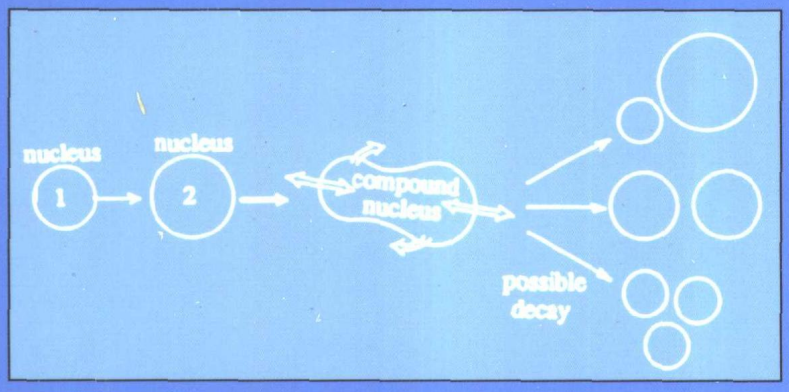
[德]W.顾莱纳 [美]B.缪勒 著

QUANTUM MECHANICS SYMMETRIES

量子力学：对称性

钱裕昆 成琍 译 张启仁 审校



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS
Springer

责任编辑\张 萍 王 原
封面设计\张 虹

QUANTUM MECHANICS SYMMETRIES
量子力学：对称性

在现代粒子物理的量子力学研究中涉及大量对角动量的运算，因此对称性在这方面的研究中具有极为重要的意义。本书对这一领域的研究方法作了系统的讲解和介绍。在简述了经典力学对称理论后，系统讲述了量子力学中的旋转对称和李群理论；深入讨论了同位旋群、超（电）荷、SU（3）群，接着是粲数、SU（4）、动力学对称理论和它们在粒子物理研究前沿，例如对介子和夸克的研究中的应用。本书的独特之处还在于包含了超过 120道直接来源于理论和试验研究，并做出祥解的例子和练习。

本译丛是专为有志于物理学研究这一艰深理论的人们准备的，第一辑包括：

- ◆热力学与统计力学
- ◆量子力学：导论
- ◆量子力学：对称性
- ◆量子电动力学

ISBN 7-301-04999-4
9 787301 049990 >
ISBN 7-301-04999-4/O.0508
定价：45.00元

量子力学：对称性

（第二版）

〔德〕W. 顾莱纳　〔美〕B. 缪勒　著
钱裕昆　成琍　译
张启仁　审校

北京大学出版社
·北　京·

著作权合同登记　图字:01-2002-4291 号

图书在版编目(CIP)数据

量子力学:对称性/(德)顾莱纳,(美)缪勒著;钱裕昆,成琍译. —北京:北京大学出版社,2002.10

ISBN 7-301-04999-4

Ⅰ.量… Ⅱ.① 顾… ② 缪… ③ 钱… ④ 成… Ⅲ. 量子力学-对称性-核物理 Ⅳ.0571.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 095482 号

Translated from "Quantum Mechanics. Symmetries"

Copyright ©Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1989, 1994. All rights are reserved.

本书由 Springer-Verlag 授权北京大学出版社出版

书　　名:量子力学:对称性

著作责任者:W.顾莱纳　B.缪勒著;钱裕昆　成琍译

责任编辑:张　萍　王　原

标准书号:ISBN 7-301-04999-4/0·0508

出 版 者:北京大学出版社

地　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871

网　　址:http://cbs.pku.edu.cn

电　　话:出版部 62754962　发行部 62754140　编辑部 62757513

电子信箱:zpup@pup.pku.edu.cn

排 版 者:兴盛达激光照排中心

印 刷 者:中国科学院印刷厂

发 行 者:北京大学出版社

经 销 者:新华书店

787 毫米×1000 毫米　16 开本　27.25 印张　640 千字

2002 年 10 月第 1 版　2002 年 10 月第 1 次印刷

定　　价:45.00 元

英译本前言(节译)

全世界不止一代说德语的学生正是用瓦尔特·顾莱纳的教材为引导了解和欣赏了现代理论物理以及作为科学根基的数学的力量和美。

用一系列密切相关的教科书连贯而完整地表达科学的一个整领域并不是新想法。许多老物理学家怀着愉悦的心情回忆他们通过索末菲的,普朗克的,以及朗道和栗弗席兹的经典丛书开拓自己的道路,进行探索和发现时的感受。从学生的观点看,用一致的符号,逻辑地组织题材和连贯的表达有许多明显优点;此外,对科学的完整概括给作者以难得的机会来表达对自己学科的热爱。

顾莱纳丛书的完备性使它对学生和教授都特别有益。他排除了常用语"于是……",这种表述背后往往隐藏着好几页的数学推导,而使学生莫名其妙。他常用实验数据解说理论观点,这些数据像理论内容一样在不断改进和扩充讲稿的过程中一再更新。丛书就在这种讲稿的基础上形成。

还有,顾莱纳在每卷中收入成百完全做出的例题而大大增加了丛书的价值。对学生来说没有什么比详细看到物理学家感兴趣的问题如何由所学的理论概念和方法解决更加重要。最后,顾莱纳在每一章加入了对所表述的理论概念和(或)实验数据有贡献的人的传略。奥古斯特·孔德(1798—1857 年)在他的《实证哲学》中曾指出:"要了解一门科学必须知道它的历史。"这是现代物理教学中经常被忘却的。顾莱纳架设的通向我们科学先驱者的桥梁值得欢迎。我们的工作正是建筑在他们工作的基础上。

此外,丛书对训练有素的物理学家也颇有益。读者会一再发现,当他深入某一卷去检视某一特别课题时,会从浏览而进一步被他原先不熟悉且常常是迷人的新见解和发展所吸引。

我在耶鲁的教学和研究工作中用过几卷顾莱纳教程的德文原版。我欢迎这套新的改进的英文译本,愿热情地将它们推荐给每一个寻求对物理学有一连贯纵览的人。

D. A. Bromley
Henry Ford Ⅱ 物理教授
耶鲁大学
New Haven, CT USA

中译本序

这套理论物理丛书的目的在于由浅入深地引导学生，最终获得本领域的渊博知识。当然，它们也可用作科学研究人员的参考书或帮助准备讲演的资料。它们是由作者在美因河畔法兰克福哥德大学理论物理研究所的教学讲义的基础上发展而成。丛书开始是经过多年改进的德文版。许多次德文版后，整套丛书被译为英文，且正在出法文版和日文版。

作者特别高兴中文版即将问世。希望丛书能像在世界其他地方那样也有益于中国学生和科学工作者。作者非常感谢中文版的问世，并且特别引以自豪，因为这里有中国和德国物理学家的长期合作。来自中国（北京、上海、兰州、……）不同大学和研究所的教授、博士后和学生访问过法兰克福的理论物理研究所，并在此作过研究工作。

我们很高兴亲身体验到来自中国的年轻科学家的出色教育并希望中国的学生和教授们同样喜欢这套丛书，希望在这个伟大的国度里找到许多朋友。

法兰克福哥德大学的理论物理课程包括：理论力学 I（第一学期），理论力学 II（第二学期），经典电动力学（第三学期），量子力学 I（第四学期），量子力学 II——对称性和相对论量子力学（第五学期），和热力学与统计力学（第五或第六学期）。研究生课程自量子力学 II 和热力学与统计开始，继以量子电动力学，规范理论与弱作用，量子色动力学，和其他关于核和固体理论以及宇宙学等更为专门的课程。

这套丛书现在已到德文第四版。许多年来不少学生和合作者作出习题和例题。我们欣赏 Steffen A. Bass，Adrian Dumitru，Dirk Rischke（现在哥伦比亚大学）和 Thomas Schönfeld 的热心奉献。Astrid Steidl 为本丛书作图。对此我们表示衷心的感谢。我们还要感谢丹麦 Aarhus 大学 Jes Madsen 教授和挪威 Bergen 大学 Laszlo Csernai 教授对正文和例题提出的宝贵意见。我们特别感谢 Fort Collins 科罗拉多州立大学的 Martin Gelfand 教授和他的学生们提醒我们注意一些物理问题。

最后我们要感谢纽约斯普林格出版社，特别是 Hans-Ulrich Daniel 博士和 Thomas von Foerster博士的鼓励和耐心，以及 Margaret Marynowski 女士的熟练编辑。我们特别要感谢张启仁教授（北京大学）和潘欧嘉博士（北京大学出版社）组织翻译和编辑中文版。

顾莱纳

1998 年 1 月 14 日于美因河畔的法兰克福

中译本审校者序

顾莱纳教授及其同事们所著的理论物理丛书中文版即将问世。这是中德文化交流的一件大事，对我国理论物理的教学和研究必将有所促进。

瓦尔特·顾莱纳教授是世界知名的理论物理学家，在原子核物理、原子物理、场论和粒子物理的广大领域都有独特的、首创的和系统的贡献。他领导下的法兰克福哥德大学理论物理研究所是一个出成果、出人材、具有世界影响的研究集体。在这个集体的长期努力下，相对论量子力学中的克莱恩(Klein)佯谬及其影响终于得到彻底的理解。在此基础上他们对巨核(Giant Nuclei)超临界电荷可能引起的真空衰变作了系统的理论研究，并提出了用重离子碰撞中形成的短暂的巨核分子态对真空衰变进行实验研究的方法。虽然由于实际的复杂性，这方面的研究仍在继续进行中，他们的理论贡献无疑为此问题的最终解决奠定了基础。在壳效应可能导致超重核的问题上，顾莱纳和他所领导的集体也是最早和最系统的研究者之一。他们还首先预言了集团放射性，这种新型放射性正被实验证实。他们还对重离子碰撞中骇波的形成和发展作过系统研究，指出这是压缩和加热核物质的关键机制。这也被实验所证实。在这些具体的研究中他们还建立了一些理论模型，如广义集体模型，被称为格诺埃斯-顾莱纳(Gneuss-Greiner)模型，和双中心壳模型；也发展了一些独特的计算方法，如双中心狄喇克方程的数值解法等。以下数字可能说明一些问题。这个集体有顾莱纳署名的论文在600篇以上，会议报告和评述论文150篇以上，讲演300篇以上。

顾莱纳还是一个教育家，在指导众多的研究生和年轻的研究工作者的同时长期坚持讲授基础理论课。在他指导下获得博士学位的超过150人，其中39人在世界各地的大学中已成为教授和学术领导。他与合作者所著的教材和专著超过10本，这些书在更大范围内发挥着培养年轻人的作用。

用经验丰富、硕果累累来形容顾莱纳的科学研究和教育工作实不为过。这使我们相信将他和其同事们所著的理论物理丛书翻译成中文将有益于我国年轻物理学家的培养。

顾莱纳教授还是中国人民的朋友。多年来他特别支持中德合作。许多中国学者和学生曾到他领导的研究所工作，他也曾多次来华访问讲学，并被聘为北京大学客座教授。在这套丛书的翻译过程中他还把最近教学中作的一些修改寄来。这意味着中译本将是这套丛书的最新版本。

张启仁

1998年4月8日于承泽园

第一版序言

理论物理已经成为包含很多方面的学科。对年轻学生，要应付如此大量新学科的学习是相当困难的，我们只对整个领域做一个概观，它包括从力学经过电动力学、量子力学、场论、核和重离子科学、统计力学、热力学和固体理论到基本粒子物理。而这些知识必须在仅仅 8-10 个学期内获得，在此期间，还有一张文凭或硕士论文必须要做，还要准备考试。要做到所有这些，大学教师就必须尽可能早地引导学生到新的分支，使他们产生兴趣和激情，从而又释放出新的精力。自然地所有不必要的课程必须被简单地排除掉。

在法兰克福的约翰·沃尔夫冈·哥德大学我们在第一学期就直接面对学习理论物理的学生。理论力学 I 和 II 和量子力学 I ——导论是头两年间的基本课程。这些讲座用许多数学解释和支持材料来补充。在第四个学期的学习后，研究生工作开始了，而量子力学 II ——对称性、统计力学和热力学、相对论量子力学、量子电动力学、弱作用的规范理论和量子色动力学是必修的。除此以外一些关于特殊课题的补充课程被给出，诸如流体力学、经典场论、特殊和广义相对论、多体理论、核模型、基本粒子及模型和固体理论。它们中一些，例如为期两学期理论核物理和理论固体物理也是必修的。

包括量子力学——对称性的讲义的形式仿效所有其他的讲义：与必要数学工具的广泛的准备一起，许多例子和练习被做出来。我们力求给予科学以一种尽可能有趣味的形式。谈到量子力学中的对称性时我们正面对一个特别优美的主题。被选的材料可能不是传统性的，但是以我们的观点，在现代物理这一领域具有相当的重要性。

本书在简短地提及经典力学中某些对称性之后，对称性在量子力学中的巨大重要性被勾划出来。特别是详细描写了旋转对称性的结果，并且我们很快被引导到李群的一般理论。广泛地描画了同位旋群、超荷和 SU(3)对称性及它们在现代基本粒子物理中的应用。基本的数学定理不加证明地引用和启发性地演示表明了它们的重要性和意义。定理的证明可以在详细的例子和完成的练习中找到。

一个关于根矢量和经典李代数的补充加深了这个材料，广泛地描画了杨盘技巧，并且通过关于群特征标的一章和关于粲数的一章，把我们引到了非常现代的物理问题。关于特殊离散对称性和动力学对称性的章节推进了这些讲座。这些都是使年青物理学家着迷的主题，因为这些内容对他们表明早在第五学期他们就能追求和讨论研究工作前沿的问题。

许多学生和合作者在这些年里帮助做了例子和练习。对这第一个英文版我们欣赏 Maria

Berenguer, Snjezana Butorac, Christian Derreth, Klaus Geiger 博士, Matthias Grabiak 博士, Carsten Greiner, Christoph Hartnack, Richard Herrmann 博士, Raffaele Mattiello, Dieter Neubauer, Jochen Rau, Wolfgang Renner, Dirk Rischke, Thomas Schönfeld 和 Stefan Schramm 博士的帮助。Astrid Steidl 小姐画了图并准备了图表。对所有他们,我们表示衷心的感谢。我们也感谢芒斯特大学物理系的 K. Langanke 博士和 R. Könning 先生,他们对德文版作了有价值的评论。

我们想特别感谢 Dipl. -Phys 的 Pela Waldhauser 先生,为了他的从头到尾的帮助。我们非常赞赏他的组织天才和在技术性问题上的建议。

最后我们想感谢 Springer-Verlag,特别是 H-U, Daniel 博士,为了他的鼓励和耐心;以及 Michael Edmeades 先生,为了他专家般的英文排版。

1989 年 7 月于法兰克福

瓦尔特·顾莱纳　　本特·缪勒

第二版序言

我们高兴地注意到我们的教科书《量子力学:对称性》在物理系学生和研究人员中找到了许多朋友,以至于产生了对第二版的需求。我们利用这次机会对这课本作了一些改进,修正了一些印刷错误和小差错,并在各处加上了解释性的要点。除了许多小的改动外,第 8.6 节,第 8.11 节和第 11.4 节以及练习 3.9,7.8 和 9.5 被扩展了。增加了两个新的练习,关于维格纳-埃克特定理(练习 5.8)和关于 SU(N)生成元的完备性关系(练习 11.3)。最后,仔细校验并引入了关于李群的数学补充(第 12 章)和新的一节引言。

我们感谢几个同事的有用的评论,特别是 L. Wilets 教授(西雅图),他提供了错误和打印差错的单子。我们大大地受益于 P. O. Hess 教授(墨西哥大学),他给出了对第 12 章可得到的修正和有价值的材料。我们也感谢 R. Mattiello 博士,他监督了这本书第二版的准备工作。最后我们感谢与 H. J. Kölsch 博士和他的小组在海德堡斯普林格出版社的令人愉快的合作。

1994 年 7 月于德国法兰克福

瓦尔特·顾莱纳

美国北卡罗莱纳州杜海姆

本特·缪勒

目　录

第 1 章　量子力学中的对称性 …… (1)
1.1　经典物理中的对称性 …… (1)
1.2　量子力学中的空间平移 …… (14)
1.3　幺正平移算符 …… (15)
1.4　关于在空间中移动的态的运动方程 …… (16)
1.5　对称性和态的简并性 …… (18)
1.6　量子力学中的时间平移 …… (24)
1.7　数学补充:群的定义 …… (26)
1.8　数学补充:转动和它们的群论性质 …… (28)
1.9　转动群的一个同构 …… (31)
1.9.1　无穷小和有限转动 …… (32)
1.9.2　空间的各向同性 …… (34)
1.10　多粒子态的转动算符 …… (41)
1.11　人物小传 …… (42)
第 2 章　角动量算符的角动量代数表示——SO(3)的生成元 …… (43)
2.1　转动群的不可约表示 …… (43)
2.2　角动量算符的矩阵表示 …… (47)
2.3　两个角动量的相加 …… (54)
2.4　克莱布许-高登系数的计算 …… (57)
2.5　克莱布许-高登系数的递推关系 …… (58)
2.6　克莱布许-高登系数的明晰的计算 …… (59)
2.7　人物小传 …… (65)
第 3 章　数学补充:李群的基本性质 …… (66)
3.1　李群的一般结构 …… (66)
3.2　对易关系解释为广义的矢量乘积,李氏定理,李群的秩 …… (74)
3.3　不变子群,单和半单李群,理想 …… (76)
3.4　紧致李群和李代数 …… (81)

3.5 不变算符(卡西米尔算符)…… (81)
3.6 拉卡定理…… (82)
3.7 关于多重态的评论…… (82)
3.8 对称群下的不变性…… (84)
3.9 不变算符的构造…… (87)
3.10 对阿贝尔李群的卡西米尔算符的评论 …… (89)
3.11 卡西米尔算符的完备性关系 …… (89)
3.12 对某些群和它们性质的评论 …… (91)
3.13 在坐标变换和函数变换之间的联系 …… (91)
3.14 人物小传…… (101)
第4章 对称群和它们的物理意义——一般考虑…… (102)
4.1 人物小传 …… (106)
第5章 同位旋群(同位自旋)…… (107)
5.1 多核子体系的同位旋算符 …… (112)
5.2 李代数表示的一般性质 …… (118)
5.3 李代数的正规(或忠实)表示 …… (119)
5.4 同位旋矢量的变换规律 …… (122)
5.5 同位旋不变性的实验检验 …… (127)
5.6 人物小传 …… (140)
第6章 超荷…… (141)
6.1 人物小传 …… (146)
第7章 SU(3)对称性 …… (147)
7.1 群 U(n)和 SU(n) …… (147)
7.1.1 U(n)和 SU(n)的生成元…… (149)
7.2 SU(3)的生成元 …… (150)
7.3 SU(3)的李代数 …… (152)
7.4 SU(3)李代数的子代数和位移算符 …… (161)
7.5 T 多重态,U 多重态和 V 多重态的耦合 …… (163)
7.6 对推理的定性分析 …… (164)
7.7 对 SU(3)多重态几何结构的进一步评论 …… (166)
7.8 网点和内壳上的状态数 …… (167)
第8章 夸克与 SU(3)…… (176)
8.1 寻找夸克 …… (179)
8.2 夸克状态的变换性质 …… (179)
8.3 从基本表示[3]和[$\bar{3}$]构造所有 SU(3)多重态 …… (184)

8.4 从夸克和反夸克构造表示 $D(p,q)$ …… (185)
8.4.1 最小的 SU(3)多重态 …… (188)
8.5 介子多重态 …… (196)
8.6 约化 SU(3)直积的规则 …… (199)
8.7 U 自旋不变性 …… (203)
8.8 U 自旋不变性的检验 …… (205)
8.9 盖尔曼-大久保质量公式 …… (207)
8.10 SU(3)的克莱布许-高登系数 …… (209)
8.11 有内部自由度的夸克模型 …… (212)
8.12 SU(6)中的质量公式 …… (234)
8.13 夸克模型中的磁矩 …… (235)
8.14 介子和重子激发态 …… (237)
8.14.1 多于三个夸克的组合 …… (237)
8.15 轨道角动量的激发态 …… (239)
第9章 置换群的表示和杨盘 …… (241)
9.1 置换群和全同粒子 …… (241)
9.2 杨图的标准形式 …… (244)
9.3 标准形式和置换群 S_N 不可约表示的维数 …… (246)
9.4 在 SU(2)和 S_2 之间的联系 …… (253)
9.5 SU(n)的不可约表示 …… (256)
9.6 维数的决定 …… (261)
9.7 SU(n)的 SU($n-1$)子群 …… (264)
9.8 两个多重态张量乘积的分解 …… (266)
第10章 数学浏览,群特征标 …… (270)
10.1 群特征标的定义 …… (270)
10.2 舒尔引理 …… (270)
10.2.1 舒尔第一引理 …… (270)
10.2.2 舒尔第二引理 …… (271)
10.3 表示的正交关系和离散群 …… (272)
10.4 等价类 …… (273)
10.5 离散群群特征标的正交关系和别的关系 …… (275)
10.6 群 D_3 的群特征标的正交关系 …… (276)
10.7 表示的约化 …… (277)
10.8 不可约性的判据 …… (278)
10.9 表示的直积 …… (278)

10.10 扩展到连续紧致群 …… (279)
10.11 数学浏览:群积分 …… (279)
10.12 幺正群 …… (281)
10.13 从 U(N)到 SU(N)的转换,例子 SU(3) …… (282)
10.14 在幺正群上的积分 …… (284)
10.15 幺正群的特征标 …… (287)
第 11 章 粲数和 SU(4) …… (301)
11.1 带粲数的粒子和 SU(4) …… (303)
11.2 SU(4)的群性质 …… (303)
11.3 SU(4)的结构常数 f_{ijk}和系数 d_{ijk}的表 …… (310)
11.4 SU(4)的多重态结构 …… (312)
11.5 高级的考虑 …… (318)
11.5.1 隐粲数介子的衰变 …… (318)
11.5.2 显粲数介子的衰变 …… (319)
11.5.3 重子多重态 …… (320)
11.6 粲素的势模型 …… (330)
11.7 SU(4)(SU(8))质量公式 …… (337)
11.8 γ共振 …… (340)
第 12 章 数学补充 …… (343)
12.1 引言 …… (343)
12.2 根矢量和经典李代数 …… (346)
12.3 本征值的标积 …… (350)
12.4 卡坦-韦耳归一化 …… (352)
12.5 根矢量的图像表示 …… (352)
12.6 秩为 1 的李代数 …… (354)
12.7 秩为 2 的李代数 …… (354)
12.8 秩 $l>2$ 的李代数 …… (355)
12.9 例外李代数 …… (356)
12.10 素根和邓金图 …… (356)
12.11 邓金的方案 …… (358)
12.12 卡坦矩阵 …… (159)
12.13 由素根决定所有的根 …… (361)
12.14 两个单李代数 …… (362)
12.15 经典李代数的表示 …… (363)

第 13 章 特殊的离散对称性 …… (367)
13.1 空间反射(宇称变换)…… (367)
13.2 反射后的状态和算符…… (368)
13.3 时间反演…… (369)
13.4 反幺正算符…… (370)
13.5 多粒子体系…… (374)
13.6 实本征函数…… (376)
第 14 章 动力学对称性 …… (376)
14.1 氢原子…… (376)
14.2 群 SO(4) …… (378)
14.3 氢原子的能级…… (379)
14.4 经典的各向同性谐振子…… (380)
14.4.1 量子力学各向同性谐振子 …… (381)
第 15 章 数学浏览:非紧致李群 …… (391)
15.1 非紧致李群的定义和例子…… (391)
15.2 李群 SO(2,1) …… (397)
15.3 对散射问题的应用…… (400)
名词索引…… (403)

例题和练习目录

1.1 不同参考系中的角动量 …… (4)
1.2 指定场的守恒量 …… (5)
1.3 诺瑟定理(为了增进理解) …… (6)
1.4 时间不变的运动方程:拉格朗日函数和守恒量 …… (8)
1.5 平移、转动和伽利略不变性的条件 …… (9)
1.6 在均匀电磁场中的守恒定律 …… (12)
1.7 空间位移态的矩阵元 …… (19)
1.8 $(i\hat{p}/\hbar)^n\hat{B}(x)$和变换算符的关系式 …… (20)
1.9 算符 $\hat{A}(x)$的平移 …… (21)
1.10 均匀场中平移的生成元 …… (22)
1.11 在转动下矢量场的变换 …… (35)
1.12 在转动下两分量旋量的变换 …… (38)
1.13 测量电子自旋的方向 …… (40)

2.1 自旋 1 算符的特殊表示 …… (48)
2.2 对于自旋轨道耦合克莱布许-高登系数的计算 …… (62)

3.1 SO(3)群的李代数 …… (68)
3.2 复 $n\times n$ 矩阵的运算 …… (69)
3.3 一个对易关系的证明 …… (70)
3.4 正规洛伦兹变换的生成元和结构常数 …… (71)
3.5 $\hat{p}_\nu$ 和 $\hat{J}_\nu$ 的代数 …… (75)
3.6 平移-旋转群 …… (76)
3.7 单和半单李群 …… (77)
3.8 $\exp\left\{\frac{1}{2}i\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}\right\}$的约化 …… (78)
3.9 卡坦的半单性判据 …… (79)

3.10 SO(3)的半单性 …… (81)
3.11 旋转群的不变子空间 …… (83)
3.12 不变子空间的约化 …… (83)
3.13 旋转群的卡西米尔算符 …… (86)
3.14 秩为 1 和 2 的某些群 …… (86)
3.15 从卡西米尔算符构造哈密顿量 …… (90)
3.16 一个 n 维空间的带有 r 个参数的变换 …… (93)
3.17 SO(n)的生成元和无穷小算符 …… (93)
3.18 自旋 1 的李代数的矩阵表示 …… (95)
3.19 一维空间的平移;三维空间的欧几里得群 E_3 …… (98)
3.20 群和代数的同态及同构 …… (99)
3.21 结构常数的变换 …… (100)

4.1 具有转动对称性和电荷无关力的守恒定律 …… (103)
4.2 关于各种对称性的能量简并度 …… (104)
4.3 附加的对称性的简并度和宇称 …… (105)

5.1 无穷小 SU(2)变换的加法定律 …… (110)
5.2 氘核 …… (113)
5.3 核力的电荷独立性 …… (115)
5.4 π 介子三重态 …… (116)
5.5 群生成元的归一化 …… (120)
5.6 G 宇称 …… (124)
5.7 李代数的表示,轨道角动量算符代数的正规表示 …… (127)
5.8 维格纳-埃克特定理 …… (129)
5.9 在质子-氘核散射中的 π 介子产生 …… (132)
5.10 在氘核-氘核散射中中性 π 介子的产生 …… (132)
5.11 π 介子-核子散射 …… (133)
5.12 中性 ρ 介子的衰变 …… (139)

6.1 原子核的超荷 …… (142)
6.2 Δ 共振的超荷 …… (142)
6.3 重子 …… (143)
6.4 反重子 …… (144)
6.5 重子共振态的同位旋和超荷 …… (144)

7.1 SU(2)的李代数 …… (149)
7.2 生成元 $\hat{\lambda}_i$ 的线性独立性 …… (151)
7.3 系数 d_{ijk} 的对称性 …… (155)
7.4 结构常数 f_{ijk} 的反对称性 …… (156)
7.5 计算某些 d_{ijk} 系数和结构常数 …… (156)
7.6 结构常数和系数 d_{ijk} 之间的关系 …… (158)
7.7 SU(3)的卡西米尔算符 …… (159)
7.8 对 SU(3)的卡西米尔算符有用的关系 …… (160)
7.9 SU(3)多重态内壳状态多重性的增加 …… (169)
7.10 重子八重态中心的粒子状态 …… (173)
7.11 计算表示 $D(p,q)$ 的维数 …… (173)
7.12 对表示 $D(p,q)$ 计算二次卡西米尔算符 …… (174)

8.1 在表示[3]中的 US(3)生成元 …… (180)
8.2 反三重态[$\bar{3}$]的状态的变换性质 …… (182)
8.3 SU(3)两个基本表示的不等价性 …… (183)
8.4 态的权 …… (186)
8.5 夸克三重态[3]和反夸克三重态[$\bar{3}$]的最大权 …… (186)
8.6 膺标介子 …… (190)
8.7 (为了深入的洞察)介子 K^0,$\bar{K}^0$ 和它们的衰变 …… (191)
8.8 标量介子 …… (197)
8.9 矢量介子 …… (197)
8.10 张量介子 …… (198)
8.11 其他共振态 …… (199)
8.12 约化 SU(2)多重态 …… (202)
8.13 构造中子波函数 …… (218)
8.14 构造重子十重态的波函数 …… (221)
8.15 构造重子八重态的自旋-味道波函数 …… (228)

9.1 S_3 的基函数 …… (248)
9.2 S_4 的不可约表示 …… (249)
9.3 三个自旋$\frac{1}{2}$粒子体系的多重态 …… (254)
9.4 在群 SU(3)中的双粒子体系多重态 …… (256)

9.5 由三个粒子构成的 SU(3)多重态 …… (258)
9.6 SU(3)的维数公式 …… (264)
9.7 一个张量直积的分解 …… (268)
9.8 SU(2)的表示和自旋 …… (269)
9.9 三重态和夸克禁闭 …… (269)

10.1 群 D_3 …… (273)
10.2 旋转群 O(3) …… (274)
10.3 群特征标的应用:对有严格 SU(3)对称性的色单态夸克-胶子等离子体的配分函数…… (293)
10.4 SU(n)表示维数的递推公式的证明 …… (296)

11.1 SU(N)生成元的反对易关系 …… (304)
11.2 SU(N)中生成元乘积的迹 …… (306)
11.3 $\hat{F}_a$ 的完备性关系 …… (307)
11.4 卡西米尔算符在一个 SU(N)基本表示上的本征值 …… (309)
11.5 SU(4)介子多重态的 SU(3)内容…… (324)
11.6 分解直积[4]⊗[4]⊗[4] …… (325)
11.7 SU(4)重子多重态的 SU(3)内容…… (326)
11.8 较高 SU(4)多重态的分解和维数 …… (327)
11.9 数学补充:艾里函数 …… (334)

12.1 SU(4)代数的权算符 …… (345)
12.2 对结构常数 C_{ikl}的关系的证明 …… (349)
12.3 B_l 的邓金图 …… (358)
12.4 SU(3),SU(4)和 G_2 的卡坦矩阵 …… (360)
12.5 用相应的素根决定 G_2 的根 …… (361)
12.6 SU(3)的分析…… (365)

13.1 一个反幺正算符对波函数的矩阵元的效果…… (371)
13.2 在 $\hat{U}$ 和 $\hat{S}$ 间的对易关系 …… (373)

14.1 氢原子的能量和径向角动量…… (381)
14.2 龙格-楞次矢量 …… (382)
14.3 龙格-楞次矢量的性质 …… (383)

14.4 $\hat{\boldsymbol{M}}$ 和 $\hat{H}$ 的对易关系 …… (383)
14.5 标积 $\hat{\boldsymbol{L}}\cdot\hat{\boldsymbol{M}}$ …… (385)
14.6 决定 $\hat{\boldsymbol{M}}^2$ …… (386)
14.7 证明$[\hat{M}_i,\hat{L}_j]_-$的对易关系 …… (387)
14.8 证明$[\hat{M}_i,\hat{M}_j]_-$的对易关系 …… (388)

15.1 SU(2)矩阵的表示 …… (392)
15.2 SU(1,1)矩阵的表示 …… (393)
15.3 洛伦兹群的非紧致性 …… (394)
15.4 SO(p,q)的生成元 …… (394)
15.5 SO(2,1)的卡西米尔算符 …… (397)
15.6 SO(2,1)算符的坐标表示 …… (400)

第 1 章　量子力学中的对称性

1.1　经典物理中的对称性

对称性在物理中起着重要的作用，对存在的对称性的认识在某些问题中往往显著地简化解的过程. 我们下面借助于三个重要的例子予以说明.

a) 空间均匀性. 我们设想空间是均匀的，即在所有的位置 $\boldsymbol{r}$，空间具有相同的结构. 这意味着给定的物理问题的解在平移下不变，因为在这种情况中围绕任一点的面积可通过平移，由围绕一任选的点的一相似面积精确地映射而来(图 1.1). “平移不变性”对一孤立系统意味着动量守恒. 在这里我们明确定义空间均匀性是指一粒子体系的拉格朗日函数 $L(\boldsymbol{r}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_i, t)$ 当粒子的坐标 $\boldsymbol{r}_i$ 以 $\boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{a}$ 替代时保持不变，其中 $\boldsymbol{a}$ 是一任意的常矢量. (“空间均匀性”更通用的概念将只要求在空间平移下运动方程的不变性. 若是这样，也可证明存在一守恒量，但它并不必一定是正则动量，见练习 1.3 和 1.5 关于这方面的详细讨论). 因此

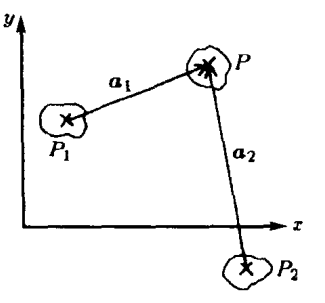


图 1.1　空间均匀性或空间平移不变性是指环绕着 P 的面积由一些另外的任选的点(即 $P_1, P_2, \cdots$)的面积平移而来.

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{a} \cdot \sum_i \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_i} = 0 \tag{1.1}$$

必须成立. 由于 $\boldsymbol{a}$ 是任意的，这意味着

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_i} = 0 = \left\{ \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i}, \sum_i \frac{\partial L}{\partial y_i}, \sum_i \frac{\partial L}{\partial z_i} \right\} \tag{1.2}$$

在此我们已缩写了 L 对 $\boldsymbol{r}_i$ 的梯度：

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_i} = \left\{ \frac{\partial L}{\partial x_i}, \frac{\partial L}{\partial y_i}, \frac{\partial L}{\partial z_i} \right\}$$

根据欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \text{，等}$$

借助(1.2)立即得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_x = 0, \text{ 因此 } P_x = \text{常数}$$

这里我们对于正则动量利用了关系式 $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = P_{x_i}$ 和 $\sum_i P_{x_i} = P_x$, P_x 是总动量

$$\boldsymbol{P} = \left\{\sum_i P_{x_i}, \sum_i P_{y_i}, \sum_i P_{z_i}\right\} = \sum_i \boldsymbol{P}_i \tag{1.3}$$

的 x 分量. 这是经典力学中的动量守恒定律. 在非相对论物理中,它可用于提供质心的定义. 这是基于在所有的惯性系中该定律都成立这一事实,因为在所有的惯性系中空间都是均匀的. 让 $\boldsymbol{P} = \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i$ 代表 K 系统中的总动量,则在以速度 $\boldsymbol{v}$ 相对于 K 系统运动的 K' 系统中,总动量由

$$\boldsymbol{P}' = \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i' = \sum_i m_i(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{P} - \boldsymbol{v}\sum_i m_i$$

给出,考虑非相对论性的 $\boldsymbol{v}_i' = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}$. 质心系是根据总动量 $\boldsymbol{P}'$ 等于零这一条件来定义的. 在 K 系统中质心的运动速度为

$$\boldsymbol{v}_s = \frac{\boldsymbol{P}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t}}{\sum_i m_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t} \tag{1.4}$$

其中

$$\boldsymbol{R} = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_i m_i} \tag{1.5}$$

是非相对论的质心坐标.

b) 时间均匀性. 时间均匀性和空间均匀性具有同样的重要性. 它意味着在孤立体系中,相对于时间的平移,自然定律的不变性,即它们在时刻 $t+t_0$ 与在时刻 t 具有相同的形式. 这在数学上由拉格朗日函数不显含时间所表现,即

$$L = L(q_i, \dot{q}_i) \tag{1.6}$$

于是由此得出

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \tag{1.7}$$

(注意若 L 显含时间,$\frac{\partial L}{\partial t}$ 项必须加到(1.7)式的右边).

利用欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

可发现

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i = \sum_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$$

或

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\right) = 0 \tag{1.8}$$

这表示代表总能量(哈密顿函数 H)的量

$$E = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \sum_i \dot{q}_i \pi_i - L = H \tag{1.9}$$

守恒，量 $\pi_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ 为正则动量. 由于能量(1.9)就 L 而论是线性的，它是相加的，因此对分别由 L_1 和 L_2 所描绘的两个体系，能量为 $E = E_1 + E_2$，只要两体系间不存在相互作用 L_{12}，即当 L_1 和 L_2 依赖于不同的力学变数 q_{i1} 和 q_{i2} 时，这就是正确的. 能量守恒定律不仅对孤立体系，而且也对在任一与时间无关的外场中的体系成立，因为那时 L 仍是孤立的(L 的唯一要求是与时间无关，它导致能量守恒(1.9)). 总能量守恒的体系称为保守系.

c) 空间各向同性. 空间各向同性意味着沿所有的方向，空间具有相同的结构(图 1.2). 换句话说：一孤立体系当整个体系在空间中任意转动时，其力学性质保持不变，即拉格朗日函数在转动下是不变的. 现让我们考虑无穷小转动(图 1.3)

$$\delta\boldsymbol{\phi} = \{\delta\phi_x, \delta\phi_y, \delta\phi_z\} \tag{1.10}$$

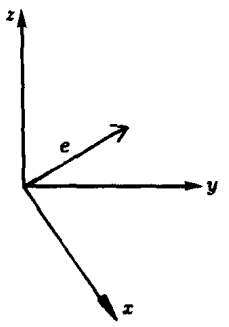


图 1.2　各向同性的空间沿一切可能的方向 e 结构相同.

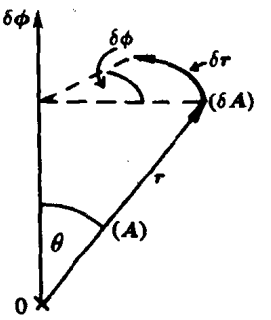


图 1.3　位置矢量 r 和一任意的矢量 A 的无穷小转动.

模 $\delta\phi$ 表示转动角的大小，方向 $\frac{\delta\boldsymbol{\phi}}{\delta\phi}$ 规定转动轴. 在转动 $\delta\boldsymbol{\phi}$ 下，矢径 r 改变了 δr，我们有

$$\delta r = |\delta \boldsymbol{r}| = r\sin\theta\delta\phi$$

δr 的方向垂直于 $\delta\boldsymbol{\phi}$ 与 r 所张成的平面，因此

$$\delta \boldsymbol{r} = \delta\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{r} \tag{1.11}$$

通过转动，除位置矢量 r_i 以外，粒子的速度 v_i 也改变了，它们改变了方向. 其实通过转动所有的矢量都以相同的方式改变. 因此速度的变化 δv_i 由

$$\delta \boldsymbol{v}_i = \delta\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{v}_i \tag{1.12}$$

给出. 由于已假设无穷小转动不改变拉格朗日函数，我们有

$$\delta L = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i + \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_i} \cdot \delta \boldsymbol{v}_i \right) = 0 \tag{1.13}$$

正则动量为

$$\boldsymbol{\pi}_i = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_i} = \left\{ \frac{\partial L}{\partial v_{i_x}}, \frac{\partial L}{\partial v_{i_y}}, \frac{\partial L}{\partial v_{i_z}} \right\}$$

根据拉格朗日方程,我们得到

$$\dot{\boldsymbol{\pi}}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_i} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_i}$$

代入这些量,并利用(1.11)和(1.12)后,方程(1.13)变为

$$\sum_i [\dot{\boldsymbol{\pi}}_i \cdot (\delta \boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{r}_i) + \boldsymbol{\pi}_i \cdot (\delta \boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{v}_i)$$

$$= \delta \boldsymbol{\phi} \cdot \sum_i (\boldsymbol{r}_i \times \dot{\boldsymbol{\pi}}_i + \boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{\pi}_i) = \delta \boldsymbol{\phi} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{\pi}_i \right) = 0 \tag{1.14}$$

由于

$$\boldsymbol{L} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{\pi}_i \tag{1.15}$$

是经典角动量,且无穷小转动矢量 $\delta \boldsymbol{\phi}$ 是任意的,从而

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{1.16}$$

即 $\boldsymbol{L}$ 为常量.因为(1.15)中的求和遍及所有的粒子,角动量是相加的——和早在(1.3)中所表明的动量一样——即如果添加更多的粒子,根据(1.15),它们对总角动量的贡献只要简单地加进去.这是正确的,不管这些添加的粒子与原来的粒子之间是否有相互作用.

通过求解以下两个问题,我们可对这些守恒定律有更深入的理解.

练习 1.1 不同参考系中的角动量

问题 a) 在彼此相对静止、原点相距 $\boldsymbol{a}$ 的两参考系中的角动量之间如何联系?

b) 以速度 $\boldsymbol{V}$ 相对运动的两惯性系 K 和 K' 中的角动量之间的关系如何?

解 a) 让我们考虑一粒子体系,粒子在一个坐标系中的位置矢量为 $\boldsymbol{r}_i$,在另一坐标系中的位置矢量为 $\boldsymbol{r}_i'$.由于坐标系的原点相距 $\boldsymbol{a}$,我们有

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i' + \boldsymbol{a} \tag{1}$$

体系的总角动量为

$$\boldsymbol{L} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i \tag{2}$$

将(1)代入(2),得出

$$\boldsymbol{L} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i = \sum_i \boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{a} \times \sum_i \boldsymbol{p}_i \tag{3}$$

当我们在彼此相对静止的系统之间变换,因为粒子的动量不变,故 $\sum_i \boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{L}'$,且 $\sum_i \boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{P}$ 是体系的总动量,

因此

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}'+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{P} \tag{4}$$

总角动量是由内部总角动量与整个体系相对于隔开一段距离$|\boldsymbol{a}|$的原点的角动量所组成. 仅当 $\boldsymbol{P}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$(或 $\boldsymbol{P}=0$),即当整个体系沿平移方向运动时,$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}'$. 然而体系的角动量是一守恒量,因为线性动量 $\boldsymbol{P}$ 也是守恒的!

b) 在系统的原点重合,即 $\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i'$ 的时刻考虑 K 与 K'. 速度为 $\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{v}_i'+\boldsymbol{V}$,因此

$$\boldsymbol{L}=\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{v}_i=\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{v}_i'+\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{V} \tag{5}$$

由于 $\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i'$,我们有 $\boldsymbol{L}'=\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{v}_i'$,且质心的位置矢量写作

$$\boldsymbol{R}=\frac{\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i}{\sum_i m_i}=\frac{\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i}{M}$$

其中 M 是体系的总质量. 因此(5)给出

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}'+M\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{V} \tag{6}$$

若各粒子体系在 K' 中是静止的,则 $\boldsymbol{V}$ 是质心的速度,且 $\boldsymbol{P}=M\boldsymbol{V}$ 是体系相对于 K 的总动量,即 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}'+\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{P}=\boldsymbol{L}'+\boldsymbol{L}_s$. 这意味着角动量是由静止系中的角动量 $\boldsymbol{L}'$ 和质心角动量 $\boldsymbol{L}_s$ 所组成. (**练习 1.1 完**)

练习 1.2　指定场的守恒量

问题　当在下列场中运动时,动量 $\boldsymbol{p}$ 和角动量 $\boldsymbol{L}$ 的哪些分量是守恒量?

a) 无穷大均匀平面场 ,

b) 无穷长均匀圆柱场,

c) 无穷长均匀棱柱场,

d) 两点场,

e) 无穷大均匀半平面场

f) 均匀圆锥场,

g) 均匀圆环场,

h) 无穷长均匀螺旋管场.

解　动量和角动量在给定场的对称轴上的投影保持守恒,因为经过沿该轴平移或围绕该轴转动,力学性质(拉格朗日函数和运动方程)不改变. 对于角动量分量,仅当角动量是相对于场的中心定义,而不是相对于一任意的空间点定义的时,这才是正确的. 当且仅当场的势不依赖于对应的广义坐标时,动量或动量分量在拉格朗日函数力学意义上分别保持守恒.

a) 无穷大均匀平面场. 我们选定 xy 平面. 由于此平面的平移不变性,势不依赖于 x 和 y,因此 p_x 和 p_y 是守恒的. 另外当进行绕 z 轴转动时,拉格朗日函数不改变,即 L_z 是守恒的.

b) 无穷长均匀圆柱场. 由于圆柱无穷长,在沿其轴(z 轴)的平移下势不改变,这样 p_z 是守恒的. 另外我们有绕 z 轴的转动对称性,即 L_z 是守恒的.

c) 无穷长均匀棱柱(边平行于 z 轴)场. 如同 b),p_z 是守恒的,但没有绕 z 轴的转动对称性,即 L_z 不守恒.

d) 两点场(点在 z 轴上). 在此我们仅有绕 z 轴的转动对称性,唯一的守恒量是 L_z.

e) 无穷大均匀半平面. 我们再次选定 xy 平面,现以 y 轴为界. 仅仅沿着 y 轴具有平移不变性,即 p_y 是守恒的.

f) 均匀圆锥体场(z 轴沿圆锥轴). 这时转动对称轴为 z 轴,L_z 是守恒的.

g) 均匀圆环(z 轴沿环的轴). 转动对称轴为 z 轴,L_z 是守恒的.

h) 无穷长均匀螺旋管(z 轴沿螺旋管的轴). 在绕 z 轴转动 $\delta\phi$ 下,只要沿 z 轴同时移动 δz,势(拉格朗日函数)就不改变. 如果螺旋的间距为 h(相对于在螺旋管上转动 2π,沿 z 方向的改变为 h),则 $\delta z=(\frac{h}{2\pi})\delta\phi$ 的平移和同时的 $\delta\phi$ 转动正好保持势的对称性,因此拉格朗日函数的变化为零,由此给出

$$\delta L = 0 = \frac{\partial L}{\partial z}\delta z + \frac{\partial L}{\partial \phi}\delta\phi \tag{1}$$

现我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_z = \frac{\partial L}{\partial z} \quad , \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L_z = \frac{\partial L}{\partial \phi}$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_z\frac{h}{2\pi} + L_z)\delta\phi = 0$$

对任意的 $\delta\phi$,得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_z\frac{h}{2\pi} + L_z) = 0$$

因此

$$p_z\frac{h}{2\pi} + L_z = \text{常数}$$

即对于螺旋管,p_z 和 L_z 的一确定的线性组合保持守恒.(**练习 1.2 完**)

如同在经典力学中那样,空间和时间的均匀性以及空间的各向同性在量子力学中也起着重要的作用. 然而在量子力学体系中还存在其它的对称性,由于这个原因我们需要就对称性研究作出一统一的方法. 另外我们把几何对称性——它对应于在空间和时间中的平移和反射下,以及在转动下体系的不变性——和力学对称性区别开,后者常常是诸如氢原子或各向同性谐振子的能量态的意外简并的原因. 除此之外,我们必须注意物理的不同分支(例如狭义相对论)[①]中的其它对称性. 通常我们仅考虑单粒子问题(或质心系中非相对论的两粒子问题,它等价于单粒子问题). 然而绝大多数结果能毫无困难地转化为几个相互作用粒子的问题,只要对所有的粒子基本的对称性是有效的.

例 1.3 诺瑟定理(为了增进理解)

诺瑟(Noether)定理叙述如下:

若欧拉-拉格朗日方程在坐标变换 $t, \boldsymbol{q}\to t'(t), \boldsymbol{q}'(\boldsymbol{q},t)$ 下不变,则存在一运动积分即一守恒量. 现我们将予以证明

① 全面的论述参见 *Relativistic Quantum Mechanics*(Springer, Berlin, Heidelberg).

给定一坐标 $q_i(i=1,2,\cdots l)$和时间 t 的拉格朗日函数 $L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$，我们通过定义

$$t' := t'(t)\ ,\ q_i' := q'_i(\boldsymbol{q},t) \tag{1}$$

引进新的坐标 $t',\boldsymbol{q}'$. 这变换将是单值可逆的，因此我们可写作

$$t' := t + \delta t(t)\ ,\ q_i' := q_i + \delta q_i(\boldsymbol{q},t) \tag{2}$$

最初，函数 δt 和 δq_i 是任意的. 速度 $\dot{\boldsymbol{q}},\dot{\boldsymbol{q}}'$ 为

$$\dot{q}_i := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q_i, \qquad \dot{q}_i' := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}q_i'$$

这两个量之间的关系为

$$\begin{aligned}\dot{q}_i' &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}q_i' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q_i'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(q_i+\delta q_i)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'} \\ &= (\dot{q}_i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_i)\frac{1}{1+\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta t}\end{aligned} \tag{3}$$

其中我们利用了

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}} = \frac{1}{1+\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta t} \tag{3'}$$

对于无穷小变换，这变为

$$\delta\dot{q}_i := \dot{q}_i' - \dot{q}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_i - \dot{q}_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta t \tag{4}$$

由于在此坐标变换下物理现象不可能改变，作用量必须保持不变：

$$S(t_1,t_2) := \int_{t_1}^{t_2} L(\boldsymbol{q}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t),t)\mathrm{d}t = S'(t_1,t_2) := \int_{t'(t_1)}^{t'(t_2)} L'(\boldsymbol{q}'(t'),\dot{\boldsymbol{q}}'(t'),t')\mathrm{d}t'$$

为达到此目的，下式必须成立

$$L'(\boldsymbol{q}',\dot{\boldsymbol{q}}',t') := L[\boldsymbol{q}(\boldsymbol{q}',t'),\dot{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q}',\dot{\boldsymbol{q}}',t'),t(t')]\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} \tag{5}$$

如果在这样的坐标变换下运动方程不改变形式，我们称此变换为对称变换. 在最简单的情况下拉格朗日函数本身保持不变，即

$$L'(\boldsymbol{q}',\dot{\boldsymbol{q}}',t') = L(\boldsymbol{q}',\dot{\boldsymbol{q}}',t')$$

但这并非必需.

$$L'(\boldsymbol{q}',\dot{\boldsymbol{q}}',t') = L(\boldsymbol{q}',\dot{\boldsymbol{q}}',t') + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\Omega(\boldsymbol{q}',t) \tag{6}$$

是足够的，或换句话说两个拉格朗日函数相差一个对时间的全导数. 容易证明 $\overline{L}=\mathrm{d}[\Omega(\boldsymbol{q},t)]/\mathrm{d}t$ 满足运动方程

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\overline{L}}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial\overline{L}}{\partial q_i} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\left(\sum_j\frac{\partial\Omega}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial\Omega}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_j\frac{\partial\Omega}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial\Omega}{\partial t}\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\Omega}{\partial q_i} - \left(\sum_j\frac{\partial^2\Omega}{\partial q_i\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial^2\Omega}{\partial t\,\partial q_j}\right) \\ &= \sum_j\frac{\partial^2\Omega}{\partial q_i\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial^2\Omega}{\partial t\,\partial q_i} - \left(\sum_j\frac{\partial^2\Omega}{\partial q_i\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial^2\Omega}{\partial t\,\partial q_i}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

将(6)代入(5),我们得到

$$L(\boldsymbol{q}(\boldsymbol{q}',t'),\cdots,t(t'))\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}=L(\boldsymbol{q}',\dot{\boldsymbol{q}}',t')+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\Omega(\boldsymbol{q}',t')$$

回复到老坐标,

$$L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)=L(\boldsymbol{q}'(\boldsymbol{q},t),\dot{\boldsymbol{q}}'(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t),t'(t))\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Omega(\boldsymbol{q}'(\boldsymbol{q},t),t'(t))$$

它分别地连同(2)或(3′),得到方程

$$L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)-L(\boldsymbol{q}'(\boldsymbol{q},t),\cdots,t'(t))=L(\boldsymbol{q}'(\boldsymbol{q},t),\cdots)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta t+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Omega(\boldsymbol{q}'(\boldsymbol{q},t),t'(t)) \tag{7}$$

如果变换是连续的,在(2)中考虑无穷小变换是足够的,于是(7)可写作(到一级无穷小),

$$\begin{aligned}-\delta L &:= L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)-L(\boldsymbol{q}+\delta\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}+\delta\dot{\boldsymbol{q}},t+\delta t)\\&=L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta t+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Omega(\boldsymbol{q}+\delta\boldsymbol{q},t+\delta t)\end{aligned}$$

尤其当我们选定 $\delta\boldsymbol{q},\delta t=0$,则 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}',t=t'$. 又根据(6)得出 $\mathrm{d}[\Omega(\boldsymbol{q},t)]/\mathrm{d}t=0$,可由此将$(-\delta L)$重写作

$$\begin{aligned}-\delta L&=L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta t+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\Omega(\boldsymbol{q}+\delta\boldsymbol{q},t+\delta t)-\Omega(\boldsymbol{q},t)]\\&=L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta t+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\Omega(\boldsymbol{q},t)\end{aligned} \tag{8}$$

现若将

$$-\delta L=-\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\right)-\frac{\partial L}{\partial t}\delta t \tag{9}$$

代入(8),然后考虑(4),得

$$\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial t}\delta t+\left(L-\sum_i\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta t=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\Omega(\boldsymbol{q},t) \tag{10}$$

对任意的 $\boldsymbol{q},t$,(10)是在无穷小对称变换(2)下,由 L 所描述的力学体系保持不变的条件. 尤其是若 $\delta\Omega=0,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta t=0$,则 $\delta L=0$,拉格朗日函数本身在变换下是不变的. 若(10)被满足,然后利用运动方程 $\frac{\partial L}{\partial q_i}=\mathrm{d}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)/\mathrm{d}t$,得到

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_i\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i+\left(L-\sum_i\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\delta t+\delta\Omega\right]\\&=\sum_i\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_i+\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\ddot{q}_i-\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i-\frac{\partial L}{\partial q_i}\ddot{q}_i\right)\delta t\right]\\&+\frac{\partial L}{\partial t}\delta t+\left(L-\sum_i\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta t+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\Omega=0\end{aligned}$$

即量

$$\sum_i\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i+\left(L-\sum_i\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i\right)\delta t+\delta\Omega=\text{常数} \tag{11}$$

是一运动积分(守恒量). (**例 1.3 完**)

练习 1.4 时间不变的运动方程:拉格朗日函数和守恒量

问题 若运动方程在时间平移下不变,拉格朗日函数 $L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$必须满足哪些条件,可能存在什么守恒量?

解　时间平移通过坐标变换 $\delta q=\delta\dot{q}=0,\delta t(t)=\delta\tau=$常数予以参数化，又条件(参看例 1.3，方程(10))写作

$$\frac{\partial L}{\partial t}\delta\tau=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\Omega \tag{1}$$

若 L 不显含时间，则 $\delta\Omega=0$，且拉格朗日函数本身具有时间平移不变性，相应的守恒量(参看例 1.3，方程(11))是总能量.

$$E=L-\sum_i\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i \tag{2}$$

若 $L=T-V$ 中的动能 T 不显含时间，而存在与时间相关的势 V，则 $\delta\Omega$ 应该以这样的方式出现，致使

$$\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{1}{\delta\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\Omega \tag{3}$$

通常这是不可能的，因为$\frac{\partial V}{\partial t}$不必是对时间的全导数.(**练习 1.4 完**)

练习 1.5　平移、转动和伽利略不变性的条件

问题　给出拉格朗日函数(用笛卡尔坐标)

$$L=\frac{1}{2}m\dot{r}^2-V(r) \tag{1}$$

和下列变换：

a) 空间平移，

$$\delta x_1=\delta x_2=0,\qquad \delta x_3=\text{常数},\qquad \delta t=0; \tag{2a}$$

b) 空间转动，

$$\delta x_1=-\delta\phi x_2,\qquad \delta x_2=\delta\phi x_1,\qquad \delta x_3=0;$$
$$\delta t=0,(\delta\phi=\text{常数}); \tag{2b}$$

c) 伽利略变换，

$$\delta x_1=\delta x_2=0,\delta x_3=\delta v_3 t,\delta t=0,(\delta v_3=\text{常数}) \tag{2c}$$

为使这些是对称变换，必须具备哪些条件？守恒量是什么？

解　因为 $\delta t=0$，对于对称变换(见例 1.3，方程(10))，条件方程写作

$$\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial x_i}+\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\delta x_i=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\Omega(r,t) \tag{3}$$

左边必须是对时间的全导数.如果能求出这样的 Ω，则(由诺瑟定理——见例 1.3，方程(11))量

$$\sum_i\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_i}\delta x_i+\delta\Omega=\text{常数} \tag{4}$$

是守恒的.在我们的情况中，我们有

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}=-\frac{\partial V}{\partial x_i},\qquad \frac{\partial L}{\partial\dot{x}_i}=m\dot{x}_i \tag{5}$$

a) 运动方程的形式不变的条件在此写作

$$-\frac{\partial V}{\partial x_3}\delta x_3=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\Omega(r,t)$$
$$=-\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}\delta\Omega(r,t)\dot{x}_i-\frac{\partial}{\partial t}\delta\Omega(r,t) \tag{6}$$

左边不含 $\dot{x}_i$,于是

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\delta\Omega(\boldsymbol{r},t)=0 \text{ 或 } \delta\Omega(\boldsymbol{r},t)=\delta\Omega(t) \tag{7}$$

因此我们的条件是

$$\frac{\partial V}{\partial x_3}\delta x_3=\frac{\partial}{\partial t}\delta\Omega(t) \tag{8}$$

由此立即得出$\frac{\partial V}{\partial x_3}$必须是常数(与 $\boldsymbol{x},t$ 无关),并且有

$$\delta\Omega=\frac{\partial V}{\partial x_3}\delta x_3 t \tag{9}$$

运动方程是形式不变的.在这种情况中空间平移是对称变换,守恒量是(见(4),在消掉 δx_3 后)

$$m\dot{x}_3+\frac{\partial V}{\partial x_3}t=\text{常数} \tag{10}$$

尤其若沿 x_3 方向的恒定力等于零,则

$$\frac{\partial V}{\partial x_3}=0 \tag{11}$$

并且守恒量是动量

$$p_3=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3}=m\dot{x}_3 \tag{12}$$

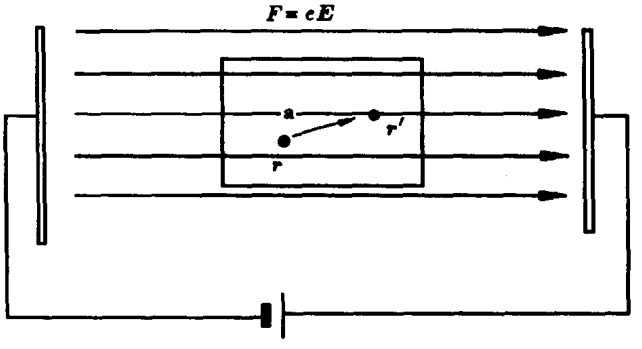
由于现在 $\delta\Omega=0$,拉格朗日函数本身是不变的.

这样我们从拉格朗日函数的空间平移不变性证明了动量守恒,而不是从对于空间平移运动方程的不变性得出.在这(一般)情况下守恒量是

$$\tilde{\boldsymbol{P}}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{F}t=m\dot{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{F}t \tag{10'}$$

意味着动量是时间的线性函数.现在 $\boldsymbol{F}$ 是一恒定的、均匀的力场.

从更广泛的观点,恒定力场说明空间的局域同性和整体同性之间的差别.场充满的空间是局部均匀的,因为通过局部的测量不能区别空间的点.然而力场必然由某个源产生,如引力场由远距离的物质,恒定电场由相隔的电容器极板产生.该源的配置破坏了空间的整体的均匀性(见下图).



空间的局部的和整体的均匀性之间的差异.整体的均匀性意味着动量守恒,
而在局部均匀的场中,动量以时间的线性函数的形式变化.

b) 这时我们有

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\delta x_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\delta x_2 = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\Omega(\boldsymbol{x},t) \tag{13}$$

或

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}x_2 - \frac{\partial V}{\partial x_1}x_1\right)\delta\phi = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\Omega(\boldsymbol{x},t) \tag{14}$$

左边实际上是围绕 x_3 轴的转动力矩，

$$(\boldsymbol{r}\times\nabla V)_3\delta\phi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\Omega(\boldsymbol{r},t) \tag{15}$$

采用与情况(a)中相同的讨论，我们可知仅仅对于

$$(\boldsymbol{r}\times\nabla V)_3 = \text{常数} \tag{16}$$

欧拉-拉格朗日方程在形式上是不变的. 可以验证，当

$$(\boldsymbol{r}\times\nabla V)_3 = 0 \tag{17}$$

成立，则我们有$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\Omega=0$，并且

$$\delta\Omega = 0 \tag{18}$$

相应的守恒量是

$$-m\dot{x}_1x_2 + m\dot{x}_2x_1 = \text{常数} \tag{19}$$

它正好是角动量的 x_3 分量，即

$$L_3 = (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})_3 = \text{常数}$$

因此角动量守恒来自于拉格朗日函数的转动不变性.

c) 对于伽利略变换，(1)变为

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_3} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\delta v_3 t = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\Omega \tag{21}$$

或

$$\left(-\frac{\partial V}{\partial x_3}t + m\dot{x}_3\right)\delta v_3 = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\Omega = -\sum_i\left(\frac{\partial\delta\Omega}{\partial x_i}\right)\dot{x}_i - \frac{\partial}{\partial t}\delta\Omega \tag{22}$$

于是

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\delta\Omega = \frac{\partial}{\partial x_2}\delta\Omega = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x_3}\delta\Omega = -m\delta v_3$$

和

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta\Omega = \frac{\partial V}{\partial x_3}\delta v_3 t \tag{23}$$

必须成立. 由这些方程的前三个得出

$$\delta\Omega = -mx_3\delta v_3 + f(t) \tag{24}$$

而由第四个方程得出

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial V}{\partial x_3}\delta v_3 t \tag{25}$$

因此$\frac{\partial V}{\partial x_3}$=常数必须成立，这意味着

$$\delta\Omega = \left(- mx_3 + \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x_3}t^2 \right)\delta v_3 \tag{26}$$

若 L 也具有平移不变性,$\left(\frac{\partial V}{\partial x_3}=0\right)$,则相应的守恒量是

$$m\dot{x}_3 t - mx_3 = \text{常数} \tag{27}$$

或

$$x_3 - \dot{x}_3 t = x_3 - \frac{p_3}{m}t = x_3(0) = \text{常数} \tag{28}$$

粒子以恒定的速度运动.(**练习 1.5 完**)

练习 1.6 在均匀电磁场中的守恒定律

问题 对带电粒子在

a) 均匀电场 $\boldsymbol{E}$ 中

b) 均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 中

导出对应于平移对称性的守恒定律.

解 具有质量 m 和电荷 q 的(非相对论的)点粒子在标势 ϕ 和矢势 $\boldsymbol{A}$ 所描述的电磁场中的拉格朗日函数为①:

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{q}{c}\boldsymbol{A}\cdot\dot{\boldsymbol{x}} - q\phi \tag{1}$$

正则动量是

$$\boldsymbol{P} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} = m\dot{\boldsymbol{x}} + \frac{q}{c}\boldsymbol{A} \tag{2}$$

进一步可找到

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{q}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_i}\cdot\dot{\boldsymbol{x}} - q\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \tag{3}$$

由此可以得到运动方程

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} \\ &= m\ddot{x}_i + \frac{q}{c}\left(\frac{\partial A_i}{\partial t} + \sum_k \dot{x}_k \frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right) - \frac{q}{c}\sum_k \frac{\partial A_k}{\partial x_i}\dot{x}_k + q\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \\ &= m\ddot{x}_i + q\left(\frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) + \frac{q}{c}\sum_k \dot{x}_k\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_i} - \frac{\partial A_k}{\partial x_i}\right) \end{aligned} \tag{4}$$

或用矢量符号写作

$$\begin{aligned} m\ddot{\boldsymbol{x}} &= q\left(-\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{A}} - \nabla\phi\right) + \frac{q}{c}\dot{\boldsymbol{x}}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) \\ &= q\boldsymbol{E} + \frac{q}{c}\dot{\boldsymbol{x}}\times\boldsymbol{B} \end{aligned} \tag{5}$$

无论什么时候将广义力 $\frac{\partial L}{\partial x_i}$ 写作全时间导数 $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G_i$ 都是可能做到的,由于欧拉-拉格朗日方程,从而可见存

① 参看 J. D. Jackson:*Classical Electrodynamics*,第二版(Wiley,New York 1985).

在守恒定律：

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}-\frac{\delta L}{\partial x_i}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}-G_i\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[P_i-G_i] \tag{6}$$

此处 P_i 是正则动量.

a) 均匀电场 $\boldsymbol{E}$ 可由势

$$\phi=-\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{x}\quad,\quad \boldsymbol{A}=0 \tag{7a}$$

或由

$$\phi'=0\quad,\quad \boldsymbol{A}'=-\boldsymbol{E}t \tag{7b}$$

描述. 两种表示对应于不同的规范. 在第一种情况中我们可写作

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}=-q\frac{\partial \phi}{\partial x_i}=+qE_i=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(+qE_it)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G_i \tag{8a}$$

由此我们得到守恒定律

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{P}-q\boldsymbol{E}t)=0 \tag{9a}$$

在此规范中守恒量与正则动量不相等. 然而在第二种情况中我们有

$$\frac{\partial L'}{\partial x_i}=0\longrightarrow \boldsymbol{G}'=0 \tag{8a}$$

因此正则动量是守恒的：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{P}=0 \tag{9b}$$

(9a)与(9b)之间的明显差异可解释为(2)产生两个不同的正则动量表达式，在第一种情况中我们有

$$\boldsymbol{P}=m\dot{\boldsymbol{x}} \tag{10a}$$

而在第二种情况中我们得到

$$\boldsymbol{P}=m\dot{\boldsymbol{x}}-q\boldsymbol{E}t \tag{10b}$$

在两种情况中可发现量

$$m\dot{\boldsymbol{x}}-q\boldsymbol{E}t \tag{11}$$

是守恒的. 由此我们认识到在有外部电磁场的情况下包含正则动量的定律的物理意义可以依赖于规范.

b) 均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 可由矢势

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{x},\qquad \phi=0 \tag{12}$$

描述. 在此我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x_i}&=\frac{q}{c}\sum_k\dot{x}_k\frac{\partial A_k}{\partial x_i}=\frac{q}{2c}\sum_k\dot{x}_k\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\sum_{lm}\epsilon_{klm}B_lx_m\Big)\\&=\frac{q}{2c}\sum_k\dot{x}_k\sum_l\epsilon_{kli}B_l\end{aligned} \tag{13}$$

或写作矢量形式

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}}=\frac{q}{2c}\dot{\boldsymbol{x}}\times\boldsymbol{B}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{q}{2c}\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{B}\Big)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{G} \tag{14}$$

于是，相应于平移对称的守恒定律写作

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\boldsymbol{P}-\frac{q}{2c}\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{B}\Big)=0 \tag{15}$$

注意到在此情况中守恒量不等于正则动量的分量.由于(2),正则动量为

$$\boldsymbol{P}=m\dot{\boldsymbol{x}}+\frac{q}{2c}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{x}=m\dot{\boldsymbol{x}}-\frac{q}{2c}\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{B} \tag{16}$$

因此我们可通过速度来表示守恒量:

$$m\dot{\boldsymbol{x}}-\frac{q}{c}\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{B} \tag{17}$$

(练习 1.6 完)

1.2 量子力学中的空间平移

考虑由刃矢$|\alpha\rangle$或波函数$\psi_\alpha(\boldsymbol{r},t)$给出的态.当此态在空间位移了一矢量$\boldsymbol{\varrho}$,则产生了一新态,我们分别称它为$|\alpha'\rangle$或$\psi_\alpha'(\boldsymbol{r},t)$,更确切地说我们有

$$\psi_\alpha'(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\varrho},t)=\psi_\alpha(\boldsymbol{r},t) \tag{1.17}$$

这已由图 1.4 明确地给出,波函数$\psi_\alpha(\boldsymbol{r},t)$在$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0$处有一极大值.

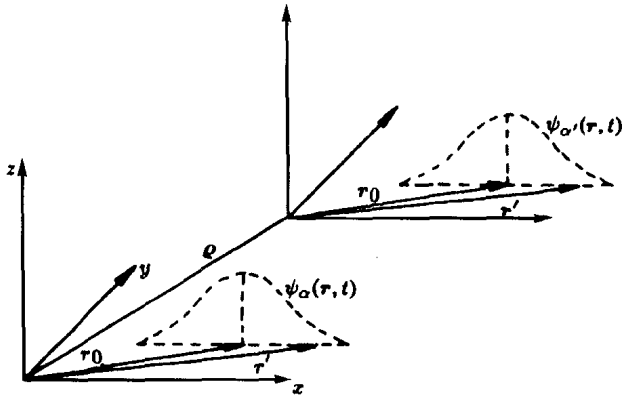


图 1.4 一波包平移$\boldsymbol{\varrho}$的说明.$\psi_\alpha'(\alpha)$在$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\varrho}$处与$\psi_\alpha(\alpha)$在$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$处有相同的值.

因此位移了的波函数$\psi_\alpha'(\boldsymbol{r},t)$在$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{\varrho}$处有一极大值.在此运用中我们位移了整个波函数$\psi_\alpha$,不过坐标系$x$、$y$、$z$保持相同.

这就是通常所说的对称操作(在我们的情况中是位移)的主动手法,对称操作的被动手法是把波函数ψ_α想象为不变(固定的),而坐标系相对于原坐标系平移了一矢量$-\boldsymbol{\varrho}$.它与主动手法是等价的.(见图 1.5,在那里对于转动说明了相同的概念.)

通常我们将处理主动手法,除非以后考虑到相对论情况[①],例如洛伦兹变换中,被动手法似乎更适合:在那里从不同的惯性系观察同一个物理体系.

① 参看 *Relativistic Quantum Mechanics*(Springer, Berlin, Heidelberg 1989).

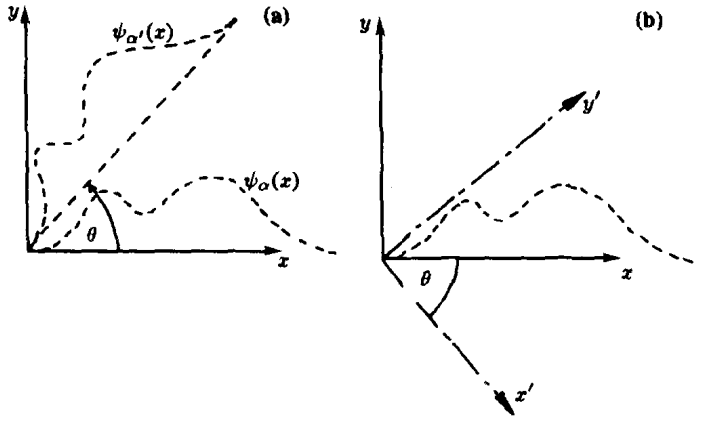


图 1.5 (a)态 $\psi_\alpha(x)$(主动的)转动 θ 角变为态 $\psi_\alpha'(x)$. (b)坐标系的(被动的)转动. 态 $\psi_\alpha(x)$保持固定,不过相对于坐标系转动了 $-\theta$,它好像是(a)中的相对于原坐标系转动了 θ 的态 $\psi_\alpha'(x)$.

1.3 幺正平移算符

早先[①]我们开始了解希尔伯特空间中的两类变换,就是

$$\phi_\mu(\boldsymbol{r},t) = \sum_n S_{n\mu}\psi_n(\boldsymbol{r},t) \tag{1.18}$$

和

$$\psi(\boldsymbol{r},t) = \exp(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t)\psi(\boldsymbol{r},0) \tag{1.19}$$

第一个方程表达希尔伯特空间的基矢 $\psi_n(\boldsymbol{r},t)$到新基矢 $\phi_\mu(\boldsymbol{r},t)$的变换. 因此它描述在希尔伯特空间中的坐标变换(坐标轴的转动). 与此相反第二个变换(1.19)保持坐标轴不动而将矢量 $\psi(\boldsymbol{r},0)$变成同一希尔伯特空间中的矢量 $\psi(\boldsymbol{r},t)$. 因此(1.19)描述在希尔伯特空间中不改变坐标轴的,普遍的态矢量 ψ 的转动.

在此我们将考虑第二种类型的变换,也就是在坐标空间中态矢量的主动的平移,它对应于希尔伯特空间中态矢量的转动. 由于在位置空间中态矢量平移的时候它的长度保持不变,我们预计对应的空间平移算符 $\hat{U}_r(\boldsymbol{\varrho})$是幺正的(概率守恒). 角标 r 标志空间平移. 接着我们将开始认识时间平移算符 $U_t(\tau)$(它经过时间间隔 τ 的移动),其中角标 t 表示通常的时间变量. 对移动态我们写作

$$\psi_\alpha'(\boldsymbol{r}) = \hat{U}_r(\boldsymbol{\varrho})\psi_\alpha(\boldsymbol{r}) \tag{1.20}$$

且由于(1.17),我们推断

① 参看此丛书《量子力学:导论》,北京大学出版社,2000.

$$\psi_\alpha'(\boldsymbol{r}) = \psi_\alpha(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\varrho}) = \hat{U}_r(\boldsymbol{\varrho})\psi_\alpha(\boldsymbol{r}) \tag{1.21}$$

为清楚地确定算符 $\hat{U}_r(\boldsymbol{\varrho})$,我们调整平移矢量 $\boldsymbol{\varrho}$ 平行于 x 轴.因此 $\boldsymbol{\varrho}=\varrho\boldsymbol{e}_1$,通过泰勒展开我们得到

$$\begin{aligned}\psi_\alpha(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\varrho}) &= \psi_\alpha(x-\varrho,y,z)\\ &= \psi_\alpha(x,y,z) - \varrho\frac{\partial}{\partial x}\psi'_\alpha(x,y,z) + \frac{\varrho^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_\alpha(x,y,z)\cdots\cdots\end{aligned} \tag{1.22}$$

很清楚(1.22)的右边可写作以下形式

$$\begin{aligned}&\psi_\alpha(x,y,z) - \varrho\frac{\partial}{\partial x}\psi_\alpha(x,y,z) + \frac{\varrho^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,y,z) - \cdots\cdots\\ &= \mathrm{e}^{-\varrho\frac{\partial}{\partial x}}\psi_\alpha(x,y,z)\end{aligned}$$

如果平移矢量 $\boldsymbol{\varrho}$ 具有任意的方向,即 $\boldsymbol{\varrho}=\varrho_1\boldsymbol{e}_1+\varrho_2\boldsymbol{e}_2+\varrho_3\boldsymbol{e}_3$,我们可推广刚才应用的方法($\varrho\frac{\partial}{\partial x}$必须用 $\boldsymbol{\varrho}\cdot\nabla$替代),且通过三维泰勒展开,得到

$$\begin{aligned}\psi_\alpha(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\varrho}) &= \psi_\alpha(x-\varrho_1,y-\varrho_2,z-\varrho_3)\\ &= \exp(-\boldsymbol{\varrho}\cdot\nabla)\psi_\alpha(x,y,z) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}\boldsymbol{\varrho}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}}{\hbar}\right)\psi_\alpha(\boldsymbol{r})\end{aligned} \tag{1.23}$$

在这里我们引进了动量算符 $\hat{\boldsymbol{p}}=-\mathrm{i}\hbar\nabla$.比较(1.21)和(1.23)得到平移算符

$$\hat{U}_r(\boldsymbol{\varrho}) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}\boldsymbol{\varrho}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}}{\hbar}\right) \tag{1.24}$$

方程(1.24)对任意的 $\psi_\alpha(\boldsymbol{r})$,即对所有的态矢量是有效的.因为算符$\nabla$(它仅在坐标表象中被定义)已由动量算符所替代,方程(1.24)在所有的表象中是有效的.利用 $\hat{\boldsymbol{p}}$ 的厄密性,我们现将证明 $\hat{U}_r(\boldsymbol{\varrho})$是幺正的.

$$\begin{aligned}\hat{U}_r^{-1}(\varrho) &= \exp\left(+\frac{\mathrm{i}\boldsymbol{\varrho}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}}{\hbar}\right) = \left[\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\boldsymbol{\varrho}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}^+}{\hbar}\right)\right]^+\\ &= \left[\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\boldsymbol{\varrho}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}}{\hbar}\right)\right]^+ = \hat{U}_r^+(\boldsymbol{\varrho})\end{aligned} \tag{1.25}$$

这将对所有的李群产生有用的结果,李群算符可写作具有确定的算符 $\hat{L}_1,\hat{L}_2,\cdots\cdots$的 $\hat{U}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha_1\hat{L}_1+\alpha_2\hat{L}_2+\cdots)}$的形式.我们称这些算符为群的生成元.在这个意义上(1.24)中的动量算符 $\hat{p}_i$ 是平移群的生成元.

1.4 关于在空间中移动的态的运动方程

在确定的时刻 t 通过一空间位移,态 $\psi_\alpha(\boldsymbol{r},t)$变换为 $\psi_\alpha'(\boldsymbol{r},t)$,并且 $\psi_\alpha(\boldsymbol{r},t)$满足含时的薛定谔方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi_a(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=\hat{H}\psi_a(\boldsymbol{r},t) \tag{1.26}$$

方程(1.26)描述 $\psi_a(\boldsymbol{r},t)$随着时间的演变,并由此产生了这样的问题:在什么条件下我们能使移动态 $\psi_a'(\boldsymbol{r},t)$和起始态 $\psi_a(\boldsymbol{r},t)$有相同的时间演变?这是空间均匀性的准确意义:所有的空间位移态满足相同的自然界定律(此处是相同的薛定谔方程).未观察到移动态和未移动态之间的差别.所以

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_a'(\boldsymbol{r},t)&=\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}_r(\boldsymbol{\varrho})\psi_a(\boldsymbol{r},t)=\hat{U}_r(\boldsymbol{\varrho})\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi_a(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\\&=\hat{U}_r(\boldsymbol{\varrho})\hat{H}\psi_a(\boldsymbol{r},t)=\hat{U}_r(\boldsymbol{\varrho})\hat{H}\hat{U}_r^{-1}(\boldsymbol{\varrho})\psi_a'(\boldsymbol{r},t)\end{aligned} \tag{1.27}$$

利用(1.25),我们得到

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_a'(\boldsymbol{r},t)=\hat{U}_r(\boldsymbol{\varrho})\hat{H}\hat{U}_r^{+}(\boldsymbol{\varrho})\psi_a'(\boldsymbol{r},t)$$

显然当

$$\hat{U}_r(\boldsymbol{\varrho})\hat{H}\hat{U}_r^{+}(\boldsymbol{\varrho})=\hat{H}$$

或利用(1.25)

$$\hat{U}_r(\boldsymbol{\varrho})\hat{H}=\hat{H}\hat{U}_r(\boldsymbol{\varrho}) \tag{1.28}$$

时,$\psi_a'(\boldsymbol{r},t)$才满足和 $\psi_a(\boldsymbol{r},t)$相同的薛定谔方程,因而哈密顿算符 $\hat{H}_r$ 和位移算符 $\hat{U}(\boldsymbol{\varrho})$必须对易,即

$$[\hat{H},\hat{U}_r(\boldsymbol{\varrho})]_-=0 \tag{1.29}$$

根据(1.24),我们可将此写作

$$[\hat{H},\exp(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{\varrho}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})]=0 \tag{1.30}$$

由于 $\boldsymbol{\varrho}$ 是任意的矢量,此方程导致条件

$$[\hat{H},\hat{\boldsymbol{p}}]_-=0 \tag{1.31}$$

即动量算符 $\hat{\boldsymbol{p}}$ 必须与哈密顿算符 $\hat{H}$ 对易.因此[①]动量 $\boldsymbol{p}$ 是运动恒量.此方程类似于经典方程(1.3).进一步由(1.31)可得出 $\hat{H}$ 和 $\hat{\boldsymbol{p}}$ 可同时对角化,因此可建立具有能量算符的以及动量算符的确定本征值的态.

根据这些考虑,若位移态 $\psi_a'(\boldsymbol{r},t)$满足和起始态 $\psi_a(\boldsymbol{r},t)$相同的薛定谔方程,动量就是运动恒量.因此对空间均匀性的要求就等同于规定每个空间的位移波函数必须同样满足薛定谔方程(即自然界定律).自然界定律(在此是薛定谔方程)相对于空间位移的对称性意味着动量守恒定律.态由恒定的能量和恒定的动量所表征,于是称这样的体系为空间位移不变的或空间位移对称的.

自由粒子是上述体系的例子.然而只要引入力(例如粒子在一局部的位势中),这种对称性即将失去,当该移动波函数越出该位势之外时,因为它不再是本征态,因此它会衰变.该位势干扰空

① 参见本丛书《量子力学:导论》,北京大学出版社,2000.

间的均匀性,因此这样的位势的本征函数不是平移不变的(见图 1.6).

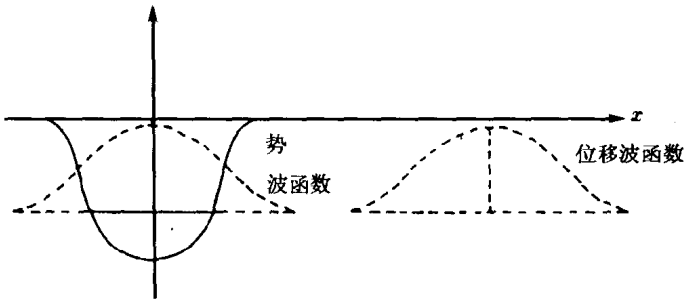


图 1.6 位移波函数不是所示位势的本征函数.这样的态将立即衰变.

1.5 对称性和态的简并性

设起始态 $\psi_a(\boldsymbol{r},t)$满足定态薛定谔方程:

$$\hat{H}\psi_a(\boldsymbol{r},t) = E_a\psi_a(\boldsymbol{r},t) \tag{1.32}$$

此外算符 $\hat{S}$ 可与 $\hat{H}$ 对易,因此

$$[\hat{H},\hat{S} = 0] \tag{1.33}$$

由于(1.32),$\hat{S}\psi_a$ 也是 $\hat{H}$ 的一本征态,具有相同的本征值 E_a,即

$$\hat{H}(\hat{S}\psi_a) = \hat{S}\hat{H}\psi_a = \hat{S}E_a\psi_a = E_a(\hat{S}\psi_a) \tag{1.34}$$

若态 $\chi_a=\hat{S}\psi_a$ 与 ψ_a 线性无关,则本征值 E_a 是简并的.在对于空间位移对称的情况下,根据(1.31)算符 $\hat{\boldsymbol{p}}$ 与哈密顿算符 $\hat{H}$ 对易,因此所有具有任意的恒定矢量 $\boldsymbol{a}$ 的态 χ_{p_0}

$$\chi_{p_0}=\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\psi_{p_0}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar^3}}\exp[+\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\boldsymbol{p}_0\cdot\boldsymbol{r}-Et)]$$

$$=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{p}_0}{\sqrt{2\pi\hbar^3}}\exp[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\boldsymbol{p}_0\cdot\boldsymbol{r}-Et)]$$

将具有相同的能量本征值 $E=\frac{\boldsymbol{p}_0^2}{2m}$.在这种情况中波函数 χ_{p_0} 与 ψ_{p_0} 仅相差一归一化因子,而我们不能关于简并性得出结论.以后在(1.72)中当我们研究波函数的转动时,简并性变成明显的.在那里我们将利用转动算符 $\hat{U}_R(\boldsymbol{\phi})$,类似于在 1.3 节中我们引进平移算符那样.相应地经过无穷小角度 $\delta\boldsymbol{\phi}$ 转动的平面波写作

$$\chi_p(r,t)=\hat{U}_R(\delta\boldsymbol{\phi})\psi_{p_0}(\boldsymbol{r},t)$$

$$=\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\delta\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{L}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar^3}}\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\boldsymbol{p}_0\cdot\boldsymbol{r}-Et)\right]$$

$$\approx\left[\mathbb{1}-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\delta\boldsymbol{\phi}\cdot(\boldsymbol{r}\times\hat{\boldsymbol{p}})\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar^3}}\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\boldsymbol{p}_0\cdot\boldsymbol{r}-Et)\right]$$

$$=\left[\mathbb{1}-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\delta\boldsymbol{\phi}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}_0)\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar^3}}\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\boldsymbol{p}_0\cdot\boldsymbol{r}-Et)\right]$$

$$=\left[\mathbb{1}+\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\delta\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{p}_0)\cdot\boldsymbol{r}\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar^3}}\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\boldsymbol{p}_0\cdot\boldsymbol{r}-Et)\right]$$

$$=\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\delta\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{p}_0)\cdot\boldsymbol{r}\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar^3}}\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\boldsymbol{p}_0\cdot\boldsymbol{r}-Et)\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar^3}}\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[(\boldsymbol{p}_0+\delta\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{p}_0)\cdot\boldsymbol{r}-Et]\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar^3}}\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-Et)\right]\tag{1.35}$$

其中 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_0+\delta\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{p}_0$ 是转动后的动量，见(1.11). 而且我们有 $|\boldsymbol{p}|=|\boldsymbol{p}_0|$，正如在(1.35)中见到的. 这转动后的波函数 $\chi_p(\boldsymbol{r},t)$ 像 ψ_a 一样是线性独立平面波系列的一部分，因此不可能通过其它平面波的线性组合而由它们构成. 这样若 $\hat{U}_R(\delta\boldsymbol{\phi})$ 与哈密顿算符对易，波 χ_p 是简并性的，且 $\psi_{p_0}(\boldsymbol{r},t)$ 是哈密顿算符的一本征态. 这是明显的，因为一粒子的能量依赖于动量的平方而与它的方向无关.

概述：以上已给出的考虑将是使人感兴趣的. 若存在两个算符 $\hat{S}$ 和 $\hat{A}$，它们与 $\hat{H}$ 对易但彼此不对易，即

$$[\hat{H},\hat{S}]_-=[\hat{H},\hat{A}]_-=0,\ [\hat{A},\hat{S}]\neq 0$$

若 ψ_a 是 $\hat{A}$ 和 $\hat{H}$ 的本征矢时，ψ_a 不是 $\hat{S}$ 的本征矢，即 $\psi_a(r,t)$ 和 $\hat{S}\psi_a$ 是线性无关的. 在以上的例子中对此已有应用，其中 $\hat{A}$ 是动量算符，而 $\hat{S}$ 是角动量算符.

例 1.7　空间位移态的矩阵元

让我们研究算符 $\hat{A}$ 在平移态之间的矩阵元，

$$\langle\psi_\alpha(\boldsymbol{r},t)|\hat{A}|\psi_\beta(\boldsymbol{r},t)\rangle=\langle\psi_\alpha(\boldsymbol{r},t)|\hat{U}_r^+(\boldsymbol{\varrho})\hat{A}\hat{U}_r(\boldsymbol{\varrho})|\psi_\beta(\boldsymbol{r},t)\rangle\tag{1}$$

若 $\hat{A}=\hat{A}(\hat{\boldsymbol{p}})$，即 $\hat{A}$ 是动量算符的函数，已平移的算符可写作

$$\hat{U}_r^+(\boldsymbol{\varrho})\hat{A}(\hat{\boldsymbol{p}})\hat{U}_r(\boldsymbol{\varrho})=\hat{A}(\hat{\boldsymbol{p}})\hat{U}_r^+\hat{U}_r=\hat{A}(\hat{\boldsymbol{p}})$$

即 $\hat{A}$ 在已移动的态之间和未移动的态之间的矩阵元相等. 若 $\hat{A}=\hat{A}(\boldsymbol{r})$ 是位置的函数，由(1)得到

$$\hat{U}_r^+(\boldsymbol{\varrho})\hat{A}(\boldsymbol{r})\hat{U}_r(\boldsymbol{\varrho})=\exp\left(+\frac{\mathrm{i}\boldsymbol{\varrho}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}}{\hbar}\right)\hat{A}(\boldsymbol{r})\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\boldsymbol{\varrho}\cdot\boldsymbol{p}}{\hbar}\right)$$

$$=\hat{A}(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\varrho})$$

这将在练习 1.8 和 1.9 中证明. 因此 $\hat{A}(\boldsymbol{r})$ 在已位移的态之间的矩阵元等于 $\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\varrho})$ 在初始态之间的矩阵元，不

过在这种情况中,应用了已位移的算符 $\hat{A}'(\boldsymbol{r})=\hat{A}(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\rho})$.(**例 1.7 完**)

练习 1.8 $\left(\frac{\mathrm{i}\hat{p}}{\hbar}\right)^n\hat{B}(x)$和变换算符的关系式

问题 证明关系式

$$\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{p}\right)^n\hat{B}(x)=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\frac{\partial^\nu\hat{B}}{\partial x^\nu}\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{p}\right)^{n-\nu} \tag{1}$$

对任一个可微分的算符 $\hat{B}(x)$成立,其中 $\hat{p}=\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x}$.利用此关系式计算

$$\hat{U}^+\hat{A}(x)\hat{U} \tag{2}$$

其中

$$\hat{U}=\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{\rho}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}\right)$$

解 a) 我们依据数学归纳法证明(1).对 $n=0$,此关系式成立,因为它产生恒等式

$$\hat{B}(x)=\hat{B}(x)$$

现我们假设对于 $n-1$,(1)是能成立的,这意味着

$$\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{p}\right)^{n-1}\hat{B}(x)=\sum_{\nu=0}^{n-1}\binom{n-\nu}{\nu}\frac{\partial^\nu\hat{B}}{\partial x^\nu}\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{p}\right)^{n-1-\nu} \tag{3}$$

应是正确的.通过$\left(\frac{\mathrm{i}\hat{p}}{\hbar}\right)$的再一次应用,我们证明对所有的 n 可推导出(1):

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{p}\right)^n\hat{B}(x)&=\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{p}\right)\left\{\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{p}\right)^{n-1}\hat{B}(x)\right\}\\
&=\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{p}\right)\sum_{\nu=0}^{n-1}\binom{n-\nu}{\nu}\frac{\partial^\nu\hat{B}}{\partial x^\nu}\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{p}\right)^{n-1-\nu}\\
&=\sum_{\nu=0}^{n-1}\binom{n-\nu}{\nu}\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[\hat{p},\frac{\partial^\nu\hat{B}}{\partial x^\nu}\right]\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{p}\right)^{n-1-\nu}+\frac{\partial^\nu\hat{B}}{\partial x^\nu}\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{p}\right)^{n-\nu}\right\}\\
&=\sum_{\nu=0}^{n-1}\binom{n-1}{\nu}\frac{\partial^{\nu+1}\hat{B}}{\partial x^{\nu+1}}\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{p}\right)^{n-(\nu+1)}+\sum_{\nu=0}^{n-1}\binom{n-1}{\nu}\frac{\partial^\nu\hat{B}}{\partial x^\nu}\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{p}\right)^{n-\nu}\\
&=\sum_{\nu=0}^{n-2}\binom{n-1}{\nu}\frac{\partial^{\nu+1}\hat{B}}{\partial x^{\nu+1}}\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{p}\right)^{n-(\nu+1)}+\binom{n-1}{n-1}\frac{\partial^\nu\hat{B}}{\partial x^\nu}+\binom{n-1}{o}\hat{B}\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{p}\right)^n\\
&\quad+\sum_{\nu=1}^{n-1}\binom{n-1}{\nu}\frac{\partial^\nu\hat{B}}{\partial x^\nu}\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{p}\right)^{n-\nu}
\end{aligned} \tag{4}$$

我们拆开了以上的求和,现利用恒等式

$$\binom{n-1}{o}=\binom{n-1}{n-1}=\binom{n}{o}=\binom{n}{n}=1$$

并在第一个求和中引进 $\mu=\nu+1$,因此我们得到

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{p}\right)^n\hat{B}(x)=\binom{n}{n}\frac{\partial^n\hat{B}}{\partial x^n}&+\sum_{\mu=0}^{n-1}\binom{n-1}{n-1}\frac{\partial^\mu\hat{B}}{\partial x^\mu}\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{p}\right)^{n-\mu}\\
&+\sum_{\nu=1}^{n-1}\binom{n-1}{\nu}\frac{\partial^\nu\hat{B}}{\partial x^\nu}\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{p}\right)^{n-\nu}+\binom{n}{o}\hat{B}\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{p}\right)^n
\end{aligned}$$

$$= \binom{n}{n}\frac{\partial^n \hat{B}}{\partial x^n} + \sum_{\nu=0}^{n-1}\left\{\binom{n-1}{\nu-1} + \binom{n-1}{\nu}\right\} \times \frac{\partial^\nu \hat{B}}{\partial x^\nu}\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{P}\right)^{n-\nu} + \binom{n}{o}\hat{B}\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{p}\right)^n \tag{5}$$

在最后的等式中我们再把 μ 标为 ν. 利用

$$\binom{n-1}{\nu-1} + \binom{n-1}{\nu} = \binom{n}{\nu} \tag{6}$$

我们可将(5)写作以下方式，

$$\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{P}\right)^n \hat{B} = \sum_{\nu=\partial}^{n}\binom{n}{\nu}\frac{\partial^\nu \hat{B}}{\partial x^\nu}\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{p}\right)^{n-\nu}$$

这与(1)相符合.

为证明(2)我们计算

$$\hat{U}^+ \hat{A}(x) = \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\varrho\hat{p}\right)\hat{A}(x) \tag{7}$$

采用指数函数的级数展开，得到

$$\begin{aligned}\hat{U}^+ \hat{A}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\varrho\hat{p}\right)^n \hat{A}(x)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varrho^n}{n!}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\frac{\partial^\nu \hat{A}}{\partial x^\nu}\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{p}\right)^{n-\nu}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\varrho^\nu}{\nu!}\frac{\partial^\nu \hat{A}}{\partial x^\nu}\frac{1}{(n-\nu)!}\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\varrho\hat{p}\right)^{n-\nu}\\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\varrho^\nu}{\nu!}\frac{\partial^\nu \hat{A}}{\partial x^\nu}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\varrho\hat{p}\right)^m\end{aligned} \tag{8}$$

此处我们利用了(1)，然后把 ϱ^n 分解为两部分，最后我们将结果写成了两个无穷级数的乘积. 第一个代表 $\hat{A}(x+\varrho)$ 的泰勒展开，而第二个是 $\hat{U}^+$. 这样我们得到

$$\hat{U}^+ \hat{A}(x) = \hat{A}(x+\varrho)\hat{U}^+$$

因此

$$\hat{U}^+ \hat{A}(x)\hat{U} = \hat{A}(x+\varrho) \tag{9}$$

用类似的方法，在三维空间中在具有矢量 $\boldsymbol{\varrho}$ 的变换

$$\hat{U} = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{\varrho}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\right)$$

下，对于算符 $\hat{A}(\boldsymbol{r})$ 我们求出

$$\hat{U}^+ \hat{A}(\boldsymbol{r})\hat{U} = \hat{A}(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\varrho}) \tag{10}$$

(练习 1.8 完)

练习 1.9　算符 $\hat{A}(x)$ 的平移

问题　对　$\hat{U}=\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{\varrho}\cdot\boldsymbol{p}\right)$

证明

$$\hat{U}^{+}\hat{A}(r)\hat{U}=\hat{A}(r+\varrho) \tag{1}$$

的正确性. 利用关系式

$$\hat{U}b(r)=b(r-\varrho) \tag{2}$$

和

$$\hat{U}^{+}b(r)=b(r+\varrho) \tag{3}$$

它们对所有的仅依赖于 r 的函数 $b(r)$ 成立.

解 我们选择一任意的函数 $\psi(r)$ 并计算 $\hat{U}^{+}\hat{A}(r)\hat{U}\psi(r)$. 利用(2)得到

$$\hat{U}^{+}\hat{A}(r)\hat{U}\psi(r)=\hat{U}^{+}\hat{A}(r)\psi(r-\varrho) \tag{4}$$

因为函数 $\hat{A}(r)\psi(r-\varrho)$ 仅依赖于变数 r,我们可利用(3)并获得结果

$$\begin{aligned}\hat{U}^{+}\hat{A}(r)\hat{U}\psi(r)&=\hat{A}(r+\varrho)\psi([r-\varrho]+\varrho)\\&=\hat{A}(r+\varrho)\psi(r)\end{aligned} \tag{5}$$

由于 $\psi(r)$ 是任意的函数,式(5)只有在

$$\hat{U}^{+}\hat{A}(r)\hat{U}=\hat{A}(r+\varrho)$$

时成立.(**练习 1.9 完**)

练习 1.10 均匀场中平移的生成元

问题 由均匀电磁场中的带电粒子的平移对称性导出量子力学算符. 假定无穷小变换的生成元显含时间. 如果此变换是对称变换? 它必须满足哪些关系式,对于恒定的电场(见练习 1.6,情况 a))讨论这一点.

解 a) 我们考虑无穷小变换

$$\psi\to\psi'=\psi-\mathrm{i}\hat{F}\delta a\psi \tag{1a}$$

或

$$\psi=\psi'+\mathrm{i}\hat{F}\delta a\psi' \tag{1b}$$

在 δa^{2} 数量级限度以内,$\hat{F}(t)$ 是时间相关的算符. 原来的波函数 ψ 遵从薛定谔方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=\hat{H}\psi \tag{2}$$

变换后的波函数因此满足

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi'&=\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi+\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\hat{F}\delta a\psi)\\&=\hat{H}\psi+\hbar\frac{\partial\hat{F}}{\partial t}\delta a\psi+\hbar\hat{F}\delta a\frac{\partial\psi}{\partial t}\\&=\hat{H}\psi+\hbar\frac{\partial\hat{F}}{\partial t}\delta a\psi-\mathrm{i}\hat{F}\delta a\hat{H}\psi\\&=\hat{H}\psi'+(\hbar\frac{\partial\hat{F}}{\partial t}+\mathrm{i}\hat{H}\hat{F}-\mathrm{i}\hat{F}\hat{H})\delta a\psi'\end{aligned} \tag{3}$$

其中已忽略了 δa^{2} 数量级的项. 如果算符 $\hat{F}$ 满足条件

$$\frac{\mathrm{d}\hat{F}}{\mathrm{d}t}\equiv\frac{\partial\hat{F}}{\partial t}+\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{H},\hat{F}]=0 \tag{4}$$

即如果算符 $\hat{F}$ 对时间的全导数等于零,式(3)正是原来的薛定谔方程. 另外哈密顿算符按照

$$\hat{H} \to \hat{H}' = \hat{H} + \hbar \frac{\mathrm{d}\hat{F}}{\mathrm{d}t} \delta a \tag{5}$$

变换. 若 $\hat{F}$ 不显含时间,则(4)正表示 $\hat{F}$ 和 $\hat{H}$ 必须彼此对易.

b) 在练习 1.6 中,我们求出在规范

$$\phi = -\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{A} = 0 \tag{6}$$

中经典守恒定律

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{P} - q\boldsymbol{E}t) = 0 \tag{7}$$

方程(9a)启示我们把量

$$\hat{\boldsymbol{F}}(t) = \hat{\boldsymbol{P}} - q\boldsymbol{E}t \tag{8}$$

看作算符,它产生一对称变换. 在这种情况中哈密顿算符为

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{\boldsymbol{P}} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A})^2 + q\phi = \frac{1}{2m}\hat{\boldsymbol{P}}^2 - q\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{x} \tag{9}$$

容易证明 $\hat{\boldsymbol{F}}$ 的全导数等于零

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{F}}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{F}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\boldsymbol{F}}] \\ &= -q\boldsymbol{E} + \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[-q\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{P}}] \\ &= -q\boldsymbol{E} + \frac{\mathrm{i}}{\hbar}(-q\boldsymbol{E}\mathrm{i}\hbar) = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

注意到 $\hat{\boldsymbol{F}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 的对易关系与 $\hat{\boldsymbol{P}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 的相同:

$$[\hat{F}_i, \hat{x}_k] = [\hat{P}_i - qE_i t, \hat{x}_k] = [\hat{P}_i, \hat{x}_k] = -\mathrm{i}\hbar\,\delta i_k \tag{11}$$

因此对于分别由 $\hat{F}_i$ 和 $\hat{p}_i$ 所产生的变换,算符 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 的变化相同.

c) 对于恒定磁场的情况,我们已求出(见练习 1.6):

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{x}, \quad \phi = 0 \tag{12}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{P} - \frac{q}{2c}\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{B}) = 0 \tag{13}$$

因此我们考虑算符

$$\hat{\boldsymbol{F}} = \hat{\boldsymbol{P}} - \frac{q}{2c}\hat{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{B} \tag{14}$$

它不显含时间. 哈密顿算符为

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2m}(\hat{\boldsymbol{P}} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A})^2 = \frac{1}{2m}(\hat{\boldsymbol{P}} - \frac{q}{2c}\boldsymbol{B} \times \hat{\boldsymbol{x}})^2 \\ &= \frac{1}{2m}(\hat{\boldsymbol{P}} + \frac{q}{2c}\hat{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{B})^2 \end{aligned} \tag{15}$$

我们计算对易关系

$$\begin{aligned} [\hat{P}_k + \frac{q}{2c}(\hat{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{B})_k, \hat{F}_i] &= [\hat{P}_k + \frac{q}{2c}(\hat{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{B})_k, \hat{P}_i - \frac{q}{2c}(\hat{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{B})_i] \\ &= -\frac{q}{2c}([\hat{P}_k, (\hat{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{B})_i] + [\hat{P}_i, (\hat{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{B})_k]) \end{aligned} \tag{16}$$

显然只要清楚地计算第一个对易关系就可以了:

$$[\hat{P}_k,(\hat{\boldsymbol{x}}\times\boldsymbol{B})_i]=\sum_{lm}[\hat{P}_k,\varepsilon_{ilm}\hat{x}_l B_m]$$

$$=\sum_{lm}\varepsilon_{ilm}(-\mathrm{i}\hbar\,\delta_{kl})B_m$$

$$=-\mathrm{i}\hbar\sum_m\varepsilon_{ikm}B_m \tag{17}$$

由于 ε_{ikm} 的反对称性,于是我们得到

$$[\hat{P}_k+\frac{q}{2c}(\hat{\boldsymbol{x}}\times\boldsymbol{B})_k,\hat{F}_i]=-\frac{q}{2c}(-\mathrm{i}\hbar)\sum_m(\varepsilon_{ikm}+\varepsilon_{kim})B_m=0 \tag{18}$$

所以我们求出

$$[\hat{H},\hat{\boldsymbol{F}}]=0 \tag{19}$$

正如我们所推测的,这样 $\hat{F}$ 是产生对称变换的算符. 明显地我们还得到了

$$[\hat{F}_i,\hat{x}_k]=[\hat{P}_i,\hat{x}_k]=-\mathrm{i}\hbar\,\delta_{ik} \tag{20}$$

然而与 $\hat{\boldsymbol{P}}$ 相反,$\hat{\boldsymbol{F}}$ 的各个分量彼此不对易:

$$[\hat{F}_i,\hat{F}_k]=[\hat{P}_i-\frac{q}{2c}(\hat{\boldsymbol{x}}\times\boldsymbol{B})_i,\hat{P}_k-\frac{q}{2c}(\hat{\boldsymbol{x}}\times\boldsymbol{B})_k]$$

$$=-\frac{q}{2c}([\hat{P}_i,(\hat{\boldsymbol{x}}\times\hat{\boldsymbol{B}})_k]-[\hat{P}_k,(\hat{\boldsymbol{x}}\times\hat{\boldsymbol{B}})_i])$$

$$=-\frac{q}{2c}(-\mathrm{i}\hbar)(\varepsilon_{ikm}-\varepsilon_{kim})B_m$$

$$=\mathrm{i}\hbar\frac{q}{c}\varepsilon_{ikm}B_m \tag{21}$$

两个垂直于磁场的生成元彼此不对易,因此它们不能同时对角化. (**练习 1.10 完**)

1.6 量子力学中的时间平移

现在我们将研究态 $\psi_\alpha(\boldsymbol{r},t)$ 经过一时间间隔 τ(图 1.7)的时间上的位移,我们称 $\psi_{\alpha'}(\boldsymbol{r},t)$ 为时间平移态. 类似于(1.7)得到

$$\psi_{\alpha'}(\boldsymbol{r},t+\tau)=\psi_\alpha(\boldsymbol{r},t) \tag{1.36}$$

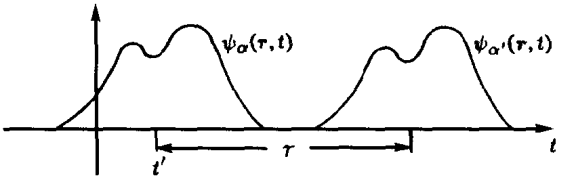


图 1.7 时间平移波函数 $\psi_{\alpha'}(\boldsymbol{r},t)$ 对于 $t=t'+\tau$ 与起始波函数 $\psi_\alpha(\boldsymbol{r},t)$ 对于 $t=t'$ 具有相同的值.

让我们更好地理解以上所述:若起始波函数在 $t=t_0$ 时具有它的最大值,时间平移波函数 $\psi_{\alpha'}(\boldsymbol{r},t)$

将在 $t=t_0+\tau$ 时具有它的最大值. 通过时间演化算符 $\hat{U}_t(\tau)$，我们表达时间平移态和起始态之间的联系，类似于(1.21)

$$\psi_{a'}(\boldsymbol{r},t)=\hat{U}_t(\tau)\psi_a(\boldsymbol{r},t)=\psi_a(\boldsymbol{r},t-\tau) \tag{1.37}$$

同我们以前的研究(1.22)到(1.24)相比，由 $\psi_a(\boldsymbol{r},t-\tau)$的泰勒展开给出

$$\begin{aligned}\hat{U}_t(\tau)\psi_a(\boldsymbol{r},t)&=\psi_a(\boldsymbol{r},t)+\frac{(-\tau)}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_a(\boldsymbol{r},t)+\frac{(-\tau)^2}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\psi_a(\boldsymbol{r},t)+\cdots\\&=\left[\mathbb{1}+\frac{(-\tau)}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\frac{(-\tau)^2}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+\cdots\right]\psi_a(\boldsymbol{r},t)\\&=\mathrm{e}^{-\tau(\partial/\partial t)}\psi_a(\boldsymbol{r},t)\end{aligned} \tag{1.38}$$

因此得到

$$\hat{U}_t(\tau)=\mathrm{e}^{-\tau(\partial/\partial t)}=\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\tau\hat{E}\right)=\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\tau\hat{H}\right) \tag{1.39}$$

其中我们引进了能量算符 $\hat{E}=\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}(=\hat{H})$. $\hat{U}_t(\tau)$是幺正的，因为

$$\hat{U}_t^{+}(\tau)=\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\tau\hat{E}^{+}\right)=\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\tau\hat{E}\right)=\hat{U}_t^{-1}(\tau)$$

在这里我们应用了 $\hat{E}$ 是厄密的，因此 $\hat{E}=\hat{E}^{+}$这一事实. 我们可利用(1.39)的每一个等号，但是当哈密顿算符 $\hat{H}$ 与时间无关时，仅最后一个表达式是有效的. 按以下方式可明白这一点，由薛定谔方程我们有

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\hat{H}\psi$$

然而

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\hat{H}\psi\right)=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\hat{H}\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\frac{\partial\hat{H}}{\partial t}\psi=\frac{1}{(\mathrm{i}\hbar)^2}\hat{H}^2\psi+\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\frac{\partial\hat{H}}{\partial t}\psi$$

我们注意到对时间的高阶导数仅当$\frac{\partial\hat{H}}{\partial t}=0$ 时能代之以 $\hat{H}$ 的幂次项. 那么 $\hat{H}$ 与时间无关，因而(1.39)成立，意味着

$$[\hat{H},\hat{U}_t(\tau)]_{-}=\left[\hat{H},\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\tau\hat{H}\right)\right]_{-}=0 \tag{1.40}$$

此关系式类似于(1.30). 它意味着时间上平移的态也将满足薛定谔方程. 实际上从

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi_a(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=\hat{H}\psi_a(\boldsymbol{r},t)$$

得到

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi_{a'}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}&=\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}_t(\tau)\psi_a(\boldsymbol{r},t)=\mathrm{i}\hbar\hat{U}_t(\tau)\frac{\partial\psi_a}{\partial t}\\&=\hat{U}_t(\tau)\hat{H}\psi_a=\hat{H}\hat{U}_t(\tau)\psi_a=\hat{H}\psi_{a'}(\boldsymbol{r},t)\end{aligned} \tag{1.41}$$

换句话我们可以说，时间平移态满足薛定谔方程的假设意味着(1.40)，反之亦然. 哈密顿算符 $\hat{H}$

与时间位移算符 $\hat{U}_t(\tau)$ 对易的假设保证时间平移态 $\psi_\alpha'(\boldsymbol{r},t)$ 也满足薛定谔方程. 因此体系显示出对于时间平移的对称性(也称为不变性). 因为这等价于哈密顿算符的时间无关性,能量守恒是成立的,归因于时间的均匀性(参见(1.8)),如同我们从经典物理知道的那样. 另外若 $\hat{H}$ 显含时间,结论(1.40)不成立并且时间移动态不满足与原始态相同的薛定谔方程.

让我们注意到明显的矛盾:从(1.19)我们知道在时刻 $t=0$ 已知的态 $\psi_\alpha(\boldsymbol{r},0)$ 的时间推演可写作

$$\psi_\alpha(\boldsymbol{r},t) = \exp(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t)\psi_\alpha(\boldsymbol{r},0) \tag{1.42}$$

另一方面从(1.37)和具有时间上不变的 $\hat{H}$(1.39),我们得出

$$\psi_\alpha'(\boldsymbol{r},t) = \exp(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}\tau)\psi_\alpha(\boldsymbol{r},t) \tag{1.43}$$

初看上去两种叙述出现了矛盾. 但如果我们设想(1.42)中的时间平移 τ 已由 t 代表,且时间平移态具有下标 α,而在(1.37)中它携带下标 α',这就会被澄清! 因此在(1.42)中用 $t=-\tau$ 替代并得到

$$\psi_\alpha(\boldsymbol{r},-\tau) = \exp(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}\tau)\psi_\alpha(\boldsymbol{r},0) \tag{1.44}$$

现在(1.43)中我们也把起始时刻确定为 $t=0$. 由此得出

$$\psi_\alpha'(\boldsymbol{r},0) = \exp(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}\tau)\psi_\alpha(\boldsymbol{r},0) \tag{1.45}$$

而最后我们通过 $\psi_\alpha(\boldsymbol{r},-\tau)$ 表达 $\psi_\alpha'(\boldsymbol{r},0)$,利用(1.42),

$$\psi_\alpha(\boldsymbol{r},-\tau) = \exp(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}\tau)\psi_\alpha(\boldsymbol{r},0)$$

显然这和(1.44)完全一样. 至此我们可以指出 $\psi_\alpha'(\boldsymbol{r},t)$ 在 $t=\tau$ 时与 $\psi_\alpha(\boldsymbol{r},t)$ 在 $t=0$ 时有相同的结构,从而通过从时刻 $t=\tau$ 到时刻 $t=0$ 反向演变,可从 $\psi_\alpha(\boldsymbol{r},\tau)$ 得到 $\psi_\alpha'(\boldsymbol{r},\tau)$.

1.7 数学补充:群的定义

群论适合于描述对称性. 为了开始认识群理论的方法,我们需要论述一些定义. 若集合 $\{a,b,c,\cdots\}$ 的元素被称之为乘法的组合 $a\circ b$ 选定并满足以下条件[①]:

1. 对所有的 a 和 b,乘积 (ab) 也是群 $G=\{a,b,c,\cdots\}$ 的元素. 换句话说群对于乘法是封闭的.

① 组合符号 $\circ$ 常被省略. 我们以 ab 替代 $a\circ b$. 仅当预料会有误解时,我们才会利用组合符号.

2. 集合 $G=\{a,b,c,\cdots\}$包含单位元素 e，它满足

$$ae = ea = a$$

其中 a 是群的一任意元素.

3. 对群的每一元素存在一逆元素 a^{-1}，它满足条件

$$a^{-1}a = aa^{-1} = e$$

4. 乘法满足结合律，即

$$(ab)c = a(bc)$$

则称集合$\{a,b,c,\cdots\}$的元素构成一个群.

例：整数 $N=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$的集合对于加法＋形成群. 此群的乘法是标准的加法，单位元素显然是 $e=0$. a 的逆元素是 $-a$，加法的结合性是众所周知的.

与群相关的一些深一层的术语是：

1) 若对群的所有元素可写作

$$ab = ba$$

即若群的乘法是可交换的，我们称群为阿贝尔的.

例：整数相加产生一阿贝尔群. 然而 N 维方形矩阵群在相乘下不是阿贝尔的.

2) 我们称群是连续的，若它的元素是一个或多个连续变量的函数. 例 $G=\{a(t),b(t),c(t),\cdots\}$，其中 t 是一连续的参数.

例：在一平面内的空间位移群(矢量相加)以及时间位移群是连续的.

3) 我们称群是连续连通的，若群参数的连续变化导致从群的任一元素到其它的元素.

例：位移群的元素$\{\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{e}_1+a_y\boldsymbol{e}_2+a_z\boldsymbol{e}_3\}$具有三个连续参数 a_x,a_y,a_z. 我们可以通过这些参数的连续变化得到空间中每一个位移矢量. 然而在空间中转动结合反射(称为 O(3))形成一连续的、不连通的群. 对于包含时间和空间反射作为不连续部分的洛伦兹变换群，我们得到相同的结果.

4) 紧致群内每一序列里存在一个群元素组成的无穷部分序列$\{a_n\}$，它收敛于群的一元素，即

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,\quad a \in G$$

例：(a)在一点阵

$$\overline{T} = \{\boldsymbol{a}_n = n_1\boldsymbol{e}_1 + n_2\boldsymbol{e}_2 + n_3\boldsymbol{e}_3\},\ \text{其中}\ n_1,n_2,n_3 \in N$$

上的位移矢量群是不连续的和不紧致的，因为$\lim_{n\to\infty} a_n$ 不属于 $\overline{T}$，(在通常度量标准内)甚至不存在.

(b) 三维空间中的转动群 $SO(3)=\{\boldsymbol{n},\psi,$其中$|\boldsymbol{n}|=1,0\leqslant\psi\leqslant\pi\}$是紧致的. 这里 $\boldsymbol{n}$ 代表转动轴，ψ 代表角度. 任一矢量 $\boldsymbol{n}'=\lim_{i\to\infty}\boldsymbol{n}_i$ 也是一单位矢量且角度范围是已定了的，因此包含任一角度序列的极限.

5) 两个群$\{a,b,c,\cdots\}$和$\{a',b',c',\cdots\}$称为同构的，如果在两个群的元素之间存在一个一对一的变换(例 $a\leftrightarrow a'$，$b\leftrightarrow b'$，等)，致使

$$ab \leftrightarrow a'b',\text{等.}$$

第一个群的乘积因此唯一地与第二个群的乘积相联系,反之亦然.

例:空间位移群与以矢量相加作为群运算的三维矢量群同构.同样地位移算符群 $\hat{U}=\{\hat{U}_r(\boldsymbol{\varrho})\}$ 与以它们的相加作为群运算的三维矢量群同构.

6) 若群 G_1 与另一群 G_2 同构,G_2 的元素是矩阵,G_2 被称为 G_1 的矩阵表示.

例:若 $G_1=\{\hat{U}_r(\boldsymbol{\varrho})\}$ 是具有三个参数的位移算符群,$\psi_n(\boldsymbol{r})$ 是波函数的完全集,则矩阵

$$\langle m|\hat{U}_r(\boldsymbol{\varrho})|n\rangle=\langle m|\exp(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{\varrho}\cdot\hat{\boldsymbol{P}})|n\rangle=\int\psi_m^*(\boldsymbol{r})\exp(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{\varrho}\cdot\hat{\boldsymbol{P}})\psi_n(\boldsymbol{r})\mathrm{d}^3r$$

将是位移算符的矩阵表示.

更多的例子和解释出现在下节中.

1.8 数学补充:转动和它们的群论性质

如同在经典力学那样,空间各向同性意味着自然界定律——在我们的情况中是薛定谔方程——对于波函数的任何转动的不变性.让我们称起始波函数为 $\psi_a(\boldsymbol{r},t)$,经过一(主动)转动它变成 $\psi_{a'}(\boldsymbol{r},t)$,在转动中位置矢量从 $\boldsymbol{r}$ 变成 $\boldsymbol{r}'$(见图 1.8).这一节涉及为讨论空间各向同性的物理结论所需的数学知识.

为描绘矢量 $\boldsymbol{r}$ 向 $\boldsymbol{r}'$ 的附加的转动,我们写作

$$\boldsymbol{r}'=\hat{\hat{R}}\,\boldsymbol{r} \tag{1.46}$$

我们借助于以下的考虑来说明这一方程.三个标准正交基 $\boldsymbol{e}_i$ 转动为 $\boldsymbol{e}'_i$(图 1.9).我们知道[①]

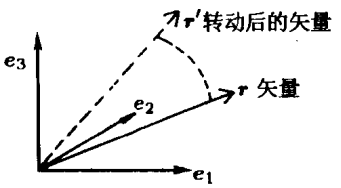


图 1.8 矢量 $\boldsymbol{r}$ 的转动给出 $\boldsymbol{r}'$.在未转动的基矢 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 的起始框架内描绘转动后的矢量 $\boldsymbol{r}'$.

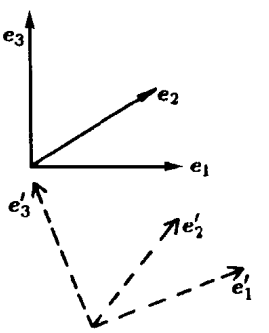


图 1.9 坐标系的转动

① 参见 H. Goldstein: *Classical Mechanics*, 第二版(Addison-Wsiley, Reading 1980) W. Greiner: *Theoretische Physik, Mechanik I* (Harri Deutsch, Frankfurt 1989)第 30 章.

$$e_i' = R_{ij}e_j \tag{1.47}$$

其中我们采用了爱因斯坦的求和符号，且总是对所有出现两次的指标求和. 因此(1.47)表示为

$$e_i' = R_{i1}e_1 + R_{i2}e_2 + R_{i3}e_3$$

因为基矢是实的，这个 3×3 矩阵 R_{ij}必须是实的. 我们将(1.47)的逆变换表示为

$$e_i = U_{ij}e_j' \tag{1.48}$$

通过以 e_k 标积由(1.47)得到

$$e_i' \cdot e_k = R_{ij}e_j \cdot e_k = R_{ij}\delta_{jk} = R_{ik} \tag{1.49}$$

再通过以 e_k' 标积就由(1.48)得到

$$e_i \cdot e_k' = U_{ij}e_j' \cdot e_k' = U_{ij}\delta_{jk} = U_{ik} \tag{1.50}$$

因此矩阵元 R_{ik}和 U_{ik}分别是方向余弦. 比较(1.49)和(1.50)的最后部分得出结果

$$U_{ik} = R_{ki}$$

或根据定义(1.48)，由于 $\hat{U}$ 是 $\hat{R}$ 的逆矩阵，

$$(\hat{R}^{-1})_{ik} = R_{ki} \tag{1.51a}$$

写作矩阵表示，

$$\hat{R}^{-1} = \hat{\tilde{R}} \tag{1.51b}$$

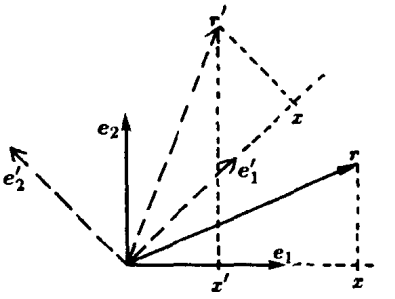


图 1.10　转动后的矢量 r′在转动后的基矢{e′ᵢ}中同起始的矢量 r 在起始的基矢{eᵢ}中具有相同的分量.

$\hat{\tilde{R}}$ 是矩阵 $\hat{R}$ 的转置(即沿主对角线反射). 根据两个基本集合的正交归一性我们可知

$$\delta_{ik} = e_i' \cdot e_k' = R_{im}R_{kn}e_m \cdot e_n = R_{im}R_{kn}\delta_{mn} = R_{im}R_{km} \tag{1.52}$$

这意味着矩阵 $\hat{R}$ 的行的正交性. 同样地根据(1.48)和(1.51)得到

$$\begin{aligned}\delta_{ik} &= e_i \cdot e_k = U_{im}U_{kn}e_m' \cdot e_n' \\ &= U_{im}U_{kn}\delta_{mn} = U_{im}U_{km} \\ &= R_{mi}R_{mk}\end{aligned} \tag{1.53}$$

意味着 $\hat{R}$ 的列的正交性. 为了得到 r 的矢量分量的变换表达式，我们注意到 r 与它的框架一道转动，于是 r'在$\{e_i'\}$中与 r 在$\{e_i\}$中具有相同的分量(图 1.10). 这些考虑使我们得到以下方程：

$$r = x_ie_i, \qquad r' = x_i'e_i' = x_i'e_i$$

或

$$x_ie_i' = x_i'(\hat{R}^{-1})_{ij}e_j'$$

重新标明求和指标，我们得出

$$x_ie_i' = x_j'(\hat{R}^{-1})_{ji}e_i' \tag{1.54}$$

由于(1.51b)，上式给出

$$x_i = (\hat{R}^{-1})_{ji}x_j' = (\hat{\tilde{R}})_{ji}x_j' = R_{ij}x_j' \tag{1.55}$$

这样若进行主动转动,相对于基本集合分量的变换是反步的①. 在别处②我们只研究了坐标框架的被动转动,在那里矢量 r 在空间中保持固定($\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$),而坐标系转动. 因此分量与基本集合以同样的方式变换,即同步的.

根据矩阵 R_{ij} 的正交归一性或通过对(1.54)中 $\boldsymbol{e}_i'$ 的取代,(1.55)的逆变换可立即计算出来,

$$x_i' = R_{ji}x_j = (\hat{\tilde{R}})_{ij}x_j \tag{1.56}$$

它与(1.46)等同. 具有行和列正交性的矩阵,如

$$R_{ij}R_{ij'} = \delta_{ij'},\ R_{ji}R_{j'i} = \delta_{jj'} \tag{1.57}$$

被称为正交矩阵,因为方形矩阵乘积的行列式等于各方形矩阵行列式的乘积,得到

$$\det(R_{ij}R_{ij'}) = \det(R_{ij})\det(R_{ij'}) = \det\delta_{jj'}$$

这意味着$(\det R_{ij})^2=1$, 因此

$$\det(R_{ij}) = \pm 1 \tag{1.58}$$

这样转动可分解成两个不连通的集合,就是一个具有 $\det(R_{ij})=+1$,形成一个群;另一具有$\det(R_{ij})=-1$,它自身不能形成一个群(它不是封闭的,且不包含单位元素). 第一个称为真转动,第二个称为假转动. 转动矩阵包含 $3\times3=9$ 个实参数. 由于六个必要的条件(1.57),它们之中仅三个是独立的. 因此转动可以用三个独立参数描述(转动矢量的三个分量). 它们形成一连续连通的三参数群③.

这容易明白,因为矩阵 R_{ij} 的矩阵乘法是结合的,R_{ij} 包含单位矩阵 δ_{ij} 作为单位元素,且每一个 R_{ij} 有一逆元素$(R^{-1})_{ij}=R_{ij}$. 转动群不是阿贝尔的,因为通常两个不同方向的转动不对易,这在图 1.11 中作了说明:情况(a)和情况(b)表明同样的两个转动按不同的次序进行. 在两种情况中最后所得到的矢量 a' 是不同的.

转动群的非阿贝尔性质的数学原因由矩阵乘法通常是不可交换的这一事实所给定. 这样

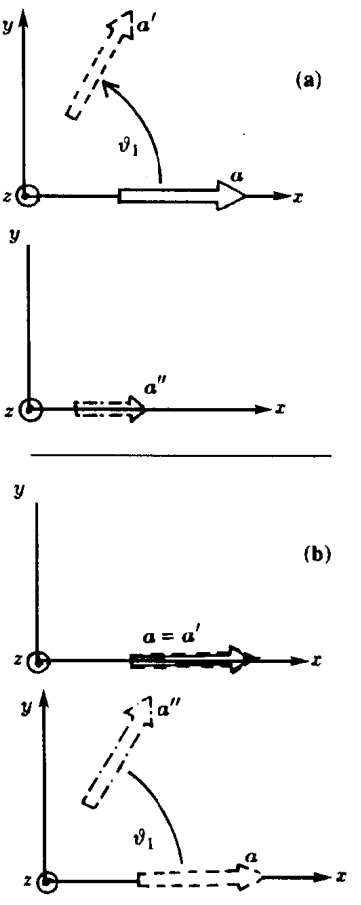


图 1.11 (a). 1. 环绕 z 轴转动 θ_1,$a\to a'$. 2. 环绕 x 轴转动 $\frac{\pi}{2}$,$a'\to a''$. (矢量 a'' 位于 xz 平面内). (b). 1. 环绕 x 轴转动 $\frac{\pi}{2}$ 不改变 a,$a=a'$. 2. 绕 2 轴转动 θ_1, $a'\to a''$(矢量 a'' 位于 xy 平面内).

① 根据拉丁文 gradior,表示步行;contragredient(反步的),沿相反的方向步行;congredient(同步的),沿同一方向步行.

② 参看 W. Greiner:*Theoretische Physik*, *Mechanik I* (Harri Dertsch, Franfurt 1989)第 30 章或 H. Goldstein:*Classical Mechanics*,第二版(Addison-Wesley, Roading 1980).

③ 只有正规转动代表一连续连通群,不正规的转动包含空间中的反射是不连续的交换. 因此包括不正规的在内的所有转动形成不连通的群.

$$R_{ij}^{(1)}R_{jk}^{(2)} \neq R_{ij}^{(2)}R_{jk}^{(1)}$$

以后将证明转动矩阵 $R^{(1)}$ 和 $R^{(2)}$ 确实不对易. (特殊)转动群由 SO(3)表示. 这表明三维正交群,它包括所有的行列式为+1 的实 3×3 矩阵. 此处 S 意味着特殊,指的是具有 det $R_{ij}=+1$ 的正交归一的转动. SO(3)是李群的一典型的例子,李群定义为这样的连续群,其元素是元素的参数的可微函数. 例如空间和时间位移群是非紧致的李群,而转动形成一紧致的李群. 洛伦兹群[①]是六参数李群(三个参数关于转动,三个参数关于惯性系的速度 $\boldsymbol{v}=\{v_x,v_y,v_z\}$). 它是非紧致的,因为不存在关于 $v=c$ 的洛伦兹变换,尽管可以找到 $v_n \to c$ 的序列.

1.9　转动群的一个同构

每一个正交归一的 3×3 矩阵 $\hat{R}$ 对应于一转动,该转动可用给出转动轴方向和转动大小的转动矢量 $\boldsymbol{\phi}=\{\phi_x,\phi_y,\phi_z\}$ 表示. 以原点为基础排列所有可能的转动矢量 $\boldsymbol{\phi}$,我们发现所有的矢量 $\boldsymbol{\phi}$ 的终点落在半径为 π 的球内,因为最大的转动由 $\boldsymbol{\phi}=|\boldsymbol{\phi}|=\pi$ 给出;每一个环绕轴的转动能通过转动角 $-\pi \leqslant \phi \leqslant \pi$ 来表达. $|\boldsymbol{\phi}|=\pi$ 的转动 $\boldsymbol{\phi}$ 与 $-\boldsymbol{\phi}$ 描绘相同的转动,其终点完全相反地落在球面上(见图 1.12 和图 1.13).

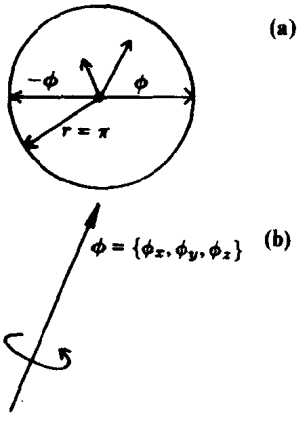


图 1.12　(a)转动矢量 $\boldsymbol{\phi}$ 的终点填满半径为 π 的球. 球面上完全相反的点描述相同的转动

(b)转动矢量描述转动角的方向和大小 $\phi=[\phi_x^2+\phi_y^2+\phi_z^2]^{1/2}$. 转动和转动矢量按右手螺旋联系.

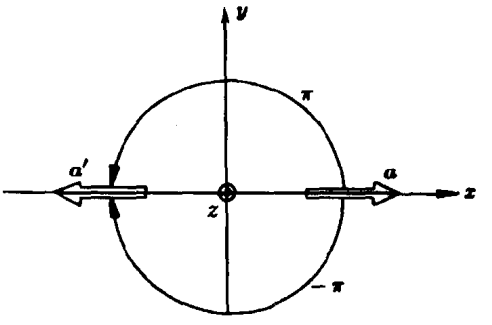


图 1.13　矢量 $a'=-a$ 可分别通过转动 $\boldsymbol{\phi}=(0,0,\pi)$ 或 $\boldsymbol{\phi}'=-\boldsymbol{\phi}=(0,0,-\pi)$ 得到.

① 看 H. Goldstein: *Classical Mechanics*, 第二版(Addison-Wesley, Reading 1980)或 W. Greiner: *Theoretische Physik, Mechanick I*(Harri Deutsch, Frankfurt 1989).

注意到两个相继的转动 ϕ_1 和 ϕ_2 的结果 ϕ 不是由矢量相加而来. $\phi \neq \phi_1 + \phi_2$,除非转动环绕同一个轴,即 ϕ_1 与 ϕ_2 共线. 通常最后所得到的转动矢量只能通过矩阵 $R_{ij}^{(1)}(\phi_1)$ 和 $R_{ij}^{(1)}(\phi_2)$ 的矩阵相乘以及随后的根据合成的转动矩阵

$$R_{ij}(\phi) = R_{ij}^{(1)}(\phi_1)R_{ij}^{(2)}(\phi_2) \tag{1.59}$$

的转动矢量的计算所确定. 不论如何,显然存在着一方面是 $\hat{R}_{(1)}$,$\hat{R}_{(2)}$ 和 $\hat{R}$,另一方面是"转动球"内的 ϕ_1,ϕ_2 和 ϕ 之间的一一对应. 转动群($\hat{R}$)与转动矢量(ϕ)之间的这种明显的同构可用来证明转动群不是单连通的. 尽管 SO(3)是连续连通的,但它不是单连通的. 这意味着从另一个元素$[R_{ik}(\phi_1)]$出发,通过群参数(转动角 ϕ_x,ϕ_y,ϕ_z)的变化,可获得群的所有元素$[R_{ik}(\phi_2)]$,但是从 ϕ_1 到 ϕ_2 的不同路径不是总能通过连续的形变相互转换.

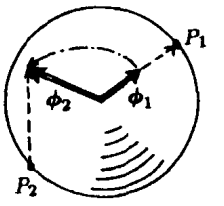


图 1.14 从 ϕ_1 到 ϕ_2 的两条路径不会发生连续可变形的相互转化.

对于转动群从 $\hat{R}(\phi_1)$ 到 $\hat{R}(\phi_2)$ 存在两条路径,二者不能连续地相互转换:第一条路径完全逗留在转动球内,从 ϕ_1 引到 ϕ_2. 第二条路径先从 ϕ_1 引到球面上的 P_1 点,然后出现在完全相反的 P_2 点,且由此最后引到 ϕ_2(图 1.14). 若一条可能的第三条路径形成第二次跳跃,从 P_2 回到 P_1,它将等价于第一条路径. 由此事实可以看出型式(1)与(2)的路径不能互相产生,且是仅有的路径,它们不会发生连续不变形的相互转化. 因此转动群是双连续连通的.

1.9.1 无穷小和有限转动

从转动群的例子我们可清楚地研究李群的许多一般性质. 在群参数的无穷小变化下(无穷小转动),群元素(转动)的性质特别有趣. 在这种情况中很多东西被简化. 让 $\delta\phi = \{\delta\phi_x, \delta\phi_y, \delta\phi_z\}$ 是无穷小转动矢量,因此按照(1.11)转动后的矢量变为

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \delta\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{r} \tag{1.60}$$

或用分量表示为

$$x_i' = x_i + \varepsilon_{ijk}\delta\phi_j x_k = (\delta_{ik} + \varepsilon_{ijk}\delta\phi_j)x_k = R_{ki}x_k = \hat{\tilde{R}}_{ik}x_k \tag{1.61}$$

这可分别地以符号形式写出或清楚地用矩阵表示写作组元,即

$$\boldsymbol{r}' = \hat{\tilde{R}}\,\boldsymbol{r}, \qquad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{21} & R_{31} \\ R_{12} & R_{22} & R_{32} \\ R_{13} & R_{23} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

根据(1.56),R_{ik} 是转动矩阵并由下式明确地给出

$$\hat{\tilde{R}} = \begin{pmatrix} 1 & -\delta\phi_z & \delta\phi_y \\ \delta\phi_z & 1 & -\delta\phi_x \\ -\delta\phi_y & \delta\phi_x & 1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{R} = \begin{pmatrix} 1 & \delta\phi_z & -\delta\phi_y \\ -\delta\phi_z & 1 & \delta\phi_x \\ \delta\phi_y & -\delta\phi_x & 1 \end{pmatrix} \tag{1.62}$$

我们又以这样的方式定义转动算符 $\hat{U}_R(\delta\phi)$,以使转动后的标量函数 $\psi_\alpha(\boldsymbol{r},t)$ 是从起始态 $\psi_\alpha(\boldsymbol{r},t)$

通过

$$\psi_\alpha'(\boldsymbol{r},t)=\hat{U}_R(\delta\boldsymbol{\phi})\psi_\alpha(\boldsymbol{r},t) \tag{1.63}$$

得到. 转动后的标量波函数必须满足类似于(1.17)和(1.36)的条件,也就是

$$\psi_\alpha'(\hat{\tilde{R}}\,\boldsymbol{r},t)=\psi_\alpha(\boldsymbol{r},t) \tag{1.64}$$

或等价地

$$\psi_\alpha'(\boldsymbol{r},t)=\psi_\alpha(\hat{\tilde{R}}^{-1}\boldsymbol{r},t)=\psi_\alpha(\boldsymbol{r}-\delta\boldsymbol{r},t) \tag{1.65}$$

方程(1.64)表明转动后的波函数对于转动后的位置矢量 $\boldsymbol{r}'=\hat{\tilde{R}}\,\boldsymbol{r}$ 的值等于未转动的波函数在未转动的位置 $\boldsymbol{r}$ 的值. 从(1.65)我们得到

$$\begin{aligned}\psi_\alpha'(\boldsymbol{r},t)&=\psi_\alpha(\hat{\tilde{R}}^{-1}\boldsymbol{r},t)=\psi_\alpha(\boldsymbol{r}-\delta\boldsymbol{r},t)=\psi_\alpha(\boldsymbol{r}-\delta\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{r},t)\\&\approx\psi_\alpha(\boldsymbol{r},t)-(\delta\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{r})\cdot\nabla\psi_\alpha(\boldsymbol{r},t)\\&=\psi_\alpha(\boldsymbol{r},t)-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\delta\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{r})\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\psi_\alpha(\boldsymbol{r},t)\\&=(\mathbb{1}-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\delta\boldsymbol{\phi}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})\psi_\alpha(\boldsymbol{r},t)\end{aligned} \tag{1.66}$$

与(1.63)相比较得到

$$\hat{U}(\delta\boldsymbol{\phi})=\mathbb{1}-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\delta\boldsymbol{\phi}\cdot\hat{\boldsymbol{L}} \tag{1.67}$$

$\hat{\boldsymbol{L}}=\boldsymbol{r}\times\hat{\boldsymbol{p}}$ 是轨道角动量. 这对无穷小转动成立. 根据以下的考虑能容易地找到对于有限转动 $\boldsymbol{\phi}$ 的转动算符:我们以这样的方式选择坐标,例如,使 x 轴沿转动轴放置. 先进行转动 $\hat{U}_R(\boldsymbol{\phi})$,然后再进行无穷小转动 $\hat{U}_R(\Delta\phi_x)=1-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\Delta\phi_x\hat{L}_x$,得到完全的转动

$$\begin{aligned}\hat{U}(\phi_x+\Delta\phi_x,\phi_y,\phi_z)&=\hat{U}_R(\Delta\phi_x)\hat{U}_R(\phi_x,\phi_y,\phi_z)\\&=(1-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\Delta\phi_x\hat{L}_x)\hat{U}_R(\phi_x,\phi_y,\phi_z)\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\hat{U}_R(\phi_x,\phi_y,\phi_z)}{\Delta\phi_x}&=\frac{\hat{U}_R(\phi_x+\Delta\phi_x,\phi_y,\phi_z)-\hat{U}_R(\phi_x,\phi_y,\phi_z)}{\Delta\phi_x}\\&=-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{L}_x\hat{U}_R(\phi_x,\phi_y,\phi_z)\end{aligned}$$

即在 $\Delta\phi_x\to0$ 的极限下得到微分方程

$$\frac{\partial\hat{U}_R(\phi_x,\phi_y,\phi_z)}{\partial\phi_x}=-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{L}_x\hat{U}_R(\phi_x,\phi_y,\phi_z) \tag{1.68}$$

对于其它坐标方向,类似的关系式成立

$$\frac{\partial\hat{U}_R(\boldsymbol{\phi})}{\partial\phi_y}=-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{L}_y\hat{U}_R(\boldsymbol{\phi}) \tag{1.69}$$

$$\frac{\partial \hat{U}_R(\boldsymbol{\phi})}{\partial \phi_z} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{L}_z\hat{U}_R(\boldsymbol{\phi}) \tag{1.70}$$

(1.68),(1.69)和(1.70)的积分根据边界条件 $\hat{U}_R(0)=1$,对于有限转动得到

$$\hat{U}_R(\boldsymbol{\phi}) = \exp(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{\phi}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}) \tag{1.71}$$

这个结果完全类似于我们以前的结果(1.24)和(1.39).它清楚地表明转动群具有三个参数(ϕ_x,ϕ_y,ϕ_z).由于

$$\hat{U}_R^{-1}(\boldsymbol{\phi}) = \exp(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{\phi}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})$$

转动算符(1.71)是幺正的,且因为 $\hat{L}$ 是厄密的

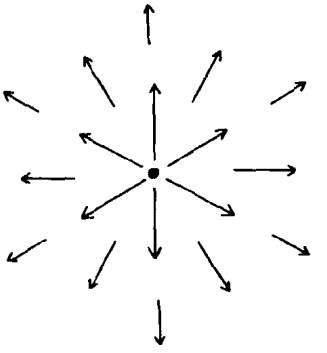
$$\hat{U}_R^{+}(\boldsymbol{\phi}) = \exp(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{\phi}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}^{+}) = \exp(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{\phi}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})$$

因此

$$\hat{U}_R^{+}(\boldsymbol{\phi}) = \hat{U}_R^{-1}(\boldsymbol{\phi}) \tag{1.72}$$

称三个算符 $\hat{L}_x,\hat{L}_y,\hat{L}_z$ 为环绕三个坐标轴转动的生成元.这和我们以前的结果(1.25)和(1.39)分别关于空间和时间位移的算符 $\hat{\boldsymbol{p}}$ 和 $\hat{E}$ 相类似.从对于空间平移,三个生成元 $\hat{p}_x,\hat{p}_y,\hat{p}_z$ 对易这一事实,我们可以推断出位移群是阿贝尔的(两个平移的次序可以交换).然而转动群是非阿贝尔的,这在形式上由此群的三个不对易的生成元 $\hat{L}_x,\hat{L}_y,\hat{L}_z$ 表示.

1.9.2 空间的各向同性



各向同性的力场所有的方向都是等同的.

空间各向同性意味着自然界定律(在此是薛定谔方程)对于在空间中的转动的对称性.因此下式必须成立

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\hbar\frac{\partial \psi_\alpha'(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} &= \mathrm{i}\hbar\frac{\partial \hat{U}_R(\boldsymbol{\phi})\psi_\alpha(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\\ &= \hat{U}_R(\boldsymbol{\phi})\mathrm{i}\hbar\frac{\partial \psi_\alpha(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = \hat{U}_R\hat{H}\psi_\alpha(\boldsymbol{r},t)\\ &= \hat{U}_R(\boldsymbol{\phi})\hat{H}\hat{U}_R^{-1}(\boldsymbol{\phi})\psi_\alpha'(\boldsymbol{r},t) = \hat{H}\psi_\alpha'(\boldsymbol{r},t)\end{aligned} \tag{1.73}$$

在此我们已经应用了起始态 $\psi_\alpha(\boldsymbol{r},t)$ 满足薛定谔方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial \psi_\alpha(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = \hat{H}\psi_\alpha(\boldsymbol{r},t) \tag{1.74}$$

这一事实.(1.73)中进行的最后一步表明涉及转动时薛定谔方程不变性的条件,或位形空间各向同性的条件.因此对于任意的转动矢量 $\boldsymbol{\phi}$,

$$\hat{U}_R(\boldsymbol{\phi})\hat{H}\hat{U}_R^{-1}(\boldsymbol{\phi}) = \hat{H} \tag{1.75}$$

或

$$[\hat{U}_R(\boldsymbol{\phi}),\hat{H}] = 0 \tag{1.76}$$

且由于 ϕ 是任意的，

$$[\hat{L},\hat{H}] = 0 \tag{1.77}$$

方程(1.75)—(1.77)是等价的，同时表明角动量守恒. 如同在经典力学中(参见(1.16))那样，在量子力学中从空间各向同性我们可推出角动量守恒.

空间各向同性意味着所有的方向是等同的. 当然力场可以存在但仅限于不显示优先方向的那一种，即该场必须是球对称的. 否则各向同性将被破坏. 球对称的场总是为相对于力心的守恒角动量创造了条件.

例 1.11　在转动下矢量场的变换

我们以一矢量场 $\psi=\{\psi_1,\psi_2,\psi_3\}$ 为例，观察在转动下波场的行为. 由矢量场描述的粒子的一个实例是光子. 它的波场由矢势 $A(r,t)$ 描述，满足麦克斯韦方程. 矢量介子是另外的实例，矢量介子是静止质量不为零的亚核粒子，它也由矢量场所描述.

矢量场的转动算符 $\hat{U}(\phi)$ 的方程比标量场的(1.64)更为复杂. 重要的是认识到这转动算符不仅将矢量 ψ 从 r 移动到 $r'=\hat{\tilde{R}}\,r$，而且也将 ψ 的方向转动到一新的方向 ψ'，正如上图(a)中所示.

算符 $\hat{U}$ 将矢量 ψ 变换成新矢量 ψ'. 我们称这变换为波场的主动的转动. 操作 $\hat{\tilde{R}}$ 转动 r 处(当地 地)的矢量 ψ 使与 $\psi'(r')$ 的方向相同(图 b). 若波场是标量函数，我们不需要这附加的操作，因为 r 处就地的转动把标量变换到它本身. 另外矢量 $\psi(r)$ 被转动，因此

$$\psi'(r',t) = \hat{\tilde{R}}\,\psi(r,t) \tag{1}$$

或

$$\psi'(\hat{\tilde{R}}\,r,t) = \hat{\tilde{R}}\,\psi(r,t) \tag{2}$$

或

$$\psi'(r,t) = \hat{\tilde{R}}\,\psi(\hat{\tilde{R}}^{-1}r,t) \tag{3}$$

另一方面转动算符的定义方程是

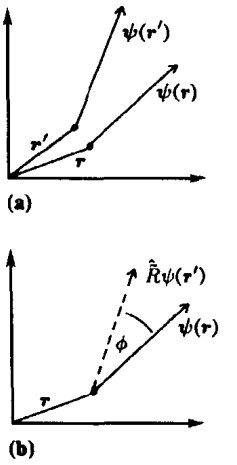
$$\psi'(r,t) = \hat{U}_R(\phi)\psi(r,t) \tag{4}$$

因此通过与(3)比较我们得到

$$\hat{U}_R(\phi)\psi(r,t) = \hat{\tilde{R}}\,\psi(\hat{\tilde{R}}^{-1}r,t) \tag{5}$$

根据这个关系式我们导出无穷小转动算符 $\hat{U}_R(\delta\phi)$

$$\begin{aligned}\hat{U}_R(\delta\phi)\psi(r,t) &= \hat{\tilde{R}}\,\psi(\hat{\tilde{R}}^{-1}r,t)\\ &= \psi(\hat{\tilde{R}}^{-1}r,t) + \delta\phi\times\psi(\hat{\tilde{R}}^{-1}r,t)\\ &= \psi(r-\delta\phi\times r,t) + \delta\phi\times\psi(r-\delta\phi\times r,t)\end{aligned}$$



(a)矢量 $\psi(r)$ 连接在位置 r 上. 转动后的矢量 $\psi'(r')$ 连接在转动后的位置 r' 上.

(b)算符 $\hat{\tilde{R}}$ 就地地转动矢量 $\psi(r)$ 到它的新方向.

$$\approx \psi(\boldsymbol{r},t) - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\delta\boldsymbol{\phi}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})\psi(\boldsymbol{r},t) + \delta\boldsymbol{\phi}\times\psi(\boldsymbol{r},t) \tag{6}$$

在(6)的第二行中我们已经忽略了 $\delta\boldsymbol{\phi}$ 的二次项,我们可将最后一项更清楚地写作

$$(\delta\boldsymbol{\phi}\times\psi(\boldsymbol{r},t))_i = \varepsilon_{ijk}\delta\phi_j\psi_k = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\delta\phi_j(\hat{S}_j)_{ik}\psi_k$$

$$= -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\delta\boldsymbol{\phi}\cdot(\hat{\boldsymbol{S}})_{ik}\psi_k \tag{7}$$

其中我们已引进矩阵

$$(\hat{S}_j)_{ik} = \mathrm{i}\hbar\,\varepsilon_{ijk} \tag{8}$$

$$(\hat{S}_1)_{ik} = \mathrm{i}\hbar\,\varepsilon_{i1k} = \mathrm{i}\hbar\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$(\hat{S}_2)_{ik} = \mathrm{i}\hbar\,\varepsilon_{i2k} = \mathrm{i}\hbar\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$$

$$(\hat{S}_3)_{ik} = \mathrm{i}\hbar\,\varepsilon_{i3k} = \mathrm{i}\hbar\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \tag{9}$$

我们可把这三个矩阵看作矢量 $\hat{\boldsymbol{S}}=\{\hat{S}_1,\hat{S}_2,\hat{S}_3\}$ 的分量. 回到矢量符号,我们现可以将(6)书写为如下形式

$$\hat{U}_R(\delta\boldsymbol{\phi})\psi(\boldsymbol{r},t) \approx [\mathbb{1} - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\delta\boldsymbol{\phi}\cdot(\hat{\boldsymbol{L}}+\hat{\boldsymbol{S}})]\psi(\boldsymbol{r},t) \tag{10}$$

这样我们得到无穷小转动算符的表达式

$$\hat{U}_R(\delta\boldsymbol{\phi}) = \mathbb{1} - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\delta\boldsymbol{\phi}\cdot(\hat{\boldsymbol{L}}+\hat{\boldsymbol{S}}) \tag{11}$$

由于 $\hat{\boldsymbol{L}}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ 是微分算符,而根据(9),$\hat{\boldsymbol{S}}$ 是具有与位置无关的分量的矩阵算符,这两个算符显然对易,因此

$$[\hat{L}_i,\hat{S}_k]_- = 0 \tag{12}$$

为得到有限转动的 $\hat{U}_R(\boldsymbol{\phi})$,我们可利用在(1.67)—(1.70)中表明的方法. 但在此我们决定采用不同的方法. 通过把有限角 $\boldsymbol{\phi}$ 划分为 N 个小的转动 $\delta\boldsymbol{\phi}=\frac{\boldsymbol{\phi}}{N}$,我们可经过 N 个相继的无穷小转动得到算符 $\hat{U}_R$. 因此,

$$\hat{U}_R(\boldsymbol{\phi}) = \lim_{N\to\infty}\left[\mathbb{1} - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left(\frac{\boldsymbol{\phi}}{N}\cdot(\hat{\boldsymbol{L}}+\hat{\boldsymbol{S}})\right]^N\right.$$

$$= \exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{\phi}\cdot(\hat{\boldsymbol{L}}+\hat{\boldsymbol{S}})\right] = \exp(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{\phi}\cdot\hat{\boldsymbol{J}}) \tag{13}$$

在此我们引进算符 $\hat{\boldsymbol{J}}=\hat{\boldsymbol{L}}+\hat{\boldsymbol{S}}$,它的分量 $\hat{J}_i$ 是矢量场转动的生成元. 如前所述,空间各向同性意味着

$$[\hat{\boldsymbol{J}},\hat{H}]_- = [\hat{\boldsymbol{L}}+\hat{\boldsymbol{S}},\hat{H}]_- = 0 \tag{14}$$

这样对于矢量场,量

$$\hat{\boldsymbol{J}} = \hat{\boldsymbol{L}} + \hat{\boldsymbol{S}} \tag{15}$$

是守恒的. 由于 $\hat{\boldsymbol{L}}$ 是轨道角动量算符,把 $\hat{\boldsymbol{S}}$ 看作是矢量场的内禀角动量或自旋似乎是自然的. 对易关系式(14)表明总角动量 $\hat{\boldsymbol{J}}$ 守恒.

我们知道轨道角动量的分量满足对易关系式

$$[\hat{L}_i,\hat{L}_j]_-=\mathrm{i}\hbar\,\epsilon_{ijk}\hat{L}_k \tag{16}$$

根据(9)通过明晰的计算，我们容易地推断 $\hat{\boldsymbol{S}}$ 的分量满足类似的对易关系式，即

$$[\hat{S}_i,\hat{S}_j]_-=\mathrm{i}\hbar\,\epsilon_{ijk}\hat{S}_k \tag{17}$$

例如，在 $i=1,j=2,k=3$ 的情况下，我们有

$$\begin{aligned}\hat{S}_1\hat{S}_2-\hat{S}_2\hat{S}_1&=(\mathrm{i}\hbar)^2\left[\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\right]\\&=(\mathrm{i}\hbar)^2\left[\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]\\&=(\mathrm{i}\hbar)(\mathrm{i}\hbar)\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\&=\mathrm{i}\hbar\hat{S}_3\end{aligned}$$

因此自旋矢量的分量 $\hat{S}_i$ 也满足角动量算符的对易关系. 这对 $\hat{J}_i$ 也成立，那么按照 $[\hat{L}_i,\hat{S}_j]=0$ 得到

$$\begin{aligned}[\hat{J}_i,\hat{J}_j]&=[\hat{L}_i+\hat{S}_i,\hat{L}_j+\hat{S}_j]=[\hat{L}_i,\hat{L}_j]_-+[\hat{S}_i,\hat{S}_j]_-\\&=\mathrm{i}\hbar\,\epsilon_{ijk}\hat{L}_k+\mathrm{i}\hbar\,\epsilon_{ijk}\hat{S}_k=\mathrm{i}\hbar\,\epsilon_{ijk}\hat{J}_k\end{aligned} \tag{18}$$

此结果对把 $\hat{\boldsymbol{J}}$ 看作总角动量算符和把 $\hat{\boldsymbol{S}}$ 看作自旋算符提供了进一步的证明. 记住当我们引进电子自旋时，我们认可对易关系式(16)—(18)是角动量算符的一般定义. 现在我们来计算矢量场的自旋 $\hat{\boldsymbol{S}}$(内禀角动量)的绝对值. 按照(9)我们得到

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{S}}^2&=\hat{\boldsymbol{S}}\cdot\hat{\boldsymbol{S}}=\hat{S}_1^2+\hat{S}_2^2+\hat{S}_3^2\\&=(\mathrm{i}\hbar)^2\left[\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]\\&=2\hbar^2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=1(1+1)\hbar^2\mathbb{1}\end{aligned} \tag{19}$$

在此我们已将值 α 写作对轨道角动量适用的已知形式 $S(S+1)$. 显然我们必须认为 S 值为 1. 此结果是十分重要的：矢量场具有自旋(内禀角动量)1，即它们描绘自旋为 1 的粒子. 因此光子和矢量介子具有自旋 $S=1$.

注释　在上述的例子中我们认识到转动算符

$$\hat{U}_R(\boldsymbol{\phi})=\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{\phi}\cdot\hat{\boldsymbol{J}}\right) \tag{20}$$

包含所考虑的场的轨道角动量和自旋(内禀角动量)之和，因为 $\hat{U}_R(\boldsymbol{\phi})$ 包含算符 $\hat{\boldsymbol{J}}$. 如果我们观察一般的波场(标量、矢量或张量)，为确定此场所描述的粒子的自旋，我们必须研究在转动下该场的变换性质. 这意味着我们必须建立算符 $\hat{U}_R(\boldsymbol{\phi})$. 我们得到的生成元 $\hat{J}_i$ 指出角动量性质，尤其是场所描述的粒子的自旋. 这正是以前应用的方法. 在标量场的情况下我们得到 $\hat{\boldsymbol{J}}=\hat{\boldsymbol{L}}=\boldsymbol{r}\times\hat{\boldsymbol{p}}$，即它描述仅具有轨道角动量的粒子或没有自旋($S=0$)的粒子. 在矢量场的情况下我们得到 $\hat{\boldsymbol{J}}=\hat{\boldsymbol{L}}+\hat{\boldsymbol{S}}$，其中 $\hat{\boldsymbol{S}}^2=S(S+1)\hbar^2=1(1+1)\hbar^2$. 因此矢量场描述具有自旋 $S=1$ 的粒子(见例 1.10).(**例 1.11 完**)

例 1.12 在转动下两分量旋量的变换

标量和旋量波场的转动是明显的,且容易想象为一转动的标量或矢量.在两分量的旋量的情况下就不是这么容易了.我们必须修改前几节中用来确定旋转算符的直接方法.在转动下我们不但必须研究单个波函数而且还必须研究关于两分量旋量方程的性质.为简单起见我们选择泡利方程

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} &= \hat{H}\psi \\ &= \left\{\frac{1}{2m}(\hat{\boldsymbol{p}}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A})^2+V(\boldsymbol{r})-\mu_B\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\boldsymbol{B}\right\}\psi \end{aligned} \tag{1}$$

我们用 $\psi=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$ 代表两分量旋量.转动算符和转动后的旋量仍用 $\hat{U}_R(\boldsymbol{\phi})$ 和 ψ' 表示.二者通过

$$\psi'(\boldsymbol{r},t)=\hat{U}_R(\boldsymbol{\phi})\psi(\boldsymbol{r},t) \tag{2}$$

相联系.我们不知道如何才能直接地建立 $\hat{U}_R(\boldsymbol{\phi})$,但我们能沿着另一条可供选择的路径:$\int\psi^+\,\psi\mathrm{d}^3x$ 必须是不变的.因此 $\hat{U}_R(\boldsymbol{\phi})$ 是幺正算符,

$$\begin{aligned} \int\psi^+\,\psi\mathrm{d}^3x &= \int\psi^+\,\psi\mathrm{d}^3x \\ &= \int\psi^+\,\hat{U}_R^\dagger(\boldsymbol{\phi})\hat{U}_R(\boldsymbol{\phi})\psi\mathrm{d}^3x \end{aligned} \tag{3}$$

并且

$$\hat{U}_R^\dagger(\boldsymbol{\phi})\hat{U}_R(\boldsymbol{\phi})=\mathbb{1} \tag{4}$$

根据(1.65)我们可推断转动后的标量函数 $f(\boldsymbol{r})$ 在转动后位置的值等于原始的波函数在原始位置的值.如果 $f(\boldsymbol{r})$ 是一乘积,如 $\psi^+\psi$,这论述也成立,并且我们必须采用各个因子的相关的位置(见(1.65)式).这意味着标量密度 $\psi^+(\boldsymbol{r},t)\psi(\boldsymbol{r},t)$ 在主动转动下表现得像标量波函数,并且

$$\psi'^+(\boldsymbol{r})\psi'(\boldsymbol{r})=\psi^+\,(\hat{R}^{-1}\boldsymbol{r})\psi(\hat{R}^{-1}\boldsymbol{r}) \tag{5}$$

我们可将(5)的右边写作两旋量分量之和.和数中的项是标量函数,它们通过 $\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{\phi}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}\right)$ 变换而来,如同在(1.71)式中那样,即

$$\begin{aligned} \psi^+\,(\hat{R}^{-1}\boldsymbol{r})\psi(\hat{R}^{-1}\boldsymbol{r}) &= \sum_{m=1}^{2}\psi_m^*(\hat{R}^{-1}\boldsymbol{r})\psi_m(\hat{R}^{-1}\boldsymbol{r}) \\ &= \sum_{m=1}^{2}\left[\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{\phi}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}\right)\psi_m(\boldsymbol{r})\right]^*\left[\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{\phi}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}\right)\psi_m(\boldsymbol{r})\right] \\ &= [\hat{U}_L(\boldsymbol{\phi})\psi(\boldsymbol{r})]^+\,[\hat{U}_L(\boldsymbol{\phi})\psi(\boldsymbol{r})] \end{aligned}$$

在最后一步中,我们引入了从(1.71)已知的算符

$$\hat{U}_L(\boldsymbol{\phi})=\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{\phi}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}\right) \tag{6}$$

$\hat{U}_L$ 计及轨道角动量的组成部分.我们用 $\hat{U}_L$ 代表这一部分,那么将存在源于自旋的另一部分.明显地 $\hat{U}_L(\boldsymbol{\phi})$ 确定在变换下由坐标决定的性质.因此我们需要依赖于旋量性质的另一项,如同在矢量场中那样(见例 1.9).这一项必须与坐标无关,于是现在关于总转动算符我们可写作

$$\hat{U}_R(\boldsymbol{\phi})=\hat{U}_S(\boldsymbol{\phi})\hat{U}_L(\boldsymbol{\phi}) \tag{7}$$

关系(3)和(4)仅当 $\hat{U}_S(\boldsymbol{\phi})$ 是幺正算符时成立，因为 $\hat{U}_R$ 和 $\hat{U}_L$ 是幺正的. 所以我们对 $\hat{U}_S(\boldsymbol{\phi})$ 作出以下的假设

$$\hat{U}_S(\boldsymbol{\phi}) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{\phi}\cdot\hat{\boldsymbol{a}}\right) \tag{8}$$

其中的厄密矢量算符 $\hat{\boldsymbol{a}}$ 仍需确定.

为求出 $\hat{\boldsymbol{a}}$ 我们必需研究泡利方程(1)的变换. 我们要求自旋矢量 $\hat{\boldsymbol{s}}$ 或——在一常数因子以内相等——泡利矢量算符 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}=[\hat{\sigma}_1,\hat{\sigma}_2,\hat{\sigma}_3]$ 在空间转动下如同矢量那样变换. 这使我们得到关系式

$$\hat{\sigma}_i' = \hat{U}_S^{\dagger}(\boldsymbol{\phi})\hat{\sigma}_i\hat{U}_S(\boldsymbol{\phi}) = R_{ji}\hat{\sigma}_j \tag{9}$$

这简明地表示在空间转动下 $\hat{\sigma}_i$ 以与矢量分量相同的方式变换. 若(9)成立，我们可以肯定 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ 实际上是一矢量. 局限于无穷小转动 $\delta\boldsymbol{\phi}$ 写作(见(1.61))

$$R_{ji} = \delta_{ji} + \varepsilon_{imj}\delta\phi_m \tag{10}$$

和

$$\hat{U}_s = \left(\mathbb{1} - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\delta\phi_n a_n\right) \tag{11}$$

将(9)写成此形式

$$R_{ji}\hat{U}_s^{+}(\boldsymbol{\phi})\hat{\sigma}_i\hat{U}_s(\boldsymbol{\phi}) = \hat{\sigma}_j \tag{9a}$$

并利用(10)和(11)得到

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_j &\approx \{\delta_{ji} + \varepsilon_{imj}\delta\phi_m\}\left\{\mathbb{1} + \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\delta\phi_l\hat{a}_l\right\}\hat{\sigma}_i\left\{\mathbb{1} - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\delta\phi_m\hat{a}_n\right\}\\ &\approx \{\delta_{ji} + \varepsilon_{imj}\delta\phi_m\}\left\{\hat{\sigma}_i + \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\delta\phi_n[\hat{a}_n,\hat{\sigma}_j]_-\right\}\\ &\approx \hat{\sigma}_j + \varepsilon_{imj}\delta\phi_m\hat{\delta}_i + \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\delta\phi_n[\hat{a}_n,\hat{\sigma}_j]_-\end{aligned} \tag{12}$$

其中我们略去了 $\delta\phi$ 的高级项. 由于 $\delta\phi_m$ 可任意地选定，(12)意味着关系式

$$[\hat{a}_n,\hat{\sigma}_j] = \mathrm{i}\hbar\,\varepsilon_{knj}\hat{\sigma}_k \tag{13}$$

算符 $\hat{a}_n$ 必须表示为 2×2 矩阵. 由于三个泡利矩阵和二维单位矩阵对所有的 2×2 厄密矩阵形成一完备基，$\hat{a}_n$ 可写成一线性组合，即

$$\hat{a}_n = \alpha_{nm}\hat{\sigma}_m + \beta_n\mathbb{1} \tag{14}$$

其中系数 α_{nm} 和 β_n 是实的(c-数). 不失普遍性，我们可选定 $\beta_n=0$，作为单位矩阵在(8)中仅产生一(不重要的)位相变换. 此外在(13)中 $\mathbb{1}$ 与 $\hat{\sigma}_j$ 对易，现(13)变为关于系数 α_{nm} 的方程：

$$\alpha_{nm}[\hat{\sigma}_m,\hat{\sigma}_j] = \mathrm{i}\hbar\,\varepsilon_{njk}\hat{\sigma}_k \tag{15}$$

把泡利矩阵的对易关系

$$[\hat{\sigma}_m,\hat{\sigma}_j] = 2\mathrm{i}\varepsilon_{mjk}\hat{\sigma}_k \tag{16}$$

考虑进去，(15)写作

$$2\,\alpha_{nm}\varepsilon_{mjk} = \hbar\,\varepsilon_{njk}\hat{\sigma}_k \tag{17}$$

此式仅能由

$$\alpha_{nm} = \frac{1}{2}\hbar\,\delta_{nm} \tag{18}$$

实现. 从而我们得到

$$a_n = \frac{1}{2}\hbar\,\hat{\sigma}_n \tag{19}$$

将这代入(8)后

$$\hat{U}_s(\phi) = \exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{i}\hbar\boldsymbol{\phi}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}\right) \tag{20}$$

引入自旋算符

$$\hat{s} = \frac{1}{2}\hbar\hat{\sigma} \tag{21}$$

根据(7)和(8),我们得到关于两分量旋量的完整的转动算符,即

$$\hat{U}_R(\phi) = \hat{U}_L(\phi)\hat{U}_s(\phi) = \exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{\phi}\cdot\left(\hat{\boldsymbol{L}} + \frac{\hbar}{2}\hat{\boldsymbol{\sigma}}\right)\right]$$

$$= \exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{\phi}\cdot(\hat{\boldsymbol{L}} + \hat{\boldsymbol{s}})\right] \tag{22}$$

因此我们断定两分量旋量按照

$$\psi'(r) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{\phi}\cdot\hat{\boldsymbol{J}}\right)\psi(\boldsymbol{r}) \tag{23}$$

变换.其中总角动量由

$$\hat{\boldsymbol{J}} = \hat{\boldsymbol{L}} + \hat{\boldsymbol{s}} \tag{24}$$

给出.这样的表达式从标量(总角动量=轨道角动量)和矢量(总角动量=轨道角动量+自旋 $1\hbar$)波函数已为我们所知,不过现在自旋本征值是 $|s| = \frac{1}{2}\hbar$.(**例 1.12 完**)

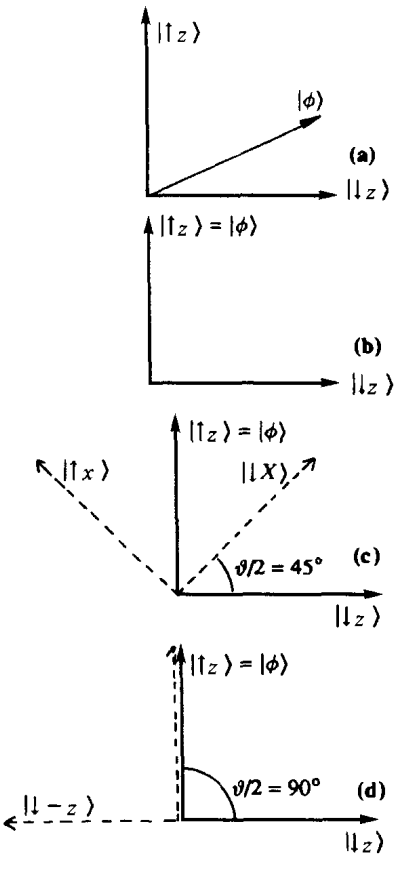
练习 1.13 测量电子自旋的方向

考虑一装置,它提供沿任意方向电子自旋分量的测量.假定已经对某一电子相对于一定的方向(e_z)进行了这样的测量,结果是沿 e_z 方向自旋向上.

问题 此实验后电子处于什么状态?在二维(复)自旋空间中描绘该态矢量.

现沿另一方向($e_{z'}$)测量同一电子的自旋分量,$e_{z'}$ 倾斜于原始的方向,相差角度 $\theta=90°$,$\theta=180°$.结果是自旋↑或自旋↓的概率等于什么?在自旋空间中沿 z' 方向自旋↑和自旋↓矢量的配置是怎样的?通过什么角度它们被转动得可与沿 z 方向的自旋↑和自旋↓相比?

解 电子自旋由具有两正交基矢的二维复矢量空间中的一矢量(旋量)所表示,这两个正交基矢选为 $|\uparrow z\rangle$(沿 z 方向自旋向上)和 $|\downarrow z\rangle$(沿 z 方向自旋向下).为简化,我们局限于实线性组合 $a_+|\uparrow z\rangle + a_-|\downarrow z\rangle$($a_+, a_- \in \mathbb{R}$).态矢量 $|\phi\rangle$ 是长度为 1 的一任意的线性组合(见图 a).随着第一次测量,它被投射到到一个基矢上,在我们的情况中到基矢 $|\uparrow z\rangle$(图 b).因此第一次测量后,态矢量为



(a) 测量前的自旋态矢量.
(b) 测量后的自旋态矢量.
(c) 和(α)按照分别被转动了 90°和 180°的坐标系展示态矢量的状态.

$$|\phi'\rangle = \frac{\langle \uparrow z|\phi\rangle}{|\langle \uparrow z|\phi\rangle|}|\uparrow z\rangle = \frac{a_+}{|a_+|}|\uparrow z\rangle = \pm\,|z\rangle \tag{1}$$

对于沿 x 方向($\theta=90°$)自旋分量的测量,我们假定 50% 自旋 ↑ 和 50% 自旋 ↓.

矢量 $|\uparrow z\rangle$ 和 $|\downarrow z\rangle$ 可写作 $|\uparrow x\rangle$ 和 $|\downarrow x\rangle$ 的线性组合,

$$\begin{aligned}|\uparrow z\rangle &= a|\uparrow x\rangle + b|\downarrow x\rangle\\ |\downarrow z\rangle &= c|\uparrow x\rangle + d|\downarrow x\rangle\end{aligned} \tag{2}$$

以及

$$|a|^2 = |b|^2 = |c|^2 = |d|^2 = \frac{1}{2} \tag{3}$$

因此,

$$|\langle\phi|\uparrow x\rangle|^2 = |\langle\uparrow z|\uparrow x\rangle|^2 = |a|^2$$

等是在第二次测量中找到"自旋 ↑ "结果的概率. 矢量 $|\uparrow x\rangle$, $|\downarrow x\rangle$ 与 $|\uparrow z\rangle$, $|\downarrow z\rangle$ 相比倾斜了 $\frac{\theta}{2}=45°$(图 c). 根据图示,通过 $|\phi\rangle=|\uparrow z\rangle$ 分别在 $|\uparrow x\rangle$ 或 $|\downarrow x\rangle$ 上的投影,我们能直接推断出刚才的结果,我们得到概率为 $\frac{1}{2}$. 若我们将测量装置转动 $\theta=180°$,我们得到"自旋 ↓ "的结果,其概率与以前的自旋 ↑ 的相同. 明显地,矢量 $|\uparrow -z\rangle$ 与 $|\downarrow -z\rangle$ 和 $|\uparrow z\rangle$ 与 $|\downarrow z\rangle$ 相比被转动了 $\frac{\theta}{2}=90°$(图 d). 代替转动仪器我们能够将电子沿相反方向转动 θ 角(例如借助于磁场),然后我们可测量 z 分量.

根据同样的考虑,我们可推断出电子在位形空间中 θ 角的转动与态矢量在自旋空间中 $\frac{\theta}{2}$ 角的转动相联系. 位形空间和自旋空间不是直接相关的,它们的维数是不同的. 记住这一事实是重要的,特别在自旋为 1 的情况中,那时两个空间都是三维的.(**练习 1.13 完**)

1.10　多粒子态的转动算符

我们考虑一标量(薛定谔)多粒子波函数

$$\psi_\alpha = \psi_\alpha(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,t) \equiv \psi_\alpha(\boldsymbol{r}_i,t) \tag{1.78}$$

它依赖于各个粒子的坐标 $\boldsymbol{r}_i$ 和时间,并且满足多粒子薛定谔方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_\alpha(\boldsymbol{r}_i,t) = \hat{H}(\hat{\boldsymbol{p}}_i,\boldsymbol{r}_i)\psi_\alpha(\boldsymbol{r}_i,t) \tag{1.79}$$

转动算符 $\hat{U}_R(\phi)$ 能够正好就像单粒子情况一样,由方程

$$\psi'_\alpha(\boldsymbol{r}_i,t) = \hat{U}_R(\boldsymbol{\phi})\psi_\alpha(\boldsymbol{r}_i,t) \tag{1.80}$$

定义. 并且可由类似于在(1.63)-(1.71)中利用过的方法确定. 例如对无穷小转动确定方程(1.66)等于

$$\begin{aligned}\psi'_\alpha(\boldsymbol{r}_i,t) &= \psi_\alpha(\hat{R}^{-1}\boldsymbol{r}_i,t)\\ &= \psi_\alpha(\boldsymbol{r}_i - \delta\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{r}_i,t) \simeq \psi_\alpha(\boldsymbol{r}_i,t) - \sum_i(\delta\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{r}_i)\cdot\nabla_i\psi_\alpha(\boldsymbol{r}_i,t)\end{aligned}$$

$$= \psi_a(\boldsymbol{r}_i,t) - \delta\boldsymbol{\phi}\cdot\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\sum_i \hat{\boldsymbol{L}}_i\psi_a(\boldsymbol{r}_i,t) = \left(\mathbb{1} - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\delta\boldsymbol{\phi}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}\right)\psi_a(\boldsymbol{r}_i,t) \tag{1.81}$$

其中

$$\hat{\boldsymbol{L}} = \sum_i \hat{\boldsymbol{L}}_i = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \hat{\boldsymbol{p}}_i \tag{1.82}$$

是体系的总角动量,因此转动算符是

$$\hat{U}_R(\boldsymbol{\phi}) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\delta\boldsymbol{\phi}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}\right) \tag{1.83}$$

形式上它与关于单粒子态的算符(1.71)完全相同,但现在 $\hat{L}$ 代表所有 粒子的总角动量.而且空间各向同性的对称性如同在单粒子情况中那样,导致$[\hat{\boldsymbol{L}},\hat{H}(\hat{\boldsymbol{p}}_i,\boldsymbol{r}_i)]_- = 0$.这意味着总角动量是守恒的,这结果是不奇怪的.

从数学的观点,(1.71)中的 $\hat{\boldsymbol{J}}_i$ 和(1.83)中的 $\hat{\boldsymbol{L}}_i$ 角动量算符是李群 SO(3)的生成元.这将在第三章中详细地解释,不过从现在开始我们将偶而使用群论语言.它们满足由对易关系式

$$[\hat{J}_i,\hat{J}_j] = \mathrm{i}\hbar\,\varepsilon_{ijk}\hat{J}_k \tag{1.84}$$

所定义的李代数.李代数是封闭的,即任意一对生成元 $\hat{J}_i$ 的对易关系式可表示为生成元的组合(在我们的情况中,由于 ε_{ijk},仅为一个生成元).在下一章中我们将证明李代数基本上确定生成元 $\hat{J}_i$ 的可能的矩阵表示.

1.11 人物小传

E. 诺瑟(NOETHER,Emmy) 1882 年 3 月 23 日生于厄兰金,1935 年 4 月 14 日死于布赖恩莫尔.诺瑟在哥丁根和埃朗根从事研究,1922 在哥丁根成为副教授.1933 移居美国后,在布赖恩莫尔的小学院内获得客座教授的身份.诺瑟通过她的工作在代数学的许多分支都有很深的影响,结构性的理论思想成为现代数学的统治的原则可归功于她的影响.

S. 李(LIE,Sophus) 1842 年 2 月 17 日生于诺德弗德,1899 年 2 月 18 日死于奥斯陆克里斯迪安那.李 1865 年在克里斯迪安那通过了他的教师资格考试.在 1869 年至 1870 年他访问了柏林和在 1870 年与克莱恩一起访问了巴黎.从 1872 年起李在克里斯迪安那任教授并且在 1886 年至 1898 年之间在来比锡任教授,直到他作为在变换群理论方面的教授回到克里斯迪安那为止.在巴黎李已经看出对于数学,研究群理论的根本的重要性,已经发现切变换并且由此证明力学可被解释为群理论的一部分.几乎所有他的进一步研究都涉及连续变换群理论和它们的应用.

第 2 章　角动量算符的角动量代数表示——SO(3)的生成元

2.1　转动群的不可约表示

在原子物理和核物理的许多应用中，探讨了中心势中的粒子态. 在中心势中角动量是一守恒量，即它的本征值可被用来作态的分类. 由于在量子力学中角动量的重要性，在此章中我们再一次研究角动量算符和它们的本征函数. 此外角动量算符的对易关系式体现了 SO(3)李代数.

角动量在经典中由关系式

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \tag{2.1}$$

定义. 在(2.1)中如果我们用算符

$$\hat{\boldsymbol{p}} = -\mathrm{i}\hbar \nabla \tag{2.2}$$

来替代动量，我们得到关于角动量算符的分量的对易关系

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = \mathrm{i}\hbar \hat{L}_z \tag{2.3}$$

如果总角动量是单个体系(粒子，自旋，轨道角动量等)的角动量之和，对易关系(2.3)也对该总角动量成立. 关于

$$\boldsymbol{L} = \sum_n \boldsymbol{L}^{(n)} \quad , \quad [\hat{L}_i^{(m)}, \hat{L}_j^{(n)}]_- = \mathrm{i}\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{L}_k^{(n)} \delta_{nm}$$

我们得到

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y]_- = \left[\sum_n \hat{L}_x^{(n)}, \sum_m \hat{L}_y^{(m)}\right]_- = \sum_n [\hat{L}_x^{(n)}, \hat{L}_y^{(n)}] = \sum_n \mathrm{i}\hbar \hat{L}_z^{(n)} = \mathrm{i}\hbar \hat{L}_z$$

我们再一次强调属于不同体系的角动量算符对易，由于它们作用在不同的空间中，即它们作用在不同的坐标上. 鉴于对易关系(2.3)普通成立，我们可定义：

任何矢量算符 $\hat{\boldsymbol{J}}$，它的分量是可观察量并且满足对易关系(2.3)，被称为角动量算符.

仅根据对易关系(SO(3)的李代数)我们可推导出角动量算符的几个基本性质和它的本征函数. 角动量平方和它所有的分量对易，即

$$[\hat{\boldsymbol{J}}, \hat{\boldsymbol{J}}^2]_- = 0, \qquad \hat{\boldsymbol{J}}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2 \tag{2.4}$$

从初等量子力学我们知道对轨道角动量算符这是正确的，利用对易关系(2.3)，在推广的情况中

我们能容易地验证(2.4)式.

从(2.4)式我们可以推论角动量的一个分量和它的总体的平方可同时被测量,即它们有共同的本征函数.

为得到这些算符的谱,利用下列的厄密共轭算符是适当的:

$$\hat{J}_+ = \hat{J}_x + \mathrm{i}\,\hat{J}_y, \qquad \hat{J}_- = \hat{J}_x - \mathrm{i}\,\hat{J}_y \tag{2.5}$$

这些算符不是厄密的,被称为阶跃算符或位移算符.

从关系式(2.4)得到

$$[\hat{J}_+, \hat{\boldsymbol{J}}^2] = [\hat{J}_-, \hat{\boldsymbol{J}}^2] = 0 \tag{2.6}$$

这三个算符 $\hat{J}_+, \hat{J}_-, \hat{J}_z$ 完全地确定矢量算符 $\hat{\boldsymbol{J}}$,并且比 $\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z$ 更便于代数变换.从(2.3)式我们可容易地推导出算符(2.5)的对易关系,

$$[\hat{J}_z, \hat{J}_+]_- = \hbar \hat{J}_+, \ [\hat{J}_z, \hat{J}_-]_- = -\hbar \hat{J}_-, \ [\hat{J}_+, \hat{J}_-] = 2\hbar \hat{J}_z \tag{2.7a}$$

为从右端去掉常数 $\hbar$,我们利用变换 $\hat{J}'_i = \hbar \hat{J}_i$.显然算符 $\hat{J}'_i$ 满足无量纲的对易关系.

$$[\hat{J}'_z, \hat{J}'_+]_- = \hat{J}'_+, \quad [\hat{J}'_z, \hat{J}'_-]_- = -\hat{J}'_-, \quad [\hat{J}'_+, \hat{J}'_-] = 2\hat{J}'_z \tag{2.7b}$$

它们与 $\hbar = 1$ 时的(2.7a)式完全一样.从现在开始我们将完全采用算符 $\hat{J}'_i$,但为简单起见仍以 $\hat{J}_i$ 代表他们.在这一节中所有的进一步的工作将以关系式(2.7b)为基础.

通过阶跃算符表示角动量算符的平方,我们得到

$$\hat{\boldsymbol{J}}^2 = \frac{1}{2}(\hat{J}_+ \hat{J}_- + \hat{J}_- \hat{J}_+) + \hat{J}_z^2 \tag{2.8}$$

以及关系式

$$\hat{J}_+ \hat{J}_- = \hat{\boldsymbol{J}}^2 - \hat{J}_z(\hat{J}_z - 1), \ \hat{J}_- \hat{J}_+ = \hat{\boldsymbol{J}}^2 - \hat{J}_z(\hat{J}_z + 1) \tag{2.9}$$

由于 $\hat{\boldsymbol{J}}^2$ 与它的所有的笛卡尔坐标对易(2.4),对一个分量(我们取 $\hat{J}_z$)和 $\hat{\boldsymbol{J}}^2$ 我们可求出一组共同本征函数,具有相应的本征值 $j(j+1)$ 和 m.因此我们写作

$$\hat{\boldsymbol{J}}^2 \psi_{jm} = j(j+1)\psi_{jm} \quad , \quad \hat{J}_z \psi_{jm} = m\psi_{jm} \tag{2.10}$$

由于 $\hat{\boldsymbol{J}}^2$ 的本征值用 $j(j+1)$ 表示,必须是正的,不失普遍性 j 可选为正数,这是由于所有的正数对于正的 j 可表示成 $j(j+1)$ 的形式.

现在我们希望通过代数方法得到这些算符的谱,因此利用(2.9)我们得到

$$\begin{aligned} \hat{J}_+ \hat{J}_- \psi_{jm} &= [j(j+1) - m(m-1)]\psi_{jm} \\ \hat{J}_- \hat{J}_+ \psi_{jm} &= [j(j+1) - m(m+1)]\psi_{jm} \end{aligned} \tag{2.11}$$

阶跃算符相互是厄密共轭的,$\hat{J}_-^+ = \hat{J}_+$;因此

$$0 \leqslant \int |\hat{J}_+ \psi_{jm}|^2 \mathrm{d}v = \int \psi_{jm}^* \hat{J}_- \hat{J}_+ \psi_{jm} \mathrm{d}v \tag{2.12}$$

成立.利用(2.11)我们得到

$$\int \psi_{jm}^* \hat{J}_- \hat{J}_+ \psi_{jm} \mathrm{d}v = [j(j+1) - m(m+1)] \int |\psi_{jm}|^2 \mathrm{d}v \geqslant 0 \tag{2.13}$$

类似地

$$\int |\hat{J}_- \psi_{jm}|^2 \mathrm{d}v = \int \psi_{jm}^* \hat{J}_+ \hat{J}_- \psi_{jm} \mathrm{d}v = [j(j+1) - m(m-1)] \int |\psi_{jm}|^2 \mathrm{d}v \geqslant 0$$

因此对于量子数 j 和 m，我们可推导出下列的关系式：

$$j(j+1) - m(m-1) = (j-m)(j+m+1) \geqslant 0 \tag{2.14}$$
$$j(j+1) - m(m+1) = (j+m)(j-m+1) \geqslant 0$$

它们对量子数 m 指定了范围

$$-j \leq m \leq j \tag{2.15}$$

对于 $m = \pm j$，利用(2.13)，从(2.12)我们可以推导出

$$\hat{J}_+ \psi_{jm} = 0, \quad m = j$$
$$\hat{J}_- \psi_{jm} = 0, \quad m = -j$$

为了探讨阶跃算符作用在本征函数 ψ_{jm} 上的结果，我们分析关系式

$$\hat{\boldsymbol{J}}^2 \hat{J}_+ \psi_{jm} = \hat{J}_+ \hat{\boldsymbol{J}}^2 \psi_{jm} = j(j+1) \hat{J}_+ \psi_{jm}$$

这表明 $\hat{J}_+ \psi_{jm}$ 是本征值 $j(j+1)$ 的本征函数，实际上 $\hat{J}_-$ 也是这样. 阶跃算符不改变角动量平方的本征值.

从(2.7b)我们看到

$$\hat{J}_z \hat{J}_+ = \hat{J}_+ (\hat{J}_z + 1)$$

或写作关于 $\hat{J}_z$ 的本征方程

$$\hat{J}_z (\hat{J}_+ \psi_{jm}) = (m+1)(\hat{J}_+ \psi_{jm}) \tag{2.16}$$

阶跃算符 $\hat{J}_+$ 与 $\hat{J}_-$ 分别增加与减少本征值 m 一个单位. 借助 $\hat{J}_+$ 在波函数 ψ_{jm} 上的逐步运用，我们得到 $\hat{\boldsymbol{J}}^2$ 和 $\hat{J}_z$ 的本征函数，在各个情况下 $\hat{J}_+$ 与本征值增加 1 相对应. 我们可以根据增加的 m 排列这些函数：

$$\psi_{jm}, \hat{J}_+ \psi_{jm}, \hat{J}_+^2 \psi_{jm}, \cdots\cdots, \hat{J}_+^p \psi_{jm}$$

以及 $\hat{J}_z$ 的相应的本征值为

$$m, m+1, m+2, \cdots\cdots, m+p = j$$

数 p 是一正整数，$m+p$ 的最大值必须等于 j. 我们可按以下方式理解以上所述：考虑 ψ_{jm^*} 是对应于 m 的最大值的非平庸态. 由于(2.16)和(2.13)，于是我们有 $\hat{J}_+ \psi_{jm^*} \sim \psi_{jm^*+1}$ 和 $\psi_{jm^*+1} \sim \hat{J}_+ \psi_{jm^*} \equiv 0$. 因此 $0 = \hat{J}_- \hat{J}_+ \psi_{jm^*} = [\hat{\boldsymbol{J}}^2 - \hat{J}_z(\hat{J}_z+1)] \psi_{jm^*} = [j(j+1) - m^*(m^*+1)] \psi_{jm^*}$. 因为 ψ_{jm^*} 是非平庸态，此方程仅当 $m^* = j$ 时被满足. 相应地对于算符 $\hat{J}_-$，我们得到序列

$$\psi_{jm}, \hat{J}_- \psi_{jm}, \cdots\cdots, \hat{J}_-^q \psi_{jm}$$

以及本征值

$$m, m-1, \cdots\cdots, m-q = -j$$

根据前面的解释，q 也是一正整数. 我们可以对最小值 $m-q$ 进行同样的讨论，并且得到 $-q = -j$，从这些条件我们可以推导出

$$p + q = 2j$$

由于 p 和 q 是正整数，关于量子数 j 我们得到下列的值

$$j = 0\ ,\ \frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3,\cdots$$

这是十分重要的结果，它表明从对易关系(2.7)可直接推导出在量子力学中仅存在具有整数$(j=0,1,2,\cdots)$或半整数$\left(j=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\cdots\right)$角动量的体系. 根据对易关系，其它的值，例如$\frac{\hbar}{3}$或$\frac{\hbar}{5}$是不允许的.

量子数是

$$m = 0,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm 1,\ \pm\frac{3}{2},\cdots$$

角动量算符 $\hat{\boldsymbol{J}}^2$ 的本征值是 $j(j+1)$，并且对于每一个确定的 j 值，$\hat{J}_z$ 有 $2j+1$ 个不同的本征值 m，它们是

$$-j,\ -j+1,\ \cdots,0,1,\cdots,\ +j$$

我们已经指出从单个本征函数 ψ_{jm}，通过阶跃算符能生成确定的本征值 j 的所有的 $2j+1$ 个本征函数. 现在我们证明它们除相因子之外被惟一地确定.

由于本征函数归一化到 1，

$$\hat{J}_+\,\psi_{jm} = a_m\psi_{jm-1}$$

成立，又根据(2.13)关于常数因子我们得到

$$|a_m|^2 = [j(j+1) - m(m+1)]$$

我们选择位相使得 a_m 是正的和实的(康登-肖特利(Condon-Shortley)位相)①. 随着上述的位相选择，我们应用 $\hat{J}_+$ 和 $\hat{J}_-$ 而得到满足本征方程

$$\hat{\boldsymbol{J}}^2\psi_{jm} = j(j+1)\psi_{jm},\quad \hat{J}_z\psi_{jm} = m\psi_{jm} \tag{2.17}$$

的 $2j+1$ 个正交归一的本征函数

$$\psi_{j,-j},\psi_{j,-j_1+j},\cdots,\psi_{jm},\cdots,\psi_{jj}$$

按照位相的选择，它们也满足

$$\hat{J}_+\,\psi_{jm} = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\,\psi_{j,m+1} \tag{2.18a}$$

$$\hat{J}_-\,\psi_{jm} = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\,\psi_{j,m-1} \tag{2.18b}$$

$$\hat{J}_+\,\psi_{jj} = \hat{J}_-\,\psi_{j,-j} = 0$$

这 $2j+1$ 个本征矢量通过算符 $\hat{J}_+,\hat{J}_-,\hat{\boldsymbol{J}}^2$ 和 $\hat{J}_z$ 相互转换. 应用这些算符即在转动算符 $\hat{U}_k(\phi)$ 的范围内，我们总是因此得到这些本征矢量和它们的线性组合. 换句话说，由本征函数 ψ_{jm} 所张成的 $2j+1$ 维矢量空向在角动量算符的应用下是不变的. 因此我们称它为希尔伯特空间的不变子空间. 它不能分解成更小的不变子空间，而且 $2j+1$ 个矢量中的每一个通过阶跃算符作用能变换为

① 原始的定义由 E. U. Condon, G. H. Shortley 在 *Theory of Atomic Spectra* (Cambridge University Press, Cambridge 1935)书中首次给出.

任何其它的矢量. 这使得我们得到转动群的不可约表示的表达式.

注意：通常对于一对 j 和 m 值有几个 ψ_{jm} 态，我们用 ψ_{njm} 代表它们，此处 n 是新的量子数，它区别开这些态(例氢原子本征态的主量子数). 算符 $\hat{J}_{\pm}$，$\hat{J}_z$ 对具有相同 n 和 j 的波函数进行相互变换，而从来没有得到具有 $n' \neq n$ 和/或 $j' \neq j$ 的波函数 $\psi_{n'j'm'}$.

2.2　角动量算符的矩阵表示

利用迄今已得到的关系式，我们能容易地计算角动量算符 $\hat{J}_x$，$\hat{J}_y$，$\hat{J}_z$ 的矩阵表示. 我们选择就 $\hat{J}_z$ 而言是对角的本征矢量基 ψ_{jm}. 为计算 $\hat{J}_x$ 和 $\hat{J}_y$ 的矩阵我们应用表达式

$$\hat{J}_x = \frac{1}{2}(\hat{J}_+ + \hat{J}_-)\ ,\hat{J}_y = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\hat{J}_+ - \hat{J}_-) \tag{2.19}$$

矩阵元是积分

$$\int \psi^*_{j'm'} \hat{J}_i \psi_{jm} \mathrm{d}V = \delta_{jj'}(\hat{J}_i)_{m'm} \tag{2.20}$$

在角动量 $j=\frac{1}{2}$ 的情况下，我们得到泡利矩阵

$$(\hat{J}_x)_{mm'} = \hat{S}_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\hat{\sigma}_x$$

$$(\hat{J}_y)_{mm'} = \hat{S}_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\hat{\sigma}_y$$

$$(\hat{J}_z)_{mm'} = \hat{S}_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z$$

和

$$(\hat{\boldsymbol{J}}^2)_{mm'} = \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\mathbb{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

在角动量 $j=1$(绝对值 $\sqrt{2}\,\hbar$)的情况下，我们得到具有 $m=-1,0,1$ 的三维矩阵. 利用如上所述的相同符号，从(2.19)，(2.20)和(2.18)我们推导出

$$\hat{S}_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{S}_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.22a}$$

$$\hat{S}_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\boldsymbol{S}}^2 = 1(1+1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

就像我们利用旋量 $\chi_{\frac{1}{2},m}$(χ_+ 和 χ_-)描述具有自旋 $\frac{1}{2}$ 的态一样，现在我们可利用矢量 $\chi_{1,m}$，即

$$\chi_{11}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \chi_{10}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \chi_{1-1}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

它们提供对于自旋 1 的所有可能的态.

矢量 χ_{1m}是矩阵 $\hat{S}_y$ 的本征矢量,因此

$$\hat{S}_y\chi_{1m}=m\chi_{1m}$$

成立. 具有 $j=1$ 的角动量可取对应于矢量 χ_{1m}的三个独特的态. 形式上自旋矢量和三维空间中的单位矢量之间有着完全的类似,意味着

$$\boldsymbol{e}_x=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_y=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_z=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

这将在下一个练习中仔细讨论. 在球表示中三维空间的矢量在空间转动下的变换正像自旋函数 χ_{1m}一样. 我们曾经指出(见例 1.11),从矢量场在转动下的行为可以得出它们具有自旋 1,例如作为电磁场(矢量场)的"粒子"的光子具有自旋 1. $\hat{S}_i$ 算符(例 1.11,方程(9))和(2.21)中的表示之间的关系将在练习 2.1 中阐明.

对于自旋$\frac{3}{2}$我们得到 $2j+1$ 维矩阵

$$\hat{S}_x=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&\sqrt{3}&0&0\\\sqrt{3}&0&2&0\\0&2&0&\sqrt{3}\\0&0&\sqrt{3}&0\end{pmatrix},\qquad \hat{S}_y=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}\sqrt{3}&0&0\\\mathrm{i}\sqrt{3}&0&2\mathrm{i}&0\\0&2\mathrm{i}&0&-\mathrm{i}\sqrt{3}\\0&0&\mathrm{i}\sqrt{3}&0\end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_z=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&3\end{pmatrix},\qquad \hat{\boldsymbol{S}}^2=\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\tag{2.22b}$$

在此将不进一步讨论它们. 以类似的方法我们可以得到关于更高阶角动量的矩阵. 相应的本征函数是具有$(2j+1)$个分量的列矢量(旋量).

我们已经建立了矩阵表示,以角动量算符对于不可进一步分解的不变子空间的态的矩阵元的形式. 正如我们以上已经提到的,这样的表示被称为"不可约的",在量子力学中它们起着重要的作用,因为通常所有的矩阵表示都能被分解成不可约表示的乘积.

练习 2.1 自旋 1 算符的特殊表示

问题 求出基矢,在其中自旋为 1 的算符 $\hat{\boldsymbol{S}}^2$ 和 $\hat{S}_3$ 都是对角的. 在此表象中导出 $\hat{S}_1,\hat{S}_2$ 和 $\hat{S}_3$. 证明对于矢量场 SO(3)的生成元能通过一幺正变换变换为(2.22)的形式.

解　从例 1.11 中方程(9)与(19)我们知道(设 $\hbar=1$)

$$\hat{\boldsymbol{S}}^2 = 2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_z = \mathrm{i}\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \tag{1}$$

显然 $\hat{\boldsymbol{S}}^2$ 已经是对角化的,具有本征值 2. 由于(1)[对应于例 1.11 中的(9),(19)]是以笛卡尔表象中的矢量 $\boldsymbol{\psi}=\{\psi_1,\psi_2,\psi_3\}$ 为基础的,$\{\psi_1,\psi_2,\psi_3\}$ 是 $\boldsymbol{\psi}$ 的笛卡尔分量. 因此

$$\hat{\boldsymbol{S}}^2\boldsymbol{\psi} = 2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\\\psi_3\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\\\psi_3\end{pmatrix} = 2\boldsymbol{\psi}$$

$$\hat{S}_3\boldsymbol{\psi} = \mathrm{i}\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\\\psi_3\end{pmatrix} = \mathrm{i}\begin{pmatrix}-\psi_2\\\psi_1\\0\end{pmatrix} \tag{2}$$

现在我们寻找旋量的幺正变换

$$\begin{pmatrix}\psi_1'\\\psi_2'\\\psi_3'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}U_{11}&U_{12}&U_{13}\\U_{21}&U_{22}&U_{23}\\U_{31}&U_{32}&U_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\\\psi_3\end{pmatrix}$$

或用简写符号

$$\boldsymbol{\psi}' = \hat{U}\boldsymbol{\psi} \tag{3}$$

使得

$$\hat{\boldsymbol{S}}^2\boldsymbol{\psi}' = 2\boldsymbol{\psi}' \tag{4a}$$

$$\hat{S}_z\boldsymbol{\psi}' = \mu\boldsymbol{\psi}' \tag{4b}$$

方程(4a)总是满足的,将(3)代入(4a)得到

$$\hat{\boldsymbol{S}}^2\hat{U}\boldsymbol{\psi} = 2\hat{U}\boldsymbol{\psi}, \quad \text{或} \quad \hat{U}^{-1}\hat{\boldsymbol{S}}^2\hat{U}\boldsymbol{\psi} = 2\boldsymbol{\psi},$$

$$\hat{U}^{-1}(2\cdot\mathbb{1})\hat{U}\boldsymbol{\psi} = 2\boldsymbol{\psi}, \quad 2\boldsymbol{\psi} = 2\boldsymbol{\psi}$$

与幺正变换 $\hat{U}$ 无关,由于(1),(4a)总是满足的. 方程(4b)是以 μ 为本征值的本征方程. 显然它写作

$$\mathrm{i}\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1'\\\psi_2'\\\psi_3'\end{pmatrix}_\mu = \mu\begin{pmatrix}\psi_1'\\\psi_2'\\\psi_3'\end{pmatrix}_\mu$$

或

$$\left[\mathrm{i}\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} - \mu\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\psi_1'\\\psi_2'\\\psi_3'\end{pmatrix}_\mu = 0$$

因而

$$\begin{pmatrix}-\mu&-\mathrm{i}&0\\\mathrm{i}&-\mu&0\\0&0&-\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1'\\\psi_2'\\\psi_3'\end{pmatrix}_\mu = 0$$

这是线性齐次方程组,仅当它的系数行列式等于零,即

$$\begin{vmatrix} -\mu & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{vmatrix} = -\mu^3 - (\mathrm{i}^2)\mu = 0$$

时,它有非平庸解.

因此三个本征值是

$$\mu_0 = 0,\ \mu_+ = +1,\ \mu_- = -1 \tag{5}$$

容易确定相应的本征矢量.让我们首先考虑本征值 $\mu=+1$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi'_1 \\ \psi'_2 \\ \psi'_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} -\psi'_1 - \mathrm{i}\psi'_2 &= 0 \\ \mathrm{i}\psi'_1 - \psi'_2 &= 0 \\ -\psi'_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \psi'_1 = A' \\ \psi'_2 = \mathrm{i}A' \\ \psi'_3 = 0 \end{cases}$$

其中 A' 是任意的.这样

$$\begin{pmatrix} \psi'_1 \\ \psi'_2 \\ \psi'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' \\ \mathrm{i}A' \\ 0 \end{pmatrix}$$

归一化后,在一个相因子以内我们求出

$$\begin{pmatrix} \psi'_1 \\ \psi'_2 \\ \psi'_3 \end{pmatrix}_+ = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6a}$$

类似地,得到

$$\begin{pmatrix} \psi'_1 \\ \psi'_2 \\ \psi'_3 \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \psi'_1 \\ \psi'_2 \\ \psi'_3 \end{pmatrix}_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6b}$$

与轨道角动量 1 $\hbar$的本征函数即 $Y_{1m}(\theta,\varphi)$完全相似,此处的位相已经被确定.为使这更清楚,我们将引进球面基矢 $\xi_\mu(\mu=\pm1,0)$并且将它们与矢量(6a)和(6b)相比较.球面基矢 ξ_μ 是由笛卡尔基矢按以下方式构成:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_1 + \mathrm{i}\boldsymbol{e}_2) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ +\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{7}$$

$$\xi_0 = \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\xi_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_1 - \mathrm{i}\boldsymbol{e}_2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \mathrm{i}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-\mathrm{i}\\0\end{pmatrix}$$

根据(4)和(6),这些球面幺正矢量 ξ_μ 代表 $\hat{S}^2$ 和 $\hat{S}_3$ 的本征矢量. 将它们和与 $m=1,0,-1$ 对应的球谐函数 $Y_{1m}(\theta,\psi)$①

$$Y_{1m}(\theta,\psi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{1}{r}\begin{cases} -(x+\mathrm{i}y)/\sqrt{2}, & m=1 \\ z, & m=0 \\ (x-\mathrm{i}y)/\sqrt{2}, & m=-1 \end{cases}$$

相比较,这类似性很明显. 球谐函数 $Y_{1m}(\theta,\psi)$——在因子 $\sqrt{3/4\pi}/r$ 以内——对应于位置 $\boldsymbol{r}=\{x,y,z\}$ 的球面表示. 通过矩阵 $\hat{U}$ 得到了变换(7)

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_0\\ \xi_{-1}\end{pmatrix} = \hat{U}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_3\end{pmatrix} \tag{8}$$

它与(3)导致(6)中的矩阵相同. 变换(3)描述从笛卡尔分量 $\psi=\{\psi_1,\psi_2,\psi_3\}$ 到球面坐标 $\{\psi'_1,\psi'_0,\psi'_{-1}\}$ 的转换:

$$\begin{aligned} \psi'_1 &= -(\psi_1+\mathrm{i}\psi_2)/\sqrt{2} \\ \psi'_0 &= -\psi_3 \\ \psi'_{-1} &= (\psi_1-\mathrm{i}\psi_2)/\sqrt{2} \end{aligned} \tag{9}$$

或

$$\begin{pmatrix}\psi'_1\\ \psi'_0\\ \psi'_{-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{pmatrix}$$

任一矢量可借助(7)用球面基矢来表示,因此

$$\boldsymbol{A} = \sum_{\mu=1}^{-1} A'_\mu \xi^*_\mu = \sum_\mu A'_\mu (-1)^\mu \xi_{-\mu} \tag{10}$$

根据(7)容易证明

$$\xi^*_\mu \cdot \xi_{\mu'} = \delta_{\mu\mu'}$$

由此得到

---

① 参见 J. D. Jackson: *Classical Electrodynamics* 第二版(Wiley, New York 1975)或 W. Greiner: *Theoretische Physik, Elektrodynamik*(Harri Deutsch, Frankfurt 1986),第 3 章.

$$A'_\mu = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\xi}_\mu$$

因此

$$A'_1 = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\xi}_1 = -(A_1 + \mathrm{i}A_2)/\sqrt{2}$$
$$A'_0 = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\xi}_0 = A_3$$
$$A'_{-1} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\xi}_{-1} = (A_1 - \mathrm{i}A_2)/\sqrt{2}$$

与(9)相一致. 由于关系式

$$\boldsymbol{\xi}^*_\mu\cdot\boldsymbol{\xi}_{\mu'} = \delta_{\mu\mu'} \quad , \quad \boldsymbol{\xi}^*_\mu = (-1)^\mu\boldsymbol{\xi}_{-\mu}$$

在球面表示中两矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的标积简明地写作

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} &= \sum_\mu A'_\mu\boldsymbol{\xi}^*_\mu\cdot\sum_\nu B'_\nu\boldsymbol{\xi}^*_\nu = \sum_{\mu,\nu}A'_\mu B'_\nu\boldsymbol{\xi}^*_\mu(-1)^\nu\boldsymbol{\xi}_{-\nu}\\ &= \sum_{\mu,\nu}A'_\mu B'_\nu(-1)^\nu\delta_{\mu,-\nu} = \sum_\mu(-1)^\mu A'_\mu B'_{-\mu}\\ &= \sum_\mu A'_\mu B'_\mu{}^*\end{aligned} \tag{11}$$

在 $\hat{S}^2$ 和 $\hat{S}_3$ 的本征表象中自旋矢量 $\hat{S}_i$ 可用两不同的方法计算:

(a) $$(\hat{S}'_i)_{\mu\nu} = \boldsymbol{\xi}^+_\mu\hat{S}_i\boldsymbol{\xi}_\nu \tag{12}$$

这给出

$$(\hat{S}'_3)_{\mu\nu} = \boldsymbol{\xi}^+_\mu\hat{S}_3\boldsymbol{\xi}_\nu = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix} \tag{13}$$

作为例子我们检验元素 $(\hat{S}'_3)_{11}$,给出

$$\begin{aligned}(\hat{S}'_3)_{11} &= \boldsymbol{\xi}^+_1\hat{S}_3\boldsymbol{\xi}_1\\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(1\quad -\mathrm{i}\quad 0)\mathrm{i}\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix}1\\\mathrm{i}\\0\end{pmatrix}\\ &= \frac{\mathrm{i}}{2}(-\mathrm{i}\quad -1\quad 0)\begin{pmatrix}1\\\mathrm{i}\\0\end{pmatrix} = \frac{\mathrm{i}}{2}(-2\mathrm{i}) = 1\end{aligned}$$

$\hat{S}_3$(在(13)中)的对角表示清楚显示可能的本征值(自旋取向沿 z 轴),就是 1,0,−1. 类似地我们求出 $\hat{\boldsymbol{S}}$ 的其它分量

$$(\hat{S}'_1)_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$
$$(\hat{S}'_2)_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}&0\\\mathrm{i}&0&-\mathrm{i}\\0&\mathrm{i}&0\end{pmatrix}$$
$$(\hat{S}'_3)_{\mu\nu} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix} \tag{14}$$

在(2.21)我们已经见到这表示.

(b) $\hat{S}_3$ 的对角表示也可按以下方法得到：设

$$\hat{S}'_3 = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

是 $\hat{S}_3$ 算符的笛卡尔表示. 然后我们计算矩阵元

$$(\hat{S}'_3)_{\mu\nu} = \langle \xi_\mu | \hat{S}'_3 | \xi_\nu \rangle = \xi_\mu^+ \hat{S}'_3 \xi_\nu \quad (\mu,\nu = 1,0,-1)$$

根据(8)我们有

$$\xi_\mu = \sum_{n=1}^{3} U_{\mu n} e_n$$

其中

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

即

$$\xi_\mu^+ = \sum_{n=1}^{3} U_{\mu n}^* e_n^+, \qquad e_n^+ = (\delta_{1n}, \delta_{2n}, \delta_{3n})$$

利用 $\xi_\nu = \sum_{m=1}^{3} U_{\nu m} e_m$，矩阵元如下

$$(\hat{S}'_3)_{\mu\nu} = \sum_{n,m=1}^{3} U_{\mu n}^* e_n^+ \hat{S}'_3 e_m U_{\nu m}$$

然而 $\hat{S}'^{(3)}_{nm} = e_n^+ \hat{S}'_3 e_m$ 正是(15)给出的 $\hat{S}'_3$ 算符的笛卡儿表示，即我们得到

$$(\hat{S}'_3)_{\mu\nu} = \sum_{n,m=1}^{3} U_{\mu n}^* \hat{S}'^{(3)}_{nm} U_{\nu m}$$

引入矩阵 $\hat{V} = \hat{U}^*$，我们可用更紧凑的形式写作

$$(\hat{S}'_3)_{\mu\nu} = \sum_{n,m=1}^{3} V_{\mu n} \hat{S}'^{(3)}_{nm} V_{\nu m}^* = \sum_{n,m=1}^{3} V_{\mu n} \hat{S}'^{(3)}_{nm} V_{m\nu}^+$$

或算符符号形式

$$\hat{S}'_{3,\text{球}} = \hat{V} \hat{S}'_{3,\text{笛}} \hat{V}^+ \tag{16}$$

下面通过详细写出，加以验证

$$\hat{S}'_{3,\text{笛}} \hat{V}^+ = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & 0 & -\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{i}\begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & 0 & \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此

$$\hat{V}\hat{S}'_{3,\text{笛}}\hat{V}^{+}=\mathrm{i}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\mathrm{i}\begin{pmatrix}+\frac{(\mathrm{i}+\mathrm{i})}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{(\mathrm{i}+\mathrm{i})}{2}\end{pmatrix}$$

即

$$\hat{S}'_{3,\text{球}}=\hat{V}\hat{S}'_{3,\text{笛}}\hat{V}^{+}=\mathrm{i}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

这样我们已经清楚地证明了幺正变换 $\hat{V}\hat{S}'_{3,\text{笛}}\hat{V}^{+}$ 使自旋算符的 z 分量对角化.(**练习 2.1 完**)

2.3 两个角动量的相加

现在我们需要考虑两个角动量 $\hat{\boldsymbol{J}}_1$ 和 $\hat{\boldsymbol{J}}_2$ 合成一总角动量 $\hat{\boldsymbol{J}}$ 的情况.

$$\hat{\boldsymbol{J}}=\hat{\boldsymbol{J}}_1+\hat{\boldsymbol{J}}_2$$

此章开始时我们说明了角动量算符的和与单独的角动量算符遵从相同的对易关系.设 $\psi_{j_1m_1}$ 和 $\psi_{j_2m_2}$ 分别是算符 $\hat{\boldsymbol{J}}_1^2,\hat{J}_{1z}$ 和 $\hat{\boldsymbol{J}}_2^2,\hat{J}_{2z}$ 的正交归一的本征函数系.因此我们有

$$\hat{\boldsymbol{J}}_1^2\psi^{(1)}_{j_1m_1}=j_1(j_1+1)\psi^{(1)}_{j_1m_1}\quad,\qquad \hat{\boldsymbol{J}}_2^2\psi^{(2)}_{j_2m_2}=j_2(j_2+1)\psi^{(2)}_{j_2m_2}$$

和

$$\hat{J}_{1z}\psi^{(1)}_{j_1m_1}=m_1\psi^{(1)}_{j_1m_1}\quad,\qquad \hat{J}_{2z}\psi^{(2)}_{j_2m_2}=m_2\psi^{(2)}_{j_2m_2}$$

参数 $\boldsymbol{r}_1,t_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2,t_2$ 在此分别缩写为"1"和"2".不过除了为更清楚的理解所必需的外,在下文中通常这些将被略去.

耦合角动量的情形也出现在多体问题的理论中,例如两电子问题,在其中单个电子可由波函数 $\psi_{j_1m_1}(1)$ 和 $\psi_{j_2m_2}(2)$ 所描述.两电子体系的总波函数于是由具有 j 的总角动量和 2 个 m 值的 $\psi_{jm}(1,2)$ 给出.但是在两电子问题中还存在自旋和轨道角动量之间的达到一总角动量的耦合,我们必须利用下面介绍的方法.

用 $\psi_{jm}(1,2)$ 表示总角动量算符 $\hat{\boldsymbol{J}}^2$ 和 $\hat{J}_z$ 的本征函数.只要两体系之间没有耦合,角动量 $\hat{\boldsymbol{J}}_1$、$\hat{\boldsymbol{J}}_2$ 和 $\hat{\boldsymbol{J}}$ 都是确定的.波函数 ψ 分解为 $\psi(1)$ 和 $\psi(2)$,我们可将 ψ_{jm} 写作乘积 $\psi_{j_1m_1}\times\psi_{j_2m_2}$.要是存在

任何耦合，ψ_{jm}总可以被写作乘积 $\psi_{j_1m_1}\times\psi_{j_2m_2}$的一线性组合. 我们将系数写成$(j_1j_2j|m_1m_2m)$的形式以表明对各种量子数的依赖关系. 这些系数被称为克莱布许-高登(Clebsch-Gordan)系数(也称 CG 矢量耦合系数).

这样关于总波函数我们写作

$$\psi_{jm}(1,2)=\sum_{m_1m_2}(j_1j_2j|m_1m_2m)\psi^{(1)}_{j_1m_1}\psi^{(2)}_{j_2m_2} \tag{2.23}$$

如果存在角动量耦合，由于分角动量环绕总角动量进动，因此 $\psi_{j_1m_1}$和 $\psi_{j_2m_2}$不再是好的本征函数(这意味着 m_1 和 m_2 不是守恒的量子数). 在(2.23)中对 m_1 和 m_2 求和已经表明了这一点. 关系式(2.23)给出希尔伯特空间的一变换，从由正交归一矢量 $\psi_{j_1m_1}$和 $\psi_{j_2m_2}$所张成的，到由新的正交归一的基矢系 ψ_{jm}所张成的同一子空间. 总乘积空间是不变的，但能被进一步分解，而由对于确定 j 的 ψ_{jm}所张成的不变子空间不能被分解. 从数学上讲我们将由乘积空间所产生的转动群的表示分解为它的不可约部分.

如果 ψ_{jm}代表算符 $\hat{J}^2$ 和 $\hat{J}_z$ 的本征函数，那么可找到系数$(j_1j_2j|m_1m_2m)$计算的条件，我们写作

$$\begin{aligned}\hat{J}_z\psi_{jm}&=(\hat{J}_{1z}+\hat{J}_{2z})\sum_{m_1,m_2}(j_1j_2j|m_1m_2m)\psi_{j_1m_1}\psi_{j_2m_2}\\&=\sum_{m_1,m_2}(m_1+m_2)(j_1j_2j|m_1m_2m)\psi_{j_1m_1}\psi_{j_2m_2}\end{aligned}$$

又以同样的方式

$$\hat{J}_z\psi_{jm}=m\psi_{jm}=\sum_{m_1,m_2}m(j_1j_2j|m_1m_2m)\psi_{j_1m_1}\psi_{j_2m_2}$$

m_1 在全部值$-j_1\leq m_1\leq j_1$ 的范围内进行求和，类似地，m_2 在区间$-j_2\leq m_2\leq j_2$ 内求和. 通过使上面的关系式相等，由于线性独立，我们得到条件

$$(m-m_1-m_2)(j_1j_2j|m_1m_2m)=0 \tag{2.24}$$

从而得到当 $m\neq m_1+m_2$ 时，克莱布许-高登系数等于零. 这意味着(2.23)中的双重求和化为一单层的和数，由于不是系数等于零，就可通过 $m_2=m-m_1$ 确定 m_2. 这样方程(2.23)变为

$$\psi_{jm}=\sum_{m_1}(j_1j_2j|m_1m_2m)\psi_{j_1m_1}\psi_{j_2m-m_1} \tag{2.25}$$

角动量(更准确地：角动量沿量子化方向的投影)守恒由关系式 $m=m_1+m_2$ 表达. 下一步我们需要计算由

$$\hat{\boldsymbol{J}}^2\psi_{jm}=j(j+1)\psi_{jm}$$

所定义的量子数 j 的可能值. 由于 $\hat{\boldsymbol{J}}$ 是角动量并且遵从对易关系(2.23)，我们有

$$-j\leq m\leq j$$

下面我们假定存在几个 j 值(至少两个). 假定态 ψ_{jm}是正交归一的. 由于波函数包含两个粒子(角动量)的坐标，我们有

$$\delta_{jj'}\delta_{mm'}=\int\psi^*_{jm}\psi_{j'm'}\mathrm{d}V_1\mathrm{d}V_2$$

$$= \int dV_1 dV_2 \left\{ \sum_{m_1} (j_1 j_2 j | m_1\, m - m_1 m) \psi_{j_1 m_1} \psi_{j_2 m - m_1} \right\}^*$$

$$\times \left\{ \sum_{m_1'} (j_1 j_2 j' | m_1' m' - m_1' m') \psi_{j_1 m_1'} \psi_{j_2 m' - m_1'} \right\}$$

从这个方程得到

$$\delta_{jj'} \delta_{mm'} = \sum_{m_1, m_1'} (j_1 j_2 j | m_1 m - m_1 m)^* (j_1 j_2 j' | m_1' m' - m_1' m') \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m - m_1, m' - m_1'}$$

或者

$$\delta_{jj'} = \sum_{m_1} (j_1 j_2 j | m_1 m - m_1 m)^* (j_1 j_2 j' | m_1 m - m_1 m) \tag{2.26}$$

方程(2.26)表明克莱布许-高登系数的行的正交性.由于它们是实的——正如我们将见到的那样——在(2.26)中我们可略去复共轭符号"*".

根据以上导出的关系式 $m = m_1 + m_2$,得到我们称之为 m_{max} 的 m 的最大值是

$$m_{max} = j_1 + j_2 \tag{2.27}$$

此值只在(2.25)中出现一次,就是当 $m_1 = j_1$ 和 $m_2 = j_2$ 时.这表明我们称之为 j_{max} 的最大的本征值 j 必须等于

$$j_{max} = j_1 + j_2 \tag{2.28}$$

次大的 m 值是 $m_{max} - 1$,它出现两次,即

$$m_1 = j_1,\ m_2 = j_2 - 1 \quad 和 \quad m_1 = j_1 - 1,\ m_2 = j_2 \tag{2.29}$$

由于 m 按整数步长取 $-j_1 - j_2 \leq m \leq j_1 + j_2$ 的所有的值,(2.29)两个态

$$\psi_{j_1 j_1} \psi_{j_2 j_2 - 1} \quad , \quad \psi_{j_1 j_1 - 1} \psi_{j_2 j_2} \tag{2.30}$$

的两个可能的、线性无关的组合中的一个必须属于 $\psi_{j_1 + j_2, m}(1,2)$,因为没有 $j > j_{max} = j_1 + j_2$ 的态,另一个可能的组合必定属于态

$$\psi_{jm} \quad , \quad j = j_1 + j_2 - 1 \tag{2.31}$$

(2.31)型式即具有 $j = j_1 + j_2 - 1$ 的态只能有一个,因为对于这种形式的第二个态,具有 $m = j_1 + j_2 - 1$ 相应的基矢组合(2.30)是不存在的.

继续此讨论,我们注意到对于 j,所有的值

$$j = \begin{cases} j_1 + j_2 \\ j_1 + j_2 - 1 \\ \vdots \\ |j_1 - j_2| \end{cases} \tag{2.32}$$

正好出现一次,这称之为三角规则,

$$\Delta(j_1 j_2 j)$$

它告诉我们两个角动量 j_1, j_2 仅能组合形成这样一个合成的总角动量 j,这与矢量加法一致(三

角形). 在图 2.1 中所示的此模型也称为角动量耦合的矢量模型.

现在我们能计算耦合态 $\psi_{jm}(1,2)$的数目,就是

$$\sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2}(2j+1)=(2j_1+1)(2j_2+1) \tag{2.33}$$

正如所预期的那样,它等于基态 $\psi_{j_1m_1}\times\psi_{j_2m_2}$的数目.

用代数方法导出(2.32)中合成角动量的下限是困难的. 通过以下的对维数的讨论给出一较简单的方法:因为由 ψ_{jm} 所张成的和由 $\psi_{j_1m_1}\times\psi_{j_2m_2}$所张成希尔伯特空间的维数必须是相等的,以及 $j_{max}=j_1+j_2$,可将(2.32)以下面形式写出

$$\sum_{j=j_{min}}^{j_{max}}(2j+1)=(2j_1+1)(2j_2+1)$$

这方程确定了 j_{min},由此我们求出 $j_{min}=j_1-j_2$(当 $j_1>j_2$)或 $j_{min}=j_2-j_1$(当 $j_1<j_2$).

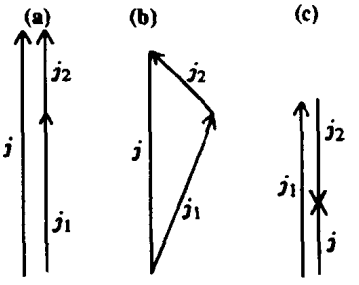


图 2.1　三角规则的图示:
(a) 经由相同取向的 j_1 和 j_2 的最大耦合;
(b) 在 j_{max}和 j_{min}之间的角动量;
(c) 经由相反的 j_1 和 j_2 的最小耦合.

2.4　克莱布许-高登系数的计算

$\psi_{j_1m_1}(1)\psi_{j_2m_2}(2)$是由单粒子波函数 $\psi_{j_1m_1}(1)$和 $\psi_{j_2m_2}(2)$的直积所组成的正交归一基矢系,方程(2.23)定义一个从 $\psi_{j_1m_1}(1)\psi_{j_2m_2}(2)$到正交归一基矢系 $\psi_{jm}(1,2)$的幺正变换. $\psi_{jm}(1,2)$是两粒子波函数. 为简化符号,现在我们将使用狄拉克的刁矢$\langle|$和刃矢$|\rangle$. 方程(2.33)因此写作①

$$|jm\rangle=|m_1m_2\rangle\langle m_1m_2|jm\rangle \tag{2.34}$$

这里$|m_1m_2\rangle$代表乘积$|m_1m_2\rangle=|j_1m_1\rangle j_2m_2\rangle$,量子数 j_1 和 j_2 被省略,并且一旦 m_1 和 m_2 出现,j_1 和 j_2 就必须看作是确定的数. 按照我们以前的符号标记(2.23),矩阵元

$$\langle m_1m_2|jm\rangle=\int\psi^*_{j_1m_1}(1)\psi^*_{j_2m_2}(2)\psi_{jm}(1,2)\mathrm{d}V_1\mathrm{d}V_2 \tag{2.35}$$

对应于克莱布许-高登系数

$$\langle m_1m_2|jm\rangle=(j_1j_2j|m_1m_2m) \tag{2.36}$$

根据两个基矢系的正交归一性,我们推导出

$$\delta_{jj'}\delta_{mm'}=\langle jm|j'm'\rangle=\langle jm|m_1m_2\rangle\langle m_1m_2|j'm'\rangle \tag{2.37}$$

这连同

$$\langle jm|m_1m_2\rangle=\langle m_1m_2|jm\rangle^* \tag{2.38}$$

---

① 我们可利用爱因斯坦的求和协定,即我们对在方程的同一边出现两次的所有的指标求和.

形成我们早先的关系式(2.26).对于描述从两粒子的基矢$|jm\rangle$向乘积基矢$|j_1m_1\rangle|j_2m_2\rangle=|m_1m_2\rangle$转换的(2.34)的逆变换,我们有

$$|m_1m_2\rangle = |jm\rangle\langle jm|m_1m_2\rangle \tag{2.39}$$

现在我们对式中的双重指标j和m求和.从这个关系式得到

$$\delta_{m_1m_1'}\delta_{m_2m_2'} = \langle m_1'm_2'|m_1m_2\rangle = \langle m_1'm_2'|jm\rangle\langle jm|m_1m_2\rangle \tag{2.40}$$

即(2.37)的互补关系式,也就是幺正变换矩阵$\langle jm|m_1m_2\rangle$的列的正交性.根据(2.32),对j和m的求和应遍及所有可能的量子数

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2 \quad , \quad -j \leq m \leq j \tag{2.41}$$

用我们最初的符号(2.40)写作

$$\sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2}\sum_{m=-j}^{j}(j_1j_2j|m_1m_2m)^*(j_1j_2j|m_1'm_2'm) = \delta_{m_1m_1'}\delta_{m_2m_2'} \tag{2.42}$$

正如我们已经提到的,可以构造克莱布许-高登系数即矩阵元$\langle m_1m_2|jm\rangle$为一实数,这将在下一节中予以证明.由于这个原因(2.42)中的以及今后所有的其它公式中的星号都可略去.

2.5 克莱布许-高登系数的递推关系

虽然十分复杂,但对克莱布许-高登系数[①]导出明晰的关系式是可能的.也存在大范围的表,它对实际工作[②]特别有用.在此我们仅想指出借助于递推关系如何计算它们并给出一些例子.出发点是总角动量算符

$$\hat{\boldsymbol{J}} = \hat{\boldsymbol{J}}_1 + \hat{\boldsymbol{J}}_2$$

以及它的球坐标分量

$$\hat{J}_\pm = \hat{J}_{1\pm} + \hat{J}_{2\pm} = \hat{J}_x + \mathrm{i}\hat{J}_y = (\hat{J}_{1x} + \hat{J}_{2x}) + \mathrm{i}(\hat{J}_{1y} + \hat{J}_{2y})$$
$$\hat{J}_0 = \hat{J}_{10} + \hat{J}_{20} = \hat{J}_z = (\hat{J}_{1z} + \hat{J}_{2z})$$

将它运用到(2.34),我们得到

$$\hat{J}_+|jm\rangle = (\hat{J}_{1+} + \hat{J}_{2+})|jm\rangle = (\hat{J}_{1+} + \hat{J}_{2+})|m_1m_2\rangle\langle m_1m_2|jm\rangle$$
$$= [\hat{J}_{1+}|m_1m_2\rangle + \hat{J}_{2+}|m_1m_2\rangle]\langle m_1m_2|jm\rangle$$

通过三次运用式(2.18),我们求出

---

① 参见 M. E. Rose: *Elementary Theory of Angular Momentum* (Wiley, New York 1957); A. R. Edmonds: *Angular Momentum in Quantum Mechanics* (Princeton University Press, Princeton, N. J. 1957); D. M. Brink 和 G. R. Satchler: *Angular Momentum* (Clarendon, Oxford 1962).

② 参见 M. Rottenberg, R. Bivins, N. Metropolis, 和 J. K. Wooten, Jr: *The 3j-and 6j-symbols* (Technology, Cambridge, Mass. 1959).

$$[j(j+1)-m(m+1)]^{1/2}|j,m+1\rangle$$
$$=\Big\{[j_1(j_1+1)-m_1(m_1+1)]^{1/2}|m_1+1,m_2\rangle$$
$$+[j_2(j_2+1)-m_2(m_2+1)]^{1/2}|m_1,m_2+1\rangle\Big\}\times\langle m_1m_2|jm\rangle \tag{2.43}$$

(2.34)代入上式左边得到

$$[j(j+1)-m(m+1)]^{1/2}|m_1,m_2\rangle\langle m_1m_2|jm+1\rangle$$
$$=[j_1(j_1+1)-m_1'(m_1'-1)]^{1/2}|m_1',m_2\rangle\langle m_1'-1,m_2|jm\rangle$$
$$+[j_2(j_2+1)-m_2'(m_2'-1)]^{1/2}|m_1,m_2'\rangle\langle m_1,m_2'-1|jm\rangle \tag{2.44}$$

在此我们已在右边的第一项中引进了 $m_1'=m_1+1$，在第二项中引进了 $m_2'=m_2+1$. 只不过像以前一样，对 m_1' 从 $-j_1$ 到 j_1 求和，对 m_2' 从 $-j_2$ 到 j_2 求和，原因在于(2.43)中具有 $m_1=j_1$ 和 $m_2=j_2$ 的项的前面部分为一等于零的因子. 这样在(2.44)中具有 $m_1'=j_1+1$ 和 $m_2'=j_2+1$ 的项没有贡献.

类似地我们发现在(2.44)中具有 $m_1'=-j_1$ 和 $m_2'=-j_2$ 的项属于(2.43)中不存在的矢量 $|-j_1-1,m_2\rangle$ 和 $|m_1,-j_2-1\rangle$，因此对结果没有贡献. 由于 m_1' 和 m_2' 是求和指标，m_1' 可改名为 m_1，m_2' 改名为 m_2. 得到

$$[j(j+1)-m(m+1)]^{1/2}1m,m_2\rangle\langle m_1m_2|jm+1\rangle$$
$$=[j_1(j_1+1)-m_1(m_1-1)]^{1/2}1m,m_2\rangle\langle m_1-1,m_2|jm\rangle$$
$$+[j_2(j_2+1)-m_2(m_2-1)]^{1/2}1m,m_2\rangle\langle m_1,m_2-1|jm\rangle \tag{2.45a}$$

此处的 m_1 和 m_2 都是确定的数而不是求和指标. 对于 $\hat{J}_-$ 重复这个过程给出类似的结果

$$[j(j+1)-m(m+1)]^{1/2}\langle m_1m_2|jm-1\rangle$$
$$=[j_1(j_1+1)-m_1(m_1+1)]^{1/2}\langle m_1+1,m_2|jm\rangle$$
$$+[j_2(j_2+1)-m_2(m_2+1)]^{1/2}\langle m_1,m_2+1|jm\rangle \tag{2.45b}$$

这个递推关系允许我们对相同的总角动量 j，导出具有相同的 j_1 和 j_2，但不同的 m 的克莱布许-高登系数. 这将在下一节中加以证明.

2.6　克莱布许-高登系数的明晰的计算

借助于递推关系(2.45a)，(2.45b)可以逐步计算 $(2j_1+1)(2j_2+1)$ 维的方形克莱布许-高登矩阵 $\langle m_1m_2|jm\rangle$. 在导出(2.33)时我们证明了维数. 然而现在矩阵按照 $m=m_1+m_2$ 的值分解为不连贯的方形子矩阵，这按以下方式可被看到：

对于不同的 m 值，我们有

$m=j_1+j_2$ 仅有单一的值,各对应于 $j=j_1+j_2$ 和对应于 $(m_1,m_2)=(j_1,j_2)$,即一个 1×1 子矩阵.

$m=j_1+j_2-1, j=j_1+j_2,$ $j=j_1+j_2-1$ 两个可能性 $\begin{cases}(m_1,m_2)=(j_1,j_2-1),\\(m_1,m_2)=(j_1-1,j_2),\end{cases}$ 即一个 2×2 子矩阵.

$m=j_1+j_2-2, j=j_1+j_2,$ $j=j_1+j_2-1, j=j_1+j_2-2,$
$$\begin{cases}(m_1,m_2)=(j_1,j_2-2),\\(m_1,m_2)=(j_1-1,j_2-1),\\(m_1,m_2)=(j_1-2,j_2),\end{cases}$$
即一个 3×3 子矩阵等. (2.46)

表 2.1 克莱布许-高登矩阵的结构.对确定的 j_1,j_2 给出克莱布许-高登系数 $(j_1j_2j|m_1m_2m)\equiv\langle m_1m_2|jm\rangle$.行由一对 m_1,m_2 列由 m 表示.对一给定的 m,满足 $m=m_1+m_2$ 条件的 m_1,m_2 的组数只可能是有限的;此外仅具有 $j_1+j_2\geqslant j\geqslant m$ 的 j 值是允许的.$N\times N$ 子矩阵的前 $(N-1)$ 列可经由递推关系(2.45b)应用到已知的 $(N-1)\times(N-1)$ 子矩阵上而被计算出来.第 N' 列由这些行的归一化和正交性关系产生.

	$m=j_1+j_2$	$m=j_1+j_2-1$	$m=j_1+j_2-2$	…
$(m_1m_2)=(j_1j_2)$	$\langle j_1j_2\|j_1+j_2,j_1+j_2\rangle$	0	0	…
$(m_1m_2)=\begin{cases}(j_1,j_2-1)\\(j_1-1,j_2)\end{cases}$	0	$(2\times2)^{*)}$	0	…
$(m_1m_2)=\begin{cases}(j_1,j_2-2)\\(j_1-1,j_2-1)\\(j_1-2,j_2)\end{cases}$	0	0	$(3\times3)^{**)}$	0…
⋮	⋮	⋮	0	(…)…
			⋮	⋮⋱

$^{*)}(2\times2)\begin{pmatrix}\langle j_1,j_2-1|j_1+j_2,j_1+j_2-1\rangle, & \langle j_1,j_2-1|j_1+j_2-1,j_1+j_2-1\rangle\\ \langle j_1-1,j_2|j_1+j_2,j_1+j_2-1\rangle, & \langle j_1-1,j_2|j_1+j_2-1,j_1+j_2-1\rangle\end{pmatrix}$

$^{**)}(3\times3)$

$$=\begin{pmatrix}\langle j_1,j_2-2|j_1+j_2,j_1+j_2-2\rangle, & \langle j_1,j_2-2|j_1+j_2-1,j_1+j_2-2\rangle, & \langle j_1,j_2-2|j_1+j_2-2,j_1+j_2-2\rangle\\ \langle j_1-1,j_2-1|j_1+j_2,j_1+j_2-2\rangle, & \langle j_1-1,j_2-1|j_1+j_2-1,j_1+j_2-2\rangle & \langle j_1-1,j_2-1|j_1+j_2-2,j_1+j_2-2\rangle\\ \langle j_1-2,j_2|j_1+j_2,j_1+j_2-2\rangle, & \langle j_1-2,j_2|j_1+j_2-1,j_1+j_2-2\rangle, & \langle j_1-2,j_2|j_1+j_2-2,j_1+j_2-2\rangle\end{pmatrix}$$

矩阵的结构展示在表 2.1 中.对角化的子矩阵的秩开始逐步增加 1,直到达到最大秩 m 为止(若 $j_1=j_2$ 在 $m=0$ 时),然后逐步减少 1.最后的 1×1 子矩阵具有 $m=-j_1-j_2$ 和 $j=j_1+j_2$.由于整个矩阵是幺正的,在主对角线上的这些子矩阵中的每一个必须是幺正的.根据观察可知 1×1 子矩阵必须是模为 1 的数.按照惯例[①]我们选定值为 $+1$.这是由于

$$\langle j_1j_2|j_1+j_2,j_1+j_2\rangle=1 \tag{2.47}$$

① 参见 2.1 中的脚注.

同时这是明显的，既然耦合 $\psi_{j_1m_1}$ 和 $\psi_{j_2m_2}$ 到最大角动量

$$\psi_{j=j_1+j_2,m=j_1+j_2}=\psi_{j_1j_1}\psi_{j_2j_2}$$

就只可利用最大取向的单个波函数 $\psi_{j_1j_1}$ 和 $\psi_{j_2j_2}$.

如果考虑递推关系(2.45)，关系式(2.47)可用作计算算法的基底. 我们从(2.45b)开始并指定 $m_1=j_1, m_2=j_2-1, j=j_1+j_2$ 和 $m=j_1+j_2$，这给出

$$\begin{aligned}&[(j_1+j_2)(j_1+j_2+1)-(j_1+j_2)(j_1+j_2-1)]^{1/2}\langle j_1,j_2-1|j_1+j_2,j_1+j_2-1\rangle\\&=[j_2(j_2+1)-(j_2-1)j_2]^{1/2}\langle j_1j_2|j_1+j_2,j_1+j_2\rangle\\&=[j_2(j_2+1)-(j_2-1)j_2]^{1/2}\end{aligned}$$

因此

$$\langle j_1,j_2-1|j_1+j_2,j_1+j_2-1\rangle=\left(\frac{j_2}{j_1+j_2}\right)^{1/2}\tag{2.48}$$

以同样的方式，通过指定 $m_1=j_1-1, m_2=j_2, j=j_1+j_2, m=j_1+j_2$，从(2.45b)我们得到

$$\langle j_1-1,j_2|j_1+j_2,j_1+j_2-1\rangle=\left(\frac{j_1}{j_1+j_2}\right)^{1/2}\tag{2.49}$$

这样我们确定了在表 2.1 中给定的克莱布许-高登矩阵的 2×2 子矩阵的第一列. 这个子矩阵的属于 $m=j_1+j_2-1, j=j_1+j_2-1$ 的第二列可利用正交归一关系式(2.37)计算，因此我们必然会有：

$$\begin{aligned}&\sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}}\langle j_1,j_2-1|j_1+j_2-1,j_1+j_2-1\rangle\\&+\sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}}\langle j_1-1,j_2|j_1+j_2-1,j_1+j_2-1\rangle=0\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}&|\langle j_1,j_2-1|j_1+j_2-1,j_1+j_2-1\rangle|^2\\&+|\langle j_1-1,j_2|j_1+j_2-1,j_1+j_2-1\rangle|^2=1\end{aligned}$$

两个方程的解在模数为 1 的一任意的相因子范围以内是惟一的. 我们以这样的方式选择它，使 $\langle j_1,j-j_1|jj\rangle$ 形式的第一个矩阵元是实的和正的. 显然我们的考虑所涉及的矩阵元能在不同的子矩阵的右上角找到. 由此得到

$$\begin{aligned}\langle j_1,j_2-1|j_1+j_2-1,j_1+j_2-1\rangle&=\left(\frac{j_1}{j_1+j_2}\right)^{1/2}\\\langle j_1-1,j_2|j_1+j_2-1,j_1+j_2-1\rangle&=-\left(\frac{j_2}{j_1+j_2}\right)^{1/2}\end{aligned}\tag{2.50}$$

对克莱布许-高登矩阵(表 2.1)的 3×3 子矩阵继续我们的讨论. 通过将(2.48)和(2.49)代入(2.45b)，简短的计算后，我们得到

$$\langle j_1,j_2-2|j_1+j_2,j_1+j_2-2\rangle=\left(\frac{j_2(2j_2-1)}{(j_1+j_2)(2j_1+2j_2-1)}\right)^{1/2}$$

$$\langle j_1-1,j_2-1|j_1+j_2,j_1+j_2-2\rangle=\left(\frac{4j_1j_2}{(j_1+j_2)(2j_1+2j_2-1)}\right)^{1/2}$$

$$\langle j_1-2,j_2|j_1+j_2,j_1+j_2-2\rangle=\left(\frac{j_1(2j_1-1)}{(j_1+j_2)(2j_1+2j_2-1)}\right)^{1/2} \tag{2.51}$$

这对应于 3×3 子矩阵的第一列. 类似地通过将(2.50)代入(2.45b)我们得到第二列

$$\langle j_1,j_2-2|j_1+j_2-1,j_1+j_2-2\rangle=\left(\frac{j_1(2j_2-1)}{(j_1+j_2)(j_1+j_2-1)}\right)^{1/2}$$

$$\langle j_1-1,j_2-1|j_1+j_2-1,j_1+j_2-2\rangle=\left(\frac{j_1-j_2}{(j_1+j_2)(j_1+j_2-1)}\right)^{1/2}$$

$$\langle j_1-2,j_2|j_1+j_2-1,j_1+j_2-2\rangle=-\left(\frac{j_2(2j_1-1)}{(j_1+j_2)(j_1+j_2-1)}\right)^{1/2} \tag{2.52}$$

我们以同样的方式继续:3×3 子矩阵的第三列是根据正交归一关系式(2.37)得出的. 列矢量(2.51)和(2.52)必须被正交归一到第三列,并且后者必须是归一化的. 为固定任意的相因子,与以前一样我们选定列矢量的第一个分量是正的和实的. 这较长计算的结果是

$$\langle j_1,j_2-2|j_1+j_2-2,j_1+j_2-2\rangle=\left(\frac{j_1(2j_1-1)}{(j_1+j_2-1)(2j_1+2j_2-1)}\right)^{1/2}$$

$$\langle j_1-1,j_2-1|j_1+j_2-2,j_1+j_2-2\rangle=\left(\frac{(2j_1-1)(2j_2-1)}{(j_1+j_2-1)(2j_1+2j_2-1)}\right)^{1/2}$$

$$\langle j_1-2,j_2|j_1+j_2-2,j_1+j_2-2\rangle=\left(\frac{j_2(2j_2-1)}{(j_1+j_2-1)(2j_1+2j_2-1)}\right)^{1/2}$$

过程如此继续. 在下一步计算表 2.1 的 4×4 矩阵. 由于正交归一关系式(2.37)的应用,最后一列的计算随着子矩阵的秩的增加变得越来越复杂. 解决这样的问题实际上是通过对于给定的 j_1 和 j_2 进行系数的数值计算,而放弃准备好了的表达式①. 正如我们已经提到的那样还存在克莱布许-高登系数表. 借助于递推关系(2.45a),克莱布许-高登矩阵也可从另一端开始计算:对于位于下面的,且指定是 $m=-j_1-j_2$ 和 $j=j_1+j_2$ 的 1×1 子矩阵. 在以下的例子中我们将上述的方法应用到一简单的问题.

例 2.2 对于自旋轨道耦合克莱布许-高登系数的计算

对于矢量耦合系数的计算是将阶跃算符应用到波函数上而完成的. 对于一般情况得到繁长的表达式. 我们将用一简单例子说明工作原理.

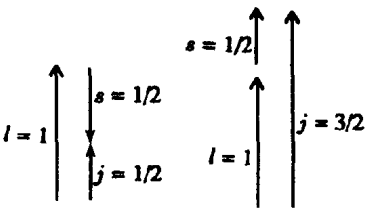
我们考虑具有自旋 $\frac{\hbar}{2}$ 和轨道角动量 1 $\hbar$ 的电子,因此有

$$l=1,\ s=\frac{1}{2},$$

① E. P. 维格纳在 1931 年首先给出关于克莱布许-高登系数的详尽的解析表达式[E. P. Wigner: *Gruppentheorie* (Viewes, Wiesbaden 1931)].

和磁量子数可以取值

$$m_l = 0, \pm 1, m_s = \pm \frac{1}{2}.$$



根据(2.32),总角动量 $j=l+s$ 必须在

$$\frac{1}{2} \leqslant j \leqslant \frac{3}{2}$$

的范围内.

由于总角动量量子数总是相差一个单位,存在两个不同的态 $j=\frac{1}{2}$(s 当 $l=1$ 和 $s=\frac{1}{2}$ 关于 j 的可能性与 l 反平行)和 $j=\frac{3}{2}$(s 与 l 平行)(见上图). 在此我们局限于 $j=\frac{1}{2}$ 态. 在氢原中的电子具有轨道角动量 l 的第一激发态的波函数为

$$\psi_{n_l l m_l m_s} = \psi_{n_l l m_l m_s} = Y_{l m_l} \chi_{\frac{1}{2} m_s} r^{-1} U_{n_l}(r)$$

由于我们只对角度相关的部分感兴趣,我们忽略径向部分并且根据(2.25),总波函数写作

$$\psi_{\frac{1}{2} m} = \sum_{m_l} \left(1 \frac{1}{2} \frac{1}{2} | m_l m - m_l m \right) Y_{1 m_l} \chi_{\frac{1}{2} m - m_l} \tag{1}$$

为统一符号,关于自旋波函数,在此我们写作 $\chi_{\frac{1}{2},m_s}$ 而不是 $\chi_{\pm}$. 由于对于现在我们只想构成一个具有角动量 $j=\frac{1}{2}$ 和 $l=1$ 的态,m 只取可以 $+\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{1}{2}$ 两个值. 对于波函数(1),这得出

$$\psi_{l=1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \sum_{m_l=0,\pm 1} \left(1 \frac{1}{2} \frac{1}{2} | m_l \frac{1}{2} - m_l \frac{1}{2} \right) Y_{1 m_l} \chi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2} - m_l} \tag{2}$$

$$\psi_{l=1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \sum_{m_l=0,\pm 1} \left(1 \frac{1}{2} \frac{1}{2} | m_l - \frac{1}{2} - m_l - \frac{1}{2} \right) Y_{1 m_l} \chi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2} - m_l} \tag{3}$$

由于 m 只有两个值,和数中只包含两项($\chi_{\frac{1}{2}\frac{3}{2}}$ 与 $\chi_{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}$ 不存在),它们是

$$\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \left(1 \frac{1}{2} \frac{1}{2} | 0 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right) Y_{10} \chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + \left(1 \frac{1}{2} \frac{1}{2} | 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right) Y_{11} \chi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \tag{4}$$

和

$$\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \left(1 \frac{1}{2} \frac{1}{2} | -1 \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) Y_{1-1} \chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + \left(1 \frac{1}{2} \frac{1}{2} | 0 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) Y_{10} \chi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \tag{5}$$

在左边指标 $l=1$ 已删掉,因为对于以下的考虑它是多余的. 从归一化条件得到两个方程

$$\left(1 \frac{1}{2} \frac{1}{2} | 0 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right)^2 + \left(1 \frac{1}{2} \frac{1}{2} | 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right)^2 = 1 \tag{6}$$

$$\left(1 \frac{1}{2} \frac{1}{2} | -1 \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(1 \frac{1}{2} \frac{1}{2} | 0 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 = 1 \tag{7}$$

通过 $\hat{J}_{\pm} = \hat{L}_{\pm} + \hat{S}_{\pm}$ 的应用,(4)和(5)相互转换. 阶跃算符产生下面的结果

$$\hat{J}_+ \psi_{jm} = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} \psi_{jm+1} \tag{8}$$

$$\hat{J}_- \psi_{jm} = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} \psi_{jm-1} \tag{9}$$

对于 $\hat{L}_{\pm}$ 和 $\hat{S}_{\pm}$ 类似的结果成立. 在我们的情况下表达式如下

$$\hat{J}_+ \psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$$

$$\hat{L}_+ Y_{10} = \sqrt{2} Y_{11}, \quad \hat{L}_+ Y_{1-1} = \sqrt{2} Y_{10}$$

$$\hat{S}_+ \psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = 0 , \quad \hat{S}_+ \psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$$

对 $\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$ 应用 $\hat{J}_+$ 并代入 $\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$,我们得到

$$\begin{aligned}
&\left(1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,|0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right)\mathrm{Y}_{10}\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + \left(1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,|1\,-\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right)\mathrm{Y}_{11}\chi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{2}\left(1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,|-1\,\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Y}_{10}\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + \sqrt{2}\left(1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,|0\,-\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Y}_{11}\chi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \\
&\quad + \left(1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,|0\,-\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Y}_{10}\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

这些波函数都是线性无关的,因此我们可比较系数,得到

$$\left(1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,|0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}\left(1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,|-1\,\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\right) + \left(1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,|0\,-\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\right)$$

$$\left(1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,|1\,-\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}\left(1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,|0\,-\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\right)$$

为清楚起见,我们把这些方程用缩写的形式写出,即

$$a = \sqrt{2}\,c + d \ , \ b = \sqrt{2}\,d \tag{10}$$

若我们对 $\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ 应用 $\hat{J}_-\hat{L}_- + \hat{S}_-$ 并代入 $\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$,得到同样的缩写

$$c = \sqrt{2}\,a \ , \ d = a + \sqrt{2}\,b \tag{11}$$

克莱布许-高登系数(具有(2.50)给定的相因子)的数值容易从(10)/(11)和(6)/(7)得到

$$a = -\,d = -\sqrt{\frac{1}{3}} \ , \ b = -\,c = +\sqrt{\frac{2}{3}}$$

将这些值代入(2)和(3),总角动量的本征函数写作

$$\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{3}}\mathrm{Y}_{10}\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}}\mathrm{Y}_{11}\chi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$$

和

$$\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = -\sqrt{\frac{2}{3}}\mathrm{Y}_{1-1}\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{3}}\mathrm{Y}_{10}\chi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$$

作为进一步的练习可对 $j=\frac{3}{2}$ 的情况计算克莱布许-高登系数,得到以下的波函数:

$$\psi_{\frac{3}{2}\frac{3}{2}} = \mathrm{Y}_{11}\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$$

$$\psi_{\frac{3}{2}\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\mathrm{Y}_{10}\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{3}}\mathrm{Y}_{11}\chi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$$

$$\psi_{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{3}}\mathrm{Y}_{1-1}\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}}\mathrm{Y}_{10}\chi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$$

$$\psi_{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}} = \mathrm{Y}_{1-1}\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$$

氢原子的这些态($p\,\frac{3}{2}$ 和 $p\,\frac{1}{2}$)的完整的波函数再加上和径向部分 $R_{nl}(r)=r^{-1}U_{nl}(r)$ 的乘积. 在单纯的库仑势中,这些态在能量方面是简并的,但是当存在自旋-轨道耦合时,它们分裂成为两个态. 而且 $p\,\frac{3}{2}$ 态是四度,$p\,\frac{1}{2}$ 态是二度简并的. 如果对这些态提供具有宽频谱的光的原子辐照,则可得到发射的精细结构双重线的强度的比值为 2∶1.

通常在球对称位势中能通过耦合轨道($\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi)$)和自旋($\chi_{\frac{1}{2}m}$)角动量本征函数来建立总角动量 j 的波函

数，给出

$$\psi_{ljm}=\sum_{m,m_s}(l\ \frac{1}{2}\ j|mm_sM)Y_{lm}(\theta,\varphi)\chi_{\frac{1}{2}m_s}$$

允许的值是 $j=l\pm\frac{1}{2}$，因此在 $l=2$ 的情况下，j 可取值 $\frac{5}{2}$ 和 $\frac{3}{2}$，对于 $l=3$ 它是 $j=\frac{7}{2}$ 和 $\frac{5}{2}$. 在第一种情况中态分别被称为“$d\ \frac{5}{2}$”和“$d\ \frac{3}{2}$”(“f”,“d”,“p”和“s”分别代表 $l=3,2,1,0$ 态). 在第二种情况中称为 $f\ \frac{7}{2}$ 和 $f\ \frac{5}{2}$ 态. 在库仑势中所有的态都是简并的，仅在引入自旋—轨道耦合势 $V(r)\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{s}$ 以后简并解除. 这导致原子光谱的精细结构. (**例 2.2 完**)

2.7　人物小传

R. F. A. 克莱布许(CLEBSCH，Rudolf Friedrich Alfred)，数学家，1833 年 1 月 19 日生于科尼格斯伯格，1872 年 11 月 7 日死于格丁根. 在卡尔斯鲁厄、吉森和格丁根任教授. 他工作的方面包括数学物理、变分计算、偏微分方程、曲线和表面理论、阿贝尔函数在几何上的应用、表面映射和不变量理论. 和 C 纽曼一起在 1868 创办数学年刊杂志.

第 3 章　数学补充:李群的基本性质

3.1　李群的一般结构

旋转群是由无穷多个算符

$$\hat{U}_R(\boldsymbol{\phi}) = \exp(-\mathrm{i}\phi_\mu \hat{J}_\mu) = \exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{\phi}\cdot\hat{\boldsymbol{J}}) \tag{3.1}$$

组成(取$\hbar=1$). 这些算符只是三个基本算符$\{\hat{J}_\nu\}=\{J_1,J_2,J_3\}$的函数,这允许我们简单地表述它们. 每个算符$\hat{U}_R(\boldsymbol{\phi})$由三个实数,即$\phi_1,\phi_2,\phi_3$来表征. 我们马上知道,基本算符$\hat{J}_\nu$可以从连续的群元素$\hat{U}_R(\boldsymbol{\phi})$用微分方法得到,即

$$-\mathrm{i}\hat{J}_\mu \hat{U}_R(\boldsymbol{\phi})|_{\phi=0} = -\mathrm{i}\hat{J}_\mu = \hat{\partial}\hat{U}_R(\boldsymbol{\phi})/\hat{\partial}\phi_\mu|_{\phi=0} \tag{3.2}$$

显然$\hat{U}_R(\boldsymbol{\phi})$要求在恒等算符$\hat{U}_R(\boldsymbol{\phi})=\mathbb{1}$邻近对于参数$\phi_\mu$可微.

现在我们推广这个概念. 由依赖于n个参数(坐标)的算符$\hat{U}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n;r)$给出的元素所构成的连续群叫李群,以挪威数学家索弗斯·李的名字命名. 它们的元素解析地依赖于n个参数α_i以及宗量$\boldsymbol{r}$,后者符号性地表明可能存在的坐标依赖性. 作为例子,在(3.1)中算符$\hat{J}_k=-\mathrm{i}\epsilon_{ijk}x_i\partial/\partial x_j$它依赖于坐标和相应的微商. 下面,我们将省略掉作为这种依赖性参照的宗量$\boldsymbol{r}$,只是记住其相关性.

选择参数,使

$$\hat{U}(0)=\mathbb{1} \tag{3.3}$$

是有好处的. 如同下面表明的,我们可以类似于(3.1)将连续群的算符表达为

$$\hat{U}(\alpha_1\cdots\alpha_n;r) = \exp\Big(-\mathrm{i}\sum_{\mu=1}^{n}\alpha_\mu\hat{L}_\mu\Big) \tag{3.4}$$

其中的算符函数$\hat{L}_\mu$还是未知的. 参考(3.2),我们有

$$-\mathrm{i}\hat{L}_\mu = \partial\hat{U}(\alpha_i)/\partial\alpha_\mu|_{\alpha=0} \tag{3.5}$$

$\hat{L}_\mu$称为群的生成元. 我们确实在恒等元的邻近得到无穷小变换

$$\hat{U}(\delta\alpha_\mu) = \hat{U}(0) + \partial\hat{U}(\alpha_i)/\partial\alpha_\mu|_{\alpha=0}\delta\alpha_\mu = \mathbb{1} - \mathrm{i}\hat{L}_\mu\delta\alpha_\mu = \mathbb{1} + \mathrm{d}\hat{A}$$

其中我们让$\mathrm{d}\hat{A}=-\mathrm{i}\hat{L}_\mu\delta\alpha_\mu$. 如同以前一样处理(参看例 1.11,方程(13))让

$$\mathrm{d}\hat{A} = \hat{A}/N = -\mathrm{i}\hat{L}_\mu\alpha_\mu/N$$

其中 N 为一整数. 为了得到有限的变换 $\hat{U}(\alpha_\mu)$，作 N 次相继的无穷小变换，得出

$$\hat{U}(\alpha_\mu) = \lim_{N\to\infty}[\mathbb{1} + \hat{A}/N]^N = \mathrm{e}^{\hat{A}} = \exp(-\mathrm{i}\hat{L}_\mu\alpha_\mu) \tag{3.6}$$

这里我们实质性地应用了群的性质. 从无穷小元素的乘积构造了有限的算符(有限的群元素). 由于群的性质，李群的算符必然地总可以由(3.4)的形式来表示. 在下面的例 3.3 中我们将从另一方面来展示这一点.

由假设的解析性，对小的 $\delta\alpha_i$ 可以得到

$$\hat{U}(\delta\alpha_\mu) = \mathbb{1} - \mathrm{i}\sum_{\mu=1}^{n}\delta\alpha_\mu\hat{L}_\mu - \frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{n}\delta\alpha_\mu\delta\alpha_\nu\hat{L}_\mu\hat{L}_\nu + \cdots \tag{3.6a}$$

我们看出 $\hat{L}_i$ 必须是线性独立的(仅当所有 $\delta\alpha_i=0$ 时，$\sum_i \delta\alpha_i\hat{L}_i=0$)，因为对 $\delta\alpha=\{\delta\alpha_i\}=0$，$\hat{U}$ 必须以惟一的方式恒等于恒等算符$\mathbb{1}$. 如果存在一组 $\delta\alpha\neq0$ 而 $\hat{\boldsymbol{L}}\cdot\delta\boldsymbol{\alpha}=0$，那么将意味着至少存在两个算符 $\hat{U}(\delta\alpha)=\mathbb{1}$.

如果 $\hat{U}(\alpha_\mu)$是幺正的，即 $\hat{U}^+(\alpha_\mu)=\hat{U}^{-1}(\alpha_\mu)$，那么由(3.6)我们得到

$$\hat{U}^+(\alpha_\mu) = \mathbb{1} + \mathrm{i}\sum_{\mu=1}^{n}\delta\alpha_\mu\hat{L}_\mu^+ = \hat{U}^{-1}(\delta\alpha_\mu) = \mathbb{1} + \mathrm{i}\sum_{\mu=1}^{n}\delta\alpha_\mu\hat{L}_\mu \tag{3.7}$$

在(3.4)中参数 α_μ 被选为实的，即 $\alpha_\mu^*=\alpha_\mu$，由此就得出生成元的厄密性

$$\hat{L}_\mu^+ = \hat{L}_\mu \tag{3.8}$$

下一步我们按(3.6a)计算逆算符到 α_μ 的二次项

$$\hat{U}^{-1}(\delta\alpha_\mu) = \mathbb{1} + \mathrm{i}\sum_{\mu=1}^{n}\delta\alpha_\mu\hat{L}_\mu - \frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{n}\delta\alpha_\mu\delta\alpha_\nu\hat{L}_\mu\hat{L}_\nu \tag{3.9}$$

由此，应用爱因斯坦求和规则，有

$$\begin{aligned}
&\hat{U}^{-1}(\delta\beta_\mu)\hat{U}^{-1}(\delta\alpha_\mu)\hat{U}(\delta\beta_\mu)\hat{U}(\delta\alpha_\mu)\\
&=(\mathbb{1}+\mathrm{i}\delta\beta_i\hat{L}_i-\frac{1}{2}\delta\beta_i\delta\beta_j\hat{L}_i\hat{L}_j)(\mathbb{1}+\mathrm{i}\delta\alpha_k\hat{L}_k-\frac{1}{2}\delta\alpha_k\delta\alpha_l\hat{L}_k\hat{L}_l)\\
&\quad\times(\mathbb{1}-\mathrm{i}\delta\beta_m\hat{L}_m-\frac{1}{2}\delta\beta_m\delta\beta_n\hat{L}_m\hat{L}_n)(\mathbb{1}-\mathrm{i}\delta\alpha_\mu\hat{L}_\mu-\frac{1}{2}\delta\alpha_\mu\delta\alpha_\nu\hat{L}_\mu\hat{L}_\nu)\\
&=(\mathbb{1}-\delta\beta_m\delta\alpha_\mu\hat{L}_m\hat{L}_\mu+\delta\beta_m\delta\alpha_k\hat{L}_k\hat{L}_m-\delta\beta_i\delta\alpha_k\hat{L}_i\hat{L}_k+\delta\beta_i\delta\alpha_\mu\hat{L}_i\hat{L}_\mu)\\
&=\mathbb{1}+\delta\alpha_k\delta\beta_m(\hat{L}_k\hat{L}_m-\hat{L}_m\hat{L}_k)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

由于(3.10)中所有四个因子都是群的元素，整个乘积(3.10)是在 $\alpha=0$ 邻域的一个群元素. 我们记它为 $\hat{U}(\delta\gamma_\nu)$，

$$\hat{U}(\delta\gamma_\nu) = \mathbb{1} - \mathrm{i}\delta\gamma_j\hat{L}_j + \cdots \tag{3.11}$$

从而我们有关系

$$\hat{U}^{-1}(\delta\beta_\mu)\hat{U}^{-1}(\delta\alpha_\mu)\hat{U}(\delta\beta_\mu)\hat{U}(\delta\alpha_\mu) = \hat{U}(\delta\gamma_\nu) \tag{3.12}$$

被显示在图 3.1 中. 由此，比较(3.10)和(3.11)我们可以写下

$$\delta\alpha_k\delta\beta_m(\hat{L}_k\hat{L}_m - \hat{L}_m\hat{L}_k) = -\mathrm{i}\delta\gamma_j\hat{L}_j$$

我们现在让

$$-\mathrm{i}\delta\gamma_j = C_{kmj}\delta\alpha_k\delta\beta_m$$

因为 δr_j 必须随 $\delta\alpha_m$ 或 $\delta\beta_m$ 趋于 0,结果它必须正比于两者. 我们因此得到

$$[\hat{L}_k,\hat{L}_m] = C_{kmj}\hat{L}_j \tag{3.13}$$

也即生成元必须满足(3.13)形式的对易关系. 它们形成封闭的对易代数,因为只有生成元 $\hat{L}_j$ 又一次出现在(3.13)的右方. 因为

$$[\hat{L}_i,\hat{L}_j]_- = -[\hat{L}_j,\hat{L}_i]_-$$

结构常数 C_{ijk} 是对前两个指标反对称的,也即

$$C_{ijk} = -C_{jik} \tag{3.14}$$

进而,雅可比恒等式成立

$$[[\hat{L}_i,\hat{L}_j]_-,\hat{L}_k]_- + [[\hat{L}_j,\hat{L}_k]_-,\hat{L}_i]_- + [[\hat{L}_k,\hat{L}_i]_-,\hat{L}_j]_- = 0 \tag{3.15}$$

用对易关系的定义 $[\hat{L}_i,\hat{L}_j]=\hat{L}_i\hat{L}_j-\hat{L}_j\hat{L}_i$ 代入就很容易证明它. 把(3.13)代入(3.15)就给出结构常数的附加条件

$$[C_{ijm}\hat{L}_m,\hat{L}_k]_- + [C_{jkm}\hat{L}_m,\hat{L}_i]_- + [C_{kim}\hat{L}_m,\hat{L}_j]_- = 0$$

进而

$$\begin{aligned} &C_{ijm}C_{mkn}\hat{L}_n + C_{jkm}C_{min}\hat{L}_n + C_{kim}C_{mjn}\hat{L}_n \\ &= [C_{ijm}C_{mkn} + C_{jkm}C_{min} + C_{kim}C_{mjn}]\hat{L}_n = 0 \end{aligned}$$

结果,由于 $\hat{L}_n$ 的线性独立性,我们有

$$C_{ijm}C_{mkn} + C_{jkm}C_{min} + C_{kim}C_{mjn} = 0 \tag{3.16}$$

关系(3.13)到(3.16)形成李代数的基本关系,它是这个群的特征. 结构常数包含了有关这个群的所有信息,因为它规定了以不同次序进行的无穷小群算符的交换性质. 而所有有限算符都可以由无穷小算符依次构成.

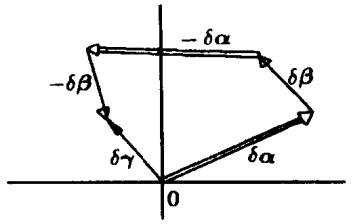


图 3.1 演示关系(3.12),四个旋转 $\delta\alpha,\delta\beta,-\delta\alpha,-\delta\beta$ 由(3.10)等价于一个单个旋转 $\delta\gamma$,它仍属于恒等元(0)的邻域. 注意一个旋转分别相应于相应固定的坐标系. 因而 $\delta\alpha$ 和 $-\delta\alpha$ 不是相互反平行的,例如 $\alpha\gamma$ 可能为 0 但不必然为 0.

例 3.1 SO(3)群的李代数

我们提醒读者 SO(3)的李代数

$$[\hat{J}_i,\hat{J}_j]_- = \mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\hat{J}_k \tag{1}$$

正是应用在群 SO(3)上的关系式(3.13). 结构常数是张量 ε_{ijk} 的分量. 一般情况当我们形成生成元(或参数 α_μ)的线性组合时,它们会变化. 例如,我们从 $\hat{J}_1,\hat{J}_2,\hat{J}_3$ 过渡到 $\hat{J}_\pm=\hat{J}_1\pm\mathrm{i}\hat{J}_2,\hat{J}_3$ 时,对易关系会变成

$$[\hat{J}_3,\hat{J}_\pm]_- = \pm\hat{J}_\pm \quad , \quad [\hat{J}_+,\hat{J}_-]_- = 2\hat{J}_3 \tag{2}$$

而且结构常数显然不同于上述的 ε_{ijk}. 因此,我们可以说结构常数依赖于李群的表达方式,也即依赖于参数的选择. ε_{ijk} 显然满足反对称关系(3.14). 类似地,雅可比恒等式(3.16)在此情况也可以得到直接证明(按照(1),我们有 $C_{ijk}=\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}$),

$$C_{ijm}C_{mkm} + C_{jkm}C_{mim} + C_{kim}C_{mjn}$$
$$= -(\epsilon_{ijm}\epsilon_{mkn} + \epsilon_{jkm}\epsilon_{min} + \epsilon_{kim}\epsilon_{mjn})$$
$$= -(\delta_{ik}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jk} + \delta_{ji}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{ki} + \delta_{kj}\delta_{in} - \delta_{kn}\delta_{ij}) = 0$$

因为，当三指标(ijk)能通过偶置换变为(123)时 $\epsilon_{ijk}=1$，当三指标能通过奇置换变为(123)时 $\epsilon_{ijk}=-1$，其他情况 $\epsilon_{ijk}=0$.（**例 3.1 完**）

练习 3.2　复 $n\times n$ 矩阵的运算

问题　若 $\hat{A},\hat{B}$ 为两复 $n\times n$ 矩阵，证明

(a)如$[\hat{A},\hat{B}]=0$，则

$$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}};$$

(b)如 $\hat{B}$ 是非奇异的，则

$$\hat{B}e^{\hat{A}}\hat{B}^{-1} = e^{\hat{B}\hat{A}\hat{B}^{-1}};$$

(c)如 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 $\hat{A}$ 的本征值，则 $e^{\lambda_1},\cdots,e^{\lambda_n}$是 $e^{\hat{A}}$ 的本征值；

(d)　$[e^{\hat{A}}]^* = e^{\hat{A}^*}$，$[e^{\hat{A}}]^T = e^{\hat{A}^T}$，
$[e^{\hat{A}}]^+ = e^{\hat{A}^+}$，$[e^{\hat{A}}]^{-1} = e^{-\hat{A}}$；

(e)　$\det e^{\hat{A}} = e^{Tr\hat{A}}$.

解　一开始我们提醒读者，指数函数定义为

$$e^{\hat{A}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\hat{A}^k = \mathbb{1} + \hat{A} + \frac{1}{2!}\hat{A}^2 + \frac{1}{3!}\hat{A}^3 + \cdots \tag{1}$$

有了这个式子，求解就没有进一步的困难

(a)在一开始我们展开乘积 $e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}$ 得到

$$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\hat{A}^k \times \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\hat{B}^j$$

再引入新的求和指标 $m=k+j$，结果

$$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{(m-k)!}\hat{A}^k\hat{B}^{m-k}$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{m!}{[k!(m-k)!]}\hat{A}^k\hat{B}^{m-k}$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}(\hat{A}+\hat{B})^m = e^{\hat{A}+\hat{B}} \tag{2}$$

在最后一步我们用到了 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ 对易的假设.

(b)我们从左方的乘积展开开始

$$\hat{B}e^{\hat{A}}\hat{B}^{-1} = \hat{B}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\hat{A}^k\hat{B}^{-1}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\hat{B}\underbrace{(A\times\hat{A}\times\cdots\times\hat{A})}_{k\text{次连乘}}\hat{B}^{-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underbrace{(\hat{B}\hat{A}\hat{B}^{-1})(\hat{B}\hat{A}\hat{B}^{-1})\cdots(\hat{B}\hat{A}\hat{B}^{-1})}_{k\text{次连乘}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\hat{B}\hat{A}\hat{B}^{-1})^k = \mathrm{e}^{\hat{B}\hat{A}\hat{B}^{-1}} \tag{3}$$

(c)如果 $\boldsymbol{a}_i(i=1,\cdots,n)$为属于 λ_i 的本征矢量,也就是

$$\hat{A}\boldsymbol{a}_i = \lambda_i \boldsymbol{a}_i \tag{4}$$

则显然

$$\mathrm{e}^{\hat{A}}\boldsymbol{a}_i = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\hat{A}^k\boldsymbol{a}_i = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\lambda_i^k\boldsymbol{a}_i = \mathrm{e}^{\lambda_i}\boldsymbol{a}_i \tag{5}$$

成立,也即 $\boldsymbol{a}_i$ 为 $\mathrm{e}^{\hat{A}}$ 的一个本征矢量,本征值为 e^{λ_i}.

(d)我们只需考虑$[\mathrm{e}^{\hat{A}}]^* = \mathrm{e}^{\hat{A}^*}$的情形,然后我们写

$$[\mathrm{e}^{\hat{A}}]^* = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\hat{A}^k\right]^* = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\hat{A}^k)^* = \mathrm{e}^{\hat{A}^*} \tag{6}$$

"+"和"T"的情形可类似地证明.

按照(a) $\mathrm{e}^{\hat{A}}\mathrm{e}^{-\hat{A}} = \mathrm{e}^0 = 1$ 也即

$$[\mathrm{e}^{\hat{A}}]^{-1} = \mathrm{e}^{-\hat{A}} \tag{7}$$

(e)行列式是本征值的乘积而迹是本征值之和,因此由(c)

$$\det \mathrm{e}^{\hat{A}} = \mathrm{e}^{\lambda_1}\cdots\mathrm{e}^{\lambda_n} = \mathrm{e}^{\lambda_1+\cdots\lambda_n} = \mathrm{e}^{\mathrm{Tr}\hat{A}} \tag{8}$$

(练习 3.2 完)

练习 3.3 一个对易关系的证明

问题 对 $\hat{L},\hat{M}\in GL(n)$,也即为由所有非奇异的 $n\times n$ 矩阵组成的一般线性群的元素,证明以下关系

$$\mathrm{e}^{\hat{L}}\hat{M}\mathrm{e}^{-\hat{L}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}[\hat{L},\hat{M}]_{(n)}$$

其中

$$[\hat{L},\hat{M}]_{(0)} = \hat{M}$$
$$[\hat{L},\hat{M}]_{(1)} = [\hat{L},\hat{M}]_-$$
$$[\hat{L},\hat{M}]_{(2)} = [\hat{L},[\hat{L},\hat{M}]]_-$$
$$[\hat{L},\hat{M}]_{(n)} = [\hat{L},[\hat{L},\hat{M}]_{(n-1)}]_-$$

解 我们定义实参数 α 的矩阵值函数

$$\hat{F}(\alpha) = \mathrm{e}^{\alpha\hat{L}}\hat{M}\mathrm{e}^{-\alpha\hat{L}} \tag{1}$$

$\hat{F}(\alpha)$可以在 $\alpha=0$ 处展为泰勒级数

$$\hat{F}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{\mathrm{d}^n\hat{F}}{\mathrm{d}\alpha^n}\right)_{\alpha=0}\alpha^n \tag{2}$$

现在我们有(考虑因子的次序)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\{\hat{A}(\alpha)\hat{B}(\alpha)\} = \lim_{\Delta\alpha\to 0}\left\{\frac{1}{\Delta\alpha}[\hat{A}(\alpha+\Delta\alpha)\hat{B}(\alpha+\Delta\alpha) - \hat{A}(\alpha)\hat{B}(\alpha)]\right\}$$

$$= \lim_{\Delta\alpha\to 0}\left\{\frac{1}{\Delta\alpha}\hat{A}(\alpha+\Delta\alpha)[\hat{B}(\alpha+\Delta\alpha) - \hat{B}(\alpha)] + [\hat{A}(\alpha+\Delta\alpha) - \hat{A}(\alpha)]\hat{B}(\alpha)\right\}$$

$$= \hat{A}(\alpha)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\{\hat{B}(\alpha)\} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\{\hat{A}(\alpha)\}\hat{B}(\alpha) \tag{3}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\mathrm{e}^{\alpha\hat{L}} = \hat{L}\mathrm{e}^{\alpha\hat{L}} = \mathrm{e}^{\alpha\hat{L}}\hat{L} \tag{4}$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\hat{F}(\alpha) &= \mathrm{e}^{\alpha\hat{L}}\hat{L}\hat{M}\mathrm{e}^{-\alpha\hat{L}} - \mathrm{e}^{\alpha\hat{L}}\hat{M}\hat{L}\mathrm{e}^{-\alpha\hat{L}} \\ &= \mathrm{e}^{\alpha\hat{L}}[\hat{L},\hat{M}]\mathrm{e}^{-\alpha\hat{L}} \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\alpha^2}\hat{F}(\alpha) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\{\mathrm{e}^{\alpha\hat{L}}[\hat{L},\hat{M}]\mathrm{e}^{-\alpha\hat{L}}\} \\ &= \mathrm{e}^{\alpha\hat{L}}\hat{L}[\hat{L},\hat{M}]\mathrm{e}^{-\alpha\hat{L}} - \mathrm{e}^{\alpha\hat{L}}[\hat{L},\hat{M}]\hat{L}\mathrm{e}^{-\alpha\hat{L}} \\ &= \mathrm{e}^{\alpha\hat{L}}[\hat{L},[\hat{L},\hat{M}]]\mathrm{e}^{-\alpha\hat{L}} \\ &= \mathrm{e}^{\alpha\hat{L}}[\hat{L}\hat{M}]_{(2)}\mathrm{e}^{-\alpha\hat{L}} \end{aligned} \tag{6}$$

现在我们假设

$$\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}\alpha^{n-1}}\hat{F}(\alpha) = \mathrm{e}^{\alpha\hat{L}}[\hat{L},\hat{M}]_{(n-1)}\mathrm{e}^{-\alpha\hat{L}} \tag{7}$$

为了用归纳法完成证明，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\alpha^n}\hat{F}(\alpha) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left\{\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}\alpha^{n-1}}\hat{F}(\alpha)\right\} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\{\mathrm{e}^{\alpha\hat{L}}[\hat{L},\hat{M}]_{(n-1)}\mathrm{e}^{-\alpha\hat{L}}\} \\ &= \mathrm{e}^{\alpha\hat{L}}\hat{L}[\hat{L},\hat{M}]_{(n-1)}\mathrm{e}^{-\alpha\hat{L}} - \mathrm{e}^{\alpha\hat{L}}[\hat{L},\hat{M}]_{(n-1)}\hat{L}\mathrm{e}^{-\alpha\hat{L}} \\ &= \mathrm{e}^{\alpha\hat{L}}[\hat{L},\hat{M}]_{(n)}\mathrm{e}^{-\alpha\hat{L}} \end{aligned} \tag{8}$$

结果就得到

$$\begin{aligned}\hat{F}(\alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{e}^{\alpha\hat{L}}[\hat{L},\hat{M}]_{(n)}\mathrm{e}^{-\alpha\hat{L}}|_{\alpha=0}\alpha^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[\hat{L},\hat{M}]_{(n)}\alpha^n \end{aligned} \tag{9}$$

（练习 3.3 完）

练习 3.4　正规洛伦兹变换的生成元和结构常数

正规洛伦兹群由描写正规洛伦兹变化的 4×4 矩阵 $\hat{a}=a^{\mu}_{\nu}$ 组成，对它有下列性质：

i) 标积不变

$$(a^{\mu}_{\alpha}x^{\alpha})g_{\mu\omega}(a^{\nu}_{\beta}x^{\beta}) = x^{\mu}g_{\mu\omega}x^{\nu} \tag{1}$$

其中 $g_{\mu\omega}$ 为洛伦兹-闵可夫斯基(Minkowski)度规.

ii) $\hat{a}$ 包含在与$\mathbb{1}$同一个洛伦兹变换集合中($\hat{a}$ 可以连续地由$\mathbb{1}$变换产生).

洛伦兹变换形成一个六参数的群. 我们可以取参数为，譬如旋转角 ω 和快度 ξ.

提示：与第 3.13 节和练习 3.16 和 3.17 比较！

问题 a)定出相应的生成元;b)找出有关的结构常数!

解 如同以前,我们猜想

$$\hat{a}(\omega,\xi) = \exp(-\mathrm{i}\omega\cdot\hat{S} - \mathrm{i}\xi\cdot\hat{K}) \tag{2}$$

其中 ω,ξ 代表参数,而 $\hat{S},\hat{K}$ 代表相应的生成元. 对元穷小变换上式变为

$$\hat{a}(\delta\omega\cdot\delta\xi) = \mathbb{1} - \mathrm{i}\delta\omega\cdot\hat{S} - \mathrm{i}\delta\xi\cdot\hat{K}) \tag{3}$$

这里 $\hat{S}$ 和 $\hat{K}$ 是 4×4 矩阵的三维矢量. 我们从研究空间旋转开始,即设 $\delta\xi=0$. 对坐标系绕 x 轴旋转的变换矩阵 ($\delta\omega_1\neq0,\delta\omega_2=\delta\omega_3=0$),在正旋转意义下为

$$\hat{a} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & +\delta\omega_1 \\ 0 & 0 & -\delta\omega_1 & 1 \end{array}\right]$$

因此按照式(3),$\delta\omega\cdot\hat{S}=\mathrm{i}(\hat{a}-\mathbb{1})=\delta\omega_1\hat{S}_1$,从而

$$\hat{S}_1 = -\mathrm{i}\left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \end{array}\right] \tag{4}$$

类似地

$$\hat{S}_2 = -\mathrm{i}\left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \hat{S}_3 = -\mathrm{i}\left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{5}$$

我们看到自旋 1 的矩阵出现为子矩阵,但是带一个负号(参看例 1.11,方程(9)). 涉及洛伦兹增速,我们先回忆一下快度变量 ξ 的定义,对此

$$\xi = \frac{\beta}{|\beta|}\mathrm{artanh}\,|\beta|\ ,\ \beta = \frac{v}{c} \tag{6}$$

借此经直接计算我们得到

$$\beta = \tanh\xi\ ,\ \gamma = \cosh\xi\ ,\ \gamma\beta = \sinh\xi \tag{7}$$

然后描写 x 方向增速的矩阵简单地为

$$\hat{a}(\xi) = \left[\begin{array}{c|ccc} \cosh\xi & -\sinh\xi & 0 & 0 \\ \hline -\sinh\xi & \cosh\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{8}$$

注意观察这里在增速和旋转之间有一定的类似性,差别只是由于在闵可夫斯基空间中时间方向和空间方向的不对称性.

在快度表示中的一个意外收获在于以下的性质

$$\hat{a}(\xi_1)\hat{a}(\xi_1') = \hat{a}(\xi_1 + \xi_1') \tag{9}$$

也即如同旋转角一样,在同一空间方向的快度是可加的. 对于一个无穷小增速($\xi\to\delta\xi_1,\delta\xi_2=\delta\xi_3=0$)我们得到

$$\hat{a}=\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & -\delta\xi_1 & 0 & 0 \\ \hline -\delta\xi_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

因此按照(3)，$\delta\xi\cdot\hat{K}=\mathrm{i}(\hat{a}-\mathbb{1})=\delta\xi_1 K_1$，从而

$$\hat{K}_1=-\mathrm{i}\left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & 0 & \\ 0 & & & \end{array}\right] \tag{10}$$

类似地

$$\hat{K}_2=-\mathrm{i}\left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 1 & & 0 & \\ 0 & & & \end{array}\right],\quad \hat{K}_3=-\mathrm{i}\left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & 0 & \\ 1 & & & \end{array}\right] \tag{11}$$

这样我们就定出了洛伦兹群的生成元. 当然我们应记住这些矩阵高度地依赖于参数的定义.

b) 如果我们以某种方式重数一下 $\hat{S}_i,\hat{K}_i(i=1,2,3)$，把它们重组为一个六分量矢量 $\hat{L}_i(i=1,\cdots 6)$，那么结构常数就定义为

$$[\hat{L}_i,\hat{L}_j]=C_{ijk}\hat{L}_k \tag{12}$$

因此我们必须计算生成元之间的所有对易关系. 我们已经知道

$$[\hat{S}_i,\hat{S}_j]=-\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\hat{S}_k \tag{13}$$

对负的自旋矩阵成立. 读者应该注意这里的符号. 如果我们选择 $-\omega$ 作为参数代替旋转角 ω，将会出现一个“+”号. 增速间的一个对易关系，例如

$$[\hat{K}_1,\hat{K}_2]_-=-\left\{\left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & 0 & \\ 0 & & & \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 1 & & 0 & \\ 0 & & & \end{array}\right]\right.$$

$$\left.-\left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 1 & & 0 & \\ 0 & & & \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & 0 & \\ 0 & & & \end{array}\right]\right\}$$

$$=\left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]=\mathrm{i}\hat{S}_3 \tag{14}$$

计算给出

$$[\hat{K}_1,\hat{K}_2]=\mathrm{i}\hat{S}_3 \tag{15}$$

总起来我们有

$$[\hat{K}_i,\hat{K}_j]=\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\hat{S}_k \tag{16}$$

最后需要计算$[\hat{S}_i,\hat{S}_j]$,我们得到

$$[\hat{S}_1,\hat{K}_2]=-\left\{\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&\\0&0&0&-1\\0&0&+1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&&&\\1&&0&\\0&&&\end{bmatrix}\right.$$

$$\left.-\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&&&\\1&&0&\\0&&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&+1&0\end{bmatrix}\right\}$$

$$=-\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&&&\\0&&0&\\+1&&&\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0&-1\\0&&&\\0&&0&\\0&&&\end{bmatrix}=\mathrm{i}\hat{K}_3 \tag{17}$$

更一般地有

$$[\hat{S}_i,\hat{K}_j]=+\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\hat{K}_k \tag{18}$$

结果结构常数由式(13),(16)和(18)的右方,即根本上是ε_{ijk}给出.这就完成了这个练习.

有意思的是注意到,纯粹旋转形成一个群,而纯粹洛伦兹变换不形成一个群.按照(16),沿不同方向相继完成的两个洛伦兹变换可能是一个旋转.生成元$\hat{K}_i$不服从一个封闭的李代数.(**练习 3.4 完**)

3.2 对易关系解释为广义的矢量乘积,李氏定理,李群的秩

对易关系(3.13)能被理解为两个矢量的矢量叉乘的直接推广.事实上在练习 3.4 中方程(12)可以写成

$$\hat{L}_i\times\hat{L}_j=C_{ijk}\hat{L}_k\ , \tag{3.17}$$

意味着两个"基矢"$\hat{L}_i$和$\hat{L}_j$的叉乘也是同一空间的一个矢量,因而是这些基矢的一个线性组合.这是在三维空间内成立的$\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{e}_k(i,j,k=1,2,3,$循环)的推广关系,其中$\boldsymbol{e}_i$就是这些基矢.对于这种观点,阶为 2 的李代数是特别值得注意的,它包含两个矢量,它们的叉乘为 0,即$[\hat{L}_1,\hat{L}_2]=0$,虽然$\hat{L}_1$和$\hat{L}_2$是线性独立的.因此,与在三维位形空间正常的矢量乘积的比较不能走得太远.对于 SO(3)群的李代数这个例外,它不是一个同构,而仅仅是一个类比.

到现在为止，我们从李群出发，确定了它的生成元和计算了它们的对易关系(3.13)．用这种方式我们导出了李代数．这个程序也可以反过来：如果给出 N 个厄密算符的集合，它们在对易关系下封闭(因此满足形如式(3.13)的方程)，那么这些算符 $\hat{L}_i$ 就规定了一个李群，它的生成元就是这些 $\hat{L}_i$．这叫做李氏定理．

这个定理是显然的，因为我们能直接写下无穷小群算符 $\hat{U}(\delta\alpha_\nu)$

$$\hat{U}(\delta\alpha_\nu) = \mathbb{1} - \mathrm{i}\sum_{n=1}^{N}\delta\alpha_n\hat{L}_n = \mathbb{1} - \mathrm{i}\sum_{n=1}^{N}\frac{\alpha_n}{M}\hat{L}_n, \qquad \alpha_n = M\delta\alpha_n \tag{3.18}$$

接连 M 次应用这些算符，取极限 $M\to\infty$ 就给出相关李群的算符，相应于有限的旋转

$$\hat{U}(\alpha_\nu) = \lim_{M\to\infty}\left(\mathbb{1} - \mathrm{i}\sum_{n=1}^{N}\frac{\alpha_n}{M}\hat{L}_n\right)^M = \exp\left(-\mathrm{i}\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\hat{L}_n\right) \tag{3.19}$$

这样构造 $\hat{U}(\alpha_\nu)$ 是和导致(3.16)式的过程严格一样的．

李群的一个基本特征是它的秩，它定义为彼此对易的生成元的最大数目．例如有三个生成元 $\hat{p}_\nu = -\mathrm{i}\cdot\partial/\partial x_\nu$ 的阿贝尔平移群，三个生成元彼此对易，因此秩为 3．在此场合，这个秩某种程度上是平凡无奇的，借助于生成元 $\hat{p}_\nu$ 的对易性，我们可写

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varrho\cdot\hat{p}} = \mathrm{e}_1^{-\mathrm{i}\varrho_1\hat{p}_1}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varrho_2\hat{p}_2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varrho_3\hat{p}_3}\ . \tag{3.20}$$

这意味着这个秩为 3 的群实际上是三个秩为 1 的群的乘积．更有趣的例子是旋转群 SO(3)，其中没有一个生成元和其他生成元对易(秩为 1)；而对群 SU(3)(我们将稍后介绍)，其中同位旋第三分量 $\hat{T}_3$ 和超荷 Y(它和奇异性有关)对易(秩为 2)．

例 3.5　$\hat{p}_\nu$ 和 $\hat{J}_\nu$ 的代数

a) 三个算符 $\hat{p}_\nu = -\mathrm{i}\partial/\partial x_\nu$ 满足平凡的对易关系

$$[\hat{p}_\nu, \hat{p}_\mu]_- = 0 \tag{1}$$

如群参数记为 $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$，那么

$$\hat{U}(\varrho) = \exp(-\mathrm{i}\varrho_\nu\hat{p}_\nu) = \exp(-\varrho\cdot\hat{\nabla}) \tag{2}$$

正如我们所知是平移群的算符．这些算符代表一个阿贝尔群．所有三个生成元对易；因此平移群的秩为 3．

b) 三个角动量算符满足

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j]_- = \mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\hat{J}_k \tag{3}$$

因而

$$\hat{U}_R(\phi) = \exp(-\mathrm{i}\phi_i\hat{J}_i) \tag{4}$$

是已知群 SO(3)的算符，而这些角 ϕ_i 是群的参数．一个生成元 $\hat{J}_i$ 只能与它自己对易，因此特殊旋转群的秩是 1．(例 3.5 完)

3.3 不变子群,单和半单李群,理想

在物理上有特殊重要性的李群是半单李群. 下面我们将解释这个概念以及它的特殊性.

让我们考察一个带有阿贝尔子群 $a=\{\hat{a}_i\}$ 的群 $g=\{\hat{g}_\nu\}$(图 3.2). 随后如果

$$\hat{g}_\nu\hat{a}_i\hat{g}_\nu^{-1}=\hat{a}_j \tag{3.21}$$

$$\hat{a}_i\hat{a}_k=\hat{a}_k\hat{a}_i \tag{3.22}$$

对每个 $\hat{a}_i$ 以及对整个群的每个元素 $\hat{g}_\nu$ 成立,也即 $\hat{g}_\nu\hat{a}_i\hat{g}_\nu^{-1}$ 仍是阿贝尔子群的元素,则这个群 a 叫做阿贝尔不变子群. 如果子群 a 是不变的但不是阿贝尔的,也即(3.21)成立但(3.22)不成立,则简称它为不变子群.

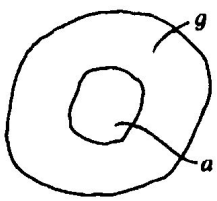


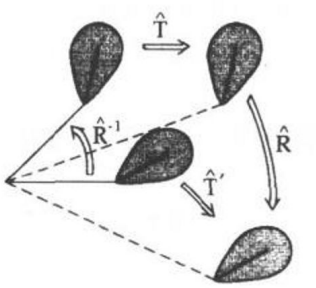
图 3.2 群 g 和阿贝尔子群 a

例 3.6 平移-旋转群

具有所有平移和旋转的群有六个生成元 $\hat{p}_1,\hat{p}_2,\hat{p}_3,\hat{J}_1,\hat{J}_2,\hat{J}_3$. 更清楚些它叫做平移-旋转群,以平移($\hat{p}_\nu$)作为一个阿贝尔子群. 直观告诉我们

$$\hat{R}\hat{T}\hat{R}^{-1}=\hat{T}'$$

其中 $\hat{R}$ 是一个旋转而 $\hat{T}$ 是一个平移,$\hat{T}'$ 又是一个纯粹的平移(看右边的图). 结果平移群是平移-旋转群的阿贝尔不变子群. 这个性质也将在练习 3.18 中作进一步分析. (**例 3.6 完**)



我们现在定义单和半单李群. 说一个李群是单的,如果它不具有连续的(因而是李类型的)不变子群. 一个李群叫做半单的,如果它不具有连续的阿贝尔不变子群. 我们应注意:一个半单李群可以照样有一个连续的不变子群,但是它不允许有一个连续的阿贝尔不变子群.

下面我们要研究带有连续不变子群的群的李代数. 由于

$$\hat{a}_j=\hat{g}_\nu\hat{a}_i\hat{g}_\nu^{-1}$$

以及 $\hat{a}_i^{-1}$ 和

$$\hat{a}_l=\hat{a}_j\hat{a}_i^{-1}=\hat{g}_\nu\hat{a}_i\hat{g}_\nu^{-1}\hat{a}_i^{-1} \tag{3.23}$$

结果 $\hat{a}_l$ 是不变子群的一个元素. 由于 g 和 a 是李群,我们令 $\hat{G}_k$ 为属于 g 的生成元,$\hat{A}_i$ 为属于 a 的生成元(注意算符符号"^ "). 然后就有

$$G_\nu=\mathbb{1}-\mathrm{i}\delta\alpha_i\hat{G}_i-\frac{1}{2}\delta\alpha_i\delta\alpha_j\hat{G}_i\hat{G}_j \tag{3.24}$$

和

$$A_i = \mathbb{1} - i\delta\beta_k\hat{A}_k - \frac{1}{2}\delta\beta_k\delta\beta_l\hat{A}_k\hat{A}_l \tag{3.25}$$

对(3.23)的右方完成类似我们先前在(3.10)中所作的计算，就得到

$$A_l = \mathbb{1} - \delta\alpha_i\delta\beta_k[\hat{G}_i, \hat{A}_k]_- \tag{3.26}$$

因为 A_l 必须处在群 a 内，在单位元的近邻，我们可以写

$$A_l = \mathbb{1} - \mathrm{i}\delta\gamma_m\hat{A}_m \tag{3.27}$$

如果我们像以前一样，让

$$\mathrm{i}\delta\gamma_l = a_{ikl}\delta\alpha_i\delta\beta_k$$

因为 $\delta\gamma_l$ 当 $\delta\alpha_i \to 0$ 及 $\delta\beta_k \to 0$ 时必须为 0. 然后从(3.26)和(3.27)就得出

$$[\hat{G}_i, \hat{A}_k]_- = a_{ikl}\hat{A}_l \tag{3.28}$$

对所有的 $\hat{G}_i$ 成立. 如果我们能把一个李群的 N 个生成元 $\hat{G}_i$ 线性组合出 M 个生成元 $\hat{A}_l (M<N)$ 使(3.28)成立，则此李群具有一个不变子群. 显然这不变子群的 M 个生成元 $\hat{A}_l = \{\hat{A}_1, \hat{A}_2, \cdots, \hat{A}_M\}$ 组成原来李代数的一个子代数. 实际上，对易关系 $[\hat{A}_l, \hat{A}_k]$ 显然是自身封闭的. 我们把一个满足(3.28)的子代数叫做一个理想. 类似于群的定义我们说：

如果一个李代数不具有除了平凡理想{0}以外的任一个理想，则称之为单的；如果它不具有一个阿贝尔理想，则叫做半单的. 这样，(3.28)可以在后一情形成立，但不允许所有该理想内的对易关系 $[\hat{A}_i, \hat{A}_j]=0$.

例 3.7　单和半单李群

a) 平移群的三个生成元 $\hat{p}_\nu$ 在 TR 群(平移一旋转群)内形成一个封闭的子代数，因为 $[\hat{p}_\nu, \hat{p}_\mu]_-=0$. 和旋转群的生成元 $\hat{J}_\nu=(r\times\hat{p})_\nu$ 一起，我们得到，例如

$$\hat{p}_x\hat{J}_x - \hat{J}_x\hat{p}_x = 0\ ,\ \hat{p}_x\hat{J}_y - \hat{J}_y\hat{p}_x = \mathrm{i}\hat{p}_z\ ,$$
$$\hat{p}_x\hat{J}_z - \hat{J}_z\hat{p}_x = -\mathrm{i}\hat{p}_y \tag{1}$$

这些就是(3.28)形式的关系. 因此，$\hat{p}_\nu$ 的代数在 TR 群内是一个理想(更准确地说，是一个阿贝尔理想). 结果 $\hat{p}_\nu$ 和 $\hat{J}_\nu$ 的代数既不是单的也不是半单的. 关系(1)再一次清楚地解释了例 3.6 中的表述.

b) 如果我们试图把(3.28)应用到旋转群，很清楚这些方程只当 $\hat{A}_k$ 张开这整个李代数时才能被满足. 也即如果我们让 $\{G_k\}=\{\hat{J}_k\}$，则对易关系

$$[\hat{J}_1, \hat{J}_2]_- = \mathrm{i}\hat{J}\ ,\quad [\hat{J}_3, \hat{J}_1]_- = \mathrm{i}\hat{J}_2\ ,\quad [\hat{J}_2, \hat{J}_3]_- = \mathrm{i}\hat{J}_1 \tag{2}$$

不产生类似于(3.28)的一个子代数. 惟一可能的是这三个 $\hat{J}_i$ 算符一起是封闭的. 因此角动量代数不具有一个理想，它是单的.

c) 典型的半单群的例子是单群的直积(克罗内克(Kronecker)乘积). 例如在许多关于角动量耦合的物理讨论中半单群

$$\mathrm{SO}(3) \times \mathrm{SO}(3) \tag{3}$$

起着重要作用. 这个群的元素具有以下形式

$$\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{\phi}\cdot\hat{\boldsymbol{J}})\times\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{\phi}'\cdot\hat{\boldsymbol{J}}') \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{\phi}=\{\phi_1,\phi_2,\phi_3\}$ 和 $\boldsymbol{\phi}'=\{\phi_1',\phi_2',\phi_3'\}$ 是六个参数,并且这些生成元(分别地)满足

$$[\hat{J}_i,\hat{J}_j]_-=\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\hat{J}_k \quad , \quad [\hat{J}_i',\hat{J}_j']_-=\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\hat{J}_k' \tag{5}$$

此外它们是对易的,即

$$[\hat{J}_i,\hat{J}_k']_-=0 \quad , \quad i,k=\{1,2,3\} \tag{6}$$

生成元 $\hat{J}_i$ 和 $\hat{J}_i'$ 作用于不同的空间,例如在众所周知的轨道和自旋角动量空间或粒子 $1(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{S}_1)$ 和粒子 $2(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{S}_2)$ 的位形空间. 这里 $\boldsymbol{S}$ 表示自旋变量.

这样,跟方程(3.28)比较,我们看出,生成元 $\{\hat{J}_1,\hat{J}_2,\hat{J}_3\}$ 以及 $\{\hat{J}_1',\hat{J}_2',\hat{J}_3'\}$ 每一组自己组成该李代数的非阿贝尔理想. 该李代数由 $\{\hat{J}_1,\hat{J}_2,\hat{J}_3,\hat{J}_1',\hat{J}_2',\hat{J}_3'\}$ 张开.

这个李代数和群是半单的,因为确实有一个理想(即有一个不变子群),但后者不是阿贝尔的. 如同能从这个例子看出来,半单李群的一个典型性质是它们能够表示成单李群的直积. 这一点对每个半单李群普遍成立.

d) 注意到单群的定义要求不存在李形式的(即连续的)不变子群. 但完全可能有一个离散不变子群,虽然这个子群必须不形成一个李群,如同对一个连续不变子群理所当然的一样. 作为一个例子,我们提出 SU(2)群,联系到旋量的旋转(例 1.12)我们对它已经早就熟悉了. 它的元素由

$$\begin{aligned}\hat{U}_R&=\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{\phi}\cdot\hat{\boldsymbol{s}})=\exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{i}\boldsymbol{\phi}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}\right)\\&=\exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{i}\phi\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}\right)\\&=\mathbb{1}\cos\left(\frac{1}{2}\phi\right)-\mathrm{i}\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}\sin\left(\frac{1}{2}\phi\right)\end{aligned} \tag{7}$$

给出(参看练习 3.8). 然而,两个间断矩阵

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\text{和}\begin{pmatrix}-1&1\\0&-1\end{pmatrix}$$

对这些连续的 2×2 矩阵形成一个间断的不变子群. 但这个群是单的,因为确实它有一个不变子群,但是是间断的不是连续的. 进而生成元 $\hat{\boldsymbol{s}}$ 具有同旋转群生成元同样的李代数.

e) 现在我们注意一个物理上重要的李代数,它不是半单的. 让 $\hat{P}$ 和 $\hat{Q}$ 为一确定方向的动量和位置算符,而 $\hat{E}$ 是恒等算符. 随后显然

$$\begin{aligned}[\hat{E},\hat{P}]_-&=[\hat{E},\hat{Q}]_-=0\\[\hat{P},\hat{Q}]_-&=-\mathrm{i}\hat{E}\end{aligned} \tag{8}$$

成立. 这三个算符的代数(有时称为海森伯代数)具有一个阿贝尔子代数,例如由 $\hat{E}$ 和 $\hat{P}$ 张开的代数. 同时它是一个理想,因为它符合(3.28). 对易关系

$$[\hat{E},\hat{P}]_-=0=[\hat{E},\hat{E}]_-=[\hat{P},\hat{P}]_- \tag{9}$$

定义了这个阿贝尔子代数. 同时因为 $[\hat{E},\hat{Q}]_-=0$ 和 $[\hat{P},\hat{Q}]_-=\mathrm{i}\hat{E}$,(3.28)满足. 因此海森伯代数是一个李代数,既不是单的也不是半单的. (**例 3.7 完**)

练习 3.8 $\exp\left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}\right)$ 的约化

问题 证明

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\phi\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}\right)=\mathbb{1}\cos\left(\frac{1}{2}\phi\right)-\mathrm{i}\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}\sin\left(\frac{1}{2}\phi\right)$$

对任何角 ϕ 和任何单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 成立(参看例 3.7,(7))

解　按假设 $\boldsymbol{n}$ 是一个单位矢量,即

$$n_i n_i = 1 \tag{1}$$

进而,对泡利矩阵有

$$\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j = \mathrm{i}\epsilon_{ijk}\hat{\sigma}_k + \hat{\sigma}_{ij}\mathbb{1} \tag{2}$$

成立.由(1)就有(我们记住爱因斯坦求和规则)

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\sigma})^2 &= n_i n_j\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j = \mathbb{1}\, n_i n_j\hat{\sigma}_{ij} + \mathrm{i}n_i n_j\epsilon_{ijk}\hat{\sigma}_k \\ &= \mathbb{1}\, n_i n_i = \mathbb{1}\end{aligned} \tag{3}$$

原因是 $n_i n_j$ 是对称的,而 ϵ_{ijk} 是对 i 和 j 反对称的,$n_i n_j\epsilon_{ijk} = 0$ 对每个 k 成立.(3)的结果显然可以被推广.结果有

$$(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\sigma})^{2n} = \mathbb{1} \tag{4}$$

和

$$(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\sigma})^{2n+1} = \mathbb{1}\,(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\sigma}) = (\boldsymbol{n}\cdot\hat{\sigma}) \tag{5}$$

现在我们可以完成这个变换

$$\begin{aligned}\exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{i}\phi\boldsymbol{n}\cdot\hat{\sigma}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{i}\phi\right)^n(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\sigma})^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{i}\phi\right)^{2n}(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\sigma})^{2n} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{i}\phi\right)^{2n+1}(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\sigma})^{2n+1} \\ &= \mathbb{1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}(-1)^n\left(\frac{1}{2}\phi\right)^{2n} \\ &\quad - \mathrm{i}(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\sigma})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}(-1)^n\left(\frac{1}{2}\phi\right)^{2n+1} \\ &= \mathbb{1}\cos\left(\frac{1}{2}\phi\right) - \mathrm{i}(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\sigma})\sin\left(\frac{1}{2}\phi\right)\end{aligned}$$

因为这两个级数刚好代表三角函数.(**练习 3.8 完**)

例 3.9　卡坦的半单性判据

有一个基本的判据可用来发现一个李代数是否是半单的,它来源于卡坦(Cartan)的工作.为此我们定义对称张量

$$g_{\sigma\lambda} = g_{\lambda\sigma} = C_{\sigma\rho\tau}C_{\lambda\tau\rho} \tag{1}$$

它由结构常数构成,叫做度规张量,有时也叫基林(Killing)型.这个张量可对任何李群和与它相关的李代数定义.有时度规类似地定义为

$$(\hat{L}_i,\hat{L}_j) = \mathrm{Tr}\hat{L}_i\hat{L}_j$$

其中 $\hat{L}_i$ 是生成元.现在我们有李群的所谓正规表示(参看后面的(5.34)),其中元素 $\hat{L}_i$ 的矩阵元定义为

$$(\hat{L}_i)_{\alpha\beta} = C_{i\alpha\beta}$$

由此有

$$(\hat{L}_i,\hat{L}_j)=\mathrm{Tr}\hat{L}_i\hat{L}_j=\sum_{\alpha\beta}(\hat{L}_i)_{\alpha\beta}(\hat{L}_j)_{\beta\alpha}$$

$$=C_{i\alpha\beta}C_{j\beta\alpha}=g_{ij}$$

$(\hat{L}_i,\hat{L}_j)$满足度规的所有性质,例如

$$(\hat{L}_i,\hat{L}_j)=(\hat{L}_j,\hat{L}_i)$$

$$(\hat{L}_i+\hat{L}_j,\hat{L}_k)=(\hat{L}_i,\hat{L}_k)+(\hat{L}_j,\hat{L}_k)$$

但不一定是正定的(即$(\hat{L}_i,\hat{L}_j)>0$),在闵可夫斯基度规的场合显然如此.现在我们证明当且仅当

$$\det(g_{\sigma\lambda})\neq 0 \tag{2}$$

时,一个李代数是半单的.为了证明这一点,我们必须演示当有一个非平凡子代数(一个阿贝尔理想)时,$\det(g_{\sigma\lambda})=0$.为此,让我们假设该李代数有一个阿贝尔理想.我们为了使属于这个理想的生成元区别于其余的生成元用一个符号"′"标记.对度规张量的λ',列

$$g_{\sigma\lambda'}=C_{\sigma\varrho\tau}C_{\lambda'\tau\varrho}=C_{\sigma\varrho'\tau}C_{\lambda'\tau\varrho'} \tag{3}$$

成立,因为对那些$\varrho\neq\varrho'$的(它们不属于这个理想)$C_{\lambda'\tau\varrho}=0$(参看(3.28)).进而从(3)得到

$$g_{\sigma\lambda'}=-C_{\varrho'\sigma\tau}C_{\lambda'\tau\varrho'}=-C_{\varrho'\sigma\tau}C_{\lambda'\tau'\varrho'} \tag{4}$$

因为同样的理由,对所有$\tau\neq\tau'$,$C^{\varrho'\sigma\tau}=0$.但是现在对阿贝尔理想

$$C_{\lambda'\tau'\varrho'}=0 \tag{5}$$

成立.因而

$$g_{\sigma\lambda'}=0 \tag{6}$$

度规张量的λ'列为0,并且得到

$$\det(g_{\sigma\lambda})=0 \tag{7}$$

这里我们强调卡坦的条件(2)意味着度规张量有一个逆张量$g^{\sigma\lambda}=(g_{\sigma\lambda})^{-1}$,对这个逆张量

$$g^{\sigma\lambda}g_{\delta\tau}=\sigma^{\lambda}_{\tau} \tag{8}$$

我们现在证明逆定理.

让

$$\det g_{\sigma\lambda}=0 \tag{9}$$

我们证明被

$$[\hat{L}_i,\hat{L}_j]=C_{ijk}\hat{L}_k,\qquad \hat{L}\in G \tag{10}$$

规定的代数具有一个阿贝尔子代数

$$[\hat{L}'_i,\hat{L}'_j]=0,\quad \hat{L}'\in U\subset G \tag{11}$$

如果$\det g_{\sigma\lambda}=0$,方程

$$a^{\sigma}g_{\sigma\lambda}=0 \tag{12}$$

给出非平凡的解.以以下方式定义的生成元

$$\hat{L}'_i=a^{\sigma}_i\hat{L}_{\sigma}\quad,\quad a^{\sigma}_i g_{\sigma\lambda}=0 \tag{13}$$

重新形成一个代数.如果$\hat{L}_k$是G的任一生成元,$\hat{L}'_i,\hat{L}'_j$是U的生成元,我们有

$$\mathrm{Tr}[\hat{L}'_i,\hat{L}'_j]\hat{L}_k=\mathrm{Tr}\hat{L}_i[\hat{L}'_i,\hat{L}_k] \tag{14}$$

将$\hat{L}'_i$的展开式(13)代入我们得到

$$\mathrm{Tr}[\hat{L}'_i,\hat{L}'_j]\hat{L}_k=a^{\sigma}_i a^{\varrho}_j\mathrm{Tr}\hat{L}_{\sigma}[\hat{L}_{\sigma},\hat{L}_k]-$$

$$=a^{\sigma}_i a^{\varrho}_j C_{\sigma kl}\mathrm{Tr}\hat{L}_{\sigma}\hat{L}_l$$

$$= a_i^\sigma a_j^\sigma C_{\sigma kl} g_{\sigma l}$$

$$= 0 \tag{15}$$

这里我们用到 $a_i^\sigma g_{\sigma\lambda}=0$.

因此

$$\mathrm{Tr}[\hat{L}_i', \hat{L}_j']\hat{L}_k = 0 \tag{16}$$

由于 $\hat{L}_k$ 是任意的，上面的迹为 0 只当对易关系

$$[\hat{L}_i', \hat{L}_j'] = 0 \tag{17}$$

时成立. 这就是我们要证明的.（**例 3.9 完**）

例 3.10　SO(3)的半单性

问题　用卡坦判据证明 SO(3)群是半单的.

解　SO(3)的结构常数恒等于反对称张量 $i\epsilon_{ijk}$（参看例 3.1）. 因此 SO(3)的度规张量由

$$g_{\sigma\lambda} = -\epsilon_{\sigma jk}\epsilon_{\lambda kj} = \epsilon_{\sigma jk}\epsilon_{\lambda jk} = 2\delta_{\sigma\lambda} \tag{1}$$

给出. 然后

$$\det(g_{\sigma\lambda}) = 8 \neq 0 \tag{2}$$

就得出来了，它表明 SO(3)是半单的. 确实，由我们前面的考虑我们已经知道 SO(3)是单的（参看例 3.7）.（**例 3.10 完**）

3.4　紧致李群和李代数

这里我们引入一个新的概念：一个李群通常叫做紧致的，如果它的参数化由有限个有界的参数域组成. 否则这个群叫非紧致的. 有关的李代数相应分别称为紧致的和非紧致的. 任何紧致李代数是半单的. 早些时候我们比较清楚地定义了紧致性（参见 1.7）. 现在的定义有些不太清楚，但它也是正确的：每个群元素惟一地和参数相关. 例如对 O(2)，ϕ 描写群元素 $e^{i\phi L_z}$.

如果只有有限个参数（即有限个生成元）以及如果参数域是紧致的（如果它是有界的，或它能借助极限过程让每个元素的参数域紧致化），那么第 1.7 节中的定义成立.

3.5　不变算符（卡西米尔算符）[①]

球谐函数 $Y_{lm}(\theta,\phi)$ 用“量子数”l 和 m 来表示. 更清楚一些，我们说 $Y_{lm}(\theta,\phi)$ 是轨道角动量 $\hat{L}^2$

① 在某种程度上我们沿袭 K. W. Mc Voy 的文章：Review of Modern Physics 37(Nol), 84(1965).

和 $\hat{L}_3$ 的共同本征函数. $\hat{\boldsymbol{L}}^2, \hat{L}_3$ 与无自旋场的旋转群的生成元 $\hat{J}_i$ 有关

$$\hat{\boldsymbol{L}}^2 = \sum_i \hat{J}_i^2 = \hat{\boldsymbol{J}}^2 \quad , \quad \hat{L}_3 = \hat{J}_3$$

$\hat{\boldsymbol{L}}^2$(同样 $\hat{\boldsymbol{J}}^2$)不是群的生成元而是所有生成元的双线性函数. $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ 具有与所有生成元对易的特性

$$[\hat{\boldsymbol{J}}^2, \hat{J}_i]_- = 0$$

因而

$$[\hat{\boldsymbol{J}}^2, \hat{U}_R(\boldsymbol{\phi})]_- = 0$$

也成立,即 $\hat{\boldsymbol{J}}^2$ 和所有群算符对易. 因此 $\hat{\boldsymbol{J}}^2$ 称为群的不变算符或者卡西米尔(Casimir)算符.

$\hat{\boldsymbol{J}}^2$ 的重要性在于它的$(2j+1)$个简并的本征矢量代表旋转群的多重态. $j=0$ 是单态,$j=\frac{1}{2}$ 是双重态,$j=1$ 是三重态等等. 这一性质并非旋转群所特有,而是在稍为推广的形式下半单李群的一般特征. 正是拉卡(Racah)证明了以下定理.

3.6 拉卡定理[①]

对秩为 l 的任何半单李群存在一组 l 个独立的卡西米尔算符. 它们是生成元 $\hat{L}_i$ 的函数 $\hat{C}_\lambda$ $(\hat{L}_1, \hat{L}_2 \cdots \hat{L}_n)(\lambda = 1, 2, \cdots, l)$,它们与群的每个算符对易,因而自身之间也对易,$[\hat{C}_\lambda, \hat{C}_{\lambda'}] = 0$. $\hat{C}_\lambda$ 的本征值组惟一地表示群的多重态.

这个定理使我们能清楚地形成多重态的表示. 因此让我们开始解释这个概念

3.7 关于多重态的评论

我们从总的希尔伯特空间的不变子空间这个概念出发. 总的希尔伯特空间也即对称群的算符作用其上的所有状态. 对不变子空间,我们理解为一组状态,当群的某些算符作用其上时它重新产生自己,也即给出同一组状态中的其他状态. 群的算符让不变子空间的状态在自身间变换. 换句话说,群的算符(即生成元)在不变子空间和不变子空间以外的状态间的矩阵元为 0. 一个多重态是群的不可约的不变子空间,也即不包括进一步的不变子空间的子空间.

---

① 参见 G · Racah:*Group Theory and Spectrosopy*, Princeton Lectures (CERN Reprint).

例 3.11　旋转群的不变子空间

正交矢量$\{Y_{00},Y_{11},Y_{10},Y_{1-1}\}$相对于旋转群形成一个四维不变子空间，因为正如我们所知这个群的生成元$\hat{J}_k$(在此情况下等于角动量算符$\hat{L}_k$)只能改变量子数m而非l.结果$\hat{J}_k$(同样$\hat{U}_R(\phi)$,它是$\hat{J}_k$的函数)让这些矢量在自身间变换.于是

$$\hat{J}_{\pm}Y_{lm}=(\hat{J}_1\pm i\hat{J}_2)Y_{lm}=\sqrt{l(l+1)-m(m\pm1)}Y_{lm\pm1}$$
$$\hat{J}_3Y_{lm}=mY_{lm}$$

(例 3.11 完)

例 3.12　不变子空间的约化

我们在前一个例子中提到的四维不变子空间$\{Y_{00},Y_{11},Y_{10},Y_{1-1}\}$是可约的子空间.它包含更小的子空间(它们不能进一步约化，也即它们是真正的多重态)也就是三重态

$$\{Y_{11},Y_{10},Y_{1-1}\} \tag{1}$$

和单态

$$\{Y_{00}\} \tag{2}$$

这是因为算符$\hat{J}_r$不改变l量子数，例如

$$\hat{J}_{\pm}Y_{lm}=\sqrt{l(l+1)-m(m\pm1)}Y_{lm\pm1}$$
$$\hat{J}_3Y_{lm}=mY_{lm} \tag{3}$$

这个三重态(单态也是)不能进一步约化.由(3)也得出

$$\langle Y_{00}|\hat{U}_R(\phi)|Y_{lm}\rangle=0\ (l\neq0)\ , \tag{4}$$

对这个群的每个旋转算符$\hat{U}_R(\phi)$成立.群的算符在单态和三重态之间(更一般，在一个多重态和另一个多重态之间)不存在非 0 的矩阵元.把不变子空间$\{Y_{00},Y_{11},Y_{10},Y_{1-1}\}$完全分解为一个单态和一个三重态可以用符号表示为

$$\{Y_{00},Y_{11},Y_{10},Y_{1-1}\}=\{Y_{00}\}\oplus\{Y_{11},Y_{10},Y_{1-1}\} \tag{5}$$

(例 3.12 完)

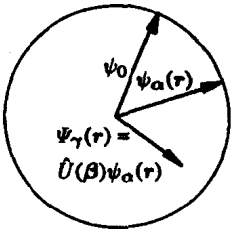


图 3.3　状态$\psi_a(r)$可以被解释成单位球上的一个矢量(归一化态)($\psi_a(r)$透视地看来好像缩短了)

从上一例中我们看出：包含在一个单个的多重态中的状态显然是相互联系的.考虑下面的多重态的交错构造法，这一点就更清楚了.

我们从一个归一化的状态ψ_0开始，它完全处在群的一个多重态内.然后所有矢量

$$\psi_a(r)=\hat{U}(a)\psi_0 \tag{3.29}$$

可以从ψ_0出发通过群算符$\hat{U}(a)$的作用来达到.每次相继应用群算符$\hat{U}(\beta)$必然把矢量$\psi_a(r)$在自身间变换，因为$\hat{U}(\beta)\hat{U}(\alpha)=\hat{U}(r)$必然重新是群的一个算符.矢量$\psi_a$的球

变换到自己(参看图 3.3). $\psi_a(r)$单独并不形成一个矢量空间(因为每个元素归一化到 1),但 $\psi_a(r)$的所有组合张开一个矢量空间. 后者显然在群作用下不变. 它严格地形成一个多重态,其中包括 ψ_0.

名词"多重态"来源于原子光谱学,其中不变子空间由总角动量 j 和轨道角动量 l 来表征. 例如

$2p3/2$ 意味着 $n=2$ (主量子数)
$l=1$ (p 态 Y_{1m})
$j=3/2$(总角动量)

$3d3/2$ 意味意 $n=3$ (主量子数)
$l=2$ (d 态 Y_{2m})
$j=3/2$(总角动量)

$3p3/2$ 意味着 $n=3$ (主量子数)
$l=1$ (p 态 Y_{1m})
$j=3/2$(总角动量) 等等.

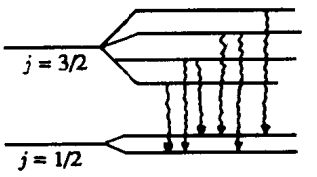


图 3.4 由多重态状态分裂得到的谱线多重态. 多重态状态的分裂指出千万这些多重态的对称性不再严格成立. 我们说对称性(稍为)破缺了. 否则的话将不可能辨认出这些多重态来(这儿,是 x 射线的多重态)参看以下关于对称性下不变性的讨论(第 3.8 节).

在不存在外场时,所有这些多重态是$(2j+1)$重简并的. 在存在外场(例如磁场)时这些态分裂了. 例如,通过塞曼效应,在原子光谱中导致了一系列相邻谱线的多重态(图 3.4).

这些分裂指出:由多重态表示的对称性将不再是严格的. 通常我们称它为(很弱地)破缺的对称性. 否则我们将无法辨认出这些多重态中状态的多重性. 在我们的场合即为谱线的多重态(也可与底下关于对称群下的不变性的讨论比较).

用群论的术语,一组简并态叫做一个多重态. 这些多重态依赖于对称群. 因而在原子物理中我们处理角动量(自旋)多重态. 它由旋转不变性产生. Y_{00}相对于旋转群是一个单态;Λ 粒子(参看表 6.1)是一个同位旋单态;中子和质子(n,p)形成一个同位旋双重态(参看第 5 章),同样还有 ^3H核和 ^3He 核的基态;π 介子$\{\pi^+,\pi^0,\pi^-\}$形成一个同位旋三重态,等等.

我们从这个讨论中得到的重要的定性的知识是:每个群具有确定的、惟一和部分特征化的多重态的集合. 虽然这些多重态是由群的结构决定的,但不存在对任意的连续群找出它们的普遍方法. 只对于半单李群我们有拉卡定理在手.

3.8 对称群下的不变性

设 $\hat{U}(\alpha)$是一个对称群的算符(例如旋转算符). 然后体系在群 $\hat{U}(\alpha)$下的不变性意味着:如

初态 ψ 满足[①]

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi \tag{3.30}$$

那么由对称操作(旋转)产生的状态

$$\psi'(\boldsymbol{r}) = \hat{U}(\alpha)\psi(\boldsymbol{r}) \tag{3.31}$$

满足同一哈密顿量的同一薛定谔方程(3.30),因此

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi' = \hat{H}\psi' \tag{3.32}$$

为了看出这个要求的结果,我们对(3.30)乘上 $\hat{U}(\alpha)$

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}(\alpha)\psi(\boldsymbol{r}) = \hat{U}(\alpha)\hat{H}\hat{U}^{-1}(\alpha)\hat{U}(\alpha)\psi(\boldsymbol{r}) \tag{3.33}$$

上面我们在右方 $\hat{H}$ 和 ψ 之间插入$\mathbb{1} = \hat{U}^{-1}(\alpha)\hat{U}(\alpha)$. 群参数 α 是固定的数;特别是它们不依赖于时间. 因而由(3.31),(3.33)我们有

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi'(\boldsymbol{r},t) = \hat{U}(\alpha)\hat{H}\hat{U}^{-1}(\alpha)\psi'(\boldsymbol{r},t) \tag{3.34}$$

再与(3.32)比较得出

$$\hat{H} = \hat{U}(\alpha)\hat{H}\hat{U}^{-1}(\alpha) \tag{3.35}$$

或

$$[\hat{U}(\alpha),\hat{H}]_- = \hat{U}(\alpha)\hat{H} - \hat{H}\hat{U}(\alpha) = 0 \tag{3.36}$$

因此,体系在群 $\hat{U}$ 下的不变性必然意味着 $\hat{H}$ 和所有群算符 $\hat{U}(\alpha)$对易,从而也和这个群的所有生成元 $\hat{L}_i$ 对易. 我们马上看出逆命题成立. 从

$$[\hat{L}_i,\hat{H}]_- = 0 \tag{3.37}$$

和 $\hat{U}(\alpha)=\exp(-\mathrm{i}\alpha_i\hat{L}_i)$就得出

$$[\hat{U}(\alpha),\hat{H}]_- = 0 \tag{3.38}$$

无论何时,一个状态,例如 ψ_0 是哈密顿量的本征态

$$\hat{H}\psi_0 = E_0\psi_0 \tag{3.39}$$

则按(3.36)我们可得

$$\hat{U}(\alpha)\hat{H}\psi_0 = \hat{U}(\alpha)E_0\psi_0 \quad , \quad \hat{H}\hat{U}(\alpha)\psi_0 = E_0\hat{U}(\alpha)\psi_0 \tag{3.40}$$

也即所有多重态内的其他状态 $\hat{U}(\alpha)\psi_0$ 是哈密顿量的带有同一本征值 E_0 的本征态. 换句话说,这个哈密顿量在一个对称群的每个多重态上是简并的. 这也对 l 个卡西米尔算符 $\hat{C}_\lambda$ 的本征值成立,因为对称群的生成元 $\hat{L}_i$ 与 $\hat{H}$ 对易,也因为 $C_\lambda(\hat{L}_1,\cdots,\hat{L}_n)$与 $\hat{L}_i$ 对易,$\hat{C}_\lambda$ 与 $\hat{H}$ 对易. 这可以理解如下:由

$$[\hat{C}_\lambda(\hat{L}_1,\cdots,\hat{L}_n),\hat{L}_i]_- = 0 \tag{3.41}$$

---

① 注意这儿我们取$\hbar=1$.

直接得出

$$[\hat{C}_\lambda(\hat{L}_\nu),\hat{C}_{\lambda'}(\hat{L}_\nu)]_-=0 \tag{3.42}$$

即所有 l 个卡西米尔算符互相对易,当然也和 $\hat{H}$ 对易.因为对易算符可以同时对角化,也即它们具有相同的本征函数,由(3.40)我们肯定 $\hat{C}_\lambda$ 在多重态上也是简并的.换句话说,对一给定的多重态,算符 $\hat{C}_\lambda$ 具有共同的本征值集合

$$C_1,C_2,\cdots,C_l \tag{3.43}$$

结果拉卡定理保证了每一多重态惟一地和一组本征值 $C_1,C_2,\cdots,C_l$ 相关.我们可总结这一点如下:每个半单李群的多重态能够被 l 个卡西米尔算符 $\hat{C}_1,\hat{C}_2,\cdots,\hat{C}_l$ 的本征值惟一地标记.

例 3.13 旋转群的卡西米尔算符

旋转群(阶 1)的多重态惟一地用卡西米尔算符 $\hat{J}^2$ 的本征值来表征,也即用 $j(j+1)$来表征(通常我们简单地说用 j 来表征).

在(3.29)中我们看到多重态的每个状态能够应用一个群算符 $\hat{U}(\alpha)$,更一般地,对任意的状态 ψ_0 的作用来代表,用这种多重态 $\hat{U}(\alpha)\psi_0$ 的一个适当线性组合

$$\psi=\sum_\alpha a_\alpha\hat{U}(\alpha)\psi_0 \tag{1}$$

来代表.现在借助于拉卡定理我们能从另一观点来理解这种关系:当 ψ_0 是 $\hat{H}$ 和 $\hat{C}_\lambda$ 相应本征值 E_0 和 $C_\lambda(\lambda=1,2,\cdots,l)$的本征态,也即

$$\begin{aligned}&\hat{H}\psi_0=E_0\psi_0\\&\hat{C}_\lambda\psi_0=C_\lambda\psi_0,\quad \lambda=1,2,\cdots,l\end{aligned} \tag{2}$$

由于$[\hat{H},\hat{C}_\lambda]_-=0$,$[\hat{H},\hat{L}_i]_-=0$ 和$[\hat{C}_\lambda,\hat{L}_i]_-=0$(参考(3.36)—(3.40))就有

$$[\hat{H},\hat{U}(\alpha)]_-=0 \tag{3}$$

$$[\hat{C}_\lambda,\hat{U}(\alpha)]_-=0 \tag{4}$$

因此由(1)

$$\hat{H}\psi=\hat{H}\Big(\sum_\alpha a_\alpha\hat{U}(\alpha)\psi_0\Big)=\sum_\alpha a_\alpha\hat{U}(\alpha)\hat{H}\psi_0=E_0\psi \tag{5}$$

$$\hat{C}_\lambda\psi=\hat{C}_\lambda\Big(\sum_\alpha a_\alpha\hat{U}(\alpha)\psi_0\Big)=\sum_\alpha a_\alpha\hat{U}(\alpha)C_\lambda\psi_0=C_\lambda\psi_0 \tag{6}$$

因此我们肯定:多重态的每个状态是 $\hat{H}$ 和所有卡西米尔算符分别带有同样本征值 E_0 和 $C_\lambda(\lambda=1,2,\cdots,l)$的共同本征态.这一组本征值包含了该多重态相对于对称群 $\hat{U}(\alpha)$的所有对称性质.我们很快将理解(参看卡西米尔算符的完备性关系,3.11 节)该多重态相对于群 $\hat{U}(\alpha)$不再具有任何进一步的对称性质.这导致我们承认对称群的不变算符(卡西米尔算符)的基本作用.借助它们的本征值,它们代表该群的对称性质.(**例 3.13 完**)

例 3.14 秩为 1 和 2 的某些群

a) 旋转群是特殊的一个,因为它的秩为 1 而因此只有一个不变算符 $\hat{J}^2$.

b) 群 SU(3),我们将稍后详细研究它(参看第 7 章),是秩为 2 的群,结果有两个卡西米尔算符.其中之一相

应于 $\hat{J}^2$. 对群 SU(3)的不同多重态它可以有相同的本征值. 这种情况下，为了惟一地分类 SU(3)的多重态，我们需要第二个不变算符. 然后拉卡定理告诉我们，借助于两个不变算符，SU(3)的多重态可以完全地分类. 这样，例如考虑下列的符号(与第 7 章比较，特别是练习 7.19)：

	$\bar{3}$ 三重态	用 $D^3(0,1)$表示
或	八重态	用 $D^8(1,1)$表示
或	十五重态	用 $D^{15}(2,1)$表示

括号里的两个数是两个卡西米尔的本征值. 注意这里考虑的三个多重态对第二个卡西米尔算符有同样的本征值(正是 1). 它们三个被第一个本征值(0,1,2)区分. (**例 3.14 完**)

3.9　不变算符的构造

没有办法在一般情况下来构造任意半单李群的卡西米尔算符. 每个群必须分别研究. 只是对 SU(n)群，即对幺正、幺模的 $n\times n$ 矩阵群，皮顿哈(Biedenharn)[①]能证明卡西米尔算符必须是生成元的齐次多项式

$$\hat{C}_\lambda = \sum_{ij} a^\lambda_{ij\cdots}\hat{L}_i\hat{L}_{j\cdots}\ .(\lambda\text{ 因子}) \tag{3.44}$$

其中 a^λ_{ij}是很好定义的结构常数的函数. 卡西米尔算符 $\hat{C}_1$ 是生成元的二次函数. 例如对 SU(2)，是算符 $\hat{\boldsymbol{J}}^2=\frac{1}{2}(\hat{J}_+\hat{J}_-+\hat{J}_-\hat{J}_+)+\hat{J}_3^2$. $\hat{C}_2$ 是生成元的三次函数等等. 下面(参看后面(3.50)式)我们对一般情况构造 $\hat{C}_1$. 对其他卡西米尔算符的一般构造过程尚不得而知. 我们在稍后，在第 7 章中看到 SU(3)的不变算符是 $\hat{C}_1$ 和 $\hat{C}_2$. 在此情况我们将成功地构造两个卡西米尔算符.

注意，卡西米尔算符不是惟一的. 例如假设 $\hat{C}$ 和 $\hat{C}'$是阶为 l 的群的不变算符，那么

$$\hat{\tilde{C}} = \hat{C}+\hat{C}' \quad , \quad \hat{\tilde{C}} = \hat{C}-\hat{C}' \tag{3.45}$$

也是同一群的不变算符. 在分类多重态时，它们和原来的卡西米尔算符 $\hat{C}$ 和 $\hat{C}'$同样合适. 同样，$\hat{C}$ 和 $\hat{C}'$的任意幂次或两者的乘积也仍是卡西米尔算符. 如果群算符 $\hat{U}(\alpha)$是幺正的，因此生成元 $\hat{L}_i$ 是厄密的，那么为了构造幺正的半单李群和厄密算符的卡西米尔算符我们总是可以利用这个自由性. 这正是，如果 $\hat{C}$ 是一个不变算符，那么对任何群算符 $\hat{U}(\alpha)$(参看练习 3.13，方程(4))我们有

$$\hat{C}\hat{U}(\alpha) = \hat{U}(\alpha)\hat{C} \tag{3.46}$$

因此

$$\hat{U}^+(\alpha)\hat{C}^+ = \hat{C}^+\hat{U}^+(\alpha) \tag{3.47}$$

因为对幺正群算符 $\hat{U}^+=\hat{U}^{-1}$，那么就有

---

① 参见 L. C. Biedenharn: J. Math. Phys. 4,436(1936).

$$\hat{U}^{-1}(\alpha)\hat{C}^{+}=\hat{C}^{+}\hat{U}^{-1}(\alpha) \tag{3.48}$$

换句话说:$\hat{C}^{+}$和所有群算符的逆$\hat{U}^{-1}(\alpha)$对易.这意味着$\hat{C}^{+}$和所有群算符对易,因为根据群的定义,每个群算符的逆算符也是一个群算符.所以$\hat{C}^{+}$也是一个不变算符,由此(参看例3.13,方程(2))

$$\hat{C}''=\hat{C}+\hat{C}^{+} \tag{3.49}$$

也是一个卡西米尔算符.显然它是厄密的.所以从现在起我们假设幺正群的所有不变算符是厄密的.

有一个卡西米尔算符总是可以如下给出

$$\hat{C}_1=g^{\varrho\sigma}\hat{L}_\varrho\hat{L}_\sigma \tag{3.50}$$

其中$g^{\varrho\sigma}$是度规张量(参看例3.9)的逆.这个逆度规张量对半单李群总是存在的,因为我们从例3.9中的方程(2)知道$\det(g_{\sigma\lambda})\neq 0$.$\hat{L}_\varrho$是李代数的生成元.由以下的对易关系出发,现在我们来证明$\hat{C}_1$是一个卡西米尔算符:

$$\begin{aligned}[\hat{C}_1,\hat{L}_\tau]_-&=g^{\varrho\sigma}[\hat{L}_\varrho\hat{L}_\sigma,\hat{L}_\tau]_-=g^{\varrho\sigma}\hat{L}_\varrho[\hat{L}_\sigma,\hat{U}_\tau]_-+g^{\varrho\sigma}[\hat{L}_\varrho\hat{L}_\tau]_-\hat{L}_\sigma\\&=g^{\varrho\sigma}\hat{C}^{\lambda}_{\sigma\tau}\hat{L}_\varrho\hat{L}_\lambda+g^{\varrho\sigma}\hat{C}^{\lambda}_{\varrho\tau}\hat{L}_\lambda\hat{L}_\varrho=g^{\varrho\sigma}\hat{C}^{\lambda}_{\sigma\tau}\hat{L}_\varrho\hat{L}_\lambda+g^{\varrho\sigma}\hat{C}^{\lambda}_{\sigma\tau}\hat{L}_\lambda\hat{L}_\varrho\\&=g^{\varrho\sigma}\hat{C}^{\lambda}_{\sigma\tau}(\hat{L}_\varrho\hat{L}_\lambda+\hat{L}_\lambda\hat{L}_\varrho)\end{aligned} \tag{3.51}$$

注意我们在最后第二行中交换了求和指标σ和ϱ.我们也将结构常数以$C_{\sigma\tau\lambda}=C^{\lambda}_{\sigma\tau}$表示,也即提升了第三个指标.这在下面是方便的,有时也在文献中用.张量

$$a^{\varrho\lambda}_{\tau}=g^{\varrho\sigma}C^{\lambda}_{\sigma\tau} \tag{3.52}$$

是对ϱ和λ反对称的.为了理解这一点,我们引入张量

$$b_{\sigma\mu\omega}=g_{\sigma\lambda}C^{\lambda}_{\mu\omega}=C^{\tau}_{\sigma\varrho}C^{\varrho}_{\lambda\tau}C^{\lambda}_{\mu\omega}=C^{\tau}_{\sigma\varrho}C^{\lambda}_{\mu\omega}C^{\varrho}_{\lambda\tau} \tag{3.53}$$

借助于雅可比恒等式(3.16)它可写成

$$b_{\sigma\mu\omega}=-C^{\tau}_{\sigma\varrho}(C^{\lambda}_{\nu\tau}C^{\varrho}_{\nu\mu}+C^{\lambda}_{\tau\mu}C^{\varrho}_{\lambda\omega})=C^{\tau}_{\sigma\varrho}C^{\lambda}_{\nu\tau}C^{\varrho}_{\mu\lambda}+C^{\tau}_{\varrho\sigma}C^{\lambda}_{\tau\mu}C^{\varrho}_{\lambda\omega} \tag{3.54}$$

求和规则应用在重复指标上,右方是对指标σ,μ和ν的循环置换不变的.我们将只证明对循环置换

$$(\sigma\mu\nu)\rightarrow(\mu\nu\sigma) \tag{3.55}$$

是对的,其他场合读者很容易证明.为此我们考虑

$$b_{\mu\nu\sigma}=C^{\tau}_{\mu\varrho}C^{\lambda}_{\sigma\tau}C^{\varrho}_{\nu\lambda}+C^{\tau}_{\varrho\mu}C^{\lambda}_{\tau\nu}C^{\varrho}_{\lambda\sigma}=C^{\varrho}_{\mu\lambda}C^{\tau}_{\sigma\varrho}C^{\lambda}_{\nu\tau}+C^{\lambda}_{\tau\sigma}C^{\varrho}_{\lambda\mu}C^{\tau}_{\varrho\nu}=b_{\sigma\mu\nu} \tag{3.56}$$

这里在第二行中我们重新命名了求和指标,在第一项中让$(\varrho\tau\lambda)\rightarrow(\lambda\varrho\tau)$,在第二项中让$(\varrho\tau\lambda)\rightarrow(\tau\lambda\varrho)$.

如同在(3.53)中,$g_{\sigma\lambda}$是对σ和λ对称的,$C^{\lambda}_{\nu\mu}$是对μ和ν反对称的,张量$b_{\sigma\mu\omega}$必须对μ和ν也即后两个指标是反对称的.因为(3.56)$b_{\sigma\mu\omega}$必须对σ和ν反对称,由于一般的循环不变性,它必须对交换任意两个指标反对称.

让我们再一次回到(3.51)和(3.52).张量$\alpha_{\varrho\tau\lambda}$能够用另一种方式表达.利用$C^{\lambda}_{\sigma\tau}=g^{\nu\lambda}b_{\nu\sigma\tau}$得到

$$\alpha^{\varrho\lambda}_{\tau}=g^{\varrho\sigma}C^{\lambda}_{\sigma\tau}=g^{\varrho\sigma}g^{\nu\lambda}b_{\nu\sigma\tau} \tag{3.57}$$

因此(3.52)变为

$$[\hat{C}_1,\hat{L}_\tau]_-=g^{\rho\sigma}g^{\nu\lambda}b_{\nu\sigma\tau}(\hat{L}_\rho\hat{L}_\lambda+\hat{L}_\lambda\hat{L}_\rho) \tag{3.58}$$

因为 $b_{\nu\sigma\tau}$ 的总的对称性，右方对 σ 和 ν 的求和为 0. 因此

$$[\hat{C}_1,\hat{L}_\tau]_-=0 \tag{3.59}$$

对每个 $\hat{L}_\tau$ 成立，从而我们证明了 $\hat{C}_1$ 是一个卡西米尔算符.

让我们再次强调：卡西米尔算符是在拉卡定理的意义上对半单李群定义的. 这并不意味对其他李群，这种与每个群算符对易的不变算符不能被构造. 例如考虑平移-转动群(有时叫做欧几里得群)，它不是半单的，它的代数为

$$\begin{aligned}&[\hat{J}_i,\hat{J}_j]_-=\varepsilon_{ijk}\hat{J}_k\quad,\quad[\hat{P}_i,\hat{P}_j]_-=0\quad,\\&[\hat{P}_i,\hat{J}_j]_-=\varepsilon_{ijk}\hat{P}_k\quad,\quad[\hat{P}_i,\hat{J}_i]_-=0\quad,\quad i,j,k=1,2,3\end{aligned} \tag{3.60}$$

我们可以很容易验证：在此情况下有三个不变算符，正是 $\hat{\boldsymbol{J}}^2=\hat{J}_1^2+\hat{J}_2^2+\hat{J}_3^2$，$\hat{\boldsymbol{P}}\cdot\hat{\boldsymbol{J}}=\hat{P}_1\hat{J}_1+\hat{P}_2\hat{J}_2+\hat{P}_3\hat{J}_3$ 和 $\hat{\boldsymbol{P}}^2=\hat{P}_1^2+\hat{P}_2^2+\hat{P}_3^2$.

我们将在第 12 章(数学补充)以更一般地进一步讨论卡西米尔算符和拉卡定理.

3.10　对阿贝尔李群的卡西米尔算符的评论

如果一个李群是阿贝尔的，它的秩恒等于生成元 $\hat{L}_i$ 的数目. 这些算符本身是不变算符，因而是卡西米尔算符. 在此情况完备性关系是成立的. 对完备性关系，下一节中将给出一个证明. 这样拉卡定理可以推广到所有阿贝尔李群.

3.11　卡西米尔算符的完备性关系

虽然 l 个不变算符不是惟一确定的，它们形成一个完备集. 更清楚点说，这意味着任何一个与一个李群所有算符对易(因此跟所有生成元对易)的算符 $\hat{A}$ 必然是该群的卡西米尔算符 $\hat{C}_\lambda$ 的函数

$$\hat{A}=\hat{A}(\hat{C}_\lambda) \tag{3.61}$$

换句话说，卡西米尔算符是与该群对易，也与跟群算符 $\hat{U}(\alpha)$ 对易的独立算符的最大集合. 特别是如果我们考虑一个算符 $\hat{A}$，满足 $[\hat{A},\hat{L}_i]_-=0$，随后它必须是生成元 $\hat{L}_i$ 的一个函数

$$\hat{A}=\hat{A}(\hat{L}_i) \tag{3.62}$$

由于 $\hat{A}$ 的作用

$$\hat{A}\psi_\alpha=\hat{A}\hat{U}(\alpha)\psi_0=\hat{U}(\alpha)\hat{A}\psi_0 \tag{3.63}$$

不会超出 ψ_0 的多重态.后者很容易被看出来,只要注意到由于它们的对易性 $\hat{L}_i$ 和 $\hat{A}$ 有一个共同的本征态

$$\hat{L}_i\psi_0 = l_i\psi_0,\ \hat{A}\psi_0 = a\psi_0 \tag{3.64}$$

因此按(3.63),ψ_a 也是 $\hat{A}$ 的一个本征态,具有同一本征值 a.

$$A\psi_a = \hat{U}(\alpha)a\psi_0 = a\psi_a \tag{3.65}$$

所以我们有 $\hat{A}\psi_a \propto \psi_a$ 处在 ψ_0 的多重态内.因为所有这个多重态内的矢量可以用适当的旋转 $\hat{U}(\alpha)$ 从 ψ^0 达到,$\hat{A}$ 必须是这些旋转的生成元 $\hat{L}_i$ 的一个组合.$\hat{A}$ 对包含 ψ_0 在内的这个多重态的每个状态 ψ_a 是对角的.因此 $\hat{A}$ 满足一个不变算符的所有判据;因此 $\hat{A}$ 必须是不变算符之一或者这些卡西米尔算符的一个组合(甚至是非线性的),因为按照拉卡定理严格地只存在 l 个独立的不变算符.

这个关于卡西米尔算符完备性的定理是相当有用的.如果一个体系被赋于一定的对称性,那么相应的哈密顿量必须和该对称群的所有的生成元以及所有的卡西米尔算符对易.与上面强调的观点一起,这意味着 $\hat{H}$ 本身必须由该对称群的不变算符构成.

例 3.15 从卡西米尔算符构造哈密顿量

a) 一个处在中心场内无自旋的粒子的哈密顿量必须和旋转群的算符对易.因此该哈密顿量必须具有

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \hat{T}(\boldsymbol{r}^2,\boldsymbol{p}^2) + f(\boldsymbol{r}^2,\boldsymbol{p}^2)\hat{L}^2 \\ &= T(\boldsymbol{r}^2,\boldsymbol{p}^2)\,\mathbb{1} + f(\boldsymbol{r}^2,\boldsymbol{p}^2)\hat{L}^2\end{aligned} \tag{1}$$

的结构.其中 $\hat{L}^2$(角动量算符的平方)是这个旋转群的不变算符.T 项正比于该旋转群的单位算符$\mathbb{1}$(因此很简单是不变的).当然任何 $\hat{L}^2$ 的高次项(例如 $\hat{L}^4$)也可能出现,这里我们只考虑了最简单的结构.

b) 一个在平移下不变的哈密顿量必须包含平移群的卡西米尔算符 $\hat{\boldsymbol{p}}=(p_1,p_2,p_3)$;因此它必须具有

$$\hat{H} = \alpha\mathbb{1} + \beta\cdot\hat{\boldsymbol{p}} + \gamma\hat{\boldsymbol{p}}^2 + \cdots \tag{2}$$

的形式.这里 α,β,γ 是常数,$\mathbb{1}$ 是平移群的单位算符.如同 a)我们仅注意到最简单的结构.如果,我们要求 $\hat{H}$ 在时间反演($t\to -t$,它使 $\boldsymbol{p}\to -\boldsymbol{p}$)下的不变性,则只有 $\hat{p}_i$ 的偶次项可以出现在 $\hat{H}$ 中.

c) 一个两粒子体系的同位旋群的不变算符(参看第 5 章关于"多核子体系的同位旋算符"一节)是

$$\hat{\boldsymbol{T}}^2 = \frac{1}{4}(\hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2)^2 = \frac{1}{4}(6\cdot\mathbb{1} + 2\hat{\tau}_1\cdot\hat{\tau}_2) \tag{3}$$

其中

$$\hat{\tau} = \left\{\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\right\} \tag{4}$$

是同位旋矢量,它如同作用在同位旋空间的三个泡利矩阵的分量.由于 $\hat{\tau}_1^2=\hat{\tau}_1\cdot\hat{\tau}_1=3\cdot\mathbb{1}$ 和 $\hat{\tau}_2\cdot\hat{\tau}_2=3\cdot\mathbb{1}$ 我们可以理解上面的结果.一个在同位旋群作用下不变的哈密顿量除了平凡的不变量$\mathbb{1}$外,必须也包含 $\hat{\tau}_1\cdot\hat{\tau}_2$ 项.因此最简单的结构为

$$\hat{H} = f(\boldsymbol{r})\cdot\mathbb{1} + G(\boldsymbol{r})\hat{\tau}_1\cdot\hat{\tau}_2 \tag{5}$$

(例 3.15 完)

3.12　对某些群和它们性质的评论

在表 3.1 中我们总结了某些群和它们的性质. 在其中值得注意的是阿贝尔群最简单的不变算符是生成元自己，因为按定义它们和所有群算符因而也和所有生成元对易.

空间反演群，它的生成元是宇称算符 $\hat{P}$，它使 $\boldsymbol{r}\to-\boldsymbol{r}$（更清楚些使 $\{x,y,z\}\to\{-x,-y,-z\}$），和同位旋群将在第 5 章和第 11 章详细讨论.

表 3.1

群	生成元	秩	不变算符	类型
平移群	$\hat{\boldsymbol{p}}=\{\hat{p}_1,\hat{p}_2,\hat{p}_3\}$	3	$\hat{\boldsymbol{p}}=\{\hat{p}_1,\hat{p}_2,\hat{p}_3\}$	阿贝尔
旋转群	$\hat{\boldsymbol{J}}=\{\hat{J}_1,\hat{J}_2,\hat{J}_3\}$	1	$\hat{\boldsymbol{J}}^2=\hat{J}_1^2+\hat{J}_2^2+\hat{J}_3^2$	单，因而半单
旋转-平移群	$\hat{\boldsymbol{J}}=\{\hat{J}_1,\hat{J}_2,\hat{J}_3\}$	3	$\hat{\boldsymbol{p}}^2=\hat{p}_1^2+\hat{p}_2^2+\hat{p}_3^2$	非单也非半单
	$\hat{\boldsymbol{p}}=\{\hat{p}_1,\hat{p}_2,\hat{p}_3\}$		$\hat{\boldsymbol{J}}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}=\hat{J}_1\hat{p}_1+\hat{J}_2\hat{p}_2+\hat{J}_3\hat{p}_3$	
（欧几里得群）				
空间反演不变性	$\hat{p}$	1	$\hat{p}$	间断（非李）
旋转反演群	$\hat{\boldsymbol{J}}=\{\hat{J}_1,\hat{J}_2,\hat{J}_3\}$	2	$\hat{\boldsymbol{J}}^2=\hat{J}_1^2+\hat{J}_2^2+\hat{J}_3^2$	不连通
	$\hat{p}$		$\hat{p}$	
同位旋群	$\hat{\boldsymbol{T}}=\{\hat{T}_1,\hat{T}_2,\hat{T}_3\}$	1	$\hat{\boldsymbol{T}}^2=\hat{T}_1^2+\hat{T}_2^2+\hat{T}_3^2$	单，因而半单

我们看到在所有情况群的阶和不变算符的数目相符（按拉卡定理应该如此），除去旋转-平移群例外. 然而这个群不破坏拉卡定理，因为它不是半单的，它含有一个阿贝尔子群. 请再次注意，拉卡定理只对半单群成立.

3.13　在坐标变换和函数变换之间的联系

考虑一个把坐标 x_i 变到 x_i' 的变换组成的李群. 在紧缩的形式下，它们为

$$\boldsymbol{x}'=f(\boldsymbol{x},\alpha) \tag{3.66}$$

其中 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{x}'$ 是 n 维空间的空间矢量，而 α 代表 r 个群参数. 更详细些，上面的变换读为

$$x_i'=f_i(x_1,x_2,\cdots x_n;\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r)\quad i=1,2,\cdots,n \tag{3.67}$$

参数选择使 $\alpha=0$ 与恒等相符

$$\boldsymbol{x}=f(\boldsymbol{x},0) \tag{3.68}$$

现在如果我们从恒等变换出发作一个无穷小旋转 $\mathrm{d}\alpha$，则 x 变换到 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}+\mathrm{d}\boldsymbol{x}$，即

$$\boldsymbol{x}+\mathrm{d}\boldsymbol{x}=f(\boldsymbol{x},\mathrm{d}\alpha) \tag{3.69}$$

取 $d\alpha$ 的最低次,这给出

$$dx = f(x,d\alpha) - f(x,0) = \left[\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x,\alpha)\right]\Big|_{\alpha=0} \cdot d\alpha \tag{3.70}$$

引入缩写

$$u(x) = \left[\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x,\alpha)\right]\Big|_{\alpha=0} \tag{3.71}$$

我们可以写

$$dx = u(x) \cdot d\alpha \tag{3.72}$$

或者详细点

$$dx_i = \left[\frac{\partial}{\partial\alpha_\mu}f_i(x,\alpha)\right]\Big|_{\alpha=0} d\alpha_u = u_{i\mu}d\alpha_u \tag{3.73}$$

其中

$$u_{i\mu}(x) = \left[\frac{\partial}{\partial\alpha_\mu}f_i(x,\alpha)\right]\Big|_{\alpha=0} \tag{3.74}$$

这儿我们应用求和规定,对罗马求和指标(诸如 i),求和从 1 到 n,而希腊指标(诸如 μ)从 1 到 r.

现在我们讨论一个函数 $F(X)$在上面引入的 $d\alpha$ 下的变化

$$dF = \frac{\partial F(x)}{\partial x} \cdot dx = \sum_i \frac{\partial F(x)}{\partial x_i}dx_i \tag{3.75}$$

借助于(3.72)—(3.75)有

$$dF = \frac{\partial F(x)}{\partial x} \cdot dx = \frac{\{\partial F(x)\}}{\partial x} \cdot u(x) \cdot d\alpha = d\alpha \cdot \left\{u(x) \cdot \frac{\partial F(x)}{\partial x}\right\}$$

$$= \sum_{\mu,i} d\alpha_\mu \left\{u_{i\mu}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}F(x) = -\,i\sum_{\mu,i} d\alpha_\mu \hat{L}_\mu(x)F(x) \tag{3.76}$$

显然 r 个量

$$\hat{L}_\mu = i\sum_i u_{i\mu}(x)\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_i \left[\frac{\partial}{\partial\alpha_\mu}f_i(x,\alpha)\right]\Big|_{\alpha=0}\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{3.77}$$

是群的生成元(与(3.4)和(3.5)比较).这一发现可以以下方式来理解:由于群的性质,旋转后的量 $F'(x,\alpha)$必须从 $F(x)$出发经相继的旋转来得到.与(3.76)式一起,这意味着

$$d\alpha_\mu = \alpha_\mu/N\ , \qquad (N \text{ 是一个大的整数}) \tag{3.78}$$

$$\begin{aligned} F(x,\alpha) &= \lim_{N\to\infty}(1 - i\hat{L}_\mu d\alpha_\mu)^N F(x,0) \\ &= \lim_{N\to\infty}(1 - i\hat{L}_\mu\alpha_\mu/N)^N F(x,0) \\ &= e^{-i\hat{L}_\mu\alpha_\mu}F(x,0) = \hat{U}(x,\alpha)F(x,0) \end{aligned} \tag{3.79}$$

这样很清楚

$$\hat{U}(x,\alpha) = \exp(-i\alpha_\mu\hat{L}_\mu)$$

是群的算符,而 $\hat{L}_\mu$ 是群的生成元.

现在我们通过某些例子和问题来展示这些观点.

练习 3.16　一个 n 维空间的带有 r 个参数的变换

考虑一个 n 维空间($\mathbb{R}$或$\mathbb{C}$)的有 r 个参数的变换群，也即对个 $x=(x^i, i=1,2,\cdots,n)$我们把

$$x_i' = f_i(x;\alpha_1,\cdots,\alpha_r) \tag{1}$$

与群参数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 联系起来. 如通常所做，我们设

$$x = f(x;0,0,\cdots,0) \tag{2}$$

我们知道一个函数 $F(x)$在一个无穷小变换 $\mathrm{d}\alpha$ 下按照

$$\begin{aligned} F(x') &= F(f(x,\mathrm{d}\alpha)) = F(x+\mathrm{d}x) \\ &= \sum_{\mu=1}^{r}(-\mathrm{i})\mathrm{d}\alpha_\mu \hat{L}_\mu(x)F(x) \end{aligned} \tag{3}$$

变换，其中算符(生成元)

$$\begin{aligned} \hat{L}_\mu &= \sum_{j=1}^{n} u_{j\mu}(x)\frac{\partial}{\partial x_j} \\ &= \mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial \alpha_\mu} f_i(x,\alpha)\big|_{\alpha=0}\frac{\partial}{\partial x_j} \quad , \quad \mu = 1,\cdots,r \end{aligned} \tag{4}$$

问题　a)计算由

$$x' = ax + b \qquad (a,b \in \mathbb{R}) \tag{5}$$

给出的两参数群的 $\hat{L}_\mu$.

b) 计算对易关系$[\hat{L}_\mu,\hat{L}_\nu]_-$　$(\mu,\nu=a,b)$

解　a) 这两个生成元记为 $\hat{L}_a$ 和 $\hat{L}_b$. 由定义我们得到

$$\hat{L}_a = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial a}(ax+b)\Big|_{a=b=0}\frac{\partial}{\partial x} = \mathrm{i}x\frac{\partial}{\partial x} \tag{6a}$$

$$\hat{L}_b = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial b}(ax+b)\Big|_{a=b=0}\frac{\partial}{\partial x} = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x} \tag{6b}$$

b) 仅有的非 0 对易关系为

$$\begin{aligned} [\hat{L}_a,\hat{L}_b]_- &= -\left\{\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} = -\mathrm{i}\hat{L}_b \end{aligned} \tag{7}$$

(练习 3.16 完)

练习 3.17　SO(n)的生成元和无穷小算符

问题　a) n 维的特殊正交群 SO(n)，也即在$\mathbb{R}^n$中的旋转矩阵有多少个参数？找出一组生成元来.

b) 表明无穷小算符 $\hat{L}_{pr}$(参看(3.77)式)可以写成

$$\hat{L}_{pr} = -\mathrm{i}\left(x_p\frac{\partial}{\partial x_r} - x_r\frac{\partial}{\partial x_p}\right) \quad p, \qquad r=1,\cdots,n; \quad r>p \tag{1}$$

解 a) 一个 $n\times n$ 矩阵在单位矩阵邻域为

$$\hat{A}=\begin{bmatrix}1+\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & & & \vdots\\ \vdots & & & \vdots\\ \alpha_{1n} & \cdots & \cdots & 1+\alpha_{nn}\end{bmatrix}$$

$$=\mathbb{1}+\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn}\end{bmatrix}=\mathbb{1}+\delta\hat{A} \tag{2}$$

其中所有 $\alpha_{pq}(p,q=1,\cdots,n)$是无穷小的. 这样一个矩阵如果使标积 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\sum_i x_i y_i$ $(x_i,y_i\in\mathbb{R})$不变,也即如果 $(Ax)^T\cdot(Ay)=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ 成立,则它是 SO(n)的一个成员. 这导致

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}&=[(\mathbb{1}+\delta\hat{A})\cdot\boldsymbol{x}]^{\mathrm{T}}\cdot[(\mathbb{1}+\delta\hat{A})\cdot\boldsymbol{y}]\\&=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}+(\delta\hat{A}\cdot\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}(\delta\hat{A}\cdot\boldsymbol{y})+0(\alpha^2)\end{aligned} \tag{3}$$

或

$$\boldsymbol{x}\cdot\delta\hat{A}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}\cdot\delta\hat{A}\cdot\boldsymbol{y}=0 \tag{3'}$$

条件(3′)必须对所有 x 和 y 成立,因此我们要求

$$\delta\hat{A}^{\mathrm{T}}=-\delta\hat{A} \tag{4}$$

也即 $\delta\hat{A}$ 必须是一个反对称矩阵

$$\delta\hat{A}=\begin{bmatrix}0 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}\\ -\alpha_{12} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \alpha_{n-1.n}\\ -\alpha_{1n} & \cdots & -\alpha_{n-1.n} & 0\end{bmatrix} \tag{5}$$

有 $\frac{1}{2}n(n-1)$个自由参数 α_{ij}. 因此生成元 $\hat{S}_{pr}(p,r=1,\cdots,n,\quad p<r)$是

$$\hat{\mathrm{S}}_{\mathrm{pr}}=i\frac{\partial}{\partial\alpha_{\mathrm{pr}}}\sigma\hat{\mathrm{A}}=i\begin{bmatrix}0 & & & \\ & \ddots & & 1\\ & & \iddots & \\ & -1 & & 0\end{bmatrix} \tag{6}$$

其中 1 和 -1 在(5)式中的 α_{pr}和 $-\alpha_{\mathrm{pr}}$处,或者详细一点

$$(\hat{S}_{pr})_{ij}=\mathrm{i}(\sigma_{ip}\sigma_{jr}-\sigma_{ir}\sigma_{jp}) \tag{6'}$$

b) 对小的 α_{pr},坐标变换由

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}'&=A\boldsymbol{x}\Leftrightarrow x'k=A_{kj}x_j\\&=x_k-\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\sum_{p,r=1}^{n}(\alpha_{pr}\hat{S}_{pr})_{kj}x_j\end{aligned} \tag{7}$$

给出. 相应的无穷小算符(生成元)，为简单起见记为 $\hat{L}_{pr}$ 为：

$$\begin{aligned}\hat{L}_{pr} &= \mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\alpha_{pr}}x_j'\big|_{\delta A=0}\frac{\partial}{\partial x_j}\\ &= \mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}(-\mathrm{i})\sum_{k=1}^{n}(\hat{S}_{pr})_{jk}x_k\frac{\partial}{\partial x_j}\\ &= \mathrm{i}\left(x_r\frac{\partial}{\partial x_p}-x_p\frac{\partial}{\partial x_r}\right)\end{aligned}\tag{8}$$

这是角动量算符对任意 n 维的推广. (**练习 3.17 完**)

练习 3.18　自旋 1 的李代数的矩阵表示

问题　证明练习 3.17 中的矩阵 $S_{\alpha\beta}$ 为自旋 1 物体的李代数的表示.

解　我们已经表明群 $SO(3)$ 同构于 $SU(2)$，这意味着两个群的元素服从同一个李代数. 在练习 3.17 中我们推导出了 $\mathbb{R}^n$ 中旋转的矩阵表示 $S_{\alpha\beta}$ 和无穷小生成元. 我们把这些算符解释为角动量算符对任意 n 维空间的推广. 重要的是强调一般情况下这些对象像二阶张量一样变换. 结果只有在 n=3 的特殊情况，存在三个独立元素(L_{12}，L_{13}，L_{23})，它们能解释为这三维空间 L 中的轴矢量. 对 n=4，已经有六个元素，它们不能解释为 $\mathbb{R}^4$ 中矢量的分量. 因此可以考虑把 $L_{\alpha\beta}$ 解释成在 αβ 平面中的旋转(但是作为例子，注意到它们可以分解为两个三分量矢量. 例如用在特殊相对论中被称为空间旋转和洛伦兹增速).

然而，我们把在 $SO(3)$ 中发展的方法，试图推广到任意的 n. 首先我们计算推广的角动量算符 $L_{\alpha\beta}$ 的对易关系：

$$\begin{aligned}[L_{\alpha\beta},L_{\mu\nu}] &= \mathrm{i}^2[(x_\beta\partial_\alpha-x_\alpha\partial_\beta),(x_\nu\partial_\mu-x_\mu\partial_\nu)]\\ &= \mathrm{i}^2(x_\beta\partial_\alpha x_\nu\partial_\mu-x_\beta\partial_\alpha x_\mu\partial_\nu-x_\alpha\partial_\beta x_\mu\partial_\nu+x_\alpha\partial_\beta x_\nu\partial_\mu\\ &\quad -x_\nu\partial_\mu x_\beta\partial_\alpha+x_\nu\partial_\mu x_\alpha\partial_\beta+x_\mu\partial_\nu x_\beta\partial_\alpha-x_\mu\partial_\beta x_\alpha\partial_\beta)\\ &= \mathrm{i}^2(x_\beta\delta_{\alpha\nu}\partial_\mu+x_\beta x_\nu\partial_\alpha\partial_\mu-x_\beta\delta_{\alpha\mu}\partial_\nu-x_\beta x_\mu\partial_\alpha\partial_\nu\\ &\quad -x_\alpha\delta_{\beta\nu}\partial_\mu-x_\alpha x_\nu\partial_\beta\partial_\mu+x_\alpha\delta_{\beta\mu}\partial_\nu+x_\alpha x_\mu\partial_\beta\partial_\nu\\ &\quad -x_\nu\delta_{\mu\beta}\partial_\alpha-x_\nu x_\beta\partial_\mu\partial_\alpha+x_\nu\delta_{\mu\alpha}\partial_\beta+x_\nu x_\alpha\partial_\mu\partial_\beta\\ &\quad +x_\mu\delta_{\nu\beta}\partial_\alpha+x_\mu x_\beta\partial_\nu\partial_\alpha-x_\mu\delta_{\nu\alpha}\partial_\beta-x_\mu x_\alpha\partial_\nu\partial_\beta)\end{aligned}\tag{1}$$

坐标和微商分量各自对易：$[x_\alpha,x_\beta]=0$，$[\partial_\alpha,\partial_\beta]=0$，结果形如 $x_\alpha x_\beta\partial_\alpha\partial_\beta$ 的项成对消掉. 作为克罗内克 δ 算符的对称性 $\delta_{\alpha\beta}=\delta_{\beta\alpha}$ 的结果，得到

$$\begin{aligned}[L_{\alpha\beta},L_{\mu\nu}] =& \mathrm{i}^2(\delta_{\alpha\nu}(x_\beta\partial_\mu-x_\mu\partial_\beta)-\delta_{\alpha\mu}(x_\beta\partial_\nu-x_\nu\partial_\beta)\\ &+\delta_{\beta\nu}(x_\alpha\partial_\mu-x_\mu\partial_\alpha)-\delta_{\beta\mu}(x_\alpha\partial_\nu-x_\nu\partial_\alpha))\end{aligned}\tag{2}$$

应用(3.17(8))的定义我们得到

$$[L_{\alpha\beta},L_{\mu\nu}] = \mathrm{i}(+\delta_{\alpha\nu}L_{\mu\beta}-\delta_{\alpha\mu}L_{\nu\beta}-\delta_{\beta\nu}L_{\mu\alpha}-\delta_{\beta\mu}L_{\nu\alpha})\tag{3}$$

或者应用生成元的反对称性 $L_{\alpha\beta}=-L_{\beta\alpha}$ 得到标准形式

$$[L_{\alpha\beta},L_{\mu\nu}] = \mathrm{i}(+\delta_{\alpha\mu}L_{\beta\nu}-\delta_{\beta\nu}L_{\alpha\mu}-\delta_{\alpha\nu}L_{\beta\mu}-\delta_{\beta\mu}L_{\alpha\nu})\tag{4}$$

这是 $SO(n)$ 的李代数. 下一步是要清晰地构造卡西米尔算符. 由定义，它跟所有群元素 $L_{\alpha\beta}$ 对易. 我们尝试猜想

$$\hat{\Lambda}^2=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}^{k=N}(L_{\alpha\beta})^2=\frac{1}{2}\delta^{\alpha\mu}\delta^{\beta\nu}L_{\alpha\beta}L_{\mu\nu}\tag{5}$$

它正是所有群元素的平方和.计算对易关系给出

$$\begin{aligned}[\hat{A}^2, L_{\sigma\tau}] &= \frac{1}{2}\delta^{\alpha\mu}\delta^{\beta\nu}[L_{\alpha\beta}L_{\mu\nu}, L_{\sigma\tau}] \\ &= \frac{1}{2}\delta^{\alpha\mu}\delta^{\beta\nu}[L_{\alpha\beta}L_{\mu\nu}L_{\sigma\tau} - L_{\sigma\tau}L_{\alpha\beta}L_{\mu\nu}] \\ &= \frac{1}{2}\delta^{\alpha\mu}\delta^{\beta\nu}(L_{\alpha\beta}[L_{\mu\nu}L_{\sigma\tau}] + [L_{\alpha\beta}, L_{\sigma\tau}]L_{\mu\nu}) \end{aligned} \tag{6}$$

将对易关系(4)代入,给出

$$\begin{aligned}[\hat{A}^2, L_{\sigma\tau}] &= \frac{1}{2}\delta^{\alpha\mu}\delta^{\beta\nu}(L_{\alpha\beta}(\delta_{\mu\sigma}L_{\nu\tau} + (\delta_{\nu\tau}L_{\mu\sigma} - \delta_{\mu\tau}L_{\nu\sigma} - \delta_{\nu\sigma}L_{\mu\tau}) \\ &\quad + (\delta_{\mu\sigma}L_{\nu\tau} + \delta_{\nu\tau}L_{\mu\sigma} - \delta_{\mu\tau}L_{\nu\sigma} - \delta_{\nu\sigma}L_{\mu\tau})L_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2}(L_{\alpha\beta}(\delta^{\mu}_{\sigma}\delta^{\beta\mu}L_{\nu\tau} + (\delta^{\alpha\mu}\delta^{\beta}_{\tau}L_{\mu\sigma} - \delta^{\alpha}_{\tau}\delta^{\beta\nu}L_{\nu\sigma} - \delta^{\alpha\mu}\delta^{\beta}_{\tau}L_{\mu\tau}) \\ &\quad + (\delta^{\mu}_{\sigma}\delta^{\beta\nu}L_{\beta\tau} + \delta^{\alpha\mu}\delta^{\nu}_{\tau}L_{\alpha\sigma} - \delta^{\mu}_{\tau}\delta^{\beta\nu}L_{\beta\sigma} - \delta^{\alpha\mu}\delta^{\nu}_{\sigma}L_{\alpha\tau})L_{\mu\nu}) \end{aligned} \tag{7}$$

我们现在采用混合的克罗内克 δ 算符:

$$\begin{aligned}[\hat{A}^2, L_{\sigma\tau}] &= \frac{\mathrm{i}}{2}(\delta^{\beta\mu}L_{\alpha\beta}L_{\nu\tau} + \delta^{\alpha\mu}L_{\alpha\tau}L_{\mu\sigma} - \delta^{\beta\mu}L_{\tau\beta}L_{\nu\sigma} - \delta^{\alpha\mu}L_{\alpha\sigma}L_{\mu\tau} \\ &\quad + \delta^{\beta\nu}L_{\beta\tau}L_{\sigma\nu} + \delta^{\alpha\mu}L_{\alpha\sigma}L_{\mu\tau} - \delta^{\beta\nu}L_{\beta\sigma}L_{\tau\nu} - \delta^{\alpha\mu}L_{\alpha\tau}L_{\mu\sigma}) \\ &= \frac{\mathrm{i}}{2}(\delta^{\beta\nu}(L_{\alpha\beta}L_{\nu\tau} - L_{\tau\beta}L_{\nu\sigma} + L_{\beta\tau}L_{\sigma\nu} - L_{\beta\sigma}L_{\tau\nu}) \\ &\quad + \delta^{\alpha\mu}(L_{\alpha\tau}L_{\mu\sigma} - L_{\alpha\sigma}L_{\mu\tau} + L_{\alpha\sigma}L_{\mu\tau} - L_{\alpha\tau}L_{\mu\sigma})) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

让我们构造一个希尔伯特空间和用代数方法计算 Λ^2 的谱.应用 $L_{\alpha\beta}$的定义,这个卡西米尔算符能被明白地写成

$$\begin{aligned}\Lambda^2 &= \frac{1}{2}L^{\mu\nu}L_{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2}(x^{\nu}\partial^{\mu} - x^{\mu}\partial^{\nu})(x_{\nu}\partial_{\mu} - x_{\mu}\partial_{\nu}) \\ &= -\frac{1}{2}(x^{\nu}\partial^{\mu}x_{\nu}\partial_{\mu} - x^{\nu}\partial^{\mu}x_{\mu}\partial_{\nu} - x^{\mu}\partial^{\nu}x_{\nu}\partial_{\mu} + x^{\mu}\partial^{\nu}x_{\mu}\partial_{\nu}) \\ &= -\frac{1}{2}(x^{\nu}\sigma^{\mu}_{\nu}\partial_{\mu} + x^{\nu}x_{\nu}\partial^{\mu}\partial_{\mu} - x^{\nu}\sigma^{\mu}_{\mu}\partial_{\nu} - x^{\nu}x_{\mu}\partial^{\mu}\partial_{\nu} \\ &\quad - x^{\mu}\sigma^{\nu}_{\nu}\partial_{\mu} - x^{\mu}x_{\nu}\partial^{\nu}\partial_{\mu} + x^{\mu}\sigma^{\nu}_{\mu}\partial_{\nu} + x^{\mu}x_{\mu}\partial^{\nu}\partial_{\nu}) \\ &= -(x^{\mu}\partial_{\mu} - x^{\nu}x_{\nu}\partial^{\mu}\partial_{\mu} - Nx^{\nu}\partial_{\mu} - x^{\nu}x^{\mu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}) \end{aligned} \tag{9}$$

我们定义齐次欧拉算符 $x^{\mu}\partial_{\mu}=J_e$,有

$$J_e^2 = x^{\mu}\partial_{\mu}x^{\nu}\partial_{\nu} = x^{\mu}\sigma^{\nu}_{\mu}\partial_{\nu} + x^{\mu}x^{\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu} = J_e + x^{\mu}x^{\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu} \tag{10}$$

这样我们重写

$$\begin{aligned}\Lambda^2 &= -(J_e + x^{\nu}x_{\nu}\partial^{\mu}\partial_{\mu} - NJ_e - J_e(J_e - 1)) \\ &= -(x^{\nu}x_{\nu}\partial^{\mu}\partial_{\mu} - J_e(J_e + N - 2)) \end{aligned} \tag{11}$$

定义一个希尔伯特空间 H_p 为所有满足拉普拉斯方程的 l 次齐次多项式的空间

$$H_p = \{f : f(\lambda x) = \lambda^l f(x); \partial^{\mu}\partial_{\mu}f = 0\} \tag{12}$$

则 Λ^2 的本征值谱为

$$\Lambda^2 f = l(l+N-2)f \tag{13}$$

让我们检验一下矩阵表示(3.17)的性质. 我们可以计算这些矩阵的对易关系

$$\begin{aligned}
([S_{\alpha\beta},S_{\mu\omega}])_{ik} &= \mathrm{i}^2\sum_j^N\{(\delta_{i\alpha}\delta_{j\beta}-\delta_{i\beta}\delta_{j\alpha})(\delta_{j\mu}\delta_{k\nu}-\delta_{j\nu}\delta_{k\mu})\\
&\quad-(\delta_{i\mu}\delta_{j\nu}-\delta_{i\nu}\delta_{j\mu})(\delta_{j\alpha}\delta_{k\beta}-\delta_{j\beta}\delta_{k\alpha})\}\\
&=\mathrm{i}^2\sum_j^N(\delta_{i\alpha}\delta_{j\beta}\delta_{j\mu}\delta_{k\nu}-\delta_{i\alpha}\delta_{j\beta}\delta_{j\nu}\delta_{k\mu}-\delta_{i\beta}\delta_{j\alpha}\delta_{j\mu}\delta_{k\nu}+\delta_{i\beta}\delta_{j\alpha}\delta_{j\nu}\delta_{k\mu}\\
&\quad-\delta_{i\mu}\delta_{j\nu}\delta_{j\alpha}\delta_{k\beta}+\delta_{i\mu}\delta_{j\nu}\delta_{i\beta}\delta_{k\alpha}+\delta_{i\nu}\delta_{i\mu}\delta_{j\alpha}\delta_{k\beta}-\delta_{i\nu}\delta_{j\mu}\delta_{j\beta}\delta_{k\alpha})\\
&=\mathrm{i}^2(\delta_{\beta\mu}\delta_{i\alpha}\delta_{k\nu}-\delta_{\beta\nu}\delta_{i\alpha}\delta_{k\mu}-\delta_{\alpha\mu}\delta_{i\beta}\delta_{k\nu}+\delta_{\alpha\nu}\delta_{i\beta}\delta_{k\mu}\\
&\quad-\delta_{\mu\alpha}\delta_{i\mu}\delta_{k\beta}+\delta_{\nu\beta}\delta_{i\mu}\delta_{k\alpha}+\delta_{\mu\omega}\delta_{i\nu}\delta_{k\beta}-\delta_{\mu\beta}\delta_{i\nu}\delta_{k\alpha})\\
&=\mathrm{i}^2(\delta_{\beta\mu}(\delta_{i\alpha}\delta_{k\nu}-\delta_{i\nu}\delta_{k\alpha})-\delta_{\beta\nu}(\delta_{i\alpha}\delta_{k\mu}-\delta_{i\mu}\delta_{k\alpha})\\
&\quad-\delta_{\alpha\mu}(\delta_{i\beta}\delta_{k\nu}-\delta_{i\nu}\delta_{k\beta})+\delta_{\alpha\nu}(\delta_{i\beta}\delta_{k\mu}-\delta_{i\mu}\delta_{k\beta}))
\end{aligned}\tag{14}$$

把 $S_{\alpha\beta}$的定义代入，给出

$$[S_{\alpha\beta},S_{\mu\omega}]=\mathrm{i}(S_{\beta\mu}S_{\alpha\omega}-S_{\beta\nu}S_{\alpha\mu}+S_{\alpha\nu}S_{\beta\mu}) \tag{15}$$

与(4)比较就得出结论：$S_{\alpha\beta}$满足与 $L_{\alpha\beta}$同样的代数. 结果与(5)类似，用于分类多重态的卡西米尔算符给出为

$$S^2=\frac{1}{2}S^{\alpha\beta}S_{\alpha\beta} \tag{16}$$

我们推出

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2}\delta^{\alpha\mu}\delta^{\beta\nu}S_{\alpha\beta}S_{\mu\omega}\right)_{ik}\\
&=\frac{\mathrm{i}^2}{2}\delta^{\alpha\mu}\delta^{\beta\nu}\sum_j^N(\delta_{i\alpha}\delta_{j\beta}-\delta_{i\beta}\delta_{j\alpha})(\delta_{j\mu}\delta_{k\nu}-\delta_{j\nu}\delta_{k\mu})\\
&=\frac{\mathrm{i}^2}{2}\delta^{\alpha\mu}\delta^{\beta\nu}\sum_j^N(\delta_{i\alpha}\delta_{j\beta}\delta_{j\mu}\delta_{k\nu}-\delta_{i\alpha}\delta_{j\beta}\delta_{j\nu}\delta_{k\mu}-\delta_{i\beta}\delta_{j\alpha}\delta_{j\mu}\delta_{k\nu}+\delta_{i\beta}\delta_{j\alpha}\delta_{j\nu}\delta_{k\mu})\\
&=\frac{\mathrm{i}^2}{2}\delta^{\alpha\mu}\delta^{\beta\nu}(\delta_{\beta\mu}\delta_{i\alpha}\delta_{k\nu}-\delta_{\beta\nu}\delta_{i\alpha}\delta_{k\mu}-\delta_{\alpha\mu}\delta_{i\beta}\delta_{k\nu}+\delta_{\alpha\nu}\delta_{i\beta}\delta_{k\mu})\\
&=\frac{\mathrm{i}^2}{2}\delta^{\alpha\mu}(\delta^{\nu}_{\mu}\delta_{i\alpha}\delta_{k\nu}-\delta^{\beta}_{\beta}\delta_{i\alpha}\delta_{k\mu}-\delta^{\nu}_{i}\delta_{\alpha\mu}\delta_{k\nu}-\delta^{\nu}_{i}\delta_{\alpha\nu}\delta_{k\mu})\\
&=\frac{\mathrm{i}^2}{2}\delta^{\alpha\mu}(\delta_{i\alpha}\delta_{k\mu}-N\delta_{i\alpha}\delta_{k\mu}-\delta_{ik}\delta_{\alpha\mu}+\delta_{i\alpha}\delta_{k\mu})\\
&=\frac{\mathrm{i}^2}{2}(\delta^{\mu}_{i}\delta_{k\mu}-N\delta^{\mu}_{i}\delta_{k\mu}-N\delta_{ik}+\delta^{\mu}_{i}\delta_{k\mu}=(N-1)\delta_{ik}
\end{aligned}\tag{17}$$

或

$$\frac{1}{2}\delta^{\alpha\mu}\delta^{\beta\nu}S_{\alpha\beta}S_{\mu\omega}=(N-1)\mathbb{1}_N \tag{18}$$

显然单位矩阵$\mathbb{1}$确实与所有 N×N 矩阵对易. 类似于(13)我们定义一个量 S 如下

$$S^2f=s(s+N-2)\mathbb{1}f \tag{19}$$

与(18)比较给出

$$s=1 \tag{20}$$

当 l 是轨道角动量的推广，我们定义 s 是内禀角动量(自旋)的推广. 因此我们发现 $S^{\alpha\beta}$服从推广的角动量代数，其

自旋等于 1.(**练习 3.18 完**)

练习 3.19 一维空间的平移;三维空间的欧几里得群 E_3

问题 *a*) 证明一维平移 x→x+a 的无穷小算符 $\hat{P}$ 的形式为 $\hat{P}=-id/dx$

b) 证明三维欧几里得空间的平移无穷小算符(生成元)

$$-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x}\ ,\ -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\ ,\ -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial z} \tag{1}$$

和同一空间的旋转无穷小算符(生成元)

$$-\mathrm{i}\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\right)\ ,\ -\mathrm{i}\left(z\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial z}\right)\ ,\ -\mathrm{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right) \tag{2}$$

一起对于对易关系是封闭的,从而定义了一个李群(三维空间的欧几里得群 E_3).

解 *a*) 这个无穷小算符(生成元)已经在练习 3.16 中定义了.对于变换

$$T:x\to x+a \quad 或 \quad x'=x-a \tag{3}$$

按照

$$F'(x)=F'(x')=F(\hat{T}^{-1}x)=F(x-a)=F(f(x;a)) \tag{4}$$

函数 f(x,a)的变换由

$$f(x,a)=x-a \tag{5}$$

给出.因此我们有

$$\hat{P}=\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial a}f(x,a)\big|_{a=0}\frac{\partial}{\partial x}=-\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tag{6}$$

b) 定义

$$\hat{\boldsymbol{P}}=-\mathrm{i}\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{1'}$$

$$\hat{\boldsymbol{L}}=-\mathrm{i}\left\{\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\right),\left(z\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial z}\right),\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\} \tag{2'}$$

随后我们知道

$$[\hat{P}_i,\hat{P}_j]_-=0\ ,\ [\hat{L}_i,\hat{L}_j]_-=\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\hat{L}_k \tag{7}$$

以及

$$\begin{aligned}[\hat{P}_i,\hat{L}_j]_-&=-\left[\frac{\partial}{\partial x_i},\varepsilon_{jkm}x_k\frac{\partial}{\partial x_m}\right]_-=-\varepsilon_{jkm}\sigma_{ik}\frac{\partial}{\partial x_m}\\&=-\varepsilon_{jim}\frac{\partial}{\partial x_m}=(-\mathrm{i})\mathrm{i}\varepsilon_{ijm}\frac{\partial}{\partial x_m}=\mathrm{i}\varepsilon_{ijm}\hat{P}_m\end{aligned} \tag{8}$$

有限的平移和旋转由算符

$$\hat{U}_T(\boldsymbol{a})=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}},\ \hat{U}_R(\boldsymbol{\phi})=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{L}} \tag{9}$$

描述.平移群的算符形成整个群的一个不变子群.我们可以证明,类似在例 3.2 和 3.3 中证明的矩阵关系对算符也成立.只要证明它对无穷小旋转成立就足够了

$$\begin{aligned}\hat{U}_R(\delta\boldsymbol{\phi})\hat{U}_T(\boldsymbol{a})\hat{U}_R^{-1}(\delta\boldsymbol{\phi})&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{L}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\delta\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{L}}\\&=\exp\{-\mathrm{i}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{L}}(\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{P}})\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\delta\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{L}}]\}\end{aligned} \tag{10}$$

现在按练习 3.3

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{i}e^{-i\delta\boldsymbol{\phi}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}}(\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{P}})e^{+i\delta\boldsymbol{\phi}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}} &= -\mathrm{i}\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{P}} + [-\mathrm{i}\delta\boldsymbol{\phi}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}, -\mathrm{i}\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}]_- \\
&= -\mathrm{i}\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{P}} - \sum_{i,j}\delta\phi_i a_j[\hat{L}_i,\hat{P}_j]_- \\
&= -\mathrm{i}\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{P}} - \mathrm{i}\sum_{i}\delta\phi_i a_j\varepsilon_{ijk}\hat{P}_k \\
&= -\mathrm{i}(\boldsymbol{a}-\delta\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{a})\cdot\hat{\boldsymbol{P}}] \qquad (10')
\end{aligned}
$$

也即

$$
\hat{U}_R(\delta\boldsymbol{\phi})\hat{U}_T(\boldsymbol{a})\hat{U}_R^{-1}(\delta\boldsymbol{\phi}) = \hat{U}_T(\boldsymbol{a}') = \hat{U}_T(\boldsymbol{a}-\delta\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{a}) \qquad (11)
$$

一个任意的平移和旋转乘积总可以写为

$$
\hat{U} = \hat{U}_T\hat{U}_R \qquad (12)
$$

因为一方面我们有

$$
\hat{U}_R\hat{U}_T = \hat{U}_R\hat{U}_T\hat{U}_R^{-1}\hat{U}_R = \hat{U}'_T\hat{U}_R
$$

另一方面对一个如下的 n 因子乘积有

$$
\begin{aligned}
\hat{U} &= \hat{U}_{T_1}\hat{U}_{R_1}\hat{U}_{T_2}\hat{U}_{R_2}\cdots\hat{U}_{T_n}\hat{U}_{R_n} \\
&= \hat{U}_{T_1}\underbrace{\hat{U}_{R_1}\hat{U}_{T_2}\hat{U}_{R_1}^{-1}}_{\hat{U}'_{T_2}}\underbrace{\hat{U}_{R_1}\hat{U}_{R_2}}_{\hat{U}'_{R_2}}\hat{U}_{T_3}\hat{U}_{R_3}\cdots \\
&= \underbrace{\hat{U}_{T_1}\hat{U}_{T_2}}_{\hat{U}''_{T_2}}\hat{U}'_{R_2}\hat{U}_{T_3}\hat{U}_{R_3}\cdots = \hat{U}''_{T_2}\hat{U}'_{R_2}\hat{U}_{R_3}\cdots \\
&= \cdots = \hat{U}''_{T_n}\hat{U}'_{R_n} \qquad (13)
\end{aligned}
$$

这里用到不仅平移形成一个子群，而且旋转也形成一个子群(虽然非不变)这一事实. 然而对任何这样的乘积按照

$$
\hat{U}_T(\boldsymbol{a})\hat{U}_R(\boldsymbol{\phi})F(\boldsymbol{x}) = \hat{U}_T(\boldsymbol{a})F(\hat{R}^{-1}(\boldsymbol{\phi})\boldsymbol{x}) = F(\hat{R}^{-1}(\boldsymbol{\phi})\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) \qquad (14)
$$

它惟一地与群 E_3(三维空间的平移和旋转)的一个元素相关. 因为这个关系是惟一地可逆的，我们正面临一个同构——我们的幺正算符群也叫做 E_3 群的一个实现(与表示对照，那时群元素用矩阵来表示). **(练习 3.19 完)**

练习 3.20　群和代数的同态及同构

问题　*a*) 首先我们讨论群和代数的“同态”和“同构”的含义.

b) 然后我们表明 $SU(2)$群和 $SO(3)$的李代数是同构的.

解　*a*) 考虑两个群 G 和 G'. 一个映射

$$
f: G \to G' \qquad (1)
$$

被称为

a 1) 群同态，如果对任何 $g_1, g_2 \in G$ 有关系

$$
f(g_1\cdot g_2) = f(g_1)\cdot f(g_2) \qquad (2)
$$

成立，也就是群的结构在映射下被保持；

a 2) 群同构，如果外加映射 f 是惟一的，因而逆映射 f^{-1}存在.

对两个代数 A 和 A'，它们是数域 K 上带有内积$[a_1, a_2]$，$a_1, a_2 \in A$ 或 A'，的矢量空间. 映射

$$f: A \to A'$$

为一

$a\ 1'$) 同态,如果对所有 $\alpha_1, \alpha_2 \in A, \alpha_1, \alpha_2 \in K$ 我们有

$$f(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) = \alpha_1 f(a_1) + \alpha_2 f(a_2) \tag{3}$$

$$f([a_1, a_2]) = [f(a_1), f(a_2)] \tag{3'}$$

也即其代数结构在映射下不变;

$a\ 2'$) 同构,如果 f 有逆.

偶而我们也说两个李群局部同构,如果有关的李代数是同构的.

b) $SO(3)$和 $SU(2)$的生成元分别为$(\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3)$和$(\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3)$,其对易关系为

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j]_- = \mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\hat{S}_k \quad , \quad [\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j]_- = 2\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\hat{\sigma}_k \tag{4}$$

映射

$$f(\alpha\hat{S}_i) = \frac{1}{2}\alpha\hat{\sigma}_i \tag{5}$$

是一个同态,又因为

$$f^{-1}(\alpha\hat{\sigma}_i) = 2\alpha\hat{S}_i \tag{6}$$

是它的逆,$SU(2)$和 $SO(3)$的代数是同构的,这两个李群是局部同构的.(**练习 3.20 完**)

练习 3.21 结构常数的变换

问题 a) 证明在一个代数的基$\{\hat{X}_i\}$的变换

$$\hat{X}_i \to \hat{X}'_i = a_{ij}\hat{X}_j \tag{1}$$

下,结构常数如下变换

$$C_{ijk} \to C'_{ijk} = \sum_{l,m,n} a_{il}a_{jm}C_{lmn}(a^{-1})_{kn}$$

b) 构造一组 a_{ij},使对易关系

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j]_- = \varepsilon_{ijk}\hat{X}_k (i, j, k = 1, 2, 3)$$

变换到

$$[\hat{X}'_i, \hat{X}'_j]_- = C_{ijk}\hat{X}'_k \tag{2}$$

其中

$$C_{123} = -C_{231} = -C_{312} = 1 \tag{3}$$

解 a) 随着 $X'_i = a_{ij}X_i$,我们有

$$[\hat{X}'_i, \hat{X}'_j]_- = a_{ik}a_{jl}[\hat{X}_k, \hat{X}_l]_- = a_{ik}a_{jl}C_{klm}\hat{X}_m = C'_{ijn}\hat{X}'_n = C'_{ijn}a_{nm}\hat{X}_m$$

由此直接得出结论(因为 $\hat{X}_m$ 是线性独立的).

b) 矩阵

$$\hat{a} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -\mathrm{i} & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

满足要求的关系.(**练习 3.21 完**)

3.14　人物小传

E. J. 卡坦(CARTAN,Elie Joseph),法国数学家,1869 年 4 月 9 日生于多洛明,1951 年 5 月 6 日死于巴黎,自 1903 年起在南锡大学当教授,1909 年起在梭尔邦大学当教授. 卡坦是在那些继续和完善李群的人们中一个杰出的代表人物. 他的工作有微分几何,微分形式和无参数表示的李群.

H. B. G. 卡西米尔(CASIMIR,Hendrik Brught Gerhard),荷兰物理学家,1909 年 7 月 15 日生于哈格,他是第一个做出刚性旋转体的量子力学的人. 卡西米尔 1942 年进入 B. V. 菲力浦的研究实验室,并成为主任,在 1957 年成为该公司董事会的成员. 除去早期的刚性旋转体的工作外,他还以卡西米尔效应著名. 这个效应指出电磁波的零点能在例如两个电容器板间的变化.

G. 拉卡(RACAH,Giulio),1909 年 2 月 9 日生于佛罗伦萨,1965 年 8 月 28 日死于耶路撒冷. 拉卡在佛罗伦萨大学和罗马大学学习过,也在苏黎世的联邦技术大学学习过. 后来他在佛罗伦萨和比萨教过理论物理,1939 年他移民到耶路撒冷. 他继续活跃在希伯来大学;他的主要研究领域是原子和核物理.

第 4 章　对称群和它们的物理意义

——一般考虑

在这一章中我们再次考虑这一问题：对于一物理体系通过考虑它的对称性能认识到什么？1918 年诺瑟在变分法[①]的框架内对此问题给予了回答. 不过我们将局限于一些特殊的情况，在此书中[②]只讨论感兴趣的问题. 在此章中遇到的一些事实已为我们所熟知，但这一次将在更高层次上讨论它们.

我们考虑具有 n 个生成元和 l 个不变算符($l<n$)的半单纯幺正李群的情况. l 个不变算符都可选为厄密的. 这情况并不像人们想象的那么特殊，因为它包括了所有的与物理有关的对称性群以及迄今详细讨论过的它们的应用. 回答由三部分组成，将依次予以讨论. 在下面我们将给一证明，然后用例子说明它.

1) 体系具有 $2l$ 个好量子数，其中一半是对称群的生成元 $\hat{L}_i(i=1,2,\cdots,l)$，这 l 个生成元彼此对易. 量子数的另一半通过 l 个卡西米尔算符得到. 卡西米尔算符对多重态进行分类. 在一个多重态内的各个态由 l 个对易的生成元表示. 为避免复杂化，我们首先假定只考虑一个对称性 S_a (例如球对称). 在下节将讨论两个或更多对称群的直积.

一体系(或两体系之间的相互作用)具有对称性 S_a 的表述和要求描述该体系的哈密顿算符与对称群的每一个算符 $\hat{U}(\alpha)$对易是等价的.

也就是，如果薛定谔方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=\hat{H}\psi(\boldsymbol{r},t) \tag{4.1}$$

对起始态成立，则通过与时间无关的对称算符 $\hat{U}(\alpha)$的应用，立即得到

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\hat{U}(\alpha)\psi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=\hat{U}(\alpha)\hat{H}\hat{U}^{-1}(\alpha)\hat{U}(\alpha)\psi(\boldsymbol{r},t) \tag{4.2}$$

因此若

$$\hat{U}(\alpha)\hat{H}\hat{U}^{-1}(\alpha)=\hat{H},\text{即}[\hat{H},\hat{U}(\alpha)]_-=[\hat{H},\mathrm{e}^{-\alpha_k\hat{L}_k}]_-=0 \tag{4.3}$$

则位移波函数 $\psi'(\boldsymbol{r},t)=\hat{U}(\alpha)\psi(\boldsymbol{r},t)$满足与原始波函数 $\psi(\boldsymbol{r},t)$完全相同的薛定谔方程(4.1). 对

---

① E. Noether: Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math Phys. KI. 235(1918)，也可看例 1.3.

② 关于一般定理的讨论，见此丛书 Vol. 4: W. Greiner, J. Reinhardt: *Quantum Electrodynamics* (Springer, Berlin, Heidelberg)将出版.

于一小的位移 $\delta\alpha=\{\delta\alpha_1,\cdots,\delta\alpha_n\}$，于是我们推断出

$$[\hat{H},\delta\alpha_k\hat{L}_k]_-=0 \tag{4.4}$$

由于 $\delta\alpha=\{\sigma\alpha_1,\cdots\delta\alpha_n\}$可被任意地选取，最后我们有

$$[\hat{H},\hat{L}_k]_-=0 \tag{4.5}$$

由于具有算符 $\hat{U}(\alpha)$的对称群 S_α 存在，使得所有的生成元 $\hat{L}_k$ 必须与体系的哈密顿算符对易. 显然由(4.5)可知，由生成元 $\hat{L}_k$ 所描述的物理可观测量是守恒量，这是 $\hat{L}_k$ 与哈密顿算符 $\hat{H}$ 对易的结果. 反过来，若(4.5)成立，则(4.4)和包括它在内的(4.3)也都成立，因而(4.2)也是正确的. 这样如果与 $\hat{H}$ 对易的所有的生成元是已知的，则可无困难地构成对称算符 $\hat{U}(\alpha)=\exp(-\mathrm{i}\alpha_k\hat{L}_k)$. 在这种情况下我们说：$\hat{S}_\alpha$ 以及算符 $\hat{U}(\alpha)$形成哈密顿函数(即物理体系)的一个对称群.

例 4.1　具有转动对称性和电荷无关力的守恒定律

a) 如果我们有转动对称性，则转动群 SO(3)是对称群，且 $\hat{J}_1,\hat{J}_2,\hat{J}_3$，是生成元，它们是守恒量即为好量子数. 我们有$[\hat{H},\hat{\boldsymbol{J}}]_-=0$. 它在物理上似乎是合理的，因为在相对于三个坐标轴中的任一个的转动下，薛定谔方程的不变性保证了在任意的转动下此方程的不变性. 在这种情况下，正如早已提到的，我们得到关于 $\hat{J}_1,\hat{J}_2$ 和 $\hat{J}_3$ 的守恒定律. 这些 $\hat{J}_i$ 彼此之间相对不对易的事实只意味着这三个算符之中仅有一个能被对角化，即它的值能被精确地测量. 在秩为 l 的对称群的一般情况下，l 个生成元可与能量一起被对角化，即在物理上完全被测量.

b) 如果我们把电荷相关的力忽略不计，则同位旋群是对称群，且同位旋分量 T_1,T_2,T_3 中的一个是好(守恒的)量子数. 例如具有不同的 $T_3=\frac{1}{2}(N-Z)$值，但相同的同位旋 T 和核子数 A 的核有相同的质量(除去电磁相互作用对能量的贡献). (**例 4.1 完**)

按照(4.1)—(4.5)，人们可能很惊奇为什么哈密顿算符 $\hat{H}$ 在它和对称群的关系中占有特殊的地位. 原因在于量子力学的基本定律即薛定谔方程中 $\hat{H}$ 所起的特殊作用. $\hat{H}$ 确定量子体系的时间演变. 因此群算符$\{\hat{U}(\alpha)\}$和 $\hat{H}$ 的可交换性意味着原始态 $\psi(\boldsymbol{r},t)$的时间演变和对称性移动的$\psi'(\boldsymbol{r},t)=\hat{U}(\alpha)\psi(\boldsymbol{r},t)$是全同的. 对于 n 个生成元同时成立的守恒定律的特点在于所谓的线性量子数，这意味着例如沿 z 方向的总角动量 $\hat{J}_z$ 与体系的粒子数成线性关系. 上述情况对总电荷(T_3)和奇异数(S)也成立. 这将在下一章中更详细地讨论.

2) 体系将有另外 l 个好量子数，它们由对称群的 l 个不变算符 $\hat{C}_\lambda(\lambda=1,2,\cdots l)$所定义. 容易看出这些算符彼此对易，并且与所有的生成元对易：只要 $\hat{S}_\alpha$ 是哈密顿算符的对称群，所有的 n 个生成元 $\hat{L}_i$ 就与 $\hat{H}$ 对易(见(4.5))，且函数 $\hat{C}_\lambda(\hat{L}_i)$也与 $\hat{H}$ 对易，结果

$$[\hat{C}_\lambda(\hat{L}_i),\hat{H}]=0 \tag{4.6}$$

所有的 l 个量子数 $C_1,C_2,\cdots C_l$ 与能量一起能被同时测量(可被“对角化”)，因为 $\hat{C}_\lambda$ 彼此对易，即

$$[\hat{C}_\lambda,\hat{C}_\lambda']_-=0 \tag{4.7}$$

因此在某种意义上这 l 个卡西米尔算符 $\hat{C}_\lambda(\lambda=1,2,\cdots l)$比生成元更为重要；换句话说，它们是可

观测量,说明了体系的能量本征值的简并度.它们唯一地确定了多重态,特别是它的维数.我们认为多重态的精确定义是具有相同量子数 $C_1,C_2,\cdots,C_l$ 的一组态.

容易证明如果体系具有对称性 S_α,体系从一多重态到另一多重态的跃迁是禁戒的,设两个多重态分别由 M 和 M' 表示,其 $\hat{C}_\lambda$ 的本征值分别由 C_λ 和 $C_{\lambda'}$ 代表,因为两个多重态是不同的,至少我们必须有一个 $C_\lambda\neq C_{\lambda'}$.由于(4.6)我们有

$$0=\langle C_{\lambda'}|\hat{C}_\lambda\hat{H}-\hat{H}\hat{C}_\lambda|C_\lambda\rangle=(C_{\lambda'}-C_\lambda)\langle C_{\lambda'}|\hat{H}|C_\lambda\rangle$$

具有 $C_\lambda\neq C_{\lambda'}$,得到

$$\langle C_{\lambda'}|\hat{H}|C_\lambda\rangle=0 \tag{4.8}$$

即 $\hat{H}$ 在两个不同的多重态之间的矩阵元素于零,因此不存在从一个多重态到另一个多重态的跃迁.我们用不同的方法来阐明这点:因为 C_λ 是好量子数(即守恒量),于是由于它们的守恒,具有至少一个 $C_\lambda\neq C_{\lambda'}$ 的两个态 $|C'_1,C'_2,\cdots C'_l\rangle$ 和 $|C_1,C_2,\cdots C_l\rangle$ 之间不存在跃迁.因此所有的引起从一个多重态到另一个多重态跃迁的相互作用是禁戒的.相互作用仅出现在一个多重态内部.对易关系(4.6)也包含舒尔引理:

任何一个算符 $\hat{H}$ 和所有的群算符 $\hat{U}(\alpha)$ 对易,因此和群的所有的生成元 $\hat{L}_i$ 对易,$\hat{H}$ 取一多重态的每一个态作为本征态,并且对于每一个多重态都是简并的.或者等价地,

$$[\hat{H},\hat{U}(\alpha)]_-=0\rightleftharpoons[\hat{H},\hat{L}_i]_-=0\Rightarrow[\hat{H},\hat{C}_\lambda]_-=0 \tag{4.9}$$

我们将按以下方法证明:

设 ψ 是 $\hat{H}$ 的本征态,即

$$\hat{H}\psi=E\psi$$

于是从(4.9)得到

$$\hat{H}\hat{U}(\alpha)\psi=E\hat{U}(\alpha)\psi$$

这意味着 $\psi'(x,t)=U(\alpha)\psi(\boldsymbol{r},t)$ 也是 $\hat{H}$ 的本征态,具有相同的本征值 E.由于 $[\hat{H},\hat{C}_i]=0$,卡西米尔算符 $\hat{C}_\lambda$ 与 $\hat{H}$ 能同时被对角化,因此 $\hat{H}$ 的本征态 ψ 也是所有的 $\hat{C}_\lambda$ 的一本征态,属于相同的多重态.由于

$$[\hat{C}_\lambda,\hat{U}(\alpha)]_-=0$$

所有的对称性移动态 $\psi'=\hat{U}(\alpha)\psi$ 也是 $\hat{C}_\lambda$ 的本征态而且它们的本征值 $C_1,C_2,\cdots,C_l$ 都是相同的,因此它们都属于该多重态.

这个定理是重要的,因为它弄清楚为何本征态是简并的,原因就在于体系的特殊对称性.另一方面这定理有助于通过好量子数 $C_1,C_2,\cdots,C_l$ 对本征态加以分类.

例 4.2 关于各种对称性的能量简并度

a) 转动群:一个卡西米卡算符 $\hat{\boldsymbol{j}}^2$,其本征值为 $j(j+1)$,$j=0,1,2,\cdots$.角动量多重态的维数是 $(2j+1)$.原则上不存在体系在能量方面简并的态 $|j'm'\rangle$ 和 $|jm\rangle$(具有 $j'\neq j$)之间的跃迁.仅仅破坏转动对称性的外部干扰能引起转动多重态之间的跃迁(例电磁波或经过的粒子,此粒子不属于该体系).这在以下两图中予以说明.

b) 同位旋群：唯一的卡西米尔算符是具有本征值 $T(T+1)$ 的 $\hat{T}^2$，多重态的维数是 $(2T+1)$.

c) π-核子体系的 $T=\frac{1}{2}$ 和 $T=\frac{3}{2}$ 多重态相互独立地散射. 在多重态内部总的位相依赖于 T 而不是 T_3(见例 5.7). (**例 4.2 完**)

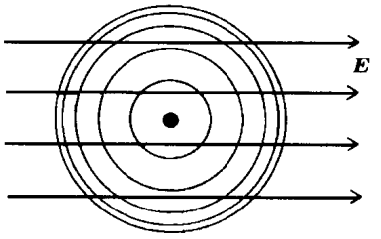


图　一外部场 E 破坏封闭体系的转动对称性. 后者的球对称性由园形等势线表示.

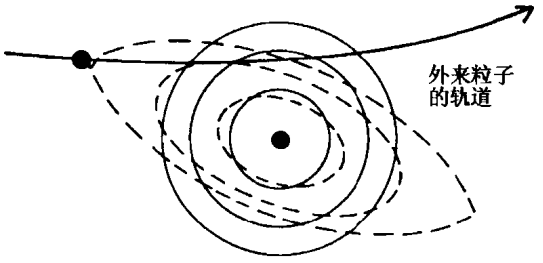


图　一外部粒子破坏了封闭体系的转动对称性，球形等势线变成畸形的. 一个例子是两个重离子的碰撞. 在那里，在两个核的两个中心的库仑势中的电子的角动量不再是好量子数即不再是守恒的. 由于两个中心的存在，对于电子体系失去了球对称性(虚线).

3) 一对称群的多重态中所有的态具有相同的质量(即具有相同的能量本征值)，正如我们刚才通过舒尔引理证明的那样. 如果存在另外的对称群如反射群或转动群，又如果另外的对称群和原始的对称群的算符对易，则原始的对称群的一多重态的所有的态对于另外的对称群具有相同的量子数.

例 4.3　附加的对称性的简并度和宇称

a) 转动群. 它和空间反演群(宇称运算 $\hat{p}:\boldsymbol{r}\to-\boldsymbol{r}$)对易. 因此所有的转动多重态具有相同的宇称. 例如 $g_{\frac{7}{2}}$ 自旋多重态的所有的 $8=\left(2\times\frac{7}{2}+1\right)$ 个态具有宇称 $(-1)^l=(-1)^4=+1$，这八个态在能量方面是简并的.

b) 同位旋群. 它和转动群及反演群对易. 因此同位旋多重态的所有的态具有相同的自旋以及相同的宇称. 所以同位旋三重态(π^+,π^0,π^-)具有相同的自旋(在基态中为 0)和相同的宇称(−1). (**例 4.3 完**)

4.1 人物小传

I. 舒尔(SCHUR,Issai),1875 年 1 月 10 日生于莫希利夫,1941 年 1 月 10 日死于特拉维夫. 舒尔 1901 年在弗罗本纽斯(Frobenius)指导下在柏林得到博士学位,1921 年他成为正式教授. 在 1935 年他不得不移民. 舒尔主要地工作在数论、群论和幂级数理论方面. 他借助于分式线性代换发展了群的表象理论.

第 5 章　同位旋群(同位自旋)

同位自旋(同位旋)群不仅在核物理中而且在基本粒子理论中具有巨大的重要性,而且在以下的讨论中我们将反复地用到它. 开始我们将追随历史的发展,但是随后很快地走向同位旋群的现代应用.

随着 1932 年中子的发现,在质子和中子间很强的相似性导致核物理学家把两个粒子解释成同一粒子的两个状态①. 当然这只当质子和中子有同样的质量(能量)才有意义. 表 5.1 总结了它们的性质.

表 5.1　质子和中子的性质

	质量 m_0c^2[MeV]	质量差 Δm[MeV]	自旋	寿命[s]	磁矩[$\mu_N = e\hbar/2m_pc$]
p	938.213		$\frac{1}{2}$	稳定	2.793
		1.294			
n	939.507		$\frac{1}{2}$	918±14	−1.913

确实质子和中子的质量是接近相等的. 小的质量差被部分解释为两个粒子不同的电磁相互作用(参看下面例 5.4,π 介子中的稍为详细的讨论). 因此到一个很好的近似我们可以相对于强相互作用取质子和中子的质量为相等的. 核子的波函数(对质子和中子的一个集体项)依赖于时空坐标 $\boldsymbol{r}, t$ 和自旋坐标 s. 除此之外现在我们有内部的同位旋坐标 τ,它允许我们区分两个电荷态(正的——质子,负的——中子). 这个变量正像自旋坐标 s 一样只有两个可能值. 我们记它们为 $\tau = \pm 1$并定义

$$\psi_p = \psi(\boldsymbol{r}, t, s, \tau = +1) = \text{质子态}$$

$$\psi_n = \psi(\boldsymbol{r}, t, s, \tau = -1) = \text{中子态}$$

代替使用内部坐标 τ,核子的波函数可以表示为两分量的列矢量

$$\psi = \begin{pmatrix} u_1(\boldsymbol{r}, t, s) \\ u_2(\boldsymbol{r}, t, s) \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

这时 $|u_1(\boldsymbol{r}, t, s)|^2$ 是一个质子在位置 $\boldsymbol{r}$,时间 t,带有自旋投影 s 的概率密度. 类似地 $|u_2(\boldsymbol{r}, t, s|^2$ 表

① 参见 Werner Heisenberg: Zeitschrift für Physik 77, 1 (1932).

示一个中子的概率密度. 下面我引入 2×2 矩阵算符

$$\hat{\tau}_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{5.2}$$

其中+1 相应于质子态,而−1 相应于中子态:

$$\hat{\tau}_3\psi_p=+1\psi_p \quad , \quad \hat{\tau}_3\psi_n=-1\psi_n \tag{5.3}$$

和(5.1)和(5.2)一起给出

$$\psi_p=\begin{pmatrix}u_1(\boldsymbol{r},t,s)\\ 0\end{pmatrix} \quad \psi_n=\begin{pmatrix}0\\ u_2(\boldsymbol{r},t,s)\end{pmatrix} \tag{5.4}$$

我们强调 $u_1(r,t,s)$和 $u_2(r,t,s)$是标准的二分量泡利旋量,所以(5.1)的核子状态 ψ 总共有四个分量(在相对论的狄拉克理论中,旋量也有四个分量[①]描写粒子和反粒子. 在此情况核子状态包含 2×4=8 个分量,四个对质子,四个对中子态.)我们接着构造形式上变换质子到中子和反过来的 2×2 矩阵. 为此原因我们首先注意到

$$\chi_p=\begin{pmatrix}\chi(\boldsymbol{r},t,s)\\ 0\end{pmatrix} \tag{5.5}$$

描写一个在状态 $\chi(r,t,s)$中的质子,

$$\chi_n=\begin{pmatrix}0\\ \chi(\boldsymbol{r},t,s)\end{pmatrix} \tag{5.6}$$

描写在同一状态 $\chi(r,t,s)$中的中子. 为了变换带有波函数 χ 的中子到带有同样波函数的质子,χ 必须由(5.6)的下半分量移到(5.5)的上半分量. 这些要求可以写成形式

$$\hat{\tau}_+\chi_p=0 \quad , \quad \hat{\tau}_+\chi_n=\chi_p \quad , \quad \hat{\tau}_-\chi_p=\chi_n \quad , \quad \hat{\tau}_-\chi_n=0 \tag{5.7}$$

借助于(5.5),(5.6)和(5.7)我们很容易验证矩阵

$$\hat{\tau}_+=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad , \quad \hat{\tau}_-=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} \tag{5.8}$$

满足这些条件.

为了代替这些奇异的($\det\hat{\tau}_+=\det\hat{\tau}_-=0$)和非厄密的算符 $\hat{\tau}_\pm$,引入非奇异的厄密的线性组合

$$\hat{\tau}_1=\hat{\tau}_++\hat{\tau}_-=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad , \quad \hat{\tau}_2=-\mathrm{i}(\hat{\tau}_+-\hat{\tau}_-)=\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix} \tag{5.9}$$

这三个矩阵是众所周知的泡利矩阵. 它们满足关系

$$\hat{\tau}_i\hat{\tau}_2=\mathrm{i}\hat{\tau}_3$$

和它们的循环置换,以及反对易关系

$$\hat{\tau}_i\hat{\tau}_k+\hat{\tau}_k\hat{\tau}_i=2\delta_{ik} \tag{5.10}$$

借助于(5.5)—(5.7)和(5.9),$\hat{\tau}_i$ 算符对质子和中子态的作用效应可以很容易被计算. 结果我们发现

---

① 这些四分量狄拉克旋量参见 *Relativistic Quantum Mechanics*(Springer, Berlin, Heidelberg 1989).

$$\hat{\tau}_1\chi_p=\chi_n \quad , \quad \hat{\tau}_2\chi_p=i\chi_n \quad , \quad \hat{\tau}_3\chi_p=\chi_p ,$$
$$\hat{\tau}_1\chi_n=\chi_p \quad , \quad \hat{\tau}_2\chi_n=-i\chi_p \quad , \quad \hat{\tau}_3\chi_n=-\chi_n \tag{5.11}$$

较早当我们讨论泡利方程[①]时,我们表明每个 2×2 厄密矩阵可以用三个泡利矩阵和单位矩阵的一个线性叠加表示.由此就得出每个作用在带有波函数 ψ 的两分量核子体系的两个自由度上的自共轭算符可以用泡利算符和单位矩阵的一个线性组合来表示.

引入算符

$$\hat{T}_k=\frac{1}{2}\hat{\tau}_k \qquad (k=1,2,3) \tag{5.12}$$

给出改变了的对易关系

$$\hat{T}_i\hat{T}_j-\hat{T}_j\hat{T}_i=i\varepsilon_{ijk}\hat{T}_k \tag{5.13}$$

这些 $\hat{T}_k$ 算符类似于自旋算符 $\hat{S}_k=\frac{1}{2}\hat{\sigma}_k$.

现在我们已作好准备来证明核子状态 ψ 的两个分量 (u_1,u_2) 在一个抽象的三维同位旋空间中建立起一个基本的旋量.按照(5.13)这些厄密算符 $\hat{T}_i$ 形成一个封闭代数,我们认出它是一个李代数.由(3.18),有关的李群的算符可以直接得到[②]

$$\begin{aligned}\hat{U}_{Is}(\boldsymbol{\varepsilon}) &=\hat{U}_{Is}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=\exp(-i\varepsilon_\nu\hat{T}_\nu)=\exp[-(i/2)(\varepsilon_1\hat{\tau}_1+\varepsilon_2\hat{\tau}_2+\varepsilon_3\hat{\tau}_3)]\\ &=\exp[-(i/2)\varepsilon n_\nu\hat{\tau}_\nu]=\mathbb{1}\cos(\varepsilon/2)-in_\nu\hat{\tau}_\nu\sin(\varepsilon/2)\end{aligned} \tag{5.14}$$

角度

$$\varepsilon=\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\}=\varepsilon\{n_1,n_2,n_3\}=\varepsilon\boldsymbol{n}$$

代表绕着抽象的同位旋空间三个轴的旋转,它也可解释为绕着 $\boldsymbol{n}$ 方向轴转 ε 角的旋转.同位旋旋转算符很显然是幺正的,即

$$\hat{U}_{Is}^{+}=\hat{U}_{Is}^{-1}=\hat{U}_{Is}(-\varepsilon)$$

并且这个 2×2 矩阵(参看(5.14))的行列式是

$$\det\hat{U}_{Is}(\boldsymbol{\varepsilon})=\det\exp(-i\varepsilon_\nu\hat{T}_\nu)=\exp[-i\varepsilon_\nu\mathrm{Tr}(\hat{T}_\nu)]=e^0=+1$$

这里我们用了在练习 3.2 中详细推导的关于幺正矩阵行列式的关系.为了完全理解计算中的步骤,读者可以留心再一次参考这个练习.

$\hat{U}_{Is}(\boldsymbol{\varepsilon})$的行列式可以借助(5.14)直接计算.由

$$\hat{U}_{Is}(\boldsymbol{\varepsilon})=\begin{pmatrix}\cos(\varepsilon/2)-in_3\sin(\varepsilon/2), & -(n_2+in_1)\sin(\varepsilon/2)\\ (n_2-in_1)\sin(\varepsilon/2), & \cos(\varepsilon/2)+in_3\sin(\varepsilon/2)\end{pmatrix}$$

我们得到

$$\begin{aligned}\det\hat{U}_{Is}(\boldsymbol{\varepsilon}) &=\cos^2(\varepsilon/2)+n_3^2\sin^2(\varepsilon/2)+(n_2^2+n_1^2)\sin^2(\varepsilon/2)\\ &=\cos^2(\varepsilon/2)+\sin^2(\varepsilon/2)=1\end{aligned}$$

---

① 参看本丛书《量子力学:导论》(北京大学出版社,2000).

② 对(5.14)中的最后一步变换可参看练习 3.8.

因此同位旋旋转算符(5.14)的群由行列式为1的幺正2×2矩阵组成.这群记为SU(2),表示二维的特殊(行列式+1)幺正旋转.随后同位旋旋量ψ按照

$$\begin{aligned}\psi'(\boldsymbol{r},t,s)&=\begin{pmatrix}u_1'(\boldsymbol{r},t,s)\\u_2'(\boldsymbol{r},t,s)\end{pmatrix}=\exp(-\mathrm{i}\varepsilon_\nu\hat{T}_\nu)\psi(\boldsymbol{r},t,s)\\&=\exp(-\mathrm{i}\varepsilon_\nu\hat{T}_\nu)\begin{pmatrix}u_1(\boldsymbol{r},t,s)\\u_2(\boldsymbol{r},t,s)\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{5.15}$$

来变换.显然算符$\hat{U}_{\mathrm{Is}}(\epsilon)$是幺模(行列式$=+1$)和幺正的.由于它们与真实的自旋(即角动量)形式上的类似,$\hat{T}_i$(即$\hat{\tau}_i$)算符也被称为同位自旋算符.

为了分类核子态,同位旋的第三分量

$$\hat{T}_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\tag{5.16}$$

也可被利用.它的本征态$+\frac{1}{2}$和$-\frac{1}{2}$分别代表质子和中子.这时核子的电荷算符被写为

$$\hat{Q}=e\left(\hat{T}_3+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}e(\hat{\tau}_3+1)\tag{5.17}$$

对质子和中子的本征值为$+e$和0.

练习5.1 无穷小SU(2)变换的加法定律

问题 找出对一个无穷小SU(2)变换的加法定律,即当

$$\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{\Phi}\cdot\hat{\tau}/2)=\exp(\mathrm{i}\delta\boldsymbol{\Phi}\cdot\hat{\tau}/2)\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{\Theta}\cdot\hat{\tau}/2)$$

时,找出在SU(2)空间内的旋转角$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\Phi},\delta\boldsymbol{\Phi})$的联系.

解 首先我们定义单位矢量(用一个放在符号上的波形号来表示)

$$\tilde{\Theta}=\frac{\Theta}{\Theta},\quad \delta\tilde{\Theta}=\frac{\delta\Theta}{\delta\Theta},\quad \tilde{\Phi}=\frac{\Phi}{\Phi}\tag{1a}$$

其中

$$\Theta=|\Theta|,\quad \delta\Theta=|\delta\Theta|,\quad \Phi=|\Phi|\tag{1b}$$

由于普适关系

$$(\boldsymbol{a}\cdot\hat{\tau})(\boldsymbol{b}\cdot\hat{\tau})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\mathrm{i}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\hat{\tau}\tag{2a}$$

然后有

$$(\tilde{\Theta}\cdot\hat{\tau})^2=(\delta\tilde{\Theta}\cdot\hat{\tau})^2=(\tilde{\Phi}\cdot\tilde{\tau})^2=1\tag{2b}$$

这使我们能够通过展开指数函数到它的幂级数来把SU(2)变换的指数表示转换到一个线性形式:

$$\begin{aligned}\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{\Theta}\cdot\hat{\tau}/2)&=\exp[\mathrm{i}\theta/2(\tilde{\Theta}\cdot\hat{\tau})]\\&=1+\mathrm{i}\frac{\Theta}{2}(\tilde{\Theta}\cdot\hat{\tau})-\frac{1}{2!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^2-\frac{\mathrm{i}}{3!}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^2(\tilde{\Theta}\cdot\hat{\tau})+\cdots\\&=\cos\frac{\Theta}{2}+\mathrm{i}(\tilde{\Theta}\cdot\hat{\tau})\sin\frac{\Theta}{2}\end{aligned}\tag{3a}$$

类似地

$$\exp(\mathrm{i}\delta\boldsymbol{\Theta}\cdot\hat{\boldsymbol{\tau}}/2)=\cos\frac{\delta\Theta}{2}+\mathrm{i}(\delta\tilde{\boldsymbol{\Theta}}\cdot\hat{\boldsymbol{\tau}})\sin\frac{\delta\Theta}{2}$$
$$\simeq 1+\mathrm{i}\frac{\delta\Theta}{2}(\delta\tilde{\boldsymbol{\Theta}}\cdot\hat{\boldsymbol{\tau}}) \tag{3b}$$

$$\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{\Phi}\cdot\hat{\boldsymbol{\tau}}/2)=\cos\Phi/2+\mathrm{i}(\tilde{\boldsymbol{\Phi}}\cdot\hat{\boldsymbol{\tau}})\sin\Phi/2 \tag{3c}$$

在(3b)中我们考虑到 $\delta\Theta$ 应该是一个无穷小角度并因此忽略了所有二次和高次的项.

另一方面,由于基本的要求

$$\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{\Phi}\cdot\hat{\boldsymbol{\tau}}/2)=\exp(\mathrm{i}\delta\boldsymbol{\Theta}\cdot\hat{\boldsymbol{\tau}}/2)\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{\Theta}\cdot\hat{\boldsymbol{\tau}}/2)$$

考虑到(3a),(3b)和(2a)我们得到

$$\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{\Phi}\cdot\hat{\boldsymbol{\tau}}/2)=\left[1+\mathrm{i}\frac{\delta\Theta}{2}(\delta\tilde{\boldsymbol{\Theta}}\cdot\hat{\boldsymbol{\tau}})\right]\left[\cos\frac{\Theta}{2}+\mathrm{i}(\tilde{\boldsymbol{\Theta}}\cdot\hat{\boldsymbol{\tau}})\sin\frac{\Theta}{2}\right]$$
$$=\cos\frac{\Theta}{2}-(\delta\tilde{\boldsymbol{\Theta}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\Theta}})\frac{\delta\Theta}{2}\sin\frac{\Theta}{2}$$
$$+\mathrm{i}\left[\delta\tilde{\boldsymbol{\Theta}}\frac{\delta\Theta}{2}\cos\frac{\Theta}{2}+\tilde{\boldsymbol{\Theta}}\sin\frac{\Theta}{2}-(\delta\tilde{\boldsymbol{\Theta}}\times\tilde{\boldsymbol{\Theta}})\frac{\delta\Theta}{2}\sin\frac{\Theta}{2}\right]\cdot\hat{\boldsymbol{\tau}} \tag{4}$$

因为泡利矩阵是线性独立的,比较(3c)和(4)就给出以下关系:

$$\cos\frac{\Phi}{2}=\cos\frac{\Theta}{2}-(\delta\tilde{\boldsymbol{\Theta}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\Theta}})\frac{\delta\Theta}{2}\sin\frac{\Theta}{2} \tag{5a}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}}\sin\frac{\Phi}{2}=\tilde{\boldsymbol{\Theta}}\sin\frac{\Theta}{2}+\delta\tilde{\boldsymbol{\Theta}}\frac{\delta\Theta}{2}\cos\frac{\Theta}{2}-(\delta\tilde{\boldsymbol{\Theta}}\times\tilde{\boldsymbol{\Theta}})\frac{\delta\Theta}{2}\sin\frac{\Theta}{2} \tag{5b}$$

为了对矢量 $\boldsymbol{\Phi}$ 解这个方程,我们先比较(5a)和余弦函数的加法定理

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\simeq\cos\alpha-\beta\sin\alpha$$

其中 β 是一个无穷小角.显然

$$\Phi=\Theta+\delta\Theta(\delta\tilde{\boldsymbol{\Theta}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\Theta}}) \tag{6}$$

必须成立.由于 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$,我们进而有

$$\sin\frac{\Phi}{2}=\sin\left[\frac{\Theta}{2}+\frac{\delta\Theta}{2}(\delta\tilde{\boldsymbol{\Theta}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\Theta}})\right]$$
$$\simeq\sin\frac{\Theta}{2}+\frac{\delta\Theta}{2}(\delta\tilde{\boldsymbol{\Theta}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\Theta}})\cos\frac{\Theta}{2}$$

或者,在线性近似下

$$\left(\sin\frac{\Phi}{2}\right)^{-1}=\left(\sin\frac{\Theta}{2}\right)^{-1}\left(1-\frac{\delta\Theta}{2}(\delta\tilde{\boldsymbol{\Theta}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\Theta}})\cot\frac{\Theta}{2}\right) \tag{7}$$

有了这个和(5b),我们可以找到 Φ 的方向,给出为

$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}}=\left[\tilde{\boldsymbol{\Theta}}+\frac{\delta\Theta}{2}(\delta\tilde{\boldsymbol{\Theta}}\cot\frac{\Theta}{2}-\delta\tilde{\boldsymbol{\Theta}}\times\tilde{\boldsymbol{\Theta}})\right]\times\left[1-\frac{\delta\Theta}{2}(\delta\tilde{\boldsymbol{\Theta}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\Theta}})\cot\frac{\Theta}{2}\right]$$
$$=\tilde{\boldsymbol{\Theta}}+\frac{\delta\Theta}{2}\left[\{\delta\tilde{\boldsymbol{\Theta}}-\tilde{\boldsymbol{\Theta}}(\delta\tilde{\boldsymbol{\Theta}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\Theta}})\}\cot\frac{\Theta}{2}-\delta\tilde{\boldsymbol{\Theta}}\times\tilde{\boldsymbol{\Theta}})\}\right] \tag{8}$$

把(8)式乘上 Φ 的模给出最后结果

$$\boldsymbol{\Phi}\simeq\boldsymbol{\Theta}+\delta\boldsymbol{\Theta}\left(\frac{\Theta}{2}\cot\frac{\Theta}{2}\right)-\boldsymbol{\Theta}(\delta\boldsymbol{\Theta}\cdot\boldsymbol{\Theta})\Theta^{-2}\left(1-\frac{\Theta}{2}\cot\frac{\Theta}{2}\right)-\frac{1}{2}(\delta\boldsymbol{\Theta}\times\boldsymbol{\Theta}) \tag{9}$$

(练习 5.1 完)

5.1 多核子体系的同位旋算符

让我们考虑一个 A 个核子(质子和中子)的体系. 对第 n 个核子的同位旋算符写为

$$\hat{\boldsymbol{T}}(n)=\frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{\tau}}(n),\quad n=1,2,\cdots,A$$

或者

$$\{\hat{T}_1(n),\hat{T}_2(n),\hat{T}_3(n)\}=\frac{1}{2}\{\hat{\tau}_1(n),\hat{\tau}_2(n),\hat{\tau}_3(n)\} \tag{5.18}$$

$\hat{\boldsymbol{T}}(n)$只作用于第 n 个核子. 为此原因正如在普通自旋的场合(参见 1.10 节)一样,$\hat{\boldsymbol{T}}(n)$和 $\hat{\boldsymbol{T}}(n')$对易,因此

$$[\hat{\boldsymbol{T}}(n),\hat{\boldsymbol{T}}(n')]_-=0,\quad n\neq n' \tag{5.19}$$

也即 n 空间的每个 $\hat{\boldsymbol{T}}$ 的分量和 n' 空间的每个 $\hat{\boldsymbol{T}}$ 的分量相互对易. 因此 A 个核子体系的同位旋可以简单地定义为这些核子的同位旋的和.

$$\hat{\boldsymbol{T}}=\sum_{n=1}^{A}\hat{\boldsymbol{T}}(n)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{A}\hat{\boldsymbol{\tau}}(n) \tag{5.20a}$$

由于(5.13)和(5.19),总同位旋的分量 $\hat{T}_i$ 满足对易关系

$$[\hat{T}_i,\hat{T}_j]=-\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\hat{T}_k \tag{5.20b}$$

相应地,电荷算符由(5.17)得到,为一个和,

$$\hat{Q}=\sum_{n}\hat{Q}(n)=e\sum_{n=1}^{A}\frac{1}{2}(\hat{\tau}_3(n)+1)=e(\hat{T}_3+\frac{1}{2}A) \tag{5.21}$$

因为原子核由两个数来代表:质量数 A 和电荷数(质子数)$Z=Q/e$,同位核(带有相等质量数 A 的原子核)只能差在 T_3 的值上. 顺便说一下,这就是名词"同位旋 Isobaric Spin"的来源. 名词同位旋 Isotopic Spin 也被使用,但意义不够充分,因为只有同位核而不是同位素被 T_3 分类.

我们体会到 $\hat{T}_3$ 的本征值唯一地代表一个给定的同位电荷多重态的状态,正如同角动量算符 $\hat{T}_3$ 分类角动量多重态的状态一样. 我们说角动量群和同位旋群是同构的. 为此我们可以直接搬用第 2 章的结果,对一个多重态的同位旋状态,得到

$$|TT_3\rangle \tag{5.22}$$

和关系

$$\begin{aligned}&\hat{\boldsymbol{T}}^2|TT_3\rangle=T(T+1)|TT_3\rangle,\quad T=0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},\cdots\\&\hat{T}_3|TT_3\rangle=T_3|TT_3\rangle,\quad T\geq T_3\geq -T\end{aligned} \tag{5.23}$$

每个同位旋多重态是$(2T+1)$项简并的,正如角动量多重态有$(2j+1)$次简并. 对 $T=\frac{1}{2}$,我们有

基本的同位旋二重态

$$\left|\frac{1}{2}T_3\right\rangle$$

其中

$$\tilde{\chi}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}=\left|\frac{1}{2},\ T_3=\frac{1}{2}\right\rangle\equiv|\mathrm{p}\rangle$$

是质子态，

$$\tilde{\chi}_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}=\left|\frac{1}{2},T_3=-\frac{1}{2}\right\rangle\equiv|\mathrm{n}\rangle \tag{5.24}$$

是中子态. 这是最小的非平凡的 SU(2)多重态. 即所有较高的多重态能由这个多重态构成. 自旋 0，同时所有其他出现在自然界中的自旋可以从自旋$\frac{1}{2}$构成. $T=0$ 的最小的 SU(2)多重态是平凡的，因为只有 $T=0$ 的多重态可以由它的构造出来. 相应地在 $T=1$ 的场合我们谈到同位旋三重态，它在自然界中由 π 介子和 Σ 重子实现.

例 5.2　氘核

氘核包含一个质子和一个中子. 它的波函数由一个空间部分 $\mathrm{R}_{nl}(r)\mathrm{Y}_{lm_l}(\vartheta,\varphi)$(描写两个核子的相对运动)，自旋部分 χ_{m_s}和同位旋部分$|TT_3\rangle$组成. 因此

$$\psi_{\text{氘核}}=\mathrm{R}_{nl}[\mathrm{Y}_{lm_l}\times\chi_{sm_s}]^{[j]}|TT_3\rangle \tag{1}$$

方括号显示出角动量和自旋到总角动量的耦合，

$$[\mathrm{Y}_{lm_l}\times\chi_{sm_s}]^{[j]}=\sum_{m_l,m_s}(lsj|m_lm_sm),\mathrm{Y}_{lm_l}\chi_{sm_s}(1,2)$$

$$\chi_{sm_s}(1,2)=\sum_{m_l,m_s}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2}s|m_1m_2m_s\right)\chi_{\frac{1}{2}m_l}(1)\chi_{\frac{1}{2}m_2}(2) \tag{2}$$

$|TT_3\rangle$由单个核子的同位旋波函数 $\tilde{\chi}_{\frac{1}{2}t_k}$构成，即

$$|TT_3\rangle=\sum_{t_1,t_2}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2}T|t_2t_2T_3\right)\tilde{\chi}_{\frac{1}{2}t_1}(1)\tilde{\chi}_{\frac{1}{2}t_2}(2) \tag{3}$$

耦合同位旋波函数的克莱布许-高登系数和耦合角动量波函数的克莱布许-高登系数是一样的. 这直接由相应旋转群和同位旋群的 SO(3)和 SU(2)李代数的同构性得出. 确实我们早就强调过两个李代数是恒等的，因为我们对旋转群有

$$[\hat{J}_i,\hat{J}_j]_-=\mathrm{i}\epsilon_{ijk}\hat{J}_k \tag{4a}$$

对同位旋群有

$$[\hat{T}_i,\hat{T}_j]_-=\mathrm{i}\epsilon_{ijk}\hat{T}_k \tag{4b}$$

因为氘核的总电荷是 $Q=e$ 和核子数 $A=2$，按照(5.21)这就得出 $T_3=0$. 然而总同位旋可以取两个值

$$T=0,T=1$$

对 $T=0$，也即同位旋单态，T_3 只能为 0. 这是氘核的基态. 同位旋三重态的状态只有$|T=1,T_3=0\rangle$属于氘核. 这个同位旋三重态的两个别的状态$|T=1,T_3=1\rangle$和 $T=1,T_3=-1\rangle$与乘积 $\tilde{\chi}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\tilde{\chi}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$和 $\tilde{\chi}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}\tilde{\chi}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$的组合分别相

对应.因此按照(5.24)它们分别是两个质子和两个中子的状态.它们不属于氘核体系(质子-中子体系)但属于双中子和双质子体系,它们是不稳定的.事实上所有 $T=1$ 的两个核子体系是不稳定的,特别是 $T=1$ 的氘核状态,显示了 $T=1$ 多重态状态间的紧密联系.

可以注意到对单态的同位旋波函数(3)

$$\begin{aligned}|T=0,T_3=0\rangle &= \sum_{t_1}\left(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}0\middle|t_1\ -t_1 0\right)\tilde{\chi}_{\frac{1}{2}t_1}(1)\tilde{\chi}_{\frac{1}{2}-t_1}(2)\\ &=\left(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}0\middle|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}0\right)\tilde{\chi}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\tilde{\chi}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(2)\\ &\quad+\left(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}0\middle|-\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}0\right)\tilde{\chi}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(1)\tilde{\chi}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\\ &=\frac{1}{\sqrt{2}}\{\tilde{\chi}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\tilde{\chi}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(2)-\tilde{\chi}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(1)\tilde{\chi}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\}\end{aligned}\tag{5}$$

相对于交换 p↔n(或者粒子 1↔2)显然是反对称的,而三重态状态

$$\begin{aligned}|T=1,T_3=0\rangle &= \sum_{t_1}\left(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}1\middle|t_1\ -t_1 0\right)\tilde{\chi}_{\frac{1}{2}t_1}\tilde{\chi}_{\frac{1}{2}-t_1}\\ &=\left(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}1\middle|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}0\right)\tilde{\chi}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\tilde{\chi}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(2)\\ &\quad+\left(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}1\middle|-\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}0\right)\tilde{\chi}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(1)\tilde{\chi}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\\ &=\frac{1}{\sqrt{2}}\{\tilde{\chi}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\tilde{\chi}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(2)+\tilde{\chi}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(1)\tilde{\chi}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\}\end{aligned}\tag{6}$$

相对于交换 p↔n(或者粒子 1↔2)是对称的.由于泡利原理,总波函数(1)相对于粒子交换必须是反对称的.因此同位旋单态状态必须出现在对称自旋态 $s=1$(参看(2))的组合中.相反的情形对对称的同位旋三重态成立,它跟自旋单态($s=0$)配对.

为了完全起见,我们仍引用属于同位旋三重态的两个别的状态

$$\begin{aligned}|T=1,T_3=1\rangle&=\tilde{\chi}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\tilde{\chi}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)(\text{两个质子})\\ |T=1,T_3=-1\rangle&=\tilde{\chi}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(1)\tilde{\chi}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(2)(\text{两个中子})\end{aligned}\tag{7}$$

尽管它们描写的是不稳定体系.

对于缺少两个核子体系的 $T=1$ 束缚态的物理理由是跟泡利原理紧密相联的.对 $T=0$ 的同位旋波函数,正如我们已看到的,是相对于交换两个粒子反对称的,而 $T=1$ 的三重态状态是对称的.因为核子-核子相互作用力在自旋 1 道里是在短程上吸引的,在位形空间的波函数必须量子数 $l=0$,也即它必须是完全对称的.这是为什么一个束缚态只能由 $T=0$[①]来构成的原因.弄清这件事的最好方法是说明强相互作用哈密顿量 $\hat{H}_{强}$ 是同位旋不变的和因此依赖于同位旋群的卡西米尔算符 $\hat{\boldsymbol{T}}^2$,即 $\hat{H}=\hat{H}(\hat{\boldsymbol{T}}^2)$.对不同的多重态,$\hat{H}$(以及随着它包含的位能)能取不同的值.例如,如果

$$\hat{H}(T)=f(r)\mathbb{1}+g(r)\hat{\boldsymbol{T}}^2$$

那么该哈密顿量对同位旋单态和同位旋三重态分别为

---

① 关于氘核和同位旋形式的应用的更多信息看,例如,T. M. Eisenbers, W. Greiner: *Microscopic Theory of the Nucleus*(第二版),Nuclear Theory, Vol. 3(North-Holland,Amsterdam 1976).

$$\hat{H}(T=0)=f(r),\ \hat{H}(T=1)=f(r)+2g(r)$$

氘核的 $T=1$ 状态是不束缚的这一观察结果表明 $f(r)$必须是吸引函数,带有一个势能口袋,而$f(r)+2g(r)$则不是.(**例 5.2 完**)

练习 5.3 核力的电荷独立性

问题 作为强相互作用同位旋不变性的结果,证明核力的电荷无关性.

解 由于要求同位旋群是强相互作用的对称群,下式必须成立

$$[\hat{H}_{强},\hat{\boldsymbol{T}}]_-=0\ , \tag{1}$$

或者等价地

$$[\hat{H}_{强},\hat{U}_{ls}(\varepsilon)]_-=0$$

这个方程清楚地定义了术语"同位旋不变性".如果,正如经常有这种情况,哈密顿量本身是不知道的,我们必须求助于 $\hat{S}$ 矩阵算符

$$\hat{S}=\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{h}\hat{H}t\right). \tag{2}$$

相应地随后由(1)得出

$$[\hat{S}_{强},\hat{T}]_-=0\ 或[\hat{S}_{强},\hat{U}_{ls}(\varepsilon)]_-=0 \tag{3}$$

或者反过来由(3)也能得到(1).我们由一般地考虑(参看(3.38)－(3.40)和例 3.13 中方程(2)－(6))知道一个同位旋多重态,也称为电荷多重态是能量简并的.我们利用关系

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\hat{T}_2}\left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\pi/2)\hat{\tau}_2}\left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle=\left(\cos\frac{1}{2}\pi-\mathrm{i}\hat{\tau}_2\sin\frac{1}{2}\pi\right)\left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle$$

$$=-\mathrm{i}\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right\rangle$$

和

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\hat{T}_2}\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right\rangle=-\mathrm{i}\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$=-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=-\left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle$$

它们可以由缩写符号写出来

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\hat{T}_2}|\mathrm{p}\rangle=|\mathrm{n}\rangle\quad,\quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\hat{T}_2}|\mathrm{n}\rangle=-|\mathrm{p}\rangle \tag{4}$$

对两核子状态得出

$$\exp[-\mathrm{i}\pi(\hat{T}_2(1)+\hat{T}_2(2))]|\mathrm{p}(1)\mathrm{p}(2)\rangle=|\mathrm{n}(1)\mathrm{n}(2)\rangle$$

和

$$\exp[-\mathrm{i}\pi(\hat{T}_2(1)+\hat{T}_2(2))]|\mathrm{n}(1)\mathrm{n}(2)\rangle=|\mathrm{p}(1)\mathrm{p}(2)\rangle \tag{5}$$

由此能够得到两质子体系的强相互作用

$$\langle\mathrm{p}(1)\mathrm{p}(2)|\hat{H}_{强}|\mathrm{p}(1)\mathrm{p}(2)\rangle$$

$$=\langle\exp[-\mathrm{i}\pi(\hat{T}_2(1)+\hat{T}_2(2))]\mathrm{n}(1)\mathrm{n}(2)|\hat{H}_{强}|$$

$$\times\exp[-\mathrm{i}\pi(\hat{T}_2(1)+\hat{T}_2(2))]\mathrm{n}(1)\mathrm{n}(2)\rangle$$

$$\begin{aligned}&=\langle nn|\exp[+i\pi(\hat{T}_2(1)+\hat{T}_2(2))]\hat{H}_{强}\exp[+i\pi(\hat{T}_2(1)+\hat{T}_2(2))]|nn\rangle\\&=\langle nn|\hat{H}_{强}|nn\rangle\end{aligned}\tag{6}$$

因此我们得出结论,两质子的相互作用等于两中子的相互作用.(**练习 5.3 完**)

例 5.4 π 介子三重态

三个有以下质量(能量)和电荷的 π 介子是从实验中知道的,看下面的表:

表 π 介子的性质

π 介子	质量 m_0c^2	质量差[Mev]	电荷	寿命[s]	自旋	磁矩
π^+	139.59	4.59	e	$(2.55\pm0.03)\times10^{-8}$	0	0
π^0	135.00	0	0	0.83×10^{-16}	0	0
π^-	139.59	4.59	$-e$	$(2.55\pm0.03)\times10^{-8}$	0	0

很清楚所有 π 介子质量(能量)是接近相等的.类似于质子和中子之间的质量差,这个近似等式可以解释为强相互作用(它决定质量的主要部分)在同位旋空间是不变的,以及这个很小的质量差($\Delta m=4.59$Mev)是由电磁相互作用和别的相互作用引起的.确实,一个均匀带电的,半径为 $r_0=\hbar/m_\pi c$(=π 介子的康普顿波长)的球的库仑能可以很容易计算.我们得到①,通过精细结构常数 $e^2/\hbar C=1/137$,

$$\begin{aligned}|E_c|&=\frac{3}{5}\frac{e^2}{r_0}=\frac{3}{5}\frac{e^2}{\hbar c}m_\pi c^2\\&=\frac{3}{5}\frac{1}{137}\times 139\text{MeV}\simeq\frac{3}{5}\text{MeV}\end{aligned}\tag{1}$$

因此我们在考虑强相互作用期间将不管这个小的质量差.我们将解释三个 π 介子为一个同位旋三重态或电荷三重态(它意味着同一东西).这建议指定

$$\begin{aligned}|T=1,\ T_3=1\rangle&=-1|\pi^+\rangle\\|T=1,\ T_3=0\rangle&=|\pi^0\rangle\\|T=1,\ T_3=-1\rangle&=+|\pi^-\rangle\end{aligned}\tag{2}$$

(2)式右边相位的选取是任意的,但一旦选取后,它就必须保持下去.我们没有对所有 π 介子态选同样的相位,而是在(2)中对正 π 介子用了一个因子(−1),这件事具有深刻的原因,我们现在来解释它:

因为同位旋群的李代数同构于角动量代数,这就如同在(2.18a),(2.18b)一样得出

$$\begin{aligned}\hat{T}_\pm|TT_3\rangle&=[T(T+1)-T_3(T_3\pm1)]^{1/2}|TT_3\pm1\rangle\\\hat{T}_0|TT_3\rangle&=T_3|TT_3\rangle\end{aligned}\tag{3}$$

其中 $\hat{T}_\pm=\hat{T}_1\pm i\hat{T}_2$,$\hat{T}_0=\hat{T}_3$.

正如我们知道的,由对易关系从(3)直接得出

$$[\hat{T}_3,\hat{T}_\pm]_-=\pm\hat{T}_\pm\quad,\quad[\hat{T}_+,\hat{T}_-]_-=2\hat{T}_3\tag{4}$$

它反过来,来源于(5.13)当 $\hat{T}_\pm=\hat{T}_1\pm i\hat{T}_2$ 和 $\hat{T}_0=\hat{T}_3$.它们恒等于角动量算符的对易关系(2.7).由(3)得出关系

---

① 看 J. D. Jackson:*Classical Electrodynamics*,第二版(Wiley, New York 1975)或 W. Greiner:;*Theoretische Physik III*,*Klassische Elektrodynamik*(Harri Deutsch, Frankfurt 1986).

$$\hat{T}_+|11\rangle=0\quad,\quad \hat{T}_+|10\rangle=\sqrt{2}\,|11\rangle\quad,\quad \hat{T}_+|1-1\rangle=\sqrt{2}\,|10\rangle, \tag{5a}$$

$$\hat{T}_3|11\rangle=1|11\rangle\quad,\quad \hat{T}_3|10\rangle=0\quad,\quad \hat{T}_3|1-1\rangle=-1|1-1\rangle, \tag{5b}$$

$$\hat{T}_-|11\rangle=\sqrt{2}\,|10\rangle\quad,\quad \hat{T}_-|10\rangle=\sqrt{2}\,|1-1\rangle\quad,\quad \hat{T}_-|1-1\rangle=0 \tag{5c}$$

利用(2)这些方程可以被写为

$$\begin{aligned}
&\hat{T}_+(\sqrt{2}\,|\pi^+\rangle)=0 && [\hat{T}_+,\hat{T}_+]_-=0\\
&\hat{T}_+(|\pi^0\rangle)=-(\sqrt{2}\,|\pi^+\rangle) && [\hat{T}_+,\hat{T}_3]_-=-\hat{T}_+\\
&\hat{T}_+(\sqrt{2}\,|\pi^-\rangle)=2(\pi^0\rangle) && [\hat{T}_+,\hat{T}_-]_-=2\hat{T}_3
\end{aligned} \tag{6a}$$

$$\begin{aligned}
&\hat{T}_3(\sqrt{2}\,|\pi^+\rangle)=+(\sqrt{2}\,|\pi^+\rangle) && [\hat{T}_3,\hat{T}_+]_-=+\hat{T}_+\\
&\hat{T}_3(\pi^0\rangle)=0 && [\hat{T}_3,\hat{T}_3]_-=0
\end{aligned} \tag{6b}$$

$$\begin{aligned}
&\hat{T}_3(\sqrt{2}\,|\pi^-\rangle)=-(\sqrt{2}\,|\pi^-\rangle) && [\hat{T}_3,\hat{T}_-]_-=-\hat{T}_-
\end{aligned} \tag{6b}$$

$$\begin{aligned}
&\hat{T}_-(\sqrt{2}\,|\pi^+\rangle)=-2(|\pi^0\rangle) && [\hat{T}_-,\hat{T}_+]_-=-2\hat{T}_3\\
&\hat{T}_-(|\pi^0\rangle)=(\sqrt{2}\,|\pi^+\rangle) && [\hat{T}_-,\hat{T}_3]_-=\hat{T}_-\\
&\hat{T}_-(\sqrt{2}\,|\pi^-\rangle)=0 && [\hat{T}_-,\hat{T}_-]_-=0
\end{aligned} \tag{6c}$$

为了更好地理解考虑的对象，我们注意到(6)的右方类似于同位旋代数(4)的公式. 我们现在可以理解对正 π 介子在(2)中选了一个负号：它保证了方程(6)中两组方程的完全符合. 清楚地

$$\hat{T}_+\leftrightarrow\sqrt{2}\,|\pi^+\rangle\quad,\quad \hat{T}_3\leftrightarrow|\pi^0\rangle\quad,\quad \hat{T}_-\leftrightarrow\sqrt{2}\,|\pi^-\rangle \tag{7}$$

和

$$\hat{T}_\mu|\pi^\nu\rangle\leftrightarrow[\hat{T}_\mu,\hat{T}_\nu]_- \tag{8}$$

对 $\mu,\nu=+,-$ 彼此相应(相对 3). 这个相应对第一个元素($\hat{T}_\mu$)同时对第二个元素($|\pi^\nu\rangle$和 $\hat{T}_\nu$)是线性的. 因此(8)的两边的所有变换是同构的，使得在 $|\pi^\nu\rangle$ 中的线性变换相应于在 $\hat{T}_\nu$ 中的同样线性变换，反之亦然. 结果同位旋群的生成元从球表示变到直角表示，即

$$\begin{pmatrix}\hat{T}_1\\ \hat{T}_2\\ \hat{T}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & (\hat{T}_++\hat{T}_-)\\ -\frac{1}{2}\mathrm{i} & (\hat{T}_+-\hat{T}_-)\\ & \hat{T}_0\end{pmatrix} \tag{9}$$

是与对易关系(4)到

$$[\hat{T}_i,\hat{T}_j]_-=\mathrm{i}\epsilon_{ijk}\hat{T}_k \tag{10}$$

的变换联系在一起的. 类似地我们定义 π 介子多重态的直角表示

$$\begin{pmatrix}|\pi_1\rangle\\ |\pi_2\rangle\\ |\pi_3\rangle\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & (|\pi^+\rangle+|\pi^-\rangle)\\ -\mathrm{i}/\sqrt{2} & (|\pi^+\rangle-|\pi^-\rangle)\\ & |\pi^0\rangle\end{pmatrix} \tag{11}$$

由(10)通过这个同构，我们得到

$$\hat{T}_i|\pi_j\rangle=\mathrm{i}\epsilon_{ijk}|\pi_k\rangle \tag{12}$$

这一关系可以由(3),借助(9)和(11)直接得到.在(11)中的因子 $1/\sqrt{2}$ 是不等于(9)中的类似因子 $\frac{1}{2}$ 的,因为状态 $|\pi_i\rangle$ 被归一化到 1,

$$\langle\pi_i|\pi_j\rangle=\delta_{ij} \tag{13}$$

(例 5.4 完)

5.2 李代数表示的一般性质

通过例 5.4 中的方程(6),我们认识了对每个李代数都成立的结构并称为李代数的正规(或忠实)表示.为了理解它,我们将先解释术语"李代数的表示":完全对应于一个群的表示,一个李代数的表示定义为这个代数到一个矢量空间的线性算符的一个射影,即算符(矩阵) $\hat{D}(\hat{L}_i)$ 被指定给该李代数的元素 $\hat{L}_i$(李群的生成元)

$$\hat{L}_i\to\hat{D}(\hat{L}_i) \tag{5.25}$$

这些算符必须满足线性的要求,

$$\hat{D}(\alpha\hat{L}_i+\beta\hat{L}_j)=\alpha\hat{D}(\hat{L}_i)+\beta\hat{D}(\hat{L}_j) \tag{5.26}$$

并且必须对该李代数是同态的

$$\hat{D}([\hat{L}_i,\hat{L}_j]_-)=[\hat{D}(\hat{L}_i),\hat{D}(\hat{L}_j)]_- \tag{5.27}$$

最后一个方程说明指定给对易子 $[\hat{L}_i,\hat{L}_j]_-$ 的算符 $\hat{D}([\hat{L}_i,\hat{L}_j]_-)$ 必须等于指定给 $\hat{L}_i$ 和 $\hat{L}_j$ 的 $\hat{D}$ 算符的对易子.一般说,在带有基 $\{|\phi_i\rangle\}$ 的矢量空间中的表示通过

$$\hat{L}_i|\phi_j\rangle=D(\hat{L}_i)_{kj}|\phi_k\rangle \tag{5.28}$$

来指定每一个算符(注意这个求和规定),一个矩阵

$$D(\hat{L}_i)_{kj}=\langle\phi_k|\hat{L}_i|\phi_j\rangle=(\hat{L}_i)_{kj} \tag{5.29}$$

因此 $D(\hat{L}_i)_{kj}$ 是这个算符 $\hat{L}_i$ 在表象 $\{|\phi_k\rangle\}$ 中的矩阵元.它们满足要求

$$\hat{D}(\hat{L}_i)\cdot\hat{D}(\hat{L}_j)=\hat{D}(\hat{L}_i\hat{L}_j) \tag{5.30}$$

它详细地写为(对重复指标 m 求和)

$$\hat{D}(\hat{L}_i)_{nm}\hat{D}(\hat{L}_j)_{mk}=D(\hat{L}_i\hat{L}_j)_{nk} \tag{5.31}$$

或者按(5.29)

$$\langle n|\hat{L}_i|m\rangle\langle m|\hat{L}_j|k\rangle=\langle n|\hat{L}_i\hat{L}_j|k\rangle$$

因此通过 $D(\hat{L}_i)$ 和 $D(\hat{L}_j)$ 的简单矩阵乘法得到的这矩阵等于指定给算符 $\hat{L}_i\hat{L}_j$ 的矩阵 $D(\hat{L}_i\hat{L}_j)$.方程(5.26)和(5.27)也必须满足.借助(5.28)和(5.30)

$$\begin{aligned}D(\alpha\hat{L}_i+\beta\hat{L}_j)_{nm}&=\langle n|\alpha\hat{L}_i+\beta\alpha\hat{L}_j|m\rangle\\&=\alpha\langle n|\alpha\hat{L}_i|m\rangle+\beta\langle n|\hat{L}_j|m\rangle\\&=\alpha D(\alpha\hat{L}_i)_{nm}+\beta D(\hat{L}_j)_{nm}\end{aligned} \tag{5.32}$$

由此有

$$\hat{D}([\hat{L}_i,\hat{L}_j]_-)=\hat{D}(\hat{L}_i\hat{L}_j-\hat{L}_i\hat{L}_j)=\hat{D}(\hat{L}_i\hat{L}_j)-\hat{D}(\hat{L}_i\hat{L}_j)$$

考虑(5.30)有，

$$\hat{D}([\hat{L}_i,\hat{L}_j]_-)=\hat{D}(\hat{L}_i)\hat{D}(\hat{L}_j)-\hat{D}(\hat{L}_j)\hat{D}(\hat{L}_i)=[\hat{D}(\hat{L}_i),\hat{D}(\hat{L}_j)]_- \tag{5.33}$$

5.3　李代数的正规(或忠实)表示

一个生成元 $\hat{L}_i$ 可以作用的可能的矢量空间$\{|\phi_k\rangle\}$是带有矢量

$$|L_i\rangle \tag{5.34}$$

的空间. 必须有和生成元一样数目的这种矢量，并且借助于类比李代数的对易关系

$$[\hat{L}_i,\hat{L}_j]_-=C_{ijk}\hat{L}_k \tag{5.35}$$

应该成立下面的关系

$$\hat{L}_i|L_j\rangle \overset{定义}{\equiv} C_{ijk}|L_k\rangle \tag{5.36}$$

和

$$\langle L_i|L_j\rangle \overset{定义}{\equiv} \delta_{ij} \tag{5.37}$$

我们就此定义了算符在这矢量空间的作用. 方程(5.36)定义了算符 $\hat{L}_i$ 在矢量$|L_j\rangle$上的作用，而(5.37)定义了内积. 对照(5.36)和(5.28)，得出

$$D(\hat{L}_i)_{kj}=C_{ijk} \tag{5.38}$$

$$D(\alpha\hat{L}_i)_{kj}=\alpha C_{ijk} \tag{5.39}$$

因而结构常数本身是生成元的矩阵表示，而生成元 $\hat{L}_i$ 的矩阵$(L_i)_{kj}$按(5.38)由 C_{ijk}给出. 现在我们想仔细地证明关系(5.30)，(5.31)和(5.32)确实成立，即与(5.36)和(5.38)没有矛盾.

方程(5.31)可以很容易证明

$$\begin{aligned} D(\hat{L}_i)_{nm}D(\hat{L}_j)_{mk}&=D(\hat{L}_i\hat{L}_j)_{nk}\\ C_{imn}C_{jkm}&=\langle L_n|\hat{L}_i\hat{L}_j|L_k\rangle=\langle L_n|\hat{L}_iC_{ikm}|L_m\rangle\\ &=C_{ikm}\langle L_n|C_{iml}|L_l\rangle=C_{jkm}C_{imi}\delta_{nl}\\ &=C_{jkm}C_{imn} \end{aligned} \tag{5.40}$$

下一步我们证明(5.33)

$$D(\hat{L}_i\hat{L}_j-\hat{L}_j\hat{L}_i)_{nk}=(\hat{D}(\hat{L}_i)\hat{D}(\hat{L}_j)-\hat{D}(\hat{L}_j)\hat{D}(\hat{L}_i))_{nk} \tag{5.41}$$

它和(5.35)，(5.38)－(5.40)一起可以被写成形式

$$D(C_{ijm}\hat{L}_m)_{nk}=\hat{D}(\hat{L}_i)_{nm}\hat{D}(\hat{L}_j)_{mk}-\hat{D}(\hat{L}_j)_{mn}\hat{D}(\hat{L}_i)_{mk}$$

或

$$C_{ijm}C_{mkn}=C_{imn}C_{jkm}-C_{jmn}C_{ikm} \tag{5.42}$$

因此

$$C_{ijm}C_{mkn}+C_{jkm}C_{min}+C_{kim}C_{mjn}=0 \tag{5.43}$$

在(5.42)中我们用到了(5.35)的明显的线性,并在(5.43)中我们用了前两个指标的反对称性 $C_{ijk}=-C_{jik}$(参看(3.14)).关系(5.43)如同我们从雅可比恒等式(看(3.16))推出的一样是恒等地满足的.因此(5.41)对特殊表示(5.35)和(5.36)成立.它叫做正规表示或忠实表示.

在例 5.4 中的方程(6)的两边的类似,因此有深刻的本质:它对所有李代数成立.因此这个正规(或忠实)表示可以对每个李代数构造.我们已经在上一个例的(6)中对同位旋代数的特殊场合证明了这个定理.

练习 5.5 群生成元的归一化

问题 证明一个幺正矩阵群,即对每一个群元素 U 有 $U^{-1}=U^{+}$,的生成元 $\hat{L}_i$ 可以这样来选,使得关系 $T_r(\hat{L}_i\hat{L}_j)=\delta_{ij}/2$ 成立.进一步表明产生的结构常数是纯虚的,并在此场合是全反对称的.

解 按照(3.8)一个幺正群的生成元是厄密的,即 $\hat{L}_i^{+}=\hat{L}_i$.作为这一性质的例外,直到现在它们被任意地选取.我们考察表达式

$$\gamma_{ik}=\mathrm{Tr}(\hat{L}_i\hat{L}_k) \tag{1}$$

由于迹对矩阵循环转置的不变性,它可以写为

$$\gamma_{ik}=\mathrm{Tr}(\hat{L}_i\hat{L}_k)=\mathrm{Tr}(\hat{L}_k\hat{L}_i)=\gamma_{ki} \tag{2}$$

因为矩阵 $\hat{A}$ 的迹等于转置矩阵 $\hat{A}^T$ 的迹,我们发现

$$\begin{aligned}\gamma_{ik}^{*}&=\mathrm{Tr}(\hat{L}_i^{*}\hat{L}_k^{*})=\mathrm{Tr}[(\hat{L}_i^{*}\hat{L}_k^{*})^T]=\mathrm{Tr}[(\hat{L}_i^{*})^T(\hat{L}_i^{*})^T]\\&=\mathrm{Tr}[\hat{L}_i^{+}\hat{L}_k^{+}]=\mathrm{Tr}(\hat{L}_k\hat{L}_i)=\gamma_{ik}\end{aligned} \tag{3}$$

因此 γ_{ik} 可以写为一个实对称矩阵的分量.这样一个矩阵可以用正交变换对角化,即

$$\sum_{j,k}R_{ij}\gamma_{jk}R_{kl}^{-1}=\lambda_i\delta_{il} \tag{4}$$

其中 λ_i 是矩阵的本征值,并且

$$\sum_{j}R_{ij}R_{kj}=\delta_{ik}\Rightarrow R_{kl}^{-1}=R_{lk} \tag{5}$$

由此得到

$$\sum_{j,k}R_{ij}\gamma_{jk}R_{lk}=\lambda_i\delta_{il} \tag{6}$$

我们也可以对我们的群选取算符 $\hat{L}_i$ 的任何线性组合(带有实系数).因此我们可以通过

$$\hat{F}_j=\sum_{i}R_{ij}\hat{L}_i\quad,\quad \hat{L}_i=\sum_{j}R_{ij}\hat{F}_j, \tag{7}$$

定义一个新的生成元集合,其中第二个关系是由(5)得到的.因为 R_{ij} 是实的,那么生成元 $\hat{F}_i$ 也是厄密的.现在我们发现,按照(6)

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\hat{F}_i\hat{F}_l)&=\sum_{jk}R_{ij}R_{lk}\mathrm{Tr}(\hat{F}_j\hat{F}_k)\\&=\sum_{jk}R_{ij}R_{lk}\gamma_{jk}=\lambda_i\delta_{il}\end{aligned} \tag{8}$$

另外我们可以证明本征值 λ_i 是大于 0 的.用希腊字母记 $\hat{F}_i$ 的矩阵指标,我们由(8),对 $i=l$,得到

$$\lambda_i=\mathrm{Tr}(\hat{F}_i\hat{F}_i)=\mathrm{Tr}(\hat{F}_i\hat{F}_i^{+})=\sum_{\alpha\beta}(\hat{F}_i)_{\alpha\beta}(F_i^{+})_{\beta\alpha}$$

$$=\sum_{\alpha\beta}(F_i)_{\alpha\beta}(F_i)^*_{\alpha\beta}=\sum_{\alpha\beta}|(F_i)_{\alpha\beta}|^2>0, \tag{9}$$

因为至少 $\hat{F}_i$ 的一个分量不为0.因此我们归一化新生成元为

$$\hat{F}_i\to\hat{T}_i=\frac{1}{\sqrt{2\lambda_i}}\hat{F}_i \tag{10}$$

因此我们得到

$$\mathrm{Tr}(\hat{T}_i\hat{T}_j)=\frac{1}{2}\delta_{ij} \tag{11}$$

这是要求的结果.结构常数是全反对称的,正如通过

$$[\hat{T}_i,\hat{T}_j]_-=\sum_k C_{ijk}\hat{T}_k$$

$$\Rightarrow\mathrm{Tr}\{[\hat{T}_i,\hat{T}_j]\hat{T}_l\}=\sum_k C_{ijk}\mathrm{Tr}(\hat{T}_k\hat{T}_l)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_k C_{ijk}\delta_{kl}=\frac{1}{2}C_{ijl} \tag{12}$$

可以表明的.由于迹相对于转置的不变性,我们写下

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\{[\hat{T}_i,\hat{T}_j]\hat{T}_l\}&=\mathrm{Tr}\{\hat{T}_i\hat{T}_j\hat{T}_l-\hat{T}_j\hat{T}_i\hat{T}_l\}\\&=\mathrm{Tr}\{\hat{T}_j\hat{T}_l\hat{T}_i-\hat{T}_l\hat{T}_j\hat{T}_i\}\\&=\mathrm{Tr}\{[\hat{T}_j,\hat{T}_l]\hat{T}_i\}=\frac{1}{2}C_{jli}\end{aligned} \tag{13}$$

与(12)比较得出

$$C_{ijl}=C_{jli} \tag{14}$$

因为 C_{ijl} 相对于 i 和 j 是反对称的,这对 C_{jli} 也成立且 $C_{lji}=-C_{jli}$.这样结构常数相对于交换任意两个指标是反对称的.最后我们证明 C_{ijk} 是纯虚的.通过下面方程的厄密共轭

$$\hat{T}_i\hat{T}_j-\hat{T}_j\hat{T}_i=C_{ijk}\hat{T}_k \tag{15}$$

由于 $\hat{T}_i$ 的厄密性,我们发现

$$\begin{aligned}(C_{ijk})^*\hat{T}_k&=(\hat{T}_i\hat{T}_j-\hat{T}_j\hat{T}_i)^+=\hat{T}_j^+\hat{T}_i^+-\hat{T}_i^+\hat{T}_j^+\\&=\hat{T}_j\hat{T}_i-\hat{T}_i\hat{T}_j=C_{jik}\hat{T}_k=-C_{ijk}\hat{T}_k\end{aligned} \tag{16}$$

因此得出

$$(C_{ijk})^*=-C_{ijk} \tag{17}$$

它意味着 C_{ijk} 是纯虚的,即 $C_{ijk}=\mathrm{i}f_{ijk}$,其中 f_{ijk} 是实的.对于度规张量我们得到

$$g_{ij}=\sum_{kl}C_{ikl}C_{jlk}=-\sum_{kl}f_{ikl}f_{jlk}=\sum_{kl}f_{ikl}f_{jkl} \tag{18}$$

让我们假设 $\det(g_{ij})=0$,这样,存在一个实的本征矢量,它满足

$$\sum_j g_{ij}\mu_j=0 \tag{19}$$

并因此也有

$$0=\sum_{ij}\mu_i g_{ij}\mu_j=\sum_{ijkl}\mu_i f_{ikl}f_{jkl}\mu_j=\sum_{kl}\Big(\sum_i\mu_i f_{ikl}\Big)^2\geq 0 \tag{20}$$

这个表达式仅当

$$\sum_i\mu_i f_{ikl}=0 \tag{21}$$

成立时变为 0，这指出

$$[\sum_j \mu_j \hat{T}_j, \hat{T}_k] = \mathrm{i} \sum_j \mu_j f_{jkl} \hat{T}_l = 0 \tag{22}$$

相应地线性组合 $\sum_j \mu_j \hat{T}_j$ 与所有矩阵对易，而因此它是一个独立的 U(1)子群的生成元. 因此由嘉当判据得出，即仅当没有子群存在时一个幺正矩阵群是半单的. (**练习 5.5 完**)

5.4 同位旋矢量的变换规律

同位旋代数正规表示的正则形式是(看例 5.4，方程(12))

$$\hat{T}_i |\pi_j\rangle = \mathrm{i}\varepsilon_{ijk} |\pi_k\rangle \tag{5.44}$$

现在用它再次说明在所谓的同位空间(同位旋空间)中的同位旋变换. 如果我们考虑一个带参数 $\delta\varepsilon_i$ 的无穷小同位旋变换，那么由(5.14)和(5.44)得出

$$|\pi_j'\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta\varepsilon_i \hat{T}_i} |\pi_j \simeq (\mathbb{1} - \mathrm{i}\delta\varepsilon_i \hat{T}_i) |\pi_j\rangle = |\pi_j\rangle + \delta\varepsilon_i \varepsilon_{ijk} |\pi_k\rangle$$

或

$$|\pi_j'\rangle = |\pi_j\rangle - \varepsilon_{ijk}\delta\varepsilon_i |\pi_k\rangle + O(\delta\varepsilon^2) \tag{5.45}$$

这些方程描写了在一个三维实空间中的无穷小的实的和正交的变换，也即我们正在处理旋转，正如我们已经从角动量代数(O(3)的李代数)和同位旋位数的同构中，因而从旋转群 O(3)和同位旋群 SU(2)的同构中得到的. 这个同位空间$\mathbb{R}^3$由三个正交矢量展开(看图 5.1)

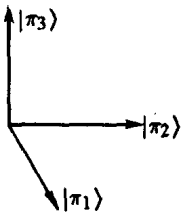


图 5.1 矢量 $|\pi_k\rangle$ 张开同位旋空间

$$\{|\pi_1\rangle, |\pi_2\rangle, |\pi_3\rangle\} = \mathbb{R}^3 \quad , \quad \langle\pi_i|\pi_j\rangle = \delta_{ij} \tag{5.46}$$

它不恒等于日常经验的三维位形空间$\mathbb{R}^3$，但同构于它. 正是这个同构使得我们能够得出许多这个同位旋空间的性质和甚至理解它们. 类似于$\mathbb{R}^3$中的矢量，这样很自然定义同位旋矢量 $\boldsymbol{v}$，作为三个基矢(5.46)的某种线性组合，即

$$\boldsymbol{v} = v_k |\pi_k\rangle \tag{5.47}$$

其中分量 v_k 是实的. 由(5.45)，能得到这个同位旋矢量的分量 v_k 的变换性质

$$v_j' |\pi_j'\rangle = v_a |\pi_a\rangle = v_a (|\pi_a'\rangle + \varepsilon_{aik}\delta\varepsilon_i |\pi_k'\rangle) \tag{5.48}$$

而因此经过投影到 $|\pi_j'\rangle$

$$v_j' = v_j - \varepsilon_{jia}\delta\varepsilon_i v_a \tag{5.49}$$

这个变换(5.49)相应于一个被动旋转，因为我们没有改变(5.48)中的同位旋矢量，但是按照(5.45)旋转了基. 为了在同位旋空间中得到一个主动旋转我们只需要反转该旋转矢量，即 $\delta\varepsilon_i \to -\delta\varepsilon_i$，改变(5.49)为

$$v_i' = v_i + \varepsilon_{ijk}\delta\varepsilon_i v_k \tag{5.50}$$

比较主动旋转(1.61)跟这个旋转！跟(5.49)比较，一个外加的因子 −1 出现在右方的第二部分.

借助旋转矢量 $\delta\boldsymbol{\varepsilon}=\{\delta\varepsilon_i\}$，方程(5.50)可以简明地写为

$$\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}+\delta\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\delta\boldsymbol{v} \tag{5.51}$$

其中

$$\delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v}=\delta\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{v} \tag{5.52}$$

这强调了对在$\mathbb{R}^3$中(看图 5.2)正常旋转的类似性，如果我们记得(1.60)．进而很这容易证明

$$\boldsymbol{v}'^2=\boldsymbol{v}^2+2\boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{v}+(\delta\boldsymbol{v})^2$$

忽略二次项及由于 ε_{ijk}的反对称，得

$$\delta(\boldsymbol{v}^2)=\boldsymbol{v}'^2-\boldsymbol{v}^2=2\delta\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}=2\varepsilon_{ijk}\delta\varepsilon_j v_k v_i=0 \tag{5.53}$$

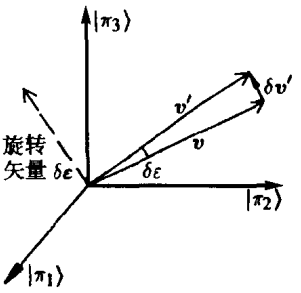


图 5.2　在同位旋空间中的旋转

通过在同位旋空间的旋转，这个同位旋矢量的长度保持不变(不变性)，这个性质通过与在$\mathbb{R}^3$中的普通旋转的同构(见图 5.2)再一次证明．

在同位旋空间中我们经常处理同位旋矢量，它的分量不是实数而是希尔伯特的算符(即它们作用在一个希尔伯特空间的状态$|\varphi\rangle$上)的同位旋矢量．同位旋算符 $\hat{\boldsymbol{T}}=\{\hat{T}_1,\hat{T}_2,\hat{T}_3\}$本身就是例子．与$\mathbb{R}^3$中的矢量算符(见式(1.60))比较我们被引到同位旋矢量算符 $\boldsymbol{V}$．看一下(5.50)这个变换性质被定义为

$$\delta\boldsymbol{V}=\hat{\boldsymbol{V}}'-\hat{\boldsymbol{V}}=\delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\times\hat{\boldsymbol{V}} \tag{5.54}$$

或者用分量写为

$$\delta\hat{V}_i=\hat{V}_i'-\hat{V}_i=\varepsilon_{ijk}\delta\varepsilon_j\hat{V}_k \tag{5.55}$$

另一方面算符按照量子力学的一般规律变换

$$\begin{aligned}\hat{V}_i' &=\hat{U}_{\mathrm{ls}}(\delta\varepsilon)\hat{V}_i\hat{U}_{\mathrm{ls}}^{-1}(\delta\varepsilon)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta\varepsilon_k\hat{T}_k}\hat{V}_i\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta\varepsilon_k\hat{T}_k}\\ &=(1-\mathrm{i}\delta\varepsilon_k\hat{T}_k)\hat{V}_i(1+\mathrm{i}\delta\varepsilon_k\hat{T}_k)=\hat{V}_i-\mathrm{i}\delta\varepsilon_k[\hat{T}_k,\hat{V}_i]_-\end{aligned} \tag{5.56}$$

由此给出

$$\delta\hat{V}_i=\hat{V}_i'-\hat{V}_i=-\mathrm{i}\delta\varepsilon_j[\hat{T}_j,\hat{V}_i]_- \tag{5.57}$$

这里求和指标被重新命名为 j．与(5.55)比较给出

$$[\hat{T}_j,\hat{V}_i]_-=\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\hat{V}_k \tag{5.58}$$

这个方程定义了一个同位旋矢量算符．它说明对一个同位旋空间的矢量算符，量子力学的变换规律(5.57)必须符合在同位旋空间中的通常矢量的变换规律(5.55)．

总结一下：同位旋群的 SU(2)变换是在同位旋空间的正交变换，这能被解释为在带有基矢如$|\pi_1\rangle$，$|\pi_2\rangle$，$|\pi_3\rangle$的正规的 $T=1$ 的表示空间中的旋转．我们仅对无穷小变换证明了这一点，但正如我们在(3.18)中表明的，它可以推广到有限的 $\boldsymbol{\varepsilon}=\{\varepsilon_i\}$．应该注意到，因为自旋是半整数，可能出现不确定性(参见(5.14)和有关的要点，联系到普通的自旋)．

我们在经验的基础上构造了同位旋空间：核子的电荷双重态和 π 介子的电荷三重态是出发点，它引导我们到同位旋空间的抽象概念．在此空间与位形空间$\mathbb{R}^3$之间的同构具有极大的理解和实际价值．然而在两者之间的差别是明显的：当$\mathbb{R}^3$被物理上实现时(它引导我们到旋转群和角动量多重态)，同位旋空间是一个形式的空间，它在基本粒子(电荷多重态)的对称性中实现．这个形

式的同位旋空间被三个矢量$|\pi_i\rangle(i=1,2,3)$(参见例 5.4,方程(11))展开.带电介子的状态矢量

$$|\pi^{\pm}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\{|\pi_1\rangle\pm\mathrm{i}|\pi_2\rangle\} \tag{5.59a}$$

它带有复的分量,属于同位旋空间的球表示,并且值得注意的是只有这种球表示中的同位矢量是物理上实现的,因此是状态$|\pi^{\pm}\rangle$和$|\pi^0\rangle$.线性组合,例如

$$|\pi_1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\{|\pi\rangle+|\pi^-\rangle\}\quad,\quad|\pi_2\rangle=\frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\{|\pi^+\rangle-|\pi^-\rangle\} \tag{5.59b}$$

不能用任何仪器在物理上实现,因为这些态不是电荷算符 Q(参见(5.21))的本征态.

例 5.6 G 宇称

我们刚刚看到同位旋对称性可以完全类似于角动量对称性来处理.三维位形空间中的旋转相应于三维同位旋空间的旋转.因此我们可以问是否在同位旋空间中存在一个量,它等价于位形空间的宇称.确实有这样一个外加的内部量子数,我们将在下面证明.同位旋宇称的性质使我们能解释 ω 和 ϱ 介子分别到三个和两个 π 介子的衰变(参见例 5.10 中 ω 和 ϱ 介子的讨论).正像我们在前一节里看到的,π 介子三重态$|\pi_j\rangle$,$j=1,2,3$ 在同位旋空间像一个矢量一样变换.这样定义所谓的 G 宇称为

$$\hat{G}|\pi_j\rangle=-|\pi_j\rangle \tag{1}$$

是直截了当的.这个算符 $\hat{G}$ 在同位旋空间的性质相应于空间反射,后者被宇称算符在位形空间中完成,它反转单位矢量的方向,即 $\hat{P}|\mathrm{e}_j\rangle=-|\mathrm{e}_j\rangle$.我们选表示

$$\hat{G}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\hat{T}_2}\hat{C} \tag{2}$$

其中 $\hat{C}$ 表示电荷共轭算符

$$\hat{C}|\pi^+\rangle=|\pi^-\rangle\quad,\quad\hat{C}|\pi^-\rangle=|\pi^+\rangle\quad,\quad\hat{C}|\pi^0\rangle=|\pi^0\rangle \tag{3}$$

在(2)中的 G 的表示和在(1)中的定义是一致的,我们现在将来证明.由(3)我们可以推断直角 π 介子分量(5.59)

$$\hat{C}|\pi_1\rangle=|\pi_1\rangle\quad,\quad\hat{C}|\pi_2\rangle=-|\pi_2\rangle\quad,\quad\hat{C}|\pi_3\rangle=|\pi_3\rangle \tag{4}$$

或者用矩阵表示

$$\hat{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \tag{5}$$

另一方面在同位旋空间中的旋转矩阵由

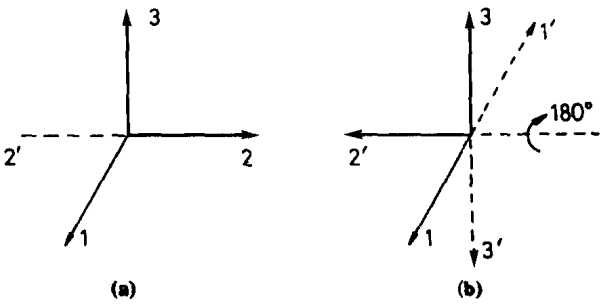
$$\hat{T}_2=-\mathrm{i}\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\hat{T}_2}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cos\pi+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix} \tag{6}$$

给出这性质由下面的图表示出来. 因此得出

$$\hat{G}|\pi_j\rangle=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}|\pi_j\rangle=-|\pi_j\rangle \tag{7}$$



$\hat{C}$ 和 $\exp(-i\pi\hat{T}_2)$的作用

在同位旋空间中的反射:

a) 算符 $\hat{C}$ 的作用:它变换同位旋空间的直角 x_2 轴到 x_2' 轴.

b) 紧接着相对于原来的 x_2 轴转 π 角:变换 $x_1\to x_1'$ 和 x_3 到 x_3'.

什么是G字称的物理意义? 我们首先假设G字称表示一种内部对称性,它在粒子反应中代表一个守恒量. 在此假设下(可能的反应限于强相互作用)每个介子有或正或负的G字称. 结果它们只能衰变到别的介子的这样一种组合,总起来也分别有正的或负的G字称. 因为两π介子体系有正的,而三π介子体系有负的G字称,我们由

$$\omega\to 3\pi,\quad \omega\not\to 2\pi(\text{通过强作用})$$

得到

$$\hat{G}|\omega\rangle=-|\omega\rangle \tag{8}$$

并由

$$\varrho\to 2\pi,\quad \varrho\not\to 3\pi$$

肯定

$$\hat{G}|\varrho\rangle=|\varrho\rangle \tag{9}$$

一个一定的G字称值可以指定到每一个介子,它使我们可以理解许多实验观测现象.

应用G字称到重子态不是一个对称操作,因为电荷共轭跑出了一个给定的多重态(事实上重子和反重子属于不同的共轭多重态,参见以下的例 6.3,6.4). 然而一个确定的G字称可以指定到核子-反核子体系,它类似于正电子素的体系. 中性的 $N\bar{N}$ 体系或者是一个同位旋三重态$|T=1,T_3=0\rangle$,或者是一个单态$|T=0,T_3=0\rangle$. 绕T_2轴的旋转,它是G运算的一部分,对这两种情况给出不同的符号:

$$e^{-i\pi T_2}|T=1,T_3=0\rangle=\exp\left[-i\frac{\pi}{2}(\tilde{\tau}_2(1)+\tilde{\tau}_2(2))\right]\frac{1}{\sqrt{2}}(|p\rangle_1|\bar{p}\rangle_2+|n_1|\bar{n}\rangle_2)$$

$$=[-i\tilde{\tau}_2(1)][-i\tilde{\tau}_2(2)]\frac{1}{\sqrt{2}}(|p\rangle_1|\bar{p}\rangle_2+|n_1|\bar{n}\rangle_2)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}[|n\rangle_1(-|\bar{n}\rangle_2)+(-|p\rangle_2)|\bar{p}\rangle_2]$$

$$=-|T=1,T_3=0\rangle \tag{10}$$

$$e^{-i\pi\hat{T}_2}|T=0,T_3=0\rangle=[-i\bar{\tau}_2(1)][-i\bar{\tau}_2(2)]\frac{1}{\sqrt{2}}(|p\rangle_1|\bar{p}\rangle_2-|n_1\rangle|\bar{n}\rangle_2)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}[|n\rangle_1(-|\bar{n}\rangle_2)-(-|p\rangle_1)|\bar{p}\rangle_2]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}[|p\rangle_1|\bar{p}\rangle_2-|n\rangle_1|\bar{n}\rangle_2]$$

$$=+|T=0,T_3=0\rangle \tag{11}$$

这里我们应用了在反粒子多重态中群运算的生成元等于在粒子多重态的群运算的生成元带一个相反符号这一事实.

我们将在稍后的练习 8.2 中对 SU(3)群的生成元证明这一奇异的性质.

对正电子素我们发现电荷宇称

$$\hat{C}|e^+e^-\rangle=(-1)^J|e^+e^-\rangle$$

对一个角动量 J 的状态.如果我们转化这个结果到 $N\bar{N}$ 体系我们有

$$\hat{C}|N\bar{N}\rangle=(-)^j|N\bar{N}\rangle \tag{12}$$

跟(10)和(4)一起我们得到

$$\hat{G}|N\bar{N}\rangle=(-)^{j+T}|N\bar{N}\rangle \tag{13}$$

$N\bar{N}$ 体系的 G 宇称曾在欧洲原子核研究中心得到实验检验,在那里低能量的反质子被质子俘获.相对于表达式(13)分析最终的衰变给出以下选择定则:

$$|N\bar{N}(j=0,T=0)\rangle\not\to 3\pi$$

$$|N\bar{N}(j=0,T=1)\rangle\not\to 2\pi \tag{14}$$

指出 $T=0$ 态有正的 G 宇称而 $T=1$ 态必须是负的.与所得实验结果极好的符合肯定了 G 宇称的概念.

G 宇称运算变换一个核子到一个反核子这件事使得我们可以把一个核子和一个原子核之间的相互作用与相应的反核子-原子核相互作用联系起来.有效的反核子势 $V_{eff}(r)$转而成为 G 共轭的核子-原子核势.$V_{eff}(r)$是介子 $\pi,\varrho,\omega,\cdots$的贡献的组合,即

$$V_{eff}^{(N)}(r)=V^{\pi}(r)+V^{Q}(r)+V^{\omega}(r)+\cdots \tag{15}$$

利用 π 介子有负 G 宇称这一事实,介子 ϱ 和 ω 的 G 宇称可以由它们的 π 介子衰变定出.因为 ω 介子衰变到三个 π 介子,它的 G 宇称是负的,而 ϱ 介子的 G 宇称是正的,它衰变到两个 π 介子.因此

$$V_{eff}^{(\bar{N})}(r)=\hat{G}V_{eff}^{(N)}(r)\hat{G}$$

$$=G_{\pi}V^{\pi}(r)+G_{\varrho}V^{\varrho}(r)+G_{\omega}V^{\omega}(r)+\cdots$$

$$=-V^{\pi}(r)+V^{\varrho}(r)-V^{\omega}(r)+\cdots \tag{16}$$

它也被实验肯定了.特别是由于 ω 介子交换的势 V^{ω},它在 NN 体系中在短程上是强烈地排斥的,在 $N\bar{N}$体系中则成为强吸引的.曾经猜测过这可能允许很强束缚的高位的 $N\bar{N}$状态(叫做重子素共振态).然而直到现在这种状态还没有被肯定地认定.(**例 5.6 完**)

练习 5.7　李代数的表示,轨道角动量算符代数的正规表示

问题　a) 解释概念"李代数的表示"和"正规表示".

b) 对轨道角动量算符的代数找出一个正规表示.

解　a) "李代数 $\mathscr{A}$ 的表示"意味着我们可以对所有的 $A\in\mathscr{A}$ 指定一个 $n\times n$ 矩阵 $\hat{a}$,使得这些矩阵满足同样的代数关系(即同态于一个矩阵代数). 因此这要求

$$\alpha\hat{A}+\beta\hat{B}\to\alpha\hat{a}+\beta\hat{b},\quad [\hat{A},\hat{B}]_-\to[\hat{a},\hat{b}]_-$$

第一个关系是在 $\mathscr{A}$ 中的标量乘法,第二个是普通的矩阵对易关系. 显然总存在一个(平凡的)表示,即对所有 $\hat{A}$ 让 $\hat{A}\to 0$. 如果这代数定义为

$$[\hat{A}_i,\hat{A}_j]_-=C_{ijk}\hat{A}_k$$

我们可以对每个 $\hat{A}_i$ 指定一个矩阵 $\hat{a}_i$,

$$(\hat{a}_i)_{kj}=C_{ijk}$$

并且类似地也是对和 $\sum\alpha_i\hat{A}_i$ 指定的. 这个表示叫做正规或忠实表示. 确实我们发现

$$\begin{aligned}([\hat{a}_i,\hat{a}_j]_-)_{lm}&=(\hat{a}_i\hat{a}_j-\hat{a}_j\hat{a}_i)_{lm}\\&=(\hat{a}_i)_{lk}(\hat{a}_j)_{km}-(\hat{a}_j)_{lk}(\hat{a}_i)_{km}\end{aligned}$$

$$C_{ikl}C_{jmk}-C_{jkl}C_{imk}=C_{mjk}C_{kil}+C_{imk}C_{kjl}$$

其中我们用了 $C_{ijk}=-C_{kji}$. 应用雅可比恒等式就得出

$$([\hat{a}_i,\hat{a}_j]_-)_{lm}=-C_{jik}C_{kml}=C_{ijk}C_{kml}=C_{ijk}(\hat{a}_k)_{lm}$$

这样,事实上我们证明了这些矩阵满足代数

$$[\hat{a}_i,\hat{a}_j]_-=C_{ijk}\hat{a}_k$$

b) 轨道角动量算符满足对易关系

$$[\hat{L}_i,\hat{L}_j]_-=\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\hat{L}_k$$

因此正规表示为

$$(\hat{L}_i)_{jk}=\mathrm{i}\varepsilon_{ikj}=-\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}$$

或者更清楚地表示为

$$\hat{L}_1\to-\mathrm{i}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix},\quad \hat{L}_2\to-\mathrm{i}\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\hat{L}_3\to-\mathrm{i}\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

这些矩阵是自旋 1 的矩阵. **(练习 5.7 完)**

5.5　同位旋不变性的实验检验

直到现在我们知道强相互作用同位旋不变性的两个论证:首先由于某个电荷多重态(见关于

核子和 π 介子的表)导致的粒子间很小的质量差,其次是核力的电荷无关性(见练习 5.3).两件事实都可以从同位旋群是强相互作用对称群的假设,即

$$[\hat{H}_{强},\hat{T}]_{-}=0$$

和相应的同位旋李代数的性质推出.下面我们将进一步讨论支持这一假设(同位旋群=强相互作用对称群)的实验事实.

应用在同位旋群和 SO(3)间的同构性(我们在与氘核相关的讨论中已经用过它)使得我们可以按照角动量代数的规则来推出两个(或更多)粒子的总同位旋构造,即

$$|TT_3\rangle=\sum_{T_3(1)+T_3(2)=T_3}(T(1)T(2)T|T_3(1)T_3(2)T_3)\quad|T(1)T_3(1)\rangle|T(2)T_3(2)\rangle \tag{5.60}$$

其中总同位旋 T 限于以下的值

$$T=T(1)+T(2),\ T(1)+T(2)-1,\cdots,|T(1)-T(2)|$$

$T(1)$和 $T(2)$分别表示粒子 1 和粒子 2 的同位旋.相应地 $T_3(1),T_3(2)$是同位旋第三分量.

克莱布许-高登系数$(T(1)T(2)T|T_3(1)T_3(2)T_3)$由 SO(3)的李代数(参见第 2 章)得出.因为同位旋代数同构于角动量代数,我们可以把第 2 章的结果带到同位旋的场合;克莱布许-高登系数对两个代数是恒等的,并且我们在表 5.2 中列出了它们中最重要的一些系数①.

表 5.2 对耦合 $T(1)=\frac{1}{2}$和$T(2)=1$,$T(1)=\frac{1}{2}$和$T(2)=\frac{1}{2}$的克莱布许-高登系数

$\frac{1}{2}\otimes 1$	$T=\frac{1}{2}$		$T=\frac{3}{2}$			
	$T_3=\frac{1}{2}$	$T_3=-\frac{1}{2}$	$T_3=\frac{3}{2}$	$T_3=\frac{1}{2}$	$T_3=-\frac{1}{2}$	$T_3=-\frac{3}{2}$
$T_3(1)=\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	1	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	0
$T_3(1)=-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	0	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	1

$\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2}$	$T=0$		$T=1$	
	$T_3=0$	$T_3=1$	$T_3=0$	$T_3=-1$
$T_3(1)=\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	1	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	0
$T_3(1)=-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	1

现在让我们考虑一个带有同位旋 T 的粒子到两个分别带有同位旋 $T(1)$和 $T(2)$的别的粒子的衰变.我们从联系初末态的 $\hat{S}$ 算符②的矩阵元开始,

$$\langle T(1)T_3(1);T(2)T_3(2)|\hat{S}|TT_3\rangle \tag{5.61}$$

① 参见 M. Rotenberg, R. Bivins, N. Metropolis 和 J. K. Wooten, Jr.: *The 3j-and 6-j-symbols* (Technology press, Cambridge, Mass. 1959).

② 参看本丛书《量子力学:导论》第 10 章,北京大学出版社,2000.

利用克莱布许-高登系数的正交性和(5.60)一起,逆方程得出为(参见第 2 章,方程(2.39))

$$|T(1)T_3(1)\rangle|T(2)T_3(2)\rangle = \sum_{T'=|T(1)-T(2)|}^{T(1)+T(2)} (T(1)T(2)T'|T_3(1)T_3(2)T'_3)|T'T'_3\rangle \tag{5.62}$$

其中 $T'_3=T_3(1)+T_3(2)$. 因此(5.61)中的 $\hat{S}$ 矩阵元变为

$$\langle T(1)T_3(1);T(2)T_3(2)|\hat{S}|TT_3\rangle = \sum_{T'} (T(1)T(2)T'|T_3(1)T_3(2)T'_3)\langle T'T'_3|\hat{S}|TT_3\rangle \tag{5.63}$$

哈密顿量的同位旋不变性意味着算符 $\hat{S}$ 的不变性,即

$$[\hat{T}_j,\hat{H}]_-=0,\ [\hat{T}_j,\hat{S}]_-=[\hat{T}_j,\exp(-\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar)]_-=0 \tag{5.64}$$

如同我们在第三章中知道的,哈密顿量的同位旋空间部分由$\hat{\mathbb{1}}$算符和这个同位旋群的卡西米尔算符 $\hat{T}^2$ 组成. 换句话说哈密顿量在同位旋空间是一个标量,即一个同位旋标量. 确实,我们较早就知道它必须由卡西米尔算符构成,即在我们的情况 $\hat{H}=\hat{H}(\hat{\boldsymbol{T}}^2)$以及 $\hat{S}=\hat{S}(\hat{\boldsymbol{T}}^2)$. 因此

$$\langle T'T'_3|\hat{S}|TT_3\rangle=\delta_{TT'}\delta_{T_3T'_3}\underbrace{\langle T\|\hat{S}\|T\rangle}_{f(T(1),T(2),T)} \tag{5.65}$$

必须成立.

在(5.65)右方的矩阵元$\langle T\|\hat{S}\|T\rangle$叫做约化矩阵元. 它只是 $T,T(1),T(2)$的函数,并不依赖于投影 T_3. 因此对某个同位旋多重态带有不同 T'_3 的所有状态它是相等的. 换句话说,约化矩阵元是带总同位旋 T 的多重态的特征,因为它不依赖于量子数 T_3,T_3 区分属于这个多重态的状态. 相应地我们被引到方程

$$\langle T(1)T_3(1);T(2)T_3(2)|\hat{S}|TT_3\rangle = (T(1)T(2)T|T_3(1)T_3(2)T_3)\langle T(1)T(2)\|\hat{S}\|T\rangle \tag{5.66}$$

方程(5.65)和(5.66)是所谓的维格纳-埃克特定理[①]的特殊情况. (5.66)的含义如下:因为跃迁概率正比于(5.66)左边的矩阵元平方,即正比于

$$|\langle T(1)T_3(1);T(2)T_3(2)|\hat{S}|TT_3\rangle|^2 = |(T(1)T(2)T|T_3(1)T_3(2)T_3|^2|\langle T(1)T(2)\|\hat{S}\|T\rangle|^2 \tag{5.67}$$

随后在末态$|T(1)T_3(1);T(2)T_3(2)\rangle$中的各种可能的电荷组合的强度比由克莱布许-高登系数的平方决定. 换句话说在考虑两个可能的衰变模式的比例时,一般情况不知道的约化矩阵元抽出去了. 这个事实使我们能够作出定量的预言——在强相互作用的完全的动力学理论不存在时——这可以由测量来检验.

例 5.8　维格纳-埃克特定理

方程(5.65)是维格纳-埃克特(Wigner-Eckart)定理的特例. 这里我们想要表述和证明一般的定理. 它对用角

① 看关于角动量代数的教科书,例如,M. E. Rose: *Elementary Theory of Angular Momentum* (John Wiley, New York 1957).

动量或同位旋算符的对易关系来定义的一般类型的张量算符都是有价值的.

我们定义:$2k+1$ 个算符 $\hat{T}_q^{(k)}$,$(q=-k,\ =k+1,\cdots,k)$形成一个阶为 k 的不可约张量算符的分量,如果它们满足以下的对易关系

$$[\hat{J}_\pm,\hat{T}^{(k)}{}_q]=\sqrt{k(k+1)-q(q\pm1)}\,T_{q\pm1}^{(k)} \tag{1}$$

$$[\hat{J}_0,\hat{T}^{(k)}{}_q]=qT_q^{(k)} \tag{2}$$

名词不可约指出算符 J_q 只组合有同样阶的算符.如果 J_q 与普通的角动量算符有关,该不可约张量算符叫做球张量.它们的变换性质能够用空间旋转来解释.上面用对易关系给出的定义,等价于这一点,并且有优越性:算符 $\hat{J}_\pm,\hat{J}_0$ 如同 $\hat{T}_\pm,\hat{T}_0$ 在同位旋空间内一样具有一个物理意义.

维格纳-埃克特定理说:在一个按照算符 $\hat{J}^2,\hat{J}_z$ 给出的表示中,其中基矢给出为$|\tau jm\rangle$,一个不可约张量算符的矩阵元$\langle\tau' j' m'|\hat{T}_q^{(k)}|\tau jm\rangle$由一个所谓的约化矩阵元,它不依赖于 m,m' 和 q,与一个克莱布许-高登系数的乘积给出

$$\langle\tau' j' m'|\hat{T}_q^{(k)}|\tau jm\rangle=(jkj'|mqm')\langle\tau' j'\|T^{(k)}\|\tau j\rangle \tag{3}$$

这里 τ 是属于一个不与所有 $\hat{J}_q$ 对易的算符的量子数.

为了证明维格纳-埃克特定理,我们看一下$(2k+1)\times(2j+1)$个矢量

$$\hat{T}_q^{(k)}|\tau jm\rangle \tag{4}$$

和它们的线性组合

$$|\tau JM\rangle=\sum_{m,q}(jkJ|mqM)\hat{T}_q^{(k)}|\tau jm\rangle \tag{5}$$

作用算符 $\hat{J}_\pm$到(4),我们利用定义 $\hat{T}_q^{(k)}$ 的对易关系得到

$$\begin{aligned}\hat{J}_\pm\hat{T}_q^{(k)}|\tau jm\rangle&=[\hat{J}_\pm,\hat{T}_q^{(k)}]|\tau jm\rangle+\hat{T}_q^{(k)}\hat{J}_\pm|\tau jm\rangle\\&=\sqrt{k(k+1)-q(q\pm1)}\,\hat{T}_{q\pm1}^{(k)}|\tau jm\rangle\\&\quad+\sqrt{j(j+1)-m(m\pm q)}\,\hat{T}_q^{(k)}|\tau jm\pm1\rangle\end{aligned} \tag{6}$$

现在我们作用 $\hat{J}_\pm$到方程(5)的状态$|\tau JM\rangle$

$$\begin{aligned}J_\pm|\tau JM\rangle&=\sum_{m,q}\sqrt{k(k+1)-q(q\pm1)}\,(jkJ|mqM)\hat{T}_{q\pm1}^{(k)}|\tau jm\rangle\\&\quad+\sum_{mq}\sqrt{j(j+1)-m(m\pm q)}\,(jkJ|mqM)\hat{T}_q^{(k)}|\tau jm\pm1\rangle\end{aligned} \tag{7}$$

改变 $q\to q\mp1$ 和 $m\to m\mp1$,给出

$$\begin{aligned}\hat{J}_\pm|\tau JM\rangle=\sum_{m,q}\hat{T}_q^{(k)}|\tau jm\rangle\Big(&\sqrt{k(k+1)-q(q\mp1)}\,(jkJ|mq\mp1M)\\&+\sqrt{j(j+1)-m(m\mp1)}\,(jkJ|m\mp1qM)\Big)\end{aligned} \tag{8}$$

括号中的表达式是克莱布许-高登系数的递推公式(参见第 2 章方程 2.45a,2.45b)

$$\begin{aligned}&\sqrt{k(k+1)-q(q\mp1)}\,(jkJ|mq\mp1M)+\\&\sqrt{j(j+1)-m(m\mp1)}\,(jkJ|mq\mp1qM)\\=&\sqrt{J(J+1)-M(M\mp1)}\,(jkJ|mqM\mp1)\end{aligned} \tag{9}$$

把该式代入(8)得出

$$\hat{J}_\pm|\tau JM\rangle=\sqrt{J(J+1)-M(M\mp1)}\sum_{m,q}(jkJ|mqM\pm1)\hat{T}_q^{(k)}|\tau jm\rangle$$

$$= \sqrt{J(J+1) - M(M \pm 1)}\,|\tau JM \pm 1\rangle \tag{10}$$

现在类似于 $\hat{J}_\pm$ 我们作用 $\hat{J}_0$ 到(4)和(5)

$$\begin{aligned} J_C\hat{T}_q^{(k)}|\tau jm\rangle &= [\hat{J}_0, \hat{T}_q^{(k)}]|\tau jm\rangle + \hat{T}_q^{(k)}\hat{J}_0|\tau jm\rangle \\ &= (q+m)\hat{T}_q^{(k)}|\tau jm\rangle \end{aligned} \tag{11}$$

与(5)一起给出

$$\hat{J}_0|\tau JM\rangle = \sum_{m,q}(jkJ|mqM)(q+m)\hat{T}_q^{(k)}|\tau jm\rangle = M|\tau JM\rangle \tag{12}$$

这里我们用到了当 $q+m \neq M$ 时所有克莱布许-高登系数为 0 这一事实. 方程(10)和(12)表明状态 $|\tau JM\rangle$ 满足角动量代数. 因此它们是算符 $\hat{J}^2$ 和 $\hat{J}_z$ 的不归一化的本征函数. 这意味着标量积 $\langle \tau J'M'|\tau JM\rangle$ 服从正交性:

$$\langle \tau J'M'|\tau JM\rangle = \delta_{JJ'}\delta_{MM'}\langle \tau' JM|\tau JM\rangle \tag{13}$$

约化矩阵元 $\langle \tau' JM|\tau JM\rangle$ 不依赖于 M. 这一点可以通过插入阶梯算符 $\hat{J}_\pm$ 来看出:

$$\begin{aligned} \langle \tau' JM|\tau JM\rangle &= (J(J+1) - M(M \mp 1))^{-1/2}\langle \tau' JM|\hat{J}_\pm|\tau' JM \mp 1\rangle \\ &= \langle \tau' JM \mp 1|\tau JM \mp 1\rangle \end{aligned} \tag{14}$$

这里我们将 $\hat{J}_\pm = \hat{J}_\pm^\dagger$ 作用到右边和左边. 考虑到这一点我们从(13)得到

$$\langle \tau' J'M'|\tau JM\rangle = \delta_{JJ'}\delta_{MM'}\langle \tau' J|\tau J\rangle \tag{15}$$

有了上面的方程,维格纳-埃克特定理可以很容易证明. 我们借助于克莱布许-高登系数的正交性变换(5)式

$$\hat{T}_q^{(k)}|\tau jm\rangle = \sum_{jm}(jkJ|mqM)\tau JM\rangle \tag{16}$$

乘上 $\langle \tau' j'm'|$ 得出

$$\begin{aligned} \langle \tau' j'm'|\hat{T}_q^{(k)}|\tau jm\rangle &= \sum_{JM}|jkJ|mqM\rangle\langle \tau' j'm'|\tau JM\rangle \\ &= (jkj'|mqm')\langle \tau' j'|\tau J\rangle \end{aligned} \tag{17}$$

j' 是由 j 和 k 产生的角动量. 因此我们可以写出

$$\langle \tau' j'm'|\hat{T}_q^{(k)}|\tau jm\rangle = (jkj'|mqm')\langle \tau' j' \| T^{(k)} \| \tau J\rangle \tag{18}$$

这证明了维格纳-埃克特定理和给出以下的选择定则:

矩阵元 $\langle \tau' j'm'|\hat{T}_q^{(k)}|\tau jm\rangle$ 只当 $q+m=M$ 并且 j,k,j' 满足三角不等式时不为 0. 这是克莱布许-高登系数性质的一个直接结果.

物理过程诸如原子物理的辐射跃迁,经典电动力学,在激发态原子核之间的核跃迁的描写可以分为两个方面.

1) 问题的对称性,它包含在选择定则中,是由克莱布许-高登系数给出的.

2) 问题的其他细节包含在约化矩阵元中.

通常我们只感兴趣两个跃迁矩阵元的比例,这时仅仅看克莱布许-高登系数就足够了.

作为一个最简单的应用,我们考虑对强相互作用哈密顿量的维格纳-埃克特定理. 它在同位旋空间是一个标量(参看例 3.15),因此在基 $|tt_3\rangle$ 中它是一个 0 阶的不可约张量算符. 在此情况维格纳-埃克特定理给出

$$\begin{aligned} \langle \tau' t't'_3|\hat{H}|\tau tt_3\rangle &= \langle \tau' t't'_3|\hat{H}|\tau tt_3\rangle \\ &= (t0t|t_30t'_3)\langle \tau' t' \| \hat{H} \| \tau t\rangle \\ &= \delta_{tt'}\delta_{t_3t'_3}\langle \tau' t' \| \hat{H} \| \tau t\rangle \end{aligned} \tag{19}$$

这确实是方程(5.65). (**例 5.8 完**)

例 5.9 在质子-氘核散射中的 π 介子产生

在质子-氘核散射中以下的出口道,即为有很好地确定的量子数的反应,是可能的(在许多其他反应中)

$$\mathrm{p}+\mathrm{d}\begin{cases}\nearrow \pi^0+{}^3\mathrm{He}\\ \searrow \pi^++{}^3\mathrm{H}\end{cases} \tag{1}$$

由例 5.2 中的讨论我们知道在氘核的基态有同位旋 $T=0$,而质子有 $T=\frac{1}{2}$. 这意味着所考虑的反应的初态生成同位旋 $T=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. 末态由一个带有 $T=1$ 的 π 介子和一个 $T=\frac{1}{2}$ 的 ^{3}He 组成,或者由一个 π 介子和也带同位旋 $T=\frac{1}{2}$ 的 ^{3}H 组成. 事实上镜像核 ^{3}He 和 ^{3}H 形成一个同位旋双重态. 这样我们可以写

$$\begin{aligned}|\text{初态}\rangle&=|\mathrm{p}+\mathrm{d}\rangle=\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle|00\rangle\\ |\text{末态}\rangle&=|\pi^++{}^3\mathrm{H}\rangle=|11\rangle\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right\rangle\\ |\text{末态}\rangle&=|\pi^0+{}^3\mathrm{He}\rangle=|10\rangle\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle\end{aligned} \tag{2}$$

关系(5.67)说明这两个特定末态(1)的截面比为

$$R=\frac{\sigma(\mathrm{p}+\mathrm{d}\to\pi^++\mathrm{H}^3)}{\sigma(\mathrm{p}+\mathrm{d}\to\pi^0+\mathrm{He}^3)}=\frac{\left|\left(1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\middle|1-\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right)\right|^2}{\left|\left(1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\middle|0\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right)\right|^2}=\frac{2/3}{1/3}=2$$

相应的实验结果为

$$R=\begin{cases}1.91\pm0.25\\ 2.26\pm0.11\end{cases}$$

这两个结果表明同位旋不变性不是严格地成立的,但至少在 10% 内成立.(**例 5.9 完**)

例 5.10 在氘核-氘核散射中中性 π 介子的产生

另一个同位旋不变性的实验验证是反应

$$\mathrm{d}+\mathrm{d}\to{}^4\mathrm{He}+\pi^0 \tag{1}$$

因为 ^{4}He 和氘核两者都是同位旋单态,即

$$|{}^4\mathrm{He}\rangle=|T=0,T_3=0,|\mathrm{d}\rangle=|T=0,T_3=0\rangle$$

那么反应 $\mathrm{d}+\mathrm{d}\to{}^4\mathrm{He}+\pi^0$ 将是不允许的,因为状态

$$|00\rangle|00\rangle,\ |00\rangle|10\rangle$$

是正交的. 实验表明

$$\sigma(\mathrm{d}+\mathrm{d}\to{}^4\mathrm{He})<1.6\times10^{-32}\mathrm{cm}^2$$

在原子核的尺度上(典型地 $10^{-26}\mathrm{cm}^2$),这是一个非常小的截面. 另一方面我们在反应

$$\mathrm{d}+\mathrm{d}\to{}^4\mathrm{He}+\gamma$$

中发现一个值得注意的截面. 这不是一个禁戒的反应,因为光子包含一个同位旋单态分量. (事实上,电磁相互作用不保持同位旋不变性,光子同时包含相同大小的同位旋单态和三重态分量!)(**例 5.10 完**)

例 5.11　π 介子-核子散射

π 介子-核子散射包括像

$$\pi+\mathrm{N}\to\pi'+\mathrm{N}' \tag{1}$$

的反应,其中 π 代表三个 π 介子 π^-,π^+,π^0 之一,而 N' 代表质子,中子或核子的激发态. 在初末态中的同位旋本征函数为

$$\underbrace{|T=1\rangle\otimes|T=\frac{1}{2}\rangle}_{\substack{\pi\text{介子}\quad\text{核子}\\ \text{初态}}}\to\underbrace{|T=1\rangle\otimes|T=\frac{1}{2}\rangle}_{\substack{\pi\text{介子}\quad\text{核子}\\ \text{末态}}} \tag{2}$$

对初末态两者,个别的粒子的同位旋可以耦合到总同位旋 $T=\frac{1}{2}$ 和 $T=\frac{3}{2}$. 用符号表示为

$$[1]\otimes\left[\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{1}{2}\right]\oplus\left[\frac{3}{2}\right] \tag{3}$$

结果,对 $T=\frac{1}{2}$ 和 $\frac{3}{2}$ 有两个约化矩阵元,现在它们将被详细讨论.

如果 $|1,\mu\rangle$ 和 $\left|\frac{1}{2},\nu\right\rangle$ 分别代表同位旋态 $T=1$ 和 $T=\frac{1}{2}$,初态为

$$|1\mu\rangle\left|\frac{1}{2}\nu\right\rangle=\left(1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \middle|\ \mu\nu\mu+\nu\right)\left|\frac{1}{2},\mu+\nu\right\rangle+\left(1\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{2}\ \middle|\ \mu\nu\mu+\nu\right)\left|\frac{3}{2},\mu+\nu\right\rangle \tag{4}$$

类似地末态取形式为

$$\begin{aligned}|1\mu'\rangle\left|\frac{1}{2}\nu'\right\rangle&=\left(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \middle|\ \mu'\nu'\mu'+\nu'\right)\left|\frac{1}{2},\mu'+\nu'\right\rangle\\&+\left(1\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{2}\ \middle|\ \mu'\nu'\mu'+\nu'+\nu'\right)\left|\frac{3}{2},\mu'+\nu'\right\rangle\end{aligned} \tag{5}$$

初态的可能量子数 $\mu=\pm1,0$ 代表 π 介子带电态 $|\pi^{\pm}\rangle$ 和 $|\pi^0\rangle$,量子数 $\nu=\pm\frac{1}{2}$ 分别代表 $|\mathrm{p}\rangle$ 和 $|\mathrm{n}\rangle$. 末态情况类似. 跃迁矩阵元为

$$\begin{aligned}\left\langle 1\mu\ \frac{1}{2}\nu\middle|\hat{S}\middle|1\mu'\ \frac{1}{2}\nu'\right\rangle&=\left(1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \middle|\ \mu\nu\mu+\nu\right)\left(1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \middle|\ \mu'\nu'\mu+\nu'\right)\\&\left\langle\frac{1}{2}\mu+\nu\middle|\hat{S}\middle|\frac{1}{2}\mu'+\nu'\right\rangle\\&+\left(1\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{2}\ \middle|\ \mu\nu\mu+\nu\right)\left(1\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{2}\ \middle|\ \mu'\nu'\mu+\nu'\right)\\&\left\langle\frac{3}{2}\mu+\nu\middle|\hat{S}\middle|\frac{3}{2}\mu'+\nu'\right\rangle\end{aligned} \tag{6}$$

其中我们用了(5.65),即只有在相等总同位旋 $T=T'$ 间的矩阵元有贡献这一事实. 从(5.65)我们也推出 $T'_3=T_3$,它对(6)意味着

$$\mu'+\nu'=\mu+\nu \tag{7}$$

另外矩阵元 $\langle TT_3|\hat{S}|TT_3\rangle$ 由于同位旋不变性不依赖于 T_3,而只依赖于总同位旋 T,即

$$\langle TT_3|\hat{S}|TT_3\rangle=\langle T\|\hat{S}\|T\rangle \tag{8}$$

因此(6)成为

$$\langle 1\mu\,\tfrac{1}{2}\nu\Big|\hat{S}\Big|1\mu'\,\tfrac{1}{2}\nu'\rangle=\Big[\Big(1\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\Big|\mu\nu\mu+\nu\Big)\Big(1\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\Big|\mu'\nu'\mu+\nu\Big)\langle\tfrac{1}{2}\|\hat{S}\|\tfrac{1}{2}\rangle$$
$$+\Big(1\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{3}{2}\Big|\mu\nu\mu+\nu\Big)\Big(1\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{3}{2}\Big|\mu'\nu'\mu+\nu\Big)\langle\tfrac{3}{2}\|\hat{S}\|\tfrac{3}{2}\rangle\Big]\delta_{\mu+\nu,\mu+\nu} \tag{9}$$

由(1)表达的十个可能的反应仅由两个约化矩阵元$\langle\frac{1}{2}\|S\|\frac{1}{2}\rangle$和$\langle\frac{3}{2}\|S\|\frac{3}{2}\rangle$描写，它们一般说是复的.这意味着对上面的反应有三个实参数，因为一个公共的实相位在取平方$\left|\langle 1\mu\,\frac{1}{2}\nu\Big|S\Big|1\mu'\,\frac{1}{2}\nu'\rangle\right|^2$时消掉了.

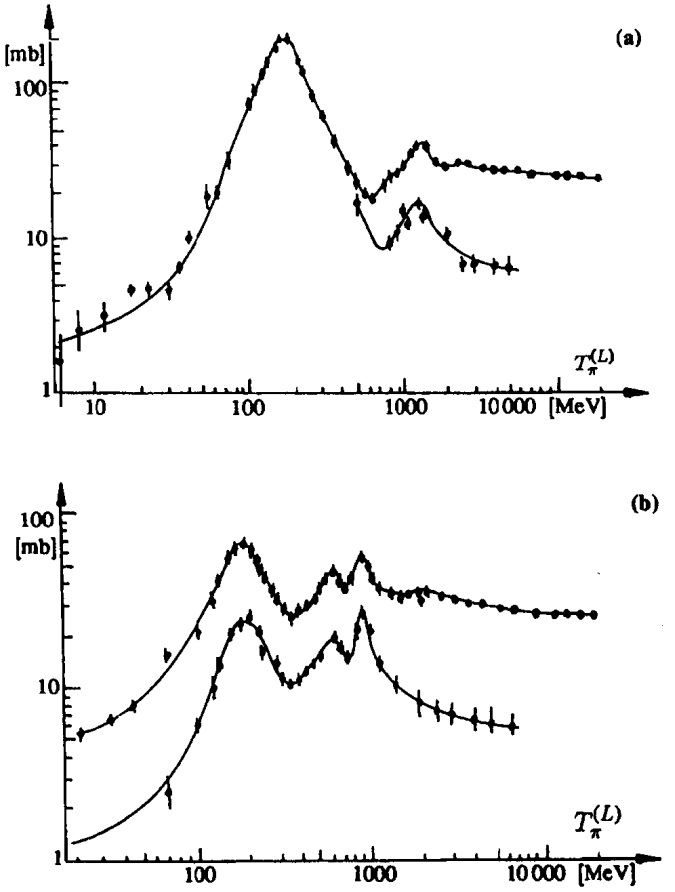
分析(9)中的矩阵元，我们发现十个可能的反应：

$\mu=1$	$\nu=\frac{1}{2}\to\mu'=1\quad\nu'=\frac{1}{2}$ $\nu=-\frac{1}{2}\begin{cases}\to\mu'=1\quad\nu'=-\frac{1}{2}\\ \to\mu'=0\quad\nu'=\frac{1}{2}\end{cases}$	$\pi^++p\to\pi^++p$ $\pi^++n\begin{cases}\to\pi^++n\\ \to\pi^0+p\end{cases}$
$\mu=0$	$\nu=\frac{1}{2}\begin{cases}\to\mu'=1\quad\nu'=\frac{1}{2}\\ \to\mu'=1\quad\nu'=-\frac{1}{2}\end{cases}$ $\nu=-\frac{1}{2}\begin{cases}\to\mu'=1\quad\nu'=-\frac{1}{2}\\ \to\mu'=-1\quad\nu'=\frac{1}{2}\end{cases}$	$\pi^0+p\begin{cases}\to\pi^0+p\\ \to\pi^++n\end{cases}$ $\pi^0+n\begin{cases}\to\pi^0+n\\ \to\pi^-+p\end{cases}$
$\mu=-1$	$\nu=\frac{1}{2}\begin{cases}\to\mu'=-1\quad\nu'=\frac{1}{2}\\ \to\mu'=0\quad\nu'=-\frac{1}{2}\end{cases}$ $\nu=-\frac{1}{2}\to\mu'=-1\quad\nu'=-\frac{1}{2}$	$\pi^-+p\begin{cases}\to\pi^-+p\\ \to\pi^0+n\end{cases}$ $\pi^-+n\to\pi^-+n$

在这个目录的右方同位旋量子数被用它们代表的物理粒子重新表达出来.因为(9)是相当复杂的，可能的一般反应第一个和第十个是稍为有点迷惑人的.这情况在第一个共振区域，位于 1232Mev 的所谓 Δ 共振处变得清楚了.它也叫做$\frac{3}{2}-\frac{3}{2}$共振，因为它的同位旋和自旋量子数两者都取值$\frac{3}{2}$.第一个图对反应

$$\pi^++p\to\pi^++p\quad,\quad\pi^-+p\to\pi^-+p \tag{10}$$

显示截面 σ 作为 π 介子能量的函数，其中能量是 π 介子在实验室中的动能 $T_\pi^{(L)}$.让我们对在高能反应中重要的和对这里的内容特别有兴趣的各个能量简短地的思考一下.首先是 π 介子-核子体系在质心系的总能量 W.如果



(a) π^+p 和(b)π^-p 散射的总截面:各种各样的极大(共振)被用中间粒子 N*(同位核)的形成非常成功地解释了.它们接着又衰变了.在 π^-p 散射的情况有两个衰变产物 π^0n 和 π^-p.在 π^+p 散射的情况我们在出口道中只发现 π^+p.在(a)部分中的第二条曲线指示出在出口道中的别的激发态,它们升起在差不多 800Mev 的阈能处.

$p=(\boldsymbol{p},E_N/c)=(\boldsymbol{p},p_0)$和 $q=(\boldsymbol{q},E_\pi/c)=(\boldsymbol{q},q_0)$对初态中的核子和 π 介子表示动量四度矢量,随后我们有洛伦兹不变量 W^2/c^2,

$$W^2/c^2=-(p+q)^2=(p^0+q^0)^2-(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})^2 \tag{11}$$

在质心参考系,由定义有

$$\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}=0 \tag{12}$$

以至于

$$W^2=(p^0+q^0)^2c^2 \tag{13}$$

因此 W 确实是这个 π-N 体系在这参考系中的总能量.在实验室系 S 中情况是不同的.在这个参考系中核子是静止的($\boldsymbol{p}_{lab}=0$),所以(11)的洛伦兹不变性成为

$$W^2/c^2 = -(p^2 + q^2 + 2\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}) = M^2c^2 + m_\pi^2c^2 + 2p^0q^0$$
$$= M^2c^2 + m_\pi^2c^2 + 2ME_\pi^{(L)} \tag{14}$$

其中我们用了[①]$M^2c^2 = -p^2$ 和 $m_\pi^2c^2 = -q^2$. M 和 m_π 是核子和 π 介子质量,$E_\pi^{(L)}$ 是 π 介子在实验室参考系中的总能量,给出为

$$(E_\pi^L)^2 = q^2c^2 + m_\pi^2c^4 \tag{15}$$

考虑 π 介子在实验室参考系中的动能,

$$T_\pi^{(L)} = E_\pi^{(L)} - m_\pi c^2 \tag{16}$$

我们对(14)得到

$$W^2 = (Mc^2 + m_\pi c^2)^2 + 2Mc^2T_\pi^{(L)} \tag{17}$$

这种共振可以解释为短寿命的中间态 N*,它由相互作用的 π 介子和核子组成. 文字上这被表达为

$$\pi + N \to N^* \to \pi + N \tag{18}$$

即在 π 介子-核子散射中形成了中间态 N*. 这共振的本性类似于核物理中的复合核. 在那里两个原子核的碰撞给出一个中间的复合核,它随后可以衰变到各种可能的碎片(见下图).

这些中间粒子的质量(能量)由在共振极大处的总能量 W_{max} 给出. 例如在第一个图中(b)表示出一个在 $W=1232$Mev 处的与众不同的极大,相应于 $T_\pi^{(L)}=190$ Mev,并且由实验数据表明我们可以肯定这些中间粒子在反应 π^+p 中表现出两倍正电荷和在反应 π^-p 中是中性的.

别的实验甚至指出带有单个正或负电荷的共振. 对这种反应的一个例子是光子产生过程

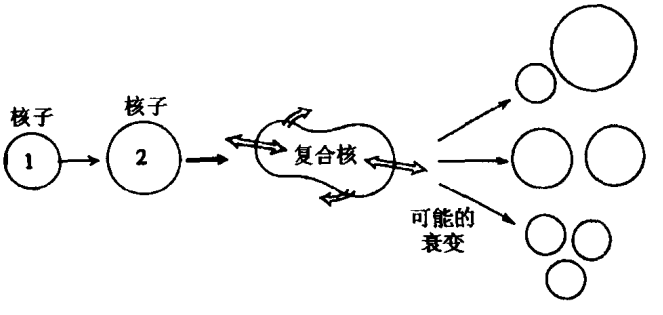
$$\gamma + p \to N^* \to \pi^0 + p \tag{19}$$

相应的截面表示在下一页的图中.

在 $E_\gamma=330$Mev 处的惊人的共振相应于一个带有正电荷和质量 $M=1232$ Mev 的中间粒子. 带负电的 N* 在反应

$$\pi^-p \to \pi^+\pi^+\pi^-\pi^-n \tag{20}$$

中遇到,通过考虑不变质量 $M_{\pi\pi^-}$(即核子和 π 介子的总质量)作为能量的函数(看下一页的图).

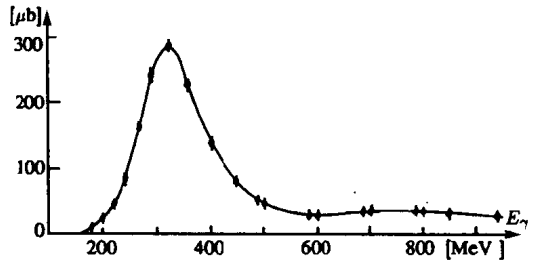


演示带有可能的族转和振动的复合核反应. 中间的复合核结果衰变到各种可能的末态.

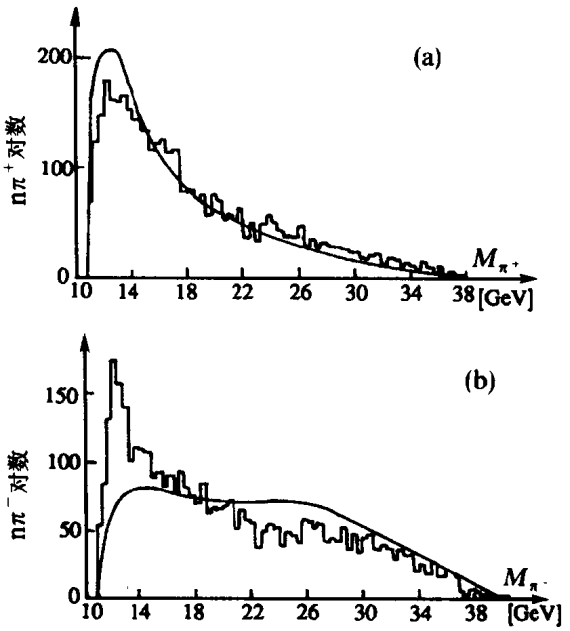
带负电的 N* 被遇到在反应(20)中. 在 $M_{\pi\pi^-}$ 的情况(图的(b)部分)那儿出现一个尖锐的共振,它相对于可以

① 参看 M. Goldstein: *Classical Mechanics* 第二版(Addison-Wesley, Reading 1980)或 W. Greiner: *Theoretische Phyisk I, Mechanik I*(Harri Deutsch, Frankfurt 1989) 34 章.

在图的(a)部分对 $M_{n\pi^+}$ 看到的宽阈的背景明显地突出出来. 这样一个共振的宽度包含关于寿命 τ 的讯息,因为由测不准关系有 $\Gamma\tau\approx\hbar$.



中性介子的光生:E_γ 代表光子相对实验室参考系的能量.



$(n\pi)$体系的质量谱作为在反应 $\pi^-p\to n\pi^+\pi^+\pi^-\pi^-$ 中测得的不变质量的函数.
(a) $(n\pi^+)$体系,(b)$(n\pi^-)$体系.

总结这些事实,我们看到中间态 N^* 带有 $M=1232$Mev 确实是一个电荷四重态,记为 $\Delta^{\text{电荷}}$(总能量),即

$$\Delta^{++}(1232),\Delta^{+}(1232),\Delta^{0}(1232),\Delta^{-}(1232) \tag{21}$$

很清楚,Δ 共振是一个 $T=\frac{3}{2}$ 状态,因为这是最低的指派,它自然地引到至少四个状态,$T_3=\frac{3}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}$ 的一个同位旋多重态(也可看下面一节). 单从分析 π-N 散射不可能决定是否还有这个复合粒子的其他的带电态,因为在 π-N 散射中可以达到的状态被 π 介子和核子的总电荷所限制. 除此以外其他的粒子体系,例如 $\pi+\pi+$N(核子加两个 π 介子)具有接近或大于 1232Mev 的质量. 然而我们将给出理论上的论证,证明 Δ 四重态的

完全性(看练习 6.5,重子共振态的同位旋和超荷和 SU(3)十重态的完全性).

在继续讨论之前,几个有关的要点该轮到了,有关这个例的第一个图,它表明 $\pi^{\pm}p$ 散射的截面:这个图表示出另外的共振,出现在 $\pi^- p$ 反应但不出现在 $\pi^+ p$ 反应,正是在

$$M=1515\text{MeV}(T_\pi^{(L)}=605\text{ MeV}),\ M=1688\text{ MeV}(T_\pi^{(L)}=890\text{ MeV}) \tag{22}$$

显然这种中间粒子必须是中性的.另一方面也出现带电的共振态.因此这些粒子看来属于电荷双重态,命名为 N(*M*).详细地,我们发现

$$N^+(1518),N^0(1515)\text{和 }N^+(1688),N^0(1688) \tag{23}$$

还有别的重子,我们将稍后研究.

让我们转回到(9).联系到(10)我们已经提到反应的比例在 Δ(1232)共振的范围内很容易决定.Δ(1232)已经被等同于一个同位旋四重态,即在(21)中 $T=\frac{3}{2}$.因为这个共振是主要的,我们可以忽略 $T=\frac{1}{2}$ 在(9)中的贡献,并在这近似中得到

$$\langle 1\mu\,\frac{1}{2}\nu\left|\hat{S}\right|1\mu'\frac{1}{2}\nu'\rangle\simeq\left(1\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\middle|\,\mu\nu\mu+\nu\right)\left(1\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\middle|\,\mu'\nu'\mu+\nu\right)\langle\frac{3}{2}\|\hat{S}\|\frac{3}{2}\rangle\delta_{\mu+\nu,\mu+\nu} \tag{24}$$

利用这个关系我们展示这些截面的比例为

$$\begin{aligned}
&\sigma(\pi^+ p\to\pi^+ p):\sigma(\pi^- p\to\pi^- p):\sigma(\pi^- p\to\pi^0 n)\\
&=\left|\left(1\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\middle|\,1\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\right)\right|1\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\Big|^2:\\
&\quad\left|\left(1\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\middle|\,-1\,\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(1\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}-1\,\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\right|^2:\\
&\quad\left|\left(1\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\middle|\,-1\,\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(1\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\middle|\,0-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\right|^2\\
&=\left|1\times1\right|^2:\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\right|^2:\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\times\sqrt{\frac{2}{3}}\right|^2=9:1:2
\end{aligned} \tag{25}$$

它与实验数据很好地符合.对在(9)中的跃迁振幅和因而对预言的同位旋不变性的进一步检验由检查所谓的三角形不等式是否满足而得到.应用列在表 5.2 中的克莱布许-高登系数和借助于跃迁振幅(9)我们可以证明恒等式

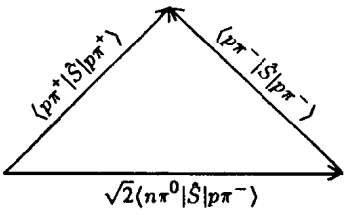
$$\sqrt{2}\,\langle n\pi^0|\hat{S}|p\pi^-\rangle+\langle p\pi^-|\hat{S}|p\pi^-\rangle=\langle p\pi^+|\hat{S}|p\pi^+\rangle \tag{26}$$

因为

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2}\,\langle n\pi^0|\hat{S}|p\pi^-\rangle+\langle p\pi^-|\hat{S}|p\pi^-\rangle-\langle p\pi^+|\hat{S}|p\pi^+\rangle\\
&=\sqrt{2}\left(1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\middle|\,0-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\middle|\,-1\,\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\langle\frac{1}{2}\|\hat{S}\|\frac{1}{2}\rangle\\
&\quad+\left(1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\middle|\,-1\,\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\middle|\,-1\,\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\langle\frac{1}{2}\|\hat{S}\|\frac{1}{2}\rangle\\
&\quad+\sqrt{2}\left(1\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\middle|\,0-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(1\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\middle|\,-1\,\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\langle\frac{3}{2}\|\hat{S}\|\frac{3}{2}\rangle\\
&\quad+\left(1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\,\middle|\,-1\,\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(1\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\middle|\,-1\,\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\langle\frac{3}{2}\|\hat{S}\|\frac{3}{2}\rangle\\
&\quad-\left(1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\,\middle|\,-1\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\right)\left(1\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\middle|\,1\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\right)\langle\frac{3}{2}\|\hat{S}\|\frac{3}{2}\rangle
\end{aligned}$$

$$=\langle\frac{1}{2}\|\hat{S}\|\frac{1}{2}\rangle\left(\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}\right)+\langle\frac{3}{2}\|\hat{S}\|\frac{3}{2}\rangle\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}-1\right)=0$$

因为这三个振幅的每一个包含两个约化矩阵元，$\langle\frac{1}{2}\|S\|\frac{1}{2}\rangle$和$\langle\frac{3}{2}\|S\|\frac{3}{2}\rangle$，它们一般是复的，(26)是在三个复数之间的关系. 在复平面上把这些数表示为矢量，恒等式(26)代表这些矢量的一个封闭三角形(矢量加法). 三角形的每条边代表(26)的振幅之一的绝对值(见图)，并必须小于两个别的边的和. 这一性质使我们能够作出关于散射截面间的关系的进一步预言，它必须对任意的(但固定的)能量和角度成立. (**例 5. 11 完**)



在复平面上演示三角形等式(27)

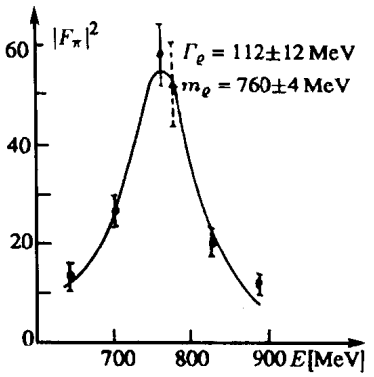
例 5. 12　中性 ϱ 介子的衰变

ϱ 介子和 ω 介子在储存环的实验中通过研究反应

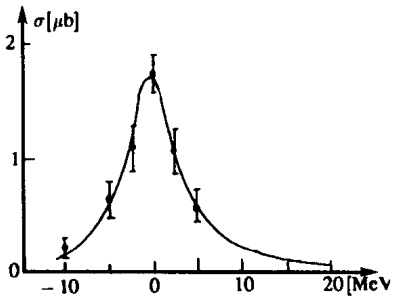
$$e^-+e^+\to\varrho^0\to\pi^-+\pi^+ \tag{1}$$

$$e^-+e^+\to\omega\to\pi^-+\pi^+\pi^0 \tag{2}$$

作为中间态(截面中的共振)被发现，类似于前面讨论过的 Δ，N^+，N^0. 下面的图表明反应 $e^-+e^+\to\pi^+\pi^-$ 的实验总截面. 在 M＝770 Mev 处的共振指出一个中性的中间粒子(因为初态 e^++e^- 的总电荷为 0)它被命名为 ϱ^0 介子.



反应 $e^++e^-\to\pi^++\pi^-$ 的总截面. 在 760 Mev 处的共振被解释为中间的 ϱ^0 介子.



反应 $e^++e^-\to\pi^++\pi^-+\pi^0$ 的总截面. 共振被解释为中间的 ω 介子. 横坐标表示与 780 Mev 的能量差.

类似地，下一个图演示反应 $e^++e^-\to\pi^-+\pi^++\pi^0$ 的截面，表现出一个在 780 Mev 处的共振. 结果，这被解释为另一个中性的中间粒子，所谓 ω 介子. 它必须不同于 ϱ^0 共振，因为三 π 介子末态有负的 G 字称，而 ϱ^0 的 G 字称是正的，它衰变到一对 π 介子. 问题提出来了，关于是否存在进一步的带电粒子，完成包含 ϱ^0 或 ω 共振的多重态. 确实它们被发现在反应

$$\pi^\pm+p\to\varrho^\pm+p\to\pi^\pm+\pi^0+p$$

中作为共振态带有围绕着 770Mev 的质量. 关于 ϱ 介子和 ω 介子的实验数据被总结在下面的表中. 因为有三个 ϱ

介子带有几乎相等的质量,我们肯定它们形成一个同位三重态,而中性 ω 介子是一个同位旋单态.

ϱ 和 ω 介子的实验数据

	自旋	宇称	质量[MeV]	宽度 Γ[MeV]	寿命[s]	电荷
ϱ^+	1	—	770	153	4.3×10^{24}	e
ϱ^-	1	—	770	153	4.3×10^{-24}	−e
ϱ^0	1	—	770	153	4.3×10^{-24}	0
ω	1	—	783	10	5.5×10^{-23}	0

下面我们研究 ϱ^0 介子到两个 π 介子的衰变,即反应

$$\varrho^0\to\pi^+ +\pi^- \tag{3a}$$

$$\varrho^0\to 2\pi^0 \tag{3b}$$

它们由跃迁矩阵元

$$\langle 1\ \mu\ 1-\mu|\hat{S}|T=1,T_3=0\rangle=(111|\mu-\mu 0)\langle 1\|\hat{S}\|1\rangle \tag{4}$$

描写.代入(3)的 μ 值我们发现衰变振幅(3a)和(3b)分别正比于克莱布许-高登系数(111|1−10)和(111|000).后者等于 0,即(111|000)=0,这是由于克莱布许-高登系数的一个一般的对称性,即①

$$(j_1j_2j_3|m_1m_2m_3)=(-1)^{j_1+j_2-j_3}(j_2j_1j_3|m_2m_1m_3) \tag{5}$$

(3b) 振幅为 0 意味着 ϱ^0 介子到两个 π^0 介子的衰变是一个禁戒反应

$$\varrho^0\not\to 2\pi^0$$

这被实验肯定.类似地 ω 介子到三个 π 介子

$$\omega\not\to 3\pi^0$$

结果是一个禁戒的衰变模式,它也是由于相关的克莱布许-高登系数(111|000)为 0.(**例 5.12 完**)

5.6 人物小传

E.P. 维格纳(WIGNER,Eugen Paul),1902 年生于布达佩斯,从 1938 年起为普林斯顿大学教授,1963 年与J.H.D. 金森和玛丽亚·戈贝脱-梅耶一起为他们对原子核和基本粒子理论的贡献,特别是对称性基本原理的发现和应用获得诺贝尔奖金.在普林斯顿退休之后,他在在巴吞鲁日的路易斯安那大学成为一个出众的教授.

C.H. 埃克特(ECKART,Carl Henry),1902 年生于圣路易斯,1973 年死于拉乔拉,从 1928 到 1946 年在芝加哥当教授并稍后在圣地亚哥当教授到 1970 年.除了关于理论物理的文章外,爱卡尔脱对海洋学作出了无数贡献.

① 例如看,M. E. Rose: *Elementary Theory of Augular Momentum* (Wiley, New York 1957).

第6章 超 荷

在上一章里我们遇到了同位旋群的电荷多重态. 几个实验的例子肯定了这种对称性的可靠性. 在一个电荷多重态内的粒子仅仅差在电荷上(和其他电磁性质,例如磁矩、电四极矩). 在一个多重态中所有基本电荷 e 的整数倍,从最小值 $Q_{\min}$ 到最大值 $Q_{\max}$ 都实现了. 一般 $Q_{\min}+Q_{\max}\neq 0$,而这电荷多重态不必然对称地放在电荷轴原点的两边. 因此电荷的中心可以不同于 0. 这被显示在图6.1中.

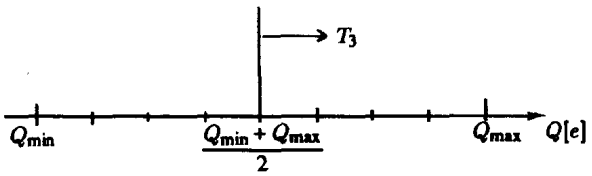


图 6.1 一个同位旋多重态的电荷中心

为了补偿这样一个整体的电荷移动,同位旋分量 T_3 从电荷中心 $\frac{1}{2}(Q_{\min}+Q_{\max})$ 向上算起. 我们因此在一个粒子的电荷和同位旋 3 分量之间得到关系

$$Q=\frac{1}{2}(Q_{\min}+Q_{\max})+T_3 \tag{6.1}$$

其中 T_3 取值

$$T_3=0,\pm 1,\pm 2,\cdots,\pm\frac{1}{2}(Q_{\max}-Q_{\min}) \tag{6.2}$$

很清楚我们得到

$$2T=Q_{\max}-Q_{\min} \tag{6.3}$$

或相应地

$$2T+1=(Q_{\max}-Q_{\min})+1 \tag{6.4}$$

该多重态的电荷中心从现在起简写为 $\frac{1}{2}Y$,其中

$$\frac{1}{2}Y=\frac{1}{2}(Q_{\min}+Q_{\max})=\text{电荷中心} \tag{6.5}$$

是一个单独在同位旋对称的框架内不确定的量. 方程(6.5)定义了所谓超荷 Y. 超荷的思想要追

溯到盖尔曼(Gell-Mann)和西岛(Mishijima)[①],他们在1953年各自独立地引入了它.关系(6.1)此后采取以下形式

$$Q=\frac{1}{2}Y+T_3, T_3=T, T-1, \cdots -T \tag{6.6}$$

它叫做盖尔曼-西岛关系.

为了分类粒子,超荷的作用和同位旋有同样的重要性.这可以由下看出:这两个量 Y 和 T_3 是(6.6)的一部分,决定了电荷.以下的例子进一步说明了这一点.

练习 6.1 原子核的超荷

问题 决定在一个同位旋多重态中的原子核的超荷,对一个包含 Z 个质子和 N 个中子的原子核($A=N+Z$ 是总的核子数)的电荷算符 $\hat{Q}$ 由(5.21)是已经知道的.

解 据前,一个原子核的电荷用基本电荷 e 为单位给出为

$$Q=\left(\frac{1}{2}A+T_3\right) \tag{1}$$

跟(6.6)比较给出

$$Y=A \tag{2}$$

因此属于一定同位旋多重态的原子核的超荷等于它的总核子数.(**练习 6.1 完**)

例 6.2 Δ 共振的超荷

在例 5.8 中(22)我们认识了 Δ 共振的同位旋的四重态

$$\Delta^{++}, \Delta^{+}, \Delta^{0}, \Delta^{-} \tag{1}$$

最大电荷是 $Q_{max}=2$ 和最小电荷是 $Q_{min}=-1$.按照(6.5)超荷为

$$Y=(Q_{max}+Q_{min})=2+(-1)=1 \tag{2}$$

并按照(6.3)

$$T=\frac{1}{2}(Q_{max}-Q_{min})=\frac{1}{2}[2-(-1)]=\frac{3}{2} \tag{3}$$

盖尔曼-西岛关系为

$$Q=\frac{1}{2}+T_3 \tag{4}$$

其中 $T_3=\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$.该关系重新产生了 Δ 共振四重态的所有观察电荷.(**例 6.2 完**)

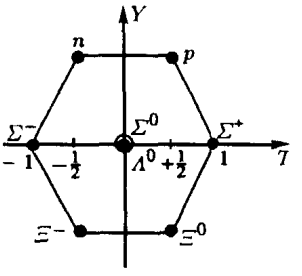
---

① 参看 T. Nakuno, K. Nishijima: Prog. Theor. Phys. 10, 581(1953); M. Gell-mann: Phys. Rev. 82, 833 (1953).

例 6.3 重子

所有编在以下表中的基本粒子叫做重子①. 重子的内在关系(以及重子共振态,看练习 6.5)是由此事实建立的:在每个衰变道中这些粒子衰变到别的重子,也即重子的个数在任何反应或衰变过程中不改变. 不同的同位多重态(电荷多重态)是明显的. 核子和 Ξ 粒子各形成一个同位二重态,Λ^0 和 Ω 粒子各代表一个同位单态. 而 Σ 超子是同位三重态. 超荷 Y 可以由通常的方式推出并在以下表的第六列中给出.

右边的图表示了量子数 Y(超荷)和 T_3(同位旋第三分量)的表示,对于它们,自旋 $\frac{1}{2}$ 的重子形成一个八重态. 所有粒子带自旋 $\frac{1}{2}$ 和正宇称. Ω 粒子带有自旋 $\frac{3}{2}$,不适合于这个图. (**例 6.3 完**)



重子九重态的量子数 Y, T_3

关于反粒子的某些事实:对每个半整数自旋的粒子存在有相应的反粒子②. 一个量子力学自洽的相对论处理预言了这些反粒子. 每个反粒子有和它的粒子一样的质量(能量)但带有相反的电荷;因而电子(自旋 $\frac{1}{2}$,e^-)的反粒子是正电子(自旋 $\frac{1}{2}$,e^+),质子(自旋 $\frac{1}{2}$,p^+)的反粒子是反质子(自旋 $\frac{1}{2}$,p^-). 中性粒子也有反粒子,正如中子(自旋 $\frac{1}{2}$,n)和反中子(自旋 $\frac{1}{2}$,$\bar{n}$). 区分中性粒子和它的反粒子是不容易的,因为它们有非常类似的性质(然而在磁矩的符号上有一个差别),但是它们能相互湮灭而形成介子③,如同在

$$n+\bar{n}\to\pi^+ +\pi^- \tag{6.7}$$

的情况. 介子也有反粒子,但是在此场合下情况稍为复杂一些. 对一个中性波色子,可能粒子和反粒子是恒等的. 这是对 π 介子的情况,这儿我们有

$$\overline{\pi^+}=\pi^-,\quad \overline{\pi^-}=\pi^+,\quad \overline{\pi^0}=\pi^0 \tag{6.8}$$

另一方面 K 介子(同位二重态 K^+,K^0,自旋 0,也可看关于轻子的讨论)的反粒子是不同的:

$$\overline{K^+}=K^-,\quad \overline{K^0}=\overline{K}^0 \tag{6.9}$$

按照标准的规定反粒子将被标记为在相应的粒子符号上加一横,就像我们在这一节中已经做的一样.

---

① barys(源于希腊文 βαρύς)即"重".

② 这被详细表明在将出版的 *Relativistic Quantum Mechanics* 和 *Quantum Electrodynamics* (Springer, Berlin, Heidelberg)中.

③ 由 mesos(源于希腊文 μέσος)即"中等".

低质量重子的性质

名称	符号	自旋(字称) $J^{(P)}$	T 同位旋	T_3 同位旋投影	超荷	质量 [MeV]	寿命	主要衰变	分支比 [%]
核子	N p	$1/2^+$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	938.3	∞	—	
	N n	$1/2^+$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	939.6	15 min	$pe^-\bar{\nu}_e$	100
超子									
	Λ^0	$1/2^+$	0	0	0	1116	2.6×10^{-10}s	$p\pi^-$	64.2
								$n\pi^0$	35.8
	Σ^+	$1/2^+$	1	1	0	1189	0.8×10^{-10}s	$p\pi^0, n\pi^+$	51.6, 48.4
	Σ^0	$1/2^+$	1	0	0	1192	5.8×10^{-20}s	$\Lambda\gamma$	100
	Σ^-	$1/2^+$	1	−1	0	1197	1.5×10^{-10}s	$n\pi^-$	100
	Ξ^0	$1/2^+$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	−1	1315	2.9×10^{-10}s	$\Lambda\pi^0$	100
	Ξ^-	$1/2^+$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	−1	1321	1.6×10^{-10}s	$\Lambda\pi^-$	100
	Ω^-	$3/2^+$	0	0	−2	1672	0.8×10^{-10}s	$\Lambda K^-, \Xi^0\pi^-$	68.6, 23.6
								$\Xi^-\pi^0$	8

例 6.4 反重子

反重子由它们的电荷区别于前面例子中讨论的重子,而质量和总同位旋对重子和反重子两者是相同的.

所以在 Σ 粒子的同位三重态

$$\Sigma=\{\Sigma^+,\Sigma^0,\Sigma^-\} \tag{1}$$

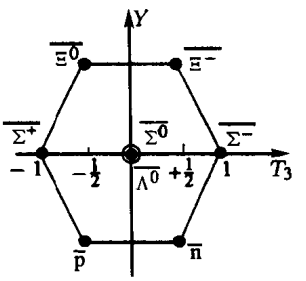
外存在有反 Σ 粒子的同位三重态

$$\overline{\Sigma}=\{\overline{\Sigma^+},\overline{\Sigma^0},\overline{\Sigma^-}\} \tag{2}$$

$\overline{\Sigma^+}$ 带负电荷,但是有和 Σ^+ 一样的质量和自旋. 两者相互湮灭给出

$$\Sigma^+ + \overline{\Sigma^+} \rightarrow \begin{cases} 2\gamma \\ p+\bar{p} \end{cases}, \text{等等} \tag{3}$$

由(6.6)得出我们必须反转 T_3 和 Y,如果电荷改变符号的话. 所以对质子 $\bar{p}$ 得出 $T_3=-\frac{1}{2}$ 和 $Y=-1$. 对反重子一个于 Y-T_3 平面的八重态的结果被表示在图中. (**例 6.4 完**)



反重子八重态,所有粒子带自旋 $\frac{1}{2}$ 和正字称

练习 6.5 重子共振态的同位旋和超荷

问题 在下表中给出的关于重子共振态的情况,推出它们的同位旋 T,T_3 和超荷 Y. 画出相应的 Y-T_3 图.

解 我们可以再一次认出这些重子共振态和重子本身之间的内在关系,作为它们衰变的结果,它成为明显的:衰变产物(第九列)之一总是一个重子. 所以某种意义上重子共振态是激发的重子. Δ 共振态已经在例 6.2 中讨论过了. 很清楚 N′ 和 Ξ 共振各形成一个同位二重态,Λ^* 是一个同位单态和 Σ^* 是一个同位三重态. 特别是如果我

们考虑 Σ^* 就得出 $Q_{max}=1$ 和 $Q_{min}=-1$. 所以因此由(6.3)我们得到

$$T=\frac{1}{2}(Q_{max}-Q_{min})=\frac{1}{2}[1-(-1)]=1 \tag{1}$$

并由(6.5)得

$$Y=(Q_{max}+Q_{min})=1+(-1)=0 \tag{2}$$

重子共振态的性质

符号	j^p	Q T T_3 Y	质量 [MeV]	寿命 [s]	Γ [MeV]	主要衰变道	共振分波
N^* Δ^{++}	$3/2^+$	2					
N^* Δ^{+}	$3/2^+$	1	1232 ± 2	5.49×10^{-24}	120	$N\pi$	$P_{33}\pi p$
N^* Δ^{0}	$3/2^+$	0					
N^* Δ^{-}	$3/2^+$	-1					
N' N'^{+}	$1/2^+$	1	1440 ± 40	3.13×10^{-24}	210	$N\pi, N\pi\pi$	$P_{11}\pi p$
N' N'^{0}	$1/2^+$	0					
Λ^*	$1/2^-$	0	1405 ± 5	1.65×10^{-23}	40	$\Sigma\pi$	$S_{01}K^-p$
Σ^* Σ^{*1}	$3/2^*$	1	1382.3 ± 0.4				
Σ^* Σ^{*0}	$3/2^*$	0	1382.0 ± 2.5	1.78×10^{-25}	37	$\Lambda\pi, \Sigma\pi$	$P_{13}K^-p$
Σ^* Σ^{*-1}	$3/2^*$	-1	1387.4 ± 0.6				
Ξ^* Ξ^{*0}	$3/2^*$	0	1531.8 ± 0.3	9.4×10^{-23}	7	$\Xi\pi$	P
Ξ^* Ξ^{*-}	$3/2^*$	-1	1535.0 ± 0.6				

T_3 分量由盖尔曼 - 西岛关系和测量的电荷得出

Σ^{*+} 到 $T_3=1$

Σ^{*0} 到 $T_3=0$

Σ^{*-} 到 $T_3=-1$

现在我们填上这表的空的列,列在下面

重子共振态的同位旋和超荷

粒子	T	T_3	Y
Δ^{++}	$\frac{3}{2}$	$+\frac{3}{2}$	1
Δ^{+}	$\frac{3}{2}$	$+\frac{1}{2}$	1
Δ^{0}	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
Δ^{-}	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1
N'^{+}	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	1
N'^{0}	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
Λ^*	0	0	0
Σ^{*+}	1	1	0

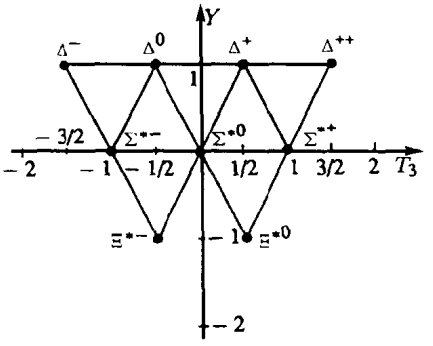
续表

粒子	T	T_3	Y
Σ^{*0}	1	0	0
Σ^{*-}	1	-1	0
Ξ^{*0}	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	-1
Ξ^{*-}	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1

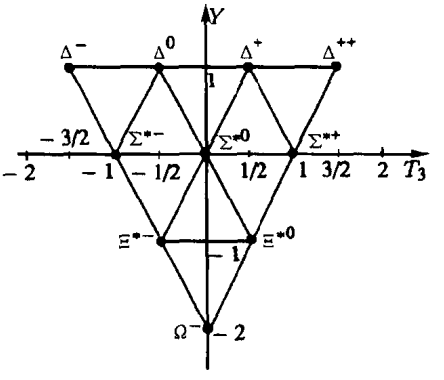
对 $J^P=\frac{3}{2}^+$ 的重子共振态的 Y-T_3 图表示在图中显然，为了建立一个较高对称性的图，缺少带有

$$J^P=\frac{3}{2}^+,Y=-2 \text{ 和 } T_3=0,\text{所以 } Q=-1 \tag{4}$$

的粒子. 实际上我们允许 Ω 粒子作为例 6.3 中的重子之一. 因为它的自旋 $J=\frac{3}{2}$，它不适合那个体系. 现在我们可以把它放在这些重子多重态的 $T_3=0$ 和 $Y=-2$ 的点上. 而且它的高质量现在很好地适合这个图.



$J^P=\frac{3}{2}^+$ 的重子共振态的 T_3-Y 值的表示



包括 Ω 粒子的重子共振态的 T_3-Y 图. 这个图是高度对称的和显然完全的.

6.1 人物小传

M. 盖尔曼(GELL-MANN，Murray)，物理学家. 1929 年 9 月 15 日生于纽约，在帕萨迪纳的加州理工学院当教授. 他写了关于基本粒子理论的文章，特别是关于形式因子，对称群和雷杰极点. 在 Y·耐爱曼的同时盖尔曼发展了重子和介子八重态的模型. 为此工作在 1969 年他获得了诺贝尔奖.

西岛和彦，物理学家. 1926 年 9 月 4 日生于日本土浦. 继他在东京和大阪的学习之后，他在哥丁根、普林斯顿和伊利诺斯大学工作过. 1966 年西岛成为东京大学教授. 他现在是京都大学汤川会堂的主任. 西岛对理论粒子物理有许多贡献，最引人注意的是奇异量子数的建议，两种中微子假设和束缚态的场论.

第 7 章　SU(3)对称性

为了加深对第 6 章研究的最后一个问题中出现的在 Y-T_3 平面上的对称性的理解，我们转回到群论. 我们猜测所得的图形代表一种新的对称性的多重态. 问题是什么是包含这些多重态的对称群的本质. 因为同位旋多重态是所得的更大多重态的一部分，以及同位旋是 SU(2)对称性的体现，我们尝试下一个更高的群 SU(3). 我们将发现 SU(3)的多重态确实严格给出练习 6.3 至 6.5 中得到的图形.

如同我们将稍后讨论的，SU(3)对称性的发现作为基本粒子的一种排列原则是现代物理的一个高潮. 首先我们给出一个简单的引言：

7.1　群 U(n)和 SU(n)

一个 n 行 n 列的幺正二次型矩阵 $\hat{U}$ 可以被写为

$$\hat{U}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}} \tag{7.1}$$

这里 $\hat{H}$ 是一个 n 行和 n 列的厄密二次型矩阵. 所有这种矩阵在矩阵乘法下形成一个群. 这个群我们称之为 U(n)，代表“n 维幺正群”. 因为 $\hat{H}$ 是厄密的，它的对角元素是实的，

$$H_{ii}^{*}=H_{ii} \tag{7.2}$$

以及

$$H_{ij}^{*}=H_{ji}, \qquad i,j=1,2,\cdots,n \tag{7.3}$$

这样 $\hat{H}$，从而 $\hat{U}$ 允许有 n^2 个实的独立参数. 显然 U(n)群是一个连续和连通的群，因为每个单个矩阵元的值可以连续地改变. U(n)代表一个紧致李群，因为每个以下形式的复数矩阵元的极限

$$\lim_{\sigma\to\sigma^0}U_{ik}(\sigma)=U_{ik}(\sigma^0) \tag{7.4}$$

再次给出一个复数 $U_{ik}(\sigma^0)$，而带有这些矩阵元的矩阵再次给出一个群元素. 由于(7.2)，一个厄密矩阵的迹是实的. 对幺正矩阵 $\hat{U}$，$\hat{U}^{+}\hat{U}=1$ 成立，由此

$$\det\hat{U}^{+}\det\hat{U}=(\det\hat{U})^{*}\det\hat{U}=1,\ |\det\hat{U}|^{2}=1 \tag{7.5}$$

应用此式到(7.1)就给出

$$\mathrm{Tr}\hat{H}=\alpha,\quad \alpha\text{ 为实数}$$

$$\det\hat{U}=\det(e^{i\hat{H}})=e^{i\mathrm{Tr}\hat{H}}=e^{i\alpha} \tag{7.6}$$

这是下式的一个结果

$$\det\hat{U}=\det\hat{U}'=\det\hat{S}\hat{U}\hat{S}^{-1}=\det\begin{pmatrix} U'_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & U'_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0\cdots & \cdots & \cdots & U'_{nn} \end{pmatrix}$$

这里假设 $\hat{S}$ 把 $\hat{U}$ 变为对角形 $\hat{U}'$,因此 $\hat{U}'$ 是对角的,$\hat{H}$ 也必需是对角的. 这样

$$\det\hat{U}=\det\hat{U}'=\det e^{i\hat{H}'}=\det\exp i\begin{pmatrix} H'_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & H'_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0\cdots & \cdots & \cdots & H'_{nn} \end{pmatrix}$$

$$=\det\begin{pmatrix} e^{iH'_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{iH'_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0\cdots & \cdots & \cdots & e^{iH'_{nn}} \end{pmatrix}=e^{i(H'_{11}+H'_{22}+\cdots+H'_{nn})}=e^{i\mathrm{Tr}\hat{H}'}=e^{i\mathrm{Tr}\hat{H}}$$

最后一步正确是因为

$$\mathrm{Tr}\hat{H}'=\mathrm{Tr}\hat{S}\hat{H}\hat{S}^{-1}=\mathrm{Tr}\hat{H}\hat{S}\hat{S}^{-1}=\mathrm{Tr}\hat{H}$$

这是由于 $\mathrm{Tr}(\hat{A}\hat{B})=\mathrm{Tr}(\hat{B}\hat{A})$,明显地写出来为

$$\mathrm{Tr}\hat{A}\hat{B}=\sum_{ik}A_{ik}B_{ki}=\sum_{ki}B_{ki}A_{ik}=\mathrm{Tr}\hat{B}\hat{A}$$

如果我们要求

$$\det\hat{U}=+1 \tag{7.7}$$

总成立,这意味着对 n^2 个参数加上一个条件 $\alpha=0$ 到 2π. 由(7.7)规定的矩阵形成一个连续紧致李群. 这个群叫做"n 维特殊幺正群". 它依赖于 n^2-1 个实参数,被记为 SU(n). 显然,SU(n)是 U(n)的一个子群. 如果我们标记 SU(n)的一定元素为 U_0,满足

$$\hat{U}_0=e^{i\hat{H}_0}\quad,\quad \mathrm{Tr}\hat{H}_0=0\quad,\quad \det\hat{U}_0=1 \tag{7.8}$$

那末我们总可以把 U(n)的一个任意给定的元素 $\hat{U}$ 写成(参看(7.1)):

$$\hat{U}=e^{i\hat{H}}=\exp\left[i\left(\hat{H}_0+\frac{\alpha}{n}\mathbb{1}\right)\right]=\left[\exp\left(i\frac{\alpha}{n}\right)\mathbb{1}\right]\hat{U}_0=\hat{U}_0\left[\exp\left(i\frac{\alpha}{n}\right)\mathbb{1}\right] \tag{7.9}$$

其中 $\hat{H}=\hat{H}_0+(\alpha/n)\mathbb{1}$,$\mathbb{1}$ 为单位矩阵. 因子 α/n 必须如下选择

$$\mathrm{Tr}\hat{H}=\mathrm{Tr}\hat{H}_0+\mathrm{Tr}\frac{\alpha}{n}\mathbb{1}=\frac{\alpha}{n}\mathrm{Tr}\,\mathbb{1}=\frac{\alpha}{n}n=\alpha$$

换句话 U(n)的矩阵元因子化为

$$U_{ik}=\exp\left(i\frac{\alpha}{n}\right)(\hat{U}_0)_{ik}$$

从 $\det\hat{U}_0=1$ 就确实得出

$$\det\hat{U}=e^{i\alpha}\det\hat{U}_0=e^{i\alpha}$$

这样一个因子化的矩阵 $\hat{U}$ 是 U(n)的一个元素，而 $\hat{U}_0$ 是 SU(n)的一个元素. 因子 $\exp(i\alpha/n)$ 是 1×1 幺正矩阵，形成群 U(1)，而 $n\times n$ 矩阵 $\exp(i\alpha/n)\mathbb{1}$ 形成群 U(1)的一个可能的实现. 我们可以如下公式化(7.9)的结果：U(n)的一个任意元素 U 总可以写成一个适当的 $\exp(i\alpha/n)\mathbb{1}$ (它是 U(1)的元素)，和一个 SU(n)的元素 U_0 的矩阵积.

显然，如果 $n\leqslant m$，U(n)和 SU(n)两者都是 U(m)的子群. 这可以如下推出，一个任意的U(n)的元素 $\hat{U}$ 总可以扩张成一个 $m\times m$ 的矩阵，如

$$\hat{U}'=\begin{pmatrix}\hat{U} & 0\\ 0 & \mathbb{1}\end{pmatrix} \tag{7.10}$$

这 n 单位矩阵是($m-n$)维的，而 0 代表 $n\times(m-n)$的长方形 0 矩阵. 按照(7.1)相应的厄密矩阵 $\hat{H}'$ 是如下形式

$$\hat{H}'=\begin{pmatrix}\hat{H} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \tag{7.11}$$

其中 $\hat{H}$ 相应于(7.1)中的 $n\times n$ 的矩阵为 $\hat{U}$.

7.1.1　U(n)和 SU(n)的生成元

第三章的一般论述得出结论(参看(3.6))：对所有李群，它的生成元由接近于单位元素的无穷小群元素所决定. 群 U(n)有 n^2 个参数 $\phi_j(j=1,\cdots,s)$，因而有 n^2 个生成元 $\hat{\lambda}_j$. 下列关系成立

$$\hat{U}(\delta\phi_j)=e^{i\hat{H}(\delta\phi_j)}=\mathbb{1}+i\hat{H}(\delta\phi_j)=\mathbb{1}+i\sum_{j=1}^{n^2}\delta\phi_j\hat{\lambda}_j \tag{7.12}$$

由于 $\hat{H}$ 必须是厄密的，在 U(n)的场合我们能用 n^2 个线性独立的 $n\times n$ 厄密矩阵作为生成元. 在此情况可以直接推出

$$[\hat{\lambda}_i,\hat{\lambda}_j]_-=iC_{ijk}\hat{\lambda}_k \tag{7.13}$$

成立，因为 $i[\lambda_i,\lambda_j]$再次是 $n\times n$ 厄密矩阵，它可以表达为线性独立的 $\hat{\lambda}_k$ 的一个线性组合. 因此 U(n)的李代数是封闭的. 这点我们已经从第三章的普遍考虑中知道了. 为了实际的理由在(7.13)中我们写结构常数为 iC_{ijk}，而在(3.13)中因子 i 被吸收到 C_{ijk}中去了. 类似 U(n)的生成元，SU(n)的生成元可以选 n^2-1 个线性独立的，迹为 0 的($n\times n$)厄密矩阵. 应用(7.6)，无迹性是保证(7.7)成立所必需的. 再一次我们可以肯定 $i[\lambda_i,\lambda_j]$是一个迹为 0 的厄密矩阵，从而 SU(n)的李代数也是封闭的.

例 7.1　SU(2)的李代数

在此特殊情况，我们选 $n=2$，结果 2 维矩阵 SU(2) 包含 $2^2-1=3$ 个参数. 这些参数可以看成是一个矢量

ϕ 的三个实分量. 作为生成元我们需要三个线性独立的无迹矩阵. 考虑泡利自旋矩阵①我们知道

$$\hat{\sigma}_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \hat{\sigma}_2=\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&0\end{pmatrix},$$

$$\hat{\sigma}_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad \mathbb{1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \tag{1}$$

是线性独立的 2×2 厄密矩阵,它们完全张开 2×2 矩阵空间

$$\begin{pmatrix}U_{11}&U_{12}\\U_{21}&U_{22}\end{pmatrix}$$

另外 $\hat{\sigma}_1,\hat{\sigma}_2$ 和 $\hat{\sigma}_3$ 是无迹的. 所以我们能取它们为 SU(2) 的生成元. $\hat{\sigma}_i$ 的对易关系是 $[\hat{\sigma}_i,\hat{\sigma}_j]=2\mathrm{i}\epsilon_{ijk}\hat{\sigma}_k$. 代替 $\hat{\sigma}_i$,更方便的是用 $\hat{S}_i=\frac{1}{2}\hat{\sigma}_i$ 作为生成元,把对易关系简化为

$$[\hat{S}_i,\hat{S}_j]=\mathrm{i}\epsilon_{ijk}\hat{S}_k \tag{2}$$

没有了因子 2. 这些关系定义了一个李代数,它同构于 SO(3) 群的李代数. 根据(7.1),SU(2) 的算符能表示成

$$\hat{U}=\exp(-\mathrm{i}\phi_j\hat{S}_j) \tag{3}$$

显然生成元 $\{\hat{S}_1,\hat{S}_2,\hat{S}_3\}$ 中没有一对对易. 所以对易生成元的最大数是 1,这决定了 SU(2) 的秩为 1. 应用拉卡定理得出只有一个卡西米尔算符. 它是

$$\hat{S}^2=\hat{S}_1^2+\hat{S}_2^2+\hat{S}_3^2 \tag{4}$$

这可以利用代数 SO(3) 和 SU(2) 的同态直接证明. (**例 7.1 完**)

7.2 SU(3)的生成元

3 维的特殊幺正群 SU(3)有 $3^2-1=8$ 个生成元. 我们记它们为

$$\hat{\lambda}_1,\hat{\lambda}_2,\cdots,\hat{\lambda}_8 \tag{7.14}$$

并适当地选取它们. 由于 SU(2)是 SU(3)的一个子群,SU(3)的三个生成元可以从 SU(2)的生成元(泡利矩阵)来构造,把它们扩张到三维. 方程(7.10)表明怎么做,结果是

$$\hat{\lambda}_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \hat{\lambda}_2=\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \hat{\lambda}_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix} \tag{7.15}$$

厄密的 $\hat{\lambda}_i$ 的迹为 0 是要求的. 前三个生成元的对易关系类似于它们由之构成的三个泡利矩阵的对易关系

$$[\hat{\sigma}_i,\hat{\sigma}_j]_-=2\mathrm{i}\epsilon_{ijk}\hat{\sigma}_k,\quad i,j,k=\{1,2,3\} \tag{7.16}$$

$$[\hat{\lambda}_i,\hat{\lambda}_j]_-=2\mathrm{i}\epsilon_{ijk}\hat{\lambda}_k,\quad i,j,k=\{1,2,3\} \tag{7.17}$$

ϵ_{ijk} 是众所周知的完全反对称张量. 剩下五个生成元可以由不同的方法选取. 我们用基本粒子物

① 参看本丛书《量子力学:导论》北京大学出版社,2000.

理中的符号[①]

$$\hat{\lambda}_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\hat{\lambda}_5=\begin{pmatrix}0&0&-\mathrm{i}\\0&0&0\\\mathrm{i}&0&0\end{pmatrix},\hat{\lambda}_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\hat{\lambda}_7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-\mathrm{i}\\0&\mathrm{i}&0\end{pmatrix},\quad \hat{\lambda}_8=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix} \tag{7.18}$$

所有 $\hat{\lambda}$ 都是厄密和无迹的

$$\hat{\lambda}_i^+=\hat{\lambda}_i,\quad \mathrm{Tr}\hat{\lambda}_i=0 \tag{7.19}$$

这个结构是简单的，例如 $\hat{\lambda}_4$ 和 $\hat{\lambda}_6$ 来自把 $\hat{\lambda}_1$ 中的泡利矩阵

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

的非 0 矩阵元依次往下移动

$$\hat{\lambda}_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\hat{\lambda}_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\to\hat{\lambda}_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} \tag{7.20}$$

类似地 $\hat{\lambda}_2,\hat{\lambda}_5$ 和 $\hat{\lambda}_7$ 联系在一起

$$\hat{\lambda}_2=\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}&0\\\mathrm{i}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\hat{\lambda}_5=\begin{pmatrix}0&0&-\mathrm{i}\\0&0&0\\\mathrm{i}&0&0\end{pmatrix}\to\hat{\lambda}_7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-\mathrm{i}\\0&\mathrm{i}&0\end{pmatrix} \tag{7.21}$$

最后 $\hat{\lambda}_3$ 和 $\hat{\lambda}_8$ 是无迹对角矩阵. 在 $\hat{\lambda}_8$ 的定义中，因子 $1/\sqrt{3}$ 是必要的，以使关系

$$\mathrm{Tr}\hat{\lambda}_i\hat{\lambda}_j=2\delta_{ij}$$

对所有 $i,j=1,2,\cdots,8$ 成立. 我们将在证明(7.24)后来讨论这个关系和它的结果.

练习 7.2　生成元 $\hat{\lambda}_i$ 的线性独立性

问题　表明八个生成元 $\hat{\lambda}$ 是线性独立的，并张开所有 3×3 无迹厄密矩阵的空间.

解　只要我们能表明最一般的 3×3 无迹厄密矩阵

$$\hat{H}=\begin{pmatrix}h_{11}&h_{12}&h_{13}\\h_{12}^*&h_{22}&h_{23}\\h_{13}^*&h_{23}^*&-(h_{11}+h_{22})\end{pmatrix}$$

总是能被八个 $\hat{\lambda}$ 矩阵(7.15)和(7.18)的线性组合表示

---

① 参看 M. Gell-Mann, Y. Ne'eman: *The Eight-fold Way* (Benjamin, New York 1964).

$$\sum_{j=1}^{8}\lambda_j\hat{\lambda}_j=\hat{H} \tag{1}$$

这个问题就解决了.这个猜想导致系数 λ_i 的线性非齐次方程组

$$\lambda_1 0+\lambda_2 0+\lambda_3 1+\lambda_4 0+\lambda_5 0+\lambda_6 0+\lambda_7 0+\lambda_8\frac{1}{\sqrt{3}}=h_{11}$$

$$\lambda_1 1-\lambda_2 \mathrm{i}+\lambda_3 0+\lambda_4 0+\lambda_5 0+\lambda_6 0+\lambda_7 0+\lambda_8 0=h_{12}$$

$$\lambda_1 0+\lambda_2 0+\lambda_3 0+\lambda_4 1-\lambda_5 \mathrm{i}+\lambda_6 0+\lambda_7 0+\lambda_8 0=h_{13}$$

$$\lambda_1 1+\lambda_2 \mathrm{i}+\lambda_3 0+\lambda_4 0+\lambda_5 0+\lambda_6 0+\lambda_7 0+\lambda_8 0=h_{12}^*$$

$$\lambda_1 0+\lambda_2 0-\lambda_3 1+\lambda_4 0+\lambda_5 0+\lambda_6 0+\lambda_7 0+\lambda_8\frac{1}{\sqrt{3}}=h_{22}$$

$$\lambda_1 0+\lambda_2 0+\lambda_3 0+\lambda_4 0+\lambda_5 0+\lambda_6 1-\lambda_7 i+\lambda_8 0=h_{23}$$

$$\lambda_1 0+\lambda_2 0+\lambda_3 0+\lambda_4 1+\lambda_5 \mathrm{i}+\lambda_6 0+\lambda_7 0+\lambda_8 0=h_{13}^*$$

$$\lambda_1 0+\lambda_2 0+\lambda_3 0+\lambda_4 0+\lambda_5 0+\lambda_6 1+\lambda_7 \mathrm{i}+\lambda_8 0=h_{23}^*$$

因为最后一个方程是不独立的,它等于第一和第五个方程负的和,它可以被略去.所以对八个系数 λ_i 确实留下八个方程.行列式

$$\det\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & -\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & +\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & +\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & +\mathrm{i} & 0 \end{vmatrix}=\frac{16}{\sqrt{3}}\mathrm{i}\neq 0$$

是不等于 0 的.结果对这个体系总是存在唯一解.(**练习 7.2 完**)

7.3 SU(3)的李代数

借助于生成元(7.15)和(7.18)的明显表达式我们很容易计算 $\hat{\lambda}_i$ 的对易关系和 SU(3)的李代数.利用爱因斯坦求和规则,我们发现

$$[\hat{\lambda}_i,\hat{\lambda}_j]_-=2\mathrm{i}f_{ijk}\hat{\lambda}_k \tag{7.22}$$

其中我们抽出了因子 2i.结构常数对交换任何两个指标是完全反对称的(参看练习 7.4)

$$f_{ijk}=-f_{ikj}=-f_{jik} \tag{7.23}$$

等等.它们被列在表 7.1 中,表中还列出了对称系数 d_{ijk},它们出现在反对易关系中

表 7.1　所有完全反对称的结构常数 f_{ijk} 和对称系数 d_{ijk}（比较(7.24)）的表，所有非 0 结构常数可以通过列出的指标的置换来得到.

ijk	f_{ijk}	ijk	d_{ijk}
123	1	118	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
147	$\frac{1}{2}$	146	$\frac{1}{2}$
156	$-\frac{1}{2}$	157	$\frac{1}{2}$
246	$\frac{1}{2}$	228	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
257	$\frac{1}{2}$	247	$-\frac{1}{2}$
245	$\frac{1}{2}$	256	$\frac{1}{2}$
367	$-\frac{1}{2}$	338	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
		344	$\frac{1}{2}$
458	$\frac{\sqrt{3}}{2}$		
678	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	355	$\frac{1}{2}$
		366	$-\frac{1}{2}$
		377	$-\frac{1}{2}$
		448	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$
		558	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$
		668	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$
		778	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$
		888	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$[\hat{\lambda}_i,\hat{\lambda}_j]_+=\frac{4}{3}\delta_{ij}\mathbb{1}+2d_{ijk}\hat{\lambda}_k$$

$$d_{ijk}=d_{jik}=d_{ikj} \tag{7.24}$$

等等. 我们把反对易关系(7.24)分成有迹项(第一项)和无迹项. 利用明显的表达式确实可以验证

$$\mathrm{Tr}\hat{\lambda}_i\hat{\lambda}_j=2\delta_{ij}$$

而相应地

$$\mathrm{Tr}[\hat{\lambda}_i,\hat{\lambda}_j]_+=4\delta_{ij}=\mathrm{Tr}\,\frac{4}{3}\delta_{ij}\mathbb{1}=\frac{4}{3}\delta_{ij}\mathrm{Tr}\,\mathbb{1}$$

因为 $\mathrm{Tr}(\mathbb{1})=3$. 我们引用包含在练习 11.1,11.2 和 7.3 中的一般考虑. 关系(7.22),(7.24),对 f_{ijk}的反对称关系和对 d_{ijk}的对称关系是在实际计算中确实有用的工具. 只有非零结构常数列在表 7.1 中.

正像按我们在第 3 章中的一般考虑所期望的,方程(7.22)明显地证明了 SU(3)的李代数是封闭的. 类似于 SU(2),重新定义生成元为

$$\hat{F}_i=\frac{1}{2}\hat{\lambda}_i \tag{7.25}$$

是有用的. 由(7.22)我们得出

$$[\hat{F}_i,F\hat{\lambda}_j]_-=\mathrm{i}f_{ijk}\hat{F}_k \tag{7.26}$$

这些是类似的对易关系. 但是因子 2 不见了. 在 SU(3)中 $\hat{\lambda}_i$ 和 $\hat{F}_i$ 之间的关系和 SU(2)中 $\hat{\sigma}_i$ 和 $\hat{S}_i$ 的关系的类似性是显然的. 这使得盖尔曼称 $\hat{F}_i$ 为集体的 F 自旋,即使它们跟角动量或自旋没有直接的关系.

如同有关角动量代数(SU(2)或 SO(3)的李代数,参看第 2 章)的考虑,我们现在引入 $\hat{F}$ 算符的球表示

$$\hat{T}_\pm=\hat{F}_1\pm\mathrm{i}\hat{F}_2\quad,\quad \hat{T}_3=\hat{F}_3$$

$$\hat{V}_\pm=\hat{F}_4\pm\mathrm{i}\hat{F}_5\quad,\quad \hat{Y}=\frac{2}{\sqrt{3}}\hat{F}_8\quad,\quad \hat{U}_\pm=\hat{F}_6\pm\mathrm{i}\hat{F}_7 \tag{7.27}$$

对 $\hat{T}_+,\hat{U}_+,\hat{V}_+$和 $\hat{T}_3$ 的定义明显地依据观察:$\hat{F}$ 算符是由泡利矩阵构成的(参看我们在(7.19)后的讨论). (7.27)的最后一个定义,即 $\hat{Y}$ 算符的定义将在下面证明是有用的. 对新算符的对易关系可以如下计算:

$$[\hat{T}_3,\hat{T}_\pm]_-=\pm\hat{T}_\pm,\qquad [\hat{T}_+,\hat{T}_-]_-=2\hat{T}_3$$

$$[\hat{T}_3,\hat{U}_\pm]_-=\mp\frac{1}{2}\hat{U}_\pm,\qquad [\hat{U}_+,\hat{U}_-]_-=\frac{3}{2}\hat{Y}-\hat{T}_3\overset{\text{定义}}{=}2\hat{U}_3$$

$$[\hat{T}_3,\hat{V}_\pm]_-=\pm\frac{1}{2}\hat{V}_\pm,\qquad [\hat{V}_+,\hat{V}_-]_-=\frac{3}{2}\hat{Y}+\hat{T}_3\overset{\text{定义}}{=}2\hat{V}_3 \tag{7.28a}$$

$$[\hat{Y},\hat{T}_\pm]_-=0\,,\qquad [\hat{Y},\hat{U}_\pm]_-=\pm\hat{U}_\pm,\qquad [\hat{Y},\hat{V}_\pm]_-=\pm\hat{V}_\pm \tag{7.28b}$$

$$[\hat{T}_+,\hat{V}_+]_-=[\hat{T}_+,\hat{U}_-]_-=[\hat{U}_+,\hat{V}_+]_-=0$$

$$[\hat{T}_+,\hat{V}_-]=-\hat{U}_-,\qquad [\hat{T}_+,\hat{U}_+]_-=\hat{V}_+$$

$$[\hat{U}_+,\hat{V}_-]_-=\hat{T}_-,\qquad [\hat{T}_3,\hat{Y}]_-=0 \tag{7.28c}$$

那些不出现的对易关系可以从(7.27)推出,部分地借助于 $\hat{F}_i$ 的厄密性的结果,即

$$\hat{T}_+=(\hat{T}_-)^+\quad,\quad \hat{U}_+=(\hat{U}_-)^+\quad,\quad \hat{V}_+=(\hat{V}_-)^+ \tag{7.29}$$

由(7.28),SU(3)李代数的最大对易的生成元数是 2(例如$[\hat{T}_3,\hat{Y}]_-=0$ 或$[\hat{Y},\hat{T}_\pm]_-=0$). 因此[①], SU(3)是秩为 2 的群,作为拉卡定理的结果它包含两个卡西米尔算符. 它们一般被定义为

$$\hat{C}_1(\hat{F}_i)=\sum_{i=1}^{8}\hat{F}_i^{\,2}=-\frac{2\mathrm{i}}{3}\sum_{ijk}f_{ijk}\hat{F}_i\hat{F}_j\hat{F}_k \tag{7.30}$$

和

$$\hat{C}_2(\hat{F}_i)=\sum_{ijk}d_{ijk}\hat{F}_i\hat{F}_j\hat{F}_k \tag{7.31}$$

练习 7.3　系数 d_{ijk}的对称性

问题　借助证明关系

$$d_{ijk}=\frac{1}{4}\mathrm{Tr}([\hat{\lambda}_i,\hat{\lambda}_j]_+\hat{\lambda}_k)$$

表明系数 d_{ijk}是对称的.

解　我们从反对易关系开始

$$[\hat{\lambda}_i,\hat{\lambda}_j]_+=\frac{4}{3}\delta_{ij}\mathbb{1}+2\sum_{m=1}^{8}d_{ijm}\hat{\lambda}_m \tag{1}$$

乘上 $\hat{\lambda}_k$

$$[\hat{\lambda}_i,\hat{\lambda}_j]_+\hat{\lambda}_k=\frac{4}{3}\delta_{ij}\mathbb{1}\,\hat{\lambda}_k+2\sum_m d_{ijm}\hat{\lambda}_m\hat{\lambda}_k \tag{2}$$

再取迹给出

$$\mathrm{Tr}([\hat{\lambda}_i,\hat{\lambda}_j]_+\hat{\lambda}_k)=\frac{4}{3}\delta_{ij}\mathrm{Tr}(\mathbb{1}\,\hat{\lambda}_k)+2\mathrm{Tr}\Big(\sum_m d_{ijm}\hat{\lambda}_m\hat{\lambda}_k\Big) \tag{3}$$

由于$\mathbb{1}\hat{B}=\hat{B}$,就得出

$$\frac{4}{3}\delta_{ij}\mathrm{Tr}(\mathbb{1}\,\hat{\lambda}_k)=\frac{4}{3}\delta_{ij}\mathrm{Tr}(\hat{\lambda}_k)=0 \tag{4}$$

因为 $\hat{\lambda}_k$ 是无迹的. 进而从 $\hat{\lambda}_i$ 的明显形式可以看出

$$\mathrm{Tr}(\hat{\lambda}_i\hat{\lambda}_k)=2\delta_{ik}$$

$$\mathrm{Tr}([\hat{\lambda}_i,\hat{\lambda}_j]_+\hat{\lambda}_k)=4\sum_m d_{ijm}\delta_{mk}=4d_{ijk}$$

$$d_{ijk}=\frac{1}{4}\mathrm{Tr}([\hat{\lambda}_i\hat{\lambda}_j]_+\hat{\lambda}_k) \tag{5}$$

因为

$$[\hat{\lambda}_i,\hat{\lambda}_j]_+=[\hat{\lambda}_j,\hat{\lambda}_i]_+ \tag{6}$$

d_{ijk}对交换 i,j 的对称性是由反对易关系的对称性得出的. 其余指标的对称性是由两个矩阵在迹运算下可交换, $\mathrm{Tr}(\hat{A}\hat{B})=\mathrm{Tr}(\hat{B}\hat{A})$得出的

$$\begin{aligned}4d_{ijk}&=\mathrm{Tr}(\hat{\lambda}_k\hat{\lambda}_i\hat{\lambda}_j+\hat{\lambda}_k\hat{\lambda}_j\hat{\lambda}_i)=\mathrm{Tr}(\hat{\lambda}_k\hat{\lambda}_i\hat{\lambda}_j+\hat{\lambda}_i\hat{\lambda}_k\hat{\lambda}_j)\\&=\mathrm{Tr}([\hat{\lambda}_i,\hat{\lambda}_k]_+\hat{\lambda}_j)=4d_{ikj}.\end{aligned} \tag{7}$$

---

① 可以一般地证明群 SU(n)的秩是($n-1$).

所以 d_{ijk}对所有指标是对称的.(**练习 7.3 完**)

练习 7.4 结构常数 f_{ijk}的反对称性

问题 证明类似于练习 7.3 对 d_{ijk}推出的公式,类似的公式对结构常 f_{ijk}成立,给出为

$$f_{ijk}=\frac{1}{4\mathrm{i}}\mathrm{Tr}([\hat{\lambda}_i,\hat{\lambda}_j]_-\hat{\lambda}_k) \tag{1}$$

解 我们再一次从 $\hat{\lambda}_i$ 的对易关系开始

$$[\hat{\lambda}_i,\hat{\lambda}_j]_-=2\mathrm{i}\sum_{m=1}^{8}f_{ijm}\hat{\lambda}_m$$

乘上 $\hat{\lambda}_k$

$$[\hat{\lambda}_i,\hat{\lambda}_j]_-\hat{\lambda}_k=2\mathrm{i}\sum_{m=1}^{8}f_{ijm}\hat{\lambda}_m\hat{\lambda}_k \tag{2}$$

再取迹

$$\mathrm{Tr}([\hat{\lambda}_i,\hat{\lambda}_j]_-\hat{\lambda}_k)=2\mathrm{i}\mathrm{Tr}\Big(\sum_{m=1}^{8}f_{ijm}\hat{\lambda}_m\hat{\lambda}_k\Big) \tag{3}$$

因为

$$\mathrm{Tr}(\hat{\lambda}_m\hat{\lambda}_k)=2\delta_{mk} \tag{4}$$

由此得出

$$\mathrm{Tr}([\hat{\lambda}_i,\hat{\lambda}_j]_-\hat{\lambda}_k)=4\mathrm{i}f_{ijm}\delta_{mk}=4\mathrm{i}f_{ijk}$$

$$f_{ijk}=\frac{1}{4\mathrm{i}}\mathrm{Tr}([\hat{\lambda}_i,\hat{\lambda}_j]_-\hat{\lambda}_k) \tag{5}$$

关系式

$$[\hat{\lambda}_i,\hat{\lambda}_j]_-=[\hat{\lambda}_j,\hat{\lambda}_i]_-\quad,\quad \mathrm{Tr}(-\hat{A})=-\mathrm{Tr}(\hat{A}) \tag{6}$$

给出

$$f_{ijk}=-f_{jik}$$

表明 f_{ijk}对交换 i 和 j 是反对称的.其余指标的反对称性是从我们前面的考虑得出的,正是

$$\begin{aligned}4\mathrm{i}f_{ijk}&=\mathrm{Tr}([\hat{\lambda}_i,\hat{\lambda}_j]_-\hat{\lambda}_k)=\mathrm{Tr}(\hat{\lambda}_i\hat{\lambda}_j\hat{\lambda}_k-\hat{\lambda}_j\hat{\lambda}_i\hat{\lambda}_k)=-\mathrm{Tr}(\hat{\lambda}_j\hat{\lambda}_i\hat{\lambda}_k-\hat{\lambda}_i\hat{\lambda}_j\hat{\lambda}_k)\\&=-\mathrm{Tr}(\hat{\lambda}_i\hat{\lambda}_k\hat{\lambda}_j-\hat{\lambda}_k\hat{\lambda}_i\hat{\lambda}_j)=-\mathrm{Tr}([\hat{\lambda}_i,\hat{\lambda}_k]_-\hat{\lambda}_j)=-4\mathrm{i}f_{ikj}\end{aligned} \tag{7}$$

再一次用到 $\mathrm{Tr}(\hat{A}\hat{B})=\mathrm{Tr}(\hat{B}\hat{A})$.结果 f_{ijk}对所有指标全部是反对称的.(**练习 7.4 完**)

练习 7.5 计算某些 d_{ijk}系数和结构常数

问题 为了更熟悉 SU(3)代数,利用 $\hat{\lambda}_i$ 的明显表示式和前面推导的迹的关系式计算结构常数 f_{156},f_{458}和系数 d_{118}和 d_{778}.

解 鉴于

$$f_{ijk}=\frac{1}{4\mathrm{i}}\mathrm{Tr}([\hat{\lambda}_i,\hat{\lambda}_j]_-\hat{\lambda}_k)\quad,\quad f_{156}=\frac{1}{4\mathrm{i}}([\hat{\lambda}_1,\hat{\lambda}_5]_-\hat{\lambda}_6) \tag{1}$$

我们先算

$$[\hat{\lambda}_1,\hat{\lambda}_5]_-=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&-\mathrm{i}\\0&0&0\\\mathrm{i}&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&-\mathrm{i}\\0&0&0\\\mathrm{i}&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-\mathrm{i}\\0&-\mathrm{i}&0\end{pmatrix} \tag{2}$$

矩阵乘法给出

$$[\hat{\lambda}_1,\hat{\lambda}_5]_-\hat{\lambda}_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-\mathrm{i}\\0&-\mathrm{i}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-\mathrm{i}&0\\0&0&-\mathrm{i}\end{pmatrix} \tag{3}$$

计算它的迹

$$\mathrm{Tr}([\hat{\lambda}_1,\hat{\lambda}_5]_-\hat{\lambda}_6)=-2\mathrm{i} \tag{4}$$

发现我们寻找的结构常数为

$$f_{156}=\frac{1}{4\mathrm{i}}(-2\mathrm{i})=-\frac{1}{2} \tag{5}$$

对

$$f_{458}=\frac{1}{4\mathrm{i}}\mathrm{Tr}([\hat{\lambda}_4,\hat{\lambda}_5]_-\hat{\lambda}_8) \tag{6}$$

进行同样的计算，我们得到

$$[\hat{\lambda}_4,\hat{\lambda}_5]_-=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&-\mathrm{i}\\0&0&0\\\mathrm{i}&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&-\mathrm{i}\\0&0&0\\\mathrm{i}&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$
$$=2\mathrm{i}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix} \tag{7}$$

和

$$[\hat{\lambda}_4,\hat{\lambda}_5]_-\hat{\lambda}_8=\frac{2\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}=\frac{2\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$
$$\mathrm{Tr}([\hat{\lambda}_4,\hat{\lambda}_5]_-\hat{\lambda}_8)=\frac{2\mathrm{i}}{\sqrt{3}}3 \tag{8}$$

因此得出

$$f_{458}=\frac{1}{4\mathrm{i}}\frac{2\mathrm{i}}{\sqrt{3}}3=\frac{1}{2}\sqrt{3} \tag{9}$$

对 d_{ijk}

$$d_{ijk}=\frac{1}{4}([\hat{\lambda}_i,\hat{\lambda}_j]_+\hat{\lambda}_k)\quad,\quad d_{118}=\frac{1}{4}([\hat{\lambda}_1,\hat{\lambda}_1]_+\hat{\lambda}_8) \tag{10}$$

因为

$$[\hat{\lambda}_1,\hat{\lambda}_1]_+=2\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} \tag{11}$$

由此

$$[\hat{\lambda}_1,\hat{\lambda}_1]_+\hat{\lambda}_8=\frac{2}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}=\frac{2}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} \tag{12}$$

计算迹给出

$$\mathrm{Tr}([\hat{\lambda}_1,\hat{\lambda}_1]_+\hat{\lambda}_8)=\frac{2}{\sqrt{3}}2 \tag{13}$$

导出 $d_{118}=1/\sqrt{3}$.

类似地我们计算

$$d_{778}=\frac{1}{4}\mathrm{Tr}([\hat{\lambda}_7,\hat{\lambda}_7]_+\hat{\lambda}_8)$$

发现

$$[\hat{\lambda}_7,\hat{\lambda}_7]_+=2\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-\mathrm{i}\\0&\mathrm{i}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-\mathrm{i}\\0&\mathrm{i}&0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \tag{14}$$

$$[\hat{\lambda}_7,\hat{\lambda}_7]_+\hat{\lambda}_8=\frac{2}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\frac{2}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix} \tag{15}$$

$$\mathrm{Tr}([\hat{\lambda}_7,\hat{\lambda}_7]_+\hat{\lambda}_8)=-\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$d_{778}=\frac{1}{4}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

(练习 7.5 完)

练习 7.6 结构常数和系数 d_{ijk}之间的关系

问题 证明恒等式

$$f_{plm}f_{mkq}+f_{klm}f_{mqp}+f_{pkm}f_{mql}=0 \tag{1}$$

和

$$f_{pkm}d_{mlq}+f_{qkm}d_{mlp}+f_{lkm}d_{mpq}=0 \tag{2}$$

解 为了证明(1)我们应用雅可比恒等式

$$\begin{aligned}&[[\hat{\lambda}_p,\hat{\lambda}_l]_-,\hat{\lambda}_k]_-+[[\hat{\lambda}_l,\hat{\lambda}_k]_-,\hat{\lambda}_p]_-+[[\hat{\lambda}_k,\hat{\lambda}_p]_-,\hat{\lambda}_l]_-\\&=\hat{\lambda}_p\hat{\lambda}_l\hat{\lambda}_k-\hat{\lambda}_l\hat{\lambda}_p\hat{\lambda}_k-\hat{\lambda}_k\hat{\lambda}_p\hat{\lambda}_l+\hat{\lambda}_k\hat{\lambda}_l\hat{\lambda}_p+\hat{\lambda}_l\hat{\lambda}_k\hat{\lambda}_p-\hat{\lambda}_k\hat{\lambda}_l\hat{\lambda}_p-\hat{\lambda}_p\hat{\lambda}_l\hat{\lambda}_k\\&\quad+\hat{\lambda}_p\hat{\lambda}_k\hat{\lambda}_l+\hat{\lambda}_k\hat{\lambda}_p\hat{\lambda}_l-\hat{\lambda}_p\hat{\lambda}_k\hat{\lambda}_l-\hat{\lambda}_l\hat{\lambda}_k\hat{\lambda}_p+\hat{\lambda}_l\hat{\lambda}_p\hat{\lambda}_k=0\end{aligned} \tag{3}$$

把(7.22)代入(3)的左方给出

$$\begin{aligned}0 &= 2\mathrm{i}f_{plm}[\hat{\lambda}_m,\hat{\lambda}_k]_- + 2\mathrm{i}f_{ikm}[\hat{\lambda}_m,\hat{\lambda}_p]_- + 2\mathrm{i}f_{kpm}[\hat{\lambda}_m,\hat{\lambda}_l]_- \\ &= -4(f_{plm}f_{mkn} + f_{lkm}f_{mpn} + f_{kpm}f_{mln})\hat{\lambda}_n \end{aligned} \tag{4}$$

我们乘上 $\hat{\lambda}_q$ 并取迹. 借助于

$$\mathrm{Tr}(\hat{\lambda}_q\hat{\lambda}_n) = 2\delta_{qn}$$

得出

$$\begin{aligned}0 &= f_{plm}f_{mkq} + f_{lkm}f_{mpq} + f_{kpm}f_{mlq} \\ &= f_{plm}f_{mkq} + f_{klm}f_{mqp} + f_{pkm}f_{mql} \end{aligned} \tag{5}$$

为了证明(2),我们利用(7.22)和(7.24),得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}([\hat{\lambda}_a,\hat{\lambda}_b] - \{\hat{\lambda}_c,\hat{\lambda}_d\}_+) &= \sum_{e,f} 2\mathrm{i}f_{abe}\mathrm{Tr}(\hat{\lambda}_e[\frac{4}{3}\delta_{cd} + 2d_{cdf}\hat{\lambda}_f]) \\ &= 4\mathrm{i}\sum_{e,f} f_{abe}d_{cdf}2\delta_{ef} = 8\mathrm{i}\sum_e f_{abe}d_{cde} \end{aligned} \tag{6}$$

现在我们重新排列(2)如下

$$\begin{aligned}&f_{pkm}d_{mlq} + f_{qkm}d_{mlp} + f_{lkm}d_{mpq} \\ &= \frac{1}{8\mathrm{i}}\mathrm{Tr}\{[\hat{\lambda}_p,\hat{\lambda}_k]_-\{\hat{\lambda}_l,\hat{\lambda}_q\}_+ + [\hat{\lambda}_q,\hat{\lambda}_k]_-\{\hat{\lambda}_l,\hat{\lambda}_p\}_+ + [\hat{\lambda}_l,\hat{\lambda}_k]_-\{\hat{\lambda}_p,\hat{\lambda}_q\}_+\} \\ &= \frac{1}{8\mathrm{i}}\mathrm{Tr}\{\hat{\lambda}_p\hat{\lambda}_k\hat{\lambda}_l\hat{\lambda}_q + \hat{\lambda}_p\hat{\lambda}_k\hat{\lambda}_q\hat{\lambda}_l - \hat{\lambda}_k\hat{\lambda}_p\hat{\lambda}_l\hat{\lambda}_q - \hat{\lambda}_k\hat{\lambda}_p\hat{\lambda}_q\hat{\lambda}_l + \hat{\lambda}_q\hat{\lambda}_k\hat{\lambda}_l\hat{\lambda}_p \\ &\quad + \hat{\lambda}_q\hat{\lambda}_k\hat{\lambda}_p\hat{\lambda}_l - \hat{\lambda}_k\hat{\lambda}_q\hat{\lambda}_l\hat{\lambda}_p - \hat{\lambda}_k\hat{\lambda}_q\hat{\lambda}_p\hat{\lambda}_l + \hat{\lambda}_l\hat{\lambda}_k\hat{\lambda}_p\hat{\lambda}_q + \hat{\lambda}_l\hat{\lambda}_k\hat{\lambda}_q\hat{\lambda}_p \\ &\quad - \hat{\lambda}_k\hat{\lambda}_l\hat{\lambda}_p\hat{\lambda}_q - \hat{\lambda}_k\hat{\lambda}_l\hat{\lambda}_q\hat{\lambda}_p\} = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

那些底下同样划线的项在迹中相消. (**练习 7.6 完**)

练习 7.7　SU(3)的卡西米尔算符

问题　应用对易关系(7.26)和反对易关系(7.26)验证 $\hat{C}_1$ 和 $\hat{C}_2$((7.30),(7.31))是 SU(3)的卡西米尔算符.

解　1) 我们证明

$$\hat{C}_1 = \sum_{i=1}^{8} \hat{F}_i^2$$

是一个卡西米尔算符:

$$\begin{aligned}[\hat{C}_1,\hat{F}_k]_- &= \sum_{i=1}^{8}(\hat{F}_i[\hat{F}_i,\hat{F}_k]_- + [\hat{F}_i,\hat{F}_k]_-\hat{F}_i) \\ &= \mathrm{i}\sum_{i,m=1}^{8} f_{ikm}(\hat{F}_i\hat{F}_m + \hat{F}_m\hat{F}_i) = 0 \end{aligned}$$

因为结构常数 f_{ikm} 对指标 i 和 m 是反对称的.

2) 我们证明

$$\hat{C}_2 = \sum_{ijn} d_{ijn}\hat{F}_i\hat{F}_j\hat{F}_n$$

是一个卡西米尔算符:

$$[\hat{C}_2,\hat{F}_k]_- = \sum_{ijn} d_{ijn}\{\hat{F}_i\hat{F}_j[\hat{F}_n,\hat{F}_k]_- + \hat{F}_i[\hat{F}_j,\hat{F}_k]_-\hat{F}_n + [\hat{F}_i,\hat{F}_k]_-\hat{F}_j\hat{F}_n\}$$

$$=\mathrm{i}\sum_{ijn} d_{ijn}\{\hat{F}_i\hat{F}_j f_{nkm}\hat{F}_m + \hat{F}_i\hat{F}_m\hat{F}_n f_{jkm} + \hat{F}_m\hat{F}_j\hat{F}_n f_{ikm}\}$$

$$=\mathrm{i}\sum_{ijn}\hat{F}_i\hat{F}_j\hat{F}_m\{d_{ijn}f_{nkm} + f_{nkj}d_{inm} + d_{njm}f_{nki}\} = 0$$

最后一步应用了练习 7.6 的(2)式.因为 $\hat{C}_1$ 和 $\hat{C}_2$ 与所有算符 $\hat{F}_i$ 对易,它们确实是卡西米尔算符.**(练习 7.7 完)**

练习 7.8 对 SU(3)的卡西米尔算符有用的关系

问题 证明以下关系

a)
$$\hat{C}_1(\hat{F}_i)\equiv \sum_l \hat{F}_l^2 = -\frac{2\mathrm{i}}{3}\sum_{ijk} f_{ijk}\hat{F}_i\hat{F}_j\hat{F}_k \tag{1}$$

b)
$$\hat{C}_2(\hat{F}_i)\equiv \sum_{ijk} d_{ijk}\hat{F}_i\hat{F}_j\hat{F}_k = \hat{C}_1\left(2\hat{C}_1 - \frac{11}{6}\right) \tag{2}$$

解 a) 为了证明(1)我们利用关系

$$[\hat{F}_i,\hat{F}_j]_- = \mathrm{i}f_{ijk}\hat{F}_k \tag{3}$$

$$f_{ijk}f_{ijl} = 3\delta_{kl} \tag{4}$$

(4)的证明我们将在练习 11.3 中给出.计算

$$\begin{aligned}\sum_{ijk} f_{ijk}\hat{F}_i\hat{F}_j\hat{F}_k &= f_{ijk}\hat{F}_j\hat{F}_i\hat{F}_k + \mathrm{i}f_{ijk}f_{ijl}\hat{F}_l\hat{F}_k \\ &= -f_{ijk}\hat{F}_i\hat{F}_j\hat{F}_k + \mathrm{i}3\delta_{kl}\hat{F}_l\hat{F}_k \\ &= -f_{ijk}\hat{F}_i\hat{F}_j\hat{F}_k + 3\mathrm{i}\sum_l \hat{F}_l^2\end{aligned} \tag{5}$$

抽出 $\sum_l \hat{F}_l^2$ 就给出

$$\hat{C}_1 = \sum_l \hat{F}_l = -\frac{2\mathrm{i}}{3}\sum_{ijk} f_{ijk}\hat{F}_i\hat{F}_j\hat{F}_k \tag{6}$$

b) 为了证明(2)我们回忆 d_{ijk} 的定义

$$[\hat{F}_i,\hat{F}_j]_+ = d_{ijk}\hat{F}_k + \frac{1}{3}\delta_{ij} \tag{7}$$

这给出

$$\begin{aligned}\hat{C}_2 = \sum_{ijk} d_{ijk}\hat{F}_i\hat{F}_j\hat{F}_k &= \sum_{ij}\hat{F}_i\hat{F}_j[\hat{F}_i,\hat{F}_j]_+ - \frac{1}{3}\sum_{ij}\hat{F}_i\hat{F}_j\delta_{ij} \\ &= \sum_{ij}\hat{F}_i\hat{F}_j\hat{F}_i\hat{F}_j + \sum_{ij}\hat{F}_i\hat{F}_i\hat{F}_j\hat{F}_j - \frac{1}{3}\sum_i \hat{F}_i^2\end{aligned} \tag{8}$$

现在让 $\sum_i \hat{F}_i^2 = \hat{C}_1$ 和在第一项中再次应用关系(3).这导致

$$\hat{C}_2 = 2\hat{C}_1^2 - \frac{1}{3}\hat{C}_1 + \mathrm{i}f_{ijk}\hat{F}_i\hat{F}_j\hat{F}_k \tag{9}$$

对最后一项我们将(a)中已证明的关系代入,这样我们得到结果

$$\hat{C}_2 = \hat{C}_1\left(2\hat{C}_1 - \frac{11}{6}\right) \tag{10}$$

(练习 7.8 完)

7.4　SU(3)李代数的子代数和位移算符

为了更熟悉 F 自旋代数，我们研究它的某些子代数.(7.28a)的第一行表明算符$(\hat{T}_1,\hat{T}_2,\hat{T}_3)$满足 SU(2)的李代数(同构于 SO(3)).

$$[\hat{T}_+,\hat{T}_-]_-=2\hat{T}_3 \quad , \quad [\hat{T}_3,\hat{T}_\pm]_-=\pm\hat{T}_\pm \tag{7.32}$$

算符 $\hat{T}_i(i=1,2,3)$形成一个封闭子代数.这对算符

$$\{O_+,O_-,O_3\}$$

同样成立，对它们有关系

$$[\hat{U}_+,\hat{U}_-]_-=2\hat{U}_3 \quad , \quad [\hat{U}_3,\hat{U}_\pm]_-=\pm\hat{U}_\pm \tag{7.33}$$

这些恒等式的最后一个来自对易关系(7.28a)，(7.28b)

$$[\hat{T}_3,\hat{U}_\pm]_-=\mp\frac{1}{2}\hat{U}_\pm \quad | \quad \times\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$[\hat{Y},\hat{U}_\pm]_-=\pm\hat{U}_\pm\frac{1}{2} \quad | \quad \times\frac{3}{4}$$

$$[\hat{U}_3,\hat{U}_\pm]=\pm\frac{3}{4}\hat{U}_\pm\pm\frac{1}{4}\hat{U}_\pm=\pm\hat{U}_\pm$$

类似地我们得到

$$[\hat{V}_+,\hat{V}_-]_-=2\hat{V}_3 \quad , \quad [\hat{V}_3,\hat{V}_\pm]_-=\pm\hat{V}_\pm \tag{7.34}$$

T 自旋代数(算符 $\hat{T}_i$)，同样 U 自旋代数(算符 $\hat{U}_i$)和 V 自旋代数(算符 $\hat{V}_i$)是封闭的.所有它们三个都是 SU(3)的子代数，而且每一个各自对应角动量算符的代数(SU(2)李代数).算符 $\hat{T}_\pm,\hat{U}_\pm,\hat{V}_\pm$也是位移算符(参看(2.16))，即提升算符$(\hat{T}_+,\hat{U}_-,\hat{V}_+)$和降低算符$(\hat{T}_-,\hat{U}_-,\hat{V}_-)$.

问题在于哪些量子数分别被提升和降低了.为了回答这个问题，我们考虑(7.28c)最后一个方程，

$$[\hat{Y},\hat{T}_3]_-=0 \tag{7.35}$$

相应地算符 $\hat{Y}$ 和 $\hat{T}_3$ 可以同时对角化.我们记这共同本征态为

$$|T_3,Y\rangle$$

和有

$$\hat{T}_3|T_3,Y\rangle=T_3|T_3,Y\rangle \tag{7.36}$$

$$\hat{Y}|T_3,Y\rangle=Y|T_3,Y\rangle \tag{7.37}$$

由$[\hat{T}_3,\hat{V}_\pm]_-=\pm\frac{1}{2}\hat{V}_\pm$，有

$$(\hat{T}_3\hat{V}_\pm-\hat{V}_\pm\hat{T}_3)|T_3Y\rangle=\pm\frac{1}{2}\hat{V}_\pm|T_3Y\rangle$$

利用(7.36)，得

$$\hat{T}_3\hat{V}_\pm|T_3Y\rangle-T_3\hat{V}_\pm|T_3Y\rangle=\pm\frac{1}{2}\hat{V}_\pm|T_3Y\rangle$$

由此

$$\hat{T}_3(\hat{V}_\pm|T_3Y\rangle)=(T_3\pm\frac{1}{2})(\hat{V}_\pm|T_3Y\rangle) \tag{7.38}$$

意味着

$$\hat{V}_\pm|T_3Y\rangle=\sum_{Y'}N(T_3,Y,Y')|T_3\pm\frac{1}{2},Y'\rangle \tag{7.39}$$

出现在上面方程中的归一化因子 $N(T_3,Y,Y')$可能依赖于量子数 T_3 和 Y. 因此算符 $\hat{V}_\pm$把量子数 T_3 的态变到量子数 $T_3\pm\frac{1}{2}$的态,还有尚不知道的超荷 Y'. $\hat{V}_\pm$把 T_3 的量子数分别提高和降低了$\frac{1}{2}$. 用同样的论证,我们从$[\hat{T}_3\hat{U}_\pm]=\mp\frac{1}{2}\hat{U}_\pm$推出以下关系

$$\hat{T}_3(\hat{U}_\pm|T_3Y\rangle)=(T_3\mp\frac{1}{2})(\hat{U}_\pm|T_3Y\rangle) \tag{7.40}$$

因此 $\hat{U}_\pm$把量子数 T_3 分别降低和提升了$\frac{1}{2}$. 由关系

$$[\hat{Y},\hat{V}_\pm]_-=\pm\hat{V}_\pm$$

类似地给出

$$\hat{Y}(\hat{V}_\pm|T_3,Y\rangle)=(Y\pm1)(\hat{V}_\pm|T_3Y\rangle) \tag{7.41}$$

因此 $\hat{V}_\pm$把量子数 Y 提升和降低了 1. 这回答了(7.39)中提出的问题:什么 Y' 值在右方是可能的. 按(7.41)在分别应用 $\hat{V}_\pm$后,Y'只能是 $Y'=Y\pm1$. 我们因此有

$$\hat{V}_\pm|T_3,Y\rangle=N(T_3,Y)|T_3\pm\frac{1}{2},Y\pm1\rangle \tag{7.39a}$$

最后对易关系

$$[\hat{Y},\hat{U}_\pm]_-=\pm U_\pm$$

给出本征值方程

$$\hat{Y}(\hat{U}_\pm|T_3,Y\rangle)=(Y\pm1)(\hat{U}_\pm|T_3Y\rangle) \tag{7.42}$$

$\hat{U}_\pm$把量子数 Y 分别提升和降低了 1. 因为$[\hat{Y},\hat{T}_\pm]=0$,算符 $\hat{T}_\pm$不改变量子数 Y. 看角动量的代数(参看第二章)我们已经知道量子数 T_3 可以是整数或半整数值. 这是明显的,因为 $\hat{V}_\pm$和 $\hat{U}_\pm$把 T_3 移动半整数单位,而 $\hat{T}_\pm$把它改变整数单位. 我们暂时留下测量 Y 的单位的问题. 稍后我们考虑特殊的例子时将回到它(参看关于夸克的一节). 位移算符或者对量子数 Y 无影响($\hat{T}_\pm$),或者把它改变整数单位($\hat{V}_\pm$,$\hat{U}_\pm$). 这显示在图 7.1 中. 例如 $\hat{V}_\pm$把 Y 提升 1,把 T_3 提升$\frac{1}{2}$,而 $\hat{T}_+$根本不改变 Y,但把 T_3 改变 1 等等. 我们标度 Y 轴的整数单位相对于 T_3 轴的单位有一个因子 $(3/4)^{1/2}$. 因此,位移算符 $\hat{T}_-$,$\hat{V}_+$,$\hat{U}_-$或 $\hat{T}_+$,$\hat{V}_-$,$\hat{U}_+$形成等边三角形(看图 7.2). 当 T_3,U_3,V_3 只能取半整数和整数值时(因为 $\hat{T}_\pm$,$\hat{T}_3$ 如同 $\hat{U}_\pm$,$\hat{U}_3$ 和 $\hat{V}_\pm$,V_3 形成一个 SU(2)代数,因而我们已

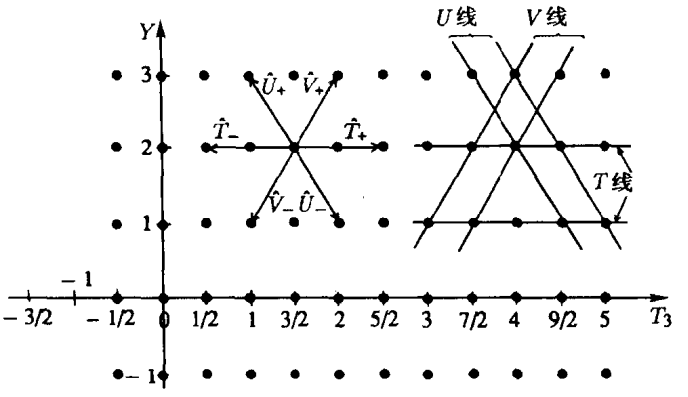


图 7.1　位移算符在 T_3-Y 平面上的作用. Y 的单位相当于，$\sqrt{3/4}$倍的 T_3 轴单位(参看图 7.2). 沿着 T 线，V 线和 U 线放置着 T，V 和 U 子多重态(SU(2)多重态)

经在(2.17a,b)中证明了这一点)，$\hat{Y}$ 的本征值却只能是 $\frac{1}{3}$ 的倍数，即 $Y=0,\pm\frac{1}{3},\pm\frac{2}{3},\cdots$，确实由(7.28)中 $\hat{V}_3,\hat{U}_3$ 的定义就得出 $Y=\frac{2}{3}(\hat{V}_3+\hat{U}_3)$，而因此 $Y=\frac{1}{3}$整数.

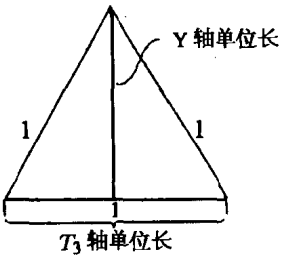


图 7.2　在 Y-T_3 平面上的单位

7.5　T 多重态，U 多重态和 V 多重态的耦合

一个 SU(3)多重态结构的某些一般特征可以被相当简单地表示为：

1) SU(3)代数 T，U 和 V 代数作为子代数. 这些代数的每一个同构于 SU(2)代数，也就是角动量的代数. 因此 SU(3)多重态可以借助于耦合的 T 多重态，U 多重态，V 多重态来构成.

2) 算符 $\hat{T}_3,\hat{Y}$ 和因而 $\hat{U}_3=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\hat{Y}-\hat{T}_3\right)$ 和 $\hat{V}_3=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\hat{Y}+\hat{T}_3\right)$ 可以同时对角化. 它们的本征值为

$$T_3,Y,U_3=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}Y-T_3\right)\quad,\quad V_3=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}Y+T_3\right)$$

3) 位移算符 $\hat{T}_\pm,\hat{V}_\pm,\hat{U}_\pm$按图 7.1 作用在SU(3)多重态的状态上. 这些算符作用的端点位于一个正规的六边形上.

4) 因此 SU(3)多重态由一个 T 多重态(平行于 T_3 轴)，一个 V 多重态(沿着图中的 V 线)和一个 U 多重态(沿着图中的 U 线)构成. 由于对易关系(例如$[\hat{T}_+,\hat{V}_-]_-=-\hat{U}_-$，$[\hat{T}_+,\hat{V}_+]_+=-\hat{V}_-$)，这些子多重态必须相耦合.

5) 由于三个子多重态的等价性，SU(3)多重态的(有限的)表示如同在图 7.3 中表示的在 Y-T_3 平面内必须是正规的(但不必然是等边的)六边形或三角形(如果六边形的三条边为 0 长度).

这一点被以下的考虑支持：T 多重态的元素(状态)沿着 T 线放置，由量子数 T_3 来计算. 正如从角动量(和同位旋代数)知道的，在一给定的多重态内所有 T_3 值必须在 $T_{3\max}\geqslant T_3\geqslant -T_{3\max}$ 范围内. 因此 SU(3)多重态必须相对于 Y 轴($T_3=0$ 轴)是对称的. 显然 T 线与 Y 轴成直角.

6) 因为 T 代数，V 代数和 U 代数是等价地对称的，因此是 SU(3)等价的子代数. 一个代表 SU(3)多重态的图形必须相对于轴 $U_3=0=\frac{3}{2}Y-T_3$ 和 $V_3=0=\frac{3}{2}Y+T_3$ 是对称的. 这三个对称轴相交形成角度 120°. V 多重态被安排垂直于($V_3=0$)轴，而 U 多重态被安排垂直于($U_3=0$)轴(见图 7.4). 这三个子多重态彼此联系着(例如，由于对易关系形如$[\hat{T}_+,\hat{V}_-]=-\hat{U}_-$). 因此形成一个正规的六角或三角结构，代表 SU(3)多重态.

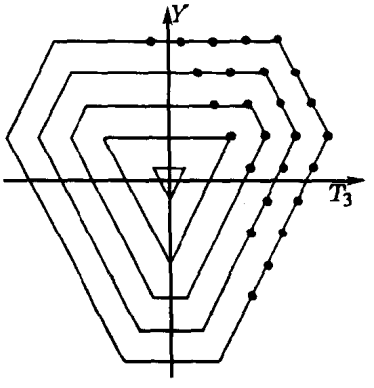


图 7.3 SU(3)多重态的表示在 Y-T_3 平面内的典型形式

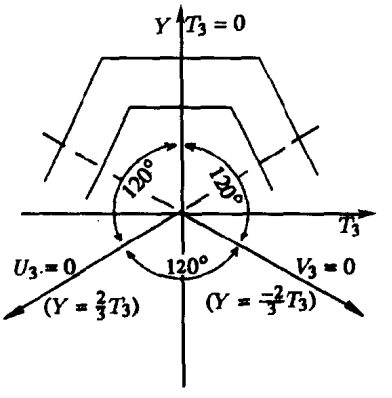


图 7.4 SU(3)多重态的三个轴，轴间的角度是 120°，Y 轴被标度为有一个因子$\sqrt{3/4}$

7) 特别，原点($Y=0,T_3=0$)是每个 SU(3)多重态的中心. 换句话说，每个 SU(3)多重态的中心位于 Y-T_3 平面的原点，而且绕原点转 $\pm 120°$ 角时不变.

7.6 对推理的定性分析

以下我们想致力于我们关于 SU(3)多重态结构的思想. 我们的兴趣局限于有限的多重态，即那些只包含有限个状态的多重态. 首先考虑在 SU(3)多重态中属于最大 T_3 值的状态. 这种状态在一个有限多重态中总是存在的. 在 T_3-Y 图中(参看图 7.5)，它是最右边的状态，我们记它为

$$\psi_{\max}=|(T_3)_{\max}Y\rangle \tag{7.43}$$

对这个状态成立以下关系①

$$\hat{T}_+\psi_{\max}=\hat{V}_+\psi_{\max}=\hat{U}_-\psi_{\max}=0 \tag{7.44}$$

因为否则的话每个位移算符将提高 T_3 的值，按照上面的假设这是不可能的.

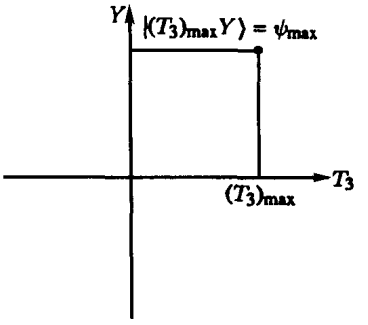


图 7.5　SU(3)多重态状态中最右边的状态

该多重态的边界可以用在 $\psi_{\max}$ 上重复应用 $\hat{V}_-$ 来构造. 让此过程重复 p 次. 假设 $(p+1)$ 次的作用为

$$(\hat{V}_-)^{p+1}\psi_{\max}=0 \tag{7.45}$$

这一性质唯一地定义了整数 p. 一旦 $(\hat{V}_-)^p\psi_{\max}$ 被达到，我们可以对此状态重复应用 $\hat{T}_-$ 来追随该多重态的边界. 这个过程，譬如说，可以重复 q 次，该算符的第 $q+1$ 次作用的结果为

$$(\hat{T}_-)^{q+1}(\hat{V}_-)^p\psi_{max}=0 \tag{7.46}$$

这就决定了整数 q. 数 p 和 q 定义了 SU(3)群的一个多重态.

到此为止，我们像图 7.6 描写的一样，沿着多重态的边界走.

我们可能会猜想，为什么边界线在图的右下角转向左边而不是右边. 对此问题的一个总体的回答可以根据群的对称性来给出：一个 SU(3)多重态的表示具有六角形结构，其对称轴以 120° 相交，而且以原点 $Y=0, T_3=0$ 为其中心. 现在将表明该多重态的边界必须是凸的. 为此目的考虑图 7.7. 点 M 代表带有最大 T_3 的状态 $\psi_{\max}$，被称为带有最大权 T_3 的状态. $\hat{V}_-$ 对 $\psi_{\max}$ 的作用是在网上产生一个状态 N②.

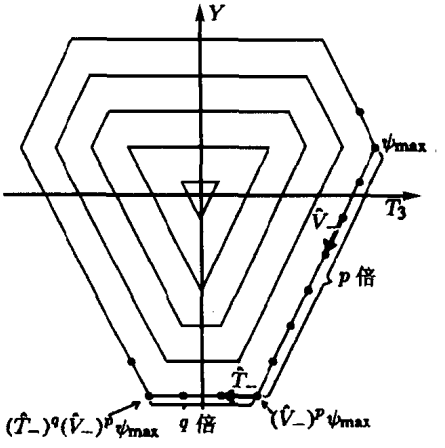


图 7.6　SU(3)多重态在 Y-T_3 空间中的边界

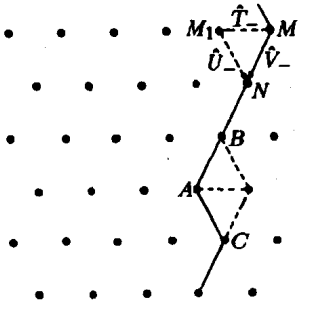


图 7.7　一个 SU(3)多重态的边界上一个凹的部分. 由点 A 向右的虚线表示禁戒的步骤.

① 根据 S. Gasiorowicz: *Elementary Particle Physics* (Wiley, New York 1967).

② 如 $\hat{V}_-\psi_{\max}=0$，我们可以用类似的方法用 $\hat{U}_+\psi_{\max}$ 来论证.

重要的是体会到只有唯一一个状态在 N 点,如果在 M 点的 $\psi_{\max}$ 是唯一的. 我们可以倾向于思考,例如状态

$$\hat{U}_-\hat{T}_-\psi_{\max}$$

是 N 点上另一个独立的状态,它不是直接达到的,而是通过 M_1 状态达到的. 然而通过对易关系(7.28c),我们表明

$$\begin{aligned}\hat{U}_-\hat{T}_-\psi_{\max}&=([\hat{U}_-\hat{T}_- - \hat{T}_-\hat{U}_-]+\hat{T}_-\hat{U}_-)\psi_{\max}\\&=[\hat{U}_-,\hat{T}_-]_-\psi_{\max}(\text{因为}\hat{U}_-\psi_{\max}=0)\\&=\hat{V}_-\psi_{\max}\end{aligned}\tag{7.47}$$

可以很容易验证所有其他的途径导致同一结果. 类似地得出

$$\psi_B=\hat{U}_-\psi_N\tag{7.48}$$

是同样唯一的. 这对点 A 代表的状态,记为 ψ_A,也同样成立,其中

$$\psi_A=\hat{V}_-\psi_B\tag{7.49}$$

如果有一个状态在 C 点(它可以记为 ψ_0),那末

$$\hat{U}_+\psi_C=\lambda\psi_A\tag{7.50}$$

因为 A 点的状态被唯一决定为 ψ_A. 关系式

$$\lambda\langle\psi_A|\psi_A\rangle=\langle\hat{V}_-\psi_B|\hat{U}_+\psi_C\rangle=\langle\psi_B|\hat{V}_+\hat{U}_+|\psi_C\rangle\tag{7.51}$$

将成立,因而

$$\lambda=\frac{\langle\psi_B|[\hat{V}_+,\hat{U}_+]_-+\hat{U}_+\hat{V}_+|\psi_C\rangle}{\langle\psi_A|\psi_A\rangle}=0\tag{7.52}$$

由于(7.28c),对易关系 $[\hat{V}_+,\hat{U}_+]_-$ 恒等于 0. 同样,矩阵元

$$\begin{aligned}\langle\psi_B|\hat{U}_+\hat{V}_+|\psi_C\rangle&=\langle\hat{U}_-\psi_B|\hat{V}_+\psi_C\rangle\\&=\langle\hat{U}_-(\hat{V}_-)^2\psi_{\max}|\hat{V}_+\psi_C\rangle=\langle(\hat{V}_-)^2\hat{U}_-\psi_{\max}|\hat{V}_+\psi_C\rangle\\&=0\end{aligned}\tag{7.53}$$

因为 $\hat{V}_-$ 和 $\hat{U}_-$ 对易,而且 $\hat{U}_-\psi_{\max}=0$(参看(7.44)). 按照(7.50),常数 $\lambda=0$ 意味着在 C 点不存在一个状态,也即 ψ_c 不存在. 该多重态的外边界不能是凹的,而必须是凸的. 在边界的内部所有的点都被占有. 这种内部的点完全被占有的点环绕着. 应该强调的是:带有最大权的点 M 必须被一个单个的态占有,因为它是 T 多重态的最外点. 关于 T 多重态(它被角动量代数决定)我们知道所有属于量子数 T 的子网的点占有只有一次. 这一点特别对 $(T_3)_{\max}$ 成立.

然而,注意,内网点例如 M_1 完全可以多重占有.

7.7 对 SU(3)多重态几何结构的进一步评论

对一个 SU(3)多重态边界的凸性和 120°对称性的要求被三角形或六边形满足(参看图 7.8). 为什么没有更高的多边形例如十二边或二十四边出现?回答是:可以得到的位移算符仅

允许沿着 V 线，T 线和 U 线沿两个方向移动. 结果只有六个方向可以得到，它们是成对反平行的. 多边形的凸性只容许三角形和六边形. 一个凸十二边形只能利用十二个方向来构造(两个一对反平行，参看图 7.9). 然而，如上面所说只有六个方向可得.

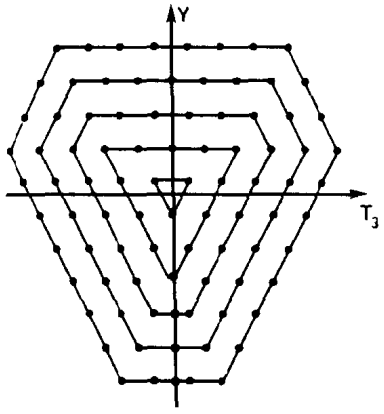


图 7.8　一个SU(3)多重态的典型表示，特征为$(p,q)=(7,3)$

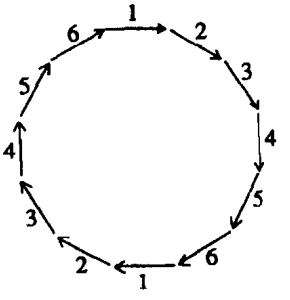


图 7.9　一个凸的十二边形包含十二个方向(它们是成对反平行的)

7.8　网点和内壳上的状态数

一个 SU(3)多重态边界上的网点如同前面演示的(参看第 7.6 节的末尾)仅被占有一次. 这意味着只有一个状态相应于边界上的一个网点. 在下一层或壳(这里我们指的是在边界内部的下一个六边形)，每个网点被多重态的两个状态占有. 这样，下一个壳是双重占有的，再下一个壳是三重占有的，等等. 每次我们进入下一个内壳把多重性提高 1，直到 q 步($q\leqslant p$)后六边形变成三角形. 现在每个网点带有$(q+1)$个状态. 这三角形内的每一状态具有多重性$(q+1)$. 这被展现在图 7.10 中，它表示一个$(p,q)=(7,3)$的多重态.

在这个特征性为$(p,q)=(7,3)$的典型的 SU(3)多重态，每个网点状态的多重性被注在壳上，它们分别是六边形或三角形. 在一个给定的壳上每一网点带有同样的状态数. 这可以被证明，首先证明当由一个给定六边形向它的下一个内部邻居过渡时，多重性被提高 1. 对这一点我们考虑任何两个相邻壳(图 7.11).

首先我们演示一个 $\hat{V}$ 位移，$\hat{T}$ 位移和 $\hat{U}$ 位移算符的常数乘积(它们独立于 Y)可以写成

$$\hat{P}_{\alpha,\beta}=\hat{T}_-^{\alpha}\hat{U}_+^{\beta}\hat{V}_-^{\beta}\qquad(\alpha,\beta\geqslant 0)\tag{7.54}$$

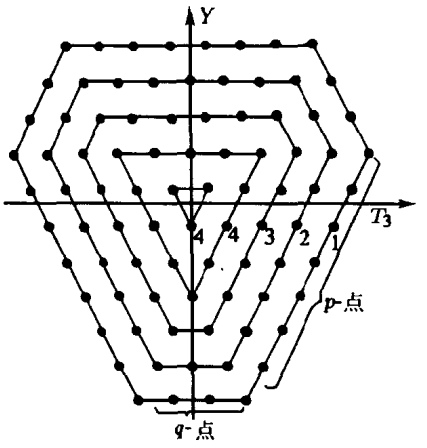


图 7.10 带有壳多重性的 SU(3)多重态.例 $D(7,3)$

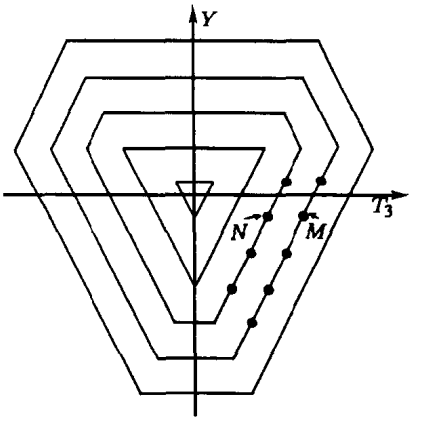


图 7.11 M 和 N 的多重性

进而对 $\mu=\alpha+\beta$,严格存在 $\mu+1$ 个独立乘积.(这些算符把一个量子数 T_3 的状态转换成 $T_3-\mu$ 的状态).开始我们考虑一个例子:μ 取值 $\mu=1$,只有 $\alpha=1,\beta=0$ 或 $\alpha=0,\beta=1$ 两种情况.这乘积很容易写出来

$$\hat{P}_{1,0}=\hat{T}_- \quad , \quad \hat{P}_{0,1}=\hat{U}_+\hat{V}_- \tag{7.55}$$

还有一个导致同样值的 T_3 和保持 Y 不变的算符组合,就是乘积 $\hat{V}_-\hat{U}_+$(图 7.12).考虑恒等式 $\hat{V}_-\hat{U}_+=-\hat{T}_-+\hat{U}_+\hat{V}_-$,则算符 $\hat{V}_-\hat{U}_+$ 可以用乘积(7.55)表示.这样对 $\mu=1$ 验证了该假设.

对一般情况考虑位移算符($\hat{U}_+\hat{V}_-$)和 T_- 的乘积,它们保持超荷不变.当 $\hat{U}_+$ 把超荷 Y 提升 1,而 $\hat{V}_-$ 把它降低同样的数,这种乘积必须包含相等数目的 $\hat{U}_+$ 和 $\hat{V}_-$ 算符.一开始我们表明所有这种乘积可以被写成以下算符的线性组合

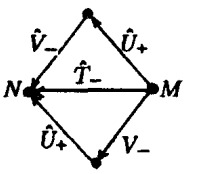


图 7.12 由 M 到 N 三条明显路径,由于对易关系只有两条是独立的

$$\hat{P}_{\alpha,\beta}=\hat{T}_-^{\alpha}\hat{U}_+^{\beta}\hat{V}_-^{\beta} \tag{7.56}$$

利用以下方程

$$\hat{V}_-\hat{U}_+=-\hat{T}_-+\hat{U}_+\hat{V}_-, \tag{7.57}$$

$$\hat{V}_-\hat{T}_-=\hat{T}_-\hat{V}_- \tag{7.58}$$

任何给定的乘积可重新排列成所有的 $\hat{V}_-$ 算符出现在右边.这样我们得到以下形式算符的和

$$\hat{U}_-\hat{T}_-\cdots\hat{T}_-\hat{U}_-\hat{V}_-^{\beta} \tag{7.59}$$

第二步借助于

$$\hat{U}_+\hat{T}_-=\hat{T}_-\hat{U}_+ \tag{7.60}$$

所有 $\hat{T}_-$ 算符被移到左边.这样得到分解一个任意乘积为(7.54)形式的项的和.算符 $\hat{P}_{\alpha,\beta}$ 把同位旋量子数降低 $\alpha\cdot 1+\beta\cdot\frac{1}{2}+\beta\cdot\frac{1}{2}=\alpha+\beta=\mu$.另一方面对任意给定的 μ 严格有 $\mu+1$ 个算符 $\hat{P}_{\alpha,\beta}$,正是 $\hat{P}_{\alpha,\mu-\alpha}$,$\alpha=0,1,2,\cdots,\mu$.现在我们回到一般场合,如果我们作用 $\hat{P}_{\alpha,\beta}$ 到最外壳的一个状

态，则显然 $\mu=\alpha+\beta$ 规定了这个多重态的这个壳. 对 $\mu=0$，我们看到 $\hat{P}_{00}$不改变这个状态，它仍在最外壳；$\mu=1$ 给出第一个内壳的一个状态；$\mu=2$ 给出第二层内壳的一个状态，如此继续下去. 如上面提到的算符 $\hat{P}_{\alpha,\beta}$导向向内，平行于 T_3 轴. 所有这些路径是以下形式

$$(\hat{T}_-)^{n_1}(\hat{V}_-\hat{U}_+)^{n_2}(\hat{U}_+\hat{V}_-)^{n_3}\cdots \tag{7.61}$$

其中 $n_1+n_2+n_3+\cdots=\alpha+\beta$. 这些不同的锯齿状路径从出发点开始向着内壳，平行于 T_3 轴. 借助于对易关系 $\hat{V}_-\hat{U}_+=-\hat{T}_-+\hat{U}_+\hat{V}_-$，它们可以转化成(7.61)形式的位移算符的线性组合. 所有我们现在必须做的是：对一个给定的 μ，数出存在的路径的数目(即(7.61)中的算符数目). 我们说明这一点如下：

借助于算符 $\hat{P}_{\alpha,\beta}$对一个在 T_3 方向 μ 单位的位移各种可能性($\alpha=\mu,\beta=0$)，($\alpha=\mu-1,\beta=1$)，…($\alpha=0,\beta=\mu$)存在. 这些是 $\mu+1$ 种独立的路径. 对每个最外壳的状态($\mu=0$)，我们在下一个内壳得到两个状态，在第二个内壳得到三个状态等等. 因为在最外壳的每个点被一个单个状态占据(最大 T_3 多重态的最外点是单个占据的，如同第 7.6 节末尾所解释的)，下一个内壳的每个点被多一个状态占据. 为什么当我们达到一个三角形时，这个推理不再成立？这按照 $q<p$ 或反之，而经 q 步或 p 步实现. 为了得到一个图像，我们再次观察当走向多重态的内壳时路径的增加数. 用多重态 $D(7,3)$ 作为例子(图 7.13). 我们从最大权的态，外壳右边的(A)开始. 有两条独立的路径走向 B，正是 $\hat{T}_-$和 $\hat{V}_-\hat{U}_+$. 结果有两个态在 B 处. 从 B 到 C，对 B 的两个态作用 $\hat{T}_-$可以各有一条路径，那就是 $\hat{T}_-\hat{T}_-$和 $\hat{T}_-\hat{V}_-\hat{U}_+$. 外加我们有路径 $(\hat{V}_-)^2(\hat{U}_+)^2$ 到 C. 这条外加路径实际上是把多重性增加 1 的原因.

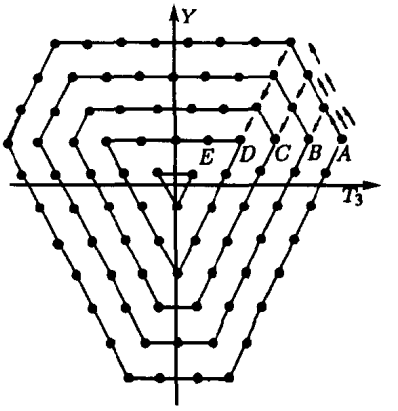


图 7.13　演示从 A 到 B,C,D 和 E 的路径

一个类似的推理对 D 成立. 从 C 出发的路径是由 $\hat{T}_-$来延伸的. 进而路径

$$(\hat{V}_-)^3(\hat{U}_+)^3$$

到 D 是处在一个三角形上. 由 D 到 E，每条到 D 存在的路径可以用 $\hat{T}_-$算符延伸. 但是对以前壳存在的外加的路径现在为 0. 它应该用算符

$$(\hat{V}_-)^4(\hat{U}_+)^4$$

来代表. 这个算符作用到状态$|A\rangle$得 0，因为$(\hat{U}_+)^3|A\rangle$(即一般情况$(U_+)^2|A\rangle$)是 $D(p,q)$多重态在 $\hat{U}_+$方向上边界上最后一个非 0 态. 因此一旦我们达到三角形，独立路径数不再增加. 对 $p<q$ 我们借助路径$(\hat{U}_+)^p(\hat{V}_-)^p$ 以类似的方式论证. 例 7.9 用不同的论证再一次证明这些事实.

例 7.9　SU(3)多重态内壳状态多重性的增加

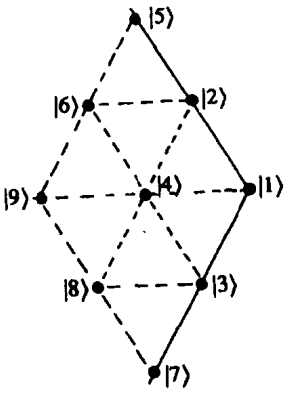
下面我们想用另一种方法来决定一个多重态的内壳状态的多重性. 为此我们从一个(p,q)多重态(看图)的

带有最大权的状态开始.这个状态对 V_-,U_-和 T_-自旋有以下值

$$V=\frac{p}{2}\quad,\quad V_3=\frac{p}{2}$$

$$U=\frac{q}{2}\quad,\quad U_3=-\frac{q}{2}$$

$$T=\frac{p+q}{2}\quad,\quad T_3=\frac{p+q}{2} \tag{1}$$



一个多重态内壳状态多重性的推导

相对相位设定为 1,我们定义

$$\left|\frac{p}{2},\frac{p}{2}\right\rangle_{V,1}=\left|\frac{q}{2},-\frac{q}{2}\right\rangle_{U,1}=\left|\frac{p+q}{2},\frac{p+q}{2}\right\rangle_{T,1}=|1\rangle \tag{2}$$

一般我们对所有多重态边界上(多重态的最外壳)的状态取相位等于 1,例如

$$|2\rangle=\left|\frac{p+1}{2},\frac{p+1}{2}\right\rangle_{V,2}=\left|\frac{q}{2},\frac{q-2}{2}\right\rangle_{U,2}$$

$$=\left|\frac{p+q-1}{2},\frac{p+q-1}{2}\right\rangle_{T,2}$$

$$|3\rangle=\left|\frac{p+1}{2},\frac{p-1}{2}\right\rangle_{V,3}=\left|\frac{q+1}{2},\frac{q+1}{2}\right\rangle_{U,3}$$

$$=\left|\frac{p+q-1}{2},\frac{p+q-1}{2}\right\rangle_{T,3} \tag{3}$$

如我们已经知道所有外壳上的这些态是唯一的.那么对某个任意态|4⟩怎么样?为了回答这个问题我们应用算符恒等式

$$\hat{U}_+\hat{V}_--\hat{V}_-\hat{U}_+-\hat{T}_-=0 \tag{4}$$

到状态|1⟩,结果是

$$\hat{U}_+\hat{V}_-|1\rangle-\hat{V}_-\hat{U}_+|2\rangle-\hat{T}_-|1\rangle$$

$$=\hat{U}_+\sqrt{\frac{p}{2}\frac{(p+2)}{2}-\frac{p}{2}\frac{(p-2)}{2}}|3\rangle-\hat{V}_-\sqrt{\frac{q}{2}\frac{(q+2)}{2}-\frac{q}{2}\frac{(q-2)}{2}}|2\rangle$$

$$-\sqrt{\frac{(p+q)}{2}\frac{(p+q+2)}{2}-\frac{(p+q)}{2}\frac{(p+q-2)}{2}}\left|\frac{p+q}{2},\frac{p+q-2}{2}\right\rangle_{T,4}$$

$$=\sqrt{p}\sqrt{\frac{(q+1)}{2}\frac{(q+3)}{2}-\frac{(q+1)}{2}\frac{(q-1)}{2}}\left|\frac{q+1}{2},-\frac{q-1}{2}\right\rangle_{U,4}$$

$$-\sqrt{q}\sqrt{\frac{(p+1)}{2}\frac{(p+3)}{2}-\frac{(p+1)}{2}\frac{(p-1)}{2}}$$

$$\times\left|\frac{p+1}{2},\frac{p-1}{2}\right\rangle_{V,4}-\sqrt{p+q}\left|\frac{p+q}{2},\frac{p+q-2}{2}\right\rangle_{T,4}$$

$$=\sqrt{p(q+1)}\left|\frac{q+1}{2},-\frac{q-1}{2}\right\rangle_{U,4}-\sqrt{q(p+1)}\left|\frac{p+1}{2},\frac{p-1}{2}\right\rangle_{V,4}$$

$$-\sqrt{p+q}\left|\frac{p+q}{2},\frac{p+q-2}{2}\right\rangle_{T,4}=0 \tag{5}$$

暂时我们设状态|4⟩只被一个状态占据.在此情况,相应的 U 自旋态,V 自旋态和 T 自旋态只相差一个因子 a,b

$$\left|\frac{p+q}{2},\frac{p+q-2}{2}\right\rangle_{T,4}=\frac{1}{a}\left|\frac{p+1}{2},\frac{p-1}{2}\right\rangle_{V,4}$$
$$=\frac{1}{b}\left|\frac{q+1}{2},\frac{q-1}{2}\right\rangle_{U,4} \tag{6}$$

其中 $a,b=\pm 1$.

但由(5)得出

$$b\sqrt{p(q+1)}-a\sqrt{q(p+1)}=\sqrt{p+q} \tag{7}$$

我们将此方程取平方得到

$$ab\sqrt{pq(q+1)(p+1)}=pq \tag{8}$$

该式显然对 p 或 q 等于 0 成立. 但是对 $p\neq 0$ 和 $q\neq 0$ 时(8)式无解,只要取平方和除此 pq,结果为

$$(q+1)(p+1)\neq pq \tag{9}$$

这样我们发现只当或者 $p=0$ 或者 $q=0$ 时,状态 $|4\rangle$ 才只被一个状态占据. 这意味着相应的表示具有三角形的形状. 因为在此情况 $|4\rangle$ 处在多重态的边上,这相应于我们早先的结果.

在 $p\neq 0$ 和 $q\neq 0$ 场合我们至少必须假设 $|4\rangle$ 是双重占据的.

$$|4\rangle=t_1\left|\frac{p+q}{2},\frac{p+q-2}{2}\right\rangle_{T,4}+t_2\left|\frac{p+q-2}{2},\frac{p+q-2}{2}\right\rangle_{T,4}$$
$$=\mu_1\left|\frac{q+1}{2},-\frac{q-1}{2}\right\rangle_{U,4}+\mu_2\left|\frac{q-1}{2},-\frac{q-1}{2}\right\rangle_{U,4}$$
$$=v_1\left|\frac{p+1}{2},\frac{p-1}{2}\right\rangle_{V,4}+v_2\left|\frac{p-1}{2},\frac{p-1}{2}\right\rangle_{V,4} \tag{10}$$

问题是是否这个猜想满足(5). 为了证明这一点我们考虑以下的一般性方案:

$$\left|\frac{p+q}{2},\frac{p+q-2}{2}\right\rangle_{T,4}=a_1\left|\frac{q+1}{2},-\frac{q-1}{2}\right\rangle_{U,4}$$
$$+a_2\left|\frac{q-1}{2},-\frac{q-1}{2}\right\rangle_{U,4}$$
$$\left|\frac{p+q-2}{2},\frac{p+q-2}{2}\right\rangle_{T,4}=a_2\left|\frac{q+1}{2},-\frac{q-1}{2}\right\rangle_{U,4}$$
$$-a_1\left|\frac{q-1}{2},-\frac{q-1}{2}\right\rangle_{U,4} \tag{11}$$

$$a_1^2+a_2^2=1$$

$$\left|\frac{p+q}{2},\frac{p+q-2}{2}\right\rangle_{T,4}=b_1\left|\frac{p+1}{2},\frac{p-1}{2}\right\rangle_{V,4}+b_2\left|\frac{p-1}{2},\frac{p-1}{2}\right\rangle_{V,4}$$
$$\left|\frac{p+q-2}{2},\frac{p+q-2}{2}\right\rangle_{T,4}=b_2\left|\frac{p+1}{2},\frac{p-1}{2}\right\rangle_{V,4}-b_1\left|\frac{p-1}{2},\frac{p-1}{2}\right\rangle_{V,4} \tag{12}$$

$$b_1^2+b_2^2=1$$

我们考虑 a_1,a_2,b_1 和 b_2 可以选得使(5)式满足. 为此我们把(5)乘上 $_{T,4}\left\langle\frac{p+q}{2},\frac{p+q-2}{2}\right|$ 和 $_{T,4}\left\langle\frac{p+q-2}{2},\frac{p+q-2}{2}\right|$,得到

$$a_1\sqrt{p(q+1)}-b_1\sqrt{q(p+1)}-\sqrt{(p+q)}=0 \tag{13}$$

$$a_2\sqrt{p(q+1)}-b_2\sqrt{q(p+1)}=0 \tag{14}$$

进行一些代数运算,我们得到

$$b_1^2q(p+1)=p(q+1)a_1^2+p+q-2a_1\sqrt{p(q+1)(p+q)} \tag{15}$$

$$b_1^2q(p+1)=p(q+1)a_1^2-p+q \tag{16}$$

相减给出

$$a_1=\sqrt{\frac{p}{(q+1)(p+1)}} \tag{17}$$

对 a_2 我们选正的解

$$a_2=\sqrt{\frac{q(q+p+1)}{(q+1)(p+1)}} \tag{18}$$

并得到 b_1 和 b_2

$$b_2=\sqrt{\frac{q(q+p+1)}{(q+1)(p+q)}}\quad,\quad b_1=-\sqrt{\frac{q}{(q+1)(p+q)}} \tag{19}$$

这样我们证明了在 $p\neq 0$ 和 $q\neq 0$ 时该网点至少是双重占据的. 我们感兴趣的不可约表示,这个最小情况必须被实现.

由|4⟩是双重占据这一事实,借助于 U,V 和 T 对称性马上就得出:所有内壳点至少被两个状态占据. 下一步我们可以推出状态|6⟩和|8⟩的分解,它们类似于(11)和(12). 作为例子我们应用算符恒等式

$$\hat{T}_-\hat{U}_+-\hat{U}_+\hat{T}_-=0 \tag{20}$$

到状态|1⟩. 这导致

$$\begin{aligned}&\sqrt{q(p+q-1)}\left|\frac{p+q-1}{2},\frac{p+q-3}{2}\right\rangle_{T,6}\\&-\sqrt{p+q}\left(a_1\sqrt{2q}\left|\frac{q+1}{2},-\frac{q-3}{2}\right\rangle_{U,6}\right.\\&\left.+a_2\sqrt{q-1}\left|\frac{q-1}{2},-\frac{q-3}{2}\right\rangle_{U,6}\right)=0\end{aligned} \tag{21}$$

或

$$\begin{aligned}\left|\frac{p+q-1}{2},\frac{p+q-3}{2}\right\rangle_{T,6}&=a_1\sqrt{\frac{2(p+q)}{p+q-1}}\left|\frac{q+1}{2}-\frac{q-3}{2}\right\rangle_{U,6}\\&+a_2\sqrt{\frac{(q-1)(p+q)}{q(p+q-1)}}\left|\frac{q-1}{2},-\frac{q-3}{2}\right\rangle_{U,6}\\&=\sqrt{\frac{2p}{(q+1)(p+q-1)}}\left|\frac{q+1}{2},-\frac{q-3}{2}\right\rangle_{U,6}\\&+\sqrt{\frac{(q-1)(p+q+1)}{(q+1)(p+q-1)}}\left|\frac{q-1}{2},-\frac{q-3}{2}\right\rangle_{U,6}\end{aligned}$$

借助这种方法推出|6⟩和|8⟩的分解后,该对易关系被用到状态|4⟩上给出|9⟩的多重性和分解.

用这种方法我们可以对简单的表示推出多重性来. 对第 7.8 节的规则的一般证明通过这里描写的这种方法来进行. 现在已经清楚的是从最大权的状态开始重复作用 $\hat{T}_-$ 就把状态的多重性提高 1. 这一过程可以继续下去,只要状态构造是可能的,也即直到达到一个三角形. 在三角形内多重性不再增加. (**例 7.9 完**)

练习 7.10　重子八重态中心的粒子状态

问题　借助于上面例(7.9)推出的一般关系，规定相应于状态$|T=0,T_3=0\rangle$，$|T=1,T_3=0\rangle$，$|V=0,V_3=0\rangle$，$|V=1,V_3=0\rangle$，$|U=0,U_3=0\rangle$和$|U=1,U_3=0\rangle$的粒子组合.

为了这些态的物理解释，考虑例 6.3 中的重子八重态.

解　粒子的分类是依据同位旋本征态

$$|\Sigma^0\rangle=|T=1,T_3=0\rangle=|1.0\rangle_T$$
$$|\Lambda^0\rangle=|0,0\rangle_T \tag{1}$$

得出的. 由例 7.9 给出的(11)和(12)，得出($p=q=1$)

$$|\Sigma^0\rangle=\frac{1}{2}|1,0\rangle_U+\frac{\sqrt{3}}{2}|0,0\rangle_U$$
$$|\Lambda^0\rangle=\frac{\sqrt{3}}{2}|1,0\rangle_U-\frac{1}{2}|0,0\rangle_U \tag{2}$$

和

$$|\Sigma^0\rangle=-\frac{1}{2}|1,0\rangle_V+\frac{\sqrt{3}}{2}|0,0\rangle_V$$
$$|\Lambda^0\rangle=\frac{\sqrt{3}}{2}|1,0\rangle_V+\frac{1}{2}|0,0\rangle_V \tag{3}$$

这些关系可以解出右边的状态

$$|0,0\rangle_U=\frac{\sqrt{3}}{2}|\Sigma^0\rangle-\frac{1}{2}|\Lambda^0\rangle$$
$$|1,0\rangle_U=\frac{1}{2}|\Sigma^0\rangle+\frac{\sqrt{3}}{2}|\Lambda^0\rangle$$
$$|0,0\rangle_V=\frac{\sqrt{3}}{2}|\Sigma^0\rangle+\frac{1}{2}|\Lambda^0\rangle$$
$$|1,0\rangle_V=-\frac{1}{2}|\Sigma^0\rangle+\frac{\sqrt{3}}{2}|\Lambda^0\rangle \tag{4}$$

然而注意(4)中的符号依赖于相位的规定.(**练习 7.10 完**)

练习 7.11　计算表示 $D(p,q)$的维数

问题　借助于已知的 SU(3)多重态的状态的多重性定出一般表示 $D(p,q)$的维数. 这些状态相应于多重态在 Y-T_3 平面中的图象表示的格点.

解　我们记得 p 和 q 正是权图(例如看图中的$D(7,3)$)边界上的连线数. 进而我们知道最外壳的每个点有多重性 1，在相邻的内壳上的点有多重性 2，如此等等，直到我们达到一个三角形壳($p=0$ 或 $q=0$). 然后多重性不再增长. 最外的六边形包含 $3(p+q)$个点(状态). 相邻的内壳(p 和 q 都减 1)包含 $3[2(p-1+q-1)]=3[2(p+q-2)]$个态，因子 2 来源于格点的多重性. 相应地，第三个壳有 $3[3(p-2+q-2)]=3[3(p+q-4)]$个状态. 一般情况 $n+1$ 层壳的状态数为

$$3\{(n+1)(p+q-2n)\}$$

加起来我们得到

$$3\sum_{n=0}^{q-1}(n+1)(p+q-2n)\ ,(p>q)\ .$$

这个和没有包括该三角形和它内部的点.被该三角形包围的点和该三角形上的点数简单地为(看上图)

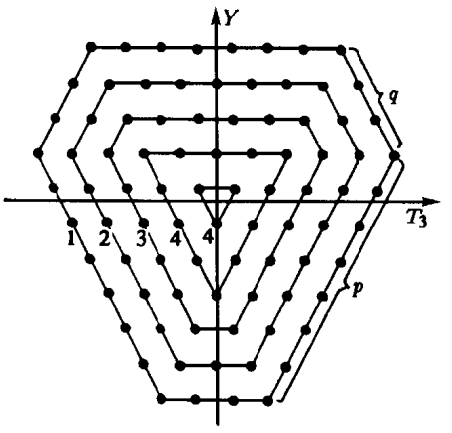
$$\sum_{n=1}^{p-q+1} n=\frac{1}{2}(p-q+1)(p-q+2)$$

每个三角形的多重性为 $q+1$.因此该三角形对表示 $D(p,q)$维数的贡献为

$$\frac{1}{2}(q+1)(p-q+1)(p-q+2)$$

总起来我们有

$$d=\frac{1}{2}(q+1)(p-q+1)(p-q+2)+3\sum_{n=0}^{q-1}(n+1)(p+q-2n)$$



$D(7,3)$多重态,其最外壳由 $p=7$ 和 $q=3$ 单位常数构成.

第二项的求和可以借助表达式的因子化和相对于正比于 n 和 n^2 的部分排列来做出.外加应用

$$\sum_{n=0}^{q-1} n=\frac{q}{2}(q-1)\ \text{和}\ \sum_{n=0}^{q-1} n^2=\frac{q}{6}(q-1)(2q-1)$$

上面两项给出最后结果

$$d=\frac{1}{2}(p+1)(q+1)(p+q+2)$$

(练习 7.11 完)

练习 7.12 对表示 $D(p,q)$计算二次卡西米尔算符

问题 决定二次卡西米尔算符 $\sum_i \hat{F}_i^2$ 在表示 $D(p,q)$中的值.

解 首先我们用(7.27)中定义的算符来表示 $\hat{F}_i$.我们利用关系

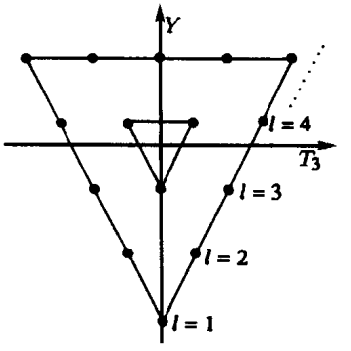
$$\hat{T}_1^2+\hat{T}_2^2=(\hat{T}_+\hat{T}_-+\hat{T}_-\hat{T}_+)/2 \qquad (1)$$

它对 U^- 和 V^- 自旋也成立.这可以明显地通过检验 U-和 V-自旋来容易地证实.我们得到

$$\sum_i \hat{F}_i^2=\frac{1}{2}(\hat{T}_+\hat{T}_-+\hat{T}_-\hat{T}_+)+\hat{T}_3^2+\frac{1}{2}(\hat{V}_+\hat{V}_-+\hat{V}_-\hat{V}_+)$$

$$+\frac{1}{2}(\hat{U}_+\hat{U}_-+\hat{U}_-\hat{U}_+)+\frac{3}{4}\hat{Y}^2 \qquad (2)$$

因为卡西米尔算符的值对一给定多重态是固定的,我们可以选该多重态的任一状态来计算它.再一次我们选 T_3 具有最大值的点(该多重态的右边最外的点).如下面图演示的 $\hat{V}_+,\hat{T}_+,\hat{U}_-$ 作用在这个状态导致出现这个多重态和给出结果为 0.



内部三角形,平行于 T_3 轴的边上的格点数为 $l=1,2,3,\cdots$

现在的想法是重排(2)中的算符,使 $\hat{V}_+,\hat{T}_+$ 和 $\hat{U}_-$ 出现在算符乘积的右方.相应这些乘积作用在这个状态上时给出无贡献.为这个原因我们利用(7.28a),它也能被写成以下形式

$$\hat{T}_+\hat{T}_-=\hat{T}_-\hat{T}_++2\hat{T}_3$$

$$\hat{V}_+\hat{V}_-=\hat{V}_-\hat{V}_++\frac{3}{2}\hat{Y}+\hat{T}_3$$

$$\hat{U}_-\hat{U}_+=\hat{U}_+\hat{U}_--\frac{3}{2}\hat{Y}+\hat{T}_3 \tag{3}$$

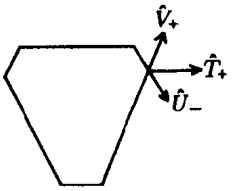
代入(2)就给出

$$\sum_i \hat{F}_i^2=\hat{T}_-\hat{T}_++\hat{T}_3^2+\hat{V}_-\hat{V}_++\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\hat{Y}+\hat{T}_3\right)$$

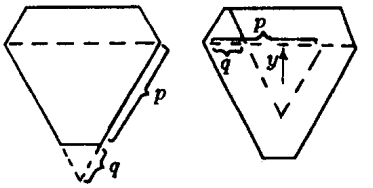
$$+\hat{U}_+\hat{U}_-+\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\hat{Y}+\hat{T}_3\right)+\frac{3}{4}\hat{Y}^2$$

$$=T_3^2+2\hat{T}_3+\frac{3}{4}\hat{Y}^2+\hat{T}_-\hat{T}_++\hat{V}_-\hat{V}_++\hat{U}_+\hat{U}_- \tag{4}$$

因为最后三项无贡献(如上面提到),考虑下面的图形,留下来的是决定 T_3 和 Y 在该多重态的最右边点的值.



算符 $\hat{V}_+$,$\hat{U}_-$ 和 $\hat{T}_+$ 对最大权状态的作用



为了决定在最大权状态上 T_3 和 Y 的坐标

看这图的左方,我们看到 T_3 是虚线三角形边长的一半,也即

$$T_3=\frac{p+q}{2} \tag{5}$$

从图的右方我们知道 Y 是内部虚线三角形边长的三分之一,

$$Y=\frac{p-q}{3} \tag{6}$$

从而我们推出结果

$$\left(\sum_i \hat{F}_i\right)_{(p,q)}=\left(\frac{p+q}{2}\right)^2+2\frac{p+q}{2}+\frac{3}{4}\left(\frac{p-q}{3}\right)^2$$

$$=\frac{p^3+pq+q^2}{3}+p+q \tag{7}$$

作为重要的特例,我们对表示 $D(1,0)$ 和 $D(0,1)$ 得到值 4/3 和对表示 $D(1,1)$ 得到 3. **(练习 7.12 完)**

注意,p 和 q 特征性地完全代表了该 SU(3)多重态. 按照拉卡定理(3.43),p 和 q 是 SU(3)的两个卡西米尔算符. 我们知道卡西米尔算符不是唯一的,结果代替 p 和 q 可以选 $\sum_i \hat{F}_i^2$ 作为一个卡西米尔算符和任何别的一个独立的 p 和 q 的函数. 最简单的方式自然是如我们已经做的那样,就选 p 和 q. 它们允许有一个简单的几何解释,即六边形多重态的边长.

第 8 章　夸克与 SU(3)

在前一章我们已经表明 SU(3)对称性确实给出了从前我们已经经验地发现了的多重态结构(例和练习 6.3－6.5). 因此这个群可能代表一种新的基本对称性,可用来分类基本粒子. 当然,问题仍保留着,是否 SU(3)对称性可以进一步预言我们至今尚未发现的多重态.

为了寻找 SU(3)的物理解释,我们应该理解 SU(3)表示和它的量子数 T_3 和 Y 的涵义. F 自旋,U 自旋和 V 自旋满足角动量代数(SU(2)李代数),并转而成为 SU(3)的子代数. 下面的考虑将使我能在 SU(3)多重态内分类基本粒子,只要我们解释 Y 为超荷,T 为同位旋. 跟随这一假设我们将把理论的含意和实验事实加以比较. 在一给定的 SU(3)多重态内,同位旋多重态表示为平行于 T_3 轴. 作为第一步,按(6.6)我们定义电荷算符为

$$\hat{Q}=\frac{1}{2}\hat{Y}+\hat{T} \tag{8.1}$$

我们标记 SU(3)状态为

$$|T_3,Y,\alpha\rangle \tag{8.2}$$

其中外加的量子数简写为 α,将稍后来规定(两个卡西米尔算符的本征值,它们唯一地分类多重态). 本征值方程

$$\hat{Y}|T_3Y,\alpha\rangle=Y|T_3,Y,\alpha\rangle \quad , \quad \hat{T}_3|T_3Y,\alpha\rangle=T_3|T_3,Y,\alpha\rangle \tag{8.3}$$

对电荷算符给出

$$\hat{Q}|T_3Y,\alpha\rangle=\left(\frac{Y}{2}+T_3\right)|T_3Y,\alpha\rangle\equiv Q|T_3Y,\alpha\rangle \tag{8.4}$$

对 SU(3)状态,电荷 Q 是一个好量子数. 特别是一个单态有 0 电荷(看图 8.1),

$$\hat{Q}|00,\alpha\rangle=0|00,\alpha\rangle \tag{8.5}$$

因为本征值 Y 和 T_3 在此情况都为 0.

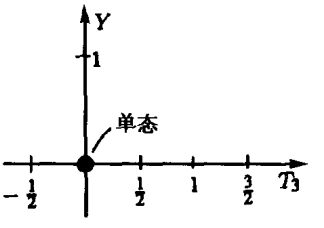


图 8.1　SU(3)的单态表示:$(p,q)=(0,0)$. 它是最小的平凡表示.

自然地解释 Λ^* 超子为单态①,它被认定为 1405Mev,

① 参看 S. L. Glashow, A. H. Rosenfeld: Phys. Rev. Lett. 10, 192(1963).

自旋$\frac{1}{2}$和宇称负的重子共振态(参看例 6.5 中的表). 我们记得,它不能放入例 6.5 中高度对称的体系,确实它可以说是代表最平凡的 SU(3)表示. 现在让我们来看最小的非平凡的 SU(3)表示.

首先我们提醒自己:$T=\frac{1}{2}$的同位旋双重态是同位旋群 SU(2)的最小的非平凡的表示(看图 8.2). 这意味着我们可以从这个表示构造所有更高的多重态. 技术上,这可以借助克莱布许-高登耦合从同位旋$T=\frac{1}{2}$到任意同位旋,然而这不能用最低的 SU(2)多重态 $T=0$ 来做到. 在这种意义上,SU(2)的 $T=0$ 多重态是平凡的.



图 8.2　同位旋双重态$T=\frac{1}{2}$带有状态$|TT_3>=\left|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right>$和$|TT_3>=\left|\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\right>$是 SU(2)的最小的非平凡表示.

因为 F 自旋代数(SU(3))包含同位旋作为子代数,我们寻找的最小的非平凡 SU(3)表示必须包含至少一个$T=\frac{1}{2}$的电荷二重态. 事实上 T 自旋,U 自旋和 V 自旋完全对称地出现在 F 自旋的代数中. 结果我们感兴趣的这个 SU(3)多重态必须包含一个 T 二重态,U 二重态和 V 二重态. 由于 SU(3)多重态在 Y-T_3 平面上的内在的对称性(看第 7 章关于 T-U-V 多重态耦合的结论),我们得出两个等边三角形,表示在图 8.3 中. 由普遍的对称性要求,它们以原点($Y=0$,$T_3=0$)为中心,对称地绕着原点. 我们分别标记这两个表示为[3]和[$\bar{3}$],因为它们每个包含 3 个状态. 如果[3]代表粒子,则[$\bar{3}$]代表相应地反粒子,因为与 ψ_ν 相比,$\bar{\psi}_\nu$ 有相反的超荷和相反的 T_3 分量,从而有相反的电荷

$$\hat{Q}\psi_\nu=Q_\nu\psi_\nu \quad , \quad \hat{Q}\bar{\psi}_\nu=-Q_\nu\bar{\psi}_\nu \tag{8.6}$$

这两个表示[3]和[$\bar{3}$]的每一个包含一个同位旋二重态$T=\frac{1}{2}$和一个同位旋单态 $T=0$. 例如[3]的同位旋二重态由状态

$$\psi_1\equiv|\tfrac{1}{2}Y\rangle \quad , \quad \psi_2\equiv|-\tfrac{1}{2}Y\rangle \tag{8.7}$$

给出,而同位旋单态为

$$\psi_3\equiv|0\ Y'\rangle \tag{8.8}$$

到此为止,它们的超荷还是未知的,但它们现在可以被定出来:ψ_1,ψ_2,ψ_3 的 T_3 值可以直接从本征值方程推出来

$$\hat{T}_3\psi_1=+\frac{1}{2}\psi_1 \quad , \quad \hat{T}_3\psi_2=-\frac{1}{2}\psi_2 \quad , \quad \hat{T}_3\psi_3=0\psi_3 \tag{8.9}$$

而考虑 ψ_1 为 U 自旋单态,相应的超荷值可以被推出来.

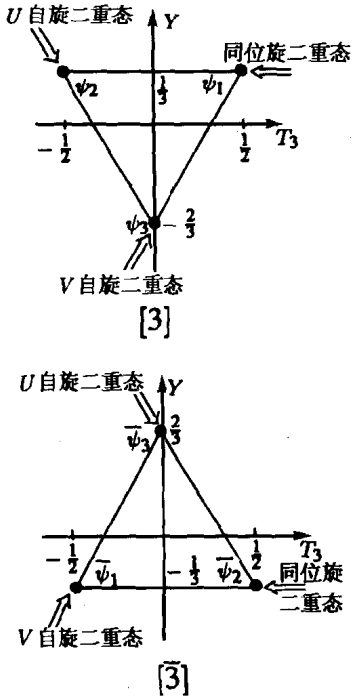


图 8.3　SU(3)的最小非平凡表示

$$\hat{U}_3\psi_1=0 \tag{8.10}$$

由 $\hat{U}_3=(3\hat{Y}-2\hat{T}_3)/4$(参看(7.28)),就得到

$$\hat{Y}\psi_1=\frac{1}{3}(4\hat{U}_3+2\hat{T}_3)\psi_1=\frac{2}{3}\hat{T}_3\psi_1=\frac{1}{3}\psi_1 \tag{8.11a}$$

因为 ψ_1 和 ψ_2 属于同一同位旋二重态(垂直于 Y 轴放置),因此有同样的超荷,同样有

$$\hat{Y}\psi_2=\frac{1}{3}(4\hat{U}_3+2\hat{T}_3)\psi_2=\frac{1}{3}\psi_2 \tag{8.11b}$$

成立.

现在我们可以认定$[4U_3+2\times(-\frac{1}{2})]/3=\frac{1}{3}$,而因此对 ψ_2,$U_3=\frac{1}{2}$. 相应地 ψ_3 必须有本征值 $U_3=-\frac{1}{2}$. 确实,$\hat{U}_-$算符从 ψ_2 导向 ψ_3,如在图 7.1 中所见,而这导致

$$\hat{Y}\psi_3=\frac{1}{3}(4\hat{U}_3+2\hat{T}_3)\psi_3=\frac{1}{3}(4\times(-\frac{1}{2})+2\times(0))\psi_3=-\frac{2}{3}\psi_3 \tag{8.11c}$$

借助于类似的论证我们对$[\bar{3}]$得到

$$\hat{Y}\bar{\psi}_1=-\frac{1}{3}\bar{\psi}_1 \quad , \quad \hat{Y}\bar{\psi}_2=-\frac{1}{3}\bar{\psi}_2 \quad , \quad \hat{Y}\bar{\psi}_3=+\frac{2}{3}\bar{\psi}_3 \tag{8.12}$$

这样我们必然地导向超荷是三分之一的倍数. 如果我们接受电荷算符(看(8.1))是由盖尔曼-西岛关系决定的,上面的结果有深刻的结果. 作为结果,对[3]的状态,以下的电荷本征值被发现

$$\begin{aligned}
\hat{Q}\psi_1&=\left(\frac{1}{2}\hat{Y}+\hat{T}_3\right)\psi_1=\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)\psi_1=\frac{2}{3}\psi_1\\
\hat{Q}\psi_2&=\left(\frac{1}{2}\hat{Y}+\hat{T}_2\right)\psi_2=\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\psi_2=-\frac{1}{3}\psi_2\\
\hat{Q}\psi_3&=\left(\frac{1}{2}\hat{Y}+\hat{T}_3\right)\psi_2=\left(\frac{1}{2}\times\left(-\frac{2}{3}\right)+0\right)\psi_3=-\frac{1}{3}\psi_3
\end{aligned} \tag{8.13}$$

类似地对反三重态$[\bar{3}]$的状态$\bar{\psi}_\nu$,有

$$\hat{Q}\bar{\psi}_1=-\frac{2}{3}\bar{\psi}_1 \quad , \quad \hat{Q}\bar{\psi}_2=+\frac{1}{3}\bar{\psi}_2 \quad , \quad \hat{Q}\bar{\psi}_3=+\frac{1}{3}\bar{\psi}_3 \tag{8.14}$$

相应于 SU(3)多重态[3]的状态的粒子有分数电荷. 盖尔曼建议叫它们"夸克",而茨威格(Zweig)称这些粒子为"艾西(ace)"①. 因为 ψ_1 和 ψ_2 形成一个同位旋二重态类似于质子和中子,ψ_1 夸克被命名为"p 夸克"而 ψ_2 为"n 夸克",ψ_3 被命名为"λ 夸克". 一个更现代的命名是"上夸克"(u),"下夸克"(d)和"奇异夸克"(s). 从现在起夸克状态被标记为 q_1,q_2,q_3 以使这关系更清楚. 类似地我们把反夸克写为

$$\bar{\psi}_1,\bar{\psi}_2,\bar{\psi}_3\rightarrow\bar{q}_1,\bar{q}_2,\bar{q}_3$$

① 参看 G. Zweig:CERN-Preprint 8409/Th. 412(1964).

8.1　寻找夸克

许多物理学家寻找过夸克，也就是带有三分之一电荷的粒子. 琼斯(L. W. Jones)描写了在加速器上产生夸克和在海水、矿物和宇宙射线中发现夸克的尝试①. 麦克柯歇(C. B. A. McCusher)和凯恩斯(I. Cairns)相信他们在高能宇宙射线中发现了夸克②，然而至今没有可信的肯定结果被得到. 也有对 W·费厄彭克(W. M. Fairbank)等人③的实验的许多怀疑，他声称在一种现代形式的密立根实验中发现了分数电荷粒子. 其他作者反对这一点④. 这样，有很强的理由假设自由夸克在自然界中不存在. 一方面，夸克模型在描写基本粒子时取得了巨大的成功，另一方面我们直接面对着夸克禁闭的基本问题. 这一概念试图解释夸克只能存在于束缚态粒子的内部(即它们被禁闭)而不能作为自由粒子存在. 我们将稍后回到这一点.

在重原子核的高能碰撞中，由于核冲击波，核物质将被压缩和加热到高温⑤. 在这种条件下一种重子和介子的融化将会出现在一种所谓夸克-胶子等离子体中⑥. 在这种等离子体中，夸克是自由的. 对夸克胶子等离子体的研究正在活跃地进行.

8.2　夸克状态的变换性质

对三重态表示[3]，算符 $\hat{F}_a$ 由 3×3 矩阵给出，因为我们是处理三个状态 $|q_i\rangle(i=1,2,3)$，即

$$(\hat{F}_a)_{ij}=\langle q_i|\hat{F}_a|q_j\rangle \tag{8.15}$$

借助于位移算符 $\hat{V}_\pm$，$\hat{U}_\pm$ 和 $\hat{T}_\pm$ 和它们的性质(参看(7.28)和第 7.4 节)，我们对夸克状态推出

$$\begin{aligned}
&\hat{T}_-|q_1\rangle=|q_2\rangle,\quad \hat{T}_+|q_2\rangle=|q_1\rangle,\\
&\hat{U}_-|q_2\rangle=|q_3\rangle,\quad \hat{U}_+|q_3\rangle=|q_2\rangle,\\
&\hat{V}_-|q_1\rangle=|q_3\rangle,\quad \hat{V}_+|q_3\rangle=|q_1\rangle,\\
&\hat{T}_3|q_1\rangle=\frac{1}{2}|q_1\rangle,\quad \hat{T}_3|q_2\rangle=-\frac{1}{2}|q_2\rangle,\quad \hat{T}_3|q_3\rangle=0|q_3\rangle,\\
&\hat{Y}|q_1\rangle=\frac{1}{3}|q_1\rangle,\quad \hat{Y}|q_2\rangle=\frac{1}{3}|q_2\rangle,\quad \hat{Y}|q_3\rangle=-\frac{2}{3}|q_3\rangle
\end{aligned} \tag{8.16}$$

---

① 参看 L. W. Jones: Int. Conf. on Symmetries and Quark Models, Wayne StateUniversity, Detroit (1969).

② 参看 C. B. A. McCusher, I. Cairns: Phys. Rev. Lett. **23**, 658(1969).

③ 参看 G. S. La Rue, W. M. Fairbank, A. F. Hebard: Phys. Rev. Lett. **38**, 1011 (1977).

④ 参看 R. G. Milner, B. H. Cooper, K. H. Chang, K. Wilson, J. Labrenz, R. D. McCeown: Phys. Rev. Lett. **54**, 1472 (1985).

⑤ 参看 W. Soheid, H. Müller and W. Greiner: Phys. Rev. Lett. **32**, 741 (1974).

⑥ 参看 H. Stöcker and W. Greiner: Phys. Reports, **137**, 277 (1986).

等等. 在此基础上我们可以计算算符 $\hat{U}_{\pm},\hat{T}_{\pm},\hat{V}_{\pm}$ 的所有矩阵元;由

$$\hat{F}_1=\hat{T}_1=\frac{1}{2}(\hat{T}_+ +\hat{T}_-),\qquad \hat{F}_5=-\frac{1}{2}\mathrm{i}(\hat{V}_+ -\hat{V}_-),$$

$$\hat{F}_2=\hat{T}_2=-\frac{1}{2}\mathrm{i}(\hat{T}_+ -\hat{T}_-),\quad \hat{F}_6=\frac{1}{2}(\hat{U}_+ +\hat{U}_-),$$

$$\hat{F}_3=\hat{T}_3,\qquad \hat{F}_7=-\frac{1}{2}\mathrm{i}(\hat{U}_+ -\hat{U}_-),$$

$$\hat{F}_4=\frac{1}{2}(\hat{V}_+ +\hat{V}_-),\qquad \hat{F}_8=\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{Y} \tag{8.17}$$

可以同样地计算算符 $\hat{F}_\alpha(\alpha=1,\cdots,8)$ 的所有矩阵元. 通过简单的计算,利用

$$\hat{F}_\alpha=\frac{1}{2}\hat{\lambda}_\alpha$$

我们重新发现 SU(3)的生成元 $\hat{\lambda}_\alpha$ 早先的结果(参看练习 8.1). 一般情况下,我们可以借助于 $\hat{F}_\alpha$,按照

$$\hat{U}(\theta)=\exp\Big(-\mathrm{i}\sum\theta_\alpha\hat{F}_\alpha\Big) \tag{8.18}$$

构造幺正算符. 这些代表了 SU(3)的群算符,并把状态在每个 SU(3)多重态(F 自旋多重态)内变换. 在三重态表示的情况,$\hat{F}_\alpha$ 是厄密的,因此(8.18)中的 $\hat{U}(\theta)$ 是幺正的 3×3 矩阵,行列式 $\det(\hat{U}(\theta))=1$. 这样我们写

$$|q^i\rangle'=\hat{U}(\theta)|q_i\rangle=\sum_j|q_j\rangle U_{ji}(\theta)$$

其中

$$\hat{U}_{ji}(\theta)=\langle q_j|\hat{U}(\theta)|q_i\rangle \tag{8.19}$$

在下面的练习中我们研究表示[3]和$[\bar{3}]$的状态 $|q_i\rangle$ 和 $|\bar{q}_i\rangle$ 的变换性质.

练习 8.1 在表示[3]中的 SU(3)生成元

问题 借助于位移算符和夸克状态在表示[3]中计算 SU(3)的生成元 $\hat{\lambda}_\alpha$.

解 我们记得关系 $\hat{\lambda}_\alpha=2\hat{F}_\alpha$ 和夸克状态是正交的,即 $\langle q_i|q_i\rangle=\delta_{ij}$. 借助关系(8.15)-(8.17),我们得到

$$(\hat{\lambda}_\alpha)_{ij}=2\langle q_i|\hat{F}_\alpha|q_i\rangle \tag{1}$$

结果对 $\hat{\lambda}_1$

$$\begin{aligned}(\hat{\lambda}_1)_{ij}&=2\langle q_i|\hat{F}_1|q_i\rangle=\langle q_i|\hat{T}_+ +\hat{T}_-|q_i\rangle\\&=\langle q_i|\hat{T}_+|q_i\rangle+\langle q_i|\hat{T}_-|q_i\rangle\end{aligned} \tag{2}$$

因为(8.16)(也利用正交性条件)

$$\hat{T}_+|q_j\rangle=\delta_{j2}|q_1\rangle,\ \hat{T}_-|q_j\rangle=\delta_{j1}|q_2\rangle \tag{3}$$

$$(\hat{\lambda}_1)_{ij}=\langle q_i|q_1\rangle\delta_{j2}+\langle q_i|q_2\rangle\delta_{j1}=\delta_{i1}\delta_{j2}+\delta_{i2}\delta_{j1} \tag{4}$$

结果我们得到仅有的非 0 矩阵元 $(\hat{\lambda}_1)_{12}=(\hat{\lambda}_1)_{21}=1$,它意味着

$$\hat{\lambda}_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \tag{5}$$

为了构造生成元 $\hat{\lambda}_2,\cdots,\hat{\lambda}_8$ 的矩阵表示，我们以同样方式进行：

$$\begin{aligned}(\hat{\lambda}_2)_{ij}&=2\langle q_i|\hat{F}_2|q_j\rangle=\frac{1}{i}[\langle q_i|\hat{T}_+|q_i\rangle-\langle q_i|\hat{T}_-|q_i\rangle]\\&=-\mathrm{i}(\delta_{i1}\delta_{j2}-\delta_{i2}\delta_{j1})\end{aligned} \tag{6}$$

即

$$(\hat{\lambda}_2)_{12}=-\mathrm{i}\text{ 和 }(\hat{\lambda}_2)_{21}=\mathrm{i},\text{即 }\hat{\lambda}_2=\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}&0\\\mathrm{i}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \tag{7}$$

对 $\hat{\lambda}_3$

$$(\hat{\lambda}_3)_{ij}=2\langle q_i|\hat{F}_3|q_j\rangle=2\langle q_i|\hat{T}_3|q_j\rangle \tag{8}$$

也即矩阵元为

$$\begin{aligned}(\hat{\lambda}_3)_{i1}&=2\langle q_i|\hat{T}_3|q_1\rangle=\langle q_i|q_1\rangle=\delta_{i1}\\(\hat{\lambda}_3)_{i2}&=2\langle q_i|\hat{T}_3|q_2\rangle=-\langle q_i|q_2\rangle=-\delta_{i2}\\(\hat{\lambda}_3)_{i3}&=2\langle q_i|\hat{T}_3|q_3\rangle=0\end{aligned} \tag{9}$$

因此

$$\hat{\lambda}_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix} \tag{10}$$

下一步我们有

$$(\hat{\lambda}_4)_{ij}=2\langle q_i|\hat{F}_4|q_j\rangle=\langle q_i|\hat{V}_+|q_j\rangle+\langle q_i|\hat{V}_-|q_j\rangle \tag{11}$$

因为

$$\hat{V}_+|q_j\rangle=\delta_{j3}|q_1\rangle\quad,\quad\hat{V}_-|q_j\rangle=\delta_{j1}|q_3\rangle \tag{12}$$

所以

$$(\hat{\lambda}_4)_{ij}=\langle q_i|q_1\rangle\delta_{j3}-\langle q_i|q_3\rangle\delta_{j1}=\delta_{i1}\delta_{j3}+\delta_{i3}\delta_{j1} \tag{13}$$

也即

$$(\hat{\lambda}_4)_{13}=1=(\hat{\lambda}_4)_{31}\quad,\quad\hat{\lambda}_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} \tag{14}$$

以下对 $\hat{\lambda}_5$ 是成立的

$$\begin{aligned}(\hat{\lambda}_5)_{ij}&=\frac{1}{\mathrm{i}}[\langle q_i|\hat{V}_+|q_i\rangle-\langle q_i|\hat{V}_-|q_i\rangle]\\&=\frac{1}{\mathrm{i}}[\delta_{i1}\delta_{j3}-\delta_{i3}\delta_{j1}]\\(\hat{\lambda}_5)_{13}&=-\mathrm{i}\quad,\quad(\hat{\lambda}_5)_{31}=\mathrm{i}\end{aligned} \tag{15}$$

(其他所有矩阵元为 0)，因此

$$\hat{\lambda}_5=\begin{pmatrix}0&0&-\mathrm{i}\\0&0&0\\\mathrm{i}&0&0\end{pmatrix} \tag{16}$$

类似地对 $\hat{\lambda}_6$ 我们发现

$$(\hat{\lambda}_6)_{ij}=2\langle q_i|\hat{F}_6|q_j\rangle=\langle q_i|\hat{U}_+|q_j\rangle+\langle q_i|\hat{U}_-|q_j\rangle \tag{17}$$

因为

$$\hat{U}_+|q_j\rangle=\delta_{j3}|q_2\rangle \quad , \quad \hat{U}_-|q_j\rangle=\delta_{j2}|q_3\rangle \tag{18}$$

我们有

$$(\hat{\lambda}_6)_{ij}=\langle q_i|q_2\rangle\delta_{j3}+\langle q_i|q_3\rangle\delta_{j2}=\delta_{i2}\delta_{j3}+\delta_{i3}\delta_{j2} \tag{19}$$

也即

$$(\hat{\lambda}_6)_{23}=(\hat{\lambda}_6)_{32}=1 \quad , \quad \hat{\lambda}_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} \tag{20}$$

对 $\hat{\lambda}_7$ 我们得到

$$\begin{aligned}(\hat{\lambda}_7)_{ij}&=\frac{1}{\mathrm{i}}[\langle q_i|\hat{U}_+|q_j\rangle-\langle q_i|\hat{U}_-|q_j\rangle]\\&=\frac{1}{\mathrm{i}}[\delta_{i2}\delta_{j3}-\delta_{i3}\delta_{j2}]\end{aligned} \tag{21}$$

$$(\hat{\lambda}_7)_{23}=-\mathrm{i} \quad , \quad (\hat{\lambda}_7)_{32}=\mathrm{i} \text{ ,即 } \hat{\lambda}_7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-\mathrm{i}\\0&\mathrm{i}&0\end{pmatrix} \tag{22}$$

最后 $\hat{\lambda}_8$ 发现为

$$(\hat{\lambda}_8)_{ij}=2\langle q_i|\hat{F}_8|q_j\rangle=\sqrt{3}\langle q_i|\hat{Y}|q_j\rangle \tag{23}$$

即

$$(\hat{\lambda}_8)_{i1}=\sqrt{3}\langle q_i|\hat{Y}|q_1\rangle=\frac{1}{3}\sqrt{3}\langle q_i|q_1\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}\delta_{i1} \tag{24}$$

$$(\hat{\lambda}_8)_{i2}=\sqrt{3}\langle q_i|\hat{Y}|q_2\rangle=\frac{1}{3}\sqrt{3}\langle q_i|q_2\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}\delta_{i2} \tag{25}$$

$$(\hat{\lambda}_8)_{i3}=\sqrt{3}\langle q_i|\hat{Y}|q_3\rangle=\frac{1}{3}\sqrt{3}(-2)\langle q_i|q_3\rangle=-\frac{2}{\sqrt{3}}\delta_{i3} \tag{26}$$

$$\hat{\lambda}_8=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix} \tag{27}$$

在表示[3]中,生成元 $\hat{\lambda}_\alpha$ 正是盖尔曼给出的矩阵. 当然这个结果并不令人惊奇. **(练习 8.1 完)**

练习 8.2 反三重态[$\bar{3}$]的状态的变换性质

问题 证明反三重态[$\bar{3}$]的状态 $|\bar{q}_i\rangle$ 由以下形式变换

$$|\bar{q}_i\rangle' = \hat{U}(\theta)|\bar{q}\rangle = \sum_j |\bar{q}_j\rangle \bar{U}_{ji}(\theta) \tag{1}$$

幺正变换算符由

$$\hat{U}(\theta) = \exp\left(-\mathrm{i}\sum_a \theta_a \hat{F}_a\right),\quad \hat{F}_a = -\frac{1}{2}\hat{\lambda}_a^* \tag{2}$$

给出，其矩阵表示为

$$\bar{U}_{ji}(\theta) = \langle \bar{q}_j | \hat{U}(\theta) | \bar{q}_i \rangle = U_{ji}^*(\theta) \tag{3}$$

解　为了证明这个定理，我们从三重状态的变换开始：

$$\hat{U}(\theta) = \exp(-\mathrm{i}\theta \cdot \hat{F})$$

$$|q_i\rangle' = \hat{U}(\theta)|q_i\rangle \tag{4}$$

其复共轭方程为

$$|q_i\rangle'^* = \hat{U}^*(\theta)|q_i^*\rangle \tag{5}$$

其中

$$\hat{U}^*(\theta) = \exp(+\mathrm{i}\theta \cdot (\hat{F})^*) \equiv \exp(-\mathrm{i}\theta \cdot \hat{\bar{F}}) \tag{6}$$

算符 $-\hat{F}^* = \hat{F}$ 是反三重态的生成元. 按照(8.18)，它们是这样引入的：指数上为 $-\mathrm{i}\theta \cdot \hat{\bar{F}}$（注意负号）. 复共轭并不改变矩阵乘法的性质，但它改变对易关系右方的符号. 这被外加的负号纠正过来，使得 $(-\hat{F}^*)$ 重新形成一个表示. 按照(8.1)，生成元由 $\hat{F}_i = -(\hat{F}_i)^*$ 或 $(\hat{F}_a = -\hat{\lambda}_a^*/2)$ 给出，即 T_3 和 Y_3（同样它们的本征值）被乘上 (-1). 很清楚，这严格地是反三重态的特征性质. 因此状态 $|q_i\rangle^*$ 被叫做反三重态，我们标记它们为 $|\bar{q}_i\rangle$. 符号 $|q_i\rangle^* \to |\bar{q}_i\rangle$ 和 $-\hat{F}_i^* \to \hat{\bar{F}}_i$ 不应与厄密共轭搞混. 在下面的练习中我们证明不存在幺正变换把 $\hat{U}$ 和 $\hat{U}^*$ 联系在一起，即[3]和$[\bar{3}]$是独立的表示. **(练习 8.2 完)**

练习 8.3　SU(3)两个基本表示的不等价性

问题　证明表示[3]和$[\bar{3}]$(三重态和反三重态)是不同的基本表示，它们不能彼此变换到对方.

解　在练习 8.2 中我们已经看到，生成元 $\hat{F}_a = -\hat{\lambda}_a^*/2$ 属于$[\bar{3}]$的生成元，而 $\hat{F}_a = \hat{\lambda}_a/2$ 是[3]的生成元. 这意味着状态 $|\bar{q}_i\rangle$ 以 $\hat{U}^*(\theta_a)$ 变换，而不以 $\hat{U}(\theta_a)$ 变换. 如果这两个表示是等价的，那么它们的生成元只差一个幺正变换 $\hat{S}$，也即

$$\hat{S}\hat{F}_a\hat{S}^{-1} \overset{!}{=} \hat{\bar{F}}_a \text{ 或 } \hat{S}\hat{\lambda}_a\hat{S}^{-1} = -\hat{\lambda}_a^* \tag{1}$$

应用这个变换到 $\hat{\lambda}_a$ 的本征值方程(即 $\hat{\lambda}_a|q_i\rangle = \lambda|q_i\rangle$，其中 λ 是本征值)

$$\hat{S}\hat{\lambda}_a|q_i\rangle = \hat{S}\lambda|q_i\rangle = \lambda\hat{S}|q_i\rangle = \hat{S}\hat{\lambda}_a\hat{S}^{-1}\hat{S}|q_i\rangle \tag{2}$$

其中

$$\hat{S}|q_i\rangle = |q_i\rangle'$$

如果(1)是对的，我们得到

$$-\lambda_a^*|q_i\rangle' = \lambda|q_i\rangle'$$

也即 $\hat{\lambda}_a$ 与 $-\hat{\lambda}_a^*$ 具有同样本征值. 现在 $\hat{\lambda}_a$ 是厄密矩阵，即

$$\hat{\lambda}_a = \hat{\lambda}_a^+ = (\lambda_a^*)^T$$

其中"T"表示转置.因为一个矩阵和它的转置矩阵行列式相等,$\hat{\lambda}_a$ 和 $\hat{\lambda}_a^*$ 有同样本征值 λ,它们是由久期方程

$$\det(\hat{\lambda}_a-\lambda\hat{I})=\det(\hat{\lambda}_a^*-\lambda\hat{I})=0$$

决定的.因此$-\hat{\lambda}_a^*$ 的本征值与 $\hat{\lambda}_a$ 的本征值差一个符号.借助计算我们发现所有 $\hat{\lambda}_a$ 的本征值是$-1,0,$和$+1$;除去例外 $\hat{\lambda}_8$,它有本征值 $1/\sqrt{3}$ 两次和$-2/\sqrt{3}$.因此 $\hat{\lambda}_8$ 和$-\hat{\lambda}_8^*$ 有不同的本征值.结果是不存在变换把[3]变到$(\bar{3})$,也即三重态和反三重态是独立的表示.这自然不令人吃惊,因为算符 $\hat{U}$ 只把给定的多重态的状态相互变换.反三重态的状态不能通过 $\hat{F}_i$ 变换到三重态的状态(注意:这一点不同于群 SU(2),SU(2)中,双重态和反双重态是等价表示,其原因显然是因为生成元 $\hat{\tau}_i$ 都有本征值-1和$+1$!).(**练习 8.3完**)

8.3 从基本表示[3]和[$\bar{3}$]构造所有 SU(3)多重态

我们刚刚发现 SU(3)的最小非平凡表示[3]和[$\bar{3}$],它们在构成更高的表示(上一章讨论过的)中起着重要作用.密切类似于 SU(2)的情况,这一点应该被看到,在那里我们能推出角动量代数(SU(2)的李代数)的多重态的一般结构.结果是对每个值 $j=0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},\cdots$相应有一个维数$(2j+1)$的多重态,带有状态$|jm\rangle,m=+j,\cdots,-j$.构造 SU(2)多重态的代替方法在于依次耦合基本二重态 $j=\frac{1}{2},m=\frac{1}{2},-\frac{1}{2}$.我们已经知道,对每个自旋 j 可以用依次把自旋$\frac{1}{2}$耦合到一起来表示.我们经常用以下符号的数学术语来表示这个过程:

$$[\tfrac{1}{2}]\otimes[\tfrac{1}{2}]=[\tfrac{1}{2}]^2=[1]\oplus[0]$$

或

$$[\tfrac{1}{2}]\otimes[\tfrac{1}{2}]\otimes[\tfrac{1}{2}]=[\tfrac{1}{2}]^3=[\tfrac{3}{2}]\oplus[\tfrac{1}{2}]\oplus[\tfrac{1}{2}].$$

借助分解这些克罗内克乘积(左边)到直接和,特别是不可约 SU(2)表示,即总角动量 j 的多重态的直接和时,如我们上面看到的,角动量 j 能出现几次.

在后者的例子中,同样的总角动量 $j=\frac{1}{2}$出现了两次.这是耦合的不同可能性的直接结果:前两个 $j=\frac{1}{2}$态可以耦合到中间态 $j'=1$ 和 $j'=0$.现在这些角动量 j'跟第三个 $j=\frac{1}{2}$一起可以耦合到总角动量 $J=\frac{3}{2},\frac{1}{2}$(耦合 $j'=1$ 和$\frac{1}{2}$)和 $J=\frac{1}{2}$(耦合 $j'=0$ 和$\frac{1}{2}$).这被表示在图 8.4 中,它表明基本多重态 $j=\frac{1}{2}$(SU(2)双重态)经多次耦合到不同的总角动量 J.角动量 $J=1$ 出现在克罗内克乘积$[\frac{1}{2}]^4$ 中三次.图的左边表示撑直的耦合,也即角动量最大的(平行的)相加.只有唯一的方法实现这一点.因此乘积$[\frac{1}{2}]^n$ 中最大角动量(撑直的图像)为 $J_{max}=n/2$.物理上这意味着从角动量 $j=\frac{1}{2}$的基本粒子构造角动量 J 的复合粒子.在这过程中旋转对称性保持不变.

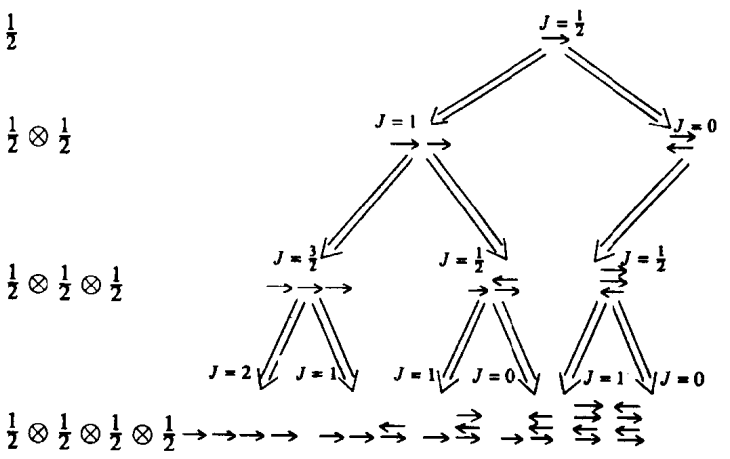


图 8.4　自旋 $\frac{1}{2}$ 到总自旋 J 的多重耦合

类似地在 SU(3)的场合我们可以借助基本表示[3]或[$\bar{3}$]来构造较高的多重态. SU(3)多重态的一般分类和它们的结构我们已经从前一章知道. 这方法类似于在角动量代数基础上对 SU(2)多重态的一般分类. 现在我们利用基本表示夸克[3]和反夸克[$\bar{3}$]来产生同样的 SU(3)多重态. 随着两个基本表示的出现,它与 SU(2)的根本差别变得清楚了.

原则上,构造所有 SU(3)的不可约表示只要两个基本表示[3]和[$\bar{3}$]中的一个. 原因是表示[$\bar{3}$]的状态能从三重态表示的克罗内克乘积中推出,反之亦然稍后当我们讨论表示的张量乘积的约化时(将证明这一点):

$$[3]\otimes[3]=[6]\oplus[\bar{3}],\quad [\bar{3}]\otimes[\bar{3}]=[\bar{6}]\oplus[3]\,.$$

然而为了物理上的原因,我们需要两个基本表示,因为夸克(表示为[3])和反夸克(表示为[$\bar{3}$])的重子数(对夸克 $B=\frac{1}{3}$,对反夸克 $B=-\frac{1}{3}$)的电荷不同.

一般的 SU(3)的克罗内克乘积包含 p 个三重态和 q 个反三重态:

$$\underbrace{[3]\otimes[3]\otimes\cdots[3]}_{p\text{次}}\otimes\underbrace{[\bar{3}]\otimes[\bar{3}]\otimes\cdots[\bar{3}]}_{q\text{次}} \tag{8.20}$$

下面我们分解这个乘积,始终把结果表示中最大的孤立出来,然后对剩下的部分继续这个过程. 用物理的术语这意味着我们用夸克和反夸克构造(复杂的)粒子,始终保持 SU(3)对称性不变.

8.4　从夸克和反夸克构造表示 $D(p,q)$

首先我们清楚地注意到基本三重态(夸克态)的基矢为

a) $[3]:|T_3,Y\rangle$

带有量子数

$$(T_3,Y)=\left(\frac{1}{2}\frac{1}{3}\right)\quad,\quad\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{3}\right)\quad,\quad\left(0,-\frac{2}{3}\right)\tag{8.21}$$

b) $[\bar{3}]:|\overline{T}_3,\overline{Y}\rangle$

带有量子数

$$(\overline{T}_3,\overline{Y})=\left(0,\frac{2}{3}\right),\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right),\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right)\tag{8.22}$$

直乘积由形式为

$$|T_3(1),Y(1)\rangle|T_3(2),Y(2)\rangle\cdots|T_3(p),Y(p)\rangle\otimes|\overline{T}_3(1),\overline{Y}(1)\rangle$$
$$\cdots\overline{T}_3(q),\overline{Y}(q)\rangle\tag{8.23}$$

的所有乘积态的集合给出.这些矢量的特征为 p 个夸克 q 个反夸克态,因为 $\hat{T}_3$ 和超荷 $\hat{Y}$ 的可加性

$$\hat{T}_3=\sum_i\hat{T}_3(i)\quad,\quad\hat{Y}=\sum_i\hat{Y}(i)\tag{8.24}$$

(求和遍及所有粒子).这些多夸克态具有本征值

$$(T_3,Y)=\left(\sum_{i=1}^{p}T_3(i)+\sum_{i=1}^{q}\overline{T}_3(i)\ ,\ \sum_{i=1}^{p}Y(i)+\sum_{i=1}^{q}\overline{Y}(i)\right)\tag{8.25}$$

按照数学文献,这对本征值的术语称为态(8.23)的权.当

$$T_3>T_3'\text{ 或 }T_3=T_3',Y>Y'$$

这个权(T_3,Y)称为大于(T_3',Y')写为

$$(T_3,Y)>(T_3',Y')\tag{8.26}$$

我们在以下的例中演示这一点.

例 8.4 态的权

按照定义

$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)>\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)\qquad\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)>\left(0,-\frac{2}{3}\right)$$

同样

$$\left(\frac{1}{2},+1\right)>\left(\frac{1}{2},-1\right)$$

我们说左边的权大于右边的权.(**例 8.4 完**)

例 8.5 夸克三重态[3]和反夸克三重态[$\bar{3}$]的最大权

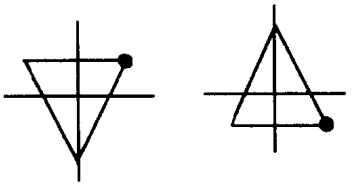
从表示[3]和[$\bar{3}$]的 Y-T_3 图中我们直接读出最大权(看图 8.3):

$$[3]:(T_3,Y)_{\max}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$$

$$[\bar{3}]:(T_3,Y)_{\max}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right)$$

如图中表明它们是最右边的点.(**例 8.5 完**)

回顾上面例中的结果我们得出结论:最大权的(p 个夸克 q 个反夸克)态是由 p 个最大权的夸克和 q 个最大权的反夸克组成,也即 p 个夸克态$\left|\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right\rangle$和 q 个反夸克态$\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right\rangle$.这个态的特征为



[3]和[$\bar{3}$]的最大权状态

$$(T_3)_{\max}=\frac{p+q}{2}\quad,\quad(Y)_{\max}=\frac{p-q}{3}\tag{8.27}$$

如同构造过程中成为显然的,相应于每个多重态只包含有一个最大权态.与此相反,存在有各种可能性来得到较低权的态.例如权为$[(T_3)_{\max}-1,Y_{\max}]$的态可以由在最大权态

$$\left|\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right\rangle,\cdots\left|\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right\rangle_p\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right\rangle,\cdots\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right\rangle_q$$

中换掉一个(而且仅仅一个)因子$\left|\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right\rangle$或$\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right\rangle$,用$\left|-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right\rangle$或$\left|-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right\rangle$代替来得到.

以最大权态为基础我们现在可以借助位移算符 $\hat{T}_{\pm},\hat{U}_{\pm},\hat{V}_{\pm}$来产生整个多重态(在前一章中我们已经详细讨论了这个过程).让我们讨论一个 $D(p,q)$表示的例子,如图 8.5 所演示,$p=2,q=1$.最大权态位于 A 点.标记它的权为$[T_{3\max}=(p+q)/2,Y_{\max}=(p-q)/3]$,我们知道从 A 点出发沿着 V 线经过 p' 步可以达到 B.然后沿 T 线经过 q' 步可以走到 C.

符号 p'和 q'仍然是不知道的,虽然因为 D 点有 $T_3=0$,我们得到

$$(T_3)_{\max}=\frac{q'}{2}\times1+p'\times\frac{1}{2}=\frac{q'+p'}{2}\tag{8.28}$$

A 又属于一个 U 多重态

$$(U_3)_{\min}=-\frac{1}{2}q'\tag{8.29}$$

另一方面我们知道

$$(T_3)_{\max}=\frac{p+q}{2}$$

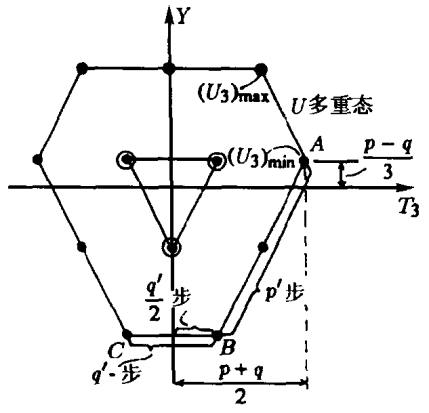


图 8.5 在特殊情况 $D(2,1)$中对一般多重态 $D(p,q)$的解释

和

$$(U_3)_{\min}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}Y_{\max}-(T_3)_{\max}\right)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{2}\left(\frac{p-q}{3}\right)-\frac{p+q}{2}\right)=-\frac{1}{2}q$$

与(8.28),(8.29)一起我们能定出 p' 和 q':

$$\frac{p+q}{2}=\frac{p'+q'}{2}\quad,\quad -\frac{q}{2}=-\frac{q'}{2}$$

给出

$$p'=p\quad,\quad q'=q \tag{8.30}$$

这证明 $D(p,q)$代表 p 个夸克 q 个反夸克组成的结构(8.21),(8.23)中最大的 SU(3)多重态.这样我们发现了一般多重态结构与夸克和反夸克态数目之间的一个重要关系,它能形成这样一个最大多重态.

8.4.1 最小的 SU(3)多重态

我们在图 8.6 中展示最简单的那些 SU(3)多重态,在图 8.7 中展示一个较高的多重态.

考虑它们的边界,我们马上得到 p 和 q 的值.由于(8.27)得到$(T_3)_{max}$和$(Y)_{max}$也即最外格点的坐标.由这一点出发我们可以简单地构造该多重态的所有格点的坐标.坐标系的原点($T_3=0$,$Y=0$)提供一个外加的帮助,同时还有该多重态图形的各种对称性.

在表示 $D(1,0)$和 $D(0,1)$中我们再次认出夸克和反夸克的存在.从练习 6.5 我们知道多重态 $D(3,0)=[10]$代表重子共振态.它的维数,也即多重态的状态数被用[10]来标记.相应的关系对所有其他表示成立.由例 6.3 知道的重子清楚地由八重态 $D(1,1)=[8]$表示,这同样对反重子成立.它们的中心($T_3=0,Y=0$)每个被两个状态占据.

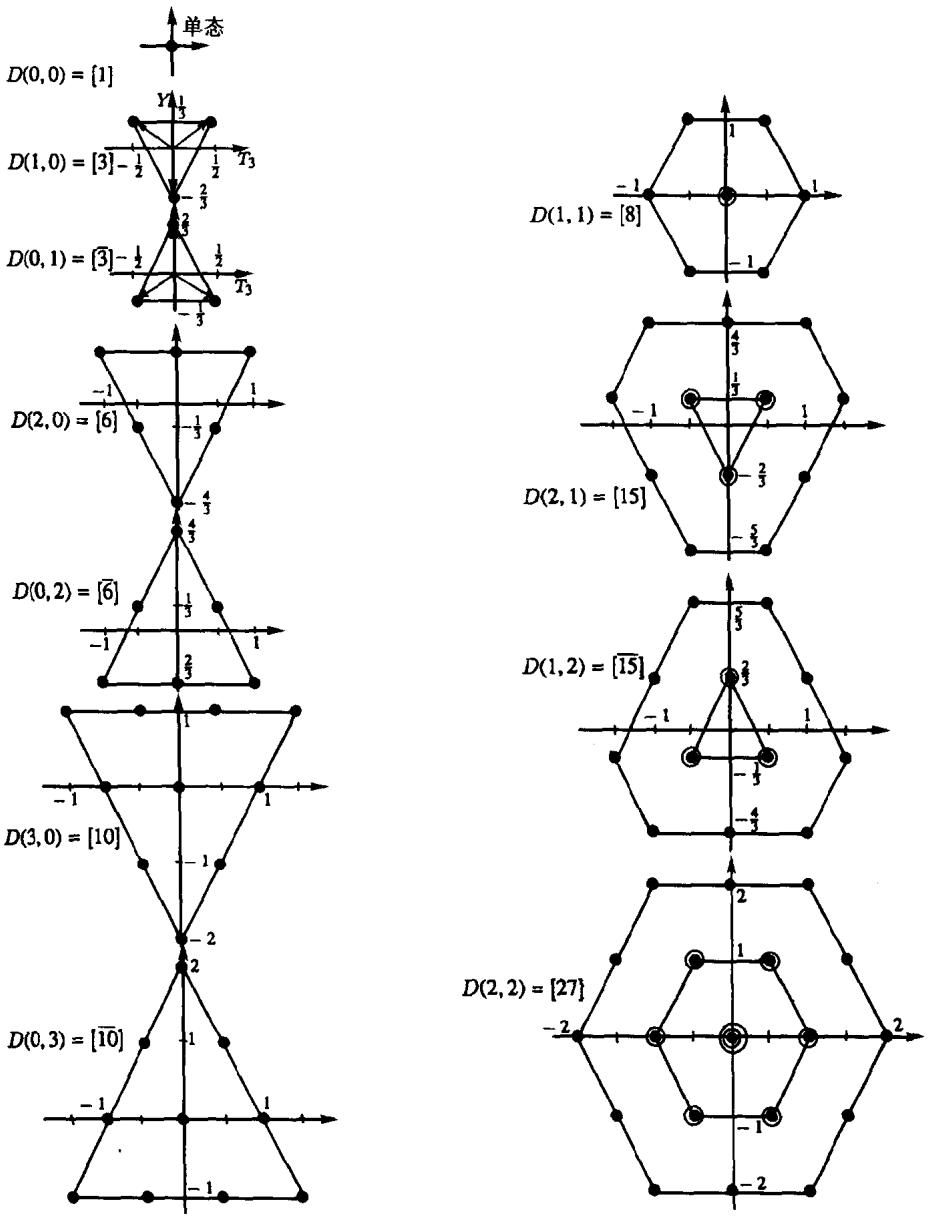


图 8.6　最简单的 SU(3)多重态

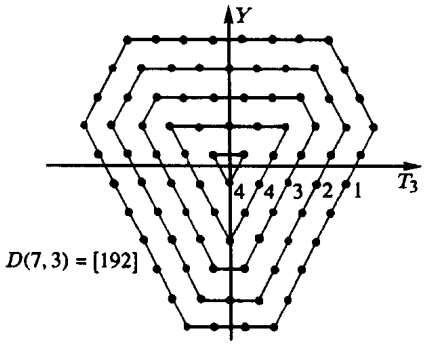
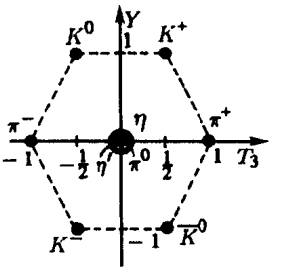


图 8.7 一个较高 SU(3)多重态的 T_3-Y 图.
数字指出各个壳上的状态的多重性



膺标介子九重态

例 8.6 膺标介子

自旋 0 和负宇称的基本粒子被称为膺标介子.因为它们有负宇称,它们不是标量粒子而是膺标粒子,这意味着在空间反射 $r'=-r$ 时,它们的波函数改变符号.它们的内在关系之一在于它们有同样的自旋和宇称.

因为所有膺标介子无自旋,它们的磁矩为 0($\mu=0$).膺标介子显然能用一种自然的方式安排到上面的图中.这样,它们是 SU(3)多重态 $D(1,1)=[8]$的成员.看来那里没有 η'的位置,表明它可以与 SU(3)单态联系在一起,必须被分别表示.有时我们把 η'粒子加入到八重态的($T_3=0, Y=0$)点上.这样做时我们称这图为"膺标介子九重态",如上图表示的一样.(**例 8.6 完**)

膺标介子(S=0,奇宇称)的性质

名称	符号	电荷	T 同位旋	T_3 同位旋	Y 超荷	质量 [Mev]	寿命[秒]	主要衰变方式	主要衰变 [%]
	π^+	+1	1	1	0	139.57	2.60×10^{-8}	$\pi^+\to\mu^-+\nu_\mu$	100
π 介子	π^0	0	1	0	0	134.97	0.89×10^{-16}	$\pi^0\to\gamma+\gamma$	98.8
	π^-	−1	1	−1	0	139.57	2.60×10^{-8}	$\pi^-\to\mu^-+\bar{\nu}_\mu$	100
K 介子	K^+	+1	1/2	1/2	1	493.82	1.235×10^{-8}	$K^+\to\mu^++\nu_\mu$	63.8
								$\to\pi^++\pi^0$	20.9
		0						$\to\pi^+\pi^+\pi^-$	5.6
	K^0			−1/2	1	497.82	$50\%K_S+50\%K_L$	见下方	
	K^-	−1	1/2	−1/2	−1	493.82	1.235×10^{-8}	$K^-\to\mu^-+\nu_\mu$	63.8
								$\to\pi^-+\pi^0$	20.9
		0						$\to\pi^-\pi^+\pi^-$	5.6
	$\overline{K}^0$			1/2	−1	497.82	$50\%K_S+50\%K_L$	见下方	

续表

名称	符号	电荷	T 同位旋	T_3 同位旋	Y 超荷	质量 [Mev]	寿命[秒]	主要衰变方式	主要衰变 [%]
短寿命 K_0	$K_s\equiv K_1^c$	0	1/2	−1/2	1	497.7	0.88×10^{-10}	$\pi^+ + \pi^-$	70
								$\pi^0\pi^0$	30
长寿命 K_0	$K_l\equiv K_2^0$	0			1	497.7	5.77×10^{-8}	$3\pi^0$	22
								$\pi^+ + \pi^- + \pi^0$	12
								$\pi^\pm + \mu^\mp + \nu_\mu$	27
								$\pi^\pm + e^\mp + \nu_e$	39
η 介子	η	0	0	0	0	548.6	ca. 10^{-20}	$\eta\to\gamma\gamma$	38
								$\to\pi^0+\gamma\gamma$	2
								$\to3\pi^0$	31
								$\to\pi^+ + \pi^- + \pi^0$	23
η' 介子	η'	0	0	0	0	958	$>6.6\times10^{-22}$	$\eta'\to\gamma\gamma$	2
								$\to\eta+\pi^+\pi^-$	67.6
								$\to\rho^0+\gamma$	30.4

例 8.7　(为了深入的洞察)介子 K^0, $\overline{K^0}$和它们的衰变

K^0 和$\overline{K^0}$是特别的粒子,前者是粒子,后者是相应的反粒子

$$(\overline{K^0})=\overline{K^0}$$

看 K^0 和$\overline{K^0}$的衰变模式我们发现一个有趣的特色①:它们有两个不同的寿命. 这是一个引人注目的事实,因为正常情况下一个不稳定粒子(以质量 M 和它的寿命 τ 为特征)被以下的量子力学状态描写

$$|\psi(t)\rangle=\exp(-\mathrm{i}Mc^2t/\hbar)\exp(-\Gamma t/2\hbar)\,|\psi(0)\rangle \tag{1}$$

其中 $\Gamma=\hbar/\tau$. 如果,譬如说衰变粒子是一个 π^- 介子,它衰变到 $\mu^- + \bar{\nu}_\mu$,那么在时间 t 被观察到的到 $\mu-\bar{\nu}_\mu$ 对的衰变率由下式给出

$$R(\mu^-\bar{\nu}_\mu,t)=R_0\exp(-\Gamma t/\hbar) \tag{2}$$

其中

$$R_0=2\pi|\langle\mu^-\bar{\nu}_\mu|\hat{H}_{\mathrm{int}}|\psi(0)\rangle|^2$$

$\hat{H}_{\mathrm{int}}$是弱相互作用哈密顿量.

因此我们得到一个实验的衰变规律,它被其他不稳定粒子(体系)所证实. 这对一个粒子衰变也成立,如同 π 介子在别的模式中衰变一样,只是常数 R_0 改变. 例如考虑 π^- 粒子 β 衰变

$$\pi^-\to\pi^0+\mathrm{e}^-+\overline{\nu_\mathrm{e}} \tag{3}$$

---

① 看 W. Greiner, B. Müller: *Theoretical Physics*. Vol. 5 *Gauge Theories of Electroweak Interactions* (Springer, Berlin, Heidelberg); P. Roman: *Theory of Elementary Particles* (North Holland, Amsterdam 1960).

它比起 μ^- 衰变是非常少见的,类似于(2),我们发现

$$R'(\pi^0 e^- \bar{\nu}_e, t) = R'_0 \exp(-\Gamma t/\hbar) \tag{4}$$

其中

$$R'_0 = 2\pi |\langle \pi^0 e^- \bar{\nu}_e | \hat{H}_{\text{int}} | \psi(0) \rangle|^2 .$$

可以看到,比例

$$\frac{R'(\pi^0 e^- \bar{\nu}_e, t)}{R(\mu^- \bar{\nu}_\mu, t)} = \frac{|\langle \pi^0 e^- \bar{\nu}_e | \hat{H}_{\text{int}} | \psi(0) \rangle|^2}{|\langle \mu^- \bar{\nu}_\mu | \hat{H}_{\text{int}} | \psi(0) \rangle|^2} \tag{5}$$

总是不依赖于时间和非常小的(3×10^{-8}).带电 K 介子的衰变是类似的:K^+ 和 K^- 的三种可能衰变模式(出现在上面表中)被同样的寿命 $\tau_K = 1.235\times10^{-8}$ 秒共同描写.各种衰变模式的比例(分支比)也是不依赖于时间的.

另一方面中性 K 介子($K^0, \bar{K}^0$)没有一个共同的寿命.它们衰变到两个 π 介子(短寿命)要比衰变到三个 π 介子(长寿命)快.

$$\left.\begin{aligned} K^0 &\to \pi^+ + \pi^- \\ \bar{K}^0 &\to \pi^+ + \pi^- \end{aligned}\right\} \quad , \quad \tau_s = 0.9\times10^{-10}\text{s} \tag{6a}$$

和

$$\left.\begin{aligned} K^0 &\to \pi^0 + \pi^0 + \pi^0 \\ &\to \pi^+ + \pi^- + \pi^0 \\ \bar{K}^0 &\to \pi^0 + \pi^0 + \pi^0 \\ &\to \pi^+ + \pi^- + \pi^0 \end{aligned}\right\} \quad , \quad \tau_l = 5\times10^{-8}\text{s} \tag{6b}$$

这一观察能够用量子力学解释:状态

$$|K^0\rangle \text{和} \ |\bar{K}^0\rangle \tag{7}$$

可以形成两个线性独立态①

$$\begin{aligned} |K^0_l(t) &= p|K^0\rangle + q|\bar{K}^0\rangle \\ |K^0_s(t) &= r|K^0\rangle + s|\bar{K}^0\rangle \end{aligned} \tag{8}$$

带有不同的质量(分别为 M_l, M_s)和寿命(τ_l, τ_s).我们说是 K_0-$\bar{K}_0$ 混合态.这些由(8)给出的新的状态有一个时间依赖性,服从

$$\begin{aligned} \left|K^0_l(t) = \exp\left\{-\left(i\frac{M_l c^2}{\hbar} + \frac{1}{2}\frac{\Gamma_l}{\hbar}\right)t\right\}\right| K^0_l(0)\rangle \\ \left|K^0_s(t) = \exp\left\{-\left(i\frac{M_s c^2}{\hbar} + \frac{1}{2}\frac{\Gamma_s}{\hbar}\right)t\right\}\right| K^0_s(0)\rangle \end{aligned} \tag{9}$$

宽度 $\Gamma_s = \hbar/\tau_s$ 和 $\Gamma_l = \hbar/\tau_l$.反解(8)导致

$$\begin{aligned} |K^0(t)\rangle &= a|K^0_l(t)\rangle + b|K^0_s(t)\rangle \\ |\bar{K}^0(t)\rangle &= c|K^0_l(t)\rangle + d|K^0_s(t)\rangle \end{aligned} \tag{10}$$

其中

$$\begin{aligned} a = s/(sp-rq), \ c = -r/(sp-rp) \\ b = -q/(sp-rq), \ d = p/(sp-rq) \end{aligned} \tag{11}$$

---

① 指标 l 和 s 分别是长寿命和短寿命的缩写.

很清楚在 K^0-$\overline{K^0}$空间一个任意状态总可以写成

$$|\psi(t)\rangle=\alpha|K_l^0(t)\rangle+\beta|K_s^0(t)\rangle \tag{12}$$

现在我们可以简单解释这个经验事实：衰变到两个 π 介子以 τ_s 为特征，衰变到三个 π 介子以 τ_l 为特征. 假设短寿命的 K_s^0 只衰变到两个 π 介子而不衰变到三个 π 介子①

$$\langle 2\pi|\hat{H}_{\text{int}}|K_s^0\rangle\neq 0\ ,\ \langle 3\pi|\hat{H}_{\text{int}}|K_s^0\rangle=0 \tag{13}$$

相反 K_l^0 只衰变到三个 π 介子②

$$\langle 2\pi|\hat{H}_{\text{int}}|K_l^0\rangle=0\ ,\ \langle 3\pi|\hat{H}_{\text{int}}|K_l^0\rangle\neq 0 \tag{14}$$

这时在事实上按照(10)得出 K^0(和$\overline{K_0}$)依赖于衰变模式有两个寿命. 此外实验相当好地表明了这一点，K^0 以及 $\overline{K^0}$，50%场合衰变到两个 π 介子而在其他一半事件中衰变到三个 π 介子. 这样

$$|p|^2=|q|^2=\frac{1}{2}\quad,\quad |r|^2=|s|^2=\frac{1}{2} \tag{15}$$

因为这些方程不能唯一地解出(相因子!)，我们通常采用约定(例如当时间 $t=0$)

$$\begin{aligned}|K_l^0(0)\rangle\equiv|K_2\rangle&=\frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0(0)\rangle+|\overline{K}^0(0)\rangle)\\ |K_s^0(0)\rangle\equiv|K_1\rangle&=\frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0(0)\rangle-|\overline{K}^0(0)\rangle)\end{aligned} \tag{16}$$

注意：这些方程仅仅近似地成立，因为严格解是

$$|K_{\mu}^0\rangle=(|K_{1,2}\rangle\pm\varepsilon|K_{2,1}\rangle)/\sqrt{1+|\varepsilon|^2} \tag{17}$$

其中 $\varepsilon\simeq 10^{-3}$由实验给出③.

下面我们将从关于 K^0 介子的(9)，(10)和(16)得出一些简单的结论. 在时间 $t=0$ 时，一个 K^0 介子可能被产生，例如由反应④

$$\begin{aligned}\pi^-+\mathrm{p}&\to\mathrm{K}^0+\Lambda\\ &\to\mathrm{K}^0+\Sigma^0\end{aligned} \tag{18}$$

对(12)中的状态$|\psi(t)\rangle$，给出

$$\begin{aligned}|\psi(t=0)\rangle=|\mathrm{K}^0\rangle&=\alpha|\mathrm{K}_l^0(t=0)\rangle+\beta|\mathrm{K}_s^0(t=0)\rangle\\ &=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathrm{K}_l^0\rangle+|\mathrm{K}_s^0\rangle)\end{aligned} \tag{19}$$

导致(考虑(16)式)

---

① 这个关系的近似正确指出强相互作用的 CP 不变性，参看 *Relativistic Quantum Mechanics* (Springer, Berlin, Heidelberg 1989).

② 这些关系只是近似成立；更准确地

$$|\langle\pi^+\pi^-|\hat{H}_{\text{int}}|\mathrm{K}_l^0\rangle/\langle\pi^+\pi^-|\hat{H}_{\text{int}}|\mathrm{K}_s^0\rangle|=1.95\times10^{-3}.$$

③ 同上.

④ K 介子和 Λ 超子总是成对产生的，这叫做‘关联产生’. 除去反应(18)还有其他反应支持这一假设：

$$\pi^-+\mathrm{p}\to\mathrm{K}^++\Sigma^-,\ \pi^++\mathrm{p}\to\mathrm{K}^++\Sigma^+$$

这是由于左方只有上和下夸克和它们的反夸克出现，但在右方有一个 s 夸克和一个反 s 夸克 $\bar{\mathrm{s}}$ 出现. 反 $\bar{\mathrm{s}}$ 夸克包含在 K^+中，而 s 夸克在 Σ^-和 Σ^+中. $\mathrm{s}\bar{\mathrm{s}}$对可以在碰撞中产生(参看第 11.4 节和第 11.5 节中表明粒子的夸克内容的表 11.6 和 11.7).

$$\alpha=\beta=\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{20}$$

按照(12),(16)和(9),对任意时间 t

$$|\psi(t)\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(-\left(\mathrm{i}\frac{M_Lc^2}{\hbar}+\frac{1}{2}\frac{\Gamma_L}{\hbar}\right)t\right)\left|\mathrm{K}_L^0(0)\right\rangle$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(-\left(\mathrm{i}\frac{M_Sc^2}{\hbar}+\frac{1}{2}\frac{\Gamma_S}{\hbar}\right)t\right)\left|\mathrm{K}_S^0(0)\right\rangle$$

参照(16)

$$=\frac{1}{2}\left\{\exp\left[-\left(\mathrm{i}\frac{M_Sc^2}{\hbar}+\frac{1}{2}\frac{\Gamma_S}{\hbar}\right)t\right]\right.$$
$$\left.+\exp\left[-\left(\mathrm{i}\frac{M_Lc^2}{\hbar}+\frac{1}{2}\frac{\Gamma_L}{\hbar}\right)t\right]\right\}\left|\mathrm{K}^0\right\rangle$$
$$+\frac{1}{2}\left\{\exp\left[-\left(\mathrm{i}\frac{M_Sc^2}{\hbar}+\frac{1}{2}\frac{\Gamma_S}{\hbar}\right)t\right]\right.$$
$$\left.-\exp\left[-\left(\mathrm{i}\frac{M_Lc^2}{\hbar}+\frac{1}{2}\frac{\Gamma_L}{\hbar}\right)t\right]\right\}\left|\overline{\mathrm{K}}^0\right\rangle \tag{21}$$

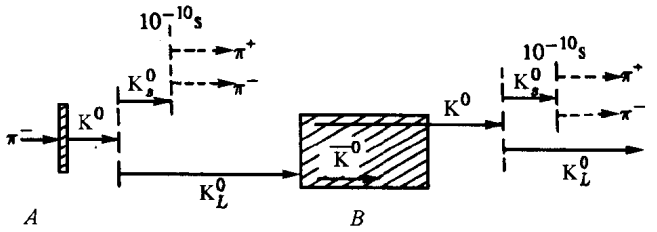
这个状态决定了最初产生的 K^0 介子的时间演化.确实我们看出当 $t=0$ 一个纯粹的 K^0 介子存在,它发展为一个 K^0 和 $\overline{\mathrm{K}^0}$ 的迭加.如果

$$\tau_L>t\geqslant\tau_S$$

那么 K^0 和 $\overline{\mathrm{K}^0}$ 各占 50%.这直接导致一个似非而是的结果:在一束 K^0 介子中,粒子不仅衰变,而且在没有其他物质存在时把自己转变为别的粒子,即 $\overline{\mathrm{K}^0}$ 介子.在束流中的 $\overline{K^0}$ 介子能被实验地检测出,例如通过束流穿过物质的反应

$$\overline{\mathrm{K}^0}+\mathrm{p}\rightarrow\pi^++\Lambda \tag{22}$$

这一实验的构图被勾划在下面图中.一束 π^- 介子在 A 点产生 K^0 介子,它随后转化为 K_S^0 和 K_L^0 的混合.

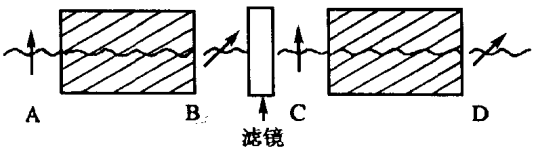


K^0 介子的衰变,转化和重新产生

因为所有 K_S^0 衰变成 π 介子,从而只有 K_L^0 留下来.按照(16)这一束流相应于 K^0 和 $\overline{\mathrm{K}^0}$ 的线性组合.$\overline{\mathrm{K}^0}$ 由于反应(22)在靶 B 处被吸收,因而一个纯 K^0 束流出现在 B 的后面,接着这个过程重复自己.这种类型的实验叫"K^0 介子的重产生实验",近来它们在高能物理实验室中是常规的实验.

为了更好地理解 K^0 介子的重产生,我们应当参考偏振光波的类似实验(看下一个图).一个线性横向极化束的两个方向相应于 K^0 和 $\overline{\mathrm{K}^0}$.如图所示,入射光的偏振在纸面方向,然后通过 A 和 B 之间的介质,它把极化矢量

旋转一定角度. 让我们假设在 B 处的旋转角为 45°. 下一步这个光束被这样过滤，使得在 C 处极化矢量重新和 A 处相同. 然后过程重新开始. 因此在 A 处和 C 处的极化方向明显地相应于上一图中 A 和 B 后面的 K^0 介子，而在 B 和 D 处的极化方向相应于 K_l^0.



以线极化光束来做的重产生实验

这一类比是从量子理论的波动部分给出的. 两个现象根本上都是根据迭加原理，它在量子力学中也对概率波(粒子的引导场)成立，并表现在例如(8)和(12)中. 作为进一步的结果，两个粒子 K_l^0 和 K_s^0 能够干涉，它已经正式地表达在(12)中. 这个干涉成为实验可观察的，因为 K_l^0 的 2π 衰变并不完全消失(参看对应于方程(14)的脚注 4). 考虑(9)和(12)我们推出

$$\begin{aligned}|\langle\pi^+\pi^-|\hat{H}_{\text{int}}|\psi(t)\rangle|^2 = |&A\exp\left[-\mathrm{i}(M_l c^2/\hbar)t\right]\exp\left[-\frac{1}{2}(\Gamma_l/\hbar)t\right]\\&+B\exp\left[-\mathrm{i}(M_s c^2/\hbar)t\right]\\&\times\exp\left[-\frac{1}{2}(\Gamma_s/\hbar)t\right]|^2\end{aligned}\tag{23}$$

其中

$$A=\alpha\langle\pi^+\pi^-|\hat{H}_{\text{int}}|K_l^0\rangle \quad , \quad B=\beta\langle\pi^+\pi^-|\hat{H}_{\text{int}}|K_s^0\rangle$$

是复常数. 把(23)取平方得到

$$\begin{aligned}|\langle\pi^-\pi^-|\hat{H}_{\text{int}}|\psi(t)\rangle|^2 = &|A|^2\exp\left[-(\Gamma_l/\hbar)t\right]+|B|^2\exp\left[-(\Gamma_s/\hbar)t\right]\\&+2\mathrm{Re}\{AB\}\exp\left[\mathrm{i}(M_l-M_s)(c^2/\hbar)t\right]\\&\times\exp\left[-\frac{1}{2}(\Gamma_l+\Gamma_s)t/\hbar\right]\end{aligned}\tag{24}$$

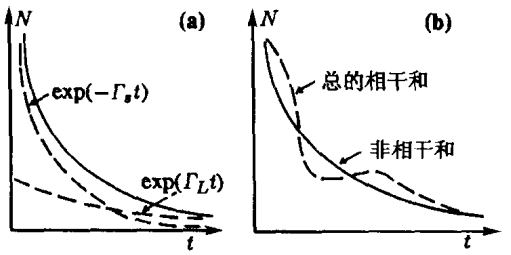
右方的前两项描写两个独立粒子的非相干迭加衰变，表现在下面的图(a)中. 外加出现了一个干涉项(第三项)，它改变衰变的时间依赖性并导致(b)中的虚线. 显然极大与极小依赖于常数 A 和 B 的值. 观测结果(看以下的图)清楚地肯定了 K_l^0 和 K_s^0 的相干性；并且如果 α 和 β 值由重产生实验确定，那么就决定了比值

$$|\langle\pi^+\pi^-|\hat{H}_{\text{int}}|K_l^0\rangle/\langle\pi^+\pi^-|\hat{H}_{\text{int}}|K_s^0\rangle|$$

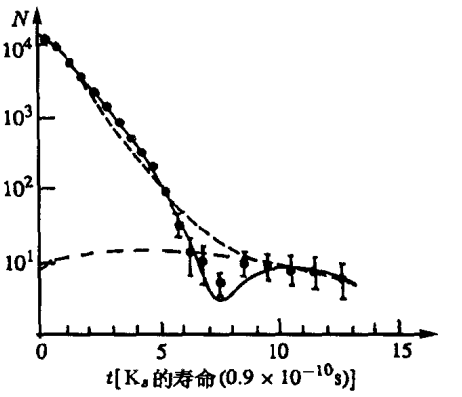
类似于这里对 K_s^0 和 K_l^0 的论证，当考虑不同种中微子时也导致振荡. 假设 ν_e，ν_μ 和 ν_τ 中微子有非 0 的静止质量，并且至少两个中微子有不同质量. 如果这个假设是真实的，中微子可以相互转化，我们将期待对“中微子振荡”①有一个类似(24)的表达式. 现在这些效应被各种各样的实验室搜寻，但至今尚未成功. (**例 8.7 完**)

---

① 参看 W. Greiner, B. Müuer: *theoretical Physics*, Vol. 5 *Gauge Theories of Electroweak Interactions* (Spring Berlin, Heidellerg).



K^0_S 和 K^0_L 的相干衰变函数的图示
(a)和(相干)干涉效应项(b)



K^0_L 和 K^0_S 干涉.
实验观察的作为时间函数的衰变.

8.5 介子多重态

SU(3)的介子多重态在某些根本性质上不同于重子多重态：

当每个重子多重态存在有反重子(反粒子)的不同多重态，在介子场合粒子和反粒子是同一个 SU(3)多重态的成员，也即对每个给定的 T_3 和 Y 的状态矢量在同一多重态中存在有一个状态矢量，量子数为 $-T_3$ 和 $-Y$. 进而粒子和反粒子具有同样的自旋和宇称. 在重子场合区分粒子和反粒子的量子数正是重子数，它在介子的情况为 0($B=0$). 这意味着对多重态的每一个状态在同一多重态内存在一个状态(同一个或者另一个矢量)，它具有反粒子的量子数. 每个夸克有重子数 $B=\frac{1}{3}$，每个反夸克 $B=-\frac{1}{3}$. 这由以下的事实得出来，每个核子由三个夸克组成，具有重子数 $B=+1$，而每一个反核子 $B=-1$. 介子由夸克对组成. 事实上我们已经在第 8.6 节中看到

$$[3]\otimes[\bar{3}]=[8]\oplus[1]$$

因为一个 $p=1,q=1$ 的夸克-反夸克直积的较大多重态是 $D(1,1)=[8]$，因此九个状态中只有一个留在外面，它必须是 $D(0,0)=[1]$，也即一个单态. 这也将被用另一种方法在第 8.6 节中证明. 分解 $[3]\otimes[\bar{3}]=[8]\oplus[1]$ 准确地符合于例 8.6 提供的膺标介子的图像.

与重子态的一个进一步的差别由各种类型的 SU(3)对称性破坏所提供. 为了解释这一点，我们考虑两个 SU(3)多重态，带有相等的自旋、宇称和重子数. 让我们进一步假设对第一个多重态的每个粒子，在第二个多重态中存在一个粒子带有相等的 T，T_3 和 Y. 例如 $T_3=Y=0$ 的 SU(3)单态和一个 $T_3=Y=0$ 的中心状态矢量也在八重态中发现(看介子性质表). 通过完成实验，我们可以看到物理状态是这些多重态状态的混合. 这一 SU(3)混合在介子多重态中比在重子多重态中要更显著. 每个介子多重态与一个单态(有相等自旋和宇称)相联系. 因为这两个多重态是

混合的，我们把两个多重态的介子分类在一起，成为一个九重态. 介子可以按自旋和宇称来分类：

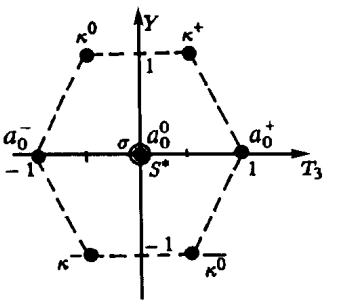
标量介子　$J^P=O^+$　矢量介子　$J^P=1^-$

膺标介子　$J^P=O^-$　轴矢介子　$J^P=1^+$

张量介子　$J^P=2^+$

膺张量介子　$J^P=2^-$　等等

例 8.8　标量介子



标量介子

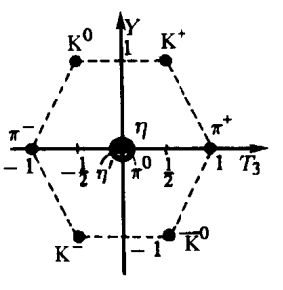
关于这些介子的质量和衰变模式的信息常常是不确定的；很大的宽度（几百 Mev）指出测量的困难（看下一页的表）. 由于 SU(3) 混合，到多重态的分类不能唯一地给出. 我们考虑 σ 粒子作为单态，而组合其他介子形成一个八重态. 可以直接看出八重态包含有反粒子，诸如 $K^0\to\bar{K}^0$ 等等.

标量介子的性质

名称	符号	电荷 [e]	T	T_3	Y	质量 [Mev]	宽度 $\Gamma=\hbar/\tau$ [Mev]	主要衰变模式
α_0 介子	α_0	$\pm1,0$	1	±1 0	0	976	50	$\nu\pi,\varrho\pi(?)$
K_π 共振	κ	$\pm1,0$	1/2	$\pm1/2$	±1	1250	～450	$K\pi$
S^* 共振	S^*	0	0	0	0	～993	40	$K\bar{K}$
σ 共振	σ	0	0	0	0	(750)	(～600)	$\pi\pi$

我们应该强调 σ 介子的存在是不肯定的. 曾经有努力（其中有盖尔曼和莱维（M. Levy）的所谓 σ 模型）[①]把 σ 介子和三个 π 介子联合成一个“四矢量”，它在对称群 $SU(2)_L\otimes SU(2)_R$（手征群）下不变. 这种样子的 π 介子核子相互作用引人注目地成功. 正如部分地借助粒子的名字建议的，“介子”被发现在像 $\pi+N$，$K+N$ 和 $\eta+N$（N 表示核子）的反应中. 我们标记它们为 π 介子，K 介子和 η 共振态. **（例 8.8 完）**

例 8.9　矢量介子



膺标介子

我们已经知道 ϱ 和 ω 介子. 对这些状态外加还有 K 共振态 $K^{*\pm}$，K^{*0} 和 Φ 介子. 下面表明这些共振态类似于相应的膺标介子八重态（$\pi\eta K$）又形成一个八重态.

η' 是单态因此 Φ 也是单态. 由于 SU(3) 混合 ω 和 Φ 必须被看成八重态 ω 和单态 Φ 的混合. 这被实验证实. 矢量介子特别是 ω 和 ϱ 介子在两个核子小距离（$\simeq0.5\times10^{-13}$cm）[②]上的核力理论中起着重要作用. 当它们足够接近在一起时，它们对核子间的强相互作用，

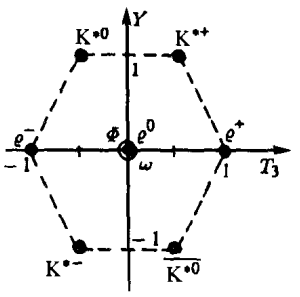
① 参看 M. Gell-man 和 M. Levy：Nuovo Cimento **16**，705 (1960).

② 对介子场论和它对核结构物理的应用参考 J. D. Walecka：Annals of Physics **83**，491 (1974)，和 P. G. Reinhard，M. Rufa，J. A. Maruhn，W. Greiner，J. Friedrichs：Z. Phys. A **323**，13 (1986).

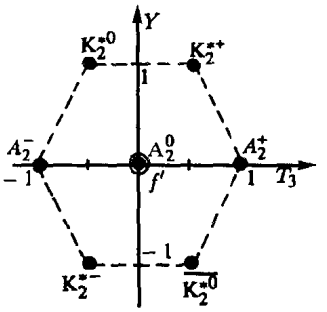
给出排斥的贡献.(**例 8.9 完**)

矢量介子的性质

名称	符号	电荷 [e]	T	T_3	Y	质量 [Mev]	宽度 $\Gamma=\hbar/\tau$ [Mev]	主要衰变模式
ϱ 介子	$\varrho+$	$+1$	1	1	0	773	154	$\pi^0\pi^+$ } 100%
	$\varrho-$	-1	1	-1	0			$\pi^0\pi^-$ } 100%
	ϱ^0	0	1	0	0			$\pi^0\pi^0$ } 100%
ω 介子	ω	0	0	0	0	782.7	10	$\pi^+\pi^-\pi^0$ 90%
								$\pi^0\gamma$ 9%
K 介子共振	$K^{*+}K^{*-}$	$+1$ -1	1/2	$\pm1/2$	$+1$	892	50	$K\pi$ 100%
	$K^{*0}\overline{K^{*0}}$	0 0			-1	898		
Φ 介子	Φ	0	0	0	0	1019	4.2	K^+K^- 46%
								$K_1^0K_2^0$ 35%
								$\pi^+\pi^-\pi^0$ 16.5%



矢量介子



张量介子

例 8.10 张量介子

在此情况,f 是单态介子($\eta^{*\prime}$ 共振态).所有别的介子形成一个八重态:A_2 是 π 介子共振态,K_2^* 是 K 介子共振态,而 f' 是 η^* 共振态(看表和图).

张量介子的重要性主要在于它们在相应的膺标粒子反应中作为中间态出现.(**例 8.10 完**)

张量介子的性质

名称	符号	J^p	电荷 [e]	T	T_3	Y	质量 [Mev]	宽度 [Mev]	主要衰变模式
A_2 介子	A_2	2^+	$\pm1,0$	1	$\pm1,0$	0	1320	110	$\varrho\pi$ 70%
									$\eta\pi$ 15%
									$\omega\pi\pi$ 10%
									$\bar{K}K$ 50%

续表

名称	符号	J^P	电荷 [e]	T	T_3	Y	质量 [Mev]	宽度 [Mev]	主要衰变模式
K 介子共振	K_2^*	2^+	$\pm1,0$	1/2	$\pm1/2$	±1	1426	100 ± 3	$K\pi$49.1% $K\rho$6.6% $K^*\pi$26.9% $K\omega$3.7% $K^*\pi\pi$11.2% $K\eta$2.5%
f′介子	f_2'	2^+	0	0	0	0	1525	76 ± 10	$K\bar{K}$100%
f 介子	f_2	2^+	0	0	0	0	1274	185 ± 20	$\pi^+\pi^-$ >81% $2\pi^+2\pi^-$ 3% $K\bar{K}$ 3%

例 8.11　其他共振态

也有别的(1^-)共振态属于矢量介子，正是在斯坦福，勃鲁克海文和汉堡的 DESY 发现的 J/Ψ 粒子(参看第 11 章). 最有趣的特性是这些粒子有惊人的长寿命($\Gamma\simeq0.067$ Mev，看下面的表)，而一般情况寿命随质量的增加而降低. Ψ 的长寿命是对守恒量子数的一个提示，它阻止它们的快衰变，这个守恒量叫"粲". 这样我们的夸克模型必须补充第四个夸克"粲"夸克 c(u,d,s,c). 在这个模型中 Ψ 的长寿命出现为粲守恒的结果. 这意味着我们必须用 SU(4)对称群来取代 SU(3)，这一点我们将稍后讨论(参看第 11 章). (**例 8.11 完**)

几个其他共振态的性质

名称	符号	J^P	电荷 [e]	T	T_3	Y	质量 [Mev]	宽度 [Mev]	主要衰变模式
J/Ψ	J/Ψ	1^-	0	0	0	0	3098	0.067	强子 86% e^+e^- 7% $\mu^+\mu^-$ 7%
Ψ(3700)	Ψ(3700)	1^-	0	0	0	0	3684	0.228	强子 98% $e^+e^-,\mu^+\mu^-$ 1%
Ψ(4160)	Ψ(4160)	1^-	0	0	0	0	4160	78 ± 20	强子 98% 其余→J/Ψ+ψ,e^+e^-
Ψ(4400)	Ψ(4400)	1^-	0	0	0	0	4415	43 ± 20	当 Ψ(4100)

8.6　约化 SU(3)直积的规则

看来现在应该明确表明如何来约化 SU(3)多重态的几个直积. 这个规则将借助于几个例子来指出，然后用图来表示它们. 在上一章提供的观察和结果的基础上，这个任务是相当简单的.

让我们从直积[3]⊗[3]开始. 鉴于(8.20)和(8.25)，借助于在 Y-T_3 平面上单个矢量的矢量

相加(看图 8.8),我们得到相应的直积状态

$$|T_3(1)Y(1)\rangle|T_3(2)Y(2)\rangle$$

的权矢量.

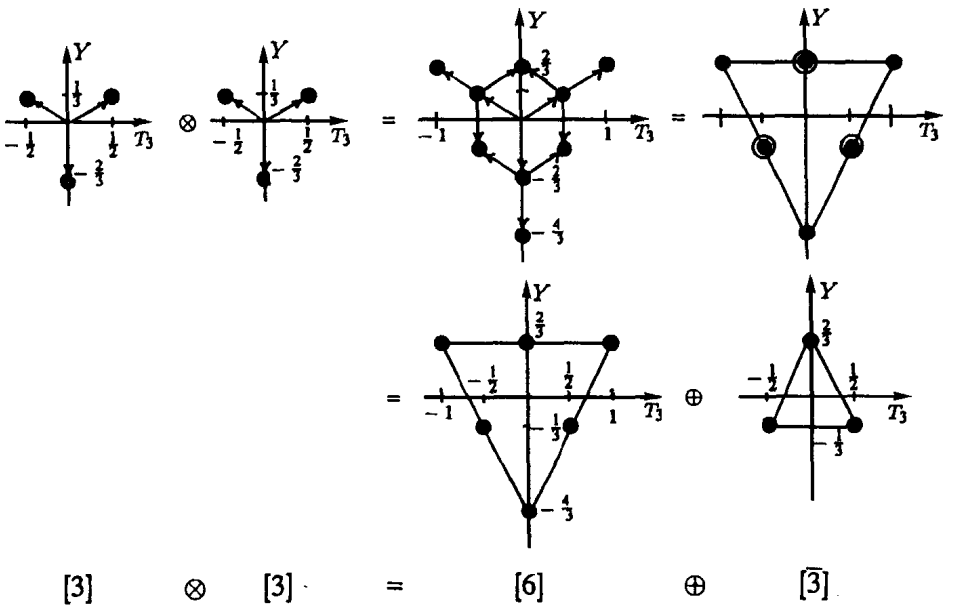


图 8.8 直积[3]⊗[3]=[6]⊕[3̄]的约化

对第一个因子,多重态[3]的矢量的每个端点加上第二个多重态的所有矢量.用这种构造得到的矢量和的端点在 Y-T_3 格点上代表该直积的所有可能的状态.我们得到一个点的图像,部分地方被两个状态占据,它们很容易被分解为一个六重态[6]=$D(2,0)$和一个反三重态[3̄]=$D(0,1)$.自然,在最后一步我们考虑到了前面章节中讨论过的 SU(3)多重态的性质和结构.作为下一个直积,让我们研究[3]⊗[3̄]=[8]⊕[1](表示在图 8.9 中).

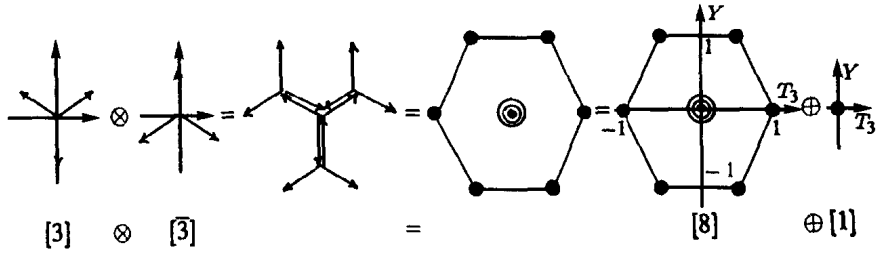


图 8.9 直积[3]⊗[3̄]=[8]⊕[1]的约化

很清楚,一个夸克三重态和一个反夸克三重态的直积可以被分解为一个八重态[8]和一个单

态[1]. 更复杂的直积，譬如说，[3]⊗[6]可以用同样的方法分解. 我们从较大的多重态出发，它的“占据点”可以标在格点上. 然后格点的矢量被附着在每个这些点上. 用这种过程得到的点的图可以与十重态[10]和八重态[8]联系起来(看图 8.10). 得到[3]⊗[6]=[10]⊕[8].

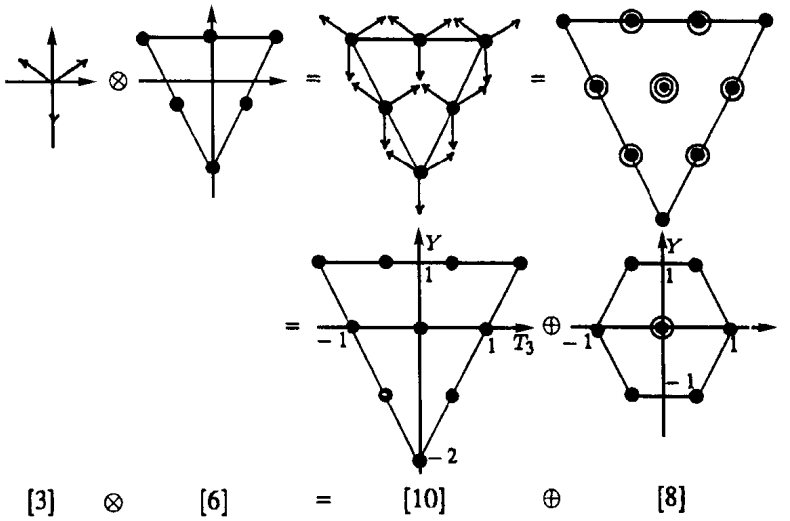


图 8.10　直积[3]⊗[6]=[10]⊕[8]的约化

从[3]⊗[3]的最大权看，很清楚[3]⊗[3]必须包含[6]作为最大表示，剩下的状态形成[$\bar{3}$]. 我们可以如下理解这一点. 和(8.27)一致我们有

$$Y_{\max}=(p-q)/3=(3n+\tau)/3\begin{cases}\text{其中 } n=0,\pm1,\pm2\cdots\\ \text{和}\quad \tau=0,1,2 \text{ 余 } 3\end{cases} \tag{8.31}$$

因为 p 和 q 是整数，$Y_{\max}$通常是$\frac{1}{3}$的倍数. 在(8.31)中 $Y_{\max}$表达为一个整数和非整数部分($\frac{1}{3}$的倍数)的和. 相应地，仅当三重度 τ 为 0 时，$Y_{\max}$为一整数. 方程(8.31)可以解释成把所有 SU(3)表示分成三类，即

类 1：$\tau=0$，Y 整数(例如 $D(1,1)=[8]$，$D[3,0]=[10]$)

类 2：$\tau=1$，Y 是 1/3 的倍数，样板是[3]

类 3：$\tau=2$，Y 是 1/3 的倍数，样板是[$\bar{3}$]

这样定义三重度，我们可以得出结论：三重度决定了 SU(3)表示的特征，也即它是一个三重态或反三重态. 所有在约化一个不可约表示直积中出现的表示有相同的三重度. 对方程(8.25)的直积的状态

$$(T_3,Y)=\Big(\sum_{i=1}^{p}T_3(i)+\sum_{i=1}^{q}\bar{T}_3(i),\ \sum_{i=1}^{p}Y(i)+\sum_{i=1}^{q}\bar{Y}(i)\Big) \tag{8.32}$$

是对的. 该乘积(因而对该多重态)的各种夸克状态的超荷相差$[Y(i)-Y'(i)]=\frac{1}{3}-\frac{1}{3},\frac{1}{3}-$

$\left(-\frac{2}{3}\right), -\frac{2}{3}-\frac{1}{3}$或者是这个的一个倍数(因为(8.21)和(8.22)).类似的关系对这些状态的$\overline{Y}(i)-\overline{Y}'(i)$值成立,因为它们是整数.鉴于(8.31),$\tau$必须对所有的乘积态相等.因为$\tau$是可加量(由于(8.31)和(8.32)),特别是可以推出所有作为两个$\tau=0$表示乘积形成的表示必须有$\tau=0$.

回到直积[3]⊗[3];因为[3]有三重度$\tau=1$,那么$D(2,0)=[6]$的三重度$\tau=2$.也即它们是表示$[\bar{3}]$的伙伴.借助这种考虑我们很容易导出结果

$$[3]\otimes[3]\otimes[3]=([6]\oplus[\bar{3}])\otimes[3]=[1]\oplus[8]\oplus[8]\oplus[10] \tag{8.33a}$$

其中三重度的守恒很容易验证.引人注目的是八重态在这儿出现了两次.类似地我们得到更复杂的两个八重态直积的结果:

$$[8]\otimes[8]=[1]\oplus[8]\oplus[8]\oplus[10]\oplus[\overline{10}]\oplus[27] \tag{8.33b}$$

在左方和右方所有多重态有三重度$\tau=0$.在右方在[10]以外必须出现$[\overline{10}]$,因为[8]⊗[8]代表一个绕着0点对称的点集.右方所有其他多重态是自身对称的.

练习 8.12 约化 SU(2)多重态

问题 把约化SU(3)多重态的图解方法转用到SU(2)多重态的简单场合,并且图解地分裂SU(2)双重态[2]的直积

$$[2]\otimes[2]\otimes[2] \tag{1}$$

解 类似于SU(3)多重态,SU(2)多重态能够用图表示.群SU(2)是阶为1的群,因此只有一个对角算符.在同位旋群的场合这是T_3.每个不可约表示,每个多重态能够用一条直线表示.

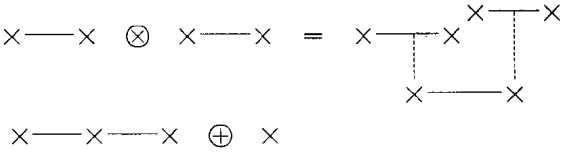
$[2]=$ ×——×
$-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

$[3]=$ ×——×——×
-1 0 1

$[4]=$ ×——×——×——×
$-\frac{3}{2}$ $-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$

在直积表示中该对角算符的本征值是可加的.这种T_3值的加法可以图解表示:把这个多重态的中心($T_3=0$)放在另一个多重态的每个点上.

我们对[2]⊗[2]直积的情况演示这一点



$=$ ×——×——× ⊕ ×

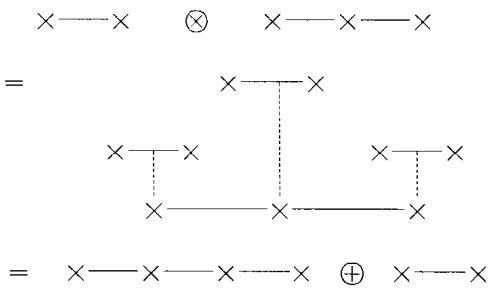
该直积能被分裂成形式

$$[2]\otimes[2]=[3]\oplus[1] \tag{2}$$

为了进一步约化[2]⊗[2]⊗[2],我们用这个结果

$$[2]\otimes[2]\otimes[2]=[2]\otimes([3]\oplus[1]) \tag{3}$$

我们应用图解方法到直积[2]⊗[3]



于是给出

$$[2]\otimes[3]=[4]\oplus[2] \tag{4}$$

和因而我们最终得到

$$[2]\otimes[2]\otimes[2]=[4]\oplus[2]\oplus[2] \tag{5}$$

这一图解方法看来稍稍有些可怕，但对复杂的群，就像 SU(3)的情况是非常有用的.（**练习 8.12 完**）

8.7　U 自旋不变性

直到现在，当我们详细研究 SU(3)多重态时最广泛应用的是 T 自旋(同位旋)群——SU(3)的一个 SU(2)子群. 从而，原来重子八重态能够借助超荷和同位旋多重态联系起来：

$$\begin{aligned}
&T=\frac{1}{2}:\mathrm{n},\mathrm{p} && (\Delta M=2\mathrm{MeV}) && Y=1\\
&T=1:\ \Sigma^-,\Sigma^0,\Sigma^+ && (\Delta M=8\mathrm{MeV}) && Y=0\\
&T=\frac{1}{2}:\Xi^-,\Xi^0 && (\Delta M=7\mathrm{MeV}) && Y=-1
\end{aligned} \tag{8.34}$$

一个给定多重态的状态能够借助算符 $\hat{T}_{\pm}$相互转换. 在一个多重态内质量差 ΔM 是 10MeV 的量级，即粒子质量的百分之一，从而我们说同位旋对称性很弱地破缺.

除了 T 自旋，我们认识 U 自旋和 V 自旋作为 SU(3)的 SU(2)子群. 首先我们考虑 U 自旋：一个单个的 U 自旋多重态的状态借助于算符 $\hat{U}_{\pm}$相互转换. 这样从图 8.11，对这多重态我们看出：

1，Σ^-,Ξ^-，　$\Delta M=124\mathrm{Mev}$，电荷 $Q=-1$

2，$\mathrm{n},\Sigma^0,\Xi^0$，　$\Delta M=374\mathrm{Mev}$，电荷 $Q=0$

3，p,Σ^+，　$\Delta M=251\mathrm{Mev}$，电荷 $Q=+1$ (8.35)

显然 U 自旋多重态的状态都有相同的电荷，也即我们能在八重态的(Y,T_3)图上画类似的(Q,U_3)图(看图 8.12).

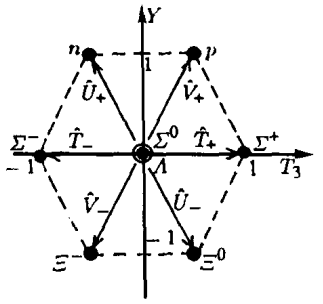


图 8.11 重子八重态作为超荷 Y 和同位旋分量 T_3 的函数

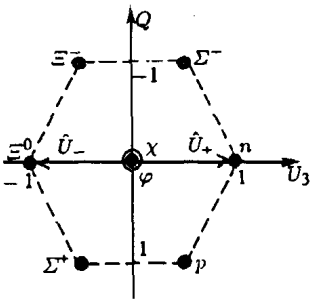


图 8.12 重子八重态作为电荷 Q 和 U 自旋分量 U_3 的函数

在边上的状态都有多重性 1,它意味着它们是单个占据的,而图的中心有多重性 2,指出它被两个粒子(Σ^0 和 Λ)占据. Σ^0 和 Λ 是同位旋本征态(至少到一个很好的近似). 一个状态带有多重性 1 必须同时是 T 自旋,U 自旋和 V 自旋的一个本征态,但是如果一个状态的多重性不是 1,那么带有这个多重性的一个同位旋本征态一般不是 U 或 V 自旋本征态. 这对 Σ^0 和 Λ 确实如此.

我们能很容易地构造 U 的本征态,为此我们从基本同位旋旋量 α 和 β 开始. $\Sigma^{\pm}$,Σ^0 和 Λ 的波函数被给出为

$$\Sigma^+ = \alpha\alpha, \quad \Sigma^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha\beta+\beta\alpha), \quad \Sigma^- = \beta\beta \qquad \text{(三重态)}$$

$$\Lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha\beta-\beta\alpha) \qquad \text{(单态)} \tag{8.36}$$

因为 T 自旋,U 自旋和 V 自旋是 SU(2)代数,它们的生成元必须是泡利矩阵. 我们在 T 自旋场合标记它们为 $\hat{\tau}_i$,在 U 自旋场合为 $\hat{\mu}_i$,它意味着

$$\hat{\mu}_3 = \hat{\tau}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mu}_- = \hat{\tau}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mu}_+ = \hat{\tau}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.37a}$$

而对多于一个粒子的状态

$$\hat{T}_3 = \frac{1}{2}\sum_i \hat{\tau}_3(i), \quad \hat{T}_- = \sum_i \hat{\tau}_-(i), \quad \hat{T}_+ = \sum_i \hat{\tau}_+(i)$$

$$\hat{U}_3 = \frac{1}{2}\sum_i \hat{\mu}_3(i), \quad \hat{U}_- = \sum_i \hat{\mu}_-(i), \quad \hat{U}_+ = \sum_i \hat{\mu}_+(i) \tag{8.37b}$$

我们现在来寻找 U 自旋的三重态状态,我们记它们为 n,χ,Ξ^0(单态为 ϕ),其中 χ 和 ϕ 为同位旋本征态 Λ 和 Σ^0 的正交线性组合:

$$\chi = a\Sigma^0 + b\Lambda \quad , \quad \phi = b\Sigma^0 = a\Lambda \tag{8.38}$$

让我们回忆一下同位旋算符在同位旋本征态上的作用,例如

$$\hat{T}_-\Sigma^+ = \sum_i \tau_-(i)[\alpha\alpha] = (\hat{\tau}_-\alpha)\alpha + \alpha(\hat{\tau}_-\alpha) = \beta\alpha + \alpha\beta \tag{8.39}$$

也即

$$\hat{T}_-\Sigma^+=\sqrt{2}\,\Sigma^0$$

当 $\hat{U}_-$ 作用到 U 自旋三重态本征态 n 时必须像 $\hat{T}_-$ 作用在同位旋本征态 Σ^+ 上一样地起作用，我们肯定

$$\hat{U}_-\mathrm{n}=\sqrt{2}\,\chi \tag{8.40}$$

进而因为 $\hat{T}_+\mathrm{n}=\mathrm{p}$，那么

$$[\hat{U}_-,\hat{T}_+]_-\mathrm{n}=\hat{U}_-\hat{T}_+\mathrm{n}-\hat{T}_+\hat{U}_-\mathrm{n}=\hat{U}_-\mathrm{p}-\hat{T}_+\sqrt{2}\,\chi$$

或

$$[\hat{U}_-,\hat{T}_+]_-\mathrm{n}=\hat{U}_-\mathrm{p}-\sqrt{2}\,\hat{T}_+(a\Sigma^0+b\Lambda) \tag{8.41}$$

外加有 $\hat{U}_-\mathrm{p}=\Sigma^+$，$\hat{T}_+\Sigma^0=\sqrt{2}\,\Sigma^+$ 和 $\hat{T}_+\Lambda=0$，结果

$$[\hat{U}_-,\hat{T}_+]_-n=\Sigma^+-2a\Sigma^+=(1-2a)\Sigma^+ \tag{8.42}$$

我们已经知道(第 7 章方程(7.28b))$[\hat{U}_-,\hat{T}_+]=0$，即

$$1-2a=0 \text{ 或 } a=\frac{1}{2} \tag{8.43}$$

χ 的归一化意味着

$$\chi^2=|a\Sigma^0+b\Lambda|^2=|a|^2+|b|^2=1$$

(因为 $|\Sigma^0|^2=|\Lambda|^2=1$ 和 $\langle\Sigma^0|\Lambda\rangle=0$)由此往下，要求 b 是实的

$$b^2=1-a^2=\frac{3}{4}\ ,b=\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

通常我们选 b 为正的，这就是

$$\chi=\frac{1}{2}\Sigma^0+\frac{1}{2}\sqrt{3}\ \Lambda \text{ 和 } \phi=\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\Sigma^0-\frac{1}{2}\Lambda \tag{8.44}$$

因此 ϕ 和 χ 是 $\hat{U}_3$ 的本征态(本征值为 0)相应于 $\hat{T}_3$ 的本征态(Σ^0，Λ).

图的中心必须是双重占据的，因为由 $[\hat{U}_-,\hat{T}_+]=0$ 得到 $a^2=\frac{1}{4}$. 如果 $b=0$，那么 χ 将不能归一化到 1，$\frac{1}{4}\neq1$. 因此，在中心必须存在两个状态，这是我们从对 SU(3)多重态结构的一般性讨论中已经知道的(看第 7 章“内壳格点上的状态数”).

8.8　U 自旋不变性的检验

我们知道电磁相互作用破坏同位旋对称性，因为它分裂 T 多重态，例如对同位旋二重态质量分裂 $\Delta M\simeq2$Mev. 如前面论证的这可能是由电磁相互作用引起的. 这种类型对称性破缺应该对 U 自旋不出现，因为我们已经看到一个 U 多重态的成员都有相同的电荷($[\hat{Q},\hat{U}_3]=0$). 但这仅当 U 自旋是一个强相互作用对称性才是如此. 然而这只对非常有限的程度($\Delta M_{\max}\approx100$Mev)

也即粒子质量的10%才是真的.而同位旋对称性被破坏仅仅只有1%.因此最多能期望U自旋对称性影响粒子的电磁性质.如果我们假设U自旋守恒,那么能期望,例如p和Σ^+(因为它们属于同一U自旋多重态)有相同的磁矩

$$\mu(\Sigma^+)=\mu(\mathrm{p}) \tag{8.45}$$

类似地我们期望$\mu(\Sigma^-)=\mu(\Xi^-)$和对三重态n,χ,Ξ^0成立,χ是Σ^0和Λ的线性组合,因而不是一个物理粒子.实验上我们发现($\mu_0=e\hbar/2m_pc$)

$$\begin{aligned}
&\mu_p=2.97\mu_0, && \mu_{\Sigma^+}=(2.33\pm0.13)\mu_0\\
&\mu_{\Xi^-}=(-0.69\pm0.04)\mu_0, && \mu_{\Sigma^-}=(-1.41\pm0.25)\mu_0\\
&\mu_n=-1.91\mu_0, && \mu_{\Xi^0}=(-1.253\pm0.014)\mu_0
\end{aligned} \tag{8.46}$$

因此U自旋不变性的予言只是粗略地被肯定;这件事将在夸克模型的框架内被更好地理解.

我们能对电磁质量分裂作进一步的评论:我们因而假设重子的质量一方面来自强相互作用,它守恒同位旋,而另一方面来自电磁相互作用,它守恒U自旋,也即对质量的电磁贡献必须在U自旋多重态内相等.这意味着这些粒子的半径应该是同样的.我们发现

$$\delta M_p=\delta M_{\Sigma^+},\delta M_n=\delta M_{\Xi^0},\delta M_{\Sigma^-}=\delta M_{\Xi^-}, \tag{8.47}$$

或

$$\delta M_n-\delta M_p+\delta M_{\Xi^-}-\delta M_{\Xi^0}=\delta M_{\Sigma^-}-\delta M_{\Sigma^+}. \tag{8.48}$$

如果除了电磁相互作用,不存在其他相互作用破坏一个同位旋多重态的简并,那么我们必须有

$$\delta M_n-\delta M_p=M_n-M_p \quad , \quad \delta M_{\Xi^-}-\delta M_{\Xi^0}=M_{\Xi^-}-M_{\Xi^0} \quad , \quad \delta M_{\Sigma^-}-\delta M_{\Sigma^+}=M_{\Sigma^-}-M_{\Sigma^+}$$

把这代入(8.48)给出

$$M_n-M_p+M_{\Xi^-}-M_{\Xi^0}=M_{\Sigma^-}-M_{\Sigma^+} \tag{8.49}$$

这个简单关系叫做"科尔曼-格拉肖(Coleman-Glashow)关系"[①],并被实验很好地验证

$$\begin{aligned}
&M_n-M_p=1.3\mathrm{MeV}\ ,M_{\Xi^-}-M_{\Xi^0}=(6.5\pm0.7)\mathrm{MeV}\ ,\\
&M_{\Sigma^-}-M_{\Sigma^+}=8.0\mathrm{MeV}
\end{aligned} \tag{8.50}$$

这表明在SU(3)多重态的内容中U自旋不变性在某种程度上是有用的假说.

最后我们研究V自旋多重态

$$\begin{aligned}
&\Sigma^-,\mathrm{n}: && \Delta M\simeq257\mathrm{MeV}\\
&\Xi^-,\varrho,\mathrm{p}: && \Delta M\simeq383\mathrm{MeV}\ \text{作为三重态;和}\ \sigma\ \text{作为单态}\\
&\Xi^0,\Sigma^+: && \Delta M\simeq125\mathrm{MeV}
\end{aligned}$$

这儿ϱ和σ是Σ^0和Λ的线性组合.对U自旋我们已经看到一个U自旋重态的所有成员带有同样电荷.然而一个V自旋多重态的成员们不享有共同的性质.因此V对称性是很强地破缺的($\Delta M/M\geqslant20\%$),它对分类状态不是很有用的.

---

① 参见S. Coleman, S. L. Glashow: Phys. Rev. Lett. **6**, 423n (1961).

8.9　盖尔曼-大久保质量公式

如果 SU(3)对称性是一个强相互作用的严格对称性，那么一个 SU(3)多重态的所有状态能量上应该是简并的，这意味它们应该有相同的质量. 然而实验表明(例如对重子八重态，质量分裂是 $\Delta M/M \cong 100\text{MeV}/1000\text{MeV}=10\%$)，SU(3)对称性比同位旋对称性由电磁相互作用的破缺更明显强地破缺：对同位旋多重态，我们有 $\Delta M/M \simeq 10\text{MeV}/1000\text{MeV}=1\%$.

因此我们必须从以下的思想出发：强相互作用哈密顿量分裂为一个 $\hat{H}_{ss}$(ss 表示超强)部分，它是 SU(3)不变的；和另一 $\hat{H}_{ms}$(ms 表示中强)部分，它破坏 SU(3)不变性. 因为在一个多重态内质量分裂算来差不多只有平均质量的 10%. 我们可以假设源于 $\hat{H}_{ms}$ 对质量的贡献是小的，这就是

$$M=\langle \hat{H}_{ss}\rangle+\langle \hat{H}_{ms}\rangle,\quad \langle \hat{H}_{ss}\rangle \gg \langle \hat{H}_{ms}\rangle \tag{8.51}$$

按照 $\hat{H}_{ss}$，这多重态是简并的，而 $\hat{H}_{ms}$ 解除这个简并. 我们应该看出 $\hat{H}_{ms}$ 必须由生成元而不是卡西米尔算符来构造，因为前者破坏 SU(3)对称性而后者不破坏. 更准确些，生成元如果应用到多重态的状态时一般给出不同的值，依赖于该状态，而卡西米尔算符不这样.

从现在起我们将忽略电磁质量分裂，它意味着一个同位旋多重态的所有成员有相同的质量. 这当然意味着强相互作用哈密顿量 $\hat{H}_{强}=\hat{H}_{ss}+\hat{H}_{ms}$ 中的对称破坏部分必须跟 $\hat{T}_3$ 对易，因此 $[\hat{H}_{ms},\hat{T}_3]=0$，从而 $\hat{H}_{ms}$ 只能包含那些跟 $\hat{T}_3$ 对易的 SU(3)生成元. 这只有 $\hat{F}_8=\sqrt{3}\,\frac{1}{2}\hat{Y}$ 的情况，从而最简单的假设为

$$\hat{H}_{ms}=b\hat{Y} \tag{8.52}$$

其中 b 是一个常数. 在未微扰的波函数 $|TT_3Y\rangle$ 中计算 $\hat{H}_{ms}$ 的期望值，我们在一级微扰论中得到 $(\langle \hat{H}_{ms}\rangle \ll \langle \hat{H}_{ss}\rangle)$

$$\langle TT_3Y|\hat{H}_{ms}|TT_3Y\rangle=bY,\ \text{即}\ M=a+bY \tag{8.53}$$

其中 a 是该多重态的平均质量(对 $Y=0$)，而 a 和 b 对一个多重态的所有成员是常数. 注意重子共振十重态(第 6 章，例 6.5)，它得出

$$M_{\Omega^-}-M_{\Xi^*}=M_{\Xi^*}-M_{\Sigma^*}=M_{\Sigma^*}-M_{\Delta} \tag{8.54}$$

很难把该预言跟实验比较(因为电磁质量分裂). 然而我们可以使这一效应最小化，让我们只考虑带有同样电荷的粒子(U 自旋多重态)，对它们我们发现

$$\begin{aligned} M_{\Omega^-}-M_{\Xi^{*-}}&=(137\pm1)\text{MeV}\\ M_{\Xi^{*-}}-M_{\Sigma^{*-}}&=(148\pm1)\text{MeV}\\ M_{\Sigma^{*-}}-M_{\Delta^-}&=(148\pm5)\text{MeV} \end{aligned} \tag{8.55}$$

理论与实验的符合显然非常好，但我们的质量公式对重子八重态不成功，因为 $Y_{\Sigma^0}=Y_{\Lambda}$，本应有 $M_{\Sigma^0}=M_{\Lambda}$. 实际上质量差 $M_{\Sigma^0}-M_{\Lambda}=77\text{MeV}$. 这一经验迫使我们对 $\hat{H}_{ms}$ 修改(8.52)：同 Y 一样，$\hat{T}^2$ 和 $\hat{Y}^2$ 两者都与 $\hat{T}_3$ 对易，因此我们尝试用

$$\hat{H}_{ms}=b\hat{Y}+c\hat{T}^2+d\hat{Y}^2 \tag{8.56}$$

作为下一步最简单的假设.它的期望值导致公式

$$M=a+bY+cT(T+1)+dY^2 \tag{8.57}$$

这里系数 c 和 d 在一个 SU(3)多重态内又是常数.但是(8.57)导致一个问题,就是这个关系对十重态不给出常数质量分裂,也即失去了与实验很好的符合((8.54),(8.55)).

我们可以修正这个缺点,借助要求十重态中 $cT(T+1)+dY^2$ 具有与 $a+bY$ 同样的形式,换句话说,它们有如下形式

$$cT(T+1)+dY^2=x+yY \tag{8.57a}$$

其中 x 和 y 是常数.代入 Δ^-,Ξ^{*-}和 Ω^-的值结果在旁边的表中.我们从(8.57a)得到

	T	Y
Δ^-	$\frac{3}{2}$	1
Ξ^{*-}	$\frac{1}{2}$	-1
Ω^-	0	-2

对 Δ^-:$15/4c+d=x+y$

对 Ξ^{*-}:$3/4c+d=x-y$

对 Ω^-:$4d=x-2y$

只要我们选 $d=-\frac{1}{4}c$,最后一个方程就与前两个一致.实际上把第一个方程乘 $-\frac{1}{2}$,第二个方程乘 $\frac{3}{2}$,加起就给出

$$-\frac{6}{8}c+d=x-2y$$

这正如说过的,对 $d=-\frac{1}{4}c$ 就全同于最后一个方程.

$$M=a+by+c[T(T+1)-\frac{1}{4}Y^2] \tag{8.58}$$

这就是盖尔曼-大久保(Okubo)质量公式①.该式先由大久保推出,随后被盖尔曼用来预言 Ω^-的质量.我们现在希望在重子八重态的情况来检验它,而因此得到

$$\frac{1}{2}(M_N+M_\Xi)=\frac{1}{4}(3M_\Lambda+M_\Sigma)$$

为了使电磁效应最小化,我们考虑中性粒子

$$\frac{1}{2}M_n+\frac{1}{2}M_{\Xi^0}=(1127.1\pm0.7)\text{MeV}\ ,\ \frac{3}{4}M_\Lambda+\frac{1}{4}M_{\Sigma^0}=(1134.8\pm0.2)\text{MeV}$$

在两个值之间的能量差达到 7.7MeV(远小于近于 100MeV 的平均质量分裂).这指明盖尔曼-大久保质量公式被相当好地满足;它也对其他 SU(3)多重态成立(对重子,同样对介子),虽然在介子场合这个质量公式必须被修改,因为它不是对质量成立而是对质量平方成立.我们能给这件事一个说法——如我们后面将看到——重子是费米子,满足狄拉克方程(它包含能量(质量)的线性

① 参看 S. Okubo: Prog. Theor. Phys. **27**, 949 (1962).

项)而介子是玻色子,满足克莱因-高登方程(它包含能量(质量)平方项).

8.10　SU(3)的克莱布许-高登系数

在同位旋群的场合我们已经发现两个反应发生在一个同位旋多重态内的相对概率是刚好由它们的克莱布许-高登系数(CGC)给出(看(5.67)和例 5.9,5.10).因此为了检验不同 SU(3)多重态的反应,我们需要有关 SU(3)群的 CGC 的知识.我们已经知道如何约化不可约表示的克罗内克直积,例如

$$[3]\otimes[3]=[6]+[\bar{3}]\text{或}$$

$$[3]\otimes[3]\otimes[3]=[1]\oplus[8]\oplus[8]\oplus[10]\text{ 等等}$$

为了构造群 SU(3)的 CGC,让我们考虑两个不可约表示 $\alpha=D(p_1,q_1)$和 $\beta=D(p_2,q_2)$,它们是由两组基函数 $\psi_\mu^{(\alpha)}$ 和 $\psi_\nu^{(\beta)}$ 产生的.这儿 α 和 β 标记相应的表示,而 μ,ν 代表其他的量子数(T,T_3 和 Y).我们采用缩写

$$\mu=\{y,t,t_3\}\ ,\nu=\{y',t',t_3'\}\ ,\ m=\{Y,T,T_3\}$$

让 N 表示 $D(p,q)$的维数.我们先以众所周知的方式从 $\psi_{ytt_3}^{(\alpha)}$和 $\psi_{y't't_3'}^{(\beta)}$构造同位旋的本征函数

$$\chi_{yty't'}^{(T,T_3)}=\sum_{t_3t_3'}(tt'T\,|\,t_3t_3'T_3)\psi_{ytt_3}^{(\alpha)}\psi_{y't't_3'}^{(\beta)} \tag{8.59}$$

其中$(tt'T\,|\,t_3t_3'T_3)$是通常的 SU(2)克莱布许-高登系数.现在我们类似地构造维数 N 的不可约表示 γ 的本征态

$$\psi_{YTT_3}^{(N\gamma)}=\sum_{yty't'}(\alpha\beta yty't'\,|\,NYT\gamma)\chi_{yty't'}^{(T,T_3)} \tag{8.60}$$

系数$(\alpha\beta yty't'\,|\,NYT\gamma)$仅依赖于 T 而不依赖于 T_3,因此它们被叫做标因子.当然我们必须有 $y+y'=Y$.仅当此时对(8.60)中的求和有贡献.这样借助于代入 $\chi_{yty't'}^{TT_3}$,我们得到 SU(3)的 CGC,如

$$(\alpha\beta ytt_3y't't_3'\,|\,Nm\gamma)=(\alpha\beta\mu\nu\,|\,Nm\gamma)=(\alpha\beta yty't'\,|\,NYT\gamma)(tt'T\,|\,t_3t_3'T_3)$$

$$\text{SU(3)-CGC}=\text{标因子}\times\text{SU(2)-CGC} \tag{8.61}$$

为定出 SU(3)的 CGC 我们只需要 SU(2)-CGC 和不依赖于 T_3 的因子[①]$(\alpha\beta yty't'\,|\,NYT\gamma)$.作为例子让我们对简单的夸克模型构造 SU(3)对称的波函数(有很好定义的 SU(3)对称性的波函数).我们知道[3]和[$\bar{3}$]是两个基本 SU(3)表示(最小,非平凡):[3]对夸克和[$\bar{3}$]对反夸克.结果这些表示相应于三个夸克态 q_1,q_2,q_3(或 u,d,s)和三个反夸克态 $\bar{q}_1,\bar{q}_2,\bar{q}_3$(或 $\bar{\text{u}},\bar{\text{d}},\bar{\text{s}}$),它们的量子数被列在表 8.1 中.物理上最有意义的这些表示的克罗内克直积是

$$[3]\otimes[\bar{3}]=[8]\oplus[1] \tag{8.62}$$

---

① 例如 J. J. deSwart: Rev. Mcd. Phys. **35**, 916 (1963)中,我们可在找到标因子的详细表格.

它是介子八重态加单态. 类似地约化直积

$$[3]\otimes[3]\otimes[3]=[1]\oplus[8]_1\oplus[8]_2\oplus[10] \tag{8.63}$$

给出一个单态，两个有不同对称性的八重态和一个十重态. 这一直积重新产生了重子和它们的共振态. 如同前面做的(看关于介子多重态的一节)，我们得出结论：介子由一个夸克和一个反夸克组成，而核子由三个夸克组成. 这也是期望对介子自旋 $I=0$ 或 $I=1$ 和重子自旋 $I=\frac{1}{2}$ 或 $I=\frac{3}{2}$ 的原因，记住夸克有自旋 $I=\frac{1}{2}$.

表 8.1 夸克和反夸克状态的量子数

	T	T_3	Q	Y
$q_1(u)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
$q_2(d)$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$q_3(s)$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$\bar{q}_1(\bar{u})$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$\bar{q}_2(\bar{d})$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$\bar{q}_3(\bar{s})$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

下面我们讨论介子八重态，特别是我们要构造 π 介子三重态：π^+ 只能是耦合的 $u\bar{d}$ 态，带有的同位旋函数给定为

$$\chi^{1,1}_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2}1\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right.\right)\psi^{(3)}_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\psi^{[\bar{3}]}_{-\frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \tag{8.64}$$

在此情况 CGC 由 $\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2}1\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}1\right.\right)=1$ 给出，进而标因子发现为 $\left(3\,\bar{3}\frac{1}{3}\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\frac{1}{2}\,\middle|\,8018\right)=1$. 我们注意到这个结果对所有 π 介子成立，因为标因子是不依赖于 T_3 的. 然后 π^+ 波函数被给出，$|\pi^+\rangle=u\bar{d}$，也即相应的 SU(3)-CGC 等于 1. 对 π^0 态我们类似地发现 $|\pi^0\rangle=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(u\bar{u}-d\bar{d})$，而对 π^- 状态 $|\pi^-\rangle=d\bar{u}$. 没有其他可能的方法通过耦合[3]的 $t=\frac{1}{2}$ 双态和$[\bar{3}]$的 $t=\frac{1}{2}$ 双态来构造 $T=1$ 三重态. 类似地，介子八重态的 $Y=1, T=\frac{1}{2}$ 双态只能通过[3]的 $T=\frac{1}{2}$ 双态($Y=\frac{1}{3}$)和$[\bar{3}]$的 $T=0$ 单态($Y=\frac{2}{3}$)的耦合来达到. 类似的推理对介子八重态的 $Y=-1, T=\frac{1}{2}$ 双态成立. 所以这里只出现普通的 SU(2)-CGC(例如 $\pm\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}$). 为完全起见我们注意表 8.2 中的所有膺标介子的夸克内容.

表 8.2 膺标介子的夸克内容

SU(3)多重态	夸克内容	Y	T	T_3	名称
[8]	$u\bar{d}$	0	1	1	π^+
[8]	$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u}-d\bar{d})$	0	1	−1	π^0
[8]	$u\bar{s}$	1	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	K^+

续表

SU(3)多重态	夸克内容	Y	T	T_3	名称
[8]	$d\bar{s}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	K^0
[8]	$s\bar{d}$	−1	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$\bar{K}^0$
[8]	$s\bar{u}$	−1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	K^-
[8]	$\frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u}+d\bar{d}-2s\bar{s})$	0	0	0	η,η'
[1]	$\frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u}+d\bar{d}+s\bar{s})$	0	0	0	η,η'

此外我们构造了 $T=\frac{1}{2}$ 和 $Y=1$ 的同位旋多重态 $d\bar{s}$，$u\bar{s}$；$T=1$ 和 $Y=0$ 的同位旋多重态 $d\bar{u}$，$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u}-d\bar{d})$，$u\bar{d}$；$T=\frac{1}{2}$，$Y=-1$ 的同位旋多重态 $s\bar{u}$，$s\bar{d}$. 正如已经提到的，这里所有 CGC 是 SU(2)-CGC.

这样我们从这九个态 $q_i\bar{q}_j$ 中建立了七个独立状态 $\psi_\alpha,\psi_\beta\cdots$. 这些状态是正交的，即

$$\langle\psi_\alpha|\psi_\beta\rangle=\delta_{\alpha\beta}$$

其中 $\psi_\alpha=\sum_{ij}\alpha_{ij}q_i\bar{q}$，进而我们可以构造状态

$$\psi_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u}+d\bar{d}+s\bar{s})$$

它也可以写成

$$\psi_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\sum_i q_i\bar{q}_i$$

这个波函数相对于 SU(3)变换的不变性很容易借助练习 8.1 和 8.2 的结果来认出. 也就是我们有

$$\sum_i\bar{q}_i'q_i'=\sum_{ijk}\bar{q}_jU_{ji}^{\dagger}q_kU_{ki}=\sum_{ijk}\bar{q}_jq_kU_{ki}(\hat{U}^{-1})_{ij}$$
$$=\sum_{jk}\bar{q}_jq_k\delta_{jk}=\sum_i\bar{q}_iq_i \tag{8.65}$$

结果 ψ_1 在 SU(3)变换下是完全不变的，因为它将变换到它自己. 从而 ψ_1 是 SU(3)单态(标量态). 第八个态 $\psi_8=\frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u}+d\bar{d}-2s\bar{s})$ 是由正交性要求给出的. 在比较简单的情况，SU(3)克莱布许-高登系数能借助于对称性的论证或归一化条件定出，而在一般情况有关于这个主题的详细的列表①. 为了得到外加的和实验可验证的洞察力，我们继续夸克模型的讨论.

① 例如看 P. McNamee, F. Chilton: Rev. Mod. Phys. **36**, 1005(1964).

8.11 有内部自由度的夸克模型

到现在为止,我们讨论了平庸的夸克模型,忽略了强子的内部自由度(像夸克自旋,角动量等等).现在我们想扩展我们的讨论到这些课题.考虑夸克自旋,我们有六个独立的夸克态 $q=\{u_1,u_2,d_1,d_2,s_1,s_2\}$,其中例如 u_1 意味着自旋向上的 u 夸克,u_2 是自旋向下的 u 夸克等等.在 SU(3)情况,夸克三重态是"最简单的"群表示.要求我们的夸克六重态 q 是一个对称群的最小非平凡表示.我们将直接导向 SU(6)群的应用,它的[6]和$[\bar{6}]$是基表示.我们可以再次形成克罗内克乘积并约化它们(图解),所以引入符号规定来简化约化过程是合理的.这用按量子数与群 $SU(3)\times SU(2)\subset SU(6)$的关系来分类 SU(6)群表示来实现.我们标记

$$[6]SU(6)\to^{\{3\},\frac{1}{2}}SU(3)\times SU(2)$$

$$[\bar{6}]SU(6)\to^{\{\bar{3}\},\frac{1}{2}}SU(3)\times SU(2) \tag{8.66}$$

这里第一个数表示 SU(3)内容,而第二个是总自旋.再一次,介子应该由一个夸克和一个反夸克对组成.因此它们必须被嵌入$[6]\otimes[\bar{6}]$的直积中.因为该直积包含自旋,我们将得到自旋 0 的膺标介子和自旋 1 的矢量介子两者.约化该直积给出

$$[6]\otimes[\bar{6}]=[1]\oplus[35] \tag{8.67a}$$

或明显地标明自旋

$$\left[\{3\},\frac{1}{2}\right]\otimes\left[\{\bar{3}\},\frac{1}{2}\right]=[\{1\},0]\oplus[\{1\},1]\oplus[\{8\},1]\oplus[\{8\},0] \tag{8.67b}$$

这里我们利用了在 SU(3)场合$[3]\otimes[\bar{3}]=[1]\oplus[8]$成立.进一步我们耦合个别自旋 $S_1=\frac{1}{2}$和 $S_2=\frac{1}{2}$到总自旋 $S=0$ 或 $S=1$,并因为 $q\bar{q}$ 是介子的夸克内涵,我们得到了对介子的更好的分类:自旋为 0 的一个单态和一个八重态以及自旋为 1 的一个单态和一个八重态.确实这些正是膺标介子和矢量介子.

总结一下,我们先决定 SU(6)多重态(在$[6]\otimes[\bar{6}]$场合,这是一个单态和一个三十五重态),然后把它们分解成 SU(3)多重态.让我们用重子为例再做一次

$$[6]\otimes[6]\otimes[6]=[20]\oplus[56]\oplus[70]\oplus[70] \tag{8.68a}$$

代替分裂重子为基本的 SU(6)多重态,我们也能借助 SU(3)×SU(2)子群来分类它们.为此目的我们约化直积

$$\left[\{3\},\frac{1}{2}\right]\otimes\left[\{3\},\frac{1}{2}\right]\otimes\left[\{3\},\frac{1}{2}\right]$$

其中$\left[\{3\},\frac{1}{2}\right]$为带有自旋的基本夸克多重态.

$$\underbrace{([3]\otimes[3]\otimes[3])}_{\text{味道SU(3)}}\otimes\underbrace{([2]\otimes[2]\otimes[2])}_{\text{自旋SU(2)}}$$

约化该直积给出

$$
\begin{aligned}
&([10]\oplus[8]\oplus[8]\oplus[1])\otimes([4]\oplus[2]\oplus[2]\\
=&\left[\{10\},\frac{3}{2}\right]\oplus\left[\{8\},\frac{3}{2}\right]\oplus\left[\{8\},\frac{3}{2}\right]\oplus\left[\{1\},\frac{3}{2}\right]\\
&\oplus\left[\{10\},\frac{1}{2}\right]\oplus\left[\{8\},\frac{1}{2}\right]\oplus\left[\{8\},\frac{1}{2}\right]\oplus\left[\{1\},\frac{1}{2}\right]\\
&\oplus\left[\{10\},\frac{1}{2}\right]\oplus\left[\{8\},\frac{1}{2}\right]\oplus\left[\{8\},\frac{1}{2}\right]\oplus\left[\{1\},\frac{1}{2}\right]
\end{aligned}
\tag{8.69}
$$

这样我们得到大量的状态，它们远比自然界观察到的状态数多得多. 我们已经有自旋$\frac{3}{2}$的重子十重态和自旋$\frac{1}{2}$的重子八重态

$$\left[\{8\},\frac{1}{2}\right]\oplus\left[\{10\},\frac{3}{2}\right]$$

自旋$\frac{1}{2}$的八重态包含 $8\times(2s+1)=16$ 个态，自旋$\frac{3}{2}$的十重态有 $10\times(2s+1)=40$ 个态. 总起来它们是 SU(6)五十六重态的 56 个态. 在第 9 章我们将理解正是五十六重态出现在自然界的现实中. 在第 9 章我们还将面临置换群和杨表. 那里我们将表明这 56 个态是三个自旋$\frac{1}{2}$夸克的完全对称组合.

显然只有这些波函数存在，它们对夸克的任意置换是完全对称的. 与夸克的全反对称的颜色波函数一起导致总波函数，如泡利原理要求的，是完全反对称的. 三重态的夸克波函数 $\psi^{(30)}_{ytt_3}$ 补充上了自旋波函数. 因此

$$\psi^{(3)}_{ytt_3}\chi_{\frac{1}{2}\mu} \tag{8.70a}$$

和类似地对反三重态

$$\psi^{(\bar{3})}_{ytt_3}\chi_{\frac{1}{2}\nu} \tag{8.70b}$$

由这些夸克六重态我们现在来构造 π 介子同位旋三重态($T=1$)，它们嵌入介子八重态，并有 $Y=0$(参看例 8.6 的图和第 8.10)节. 按照(8.64)知道标因子是等于 1. 因此 π 介子的 $T=1$ 同位旋三重态的状态可以写成

$$
\begin{aligned}
\psi^{(8)}_{Y=0,T=1,T_3,I=0,M=0}=&\sum_{t_3,t'_3,\mu,\nu}\left(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 1\middle|t_3t'_3T_3\right)\left(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 0\middle|\mu\nu 0\right)\\
&\times\psi^{(3)}_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}t_3}(1)\psi^{(\bar{3})}_{-\frac{1}{3}\frac{1}{2}t'_3}(2)\chi_{\frac{1}{2}\mu}(1)\chi_{\frac{1}{2}\nu}(2)
\end{aligned}
\tag{8.71}
$$

宗量(1)和(2)分别代表粒子 1(夸克)和粒子 2(反夸克)的坐标. 下面对不同值的 T_3 我们明确计算(8.71)：

a) $T_3=1$，在此情况 t_3 和 t'_3 只能取值$\frac{1}{2}$. 因此该波函数为

$$|\pi^+\rangle=\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2}1\middle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}1\right)\sum_{\mu}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2}0\middle|\mu-\mu0\right)\psi^{(3)}_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\psi^{(\bar{3})}_{-\frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\chi_{\frac{1}{2}\mu}(1)\chi_{\frac{1}{2}-\mu}(2) \tag{8.72}$$

因为这些克莱布许-高登系数为

$$(j,j,2j|j,j,2j)=1 \tag{8.73a}$$

$$(j,j,0|\mu-\mu0)=\frac{(-1)^{j-\mu}}{\sqrt{2j+1}} \tag{8.73b}$$

就得出

$$\begin{aligned}|\pi^+\rangle&=\psi^{(3)}_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\psi^{(\bar{3})}_{-\frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\chi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(1)\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)-\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\chi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(2)\right]\\&=u(1)\bar{d}(2)\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\chi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(1)\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)-\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\chi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(2)\right]\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}[u(1)_{\downarrow}\bar{d}(2)_{\uparrow}-u(1)_{\uparrow}\bar{d}(2)_{\downarrow}]\\&=-\frac{1}{\sqrt{2}}(u_{\uparrow}\bar{d}_{\downarrow}-u_{\downarrow}\bar{d}_{\uparrow})\end{aligned} \tag{8.74}$$

在波函数的最后一步自旋向上和自旋向下分别由指标↑和↓指出.同时波函数的位置标记它们的宗量;这样 $u_{\uparrow}\bar{d}_{\downarrow}$ 实际上代表 $u_{\uparrow}(1)\bar{d}_{\downarrow}(2)$ 等等.

b) $T_3=0$,按(8.71),波函数 $|\pi^0\rangle$ 为

$$\begin{aligned}|\pi^0\rangle=&\left[\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2}1\middle|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}0\right)\psi^{(3)}_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\psi^{(\bar{3})}_{-\frac{1}{3}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(2)+\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2}1\middle|-\frac{1}{2}\frac{1}{2}0\right)\right.\\&\left.\times\psi^{(3)}_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(1)\psi^{(\bar{3})}_{-\frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\right]\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{2}0\middle|\mu-\mu0\right)\chi_{\frac{1}{2}\mu}(1)\chi_{\frac{1}{2}-\mu}(2)\end{aligned} \tag{8.75}$$

SU(2)克莱布许-高登系数取值为

$$\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2}1\middle|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}0\right)=\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{8.76a}$$

$$\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2}1\middle|-\frac{1}{2}\frac{1}{2}0\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{8.76b}$$

$$\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2}0\middle|\mu-\mu0\right)=\frac{(-)^{\frac{1}{2}+\mu}}{\sqrt{2}} \tag{8.76c}$$

它导致

$$\begin{aligned}|\pi^0\rangle&=\frac{1}{\sqrt{2}}(u(1)\bar{u}(2)+d(1)\bar{d}(2))\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\left(\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\chi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(2)-\chi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(1)\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\right)\\&=\frac{1}{2}(u(1)_{\uparrow}\bar{u}(2)_{\downarrow}-d(1)_{\uparrow}\bar{d}(2)_{\downarrow}-u(1)_{\downarrow}\bar{u}(2)_{\uparrow}-d(1)_{\downarrow}\bar{d}(2)_{\uparrow})\\&=\frac{1}{2}(u_{\uparrow}\bar{u}_{\downarrow}+d_{\uparrow}\bar{d}_{\downarrow}-u_{\downarrow}\bar{u}_{\uparrow}-d_{\downarrow}\bar{d}_{\uparrow})\end{aligned} \tag{8.77}$$

同样的方法继续用于 π^- 介子($T_3=-1$).下面我们总结了膺标介子(π介子,自旋0)和矢量介子

(ϱ 介子，自旋 1)的波函数，它们属于 SU(3)八重态的同位旋三重态：

$$
\begin{aligned}
|\pi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u_\uparrow \bar{d}_\downarrow - u_\downarrow \bar{d}_\uparrow)\\
|\pi^0\rangle &= \frac{1}{2}(u_\uparrow \bar{u}_\downarrow - u_\downarrow \bar{u}_\uparrow - d_\uparrow \bar{d}_\downarrow + d_\downarrow \bar{d}_\uparrow)\\
|\pi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(d_\uparrow \bar{u}_\downarrow - d_\downarrow \bar{u}_\uparrow)\\
|\varrho^+_{\pm 1}\rangle &= (u_{\uparrow,\downarrow} \bar{d}_{\uparrow,\downarrow})\\
|\varrho^+_0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u_\uparrow \bar{d}_\downarrow + u_\downarrow \bar{d}_\uparrow)\\
|\varrho^0_{\pm 1}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u_{\uparrow,\downarrow} \bar{u}_{\uparrow,\downarrow} - d_{\uparrow,\downarrow} \bar{d}_{\uparrow,\downarrow})\\
|\varrho^0_0\rangle &= \frac{1}{2}(u_\uparrow \bar{u}_\downarrow + u_\downarrow \bar{u}_\uparrow - d_\uparrow \bar{d}_\downarrow - d_\downarrow \bar{d}_\uparrow)\\
|\varrho^-_{\pm 1}\rangle &= (d_{\uparrow,\downarrow} \bar{u}_{\uparrow,\downarrow})\\
|\varrho^-_\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(d_\uparrow \bar{u}_\downarrow + d_\downarrow \bar{u}_\uparrow)
\end{aligned}
\tag{8.78}
$$

上指标代表电荷而下指标是自旋的 z 分量：$u_\uparrow$ 代表 $u|\uparrow\rangle$，$u_\downarrow$ 代表 $u|\downarrow\rangle$ 等等. π 介子自旋为 0，而 ϱ 介子自旋为 1(矢量介子). 因而后者如同(8.78)指出的，有 $j_z=0,\pm 1$. 重子波函数可以类似地构造，它对于十重态$[\{10\}\frac{3}{2}]$是相当容易的. 比如让我们从最大权态 Δ^{++} 开始：

$$
\Delta^{++}_{jz}=\begin{cases}
\Delta^{++}_{+\frac{3}{2}} = u_\uparrow u_\uparrow u_\uparrow \\
\Delta^{++}_{+\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(u_\uparrow u_\uparrow u_\downarrow + u_\uparrow u_\downarrow u_\uparrow + u_\downarrow u_\uparrow u_\uparrow)
\end{cases}
\tag{8.79}
$$

与 $\Delta^{++}_{+\frac{3}{2}}=u_\uparrow u_\uparrow u_\uparrow$ 的波函数有关我们接触到一个新问题. 显然这个波函数破坏泡利原理，因为所有三个夸克在同一状态 $u_\uparrow$. (同样的问题出现在第二个波函数，因为三个夸克中的两个在同一状态 $u_\uparrow$).

为了在夸克的领域内重新建立泡利原理，我们必须对夸克引入一个新的量子数. 这个量子数叫做颜色或色荷. 三个颜色是必要的(红，绿，兰)：使得第一个 $u_\uparrow$ 夸克里是红的，第二个是绿的而第三个是兰的.

后面在这套丛书的第八、九卷(弱作用的规范理论和量子色动力学)中，我们将更清楚地讨论这一点.

现在我们极其仔细地来解释第二个波函数的构造. Δ^{++} 的 SU(3)分量为 u(1)u(2)u(3)；这些 $j=\frac{3}{2}$ 粒子的自旋分量为

$$
\sum_{\mu\nu\mu\tau}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2}1\,\middle|\,\mu\nu m\right)\left(1\,\frac{1}{2}\frac{1}{3}\,\middle|\,m\tau M\right)\chi_{\frac{1}{2}\mu}(1)\chi_{\frac{1}{2}\nu}(2)\chi_{\frac{1}{2}\tau}(3)
\tag{8.80}
$$

这相应于对 $j=\frac{3}{2}$ 仅有可能的耦合,

$$\left[\left[\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2}\right]^{[1]}\otimes\frac{1}{2}\right]^{\left[\frac{3}{2}\right]} \tag{8.81}$$

下面我们对 $M=\frac{3}{2}$ 和 $M=\frac{1}{2}$ 证明(8.80)式:

a) $M=\frac{3}{2}$. 相应地我们必须有 $\tau=\frac{1}{2}$ 和 $m=1$,它导致,$\mu=\nu=\frac{1}{2}$. 对(8.80),该结果为

$$\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2}1\middle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}1\right)\left(1\frac{1}{2}\frac{3}{2}\middle|\frac{1}{2}\frac{3}{2}\right)\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3) \tag{8.82}$$

这两个克莱布许-高登系数等于 1(最大耦合,没有别的可能性),而因此我们得到总的波函数

$$\begin{aligned}\Delta^{++}_{j_3=\frac{3}{2}}&=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[u(1)u(2)u(3)\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)\right]\\&=u_\uparrow(1)u_\uparrow(2)u_\uparrow(3)\\&=u_\uparrow u_\uparrow u_\uparrow\end{aligned} \tag{8.83}$$

b) $M=\frac{1}{2}$. 对(8.80)必须有

$$m=1,\tau=\frac{1}{2}\text{或}\ m=0,\tau=\frac{1}{2}$$

进而对

$$\begin{aligned}m=1&:\ \mu=\frac{1}{2},\quad \nu=\frac{1}{2}\\m=0&:\ \mu=\frac{1}{2},\quad \nu=-\frac{1}{2}\\m=0&:\ \mu=-\frac{1}{2},\quad \nu=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

对(8.80)的自旋波函这总共给出

$$\begin{aligned}a=&\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2}1\middle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}1\right)\left(1\frac{1}{2}\frac{3}{2}\middle|1-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right)\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\chi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(3)\\&+\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2}1\middle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}0\right)\left(1-\frac{1}{2}\frac{3}{2}\middle|0\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right)\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\chi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(2)\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)\\&\times\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2}1\middle|-\frac{1}{2}\frac{1}{2}0\right)\left(1\frac{1}{2}\frac{3}{2}\middle|0\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right)\chi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(1)\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)\end{aligned} \tag{8.84}$$

这些克莱布许-高登系数的值可以在各种书上[①]找到,我们引用

$$\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2}1\middle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}1\right)=1\qquad\left(1\frac{1}{2}\frac{3}{2}\middle|0\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

① 例如 M. Rotenbergetal:*The* 3*j and the* 6*j-Symbols* (Technology Press,Cambridge, Mass. 1959).

$$\left(1\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\middle|1-\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\qquad\left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,1\middle|-\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,1\middle|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,0\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad\left(1\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\middle|0\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\right)=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

这样得出 SU(6)总的波函数

$$\begin{aligned}\Delta^{++}_{j3=\frac{1}{2}}&=\frac{1}{\sqrt{3}}[\mathrm{u}(1)\mathrm{u}(2)\mathrm{u}(3)]\cdot\left[\chi_{1\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\chi_{1\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\chi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(3)+\chi_{1\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\chi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(2)\chi_{1\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)\right.\\&\left.+\chi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(1)\chi_{1\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\chi_{1\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)\right]\\&=\frac{1}{\sqrt{3}}[\mathrm{u}_{\uparrow}(1)\mathrm{u}_{\uparrow}(2)\mathrm{u}_{\downarrow}(3)+\mathrm{u}_{\uparrow}(1)\mathrm{u}_{\downarrow}(2)\mathrm{u}_{\uparrow}(3)+\mathrm{u}_{\downarrow}(1)\mathrm{u}_{\uparrow}(2)\mathrm{u}_{\uparrow}(3)]\\&=\frac{1}{\sqrt{3}}[\mathrm{u}_{\uparrow}\mathrm{u}_{\uparrow}\mathrm{u}_{\downarrow}+\mathrm{u}_{\uparrow}\mathrm{u}_{\downarrow}\mathrm{u}_{\uparrow}+\mathrm{u}_{\downarrow}\mathrm{u}_{\uparrow}\mathrm{u}_{\uparrow}]\end{aligned}\tag{8.85a}$$

对 $\hat{S}_-\Delta^{++}_{3/2}=\sqrt{3}\,\Delta^{++}_{1/2}$ 应用(2.18)，我们也能从(8.83)用自旋梯级算符

$$\hat{S}_-=\hat{S}_-(1)+\hat{S}_-(2)+\hat{S}_-(3)$$

得到这一结果. 这里按(2.18b)我们又有

$$\hat{S}_-(1)\mathrm{u}_{\uparrow}(1)=\mathrm{u}_{\downarrow}(1)\quad\text{等等}$$

借助于 SU(3)群的降低算符 $\hat{T}_-$，$\hat{U}_-$和 $\hat{V}_-$或自旋降低算符的 $\hat{S}_-$对态(8.79)的作用，SU(3)十重态的其他波函数都能被构造，例如对于自旋投影 $j_z=\frac{1}{2}$的 Σ^{*+}粒子我们得到波函数

$$\Sigma^{*+}_{+\frac{1}{2}}=\text{const.}\,\hat{V}_-\Delta^{++}_{+\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{9}}(s_{\uparrow}u_{\uparrow}u_{\downarrow}+s_{\uparrow}\mathrm{u}_{\downarrow}\mathrm{u}_{\uparrow}+\mathrm{s}_{\downarrow}\mathrm{u}_{\uparrow}\mathrm{u}_{\uparrow}+\text{排列置换})$$

其中的排列置换来自于 $\hat{V}_-=\hat{V}_-(1)+\hat{V}_-(2)+\hat{V}_-(3)$，即 $\hat{V}_-$是由所涉及到的三个粒子(夸克)的 $\hat{V}_-$算符组成的. 注意十重态$[\{10\},\frac{3}{2}]$的状态自动揭示了在交换任何夸克对时的对称性. 这能直接从(8.79 和 80)中看到.

为了构造 $j=\frac{1}{2}$的重子八重态的状态，我们结合两个夸克形成一个中间角动量，然后再把它与第三个夸克耦合. 这里我们要求总的波函数在交换时是完全对称的，正如对自旋$\frac{3}{2}$重子一样(参看(8.79 和(8.80)). 如果当作例子我们想得到质子 $\mathrm{p}_{+\frac{1}{2}}$的波函数，我们结合两个 u 夸克到(对称的)三重态$(\mathrm{uu})^{j=1}_{j_3}$，而随后耦合第三个夸克 d 夸克来形成一个好的总自旋$\frac{1}{2}$：

$$\begin{aligned}|p_{\uparrow}\rangle&=\text{const.}\left[\left(1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\middle|1-\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right)(\mathrm{uu})^1_1\mathrm{d}_{\downarrow}+\left(1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\middle|0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right)(\mathrm{uu})^1_0\mathrm{d}_{\downarrow}+\text{置换}\right]\\&=\text{const.}\left[\sqrt{\frac{2}{3}}\mathrm{u}_{\uparrow}\mathrm{u}_{\uparrow}\mathrm{d}_{\downarrow}-\frac{1}{\sqrt{6}}(\mathrm{u}_{\uparrow}\mathrm{u}_{\downarrow}+\mathrm{u}_{\downarrow}\mathrm{u}_{\uparrow})\mathrm{d}_{\uparrow}+\text{置换}\right]\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{18}}[2u_\uparrow u_\uparrow d_\downarrow - u_\uparrow u_\downarrow d_\uparrow - u_\downarrow u_\uparrow d_\uparrow + \text{置换}]$$

详细地写出该波函数为(展示所有置换)

$$|p_\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{18}}[2|u_\uparrow d_\downarrow u_\uparrow\rangle + 2|u_\uparrow u_\uparrow d_\downarrow\rangle + 2|d_\downarrow u_\uparrow u_\uparrow\rangle - |u_\uparrow u_\downarrow d_\uparrow\rangle - |u_\uparrow d_\uparrow u_\downarrow\rangle$$
$$- |u_\downarrow d_\uparrow u_\uparrow\rangle - |d_\uparrow u_\downarrow u_\uparrow\rangle - |d_\uparrow u_\uparrow u_\downarrow\rangle - |u_\downarrow u_\uparrow d_\uparrow\rangle] \tag{8.85b}$$

我们必须考虑这里波函数的位置表示位置算符的指标.例如

$$udu \leftrightarrow u(1)d(2)u(3)$$

通过耦合质子波函数到中间自旋 $j=1$,我们保证了两个 u 夸克间的对称性.通过中间自旋 $j=0$ (初看起来是可能的)被排除了,因为这样前两个 u 夸克的波函数将是反对称的.

还有另一点要对质子的 uud 结构强调:为什么它的结构不是 uus,它的电荷 $Q=\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)=1$? 回答是简单的,质子在[8]中必须有超荷 $Y=1$,而 uus 结构有超荷 $Y=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)=0$.类似于上面对质子所做的我们得到中子的波函数

$$|n_\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{18}}[2d_\uparrow d_\uparrow u_\downarrow - d_\uparrow d_\downarrow u_\uparrow - d_\downarrow d_\uparrow u_\uparrow + \text{置换}] \tag{8.85c}$$

除去 Λ^0 粒子八重态的其他状态看起来相当类似,Λ^0 必须被相对于 Σ^0 的正交性来定出.在此情况我们发现

$$|\Lambda^0_\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{12}}[u_\uparrow d_\downarrow s_\uparrow - u_\downarrow d_\uparrow s_\uparrow - d_\uparrow u_\downarrow s_\uparrow + d_\downarrow u_\uparrow s_\uparrow + \text{置换}] \tag{8.85d}$$

在以下的练习中,中子波函数的结构,特别是重子共振态的波函数的结构被详细推出.

练习 8.13 构造中子波函数

问题 将位移算符 $\hat{T}_-$ 到质子波函数来计算中子波函数.

解 我们知道中子波函数产生于应用 $\hat{T}_-$ 算符到质子波函数,$\hat{T}_-$ 降低 T_3 分量一个单位.因为质子和中子波函数是三体波函数,我们必须应用三体算符 $\hat{T}_-=\hat{T}_-(1)+\hat{T}_-(2)+\hat{T}_-(3)$.这个算符由三部分组成,每个作用在不同的希尔伯特空间,虽然是以相似的方式.由(8.85b),质子波函数被知道为

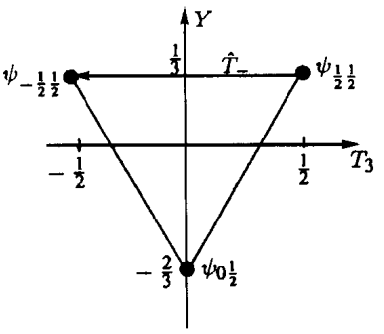
$$|p_\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{18}}\cdot\{2\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)$$
$$+ 2\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(3) + 2\psi_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)$$
$$- \psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3) - \psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(3)$$
$$- \psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3) - \psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)$$
$$- \psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(3) - \psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)\} \tag{1}$$

这里 $\psi_{t_3 j_3}$ 代表一个自旋分量 j_3 和同位旋分量 t_3 的粒子的波函数.括号中的数规定相应的希尔伯特空间,这是重

要的，因为一个算符作用到别的希尔伯特空间的函数上时不影响那个函数(例如符号 $\hat{T}_-(1)$ 应被理解成张量乘积 $\hat{T}_-(1)\hat{I}(2)\hat{I}(3)$ 的缩写，其中 $\hat{I}$ 是恒等算符，等等). 我们知道 $\hat{T}_-$ 降低同位旋分量 t_3 一个单位，所有其他量子数保持不变. $\hat{T}_-$ 不能使该函数跑出它作为一个成员的多重态. 因为函数 $\psi_{t_3 j_3}$ 都是基本 SU(3) 三重态的函数，结果对所有的 i 和 j_3，$\hat{T}_-(i)\psi_{-\frac{1}{2}j_3}(i)=0$(看下面的演示). 仅有的保留下来的位移是

$$\hat{T}_-(i)\psi_{\frac{1}{2}j_3}(i)=N\psi_{-\frac{1}{2}j_3}(i) \tag{2}$$

对所有的 i 和 j_3，其中 N 是一个归一化因子. 这样就得出



自旋 $\frac{1}{2}$ 的 SU(3) 基本三重态

$$|\mathrm{n}_\uparrow\rangle=N\hat{T}_-|\mathrm{p}_\uparrow\rangle=\frac{N}{\sqrt{18}}$$
$$\cdot\{2(\hat{T}_-(1)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)+2\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)(\hat{T}_-(2)\psi_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)$$
$$+2\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(2)(\hat{T}_-(3)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3))+2(\hat{T}_-(1)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1))\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(3)$$
$$+2\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)(\hat{T}_-(2)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(3)+2\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)(\hat{T}_-(3)\psi_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(3))$$
$$+2(\hat{T}_-(1)\psi_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(1))\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)+2\psi_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(1)(\hat{T}_-(2)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)$$
$$+2\psi_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)(\hat{T}_-(3)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3))-(\hat{T}_-(1)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)$$
$$-\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)(\hat{T}_-(2)\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(2))\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)-\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(2)(\hat{T}_-(3)\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3))$$
$$-(\hat{T}_-(1)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1))\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(3)-\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)(\hat{T}_-(2)\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2))\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(3)$$
$$-\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)(\hat{T}_-(3)\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(3))-(\hat{T}_-(1)\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(1))\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)$$
$$-\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(1)(\hat{T}_-(2)\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)-\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)(\hat{T}_-(3)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3))$$
$$-(\hat{T}_-(1)\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)-\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)-(\hat{T}_-(2)\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)$$
$$-\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(2)(\hat{T}_-(3)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3))-(\hat{T}_-(1)\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1))\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(3)$$
$$-\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)(\hat{T}_-(2)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2))\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(3)-\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)(\hat{T}_-(3)\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(3))$$
$$-(\hat{T}_-(1)\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)-\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(1)(\hat{T}_-(2)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2))\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)$$
$$-\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)(\hat{T}_-(3)\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3))\}$$

$$|\mathrm{n}_\uparrow\rangle=\frac{N}{\sqrt{18}}\cdot\{2\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)+0$$
$$+2\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)+2\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(3)$$
$$+2\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(3)+0+0$$
$$+2\psi_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)+2\psi_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)$$
$$-\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)-\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)-0$$
$$-\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(3)-0-\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(3)$$
$$-\psi_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)-0-\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)$$

$$
\begin{aligned}
&- 0 - \psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3) - \psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)\\
&- 0 - \psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(3) - \psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(3)\\
&- \psi_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3) - \psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3) - 0\}\\
=&-\frac{N}{\sqrt{18}}\cdot\{2\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)\\
&+2\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(3) + 2\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)\\
&-\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3) - \psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)\\
&-\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(3) - \psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(3)\\
&-\psi_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3) - \psi_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)\}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

归一化条件为$\langle n_\uparrow|n_\uparrow\rangle=1$,该积分必须由个别积分的和来计算,它满足基本的归一化条件

$$
\begin{aligned}
&\langle\psi_{t_1j_1}(1)\psi_{t_2j_2}(2)\psi_{t_3j_3}(3)|\psi^{t'}_{i_1j'_1}(1)\psi^{t'}_{i'_2j'_2}(2)\psi^{t'}_{i'_3j'_3}(3)\rangle\\
&=\delta_{t_1t'_1}\delta_{j_1j'_1}\delta_{t_2t'_2}\delta_{j_2j'_2}\delta_{t_3t'_3}\delta_{j_3j'_3}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

(这里我们对 t 和 j 两者省略了指标 3). 重复应用这个关系给出

$$
\begin{aligned}
1=&\langle n_\uparrow|n_\uparrow\rangle\\
=&N^2\cdot\frac{1}{18}\cdot\{4+0+0+0+0+0+0+0+0+0+4+0+0+0\\
&+0+0+0+0+0+0+4+0+0+0+0+0+0+0+0\\
&+1+0+0+0+0+0+0+0+0+1+0+0+0+0+0\\
&+0+0+0+0+1+0+0+0+0+0+0+0+0+1+0\\
&+0+1+0+0+0+0+0+0+1+1\}\\
=&N^2\cdot\frac{1}{18}\cdot(4+4+4+1+1+1+1+1+1)\\
=&N^2\cdot\frac{18}{18}=N^2
\end{aligned}
\tag{5}
$$

因此$|N^2|=1$,即 $N=e^{i\phi}$,其中相位 ϕ 是任意的,因此一个波函数仅仅决定到一个相位的限度. 为了得到一个类似于初始波函数的形式,我们选 $\phi=\pi$,也即 $N=-1$. 因此这个波函数变为

$$
\begin{aligned}
|n_\uparrow\rangle=&\frac{1}{\sqrt{18}}\cdot\{2\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)\\
&+2\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(3) + 2\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)\\
&-\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3) - \psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)\\
&-\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(3) - \psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(3)\\
&-\psi_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3) - \psi_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)\}
\end{aligned}
$$

通过分别缩写 $\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$为 $d_\uparrow$,$\psi_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$为 $u_\uparrow$可以改写这方程. 记住,例如 duu 代表 d(1)u(2)u(3),我们得到

$$
\begin{aligned}
|n_\uparrow\rangle=&\frac{1}{\sqrt{18}}\cdot\{2d_\uparrow u_\downarrow d_\uparrow + 2d_\uparrow d_\uparrow u_\downarrow + 2u_\downarrow d_\uparrow d_\uparrow - d_\uparrow d_\downarrow u_\uparrow\\
&-u_\uparrow d_\downarrow d_\uparrow - d_\uparrow u_\uparrow d_\downarrow - u_\downarrow d_\uparrow d_\downarrow - d_\downarrow d_\uparrow u_\uparrow - d_\downarrow u_\uparrow d_\downarrow\}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

(练习 8.13 完)

练习 8.14　构造重子十重态的波函数

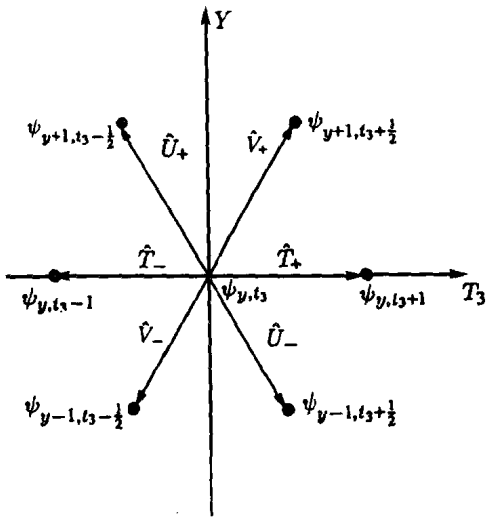
问题　由 Δ^{++}出发构造十重态重子共振的波函数，Δ^{++}我们已经知道为(参看(8.85a))

$$|\Delta^{++}\rangle=\psi^{[3]}_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1)\cdot\psi^{[3]}_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2)\cdot\psi^{[3]}_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3)\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\cdot\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\cdot\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3) \tag{1}$$

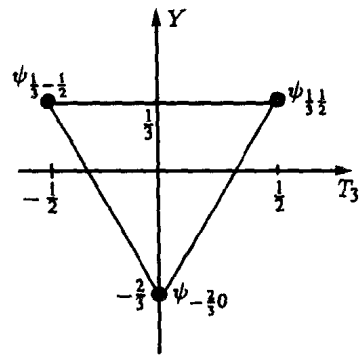
解　Δ^{++}的波函数由 SU(3)波函数 $\psi^{[m]}_{\nu_3}$(在此情况是基本三重态的函数，因此[m]=[3])和组成这个粒子的夸克自旋波函数 χ_{jm}的乘积给出. 括号中的数规定相应函数的希尔伯特空间，这样例如 $\psi^{[3]}_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1)$是粒子 1 的波函数，它是三重态的一个部分，带有量子数 $y=\frac{1}{3}$，$t_3=\frac{1}{2}$. 自旋、同位旋和超荷是可加量子数，即对 Δ^{++}我们有值 $Y=1$，$T_3=\frac{3}{2}$，$J=\frac{3}{2}$. 这里我们只考虑最大自旋投影 $M=\frac{3}{2}$的状态. 一般说来这是不必要的，我们也可以考虑 $M=\frac{1}{2}$，$M=-\frac{1}{2}$或 $M=-\frac{3}{2}$的状态. 但波函数的同位旋超荷部分不会被自旋投影值影响，因此我只选 $M=\frac{3}{2}$.

从 Δ^{++}函数开始，重子十重态的其他波函数可以通过相继应用位移算符来构造. 所有观察到的重子共振态有自旋 $J=\frac{3}{2}$.

我们知道位移算符作用在 Y-T_3 空间一个状态上的效果(看下面的图)，因而必须小心它不把状态移出该 SU(3)多重态的边界，在那种情况结果将是 0. 在我们的情况，这个波函数代表基本三重态的状态(看下面的图).



位移算符的效果



基本夸克三重态

因此，例如 $\hat{T}_+\psi^{[3]}_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}=0$，因为 $\psi^{[3]}_{\frac{1}{3}\frac{3}{2}}$不存在，类似地

$$\hat{U}_+\psi^{[3]}_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}=\hat{U}_-\psi^{[3]}_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}=\hat{V}_+\psi^{[3]}_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}=0$$

但是状态

$$\hat{T}_+\psi^{[15]}_{1\,1\,1\atop 3\,2}=\text{const.}\,\psi^{[15]}_{1\,1\,3\atop 3\,2}$$

存在，因为在十五重态的情况 $\hat{T}_+$ 算符作用在 $Y=\frac{1}{3}$，$T_3=\frac{1}{2}$ 的状态不会跑出这个多重态. 那些在基本三重态内可能的算符为

$$\hat{T}_-\psi^{[3]}_{1\,1\atop 3\,2}=\psi^{[3]}_{1\,-1\atop 3\,2},\hat{V}_-\psi^{[3]}_{1\,1\atop 3\,2}=\psi^{[3]}_{-2\atop 3\,0},\hat{T}_+\psi^{[3]}_{1\,-1\atop 3\,2}=\psi^{[3]}_{1\,1\atop 3\,2}$$

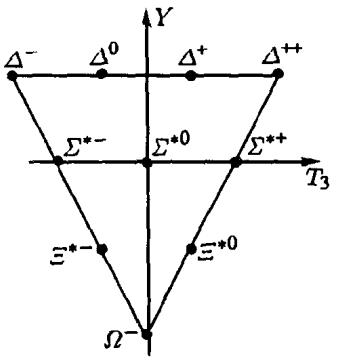
$$\hat{U}_-\psi^{[3]}_{1\,-1\atop 3\,2}=\psi^{[3]}_{-2\atop 3\,0},\ \hat{V}_+\psi^{[3]}_{-2\atop 3\,0}=\psi^{[3]}_{1\,1\atop 3\,2},\ \hat{U}_+\psi^{[3]}_{-2\atop 3\,0}=\psi^{[3]}_{1\,-1\atop 3\,2} \tag{2}$$

在开始构造十重态的新的状态之前(看下面的图)我们必须体会到我们这里涉及的是多体状态，结果算符必须是多体算符：

$$\hat{O}\phi$$

其中 $\phi=\phi(1)\phi(2)\phi(3)$. 因此

$$\begin{aligned}\{\hat{O}(1)+\hat{O}(2)+\hat{O}(3)\}\phi=&(O(1)\phi(1))\phi(2)\phi(3)\\&+\phi(1)(\hat{O}(2)\phi(2)\phi(3)\\&+\phi(1)\phi(2)(\hat{O}(3)\phi(3))\end{aligned}\tag{3}$$



重子共振十重态

现在我们可以开始构造第一个新波函数：

如同在上面的图中可以看到的，$|\Delta^+\rangle=N\hat{T}_-|\Delta^{++}\rangle$，其中 N 是一个归一化因子，它保证 $\langle\Delta^+|\Delta^+\rangle=1$. 因为我们只考虑属于基本三重态的函数 ψ(我们假设它是归一的，在下面略去上标[3]，另外我们让

$$\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)\equiv\chi$$

因为波函数的自旋部分保持不变. 下一步我们得到

$$\begin{aligned}|\Delta^+\rangle=&N\hat{T}_-|\Delta^{++}\rangle\\=&N(\hat{T}_-(1)+\hat{T}_-(2)+\hat{T}_-(3))[\psi_{1\,1\atop 3\,2}(1)\psi_{1\,1\atop 3\,2}\psi_{1\,1\atop 3\,2}(3)]\cdot\chi\\=&N\cdot\chi\cdot\{(\hat{T}_-(1)\psi_{1\,1\atop 3\,2}(1))\psi_{1\,1\atop 3\,2}(2)\psi_{1\,1\atop 3\,2}(3)\\&+\psi_{1\,1\atop 3\,2}(1)(\hat{T}_-(2)\psi_{1\,1\atop 3\,2}(2))\psi_{1\,1\atop 3\,2}(3)+\psi_{1\,1\atop 3\,2}(1)\psi_{1\,1\atop 3\,2}(2)(\hat{T}_-(3)\psi_{1\,1\atop 3\,2}(3))\}\\=&N\cdot\chi\cdot\{\psi_{1\,-1\atop 3\,2}(1)\psi_{1\,1\atop 3\,2}(2)\psi_{1\,1\atop 3\,2}(3)+\psi_{1\,1\atop 3\,2}(1)\psi_{1\,-1\atop 3\,2}(2)\psi_{1\,1\atop 3\,2}(3)\\&+\psi_{1\,1\atop 3\,2}(1)\psi_{1\,1\atop 3\,2}(2)\psi_{1\,-1\atop 3\,2}(3)\}\end{aligned}\tag{4}$$

因子 N 通过归一化条件决定.

$$\begin{aligned}1=\langle\Delta^+|\Delta^+\rangle=\int\{&N^*\cdot\bar{\chi}\cdot[\underbrace{\bar{\psi}_{1\,-1\atop 3\,2}(1)\bar{\psi}_{1\,1\atop 3\,2}(2)\bar{\psi}_{1\,1\atop 3\,2}(3)}_{\psi_{\mathrm{I}}}\\&+\underbrace{\bar{\psi}_{1\,1\atop 3\,2}(1)\bar{\psi}_{1\,-1\atop 3\,2}(2)\bar{\psi}_{1\,1\atop 3\,2}(3)}_{\psi_{\mathrm{I}}}+\underbrace{\bar{\psi}_{1\,1\atop 3\,2}(1)\bar{\psi}_{1\,1\atop 3\,2}(2)\bar{\psi}_{1\,-1\atop 3\,2}(3)}_{\psi_{\mathrm{I}}}]\\&\times N\cdot\chi\cdot[\psi_{1\,-1\atop 3\,2}(1)\psi_{1\,1\atop 3\,2}(2)\psi_{1\,1\atop 3\,2}(3)\\&+\psi_{1\,1\atop 3\,2}(1)\psi_{1\,-1\atop 3\,2}(2)\psi_{1\,1\atop 3\,2}(3)+\psi_{1\,1\atop 3\,2}(1)\psi_{1\,1\atop 3\,2}(2)\psi_{1\,-1\atop 3\,2}(3)]\}\mathrm{d}^3x\\=|N|^2\cdot\int|\chi|^2\cdot\{&|\psi_{\mathrm{I}}|^2+\bar{\psi}_{\mathrm{I}}\psi_{\mathrm{I}}+\bar{\psi}_{\mathrm{I}}\psi_{\mathrm{I}}+\bar{\psi}_{\mathrm{I}}\psi_{\mathrm{I}}+|\psi_{\mathrm{I}}|^2\\&+\bar{\psi}_{\mathrm{I}}\psi_{\mathrm{I}}+\bar{\psi}_{\mathrm{I}}\psi_{\mathrm{I}}+|\psi_{\mathrm{I}}|^2\}\mathrm{d}^3x_1\mathrm{d}^3x_2\mathrm{d}^3x_3.\end{aligned}\tag{5}$$

现在 ψ_a 是正交的，例如

$$\int|\psi_1|^2\cdot|\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}|^2\mathrm{d}^3x_1\mathrm{d}^3x_2\mathrm{d}^3x_3$$

$$=\int\bar{\psi}_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1)|\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)|^2\mathrm{d}^3x_1\int\bar{\psi}_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2)\bar{\psi}_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2)|\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)|^2\mathrm{d}^3x_2$$

$$\times\int\bar{\psi}_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3)|\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)|^2\mathrm{d}^3x_3$$

$$=1\cdot1\cdot1=1$$

$$\int|\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}|^2\bar{\psi}_1\psi_1\mathrm{d}^3x_1\mathrm{d}^3x_2\mathrm{d}^3x_3$$

$$=\int\bar{\psi}_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1)|\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)|^2\mathrm{d}^3x_1\int\bar{\chi}_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2)|\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)|^2\mathrm{d}^3x_2$$

$$\times\int\bar{\psi}_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3)\bar{\psi}_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3)|\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)|^2\mathrm{d}^3x_3$$

$$=0\cdot0\cdot1=0 \tag{6}$$

由此我们得到

$$1=|N|^2\cdot(1\cdot1\cdot1+0\cdot0\cdot1+0\cdot1\cdot0$$
$$+0\cdot0\cdot1+1\cdot1\cdot1+1\cdot0\cdot0+0\cdot1\cdot0+1\cdot0\cdot0+1\cdot1\cdot1)$$
$$=|N|^2\cdot3\Rightarrow N=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

因此

$$|\Delta^+\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\{\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3)+\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3)$$
$$+\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3)\}\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3) \tag{7}$$

现在我们可以同样地计算$|\Sigma^{*+}\rangle$

$$|\Sigma^{*+}\rangle=N\cdot(\hat{V}_-(1)+\hat{V}_-(2)+\hat{V}_-(3))\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3)\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)$$
$$=N\cdot\{(\hat{V}_-(1)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1))\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3)$$
$$+\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1)(\hat{V}_-(2)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2))\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3)+\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2)(\hat{V}_-(3)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3))\}\cdot\chi$$
$$=N\cdot\{\psi_{-\frac{2}{3}0}(1)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3)$$
$$+\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{2}{3}0}(2)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3)+\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{2}{3}0}(3)\}\cdot\chi \tag{8}$$

再一次 N 得自归一化条件

$$1\overset{!}{=}|N|^2\cdot\langle[\psi_{-\frac{2}{3}0}(1)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3)+\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{2}{3}0}(2)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3)$$
$$+\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{2}{3}0}(3)]\cdot\chi|[\psi_{-\frac{2}{3}0}(1)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3)$$
$$+\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{2}{3}0}(2)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3)+\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{2}{3}0}(3)]\chi\rangle$$
$$=|N|^2\cdot(1+0+0+0+1+0+0+0+1)=3|N|^2 \tag{9}$$

这样 $N=1/\sqrt{3}$，我们得到

$$|\Sigma^{*-}\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\{\psi_{-\frac{2}{3}0}(1)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3)+\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{2}{3}0}(2)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3)$$
$$+\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{2}{3}0}(3)\}\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3) \tag{10}$$

类似地我们可以决定粒子 $\Delta^0,\Delta^-,\Xi^*,\Omega$ 的波函数:

$$
\begin{aligned}
|\Delta^0\rangle &= N\hat{T}_-|\Delta^+\rangle \\
&= N(\hat{T}_-(1)+\hat{T}_-(2)+\hat{T}_-(3))\cdot\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}[\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3)\right. \\
&\quad \left.+\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3)+\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3)]\chi(1)\chi(2)\chi(3)\right\} \\
&= \frac{N}{\sqrt{3}}\cdot\{(\hat{T}_-(1)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1))\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3) \\
&\quad +(\hat{T}_-(1)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1))\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3)+(\hat{T}_-(1)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1))\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3) \\
&\quad +\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1)(\hat{T}_-(2)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2))\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3)+\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1)(\hat{T}_-(2)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2))\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3) \\
&\quad +\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1)(\hat{T}_-(2)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2))\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3)+\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2)(\hat{T}_-(3)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3)) \\
&\quad +\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2)(\hat{T}_-(3)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3))+\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2)(\hat{T}_-(3)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3))\}\cdot\chi \\
&= \frac{N}{\sqrt{3}}\cdot\chi\cdot\{0+\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3) \\
&\quad +\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3)+\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3)+0 \\
&\quad +\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3)+\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3) \\
&\quad +\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3)+0\} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot N\cdot\chi\cdot\{\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3) \\
&\quad +\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3)+\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3)\}
\end{aligned}
$$

由 $1=\langle\Delta^0|\Delta^0\rangle$ 得出

$$
1=\frac{4}{3}\cdot|N|^2\cdot(1+0+0+0+1+0+0+0+1)=4|N|^2\Rightarrow N=\frac{1}{2}
$$

导致

$$
\begin{aligned}
|\Delta^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\{\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3)+\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3) \\
&\quad +\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3)\}\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3) \qquad (11) \\
|\Delta^-\rangle &= N\hat{T}_-|\Delta^0\rangle = \frac{N}{\sqrt{3}}\cdot\{(\hat{T}_-(1)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1))\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3) \\
&\quad +(\hat{T}_-(1)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1))\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3)+(\hat{T}_-(1)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1))\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3) \\
&\quad +\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1)(\hat{T}_-(2)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2))\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3)+\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1)(\hat{T}_-(2)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2))\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3) \\
&\quad +\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1)(\hat{T}_-(2)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2))\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3)+\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2)(\hat{T}_-(3)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3)) \\
&\quad +\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2)(\hat{T}_-(3)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3))+\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2)(\hat{T}_-(3)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3))\}\cdot\chi \\
|\Delta^-\rangle &= \frac{N}{\sqrt{3}}\cdot\chi\{0+0+\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3)+0+\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3) \\
&\quad +0+\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3)+0+0\}
\end{aligned}
$$

$$=N\chi\cdot\sqrt{3}\cdot\psi_{1\,-\frac{1}{2}}(1)\psi_{1\,-\frac{1}{2}}(2)\psi_{1\,-\frac{1}{2}}(3)$$

由$\langle\Delta^-|\Delta^-\rangle=1$得出$1=3|N|^2$,也就是$N=1/\sqrt{3}$.由此

$$|\Delta^-\rangle=\psi_{1\,-\frac{1}{2}}(1)\psi_{1\,-\frac{1}{2}}(2)\psi_{1\,-\frac{1}{2}}(3)\chi_{2\,\frac{1}{2}}(1)\chi_{2\,\frac{1}{2}}(2)\chi_{2\,\frac{1}{2}}(3) \tag{12}$$

$$\begin{aligned}|\Xi^{*0}\rangle&=N\cdot\hat{V}_-|\Sigma^{*+}=\frac{N}{\sqrt{3}}\cdot\chi\cdot[(\hat{V}_-(1)\psi_{-\frac{2}{3}0}(1))\psi_{1\,\frac{1}{2}}(2)\psi_{1\,\frac{1}{2}}(3)\\&+(\hat{V}_-(1)\psi_{1\,\frac{1}{2}}(1))\psi_{-\frac{2}{3}0}(2)\psi_{1\,\frac{1}{2}}(3)+(\hat{V}_-(1)\psi_{1\,\frac{1}{2}}(1))\psi_{1\,\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{2}{3}0}(3)\\&+\psi_{-\frac{2}{3}0}(1)(\hat{V}_-(2)\psi_{1\,\frac{1}{2}}(2))\psi_{1\,\frac{1}{2}}(3)+\psi_{1\,-\frac{1}{2}}(1)(\hat{V}_-(2)\psi_{-\frac{2}{3}0}(2))\psi_{1\,\frac{1}{2}}(3)\\&+\psi_{1\,\frac{1}{2}}(1)(\hat{V}_-(2)\psi_{1\,\frac{1}{2}}(2))\psi_{-\frac{2}{3}0}(3)+\psi_{-\frac{2}{3}0}(1)\psi_{1\,\frac{1}{2}}(2)(\hat{V}_-(3)\psi_{1\,\frac{1}{2}}(3))\\&+\psi_{1\,\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{2}{3}0}(2)(\hat{V}_-(3)\psi_{1\,\frac{1}{2}}(3))+\psi_{1\,\frac{1}{2}}(1)\psi_{1\,\frac{1}{2}}(2)(\hat{V}_-(3)\psi_{-\frac{2}{3}0}(3))]\\&=\frac{N}{\sqrt{3}}\cdot2\cdot\{\psi_{-\frac{2}{3}0}(1)\psi_{-\frac{2}{3}0}(2)\psi_{1\,\frac{1}{2}}(3)\\&+\psi_{-\frac{2}{3}0}(1)\psi_{1\,\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{2}{3}0}(3)+\psi_{1\,\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{2}{3}0}(2)\psi_{-\frac{2}{3}0}(3)\}\cdot\chi\end{aligned} \tag{13}$$

归一化条件导致

$$\begin{aligned}|\Xi^{*0}\rangle&=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\{\psi_{-\frac{2}{3}0}(1)\psi_{-\frac{2}{3}0}(2)\psi_{1\,\frac{1}{2}}(3)+\psi_{-\frac{2}{3}0}(1)\psi_{1\,\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{2}{3}0}(3)\\&+\psi_{1\,\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{2}{3}0}(2)\psi_{-\frac{2}{3}0}(3)\}\chi_{2\,\frac{1}{2}}(1)\chi_{2\,\frac{1}{2}}(2)\chi_{2\,\frac{1}{2}}(3)\end{aligned} \tag{14}$$

同样的方式可得

$$\begin{aligned}|\Omega^-\rangle&=N\cdot\hat{V}_-|\Xi^{*0}\rangle\\&=\psi_{-\frac{2}{3}0}(1)\psi_{-\frac{2}{3}0}(2)\psi_{-\frac{2}{3}0}(3)\chi_{2\,\frac{1}{2}}(1)\chi_{2\,\frac{1}{2}}(2)\chi_{2\,\frac{1}{2}}(3)\end{aligned} \tag{15}$$

现在为了由前面计算的状态推出$|\Sigma^{*0}\rangle$有几种可能性存在,这可以在Y-T_3图中看出.一方面我们有

$$|\Sigma^{*0}\rangle=\hat{T}_-|\Sigma^{*+}\rangle \tag{16}$$

别的可能性是

$$|\Sigma^{*0}\rangle=\hat{V}_-|\Delta^+\rangle\quad,\quad|\Sigma^{*0}\rangle=\hat{U}_-|\Delta^0\rangle$$

我们证明所有的可能性给出同一函数(正如我们应该期望的)

$$\begin{aligned}|\Sigma^{*0}\rangle&=\hat{T}_-|\Sigma^{*-}\rangle\\&=N\cdot\hat{T}_-\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}[\psi_{-\frac{2}{3}0}(1)\psi_{1\,\frac{1}{2}}(2)\psi_{1\,\frac{1}{2}}(3)+\psi_{1\,\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{2}{3}0}(2)\psi_{1\,\frac{1}{2}}(3)\right.\\&\left.+\psi_{1\,\frac{1}{2}}(1)\chi_{1\,\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{2}{3}0}(3)]\chi_{2\,\frac{1}{2}}\chi_{2\,\frac{1}{2}}(2)\chi_{2\,\frac{1}{2}}(3)\right\}\\&=\frac{N}{\sqrt{3}}\cdot\chi\cdot\{(\hat{T}_-(1)\psi_{-\frac{2}{3}0}(1))\psi_{1\,\frac{1}{2}}(2)\psi_{1\,\frac{1}{2}}(3)\\&+(\hat{T}_-(1)\psi_{1\,\frac{1}{2}}(1))\psi_{-\frac{2}{3}0}(2)\psi_{1\,\frac{1}{2}}(3)+(\hat{T}_-(1)\psi_{1\,\frac{1}{2}}(1))\psi_{1\,\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{2}{3}0}(3)\\&+\psi_{-\frac{2}{3}0}(1)(\hat{T}_-(2)\psi_{1\,\frac{1}{2}}(2))\psi_{1\,\frac{1}{2}}(3)+\psi_{1\,\frac{1}{2}}(1)(\hat{T}_-(2)\psi_{-\frac{2}{3}0}(2))\psi_{1\,\frac{1}{2}}(3)\\&+\psi_{1\,\frac{1}{2}}(1)(\hat{T}_-(2)\psi_{1\,\frac{1}{2}}(2))\psi_{-\frac{2}{3}0}(3)+\psi_{-\frac{2}{3}0}(1)\psi_{1\,\frac{1}{2}}(2)(\hat{T}_-(3)\psi_{1\,\frac{1}{2}}(3))\\&+\psi_{1\,\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{2}{3}0}(2)(\hat{T}_-(3)\psi_{1\,\frac{1}{2}}(3))+\psi_{1\,\frac{1}{2}}(1)\psi_{1\,\frac{1}{2}}(2)(\hat{T}_-(3)\psi_{-\frac{2}{3}0}(3))\}\end{aligned} \tag{17}$$

$$=\frac{N}{\sqrt{3}}\cdot\chi\cdot\{0+\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{2}{3}0}(2)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3)+\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{2}{3}0}(3)$$
$$+\psi_{-\frac{2}{3}0}(1)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3)+0+\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{2}{3}0}(3)$$
$$+\psi_{-\frac{2}{3}0}(1)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3)+\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{2}{3}0}(2)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3)+0\} \tag{18}$$

归一化条件导致

$$1=\langle\Sigma^{*0}|\Sigma^{*0}\rangle=\langle[\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{2}{3}0}(2)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3)+\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{2}{3}0}(3)$$
$$+\psi_{-\frac{2}{3}0}(1)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3)+\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{2}{3}0}(3)+\psi_{-\frac{2}{3}0}(1)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3)$$
$$+\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{2}{3}0}(2)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3)]\cdot\chi|[\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{2}{3}0}(2)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3)$$
$$+\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{2}{3}0}(3)+\psi_{-\frac{2}{3}0}(1)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3)$$
$$+\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{2}{3}0}(3)+\psi_{-\frac{2}{3}0}(1)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3)$$
$$+\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{2}{3}0}(2)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3)]\cdot\chi\rangle\cdot\frac{|N|^2}{3}$$
$$=(1+0+0+0+0+0+0+0+1+0+0+0+0+0+0+0+1$$
$$+0+0+0+0+0+0+0+1+0+0+0+0+0+0+0+1$$
$$+0+0+0+0+0+0+0+1)\frac{|N|^2}{3}=2|N|^2$$

这样 $N=1/\sqrt{2}$,因此

$$|\Sigma^{*0}\rangle=\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\{\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{2}{3}0}(2)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3)+\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{2}{3}0}(3)$$
$$+\psi_{-\frac{2}{3}0}(1)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3)+\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{2}{3}0}(3)$$
$$+\psi_{-\frac{2}{3}0}(1)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3)+\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{2}{3}0}(2)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3)\}\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)$$

另一方面

$$|\Sigma^{*0}\rangle=\tilde{N}\hat{V}_{--}|\Delta^{+}\rangle=\tilde{N}\hat{V}_{-}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\{\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3)\right.$$
$$\left.+\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3)+\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3)\}\cdot\chi\right]$$
$$=\frac{\tilde{N}}{\sqrt{3}}\cdot\chi\cdot\{0+\psi_{-\frac{2}{3}0}(1)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3)+\psi_{-\frac{2}{3}0}(1)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3)$$
$$+\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{2}{3}0}(2)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3)+0+\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{2}{3}0}(2)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3)$$
$$+\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{2}{3}0}(3)+\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{2}{3}0}(3)+0\} \tag{19}$$

由此得到 $1=6|\tilde{N}|^2/3$,就是 $\tilde{N}=1/\sqrt{2}$;结果该函数和上面的函数一样.由同样的方法我们确认

$$|\Sigma^{*0}\rangle=\tilde{\tilde{N}}\hat{U}_{-}|\Delta^{0}\rangle=\frac{\tilde{\tilde{N}}}{\sqrt{3}}\cdot\chi\cdot\{(\hat{U}_{-}(1)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1))\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3)$$
$$+(\hat{U}_{-}(1)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1))\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3)+(\hat{U}_{-}(1)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1))\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3)$$
$$+\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1)(\hat{U}_{-}(2)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2))\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3)+\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1)(\hat{U}_{-}(2)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2))\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3)$$
$$+\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1)(\hat{U}_{-}(2)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2))\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3)+\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2)(\hat{U}_{-}(3)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3)$$

$$+\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2)(\hat{U}_-(3)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3))+\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2)(\hat{U}_-(3)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3))\}$$

$$=\frac{\tilde{\tilde{N}}}{\sqrt{3}}\cdot\chi\cdot\{\psi_{-\frac{2}{3}0}(1)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3)+\psi_{-\frac{2}{3}0}(1)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3)$$

$$+\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{2}{3}0}(2)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(3)+\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{2}{3}0}(2)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3)$$

$$+\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{2}{3}0}(3)+\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{2}{3}0}(3)\}\tag{20}$$

它经过归一化给出同一函数. 现在我们由

$$\begin{aligned}|\Sigma^{*-}\rangle=N\hat{U}_-|\Delta^-\rangle=&N\cdot\{(\hat{U}_-(1)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1))\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3)\\&+\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1)(\hat{U}_-(2)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3)\\&+\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2)(\hat{U}_-(3)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3))\}\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)\\=&N\cdot\{\psi_{-\frac{2}{3}0}(1)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3)+\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{2}{3}0}(2)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3)\\&+\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{2}{3}0}(3)\}\cdot\chi\end{aligned}\tag{21}$$

计算$|\Sigma^{*-}\rangle$,归一化后得出

$$1=\langle\Sigma^{*-}|\Sigma^{*-}\rangle=N^2\cdot3\quad\text{即 }N=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned}|\Sigma^{*-}\rangle=&\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\{\psi_{-\frac{2}{3}0}(1)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3)+\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{2}{3}0}(2)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3)\\&+\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{2}{3}0}(3)\}\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)\end{aligned}\tag{22}$$

计算$\hat{T}_-|\Sigma^{*0}\rangle$或$\hat{V}_-|\Delta^0\rangle$给出同样结果.

最后还要计算$|\Xi^{*-}\rangle$. 最容易得到它的方法是

$$\begin{aligned}|\Xi^{*-}\rangle=&N\hat{U}_+|\Omega^-\rangle\\=&N\cdot\{(\hat{U}_+(1)\psi_{-\frac{2}{3}0}(1))\psi_{-\frac{2}{3}0}(2)\psi_{-\frac{2}{3}0}(3)+\psi_{-\frac{2}{3}0}(1)(\hat{U}_+(2)\psi_{-\frac{2}{3}0}(2))\psi_{-\frac{2}{3}0}(3)\\&+\psi_{-\frac{2}{3}0}(1)\psi_{-\frac{2}{3}0}(2)(\hat{U}_+(3)\psi_{-\frac{2}{3}0}(3))\}\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)\\=&N\cdot\{\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{2}{3}0}(2)\psi_{-\frac{2}{3}0}(3)+\psi_{-\frac{2}{3}0}(1)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{2}{3}0}(3)\\&+\psi_{-\frac{2}{3}0}(1)\psi_{-\frac{2}{3}0}(2)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3)\}\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)\end{aligned}\tag{23}$$

归一化

$$1=\langle\Xi^{*-}|\Xi^{*-}\rangle=|N|^2\cdot3,\qquad N=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned}|\Xi^{*-}\rangle=&\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\{\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(1)\psi_{-\frac{2}{3}0}(2)\psi_{-\frac{2}{3}0}(3)+\psi_{-\frac{2}{3}0}(1)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(2)\psi_{-\frac{2}{3}0}(3)\\&+\psi_{-\frac{2}{3}0}(1)\psi_{-\frac{2}{3}0}(2)\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}(3)\}\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)\end{aligned}\tag{24}$$

现在我们归并所有的波函数,利用缩写

$$\psi_{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}=u_\uparrow;\quad\psi_{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}=d_\uparrow;\quad\psi_{-\frac{2}{3}0}\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}=s_\uparrow\tag{25}$$

考虑到内在的次序,即 udu=u(1)d(2)u(3)等等,我们得出

$$|\Delta^{++}\rangle=u_\uparrow u_\uparrow u_\uparrow$$

$$|\Delta^+\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(d\uparrow u\uparrow u\uparrow+u\uparrow d\uparrow u\uparrow+u\uparrow u\uparrow d\uparrow)$$

$$|\Delta^0\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(d\uparrow d\uparrow u\uparrow+d\uparrow u\uparrow d\uparrow+u\uparrow d\uparrow d\uparrow)$$

$$|\Delta^-\rangle=d\uparrow d\uparrow d\uparrow$$

$$|\Sigma^{*+}\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(s\uparrow u\uparrow u\uparrow+u\uparrow s\uparrow u\uparrow+u\uparrow u\uparrow s\uparrow)$$

$$|\Sigma^{*0}\rangle=\frac{1}{\sqrt{6}}(s\uparrow d\uparrow u\uparrow+s\uparrow u\uparrow d\uparrow+d\uparrow s\uparrow u\uparrow+d\uparrow u\uparrow s\uparrow+u\uparrow s\uparrow d\uparrow+u\uparrow d\uparrow s\uparrow)$$

$$|\Sigma^{*-}\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(s\uparrow d\uparrow d\uparrow+d\uparrow s\uparrow d\uparrow+d\uparrow d\uparrow s\uparrow)$$

$$|\Xi^{*0}\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(s\uparrow s\uparrow u\uparrow+s\uparrow u\uparrow s\uparrow+u\uparrow s\uparrow s\uparrow)$$

$$|\Xi^{*-}\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(s\uparrow s\uparrow d\uparrow+s\uparrow d\uparrow s\uparrow+d\uparrow s\uparrow s\uparrow)$$

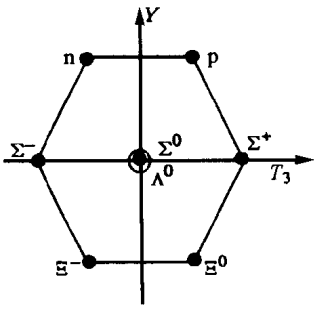
$$|\Omega^-\rangle=s\uparrow s\uparrow s\uparrow \tag{26}$$

要构造有不同自旋投影 j_3 的粒子,只需要重新计算波函数的不同的自旋部分.(**练习 8.14 完**)

练习 8.15 构造重子八重态的自旋-味道波函数

问题 在SU(3)×SU(2)框架内构造重子八重态的波函数(也即作为同位旋、超荷和自旋本征函数的重子波函数).

解 **a. 重子八重态和位移算符的作用.** 从例 6.3(看图)我们已经知道在 Y-T_3 平面中的重子八重态.从第 7 章,特别是由 SU(3)子代数的考虑中我们知道位移算符的作用.这再一次表现在下面的图中.



重子八重态

一个位移算符应用到重子八重态的一个任意状态,按照该算符的位移方向给出邻近的状态.如果它是该八重态的状态,我们就得到相应粒子的波函数.但是如果这个位移穿出该八重态的边界,那么这个波函数为 0.构造八重态的双重占据点(这只出现在 Y-T_3 平面的原点)的波函数将被分开来考虑.这里我们知道(从关于内壳格点状态数的研究,第 7 章)如果从 Σ^+ 开始应用 $\hat{T}_-$ 或算符组合 $\hat{U}_+\hat{V}_-$,我们得到两个不同状态.在前一个情况我们得到 Σ^0,而后一情况得到 Λ^0.在我们开始构造波函数之前,有两件重要的事要考虑:

b. 位移算符的明确形式:每个重子由三个夸克组成.一般来说它的波函数由夸克波函数的乘积的线性组合构成,该乘积受到可能的重子量子数 Y,T,T_3 的限制(开始我们不注意自旋):

$$\psi_B(\boldsymbol{r})=\sum_i \lambda_i(q_{t^1,t_3^1,y^1}(\boldsymbol{r}_1)\cdot q_{t^2,t_3^2,y^2}(\boldsymbol{r}_2)\cdot q_{t^3,t_3^3,y^3}(\boldsymbol{r}_3))_i \tag{1}$$

括号$(\cdots)_i$ 指出第 i 个可能的三夸克波函数;$q_{t^jt_3^jy^j}(j)$是第 j 个夸克带有量子数 t^j,t_3^j,y^j(在下面我们经常使用共同的缩写:$q_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{3}}$为$|u\rangle$,$q_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{3}}$为$|d\rangle$和$q_{00-\frac{2}{3}}$为$|s\rangle$).在开始的情况 λ_i 是任意的复数.

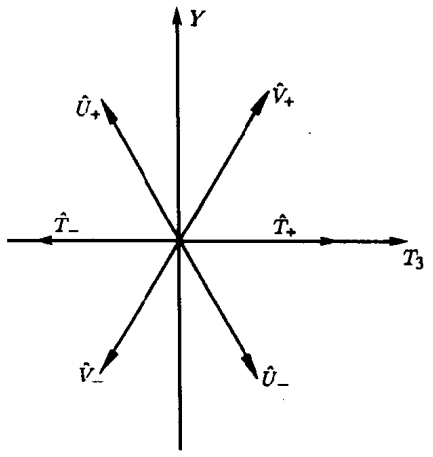
从(1)我们看出在现实中，重子波函数是一个多体波函数. 因此一个算符(例如一个位移算符)，它作用在重子波函数空间，也是一个多体算符，因而

$$\hat{O}_B=\hat{O}_1+\hat{O}_2+\hat{O}_3 \tag{2}$$

$\hat{O}_j$ 是仅作用在相应夸克波函数 $q_{t_j t_3^j y^j}(j)$①上的算符. 这表示

$$\begin{aligned}\hat{O}_B\psi_B(\boldsymbol{r})&=\sum_i\lambda_i\hat{O}_B(q_1(\boldsymbol{r}_1)q_2(\boldsymbol{r}_2)q_3(\boldsymbol{r}_3))_i\\&=\sum_i\lambda_i\{(\hat{O}_1q_1(\boldsymbol{r}_1))q_2(\boldsymbol{r}_1)q_3(\boldsymbol{r}_3)\\&\quad+q_1(\boldsymbol{r}_1)(\hat{O}_2q_2(\boldsymbol{r}_2))q_3(\boldsymbol{r}_3)\\&\quad+q_1(\boldsymbol{r}_1)q_2(\boldsymbol{r}_2)(\hat{O}_3q_3(\boldsymbol{r}_3))\}_i\end{aligned} \tag{3}$$

(这儿我们缩写 $(t^i t_3^i y^i)$ 为 i).



位移算符的作用

最后我们必须考虑算符作用于上的这个函数：

c. 带有自旋分量的重子波函数的形式：忽略了自旋，波函数为形式(1). 如果我们包括自旋，初看起来这个波函数将是非常复杂的. 正如前面已经表明的(参看例 8.9 的脚注)，总波函数是波函数(1)和自旋波函数的直积，并被定义为

$$\begin{aligned}\psi_B(\boldsymbol{r})\otimes\chi(\boldsymbol{r})&=\sum_i\lambda_i(q_1(\boldsymbol{r}_1)q_2(\boldsymbol{r}_2)q_3(\boldsymbol{r}_3))_i\otimes\sum_j\lambda_j(\chi_{\frac12 m_s^1}(1)\chi_{\frac12 m_s^2}(2)\chi_{\frac12 m_s^3}(3))\\&=\sum_k\lambda_k(q_1\otimes\chi_{\frac12 m_s^1}(1)\cdot q_2\otimes\chi_{\frac12 m_s^2}(2)\cdot q_3\otimes\chi_{\frac12 m_s^3}(3))_k\end{aligned} \tag{4}$$

这里 ψ_B 是一个在同位旋和超荷本征函数空间中的函数，χ 是一个自旋本征函数空间中的函数.

显著简化计算的一点是：SU(3)位移算符不影响自旋波函数. 因此应用位移算符之一到属于八重态的任一函数不改变自旋部分. 这样我们可以从一开始确定自旋投影，而在整个计算中让它不改变.

因为夸克有自旋 $s=\frac12$，其投影为 $m_s=\pm\frac12$，三个夸克的耦合对该重子提供总自旋 $J_z=\pm\frac32,\pm\frac12$. 还有我们从例 6.3 知道所有八重态的重子有自旋 $J=\frac12$，也即 $J_z=\pm\frac12$(另一方面重子共振十重态有自旋 $J=\frac32$). 因此我们只要考虑 $J_z=\frac12$ 和 $J_z=-\frac12$ 两种情况，又由于波函数的自旋部分在应用位移算符时是不改变的，我们可以从一开始就限制我们到 $J_z=\pm\frac12$. 另外的情况能类似地处理.

为了构造一个波函数我们必须先计算一个初始态. 其余的状态能够应用位移算符产生出来.

d. 第一个重子态的构造：我们选质子波函数为初始态. 我们知道在 SU(3)的框架内质子的夸克内涵为两个 u 夸克和一个 d 夸克(或者是这些态的一个线性组合，如果该波函数必须有特定的对称性质的话). 在 SU(3)×SU(2)的框架内，它的夸克内涵必须是三个夸克波函数

$$|u_\uparrow\rangle:=|u\rangle\otimes\chi_{\frac12\frac12}\quad;\quad|u_\downarrow\rangle:=|u\rangle\otimes\chi_{\frac12-\frac12}\quad;\quad|d_\uparrow\rangle\text{和}|d_\downarrow\rangle$$

乘积的一个线性组合(这里两个带自旋的 u 夸克总是耦合于一个带自旋的 d 夸克. 进而 $J=J_z=\frac12$).

为了从这些夸克产生一个这种类型的波函数，我们必须应用第二章中角动量耦合的方法. 首先我们耦合 $|u_\uparrow\rangle$ 和 $|u_\uparrow\rangle$ 到 $(uu)_{J_2=1}^{J=1}=|u_\uparrow u_\uparrow\rangle$，然后这结果又与 $|d_\downarrow\rangle$ 耦合(使得给出 $J_z=\frac12$ 的状态). 同样 $|u_\uparrow\rangle$ 和 $|u_\downarrow\rangle$ 耦合到 $(uu)_{J_z=0}^{J=1}$ 而

① 看此丛书《量子力学：导论》北京大学出版社，2000.

结果又与$|d_\uparrow\rangle$耦合. 为了极大的简单性我们略去了宗量r_1,r_2,r_3,夸克的次序就相应于宗量的次序,因此有根本的重要性. 放在第一位的夸克有量子数t^1,t_3^1,y^1和相应的波函数的宗量r_1,第二夸克被t_1^2,t_3^2,y^2等等代表.

因此

$$\begin{aligned}(uu)_0^1 &= \sum_{m_s,m_s'}\left(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 1\ \middle|\ m_s m_s' 0\right)(|u(r_1)\rangle\otimes\chi_{\frac{1}{2}m_s}(1))(|u(r_2)\rangle\otimes\chi_{\frac{1}{2}m_s}(2))\\ &=\left(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 1\ \middle|\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ 0\right)|u_\uparrow u_\downarrow\rangle+\left(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 1\ \middle|\ -\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 0\right)|u_\downarrow u_\uparrow\rangle\\ &=\frac{1}{\sqrt{2}}(|u_\uparrow u_\downarrow\rangle+|u_\downarrow u_\uparrow\rangle)\end{aligned}$$

导致

$$\begin{aligned}|p_\uparrow\rangle &=\left(1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \middle|\ 1\ -\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right)|u_\uparrow u_\uparrow d_\downarrow\rangle+\left(1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \middle|\ 0\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(|u_\uparrow u_\downarrow d_\uparrow\rangle+|u_\downarrow u_\uparrow d_\uparrow\rangle)\\ &=\sqrt{\frac{2}{3}}|u_\uparrow u_\uparrow d_\downarrow\rangle-\frac{1}{\sqrt{6}}(|u_\uparrow u_\downarrow d_\uparrow\rangle+|u_\downarrow u_\uparrow d_\uparrow\rangle)\end{aligned}\tag{5}$$

该波函数是正确地归一化的,但是因为重子有偶字称(参看例 6.3)我们必须外加要求波函数相对于夸克交换是对称的. 因此我们必须对称化该函数.

一个任意的波函数能够应用对称化算符(参看第 9 章)来对称化. 对三体体系,总的对称化算符定义为对所有三个粒子置换的和

$$\hat{S}_{123}=\mathbb{1}+\hat{P}_{12}+\hat{P}_{13}+\hat{P}_{23}+\hat{P}_{13}\hat{P}_{12}+\hat{P}_{12}\hat{P}_{13}\tag{6}$$

其中$\hat{P}_{ij}$代表交换第i个和第j个粒子的算符. 因此总的对称的质子波函数为

$$\begin{aligned}|p_\uparrow\rangle =&N\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\{2|u_\uparrow u_\uparrow d_\downarrow\rangle-|u_\uparrow u_\downarrow d_\uparrow\rangle-|u_\downarrow u_\uparrow d_\uparrow\rangle+2|u_\uparrow u_\uparrow d_\downarrow\rangle\\ &-|u_\downarrow u_\uparrow d_\uparrow\rangle-|u_\uparrow u_\downarrow d_\uparrow\rangle+2|d_\downarrow u_\uparrow u_\uparrow\rangle-|d_\uparrow u_\downarrow u_\uparrow\rangle-|d_\uparrow u_\uparrow u_\downarrow\rangle\\ &+2|u_\uparrow d_\downarrow d_\uparrow\rangle-|u_\uparrow d_\uparrow u_\downarrow\rangle-|u_\downarrow d_\uparrow u_\uparrow\rangle+2|d_\downarrow u_\uparrow u_\uparrow\rangle-|d_\uparrow u_\uparrow u_\downarrow\rangle\\ &-|d_\uparrow u_\downarrow u_\uparrow\rangle+2|u_\uparrow d_\downarrow u_\uparrow\rangle-|u_\downarrow d_\uparrow u_\uparrow\rangle-|u_\uparrow d_\uparrow u_\downarrow\rangle\}\\ |p_\uparrow\rangle =&\frac{1}{\sqrt{18}}\cdot\{2|u_\uparrow u_\uparrow d_\downarrow\rangle+2|d_\downarrow u_\uparrow u_\uparrow\rangle+2|u_\uparrow d_\downarrow u_\uparrow\rangle-|u_\uparrow u_\downarrow d_\uparrow\rangle\\ &-|d_\uparrow u_\downarrow u_\uparrow\rangle-|u_\uparrow d_\uparrow u_\downarrow\rangle-|u_\downarrow u_\uparrow d_\uparrow\rangle-|d_\uparrow u_\uparrow u_\downarrow\rangle-|u_\downarrow d_\uparrow u_\uparrow\rangle\}\end{aligned}\tag{7}$$

如果我们取$\langle p_\uparrow|p_\uparrow\rangle=1$,则归一化导致$N=1/\sqrt{12}$(对于归一化波函数看本练习的小节 e).

很容易证明这个波函数对于交换任何两个夸克是完全对称的.

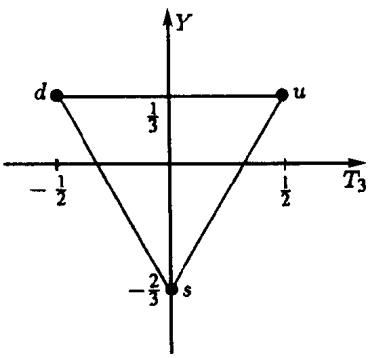
e. 其他重子态的构造. 从质子波函数开始我们照本练习的小节 a 来构造别的重子波函数. 因此中子波函数为

$$\begin{aligned}|n_\uparrow\rangle =&N\cdot\hat{T}_-|p_\uparrow\rangle=N\cdot\sum_{i=1}^{3}\hat{T}_-\cdot\frac{1}{\sqrt{18}}\{2|u_\uparrow u_\uparrow d_\downarrow\rangle+2|d_\downarrow u_\uparrow u_\uparrow\rangle\\ &+2|u_\uparrow d_\downarrow u_\uparrow\rangle-|u_\uparrow u_\downarrow u_\uparrow\rangle-|d_\uparrow u_\downarrow u_\uparrow\rangle-|u_\uparrow d_\uparrow u_\downarrow\rangle\\ &-|u_\downarrow u_\uparrow d_\uparrow\rangle-|d_\uparrow u_\uparrow u_\downarrow\rangle-|u_\downarrow d_\uparrow u_\uparrow\rangle\}\\ =&\frac{N}{\sqrt{18}}\cdot\{2|(\hat{T}_-(1)u)_\uparrow u_\uparrow d_\downarrow\rangle+2|u_\uparrow(\hat{T}_-(2)u)_\uparrow d_\downarrow\rangle+2|u_\uparrow u_\uparrow(\hat{T}_-(3)d)_\downarrow\rangle\\ &+2|(\hat{T}_-(1)d)_\downarrow u_\uparrow u_\uparrow\rangle+2|d_\downarrow(\hat{T}_-(2)u)_\uparrow u_\uparrow\rangle+2|d_\downarrow u_\uparrow(\hat{T}_-(3)u)_\uparrow\rangle\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+2|(\hat{T}_-(1)\mathrm{u})_\uparrow \mathrm{d}_\downarrow \mathrm{u}_\uparrow\rangle+2|\mathrm{u}_\uparrow(\hat{T}_-(2)\mathrm{d})_\downarrow \mathrm{u}_\uparrow\rangle+2|\mathrm{u}_\uparrow \mathrm{d}_\downarrow(\hat{T}_-(3)\mathrm{u})_\uparrow\rangle\\
&-|(\hat{T}_-(1)\mathrm{u})_\uparrow \mathrm{u}_\downarrow \mathrm{d}_\uparrow\rangle-|\mathrm{u}_\uparrow(\hat{T}_-(2)\mathrm{u})_\downarrow \mathrm{d}_\uparrow\rangle-|\mathrm{u}_\uparrow \mathrm{u}_\downarrow(\hat{T}_-(3)\mathrm{d})_\uparrow\rangle\\
&-|(\hat{T}_-(1)\mathrm{d})_\uparrow \mathrm{u}_\downarrow \mathrm{u}_\uparrow\rangle-|\mathrm{d}_\uparrow(\hat{T}_-(2)\mathrm{u})_\downarrow \mathrm{u}_\uparrow\rangle-|\mathrm{d}_\uparrow \mathrm{u}_\downarrow(\hat{T}_-(3)\mathrm{u})_\uparrow\rangle\\
&-|(\hat{T}_-(1)\mathrm{u})_\uparrow \mathrm{d}_\uparrow \mathrm{u}_\downarrow\rangle-|\mathrm{u}_\uparrow(\hat{T}_-(2)\mathrm{d})_\uparrow \mathrm{u}_\downarrow\rangle-|\mathrm{u}_\uparrow \mathrm{d}_\uparrow(\hat{T}_-(3)\mathrm{u})_\downarrow\rangle\\
&-|(\hat{T}_-(1)\mathrm{u})_\downarrow \mathrm{u}_\uparrow \mathrm{d}_\uparrow\rangle-|\mathrm{u}_\downarrow(\hat{T}_-(2)\mathrm{u})_\uparrow \mathrm{d}_\uparrow\rangle-|\mathrm{u}_\downarrow \mathrm{u}_\uparrow(\hat{T}_-(3)\mathrm{d})_\uparrow\rangle\\
&-|(\hat{T}_-(1)\mathrm{d})_\downarrow \mathrm{u}_\uparrow \mathrm{u}_\uparrow\rangle-|\mathrm{d}_\downarrow(\hat{T}_-(2)\mathrm{u})_\uparrow \mathrm{u}_\uparrow\rangle-|\mathrm{d}_\downarrow \mathrm{u}_\uparrow(\hat{T}_-(3)\mathrm{u})_\uparrow\rangle\\
&-|(\hat{T}_-(1)\mathrm{u})_\downarrow \mathrm{d}_\uparrow \mathrm{u}_\uparrow\rangle-|\mathrm{u}_\downarrow(\hat{T}_-(2)\mathrm{d})_\uparrow \mathrm{u}_\uparrow\rangle-|\mathrm{u}_\downarrow \mathrm{d}_\uparrow(\hat{T}_-(3)\mathrm{u})_\uparrow\rangle\}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

从基本三重态的结构(看下面的图)和位移算符的作用，我们可以看出诸如 $\hat{T}_-(i)q_i$ 的项：

$$\hat{T}_-(i)|\mathrm{u}_i\rangle=|\mathrm{d}_i\rangle\quad,\quad \hat{T}\ (i)|\mathrm{d}_i\rangle=0$$



基本三重态

这就得出

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{n}_\uparrow\rangle=&\frac{N}{\sqrt{18}}\cdot\{2|\mathrm{d}_\uparrow \mathrm{u}_\downarrow \mathrm{d}_\uparrow\rangle\\
&+2|\mathrm{u}_\uparrow \mathrm{d}_\uparrow \mathrm{d}_\downarrow\rangle+2|\mathrm{d}_\downarrow \mathrm{d}_\uparrow \mathrm{u}_\uparrow\rangle+2|\mathrm{d}_\downarrow \mathrm{u}_\uparrow \mathrm{d}_\uparrow\rangle\\
&+2|\mathrm{d}_\uparrow \mathrm{d}_\downarrow \mathrm{u}_\uparrow\rangle+2|\mathrm{u}_\uparrow \mathrm{d}_\downarrow \mathrm{d}_\uparrow\rangle\\
&-|\mathrm{d}_\uparrow \mathrm{u}_\downarrow \mathrm{d}_\uparrow\rangle-|\mathrm{u}_\uparrow \mathrm{d}_\downarrow \mathrm{d}_\uparrow\rangle-|\mathrm{d}_\uparrow \mathrm{d}_\downarrow \mathrm{u}_\uparrow\rangle\\
&-|\mathrm{d}_\uparrow \mathrm{u}_\downarrow \mathrm{d}_\uparrow\rangle-|\mathrm{d}_\uparrow \mathrm{d}_\uparrow \mathrm{u}_\downarrow\rangle\\
&-|\mathrm{u}_\uparrow \mathrm{d}_\uparrow \mathrm{d}_\downarrow\rangle-|\mathrm{d}_\downarrow \mathrm{u}_\uparrow \mathrm{d}_\uparrow\rangle-|\mathrm{u}_\downarrow \mathrm{d}_\uparrow \mathrm{d}_\uparrow\rangle\\
&-|\mathrm{d}_\uparrow \mathrm{d}_\uparrow \mathrm{u}_\downarrow\rangle-|\mathrm{d}_\uparrow \mathrm{u}_\uparrow \mathrm{d}_\downarrow\rangle\\
&-|\mathrm{d}_\downarrow \mathrm{d}_\uparrow \mathrm{u}_\uparrow\rangle-|\mathrm{u}_\downarrow \mathrm{d}_\uparrow \mathrm{d}_\uparrow\rangle\}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

总起来我们有

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{n}_\uparrow\rangle=&\frac{N}{\sqrt{18}}\cdot\{-2|\mathrm{d}_\uparrow \mathrm{d}_\uparrow \mathrm{u}_\downarrow\rangle-2|\mathrm{u}_\downarrow \mathrm{d}_\uparrow \mathrm{d}_\uparrow\rangle\\
&-2|\mathrm{d}_\uparrow \mathrm{u}_\downarrow \mathrm{d}_\uparrow\rangle+2|\mathrm{d}_\uparrow \mathrm{d}_\downarrow \mathrm{u}_\uparrow\rangle\\
&+|\mathrm{u}_\uparrow \mathrm{d}_\downarrow \mathrm{d}_\uparrow\rangle+|\mathrm{d}_\uparrow \mathrm{u}_\uparrow \mathrm{d}_\downarrow\rangle+|\mathrm{d}_\downarrow \mathrm{d}_\uparrow \mathrm{u}_\uparrow\rangle+|\mathrm{u}_\uparrow \mathrm{d}_\uparrow \mathrm{d}_\downarrow\rangle+|\mathrm{d}_\downarrow \mathrm{u}_\uparrow \mathrm{d}_\uparrow\rangle
\end{aligned}
\tag{10}
$$

而归一化因子由条件

$$\langle \mathrm{n}_\uparrow|\mathrm{n}_\uparrow\rangle=\int \psi_n^\dagger\,\psi_n \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}_1\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}_2\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}_3\overset{!}{=}1 \tag{11}$$

得到. 因为

$$
\begin{aligned}
&\int q_{t^1}^*{}_{,t'_3{}^1,y^1}\chi^\dagger_{\frac{1}{2}m'^1_s}(\boldsymbol{r}_1)q_{t'^2}^*{}_{,t'_3{}^2,y^2}\chi^\dagger_{\frac{1}{2}m'^2_s}(\boldsymbol{r}_2)q_{t'^3}^*{}_{,t'_3{}^3,y^3}\chi^\dagger_{\frac{1}{2}m'^3_s}(\boldsymbol{r}_3)q_{t^1,t^1_3,y^1}\chi_{\frac{1}{2}m^1_s}(\boldsymbol{r}_1)\\
&\times q_{t^2,t^2_3,y^2}\chi_{\frac{1}{2}m^2_s}(\boldsymbol{r}_2)q_{t^3,t^3_3,y^3}\chi_{\frac{1}{2}m^3_s}(\boldsymbol{r}_3)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}_1\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}_2\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}_3\\
=&\prod_{i=1}^3\int q_{t^i,t'_3{}^i,y^i}^*\chi^\dagger_{\frac{1}{2}m'^i_s}(\boldsymbol{r}_i)q_{t^i,t^i_3,y^i}\chi_{\frac{1}{2}m^i_s}(\boldsymbol{r}_i)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}_i\\
=&\prod_{i=1}^3\delta_{y^i,y^i}\delta_{t^i,t^i}\delta_{t^i_3,t'^i_3}\delta_{m^i_s,m'^i_s}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

然后得

$$1=\langle \mathrm{n}_\uparrow|\mathrm{n}_\uparrow\rangle=N^2\frac{1}{18}\{3\cdot 4+6\cdot 1\}=N^2$$

即 $N=\pm 1$.

如果我们取 $N=-1$,那么中子波函数有类似于质子波函数的形式:

$$|n_\uparrow\rangle=\frac{1}{\sqrt{18}}\cdot\{2|d_\uparrow d_\uparrow u_\downarrow\rangle+2|u_\uparrow d_\downarrow d_\uparrow\rangle+2|d_\uparrow u_\downarrow d_\uparrow\rangle-|d_\uparrow d_\downarrow u_\uparrow\rangle-|u_\uparrow u_\downarrow d_\uparrow\rangle$$
$$-|d_\uparrow u_\uparrow d_\downarrow\rangle-|d_\downarrow d_\uparrow u_\uparrow\rangle-|u_\uparrow d_\uparrow d_\downarrow\rangle-|d_\downarrow u_\uparrow d_\uparrow\rangle\} \tag{13}$$

我们类似地处理$|\Sigma^+_\uparrow\rangle$:通过在(8)中用 $\hat{U}_-$替代 $\hat{T}_-$和用相应的关系 $\hat{U}_-|d\rangle=|s\rangle$,$\hat{U}_-|u\rangle=0$, 我们马上可以写下

$$|\Sigma^+_\uparrow\rangle=U_-|p_\uparrow\rangle=\frac{1}{\sqrt{18}}\{2|u_\uparrow u_\uparrow s_\downarrow\rangle+2|s_\uparrow u_\downarrow u_\uparrow\rangle+2|u_\uparrow s_\downarrow u_\uparrow\rangle$$
$$-|u_\uparrow u_\downarrow s_\uparrow\rangle-|s_\uparrow u_\downarrow u_\uparrow\rangle-|u_\uparrow s_\uparrow u_\downarrow\rangle$$
$$-|u_\downarrow u_\uparrow s_\uparrow\rangle-|s_\uparrow u_\uparrow u_\downarrow\rangle-|u_\downarrow s_\uparrow u_\uparrow\rangle\} \tag{14}$$

我们选归一化常数使得$\langle\Sigma^+|\Sigma^+\rangle=1$.

进而

$$|\Sigma^0_\uparrow\rangle=\hat{T}_-|\Sigma^+_\uparrow\rangle=\frac{1}{6}\cdot\{2|d_\uparrow u_\uparrow s_\downarrow\rangle+2|u_\uparrow d_\uparrow s_\downarrow\rangle+2|s_\downarrow d_\uparrow u_\uparrow\rangle+2|s_\downarrow u_\uparrow d_\uparrow\rangle$$
$$-|d_\uparrow u_\downarrow s_\uparrow\rangle-|u_\uparrow d_\downarrow s_\uparrow\rangle-|s_\uparrow d_\downarrow u_\uparrow\rangle-|s_\uparrow u_\downarrow d_\uparrow\rangle$$
$$-|d_\downarrow u_\uparrow s_\uparrow\rangle-|u_\downarrow d_\uparrow s_\uparrow\rangle-|s_\uparrow d_\uparrow u_\downarrow\rangle-|s_\uparrow u_\uparrow d_\downarrow\rangle$$
$$+2|d_\uparrow s_\downarrow u_\uparrow\rangle+2|u_\uparrow s_\downarrow d_\uparrow\rangle-|d_\uparrow s_\uparrow u_\downarrow\rangle-|u_\uparrow s_\uparrow d_\downarrow\rangle$$
$$-|d_\downarrow s_\uparrow u_\uparrow\rangle-|u_\downarrow s_\uparrow d_\uparrow\rangle\} \tag{15}$$

原因是

$$\hat{T}_-|s\rangle=\hat{T}_-|d\rangle\equiv 0,\ \hat{T}_-|u\rangle=|d\rangle$$

$$|\Sigma^-_\uparrow\rangle=\hat{T}_-|\Sigma^0_\uparrow\rangle=\frac{N}{6}\cdot\{2|d_\uparrow d_\uparrow s_\downarrow\rangle+2|d_\uparrow d_\uparrow s_\downarrow\rangle+2|s_\downarrow d_\uparrow d_\uparrow\rangle+2|s_\downarrow d_\uparrow d_\uparrow\rangle$$
$$-|d_\uparrow d_\downarrow s_\uparrow\rangle-|d_\uparrow d_\downarrow s_\uparrow\rangle-|s_\uparrow d_\downarrow d_\uparrow\rangle-|s_\uparrow d_\downarrow d_\uparrow\rangle$$
$$-|d_\downarrow d_\uparrow s_\uparrow\rangle-|d_\downarrow d_\uparrow s_\uparrow\rangle-|s_\uparrow d_\downarrow d_\downarrow\rangle-|s_\uparrow d_\downarrow d_\downarrow\rangle$$
$$+2|d_\uparrow s_\downarrow d_\uparrow\rangle+2|d_\uparrow s_\downarrow d_\uparrow\rangle-|d_\uparrow s_\uparrow d_\downarrow\rangle-|d_\uparrow s_\downarrow d_\downarrow\rangle$$
$$-|d_\downarrow s_\uparrow d_\uparrow\rangle-|d_\downarrow s_\uparrow d_\uparrow\rangle\}$$

其中 $N=1/\sqrt{2}$,且

$$\hat{T}_-|u\rangle=|d\rangle,\ \hat{T}_-|s\rangle=\hat{T}_-|d\rangle\equiv 0$$

结果

$$|\Sigma^-_\uparrow\rangle=\frac{1}{\sqrt{18}}\cdot\{2|d_\uparrow d_\uparrow s_\downarrow\rangle+2|s_\downarrow d_\uparrow d_\uparrow\rangle+2|d_\uparrow s_\downarrow d_\uparrow\rangle$$
$$-|d_\uparrow d_\downarrow s_\uparrow\rangle-|s_\uparrow d_\downarrow d_\uparrow\rangle-|d_\uparrow s_\uparrow d_\downarrow\rangle-|d_\downarrow d_\uparrow s_\uparrow\rangle$$
$$-|s_\uparrow d_\uparrow d_\downarrow\rangle-|d_\downarrow s_\uparrow d_\uparrow\rangle\} \tag{16}$$

$$|\Xi^-_\uparrow\rangle=\hat{U}_-|\Sigma^-_\uparrow\rangle=\frac{N}{\sqrt{18}}\cdot\{2|s_\uparrow d_\uparrow s_\downarrow\rangle+2|d_\uparrow s_\uparrow s_\downarrow\rangle+2|s_\downarrow s_\uparrow d_\uparrow\rangle$$
$$+2|s_\downarrow d_\uparrow s_\uparrow\rangle-|s_\uparrow d_\downarrow s_\uparrow\rangle-|d_\uparrow s_\downarrow s_\uparrow\rangle-|s_\uparrow s_\downarrow d_\uparrow\rangle$$
$$-|s_\uparrow d_\uparrow s_\downarrow\rangle-|s_\downarrow d_\uparrow s_\uparrow\rangle-|d_\downarrow s_\uparrow s_\uparrow\rangle-|s_\uparrow s_\uparrow d_\downarrow\rangle$$
$$-|s_\uparrow d_\uparrow s_\downarrow\rangle+2|s_\uparrow s_\downarrow d_\uparrow\rangle+2|d_\uparrow s_\downarrow s_\uparrow\rangle-|s_\uparrow s_\uparrow d_\downarrow\rangle$$

$$-|s_\uparrow s_\uparrow d_\downarrow\rangle-|d_\uparrow s_\uparrow s_\downarrow\rangle-|s_\downarrow s_\uparrow d_\uparrow\rangle-|d_\downarrow s_\uparrow s_\uparrow\rangle\}$$

$$|\Xi_\uparrow^-\rangle=\frac{1}{\sqrt{18}}\cdot\{2|s_\uparrow s_\uparrow d_\downarrow\rangle+2|d_\downarrow s_\uparrow s_\uparrow\rangle+2|s_\uparrow d_\downarrow s_\uparrow\rangle$$
$$-|s_\uparrow s_\downarrow d_\uparrow\rangle-|d_\uparrow s_\downarrow s_\uparrow\rangle-|s_\downarrow d_\uparrow s_\uparrow\rangle-|s_\downarrow s_\uparrow d_\uparrow\rangle$$
$$-|d_\uparrow s_\uparrow s_\downarrow\rangle-|s_\uparrow d_\uparrow s_\downarrow\rangle\} \tag{17}$$

取 $N=-1$ 以产生与其他波函数形式上的类似. 类似地

$$|\Xi_\uparrow^0\rangle=\hat{T}_+|\Xi_\uparrow^-\rangle=\frac{1}{\sqrt{18}}\cdot\{2|s_\uparrow s_\uparrow u_\downarrow\rangle+2|u_\downarrow s_\uparrow s_\uparrow\rangle$$
$$+2|s_\uparrow u_\downarrow s_\uparrow\rangle-|s_\uparrow s_\downarrow u_\uparrow\rangle-|u_\uparrow s_\downarrow s_\uparrow\rangle-|s_\downarrow u_\uparrow s_\uparrow\rangle$$
$$|s_\downarrow s_\uparrow u_\uparrow\rangle-|u_\uparrow s_\uparrow s_\downarrow\rangle-|s_\uparrow u_\uparrow s_\downarrow\rangle \tag{18}$$

因为

$$\hat{T}_+|u\rangle=\hat{T}_+|s\rangle\equiv 0\quad,\quad \hat{T}_+|d\rangle=|u\rangle$$

为了构造$|\Lambda_\uparrow^0\rangle$,我们如本练习小节 a 中解释的那样,先构造 Y-T_3 图中心处的第二个状态:

$$|\Lambda_\uparrow^0\rangle=\hat{U}_+\hat{V}_-|\Sigma_\uparrow^+\rangle=\hat{U}_+|\Xi_\uparrow^0\rangle$$
$$=\frac{1}{6}\{2|d_\uparrow s_\uparrow u_\downarrow\rangle+2|s_\uparrow d_\uparrow u_\downarrow\rangle+2|u_\downarrow d_\uparrow s_\uparrow\rangle+2|u_\downarrow s_\uparrow d_\uparrow\rangle$$
$$-|d_\uparrow s_\downarrow u_\uparrow\rangle-|s_\uparrow d_\downarrow u_\uparrow\rangle-|u_\uparrow d_\downarrow s_\uparrow\rangle-|u_\uparrow s_\downarrow d_\uparrow\rangle$$
$$-|d_\downarrow s_\uparrow u_\uparrow\rangle-|s_\downarrow d_\uparrow u_\uparrow\rangle-|u_\uparrow d_\uparrow s_\downarrow\rangle-|u_\uparrow s_\downarrow d_\downarrow\rangle$$
$$+2|d_\uparrow u_\downarrow s_\uparrow\rangle+2|s_\uparrow u_\downarrow d_\uparrow\rangle-|d_\downarrow u_\uparrow s_\uparrow\rangle-|s_\downarrow u_\uparrow d_\uparrow\rangle$$
$$-|d_\uparrow u_\uparrow s_\downarrow\rangle-|s_\uparrow u_\uparrow d_\downarrow\rangle\} \tag{19}$$

因为

$$\hat{U}_+|d\rangle=\hat{U}_+|u\rangle\equiv 0\quad,\quad \hat{U}_+|s\rangle=|d\rangle$$

这个波函数类似于 Σ^0,然而这两个波函数是线性独立的. 为了得到物理的 Λ^0 波函数我们必须使函数(19)与 Σ^0(15)正交化.

按照通常的施密特正交化过程,这个正交的波函数$|\Lambda_\uparrow^0\rangle$被给出为

$$|\Lambda_\uparrow^0\rangle=N\cdot(|\tilde{\Lambda}_\uparrow^0\rangle-\langle\Sigma_\uparrow^0|\tilde{\Lambda}_\uparrow^0\rangle|\Sigma_\uparrow^0\rangle)$$

随后

$$\langle\Sigma_\uparrow^0|\Lambda_\uparrow^0\rangle=N\cdot(\langle\Sigma_\uparrow^0|\tilde{\Lambda}_\uparrow^0\rangle-\langle\Sigma_\uparrow^0|\tilde{\Lambda}_\uparrow^0\rangle\underbrace{\langle\Sigma_\uparrow^0|\Sigma_\uparrow^0\rangle}_{=1})=0 \tag{20}$$

明显地(因为(7)式)

$$\langle\Sigma_\uparrow^0|\tilde{\Lambda}_\uparrow^0\rangle=\frac{1}{36}\{-2-2+1\}\cdot 6=-\frac{18}{36}=-\frac{1}{2}$$

这样我们找出

$$|\Lambda_\uparrow^0\rangle=\frac{N}{6}\cdot\{2|d_\uparrow s_\uparrow u_\downarrow\rangle+2|s_\uparrow d_\uparrow u_\downarrow\rangle+2|u_\downarrow d_\uparrow s_\uparrow\rangle+2|u_\downarrow s_\uparrow d_\uparrow\rangle$$
$$+2|d_\uparrow u_\downarrow s_\uparrow\rangle+2|s_\uparrow u_\downarrow d_\uparrow\rangle+\frac{1}{2}(-|d_\uparrow s_\uparrow u_\downarrow\rangle-|s_\uparrow d_\uparrow u_\downarrow\rangle$$
$$-|u_\downarrow d_\uparrow s_\uparrow\rangle-|u_\downarrow s_\uparrow d_\uparrow\rangle-|d_\uparrow u_\downarrow s_\uparrow\rangle-|s_\uparrow u_\downarrow d_\uparrow\rangle-|d_\uparrow s_\downarrow u_\uparrow\rangle$$
$$-|s_\uparrow d_\downarrow u_\uparrow\rangle-|u_\uparrow d_\downarrow s_\uparrow\rangle-|u_\uparrow s_\downarrow d_\uparrow\rangle-|d_\downarrow u_\uparrow s_\uparrow\rangle-|s_\downarrow u_\uparrow d_\uparrow\rangle$$

$$+\frac{1}{2}(2|d_\uparrow s_\downarrow u_\uparrow\rangle)+\frac{1}{2}(-|s_\uparrow d_\downarrow u_\uparrow\rangle)+\frac{1}{2}(-|u_\uparrow d_\downarrow s_\uparrow\rangle)+\frac{1}{2}(2|u_\uparrow s_\downarrow d_\uparrow\rangle)$$

$$+\frac{1}{2}(-|d_\downarrow u_\uparrow s_\uparrow\rangle)+\frac{1}{2}(2|s_\downarrow u_\uparrow d_\uparrow\rangle)-|d_\downarrow s_\uparrow u_\uparrow\rangle-|s_\downarrow d_\uparrow u_\uparrow\rangle$$

$$-|u_\uparrow d_\uparrow s_\downarrow\rangle-|u_\uparrow s_\uparrow d_\downarrow\rangle-|d_\uparrow u_\uparrow s_\downarrow\rangle-|s_\uparrow u_\uparrow d_\downarrow\rangle+\frac{1}{2}(-|d_\downarrow s_\uparrow u_\uparrow\rangle)$$

$$+\frac{1}{2}(2|s_\downarrow d_\uparrow u_\uparrow\rangle)+\frac{1}{2}(2|u_\uparrow d_\uparrow s_\downarrow\rangle)+\frac{1}{2}(-|u_\uparrow s_\uparrow d_\downarrow\rangle)+\frac{1}{2}(2|d_\uparrow u_\uparrow s_\downarrow\rangle)$$

$$+\frac{1}{2}(-|s_\uparrow u_\uparrow d_\downarrow\rangle)\}$$

$$=\frac{N}{6}\cdot\left\{\frac{3}{2}(|d_\uparrow s_\uparrow u_\uparrow\rangle+|s_\uparrow d_\uparrow u_\uparrow\rangle+|u_\uparrow d_\uparrow s_\uparrow\rangle+|u_\uparrow s_\uparrow d_\uparrow\rangle+|d_\uparrow u_\uparrow s_\uparrow\rangle\right.$$

$$+|s_\uparrow u_\uparrow d_\downarrow\rangle)-\frac{3}{2}(|d_\downarrow s_\uparrow u_\uparrow\rangle+|s_\uparrow d_\downarrow u_\uparrow\rangle+|u_\uparrow d_\downarrow s_\uparrow\rangle$$

$$\left.+|u_\uparrow s_\uparrow d_\downarrow\rangle+|d_\downarrow u_\uparrow s_\uparrow\rangle+|s_\uparrow u_\uparrow d_\downarrow\rangle)\right\}$$

并经过归一化得到

$$|\Lambda_\uparrow^0\rangle=\frac{1}{\sqrt{12}}\cdot\{|d_\uparrow s_\uparrow u_\downarrow\rangle+|s_\uparrow d_\uparrow u_\downarrow\rangle+|u_\downarrow d_\uparrow s_\uparrow\rangle+|u_\downarrow s_\uparrow d_\uparrow\rangle+|d_\uparrow u_\downarrow s_\uparrow\rangle$$

$$+|s_\uparrow u_\downarrow d_\uparrow\rangle-|d_\downarrow s_\uparrow u_\uparrow\rangle-|s_\uparrow d_\downarrow u_\uparrow\rangle-|u_\uparrow d_\downarrow s_\uparrow\rangle$$

$$+|u_\uparrow s_\uparrow d_\downarrow\rangle-|d_\downarrow u_\uparrow s_\uparrow\rangle-|s_\downarrow u_\uparrow d_\uparrow\rangle\}\tag{21}$$

$|\Lambda_\uparrow^0\rangle$是从$|\tilde{\Lambda}_\uparrow^0\rangle$构造的正交波函数,归一化到 1. 它也是对于交换任意两个夸克完全对称的.(**练习 8.15 完**)

8.12 SU(6)中的质量公式

在 SU(6)框架内推广盖尔曼-大久保质量公式是容易的. 开始我们假设哈密顿量的对称破坏部分在自旋空间是一标量,即$[\hat{H}_{ms},S^2]=0$. 这样$\hat{H}_{ms}$在一个 SU(6)多重态内导致不同自旋粒子的质量分裂. 那么最简单的假设是$\hat{H}_{ms}\propto S^2$,通过它我们得到质量公式

$$M=a+bY+c[T(T+1)-\frac{1}{4}Y^2]+dS(S+1)$$

这个关系叫做古塞-拉地卡底(Cürsey-Radicati)质量公式①. 它对重子八重态和十重态成立(对五十六重态的所有粒子). 对 N,Λ,Σ,Σ* 和 Ξ* 确定这些常数我们得到

表 8.3 根据古塞-拉地卡底质量公式计算的质量与它们的实验值的比较

名称	计算质量 [MeV/c^2]	实验质量 [MeV/c^2]
Ξ	1331	1318
Δ	1251.2	1232
Ω^-	1664.9	1672.4

① 参看 F. Gürsey, L. A. Radicati: Phys. Rev. Lett. **13**, 173(1964).

$$a=1066.6\text{MeV}/c^2,\ b=-196.1\text{MeV}/c^2,$$
$$c=38.8\text{MeV}/c^2,\ d=65.3\text{MeV}/c^2$$

利用这些常数计算别的粒子质量与实验质量比较结果相当好(看表 8.3).

8.13　夸克模型中的磁矩

直到现在我们假设夸克的空间波函数具有轨道角动量 $l=0$,也即它们是束缚在一个 S 态. 然而,这意味着强子基态的磁矩应该是组分夸克的磁矩之和. 为此我们对每个夸克指定一个磁矩 $\mu_q(q=\text{u},\text{d},\text{s})$,它们的值尚未确定. 我们对总磁矩算符作出一个设想

$$\hat{\mu}=\sum_i \mu_q(i)\hat{\sigma}(i) \tag{8.86}$$

其中 $\frac{1}{2}\hat{\sigma}(i)$ 为强子中第 i 个夸克的自旋算符. 一个强子 $|h\rangle$ 测量的磁矩(静态的)是 μ 的 z 分量的期望值,即

$$\mu_h=\langle h|\sum_i \mu_q(i)\hat{\sigma}_z(i)|h\rangle \tag{8.87}$$

按定义 $|h\rangle$ 总是取最大自旋投影的状态. 这个关系可以用前面推出的强子波函数直接演示出来. 让我们看被 SU(6)波函数(参看练习 8.13,方程(7))描写的质子磁矩

$$|\text{p}_\downarrow\rangle=\frac{1}{\sqrt{18}}|2\text{u}_\uparrow\text{u}_\uparrow\text{d}_\downarrow-\text{u}_\uparrow\text{u}_\downarrow\text{d}_\uparrow-\text{u}_\downarrow\text{u}_\uparrow\text{d}_\uparrow+\text{置换}\rangle$$

把它代入我们得到

$$\begin{aligned}\mu_p=&\frac{3}{18}\Big[4\Big\langle \text{u}_\uparrow\text{u}_\uparrow\text{d}_\downarrow\Big|\sum_i\mu_q(i)\hat{\sigma}_z(i)\Big|\text{u}_\uparrow\text{u}_\uparrow\text{d}_\downarrow\Big\rangle\\&+\Big\langle \text{u}_\uparrow\text{u}_\downarrow\text{d}_\uparrow\Big|\sum_i\mu_q(i)\hat{\sigma}_z(i)\Big|\text{u}_\uparrow\text{u}_\downarrow\text{d}_\uparrow\Big\rangle+\Big\langle \text{u}_\downarrow\text{u}_\uparrow\text{d}_\uparrow\Big|\sum_i\mu_q(i)\hat{\sigma}_z(i)\Big|\text{u}_\downarrow\text{u}_\uparrow\text{d}_\uparrow\Big\rangle\Big]\\=&\frac{3}{18}[4(\mu_\text{u}+\mu_\text{u}-\mu_\text{d})+(\mu_\text{u}-\mu_\text{u}+\mu_\text{d})+(-\mu_\text{u}+\mu_\text{u}+\mu_\text{d})]\\=&\frac{3}{18}[8(\mu_\text{u}-2\mu_\text{d})=\frac{1}{3}(4\mu_\text{u}-\mu_\text{d})\end{aligned}$$

中子磁矩以同样方式得出(交换 u 和 d),结果为

$$\mu_\text{n}=\frac{1}{3}(4\mu_\text{d}-\mu_\text{u})$$

由这两个结果与实验值 μ_p 和 μ_n 比较可以定出 μ_u 和 μ_d. 我们可以推导一个独立的关系,如果我们假设夸克的磁矩正比于它们的电荷(参看(8.14)),并且我们忽略质量差,即有

$$\mu_\text{d}=\frac{-1/3}{2/3}\mu_\text{u}=-\frac{1}{2}\mu_\text{u}$$

这样我们得到预言

$$\left(\frac{\mu_n}{\mu_p}\right)_{理论}=\frac{4\mu_d-\mu_u}{4\mu_u-\mu_d}=-\frac{2}{3}$$

而$(\mu_n/\mu_p)_{exp}=-0.685$.考虑到假设的简单性,这个结果符合得相当好,并且是非相对论可加性的夸克模型的一个主要成功之处.

反过来我们可以从实验值计算夸克的磁矩,以核磁子为单位;正是

$$\mu_u=\frac{1}{5}(\mu_n+4\mu_p)=1.852\mu_0,$$

$$\mu_d=\frac{1}{5}(\mu_p+4\mu_n)=-0.972\mu_0,$$

$$\mu_s=\mu_\Lambda=-0.613\mu_0,$$

其中 $\mu_0=\frac{e\hbar}{2Mc}$. (8.88a)

这儿 M 是质子质量.最后一个值是用 Λ^0 的波函数得出的.利用这些值可以对有足够长寿命的其他重子作出予言.在表 8.4 中这些结果和能得到的实验数据进行了比较.

表 8.4 几个重子磁矩的预言和测量值的比较

重子	μ_h	预言 $[\mu_0]$	实验 $[\mu_0]$*
Σ^+	$\frac{4}{3}\mu_u-\frac{1}{3}\mu_s$	2.67	2.42 ± 0.05
Σ^0	$\frac{2}{3}(\mu_u+\mu_d)-\frac{1}{3}\mu_s$	0.76	—
Σ^-	$\frac{4}{3}\mu_d-\frac{1}{3}\mu_s$	−1.09	-1.160 ± 0.025
Ξ^0	$\frac{4}{3}\mu_s-\frac{1}{3}\mu_u$	−1.44	-1.250 ± 0.014
Ξ^-	$\frac{4}{3}\mu_s-\frac{1}{3}\mu_d$	−0.49	-0.6507 ± 0.0025

*来自 *the Review of Particle Properties* Phys. Rev. D45, Part 2 (1992)

显然这个结果是满意的.留下的偏差可能可以归结于 d 波对轨道角动量混合的贡献.进一步,如果我们假设夸克是基本费米子,有 g 因子 2,关系

$$\mu_q=\frac{Qe\hbar}{2M_qc} \tag{8.88b}$$

应对它们的磁矩成立.由此就得出夸克的质量为

$$M_u=338\text{MeV}\ ,\ M_d=322\text{MeV}\ ,\ M_s=510\text{MeV} \tag{8.89}$$

这些质量惊人地小,特别是因为即使在最大的加速器上也没有发现质量低于 $100\text{GeV}/c^2$ 可以解释为夸克的粒子.事实上从未发现过分数电荷$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$的粒子.因此解释为什么夸克只存在于强子内部,即所谓夸克禁闭的问题成为一个主要的理论问题.然而,相当可能,或早或迟,自由夸克会被发现,而它们的质量可以远大于 $100\text{GeV}/c^2$,一个今天的加速器还不能达到的区域.对

自由夸克这样大的一个质量并不与我们声称 $M_q \approx 300\text{MeV}/c^2$ 矛盾，因为夸克在强子中是束缚粒子，它们的质量由于束缚能而减小（更准确些我们应该叫 M_q 值为能量本征值 E_q 而不是质量.）读者会注意到按强子的夸克组成，夸克质量(8.89)粗糙地加起来得到强子的质量. 这一事实代表了非相对论夸克模型的进一步成功. 它能被用来推导强子的质量公式，这一点并不以味道 SU(3)对称群为基础. E_q 通常被称为“价夸克的质量”.

8.14　介子和重子激发态

我们已经看到在以带自旋的夸克三重态为基础的 SU(6)框架内，0^- 和 1^- 介子可以被解释为成一个单态和一个[35]维表示的成员，因为这些表示能分解为 SU(3)的表示[1]（自旋 0），[8]（自旋 0），[1]（自旋 1）和[8]（自旋 1）. 类似地对重子[56]多重态分解为一个八重态和一个十重态.

下面我们想要关心激发的介子和重子态. 有两种方式来做这件事：

(a)我们想象由多于 2 或 3 个夸克组成的激发态（例如 $q\bar{q}q\bar{q}$ 作为介子或 $qqqq\bar{q}$ 作为重子），所谓异常夸克态，或

(b)我们保持 $q\bar{q}$ 和 qqq 结构而解释激发态为轨道角动量 $l \neq 0$ 的态.

作为开始，我们要检验第一个可能性.

8.14.1　多于三个夸克的组合

束缚的夸克-反夸克态的宇称为

$$\hat{P}|q\bar{q}\rangle = -(-1)^l|q\bar{q}\rangle$$

其中 l 表示该体系的轨道角动量. 在基态（$l=0$）夸克-反夸克对的宇称总是负的.

对此的一个例子是膺标介子（例 8.6）$J^P = 0^-$ 和矢量介子（例 8.9）$J^P = 1^-$.

如果我们坚持夸克们被束缚在 S 态（$l=0$）的概念，组合 $q\bar{q}q\bar{q}$ 允许构造正宇称的介子（$0^- \otimes 0^- \to 0^+$；$0^- \otimes 1^- \to 1^+$；$1^- \otimes 1^- \to 0^+, 1^+, 2^+$）. 如果每个 $q\bar{q}$ 是一个 SU(6)表示，我们得到以下的可能组合：

$$[6]\otimes[\bar{6}] = [1]\oplus[35], \quad [1]\oplus[1] = [1], \quad [1]\otimes[35] = [35],$$
$$[35]\otimes[35] = [1]\oplus[35]\oplus[35']\oplus[189]\oplus[280]\oplus[28\bar{0}]\oplus[405]$$

又一次我们能分解这些 SU(6)多重态到它们的 SU(3)内涵. 我们得到不同自旋的多重态（全是正宇称），它们被列在表 8.5 中.

表 8.5 SU(6)多重态的分解

		SU(6)多重态分解为				
		[1]	[35]	[189]	[280]	[405]
SU(3)多重态	[27]	—	—	0^+	1^+	$2^+,1^+,0^+$
	$[\overline{10}]$	—	—	1^+	$1^+,0^+$	1^+
	[10]	—	—	1^+	$2^+,0^+$	1^+
	[8]	—	$0^+,1^+$	$2^+,1^+,1^+,0^+$	$2^+,1^+,1^+,0^+$	$2^+,1^+,1^+,0^+$
	[1]	0^+	1^+	$2^+,0^+$	1^+	$2^+,0^+$

除去 2^+ 九重态(A_2,f,f',k^* 参看例 8.10),出自这一大批状态只有很少几个 0^+ 九重态为人所知(例如 σ^- 介子,参看例 8.8).对所有别的态没有(或只有很弱的)实验证据.

现在让我们考虑重子组合 $qqqq\bar{q}$.如果我们假设那种对总是束缚在 S 态($l=0$),所有可能的状态具有负宇称$\left(\frac{1}{2}^+\otimes 0^-\to\frac{1}{2}^-;\frac{1}{2}^+\otimes 1^-\to\frac{3}{2}^-,\frac{1}{2}^-;\frac{3}{2}^+\otimes 0^-\to\frac{3}{2}^-;\frac{3}{2}^+\otimes 1^-\to\frac{5}{2}^-,\frac{3}{2}^-,\frac{1}{2}^-\right)$.在这些情况我们耦合一个$(qqq)$[56]重态到一个 $q\bar{q}$[35]重态:

$$[35]\otimes[56]=[56]\oplus[70]\oplus[700]\oplus[1134]$$

这些 SU(6)多重态有带负宇称和自旋从$\frac{1}{2}$到$\frac{5}{2}$的 SU(3)分解,它们被列在表 8.6 中.

表 8.6 SU(6)多重态到负宇称 SU(3)多重态的分解

SU(3) \ SU(6)	[56]	[70]	[700]	[1134]
[35]	—	—	$\frac{5}{2}^-,\frac{3}{2}^-$	$\frac{3}{2}^-,\frac{1}{2}^-$
[27]	—	—	$\frac{3}{2}^-,\frac{1}{2}^-$	$\frac{5}{2}^-,\frac{3}{2}^-\frac{3}{2}^-,\frac{1}{2}^-\frac{1}{2}$
$[\overline{10}]$	—	—	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}^-,\frac{1}{2}^-$
[10]	$\frac{3}{2}^-$	$\frac{1}{2}^-$	$\frac{5}{2}^-,\frac{3}{2}^-,\frac{1}{2}^-$	$\frac{5}{2}^-,\frac{3}{2}^-,\frac{3}{2}^-\frac{1}{2}^-,\frac{1}{2}^-$
[8]	$\frac{1}{2}^-$	$\frac{1}{2}^-,\frac{3}{2}^-$	$\frac{1}{2}^-,\frac{3}{2}^-$	$\frac{5}{2}^-,\frac{3}{2}^-,\frac{3}{2}^-,\frac{3}{2}^-,\frac{1}{2}^-,\frac{1}{2}^-,\frac{1}{2}^-$
[1]	—	$\frac{1}{2}^-$		$\frac{3}{2}^-,\frac{1}{2}^-$

这一分解给出太多状态,大部分没有被实验证实.因为这对介子也是这样,我们不得不肯定:这个模型不适合于描写物理的状况,而我们改而转向(b).

8.15　轨道角动量的激发态

我们先看一眼介子激发态：

在多夸克模型中，我们解释介子激发态作为多于两个价夸克的组合，我们已经看到我们只能构造正宇称的状态.

如果我们留在 $q\bar{q}$ 模型中，解释激发态作为带有轨道角动量的态. 应用 $P=-(-1)^l$ 我们得出以下的介子激发态的表，那里我们再一次用量子数 J^P 和 τ 来分类：

带有轨道角动量的介子多重态

J^P	l	J^P	l
0^-	0	2^-	2
0^+	1	2^+	1,3
1^-	0,2	3^-	2,4
1^+	1	3^+	3

对 $l=0$ 我们有膺标和矢量介子. 另外我们得到标量介子，它是我们从例 8.8 知道的. 我们看到它们是夸克总自旋 s=1 和轨道角动量 $l=1$ 耦合到 $J=0$ 的结果. $s=1$ 和 $l=1$ 一起的第二种可能的耦合到 $J=2$ 给出例 8.10 的张量介子. 第三种可能性正是 $s=1$ 和 $l=1$ 耦合到 $J=1$ 给出膺矢介子 1^+. 所有这些粒子在自然界中都被观察到. 我们标记带有轨道角动量的多重态为超多重态. 内部轨道角动量给出多重态内粒子的宇称.

对重子，我们说 $qqqq\bar{q}$ 模型产生了太多状态. 而且所有这些状态是负宇称的，同时正宇称的状态却也被观察到了. 因此我们将尝试带有内部角动量的 qqq 模型. 为此我们假设一个吸引的中心力作用在夸克对之间，对于它基态是完全对称的(有 $l=0$). 它属于 $[56]^+$ 多重态(正宇称)，它具有 SU(3)分解 $[8]_2\oplus[10]_4$(指标表示 $2s+1$). 当然这个夸克三重态激发态的系列依赖于特殊的夸克-夸克相互作用，而为了演示这一点我们采用一个简单的模型：我们把夸克放在一个谐振子里，解薛定谔方程并用 SU(6)多重态来分类这些状态. 得到的能级图表示在图 8.13 中.

基态是 $l=0$ 的 $[56]^+$ 多重态，而第一激发态是 $l=1$，负宇称的状态，属于 SU(6)的[70]表示. [70]重态的 SU(3)分解为

$$[70]=[1]_2\oplus[8]_2\oplus[10]_2\oplus[8]_4$$

这意味着我们期望联系于 qqq 第一激发态的以下 SU(3)多重态：

$^4P_{\frac{5}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}}$(三个八重态)

$^2P_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}$(两个单态，两个八重态和两个十重态).

实验表明对这九个多重态的每一个，至少有一个(大部分情况有几个)被证实的状态，并且进一步他们发现了独有的 $[56]^+$ 类型(偶 l)和 $[70]^-$ 类型(奇 l)的超多重态. 这一事实只能用夸克的

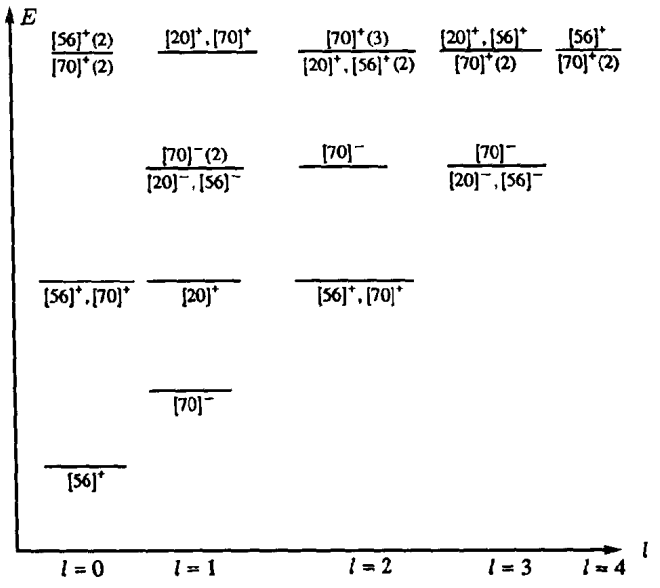


图 8.13 用 SU(6)多重态分类的在一个简谐振子势中的夸克的能级

内部量子数"颜色"来解释.

在这($l=1$)超多重态模型的框架中推出的推广的质量公式对 N^*,Δ,Λ^*,Σ^*,Ξ^*和 Ω^*共振非常成功.精细结构也能在自旋-轨道相互作用的框架内被很好地解释①.这些和其他实验证实的预言导致现在的信心:SU(6)夸克模型(SU(3)带自旋)是协调地分类重子、介子以及它们的共振态的正确体系.

① 参看 B. T. Feld: *Models for Elementary Particles* (Blaisdell, London 1969) p. 333.

第 9 章　置换群的表示和杨盘

9.1　置换群和全同粒子

直到现在我们研究了幺正群 SU(N)，特别是 $N=2,3,4$ 和 6 维的那些群. 现在我们想要讨论置换群 S_N 的某些性质，它也叫做对称群. 如果我们必须处理几个全同粒子，群 S_N 是重要的. 在这一节中我们将使用杨图的概念，它本身又对构造 SU(N)的幺正不可约表示的基函数是有用的.

换位是置换的一种，它相互交换两个量(物体). 例如从其次序为 $O_1,O_2,O_3,\cdots,O_N$ 的 N 个物体 $O_n(n=1,2,\cdots,N)$出发，一个 O_3 和 O_1 的换位给出物体的次序为 $O_3,O_2,O_1,\cdots,O_N$. 它们是特别重要的，因为任意一个置换总可以表示为换位的乘积. 让我们想象一些格子，它们包含标号为 $1,2,\cdots,N$ 的一定的物体. 随后交换算符 $\hat{P}_{ij}$描写交换在格子 i 和 j 中物体的换位. 容易看到

$$\hat{P}_{ij}=\hat{P}_{ji}\quad,\quad \hat{P}_{ij}^2=1 \tag{9.1}$$

一个置换称作偶的或奇的分别取决于它能被偶数个或奇数个换位产生. 例如上面提到的物体次序

$$(O_3,O_2,O_1,O_4,\cdots,O_N)=\hat{P}_{13}(O_1,O_2,O_3,O_4,\cdots,O_N) \tag{9.2}$$

是奇的，而置换

$$(O_4,O_2,O_1,O_3,O_5,\cdots,O_N)=\hat{P}_{14}\hat{P}_{13}(O_1,O_2,O_3,O_4,\cdots,O_N) \tag{9.3}$$

是偶的.

下面我们数学地定义置换，特别着眼于在量子力学中的应用. 为此目的我们想象非全同的物体被放在个别的全同的格子内，然后我们标记一个置换为

$$\begin{pmatrix}1,2,3,\cdots,N\\ b_1,b_2,b_3,\cdots,b_N\end{pmatrix} \tag{9.4}$$

表示最初在第一格内的物体现在被移到格子 b_1 中，最初在第二格内的物体被移到格子 b_2 等等. 如果我们有 N 个全同粒子，标号为 $1,2,\cdots,N$，而每个粒子在一定的特定量子力学状态，全同粒子就相应于全同的格子，而非全同的状态相应于非全同的物体. 一开始这看起来稍稍有点费解，因为物体是在格子内，而粒子(它相应于格子)占据特定的状态(它相应于物体). 然而最终我们会习惯于这种迷惑人的游戏.

有几种不同的方式来表达物体到格子的分布或者粒子到状态的分布. 让 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 为四个非全同物体或者四个非全同的单粒子态(波函数). 那么

$$\alpha(1)\beta(2)\gamma(3)\delta(4) \tag{9.5}$$

意味着物体 α 是在格子 1,物体 β 在格子 2,物体 γ 在格子 3 和物体 δ 在格子 4. 通过我们的物理解释,表达式(9.5)也意味着粒子 1 在状态(波函数)α,粒子 2 在状态 β,粒子 3 在状态 γ 和粒子 4 在状态 δ. 在下面我们对(9.5)将总是用后者——量子力学的——解释. 如果我们应用置换 $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$ 到这四粒子波函数 $\alpha(1)\beta(2)\gamma(3)\delta(4)$,我们得到四粒子波函数 $\alpha(2)\beta(3)\gamma(4)\delta(1)$. 我们把这写为

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\alpha(1)\beta(2)\gamma(3)\delta(4)=\alpha(2)\beta(3)\gamma(4)\delta(1) \tag{9.6}$$

这一符号可以被进一步简化,只要我们同意把粒子 1 的状态总放在第一位,接着是粒子 2 的状态再接着是粒子 3 的状态最后是粒子 4 的状态. 用这一符号(9.6)简单地写为

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\alpha\beta\gamma\delta=\delta\alpha\beta\gamma \tag{9.7}$$

我们也强调置换 $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$ 能够被三个换位的乘积表示,就是

$$\begin{aligned}\hat{P}_{14}\hat{P}_{13}\hat{P}_{12}&=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{9.8}$$

这里必须注意,我们始终必须从最右边的置换开始. 例如出现在第一步中的乘积 $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}$ 表示 1 被换到 2,接着 2 被换到 2;2 被换到 1,接着 1 被换到 3;3 被换到 3,接着 3 被换到 1 和 4 被换到 4,接着 4 被换到 4. 因此

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix} \tag{9.9}$$

它解释了(9.8)的最后第二步,等等. 有时候这状态被简写为 $\psi(1,2,3,4)$ 代表 $\alpha(1)\beta(2)\gamma(3)\delta(4)$. 到此这是更一般的,因为 $\psi(1,2,3,4)$ 不必是单粒子态乘积($\alpha\beta\gamma\delta$). 在这种符号下相应于 $\psi(2,3,4,1)$ 是:

$$\psi(2,3,4,1)\Leftrightarrow\alpha(2)\beta(3)\gamma(4)\delta(1)\text{ 或 }\delta\alpha\beta\gamma \tag{9.10}$$

作为一个例子让我们考虑 2 个和 3 个全同粒子. 我们从置换群 S_2 开始并选一个两粒子态 $\psi(1,2)$. 数 1 和 2 分别概括了粒子 1 和 2 的所有坐标(位置,自旋,同位旋),即 $1\Leftrightarrow x_1,y_1,z_1,s_1,\tau_1;2\Leftrightarrow x_2,y_2,z_2,s_2,\tau_2$. 为了检验交换粒子下的对称性,我们注意到一般情况下,$\psi(1,2)$不具有这种类型的特殊对称性. 但是我们总可以由 $\psi(1,2)$建立一个对称的(ψ_s)和一个反对称的(ψ_a)态,就是

$$\psi_s = \psi(1,2) + \psi(2,1)\ ,\ \psi_a = \psi(1,2) - \psi(2,1) \tag{9.11}$$

这里

$$\psi(2,1) = \hat{P}_{12}\psi(1,2) \tag{9.12}$$

表示由 $\psi(1,2)$交换坐标 1 和坐标 2 得到的两粒子波函数. ψ_s 和 ψ_a 两者同时是置换算符 $\hat{P}_{12}$的本征态. 这一点是显然的，并且它意味着 ψ_s 和 ψ_a 一样每一个独自代表一个非简并的多重态，即置换群 S_2 的一个单态. 我们也说 ψ_s 和 ψ_a 两者分别为一个置换群的一维表示(多重态)的基函数.

现在两粒子态 ψ_s 和 ψ_a 可以用以下方式图解地表示：

$\psi_s =$  ，　$\psi_a =$  (9.13)

这里每个粒子与一个格子相关. 两个格子在一行描写一个对称态，两个格子在一列描写一个反对称态. 这种状态对称性的表示叫做杨图或杨盘①. 显然对单粒子态只有一个格子，所以对单粒子态只有一个杨图. 这是非常明显的. 三粒子状态更为有趣，因为在这个情况有三个杨图：

$\psi_s =$  (全对称态)

$\psi_a =$  (全反对称态)

$\psi_m =$  (混合对称态) (9.14)

前两个图和它们的解释是清楚的. 最后一个图表示所有这些状态，它们对交换两个粒子是对称的，但两个交换对称粒子之一和第三个粒子是反对称的. 如果我们引入恒等算符 $\mathscr{I}$，对称化算符(对称子)$\hat{S}_{ij}$和反对称算符(反对称子)$\hat{A}_{ij}$，可以更清楚地表达这一点. 这时

$$\hat{S}_{ij} = \mathscr{I} + \hat{P}_{ij}\quad ,\quad \hat{A}_{ij} = \mathscr{I} + \hat{P}_{ij}$$
$$\hat{S}_{ij}\hat{A}_{ij} = \mathscr{I} + \hat{P}_{ij} - \hat{P}_{ij} - \hat{P}_{ij}^2 = \mathscr{I} - \mathscr{I} = 0 \tag{9.15}$$

如果我们从状态 $\psi(1,2,3)$出发，很清楚混合对称态 $\psi_m(m=1,2,3,4)$为

$$\psi_1 = \hat{A}_{13}\hat{S}_{12}\psi(1,2,3)\quad ,\quad \psi_2 = \hat{A}_{23}\hat{S}_{12}\psi(1,2,3)$$
$$\psi_3 = \hat{A}_{23}\hat{S}_{13}\psi(1,2,3)\quad ,\quad \psi_4 = \hat{A}_{12}\hat{S}_{13}\psi(1,2,3) \tag{9.16}$$

作为一个例子，我们明确写出 ψ_1，即

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \hat{A}_{13}[\psi(1,2,3) + \psi(2,1,3)]\\ &= [\psi(1,2,3) + \psi(2,1,3)] - [\psi(3,2,1) + \psi(2,3,1)]\\ &= \psi(1,2,3) + \psi(2,1,3) - \psi(3,2,1) - \psi(2,3,1)\end{aligned} \tag{9.17}$$

这四个混合对称状态(9.16)和全对称和全反对称状态一起形成 $\psi(1,2,3)$的包括恒等在内的六个置换的六个线性独立的组合. 然而两个外加的状态可以利用对称子 $\hat{S}_{23}$来构造. 很容易用类似(9.17)的直接计算来检验这两个外加状态 $\hat{A}_{12}\hat{S}_{23}\psi(1,2,3)$和 $\hat{A}_{13}\hat{S}_{23}\psi(1,2,3)$是与(9.16)的状态

① 在文献中我们有时区分杨图和杨盘：专门术语说杨盘是在每一个格子里有一个正数的杨图.

线性相关的.因此我们可以忘记它们.我们也能解释混合对称杨图



(9.18)

表示状态

$$\psi_n = \hat{S}_{ij}\hat{A}_{ik}\psi(1,2,3) \tag{9.19}$$

它是这样构造的:先做反对称化,然后对称化.然而这些得到的状态是和(9.16)的状态线性相关的.我们应该注意,如果一个状态先对 i 和 j 对称化,再对 j 和 k 反对称化,那么一般说来对 i 和 j 的对称性不再存在.我们说:最后作用的那个对称子(或反对称子)决定了结果.

让我们总结这六个对 $\psi(1,2,3)$ 作用置换算符所构造的状态.它们是

$$\psi_s \equiv \hat{S}_{123}\psi(1,2,3)$$
$$= [\mathscr{I} + \hat{P}_{12} + \hat{P}_{13} + \hat{P}_{23} + \hat{P}_{12}\hat{P}_{13} + \hat{P}_{13}\hat{P}_{12}]\psi(1,2,3) \equiv \square\square\square \tag{9.20a}$$

$$\psi_a = \hat{A}_{123}\psi(1,2,3) = \hat{A}_{12}\hat{A}_{13}\hat{A}_{23}\psi(1,2,3)$$
$$= [\mathscr{I} - \hat{P}_{12} - \hat{P}_{13} - \hat{P}_{23} + \hat{P}_{12}\hat{P}_{13} + \hat{P}_{13}\hat{P}_{12}]\psi(1,2,3) \equiv \begin{array}{|c|}\hline\ \\\hline\ \\\hline\ \\\hline\end{array} \tag{9.20b}$$

和

$$\psi_n = \hat{A}_{ik}\hat{S}_{ij}\psi(1,2,3) \equiv \begin{array}{|c|c|}\hline\ & \\\hline\ \\\cline{1-1}\end{array} \tag{9.20c}$$

这四个状态(9.20c)被列出在(9.16)中.在(9.20a)和(9.20b)的最后一步中我们应用了以下恒等式

$$\hat{P}_{12}\hat{P}_{13}\hat{P}_{23} = \hat{P}_{13},\ \hat{P}_{13}\hat{P}_{23} = \hat{P}_{12}\hat{P}_{13},\hat{P}_{13}\hat{P}_{12} = \hat{P}_{12}\hat{P}_{23} \tag{9.21}$$

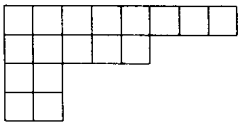
并且保持恒等项只有一次.这六个态形成置换群 S_3 的不可约表示的基.这里所有这些具有很好定义的对称性质的状态叫做基函数.因为只有一个全对称和一个全反对称的态,剩下的四个基函数(9.16)必须是混合对称的.我们可以想象这四个态给出置换群 S_3 的一个四维不可约表示.然而这是不正确的,代之这四个混合对称态是两个两维不可约表示的线性组合,在下一节中我们将更清楚地推出置换群 S_N 的不可约幺正表示的维数.

9.2 杨图的标准形式

人们很容易相信,一般情况全对称态和全反对称态两者各形成 S_N 的一个一维不可约幺正表示的基函数.实际上如果我们将任一置换算符 $\hat{P}_{ij}$ 作用到 ψ_s 来置换这个全对称态 $\psi_s(1,2,\cdots,N)$,状态 ψ_s 变换到它自己.群算符 $\hat{P}_{ij}$ 的应用并不跑出 ψ_s.因此 ψ_s 是一个不变子空间.类似的陈述对全反对称态 $\psi_a(1,2,\cdots,N)$ 同样成立.然而所有非等价的混合对称态分解为 S_N 的多维不可约表示.正如我们将要看到的,这些表示的维数可以应用杨图来得到.这是非常有力的技巧.为了

理解这一点我们先来解释所谓杨图的标准排列或杨图的标准形式.

考虑一个有各种行列的杨盘. 让 q_i 代表 i 行的格子数. 我们现在约定 $q_i \geq q_{i+1}$，它总能用重排这些行来达到. 换句话说，杨图的这些列应该被安排成格数随着行数的增加而减少. 总的格子数给出粒子数，它们的波函数具有表达在图中的一定的置换对称性. 例如，下面是一个典型的杨图



(9.22)

这里 $q_1=8, q_2=5, q_3=2, q_4=2, q_5=0$. 由这个杨图代表的 17 粒子波函数的对称性相应于先把行对称化再把列反对称化或反过来的置换. 特别是，杨图(9.22)描写了所有具有该图表达的对称性的可能的 17 粒子状态.

通常不用 q_i，而用相邻 q_i 的差的整数 p_i

$$p_i = q_i - q_{i+1} \tag{9.23}$$

来表征这个图. 在(9.22)中 p_i 分别为

$$p_1=3\ ,\ p_2=3\ ,\ p_3=0\ ,\ p_4=2$$

我们认出 p_1 是只有一格的列的数，p_2 是有两格的列的数，p_3 是有三格的列的数，p_4 是有四格的列的数. 因此(9.22)能或者被

$$q = (q_1, q_2, q_3, q_4) = (8,5,2,2) \tag{9.24}$$

或者被

$$p = (p_1, p_2, p_3, p_4) = (3,3,0,2) \tag{9.25}$$

描写. 从现在起我们将采用杨图的 p 特征化.

杨图的标准形式用标上正整数的格子来定义，服从以下的规则：在一行里的数(从左到右)不减少，而在一列中的数(从上到下)增加. 每个数代表一个单个粒子的状态(单粒子态). 如果对一个单个粒子可以得到 n 个状态，这些状态被排成某种次序并标以 1 到 n 的数. 这样在一个格子里的数 j 必须在 1 和 n 之间，即

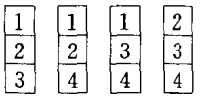
$$1 \leq j \leq n \tag{9.26}$$

我们用一个有四个允许单粒子态的三粒子杨图的标准形式来解释这一点. 对称图被□□□给出，而其标准形式为

1 1 1	1 1 2	1 1 3	1 1 4				
1 2 2	1 2 3	1 2 4	1 3 3				
1 3 4	2 2 2	2 2 3	2 2 4				
2 3 3	2 3 4	3 3 3	3 3 4				
3 4 4	4 4 4						

(9.27)

反对称图由  给出并具有以下标准形式

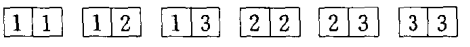


(9.28)

我们马上注意到:一个数(例如 2 或 3 或 4)能在一行中出现几次,但不能在一个单列中出现多次.即所有一列中的数必须是彼此不同的.这只意味着两个粒子可以在同一状态中对称化(有带有同样单粒子函数的对称化的双粒子态),但是两个粒子决不能在同一单粒子态上反对称化(该双粒子态恒等于 0).

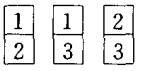
作为另一个例子我们列出一个带有三个允许单粒子态的双粒子杨盘的对称和反对称标准排列

a) 对称排列



(9.29)

b) 反对称排列

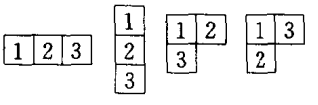


(9.30)

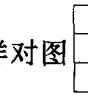
9.3 标准形式和置换群 S_N 不可约表示的维数

对称群 S_N 的不可约表示的维数能够用标准形式(排列)来决定.为此目的,有 N 个格子的所有杨图必须被考虑.每个不同的图表示不同的置换对称性,因此是置换群的另一个表示.表示的维数由计算有 N 个可得到的单粒子态的标准排列得到.这里每个粒子必须在不同的态.

我们用以下关于在不同单粒子态的三个全同粒子的例子来解释这一点.该杨盘的标准排列为



(9.31)

显然对不同单粒子态(1,2,3),图的标准排列只有一种可能.这同样对图成立.这表示只有三个粒子的一个对称和一个反对称组合,这是相当有说服力的.这个陈述对任意数粒子成立也是显然的.非标准排列经过一个相应的对称化相应于标准排列给出的同一状态.因此它们应该不被计入.我们用非标准排列来演示这一点,它给出标准排列一样的总的状态,因为我们对所有三个粒子对称化了.

如同上面注意到的,只有一个对称和一个反对称的标准排列.两个排列的每一个代表一个 S_3 的一维不可约幺正表示的基函数(分别为全对称和全反对称波函数).这个表示的每一个代表一个非简并的多重态,正是一个单态.确实,置换群的生成元,即(9.1)的算符 $\hat{P}_{ij}$,如果作用到对称和反对称态,则重新分别产生对称和反对称态(多粒子波函数).因为如果将群的算符作用到一

个多重态的任意一个状态，该多重态的所有成员都能达到(参看第 3 章式(3.25))，在上面这些情况这多重态只包含一个成员，因而我们面对的是单态表示.

现在考虑混合对称杨图

　　(9.32)

对于它有两个标准形式(排列)，就是盘，

　　(9.33)

由这两个表代表的两个波函数不能通过群 S_3 的置换转换彼此. 因此它们必须构成 S_3 的两个不同不可约表示的基矢. 这两个不可约表示不是单态. 直到现在我们考虑了四个基函数，就是相应于表(9.31)的那些波函数. 然而我们知道从 $\psi(1,2,3)$ 通过置换总共我们得到 $3!=6$ 个基函数. 另外两个基函数到哪里去了？另外两个剩下的函数和(9.33)的两个函数一起形成 S_3 的两个双重态，它们由同样的图(9.32)表示. 这个有关的基函数由非标准盘

　　(9.34)

给出. 它们不同于函数(9.33)，例如  是对交换 2 和 3 反对称的，而函数(9.33)没有一个这样. 应用群算符

$$\hat{P}_{ij}=\{\hat{P}_{12},\hat{P}_{13},\hat{P}_{23}\} \tag{9.35}$$

把状态(9.33)和(9.34)相互转换，这样它们组成两个不变子空间，即两个多重态(正是双重态). 这两个不变子空间由线性组合

$$\lambda\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\ +\mu\ \begin{array}{|c|c|}\hline 2&1\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array} \tag{9.36}$$

和

$$\lambda'\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\ +\mu'\ \begin{array}{|c|c|}\hline 3&1\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array} \tag{9.37}$$

分别形成.

在由(9.36)代表的波函数中对数 1,2,3 的任何置换给出两个基矢的线性组合，对(9.37)也是这样. 我们将在下面的简单例子中展示这一点.

$$\begin{aligned}\lambda\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\ +\mu\ \begin{array}{|c|c|}\hline 2&1\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\ &=\lambda(\psi(1,2,3)+\psi(2,1,3)-\psi(3,2,1)-\psi(2,3,1))\\&\quad+\mu(\psi(1,2,3)+\psi(2,1,3)-\psi(1,3,2)-\psi(3,1,2))\end{aligned} \tag{9.38}$$

例如用置换算符 $P\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$ 作用在上面，我们得到

$$\begin{aligned}&P\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\left(\lambda\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\ +\mu\ \begin{array}{|c|c|}\hline 2&1\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\right)\\&=\lambda(\psi(2,3,1)+\psi(3,2,1)-\psi(1,3,2)-\psi(3,1,2))\\&\quad+\mu(\psi(2,3,1)+\psi(3,2,1)-\psi(2,1,3)-\psi(1,2,3)\end{aligned} \tag{9.39}$$

右边的表达式能被写成两个基矢的线性组合,即

$$P\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\left(\lambda\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}+\mu\begin{array}{|c|c|}\hline 2&1\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\right)$$

$$=-(\lambda+\mu)\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}+\lambda\begin{array}{|c|c|}\hline 2&1\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}$$

$$=-(\lambda+\mu)(\psi(1,2,3)+\psi(2,1,3)-\psi(3,2,1)-\psi(2,3,1))$$
$$+\lambda(\psi(1,2,3)+\psi(2,1,3)-\psi(1,3,2)-\psi(3,1,2)) \tag{9.40}$$

同样所有其他数 1,2,3 的置换将留在这个不可约子空间内. 这对通过(9.37)定义的子空间同样正确. 然而这样定义的基矢有一个缺点:它们不是正交的,即它们对波函数的标积形成一组非正交基. 在例 9.1 中我们将按施密特正交化过程正交化这些基矢. 一般说可以证明:如果一个 S_N 的不可约表示是 n 维的,那么严格地有 n 个这种表示①.

一般一个 N 格的杨图代表一个 S_N 不可约表示的基函数. 这些基函数也常常被叫做基张量(代替基矢量),因为它们依赖于 N 个指标.

练习 9.1 S_3 的基函数

问题 用单粒子波函数 $\alpha(i)\beta(j)\gamma(k)$写出置换群 S_3 的基函数.

解 按照前面的结果,全对称波函数给出为

$$\psi_s=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline\end{array}=\hat{S}_{123}\alpha\beta\gamma \tag{1}$$

全对称算符是以下的换位 $\hat{P}_{ij}$的组合(看(9.20a)):

$$\hat{S}_{123}=\mathbb{1}+\hat{P}_{12}+\hat{P}_{13}+\hat{P}_{23}+\hat{P}_{13}\hat{P}_{12}+\hat{P}_{12}\hat{P}_{13} \tag{2}$$

归一化 ψ_s,我们得到

$$\psi_s=1/\sqrt{6}\,(\alpha\beta\gamma+\beta\alpha\gamma+\gamma\beta\alpha+\alpha\gamma\beta+\gamma\alpha\beta+\beta\gamma\alpha) \tag{3}$$

类似地对反对称波函数

$$\psi_a=\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 3\\\hline\end{array}=\hat{A}_{123}\alpha\beta\gamma \tag{4}$$

其中

$$\hat{P}_{123}=\mathbb{1}-\hat{P}_{12}-\hat{P}_{13}-\hat{P}_{23}+\hat{P}_{13}\hat{P}_{12}+\hat{P}_{12}\hat{P}_{13} \tag{5}$$

是全反对称子(见(9.20b)). 从而我们发现归一化的 ψ_a 为

$$\psi_a=1/\sqrt{6}\,(\alpha\beta\gamma-\beta\alpha\gamma-\gamma\beta\alpha-\alpha\gamma\beta+\gamma\alpha\beta+\beta\gamma\alpha) \tag{6}$$

然而混合对称表示的基函数不是唯一地决定的,但是借助幺正变换来推导代替的基函数是可能的. 对我们来说已经知道 S_3 包含两个混合对称的双重态. 为了得到适当的基函数,我们借助对称子 $\hat{S}_{ij}$和反对称子 $\hat{A}_{ij}$来开始构造混合对称的四个波函数:

---

① 参看 W. K. Tung: *Group Theory in Physics* (World Seientific, Singapore 1985) Chap. 5.

$$\psi_1=\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}=\hat{A}_{13}\hat{S}_{12}\alpha\beta\gamma=\alpha\beta\gamma+\beta\alpha\gamma-\gamma\beta\alpha-\gamma\alpha\beta \tag{7a}$$

$$\psi_2=\begin{array}{|c|c|}\hline 2&1\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}=\hat{A}_{23}\hat{S}_{12}\alpha\beta\gamma=\alpha\beta\gamma+\beta\alpha\gamma-\alpha\gamma\beta-\beta\gamma\alpha \tag{7b}$$

$$\psi_3=\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}=\hat{A}_{12}\hat{S}_{13}\alpha\beta\gamma=\alpha\beta\gamma+\gamma\beta\alpha-\beta\alpha\gamma-\beta\gamma\alpha \tag{7c}$$

$$\psi_4=\begin{array}{|c|c|}\hline 3&1\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}=\hat{A}_{23}\hat{S}_{13}\alpha\beta\gamma=\alpha\beta\gamma+\gamma\beta\alpha-\alpha\gamma\beta-\gamma\alpha\beta \tag{7d}$$

这四个波函数代表两个混合双重态，而且它们不是正交的. 为了得到一个正交基，我们做出一个 ψ_1 和 ψ_2 的线性组合，它正交于 ψ_1. 因此我们让

$$\psi_2'=\psi_2+a\psi_1 \tag{8}$$

满足条件

$$\begin{aligned}0=\langle\psi_1|\psi_2'\rangle=\langle\alpha\beta\gamma+\beta\alpha\gamma-\gamma\beta\alpha-\gamma\alpha\beta\|(1+a)(\alpha\beta\gamma+\beta\alpha\gamma)-a\gamma\beta\\-\beta\gamma\alpha-a(\gamma\beta\alpha+\gamma\alpha\beta)\rangle=2(1+a)+2a=0\end{aligned} \tag{9}$$

这儿我们用到了单粒子态 α,β,γ 的正交性，它有一个效果就是非全同的乘积波函数总是正交的. 通过(9)式，我们发现 $a=-1/2$，即

$$\psi_2'=\psi_2-\frac{1}{2}\psi_1=\frac{1}{2}(\alpha\beta\gamma+\beta\alpha\gamma+\gamma\beta\alpha+\gamma\alpha\beta)-\alpha\gamma\beta-\beta\gamma\alpha \tag{10}$$

明显地将 S_3 的六个置换作用到 ψ_1 和 ψ_2'，我们能用 ψ_1 和 ψ_2' 的线性性组合表达其结果. 这样两个归一化矢量

$$\frac{1}{2}\psi_1\quad,\quad\frac{1}{\sqrt{3}}\psi_2' \tag{11}$$

是 S_3 的两维不可约表示的正交基，即它们形成一个双重态.

我们从 ψ_3,ψ_1 和 ψ_2' 出发构造一个基函数，要求正交于 ψ_1 和 ψ_2'. 重复施密特正交化过程，我们发现

$$\psi_3'=\psi_3+\frac{1}{4}\psi_1-\frac{1}{2}\psi_2'=\alpha\beta\gamma-\beta\alpha\gamma+\frac{1}{2}(\gamma\beta\alpha+\alpha\gamma\beta-\gamma\alpha\beta-\beta\gamma\alpha) \tag{12}$$

最后第四个正交函数由线性组合

$$\psi_4'=\psi_4-\frac{1}{4}(\psi_1+2\psi_2'+2\psi_3')=\frac{3}{4}(\beta\gamma\alpha+\gamma\beta\alpha-\alpha\gamma\beta-\gamma\alpha\beta) \tag{13}$$

给出. 这儿 S_3 又变换函数 ψ_3' 和 ψ_4' 到这些同样的函数的线性组合. 因此我们得到

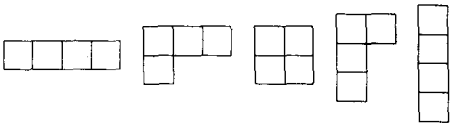
$$\frac{1}{\sqrt{3}}\psi_3'\quad,\quad\frac{2}{3}\psi_4' \tag{14}$$

作为第二个双重态的正交基. (**练习 9.1 完**)

练习 9.2　S_4 的不可约表示

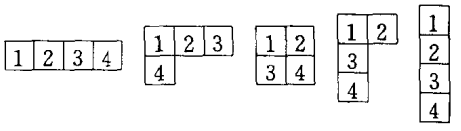
问题　讨论置换群 S_4 的不可约表示.

解　S_4 的不可约表示由杨图



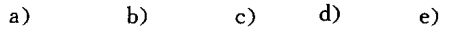
(1)

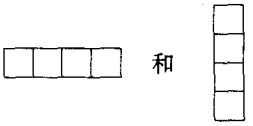
给出,而有关的标准排列为:



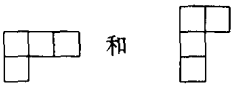
(2)

图





表征两个一维表示的基矢量. 就是说群算符$\{\hat{P}_{12},\hat{P}_{13},\hat{P}_{14},\hat{P}_{23},\hat{P}_{24},\hat{P}_{34}\}$中的每一个将这两个矢量的每一个变换到它自己. 另一方面



(3)

每个代表 3 个三维表示. 为了说明这一点我们考虑左边的图和它的标准排列,后者可在(2)的第二列中找到.

由(2b)中的第一个盘代表的波函数由

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \hat{A}_{14}\hat{S}_{123}\alpha\beta\gamma\delta\\ &= [\alpha(1)\beta(2)\gamma(3)+\alpha(1)\beta(3)\gamma(2)+\alpha(2)\beta(1)\gamma(3)+\alpha(2)\beta(3)\gamma(1)\\ &\quad+\alpha(3)\beta(1)\gamma(2)+\alpha(3)\beta(2)\gamma(1)]\delta(4)-[\alpha(4)\beta(2)\gamma(3)+\alpha(4)\beta(3)\gamma(2)\\ &\quad+\alpha(2)\beta(4)\gamma(3)+\alpha(2)\beta(3)\gamma(4)+\alpha(3)\beta(4)\gamma(2)+\alpha(3)\beta(2)\gamma(4)]\delta(1)\\ &= \alpha\beta\gamma\delta+\alpha\gamma\beta\delta+\beta\alpha\gamma\delta+\gamma\alpha\beta\delta+\beta\gamma\alpha\delta+\gamma\beta\alpha\delta-\delta\beta\gamma\alpha-\delta\gamma\beta\alpha-\delta\alpha\gamma\beta\\ &\quad-\delta\alpha\beta\gamma-\delta\gamma\alpha\beta-\delta\beta\alpha\gamma\end{aligned} \tag{4a}$$

给出. 类似地,(2b)的另外两个盘给出

$$\begin{aligned}\psi_2 &= \hat{A}_{13}\hat{S}_{124}\alpha\beta\gamma\delta\\ &= \alpha\beta\gamma\delta+\alpha\delta\gamma\beta+\beta\alpha\gamma\delta+\delta\alpha\gamma\beta+\beta\delta\gamma\alpha+\delta\beta\gamma\alpha-\gamma\beta\alpha\delta\\ &\quad-\gamma\delta\alpha\beta-\gamma\alpha\beta\delta-\gamma\alpha\delta\beta-\gamma\delta\beta\alpha-\gamma\beta\delta\alpha\end{aligned} \tag{4b}$$

和

$$\begin{aligned}\psi_3 &= \hat{A}_{12}\hat{S}_{134}\alpha\beta\gamma\delta\\ &= \alpha\beta\gamma\delta+\alpha\beta\delta\gamma+\gamma\beta\alpha\delta+\delta\beta\alpha\gamma+\gamma\beta\delta\alpha+\delta\beta\gamma\alpha-\beta\alpha\gamma\delta\\ &\quad-\alpha\beta\delta\gamma-\beta\gamma\alpha\delta-\beta\delta\alpha\gamma-\beta\gamma\delta\alpha-\beta\delta\gamma\alpha\end{aligned} \tag{4c}$$

这三个波函数作为群 S_4 的三个等价的三维表示的生成基矢量,它们由(1)中的第二个杨图代表. 完全的表示通

过用 S_4 的所有 24 个算符作用在 ψ_1，ψ_2 和 ψ_3 上来得到. 因为这个表示是三维的，在每组这样得到的 24 个波函数中只有三个是线性独立的. 比如我们可以取顶上一行的两个数的置换. 对第一个表示我们有三个可能的选择

$$\hat{P}_{12}\psi_1, \hat{P}_{13}\psi_1 \text{ 和 } \hat{P}_{23}\psi_1$$

最后一个是全同于 ψ_1 的，因为 2 和 3 的对称性没有被 1 和 4 间的反对称化破坏. 因此，只有两个选择保留下来，以至于对第一个表示我们可以取波函数

$$\psi_1, \hat{P}_{12}\psi_1, \ \hat{P}_{13}\psi_1 \tag{5a}$$

对另外两个表示我们可以类似地取

$$\psi_2, \hat{P}_{12}\psi_2, \ \hat{P}_{14}\psi_2 \tag{5b}$$

和

$$\psi_3, \hat{P}_{13}\psi_3, \ \hat{P}_{14}\psi_3 \tag{5c}$$

这些波函数可以由非标准的杨盘表示. 通过明显地写出这个置换，我们容易验证

$$\hat{P}_{12}\psi_1 = \hat{P}_{12}\hat{A}_{14}\hat{S}_{123}\alpha\beta\gamma\delta = \hat{A}_{24}\hat{S}_{123}\alpha\beta\gamma\delta \tag{6}$$

或用图解符号① 表示为：

$$\hat{P}_{12} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array} \quad = \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4\\\cline{1-1}\end{array}$$

类似地，我们发现

$$\hat{P}_{13} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array} \quad = \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline \multicolumn{2}{c}{}&4\\\cline{3-3}\end{array}$$

因此这三个三维表示(5a)－(5c)可以用“移动下面格子”的杨盘代表.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4\\\cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline \multicolumn{2}{c}{}&4\\\cline{3-3}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline \multicolumn{3}{c}{}\\\cline{1-3}4\end{array} \tag{7a}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\\hline \multicolumn{2}{c}{}&3\\\cline{3-3}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\\hline \multicolumn{3}{c}{}\\\cline{1-3}3\end{array} \tag{7b}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\\hline \multicolumn{2}{c}{}&2\\\cline{3-3}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\\hline \multicolumn{3}{c}{}\\\cline{1-3}2\end{array} \tag{7c}$$

当然这些波函数是还未正交的，但它们能如同练习 9.1 中在群 S_3 情况下证明的方法一样地正交化.

现在让我们讨论两个方块盘(2c). 第一个盘代表的波函数显然为：

$$\begin{aligned}\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&4\\\hline\end{array} &= \hat{A}_{24}\hat{A}_{13}\hat{S}_{34}\hat{S}_{12}\alpha\beta\gamma\delta\\ &= [\alpha(1)\beta(2)+\beta(1)\alpha(2)][\gamma(3)\delta(4)+\gamma(4)\delta(3)]\\ &\quad -[\alpha(3)\beta(2)+\beta(3)\alpha(2)][\gamma(1)\delta(4)+\gamma(4)\delta(1)]\\ &\quad -[\alpha(1)\beta(4)+\beta(1)\alpha(4)][\gamma(3)\delta(2)+\gamma(2)\delta(3)]\\ &\quad +[\alpha(3)\beta(4)+\beta(3)\alpha(4)][\gamma(1)\delta(2)+\gamma(2)\delta(1)]\end{aligned} \tag{8}$$

---

① 注意这个在盘中交换数的规则对在不同行和列中的数不成立，例如

$$\hat{P}_{23} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array} = \hat{P}_{23}(\hat{A}_{13}\hat{S}_{12}\alpha\beta\gamma) \neq \hat{A}_{12}\hat{S}_{13}\alpha\beta\gamma = \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}!$$

而第二个盘的波函数为

$$\begin{aligned}\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2&4\\\hline\end{array} &= \hat{A}_{34}\hat{A}_{12}\hat{S}_{24}\hat{S}_{13}\alpha\beta\gamma\delta\\ &= [\alpha(1)\gamma(3)+\alpha(3)\gamma(1)][\beta(2)\delta(4)+\beta(4)\delta(2)]\\ &\quad -[\alpha(2)\gamma(3)+\alpha(3)\gamma(2)][\beta(1)\delta(4)+\beta(4)\delta(1)]\\ &\quad -[\alpha(1)\gamma(4)+\alpha(4)\gamma(1)][\gamma(2)\delta(3)+\beta(3)\delta(2)]\\ &\quad +[\alpha(2)\gamma(4)+\alpha(4)\gamma(2)][\beta(1)\delta(3)+\beta(3)\delta(1)] \qquad (9)\end{aligned}$$

再一次,完全的表示是用所有 24 个群算符作用在生成矢量(8)和(9)上得到的.因为该表示是两维的,只有一个这种方式得到的别的波函数是线性独立的.如前一样,这可以用在杨盘某一行中的置换来得到.在第一个情况,方程(8),我们得到两个可能的波函数

$$\hat{P}_{12}\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&4\\\hline\end{array}=\begin{array}{|c|c|}\hline 2&1\\\hline 3&4\\\hline\end{array}\quad 和\quad \hat{P}_{34}\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&4\\\hline\end{array}=\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 4&3\\\hline\end{array} \qquad (10)$$

它们是全同的态,因为如果我们交换杨盘的整个行或列,该波函数保持不变.对第二个表示(9)我们有两个波函数

$$\hat{P}_{13}\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2&4\\\hline\end{array}=\begin{array}{|c|c|}\hline 3&1\\\hline 2&4\\\hline\end{array}\quad 和\quad \hat{P}_{24}\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2&4\\\hline\end{array}=\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 4&2\\\hline\end{array} \qquad (11)$$

它们又表示全同的态.由这四个状态

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&4\\\hline\end{array}\ ,\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 4&3\\\hline\end{array}\ 和\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2&4\\\hline\end{array}\ ,\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 4&2\\\hline\end{array} \qquad (12)$$

我们可以构造两个正交波函数双重态,在应用 $\hat{P}_{ij}$ 时它们只在自己之间变换.在练习 9.1 中我们已经对 S_3 的简单基函数明显地表明了这一点,但是我们现在略去这一点.

我们肯定:置换群 S_4 的标准图给出基矢量的总数为

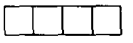
$$1+3^2+2^2+3^2+1=24$$

确实 S_4 严格有 $4!=24$ 个元素,因而从一个给定的矢量 $\psi(1,2,3,4)$,正是 24 个矢量可以通过置换被形成.这些是可约的,并能被分解为(2)和(13)给出的单态、双重态和三重态.通过分解可约的 24 个基矢量到刚才提到的(看(13))不可约表示,S_4 的对称性质能显示得更为清楚.(**练习 9.2 完**)

下一步我们将讨论共轭杨图的概念.有两种可能的途径来定义它:一是对对称群,而另一个是对 SU(N).这里我们只使自己涉及到对称群的共轭,SU(N)的共轭将稍后再讨论(第十二章).让我们取一个有 n 个格子的一定相图,n 个格子代表 n 个全同粒子(每一个在一个特定的状态上).这时对这个对称群,共轭图通过把每一列变成行和每一行变成列来得到.我们通过以下四粒子态来解释这一点:



共轭于



(9.41)

　共轭于　　(9.42)

　是自共轭的　(9.43)

共轭图属于该对称群的不同的不等价的表示，具有同样维数.

我们再一次强调不可约表示维数的重要性：一个群(在我们的情况是 S_N)的同一不可约表示的所有基状态具有相等的能量，只要该体系的哈密顿量对这个群是不变的(在我们的情况，它是在全同粒子的置换下不变). 这样一个不可约表示的维数告诉我们一个能级的简并度，当然不算偶然简并. 因此我们也说：一个对称群的不可约表示维数等于基本的简并度.

现在让我们假设一个体系的哈密顿量在两个或更多不同的群下不变. 所有这些群的变换一起形成一个较大的群，它可能等于原来群的直积或不等于原来群的直积，取决于每个单个群的所有群变换是否与所有别的群的所有变换对易. 在任一情况，简并的多重态是这个较大群的不可约表示的基矢量. 如果该较大群是一个直积，该多重性简单地是形成这个直积的那些群的多重性的乘积.

所有自然中观察到的粒子是费米子或玻色子. N 个全同玻色子的态矢量属于 S_N 的全对称表示，而费米子的态矢量属于 S_N 的全反对称表示. 我们也可以以下方式表达这一重要事实：所有至今在自然界中发现的粒子属于对称群的一维表示. 相对于对称群它们是单态.

读者也许会困惑，到底为什么我们研究 S_N 的较高多重态？一个原因是那种既不是费米子也不是玻色子的粒子将来可能会被发现. 然而有一个远为重要的原因：不管几个全同粒子在所有这些全同粒子的任何坐标置换下是单态这一事实(更清楚地说：相对于两个粒子的完全交换是单态)，如果只考虑置换粒子的几个(不是全部)坐标，就存在有较高多重性的状态(因此属于 S_N 的较高多重态). 这最好用一个例子来解释：让我们考虑三个自旋 1 的粒子. 这些粒子的量子状态对于整个交换两个粒子，即同时交换两个粒子的自旋和空间坐标是对称的. 但是如果我们考虑单独交换两个粒子的自旋或空间坐标，该状态在这种置换下可能很好地具有混合对称性. 这时这个混合对称性是这样的类型使得在交换所有坐标(指的空间坐标和自旋)时是整个对称的.

9.4　在 SU(2)和 S_2 之间的联系

开始我们对 SU(2)考虑在置换群 S_N 和幺正群 SU(N)的不可约表示间的联系. SU(2)的基本表示由基矢

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{9.44}$$

张开. 这些矢量可以代表一个带自旋 $\frac{1}{2}$ 的粒子的两个状态. 下面这些基矢量由一个格子组成的杨盘来代表，即

$$\psi_1 = \boxed{1}\ ,\ \psi_2 = \boxed{2} \tag{9.45}$$

如果我们抹去格子里的内容,该杨图□符号性地代表该双重态的两个成员.

我们从(9.13)知道置换群 S_2 的两个不可约表示被杨图

□□ 对称表示, □ 反对称表示 (9.46)

代表.通过数格子我们相信这些图也符号化 SU(2)的不可约表示.我们从对称的双粒子态开始.如果两个粒子都在状态 ψ_1 上,我们有盘$\boxed{1}\boxed{1}$;如果两个都在状态 ψ_2 上,我们有$\boxed{2}\boxed{2}$.还有一个可能的第三个状态

$$\psi = \psi_1(1)\psi_2(2) + \psi_1(2)\psi_2(1) \tag{9.47}$$

由盘$\boxed{1}\boxed{2}$符号化.因为对称性,盘$\boxed{2}\boxed{1}$描写同一状态.因此我们可以限止自己到计数标准杨盘.由这个论证我们知道杨图□□代表三个不同的标准构形,即相应的多重态有三维.

然而如果我们处理 S_2 的反对称表示,这里只有一个可能方式来构造反对称双粒子态:

$$\psi = \psi_1(1)\psi_2(2) - \psi_1(2)\psi_2(1) \tag{9.48}$$

这个态被盘

$$\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \tag{9.49}$$

表示.这样,有关的不可约表示为一单态.其他的杨盘原则上可以构造

$$\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}\qquad \begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}\ ,\ \begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \tag{9.50}$$

不形成标准构形,因为格子里的数并不从上到下增加.(9.50)中前两个态为 0,最后一个全同于(9.49).我们肯定我们通过限制于标准表,对反对称态也得到了正确的多重性.

练习 9.3 三个自旋$\frac{1}{2}$粒子体系的多重态

问题 决定三个自旋$\frac{1}{2}$粒子体系的多重态.

解 带三个格子的三个图是可能的.

□□□ , □□ 和 □ (1)

a) b) c)

在 SU(2)情况,(1c) 可以略去,因为如果只有两个状态,没有三个粒子的全反对称态可以被构造(这是泡利原理).图(1a)允许四个标准构形

$$\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\ ,\ \boxed{1}\boxed{1}\boxed{2}\ ,\ \boxed{1}\boxed{2}\boxed{2}\ ,\ \boxed{2}\boxed{2}\boxed{2} \tag{2}$$

即对称态形成一个四重态,描写一个自旋$\frac{3}{2}$的多重态.图(1b)只产生两个标准盘,

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\quad 和\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array} \tag{3}$$

因此带有混合对称性的状态形成一个双重态，描写总自旋$\frac{1}{2}$.（**练习 9.3 完**）

为了说明 SU(2)和 S_2 的联系，我们把杨盘代表的波函数归一化. 单态表示为

$$\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array} \cong \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi(1)\psi(2)-\psi(2)\psi(1))$$

而对三重态表示我们发现

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline\end{array} \cong \psi(1)\psi(1)$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 2&2\\\hline\end{array} \cong \psi(2)\psi(2)$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline\end{array} \cong \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi(1)\psi(2)+\psi(2)\psi(1))$$

这些正是可能的状态，它们产生于两个自旋$\frac{1}{2}$粒分别耦合到自旋 0 或自旋 1. 自旋 0 单态为

$$|JM|>=|00>=\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow-\downarrow\uparrow)$$

自旋 1 三重态给出为

$$|11>=\uparrow\uparrow$$

$$|1-1>=\downarrow\downarrow$$

$$|10>=\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow+\downarrow\uparrow)$$

我们相信，如果只有两个不同的允许状态(即在 SU(2)情况)，一般一列不能有多于两个格子，否则反对称化将自动给出 0. 两个格子的一列必须有数$\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}$. 没有别的选择. 因此如果我们要决定一个 SU(2)多重态的维数，我们可以省去所有两个格子的列. 因此杨图

$$\square\ ,\quad \begin{array}{|c|c|}\hline\ &\ \\\hline\ \\\cline{1-1}\end{array}\ ,\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline\ &\ &\ \\\hline\ &\ \\\cline{1-2}\end{array} \tag{9.51}$$

等等都代表一个双重态. 从群论的观点，对于一个、两个、三个或多个粒子体系，它是同一 SU(2)的不可约表示.

结果通过构造只有一个水平行的所有可能杨图，我们得到 SU(2)的所有不可约表示，在每一种情况，维数由格子指标 1 和 2 的可能的独特的标准构形的数目给出. 在特殊的意义下，单态代表一个例外，因为如果我们从图$\begin{array}{|c|}\hline\ \\\hline\ \\\cline{1-1}\end{array}$略去带有两个格子的列，我们得到一个根本没有格子的图.

为了记住“无格”图,我们用符号①表示单态.这样我们相继得到

①	单态	
□	双重态	1 , 2
□□	三重态	11 , 12 , 22
□□□	四重态	111 , 112 , 122 , 222

等等

有 p 个格子的图可以包括不含 2 的,包括 2 一次、两次、…直到 p 次,也即它的维数是 $(p+1)$.这相应于我们早先的结果:对每个整数 p 严格地存在一个不可约 SU(2)表示.

9.5 SU(n)的不可约表示

通过从 1 到 n 数杨图的格子,我们可以类似地处理 SU(n)的不可约表示.这个推广依赖于下面的定理,我们这里只引用而不证明①.

定理 若 N 粒子状态属于置换群 S_N 的一个不可约表示并且由一个 n 维 SU(n)多重态的单粒子态构成,则该 N 粒子状态在一个群 SU(n)的不可约表示下变换.

由此定理我们肯定每个至多 n 行的杨图代表一个群 SU(n)的不可约表示.一个多于 n 行的图必然包括至少 $(n+1)$ 格子的一列.因此这状态必须对这 $(n+1)$ 个粒子反对称化,但这是做不到的,因为我们只有 SU(n)的 n 个不同的单粒子基函数.为了得到一个联系于一定的杨图的不可约表示的维数,我们计算通过代入数 1 到 n 建立起来的这个图的所有可能的标准构形的个数.每个格子代表一个粒子,而格子里的数代表这个粒子能够占据的不同状态之一.为此我们表述以下的规则:首先在每一个格子里写下 1 到 n 中的一个数,注意在每一列中数字的值向下增加,并且每一行中由左向右不减少.

练习 9.4 在群 SU(3)中的双粒子体系多重态

问题 构造一个双粒子体系可能的 SU(3)多重态.

解 可能的杨图为

□□ 和 □ (1)
□

对这些图我们找到以下的标准构形:

① 这个定理的证明可以在 B. G. Wyborne: *Classical Groups for Physicists* (Wiley, New York 1974)第 22 章找到.

$$\boxed{1}\boxed{1}\,,\ \boxed{1}\boxed{2}\,,\ \boxed{1}\boxed{3}\,,\ \boxed{2}\boxed{2}\,,\ \boxed{2}\boxed{3}\,,\ \boxed{3}\boxed{3}\ \text{以及}\quad \begin{matrix}\boxed{1}\\\boxed{2}\end{matrix},\ \begin{matrix}\boxed{1}\\\boxed{3}\end{matrix},\ \begin{matrix}\boxed{2}\\\boxed{3}\end{matrix} \tag{2}$$

因此我们有一个六重态和一个三重态. 实际上这里我们遇到一个反三重态，因为由 $\begin{matrix}\boxed{\ }\\\boxed{\ }\end{matrix}$ 代表的两粒子波函数是反对称的. 三重态由 $\boxed{\ }$ 代表. **(练习 9.4 完)**

原来我们用 T_3-Y 平面上的点表示一个 SU(3)多重态的基状态. 点的坐标被称为相关状态的“权”. 现在我们可以等同这些点和相应的杨盘. 在基本表示的情况我们得到以下的图(图 9.1). 由此我们推出表 9.1.

因为权表现为可加的数，多粒子态的权通过将分量相加来得到. 以这种方式我们得到由两个粒子建立起来的六重态(从练习 9.4)的基函数(看表 9.2).

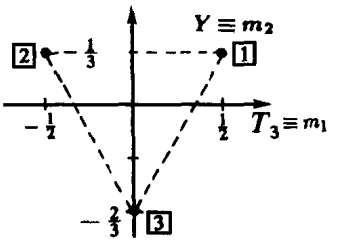


图 9.1　SU(3)的基础表示

表 9.1　三重态的权

状态	权(T_3, Y)
$\boxed{1}$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$
$\boxed{2}$	$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$
$\boxed{3}$	$\left(0, \frac{2}{3}\right)$

表 9.2　六重态的对称状态的权

状态	权
$\boxed{1}\boxed{1}$	$\left(1, \frac{2}{3}\right)$
$\boxed{1}\boxed{2}$	$\left(0, \frac{2}{3}\right)$
$\boxed{2}\boxed{2}$	$\left(-1, \frac{2}{3}\right)$
$\boxed{1}\boxed{3}$	$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$
$\boxed{2}\boxed{3}$	$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$
$\boxed{3}\boxed{3}$	$\left(0, -\frac{4}{3}\right)$

表 9.3　两粒子三重态的反对称状态的权

状态	权
$\begin{matrix}\boxed{1}\\\boxed{2}\end{matrix}$	$\left(0, \frac{2}{3}\right)$
$\begin{matrix}\boxed{1}\\\boxed{3}\end{matrix}$	$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$
$\begin{matrix}\boxed{2}\\\boxed{3}\end{matrix}$	$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$

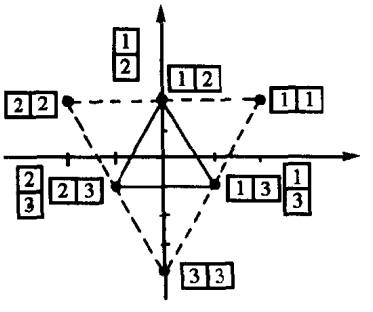


图 9.2　SU(3)中的双粒子态(六重态和三重态)

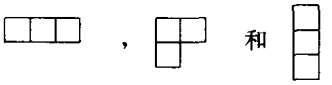
反对称的两粒子态三重态有同样的权,因为格子里的数只在构造该多重态的过程中需要,但是它们的特殊构形不影响这结果(看表 9.3).

如果我们把这些点画在图 9.2 中,我们已经知道的六重态和反三重态就产生了.

练习 9.5 由三个粒子构成的 SU(3)多重态

问题 构造由三个粒子构成的 SU(3)多重态.

解 我们得到以下由三个格子构成的相图:



(1)

因为第三个图只有一种可能的构形 $\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 3\\\hline\end{array}$,它代表单态.第二个图允许有八种构形,代表八重态(看下面的表).

三粒子八重态的权

状态	权
$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}$	$\left(\frac{1}{2},1\right)$
$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}$	$\left(-\frac{1}{2},1\right)$
$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}$	$(0,0)$
$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}$	$(1,0)$
$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}$	$(0,0)$
$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}$	$\left(\frac{1}{2},-1\right)$
$\begin{array}{|c|c|}\hline 2&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}$	$(-1,0)$
$\begin{array}{|c|c|}\hline 2&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}$	$\left(-\frac{1}{2},-1\right)$

(2)

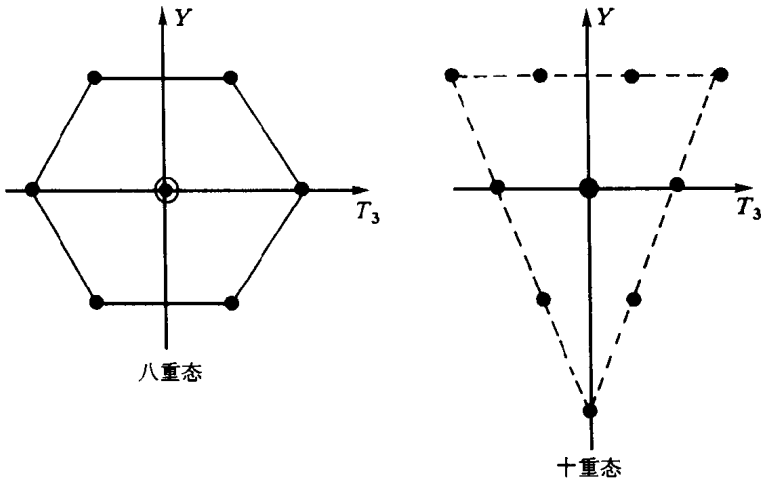
最后,第一个图演示全对称表示包括十个态:

$$\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\left(\frac{3}{2},1\right),\ \boxed{2}\boxed{2}\boxed{2}\left(-\frac{3}{2},1\right),\ \boxed{3}\boxed{3}\boxed{3}(0,-2) \tag{3}$$

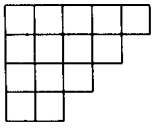
以及

$$\boxed{1}\boxed{1}\boxed{2},\ \boxed{1}\boxed{2}\boxed{2},\ \boxed{1}\boxed{1}\boxed{3},\ \boxed{1}\boxed{3}\boxed{3},$$
$$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3},\ \boxed{2}\boxed{2}\boxed{3},\ \boxed{2}\boxed{3}\boxed{3} \tag{4}$$

它们的权已经包含在八重态状态中.通过把这些状态画在 T_3-Y 坐标系里,我们得到已经知道的图(看下面的图).有趣的是八重态的中心状态自动得到正确的多重性 2.(**练习 9.5 完**)

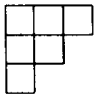


回到一般的 SU(n)，我们知道每一列至多包括 n 个格子. 对 n 个粒子，在 n 个状态形成一个反对称波函数只存在一条途径. 因此，如果我们想要决定一个 SU(n)不可约表示的维数，我们可以略去杨图的所有严格 n 个格子的列. 例如我们考虑图



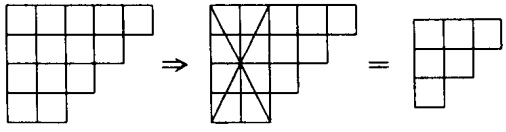
(9.52)

在 $n=4$ 的情况下，这同样的不可约表示被更简单的图



(9.53)

演示. 因此(9.52)可以与(9.53)相等：

SU(4)：

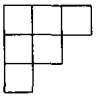
(9.54)

尽管第一个图代表一个 14 粒子状态，而第二个图代表一个 6 粒子状态，但两个不可约表示是等价的，并有相同的维数. (但是注意，例如在 SU(5)的框架内，这两个相图代表不同的多重态).

这样在 SU(n)的情况，我们只需要考虑至多($n-1$)行的图. 我们已经表明(看(9.22))，这样一个图无疑地由($n-1$)个数

$$\boldsymbol{p}=(p_1,\cdots,p_{n-1}) \tag{9.55}$$

来表征. 数 p_k 表示严格 k 个格子的列的数目. 例如在 SU(4)框架内，图



(9.56)

由矢量

$$\boldsymbol{p} = (1,1,1) \tag{9.57}$$

表征.后面我们将发现,在SU(3)情况,数 p_1 和 p_2 相应于以前我们用来表征SU(3)多重态的数 p 和 q.最后我们要考虑在略去所有 n 格的列时,是否在一个多重态内的成员的权会发生变化.如果我们数标准构形杨盘的格子,在每一列内数必须往下增加,即



一个 n 个格子的列必须包含所有1到 n 的数.因为单粒子态的权是可加的,这 n 个格子对这杨盘的权贡献一个等于所有单粒子态的权的和的数,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} W_1(\boxed{i}),\ \sum_{i=1}^{n} W_2(\boxed{i}),\ \sum_{i=1}^{n} W_3(\boxed{i}),\cdots,\sum_{i=1}^{n} W_{N-1}(\boxed{i})\right) \tag{9.58}$$

单粒子态的权由SU(n)的对角的对易生成元的对角元素给出.所有 n 个权的和(9.58)为0,因为在SU(n)情况这些矩阵是无迹的.因此我们肯定有 n 个格子的列对杨盘的权无贡献,因而可以被忽略(这一点对别的群,例如U(n)不一定成立).

这样,一般情况SU(n)的多重态被($n-1$)个整数 $p_1,\cdots,p_{n-1}$ 所规定.最简单的场合,

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_{n-1} = 0 \tag{9.59}$$

代表SU(n)的单态.类似于SU(2)我们用符号①来表示它.接下的一个基本杨图特征是一个数 p_i 为1而所有其余 p_k 为0.

$$p_k = \delta_{ik} \quad , \quad k = 1,\cdots,n-1 \tag{9.60}$$

i 可以取从1到($n-1$)的每个值,这些图由带有 i 个格子的单一列组成.这些表示称为基本表示.在SU(n)情况我们有($n-1$)个这种样子的图,所以SU(2)只有一个基本表示,正是双重态

$$\square = (1) \tag{9.61}$$

在SU(3)情况存在三重态和反三重态

$$\square = (1,0), \quad \begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline \end{array} = (0,1) \tag{9.62}$$

而对SU(4)有三个基本表示

$$\square = (1,0,0),\quad \begin{array}{|c|}\hline\ \\ \hline\ \\ \hline\end{array} = (0,1,0),\quad \begin{array}{|c|}\hline\ \\ \hline\ \\ \hline\ \\ \hline\end{array} = (0,0,1) \tag{9.63}$$

这里第一个是四重态，最后一个是反四重态，而第二个表示是一个六重态.

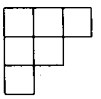
现在我们引入与 SU(n)有关的共轭杨图的概念. 考虑一个图，它由数

$$(p_1,\cdots,p_{n-1}) \tag{9.64}$$

表征. 如果我们颠倒数的次序

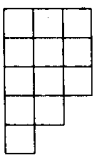
$$(p_{n-1},\cdots,p_1) \tag{9.65}$$

我们称这样构造的图共轭于前者. (注意与我们在前面引入的有关置换群 S_N 的共轭图是不同定义的). 与 SU(6)有关的 6 粒子杨图



(9.66)

是由数(1,1,1,0,0)代表的. 其共轭图(0,0,1,1,1)具有形式



(9.67)

如果原来的图全同于共轭图，它对 SU(2)总是这样，我们称这图为“自共轭”的. SU(3)的八重态表示是在较高的群中一个自共轭图的例子：



$$= (1,1) \tag{9.68}$$

另一个例子是 SU(4)的第 2 个基本表示

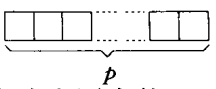


$$= (0,1,0) \tag{9.69}$$

一般情况共轭表示的维数恒等于原来图给出的表示的维数.

9.6　维数的决定

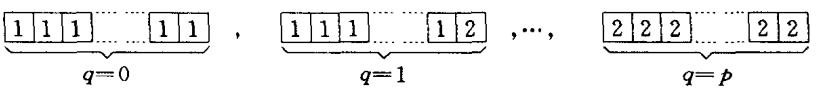
一般说来通过与数有关杨图的标准构形来决定一个 SU(n)多重态的维数可能是相当费劲的. 因此，要是在我们手中有一个普适的公式来计算给定数 $p_1,\cdots,p_{n-1}$ 的维数是非常有用的. 我们从 SU(2)开始，在 SU(2)中每个多重态(相应于杨图)由一个单个数 p 来表征. 该图由一行 p 个格子组成：



(9.70)

标准构形在这些格子中包含数 1 或 2. 在这个图中数 2 必须在所有数 1 的右方. 这样，每个标准

构形由指标 2 出现的次数 q 给出. q 可以取值 o 到 p,即



(9.71)

每个 q 值严格地与一个标准盘相关. 因此标准构形的总数,即该多重态的维数为

$$D_2(p)=\sum_{q=0}^{p}1=p+1 \tag{9.72}$$

如果我们计算较高的群 SU(n)的维数,我们必须应用组合方法,例如

$$D_n(p_1,\cdots,p_{n-1}) \tag{9.73}$$

我们可以用类似的考虑推出一个递推公式,把 SU($n+1$)的图的维数与 SU(n)的同一图的维数联系起来. 由 SU($n+1$)下到 SU(n),我们注意所有 n 格的列都能被略去,大大地简化了这个杨图. 这相应于忽略最后一个数 p_n,即

$$(p_1,\cdots,p_{n-1},p_n)\xrightarrow{\mathrm{SU}(n)}(p_1,\cdots,p_{n-1}) \tag{9.74}$$

上面提到的递推公式(它的一般证明将在例 10.4 中给出)为

$$\begin{aligned}D_{n+1}(p_1,\cdots,p_n)=&\frac{1}{n!}(p_n+1)(p_n+p_{n-1}+2)\cdots(p_n+\cdots+p_1+n)\\&\times D_n(p_1,\cdots,p_{n-1})\end{aligned} \tag{9.75}$$

对群 SU(3),我们得到公式

$$\begin{aligned}D_3(p_1,p_2)&=\frac{1}{2!}(p_2+1)(p_1+p_2+2)D_2(p_1)\\&=\frac{1}{2}(p_1+1)(p_2+1)(p_1+p_2+2)\end{aligned} \tag{9.76}$$

如果我们让数(p_1,p_2)恒等于数(p,q),这正是我们在第八章中通过几何考虑得到的表达式.

对 SU(4),我们类似地得到

$$\begin{aligned}D_4(p_1,p_2,p_3)&=\frac{1}{3!}(p_3+1)(p_2+p_3+2)(p_1+p_2+p_3+3)D_3(p_1,p_2)\\&=\frac{1}{12}(p_1+1)(p_2+1)(p_3+1)(p_1+p_2+2)\\&\quad\times(p_2+p_2+2)(p_1+p_2+p_3+3)\end{aligned} \tag{9.77}$$

很清楚,因子数随着群的秩增加得很快. 因此对大的 n 值用较简单的方法给出适当的维数的方法常常是有用的. 这样,一个 SU(n)多重态的维数由一个分数表示①,

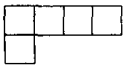
$$D_n(p_1,\cdots,p_{n-1})=\frac{a_n(\boldsymbol{p})}{b(\boldsymbol{p})} \tag{9.78}$$

---

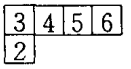
① H. J. Coleman: Symmetry Groups made easy, Adv. Quantum Chemistry 4, 83(1968).

它的分子和分母如下来定出.

为了决定分子 a_n,每个格子被标上一个数. 在 SU(n)情况,我们从数字 n 开始,它被标在表的最上左边的格子里. 在第一行里这些数从左到右必须每次增加 1. 在第二行里这些格包含一个比相应的上面格子的数小 1 的数. 例如我们考虑以下 SU(3)的杨图,即 $n=3$

 $=(3,1)$ (9.79)

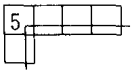
我们遵从上面表达的规则用下面的数填充这些格子

 (9.80)

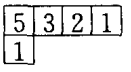
而这分子由这些数的乘积产生

$$a_3(3,1)=3\times4\times5\times6\times2 \tag{9.81}$$

为了得到分母,每个格子再次被填上数,但是是以不同的方式. 为了这个目的,我们画一条水平线从上面左边的格子中心到右边,再画一条垂直线向下. 然后我们计算这些通过的格子数,包括原来的格子,把这个数填在适当的格子里. 这些数乘起来给出 b 的值. 在我们的例子中在第一行左边的第一个格子,我们有

 (9.82)

总和起来

 (9.83)

由此排数我们可以计算 b,例如

$$b(3,1)=5\times3\times2\times1\times1 \tag{9.84}$$

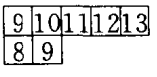
因此 SU(3)的表示(3,1)的维数为

$$D_3(3,1)=\frac{a_3(3,1)}{b(3,1)}=\frac{3\times4\times5\times6\times2}{5\times3\times2\times1\times1}=24 \tag{9.85}$$

公式(9.76)给出同样的结果:

$$D_3(3,1)=\frac{1}{2}(3+1)(1+1)(3+1+2)=\frac{1}{2}\times4\times2\times6=24 \tag{9.86}$$

当我们考虑一个类似的杨图作为 SU(9)的一个多重态时,这个新方法的优越性很明显. 我们只要重新计算这分子得到

 (9.87)

我们现在得出这个维数

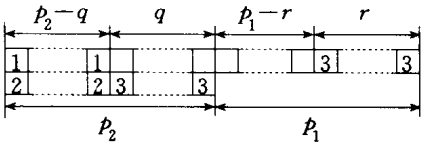
$$D_9(3,2,0,\cdots0)=\frac{9\times10\times11\times12\times13\times8\times9}{6\times5\times3\times2\times1\times2\times1}=30888 \tag{9.88}$$

在这个例子中,用标准公式(9.75)我们将不得不乘起一个 8! =40320 个因子的乘积.

练习 9.6 SU(3)的维数公式

问题 通过应用 SU(2)的结果对 SU(3)多重态的维数推导表达式(9.76).

解 在一个包含数 1,2 和 3 的 SU(3)标准构形中,第二行只能包括 2 和 3,而且所有数 3 必须在数 2 的右方,并且仅仅在这些(单个的)不再有任何格子在下面的格子里.在第一行,在数 2 上面的格子只能包含值 1.在第一行里,数 3 只能出现在右端,在那些没有格子直接在下面的格子里.用 r 代表第一行里包含 3 的格子数,我们必须有 $0\leq r\leq p_1$.如果 q 是第二行里包含 3 的格子数,$0\leq q\leq p_2$ 必须成立.因此我们得到一个以下形式的盘:



直到现在只有在第一行中心的 $q+(p_1-r)$ 个格子的值尚未决定.应用标准方法我们可以用数 1 和 2 任意填充这些格子.但这个构形数刚好等于 SU(2)中带有 $q+(p_1-r)$ 个格子的杨图的维数:

$$D_2(q+p_1-r)=q+p_1-r+1 \tag{1}$$

在 SU(3)情况,我们通过在允许范围内对 q 和 r 求和来得到完全的图的维数,给出

$$\begin{aligned}
D_3(p_1,p_2)&=\sum_{q=0}^{p_2}\sum_{r=0}^{p_1}D_2(q+p_1-r)\\
&=\sum_{q=0}^{p_2}\left[(q+p_1+1)(p_1+1)-\frac{1}{2}p_1(p_1+1)\right]\\
&=\frac{1}{2}(p_1+1)\sum_{q=0}^{p_2}(2q+p_1+2)\\
&=\frac{1}{2}(p_1+1)[p_2(p_2+1)+(p_1+2)(p_2+1)]\\
&=\frac{1}{2}(p_1+1)(p_2+1)(p_1+p_2+2)
\end{aligned}\tag{2}$$

其中我们应用了关系

$$\sum_{i=0}^{m}1=m+1\quad,\quad\sum_{i=0}^{m}i=\frac{1}{2}m(m+1)\tag{3}$$

(练习 9.6 完)

9.7 SU(n)的 SU($n-1$)子群

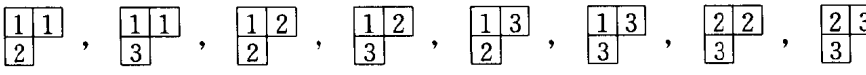
在 SU(3)多重态的权图中包含一些 SU(2)多重态.因为图的对称性,在与同位旋有关的子多重态与别的与 U 自旋或 V 自旋有关的子多重态间没有什么差别.例如夸克三重态包括一个同

位旋单态(s 夸克)和一个同位旋二重态(u 夸克和 d 夸克). 重子八重态包括两个同位旋二重态(p,n 和 Ξ^-,Ξ^0),一个三重态($\Sigma^-,\Sigma^0,\Sigma^+$) 和一个单态($\Lambda$).

我们现在需要借助于杨图来完成到子群的分解。为了演示这个过程,我们采取 SU(3)的八重态,表示为


$$=(1,1) \tag{9.89}$$

八个相应的杨盘在原来的练习 9.5 中考虑过为


$$\tag{9.90}$$

在 SU(2)情况,包含数 3 的格子不存在。因而我们把这些盘按包含 3 的格子的相应位置分成组。首先我们发现两个盘不包含数 3,即


$$\text{和} \tag{9.91}$$

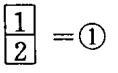
在 SU(2)中列  能被略(因为它在 SU(2)下表示一个单态),这样我们得到一个二重态


$$\tag{9.92}$$

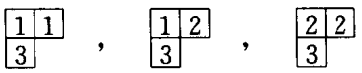
现在我们看寻找一个单个数 3 在右边的盘。只有一个这样的盘


$$\tag{9.93}$$

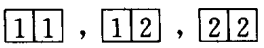
因为在 SU(2)的情况数 3 是无意义的,我们可以忽略这个格子而得到一个 SU(2)单态


$$\tag{9.94}$$

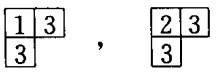
有三个盘在底部带有数 3,


$$\tag{9.95}$$

再一次忽略包含 3 的格子,我们得到一个 SU(2)三重态,


$$\tag{9.96}$$

最后我们有两个包含数 3 两次的盘,即

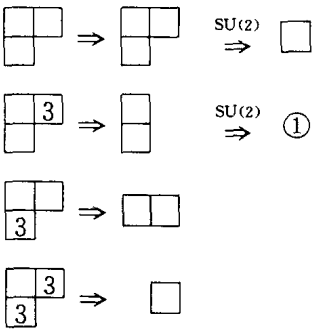

$$\tag{9.97}$$

抹去两个包含 3 的格子,产生了一个二重态


$$\tag{9.98}$$

这样总起来我们找到了一个单态、两个二重态和一个三重态.

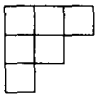
我们将简单地通过只对允许的构形用 3 填充格子得到同样的结果:



(9.99)

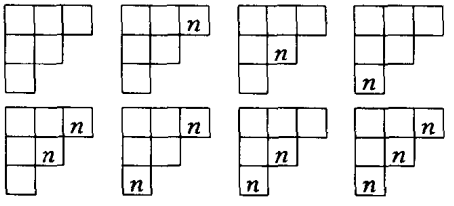
在第一步我们移去所有包含数 3 的格子,第二步我们排除两个格子的列.

我们很容易推广这个方法到群 SU(n). 在图中考虑所有包含数 n 的格子的允许位置,并移去这些格子. SU($n-1$)子多重态由留下来的格子给出. 例如我们考虑杨图



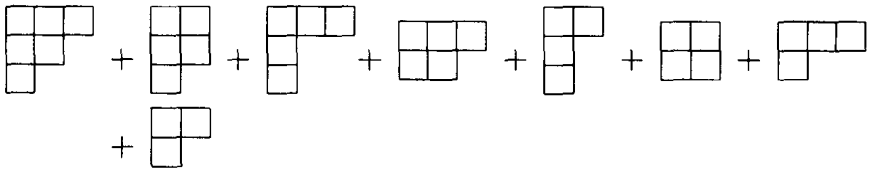
(9.100)

对于它有几种方式用数 n 来标这些格子,给出为



(9.101)

这里的规则是 n 只能出现在一列的底部,因为这些方块中的数必须从顶到底增加,并且从左到右不减少. 这样我们得到了从 SU(n)多重态到群 SU($n-1$)子多重态的分解,即



(9.102)

然后我们可以进一步分解这些多重态到 SU($n-2$)的多重态,并如此继续下去.

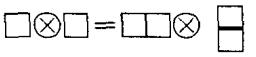
9.8 两个多重态张量乘积的分解

分解属于一个一定多重态的多粒子体系状态是群论中的一个重要问题. 我们已经讨论过有

两种方式耦合两个自旋$\frac{1}{2}$粒子到好的总角动量状态($j=0$ 和 $j=1$,分别地)的例子. 用群论的语言来表达这一点:两个 SU(2)二重态的张量直积分解为一个单态和一个三重态

$$[\underline{2}]\otimes[\underline{2}]=[\underline{3}]\oplus[\underline{1}] \tag{9.103}$$

借助于杨图表达这个结果我们有



(9.104)

很明显,两个新的多重态是由以一个适当方式联合原来两个图的格子得到的. 我们注意杨图的组合(9.104)比起关系(9.103)来有远为广泛的正确性. (9.103)只在 SU(2)情况成立,方程(9.104)对任何 SU(n)群成立. 对 SU(3)的例子,图□代表一个基本三重态(夸克). 现在(9.104)表示两个夸克可以耦合到一个六重态和一个反三重态,即

$$[\underline{3}]\otimes[\underline{3}]=[\underline{6}]\oplus[\underline{\bar{3}}] \tag{9.105}$$

在 SU(4)框架内,(9.104)表示关系

$$[\underline{4}]\otimes[\underline{4}]=[\underline{10}]\oplus[\underline{6}] \tag{9.106}$$

如此等等.

我们现在说明如何耦合两个 SU(n)多重态的一般规则[①],但不做证明. 我们从画出表示两个多重态的杨图开始,第二个图的每一格子用相应的行数标上. 我们用把第二个图的所有格子加到第一个图上来继续下去. 这些格子只能被加在第一个图的右边和底下,注意以下的规则:

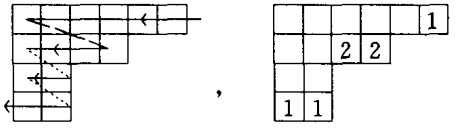
a) 每个结果的图必须是一个允许的构形,即必须没有一行比上面一行长.

b) 在 SU(n)框架内,没有一列包含多于 n 个格子.

c) 在一行内由第二个图产生的格子中的数从左到右必须不减少.

d) 在一列内从顶到底必须增加.

e) 我们画一条路径穿过结果杨图的所有格子,穿过每一行从右到左,开始于顶部. 沿着这条路径,数 i 必须任何时候不会出现得比数$(i-1)$次数多,即



路径　　禁戒图

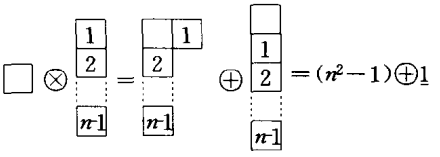
(9.107)

在其他的事情中,这个规则说第二个杨图的第 i 行的格子必须不被连接到第一个杨图的前$(i-1)$行上.

作为一个例子我们考虑 SU(n)的两个基本表示的张量乘积,$n\geq 3$.

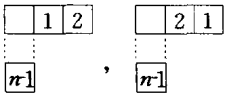
---

① 参看 D. B. Lichtenberg: *Unitary Symmetry and elementary particles* (Academic Press, New York, London 1970) 第 7 章



$$= (n^2-1)\oplus\underline{1} \tag{9.108}$$

组合



(9.109)

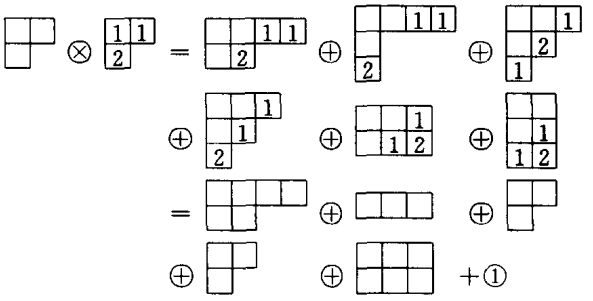
等等是分别被规则(e)和(c)禁止的. 在群 SU(3)的内容内,关系(9.108)指的是

$$[\underline{3}]\otimes[\underline{\bar{3}}] = [\underline{8}]\oplus[\underline{1}] \tag{9.110}$$

练习 9.7 一个张量直积的分解

问题 对 SU(3)找出张量直积$\underline{8}\otimes\underline{8}$的分解.

解



这里在最后一步我们略去了包含三个格子的多余的列. 结果,把多重态用它们的维数表示我们得到

$$[\underline{8}]\otimes[\underline{8}] = [\underline{27}]\oplus[\underline{10}]\oplus[\underline{8}]\oplus[\underline{8}]\oplus[\underline{10}]\oplus[\underline{1}]. \tag{1}$$

这里值得注意的是八重态在分解中出现两次. 由于一个一般规则这是可以出现的,只要原来的图不是两者都是长方形形式. **(练习 9.7 完)**

如果我们考虑表示的直积,一种分类的安排常常是有用的. 这可以在下面看到. 组合两个分别有 b_1 格和 b_2 格的杨图,最初给出一个图有(b_1+b_2)个格子. 然而对 SU(n)我们可以略去有 n 个格子的列,留下来的图可以有

$$b_1+b_2,\ b_1+b_2-n,\ b_1+b_2-2n,\ \cdots \tag{9.111}$$

格子. 为了统一这些可能性,把格子数按 n 的余数分类是有用的. 这样我们说一个不可约表示是类 $m(0\leq m\leq n-1)$,如果相应杨图的格子数可以写成形如

$$b = in + m \tag{9.112}$$

其中 i 是某个整数. 如果我们按上面说的形成类 m_1 和类 m_2 两个的表示的张量直积，结果就有每个结果杨图必须是类

$$m = (m_1 + m_2) \quad (\text{余 } n) \tag{9.113}$$

的成员. 所以 SU(n)的表示分成类，当形成张量直积时，行为如同一个加法群. 这个余数类(余 n)的群标为 Z_n，并被称为该群的中心. 代替余数类 m，我们也可以用单位根 $\exp(2im\pi/n)$来描写 SU(n)群的不同类，因为

$$e^{2im_1\pi/n}e^{2im_2\pi/n} = e^{2im\pi/n} \tag{9.114}$$

对 $m \equiv m_1 + m_2$(余 n)成立. 这种分类有一个优越性：张量直积形式的乘法特征变得明显了.

例 9.8　SU(2)的表示和自旋

在 SU(2)的表示中有带偶数格子的表示和带奇数格子的表示，那些带偶数格子的相应于整数自旋或同位旋的表示，而那些带奇数格子的代表半整数(同位)自旋的多重态. (**例 9.8 完**)

例 9.9　三重态和夸克禁闭

在 SU(3)场合，我们用三重度区分多重态，$\tau=0$(对 $k=0$)，$\tau=1$(对 $k=1$)和 $\tau=-1$(对 $k=2$). 对夸克 $\tau=1$，对反夸克 $\tau=-1$. 几个粒子的三重度是相加的(余 3)，而重子包含三个夸克，有三重度 $\tau=0$ 和介子由一个夸克和一个反夸克组成，有 $\tau=0$. 人们猜想：在自然界中只有 $\tau=0$ 的粒子出现为自由粒子(夸克禁闭). (**例 9.9 完**)

第 10 章　数学浏览，群特征标

10.1　群特征标的定义

在这一章里将引入一个特殊的群论概念，它有许多应用. 它描写表示的主要性质，因而被称为“群特征标”. 它解决怎样以一种简单方式来描写一个群表示的不变性质的问题. 如果我们用 $\hat{G}_a$ 来表示群 G 的一个元素，一个表示 $\hat{D}(\hat{G}_a)$ 不是完全确定的，因为每个相似变换 $\hat{A}\hat{D}(\hat{G}_a)\hat{A}^{-1}(\hat{A}\in D(G))$ 给出一个等价形式. 描写不变性质的一个可能性是利用表示矩阵的本征值，它在相似变换下不变. 这导致卡西米尔算符的构造，它的本征值分类该表示. 构造卡西米尔算符和它们的本征值一般是一个非常困难的非线性问题. 幸好在许多场合用一个简单的不变量就够了，该不变量即表示矩阵的迹

$$\chi(\hat{G}_a)=\sum_{i=1}^{d}D_{ii}(\hat{G}_a) \tag{10.1}$$

这里 d 是这个矩阵表示的维数. 方程(10.1)事实上是在相似变换下不变的，因为

$$\begin{aligned}\psi'(\hat{G}_a)&=\sum_i D'_{ii}(\hat{G}_a)=\sum_{ijk}A_{ij}D_{jk}(\hat{G}_a)(\hat{A}^{-1})_{ki}\\&=\sum_{jk}D_{jk}(\hat{A}^{-1}\hat{A})_{kj}=\sum_j D_{jj}(\hat{G}_a)=\chi(\hat{G}_a)\end{aligned} \tag{10.2}$$

$\chi(\hat{G}_a)$ 被称为这个表示的“群特征标”.

现在我们限制自己于有限群. 这些群只由有限数个元素组成，因而比较好处理. 稍后我们推广这些结果到连续紧致群，即紧致李群，例如像 U(N)和 SU(N). 然而首先我们引入几个基本概念，它们在以后是必需的.

10.2　舒尔引理

10.2.1　舒尔第一引理

设 $(\hat{D})(\hat{G}_a)$ 为群 G 的一个不可约表示，定义在矢量空间 $\mathscr{R}$ 上(例如三维的物理空间上)，而 $\hat{A}$ 为

$\mathscr{R}$ 上一个固定算符. 舒尔(Schur)第一引理说：

如果对所有 $\hat{G}_a$，$\hat{A}$ 与 $\hat{D}(\hat{G}_a)$ 对易，即

$$[\hat{A},\ \hat{D}(\hat{G}_a)]_- = 0 \tag{10.3}$$

则 $\hat{A}$ 正比于单位算符(单位矩阵)，或

$$\hat{A} = \lambda \mathbb{1} \tag{10.4}$$

这一点已经在第四章的(4.6)和(4.9)中看到，但是以稍微不同的形式. 新的和重要的东西是：以下的讨论中 $\hat{D}(\hat{G}_a)$ 不只是群的一个一般算符，而是一个矩阵表示. 如果这个群正是空间 $\mathscr{R}$，那么这就回到前面的情况.

10.2.2　舒尔第二引理

设 $\hat{D}^1(\hat{G}_a)$ 和 $\hat{D}^2(\hat{G}_a)$ 为群 G 在维数分别为 d_1 和 d_2 的两个空间 $\mathscr{R}_1$ 和 $\mathscr{R}_2$ 上的两个不等价的不可约表示($\mathscr{R}_1=\mathscr{R}_2$ 或 $d_1=d_2$ 的情况不排除在外)；而 $\hat{A}$ 是一个算符把 $\mathscr{R}_1$ 映射到 $\mathscr{R}_2$. 舒尔第二引理说：

如果对所有 G 中的 $\hat{G}_a$ 有

$$\hat{D}^1(\hat{G}_a)\hat{A} = \hat{A}\hat{D}^2(\hat{G}_a) \tag{10.5}$$

则 $\hat{A}$ 是零算符，$\hat{A}=0$.

舒尔第二引理的证明. 因为舒尔第一引理在第四章中被明显地处理了，这就足以证明第二引理. 这可以用反证法来达到.

(i) 我们先考虑 $d_2 \leq d_1$ 的情况. 那时 $\hat{A}$ 作用到 $\mathscr{R}_2$ 上产生一个 $\mathscr{R}_1$ 的子空间 $\mathscr{R}_a$，其维数 $d_a \leq d_2 \leq d_1$. 这个子空间由所有矢量 $\hat{A}\boldsymbol{r}$ 构成，其中 $\boldsymbol{r} \in \mathscr{R}_2$. 由假设(10.5)马上就得出 $\mathscr{R}_a$ 相对于群 G 的表示的作用是不变的：

$$\hat{D}^1(\hat{G}_a)\hat{A}\boldsymbol{r} = \hat{A}\hat{D}^2(\hat{G}_a)\boldsymbol{r} \equiv \hat{A}\boldsymbol{r}_a \tag{10.6}$$

这也属于 $\mathscr{R}_a$，因为 $\boldsymbol{r}_a=\hat{D}^2(\hat{G}_a)\boldsymbol{r}$ 属于 $\mathscr{R}_2$. 然而假设说 $\hat{D}^1$ 是不可约表示，也即 $\mathscr{R}_1$ 没有真正的不变子空间. 否则 $\hat{D}^1(\hat{G}_a)$ 能够化为分块形状. 因为 $\mathscr{R}_a$ 是一个不变子空间，这儿有一个矛盾，除非 $\mathscr{R}_a$ 是 0 空间($d_a=0$)即 $\hat{A}=0$ 或者 $\mathscr{R}_a$ 是整个空间 $\mathscr{R}_1$ 即($d_a=d_1=d_2$). 这最后一个可能性被排除掉，因为 $\hat{D}^1(\hat{G}_a)$ 和 $\hat{D}^2(\hat{G}_a)$ 已经被假设为不同的，即不等价的表示. 如果两者有同一维数，我们可以逆转 $\hat{A}$ 使得

$$\hat{D}^1(\hat{G}_a) = \hat{A}\hat{D}^2(\hat{G}_a)\hat{A}^{-1}$$

即 $\hat{D}^1(\hat{G}_a)$ 将相似于 $\hat{D}^2(\hat{G}_a)$；因此唯一的可能 $\hat{A}=0$ 留下来.

(ii) $d_2>d_1$. 因为 $\hat{A}$ 映射整个空间 $\mathscr{R}_2$ 到 $\mathscr{R}_1$，必然有 $d_a<d_2$，因为 $d_2>d_1$. 这意味着 $\mathscr{R}_2$ 中有矢量 $\boldsymbol{r}$ 被映射到 0($\hat{A}\boldsymbol{r}=0$). 我们用 $\mathscr{R}_b$ 标记 $\mathscr{R}_2$ 的这个子空间，它的维数 $d_b=d_2-d_a$. $\mathscr{R}_b$ 也是一个不变子空间，因为如果 $\boldsymbol{r}_a=\hat{D}^2(\hat{G}_a)\boldsymbol{r}$，则

$$\hat{A}\boldsymbol{r}_a = \hat{A}\hat{D}^2(\hat{G}_a)\boldsymbol{r} = \hat{D}^1(\hat{G}_a)\hat{A}\boldsymbol{r} = 0 \tag{10.7}$$

即 r_a 也属于 $\mathscr{R}_b$. 如果 $d_b<d_2$ 这与 D^2 的不可约性是一矛盾. 因此 $d_b=d_2$,即 $d_a=0$,而再次 $\hat{A}=0$ 必须成立. 这样舒尔第二引理被证明了.

10.3 表示的正交关系和离散群

首先我们表明对两个任意的不可约表示 $\hat{D}^\alpha$ 和 $\hat{D}^\beta$,矩阵

$$\hat{A}=\sum_b \hat{D}^\alpha(\hat{G}_b)\hat{X}\hat{D}^\beta(\hat{G}_b^{-1}) \tag{10.8}$$

具有舒尔引理要求的性质. 这里 $\hat{X}$ 是一个维数为 $d_\alpha\times d_\beta$ 的任意矩阵,而求和遍及群的所有元素 $\hat{G}_b$. 记住我们仍在处理有限群,因此求和是有限的.

现在我们用清晰的计算表明(10.5)成立:

$$\begin{aligned}\hat{G}^\alpha(\hat{G}_a)\hat{A}&=\sum_b \hat{D}^\alpha(\hat{G}_a)\hat{D}^\alpha(\hat{G}_b)\hat{X}\hat{D}^\beta(\hat{G}_b^{-1})\\&=\sum_b \hat{D}^\alpha(\hat{G}_a\hat{G}_b)\hat{X}\hat{D}^\beta(\hat{G}_b^{-1})\hat{D}^\beta(\hat{G}_a{}^{-1})\hat{D}^\beta(\hat{G}_a)\end{aligned} \tag{10.9}$$

这里我们用了 $\hat{D}^\alpha(\hat{G}_a)\hat{D}^\alpha(\hat{G}_b)=\hat{D}^\alpha(\hat{G}_a\hat{G}_b)$和 $\hat{D}^\beta(\hat{G}_a^{-1})\hat{D}^\beta(\hat{G}_a)=\hat{D}^\beta(E)=\mathbb{1}$ (E 是群的单位元素). 上面的表达式可以被写成

$$\begin{aligned}\sum_b \hat{D}^\alpha(\hat{G}_a\hat{G}_b)\hat{X}\hat{D}^\beta((\hat{G}_a\hat{G}_b)^{-1})\hat{D}^\beta(\hat{G}_a)&=\sum_c \hat{D}^\alpha(\hat{G}_c)\hat{X}\hat{D}^\beta(\hat{G}_c^{-1})\hat{D}^\beta(\hat{G}_a)\\&=\hat{A}\hat{D}^\beta(\hat{G}_a)\end{aligned} \tag{10.10}$$

其中 $\hat{G}_c=\hat{G}_a\hat{G}_b$. 最后一步成立是因为求和遍及所有群元素 $\hat{G}_b$,而 $\hat{G}_a\hat{G}_b$ 只是引起元素的置换;最后求和重新包括所有的元素而我们又一次得到算符 $\hat{A}$. 然而最后的等式指出

$$\hat{G}^\alpha(\hat{G}_a)\hat{A}=\hat{A}\hat{D}^\beta(\hat{G}_a) \tag{10.11}$$

因此 $\hat{A}$ 具有舒尔引理要求的性质(10.5). 在短阵表示中 $\hat{A}$ 是形式

$$\hat{A}=\lambda\delta_{\alpha\beta}\mathbb{1} \tag{10.12}$$

在(10.8)中我们可以任意选择 $\hat{X}$,因为我们在推导中没有关于 $\hat{X}$ 的任何假设. 如果我们取 $x_{km}=\delta_{kp}\delta_{mq}$即要求 $\hat{X}$ 由一个除去 q 行 p 列的元素外都是 0 的矩阵表示,那么由(10.8)得出

$$\begin{aligned}&\sum_{a=1}^{g}\sum_{m=1}^{d_\beta}\sum_{k=1}^{d_\alpha}D^\alpha_{ik}(\hat{G}_a)X_{km}D^\beta_{mj}(\hat{G}_a^{-1})\\&=A_{ij}=\lambda^{(p,q)}\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}=\sum_{a=1}^{g}D^\alpha_{ip}(\hat{G}_a)D^\beta_{qj}(\hat{G}_a^{-1})\end{aligned} \tag{10.13}$$

其中 g 是群的阶数,即在 G 中的元素数,而 d_α,d_β 是不可约表示 D^α,D^β 的维数. 这样只有 λ 留待决定. λ 只对 $i=j$ 和 $\alpha=\beta$ 是重要的. 如果(10.13)被用来对所有 i 求和,我们发现

$$\sum_{i=1}^{d_\alpha}\sum_{a=1}^{g}D^\alpha_{ip}(\hat{G}_a)D^\alpha_{qi}(\hat{G}_a^{-1})=\lambda^{p,q}\sum_{i=1}^{d_\alpha}1=d_\alpha\lambda^{(p,q)} \tag{10.14}$$

另一方面

$$\sum_{i=1}^{d_a} D_{ip}^{a}(\hat{G}_a) D_{qi}^{a}(\hat{G}_a^{-1}) = D_{qp}^{a}(\hat{E})$$

成立，即

$$\sum_{a=1}^{g} D_{qp}^{a}(\hat{E}) = g D_{qp}^{a}(\hat{E}) = \lambda^{p,q} d_a \tag{10.15}$$

然而单位元的表示矩阵是 $D_{qp}^{a}(\hat{E})=\delta_{qp}$，这样由(10.15)就得出

$$\lambda^{(p,q)} = \delta_{qp} \frac{g}{d_a} \tag{10.16}$$

因此有限群表示的正交关系的最后形式被确定为

$$\sum_{a=1}^{g} D_{ip}^{a}(\hat{G}_a) D_{qj}^{\beta}(\hat{G}_a^{-1}) = \frac{g}{d_a} \delta_{a\beta} \delta_{ij} \delta_{pq} \tag{10.17}$$

稍后我们需要用这个形式来推导群特征标的正交关系. 如果表示是幺正的，这是从现在起我们想限定的情况，那么(10.17)能被简化，因为 $D_{qj}^{\beta}(\hat{G}_a^{-1})=D_{jq}^{\beta}(\hat{G}_a)^*$. 因此得到形式

$$\sum_{a=1}^{g} D_{ip}^{a}(\hat{G}_a) D_{jq}^{\beta}(\hat{G}_a)^* = \frac{g}{d_a} \delta_{a\beta} \delta_{ij} \delta_{pq} \tag{10.18}$$

10.4　等价类

在我们引入等价类的概念之前，我们需要“共轭”群元素的定义：如果存在有一个元素 $\hat{G}_n \in G$ 具有性质

$$\hat{G}_a = \hat{G}_n \hat{G}_b \hat{G}_n^{-1} \tag{10.19}$$

$\hat{G}_a$ 被称为共轭于元素 $\hat{G}_b$. 如果 $\hat{G}_b$ 和 $\hat{G}_c$ 都共轭于 $\hat{G}_a$，那么(10.19)对 $\hat{G}_b$ 和 $\hat{G}_c$ 也成立，即

$$\hat{G}_a = \hat{G}_n \hat{G}_b \hat{G}_n^{-1} \text{ 和 } \hat{G}_a = \hat{G}_m \hat{G}_c \hat{G}_m^{-1}$$

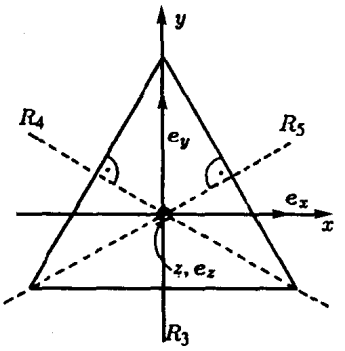
这给出

$$\hat{G}_b = \hat{G}_n^{-1} \hat{G}_a \hat{G}_n = \hat{G}_n^{-1} \hat{G}_m \hat{G}_c \hat{G}_m^{-1} \hat{G}_n = (\hat{G}_n^{-1} \hat{G}_m) \hat{G}_c (\hat{G}_n^{-1} \hat{G}_m)^{-1} \tag{10.20}$$

这严格地是等价关系的性质. 所有成对共轭的元素形成一个等价类. 下面的例子将说明这一概念.

例 10.1　群 D_3

等边三角形(看图)的对称群 D_3 由六个元素 $\hat{E}, \hat{R}_1, \hat{R}_2, \hat{R}_3, \hat{R}_4, \hat{R}_5$ 组成. $\hat{E}$ 是单位变换，它的应用不改变这三角形. $\hat{R}_1$ 和 $\hat{R}_2$ 分别绕 z 轴把这三角形旋转 $2\pi/3$ 和 $4\pi/3$ 角. 其余的 $\hat{R}_3, \hat{R}_4$ 和 $\hat{R}_5$ 表示对轴的反射. 借助这些定义我们可以构造一个乘法表，如下表



等边三角形的对称群 D_3

等边三角形对称群 D_3 的乘法表

$\hat{G}_b$ \ $\hat{G}_a$	$\hat{E}$	$\hat{R}_1$	$\hat{R}_2$	$\hat{R}_3$	$\hat{R}_4$	$\hat{R}_5$
$\hat{E}$	$\hat{E}$	$\hat{R}_1$	$\hat{R}_2$	$\hat{R}_3$	$\hat{R}_4$	$\hat{R}_5$
$\hat{R}_1$	$\hat{R}_1$	$\hat{R}_2$	$\hat{E}$	$\hat{R}_4$	$\hat{R}_5$	$\hat{R}_3$
$\hat{R}_2$	$\hat{R}_2$	$\hat{E}$	$\hat{R}_1$	$\hat{R}_5$	$\hat{R}_3$	$\hat{R}_4$
$\hat{R}_3$	$\hat{R}_3$	$\hat{R}_5$	$\hat{R}_4$	$\hat{E}$	$\hat{R}_2$	$\hat{R}_1$
$\hat{R}_4$	$\hat{R}_4$	$\hat{R}_3$	$\hat{R}_5$	$\hat{R}_1$	$\hat{E}$	$\hat{R}_2$
$\hat{R}_5$	$\hat{R}_5$	$\hat{R}_4$	$\hat{R}_3$	$\hat{R}_2$	$\hat{R}_1$	$\hat{E}$

符号如下:首先上面一行的一个元素,例如第二个,$\hat{R}_1$ 被用到该三角形,跟随着左边一列的一个元素,例如第五个,$\hat{R}_4$ 被应用.其结果由两个元素的交叉处给出,在这个例子中是第五行和第二列的交叉处.

我们通过下面三角形角标上的数来详细地看这些运算.

$$\hat{R}_1 \begin{smallmatrix}1\\2\ 3\end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix}3\\1\ 2\end{smallmatrix}$$

$$\hat{R}_4\hat{R}_1 \begin{smallmatrix}1\\2\ 3\end{smallmatrix} = \hat{R}_4 \begin{smallmatrix}3\\1\ 2\end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix}1\\3\ 2\end{smallmatrix} = \hat{R}_3 \begin{smallmatrix}1\\2\ 3\end{smallmatrix} \tag{1}$$

这导致结果 $\hat{R}_4\hat{R}_1=\hat{R}_3$.用同样的方式我们可以计算所有的乘法.结果列在上表中.

现在,什么是这个群的等价类?我们发现严格存在三个等价类:

$$\phi_1=\hat{E}\quad,\quad \phi_2=\{\hat{R}_1,\hat{R}_2\}\quad,\quad \phi_3=\{\hat{R}_3,\hat{R}_4,\hat{R}_5\} \tag{2}$$

$\hat{E}$ 为单位变换,总是共轭到它自己,因为 $\hat{R}_i^{-1}\hat{E}\hat{R}_i=\hat{R}_i^{-1}\hat{R}_i=\hat{E}$.经过简单的计算得出,例如

$$\hat{R}_2=\hat{R}_3\hat{R}_1\hat{R}_3^{-1}\quad 和\quad \hat{R}_3=\hat{R}_1\hat{R}_4\hat{R}_1^{-1}=\hat{R}_2\hat{R}_5\hat{R}_2^{-1} \tag{3}$$

它表明 $\hat{R}_2$ 和 $\hat{R}_1$ 是相互共轭的,同样 $\hat{R}_3$,$\hat{R}_4$ 和 $\hat{R}_5$ 是共轭的.为了完成把所有元素指定到类,别的组合,例如 $\hat{R}_4\hat{R}_1\hat{R}_i^{-1}$ 必须被做出来,而这留给读者作为练习.(**例 10.1 完**)

例 10.2 旋转群 O(3)

O(3)由元素

$$\hat{R}(\phi_1,\phi_2,\phi_3)=\exp(\mathrm{i}\sum\phi_k\hat{L}_k)$$

组成,其中 $\hat{L}_k$ 是群 SO(3)的生成元(角动量分量).为了能分类这些元素,我们必须应用所有可能的相似变换到 $\hat{R}(\phi_1,\phi_2,\phi_3)$上,即对任意的 $\hat{R}'$,下式成立

$$\hat{R}'\hat{R}(\phi_1\phi_2\phi_3)\hat{R}'^{-1}=\hat{\tilde{R}}\ (\phi_1\phi_2\phi_3) \tag{1}$$

该式的解释是简单的:首先通过 $\hat{R}'^{-1}$我们旋转到一个新的坐标系,在其中我们完成一个欧拉角为(ϕ_1,ϕ_2,ϕ_3)的旋转,随后转回到老坐标系.因此 $\hat{\tilde{R}}\ (\phi_1,\phi_2,\phi_3)$代表定义在别的坐标系的同一旋转.由(1)我们看到哪些元素组成一个类.所有同样角度的旋转属于同一类.为了说明这一点,我们考虑绕轴 k(例如 z 轴)转角度 ϕ 的旋转:

$$R_k(\phi)=\begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi & 0\\ \sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{2}$$

方程(1)变换这旋转到绕着一个 k' 轴的旋转，这个轴可以在空间的任意方向.

$$\hat{R}'\hat{R}_k(\phi)\hat{R}'^{-1}=\hat{\hat{R}}_{k'}(\phi) \tag{3}$$

$\hat{\hat{R}}_{k'}(\phi)$描写一个同样角度 ϕ 的旋转. 所有在三维空间里绕某个任意轴转这个角度的这种旋转属于同一类.

借助这一知识我们可以容易理解对 D_3 群得到的结果：$\phi_1=\{E\}$描写 0 角的旋转；$\phi_2=\{R_1,R_2\}$描写 $2\pi/3$ 角的旋转($\phi=4\pi/3$ 等价于 $\phi=-2\pi/3$)；在 $\phi_3=\{R_3,R_4,R_5\}$中的元素每个代表一个 π 角的旋转. 这样群 D_3 是 O(3)的一个离散子群，对于它只允许有特殊的旋转轴(每个带有固定的 ϕ 值). 像 D_3 这样的群在晶体学中起着重要的作用. (**例 10.2 完**)

10.5　离散群群特征标的正交关系和别的关系

经过这些例子我们回到群特征标，它被定义在(10.1)中. 首先我们通过(10.18)让 $p=i,q=j$ 并对所有的 i 和 j 求和来证明群特征标的正交关系.

$$\sum_{a=1}^{g}\sum_{i}D_{ii}^{a}(\hat{G}_a)\sum_{j}D_{jj}^{\beta}(\hat{G}_a)^{*}=g\delta_{a\beta} \tag{10.21}$$

上面我们用了 $\sum_i 1=d_a$；而 a 和 β 代表两个不可约表示. 如果我们应用群特征标的定义(10.1)，群特征标的正交关系就从(10.21)得出来

$$\sum_{a=1}^{g}\chi^{(a)}(\hat{G}_a)\chi^{(\beta)}(\hat{G}_a)^{*}=g\delta_{a\beta} \tag{10.22}$$

因为特征标是相似变换下不变的(参看(10.2))，即一类中所有元素有同样的特征标，(10.22)就简化为

$$\sum_{p=1}^{n}c_p\chi_p^{(a)}\chi_p^{(\beta)*}=g\delta_{a\beta} \tag{10.23}$$

其中 c_p 表示类 p 中的元素个数，而 n 是等价类的总数. 我们对两个恒等表示 $a=\beta$ 得到一个有趣的结果：

$$\sum_{a=1}^{g}|\chi^{(a)}(\hat{G}_a)|^2=\sum_{p=1}^{n}c_p|\chi_p^{(a)}|^2=g \tag{10.24}$$

我们可以如下解释(10.23)中的特征标：特征标 χ^a 可以被理解为 n 维空间的一个矢量，带有分量 $\sqrt{c_p}\chi_p^a$，在这空间中不可约的特征标形成一组正交矢量. 因此，很显然，不可能存在多于 n 个不同的不可约表示！

10.6 群 D_3 的群特征标的正交关系

首先我们试图构造在例 10.1 中引入的群 D_3 的矩阵表示.为此目的我们把这个三角形的变换考虑为三维空间里的旋转和反射的结合.我们选择在例 10.1 图中的轴 $\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y$ 和 $\boldsymbol{e}_z$,对 $\hat{R}_1$(绕 z 轴转 $2\pi/3$)给出

$$\begin{aligned}\hat{D}(\hat{R}_1)\boldsymbol{e}_x &= -\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_x+\sqrt{\frac{3}{4}}\boldsymbol{e}_y\\ \hat{D}(\hat{R}_1)\boldsymbol{e}_y &= -\sqrt{\frac{3}{4}}\boldsymbol{e}_y-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_y\\ \hat{D}(\hat{R}_1)\boldsymbol{e}_z &= \boldsymbol{e}_z\end{aligned}\tag{10.25}$$

对其他元素我们得到

$$\hat{D}(\hat{R}_1)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\sqrt{\frac{3}{4}} & 0\\ \sqrt{\frac{3}{4}} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\qquad \hat{D}(\hat{R}_4)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\sqrt{\frac{3}{4}} & 0\\ -\sqrt{\frac{3}{4}} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\hat{D}(\hat{R}_2)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\sqrt{\frac{3}{4}} & 0\\ \sqrt{\frac{3}{4}} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\qquad \hat{D}(\hat{R}_5)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \sqrt{\frac{3}{4}} & 0\\ \sqrt{\frac{3}{4}} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\tag{10.26}$$

$$\hat{D}(\hat{R}_3)=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},\qquad \hat{D}(\hat{E})=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

容易证明这些矩阵满足前面表中给出的乘法规则.进而(10.26)显示了所有的矩阵具有分块结构,允许分解为一个(2×2)和一个(1×1)子矩阵;因此(10.26)给出的表示是可约的.然而这些子矩阵形成一个不可约表示,因为它们不能被进一步分解.这些(2×2)子矩阵形成不可约表示 $\hat{D}^{(3)}$,而这些(1×1)子矩阵形成表示 $\hat{D}^{(2)}$.最后存在一个平凡的表示,正是恒等表示,它的特征是对所有 $\hat{R}_i,\hat{D}^{(1)}(\hat{R}_i)=1$.结果被总结在表 10.1 中

表 10.1　D_3 的群元素的不可约表示

表示 \ 群元素	$\hat{E}$	$\hat{R}_1$	$\hat{R}_2$	$\hat{R}_3$	$\hat{R}_4$	$\hat{R}_5$
$\hat{D}(1)$	1	1	1	1	1	1
$\hat{D}(2)$	1	1	1	−1	−1	−1
$\hat{D}(3)$	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\sqrt{\frac{3}{4}}\\ \sqrt{\frac{3}{4}} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\sqrt{\frac{3}{4}}\\ -\sqrt{\frac{3}{4}} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\sqrt{\frac{3}{4}}\\ -\sqrt{\frac{3}{4}} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \sqrt{\frac{3}{4}}\\ \sqrt{\frac{3}{4}} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

证明它们满足不可约表示的正交关系留给读者作为练习.

在对表 10.1 中的矩阵完成迹运算后，我们得到一个特征标图，它在表 10.2 中给出.

表 10.2　群 D_3 的特征标表

表示 \ 类	$\phi_1(\hat{E})$	$\phi_2(\hat{R}_1, \hat{R}_2)$	$\phi_3(\hat{R}_3, \hat{R}_4, \hat{R}_5)$
$\hat{D}(1)$	1	1	1
$\hat{D}(2)$	1	1	−1
$\hat{D}(3)$	2	−1	0

这些特征标也满足正交关系(10.23). 譬如作为练习我们考虑在表示 $\hat{D}^{(2)}$ 和 $\hat{D}^{(3)}$ 间的正交性：

$$\sum_{p=1}^{n} c_p \chi_p^{(2)} \chi_p^{(3)*} = 1 \times 2 \times 1 + 2 \times 1 \times (-1) + 3 \times (-1) \times 0 = 0 \tag{10.27}$$

$$\sum_{p=1}^{n} c_p \chi_p^{(2)} \chi_p^{(2)*} = 1 \times 1^2 + 2 \times 1^2 + 3 \times (-1)^2 = 6 = g \tag{10.28}$$

方程(10.28)正好给出群元素的个数！

10.7　表示的约化

现在我们考虑一个一般的可约表示 $\hat{D}(\hat{G}_a)$. 群特征标可以帮助我们分解这个表示. 我们知道矩阵表示 $\hat{D}(\hat{G}_a)$ 的矩阵可以被化为分块形式. 随后特征标是每个块对角元素之和. 如果 $\hat{D}(\hat{G}_a)$ 属于类 p，那么

$$\chi_p = \sum_{\alpha} m_\alpha \chi_p^{(\alpha)} \tag{10.29}$$

其中 m_α 是等价不可约表示的数目，也即 $\hat{D}^{\alpha}(\hat{G}_a)$ 出现在 $\hat{D}(\hat{G}_a)$ 中的次数. 借助正交关系(10.23)，我们可以定出 m_α. 因此我们乘上 $(c_p/g)\chi_p^{(\beta)*}$ 并对所有的类 p 求和，得到

$$\frac{1}{g}\sum_{p} c_p \chi_p^{(\beta)*} \chi_p = \frac{1}{g}\sum_{\alpha} m_\alpha \sum_{p} c_p \chi_p^{(\beta)*} \chi_p^{(\alpha)} = \frac{1}{g}\sum_{\alpha} m_\alpha g \delta_{\alpha\beta} = m_\beta \tag{10.30}$$

作为例子,我们再考虑 D_3 和上面引入的表示.我们分解表示(10.26)到不可约分量(看表 10.1)

$$\hat{D} = m_1\hat{D}^{(1)} \oplus m_2\hat{D}^{(2)} \oplus m_3\hat{D}^{(3)} \tag{10.31}$$

'⊕'表示直和,也即通过联接单个矩阵形成一个扩展的矩阵.借助于(10.30)我们得到

$$m_1 = \frac{1}{6}(3+0-3) = 0\ ,\ m_2 = \frac{1}{6}(3+0+3) = 1,$$

$$m_3 = \frac{1}{6}(6+0+0) = 1 \tag{10.32}$$

也即表示 $\hat{D}^{(2)}$ 和 $\hat{D}^{(3)}$ 两者包括在 $\hat{D}$ 中,但 $\hat{D}^{(1)}$ 没有.这是前面给出的平凡的结果.

10.8 不可约性的判据

由特征标的知识,我们可以马上肯定一个给定的表示是否不可约.我们从(10.24)知道

$$\sum_p c_p|\chi_p|^2 = g \tag{10.33}$$

成立.方程(10.33)是不可约性的充分条件,它可以通过考虑(10.23)和(10.29)来证明;

$$\sum_p c_p|\chi_p|^2 = \sum_{\alpha,\beta,p} c_p m_\alpha m_\beta \chi^{(\alpha)}\chi_p^{(\beta)*} = g\sum_\alpha m_\alpha^2 \tag{10.34}$$

这样,(10.33)只当 $\sum_\alpha m_\alpha^2 = 1$ 时成立.然而因为所有 m_α 是正整数或 0,这个条件只当所有数 m_α 除去一个,例如 $m_{\alpha'}$,都为 0 而 $m_{\alpha'}=1$ 时才能被满足.作为一个例子,我们考虑群 D_3 的表示 $D^{(3)}(Ri)$并表明它是不可约的,因为

$$\sum_p c_p|\chi_p|^2 = (1\times 4 + 2\times 1 + 3\times 0) = 6 = g \tag{10.35}$$

10.9 表示的直积

在下面我们确定两个不可约表示的直积的特征标.设$\{D^\alpha_{im}(G_a)\}$和$\{D^\beta_{im}(G_a)\}$为不可约表示 α 和 β 的矩阵表示.然后直积的矩阵表示由表达式

$$\{D^{(\alpha\times\beta)}_{(ij)(mn)}(\hat{G}_a)\} = \{D^\alpha_{(im)}(\hat{G}_a)D^\beta_{(jn)}(\hat{G}_a)\} \tag{10.36}$$

给出.迹是对所有对角元的求和

$$\chi^{(\alpha\times\beta)} = \sum_{ij} D^{(\alpha\times\beta)}_{(ii)(jj)}(\hat{G}_a) = \sum_i D^{(\alpha)}_{ii}(\hat{G}_a)\sum_j D^{(\beta)}_{jj}(\hat{G}_a) \tag{10.37}$$

直积表示的特征标等于原表示 α 和 β 的特征标的乘积,它意味着

$$\chi^{(\alpha\times\beta)} = \chi^{(\alpha)}\cdot\chi^{(\beta)} \tag{10.38}$$

由(10.36)产生的表示一般是可约的,即

$$\hat{D}^{(\alpha\times\beta)}(\hat{G}_a) = \bigoplus_\gamma m_\gamma \hat{D}_\gamma(\hat{G}_a) \tag{10.39}$$

是不可约表示的直和. 借助于(10.30)和(10.38)我们可以决定 m_γ 为

$$m_\gamma = \frac{1}{g}\sum_p c_p \chi_p^{(\gamma)*}\chi_p^{(\alpha)}\chi_p^{(\beta)} \tag{10.40}$$

作为例子我们再考虑群 D_3：我们可以借助于表 10.2 和(10.38)决定直积 $\hat{D}^{(3)}\otimes\hat{D}^{(3)}=\hat{D}^{(3\times3)}$ 的特征标. 对这三个类，该特征标取值为

$$\chi^{(3\times3)} = (4,1,0) = \chi^{(3)}\cdot\chi^{(3)} \tag{10.41}$$

把它代入(10.30)我们得到

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{6}(1\times1\times4+2\times1\times1+3\times1\times0)=1\\ m_2 &= \frac{1}{6}(1\times1\times4+2\times1\times1+3\times(-1)\times0)=1\\ m_3 &= \frac{1}{6}(1\times2\times4+2\times(-1)\times1+3\times0\times0)=1 \end{aligned} \tag{10.42}$$

这样表示 $\hat{D}^{(3\times3)}$ 能够被分解为

$$\hat{D}^{(3\times3)} = \hat{D}^{(3)}\otimes\hat{D}^{(3)} = \hat{D}^{(1)}\oplus\hat{D}^{(2)}\oplus\hat{D}^{(3)} \tag{10.43}$$

10.10　扩展到连续紧致群

到现在为止我们只考虑了离散群，因为它们比较容易处理. 但是带有连续参数域的群在物理中具有巨大的重要性，例如群 SU(2)或 SU(3)在基本粒子物理中起着重要的作用(参看第 5 章、第 8 章). 困难在于我们现在有无穷多的群元素，因为群参数是连续的. 在上面推导的公式中求和要变为积分，而群的元素个数被适当的归一化因子代替. 然而，一开始我们需要几个新的概念，它们将在下一节中被引入.

10.11　数学浏览：群积分

首先我们一个离散的有限维群考虑表达式

$$\sum_{a=1}^{g} f(\hat{G}_a) \tag{10.44}$$

这些群的一个重要性质是：在(10.44)中 $\hat{G}_a$ 可以被 $\hat{G}_c=\hat{G}_b\hat{G}_a$ 代替(用一个固定的但是任意的 $\hat{G}_b$)，而不会改变它的值. 如果 $\hat{G}_a$ 的值覆盖整个群，那么严格地 $\hat{G}_c$ 也覆盖整个群一次. 否则某个 $\hat{G}_{a'}$ 将存在，它给出同样的 $\hat{G}_c$：

$$\hat{G}_c = \hat{G}_b\hat{G}_a = \hat{G}_b\hat{G}_{a'} \tag{10.45}$$

从左边乘上 $\hat{G}_b^{-1}$ 给出

$$\hat{G}_b^{-1}\hat{G}_c=\hat{G}_a=\hat{G}_{a'} \tag{10.46}$$

也即元素 $\hat{G}_a$ 和 $\hat{G}_{a'}$ 必须是恒等的!

在连续群的情况(10.44)转为积分 $\int\mu(\underline{a})f(\underline{a})\mathrm{d}\underline{a}$,其中 $\underline{a}$ 表示该群的参数;测度函数 $|(\mu\underline{a})|$ 被适当选择,以使得满足

$$\int_{\underline{a}\in G} f(\underline{a})\mu(\underline{a})\mathrm{d}\underline{a} = \int_{\underline{a}\in G} f(\underline{c})\mu(\underline{a})\mathrm{d}\underline{a} \tag{10.47}$$

其中 $\underline{c}$ 被定义为

$$\hat{G}(\underline{c}) = \hat{G}(\underline{a})\hat{G}(\underline{b}) \tag{10.48}$$

这里一个任意的但固定的群元素 $\hat{G}(\underline{b})$ 意味着对有限群的性质被保持下来.

这个积分只当积分区域是紧致的(即有限和闭的)才有意义.对非紧致群的情况这个积分可能是发散的.在(10.47)中 $\underline{a}$ 是 $\underline{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_r)$ 的缩写,而 $\mathrm{d}\underline{a}=\mathrm{d}a_1\mathrm{d}a_2\cdots\mathrm{d}a_r$;$r$ 是该群的参数数目.除了(10.47)外还存在一个平凡的条件

$$\int_{\underline{a}\in G} f(\underline{a})\mu(\underline{a})\mathrm{d}\underline{a} = \int_{\underline{c}\in G} f(\underline{c})\mu(\underline{c})\mathrm{d}\underline{c} \tag{10.49}$$

如果我们将(10.49)右方的积分变量 $\underline{c}$ 改变为 $\underline{a}$,我们得到

$$\int_{\underline{a}\in G} f(\underline{a})\mu(\underline{a})\mathrm{d}\underline{a} = \int_{\underline{a}\in G} f(\underline{c})\mu(\underline{c})\frac{\partial\underline{c}}{\partial\underline{a}}\mathrm{d}\underline{a} \tag{10.50}$$

$\partial\underline{c}/\partial\underline{a}$ 是函数行列式(雅可比行列式)

$$\frac{\partial\underline{c}}{\partial\underline{a}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial c_1}{\partial a_1} & \frac{\partial c_1}{\partial a_2} & \cdots & \frac{\partial c_1}{\partial a_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial c_r}{\partial a_1} & \frac{\partial c_r}{\partial a_2} & \cdots & \frac{\partial c_r}{\partial a_r} \end{vmatrix} \tag{10.51}$$

如果我们把(10.50)与关系(10.47)比较,(10.47)是要求成立的,那么对 μ 的条件是

$$\mu(\underline{c})\frac{\partial\underline{c}}{\partial\underline{a}} = \mu(\underline{a}) \tag{10.52}$$

对所有 $\underline{a}$ 成立.假设这样一个测度 μ 存在,我们可以通过指定某个值 $\underline{a}$,例如 $\underline{a}=\underline{0}$(这相应于李群的单位元)来计算 $\mu(\underline{c})$.由此

$$\mu(\underline{c}) = \mu(0)\Big/\left(\frac{\partial\underline{c}}{\partial\underline{a}}\right)_{\underline{a}=\underline{0}} \tag{10.53}$$

常数因子 $\mu(\underline{0})$ 对于它是不重要的,所以让 $\mu(\underline{0})=1$ 和计算 $(\partial\underline{c}/\partial\underline{a})_{\underline{a}=\underline{0}}$ 已经足够了.稍后我们将对幺正群的情况,例如 SU(2)和 SU3 明显地进行这一推算.

在有限离散群的场合,我们有一般形式的表达式

$$\frac{1}{g}\sum_{a=1}^{g} f(\hat{G}_a) \tag{10.54}$$

这里 g 起着一个群的"体积"的作用,因而被

$$g \longrightarrow V(G) = \int_{a \in G} \mu(a)\mathrm{d}a \tag{10.55}$$

取代. 对一个连续群，表达式

$$\frac{1}{V(G)} \int_{\underline{a} \in G} f(\underline{a})\mu(\underline{a})\mathrm{d}\underline{a} \tag{10.56}$$

可以考虑为(10.54)的推广. 在平凡表示 $f(\underline{a})=1$ 的情况，(10.56)具有值“1”. 所有前一节的公式可以通过用表达式(10.56)代替(10.54)，变换到紧致群，虽然在我们考虑测度函数 $\mu(\underline{a})$ 的实际计算之前必须极为详细地研究幺正群.

10.12　幺正群

幺正群 U(N)有 N^2 个生成元 $\hat{C}_{im}(i,m=1,\cdots,N)$，它们满足对易关系

$$[\hat{C}_{im},\hat{C}_{jn}]_- = \delta_{jm}\hat{C}_{in} - \delta_{in}\hat{C}_{jm} \tag{10.57}$$

例如我们可以取 $\hat{C}_{im}=\hat{b}_i^+\hat{b}_m$ 作为生成元，其中 $\hat{b}_i^+$，$\hat{b}_m$ 是产生消灭算符，有对易关系 $[\hat{b}_m\hat{b}_i^+]=\delta_{im}$，对它们

$$\begin{aligned}[\hat{b}_i^+\hat{b}_m,\hat{b}_j^+\hat{b}_n] &= \hat{b}_i^+[\hat{b}_m,\hat{b}_j^+]\hat{b}_n + \hat{b}_i^+\hat{b}_j^+[\hat{b}_m,\hat{b}_n] + [\hat{b}_i^+,\hat{b}_j^+]\hat{b}_n\hat{b}_m + \hat{b}_j^+[\hat{b}_i^+,\hat{b}_n]\hat{b}_m \\ &= \hat{b}_i^+\delta_{mj}\hat{b}_n - \hat{b}_j^+\delta_{in}\hat{b}_m = \delta_{jm}\hat{b}_i^+\hat{b}_n - \delta_{in}\hat{b}_j^+\hat{b}_m\end{aligned}$$

成立. 另一可能的表示是

$$(\hat{C}_{im}) = (\delta_{im}) \tag{10.58}$$

其中(δ_{im})表示一个矩阵，在 i 行和 m 列的交叉处矩阵元为1，而其余到处为0. 这个矩阵也满足对易关系(10.57). U(N)的任意一个群元素由

$$\exp\Big(-\mathrm{i}\sum_{kl}\theta_{kl}\hat{C}_{kl}\Big) \tag{10.59}$$

给出，其中“角”θ_{kl}参数化这个群变换.

到SU(N)的转换可以通过从 $\hat{C}_{im}$构造无迹矩阵来做到，它对 $i\neq m$ 是自动满足的. 对 $i=m$ 我们只要从每个对角元中扣除 N^{-1}就可以，因为单位矩阵与每个矩阵对易，因此不干扰对易关系：

$$\hat{\tilde{C}}_{ii} = \hat{C}_{ii} - \frac{1}{N}\mathbf{1}, \quad \hat{\tilde{C}}_{ij} = \hat{C}_{ij},\ i \neq j \tag{10.60}$$

即(10.60)中的 $\hat{\tilde{C}}_{ii}$具有形式

$$\hat{\tilde{C}}_{ii}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{N} & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & -\frac{1}{N} & & \\ & & & 1-\frac{1}{N} & \leftarrow i \\ & 0 & & -\frac{1}{N} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & -\frac{1}{N} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ N \end{matrix} \tag{10.61}$$

$$\begin{matrix} & & & \uparrow i & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{matrix}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{N}$$

由它很容易计算出 $\mathrm{Tr}(\hat{\tilde{C}}_{ii})=0$. 方程(10.60)对 $\hat{\tilde{C}}_{ii}$ 给出一个条件,因为

$$\sum_i \hat{\tilde{C}}_{ii}=0 \tag{10.62}$$

成立,也即 N 个产生算符中只有$(N-1)$个是线性独立的. 总而言之我们对 SU(N)得到 N^2-1 个生成元.

10.13 从 U(N)到 SU(N)的转换,例子 SU(3)

直到现在我们用别的矩阵作为 SU(3)的生成元. 它们与(10.58)的矩阵由以下关系联系:

$$\hat{\lambda}_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\hat{C}_{21}+\hat{C}_{12}$$

$$\hat{\lambda}_2=\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}&0\\\mathrm{i}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\mathrm{i}(\hat{C}_{21}-\hat{C}_{12})$$

$$\hat{\lambda}_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\hat{C}_{11}-\hat{C}_{22}$$

$$\hat{\lambda}_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\hat{C}_{31}+\hat{C}_{13}$$

$$\hat{\lambda}_5=\begin{pmatrix}0&0&-\mathrm{i}\\0&0&0\\\mathrm{i}&0&0\end{pmatrix}=\mathrm{i}(\hat{C}_{31}-\hat{C}_{13})$$

$$\hat{\lambda}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{C}_{32} + \hat{C}_{23}$$

$$\hat{\lambda}_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{i}(\hat{C}_{32} - \hat{C}_{23})$$

$$\hat{\lambda}_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{C}_{11} + \hat{C}_{22} - 2\hat{C}_{33}) \tag{10.63}$$

在下面我们将反复地应用(10.63).

在群 U(3)和 SU(3)间的联系如下：一个 U(3)的元素由

$$\exp\Big(-\mathrm{i}\sum_{k,l=1}^{3}\theta_{kl}\hat{C}_{kl}\Big) = \exp\Big(-\mathrm{i}\sum_{k\neq i=1}^{3}\theta_{kl}\hat{C}_{kl} - \mathrm{i}\sum_{k=1}^{3}\theta_{kk}\hat{C}_{kk}\Big) \tag{10.64}$$

给出，通过利用(10.60)，它能被进一步变换而得到

$$\exp\Big(-\mathrm{i}\sum_{k\neq l=1}^{3}\theta_{kl}\,\hat{C}_{\ kl} - \mathrm{i}\sum_{k=1}^{3}\theta_{kk}\,\hat{C}_{\ kk}\Big)\exp\Big(-\frac{\mathrm{i}}{N}\mathbb{1}\sum_{k=1}^{3}\theta_{kk}\Big) \tag{10.65}$$

$-\frac{\mathrm{i}}{N}\sum_{k=1}^{3}\theta_{kk}\mathbb{1}$ 项在指数中消去 $\hat{C}_{kk}$，而(10.65)的左半部分表示一个群元素，正是一个 SU(3)元素的形式；右半部分简单为一相因子. 现在由 U(3)到 SU(3)的转换通过要求在(10.65)中满足

$$\mathrm{U}(3) \to \mathrm{SU}(3): \sum_{k=1}^{3}\theta_{kk} = 0 \tag{10.66}$$

来实现. 在一般的 U(N)情况我们用同样方式处理，差别只是指标 k 由 1 到 N. 然而如果我们想用(10.63)中的生成元，必须采用以下的方法. 首先限制在对角矩阵 $\hat{C}_{11},\hat{C}_{22},\hat{C}_{33}$，稍后回到其余的矩阵. 那时仅由 $\hat{C}_{11},\hat{C}_{22}$和 $\hat{C}_{33}$产生的群元素在指数上有如下的表达式

$$\theta_{11}\hat{C}_{11} + \theta_{22}\hat{C}_{22} + \theta_{33}\hat{C}_{33} = \phi\hat{\lambda}_3 + (\psi/\sqrt{3})\hat{\lambda}_8 + 1/3(\theta_{11} + \theta_{22} + \theta_{33})\hat{N} \tag{10.67}$$

对单位矩阵 $\hat{N}[\hat{N} = (\hat{C}_{11} + \hat{C}_{22} + \hat{C}_{33}) = \mathbb{1}]$，我们对$(\phi,\psi)$和$(\theta_{11},\theta_{22},\theta_{33})$之间的关系感兴趣. 如果我们应用(10.63)，$\hat{\lambda}_3,\hat{\lambda}_8$ 和 $\hat{N}$ 可以通过 $\hat{C}_{11},\hat{C}_{22}$和 $\hat{C}_{33}$表示，反之亦然. 这在角度之间给出关系

$$\theta_{11} - \theta_{22} = \phi\ ,\ \theta_{11} - \theta_{33} = \psi + \frac{1}{2}\phi\ ,\ \theta_{22} - \theta_{33} = \psi - \frac{1}{2}\phi \tag{10.68}$$

在 SU(3)场合，附加条件 $\theta_{11}+\theta_{22}+\theta_{33}=0$ 必须满足.

最后我们考虑只由对角元组成的有限变换的形式. 无穷小变换由下式给出

$$1 - \mathrm{i}\sum_{k}\theta_{kk}\hat{C}_{kk} - \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i}\theta_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-\mathrm{i}\theta_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-\mathrm{i}\theta_{NN} \end{pmatrix} \tag{10.69}$$

由此，有限变换给出为

$$\exp\Big(-\mathrm{i}\sum_k \theta_{kk}\hat{C}_{kk}\Big)=\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_{NN}} \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varepsilon_N \end{pmatrix} \tag{10.70}$$

(引入 $\varepsilon_k=\exp(-\mathrm{i}\theta_{kk})$). 后面我们需要幺正变换的最一般的形式. 因此我们由 $\hat{C}_{ij}(i\neq j)$构造别的生成元使之类似于 SU(3)(参看(10.63)),

$$\hat{\lambda}_{ij}=\hat{C}_{ij}+\hat{C}_{ji},\ \hat{\lambda}_{ji}=\mathrm{i}\hat{C}_{ij}-\hat{C}_{ji},\quad i<j \tag{10.71}$$

通过这个我们对无穷小变换得到:

$$1-\mathrm{i}\sum_{kl}\theta_{kl}\hat{C}_{kl}=1-\mathrm{i}\sum_k\bar{\theta}_{kk}\hat{C}_{kk}-\mathrm{i}\sum_{k<1}\bar{\theta}_{kl}\hat{\lambda}_{kl}-\mathrm{i}\sum_{k<1}\bar{\theta}_{lk}\hat{\lambda}_{lk}$$
$$=\begin{pmatrix} 1-\mathrm{i}\bar{\theta}_{11} & \bar{\theta}_{12}-\mathrm{i}\bar{\theta}_{21} & \cdots \\ \bar{\theta}_{12}+\mathrm{i}\bar{\theta}_{21} & 1-\mathrm{i}\bar{\theta}_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}\Bigg\}N \tag{10.72}$$

其中

$$\bar{\theta}_{kl}+\mathrm{i}\bar{\theta}_{lk}=\theta_{kl},\ \bar{\theta}_{kl}-\mathrm{i}\bar{\theta}_{lk}=\theta_{kl},\ k<1\quad 和\quad \bar{\theta}_{kk}=\theta_{kk} \tag{10.73}$$

10.14 在幺正群上的积分

幺正群 U(N)依赖于 N^2 个参数,以至任意一个借助于算符写出的变换给出为

$$\exp\Big(-\mathrm{i}\sum_{k,l=1}^{N}\theta_{kl}\hat{C}_{kl}\Big) \tag{10.74}$$

为了计算 $\mu(\theta_{kl})$,我们计算乘积 $\hat{U}(c)=\hat{U}(a)\hat{U}(b)$,其中 $\hat{U}(b)$被选为对角矩阵,也即在(10.74)中只出现嘉当子代数的算符,它们相互对易(参看第 12 章). $\hat{U}(b)$是形式(10.70)意味着对 $\hat{U}(c)$我们得到

$$\hat{U}(c)=\begin{pmatrix} (1-\mathrm{i}a_{11})\varepsilon_1 & (a_{12}-\mathrm{i}a_{21})\varepsilon_2 & \cdots \\ (a_{12}-\mathrm{i}a_{21})\varepsilon_1 & (1-\mathrm{i}a_{22})\varepsilon_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{10.75}$$

这个矩阵可以用变换

$$\hat{U}=\hat{V}^{-1}\hat{W}\hat{V} \tag{10.76}$$

对角化，其中

$$V(c)=\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{a_{12}-\mathrm{i}a_{21}}{\varepsilon_1/\varepsilon_2-1} & \cdots \\ \dfrac{a_{12}+\mathrm{i}a_{12}}{\varepsilon_2/\varepsilon_1-1} & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{10.77}$$

$$W(c)=\begin{pmatrix} (1-\mathrm{i}a_{11})\varepsilon_1 & 0 & \cdots \\ 0 & (1-\mathrm{i}a_{22}) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{10.78}$$

这里我们忽略了二次项($a_{ik}\ll 1$). 明显地计算 $\hat{V}\hat{U}=\hat{W}\hat{V}$ 是证明(10.76)的正确性的最好方法，因此该变换分为三个部分；$\hat{W}$ 现在是对角矩阵，只依赖于 N 个参数！如果我们将$(1-\mathrm{i}a_{kk})$近似为 $\exp(-\mathrm{i}a_{kk})$并考虑 $\varepsilon_k=\exp(-\mathrm{i}\theta_{kk})$，我们可以马上规定 N 个角的变换为

$$\hat{C}_{kk}=\theta_{kk}=\theta_{kk}+a_{kk} \tag{10.79}$$

变换矩阵依赖于其余的 N^2-N 个参数和描写该变换的角度，体系中 $\hat{U}$ 是对角的. 我们选这些参数的变换为(参看相应于一个 $\hat{U}(c)$的 $\hat{V}$ 的素(12))：

$$\begin{aligned}\hat{C}_{12}&=a_{12}\mathrm{Re}(\varepsilon_1/\varepsilon_2-1)^{-1}+a_{21}\mathrm{Im}(\varepsilon_1/\varepsilon_2-1)^{-1}\\ \hat{C}_{21}&=a_{12}\mathrm{Im}(\varepsilon_1/\varepsilon_2-1)^{-1}-a_{21}\mathrm{Re}(\varepsilon_1/\varepsilon_2-1)^{-1}\end{aligned} \tag{10.80}$$

这样我们得到雅可比行列式的以下结构，它相对前 N 个参数有一个对角形式：

$$\partial\hat{C}_{kk}/\partial a_{ij}=\delta_{ki}\delta_{kj} \tag{10.81}$$

其余部分是$\frac{1}{2}N(N-1)$个因子的乘积，即

$$\begin{vmatrix}\partial\hat{C}_{12}/\partial a_{12} & \partial\hat{C}_{12}/\partial a_{21}\\ \partial\hat{C}_{21}/\partial a_{12} & \partial\hat{C}_{21}/\partial a_{21}\end{vmatrix}=|\varepsilon_1-\varepsilon_2|^{-2} \tag{10.82}$$

等等. 最终对 $\mu(\underline{c})$我们得到

$$\mu(\underline{c})=(\partial\underline{c}/\partial\underline{a})^{-1}_{\underline{a}=\underline{0}}=\prod_{i<j}^{N}|\varepsilon_i-\varepsilon_j|^2 \tag{10.83}$$

注意 $\mu(c=0)$只依赖于参数中的 N 个！

a) U(2)，SU(2). 作为一个例子让我们看一下群 U(2). 其测度由(10.83)给出，因此

$$\begin{aligned}\mu(\mathrm{U}(2))&=|\varepsilon_1-\varepsilon_2|^2=|\exp(-\mathrm{i}\theta_{11})-\exp(-\mathrm{i}\theta_{22})|^2\\ &=\left|\exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{i}(\theta_{11}+\theta_{22})\right)\right|^2\exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{i}(\theta_{11}-\theta_{22})\right)\\ &\quad-\left|\exp\left(\frac{1}{2}\mathrm{i}(\theta_{11}-\theta_{22})\right)\right|^2=4\sin^2\left(\frac{1}{2}(\theta_{11}-\theta_{22})\right)\end{aligned} \tag{10.84}$$

限制 SU(2)给出 $\theta_{11}+\theta_{22}=0$. 令 $\theta_{11}-\theta_{22}=\phi$，那么

$$\mu(\mathrm{SU}(2))=4\sin^2\frac{1}{2}\phi \tag{10.85}$$

按照(10.56)这个结果必须被

$$V=\int_0^{4\pi}\mu(\mathrm{SU}(2))\mathrm{d}\phi=8\pi.$$

除,其结果为

$$V^{-1}\int\mu(\phi)f(\phi)\mathrm{d}\phi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{4\pi}(\sin^2\frac{1}{2}\phi)f(\phi)(\mathrm{d}\phi) \tag{10.86}$$

b) U(3),SU(3). 在此情况我们通过先看一下U(3)来类似地处理. 按照(10.83),

$$\mu(U(3))=|\varepsilon_1-\varepsilon_2|^2|\varepsilon_1-\varepsilon_3|^2|\varepsilon_2-\varepsilon_3|^2 \tag{10.87}$$

是正确的. 每个因子用例U(2)→SU(2)中类似的方法处理,由

$$\begin{aligned}\mu(\mathrm{U}(3))=&4\left|\exp\left[-\frac{\mathrm{i}(\theta_{11}+\theta_{22})}{2}\right]\right|^2\sin^2\left(\frac{\theta_{11}-\theta_{22}}{2}\right)\\&\times 4\left|\exp\left[-\frac{\mathrm{i}(\theta_{11}+\theta_{33})}{2}\right]\right|^2\sin^2\left(\frac{\theta_{11}-\theta_{33}}{2}\right)\\&\times 4\left|\exp\left[-\frac{\mathrm{i}(\theta_{22}+\theta_{33})}{2}\right]\right|^2\sin^2\left(\frac{\theta_{22}-\theta_{33}}{2}\right)\\=&64\sin^2\left(\frac{\theta_{11}-\theta_{22}}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\theta_{11}-\theta_{33}}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\theta_{22}-\theta_{33}}{2}\right)\end{aligned} \tag{10.88}$$

最后按照(10.66)和(10.68),对SU(3)我们得到

$$\mu(\mathrm{SU}(3))=64\sin^2\left(\frac{1}{2}\phi\right)\sin^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\phi+\psi\right)\right]\sin^2\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\phi+\psi\right)\right] \tag{10.89}$$

其中ϕ是对同位旋的参数,而ψ是对超荷的参数. 按照(10.56)我们必须被

$$V=\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\phi\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{3}\psi\right)\mu(\mathrm{SU}(3)) \tag{10.90}$$

除. 上面积分限的出现是因为在(10.88)中正弦函数宗量的积分限被给出为

$$0\leq\theta_{11}-\theta_{22},\ \theta_{11}-\theta_{33}\leq 2\pi\ ,\ \theta_{22}-\theta_{33}\leq 2\pi \tag{10.91}$$

即覆盖整个周期. 对$\frac{1}{2}\phi=\frac{1}{2}(\theta_{11}-\theta_{22})$,这给出积分限

$$-\pi\leq\frac{1}{2}\phi\leq\pi \tag{10.92}$$

最后ψ的积分限要被定出. 如果我们用$\theta_{11}-\theta_{33}$和$\frac{1}{2}\phi$相应的极大极小值代替$\psi+\frac{1}{2}\phi=\theta_{11}-\theta_{33}$,我们得到

$$-\pi\leq\frac{1}{3}\psi\leq+\pi \tag{10.93}$$

积分(10.90)的结果为

$$V=64\times 3\pi^2/8=24\pi^2 \tag{10.94}$$

而随后所有感兴趣的积分为如下形式

$$\frac{1}{V}\int_{SU(3)}\mu(SU(3))f(\phi,\psi)d(SU(3))$$
$$=\frac{8}{3\pi^2}\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}d\left(\frac{1}{2}\phi\right)d\left(\frac{1}{3}\psi\right)\sin^2\frac{1}{2}\phi\sin^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\phi+\psi\right)\right]$$
$$\times\sin^2\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\phi+\psi\right)\right]f(\phi,\psi) \tag{10.95}$$

这里我们假设 f 只依赖于 ϕ 和 ψ. 如果 f 也依赖于别的角，我们必须对它们积分并用 $V_0=\int d(\theta_{ij})(i\neq j)$ 来乘 V. 我们对体积元不会遇到麻烦，因为它不依赖于这些角！

10.15　幺正群的特征标

如果群的一个元素被给出，例如

$$\hat{G}_a=\exp\left(-i\sum_{ij}\theta_{ij}\hat{C}_{ij}\right) \tag{10.96}$$

那么特征标被定义为

$$\chi(\hat{G}_a)=\mathrm{Tr}[\hat{G}_a] \tag{10.97}$$

然而我们知道迹形式在相似变换下不变，即 $\hat{A}\hat{G}_a\hat{A}^{-1}$ 有同样的迹和同样的特征标，以及每个幺正矩阵可以转化为对角形式. 但是因为所有对角形式的表示矩阵可以单独由嘉当子代数的生成元构成

$$\exp\left(-\sum_{k=1}^{N}\theta_{kk}\hat{C}_{kk}\right) \tag{10.98}$$

只考虑这种形式的群元素已经足够. 如果我们记 $\hat{C}_{kk}(k=1,\cdots,N)$ 的本征值(权)为 $(r_1,\cdots,r_N)$，那么(10.99)最后设定形式

$$\chi^{(a)}=\sum_{r_1,\cdots,r_N}\exp\left(-i\sum_{k=1}^{N}\theta_{kk}\hat{r}_k\right) \tag{10.99}$$

其中求和遍及所有可能的权. 符号“(α)”代表该表示而 $(\theta_{11},\cdots,\theta_{NN})$ 代表这类.

幺正群的群特征标存在一个一般形式，我们将通过先表达这结果和某些例子来证明它. 如果 $\varepsilon_j=\exp(-i\theta_{jj})$，那么群特征标由以下两个行列式的比值来给出：

$$\chi^{(a)}=\begin{vmatrix}\varepsilon_1^{h_{1N}+N-1} & \varepsilon_1^{h_{2N}+N-2} & \cdots & \varepsilon_1^{h_{NN}}\\ \varepsilon_2^{h_{1N}+N-1} & \varepsilon_2^{h_{2N}+N-2} & \cdots & \varepsilon_2^{h_{NN}}\\ \vdots & & & \\ \varepsilon_N^{h_{1N}+N-1} & \varepsilon_N^{h_{2N}+N-2} & \cdots & \varepsilon_N^{h_{NN}}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\varepsilon_1^{N-1} & \varepsilon_1^{N-2} & \cdots & 1\\ \varepsilon_2^{N-1} & \varepsilon_2^{N-2} & \cdots & 1\\ \vdots & & & \\ \varepsilon_N^{N-1} & \varepsilon_N^{N-2} & \cdots & 1\end{vmatrix}^{-1} \tag{10.100}$$

其中值 $(h_{1N},\cdots,h_{NN})$ 代表群 $U(N)$ 的这个表示，它是最大权 $(r_1=h_{1N},r_2=h_{2N},\cdots,r_N=h_{NN})$. 在 $SU(N)$ 的场合我们让 $\sum_k\theta_{kk}=0$，以至于 $SU(N)$ 的表示随后由数

$$(h_{1N}-h_{2N},\ h_{2N}-h_{3N},\cdots,\ h_{(N-1)N}-h_{NN},0) \tag{10.101}$$

来代表.

a) U(1). 这是平凡的,因为U(1)只由一个单个元素组成

$$\chi^{(a)}=\exp(-\mathrm{i}h_{11}\theta_{11}) \tag{10.102}$$

b) U(2). 这个表示由 h_{12},h_{22}来代表,群特征标为

$$\chi^{(a)}=\begin{vmatrix}\varepsilon_1^{h_{12}+1} & \varepsilon_1^{h_{22}}\\ \varepsilon_2^{h_{12}+1} & \varepsilon_2^{h_{22}}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\varepsilon_1 & 1\\ \varepsilon_2 & 1\end{vmatrix}^{-1}=\frac{\varepsilon_1^{h_{12}+1}\varepsilon_2^{h_{22}}-\varepsilon_1^{h_{22}}\varepsilon_2^{h_{12}+1}}{\varepsilon_1-\varepsilon_2} \tag{10.103}$$

由 $\varepsilon_i=\exp(-\mathrm{i}\theta_{ii})$我们得到

$$\begin{aligned}\chi^{(a)}&=\frac{\exp[-\mathrm{i}((h_{12}+1)\theta_{11}+h_{22}\theta_{22}]-\exp[-\mathrm{i}(h_{22}\theta_{11}+(h_{12}+1)\theta_{22})]}{\exp(-\mathrm{i}\theta_{11})-\exp(-\mathrm{i}\theta_{22})}\\
&=\exp\left(\mathrm{i}\frac{(\theta_{11}+\theta_{22}(h_{12}+1+h_{22})}{2}\right)\\
&\quad\times\left\{\frac{\exp\left\{-\mathrm{i}\frac{1}{2}\left[(h_{12}+1)\theta_{11}+\frac{1}{2}h_{22}\theta_{22}-\frac{1}{2}\theta_{11}h_{22}-\frac{1}{2}\theta_{22}(h_{12}+1)\right]\right\}}{\exp(-\mathrm{i}\theta_{11})-\exp(-\mathrm{i}\theta_{22})}\right.\\
&\quad\left.-\frac{\exp\left\{-\mathrm{i}\left[\frac{1}{2}h_{22}\theta_{11}+\frac{1}{2}(h_{12}+1)\theta_{22}-\frac{1}{2}\theta_{11}(h_{12}+1)-\frac{1}{2}\theta_{22}-h_{22}\right]\right\}}{\exp(-\mathrm{i}\theta_{11})-\exp(-\mathrm{i}\theta_{22})}\right\}\\
&=\exp\left(\mathrm{i}\frac{(\theta_{11}+\theta_{22})(h_{12}+h_{22}+1)}{2}\right)\\
&\quad\times\left\{\frac{\exp\left\{-\mathrm{i}\left[\frac{1}{2}(h_{12}+1-h_{22})\right](\theta_{11}-\theta_{22})\right\}}{\exp(-\mathrm{i}\theta_{11})-\exp(-\mathrm{i}\theta_{22})}\right.\\
&\quad\left.-\frac{\exp\left\{\mathrm{i}\left[\frac{1}{2}(h_{12}+1-h_{22})\right](\theta_{11}-\theta_{22})\right\}}{\exp(-\mathrm{i}\theta_{11})-\exp(-\mathrm{i}\theta_{22})}\right\}\\
&=\exp\left(-\mathrm{i}\frac{(\theta_{11}+\theta_{22})(h_{12}+h_{22})}{2}\right)\\
&\quad\times\left\{\sin\left[\frac{(h_{12}+1-h_{22})}{2}(\theta_{11}-\theta_{22})\right]\right\}\Big/\left(\sin\frac{\theta_{11}-\theta_{22}}{2}\right)\end{aligned} \tag{10.104}$$

在最后一步我们利用了

$$\begin{aligned}&\exp(-\mathrm{i}\theta_{11})-\exp(-\mathrm{i}\theta_{22})\\
&\quad=\exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{i}(\theta_{11}+\theta_{22})\right)\left[\exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{i}(\theta_{11}-\theta_{22})\right)-\exp\left(\frac{1}{2}\mathrm{i}(\theta_{11}-\theta_{22})\right)\right]\end{aligned} \tag{10.105}$$

当变换到SU(2),按(10.102)该表示由

$$(h_{12}-h_{22},0)=(2j,0) \tag{10.106}$$

代表.进而我们让 $\theta_{11}+\theta_{22}=0$[按照(10.66)],因此对这SU(2)特征标得到

$$\chi(\mathrm{SU}(2))=\sin((2j+1)\phi/2)/\sin\phi/2 \tag{10.107}$$

其中 $\phi=\theta_{11}-\theta_{22}$.

c) U(3). 表示由三个数(h_{13},h_{23},h_{33})来代表，群特征标为

$$\chi^{(\alpha)}(\mathrm{U}(3))=\begin{vmatrix}\varepsilon_1^{h_{13}+2} & \varepsilon_1^{h_{23}+1} & \varepsilon_1^{h_{33}}\\ \varepsilon_2^{h_{13}+2} & \varepsilon_2^{h_{23}+1} & \varepsilon_2^{h_{33}}\\ \varepsilon_3^{h_{13}+2} & \varepsilon_3^{h_{23}+1} & \varepsilon_3^{h_{33}}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\varepsilon_1^2 & \varepsilon_1 & 1\\ \varepsilon_2^2 & \varepsilon_2 & 1\\ \varepsilon_3^2 & \varepsilon_3 & 1\end{vmatrix}^{-1} \tag{10.108}$$

分母可以进一步简化，即

$$\begin{aligned}&(\varepsilon_1-\varepsilon_2)(\varepsilon_1-\varepsilon_3)(\varepsilon_2-\varepsilon_3)\\ &=-\exp\Big[-\frac{1}{2}\mathrm{i}(\theta_{11}+\theta_{22})\Big]\exp\Big[-\frac{1}{2}\mathrm{i}(\theta_{11}+\theta_{33})\Big]\exp\Big[-\frac{1}{2}\mathrm{i}(\theta_{22}+\theta_{33})\Big]\\ &\quad\times 8\sin\Big[\frac{1}{2}(\theta_{11}-\theta_{22})\Big]\sin\Big[\frac{1}{2}(\theta_{11}-\theta_{33})\Big]\sin\Big[\frac{1}{2}(\theta_{22}-\theta_{33})\Big]\end{aligned} \tag{10.109}$$

但分子不能变换到较简单的形式. 尽管如此我们将推导一个表达式，稍后我们需要用它来一般性证明(10.100)：

$$\chi^{(\alpha)}(U(3))=\sum_{h'_{12}=h_{23}}^{h_{13}}\sum_{h'_{22}=h_{33}}^{h_{23}}\frac{\begin{vmatrix}\varepsilon_1^{h'_{12}}+1 & \varepsilon_1^{h'_{22}}\\ \varepsilon_2^{h'_{12}}+1 & \varepsilon_2^{h'_{22}}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\varepsilon_1 & 1\\ \varepsilon_2 & 1\end{vmatrix}}\times\varepsilon^{h_{13}+h_{23}+h_{33}-h'_{12}-h'_{22}} \tag{10.110}$$

我们还必须证明这个表达式等价于(10.108)！

为此我们把(10.110)的第一列乘上 $\varepsilon_3^{-h'_{12}-1}$，第二列乘上 $\varepsilon_3^{h'_{22}}$，这对每一项导致

$$\varepsilon_3^{h_{13}+h_{23}+h_{33}+1}\begin{vmatrix}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}\right)^{h'_{12}+1} & \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}\right)^{h'_{22}}\\ \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\right)^{h'_{12}+1} & \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\right)^{h'_{22}}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\varepsilon_1 & 1\\ \varepsilon_2 & 1\end{vmatrix}^{-1} \tag{10.111}$$

利用这个结果，借助于行列式的加法定理，方程(10.110)右边成为

$$\varepsilon_3^{h_{13}+h_{23}+h_{33}+1}\times\frac{\begin{vmatrix}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}\right)^{h'_{13}+1}+\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}\right)^{h_{13}}+\cdots+\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}\right)^{h_{23}+1} & \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}\right)^{h_{23}}+\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}\right)^{h_{23}-1}+\cdots+\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}\right)^{h_{33}}\\ \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\right)^{h_{13}+1}+\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\right)^{h_{13}}+\cdots+\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\right)^{h_{23}+1} & \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\right)^{h_{23}}+\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\right)^{h_{23}-1}+\cdots+\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\right)^{h_{33}}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\varepsilon_1 & 1\\ \varepsilon_2 & 1\end{vmatrix}} \tag{10.112}$$

我们用$(\varepsilon_1/\varepsilon_3-1)$乘第一行，用$(\varepsilon_2/\varepsilon_3-1)$乘第二行，对分母也同样做. 对分母我们现在有

$$\begin{vmatrix}\varepsilon_1 & 1\\ \varepsilon_2 & 1\end{vmatrix}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}-1\right)\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}-1\right)=\varepsilon_3^{-2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)(\varepsilon_1-\varepsilon_3)(\varepsilon_2-\varepsilon_3)$$

$$= \varepsilon_3^{-2}\begin{vmatrix} \varepsilon_1^2 & \varepsilon_1 & 1 \\ \varepsilon_2^2 & \varepsilon_2 & 1 \\ \varepsilon_3^2 & \varepsilon_3 & 1 \end{vmatrix} \tag{10.113}$$

即分母已经是正确的形式.分子由下式给出

$$\begin{vmatrix} \left[\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}\right)^{h_{13}+2} - \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}\right)^{h_{23}+1}\right] & \left[\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}\right)^{h_{23}+1} - \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}\right)^{h_{33}}\right] & \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}\right)^{h_{33}} \\ \left[\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\right)^{h_{13}+2} - \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\right)^{h_{23}+1}\right] & \left[\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\right)^{h_{23}+1} - \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\right)^{h_{33}}\right] & \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\right)^{h_{33}} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{10.114}$$

其中在最后一步我们加上一列

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}\right)^{h_{33}} \\ \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\right)^{h_{33}} \\ 1 \end{vmatrix}$$

在第三行里代入 0.这行列式的确不为这一运算改变!现在我们把第二第三列加到第一列上和把第三列加到第二列.这给出

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}\right)^{h_{13}+2} & \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}\right)^{h_{23}+1} & \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}\right)^{h_{33}} \\ \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\right)^{h_{13}+2} & \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\right)^{h_{23}+1} & \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\right)^{h_{33}} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \varepsilon_3^{-(h_{13}+2)}\varepsilon_3^{-(h_{23}+1)}\varepsilon_3^{-h_{33}}\begin{vmatrix} \varepsilon_1^{h_{13}+2} & \varepsilon_1^{h_{23}+1} & \varepsilon_1^{h_{33}} \\ \varepsilon_2^{h_{13}+2} & \varepsilon_2^{h_{23}+1} & \varepsilon_2^{h_{33}} \\ \varepsilon_3^{h_{13}+2} & \varepsilon_3^{h_{23}+1} & \varepsilon_3^{h_{33}} \end{vmatrix} \tag{10.115}$$

这里我们分别从第一、第二和第三列移去了因子

$$\varepsilon_3^{-(h_{13}+2)},\ \varepsilon_3^{-(h_{23}+1)}\text{和}\ \varepsilon_3^{-(h_{33})}$$

最后通过应用(10.113)和(10.112)我们得到结果(10.110),它的解释是很容易的.如果我们考虑子群 U(2),所有角 θ_{33}, θ_{i3}, $\theta_{3j}(i,j=1,\cdots,N-1)$必须固定为 0 值.这样在 $N=3$ 的情况,只有$(N-1)^2=2^2=4$ 个角度留下来.该表示的特征标可以写为包括在整个群的表示中的子群表示的特征标之和.对于 U(3)这意味着我们让 $\theta_{33}=0$,而(10.110)跟着成为子群 U(2)的表示的特征标之和(看关于 U(3)的一节):

$$\chi^{(\alpha)}(U(3))|_{\theta_{33}=0} = \sum_{h'_{12}=h_{23}}^{h_{13}}\ \sum_{h'_{22}=h_{33}}^{h_{23}} \chi^{\left(h'_{12},h'_{22}\right)}(\mathrm{U}(2)) \tag{10.116}$$

方程(10.116)表明一个 SU(3)群的表示(h_{13},h_{23},h_{33})只包括这些 U(2)的表示(h_{12},h_{22}),它们要

求不等式

$$h_{13} \geq h_{12} \geq h_{23} \geq h_{22} \geq h_{33} \tag{10.117}$$

这里每个 U(2)的表示被严格地包含一次！

最后为了得到 SU(3)的特征标，我们可以应用(10.110)同时用前面例子的结果：

$$\begin{aligned}\chi^{h_{13},h_{23},h_{33}} = \chi^{(\alpha)} = & \sum_{h'_{12}=h_{23}}^{h_{13}} \sum_{h'_{22}=h_{33}}^{h_{23}} \exp\left[\frac{1}{2}(\theta_{11}+\theta_{22})(h'_{12}+h'_{22})\right] \\ & \times \exp\left[-\frac{1}{2}\theta_{33}(h_{13}+h_{23}+h_{33}-h'_{12}-h'_{22})\right] \\ & \times \sin\left[\frac{(h'_{12}+1-h'_{22})}{2}(\theta_{11}-\theta_{22})\right]\left(\sin\frac{\theta_{11}-\theta_{22}}{2}\right)^{-1}\end{aligned} \tag{10.118}$$

考虑其中前两个因子，它们能被写成形式

$$\begin{aligned}& \exp\left[-\frac{1}{3}(\theta_{11}+\theta_{22}+\theta_{33})(h_{13}+h_{23}+h_{33})\right] \\ & \quad \times \exp\left[-\frac{1}{2}(\theta_{11}+\theta_{22}-2\theta_{33})(h'_{12}+h'_{22})\right] \\ & \quad \times \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{3}(\theta_{11}+\theta_{22}-2\theta_{33})(h_{13}+h_{23}+h_{33})\right] \\ & = \exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{3}(\theta_{11}+\theta_{22}+2\theta_{33})(h_{13}+h_{23}+h_{33})\right] \\ & \quad \times \exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{2}[(\theta_{11}-\theta_{33})+(\theta_{22}-\theta_{33})](h'_{12}+h'_{22})\right] \\ & \quad \times \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{3}[(\theta_{11}-\theta_{33})+(\theta_{22}-\theta_{33})](h_{13}+h_{23}+h_{33})\right]\end{aligned} \tag{10.119}$$

这样对(10.110)或(10.118)我们有

$$\begin{aligned}& \chi_{U(3)}^{(h_{13},h_{23},h_{33})} \\ & = \exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{3}(\theta_{11}+\theta_{22}+\theta_{33})(h_{13}+h_{23}+h_{33})\right] \\ & \quad \times \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{3}[(\theta_{11}-\theta_{33})+(\theta_{22}-\theta_{33})](h_{13}+h_{23}+h_{33})\right] \\ & \quad \times \sum_{h'_{12}=h_{23}}^{h_{13}} \sum_{h'_{22}=h_{33}}^{h_{23}} \exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{2}[(\theta_{11}+\theta_{33})+(\theta_{22}-\theta_{33})]h'_{12}+h'_{22}\right] \\ & \quad \times \sin\left[\left(\frac{h'_{12}+1-h'_{22}}{2}\right)(\theta_{11}-\theta_{22})\right]\left(\sin\frac{\theta_{11}-\theta_{22}}{2}\right)^{-1}\end{aligned} \tag{10.120}$$

在 SU(3)场合，我们有 $\theta_{11}+\theta_{22}+\theta_{33}=0$，它会同(10.68)导致

$$\chi^{(h_{13}-h_{23},h_{23}-h_{33},0)}_{U(3)}$$

$$= \exp\left[-\frac{2i\varphi}{3}(h_{13}+h_{23}+h_{33})\right]\sum_{h'_{12}=h_{23}}^{h_{13}}\sum_{h'_{22}=h_{33}}^{h_{23}}\exp[-i\psi(h'_{12}+h'_{22})]$$

$$\times\sin\left[\left(\frac{h'_{12}+1-h'_{22}}{2}\right)\varphi\right]\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)^{-1} \tag{10.121}$$

这里SU(3)的表示被给出为

$$(p,q,0)=(h_{13}-h_{23},\ h_{23}-h_{33},0) \tag{10.122}$$

一个特殊情况是标量表示,这时我们有 $h_{13}=h_{23}=h_{33}=0$,因此也有 $h_{12}=h_{22}=0$,特征标函数恒等于1,这从(10.108)看也是显然的.

在上一个例子中我们勾划了如何一般地计算一个幺正表示的特征标.一般的证明是由归纳法从一个U(1)给出的基础出发来完成,U(1)情况是平凡的.现在我们假设这个假设对U(N)成立;再证明它对U($N+1$)成立.这个过程全同于上一个完成的例子中的情况,只是现在必须考虑有多于两个求和和更多的指标.

最后,几个对联系到幺正群有进一步参考价值的公式被列出来.

分别由(10.22),(10.23)和(10.56)我们得到

$$V^{-1}\int_{U(N)}\chi^{(\alpha)}\chi^{(\beta)*}\mu(U(N))d\theta=\delta_{\alpha\beta} \tag{10.123}$$

其中 $d\theta$ 是 $d\theta_{11}d\theta_{22}\cdots d\theta_{NN}$的缩写,而 V 被给出为

$$V=\int_{U(N)}M(U(N))d\theta \tag{10.124}$$

因为特征标只依赖于 $\theta_{11},\cdots,\theta_{NN}$,只对这些角进行积分已经足够了.$\chi^{(\alpha)}$由(10.100)给出而 μ(U(N))由(10.83)给出.进而如同在(10.29)中一样,一个可约表示的特征标 χ 表达形式为

$$\chi=\sum m_\alpha\chi^{(\alpha)} \tag{10.125}$$

其中 $\chi^{(\alpha)}$只是不可约表示的特征标.

对一个乘积表示我们有(看(10.38))

$$\chi^{(\alpha\times\beta)}=\chi^{(\alpha)}\cdot\chi^{(\beta)} \tag{10.126}$$

借助这些公式我们能够计算包含在一个任意表示中的不可约表示.如果我们的考虑限于一个单个的子代数,则可以进一步计算由原来的表示能分解到的表示.这一点的一个例子由(10.16)中U(3)到U(2)的约化给出.

例 10.3　群特征标的应用：对有严格 SU(3)对称性的色单态夸克-胶子等离子体的配分函数

在过去几年里所谓夸克-胶子等离子体[①]被理论物理学家认真地研究过. 这个名字“夸克-胶子等离子体”描写核物质的一个新的状态，在这状态中夸克和胶子自由地移动. 按照假设，这个状态在宇宙的大爆炸后 20 微秒内存在过. 今天我们希望在非常高温的重离子反应中产生这种等离子体. 为了在它形成时能认出一个夸克-胶子等离子体，我们必须理论上研究它的性质和对特征性的讯号得出预言，例如奇异粒子的丰度增加. 因为这个等离子体的激发能够有高的能量而周围的核物质能够像一个“热浴”一样起作用，这时我们正面对一个热力学问题. 然而由于色禁闭，这个等离子体的总的颜色必须总是中性的，它意味着只有严格 SU(3)单态对称性的状态被实现.

在下面我们将说明某些热力学的定义，而随后运用群的特征标表明我们能够限止到属于一个 SU(3)群的一定表示的状态. 作为一个例子我们讨论同位旋守恒，因为在核反应中电磁相互作用能够被忽略，同位旋是守恒的，所以只有给定同位旋的状态能够得到. 作为最后一个例子我们转回到夸克-胶子等离子体.

(1) 几个热力学表达式. 配分函数在一个统计体系的热力学描写中有着相当的重要性. 它被定义为

$$Z = \mathrm{Tr}[\exp(-\beta\hat{H})] \tag{1}$$

其中 $\beta=1/kT$，k 是玻尔兹曼常数，T 是温度而 $\hat{H}$ 是哈密顿量. 迹运算意味着对希尔伯特空间内所有对角矩阵元求和. 如果一个非相互作用的粒子体系具有带能量 ϵ_i 的不连续状态，那么 $\hat{H}$ 的期望值给出为

$$\sum_{i=1}^{\infty} n_i\epsilon_i \tag{2}$$

其中 n_i 是占据数，规定多少个粒子在一给定状态 ϵ_i 上. 如果一个连续的能量谱(2)中的求和被一个积分代替. 一旦配分函数知道了，物理量诸如压强 P 和内能 U 能够容易地用下面的公式计算

$$P = T\partial \log Z/\partial V \tag{3a}$$

$$U = -\partial \log Z/\partial\beta \tag{3b}$$

对玻色子和费米子配分函数由不同的表达式给出，为了表明这一点我们先缩写配分函数中的指数为

$$Z_i \equiv \exp(-\beta\epsilon_i) \tag{4}$$

这样(1)取形式为

$$Z \equiv \sum_{(n_i)} \exp(-\beta\sum_i n_i\epsilon_i) = \sum_{(n_i)}\prod_{i=1}^{\infty}(Z_i)^{n_i} \tag{5}$$

其中(n_i)表示所有可能的占据数组.

对玻色子(例如胶子)，得出

$$Z_B = \Big(\sum_{n_1=0}^{\infty} Z_1^{n1}\Big)\Big(\sum_{n_2=0}^{\infty} Z_2^{n2}\Big)\cdots\Big(\sum_{n_i=0}^{\infty} Z_i^{ni}\Big)\cdots \tag{6}$$

每个状态可以被任意数个玻色个占据. 因为在(6)中每个求和是一个几何级数，我们得到

$$Z_B = \prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-Z_i} = \prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-\exp(-\beta\epsilon_i)} \tag{7}$$

---

① 例如看 B. Müller: *The Physics of the Quark-Gluon Plasma*, Lecture Notes in Physics 225 (Springer, Berlin, Heidelberg 1985).

考虑费米子(例如夸克、核子),每个状态可以被 1 个或没有粒子占据,即

$$\sum_{n_i} Z_i = 1 + Z_i = 1 + \exp(-\beta\varepsilon_i) \tag{8}$$

第一项相应于没有粒子在状态 i 上,而第二项相应于有一个粒子在这状态上. 因此费米子配分函数给出为

$$Z_F = \prod_{i=1}^{\infty}[1 + \exp(-\beta\varepsilon_i)] \tag{9}$$

为了计算,乘积被提升到指数上

$$Z_B = \exp\left(\ln\prod_i \frac{1}{1-Z_i}\right) = \exp\left[-\sum_{i=1}^{\infty}\ln(1-e^{-\beta\varepsilon_i})\right] \tag{10a}$$

$$Z_F = \exp\left[\ln\prod_i (1+Z_i)\right] = \exp\left[+\sum_{i=1}^{\infty}\ln(1+e^{-\beta\varepsilon_i})\right] \tag{10b}$$

当 $\beta\varepsilon_i \gg 1$,对数可以被展开,得出一个被许多情况证实了的近似,而(10a)和(10b)中的配分函数服从分别的统计. 但是我们关心一个严格的全局对称性,什么将会发生? Z_B 和 Z_F 不考虑严格守恒的对称性,即它们也包括不允许的状态. 在夸克-胶子等离子体的情况我们有一个 Z_B 和 Z_F 的乘积,它也考虑有颜色的态.

下面我们将先考虑一个一般的严格的 SU(n)对称性. 我们将表明如何把属于 SU(n)一定表示的状态投影出来. 首先我们加上一个对权算符 $\hat{C}_{kk}$ 的求和到指数上. 这样

$$\tilde{Z} = \mathrm{Tr}\left[\exp\left(-\beta\hat{H} - i\sum_k \theta_{kk}\hat{C}_{kk}\right)\right] \tag{11}$$

其中 Z 上的波形符号表示 $\tilde{Z}$ 不同于老的配分函数 Z. 迹被定义为在所有可能状态上的对角矩阵元的求和

$$\tilde{Z} = \sum_{(p)}\sum_{(m)} \langle (p)(m)|\exp\left(-\beta\hat{H} - i\sum_k \theta_{kk}\hat{C}_{kk}\right)|(p)(m)\rangle \tag{12}$$

这儿(m)是在不可约表示(p)中标记状态的所有量子数的缩写. 在 SU(3)情况我们有$(m)=(y,T_z)$. 插入一个状态的完全集合给出

$$\tilde{Z} = \sum_{\substack{(p)\\(p')}}\sum_{\substack{(m)\\(m')}} \langle (p)(m)|\exp(-\beta\hat{H})|(p')(m')\rangle$$

$$\times \langle (p')(m')|\exp\left(-i\sum_{k=1}^{n}\theta_{kk}\hat{C}_{kk}\right)|(p)(m)\rangle \tag{13}$$

我们现在注意 $\hat{H}$ 的矩阵元是不依赖(m),并且在(m)中对角的,因为 $\hat{H}$ 严格地守恒颜色对称性. 体会到 $\hat{C}_{kk}$ 不改变(p)也不改变量子数(m),我们得到

$$\tilde{Z} = \sum_{(p)} \langle (p)|e^{-\beta\hat{H}}|(p)\rangle \sum_{(m)} \langle (p)(m)|\exp\left(-i\sum_k \theta_{kk}\hat{C}_{kk}\right)|(p)(m)\rangle \tag{14}$$

后一个求和等于表示(p)特征的定义:

$$\chi^{(p)}_{\theta_{kk}} = \sum_{(m)} \langle (p)(m)|\exp\left(-i\sum_k \theta_{kk}\hat{C}_{kk}\right)|(p)(m)\rangle \tag{15}$$

在(14)中第一个因子可以改写为

$$\langle (p)|e^{-\beta\hat{H}}|(p)\rangle = \frac{1}{\dim(p)}\sum_m \langle (p)(\overline{m})|e^{-\beta\hat{H}}|(p)(\overline{m})\rangle \equiv \frac{1}{\dim(p)} Z_{(p)} \tag{16}$$

因为这求和中的矩阵元是不依赖于(m)的,我们得到 $\dim(p)$ 倍的同样值[$\dim(p)$是表示(p)的维数]. 这样(16)中的求和等于

$$Z_{(p)} = \mathrm{Tr}_{(p)}[\exp(-\beta\hat{H})] \tag{17}$$

也即求迹,它只在(p)表示的状态中完成. 方程(17)是我们最终想得到的配分函数. 加起来我们对 $\tilde{Z}$ 得到

$$\tilde{Z} = \sum_{(p)} \frac{Z_{(p)}}{\dim(p)} \chi^{(p)}(\theta_{kk}) \tag{18}$$

$\tilde{Z}$ 由在(10a)和(10b)中的同样方法计算，其中包含权重算符 $\hat{C}_{kk}$. 为了得到 $Z_{(p)}$ 我们应用对群特征标的正交关系(10.123)：

$$Z_{(p)} = \dim(p) \int \mathrm{d}\mu(\theta_{kk}) \chi^{(p)}(\theta_{kk}) \tilde{Z}(\beta, \hat{H}, \theta_{kk}) \tag{19}$$

其中

$$\mathrm{d}\mu(\theta_{kk}) = \frac{1}{V} \mu(\mathrm{SU}(n)) \mathrm{d}(\mathrm{SU})(n))$$

方程(19)是用来计算 $Z_{(p)}$ 的关系.

例(a)：在核反应中的同位旋守恒. 较早在这一章里 SU(2)的特征标在(10.107)中定义为

$$\chi^{(p)}_{\mathrm{SU}(2)} = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(p+1)\phi\right)}{\sin\frac{1}{2}\phi} \tag{20}$$

其中 $p=2j$，$\phi \equiv \phi_{11} - \phi_{22}$ 和 $\phi_{11} + \phi_{22} = 0$. 该测度表明在(10.86)中，给出为

$$\mathrm{d}\mu(\phi) = \frac{1}{2\pi} \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \mathrm{d}\phi \text{，其中 } 0 \leq \phi \leq 4\pi \tag{21}$$

这样我们对配分函数得到一个表达式，它只考虑有一定同位旋 I 的状态($\dim(p)2I+1$)：

$$Z_{(I)} = \frac{(2I+1)}{2\pi} \int_0^{4\pi} \mathrm{d}\phi \sin\frac{1}{2}\phi \cdot \tilde{Z}(\beta, \hat{H}, \phi) \tag{22}$$

由于(11)，$\tilde{Z}$ 有以下形式

$$\tilde{Z}(\phi) = \mathrm{Tr}\left\{\exp\left[-\beta\hat{H} - \frac{\mathrm{i}}{2}\phi(\hat{C}_{11} - \hat{C}_{22})\right]\right\} \tag{23}$$

由 U(n)到 SU(n)我们用了下式(看(10.66)，U(3)→SU(3)的情况)

$$\sum_{k=1}^{n} \theta_{kk} = 0 \tag{24}$$

方程(23)定义了一个非常强烈振荡的函数，值在 0 与 10 的几次方之间. (22)得不到解析解，但是存在近似方法和数值计算.

例(b) SU(3)色荷的守恒. 如果一个夸克-胶子等离子体在重离子反应中形成，它的总色荷始终保持为 0. SU(3)表示的特征标具有由(10.118)给出的形式，我们考虑一个标量(无色)表示(单态(p)=(p_1, p_2)=(0,0)). 这个单态特征标是 $\chi^{(0,0)}=1$. 测度由(10.95)给出：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\mu(\phi,\psi) = {} & \frac{8}{3\pi^2} \sin^2\frac{\phi}{2} \sin^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\phi}{2} + \psi\right)\right] \\ & \times \sin^2\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{\phi}{2} + \psi\right)\right] \mathrm{d}\left(\frac{\phi}{z}\right) \mathrm{d}\left(\frac{\psi}{3}\right)\end{aligned} \tag{25}$$

其中

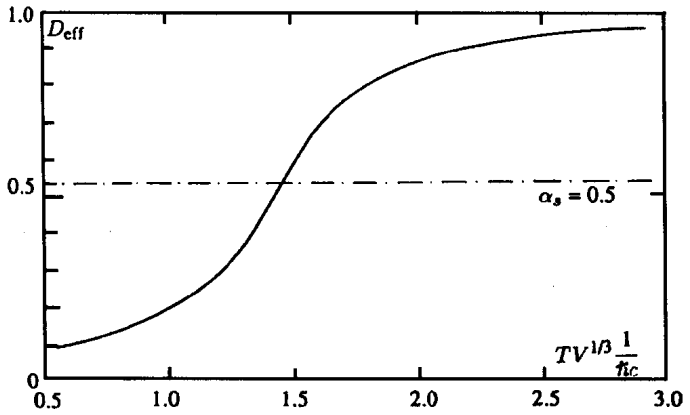
$$\begin{aligned}&\phi = \theta_{11} - \theta_{22}, \quad -\pi \leq \frac{1}{2}\phi \leq \pi \\ &\psi = \frac{1}{2}(\theta_{11} + \theta_{22} - 2\theta_{33}), \quad -\pi \leq \frac{\psi}{3} \leq \pi \\ &\theta_{11} + \theta_{22} + \theta_{33} = 0\end{aligned} \tag{26}$$

这样我们对只允许无色态的配分函数得到积分

$$Z_{(0,0)}=\frac{8}{3\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\left(\frac{\phi}{2}\right)d\left(\frac{\psi}{3}\right)\sin^2\frac{\phi}{2}\sin^2\frac{1}{2}\left(\frac{\phi}{2}+\psi\right)$$

$$\times\sin^2\frac{1}{2}\left(-\frac{\phi}{2}+\psi\right)\tilde{Z}(\beta,\hat{H},\phi,\psi) \tag{27}$$

$\tilde{Z}$ 又是一个强烈振荡的函数,其值在 0 和 10 的很大幂次之间,因此数值积分是必需的. 一个有用的方法来画出这个结果是取由 $Z_{(0,0)}$ 计算的能量 $E_{(0,0)}$ 和没有任何对称性限制的能量 $E^{(0)}$ 的比值. 量 $D_{eff}=E_{(0,0)}/E^{(0)}$ 描写从斯忒藩-玻尔兹曼理想气体行为的偏离,并可以被理解为一个有效的自由度数. 该结果被表示在下面图中,其中 D_{eff} 表现为无量纲量 $TV^{1/2}(\hbar c)$ 的函数. 我们看到有一个转变区域,在那里有效自由度数快速地减少. 这个行为暗示着一个相变,但是对比热的观察表明这里不包含不连续性. (**例 10.3 完**)



在 SU(3)规范理论中自由度数的有效减少

例 10.4 SU(n)表示维数的递推公式的证明

较早时候在这一章里对群 U(n)中的表示$[h_1,h_2,\cdots,h_n]$的特征标给出了一般公式(10.100). 数$[h_1,h_2,\cdots,h_n]$表示一个杨图的格子数,即 h_1 个格子在第一行,h_2 个格子在第二行等等. 一个 SU(n)的杨图通过消去最后一行($h_n=0$)来得到. 表示 SU(n)中的表示的数 $p_1,p_2,\cdots,p_{n-1}$ 通过

$$p_i=h_i-h_{i+1} \tag{1}$$

与数 $h_i(i=1,2,\cdots,n)$ 联系起来. 对 p_{n-1} 这导致

$$p_{n-1}=h_{n-1}-h_n=h_{n-1} \tag{2}$$

如果 $h_n=0$. 为了在 SU(n)中计算表示$(p_1,p_2,\cdots,p_{n-1})$的维数,在 U(n)中计算表示$[h_1,h_2,\cdots,h_{n-1},0]$的维数是方便的. 为了进一步计算需要(1)的逆,它为

$$h_{n-1}=p_{n-1}$$

$$h_{n-2}=p_{n-1}+p_{n-2}$$

$$h_{n-3}=p_{n-1}+p_{n-2}+p_{n-3}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$h_2 = p_{n-1} + p_{n-2} + p_{n-3} + \cdots + p_2$$

$$h_1 = p_{n-1} + p_{n-2} + p_{n-3} + \cdots + p_2 + p_1 \tag{3}$$

表示的维数由单位元(所有角 $\theta_{kk}=0$)的特征标的值给出. 在此情况我们有一个对角矩阵，到处有值 1，这个变换的特征标是对所有的 '1' 求和，也就是维数. 通过(10.99)这成为显然的，那里指数上变成等于 0，而求和在所有的态上进行. 在我们给出一般的途径之前，我们用几个例子来演示它.

a) SU(2). 按照(10.100)该特征标给出为

$$\chi^{[h_1 0]}_{U(2)} = \frac{\begin{vmatrix} \epsilon_1^{h_1+1} & 1 \\ \epsilon_2^{h_1+1} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \epsilon_1 & 1 \\ \epsilon_2 & 1 \end{vmatrix}} \tag{4}$$

ϵ_1, ϵ_2 是指数，$\epsilon_k = \exp(-i\theta_{kk})$，但它们能看作变量. 对 $(\theta_{kk}=0)$ 的情况我们有

$$\epsilon_k \xrightarrow[\theta_{kk}\to 0]{} 1 \tag{5}$$

因为分子和分母两者都趋于 0，我们还有得不应用洛毕达法则，也即我们相对于变量之一微商分子分母两者. 如果后来的量的比值存在则 $\chi^{[h_1,0]}$ 的极限也存在，而且两个值相等. 我们选 $\partial/\partial\epsilon_1$：

$$\frac{\partial/\partial\epsilon_1 \begin{vmatrix} \epsilon_1^{h_1+1} & 1 \\ \epsilon_2^{h_2+1} & 1 \end{vmatrix}}{\partial/\partial\epsilon_1 \begin{vmatrix} \epsilon_1 & 1 \\ \epsilon_2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} (h_1+1)\epsilon_1^{h_1} & 0 \\ \epsilon_2^{h_2+1} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \epsilon_2 & 1 \end{vmatrix}} \xrightarrow[\theta_{kk}\to 0]{} \frac{\begin{vmatrix} (h_1+1) & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = h_1 + 1 \tag{6}$$

因为在 SU(2) 场合 $h_1 = p_1$，这个结果和(9.59)相符.

b) SU(3). 按(10.100)该特征标给出为

$$\chi^{[h_1 h_2 0]}_{U(3)} = \begin{vmatrix} \epsilon_1^{h_1+2} & \epsilon_1^{h_2+2} & 1 \\ \epsilon_2 & \epsilon_2^{h_2+1} & 1 \\ \epsilon_3^{h_1+2} & \epsilon_3^{h_2+1} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \epsilon_1^2 & \epsilon_1 & 1 \\ \epsilon_2^2 & \epsilon_2 & 1 \\ \epsilon_3^2 & \epsilon_3 & 1 \end{vmatrix}^{-1} \tag{7}$$

现在我们将微商三次，一次对 ϵ_2 和两次对 ϵ_1(反过来是不够的，因为分子和分母将给出 0). 结果为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\epsilon_1^2}\frac{\partial}{\partial\epsilon_2} \begin{vmatrix} \epsilon_1^{h_1+2} & \epsilon_1^{h_2+1} & 1 \\ \epsilon_2^{h_1+2} & \epsilon_2^{h_2+1} & 1 \\ \epsilon_3^{h_1+2} & \epsilon_3^{h_2+1} & 1 \end{vmatrix} \right) \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial\epsilon_1^2}\frac{\partial}{\partial\epsilon_2} \begin{vmatrix} \epsilon_1^2 & \epsilon_1 & 1 \\ \epsilon_2^2 & \epsilon_2 & 1 \\ \epsilon_3^2 & \epsilon_3 & 1 \end{vmatrix} \right)^{-1}$$

$$= \begin{vmatrix} (h_1+2)(h_1+1)\epsilon_1^{h_1} & (h_2+1)h_2\epsilon_1^{h_2-1} & 0 \\ (h_1+2)\epsilon_2^{h_1+1} & (h_2+1)\epsilon_2^{h_2} & 0 \\ \epsilon_3^{h_1+2} & \epsilon_3^{h_2+1} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2\epsilon_2 & 1 & 0 \\ \epsilon_3^2 & \epsilon_3 & 1 \end{vmatrix} \tag{8a}$$

在 $\theta_{kk}\to 0$ 的极限我们得到

$$\frac{1}{2\cdot 1\cdot 1} \begin{vmatrix} (h_1+2)(h_1+1) & (h_2+1)h_2 & 0 \\ (h_1+2) & (h_2+1) & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(h_1+2)(h_2+1)(h_1-h_2+1) \tag{8b}$$

然后应用(3)，它把 h_1, h_2 和 p_1, p_2 联系起来，我们对 SU(3) 得到维数公式：

$$\frac{1}{2}(h_1-h_2+1)(h_2+1)(h_1+2)=\frac{1}{2}(p_1+1)(p_2+1)(p_1+p_2+2) \tag{8c}$$

这两个例子指出了一般的程序.

通过 U(2)的特征标来表达 U(3)的特征标是有趣味的,因为这给出如何得到递推公式(9.75)的提示. 为此目的我们分别考虑(8a)和(8b)中的分子和分母.

分子:

$$\begin{vmatrix}(h_1+2)(h_1+1)\epsilon_1^{h_1} & (h_2+1)h_2\epsilon_1^{h_2-1} & 0\\ (h_1+2)\epsilon_2^{h_1+1} & (h_2+1)\epsilon_2^{h_2} & 0\\ \epsilon_3^{h_1+2} & \epsilon_3^{h_2+1} & 1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}(h_1+2)(h_1+1)\epsilon_1^{h_1} & (h_2+1)h_2\epsilon_1^{h_2-1}\\ (h_1+2)\epsilon_2^{h_1+1} & (h_2+1)\epsilon_2^{h_2}\end{vmatrix}$$

$$=(h_1+2)(h_2+1)\begin{vmatrix}(h_1+1)\epsilon_1^{h_1} & h_2\epsilon_1^{h_2-1}\\ \epsilon_1^{h_1+1} & \epsilon_1^{h_2}\end{vmatrix} \tag{9}$$

现在我们反过来做洛毕达法则并代替(9)写下

$$(h_1+2)(h_2+1)\frac{\partial}{\partial\epsilon_1}\begin{vmatrix}\epsilon_1^{h_1+1} & \epsilon_1^{h_2}\\ \epsilon_2^{h_1+1} & \epsilon_2^{h_2}\end{vmatrix} \tag{10a}$$

类似地处理分母,我们得到结果

$$\begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\ 2\epsilon_2 & 1 & 0\\ \epsilon_3^2 & \epsilon_3 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 2\epsilon_2 & 1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1 & 0\\ \epsilon_2 & 1\end{vmatrix}=2\frac{\partial}{\partial\epsilon_1}\begin{vmatrix}\epsilon_1 & 1\\ \epsilon_2 & 1\end{vmatrix} \tag{10b}$$

如果我们把(10a)和(10b)放在一起,我们得到

$$\frac{1}{2}(h_2+1)(h_1+2)\left(\frac{\partial}{\partial\epsilon_1}\begin{vmatrix}\epsilon_1^{h_1+1} & \epsilon_1^{h_2}\\ \epsilon_2^{h_1+1} & \epsilon_2^{h_2}\end{vmatrix}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\epsilon_1}\begin{vmatrix}\epsilon_1 & 1\\ \epsilon_2 & 1\end{vmatrix}\right)^{-1} \tag{10c}$$

现在如果我们去掉微商,我们分别得到 U(2)的表示$[h_1,h_2]$和 SU(2)的表示$(p_1)=(h_1-h_2)$的特征标. 因为(10c)作为$\theta_{kk}\to 0$的极限存在,(10c)的没有微商的极限也存在. 这意味着

$$\dim[h_1h_20]_{U(3)}=\frac{1}{2!}(h_2+1)(h_1+2)\dim[h_1h_2]_{U(2)} \tag{11a}$$

或者由于(3)

$$\dim(p_1p_2)_{SU(3)}=\frac{1}{2!}(p_2+1)(p_1+p_2+2)\dim(p_1)_{SU(2)} \tag{11b}$$

这正是在$(n+1)=3$情况下的递推公式(9.75).

现在应该清楚了在一般情况如何处理. 对群 U(n)的情况,特征标由(10.100)给出. 我们将对分母分子分别地考虑这一点.

分母:

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial\epsilon_1^{n-1}}\frac{\partial^{n-2}}{\partial\epsilon_2^{n-2}}\frac{\partial}{\partial\epsilon_{n-1}}\begin{vmatrix}\epsilon_1^{n-1} & \epsilon_1^{n-2} & \cdots & \epsilon_1 & 1\\ \epsilon_2^{n-1} & \epsilon_2^{n-2} & \cdots & \epsilon_2 & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ \epsilon_{n-1}^{n-1} & \epsilon_{n-1}^{n-2} & \cdots & \epsilon_{n-1} & 1\\ \epsilon_n^{n-1} & \epsilon_n^{n-2} & \cdots & \epsilon_n & 1\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (n-1)(n-2)\cdots 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ (n-1)(n-2)\cdots 2\varepsilon_2 & (n-2)(n-3)\cdots 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (n-1)\varepsilon_{n-1}^{n-2} & (n-2)\varepsilon_{n-1}^{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \varepsilon_n^{n-1} & \varepsilon_{n-1}^{n-3} & \cdots & \varepsilon_n & 1 \end{vmatrix} \tag{12}$$

我们再次分别丢掉第 n 行和列，并分解因子 $(n-1)(n-2)\cdots 1=(n-1)!$

$$\begin{vmatrix} (n-2)\cdots 1 & 0 & \cdots & 0 \\ (n-2)\cdots 2\varepsilon_2 & (n-3)\cdots 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \varepsilon_{n-1}^{n-2} & \varepsilon_{n-1}^{n-3} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (n-1)!\frac{\partial^{n-2}}{\partial\varepsilon_1^{n-2}}\frac{\partial^{n-3}}{\partial\varepsilon_2^{n-3}}\frac{\partial}{\partial\varepsilon_{n-2}} \begin{vmatrix} \varepsilon_1^{n-2} & \varepsilon_1^{n-3} & \cdots & \varepsilon_1 & 1 \\ \varepsilon_2^{n-2} & \varepsilon_2^{n-3} & \cdots & \varepsilon_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \varepsilon_{n-1}^{n-2} & \varepsilon_{n-1}^{n-3} & \cdots & \varepsilon_{n-1} & 1 \end{vmatrix} \tag{13}$$

这样我们得到 U$(n-1)$表示的特征标的分母.

分子：应用$(\partial^{n-1}/\partial\varepsilon_1^{n-1})\cdots(\partial/\partial\varepsilon_{n-1})$给出

$$\begin{vmatrix} (h_1+n-1)\cdots(h_1+1)\varepsilon_1^{h_1} & (h_2+n-2)\cdots h_2\varepsilon_1^{h_2-1} & \cdots & 0 \\ (h_1+n-1)\cdots(h_1+2)\varepsilon_2^{h_1+1} & (h_2+n-2)\cdots(h_2+1)\varepsilon_1^{h_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ (h_1+n-1)\varepsilon_{n-1}^{h_1+n-2} & (h_2+n-2)\varepsilon_{n-1}^{h_2+n-3} & \cdots & 0 \\ \varepsilon_n^{h_1+n-1} & \varepsilon_n^{h_2+n-2} & \cdots & 1 \end{vmatrix} \tag{14}$$

略去最后一行和列并抽出因子

$$(h_1+n-1)(h_2+n-2)\cdots(h_{n-1}+1)$$

我们由(14)得到这个分子成为

$$(h_{n-1}+1)(h_{n-2}+2)\cdots(h_2+n-2)(h_1+n-1)$$
$$\times \begin{vmatrix} (h_1+n-2)\cdots(h_1+1)\varepsilon_1^{h_1} & (h_2+n-3)\cdots h_2\varepsilon_1^{h_2-1} & \cdots & (h_{n-1})\cdots(h_{n-1}-n+3)\varepsilon_1^{h_{n-1}-n+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_{n-1}^{h_1+n-2} & \varepsilon_{n-1}^{h_2+n-3} & \cdots & \varepsilon_{n-1}^{h_{n-1}} \end{vmatrix}$$

或者

$$(h_{n-1}+1)(h_{n-2}+2)\cdots(h_2+n-2)(h_1+n-1)$$
$$\times\frac{\partial^{n-2}}{\partial\varepsilon_1^{n-2}}\frac{\partial^{n-3}}{\partial\varepsilon_2^{n-3}}\cdots\frac{\partial}{\partial\varepsilon_{n-2}} \begin{vmatrix} \varepsilon_1^{h_1+(n-1)-1} & \varepsilon_1^{h_2+(n-1)-2} & \cdots & \varepsilon_1^{h_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_{n-1}^{h_1+(n-1)-1} & \varepsilon_{n-1}^{h_2+(n-1)-2} & \cdots & \varepsilon_{n-1}^{h_{n-1}} \end{vmatrix} \tag{15}$$

把(13)和(15)放在一起，并略去微商我们就得到递推公式，其中出现了 U$(n-1)$的特征标. 在 $\theta_{kk}\to 0$ 的时候我们有

$$\dim[h_1\cdots h_{n-1}0]_{U(n)}$$
$$=(h_{n-1}+1)(h_{n-2}+2)\cdots(h_1+n-1)\dim[h_1\cdots h_{n-1}]_{U(n-1)} \tag{16a}$$

或者用(3)式:

$$\dim(p_1,\cdots,p_{n-1})_{SU(n)}$$
$$=\frac{1}{(n-1)!}(p_{n-1}+1)(p_{n-1}+p_{n-2}+2)$$
$$\times(p_n+\cdots+p_1+n-1)\dim(p_1\cdots p_{n-2})_{SU(n-1)} \tag{16b}$$

如果我们用$(n+1)$代替n和用$N(\cdots)$代替$\dim(\cdots)$,这正是递推公式(9.75).

$$N_{n+1}(p_1,\cdots,p_n)$$
$$=\frac{1}{n!}(p_n+1)(p_n+p_{n-1}+2)\cdots(p_n+p_{n-1}+\cdots+p_1+n)$$
$$\times N_n(p_1,\cdots,p_{n-1}) \tag{17}$$

对最低几个群的解的维数公式为

$$SU(2):\frac{1}{1!}(p_1+1)$$

$$SU(3):\frac{1}{2!}(p_1+1)(p_2+1)(p_1+p_2+2)$$

$$SU(4):\frac{1}{2!3!}(p_1+1)(p_2+1)(p_3+1)(p_1+p_2+2)(p_2+p_3+2)$$
$$\times(p_1+p_2+p_3+3) \tag{18}$$

这系统地导致我们假设一般解可给出为

$$N_{n+1}(p_1\cdots p_n)=\frac{\prod_{l=1}^{n}\prod_{k=0}^{n}\left(\sum_{m=k-l+1}^{k}p_m+l\right)}{\prod_{k=1}^{n}k!} \tag{19}$$

这个证明用归纳法来做.在$n=1,2,3$的情况我们已经有证明的基础.现在我们假设这公式对某个SU(n)成立.借助于递推公式(17)我们得到:

$$N_{n+1}(p_1\cdots p_n)=\frac{1}{n!}(p_n+1)(p_n+p_{n-1}+2)\cdots(p_n+p_{n-1}+\cdots+p_1+n)$$
$$\times\frac{\prod_{l=1}^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{m=k-l+1}^{k}p_m+l\right)}{\prod_{k=1}^{n-1}k!} \tag{20}$$

分母马上可以写成$\prod_{k=1}^{n}k!$而这些因子可以被放入分子中的乘积项内,即

$$(p_n+1)\text{ 对 }k=n,l=1,(p_n+p_{n+1}+2)\text{ 对 }k=n,l=2 \tag{21}$$

如此等等.最后一个因子$(p_n+p_{n-1}+\cdots+p_1+n)$放到$k=n,l=n$项中.这样我们就证明了猜想(19).(**例 10.4 完**)

第 11 章　粲数和 SU(4)

直到现在我们讨论了带有三种组分夸克味道(夸克三重态)的夸克模型. 1974 年 11 月一种新的矢量介子被两个团体在勃鲁克海文和斯坦福(USA)[①]发现了,它被分别记为 J 或者 Ψ,并且现在被普遍地称为 J/Ψ 介子. 其他粒子的发现跟随而来. 后来这些发现在汉堡的德国电子同步加速器(DESY)中的碰撞储存环(DORIS)上被实验证实了,而且更多粒子被发现了. 在图 11.1 中给出了在汉堡的这个加速器的复杂结构的图像,在那里完成了这种实验.

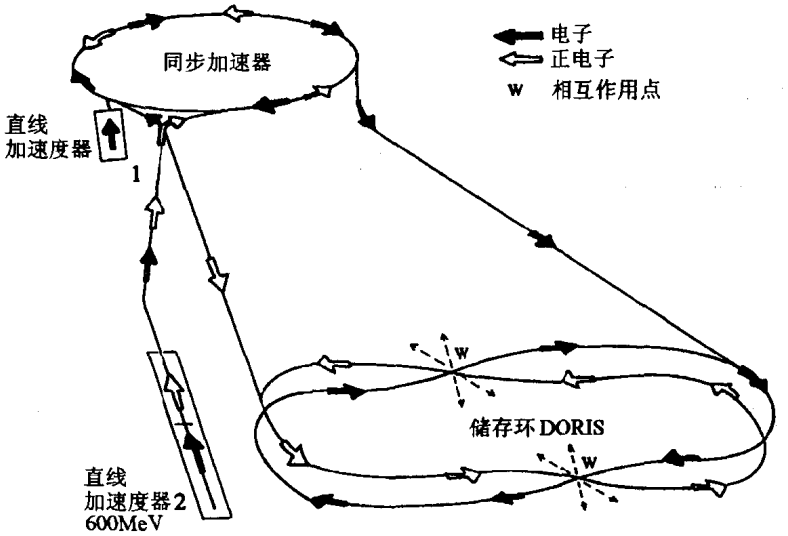


图 11.1　在汉堡 DESY 的加速器结构的计划

这个实验包括电子(e^-)正电子(e^+)碰撞,在其中产生了 μ 介子($e^+e^- \to \mu^+\mu^-$)以及强子($e^+e^- \to$强子). J/Ψ 介子具有不寻常的高质量,$M=3097$MeV 和一个极端小的共振宽度,$\Gamma=0.063$MeV (看表 11.1). 在 1976 年[②]丁肇中和 B. 里希特(Richter)因为 J/Ψ 的发现被授予诺贝尔物理奖.

---

① J. J. Aubert et al. (15 个作者): Phys. Rev. Lett. **33**, 1404(1974).
J. -E. Augustin et al. (35 个作者): Phys. Rev. Lett. **33**, 1406(1974).

② Samuel C. C. Ting: Rev. Mod. Phys. **49**, 235(1977).
Burton Richter: Rev. Mod. Phys. **49**, 251(1977).

表 11.1 新发现的矢量介子的性质

粒子	自旋宇称	同位旋	质量[MeV]	宽度[MeV]	衰变	[%]
$\Psi(3100),J$	1^-	0	3096.9 ± 0.1	0.063 ± 0.009	e^+e^-	7.5
					$\mu^+\mu^-$	7.5
					强子	85
$\Psi(3700),\psi'$	1^-	0	3686.0 ± 0.1	0.215 ± 0.040	e^+e^-	0.9
					$\mu^+\mu^-$	0.9
					强子	98.1
$\Psi(4030),\psi''$	1^-	?	4030 ± 5	51 ± 10	e^+e^-	0.0014
					强子	rest
$\Psi(4415),\psi'''$	1^-	?	4415 ± 6	43 ± 20	e^+e^-	0.0010
					强子	rest

两个反应的截面比由

$$R=\frac{\sigma(e^+e^-\to\text{强子})}{\sigma(e^+e^-\to\mu^+\mu^-)}$$

来计算. 如果把 R 相对 e^+e^- 体系的质心系能量 E 画出来,那么 J/Ψ 和 Ψ' 将分别在 3.1GeV 和 3.7GeV 处清楚地出现为极窄的共振(图 11.2).

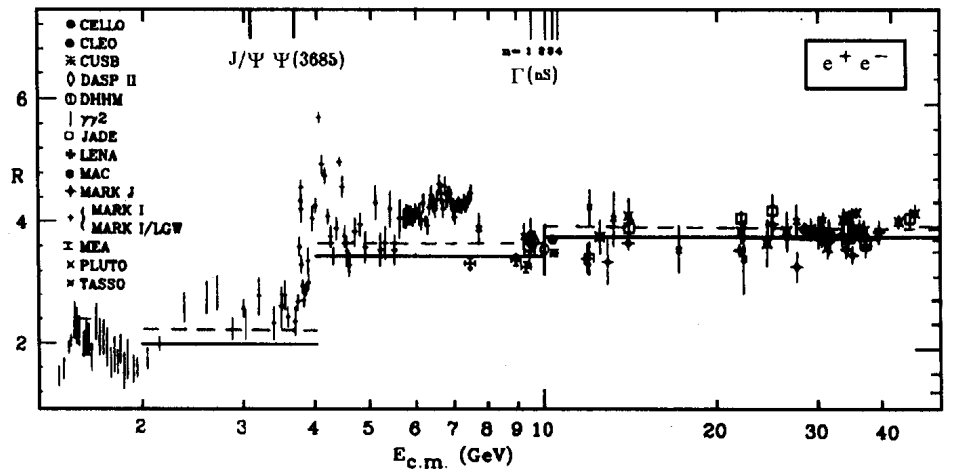


图 11.2 反应 $e^+e^-\to$强子和反应 $e^+e^-\to\mu^+\mu^-$ 的截面比

另外在 $E\sim4.1$GeV 和 $E\sim4.4$GeV 处能观察到几个共振态,但是它们比在 3.1GeV 处的 Ψ 的宽度明显大. 因此我们先仔细看看这个态.

因为这个矢量介子是很强相互作用的,这被很好地肯定,它的寿命 τ 应该有与其他高质量强子共振态衰变时间的同样的数量级,这样 $\tau\sim5\times10^{-24}$秒,它等价于宽度 $\Gamma\sim100$MeV. 然而测量值 $\Gamma_{exp}\sim0.063$MeV. 这是对一个新的守恒量子数的提示,它强烈地压低了由强相互作用引起的

Ψ 的衰变. 最简单的方法来接受这个新量子数到夸克模型的框架内是引入第四个夸克 c(粲),它不同于 u,d 和 s 有一个粲量子数 C. u,d 和 s 有 $C=0$ 而第四个夸克有 $C=1$. 像 T_3 和 Y 一样粲是一个可加量子数(类似电荷),也即 T_3-Y 图要被扩展到第三个轴. 也存在反夸克 $\bar{c}$ 带有 $C=-1$. 这样代替基本三重态[3],我们有一个四重态[4]作为对称群的最小表示. 这导致群 SU(4).

11.1　带粲数的粒子和 SU(4)

从现在起我们假设存在第四个夸克 c,它有一个外加的量子数,表示为"粲数 C",即 c 夸克有 $C=1$. c 夸克的其他量子数为 $T=T_3=0$ 和 $Y=\frac{1}{3}$. 因此 c 相对于通常的 SU(3)味是一个单态,我们现在代替 SU(3)三重态,有四重态 $q=$u,d,s,c 作为对称群的基本表示. 进而在 SU(3)(秩为 2 的群)的可加量子数 T_3 和 Y 以外我们必须考虑粲量子数 C,即新的对称群的多重态的状态由 $|T_3YC\rangle$ 给出. 因为现在我们有三个可加量子数,这个对称群必须是阶为 3,也必须有四重态(反四重态)作为基本表示. 自然地满足这些要求的群是 SU(4). 因此我们将把我们对带粲数粒子的检验立足于 SU(4)的群论考虑.

11.2　SU(4)的群性质

因为 SU(3)多重态必须被包括在 SU(4)模型中,我们希望在 SU(4)中尽可能多地保持 SU(3)的结构(类似于在 SU(3)中嵌入同位旋 SU(2)). 我们再次应用李代数和它的生成元的矩阵表示,即它的生成元是 4×4 矩阵. 类似于 SU(3)的矩阵 $\hat{\lambda}_i$,它是借助于 SU(2)的 $\hat{\tau}_i$(泡利矩阵)推出来的,我们将从 SU(3)的 $\hat{\lambda}_i$ 来推出 SU(4)矩阵.

因为群 SU(n)的生成元数一般为 n^2-1 个,我们对 SU(4)得到 15 个 4×4 矩阵. 开始的八个是由 SU(3)的八个生成元产生的. (我们也标记 SU(4)的生成元为 $\hat{\lambda}_i$ 以强调这形式上的相似性).

$$\hat{\lambda}_1=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \hat{\lambda}_2=\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}&0&0\\\mathrm{i}&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \hat{\lambda}_3=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\hat{\lambda}_4=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \hat{\lambda}_5=\begin{pmatrix}0&0&-\mathrm{i}&0\\0&0&0&0\\\mathrm{i}&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \hat{\lambda}_6=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\hat{\lambda}_7=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&-\mathrm{i}&0\\0&\mathrm{i}&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \hat{\lambda}_8=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \tag{11.1}$$

跟随着的六个 $\hat{\lambda}_i$ 是分别由移动非 0 元素 1 和$-\mathrm{i}$,i 构造的(正如由 $\hat{\lambda}_1$ 和 $\hat{\lambda}_2$ 到 $\hat{\lambda}_4$ 到 $\hat{\lambda}_7$)

$$\hat{\lambda}_9=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\quad \hat{\lambda}_{10}=\begin{pmatrix}0&0&0&-\mathrm{i}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\\mathrm{i}&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\hat{\lambda}_{11}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\quad \hat{\lambda}_{12}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&-\mathrm{i}\\0&0&0&0\\0&\mathrm{i}&0&0\end{pmatrix}$$

$$\hat{\lambda}_{13}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\quad \hat{\lambda}_{14}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-\mathrm{i}\\0&0&\mathrm{i}&0\end{pmatrix} \tag{11.2}$$

$\hat{\lambda}_{15}$是这样来选的,使所有的 $\hat{\lambda}_i$ 线性独立. 通常我们选 $\hat{\lambda}_{15}$类似于 $\hat{\lambda}_8$,即

$$\hat{\lambda}_{15}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix} \tag{11.3}$$

SU(4)的矩阵 $\hat{\lambda}_i$ 如同 SU(3)矩阵一样,满足类似的对易关系和迹关系:

$$[\hat{\lambda}_i,\hat{\lambda}_j]_-=2\mathrm{i}f_{ijk}\hat{\lambda}_k\quad,\quad [\hat{\lambda}_i,\hat{\lambda}_j]_+=\delta_{ij}\mathbb{1}+2d_{ijk}\hat{\lambda}_k\ , \tag{11.4a}$$

$$\mathrm{Tr}(\hat{\lambda}_i)=0\quad,\quad \mathrm{Tr}(\hat{\lambda}_i\hat{\lambda}_j)=2\delta_{ij} \tag{11.4b}$$

第一和第三个方程是显然的,而第二和第四个方程将在以下对一般 SU(n)的练习中被证明. SU(4)的结构常数 f_{ijk}和 d_{ijk}由已经表明的关系给出(看练习 7.3 和 7.4 还有以下的练习 11.1)—(11.3)

$$f_{ijk}=\frac{1}{4\mathrm{i}}\mathrm{Tr}([\hat{\lambda}_i,\hat{\lambda}_j]_-\hat{\lambda}_k)\quad,\quad d_{ijk}=\frac{1}{4}\mathrm{Tr}([\hat{\lambda}_i,\hat{\lambda}_j]_+\hat{\lambda}_k)\ . \tag{11.5}$$

练习 11.1 SU(N)生成元的反对易关系

问题 证明有(N^2-1)个无迹 $\hat{\lambda}_i$ 矩阵的 SU(N)矩表示满足

$$[\hat{\lambda}_i,\hat{\lambda}_j]_+=\frac{4}{N}\delta_{ij}\mathbb{1}_{N\times N}+2d_{ijk}\hat{\lambda}_k \tag{1}$$

其中

$$d_{ijk} = \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\{[\hat{\lambda}_i, \hat{\lambda}_j]_+ \hat{\lambda}_k\} \tag{2}$$

解　与单位矩阵$\mathbb{1}_{N\times N}$一起 $\hat{\lambda}_i$ 形成一组 $N\times N$ 矩阵的基. 这允许这表示有

$$[\hat{\lambda}_i, \hat{\lambda}_j]_+ = \mathbb{1}_{N\times N}\alpha_{ij} + \beta_{ijk}\hat{\lambda}_k \tag{3}$$

系数 α_{ij}和 β_{ijk}有待决定. 由此(3)的迹为

$$\mathrm{Tr}\{[\hat{\lambda}_i, \hat{\lambda}_j]_+\} = 2\mathrm{Tr}\{\hat{\lambda}_i\hat{\lambda}_j\} = N\alpha_{ij} + 0$$

$$\alpha_{ij} = \frac{4}{N}\delta_{ij} \tag{4}$$

其中用了 $\mathrm{Tr}\{\hat{\lambda}_i\} = 0$ 和 $\mathrm{Tr}\{\hat{\lambda}_i\hat{\lambda}_j\} = 2\delta_{ij}$. 最后一个关系将被稍后证明(也可以看练习 11.2),但是现在我们乘上 $\hat{\lambda}_l$ 和再计算迹.

$$\mathrm{Tr}\{\hat{\lambda}_l[\hat{\lambda}_i, \hat{\lambda}_j]_+\} = \frac{4}{N}\mathrm{Tr}\{\hat{\lambda}_l\}\delta_{ij} + \beta_{ijk}\mathrm{Tr}\{\hat{\lambda}_l\hat{\lambda}_k\}$$

$$4d_{ijl} = 2\beta_{ijk}\delta_{lk} = 2\beta_{ijl} \quad , \quad \beta_{ijl} = 2d_{ijl} \tag{5}$$

因此

$$\{\hat{\lambda}_i, \hat{\lambda}_j]_+ = \frac{4}{N}\delta_{ij} + 2d_{ijk}\hat{\lambda}_k$$

成立.

我们还必须建立方程 $\mathrm{Tr}\{\hat{\lambda}_i\hat{\lambda}_j\} = 2\delta_{ij}$,它其实是一个归一化条件. 这可以通过假设

$$\mathrm{Tr}\{\hat{\lambda}_i^2\} = 2 \quad (\text{归一化}) \tag{6}$$

并证明对 $i\neq j$,$\mathrm{Tr}\{\hat{\lambda}_i\hat{\lambda}_j\} = 0$ 来完成.

乘积 $\hat{\lambda}_i\hat{\lambda}_j, i\neq j$ 仅在两种情况有对角元,就是:

1) $\hat{\lambda}_i$ 和 $\hat{\lambda}_j$ 为非对角矩阵,并属于同一 SU(2)子代数,带有位移算符

$$\hat{\Lambda}_\pm = \frac{1}{2}(\hat{\lambda}_i \pm \mathrm{i}\hat{\lambda}_j) \tag{7}$$

然后

$$\hat{\Lambda}_\pm^2 = \frac{1}{4}(\hat{\lambda}_i^2 - \hat{\lambda}_j^2 + \mathrm{i}\hat{\lambda}_i\hat{\lambda}_j + \mathrm{i}\hat{\lambda}_j\hat{\lambda}_i) \tag{8}$$

$\hat{\Lambda}_+$和 $\hat{\Lambda}_+^2$的对角元为 0,因此

$$\mathrm{Tr}\{\hat{\Lambda}_+^2\} = \mathrm{Tr}\{\hat{\Lambda}_+\hat{\Lambda}_+\} = 0 \tag{9}$$

$$\mathrm{Tr}\{\hat{\lambda}_i^2 - \hat{\lambda}_j^2 + 2\mathrm{i}\hat{\lambda}_i\hat{\lambda}_j\} = 0 \tag{10}$$

或者跟(6)一起,

$$\mathrm{Tr}\{\hat{\lambda}_i\hat{\lambda}_j\} = 0 \ , \quad i\neq j \tag{11}$$

2) $\hat{\lambda}_i$ 和 $\hat{\lambda}_j$ 是对角矩阵,因此

$$i,j \in \{3,8,15,\cdots,n^2-1,\cdots\}$$

现在 $\hat{\lambda}$ 矩阵是这样构造的,使得

$$\hat{\lambda}_l\hat{\lambda}_m \sim \hat{\lambda}_l, \qquad \text{对 } l < m \tag{12}$$

由(12)($i\neq j$)导致

$$\mathrm{Tr}\{\hat{\lambda}_i\hat{\lambda}_j\} \sim \mathrm{Tr}\{\hat{\lambda}_{\min(i,j)}\} = 0 \ , \quad i\neq j \ . \tag{13}$$

由(6),(11),(13)我们得到

$$\mathrm{Tr}\{\hat{\lambda}_i\hat{\lambda}_j\} = 2\delta_{ij}$$

证毕.把这个结果和下面的练习 11.2 比较!(**练习 11.1 完**)

练习 11.2 SU(N)中生成元乘积的迹

问题 证明对任何群 SU(N)的 $\hat{\lambda}_i$ 矩阵表示

$$\mathrm{Tr}\{\hat{\lambda}_i\hat{\lambda}_j\} = 2\delta_{ij}$$

成立.

解 为了解决这个问题我们必须设计一个一般的体系来构造任意 SU(N)的 $\hat{\lambda}_i$.

1) 对每个 $i,j=1,2,\cdots,N,i<j$ 我们定义两个 $N\times N$ 矩阵

$$[\hat{\lambda}^{(1)}(i,j)]_{\mu\nu} = \delta_{j\mu}\delta_{i\nu} + \delta_{j\nu}\delta_{i\mu}$$

$$[\hat{\lambda}^{(2)}(i,j)]_{\mu\nu} = -\mathrm{i}(\delta_{i\mu}\delta_{j\nu} - \delta_{i\nu}\delta_{j\mu}) \tag{1}$$

它们形成 $N(N-1)/2+N(N-1)/2=N(N-1)$个线性独立矩阵.

2) 我们按照

$$\hat{\lambda}_{n^2-1} = \sqrt{\frac{2}{n^2-n}}\begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots^{n-1} & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -(n-1) & & \\ & & & & 0 & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad n = 2,3,\cdots,N \tag{2}$$

来构造别外 $N-1$ 个矩阵.这给出另外 $N-1$ 个线性独立矩阵,这样我们得到总数为 $N(N-1)+N-1=N^2-1$ 个矩阵.这样定义的 $\hat{\lambda}$ 矩阵形成无迹 $N\times N$ 矩阵矢量空间的一组基,并因此是 SU(N)生成元的一个表示.

现在我们可以用简单地计算证明要求的关系.

$$\mathrm{Tr}\{\hat{\lambda}_i^2\} = 2,\ i = 1,\cdots,N^2-1 \tag{3}$$

它被通过适当选择归一化来达到.对 $\mathrm{Tr}\{\hat{\lambda}_{n^2-1}\hat{\lambda}_{m^2-1}\}$,$n<m$,方程(2)给出

$$\hat{\lambda}_{n^2-1}\hat{\lambda}_{m^2-1} = \sqrt{\frac{2}{m^2-m}}\hat{\lambda}_{n^2-1}, \quad n<m \tag{4}$$

因此

$$\mathrm{Tr}\{\hat{\lambda}_{n^2-1}\hat{\lambda}_{m^2-1}\} = \sqrt{\frac{2}{m^2-m}}\mathrm{Tr}\{\hat{\lambda}_{n^2-1}\} = 0 \tag{5}$$

进而

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\{\hat{\lambda}_{n^2-1}\hat{\lambda}^{(1)}(i,j)\} &= \sum\nolimits_{\mu}\alpha_{\mu}^{(n)}\delta_{\mu\omega}[\hat{\lambda}^{(1)}(i,j)]_{\nu\mu} \\ &= \sum\nolimits_{\mu}\alpha_{\mu}^{(n)}[\delta_{j\mu}\delta_{i\nu}\delta_{\mu\omega} + \delta_{j\nu}\delta_{i\mu}\delta_{\mu\omega}] = 0\end{aligned} \tag{6}$$

因为 $i<j$,并且用同样的方法我们得到

$$\mathrm{Tr}\{\hat{\lambda}_{n^2-1}\hat{\lambda}^{(2)}(i,j)\} = 0 \tag{7}$$

现在我们计算

$$\mathrm{Tr}\{\hat{\lambda}^{(1)}(i,j)\hat{\lambda}^{(1)}(k,l)\},\quad (i,j)\neq(k,l)\ \text{即}\ i\neq k\ \text{或}\ j\neq l$$

$$\mathrm{Tr}\{\hat{\lambda}^{(1)}(i,j)\hat{\lambda}^{(1)}(k,l)\} = \sum_{\mu,\nu}(\delta_{j\mu}\delta_{i\nu} + \delta_{j\nu}\delta_{i\mu})(\delta_{k\nu}\delta_{l\mu} + \delta_{k\mu}\delta_{l\nu})$$

$$= \delta_{ji}\delta_{ik} + \delta_{jk}\delta_{il} + \delta_{jk}\delta_{il} + \delta_{jl}\delta_{ik}$$
$$= 2\delta_{jk}\delta_{il} = 0 \tag{8}$$

因为 $i<j$ 和 $k<l$(假设 $i=l$ 和 $j=k$ 会给出 $i<j \Rightarrow l<k$,而因此与 $k<l$ 矛盾). 类似地我们发现

$$\mathrm{Tr}\{\hat{\lambda}^{(2)}(i,j)\hat{\lambda}^{(2)}(k,l)\} = 0 \tag{9}$$

最后要算的量是:

$$\mathrm{Tr}\{\hat{\lambda}^{(1)}(i,j)\hat{\lambda}^{(2)}(k,l)\} = \sum_{\mu,\nu} -\mathrm{i}[\delta_{j\mu}\delta_{i\nu} + \delta_{j\nu}\delta_{i\mu}][\delta_{l\mu}\delta_{k\nu} - \delta_{k\mu}\delta_{l\nu}]$$
$$= -\mathrm{i}[\delta_{jl}\delta_{ik} + \delta_{jk}\delta_{il} - \delta_{kj}\delta_{il} - \delta_{jl}\delta_{ik}] = 0\,. \tag{10}$$

这样我们证明了

$$\mathrm{Tr}\{\hat{\lambda}_i\hat{\lambda}_j\} = 2\delta_{ij} \tag{11}$$

(练习 11.2 完)

练习 11.3　$\hat{F}_a$ 的完备性关系

问题　对 SU(N)的生成元 $\hat{F}_a=\hat{\lambda}_a/2$ 证明完备性关系

$$\sum_a (\hat{F}_a)_{il}(\hat{F}_a)_{jk} = \frac{1}{2}\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{2N}\delta_{il}\delta_{jk} \tag{1}$$

推导以下的有用恒等式

a)
$$\sum_a (\hat{F}_a)_{ik}(\hat{F}_a)_{jl} = \frac{N^2-1}{2N}\delta_{il}\delta_{jk} - \frac{1}{N}\sum_a (\hat{F}_a)_{il}(\hat{F}_a)_{jk} \tag{2}$$

和

$$\sum_a (\hat{F}_a)_{ij}(\hat{F}_a)_{jk} = \frac{N^2-1}{2N}\delta_{ik}$$

b)
$$f^{acd}f^{bcd} = N\delta^{ab} \tag{4}$$

解　$\hat{F}_a$ 和单位矩阵是 $N\times N$ 厄密矩阵的一个可能的基. 因此任何 $N\times N$ 厄密矩阵能表示为

$$(A)_{ij} = c_0\delta_{ij} + \sum_{a=1}^{N^2-1} c_a(\hat{F}_a)_{ij} \tag{5}$$

下面对全同指标我们采用爱因斯坦的求和规定. 系数 c_0 和 $c_a(a=1,\cdots,N^2-1)$被归一化条件

$$\mathrm{Tr}\{\hat{F}_a\hat{F}_b\} = \frac{1}{2}\delta_{ab} \tag{6}$$

和

$$\mathrm{Tr}\{\mathbb{1}\} = \delta_{ii} = N \tag{7}$$

来决定. (5)乘上 δ_{ij}导致

$$A_{ij}\delta_{ij} = c_0\delta_{ij}\delta_{ij} + c_a(\hat{F}_a)_{ij}\delta_{ij}$$
$$A_{ii} = c_0\delta_{ii} + c_a(\hat{F}_a)_{ii} = c_0N + c_a\mathrm{Tr}\{\hat{F}_a\} = c_0N \tag{8}$$

因此,性质 $\mathrm{Tr}\{\hat{F}_a\}=0$ 导致

$$c_0 = \frac{A_{ii}}{N}$$

(5) 乘上$(\hat{F}_b)_{ji}$得出

$$A_{ij}(\hat{F}_b)_{ij} = c_a(\hat{F}_a)_{ij}(\hat{F}_b)_{ji} = c_a\frac{1}{2}\delta_{ab} = \frac{1}{2}c_b \tag{10}$$

因此

$$A_{ij} = \frac{A_{ll}}{N}\delta_{ij} + 2A_{lm}(\hat{F}_b)_{ml}(\hat{F}_b)_{ij} \tag{11}$$

我们把所有项移到左方,并把因子 A_{lm} 拿出括号外

$$A_{lm}(\delta_{li}\delta_{jm} - \frac{1}{N}\delta_{ij}\delta_{lm} - 2(\hat{F}_b)_{ml}(\hat{F}_b)_{ij}) = 0$$

这个方程对任意矩阵 A_{lm} 成立. 因此括号内的表达式必须为 0,因而我们得到

$$(\hat{F}_b)_{ml}(\hat{F}_b)_{ij} = \frac{1}{2}\delta_{li}\delta_{mj} - \frac{1}{2N}\delta_{ij}\delta_{lm} \tag{12}$$

在重新命名这些指标后,得出的正是要求的关系(1).

a)这一关系是完备性关系的简单推论. 把表达式

$$(\hat{F}_a)_{ik}(\hat{F}_a)_{jl} = \frac{1}{2}\delta_{il}\delta_{kj} - \frac{1}{2N}\delta_{ik}\delta_{jl} \tag{13}$$

加到

$$\frac{1}{N}(\hat{F}_a)_{il}(\hat{F}_a)_{jk} = -\frac{1}{2N^2}\delta_{il}\delta_{kj} + \frac{1}{2N}\delta_{ik}\delta_{jl} \tag{14}$$

上,直接得出要求的关系

$$(\hat{F}_a)_{ik}(\hat{F}_a)_{jl} = \frac{1}{2N^2}(N^2-1)\delta_{il}\delta_{jk} - \frac{1}{N}(\hat{F}_a)_{il}(\hat{F}_a)_{jk} \tag{15}$$

乘上 δ_{kj} 就得出

$$(\hat{F}_a)_{ik}(\hat{F}_a)_{kl} = \frac{N^2-1}{2N^2}\delta_{il} \tag{16}$$

由这个表达式我们构造了一个卡西米尔算符,因为

$$\hat{F}_a \cdot \hat{F}_a = \frac{N^2-1}{2N^2}\mathbb{1} \tag{17}$$

跟所有生成元对易.

b) 现在我们证明

$$f^{acd}f^{bcd} = N\delta^{bc} \tag{18}$$

首先我们用 $\hat{F}_a$,$\hat{F}_b$ 和 $\hat{F}_c$ 表达 f^{abc}

$$\begin{aligned} f^{abc} &= -2\mathrm{i}\,\mathrm{Tr}\{[\hat{F}^a,\hat{F}^b]\hat{F}^c\} \\ &= -2\mathrm{i}\,\mathrm{Tr}\{\hat{F}^a[\hat{F}^b,\hat{F}^c]\} \end{aligned}$$

(看练习 7.4).

因此

$$\begin{aligned} f^{acd}f^{bcd} &= -4\mathrm{Tr}\{\hat{F}^a[\hat{F}^c,\hat{F}^d]\}\,\mathrm{Tr}\{\hat{F}^b[\hat{F}^c,\hat{F}^d]\} \\ &= -4[(\mathrm{Tr}\{\hat{F}^a\hat{F}^c\hat{F}^d\} - \mathrm{Tr}\{\hat{F}^a\hat{F}^d\hat{F}^c\}) \\ &\quad \times (\mathrm{Tr}\{\hat{F}^b\hat{F}^c\hat{F}^d\} - \mathrm{Tr}\{\hat{F}^b\hat{F}^d\hat{F}^c\})] \\ &= -8(\mathrm{Tr}\{\hat{F}^a\hat{F}^c\hat{F}^d\}\mathrm{Tr}\{\hat{F}^b\hat{F}^c\hat{F}^d\} \\ &\quad - \mathrm{Tr}\{\hat{F}^a\hat{F}^c\hat{F}^d\}\mathrm{Tr}\{\hat{F}^b\hat{F}^d\hat{F}^c\}) \end{aligned} \tag{19}$$

现在我们必须计算项

$$\mathrm{Tr}\{\hat{F}^a\hat{F}^c\hat{F}^d\}\mathrm{Tr}\{\hat{F}^b\hat{F}^c\hat{F}^d\} \tag{20}$$

和

$$\mathrm{Tr}\{\hat{F}^a\hat{F}^c\hat{F}^d\}\mathrm{Tr}\{\hat{F}^b\hat{F}^d\hat{F}^c\} \tag{21}$$

这可以借助完备性关系(1)来做出

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\{\hat{F}^a\hat{F}^c\hat{F}^d\}\mathrm{Tr}\{\hat{F}^b\hat{F}^c\hat{F}^d\} &= (\hat{F}^a_{ij}\hat{F}^c_{jl}\hat{F}^d_{li})(\hat{F}^b_{\alpha\beta}\hat{F}^c_{\beta\gamma}\hat{F}^d_{\gamma\alpha})\\ &= \hat{F}^a_{ij}\hat{F}^b_{\alpha\beta}(\hat{F}^c_{jl}\hat{F}^c_{\beta\gamma})(\hat{F}^d_{li}\hat{F}^d_{\gamma\alpha})\end{aligned} \tag{22}$$

现在我们把(1)代入

$$\begin{aligned}&= \hat{F}^a_{ij}\hat{F}^b_{\alpha\beta}\left(\frac{1}{2}\delta_{j\gamma}\delta_{l\beta}-\frac{1}{2N}\delta_{jl}\delta_{\beta\gamma}\right)\left(\frac{1}{2}\delta_{l\alpha}\delta_{i\gamma}-\frac{1}{2N}\delta_{li}\delta_{\gamma\alpha}\right)\\ &= \frac{1}{4}\hat{F}^a_{ij}\hat{F}^b_{\alpha\beta}\left(\delta_{ji}\delta_{\alpha\beta}-\frac{1}{N}\delta_{i\beta}\delta_{j\alpha}-\frac{1}{N}\delta_{j\alpha}\delta_{i\beta}\frac{1}{N^2}\delta_{ji}\delta_{\beta\alpha}\right)\\ &= \frac{1}{4}\hat{F}^a_{ij}\hat{F}^b_{\alpha\beta}\left(-\frac{2}{N}\delta_{i\beta}\delta_{j\alpha}\right)=-\frac{1}{2N}\mathrm{Tr}\{\hat{F}^a\hat{F}^b\}\\ &= -\frac{1}{4N}\delta^{ab}\end{aligned} \tag{23}$$

这里我们又用了 $\mathrm{Tr}\{\hat{F}^a\}=0$.

第二项(21)被类似地计算

$$\mathrm{Tr}\{\hat{F}^d\hat{F}^c\hat{F}^d\}\mathrm{Tr}\{\hat{F}^b\hat{F}^d\hat{F}^c\} = \hat{F}^a_{ij}\hat{F}^b_{\alpha\beta}(\hat{F}^c_{jl}\hat{F}^c_{\gamma\alpha})(\hat{F}^d_{li}\hat{F}^d_{\beta\gamma}) \tag{24}$$

在把(1)代入后得出

$$\mathrm{Tr}\{\hat{F}^a\hat{F}^c\hat{F}^d\}\mathrm{Tr}\{\hat{F}^b\hat{F}^d\hat{F}^c\} = \frac{1}{8}\delta^{ab}\left(N-\frac{2}{N}\right) \tag{25}$$

把这个表达式和(23)一起代入到(19)中,最后得出

$$f^{acd}f^{bcd} = -8\left(-\frac{1}{4N}\delta^{ab}-\frac{1}{8}N\delta^{ab}+\frac{1}{4N}\delta^{ab}\right)=N\delta^{ab}$$

(练习 11.3 完)

练习 11.4　卡西米尔算符在一个 SU(N)基本表示上的本征值

问题　证明卡西米尔算符在一个 SU(N)基本表示上的本征值取值为$(N^2-1)/2N$.

解　首先我们证明对所有的 k, $\sum_i d_{iik}=0$. $\hat{C}_1$ 是一个卡西米尔算符,因此我们有$[\hat{F}_\sigma,\hat{C}_1]_-=0$. 通过应用 $\hat{\lambda}_i$ 的矩阵表示给出

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N^2-1}\left[\frac{1}{2}\hat{\lambda}_\sigma,\frac{1}{4}\hat{\lambda}_l^2\right]_- &= \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{N^2-1}\left[\hat{\lambda}_\sigma,\left(\frac{2}{N}\delta_{ii}\mathbb{1}_{N\times N}+d_{iik}\hat{\lambda}_k\right)\right]\\ &= \frac{\mathrm{i}}{4}\sum_k f_{\sigma kl}\hat{\lambda}_l\left\{\sum_{i=1}^{N^2-1}d_{iil}\right\}\end{aligned} \tag{1}$$

其中我们用了练习 11.1 的结果

$$[\hat{\lambda}_i,\hat{\lambda}_j]_+ = \frac{4}{N}\delta_{ij}\mathbb{1}_{N\times N}+2d_{jk}\hat{\lambda}_k \tag{2}$$

现在以下两点是对的:

1) 对给定的 σ 和 l 只存在一个 k 使得 $f_{\sigma kl}\neq 0$.

2) $\hat{\lambda}_i$ 是线性独立的.

然后得出表达式(1)为 0,仅当对所有 l,

$$\sum_{i=1}^{N^2-1} d_{iil} = 0 \tag{3}$$

$\hat{\lambda}_i$ 正是基本表示的 $\hat{F}_i$ 的矩阵表示.因此在基本表示的情况,$\hat{C}_1$ 的值可直接计算

$$\hat{C}_1^{f,r} = \frac{1}{4}\sum_i \hat{\lambda}_i\hat{\lambda}_i = \frac{1}{4}\sum_i \left(\frac{2}{N}\delta_{ii}\mathbb{1}_{N\times N} + d_{iik}\hat{\lambda}_k\right) = \frac{N^2-1}{2N}\mathbb{1}_{N\times N} \tag{4}$$

(练习 11.4 完)

11.3 SU(4)的结构常数 f_{ijk}和系数 d_{ijk}的表

SU(4)的非 0 结构常数给出在表 11.2 和 11.3 中;

我们认出 f_{ijk}是完全反对称的,而 d_{ijk}又是对所有指标对称的.这完全类似于我们在较早的练习 7.3 和 7.4 中的结论,由关系(11.4)和(11.5)得出.

表 11.2 非 0 结构常数 f_{ijk}

i	j	k	f_{ijk}	i	j	k	f_{ijk}
1	2	3	1	4	10	13	$-1/2$
1	4	77	$1/2$	5	9	13	$1/2$
1	5	6	$-1/2$	5	10	14	$1/2$
1	9	12	$1/2$	6	7	8	$\sqrt{3}/2$
1	10	11	$-1/2$	6	11	14	$1/2$
2	4	6	$1/2$	6	12	13	$-1/2$
2	5	7	$1/2$	7	11	13	$1/2$
2	9	11	$1/2$	7	12	14	$1/2$
2	10	12	$1/2$	8	9	10	$1/(2\sqrt{3})$
3	4	5	$1/2$	8	11	12	$1/(2\sqrt{3})$
3	6	7	$-1/2$	8	13	14	$-1/\sqrt{3}$
3	9	10	$1/2$	9	10	15	$\sqrt{2/3}$
3	11	12	$-1/2$	11	12	15	$\sqrt{2/3}$
4	5	8	$\sqrt{3}/2$	13	14	15	$\sqrt{2/3}$
4	9	14	$1/2$				

表 11.3 非 0 结构系数 d_{ijk}

i	j	k	d_{ijk}	i	j	k	d_{ijk}
1	1	8	$1/\sqrt{3}$	5	5	8	$-1/(2\sqrt{3})$
1	1	15	$1/\sqrt{6}$	5	5	15	$1/\sqrt{6}$
1	4	6	$1/2$	5	9	14	$-1/2$

续表

i	j	k	d_{ijk}	i	j	k	d_{ijk}
1	5	7	1/2	5	10	13	1/2
1	9	11	1/2	6	6	8	$-1/(2\sqrt{3})$
1	10	12	1/2	6	6	15	$1/\sqrt{6}$
2	2	8	$1/\sqrt{3}$	6	11	13	1/2
2	2	15	$1/\sqrt{6}$	6	12	14	1/2
2	4	7	−1/2	7	7	8	$-1/(2\sqrt{3})$
2	5	6	1/2	7	7	15	$1/\sqrt{6}$
2	9	12	−1/2	7	11	14	−1/2
2	10	11	1/2	7	12	13	1/2
3	3	8	$1/\sqrt{3}$	8	8	8	$-1/\sqrt{3}$
3	3	15	$1/\sqrt{6}$	8	8	15	$1/\sqrt{6}$
3	4	4	1/2	8	9	9	$1/(2\sqrt{3})$
3	5	5	1/2	8	10	10	$1/(2\sqrt{3})$
3	6	6	−1/2	8	11	11	$1/(2\sqrt{3})$
3	7	7	−1/2	8	12	12	$1/(2\sqrt{3})$
3	9	9	1/2	8	13	13	$-1/\sqrt{3}$
3	10	10	1/2	8	14	14	$-1/\sqrt{3}$
3	11	11	−1/2	9	9	15	$-1/\sqrt{6}$
3	12	12	−1/2	10	10	15	$-1/\sqrt{6}$
4	4	8	$-1/(2\sqrt{3})$	11	11	15	$-1/\sqrt{6}$
4	4	15	$1/\sqrt{6}$	12	12	15	$-1/\sqrt{6}$
4	9	13	1/2	13	13	15	$-1/\sqrt{6}$
4	10	14	1/2	14	14	15	$-1/\sqrt{6}$
				15	15	15	$-1/\sqrt{2/3}$

通常的 SU(4)生成元为

$$\hat{F}_i = \frac{1}{2}\hat{\lambda}_i \quad (i = 1,\cdots,15) \tag{11.6}$$

它相应于 SU(3)的 $\hat{F}_i$. 进而类似于 SU(3)我们可以引入同位旋算符 $\hat{T}_\pm = \hat{F}_1 \pm i\hat{F}_2$, $\hat{T}_3 = \hat{F}_3$; V 自旋算符 $\hat{V}_\pm = \hat{F}_4 \pm i\hat{F}_5$ 以及 U 自旋算符 $\hat{U}_\pm = \hat{F}_6 \pm i\hat{F}_7$. 我们不用通常 SU(3)对超荷的定义 $\hat{Y} = 2/\sqrt{3}\,\hat{F}_8$,因为它导致粲夸克的 0 超荷,$Y = 0$. 这个定义将对显粲数的强子的超荷导致非整数值. 因此我们借助于第三个对角矩阵 $\hat{F}_{15}$扩展这个定义为

$$\hat{Y} = \frac{2}{\sqrt{3}}\hat{F}_8 + \frac{1}{12}(\mathbb{1} - 2\sqrt{6}\,\frac{1}{\sqrt{15}})$$

这个定义对粲夸克给出超荷 $Y = \frac{1}{3}$. 我们现在可以借助其余的算符进一步构造准自旋算符(例如 W 自旋等等);然而这看来并不很有意义. 当同位旋对在 SU(3)多重态中分类状态是非常有用时

(质量差 $\Delta M \leq 10\text{MeV}$),对 U 自旋这只是在非常有限的意义上成立;U 自旋多重态质量分裂在几个 100MeV(质量的 10%).

试图用 W 自旋来分类 SU(4)多重态是完全不妥当的;质量差(例如在 ρ^0 和 Ψ 之间,2GeV 的值,近似于质量的 100%)是非常高的,即 SU(4)对称性比起 SU(3)对称性远为严重地破缺.因此按 SU(2)子群的分类是不实际的.然而在下面我们将看到按照 SU(3)子多重态,夸克三重态 uds(即作用在四个夸克的三个上的一个 SU(3)群)来分类 SU(4)多重态仍然是有意义的.

11.4 SU(4)的多重态结构

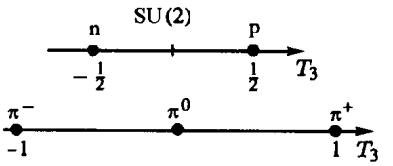


图 11.3 SU(2)的最低非平凡表示

我们已经体会到[4]和[$\bar{4}$]是 SU(4)的基本表示,它们的量子数列在表 11.4 中.类似于 SU(3)为了分类强子,我们必须形成这些表示的直积,即[4]⊗[$\bar{4}$]对介子($q\bar{q}$),[4]⊗[4]⊗[4]对重子(qqq).

因为每个多重态有三个可加量子数(T_3,Y,C)(对四重态看表 11.4),我们对[4]和[$\bar{4}$]得到一个三维的 T_3-Y-C 表示,显示在图 11.5 中.这可以与表示在图 11.3 中的 SU(2)的一维表示和 SU(3)的两维表示(图 11.4)比较.

表 11.4 夸克四重态的量子数 S=奇异数,B=重子数

符号	Q[e]	T	T_3	S	B	Y	C
u_1,u	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
u_2,d	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
u_2,s	$-\frac{1}{3}$	0	0	−1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0
u_4,c	$\frac{2}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

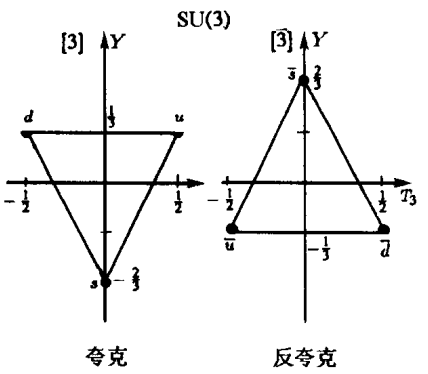


图 11.4 SU(3)的最低非平凡表示

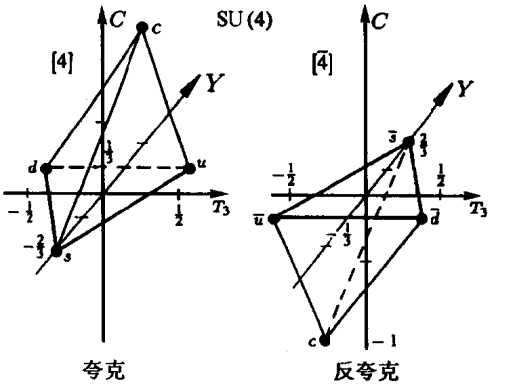


图 11.5 SU(4)的最低非平凡表示

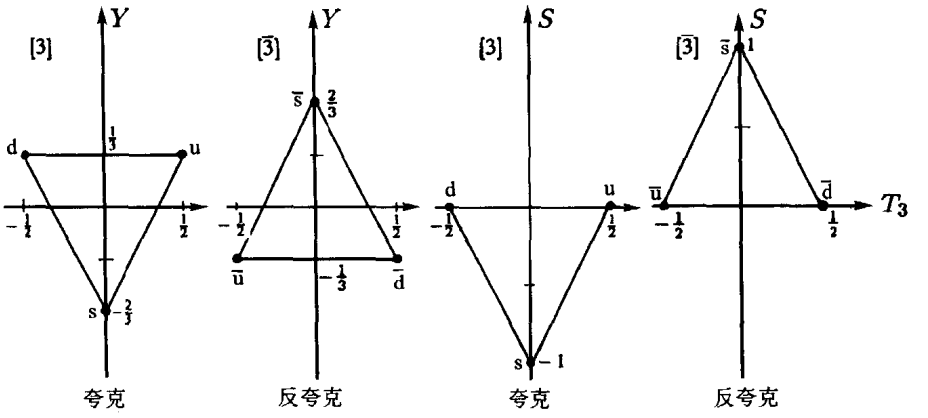


图 11.6　夸克和反夸克在 SU(3)的表示中作为同位旋分量 T_3 和超荷 Y 或奇异数 S 的函数

要点:在基本粒子物理中奇异数常被用来代替超荷 Y,其中 $Y=B+S$(看图 11.6). 重子数对所有重子 $B=+1$,对所有反重子 $B=-1$,而对介子 $Y=S$. 随后盖尔曼-西岛关系为 $Q=T_3+1/2(B+S)$. 正如我们稍后在方程(11.9)中表明的,将有必要推广这个关系到 $Q=T_3+\frac{1}{2}(Y+C)=T_3+\frac{1}{2}(B+S+C)$. 由这个推广,c 夸克的电荷被算出为 $Q_c=\frac{2}{3}$(看表 11.4).

当图解约化克罗内克乘积在 SU(2)和 SU(3)情况是相当简单的时候,在 SU(4)情况(特别对较高的表示)它是不容易做到的,因为维数较高. 因此更适当的是依靠群论方法,例如杨图的方法. 我们把这些结果(也对表示[6],[10],[$\overline{10}$]等等)表达在表 11.5 中,其中几个是在练习 11.4—练习 11.7 的解中推导的.

表 11.5　乘积[X]⊗[$\overline{Y}$]的完全分解表

4	$\overline{4}$	6	10	$\overline{10}$	15	20	$\overline{20}$	20′	$\overline{20'}$	20″	x y
6+10	1+15	$\overline{4}+20'$	20+20′	$\overline{4}+\overline{36}$	$4+\overline{20'}$ $+36$	35+45	$\overline{10}+\overline{70}$	$15+20''$ $+45$	$6+\overline{10}$ $+64$	$\overline{20'}+60$	4
		$1+15$ $+20''$	15+45	$\overline{15}+\overline{45}$	$6+10$ $+\overline{10}+64$	$36+84'$	$\overline{36}+\overline{84'}$	$\overline{4}+20'$ $+\overline{36}+60$	$\overline{4}+20'$ $+\overline{36}+\overline{60}$	$6+50$ $+64$	6
			$20''+35$ $+45$	$1+15$ $+84$	$6+10$ $+64+70$	$56+60$ $+84'$	$\overline{4}+\overline{36}$ $+\overline{160}$	$\overline{20'}+36$ $+60+84'$	$\overline{4}+20'$ $+\overline{36}+140''$	$\overline{10}+64$ $+12$	10
					$1+15+15$ $+20''+45$ $+\overline{45}+84$	$20+20'$ $+120$ $+140''$	$\overline{20}+\overline{20'}$ $+\overline{120}$ $+\overline{140''}$	$\overline{4}+20+20$ $+20'+\overline{36}$ $+\overline{60}+140''$	$4+\overline{20'}$ $+\overline{20}+\overline{20}$ $+36+60$ $+\overline{140''}$	$15+20''$ $+45+\overline{45}$ $+175$	15

作为例子我们选[4]⊗[$\overline{4}$]的克罗内克乘积. 按照杨图的规则(看第 9 章),两个基本表示由图

$$[4]=\square\ ,\ [\bar{4}]=\begin{array}{|c|}\hline\ \\\hline\ \\\hline\ \\\hline\end{array} \tag{11.7}$$

来代表.它们的直积

$$[4]\otimes[\bar{4}]=\square\otimes\begin{array}{|c|}\hline\ \\\hline\ \\\hline\end{array}=\begin{array}{|c|}\hline\ \\\hline\ \\\hline\ \\\hline\end{array}\oplus\begin{array}{|c|c|}\hline\ &\ \\\hline\ \\\cline{1-1}\ \\\cline{1-1}\end{array}=[1]\oplus\begin{array}{|c|c|}\hline\ &\ \\\hline\ \\\cline{1-1}\ \\\cline{1-1}\end{array} \tag{11.8}$$

而第二个不可约表示的维数是采用第九章给出的规则计算的.

$$\dim\left(\begin{array}{|c|c|}\hline\ &\ \\\hline\ \\\cline{1-1}\ \\\cline{1-1}\end{array}\right)=\begin{array}{|c|c|}\hline 4&5\\\hline 3\\\cline{1-1}2\\\cline{1-1}\end{array}\ :\ \begin{array}{|c|c|}\hline 4&1\\\hline 2\\\cline{1-1}1\\\cline{1-1}\end{array}=\frac{4\times5\times3\times2}{4\times1\times2\times1}=15 \tag{11.9}$$

对介子组合$[4]\otimes[\bar{4}]$我们这样得到

$$[4]\otimes[\bar{4}]=[1]\oplus[15] \tag{11.10}$$

即一个SU(4)单态和一个十五重态.我们可以分解十五重态到SU(3)多重态:

$$[15]\xrightarrow{SU(3)}[1]\oplus[3]\oplus[\bar{3}]\oplus[8]\ .$$

这由SU(3)分解$[4]=[3]+[1]$得来.为了解释这种情况,我们回忆一下,SU(4)多重态是由SU(3)多重态构成的.后者是水平的(层),带有常数粲数,平行于T_3-Y平面.这类似于SU(3)多重态由SU(2)多重态的构造.在此情况SU(2)多重态(例如T-多重态)是平行于T轴和属于一个不同的(但是在每个多重态内固定的)超荷Y.因此,例如SU(3)三重态$[3]=[2]^{1/3}\oplus[1]^{-2/3}$.右方的上标给出超荷.SU(3)反三重态分解为$[\bar{3}]=[2]^{-1/3}\oplus[1]^{2/3}$.现在我们可以轻易地计算SU(3)介子九重态的SU(2)子结构

$$\begin{aligned}[3]\otimes[\bar{3}]&=([2]^{1/3}\oplus[1]^{-2/3})\otimes([2]^{-1/3}\oplus[1]^{2/3})\\&=([2]\otimes[2])^0\oplus[2]^{-1}\oplus[2]^1\oplus[1]^0\\&=[3]^0\oplus[1]^0\oplus[2]^{-1}\oplus[2]^1\oplus[1]^0\end{aligned}$$

这严格地是第8章中引入的介子九重态的结构.

在SU(3)多重态中上指标代表粲量子数,例如$[1]^1$代表一个SU(3)单态,带有$C=1$;$[\bar{3}]^0$指出SU(3)三重态,带有$C=0$.因此按(8.62),我们有

$$\begin{aligned}[4]\otimes[\bar{4}]&=[[3]^0\oplus[1]^1]\otimes[[\bar{3}]^0\oplus[1]^{-1}]\\&=[3]^0\otimes[\bar{3}]^0\oplus[3]^0\otimes[1]^{-1}\oplus[\bar{3}]^0\otimes[1]^1\oplus[1]^1\otimes[1]^{-1}\\&=[8]^0\oplus[1]^0\oplus[3]^{-1}\oplus[\bar{3}]^1\oplus[1]^0\end{aligned} \tag{11.11}$$

这被显示在图11.7和图11.8中,它表明SU(3)多重态(在每个平行于Y-T_3平面的平面内)和两个SU(4)多面体.总共我们得到熟知的介子九重态$[1]^0+[8]^0$(两者严格处在多面体的Y-T_3平面内),但是外加一个三重态$[3]^{-1}$和一个反三重态$[\bar{3}]^1$.这个SU(3)分类区分带有不同粲数的SU(3)多重态:三重态有$C=-1$,九重态$C=0$和反三重态$C=+1$(看图11.8中的SU(4)多面

体).[4]⊗[$\bar{4}$]直积的 SU(3)分解导致粲数和 SU(3)三重态的关联.这时这个三重态产生于[3]*⊗[1]$^{-1}$的耦合,其中[1]$^{-1}$是从[$\bar{4}$]中分解出来的带 $C=-1$ 的单态.[$\bar{3}$]产生于[$\bar{3}$]*⊗[1]^{1},现在其中的单态[1]^{1} 来源于[4]的分解中带 $C=+1$ 的部分.这样我们从基本四面体[4]和[$\bar{4}$]构造了空间多边形,类似于用基本三重态构造不同 SU(3)表示的过程.

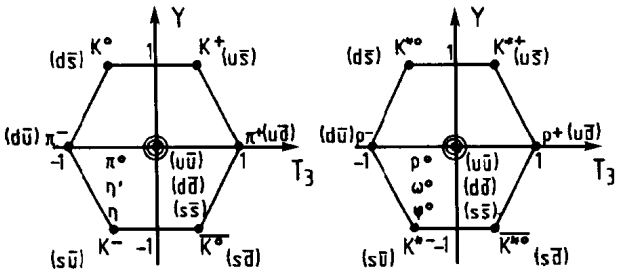


图 11.7　膺标介子(0^-)和矢量介子(1^-)SU(3)多重态.在左边和右边的多重态内类似态的夸克内容是全同的,只有波函数的自旋部分的耦合是不同的.

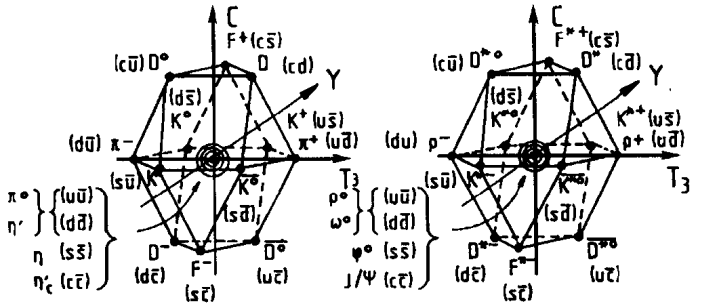


图 11.8　膺标介子(0^-)和矢量介子(1^-)SU(4)多重态.左边和右边的多重态中类似态的夸克内容是一样的;只有波函数的自旋部分是以不同方式耦合的(分别到 O^- 和 1^-).

很清楚我们得到以下($C=1$)状态(包含一个 c 夸克),我们叫它($C=1$)SU(3)多重态:

膺标介子	矢量介子
$\|D^0\rangle=\|c\,\bar{u}\rangle$,	$\|D^{*0}\rangle=\|c\,\bar{u}\rangle$
$\|F^+\rangle=\|c\,\bar{s}\rangle$,	$\|F^{*+}\rangle=\|c\,\bar{s}\rangle$
$\|D^+\rangle=\|c\,\bar{d}\rangle$,	$\|D^{*+}\rangle=\|c\,\bar{d}\rangle$

(11.12)

($C=0$)多重态是原来 SU(3)介子九重态(它不包含 c 夸克).此外在图 11.8 中表现出了 SU(4)单态 $c\,\bar{c}$.

($C=-1$)多重态在每个波函数中包含一个反夸克 $\bar{c}$:

膺标介子	矢量介子
$\|\bar{D}^0\rangle = \|u\bar{c}\rangle$,	$\|\bar{D}^{*0}\rangle = \|u\bar{c}\rangle$
$\|F^-\rangle = \|s\bar{c}\rangle$,	$\|F^{*-}\rangle = \|s\bar{c}\rangle$
$\|D^-\rangle = \|d\bar{c}\rangle$,	$\|D^{*-}\rangle = \|d\bar{c}\rangle$

(11.13)

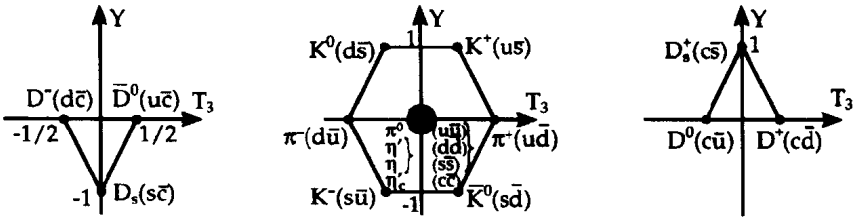


图 11.9 详细分解膺标 SU(4)[15]+[1]到 SU(3)多重态.

$\underbrace{[3]\oplus[1]\oplus[8]\oplus[\bar{3}]\oplus[1]}_{[15]}$说明原来图的定量内容.不同 c 水平被分别画出.

除去这些带有显粲数的介子外,也存在带有隐粲数的介子(看表 11.6),即两个组分的粲量子数加起来到 $C=0$:这些是 $c\bar{c}$组合,带有 $T_3=Y=0$ 和 $C=0$,即 T_3-Y-C 图(或 T_3-S-C 图)的原点是四重简并的.在膺标介子情况,带有 $T_3=Y=0$,即

$$|\pi^0\rangle = 1/\sqrt{2}\,(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle)\ ,\ |\eta\rangle \sim 1/\sqrt{2}\,(|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle)$$
$$|\eta\rangle \sim s\bar{s} \tag{11.14}$$

我们现在可以加上

$$|\eta_c\rangle = c\bar{c}\rangle$$

表 11.6 膺标介子和矢量介子的量子数

膺标介子	矢量介子	夸克内容	Q[e]	T	T_3	S	B	Y	C
π^-	ϱ^-	$d\bar{u}$	−1	1	−1	0	0	0	0
$\pi^0(\eta',\eta,\eta_k)$	$\varrho^0(\omega^0,\phi^0,\psi)$	$u\bar{u}$, $d\bar{d}$, $s\bar{s}$, $c\bar{c}$	0	1	0	0	0	0	0
π^+	ϱ^+	$u\bar{d}$	1	1	1	0	0	0	0
K^0	K^{*0}	$d\bar{s}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	1	0
K^+	K^{*+}	$u\bar{s}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	1	0
K^-	K^{*-}	$s\bar{u}$	−1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	−1	0	−1	0
$\overline{K^0}$	$\overline{K^{*0}}$	$s\bar{d}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	−1	0	−1	0
D^0	D^{*0}	$c\bar{u}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	1
D^+	D^{*+}	$c\bar{d}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	1
F^+	F^{*+}	$c\bar{s}$	1	0	0	1	0	1	1

续表

膺标介子	矢量介子	夸克内容	Q[e]	T	T_3	S	B	Y	C
D^-	D^{*+}	$d\bar{c}$	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	-1
$\overline{D^0}$	$\overline{D^{*0}}$	$u\bar{c}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	-1
F^-	F^{*-}	$s\bar{c}$	-1	0	0	-1	0	-1	-1

显然奇异数 S 给出这个粒子的奇异夸克数目，并且我们注意到：奇异数 $S=+1$，如果一个 $\bar{s}$（反奇异夸克）包含在这构形内；$S=-1$，如果一个 s（奇异夸克）包含在这构形内，也即是一个反直观的映像.

在矢量介子情况，在这多重态中心的状态带有量子数 $T_3=0, Y=0, C=0$ 为

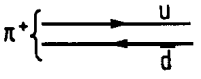
$$|\rho^0\rangle = 1/\sqrt{2}\,(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle)\,,\quad |\omega^0\rangle = 1/\sqrt{2}\,(|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle)\,,$$
$$|\phi\rangle = |s\bar{s}\rangle\,, \tag{11.15}$$

而现在也有

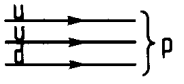
$$|\Psi\rangle = |c\bar{c}\rangle$$

我们认同 $|\Psi\rangle$ 为 $|c\bar{c}\rangle$ 因为这一状态严格地有 $\Psi(3.1\text{GeV})$ 在实验中表明出来的量子数. 在下一节中这一概念将被更详细地解释. 类似于 e^+e^- 束缚态，它被叫做正电子素，我们称 $c\bar{c}$ 为粲素. 后面我们会看到每一个最近被发现的矢量介子都可以在粲素模型中被理解.

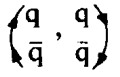
$c\bar{c}$ 的相对稳定性可以被所谓大久保-茨威格-饭冢(Iizuka)规则(OZI 规则)来解释. 这个规则是从经验的考虑中推出来的，说的是：包含在入射粒子中的夸克将分布在反应末态的粒子中. 否则相应的反应是被强烈禁止的. 我们想通过 ϕ 介子的例子($\phi\rangle = |s\bar{s}\rangle$)来使 OZI 规则更清楚. 为此每个夸克线用一个箭头(→)，每个反夸克线用一个相反方向的箭头(←)来表示是有用的，也即一个介子用图像表示



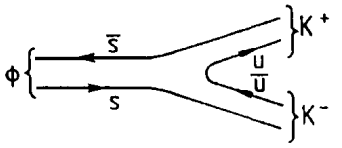
和一个重子用图像表示



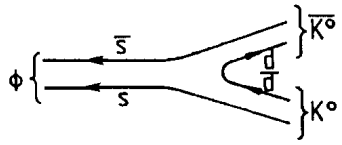
一个 $q\bar{q}$ 对的产生消灭分别表示为



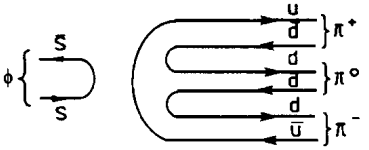
这样完成了构造我们的夸克流动图的元素目录. 现在很容易看到 $\phi\to K^+K^-$ 是茨威格允许的.



初态 $\phi(s\bar{s})$的夸克分量在末态中被分成两个粒子(K^+K^-). $\phi\to K^0\overline{K^0}$的衰变也是可能的,因为



相反,$\phi\to\pi^+\pi^-\pi^0$ 的衰变是茨威格禁止的:



这里我们不可能把 s 和$\bar{s}$分到任何末态粒子中去,因为 π 介子不包含 s 夸克. 实际上,实验表明以下的衰变道的分布

$$\phi\to K^+K^- \quad 47\%$$
$$\phi\to K^0\overline{K}^0 \quad 35\%$$
$$\phi\to \pi^+\pi^-\pi^0 \quad 16\%$$

这是最引人注目的,因为在最后一个反应中的能量释放(605MeV)远高于前两个衰变(分别为 35 和 25MeV). 结果大久保-茨威格-饭冢规则引入注目地被满足. 场论的考虑指出 OZI 规则的可靠性对重介子将更好(看第 11.5 节).

11.5 高级的考虑

11.5.1 隐粲数介子的衰变

近日来 OZI 规则在量子色动力学(QCD)[①]的基础上被比较好地理解了. 这时自旋 1 介子(ϕ, Ψ 等等)的茨威格禁戒衰变通过夸克-反夸克对的成对湮灭到三个虚胶子来发生,三个胶子每个产生一个夸克-反夸克对. 这被演示在图 11.10 中.

---

① 也可看 W. Greiner, A. Schäfer: *Quantum Chromodynamics* (Harri Deutsch, Thun, Frankfurt am Main 1989); F. E. Close: *An Introduction to Quaks and Partons* (Academic Press, New York 1979).

每个虚胶子对这费曼图贡献一个因子 α_s(QCD 耦合常数),结果这图正比于 α_s^3. 对能量在 1GeV 范围(近似 ϕ 的质量)$\alpha_s \sim 0.5$,即这个茨威格禁戒图通过一个因子 0.1 被压低. 对能量在 3.5GeV 范围,由于 QCD 规范理论的"渐近自由",$\alpha_s \sim 0.2$. 这样这个茨威格禁戒衰变的压低因子现在约为0.01. 随着能量升高 α_s 继续减小. 耦合常数的这个能量依赖关系叫做耦合常数的"跑动".

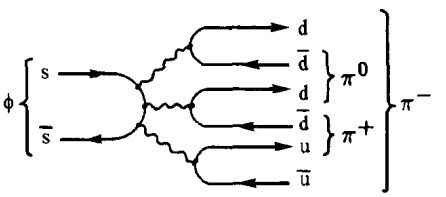


图 11.10　ϕ 介子的茨威格禁戒衰变

在图 11.11 中我们对 Ψ 介子的衰变表明茨威格图.

按照 OZI 规则 $\psi \to D^0\overline{D^0}$, D^+D^-, F^+F^-的衰变是允许的,但 $\Psi \to \pi^+\pi^-\pi^0$是禁止的. 然而我们稍后将在势模型框架内完成的计算表明,Ψ 的质量小于 D 介子或 F 介子质量的两倍,而所以这些衰变是能量上不可能的. 它们将通过高激发的 $c\bar{c}$状态出现和确实它们被实际观察到.

这样,只有茨威格禁止的 Ψ 粒子强子衰变,诸如 $\Psi \to \pi^+\pi^-\pi^0$保留下来. 其结果 Ψ 衰变被很强地压低了. 这解释了 Ψ 的小宽度. 进而我们看到其他矢量介子(在较高能量)的宽度常常是大的:在 $\Psi(4030)$的情况,$\Gamma \sim 50$MeV;对 $\Psi(4415)$ $\Gamma \sim 40$MeV. 这些大的宽度表达了到两个 D 介子或 F 介子的衰变的事实,给出在图 11.11 的衰变是可能的. 这样,在较高能的 Ψ 介子[例如 $\Psi(4030)$和 $\Psi(4415)$]的质量至少要像衰变中出现的粒子质量和那么大,即至少分别是单个 D 介子或 F 介子的质量的两倍. 由这一观察,我们得到对这些质量的一个估计

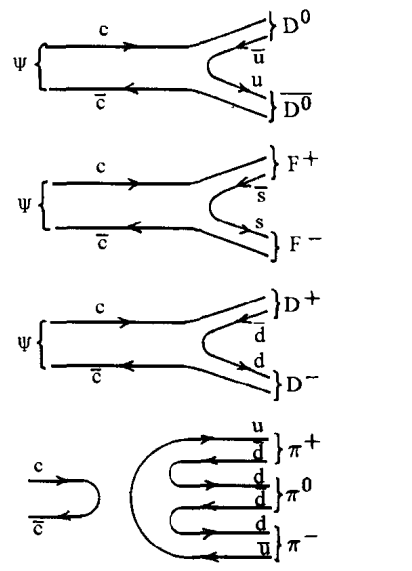


图 11.11　OZI 禁戒和允许的 Ψ 介子衰变. 最后一个图描写 OZI 禁戒过程.

$$\frac{1}{2}M(\Psi' = \Psi(3700)) < M(D \text{ 或 } F) \leqslant \frac{1}{2}M(\Psi(4030)) \tag{11.16}$$

即 $1800\text{MeV} < M(D,F) \leqslant 2000\text{MeV}$

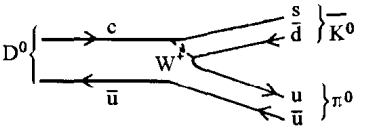


图 11.12　D^0介子到$\overline{K^0}$和 π^0的衰变的图表示. c 夸克有电荷 $Q_c = +2/3$,通过放出一个 W^+衰变到带电荷 $Q_s = -1/3$ 的一个 s 夸克. W^+衰变到一个 $\bar{d}$($Q_{\bar{d}} = 1/3$)和一个 u 夸克($Q_u = 2/3$). 比较这和表 11.6.

11.5.2　显粲数介子的衰变

D 介子衰变到 π^+K^-或 π^-K^+主要通过弱相互作用(看图 11.12). 这后者的衰变是通过交换 W 玻色子和 Z 玻色子

为中介的. 存在有两个 W 玻色子:一个带正电(W^+)和一个带负电(W^-)①. 在斯坦福和汉堡②这种反应产物(π^+K^-和π^-K^+分别)的产量被作为总能量的函数来测量,实验数据展示在图 11.13 中.

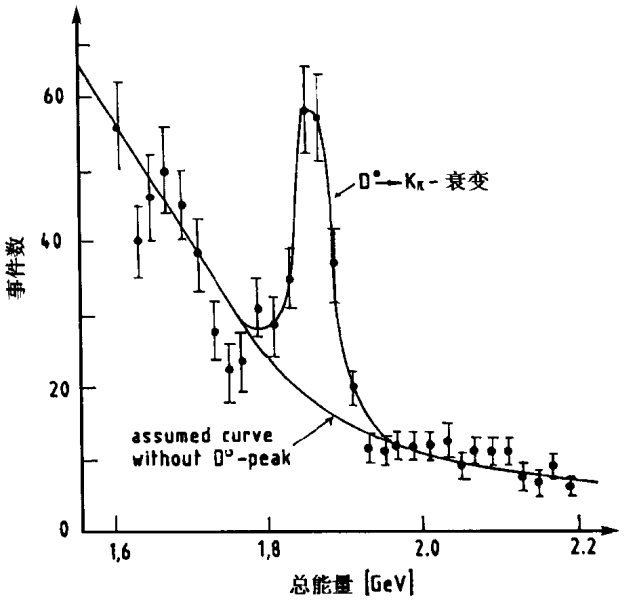


图 11.13 D 介子到 kπ 的衰变

人们发现一个明显的极大,在 $M=(1865\pm1)$MeV 处,它有所有对 D°和$\overline{D^0}$介子期望的性质. 通过这种方法一个带有显粲数粒子的存在第一次被确立了. 稍后带有质量 1869MeV 的 D^+介子和 D^-介子也被检测到了. 这是夸克模型的辉煌成就. 然而在我们更详细考虑介子之前(参看第 11.6 节),我们将先看看 SU(4)的重子组合.

11.5.3 重子多重态

重子由 qqq 组合构成,即出自 SU(4)表示

$$[4]\otimes[4]\otimes[4]=([6]\oplus[10])\otimes[4]$$
$$=[\bar{4}]\oplus[20]\oplus[20]\oplus[20']\tag{11.17}$$

(看表 11.5 和练习 11.5 和练习 11.6). SU(4)多重态的 SU(3)约化给出

$$[20]=[3]\oplus[\bar{3}]\oplus[6]\oplus[8]$$
$$[20']=[1]\oplus[3]\oplus[6]\oplus[10]\tag{11.18}$$

---

① 参见 *Gauge Theory of Electro-Weak Interactions* (Springer, Berlin, Heidelberg)将出版.

② 参看 G. Goldhaber et al(41 作者):Phys. Rev. Lett. **37**,255(1976);I. Peruzzi et al(40 作者):Phys, Rev. Lett. **37**,569(1976);I. E. Wiss et al (40 作者):Phys. Rev. Lett. **37**,1531(1976).

其中[20]和[20′]的不同在于其 SU(3)多重态的组成. 两者各包含 20 个态，但是是不同的 SU(3)多重态，它们和 SU(3)分类有关(看图 11.14，11.15 和 11.16)：很清楚 SU(4)的[20]表示适合于重子的分类，因为它包含一个 SU(3)八重态，而[20′]代表重子共振态，因为它包含一个 SU(3)十重态[10](所有状态都有 $C=0$). 重子六重态和重子反三重态两者有 $C=1$. 反三重态的这些状态同六重态的某些状态具有同样的夸克内涵，即六重态的三个点被占据两次(用绕着点的圈来指出). 进而还出现一个[3](三重态)带有 $C=2$. 为什么 $C=1$ 的重子态相应于两个不同的 SU(3)表示，而对重子共振态的这些状态只相应于一个单个的 SU(3)表示，其原因在于它们包含两个轻夸克 u，d 和 s. 我们知道两个 SU(3)三重态的乘积分解为一个六重态和一个反三重态. 六重态是对称的，而反三重态是反对称的. 因此两个表示都能被包含在具有混合对称性的重子多重态内，但是只有六重态能被包含在重子共振态的多重态内，它相应于完全对称的表示.

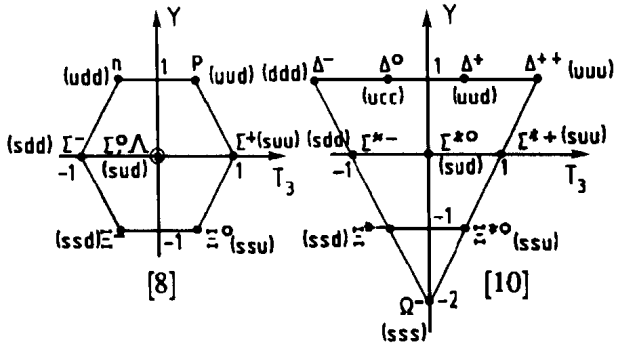


图 11.14　SU(3)重子多重态

因为重子不包括反夸克，只有 $C\geq 0$ 的粒子可能被包括. 因此 SU(3)八重态和 SU(3)十重态总是形成 SU(4)三维图的底部. 下一个高的 SU(3)多重态带有 $C=1$ 包含带有一个 c 夸克的状态等等. 在表示[20]的情况，没有 $C=3$ 的 SU(3)单态存在，该图形的顶部是平的(看图 11.15).

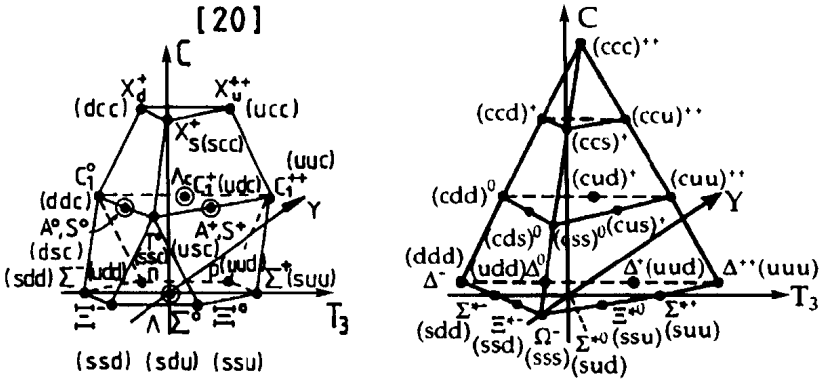


图 11.15　SU(4)重子多重态

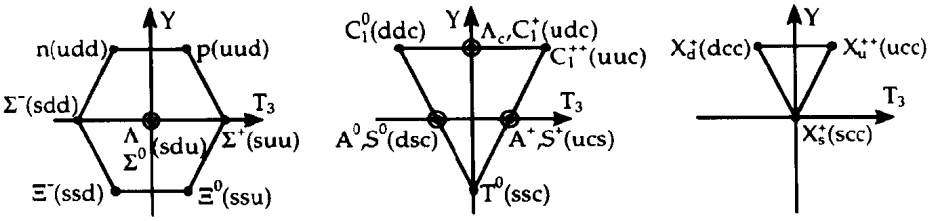


图 11.16 SU(4)多重态(图 11.15)到 SU(3)多重态[8]⊕[6]⊕[$\bar{3}$]⊕[3]的详细分解说明该三维图的子结构.[20′]多重态可以被类似地分解.也可看练习 11.7.

相反[20′]表示包含一个 SU(3)单态带有 $C\neq 0$,就是 ccc 态,带有量子数 $T_3=0, Y=B+S=1$(因为 $S=0$)和 $C=3$.它的电荷由推广的盖尔曼-西岛关系给出,正是

$$Q = T_3 + \frac{1}{2}(B + S + C) = T_3 + \frac{1}{2}(Y + C) \tag{11.19}$$

即 ccc 态的电荷是 $Q=2$.c 夸克的电荷 $Q_c=2/3$,也由(11.19)得出.这能通过实验测量 D 介子和 F 介子的电荷来证实.重子的量子数被列在表 11.7 中.

表 11.17 重子的量子数

粒子	夸克内涵	Q[e]	T	T_3	S	B	Y	C
n	udd	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	1	0
p	uud	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	1	0
Σ^-	dds	−1	1	−1	−1	1	0	0
$\Sigma^0(\Lambda)$	uds	0	1(0)	0	−1	1	0	0
Σ^+	uus	1	1	1	−1	1	0	0
Ξ^-	dss	−1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	−2	1	−1	0
Ξ^0	uss	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	−2	1	−1	0
T^0	ssc	0	0	0	−2	1	−1	1
A^0,S^0	dsc	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	−1	1	0	1
A^+,S^+	usc	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	−1	1	0	1
C_1^0	ddc	0	1	−1	0	1	1	1
$Ac(C_1^+)$	udc	1	0(1)	0	0	1	1	1
C_1^{++}	uuc	2	1	1	0	1	1	1
X_d^+	dcc	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	1	2
X_u^{++}	ucc	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	1	2
X_s^+	scc	1	0	0	−1	1	0	2

这样包含一个 c 夸克的重子具有显粲数($C\neq 0$). 因为从粲数重子到没有粲数的粒子的衰变是茨威格或卡比玻压低的，实验观测 $C>0$ 的重子是非常困难的. 直到现在只有一个粲数重子被肯定地确定；反重子 $\overline{\Lambda}_c$(夸克组合$\bar{u}\bar{d}\bar{c}$)通过弱相互作用衰变到

$$\overline{\Lambda}_c \to \overline{\Lambda}\pi^+\pi^-\pi^-$$

这个激发被表明在图 11.17 中.

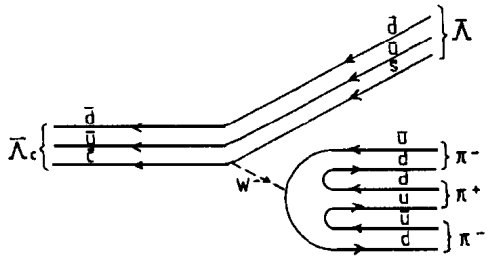


图 11.17　$\overline{\Lambda}_c$ 的衰变：一个带电荷 $Q_c=-2/3$ 的 $\bar{c}$ 夸克通过放出一个 W^- 玻色子变为一个 $\bar{s}$ 夸克 ($Q_i=1/3$). 这个 W^- 衰变到 π 化的一个 $\bar{u}d$ 对.

在费米实验室(USA)一个质量 $M=(2282\pm 3)$MeV 的共振态在($\overline{\Lambda}\pi^+\pi^-\pi^-$)体系的质量分布中被看到[①]，但是没有能在通过用 400GeV 加速器中的高能光子轰击一个靶时的($\overline{\Lambda}\pi^+\pi^+\pi^-$)体系的质量分布中看到(看图 11.18). 如果这极大是由 $\overline{\Lambda}_c$ 粒子衰变引起的，这能被很容易理解，因为 $\overline{\Lambda}_c$ 有量子数 $T=T_3=0$. 因此它是一个同位旋单态，并只出现一个电荷态.

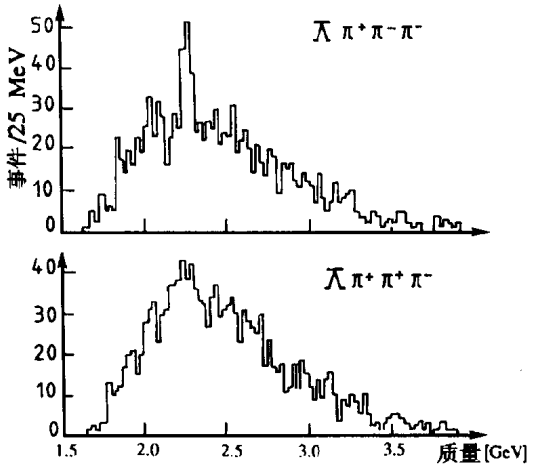


图 11.18　在巴塔维亚(费米实验室)的 $\overline{\Lambda}_c$ 衰变的实验激发.
这个激发 $\overline{\Lambda}_c$(即那样解释的那个共振)出现在跟高能光子的碰撞中.

① B. Knapp et al (19 个作者): Phys. Rev. Lett. **37**, 882(1976).

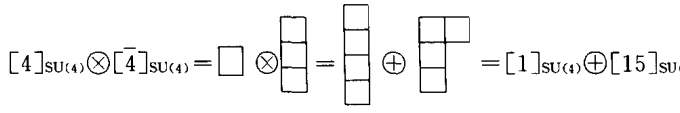
量子数 $T=1$ 和 $T_3=-1$（$\bar{\Lambda}$ 有 $T_3=0$；对 π^-，$T_3=-1$；对 π^+，$T_3=+1$）是由末态的夸克构形得出来的. 如果我们试图用一个 SU(3) 共振态的强衰变来解释这个极大，它势必是一个同位旋三重态，即应该有三个电荷态. 因而人们应该在（$\bar{\Lambda}\pi^+\pi^+\pi^-$）道也看到一个极大. 找不到这样一个极大指出是一个粲数重子的（弱）衰变.

最后注意：术语“味同位旋”，“味超荷”等等在跟强相互作用理论体系相关的意义上应该不同于弱相互作用理论[①]里的“弱同位旋”，“弱超荷”等等，它们应该与这里的这些讨论区分开.

练习 11.5 SU(4)介子多重态的 SU(3)内容

问题 在 SU(4)中计算直积 $[4]_{SU(4)}\otimes[\bar{4}]_{SU(4)}$（一个介子多重态）. 分解这结果到 SU(3)子群的表示并决定每个 SU(3)表示的粲数内容.

解 **a)直积的计算**. 首先我们通过有关的杨图来表示[4]和[$\bar{4}$]. 然后借助于我们的乘法规则把两个表示乘起来. 图形表示是

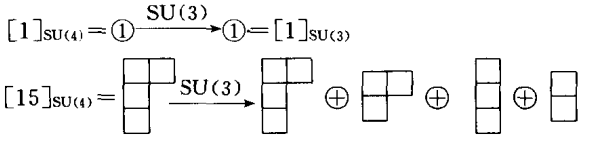


$$[4]_{SU(4)}\otimes[\bar{4}]_{SU(4)}=\square\otimes\square=\square\oplus\square=[1]_{SU(4)}\oplus[15]_{SU(4)} \tag{1}$$

b) 约化这些 SU(4)表示到 SU(3)表示. 如果我们约化一个 SU(4)表示到群 SU(3)，我们通过从这杨图一个接一个扣除格子来完成这一点. 这里我们采用以下规则[②]：如果 h_k 是一个 SU(4)表示第 k 行的格子数，而 h'_k 是 SU(3)表示相应的数，那么我们有

$$h_1\geqslant h'_1\geqslant h_2\geqslant h'_2\geqslant h_3 \tag{2}$$

由此得到



$$[1]_{SU(4)}=①\xrightarrow{SU(3)}①=[1]_{SU(3)}$$

$$[15]_{SU(4)}=\xrightarrow{SU(3)}\oplus\oplus\oplus$$

$$=[3]_{SU(3)}\oplus[8]_{SU(3)}\oplus[1]_{SU(3)}\oplus[\bar{3}]_{SU(3)} \tag{3}$$

c) 决定粲数内容. 在 SU(4)多重态内 SU(3)多重态平行于 Y-T_3 平面. 作为决定 SU(3)表示粲数内容的第一步，我们分解 $[4]_{SU(4)}$ 和 $[\bar{4}]_{SU(4)}$ 到它们的 SU(3)分量：

$$[4]_{SU(4)}=[3]^0_{SU(3)}\oplus[1]^1_{SU(3)},\quad[\bar{4}]_{SU(4)}=[\bar{3}]^0_{SU(3)}\oplus[\bar{1}]^{\bar{1}}_{SU(3)} \tag{4}$$

上标 0 和 1 表示该 SU(3)多重态的粲数内容. 反夸克由[$\bar{4}$]表示. 现在负的粲数值可以作为一个带粲数的反夸克的存在的结果出现（与重子多重态相反）.

由(4)，乘积 $[\bar{4}]\otimes[4]$（以下我们丢掉指标 SU(3)和 SU(4)）成为

---

① 参看 *Gauge Theory of Electro-Weak Interactions* (Springer, Berlin, Heidelberg)将出版.

② 参看 M. Harmermesh: *Group Theory and its Application to physical Problems* (Addison-Wesley, Reading, MA 1962); J. P. Elliott, P. G. Dawber: *Symmetry in physics* (Oxford University Press, Oxford 1979).

$$[4]\otimes[\bar{4}]=([3]^0\oplus[1]^1)\otimes([\bar{3}]^0\oplus[1]^{-1})$$
$$=([3]^0\otimes[\bar{3}]^0)\oplus([3]^0\otimes[1]^{-1})\oplus([1]^1\otimes[\bar{3}]^0)\oplus([1]^1\otimes[1]^{-1})$$
$$=([8]^0\oplus[1]^0)\oplus([3]^{-1})\oplus([\bar{3}]^1\oplus[1]^0) \tag{5}$$

比较(3)和(5)我们得到

$$[1]_{SU(4)}=[1]^0_{SU(3)}$$
$$[15]_{SU(4)}=[1]^0_{SU(3)}\oplus[8]^0_{SU(3)}\oplus[3]^{-1}_{SU(3)}\oplus[\bar{3}]^1_{SU(3)} \tag{6}$$

这意味着 SU(3)八重态和 SU(3)单态处在 Y-T_3 平面内，而 SU(3)三重态沿 C 轴向下移动一个单位，并且反三重态沿 C 轴向上移动一个单位. 这样我们得到图 11.8. (**练习 11.5 完**)

练习 11.6　分解直积[4]⊗[4]⊗[4]

问题　应用杨图方法验证直积[4]⊗[4]⊗[4]的分解(11.17).

解　首先我们计算直积[4]⊗[4]

$$[4]\otimes[4]=\square\otimes\square=\begin{array}{|c|}\hline\\\hline\\\hline\end{array}\oplus\square\square=[6]\oplus[10] \tag{1}$$

因为我们有

$$\dim\begin{array}{|c|}\hline\\\hline\end{array}=\boxed{\begin{matrix}4\\3\end{matrix}}:\boxed{\begin{matrix}2\\1\end{matrix}}=\frac{4\cdot3}{2\cdot1}=6$$
$$\dim\square\square=\boxed{4\,5}:\boxed{2\,1}=\frac{4\cdot5}{2\cdot1}=10 \tag{2}$$

如果我们用[4]再一次乘上这个乘积，我们一方面得到

$$[6]\otimes[4]=\begin{array}{|c|}\hline\\\hline\end{array}\otimes\square=\begin{array}{|c|}\hline\\\hline\\\hline\end{array}\oplus\begin{array}{|c|c|}\hline\\\hline\end{array}=[\bar{4}]\oplus[20] \tag{3}$$

其中

$$\dim\begin{array}{|c|c|}\hline\\\hline\end{array}=\boxed{4\,5}:\boxed{\begin{matrix}3\\1\end{matrix}}=\frac{4\cdot5\cdot3}{3\cdot1\cdot1}=20 \tag{4}$$

而另一方面

$$[10]\otimes[4]=\square\square\otimes\square=\begin{array}{|c|c|}\hline\\\hline\\\hline\end{array}\oplus\square\square\square=[20]\oplus[20']$$

其中

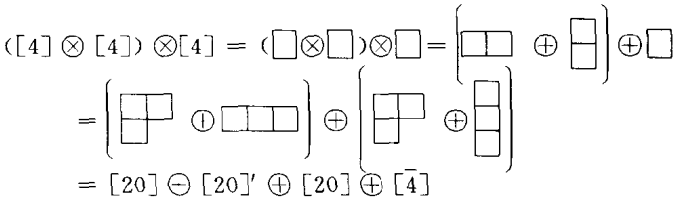
$$\dim\square\square\square=\boxed{4\,5\,6}:\boxed{3\,2\,1}=\frac{4\cdot5\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=20 \tag{6}$$

两个 20 维表示$\begin{array}{|c|c|}\hline\\\hline\\\hline\end{array}$和$\square\square\square$是不同的不可约表示，它们的不同在于它们的对称性质. $\square\square\square=[20']$包含三个 SU(4)夸克的所有可能的完全对称组合. $\begin{array}{|c|c|}\hline\\\hline\\\hline\end{array}=[20]$包含混合对称的组合. (**练习 11.6 完**)

练习 11.7 SU(4)重子多重态的 SU(3)内容

问题 计算三个 SU(4)基本表示[4]的直积(即重子多重态). 把结果分解到 SU(3)子群的表示并决定每个 SU(3)多重态的粲数内容.

解 a) **直积的计算**. 首先我们用杨图□表示基本表示[4]和取两个它们的乘积. 这个乘积然后被第三个表示乘. 这结果的图像表示为



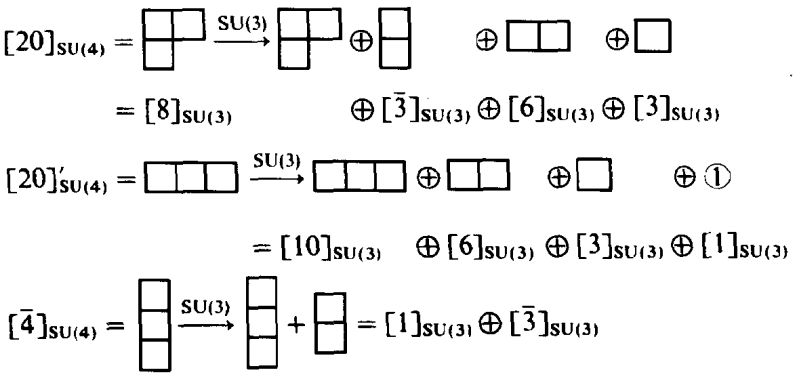
$$= [20] \ominus [20]' \oplus [20] \oplus [\bar{4}] \tag{1}$$

在最后一行我们写下了表示的维数. 注意有几个表示有相同的维数.

b) **约化 SU(4)表示到 SU(3)子表示**. 这个约化可以由从杨图上扣除格子来完成；先不扣除，然后扣除一个格子，再然后两个格子，三个格子并如此继续. 如果被约化的杨图在 k 行有 h_k 个格子，则只有 SU(3)的这些杨图是允许的，它们在 k 行有 h'_k 个格子，满足

$$h_1 \geqslant h'_1 \geqslant h_2 \cdots h_k \geqslant h'_k \geqslant \cdots \tag{2}$$

这样我们得到



$$= [8]_{SU(3)} \oplus [\bar{3}]_{SU(3)} \oplus [6]_{SU(3)} \oplus [3]_{SU(3)}$$

$$[20]'_{SU(4)} = \square\square\square \xrightarrow{SU(3)} \square\square\square \oplus \square\square \oplus \square \oplus ①$$

$$= [10]_{SU(3)} \oplus [6]_{SU(3)} \oplus [3]_{SU(3)} \oplus [1]_{SU(3)}$$

$$[\bar{4}]_{SU(4)} = \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \xrightarrow{SU(3)} \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \end{array} = [1]_{SU(3)} \oplus [\bar{3}]_{SU(3)} \tag{3}$$

c) **决定粲数内容**. 这些 SU(3)多重态在 SU(4)多重态内平行于 Y-T_3 平面放着，但是它们严格的位置，即粲数内容还是不清楚的. 为了决定它，我们先分解基本表示$[4]_{SU(4)}$到包括在它中间的 SU(3)子表示：

$$[4]_{SU(4)} = [3]^0_{SU(3)} \oplus [1]^1_{SU(3)} \tag{4}$$

在右上方的上标描写粲数内容，即包括在形成这个子多重态的粒子中的粲夸克数. 下指标提醒我们哪个群是我们实际涉及到的，但是在下面的计算中它们将被略去，因为由上下文它意味着哪个群是清楚的.

我们重复这直积，为了把它跟前面的结果(1)和(3)比较.

$$[4] \otimes [4] \otimes [4] = ([3]^0 \oplus [1]^1) \otimes ([3]^0 \oplus [1]^1) \otimes ([3]^0 \oplus [1]^1)$$

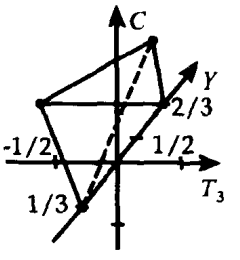
$$= ([3]^0 \oplus [3]^0 \otimes [3]^0) \oplus ([3]^0 \otimes [3]^0 \otimes [1]^1)$$

$$\begin{aligned}
&\oplus([3]^0\otimes[1]^1\otimes[3]^0)\oplus([1]^1\otimes[3]^0\otimes[3]^3)\\
&\oplus([1]^1\otimes[1]^1\otimes[3]^0)\oplus([1]^1\otimes[3]^0\otimes[1]^1)\\
&\oplus([3]^0\otimes[1]^1\otimes[1]^1)\oplus([1]^1\otimes[1]^1\otimes[1]^1)\\
=&([\bar{1}]^0\oplus[8]^0\oplus[\bar{8}]^0\oplus[10]^0)\oplus[\bar{3}]^1\oplus[6]^1)\\
&\oplus([\bar{3}]^1\oplus[6]^1)\oplus([\bar{3}]^1\oplus[6]^1)\oplus[3]^2\\
&\oplus[3]^2\oplus[\bar{3}]^2\oplus[1]^3
\end{aligned}\tag{5}$$

除去对单态，表示之间的关系是惟一的. 考虑表示$[\bar{4}]$被分解为$[1]^0$和$[\bar{3}]^1$，我们得到最后结果

$$\begin{aligned}
[20]&=[8]^0\oplus[6]^1\oplus[\bar{3}]^1\oplus[3]^2\\
[20]'&=[10]^0\oplus[6]^1\oplus[3]^2\oplus[1]^3\\
[\bar{4}]&=[1]^0\oplus[\bar{3}]^1
\end{aligned}$$

并且如同我们从(1)知道的，表示[20]出现两次. 注意$[1^\circ]\oplus[\bar{3}]^1$ 确实是$[\bar{4}]$，但是单态$[1]^\circ$在$C=0$，而反三重态$[\bar{3}]^1$ 在$C=1$，即沿着正 C 轴移动了一个单位. 这说明 SU(4)多重态不是相对 T_3-Y-C 坐标系的原点都对称的. 这跟 SU(3)相反，那里所有多重态都以一种对称的方式包含 T_3-Y 的原点. (**练习 11.7 完**)



例 11.8　较高 SU(4)多重态的分解和维数

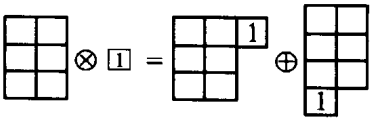
现在我们在 SU(4)中计算几个表示[x]和[4]的直积，并在决定几个这些表示在 SU(4)中的维数前把它们分解到 SU(4)表示. 我们应用两个多重态直积分解的规则，在下面例子中的这些规则我们在第 9 章中研究过.

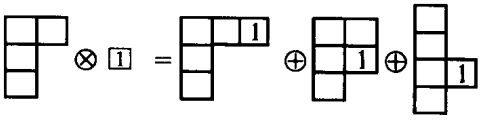
$$[4]\otimes[4]=\square\otimes\boxed{1}=\square\!\boxed{1}\oplus\begin{array}{|c|}\hline\ \\\hline 1\\\hline\end{array}=[10]\oplus[6]\tag{1}$$

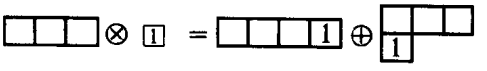
$$\begin{aligned}[\bar{4}]\otimes[4]&=\begin{array}{|c|}\hline\ \\\hline\ \\\hline\ \\\hline\end{array}\otimes\boxed{1}=\begin{array}{|c|c|}\hline\ &1\\\hline\ \\\hline\ \\\hline\end{array}\oplus\begin{array}{|c|}\hline\ \\\hline\ \\\hline\ \\\hline 1\\\hline\end{array}\\&=[15]\oplus[1]\end{aligned}\tag{2}$$

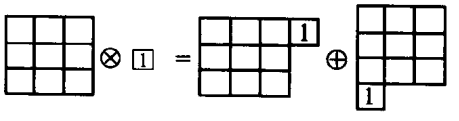
$$\begin{aligned}[6]\otimes[4]&=\begin{array}{|c|c|}\hline\ \\\hline\ \\\hline\end{array}\otimes\boxed{1}=\begin{array}{|c|c|}\hline\ &1\\\hline\ \\\hline\end{array}\oplus\begin{array}{|c|}\hline\ \\\hline\ \\\hline 1\\\hline\end{array}\\&=[20]\oplus[\bar{4}]\end{aligned}\tag{3}$$

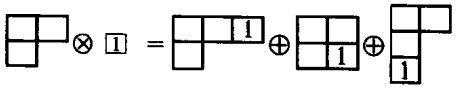
$$\begin{aligned}[10]\otimes[4]&=\square\!\square\otimes\boxed{1}=\square\!\square\!\boxed{1}\oplus\begin{array}{|c|c|}\hline\ &\ \\\hline 1\\\hline\end{array}\\&=[20]'\oplus[20]\end{aligned}\tag{4}$$

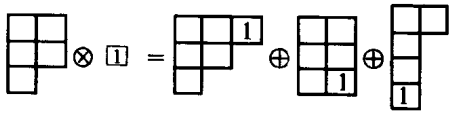
$[\overline{10}]\otimes[4]=$  $=[\overline{36}]\quad\oplus[\overline{4}]$ (5)

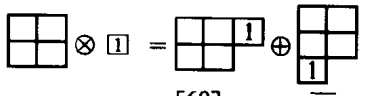
$[15]\otimes[4]=$  $=[36]\quad\oplus[\overline{20}]\oplus[4]$ (6)

$[20]'\otimes[4]=$  $=[35]\quad\oplus[45]$ (7)

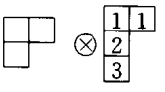
$[\overline{20}]'\otimes[4]=$  $=[\overline{70}]\quad\oplus[\overline{10}]$ (8)

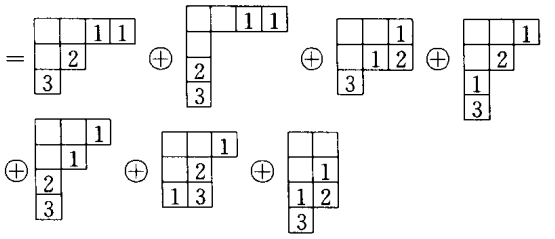
$[20]\otimes[4]=$  $[45]\quad\oplus[20'']\oplus[15]$ (9)

$[\overline{20}]\otimes[4]=$  $=[64]\quad\oplus[\overline{10}]\oplus[6]$ (10)

$[20]''\otimes[4]=$  $=[60]\quad\oplus[\overline{20}]$ (11)

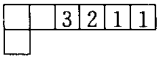
现在我们尝试一个更复杂的例子

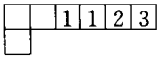
$[20]\otimes[15]=$ 



$$=[140]''\oplus[20']\oplus[\overline{60}]\oplus[20]\oplus[20]\oplus[\overline{36}]\oplus[\overline{4}] \tag{12}$$

按照第 9 章中给的规则，以下的盘是不允许的

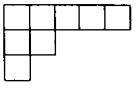
　规则 3(在一行中，数字降低)

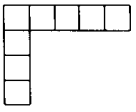
　规则 5(在路径上 3 出现在 2 前面)

　规则 5(在路径上 3 出现在 2 前面)

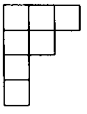
　规则 3 和 4(在一行和一列中数字降低)

最后我们对这个例子来定出几个表示的维数：

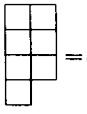
$$\dim\ \text{}=\frac{(4\cdot5\cdot6\cdot7)(3\cdot4)\cdot2}{(6\cdot4\cdot2\cdot1)(3\cdot1)\cdot1}=140 \tag{13}$$

$$\dim\ \text{}=\dim\ \text{}=\frac{(4\cdot5\cdot6)}{(3\cdot2\cdot1)}=20 \tag{14}$$

$$\dim\ \text{}=\frac{(4\cdot5\cdot6)(3\cdot4\cdot5)\cdot2}{(5\cdot3\cdot2)(4\cdot2\cdot1)\cdot1}=60 \tag{15}$$

$$\dim\ \text{}=\dim\ \text{}=\frac{(4\cdot5)\cdot3}{(3\cdot1)\cdot1}=20 \tag{16}$$

$$\dim\ \text{}=\frac{(4\cdot5\cdot6)(3\cdot4)(2\cdot3)}{(5\cdot4\cdot1)(3\cdot2)(2\cdot1)}=36 \tag{17}$$

$$\dim\ \text{}=\dim\ \text{}=\frac{(4)(3)(2)}{(3)(2)(1)}=4 \tag{18}$$

(例 11.8 完)

11.6 粲素的势模型

我们已经把 Ψ 粒子解释为 c 和 $\bar{c}$ 的束缚态,它有总的粲量子数 $C=0$,即隐粲数. 进而我们已经看到由于能量的原因,J/Ψ 和 Ψ' 只能以茨威格禁戒的方式衰变,诸如 $\Psi\to\pi^+\pi^0\pi^-$,但不能衰变到茨威格允许的道 $\Psi\to D^0\overline{D^0}$,$\Psi\to D^+D^-$,$\Psi\to F^+D^-$. 另一方面这些衰变对较高的粲数态 Ψ''和 Ψ'''是可能的,因为这些态足够重,可以分别衰变到 D 介子和 F 介子. 这解释了它们相对 Ψ 和 Ψ' 的远为大的宽度 Γ. 如果我们现在考虑所有 Ψ 共振态为 $c\bar{c}$束缚体系的状态,我们看到较高的激发态能够衰变到 D 和 F,但自旋 1 的基态和第一激发态不能. 因为 $c\bar{c}$体系上类似于被称为正电子素的一个电子和一个正电子的束缚态,我们称 $c\bar{c}$体系为粲素①.

我们现在试图用一个适当的势模型来描写 $c\bar{c}$状态,在其中我们假设体系是球对称的,并由一个非相对论的薛定谔方程来描写. 经过一个 $c\bar{c}$体系到质心系的坐标变换,我们得到

$$\left[\frac{1}{m_c}\left(-\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}r+\frac{l(l+1)}{r^2}\right)+(V(r)-E)\right]R(r)=0\ ,\quad(\hbar=1) \tag{11.20}$$

其中 m_c 是粲夸克的质量. 由于自由夸克没有被观察到这一事实,我们肯定这个势必须在大距离上(更准确地说,距离 r 远大于强子的直径)引起夸克禁闭. 最简单的选择是假设夸克的这个势正比于距离增加,即 $V(r)=kr$,并且常数 k 和 m_c 必须适合实验数据.

对 $l=0$ 我们可以严格地解这个薛定谔方程

$$-\frac{1}{m_c}\frac{d^2(rR)}{dr^2}+(kr-E)rR=0 \tag{11.21}$$

现在我们引入符号 $L^3=1/m_c\cdot k$ 和 $\lambda=L^2m_cE$,并转到一个新变量 x,定义为

$$x=\frac{r}{L}-\lambda\ ,\quad rR(r)=u(x)$$

得到

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2}-xu=0 \tag{11.22}$$

因为波函数在 $r=0$ 应该是正规的,即 $R(0)<\infty$,我们得到$\lim\limits_{r\to0}rR(r)=0$,它要求

$$u(-\lambda)=0 \tag{11.23}$$

进而我们必须要求 $u(\infty)=0$,因为束缚态必须是可归一化的. 微分方程(11.22)的解可以用 1/3 阶的变型贝塞尔函数来表达,而且满足边条件 $u(\infty)=0$ 的那个解叫做艾里(Airy)函数(看数学补充,例11.9). 因此

---

① 参见 A. de Rujula; S. L. Glashow; Phys. Rev. Lett, **34**,46(1975); T. Appelquist, A. de Rujula, H. D. Polizer, S. L. Glashow; Phys. Rev. Lett. **34**, 365(1975); K. Kinoshita, J. Kogut, K. D. Lane, T.-M. Yan; Phys. Rev. Lett. **34**, 369 (1975).

$$u(x) = C \times \mathrm{Ai}(x) \tag{11.24}$$

其中

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{x}{3}}K_{1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right), \quad x > 0$$

渐近行为由公式

$$K_\nu(z) \to \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\mathrm{e}^{-z}, \quad z \to \infty$$

推出，所以

$$u(x) \to \frac{C}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}x^{-1/4}\exp\left(-\frac{2}{3}^{x^{3/2}}\right), \quad x \to +\infty \tag{11.25}$$

在 $x<0$ 的范围内，艾里函数被表示为

$$\mathrm{Ai}(-x) = \frac{1}{3}\sqrt{x}\left\{J_{1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right) + J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)\right\}$$

所以

$$u(x) = \frac{C}{3}\sqrt{|x|}\left\{J_{1/3}\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2}\right) + J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2}\right)\right\}, \quad x < 0 \tag{11.26}$$

因为第二个边条件，我们要求 $\mathrm{Ai}(-\lambda)=0$. 注意 λ 只是能量本征值(单位为 $L^2 m_c$)，它意味着能量本征值由艾里函数的根决定

$$E_n = \left(\frac{k^2}{m_c}\right)^{1/3}\lambda_n \tag{11.27}$$

这些能量必须被加到 $c\bar{c}$ 对的静止质量上，以至于粲素的第 n 个激发态的质量得出为

$$M^{(n)} = 2m_c + \left(\frac{k^2}{m_c}\right)^{1/3}\lambda_n \tag{11.28}$$

其中 λ_n 为艾里函数的第 n 个根：$\mathrm{Ai}(-\lambda)=0$. 因为我们有两个输入参数 m_c 和 k，为了符合我们需要两个质量. 我们选 $M^{(1)}=3.097\mathrm{GeV}$ 和 $M^{(2)}=3.686\mathrm{GeV}$，并由此得到 $k=(0.458\mathrm{GeV})^2$ 和 c 夸克质量 $m_c=1.155\mathrm{GeV}$. 我们看到 c 夸克的有效质量远大于 u,d 或 s 夸克的有效质量，它们差不多是 330MeV，这解释了为什么包含 c 夸克的粒子有很大的质量. 有了这些参数的知识，我们现在能计算较高激发态的质量，这些被列在表 11.8 中.

表 11.8　在线性势模型中粲素的径向激发态(ns 态)的质量

n	λ_n	M^n[GeV]	ΔM_{rel}	$M_{\mathrm{eff}}^{(n)}$	M_{exp}
1	2.338	3.097(fit)	—	3.097	3.097
2	4.088	3.686(fit)	—	3.686	3.686
3	5.521	4.17	−0.15	4.02	4.040
4	6.787	4.59	−0.23	4.36	4.415

在这个表里我们考虑了 $n>2$ 的态不再能被非相对论的方程描写，相对论质量修正 ΔM_{rel} 是

我们模型的这个相对论推广的结果.跟实验比较表明,我们的简单模型很好地描写了粲数的自旋1的激发态.

下一步我们必须对任意轨道角动量 L 解薛定谔方程.进而我们必须考虑夸克自旋,对于它有两种可能性

a) 自旋反平行　　"顺粲素"($s=0$)

b) 自旋平行　　"正粲素"($s=1$)

因为反平行自旋的状态比起平行自旋的状态有较低的能量,看来自然地把膺标介子 η_c 和 η_c'(质量 2.98GeV 和 3.59GeV)等同于顺粲素,而把矢量介子 Ψ,Ψ' 等等同于正粲素.进一步考虑自旋轨道耦合和超精细结构(HFS)导致的能级图表明在图 11.19 中.

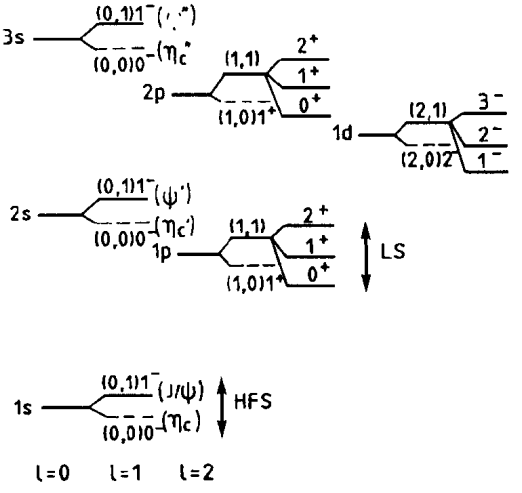


图 11.19　粲素的能级图,顺粲素态由(……↑↓)表示,而正粲素态由(……↑↑)表示.括号中的数代表轨道角动量和自旋(l,s)

表 11.9　实验观察到的粲素态的质量

粒子名称	态	质量[MeV]	粒子名称	态	质量[MeV]
J/Ψ	1^3S_1	3097	η_c	1^1S_0	2980
Ψ'	2^3S_1	3686	$\eta_c'(?)$	$2^1S_0(?)$	3590
			χ_0	2^1P_0	3415
			χ_1	1^3P_1	3510
			χ_2	1^5P_2	3556
Ψ''	3^3S_1	4040		1^3D_1	3770
	?	4160			
Ψ'''	4^3S_1	4415			

顺粲素态由虚线表示而正粲素态由实线表示.状态由它们的总角动量 J 和宇称 Π 来表征,写成 J^π(例如 3^- 意味 $J=3$ 和负宇称).括号里的数表示轨道角动量和自旋(l,s).类似于在原子物理中的

应用，谱符号 $n^M lJ$ 被采用，其中 n 是主量子数，M 是多重性（例如“3”为三重态），l 是轨道角动量，J 是总角动量. 在这种符号下 η_c' 是 2^1S_0 态等等. 现在(1985)接受的指派被列在表 11.9 中(问号表明这个指派不是惟一的). 带有显粲数的介子如在表 11.10 中表明的那样可以类似地分类.

表 11.10　带显粲数介子的分类

介子名称	态	质量[MeV]
D^0	$^1S_0$	1864.7±0.6
D^+	$^1S_0$	1869.4±0.6
D^{0*}	$^3S_1$	2007±2
D^{+*}	$^3S_1$	2010.1±0.7
F^+	$^1S_0$	1971±6
F^{+*}(?)	$^3S_1$	2140±60

最后图 11.20 表明粲数体系的实验能级图. 这里衰变模式和它们相对的分支比被表示出来. 在能量 $2M_D=3.73$GeV(虚线)以上的状态衰变到 $D\bar{D}$，$D^*\bar{D}^*$，$F\bar{F}$.

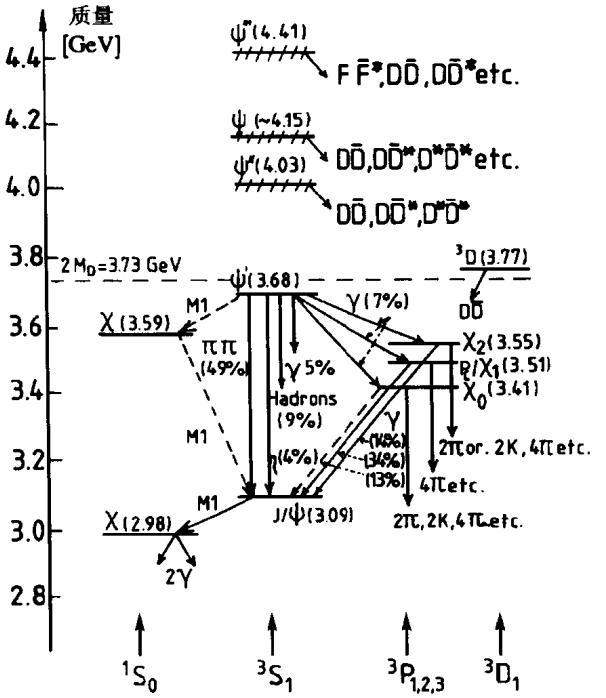


图 11.20　粲素的实验能级图

例 11.9 数学补充:艾里函数

艾里(Airy)函数是微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2u(x)}{\mathrm{d}x^2} - xu(x) = 0 , \tag{1}$$

的解,它有两个线性独立解. 当 $x\to\infty$时,减少的那个解称为 Ai(x),而在∞发散的那个解称为Bi(x). 这些函数正如我们在下面看到的可以用正规的和变型的贝塞尔函数表示. 首先我们考虑 $x>0$ 的区域. 引入坐标变换

$$z = \beta x^{\gamma} \tag{2}$$

为了解出(1),我们尝试猜想

$$u(x) = z^{\alpha}f(z) \tag{3}$$

其中常数 α,β 和 γ 仍需要被确定. 我们得到

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} = \gamma x^{-2}z^{\alpha}\{\alpha(\gamma\alpha-1)f(z) + (2\alpha\gamma+\gamma-1)zf'(z) + \gamma z^2f''(z)\} \tag{4}$$

其中撇表示对 z 的微商. 把(4)代入(1)我们得到方程

$$0 = f''(z) + \frac{2\alpha\gamma+\gamma-1}{\gamma z}f'(z) - \frac{x^3}{\gamma^2z^2}f(z) + (\alpha\gamma-1)\frac{\alpha}{\gamma z^2}f(z) \tag{5}$$

我们可以通过 γ 的适当选择来消去右边第三项中的 x 依赖性,使得 $f(z)$的系数变成常数. 我们让

$$\frac{x^3}{\gamma^2z^2} = 1 \tag{6}$$

并按照(2)得到条件

$$\gamma = \frac{3}{2} , \beta = \frac{2}{3} \tag{7}$$

这样(5)变成形式

$$0 = f''(z) + \frac{6\alpha+1}{3z}f'(z) - \left[1 - \left(\alpha - \frac{2}{3}\right)\frac{\alpha}{z^2}\right]f(z) \tag{8}$$

并且由选择 $\alpha=\frac{1}{3}$, 我们得到贝塞尔微分方程的标准形式

$$0 = f''(z) + \frac{1}{z}f'(z) - \left[1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{1}{z^2}\right]f(z) \tag{9}$$

它的解是阶为 1/3 的变型贝塞尔函数

$$f(z) = \{I_{1/3}, I_{-1/3}, K_{1/3}\}$$

用

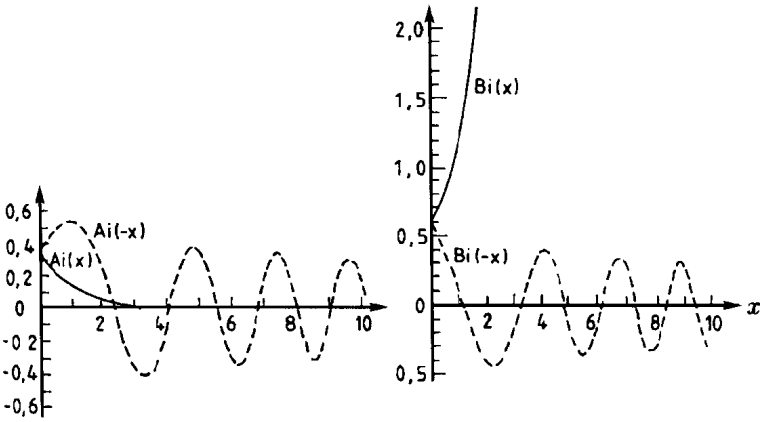
$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{x}{3}}K_{1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)$$

$$\mathrm{Bi}(x) = \sqrt{\frac{x}{3}}\left\{I_{1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right) + I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)\right\} , \quad x>0 \tag{10}$$

来表示艾里函数是通常的做法,这里我们重新引入了原来的自来变 x.

下一步为了推出 x 为负值时的解,我们作变换

$$y = -x \quad , \quad u(x) = v(y) \tag{11}$$



艾里函数

由此，(1)采取

$$\frac{d^2v(y)}{dy^2} + yv(y) = 0 \tag{12}$$

的形式. 现在像前面一样来完成同样的计算，除去用变量 y 代替 x 外，利用

$$z = \beta y^{\gamma} \quad , \quad v(y) = z^{\alpha} f(z) \tag{13}$$

那时我们得到已经熟悉的形式

$$0 = f''(z) - \frac{2\alpha\gamma + \gamma - 1}{\gamma z} f'(z) + \frac{y^3}{\gamma^2 z^2} f(z) + (\alpha\gamma - 1)\frac{\alpha}{\gamma z^2} f(z)$$

类似于(7)我们选

$$\gamma = \frac{3}{2} \quad , \quad \beta = -\frac{2}{3} \tag{14}$$

得到

$$0 = f''(z) + \frac{6\alpha + 1}{3z} f'(z) + \left[1 + \left(\alpha - \frac{2}{3}\right)\frac{\alpha}{z^2}\right] f(z)$$

只要我们让 $\alpha = \frac{1}{3}$，它马上约化到一个贝塞尔型的微分方程.

$$0 = f''(z) + \frac{1}{z} f'(z) + \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{1}{z^2}\right] f(z) \tag{15}$$

它的解是阶为 1/3 或 −1/3 的贝塞尔函数，即函数 $J_{\pm 1/3}(z)$ 回到原来的变量，我们把艾里函数写成以下形式

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{3}\sqrt{|x|}\left\{J_{1/3}\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2}\right) + J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2}\right)\right\}$$

$$\mathrm{Bi}(x) = \sqrt{\frac{1}{3}}|x|\left\{J_{1/3}\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2}\right) - J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2}\right)\right\} \tag{16}$$

其中 $x<0$,定义(10)和(16)在整个 x 区间(参看(11.22))惟一地决定了艾里函数.利用有关贝塞尔函数的众所周知的关系,我们试图研究它在 $x\to 0$ 时的行为.以下的关系取自标准的数学文献①.

对小的 $|z|$ 值我们发现

$$J_\nu(z)\simeq\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{1}{2}z\right)^\nu\left(1-\frac{z^2}{4(\nu+1)}\right) \tag{17}$$

$$I_\nu(z)\simeq\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{1}{2}z\right)^\nu\left(1+\frac{z^2}{4(\nu+1)}\right) \tag{18}$$

$K_\nu(z)$ 的行为可以借助于普遍公式

$$K_\nu(z)=\frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}-I_\nu}{\sin(\nu\pi)} \tag{19}$$

来计算,特别是我们得到

$$K_{1/3}(z)\simeq\frac{\pi}{\sqrt{3}}\left\{1\Big/\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\right\}\left(\frac{1}{2}z\right)^{-1/3}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}z\right)^{2/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\right\} \tag{20}$$

这样对的小 x 正值我们得到

$$\mathrm{Ai}(x)\simeq\left(\frac{1}{3}\right)^{2/3}\left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\right)\left\{-\left(\frac{1}{3}\right)^{2/3}x\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\right\}$$

$$\mathrm{Bi}(x)\simeq\left(\frac{1}{3}\right)^{1/6}\left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\right)\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{2/3}x\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\right\}$$

对接近 0 的负值

$$\mathrm{Ai}(x)\simeq\left(\frac{1}{3}\right)^{2/3}\left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\right)\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{2/3}|x|\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\right\}$$

$$\mathrm{Bi}(x)\simeq\left(\frac{1}{3}\right)^{1/6}\left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\right)\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{2/3}|x|\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\right\}$$

这样我们立刻看到在 $x=0$ 处艾里函数是连续的,在这一点也有连续的微商.

$$\mathrm{Ai}(0)=\left(\frac{1}{3}\right)^{1/2},\ \mathrm{Ai}'(0)=-\left(\frac{1}{3}\right)^{1/2},$$

$$\mathrm{Bi}(0)=\left(\frac{1}{3}\right)^{2/3}\Big/\Gamma\left(\frac{2}{3}\right),\ \mathrm{Bi}'(0)=-\left(\frac{1}{3}\right)^{4/3}\Big/\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \tag{21}$$

为了物理问题的应用,知道渐近行为是必需的.这很容易从正规的和变型的贝塞尔函数的众所周知的行为推出.对 $|z|\to\infty$ 我们看到

$$J_\nu(z)\to\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{\pi}{2}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\right) \tag{22}$$

$$I_\nu(z)\to\sqrt{\frac{1}{2\pi z}}\mathrm{e}^z \tag{23}$$

$$K_\nu(z)\to\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\mathrm{e}^{-z} \tag{24}$$

① 例如 M. Abarmowitz, J. A. Stegun: *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, New York 1965).

这样对 $x\to\infty$，我们得到

$$\mathrm{Ai}(x)\to\sqrt{\frac{1}{4\pi}}x^{-1/4}[\exp(-x^{3/2})]^{2/3} \tag{25}$$

$$\mathrm{Bi}(x)\to\sqrt{\frac{1}{\pi}}x^{-1/4}[\exp(x^{3/2})]^{2/3} \tag{26}$$

对负的 x 值两个函数都是振荡的，并表现出渐近行为

$$\mathrm{Ai}(x)\to\sqrt{\frac{1}{\pi}}|x|^{-1/4}\cos\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2}-\frac{\pi}{4}\right) \tag{27}$$

$$\mathrm{Bi}(x)\to-\sqrt{\frac{1}{\pi}}|x|^{-1/4}\sin\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2}-\frac{\pi}{4}\right) \tag{28}$$

（例 11.9 完）

11.7　SU(4)(SU(8))质量公式

如果我们想推广 SU(6)的质量公式到包含粲夸克的强子，我们得到带自旋的 SU(4)多重态，即 SU(8)多重态. SU(6)的质量公式为(参看第 8 章)

$$M=M_0+aY+b\left[T(T+1)-\frac{1}{2}Y^2\right]+cJ(J+1) \tag{11.29}$$

其中 J 是粒子的自旋. 我们再次假设强相互作用哈密顿量由两部分组成，即 $\hat{H}_{强}=\hat{H}_{ss}+\hat{H}_{ms}$. 基本强作用的哈密顿量 $\hat{H}_{ss}$是在 SU(4)群下不变的，它意味着一个 SU(4)多重态的所有粒子有同样的质量 $M_0=\langle\hat{H}_{ss}\rangle$. 进一步我们假设对称破坏部分 $\hat{H}_{ms}$只在不同的同位旋多重态间，而不在这样一个多重态内引起质量分裂，即$[\hat{H}_{ms},\hat{T}_3]=0$. 这样我们简单地采取 SU(6)的质量公式，并考虑如何来描写带有不同粲数内容的多重态间的质量分裂.

除去 $\hat{\lambda}_8=2\hat{F}_8=\sqrt{3}\hat{Y}$ 外只有 $\hat{\lambda}_{15}$跟 $\hat{T}_3=\frac{1}{2}\hat{\lambda}_3$ 对易. 我们现在从 $\hat{\lambda}_{15}$来构造算符

$$\hat{Z}=\sqrt{\frac{3}{8}}\hat{\lambda}_{15}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix} \tag{11.30}$$

它明显地满足$[\hat{T}_3,\hat{Z}]_-=0$. 算符以如下形式

$$\hat{Z}|u\rangle=\frac{1}{4}|\mathrm{u}\rangle\ ,\ \hat{Z}|\mathrm{d}\rangle=\frac{1}{4}|\mathrm{d}\rangle\ ,$$

$$\hat{Z}|s\rangle=\frac{1}{4}|\mathrm{s}\rangle\ ,\ \hat{Z}|\mathrm{c}\rangle=-\frac{3}{4}|\mathrm{c}\rangle \tag{11.31}$$

作用在夸克态上. 现在很容易从 $\hat{Z}$ 构造粲数算符. 我们试一下猜想

$$\hat{C} = \frac{3}{4}\hat{B} - \hat{Z} \tag{11.32}$$

其中 $\hat{B}$ 表示重子数算符.关系

$$\hat{B}|q_i\rangle = \frac{1}{3}|q_i\rangle \quad \text{对 } i = 1,2,3,4$$

对所有夸克成立,因为由定义,每个夸克有重子数 $B=\frac{1}{3}$.这保证了由 3 个夸克组成的重子有重子数 $B=1$.因此

$$\hat{C} = \frac{1}{4}\mathbb{1} - \hat{Z} \tag{11.33}$$

它能被明显地验证,即

$$\hat{C}|u\rangle = 0|u\rangle\ ,\ \hat{C}|d\rangle = 0|d\rangle\ ,\ \hat{C}|s\rangle = 0|s\rangle\ ,\ \hat{C}|c\rangle = 1|c\rangle$$

我们看 $\hat{C}$ 确实是粲数算符,对夸克四重态带有本征值 $C=0,0,0,1$.因为 $\hat{Z}$ 和 $\mathbb{1}$ 跟 $\hat{T}_3$ 对易,$\hat{C}$ 和 $\hat{T}_3$ 的对易关系同样为 $0[\hat{C},\hat{T}_3]=0$,即 $\hat{C}$ 是要求的算符.因而重子的质量公式必须有以下形式

$$M = M_0 + aY + b\left[T(T+1) - \frac{1}{4}Y^2\right] + cJ(J+1) + dC \tag{11.34}$$

这里参数 M_0,a,b,c 和 d 必须适合于实验质量.由于至今为止没有带 $J=\frac{3}{2}$ 的粲重子被发现,考虑味 SU(4)的质量公式

$$M = M_0 + aY + \beta\left[T(T+1) - \frac{1}{4}Y^2\right] + \gamma C$$

已经足够了,它能用来代替完全的 SU(8)公式.为了决定这些参数我们用来自表 11.11 中的数据.

通过值 $M_0=1116\text{MeV}$,$\alpha=-196\text{MeV}$,$\beta=38\text{MeV}$ 和 $\gamma=1349.5\text{MeV}$(与第 8.12 节比较),其余的质量可以被算出来,理论值与实验数据的比较列在表 11.12 中.

表 11.11 某些 $J=1/2$ 重子的量子数

粒子	质量[MeV]	T	Y	C
核子	939	$\frac{1}{2}$	1	0
Σ	1192	1	0	0
Λ	1116	0	0	0
Λ_c	2282	0	1	1

表 11.12 某些 $J=1/2$ 重子的量子数

粒子 c	计算质量[MeV]	观察质量[MeV]	T	Y	C
Ξ	1331	1317	$\frac{1}{2}$	−1	0
Ξ_c	2494	2465?	$\frac{1}{2}$	0	1
Σ_c	2336	2450?	1	1	1
X_u, X_d,	3638	?	$\frac{1}{2}$	1	2
X_s	3815	?	0	0	2

由于粲重子还没有被清楚地认同,很难决定这个推广的质量公式的成功程度.

下一步我们对介子写下推广的质量公式.在 SU(3)群有内容中我们已经注意到:介子质量

公式对质量平方而不是对质量本身成立. 因为带 $C=1$ 和带 $C=-1$ 的介子比起 $C=0$ 的介子有大的质量，质量公式必须不包括 C 作为线性项，因为在这情况 $C=1$ 的状态和 $C=-1$ 的状态之一将有比 $C=0$ 的状态有较小的质量. 因而对质量公式最简单的选择是一个正比于 C^2 的项，使得

$$\mu^2 = \mu_0^2 + \beta C^2 + \gamma\left[T(T+1) - \frac{1}{4}Y^2\right] + \delta J(J+1) \tag{11.35}$$

这一公式不能解释在 ω°，Φ°和 Ψ 之间的质量差，因为这些态在 T_3-Y-C 图中是简并的. 这些差只能由考虑状态的不同夸克组成($\omega^\circ \sim u\bar{u}, d\bar{d}$，$\Phi^\circ \sim s\bar{s}$，$\Psi \sim c\bar{c}$)来解释，即不同的夸克应该有不同的有效质量. 考虑磁矩我们得到 $m_{u,d} \approx 330\text{MeV}$，$m_s \approx 470\text{MeV}$，而粲素模型给出 $m_c \approx 1.15\text{GeV}$. 这些质量差事实上可以用这些数据来解释.

为了应用质量公式到矢量介子($J=1$)，我们用 SU(4)公式

$$\mu^2 = \mu_0^2 + \beta C^2 + \gamma\left[T(T+1) - \frac{1}{4}Y^2\right] \tag{11.36}$$

由表 11.13 中的数据，我们对这些参数推出以下的值：

$$\mu_0^2 = (783)^2(\text{MeV})^2$$
$$\gamma = -\ 7780\text{MeV}^2$$
$$\beta = 3432846\text{MeV}^2$$

别的矢量介子的质量被列在表 11.14 中，与观察值比较.

表 11.13　三个矢量介子的质量和量子数

粒子	质量[MeV]	T	Y	C
ϱ	773	1	0	0
ω	783	0	0	0
D^{0*}	2010	$\frac{1}{2}$	0	1

表 11.14　K^*，F^*矢量介子的质量的予言和观察值的比较

粒子	计算质量[MeV]	观察质量[MeV]	T	Y	C
K^*	790	892	$\frac{1}{2}$	1	0
F^*	2012	2140	0	−1	1

如同在自旋-味群 SU(6)的情况，我们注意到 SU(4)介子质量公式比起重子质量公式远为差. 因为 β 比 μ_0^2 和 γ 远为大，对质量的最大贡献来自粲数项 βC^2；因此毫不奇怪：F^*和 D^*的质量接近相等(差为 2MeV).

总结一下，我们可以说 SU(4)对称性比起 SU(3)对称性来远为强地破坏. 这特别在质量公式中可以看到. 因此 SU(4)对称的可用性远比 SU(3)局限，而人们最想解释粲数态能级分裂的精细结构是用一个势模型. 这也由第一原则给出跃迁概率和衰变宽度而不考虑 SU(4)对称性. 这样一个处理可能是成功的，因为这种夸克间相互作用可能的基本理论，量子色动力学(QCD)在能量远高于 1000MeV 时导致弱的耦合和允许微扰计算. 在“轻”重子和介子情况(即不带粲的那些)，微扰论不能应用而对称性考虑是相当成功的. 粲素的谱能够类似玻尔的原子模型被合理地很好解释，因为它能作为一个两个重粒子的非相对论束缚态来理解.

11.8 Υ 共振

1977 年一组物理学家[①]在费米国家实验室(伊利诺斯,USA)观察反应 $p+N\to\mu^+\mu^-+X$ 时观察到了另一家族非常重的介子共振态. 这种所谓 Υ 共振态 $\Upsilon,\Upsilon',\Upsilon'',\Upsilon'''$ 在某种意义上是粲素族的大姊姊. 不多久在汉堡 DESY 上的实验[②]用远为高的分辨率肯定了费米实验室的结果,从那时起,Υ,Υ' 和 Υ'' 的质量在 DESY 被非常准确地测得:

$$M(\Upsilon)=9.460\text{GeV}/c^2$$
$$M(\Upsilon'')=10.023\text{GeV}/c^2$$
$$M(\Upsilon''')=10.355\text{GeV}/c^2$$

e^+e^- 碰撞的截面作为质心系能量的函数被画在图 11.21 中. 由这些共振态的小的轻子衰变宽度[③],人们肯定它们必须被解释为一个新的重夸克和它的反夸克的束缚态. 这新的夸克称为 b 夸克("底"或"美丽").

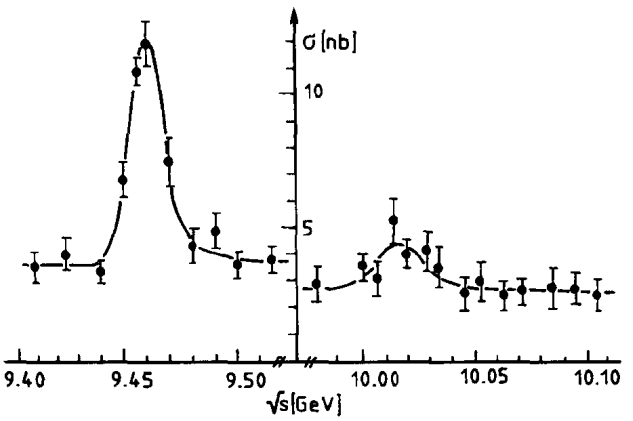


图 11.21 在 Υ(左方)和 Υ'(右方)范围内的观察截面 $\sigma(e^+e^-\to\text{强子})$. 总宽度为 $\Gamma_{tot}\Upsilon\approx7.8\text{MeV}$ 和 $\Gamma_{tot}(\Upsilon')\approx8.7\text{MeV}$,而衰变到电子的宽度为 $\Gamma_e(\Upsilon)\approx1\text{MeV}$ 和 $\Gamma_e(\Upsilon')\approx0.32\text{MeV}$.

为了在对称群 SU(5)的框架内解释 Υ 的将近 10GeV 的质量,将要求比 SU(4)理论中还要大的对称性破坏,因此这种对称性考虑被放弃了. 代之,这个体系被放在一个势模型中描写. 因为高的能量尺度,这样一个模型代表了一个极好的近似. 用这种方法发现 b 夸克的质量为

$$M_b=4500\text{MeV}/c^2$$

① 参见 S. W. Herb et al. (16 个作者): Phys. Rev. Lett. **39**, 352(1977).

② 参见 C. W. Darden et al. (15 个作者): Phys. Lett. **76B**, 246 和 **78B**, 364(1978).

③ 参见 J. L. Rosner, C. Quigg, H. B. Thacker: Phys. Lett. **74B**, 350(1978).

因为相对论修正对重的 b 夸克比对轻的 c 夸克要小，人们希望由衰变模式的测量和对 $b\bar{b}$ 体系进一步激发态的测量得到关于夸克-反夸克势的新的信息. 用这种方法，期望对夸克-反夸克之间的基本相互作用有一个更好的理解.

这些新的共振态截面比 R

$$R = \frac{\sigma(e^+ e^- \to 强子)}{\sigma(e^+ e^- \to \mu^+ \mu^-)} \tag{11.37}$$

如同我们已经看到的，它在决定正确的夸克模型中起着决定性的作用. 在能量范围 $2\text{GeV} \leq E_{cm} \leqslant 3\text{GeV}$ 中，R 接近于常数

$$R = 2 \tag{11.38}$$

在较高的能量 R 增加，并在 4.5GeV 的能量处达到值 3.5. 在这个范围所有的粲素共振态都被发现了. 在一个差不多 10GeV 的能量，R 通过另一个阈区域，乌普锡隆共振的区域. 这里它提高到接近 4 的值.

产生 $e^+e^- \to$ 强子的基本过程是一对 e^+e^- 湮灭到一个虚光子，接着产生一个夸克-反夸克对(看图 11.22).

量子电动力学的计算表明[①]，这个截面根本上由产生粒子的电荷平方给出. 因为所有夸克由同样概率产生(给以足够的能量)，我们加起所有的夸克电荷就发现

$$R = \sum_i Q_i^2 \tag{11.39}$$

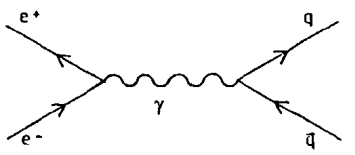


图 11.22　夸克-反夸克对的产生

用通常的 SU(3)夸克模型，我们得到

$$R_{SU(3)} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \tag{11.40}$$

但是显然这个值与实验不符合. 如果我们考虑每个夸克有三种颜色出现，我们得到

$$R^{色} = 3\sum_i Q_i^2 \tag{11.41}$$

并对味道 SU(3)得出

$$R^{色}_{SU(3)} = 3 \times \frac{2}{3} = 2 \tag{11.42}$$

事实上这就是在能量范围 $E_{cm} \leqslant 3\text{GeV}$ 中的实验值. 因此我们肯定[$SU(3)_{色} \times SU(3)_{味}$]模型正确地描写了 R 的低能行为.

显然在 3GeV 和 4.5GeV 之间一个粒子产生的新的道打开了，我们不能在我们简单的模型中解释这个跃迁的详细结构. 然而从 $E_{cm} = 5\text{GeV}$ 开始，R 再一次近于常数. 按照我们的考虑现在 R 的值应该被粲模型描写. c 夸克的电荷是 $Q = 2/3$ 而因而我们将得到错误的值，即如果我们计算每个夸克味道仅仅一次

① W. Greiner, A. Schäfer: *Quantum Chromodynamics* (Harri Deutsch, Thun 1989).

$$R_{(u,d,s,c)} = \frac{10}{9} \tag{11.43}$$

然而如果我们允许颜色，我们得到

$$R^{色}_{(u,d,s,c)} = 3 \times \frac{10}{9} = \frac{10}{3} \tag{11.44}$$

再一次这个值很好地符合实验.

最近发现的在 10GeV 处的增加只能解释为一个进一步的夸克味道，b 夸克. 标记这个新夸克的电荷为 Q_b，关系

$$R = \frac{10}{3} + 3Q_b^2 \tag{11.45}$$

必须在 10GeV 以上成立. 如果我们限制自己于电荷为三分之一或三分之二个基本电荷，则实验值 R 给出 $Q_b = \pm 1/3$. $Q_b = +1/3$. 的可能性可以被一个简单的考虑排除：所谓的 Λ_b 粒子它由一个 u 一个 d 和一个 b 夸克组成，具有电荷

$$Q(\Lambda_b) = \left(+\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) + Q_b = \frac{1}{3} + Q_b \tag{11.46}$$

在 $Q_b = +1/3$ 的情况，Λ_b 的电荷将不是一个整数. 结果因为电荷守恒，Λ_b 不能衰变到已知的强子，它们都有整数电荷. Λ_b 将会是绝对稳定的. 因为这样一个稳定的粒子还没有被观察到，b 夸克必须有电荷 $-1/3$，和 d 和 s 夸克一样.

立足于弱相互作用理论[①]，有人猜想至少有第六个夸克味道，t 夸克（“顶”或“真”）. 还没有被实验发现的这个夸克将有电荷 $Q_t = +2/3$. 然后所有夸克味道可以安排成双重态而给出

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}, \text{和继续下去(?)} \tag{11.47}$$

究竟存在多少这些双重态还不知道. 相当可能更多更多夸克味道将被发现，直到把夸克考虑成基本组分成为有问题的. 这种可能的夸克子结构的各种模型已经被建议过[②].

① 参看 W. Greiner, B. Müller: *Gause Theory of Electro-Weak Interactions* (Springer, Berlin, Heidelberg) 将出版.

② 例如看 R. N. Mohapatra: *Unification and Supersymmetry* (Springer, Berlin, Heidelberg 1986).

第 12 章　数 学 补 充

12.1　引言

到现在为止，我们已经看到了李群的各种各样例子，特别是幺正群(U(n)和 SU(n)). 让我们看看我们是否能在它们的代数 U(n)和 SU(n)(代数用小写字母代表)的结构中发现某些共同的特性.

第一个例子，我们广泛地讨论过的是 SU(2)代数，它被等同于 O(3). 各种符号曾被用过，但这里我们感兴趣的是该代数的球形式($\hat{J}_+$, $\hat{J}_0$, $\hat{J}_-$)，随后它被给出为

$$[\hat{J}_+,\hat{J}_-]=2\hat{J}_0 \quad , \quad [\hat{J}_0,\hat{J}_\pm]=\pm\hat{J}_\pm \tag{12.1}$$

算符 $\hat{J}_+$和 $\hat{J}_-$可以分别被解释为提升和降低算符，简单地因为它们把磁量子数提升或降低 1. 算符 $\hat{J}_0$ 可称为“权”算符，因为它正好给出“权”M. 更仔细地考察(12.1)，我们可以解释 $\hat{J}_+$和 $\hat{J}_-$分别为权加减 1 的算符，因为由对易子定义，当 $\hat{J}_0$ 作用于 $\hat{J}_\pm$给回 $\hat{J}_\pm$带着一个正负号. 也可以看第 5.3 节关于李代数的正规表示的定义. 那里生成元对它们自己的作用定义一个表示. 在这种意义上例如 $\hat{J}_+$可以看成权为 1 的“状态”等等. 方程(12.1)告诉我们 $\hat{J}_+$作用在 $\hat{J}_-$上或反过来都给回权算符 $\hat{J}_0$.，而 $\hat{J}_0$ 作用在 $\hat{J}_\pm$上给回 $\hat{J}_\pm$，带着“权”在前方.

这种借助于提升、降低和权算符的分法，结果在定义一组合适的基和在构造矩阵元方面非常有用(看第 2 章对 SU(2)的情况). 现在的问题是：是否其他的代数表现出类似的结构？如果是的话，我们可以复制 SU(2)场合建议的过程并应用它们到别的代数. 下一个让我们考虑 SU(3)代数作为例子.

在第 7.3 节，方程(7.28)中我们确实发现了同样的结构. 我们有“正”权的算符($\hat{T}_+$,$\hat{V}_+$, $\hat{U}_+$)，负权的算符($\hat{T}_-$,$\hat{V}_-$,$\hat{U}_-$)和两个权算符($\hat{T}_3$,$\hat{Y}$). 两个权算符相互对易，形成所谓的卡坦子代数，它由相互对易的最大可能数目的生成元给出. 注意，随着第 7 章给出的“最高”权的定义，在 SU(3)中 $\hat{T}_+$,$\hat{V}_+$,$\hat{U}_-$是提升算符. 然而定义 $\hat{T}_+$,$\hat{V}_+$和 $\hat{U}_+$为提升算符是同样正确的，结果只是不同的最高权态. 所有这些只是一个定义问题，在这里不会干扰我们. SU(3)代数的结构看来复杂得多，但实际上它表现出跟 SU(2)同样的结构. 为简单起见我们现在标记所有的提升和降低算符为 $\hat{E}_\alpha$，由 α 定义算符的权. 例如 $\hat{T}_3$,$\hat{Y}$ 对 $\hat{T}_\pm$的作用由$[\hat{T}_3,\hat{T}_\pm]=\pm\hat{T}_\pm$和$[\hat{Y},\hat{T}_\pm]=0$ 给出，表

明这些算符的权 α 为 $\alpha=(\pm1,0)$. 类似地,$\hat{V}_{\pm},\hat{U}_{\pm}$ 分别有权(参见第 7 章方程(7.28))$\alpha=\left(\pm\frac{1}{2},\pm1\right)$ 和 $\alpha=\left(\mp\frac{1}{2},\pm1\right)$. 权 α 惟一地定义这个算符! 同样现在我们将特别标记权算符 $\hat{T}_3$ 和 $\hat{Y}$ 为 $\hat{H}_i(i=1,2)$. 由这个新符号,这个代数为

$$[\hat{E}_\alpha,\hat{E}_\beta]=N_{\alpha\beta}\hat{E}_{\alpha+\beta}\quad,\quad\alpha\neq\beta \tag{12.2a}$$

$$[\hat{E}_\alpha,\hat{E}_{-\alpha}]=\alpha^i\hat{H}_i \tag{12.2b}$$

$$[\hat{H}_i,\hat{E}_\alpha]=\alpha_i\hat{E}_\alpha \tag{12.2c}$$

$$[\hat{H}_i,\hat{H}_j]=0 \tag{12.2d}$$

其中 $N_{\alpha\beta},\alpha^i,\alpha^i$,是常数,并对重复指标求和. 作为(12.2a)的例子,有对易关系$[\hat{T}_+,\hat{V}_-]=-\hat{U}_-$,在新的符号下它表现为$\left[\hat{E}_{(+1,0)},\hat{E}_{\left(-\frac{1}{2},-1\right)}\right]=-\hat{E}_{\left(-\frac{1}{2},-1\right)}$,也即权简单相加. 作为(12.2b)的例子,我们有$[\hat{U}_+,\hat{U}_-]=\frac{3}{2}\hat{Y}-\hat{T}_3$,在新符号下它表现为$\left[\hat{E}_{\left(-\frac{1}{2},+1\right)},\hat{E}_{\left(\frac{1}{2},-1\right)}\right]=-\hat{H}_1+\frac{3}{2}\hat{H}_2$. 对(12.2c),我们有$[\hat{T}_3,\hat{U}_\pm]=\mp\frac{1}{2}\hat{U}_\pm$,现在表现为$\left[\hat{H}_1,\hat{E}_{\left(\mp\frac{1}{2},\pm1\right)}\right]=\left(\mp\frac{1}{2}\right)\hat{E}_{\left(\mp\frac{1}{2}\pm1\right)}$,给出权 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$的第一个分量,也即 α_i 是权分量. 最后,(12.2d)例如由$[\hat{T}_3,\hat{Y}]=0$ 代表,它就是$[\hat{H}_1,\hat{H}_2]=0$. 这两个算符 $\hat{T}_3$ 和 $\hat{Y}$ 形成卡坦子代数. 正如后面将表明的,在(12.2b)中的 α^i 与 α_i 相关连. 暂时我们考虑它们是不同的. 由乘上一个常数重新定义生成元,也将得到某些变化,这个常数对每个生成元可以是不同的! 这相应地在(12.2)中重新定义权和别的常数.

如果可能写出一个如(12.2)的代数,那么这个优越性是显然的. 权算符和卡西米尔算符一起形成一个厄密算符的对易集合. 随后状态可以定义为这些算符的本征态. 或者换句话说:我们可以系统地定义量子数! 进而像第 2 章对 SU(2)群一样,我们可以定义提升和降低算符,它的作用能从代数本身推出. 并且类似地矩阵元和克莱布许-高登系数可以被计算.

在练习 7.1 中,我们证明了 SU(4)也展现出跟(12.2)一样的结构,因此意味着所有半单代数可以写为(12.2)的形式.

作为最后一个例子我们将讨论非紧致代数 Sp(2,R). 它关系到一维谐振子($\hbar=m=\omega=1$)

$$\hat{H}=\frac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{p}}^2+x^2) \tag{12.3}$$

其中$[x,\hat{\boldsymbol{p}}]=\mathrm{i}$. 名词"辛"首先来自重新定义 $x=\hat{z}_1$ 和 $\hat{p}=\hat{z}_2$,结果对易子$[\hat{z}_i,\hat{z}_j]=\mathrm{i}g_{ij}$,其中$(g_{ij})=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$. 只有这些变换在相空间$(\hat{z}_1,\hat{z}_2)$中是允许的,它们保持"度规"$(g_{ij})$不变,它叫做辛度规. 数 2 关系到这相空间的维数.

代替坐标和动量我们可以通过

$$\hat{X}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{b}^+ +\hat{b})\quad,\quad\hat{\boldsymbol{p}}=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(\hat{b}^+ -\hat{b}) \tag{12.4}$$

引入玻色子产生算符和消灭算符. 现在我们构造所有可能的平方项,即

$$\hat{B}^+ = \hat{b}^+ \hat{b}^+ \quad , \quad \hat{B} = \hat{b}\hat{b} \quad , \quad \hat{C} = \hat{b}^+ \hat{b} + \frac{1}{2} \tag{12.5}$$

$\hat{B}^+$提升一个 N 量子状态两个量子，而 $\hat{B}$ 降低两个量子. 算符 $\hat{C}$ 停留在同一状态或简单地给出权 $\left(N+\frac{1}{2}\right)$. 根据(12.7)我们可以联接一维谐振子的所有状态，把状态分为两个空间，其 $N=$偶或奇数. 我们现在可以由

$$\hat{B}|1.w.\rangle = 0 \tag{12.6}$$

定义最低权(1. w.)状态，它有两个解 $N=0$ 或 1. $\hat{C}$ 应用到这个态就定义了不可约表示，即 $\left(\frac{1}{2}\right)$或$\left(\frac{3}{2}\right)$依赖于我们是否作用在 $N=$偶或奇的空间上. 这个表示显然是无穷维的，因为只要我们喜欢，就可以多次应用 $\hat{B}^+$.

(12.5)中的算符形成这个代数

$$[\hat{B},\hat{B}^+] = 4\hat{C} \quad , \quad [\hat{C},\hat{B}^+] = +\hat{B}^+ \quad , \quad [\hat{C},\hat{B}] = -\hat{B} \tag{12.7}$$

这个代数叫做 Sp(2,R). 现在让我们重新定义这些算符，即

$$\hat{B}^+ \to \hat{E}_{+1} \quad , \quad \hat{B} \to \hat{E}_{-1} \quad , \quad \hat{C} \to \hat{H}_1 \tag{12.8}$$

由此这个代数成为

$$[\hat{E}_{+1},\hat{E}_{-1}] = -4\hat{H}_1 \quad , \quad [\hat{E}_1,\hat{E}_{\pm 1}] = \pm \hat{E}_{\pm 1}$$

实际上用$\frac{1}{\sqrt{2}}$乘 $\hat{B}^+$和 $\hat{B}$ 只改变第一个对易子，现在有个 2 在前面. 跟(12.1)比较，除了在第一个对易子中的符号外，我们得到了接近相同的代数. 这不是偶然的. 这个代数是跟 SU(1,1)的代数一样的. 即 Sp(2,R)≃SU(1,1). 对我们更重要的是，又有了同样的结构.

结论是，我们发现了各种各样代数的例子，它们能写为标准形式，即权、提升和降低算符. 这一引人注目的性质值得更多的注意和研究. 在下面我们将看到确实所有半单李代数可以写成标准形式，并可以按它来分类. 虽然这个代数如上面指出的有同样结构，但常数 $N_{\alpha\beta}$，α_i 和 α^i 将不同于前面的例子，可以方便地乘上一个常数因子到生成元上.

不幸的是，我们不得不经过一个相当枯燥的课题，然而这是必要的. 在各个步骤中我们必需记住各种各样的例子. 作为回报，我们将理解所有半单经典李代数在它们的结构中是相互联系的，并且只有有限种类型的半单代数. 这一知识大大简化了群的处理和群到各种各样物理课题中的应用.

例 12.1　SU(4)代数的权算符

SU(4)代数已经在第 11 章中介绍过了. 它有 SU(3)作为一个子代数，所以我们只需要看一下外加的算符是否显示出(12.2)的继续. 回答是肯定的！为了这个应用，我们采用方程(11.1)—(11.3)定义的 $\hat{\lambda}_i$算符($i=1,\cdots,15$). 对 $i=1,\cdots,8$ 的 λ 我们已经在对 SU(3)的方程(7.27)中做到这一点. 我们对其余的算符做同样的事，即我们定义 $\hat{F}_i=\frac{1}{2}\hat{\lambda}_i$ 和引入算符

$$\hat{W}_{\pm}=\hat{F}_9\pm\hat{F}_{10},\quad \hat{X}_{\pm}=\hat{F}_{11}\pm\mathrm{i}\hat{F}_{12},$$

$$\hat{Z}_{\pm}=\hat{F}_{13}\pm\mathrm{i}\hat{F}_{14},\quad \hat{H}_3=\sqrt{6}\,\hat{F}_{15}=\frac{\sqrt{6}}{2}\hat{\lambda}_{15} \tag{1}$$

我们现在有三个权算符,就是 $\hat{H}_1=\hat{T}_3$,$\hat{H}_2=\hat{Y}$ 和 $\hat{H}_3=\frac{6}{\sqrt{2}}\hat{\lambda}_{15}$. 这意味着联系到 $\hat{H}_i(i=1,2,3)$在算符上的作用,算符的权带有三个数.

为了决定 $\hat{W}_{\pm}$,$\hat{X}_{\pm}$和 $\hat{Z}_{\pm}$的权,我们分别用 $\hat{H}_1$,$\hat{H}_2$ 和 $\hat{H}_3$ 作用到它们上面. 我们从 $\hat{W}_{\pm}$开始. 由表 11.2 和方程(11.4a)我们得到

$$[\hat{H}_1,\hat{W}_{\pm}]=\left[\frac{1}{2}\hat{\lambda}_3,\frac{1}{2}(\hat{\lambda}_9\pm\mathrm{i}\hat{\lambda}_{10})\right]=\pm\hat{W}_{\pm} \tag{2a}$$

$$[\hat{H}_2,\hat{W}_{\pm}]=\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\lambda}_8,\frac{1}{2}(\hat{\lambda}_9\pm\mathrm{i}\hat{\lambda}_{10})\right]=\pm\frac{1}{3}\hat{W}_{+} \tag{2b}$$

$$[\hat{H}_3,\hat{W}_{\pm}]=\left[\frac{\sqrt{6}}{2}\hat{\lambda}_{15},\frac{1}{2}(\hat{\lambda}_9\pm\mathrm{i}\hat{\lambda}_{10})\right]=\pm 2\hat{W}_{\pm} \tag{2c}$$

这意味着权 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\pm1,\pm\frac{1}{3},\pm2)$,并用

$$\hat{W}_{\pm}\to\hat{E}_{\left(\pm1,\pm\frac{1}{3},\pm2\right)} \tag{3a}$$

来代换 $\hat{W}_{\pm}$. 类似地,我们有

$$\hat{X}_{\pm}\to\hat{E}_{\left(\mp\frac{1}{4},\pm\frac{1}{3},\pm2\right)} \tag{3b}$$

和

$$\hat{Z}_{\pm}\to\hat{E}_{\left(0,\mp\frac{2}{3},\pm2\right)} \tag{3c}$$

对 SU(3)的每个生成元的权相对于第三个权算符是 0,这很容易从表 11.2 推出,因为 $\hat{H}_3=(\sqrt{6}/2)\hat{\lambda}_{15}$,即 $\hat{\lambda}_{15}$ 和 $\hat{\lambda}_k(k=1,\cdots,8)$的对易子为 0.

也请注意在这个例子中,我们这样来选权,使得没有平方根出现. 通过适当地重归一化,即对生成元乘上一个因子,这一点会改变. 事实上权的最终的方便形式将偏离这个例子. (**例 12.1 完**)

12.2 根矢量和经典李代数

在这一章里我们将试图分类所有的半单李代数. 因为我们知道李代数的一组基可以通过线性变换变到另一组基,我们首先来寻找一个半单李代数的元素(生成元)$\hat{X}_\mu$ 的对易关系的标准形式. 这些元素的一个任意的线性组合被记为 $\hat{A}$,其中

$$\hat{A}=a^\mu\hat{X}_\mu \tag{12.9}$$

而另一个组合记为 $\hat{X}$,定义为

$$\hat{X}=x^\mu\hat{X}_\mu \tag{12.10}$$

我们现在要求这些算符满足本征值方程

$$[\hat{A},\hat{X}] = rX \tag{12.11}$$

其中 r 和 $\hat{X}$ 分别代表本征值和本征矢量. 通过应用 $\hat{X}_\mu$ 之间的对易关系

$$[\hat{X}_\mu,\hat{X}_\nu]_- = C_{\mu\nu\sigma}\hat{X}_\sigma \tag{12.12}$$

方程(12.11)取形式为

$$a^\mu x^\nu C_{\mu\nu\sigma}\hat{X}_\sigma = rx^\sigma\hat{X}^\sigma \tag{12.13}$$

因为 $\hat{X}_\sigma$ 根据定义是线性独立的，那么(12.13)等价于

$$(a^\mu C_{\mu\nu\sigma} - r\delta_{\nu\sigma})x^\nu = 0$$

而相应的久期方程为

$$\det|a^\mu C_{\mu\nu\sigma} - r\delta_{\nu\sigma}| = 0 \tag{12.14}$$

如果该李代数由 N 个元素组成，那么(12.14)有 N 个解，虽然它们中的几个可以是简并的. 如卡坦表明的，我们可以这样选 $\hat{A}$ 使得(12.14)的不同解的数目成为最大的. 在半单李代数情况，只有本征值 $r=0$ 保持简并. 如果 $r=0$ 是 l 次简并的，我们称 l 为这半单李代数的秩，因为 $r=0$ 的(12.11)定义了该李代数的对易元素 $\hat{H}_i$.

本征值 $r=0$ 有 l 个线性独立本征矢量 $\hat{H}_i$，它们构成 N 维矢量空间的一个 l 维子空间，即

$$[\hat{A},\hat{H}_i] = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,l) \tag{12.15}$$

本征矢量 $\hat{E}_\alpha$ 相应于留下的 $N-l$ 个解，形成一个$(N-l)$维子空间，对它们

$$[\hat{A},\hat{E}_\alpha]_- = \alpha\hat{E}_\alpha \tag{12.16}$$

成立，其中本征值现在记为 α. 值 α 叫做该李代数的根. 下一步我们写下

$$[\hat{H}_i,\hat{E}_\alpha]_- = \alpha_i\hat{E}_\alpha \quad , \quad [\hat{H}_i,\hat{H}_j]_- = 0$$

$\hat{H}_i$ 的对易性可以被理解，通过开始假设 $\hat{H}_i$ 不相互对易，以至

$$[\hat{H}_1,\hat{H}_i] = \tilde{C}^j_{1i}\hat{H}_j$$

其中 $\tilde{C}^j_{1i}\neq 0$，也即方程

$$(\tilde{C}^j_{1i} - s\delta^j_i)\hat{H}_j = 0$$

至少有一个本征值 s 是非 0 的. 现在我们把 $\hat{A}$ 换成

$$\hat{A}' = \hat{A} + \varepsilon\hat{H}_1$$

其中 ε 选到很小，使得(12.14)的非 0 的本征值 r 不被显著地改变(即没有一个本征值变为 0). 如果我们选 $\hat{H}_i$ 的一个适当的线性组合当作 $\hat{X}$，我们也得到本征值 $\varepsilon\cdot s$，这样本征值 0 的简并度变小了. 这是与假设 $\hat{A}$ 已经选到使(12.14)有最大数目的不同解相矛盾的. 与所有 $\hat{H}_i$ 对易的任何算符 $\hat{A}$(如同在(12.15)中)可以表达为 $\hat{H}_i$ 算符的一个线性组合，即

$$\hat{A} = a^i\hat{H}_i \tag{12.17}$$

为了研究根 α 的性质，我们计算

$$\begin{aligned}[\hat{A},[\hat{H}_i,\hat{E}_\alpha]_-]_- &= [\hat{A},\hat{H}_i\hat{E}_\alpha]_- - [\hat{A},\hat{E}_\alpha\hat{H}_i]_- \\ &= [\hat{A},\hat{H}_i]_-\hat{E}_\alpha + \hat{H}_i[\hat{A},\hat{E}_\alpha]_- - [\hat{A},\hat{E}_\alpha]_-\hat{H}_i - \hat{E}_\alpha[\hat{A},\hat{H}_i]_- \\ &= \alpha[\hat{H}_i,\hat{E}_\alpha]_-\end{aligned} \tag{12.18}$$

这里我们考虑了(12.15)和(12.16),虽然(12.18)可以由应用雅可比恒等式更快和更优雅地得到.

$$[\hat{A},[\hat{H}_i,\hat{E}_\alpha]_-]_- = -[\hat{H}_i,[\hat{E}_\alpha,\hat{A}]_-]_- - [\hat{E}_\alpha,[\hat{A},\hat{H}_i]_-]_-$$
$$= \alpha[\hat{H}_i,\hat{E}_\alpha]_-$$

在最后一步再一次用了(12.15)和(12.16).如果 $\hat{E}_\alpha$ 是一个本征矢量,带有本征值 α,那么存在有 l 个本征矢量 $[\hat{H}_i,\hat{E}_\alpha]_-$ 带有同样的本征值.但是因为 α 是不简并的,所有 $[\hat{H}_i,\hat{E}_\alpha]_-$ 必需正比于 $\hat{E}_\alpha$,即

$$[\hat{H}_i,\hat{E}_\alpha]_- = \alpha_i\hat{E}_\alpha \tag{12.19}$$

或

$$C^\sigma_{i\alpha} = \alpha_i\delta^\sigma_\alpha \tag{12.20}$$

换句话说 $\hat{H}_i$ 和 $\hat{E}_\alpha$ 张开这个李代数.定义在(12.20)中的结构常数被记为 $C^\sigma_{i\alpha}$,并有非常简单的形式,因为它们对 α 和 σ 是对角的.由(12.16),(12.17)和(12.18)我们看到

$$\alpha = a^i\alpha_i \quad (i = 1,2,\cdots,l) \tag{12.21}$$

这儿 α_i 可以被考虑为在一个 l 维空间中的一个矢量 α 的协变分量.这个矢量叫做根矢量.

雅可比恒等式

$$[\hat{A},[\hat{E}_\alpha,\hat{E}_\beta]_-]_- + [\hat{E}_\alpha,[\hat{E}_\beta,\hat{A}]_-]_- + [\hat{E}_\beta,[\hat{A},\hat{E}_\alpha]_-]_- = 0 \tag{12.22}$$

和(12.16)一起给出

$$[\hat{A},[\hat{E}_\alpha,\hat{E}_\beta]_-]_- = (\alpha+\beta)[\hat{E}_\alpha,\hat{E}_\beta]_- \tag{12.23}$$

即 $[\hat{E}_\alpha,\hat{E}_\beta]_-$ 是一个本征矢量,本征值为 $\alpha+\beta$,如果 $\alpha+\beta\neq 0$ 的话.因此

$$[\hat{E}_\alpha,\hat{E}_\beta]_- = C^\sigma_{\alpha\beta}\delta^{\alpha+\beta}_\sigma\hat{E}_{\alpha+\beta}$$

如果 $\alpha+\beta=0$,那么 $[\hat{E}_\alpha,\hat{E}_\beta]_-$ 是生成元 $\hat{H}_i$ 的一个线性组合

$$[\hat{E}_\alpha,\hat{E}_{-\alpha}]_- = C^i_{\alpha,-\alpha}\hat{H}_i \tag{12.24}$$

其中在 $\sigma\neq\alpha-\beta$ 的情况,$C^\sigma_{\alpha\beta}=0$.如果 $\alpha+\beta$ 是一个非 0 根,那么

$$[\hat{E}_\alpha,\hat{E}_\beta]_- = N_{\alpha\beta}\hat{E}_{\alpha+\beta} \text{ ,即 } C^{\alpha+\beta}_{\alpha\beta} = N_{\alpha\beta} \tag{12.25}$$

成立.下一步我们构造度规张量

$$g_{\alpha\sigma} = C^\mu_{\alpha\nu}C^\nu_{\sigma\mu} \tag{12.26}$$

对 μ 和 ν 的求和相对于限制(12.19),(12.20)和(12.24)来完成

$$g_{\alpha\sigma} = C^\alpha_{\alpha\nu}C^\nu_{\sigma\alpha} + C^\mu_{\alpha,-\alpha}C^{-\alpha}_{\sigma\mu} + \sum_{\beta\neq-\alpha}C^{\alpha+\beta}_{\alpha\beta}C^\beta_{\sigma,\alpha+\beta}$$

α 和 σ 一样是固定的指标,即虽然 α 出现两次我们必须不对它求和.在这个方程里只有 $\sigma=-\alpha$ 的项能够存在(参看(12.19)和(12.24)),即如果 $\sigma\neq-\alpha$,

$$g_{\alpha\sigma} = 0 \tag{12.27}$$

如果 $-\alpha$ 不是(12.14)的解,那么 $\det|g_{\alpha\sigma}|=0$,它意味着卡坦的半单李代数条件不满足.这样我们肯定,对半单李代数的每个非 0 根 α,$-\alpha$ 也是一个根.

通过这样一种方式归一化 $\hat{E}_\alpha$,使得 $g_{\alpha-\alpha}=1$,并重新排列基元素,我们得到

$$g_{\mu\nu}=\left(\begin{array}{c|ccccc} g_{ik} & & & 0 & & \\ \hline & 0 & 1 & & & \\ & 1 & 0 & & & \\ 0 & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & \\ & & 0 & & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 \end{array}\right)$$

由 $\det|g_{\mu\nu}|\neq 0$，得出 $\det|g_{ik}|\neq 0$，而我们通过应用(12.19)和(12.20)得到

$$g_{ik}=\sum_{\alpha}C_{i\alpha}^{\alpha}C_{k\alpha}^{\alpha}=\sum_{\alpha}\alpha_i\alpha_k \tag{12.28}$$

这一张量可以考虑为由矢量 α(参看(12.21))张开的 l 维空间中的度规张量. 留下来的只是要决定(12.24)中的系数.

因为 $C_{ikl}=g_{kj}C_{ik}^{i}$，如同练习 12.2 所表明的，指标可以循环置换，即 $C_{ikl}=C_{kli}=C_{lik}$，我们发现

$$C_{\alpha-\alpha}^{i}=g^{ik}C_{\alpha-\alpha,k}=g^{ik}C_{k,\alpha-\alpha}=g^{ik}C_{k\alpha}^{\alpha}=g^{ik}\alpha_k=\alpha^i \tag{12.29}$$

因此

$$[\hat{E}_{\alpha},\hat{E}_{-\alpha}]_{-}=\alpha^i\hat{H}_i \tag{12.30}$$

这里 α^i 是矢量 α 的逆变分量. 现在我们可以写下半单李代数的对易关系的所谓卡坦-韦耳基：

$$[\hat{H}_i,\hat{H}_k]_{-}=0\ ,\ (i=1,2,\cdots,l) \tag{12.31}$$

$$[\hat{H}_i,\hat{E}_{\alpha}]_{-}=\alpha_i\hat{E}_{\alpha} \tag{12.32}$$

$$[\hat{E}_{\alpha},\hat{E}_{\beta}]_{-}=N_{\alpha\beta}\hat{E}_{\alpha+\beta}\ ,\ (\alpha+\beta\neq 0) \tag{12.33}$$

$$[\hat{E}_{\alpha},\hat{E}_{-\alpha}]_{-}=\alpha^i\hat{H}_i \tag{12.34}$$

方程(12.31)可以用来从半单李代数的元素中定义一个对易的子代数，也称为卡坦子代数. 它表示一个给定李代数的最大阿贝尔子代数.

练习 12.2　对结构常数 C_{ikl} 的关系的证明

问题　证明 $C_{ikl}=C_{kli}=C_{lik}$.

解　由定义，我们有

$$C_{ikl}=g_{lj}C_{ik}^{j}=C_{lm}^{n}C_{jn}^{m}C_{ik}^{j} \tag{1}$$

所以利用雅可比恒等式我们可以写下

$$C_{ikl}=-C_{lm}^{n}C_{ji}^{m}C_{kn}^{j}-C_{lm}^{n}C_{jk}^{m}C_{ni}^{j}=C_{ij}^{m}C_{kn}^{j}C_{lm}^{n}-C_{in}^{j}C_{kj}^{m}C_{lm}^{n} \tag{2}$$

我们马上看到通过适当地重新命名指标 j,m 和 n，它在一个循环置换下保持不变，例如

$$C_{kj}^{m}C_{in}^{j}C_{lm}^{n}=C_{kn}^{j}C_{lm}^{n}C_{ij}^{m} \tag{3}$$

(练习 12.2 完)

12.3 本征值的标积

在(12.21)和(12.29)中我们看到本征值 α 可以被考虑为在一个 l 维空间中的矢量.现在我们定义两个根矢量的标积为

$$(\alpha,\beta) = \alpha^i\beta_i \tag{12.35}$$

对这些标积,以下的**引理 1** 成立:

如果 α 和 β 是(12.14)的根,那么 $2(\alpha,\beta)/(\alpha,\alpha)$ 是一个整数,而且 $\{\beta-[2\alpha(\alpha,\beta)/(\alpha,\alpha)]\}$ 也是一个根.

证明:我们假设 α 和 β 是(12.14)的根,并这样选第三个根 γ 使得 $\alpha+\gamma$ 不是(12.14)的根.由(12.33),随后就有

$$[\hat{E}_{-\alpha},\hat{E}_\gamma]_- = N_{\alpha\gamma}\hat{E}_{\gamma-\alpha}$$

因为我们不在乎归一化,我们记右方为 $\hat{E}'_{\gamma-\alpha}$.在下面也接受这个定义,我们得到

$$[\hat{E}_{-\alpha},\hat{E}_\gamma]_- = \hat{E}'_{\gamma-\alpha}\ ,\quad [\hat{E}_{-\alpha},\hat{E}'_{\gamma-\alpha}]_- = \hat{E}'_{\gamma-2\alpha}$$

最后

$$[\hat{E}_{-\alpha},\hat{E}'_{\gamma-j\alpha}]_- = \hat{E}'_{\gamma-(j+1)\alpha} \tag{12.36}$$

这个方程系列必须在 n 步以后中断,因为只存在有限个 $\hat{E}_\beta$,那就是

$$[\hat{E}_{-\alpha},\hat{E}'_{\gamma-n\alpha}]_- = \hat{E}'_{\gamma-(n+1)\alpha} = 0 \tag{12.37}$$

由(12.25),一个类似的关系也被推出,就是

$$[\hat{E}_\alpha,\hat{E}'_{\gamma-(j+1)\alpha}]_- = \mu_{j+1}\hat{E}'_{\gamma-j\alpha} \tag{12.38}$$

由(12.36)和(12.38)消去 $\hat{E}'_{\gamma-(j+1)\alpha}$,并应用雅可比恒等式,我们推出

$$\begin{aligned}\mu_{j+1}\hat{E}'_{\gamma-j\alpha} &= [\hat{E}_\alpha,[\hat{E}_{-\alpha},\hat{E}'_{\gamma-j\alpha}]_-]_- \\ &= [\hat{E}'_{\gamma-j\alpha},[\hat{E}_\alpha,\hat{E}_{-\alpha}]_-]_- - [\hat{E}_{-\alpha},[\hat{E}'_{\gamma-j\alpha},\hat{E}_\alpha]_-]_-\end{aligned}$$

(由于(12.31)-(12.34))并因为(12.38)

$$\mu_{j+1}\hat{E}'_{\gamma-j\alpha,} = -[\hat{E}'_{\gamma-j\alpha},\alpha^i\hat{H}_i]_- + \mu_j[\hat{E}_{-\alpha},\hat{E}'_{\gamma-(j-1)\alpha}]_-$$

它跟(12.36)一起给出

$$\mu_{j+1}\hat{E}'_{\gamma-j\alpha,} = \alpha^i[\hat{H}_i,\hat{E}'_{\gamma-j\alpha}]_- + \mu_j\hat{E}'_{\gamma-j\alpha}$$

并最后应用(12.32)

$$\mu_{j+1}\hat{E}'_{\gamma-j\alpha,} = \alpha_i(\gamma_i - j\alpha_i)\hat{E}'_{\gamma-j\alpha} + \mu_j\hat{E}'_{\gamma-j\alpha}$$

$\hat{E}'_\beta$ 是线性独立的(因为 $\hat{E}_\beta$ 是),因此最后一个方程给出递推关系

$$\mu_{j+1} = (\alpha,\gamma) - j(\alpha,\alpha) + \mu_j \tag{12.39}$$

μ_0 最初没有从(12.36)定义,所以选 $\mu_0=0$,我们对所有的值 $j\geq 0$ 应用(12.31),因此我们从(12.39)通过递推得到

$$\mu_j = j(\alpha,\gamma) - \frac{1}{2}j(j-1)(\alpha,\alpha) \tag{12.40}$$

但是现在(12.37)表明 $\mu_{n+1}=0$,因此

$$(\alpha,\gamma) = \frac{1}{2}n(\alpha,\alpha) \tag{12.41}$$

或

$$\mu_j = \frac{j}{2}(n-j+1)(\alpha,\alpha)$$

如果 β 是任意一个根,存在一定的 $j\geqslant 0$ 具有性质:$\gamma=\beta+j\alpha$ 也是一个根,但 $\gamma+\alpha$ 不是根. 把这代入(12.41)给出

$$(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}(n-2j)(\alpha,\alpha)$$

或

$$2\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} = n - 2j \tag{12.42}$$

这个方程证明了我们引理的第一部分,因为右方肯定是一个整数.

(α,α)必须不为 0,否则(12.41)将意味着 α 正交于所有的根. 因为这些根构成了这整个 l 维空间,这将与卡坦的半单代数判据矛盾. 因此我们总可以用(α,α)来除,而(12.41)也给出

$$n = 2\frac{(\alpha,\gamma)}{(\alpha,\alpha)}$$

对 $\alpha+\gamma$ 不是一个解的每一对 α 和 γ,一系列根相应于

$$\gamma,\ \gamma-\alpha,\cdots,\gamma-n\alpha \tag{12.43}$$

它们是对这个超平面反射不变的. 这个系列也接触到原点和正交于矢量 α. 因为每个 β 必须是这些系列之一的一个成员,我们可以说 $\beta=\gamma-m\alpha$. $\delta=\gamma-(n-m)\alpha$ 也是一个根,因为反射对称性,也即 $\alpha=\beta-(n-2m)\alpha$. 因此(12.41)意味着

$$\delta = \beta - 2\alpha\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\beta)} \tag{12.44}$$

也是一个根,它证明了引理 1 的第二部分.

可以很简单地证明**引理 2**:如果 α 是一个根矢量,那么 α,0 和 $-\alpha$ 是 α 的仅有的也是根矢量的整数多重态(记为 k).

证明:由$[\hat{E}_\alpha,\hat{E}_\alpha]_-=0$ 和(12.33)我们直接看到 2α 不能是一个根. 但每个值$|k|>1$ 给出一个根系列,它必须包含 2α. 因此$|k|>1$ 是不可能的,而引理 2 被证明了.

引理 3 也是重要的:一个以 α 为基础的包含别的根 β 的根系列由不多于四个根组成,它们满足

$$2\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3 \tag{12.45}$$

证明:因为 $\beta=\pm\alpha$ 的情况在引理 2 中考虑过了,我们可以假设 $\beta\neq\pm\alpha$. 我们进一步假设至少有五个根存在,我们可以记它们为 $\beta-2\alpha,\beta-\alpha,\beta,\beta+\alpha,\beta+2\alpha$.

然而引理 2 表明了 2α 和 $2(\alpha+\beta)$不是根. 另一方面我们有

$$2\alpha = (\beta + 2\alpha) - \beta \quad 和 \quad 2(\alpha + \beta) = (\beta + 2\alpha) + \beta$$

因此 β 根系列,它包含 $\beta+2\alpha$,只由一个单个成员组成,即 $\beta+2\alpha$. 因此$(\beta+2\alpha,\beta)=0$. 类似地无论 $\beta-2\alpha-\beta$ 或 $\beta-2\alpha+\beta$ 都不是根,所以$(\beta-2\alpha,\beta)=0$ 成立. 把这两个方程加起来给出$(\beta,\beta)=0$,它只可能对 $\beta=0$ 成立. 然而 0 根是从我们的考虑中排除的,因此至多四个根留下来.

我们还不得不证明(12.45). 为此我们写下一个根系列类似于(12.41). 一方面我们有

$$k + j + 1 \leq 4 \tag{12.46}$$

而另一方面,按照(12.40)如果我们让 $n=k+j$ 则

$$2\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} = k - j \tag{12.47}$$

但(12.46)给出 $k,j\leqslant 3$,因此(12.47)证明了这个断言.

12.4 卡坦-韦耳归一化

在我们考虑根空间的图像表示之前,我们对卡坦和韦耳归一化作一些评论. 出现在(12.33)中的常数 $N_{\alpha\beta}$还没有被决定. 联合(12.36)和(12.38)并让 $\beta=\gamma-j\alpha$,我们得到

$$\begin{aligned}\mu_j\hat{E}_{\alpha+\beta} &= [\hat{E}_\alpha,[\hat{E}_{-\alpha},\hat{E}_{\alpha+\beta}]_-]_- = N_{-\alpha,\alpha+\beta}[\hat{E}_\alpha,\hat{E}_\beta]_- \\ &= N_{-\alpha,\alpha+\beta}N_{\alpha\beta}\hat{E}_{\alpha+\beta}\end{aligned} \tag{12.48}$$

这里用了(12.33)两次. 因为 μ_j 从(12.40)和(12.41)已经知道,那么

$$N_{\alpha\beta}N_{-\alpha,\alpha+\beta} = \mu_j = \frac{j}{2}(n - j + 1)(\alpha,\alpha)$$

并像上面一样,让 $n=k+j$,我们得到

$$N_{\alpha\beta}N_{-\alpha,\alpha+\beta} = \frac{j}{2}(k + 1)(\alpha,\alpha) \tag{12.49}$$

根系列

$$\beta + j\alpha\ ,\ \beta + (j - 1)\alpha,\cdots,\beta,\cdots,\beta - k\alpha \tag{12.50}$$

属于(12.49),对于它,常数 $N_{\alpha\beta}$被决定到只有一个相因子的限度. 然而如果我们考虑 $N_{\alpha\beta}$的反对称性,我们得达一个一致的相因子选择. 为此目的我们必须要求下列关系成立

$$N_{\alpha\beta} = -N_{\beta\alpha} = -N_{-\alpha,-\beta} = N_{-\beta,-\alpha}$$

12.5 根矢量的图像表示

考虑到(12.21),

$$\alpha = \lambda^i \alpha_i (i = 1, \cdots, l)$$

可以被考虑为 l 维空间中的根矢量，带有 l 个协变分量 α_i. 如果我们从某一点开始画出这些矢量，一个 l 维的图就产生了. 范德瓦尔登表明相应于每个图，严格地有一个根矢量体系，并且他用此给出了单李代数的完全分类. 他的方法建立在我们上面证明的三个引理的基础上. 这里我们再次重复它们的有关表述：

1) 如果 α 是一个根矢量，那么 $-\alpha$ 也是一个根.

2) 如果 α 和 β 是根矢量，那么 $2(\alpha,\beta)/(\alpha,\alpha)$ 是一个整数.

3) 如果 α 和 β 是根矢量，那么 $\beta-[2\alpha(\alpha,\beta)/(\alpha,\alpha)]$ 也是一个根矢量.

借助于定义在(12.35)中的标积，我们能在根矢量 α 和 β 间引入角度 ϕ，其中

$$\cos\phi = \frac{(\alpha,\beta)}{\sqrt{(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)}} \tag{12.51}$$

借助于(12.19)和引理 2，给出

$$\cos^2\phi = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \text{或 } 1 \tag{12.52}$$

因为引理 1，只考虑正角度已经足够，即角度

$$\phi = 0°, 30°, 45°, 60° \text{ 和 } 90°$$

现在我们把这些角度和标积的比例联系起来：

1. $\phi=0°$. 这个角只出现在 $\alpha=\beta$ 的场合.

2. $\phi=30°$. 那么我们有 $(\alpha,\beta)/(\alpha,\alpha)=\frac{1}{2}$ 或 $\frac{3}{2}$，$(\alpha,\beta)/(\beta,\beta)=\frac{3}{2}$ 或 $\frac{1}{2}$. 因此 $(\beta,\beta)/(\alpha,\alpha)=\frac{1}{3}$ 或 3.

3. $\phi=45°$. 那么我们有 $(\alpha,\beta)/(\alpha,\alpha)=\frac{1}{2}$ 或 1，相应地 $(\alpha,\beta)/(\beta,\beta)=1$ 或 $\frac{1}{2}$. 因此 $(\beta,\beta)/(\alpha,\alpha)=\frac{1}{2}$ 或 2.

4. $\phi=60°$. 这里 $(\alpha,\beta)/(\alpha,\alpha)=\frac{1}{2}$，$(\alpha,\beta)/(\beta,\beta)=\frac{1}{2}$. 我们得到 $(\beta,\beta)=(\alpha,\alpha)$.

5. $\phi=90°$. $(\alpha,\beta)=0$ 和 $(\beta,\beta)/(\alpha,\alpha)$ 不确定.

有用的是引入矢量 α 和 β 的长度比

$$k=\sqrt{\frac{(\alpha,\alpha)}{(\beta,\beta)}}$$

如果 β 是较短的矢量，由上面的表述得到以下的图像

$$\begin{aligned} &\phi = 30°: k^2 = 3 \qquad \phi = 60°: k^2 = 1 \\ &\phi = 45°: k^2 = 2 \qquad \phi = 90°: k^2 \text{ 不确定} \end{aligned} \tag{12.53}$$

现在我们能对所有单李代数来构造矢量图.

12.6 秩为 1 的李代数

在 $l=1$ 的情况,(12.31)－(12.34)和引理 1 只给出两个不为 0 的根,$\pm\alpha$.因此我们得到 $\phi=0°$,并且这个图变得相当简单,它被画在图 12.1 中.只有一个秩为 1 的李代数,它是 SU(2)(或者 SO(3),它同构于 SU(2)),并被大家称为 A_1.

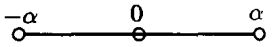


图 12.1 李代数 A_1 的图

12.7 秩为 2 的李代数

二秩李代数的各种图是二维的.我们按照角度 ϕ 来分别描写它们.

$\phi=30°$

坐标系是这样选,使得矢量 α 被(1,0)给出,比矢量 β 短.由(12.53)我们有$(\beta,\beta)=3$.因为 α 和 β 的夹角是 30°,β 的坐标是$[3/2,\sqrt{3}/2]$.由(12.51)得出来,矢量 $-\alpha$ 和 $-\beta$ 也属于这个图.因为$(\alpha,\beta)/(\beta,\beta)=1/2$ 我们从引理 3 看到,$\alpha-\beta$ 是这个图的一个矢量,坐标为$[-1/2,-\sqrt{3}/2]$.这样由引理 1 得出 $\beta-\alpha$ 也属于这个图坐标为$[1/2,\sqrt{3}/2]$.

通过依次运用这个方法,我们能找出所有 12 个非 0 的矢量(当然对 $l=2$,有两个 0 矢量属于该李代数).这个李代数的图被卡坦记为 G_2,表示在图 12.2 中.注意指向外边的长矢量每个都由它们两个相邻矢量的和给出.

$\phi=45°$

用上面同样的方式处理,我们得到图 12.3.按照卡坦的符号,这代表 B_2 李代数.它包括两个 0 矢量在内的 10 个矢量,并描写群 SO(5)的李代数.

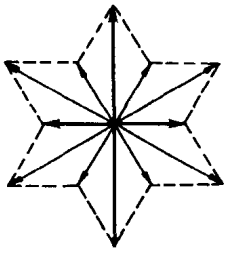


图 12.2 李代数 G_2 的矢量图

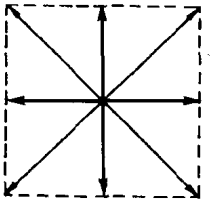


图 12.3 李代数 B_2 的矢量图

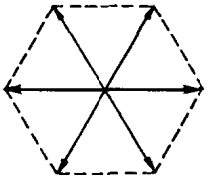


图 12.4 李代数 A_2 的矢量图

$\phi=60°$:

在这个情况,我们得到一个六边形矢量图,它属于 A_2 李代数.

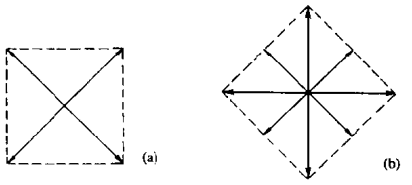


图 12.5　*a*. 李代数 D_2 的矢量图　*b*. 李代数 C_2 的矢量图

这个李代数代表群 SU(3)，并包括 0 矢量在内的 8 个矢量.

$\phi=90°$

在此情况有两个不同的图(画在图 12.5a 和 b 中).

矢量图 D_2 包含 6 个矢量并可被分解为两组正交的矢量. 因此它代表李代数 SO(4)，它同构于两个 SO(3)代数的直和. 第二个图属于被卡坦记为 C_2 的李代数. 它产生于 B_2 旋转 45°，因此同构于它. 它代表 4 维辛群 Sp(4)的生成元的代数.

12.8　秩 $l>2$ 的李代数

对所有可能的高阶单李代数的矢量图的推广是范德瓦尔登(Van der Waerden)给出的

B_l：我们引入矢量

$$e_1=(1,0)\text{ 和 }e_2=(0,1)$$

并以所有可能的符号组合构造矢量 $\pm e_1$，$\pm e_2$，$\pm e_1\pm e_2$. 随后我们在这个坐标表示中，由 8 个矢量和两个 0 矢量一起形成 B_2 的图. 对 B_3 我们考虑正交矢量

$$e_1=(1,0,0)\ ,\ e_2=(0,1,0)\ ,\ e_3=(0,0,1)$$

我们建立矢量 $\pm e_i$ 和 $\pm e_i\pm e_j$，并得到 18 个矢量，包括三个 0 矢量一起，它们代表 B_3 的 21 个根. 对一般的图 B_l 我们考虑 l 个正交单位矢量，并构造 l 维空间的矢量

$$\pm e_i\text{ 和 }\pm e_i\pm e_j(i,j=1,\cdots,l) \tag{12.54}$$

它们给出 $2l^2$ 个矢量. 包括 l 个 0 矢量我们得到代表阶数 $l(2l+1)$，并属于群 SO$(2l+1)$的李代数的矢量图.

C_l：对 C_l 我们可以用 B_l 情况下的同样的单位矢量，但是我们需要构造

$$\pm 2e_i\text{ 和 }\pm e_i\pm e_j\quad(i,j=1,\cdots,l) \tag{12.55}$$

作为该图的矢量. 显然 C_l 和 B_l 是同样阶数，但是它属于辛群 Sp$(2l)$的李代数.

D_l：对 $l>2$ 我们再用同样的单位矢量并考虑矢量

$$\pm e_i\pm e_j\quad(i,j=1,\cdots,l) \tag{12.56}$$

存在 $2l(l-1)$个这种矢量，这样该代数是 $l(2l-1)$阶的，并因此 D_l 代表群 SO$(2l)$的李代数.

A_l：我们在一个$(l+1)$维空间选 $l+1$ 个正交单位矢量，并建立所有形为

$$e_i - e_j \quad (i,j = 1,\cdots,l+1) \tag{12.57}$$

的矢量.现在我们把这些矢量投影到一个适当的 l 维子空间,给出 $l(l+1)$个矢量.与 l 个 0 矢量一起它们相应于一个 $l(l+2)$阶的李代数,属于群 SU$(l+1)$.

12.9 例外李代数

四个矢量图系列 A_l,B_l,C_l 和 D_l 相应于群 SU$(l+1)$,SO$(2l+1)$,Sp$(2l)$和 SO$(2l)$的四个经典李代数.如同范德瓦尔登指出的,只存在有五个别的图,它们属于例外李代数,它们是 G_2,F_4,E_6,E_7 和 E_8(用卡坦的符号).

G_2:这个图已经讨论过了.

F_4:对这个图我们外加 16 个矢量

$$\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4) \tag{12.58}$$

到 B_4 的矢量上.这些 48 个矢量和四个 0 矢量一起代表 52 个根,因此 F_4 的代数是阶数 52.显然 B_4 是 F_4 的一个子代数.

E_6:我们外加上以下的矢量到 A_5 的矢量

$$\pm 2e_7 \text{ 和} \frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4 \pm e_5 \pm e_6) \pm \frac{e_7}{\sqrt{2}} \tag{12.59}$$

其中在括号中我们选三个正号和三个负号.随后我们有 72 个非 0 根,因此该代数是 78 阶的.很清楚李代数 E_6 包含群 SU(6)⊗SU(5)的代数作为子代数.

E_7:与 A_7 的矢量一起,我们考虑

$$\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4 \pm e_5 \pm e_6 \pm e_7 \pm e_8) \tag{12.60}$$

其中我们选四个正号和四个负号并得到 126 个非 0 矢量,属于阶数 133 的代数 E_7.显然 SU(8)的代数是 E_7 的一个子代数.

E_8:对这个图我们取 D_8 的矢量,再外加

$$\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4 \pm e_5 \pm e_6 \pm e_7 \pm e_8) \tag{12.61}$$

其中我们选偶数的正号.因此代数 E_8 是阶数 248 的和包含群 SO(16)的代数作为一个子代数.

12.10 素根和邓金图

对于构造矢量图,范德瓦尔登的方法只对秩 $l \leqslant 2$ 的群是合适的,因为对 $l > 2$,一个两维表示

是不可能的. 邓金(Dynkin)表明关于一个半单李代数的根的大部分信息包含在整个根集合 Σ 的一个小部分分 σ 中. 这些特殊的根矢量叫做素根. 邓金也证明素根能被表示在一个两维图上,就是邓金图. 由这些图我们很容易得到根矢量的完全集合,包括它们的长度和它们之间的角度.

我们叫一个根为一个正根,如果在某个给定的基中它的第一个非 0 坐标是正的(当然这依赖于基的选择). 例如我们考虑图 B_2 中的所有非 0 根,对它有 8 个矢量

$$(1,0);(1,1);(1,-1);(0,1);(0,-1);(-1,0);(-1,1);(-1,-1)$$

这个集合的前四个是正根矢量. 一般说一个图的所有非 0 矢量的一半是正的.

我们称一个根是素的,如果它是正的,并且不能被表示为两个正根之和. 例如我们有

$$(1,0)=(1,-1)+(0,1) \text{ 或 } (1,1)=(1,0)+(0,1)$$

而因此(1,0)和(1,1)不是素根. 一个相应的分解对(0,1)和(1,−1)是不可能的,意味着 B_2 的素根为

$$\alpha=(0,1) \quad , \quad \beta=(1,-1) \tag{12.62}$$

显然所有素根是线性独立的,我们用 σ 来表示素根的体系. 我们能把每个正根表示为

$$\gamma=\sum_{\alpha_i\in\sigma}k_i\alpha_i \tag{12.63}$$

其中 k_i 为非负整数. 一个秩为 l 的半单李代数严格地有 l 个素根,它们形成根矢量的 l 维空间的一组基.

因为跟上面给出的引理的联系是显然的,我们不加证明给出三个以下的引理:

引理 4:如果 α 和 β 是素根,那么它们的差不是一个素根,即

如果 $\alpha,\beta\in\sigma$,则 $\alpha-\beta\notin\sigma$

引理 5:如果 $\alpha,\beta\in\sigma$,那么

$$2\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}=-p \tag{12.64}$$

其中 p 是一个正整数.

引理 6:如果 $\alpha,\beta\in\sigma$,它们之间的角度或者是 90°,120°,135°或者是 150°. 如果$(\alpha,\alpha)\leqslant(\beta,\beta)$,则

$$\frac{(\beta,\beta)}{(\alpha,\alpha)}=\begin{cases}1, & \text{当 } \phi_{\alpha\beta}=120^\circ\\ 2, & \text{当 } \phi_{\alpha\beta}=135^\circ\\ 3, & \text{当 } \phi_{\alpha\beta}=150^\circ\\ \text{不确定}, & \text{当 } \phi_{\alpha\beta}=90^\circ\end{cases} \tag{12.65}$$

为了演示起见我们考虑 B_2 和 B_3. 对 B_2,素根 α,β 间的角度给出在(12.62)中,被发现为

$$\cos\phi_{\alpha\beta}=\frac{(\alpha,\beta)}{\sqrt{(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)}}=-\sqrt{\frac{1}{2}}$$

即

$$\phi_{\alpha\beta}=135^\circ \tag{12.66}$$

而由于(12.65),其长度间的关系为

$$\frac{(\beta,\beta)}{(\alpha,\alpha)}=2 \tag{12.67}$$

对 B_3 有三个素根

$$\alpha=(0,0,1)\ ,\ \beta=(0,1,-1)\ ,\ \gamma=(1,-1,0) \tag{12.68}$$

它们服从关系

$$\begin{aligned}
&\cos\phi_{\alpha\beta}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ \text{即}\ \phi_{\alpha\beta}=135^\circ\ ,\ \frac{(\beta,\beta)}{(\alpha,\alpha)}=2\\
&\cos\phi_{\alpha\gamma}=0\ ,\qquad \text{即}\ \phi_{\alpha\gamma}=90^\circ\ ,\ \frac{(\gamma,\gamma)}{(\alpha,\alpha)}=2\\
&\cos\phi_{\beta\gamma}=-\frac{1}{2}\ ,\ \text{即}\ \phi_{\beta\gamma}=120^\circ\ ,\ \frac{(\beta,\beta)}{(\gamma,\gamma)}=1
\end{aligned} \tag{12.69}$$

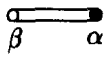
矢量(12.68)的一个通常表示将是三维的. 邓金给出一个如何在一个两维空间表示每个半单李代数的素根的方案.

12.11 邓金的方案

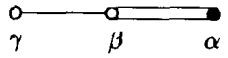
每个素根在图中用一个小圆圈表示. 小圆圈之间按照相应素根之间的角度是 120°,135°或150°而用一条,两条或三条线连接. 属于正交的根的圆圈保持不连接. 相应于较短长度的素根的圆圈被涂黑,而相应于最长长度的根的圆圈保持空着. 这个规则是惟一的,因为每个单李代数包含至多有两种有不同长度的素根.

例 12.3 B_l 的邓金图

按照(12.66)和(12.67),B_2 的邓金图简单为



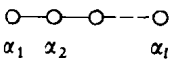
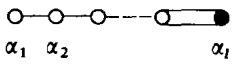
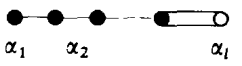
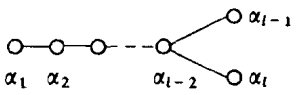
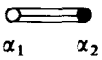
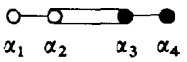
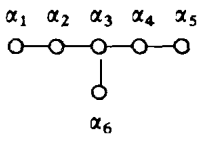
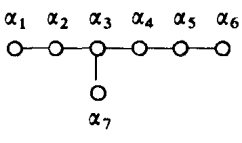
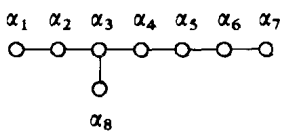
而由于(12.69),B_3 的邓金图被表示为



重复这个方法我们得到每个李代数 B_l 的邓金图,即



邓金证明了对每个单李代数存在一个惟一的表示图. 这些图给出在下面的表中. 其他图是不可能的. (**例 12.3 完**)

阶	卡坦的符号	群	邓金图	解
$l(l+2)$	A_l	$SU(l+1)$		$e_i-e_j(i,j=1,\ldots,l+1)$
$l(2l+1)$ $l\geqslant 2$	B_l	$SO(2l+1)$		$\pm e_i$ 和 $\pm e_i\pm e_j(i,j=1,\ldots,l)$
$l(2l+1)$ $l\geqslant 3$	C_l	$Sp(2l)$		$\pm 2e_i$ 和 $\pm e_i\pm e_j(i,j=1,\ldots,l)$
$l(2l-1)$ $l\geqslant 4$	D_l	$SO(2l)$		$\pm e_i\pm e_j(i,j=1,\ldots,l)$
14	G_2	G_2		$e_i-e_j(i,j=1,2,3;i\neq j)$ $\pm 2e_i\mp e_j\mp e_k(i,j,k=1,2,3,i\neq j\neq k)$
52	F_4	F_4		对 B_4 的解加上 16 个解 $\frac{1}{2}(\pm e_1\pm e_2\pm e_3\pm e_4)$
78	E_6	E_6		对 A_5 的解加上解 $\pm\sqrt{2}\,e_7$ 和 $\frac{1}{2}(\pm e_1\pm e_2\pm e_3\pm e_4\pm e_5\pm e_6)\ \pm e_7/\sqrt{2}$ (对括号中的项任选三个“+”号和三个“−”号)
133	E_7	E_7		对 A_7 的解加上解 $\frac{1}{2}(\pm e_1\pm e_2\pm e_3\pm e_4\pm e_5\pm e_6\pm e_7\pm e_8)$ (对括号中的项任选四个“+”号和四个“−”号)
248	E_8	E_8		对 D_8 的解加上解 $\frac{1}{2}(\pm e_1\pm e_2\pm e_3\pm e_4\pm e_5\pm e_6\pm e_7\pm e_8)$ 带有偶数个正号

12.12　卡坦矩阵

卡坦矩阵对以下的应用是重要的，因此我们用

$$A_{ij}=2(\alpha_i,\alpha_j)/(\alpha_i,\alpha_i) \tag{12.70}$$

$\alpha_k \in \sigma$,给出的元素来表明卡坦矩阵(A_{ij}). 对每个邓金图我们利用引理 4 到 6 可以容易地计算相应的卡坦矩阵. 由(12.70),对角元总是 2 而非对角元等于$-3,-2,-1$和 0.

例 12.4 SU(3),SU(4)和 G_2 的卡坦矩阵

群 SU(3)的李代数的邓金图为



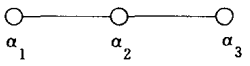
由此我们计算得

$$(\alpha_1,\alpha_1) = (\alpha_2,\alpha_2) = 1 \quad , \quad (\alpha_1,\alpha_2) = -\frac{1}{2}$$

因为在素根 α_1 和 α_2 之间的角度是 120°. 因此 SU(3)的卡坦矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

SU(4)的邓金图为



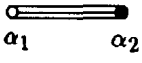
因此

$$(\alpha_1,\alpha_1) = (\alpha_2,\alpha_2) = (\alpha_3,\alpha_3) = 1,\ (\alpha_1,\alpha_2) = (\alpha_2,\alpha_3) = -\frac{1}{2}$$

和$(\alpha_1,\alpha_3)=0$. 对 SU(4)卡坦矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

对 G_2 我们有简单的邓金图



其中$(\alpha_1,\alpha_1)=3,(\alpha_2,\alpha_2)=1,(\alpha_1,\alpha_2)=-\frac{3}{2}$,因为

$$(\alpha_1,\alpha_2) = \sqrt{(\alpha_1,\alpha_1)(\alpha_2,\alpha_2)}\cos 150°$$

$$= -\sqrt{(\alpha_1,\alpha_1)(\alpha_2,\alpha_2)}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

因此相应的卡坦矩阵给出为

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

(例 12.4 完)

12.13　由素根决定所有的根

我们现在表明如何由素根体系 σ 来决定整个李代数. 为此目的我们寻找一系列整数 $k_1,\cdots,k_l$,使得 $\sum_{\alpha_i\in\sigma}k_i\alpha_i$ 为一根.

为了实际的目的只决定正根已经足够. 如果 $\beta=\sum k_i\alpha_i$ 为一根,那么我们称 $|\beta|=\sum|k_i|$ 为 β 的高度. 显然高度是一个正数,而所有素根有高度 1. 为继续下去,我们假设我们知道高度 n 的正根. 然后所有高度 $n+1$ 的正解具有形式 $\beta=\alpha+\alpha_j$ 其中 $\alpha_j\in\sigma$. 对一高度 n 的给定正根 α,我们因此必须决定这些 $\alpha\in\sigma$,它的根由 $\alpha+\alpha_j$ 给出. 如果 $\alpha=\alpha_j$,那么就得出 $\alpha+\alpha_j$ 没有根,并在此场合我们可以假设 $\alpha=\sum k_i\alpha_i$,其中某些 $k_i>0(i\neq j)$. 这些线性组合 $\alpha-\alpha_j,\alpha-2\alpha_j,\cdots$ 是根,是正的,而且高度低于 n,所以我们可以由我们的假设推出哪些组合给出根. 这样对包含 α 的 α_j 系列

$$\alpha-s\alpha_j,\cdots,\alpha,\cdots,\alpha+t\alpha_j$$

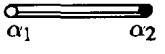
s 是已经知道的. 对 t,关系

$$t=s-2(\alpha,\alpha_j)/(\alpha_j,\alpha_j)=s-\sum_{i=1}^{l}k_iA_{jt} \tag{12.71}$$

成立,并且它可以应用卡坦矩阵来决定. 因为 $\alpha+\alpha_j$ 只当 $t>0$ 时是一个根,我们可以容易地决定一个给定的 $\alpha+\alpha_j$ 是根与否.

例 12.5　用相应的素根决定 G_2 的根

由例 12.3,我们知道李代数 G_2 的邓金图



和相应的卡坦矩阵

$$\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix} \tag{1}$$

因此我们由(1)知道

$$2(\alpha_1,\alpha_2)/(\alpha_1,\alpha_1)=-1\quad,\quad 2(\alpha_1,\alpha_2)/(\alpha_2,\alpha_2)=-3 \tag{2}$$

因为 $\alpha_1-\alpha_2$ 不是一个根,由这些关系推出包含 α_2 的 α_1 系列和包含 α_1 的 α_2 系列有如下形式

$$\alpha_2,\alpha_2+\alpha_1;\ \alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_1+3\alpha_1$$

这里仅有的高度 2 的正根是 $\alpha_1+\alpha_2$. 又因为 $\alpha_2+2\alpha_1$ 不是根,我们肯定 $\alpha_1+2\alpha_2$ 是仅有的高度 3 的根. $2\alpha_1+2\alpha_2$ 也不是根,因此 $\alpha_1+3\alpha_2$ 是仅有的高度 4 的根. 最后由(12.71),我们发现

$$2(\alpha_1 + 3\alpha_2, \alpha_1)/(\alpha_1, \alpha_2) = 2 - 3 = -1$$

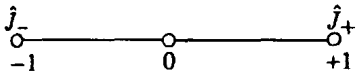
它意味着$(\alpha_1+3\alpha_2)+\alpha_1=2\alpha_1+3\alpha_2$是一个根.它是仅有的高度5的根,因为$\alpha_1+4\alpha_2$不代表一个根.因为线性组合$(2\alpha_1+3\alpha_2)+\alpha_1=3(\alpha_2+\alpha_2)$和$(2\alpha_1+3\alpha_2)+\alpha_2=2(\alpha_1+2\alpha_2)$不是根,再没有高度大于5的根.结果$G_2$的非0根为

$$\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm(\alpha_1+\alpha_2), \pm(\alpha_1+2\alpha_2), \pm(\alpha_1+3\alpha_2), \pm(2\alpha_1+3\alpha_2)$$

(例12.5完)

12.14 两个单李代数

作为演示,我们想定出群SO(3)和SU(3)的李代数.SO(3)的邓金图简单为一个圈O,意味着存在一个素根,我们记它为$\hat{J}_+$.在范德瓦尔登的表示中相应的图看来像



由(12.31)—(12.34)得出相应的对易关系代数,即

$$[\hat{H}_1, \hat{H}_1]_- = 0, \quad [\hat{H}_1, \hat{J}_\pm]_- = \pm\hat{J}_\pm, \quad [\hat{J}_+, \hat{J}_-]_- = \hat{H}_1$$

为了得到上面的代数,我们把$\hat{H}_1$和$\hat{J}$用角动量无穷小算符$\hat{J}_x, \hat{J}_y$和$\hat{J}_z$来表达,使得

$$\hat{H}_1 = \hat{J}_z \text{和} \ \hat{J}_\pm = \frac{1}{2}(\hat{J}_x \pm \mathrm{i}\hat{J}_y)$$

这样我们显然得到了已知的角动量的对易关系代数.正如我们看到的,新的定义从第2章的定义偏离了一个因子$\frac{1}{\sqrt{2}}$.

SU(3)的邓金图为



这意味着存在两个相等长度的素根,夹角120°.当然$-\alpha$和$-\beta$也是根,同时$\pm(\alpha+\beta)$是根,结果加上这些根我们得到A_2的图,画在图12.6中.我们用

$$\sum_\alpha \alpha_i\alpha_j = \delta_{ij}$$

来归一化这些根,而因此得到

$$\alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}}(1,3), \ \beta = \frac{1}{2\sqrt{3}}(1,-3), \ \alpha+\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,0)$$

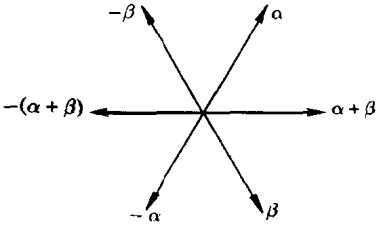


图12.6 A_2的矢量图

对对易关系代数(12.31)—(12.34),我们得到

$$[\hat{H}_1, \hat{E}_{\pm\alpha}]_- = 1/2\sqrt{3}\hat{E}_{\pm\alpha} \qquad [\hat{H}_2, \hat{E}_{\pm\alpha}]_- = \pm\frac{1}{2}\hat{E}_{\pm\alpha}$$

$$[\hat{H}_1,\ \hat{E}_{\pm\beta}]_- = 1/2\sqrt{3}\,\hat{E}_{\pm\beta} \qquad [\hat{H}_2,\ \hat{E}_{\pm\beta}]_- = \pm\frac{1}{2}\hat{E}_{\pm\beta}$$

$$[\hat{H}_1,\ \hat{E}_{\pm(\alpha+\beta)}]_- = 1/\sqrt{3}\,\hat{E}_{\pm(\alpha+\beta)} \qquad [\hat{H}_2,\ \hat{E}_{\pm(\alpha+\beta)}]_- = 0$$

$$[\hat{E}_\alpha,\ \hat{E}_{-\alpha}]_- = 1/2\sqrt{3}\,\hat{H}_1 + \frac{1}{2}\hat{H}_2 \qquad [\hat{E}_\beta,\ \hat{E}_{-\beta}] = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\hat{H}_1 - \frac{1}{2}\hat{H}_2$$

$$[\hat{E}_{\alpha+\beta},\ \hat{E}_{-(\alpha+\beta)}]_- = 1/\sqrt{3}\,\hat{H}_1 \qquad [\hat{E}_\alpha,\ \hat{E}_\beta]_- = 1/\sqrt{6}\,\hat{E}_{(\alpha+\beta)}$$

$$[\hat{E}_\alpha,\ \hat{E}_{\alpha+\beta}]_- = 0 \qquad [\hat{E}_\beta,\ \hat{E}_{\alpha+\beta}]_- = 0$$

$$[\hat{E}_\alpha,\ \hat{E}_{-(\alpha+\beta)}]_- = -1/\sqrt{6}\,\hat{E}_{-\beta} \qquad [\hat{E}_\beta,\ \hat{E}_{-(\alpha+\beta)}]_- = 1/\sqrt{6}\,\hat{E}_{-\alpha}$$

$$[\hat{H}_1,\ \hat{H}_2]_- = 0$$

12.15　经典李代数的表示

有一个方法允许我们用上面的表构造每个李代数的不可约表示. 我们想演示这个方法而不进一步证明. 一个不可约表示的基矢$|u\rangle$用它们相对于卡坦子代数的算符 $\hat{H}_i$ 的本征值来分类，即

$$\hat{H}_i|u\rangle = \lambda_i(u)|u\rangle \tag{12.72}$$

我们定义状态$|u\rangle$的权为矢量(李代数的秩为 N)

$$\Lambda(u) := (\lambda_1(u),\ \lambda_2(u),\cdots,\lambda_N(u)) \tag{12.73}$$

对这些权我们引入以下的次序关系：权 Λ 称为大于权 Λ'，如果第一个非 0 数 $\lambda_i-\lambda_i'$ 为正的，$i=1$，$2,\cdots,N$. 这个次序关系对每个不可约表示惟一地决定了一个最大权 $\Lambda_{\max}$，它有如下性质：

a) $\Lambda_{\max}$是不简并的，即只存在一个状态有权 $\Lambda_{\max}$.

b) 在出现的不可约表示和相应的 $\Lambda_{\max}$之间有一对一的对应关系.

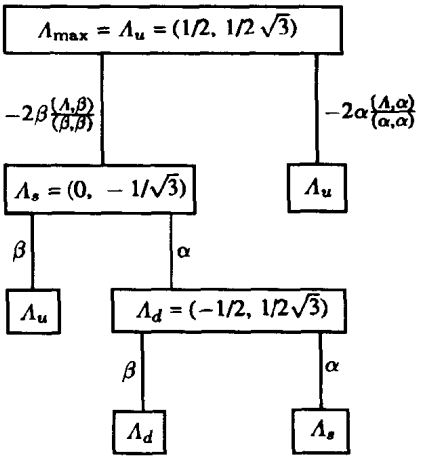


图 12.7　从最大权 $\Lambda_{\max}$推导不可约表示的所有成员的权

我们可以通过推广第7章中与SU(3)有关的考虑来证明这些论述.为了证实以下的过程,我们希望对SU(3)三重态演示我们可以由最大权 $\Lambda_{\max}$ 推出整个不可约表示.为此类似于引理1,我们需要以下的引理:

引理 1′. 对一个不可约表示的每个权 Λ 和对每个根 α,$2(\Lambda,\alpha)/(\alpha,\alpha)$ 是一个整数,并且 $\Lambda-2\alpha[(\Lambda,\alpha)/(\alpha,\alpha)]$ 是该不可约表示的一个权.

SU(3)三重态的最大权是 $\Lambda_{\max}=\Lambda_u=(1/2,1/2\sqrt{3})$. 对SU(3)素正根是(看上一节)

$$\alpha=\sqrt{2}(1/2,-\sqrt{3}/2)\ ;\ \beta=\sqrt{2}(1/2,\sqrt{3}/2)$$

因为 $(\Lambda,\alpha)=0$,$(\Lambda,\beta)=1/\sqrt{2}$,由引理1′得到

$$\Lambda_u=(1/2,1/2\sqrt{3})\ ,\ \Lambda_d=(-1/2,1/2\sqrt{3})\ ,\ \Lambda_s=(0,-1/2)$$

由 $\Lambda_{\max}$ 完全决定一个不可约表示是非常复杂的,因为有简并,即有几个态带有一样的权.为了对完全决定任何单李代数的不可约表示得到一个一般的图像,我们必需:

1. 能够写下所有的最大权 $\Lambda_{\max}$,
2. 知道每个状态被多少次占据.

问题1由邓金通过定一个新的权 $\tilde{\Lambda}$ 而解决了.

$$\Lambda(\lambda_1,\cdots,\lambda_N)\to\tilde{\Lambda}(\tilde{\lambda}_1,\cdots,\tilde{\lambda}_N)\ ;\ \tilde{\lambda}_i=2\frac{(\Lambda,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}\tag{12.74}$$

其中正根记为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_N$. 由引理1′得所有 $\tilde{\lambda}_i$ 为整数,所以这样第一个问题解决. 邓金证明了所有 $\Lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_N)$,其中 $\lambda_i\geq 0$,$i=1,2,\cdots,N$,出现为最大权.第一个问题简化为写下所有带有非负整数分量的 N 维矢量 Λ.

通过考虑根系列我们可以推出以下引理1′的推广:

引理 7:如果 $\tilde{\Lambda}$ 和 $\tilde{\lambda}_j>0$,那么 $\tilde{\Lambda}-\tilde{\alpha}_j$ 也是一个根,其中 $\tilde{\alpha}_j$ 是在"邓金基"中的素根 α_j,并且

$$(\tilde{\alpha}_j)_\lambda=2\frac{(\alpha_j,\alpha_\lambda)}{(\alpha_\lambda,\alpha_\lambda)}=A_{\lambda j}=A_{j\lambda}$$

引理7提供了在邓金基中的权.为了变换这组基到通常的基,我们写

$$\Lambda=\sum_j b_j a_j\to a_i=\sum_j b_j A_{ij}\to b_j=\sum_i a_i(A^{-1})_{ij}\tag{12.75}$$

为了计算简并度,我们可以用所谓的弗罗顿萨尔递推公式,给出为

$$\begin{aligned}&[(\Lambda_{\max}+\delta,\Lambda_{\max}+\delta)-(\Lambda+\delta,\Lambda+\delta)]n_\Lambda\\&=2\sum_{\substack{\alpha\text{正根}\\k>0}}n_{\Lambda+k\alpha}(\Lambda+k\alpha,\alpha)\end{aligned}\tag{12.76}$$

其中

$$\delta=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\text{正根}}\alpha$$

在邓金基中 $\delta=(1,1,\cdots,1)$,n_Λ 是权 Λ 的状态数,并且

$$
\begin{aligned}
(\Lambda,\Lambda') &= \sum_{ij} b_i b'_j(\alpha_i,\alpha_j) \\
&= \sum_{ijkl} a_k (A^{-1})_{ki}(\alpha_i,\alpha_j) a'_i (A^{-1})_{lj} \\
&= \sum_{ji} a'_l a_j \frac{1}{2}(\alpha_j,\alpha_j)(A^{-1})_{lj} \\
&= \sum_{jl} a'_l G_{lj} a_j
\end{aligned}
$$

$$
G_{lj} = [(\alpha_j,\alpha_j)/2][A^{-1}]_{lj} \tag{12.77}
$$

度规 G_{ij} 由归一出现的最大根到 2 来惟一地决定. 最后我们给出所谓韦耳公式，它允许我们由 $\Lambda_{\max}$ 计算一个不可约表示的维数

$$
N(\Lambda_{\max}) = \prod_{\alpha\text{正根}} (\Lambda_{\max} + \delta,\alpha)/(\delta,\alpha) \tag{12.78}
$$

最后，我们总结决定一个给定单李代数的不可约表示的过程为：

1. 由邓金图(看例 12.3 的表)我们得到所有正根 α_i.
2. 我们用(12.74)和(12.77)计算卡坦矩阵 A 和度规 G.
3. 由(12.78)我们得到不太大维数的不可约表示的所有 $\Lambda_{\max}$.
4. 应用引理 7 和(12.78)，我们对有兴趣的不可约表示构造权图.

在例 12.6 中我们将对 SU(3)的八重态表示完成这一计算，虽然实际上我们能应用计算机计算的表格.

例 12.6　SU(3)的分析

1. 我们应用上面的表. 因为 SU(3)是二秩的，常有两个素根

$$
\alpha_1 = \sqrt{2}\,(1,0), \qquad \alpha_2 = \sqrt{2}\,(-1/2, \sqrt{3}/2)
$$

由此得到

$$
\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2 = \sqrt{2}\,(1/2, \sqrt{3}\,2)
$$

其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是在所选基中的正根，它们被 $\alpha_1 = \sqrt{2}\,(1,0)$ 所确定.

2. 我们计算 A 和 G. $A_{ij} = 2(\alpha_i,\alpha_j)/(\alpha_i,\alpha_i)$ ；

$$
A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ 和 } G = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}
$$

$$
\tilde{\alpha}_1 = (2,-1),\ \tilde{\alpha}_2 = (-1,2),\ \tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 = (1,1)
$$

3. 我们取 $\tilde{\Lambda}_{\max}$ 它有一般形式 $\tilde{\Lambda}_{\max} = (p,q)$，以至由(12.78)得出

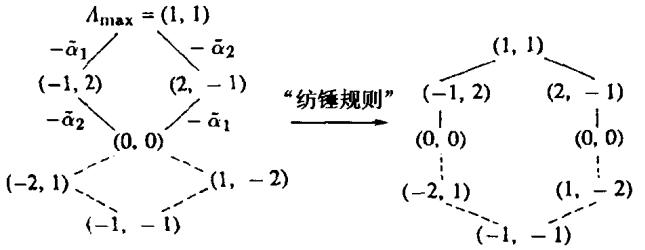
$$
N(p,q) = \prod_{\alpha=\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3} \frac{1/3(p+1,q+1)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\tilde{\alpha}^T}{1/3(1,1)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\tilde{\alpha}^T}
$$

$$= \prod_{\alpha=\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3} \frac{1/3(2p+q+3,\ p+2q+3)\tilde{\alpha}^T}{(1,1)\tilde{\alpha}^T}$$

$$= (p+1)\times(q+1)\times\frac{1}{2}\times(p+q+2)$$

这正是在练习 7.9 中推导的关系.因此对 SU(N)所谓的邓金标号相应于由杨图推出的标号.

4. 我们想构造八重态 $\Lambda_{max}=(1,1)$,对于它下面的图成立



对 $\Lambda=(-1,2),(12.78)$给出

$$\left[(2,2)\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}-(0,3)\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\right]n_{(-1,2)}$$

$$= 2n_{(-1,1)}(1,1)\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$$

因为 Λ_{max}是不简并的,就得出

$$(8-6)n_{(-1,2)} = 2n_{(1,1)} = 2 \quad n_{(-1,2)} = 1$$

相应地,(12.74)结果为

$$\bar{\Lambda} = (2,-1),\ n_{(2,-1)} = 1$$

这样对 $\Lambda=(0,0)$我们有

$$\left[8-(1,1)\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]n_{(0,0)} = 2\left\{n_{(2,-1)}(2,-1)\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\right.$$

$$\left.+\,n_{(-1,2)}(-1,2)\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+n_{(1,1)}(1,1)\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$= 2(2+2+2) = 12$$

$$6n_{(0,0)} = 12 \rightarrow n_{(0,0)} = 2$$

这个结果也可以由"纺锤规则"得到,它表示根图是凸的,即那些由第一次,第二次等等扣除得到的状态数不能减少而是增加的.(**例 12.6 完**)

第 13 章　特殊的离散对称性

在这本书的前两章我们转向在量子力学中具有一般意义的对称性. 我们现在从空间反射和时间反演的离散对称性开始.

13.1　空间反射(宇称变换)

宇称在量子力学中起着重要作用. 我们经常发现[①]当一宇称变换被完成时,哈密顿量的本征函数或者保持不变或者改变符号. 当宇称变换时 $\boldsymbol{r}$ 被 $-\boldsymbol{r}$ 取代,而这变换不影响势能. 一个物理状态被定义为正宇称如果波函数不改变;而如果波函数改变符号,它是负宇称.

一开始我们采用和旋转情况(参看第 1 章(1.46))一样的途径,而这变换被写为

$$\boldsymbol{r}'=\hat{R}_1\boldsymbol{r}=-\boldsymbol{r} \tag{13.1}$$

如果我们选择 $\hat{R}_1$ 为

$$\hat{R}_1=-\mathbb{1}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \tag{13.2}$$

则给出一个空间反射. 显然 $\hat{R}_1$ 是实的,正交的,外加 $\hat{R}_1^{-1}=\hat{R}_1$. 但是由于 $\hat{R}_1$ 的行列式是 -1,这不可能是群 SO(3)的一个变换,因为旋转矩阵的行列式总是 1. 每个实的正交的有行列式 -1 的 3×3 矩阵可以写成 $\hat{R}_1$ 和一个代表旋转的矩阵的乘积. 单位矩阵$\mathbb{1}$ 和 $\hat{R}_1$ 一起形成一个两元素 $\hat{E}_i$ 的离散群,对 $\hat{E}_i$ 有 $\hat{E}_i^2=1$.

现在我们考虑一个处在由波函数 $\psi_\alpha(\boldsymbol{r})$ 代表的状态 $|\alpha\rangle$ 上的物理体系. 在空间反射下这个状态变换到 $|\alpha'\rangle$,波函数为 $\psi_{\alpha'}(\boldsymbol{r})$. 我们假设这两个状态由

$$\psi_{\alpha'}(\hat{R}_1\boldsymbol{r})=a\psi_\alpha(\boldsymbol{r}) \tag{13.3}$$

联系起来,其中 a 尚需决定. 对比平移和旋转的类似关系(分别看(1.17)和(1.64)),空间反射的离散本性意味着 a 要出现在这个关系中.

要点　对那种连续变换,我们也可以类似(13.3)引入因子 a. 这些因子将是相应的变换参数的连

---

① 看本丛书《量子力学导论》(北京大学出版社,2000).

续函数，即对平移 $a=a(\boldsymbol{a})$ 和对旋转 $a=a(\boldsymbol{\phi})$. 这些连续函数当变换参数为 0 时，即当变换正好是恒等变换时必须有值 1. 然而我们可以表明具有这一性质的这些因子没有物理意义.

类似于以前的定义，我们现在用方程

$$\hat{U}_1\psi_a(\boldsymbol{r})=\psi_a'(\boldsymbol{r}) \tag{13.4}$$

引入幺正的空间反射算符. 它(跟(13.3)一起)给出

$$\hat{U}_1\psi_a(\boldsymbol{r})=a\psi_a(\hat{R}_1^{-1}\boldsymbol{r})=a\psi_a(\hat{R}_1\boldsymbol{r}) \tag{13.5}$$

这里我们应用了一个反射的逆也是一个反射这一事实. 这样我们应用这个算符两次，得到

$$\hat{U}_1^2\psi_2(\boldsymbol{r})=a\hat{U}_1\psi_a(\hat{R}_1\boldsymbol{r})=a^2\psi_a(\hat{R}_1^{-1}\hat{R}_1\boldsymbol{r})=a^2\psi_a(\boldsymbol{r}) \tag{13.6}$$

另一方面两个相继的空间反射把坐标空间变到它自己，所以 $\hat{U}_1^2$ 必须变换每个状态到它自己. 这意味着 $\hat{U}_1^2\psi_a$ 和 ψ_a 只能差一个相因子，因为 $\hat{U}_1$ 是幺正算符. 因此 a^2 的绝对值必须是 1，并且结果对 a 也同样成立. 另外我们可以强加进一步的限制于 a.

一个粒子体系的物理状态，我们记为 $\psi_a(\boldsymbol{r})$，可以迭加而给出

$$\psi(\boldsymbol{r})=\sum_a A_a\psi_a(\boldsymbol{r}) \tag{13.7}$$

导致

$$\hat{U}_1^2\psi(\boldsymbol{r})=\sum a_a^2A_a\psi_a(\boldsymbol{r}) \tag{13.8}$$

(13.8)的右方描写一个不同于 $\psi(\boldsymbol{r})$的状态，除非所有因子 a_a^2 是相等的. 只有那时两个相继的空间反射重新在一个相因子限度内产生原来的状态. 这意味着 a_a^2 对所有可能被迭加的状态必须是一样的. 因此看来对每一种粒子选一个一定值的 a 是适当的. 一个 2π 的旋转不改变整数自旋粒子的状态矢量. 我们对空间反射假设有这个同样的结果，因此 $a^2=1$，它意味着 $a=\pm1$. 半整数自旋的粒子可以成对耦合，给出整数自旋的粒子. 因此我们期望对半整数自旋的粒子 a 能取整数自旋粒子的因子 a^2 同样的值，以至 $a=\pm1$ 和 $\pm\mathrm{i}$，即 $a^4=1$. 在相对论量子力学中我们看到一个自旋 $\frac{1}{2}$ 的粒子的旋量由 4π 的旋转重新产生.

为了对不同的粒子实验地决定 a，我们不得不包括它们彼此的相互作用. 作为例子让我们考虑 π^0 介子，它有 0 自旋. 它衰变到两个光子(看例 8.6). 假设衰变中体系的宇称是守恒的，我们可以相对电磁场的宇称决定 π^0 的内禀宇称. 我们发现 $a=-1$，所以 π^0 介子有负宇称，它被称为膺标粒子，而带有 $a=+1$ 的自旋 0 粒子被称为标量粒子. 带电介子 $\pi^{\pm}$ 也有自旋 0，虽然不可能相对电磁场来决定它们的内禀宇称，因为它们由于电荷守恒不能衰变到光子. 另一方面这些 π 介子在与核子的相互作用中产生和湮灭. 这样我们可以相对于核子决定它们的宇称，只要宇称在这些相互作用中也守恒. 按照这样的考虑我们指定 π 介子为负宇称，而核子为正宇称.

13.2 反射后的状态和算符

空间反射后的状态的运动方程由 $\hat{U}_1$ 作用到原来状态的运动方程来得到. 如预期的，一个反

射后的状态满足同原来状态一样的薛定谔方程，只要 $\hat{H}$ 和 $\hat{U}_1$ 对易，即

$$[\hat{U}_1, \hat{H}]=0 \tag{13.9}$$

在此情况，$\hat{H}$ 和 $\hat{U}_1$ 可以表示为对角矩阵，而且能量本征态可以同时被选为具有好宇称的状态. 类似于例 1.6 中的(1)，动力学变量 $\hat{A}$ 对反射后状态的矩阵元等于 $\hat{U}_1^+\hat{A}\hat{U}_1$ 对原状态的矩阵元，因为

$$\langle \hat{U}_1\psi_\alpha|\hat{A}|\hat{U}_1\psi_\beta\rangle=\langle\psi_\alpha|\hat{U}_1^+\hat{A}\hat{U}_1|\psi_\beta\rangle \tag{13.10}$$

由于 $\hat{U}_1$ 被选为幺正算符，(13.5)在应用 $\hat{U}_1^+$ 时变为

$$\psi_\alpha(\boldsymbol{r})=a\hat{U}_1^+\psi_\alpha(\hat{R}_1^{-1}\boldsymbol{r})$$

或者

$$\hat{U}_1^+\psi_\alpha(\boldsymbol{r})=\frac{1}{a}\psi_\alpha(\hat{R}_1\boldsymbol{r}) \tag{13.11}$$

借助于这个方程 $\hat{U}_1^+\boldsymbol{r}\hat{U}_1$ 的表达式可以容易地计算：

$$\begin{aligned}\hat{U}_1^+\boldsymbol{r}\hat{U}_1\psi_\alpha(\boldsymbol{r}) &=a\hat{U}_1^+\boldsymbol{r}\psi_\alpha(\hat{R}_1^{-1}\boldsymbol{r})\\ &=a\frac{1}{a}(\hat{R}_1\boldsymbol{r})\psi_\alpha(\hat{R}_1\hat{R}_1^{-1}\boldsymbol{r})=(-\boldsymbol{r})\psi_\alpha(\boldsymbol{r})\end{aligned} \tag{13.12}$$

因为(13.12)对每个 $\psi_\alpha(\boldsymbol{r})$ 成立，我们肯定

$$\hat{U}_1^+\boldsymbol{r}\hat{U}_1=-\boldsymbol{r} \tag{13.13}$$

以至代替(13.4)，上一方程也可以被用来定义算符 $\hat{U}_1$. 因为 $\boldsymbol{p}=-\mathrm{i}\hbar\nabla$ 和 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$，我们用同样方式发现

$$\hat{U}_1^+\hat{\boldsymbol{p}}\hat{U}_1=-\hat{\boldsymbol{p}} \tag{13.14}$$

$$\hat{U}_1^+\hat{\boldsymbol{L}}\hat{U}_1=\hat{\boldsymbol{L}} \tag{13.15}$$

给出算符 $\hat{U}_1$ 只作用在空间坐标上而不作用在自旋上，它必须与 $\hat{\boldsymbol{S}}$ 对易. 因为(13.15)，我们发现

$$\hat{U}_1^+\hat{\boldsymbol{S}}\hat{U}_1=\hat{\boldsymbol{S}} \tag{13.16}$$

$$\hat{U}_1^+\hat{\boldsymbol{J}}\hat{U}_1=\hat{\boldsymbol{J}} \tag{13.17}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{J}}=\hat{\boldsymbol{L}}+\hat{\boldsymbol{S}}$. 结果(13.13)－(13.17)表明坐标、动量和角动量在空间反射下的行为严格地如经典地期望的方式. 相应地空间坐标和动量是矢量的例子，也叫极矢量，而角动量是轴矢量或膺矢量的例子.

13.3　时间反演

一个在保守势中运动的粒子的经典运动方程是对称的，如果时间传播方向被反过来. 因为它们只包含相对时间的二阶微商或一阶时间微商的平方. 一般地，我们期望这一时间反演对称性也对量子力学方程成立. 然而我们将看到时间反演在量子力学中有某些特殊性质. 这部分地由于在量子力学中时间坐标(与空间坐标相反)在希尔伯特空间中不代表一个算符，而是取作状态的一

个参数.因此没有(13.13)的类似.我们要求时间反演把状态 α 的波函数 $\psi_\alpha(\boldsymbol{r},t)$ 变换到 $\psi_\alpha'(\boldsymbol{r},-t)$,即我们要求 $\psi_\alpha(\boldsymbol{r},-t)$ 按照反过来的时间传播.在这个新的状态里动量和角动量的符号是反过来的,而所有其他的量保持不变.时间反演由不依赖于时间的算符 $\hat{T}$ 描写,它被方程

$$\hat{T}\psi_\alpha(\boldsymbol{r},t)=\psi_{\alpha'}(\boldsymbol{r},-t) \tag{13.18}$$

定义.在下面我将考虑 $\hat{T}$ 是对称变换的物理体系.这意味着对 u_k,$\hat{T}u_k$ 也是哈密顿量(它被假设是时间无关的)的一个本征态,具有同样的本征值 E_k.

让我们考虑薛定谔方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_\alpha(\boldsymbol{r},t)=\hat{H}\psi_\alpha(\boldsymbol{r},t) \tag{13.19}$$

其中 $\hat{H}$ 不依赖于时间.对时间反演的函数 $\psi_\alpha'(\boldsymbol{r},t)$,薛定谔方程因此变为

$$-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_\alpha'(\boldsymbol{r},t)=\hat{H}\psi_\alpha'(\boldsymbol{r},t) \tag{13.20}$$

其中左方的负号源于时间微商.如 $\hat{T}$ 是一个对称变换,它必须跟哈密顿量对易,这可以表达为

$$\hat{T}\hat{H}=\hat{H}\hat{T},\text{或 }\hat{T}\hat{H}\hat{T}^{-1}=\hat{H} \tag{13.21}$$

这可以被以下方式证实:我们用 $\hat{T}$ 从左边乘(13.19),它给出

$$(\hat{T}\mathrm{i}\hat{T}^{-1})\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{T}\psi_\alpha(\boldsymbol{r},t)=(\hat{T}\hat{H}\hat{T}^{-1})\hat{T}\psi_\alpha(\boldsymbol{r},t)=\hat{H}\hat{T}\psi_\alpha(\boldsymbol{r},t) \tag{13.22}$$

这个运算被小心地完成,在这种意义上:我们把虚数单位 i 包括在这个运算中间,也即我们允许 $\hat{T}\mathrm{i}\hat{T}^{-1}\neq\mathrm{i}$.进而我们考虑了实参数 t 和 $\hat{T}$ 对易.(代替(13.21),我们可以要求 $\hat{T}\hat{H}\hat{T}^{-1}=-\hat{H}$,这样 i 与 $\hat{T}$ 对易.然而在这种情况时间反演也将改变哈密顿量的谱,然后它不再是正定的.这将是物理上不可接受的.)比较(13.22)和(13.20)表明我们不得不假设

$$\hat{T}\mathrm{i}\hat{T}^{-1}=-\mathrm{i} \tag{13.23}$$

这是一般关系

$$\hat{T}(a\psi)=a^*\hat{T}\psi \tag{13.24}$$

$$\hat{T}(a\psi+b\phi)=a^*\hat{T}\psi+b^*\hat{T}\phi \tag{13.25}$$

的特殊情况.一个服从这些方程的算符称为一个反线性算符.相应地时间反演算符是反线性的.

13.4 反幺正算符

我们用定义对任何函数 ψ

$$\hat{K}\psi=\psi^* \tag{13.26}$$

来引入复共轭算符 $\hat{K}$.显然 $\hat{K}^2=1$ 和 $\hat{K}$ 服从关系(13.24)和(13.25),即它是反线性的.现在每个反线性算符可以表示为 $\hat{K}$ 和一个线性算符的乘积.特别重要的是这种乘积,对于它这个线性算符是幺正的.这种算符叫做反幺正的,而很清楚 $\hat{K}$ 本身是反幺正的.

练习 13.1　一个反幺正算符对波函数的矩阵元的效果

问题　证明两个状态的内积等于由应用一个反幺正算符到原来状态得到的状态的内积的复共轭. 对模得到什么?

解　这两个状态由它们的波函数来表示,我们记它们为 ψ_α 和 ψ_β. 由这两个状态我们得到 $\psi_\alpha'=\hat{A}\psi_\alpha$ 和 $\psi_\beta'=\hat{A}\psi_\beta$. 因为 $\hat{A}$ 是反幺正的,能被写为

$$\hat{A}=\hat{U}\hat{K} \tag{1}$$

其中 $\hat{U}$ 是幺正的. 这给出

$$\psi_\alpha'=\hat{U}\psi_\alpha^*,\qquad \psi_\beta'=\hat{U}\psi_\beta^* \tag{2}$$

由此,我们可以写下这内积为

$$\langle\alpha'|\beta'\rangle\equiv\int \mathrm{d}^3r\psi_\alpha^+\psi_\beta=\int \mathrm{d}^3r(\hat{U}\psi_\alpha^*)^+(\hat{U}\psi_\beta^*)=\int \mathrm{d}^3r\psi_\alpha^{*+}\hat{U}^+\hat{U}\psi_\beta^*$$

$$=\{\int \mathrm{d}^3r\psi_\alpha^+\psi_\beta\}^*=\langle\alpha|\beta\rangle^*=\langle\beta|\alpha\rangle \tag{3}$$

其中我们用 $\hat{U}$ 是幺正的这一事实. 对模我们得到

$$\langle\alpha'|\alpha'\rangle=\langle\alpha|\alpha\rangle^*=\langle\alpha|\alpha\rangle \tag{4}$$

因为它是实数,这意味着模保持不变. (**练习 13.1 完**)

按照这个问题的结果,假设时间反演算符是反幺正的是可以理解的,因为它不改变状态的模,两个状态的内积的绝对值也保持不变. 因此,我们把 $\hat{T}$ 写成形式

$$\hat{T}=\hat{U}\hat{K} \tag{13.27}$$

带有幺正的 $\hat{U}$. 现在我们想以这样的方法找到 $\hat{T}$ 的一个明显的表达式,以至于在时间反演态中动量和角动量的符号反过来而其他的量保持不变. 作为最简单的情况,首先我们检验一个自旋 0 的粒子的情况. 相应的状态由一个单分量的波数代表. 由给定的波函数 ψ_α 我们构造

$$\psi_\beta(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{r}\psi_\alpha(\boldsymbol{r},t) \tag{13.28}$$

由 $\psi_\alpha'(\boldsymbol{r},t)=\hat{T}\psi_\alpha(\boldsymbol{r},t)$ 和 $\psi_\beta'=\hat{T}\psi_\beta$ 来记相应的时间反演态,我们得到类似的关系

$$\psi_\beta'(\boldsymbol{r},-t)=\boldsymbol{r}\psi_\alpha'(\boldsymbol{r},-t) \tag{13.29}$$

因为 $\boldsymbol{r}$ 在时间反演下不改变符号. 由此我们发现

$$\boldsymbol{r}\hat{T}\psi_\alpha=\boldsymbol{r}\psi_\alpha'=\psi_\beta'=\hat{T}\psi_\beta=\hat{T}\boldsymbol{r}\psi_\alpha \tag{13.30}$$

ψ_α 可以任意选择,所以由此得出

$$\boldsymbol{r}\hat{T}=\hat{T}\boldsymbol{r} \tag{13.31}$$

现在我们把由 ψ_α 应用动量算符得到的状态写为 ψ_r,即 $\psi_r=\hat{\boldsymbol{p}}\psi_\alpha(\boldsymbol{r},t)$. 关于时间反演态我们期望

$$\psi_r'(\boldsymbol{r},-t)=-\hat{\boldsymbol{p}}\psi_\alpha'(\boldsymbol{r},-t) \tag{13.32}$$

成立,因为动量在时间反演下改变它的符号. 这给出

$$\hat{\boldsymbol{p}}\hat{T}\psi_\alpha(\boldsymbol{r},t)=\hat{\boldsymbol{p}}\psi_\alpha'(\boldsymbol{r},-t)=\psi_r'(\boldsymbol{r},t)$$

$$= -\hat{T}\psi_\gamma(\boldsymbol{r},t) = -\hat{T}\hat{\boldsymbol{p}}\psi_\alpha(\boldsymbol{r},t) \tag{13.33}$$

或

$$\hat{\boldsymbol{p}}\hat{T} = -\hat{T}\hat{\boldsymbol{p}} \tag{13.34}$$

类似地对 $\hat{\boldsymbol{L}}=\boldsymbol{r}\times\hat{\boldsymbol{p}}$ 发现

$$\hat{\boldsymbol{L}}\hat{T} = -\hat{T}\hat{\boldsymbol{L}} \tag{13.35}$$

在坐标表象,$\boldsymbol{r}$ 是实的算符,而 $\hat{\boldsymbol{p}}=-\mathrm{i}\hbar\nabla$ 是纯虚的. $\hat{T}$ 的最简单的选择是使之满足(13.31),(13.34)和(13.5),于是

$$\hat{U}=\mathbb{1}$$

所以

$$\hat{T}=\hat{K} \tag{13.36}$$

虽然这个结论依赖于选取的表象. 在动量表象(其中 ψ_α 为 $\boldsymbol{p}$ 的函数而不是 $\boldsymbol{r}$ 的函数,动量 $\boldsymbol{p}$ 是实的乘法因子,而 $\boldsymbol{r}$ 是纯虚的 $\boldsymbol{r}=\mathrm{i}\hbar\nabla_p$). 在些情况对 $\hat{T}$ 的表示(13.27)仍成立,但现在 $\hat{U}$ 必须是一个把 $\hat{\boldsymbol{p}}$ 变到 $-\hat{\boldsymbol{p}}$ 的算符,即

$$\hat{U}\psi_\alpha(\boldsymbol{p})=\psi_\alpha(-\boldsymbol{p})$$

我们现在转回到坐标空间表象,其中对一个带自旋粒子我们期望

$$\hat{\boldsymbol{S}}\hat{T} = -\hat{T}\hat{\boldsymbol{S}} \tag{13.37}$$

(类似于(13.35))以及

$$\hat{\boldsymbol{J}}\hat{T} = -\hat{T}\hat{\boldsymbol{J}} \tag{13.38}$$

我们已经看到 $\hat{T}$ 的形式依赖于表象. 进而我们选一组特定的自旋矩阵,如果我们考虑粒子带有非 0 自旋的话. 我们这样来选它们,使得 $\hat{S}_x$ 和 $\hat{S}_z$ 是实算符,而 $\hat{S}_y$ 是纯虚的(参看(2.21b)对自旋 1 的粒子和(2.21a)对自旋 $\frac{1}{2}$ 的粒子). 这通过适当的幺正变换总是可以做到.

符号 $\boldsymbol{r},\hat{S}_x$ 和 $\hat{S}_z$ 现在是实算符,而 $\hat{\boldsymbol{p}},\hat{\boldsymbol{L}}$ 和 $\hat{S}_y$ 是纯虚的. 如果 $\hat{T}$ 等于 $\hat{K}$,那么(13.31),(13.34)和(13.35)将被满足,同样(13.37)对分量 $\hat{S}_y$ 也被满足. 另一方面对 $\hat{S}_x$ 和 $\hat{S}_z$ 的方程将不被满足. 因此我们必须在 $\hat{T}$ 的一般的表示(13.27)中选一个幺正算符 $\hat{U}$,它与 $\boldsymbol{r},\hat{\boldsymbol{p}},\hat{\boldsymbol{L}}$ 和 $\hat{S}_y$ 对易,并服从关系

$$\hat{S}_x\hat{U} = -\hat{U}\hat{S}_x \quad , \quad \hat{S}_z\hat{U} = -\hat{U}\hat{S}_z \tag{13.39}$$

如果选 $\hat{U}$ 只是 $\hat{S}_y$ 的函数,那么前四个条件

$$[\boldsymbol{r},\hat{U}]_- = [\hat{\boldsymbol{p}},\hat{U}]_- = [\hat{\boldsymbol{L}},\hat{U}]_- = [\hat{S}_y,\hat{U}]_- = 0$$

被满足. 另一方面我们可以表明(看下面的练习)(13.39)也可以满足,只要我们选

$$\hat{U}=\exp(-\mathrm{i}\pi\hat{S}_y/\hbar) \tag{13.40}$$

我们在第 3 章中对旋转的考虑也引导我们到这个表达式. 那里我们看到幺正算符 $\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{\phi}\cdot\hat{\boldsymbol{S}}/\hbar)$ 表示一个角度 $\boldsymbol{\phi}$ 的旋转. 因此如(13.40)一样的一个绕 y 轴转 π 角的旋转将把 $\hat{S}_x$ 变到 $-\hat{S}_x$,把 $\hat{S}_z$ 变到 $-\hat{S}_z$. 对一个自旋 $\frac{1}{2}$ 粒子这个表达式取一个简单形式

$$\hat{T}=-\mathrm{i}\hat{\sigma}_y\hat{K} \tag{13.41}$$

其中 $\hat{\sigma}_y$ 是泡利矩阵

$$\hat{\sigma}_y=\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix}$$

练习 13.2　在 $\hat{U}$ 和 $\hat{S}$ 间的对易关系

问题　对 $\hat{U}=\exp(-\mathrm{i}\pi\hat{S}_y/\hbar)$，应用 $\hat{S}_y$ 和 $\hat{S}_\pm=\hat{S}_z\pm\mathrm{i}\hat{S}_x$ 间的对易关系，证明关系 $\hat{U}\hat{S}_x=-\hat{S}_x\hat{U}$ 和 $\hat{U}\hat{S}_z=-\hat{S}_z\hat{U}$ 的正确性.

解　应用一般的对易关系

$$[\hat{S}_i,\hat{S}_j]_-=\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\hat{S}_k \tag{1}$$

直接得出

$$[\hat{S}_y,\hat{S}_\pm]_-=\pm\hbar\hat{S}_\pm \tag{2}$$

这些关系然后可以写成形式

$$\hat{S}_y\hat{S}_\pm=\hat{S}_\pm\hat{S}_y\pm\hbar\hat{S}_\pm=\hat{S}_\pm(\hat{S}_y\pm\hbar\mathbb{1}) \tag{3}$$

其中$\mathbb{1}$ 为单位矩阵. 现在我们断言

$$\hat{S}_y^n\hat{S}_\pm=\hat{S}_\pm(\hat{S}_y\pm\hbar\mathbb{1})^n \tag{4}$$

对每个 n 成立.

证明　显然(4)对 $n=1$ 满足. 如果我们假设它对某个 $n>1$ 也成立，我们只需要证明它对 $n+1$ 也成立，即

$$\begin{aligned}\hat{S}_y^{n+1}\hat{S}_\pm&=\hat{S}_y\hat{S}_y^n\hat{S}_\pm\\&=\hat{S}_y\{\hat{S}_\pm(\hat{S}_y\pm\hbar\mathbb{1})^n\}\\&=\hat{S}_\pm(\hat{S}_y\pm\hbar\mathbb{1})(\hat{S}_y\pm\hbar\mathbb{1})^n\\&=\hat{S}_\pm(\hat{S}_y\pm\hbar\mathbb{1})^{n+1}\end{aligned} \tag{5}$$

现在我们可以计算 $\hat{U}\hat{S}_\pm$.

$$\begin{aligned}\hat{U}\hat{S}_\pm&=\sum^n\left(\frac{-\mathrm{i}\pi}{\hbar}\right)\frac{1}{n!}\hat{S}_y^n\hat{S}_\pm\\&=\hat{S}_\pm\sum^n\left(\frac{-\mathrm{i}\pi}{\hbar}\right)\frac{1}{n!}(\hat{S}_y\pm\hbar\mathbb{1})^n\\&=\hat{S}_\pm\exp\{-\frac{\mathrm{i}\pi}{\hbar}(\hat{S}_y\pm\hbar\mathbb{1})\}\\&=\hat{S}_\pm\hat{U}\exp\{\pm(-\mathrm{i}\pi)\mathbb{1}\}\end{aligned} \tag{6}$$

另一方面，最后一个因子等于$-\mathbb{1}$，因为

$$\exp(\pm\mathrm{i}\pi\mathbb{1})=1\exp(\pm\mathrm{i}\pi)=\mathbb{1}\cos\pi=-\mathbb{1} \tag{7}$$

因此(6)成为

$$\hat{U}\hat{S}_\pm=-\hat{S}_\pm\hat{U} \tag{8}$$

如果分别写下实部和虚部，我们得到

$$\hat{U}\hat{S}_x=-\hat{S}_x\hat{U} \tag{9}$$

$$\hat{U}\hat{S}_z=-\hat{S}_z\hat{U} \tag{10}$$

这个分离是可能的，因为 $\hat{U}$，$\hat{S}_x$ 和 $\hat{S}_z$ 是实算符.（**练习 13.2 完**）

13.5 多粒子体系

如果我们有一个多粒子体系，时间反演算符 $\hat{T}$ 可以被写成属于个别粒子的幺正算符 $\hat{U}$ 和算符 $\hat{K}$ 的乘积，即

$$\hat{T}=\exp\{-\mathrm{i}\pi\hat{S}_{1y}/\hbar\}\cdots\exp\{-\mathrm{i}\pi\hat{S}_{ny}/\hbar\}\hat{K} \tag{13.42}$$

这些算符可以以任意次序放置，因为每个算符作用在不同粒子的状态. 因此它们对易，并且算符 $\hat{T}$ 对每个粒子的自旋服从关系(13.37). 因为所有算符 $\hat{S}_y$ 是纯虚的，(13.42)中所有指数是实的，并因此与 $\hat{K}$ 对易. 因为 $\hat{K}^2=1$，我们发现

$$\hat{T}^2=\exp\{-2\mathrm{i}\pi\hat{S}_{1y}/\hbar\}\cdots\exp\{-2\mathrm{i}\pi\hat{S}_{ny}/\hbar\} \tag{13.43}$$

每个指数代表一个 2π 的旋转，所以相应的坐标空间变换到它自己. 对整数自旋的粒子，该指数等于 $+1$，而对半整数自旋的粒子它们是 -1. 因此，按照在这体系中半整数自旋粒子的数目是偶的或奇的，$\hat{T}^2$ 是 $+1$ 或 -1.

如同我们已经提到过的，如果 u_k 是一个能量本征函数，那么 $\hat{T}u_k$ 也是，而且两者有同样的本征值. 让我们先假设没有简并. 在这种情况下，$\hat{T}u_k$ 代表与 u_k 同样的状态，所以我们可以写

$$\hat{T}u_k=cu_k \tag{13.44}$$

带有某个复数 c，导致

$$\hat{T}^2u_k=\hat{T}(cu_k)=c^*\hat{T}u_k=|c|^2u_k \tag{13.45}$$

$\hat{T}^2=+1$，$|c|^2=1$ 描写一个可能的情况. 另一方面，如果 $\hat{T}^2=-1$，按照(13.45)就不存在 c. 这意味着 $\hat{T}$ 的作用给出一个新的状态，相应的本征值是简并的.

在这种情况下，我们可以证明 u_k 和 $\hat{T}u_k$ 是相互正交的. 按照练习 13.1，我们有 $(\hat{T}\psi_1,\hat{T}\psi_2)=(\psi_1,\psi_2)^*=(\psi_2,\psi_1)$. 如果现在取 $\psi_1=\hat{T}u_k$ 和 $\psi_2=u_k$，我们得到

$$(\hat{T}^2u_k,\hat{T}u_k)=(u_k,Tu_k) \tag{13.46}$$

另一方面，$\hat{T}^2=-1$，所以(13.46)的左方是 $-(u_k,Tu_k)$. 因此(13.46)双方差一个符号，而这只可能是

$$(u_k,\hat{T}u_k)=0 \tag{13.47}$$

它意味着两个态是相互正交的. 因此对每个状态 u_k 我们可以找到一个很好定义的简并态 $\hat{T}u_k$，所以状态的简并度总是偶的.

13.6　实本征函数

我们想考虑一个没有自旋的体系(或者其中自旋是无关的). 在此场合,如果我们选在空间表象中工作,则 $\hat{U}=\mathbb{1}$ 是单位矩阵,而 $\hat{T}=\hat{K}$. 进而我们假设有一个算符 $\hat{A}$,它跟 $\hat{K}$ 对易并且它的本征值 A_μ 是不简并的. 我们将用 a_μ 来记它的本征函数以至于

$$\hat{A}a_r(\boldsymbol{r},t)=A_\mu a_\mu(\boldsymbol{r},t) \tag{13.48}$$

正如我们上面解释的,$\hat{K}a_\mu$ 表示与 a_μ 同样的状态,而我们可以写 $\hat{K}a_\mu=a_\mu^*=ca_\mu$,其中 c 又是一个复数. 函数 a_μ 可以分解为它的实部和它的虚部,即 $a_\mu=v_\mu+\mathrm{i}w_\mu$,其中 v_μ 和 w_μ 是两个实函数. 上面的方程现在为

$$v_\mu-\mathrm{i}w_\mu=c(v_\mu+\mathrm{i}w_\mu)\text{或}(1-c)v_\mu=\mathrm{i}(1+c)w_\mu \tag{13.49}$$

这表明 v_μ 和 w_μ 相互成正比. 因此 a_μ 在一个复因子限度内是实的. 在此情况,特别是所有非简并的本征函数可以被选为实的,只要这体系在时间反演下不变.

有些时候上面的论证可以被扩展到简并态的情况. 一个有趣的例子是实哈密顿量,它包括一个球形势,也即它满足关系

$$[\hat{H},\hat{\boldsymbol{L}}^2]_-=0\quad,\quad[\hat{H},\hat{K}]_-=0\quad,\quad[\hat{K},\hat{\boldsymbol{L}}^2]_-=0 \tag{13.50}$$

众所周知,能量本征函数(属于 E_k)可以用量子数 k,l(角动量)和 m(角动量投影)来代表,所以我们可以写下这些本征函数为 u_{klm}. 角动量的 z 分量算符(带有本征值 m)是纯虚的:$\hat{L}_z=\hbar(\partial/\delta\phi)$. 相应于(13.35),它不与 $\hat{K}$ 对易,因此我们不能用上面同样的方式论证 $\hat{K}u_{klm}=cu_{klm}$,这将意着 u_{klm}是实的(到一个无关的复数常数限度). 这也能直接由下面的事实看出,这些本征函数正比于球谐函数 $Y_{lm}(\theta,\varphi)$,对 $m\neq0$ 它们都是复的. 另一方面,如果我们限制自己于 $m=0$ 的函数,那么我们只有 $\hat{L}_z$ 的本征值 0 的本征函数,即 $\hat{L}_zu_{kl0}=0$. 由一般关系(13.35)就得出

$$\hat{L}_z\hat{K}u_{kl0}=0 \tag{13.51}$$

因为 $\hat{L}_z\hat{K}=-\hat{K}\hat{L}_z$. $\hat{K}u_{kl0}$因此也是 $\hat{L}_z$ 的本征值为 0 的一个本征函数. 如果我们没有外加的简并,我们可以肯定,在一个广泛的意义上 $\hat{H}$ 和 $\hat{L}$ 带有 $m=0$ 的本征函数,即到一个相因子限度内是实函数.

第 14 章　动力学对称性

我们在前面的各章里已经看到，对称性和一个体系的简并是相互关连的. 例如一个具有旋转对称性的体系一般是相对于角动量的方向，也即相对一个特殊分量(一般是 J_z)的本征值是简并的. 一个例外是 $\boldsymbol{J}=0$ 的场合. 在前一章讨论的空间反射和时间反演的离散对称性的情况，简并是不大经常的，因为被变换的状态经常等于原来的状态.

下面们将更详细地看到，超出旋转对称性中出现的简并还有出自不同根源的简并的可能性. 当薛定谔方程可以以不止一种方式求解时，这种简并正是我们预想的，例如在不同的坐标系中求解，或者在能投影到不同方向的单一坐标系中求解. 从现在的考虑，我们应该期望这些简并也是与某种对称性相关的. 这些对称性根本上不同于所有迄今为止考虑过的所有别的对称性，因为它们的本性不是几何的. 它们叫做动力学对称性，因为它们是特殊形式的薛定谔方程或特殊形式的经典力学定律的结果. 我们将检验两个相对简单的量子力学例子，从相应的经典体系出发，它们允许以与几何对称性非常接近的方式推导动力学对称性的存在，以及随后它的一般形式. 当然这一般是不可能的，实际上许多量子力学体系没有经典类似.

14.1　氢原子

首先我们研究经典的开普勒问题. 在相对坐标中哈密顿量给出为

$$H=\boldsymbol{p}^2/2\mu-\kappa/r \tag{14.1}$$

这里 μ 是体系的约化质量，而 κ 是一个正的量(对氢原子 $\kappa=Ze^2$). 经典问题的束缚解是椭园. 从近日点 P 到远日点 A 的距离叫 $2a$. 如果 b 表示短半轴的长度，离心率 $e=(a^2-b^2)^{1/2}/a$，从焦点 M 到几何中心的距离 $f=a\cdot e$(如图 14.1)

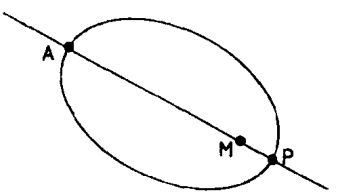


图 14.1　经典的开普勒轨道其引力中心 M 处在椭园的焦点之一

因为 H 不依赖于时间，总能量 E 是运动常数；并且因为 H 具有旋转对称性，轨道角动量 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ 是一个运动常数. $\boldsymbol{L}$ 明显地是一个垂直于轨道平面的轴矢量. 很容易证明(练习 14.1)

$$E=-\kappa/2a \quad , \quad L^2=\mu\kappa a(1-e^2) \tag{14.2}$$

H 的旋转对称性意味着轨道处在通过引力中心 M 的某个平面内，但它不足以保证轨道是封闭的. 势能项从牛顿形式 $V(r)=-\kappa/r$ 的一个很小的偏离会引起椭圆长轴 PA 缓慢的进动，因此轨道不再是封闭的. 这提示了对形式 $-\kappa/r$ 的势能除了 H 和 L 外还有某个量是运动常数. 它可以用来固定长轴在轨道平面中的指向. 因此我们寻找由 M 到 P 或者到 A 的一个常矢量 $\boldsymbol{M}$.

这样一个矢量早就被知道了，并被称为龙格-楞次矢量. 它具有形式

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L}/\mu-\kappa\boldsymbol{r}/r \tag{14.3}$$

对此，$\boldsymbol{M}$ 很容易看出是一个运动常数. 因为 $\dot{\boldsymbol{L}}=0$，我们发现 $\boldsymbol{M}$ 相对于时间的微商为

$$\dot{\boldsymbol{M}}=\dot{\boldsymbol{p}}\times\boldsymbol{L}/\mu-\kappa\dot{\boldsymbol{r}}/r+\kappa\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})/(\mu r^3) \tag{14.4}$$

这里用了关系 $\boldsymbol{p}=\mu\dot{\boldsymbol{r}}$. 如果考虑到关系 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$，我们发现

$$\dot{\boldsymbol{M}}=\boldsymbol{r}(\dot{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{p})/\mu-\boldsymbol{p}(\dot{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{r})/\mu-\boldsymbol{p}\kappa/(\mu r)+\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})\kappa/(\mu r^3)$$

因为牛顿方程 $\dot{\boldsymbol{p}}=-\kappa\boldsymbol{r}/r^3$，我们看到

$$\dot{\boldsymbol{M}}=0 \tag{14.5}$$

也即 $\boldsymbol{M}$ 是一个常数，是一个长度 κe 由 M 指向近日点 P 的矢量(看练习 14.2). 还有两个关系是独立于特殊选择的轨道参数 a 和 e 的(看练习14.3)：

$$\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{M}=0, \qquad \boldsymbol{M}^2=2E\boldsymbol{L}^2/\mu+\kappa^2 \tag{14.6}$$

为了量子力学地处理氢原子，我们必须用算符代替经典函数，这对 $\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{L}$ 很容易做到. 但是矢量乘积 $\hat{\boldsymbol{p}}\times\hat{\boldsymbol{L}}$ 和 $-\hat{\boldsymbol{L}}\times\hat{\boldsymbol{p}}$ 不是恒等的，因为 $\hat{\boldsymbol{L}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{p}}$ 的分量不对易. 因此用算符代替函数得到的(14.3)的表达式不是厄密的，于是我们重新定义 $\hat{\boldsymbol{M}}$ 为对称化的表达式：

$$\hat{\boldsymbol{M}}=\frac{1}{2\mu}(\hat{\boldsymbol{p}}\times\hat{\boldsymbol{L}}-\hat{\boldsymbol{L}}\times\hat{\boldsymbol{p}})-\kappa\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{14.7}$$

考虑 $\boldsymbol{r}$ 和 $\hat{\boldsymbol{p}}$ 的对易关系，我们可以表明

$$[\hat{\boldsymbol{M}},\hat{\boldsymbol{H}}]_-=0 \tag{14.8}$$

$$\hat{\boldsymbol{L}}\cdot\hat{\boldsymbol{M}}=\hat{\boldsymbol{M}}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}=0 \tag{14.9}$$

$$\hat{\boldsymbol{M}}^2=2\hat{H}/\mu(\hat{\boldsymbol{L}}^2+\hbar^2)+\kappa^2 \tag{14.10}$$

关系(14.8)是(14.5)的量子力学类似，表达式(14.9)和(14.10)相应于(14.6).

关系式(14.7)－(14.10)被泡利在 1926 年用来计算氢原子的能级. 他把 $\hat{\boldsymbol{M}}$ 的三个分量看成是无穷小变换的生成元. 追随这种方法我们推出六个生成元 $\hat{\boldsymbol{L}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{M}}$ 的代数，它由 15 个对易关系组成. 其中三个是角动量算符的已知关系：

$$[\hat{L}_i,\hat{L}_j]_-=\mathrm{i}\,\hbar\,\varepsilon_{ijk}\hat{L}_k \tag{14.11}$$

包括一个 $\hat{\boldsymbol{M}}$ 的分量和一个 $\hat{\boldsymbol{L}}$ 的分量的对易关系给出进一步的九个关系.

$$[\hat{M}_i,\hat{L}_i]_-=\mathrm{i}\,\hbar\,\varepsilon_{ijk}\hat{M}_k \tag{14.12}$$

经过外加一些计算，我们找到最后三个对易关系

$$[\hat{M}_i,\hat{M}_j]_-=-2\mathrm{i}\,\frac{\hbar}{\mu}\hat{H}\varepsilon_{ijk}\hat{L}_k \tag{14.13}$$

正如我们在第 2 章中看到的,$\hat{\boldsymbol{L}}$ 的分量组成一个封闭代数并生成群 O(3). 然而 $\hat{\boldsymbol{L}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{M}}$ 一起并不形成一个封闭代数,因为虽然(14.12)只包括 $\hat{\boldsymbol{M}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{L}}$,关系(14.13)也带来了算符 $\hat{H}$. 然而 $\hat{H}$ 不依赖于时间,并与 $\hat{\boldsymbol{L}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{M}}$ 对易的,我们可以限制自己于相应于 $\hat{H}$ 的一个特定本征值 E 的一个希尔伯特空间的子空间. 随后(14.13)式中的 $\hat{H}$ 可以用它的本征值 E 来代替. 对束缚态 E 有负值,用

$$\hat{\boldsymbol{M}}'=\sqrt{-\mu/2E}\hat{\boldsymbol{M}} \tag{14.14}$$

来代替 $\hat{\boldsymbol{M}}$ 是方便的. 显然(14.12)和(14.13)因而转换为

$$[\hat{\boldsymbol{M}}'_i,\hat{\boldsymbol{L}}]_-=\mathrm{i}\,\hbar\,\varepsilon_{ijk}\hat{\boldsymbol{M}}'_k \tag{14.15}$$

$$[\hat{\boldsymbol{M}}'_i,\hat{\boldsymbol{M}}'_j]_-=\mathrm{i}\,\hbar\,\varepsilon_{ijk}\hat{\boldsymbol{L}} \tag{14.16}$$

14.2 群 SO(4)

这六个生成元 $\hat{\boldsymbol{L}},\hat{\boldsymbol{M}}'$ 组成一个封闭代数. 为了说明这一点我们重新标记 $\hat{\boldsymbol{L}}$ 分量的指标. 首先我们写

$$\boldsymbol{r}=(r_1,r_2,r_3),\hat{\boldsymbol{p}}=(\hat{p}_1,\hat{p}_2,\hat{p}_3) \tag{14.17}$$

对它们

$$[r_i,\hat{p}_j]_-=\mathrm{i}\,\hbar\,\delta_{ij} \tag{14.18}$$

成立. 因为

$$\hat{L}_{ij}=r_i\hat{p}_j-r_j\hat{p}_i \tag{14.19}$$

对 $\hat{L}$ 算符我们发现了"自然指标"

$$\hat{L}=(\hat{L}_{23},\hat{L}_{31},\hat{L}_{12}) \tag{14.20}$$

我们现在用引入 r_4 和 p_4 把指标扩充到 $i,j=1,2,3,4$,它完全了(14.18)和(14.19),这样

$$\hat{M}'_x=\hat{L}_{14},\qquad \hat{M}'_y=\hat{L}_{24},\qquad \hat{M}'_z=\hat{L}_{34} \tag{14.21}$$

成立. 很容易证明(14.18),(14.19)和(14.21)导致对易关系(14.11),(14.15)和(14.16). 这六个生成元 $\hat{L}_{ij}$ 显然构成了三个生成元 $\hat{\boldsymbol{L}}$ 由三维到四维的一个推广. 相应的群可以表明为四维空间的特殊正交群或正规旋转群,也即 SO(4). 它包括所有实的正交归一的 4×4 矩阵,其行列式等于 $+1$. 这显然不代表氢原子的几何对称性,因为第四分量 r_4 和 $\hat{p}_4$ 是人为的,并不能等同于几何变量. 为此原因,SO(4)被说成是描写了氢原子的动力学对称性. 它包含由角动量算符 $\hat{L}_i$ 生成的几何对称性 SO(3)作为一个子群.

重要的是注意到 SO(4)生成元是由限制于束缚态而得到的. 对连续状态,E 是正的而在(14.14)的平方根中的符号必须被改变以使 $\hat{\boldsymbol{M}}'$ 是厄密的. 但是随后在(14.16)右方的符号变了,并且(14.21)的指定不再可能. 结果在此情况动力学对称群同构于一维时间和三维空间的洛伦兹变换群,而不是四维空间的旋转群. 这用符号表示为 SO(3,1).

14.3　氢原子的能级

现在来找出本征值是比较简单的. 我们定义量

$$\hat{\boldsymbol{I}}=\frac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{L}}+\hat{\boldsymbol{M}}'),\qquad \hat{\boldsymbol{K}}=\frac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{L}}-\hat{\boldsymbol{M}}') \tag{14.22}$$

它们满足对易关系

$$[\hat{I}_i,\hat{I}_j]_-=\mathrm{i}\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{I}_k \tag{14.23}$$

$$[\hat{K}_i,\hat{K}_j]_-=\mathrm{i}\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{K}_k \tag{14.24}$$

$$[\hat{I}_i,\hat{K}_j]_-=0 \tag{14.25}$$

$$[\hat{I}_i,\hat{H}_j]_-=[\hat{K},\hat{H}]_-=0 \tag{14.26}$$

因为(14.25),I_k 和 K_k 的代数是分离的. 因此 $\hat{\boldsymbol{I}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{K}}$ 各自构成一个 SO(3)或 SU(2)代数,并且我们马上体会到本征值是

$$\hat{\boldsymbol{I}}^2=i(i+1)\hbar^2,\quad i=0,\frac{1}{2},1,\cdots \tag{14.27}$$

$$\hat{\boldsymbol{K}}^2=k(k+1)\hbar^2,\quad k=0,\frac{1}{2},1,\cdots \tag{14.28}$$

关系式(14.23)－(14.26)表明 SO(4)群的秩为 2,因为一个算符 $\hat{I}_i$ 和一个算符 $\hat{K}_j$ 形成一个对易生成元的最大体系. 因此这里有两个卡西米尔算符,它们显然可以选为

$$\hat{\boldsymbol{I}}^2=\frac{1}{4}(\hat{\boldsymbol{L}}+\hat{\boldsymbol{M}}')^2 \tag{14.29}$$

$$\hat{\boldsymbol{K}}^2=\frac{1}{4}(\hat{\boldsymbol{L}}-\hat{\boldsymbol{M}}')^2 \tag{14.30}$$

作一代换,用 $\hat{\boldsymbol{I}}^2$ 和 $\hat{\boldsymbol{K}}^2$ 的和与差:

$$\hat{C}_1=\hat{\boldsymbol{I}}^2+\hat{\boldsymbol{K}}^2=\frac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{L}}^2+\hat{\boldsymbol{M}}'^2) \tag{14.31}$$

$$\hat{C}_2=\hat{\boldsymbol{I}}^2-\hat{\boldsymbol{K}}^2=\hat{\boldsymbol{L}}\cdot\hat{\boldsymbol{M}}' \tag{14.32}$$

方程(14.9)表明 $\hat{C}_2=0$,因此我们将只处理 SO(4)的 $\hat{\boldsymbol{I}}^2=\hat{\boldsymbol{K}}^2$ 的部分. 这样 $i=k$,$\hat{C}$ 的可能的本征值为

$$C_1=2k(k+1)\hbar^2,\quad k=0,\frac{1}{2},1,\cdots \tag{14.33}$$

通过考虑(14.14)和(14.10)来转换(14.31)给出

$$\hat{C}_1=\frac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{L}}^2-\frac{\mu}{2E}\hat{\boldsymbol{M}}^2)=-\mu\kappa^2/4E-\frac{1}{2}\hbar^2 \tag{14.34}$$

这样利用(14.33),能量本征值被发现为

$$E=-\mu\kappa^2/[2\hbar^2(2k+1)^2]\ ,k=0,\frac{1}{2},1,\cdots \tag{14.35}$$

注意,对 i 和 k 我们允许使用半奇数值. 正如我们很快将看到的,这时物理量 $\hat{\boldsymbol{L}}=\hat{\boldsymbol{I}}+\hat{\boldsymbol{K}}$ 并不给出任何矛盾. 应用三角形规则我们看到 l(在 $\hat{L}^2=l(l+1)\hbar^2$ 中)可以取在间隔 $i+k=2k,\cdots,|i-k|=0$(相继值每步差一个单位)中的任何值. 显然 l 是一个整数,正如它在轨道角动量场合应该是的那样. 状态的简并度也被正确地重新产生:$\hat{I}_z$ 和 $\hat{K}_z$ 可以各自有 $(2k+1)$ 个独立本征值,因此总共有 $(2k+1)^2$ 个状态. 而且,在前一章里我们认出 $\hat{\boldsymbol{L}}$ 是一个轴矢量,在空间反射下不改变它的符号. 但是由(14.7)显然地 $\hat{\boldsymbol{M}}$ 是一个极矢量,它改变符号. 我们因此预料由对称性算符 $\hat{L}$ 和 $\hat{M}$ 表征的状态不需要有确定的宇称. 这确实如此,因为在氢原子中偶和奇的 l 的状态是简并的.

14.4 经典的各向同性谐振子

三维各向同性谐振子由哈密顿量

$$H=p^2/2m+\frac{1}{2}K\boldsymbol{r}^2 \tag{14.36}$$

来描写. 一个特殊的经典轨道是一个半轴为 a 和 b 的椭圆. 长半轴与 x 轴形成一个 α 角(看图 14.2). 正像在开普勒问题中一样,H 和 $\boldsymbol{L}$ 是运动常数,其值为

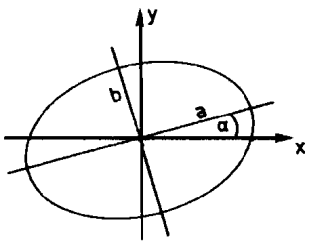


图 14.2 经典简谐振子的轨道. 力心在这椭圆的中心.

$$E=\frac{1}{2}K(a^2+b^2) \tag{14.37}$$

$$\boldsymbol{L}^2=mKa^2b^2 \tag{14.38}$$

轨道是封闭的这件事再次提示有某个别的运动常数存在,它也可以用来表示角 α. 但是比较相应的图(图 14.1 和图 14.2),这里有惊人的差别:在开普勒问题中力的中心是椭圆的焦点,而在这个问题中是它的中心. 因此在开普勒问题中方向 OA 和 OP 是不等价的,而且短半轴不是一个对称元素. 与此相反在谐振子问题中沿着长半轴的两个方向如同沿着短半轴的两个方向都是好的对称元素. 我们因此预料这个外加的运动常数不是一个矢量(如在开普勒问题中),而是一个四极张量. 我们得到

$$Q_{xy}=\frac{1}{2}a(a^2-b^2)\sin 2\alpha\quad ,\quad Q_{yz}=Q_{xz}=0$$

$$Q_0=\frac{1}{2}a/\sqrt{3}\,(a^2+b^2)\quad ,\quad Q_1=\frac{1}{2}a(a^2-b^2)\cos 2\alpha \tag{14.39}$$

正如由图 14.2 已经预料到的,如果 α 被 $\alpha+\beta$ 代替;或者如果 a 和 b 交换,同时 α 被 $\alpha\pm\frac{1}{2}\pi p$ 代替,张量的分量保持不变.

14.4.1　量子力学各向同性谐振子

由于这个量子力学问题在直角坐标中是可分离变量的，能级很容易被发现为

$$E_n=(n+\frac{3}{2})\hbar\sqrt{K/m},\qquad n=n_x+n_y+n_z$$
$$n_x,n_y,n_z=0,1,2,\cdots \tag{14.40}$$

显然状态是$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$重简并的. 这些状态的宇称是正或负的，依赖于 n 是偶或奇的. 这样仅可能的 l 值只是 $n,n-2,\cdots,$ 直到 1 或 0，而且每个 l 只出现一次. 可以表明在 SU(3)中可能由 $\hat{\boldsymbol{L}}$ 和四极矩张量构造一个卡西米尔算符. 应用空间表象我们可以找到关系

$$\hat{C}=\hat{\boldsymbol{L}}^2/\hbar^2+m\boldsymbol{K}/(\hbar^2a^2)(Q_{xy}^2+Q_{yz}^2+Q_{zx}^2+Q_0^2+Q_1^2)$$
$$=-3+\frac{1}{3}\hbar^2\left(\sqrt{mK}\boldsymbol{r}^2+\hat{\boldsymbol{p}}^2/\sqrt{mK}\right)^2 \tag{14.41}$$

如果我们用哈密顿量表示括号里的量，我们发现

$$\hat{C}=-3+4m/(3\hbar^2K)\hat{H}^2 \tag{14.42}$$

代入本征值(14.40)，对第 n 个本征值给出

$$C=\frac{4}{3}(n^2+3n) \tag{14.43}$$

因为 SU(3)秩为 2，有两个卡西米尔算符，它们能用两个参数 λ 和 μ 表示，并且它们取值 0,1,2,…. 用这些参数对卡西米尔算符之一的一般表达式为

$$C=\frac{4}{3}(\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2+3\lambda+3\mu) \tag{14.44}$$

与(14.43)比较表明，只有$(\lambda,\mu)=(n,0)$的 SU(3)表示被各向同性谐振子实现. 这几种情况稍稍类似于在氢原子的情况，在那里只有 $i=k$ 的 SO(4)表示被实现. 与氢原子相反我们看到在各向同性谐振子中没有宇称混合，因为在每组简并态中的 l 值要不都是偶的要不都是奇的. 这是我们所预料的，因为所有几个生成元，即 $\hat{\boldsymbol{L}}$ 的三个分量和四极矩阵张量的五个分量在空间反射下都不改变符号. 各向同性谐振子的群论分类在壳模型[①]的框架中解释轻原子核的结构时起着重要作用.

练习 14.1　氢原子的能量和径向角动量

问题　推导关系(14.2)

---

① 例如看 J. M. Eisenberg, W. Greiner: *Naclear Theory, Vol Ⅱ: Microscopic Theory of the Nucleus*，第二版(North-Holland, Amsterdam 1972).

解 在球坐标里,哈密顿量(14.1)给出为

$$H=\frac{p_r^2}{2\mu}+\frac{L^2}{2\mu r^2}-\frac{\kappa}{r} \tag{1}$$

在远日点 r_a 和近日点 r_p,径向动量 $P_r=0$,所以我们对总能量有两个方程

$$E=\frac{L^2}{2\mu r_a^2}-\frac{\kappa}{r_a} \quad \text{(远日点)} \tag{2a}$$

$$E=\frac{L^2}{2\mu r_p^2}-\frac{\kappa}{r_p} \quad \text{(近日点)} \tag{2b}$$

如果我们用 r_p^2 除(2a),用 r_a^2 除(2b),并随后让它们相减,不知道的角动量就被消掉了,得出

$$E(r_a+r_p)=-\kappa \tag{3}$$

另外,直接将(2)式相减,有

$$\frac{L^2}{2\mu}(r_a+r_p)=\kappa r_a r_p \tag{4}$$

借助于几何关系 $r_a=a+f, r_p=a-f$ 和 $f=(a^2-b^2)^{1/2}$,我们发现

$$r_p+r_a=2a \quad , \quad r_a r_p=a^2-f^2=b^2 \tag{5}$$

这样方程(3)和(4)就给出所要的结果

$$E=-\frac{\kappa}{2a} \tag{6}$$

$$L^2=2\mu\kappa r_a r_p/(r_a+r_p)=\mu\kappa b^2/a=\mu\kappa a(1-e^2) \tag{7}$$

(练习 14.1 完)

练习 14.2 龙格-楞次矢量

问题 证明龙格-楞次(Runge-Lenz)矢量可以被写成形为

$$\hat{M}=\kappa e\boldsymbol{r}_p/r_p, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{r}_p$ 为由椭圆轨道中心指向近日点的矢量和 e 是离心率.

解 我们从(14.3)开始.因为 $\hat{\boldsymbol{M}}$ 是一个运动常数,我们可以对 $r=r_p$ 来估计右方,并且因为关系 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{L}$ 在轨道的每一点形成一个矢量的右手系.在近日点 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{p}$ 是垂直的,也就是 $\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L}$ 指向 $\boldsymbol{r}$ 同样的方向.这可以用双重叉乘的一般规则很容易地看出来:

$$\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{r}=\boldsymbol{p}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})=\boldsymbol{r}p^2-\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}) \tag{2}$$

在近日点给出

$$(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L})_p=\boldsymbol{r}_p p^2=\boldsymbol{r}_p L^2/r_p^2 \tag{3}$$

借助于(3),应用 $r_p=a-f=a(1-e)$ 我们有

$$\frac{1}{\mu}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L})_p=\boldsymbol{r}_p\frac{\kappa a(1-e^2)}{a(1-e)r_p}=\boldsymbol{r}_p\kappa(1+e)/r_p \tag{4}$$

这使我们能对 $\boldsymbol{M}$ 写出所要的结果,即

$$\hat{M}=\frac{1}{\mu}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L})_p-\frac{\kappa\boldsymbol{r}_p}{r_p}=\kappa e\frac{\boldsymbol{r}_p}{r_p} \tag{5}$$

(练习 14.2 完)

练习 14.3　龙格-楞次矢量的性质

问题　推导关系(14.6).

解　首先因为一个包括两个全同矢量的混合积总为 0,我们写下

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{M}&=\frac{1}{\mu}\boldsymbol{L}\cdot(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L})-\frac{\kappa}{r}\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{r}\\&=-\frac{\kappa}{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{r}=0\,,\end{aligned}\tag{1}$$

来证明第一个式子. 下一步我们通过

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}^2&=\frac{1}{\mu^2}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L})^2-2\frac{\kappa}{\mu r}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L})\cdot\boldsymbol{r}+\kappa^2\\&=\frac{1}{\mu^2}[\boldsymbol{p}^2\boldsymbol{L}^2-(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{L})^2]-2\frac{\kappa}{\mu r}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{L}+\kappa^2\\&=\frac{1}{\mu^2}(\boldsymbol{p}^2\boldsymbol{L}^2)-2\frac{\kappa}{\mu r}\boldsymbol{L}^2+\kappa^2,\end{aligned}\tag{2}$$

来建立第二个关系,又一次因为 $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{L}=\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})=0$. 头两项可以合起来产生

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}^2&=\frac{2}{\mu}\boldsymbol{L}^2\left(\frac{\boldsymbol{p}^2}{2\mu}-\frac{\kappa}{\gamma}\right)+\kappa^2\\&=\frac{2}{\mu}\boldsymbol{L}^2H+\kappa^2=\frac{2}{\mu}E\boldsymbol{L}^2+\kappa^2\end{aligned}\tag{3}$$

(练习 14.3 完)

练习 14.4　$\hat{\boldsymbol{M}}$ 和 $\hat{H}$ 的对易关系

问题　对 $\hat{H}=\dfrac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m}-\dfrac{c}{r}$ 和 $\hat{\boldsymbol{M}}=\dfrac{1}{2\mu}(\hat{\boldsymbol{p}}\times\hat{\boldsymbol{L}}-\hat{\boldsymbol{L}}\times\hat{\boldsymbol{p}})-c\dfrac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r}$ 证明量子力学关系

$$[\hat{\boldsymbol{M}},\hat{H}]_-=0$$

解　因为在本章余下的练习中我们只需要处理算符,混淆是不大可能的,所以为了方便起见从现在起我们去掉算符符号. 已经众所周知,上面的哈密顿量跟角动量算符对易,对所有 i,$[H,L_i]=0$. 下面我们计算两个必需的辅助的对易关系:

$$\begin{aligned}[p_i,H]_-&=-c\left[p_i,\frac{1}{r}\right]_-\\&=\mathrm{i}\hbar c\left(\partial_i\frac{1}{r}-\frac{1}{r}\partial_i\right)=-\mathrm{i}\hbar c\frac{x_i}{r^3}\\\left[\frac{x_i}{r},\sum_k p_k^2\right]_-&=-\hbar^2\sum_k\left\{\frac{x_i}{r}\partial_k^2-\partial_k^2\frac{x_i}{r}\right\}\end{aligned}\tag{1}$$

现在我们有

$$\begin{aligned}\sum_k\partial_k\left\{\partial_k\frac{x_i}{r}\right\}&=\sum_k\partial_k\left\{\frac{\delta_{ik}}{r}-\frac{x_ix_k}{r^3}\frac{x_i}{r}\partial_k\right\}\\&=\sum_k\left\{-2\delta_{ik}\frac{x_k}{r^3}+2\frac{\delta_{ik}}{r}\partial_k+3\frac{x_ix_k^2}{r^5}-2\frac{x_ix_k}{r^3}\partial_k-\frac{x_i}{r^3}+\frac{x_i}{r}\partial_k^2\right\}\end{aligned}$$

因此

$$\left[\frac{x_i}{r},\sum_k p_k^2\right]_-=2\hbar^2\left(-\frac{x_i}{r^3}+\frac{1}{r}\partial_i-\frac{x_i}{r^3}\sum_k x_k\partial_k\right) \tag{2}$$

对问题中的对易关系,我们有

$$[M_i,H]_-=\frac{1}{2\mu}[(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{p})_i,H]_--c\left[\frac{x_i}{r},H\right]_- \tag{3}$$

并且第二个对易关系可以进一步约化给出

$$-\frac{c}{2m}\left[\frac{x_i}{r},\sum_k p_k^2\right]_-$$

它正好相应于(2).第一个对易关系随后以以下的方式处理:

$$[(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{p}-\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{p})_i,H]_-=\sum_{jk}\varepsilon_{ijk}[(p_jL_k-L_jp_k),H]_- \tag{4}$$

因为 H 和 $\boldsymbol{L}$ 对易,H 可以移到最左边的位置(注意(1))所以

$$\begin{aligned}p_jL_kH-L_jp_kH&=p_jHL_k-L_jHp_k+\mathrm{i}\hbar cL_j\frac{x_k}{r^3}\\&=Hp_jL_k-HL_jp_k+\mathrm{i}\hbar c\left(L_j\frac{x_k}{r^3}-\frac{x_j}{r^3}L_k\right)\end{aligned}$$

现在我们代入 $L_i=\sum_{m,n}\varepsilon_{imn}x_mp_n$ 和类似的表达式,得到

$$\begin{aligned}[(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{p})_i,H]_-&=\mathrm{i}\hbar c\sum_{jkmn}\varepsilon_{ijk}\\&\times\{\varepsilon_{jmn}x_mp_n\frac{x_k}{r^3}-\frac{x_j}{r^3}\varepsilon_{kmn}x_mp_n\}\end{aligned} \tag{5}$$

为进一步处理,我们应用简单推出的辅助对易关系

$$\left[p_n,\frac{x_k}{r^3}\right]_-=-\mathrm{i}\hbar\left(\frac{\delta_{kn}}{r^3}-3\frac{x_kx_n}{r^5}\right)$$

因此有

$$\begin{aligned}&[(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{p})_i,H]_-\\&=-(\mathrm{i}\hbar)^2c\sum_{jkmn}\varepsilon_{ijk}\left\{\varepsilon_{jmn}\frac{x_mx_k}{r^3}-\varepsilon_{kmn}\frac{x_jx_m}{r^3}\right\}\partial_n\\&\quad-(\mathrm{i}\hbar)^2c\sum_{jkm}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jmk}\frac{x_m}{r^3}+3(\mathrm{i}\hbar)^2c\sum_{jkmn}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jmn}\frac{x_kx_mx_n}{r^5}\end{aligned} \tag{6}$$

$\sum_{m,n}\varepsilon_{jmn}x_mx_n$ 对所有 j 为 0,通过明显地标出指标这很容易看出,因为在(6)的最后一项里,$[x_m,x_n]_-=0$.在第一个求和中的第二项指标 j 和 k 可以变换(应用 $\varepsilon_{ikj}=-\varepsilon_{ijk}$),再一次给出这个求和中的第一项.现在我们有

$$\begin{aligned}-2c(\mathrm{i}\hbar)^2\sum_{jkmn}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jmn}\frac{x_mx_k}{r^3}\partial_n&=-2c(\mathrm{i}\hbar)^2\sum_{kmn}(\delta_{km}\delta_{in}-\delta_{kn}\delta_{im})\frac{x_mx_k}{r^3}\partial_n\\&=2c(\mathrm{i}\hbar)^2\left(\frac{x_i}{r^3}\sum_k x_k\partial_k-\frac{1}{r}\partial_i\right)\end{aligned}$$

这里利用了关系

$$\sum_i\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn}=\delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{km} \tag{7}$$

这可以很容易证明.借助于这个关系(6)中第二项也可以被简化,即

$$-(\mathrm{i}\hbar)^2\sum_{jkm}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jmn}\frac{x_m}{r^3}=-(\mathrm{i}\hbar)^2c\sum_{jm}(\delta_{ij}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jj})\frac{x_m}{r^3}$$

$$=-(\mathrm{i}\hbar)^2c\left(\frac{x_i}{r^3}-3\frac{x_i}{r^3}\right)=2c(\mathrm{i}\hbar)^2\frac{x_i}{r^3}$$

收集所有有贡献的项，一方面利用(6)，我们发现

$$\frac{1}{2m}[(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{p})_i,H]_-=\frac{c}{m}(\mathrm{i}\hbar)^2\left(\frac{x_i}{r^3}-\frac{1}{r}\partial_i+\frac{x_i}{r^3}\sum_k x_k\partial_k\right)\tag{8}$$

而另一方面，由(2)有

$$-c\left[\frac{x_i}{r},H\right]_-=-\frac{c}{m}(\mathrm{i}\hbar)^2\left(\frac{x_i}{r^3}-\frac{1}{r}\partial_i+\frac{x_i}{r^3}\sum_k x_k\partial_k\right)\tag{9}$$

把(8)和(9)加起来就给出$[M_i,H]_-=0$.（**练习 14.4 完**）

练习 14.5　标积 $\hat{\boldsymbol{L}}\cdot\hat{\boldsymbol{M}}$

问题　利用在练习 14.4 中给出的 $\hat{\boldsymbol{M}}$ 的定义证明量子力学关系 $\hat{\boldsymbol{L}}\cdot\hat{\boldsymbol{M}}=0$.

解　a) 因为

$$\sum_i L_i\frac{x_i}{r}=\sum_{imn}\varepsilon_{imn}x_mp_n\frac{x_i}{r}=\sum_{imn}\varepsilon_{imn}p_nx_m\frac{x_i}{r}+\mathrm{i}\hbar\sum_{imn}\varepsilon_{imn}\delta_{mn}\frac{x_i}{r}\tag{1}$$

$\sum_{i,n}\varepsilon_{imn}x_mx_i\equiv0$，第一项为 0，因为 $\varepsilon_{imn}\equiv0$ 第二项也为 0. 我们有 $\hat{\boldsymbol{L}}\cdot\boldsymbol{r}/r=0$.

b) 进而我们有 $\boldsymbol{L}\cdot(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L})-\boldsymbol{L}\cdot(\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{p})=0$，由于

$$\sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}L_i(p_jL_k-L_jp_k)=\sum_iL_i\sum_{jkmn}\varepsilon_{ijk}(\varepsilon_{kmn}p_jm_mp_n-\varepsilon_{jmn}x_mp_np_k)$$

$$=\sum_iL_i\sum_{jmn}(\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm})p_jx_mp_n-\sum_iL_i\sum_{kmn}(\delta_{km}\delta_{in}-\delta_{kn}\delta_{im})x_mp_np_k$$

$$=\sum_iL_i\Big\{\sum_j(p_jx_ip_j-p_jx_jp_i-x_jp_ip_j+x_ip_jp_j)\Big\}\tag{2}$$

（在最后一步中我们改变了求和指标从 k 到 j）. 应用 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{p}$ 的对易关系，$[p_j,x_i]_-=-\mathrm{i}\hbar\delta_{ij}$，我们最终得到

$$\sum_iL_i\Big\{\sum_j(p_jx_ip_j-p_jx_jp_j-x_jp_ip_j+x_ip_j^2)\Big\}$$

$$=\sum_{ijmn}\varepsilon_{imn}x_m\Big(pn\underbrace{p_jx_i}_{x_ip_j-\mathrm{i}\hbar\delta_{ij}}p_j-p_np_j\underbrace{x_jp_i}_{p_ix_j+\mathrm{i}\hbar\delta_{ij}}-pn\underbrace{x_jp_i}_{p_ix_j+\mathrm{i}\hbar\delta_{ij}}p_j+\underbrace{p_nx_i}_{x_ip_n-\mathrm{i}\hbar\delta_{ni}}p_j^2\Big)$$

$$=\sum_{ijmn}\varepsilon_{imn}x_m\Big(\underbrace{p_nx_i}_{x_ip_n-\mathrm{i}\hbar\delta_{in}}p_j^2-\mathrm{i}\hbar\delta_{ij}p_np_j-p_np_ip_jx_j-\mathrm{i}\hbar\delta_{ij}p_np_i$$

$$-\underbrace{p_np_i}_{\substack{=0\text{ 对}n,i\\\text{求和后}}}x_jp_j-\mathrm{i}\hbar p_n\delta_{ij}p_j+\underbrace{x_i}_{\substack{=0\text{ 对}m,i\\\text{求和后}}}p_np_j^2-\mathrm{i}\hbar\underbrace{\delta_{ni}}_{\substack{=0\text{ 因为}\\\varepsilon_{imi}=0}}p_j^2\Big)$$

$$=\sum_{ijmn}\varepsilon_{imn}x_m\Big(\underbrace{x_i}_{\substack{=0\text{ 对}i,m\\\text{求和后}}}p_np_j^2-\mathrm{i}\hbar\underbrace{\delta_{ni}}_{\substack{=0\text{ 因为}\\\varepsilon_{imi}=0}}p_j^2-\mathrm{i}\hbar\delta_{ij}p_np_j$$

$$-\underbrace{p_n}_{\substack{=0\text{ 对}n,i\\\text{求和后}}}p_ip_jx_j-\mathrm{i}\hbar\delta_{ij}p_np_j-\mathrm{i}\hbar p_n\delta_{ij}p_j\Big)$$

$$= \sum_{ijmn} \varepsilon_{imn} x_m (-3\mathrm{i}\hbar\, \delta_{ij} p_n p_j) = 0 \tag{3}$$

因为

$$\sum_j \delta_{ij} p_j = p_i,\ \sum_{imn} \varepsilon_{imn} x_m p_n p_i = \sum_m x_m \sum_{in} \varepsilon_{imn} p_n p_i = 0$$

注意 $\sum_k \delta_{kk} = 3$,并且由在练习 14.4 中对位置算符情况给出的同样的理由,最后一个和为 0.(**练习 14.5 完**)

练习 14.6 决定 $\hat{M}^2$

问题 证明量子力学关系 $\hat{M} = 2\hat{H}/\mu(\hat{L}+\hbar^2)+c^2$. $\hat{M}$ 的定义看练习 14.4.

解 首先我们证明辅助关系

$$(\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{p})_i = \sum jk\varepsilon_{ijk} L_j p_k = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} p_k L_j + \mathrm{i}\hbar \sum_{jkM} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jkm} p_m$$

$$= -(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L})_i + 2\mathrm{i}\hbar\, p_i, \tag{1}$$

这里利用了 $\sum_{jk} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jkm} = 2\delta_{im}$和众所周知的对易关系$[L_j, P_k]_- = \mathrm{i}\hbar \sum_m \varepsilon_{jkm} p_m$. 因此我们发现

$$\hat{\boldsymbol{M}}^2 = \left\{ \frac{1}{2\mu}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L} - \boldsymbol{L}\times\boldsymbol{p}) - c\frac{\boldsymbol{r}}{r} \right\}^2$$

$$= \frac{1}{(2\mu)^2} 4(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L} - \mathrm{i}\hbar\,\boldsymbol{p})^2 - \frac{c}{\mu}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L} - \mathrm{i}\hbar\,\boldsymbol{p})\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

$$- \frac{c}{\mu}\frac{\boldsymbol{r}}{r}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L} - \mathrm{i}\hbar\,\boldsymbol{p}) + c^2\frac{\boldsymbol{r}^2}{r^2} \tag{2}$$

在右边的第一项二次表达式为

$$(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L} - \mathrm{i}\hbar\,\boldsymbol{p})^2 = (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L})^2 - \mathrm{i}\hbar(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L})\cdot\boldsymbol{p} - \mathrm{i}\hbar\,\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L}) - \hbar^2\boldsymbol{p}^2$$

这些项现在分别被计算(参看练习 14.4 方程(7)). 首先我们得到

$$(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L})^2 = \sum_{ijkmn} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{inm} p_j L_k p_n L_m$$

$$= \sum_{ikmn} (\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kn}) p_j L_k p_n L_m$$

$$= \sum_{jk} (p_j L_k p_j L_k - p_j L_k p_k L_j)$$

利用 $\sum_k L_k p_k = \sum_{k,m,n} \varepsilon_{kmn} x_m p_n p_k = 0$,第二项为 0,而在第一项中 L_k 和 p_j 的对易关系给出

$$(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L})^2 = \sum_{jk} p_j^2 L_k^2 + \mathrm{i}\hbar \sum_{jkm} \varepsilon_{kjm} p_j p_m L_k = \boldsymbol{p}^2\boldsymbol{L}^2 \tag{3}$$

其中后一项又为 0. 进而我们有

$$\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L}) = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} p_i p_j L_k \equiv 0 \tag{4}$$

它是跟经典场合同样的,而

$$(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L})\cdot\boldsymbol{p} = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} p_i L_k p_i = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} p_j p_i L_k + \mathrm{i}\hbar \sum_{ijkm} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kim} p_j p_m = 2\mathrm{i}\hbar\,\boldsymbol{p}^2 \tag{5}$$

因为第一个和为 0,而关系 $\sum_{k,i} \varepsilon_{kij}\varepsilon_{kim} = 2\delta_{jm}$可以用在第二个和中. 收集这些项给出

$$(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L} - \mathrm{i}\hbar\,\boldsymbol{p})^2 = \boldsymbol{p}^2\boldsymbol{L}^2 - 2(\mathrm{i}\hbar)\boldsymbol{p}^2 - \hbar^2\boldsymbol{p}^2 = \boldsymbol{p}^2(\boldsymbol{L}^2+\hbar)^2 \tag{6}$$

下一个项被如下处理：

$$(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L})\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}=\sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}p_jL_k\frac{x_i}{r}$$

$$=\sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}p_j\frac{x_i}{r}L_k+\mathrm{i}\hbar\sum_{ijkm}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kim}p_j\frac{x_m}{r}$$

$$=\sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}\frac{x_i}{r}p_jL_k-\mathrm{i}\hbar\sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}\frac{\delta_{ij}}{r}-\frac{x_ix_j}{r^3}L_k+2\mathrm{i}\hbar\,\boldsymbol{p}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

(在倒数第二行中利用了对易关系$[x_i/r,L_k]_-=\mathrm{i}\hbar\sum_m\varepsilon_{ikm}x_m/r$).

然而第二个和因为$\varepsilon_{iik}\equiv0$和$\sum_{i,j}\varepsilon_{ijk}x_ix_i\equiv0$而为 0. 用$L_k$代替$\sum_{i,j}\varepsilon_{ijk}x_ip_j$给出

$$(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L})\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}=\frac{1}{r}\sum_k L_kL_k+2\mathrm{i}\,\hbar\,\boldsymbol{p}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}\tag{7}$$

总起来我们发现

$$\frac{\boldsymbol{r}}{r}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L}-\mathrm{i}\hbar\,\boldsymbol{p})+(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L}-\mathrm{i}\hbar\,\boldsymbol{p})\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}=\frac{1}{r}\boldsymbol{L}^2-\mathrm{i}\hbar\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot\boldsymbol{p}+\frac{1}{r}\boldsymbol{L}^2$$

$$+2\mathrm{i}\hbar\,\boldsymbol{p}\frac{\boldsymbol{r}}{r}-\mathrm{i}\hbar\,\boldsymbol{p}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

再利用$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}/r=\boldsymbol{r}/r\cdot\boldsymbol{p}-2\mathrm{i}\hbar/r$我们得到上式等于

$$\frac{2}{r}\boldsymbol{L}^2-\frac{2(\mathrm{i}\,\hbar)^2}{r}=\frac{2}{r}(\boldsymbol{L}^2+\hbar^2)\tag{8}$$

收集所有这些部分的结果，我们最终得到

$$\boldsymbol{M}^2=\frac{1}{(2\mu)^2}4\boldsymbol{p}^2(\boldsymbol{L}^2+\hbar^2)-\frac{c}{\mu}\frac{2}{r}(\boldsymbol{L}^2+\hbar^2)+c^2$$

因而

$$\boldsymbol{M}^2=\frac{2}{\mu}\left(\frac{p^2}{2\mu}-\frac{c}{r}\right)(\boldsymbol{L}^2+\hbar^2)+c^2,\quad \boldsymbol{M}^2=\frac{2}{\mu}H(\boldsymbol{L}^2+\hbar^2)+c^2\tag{9}$$

(练习 14.6 完)

练习 14.7　证明$[\hat{M}_i,\hat{L}_j]_-$的对易关系

问题　证明对易关系

$$[\hat{M}_i,\hat{L}_j]_-=\mathrm{i}\,\hbar\sum_K\varepsilon_{ijk}\hat{M}_k$$

解　方便的是对它的分量可以明显地证明这个关系，例如

$$[M_x,L_y]_-=\mathrm{i}\hbar M_z=\left[\frac{1}{\mu}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L}-\mathrm{i}\,\hbar\,\boldsymbol{p})_x-c\,\frac{x}{r},L_y\right]_-$$

$$=\frac{1}{\mu}(p_yL_zL_y-p_zL_yL_y-L_yp_yL_z+L_yp_zL_y)$$

$$+\mathrm{i}\,\frac{\hbar}{\mu}(L_yp_x-p_xL_y)+c\left(L_y\frac{x}{r}-\frac{x}{r}L_y\right)\tag{1}$$

我们有

$$p_yL_zL_y=p_yL_yL_z-\mathrm{i}\hbar\,p_yL_x=L_ypIyL_z-\mathrm{i}\hbar\,p_yL_x$$

和

$$p_z L_y L_y = L_y p_z L_y - \mathrm{i}\hbar\, p_x L_y$$

而因此

$$p_y L_z L_y - p_z L_y L_y - L_y p_y L_z + L_y p_z L_y = \mathrm{i}\hbar(p_x L_y - p_y L_x)$$

此外

$$L_y p_x - p_x L_y = -\mathrm{i}\hbar\, p_z, \quad L_y \frac{x}{r} - \frac{x}{r} L_y = -\mathrm{i}\hbar \frac{z}{r}$$

这里利用了在练习 14.6 中已经提到的对易关系$[L_i, p_k]_- = \mathrm{i}\hbar \sum_m \varepsilon_{ikm} p_m$. 结果我们得到

$$[M_x, L_y]_- = \mathrm{i}\frac{\hbar}{\mu}(p_x L_y - p_y L_x - \mathrm{i}\hbar\, p_z) - \mathrm{i}\hbar c \frac{z}{r} = \mathrm{i}\hbar M_z \tag{2}$$

我们还需要证明的是,例如$[M_x, L_x] = 0$. 接下去我们写出

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{\mu}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L} - \mathrm{i}\hbar\boldsymbol{p})_x - c\frac{x}{r}, L_x\right]_- \\
&= \frac{1}{\mu}(p_y L_z L_x - p_z L_y L_x - L_x p_y L_z + L_x p_z L_y) \\
&\quad + \mathrm{i}\frac{\hbar}{\mu}(L_x p_x - p_x L_x) + c\left(L_x \frac{x}{r} - \frac{x}{r} L_x\right)
\end{aligned} \tag{3}$$

它导致

$$\begin{aligned}
p_y L_z L_x &= p_y L_x L_z + \mathrm{i}\hbar\, p_y L_y = L_x p_y L_z - \mathrm{i}\hbar\, p_z L_z + \mathrm{i}\hbar\, p_y L_y \\
p_y L_z L_x &= p_z L_x L_y - \mathrm{i}\hbar\, p_z L_z = L_x p_z L_y + \mathrm{i}\hbar\, p_y L_y - \mathrm{i}\hbar\, p_z L_z
\end{aligned}$$

给出

$$p_y L_z L_x - p_z L_y L_x - L_x p_y L_z + L_x p_z L_y \equiv 0 \tag{4}$$

进而 $L_x p_x - p_x L_x = 0$,但也有 $L_x x/r - x/r L_x \equiv 0$(因为$[x_i/r, L_j]_- = \mathrm{i}\hbar \sum_k \varepsilon_{ijk} x_k/r$). 所以我们最后得到

$$[M_x, L_x] = 0$$

其余的对易关系可以用循环置换 x, y 和 z 来推出. **(练习 14.7 完)**

练习 14.8 证明$[\hat{M}_i, \hat{M}_j]_-$的对易关系

问题 证明对易关系

$$[\hat{M}_i, \hat{M}_j]_- = \frac{2\mathrm{i}\hbar}{\mu}\hat{H} \sum_k \varepsilon_{ijk}\hat{L}_k.$$

解 正如在上一个问题中一样,我们用对它的分量证明来进行

$$\begin{aligned}
&M_x M_y - M_y M_x \\
&= \left\{\frac{1}{\mu}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L} - \mathrm{i}\hbar\boldsymbol{p})_x - c\frac{x}{r}\right\}\left\{\frac{1}{\mu}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L} - \mathrm{i}\hbar\boldsymbol{p})_y - c\frac{y}{r}\right\} \\
&\quad - \left\{\frac{1}{\mu}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L} - \mathrm{i}\hbar\boldsymbol{p})_y - c\frac{y}{r}\right\}\left\{\frac{1}{\mu}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L} - \mathrm{i}\hbar\boldsymbol{p})_x - c\frac{x}{r}\right\} \qquad (1)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\mu^2}(p_y L_z - p_z L_y - \mathrm{i}\hbar\, p_x)(p_z L_x - p_x L_z - \mathrm{i}\hbar\, p_y) \tag{2a}$$

$$-\frac{1}{\mu^2}(p_zL_x-p_xL_z-\mathrm{i}\hbar p_y)(p_yL_z-p_zL_y-\mathrm{i}\hbar p_x) \tag{2b}$$

$$+\frac{c}{\mu}\left[\frac{y}{r}(p_yL_z-p_zL_y-\mathrm{i}\hbar p_x)-(p_yL_z-p_zL_y-\mathrm{i}\hbar p_x)\frac{y}{r}\right] \tag{2c}$$

$$+\frac{c}{\mu}\left[(p_zL_x-p_xL_z-\mathrm{i}\hbar p_y)\frac{x}{r}-\frac{x}{r}(p_zL_x-p_xL_z-\mathrm{i}\hbar p_y)\right] \tag{2d}$$

在完成(2a)和(2b)中的乘法后，我们结果得到 18 项. 所有跟 $\mathrm{i}\hbar p_x$ 或 $\mathrm{i}\hbar p_y$ 乘出来的项都相互消掉(可能我们必须交换项). 留下

$$\frac{1}{\mu^2}(p_yL_zp_zL_x-p_yL_zp_xL_z-p_zL_yp_zL_x+p_zL_yp_xL_z$$
$$-p_zL_xp_yL_z+p_zL_xp_zL_y+p_xL_zp_yL_z-p_xL_zp_zL_y)$$

我们有

$$\begin{aligned}
p_yL_zp_zL_x&=p_yp_zL_xL_z+\mathrm{i}\hbar p_yp_zL_y\\
&=p_zL_xp_yL_z+\mathrm{i}\hbar p_yp_zL_y-\mathrm{i}\hbar p_zp_zL_x\\
p_zL_xp_zL_y&=p_zp_zL_xL_y+\mathrm{i}\hbar p_zp_yL_y\\
&=p_zp_zL_yL_x-\mathrm{i}\hbar p_zp_yL_y+\mathrm{i}\hbar p_zp_zL_x\\
&=p_zL_yp_zL_x-\mathrm{i}\hbar p_zp_yL_y+\mathrm{i}\hbar p_zp_yL_y-\mathrm{i}\hbar p_zp_xL_x\\
p_xL_zp_yL_z&=p_xp_yL_zL_z-\mathrm{i}\hbar p_xp_xL_z\\
&=p_yL_zp_xL_z-\mathrm{i}\hbar p_xp_xL_z-\mathrm{i}\hbar p_yp_yL_z\\
p_zL_yp_xL_z&=p_zp_xL_yL_z-\mathrm{i}\hbar p_zp_zL_x\\
&=p_xL_zp_zL_y-\mathrm{i}\hbar p_zp_zL_x+\mathrm{i}\hbar p_zp_xL_x
\end{aligned}$$

所以，对(2a)和(2b)得到

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{i}\hbar}{\mu^2}(p_yp_zL_y-p_z^2-p_zp_yL_y+p_z^2L_z\\
&\quad-p_zp_xL_x-p_x^2L_z-p_y^2L_z-p_z^2L_z+p_zp_xL_x)\\
&=-\frac{\mathrm{i}\hbar}{\mu^2}\boldsymbol{p}^2L_z
\end{aligned} \tag{3}$$

现在考虑剩下的(2c)和(2d)的项，它们导致

$$p_zL_x\frac{x}{r}-p_xL_z\frac{x}{r}-\mathrm{i}\hbar p_y\frac{x}{r}-p_yL_z\frac{y}{r}+p_zL_y\frac{y}{r}+\mathrm{i}\hbar p_x\frac{y}{r}$$
$$-\frac{x}{r}p_zL_x+\frac{x}{r}p_xL_z+\mathrm{i}\hbar p_x\frac{x}{r}p_y+\frac{y}{r}p_yL_z-\frac{x}{r}p_zL_y-\mathrm{i}\hbar\frac{y}{r}p_x \tag{4}$$

这里我们发现

$$p_x\frac{y}{r}-p_y\frac{x}{r}+\frac{x}{r}p_y-\frac{y}{r}p_x\equiv 0$$

因为

$$p_x\frac{y}{r}=\frac{y}{r}p_x+\mathrm{i}\hbar\frac{yx}{r^3},\qquad -p_y\frac{x}{r}=-\frac{x}{r}p_y-\mathrm{i}\hbar\frac{xy}{r^3}$$

留在(4)中的项的差可以借助于

$$p_z L_x \frac{x}{r} = p_z \frac{x}{r} L_x = \frac{x}{r} p_z L_x + \mathrm{i}\hbar \frac{xz}{r^3} L_x$$

$$p_z L_z \frac{y}{r} = p_z \frac{y}{r} L_y = \frac{y}{r} p_z L_z + \mathrm{i}\hbar \frac{yz}{r^3} L_y$$

$$- p_x L_z \frac{x}{r} = - p_x \frac{x}{r} L_z - \mathrm{i}\hbar p_x \frac{y}{r}$$

$$= - \frac{x}{r} p_x L_z + \mathrm{i}\hbar \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right) L_z - \mathrm{i}\hbar p_x \frac{y}{r}$$

$$- p_y L_z \frac{y}{r} = - p_y \frac{y}{r} L_z - \mathrm{i}\hbar p_y \frac{x}{r}$$

$$= - \frac{y}{r} p_y L_z + \mathrm{i}\hbar \left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} \right) L_z - \mathrm{i}\hbar p_y \frac{x}{r}$$

而得到简化. 这使得剩余的项为

$$p_z L_x \frac{x}{r} - p_x L_z \frac{x}{r} - \frac{x}{r} p_z L_x + \frac{x}{r} p_x L_z - p_z L_z \frac{y}{r} + p_z L_y \frac{y}{r} + \frac{y}{r} p_y L_z + \frac{y}{r} p_z L_y$$

$$= \mathrm{i}\hbar \left(\frac{xz}{r^3} L_x + \frac{yz}{r^3} L_y + \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right) L_z + \left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} \right) L_z + \frac{x}{r} p_y - \frac{y}{r} p_x \right) \tag{5}$$

并且我们有

$$x L_x - y L_y = - \mathrm{i}\hbar (x(y\partial_z z \partial_y) + y(z\partial_x - x\partial_z))$$

$$= - \mathrm{i}\hbar z (y\partial_x - x\partial_y) = - z L_z$$

用 L_z 代替 $xp_y - yp_x$, 我们可以把(5)转化为

$$\mathrm{i}\hbar \left\{ - \frac{1}{r^3} (z^2 + x^2 + y^2) L_z + \frac{2}{r} L_z + \frac{1}{r} L_z \right\} = \mathrm{i}\hbar \frac{2}{r} L_z \tag{6}$$

收集(3)和(6)的部分结果, 我们最终得到

$$[M_x, M_y]_- = - 2\mathrm{i}\hbar \frac{\hbar}{\mu} \left(\frac{p^2}{2\mu} \right) L_z - \frac{c}{\mu} \frac{2\mathrm{i}\hbar}{r} L_z = - 2\mathrm{i} \frac{\hbar}{\mu} \left(\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} - \frac{c}{r} \right) L_z$$

$$= - 2\mathrm{i} \frac{\hbar}{\mu} H L_z \tag{7}$$

$[M_x, M_x]_- = 0$ 是显然的, 而其余对易关系可以用循环置换推出. (**练习 14.8 完**)

第 15 章　数学浏览：非紧致李群

15.1　非紧致李群的定义和例子

紧致和非紧致李群彼此差别在于它们的根本性质(它将被稍后讨论)，因此我们应该更完全地研究群的性质“紧致性”.

一个李群是紧致的，如果它的参数域是紧致的. 这一非拓扑的定义是稍为简单化了一些，但是完全适合于我们的目的. 在参数域是$\mathbb{R}^n$的子集的情况，由于汉纳-鲍雷尔定理，这意味着这个参数域必须是闭的和有界的.

作为一个例子我们考虑 SO(3)：这个李群的每个元素可以被写为 $\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{\phi}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})$，其中 $\boldsymbol{\phi}=(\phi_x,\phi_y,\phi_z)$代表三个实参数. 如同第 1.9 节中讨论过的，SO(3)的参数域是所有端点处在一个半径为 π 的球内的旋转矢量的集合，所以 $|\boldsymbol{\phi}|\leqslant\pi$. 一个球是紧致集合，而因此 SO(3)是紧致的.

SU(2)的情况是类似的，它的元素由

$$\exp\left(\frac{-\mathrm{i}}{2}\boldsymbol{\phi}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}\right)=\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\mathbb{1}-\mathrm{i}\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}} \tag{15.1}$$

给出(其中单位矢量 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{\phi}/|\boldsymbol{\phi}|=\boldsymbol{\phi}/\phi$). 因为 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的周期性，我们只需要一个 $|\boldsymbol{\phi}|\leqslant 2\pi$ 的区域，而因此旋转矢量 $\boldsymbol{\phi}$ 填满一个半径 2π 的球. SU(2)紧致性的另一个证明将在练习 15.1 中给出.

作为第一个非紧致李群的例子，我们取 SU(1,1). 为了更好地理解这个群的定义，我们再一次转向李群 SU(n)的定义：这些是幺正的 $n\times n$ 矩阵(n 行，n 列)，其行列式为 1. 对 $\hat{U}\in\mathrm{SU}(n)$，因此有 $\hat{U}^{+}=\hat{U}^{-1}$.

现在让我们考虑变换 $\hat{U}$ 对带有复分量 $z_i(i=1,\cdots,n)$的 n 维矢量 $\boldsymbol{Z}=(z_1,\cdots,z_n)^T$ 的作用. 我们得到一个矢量 $\boldsymbol{Z}'=\hat{U}\boldsymbol{Z}$ 和

$$\|\boldsymbol{Z}\|^2=(\boldsymbol{Z}')^{\dagger}\boldsymbol{Z}'=\boldsymbol{Z}^{\dagger}\hat{U}^{\dagger}\hat{U}\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{Z}^{\dagger}Z=\|\boldsymbol{Z}\|^2$$

(因为 $\hat{U}^{+}=\hat{U}^{-1}$). 这样，每个 SU(n)的矩阵以这样的方式变换 n 维复矢量，使得它们的模不变，其中这个模定义为

$$\|\boldsymbol{Z}\|=\sqrt{|Z_1|^2+\cdots\cdots+|Z_n|^2}$$

由于我们有

$$\| \boldsymbol{Z} \| = \sqrt{\boldsymbol{Z}^{\dagger}\, \hat{g} \boldsymbol{Z}} \tag{15.2}$$

其中 $\hat{g}$ 是所谓的度规张量,如果度规张量正好是 n 维单位矩阵,即

$$\hat{g} = \mathbb{1}_{(n)}$$

那么我们就得到这样一个模.

作为 SU(n)的推广,我们可定义李群 SU(p,q)(其中 $p+q=n$),它把 n 维复矢量如此变换,使得模是不变的,但是这个模现在以另外的方式来定义:

$$\| \boldsymbol{Z} \| = \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_p|^2 - |z_{p+1}|^2 - \cdots - |z_n|^2}$$

这个模相应于度规张量

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{(p)} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_{(q)} \end{pmatrix} \tag{15.3}$$

对 $\hat{U} \in \mathrm{SU}(1,1)$,我们因而有

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \hat{U} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \qquad |z_1'|^2 - |z_1'|^2 = |z_1|^2 - |z_2|^2$$

而且,$\hat{U} \in \mathrm{SU}(p,q)$有行列式 1.

练习 15.1 SU(2)矩阵的表示

问题 证明每个 $\hat{U} \in \mathrm{SU}(2)$可以被写成

$$\hat{U} = u_0 \hat{\sigma}_0 + \mathrm{i} \sum_{k=1}^{3} u_k \hat{\sigma}_k \qquad (u_v \in \mathbb{R}\,; \hat{\sigma}_0 = \mathbb{1}_{(2)})$$

其中 $u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$,并证明 SU(2)的紧致性.

解 我们用(15.1):

$$\hat{U} = \mathbb{1}_{(2)} \cos(\phi/2) - \mathrm{i} \boldsymbol{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \sin(\phi/2) = \hat{\sigma}_0 \cos(\phi/2) - \mathrm{i} \sum_{k+1}^{3} n_k \hat{\sigma}_k \sin(\phi/2)$$

因此

$$\hat{U} = u_0 \hat{\sigma}_0 + \mathrm{i} \sum_{k=1}^{3} u_k \hat{\sigma}_k$$

其中 $u_0 = \cos(\phi/2)$,$u_k = -n_k \sin(\phi/2)$.

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{3} u_k^2 = \sin^2(\phi/2) \sum_k n_k^2 = \sin^2(\phi/2)$$

因为 $|n| = 1$,

$$\Rightarrow u_0^2 + \sum_{k=1}^{3} u_k^2 = \cos^2(\phi/2) + \sin^2(\phi/2) = 1$$

这是一个 4 维单位球的表面(拓扑地说,边界),因此是一个紧致集合,所以 SU(2)是紧致的.(**练习 15.1 完**)

练习 15.2　SU(1,1)矩阵的表示

问题　证明每个 $\hat{U}\in \mathrm{SU}(1,1)$是一个复的 2×2 矩阵,具有性质

a) $\hat{U}^{+}\hat{\sigma}_3\hat{U}=\hat{\sigma}_3$ 和 $\det\hat{U}=1$.

b) $\hat{U}=v_0\hat{\sigma}_0+v_1\hat{\sigma}_1+v_2\hat{\sigma}_2+\mathrm{i}v_3\hat{\sigma}_3$, $(v_v\in\mathbb{R})$

其中 $v_0^2-v_1^2-v_2^2+v_3^2=1$. 为什么 SU(1,1)不是紧致的?

解　a) 作为模应该不变,我们有

$$\|\boldsymbol{Z}'\|=\sqrt{\boldsymbol{Z}'^{\dagger}\hat{g}\boldsymbol{Z}'}=\sqrt{\boldsymbol{Z}^{\dagger}\hat{U}^{\dagger}\hat{g}\hat{U}\boldsymbol{Z}}=\sqrt{\boldsymbol{Z}^{\dagger}\hat{g}\boldsymbol{Z}}$$

随后得出

$$\hat{U}^{\dagger}\hat{g}\hat{U}=\hat{g}$$

其中

$$\hat{g}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\hat{\sigma}_3$$

由此就有

$$\hat{U}^{\dagger}\hat{\sigma}_3\hat{U}=\hat{\sigma}_3$$

$\det\hat{U}=1$ 是必需的,因为 $\hat{U}\in\mathrm{SU}(1,1)$.

b) 让 $\hat{U}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$,其中 $a,b,c,d\in C$. 这导致

$$\hat{U}^{\dagger}\hat{g}\hat{U}=\begin{pmatrix}a^*&c^*\\b^*&d^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}aa^*-cc^*&a^*b-c^*d\\ab^*-cd^*&bb^*-dd^*\end{pmatrix}$$

$$=\hat{g}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

由此得出

$$a^*b-c^*d=0\quad(\mathrm{A})$$

$$|a|^2-|c|^2=1\quad(\mathrm{B})$$

$$|d|^2-|b|^2=1\quad(\mathrm{C})$$

$$1=\det\hat{U}=ab-bc\quad(\mathrm{D})$$

(A)$\times a$ 给出

$$0=|a|^2b-c^*ad\overset{(\mathrm{D})}{=}|a|^2b-c^*(cb+1)$$

$$=b(|a|^2-|c|^2)-c^*\overset{(\mathrm{B})}{=}b-c^*$$

因此

$$b=c^*\quad(\mathrm{E})$$

借助(E),我们从(A)得到

$$b(a^*-d)=0,\text{从而 }a^*=d$$

因此

$$\hat{U}=\begin{pmatrix} a & b \\ b^* & a^* \end{pmatrix}$$

让 $a=x+\mathrm{i}y, b=z+\mathrm{i}t$,

$$\begin{aligned}\hat{U}&=\begin{pmatrix} x+\mathrm{i}y & z+\mathrm{i}t \\ z-\mathrm{i}t & x-\mathrm{i}y \end{pmatrix}\\ &=x\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\mathrm{i}y\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}-t\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&0\end{pmatrix}\\ &=x\hat{\sigma}_0+z\hat{\sigma}_1-t\hat{\sigma}_2+\mathrm{i}y\hat{\sigma}_3\end{aligned}$$

即,当 $v_0=x, v_1=z, v_2=-t, v_3=y$ 时

$$v_0^2-v_1^2-v_2^2+v_3^2=x^2+y^2-(z^2+t^2)=|a|^2-|b|^2\overset{(E)}{=}|a|^2-|c|^2\overset{(B)}{=}1$$

带有 $v_0^2-v_1^2-v_2^2+v_3^2=1$ 的区域是一个无界集合,因此不是紧致的,所以 SU(1,1)不是紧致的.(**练习 15.2 完**)

练习 15.3 洛伦兹群的非紧致性

问题 证明正规洛伦兹群 L(练习 3.4)不是紧致的.

解 L 的六个实参数是旋转角 ω 和快度 $\xi=(\beta/|\beta|)\tanh^{-1}|\beta|$,其中 $\beta=v/c$.

现在,两个坐标系相对速度 v 的大小总是比 c 小,这导致 $0\leqslant\beta\leqslant1$. 这给出 $0\leqslant\tanh^{-1}|\beta|\leqslant\infty$,而因此也有 $0\leqslant\xi\leqslant\infty$. 所以 L 的参数域是无界的,因而不是紧致的.

要点 这里我们可以看到应用正确的参数来检验紧致性是非常重要的. 在快度 ξ 的单个分量下洛伦兹群是相加的,由此这个无界性是直接明显的. 然而在速度 β 的分量下,我们有复杂的加法规则,它使得无界性的证明远为复杂. 我们可以证明 $|\beta|=1$ 不是洛伦兹群的一个元素!

现在我们来到另一类非紧致李群,群 SO(p,q)(其中 $p+q=n$),这是 n 维特殊旋转群 SO(n)的推广.

当 $\hat{U}\in\mathrm{SO}(n)$ 把一个矢量 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}$ 这样变换,使得 $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}}$ 是不变的(即 $\hat{g}=\mathbb{1}_{(n)}$),SO(p,q)变换使得模

$$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{|x_1|^2+\cdots+|x_p|^2-|x_{p+1}|^2-\cdots-|x_n|^2}=\sqrt{x^T\hat{g}x}$$

不变,其中

$$\hat{g}=\begin{pmatrix}\mathbb{1}_{(p)}&0\\0&-\mathbb{1}_{(q)}\end{pmatrix}$$

SO(p,q)变换矩阵的行列式为+1.

正如众所周知的,正规洛伦兹群保持二次型 $x^2+y^2+z^2-c^2t^2$ 不变,而因此可以被 SO(3,1)描写. 因此洛伦兹群的非紧致性(参看练习 15.3)是所有李群 SO(p,q)(其中 $p,q\neq0$)的非紧致性的特殊情况.(**练习 15.3 完**)

练习 15.4 SO(p,q)的生成元

问题 李群 $\hat{U}\in\mathrm{SO}(p,q)$,其中 $p+q=n$,有多少个实参数? 找到一组生成元,并证明最终的无穷小算符(参看第 3.13 节)可以被表示为

$$\hat{L}_{ij}=\mathrm{i}\left(x_i\frac{\partial}{\partial x_j}-x_j\frac{\partial}{\partial x_i}\right),(i<j),i,j=1,\cdots,p\text{ 和 }i,j=p+1,\cdots,n$$

$$\hat{L}_{ij}=\mathrm{i}\left(x_i\frac{\partial}{\partial x_j}+x_j\frac{\partial}{\partial x_i}\right),\text{对 } i=1,\cdots,p \text{ 和 } j=p+1,\cdots,n$$

解　对无穷小变换我们有

$$\hat{U}=\mathbb{1}_n+S\hat{U}$$

其中 $S\hat{U}$ 可以只包含无穷小的实参数. 由 $\boldsymbol{x}'=\hat{U}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n)$,从模不变就得出

$$(\boldsymbol{x}')^T\hat{g}\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}^T\hat{U}^T\hat{g}\hat{U}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^T\hat{g}\boldsymbol{x}$$

因此

$$\hat{U}^T\hat{g}\hat{U}=\hat{g}=\begin{pmatrix}\mathbb{1}_{(p)} & 0\\ 0 & -\mathbb{1}_{(q)}\end{pmatrix}$$

$$\hat{U}^T\hat{g}\hat{U}=\hat{g}+\delta\hat{U}^T\hat{g}+\hat{g}\delta\hat{U}+\vartheta(\delta\hat{U}^2)=\hat{g}$$

因为 $\hat{g}^T=\hat{g}$,这导致

$$\hat{g}S\hat{U}=-(\hat{g}S\hat{U})^T$$

下面的猜想是非常有用的:

$$\delta\hat{U}=\begin{pmatrix}\hat{A} & \hat{B}\\ \hat{C} & \hat{D}\end{pmatrix}$$

(例如 $\hat{B}$ 也是 $p\times q$ 矩阵),

$$\Rightarrow\hat{g}\delta\hat{U}=\begin{pmatrix}\hat{A} & \hat{B}\\ -\hat{C} & -\hat{D}\end{pmatrix}\overset{!}{=}-(\hat{g}\delta\hat{U})^T=\begin{pmatrix}-\hat{A}^T & \hat{C}^T\\ -\hat{B}^T & \hat{D}^T\end{pmatrix}$$

由此得到

$$\hat{A}^T=-\hat{A},\qquad \hat{D}^T=-\hat{D},\qquad \hat{B}=+\hat{C}^T$$

因此 $S\hat{U}$ 有如下形式

$$S\hat{U}=\begin{pmatrix}\hat{A} & \hat{B}\\ \hat{B}^T & \hat{C}\end{pmatrix}$$

其中 $\hat{A}$ 和 $\hat{C}$ 分别是实的、反对称的 $p\times p$ 和 $q\times q$ 矩阵,而 $\hat{B}$ 是一个任意的实的 $p\times q$ 矩阵. 所以参数数目为

对 $\hat{A}$:　$p(p-1)/2$

对 $\hat{C}$:　$q(q-1)/2$

对 $\hat{B}$:　pq

合起来

$$\frac{1}{2}[p^2+2pq+q^2-p-q]=\frac{1}{2}[(p+q)^2-(p+q)]$$

$$=\frac{1}{2}n(n-1),\qquad (n=p+q)$$

因此带有 $p+q=n$ 的 $\mathrm{SO}(p,q)$和 $\mathrm{SO}(n)$(参看练习 3.17)有同样多的参数. 现在我们来决定生成元. 让

$$\hat{A}=\begin{pmatrix}0 & -a_{12} & \cdots & & -a_{1p}\\ a_{12} & & & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & & & -a_{p-1,p}\\ a_{1p} & & \cdots & a_{p-1,p} & 0\end{pmatrix}$$

是一个反对称矩阵. 随后相应的生成元是

$$\hat{S}_{rt}^{A}=\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial a_{rt}}\hat{A}$$

$$=\mathrm{i}\begin{pmatrix}0 & \cdots & -1\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \cdots & 0\end{pmatrix},\quad \text{对 } r,t=1,\cdots,p,\quad r<t$$

解析地

$$(\hat{S}_{rt}^{A})_{ij}=\mathrm{i}(-\delta_{ri}\delta_{tj}+\delta_{rj}\delta_{ti})\qquad (r,t=1,\cdots,p;r<t;\ i,j=1,\cdots,n)$$

完全类似,矩阵 $\hat{C}$ 的生成元得到

$$(\hat{S}_{rt}^{C})_{ij}=\mathrm{i}(-\delta_{ri}\delta_{tj}+\delta_{rj}\delta_{ti})\qquad (r,t=p+1,\cdots,n;r<t;\ i,j=1,\cdots,n)$$

$S\hat{U}$ 的其余部分可以参数化为如下形式:

$$\begin{pmatrix}0 & \hat{B}\\ \hat{B}^{T} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & & & b_{1,p+1} & \cdots & b_{1,p+q}=n\\ & & & \vdots & & \vdots\\ & & & b_{p,p+1} & \cdots & b_{p,p+q}\\ b_{1,p+1} & \cdots & b_{p,p+1} & & & \\ \vdots & & \vdots & & & \\ b_{1,p+q}=n & \cdots & b_{p,p+q} & & & \end{pmatrix}$$

相应地,我们有

$$(\hat{S}_{rt}^{B})_{ij}=\mathrm{i}(\delta_{ri}\delta_{tj}+\delta_{rj}\delta_{ti})\qquad (r=1,\cdots,p;r=p+1,\cdots,n;\ i,j=1,\cdots,n)$$

现在无穷小坐标变换可以写为

$$x_k'=\hat{U}_{kj}x_j=(\mathbb{1}_{(n)}+\delta\hat{U})_{kj}x_j$$

$$=x_k-\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}x_j\Big(\sum_{\substack{r,t=1\\(r<t)}}^{p}(a_{rt}\hat{S}_{rt}^{A})_{kj}+\sum_{\substack{r,t=p+1\\(r<t)}}^{n}(C_{rt}\hat{S}_{rt}^{C})_{kj}$$

$$+\sum_{r=1}^{p}\sum_{t=p+1}^{n}(b_{rt}\hat{S}_{rt}^{B})_{kj}\Big)$$

因此我们得到如下的无穷小算符 $\hat{L}_{rt}$(3.71). 对 $r,t=1,\cdots,p$ 和 $r<t$

$$\hat{L}_{rt}=\mathrm{i}\sum_{k+1}^{n}\frac{\partial}{\partial a_{rt}}x_k'\Big|_{\delta\mathcal{O}=0}\frac{\partial}{\partial x_k}=\mathrm{i}\sum_{k+1}^{n}(-\mathrm{i})\sum_{j=1}^{n}(\hat{S}_{rt}^{A})_{kj}x_k\frac{\partial}{\partial x_k}$$

$$=\sum_{k,j=1}^{n}\mathrm{i}(-\delta_{ri}\delta_{tj}+\delta_{rj}\delta_{ti})x_j\frac{\partial}{\partial x_k}=\mathrm{i}\Big(x_r\frac{\partial}{\partial x_t}-x_t\frac{\partial}{\partial x_r}\Big)$$

用类似的方式对 $r,t=(p+1),\cdots,(p+q=n)$和 $r<t$

$$\hat{L}_{rt}=\mathrm{i}\sum_{k+1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_{rt}}x_k'\Big|_{\delta\mathcal{O}=0}\frac{\partial}{\partial x_k}=\mathrm{i}\Big(x_r\frac{\partial}{\partial x_t}-x_t\frac{\partial}{\partial x_r}\Big)$$

对 $r=1,\cdots,p$ 和 $t=p+1,\cdots,n$,负号恰好换成一个正号:

$$\hat{L}_{rt}=\mathrm{i}\sum_{k+1}^{n}\frac{\partial}{\partial b_{rt}}x_k'\Big|_{\delta\mathcal{O}=0}\frac{\partial}{\partial x_k}=\mathrm{i}\Big(x_r\frac{\partial}{\partial x_t}+x_t\frac{\partial}{\partial x_r}\Big)$$

知道$[\partial/\partial x_i,x_j]=\delta_{ij}$,这些无穷小算符的对易关系可以容易地计算.(**练习 15.4 完**)

15.2　李群 SO(2,1)

为了在头脑中有一个简单而清楚的例子,下面我们专注于 SO(2,1),即 $p=2,q=1$. 这里我们有三个生成元($\hat{L}_{12},\hat{L}_{13}$和 $\hat{L}_{23}$)和它们的对易关系

$$[\hat{L}_{12},\hat{L}_{13}]=-\mathrm{i}\hat{L}_{23},\quad [\hat{L}_{12},\hat{L}_{23}]=\mathrm{i}\hat{L}_{13},\quad [\hat{L}_{13},\hat{L}_{23}]=\mathrm{i}\hat{L}_{12} \tag{15.4}$$

然而我们通常不用这三个生成元,而是用以下形式:

$$\begin{aligned}\hat{J}_x&=-\hat{L}_{23}=-\mathrm{i}\left(y\frac{\partial}{\partial z}+z\frac{\partial}{\partial y}\right)\\ \hat{J}_y&=\hat{L}_{13}=\mathrm{i}\left(x\frac{\partial}{\partial z}+z\frac{\partial}{\partial x}\right)\\ \hat{J}_z&=-\hat{L}_{12}=-\mathrm{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)\end{aligned} \tag{15.5}$$

(这个选择是允许的,因为李代数$\{-\hat{L}_{23},\hat{L}_{13},-\hat{L}_{12}\}$和$\{\hat{L}_{23},\hat{L}_{13},\hat{L}_{12}\}$是同构的,看例 3.20).

现在这个对易关系采取一种非常有启发性的形式:

$$[\hat{J}_x,\hat{J}_y]=-\mathrm{i}\hat{J}_z,\quad [\hat{J}_y,\hat{J}_z]=\mathrm{i}\hat{J}_x,\quad [\hat{J}_z,\hat{J}_x]=\mathrm{i}\hat{J}_y \tag{15.6}$$

除去第一个对易关系中的负号,这些正是众所周知的 SO(3)的对易关系($[\hat{J}_i,\hat{J}_j]=\mathrm{i}\sum_k\varepsilon_{ijk}\hat{J}_k$). 形式上我们借助于代换

$$\hat{J}_x\to\hat{J}_x=\mathrm{i}\hat{J}_x,\quad \hat{J}_y\to J\hat{J}_y=\mathrm{i}\hat{J}_y,\quad \hat{J}_z\to\hat{J}_z=\mathrm{i}\hat{J}_z$$

由 SO(3)的对易关系得到 SO(2,1)的对易关系.(然而这个实李代数 SO(3)到实李代数 SO(2,1)的投影不是同构,因为用了虚系数).

SO(2,1)和 SO(3)的这个关系使得马上得出 SO(2,1)是非紧致的结论,因为 SO(3)的群元素如下变换,

$$\exp[-\mathrm{i}(\alpha_x\hat{J}_x+\alpha_y\hat{J}_y+\alpha_z\hat{J}_z)]\to\exp(\alpha_x\hat{J}_x+\alpha_y\hat{J}_y-\mathrm{i}\alpha_z\hat{J}_z)$$

群元素的绝对值不再是有界的这一事实是由于 SO(2,1)群元素的指数中的前两项造成的.因此,由此直接得出 SO(2,1)不是紧致的.

练习 15.5　SO(2,1)的卡西米尔算符

问题　a) 决定 SO(2,1)的卡西米尔算符.

b) 用

$$\hat{J}_\pm=\hat{J}_x\pm\mathrm{i}\hat{J}_y\text{ 和 }\hat{J}_z$$

来表达这个卡西米尔算符.

解　a) SO(2,1)秩为 1,并因此只有一个卡西米尔算符.这个卡西米尔算符为(参看第 3.9 节)

$$\hat{C}=\sum_{ij} g^{ij}\hat{J}_i\hat{J}_j$$

其中 g^{ij} 是嘉当度规张量的逆,$g^{ij}=(g_{ij})^{-1}$. 本身 g_{ij} 依赖于结构常数 C_{ijk}(回忆 $[\hat{J}_i,\hat{J}_j]=\mathrm{i}\sum_k C_{ijk}\hat{J}_k$)如下(参看例 3.9):

$$g_{ij}=\sum_{kl} C_{ikl}C_{jlk}$$

对 SO(2,1),因为 $C_{ijk}=-C_{jik}$,我们只有三个线性独立的非 0 结构常数:

$$C_{123}=-\mathrm{i},\quad C_{231}=\mathrm{i},\quad C_{132}=-\mathrm{i}$$

所有带有两个或三个相等指标的结构常数为 0,而因此 g_{ij} 可以容易地定出. 例如我们有

$$g_{11}=\sum_{kl} C_{1kl}C_{1lk}=C_{123}C_{132}+C_{132}C_{123}=2(-\mathrm{i})(-\mathrm{i})=-2$$

$$g_{ij}=\begin{pmatrix}-2 & \cdots & 0\\ \vdots & -2 & \vdots\\ 0 & \cdots & 2\end{pmatrix}\Rightarrow g_{ij}=\begin{pmatrix}-1/2 & \cdots & 0\\ \vdots & -1/2 & \vdots\\ 0 & \cdots & 1/2\end{pmatrix}$$

因此 $\hat{C}=\frac{1}{2}(-\hat{J}_x^2-\hat{J}_y^2+\hat{J}_z^2)$,或者我们为方便起见丢掉因子 $\frac{1}{2}$.

$$\hat{C}=-\hat{J}_x^2-\hat{J}_y^2+\hat{J}_z^2$$

b) 我们得到

$$\hat{J}_+\hat{J}_-=\hat{J}_x^2+\hat{J}_y^2-\mathrm{i}[\hat{J}_x,\hat{J}_y]=\hat{J}_x^2+\hat{J}_y^2-\hat{J}_z$$

因此

$$\hat{C}=-(\hat{J}_+\hat{J}_-+\hat{J}_z)+\hat{J}_z^2=-\hat{J}_+\hat{J}_-+\hat{J}_z^2-\hat{J}_z$$

代替它

$$\hat{J}_-\hat{J}_+=\hat{J}_x^2+\hat{J}_y^2+\mathrm{i}[\hat{J}_x,\hat{J}_y]=\hat{J}_x^2+\hat{J}_y^2+\hat{J}_z$$
$$\Rightarrow\hat{C}=-\hat{J}_-\hat{J}_++\hat{J}_z^2+\hat{J}_z.$$

(练习 15.5 完)

由这两种用 $\hat{J}_+,\hat{J}_-$ 和 $\hat{J}_z$ 对卡西米尔算符的表示,我们可以对 SO(2,1)的幺正表示(即 $\hat{J}_i^+=\hat{J}_i$,对 $i=x,y,z$)推出重要的结果来. 如同在 SO(3)的幺正表示的情况,我们可以选择相应的状态的 $\hat{C}$ 和 $\hat{J}_z$ 的本征态:

$$\hat{C}|Xa\rangle=X|Xa\rangle,\qquad \hat{J}_z|Xa\rangle=a|Xa\rangle \tag{15.7}$$

X 和 a 为实数,因为对幺正表示,$\hat{C}$ 和 $\hat{J}_z$ 是厄密的. 在 SO(3)的场合,我们有关系 $X=j(j+1)$ 和 $a=m$,由此我们得到($j\geqslant 0$)

$$j(j+1)-m(m\pm 1)\geqslant 0$$

于是

$$X-a(a\pm 1)\geqslant 0\ ,X\geqslant 0 \tag{15.8}$$

由此给出 $-j\leqslant m\leqslant j$,而因此证明了对一固定的 $X_0=j(j+1)$ 存在有限个数($=2j+1$)不同的状态 $|X_0,a=m\rangle$. 这里我们谈到有限维的不可约幺正表示.

对 SO(2,1)的幺正表示 $|X,a\rangle$,类似于(15.8)的关系可以被发现.

我们由练习 15.5 知道

$$\hat{C}=-\hat{J}_+\hat{J}_-+\hat{J}_z^2-\hat{J}_z\Rightarrow\hat{J}_+\hat{J}_-=-\hat{C}+\hat{J}_z^2-\hat{J}_z$$

现在 $\hat{J}_-=\hat{J}_+^\dagger$，它导致 $\hat{J}_+\hat{J}_-=\hat{J}_+(\hat{J}_+)^+$. 但这意味着 $\hat{J}_+\hat{J}_-$ 是一个正定算符，因为应用它到一个任意状态给出

$$\langle\psi|\hat{J}_+\hat{J}_+^\dagger|\psi\rangle=\langle\varphi|\varphi\rangle\geq 0$$

其中 $|\varphi\rangle=\hat{J}_+^\dagger|\psi\rangle$. 由此对 $(\hat{J}_+\hat{J}_+^\dagger)|\chi\rangle=b|\chi\rangle$ 的本征态 $|\chi\rangle$ 得到

$$\langle\chi|\hat{J}_+\hat{J}_+^\dagger|\chi\rangle=b\langle\chi|\chi\rangle\geq 0\Rightarrow b\geq 0$$

(b 是实的，因为 $\hat{J}_+\hat{J}_+^\dagger$ 是厄密的). 特别当应用到 $|Xa\rangle$ 上我们得到

$$\hat{J}_+\hat{J}_-|Xa\rangle=(-\hat{C}+\hat{J}_z^2-\hat{J}_z)|Xa\rangle=(-X+a(a-1))|Xa\rangle\ ,$$

也即 $|Xa\rangle$ 是 $\hat{J}_+\hat{J}_-$ 的一个本征态，本征值为 $-X+a(a-1)\geq 0$. 用类似的方式，由练习 15.5 得出

$$\hat{J}_-\hat{J}_+=\hat{J}_-\hat{J}_-^\dagger=-\hat{C}+\hat{J}_z^2+\hat{J}_z$$

因此

$$-X+a(a+1)\geq 0$$

合起来我们有

$$-X+a(a\pm 1)\geq 0 \tag{15.9}$$

由于 $\hat{C}$ 是厄密的，X 是实的. 然而与 SO(3)情况相反，我们对 X 的符号说不出任何东西来，因为这里 $\hat{C}$ 不是正定厄密算符的和.

对于 SO(2,1)的不可约幺正表示的维数，关系(15.9)有一个重要结果，因为对正和负的 X 两者，值 $|a|$ 没有上界. 因此由此得出对每个 X，有任意数个 a，所以我们有一个无穷维不可约幺正表示. 紧致的 SO(3)有有限维的，而非紧致的 SO(2,1)有无限维的不可约幺正表示，这件事并非偶然. 相反我们可以证明下面的定理成立：

i) 一个紧致李群的每个不可约幺正表示是有限维的.

ii) 一个一致的、单的、非紧致的李群除去平凡表示(其中所有生成元由单位矩阵表示)不允许有有限维幺正表示.

我们注意到 SO(2,1)是一致的(即具有一个一致的连通的参数域)，并且也是单的(看第 3.3 节).

但是让我们转到 SO(2,1)的不可约幺正表示. 关系(15.9)进一步说明，在 $X=j(j+1)$ 中的 j 不再需要是整数或半整数. 此外，这一点的原因是对 a 不是总有一个断裂条件，它给出 a 和 X 或 j 之间的关系. 因此我们对 X 区分离散的和连续的系列. 在后一情况，X 可以接受在一定区域内的任意实数. 对细节请参考文献①，我们在这里只提及一个特殊的连续系列，即 $X<-1/4$. 由 $X=j(j+1)$，这导致

$$j^2+j+\frac{1}{4}=\left(j+\frac{1}{2}\right)^2<0 \tag{15.10}$$

因此这里我们选

---

① L. C. Biedenharn 在 Y. Chow 编的 *Noncompact Groups in Particle Physics* (Benjamin, New York 1966)p. 23.

$$j=-1/2+\mathrm{i}k,\quad k\in\mathbb{R} \tag{15.11}$$

然后我们有

$$X=j(j+1)=-k^2-1/4$$

因为$-X>1/4$和(15.9)，对每个固定的k，a必须满足条件$a(a\pm1)\geqslant-1/4$. 但是因为我们有

$$a(a\pm1)+\frac{1}{4}=\left(a\pm\frac{1}{2}\right)^2\geq0$$

(对$a\in\mathbb{R}$)，任意实的a都是许可的. 然而，如文献中表明的，相邻的a相差1. 这能从$\hat{J}_+$和$\hat{J}_-$的性质推出来.

15.3 对散射问题的应用

连续系列诸如$j=-\frac{1}{2}+\mathrm{i}k$是为量子力学中的问题的群论处理预定的，其中出现了连续的(能量)本征值，例如散射问题. 这一过程将被勾划在最后一个练习中.

练习 15.6 SO(2,1)算符的坐标表示

问题 决定SO(2,1)算符$\hat{C}$和$\hat{J}_z$在极双曲坐标系：

$$x=r\cosh\varrho\cos\phi\qquad y=r\cosh\varrho\sin\phi\qquad z=r\sinh\varrho$$

$$r\geq0;\ -\infty<\varrho<\infty;\ 0\leq\phi<2\pi$$

中的明显坐标表示.(为什么$\hat{J}_\pm$和$\hat{J}_z$不依赖于r?) 然后完成相似变换$\hat{O}\to\hat{U}\hat{O}\hat{U}^{-1}$，其中$\hat{U}=\cosh^{1/2}\varrho$，并找到本征方程

$$\hat{C}|jm\rangle=j(j+1)|jm\rangle\quad(\hat{J}_z|jm\rangle=m|jm\rangle)$$

的坐标表示.

解 以下的微商需要被计算：

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial\varrho}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\varrho}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}.$$

用反变换

$$r=\sqrt{x^2+y^2-z^2},\ \varrho=\sinh^{-1}(2/\sqrt{x^2+y^2-z^2})$$

$$\phi=\tan^{-1}(y/x)$$

我们对这些微商得到

$$\frac{\partial}{\partial x}=\cosh\varrho\cos\phi\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sinh\varrho\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\varrho}-\frac{\sin\phi}{r\cosh\varrho}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\cosh\varrho\sin\phi\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sinh\varrho\sin\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\varrho}+\frac{\cos\phi}{r\cosh\varrho}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}=-\sinh\varrho\cos\phi\,\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cosh\varrho}{r}\,\frac{\partial}{\partial\varrho}$$

因此

$$\begin{aligned}\hat{J}_z&=-\mathrm{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)=-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\phi}\\ \hat{J}_\pm&=\hat{J}_x\pm\mathrm{i}\hat{J}_y\\ &=-\mathrm{i}\left(y\frac{\partial}{\partial z}+z\frac{\partial}{\partial y}\right)\mp\left(x\frac{\partial}{\partial z}+z\frac{\partial}{\partial x}\right)\\ &=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\phi}\left(\mp\frac{\partial}{\partial\varrho}-\mathrm{i}\tanh\varrho\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\end{aligned}$$

因而这些 SO(2,1)生成元是与 r 无关的. 这一点是清楚的，正像在给定坐标内，有 $r=$常数(即没有 r 依赖性)一样.

$$x^2+y^2-z^2=r^2(\cosh^2\varrho-\sinh^2\varrho)=r^2=\text{常数}$$

这样这两个坐标 ϱ 和 ϕ 单独完全参数化了$\mathbb{R}^3$的一个区域(一个双曲面)，它是在 SO(2,1)变换下不变的. 因此借助于它们这些变换能被执行的生成元 $\hat{J}_\pm$和 $\hat{J}_z$ 必须也是 r 无关的. (与此类似的是球坐标(r,θ,ϕ)，$r=$常数，在 SO(3)的场合，它的变换使球表面不变.)

相似变换 $\hat{U}=\cosh^{1/2}\varrho$ 只与算符$\frac{\partial}{\partial\varrho}$有关，因为$\frac{\partial\varrho}{\partial\phi}=0$. 这个变换是

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\varrho}\to\left(\frac{\partial}{\partial\varrho}'\right)&=\cosh^{1/2}\varrho\,\frac{\partial}{\partial\varrho}\cosh^{-1/2}\varrho\\ &=-\frac{1}{2}\tanh\varrho+\frac{\partial}{\partial\varrho}\end{aligned}$$

(这一相似变换是方便的，因为对双曲面 $x^2+y^2-z^2=$常数，体积元(以模 $\|r\|^2=x^2+y^2-z^2$ 计算)正比于 $\cosh\varrho$. 所以体积元的基本部分被包括在波函数 $\psi'=\cosh^{1/2}\varrho\psi$ 中，以至于我们可以用正比于 $\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\phi$ 的体积元来积分.)这样我们得到

$$\hat{J}_z=\hat{J}'_z=-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\phi},\quad \hat{J}'_\pm=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\phi}\left[\mp\frac{\partial}{\partial\varrho}+\tanh\varrho\left(\pm\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right]$$

和因此

$$\hat{C}'=-\hat{J}_+\hat{J}_-+\hat{J}'^2_z-\hat{J}'_z=\frac{\partial^2}{\partial\varrho^2}-\frac{\partial^2/\partial\phi^2+1/4}{\cosh^2\varrho}-\frac{1}{4}$$

为了解本征值问题

$$\hat{C}'|jm\rangle=j(j+1)|jm\rangle,\quad \hat{J}'_z|jm\rangle=m|jm\rangle$$

我们作以下的假设：

$$\langle\varrho\phi|jm\rangle=\hat{U}_{jm}(\varrho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$$

这直接解决了第二个本征值方程. 把 $\hat{C}$ 代入第一个方程，给出

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial\varrho^2}-\frac{m^2-1/4}{\cosh^2\varrho}\right)u_{jm}(\varrho)=-\left[j(j+1)+\frac{1}{4}\right]u_{jm}=-\left(j+\frac{1}{2}\right)^2u_{jm}$$

但是这只是对所谓珀舍尔-泰勒(Poschl-Teller)势

$$V(\varrho)=-V_0/\cosh^2\varrho$$

其中强度 $V_0=m^2-1/4$，的一个一维薛定谔方程(其中$\hbar=m=1$)！这个势问题的本征能量是 $E_j=-\left(j+\frac{1}{2}\right)^2$. 利

用连续系列(15.11),$j=\frac{1}{2}+\mathrm{i}k(k\in\mathbb{R})$,我们得到

$$E_j=E_{k(j)}=k^2>0$$

并且可以对珀舍尔-泰勒势以一种群论的方式处理散射问题.SO(2,1)的无穷维不可约幺正表示(即 k 固定,m 可变)描写了带有固定能量 k^2 和可变的势 $m^2-1/4$ 的散射问题.

对散射问题直到三维空间维数和其他势的推广在文献中①给出.(**练习 15.6 完**)

① 参看 Y. Alhassid, F. Gürsey, F. Iachello: Ann. Phys. (N. Y.) **167**, 181(1986); J. Wu, F. Iachello, Y. Alhassid: Ann. Phys. (N. Y.) **173**, 68(1987).

名词索引

A

阿贝尔理想	Abelian ideal	77
阿贝尔平移群	Abelian transformation group	75
阿贝尔群	Abelian group	27
埃克特,C.H	Eckart, Carl Henry	139
艾里函数	Airy function	330
半单李代数	Semisimple Lie algebra	76
半单李群	Semisimple Lie group	76
半单性	Semisimplicity	79
半单幺正李群	Semisimple unitary Lie group	102

B

八重态	Octet	143
保守系(统)	Conservative system	3
被动手法	Passive execution	14
被动转动	Passive rotation	30
本征函数	Eigenfunction	43
本征态	Eigenstate	18
标量波场	Scalar wave field	38
标量波函数	Scalar wave function	33
标量介子	Scalar meson	197
标量粒子	Scalar particle	368
标量密度	Scalar density	38
标因子	Isoscalar factor	209
标准排列	Standard arrangement	245
波函数	Wave function	17

不变算符	Invariant operator	81
不变性	Invariance	1
不变子空间	Invariant subspace	46
不变子群	Invariant subgroup	76
不可约表示	Irreducible representation	46
不可约不变子空间	Irreducible invariant subspace	76
不可约判据	Criterion for irreducibility	278
玻色子	Boson	219

C

CG 矢量耦合系数	Clebsch-Gordon coefficient	55
粲夸克	Charm quark	199
粲量子数	Charm quantum number	303
粲数	Charm	303
粲素	Charmonium	317
粲素模型	Charmonium model	317
叉乘	Cross product	74
超多重态	Supermultiplet	240
超荷	Hypercharge	141
超子	Hyperon	143
茨威格禁戒衰变	Zweig forbidden decay	319

D

大久保-茨威格-饭冢规则	Okubo-Zweig-Iizuka-rule	317
单李代数	Simple Lie algebra	76
单李群	Simple Lie group	76
单连通的	Simply connected	32
单群	Simple group	77
单态	Singlet	81
单位元(素)	Unit element	26
氘核	Deuteron	113
等价类	Equivalence class	272
邓金图	Dynkin diagram	357
笛卡尔表示	Cartesian representation	53
底夸克	Bottom quark	342
电荷多重态	Charge multiplet	141

电荷共轭算符	Charge conjugation operator	124
电荷算符	Charge operator	176
顶夸克	Top-quark	342
定态薛定谔方程	Stationary Schrodinger equation	18
动力学对称群	Dynamical symmetry group	378
动力学对称性	Dynamical symmetry	376
动量守恒	Momentum conservation	1
动能	Kinetic energy	9
度规	Metric	71
度规张量	Metric tensor	80
对称变换	Symmetry transformation	7
对称操作	Symmetry operation	85
对称化算符	Symmetrization operator	243
对称破缺	Symmetry breaking	84
对称态	Symmetric state	242
对称性	Symmetry	1
对称(性)群	Symmetry group, Symmetric group	102
对称轴	Symmetry axis	5
对易关系	Commutation relation	23
对易子	Commutator	19
多夸克态	Many-quark state	186
多粒子系统	Many-particle system	374
多重态	Multiplet	81

E

厄密矢量算符	Hermitian vector operator	39
二重态	Doublet	143

F

反步变换	Contragredient transformation	30
反对称关系	Antisymmetry relation	68
反对称化算符	Antisymmetrization operator	243
反对称态	Antisymmetric state	242
反夸克	Antiquark	186
反夸克状态	Antiquark state	210
反三重态	Antitriplet	182

反演	Inversion group	91
反幺正性算符	Antiunitarity operator	370
反重子	Antibaryon	144
非紧致李群	Non-compact Lie group	391
封闭代数	Closed algebra	68
复合核	Compound nucleus	136

G

G 宇称	G-parity	124
伽利略变换	galilei transformation	10
伽利略不变性	Galilean invariance	9
盖尔曼,M	Gell-Mann, Murray	146
盖尔曼-大久保质量公式	Gell-Mann-Okubo mass formula	207
盖尔曼-西岛关系式	Gell-Mann-Nishijima relation	142
各向同性	Isotropy	3
各向同性谐振子	Isotropic oscillator	380
根矢量	Root vector	346
共轭群元素	Conjugate group element	273
共轭图	Conjugate diagram	252
共轭杨图	Conjugate Young diagram	261
共振(态)	Resonance	138
孤立系统	Isolated system	1
古塞-拉地卡底质量公式	Gürsey-Radicati mass formula	234
广义盖尔曼-西岛关系式	Generalized Gell-Mann-Nishijima relation	322
轨道角动量	Orbital angular momentum	37

H

哈密顿(量,算符)	Hamiltonian	17
海森伯代数	Heisenberg algebra	78
核力	Nuclear force	115
核子-反核子体系	Nucleon-antinucleon system	125
换位变换	Transposition	241
混合对称态	Mixed symmetric state	243

J

J/ψ介子	J/Ψ meson	301
J共振态	J-resonance	199
基本表示	Fundamental representation	260
基本简并度	Essential degeneracy	253
基函数	Basis function	243
基林型	Killing form	79
基张量	Basis tensor	248
极矢量	Polar vector	369
极双曲坐标	Polar hyperbolic coordinate	400
几何对称性	Geometric symmetry	6
价夸克	Valence quark	237
假转动	Improper rotation	30
简并(性)	Degeneracy	18
简并态	Degenerate state	84
渐进自由	Asymptotic freedom	319
角动量	Angular momentum	4
角动量代数	Angular momentum algebra	43
角动量耦合	Angular momentum coupling	54
角动量算符	Angular momentum operator	23
阶跃算符	Step operator	44
结构常数	Structure constant	68
截面	Cross-section	138
介子	Pion	116
介子多重态	Meson multiplet	196
介子-核子散射	Pion nucleon scattering	133
介子激发态	Excited meson state	237
紧致李代数	Compact Lie algebra	81
紧致李群	Compact Lie group	148
紧致群	Compact group	27
精细结构	Fine structure	65
九重态	Nonet	143
局域同性	Local homogeneity	10
矩阵表示	Matrix representation	32
均匀电磁场	Homogeneous electromagnetic field	12
均匀性	Homogeneity	1

K

卡坦矩阵	Cartan matrix	359
卡坦判据	Cartan's criterion	79
卡坦-韦耳归一化	Cartan-Weyl normalization	351
卡坦-韦耳基	Cartan-Weyl basis	349
卡坦子代数	Cartan subalgebra	349
卡西米尔,H	Casimir, Hendrid	101
卡西米尔算符	Casimir operator	82
开普勒问题	Kepler problem	14
康登-肖特利位相	Condon-Shortley Phase	46
科尔曼-格拉肖关系	Coleman-Glashow relation	206
可约表示	Reducible representation	277
克莱布许,R. F. A.	Clebsch, Rudolf Friedrich Alfred	65
克莱布许-高登矩阵	Clebsch-Gordon matrix	60
克莱布许-高登系数	Clebsch-Gordon coefficient	55
克莱布许-高登系数递推关系	Clebsch-Gordon coefficients recursion relation	58
空间反射	Space reflection	368
空间各向同性	Spatial isotropy	42
空间均匀性	Homogeneity of space	1
空间平移	Spatial translation	9
空间平移算符	Spatial translation operator	15
空间位移	Space-displacement	17
空间位移不变体系	Space-displacement invariant system	17
空间位移对称体系	Space-displacement symmetric system	17
空间位移群	Group of spatial displacement	28
空间转动	Spatial rotation	9
夸克	Quark	176
夸克-胶子等离子体	Quark Gluon plasma	293
夸克禁闭	Quark confinement	179
夸克模型	Quark model	179
夸克状态	Quark state	179
夸克组合	Quark combination	323

L

拉格朗日函数	Lagrange function	1

拉卡,H	Racah, Giulio	101
拉卡定理	Racah theorem	82
离散不变子群	Discrete invariant subgroup	77
离散对称性	Discrete symmetry	13
离散群	Discrete group	272
李	Liet, Sophus	42
李代数	Lie algebra	149
李群	Lie group	31
李氏定理	Lie's theorem	75
理想	Ideal	76
力学对称性	Dynamic symmetry	6
例外李代数	Exceptional Lie algebra	356
连续不变子群	Continuous invariant subgroup	76
连续群	Continuous group	27
两分量旋量	Two-component spinor	38
量子色动力学	Quantum chromodynamics	318
量子数	Quantum number	45
龙格-楞次矢量	Runge-Lenz vector	377
洛伦兹变换	Lorentz transformation	15
洛伦兹变换群	Group of Lorentz transformation	27
洛伦兹-闵可夫斯基度规	Lorentz-Minkowski metric	71
洛伦兹群	Lorentz group	31

M

美夸克	Beauty quark	342

N

内禀角动量	Intrinsic angular momentum	37
内禀宇称	Internal parity	368
能量简并度	Energy degeneracy	104
能量守恒	Energy conservation	3
能量算符	Energy operator	25
逆元素	Inverse element	27
诺瑟	Noether, Emmy	42
诺瑟定理	Noether's theorem	6

O

欧几里得群	Euclidean group	98
欧拉-拉格朗日方程	Euler-Lagrange equation	2
耦合	Coupling	163
耦合常数	Coupling constant	319

P

泡利方程	Pauli equation	109
泡利矩阵	Pauli matrix	48
泡利矢量算符	Pauli vector operator	39
泡利旋量	Pauli spinor	108
泡利原理	Pauli principle	114
配分函数	Partition function	293
平移	Translation	14
平移不变性	Translational invariance	9
平移对称	Translational symmetry	22
平移群	Translation group	77
平移-旋转群	Translation-rotation group	76

Q

奇异夸克	Strange quark	178
奇异数	Strangeness	313
强相互作用	Strong interaction	128
球对称场	Spherically symmetric field	35
球面表示	Spherical representation	51
球面基矢	Spherical basis vector	50
球面坐标	spherical coordinate	51
球谐函数	Spherical harmonics	51
群	Group	26
群参数	Group parameter	32
群的实现	Realization of the group	99
群的同构	Isomorphism of group	99
群的同态	Homomorphism of group	99

群积分	Group integration	279
群特征标	Group character	270
群元素	Group element	32

R

刃(右矢)	Ket	14
弱超荷	Weak hypercharge	324
弱同位旋	Weak isospin	324
塞曼效应	Zeeman effect	84

S

三角规则	Triangle rule	56
三维正交群	Orthogonal group in three dimensions	31
三重态	Triality	265
散射问题	Scattering problem	400
色(颜色)	Colour	240
上夸克	Up quark	178
生成元	Generator	16
十重态	Decuplet	210
时间反演	Time reversal	369
时间反演算符	Time reversal operator	370
时间平移	Time displacement	24
时间平移算符	Time translation operator	15
时间演化算符	Time evolution operator	24
矢量场	Vector field	35
矢量场的自旋	Spin of the vector field	36
矢量介子	Vector meson	197
矢量模型	Vector model angular momentum coupling	57
矢势	Vector potential	35
势模型	Potential model	330
手征群	Chiral group	197
守恒量	Conserved quantity	8
舒尔,I	Schur, Issai	106
舒尔引理	Schur's lemma	104
双连续连通群	Doubly continuously connected group	32
顺粲素	Paracharmonium	331

四重态	Quartet	142
素根	Simple root	357
算符谱	Spectrum of operator	44

T

态	State	14
态矢量的转动	Rotation of the state vector	15
同步变换	Congredient transformation	30
同构	Isomorphism	31
同位电荷多重态	Isobaric charge multiplet	112
同位旋	Isobaric spin, Isospin	112
同位旋变换	Isospin transformation	122
同位旋不变性	Iso-invariance	115
同位旋单态	Iso-singlet	113
同位旋多重态	Isospin multiplet	137
同位旋空间	Isospin space	122
同位旋群	Isobaric spin group	91
同位旋群	Isospin group	129
同位旋矢量	Isospin vector	122
同位旋矢量算符	Iso-vector operator	123
同位旋旋量	Iso-spinor	110
同位旋旋转算符	Iso-rotation operator	109

W

微分算符	Differential operator	36
维格纳,E	Wigner, Eugen	140
维格纳-埃克特定理	Wigner-Eckart theorem	129
位移矢量群	Group of translation vector	27
位移算符	Displacement operator, Shift operator	28
味超荷	Flavour hypercharge	324
味同位旋	Flavour isospin	324
无穷维不可约幺正表示	Infinite-dimensional irreducible unitary representation	398
无穷小变换	Infinitesimal transformation	7
无穷小元素	Infinitesimal element	67
无穷小转动	Infinitesimal rotation	3

X

西岛和彦	Nishijima, Kazuhiko	146
希尔伯特空间	Hilbert space	15
下夸克	Down quark	178
显粲数	Open charm	316
显粲数介子	Meson with open charm	319
线性量子数	Linear Quantum number	103
旋量	Spinor	49

Y

雅可比恒等式	Jacobi identity	68
赝标介子	Pseudoscalar meson	188
赝标粒子	Pseudoscalar particle	367
赝矢量	Pseudovector	369
赝张量介子	Pseudotensor meson	196
杨盘	Young tableaux	243
杨图	Young diagram	243
幺正(的)	Unitary	15
幺正表示	Unitary representation	398
幺正二次型矩阵	Unitary quadratic matrix	147
幺正平移算符	Unitary translation operator	15
幺正群	Unitary group	281
幺正算符	Unitary operator	38
异常夸克态	Exotic quark state	237
隐粲数	Hidden charm	330
隐粲数介子	Meson with hidden charm	319
有限群元素	Finite group element	67
有限转动	Finite rotation	32
余数类	Residue class	268
宇称	Parity	124
宇称变换	Parity transformation	367
约化	Reduction	78
约化矩阵元	Reduced matrix element	129
运动常数	Constant of motion	18
运动积分	Integral of motion	8

Z

张量介子	Tensor meson	198
真夸克	True quark	342
真转动	Proper rotation	30
整体同性	Global homogeneity	10
正粲素	Orthocharmonium	331
正电子素	Positronium	125
正规表示	Regular representation	118
正交矩阵	Orthogonal matrix	30
正交性	Orthogonality	56
正则动量	Canonical momentum	4
直积表示	Direct product representation	199
质心系	Centre-of-mass system	2
质子波函数	Proton wave function	218
质子态	Proton state	113
秩	Rank	74
置换群	Permutation group	241
中微子振荡	Neutrino oscillation	195
中子波函数	Neutron wave function	218
中子态	Neutron state	113
忠实表示	Adjoint representation	118
重产生实验	Regeneration experiment	195
重子	Baryon	142
重子共振(态)	Baryon resonance	142
重子数	Baryon number	312
重子素共振态	Baryonium resonance	126
轴矢(量)	Axial vector	369
轴矢介子	Axial vector meson	196
主动手法	Active execution	14
主动转动	Active rotation	30
主量子数	Principal quantum number	47
转动不变性	Rotational invariance	9
转动的生成元	Generator of rotation	34
转动矩阵	Rotation matrix	32
转动球	Rotation sphere	32
转动群	Rotation group	27

转动算符	Rotation operator	33
转置矩阵	Transpose matrix	30
子代数	Subalgebra	77
子群	Subgroup	265
自共轭	Self-conjugate	261
自然定律不变性	Invariance of the laws of nature	28
自旋不变性	Spin invariance	199
自旋轨道耦合	Spin-orbit coupling	62
自旋函数	Spin function	48
自旋矢量	Spin vector	52
自旋算符	Spin operator	37
自旋-味道波函数	Spin-flavour wave function	228
最大权(重)	Maximal weight	165
最小非平凡表示	Smallest non-trivial representation	177
作用量	Action	7
坐标变换	Coordinate transformation	6