力学里，不需要象在经典物理学里那样去处理非齐次方程

的解，也就不存在相应的“力的独立作用原理”。或者说，量子力学里的 ψ 场总是“无源”场，Schrödinger 方程的任何两个解的叠加，仍然是方程的解。因此，我们可以在形式上采取同上节中所讲弦的自由振动或者无源电磁场一样的步骤来讨论 ψ 函数的叠加性质。

在第二章里讲过了，当哈密顿算符不显含时间时，它的特解是

$$\psi_n(x,t)=e^{-iE_nt/\hbar}\varphi_n(x)$$

其中 E_n 和 φ_n 分别为定态 Schrödinger 方程

$$H\varphi_n=E_n\varphi_n$$

里哈密顿算符的分立本征值和本征函数。按照态叠加原理，马上可以写出 Schrödinger方程的通解是

$$\begin{aligned}\psi(x,t)&=\sum_n\psi_n(x,t)\\&=\sum_n c_ne^{-iE_nt/\hbar}\varphi_n(x).\end{aligned}\tag{22}$$

式中的 c_n 是任意常数。

(22)式其实是(12) 式的量子版本。重复上一节的讨论，当给定 ψ 函数的初始条件

$$\psi(x,0)=\sum_n c_n\varphi_n(x)\tag{23}$$

后，就可以确定展开式中每项的系数 $c_n=(\varphi_n(x),\psi(x,0))$，从而根据(22) 式写出问题的解。(注意到 Schrödinger 方程只含对时间的一阶导数，所以相应的初始条件(23)要比经典波动情况简单一些。)以上就是态叠加原理的运用。常数 c_n 的模方 $|c_n|^2$ 代表以态函数 $\psi(x,t)$ 描写的系统处在第 n 个能级 E_n 的定态 $\varphi_n(x)$ 的几率，也就是测量系统能量取 E_n 值的几率。

以两能级系统为例，设系统的哈密顿算符可写成

$$H=H_0+H',\tag{24}$$

φ_1 和 φ_2是对应于 H_0 的同一本征值 E_0 的两个简并态:

$$H_0\varphi_1=E_0\varphi_1,\quad H_0\varphi_2=E_0\varphi_2. \tag{25}$$

以 φ_1 和 φ_2 为基,计算出微扰量 H' 的矩阵元,记为

$$\begin{aligned}(\varphi_1,H'\varphi_1)&=(\varphi_2,H'\varphi_2)=a,\\(\varphi_1,H'\varphi_2)&=(\varphi_2,H'\varphi_1)=b.\end{aligned} \tag{26}$$

为了简单起见,我们假定 H' 矩阵对于 φ_1 和 φ_2 的交换是对称的。这一种简化并不影响下面所得结论的普遍性。

由于(26)式里的非对角元素b一般不等于零,系统的定态不是 φ_1 和 φ_2,而是满足方程

$$H\psi_1=E_1\psi_1,\quad H\psi_2=E_2\psi_2 \tag{27}$$

的总哈密顿算符 H 的本征函数

$$\psi_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1+\varphi_2),\qquad \psi_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1-\varphi_2), \tag{28}$$

相应的能量本征值为

$$E_1=E_0+a+b,\qquad E_2=E_0+a-b. \tag{29}$$

于是,按照(22)式,可以写出 Schrödinger 方程 (2.20)的通解

$$\psi(t)=c_1e^{-iE_1t/\hbar}\psi_1+c_2e^{-iE_2t/\hbar}\psi_2. \tag{30}$$

式中的 c_1 和 c_2 为任意常数。

现假设系统在 $t=0$ 的初始时刻处在 φ_1 态。可以这样设想,在 $t<0$ 时系统只受 H_0 的支配,φ_1 是一个定态;只是在 $t=0$ 以后,才加上微扰 H'。现在问 $t>0$ 时系统仍然处在 φ_1 态的几率。按题意,初始条件是

$$\psi(0)=\varphi_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1+\psi_2). \tag{31}$$

同取 $t=0$ 的(30)式比较,定出常数

$$c_1=c_2=\frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{32}$$

将(32)式代回(30)式，并且再次运用(28)式，得到

$$\psi(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-iE_1t/\hbar}\psi_1+e^{-iE_2t/\hbar}\psi_2)$$

$$=e^{-i(E_0+a)t/\hbar}(\cos\Omega t\varphi_1-i\sin\Omega t\varphi_2),$$

$$\Omega=b/\hbar=(E_1-E_2)/2\hbar. \tag{33}$$

结果表明，系统将周期性地在 φ_1 和 φ_2 之间振荡。系统处在 φ_1 的几率是(33)式中相应项系数的模方，即 $\cos^2\Omega t$，而在 φ_2 态的几率是 $\sin^2\Omega t$。几率幅的振荡角频率是 Ω，它决定于两定态之间的能级差。这一现象类似于经典力学里的对称耦合摆。在那种情况下，由于两种特征振动的振幅的叠加，使得在满足一定的初始条件时，振动能量在耦合着的两个对称的单摆之间往复转移，轮流达到极大和极小值。

如果系统的两条能级足够接近，由(33)式决定的振荡频率就会小到可以在宏观范围内直接观察的程度。再下一节我们将会给出一些适当的例子。在这里先顺便说明一下，与经典物理学的振动不同，在量子力学里，系统的能量本身，或者说它的绝对值，一般并不同某种振动频率相联系。观察(33)式结果里 $\psi(t)$ 的总相因子，它是由两能级的平均能量 $\frac{1}{2}(E_1+E_2)=E_0+a$ 决定的。在对 ψ 取模方以计算几率时，这一相因子是没有贡献的，因而是没有直接的观测效果的。从(33)式还可以看出，真正有观察意义的只是由能级差 E_1-E_2 决定的几率幅振荡频率 Ω。或者说，只有能量的差值才同某种真实的振荡频率有联系。这一结果不仅适用于上述例子，而是有普遍意义的。例如在氢原子里，把能级的能量值说成是电子绕核运动的频率的某种比例是没有意义的，因为那种运动只是一种无法证明其正确性的一种想象，是没有观察效果的。在氢原子里，能级之间的能量差 ΔE 才是与有观察意义的辐射频率 $\omega=$

$\Delta t/\hbar$ 相联系的。总之，对电子的态函数，写出 $E=\hbar\omega$ 的式子，其中的 ω 只能看成是一个虚拟的参数，或者说是能量的“代用品”，一般不能与某种振动的频率相联系。这就是在上一章里讨论 de Broglie 波时我们所强调过的，只有 de Broglie 波的波长才具有观察意义的原因。

以上讲的都是定态即能量本征态的叠加，将任意态函数展开成定态的叠加，可以简捷地得出态随时间的演化。这种做法类似于上一节所讲将弦的振动幅度按照 Fourier 级数的展开。可是在量子力学里，态叠加原理不仅只有这一种表现形式，它具有更普遍的意义。事实上，由于厄密(自伴)算符本征函数组的完备性，系统的任何状态函数皆可以对代表任意力学变量的算符的本征函数组实现展开：

$$\psi(x,t)=\sum_n c_n(t)u_n(x). \tag{34}$$

式中 u_n 是满足本征值方程 (2.3) 的任一算符 A 的对应于本征值 α_n 的本征函数。(34)式其实就是(2.12)式，只不过明显写出了 ψ 对时间的依赖关系。

从这一普遍的观点回头看，(22)式就是在(34)式中 u_n 取为哈密顿算符 H 的本征函数 φ_n 的特殊情形，相应的含时展开系数是 $c_n(t)=c_n e^{-iE_n t/\hbar}$。而上面的例题里最后(33)式的结果，也可以看做是 $\psi(t)$ 对于无微扰的哈密顿算符 H_0 的本征函数组的展开式。

上一节讨论经典波动的叠加原理时，我们强调过，叠加原理不能简单地归结为 Fourier 展开的数学形式。在量子力学里，我们更加有必要强调这一点。尽管态叠加原理一般是以(34)式那样对某一算符 A 的本征函数组的展开式表示的，但是不可以将态叠加原理归结为本征函数展开的数学方法。因为，(34) 式不是对任意量，而是对几率幅的叠加展开式，从而叠加系数 $c_n(t)$ 的模方，

就代表测量力学变量 A 时得到相应本征值 α_n 结果的几率。在上面例题里，我们正是做这样的物理解释的。

关于这一点，Dirac 说得很好："把一个态表示成一些其他的态的叠加的结果，这个过程是一个数学过程，它总是可以允许的，这一点不涉及任何物理条件，就象把一个波分解成一些 Fourier 分量一样。然而，在某一特定情况下，这种过程是否有用，就得由所研究的问题的特殊物理条件来决定了。"[9]在下一节里，我们先进一步讨论态叠加原理的物理意义；然后，在再下一节，将给出对态叠加原理的一些直接例证。

4.3 态叠加原理的非经典特征

以上我们着重从同经典波动方程的解的叠加性的类比，过渡到量子力学的态叠加原理。然而，量子力学里的态函数毕竟不是可与经典情况对比的物理量，因而态叠加原理本质上不是能够用经典观念去理解的。这首先是因为，量子力学实质上是一种统计性的理论，不能用 Laplace 决定论描写而需要几率性的描写。其次，满足叠加原理的对象又不是几率本身而是作为几率幅的态函数。所以，量子力学里的态叠加原理具有双重的非经典特征。

Dirac 在 1970 年曾经讲过："我们在原子理论中所得到的几率，是作为一种更加基本的量的数值的模方而出现的。……这种量叫做几率幅。""这给了我们一个同日常生活中的几率概念非常不同的几率观念。……存在这种几率幅的直接结果就是引起干涉现象。如果有某一过程能够以几种不同的方式发生，象人们所说的由不同的通道发生，那么我们必须做的就是计算出对其中每一通道的几率幅。然后，把所有这些几率幅加起来，并且只有在完成了这种加法以后，我们才乘出模的平方，从而得出这一过程发生的几率的总结果。你可以看出，这一结果完全不同于我们对与各条

通道相对应的各项单独取模的平方而得到的结果。正是这种差别引起了充满着整个原子世界的干涉现象。"[10]

现在我们回到上一章里讨论过的电子双缝衍射的例子，进一步分析 Dirac 所讲的量子力学里关于几率的新观念。如图 2 所示，设电子从源 A 射出，通过开有狭缝 1 和 2 的障板，到达屏 B 的某一点上。按照经典物理学里粒子具有确定轨道的观念，电子从 A 出发，或者穿过缝 1 到屏 B，或者穿过缝 2 到屏 B，它不可能同时穿过缝 1 和缝 2。

对于这种经典粒子的运动，可以做如下的几率性描写。设电子从 A 到缝 1 的几率为 P_{A1}，从 A 到缝 2 的几率为 P_{A2}；又设电子从缝 1 到屏 B 的几率为 P_{1B}，从缝 2 到屏 B 的几率为 P_{2B}。那么，按照电子具有确定轨道的观念，电子从 A 到 B 的总几率 P_{AB}，应当是分别通过两条路径的几率 $P_A{}_B^{(1)}$ 和 $P_A{}_B^{(2)}$ 之和。既然这两条路径是可以明确区分因而是互相排斥的，我们就有

$$P_{AB}^{(1)}=P_{A1}P_{1B},\ P_{AB}^{(2)}=P_{A2}P_{2B}. \tag{35}$$

最后得到总的几率分布是

$$P_{AB}=P_{AB}^{(1)}+P_{AB}^{(2)}=P_{A1}P_{1B}+P_{A2}P_{2B}, \tag{36}$$

结果等于电子从 A 穿过缝 1 到 B 的几率，加上从 A 穿过缝 2 到 B 的几率。这里适用的是几率叠加规则。当使用小弹丸等宏观粒子做实验时，只要 1 和 2 两种路径是互相排斥的，必定能得出以(36)式表示的几率相加的结果。在医学或者社会学里对人身行为的统计，当然也是满足不同途径的几率叠加规则的。

在(36)式的展开里，每一项几率因子 $P_{A1},\cdots,P_{2B}$ 都是可以分别测量的，并且这种测量(或者监视)并不影响到宏观粒子的实际运动。例如，对粒子的全路径施行照明并连续摄影记录，就可以做到这一点。于是，我们可以坚定无疑地相信，宏观粒子的运动必定具有确定轨道。或者，换句话说，即使我们没有对宏观粒子的运

动逐步监视，我们也相信在接受观测之前，它们也总是以颗粒形式，沿着某种确定轨道走过来的。(36)式就是这种建筑在经典观念基础上的信心的体现。

可是，对微观粒子所做的双缝衍射实验，出现了按几率相加所不能解释的强烈起伏的衍射条纹。在第 3.5 节里我们讲过了，如果仔细观察衍射条纹极大和极小处的强度，会提示我们满足叠加规则的量不是几率而是几率的平方根；而且，为了能够得到强烈起伏的衍射条纹，这个量应当是复数而不是实数。按 Dirac 的说法，这个比几率"更加基本的量"就是几率幅，所有几率都是作为几率幅的模方而出现的。

运用几率幅的概念，我们把刚才的问题重新描述如下：电子从 A 穿过缝 1 到屏 B 和穿过缝 2 到屏 B 这两种几率，分别等于各自几率幅的模方：

$$P_{AB}^{(1)} = |\psi_{AB}^{(1)}|^2, \quad P_{AB}^{(2)} = |\psi_{AB}^{(2)}|^2. \tag{37}$$

而在双缝衍射实验里，两条途径都是可能的，这时出现的几率分布也等于相应几率幅的模方：

$$P_{AB} = |\psi_{AB}|^2. \tag{38}$$

量子力学的态叠加原理告诉我们，不应当使用将几率直接相加的(36)式，而代之以几率幅的相加：

$$\psi_{AB} = \psi_{AB}^{(1)} + \psi_{AB}^{(2)}. \tag{39}$$

将(39)式代入(38)式，便得到

$$P_{AB} = P_{AB}^{(1)} + P_{AB}^{(2)} + 2\mathrm{Re}[\psi_{AB}^{(1)*}\psi_{AB}^{(2)}]. \tag{40}$$

(40)式实际上就是(3.11)式的改写，同(36)式相比，多出了右方最后一项干涉项，正是这一项贡献了强烈起伏的双缝衍射条纹。

在量子力学里，既然是把几率幅而不是把几率当做基本量，也就是说是在几率幅的空间而不是在几率空间里描写物理世界，那么相应地，就要把(35)式表示的各个过程里先后步骤的几率分解

式换成几率幅的分解：

$$\psi^{(1)}_{AB}=\psi_{A1}\psi_{1B},\quad \psi^{(2)}_{AB}=\psi_{A2}\psi_{2B}. \tag{41}$$

式中 $\psi_{A1},\psi_{1B},\psi_{A2}$ 和 ψ_{2B}，分别是与(35)式里的几个几率因子相对应的几率幅因子：

$$\begin{aligned} P_{A1}&=|\psi_{A1}|^2,\quad P_{1B}=|\psi_{1B}|^2,\\ P_{A2}&=|\psi_{A2}|^2,\quad P_{2B}=|\psi_{2B}|^2. \end{aligned} \tag{42}$$

于是可以将(39)式写成

$$\psi_{AB}=\psi_{A1}\psi_{1B}+\psi_{A2}\psi_{2B}. \tag{43}$$

这样写有什么意思呢？我们先考虑一种特殊情况，即过程只有唯一的一条可能途径的情形。这时候有 $P^{(2)}_{AB}=0,\psi^{(2)}_{AB}=0$，将这些条件代入(39)和(43)式，得出 $\psi_{AB}=\psi^{(1)}_{AB}=\psi_{A1}\psi_{1B}$；两边取绝对值平方，便有 $P_{AB}=P^{(1)}_{AB}=P_{A1}P_{1B}$，即在同一情况下的(36)式。由此可见，(35)式的几率分解同(41)式的几率幅分解两者的区别，全在于存在多于一种可能途径时的叠加性质上。事实上，(43)式就是在态空间里对某一几率幅所作的“中间态”展开：

$$(A,B)=\sum_n (A,n)(n,B). \tag{44}$$

只要以指标 n 标志的中间态(它一般是某个算符的本征函数组)是完备的，总可以做这样的展开。当然，如果世界简单到只有一个中间态，那么几率描写同几率幅描写都是一样的，我们将永远看不到任何干涉和衍射现象，量子力学就不再是必要的了。

然而，“自然界是微妙的”，她在我们面前展现了绚丽多姿的风采。量子现象的基础就是由(39)或(43)式表示的几率幅叠加原则。正如Feynman 所说，(43)式所表示的定律，“是Schrödinger 的工作，Born 和 Jordan 的统计诠释以及 Dirac 的变换理论的结果。”[12]

如果存在着一种以上的可能途径或者中间态，那么承认了(43)式型的几率幅叠加关系，(36)式型的几率叠加关系便无效了。因为，几率幅的叠加会产生出(40)式里的干涉项，而几率叠加不可能产生干涉项。上面说过，(36)式的观念基础，是相信电子要就是从缝1穿过，要就是从缝2穿过，这是两条互相排斥的可能途径。虽然我们没有逐步监视电子的运动，但我们认定它必然是沿着某一条确定的轨道走过来的。这样，当电子从某一条狭缝穿过的时候，另一条狭缝是否开放，对它的运动不会产生任何影响。这是在把电子看做经典粒子的观念下作出的结论。而量子力学则相反，它不承认电子的运动坐标是有因果性的。在量子力学里，有因果性的是几率幅，不可以认为电子沿着某种轨道运动。我们不可能逐步监视电子的运动而不严重干扰它的状态，因而我们无从谈论电子到达屏B之前是怎么样走过来的，甚至无从谈论它在传播过程中是否保持着微粒的形式。抛弃了关于电子的经典观念，改用几率幅的语言，我们可以说：电子的几率幅可以同时穿过两条狭缝；或者说，电子穿过一条狭缝的行为，会受到它没有穿过的另一条狭缝是否开放的影响。这是因为，满足Schrödinger方程的不是电子的坐标而是它的几率幅，这种"几率波"的行为当然要受到全部边界条件的影响。

总之，(36)式的几率相加规则，是经典粒子观念的反映；而(39)或(43)式的几率幅相加规则，即态叠加原理，是量子力学基本假设的基础。量子力学开创了以几率幅为基本量的全面统计描写，它既区别于使用几率叠加的经典粒子观念，又区别于直接用物理量表示振幅而不需要统计描写的经典波动观念。

然而，虽然在量子力学诞生以前，人们没有使用过以几率幅叠加为基本原理的概率论，但这一套做法并不违背概率论的数学结构[18]。譬如，(36)式的失效并不意味着概率论里关于互相排斥的

事件的条件概率满足相加的普遍定律不再成立。因为，事实上(36)式里的$P^{(1)}_{AB}$和$P^{(2)}_{AB}$是分别只开放缝 1 和缝 2 情形下的几率，而 P_{AB} 则指双缝开放的情况，条件都不相同，本来就没有理由把(36)式看做是概率论里普遍定律的一种体现。只是在经典物理学的粒子观念支配下，认为粒子只可能从其中某一条缝里通过，而这时它所没有通过的另一条缝是否开放，不会对它的行为有什么影响。在这种假定下，才有可能把 $P^{(1)}_{AB}$ 和 $P^{(2)}_{AB}$ 当成是两种互相排斥事件的几率，因而可以遵从相加的规则。

现在，在量子力学里，我们不再承认 $\psi^{(1)}_{AB}$ 和 $\psi^{(2)}_{AB}$描写的是两种相互排斥事件的几率幅。处在状态 ψ_{AB} 的电子，可以既处在 $\psi^{(1)}_{AB}$，又处在 $\psi^{(2)}_{AB}$。因为，在量子力学里起作用的是几率幅的叠加，从而产生了干涉效应，几率叠加规则就不再成立。由此可见，(36)式的失效只说明了经典粒子概念的失效，并不说明概率论里的普遍定律不再成立。

以上关于舍弃几率叠加而采用几率幅叠加的意义的基本论证，是 Feynman 在提出路径积分方法的工作里首次作出的[12]。我们已经看到，这种讨论同本节一开始所引 Dirac 晚年的说法的精神是一致的。下面我们再讨论一下 Dirac 在他的教科书里对态叠加原理意义的阐述。

一般地说，设有态函数 $\psi=\psi_1+\psi_2$，它由 ψ_1 和 ψ_2 相加而成。那么，ψ 当然只能存在于 ψ_1或 ψ_2 不等于零的区域，也就是说，ψ 存在的区域由 ψ_1 和 ψ_2 的存在域决定。例如，在图 2 所示的电子双缝衍射装置里，在屏 B 上电子出现在位置 z 上的几率分布 $P(z)$的存在区域，是由分别单独开放缝 1 和缝 2 时的几率 $P_1(z)$和 $P_2(z)$的分布决定的。在 P_1 和 P_2 同时为零的区域，不会有非零的 P 值。记得几率 P 是态函数 ψ 的模方，我们也可以说，对处在 $\psi(z)$的电子测量到的 z 值的集合，是对分别处在 $\psi_1(z)$和 $\psi_2(z)$的电子测量到

的 z 值的两个集合之和。

注意这里讲的只是可能出现的测量值，即测量值谱的关系。至于每个测量值的几率，要由 ψ 取模方决定。这一点已经与经典物理学大不相同了。在经典的波动里，两列波动的振幅的叠加，直接表现为相应物理量的叠加。因为经典波动的振幅，本身是弹性位移和电磁场等物理量，波动的叠加就表现为这些物理量或长或消的叠加。在量子力学里，叠加的对象 ψ 不是物理量，当然就不会出现对物理量测量值的叠加，上面所讲的只是测量值谱的叠加。

在双缝衍射的例子里，在非零的几率分布区域上，测量值取任何 z 值都是可能的，因而上面的论证也许太平庸而乏味了。为了讲得清楚一些，我们再讨论具有分立本征值谱的情况。设系统处在 ψ_1 时，每次测量力学变量 A 的可能结果总是它的一组本征值 $\{\alpha_1\}$ 当中的一个；系统处在 ψ_2 时，对 A 的测量值总是它的另一组本征值 $\{\alpha_2\}$ 当中的一个。那么，态叠加原理意味着，当系统处在状态 $\psi=\psi_1+\psi_2$ 时，每次测量力学变量 A 的可能结果，或者是 $\{\alpha_1\}$ 当中的一个，或者是 $\{\alpha_2\}$ 当中的一个。换句话说，这时 A 的测量值的集合 $\{\alpha\}$ 是 $\{\alpha_1\}$ 与 $\{\alpha_2\}$ 两集合的和集。因为在分立谱的情况下，A 的测量值不是连续分布的，这种测量值谱的和的关系，会对我们掌握叠加态的性质有一定的帮助。

这里的 $\{\alpha_1\}$ 和 $\{\alpha_2\}$ 两集合可以有部分的重复，但都不必包含 A 的全部本征值。它们实际上是分别由 ψ_1 和 ψ_2 对 A 的本征函数展开式里有哪些非零项来决定的。同样，$\{\alpha\}$ 也不必包含 A 的全部本征值，而只包含 $\{\alpha_1\}$ 和 $\{\alpha_2\}$ 里所有的本征值（不排斥其中有部分本征值对应着零几率）。这一点，在将 ψ_1，ψ_2 和 ψ 分别用 A 的本征函数展开的公式里，可以看得一目瞭然。因为，上面所讲这种测量值谱的关系不外是指，$\psi=\psi_1+\psi_2$ 对 A 的本征函数展开式里的非零项，只可能来自 ψ_1 展开式里的非零项或者 ψ_2 展开式里的非零项。

在做了基本上与上面所讲相同的分析之后，Dirac 下结论说，量子力学里“由叠加形成的态所具有的中间性质是，通过由观察得出特定结果的几率处于两个态的相应几率的中间而表现出来，而不是观察结果本身处于两个态的相应结果的中间。”[14]看来，Dirac 这段话的本意是想说明量子力学的态叠加原理同经典物理学里的叠加原理之间的巨大差别。可是，一方面我们已经说过了，经典波动的叠加是物理量的直接叠加，观察结果会产生强烈的起伏，表现出干涉效应，而不是采取什么“中值”。另一方面，在量子力学里对叠加态 ψ 测量到某一本征值的几率，也不必取原来与 ψ_1 和 ψ_2 相对应的两种几率的中值。最简单的一个反例是 ψ_1 和 ψ_2 对 A 的某一个本征函数的展开系数刚好只差一个符号的情形，这时对 ψ 状态测量到相应本征值的几率为零。难怪 Dirac 又不得不为这句话加了一个脚注，声明这种几率取中值的性质，“是有若干限制的。”[14]

相形之下，Landau 关于这一点的说法要稳妥一些。他在讨论态叠加原理时写道：“假定在波函数为 ψ_1 的态中进行某种测量时肯定能得到确定的结果 1，而在波函数为 ψ_2 的态中这种测量能得到确定的结果 2。那么就假设，在由 ψ_1 和 ψ_2 的任意线性组合……所给出的态中，这种测量所得到的结果或者是 1，或者是 2。”[15]这里明显只涉及测量值谱的性质，而没有提到测量值本身或者它的几率的中值。

Landau 这种说法当然是不错的。但是，这种对态叠加原理的说明，只有依附于态函数的几率诠释，即首先肯定了 ψ 函数代表几率幅，才有可能完整地表达出量子力学里态叠加原理的本质意义。换句话说，只靠这种测量值谱的叠加性，不能准确地把握量子力学里态叠加原理的非经典特征。

举一个浅显的例子就足以说明问题。设有一组人，人数为 N_1，

他们的某一个量 A(如年龄或者身长、体重等)取值的集合为$\{\alpha_1\}$；另有一组人，人数为 N_2，他们的量 A 取值的集合为$\{\alpha_2\}$。现在把这两组人合并为一大组，则人数为 $N=N_1+N_2$，那么，当对这大组每次做抽样统计 A 量时，单个人的取值自然或者是$\{\alpha_1\}$当中的一个，或者是$\{\alpha_2\}$当中的一个。亦即是说，对总数 N 名人选观察量 A 取值的集合$\{\alpha\}$是$\{\alpha_1\}$与$\{\alpha_2\}$的和集。由此可见，观察值谱的相加性并不是量子力学所特有的，在普通的统计里早就有了。

不过，在普通的统计里，是以几率而不是以几率幅为基本量的。在上面的例子里，如果把观察值的出现频度定义为几率，那么，设 α'是$\{\alpha_1\}$和$\{\alpha_2\}$里共有的一个取值，容易证明，在大组里观察值取 α' 的几率 P'，必定介于两个小组里相应的几率 P'_1 和 P'_2 之间。这是几率的非负性的结果。而在量子力学里，满足叠加关系的是复数的几率幅，不同的线性组合可以发生此消彼长的强烈干涉，完全不必受到叠加态取某观察值的几率介乎原先两个态的几率中间的限制。

此外，也容易证明，在上面的例子里，在大组里对全部 N 名人选计算出来的观察量 A 的平均值$\langle\alpha\rangle$，必定介于两个小组里相应的平均值$\langle\alpha_1\rangle$和$\langle\alpha_2\rangle$之间。这也是几率的非负性的结果。在经典的波动问题里，振幅并不是恒正的，因而可以发生象驻波的波节那样完全消失运动的情况，也不必受到叠加波动的强度中值限制。

于是，由这个使用几率为基本量的普通统计的典型例子，可以得出两点结论。第一点是，上述 Dirac 和 Landau 关于测量值谱的叠加，以及从而引出关于态叠加原理同不确定性的关系的议论，并没有说出量子力学里态叠加原理的本质。因为这种测量值谱的叠加性，即一个集合的测量值谱，等于其各子集测量值谱之和的性质，普通的统计里早就有了。第二点是，Dirac 上面那段话，本来应该是拿量子力学的态叠加原理的表现来同经典物理学里的叠加

原理的表现作对比。但他却误用了普通统计里在一个集合里出现特定观察值的几率介于所属各子集的相应几率的最大值和最小值之间这种性质，同普通统计里对一个集合求平均值的结果必定介于所属各子集平均值的最大值和最小值之间这另一种性质的对比，因而说明不了什么问题。

读到这里，细心的读者会发现，前章后面几节所讲的态函数几率诠释的意义，同本章这几节讲的态叠加原理的意义，每每有一定程度的重复，或者看起来象是从不同的角度去谈论同一件事。读者有这点感觉是很自然的，因为这正反映了我们对这些问题的基本看法，它们可以概括为如下三点：

第一，态函数的几率诠释，即把满足动力学方程的态函数看做几率幅的诠释，同态叠加原理即几率幅叠加原理这两种重要的陈述，都是量子力学理论体系的基本出发点的体现。可以把它们看做是量子力学最重要的原理的两个侧面，或者两种不同的表述。态函数的几率诠释和态叠加原理的主要内容应当是相通的。

第二，态函数的几率诠释和态叠加原理，都已经或明或暗地包含在第二章所讲的量子力学的基本假设(I)、(II)、(III)之内。承认了公设(I)、(II)、(III)，就不需要再外加几率诠释或者叠加原理。

第三，至于说，态函数的几率诠释同态叠加原理两者的内容是否完全相同或者可以把它们的内容处理得完全相同，这个问题是可以研究的，我们觉得是有可能做到的。可是，一般说来，态叠加原理侧重于数学程式的建立和定量方面的计算，态函数的几率诠释则侧重于同物理学经验的联系和定性方面的解释，不一定有必要把它们处理成一副面孔，保留两副面孔也没有什么不便之处。下一节介绍了态叠加原理的一些直接的实验证据之后，在本章的最后一节我们再仔细讨论态叠加原理的数学表述。

4.4 态叠加原理的直接例证

前一节以二能级系统为例，说明在适当的初始条件下，由于态的叠加性质，会表现出系统的运动随时间振荡的结果。实际上，正象经典波动振幅的叠加可以引起随时间变化的拍频效应或者在空间分布的干涉条纹一样，在量子力学里态的叠加不仅可以引起随时间的振荡效应，也可以引起在空间中的强度起伏。更一般地说，态叠加原理不但可以引起普通空间中的振荡或起伏的干涉效应，而且，随着所选用的量子力学表象的不同，这种干涉效应可以表现为观察到的计数率随某个适当的物理量的变化而往复振荡的效应。按照 Gerjuoy 的意见，凡是这种表现出"作为某个可控制的物理参数的函数而产生一系列的规则振荡"的"明显的干涉效应"，都可以看做是态叠加原理的有效性和必要性的直接实验证据。[16]

本节就是介绍态叠加原理的这些直接例证，并只限于从原子物理学和粒子物理学的范围内选取例子。凝聚态的情况复杂得多，要得出明确的结论还要依赖关于物质结构的假定，因此不做详细讨论。

这些例子可以分为两类。第一类是用自由的或近自由的稳定粒子做的实验。这主要是指电子的多缝衍射以及在这基础上发展出来的 Aharonov-Bohm 效应，还有中子干涉术。鉴于近年来这两方面的工作已经取得了令人瞩目的一些重要进展，以至于有必要在第七章专门介绍这两方面的情况，而在本节里为了保持叙述的完整性，仍然列出有关的小标题。

第二类例子是用束缚态或者不稳定粒子做的实验。它们也大多是近一二十年来的成果，一般教科书里很少介绍，我们讲得稍为详细一些。关于这方面的情况，还可以参考有关的文献[17,18]。

一、电子衍射实验和 Aharonov-Bohm 效应

(见第 7.2 节)

二、中子干涉实验

(见第 7.3 节)

三、电子共振俘获[16]

如图 6 所示，质子 A 和电子 e 组成处在 1s 基态的氢原子 H(1s)；B 是入射的低能质子(氢离子)H^+，对A的瞄准距离为 b。质子 B 经过以 A 为核的氢原子附近时，有可能将其中的电子裹挟而去，形成新的以 B 为核的氢原子 H(1s)，留下氢离子 A，发生以下式表示的电子俘获过程：

$$\underset{\text{快 B}}{H^+}+\underset{\text{慢 A}}{H(1s)}\longrightarrow\underset{\text{快 B}}{H(1s)}+\underset{\text{慢 A}}{H^+} \tag{45}$$

在低能时可不考虑电子的自旋和激发状态以及交换动能的效应。

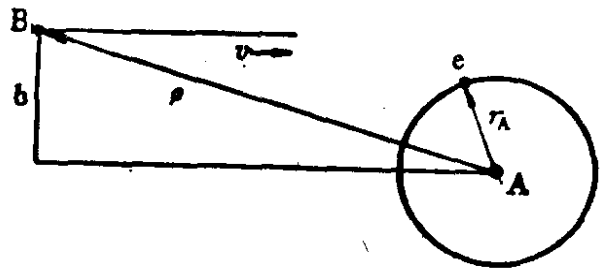


图 6　电子共振俘获过程的几何参数，A和 B 是质子，e是电子。

从氢分子理论知道，当两核靠近时，电子的能量本征态是对两核交换对称化的 u_s 和反对称化的 u_a：

$$u_s=\frac{1}{\sqrt{2}}(u_A+u_B),\quad u_a=\frac{1}{\sqrt{2}}(u_A-u_B). \tag{46}$$

式中 u_A 和 u_B 分别是电子束缚于核 A 和核 B 的原子基态波函数。

这正是前一节里讲过的二能级情况。现在的初始条件是：$t=-\infty$ 时电子与核 A 结合，即

$$\psi(-\infty)=u_A=\frac{1}{\sqrt{2}}(u_s+u_a). \tag{47}$$

于是我们可以按(33)式的推导那样去计算系统在 u_A 和 u_B 之间的振荡过程。不过，与稳定的氢分子不同，在散射过程中，两核的距离 $\rho=\sqrt{b^2+v^2t^2}$ 是随时间而不断变化的。又因为 u_s 和 u_a 的能级数值是随 ρ 而变的，所以由两能级差值决定的振荡频率 $\Omega=(E_a-E_s)/2\hbar$ 也是随着 ρ 而变化的。结果，需要把(33)式里的线性相位因子 Ωt 换成从初态($t=-\infty$)到末态($t=\infty$)全部时间里对 $\Omega(t)$ 的积分 $\int_{-\infty}^{\infty}\Omega(t)dt$。而且，在瞄准距离比较小的情况下，可以把积分变量 dt 近似地用 $d\rho/v$ 代替。于是，相应于(33)式里从初态 φ_1 跃迁到末态 φ_2 的几率 $\sin^2\Omega t$ 就变成

$$P_o=\sin^2\left\{\frac{1}{2\hbar v}\int_{\rho(t=-\infty)}^{\rho(t=\infty)}[E_a(\rho)-E_s(\rho)]d\rho\right\}, \qquad (48)$$

它代表电子从束缚于 A 的初态 u_A 被 B 俘获，尔后以末态 u_B 出现的俘获几率。$E_a(\rho)$和 $E_s(\rho)$两种函数形式有确定的计算结果可循，(48)式里的积分因子是一个恒量，所以在 b 小的近似情况下，这种电子共振俘获的几率 P_c 仅决定于入射质子的速度 v，并且随 $1/v$ 的大小而作规则的起伏振荡。

具体说来，对 keV 量级的入射能量，在小角度偏转情况下可满足上述近似条件。图 7 表示了偏转角为 3° 时的实验结果；可以看出有明显的起伏振荡，并且在 $1/v$的尺度上，俘获几率 P_c 的相邻峰值之间基本上是等距离的。这类实验结果很好地证明了在整个散射过程中，电子不停地在氢分子离子 H_2^+ 的两个能量相近的定态 u_s 和 u_a 之间做时快时慢的往复振荡。决定整个过程的速缓的是入射质子速度的倒数 $1/v$，正是这一参数决定着通过整个过程后积累了多大的位相，使得"终点站"落在振荡循环的哪一点上。

四、量子拍

运用束-箔技术[20-22]可以更直接地观察到原子在能量相近的

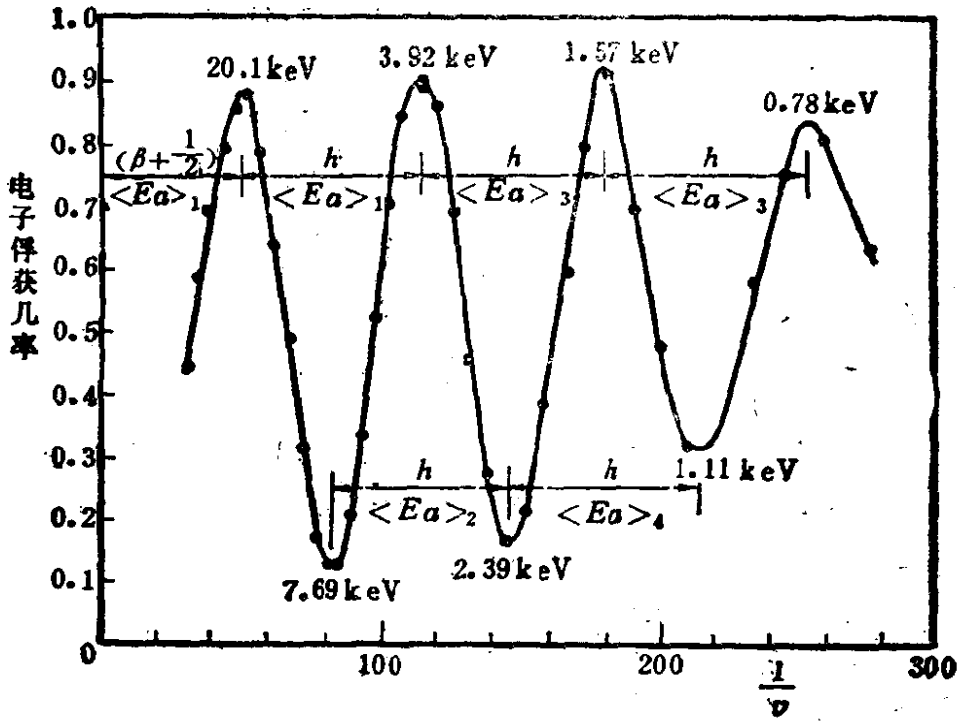


图 7　在 H^+-H(1s)碰撞过程中的电子俘获几率。
横坐标是入射速度的倒数，偏转角固定为 3°[10]。

相干态之间随时间振荡的效应——量子拍。

与电子俘获实验不同，束-箔光谱技术使用达 MeV 量级的较高能量的离子，例如氦离子 He^+ 束，穿过一块极薄的碳箔或铅箔。在同箔物质相互作用时，氦离子容易由于俘获电子而形成高激发态的 $He(3^3P)$ 或 $He(4^3D)$ 原子。因为离子束在薄箔内只度过约 10^{-14} 秒的极短时间，它还来不及形成能量完全确定的状态，从薄箔里穿出来的氦原子，实际上处在由能量相近的一些精细结构能级叠加而成的状态。对于脱离了箔物质而自由飞行的氦原子，每一条精细结构能级当然都对应于不同的定态，但由这些精细结构能级叠加而成的状态不再是稳定的，结果就会发生系统状态在这些相干的精细结构能级之间的振荡。

假设只有两个状态叠加的最简单情形。将 H 看做是在箔内的系统的哈密顿算符，又将 H_0 看做是自由飞行的氦原子的哈密顿

算符，就可以袭用前一节所讲二能级问题的结果。不过现在每一个激发态都不是完全稳定的，它们会或迟或早地跃迁回基态，同时放出可供我们观察的辐射。我们再做进一步的限制，只讨论两个寿命相近的激发态的叠加。在这种情况下，可以推得从束-箔光源观察到的辐射强度随时间的变化规律具有下述形式：

$$I(t)=e^{-t/\tau}\left[A+B\cos\left(\frac{\Delta E}{\hbar}t\right)\right]. \tag{49}$$

式中 A 和 B 是适当的常数，τ 是两个激发态的共同寿命，加上指数衰减因子是为了反映自发衰变的性质，余下方括号内的因子是对(33)型的公式取模方而得到的，ΔE 表示两能级间的裂距。

上面所讲的电子俘获问题里，观察到的末态是明确地处在 u_A 的出射俘获态，因而可以显现出图 7 那样的俘获几率曲线。在量子拍问题里则不同，出射的原子一般处在叠加的状态，观察到的不是各自状态的辐射几率，而是象(49)式那样形式的总自发辐射几率。实际的观察时间从氦原子离开薄箔开始，沿着它们自由飞行的方向，在不同的距离上接收它们发出的光辐射。根据记录下来的各条谱线强度随飞行时间的变化曲线，可以有效地测量有关激发态的寿命[21]，或者再通过 Fourier 变换，分析出该激发态的精细结构和超精细结构[20]。

图 8 给出了两种典型的二能级混合的量子拍观察结果。图中的两条曲线分别与氦原子的 $1s2p^3P-1s4d^3D$(4471Å)和 $1s2s^3S-1s3p^3P$(3889Å)两条谱线相对应，表现了符合于(49)式的明显的干涉，即量子拍效应。

五、双光子光谱中的干涉效应[24]

一般在观察原子或分子光谱时，由于在气体状态下原子或分子具有一定的速率分布，而使得光谱线呈现出不可避免的 Doppler 增宽。在双光子吸收技术中，实验装置安排得使两支一样的激

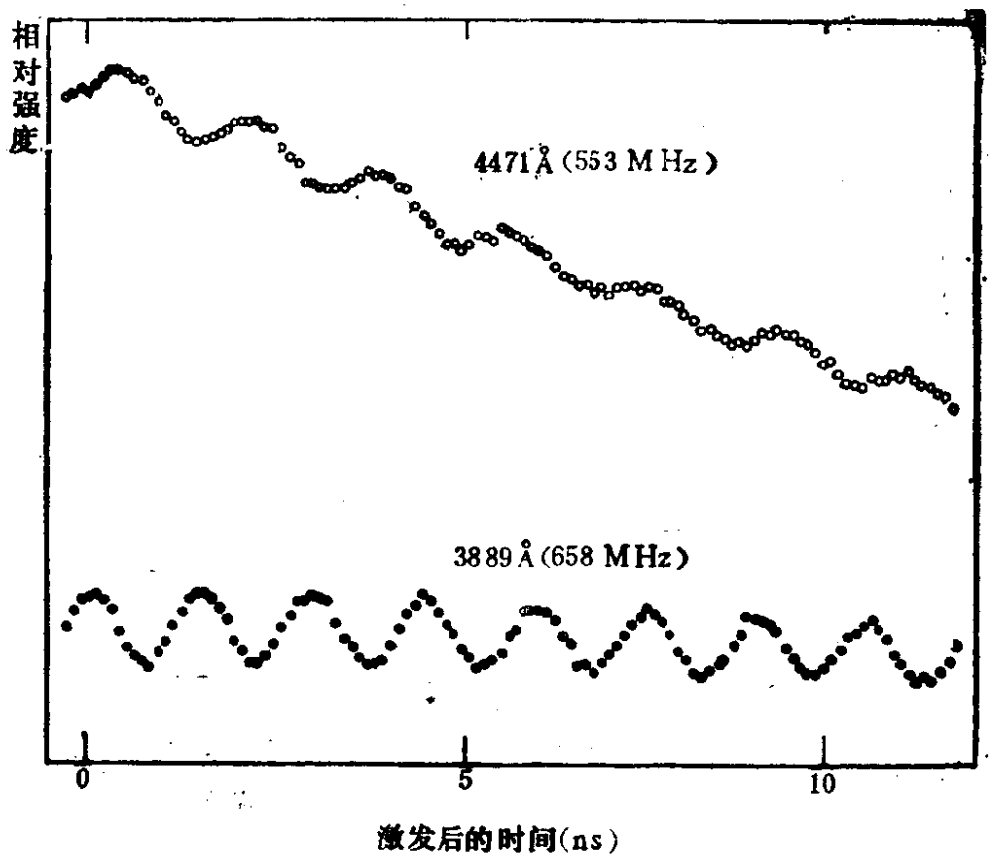


图 8　与氢原子的两种自发辐射谱线相联系的量子拍曲线[28]。

光束，从相反的两侧照射在样品上，调整激光的频率 ω 使 $2\hbar\omega$ 正好对准指定跃迁的能量，这时有可能原子从每一光束中吸收一个光子，产生双光子跃迁。由于相反方向上的 Doppler 频移正好互相抵消，便得到无 Doppler 增宽的尖锐的吸收谱线，叫做无Doppler 增宽的双光子谱。利用这一种高分辨率的技术，首次实现了时间维度上的延迟干涉。

实验所用的光源是两支可调的连续波染料激光器。我们知道，当送出单个时间宽度为 τ 的激光脉冲时，相应的频谱是以激光频率 ω 为中心的、宽度为 $1/\tau$ 的峰状分布。现在在时间间隔 T 之后，发出延迟的第二个相同宽度并且是相干的激光脉冲，那么，样品原子所受到激发的电场可用下式表示：

$$E(t)=\begin{cases}Ee^{-i\omega t}, & 0\leqslant t\leqslant\tau\\ Ee^{-i\omega t}, & T\leqslant t\leqslant T+\tau\\ 0\quad\ , & \text{其他时间.}\end{cases}\tag{50}$$

这种形状的延迟脉冲，可以看做是三维空间里的 Young 实验中的双狭缝在时间维度里的再现。(50)式形状的双脉冲的频谱，是在上述单脉冲频谱峰内再按 $1/T$ 为间隔分解为若干个强弱相间的起伏。这种频谱的形状，正象在单缝衍射分布曲线的包迹线内，再划出若干条纹的双缝衍射图样。双光子光谱技术的出现，有可能以前所未有的高分辨率观察到这些细致的干涉现象。

实验观察的是受上述激光脉冲激发了的钠原子所发出的荧光辐射。由于(50)式里的两个单脉冲是相干的，我们无法区别所观察到的辐射是由接受了第一个单脉冲的钠原子还是由接受了第二个单脉冲的钠原子发出的。或者说，应当把钠原子的激发态看做是由第一个单脉冲激发的状态同由第二个单脉冲激发的状态的叠加，正是这种延迟的叠加，产生了时间维度上的量子干涉效应。

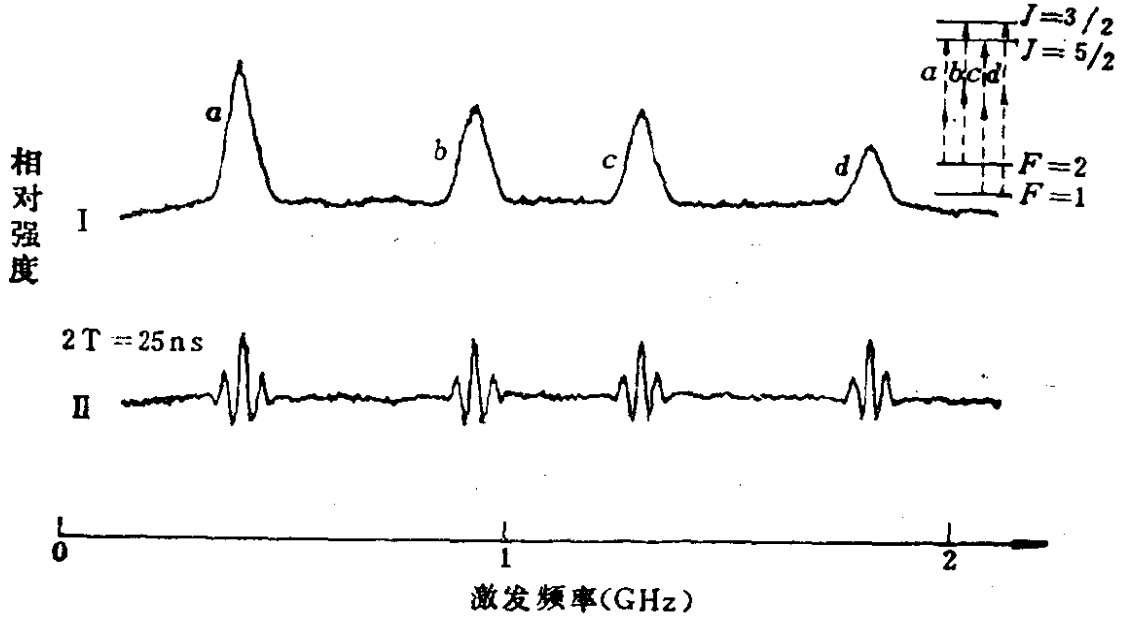


图 9　钠原子 3^2S-4^2D 双光子跃迁频谱

I. 单脉冲激发，II. 延迟双脉冲激发

图 9 是对钠原子 3^2S—4^2D 的双光子跃迁强度的观察结果。上面一条曲线对应于单脉冲激发，a、b、c、d 四个峰分别对应于四种不同的精细结构和超精细结构跃迁。下面一条曲线是用加了延迟的两个相干脉冲的激发，可以明显看出，四种跃迁的频谱都呈现出干涉效应。所用的单脉冲宽度是 8ns，延迟参数是 $2T=25$ns.

在光学领域内比较直接显现出由原子状态的叠加而产生的干涉效应的，还有光子回波等现象[25,26]，限于篇幅，不再一一介绍。

六、中性 K 介子问题[27]

现在我们简单介绍一下著名的中性 K 介子问题里的干涉现象。K^0介子是自旋为零的不带电粒子，带有奇异数 1，它的反粒子 $\bar{K}^0$ 介子的奇异数为 -1。K^0 或 $\bar{K}^0$ 介子一般是由高能粒子碰撞产生的，这是一种强相互作用过程，在这种过程中奇异数是守恒的。或者可以说，K^0 和 $\bar{K}^0$ 都是支配其产生过程的强相互作用哈密顿算符 H_s 的分别带有奇异数 $+1$ 和 -1 的本征态。可是，在 K^0 或 $\bar{K}^0$ 产生出来之后，它们的自发衰变过程是受弱相互作用支配的。也就是说，作为具有确定的质量和平均寿命的中性 K 介子，应当是弱相互作用哈密顿算符 H_w 的本征态。而在弱相互作用中，奇异数不必守恒，K^0 和其反粒子 $\bar{K}^0$ 可以通过奇异数不守恒的弱过程互相转化，从而引起所谓“奇异数振荡”等干涉效应。

问题就是要确定弱相互作用的本征态。为了简化叙述，我们忽略已经发现的微小的 CP 不守恒效应，即假定弱相互作用下保持电荷共轭 C 和宇称 P 的联合反演 CP 不变。

设 $\varphi(K^0)$和 $\varphi(\bar{K}^0)$ 分别是 K^0 和 $\bar{K}^0$ 的状态函数，它们是强作用 H_s 的本征函数。它们是一对正反粒子，所以质量(能量)是相同的。这是参加强作用过程时适用的描述。另一方面，当中性 K 介子作为独立的粒子存在时，它们应当是弱作用 H_w 的本征态，亦即是 CP 的本征态。

可以证明，在联合反演 CP 的作用下，将 $\varphi(\mathrm{K}^0)$ 和 $\varphi(\bar{\mathrm{K}}^0)$ 互相变换：

$$CP\varphi(\mathrm{K}^0)=\varphi(\bar{\mathrm{K}}^0),\qquad CP\varphi(\bar{\mathrm{K}}^0)=\varphi(\mathrm{K}^0). \tag{51}$$

那么，由下式定义的态 $\varphi(\mathrm{K}_1)$ 和 $\varphi(\mathrm{K}_2)$，即

$$\begin{aligned}\varphi(\mathrm{K}_1)&=\frac{1}{\sqrt{2}}[\varphi(\mathrm{K}^0)+\varphi(\bar{\mathrm{K}}^0)],\\ \varphi(\mathrm{K}_2)&=\frac{1}{\sqrt{2}}[\varphi(\mathrm{K}^0)-\varphi(\bar{\mathrm{K}}^0)],\end{aligned} \tag{52}$$

就是我们需要的 CP 本征态。因为，由(51)和(52)式有

$$CP\varphi(\mathrm{K}_1)=\varphi(\mathrm{K}_1),\quad CP\varphi(\mathrm{K}_2)=-\varphi(\mathrm{K}_2). \tag{52}$$

也即是说，K_1 和 K_2 介子分别是 CP 取正值和负值的状态。

从对衰变末态的分析我们知道，两个 π 介子末态的 CP 恒取正值。于是，K_2 态就不可能有二 π 介子衰变，而只能有三 π 介子或轻子型的衰变。由于三 π 衰变的 Q 值(78 MeV)比二 π 衰变(215 MeV)小得多，因而 K_2 的寿命比较长。相反地，对 K_1 存在着有利的二 π 型衰变道，因而它们寿命比 K_2 短得多，也来不及表现出三 π 型的衰变了。根据最新的数据，短寿的中性 K 介子(近似为 K_1)的寿命是 $0.8923(22)\times10^{-10}$s；长寿的中性 K 介子(近似为 K_2)的寿命是 $5.183(40)\times10^{-8}$s，两者要差好几百倍[28]。

从 H_s 的本征态重新组合为 H_w 本征态的公式(52)，同由 H_0 本征态变换为 H_0+H' 本征态的(28)式具有相同的形式。这又是一个两能级问题。弱作用的 H_w 参加进来以后，解除了原来 K^0 和 $\bar{\mathrm{K}}^0$ 的质量简并，使得新的两个本征态 K_1 和 K_2 之间产生了微小的质量差 Δm。这一质量(能量)差决定着(33)式或者(49)式中干涉项的行为。所以，完全可以把中性 K 介子的奇异数振荡现象看做是原子物理学里的量子拍现象在粒子物理学里的再现(其实，按照发现的先后次序，应该反过来说量子拍是奇异数振荡现象的

翻版)。

然而，与量子拍公式(49)适用于两个激发态具有共同寿命的情况不同，现在的 K_1 和 K_2 的寿命相去甚远。我们再做一个近似，认为在有观察意义的时间范围(一般是τ_1的几倍)，可以把 τ_2 当成无限，即把长寿的 K_2 近似看成是稳定粒子。于是，对于产生出来的是 K^0 介子，即系统状态$\varphi(t)$满足初始条件

$$\varphi(0)=\varphi(K^0) \tag{53}$$

的情况，按照(33)式改写后所得到的，发现系统在 $t>0$ 的任一时刻振荡到 $\bar{K}^0$ 态的几率是

$$|(\varphi(t),\varphi(\bar{K}^0))|^2=\frac{1}{4}\left[1+e^{-t/\tau_1}-2e^{-t/2\tau_1}\cos\left(\frac{\Delta mc^2}{\hbar}t\right)\right]. \tag{54}$$

根据(54)式右方最后一项干涉项，就可以由系统的振荡行为决定 K_1 和 K_2 的质量差 Δm。这一干涉项的出现是两种几率幅叠加的结果。从奇异数振荡效应和其他由于几率幅叠加而产生的干涉效应，测量到长寿中性 K 介子的质量要比短寿中性 K 介子大，它们的差值是[28]

$$\Delta m=3.521(14)\times10^{-12}\mathrm{MeV}/c^2$$

同 K^0 或者 $\bar{K}^0$ 本身的质量值 $497.72(7)\mathrm{MeV}/c^2$ 相比，这一质量差只占质量值的 10^{-14}，当然不会在粒子的惯性行为中被观察到。由此可见，在量子力学里，由于态叠加原理，质量(能量)的差值，甚至质量值本身，往往是作为干涉项的参数而出现的。

不仅能量差和质量差决定着量子拍和奇异数振荡随时间变化的行为，而且在 de Broglie 波的波长公式 $\lambda=h/mv$ 里，我们看到正是粒子的质量决定着这一波长从而确定干涉或者衍射图样在空间中的分布。量子力学里的质量参数总在干涉或振荡现象起着支配的作用，这正是态叠加原理威力的体现。站在经典物理学立场

上，是不可能理解质量参数在量子理论里起到的这些作用的。总而言之，在量子力学里质量概念赋有全新的意义，不可能归结为粒子的惯性，到第七章我们还要回过头来谈这个问题。

七、全同粒子的散射

在量子力学对散射问题的描写里，公式(2.3) 中的散射振幅 $f(\theta)$的模方，就是入射粒子的微分散射截面：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta)=|f(\theta)|^2$$

式中 $d\Omega$ 是在 θ 方向的立体角元，并且假定了绕入射方向的旋转对称，因此不必计及角度 φ。

对于两个全同粒子的散射，会带来复杂的问题。如图 10 所示，在质心系里，入射粒子 1 和靶粒子 2 以相同大小的动量相向而遇，然后从另一方向相背而去。设在同粒子 1 的入射方向成 θ 角的方位上设置一个检测器 D，那么它当然可以接收到散射角为 θ 的入射粒子1。可是，由于质心系里粒子 1 和 2 的动量是相等而相反的，当入射粒子的散射角为 $\pi-\theta$时，反冲的靶粒子 2 必以角度 θ 射出，也可以被同一检测器 D 所接收。图 10*a*)和 *b*) 分别表示了这两种

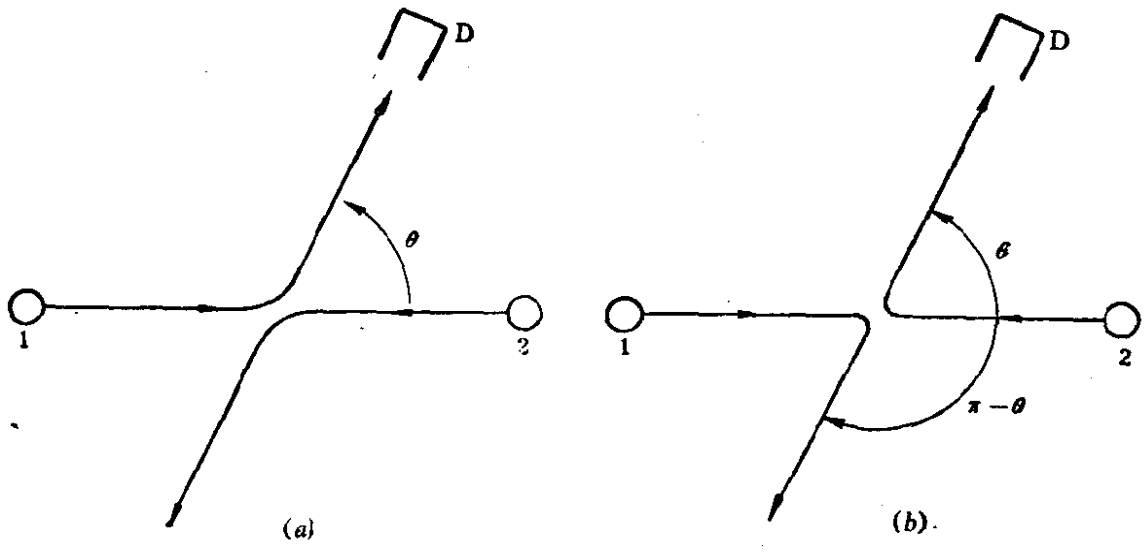


图 10　全同粒子散射。对(*a*)、(*b*)两种过程不可分辨。

情况。

在微观碰撞过程里，两粒子接近到相互发生作用的区域是很微小的，我们无法直接观察两个粒子在这个微小的相互作用里的具体行为，而只能依靠放在离作用区很远处的检测器接收到的出射粒子分布情况，来了解这种相互作用的性质。这正是我们把(2.3)式里$r\to\infty$的渐近态函数的模方来同散射截面建立联系的原因。于是，从实验观察的角度看，图 10*a*)和 *b*) 表示的两种过程是不可分辨的。即是说，当我们在检测器 D 中接受到一个粒子时，我们无法认出它是以角度θ散射的入射粒子 1，还是当入射粒子的散射角为$\pi-\theta$时的反冲靶粒子 2。结果，我们只好先把这两种无法分开的情况都算进角度为θ的微分散射截面之内；也就是说，只要接受到一个粒子，不管它是 1 还是 2，都算一次计数。

说到这里，如果保留着经典粒子的观念，就象认为在双缝衍射实验里电子必定或者从缝 1 穿过或者从缝 2 穿过一样，也要认为接收到的粒子必定或者是图 10*a*)里的入射粒子 1，或者是 *b*)里的反冲粒子 2。虽然由于我们的无能，没有对它们的行为进行不间断的监视，但只要保持着粒子轨道的概念，就必定要作出这样的结论。这就正象在第 2.2 节里举过的例子那样，虽然侦探只是守候在一对孪生子的住房外面，不了解里面的活动情况，但他仍然能够肯定，每次走出大门的不是哥哥就是弟弟；同时，由于无法区别每一次出来的是哥哥还是弟弟，他只好把不论是谁出来一次都写在他的观察记录里。总之，只要我们在观念上认为观察到的是哥哥还是弟弟，或者是散射粒子还是反冲粒子，都属于两种互相排斥的可能性，就要用几率的相加来描写我们的结果。在散射问题里的这种结果就是，在角度θ处放置的检测器 D 接收到粒子的几率，等于在θ角度发现粒子 1 的几率$|f(\theta)|^2$，加上粒子 1 射向角度$\pi-\theta$同时在角度θ处发现粒子 2 的几率，即

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta)=|f(\theta)|^2+|f(\pi-\theta)|^2. \tag{55}$$

在量子力学里，由于第二章所讲的基本假设全同性原理(V)，更确切地讲是对称化公设(V′)，是关于态函数即几率幅对称性质而不是关于几率本身对称性质的假设，因而在这个问题上会产生出一些不同的结果。下面讨论两个最简单的例子。

第一个例子是两个自旋为零的粒子，譬如两个 α 粒子的散射。这是玻色子的情况，在这种情况下，按照对称化公设(V)，在 θ 处发现粒子的几率，不是(55)式的两个对称方向几率之和，而是与对称的散射振幅 $f(\theta)+f(\pi-\theta)$ 相对应的几率，即

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta)=|f(\theta)+f(\pi-\theta)|^2. \tag{56}$$

4.3 节已经讨论过了，这种几率幅的叠加即态函数的叠加，否定了以中间步骤是互相排斥的概念为基础的几率相加规则。

对称化态函数的运用，说明在量子力学里认为图 10*a*)和 *b*)两种中间步骤，不仅是不可分辨的而且不是非此即彼的。实际上，在碰撞区域我们不可能画出粒子的轨道，在那里两个粒子的态函数可以发生重叠或者其他激烈的变动，以至于经过这番磨炼出来的粒子，原则上不再带有自身历史的标记。在检测器 D 接收到的每个粒子，都应当认为既属于以 $f(\theta)$ 描写的状态，又属于以 $f(\pi-\theta)$ 描写的状态。

第二个例子是自旋状态相同(例如自旋都朝上)的两个电子的碰撞。这回是费密子，按照对称化公设(V′)，要使用反对称化态函数。现在的自旋部分态函数已经给定是对称的，所以要求使用对普通空间是反对称的散射振幅，即 $f(\theta)-f(\pi-\theta)$，相应的微分散射截面是

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta)=|f(\theta)-f(\pi-\theta)|^2. \tag{57}$$

选一个特殊的角度 $\theta=\pi/2$，代入(55)，(56)和(57)式，马上可以看出这几种情况的不同：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}2\left|f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|^2, & \text{对经典全同粒子;}\\ 4\left|f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|^2, & \text{对}\alpha\text{粒子;}\\ 0, & \text{对自旋取向相同的电子。}\end{cases}\tag{58}$$

(58)式的结果，特别是对自旋状态相同的两个电子，在质心系中不可能有 $\theta=\pi/2$ 的散射的结果，已被实验完全证实。这实际上可以看做是由于态函数的叠加而引起的在角度参数 θ 上表现的一种“干涉”效应。

注意到(55)—(58)各式里的微分散射截面反映的是检测器接收到粒子的几率，而每次散射过程中都有两个全同粒子射出，所以在求出一个入射粒子被散射的总截面时，要在相应的公式里乘上因子 1/2。这就是为什么我们在构造(56) 和(57) 式里的对称和反对称散射振幅 $f(\theta)\pm f(\pi-\theta)$ 时，没有写上归一化因子 $1/\sqrt{2}$ 的原故，因为这一因子(的平方)要到最后再算进去。

4.5 态叠加原理的物理要求

本章所举的各种例子，从电子双缝衍射到全同粒子的散射，都只涉及两种状态叠加的问题，亦即是态叠加原理的最简单运用。例如，在第 4.2 节里描述的二能级问题，只有唯一的一个由能量差 ΔE 或者相应的质量差 Δm 决定的振荡参数。我们说过了，中性 K 介子问题是这种两能级振荡的最早的直接而有效的运用，原子物理学的量子拍现象是后来才发现的。事实上，从五十年代中期使用两种状态混合的办法成功地处理了中性 K 介子问题之后，这种手段已经成为基本粒子理论里屡见不鲜的招数。从六十年代初期的 φ-ω 混合，Cabbibo 角，到七十年代的Weinberg 角，夸克混合，

一直到八十年代仍然未有定论的中微子振荡甚至中子振荡等等，都是态叠加原理的各种不同的运用，我们不再一一细说。

以上引述过的这些例子，无疑是态叠加原理的极好证据。但是我们还没有讨论过多于两个状态叠加的情形。在一般的情况下，态叠加原理的成立会不会给一些可观察的物理参数规定一些限制呢？换句话说，会不会从一些物理参数的观察值所满足的某种关系，来检验态叠加原理给出的条件是否正确，从而判明态叠加原理是不是有偏差呢？由于二能级问题只有一个描写振荡行为的物理参数，必须在更多能级叠加的问题里才会出现可供检验的物理参数之间的关系。

现在将第 4.2 节里的二能级问题推广到一般的情况。设 φ_1，$\varphi_2,\cdots,\varphi_N$ 是 H_0 的本征态函数，满足正交归一关系

$$(\varphi_m,\varphi_n)=\delta_{mn}. \tag{59}$$

现在将哈密顿算符从 H_0 换成 H，新的 H 另有一套本征函数 ψ_1，$\psi_2,\cdots,\psi_N$。按照态叠加原理，这 N 个 ψ_n 是原来的 N 个 φ_n 的线性组合，我们写成

$$\psi_m=\sum_n U_{mn}\varphi_n,\quad U_{mn}=(\varphi_n,\psi_m). \tag{60}$$

(60)式实际上就是(2.12)式的改写。容易证明，由 U_{mn} 为矩阵元而构成的 $N\times N$ 矩阵 U 满足幺正性条件(2.33)：

$$U^\dagger U=UU^\dagger=1.$$

(对任意矩阵 A 的矩阵元 A_{mn} 的脚标转置后再取复数共轭 A^*_{nm}，便等于 A 的厄密共轭矩阵 $A^\dagger$ 的相应矩阵元 $A^\dagger{}_{mn}$。)

并且，同演化算符的性质相类似，在这里负责从 φ 表象变换到 ψ 表象的 U 矩阵的幺正性，也是同变换前后的几率守恒相联系的。更确切地讲，从(59)式和变换后 ψ_n 满足正交归一关系的要求，可以证明 U 矩阵必定满足幺正性条件。例如，请看下面的演算：

$$(\psi_m,\psi_n)=\sum_{kl}(U_{mk}\varphi_k,U_{nl}\varphi_l)$$
$$=\sum_{k\ l}U^*_{mk}U_{nl}(\varphi_k,\varphi_l)=\sum_{kl}U^\dagger_{km}U_{nl}\delta_{kl}$$
$$=\sum_k U_{nk}U^\dagger_{km}=(UU^\dagger)_{nm}=\delta_{nm}.$$

大家知道，对于最一般的 $N\times N$ 的复数线性变换矩阵，每个矩阵元都是独立的，一共有 $2N^2$ 个独立的变换参数。现在我们不管(60)式里 U_{mn} 的具体形式，从反映了变换前后几率守恒的幺正性条件(2.33)，对这些参数加上了 N^2 个限制条件。它们是 $UU^\dagger$ 矩阵对角元的 N 个实条件

$$(UU^\dagger)_{nn}=\sum_k U_{nk}U^\dagger_{kn}=\sum_k U_{nk}U^*_{nk}=\sum_k|U_{nk}|^2=1$$

和 $\frac{1}{2}N(N-1)$ 个非对角元的复条件，即

$$(UU^\dagger)_{mn}=\sum_k U_{mk}U^\dagger_{kn}=\sum_k U_{mk}U^*_{nk}=0,\ m\neq n$$

或者与它们等价的

$$(UU^\dagger)_{nm}=\sum_k U_{nk}U^\dagger_{km}=\sum_k U_{nk}U^*_{mk}=\left(\sum_k U_{mk}U^*_{nk}\right)^*=0.$$

这样，幺正变换矩阵的独立参数的数目就是 $2N^2-N^2=N^2$ 个。在现在的情况下，由 N 个 φ_n 加上 N 个 ψ_n 的 $2N$ 个本征函数都可以各自乘上一个任意的相因子，使得由(60)式定义的每个矩阵元 U_{mn} 都出现由这种任意选择而决定的相位差因子。并且，仔细观察可以发现，给这 $2N$ 个本征函数乘上一个共同的相位因子，对 U_{mn} 不发生任何影响；实际上，这种相位的任意性只通过 $m\neq n$ 的非对角元素 U_{mn} 里的相对相位差因子而表现出来。那么，从 $2N$ 个本征函数中抽出一个总的相位因子，剩下 $2N-1$ 个任意的相对相位参数，就是 U 矩阵里不反映真实的物理差别而只反映

变换基底的相位选择任意性的 $2N-1$ 个非物理参数。这样一来，幺正矩阵U里有效的物理参数只剩下$N^2-(2N-1)=(N-1)^2$个。

在这些有物理观察意义的参数里，代表在这个 N 维空间里转动的独立参数(例如 Euler 角那样的转动角度)是$\frac{1}{2}N(N-1)$个，它就是 N 维转动群 $SO(N)$ 里所含的独立参数的数目。那么，在 $(N-1)^2$ 个物理参数里扣掉$\frac{1}{2}N(N-1)$个转动参数，还剩下

$$(N-1)^2-\frac{1}{2}N(N-1)=\frac{1}{2}(N-1)(N-2) \tag{61}$$

个独立参数，表现为物理学上可以观察到的相位参数。

当 $N=1$ 时，是无混合的平庸情况，不必讨论。当 $N=2$ 时，从(61)式可知，这时只有 1 个表示混合的转动参数，而没有物理相位参数。我们看到，在对称二能级系统的(28) 式和电子俘获问题的(46)式以及中性 K 介子 CP 不变描写的(52)式，都表现为 $\pi/4$ 的转动。而在 CP 不守恒的中性 K 介子问题里，表示这种转动角就不再是 $\pi/4$，而是有微小的偏离[27]。

在粒子物理学里，往往直接采用这种转动参数来描写状态的混合，并称之为混合角。例如，Cabbibo[29] 最早把奇异数不改变的弱作用流同奇异数改变的弱作用流所做的混合，用夸克的语言表示就是：

$$\begin{cases} d' = \cos\theta_c d + \sin\theta_c s, \\ s' = -\sin\theta_c d + \cos\theta_c s. \end{cases} \tag{62}$$

(62) 式表示，具有不同的奇异数的强相互作用本征态 d 夸克和 s 夸克，经过混合之后才是弱相互作用的本征态 d' 和 s'，式中的混合角 θ_c 叫做 Cabbibo 角。用这种方案可以很好地统一描写了当时已经了解的不同弱衰变过程。由奇异粒子衰变过程定出的 θ_c 值约为 13°，所以这是一种不对称的二能级系统。

后来，又发现了带粲数(charm)等新量子数的粒子，为了统一描写包括新粒子在内的弱相互作用过程，需要把 Cabbibo 的混合推广到三种夸克的混合。这种混合用 3×3 的 Kobayashi-Maskawa 混合矩阵表示[30]。

设 d 夸克，s 夸克和 b 夸克是强相互作用的本征态，那么弱相互作用的本征态 d'，s' 和 b' 是 d，s 和 b 的某种线性叠加，这种叠加即混合的参数用下列的 Kobayashi-Maskawa 矩阵变换表示[31]：

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & s_1c_3 & s_1s_3 \\ -s_1c_2 & c_1c_2c_3-s_2s_3e^{i\delta} & c_1c_2s_3+s_2c_3e^{i\delta} \\ -s_1s_2 & c_1s_2c_3+c_2s_3e^{i\delta} & c_1s_2c_3-c_2c_3e^{i\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}. \quad (63)$$

(63)式矩阵里的 c_1 和 s_1 是 $\cos\theta_1$ 和 $\sin\theta_1$ 的简写，余类推。我们看到，一共有三个转动参数即 θ_1，θ_2 和 θ_3，以及一个相位参数 δ，正好满足取 $N=3$ 的(61)式。假若对(63)取 $\theta_2=\theta_3=\delta=0$，它就退化为(62)式，并且由此可知 θ_1 就是Cabbibo 角 θ_c。

Kobayashi-Maskawa 矩阵里的每一个元素，都是同某种满足指定选择定则的弱相互作用过程相联系的。由各种不同的弱过程的实验数据，可以确定这些矩阵元的数值。今天所掌握的资料，已经对它们作出了一些或精或粗的分析[32]。

由以上讨论可知，在(63)式的矩阵里，只有四个矩阵元是独立的。我们可以选定它们是左上角的

$$\begin{aligned} A&=c_1, & B&=s_1c_3, \\ C&=-s_1c_2, & D&=c_1c_2c_3-s_2s_3e^{i\delta}. \end{aligned} \quad (64)$$

其余的五个矩阵元可以通过幺正性条件，由这四个元素决定。实际上，实验数据还没有精确到可以检验幺正性条件是否满足的程度，而是反过来在各矩阵元数值的分析中运用了矩阵的幺正性条件[32]。

此外，Roos 还提出[33]，即使由三个转角 θ_1，θ_2 和 θ_3，加上一个相角 δ 这四个独立的有物理意义的变换参数决定的 A、B、C 和 D 四个矩阵元的取值，也不能是任意的，而是要满足一定的限制。事实上，由(64)式可以算出

$$\cos\delta=\frac{|D|^2(1-A^2)^2-(ABC)^2-(1-A^2-B^2)(1-A^2-C^2)}{-2ABC\sqrt{1-A^2-B^2}\sqrt{1-A^2-C^2}},\tag{64}$$

那么，由

$$-1\leqslant\cos\delta\leqslant 1\tag{65}$$

的限制，便得到矩阵元 D 满足的条件

$$|D|^2\leqslant\frac{1}{(1-A^2)}[2|ABC|\sqrt{1-A^2-B^2}\sqrt{1-A^2-C^2}$$
$$+(ABC)^2+(1-A^2-B^2)(1-A^2-C^2)].\tag{66}$$

于是，如果能够从实验数据准确地算出 A、B、C 和 D，就可以看它们是否满足(66)式而检验态叠加原理是否成立。然而，目前在实验数据的分析中，不确定的因素太多。实际上，A，B 和 C 可以比较直接地从有关的过程定出，而量 D 就没有那么容易，只能定出一个下限。在一般的分析里，还要靠(66)式那样的关系，从 A、B 和 C 定出 D 的准确数值。所以，现在还不能对此做出检验。[32]

注意到以上对于以(60)式那样以幺正变换矩阵 U 表示的态的叠加即混合性质的讨论，都是以这种叠加的完备性和变换中的几率守恒为基础的。因此，如果发现变换前后的归一化有问题，也可能是有所遗漏，并不一定是叠加原理出了问题。或者，增加了维数的空间才是完备的，在那里几率守恒就不成问题了。

同样，(64)或者(66)式的关系，也是假定了三种夸克的混合就足够了。所以，假使它们出了问题，亦可能是需要考虑更多的夸克混合。例如，考虑 $N=4$ 的情况，从(61)式知道，这时候有六个混合角和三个独立的相位参数，对于 A、B、C、D 四个元素，必定存在

比(66)式宽得多的限制，也许困难就不存在了。[32]

本来，任意态函数可以写成某种本征函数组的线性组合，并且存在着相应的几率解释这件事，一方面是态叠加原理的一种表述，另一方面也必须依赖于作为这种展开的基的本征函数组的完备性。所以，态叠加原理同相应函数空间的基矢的完备性这两者是紧密地交织在一起的。假若这一套数学程式以及由此得出的(66)式一类的结果不被满足，那么说是态叠加原理出了毛病，或者说空间太小了，要扩大维数才是完备的，这两种说法也许只是"仁者见仁，智者见智"罢了。

参 考 文 献

[1] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lecitures on Physics*, Vol. I, Addison-Wesley (1963), Chapter 25.

[2] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley (1975), § I. 3.

[3] 郭敦仁，数学物理方法，人民教育出版社(1965)，§ 13. 1.

[4] 见[1. 24].

[5] E. Fermi, *Notes on Quantum Mechanics*, Univ. Chicago (1961).

[6] 见[1. 23].

[7] 见[1. 42]，256 页。

[8] 见[1. 15]，上册，42 页。

[9] 见[1. 24]，中文版，11 页。

[10] 见[1. 30].

[11] 同[9].

[12] 见[1. 32].

[13] 见[3. 48].

[14] 见[1. 24]，中文版，12 页。

[15] 见[1. 22]，中文版，上册，8-9 页。

[16] E. Gerjuoy, in *Contemporary Research in the Foundations and Philosophy of Quantum Theory*, C. A. Hooker ed., D. Reidel

Pub. Co. (1973), pp. 114—142.
[17] 见[1.7].
[18] R. Schlegel, *Superposition and Interaction*, Univ. Chicago Press (1980).
[19] G. J. Lockwood, E. Everhart, *Phys. Rev.* **125** (1962), 567.
[20] 邢磊, 于桂兰, 物理, **14** (1985), 129.
[21] 刘汉朋, 王文勋, 物理, **16** (1987), 109.
[22] D. J. Pegg, in *Methods of Experimental Physics*, Vol. 17, P. Richard ed., Academic (1980), pp. 529—606.
[23] G. Astner *et al.*, *J. Phys.* **B9** (1976), L345.
[24] M. M. Salour, *Rev. Mod. Phys.* **50** (1978), 667.
[25] 陈天杰, 物理, **14** (1985), 71.
[26] U. Fano, *Rev. Mod. Phys.* **55** (1983), 855.
[27] T. D. Lee, C. S. Wu, *Ann. Rev. Nucl. Sci.* **16** (1966), 512.
[28] 见[1.3].
[29] N. Cabbibo, *Phys. Rev. Lett.* **10** (1963), 531.
[30] M. Kobayashi, T. Maskawa, *Prog. Theor. Phys.* **49** (1973), 652.
[31] L. L. Chau, *Phys. Rep.* **95** (1983), 1.
[32] F. J. Gilman, K. Kleinknecht, *Phys. Lett.* **170B** (1986), 74.
[33] M. Roos, in S. Diner *et al.* ed., [3. 18] pp. 291—295; M. Roos, *Comm. Phys. Math. Soc. Sci. Fennicae* **33** (1966), 1.

第五章　不确定关系*

5.1　不确定关系的提出

自从 Pauli 在他的名著《量子力学的基本原理》[1]里以“不确定原理”作为全书的开头之后，许多量子力学教科书竟相效尤，都把不确定关系或者不确定原理当做量子力学的重要内容来大书特书。然而，对于不确定关系的阐述和证明，以及它在量子力学理论体系中所占的位置，又存在着各种莫衷一是的讲法。

不确定关系(uncertainty relation)是 Heisenberg 在 1927 年首次提出来的[2]。它说的是象粒子坐标和动量那样的一对共轭力学变量的不确定度的乘积，必定大于以 Planck 常数 $\hbar$ 表征的某一下限值。从不确定关系被提出来的那天起，六十年来，关于这一关系究竟是在量子力学理论中具有独立逻辑地位的原理，还是由第二章所述的几条基本假设得出的推论；以及其中的“不确定度”指的是对单个微观过程进行测量的可能误差，还是在相同条件下多次测量的统计偏差等等问题，一直存在着不同意见的争论。为了弄清楚对不确定关系的各种不同解释及其间的分歧实质，我们先从早期的历史开始，分析了出现过的不同形式的不确定关系之后，着重介绍近年来关于这一问题讨论的进展。

大家知道，在量子力学的最早形式即 Heisenberg 等人的矩阵力学里，只处理了谐振子和氢原子之类的束缚态问题里的能级差和跃迁率等可与实验直接比较的观察量，而完全摒弃了在 Bohr 量

子论里一直使用着的电子轨道的概念。接着，又出现了 Schrödinger 的波动力学，以及 Born 对 ψ 函数的几率诠释。按照这种理论，譬如说氢原子里的电子，具有一种由 $|\psi|^2$ 决定的几率分布；而且 Schrödinger 坚持把这种分布看做是电子的真实的电荷分布，即所谓“电子云”。Bohr 和 Heisenberg 虽然从不接受Schrödinger的电子云概念，主张微观现象的本质是不连续性，不可以把电子的行为归结为象经典物理学里那样的连续分布和连续变化。可是，后来他们也不得不考虑在量子理论里粒子的路径或轨道等经典概念在多大的程度上可以使用的问题。

使 Heisenberg 感到困惑的疑难首先是：既然在量子理论中不需要粒子路径的概念，那又怎么样解释在云室里观察到的粒子径迹呢？经过几个月的冥思苦索，1927年初Heisenberg 忽然想起，年前在一次讨论中，当他向 Einstein 表示“一个完善的理论必须以直接可观察量作依据”时，Einstein 向他指出：“在原则上，试图单靠可观察量去建立理论，那是完全错误的，实际上正好相反，是理论决定我们能够观测到什么东西。”[3]在这一回忆的启发下，Heisenberg 仿效 Einstein 在狭义相对论里对同时性的操作定义方法，马上领悟到：云室里的径迹，不外是一连串凝结起来的小水珠，这些水珠比电子大得多，自然不可能给出电子的准确位置和动量；也就是说，云室里的径迹不可能精确地表示出经典意义下的电子路径或轨道，它原则上至多给出电子坐标和动量的一种近似的、模糊的描写。

这样一来，Heisenberg 在排斥了微观粒子的绝对精确的经典式轨道，从而坚守住矩阵力学的基本观念之后，便转而去研究量子理论的要求对于经典描写的限制，即对粒子坐标和动量观察的不确定度两者之间，是否会满足一定的条件。

Heisenberg 最早用高斯型波包的例子来定量地导出他的不确

定关系[3]。1926 年底，Dirac 和 Jordan 已经分别提出了量子力学里的变换理论，亦即是我们现在称呼的表象变换。从坐标 q 表象到动量 p 表象的变换理论里，Dirac 和 Jordan亦已分别明确指出，在量子理论里，“q 和 p 两者不能同时有确定的数值”，以及“对于给定数值的q，p 的任何数值都是同样可能的。”[4]Heisenberg 正是运用了 Dirac 和 Jordan 的变换理论，第一次导出了对于坐标取值同动量取值两者之间的这种限制的定量关系。下面我们用现代的形式写出这一推导.

大家知道，坐标表象里的态函数 $\psi(x)$和动量表象里的态函数 $\varphi(p)$，是通过下述 Fourier 变换式相联系的：(为了简单起见，我们只讨论一维情况)

$$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(p)e^{ipx/\hbar}dp, \tag{1a}$$

$$\varphi(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)e^{-ipx/\hbar}dx. \tag{1b}$$

在这一变换下，$\psi(x)$和 $\varphi(p)$具有相同的归一化常数：

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2dx=\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(p)|^2dp. \tag{2}$$

现在假设，坐标空间中的态函数 $\psi(x)$取高斯形式：

$$\psi(x)=e^{-x^2/a^2}. \tag{3}$$

(3)式中的参数 a 表示高斯分布的宽度。由数学上熟知的公式，我们知道同样是高斯形式的函数 ψ^2 的标准差，即 ψ^2 分布偏离其平均值(在这里是$\langle x\rangle=0$) 的方均根偏差 Δx 是

$$\Delta x=a/2. \tag{4}$$

将(3)式代入(1b)，算出积分，我们得到动量空间中的态函数 $\varphi(p)$，恰好仍然具有高斯分布的形式：

$$\varphi(p)=\frac{a}{\sqrt{2\hbar}}e^{-p^2/b^2} \tag{5}$$

其中的宽度参数是

$$b=2\hbar/a. \tag{6}$$

因而相应的 φ^2 分布的标准差 Δp 是

$$\Delta p=b/2=\hbar/a. \tag{7}$$

将(4),(7)两式相乘,便得到

$$\Delta x\Delta p=\hbar/2. \tag{8}$$

这就是由 Heisenberg 最早严格推导出来的第一个不确定关系式。[2](8)式表明，对于高斯型态函数说来，Δx 和 Δp 不可能同时为零或者取很小的数值,它们的乘积存在着确定的限制。注意,根据态函数的几率诠释，以上讨论的 Δx 和 Δp 分别指 ψ^2 和 φ^2 的几率分布对其平均值偏离的标准差，亦即围绕平均值的统计离散或涨落。

Heisenberg 把这一工作的草稿寄给 Pauli，很快收到 Pauli "大加肯定和鼓励"的回信。但当 Bohr 看到论文的初稿时，却说 Heisenberg 在这篇文章的讨论中忽视了主要之点。Heisenberg回忆说，Bohr "认为波粒二象性应当成为量子理论解释的合适的出发点。……他明确表示反对我没有从波粒二象性着手来研究。"[5] 其实,Bohr 对 Heisenberg 所得到的结果是欣然同意的，分歧只是在解释性的观点上。原来,在这些时日里，Bohr 正苦心构思他的"互补原理",企图以此作为量子理论的观念基础。

1927 年秋天，Bohr 在科莫会议上的发言正式提出了互补原理，并且果然通过波粒二象性的论证，重新导出了不确定关系。Bohr 说,一个在空间和时间上都是有限的实际波场，只能由原则上与无限多的频率 ν 值和波矢 k 值相对应的基本波叠加而成。"在最有利的条件下，波群中这些基本波的这两个量的平均差的数量级决定于下列条件:

$$\Delta t\Delta\nu=\Delta x\Delta k=1, \tag{9}$$

式中 Δt 和 Δx 分别代表波场的时间持续和空间延伸。”再运用 Einstein-de Broglie 关系 $E=h\nu$ 和 $p=hk$，便得出：[6]

$$\Delta t\Delta E=\Delta x\Delta p=h. \tag{10}$$

在光学里我们知道，只有在空间和时间上都是无限的等幅正弦波场，才能具有完全精确的频率和波长。可是，实际上的波场总存在于有限的空间时间区域之内，因此它不可能是绝对精确的单色光，而只能看做是由具有一定频谱分布的许多单色光叠加而成的。正象 Bohr 所说，(10)式正“表示着波列在波长的时空边界上因干涉而抵消的条件。”[6]当然，我们也不难从有限的等幅正弦波列的 Fourier 积分表示式推出这些关系。

先不讨论时间的变化。设有一列等幅波，其长度为 $2a$，可用下述波函数 ψ 表示：

$$\psi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2a}}e^{ip_0x/\hbar}, & -a<x<a\\ 0, & |x|>a\end{cases} \tag{11}$$

式中的 $1/\sqrt{2a}$ 是归一化常数。$\psi(x)$ 写成量子力学里的(有限)平面波形式，只要化做 $p_0=\hbar k_0$，也适用于电磁场的讨论。

将(11)式代入(1b)式，求出动量空间的波函数是

$$\varphi(p)=\sqrt{\frac{a}{\pi\hbar}}\frac{\sin\xi}{\xi},\qquad \xi=(p-p_0)a/\hbar, \tag{12}$$

于是，在动量空间里的几率密度是

$$[\varphi(p)]^2=\frac{a}{\pi\hbar}\frac{\sin^2\xi}{\xi^2}. \tag{13}$$

亦即是说，它按函数 $\sin^2\xi/\xi^2$ 的形式分布，如图 11 所示。

从图上可以看出，当 $\xi=0$ 即动量 $p=p_0$ 时，几率分布达到极大值；而当动量 p 偏离 p_0 时，几率分布迅速呈振荡式的衰减，并在 ξ 参数取 π 的正负整数倍，即动量偏差 $|p-p_0|$ 为 $\pi\hbar/a$ 的正整数

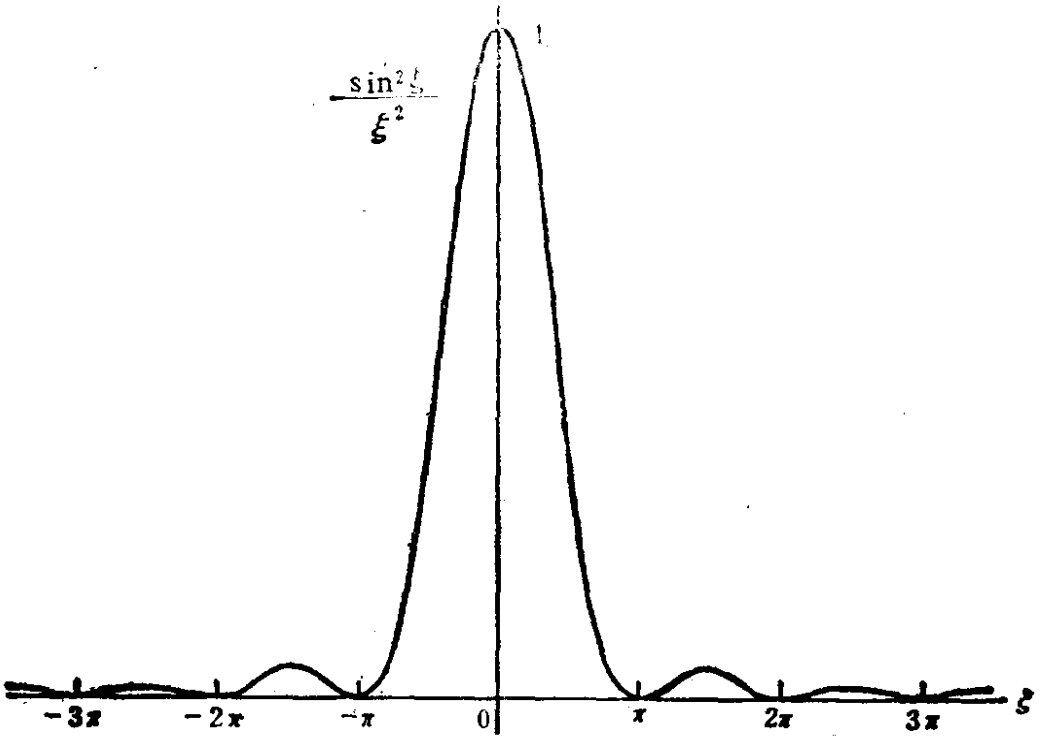


图 11　有限等幅正弦波列的动量分布几率

$$\frac{[\varphi(p)]^2}{[\varphi(p_0)]^2}=\frac{\sin^2\xi}{\xi^2},\quad \xi=(p-p_0)a/\hbar.$$

倍时，几率分布$[\varphi(p)]^2$等于零。

由于(11)式定义的$\psi(x)$明显是平方可积的，所以，根据(2)式，(12)式定义的$\varphi(p)$也是可归一化的，实际上我们给出的就是已经归一化了的形式。从图上清楚地看出，$[\varphi(p)]^2$的绝大部分分布在$|\xi|<\pi$的主极大区域内。这种情况使得我们有可能采取“主峰”近似，用主峰的宽度去代替整个分布的平均偏差。从图上主极大的形状，容易估计出，当分布曲线降到峰值的一半时的全宽度约为$\Delta\xi=\pi$，换算成动量宽度即是

$$\Delta p\approx\pi\hbar/a. \tag{14}$$

以(11)式表示的在坐标空间中的有限正弦波列占有的空间长度是$2a$，我们可以把它当做这一波列空间不确定度Δx的近似量度：

$$\Delta x \approx 2a. \tag{15}$$

同时，对(11)式的动量谱分布式(13)作了主峰近似后所得的宽度(14)式，也可以当做是这一有限波列的动量偏离其中心值 p_0 的不确定度的量度。把(14)式和(15)式合并，便得到

$$\Delta x \Delta p \approx h. \tag{16}$$

结果与公式(10)相同。

以上我们介绍了 Heisenberg 和 Bohr 最初用波包概念对不确定关系所做的两种论证，并且进行了简单的讨论。然而，在 Born 对态函数的几率诠释得到承认之后，波包已经不再是一个必需的，也不是一个普遍适用的概念了。实际上，一般只在满足经典极限的条件下，才可以将微观粒子用波包描写。例如，我们无法用波包的运动去恰当地描写氢原子里的电子。所以，上述这些使用波包概念对测不准关系的推导，虽然在当时曾经起到过积极的启发作用，但却不能被当做是一种普遍有效的理论基础。

总之，量子力学不是波包力学。量子理论有着本质上不同的内涵，不是只通过对经典波动的比拟就可以穷尽的。不确定关系的真正意义，还有待于深入探讨。

5.2 不确定关系的例子

除了以上所讲的波包模型之外，Heisenberg 最初还通过一些个别例子来论证他的不确定关系[2,7]。其中最著名的就是“γ 射线显微镜”的思想实验。

Heisenberg 在 1927 年的工作里提出了这一思想实验，但只做了粗略的偏于定性的论证。Heisenberg 先说道：“当我们想要弄清楚‘物体(例如电子)的位置’这一词组是什么意思的时候，我们必须指明一些确定的实验，藉以进行‘电子的位置’的测量，否则这一词组是没有意义的。”接着，他提出：“例如，当我们对电子施加光

照，并在一台显微镜下进行观察。那么，在测量中可达到的最高精确度取决于光的波长。然而，原则上我们能够建造一台 γ 射线显微镜，并且用它来进行精确度要多高就有多高的位置测定。在这种测量中的一个重要特征是 Compton 效应。……当测定位置的瞬间，因而也正是光子被电子散射的瞬间，电子的动量产生一个不连续的改变。当所用的光的波长愈小，即位置测定得愈精确，这一[动量]改变就愈大。因此，在知道电子位置的瞬间，它的动量只能了解到对应于那一不连续改变的大小的程度。于是，位置测定得愈精确，动量就知道得愈不精确，反之亦然。在这种情况下，我们看到方程 $pq-qp=-i\hbar$ 的一种直接的物理解释。令 q_1 是了解 q 值的精确度(即是说，q_1 是 q 的平均误差)，因而在这里即是光的波长。令 p_1 是测定 p 值时可能的精确度，在这里即是在 Compton 效应中的不连续改变。于是，根据 Compton 效应的基本定律，p_1 和 q_1 满足关系式 $p_1q_1\approx h$"。[2]

这一番论证无疑含有深刻的思想，但在细节上也确实是太粗糙了。Bohr 看到 Heisenberg 的手稿后，马上指出，Compton 散射前后电子动量的改变不是不确定的，而是可以根据散射公式，从光子频率的变化推算出来的。Bohr 纠正说，真正不确定的不是电子动量变化的大小，而是它的方向。因为对于一个有限孔径的显微镜物镜，我们只能在一定范围内而无法精确地决定接收到的光子动量的方向。以下我们就介绍这种经过 Bohr 改正的，而为 Heisenberg 接受了的关于 γ 射线显微镜的论证[7]。这也是直到今天的许多教科书里所引述的内容。

如图 12 所示。AB 是 γ 射线显微镜的物镜，P是电子与光子发生 Compton 散射的中心，ε 是物镜半径对 P 点的张角。设投射到电子上的 γ 光子的波长是 λ，那么，根据 Abbe 的衍射理论，在与显微镜光轴相垂直的物平面的 x 方向上，位置测量精度的极限是

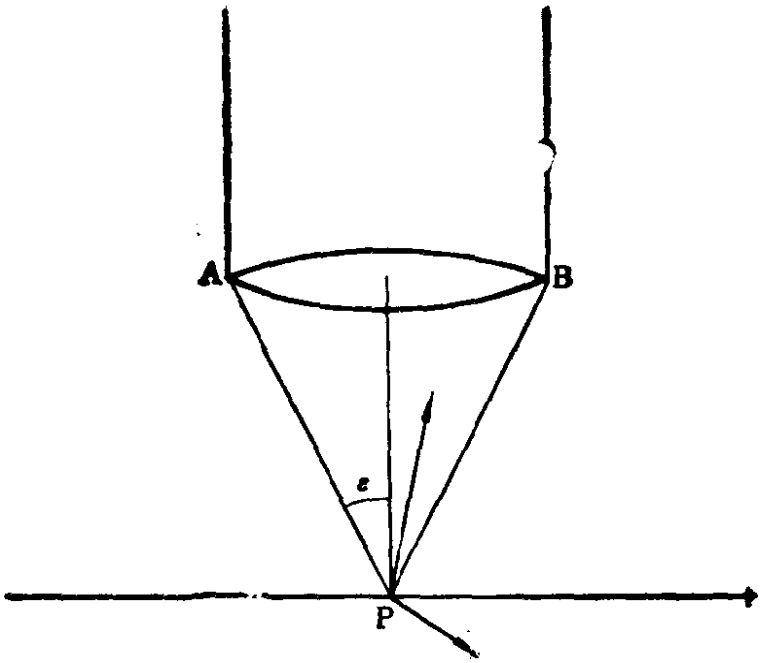


图 12　γ 射线显微镜示意图

$$\Delta x \approx \lambda / \sin \epsilon. \tag{17}$$

另一方面，我们之所以有可能观察到电子，是因为看到了被电子散射出来偏离了水平入射方向的 γ 光子。可是，由于显微镜物镜的有限孔径，它所接受到的散射光子沿 x 方向的动量分量是不确定的。显微镜可能接收到的光子动量的角度，正好就是图 12 里以折线 APB 所围成的锥体对 P 点所张的角度。根据动量守恒定律，在发生 Compton 散射的前后，电子动量变化等于光子动量变化的负值。所以，我们可以用散射光子动量的不确定度去估计被测量电子动量的不确定度。

忽略散射前后光子动量值的微小变化，我们认为散射光子的动量仍然是 $p = h/\lambda$。那么，按照上面的分析，显微镜接收到的光子横动量 p_x 的范围是 $-p\sin\epsilon$ 到 $p\sin\epsilon$。也就是说，光子横动量的不确定度，亦即电子横动量的不确定度是

$$\Delta p_x \approx \frac{h}{\lambda} \sin \epsilon. \tag{18}$$

合并(17)和(18)式，便得到不确定关系：

$$\Delta x \Delta p_x \approx h. \tag{19}$$

并且容易看出：一方面，使用波长较短的 γ 射线，有利于降低坐标测量的不确定度 Δx，但同时增加了动量测量的不确定度 Δp_x；另一方面，采用小孔径的显微镜物镜，有利于降低 Δp_x，但同时却增大了 Δx。无论如何，不管采取什么措施，Δx 和 Δp_x 总是此长彼消，不可能找到同时降低 Δx 和 Δp_x 的手段。Heisenberg 就这样把不确定关系式(19)，解释为同时测量电子的坐标和动量时，对坐标不确定度和动量不确定度的一种综合的限制。并且认为："对这个实验的整个讨论，其特点又是同时运用了粒子图象和波动图象。我们实际上使用了波粒二象性……"[7]

Heisenberg 举出的另一个后来常被援引的例子是电子单缝衍射实验。[7]如图 13 所示，设一块障板上开有一条宽度为 d 的狭缝，电子束沿障板的法线方向射入。由于衍射效应，出射的电子动量方向会按出射角 α 的不同而形成一定的分布。

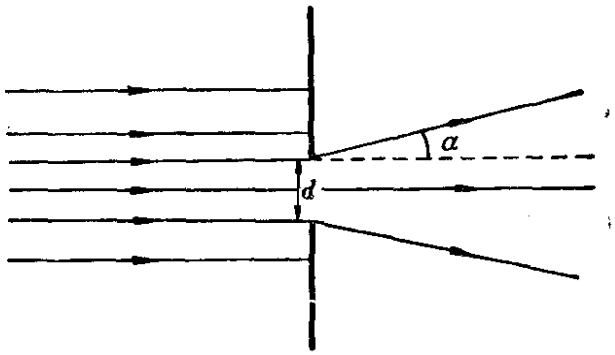


图 13　单缝衍射示意图

设电子束的动量为 p，相应的 de Broglie 波长是 $\lambda = h/p$。由光学理论得知，单缝衍射出射强度的角度分布是

$$\frac{I(\alpha)}{I(0)} = \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2}, \qquad \xi = \frac{\pi d}{\lambda} \sin\alpha. \tag{20}$$

我们再次遇到(13)式即图 11 所表示的分布函数 $\sin^2\xi/\xi^2$。运用上一节的分析，可知对应$|\xi|\leqslant\pi$ 的主极大的宽度是

$$\sin\alpha\approx\lambda/d. \tag{21}$$

由于电子动量的大小在通过狭缝前后保持不变，所以出射电子动量的横向分量只决定于它的出射角 α。采取主峰近似，忽略主极大以外的其他衍射峰，得到电子横动量的不确定度约为

$$\Delta p_x\approx\frac{h}{\lambda}\sin\alpha. \tag{22}$$

而通过衍射缝时，电子的横向坐标分量 x 的不确定度可取为狭缝的宽度 d，即有

$$\Delta x\approx d. \tag{23}$$

综合(21)-(23)诸式，我们又一次得到不确定关系式(19)。在电子单缝衍射的情况下，狭缝宽度 d 愈小，愈有利于降低电子位置不确定度 Δx，同时，衍射电子却显现较宽的横动量分布 Δp_x。对于电子双缝或多缝衍射，可以作出类似的分析。

除此之外，Heisenberg 还举出过自由电子或束缚电子的一些其他例子来论证他的不确定关系，我们不再一一叙述。按照 Heisenberg 自己的看法，在这些例子的推导里，或者使用了“辐射理论的波粒二象性”，或者使用了“物质理论的波粒二象性”；而在“没有直接提到波粒二象性”的其他场合，它“依然隐含在量子化条件之中。”[7] 不过，对于这些具体例子的分析和理解，一开始就引起了不同的意见。Heisenberg从这些例子引伸出来的关于不确定关系的解释，包括它们是不是波粒二象性的运用等等，一直受到种种怀疑和诘难。我们将在第 5.5 节，专门通过对 γ 射线显微镜的仔细讨论，分析这里面存在的种种问题。在这一节里，我们暂时不忙于揭露这些问题，姑且把上述几种例子的论证都当做是完全没有毛病的。

在这里，我们只强调一点，从方法论的角度看来，举例并不是证明。大家知道，举出一个反例，就足以使任何理论发生危机。但是反过来，单靠举出一个又一个实例，是不足以证明一条原理或定律的普遍有效性的。在逻辑学上，这种方法叫做"简单枚举法"。即使举出了成百上千个符合不确定关系的实例，也无法保证第 101 或第 1001 个例子不出毛病。一个著名的逻辑学例子是，在澳大利亚发现了一只黑天鹅，就足以推翻多少年来建立在无数次直接观察基础上的"一切天鹅都是白的"这一命题。

另一方面，本节里所讲的两个例子的讨论里，并没有使用严密的量子力学数学程式。在 Bohr 和 Heisenberg 会感到十分满意的这种"波粒二象性"的论证里，我们看到的更多是对电子这样的微观粒子运用从经典光学那里搬过来的公式和定律。这一套论证方法，同以量子力学基本假设为基础而建立起来的数学程式和物理解释会相融洽一致呢，还是会发生矛盾冲突？这个问题还需要仔细推敲，不是凭想当然就可以解决的。总而言之，以上从一些特例所得出的不确定关系及其解释，虽然在量子力学发展的早期起到过积极的启发作用，都不能被当做是严格的普遍性的结论。

5.3 不确定关系的证明

Heisenberg 提出不确定关系时，量子力学的基本数学结构和物理解释都已建立起来了。人们自然马上就尝试在量子力学基本假设的基础上，给出不确定关系的严密推导。量子力学既然是一种统计性的理论，它也必定可以从平均值的计算法则，进而估算统计量围绕其平均值的涨落。这正是解决这一问题的合适途径。

在经典统计理论里，统计量 A 偏离其平均值 $\langle A\rangle$ 的涨落 ΔA，是用相应的平均平方偏差来定义的：

$$(\Delta A)^2=\langle(A-\langle A\rangle)^2\rangle=\langle A^2\rangle-\langle A\rangle^2. \tag{24}$$

那么，根据第二章里所讲的平均值公设(II)，在量子力学里，对于处在状态 ψ 的系统，多次测量力学变量 A 所得到的统计涨落应当是方均根偏差(标准差)

$$\Delta A=\left[\int\psi^*(A-\langle A\rangle)^2\psi d\tau\right]^{1/2}, \tag{25}$$

其中平均值的定义是

$$\langle A\rangle=\int\psi^* A\psi d\tau. \tag{26}$$

回顾在前一节里所讲 Heisenberg 最早用高斯型波包所做的推导里，他所指定的坐标不确定度 Δx 和动量不确定度 Δp，恰好是按(25)式方均根偏差定义的统计涨落。于是，把由(25)式定义的 ΔA 作为力学变量 A 的不确定度的量度，便找到了将量子力学的基本原理同不确定关系联系起来的一把钥匙。

1927 年夏天，Heisenberg 的文章[2]刚发表出来，Kennard 就在一篇评述性文章里，采用(25)式作为不确定度的定义，第一次运用量子力学的数学程式，证明了对于任意的态函数 ψ，Δx 和 Δp_x 都满足下述的不等式：[4]

$$\Delta x\Delta p_x\geqslant\hbar/2. \tag{27}$$

Heisenberg 在 1930 年的讲演里，征引和复述了 Kennard 的这一工作[7]。注意到与(8)，(10)，(16)和(19)等几条等式形式的不确定关系不同，经过严密推导的、具有普遍意义的不确定关系(27)是一条不等式。这就是后来大家所公认的坐标和动量的不确定关系，其中的不确定度 Δx 和 Δp 有着明确的定义，并且这一关系式的有效性是不依赖于任何具体模型的。

1928 年，Weyl 在《群论和量子力学》一书里，首次写进了不确定关系的内容。并且，由于 Pauli 的建议，Weyl 使用 Schwarz 不等式推导出了不确定关系式(27)[8]。

1929 年，Robertson 成功地把 Weyl 的方法运用到任意两个(不对易的)力学变量 A 和 B，得出了一般情况下两个力学变量的不确定关系。[9] 在今天的许多量子力学教科书里关于不确定关系的一般证明，实质上都是 Robertson 推导的改写。

1930 年，密切地注视着事态发展的 Schrödinger，又改进了 Robertson 的结果，使之具有更严格的形式[10]。于是，在这几年里每年都翻出新花样的不确定关系推导的进程，就此告一段落了。下面我们先从 Schwarz 不等式推出严格的不确定关系式，再倒回去讨论各种特殊情况以及存在着歧义之处。

设 f 和 g 是两个任意的平方可积复函数，它们必定满足Schwarz 不等式:

$$\left(\int |f|^2 d\tau\right)\left(\int |g|^2 d\tau\right) \geqslant \left|\int f^* g d\tau\right|^2. \tag{28}$$

证明如下: 设 λ 为任意复常数，令

$$\psi = f + \lambda g, \tag{29}$$

则必定有

$$\int |\psi|^2 d\tau = \int |f|^2 d\tau + 2\mathrm{Re}\left(\lambda \int f^* g d\tau\right) + |\lambda|^2 \int |g|^2 d\tau \geqslant 0. \tag{30}$$

由于 λ 可以任意选择，我们令

$$\lambda = -\left(\int g^* f d\tau\right) \Big/ \left(\int |g|^2 d\tau\right). \tag{31}$$

将(31)式代入(30)式，经过整理和减除，便得到(28)式。

以下我们证明对任意两个力学变量 A 和 B 的不确定关系。由于(28)式里的 f 和 g 是任意函数，我们选取

$$f = (A - \langle A \rangle)\psi, \quad g = (B - \langle B \rangle)\psi. \tag{32}$$

将(32)式代入 Schwarz 不等式(28)，便有

$$\left(\int|(A-\langle A\rangle)\psi|^2d\tau\right)\left(\int|(B-\langle B\rangle)\psi|^2d\tau\right)$$
$$\geqslant\left|\int\psi^*(A-\langle A\rangle)(B-\langle B\rangle)\psi d\tau\right|^2. \tag{33}$$

由于代表力学变量的算符 A 和 B 的厄密性，从定义式(25)可以看出，(33)式左方即是(ΔA^2)和$(\Delta B)^2$两个均方误差因子的乘积。另一方面，(33)式右方绝对值符号内的积分式，无非是下列平均值：

$$\begin{aligned}&\langle(A-\langle A\rangle)(B-\langle B\rangle)\rangle=\langle AB\rangle-\langle A\rangle\langle B\rangle\\&=\left(\frac{1}{2}\langle AB+BA\rangle-\langle A\rangle\langle B\rangle\right)+\left(\frac{1}{2}\langle AB-BA\rangle\right).\end{aligned} \tag{34}$$

如果两个厄密算符 A 和 B 不可对易，那么(34)式里的算符 AB 就不是厄密的，它的平均值$\langle AB\rangle$一般是复数。因此，在(34)式的最后结果里，把算符 AB 拆成厄密部分$\frac{1}{2}(AB+BA)$ 和反厄密部分$\frac{1}{2}(AB-BA)$之和，分别对应着实数和纯虚数的平均值。亦即是说，在(34)式的结果里的前后两个括弧，已经整理成平均值的实部和虚部两个部分。

于是，对(33)式不等号的两边分别运用(25)和(34)式，两边开方后便得到标准差 ΔA 和 ΔB 所满足的不等式：

$$\Delta A\Delta B\geqslant\left(\left|\frac{1}{2}\langle AB+BA\rangle-\langle A\rangle\langle B\rangle\right|^2+\left|\frac{1}{2}\langle AB-BA\rangle\right|^2\right)^{1/2} \tag{35}$$

这就是 Schrödinger 所导出的严格的不确定关系[10]。

从统计理论我们知道，只要是独立而无关联的两个随机变量 A 和 B，必定有平均值关系。

$$\frac{1}{2}\langle AB+BA\rangle=\langle A\rangle\langle B\rangle, \tag{36}$$

对易关系等于普通 c 数的、代表着两个正则共轭变量的算符 A 和

B，就属于这种满足(36)式的情形。对于这种情况，可以把(35)式右方括号内第一项绝对值平方抹去，变成

$$\Delta A\Delta B\geqslant\frac{1}{2}|\langle AB-BA\rangle|. \tag{37}$$

话说回来，即使算符 A 和 B 不满足(36)式，从较强的不等式(35)，总是可以得到较弱的不等式(37)。这(37)式就是由Robertson 首次导出[9]，而为今天的教科书普遍采用的不确定关系式。

从以上的讨论可以看出，将(34)式的平均值舍去实部，只取虚部，就将(35)式简化为(37)式。这种做法相当于将(29)式里的参数选成纯虚数的情形。试将(31)式一般是复数的 λ 定义换成

$$\lambda=i\xi,\ \xi=\left(\mathrm{Im}\int f^*gd\tau\right)\Big/\left(\int|g|^2d\tau\right). \tag{38}$$

将(38)式代入(30)式，就得到代替(28)式的另一个较弱的Schwarz 不等式：

$$\left(\int|f|^2d\tau\right)\left(\int|g|^2d\tau\right)\geqslant\left(\mathrm{Im}\int f^*gd\tau\right)^2. \tag{39}$$

Weyl[8]和 Robertson[9]实质上运用了这一形式的 Schwarz 不等式。所以他们得到的结果是(37)式或与它相对应的(27)式。

把(29)式里的参数 λ 写成纯虚数 $i\xi$，(30)式就变成实参数 ξ 的二次式所要满足的非负条件：

$$\xi^2\int|g|^2d\tau-\xi\cdot\mathrm{Im}\int f^*gd\tau+\int|f|^2d\tau\geqslant0 \tag{40}$$

不难由此看出，取(38)式规定的 ξ 值从而得到(39)式，同运用一般二次式的判别式而得到(40)式，两者是一样的。这里所讲的后面一种方法就是多数量子力学教科书上证明不确定关系所用的方法，其中虽然没有明显提到 Schwarz 不等式，实际上是一回事。

以上我们证明了对任意两个力学变量 A 和 B 的不确定关系式(35)或(37)。当 A 和 B 不可对易时，不确定关系对它们的标准

差 ΔA 和ΔB 的乘积有一定的下限限制。例如，当取 A 和 B 分别为坐标 x 和动量 p_x 时，由对易关系(2.44)式

$$xp_x - p_x x = i\hbar$$

便可以推出坐标和动量的不确定关系式(27)。

在这一节里的讨论都不依赖于函数 ψ 的具体形式，因而所得到的结论是普遍有效的。

观察 Schwarz 不等式(28)，不难发现，如两个函数 f 和 g 只差一个(复)常数因子，即两函数成比例：

$$f \propto g \tag{41}$$

这时，(28)式应当取等号，相应于该式左方取极小值的情形。将不确定关系证明里用到的(32)式代入(41)式，便得知当态函数 ψ 满足

$$(A - \langle A\rangle)\psi \propto (B - \langle B\rangle)\psi \tag{42}$$

时，不确定关系式(35)或(37)应取它们的下限。

今分别取算符 A 和 B 为坐标 x 和动量 $p_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$，并且为简便计，只讨论 $\langle x\rangle = 0$，$\langle p_x\rangle = 0$ 的静止对称情形。运用(42)式，得到方程

$$x\psi \propto \frac{d}{dx}\psi. \tag{43}$$

高斯型态函数(2)式，显然是方程(43)的解。这样，我们就证明了，对高斯型波包 (2)，坐标动量不确定关系式(27)取极小值，这时 (8) 式的取等号的不确定关系式成立。而在除了高斯型分布以外的其他情形，Δx 和 Δp 的乘积都大小 $\hbar/2$。[2]

然而，细心的读者也许已经发现，在前面两节里，除了高斯型波包之外，对有限正弦波列，γ 射线显微镜和电子单缝衍射等情况得出的(10)，(16)和(19)诸式，也都是等式而不是不等式。虽然

在这几个式子里 Δx 和 Δp 的乘积等于 h，它是上述极小值 $\hbar/2$ 的 4π 倍，因而并不违反(27)式的限制；然而，这 4π 因子可能只是我们当初没有严格地用标准差去规定不确定度，而只是做一些粗略估计所引起的误差。既然已经证明了只有高斯型波包才使 Δx 和 Δp 的乘积等于其可能的极小值，那我们就完全有理由怀疑在其他那些例子里所得到的等式会不会是弄错了。

认真查一查，果然发现了毛病。1958 年，Beck 和 Nussenzveig 指出，使用单缝衍射的边界条件，对量子力学方程严格求解所得到的波函数，求出相应的坐标和动量两种标准差的乘积 $\Delta x\cdot\Delta p$，结果是发散的[11]。这一发散的结果当然不会影响象(27)式那样经过严密推导出来的测不准关系式的有效性，因为(27)式只是一条不等式，并没有规定什么上限。可是，这么一来，就同采取主峰近似处理单缝衍射所得到的等式(16)发生了矛盾。如果坚持不确定关系里的不确定度由(25)式所定义的标准差表示，那么对单缝衍射的主峰近似及其有限结果(16)式就都不能接受了。

其实，不止单缝衍射有这个问题，在前一节所讲的有限波列里也是如此。因为，根据标准差的定义(25)，对于(11)式表示的坐标空间波函数 ψ，求出的坐标不确定度是

$$\Delta x=\left[\int_{-a}^{a}x^2\psi^2(x)\,dx\right]^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{3}}a\ ; \tag{44}$$

而对(12)式表示的动量空间波函数 φ，求出的动量不确定度是

$$\begin{aligned}\Delta p&=\left[\int_{-\infty}^{\infty}p^2\varphi^2(p)\,dp\right]^{1/2}\\&=\left[\frac{\hbar^2}{\pi a^2}\int_{-\infty}^{\infty}\sin^2\xi d\xi\right]^{1/2},\end{aligned} \tag{45}$$

结果明显是发散的。那么，有限的 Δx 乘上无限的 Δp，乘积当然仍然是无限，同(16)式的结果完全不同，根本不是只差个分数因子的问题了。

从(13)式和(20)式可知，在有限波列和单缝衍射这两个问题里，动量的大小或方向的分布都有一个共同的函数形式 $\sin^2\xi/\xi^2$，如图 11 所示。这种分布本身是平方可积因而是可归一化的。可是，在按照(24)式或(25)式求均方偏差时，就会遇到对这一分布函数乘上权重因子 ξ^2 的积分。结果，虽然在图 11 里主极大以外的两侧的极大峰本身的高度是按 ξ^{-2} 变化而迅速降低的，但在乘上权重因子 ξ^2 后，在(45)式最后的积分里，每一个极大峰都负担着同样的贡献，而与 ξ 的绝对大小无关。从这种分析我们就了解到为什么会出现发散，并且看出只取主极大峰的近似做法未必是妥当的。

实际上，现代的光栅技术已经可以观察到成千上万条衍射条纹。所以，上面的这番议论决不是多余的。只考虑主极大的近似方法，不仅缺乏严密的理论依据，而且已经出了毛病。因此，从主峰近似得出的(9)，(10)，(16)和(19)那样的近似等式出发，或者随便把(27)或(37)式里的不等号抹去，对于种种不同情况做估算的惯常做法，便都变得不可靠了。

另一方面，本节里所讲的采用反映了统计涨落的标准差作为不确定度的量度，虽然可以从量子力学的数学程式推导出普遍有效的不确定关系；但这种严格方法的结果，在某些情况下常常会出现发散，因而是没有实际意义的。看来，以上这两种估算不确定度的办法都各有缺陷，未能尽如人意。是不是可以在量子力学的理论基础上，选择新形式的不确定度定义，使不确定关系得到更合理的解释和应用呢？这个问题还值得进一步研究。已经有作者提出了不确定度的新定义[12]。我们不再介绍其细节，而只是借此强调，从以上的讨论已经看到，通常对不确定关系的表达形式里，还存在着一些漏洞，并不是已经万事大吉了。

5.4 所谓"同时测量"

上面讨论了测不准关系的数学推导以及不确定度的确切定义等问题。现在我们着手讨论不确定关系的物理解释。按照量子力学的统计解释，我们知道，态函数的模方代表多次测量中测量值出现的相对频度分布，而由(26)式定义的力学变量A的平均值，也指的是对处在ψ状态的系统进行多次测量的结果。既然量子力学的基本假设原则上不包含对单次测量结果的确定预言，那么由这些基本假设推演出来的不确定关系也不能例外。于是，无论是按照(25)式定义的在全部分布谱上的标准偏差，还是前面讲的只取分布谱里的主峰的近似，不确定关系里的不确定度都应当指的是多次测量里观察值偏离其平均值的统计散布，不确定关系就是两种统计散布即涨落ΔA和ΔB乘积所受到的限制条件。

如前所述，Heisenberg在关于高斯型波包的论证里[2]，实际上使用了标准差作为不确定度的量度。后来，他在证明坐标和动量之间的不确定关系式(27)时，又明确地按照(25)式的形式写出Δx和Δp的表示式；他还声明说："就其数学内容来说，对于不确定关系的这一推导与根据波粒二象性的推导没有什么区别……"[7]从这方面看来，好象Heisenberg有意把他从不同方法导出的不确定关系里的不确定度Δx和Δp，都理解为多次测量的统计偏差似的。

可是，另一方面，我们已经看到，在Heisenberg最早关于γ射线显微镜的论证里，他认为由于"光子被电子散射的瞬间，电子的动量产生一个不连续的改变。""因此，……[电子的]位置测定得愈精确，动量就知道得愈不精确，反之亦然。"[2]后来，Heisenberg又进一步主张："任何一个测定位置的实验，必定会在某种程度上干扰对于速度的认识，……对位置所作的每一次观测必定会使电子

动量发生改变,……使得在实验完成之后,我们对于电子运动的知识要受到不确定关系的限制。"[7]在这些话里,Heisenberg 又明确地把不确定关系看成是对单次测量结果的限制,而不是看作多次测量的统计散布性质。

本来,经过了 Bohr 的纠正,Heisenberg 已经承认,由于显微镜物镜的有限孔径,只能观察到散布在一定立体角范围内的经过 Compton 散射的光子。这明明是由仪器构造决定的一种统计散布的限制,同单个 Compton 散射过程的特性没有什么关系(事实上,上节所讲的 Heisenberg 在文献[7]的推导里,根本没有用到 Compton 散射定律公式)。但是,Heisenberg 在这个问题上却采取了一种自相矛盾的态度,仍然先入为主地坚持他最早关于电子在散射前后动量的不连续改变是引起不确定性的本质原因的看法。Heisenberg 坚持认为:"在讨论某些实验时,必须考虑到客体与观测者之间的相互作用,这种相互作用对于任何观测都是不可避免的。""在原子物理学中……观测者和客体之间的相互作用会对被观测体系引起不可控制的大的变化。""这种情况的直接后果是:由于实验对被观测体系有不可控制的影响,……我们会发现,在很多情况下,同时测量两个不同物理量时总是存在一个不能再提高的精度下限……即所谓不确定关系……"[7]等等。

Bohr 也讲过:"按照量子理论,正是由于不可能忽略系统和测量器械的相互作用,就意味着每一次观察都将引入一个新的不可控制的要素。"[13] 这正是他的互补原理所需要的概念源泉。总之,在量子力学的一些创始人最早对 γ 射线显微镜等思想实验自以为是的分析的基础上,逐渐形成了一种对不确定关系的正统解释,并且占据了支配的地位。例如,在五十年代之前,几乎所有量子力学教科书都或多或少地受到它的影响。按照以上所引述的 Heisenberg 的言论,以及后来广泛流行的一些说法,可以把这种对不确定关系

的正统解释的要点概括如下：

一、不确定关系里的不确定度，不是指多次测量结果的统计散布，而是指单次测量结果的精确度；

二、不确定关系来源于在单次测量中宏观仪器对被测量的微观系统的不可控制和不可预计的扰动；

三、不确定关系给出了在单次测量中对两个力学变量同时进行测量所可能达到的精确度的限制。

以上这三点：单次测量；扰动说和同时测量等问题，既是互相关联的，又被不同作者在不同场合各有侧重地表述，但其基本物理内容大都没有越出这个范围。

早在 1934 年，Popper 就已经指出：[14] 既然从量子力学的基本原理可以导出不确定关系，这一关系就应当是一种推论，而不是在量子理论的逻辑体系里具有独立地位的原理；既然对不确定关系的严格推导没有超越态函数的几率诠释，那么从 Heisenberg 发端的关于不确定关系的传统解释就必须受到重新审查。

从五十年代开始，沿着这一方向，经过 Margenau 等人的努力，对不确定关系的传统解释进行了一系列的批评，明确地指出只应当限于在多次测量的统计意义上解释不确定关系。因此，人们常把后来出现的对不确定关系的这种非传统解释称为不确定关系的统计解释，而把传统的解释称为“非统计解释。”[15] 下面我们按以上所说的三个要点，说明这两种解释的主要分歧。

首先，按照量子力学的统计解释，对于由(25)式定义的不确定度，通过量子力学的数学程式严格推导出来的不确定关系式(35)或(37)式，只能理解成对于用态函数 ψ 描写的量子系综进行足够多次测量所得到的统计散布或涨落 ΔA 和 ΔB 的限制。这一点我们已经反复讲过了。然而，在单次测量里自然没有统计散布可言。那么，在不确定关系的非统计解释里，单次测量的不确定度

又指的是什么呢？从上面的引文我们已经看到，Heisenberg已经把单次测量中的不确定度说成是测量值的精确度或精度，而通常又是把精确度当做实验误差来理解的。

大家知道，为了将多次测量的结果整理出一种有意义的统计分布，每次测量的误差必须显著地小于统计分布的宽度（标准差）。如果反过来，单次结果的误差比多次结果的可能散布还要大，得出来的只能是模糊一片，无法算出分布宽度或者标准差。

譬如说，在基本粒子共振态的分析里，就很清楚地显示了这一种关系。图14是在反应

$$K^- + p \to \bar{K}^0 + \pi^- + p$$

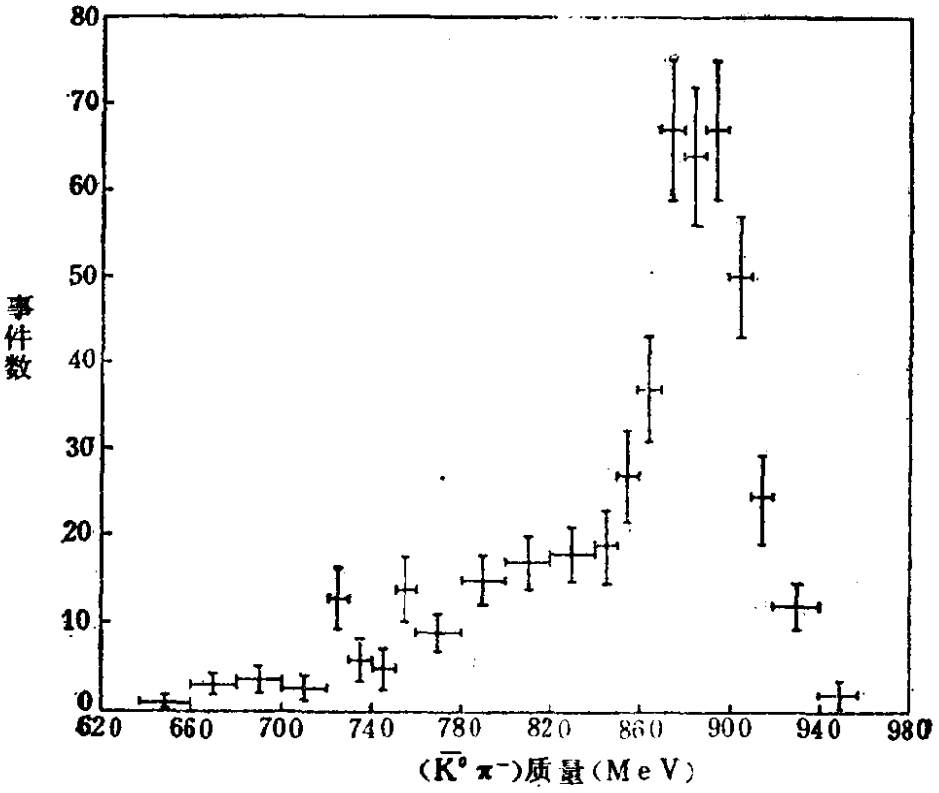


图14 $K^- + p \to \bar{K}^0 + \pi^- + p$ 中的($\bar{K}^0\pi^-$)质量分布

中产物($\bar{K}^0\pi^-$)系统的质量分布。我们看到每一个数据点(包含了若干个测量事件)的能量误差是5到10 MeV，而拟合分析得到的共振态K^*的宽度为50 MeV。实际上，在原始的Dalitz图里，代表

单个事件的每一测量点的能量精确度比 5 MeV 还小，当然是远小于 K^* 态的宽度的[16]。

这个道理，就象我们平常观看照片或电视画面时，其中每个象素必须具有足够的分辨能力，才有可能识别一定的图象细节一样。反过来说，我们不可能看清楚其尺度范围低于分辨率以内的图象的精细结构，在分辨率尺度以内，看到的只能是模糊一片。

总而言之，按照不确定关系的统计解释，不确定度指的是多次测量的统计散布。这一结论是从经受过无数次实验检验的量子力学基本原理推导出来的，因而在逻辑上是可靠的。实验上从来也没有观察到与这一结论相矛盾的情况。

另一方面，如果按照不确定关系的非统计解释，不确定度指的是单次测量中的精度或误差。那么，由于这种误差总是显著地小于所观察到的统计宽度(标准差)，这样理解的不确定关系的要求肯定要严于统计解释的不确定关系。譬如，我们将单次测量中坐标与动量的精度（误差）分别记为 δx 和 δp，则非统计解释的不确定关系应表示为

$$\delta x \delta p \gtrsim h. \tag{46}$$

那么，由于按（25）式定义的 Δx 和 Δp 总是分别显著大于 δx 和 δp，(46)式的要求就必定比(27)式要严格得多，两者的意义是全然不同的。[17,18]

这样一来，不确定关系的非统计解释便超越了量子力学基本假设所包容的范围，从而必须把它当做是独立于通常的量子力学基本原理之外的一个独立假设。事实上，关于单次测量不确定度的这一额外假设的正确性，从来没有受到过充分的检验。正是在这个问题上，形成了关于不确定关系不同解释之间争论的焦点。例如，Margenau 就说过，将不确定关系里的不确定度归于单次测量的性质，“这是如同把温度归之于一个分子那样的蠢话。”[19]虽然我

们不一定要采取那样极端的态度，但也应当承认：不确定关系的统计解释同现今量子力学的基本内容是相容的，而不确定关系的非统计解释则涉及更深入的研究领域，在那里必须引进至今未经充分验证的额外假设。

其次，我们再谈谈认为在单次测量中微观系统所受到的不可控制和不可预计的扰动是不确定度的来源这一说法，即Heisenberg的“扰动说”。从统计解释的立场看来，只要被测量的是以ψ来描写的系统或系综，测量值的统计散布或涨落就可以准确地计算出来。换句话说，每一观察量的标准差仅由态函数ψ决定，它们反映的只是ψ的特征，而与其他各种因素皆无关系。至于在每次测量中，观察量为什么取这一数值而不取另一数值，或者说为什么它与平均量有某一偏离等等这些问题，都是属于量子力学基本原理范围之外的问题，同我们观察到的关于能级、跃迁率、散射截面等实验数据没有什么必然的联系，因此可以暂时不予理会。

实际上，在第3.4节已讲过，对个别微观粒子位置探测的精确度，往往是由探测仪器的工作物质的性能以及在其中进行的物理学和化学过程的性质，或者还有探测器单元的尺寸决定的。而在散射实验里，我们又常常通过粒子出射方向或者它的径迹的曲率来确定其动量。这些测量都离不开位置的测定。因此，粒子位置和动量测量的精度或者误差，在一定程度上是由实验手段决定的。这种误差虽然不可以任意减小，但也不大会忽然增到非常大，看来很难把它的大小归结为被测系统所受到观察仪器的干扰。已经有些作者提出了一些反例，用来证明关于测量误差的“不确定关系式”(46)并不成立。[17,20]我们不拟详细讨论。

其实，在经典物理学的测量当中，一般也要遇到测量仪器对被测系统的干扰问题。不过，人们相信，随着测量技术的改进，这种干扰总可以降低到可忽略的程度。现在，对于娇嫩的微观系统，它

所受到测量仪器的干扰要大得多，甚至必然达到不可忽略的程度。这种推理当然是可信的。问题只是到底是什么一些量受到了干扰，为什么不可以设想，这种干扰只表现在，由于仪器的干扰，使得原来处在 ψ 态的系统按(25)式定义的不确定度 ΔA，变成由另一个 ψ' 态函数算出的 $\Delta A'$ 呢？为什么一定要象 Heisenberg 说的那样，只是在测量中受到扰动才会产生不确定性，难道在接受测量之前粒子的坐标和动量都采取绝对精确的数值吗？这里面确实还存在着许多没有弄清楚的问题。

一些著名的物理学家对于不确定关系的本质，抱着各不相同的看法：Heisenberg 认为测量对系统的扰动是不可约简的，表明在微观领域内主体和客体不可能完全分开；Dirac 认为不确定性是量子的不可分性对扰动的表现；Laue 认为这是波粒二象性的体现；Born 认为这是在原子水平上的涨落现象；而Bohm 则认为这是由更深层次的隐参数决定的表观现象等等[21]。

在我们看来，这种种议论和猜测离物理学本身是有一段距离的。事实上，它们往往是不熟悉物理学的哲学家和不熟悉哲学的物理学家们所热衷于发挥的话题。或者，象 Lamb 所说，关于量子力学测量问题的大多数讨论都是"或则含混不清，或则形式化且非物理学的。"[22]现在看来，在这方面除了要在第七章讲到的有关 Bell 不等式等问题外，其余问题的争论还未达到已经有实验结果来判定谁是谁非的程度。有兴趣的学者不妨去从事深入的研究，但我们总是觉得，在量子力学基本内容的教学里，是不必涉及这些争论的。

最后，我们着重谈谈"同时测量"问题。以上所讲的两点，只谈及单个观测量的误差或扰动。现在，不确定关系里包含有两个力学变量的不确定度。不确定关系的非统计解释既然主张它是单次测量中所得到的两种不确定度的关系，自然要求在每一次测量

中都能同时对譬如说坐标和动量进行测量，这样就把不确定关系理解为在一次测量中同时得出的坐标和动量两种不确定度的限制。

与此相反，不确定关系的统计解释全然否定讨论同时测量的必要性。例如，Margenau 把量子力学里对几率分布的测量分为两类：一类是空间系综，即处在同一状态的许多个互不干扰的独立系统，一类是时间系综，即使用同一套装置，可以一次一次地反复按相同的一些物理条件制备并接受测量的单个系统。按照他的区分，在空间系综里，可以同时对其中一半的系统测量坐标，对另一半测量动量；而在时间系综里，则对同一系统在一半的时刻（次数）测量坐标，在另一半时刻测量动量。在这两组测量里，都可以求出处在同一状态中的统计偏差 Δx 和 Δp。在这里，对坐标测量的一半事件同对动量测量的另一半事件是完全不相干的，因而所谓“不可预计和不可控制的扰动”，在这种测量结果中不应当发生什么影响。[19]

我们还可以补充说，在 Margenau 的空间系综里，对其中各成员的测量既可以是同时的，也可以是不同时的。只要我们相信时间的均匀性，对于处在定态的系统，所得结果必然具有相同的统计性质。因此，甚至在这种情况下，“同时测量”的要求都不是必要的。

当然，在不确定关系的非统计解释里，“同时测量”指的不是对多个系统的测量，而是在对单个系统进行的单次测量中，同时得出的坐标和动量取值。那么，同时测得的这两种测量值的不确定度，如果不能理解为单次测量的读数误差，可不可以象有些作者那样，把不确定关系理解为，对单次测量中坐标和动量同时取确定值的限制，即对两个力学变量偏离其平均值的单次偏差的限制呢？

从统计学的观点看来，这一说法是肯定不能成立的。按不确定关系的统计解释，(27)式是多次测量的统计偏差 Δx 和 Δp 满足的关系。至于单次测量中所得的坐标值 x' 和动量值 p' 对其平均值的偏差 $x'-\langle x\rangle$ 和 $p'-\langle p\rangle$，原则上不应当有什么限制。Jammer 就举过一个例子[4]。他说，对一群人逐个分别测量其身高和体重，通过统计方法得出平均身高和平均体重以及相应的标准差。但并不排斥其中有个别成员身高和体重都恰好等于平均值，即出现两种偏差都等于零的单个"同时测量"事件。

我们还可以补充说，根据误差理论，对平均值偏离不到一个标准差的测量事件，应当占总事件数的 68%。今假设在每一事件中均能同时测量到坐标值 x' 和动量值 p'，并且二者是独立的随机变量。那么，在同一组总事件数中，$|x'-\langle x\rangle|<\Delta x$ 的占 68%，$|p'-\langle p\rangle|<\Delta p$ 的也占 68%，就必然有 $2\times0.68-1=36\%$ 的事件同时满足 $|x'-\langle x\rangle|<\Delta x$ 和 $|p'-\langle p\rangle|<\Delta p$。亦即是说，在总的测量事件中，至少有 36% 满足以下不等式：

$$|x'-\langle x\rangle|\cdot|p'-\langle p\rangle|<\Delta x\Delta p. \tag{47}$$

由于 $\Delta x\Delta p$ 这一乘积满足不确定关系式(27)，所以在这 36% 的事件中会存在着满足

$$|x'-\langle x\rangle|\cdot|p'-\langle p\rangle|<\hbar/2 \tag{48}$$

的一些事件，就是一件很自然的事了。于是，如果将不确定关系里的不确定度指认为单次测量结果对平均值的偏差，就总会出现(48)式表示的"违反"不确定关系的事件。因此，这种解释也是行不通的。

会有人提出批评说，以上基于普通统计的论证，未必适用于量子理论，特别是象坐标和动量那样的一对非对易量的情况。可是，我们觉得，尽管以上的讨论在具体内容上也许需要修改，但单次测量的两种偏差原则上会同时小于相应的两种标准差这一种

可能性，看来是无法避免的。

严格地讲，在量子理论里，一次测量事件中“同时”测得坐标值为 x' 且动量值为 p' 的几率称为“联合几率”(joint probability)。长期以来，关于是否有可能定义这种几率，怎么样定义这种几率，以及联合几率同单独测量坐标或动量的几率有什么关系等等问题，存在着各种不同的意见，至今没有取得一致的认识[23]。并且，我们以上对同时测量的讨论中，默认了同时测得 x' 和 p' 的联合几率，等于单独测量坐标得 x' 和单独测量动量得 p' 的两种几率的乘积，这仍然不失为关于联合几率的一种可能的最简单的定义[19]。

总之，从今天的量子力学理论体系出发，不足以唯一确定联合几率的形式。所以，即使我们不赞成那种坚决排斥同时测量问题的意见，也必须承认，只靠我们这章里讲的不确定关系，是不能恰当地处理同时测量问题的。换句话说，同时测量的理论超越了今天量子力学的理论基础，是需要进一步深入研究的问题，不必同量子力学的基本内容搅到一起。至于在实际工作里，是不是已经进行过对譬如说坐标和动量的精密测量，以致于有希望通过实验的检验，选定一种合理的同时测量理论了，我们将在下一节通过对一个具体例子的分析，继续讨论这个问题。

5.5 对 γ 射线显微镜的再考查

如上所述，不确定关系的非统计解释，在很大程度上来源于 Heisenberg 对 γ 射线显微镜这一思想实验的论述。后来，一些作者指出，Heisenberg 原先对这类思想实验的分析，存在着这样那样的漏洞。例如，Wigner 就针对这一问题说过：“实际上，Heisenberg的论证不是完全严密的——这种论证基于对通过 γ 射线显微镜进行的测量所做的分析。但是这一分析在一切细节上都是不完

善的。”[24]

首先要指出，Heisenberg 以显微镜的分辨本领作为整个论证的出发点，这是不适当的。大家知道，按照光学的规定：“在成象系统中，分辨本领是衡量分开相邻两个物点的象的能力。”[25] 然而，直至今天，根据高能碰撞的实验结果，我们仍然可以将电子看作一个小于 10^{-18} 米的点状物，而不需要考虑它的内部结构。电子既然是点状物而不具有可以觉察得到的空间延展，对电子的观测自然用不上分辨本领的概念。

Heisenberg 当初所用的（17）式，实质上相当经典光学里根据衍射理论估算出的“Rayleigh 判据”。由于衍射效应，通过具有一定入射孔径的成象系统之后，一个物点所形成的象是一组同心环状的衍射图样，其中最亮的中央极大称为“Airy斑”。(17) 式大约相当于，与两个相邻物点对应的 Airy 斑，接近到每一个的最亮点（中心）与另一个的边缘（第一极小）互相重合的情形。在这种情况下，一般用肉眼可以看出这是两个分开的点的象。

不难料到，由于现代实验技术和数学工具的发展，特别是电子计算机的应用，上一世纪基于肉眼观测而定下来的分辨能力公式(17)，早已经不再是什么绝对的极限。[26]况且，对于点状物说来，根本用不上分辨率的概念。要确定点状物的位置，只需要测量 Airy 斑中心的坐标。使用足够好的仪器，这一中心坐标的测量精度，总可以远小于整个 Airy 斑的半径。这样一来，对单个物点坐标测量的不确定度，就必定远小于（17）式的限制。

由此可见，即使在经典光学的范围内，Heisenberg 也完全误用了分辨本领的概念。

其次，我们知道，经典光学所涉及的是大量单个光子过程的总的效应。譬如说，任何衍射图样，都是由射击在不同空间部位的许多光子所激发出来的。无论对量子力学里的态函数或者不确定

关系持有什么样的看法，总得承认，象 Heisenberg 那样对于单个微观过程运用基于衍射理论而作出的论证，一开始就是缺乏根据的。

我们知道，单个光子落在荧光屏、照相乳胶或者视网膜上，只会激发出尺寸很小的一个亮点。亮点的大小决定于各种不同的感光机制和材料性能。所以，单光子观察的坐标精度，是由这些亮点大小，而不是由衍射理论里从 Airy 斑尺寸得出的分辨本领决定的。Heisenberg 关于 γ 射线显微镜论证的要害正是，对于单光子过程运用了经典波动学的论据。在量子力学创立之初，物理学家们在运用所谓波粒二象性的论证时，常常发生这样的失误。Heisenberg 在这里，硬把经典的微粒性和经典的波动性糅和在一起，结果免不了要出毛病。Bunge 就曾经评论过，Heisenberg 关于 γ 射线显微镜的论证“只使用了属于光学的命题，没有用属于量子力学的命题。”[27] Popper 也讲过，Heisenberg 和 Bohr 关于不确定关系讨论的是“从经典物理学，特别是从波动光学出发的论证，用以证明经典物理学不允许我们比 Heisenberg 公式所容许的更精确地测定粒子的位置和动量。……换言之，不是用量子力学来证明我们必须接受这些公式，也不是通过量子力学推导出这些公式来为它们辩护，而是当做经典物理学的结果来进行辩护。”[18]

那么，按照建筑在量子力学基本假设之上的不确定关系的统计解释，怎样对 γ 射线显微镜这一理想实验作出恰当的说明呢？

设想我们对于处在相同的指定位置的电子，先后进行许多次的测量。每次经过电子散射的光子，在象平面上激发出一个小亮点。观察到的各个亮点，一般都落在各不相同的位置上，而多次观察的所有亮点的总的效果，在象平面上形成了一幅衍射图样。这就是理想的 γ 射线显微镜的观察过程。按照统计解释，不确定关系式(27)里的 Δx，就是指多次测量中电子坐标的统计偏差，它描

写了多次测量值的散布或涨落的大小。

不久前，Home 和 Sengupta 按照上述统计解释，对 γ 射线显微镜思想实验，做了均方根值的估算[28]。他们假设被电子散射的许多光子均匀地落在象平面的 Airy 斑上，算出光子分布的标准差等于 Airy 斑半径的一半。再运用衍射公式，便得到与(17)式相近的结果。不过，这时候的 Δx 是观察到的物点的标准偏差，在这里根本没有用到分辨本领的概念。在对反冲电子的动量分布也做了一定的简化处理之后，就可以算出相对应的动量标准偏差 Δp_x，从而导出不确定关系式(27)。他们最后得到的结论是："只有通过使用统计解释的仔细重新审理，才可以把 Heisenberg 的思想实验当成是不确定关系的有意义的说明。"

最后一个，也是最根本的一个问题是，我们真的可以运用 γ 射线显微镜去测量电子的位置吗？

在经典光学里，显微镜无疑是用来观察物体的空间位置和结构的。应当强调，在一般情况下，观察的是处在一定照明条件下，位置固定或相对稳定的宏观小而微观大的物体。这种由大量原子或分子组成的小颗粒，在经受照明光的照射时，绝不会显著地改变其固定的或相对稳定的位置。因此，我们才有可能在一段长时间内多次地或连续地观测或跟踪被观察颗粒的位置。

然而，在 γ 射线显微镜里，被观察的是一个电子。经过与照明的 γ 光子的 Compton 散射之后，原来的电子就不知去向。那么，在单次测量里，我们有可能象非统计解释说的那样，同时测量到电子的位置和动量吗？还有，即使按照统计解释，我们有可能一次又一次地提供精确地处在相同位置的电子样品来进行测量吗？这些问题都不是袭用经典物理学的概念就可以解决的。

Lamb 站在实验物理学家的立场，对这一点给出过答案。他说过："Heisenberg 用来定性地讨论他的不确定关系的著名的'γ

射线显微镜'，并没有提供对位置的测量，它不过是一种散射实验。"[22]以下我们试图从实际观测的角度来作几点分析。

对于这个问题，首先应当指出，在关于 Compton 散射的简单讨论里，处理的是光子同静止的自由电子的散射。如若对电子进行多次的位置测量，还要求每次供给的自由电子都静止在相同的空间位置上，起码是静止在一定的空间范围之内。我们知道，这一点实际上是做不到的。今天，能够得到最精确的位置测量的现代技术，大概要算场离子显微镜或者隧道扫描电子显微镜[29]，那也只是对固定在晶体点阵上的原子构象，而不是对自由粒子位置的观察。

原来，由于无法制备静止的自由电子靶，Compton 散射的散射体是含有大量相同原子的某种元素的靶物质，与光子发生作用的就是这些原子的外层电子。由于这些处在不同束缚定态的电子分别具有不同的动量分布，所以在使用不同元素做靶物质时，所观察到的 Compton 散射谱线的轮廓皆各有不同。近二十年来，已经成功地利用 x 射线的 Compton 散射轮廓方法去探测散射体的动量分布，以了解在不同的原子、分子或固体中电子运动状态的性质[30]。

回顾在本世纪中叶，运用高能电子被原子核的散射，了解到各种原子核甚至单个核子的电荷分布。在这里直接测量的只是实际散射截面同点状散射体的散射截面相比的因子——形状因子随动量传递的变化行为。原子核的电荷密度函数，乃是通过 Fourier 分析将形状因子变换到坐标空间的结果。当探测器接收到以某种能量和角度射出的一个散射电子时，不可能知道这个电子是被靶体中哪一个核散射的。形状因子只是对含有大量相同原子核的一小块靶物质所散射的电子动量分布的量度。它反映了靶元素的核的电荷密度，却不应当被认为反映了其中某一个核的空间位置或

结构。从这一例子看得很清楚，从大量积累的散射实验数据中了解到的是组成靶体的那一种微观粒子的共同性质，而不能确立其中每一个散射事件涉及的是哪一个个别的粒子。事实上，所有微观散射过程，包括 Rutherfold散射等等，都是如此。

与上述例子中散射体是一个个位置相对固定的原子核不同，在 Compton 散射里散射体是某种原子的外层电子。处在一定运动状态中的电子具有确定的动量分布，从而使得实际散射光子的频移，在静止电子项之外再加上与电子初动量有关的一项。因此，通过某种元素原子的 Compton 散射谱线的轮廓，亦即散射光子的动量分布，就可以了解处在一定运动状态上的电子的动量分布函数。再通过 Fourier 变换，就可以从动量分布函数推算出电子的坐标空间态函数和电荷分布。这就是今天 Compton 散射技术已经可以达到的水平[30]。

由此可见，在迄今为止的散射实验里，既没有提供过位置固定的静止的自由粒子靶，也没有在每个事件里对参加作用的微观粒子的绝对位置做过测量。在微观物理学的散射实验里，测量的只是散射粒子动量的大小和方向，并没有同时对粒子发生作用之处的坐标进行过测量。按照这种理解，我们同意 Lamb 的论断[22]，认为 Heisenberg 关于 γ 射线显微镜可以对电子的坐标和动量进行同时测量的说法，是没有什么根据的。

另外，我们知道，为了得到较高的分辨率和其他原因，显微镜的物镜总是比较靠近，甚至非常靠近被观察物的。例如，图 12 所表示的就是这样，这种布置是适于对物体的空间位置和结构进行测量的。

然而，在散射实验里则是另一种情况。为了免除入射粒子束流的直接照射，有效的探测范围必定远离散射中心并且避开向前方位。在这种情况下，不可能得到大的入射孔径角 ε。在散射实

验中环绕散射中心所布置的一组一组的探测器，与其说象显微镜，不如说更象是一架架望远镜（事实上高能物理学家常常就是这样称呼的）。望远镜的小的入射孔径角 ε，有利于对散射粒子的动量作出精确的测量。

还有，为了一视同仁地处理从靶体散射开来的粒子，只对其动量的大小和方向加以甄别，而不区分每一粒子是从哪一部分靶物质射出来的，一般探测器单元的尺寸总要比靶体的尺寸大得多，同时两者之间要隔开足够大的距离。这方面的原因也使得散射实验中的探测器更象是只测定动量的望远镜，而不是测定位置的显微镜。

此外还存在着一类将靶物质和探测器混为一体的装置，例如云室、泡室和乳胶等。但即使在确实需要在显微镜下进行测量操作的核乳胶里，也只是对各反应产物的能量和动量进行测定，仍然不可能在原子大小的尺度内确定发生反应时粒子的准确位置。

总之，在直到今天的 Compton 散射等实验里，从来没有对微观粒子的绝对坐标进行过测量。由这类实验所得到的微观上的电荷密度等相对分布，则是从直接的动量测量数据换算出来的。在这里，并没有对粒子的坐标和动量进行过同时测量。Jammer 曾对不确定关系指同时测量坐标和动量的限制这种说法评论道："现在看来，没有什么办法可以用来同时测量单个电子的位置和动量，以至于其精确度足以估价有关的误差。""从来没有以对我们的问题有一丁点意义的足够精度完成过这种对单个粒子的测量。"[15]

我们的结论是，Heisenberg 关于 γ 射线显微镜的论证，主要不是建立在量子力学概念的基础上，而是把 de Broglie 波误认为经典波动，并且把经典光学的规律强加到单个微观过程上去，因而到处出现漏洞，实在不足为法。

5.6 关于时间-能量不确定关系

以上对坐标和动量的不确定关系的讨论，原则上也适用于一般的不对易的两个力学变量之间的不确定关系。可是，对于量子力学里的相位和角度等变量，由于它们的厄密性会发生问题，所以要经过特别的数学处理，才能写出适当形式的不确定关系。有兴趣的读者请参阅有关的文献[31]。

在量子力学里，真正别具一格的是时间和能量的不确定关系。在这问题上，除了以上几节所讲到的种种争议之外，还存在着更加严重的分歧。甚至于在国内外许多量子力学教科书里，对于时间-能量不确定关系仍然有各种形式不同的表述和意义矛盾的解释。我们简单介绍如下：

Heisenberg 在文献[2]里分析了γ射线显微镜之后，接着讨论了电子的路径同速度的概念。然后，在讨论能量概念时，Heisenberg 指出："谈论光波在一个确定瞬间的频率同一个原子在一个确定时刻的能量，都是没有什么意义的。相应地，在 Stern-Gerlach 实验里，当我们缩短原子处在偏转场影响下的时间，能量测量的精确度就下降了。"Heisenberg 将 Stern-Gerlach 实验里所涉及的两个定态的能量差E_1，看做是能量测量的精密度，并且设定E_1/d是原子所受偏转力的上限，其中的d是由狭缝间隔来量度的束流宽度。于是，Heisenberg 论证说："原子束的角偏向是E_1t_1/dp，其中t_1表示原子处在偏转场影响下的时间，p表示原子在束流方向上的动量。此偏转必定至少在数量级上与由于狭缝衍射而导致的束流自然宽度相同，……如果用λ表示 de Broglie 波长，则偏转角大约是λ/d，因此有$\lambda d\approx E_1t_1/dp$，或者，因为$\lambda=\hbar/p$，结果有$E_1t_1\approx\hbar$。……此方程表示，只有付出相应的时间不确定度的代价，才能得到怎么样的能量精密测量。"[2]

从这段话看出，Heisenberg 对 Stern-Gerlach 实验的分析，在关键之处也使用了经典光学的论据，并且其中的能量和时间的测量是什么意思等等问题，恐怕里面的漏洞不会比 γ 射线显微镜少。况且，Heisenberg 在后来再次援引这个例子时[7]，又只谈相位的不确定而不谈时间和能量的不确定关系了。既然如此，我们就不必对这一问题的细节多费笔墨了。

尽管这样，Heisenberg 关于在一段短暂的时间内不能谈论绝对精确的能量值，或者说只有在无限的时间内保持稳定的状态上才有确定能量的论断，仍是具有普遍意义的。在第 5.1 节里我们已经看到，Bohr 在文献(6)里就是对有限等幅正弦波列，运用经典波动里熟知的关系式(9)，同时导出在(10)式里所包含的坐标-动量和时间-能量这两条“不确定关系”的。

事实上，(11)式就是对有限波列

$$\psi(x,t)=\begin{cases}ce^{i(p_0x-E_0t)/\hbar}, & |x-ut|<a\\ 0, & |x-ut|>a\end{cases} \tag{49}$$

取固定时刻 $t_0=0$ 的波函数 $\psi(x,0)$。现在，结果我们对(49)式取固定的位置 $x_0=0$，就可以对仅存在于时间间隔 $|t|<a/u$（u 是波的相速度）内的含时波函数

$$\psi(0,t)=\begin{cases}ce^{-iE_0t/\hbar}, & |t|<a/u\\ 0, & |t|>a/u\end{cases} \tag{50}$$

进行相应于普通频谱分析的、在时间维度上的 Fourier 变换，得出与图 11 所表示的形状相同的能谱分布。采取主峰近似，重复对(16)式的推导方法，便可以得到(10)式所包含的时间-能量“不确定关系”：

$$\Delta t\ \Delta E\approx\hbar. \tag{51}$$

必须指出，按照以上的讨论，(51)式里的 ΔE 是有限波列或者一般的波包的能量（主峰）分布宽度，而 Δt 则是波包通过固定点 x_0

的时间，或者叫做“到达时间”的持续期间。[32]对于有限波列，直接有$\Delta t=2a/u$。可是，在一般的情况下，对于任意态函数ψ如何定义Δt，以及它同时间测量的关系等等，都还缺乏明确而严格的规定。

此外，从本章开头关于坐标-动量不确定关系的方法论讨论里已经明白，即使 Heisenberg 和 Bohr 关于 Stern-Gerlach 实验和有限等幅波列这两个例子的个别论证完全没有毛病，也不足以由此建立起一条普遍生效的定律或原理。事实上，我们在流行的量子力学教科书里还不时看到有这样或那样形式的“时间-能量不确定关系”参加到这个行列里来，其中最有影响的是从跃迁问题直接引伸或者派生出来的关系。

设在$t<0$时，系统处在未受微扰的哈密顿算符$H^{(0)}$的本征值为$E_a^{(0)}$的定态能级。在时刻$t=0$，对系统突然加上不显含时间的恒常微扰V。运用含时间的微扰论可以算出，在时刻$t=T$，系统跃迁到$H^{(0)}$的本征值为$E_b^{(0)}$的能级的几率是[33]：

$$W_{a\to b}=\frac{|V_{ba}|^2}{\hbar^2}\frac{\sin^2\xi}{\xi^2}T^2, \tag{52}$$

$$\xi=(E_b^{(0)}-E_a^{(0)})T/2\hbar,$$

式中V_{ba}是微扰哈密顿算符V在初末态之间的矩阵元。我们在(52)式里又一次遇到图 11 所表示的$\sin^2\xi/\xi^2$形式的几率分布。由$\Delta\xi\approx\pi$的主峰宽度，从(52)式马上可以推出发生跃迁的时刻T同末态的$E_b^{(0)}$围绕初态$E_a^{(0)}$值的分布宽度$\Delta E^{(0)}$之间的关系式：

$$T\Delta E^{(0)}\approx h. \tag{53}$$

(53)式也常被称为时间-能量不确定关系。然而，这里面存在两个问题：第一，(53)式里的$\Delta E^{(0)}$即$E_b^{(0)}-E_a^{(0)}$的分布宽度，指的是未受微扰的$H^{(0)}$的能级分布。但在$t>0$时，系统的哈密顿算符不是$H^{(0)}$而是$H^{(0)}+V$，所以$\Delta E^{(0)}$并不代表系统的能量分布。第

二，(53) 式里的 T 是指从突然加上微扰的 $t=0$ 时刻算起的时间，换一个时间原点就破坏了(53) 式表示的关系。所以，它主要反映的是系统对外界扰动的响应，而不是系统本身演化的特征。因此，Messiah 已经明确指出，把(53)式称做时间-能量不确定关系是不适当的。[33]

Landau 还在上述讨论的基础上加以变通，运用到具有微扰相互作用的两个子系统。设初始时刻它们的能量分别是 E_0和ε_0，经过时间Δt 之后是 E 和ε。Landau 把(53)式里的$\Delta E^{(0)}$当做系统总能量的变化，据此写出

$$|E+\varepsilon-E_0-\varepsilon_0|\Delta t\approx h \tag{54}$$

并且下结论说："由此可见，时间间隔Δt 愈短，观测到的能量变化就愈大。……它表明了，在量子力学里，通过时间间隔为Δt 的两次测量，只能以 $h/\Delta t$ 数量级的精确度验证能量守恒定律。"[34]

Landau 还进一步把刚才的两个子系统分别认作被测系统和测量仪器。那么，在测量仪器本身引起的误差可以忽略（取$\Delta\varepsilon=\Delta\varepsilon_0=0$)的情况下，对被测系统有

$$\Delta(E-E_0)\approx h/\Delta t. \tag{55}$$

Landau 认为 (55) 式表示相隔Δt 的两次对系统测量的能量误差关系。

我们知道，(53) 式本来是受到微扰的系统对未受微扰的能级分布宽度随扰动时间的变化关系。但 Landau 却把它看成由具有相互作用的两个子系统组成的系统总能量精确值的先后变化差值的关系，实在是牛头不对马嘴。

在跃迁问题里，当 $t=0$ 时系统的哈密顿算符经历了一次突然的变化，从 $H^{(0)}$变为 $H^{(0)}+V$，从整体看来不再满足能量守恒的条件。(53) 式就描写了刚刚经受扰动的那一段时间里的不稳定情况。这种情况可以同经典物理学里的强迫振动问题相比拟。大

家知道，在加上周期性策动力之后，经过足够长的时间达到稳定状态时，系统按照外力频率而不是按照本身的固有频率振动，这种单频振动就相当于(53)式取 $T\to\infty$ 的 δ 函数($E_a^{(0)}=E_b^{(0)}$)极限。在达到稳定之前的暂态过程中，系统的振动远非单频的而呈现出复杂的波形，相当于(53)式对有限的 T 表现为一定宽度的 $E^{(0)}$ 分布。而在最初刚加上微扰时，这种突然变动的情况就好象一个理想的阶跃脉冲信号，它具有无限宽的频谱，这就是(53)式里取 $T\to 0$，跃迁几率呈现出均匀 $E^{(0)}$ 分布的情形。总而言之，在强迫振动的暂态过程里系统频谱宽度随时间的变化，同先后两个时刻测量到的能量精确值之差，完全是两件不同的事。因此，Landau 的(54)或者(55)式，也决非(53)式的推论。

本来，按照态函数的几率诠释，不论是 (51) 式里的 ΔE 还是(53)式里的 $\Delta E^{(0)}$，都指的是多次测量的统计散布或宽度，不是指单次测量的精确度，也不是指随便两次测量结果的差值。可是，由于上面提到的Heisenberg, Bohr 和 Landau 等人工作的影响，如同位置-动量的不确定关系一样，对于时间-能量的不确定关系，也长期流行着缺乏根据的非统计解释。他们认为：测量的时间愈短，则对系统能量的扰动愈大，使测量到的能量不确定度愈大；或者说，在时间间隔 Δt 里测量能量，必定使被测系统产生由(55)式规时其下限的能量传递不确定度，因此不可能在 Δt 的时间间隔内重复进行实验偏差小于(55)式规定数值的能量测量等等。这些论断都是指一两次测量的结果而言的，自然超出了量子力学基本假设所能包容的范围，只能看做是其正确性有待检验的独立假设。

1961 年，Bohm 和 Aharonov最先对时间-能量不确定关系的传统解释提出了专门的批评[35]，并且针对 Landau 的说法，举出了一个反例。在他们所设计的系统里，可以在任意短的时间内以任意高的精确度重复能量的测量。因此，时间-能量不确定关系不

应当被认为是对能量测量精度的限制。从此时起，开始了对这一问题的热烈的讨论[36]。例如，Allcock 也明确地指出，Landau类型的时间-能量不确定关系不是普遍成立的，在有些情况下则是"完全错误"的[32]。

除了上面讨论的与普通的不确定关系共同的解释上的问题之外，时间-能量不确定关系还存在着独特的困难。在第 2. 1节里我们早已指出，在量子力学里，时间 t 不是描述不同系统特性的力学变量，而是对每一系统都适用的，并且具有相同数值的描写一切过程演变的普遍参数。相应地，在量子力学里时间 t 是一个普通的 c 数，而不是算符。因此，无法使用对一般力学变量适用的(25)式，去定义时间的统计散布或标准差 Δt。实际上，以上所举的 Stern-Gerlach 实验，有限波列和跃迁问题里的 Δt，在每个例子里都有特定的具体含义，而缺乏一种统一的定义和解释。

还有一种常见的说法是，根据狭义相对论，可以构造出伴随着三维坐标-动量对易关系的第四维时间-能量对易关系，其中与动量算符 $\boldsymbol{p}=-i\hbar\nabla$ 相对应的自然是能量算符 $E=i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}$。由此就可以顺理成章地建立普遍适用的时间-能量不确定关系。然而，这种推理是不能成立的。在量子力学里能量算符就是系统的哈密顿算符。(2. 20)式的 Schrödinger 方程是系统态函数 ψ 所满足的微分方程，而不是作为哈密顿算符 H 定义的恒等式。因此，$i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}$ 只能看做是代表对时间参数的微商运算的数学符号，而不是同某一力学变量相对应的量子力学算符。再说，相对论里对空间和时间描述的平等性，在量子理论里并没有得到充分的证明，不应当被看成是一条先验的原则。因此，有些作者对于究竟能否建立时间和能量两个算符的不确定关系，抱着一种完全悲观的态度[37]。或许，我们从这一角度已经窥见的是，在自然界里时间和空间扮演的角色毕竟

不是那么对称的吧。

早在 1945 年，Mandelstam 和Tamm 就提出了一种别出心裁的有普遍意义的方式，来表述关于能量的不确定关系[38]。考虑不显含时间 t 的力学变量 A，按照(37)式，它同哈密顿算符H有不确定关系

$$\Delta A \quad \Delta E \geqslant \frac{1}{2}|\langle AH-HA\rangle|, \tag{56}$$

式中的ΔA和ΔE都是按(25)型的公式定义的统计涨落。又从算符 A 满足的运动方程

$$i\hbar\frac{d}{dt}\langle A\rangle = \langle AH-HF\rangle, \tag{57}$$

便可推出下述关系：

$$\tau_A \ \Delta E \geqslant \frac{\hbar}{2}. \tag{58}$$

其中的 τ_A 定义为

$$\tau_A = \Delta A \Big/ \left|\frac{d}{dt}\langle A\rangle\right|. \tag{59}$$

由(59) 式可见，τ_A 具有时间的量纲。它表示平均值$\langle A\rangle$变化了一个标准差，即发生明显可觉察改变所经历的时间。τ_A 就这样通过对 A 的统计分布的变化，描写了处在 ψ 状态的系统演化的快慢，因而称为特征时间。那么，(58)式就是这种特征时间同能量的不确定关系。

这样一来，(58)式左方的两个因子都有明确的定义，它们可由有关力学变量的平均值和涨落性质求出，不需要额外的假设，逻辑上简单而严密。因而这种形式的不确定关系逐渐被愈来愈多的教科书所采用[39]。

在这里，力学变量 A 的选择多少是任意的，但由不同的 A 所求得的特征时间 t_A 往往差别不大。例如，在定态中 $\Delta E=0$，但同

时对任何 A 都有 $\frac{d}{dt}\langle A\rangle=0$，所以 τ_A 必为无穷大，并不破坏 (58) 式。可见，特征时间主要表征了处在一定状态的系统的演化性质，而不局限于具体力学变量的特性。（更严格的做法，可以取特征时间为对应于各个不同力学变量 A 的 τ_A 当中最小的一个，见文献[89]。）

又如，设Δx是一个波包的空间分布宽度。那么，按照(59)式定义的特征时间可取为$\tau_x=\Delta x/\left|\frac{dx}{dt}\right|=\Delta x/v$，($v$ 是波包的群速度) 正是波包通过空间固定点的时间。那么，在这种情况下的 (58) 式，就同(51)式具有相同的涵义。由此可见，用特征时间定义的关于能量的具有普遍意义的不确定关系式(58)，同在某些特殊情况下已经得到的关系式是相通的。而且，(58)式里的特征时间描写了系统的内在演化性质，它同(51)式里波包的通过时间一样，与测量能量所需要的时间一般是没有直接的联系的。

另外一个例子是在第 4.2 节讨论过的二能级系统问题。从(4.33)式的态函数 $\psi(t)$看出，系统周期性地在 φ_1 和 φ_2 之间来回振荡，从完全处在 φ_1 态变到完全处在 φ_2 态的时间是 $\pi/2\Omega$，我们就拿它作为表示系统经历显著变化的特征时间 τ。另一方面，在这问题中涉及的能量偏差可用$\Delta E\approx|E_1-E_2|$描写。于是，由(4.33)式有

$$\tau\Delta E\approx\frac{\pi}{2\Omega}(E_1-E_2)\approx\frac{h}{2},\tag{60}$$

即与(58)式相当的关系。这里的 τ 是系统本身振荡周期的一个适当分数，也同如何进行测量没有直接的关系。

最后我们谈一下似稳态问题。

为描写会进行自发衰变的似稳状态，将定态波函数(2.22)式里的能量参数 E 添加一个小的虚部，写成 $E_a^{(0)}-i\Gamma/2$，则相应的几

率密度从常数变成指数衰减的形式:

$$|\psi_a(t)|^2=|\psi_a(0)|^2e^{-\Gamma t/\hbar}. \tag{61}$$

可见能量的虚部描写系统衰变的快慢程度。定义

$$\tau=\hbar/\Gamma, \tag{62}$$

则从(61)式看出,τ 就是似稳态的寿命。

把绝对稳定的定态看做寿命 $\tau\to\infty$ 即 $\Gamma=0$ 的情况,对(52)式取 $T\to\infty$ 的极限,求出的跃迁几率是(以下省去零阶能量的上标):

$$W_{a\to b}\approx\frac{2\pi}{\hbar}|V_{ba}|^2\delta(E_b-E_a)T. \tag{63}$$

(63)式里的 δ 函数表示,定态只能够衰变到能量与它精确相等的末态。

如果对添加了虚部的 E_a,重新计算(52)式,然后作 $T\gg\tau$ 的近似,求出一般似稳态的自发衰变几率的形式是[40]

$$W_{a\to b}\approx|V_{ba}|^2\frac{1}{(E_b-E_a)^2+\Gamma^2/4}. \tag{64}$$

事实上,(64)式就是熟知的描写似稳态能量分布的 Breit-Wigner 共振公式,如图 15 所示。对比(63)和(64)两式,我们看到主要差别在于从定态的无限尖锐的 δ 函数末态能量分布,扩展成一种具有一定宽度的单峰形式的分布。当 $E_b=E_a$ 时,(63)式取极大的峰值;而当 $|E_b-E_a|=\Gamma/2$ 时,(63)式取峰值的一半。由此可知,Γ 就是末态能量分布的半峰值全宽度,即等于通常规定的能量不确定度 ΔE。

对(62)式取 $\Gamma=\Delta E$,结果得到

$$\tau\cdot\Delta E=\hbar. \tag{65}$$

这就是似稳态寿命与其衰变末态能量宽度的关系,它意味着寿命为 τ 的似稳态的能量不完全确定,而呈现出一个自然宽度 $\Delta E=\hbar/\tau$。

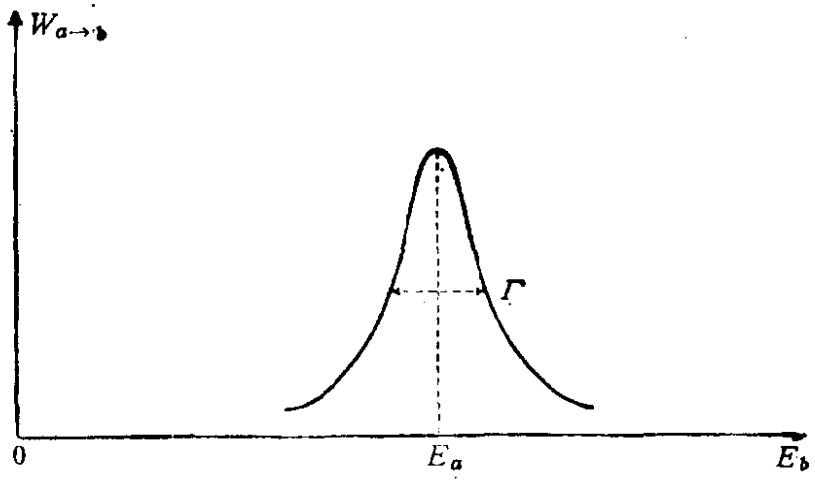


图 15　似稳态自发衰变几率 $Wa\to b$ 对末态能量的 Breit-Wigner 分布。

(65)式也常被称为时间-能量不确定关系，但它的意义同Heisenberg 或 Landau 的解释是不同的。(65)式的 τ 表征着系统本身演化进程的疾缓，而不是能量测量的时间；ΔE 也指象图 14 所表示的多次能量测量值的统计散布，而不是一两次测量中出现的误差。在这种意义上，我们很自然希望(65)式会是特征时间和能量的不确定关系式(58)的一个特例。事实上，把描写似稳态变化快慢的寿命参数 τ 或者它的适当分数，当做由(59)式定义的特征时间，(65)式同(58)式这两个关系就是一回事了。如果不满足这种定性的论证，也可以进一步选择适当的算符 A，定量地从(58)式推导出(65)式，详细的讨论请参看有关文献[41]。

尽管如此，特征时间的定义(59)式，依赖于算符 A 的选择，因而有一定的任意性。这样得出的关系式(58)，它的意义也不如普通的不确定关系式(37)来得简单明确。因此，关于时间-能量不确定关系的形式和解释的争论仍将继续下去。至于是否能在现今量子力学的理论框架之内找出具有更加普遍而统一的形式的时间-能量不确定关系，还是要另辟蹊径地创造出作为力学变量的时间算符才能解决问题[42]，现在还很难下结论。

参考文献

* 本章部分内容根据：关洪，范瑞方，测不准关系的意义，大学物理，1983年9—10期文章改写而成。

[1] 见[1.23]，德文初版于1933年。

[2] W. Heisenberg, *Z. Physik* **43** (1927), 172; 英译文见[3.25]。

[3] 见[3.4]，73，87页。

[4] 见[3.24] § 7.1.

[5] S. Rozental 编，尼尔斯·玻尔，上海翻译出版公司(1985)，108—109页。

[6] 见[3.2]，39—66页。

[7] 见[1.27]。

[8] H. Weyl, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics* Dover (1950), pp. 77, 393。德文初版于1928年。

[9] H. P. Robertson, *Phys. Rev.* **34** (1929) 163.

[10] E. Schrödinger, *Berliner Berichte*, (1930), 296; 转引自[4]。

[11] G. Beck, G. M. Nussenzveig, *Nuovo Cim.* **9** (1958) 1068.

[12] J. B. M. Uffink, J. Hilgevoord, *Found. Phys.* **15** (1985) 925; *Eu. J. Phys.* **6** (1985) 165.

[13] 见[3.2]，50页。

[14] 见[1.16]，p. 223.

[15] 见[1.10]pp.，80—81.

[16] H. Y. Ticho, in *Selected Topics on Elementary Particle Physics*, M. Conversi ed., Academic (1963), p. 158.

[17] 见[1.19]。

[18] 见[1.18]，pp. 53—60.

[19] H. Margenau, *Ann. Phys.* **23** (1963), 469.

[20] H. R. Brown, M. L. G. Redhead, *Found. Phys.* **11** (1981), 1.

[21] M. Bunge, *Am. J. Phys.* **24** (1956), 272.

[22] W. E. Lamb, *Phys. Today* **4** (1969), No. 4.

[23] 参看[4]; W. M. de Muynck *et al.*, *Found. Phys.* **9** (1979) 71; M. Mugur-Schächter, *Found. Phys.* **13** (1983), 419; P. Busch, *Int. J. Theor. Phys.* **24** (1985), 63.

[24] E. P. Wigner, [2.53].
[25] M. Born, E. Wolf, 光学原理, 上册, 杨葭荪等译, 科学出版社(1978), 541 页。
[26] C. Roychoudhuri, *Found. Phys.* **8** (1978), 345.
[27] 转引自[26].
[28] D. Home, S. Sengupta, *Am. J. Phys.* **51** (1983), 567.
[29] 参看: 戴道宣, 物理, **14** (1985), 235.
[30] 参看: 陈成钧, 物理, **9** (1980), 350; B. G. Williams, *Am. J. Phys.* **52** (1984), 425; 杨福家, 原子物理学, 上海科学技术出版社(1985), 208页。
[31] P. Carruthers, M. M. Nieto, *Rev. Mod. Phys.* **40** (1968), 411.
[32] G. R. Allcock, *Ann. Physics* **53** (1969), 253.
[33] 见[2.43], Vol. II, pp. 732—733.
[34] 见[1.22], § 44; 最早的工作是: L. Landau, R. Peierls, *Z. Physik* **69** (1931), 56.
[35] Y. Aharonov, D. Bohm, *Phys. Rev*, **122** (1961), 1649.
[36] 参看[15], § 5.4, 和[32].
[37] 例如: M. Bunge, *Can. J. Phys.* **48** (1970), 410.
[38] Л. Мандельстам, И. Тамм, ИАН **9** (1945), 122.
[39] 见[33]. Vol. I, pp. 319—320.
[40] 详细推导参看[1.2], Vol. II, pp. 1343—1355.
[41] D. Shalitin, *Am. J. Phys.* **52** (1984), 1111.
[42] I. Prigogine, 从存在到演化, 曾庆宏等译, 上海科技出版社(1986), 第九、十章。

第六章　态的概念

6.1 态的制备

在第2.1节里早就指出，量子力学里的态函数或态矢，是很难预先加以精确定义的，我们只好把它当作未经严格规定的原始概念来使用，暂时相信大家对此都会有一种自然的直觉理解。

在前面几章里，我们对在量子力学理论体系里态作为几率幅这一基本量的身份，以及它所满足的叠加原理的意义等问题，已经做了比较详细的讨论。特别是，我们反复强调过，根据量子力学的基本假设，它是一种统计性的理论，只能预言对处在 ψ 的系统进行多次测量所得结果的平均值和统计涨落。因此，按照建立在这一基础上的量子力学的统计解释，态函数 ψ 描写的不是个别微观系统，而是由处在指定的物理条件之下的许多个同样的系统所组成的系综的性质。对于这样的系综的各个成员逐个进行测量，就实现了我们所需要的多次测量。

现在，我们再回过头来讨论，怎么样才算做一个态？亦即是说，怎么样才能提供一个以 ψ 函数描写的量子系综的问题。从以上的说明可以看出，在规定了物理系统的确定组分（例如单个或多个指定数目的电子或原子所组成的系统）之后，这一问题归结为所施加给系统使它受到限制的指定的“物理条件”。这种给一个个相同的系统提供同样一些限制条件，从而给出以 ψ 描写的量子系综的一整套手续，就称为态 ψ 的制备（preperation）过程。

在量子力学里，正是把系统所受制备的方式，或者说在制备过程中对系统所施加的限制条件，作为此后一段时间里系统所处的态的定义。例如，在 Dirac 的书里写道："系统的态可以定义为受到理论上可能的那么多条件或数据所限制的不受干扰的运动。……实际上，…通过对系统的适当制备便能加上这些限制，譬如让它穿过象狭缝或偏振仪那样的各种分选装置，而且在制备之后不让系统再受到扰动。"[1]

按照这种定义，系统的态是由它所经受过的一套制备手续来规定的。通过了确定的制备过程，系统就处于某种确定的态。例如，在现代的散射实验里，从源发出的某种带电粒子，经过加速器的运转，再通过均匀或者不均匀的电场和磁场以及各种小孔、狭缝和偏振（极化）装置等等，对粒子进行偏转、准直、极化等等操作，最后选出具有确定的方向和大小的动量（能量）以及某种自旋状态的粒子束。这一整套操作手续，就是入射粒子状态的制备过程。再将入射粒子束流引向靶物质，又会得到经过散射的状态。我们要观察和记录的，正是这种处在散射状态的系统。

注意到以上为了对微观系统限定物理条件所布置的小孔，狭缝、加速器、偏转磁铁甚至散射实验中的靶物质等等，都毫无例外地是各式各样的宏观装置。微观系统所受到的限制就是由这些宏观仪器所给出的宏观范围内的物理条件。于是，从这种意义上讲，要说明一个态是什么，就必须详细规定这个态的制备过程中所使用的各种宏观仪器，所选定的参数和经过的手续。而且，在关于怎么才算做这个态的说明里，完全不需要运用量子力学的理论和概念，因为其中只涉及到宏观仪器的构造和运用。这样，我们就可以把关于态的规定，看做是不属于量子力学基本假设，而是在它之外的、可以预先说明的内容。[2]

上面所讲的这种态的定义方式，可以叫做态的"操作定义"。先

通过操作定义明确怎样才算做一个态，然后再在量子力学的基本假设里规定描写态的态函数或态矢的几率幅地位，已经有相当多的文献采取了这种做法。[3]例如，在 Jauch 的书里这样给态下定义："态是构成对态的制备的、对系统的一系列物理操作的结果。如果在态的制备中有关的条件都相同的话，两个态就是相同的。"[4]

首先应当指出，量子力学里态的这种定义，与经典物理学是迥然不同的。一个经典系统的给定状态，表现为系统的运动所满足的微分方程的初始条件。例如，在单粒子情况下，给定了粒子的坐标和动量，就给定了粒子的状态。对于复杂系统，由其各组份粒子的坐标和动量所构成的相空间中的点，来代表其运动状态。当时间演进时，经典系统运动状态的改变，就表示为相空间中代表点沿着某一条轨道的运动。由于不确定关系，微观粒子不可能处在坐标和动量同时取精确值的状态，所以，上述用相空间中的代表点去描述系统状态的做法，在量子力学里显然是行不通的。

除此以外，我们早就讲过，量子力学里的力学变量不能归结为粒子的坐标和动量的函数，这也是不可能采取经典方法描写微观粒子状态的理由。上述 Dirac 那句话里所说规定系统的态的条件或数据的数目，要等于"理论上所可能的那么多"，大概就指不受经典描写限制的意思。

那么，要决定系统的态的具体描写，还得依赖于量子力学的理论。在这里具有根本意义的是，态函数 ψ 只是几率幅而不是任何物理量。所以，给定状态 ψ，并不一定要求给定粒子的坐标、动量或者其他任何一个力学变量，更不可能同时给定一对象坐标和动量那样的共轭力学量。而且，一般说来，给定了状态 ψ，也不意味着给定了一组物理量之间的确切关系。因此，量子态的描写一定不同于象气体状态方程那样的经典描写。总之，量子力学本质上是一种统计性的理论，几率幅 ψ 是这种统计描写里最要紧的概念。

ψ 并不直接表现为物理量所满足的关系。因而，应当说量子力学里对态的描写，比经典态的描写的容量要大得多，使得我们难以预先给量子态下一个抽象的严格定义，而只好满足于上面所说的经验性的操作定义。

其次，我们在第 2.5 节已经讲过，在经典统计物理学里，系综只是一种用于计算的抽象工具，对于每一个宏观系统的测量，都会显示出按统计系综计算的宏观平均值。而量子系综则与此不同，作为系综成员的每个微观系统一般表现出各自不同的行为，必须对许多个处在相同状态的相同系统逐个进行测量，所得到的多次测量结果的平均值才体现以 ψ 表示的系综的性质。所以，ψ 的制备过程不能只限于对个别系统进行单单一次或者少数几次的操作，而必须不断重复地提供许多个受指定的相同条件限制的相同的系统。

制备过程的这种重复性，可以表现为在许多个不同的空间区域，使用许多套相同的宏观仪器，分别对一个个的相同系统进行同样的制备手续；也可以表现为使用固定的一套宏观装置，在相同的条件下，一次又一次地按照相同的手续，先后制备一个又一个的相同的微观系统。事实上，这两种情况分别就是在第 5.4 节里提到过的，Margenau所讲的“空间系综”和“时间系综”。并且，因为空间系综的制备是很费事的，实际上我们经常用到的是时间系综。例如，上面举例的入射粒子系综和散射粒子系综的制备，都可以看做是源源不断地在时间上先后多次重复地提供处在相同状态的系统的情形。

注意，这里所说的不断提供的相同系统，不必是同一个系统。例如，入射电子束里的任何一个电子，都不必是在这束里过去出现过的某一个电子。实际上，我们用不着也不可能把经过散射的电子重新收集回来，再加工后放到入射束里去。微观粒子的全同性

原理更使我们放心，只要出现的是电子，就是合用的，不必去查它的历史。此外，实际上加速器的输出是脉冲式的，即间断地放出一团团的粒子。但只要这些粒子之间、即使是同一脉冲放出来的许多粒子之间没有相互干扰，我们仍然可以看做是提供了一个个单粒子系统。这样，散射实验为我们提供的入射粒子束和散射粒子流，都可以看成是一种量子系综，其中每一个成员都是单粒子系统，有关的态函数 ψ 就描写对这些系综的成员、即对每个单粒子系统进行多次测量所得到结果的性质。例如，在一次典型的电子-质子散射实验中，可以提供经过靶体中 10^6 个质子散射的 10^{10} 个电子，通过对这些沿不同角度射出的散射电子的测量，就能够了解单个电子同单个质子之间相互作用的细节。

French 形象地把这种态的制备过程譬喻为工厂里的一条生产线[5]，并且说“事实上这正是量子物理学里真实的实验工作的典型写照。”只制备一两个或者少数几个系统是不够用的，必须象生产线那样源源不断地提供合用的大量产品，才有可能实现量子系综的要求。

那么，我们怎么知道一条生产线送出的产品是合格的呢？或者说，我们怎么知道已经制备出来的许多个物理系统达到了态函数 ψ 所表示的标准呢？这当然都只能靠测量的检验。的确，按照第二章里所讲的平均值公设，对制备出来的许多个物理系统逐个测量力学变量 A，如果对测量结果统计所得的几率满足 (2.16) 或者 (2.17)式，就可以认为实现了 ψ 函数所描写的系综。可是，我们知道，微观系统一般是很“娇嫩”的，经过测量之后的各个系统，由于受到了扰动而一般不再是由 ψ 描写的系综的成员。所以，一般不能够对制备出来的每一个系统逐个进行检验之后再送去接受进一步的测量，而只能依赖过去已经经过检验的可靠的制备手段，来保证采用这套手段的生产线确实可以送出符合要求的样品来。

为了说明问题，我们举一个例子来做比方。设一家工厂有一条生产炸弹或者手榴弹的流水线。我们怎么知道每个产品都是合格的呢？当然可以把每一颗炸弹都拿到靶场去做试验，通过实地爆炸的测定，证明它的确是合格的。但是这么一来，就再也没有可供出厂的产品了。实际上，炸弹的破坏力是靠弹壳的材料和结构，炸药的成份和数量以及雷管的性能等等因素来决定的。只要我们事先做过充分的试验，就足以保证只要这些因素满足了适当的条件，必定能够制造出合格的产品。在正常的生产中只需要做少量的抽样检查来监视产品的质量，而不需要做很多的破坏性试验。

对微观系统的测量或试验，一般都是破坏性的，即测量之后系统不再处在原来的状态，非破坏性的测量只是一些特殊的情况。所以，我们必须靠过去的经验，了解到哪一些物理条件能使系统的制备满足 ψ 函数的要求。而且，制备出来的一个个系统，一般并不表现出相同的行为。在这里，相同的制备手续只体现为由 ψ 函数决定的各种测量结果的确定的几率分布，而不表现为对每个系统总得出确定的测量结果。

其实，在刚才所举的那个浅显的例子里，采用了严格规定的制备操作，也只能保证炸弹产品的重量、几何尺寸和形状以及所释放的能量等等技术指标具有确定的数值。至于炸弹爆炸时，弹壳分成几块碎片，这些碎片射出的角度和飞过距离的分布等等表现，即使是同一批出厂的产品，一般也是各不相同的。只有通过许多次的试验测定，才能对每次爆炸的碎片行为，给出一种统计性的结果，即得出有关数据的平均值和统计散布(标准差)。精密准确的生产技术原则上只能降低而不能完全消除这种每一批产品特有的统计散布。

反过来说，只对一颗炸弹样品进行试验，虽然也许可以测定到比较确定的能量释放数值，但只能提供一种可能的碎片分布情

况。要了解一批产品的弹片分布的总的情况，必须对这一炸弹"系综"的许多个成员进行检验和统计分析。换句话讲，只观察一颗炸弹爆炸时的碎片行为，无从判别它属于哪一批产品。按照同样的道理，只射击一发子弹，也是无从鉴定枪支弹着点的精密度的。

因此，只对个别系统进行一次测量，无法知道它处在什么状态，或者说经过了什么样的制备手续。例如，我们观察到有一个光子通过了一片方解石晶体。那么，可不可以由此判断这个光子通过晶片之前处在什么状态呢？当然不可以！事实上，除了其偏振方向平行于晶片光轴因而肯定不会通过晶片之外，处在沿其他任何方向偏振的状态的光子，都有可能（以非零的几率）通过晶片。因此，只凭这一次观察，我们无法断定光子原先处在什么偏振状态。所以，从观察的角度讲，对个别光子不能谈论它的偏振状态，它可能来自自然光，也可能来自各种形式的偏振光。

在 French 的书上[6]，还深入地分析了偏振光子的行为。实际上，要确定一束光的线偏振状态，需要检偏器从各种不同的角度检测大量的光子。如果只接收到少数光子，统计涨落将使观测结果的散布增大，无法作出确定的结论。对于只接收到一个光子的情况，当然更不能谈论它原来的偏振状态了。

以上的论证是有普遍性的：说个别微观系统处在某一状态是没有意义的，因为只靠对这个系统的一次测量，无法检验这一说法的正确性。量子态的概念一定要同按一定条件大量制备出来的许多相同系统联系在一起，对这些系统逐一测量所得到的结果的统计分布，就实现了量子力学理论同经验事实的对应。

Wigner曾经讲过："态矢不外是我们用来（尽其可能地）预言系统未来行为的那一部分关于系统过去的信息的简略表述。"[7]我们理解，这里所讲的过去，指的就是所受到的制备手续，而未来则自然指接受测量时的表现。于是，态函数可以看做是系统从制备

到测量这段过程因果联系的描述，不过这种因果性不是 Laplace 的决定论，也不是传统的以几率为基本量的统计性描述，而是一种前所未见的、以几率幅为基本量的统计性描述。我们觉得，这可以算做是对“态是什么？”这一问题的概括回答。

至于对“怎么样才算做某一个态？”或者“通过什么样的制备手续才能得到所希望的状态？”之类的问题，我们仍然未能给出具体的答案。事实上在这方面并不存在着什么先验的原则，而是要靠对每个具体问题的摸索、试探和检验。正如 French 所说：“我们无法预先确定，在足以清楚地规定量子态的描写里，要包括哪些和去掉哪些特性。对一个给定的系统，这种区分是由猜想，由直觉和由灵感得来的，是凭数学程式和理论思考以及对称性论证而得出的。不管这种区分原先是怎么得出来的，最终都要在经验的范围内经受检验。”[8]

最后还要提到的是，态的制备不一定都是人为的过程。例如，放射性核的蜕变，宇宙线辐射的粒子等等；这些物理系统是从自然界取得的，因此把这种情况称为自然制备。当然也可以理解成，这些系统是在宇宙发展的早期，在遥远的恒星或者星际空间中特定的物理条件下制备的。这些“天然实验室”里的物理参数远远超出人工所能达到的极限，对由此制备出来的系统的研究，已经和仍将会给人类带来关于物质结构和相互作用的宝贵知识。

6.2 态和测量

上一节已经讲清楚了，态矢或态函数描写由按照特定的制备手续所提供的许多个微观系统为其成员而组成的系综，由态函数的具体性质便可以作出对这一系综进行测量所得结果的统计性预言。本来，在第 2.2 节对量子力学基本假设的陈述里，态函数 ψ 的功效，全在于对由它所描写的系综的测量结果的预言能力。其

体说来，这一点体现在平均值公设 (III) 之中。[在第 2.3 节的进一步讨论里，我们已经论证了，由公设(III)可以导出公设(II)]只要知道了 ψ 函数，就可以对多次测量结果按各测量值的分布(几率)作出预言。

必须强调的是，按照量子力学的基本假设，ψ 函数只负责预言系统受到测量时，所得出结果的几率分布，而没有说 ψ 函数同未受到测量时系统的行为有些什么联系。例如，设在坐标空间中电子的态函数是 $\psi(x,t)$。那么 ψ 的模方 $|\psi(x,t)|^2$ 就表示，在 t 时刻测量到电子位置处在 x 处的几率密度，只要电子在制备出来之后，一直到测量时刻 t 之前没有受到扰动。那么，在 t 时刻之前，电子是否以 $|\psi|^2$ 的几率密度存在于空间之中呢？量子力学理论对此没有做过什么假定，因而回答不了这个问题。

在第 3.4 节里已经指出，把光在产生和转化过程中表现为一颗颗光子的性质，推广成光在传播过程中也是如此的做法，是没有什么根据的。我们还将在第 7.4 节详细讨论这种把光束看成光子流的可疑观念。现在我们限于说明，光的测量总是同它的转化联系在一起的，而光在没有受到测量时的传播过程中是否以光子的形式存在，则是本质上不同的另外一个问题。

本来，一个物体或者物质系统在没有受到观察时以什么样的形式存在，这是一个哲学味道很浓的问题。沿着这个方向，甚至还可以提出物体在没有受到观察时是否存在的问题。不过我们不准备走这么远，主要从物理学的角度讨论在这方面宏观物体同微观对象之间的差别。在经典物理学里，质点的坐标、动量等等都是连续变化的，它们也不会突然消失或产生。也就是说，宏观物体的形状和运动状态总是相对稳定、起码是遵循连续变化的规律的。在任何时刻的测量，都可以证实坐标和动量等等是满足有关演化方程的。所以，即使我们在没有作观察的时候，也完全有理由相信

一个经典的质点是沿着某条轨道运动的，并且每一时刻都有确定的和连续变化着的坐标和动量。对于复杂的系统，我们同样相信它的代表点在相空间中沿着某一轨道运动。所以，我们可以认为，宏观物体在没有受到观察时的存在方式，和它受到观察时所表现的形式是相同的。

可是，在量子力学里，不存在着这种简单的因果性。遵从Schrödinger方程因而连续地演化着的只是几率幅 ψ 而不是任何物理量。因此，对于任何粒子，一般不能使用运动轨道这种连续变化的概念。于是，我们原则上就不能问，现在观察到的粒子，原先在什么位置，它是怎么样走过来的等等问题。总之，我们不能把对微观系统观察到的物理性质，不加思索地外推到未受观察的系统，认为它也具有类似的行为。因为，外推本身不外是一种连续性的延拓，而量子力学里对于系统的任何物理性质，除了处在本征状态者之外，一般都不存在这种连续的演化性质。于是，光在未受观察时是否以光子形式存在，或者还有对电子所提的类似问题，都是不能沿用经典物理学概念想当然地给出回答的。

我们还要强调的是，正如在第2.2节所指出过的那样，在涉及到测量结果的量子力学基本假设里，并没有规定测量过程的具体性质。实际上，这里假定了：第一，量子力学里所有力学量都是可以测量得到的；第二，对同一个力学量，用不同测量方法所得到的结果是一样的；第三，这些测量结果都符合于有关的基本假设。这些假定的普遍适用性确是令人惊讶的。Wigner曾经说过："对一个算符的测量结果找到一种数学表达式的可能性，显然并不保证这种测量的可能性。""为了保证这样一种测量的可能性，我们应当描述进行这种测量的方法。"[9]所以，对于测量问题，例如测量仪器的功用，测量前后仪器和系统的变化，仪器和系统的相互影响等等问题，都是很值得深入研究的。虽然，按照Wigner的意见，最早由

von Neumann 提出而现今被普遍接受的测量的数学理论，仍然没有解决上面所说测量的可能性这一问题。

也许有些读者会对此感到震惊。如此基本的问题还没有解决，那么物理学家们不是一直在糊里糊涂地工作吗？我们说这种担心是大可不必的，因为世界本来就是这样的。我们一方面承认基本问题的重要性，尊敬对这些问题的研究，另一方面又不由于那些问题长期得不到满意的结论而放下手上的工作。因为，通过人类的奋斗，毕竟发现了这个世界是可以逐步认识和逐步改造的。Einstein曾经说过，世界上最令人费解的事就是，这个世界竟是可以被我们理解的。套用这句名言，我们也想说，量子力学的测量理论是一门非常深奥的学问，可是最奥妙的是，绝大多数物理学家们竟不必理会这一理论，就能照样恰当地进行实验观察以及将测量结果同理论预言相比较的工作。这真是一个难解的谜！

在测量理论里，为了对测量过程进行全面的研究，必须描写系统在接受测量之后的性质。我们知道，在量子力学的基本假设里，只规定态函数 ψ 描写对同样制备出来的许多个系统一一进行测量所得结果的统计分布，没有对这些系统在测量之后的行为作过任何假定。因此，在测量理论里，必定要在第二章所讲的几条基本假设之外，对测量过程提出一些独立的额外假设。其中最有影响的一条，叫做“投影公设”，通常也叫做“波包编缩”或者“态矢坍缩”，它说的就是系统受到测量之后的表现。由于这一假设已经列进了不少（决不是全部）教科书的内容里，所以，我们虽然无意在本书里讨论测量理论，也还是有必要在这一节里着重介绍一下有关投影公设的一些问题。

我们反复讲过，微观系统在被测量时，所受到宏观仪器的扰动，一般说来改变了它原先制备过程中所限制的物理条件，因此不再属于由原来的态函数 ψ 所描写的系综。然而，人们经常运用量

子理论，只是计算和检验处在某一状态下的系统的测量结果，并不需要关心系统受测量后的变化。正象在一条流水线上送出的产品，当进行抽样检查时，对于产品质量有意义的是测量所得的数据，而不是抽查过的样品变成什么样子。对于破坏性试验的情况，这两者的差别更为明显。例如，炸弹样品经过试爆，点心样品经过品尝，目的是为了取得评价，作为产品质量的依据。至于爆碎了的炸弹，吃剩了的点心，不再是我们关心的对象，起码那不是生产部门的事，至多送去回收处理。在这种意义上，讨论经过测量之后的系统的性质，也可以说是一种"回收"问题。

投影公设最早是 von Neumann 提出的，在他的书里[10]的表述是：

"如果对一个系统 S 接连两次测量物理量 R，那么每次都得到相同的数值。即使在 S 原来的态中 R 具有弥散的情况也是如此，而且对 R 的测量会改变 S 的态。"

按照这一假设，如果对处在任意状态(即使不是被测力学量的本征态)的系统测量力学变量得到某一个它的本征值，那么以后接连不论多少次进行重复的测量，结果都是确定的同一数值。这样就预言了系统在受到测量之后的行为。

提出这一假设的根据是什么？von Neumann 自己说，它是由对Compton 散射实验结果的统计性质得出来的。他说，Compton 实验表明了，在统计理论中只有这样的可能，即"如果系统起初处在对 R 的数值不能确定预言的一个状态，那么，通过对 R 的测量 M，就使这一状态变成另一状态，即变到 R 的数值唯一确定的状态。"[11]这里的意思很清楚：系统原来处在 R 的非本征态，通过对 R 的测量，得到的测量值必定是 R 的某一个本征值 λ_n；那么测量之后系统的态必定变到 R 取确定值 λ_n 的态，亦即 R 的本征值为 λ_n 的本征态 φ_n。对于处在 φ_n 的系统，再重复测量 R，当然继续会得

到相同的 λ_n 值。

在接收测量之前，φ_n 只是原来的态函数 ψ 对 R 的本征态展开式里的一个分量。按照上述假设，在测量之后，系统的态即从 ψ 变为 φ_n，也就是说 ψ"投影"到它的一个分量 φ_n 之上，所以把这一假设叫做投影公设。所谓波包的"编缩"或者态矢的"坍缩"，都指的是测量前后系统状态的这种变化。虽然有一些著名的教科书把这一假设当做量子力学的基本原理写了进去[12]，但也有同样著名的另一些教科书对此只字不提[13]。事实上，投影公设从提出来那天起，就不断受到猛烈的批评[14]，以至于Wigner 评论道："正是态矢的这种编缩使我们的许多同行无法接受。"[7]下面我们从量子力学一般原理的角度，讨论一下有关投影公设的一些概念问题，而避免涉及测量理论的细节。

首先，象在第 5.2 节讨论不确定关系的例子时我们讲过的那样，举例不是证明。由于篇幅关系，我们不去具体考查 von Neumann 对 Compton 散射这一例子的论证是不是有道理，而只是指出，即使他这个例子完全没有毛病，亦不能由此得出什么普遍性的结论来。事实上，我们不难举出别的一些符合于投影公设的情形。譬如，用偏振仪测量光子的偏振状态。凡是通过了偏振仪的光子，都必定具有确定的线偏振方向；或者，通过 Stern-Gerlach装置的电子，必定具有确定的自旋分量等等。这些都是在许多文献上津津乐道的例子。

然而，例子举得再多，也不能保证不存在着相反的情况。von Neumann 的投影公设，首先假设了对一个系统的重复测量的可能性。但在对微观系统的测量里，常常不存在这种可能性。最简单的一种情况，就是没有通过偏振仪的光子。例如，透过方解石晶片因而被我们接收到的光子，它的偏振方向必定与晶体光轴垂直；同时，没有透过的光子，它的偏振方向则与晶体光轴平行。一般文献

里只是大谈前面一种对投影公设有利的情况，而根本不提后一种情况。事实上，没有透过晶片的光子是被吸收了，或者说原先的光子已经把能量交给晶体中的电子等等，光子已经不再存在了，在这种情况下重复的测量显然是不可能的。

又如，在一般的散射实验里，进行测量之后，散射粒子常常停留在探测器的工作物质里，或者越出探测器而不知去向。譬如，一个中性粒子进入核乳胶，在其中发生了衰变过程，我们从这些衰变产物所留下的径迹，测量到原先粒子的能量和动量等等。在这里，中性粒子正是要转化为别的(带电)粒子，才能被我们观察到。那么，在测量之后，或者说在使测量成为可能的衰变过程之后，原先的粒子已不存在，当然无法进行重复测量。(如果把在显微镜下鉴别乳胶的工作归入测量过程，那就连衰变产物也不知去向，留下的只是它们的径迹罢了。)Wigner 就曾经评论说："应该承认，当量子理论家讨论测量时，他是做了许多理想化的，例如，他假定，不管客体的初态如何，测量装置都会得出某种结果。这显然是不现实的，因为客体可以离开这个装置而永不与它再接触。更重要的是，他已经占用了'测量'这个名词，用来表征一种可由此获得关于一个确定客体的状态的信息的一种特殊类型的相互作用。因而，象对截面那样的物理常数的测量，是不算做这位理论家称为'测量'的范畴之内的。……"[7]由此可见，测量理论里所说的测量，同物理学家们天天进行的测量工作不是一码事。

第二个问题，就是人们常常把 von Neumann 的投影公设，理解成对个别系统的规定。按照这种说法，一个系统的态原来是 ψ，经过测量之后就投影或编缩为 φ_n。这里又回到了在第 2.3 节和 5.4 节讨论过的老问题，即 ψ 函数是描写个别系统还是描写系综这一个有争议的题目。

Schrödinger 曾经提出著名的"猫佯谬"，来生动地讨论有关

的问题。他说[15]：

“还可以举出十分荒谬的例子。一只猫关在一个铁箱子里面，其中设有下述的致命机关（保证它不会受到那只猫的直接干扰）：在一个 Geiger 计数器里有一小块放射性物质，它小到在一小时过程里只会有一个原子衰变，但是也有相等的可能性一个原子也不会衰变。如果发生了衰变，那个计数管就被触发放电，并且通过一个继电器松开一把小锤子，使它击碎一个装着氢氰酸的小瓶。如果我们使这整个系统自行搁置了一小时，我们会说，假若这段时间里没有原子发生衰变，那只猫就仍然活着。第一个原子的衰变则会毒杀了它。整个系统的 ψ 函数就由其中活着的和死了的猫这两部分以相等的比例相混合来描写。”

对于这个例子，传统的解释认为活猫加死猫的态函数是描写个别系统的。过了一小时，猫就处在死活几率各占一半的状态中。当我们打开了箱子观察时，它就突然发生“投影”或“编缩”，以相等的可能性落到活着或死掉的状态（只有这两种状态才是观察到的“本征态”）。

相反地，量子力学的统计解释认为，态函数不是描写个别系统，而是描写系综的。过了一小时，在组成系综的大量独立系统当中，有一半数目的系统里猫已经死了，而另一半数目的系统里猫仍然活着。对于系综各成员进行大量观察将会证明这一点。可是，如果只对个别系统进行观察，那么碰到活猫就看到是活的，碰到死猫就看到是死的，两者机会均等。在接受测量前后，每一个系统都没有发生什么突然的坍缩。

以上只是一种粗略的陈述，仔细讲还有许多问题。可是我们已经足以看出，统计解释是比较自然的，不存在什么佯谬。而在传统解释里，测量之前猫处在一种死活不确定的叠加态的说法，确实是很难令人接受的。Einstein 在对 Schrödinger 提出的这个问题

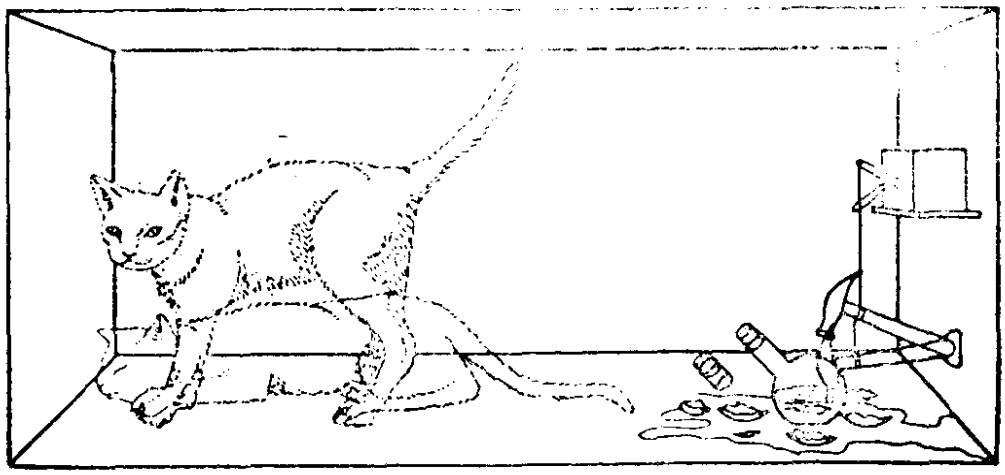


图 16　Schrödinger 的猫佯谬示意图

进行讨论之后，就下过这样的结论："如果人们企图坚持这样的命题，说统计性的量子理论原则上能够产生个别物理系统的完备描述，那末就会得出一些很讲不通的理论概念。另一方面，如果人们认为量子力学的描述是关于系综的描述，那么这些理论解释上的困难就会消失。"[16]

其实，个别系统的态矢编缩原理，可以看作是一般统计性理论里几率概念的一种多少有点混淆的运用。例如，一枚硬币掷到地下，正反两面朝上的几率是相等的。那么，也可以说，硬币落地之前，处在正反两面朝上的几率都是 1/2 的状态；而到它落到地下停下来的那一时刻，就会"投影"或者"编缩"到例如正面朝上的状态。因为，当它停下来之后，只能百分之一百地处在某一面朝上的状态。因此，Popper说过："波包编缩不是量子理论特有的效应，一般说来它是概率论的一种效应。"[17]

在我们看来，态矢编缩的这种说法，可能多少反映了通常把态矢说成既描写系综又描写个别系统，以及把几率说成既是多次测量的相对频度又是单次测量的趋向这种语言上的混乱。Margenau 曾经针对这种情况，不无挖苦地说过："一次测量产生一个本征态的主张，它的意思恰好象下述论述一样：在击碎并且吃下一颗核

桃之后，我仍然有一颗核桃，不是处在它的破碎了和吃掉了的状态之中。”[18]

第三，必须指出，以上关于个别系统态矢坍缩的解释，并不是对投影公设的唯一可能的解释。事实上，von Neumann 在他的书的后半部里，系统地论述和运用了量子力学的系综概念，并且说明了这样做的好处，以至于可以说，这本书在很大程度上是按系综解释写成的。的确，von Neumann 在书上明白地对投影公设作过这样的补充阐述：“测量之后，……在原来系综的一部分里，R 具有数值 λ_n。于是这一部分就构成其中 R 确定具有数值 λ_n 的一个系综。”[19]这一个个子系综，自然就由 R 的本征态 φ_n 来描写。

于是，投影公设的意义便是，R 的测量使原先以 ψ 描写的系综，分开成为以 φ_n 描写的一个个子系综。这样，出现的就不是单个系统的波包编缩，而是假定了对 R 的测量操作，必定同时实现了 R 的本征态 φ_n 的制备。

我们不否定确实有这样的情况。上面提到过的用 Stern-Gerlach装置测量电子的自旋分量，以及用偏振仪测量光子的偏振状态等等，起码都能部分地满足测量就是制备的要求。在以 φ_n 描写的系综里，重复测量 R，自然只能得到同一个 λ_n 值。其实，在普通的统计里何尝不是如此？例如，对一组人调查过其年龄，就可以按相同年龄分成一个个小组，亦即“制备”了有确定年龄值的一个个“子系综”。

可是要当心。上面例子里的出生年份，对每个人来讲都是不可改变的。但是还有文化程度、经济状况等可以改变的因素，还可能有调查结果受到调查方式影响的复杂因素，不可一概而论。对于微观系统，情况要微妙得多，测量对于系统的影响，似乎更应当就各种实际情况进行具体分析，避免匆忙作出结论。

Margenau 在 1937 年最早明确提出要清楚地区分态的制备

和测量这两种过程，并且拒绝承认投影公设的普遍有效性。[18]在此之前，Landau 和 Peierls 以及 Pauli，都举出了不符合投影公设的情况。在 Pauli 的书里把测量分成两类：第一类测量指“重复测量给出在第一次测量中被测[物理]量的相同数值”，“另一方面，也有可能……重复测量的结果与第一次测量的结果不同。……我们称之为第二类测量。”[20]Pauli 还举出了用非弹性电子碰撞测定原子能级的过程作为第二类测量的例子。

Pauli 这里讲的第一类测量，明显符合 von Neumann 的投影公设，并且也是有关本征态的制备过程。但是 Pauli 的第二类测量并不满足投影公设，它起码不是被测力学量本征态的制备过程。

总而言之，不论采用什么样的解释，投影公设的成立都是有限制的。一方面存在着大量不可对同一系统重复进行的测量过程；另一方面即使可以重复，也有不满足投影公设的情况。正如 Wigner 所指出，测量理论里是在理想化的一些条件的限制下使用测量这个术语的，它的意义和物理学家们通常所说的并不一样。而且，即使在测量理论的局限范围内，许多基本问题还远没有弄清楚。在这种情况下，在量子力学的教学中引进投影公设或者态矢编缩，不仅是不必要的，而且会生出这样那样的误解来。

最后还要提醒一下，无论是投影公设的赞成者还是反对者，大家都承认，Schrödinger 方程只描写在不受其他扰动时态矢随时间的演化，而不描写测量过程。换句话说，系统受到宏观仪器扰动时所产生的变化是瞬时发生的一种不连续的非因果性的变化。对于测量过程中仪器和系统的相互影响以及各自的变化，当然可以提出许多进一步研究的课题。但那些是属于测量理论的范围，有着同量子力学密切联系着而又相对独立的一套理论体系，是可以暂时放在一边而不影响对量子力学本身的学习和运用的。

6.3 波包和经典近似

我们在第 3.2 节里已经讲过，量子理论里波群即波包的概念，最早是由 de Broglie 和 Schrödinger 先后引进的，用来描写伴随着电子前进的相位波，或者进而认为粒子不过是 ψ 波场的凝聚。1927 年 Born 提出态函数的几率诠释，将 ψ 解释为发现粒子的几率幅，此后已经不再需要认为粒子总跟着波包跑或者粒子本身就是波包。事实上，Born 当年在一篇文章里就宣称道："我想还是抛弃这种'波包'观念为好，我们从来没有而且也许不可能把这一观念坚持到底。"[21]

在那以前，波包概念在从牛顿力学过渡到量子力学的历史进程中，起到过积极的作用。但是，在量子力学里，ψ 只是描写对系综测量结果的几率分布，而同波包概念没有必然的联系。在今天的量子力学里，常常只在讨论经典近似时才运用到波包的概念。

牛顿力学里的单个粒子具有确定的位置和动量。而在量子力学里，由于不确定关系的限制，粒子的位置和动量不可能同时确定。于是，人们就设想出象第 5.1 节里所述的有限正弦波列和高斯型分布等波包，它们的位置和动量都具有适当的有限分布，可以用来近似地描写单个经典粒子的运动。

Ehrenfest 定理证明了，当可以认为平均值代表着经典变量时，波包的运动就象一个经典粒子那样遵循牛顿力学的规律。为了说明这一点，我们先从平均值公设(3.14)和 Schrödinger 方程(3.20)，推导出任意力学量 A 的平均值服从的演化定律，即 Heisenberg 形式的运动方程：

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle=\langle[H,A]\rangle. \tag{1}$$

再将(3.24)式的单粒子哈密顿算符代入，算出

$$\frac{d}{dt}\langle x\rangle=\frac{1}{m}\langle p\rangle,\ \frac{d}{dt}\langle p\rangle=-\left\langle\frac{\partial}{\partial x}V\right\rangle, \tag{2}$$

或者

$$m\frac{d^2}{dt^2}\langle x\rangle=-\left\langle\frac{\partial}{\partial x}V\right\rangle. \tag{3}$$

为了简单起见，我们只写出了一维运动的情况。

(3)式即 Ehrenfest 定理的结果，它的形式很象是经典力学里的 Newton 第二定律。可是，要把(3)式左方的坐标平均值$\langle x\rangle$完全看成是波包的代表位置，右方的平均值必须换成势对这一位置的微分，即$\frac{\partial}{\partial\langle x\rangle}V(\langle x\rangle)$。分析指出[22]，可以作这种近似代换的条件是

$$\left|\frac{\partial}{\partial\langle x\rangle}V(\langle x\rangle)\right|\gg\frac{1}{2}\left|\frac{\partial^3}{\partial\langle x\rangle^3}V(\langle x\rangle)\right|(\Delta x)^2, \tag{4}$$

式中的Δx就是按(5.25)式定义的x的标准差，在这里代表波包的宽度。对于宽度Δx很小的波包，(4)式以及进一步的分析表明，当粒子的动能足够大，而且势场变化足够平缓时，(3)式可以近似地过渡到牛顿力学的运动方程。这种动能大的粒子在平缓的势场中的运动，可以看成是接近于自由运动的准自由粒子，在这种条件之下，肯定满足经典近似的条件。

以上的论证不难推广到多自由度的情况。Dirac 的书上对这种情况下的结论是："对任意有经典类比的动力学系统，经典描述近似生效的一个态，在量子力学中用一个波包表示，其中所有坐标和动量都具有其精确度受到 Heisenberg 不确定原理的限制的近似数值。"[23]我们理解，这里所说的"经典描述"，就是满足牛顿力学规律的意思。

可是，如果波包宽度Δx比较大，那么，即使对比较平缓的势

场，条件(4)也可能不满足。而在第 3.2 节里我们知道，de Broglie 波的群速度和相速度并不相等，因此总会产生色散现象。这意味着组成波包的各不同频率的平面波成分传播的快慢会有差别，因此波包在经过长时间之外，一般总要扩散开来，不能老维持很小的线度。例如，Schiff 的书上估计了："对于大多数原子系统，……相应于一个精确定位的粒子的波包，在一个周期内散开得使这种描述运动的方式已失去物理意义了。"[24]

总之，在量子力学里波包概念的运用是有很大局限的。只有在准自由粒子或者可以作牛顿力学近似的情况下，才可以使用波包概念去描写个别粒子或系统的运动。不可以把量子力学的所有问题都用波包概念去处理，也不可能把量子力学的基本原理建筑在波包概念之上。我们在第 5.1 节里所说的"量子力学不是波包力学"，道理就在这里。

下面我们再讨论一下有关量子态和波包概念的容易引起误解的两个问题。

第一个问题是，对于自由粒子来说，它在零势场中运动，(3)式右方为零，自然满足经典近似的条件。所以，自由粒子的运动无疑是可以用波包表示的。我们知道，具有确定的大小和方向的动量值 $\boldsymbol{p}$ 的本征态函数是平面波

$$\exp[i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-Et)/\hbar], \tag{5}$$

它满足零势 Schrödinger 方程。根据叠加原理，我们还知道，由相应于一些不同的(实际上是相近的)动量值的平面波解叠加而成的波包，也必定满足零势的 Schrödinger 方程。因而，我们常常说，在量子力学里，自由粒子的态函数可以用平面波或者由平面波叠加而成的波包来表示。

可是，如果把上面这句话反过来说成，量子力学里自由粒子态函数的一般形式，只能是平面波或者是由平面波叠加而成的波包，

那就不怎么妥当了。

这是因为，虽然量子力学里的波包是适宜于过渡到牛顿力学近似的一种形式，对应于具有相对确定的坐标和动量的经典粒子的运动。然而，决不能把量子力学只归结为经典近似，否则它就没有存在的价值了。事实上，量子力学的态不是描写个别粒子或者个别系统的运动，而是描写系综的性质。就自由粒子说来，它可以处在具有确定大小和方向的动量的平面波状态，可以处在具有一定的动量和坐标分布的波包状态，也可以处在满足除此以外的某种条件的状态，例如具有确定轨道角动量的状态等等。以下我们通过散射问题来做具体的说明。

现重新写出散射过程中远离靶体($r\to\infty$)的渐近态函数(3.3)式:

$$\begin{aligned}\psi&=\psi_1+\psi_2,\\ \psi_1&=e^{ikz},\quad \psi_2=f(\theta)\frac{1}{r}e^{ikr}.\end{aligned}\tag{6}$$

这里把散射过程作为定态问题处理，略去了态函数里含时间的因子。记得动量 $\boldsymbol{p}=\hbar\boldsymbol{k}$,(6)式里的 ψ_1 就是(5)式沿 z 方向传播的平面波，它代表未受靶体影响的原入射粒子束流。(6)式里的 ψ_2 是具有一定角度分布的球面波，它代表离开了散射中心的散射粒子流。在处理散射问题的分波法里，还把这些态函数展开成具有确定的轨道角动量($l=0,1,2,\cdots$)的成分。

现在我们单说球面波 ψ_2 部分，它既然描写受到靶体作用之后无限远离靶体的散射粒子，那么这些散射粒子当然就不再受靶体影响而是自由粒子。或者说，ψ_2 描写的是已经离开了散射中心的，动量大小相同，而沿不同的半径方向射出的自由粒子。散射振幅的模方 $|f(\theta)|^2$ 就表示沿不同角度射出的几率密度。在这里，ψ_2 既不是平面波，也不是局域的波包，但它描写的同样是自由粒子。

在散射问题的边界条件下，决定了 ψ_2 采取的是用球面波形式而不是用平面波或波包描写的自由粒子。

在电动力学里，早就用到了球面波解。从点源辐射出来的电磁波，在离开了源之后，当然是自由的电磁波。事实上，只要满足无源 Maxwell 方程组的解，都代表自由的电磁波。有多少种这样的解，就有多少种自由的电磁波。由此可见，就是在经典物理学的范围内，也不能把自由运动限制成只有牛顿力学里的一种形式。

同样，零势 Schrödinger 方程的任何形式的解，都代表自由粒子的运动。不仅是平面波和球面波解，而且在人们已经熟练掌握的柱面坐标系、抛物面坐标系以及各种椭球面坐标系……里得出来的零势 Schrödinger 方程的解，都有可能代表在一定边界条件下的自由运动。这正是波动问题有异于质点力学的特征。

其实，量子力学里的平面波所描写的也不是牛顿力学里的个别有确定动量的自由粒子，而是描写在时间和空间中分布均匀的具有确定动量的自由粒子系综。取平面波形式的 ψ_1 就适宜于描写入射粒子束，只要它是均匀的而且横截面比靶体大得多。从这个意义上讲，ψ_2 描写的也是一种自由粒子系综，不过是从散射中心沿半径方向射出而且对不同角度有某种几率分布的自由粒子系综。分波法则进一步将 ψ_2 分解成各向同性的 s 波($l=0$)和按 Legendre 多项式 $P_l(\cos\theta)$展开的其他角动量 $l=1,\ 2,\ \cdots$的 p, d,…等分波，其中每一分波都描写具有确定轨道角动量的球面波形式的自由运动状态。在 Coulomb 场的散射问题里，还可以方便地采用抛物面坐标来描写散射态函数[25]。由此可见，在量子力学里，对自由粒子的描写决不止平面波或者由准单色平面波叠加而成的波包这些形式。

第二个问题是，上面讲可以作经典近似的波包的运动，对应于个别粒子的运动。然而，量子力学里态函数是描写系综的，只在特

殊情况即本征态的情况下，才也直接描写个别系统的行为，波包亦不应当例外。我们指出，用波包的运动来得到经典近似下个别粒子的运动，也只是一种特殊的情况。事实上，大家不太熟悉的是：一方面，可以通过从量子系综到经典系综的过渡来作出经典近似，不必回到个别粒子的运动；另一方面，除了在一些原理性探讨之外，量子力学也常常在系综的意义上使用波包概念来解决问题。以下我们分别加以说明。

还是先以散射问题为例。在经典力学里，入射粒子被认为具有同时确定的坐标和动量，或者说有确定的动能和对于散射中心的散射参数(瞄准距离)。对于一定的散射参数的入射粒子，处在已知形式的中心力场的作用下，可以算出它受散射后的射出角 θ。这种计算和量子力学是大不相同的。然而，实际的观察当然不可能是对一个个给定瞄准距离的入射粒子进行的，我们测量到的只是受到散射的比率和散射角的相对分布。在这里，瞄准距离只是一种设想的计算参数，实际上还是假设了入射粒子具有均匀的时间和空间分布，然后再估计具有不同瞄准距离的粒子所占的比例。所以，在经典力学里，仍然把入射粒子处理成动量确定而空间分布均匀的束流，同时把散射粒子处理成沿半径方向射出而按角度不同呈现不同分布的粒子流。亦即是说，无论入射粒子还是散射粒子，都可以看做是一种系综处理。不过这里的系综不象量子力学里那样用平面波或球面波形式的几率幅描写，在经典系综里把几率看成基本量，直接使用几率描写。散射截面和微分截面等等的规定，实质上都是这种几率描写的体现。[26]

有关散射问题里以几率为基本量的经典系综同以几率幅为基本量的量子系综两种描述的差别，可以参看第 4.4 节里对于全同粒子散射的讨论，我们不再重复。在这里只是强调，在经典力学里也有可以用系综概念处理的问题，至于经典统计物理学的问题就

更不用说了。所以，作经典近似并不一定要回到个别粒子的运动。

另一方面，在量子力学里，除了上述把散射问题当做定态问题处理之外，还可以用含时间的 Schrödinger 方程来处理。在定态处理里，用适当的边界条件来规定入射粒子和散射粒子的形式，比较容易求解。而在含时处理里，则变成初值问题，求解要困难得多，但这样做的好处是可以明显地演出从入射到散射的整个发展过程。在定态问题里，实际上认为入射束和散射流都是一直稳定地存在着，相应的态函数描写在空间中是连续分布的。而在含时问题里，为了要显示出散射过程的步骤，就不能使用充满整个空间的态函数，而是使用在空间中不连续分布的，即一个个有局限体积的态函数即波包。所以，散射问题的含时处理又叫做波包描述[27]。

在 Goldberger 和 Watson 关于碰撞理论的专著里，对这种用波包演化来处理散射问题的方法做了详尽的叙述。[28]他们明确指出："我们只涉及那些按微观尺度说来是大的波包。即是说，我们假定波包比粒子的波长 h/p 大得多，当然也比粒子也许会有的固有'尺寸'大得多。"由此可见，这里的波包不是个别粒子的描写，而是一种系综的描写，即对于具有某种坐标和动量分布的粒子系综的描写。这样做不仅适宜于表示系统随时间变化的统计性质，而且也许是更切合于实际情况的。因为，在现代的加速器里，粒子的输出不是连续的而是脉冲式的，每次脉冲产生一团有一定动量和坐标分布的粒子。这里所说的波包就可以看成是对这些一团团粒子的描写。

例如，在图17里示意地画出了在经过散射中心之后，有未受散射的一小块入射波包继续按原先的方向运动，同时产生出球面波块形式的部分，代表散射粒子的运动。随着时间的推移，入射波包离开得更远，同时散射波块的半径变得更大。很明显，这两部分描写的都不是个别入射粒子或个别散射粒子的运动，它们分别描写

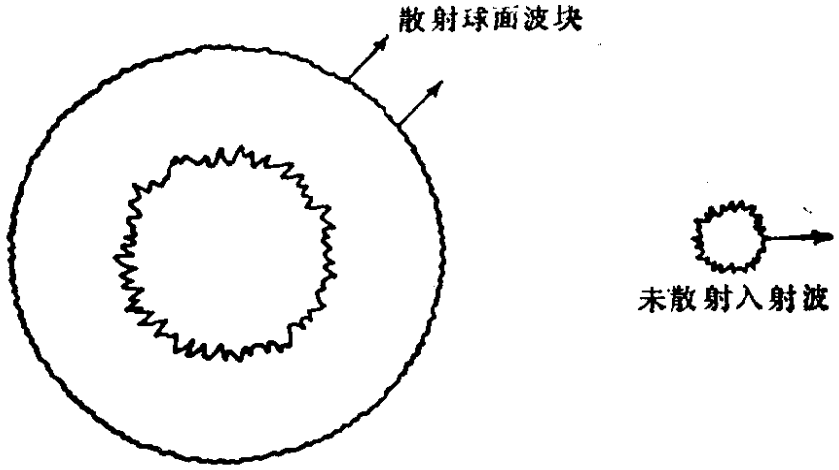


图 17　未受散射的入射波包和已受散射的球面波块

了入射粒子系综和散射粒子系综的统计性质。在这方面，入射波包和散射波块同定态处理里 ψ_1 和 ψ_2 的意义完全相同，只是在空间分布范围及其变化上有所不同罢了。

由此可见，在量子力学里真正用来处理问题的这种波包仍然描写系综而不描写个别粒子。只有在特殊情况下，波包才对应于个别粒子的运动。

最后介绍一下，按照上面讨论的概念，选取适当的波包，可以证明，Schrödinger方程的解的WKB(准经典)近似的模方，形式上等同于由全同系统组成的系综里的经典位置的几率密度。亦即是说，在经典极限下，量子系综的时间演化就象经典系综一样[29]。这一结论是普遍的而不限于散射问题。于是，这一证明保证了，即使运用波包描写，原则上也可以从它描写的量子系综，在经典近似的条件下过渡到经典系综。

6.4　再谈经典对应

在上一节里，我们讨论了作为特殊情况描写个别粒子或者一般地描写系综的波包概念，以及通过这样那样的波包模型，和在什么样的近似条件下，怎样实行从量子力学到经典物理学的过渡。

在很多教科书中讲到的 Ehrenfest 定理，就是依赖于波包模型的一种论证。在这一节里，我们将脱离波包概念，更普遍地讨论量子力学的经典对应问题。

我们先讲一种从 Schrödinger 方程出发，通过近似条件，得出经典力学里的 Hamilton-Jacobi 方程的方法。[30]在这种方法里，完全不需要对态函数 ψ 的细节作出假定，包括不需要假定 ψ 采取波包的形式。

仿效在波长趋于零的极限下，从满足 Maxwell 方程组导出几何光学定律的办法[31]，我们将态函数 ψ 写成

$$\psi(\boldsymbol{x},t)=A(\boldsymbol{x},t)e^{iS(\boldsymbol{x},t)/\hbar}. \tag{7}$$

其中函数 A 和 S 都是实函数。实际上，A 是 ψ 的模，S 除以 $\hbar$ 是 ψ 的相位。运用(2.26)式，算出的几率密度和几率流密度是

$$w=A^2 \tag{8}$$

$$\boldsymbol{j}=A^2\nabla S/m \tag{9}$$

(8)式是我们所熟知的态函数模方表示几率密度的关系。而从(9)式我们进一步揭示了，态函数相位的梯度表征着几率流的大小。例如，对于动量本征函数(5)，我们有 S 的梯度直接等于粒子动量的关系：

$$\nabla S=\boldsymbol{p}, \tag{10}$$

即在这种情况下，自由粒子的运动方向沿着等相位面(波前)的法线方向，而相位的空间变化愈陡急，则粒子的动量或速度就越大。

现在讨论一般的单粒子在势场中的运动。采用哈密顿算符(3.24)，将(7)式代入 Schrödinger 方程(3.20)，得到

$$\begin{aligned}&i\hbar\left[\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{i}{\hbar}A\frac{\partial S}{\partial t}\right]\\&=-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\nabla^2A+\frac{2i}{\hbar}\nabla A\cdot\nabla S-\frac{1}{\hbar^2}A(\nabla S)^2+\frac{i}{\hbar}A\nabla^2S\right]+AV.\end{aligned} \tag{11}$$

记得 A 和 S 都是实函数，将(11)式的实部和虚部分开来，写出两条方程：

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}(\nabla S)^2+V-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2 A}{A}=0, \tag{12}$$

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{1}{m}\nabla A\cdot\nabla S+\frac{1}{2m}A\nabla^2 S=0. \tag{13}$$

运用(8)、(9)两式，可以把(13)式整理成(2.25)的形式：

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0,$$

即几率守恒的表示。我们看到，就象从 Maxwell 方程组可以导出电荷守恒定律一样，Schrödinger 方程也包含着几率守恒定律。这一点已经在第 2.2 节提到过了。

真正引起我们关心的是(12)式。(12)式左方前三项都不含 $\hbar$，只有末项有因子 $\hbar^2$。因此，在取 $\hbar\to 0$ 的极限时，可以忽略这最后一项，近似地得到 S 满足的一条非线性方程：

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}(\nabla S)^2+V=0. \tag{14}$$

很容易看出，(14)就是经典力学里的 Hamilton-Jacobi 方程，S 对应于哈密顿主函数或者系统的作用量[32]。从(7)式可以看到，S 的确具有作用量的量纲。现在证明了，在取 $\hbar\to 0$ 的极限时，Schrödinger 方程便还原为经典力学的方程。并且，还弄清楚了，态函数 ψ 的相位乘上 $\hbar$，在经典极限下，就表现为系统的作用量。

为了进一步阐明量子力学的这种经典对应的意义，现在具体讨论哈密顿算符不显含时间 t，即定态的情形。从(3.22)的定态解看到，ψ 可以分解为仅含时间变数和仅含坐标变数的两个因子的乘积，并且时间因子就是 $\exp(-iEt/\hbar)$。由(7)式的写法，可知在这种情况下，相位函数 S 必定是空间部分和时间部分两者的和，而且时间部分就是 $-Et$。在经典力学里，这对应于哈密顿函数不

显含时间的情形，分离出时间变量，也可以将 S 表示成

$$S(x,t)=W(x)-Et. \tag{15}$$

式中的 W 称为哈密顿特征函数[32]。

本来，在 Hamilton-Jacobi 理论里，粒子的动量一般也有与(10)式相同的关系。现在，在可分离变量的情况下，由于(15)式，粒子的经典动量是[32]

$$p=\nabla S=\nabla W. \tag{16}$$

这样，从(10)式和(16)式的雷同，我们再一次看到，量子力学里用平面波态函数(5)式描写的自由粒子的动量，同粒子的经典动量是一致的。

在平面波的情况下，态函数 ψ 的相位函数 S 为常数的"等相位面"即"波阵面"，是一些与波的传播方向即粒子动量方向相垂直的平面。现在，在经典力学里，(16)式是普遍成立的，不限于自由粒子情况。即是说，即使受到势场的影响，S 为常数的等相位面不是平面而是某种曲面，该曲面的法线方向也决定着粒子的动量方向或者它的运动轨道的切线方向。再由相位函数 S 的形式(15)直接看出，S 为常数的曲面，就象光的波阵面那样随着时间迁移而在空间中向前推进着。结果，在取波长 $\lambda\to 0$ 的极限时，从光波波阵面的梯度确定出几何光线的传播方向[31]这种对应关系，就恰好类似于在取 Planck 常数 $\hbar\to 0$ 的极限时，从量子力学里描写粒子运动的态函数 ψ 的等相位面的梯度确定出粒子的经典轨道。

以上的讨论，具体而精确地体现了 Schrödinger 关于新的波动力学同旧的质点力学之间的关系，正如光的波动理论同几何光学之间的关系一样的想法。我们在 3.2 节已经提到，这是 Schrödinger 认为在他的开创性工作中占最重要地位的指导思想。樱井纯曾经对此评论道："也许有人会事后诸葛亮地感到惊奇，为什么在十九世纪竟没有充分地利用这种光学-力学的类比。其实，这是

因为那时还没有要将哈密顿主函数看做某种行波相位的动机，再说在二十世纪二十年代之前，物质粒子的波动本性还没有弄明白。此外，由于量纲的原因必须写进(7)式的作用量的基本单位 $\hbar$，在十九世纪也还没有进入物理学。”[33]

必须指出，在从波动光学过渡到几何光学时，光波波前的法线方向决定着光线行进方向这一结论，当然不是指个别光线，而是指在整个波场中所有可能的光线来说的。同样，在从量子力学到经典力学的上述过渡里，等相位曲面的法线方向决定着粒子的经典轨道这一结论，也是指 ψ 场里面所有可能的粒子轨道，而不是指个别粒子的运动而言的。所以，这里讨论的经典对应，同在波包模型基础上(Ehrenfest 定理)对个别粒子的经典对应是不相同的。这里的讨论没有把 ψ 压缩为波包，因而可以跳出局域的范围，充分运用波场的效力，得出普遍性的原则。这样，我们再一次论证了，即使在求解 Schrödinger 方程的经典对应时，波包概念也不是必要的。(当然，只讨论 ψ 的相位 S 而不顾它的模 A 是不完全的，因此我们没有把这里的初步讨论看做是系综描写。)

回顾一下，精确成立的(12)式同它的经典近似(14)式，只多了最后一项：$-(\hbar^2/2m)(\nabla^2 A/A)$。这一项表征了量子力学与 Hamilton-Jacobi 方程的本质差异。在不满足经典近似的条件下，微观粒子的运动遵循着特殊的规律，不是用经典运动所能说明得了的。这就象不能用几何光学去说明物理光学一样。在 Bohm 的量子势理论里，继承了第 3.2 节提到过的 de Broglie 的导波概念，并且在(12)式的最后一项上大做文章。他把这一项称为“量子势”，把(12)式解释为，电子除了受到具有经典形式的势 V 的影响之外，还受到最后一项量子势的影响。Bohm 等由此出发建立了一套与众不同的量子力学解释，感兴趣的读者可参阅有关的文献[34]。

这两节所讲的，在 $\hbar \to 0$ 的极限下，Schrödinger 方程近似对应于牛顿力学的运动方程或者 Hamilton-Jacobi 方程的这种关系，常常被称做是对应原理的要求。可是在历史上，“对应原理(correspondence principle)”这一名词曾经有过特定的含义。大家知道，Bohr 提出的量子论，可以比较直接地给出氢原子等的光谱线和能级的数值。但只凭简单的量子论，无法具体估算各光谱线的不同强度。当时的所谓对应原理，指的就是怎么样运用经典物理学的形式，过渡到量子论，以解决诸如光谱线的强度和偏振等的一套规则。[35]当新的动力学——量子力学建立之后，包括谱线强度和选择定则等等跃迁问题，是通过跃迁矩阵元的计算直接解出来的，不再需要运用同经典物理学的繁琐对应。况且，当时的对应原理，只有几条粗糙的框框，具体的细节还得按照不同的问题，由各人自己去发挥。在今天的量子力学和原子物理教科书上，实在是不必要也不便于讲授那种对应原理的内容。

事实上，在专治量子力学历史的文献里，早就把那时候的对应原理看做是过去年代的陈迹了。例如，Jammer 对此曾经说过：“Bohr 的对应原理……从经典公式转译到量子论的语言，通常需要大量的猜测，并且只有一条指导原则，即对应原理。它曾经以几乎是各不相同的方式运用于每一个问题。尽管它在许多方面富于成效的运用吸引了象 Bohr 那样擅于综合思考的物理学家，但它的可塑性和不严格却使象 Sommerfeld 那样更着重分析思考的理论家反感。”[35]van der Waerden 也简明扼要地指出：“在最终导致量子力学产生的 1919—1925 那些年代里的研究工作，可以说成是在对应原理指导下的系统猜测。”[36]

历史上常常有同一个术语先后表达不同内容的情况。我们觉得，今天的“对应原理”就属于这种情况。但是，它虽然叫做“原理”，可决不是独立于量子力学基本假设之外的假定。所以，一般叫做

经典极限或者经典对应就可以了。如果人家已经把量子力学的经典极限叫做“correspondence principle”，为了同原来的对应原理相区分，也许把现在的这种内容叫做“对应原则”会更好一些。

最后还要讲讲，我们说量子力学的经典对应是有条件的，这不仅指微观粒子或者量子系统的运动一般不能归结为服从经典物理学的运动，而且也反过来指，宏观物体或者经典系统的运动也不总是可以用量子力学描写的。在第 2.2 节里已经提到，微观粒子没有新旧和冷热之分，在微观世界里不存在宏观世界里不可避免的阻尼和耗散等等。例如，Greenberger 就举过阻尼振子等例子，来说明不仅许多量子系统没有经典对应，而且有些经典系统也没有量子对应。[37]他所得到的结论是，虽然历史上量子理论发展曾经得益于经典类比，但这点不是必需的，“不可以指望运用经典物理学作为出发点去重建一种满意的量子理论。”

回到上一节所讲的 Schrödinger 的猫。我们知道，一件普通的宏观物体，总是处在同环境的相互制约和影响之中。宏观物体总是同外界不断交换物质和能量，起码总有热辐射吧。它们的运动又总存在着阻尼和耗散。这些性质都是微观粒子总不具备，至少是在形式上大不相同的。我们能够用态函数 ψ 去描写宏观物体甚至一只活的动物吗？退一步讲，即使使用系综描述，我们能够说 ψ 描写的是一个“猫的系综”吗？在第三章里已经反复强调，由宏观系统组成的系综，同由微观系统组成的系综是有本质差别的。看来这里面除了上一节里已经讲过的问题之外，还有不少概念上的陷阱，需要格外小心，不宜贸然谈论猫的 ψ 函数。

Gerjuoy 曾经对此评论道：“我看不出 Schrödinger 的猫的佯谬里的问题……对我说来，侈谈象一只猫那样的宏观对象可以用波函数来描写，因而意味着活猫和死猫的振幅可以相互干涉……这种讲法是荒唐的。”因为，“猫是由大量原子组成的，在本

质上具有无规性的外界环境影响下，这些原子的总数目和总能量都在不停地涨落着。”而且，“即使箱子里的猫这一系统可以用波函数描写，我也看不出这个佯谬，因为，连续地演化着的是波函数而不是猫；……猫在它死以前完全是活生生的，然后它就完全是死沉沉的。”[38]

参 考 文 献

[1] 见[1.24]，11 页。

[2] 参看：G. Ludwig, *Foundation of Quantum Mechanics*, Vol. I, Springer (1983), § .

[3] 参看：A. Peres, *Am. J. Phys.* **52** (1984) 644.

[4] 见[2.29]，p. 92.

[5] 见[1.21]，p. 250.

[6] 同上，§ 6.1.

[7] E. P. Wigner, *Am. J. Phys.* **31** (1963) 6.

[8] 同[6]，p. 256.

[9] E. P. Wigner, [2.53].

[10] 见[2.14]，p. 335.

[11] 同上，p. 214.

[12] 例如：[1.28]，[1.15].

[13] 例如：[1.25]，[1.22].

[14] 参看[1.10]，§5.1, 6.7, 10.1.

[15] E. Schrödinger, *Naturwiss.* **23** (1935) 307. 英译文载：J. A. Wheeler, W. H. Zurek ed. [2.53], pp. 152—167.

[16] 见[1.13]，467—468 页。

[17] 见[1.17]，p. 78.

[18] 转引自[1.10]，p. 229.

[19] 见[2.14]，p. 377.

[20] 见[1.23]，pp. 75—78.

[21] 见[1.9]，14 页。

[22] 参看：[1.15]，§ 31.

[23] 见[1.24],123 页。
[24] 见[1.25],72 页。
[25] 同上,§16.
[26] 参看: H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley (1980);中文本:经典力学,陈为恂译,科学出版社(1986),§3—10.
[27] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Benjamin/Cummings (1985), p. 385.
[28] M. L. Goldberger, K. M. Watson, *Collision Theory*, John Wiley (1964), Chap. 3.
[29] 参看: L. S. Brown, *Am. J. Phys.* **40** (1972) 371; D. Home, S. Sengupta, *Am. J. Phys.* **51** (1983) 265. S. W. Qian, X. Y. Huang, *Phys. Lett.* A121 (1987) 211.
[30] 参看: [1.24], [1.22]; 又可参阅: 刘云喜,大学物理, 1986 年 9—10 期。
[31] 参看: [5.25],第三章。
[32] 参看: [26],第十章。
[33] 见[27], p. 104.
[34] D. Bohm, B. J. Hiley, *Phys. Rept.* **144** (1987) 323.
[35] 参看: [3.24], pp. 109—118, 199.
[36] B. L. van der Waerden, *Sources of Quantum Mechanics*, North-Holland (1967), p. 8.
[37] D. M. Greenberger, in *Physics as Natural Philosophy*, A. Shimony, H. Feshbach ed., MIT (1982), pp. 178-203.
[38] 见: [4.16].

第七章　新近的一些进展

7.1　Bell 不等式及其检验

1935 年，Einstein，Podolsky 和 Rosen 发表的文章《能认为量子力学对物理实在的描述是完备的吗？》[1]，为关于量子力学的争论揭开了新的一页。什么叫做“完备”呢？他们对理论的完备性所提出的条件是：“物理实在的每一个元素都必须在这物理理论中有它的对应。”而关于“物理实在”这一概念，他们给出的判据是：“要是对于一个系统没有任何干扰，我们能够确定地预测（即几率等于1）一个物理量的值，那么对应于这一物理量，必定存在着一个物理实在的元素。”

这篇文章的具体论证大致是这样的：有一个一维的量子力学系统 S，它由粒子 1 和粒子 2 组成。虽然每个粒子的坐标和动量算符，即 x_1 同 p_1，或者 x_2 同 p_2，彼此之间并不对易，但我们发现两粒子坐标之差 x_1-x_2 同动量之和 p_1+p_2 这两个算符是对易的。那么，我们总可以找到这两个算符的共同本征函数。今设态函数 Ψ 同时是算符 x_1-x_2 的本征值为 a、和算符 p_1+p_2 的本征值为 0 的本征函数，在坐标表象里它可以写成 $\delta(x_1-x_2-a)$。

现在，假设我们对粒子 1 测量其坐标 x_1，得到某一本征值 x。那么，由于粒子 1 和 2 共处在态 Ψ 中，它们的坐标之差 x_1-x_2 确定取本征值 a，我们便知道，在刚刚完成对粒子 1 的上述测量的时候，粒子 2 的坐标 x_2 必定取确定的值 $x-a$。回顾在测量之前，在

用 Ψ 描写的状态里，x_1 和 x_2 都没有确定的取值。如今，通过对 x_1 的测量，我们就能确定地(几率等于 1)预言 x_2 的取值是 $x-a$。而这里的 a，即 x_1 和 x_2 的差，可以是很大的，例如大到宏观尺度，原则上甚至可以是天文数字。按照狭义相对论，信号的传播不会大于光速。于是，只要距离 a 足够大，我们总可以认为对粒子 1 的任何测量不会对粒子2 的行为产生什么干扰。于是，按照 Einstein 的判据，就应当认为，粒子 2 的坐标 x_2 必定对应于一个物理实在的元素。

另一方面，由于 Ψ 也是 p_1+p_2 的本征值为 0 的本征函数，我们也可以在不扰动粒子 2 的条件下，通过对粒子 1 的动量 p_1 的测量(设测量值为 p)，确定地预言此时粒子 2 的动量 p_2 的取值(等于 $-p$)。这样，粒子 2 的动量 p_2，和 x_2 一样，也对应于一个物理实在的元素。同样，我们也可以反过来，通过对 x_2 和 p_2 的测量，确定地预言 x_1 和 p_1 的取值。亦即是说，粒子 1 的坐标 x_1 和动量 p_1 亦分别对应于物理实在的元素。可是，按照量子力学，坐标和动量 x_1 和 p_1，或者 x_2 和 p_2 都是不对易的，因此它们一般不可能同时具有确定的取值，也就不可能对应于两个独立的物理实在的元素。以上这种相互矛盾的结论，一般称为“EPR 悖论”。按照 Einstein 的意见[2]：“这个悖论迫使我们放弃下述两个论断之一：(1)用 Ψ 函数所作的描述是完备的；(2)空间上分隔开的客体的实在状态是彼此独立的。……如果人们认为 Ψ 函数是关于(统计)系综的描述，那就可以坚持(2)，因而也就要放弃(1)。”这样，Einstein 就作出量子力学描述是不完备的结论，并且认为完备描述的理论尚有待于将来发现。他的出发点就是上面所引的第(2)点关于分隔开的两个子系统具有独立的物理实在性这一信念，一般把这种看法叫做“定域实在论”。

EPR 的文章很快引起了巨大的反响[3]。其中最有影响的是

Bohr 的反驳[4]。Bohr 在他的文章里从互补原理出发，指出在 Einstein 的论证里，认为对粒子 1 的测量不会干扰到粒子2的看法是站不住脚的。Bohr 认为，正象测量仪器对微观系统的干扰使得后者失去经典意义的独立性，因而必须把两者当做不可分割的整体来考虑一样，粒子 1 和粒子 2 虽然在空间上分隔开来，但它们既然共处于系统 S 之中，就必须看做是一个整体，而不可以看做是互相独立的两个部分。亦即是说，Bohr 认为经典物理学里的“可分离性”，对于微观系统的两个部分是不适用的，因而 Einstein 的“实在性判据”是不能接受的。这样，Bohr 就用微观系统从根本上的“不可分离性”否定了 Einstein 的问题。

Einstein 没有服输，直到晚年，还同 Bohr 争论不休[5]。可是，他们之间还只是一场纯观念上的争论。况且，EPR 文章所举的例子里，所用的态函数 Ψ 虽然在数学上是可能的，但谁也想不出怎样实现这种两个粒子有着相反方向的动量，又始终保持一定距离的臆想的追随运动。难怪好多人把这场争论只当做是一场不会有结果的空谈。

1951 年出现了转机。这一年 Bohm 在他的教科书里把 EPR 理想实验里两个粒子的坐标和动量，改换为不同的自旋分量[6]，为进一步的研究铺平了道路。Bohm 论证的要点如下：设有两个自旋都是 $\hbar/2$ 的粒子，组成一个系统 S。又设 S 处在总自旋为零的状态(单态)。我们知道，单态是两个粒子的自旋反平行的状态。那么，如果组成 S 的两个粒子分开了一定的距离后，我们测量粒子 1 的自旋的 z 分量(除以 $\hbar/2$)σ_{1z}，得到其本征值 $+1$(或 -1)，就可以确定地预言这时粒子 2 的 σ_{2z} 必定取值 -1(或 $+1$)。对于 x 方向和 y 方向上的自旋分量，可以作出同样的论证。于是，我们就可以在不干扰粒子 2 的情况下，通过测量粒子 1 的三个自旋分量 σ_{1x}，σ_{1y} 和 σ_{1z}，分别确定地预言粒子 2 的相应自旋分量 σ_{2x}，σ_{2y}

和 σ_{2z} 的取值。按照 EPR 的判据，就可以认为粒子 2(或者粒子 1)的三个自旋分量都对应于独立的物理实在的元素。可是，按照量子力学，一个粒子的三个自旋分量并不对易，因此它们一般不可能同时采取确定的数值，亦即不可能同时都对应于物理实在的元素。所以，用粒子的三个自旋分量代替它的坐标和动量，同样可以作出 EPR 关于量子力学描述的不完备性的论证。

我们知道，处在单态的系统 S 里的粒子 1 或粒子 2，在任意方向上的自旋分量都没有确定的数值。事实上每个粒子的自旋分量取 $+1$ 和 -1 的几率都是 1/2。那么，当测量了粒子 1 的自旋分量为 $+1$ 的时候，粒子 2 怎么"知道"这一点而马上决定取相反的值 -1 呢？这一点的确很难从经典物理学的观念得到理解。然而，尽管解释上有分歧，争论双方对这种沿同一方向上粒子 1 和 2 的自旋分量负关联的性质是没有异议的。整个问题仍然停留在哲理性讨论的水平上。

真正的突破是 Bell 在六十年代中期做出的。事情要从隐变量理论的反复起落谈起[7]。我们在第 1.2 和 3.2 节已经先后提到，量子力学诞生的早期，就有过隐变量理论的尝试，认为量子力学的统计性质是一种由更深层次的隐变量决定的表观现象。可是，1932 年 von Neumann在他的名著[8]里证明了，如果在态函数之外还存在着隐变量，就不可能与量子力学的基本假设相容；因而，量子力学是一个完备的理论。在这一权威性的结论面前，各种隐变量理论很快消声匿迹了。虽然，EPR 关于量子力学完备性的质疑，在一定程度上是冲着 von Neumann 而发出的。

1952 年，Bohm 指出 von Neumann 关于隐变量解释的"不可能证明"存在漏洞，并且提出了一种新的隐变量理论。[9]从此又开展了一场新的争论，一方不断发展出各种隐变量理论，另一方则努力补救von Neumann 的证明，一时胜负未分。

在这样的背景下，1964 年夏天和秋天，Bell 先后写成了两篇文章。第一篇文章《关于量子力学的隐变量问题》[10]，严格分析了争论双方的观点，普遍地论证了 von Neumann 等人的“不可能证明”的前提是不能成立的。因此，不能仅从形式上否定具有可分离性的定域隐变量理论。

Bell 在另一篇文章《关于 EPR 悖论》里[11]，进一步提出了可以用来实际检验隐变量解释同通常的量子力学孰是孰非的一种方法，使关于量子力学解释的争论从理想到现实，跨出了决定性的一步。

在这篇文章里，Bell 继承了 Bohm 对 EPR 悖论的复述讨论的是由两个自旋 $\hbar/2$ 的粒子组成的单态系统。但他没有停留在前人的水平上，而是巧妙地通过两个粒子在不同方向上自旋分量的关联，得出了可供检验的“Bell 不等式”。以下是他推导的要点：

设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为沿空间任意两个方向的单位矢量。粒子 1 沿 $\boldsymbol{a}$ 方向的自旋分量 $\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{a}$ 的测量值是 $A(\boldsymbol{a})$，粒子 2 沿 $\boldsymbol{b}$ 方向的自旋分量 $\boldsymbol{\sigma}_2\cdot\boldsymbol{b}$ 的测量值是 $B(\boldsymbol{b})$。由于两个粒子的自旋都是 $\hbar/2$，所以测量值 $A(\boldsymbol{a})$和 $B(\boldsymbol{b})$都只能是 $+1$ 或 -1。(由于光子只有两个独立的偏振分量，所以也适用于下面的讨论。)

在隐变量理论里，认为 $A(\boldsymbol{a})$和 $B(\boldsymbol{b})$都是由隐变量 λ 按一定的函数关系决定的，亦即是

$$A(\boldsymbol{a},\lambda)=\pm 1,\quad B(\boldsymbol{b},\lambda)=\pm 1. \tag{1}$$

(1)式的意思是 λ 取某些数值时测量值是 $+1$，λ 取其他数值时测量值是 -1。同时，(1)式里的两个式子是独立的。这意味着粒子 1 的取值 A 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向无关，同样，粒子 2 的取值 B 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向无关。这一点体现了粒子 1 和 2 的可分离性，因而这是一种定域隐变量模型。

设 $\rho(\lambda)$是对 λ 的几率分布函数。那么，按照隐变量理论，粒

子 1 在 $\boldsymbol{a}$ 方向的自旋分量 $\sigma_1\cdot\boldsymbol{a}$ 同粒子 2 在 $\boldsymbol{b}$ 方向的自旋分量 $\sigma_2\cdot\boldsymbol{b}$ 的关联函数是

$$P(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\int d\lambda\rho(\lambda)A(\boldsymbol{a},\lambda)B(\boldsymbol{b},\lambda). \tag{2}$$

今设 $\boldsymbol{a}'$ 和 $\boldsymbol{b}'$ 为对粒子 1 和粒子 2 测量自旋分量的另外两个任意方向上的单位矢量，运用(2)式，得到

$$\begin{aligned}P(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})-P(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}')&=\int d\lambda\rho(\lambda)[A(\boldsymbol{a},\lambda)B(\boldsymbol{b},\lambda)\\&\quad-A(\boldsymbol{a},\lambda)B(\boldsymbol{b}',\lambda)]\\&=\int d\lambda\rho(\lambda)A(\boldsymbol{a},\lambda)B(\boldsymbol{b},\lambda)[1\pm A(\boldsymbol{a}',\lambda)B(\boldsymbol{b}',\lambda)]\\&\quad-\int d\lambda\rho(\lambda)A(\boldsymbol{a},\lambda)B(\boldsymbol{b}',\lambda)[1\pm A(\boldsymbol{a}',\lambda)B(b,\lambda)].\end{aligned} \tag{3}$$

由于(1)式，下述不等式成立：

$$A(\boldsymbol{a},\lambda)B(\boldsymbol{b},\lambda)\leqslant 1,\quad A(\boldsymbol{a},\lambda)B(\boldsymbol{b}',\lambda)\geqslant -1,$$

因此可将(3)式改写成

$$\begin{aligned}|P(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})-P(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}')|&\leqslant\int d\lambda\rho(\lambda)[1\pm A(\boldsymbol{a}',\lambda)B(\boldsymbol{b}',\lambda)]\\&\quad+\int d\lambda\rho(\lambda)[1\pm A(\boldsymbol{a}',\lambda)B(\boldsymbol{b},\lambda)].\end{aligned}$$

再运用(2)式，结果得到

$$|P(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})-P(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}')|\leqslant 2\pm[P(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}')+P(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b})]. \tag{4}$$

这就是一般形式的 Bell 不等式。式中的 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}'$ 和 $\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b}'$ 是空间的四个任意方向。

当粒子 1 和 2 共处于总自旋为零的单态时，粒子 1 和 2 沿同一方向的自旋分量总是相反的，即对于任何方向 $\boldsymbol{a}$，有

$$A(\boldsymbol{a},\lambda)=-B(\boldsymbol{a},\lambda) \tag{5}$$

将(5)式代入(2)式，对于归一化的 $\rho(\lambda)$，得到

$$P(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})=-1, \tag{6}$$

体现了处在单态的两个粒子自旋分量 100% 的负关联。

那么，对(4)式取 $a'=b'$，代入(6)式，便得到

$$|P(a,b)-P(a,b')|\leqslant 1+P(b,b'). \tag{7}$$

这就是对单态适用的、原始形式的 Bell 不等式。

另一方面，运用系统 S 的单态自旋函数，不难算出两个粒子的自旋关联函数的取值是

$$P(a,b)=\langle(\sigma_1\cdot a)(\sigma_2\cdot a)\rangle_{单态}=-\cos(a,b). \tag{8}$$

将(8)式代入(7)式，便得到

$$|\cos(a,b)-\cos(a,b')|\leqslant 1-\cos(b,b'). \tag{9}$$

选择适当的角度，容易看出，(9)式一般并不满足。例如，当 a 与 b 垂直，即 $\cos(a,b)=0$ 时，(a,b')和(b,b')两个角互为余角，于是(9)式变成以下形式

$$|\sin\theta|\leqslant 1-\cos\theta, \tag{10}$$

对于小的 θ，(10)式自然不成立。这一矛盾说明，根据量子力学算出的(8)式同根据定域隐变量理论算出的(7)式是不相容的。于是，Bell 下结论说："最少对一个量子力学态……即单态说来，量子力学的统计预言同可分离性的假定是不相容的。"[11]

Bell 的工作引起了广泛的注意，很快发表了用不同方法的推导工作。这些工作一方面弄清楚了，Bell 的结论实际上并不依赖于隐变量解释，而只需要"定域性"即"可分离性"的基本假定；另一方面，还给出了一些更便于进行实际检验的、推广了的 Bell 不等式[12]。

从七十年代初开始，各国物理学家陆续完成了十多项检验 Bell 不等式的实验工作[13]。主要有三种实验，一是原子级联辐射的两个光子的偏振关联分析，二是由电子偶素湮灭而产生的两个 γ 光子的偏振关联分析，三是质子-质子散射的自旋关联分析。这些工作的大多数结果都明显违反 Bell 不等式，而与量子力学预言

相符合。

由于对可见光的检测技术最为成熟，大部分实验是用原子级联辐射做的，其中最成功的是 Aspect 等人 1982 年完成的一个实验，简单介绍如下：[14]

如图 18 所示，从钙原子源发出的级联光子对，向左右两侧飞出。每一侧经过约 6 米的距离后，到达一个声光开关。左右两侧的开关独立并且随机地把接收到的光子，分别投给沿 a 或 a' 和沿 b 或 b' 方向安置的两对偏振器。然后，放在偏振器后面的 4 个光电倍增管，将接收到的信号送到符合监测器。这样就可以测量和分析对侧的任意两个方向之间的偏振关联，即符合计数率 $N(a,b)$，$N(a,b')$，$N(a',b)$ 和 $N(a',b')$，检验它们是否满足以下的广义 Bell 不等式：

$$-1\leqslant S\leqslant 0,\ \text{其中}$$

$$S=\frac{N(a,b)}{N(\infty,\infty)}-\frac{N(a,b')}{N(\infty,\infty')}+\frac{N(a'b)}{N(\infty',\infty)}$$
$$+\frac{N(a',b')}{N(\infty',\infty')}-\frac{N(a',\infty)}{N(\infty',\infty)}-\frac{N(\infty,b)}{N(\infty,\infty)} \qquad (11)$$

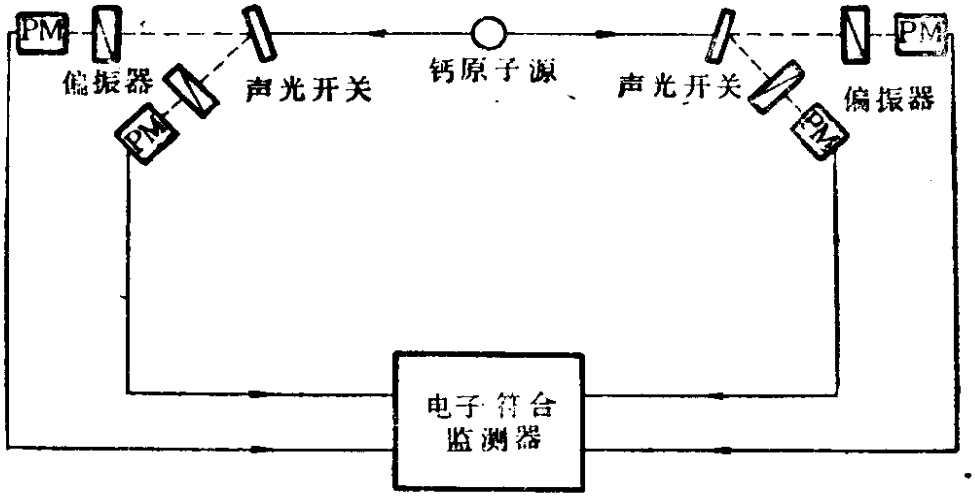


图 18　Aspect 实验装置图(图中PM是光电倍增器)

式中每项分母表示4个偏振器全部取走时的符合率，而最后两项分子则表示有一侧取走一个偏振器时的符合率。

实验所取的角度是$(a,\ b)=(b,\ a')=(a',\ b')=22.5°$和$(a,b')=67.5°$，所得到的结果是$S=0.101\pm0.020$，与Bell不等式(11)的要求偏离5个标准差。而根据他们仪器装置的具体情况，用量子力学算出是$S=0.112$，与实验结果很好地符合。

这一实验的关键是使用了转换时间大约是10^{-8}秒的快速声光开关。这一时间比光在仪器内的传播时间短得多，"所以在一侧上的检测事件同另一侧上相应的取向变化是被一个类空间隔分离开的。"[14]因此，只要不存在超光速的相互作用，就保证了满足(1)式所隐含的定域性条件。于是，这一实验结果公认为比以往所有对两侧固定取向的关联测量更有说服力。

一般认为，Aspect等人实验的结果，确认了量子力学系统的不可分离性，否定了定域隐变量模型等以可分离性为基础的理论。但在这问题上仍然有各种不同的进一步解释。有人认为，偏振关联实验表明了系统各成员之间存在着一种超光速传播的影响，因而需要在微观领域内修改狭义相对论。有人争辩说，关联并不意味着存在相互作用。例如，玻色子气体和费米子气体可以仅仅由于不同的统计性质而表现出不同的行为，并不一定要用相互作用去解释。还有人认为尽管否定了定域隐变量理论，但仍然可以有非定域的隐变量理论等等。在这些问题上正开展着热烈的讨论[15,16]。

据说，Josephson曾经把Bell不等式誉为物理学上最重要的新近进展[17]。我们觉得这是有一定道理的。同时我们也要指出，有一种说法认为关于Bell不等式的检验已经完全解决了关于量子力学解释的长期争论，并且已经裁定Bohr的观点大获全胜，而Einstein的观点则一败涂地，这是一种误解。事实上，Bell和

Aspect 两人都很谨慎，只把有关的实验结果看做是关于 Einstein 的可分离性或者是否存在超距作用等有局限意义的检验，没有看成是对 Einstein 关于量子力学观点的全面检验[17]。我们想，应当说 Bell 工作的重要意义正在于开拓了一个新的研究方向，而决不是结束这方面的讨论。

7.2 Aharonov-Bohm 效应[18]

Feynman 曾经讲过："当我们从经典力学过渡到量子力学时，关于哪些概念是重要的看法，发生了好些改变。……特别是，力的概念逐渐淡薄了，而能量和动量的概念变得头等重要。……我们在量子力学中处理的不是质点的运动，而是在空间和时间中变动的几率幅。而这些振幅的波长与动量相对应，且频率与能量相对应。因此，确定波函数相位的动量和能量就是量子力学里重要的量。……力的观念变得完全是第二位的——如果还有人用它的话。"[19]的确，量子力学是使用哈密顿函数的形式表示的，也就是在能量-动量表象中描述的[20]。在上一章已经看到，只在特殊情况下，它才可以还原为 Newton 的质点力学。一般地说，量子理论不需要用力的语言。不仅如此，在六十年代初还发现了完全不能使用力的语言描述的量子干涉现象，这就是本节所要介绍的。

我们先回到电子衍射实验。在第 3.4 节里已经提到，在量子力学建立后的三十年内，电子双缝衍射还只是一种理想实验。第一个用人工的宏观装置而不是用晶体点阵来实现电子衍射的是 Boersch，他在四十年代初用 MgO 晶体边缘所做的电子直棱衍射，得出与可见光的类似现象形式相同的衍射图样[21]。这应当是不依赖于晶体结构知识的、对实物粒子的 de Broglie 波的最早的直接证据。

五十年代中期，Möllenstadt 等通过电子光学的手段，仿照

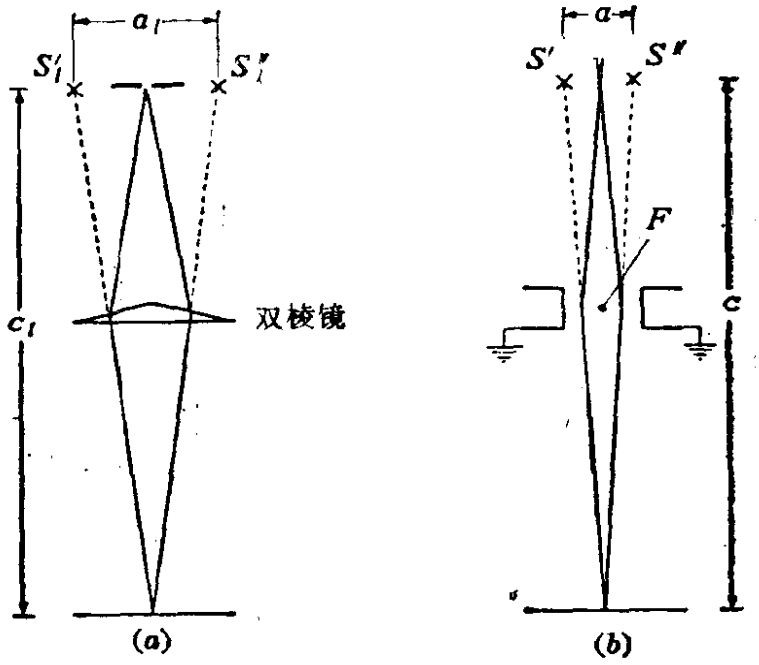


图 19

(*a*) 光学双棱镜; (*b*) 静电双棱镜。*F*是导电纤维，对地取正电位。

Fresnel 双棱镜，运用静电双棱镜(图 19)装置，首次实现了电子双缝衍射[22]。1961 年，Jönsson 又发明了一种新工艺，制成微米级的铜质栅片，实现了电子单缝和多缝衍射[23]。这些实验的成功，直接证实了 de Broglie 波假说的正确性，也为下一步的进展准备了条件。

1959 年，Aharonov 和 Bohm 指出，在围禁起来的磁场附近通过的带电粒子，它们的行为会受到影响而表现出可以观察到的物理效应。这就是 Aharonov-Bohm 效应，简称 A-B 效应。[24]

以静磁场为例。设空间中有一根无限长的理想螺线管，其表面有电流 I 流过。那么，我们知道，这时磁场 $\boldsymbol{B}$ 围禁在螺线管内，而在管外 $\boldsymbol{B}=0$。但由于 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$，可知管外区域仍然存在着环状分布的非零矢势场 $\boldsymbol{A}$。一根细长螺线管或棒状磁体中部附近，就近似地是这样一种场 $\boldsymbol{B}$ 为零而势 $\boldsymbol{A}$ 非零的区域。(见图 20)

设在无外场时，电子的定态 Schrödinger 方程的解是 ψ_0，它

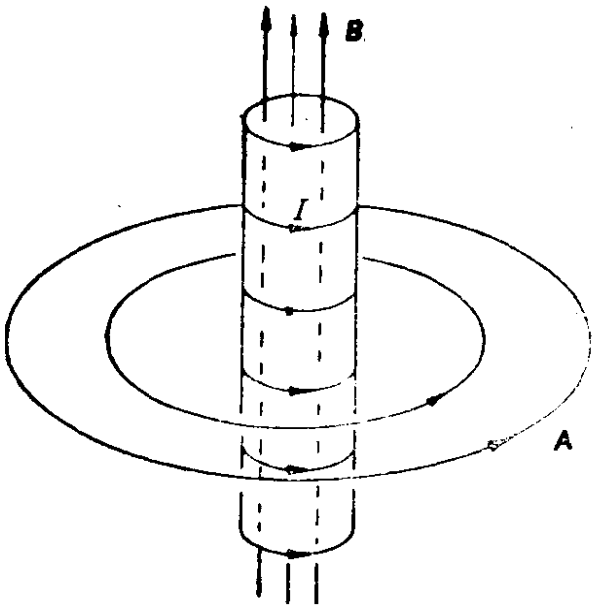


图 20　螺线管的场

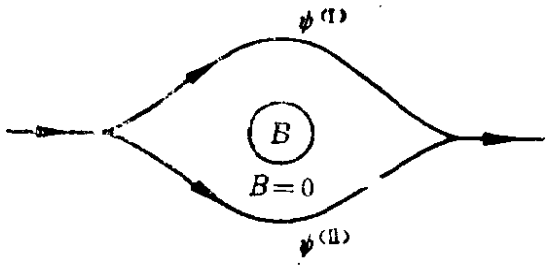


图 21　A-B效应

满足

$$\left(\frac{1}{2m}\boldsymbol{p}^2+U\right)\psi_0=E\psi_0. \tag{12}$$

我们知道，当存在以矢势 $\boldsymbol{A}$ 描写的外场时，Schrödinger 方程变成

$$\left[\frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2+U\right]\psi=E\psi, \tag{13}$$

式中 e 是粒子的电荷。不难证明，方程(13)有以下的解：

$$\psi(\boldsymbol{x})=\psi_0(\boldsymbol{x})e^{i\phi(\boldsymbol{x})}, \tag{14}$$

$$\phi(\boldsymbol{x})\equiv\frac{e}{\hbar c}\int_{\ell}^{x}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}. \tag{15}$$

上述结果表明，外场存在的唯一效果是使态函数 ψ 比无外场时的 ψ_0 多了一个相位因子 $e^{i\phi}$。从相位函数 ϕ 的定义式(15)可以看出，当空间存在磁场时，相位 ϕ 会与积分路径有关。按 Aharonov 和 Bohm 的设计，如图 21 所示，将一电子束分成相干的两分束 I 和 II，让它们分别绕过长螺线管两侧 $\boldsymbol{B}=0$ 而 $\boldsymbol{A}\neq 0$ 的区域，然后再复合，就可以观察到两分束沿不同路径的相位差所造成的

干涉效应。具体推导如下：

设螺线管内无磁场时，沿路径 I 和 II 通过的电子态函数分别是 $\psi_0^{(\mathrm{I})}$ 和 $\psi_0^{(\mathrm{II})}$，有场时相应的态函数是 $\psi^{(\mathrm{I})}$ 和 $\psi^{(\mathrm{II})}$。那么，按照(14)、(15)式，有

$$\psi^{(\mathrm{I})}=\psi_0^{(\mathrm{I})}\exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\int_{\mathrm{I}}A\cdot dl\right),$$

$$\psi^{(\mathrm{II})}=\psi_0^{(\mathrm{II})}\exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\int_{\mathrm{II}}A\cdot dl\right).$$

两分束复合处的态函数应当是

$$\psi=\psi^{(\mathrm{I})}+\psi^{(\mathrm{II})}=(\psi_0^{(\mathrm{I})}+\psi_0^{(\mathrm{II})}e^{i\eta})\cdot\exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\int_{\mathrm{I}}A\cdot dl\right). \tag{16}$$

(16)式最后的公共相位因子不会有观察效果，真正有意义的只是相位差 η，它等于

$$\eta=\frac{e}{\hbar c}\left(\int_{\mathrm{I}}-\int_{\mathrm{I}}\right)A\cdot dl=\frac{e}{\hbar c}\oint_C A\cdot dl. \tag{17}$$

上式最后一个积分的回路 C，就是图 21 上沿顺时针方向所走的闭合回路。再运用 Stokes 定理，可以把(17)式改写成

$$\eta=\frac{e}{\hbar c}\iint B\cdot d\tau\equiv\frac{e}{\hbar c}\Phi. \tag{18}$$

式中的 Φ 代表回路 C 所包围的磁通量。在我们所讨论的情况下，因为螺线管外没有磁场，Φ 也就是螺线管内的磁通量。于是，控制螺线管内磁通 Φ 的大小，从而改变相位差 η，就可以观察到衍射条纹移动的干涉效应。并且，从(18)式看出，当磁通量的变化为 $\Delta\Phi=hc/e$ 时，η 的改变量为 2π，衍射条纹正好移动一个周期。

必须指出，这里所讲的Aharonov-Bohm效应是一种纯量子现象。在图 21 的布置里，I 和 II 两条路径上都没有磁场，所以电子不会经受 Lorentz 力而发生偏移，干涉效应完全是电子态函数的相位差而引起的。这种效应具体表现为衍射条纹相对于其包迹线

的移动，而双缝衍射的包迹线保持不动。相反，如果磁场不是围禁在当中一个小区域，而是均匀地充满了整个空间，那么，按照以上的推导，也会出现衍射条纹在空间中的移动。可是，由于这时电子在每条路径上都受到 Lorentz 力而产生同一方向的偏转，结果衍射条纹的包迹线随着条纹一起同步移动，表现为整个衍射图样的平行移动。这后一种现象与 A-B 效应不同，它(至少部分地)是容易从经典物理学得到解释的。

在 Aharonov 和 Bohm 的文章发表之后，这一效应很快就得到实验上的证实。Chambers[25]最先在静电双棱镜的直径为 1.5 微米的导电纤维的后方(即图 19a 中 F 的下方)阴影处，平行放置一根直径 1 微米的铁晶须，首次观察到在电子双缝衍射装置中，被围禁的磁通的变化所引起的衍射条纹相对于其包迹线的移动。接着，Boersch 等又在导电纤维的后半部淀积上坡莫合金层，也观察到了相同的效应[26]。与此同时，Möllenstedt 等使用直径约 20 微米的微型螺线管来做实验[2]。因为在图19所示的简单型静电棱镜中，两束电子只能拉开有限的距离，放不下这么大的螺线管，这次他们使用了由三根导电纤维组成的棱镜系统，如图 22 所示。图中的螺线管放在两侧电子束接触不到的位置上，U 形铁轭是用来引导螺线管磁通回路的。这样，调节螺线管磁通量是很方便的，从而使这个实验得以首次验证衍射条纹移动的周期对应于 hc/e

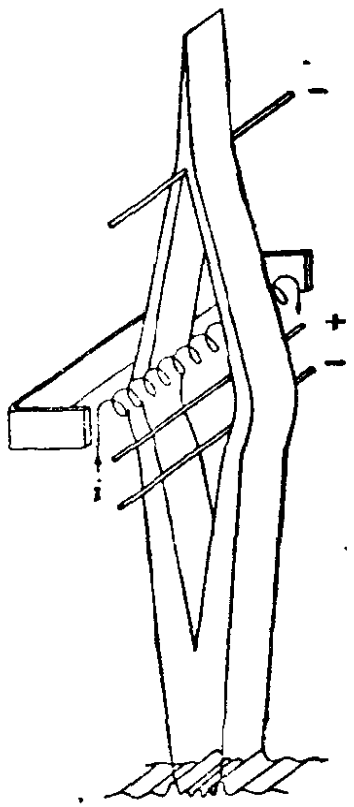


图 22　A-B 效应实验装置

的磁通变化。

Wigner 早在 1959 年就讲过，A-B 效应必定能够观察得到，否则量子力学就要改写了。那么，在其后的两三年内上面所说的一批实验结果，更使多数物理学家确信 A-B 效应的存在。可是，同时也有一些反对者，想方设法用经典电动力学去解释这一效应，不承认是一种新的现象。例如，有一种意见认为，所观察到的条纹移动，不过是因为实验装置不够理想，存在着漏磁对电子运动的影响的缘故。

为了消除漏磁的影响，最好不用实际上只能是有限长的螺线管或直磁体，而使用环形磁体。1982 年，Tonomura 等[28]就用了一个直径约 6 微米的环状坡莫合金薄膜做成的磁体来验证 A-B 效应。这次不能再用双缝衍射，而是将穿过环状磁体的电子束与从旁边经过的参考束会聚后，再通过一个静电棱镜，观察得出的电子全息图中的干涉条纹。最近，为了进一步回答批评者的指责，Tonomura 等又做了一件新的工作[29]。在这个新实验里，他们用超导薄膜把环状磁体完全包围起来，使得磁场完全围禁在磁体内部，结果定量地证实了 A-B 效应的存在，同时验证了磁通量子化效应。这一工作已被认为是对于 A-B 效应的最有说服力的证据。

环状超导体内的磁通量子化效应是 1961 年发现的。杨振宁等立即指出[30]，超导体内的电子能级受到不存在于体内的磁场的影响，这正是 A-B 效应的体现。的确，由于 Meissner 效应，超导环体里是没有磁场的。但环体中空部分的磁场，要求环体内部存在着矢势。那么，由相位函数(17)式满足的周期性边界条件，马上可以推出环体当中的磁通量，只能是 $hc/2e$ 的整数倍。这一结果与由(18)式得出推论的数量上的差异，仅在于超导体内的电子对用 $2e$ 代替了单个电子的电荷 e。

不久，Jaklevic 等[31]又在并联的两个 Josephson 结之间的中

空处施加磁场，当所加磁通 Φ 不断增加时，观察到总电流出现周期性的变化，并且这一周期正是(18)式所要求的 hc/e。这就很好地证实了两支路的超导隧道电流相互干涉所表现的 A-B 效应。这一工作进一步证实了，不仅是自由电子，而且束缚态中的电子也会有 A-B 效应。

新近Webb 等[32]还在非超导的无序金属中发现了 A-B 效应。他们用微光刻技术制成直径小于 1 微米的无序金属的圆环，它的几何构造同图 21 很相似。电流从一端流入，从另一端流出，环的中间施加可变的磁场。他们发现样品磁阻的变化是周期性的，而且这一周期正好是 A-B 效应所要求的磁通单位 hc/e。这里所涉及的既不是自由电子，也不是超导体内的电子对，干涉现象肯定是由新的机制引起的。这一方面的进展引起了人们的浓厚兴趣。

以上所讲的几个实验，以及一些没有提到的实验，已经确定地证实了 A-B 效应的存在，尽管这些实验在细节上也许还有值得研究的地方。早在二十年前，A-B 效应的内容已经写进了一些量子力学教科书里[33]。无论如何，从前认为电子通过场强为零的区域时，它的行为不会受到影响的观念。已被证明为不适当的。围禁起来的磁通，会对在它两侧通过的电子的状态发生影响，从而产生可观察的物理效应。在这里，电子只通过场为零而势非零的区域，并没有闯到围禁着的磁通里面去。这样，如果我们不相信任何场强的超距作用的话，就只好承认真正作用于电子的是矢势 $\boldsymbol{A}$ 而不是磁场 $\boldsymbol{B}$。过去，受到牛顿力学的局限，基于 Lorentz 力公式而认为描写电子运动所受到影响全在于与加速度相关的电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{B}$，而矢势 $\boldsymbol{A}$ 和标势 φ 不过是方便描写的数学工具。这种看法无法对 A-B 效应作出满意的解释。现在应当反过来，确认矢势 $\boldsymbol{A}$ 和标势 φ 才是具有普遍意义的物理量，而电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{B}$ 的

描写是有局限的。本来，量子理论一开始就不需要加速度和力的概念，从(13)式所表示的哈密顿算符的形式就清楚地看出，矢量势 A 和标量势 φ 是同动量和能量紧密地联系在一起的。过去在经典力学里，力的表象同能量表象是两种互相等效的表述。今天，A-B 效应的实验证实，已经证明了能量表象是物理学里普遍适用的，而力的表象是有局限的[20]。因此，应当认为通过量子力学里的 A-B 效应，对于物理学里什么是最重要的基本概念的认识是有所突破的。

除了本节所讲的与矢势 A 相关的围禁磁通的 A-B 效应之外，还会存在与标势 φ 相关的围禁电通量的 A-B 效应；此外，对于束缚态的 A-B 效应，以及是否不仅在干涉现象，而且在散射过程里也存在着可以观察到的 A-B 效应等等问题，都在进行着热烈的讨论。这些方面的详细情况，请参阅最近的总结性文献[24]。

7.3 中子干涉术[18]

凡是上一节所讲到的各种电子光学现象，原则上都可以有相对应的中子光学现象。两者的差别，仅在于电子带电荷而中子是电中性的。因此，对中子不能象电子那样使用电磁偏转的办法来构造所需要的光具组。此外，具有足够强度和合适能量的中子源也不是随便可以找到的。从这些方面看，中子光学的实验要困难得多。一般说来，同电子光学的相应实验作比较，中子光学的类似实验晚了好些年才能实现。

事实上，尽管在 1932 年发现中子之后不久，即 1936 年就成功地实现了中子在晶体表面上的衍射，但中子光学的重要进展，很多是在六十年代末到八十年代初这段时间才实现的。这里指的不仅是受宏观障碍物的衍射，如中子的直棱衍射、单缝衍射和双缝衍射等实验，而且也指中子的棱镜折射、透镜会聚等几何光学范围内

的实验[34]。

至于讲到干涉，1962 年 Maier-Leibnitz 和 Springer 把经过一只 Fresnel 双面镜分解的中子束，再用由一对石英棱镜构成的 Fresnel 双棱镜会聚，做成了第一台中子干涉仪。它实际上就是上一节所讲的 Möllenstedt 的静电棱镜系统的对应物。这种“波前分割”式的干涉仪以及后来的改进型，同上一节的电子光学装置一样，只能把两部分粒子束拉开几十微米的间距。因此，我们很难单独对其中一分束进行处理，改变它的相位，而不扰动另外一分束的状态。所以，这种类型的干涉仪的应用是极为有限的[34]。

另一方面，正由于中子没有电荷，因而它象 x 射线一样具有较强的穿透能力。利用这一性质以及它穿过晶体的衍射效应，可以得到其功用类似于光学半透镜那样的中子分束器，结果制成了“振幅分割”式的中子干涉仪。这种中子干涉仪开发了一种新的实验手段，已经取得了几项重要的成果。这又是电子光学实验所不可企及的。

由于电子工业的发展，提供了大块的无位错单晶材料，为这种新型的中子干涉仪准备了必需的物质条件。以下我们所讲的就专指这一类型的中子干涉仪。它的构造如图 23 所示。干涉仪的核心部件由一块长约 8 厘米，直径约 5 厘米的单晶硅加工而成。削去了多余的部分后，剩下一个底座和在它上面竖立着的前、中、后三块耳片。整个形状有点象中国的笔架。三块耳片相互平行而且等距，它们的法线沿适当的晶轴方向。设入射中子束沿 Bragg 角 θ 射到前耳 A 点。那么，在中子束穿透厚度为几毫米的前耳片后，它将分解为两束，即沿原来方向前进的透射束 AB_1，和与晶面法线方向呈对称角度射出的衍射束 AB_2。这一现象称为 Borrmann 效应，已经在 x 射线的衍射中研究清楚了[35]。这两分束穿过中

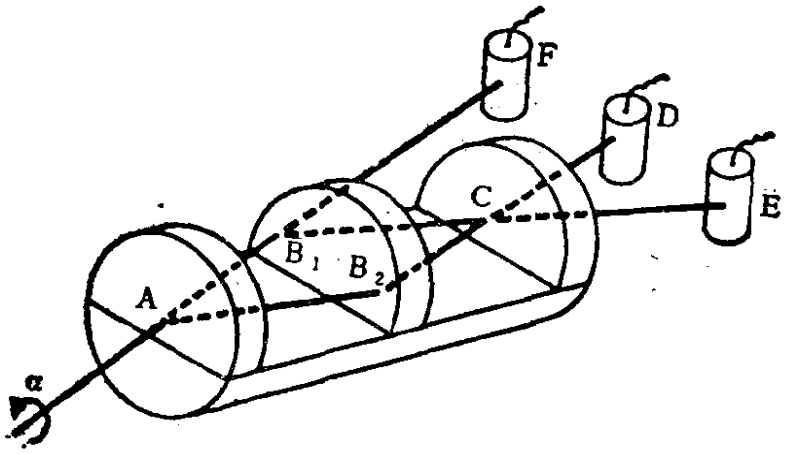


图 23　中子干涉仪的结构

耳后，它们的次生衍射束便会重新于后耳的C点复合而发生干涉。图中D，E和F是三个中子探测器，其中D和E接收经过干涉后的中子束，F接收未经干涉的参考束。可以证明，当两支路中子束的相位差为ϕ时，探测器D和F接收到的中子强度分别是[36]

$$I_D=a(1+\cos\phi),$$
$$I_E=b-a\cos\phi。 \tag{19}$$

其中的常数a和b决定于入射束强度、晶体结构和中子对硅核的散射长度。于是，当相位差ϕ改变时，单独使用探测器D或E，就可以观察到干涉效应。

整个中子干涉仪，很象是传统光学里Mach-Zehnder干涉仪[37]的翻版。现在，限制两分束间距的，只是所能得到的单晶材料的尺寸。因为，整个器件必须从一块单晶切割而成，这样两分束才能自始至终保持相干。已经达到的几厘米间距，足够使物理学家们在这上面大显身手了。

事实上，这种干涉仪最先是Bonse等用于x射线取得成功的[38]。后来，他和Rauch等合作，把这一技术移植到波长相近的中子束。1974年，他们在中子干涉仪的两条支路里插入厚度

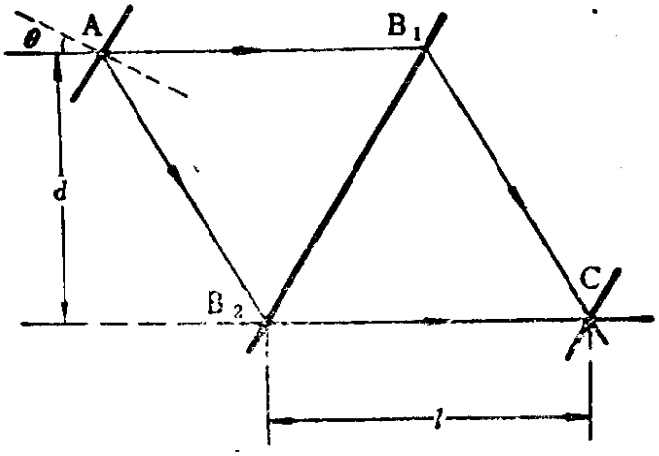


图 24　中子干涉仪平面图

不同的铝片，以改变其相位差，首次观察到干涉效应[39]。

很快，Colella, Overhauser 和 Werner 就运用中子干涉技术，观察到由引力引起的量子干涉效应[40]。以下主要介绍这种引力干涉实验。

上一节里关于矢势 A 的 A-B 效应的讨论，不难推广到标势 φ，即当电子束的两个分束在不同的静电势影响下的 A-B 效应。那么，由于引力势和静电势具有相同的形式(都是反平方力)，可以预料到必定也存在着引力势差所引起的量子干涉效应。事实上，当势 U 可以当成微扰量，即在准自由粒子的情况下，可以证明，Schrödinger 方程(12)有下述形式的解[41]：

$$\psi = e^{i\,k\cdot r}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int U dt\right). \tag{20}$$

可见势 U 的差也表现在态函数的位相上。

实际上，对于准自由粒子，也可以只用到 de Broglie 波的概念去解决这一问题，而不必去解 Schrödinger 方程。现在我们就引力干涉的具体情况进行推导。如图 24 所示，实验中保持入射方向 AB_1 在水平方向，整个干涉仪在保持 Bragg 角 θ 不变的情况下绕 AB_1 轴转动。设从水平布置开始算起的转角是 α，那么在图 24 所

示干涉仪平面上的重力加速度分量是 $g=g_0\sin\alpha$，其中 g_0 是通常的重力加速度。图 24 中忽略了各耳片的厚度。那么，两支分束的路径 I 和 II 正好围成一个菱形。设这个菱形的边长是 l，高是 d，那么它的面积就是 $A=ld$。

现在我们要处理的是在重力势场中粒子 de Broglie 波长的差别所导致的位相差。因为路径 I 的 B_1C 段和路径 II 的 AB_2 段这两段上的势的变化是一样的，所以我们只需要比较路径 I 的 AB_1 段同路径 II 的 B_2C 段这两段的差别。今设 AB_1 和 B_2C 这两段路径上粒子的动量分别是 p_1 和 p_2，按照 de Broglie 公式，相应的波长便是 $\lambda_1=h/p_1$，$\lambda_2=h/p_2$。因此，这两段路径上积累的相位差是

$$\Delta\phi=2\pi\left(\frac{l}{\lambda_1}-\frac{l}{\lambda_2}\right)=\frac{2\pi}{h}l(p_1-p_2). \tag{21}$$

另一方面；根据能量守恒定律，我们有

$$\frac{p_1^2}{2m_i}-\frac{p_2^2}{2m_i}=-m_g gd. \tag{22}$$

为明确起见，我们在(22)式里把动能项的惯性质量记为 m_i，把重力项里的引力质量记为 m_g。由(22)式可知

$$p_1-p_2=m_i m_g g\lambda d. \tag{23}$$

式中波长用 $\lambda=h/p$ 表示，$p=(p_1+p_2)/2$ 是粒子的平均动量。将(23)式代入(21)式，得到相位差是

$$\begin{aligned}\Delta\phi&=\frac{1}{\hbar p}m_i m_g l dg\\&=\frac{2\pi}{h^2}m_i m_g\lambda A g_0\sin\alpha.\end{aligned} \tag{24}$$

这一结果表明，当绕着水平的 AB_1 轴旋转中子干涉仪时，应当看到由于干涉而形成的周期性强度振荡。图 25 给出了一个典型的实验结果，这是用波长为 1.419 Å 的中子束所做的观察。一系列的实验工作证实了，观察结果以 10^{-3} 的精度同理论预言相符

合。同时，也从(24)式的系数验证了，中子的惯性质量等于引力质量[42]。

这一结论的意义是深远的。首先，在此之前，在量子力学里引力相互作用的效果从来没有被检验过。引力作用比电磁作用弱好些个数量级，因此不可能对电子的行为有什么实质性的影响。也许可以设想，由于静电势同引力势具有同样的形式，如果我们将氢原子的哈密顿算符里的 $-e^2/r$ 项换成 $-Gm^2/r$，同样可以解出两个中性粒子所形成的束缚态。然而，用简单的比例就可以算出，这种譬如说由两个中子而组成的“引力原子”，它的“Bohr 半径”约为 10^{23} 米的数量级。这种尺寸可与整个宇宙大小相比的状态当然是不稳定的。基于同样的原因，想通过微观粒子之间的散射来研究引力效应，看来也是没有什么希望的。

我们在第 2.4 节早已讲过，在量子力学里，物理系统的哈密顿算符采取什么具体形式，包括可不可以把经典物理学里的相互作用势照搬过来，都是需要经过实验检验才能确定的。尽管对于电磁相互作用，经典的类比已被证明是很有效的，但也不能没有根据地把这种做法运用于本质上不相同的引力相互作用。只是通过中子的引力干涉实验，才首次证实了经典的引力势同样适用于量子力学。这方面的证据既不是来自天文学，也不是来自微观粒子的束缚态或者散射过程，而且来自一种独特的干涉效应，这确是许多人所始料不及的。

其次，从(24)式的结果明显看出，相位差同惯性质量与引力质量的乘积成正比；或者，令 $m_i=m_g$，它就同质量平方成比例。这意味着，引力干涉实验已经证实了，中子的干涉行为是同它的质量相关的。这是一个直接违反经典物理学的惊人结论。

大家知道，在描写处在引力场中的质点的 Newton 运动方程里，一边是惯性质量 m_i 乘以加速度，另一边是引力质量 m_g 乘以

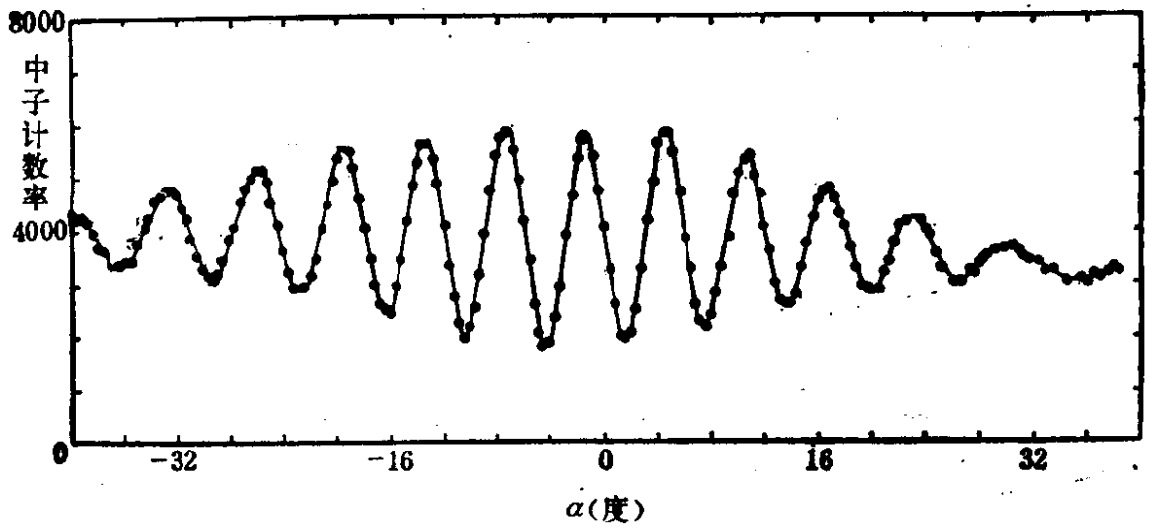


图 25　用波长为 1.419Å的中子束所做的引力干涉实验的强度振荡结果。

引力势的负梯度。那么，当取 $m_i=m_g$ 时，质量参数就从两边消去了。因此，在经典力学里，从惯性质量等于引力质量这一点出发，可以推出“所有质点在引力场中的行为与其质量无关”的结论。这一论断称为弱等效原理，它是 Einstein 把引力场几何化的广义相对论理论的基础。

现在，在量子力学里，由于基本的力学变量是动量而不是速度或者加速度，所以哈密顿算符的动能项 $\boldsymbol{p}^2/2m_i$ 里，惯性质量 m_i 出现在分母上。而在引力势能项 $m_g\varphi$ 里，引力质量 m_g 却仍然在分子上。所以，在量子力学里，即使取 $m_i=m_g$，它们也不可能相消。于是，在引力场中粒子的行为就会与质量相关。

事实上，如果保留 m_i 和 m_g，那么在经典力学里，引力场中的运动的解，只能含有 m_i 和 m_g 的比例。而在量子力学里，由于动能项和引力势能项中质量因子的不同，最后的解就会象(24)式那样含有 m_i 和 m_g 的乘积。这意味着，即使取 $m_i=m_g$，尽管粒子的运动轨道(如果有的话)同它的质量无关，但它的干涉效应(例如条纹间隔，振荡周期等)却是与质量相关的。现在，中子引力干涉实验果然证实了这一点。我们必须承认，弱等效原理不再是普

遍成立的了，引力几何化的原则同量子理论是不相容的[43]。

在第 4.4 节里我们已经看到过，两种中性 K 介子的质量差是在干涉项的相位因子里出现的。现在，在(24)式里，惯性质量 m_i 起着同样的作用。从 de Broglie 波开始到 Schrödinger 方程，一般说来，质量参数总是同干涉条纹的间距或者振荡过程的周期等效应紧密相连的。在经典力学里，惯性质量表征了粒子速度变化的难易程度。那么，在量子力学里的相位因子里面出现的质量参数，可以解释为表示了粒子的惯性吗？看来这一点很难做到。我们觉得，至少不可以把量子力学里的"惯性"质量看做是粒子加速性能的描写，因为量子力学里一开始就不需要加速度的概念。因此，基于经典力学里加速度和惯性概念而作出的弱等效原理的论证，在量子力学的范围内不再有效，就是一件很自然的事了。

总之，在经典物理学里，质量和力都是靠质点的加速度来定义的，因而，建筑在不同基础之上的量子理论，有必要重新审查这些概念的适用性。在上一节里讨论的 A-B 效应，已经明确地否定了力的概念的普遍性。现在讲的中子引力干涉效应，也必定会加深我们对量子理论中质量概念意义的进一步理解。

最后要讲的是，十几年来运用新发展的中子干涉术，继引力干涉之后，又做了一些过去用别的手段难以实现的实验。例如：

1975 年，Rauch 等和 Werner 等两组人几乎同时完成了直接检验旋量态函数相位改变2π对应于空间转动 4π 的实验[44]。在这一工作里，他们对一条支路里的中子束施加可以调节的磁场，测量由于自旋进动而产生的相位差所引起的干涉效果。这是第一次通过实验直接检验旋量函数的这种 4π 的旋转周期。

1979 年，Werner 等又用中子干涉仪测量了地球自转角速度所引起的干涉效应[45]。不难看出，在地球参照系里，由于地球自转而产生的离心加速度，也会存在着类似于引力干涉的效应。

实验中让入射束保持在铅直方向上不变，以消除重力加速度的影响。那么，当干涉仪平面位于南北方向时，离心加速度产生的相位差最大，而取东西方向时，相位差最小。实验结果与预言值符合得很好。

1982年，Summhammer等又完成了中子的不同自旋分量叠加效应的实验[46]。这次入射的是极化中子束，设它的极化方向是z的正方向。在干涉仪内部使一支分束的中子实行自旋翻转，再与未翻转的另一支分束复合。由量子力学我们知道，自旋朝z的正负两个方向的态函数的叠加，描写极化方向在xy平面的粒子。实验证实了预期的结果。这也可以看做是态叠加原理在自旋空间里的一个新的直接例证。

以上的几个实验，用电子还没有能够做出来。在这里，原先当做中子缺点的电中性，反过来变成了它的优点。用中子还成功地完成了其他一些实验[34]。这方面已经显现出广阔的前景，正有待于人们的开发。

7.4 光的相干性[47]

人类对光的干涉现象的研究，从Newton环算起，已经过去了三百年。从前所利用的都是基于原子自发辐射的自然光一类的光源，运用不同的技术把这样的光束分解成两束或更多的分束，便可以观察到这些分束之间的干涉效应。

以往的物理光学实验都是用相当强的光束来做的。在Einstein提出了光量子概念之后，1909年Taylor做过一个实验[48]。他先用强光拍下一根细针的衍射象。然后把光束衰减到很弱，弱到按照计算不可能有多于一个光子同时通过仪器，相应就要增长曝光时间。最长一次曝光约达三个月，结果发现衍射图象与短时间的强光照相同。这就是首次实现的“单光子干涉”，它和后来重复改

进的一些类似实验[49]，都证明了干涉现象不可能是由多个光子互相影响而产生的。

正是在当时实验条件的基础上，Dirac 在分析两束光的干涉时，断言量子理论认定："每一个光子都部分地进入两分束中的每一束。这样，每一个光子只同它自己发生干涉，决不会发生不同的两个光子之间的干涉。"[50]在第 3.4 节里已经指出，Dirac 这些话继承了 Einstein 把光束看成是光子流的观念，隐含着光是以光子的形式传播的假定，而这种可疑的观念早就受到了激烈的批评，难以自圆其说。

如果说，在过去只有将从一个光源发出的光束劈裂开来进行干涉实验的条件下，关于原来的光子会同时处在两个分束的说法还不是完全没有道理的话；那么，激光技术的发展，使我们能够用从两个独立光源发出的光束做干涉实验，在这种新的情况下，关于光子干涉的说法就很难再有说服力了。

继1962年Javan等观察到两支独立的激光光束的拍频效应[51]之后，紧接着 Mandel 等又在 1963 年观察到两支独立的激光光束叠加而产生的干涉条纹[52]。这些都是强光实验。到 1967 年，Pfleegor 和 Mandel[53]终于实现了高度减弱的两支激光束之间的干涉。他们的实验装置如图 26 所示。1 和 2 是经过高度减弱的两支独立的单模氦氖激光束，以小的夹角 θ 射入。光束减弱到当一束中如果存在着一个光子时，另一束同时存在光子的几率约为 10^{-4}，即实际上仪器里不可能两束中同时有光子经过。用文献[58]的原话说就是："当下一个光子被两光源中的任一个发射出来之前，上一个光子已被吸收掉。"他们在干涉区域置放一叠薄玻璃片，使其侧缘对准干涉条纹的方向。再将奇数顺序和偶数顺序的玻片分别接到光电检测器 A 和 B。两光束的夹角 θ 是可以调节的。当相应的条纹间隔的一半正好等于相邻玻片的间距时，就应

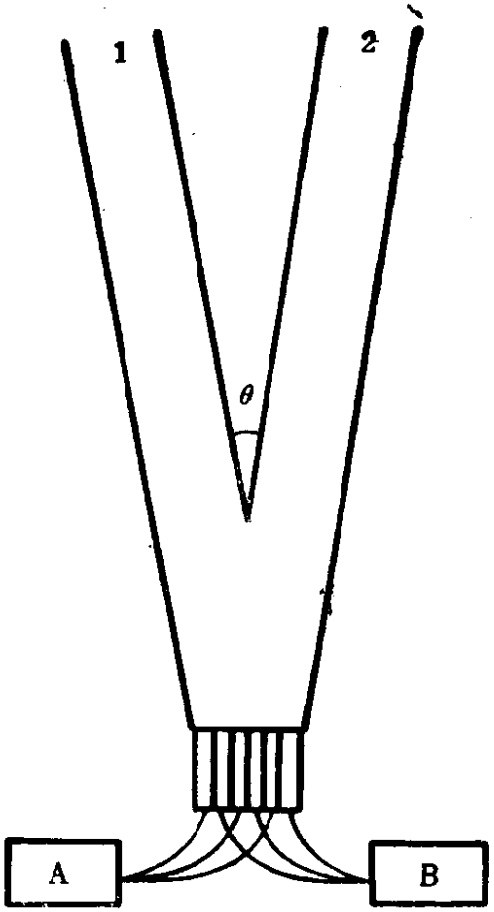


图 26　Pfleegor-Mandel 实验示意图

当观察到两个探测器 A 和 B 的反关联即明暗相反的效应。实验结果证实了这一效应的存在，第一次成功地实现了这种两个独立光源引起的单光子干涉现象。

Pfleegor 和Mandel 的实验，实际上是运用了快速的光电检测技术，避开了激光频率漂移的不利影响。1971年，Radloff[54]运用自动快门技术，选出符合一定要求的事件，用 30 分的时间，又观察到了高度减弱的两支激光束产生的干涉条纹。这些两支独立激光之间的干涉实验，突破了三百年来参加干涉的各光束必须有同一来源的限制。特别是，以上介绍的两支激光的“单光子干涉”，更给原来的旧观念带来新的困难。最近一篇评论性文章[55] 的作者 Paul，已经明确宣称，Dirac 的名言“决不会发生不同的两个光

子之间的干涉。"[50]已被证明为失效。

我们觉得这种议论是有道理的。的确很难把 Dirac 原先的论证搬到两支激光的干涉上来。难道可以说两个激光器同时发射一个光子的两个部分吗？或者，一支光束中的光子可以同另一支空虚(无光子的) 光束进行干涉吗？看来，最好的解决办法还是象我们多次讲过的那样，只承认光在产生和转化时以光子形式出现，而不说光束是光子流的传播。不要问观察到的光子原先在什么地方，是怎么过来的。因为传播的是几率幅而不是光子。总之，新的实验结果并不使量子力学发生困难，有困难的只是光子干涉的观念。如果我们只承认发生干涉的是几率幅而不是光子本身，就不会有麻烦。

以上所讲的干涉现象等等，都是观察到的大量光子所表现的总的效应、或者说是平均值效应。下面我们进一步讨论光子涨落问题。

实验的发现是偶然的。1956 年，为了探索测量恒星视角的新手段，Hanbury-Brown 和 Twiss 做了一个别开生面的实验[56]。如图 27 所示，从汞弧放电管发出的光束，经过狭小的光阑和过滤器之后，投到半透镜上，分解为透射束 1 和反射束 2。这两支相干束分别由光电检测器 A 和 B 接收，再连到一个延时符合电路上计数。测量到的实际上是对各种取值的延迟时间 τ 在规定的时间间隔内积累的光子计数的平均效应。设两光束的强度分别是 $I_A(t)$ 和 $I_B(t)$，测量到的就是对于一定延迟时间 τ 的平均强度关联$\langle I_A(t+\tau)I_B(t)\rangle$。或者，写成归一化形式，令 $\langle I_A(t)\rangle$ 和 $\langle I_B(t)\rangle$为两光束的平均强度，可以把有关的关联函数定义为

$$g(\tau)=\langle I_A(t+\tau)I_B(t)\rangle/\langle I_A\rangle\langle I_B\rangle. \qquad (25)$$

按理说，落到透射束的光子同落到反射束的光子，原先是从光源里不同的原子发射出来的，初看起来 I_A 和 I_B 好象不会有什

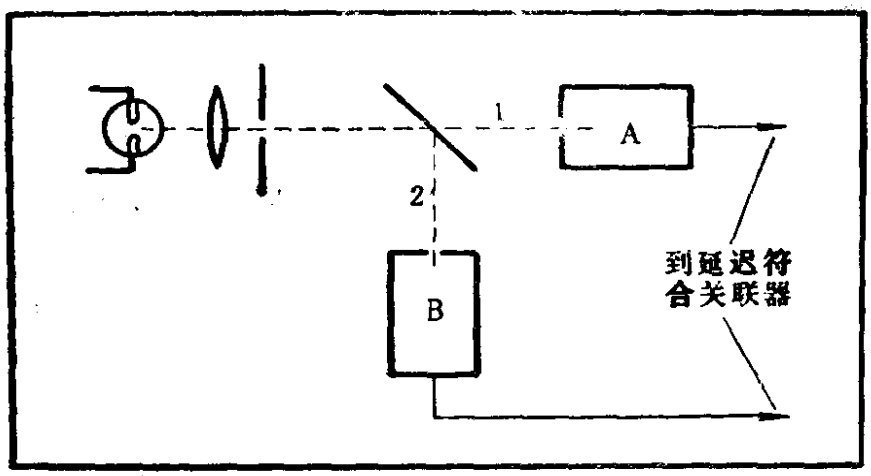


图 27　Brown-Twiss 实验示意图（A. B 是光电探测器）

么关联。如果 I_A 和 I_B 确是完全独立的，(25) 式里的 $g(\tau)$ 就应该恒等于 1，这也就是零关联的情况。

可是，实验得到了出乎意料的结果。如图 28 的曲线 a 所示，在小的 τ 值(10^{-8} 秒数量级)发现 $g>1$，即有明显的正关联，并在 $\tau=0$ 处达到极大值 $g(0)=2$。如果 τ 很大，譬如超过了光束的相干时间，自然不可能再有什么关联，这时曲线就下降回到代表零关联的水平线上，即 $g(\infty)=1$。

消息传出去后引起了震动。有人说果真如此，量子力学的原理就要修改了。但 Purcell 很快指出[57]，Brown-Twiss 实验里测量到的光子计数涨落具有正关联，正反映了热光源里的光子满足的是 Bose 统计，而不是具有零关联的独立事件的纯随机序列。换句话说，光子的 Bose 统计性质使它们倾向于互相接续，成串出现，这正是量子力学原理的极好体现。这种效应被称为 photon bunching，我们译为“光子成串”效应，因为它指的是一种时间顺序上的接续，而不是空间距离上的聚拢。[58]

后来弄清楚了，处在热平衡的经典电磁场的涨落，也会导致相干束的强度正关联。Brown-Twiss 实验的结果，就表现了这种强度上的涨落。回顾整个传统光学里处理的干涉，都是相干束之

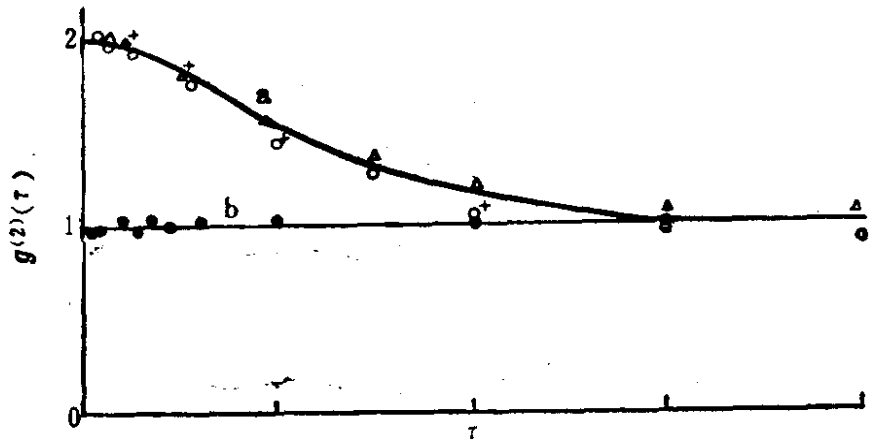


图28　光子成串效应(*a*热光，*b*激光)

间的振幅关联；那么，由于光强是振幅的平方，相干光束之间的强度关联，就应当是振幅之间的高阶相干性质。从1963年开始，已经对光的二阶相干函数做了详细的研究[59]。我们简单介绍如下[60]：

先讲经典描写。设有从不同来源的两束相干光，其强度分别是I_1和I_2。二阶相干度实际上就是象(25)式所表示的那种归一化的强度关联函数，定义为

$$g_{12}^{(2)}(\tau)=\langle I_1(t+\tau)I_2(t)\rangle/\langle I_1\rangle\langle I_2\rangle. \tag{26}$$

不同之处在于，(25)式所描写的情况，其中A和B接收的光子，是来自同一来源的。半透镜的分束作用，只是为了便于用符合电路去捕捉入射光束中光子到达时间的涨落特性。所以，(25)式中的g，其实是单光束的二阶相干度。对(26)式取$1=2$，便可以将(25)式重写为

$$g_{11}^{(2)}(\tau)=\langle I_1(t+\tau)I_1(t)\rangle/\langle I_1\rangle^2. \tag{27}$$

以下马上可以得出几点推论：

a) 由于强度总是非负的，所以$g_{12}^{(2)}(\tau)\geqslant 0$；

b) τ很大时无关联，所以$g_{12}^{(2)}(\infty)=1$；

c) 因为$\langle I_1^2\rangle\geqslant\langle I_1\rangle^2$，所以$g_{11}^{(2)}(0)\geqslant 1$；

d) 由 Cauchy 不等式$\langle I_1^2\rangle\langle I_2^2\rangle\geqslant\langle I_1 I_2\rangle^2$，可知

$$g_{11}^{(2)}(0)g_{22}^{(2)}(0)\geqslant[g_{12}^{(2)}(\tau)]^2;$$

e) 对上式取 1=2，得 $g_{11}^{(2)}(0)\geqslant g_{11}^{(2)}(\tau)$。

检查一下 Brown-Twiss 实验的结果（图 28），可知它是满足以上 a)、b)（均取 1=2）和c)、e)各点要求的。进一步可以证明，所测得的关联函数的形式，同经典涨落分析并不矛盾[60]。

在量子力学里，光是用经典场描写的，所以只能得到以上的结果。如果使用把电磁场量子化即量子场论的方法，就应当将(26)式的强度相关函数写成高阶的振幅相关。由于一般性的描写已经超出了初等量子力学的范围，我们在这里只做最简单的讨论。

在单模的情况下，只有一种光子的吸收算符 a 和产生算符$a^\dagger$。它们之间满足对易关系：

$$[a, a^\dagger]=1. \tag{28}$$

而光的强度则用光子数算符 $n=a^\dagger a$ 描写。对于学过了占有数表象（例如谐振子问题的处理）的读者，这一套方法应当是熟悉的。

以下我们计算光子数涨落即平均方差$\langle\Delta n^2\rangle$：

$$\begin{aligned}\langle\Delta n^2\rangle&\equiv\langle(n-\langle n\rangle)^2\rangle=\langle n^2\rangle-\langle n\rangle^2\\&=\langle a^\dagger a a^\dagger a\rangle-\langle a^\dagger a\rangle^2\\&=\langle n\rangle+\langle a^\dagger a^\dagger a a\rangle-\langle n\rangle^2.\end{aligned}\tag{29}$$

在最后一步推导中运用了对易关系式(28)。

那么，按照量子场论的规则，描写相干单模光束强度涨落关联的零延迟($\tau=0$)二阶相干度的定义是

$$g_{11}^{(2)}(0)=\langle a^\dagger a^\dagger a a\rangle/\langle a^\dagger a\rangle^2. \tag{30}$$

我们看到，(30)式不外是(27)式用场算符的改写，只是分子中的算符排列采取了“正规乘积”的形式。可以证明，由所定义的

量的厄米性，量子形式的二阶相干度总是非负的，即经典情况的a)点仍然成立。此外，b)点当然还是有效的。可是，由于场算符的不可对易性，强度涨落的量子描写会突破经典条件的其他限制，表现出一些新的特征。为了说明这点，我们先将(29)式的结果代入(30)式，求出用涨落项表示的关联函数

$$g_{11}^{(2)}(0)=1+\frac{\langle\Delta n^2\rangle-\langle n\rangle}{\langle n\rangle^2}, \tag{31}$$

再分别就几种情况进行讨论：

1. 对一般的热光(thermal light)，在热平衡状态下光子遵从Bose分布，这时有[61]$\langle\Delta n^2\rangle=\langle n\rangle+\langle n\rangle^2$，于是由(31)式可知$g_{11}^{(2)}(0)=2$。这就是在图28中以曲线a表示的Brown-Twiss实验的结果。

2. 远高于阈值运行的激光，处在平均光子数很高的相干态。这是一种相位完全确定而粒子数完全不确定的状态。在相干态中，光子遵从的是Poisson分布，均方差$\langle\Delta n^2\rangle=\langle n\rangle$。由(31)式可知，这时有$g_{11}^{(2)}(0)=1$。事实上，激光的二阶相干度$g_{11}^{(2)}(\tau)=1$，用图28中的水平直线b表示，这也已经得到了实验的证实。尽管激光同热光的表现有这么大的差异，但它们都没有超出前面所讲的经典描写的a)到e)各点的限制。

3. 我们再看另一个极端的情况，即粒子数完全确定的状态，也就是粒子数算符$n=a^\dagger a$的本征态。在这状态中显然有$\langle\Delta n^2\rangle=0$，$\langle n\rangle=n$，这里的$n$是状态的光子数。由(31)式可知这时有$g_{11}^{(2)}(0)=1-1/n$。由于实际的光子态总有$n\geqslant 1$，因此$g_{11}^{(2)}(0)<1$，即表现出负关联。这一点与经典条件c)和e)直接违反，因而是最受注意的一种情况。

综上所述，激光强度涨落属零关联，亦即光子计数表现出完全是随机的序列；热光的正关联，表示光子到达要比随机情况接得紧

些；或者说，热光的光子喜欢成对成群地到达。反过来，对具有确定光子数的状态，涨落的负关联意味着光子到达的序列比随机情况隔得开些，即显得平均一些，这就是光子反成串(antibunching)效应。在这里，不同的关联是由系统的统计性质决定的。

由以上第 3 点的讨论可知，选取光子数 n 越小的状态，负关联效应越显著。我们知道，只含少数几个粒子的状态，一般是没有经典对应的，自然可以表现出非经典的特征。如果选取 $n=1$ 的单光子状态，就应当观察到 $g_{11}^{(2)}(0)=0$ 的最显著的非经典效应。

1977 年，Mandel 等在共振荧光实验中观察到了光子反成串效应[61]。他们使用弱的钠原子束，在横向施加染料激光加以激发，然后再同原子束和激光束都互成直角的第三轴方向收集钠原子发出的共振荧光，再将光束引入一副 Brown-Twiss 型的测量装置，记录在不同的延迟时间 τ 的光子符合计数率。束流的强度控制得可以认为钠原子是逐个通过视场的。由于每一个原子发生跃迁时只可能发出一个光子，这就保证满足了所要求的实验条件。

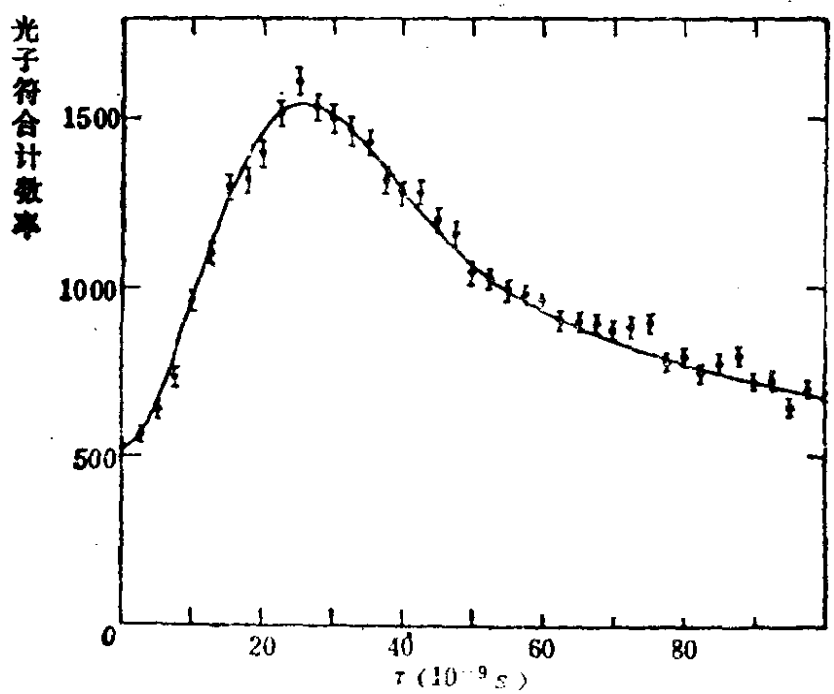


图 29　共振荧光实验的光子符合计数率

共振荧光实验的结果如图 29 所示，明显地看到在 τ 小的区域，光子符合计数率有一段斜率为正的上升部分，而以 $\tau=0$ 时为最低。这无论如何是同经典限制 e)点相违的，所以，这一结果被认为是光子反成串效应的初步肯定的证据。进一步的研究仍在进行之中。

此外，早在 1974 年，Clauser 等就做过一种双束关联实验[62]，他们的结果也违反经典限制的 e)点。这些结果都证实了，光场的量子描写是必需的[63]。

总之，本节所讲的高阶相干性质，反映了光的统计性质的深一层次的干涉。无论在普通的干涉还是这种高阶的干涉里，起决定作用的是几率幅的叠加。量子理论里最要紧的概念是本身并非物理量的几率幅，这一点应该说已经获得了愈来愈多的支持。

最后要谈到的是，上一节所谈的中子干涉实验，实际上也是一种"单中子干涉"[36]。在中子干涉术的基础上，人们已经开始谈论准备去做中子的 Brown-Twiss 型的实验了[36]。

参 考 文 献

[1] 见[1.13]，328—335 页。

[2] 同上，478 页。

[3] 见[1.10]，chap.6.

[4] N. Bohr, *Phys. Rev.* **48** (1935) 696.

[5] 参看[1.13]，462—488 页；[3.3].

[6] 见[3.1]，第 22 章 15—19 节。

[7] 见[1.10]，chap.7; F. J. Belinfate, *A Survey of Hidden Variable Theories*, Pergamon (1973).

[8] 见[2.14]，chap. IV.

[9] D. Bohm, *Phys. Rev.* **85** (1952) 166; 180.

[10] J. S. Bell, *Rev. Mod. Phys.* **38** (1966) 447.

[11] J. S. Bell, *Physics*, **1** (1964) 195.

[12] J. F. Clauser *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **23** (1969) 880.

[13] 参看[1.7]; J. F. Clauser, A. Shimony, *Rep. Prog. Phys.* **41** (1978) 1881; B. d'Espagnat, 科学 (*Sci. Am.* 中译本), 1980年第 3 期; 苏汝铿, 自然杂志, **6** (1983) 656.

[14] A. Aspect *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **49** (1982) 1804; 中译文见: 自然科学哲学问题丛刊, 1983 年第 4 期。

[15] 董光璧, 自然辩证法通讯, 1984年 2 期; 自然科学哲学问题丛刊, 1984 年 2 期; 大自然探索, 1987年第 3 期。

[16] G. Tarozzi, A. van der Merwe ed., *Open Questions in Quantum Physics*, D. Reidel Pub. Co. (1985).

[17] P. C. W. Davies, J. R. Brown ed., *The Ghost in the Atom*, Cambridge Univ. Press (1986).

[18] 关洪, 物理, **12** (1983) 206.

[19] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. II, Addison-Wesley (1964), § 15-5.

[20] 关洪, 罗蔚茵, 大学物理, 1985 年 2 期。

[21] H. Boersch, *Naturwiss.* **28** (1940) 709; *Phys. Z.* **44** (1943) 202.

[22] G. Möllenstedt, H. Düker, *Naturwiss.* **42** (1954) 41; *Z. Physik* **145** (1956) 377; 曹涵青等, 物理学报, **36** (1987) 10.

[23] C. Jönsson, *Z. Physik* **161** (1961) 454; 英译文见: P. Brandt, S. Hirschi, *Am. J. Phys.* **42** (1974) 4; 许明康, 物理, **9** (1980) 332.

[24] Y. Aharonov, D. Bohm, *Phys. Rev.* **115** (1959) 485; 关于 A-B 效应的理论和实验的综述, 参看: S. Olariu, I. I. Popescu, *Rev. Mod. Phys.* **57** (1985) 339.

[25] R. G. Chambers, *Phys. Rev. Lett.* **5** (1960) 3.

[26] H. Boersch *et al*, *Z. Physik* **165** (1961) 79;

[27] G. Mollenstedt, W. Bayh, *Naturwiss.* **48** (1961) 400; *ibid.* **49** (1962) 81.

[28] A. Tonomura *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 1443.

[29] A. Tonomura *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **56** (1982) 792.

[30] N. Byers, C. N. Yang, *Phys. Rev. Lett.* **7** (1961) 46.

[31] R. C. Jaklevic *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **12** (1964) 159, 274; *Phys. Rev.*

140 (1965) 1628**A**.

[32] R. A. Webb *et. , al*, *Phys. Rev. Lett.* **54** (1985) 2696; 参看: 大学物理, 1986年10期; 物理, **16** (1987) 78.

[33] 例如[19]和 J. J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics*, Addison-Wesley (1967)

[34] A. G. Klein, S. A. Werner, *Rep. Prog. Phys.* **46** (1983) 259.

[35] D. M. Greenberger, A. W. Overhauser, *Rev. Mod. Phys.* **51** (1979) 43.

[36] H. Rauch, in S. Diner *et al.* ed., [3. 18], pp. 69—83.

[37] 见[5. 25], § 7. 5. 7.

[38] U. Bonse, M. Hart, *Appl. Phys. Lett.* **6** (1965) 155.

[39] H. Rauck, W. Treimer, U. Bonse, *Phys. Lett.* **47A** (1974) 369.

[40] R. Colella, A. W. Overhauser, S. A. Werner, *Phys. Rev. Lett.* **34** (1975) 1472.

[41] 参看[35]和[1. 22], § 45.

[42] J. L. Staudenmann *et al.*, *Phys. Rev.* **A21** (1980) 1419.

[43] D. M. Greenberger, A. W. Overhauser, 科学 (*Sci. Am.* 中译本), 1980年第 9 期。

[44] H. Rauch *et al.*, *Phys. Lett.* **54A** (1975) 425; S. A. Werner *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **35** (1975) 1053.

[45] S. A. Werner *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **42** (1979) 1103.

[46] J. Summhammer *et al.*, *Phys. Lett.* **90A** (1982) 110.

[47] 关洪, 物理, **17** (1988) 149.

[48] G. I. Taylor, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **15** (1909) 114.

[49] 参看[1. 7].

[50] 见[1. 24], § 3.

[51] A. Javan *et al.*, *J. Opt. Soc. Am.* **52** (1962) 96.

[52] G. Magyar, L. Mandel, *Nature* **198** (1963) 255.

[53] R. L. Pfleegor, L. Mandel, *Phys. Lett.* **24A** (1967) 766; *Phys. Rev.* **159** (1967) 1084.

[54] W. Radloff, *Ann. Physik* **26** (1971) 178.

[55] H. Paul, *Rev. Mod. Phys.* **58** (1986) 209.

[56] R. Hanbury-Brown, R. Q. Twiss, *Nature*, **177** (1956) 27.

[57] E. M. P rc.'l, *Nature*, **178** (1956) 1449.

[58] 参看 H. Paul, *Rev. Mod. Phys.* **54** (1982) 1061.

[59] R. J. Glauber, *Phys. Rev.* **130** (1963) 2529; *ibid.* **131** (1963) 2766.

[60] 参看 R. Loudon, *Rep. Prog. Phys.* **43** (1980) 913.

[61] H. J. Kimble, M. Dagenais, L. Mandel, *Phys. Rev. Lett.* **39** (1977) 691; M. Dagenais, L. Mandel, *Phys. Rev.* **A18** (1978) 2217.

[62] J. F. Clauser, *Phys. Rev.* D9 (1974) 853.

[63] 参看: P. W. Milonni, *Phys. Rept.* **25** (1976) 1; L. Mandel, in *Progress in Optics*, Vol. 3, E. Wolf ed., North-Holland (1976) pp. 29—68; P. W. Milonni, in S. Diner *et al.* ed., [3.18], pp. 27—67.