目　录

译者的话 ……iii
第一章　引言 …… 1
§1-1　光学和通讯理论 …… 1
§1-2　本书内容概述 …… 2
第二章　二维线性系统分析 …… 4
§2-1　二维傅里叶分析 …… 5
§2-2　线性系统 ……18
§2-3　二维抽样理论 ……23
第三章　标量衍射理论基础 ……33
§3-1　历史引言 ……33
§3-2　数学预备知识 ……36
§3-3　平面屏幕衍射的基尔霍夫理论 ……41
§3-4　平面屏幕衍射的瑞利-索末菲理论 ……47
§3-5　瑞利-索末菲理论推广到非单色波情形 ……51
§3-6　在边界上的衍射 ……53
§3-7　平面波的角谱 ……54
第四章　菲涅耳衍射与夫琅和费衍射 ……64
§4-1　惠更斯-菲涅耳原理的近似 ……64
§4-2　夫琅和费衍射图样的例子 ……69
§4-3　菲涅耳衍射图样的例子 ……80
第五章　透镜的傅里叶变换性质及成像性质 ……88
§5-1　薄透镜作为位相变换器 ……88
§5-2　透镜的傅里叶变换性质 ……94
§5-3　成像：单色光照明 …… 102
第六章　光学成像系统的频谱分析 …… 115

§ 6-1 成像系统的一般分析…… 116
§ 6-2 衍射受限的相干成像系统的频率响应…… 125
§ 6-3 衍射受限的非相干成像系统的频率响应…… 129
§ 6-4 像差及其对频率响应的影响…… 137
§ 6-5 相干成像和非相干成像的比较…… 144
§ 6-6 超越经典衍射极限的分辨率…… 152
第七章 空间滤波和光学信息处理 …… 161
§ 7-1 历史背景…… 162
§ 7-2 照相胶片…… 170
§ 7-3 根据几何光学的非相干处理系统…… 181
§ 7-4 频域综合…… 187
§ 7-5 Vander Lugt 滤波器…… 194
§ 7-6 对特征识别的应用…… 201
§ 7-7 对处理综合孔径天线数据的应用…… 208
第八章 波前重现成像或全息术 …… 225
§ 8-1 历史导言…… 225
§ 8-2 波前重现问题…… 226
§ 8-3 盖伯全息图…… 233
§ 8-4 利思-乌帕特尼克斯全息图 …… 236
§ 8-5 底片的 MTF(调制传递函数)的影响 …… 254
§ 8-6 底片的非线性效应…… 260
§ 8-7 乳胶厚度的影响…… 274
§ 8-8 几种推广…… 278
§ 8-9 全息术的应用…… 286
附 录
A. 狄拉克 δ 函数 …… 308
B. 傅里叶变换式定理的推导 …… 309

第一章　引　　言

§ 1-1　光学和通讯理论

从本世纪三十年代后期起，物理学的古老分支光学与电气工程中的通讯和信息理论的联系越来越紧密。这种趋势是可以理解的，因为通讯系统和成像系统都是用来收集或传递信息的。前者处理的信息一般是时间性的（例如被调制的电压或电流波形），而后者处理的则是空间性的（例如光波振幅或强度在空间的分布）。但从抽象观点来看，这一差别并不是实质性的。

这两门学科之间最紧密的联系大概就是：都可以用同样的数学方法——傅里叶分析和"系统"理论来描写各自有关的系统。采用相同的数学方法的根本原因不只是由于两门学科都对"信息"感兴趣，而更在于通讯系统和成像系统都具有某些相同的基本性质。例如，许多电子学网络和成像装置都具有线性性和不变性(其定义见第二章)。任何具有这两种性质的网络或装置(电子学的、光学的或其他)，在数学上都很容易用频谱分析方法来描述。因此，正像一个音频放大器适于用它的（时间）频率响应来描述一样，一个成像系统用它的（空间）频率响应来描述往往也是合适的。

两门学科之间的相似并不只限于线性性和不变性。某些非线性光学元件(特别是照相底片)具有的输入-输出关系，与非线性电子学元件(二极管、真空管等)的相应特性正相类似，并且两种情况下都可以用同样的数学分析方法。

特别重要的是要认识到，数学结构的相似不但可用于分析的目的，而且也可用于综合的目的。于是，正像一个时间函数的频谱可以按规定方式加以改变一样，一个空间函数的频谱也可以按要求的方式予以改变。光学的近代发展史有许多由于应用傅里叶综合技术而得到重要进展的例子，我们仅举其中的几个，例如切尼克相衬显微镜、光学匹配滤波器以及各种反差增强技术等。这两门学科的结合无疑地将会带来更多的成果，而这些成果将使光学和通讯科学的内容更加丰富。

§ 1-2 本书内容概述

我们假设本书读者一开始就对傅里叶分析和线性系统理论具有相当牢固的基础。第二章复习所需要的基础知识；为了不致使那些对时间信号分析和通讯系统有较好基础的读者感到厌烦，在这个复习中讨论的是二元函数。这种函数当然是光学中最常用的，而从一个自变量推广到两个自变量，则对数学理论提供了新的丰富内容，引入了许多新的性质。这些性质在电子学信号和系统的理论中没有直接对应的部分。

在光学成像系统理论中，衍射这种物理现象特别重要。第三章讨论标量衍射理论的基础，包括基尔霍夫理论、瑞利-索末菲理论和“角谱”方法。第四章介绍普遍结果的某些近似，即菲涅耳近似和夫琅和费近似，并且给出了计算衍射图样的例子。

透镜当然是成像系统和光学数据处理系统中的重要元件。第五章研究透镜及其性质。一个薄透镜模型化为一个位相变换器；由此模型导出通常的透镜定律及正透镜的某些傅里叶变换性质。

第六章讨论频谱分析方法在相干成像系统和非相干成像系统中的应用。分别对有像差和无像差系统定义了相应的传

递函数，并讨论了它们的性质。从不同角度对相干系统和非相干系统作了比较。最后考虑了分辨率超过“经典”衍射极限的可能性。

第七章主要注意综合问题，这一章讨论了空间滤波和光学信息处理。首先叙述了傅里叶综合观念的历史发展，接着简单地讨论照相底片的基本性质，考察了基于几何光学的光学处理系统，然后深入研究了更有效的频率平面处理技术。本章内相当详尽地讨论了“Vander Lugt 滤波器”，利用它可以通过纯吸收型频率平面模片(frequency-plane masks)来实现复数传递函数的综合。这一章所讨论的主要应用是光学特征识别和综合孔径天线数据的光学处理。

最后一章是讨论波前重现成像或全息照相。首先从很普遍的观点讨论波前重现的问题，接着较详细地讨论了由盖伯(Gabor)及利思(Leith)和乌帕特尼克斯(Upatnieks)发展起来的特殊全息技术。也讨论了推广到三维的无透镜照相术。照相底片的性质和它对波前重现成像的影响特别重要，因此，我们十分注意地讨论了空间频率响应的受到限制、非线性以及乳胶厚度等因素的影响。也讨论了推广到运动物体的全息照相、非相干光全息照相以及反射全息图的情形。最后，概略地讨论了全息照相的各种大有前途的应用：从显微镜直到通过像差媒质成像。

第二章　二维线性系统分析

实验上发现很多物理现象都有这样一种共同的基本性质，即它们对同时作用的几个激励的响应恒等于每个激励单独引起的响应之和．这种现象称为线性，而它们所具有的这种共同的性质称为线性性质．由电阻、电容和电感所组成的电网络通常在输入信号的相当大范围内是线性的．此外，我们即将看到，描述光通过大多数媒质传播的波动方程的线性性质，使我们自然地把光学成像过程看作是由“物”光分布到“像”光分布的一个线性变换．

这一线性性质大大简化了这一类现象的数学描写，它是我们称为线性系统理论的这一数学结构的基础．线性所带来的最大好处是能够把对一复杂激励的响应（它可以是电压、电流、光的振幅或者光的强度）用对某种“基元”激励的响应表示出来．因此，如果一个激励可以分解成基元激励的线性组合，每个基元激励产生已知的、形式方便的响应，那么由于线性性质，总响应可以看作是各个基元激励的响应的相应线性组合．

本章中我们将复习一些对描写线性现象有用的数学工具，并且讨论在数学分析中经常用到的一些分解式．以后各章我们讨论的激励（系统输入）和响应（系统输出），可以是两种不同物理量中的任何一个．如果光学系统使用的照明具有空间相干性，那么我们会发现，用复数值场振幅的空间分布来描写光场是合适的．如果照明没有空间相干性，则光场宜于用实数值场强度的空间分布来描写．这一章里我们集中注意分析输入为复数值的线性系统；输入为实数值的结果则作为特

例已包含在本章研究的理论中.

§ 2-1 二维傅里叶分析

傅里叶分析对分析线性和非线性现象都是一个很有用的数学工具. 它被广泛地应用于电气网络和通讯系统的研究中; 我们假定读者在这些应用中已经接触过傅里叶理论, 从而对一元函数(如时间的函数)的分析已相当熟悉. 要复习基本的数学概念,可参看 Papoulis[2-1] 和 Bracewell[2-2] 所写的专书.在这里,我们的目的只是使读者进一步熟悉二元函数的分析. 我们不追求数学上的高度严谨,而是着眼于运算方法,这是工程上讨论这个题目的大多数著作的特点.

定义和存在条件

我们用$\mathscr{F}\{\mathbf{g}\}$表示含两个自变量$x$和$y$的一个复函数[1]$\mathbf{g}$的傅里叶变换式(也叫傅里叶谱或频谱),它由下式定义[2]:

$$\mathscr{F}\{\mathbf{g}\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int\mathbf{g}(x,y)\exp[-j2\pi(f_X x+f_Y y)]dxdy. \quad (2\text{-}1)$$

这样定义的变换本身也是两个自变量f_X和f_Y的复函数,f_X和f_Y一般称为频率. 相仿地,函数$\mathbf{G}(f_X,f_Y)$的逆傅里叶变换可用$\mathscr{F}^{-1}\{\mathbf{G}\}$表示,其定义为

$$\mathscr{F}^{-1}\{\mathbf{G}\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int\mathbf{G}(f_X,f_Y)\exp[j2\pi(f_X x+f_Y y)]df_X df_Y. \quad (2\text{-}2)$$

注意,作为数学运算,变换和逆变换在形式上是非常相似的,只是被积函数中指数项符号不同.

1) 以后都用粗体无衬线字母表示函数取复数值.

2) 二重积分号上下只写一个积分限时, 表示此积分限对两次积分都适用.

在讨论傅里叶变换及其逆变换的性质之前，我们首先必须确定，在什么条件下定义 (2-1) 式和 (2-2) 式实际上有意义. 对于某些函数，这种积分在通常数学意义下不一定存在. 因此，我们至少应当简略地讲一下其"存在条件"，否则我们的讨论就不完备. (2-1) 式存在的充分条件可能有种种不同形式，但最常用的也许是下面这一组：

(1) g 必须对整个无限 xy 平面绝对可积.

(2) 在任一有限矩形区域里，g 必须只有有限个间断点和有限个极大和极小点.

(3) g 必须没有无穷大间断点.

一般说来，这三个条件中的任何一个都可以减弱，只要加强另外一个或两个条件，但是讨论这些将远离我们的目的.

正如 Bracewell[2-2]指出过的，"物理上的可能是一个变换存在的很有力的充分条件". 然而，在分析系统时，为了方便，往往用理想化的数学函数来表示实际的物理波形，而对于这些函数，上述存在条件中的一个或多个可能不成立. 例如，经常用狄拉克 δ 函数[1]来表示一个强烈而短促的时间脉冲，δ 函数的定义为

$$\delta(t)=\lim_{N\to\infty} N\exp(-N^2\pi t^2).$$

相仿地，一个理想化的点光源常常用二维的 δ 函数来表示：

$$\delta(x, y)=\lim_{N\to\infty} N^2\exp[-N^2\pi(x^2+y^2)]. \qquad (2\text{-}3)$$

这个函数在原点为无穷大，在其他点上为零，它有一个无穷大间断点，因而不满足存在条件 (3). 也容易找到别的重要例子；例如，函数

$$f(x, y)=1 \text{ 和 } f(x, y)=\cos(2\pi f_x x)$$

---

1) δ 函数的更详尽讨论，包括其他各种定义，见附录 A.

都不满足存在条件(1)。

显然，如果要用傅里叶分析来讨论大量有用的函数，那么就必须对定义(2-1)作些推广。幸好，对于那些不严格满足存在条件的函数，往往也能够发现它们有一个有意义的变换式，只要这些函数可以定义为由可变换函数所组成的序列的极限。对组成定义序列的每一函数进行变换，就产生一个相应的变换式序列，我们称这个新序列的极限为原来函数的广义傅里叶变换式。广义变换可以按照和通常变换相同的规则进行运算，二者之间的差别一般可以不计。以下我们作这样的理解：若一函数并不满足存在条件，但我们仍说它有一个变换式，那么实际上这就是指广义变换。有关傅里叶分析这一推广的更详细的讨论，读者可参阅 Lighthill 的书[2-3]。

为了说明广义变换的计算，我们来考虑狄拉克 δ 函数，我们已看到它是违背存在条件(3)的。注意，定义序列 (2-3) 的每一函数都满足存在条件的要求，并且事实上每一个都存在有傅里叶变换式，由下式给出(见表 2-1)：

$$\mathscr{F}\{N^2\exp[-N^2\pi(x^2+y^2)]\}=\exp\left[-\frac{\pi(f_X^2+f_Y^2)}{N^2}\right].$$

于是得 $\delta(x, y)$的广义变换式为

$$\mathscr{F}\{\delta(x, y)\}=\lim_{N\to\infty}\left\{\exp\left[-\frac{\pi(f_X^2+f_Y^2)}{N^2}\right]\right\}=1. \quad (2\text{-}4)$$

显然，δ 函数的频谱在整个频率区域内是均匀的。

广义变换的其他例子见表 2-1。

傅里叶变换作为分解式

前面已说过，在处理线性系统时，常用的方法是把一个复杂的输入分解成许多较简单的输入，计算系统对每个这样的“基元”函数的响应，再把单个响应迭加起来便得到总响应。

傅里叶分析提供了一个实行这种分解的基本手段。考虑熟知的逆变换关系式

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{G}(f)\exp(j2\pi ft)\,df,$$

此式把一时间函数 g 通过其频谱表示出来。我们可以把这个表达式看作是把函数 $g(t)$ 分解成许多基元函数的线性组合(即积分),每个基元函数的具体形式为 $\exp(j2\pi ft)$。显然,复数 $\mathbf{G}(f)$ 只不过是一个权重因子,必须把它加到频率为 f 的基元函数上以综合出所需要的 $g(t)$。

相仿地,我们可以把二维傅里叶变换看成是把函数 $\mathbf{g}(x,y)$ 分解成形式为 $\exp[j2\pi(f_X x+f_Y y)]$ 的基元函数的线性组合。这些基元函数有许多有意义的性质。注意,对于任意一对特定频率 (f_X,f_Y),相应的基元函数在由

$$y=-\frac{f_X}{f_Y}x+\frac{n}{f_Y}\quad(n\text{ 为整数})$$

表示的线上具有零位相。因此,如图 2-1 所示,可以认为这个基元函数在 xy 平面内之"指向"为 θ 角(相对于 x 轴):

$$\theta=\tan^{-1}\frac{f_Y}{f_X},\tag{2-5}$$

此外,空间周期(即零位相线间的距离)显然为

$$L=\frac{1}{\sqrt{f_X^2+f_Y^2}}.\tag{2-6}$$

总之,我们可以再一次认为逆傅里叶变换提供了分解数学函数的一种手段。一个函数 $\mathbf{g}$ 的傅里叶频谱 $\mathbf{G}$ 只是代表权重因子,必须把它加到各个基元函数上才能综合出所要的函数 $\mathbf{g}$。使用这种分解的实际好处,只有在下面讨论了不变

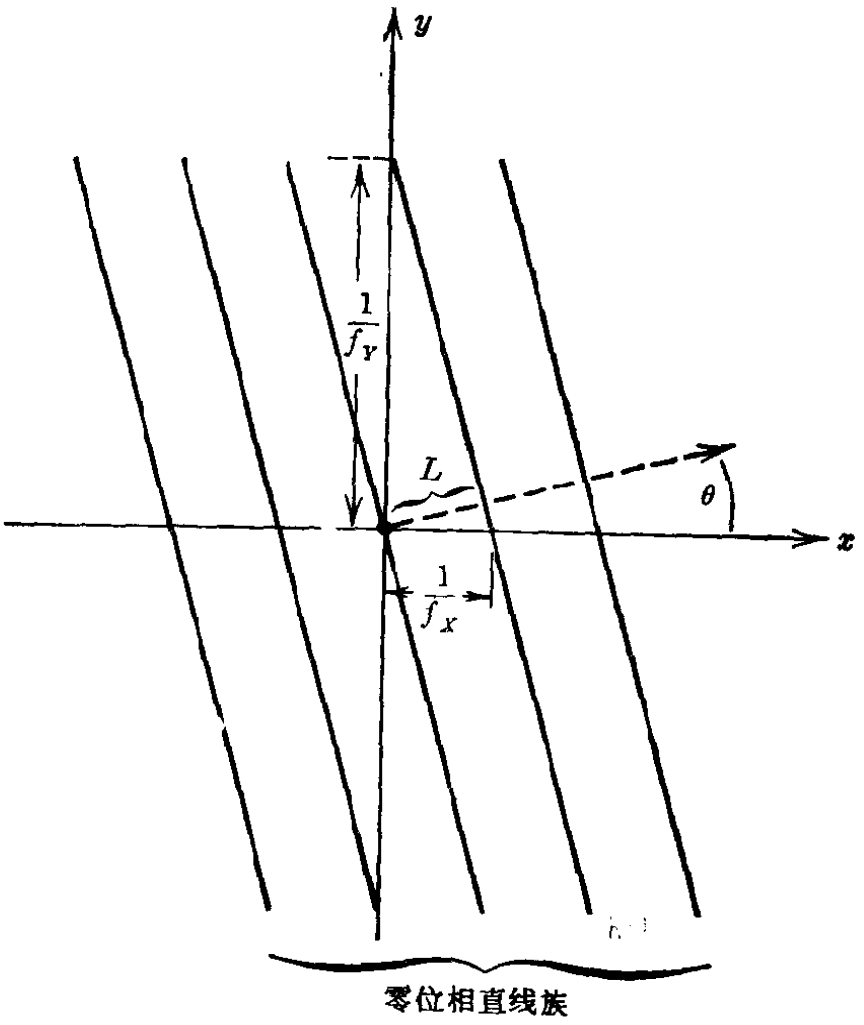


图 2-1　函数 $\exp[j2\pi(f_X x + f_Y y)]$的零位相直线族

线性系统之后才能明显看出.

傅里叶变换定理

傅里叶变换的基本定义(2-1)引出了关于变换运算的一整套内容丰富的数学理论. 现在我们来研究傅里叶变换的几个基本数学性质,这些性质在以后的内容中将会得到广泛应用. 我们把这些性质表述成数学定理,然后简短地讲一下它们的物理意义.因为这些定理是类似的一维情形的直接推广,我们把它们的证明留到附录中.

1．线性定理．$\mathscr{F}\{a\mathbf{g}+\beta\mathbf{h}\}=a\mathscr{F}\{\mathbf{g}\}+\beta\mathscr{F}\{\mathbf{h}\}$；即，两个函数之和的变换简单地是它们各自的变换之和．

2．相似性定理．若 $\mathscr{F}\{\mathbf{g}(x, y)\}=\mathbf{G}(f_X, f_Y)$，则

$$\mathscr{F}\{\mathbf{g}(ax, by)\}=\frac{1}{|ab|}\mathbf{G}\left(\frac{f_X}{a}, \frac{f_Y}{b}\right),$$

即，空域[1]中坐标(x, y)的“伸展”，导致频域中坐标(f_X, f_Y)的压缩加上整个频谱上幅度的一个总体的变化．

3．相移定理．若 $\mathscr{F}\{\mathbf{g}(x, y)\}=\mathbf{G}(f_X, f_Y)$，则

$$\mathscr{F}\{\mathbf{g}(x-a, y-b)\}=\mathbf{G}(f_X, f_Y)\exp[-j2\pi(f_Xa+f_Yb)],$$

即，函数在空域中的平移，带来频域中的一个线性相移．

4．Parseval 定理．若 $\mathscr{F}\{\mathbf{g}(x, y)\}=\mathbf{G}(f_X, f_Y)$，则

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int|\mathbf{g}(x, y)|^2dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\int|\mathbf{G}(f_X, f_Y)|^2df_Xdf_Y,$$

这个定理一般可以解释为能量守恒的表述．

5．卷积定理．若 $\mathscr{F}\{\mathbf{g}(x, y)\}=\mathbf{G}(f_X, f_Y)$ 并且 $\mathscr{F}\{\mathbf{h}(x, y)\}=\mathbf{H}(f_X, f_Y)$，则

$$\mathscr{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int\mathbf{g}(\xi, \eta)\mathbf{h}(x-\xi, y-\eta)\,d\xi d\eta\right\}=$$

$$=\mathbf{G}(f_X, f_Y)\mathbf{H}(f_X, f_Y),$$

空域中两个函数的卷积（这是线性系统理论中经常出现的一种运算）完全等效于一个更简单的运算：它们各自的变换式相乘．

6．自相关定理．若 $\mathscr{F}\{\mathbf{g}(x, y)\}=\mathbf{G}(f_X, f_Y)$，则

1）空域（space domain）一词是相应于无线电工程中的时域一词而引入的．——译注

$$\mathscr{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{g}(\xi,\eta)\mathbf{g}^*(\xi-x,\eta-y)d\xi d\eta\right\}=|\mathbf{G}(f_X,f_Y)|^2$$

同样，

$$\mathscr{F}\{|\mathbf{g}(\xi,\eta)|^2\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{G}(\xi,\eta)\mathbf{G}^*(\xi+f_X,\eta+f_Y)d\xi d\eta,$$

这个定理可看成是卷积定理的特例。

7．傅里叶积分定理．在 $\mathbf{g}$ 的各个连续点上

$$\mathscr{F}\mathscr{F}^{-1}\{\mathbf{g}(x,y)\}=\mathscr{F}^{-1}\mathscr{F}\{\mathbf{g}(x,y)\}=\mathbf{g}(x,y)$$

在 $\mathbf{g}$ 的各个间断点上，这样两次相继的变换给出该点的一个小邻域内 $\mathbf{g}$ 的角向平均值．亦即，除在间断点外，对函数相继进行变换和逆变换又重新得出该函数。

上述变换定理远远不止是有理论上的意义。它们会经常用到，因为它们为傅里叶变换的计算提供了基本工具，并且在解决傅里叶分析问题时能节省大量的工作量。

可分离的函数[1)]

一个二元函数在某种坐标系内若能写成两个一元函数的乘积，则称此函数在这种坐标系中是可分离的．因此，函数 $\mathbf{g}$ 在直角坐标系内是可分离的，若

$$\mathbf{g}(x,y)=\mathbf{g}_X(x)\mathbf{g}_Y(y), \tag{2-7}$$

而它在极坐标中是可分离的，若

$$\mathbf{g}\ (r,\theta)=\mathbf{g}_R(r)\mathbf{g}_\theta(\theta). \tag{2-8}$$

跟一般的函数比较起来，可分离的函数往往更便于讨论，因为可分离性常常使复杂的二维计算得以简化为更简单的一维计算．例如，一个在直角坐标系中可分离的函数具有这一特别简单的性质：它的二维傅里叶变换式是两个一维傅里叶

1）即可分离变量的函数．——译注

变换式的乘积，这由下面的关系式就可以清楚看出：

$$\mathscr{F}\{\mathbf{g}(x, y)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int\mathbf{g}(x, y)\exp[-j2\pi(f_X x+f_Y y)]dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{g}_X(x)\exp[-j2\pi f_X x]\,dx\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{g}_Y(y)\exp[-j2\pi f_Y y]dy$$

$$=\mathscr{F}_X\{\mathbf{g}_X\}\mathscr{F}_Y\{\mathbf{g}_Y\}. \tag{2-9}$$

这样，$\mathbf{g}$ 的变换式本身也可分离为两个因子的乘积，一个因子只是 f_X 的函数，另一个只是 f_Y 的函数，并且二维的变换过程简化为一系列更为熟悉的一维计算。

在极坐标中可分离的函数没有在直角坐标中可分离的函数那样容易处理。但是仍然能够普遍证明，二维计算可以通过一系列一维计算来完成。例如，在习题中（见题 2-7）要研究在极坐标中可分离的函数的傅里叶变换过程，那里要求读者证明，二维频谱能够由进行一系列被称为汉克尔 (Hankel) 变换的一维运算来得到。

具有圆对称的函数：傅里叶-贝塞尔变换

最简单的一类在极坐标中可分离的函数也许是那些具有圆对称的函数。所谓一个函数 $\mathbf{g}$ 是圆对称的，就是它只是半径 r 的函数：

$$\mathbf{g}(r, \theta)=\mathbf{g}_R(r). \tag{2-10}$$

这种函数在我们感兴趣的问题中起着特别重要的作用，因为大部分光学系统恰好具有这种对称性。因此我们特别注意如何对圆对称函数进行傅里叶变换的问题。

$\mathbf{g}$ 在直角坐标中的傅里叶变换式当然为

$$\mathbf{G}(f_X, f_Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int\mathbf{g}(x, y)\exp[-j2\pi(f_X x+f_Y y)]dxdy. \tag{2-11}$$

为了充分利用 $\mathbf{g}$ 的圆对称性，我们在 xy 平面和 $f_X f_Y$ 平面作如下的变换以变换为极坐标：

$$\begin{aligned} &r=\sqrt{x^2+y^2}, \quad x=r\cos\theta; \\ &\theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), \quad y=r\sin\theta; \\ &\rho=\sqrt{f_X^2+f_Y^2}, \quad f_X=\rho\cos\phi; \\ &\phi=\tan^{-1}\left(\frac{f_Y}{f_X}\right), \quad f_Y=\rho\sin\phi. \end{aligned} \tag{2-12}$$

暂时我们还把傅里叶变换式写成半径和角度二者的函数：

$$\mathscr{F}\{\mathbf{g}\}=\mathbf{G}_0(\rho,\phi).$$

把坐标变换(2-12)代入方程(2-11)，$\mathbf{g}$ 的傅里叶变换式可写成

$$\mathbf{G}_0(\rho,\phi)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\infty}dr\cdot r\mathbf{g}_R(r)\exp[-j2\pi r\rho(\cos\theta\cos\phi+\sin\theta\sin\phi)],$$

它等价于

$$\mathbf{G}_0(\rho,\phi)=\int_0^{\infty}dr\cdot r\mathbf{g}_R(r)\int_0^{2\pi}d\theta\exp[-j2\pi r\rho\cos(\theta-\phi)]. \tag{2-13}$$

最后，为了化简这个变换式，我们利用贝塞尔恒等式

$$J_0(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp[-ja\cos(\theta-\phi)]d\theta, \tag{2-14}$$

其中 J_0 是零阶的第一类贝塞尔函数。把(2-14)代入(2-13)，可以看到变换式对角度的依赖关系就消失了，使 $\mathbf{G}_0$ 成为只是半径 ρ 的函数：

$$\mathbf{G}_0(\rho)=2\pi\int_0^\infty r\mathbf{g}_R(r)J_0(2\pi r\rho)dr. \qquad (2\text{-}15)$$

于是，圆对称函数的傅里叶变换式本身也是圆对称的，它可以由作一维计算(2-15)求出. 傅里叶变换的这种特殊形式出现非常频繁，有必要给它一个专门名称；因此(2-15)式称为傅里叶-贝塞尔变换或零阶汉克尔 变换. 为了 简短，我们采用前一术语.

用与上面完全相同的论证方法，圆对称函数 $\mathbf{G}_0(\rho)$ 的逆傅里叶变换可表示为

$$\mathbf{g}_R(r)=2\pi\int_0^\infty \rho\mathbf{G}_0(\rho)J_0(2\pi r\rho)d\rho.$$

因此，对于圆对称函数，变换和逆变换运算没有差别.

用符号 $\mathscr{B}\{\}$ 表示傅里叶-贝塞尔变换 的运算，由傅里叶积分定理直接推出，在 $\mathbf{g}_R(r)$连续的每一 r 值上有

$$\mathscr{B}\mathscr{B}^{-1}\{\mathbf{g}_R(r)\}=\mathscr{B}^{-1}\mathscr{B}\{\mathbf{g}_R(r)\}=\mathbf{g}_R(r).$$

此外，可直接用相似性定理证明(见习题 2-4)

$$\mathscr{B}\{\mathbf{g}_R(ar)\}=\frac{1}{a^2}\mathbf{G}_0\left(\frac{\rho}{a}\right).$$

在用傅里叶-贝塞尔变换的表示式(2-15)时，读者应当记住，它只不过是二维傅里叶变换式的一个特殊情形，因此傅里叶变换的任何熟知的性质在傅里叶-贝塞尔变换的 术语 中都有完全等效的对应物.

一些常用函数和一些有用的傅里叶变换式

有几个数学函数在以后要广泛用到，因而给 它们各自指定专门的记号可以节省相当多的时间和精力. 为此，我们规定一些常用函数的定义如下：

矩形函数

$$\mathrm{rect}(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant\frac{1}{2}\\ 0 & \text{其他,}\end{cases}$$

sinc 函数

$$\mathrm{sinc}(x)=\frac{\sin\pi x}{\pi x},$$

符号函数

$$\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0,\end{cases}$$

三角状函数

$$\Lambda(x)=\begin{cases}1-|x| & |x|\leqslant 1\\ 0 & \text{其他,}\end{cases}$$

梳状函数

$$\mathrm{comb}(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-n),$$

圆域函数

$$\mathrm{circ}(\sqrt{x^2+y^2})=\begin{cases}1 & \sqrt{x^2+y^2}\leqslant 1\\ 0 & \text{其他.}\end{cases}$$

这些函数中的前五个都画在图2-2中，都是一元函数；但是，二维空间上的许多可分离的函数可以用这些函数的乘积构成. 圆域函数是唯一的一个二元函数，它的结构的图象见图 2-3.

我们给出若干对特殊的二维变换式来结束对傅里叶分析的讨论.表2-1列出了几个在直角坐标系中可分离的函数的变换式. 因为这些函数的变换式可以直接从熟知的一维变换式的乘积求出，这些关系式的证明留给读者去做(见习题 2-2).

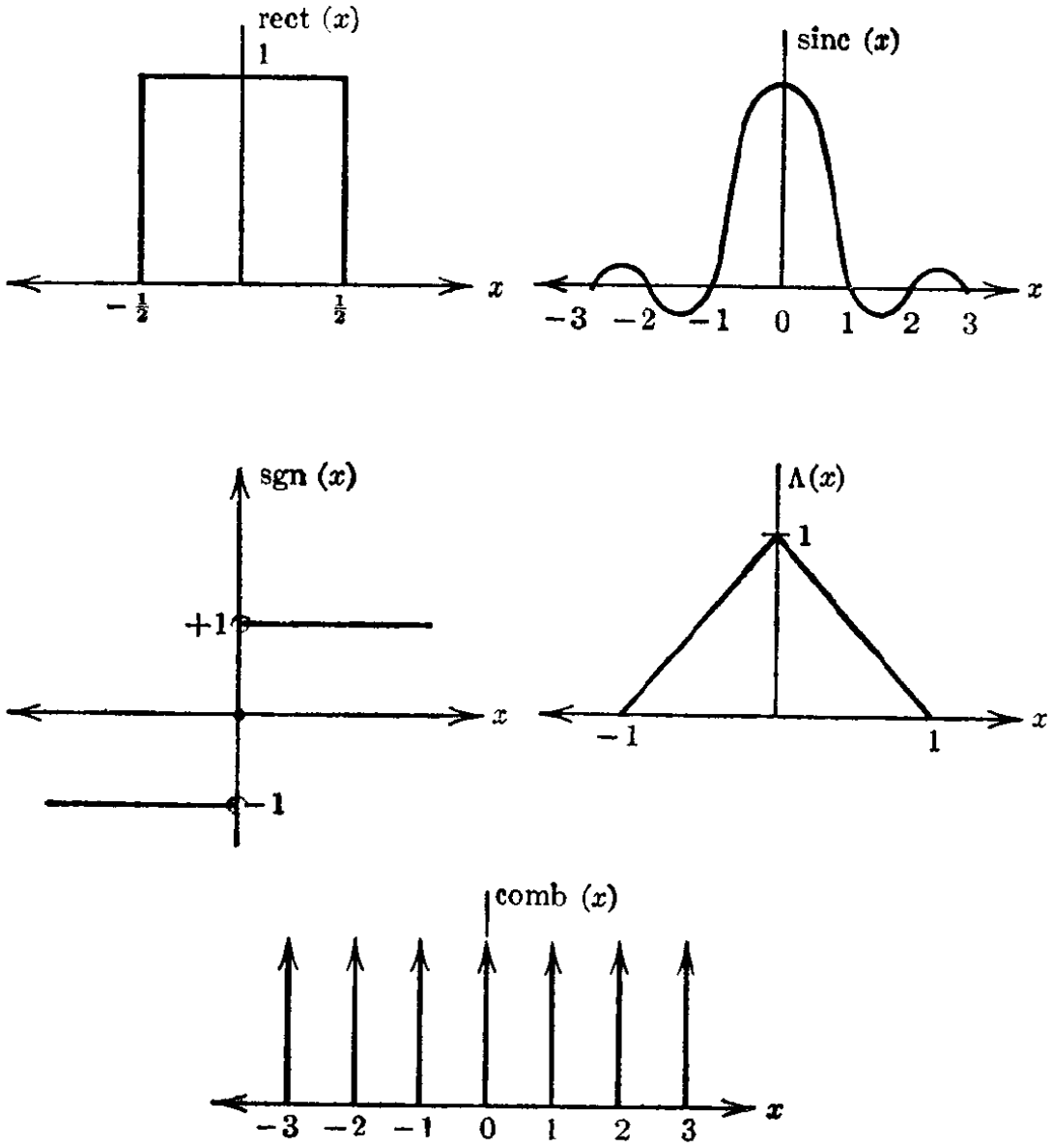


图 2-2 特殊函数

另一方面，大多数圆对称函数的变换式不能简单地从一维变换式的知识求出。最常遇见的具有圆对称性的函数是

$$\mathrm{circ}(r)=\begin{cases}1 & r\leqslant 1\\ 0 & \text{其他.}\end{cases}$$

因此我们在这里花点功夫来求出这个函数的变换式。利用傅

表 2-1　一些在直角坐标系中可分离的函数的傅里叶变换式

函　　数	变　　换　　式
$\exp[-\pi(x^2+y^2)]$	$\exp[-\pi(f_X^2+f_Y^2)]$
$\mathrm{rect}(x)\mathrm{rect}(y)$	$\mathrm{sinc}(f_X)\mathrm{sinc}(f_Y)$
$\Lambda(x)\ \Lambda(y)$	$\mathrm{sinc}^2(f_X)\mathrm{sinc}^2(f_Y)$
$\delta(x,y)$	1
$\exp[j\pi(x+y)]$	$\delta\left(f_X-\frac{1}{2},\ f_Y-\frac{1}{2}\right)$
$\mathrm{sgn}(x)\mathrm{sgn}(y)$	$\frac{1}{j\pi f_X}\cdot\frac{1}{j\pi f_Y}$
$\mathrm{comb}(x)\ \mathrm{comb}(y)$	$\mathrm{comb}(f_X)\ \mathrm{comb}(f_Y)$

里叶-贝塞尔变换的表示式(2-15)，圆域函数的变换式可写成

$$\mathscr{B}\{\mathrm{circ}(r)\}=2\pi\int_0^1 rJ_0(2\pi r\rho)\,dr,$$

作变数变换 $r'=2\pi r\rho$，并利用恒等式

$$\int_0^x \xi J_0(\xi)\,d\xi=xJ_1(x)\ ,$$

我们把变换式改写成

$$\mathscr{B}\{\mathrm{circ}(r)\}=\frac{1}{2\pi\rho^2}\int_0^{2\pi\rho} r'J_0(r')\,dr'$$

$$=\frac{J_1(2\pi\rho)}{\rho},\qquad (2\text{-}16)$$

其中 J_1 是一阶第一类贝塞尔函数. 图 2-3 画出圆域函数及其变换式. 注意，正如预料的那样，变换式也是圆对称的，它由中心的尖峰和一系列幅度逐渐变小的同心环组成. 奇妙的是，我们看到这个变换式的零点在半径上的排列是不等距的. 关于另外一些函数的傅里叶-贝塞尔变换式请参阅习题(见习题 2-4).

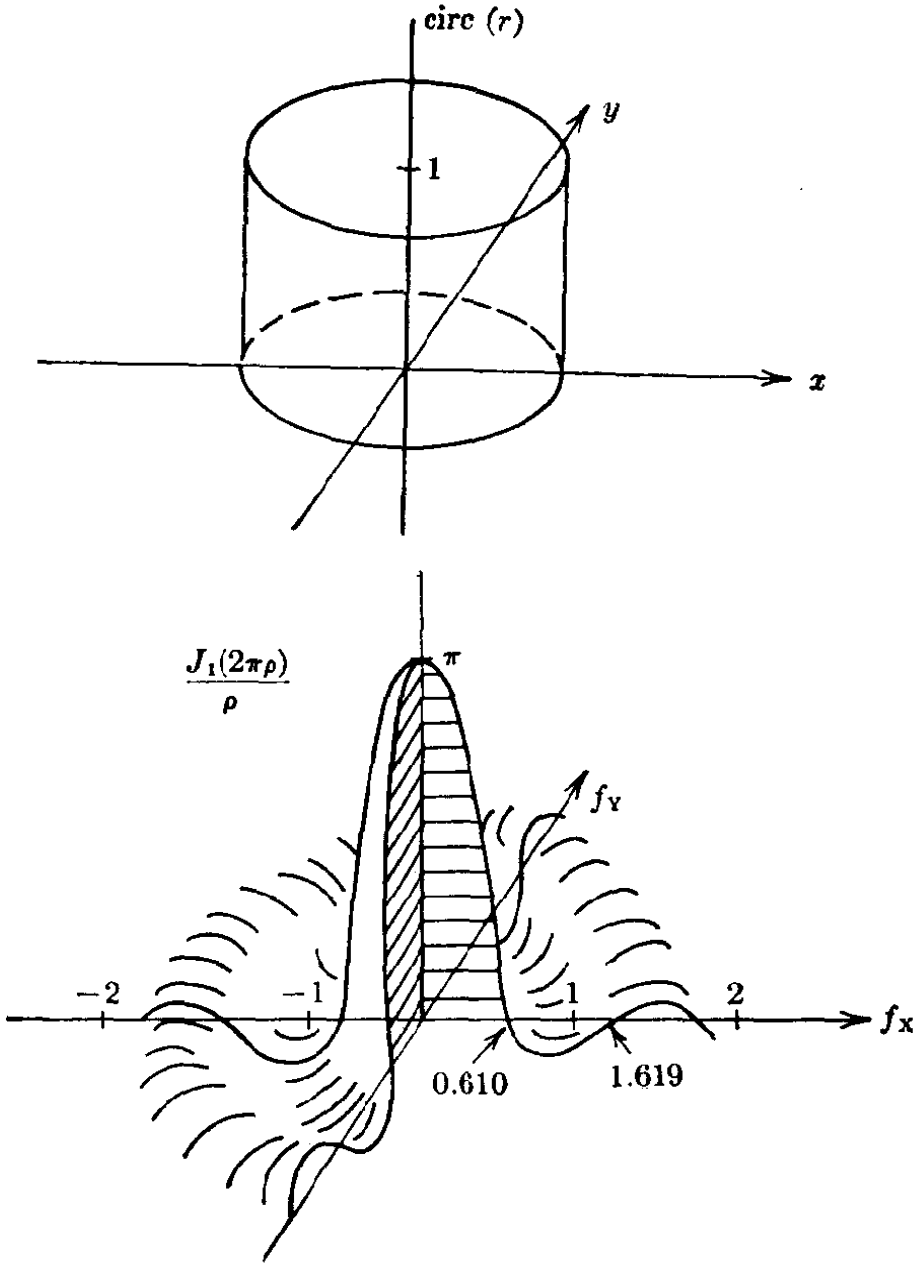


图 2-3　圆域函数及其变换式

§ 2-2　线 性 系 统

为了便于讨论，我们打算相当广义地来定义系统一词，使它既包括熟悉的电网络，也包括不太熟悉的光学成像装置。因此，我们把系统定义为一个变换，它把一组输入函数变换成

一组输出函数. 对电网络而言，输入和输出都是一个一维自变量(时间)的实值函数(电压或电流)；对于成像系统来说，输入和输出可以是一个二维自变量(空间)的实值函数（强度），也可以是它的复值函数(场振幅). 前面已经提过，是应当把强度还是把场振幅看作是系统变量的问题，将在稍后讨论.

如果我们只限于考虑确定性(即非随机) 系统，那么一个给定的输入必定变换成一个唯一的输出. 但是，每个输出却不一定对应于一个唯一的输入，因为我们看到，有一些输入函数可以没有输出. 因此我们从一开始就只限于考虑多对一变换所表征的系统.

表示一个系统最合适的方法是用一个数学算符 $\mathcal{S}\{\}$. 我们设想此算符作用在输入函数上产生输出函数. 于是，如果函数 $\mathbf{g}_1(x_1, y_1)$表示一个系统的输入，而 $\mathbf{g}_2(x_2, y_2)$表示与之相应的输出，那么由 $\mathcal{S}\{\}$的定义，两个函数由下式联系：

$$\mathbf{g}_2(x_2, y_2)=\mathcal{S}\{\mathbf{g}_1(x_1, y_1)\}. \tag{2-17}$$

若不更详尽地说明算符 $\mathcal{S}\{\}$的性质，那么对一般系统的性质的描述就只能限于方程(2-17) 那样，而要更具体是困难的. 在下面的内容中，我们主要（即使不是唯一地）讨论的是经过挑选的一类系统，即所谓线性系统. 我们将会看到，线性性质的假定将使这种系统具有既简单而又有物理意义的表示，它也将导出输入和输出之间的有用关系式.

线性性质和迭加积分

若对所有的输入函数 $\mathbf{t}$ 和 $\mathbf{s}$ 以及所有复数常数 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$，下述迭加性质

$$\mathcal{S}\{\mathbf{as}(x_1, y_1)+\mathbf{bt}(x_1, y_1)\}=\mathbf{a}\,\mathcal{S}\{\mathbf{s}(x_1, y_1)\}+ +\mathbf{b}\,\mathcal{S}\{\mathbf{t}(x_1, y_1)\} \tag{2-18}$$

都成立，则此系统称为线性系统. 如前所述，线性的最大好处

是，系统对任意输入的响应，能够用它对此输入分解成的某些“基元”函数的响应表示出来．因此，找出一个简便方法来分解输入函数是很重要的．δ 函数的筛选性质（见附录 A）就提供了这种分解方法．根据 δ 函数的这一性质，有

$$\mathbf{g}_1(x_1, y_1) = \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{g}_1(\xi, \eta)\delta(x_1-\xi, y_1-\eta)d\xi d\eta. \quad (2\text{-}19)$$

这个方程可看成是把 $\mathbf{g}_1$ 表示成带有权重的并移动位置的许多 δ 函数的线性组合，这种分解方法的基元函数当然就是这些 δ 函数．

为了求出系统对输入 $\mathbf{g}_1$ 的响应，把(2-19)代入(2-17)：

$$\mathbf{g}_2(x_2, y_2) = \mathbb{S}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int g_1(\xi, \eta)\delta(x_1-\xi, y_1-\eta)d\xi d\eta\right\}.$$

现在把数 $\mathbf{g}_1(\xi, \eta)$看成是一个加在元函数 $\delta(x_1-\xi, y_1-\eta)$上的简单权重因子，则由线性性质(2-18) 可以把算符 $\mathbb{S}\{\}$作用到各个“基元”函数上；于是把算符 $\mathbb{S}\{\}$移进积分号内，得到

$$\mathbf{g}_2(x_2, y_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{g}_1(\xi, \eta)\ \mathbb{S}\{\delta(x_1-\xi, y_1-\eta)\}d\xi d\eta.$$

最后，我们用记号 $\mathbf{h}(x_2, y_2; \xi, \eta)$表示系统在输出平面的$(x_2, y_2)$点上对输入平面坐标$(\xi, \eta)$上的 δ 函数输入的响应，即

$$\mathbf{h}(x_2, y_2; \xi, \eta) = \mathbb{S}\{\delta(x_1-\xi, y_1-\eta)\}. \quad (2\text{-}20)$$

函数 $\mathbf{h}$ 称为系统的脉冲响应．于是系统的输入和输出现在就可以用如下的简单方程联系起来：

$$\mathbf{g}_2(x_2, y_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{g}_1(\xi, \eta)\mathbf{h}(x_2, y_2; \xi, \eta)d\xi d\eta. \quad (2\text{-}21)$$

这个基本表达式称为迭加积分，它表明了一个非常重要的事实，即线性系统的性质完全由它对单位脉冲的响应表

征. 为了完全确定输出，一般就必须知道系统对位于输入平面上所有可能的点上的脉冲的响应. 对于线性成像系统，这个结果具有有趣的物理解释，即只要确定了物场中各点上的点光源的像（可能是复数值），就足以完备地描述各个成像元件(透镜、光阑等)的效应.

不变线性系统：传递函数

在研究了一般线性系统的输入-输出关系式之后，现在我们转而注意线性系统的一个重要的子类即不变线性系统. 如果一个电网络的脉冲响应$\mathbf{h}(t;\tau)$(即它在t时刻对作用于τ时刻的单位脉冲激励的响应)只依赖于时间之差$(t-\tau)$，则称它是时间不变的. 由固定电阻、电容和电感所组成的电网络是时间不变的，因为它们的特性并不随时间变化.

同样，一个线性成像系统是空间不变的(或等效于说是等晕的)，如果它的脉冲响应$\mathbf{h}(x_2, y_2; \xi, \eta)$只依赖于距离$(x_2-\xi)$和$(y_2-\eta)$. 对于这种系统当然有

$$\mathbf{h}(x_2, y_2; \xi, \eta) = \mathbf{h}(x_2-\xi, y_2-\eta), \qquad (2\text{-}22)$$

于是，当一个点光源在物场中移动时，若点光源的像只改变位置而不改变它的函数形式，则此成像系统是空间不变的. 实际上，成像系统很少能在它们的整个物场上是等晕的，但是往往有可能把物场分成许多小区域(等晕区 isoplanatic patches)，在每个小区域中系统是近似不变的. 为了完备地描写成像系统，应当给出适用于每块等晕区的脉冲响应；但是，如果我们关心的那一部分物场相当小，通常只要考虑系统的轴上的等晕区就够了. 注意，对于不变系统，迭加积分(2-21)有特别简单的形式

$$\mathbf{g}_2(x_2, y_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{g}_1(\xi, \eta)\mathbf{h}(x_2-\xi, y_2-\eta)\,d\xi d\eta, \quad (2\text{-}23)$$

我们认出它是物函数与系统的脉冲响应的一个二维卷积．以后，给 (2-23) 式这样的卷积关系式一个简写记号将会带来方便，因此把这个方程式改写成

$$\mathbf{g}_2 = \mathbf{g}_1 * \mathbf{h}.$$

这里任何两个函数之间的一个星号是表示这两个函数构成卷积的一个方便的符号．

不变线性系统具有一套比一般的线性系统更为细致得多的数学理论．正是由于有这套理论，不变系统非常容易处理．如果我们注意，卷积关系式 (2-23) 在进行傅里叶变换后形式特别简单，那么不变系统的简单性就明显起来了．具体地看，对(2-23)式两边作傅里叶变换并应用卷积定理，可以看出系统的输出和输入的频谱 $\mathbf{G}_2(f_X, f_Y)$ 和 $\mathbf{G}_1(f_X, f_Y)$ 由下述简单的方程联系：

$$\mathbf{G}_2(f_X, f_Y) = \mathbf{H}(f_X, f_Y)\mathbf{G}_1(f_X, f_Y), \qquad (2\text{-}24)$$

其中 $\mathbf{H}$ 是脉冲响应的傅里叶变换式

$$\mathbf{H}(f_X, f_Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{h}(\xi, \eta)\exp[-j2\pi(f_X\xi + f_Y\eta)]d\xi d\eta, \qquad (2\text{-}25)$$

函数 $\mathbf{H}$ 称为系统的传递函数，它表示系统在“频域”中的效应．注意，为求系统输出所需的比较冗烦的卷积运算(2-23)，在(2-24)中换成往往更简单的一系列运算：先作傅里叶变换，然后变换式相乘，最后进行逆傅里叶变换．

从另一种观点来看，我们可以认为：关系式 (2-24) 和 (2-25)表明，对于线性不变系统，输入可以分解成比(2-19)式的 δ 函数更为合适的别种基元函数．这里所说的别种基元函数当然就是复指数函数．对 $\mathbf{g}_1$ 作变换只不过是把输入分解成具有不同空间频率(f_X, f_Y)的复指数函数．输入频谱 $\mathbf{G}_1$ 与

传递函数$\mathbf{H}$相乘就相当于考虑系统对每个元函数的效应。注意，这些效应只限于振幅的变化和相角的移动。这由我们只是把输入频谱在每一频率(f_X, f_Y)上乘以一个复数$\mathbf{H}(f_X, f_Y)$即可明显看出。而对输出频谱$\mathbf{G}_2$进行逆变换，则只不过是把所有改变后的元函数加起来以合成输出$\mathbf{g}_2$。

最后应当强调，传递函数理论所带来的简化只适用于不变线性系统。关于傅里叶分析在随时间变化的电网络中的应用，读者可参看文献[2-4]；傅里叶分析在可随空间变化的成像系统中的应用可在文献[2-5]中找到。

§ 2-3 二维抽样理论

为了数据处理和数学分析的目的，一个函数$\mathbf{g}(x, y)$用它在(x, y)平面内一个分立点集上的抽样值的列阵来表示往往是方便的。从直观上看很清楚，如果这些抽样点取得彼此足够靠近，那么我们可以说抽样数据就是原来的函数的精确表示，意即通过简单的内插就能以相当大的精确度使$\mathbf{g}$重现。一个较不明显的事实是，有一类特殊的函数（称为限带函数 bandlimited functions），可以绝对准确地重现，只要抽样点之间的间隔不大于某一个上限。这个结果最初是Whittaker[2-6]指出的，后来 Shannon[2-7]在信息论研究中加以普及。

抽样定理是应用于限带函数这一类函数的。所谓限带函数是指这类函数的频带有限，即其傅里叶变换只在频率空间的一个有限区域$\mathscr{R}$上不为零。我们首先讨论这个定理的一种形式，它直接类似于 Shannon 所用的一维定理。然后我们非常简要地指出这个定理在有些二维情况下所能作的改进。

Whittaker-Shannon 抽样定理

为了导出也许是最简单形式的抽样定理，我们考虑函数

$\mathbf{g}$ 在矩形格点上的抽样，由下式定义：

$$\mathbf{g}_s(x, y) = \mathrm{comb}\left(\frac{x}{X}\right)\mathrm{comb}\left(\frac{y}{Y}\right)\mathbf{g}(x, y)。\quad (2\text{-}26)$$

因此，抽样函数 $\mathbf{g}_s$ 由 δ 函数的阵列组成，各个 δ 函数之间的相互间距在 x 方向上的宽度为 X 而在 y 方向上的宽度为 Y，如图 2-4 所示。每个 δ 函数下的面积正比于函数 $\mathbf{g}$ 在方形格点点阵中该特定点上之值。卷积定理指出，$\mathbf{g}_s$ 的频谱 $\mathbf{G}_s$ 可以从函数 $\mathrm{comb}\left(\frac{x}{X}\right)\mathrm{comb}\left(\frac{y}{Y}\right)$ 的变换式与函数 $\mathbf{g}$ 的变换式的卷积求出，即

$$\mathbf{G}_s(f_X, f_Y) = \mathscr{F}\left\{\mathrm{comb}\left(\frac{x}{X}\right)\mathrm{comb}\left(\frac{y}{Y}\right)\right\} * \mathbf{G}(f_X, f_Y)$$

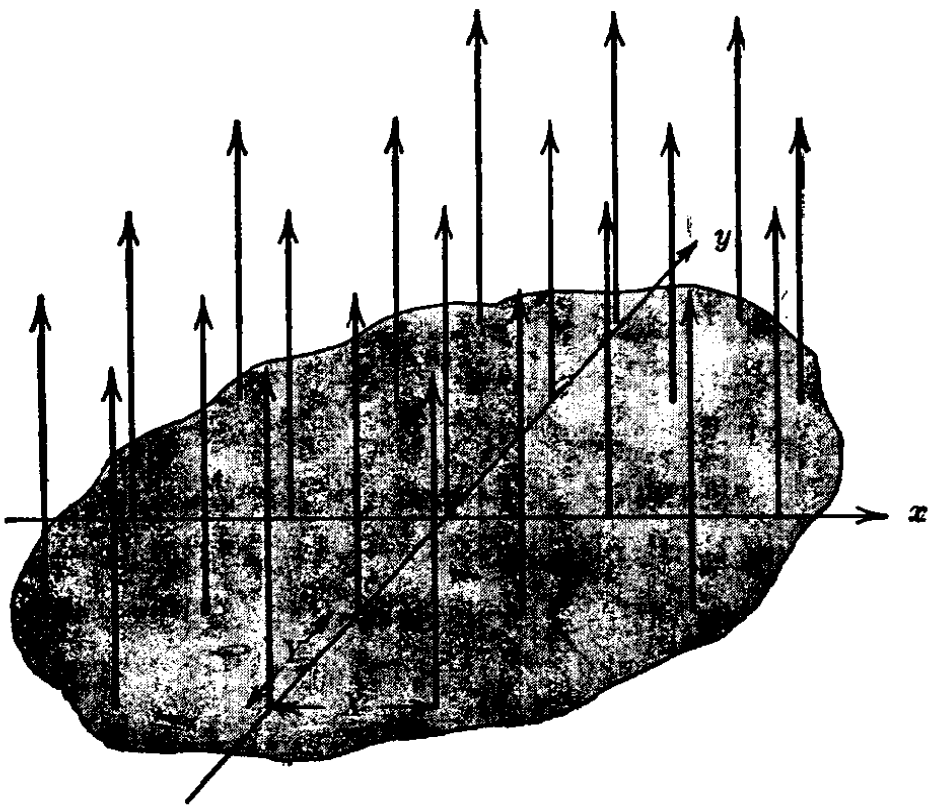


图 2-4　抽样函数

其中星号仍表示要作卷积。利用表 2-1 和相似性定理，我们得到

$$\mathscr{F}\left\{\mathrm{comb}\left(\frac{x}{X}\right)\mathrm{comb}\left(\frac{y}{Y}\right)\right\}=$$
$$=XY\,\mathrm{comb}(Xf_X)\,\mathrm{comb}(Yf_Y)\,.$$

而由习题 2-1b 的结果，

$$XY\,\mathrm{comb}(Xf_X)\,\mathrm{comb}\,(Yf_Y)=$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta\left(f_X-\frac{n}{X},\ f_Y-\frac{m}{Y}\right).$$

因此，抽样函数的频谱由下式给出：

$$\mathbf{G}_s(f_X,f_Y)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathbf{G}\left(f_X-\frac{n}{X},\ f_Y-\frac{m}{Y}\right). \tag{2-27}$$

显然，$\mathbf{g}_s$ 的频谱可以通过把 $\mathbf{g}$ 的频谱安置在 $f_X f_Y$ 平面上每一$\left(\frac{n}{X},\ \frac{m}{Y}\right)$点的周围的办法简单求出，如图 2-5 所示。

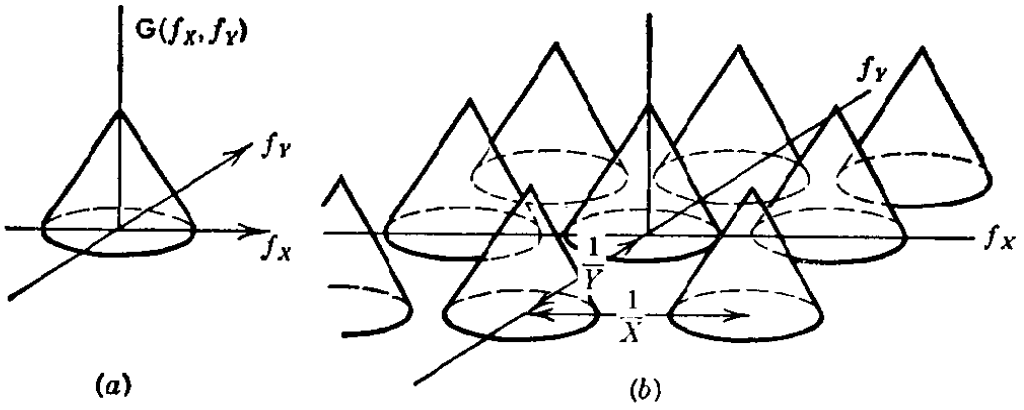


图 2-5 (a)原来函数的频谱；(b)抽样数据的频谱

因为已假定函数 $\mathbf{g}$ 是限带的，它的频谱 $\mathbf{G}$，只在频率空间的一个有限区域 $\mathscr{R}$ 上不为零。由方程 (2-27)，抽样函数的频谱不为零的区域可由在频率平面内的每一$\left(\frac{n}{X},\ \frac{m}{Y}\right)$点周围划出区域 $\mathscr{R}$ 而得到。于是很清楚，如果 X 和 Y 足够小(即抽

样点相互之间充分靠近)，那么各个频谱区域的间隔$\frac{1}{X}$和$\frac{1}{Y}$就会足够大，保证相邻的区域不会重迭(见图 2-5)。于是，从$\mathbf{G}_s$可以绝对准确地恢复原来的频谱$\mathbf{G}$，方法是让抽样函数$\mathbf{g}_s$通过一个能够无畸变地传递方程(2-27)中的$(n=0, m=0)$项同时完全阻挡所有其他各项的线性滤波器。这样，在这个滤波器的输出端，我们就得到了原始数据$\mathbf{g}(x, y)$的绝对准确的再现。

如上所述，为了很好地恢复原始数据，抽样点就必须足够靠近，以使得$\mathbf{G}_s$的各个频谱区域分开。为了确定抽样点之间的最大容许间隔，令$2B_X$和$2B_Y$分别表示完全围住区域$\mathscr{R}$的最小矩形[1]在f_X和f_Y方向上的宽度。因为抽样数据的频谱(2-27)中的各项在f_X和f_Y方向上相隔的距离分别为$\frac{1}{X}$和$\frac{1}{Y}$，所以如果

$$X \leqslant \frac{1}{2B_X}, \quad \text{及} \quad Y \leqslant \frac{1}{2B_Y}, \tag{2-28}$$

就保证了频谱区域分开。于是，为了完全复原原来的函数，抽样点阵的最大间距就为$(2B_X)^{-1}$和$(2B_Y)^{-1}$。

在确定了抽样点之间的最大容许距离之后，还需要具体定出应当让抽样数值通过的滤波器的准确的传递函数。在许多情况下，这里有很大的选择余地，因为对于区域$\mathscr{R}$的许多可能的形状，存在着大量的传递函数，这些函数只通过$\mathbf{G}_s$的$(n=0, m=0)$项而摒弃所有其他各项。但是，对于我们的目的来说，只要注意到这一点就够了，即若关系式(2-28)成立，就存在一个传递函数，它不管$\mathscr{R}$的具体形状如何将给出所要

1) 为了简单起见，我们假定这个矩形的中心在原点。如果情况不是这样，可对论据加以修正，以给出一个更有效的抽样定理。

的结果，即

$$\mathbf{H}(f_X, f_Y) = \mathrm{rect}\left(\frac{f_X}{2B_X}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{f_Y}{2B_Y}\right), \tag{2-29}$$

这时就从 $\mathbf{G}_s$ 绝对准确地复原了 $\mathbf{G}$，因为这样一个滤波器的输出频谱是

$$\mathbf{G}_s(f_X, f_Y)\ \mathrm{rect}\left(\frac{f_X}{2B_X}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{f_Y}{2B_Y}\right) \equiv \mathbf{G}(f_X, f_Y),$$

在空间区域中相应于上式的等式为

$$\left[\mathrm{comb}\left(\frac{x}{X}\right)\mathrm{comb}\left(\frac{y}{Y}\right)\mathbf{g}(x, y)\right] * \mathbf{h}(x, y) = \mathbf{g}(x, y), \tag{2-30}$$

其中 $\mathbf{h}$ 是滤波器的脉冲响应函数：

$$\mathbf{h}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathrm{rect}\left(\frac{f_X}{2B_X}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{f_Y}{2B_Y}\right)\exp[j2\pi(f_X x + f_Y y)]df_X df_Y = 4B_X B_Y \mathrm{sinc}(2B_X x)\mathrm{sinc}(2B_Y y).$$

注意

$$\mathrm{comb}\left(\frac{x}{X}\right)\mathrm{comb}\left(\frac{y}{Y}\right)\mathbf{g}(x, y) =$$

$$= XY\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathbf{g}(nX, mY)\,\delta(x-nX, y-mY),$$

方程(2-30)变为

$$\mathbf{g}(x, y) = 4B_X B_Y XY \cdot$$

$$\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathbf{g}(nX, mY)\mathrm{sinc}[2B_X(x- \cdot nX)]\cdot$$

$$\cdot\ \mathrm{sinc}[2B_Y(y-mY)].$$

最后，令抽样间距 X 和 Y 取它们的最大容许数值，等式变为

$$g(x,y)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{n}{2B_X},\ \frac{m}{2B_Y}\right)\cdot$$

$$\cdot\operatorname{sinc}\left[2B_X\left(x-\frac{n}{B_X}\right)\right]\operatorname{sinc}\left[2B_Y\left(y-\frac{m}{B_Y}\right)\right]. \qquad (2\text{-}31)$$

方程(2-31)代表一个重要的结果，我们称之为Whittaker-Shannon 抽样定理。它表明，从其抽样值的一个间隔合适的矩形阵列，可以绝对准确地复原一个限带函数；在每一抽样点上加上一个由 sinc 函数的乘积构成的内插函数，就得到了这种复原。

上述结果决不是唯一可能的抽样定理。我们在分析中作了两个相当任意的选择，在这两处作出别种假定将导至别种形式的抽样定理。在分析过程中先出现的第一个任意选择，是使用了方形的抽样格点。出现较晚的第二个任意选择，是选择了特殊的传递函数(2-29)。在这两处作不同选择所导出的别种形式的抽样定理，其有效性当然并不比方程(2-31)差；事实上，在有些情况下，别种形式的抽样定理，可能在下述意义上更"有效"；即为了保证完全复原，所需的单位面积上的抽样数目可以少一些。对于深入研究内容极为丰富的多维抽样理论有兴趣的读者可参阅 Bracewell 的论文[2-8]和 Perterson 与 Middelton 的论文[2-9]。此外，Linden[2-10]曾讨论过除函数本身外还含有函数的导数之值的抽样定理。

习　题

2-1　证明 δ 函数的下列性质：

(a) $\delta(ax,by)=\frac{1}{|ab|}\delta(x,y)$；

(b) $\operatorname{comb}(ax)\operatorname{comb}(by)=\frac{1}{|ab|}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta\left(x-\frac{n}{a},y-\frac{m}{b}\right)$.

2-2　证明下列傅里叶变换关系式：

(a) $\mathscr{F}\{\mathrm{rect}(x)\mathrm{rect}(y)\}=\mathrm{sinc}(f_X)\mathrm{sinc}(f_Y)$；

(b) $\mathscr{F}\{\Lambda(x)\Lambda(y)\}=\mathrm{sinc}^2(f_X)\mathrm{sinc}^2(f_Y)$。

证明下列广义傅里叶变换关系式：

(a) $\mathscr{F}\{1\}=\delta(f_X,f_Y)$；

(b) $\mathscr{F}\{\mathrm{sgn}(x)\mathrm{sgn}(y)\}=\left(\frac{1}{j\pi f_X}\right)\left(\frac{1}{j\pi f_Y}\right)$。

2-3 证明下列傅里叶变换定理：

(a) 在所有 $\mathbf{g}$ 连续的点上，

$$\mathscr{F}\mathscr{F}\{\mathbf{g}(x,y)\}=\mathscr{F}^{-1}\mathscr{F}^{-1}\{\mathbf{g}(x,y)\}=\mathbf{g}(-x,-y)$$；

(b) $\mathscr{F}\{\mathbf{g}(x,y)\mathbf{h}(x,y)\}=\mathscr{F}\{\mathbf{g}(x,y)\}*\mathscr{F}\{\mathbf{h}(x,y)\}$；

(c) $\mathscr{F}\{\nabla^2\mathbf{g}(x,y)\}=-4\pi^2(f_X^2+f_Y^2)\mathscr{F}\{\mathbf{g}(x,y)\}$，

其中 ∇^2 是拉普拉斯算符：$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{2y^2}$。

2-4 证明下列傅里叶-贝塞尔变换关系式：

(a) 若 $g_R(r)=\delta(r-r_0)$，则

$$\mathscr{B}\{g_R(r)\}=2\pi r_0 J_0(2\pi r_0\rho)$$；

(b) 在 $a\leqslant r\leqslant 1$ 时，若 $g_R(r)=1$，而其他地方为零，则

$$\mathscr{B}\{g_R(r)\}=\frac{J_1(2\pi\rho)-aJ_1(2\pi a\rho)}{\rho}$$；

(c) 若 $\mathscr{B}\{\mathbf{g}_R(r)\}=\mathbf{G}(\rho)$，则

$$\mathscr{B}\{\mathbf{g}_R(ar)\}=\frac{1}{a^2}\mathbf{G}\left(\frac{\rho}{a}\right)$$；

(d) $\mathscr{B}\{\exp(-\pi r^2)\}=\exp(-\pi\rho^2)$。

2-5 表达式

$$\mathbf{p}(x,y)=\mathbf{g}(x,y)*\left[\mathrm{comb}\left(\frac{x}{X}\right)\mathrm{comb}\left(\frac{y}{Y}\right)\right]$$

定义了一个周期函数，它在 x 方向的周期为 X，在 y 方向的周期为 Y。

(a) 证明 $\mathbf{p}$ 的傅里叶变换式可写为

$$\mathbf{P}(f_X,f_Y)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathbf{G}\left(\frac{n}{X},\frac{m}{Y}\right)\delta\left(f_X-\frac{n}{X},f_Y-\frac{m}{Y}\right),$$

其中 $\mathbf{G}$ 是 $\mathbf{g}$ 的变换式；

(b) 若$\mathbf{g}(x,y)=\mathrm{rect}\left(2\frac{x}{X}\right)\mathrm{rect}\left(2\frac{y}{Y}\right)$，画出函数$\mathbf{p}(x,y)$的图形，并且求出相应的变换式$\mathbf{P}(f_X,f_Y)$。

2-6 设变换算符$\mathcal{F}_A\{\}$和$\mathcal{F}_B\{\}$由下式定义

$$\mathcal{F}_A\{\mathbf{g}\}=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\int\mathbf{g}(\xi,\eta)\exp\left[-j\frac{2\pi}{a}(f_X\xi+f_Y\eta)\right]d\xi d\eta,$$

$$\mathcal{F}_B\{\mathbf{g}\}=\frac{1}{b}\int_{-\infty}^{\infty}\int\mathbf{g}(\xi,\eta)\exp\left[-j\frac{2\pi}{b}(x\xi+y\eta)\right]d\xi d\eta.$$

(a) 求出$\mathcal{F}_B\{\mathcal{F}_A\{\mathbf{g}(x,y)\}\}$的简单表达式。

(b) 说明对于$a>b$和$a<b$两种情形结果的意义。

2-7 设$\mathbf{g}(r,\theta)$在极坐标中为可分离变量。

(a) 证明若$\mathbf{g}(r,\theta)=\mathbf{g}_R(r)e^{jm\theta}$，则

$$\mathcal{F}\{\mathbf{g}(r,\theta)\}=(-j)^m e^{jm\phi}\mathcal{H}_m\{\mathbf{g}_R(r)\},$$

其中$\mathcal{H}_m\{\}$为m阶汉克尔变换

$$\mathcal{H}_m\{\mathbf{g}_R(r)\}=2\pi\int_0^{\infty}r\mathbf{g}_R(r)J_m(2\pi r\rho)dr,$$

而(ρ,ϕ)为频率空间中的极坐标。

提示：$\exp(ja\sin x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}J_k(a)\exp(jkx)$。

(b) 证明对于任意地依赖于角向的函数$\mathbf{g}_\theta(\theta)$的更一般的情形，傅里叶变换可以用下述汉克尔变换式的无穷级数表示：

$$\mathcal{F}\{\mathbf{g}(r,\theta)\}=\sum c_k(-j)^k e^{jk\phi}\mathcal{H}_k\{\mathbf{g}_R(r)\},$$

$$\text{其中 } c_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathbf{g}_\theta(\theta)e^{-jk\theta}d\theta\ .$$

2-8 设在一线性系统上加一个正弦输入

$$g(x,y)=\cos[2\pi(f_X x+f_Y y)].$$

在什么样的(充分)条件下，输出是一个空间频率与输入相同的实数值正弦函数？用系统适当的特征表示出输出的振幅和位相。

2-9 证明：在频率平面上的一个半径为B的圆之外没有非零的频谱

分量的函数，遵从下述抽样定理：

$$g(x,y)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}g\left(\frac{n}{2B},\frac{m}{2B}\right)\cdot$$

$$\cdot\left\{2\pi B^2\frac{J_1\left[2\pi B\sqrt{\left(x-\frac{n}{2B}\right)^2+\left(y-\frac{m}{2B}\right)^2}\right]}{2\pi B\sqrt{\left(x-\frac{n}{2B}\right)^2+\left(y-\frac{m}{2B}\right)^2}}\right\}.$$

2-10 傅里叶变换算符可以看成是函数到其变换式的变换，因此它满足本章所提出的关于系统的定义.

(a) 这个系统是线性的吗？

(b) 你是否能具体给出一个表征这个系统的传递函数？ 如果能够，它是什么？ 如果不能，为什么不能？

2-11 一个函数的"等效面积"Δ_{XY} 可定义为

$$\Delta_{XY}=\left|\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int g(x,y)dxdy}{g(0,0)}\right|,$$

而 g 的"等效带宽"则通过它的变换式 G 由下式定义：

$$\Delta_{f_Xf_Y}=\left|\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int G(f_X,f_Y)df_Xdf_Y}{G(0,0)}\right|.$$

证明：$\Delta_{XY}\cdot\Delta_{f_Xf_Y}=1$.

2-12 某一个含两个自变量(x,y)的复函数的空间傅里叶变换式，在频域中的区间$|f_X|\leqslant B_X$，$|f_Y|\leqslant B_Y$以外恒等于零. 证明这个函数在空间域内的区间$|x|\leqslant X$，$|y|\leqslant Y$上的那一部分可以用$32B_XB_YXY$个实数(近似)确定. 为什么这只是一个近似，并且什么时候它是一个好的近似？ (数 $16B_XB_YXY$ 通称为所考虑函数的那一部分的空间-带宽乘积.)

2-13 某一成像系统的输入是一个复数值的物场 $U_0(x,y)$，它的空间频率含量是无限制的，而系统的输出是一个象场分布 $U_i(x,y)$. 可

假定成像系统是一个线性的空间不变低通滤波器，它的传递函数在频率域上的区间$|f_X|\leqslant B_X$，$|f_Y|\leqslant B_Y$之外恒为零。证明，存在一个由点源的方形陈列所构成的"等效"物体$\mathbf{U}_0'(x,y)$与真实的物体$\mathbf{U}_0$产生完全一样的像$\mathbf{U}_i$，并且等效物体上的场分布可写成：

$$\mathbf{U}_0'(x,y)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int\mathbf{U}_0(\xi,\eta)\mathrm{sinc}(n-2B_X\xi)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\,\mathrm{sinc}(m-2B_Y\eta)d\xi d\eta\right]\delta\left(x-\frac{n}{2B_X},\ y-\frac{m}{2B_Y}\right)\cdot$$

参 考 文 献

2-1 Papoulis, A., *The Fourier Integral and Its Applications*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1962.

2-2 Bracewell, R. N., *The Fourier Transform and Its Applications*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1965.

2-3 Lighthill, M. J., *Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions*, Cambridge University press, New York, 1960.

2-4 Kailath, T., in E. J. Baghdady (ed.), Channel Characterization: Time-variant Dispersive Channels, *Lectures on Communication System Theory*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1960.

2-5 Lohmann, A. W. and D. P. Paris, Space-Variant Image Formation, *J. Opt. Soc. Am.*, **55**,1007(1965).

2-6 Whittaker, E. T., On the Functions Which Are Represented by the Expansions of the Interpolation Theory, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A*, **35**,181(1915).

2-7 Shannon, C. E., Communication in the Presence of Noise, *Proc. IRE*, **37**,10(1949).

2-8 Bracewell, R. N., Two-Dimensional Aerial Smoothing in Radio Astronomy, *Australia J. Phys.*, **9**,297(1956).

2-9 Peterson, D. P. and D. Middleton, Sampling and Reconstruction of Wave-Number-Limited Functions in N-Dimensional Euclidean Spaces, *Information and Control*, **5**,279(1962).

2-10 Linden, D. A., A Discussion of Sampling Theorems, *Proc. IRE*, **47**,1219(1959)

第三章　标量衍射理论基础

衍射这种现象在讨论对象为波动传播的物理学和工程各个部门中起着极为重要的作用．本章中我们研究标量衍射理论的一些基本问题．虽然这里讨论的理论非常普遍，完全可以用到别的领域（如声波传播和无线电波传播），但我们这里最关心的还是物理光学领域内的应用．为了透彻了解光学成像系统和光学数据处理系统的特性，对衍射现象以及它对系统性能所加的限制有所理解是必需的．更完备地讨论衍射理论的各种参考文献将在下面的内容中给出．

§ 3-1　历史引言

索末菲把衍射一词恰当地定义为[3-1]“不能用反射或折射来解释的光线对直线光路的任何偏离”．这种现象的首次精确报道和描述是 Grimaldi 做的，于 1665 年在他死后不久发表．他所报道的测量是用类似于图 3-1 所示的实验装置进行的．用一个光源照明不透明屏幕上的一个孔径，在屏幕后一定距离的平面上观察光强的分布．当时普遍接受的用来解释光学现象的理论是光线传播的微粒学说，这个学说预言，屏幕后的影子应该是轮廓分明的，具有尖锐的边界．但是 Grimaldi 的观察表明，从明到暗的过渡是渐变的而不是突变的．倘若他用的光源的质量更好些，他还可以观察到更惊人的结果，例如明暗条纹的存在一直扩展到屏幕的几何阴影区内很远的地方．这些现象用光的微粒学说是不能得到令人满意的解释的，微粒学说要求光线在没有反射和折射时成直线传播．

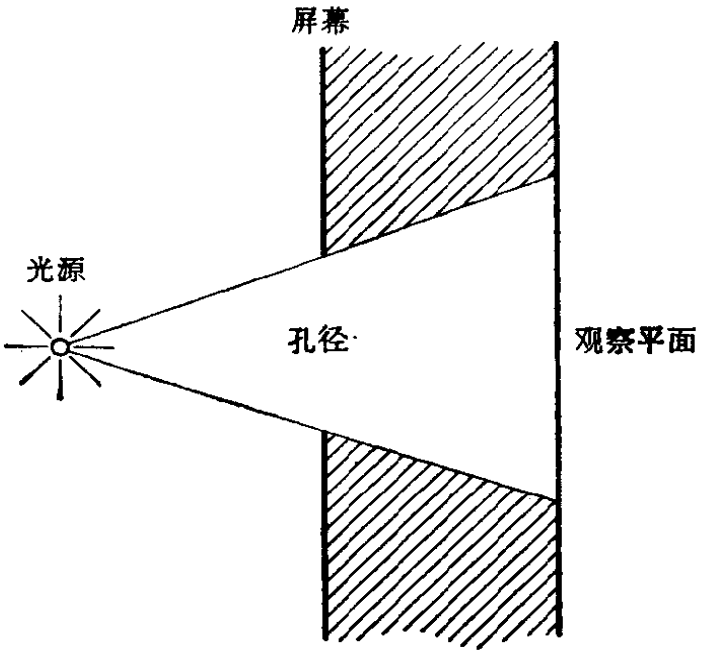


图 3-1　观察光的衍射的装置

在可以解释这种现象的理论的形成过程中第一步是由光的波动说的最早的倡议者惠更斯于 1678 年迈出的. 惠更斯表述了一个直观信念：如果我们把光扰动的波前上的每一点看成是一个“次级”球面扰动的新波源，那么随后任一时刻的波前可以由作出次级子波的“包络”而得到，如图 3-2 所示. 1818 年，菲涅耳在其著名的回忆录中，对惠更斯的直观概念作了很大的改进，他用杨氏干涉原理补充了惠更斯的包络作图法. 通过对惠更斯的次级波源的有效振幅和位相作一些相当任意的假定，并且让各个子波相互干涉，菲涅耳能够以极高的精度计算出衍射图样中的光场分布.

基尔霍夫在 1882 年把惠更斯和菲涅耳的概念放在一个更坚实的数学基础上，他成功地证明了，菲涅耳所赋予次级波源的振幅和位相其实是光的波动本性的逻辑结论. 基尔霍夫把他的数学理论建立在两个假定上，这两个假定是关于投射到放在光的传播路径上的障碍物的表面上的光的边值条件问题. 随后，Poincaré 于 1892 年，索末菲于 1894 年证明了这两

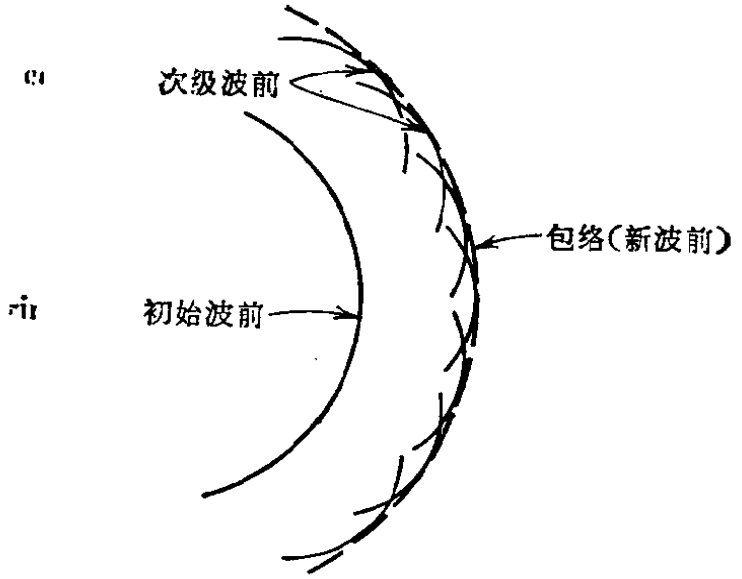


图 3-2　惠更斯包络的作图法

个假定互不相容[1]。由于这种批评，对所谓惠更斯-菲涅耳原理的基尔霍夫理论必须看成是一级近似，尽管在绝大多数条件下它所推出的结果与实验符合得惊人。Kottler[3-2]曾企图通过把基尔霍夫的边值问题重新解释为一个边值跃变（saltus）问题（saltus是一个拉丁字，意为一个函数的不连续或跃变）以解决这个矛盾。索末菲也曾修正过基尔霍夫的理论，他利用格林函数理论取消了前述的关于光在边界上的行为的两个假定之一。这个所谓的瑞利-索末菲衍射理论将在§3-4中讨论。

应当在一开始就强调指出，基尔霍夫理论和瑞利-索末菲理论都作了某些主要的简化和近似。最重要的是，把光当作标量现象来处理；即，只考虑电场或磁场的一个横分量的标量振幅，而假定任何别的有关的分量可以用同样的方式独立处理。这种方法完全忽略了这一事实：电场矢量和磁场矢量的各个分量是通过麦克斯韦方程组耦合起来的，并不能相互独

1）对这种互不相容性的更详尽的讨论见§3-4。

立地处理. 幸好,在微波波谱区域内所作的实验[3-3]表明,标量理论能得出非常精确的结果, 如果满足下面两个条件的话: (1)衍射孔径必须比波长大得多,以及 (2) 不要在太靠近孔径的地方观察衍射场. 这些条件在我们要讨论的问题中满足得很好. 关于标量理论在仪器光学中的适用性的更全面的讨论,读者可参考文献[3-4,§8-4]. 然而,的确存在一些重要问题,它们不满足所要求的条件,例如在高分辨率衍射光栅的理论中[3-5]. 我们现在不讨论这样的问题,因为如 果要得到有相当精确度的结果, 就必须考虑场的矢量本性. 现已有了推广到矢量的衍射理论, 这方面的满意的讨论是 Kottler[3-6] 首先提出来的.

索末菲于 1896 年首次给出了一个衍射问题 的 真正严格解[3-7]. 他讨论的是一个平面波投射到一个无限薄的 理想导体半平面上的二维情形. 后来 Kottler[3-8]对索末菲的解和基尔霍夫标量处理的相应结果进行了比较.

不用说, 对于在文献中出现如此广泛的一个题目的历史介绍很难认为是完全的. 因此, 读者可参看那些全面讨论衍射理论的文献,例如文献[3-9]、[3-10]以及[3-11].

§ 3-2 数学预备知识

在着手讨论衍射问题之前, 我们首先讨论一些数学预备知识, 它们是下面对衍射理论进行推导的基础. 我们也用这些初步讨论来引进全书各处要用到的各种记号.

亥姆霍兹(Helmholtz)方程

用标量函数 $u(P,t)$表示在地点 P 和时刻 t 的光扰动;对于线偏振波的情形, 我们可以认为这个函数代表电场强度或磁场强度. 我们先只限于考虑纯单色波的情形, 对多色波的

推广留待§3-5.

对于单色波，场可以写为

$$u(P,t)=U(P)\cos[2\pi\nu t+\phi(P)] \tag{3-1}$$

其中 $U(P)$和 $\phi(P)$分别是在 P 点上波的振幅和位相，而 ν 是光的频率. 利用复数记号，可得到(3-1)式的一种更简明的形式为

$$u(P,t)=\mathrm{Re}[\mathbf{U}(P)\exp(-j2\pi\nu t)], \tag{3-2}$$

其中$\mathbf{U}(P)$是位置坐标的复值函数(有时称为相幅矢量[1](phasor))，形式如下：

$$\mathbf{U}(P)=U(P)\exp[-j\phi(P)], \tag{3-3}$$

而 Re 是简写记号，意思是取实部.

如果实数扰动 $u(P,t)$是用来表示光波，那么在每一无源点上它必须满足标量波动方程

$$\nabla^2u-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=0, \tag{3-4}$$

∇^2是拉普拉斯算符

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

但是由于对时间的函数关系已经预先知道，故复函数$\mathbf{U}(P)$已足以描述扰动. 把(3-2)代入(3-4)，可得复扰动$\mathbf{U}(P)$必须满足不含时间的方程

$$(\nabla^2+k^2)\mathbf{U}=0, \tag{3-5}$$

其中 k 称为波数，定义为

$$k=2\pi\frac{\nu}{c}=\frac{2\pi}{\lambda}.$$

关系式(3-5)叫做亥姆霍兹方程；我们以后将假定，在自由空

1) 即复平面上的一个矢量，其大小为 $U(P)$ 而幅角为 $\phi(P)$。——译注

间传播的任何单色光扰动的复振幅必须满足这一关系式。

格林定理

空间一点上的复扰动 $\mathbf{U}$ 可借助于格林定理这一数学关系式来计算。这个定理可以在大多数高等微积分教科书中找到[例如参考书 3-12,316 页],它可表述如下:

格林定理　令 $\mathbf{U}(P)$ 和 $\mathbf{G}(P)$ 为位置坐标的两个任意的复值函数,并令 S 为包围体积 V 的封闭曲面。若 $\mathbf{U}$、$\mathbf{G}$ 以及它们的一阶和二阶偏微商都是单值的并且在 S 内和 S 上连续,则有

$$\iiint_V (\mathbf{G}\nabla^2\mathbf{U}-\mathbf{U}\nabla^2\mathbf{G})\,dv=\iint_S\left(\mathbf{G}\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial n}-\mathbf{U}\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial n}\right)ds, \tag{3-6}$$

其中 $\frac{\partial}{\partial n}$ 表示在 S 上每一点沿向外的法线方向上的偏微商。

这一定理在许多方面都是标量衍射理论的主要基础。但是,只有慎重地选择格林函数 $\mathbf{G}$ 和封闭曲面 S,它才能直接应用到衍射问题上来。我们现在讨论问题的前半部分,研究基尔霍夫对格林函数的选择以及随之而来的积分定理。

亥姆霍兹和基尔霍夫的积分定理

基尔霍夫的衍射理论是建立在一个积分定理的基础之上的,这个积分定理把齐次波动方程在任意一点的解用包围这一点的任意封闭曲面上方程的解及其一阶微商之值表示出来。这个定理以前在声学中已由亥姆霍兹导出。

令观察点为 P_0,并令 S 代表包围 P_0 的一个任意封闭曲面,如图 3-3 所示。问题是要用封闭面 S 上的波动之值来表

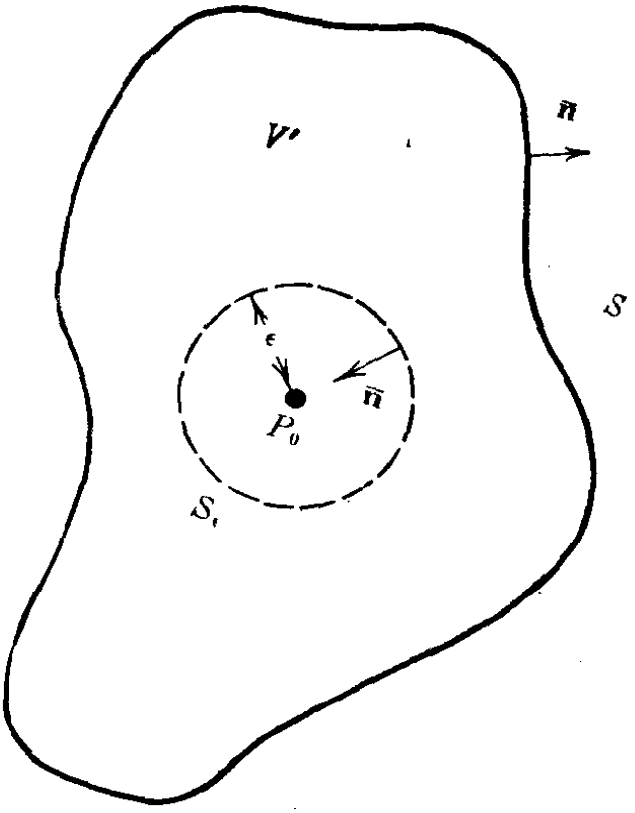


图 3-3　积分曲面

示在 P_0 点的波动. 为了解决这一问题,我们仿效基尔霍夫那样应用格林定理，并像他那样选格林函数 G 为由 P_0 点向外发散的单位振幅的球面波(即所谓的自由空间的格林函数). 于是,在任意一点 P_1 上 G 之值为

$$\mathbf{G}(P_1)=\frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}}, \tag{3-7}$$

其中我们用 r_{01} 表示从 P_0 指向 P_1 的矢量 $\bar{\mathbf{r}}_{01}$ 的长度.

函数 G (以及它的一阶和二阶导数) 在被包围的体积 V 内必须是连续的,才能够运用格林定理. 所以,为了排除在 P_0 点的不连续性,我们把半径为 ϵ 的小球面 S_ϵ 嵌在 P_0 点周围. 然后应用格林定理,积分的体积 V' 为介于 S 和 S_ϵ 之间的体积,而积分曲面是复合曲面

$$S'=S+S_\epsilon,$$

如图 3-3 所示. 注意,对于复合曲面的"外向"法线,在 S 上是如通常意义指向外侧,而在 S_ϵ 上则是指向内侧(指向 P_0).

在体积 V' 内,扰动 $\mathbf{G}$ 只是一个向外扩展的球面波,它满足亥姆霍兹方程

$$(\nabla^2+k^2)\mathbf{G}=0. \tag{3-8}$$

把(3-5) 和 (3-8) 这两个亥姆霍兹方程代入格林定理左边,我们得到

$$\iiint_{V'}(\mathbf{G}\nabla^2\mathbf{U}-\mathbf{U}\nabla^2\mathbf{G})\,dv=$$

$$=-\iiint_{V'}(\mathbf{G}\mathbf{U}k^2-\mathbf{U}\mathbf{G}k^2)\,dv\equiv 0.$$

于是格林定理化简为

$$\iint_{S'}\left(\mathbf{G}\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial n}-\mathbf{U}\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial n}\right)ds=0,$$

或

$$-\iint_{S_\epsilon}\left(\mathbf{G}\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial n}-\mathbf{U}\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial n}\right)ds=\iint_{S}\mathbf{G}\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial n}-\mathbf{U}\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial n}\Big)ds. \tag{3-9}$$

现在注意,对于在 S' 上的一般的点 P_1,我们有

$$\mathbf{G}(P_1)=\frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}}, \tag{3-10}$$

及

$$\frac{\partial\mathbf{G}(P_1)}{\partial n}=\cos(\bar{\mathbf{n}},\bar{\mathbf{r}}_{01})\left(jk-\frac{1}{r_{01}}\right)\frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}}, \tag{3-11}$$

其中 $\cos(\bar{\mathbf{n}},\bar{\mathbf{r}}_{01})$ 代表外向法线 $\bar{\mathbf{n}}$ 与从 P_0 到 P_1 的矢量 $\bar{\mathbf{r}}_{01}$ 之间夹角的余弦. 对于 S_ϵ 上的 P_1 点的特殊情形,$\cos(\bar{\mathbf{n}},\bar{\mathbf{r}}_{01})=-1$,这些方程变为

$$\mathbf{G}(P_1)=\frac{e^{jk\epsilon}}{\epsilon}\quad 及\quad \frac{\partial \mathbf{G}(P_1)}{\partial n}=\frac{e^{jk\epsilon}}{\epsilon}\left(\frac{1}{\epsilon}-jk\right).\tag{3-12}$$

令 ϵ 任意变小，$\mathbf{U}$（及其导数）在 P_0 点的连续性使我们得到

$$\iint_{S_\epsilon}\left(\mathbf{G}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial n}-\mathbf{U}\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial n}\right)ds=4\pi\epsilon^2\left[\frac{\partial \mathbf{U}(P_0)}{\partial n}\frac{e^{jk\epsilon}}{\epsilon}-\right.$$

$$\left.-\mathbf{U}(P_0)\frac{e^{jk\epsilon}}{\epsilon}\left(\frac{1}{\epsilon}-jk\right)\right]_{\epsilon\to 0}=-4\pi\mathbf{U}(P_0).$$

把这个结果代入(3-9)式，得到

$$\mathbf{U}(P_0)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left\{\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial n}\left[\frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}}\right]-\right.$$

$$\left.-\mathbf{U}\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}}\right]\right\}ds.\tag{3-13}$$

这个结果叫做亥姆霍兹和基尔霍夫的积分定理；它在标量衍射理论的发展中起了重要作用，因为它使得可以把任意一点上的场用包围这一点的任意封闭面上波动的“边值”表示出来．我们将看到，这一关系式在标量衍射方程的发展中是很有用的．

§ 3-3 平面屏幕衍射的基尔霍夫理论

现在我们考虑无限大的不透明屏幕上的一个孔径所引起的衍射的问题．如图 3-4 所示，假定一个波动从左面投射到屏幕和孔径上，要计算孔径后面一点 P_0 上的场．

积分定理的应用

为了求出 P_0 点的场，我们应用亥姆霍兹和基尔霍夫积分定理，细心选择一个积分面，使得计算能顺利完成．我们仿效基尔霍夫的作法，选择封闭面由两部分组成，如图 3-4 所示．

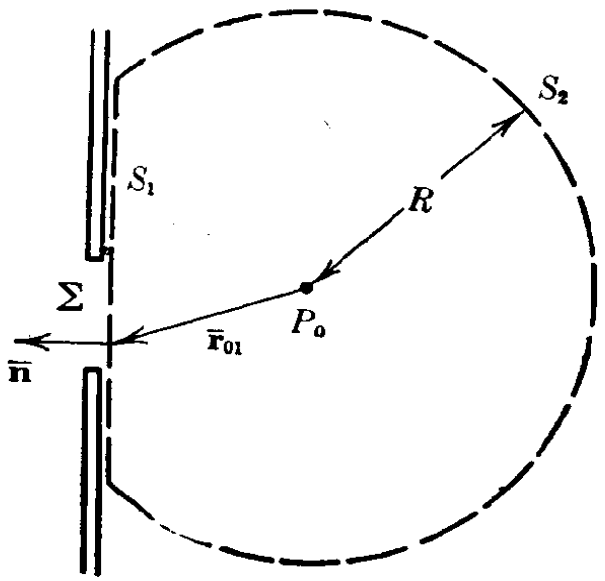


图 3-4　平面屏幕衍射的基尔霍夫理论

令正好位于衍射屏幕后的平面 S_1 与一个半径为 R、中心在观察点 P_0 的大球形罩 S_2 连接起来构成封闭面。整个封闭面简单地是 S_1 与 S_2 之和。于是，应用(3-13)，

$$\mathbf{U}(P_0)=\frac{1}{4\pi}\iint_{S_1+S_2}\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial n}\mathbf{G}-\mathbf{U}\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial n}\right)ds,$$

和以前一样，其中

$$\mathbf{G}=\frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}}.$$

当 R 增大时，S_2趋于一个大的半球壳。人们也许会轻易推论，由于 $\mathbf{U}$ 和 $\mathbf{G}$ 都按$\frac{1}{R}$减少，被积函数最终将消失，从而使 S_2 上的面积分为零。但是不要忘记，积分面积却按 R^2 增大，因此上述论据是不全面的。人们也可能轻易地假设，既然扰动是以有限速度 c 传播的，R 最后变成如此之大，以致波动尚未到达 S_2，因此被积函数在这个面上将为零。但是这个论据与我们关于扰动是单色的这一假定是不相容的，按定义单色扰动必须在所有时间都存在。显然，在我们能够弃去 S_2 对积分的贡献之前，还需要作更细致的研究。

下面来更详细地考察这个问题. 我们看到在 S_2 上

$$\mathbf{G}=\frac{\exp(jkR)}{R},$$

以及由(3-11)

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial n}=\left(jk-\frac{1}{R}\right)\frac{\exp(jkR)}{R}\cong jk\mathbf{G},$$

式中最后的近似在 R 大时成立. 于是,所研究的积分可化为

$$\iint_{S_2}\left[\mathbf{G}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial n}-\mathbf{U}(jk\mathbf{G})\right]ds=\int_{\Omega}\mathbf{G}\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial n}-jk\mathbf{U}\right)R^2\,d\omega,$$

其中 Ω 是 S_2 对 P_0 点所张的立体角. 现在 $|R\mathbf{G}|$ 这个量在 S_2 上是一致有界的. 所以,S_2 上的全部积分将随着 R 变成无穷大而消失,只要扰动 $\mathbf{U}$ 对角度一致地具有下述性质:

$$\lim_{R\to\infty} R\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial n}-jk\mathbf{U}\right)=0. \tag{3-14}$$

这一要求称为索末菲辐射条件[3-13],若扰动趋于零的速度至少像发散球面波一样快,则此条件满足[见习题3-1]. 由于投射到孔径上的扰动总是由一个球面波或球面波的线性组合构成,我们可以确信实际上这个要求总会满足,因此 S_2 上的积分的贡献正好为零.

基尔霍夫边界条件

在弃去了曲面 S_2 上的积分之后,现在就能够把 P_0 点的扰动用紧接屏幕后方的无穷平面 S_1 上的扰动及其法向导数表示出来了,即

$$\mathbf{U}(P_0)=\frac{1}{4\pi}\iint_{S_1}\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial n}\mathbf{G}-\mathbf{U}\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial n}\right)ds. \tag{3-15}$$

除了开着的孔径(用Σ表示)之外,屏幕是不透明的. 所以,从直观看来,对积分(3-15)的贡献应该主要来自 S_1 上的位于孔径Σ内的那些点,我们可以预期被积函数在那里最大.

因此，基尔霍夫采用了下述假定[3-14]：

1．在孔径Σ上，场分布U及其导数$\frac{\partial U}{\partial n}$跟没有屏幕时完全相同．

2．在S_1的位于屏幕的几何阴影区内的那一部分上，场分布U及其导数$\frac{\partial U}{\partial n}$恒为零．

这两个条件一般称为基尔霍夫边界条件．前一个条件使我们可以通过忽略屏幕的存在而确定入射到孔径上的场分布．第二个条件使我们可以忽略积分面的所有其他部分，除了直接位于孔径之内的那一部分以外．于是(3-15)化简为

$$U(P_0)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial U}{\partial n}G-U\frac{\partial G}{\partial n}\right)ds. \qquad (3\text{-}16)$$

尽管基尔霍夫边界条件使结果大大简化，但是必须认识到这两项条件中没有一条是严格正确的．屏幕的存在必然会在一定程度上干扰Σ上的场，因为沿着孔径的边缘必须满足一定的边界条件，而这些边界条件在屏幕不存在时并不要求．此外，屏幕后阴影也不可能是完全的，因为场总要扩展到屏幕后几个波长的距离．但是，如果孔径的线度比波长大得多，那么这些边缘上的精细效应尽可以放心地忽略不计[1)]，并用这两个边界条件得出跟实验符合得很好的结果．

菲涅耳-基尔霍夫衍射公式和惠更斯-菲涅耳原理

$U(P_0)$的表示式可以得到进一步的简化．注意从孔径到观察点的距离r_{01}通常为波长的许多倍，从而$k\gg\frac{1}{r_{01}}$，因此方程(3-11)变为

1) 我们将会看到，对使用基尔霍夫边界条件的异议，并不是由于边缘上的精细效应，而是由于某些内在的不自洽性．

$$\frac{\partial G(P_1)}{\partial n}=\cos(\bar{n},\bar{r}_{01})\left(jk-\frac{1}{r_{01}}\right)\frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}}\cong$$

$$\cong jk\cos(\bar{n},\bar{r}_{01})\frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}}.$$

把这个近似式以及 G 的表达式(3-7)代入方程(3-16)中，我们得到

$$U(P_0)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}}\left[\frac{\partial U}{\partial n}-jkU\cos(\bar{n},\bar{r}_{01})\right]ds. \tag{3-17}$$

现在设孔径是由 P_2 点上的点源所产生的单个球面波照明的，P_2 跟 P_1 的距离为 r_{21}（见图 3-5）。于是

$$U(P_1)=\frac{A\exp(jkr_{21})}{r_{21}}.$$

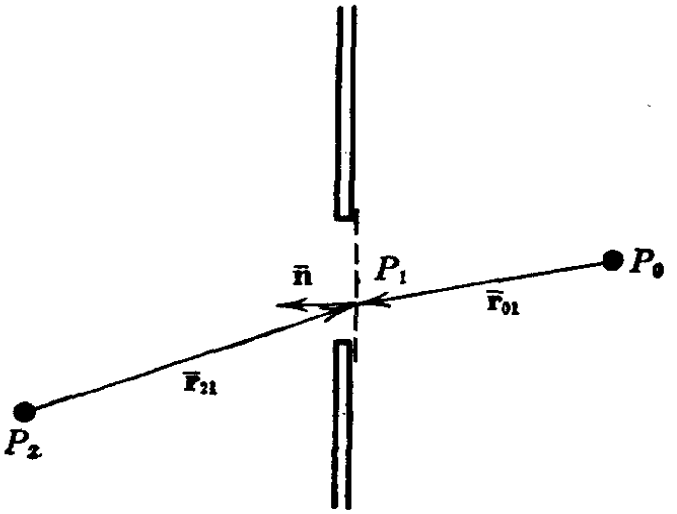


图 3-5　点光源照明平面屏幕

如果 r_{21} 比波长长得多，那么(3-17)可立即化为(见习题 3-2)

$$U(P_0)=\frac{A}{j\lambda}\iint_{\Sigma}\frac{\exp[jk(r_{21}+r_{01})]}{r_{21}r_{01}}\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{\cos(\bar{n},\bar{r}_{01})-\cos(\bar{n},\bar{r}_{21})}{2}\right]ds. \tag{3-18}$$

这个结果只能用于单个点光源照明时的情形，它通常称为菲

涅耳-基尔霍夫衍射公式.

注意，方程(3-18)对点光源和观察点是对称的.因此在P_0的一个点源在P_2所产生的效果和一个同样强度的点源置于P_2将在P_0点上所产生的效果一样. 这一结果有时叫做亥姆霍兹互易定理.

最后，我们来讨论衍射公式(3-18)的一个有趣而且有用的解释. 把这个方程改写成如下形式：

$$\mathbf{U}(P_0)=\iint_{\Sigma} \mathbf{U}'(P_1)\frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}}ds, \qquad (3\text{-}19)$$

其中

$$\mathbf{U}'(P_1)=\frac{1}{j\lambda}\left[\frac{A\exp(jkr_{21})}{r_{21}}\right]\cdot \left[\frac{\cos(\bar{\mathbf{n}},\bar{\mathbf{r}}_{01})-\cos(\bar{\mathbf{n}},\bar{\mathbf{r}}_{21})}{2}\right]. \qquad (3\text{-}20)$$

于是(3-19)式可以解释为：P_0点的场是由位于孔径内的无穷多个虚设的“次级”点源产生的. P_1上的次级波源的振幅$\mathbf{U}'(P_1)$显然正比于投射到P_1上的波的振幅$[A\exp(jkr_{21})]/r_{21}$，但是它与这个振幅在以下三个方面有差别. 首先，次级波源的振幅与入射波振幅差一个因子λ^{-1}. 其次，次级波源的振幅比入射波振幅还要小一个倾斜因子，$\frac{1}{2}[\cos(\bar{\mathbf{n}},\bar{\mathbf{r}}_{01})-\cos(\bar{\mathbf{n}},\bar{\mathbf{r}}_{21})]$，其值在0与1之间；实际上，每一个次级波源都有一个非各向同性的“指向性图样”. 最后，P_1点上的次级波源的位相超前于入射波90°.

次级波源的这些奇特性质从历史的角度来看是很重要的，因为在菲涅耳比较早期的工作中，只有当我们能够使次级波源具有这些性质之后，才能通过惠更斯包络作图法和杨氏干涉原理的结合来准确地预言衍射图样. 为了得到准确的结

果，菲涅耳假设这些性质是对的，而基尔霍夫的数学推导表明，这些性质实际上是光的波动本性的自然结果.

注意，对所谓惠更斯-菲涅耳原理的上述推导限于孔径是由单个扩展球面波来照明的情形. 但是不久我们还将回到这个问题上来，那时将要证明，惠更斯-菲涅耳原理实际上比我们的初步考察所意味的情况更为普遍.

§ 3-4 平面屏幕衍射的瑞利-索末菲理论

从实验发现，基尔霍夫理论会给出非常准确的结果，因而在实际问题中这一理论得到广泛的应用. 但是，这个理论中存在着一些内在矛盾，这就推动人们去寻求更满意的数学理论. 基尔霍夫理论的困难来自于，同时对场强及其法向导数施加边界条件. 特别是，势论中有一个熟知的定理说：如果一个二维势函数及其法向导数沿任一有限的曲线段同时为零，那么这一势函数必定在整个平面上为零. 相仿地，如果三维波动方程的一个解在任一有限的面元上为零，那么它必定在全空间为零. 因而两个基尔霍夫边界条件合在一起[1]就意味着，孔径后面各处的场恒等于零，这一结果与已知的物理情况矛盾. 这种不自洽性的进一步表征是，当观察点趋近屏幕或孔径时，可以证明菲涅耳-基尔霍夫衍射公式不能重新给出原来假定的边界条件. 尽管有这些矛盾，基尔霍夫理论仍然给出如此准确的结论，这的确是惊人的.

索末菲消除了同时对扰动及其法向导数都施加边界条件的必要性，从而克服了基尔霍夫理论的不自洽性. 这一所谓瑞利-索末菲理论是本节的题目. 对基尔霍夫理论和瑞利-索

1) 这里说的两个边界条件并不是指前面所列的孔径上的场强和阴影内的场强这两条，而是指阴影内紧靠屏幕的平面上场强为零，法向导数亦为零这两个条件.——译注

末菲理论这两种理论的比较见参考文献[3-15][1]。

格林函数的另一种选法

我们再来研究方程(3-15)，它把所观察的那一点的场强用整个屏幕上的入射场及其法向导数表示出来：

$$\mathbf{U}(P_0)=\frac{1}{4\pi}\iint_{S_1}\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial n}\mathbf{G}-\mathbf{U}\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial n}\right)ds. \quad (3\text{-}15)$$

设我们把基尔霍夫理论中的格林函数加以改变，使得仍然可以导出上述方程，此外还使得 $\mathbf{G}$ 或者 $\partial\mathbf{G}/\partial n$ 在整个 S_1 面上为零。不论对上述的哪种情况，都不必同时对 $\mathbf{U}$ 和 $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial n}$ 施加边界条件了，因而基尔霍夫理论的不自洽也就会消除了。

索末菲指出，具有所要求的这些性质的格林函数确实是存在的。设 $\mathbf{G}$ 不只是由位于 P_0 的点源产生，而且也由位于屏幕对面 P_0 的镜像点 $\tilde{P}_0$ 上的第二个点源产生(参看图3-

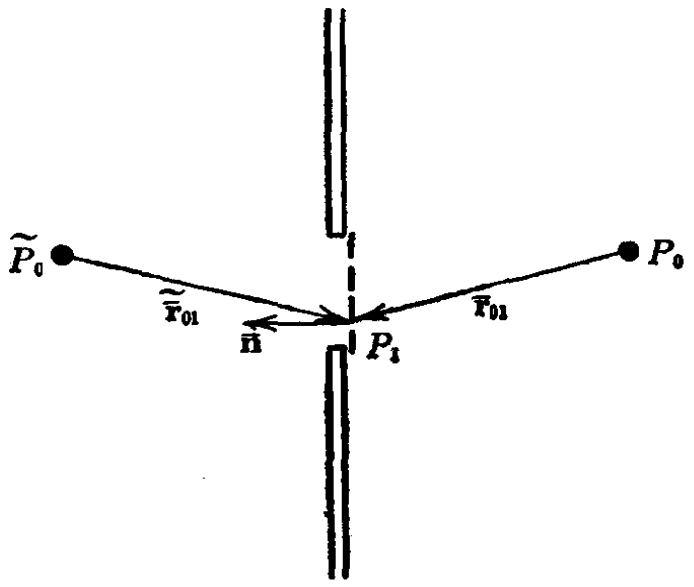


图 3-6　平面屏幕衍射的瑞利-索末菲表示法

1) 一个理论是自洽的而另一个理论不自洽这一情况，并不一定意味着前者比后者更准确。基尔霍夫理论与瑞利-索末菲理论相比那个更准确，仍然是一个研究中的题目。

6)．令$\tilde{P}_0$处的点源与P_0的点源的波长同为λ，并且假设两个源的扰动有一个180°的位相差．这时格林函数由下式给出

$$\mathbf{G}_-(P_1)=\frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}}-\frac{\exp(jk\tilde{r}_{01})}{\tilde{r}_{01}}, \qquad (3\text{-}21)$$

其中$\tilde{r}_{01}$是从$\tilde{P}_0$到P_1的距离．$\mathbf{G}_-$的相应的法向导数为

$$\frac{\partial \mathbf{G}_-}{\partial n}=\cos(\bar{\mathbf{n}},\bar{\mathbf{r}})\left(jk-\frac{1}{r_{01}}\right)\frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}}-$$

$$-\cos(\bar{\mathbf{n}},\tilde{\bar{\mathbf{r}}})\left(jk-\frac{1}{\tilde{r}_{01}}\right)\frac{\exp(jk\tilde{r}_{01})}{\tilde{r}_{01}} \qquad (3\text{-}22)$$

对于S_1上的点P_1，我们有

$$r_{01}=\tilde{r}_{01},$$

$$\cos(\bar{\mathbf{n}},\bar{\mathbf{r}}_{01})=-\cos(\bar{\mathbf{n}},\tilde{\bar{\mathbf{r}}}_{01}),$$

因此在这个面上

$$\mathbf{G}_-(P_1)=0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{G}_-(P_1)}{\partial n}=2\cos(\bar{\mathbf{n}},\bar{\mathbf{r}}_{01})\left(jk-\frac{1}{r_{01}}\right)\frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}}, \qquad (3\text{-}23)$$

于是函数$\mathbf{G}_-$在整个S_1面上为零．

若令两个点源的振动同位相，则得到另外一个(但是同样有用的)格林函数为

$$\mathbf{G}_+(P_1)=\frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}}+\frac{\exp(jk\tilde{r}_{01})}{\tilde{r}_{01}}. \qquad (3\text{-}24)$$

容易证明(见习题3-3)这个函数的法向导数在整个屏幕和孔径上为零．

瑞利-索末菲衍射公式

把方程(3-15)中的$\mathbf{G}$换成格林函数$\mathbf{G}_-$．应用(3-23)

式，立即可得

$$\mathbf{U}(P_0)=\frac{1}{j\lambda}\iint_{S'}\mathbf{U}(P_1)\frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}}\cos(\bar{\mathbf{n}},\bar{\mathbf{r}}_{01})\,ds,\quad(3\text{-}25)$$

其中已假定 $r_{01}\gg\lambda$。现在可以只对 $\mathbf{U}$ 应用基尔霍夫边界条件，给出非常普遍的结果

$$\mathbf{U}(P_0)=\frac{1}{j\lambda}\iint_{\Sigma}\mathbf{U}(P_1)\frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}}\cos(\bar{\mathbf{n}},\bar{\mathbf{r}}_{01})\,ds.\quad(3\text{-}26)$$

因为不需要对 $\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial n}$ 施加边界条件，基尔霍夫理论中的不自洽性显然已经消除了。

为了把这些结果与基尔霍夫理论的预言进行比较，令孔径由一个从 P_0 处的点源发散的球面波照明（仍见图 3-5）。于是，

$$\mathbf{U}(P_1)=A\frac{\exp(jkr_{21})}{r_{21}},$$

及

$$\mathbf{U}(P_0)=\frac{A}{j\lambda}\iint_{\Sigma}\frac{\exp[jk(r_{21}+r_{01})]}{r_{21}r_{01}}\cos(\bar{\mathbf{n}},\bar{\mathbf{r}}_{01})\,ds.\quad(3\text{-}27)$$

后面这个式子称为瑞利-索末菲衍射公式，应该把它与基尔霍夫理论的相应结果(3-18)式相比较。我们看到，两个表达式之间的唯一差别只在倾斜因子上。

格林函数选为 $\mathbf{G}_+$ 时相应结果的研究留在习题中。利用这种形式的格林函数推得的 $\mathbf{U}(P_0)$ 的式子当然和上面推得的结果同样成立。

惠更斯-菲涅耳原理的进一步讨论

我们前面推导惠更斯-菲涅耳原理时，假设衍射孔径由单个发散球面波照明，从表达式(3-26)显然可看出，这个原理实

际上对更普遍的孔径照明情况也是成立的. 这种普遍性实际上寓于上述较特殊的情形之中，因为任意的照明情况总可以分解为(可能是无穷多个)点源的集合，而由于波动方程的线性性质，可对每一个点源应用这个原理.

对于我们的目的来说，重要的是认识到，方程(3-26)所表示的惠更斯-菲涅耳原理实际上无非就是第二章所讨论过的那种迭加积分. 为了强调说明这种观点，我们可将(3-26)改写为

$$\mathbf{U}(P_0)=\iint_{\Sigma}\mathbf{h}(P_0,P_1)\mathbf{U}(P_1)\,ds, \qquad (3\text{-}28)$$

其中权重函数 $\mathbf{h}(P_0,P_1)$ 由下式给出：

$$\mathbf{h}(P_0,P_1)=\frac{1}{j\lambda}\frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}}\cos(\bar{\mathbf{n}},\ \bar{\mathbf{r}}_{01}). \qquad (3\text{-}29)$$

我们分析衍射的结果出现一个迭加积分，这不应该完全出乎我们意料之外. 前面已经看到，得出这一结果所要求的主要因素是线性性质，而在我们的分析中前面曾假定这一性质存在.

§ 3-5 瑞利-索末菲理论推广到非单色波情形

前面，在所有情况下我们都假定波动是理想的单色波. 在实践中可以得到这种波的很好的近似，同时它也特别容易分析. 下面简略地考虑一下非单色扰动这一更普遍的情形；我们只限于注意瑞利-索末菲理论将给出一些什么预言，但从基尔霍夫的分析也可得到类似的结论.

在不透明屏幕上的孔径 Σ，当一扰动 $u(P_1,t)$ 投射到孔径上时，考虑在孔径后面所观察到的标量扰动 $u(P_0,t)$. 时间函数 $u(P_0,t)$ 及 $u(P_1,t)$ 可以表示为逆傅里叶变换：

$$u(P_1,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{U}(P_1,\nu)\exp(j\,2\pi\nu t)\,d\nu, \qquad (3\text{-}30\,\mathrm{a})$$

$$u(P_0, t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{U}(P_0, \nu)\exp(j\,2\pi\nu t)d\nu, \qquad (3\text{-}30\ \mathrm{b})$$

其中 $\mathbf{U}(P_0, \nu)$和 $\mathbf{U}(P_1, \nu)$分别是 $u(P_0, t)$和 $u(P_1, t)$ 的 傅里叶谱，而 ν 表示光波频率。

作变数变换 $\nu'=-\nu$，方程(3-30 a, b)变换为

$$u(P_1, t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{U}(P_1, -\nu')\exp(-j\,2\pi\nu' t)\,d\nu', \quad (3\text{-}31\mathrm{a})$$

$$u(P_0, t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{U}(P_0, -\nu')\exp(-j\,2\pi\nu' t)d\nu', \quad (3\text{-}31\ \mathrm{b})$$

可以把这两个关系式看成是：用方程 (3-2) 所代表的那种单色时间函数的线性组合 来表示 非单 色时间 函数 $u\ (P_1, t)$ 和 $u(P_0, t)$。单色基元函数有不同的频率 ν'，频率为 ν'的扰动的复数振幅就是 $\mathbf{U}(P_1, -\nu')$和 $\mathbf{U}(P_0, -\nu')$。 根据波动传播现象的线性性质，下面我们将应用 §3-4 的结果求出每一单色扰动在 P_0 的复数振幅，再把结果迭加起来以得到普遍的时间函数 $u(P_0, t)$。

为此，由方程(3-26)立即可写出

$$\mathbf{U}(P_0,-\nu')=-\,j\frac{\nu'}{c}\iint_{\Sigma}\mathbf{U}(P_1, -\nu')\frac{\exp(j\,2\pi\nu'\frac{r_{01}}{c})}{r_{01}}\cdot$$

$$\cdot\cos(\bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{r}}_{01})ds, \qquad (3\text{-}32)$$

其中用到关系式 $\lambda'\nu'=c$。把(3-32)代入(3-31 b)并交换积分次序，得

$$u(P_0, t)=\iint_{\Sigma}\frac{\cos(\bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{r}}_{01})}{2\pi c r_{01}}\int_{-\infty}^{+\infty}-j\,2\pi\nu'\mathbf{U}(P_1, -\nu')\cdot$$

$$\cdot\exp\left[-j\,2\pi\nu'\left(t-\frac{r_{01}}{c}\right)\right]d\nu' ds.$$

最后，利用下述恒等式

$$\frac{d}{dt}u(P_1, t)=\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{U}(P_1, -\nu')\exp(-j\,2\pi\nu' t)\,d\nu'=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}-j\,2\pi\nu'\mathbf{U}(P_1, -\nu')\exp(-j\,2\pi\nu' t)\,d\nu',$$

可得

$$u(P_0, t)=\iint_{\Sigma}\frac{\cos(\bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{r}}_{01})}{2\pi c r_{01}}\frac{d}{dt}u\left(P_1, t-\frac{r_{01}}{c}\right)ds. \quad (3\text{-}33)$$

于是我们看到，P_0 点的扰动正比于孔径上各点 P_1 的扰动对时间的微商。由于扰动从 P_1 传播到 P_0 需要一段时间 $\frac{r_{01}}{c}$，观察到的波依赖于入射波在“被推迟”时刻 $t-\frac{r_{01}}{c}$ 的微商。

这一更普遍的讨论表明，研究理想单色波的衍射绝对不是一个学院式的题目，因为更普遍的时间扰动的结果很容易从单色波的综合得到。此外，对于大多数研究目的而言，可看成是理想单色光的光源也很容易得到（例如，He-Ne 气体激光器）。关于非单色波的进一步研究见习题 3-5。

§ 3-6 在边界上的衍射

在陈述惠更斯-菲涅耳原理时，我们发现把孔径上的每一点看成是一个新的球面波源有其方便之处。已经指出，这些波源纯碎是数学上的方便，并没有实际的物理意义。杨氏于1802年首先定性地表述了一个更有物理内容的观点，这种观点认为观察到的场是由不受干扰地通过孔径的入射波和孔径**边缘**发出的衍射波叠加而成。边缘的物质介质发出新的波的可能性使这种解释更有物理内容。

索末菲严格求解了半无穷理想导体反射屏幕的衍射问题[3-7]，这给杨氏的定性论据增添了动力。索末菲的严格解表明，屏幕的几何阴影内的场的形式是发源于屏幕边缘上的柱面波；而在屏幕后被照明的区域内的场则是这一柱面波和直接透射的入射波的叠加。

Maggi[3-16]和 Rubinowicz[3-17] 研究了边界衍射方法在更普遍的衍射问题中的适用性。他们证明，实际上可以对基尔霍夫衍射公式加以处理便得出与杨氏的概念等价的一种形式。不久前，Miyamoto 和 Wolf[3-18] 扩展了边界衍射理论。为了进一步讨论这些概念，读者应当参考所引的文献。

与杨氏的概念密切相关的另一种方法是 Keller 所发展的衍射的几何理论[3-19]。在这种处理方法中，引起衍射的障碍物后面的场是用几何光学原理来求的，再加进从障碍物的一些点上发出的“衍射光线”以作修正。新的光线假定是从障碍物的边缘、角落、尖端及表面上发出的。这个理论往往可以用来计算那种用别的方法计算过于复杂的一些障碍物的衍射场，因此日益为人所知。

§ 3-7 平面波的角谱

标量衍射理论也能在一个与线性时间不变滤波器理论极其相似的框架内来表述。虽然这一处理方法在物理光学中用得不如基尔霍夫理论那样广泛，但是它对那些熟悉线性系统理论的读者所具有的直观吸引力使得我们值得在这里讨论这一方法。我们将会看到，若对任一平面上的复场分布作傅里叶分析，则各个空间傅里叶分量可以看作是沿不同方向传播的平面波。在任一其他点上的场振幅，可以在考虑到这些平面波传播到该点所经受的相移之后，对各个平面波的贡献求和而算出。关于衍射理论的这一研究方法的详尽讨论及其在无

线电波传播理论中的应用，可参考 Ratcliffe 的著作[3-20]。

角谱及其物理解释

假设某个未经特殊说明的单色光源系统把一个沿正 z 方向传播的波投射到图 3-7 的 xy 平面上。令此平面上的复场用 $\mathbf{U}(x, y, 0)$ 代表；我们的最终目的是计算由它引起的出现在坐标为 (x, y, z) 的第二点 P_0 处的场 $\mathbf{U}(x, y, z)$。

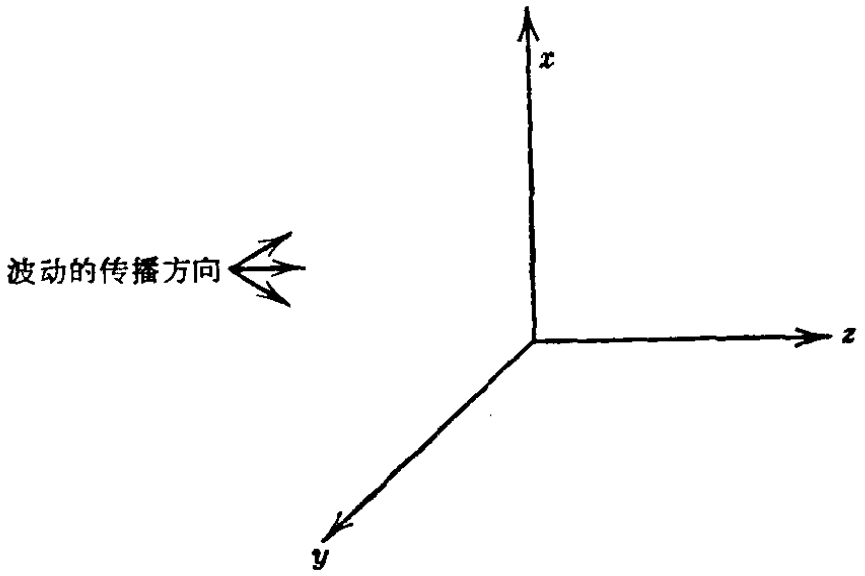


图 3-7　计算角谱用的坐标系

在 xy 平面上函数 $\mathbf{U}$ 有一个二维傅里叶变换式，由下式给出：

$$\mathbf{A}_0(f_X, f_Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{U}(x, y, 0)\exp[-j2\pi(f_X x + f_Y y)]dxdy. \tag{3-34}$$

在第二章曾经指出，可以把傅里叶变换的运算看成是把一个复杂函数分解成更简单的复指数函数的集合。为了更加强调这种观点，我们把 $\mathbf{U}$ 写成其频谱的逆变换

$$\mathbf{U}(x,\ y,\ 0)=\int_{-\infty}^{\infty}\int\mathbf{A}_0(f_X,f_Y)\exp[j\,2\pi(f_Xx+f_Yy)]df_Xdf_Y.$$

(3-35)

我们回想起，一个以方向余弦(α,β,γ)传播的单位振幅的平面波的方程为

$$\mathbf{B}(x,y,z)=\exp\left[j\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha x+\beta y+\gamma z)\right],$$

其中

$$\gamma=\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}.$$

因此，在$z=0$平面上，可以把复指数函数$\exp[j\,2\pi(f_Xx+f_Yy)]$看成是以方向余弦

$$\alpha=\lambda f_X,\ \beta=\lambda f_Y,\ \gamma=\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}\qquad(3\text{-}36)$$

传播的平面波。这一平面波分量的复振幅就是$\mathbf{A}_0(f_X,f_Y)df_Xdf_Y$，在$\left(f_X=\frac{\alpha}{\lambda},f_Y=\frac{\beta}{\lambda}\right)$处求值。由于这个缘故，函数

$$\mathbf{A}_0\left(\frac{\alpha}{\lambda},\frac{\beta}{\lambda}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\int\mathbf{U}(x,y,0)\exp\left[-j2\pi\left(\frac{\alpha}{\lambda}x+\frac{\beta}{\lambda}y\right)\right]dxdy$$

(3-37)

称为扰动$\mathbf{U}(x,y,0)$的角谱。

角谱的传播

现在来看在一个与xy平面平行但离它距离为z的平面上的扰动$\mathbf{U}$的角谱。令函数$\mathbf{A}\left(\frac{\alpha}{\lambda},\frac{\beta}{\lambda};z\right)$代表$\mathbf{U}(x,y,z)$的角谱，即

$$\mathbf{A}\left(\frac{\alpha}{\lambda},\frac{\beta}{\lambda};z\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\int\mathbf{U}(x,y,z)\cdot$$

$$\cdot\exp\left[-j2\pi\left(\frac{\alpha}{\lambda}x+\frac{\beta}{\lambda}y\right)\right]dxdy.\qquad(3\text{-}38)$$

如果能够找到 $\mathbf{A}_0\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right)$与$\mathbf{A}\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}; z\right)$之间的关系，那么波动传播对扰动的角谱的效应就清楚了。

为了找到这个关系，注意 $\mathbf{U}$ 可写成

$$\mathbf{U}(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{A}\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}; z\right) \cdot$$

$$\cdot \exp\left[j 2\pi \left(\frac{\alpha}{\lambda} x + \frac{\beta}{\lambda} y\right)\right] d\frac{\alpha}{\lambda} d\frac{\beta}{\lambda}. \qquad (3\text{-}39)$$

此外，在所有无源的点上 $\mathbf{U}$ 必须满足亥姆霍兹方程

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{U} = 0.$$

把这一要求直接加到方程(3-39)上表明，$\mathbf{A}$ 必须满足微分方程

$$\frac{d^2}{dz^2}\mathbf{A}\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}; z\right) + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 [1 - \alpha^2 - \beta^2]\mathbf{A}\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}; z\right) = 0.$$

这个方程的一个基本解可以写成下述形式：

$$\mathbf{A}\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}; z\right) = \mathbf{A}_0\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) \exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}\, z\right). \qquad (3\text{-}40)$$

这一结果表明，当方向余弦(α, β)满足

$$\alpha^2 + \beta^2 < 1$$

时，传播一段距离 z 的效应只是改变了各个角谱分量的相对位相。因为每个平面波分量在不同角度上传播，它们到达给定观测点所走过的距离各不相同，因而引入了相对的位相延迟。

但是，当(α, β)满足

$$\alpha^2 + \beta^2 > 1$$

时，就需要有不同的解释。这时方程(3-40)中的平方根是虚数，这一方程可写成：

$$\mathbf{A}\left(\frac{\alpha}{\lambda},\ \frac{\beta}{\lambda};z\right)=\mathbf{A}_0\left(\frac{\alpha}{\lambda},\ \frac{\beta}{\lambda}\right)\exp(-\mu z)。\quad (3\text{-}41)$$

其中

$$\mu=\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\alpha^2+\beta^2-1},$$

由于μ是一个正实数，这些波动分量由于传播现象而剧烈衰减。这些角谱分量称为倏逝波(evanescent wave)，它们与在截止频率以下运行的微波波导管中所产生的波非常相似。注意极限情形

$$\alpha^2+\beta^2=1,$$

相当于传播方向垂直于z轴的平面波，它们对在z方向上的净能流没有贡献[1)]。

最后我们看到，利用逆变换方程，可将在(x, y, z)处观测到的扰动用初始角谱表出：

$$\mathbf{U}(x, y, z)=\int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{A}_0\left(\frac{\alpha}{\lambda},\ \frac{\beta}{\lambda}\right)\exp\left(j\ \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}\,z\right)\cdot$$

$$\cdot\exp\left[\ j2\pi\left(\frac{\alpha}{\lambda}x+\ \frac{\beta}{\lambda}y\ \right)\right]d\,\frac{\alpha}{\lambda}\,d\,\frac{\beta}{\lambda}。\quad (3\text{-}42)$$

衍射孔径对角谱的效应

设在图3-7的$z=0$平面上引入一个无穷大的不透明屏幕，其上有一孔径Σ。我们现在来研究这个衍射屏幕对扰动的角谱的效应。令入射到屏幕上的扰动的角谱为$\mathbf{A}_i\left(\frac{\alpha}{\lambda},\ \frac{\beta}{\lambda}\right)$，并定义孔径的透射函数为

1) 注意，倏逝波正是在使用标量理论已经靠不住的条件下预言的。因此它们在向量理论中讨论更为合适（倏逝波的产生及其应用可参阅 O. Bryngdahl, Progress in Optics XI, E. Wolf (ed.), p. 169, North-Holland).

$$t(x, y)=\begin{cases}1 & (x, y)\text{在}\Sigma\text{上}\\ 0 & \text{其他地方.}\end{cases}$$

我们对扰动 $\mathbf{U}$ 应用基尔霍夫边界条件，假定屏幕对投射到 Σ 上的波没有影响并且屏幕的几何阴影内的场恒为零。于是，紧靠屏幕后的平面上的场可写成

$$\mathbf{U}_t(x, y, 0)=\mathbf{U}_i(x, y, 0)t(x, y),$$

其中 $\mathbf{U}_i(x, y, 0)$ 代表投射到屏幕上的场。再利用傅里叶分析的卷积定理，把透射波的角谱写为

$$\mathbf{A}_t\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right)=\mathbf{A}_i\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right)*\mathbf{T}\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right), \quad (3\text{-}43)$$

其中

$$\mathbf{T}\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right)\triangleq\int_{-\infty}^{\infty}\int t(x, y)\exp\left[-j2\pi\left(\frac{\alpha}{\lambda}x+\frac{\beta}{\lambda}y\right)\right]dxdy. \quad (3\text{-}44)$$

因此透射扰动的角谱由入射扰动的角谱与另一个表征孔径 Σ 本身特征的角谱的卷积得出。

对于孔径由单个单位振幅的平面波垂直照射的特殊情形，这个结果取特别简单的形式。这时

$$\mathbf{A}_i\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right)=\delta\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right),$$

因而

$$\mathbf{A}_t\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right)=\delta\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right)*\mathbf{T}\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right)=\mathbf{T}\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right).$$

于是，对孔径的透射函数作傅里叶变换，就立即得到透射的角谱。

总之，引入使入射波在空间受限制的衍射孔径的效果是展宽了扰动的角谱。当孔径由平面波照明时，透射光的角谱可以从对孔径的透射函数直接进行傅里叶变换而得出。孔径越小，孔径后的角谱就越宽。在电信号的脉冲技术中也发生类

似的效应；限制一个函数的时间宽度的效果是使其频谱展宽。

传播现象作为一种线性空间滤波器

下面我们再来考虑光从图 3-7 中的 $z=0$ 平面到另一距离为 z 的平面的传播。可以认为，投射到第一个平面上的扰动 $\mathbf{U}(x, y, 0)$ 经传播现象变换为一个新的场分布 $\mathbf{U}(x, y, z)$。这种变换满足我们前面对系统的定义。事实上，我们将要证明传播现象的作用相当于一个线性的空间不变系统，并且由一个比较简单的传递函数表征。

传播现象的线性性质前面已经讨论过；它直接隐含在波动方程的线性性质之中，或者换句话说，直接隐含在迭加积分(3-28)中。空间不变性的最容易的证明方法，就是实际推出描写传播效应的传递函数；如果一个变换具有传递函数，那么它必定是空间不变的。

为了求出传递函数，我们回到角谱的观点。但是，我们现在不把角谱写成方向余弦 (α, β) 的函数，而让它们仍然作为空间频率的函数要更方便些。空间频率与方向余弦直接由方程(3-36)联系。

设 $\mathbf{U}(x, y, z)$ 的空间频谱用 $\mathbf{A}(f_X, f_Y; z)$ 表示，而 $\mathbf{U}(x, y, 0)$ 的频谱仍写作 $\mathbf{A}_0(f_X, f_Y)$。于是，我们可以把 $\mathbf{U}(x, y, z)$ 表示为

$$\mathbf{U}(x, y, z)=\int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{A}(f_X, f_Y; z)\exp[j2\pi(f_X x+f_Y y)]df_X df_Y.$$

但是从方程(3-42)，我们又有

$$\mathbf{U}(x, y, z)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{A}_0(f_X, f_Y)\exp\left[j2\pi\frac{z}{\lambda}\sqrt{1-(\lambda f_X)^2-(\lambda f_Y)^2}\right].$$

$$\cdot\exp[j\,2\,\pi(f_X x+f_Y y)]df_X df_Y.$$

比较这两个方程，可得

$$\mathbf{A}(f_X,f_Y)=\mathbf{A}_0(f_X,f_Y)\exp\left[j2\,\pi\frac{z}{\lambda}\sqrt{1-(\lambda f_X)^2-(\lambda f_Y)^2}\right]. \tag{3-45}$$

因此我们看到传播现象是由下述传递函数表征：

$$\mathbf{H}(f_X,f_Y)=\frac{\mathbf{A}(f_X,f_Y)}{\mathbf{A}_0(f_X,f_Y)}=$$

$$=\exp\left[j2\,\pi\frac{z}{\lambda}\sqrt{1-(\lambda f_X)^2-(\lambda f_Y)^2}\right]. \tag{3-46}$$

若距离 z 至少有几个波长的长度，那么倏逝波可以忽略，得到传递函数为

$$\mathbf{H}(f_X,f_Y)=\begin{cases}\exp\left[j2\,\pi\frac{z}{\lambda}\sqrt{1-(\lambda f_X)^2-(\lambda f_Y)^2}\right] & \\ \qquad\qquad f_X^2+f_Y^2<\frac{1}{\lambda^2} & (3\text{-}47)\\ 0 \qquad\qquad \text{其他地方.} & \end{cases}$$

因此，传播现象可以看成是一个具有有限的空间带宽的线性色散空间滤波器. 滤波器的透过率在频率平面上半径为 λ^{-1} 的圆形区域之外为 0. 在这圆形带宽之内，传递函数的模为 1，但引进了与频率有关的相移. 系统的位相色散当空间频率高时最大；而当 f_X 和 f_Y 趋于零时，色散便消失.

习　题

3-1　证明发散球面波满足索末菲辐射条件.

3-2　证明：若孔径由发散球面波照明时，方程 (3-17) 化为方程 (3-18).

3-3　考虑在瑞利-索末菲理论中采用下述格林函数

$$\mathbf{G}_+(P_1)=\frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}}+\frac{\exp(jk\tilde{r}_{01})}{\tilde{r}_{01}},$$

(a) 证明 $\mathbf{G}_+$ 的法线方向的导数在孔径平面上为零。

(b) 利用这个格林函数，求出用孔径上的任意的扰动来表示$\mathbf{U}(P_0)$的表达式。要得到这个结果必须要用什么样的边界条件？

(c) 利用(b)的结果，求出当孔径被从 P_2 点发散的球面波照射时 $\mathbf{U}(P_0)$的表达式。

3-4 假定孔径由垂直入射的单位振幅的平面波照明。求出下述情形下的角谱：

(a) 直径为 d 的圆形孔径；

(b) 直径为 d 的不透明圆盘。

3-5 考虑非单色扰动 $u(P,t)$，其中心频率为$\bar{\nu}$而带宽为$\Delta\nu$。定义一个相关的复数值扰动 $\mathbf{U}_-(P,t)$，它只是由 $u(P,t)$的负频分量构成。因此，

$$\mathbf{U}_-(P,t)=\int_{-\infty}^{0}\mathbf{U}(P,\nu)\exp(j2\pi\nu t)d\nu,$$

其中 $\mathbf{U}(P,\nu)$是 $u(P,t)$的傅里叶谱。假定几何关系如图 3-4 所示，证明若

$$\frac{\Delta\nu}{\bar{\nu}}\ll 1 \text{ 及 } \frac{1}{\Delta\nu}\gg\frac{r_{01}}{c},$$

则 $$\mathbf{U}_-(P_0,t)=\frac{1}{j\bar{\lambda}}\int_{\Sigma}\int\mathbf{U}_-(P_1,t)\frac{\exp(j\bar{k}r_{01})}{r_{01}}\cos(\bar{\mathbf{n}},\bar{\mathbf{r}}_{01})ds,$$

其中 $\bar{\lambda}=\frac{c}{\bar{\nu}}$ 而 $\bar{k}=\frac{2\pi}{\bar{\lambda}}$。

参 考 文 献

3-1 Sommerfeld, A., Optics, *Lectures on Theoretical Physics*, vol. IV, Academic Press Inc., New York, 1954.

3-2 Kottler, F., Diffraction at a Black Screen, in E. Wolf (Ed.), *Progress in Optics*, vol. IV, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1965.

3-3 Silver, S., Microwave Aperture Antennas and Diffraction Theory,

J. Opt. Soc. Am., **52**,131(1962).

3-4 Born, M., and E. Wolf, *Principles of Qptics*, 2d rev. ed., Pergamon Press, New York, 1964.

3-5 Stroke, G. W., Theory, Production and Use of Optical Gratings for High-Resolution Spectroscopy, *Proc. Third Intern. Conf. Quantum Electron.*, **2** (1964).

3-6 Kottler, F., Electromagnetische Theorie der Beugung an Schwarzen Schirmen, *Ann. Physik*, (4) **71**,457(1923)

3-7 Sommerfeld, A., Mathematische Theorie der Diffraction, *Math. Ann.*, **47**,317(1896).

3-8 Kottler, F., Zur Theorie der Beugung an Schwarzen Schirmen, *Ann. Physik* (4) **70**,405(1923).

3-9 Baker, B. B. and E. T. Copson, *The Mathematical Theory of Huygens' Principle*, 2d ed., Clarendon Press, Oxford, 1949.

3-10 Bouwkamp, C. J., Diffraction Theory, in A. C. Strickland (ed.) *Reports on Progress in Physics* vol. XVII, The Physical Society, London, 1954.

3-11 Hoenl, H., A. W. Maue and K. Westpfahl, Theorie der Beugung, in S. Fluegge (ed.), *Handbuch der Physik* vol. 25, Springer-Verlag, Berlin, 1961.

3-12 Hildebrand, F. B., *Advanced Calculus for Engineers*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1948.

3-13 Sommerfeld, A., Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung, *Jahresber. Deut. Math. Ver.*, **21**,309(1912).

3-14 Kirhhoff, G., Zur Theorie der Lichtstrahlen, *Wiedemann Ann.*, (2)**18**,663(1883).

3-15 Wolf, E. and E. W. Marchand, Comparison of the Kirchhoff and the Rayleigh-Sommerfeld Theories of Diffraction at an Aperture, *J. Opt. Soc. Am*, **54**,587(1964).

3-16 Maggi, G. A., Sulla Propagazione Libera e Perturbata della Onde Luminose in un Mezzo Isotropo, *Ann. Matematica*, **16**,21(1888).

3-17 Rubinowicz, A, Die Beugungswelle in der Kirchhoffschen Theorie der Beugungserscheinungen, *Ann. Physik*, (14)**53**,257(1917).

3-18 Rubinowicz, A, The Miyamoto-Wolf Diffraction Wave, in E. Wolf (ed.), *Progress in Optics*, vol. IV, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1965.

3-19 Keller, J. B., Geometrical Theory of Diffraction, *J. Opt. Soc. Am.*, **52**,116(1962).

3-20 Ratcliffe, J. A., Some Aspects of Diffraction Theory and their Application to the Ionosphere, in A. C. Strickland (ed.), *Reports on Progress in Physics*, vol. XIX, The Physical Society, London, 1956.

第四章　菲涅耳衍射与夫琅和费衍射

在上一章里，我们叙述了最普遍形式的标量衍射理论的结果.现在我们转而讨论普遍理论的某些近似，这些近似使我们可以用比较简单的数学运算来计算衍射图样. 在许多讨论波动传播的学科里这些近似是常见的，以后我们把这些近似称为菲涅耳近似和夫琅和费近似. 我们的讨论与通常对菲涅耳衍射和夫琅和费衍射的讨论不同之处在于，按照把传播现象看作是一个“系统”的观点，我们将试图求得对广泛的一类“输入”的场分布都适用的近似.

§ 4-1　惠更斯-菲涅耳原理的近似

我们还是来考虑无穷大的不透明屏幕上的一个有限孔径 Σ 对单色光的衍射. 如图 4-1 所示，设屏幕是平面的，其上附有一个直角坐标系 (x_1, y_1). 还假设观察区域也是一个平

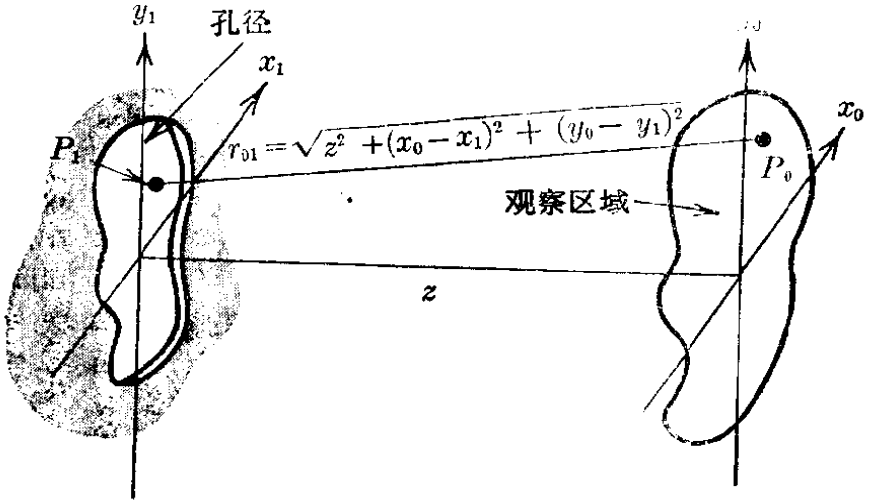


图 4-1　讨论衍射的几何示意图

面，与屏幕平面平行，两个平面的间距为 z。观察平面上附有坐标系(x_0, y_0)，其坐标轴平行于x_1y_1平面上的坐标轴。

初步近似

利用惠更斯-菲涅耳原理的数学表达式，特别是方程(3-28)和(3-29)，(x_0, y_0)点的场的振幅很容易写成

$$\mathbf{U}(x_0, y_0)=\iint_{\Sigma}\mathbf{h}(x_0, y_0; x_1, y_1)\mathbf{U}(x_1, y_1)dx_1dy_1, \tag{4-1}$$

其中 $$\mathbf{h}(x_0, y_0; x_1, y_1)=\frac{1}{j\lambda}\frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}}\cos(\bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{r}}_{01}). \tag{4-2}$$

下面将把这个迭加积分的积分限写为无穷，这时应当这样理解：根据基尔霍夫边界条件，$\mathbf{U}(x_1, y_1)$在孔径 Σ 之外恒为零。于是

$$\mathbf{U}(x_0, y_0)=\int_{-\infty}^{\infty}\iint\mathbf{h}(x_0, y_0; x_1, y_1)\mathbf{U}(x_1, y_1)\,dx_1dy_1. \tag{4-3}$$

我们要作的近似的基础，是假设孔径和观察平面之间的距离 z 远远大于孔径 Σ 的最大线度。此外，我们还假设在观察平面上只对 z 轴附近的一个有限区域我们才感兴趣，并且距离 z 也远远大于这个区域的最大线度。有了这些假设之后，倾斜因子容易近似为

$$\cos(\bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{r}}_{01})=1.$$

如果角度 $(\bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{r}}_{01})$ 不超过 18°，上式的准确度在 5%之内。在相同的条件下，(4-2)式分母上的 r_{01} 之值跟 z 差别不大，使得权重函数可以近似为：

$$\mathbf{h}(x_0, y_0; x_1, y_1)\cong\frac{1}{j\lambda z}\exp(jkr_{01}). \tag{4-4}$$

注意，指数上的 r_{01} 值不能简单地换为 z，因为这样做所带来

的误差还将乘上一个很大的数 k，因而会招致一个远大于 2π 弧度的位相误差。

菲涅耳近似

只有对方程(4-4)的指数中的 r_{01} 之值采用某种近似，才能得到进一步的简化。从图 4-1，距离 r_{01} 准确地为

$$r_{01}=\sqrt{z^2+(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2}=$$

$$=z\sqrt{1+\left(\frac{x_0-x_1}{z}\right)^2+\left(\frac{y_0-y_1}{z}\right)^2}. \qquad (4\text{-}5)$$

对根号作二项式展开提供了一种方便的近似方法：

$$\sqrt{1+b}=1+\frac{1}{2}b-\frac{1}{8}b^2+\cdots \qquad |b|<1. \qquad (4\text{-}6)$$

我们现在假定方程(4-5)中的根号用它的展开式的前两项来近似就足够了，得到

$$z\sqrt{1+\left(\frac{x_0-x_1}{z}\right)^2+\left(\frac{y_0-y_1}{z}\right)^2}\simeq$$

$$\simeq z\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{x_0-x_1}{z}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{y_0-y_1}{z}\right)^2\right].$$

以后我们把这个假设叫做菲涅耳近似，这种近似允许把权重函数写为

$$\mathbf{h}(x_0, y_0; x_1, y_1)=$$

$$=\frac{\exp(jkz)}{j\lambda z}\exp\left\{j\frac{k}{2z}[(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2]\right\}. \qquad (4\text{-}7)$$

若距离 z 足够大，以致这个近似准确成立，则称观察者是处于菲涅耳衍射区内。

注意，我们的近似的关键在于用二次曲面来代替球面的惠更斯子波。显然，这种近似的精度要求对孔径、观察区域

以及距离 z 的相对大小有某种限制。作为有足够精度的充分条件，我们可以要求二项式展开中次高阶项所贡献的位相变化远小于 1 弧度。要这个条件成立，则距离 z 应当满足

$$z^3 \gg \frac{\pi}{4\lambda}[(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2]^2_{\max}. \qquad (4\text{-}8)$$

但是，这一要求一般并不是必要的。要使菲涅耳近似能够成立，只要求展开式中的高阶项不改变迭加积分(4-3)之值；而为此并不一定需要附加的位相因子的极大值远小于 1 弧度。当距离 z 很小，使得(4-8)式不成立，这时$\frac{k}{2z}$之值一般会很大，并且方程(4-7)中的二次位相因子将会振荡很快，以致对积分的主要贡献仅仅来自($x_1=x_0$, $y_1=y_0$)附近的点，那里的位相变化速率最小。在这些"稳相"点的附近，次高阶位相项的大小往往可以完全忽略。对于这个所谓稳相原理的进一步讨论见参考文献[3-4]的附录Ⅲ。

承认菲涅耳近似成立，那么迭加积分可以表示成下面两种等效的形式。第一种：$\mathbf{U}(x_0, y_0)$可以看成是 $\mathbf{U}(x_1, y_1)$与 $\mathbf{h}$ 的卷积，即

$$\mathbf{U}(x_0, y_0)=\frac{\exp(jkz)}{j\lambda z}\int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{U}(x_1, y_1)\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{j\frac{k}{2z}[(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2]\right\}dx_1dy_1; \qquad (4\text{-}9)$$

另一种：指数中的二次项可以展开，得到

$$\mathbf{U}(x_0, y_0)=\frac{\exp(jkz)}{j\lambda z}\exp\left[j\frac{k}{2z}(x_0^2+y_0^2)\right]\cdot$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\int\left\{\mathbf{U}(x_1, y_1)\exp\left[j\frac{k}{2z}(x_1^2+y_1^2)\right]\right\}\cdot$$

$$\cdot\exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda z}(x_0x_1+y_0y_1)\right]dx_1dy_1. \qquad (4\text{-}10)$$

于是，除了与(x_1, y_1)无关的相乘的振幅和位相因子之外，函数$U(x_0, y_0)$可以从$U(x_1, y_1)\exp\left[j\frac{k}{2z}(x_1^2+y_1^2)\right]$的傅里叶变换求出，这时变换必须在频率$\left(f_x=\frac{x_0}{\lambda z},\ f_y=\frac{y_0}{\lambda z}\right)$处取值，以保证观察平面上有正确的空间标度.

回到第一种形式(4-9)．这个方程的卷积性质直接提示我们：通过考虑菲涅耳衍射在空间频率域内的效应，也许能够对它的意义得到更多的理解．于是，我们对空间不变权重函数(4-7)进行傅里叶变换便得到传递函数

$$H(f_x, f_y)=\exp(jkz)\exp[-j\pi\lambda z(f_x^2+f_y^2)]. \quad (4\text{-}11)$$

它描写菲涅耳衍射区内的传播的效果．这个式子中的第一个指数因子代表一个总体的位相延迟，这是任何角谱分量在距离为z的两个平面之间传播时都要受到的．第二个指数因子代表和频率的平方有关的位相色散．比较方程(4-11)和(3-46)表明，上面这个传递函数只不过是§3-6中所推出的更普遍的传递函数的一个近似.

夫琅和费近似

如果采用比菲涅耳近似中所用的更强的限制条件，那么计算衍射图样的工作还可以进一步简化．特别是，前面已经看到，在菲涅耳衍射区内，观察到的场分布$U(x_0, y_0)$可以通过对孔径上的场分布$U(x_1, y_1)$与二次位相函数$\exp\left[j\frac{k}{2z}(x_1^2+y_1^2)\right]$的乘积作傅里叶变换求出．如果我们除此之外还采用更强的(夫琅和费)假设

$$z\gg\frac{k(x_1^2+y_1^2)_{max}}{2}, \quad (4\text{-}12)$$

那么平方位相因子在整个孔径上近似等于1，而观察到的场

分布就可以直接从孔径上的场分布本身的傅里叶变换求出。因此在夫琅和费衍射区内

$$\mathbf{U}(x_0, y_0)=\frac{\exp(jkz)\exp\left[j\frac{k}{2z}(x_0^2+y_0^2)\right]}{j\lambda z}\cdot$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\int\mathbf{U}(x_1, y_1)\exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda z}(x_0x_1+y_0y_1)\right]dx_1dy_1. \quad (4\text{-}13)$$

这个式子，除了积分号前的相乘因子外，就是孔径上场分布的傅里叶变换式，在频率$\left(f_X=\frac{x_0}{\lambda z},\ f_Y=\frac{y_0}{\lambda z}\right)$上取值。

在光学频段，夫琅和费衍射方程成立所要求的条件实际上可以是相当苛刻的。例如，当波长为6×10^{-7}米(红光)及孔径宽度为2.5厘米(1吋)时，观察距离z必须满足

$$z\gg1600\text{ 米}.$$

但是上面所要求的条件仍然在某些重要问题中得到满足。此外，如果孔径用一个向观察者会聚的球面波照明（见习题4-3），或者如果一个会聚透镜放在观察者和孔径之间的适当位置上的话(见第五章)，夫琅和费衍射图样也能在比(4-12)式所指定的距离更近的距离上观察到。

最后应当注意，不存在专门与夫琅和费衍射对应的传递函数，因为近似式(4-12)破坏了衍射方程式的空间不变性(参看习题2-10)。但是，由于夫琅和费衍射只不过是菲涅耳衍射的极限情形，传递函数(4-11)对菲涅耳衍射与夫琅和费衍射二者都保持有效。

§ 4-2 夫琅和费衍射图样的例子

我们下面考虑计算夫琅和费衍射的一些例子。更多的例子读者可以参考习题(见习题4-1、4-2及4-3)。

可以直接用前一节的结果来求出任意给定孔径所产生的夫琅和费衍射图样上的复场分布. 但应当注意, 实际的辐射探测器,包括眼睛在内,都只对光的强度[1]而不是对光场的振幅有响应. 因此将用强度分布来作为衍射图样的最后描述.

矩形孔径

首先考虑一个矩形孔径,其振幅透射率为

$$t(x_1, y_1) = \mathrm{rect}\left(\frac{x_1}{l_X}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y_1}{l_Y}\right).$$

常数 l_X 和 l_Y 分别是 x_1 和 y_1 方向上的孔径宽度. 如果孔径用一个单位振幅的单色平面波垂直照明, 那么孔径上的场分布就等于透射率函数 t. 于是,利用方程(4-13),此孔径的夫琅和费衍射图样为

$$\mathbf{U}(x_0, y_0) =$$

$$= \frac{\exp(jkz)\exp\left[j\frac{k}{2z}(x_0^2+y_0^2)\right]}{j\lambda z}\mathscr{F}\{\mathbf{U}(x_1, y_1)\}\Big|_{f_X=x_0/\lambda z,\ f_Y=y_0/\lambda z}.$$

注意 $\mathscr{F}\{\mathbf{U}(x_1, y_1)\} = l_X l_Y \mathrm{sinc}(l_X f_X)\mathrm{sinc}(l_Y f_Y)$,
我们得到

$$\mathbf{U}(x_0, y_0) = \frac{\exp(jkz)\exp\left[j\frac{k}{2z}(x_0^2+y_0^2)\right]}{j\lambda z}\cdot$$

$$\cdot\ l_X l_Y \mathrm{sinc}\left(\frac{l_X x_0}{\lambda z}\right)\mathrm{sinc}\left(\frac{l_Y y_0}{\lambda z}\right),$$

而

$$I(x_0, y_0) = \frac{l_X^2 l_Y^2}{\lambda^2 z^2}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{l_X x_0}{\lambda z}\right)\mathrm{sinc}^2\left(\frac{l_Y y_0}{\lambda z}\right). \qquad (4\text{-}14)$$

1) 光场的强度在这里定义为 $I(P) = 2\langle u^2(P,t)\rangle$,其中尖括号表示对无限长时间求平均. 对于复振幅为 $\mathbf{U}(P)$ 的单色场,这个式子化为 $I(P) = |\mathbf{U}(P)|^2$.

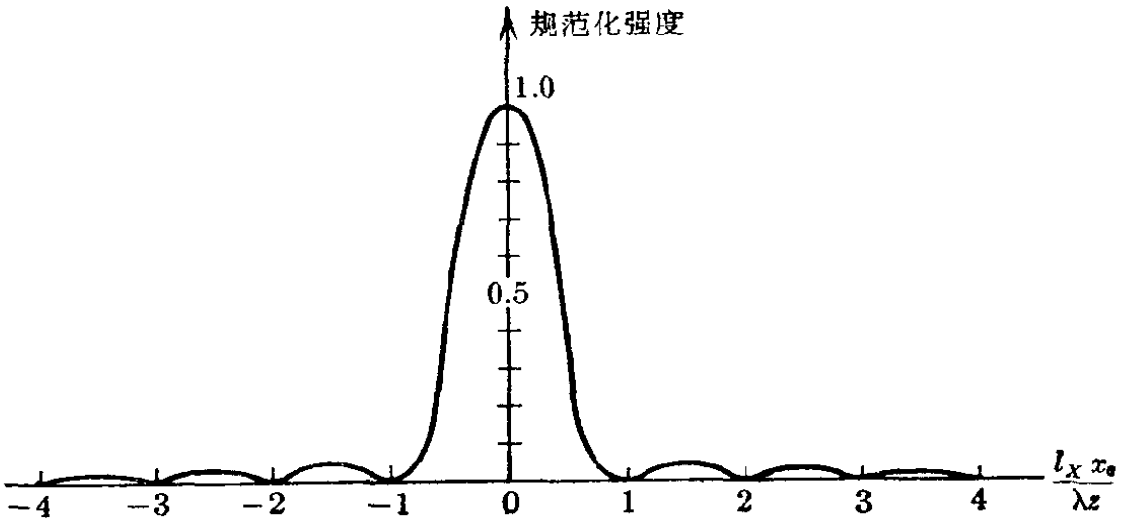


图 4-2　矩形孔径的夫琅和费衍射图样截面图

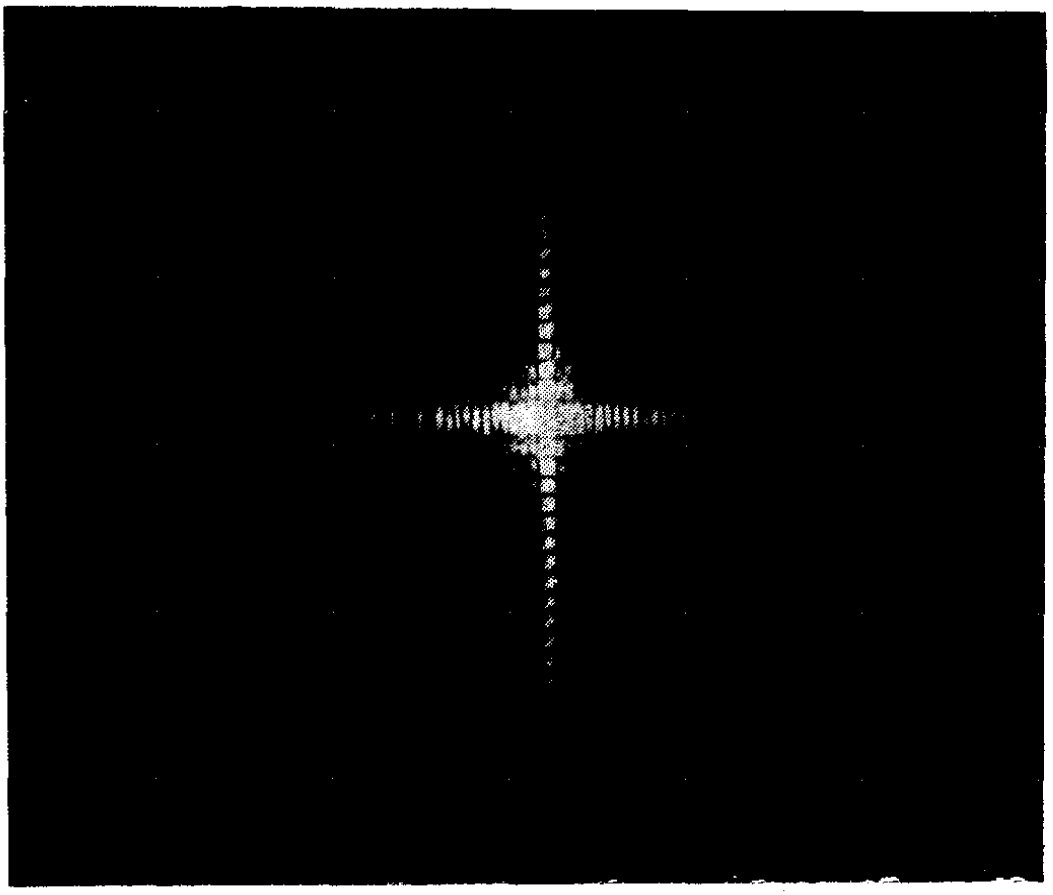


图 4-3　矩形孔径的夫琅和费衍射图样($l_X/l_Y=2$)

图(4-2)表示夫琅和费衍射图样沿 x_0 轴的截面图. 注意头两个零点之间的宽度(即主瓣的宽度)为

$$\Delta x_0 = 2\frac{\lambda z}{l_X}. \tag{4-15}$$

图 4-3 是一张由长宽比为 $l_X/l_Y=2$ 的矩形孔径所产生的衍射图样的照片.

圆形孔径

若衍射孔径是圆形的而不是矩形的，并令孔径直径为 l. 于是，若 r_1 是孔径平面上的径向坐标，则

$$t(r_1)=\mathrm{circ}\left(\frac{r_1}{l/2}\right).$$

这个问题的圆对称性提示我们，方程(4-13)中的傅里叶变换式要改写成傅里叶-贝塞尔变换式. 于是，若 r_0 是观察平面上的径向坐标，我们就有

$$\mathbf{U}(r_0)=\frac{\exp(jkz)}{j\lambda z}\exp\left(j\frac{kr_0^2}{2z}\right)\mathscr{B}\{\mathbf{U}(r_1)\}\Big|_{\rho=\frac{r_0}{\lambda z}}, \tag{4-16}$$

若用单位振幅的垂直入射平面波照明，则我们有 $\mathbf{U}(r_1)=t(r_1)$；另外

$$\mathscr{B}\left\{\mathrm{circ}\left(\frac{r_1}{l/2}\right)\right\}=\left(\frac{l}{2}\right)^2\frac{J_1(\pi l\rho)}{l\rho/2},$$

于是夫琅和费衍射图样的振幅分布为

$$\mathbf{U}(r_0)=\frac{\exp(jkz)}{j\lambda z}\exp\left(j\frac{kr_0^2}{2z}\right)\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2\frac{J_1(\pi l r_0/\lambda z)}{l r_0/2\lambda z}\right]$$

$$=\exp(jkz)\exp\left(j\frac{kr_0^2}{2z}\right)\frac{kl^2}{j\,8z}\left[2\frac{J_1(klr_0/2z)}{klr_0/2z}\right],$$

而强度分布可写成

$$I(r_0)=\left(\frac{kl^2}{8z}\right)^2\left[2\frac{J_1(klr_0/2z)}{klr_0/2z}\right]^2. \tag{4-17}$$

这个强度分布一般以首先导出它的爱里(G. B. Airy)命名，称为爱里图样. 表(4-1)列出了爱里图样在相继的极大点和

表 4-1

x	$\left[2\frac{J_1(\pi x)}{\pi x}\right]^2$	极大或极小
0	1	极大
1.220	0	极小
1.635	0.0175	极大
2.233	0	极小
2.679	0.0042	极大
3.238	0	极小
3.699	0.0016	极大

极小点的数值，由此表可以看到第一个零点的半径为

$$\Delta r_0 = 1.22\frac{\lambda z}{l}. \tag{4-18}$$

图 4-4 是表示爱里图样的一个截面图，而图 4-5 则是圆形孔径的夫琅和费衍射图样的照片.

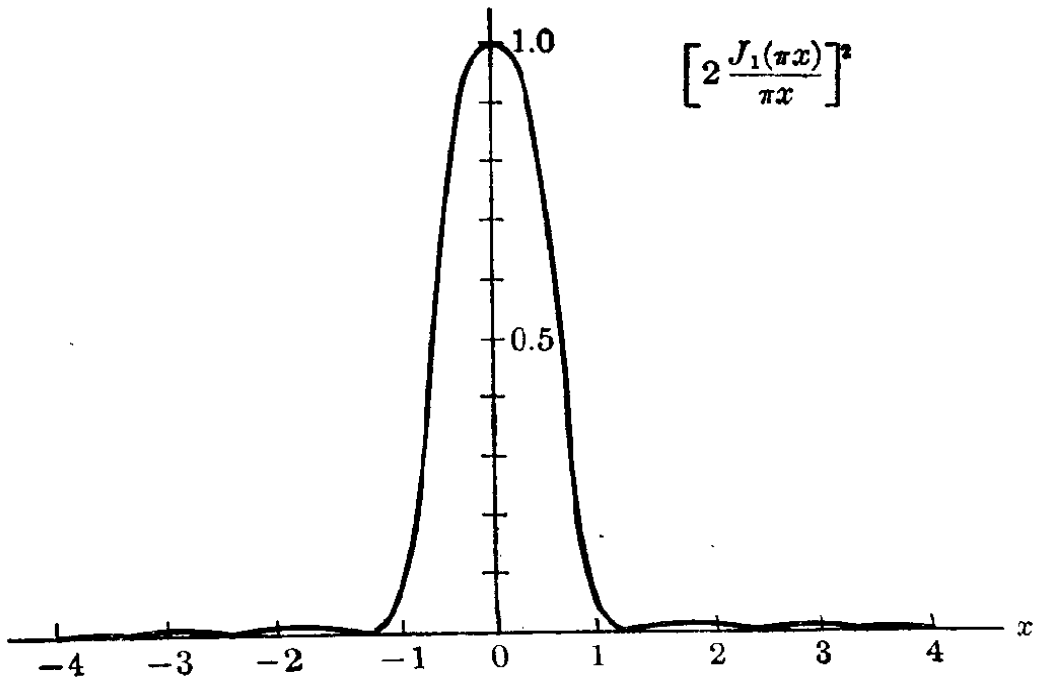


图 4-4 爱里图样的截面图

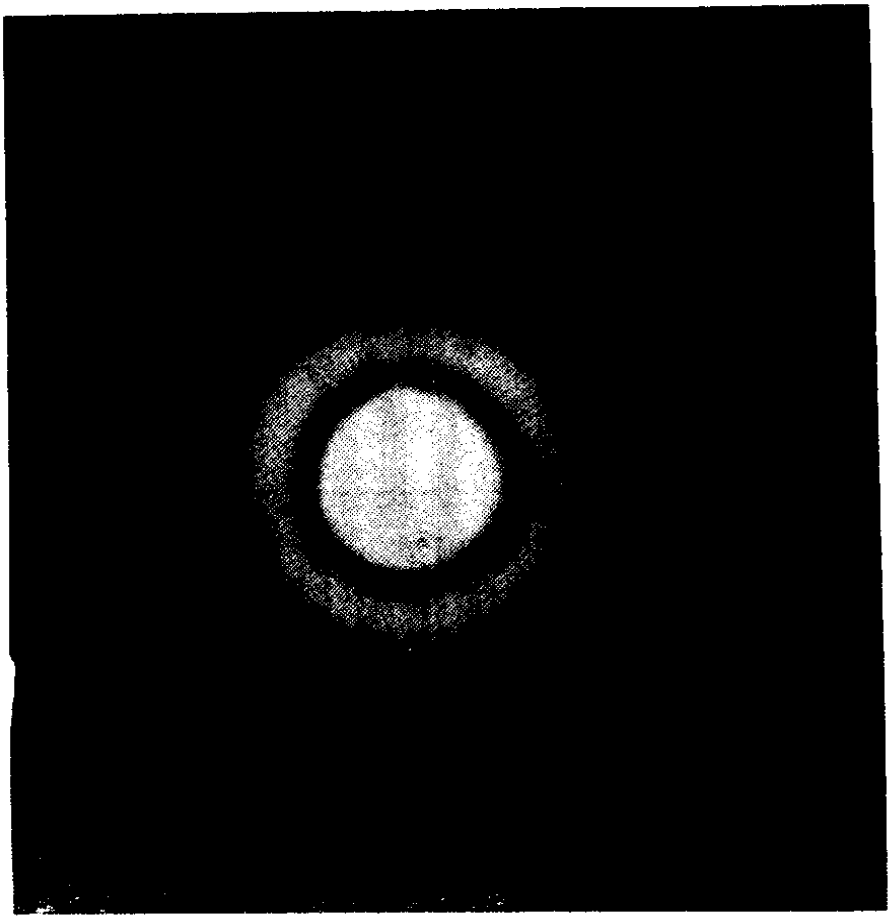


图 4-5　圆形孔径的夫琅和费衍射图样

正弦型振幅光栅

在前面的例子中，我们假设衍射都是由无穷大不透明屏幕上的孔径产生的。下面我们要推广关于引起衍射的物体的概念。

我们把屏幕的复数振幅透射率 $t(x, y)$ 定义为紧贴屏后的场振幅与入射到屏幕上的场振幅的逐点的比值。迄今为止，我们只考虑过下面这种形式的透射率函数

$$t(x, y)=\begin{cases}1 & \text{在孔径之内}\\ 0 & \text{在孔径之外。}\end{cases}$$

但是，我们也能够在给定的孔径内引入一个预先给定的振幅

透射率函数. 例如，可以通过一张照相底片来引入空间的吸收图样，这样就使得 t 可以实现 0 到 1 之间的全部实数值. 通过厚度可变的透明片，可以引入空间的相移图样. 于是 t 的可实现的数值扩展到复平面上的单位圆内及圆上的所有各点.

作为这类更普遍的衍射屏幕的例子，我们考虑一个用下述透射率函数

$$t(x, y)=\left[\frac{1}{2}+\frac{m}{2}\cos(2\pi f_0 x)\right]\operatorname{rect}\left(\frac{x}{l}\right)\operatorname{rect}\left(\frac{y}{l}\right) \tag{4-19}$$

定义的正弦型振幅光栅. 这里，我们为了简单起见，假设光栅结构限于一个宽度为 l 的方孔径内. 参数 m 代表屏幕上振幅透射率峰值到峰值的变化，而 f_0 是光栅频率. 图 4-6 表示这个透射率函数的截面图.

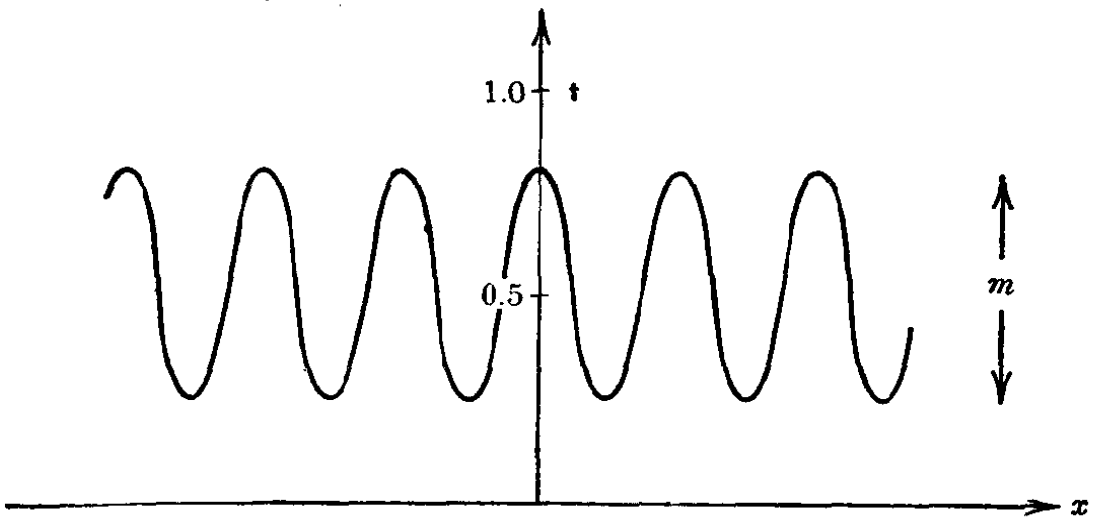


图 4-6　正弦型振幅光栅的透射率函数

如果用一个单位振幅的单色平面波垂直照射屏幕，则孔径上的场分布简单地就等于 t. 为了求出夫琅和费衍射图样，我们首先对这个场分布进行傅里叶变换. 注意

$$\mathscr{F}\left\{\frac{1}{2}+\frac{m}{2}\cos(2\pi f_0 x_1)\right\}=\frac{1}{2}\delta(f_X,f_Y)+$$

$$+\frac{m}{4}\delta(f_X+f_0,f_Y)+\frac{m}{4}\delta(f_X-f_0,f_Y)$$

以及

$$\mathscr{F}\left\{\operatorname{rect}\left(\frac{x_1}{l}\right)\operatorname{rect}\left(\frac{y_1}{l}\right)\right\}=l^2\operatorname{sinc}(lf_X)\operatorname{sinc}(lf_Y),$$

利用卷积定理可以写出

$$\mathscr{F}\{U(x_1,y_1)\}=\frac{l^2}{2}\operatorname{sinc}(lf_Y)\left\{\operatorname{sinc}(lf_X)+\right.$$

$$\left.+\frac{m}{2}\operatorname{sinc}[l(f_X+f_0)]+\frac{m}{2}\operatorname{sinc}[l(f_X-f_0)]\right\}.$$

于是夫琅和费衍射图样可写成

$$U(x_0,y_0)=\frac{l^2}{j2\lambda z}\exp(jkz)\exp\left[j\frac{k}{2z}(x_0^2+\right.$$

$$\left.+y_0^2)\right]\operatorname{sinc}\left(\frac{ly_0}{\lambda z}\right)\left\{\operatorname{sinc}\left(\frac{lx_0}{\lambda z}\right)+\frac{m}{2}\operatorname{sinc}\left[\frac{l}{\lambda z}(x_0+\right.\right.$$

$$\left.\left.+f_0\lambda z)\right]+\frac{m}{2}\operatorname{sinc}\left[\frac{l}{\lambda z}(x_0-f_0\lambda z)\right]\right\}. \qquad (4\text{-}20)$$

最后，对(4-20)式平方，就得到相应的强度分布．注意，如果光栅频率f_0比$2/l$大得多，则依赖于x_0的三个sinc函数之间的重叠可以忽略不计，给出

$$I(x_0,y_0)=\left[\frac{l^2}{2\lambda z}\right]^2\operatorname{sinc}^2\left(\frac{ly_0}{\lambda z}\right)\left\{\operatorname{sinc}^2\left(\frac{lx_0}{\lambda z}\right)+\frac{m^2}{4}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\operatorname{sinc}^2\left[\frac{l}{\lambda z}(x_0+f_0\lambda z)\right]+\frac{m^2}{4}\operatorname{sinc}^2\left[\frac{l}{\lambda z}(x_0-f_0\lambda z)\right]\right\}. \quad (4-21)$$

这个强度图样画在图4-7中．我们看到，孔径上透射度的正弦式变化将中央衍射图样中的一部分能量转移到附加的两个边旁图样中去了．中央衍射图样称为夫琅和费衍射的零级分量，而两个边旁图样称为一级分量．零级分量到一级分量之

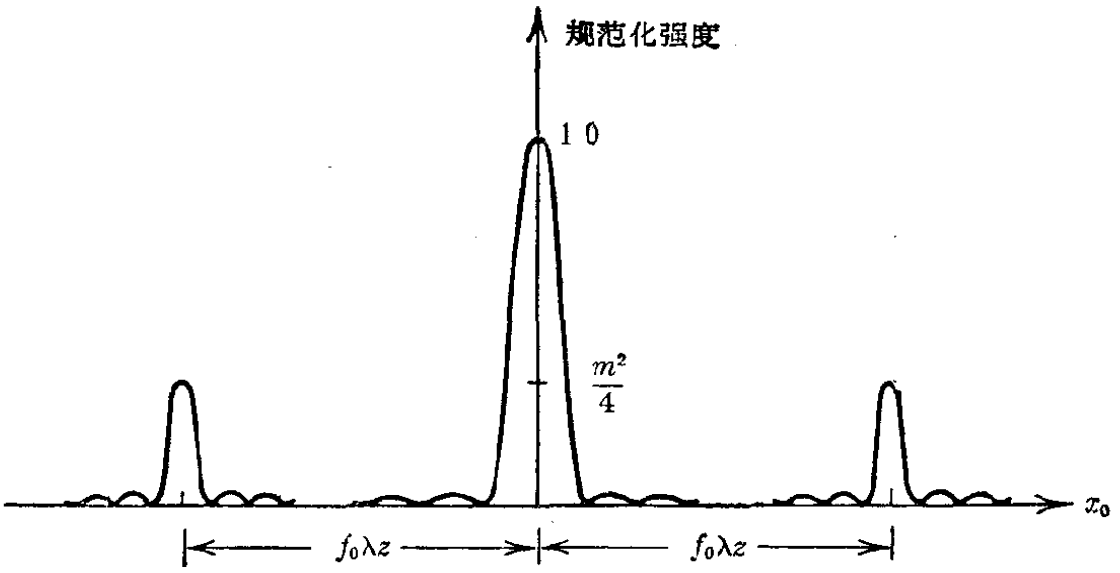


图 4-7　正弦型振幅光栅的夫琅和费衍射图样的截面图

间的空间间隔为$f_0\lambda z$，而每个分量的宽度则正比于$\lambda z/l$。由此可得光栅的波长分辨本领和$f_0\lambda z/(\lambda z/l)=f_0 l$这个量成正比，亦即正比于光栅上的正弦条纹数目，但和观察距离z无关。最后，应当着重指出，我们的计算是以标量理论为基础的，因此只有当光栅频率比λ^{-1}小时它才准确成立。如果这个条件不满足，那就需要用以麦克斯韦方程组为基础的更精确的矢量理论。

正弦型位相光栅

作为计算夫琅和费衍射的最后一个例子，我们考虑一个正弦型位相光栅，它由下述透射率函数定义：

$$t(x_1, y_1)=\exp\left[\, j\frac{m}{2}\sin(2\pi f_0 x_1)\right]\operatorname{rect}\left(\frac{x_1}{l}\right)\operatorname{rect}\left(\frac{y_1}{l}\right), \tag{4-22}$$

式中通过适当选取位相参考点，我们已经弃去了表示通过光栅时的平均位相延迟的因子。参数m表示位相延迟的峰-峰幅度。

如果用一个单位振幅的垂直入射平面波照明屏幕，那么紧贴屏幕后的地方的场分布便由方程(4-22)准确地给出。利用恒等式

$$\exp\left[j\frac{m}{2}\sin(2\pi f_0 x_1)\right]=\sum_{q=-\infty}^{\infty}J_q\left(\frac{m}{2}\right)\exp(j2\pi q f_0 x_1),$$

可使我们要作的分析得到简化，式中 J_q 是 q 阶的第一类贝塞尔函数。于是

$$\mathscr{F}\{\mathbf{U}(x_1, y_1)\}=\mathscr{F}\{\mathbf{t}(x_1, y_1)\}$$

$$=[l^2\mathrm{sinc}(lf_X)\mathrm{sinc}(lf_Y)]*$$

$$*\left[\sum_{q=-\infty}^{\infty}J_q\left(\frac{m}{2}\right)\delta(f_X-qf_0, f_Y)\right]=$$

$$=\sum_{q=-\infty}^{\infty}l^2J_q\left(\frac{m}{2}\right)\mathrm{sinc}[l(f_X-qf_0)]\cdot$$

$$\cdot\,\mathrm{sinc}(lf_Y),$$

而夫琅和费衍射图样中的场强可写为

$$\mathbf{U}(x_0, y_0)=\frac{l^2}{j\lambda z}\exp(jkz)\exp\left[j\frac{k}{2z}(x_0^2+y_0^2)\right]\cdot$$

$$\cdot\sum_{q=-\infty}^{\infty}J_q\left(\frac{m}{2}\right)\mathrm{sinc}\left[\frac{l}{\lambda z}(x_0-qf_0\lambda z)\right]\mathrm{sinc}\left(\frac{ly_0}{\lambda z}\right).\quad(4\text{-}23)$$

如果我们仍假设 $f_0\gg\frac{2}{l}$，那么各个衍射项之间的交叠可以忽略，相应的强度图样变为

$$I(x_0, y_0)=\left(\frac{l^2}{\lambda z}\right)^2\sum_{q=-\infty}^{\infty}J_q^2\left(\frac{m}{2}\right)\mathrm{sinc}^2\left[\frac{l}{\lambda z}(x_0-qf_0\lambda z)\right]\cdot$$

$$\cdot\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{ly_0}{\lambda z}\right).\qquad(4\text{-}24)$$

因此，正弦型位相光栅的引入把能量从零阶分量转移到许多更高阶分量上去．q 阶分量的峰值强度简单地是 $\left[l^2 J_q\left(\frac{m}{2}\right)\Big/\lambda z\right]^2$，而这一分量偏离衍射图样中心的距离为

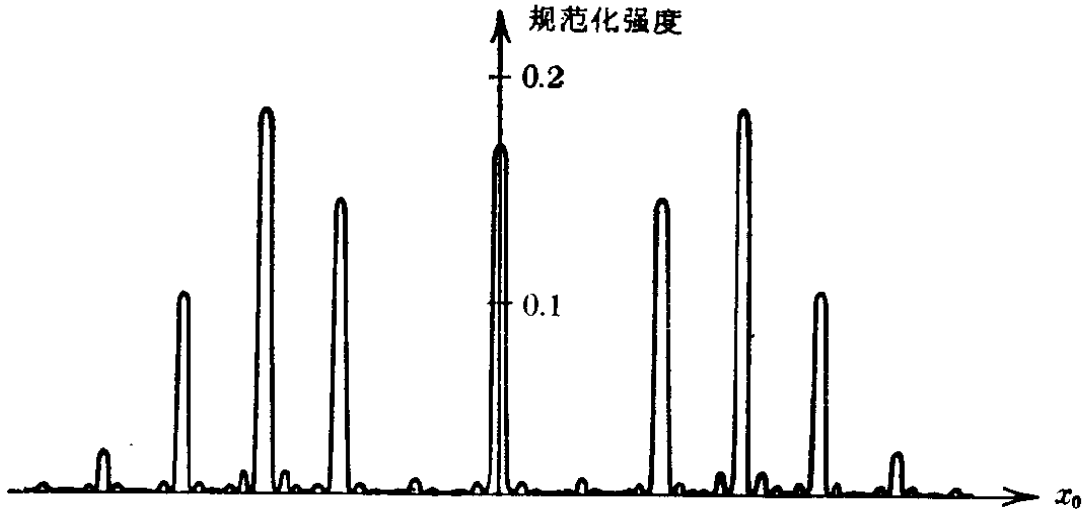


图 4-8　一个正弦型位相光栅($m=8$)的夫琅和费衍射图样的截面图

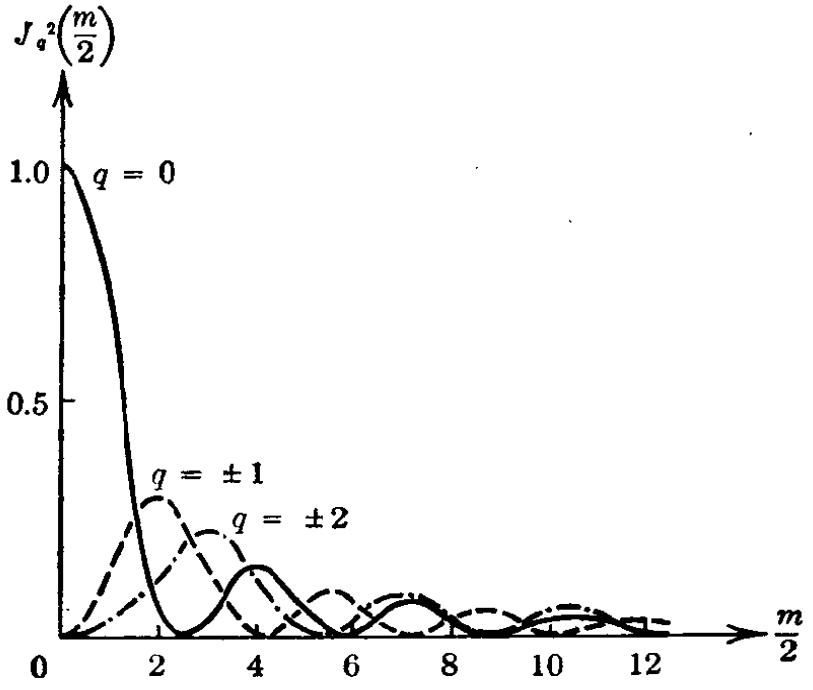


图 4-9　对于 $\pm q$ 的三个数值，$J_q^2\left(\frac{m}{2}\right)$ 对 $\frac{m}{2}$ 的关系

$qf_0\lambda z$. 图 4-8 示出当位相延迟的峰-峰值为 8 弧度时强度图样的截面图. 图4-9 画出不同 q 值时 $J_q^2\left(\frac{m}{2}\right)$对$\frac{m}{2}$的关系. 注意，只要 $m/2$ 是 J_0 的一个根，零阶条纹就完全消失!

§ 4-3 菲涅耳衍射图样的例子

计算菲涅耳衍射图样比起计算相应的夫琅和费衍射图样，一般要困难得多. 作为菲涅耳衍射的一个实例，我们将只考虑方形孔径；对于更多的计算菲涅耳衍射的例子见习题 4-3、4-4 和 4-5.

设一个宽度为 l 的方形孔径用单位振幅的单色平面波垂直照明. 那么，紧贴着孔径之后的场分布可写成

$$\mathbf{U}(x_1, y_1) = \mathrm{rect}\left(\frac{x_1}{l}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y_1}{l}\right). \tag{4-25}$$

菲涅耳衍射方程的卷积形式用起来最方便，它给出衍射场的表达式如下：

$$\mathbf{U}(x_0, y_0) = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z}\int_{-l/2}^{l/2}\int\exp\left\{ j\frac{k}{2z}[(x_1-x_0)^2+ \right.$$

$$\left. +(y_1-y_0)^2]\right\}dx_1dy_1,$$

这个式子可以分离成两个积分的乘积

$$\mathbf{U}(x_0, y_0) = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z}\mathscr{I}(x_0)\mathscr{I}(y_0), \tag{4-26}$$

其中 $$\mathscr{I}(x_0) = \int_{-l/2}^{l/2}\exp\left[j\frac{k}{2z}(x_1-x_0)^2\right]dx_1,$$

$$\mathscr{I}(y_0)=\int_{-l/2}^{l/2}\exp\left[j\frac{k}{2z}(y_1-y_0)^2\right]dy_1.$$

通过变量代换

$$\xi=\sqrt{\frac{k}{\pi z}}(x_1-x_0),\quad \eta=\sqrt{\frac{k}{\pi z}}(y_1-y_0),$$

这两个积分可以大为简化，得到

$$\mathscr{I}(x_0)=\sqrt{\frac{\pi z}{k}}\int_{\xi_1}^{\xi_2}\exp\left(j\frac{\pi}{2}\xi^2\right)d\xi,$$

$$\mathscr{I}(y_0)=\sqrt{\frac{\pi z}{k}}\int_{\eta_1}^{\eta_2}\exp\left(j\frac{\pi}{2}\eta^2\right)d\eta,$$

其中积分限为

$$\begin{aligned}&\xi_1=-\sqrt{\frac{k}{\pi z}}\left(\frac{l}{2}+x_0\right),\quad \xi_2=\sqrt{\frac{k}{\pi z}}\left(\frac{l}{2}-x_0\right),\\&\eta_1=-\sqrt{\frac{k}{\pi z}}\left(\frac{l}{2}+y_0\right),\quad \eta_2=\sqrt{\frac{k}{\pi z}}\left(\frac{l}{2}-y_0\right).\end{aligned}\tag{4-27}$$

积分 $\mathscr{I}(x_0)$ 和 $\mathscr{I}(y_0)$ 之值可以用菲涅耳积分的函数表来计算. 菲涅耳积分的定义为

$$C(\alpha)=\int_0^{\alpha}\cos\frac{\pi t^2}{2}dt\qquad S(\alpha)=\int_0^{\alpha}\sin\frac{\pi t^2}{2}dt.\tag{4-28}$$

注意

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2}\exp\left(j\frac{\pi}{2}\xi^2\right)d\xi=\int_0^{\xi_2}\exp\left(j\frac{\pi}{2}\xi^2\right)d\xi-\int_0^{\xi_1}\exp\left(j\frac{\pi}{2}\xi^2\right)d\xi,$$

我们可以写下

$$\mathscr{I}(x_0)=\sqrt{\frac{\pi z}{k}}\{[C(\xi_2)-C(\xi_1)]+j[S(\xi_2)-S(\xi_1)]\},$$

$$\mathscr{I}(y_0)=\sqrt{\frac{\pi z}{k}}\{[C(\eta_2)-C(\eta_1)]+j[S(\eta_2)-S(\eta_1)]\}.$$

(4-29)

最后，将(4-29)式代入(4-26)式给出复场分布为

$$\mathbf{U}(x_0, y_0)=\frac{\exp(jkz)}{2j}\cdot$$
$$\cdot\{[C(\xi_2)-C(\xi_1)]+j[S(\xi_2)-S(\xi_1)]\}\cdot$$
$$\cdot\{[C((\eta_2)-C(\eta_1)]+j[S(\eta_2)-S(\eta_1)]\},\quad (4\text{-}30)$$

而相应的强度分布则为

$$I(x_0, y_0)=\frac{1}{4}\{[C(\xi_2)-C(\xi_1)]^2+[S(\xi_2)-S(\xi_1)]^2\}\cdot$$
$$\cdot\{[C(\eta_2)-C(\eta_1)]^2+[S(\eta_2)-S(\eta_1)]^2\}.\quad (4\text{-}31)$$

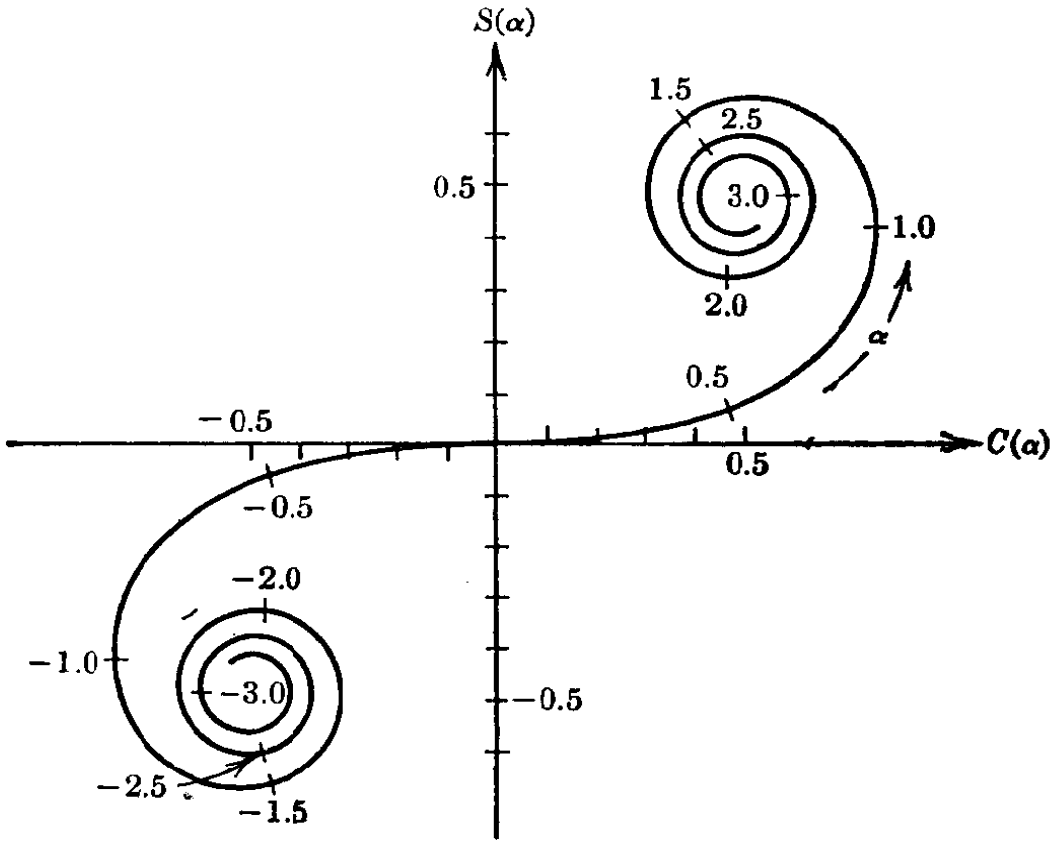


图 4-10　考纽(Cornu)螺线

解释这些式子的一个方便工具是称为考纽蜷线的图解法，它同时表示出$C(\alpha)$和$S(\alpha)$对参量α的关系，如图4-10所示。注意量$C(\alpha)+jS(\alpha)$在图上可以解释为连结原点与蜷线上α点的复数相幅矢量。因此，量$\{[C(\xi_2)-C(\xi_1)]+j[S(\xi_2)-S(\xi_1)]\}$是由连结蜷线上的$\xi_1$点和$\xi_2$点的线段所定义的相幅矢量。利用这种作图方法，可以在衍射图样上的每一点求得表达式(4-30)和(4-31)之值。

为了说明这种计算方法，考虑离孔径很近的距离z处(即位于菲涅耳衍射区内的深处，但是离孔径仍足够远，使得菲涅耳近似仍然成立)的场分布。对于充分小的z，$\frac{k}{\pi z}$是一个非常大的数，因而下述近似对方程(4-27)是足够准确的：

$$\xi_1\cong\begin{cases}-\infty & x_0>-\dfrac{l}{2}\\ +\infty & x_0<-\dfrac{l}{2},\end{cases}\qquad \xi_2\cong\begin{cases}-\infty & x_0>\dfrac{l}{2}\\ +\infty & x_0<\dfrac{l}{2},\end{cases}$$

$$\eta_1\cong\begin{cases}-\infty & y_0>-\dfrac{l}{2}\\ +\infty & y_0<-\dfrac{l}{2},\end{cases}\qquad \eta_2\cong\begin{cases}-\infty & y_0>\dfrac{l}{2}\\ +\infty & y_0<\dfrac{l}{2}.\end{cases}$$

从考纽蜷线上求出相应的$C(\alpha)$和$S(\alpha)$之值为

$$C(\xi_1)=S(\xi_1)\cong\begin{cases}-\dfrac{1}{2} & x_0>-\dfrac{l}{2}\\ +\dfrac{1}{2} & x_0<-\dfrac{l}{2},\end{cases}$$

$$C(\xi_2)=S(\xi_2)\cong\begin{cases}-\dfrac{1}{2} & x_0>\dfrac{l}{2}\\ +\dfrac{1}{2} & x_0<\dfrac{l}{2},\end{cases}$$

$$C(\eta_1)=S(\eta_1)\cong\begin{cases}-\frac{1}{2} & y_0>-\frac{l}{2}\\ +\frac{1}{2} & y_0<-\frac{l}{2},\end{cases}$$

$$C(\eta_2)=S(\eta_2)\cong\begin{cases}-\frac{1}{2} & y_0>\frac{l}{2}\\ +\frac{1}{2} & y_0<\frac{l}{2}.\end{cases}$$

把这些结果代入方程(4-20)，我们求得

$$\mathbf{U}(x_0, y_0)=\exp\ (jkz)\ \mathrm{rect}\left(\frac{x_0}{l}\right)\ \mathrm{rect}\left(\frac{y_0}{l}\right). \qquad (4\text{-}32)$$

于是菲涅耳衍射区内深处的场分布 $\mathbf{U}(x_0, y_0)$ 是孔径分布 $\mathbf{U}(x_1, y_1)$ 的几何投影，所以几何光学的预言是准确的。这个结果当然不是矩形孔径[1]所特有的，而是对任意孔径都成立，这可用稳相原理来证明[见参考文献 3-4 的附录 III]。

习　　题

4-1　设用单位振幅的垂直入射的平面波照明：

(a)　求出如图 4-11 所示的双缝的夫琅和费衍射图样中的强度分布。

(b)　画出所衍射图样沿观察平面内的 x_0 轴和 y_0 轴的截面图。设 $\frac{X}{\lambda z}=10\,\mathrm{m}^{-1}$，$\frac{Y}{\lambda z}=1\ \mathrm{m}^{-1}$，$\frac{\Delta}{\lambda z}=\frac{3}{2}\mathrm{m}^{-1}$；$z$ 是观察距离而 λ 是波长。

4-2　(a) 画出由透射率函数

$$t(x_1, y_1)=\left\{\left[\mathrm{rect}\left(\frac{x_1}{X}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y_1}{Y}\right)\right]*\left[\frac{1}{\Delta}\,\mathrm{comb}\left(\frac{y_1}{\Delta}\right)\delta(x_1)\right]\right\}\cdot \mathrm{rect}\left(\frac{y_1}{N\Delta}\right)$$

所描述的孔径，其中 N 是一个奇数而 $\Delta>Y$。

1)　本书把方形孔径当作是矩形孔径的特殊情形看待，前后文就一致了。——译注

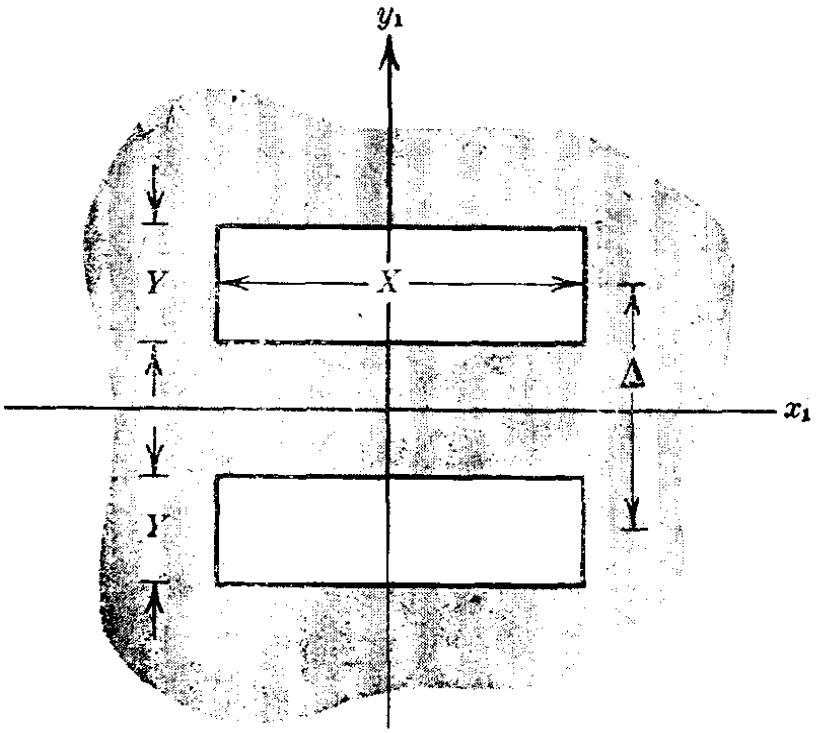


图 4-11

(b) 设由一个垂直入射的平面波照明并且 $N \gg 1$，求这个孔径的夫琅和费衍射图样中强度分布的表达式.

(c) Y 与 Δ 之间成什么关系时，可望使偶数级衍射分量的强度减到极小而同时使零级分量强度近似保持不变？

4-3 不透明屏幕上的一个孔径 Σ，用向 P 点会聚的一个球面波照明，P 点位于孔径后面距离为 z 的平行平面上，如图 4-12 所示.

(a) 求出孔径平面上入射波波前的二次型近似，设(1) P 在 z 轴上，及(2) P 位于坐标 (O, Y_0) 上.

(b) 假设从孔径平面到包含 P 点的观察平面内为菲涅耳衍射，证明在上述两种情形下，所观察到的强度分布都是该孔径的夫琅和费衍射图样，其中心在 P 点.

4-4 求出具有下述透射率函数的孔径的菲涅耳衍射图样在孔径轴上的强度分布(设照明为垂直入射的单位振幅平面波)：

(a) $t(x_1, y_1) = \mathrm{circ}\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$,

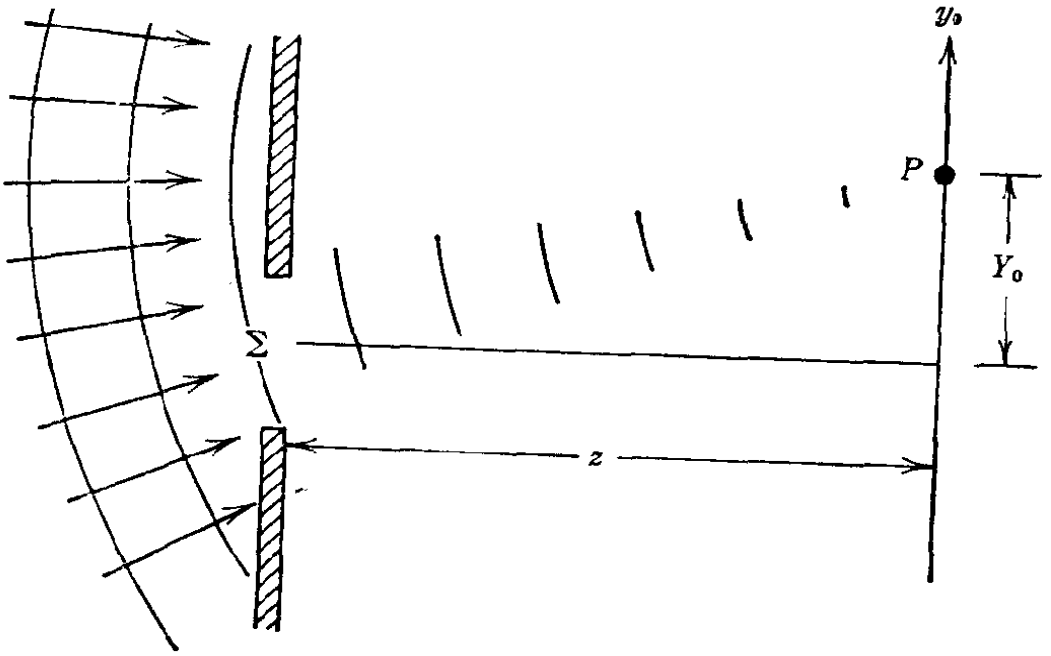


图 4-12

(b) $t(x_1, y_1)=\begin{cases} 1 & a\leqslant\sqrt{x_1^2+y_1^2}\leqslant 1 \\ 0 & \text{其他地方,} \end{cases}$

其中 $a<1$.

4-5 设一光源有两条分立的光谱线，波长分别为 λ_1 和 λ_2，若 λ_1 所生的 q 级衍射波分量的峰值正好落在 λ_2 所生的 q 级衍射分量的第一个零点上，则称这两条分立谱线是这个衍射光栅"刚能分辨的".光栅的分辨本领定义为平均波长 λ 与最小可分辨波长差 $\Delta\lambda$ 的比值.试证明，本章所讨论的正弦型位相光栅的分辨本领为

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda}=qlf_0=qM,$$

其中 q 是测量中所用的衍射级数，而 M 是光栅上的空间周期条纹的数目.任意高的衍射级的使用受到什么现象的限制?

4-6 设照明用垂直入射平面波，并且不考虑孔径的有限大小，

(a) 求出透射率函数为

$$t(x, y)=\frac{1}{2}(1+m\cos 2\pi f_0 x)$$

的屏幕的菲涅耳衍射图样.

(b) 给定 $\hat{m} \ll 1$，问一个平行平面离孔径的距离应该是多大，这个平面上的场分布才 (1) 在空间是纯粹调幅的？(2) 在空间是近似调相的？

4-7 求出图 4-13 所示的孔径的夫琅和费衍射图样中的强度分布的表达式，设由一个单位振幅、垂直入射的平面波照明。

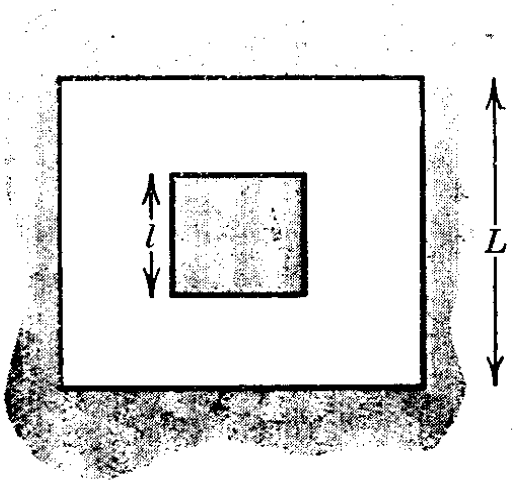


图 4-13

第五章　透镜的傅里叶变换性质及成像性质

光学成像系统和光学数据处理系统中最重要的元件当然是透镜。虽然对透镜的性质作一透彻的讨论会是有益的，但是这种讨论需要在几何光学的基本原理中兜一个大圈子。由于这种完备的讨论对我们的目标并不是必需的，我们将采取另一种办法，这种办法虽然不是直接根据几何光学原理，但和它们完全一致。本章将仅限于讨论单色照明的情形，对非单色照明的情形的推广留待第六章。

§ 5-1　薄透镜作为位相变换器

透镜是由光密物质(通常是玻璃)构成的，光扰动在其中的传播速度小于光在空气中的速度。若一条光线在透镜的一面上坐标为 (x, y) 的点射入，而在相对的另一面上从近似相同的坐标处射出，也就是说，如果可以忽略光线在透镜内的平移，则称此透镜是一个薄透镜。于是，一个薄透镜的作用只是使入射波前受到延迟，其大小正比于透镜各点的厚度。

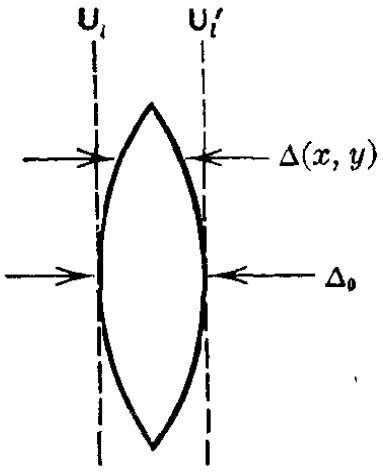


图 5-1　厚度函数

参看图 5-1，令透镜的最大厚度为 Δ_0，而在坐标 (x, y) 处的厚度为 $\Delta(x, y)$。那么，波通过透镜时在 (x, y) 点发生的总位相延迟可写为

$$\phi(x, y)=knA(x, y)+k[\Delta_0-\Delta(x, y)], \qquad (5\text{-}1)$$

其中 n 是透镜材料的折射率，$knA(x, y)$是由透镜引起的位相延迟，而 $k[\Delta_0-\Delta(x, y)]$是由两个平面之间剩下的自由空间区域引起的位相延迟。透镜的作用可以等效地用一个形式为

$$\mathbf{t}_l(x, y)=\exp[jk\Delta_0]\exp[jk(n-1)\Delta(x, y)]$$

的相乘的位相变换来表示。紧靠透镜之后的平面上的复场 $\mathbf{U}_l'(x, y)$和入射到紧靠透镜之前的平面上的复场 $\mathbf{U}_l(x, y)$之间的关系是

$$\mathbf{U}_l'(x, y)=\mathbf{t}_l(x, y)\mathbf{U}_l(x, y). \qquad (5\text{-}2)$$

为了了解透镜的效应，剩下的问题只要确定厚度函数 $\Delta(x, y)$的数学形式就行了。

厚度函数

为了确定各种不同类型的透镜引起的位相变换的具体形式，我们首先规定以下的符号规则：当光线从左到右时，它遇到的每个凸面的曲率半径为正，而每个凹面的曲率半径为负。于是图 5-1 中透镜左面的曲率半径R_1为正，而右面的曲率半径 R_2 为负。

为了求出厚度 $\Delta(x, y)$，我们把透镜剖成两半，如图 5-2 所示，把总厚度函数写成两部分各自的厚度函数之和：

$$\Delta(x, y)=\Delta_1(x, y)+\Delta_2(x, y). \qquad (5\text{-}3)$$

参看图中的几何关系可知，厚度 $\Delta_1(x, y)$由下式给出：

$$\Delta_1(x, y)=\Delta_{01}-(R_1-\sqrt{R_1^2-x^2-y^2})$$

$$=\Delta_{01}-R_1\left(1-\sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{R_1^2}}\right). \qquad (5\text{-}4)$$

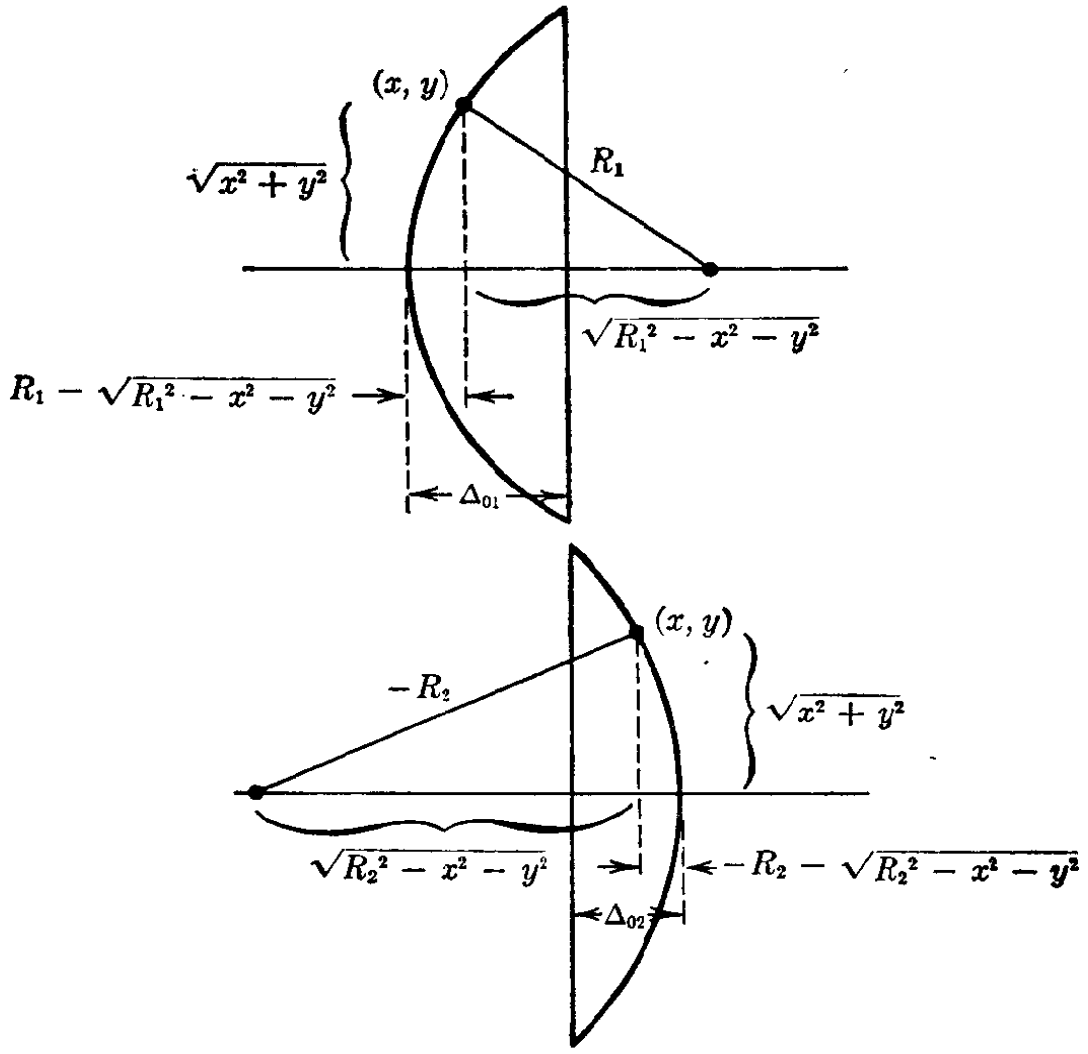


图 5-2　厚度函数的计算

相仿地，

$$\Delta_2(x,y)=\Delta_{02}-(-R_2-\sqrt{R_2^2-x^2-y^2})=$$

$$=\Delta_{02}+R_2\left(1-\sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{R_2^2}}\right), \qquad (5\text{-}5)$$

其中我们把正数$-R_2$提出根号.将(5-4)和(5-5)代入(5-3)，得总厚度函数为

$$\Delta(x,y)=\Delta_0-R_1\left(1-\sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{R_1^2}}\right)+$$

$$+R_2\left(1-\sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{R_2^2}}\right), \qquad (5\text{-}6)$$

其中 $\Delta_0=\Delta_{01}+\Delta_{02}$。

傍轴近似

如果只限于考虑在透镜轴附近的那一部分波前，或者等效地，如果只考虑傍轴光束，那么厚度函数的表达式可以大为简化。为此，我们仅仅考虑足够小的 x 和 y 值，小到下列近似式准确成立：

$$\begin{aligned}\sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{R_1^2}}&\cong 1-\frac{x^2+y^2}{2R_1^2},\\ \sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{R_2^2}}&\cong 1-\frac{x^2+y^2}{2R_2^2}.\end{aligned}\tag{5-7}$$

当然，这样得出的位相变换只在有限的区域内才能准确地代表透镜的作用，但是这一限制并不比几何光学中常见的傍轴近似更严。注意，关系式(5-7)相当于用抛物面来近似透镜的球面。利用这些近似，厚度函数变成

$$\Delta(x,y)=\Delta_0-\frac{x^2+y^2}{2}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right).\tag{5-8}$$

位相变换及其物理意义

将(5-8)式代入(5-1)式，得到透镜变换的傍轴近似为

$$\begin{aligned}t_l(x,y)=&\exp\left[jkn\Delta_0\right]\cdot\\ \cdot&\exp\left[-jk(n-1)\frac{x^2+y^2}{2}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\right].\end{aligned}$$

透镜的几种物理性质(即 n，R_1 和 R_2)可以组合成一个称为焦距 f 的数，其定义为

$$\frac{1}{f}\triangleq(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right).\tag{5-9}$$

于是位相变换可以重新写成

$$\mathbf{t}_l(x, y)=\exp[jkn\Delta_0]\exp\left[-j\frac{k}{2f}(x^2+y^2)\right]. \quad (5\text{-}10)$$

这个方程是我们表示透镜对入射扰动的效应的基本表达式.

注意,虽然我们推导这个式子时假定透镜的具体形式如图 5-1 中所示,但是上面所规定的符号规则使得这一结果可用于其他类型的透镜. 图 5-3 画出了凸面和凹面的各种组合所得到的几种不同类型的透镜. 在习题 5-1 中要求读者证明,我们采用的符号规则意味着,双凸透镜、平凸透镜及正弯月形透镜的焦距 f 为正,而双凹透镜、平凹透镜及负弯月形透镜的焦距 f 为负. 因此,只要焦距的符号取得正确,(5-10)式可以用来表示上述任意一种透镜.

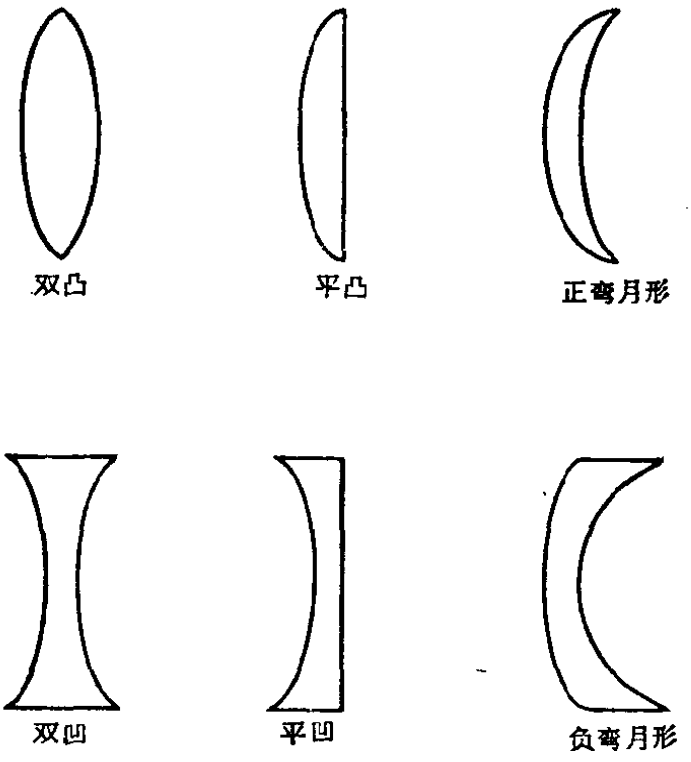


图 5-3 各种类型的透镜

要理解透镜变换的物理意义,最好是考察透镜对垂直入

射的单位振幅平面波的效应. 此时,在透镜前侧的场 分布 U_l 为 1 ,方程(5-2)给出透镜后侧的场 U_l' 的表达式如下:

$$U_l'(x, y)=\exp[jkn\Delta_0]\exp\left[-j\frac{k}{2f}(x^2+y^2)\right].$$

头一项只是一项常数位相延迟,而 第二项则可解释为对一个球面波的二次曲面近似. 若焦距 f 为正,则球 面波向透镜之后、位于透镜轴线上、和透镜距离为 f 的一点会聚. 若 f 为负,则球面波是从透镜前面在透镜轴上并与透镜距离为 f 的一点发散出来. 这两种情形都画在图 5-4 中. 因此,焦距为正的透镜称为会聚透镜(或正透镜),而焦距为 负的透镜称为发散透镜(或负透镜).

我们关于球面透镜将一个入射平面波变换成一个球面波的结论,在很大程度上依赖傍轴近似. 在非傍轴条件下,即使透镜表面是理想球面,出射波前也将显示出对 理 想球面的

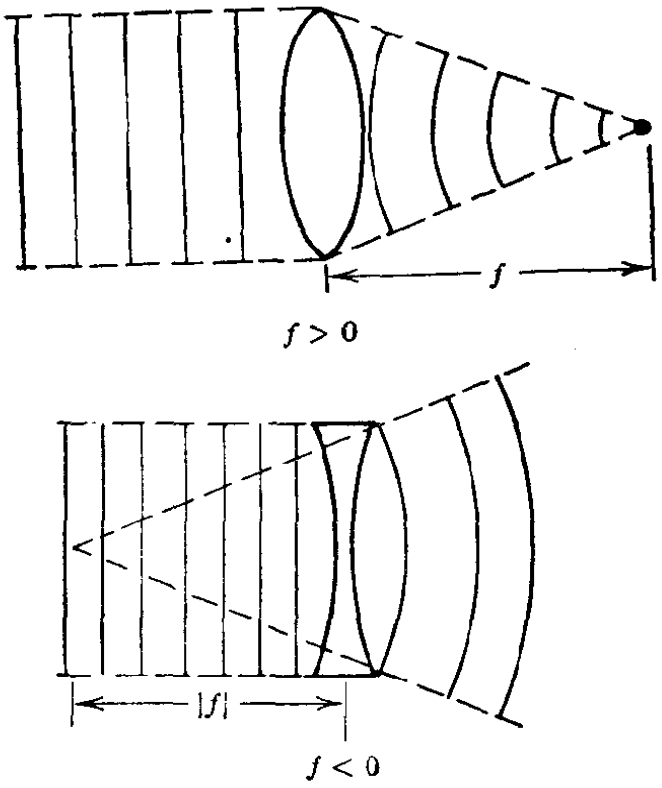


图 5-4 会聚透镜和发散透镜对垂直入射平面波的效应

偏离(称为像差——见§6-4)。事实上,往往把透镜表面磨成非球面形状,以减少出射波前对球面的偏离,从而"校正"透镜的像差。

但是应该强调指出,下面将通过相乘位相变换(5-10)式而推出的结果,其应用范围实际上要比导至这个变换式的分析所意味的范围更为广泛。对大多数经过很好的像差修正的透镜系统所作的彻底的几何光学分析表明,它们的性质实际上完全符合我们的受到更严格限制的理论的预言。

§5-2 透镜的傅里叶变换性质

会聚透镜的最突出和最有用的性质之一是它能够进行二维傅里叶变换的本领。傅里叶变换运算一般要用庞大、复杂而且价格昂贵的电子学频谱分析仪才能进行,然而这种复杂的模拟运算却可以用一具相干光学系统极其简单地完成。

在下面的内容中,我们分别考虑进行傅里叶变换运算的三种光路。在所有三种情形中,假定照明都是单色的,并且只关心后焦面[1]上光场振幅的分布。图5-5 a—c 画出了所考虑的三种光路。在情形(a)中,要作变换的物体紧靠着透镜。在情形(b)中,物体放在透镜之前距离为 d_0 的地方。在情形(c)中,物体放在透镜之后,离后焦面的距离为 d。

关于透镜的傅里叶变换性质的补充讨论,读者可参看资料[5-1],[5-2]或[5-3]。

物体紧靠透镜

设一个平面物体,它的振幅透射率为 $t_0(x, y)$,紧靠着放

1) 我们把位于透镜之前和之后、与透镜的距离为$|f|$的垂直于透镜轴线的平面分别称为透镜的前焦面和后焦面。

在一个焦距为 f 的会聚透镜之前[1]，如图 5-5 a 所示。假定用一个振幅为 A 的单色平面波垂直入射，均匀照明物体，那么，

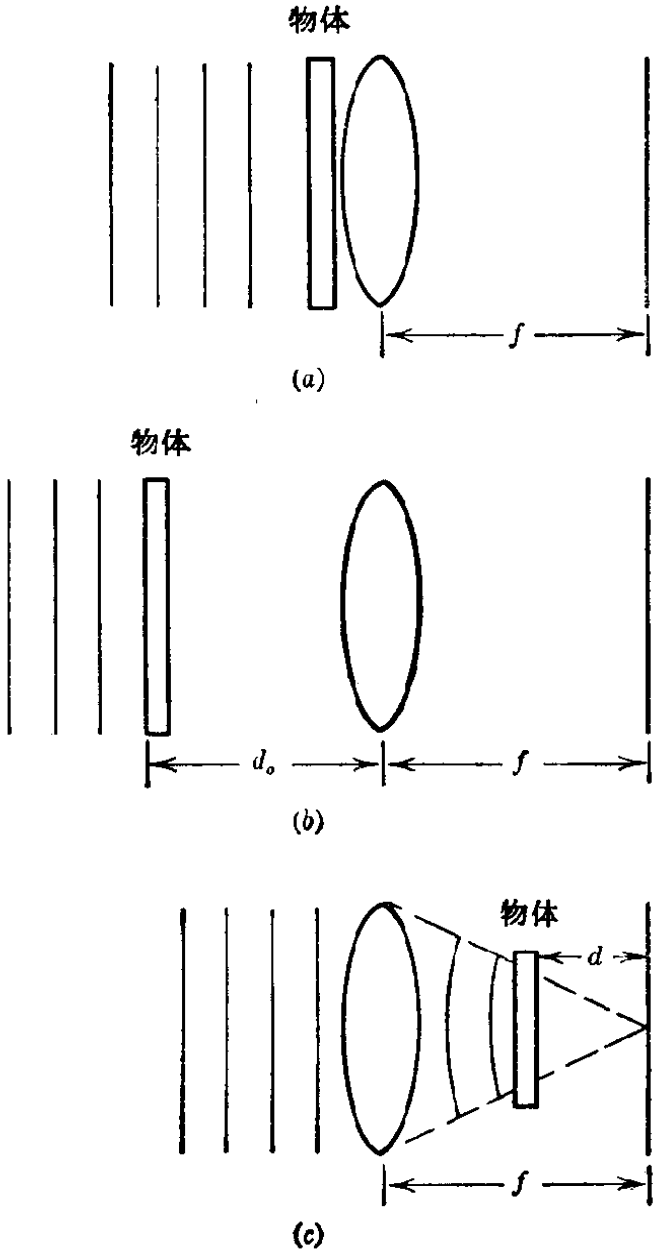


图 5-5 傅里叶变换的光路 (a) 物体紧靠透镜；(b) 物体放在透镜之前；(c) 物体放在透镜之后

1) 从下面可知[在(5-22)式中令 $d=f$]，只要物体紧靠着透镜，放在透镜之前或之后并没有关系，结果一样。这是很自然的。——译注

这时投射到透镜上的扰动为

$$\mathbf{U}_l(x, y)=A\mathbf{t}_0(x, y). \tag{5-11}$$

透镜孔径的有限大小的效应可以用一个与透镜相联系的光瞳函数 $P(x, y)$ 来加以考虑，其定义为

$$P(x, y)=\begin{cases}1 & \text{透镜孔径内}\\ 0 & \text{其他地方.}\end{cases}$$

于是，利用(5-10)式，透镜后面的振幅分布为

$$\mathbf{U}_l'(x, y)=\mathbf{U}_l(x, y)P(x, y)\exp\left[-j\frac{k}{2f}(x^2+y^2)\right]. \tag{5-12}$$

我们在式中略去了与透镜变换相联系的常数位相延迟，因为它不会对结果带来任何有意义的影响.

我们用菲涅耳衍射公式(4-10)来求透镜的后焦面上场振幅的分布 $\mathbf{U}_f(x_f, y_f)$. 于是，令 $z=f$，得

$$\mathbf{U}_f(x_f, y_f)=\frac{\exp\left[j\frac{k}{2f}(x_f^2+y_f^2)\right]}{j\lambda f}\int_{-\infty}^{\infty}\int\mathbf{U}_l'(x, y)\cdot$$

$$\cdot\exp\left[j\frac{k}{2f}(x^2+y^2)\right]\exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda f}(xx_f+yy_f)\right]dxdy, \tag{5-13}$$

式中弃去了常数位相因子. 将(5-12)代入(5-13)，我们看到，被积函数内的二次位相因子相消，得到

$$\mathbf{U}_f(x_f, y_f)=\frac{\exp\left[j\frac{k}{2f}(x_f^2+y_f^2)\right]}{j\lambda f}\cdot$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\int\mathbf{U}_l(x, y)P(x, y)\cdot$$

$$\cdot \exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda f}\cdot(xx_f+yy_f)\right]dxdy. \qquad (5\text{-}14)$$

因此，场分布 $\mathbf{U}_f$ 与透镜孔径所包围的那一部分入射光场的二维傅里叶变换成正比．若物体的尺度小于透镜孔径，因子 $P(x, y)$ 可以略去，得到

$$\mathbf{U}_f(x_f, y_f)=\frac{A\exp\left[j\frac{k}{2f}(x_f^2+y_f^2)\right]}{j\lambda f}\iint_{-\infty}^{\infty}\mathbf{t}_0(x, y)\cdot$$

$$\cdot \exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda f}(xx_f+yy_f)\right]dxdy. \qquad (5\text{-}15)$$

显然，坐标 (x_f, y_f) 处的光场的振幅和位相，由物体的频率为 $(f_X=x_f/\lambda f, f_Y=y_f/\lambda f)$ 的傅里叶分量的振幅和位相决定．

注意，由于积分号前出现的二次位相因子，物体与焦面上的振幅分布之间的傅里叶变换关系不是准确的．虽然焦面上的位相分布不同于物体的频谱的位相分布，但二者之间的差别只是一个位相弯曲．在大多数情形下有实际意义的是焦面上的强度分布．测量强度分布给出关于物体功率谱的知识；位相分布在这种测量中不起作用．因而

$$I_f(x_f, y_f)=\frac{A^2}{\lambda^2 f^2}\left|\iint_{-\infty}^{\infty}\mathbf{t}_0(x, y)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot \exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda f}(xx_f+yy_f)\right]dxdy\right|^2. \qquad (5\text{-}16)$$

物体位于透镜之前

其次来讨论图 5-5*b* 这种更一般的光路情形．物体放在透镜之前距离为 d_0 的地方，由垂直入射的振幅为 A 的平面波照明．物体的振幅透射率仍用 $\mathbf{t}_0$ 表示．此外，令 $\mathbf{F}_0(f_X, f_Y)$ 代表物体所透射的光的傅里叶频谱，而 $\mathbf{F}_i(f_X, f_Y)$ 代表投射

到透镜上的光场的傅里叶频谱；即

$$\mathbf{F}_0(f_X,f_Y)=\mathscr{F}\{A\mathbf{t}_0\}\qquad \mathbf{F}_l(f_X,f_Y)=\mathscr{F}\{\mathbf{U}_l\}.$$

假定菲涅耳近似适用于在距离 d_0 上的传播，那么 $\mathbf{F}_0$ 和 $\mathbf{F}_l$ 可通过方程(4-11)联系起来，得出

$$\mathbf{F}_l(f_X,f_Y)=\mathbf{F}_0\ (f_X,f_Y)\exp[-j\pi\lambda d_0(f_X^2+f_Y^2)],\quad (5\text{-}17)$$

其中我们已弃去了一项常数位相延迟因子.

我们暂不考虑透镜孔径的有限大小. 于是，令 $P=1$，方程(5-14)可改写为

$$\mathbf{U}_f(x_f,y_f)=\frac{\exp\left[j\dfrac{k}{2f}(x_f^2+y_f^2)\right]}{j\lambda f}\mathbf{F}_l\left(\frac{x_f}{\lambda f},\frac{y_f}{\lambda f}\right).\quad (5\text{-}18)$$

将(5-17)代入(5-18)，我们得到

$$\mathbf{U}_f(x_f,y_f)=\frac{\exp\left[j\dfrac{k}{2f}\left(1-\dfrac{d_0}{f}\right)(x_f^2+y_f^2)\right]}{j\lambda f}\mathbf{F}_0\left(\frac{x_f}{\lambda f},\frac{y_f}{\lambda f}\right)$$

或

$$\mathbf{U}_f(x_f,y_f)=\frac{A\exp\left[j\dfrac{k}{2f}\left(1-\dfrac{d_0}{f}\right)(x_f^2+y_f^2)\right]}{j\lambda f}\cdot$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\int\mathbf{t}_0(x_0,y_0)\exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda f}(x_0x_f+y_0y_f)\right]dx_0dy_0.\quad (5\text{-}19)$$

因此，光场在 (x_f,y_f) 处的振幅和位相仍和物体的频率为 $(x_f/\lambda f,y_f/\lambda f)$ 的频率分量的振幅和位相有关. 注意在变换积分之前仍有一位相因子，但在 $d_0=f$ 这一特殊情形下，这一位相因子为零. 显然，若物体放在透镜的前焦面上，则位相弯曲消失，而得到准确的傅里叶变换关系!

迄今我们完全忽略了透镜孔径大小有限所造成的效应.

为了把孔径效应考虑进来，我们要用几何光学近似. 如果距离 d_0 足够小，使得物体深深位于透镜孔径的菲涅耳区之内，则这一近似就准确成立. 绝大多数的有关问题都满足这个条件. 参看图 5-6，坐标 (x_f, y_f) 处的光场振幅是一切以方向余弦 $(\alpha \simeq x_f/f, \beta \simeq y_f/f)$ 传播的光线的叠加. 但是这些光线只有有限的一部分被透镜孔径接收. 于是，透镜孔径的有限大小的效应可以这样来考虑：把透镜孔径投射到物平面上，投影中心在坐标 (x_f, y_f) 与透镜中心的连线上(见图 5-6). 透镜孔径仍然限制了物体的有效大小，但这一次，影响 $\mathbf{U}_f$ 的 $\mathbf{t}_0$ 的

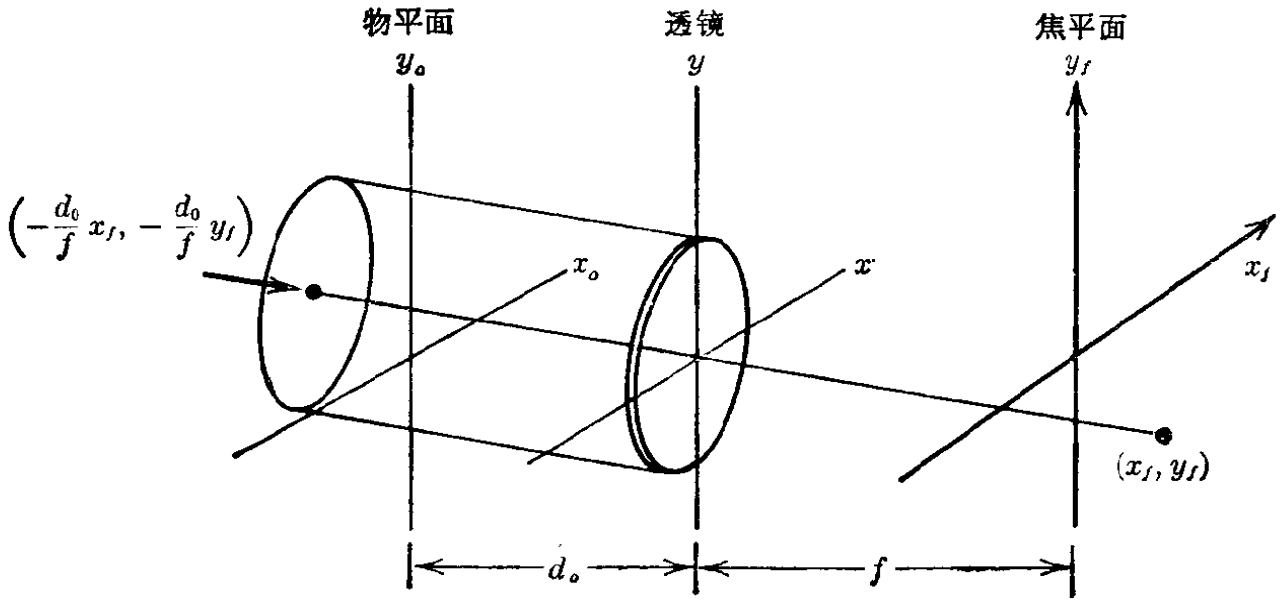


图 5-6　物体的渐晕

特定部分依赖于坐标 (x_f, y_f). 如图 5-6 所示，(x_f, y_f) 点的 $\mathbf{U}_f$ 值，可以从中心在 $[x_0 = -(d_0/f)x_f, y_0 = -(d_0/f)y_f]$ 的光瞳函数 P 所包围的那一部分物体的傅里叶变换求出. 于是

$$\mathbf{U}_f(x_f, y_f) = \frac{A \exp\left[j\frac{k}{2f}\left(1-\frac{d_0}{f}\right)(x_f^2+y_f^2)\right]}{j\lambda f}.$$

$$\cdot \iint_{-\infty}^{\infty} t_0(x_0, y_0) \cdot P\left(x_0 + \frac{d_0}{f}x_f y_0 + \frac{d_0}{f}y_f\right) \cdot$$

$$\cdot \exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda f}(x_0 x_f + y_0 y_f) \right] dx_0 dy_0. \qquad (5\text{-}20)$$

由于透镜孔径有限所引起的对有效物体的限制称为渐晕(vignetting)效应. 注意，当物体靠近透镜，并且透镜孔径比物体大得多时，物平面上的渐晕效应最小. 实际上，往往喜欢把物体放在紧贴着透镜的地方以尽量减小渐晕，但是在分析中一般把物体放在前焦面上要方便些，因为这里傅里叶变换关系准确成立.

物体位于透镜之后

最后我们讨论物体放在透镜之后的情形，如图 5-5c 所示. 物体的透射率仍为 t_0，但是现在置于距透镜后焦面距离为 d 处. 设透镜用一振幅为 A 的垂直入射平面波照明. 那么投射到物体上的是一个向透镜的后焦点会聚的球面波.

在几何光学近似下，射到物体上的球面波的振幅为 Af/d；物体受到照明的特定区域由光束的会聚圆锥与物平面的交线确定. 如果透镜是一直径为 l 的圆透镜，那么物平面上有一直径为 ld/f 的圆形区域被照明. 照明光斑的有限大小在数学上可以由把透镜的光瞳函数沿着光束圆锥投影到物体上来表示，结果给出物平面上的一个有效光瞳函数 $P[x_0(f/d), y_0(f/d)]$. 注意物体透射率 t_0 本身也带有一个有限孔径；因此，物体上的有限孔径由实际的物体孔径与投影的光瞳函数的交线确定. 如果物体孔径完全被照明，那么投影光瞳函数可以略去.

对照明物体的球面波用傍轴近似，则物体所透射的光场振幅可写成

$$U_0(x_0, y_0)=\left\{\frac{Af}{d}P\left(x_0\frac{f}{d}, y_0\frac{f}{d}\right)\exp\left[-j\frac{k}{2d}(x_0^2+y_0^2)\right]\right\}\cdot \cdot t_0(x_0, y_0). \tag{5-21}$$

假定从物平面到焦平面为菲涅耳衍射，应用方程(4-10)可得

$$U_f(x_f, y_f)=\frac{A\exp\left[j\frac{k}{2d}(x_f^2+y_f^2)\right]}{j\lambda d}\frac{f}{d}\cdot$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\int t_0(x_0, y_0)P\left(x_0\frac{f}{d}, y_0\frac{f}{d}\right)\cdot$$

$$\cdot\exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda d}(x_0x_f+y_0y_f)\right]\cdot dx_0dy_0. \tag{5-22}$$

因此，焦平面上的振幅分布是由投影后的透镜孔径所包围的那一部分物体的傅里叶变换式，只差一个二次位相因子。

方程(5-22)所表示的结果实质上就是前面当物体紧靠着透镜放置时所得到的同一结果。但是，在现在这种光路下，我

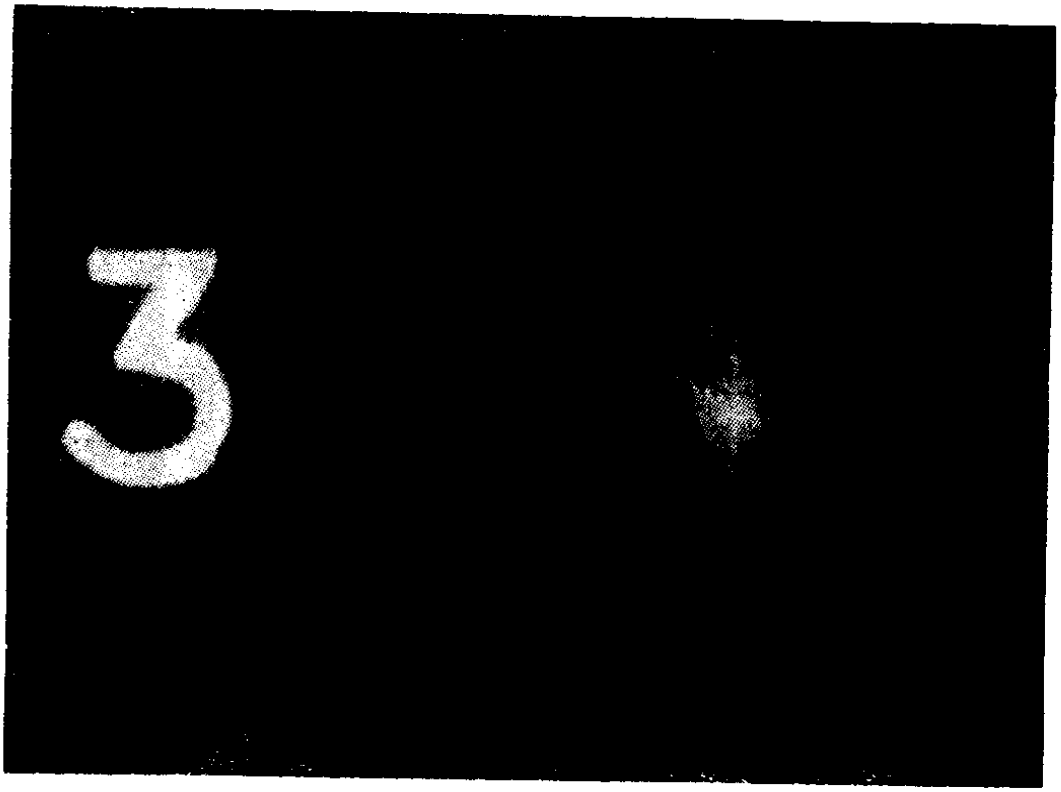


图 5-7　用光学方法得到的字“3”的傅里叶谱

们得到了一种额外的灵活性，即傅里叶变换式的大小尺寸可以受实验者控制．增大 d，变换式的空间尺寸也变大，直到透明胶片紧靠着透镜(即 $d=f$)为止．减小 d，变换式的尺寸变小．在空间滤波的应用中(见第七章)，这种灵活性将会是很有用的，在那里傅里叶变换式的大小能够调整会带来很大的方便．

最后，我们用一个典型例子来形象地显示用光学方法极易实现的二维傅里叶分析的型式．图 5-7 左边是一个透明数字“3”，把它放在一个正透镜之前，并用相干光照明，则在后焦面上得出它的频谱，如右边的图所示．特别注意“3”字的直线部分所带来的高频分量．

§ 5-3 成像：单色光照明

透镜的最为人熟悉的性质肯定是它们的成像能力．若把一物体置于透镜之前，并受到照明，那么在适当条件下，在另一个平面上将出现一个与物体极为相似的光场强度分布．这个强度分布称为该物体的像．像可以是实像，意即一个实际的光强分布出现在透镜后面的一个平面上；也可是虚像，意即透镜后的光看来好像是从透镜前面的一个新平面上的光强分布所发出的．

目前，我们只在很有限的范围内讨论成像问题．首先，我们只注意一个无像差的薄的正透镜所成的实像．其次，我们只讨论单色照明情形，这个限制意味着成像系统对于复场振幅是线性的．在第六章中这两个限制都将取消，在那里我们将要以更为普遍的方式讨论成像问题．

正透镜的脉冲响应

参看图 5-8 的几何关系，设一个平面物体放在透镜前面

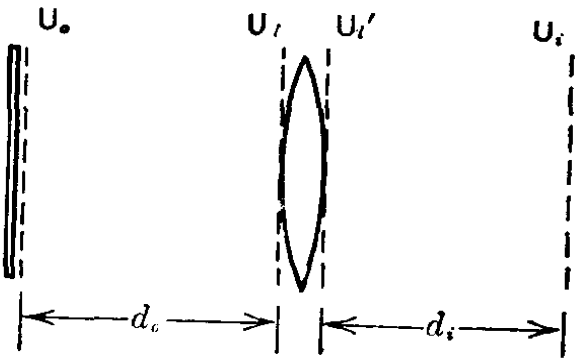


图 5-8　成像的几何示意图

距离为 d_0 的位置上，并用单色光照明. 我们用 $\mathbf{U}_0(x_0, y_0)$ 表示紧靠着物体之后的复场. 在透镜之后距离为 d_i 的平面上有一个复场分布，我们用 $\mathbf{U}_i(x_i, y_i)$ 表示. 我们的目的是求出在什么条件下场分布 $\mathbf{U}_i$ 可以合理地叫做物分布 $\mathbf{U}_0$ 的“像”.

由于波动传播现象是线性的，我们总可以把场分布 $\mathbf{U}_i$ 表示成下述迭加积分：

$$\mathbf{U}_i(x_i, y_i)=\int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{h}(x_i, y_i; x_0, y_0)\mathbf{U}_0(x_0, y_0)dx_0dy_0, \quad (5\text{-}23)$$

其中 $\mathbf{h}(x_i, y_i; x_0, y_0)$ 是由置于物坐标 (x_0, y_0) 的单位振幅的点源在坐标 (x_i, y_i) 处产生的场振幅. 因此，只要能够确定脉冲响应 $\mathbf{h}$，就能完备地描写了成像系统的性质.

如果光学系统要产生高质量的像，那么 $\mathbf{U}_i$ 必须尽可能地和 $\mathbf{U}_0$ 相似. 也就是说，脉冲响应应当非常近似于

$$\mathbf{h}(x_i, y_i; x_0, y_0)\cong \mathbf{K}\delta(x_i \pm Mx_0, y_i \pm My_0), \quad (5\text{-}24)$$

其中 $\mathbf{K}$ 是一个复常数，M 代表系统的放大率，式中含有正负号是为了容许可能的像的倒立. 因此我们将把(5-24)式最近似成立的平面定为“像平面”.

为了求得 $\mathbf{h}$，令物体为 (x_0, y_0) 点上的一个 δ 函数（点源），那么投射到透镜上的将是从 (x_0, y_0) 点发出的一个发散

球面波，其傍轴近似为

$$\mathbf{U}_l(x, y)=\frac{1}{j\lambda d_0}\exp\left\{j\frac{k}{2d_0}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\right\}, \tag{5-25}$$

通过透镜之后，场分布变为

$$\mathbf{U}_l'(x, y)=\mathbf{U}_l(x, y)\,P(x, y)\exp\left[-j\frac{k}{2f}(x^2+y^2)\right], \tag{5-26}$$

最后，利用菲涅耳衍射方程(4-9)来描写通过距离 d_i 的传播，我们得到

$$\mathbf{h}(x_i, y_i; x_0, y_0)=\frac{1}{j\lambda d_i}\int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{U}_l'\exp\left\{j\frac{k}{2d_i}[(x_i-x)^2+\right.$$

$$\left.+(y_i-y)^2]\right\}dxdy, \tag{5-27}$$

其中已弃去了常数位相因子。合併(5-25)、(5-26)和(5-27)，得到下面的庞杂结果：

$$\mathbf{h}(x_i, y_i; x_0, y_0)=$$

$$=\frac{1}{\lambda^2 d_0 d_i}\exp\left[j\frac{k}{2d_i}(x_i^2+y_i^2)\right]\exp\left[j\frac{k}{2d_0}(x_0^2+y_0^2)\right]\cdot$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\int P(x, y)\exp\left[j\frac{k}{2}\left(\frac{1}{d_0}+\frac{1}{d_i}-\frac{1}{f}\right)(x^2+y^2)\right]\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{-jk\left[\left(\frac{x_0}{d_0}+\frac{x_i}{d_i}\right)x+\left(\frac{y_0}{d_0}+\frac{y_i}{d_i}\right)y\right]\right\}dxdy. \tag{5-28}$$

于是，方程(5-23)和(5-28)提供了一个规定 $\mathbf{U}_0$ 和 $\mathbf{U}_i$ 之间的关系的形式解。但是，除非作进一步的简化，否则很难确定可以把 $\mathbf{U}_i$ 合理地当成 $\mathbf{U}_0$ 的像的条件。

消去二次位相因子：透镜定律

上述脉冲响应函数中最麻烦的是那些含有二次位相因子

的项. 注意这些项中有两项是与透镜坐标(x, y)无关的，即

$$\exp\left[j \frac{k}{2 d_i}(x_i^2+y_i^2)\right]\text{及 } \exp\left[j \frac{k}{2 d_0}(x_0^2+y_0^2)\right],$$

这两项仅仅表示在 x_iy_i 和 x_0y_0 平面上的位相弯曲. 如果我们愿意讨论两个球面之间而不是两个平面之间的成像问题，这两项可以直接弃去. 但是，即使是对于两个平面之间的成像，也可以证明这两项是无关紧要的.

为了消去因子 $\exp\left[j \frac{k}{2 d_i}(x_i^2+y_i^2)\right]$，注意对于绝大多数我们感兴趣的情形，透镜之后的光场分布将是成像操作的最后一步的产物. 因此这一分布将直接被一个只对光的强度起反应的探测器(例如照相底片)感知. 由于这一项只改变光场的位相分布，它对测量结果不发生任何影响，因此可以弃去.

遗憾的是，位相因子 $\exp\left[j \frac{k}{2 d_0}(x_0^2+y_0^2)\right]$不能这样直接地处理掉，因为它依赖于迭加积分的积分变量 (x_0, y_0)[1]. 但是，在大多数有关的情形下，可以用下面的论据把它消去. 若成像系统的行为近似于方程(5-24)所代表的理想特性，那么坐标 (x_i, y_i) 处的光场振幅必定只包含物平面上以理想的几何物体点为中心的一个微小区域的贡献(见图5-9). 如果在这个微小区域内 $\exp\left[j \frac{k}{2 d_0}(x_0^2+y_0^2)\right]$的参量的变化不大于几分之一弧度，那么我们可以用下述近似：

$$\exp\left[j \frac{k}{2 d_0}(x_0^2+y_0^2)\right]\cong\exp\left[j \frac{k}{2 d_0}\left(\frac{x_i^2+y_i^2}{M^2}\right)\right]. \quad (5\text{-}29)$$

因为对(x_0, y_0)的依赖关系已经消除了，于是指数项可以弃去，原因仍然是它不会影响(x_i, y_i)平面内的强度测量. 关于

1) 如果照明是"非相干的"，可以证明成像系统对于强度是线性的，其脉冲响应为$|\mathbf{h}|^2$. 在这种情况下，两个位相因子都可以直接弃去. 更详尽的讨论见第六章.

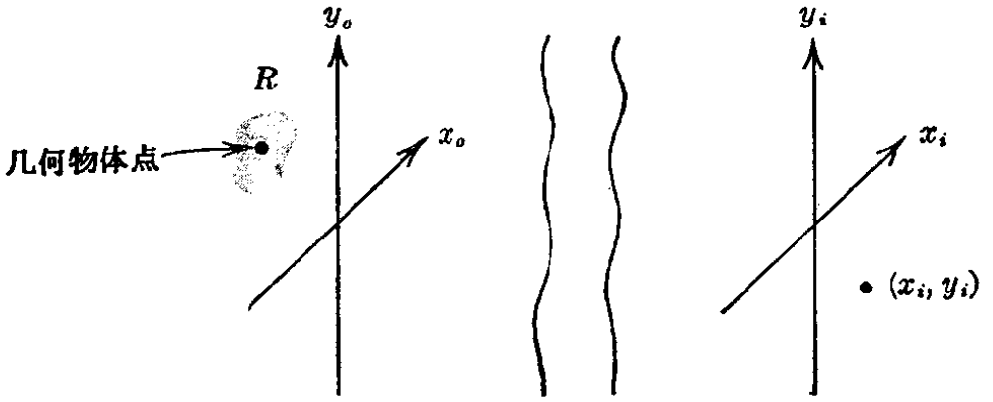


图 5-9　对所示的特定点(x_i, y_i) h 之值甚大的区域 R

上述近似式的进一步讨论以及它成立的条件，见 习题 5-7.

通过上述讨论，我们已把脉冲响应的表达式简化为

$$\mathbf{h}(x_i, y_i; x_0, y_0) \cong$$

$$\frac{1}{\lambda^2 d_0 d_i}\int_{-\infty}^{\infty}\int P(x, y)\exp\left[j\frac{k}{2}\left(\frac{1}{d_0}+\frac{1}{d_i}-\frac{1}{f}\right)(x^2+y^2)\right]\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{-jk\left[\left(\frac{x_0}{d_0}+\frac{x_i}{d_i}\right)x+\left(\frac{y_0}{d_0}+\frac{y_i}{d_i}\right)y\right]\right\}dxdy. \quad (5\text{-}30)$$

作为最后一步简化，我们只限于讨论透镜后面的一个特殊的平面，它和透镜的距离 d_i 满足

$$\frac{1}{d_0}+\frac{1}{d_i}-\frac{1}{f}=0. \quad (5\text{-}31)$$

这个关系式我们在初等几何光学里已经熟知了，在那里把它称为透镜定律. 它给出透镜后面的一个特定距离，从单个物体点发出的光线重新又交于这个距离上的一个像点. 从这一几何光学观点来看，如果要达到一个和理想情况相近的脉冲响应，透镜定律是必须满足的. 因此，假定透镜定律得到满足，那么脉冲响应简化为

$$\mathbf{h}(x_i, y_i; x_0, y_0) \cong \frac{1}{\lambda^2 d_0 d_i} \iint_{-\infty}^{\infty} P(x, y) \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{-jk\left[\left(\frac{x_0}{d_0}+\frac{x_i}{d_i}\right)x+\left(\frac{y_0}{d_0}+\frac{y_i}{d_i}\right)y\right]\right\} dx\,dy. \quad (5\text{-}32)$$

定义系统的放大率为

$$M=\frac{d_i}{d_0}. \quad (5\text{-}33)$$

最后，我们得到的脉冲响应简化为

$$\mathbf{h}(x_i, y_i; x_0, y_0) \cong \frac{1}{\lambda^2 d_0 d_i} \iint_{-\infty}^{\infty} P(x, y) \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{-j\frac{2\pi}{\lambda d_i}[(x_i+Mx_0)x+(y_i+My_0)y]\right\} dx\,dy. \quad (5\text{-}34)$$

因此，如果透镜定律得到满足，则我们看到脉冲响应由透镜孔径的夫琅和费衍射图样给出，其中心在像点($x_i=-Mx_0$, $y_i=-My_0$)。夫琅和费衍射公式的出现应当不是完全出乎意料的。因为通过选择 d_i 以满足透镜定律，我们要考察的就是离开透镜的球面波向之会聚的平面；而由习题 4-3 的结果，我们应当预料到，会聚点附近的光场分布正是限制该球面波大小的透镜孔径的夫琅和费衍射图样。

物体和像之间的关系

我们首先研究几何光学所预言的像的性质。为了求出这个理想的像，我们通常所利用的方法是让波长 λ 趋于零，在这种情况下衍射效应可以忽略。作变量变换

$$\tilde{x}=\frac{x}{\lambda d_i}, \quad \tilde{y}=\frac{y}{\lambda d_i}, \quad (5\text{-}35)$$

则脉冲响应(5-34)可以改写为

$$\mathbf{h}(x_i, y_i; x_0, y_0) \cong M \iint_{-\infty}^{\infty} P(\lambda d_i \tilde{x}, \lambda d_i \tilde{y}) \cdot$$

$$\cdot\exp\{-j2\pi[(x_i+Mx_0)\tilde{x}+(y_i+$$

$$+My_0)\tilde{y}]\}d\tilde{x}\,d\tilde{y}. \tag{5-36}$$

随着 λ 趋于零，P 等于 1 的$(\tilde{x},\ \tilde{y})$区域将无限增大，使得我们能够把 P 换成 1 而仍然保持积分限为无穷．于是

$$\mathbf{h}(x_i, y_i; x_0, y_0)\to M\int_{-\infty}^{\infty}\int\exp\{-j2\pi[(x_i+Mx_0)\tilde{x}+$$

$$+(y_i+My_0)\tilde{y}]\}\,d\tilde{x}\,d\tilde{y}$$

$$=M\delta(x_i+Mx_0, y_i+My_0)$$

$$=\frac{1}{M}\delta\left(\frac{x_i}{M}+x_0,\ \frac{y_i}{M}+y_0\right). \tag{5-37}$$

把这个结果用到迭加积分(5-23)中，可知物体和像的振幅分布由下式联系着

$$\mathbf{U}_i(x_i, y_i)=\frac{1}{M}\mathbf{U}_0\left(-\frac{x_i}{M}, -\frac{y_i}{M}\right). \tag{5-38}$$

于是我们得出结论：几何光学预言的像是物体的准确的复现，它在像平面上被放大并且是倒立的．

几何光学的预言当然不是精确的．只有把衍射效应也考虑进来，才能对物和像之间的关系有更全面的理解．为此，我们回到脉冲响应的表达式(5-36)，并且作如下的补充的变数变换：

$$\tilde{x}_0=-Mx_0,\quad \tilde{y}_0=-My_0. \tag{5-39}$$

此时我们求出脉冲响应为

$$\mathbf{h}(x_i, y_i; \tilde{x}_0, \tilde{y}_0)=M\int_{-\infty}^{\infty}\int P(\lambda d_i\tilde{x};\ \lambda d_i\tilde{y})\cdot$$

$$\cdot\exp\{-j\frac{2}{\lambda}\pi[(x_i-\tilde{x}_0)\tilde{x}+(y_i-\tilde{y}_0)\tilde{y}]\}\,d\tilde{x}\,d\tilde{y}, \tag{5-40}$$

注意此时 $\mathbf{h}$ 是空间不变的，只依赖于坐标之差$(x_i-\tilde{x}_0,\ y_i-\tilde{y}_0)$。最后定义

$$\tilde{\mathbf{h}}=\frac{1}{M}\mathbf{h}, \tag{5-41}$$

迭加积分(5-23)变为

$$\mathbf{U}_i(x_i,\ y_i)=\int_{-\infty}^{\infty}\int\tilde{\mathbf{h}}\ (x_i-\tilde{x}_0;y_i-\tilde{y}_0)\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{1}{M}\mathbf{U}_0\left(-\frac{\tilde{x}_0}{M},-\frac{\tilde{y}_0}{M}\right)\right]d\tilde{x}_0\,d\,\tilde{y}_0. \tag{5-42}$$

我们认出它正是脉冲响应 $\tilde{\mathbf{h}}$ 与几何光学所预言的像的卷积。为了方便起见，我们定义一个新函数 $\mathbf{U}_g$，它代表几何光学所预言的像；即

$$\mathbf{U}_g(x_i,\ y_i)=\frac{1}{M}\mathbf{U}_0\left(-\frac{x_i}{M},\ -\frac{y_i}{M}\right), \tag{5-43}$$

于是卷积(5-42)可用简化符号写成

$$\mathbf{U}_i(x_i,\ y_i)=\tilde{\mathbf{h}}\ (x_i,\ y_i)*\mathbf{U}_g(x_i,\ y_i), \tag{5-44}$$

其中

$$\tilde{\mathbf{h}}(x_0,\ y_0)=\int_{-\infty}^{\infty}\int P\ (\lambda d_i\tilde{x},\ \lambda d_i\tilde{y})\cdot$$

$$\cdot\exp[-j\,2\pi(x_i\tilde{x}+y_i\tilde{y})]\,d\tilde{x}\,d\tilde{y}. \tag{5-45}$$

方程(5-44)和(5-45)代表我们现阶段分析的最后结果。它们表明：当衍射效应也考虑进来之后，像就不再是物体的准确复现了。相反，实际上得到的像是物体的平滑变形，这是脉冲响应的宽度不为零的结果。这种平滑作用能使物体的精细细节受到强烈的衰减，结果使所生成的像产生相应的失真。把一个电信号加到一个线性电网络上去时，也可以观察到完全

类似的现象．如果网络的脉冲响应的(时间)宽度比起输入信号的“涨落时间”是长的，那么网络将输入信号变平滑，于是输入信号中的快变化部份将不会在输出端再现。

在时间不变的电网络的情况下，从频率的角度来描写信号的失真往往是最方便的．如果输入信号含有过高的频谱分量，以致电网的传递函数不让它通过，那么信号将不会在输出端准确重现．频谱分析概念在电网络中所起的巨大作用向我们提示，同样的概念也许也可以有效地用来研究光学成像系统。事实上，滤波概念对成像系统的应用就是一个非常重要的题目，并且是下一章的主要内容。

习　题

5-1　证明双凸透镜、平凸透镜和正弯月形透镜的焦距总是正的，而双凹透镜、平凹透镜和负弯月形透镜的焦距总是负的。

5-2　(a) 求出由圆柱体的一部份构成的透镜(画在图 5-10 中)所引起的位相变换的傍轴近似.

(b) 这种透镜对沿透镜轴传播的平面波的效应是什么？

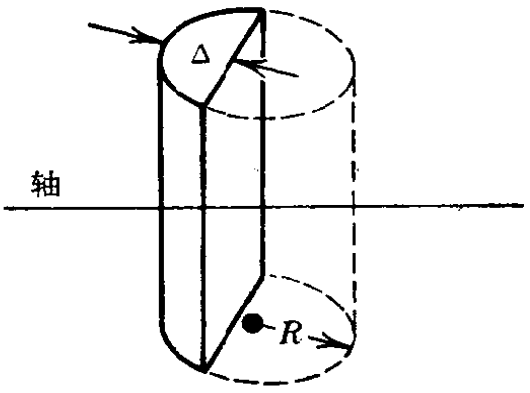


图 5-10

5-3　考虑由圆锥体的一部份构成的透镜(如图 5-11所示).

(a) 证明这种透镜所引起的位相变换的傍轴近似为（在薄透镜假定下）

$$t_r(x,y)=\exp\left\{jk\left[n\Delta_0-\frac{(n-1)Ry}{h}-\frac{x^2}{2f(y)}\right]\right\},$$

其中
$$f(y)=\frac{R(1-y/h)}{n-1}.$$

(b) 这种透镜对沿 xy 平面法线方向传播的平面波的效应是什么？

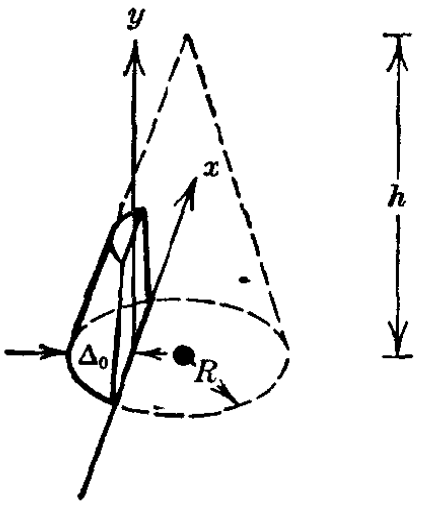


图 5-11

5-4 一个被直径为 l 的圆形孔径限制的物函数 U_0，把它放在直径为 L 的圆形会聚透镜的前焦面上。测量透镜的后焦面上的强度分布。假定 $L>l$。

(a) 求出关于其所测得强度准确代表物体的傅里叶谱的模的平方的最大空间频率的表达式。

(b) 如果 $L=4$ 厘米，$l=2$ 厘米，f(焦距)$=50$ 厘米以及 $\lambda=6\times10^{-7}$ 米，这个频率的数值等于多少(单位用周/毫米)？

(c) 在多大的频率以上测得的频谱为零？尽管物体可以在更高的频率上有不为零的傅里叶分量。

5-5 一个衍射屏具有下述圆对称的振幅透射率函数

$$t(r)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\alpha r^2\right)\mathrm{circ}\left(\frac{r}{l}\right),$$

(a) 这个屏的作用在什么方面像一个透镜？

(b) 给出此屏的焦距的表达式。

(c) 什么特性将会严重地限制这种屏用作成像装置(特别是对于

多色物体)?

5-6 一维物函数的一个阵列可表成$U_0(x, y_k)$，其中$y_1, y_2, \cdots, y_k, \cdots, y_N$是$N$个固定的$y$坐标。我们想要对所有$N$个函数在$x$方向作傅里叶变换，得出变换式的一个阵列

$$\mathbf{G}_0(f_X, y_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{U}_0(x, y_k)\exp(-j\,2\pi f_X x)dx.$$

忽略物体孔径和透镜孔径的有限大小，利用本章所推得的透镜的傅里叶变换性质和透镜的成像性质，证明这一变换能够用下述透镜装置来完成：

(a) 两个不同焦距的圆柱透镜.

(b) 焦距相同的一个圆柱透镜和一个球面透镜。

简化： 因为只需要显示$|\mathbf{G}_0|^2$，因此位相因子可以弃去.

5-7 关于方程(5-29)所代表的近似：

(a) 物平面上的半径是多大时，位相因子 $\exp\left[j\frac{k}{2d_0}(x_0^2+y_0^2)\right]$ 相对于它在原点之值正好改变π弧度?

(b) 设光瞳函数是一个半径为α的圆，那么在物平面上相应于$\mathbf{h}$的第一个零点的半径是多少?假定像平面上的观察点是原点。

(c) 由这些结果，设观察是在透镜轴附近进行。那么α、λ和d_0之间存在什么关系时可以弃去位相因子$\exp\left[j\frac{k}{2d_0}(x_0^2+y_0^2)\right]$?

5-8 一束单位振幅的平面波，垂直入射照明一个透镜，透镜的直径为5厘米，焦距为2米。在透镜后面一米的地方，以透镜轴为中心，放着一个物体，其振幅透镜率为

$$t(x_0, y_0) = \frac{1}{2}(1+\cos 2\pi f_0 x_0)\,\mathrm{rect}\left(\frac{x_0}{L}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y_0}{L}\right).$$

假定$L=1$厘米，$f_0=100$周/厘米，大致画出焦平面上沿x_f轴的强度分布，标出各个衍射分量之间的距离和各个分量(第一个零点之间)的宽度的数值。

5-9 一个单位振幅的单色平面波，垂直入射照明一个物体，其最大线度为l，紧贴在一个比它更大的焦距为f_0的会聚透镜之前。由于

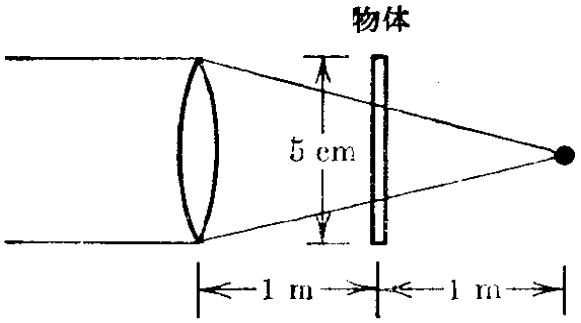


图 5-12

定位的误差，强度分布是在透镜后面距离为$(f-\Delta)$的平面上测量的。如果测得的强度分布正好代表物体的夫琅和费衍射图样的话，试问Δ必须多小？见图5-14

-10 某一衍射屏，其振幅透射率为

$$t(r)=\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{sgn}\ (\cos \alpha r^2)\right]\mathrm{circ}\left(\frac{r}{l}\right),$$

用一个单位振幅的单色平面波垂直照明。证明这个屏的性能相当于一个有多重焦距的透镜。确定这些焦距的大小以及相应的焦平面内集中到焦点上的能量的相对大小（这种衍射屏称为菲涅耳波带片）。

提示：图5-14所示的方波可以展成傅里叶级数

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n}\right]\exp\left(j\frac{2\pi nx}{X}\right).$$

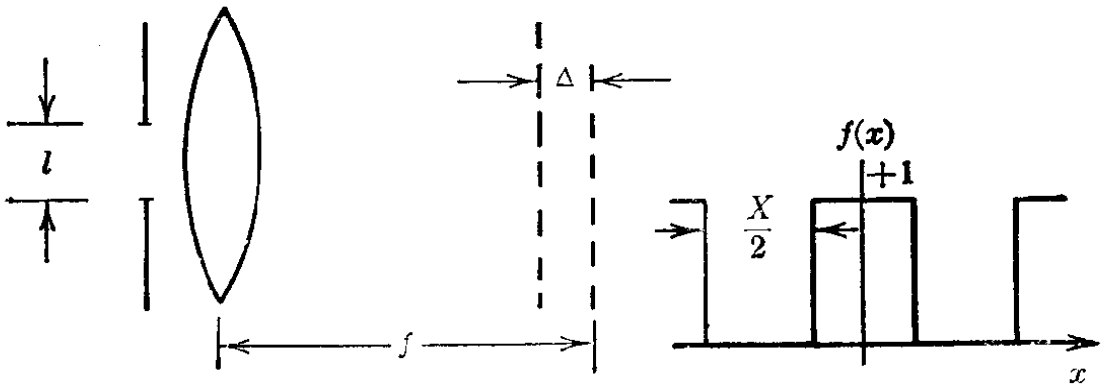


图 5-13　　图 5-14

參 考 文 献

5-1 Rhodes, J., Analysis and Synthesis of Optical Images, *Am. J. Phys.*, **21**, 337(1953).

5-2 Cutrona, L. J., et al., Optical Data Processing and Filtering Systems, *IRE Trans. Inform. Theory*, **IT-6**, 386(1960).

5-3 Preston, K., Jr., Use of the Fourier Transformable Properties of Lenses for Signal Spectrum Analysis, in J. T. Tippett et al. (eds.), *Optical and Electro-optical Information Processing*, M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1965.

第六章　光学成像系统的频谱分析

与光学的悠久而丰富的历史相比，频谱分析和线性系统理论这两种方法在光学中起重要作用的时间是相当短的．然而，在这短短的时期内，这些方法应用得如此广泛和成功，使得它们现在已成为成像系统理论的基础．

把傅里叶方法实际用来分析光学系统，是在本世纪三十年代末不自觉地出现的，那时有些光学工作者开始提议利用正弦试样来评价光学系统的性能．最初的推动力有许多是来自法国科学家 P. M. Duffieux，他的工作最后总结为一本阐述傅里叶方法在光学中应用的书[6-1]，于 1946 年出版．遗憾的是这本书一直没有译成英文，因而没有得到广泛流传．在美国，对这些课题的关心主要是由电气工程师 O. Schade 推动的，他曾非常成功地应用线性系统理论和通讯理论方法来分析和改进电视摄像管透镜组[6-2]．但是，傅里叶光学的基础实际上在 1940 年以前很久就已经基本上奠定了，特别是通

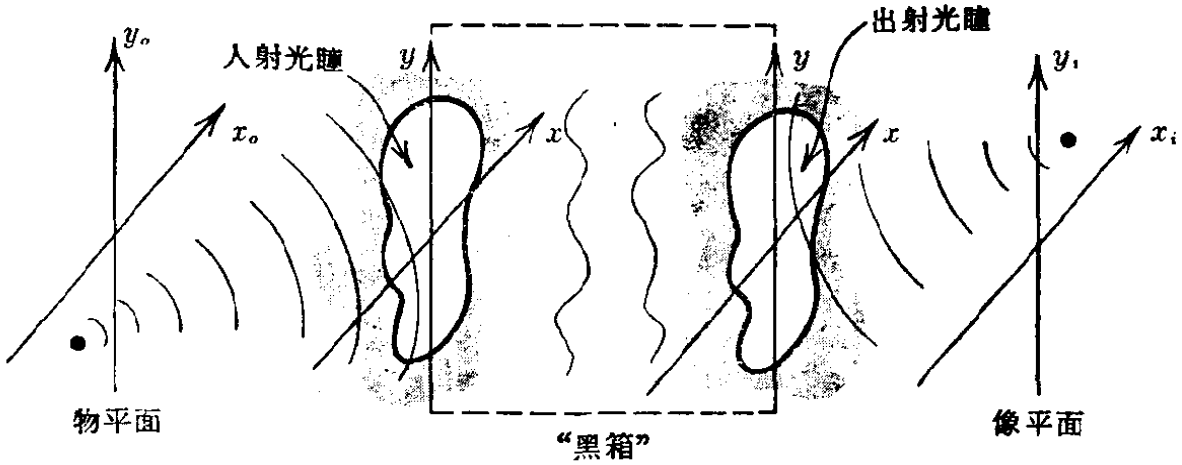


图 6-1　成像系统的普遍模型

过阿贝(1840—1905)和瑞利(1842—1919)的工作.

在本章中，我们将考虑傅里叶分析在相干成像和非相干成像理论中的作用. 虽然历史上非相干光照明的情形更为重要，但是在显微镜成像中相干光照明的情形始终是重要的，自从激光出现以后，它的重要性就更增加了. 为了对后面的课题各个方面的进一步讨论，读者可参阅 O'Neill[6-3]、Françon[6-4]、Linfoot[6-5]和 Stroke[6-6]的著作.

§ 6-1 成像系统的一般分析

前一章里，在单色光照明的特殊情况下我们研究了单个薄透镜的成像性能. 下面，首先把我们的讨论推广到不限于单个会聚透镜的情形，求出可适用于更为普遍的透镜组的结果，然后再取消单色光照明的限制，求出空间相干的和空间非相干的"准单色"光照明情形的结果.

普遍模型

假定有关的成像系统不是由一个单透镜，而是由几个透镜组成，其中有些是正透镜，有些是负透镜. 这些透镜并不一定要求是"薄"的(薄透镜的定义见前). 但是我们假定，这个系统最后将产生一个实像；实际上，这并不是一个限制，因为如果看到的是一个虚像，它最后总会被眼睛这个透镜转换成一个实像. 那么在这种情形下，我们应把这个透镜包括进来，作为我们系统的最后一个元件.

为了说明透镜系统的性能，我们采用的观点是：全部成像元件都可以装在一个"黑箱"[1]中，只要指明这一光学组件的边端性质，这个系统的主要性质就完全描述出来了.

1) 所谓"黑箱"(black box)即一系统，只需知道它的外部性能而不管它的内部结构. ——译注

参考图 6-1，这个黑箱的“边端”由一个入射光瞳和一个出射光瞳组成，前者代表光达到成像元件必须通过的一个有限孔径(有效的或实在的)，后者(同样是有效的或实在的)代表光离开成像元件到达像平面的路上所必须通过的有限孔径。通常假定在入射平面和出射平面之间光的传播可用几何光学很好描述。因而，两个光瞳的有限尺寸便可由该系统内的最小孔径通过成像元件按几何方法投影到入射和出射平面上求出。所得光瞳尺寸可能小于这两个平面上实在孔径的实际物理尺寸，因为光瞳可能对应于系统内某处一个实际上更小孔径的投影。注意，按照这个定义，入射光瞳总是出射光瞳的几何投影，反之亦然。

如果从任一点光源发出的发散球面波通过成像系统转换成新的理想球面波，并且在像平面上会聚成一理想点，则称该成像系统是衍射受限的 (diffraction-limited)[1]。因此，衍射受限透镜系统的边端性质是，将投射到入射光瞳上的发散球面波变换成出射光瞳上的会聚球面波。对于任何实际成像系统，这一性质充其量也只能在物平面上的一个有限区域内满足。若有关的物体限在此区域内，那末这一系统就可以看成是衍射受限的。

在点光源的情况下，如果离开出射光瞳的波前大大地偏离理想球面波形，那末就说成像系统具有像差。像差将在§6-4中得到更详细的讨论，我们将看到，它们会导至成像系统的空间频率响应不完善。

衍射效应

几何光学已足以描述从入射光瞳到出射光瞳之间的传

1) 在几何光学中通常称为理想光具组。——译注

播，那么衍射效应就只在光从物到入射光瞳以及从出射光瞳到像的传播中才起重要作用. 事实上，可以把全部衍射效应归结到这两段光程中的随便那一段. 把像的分辨率看成是(1)受有限大小的入射光瞳所限或是(2)受有限大小的出射光瞳所限，这两种看法是完全等价的. 其所以等价的基本原因在于：一个光瞳只不过是另一个光瞳的几何投影.

认为衍射效应是由于有限的入射光瞳引起的，这一看法是阿贝在1873年首次提出的[6-7]. 按照他的理论，一个复杂物体所产生的衍射分量只有一部分被有限的入射光瞳截取. 未被孔径截取的分量正是物体的高频部分所产生的分量. 图6-2在物为简单光栅而成像系统是由单个正透镜组成的情况下形象地表示了这种观点.

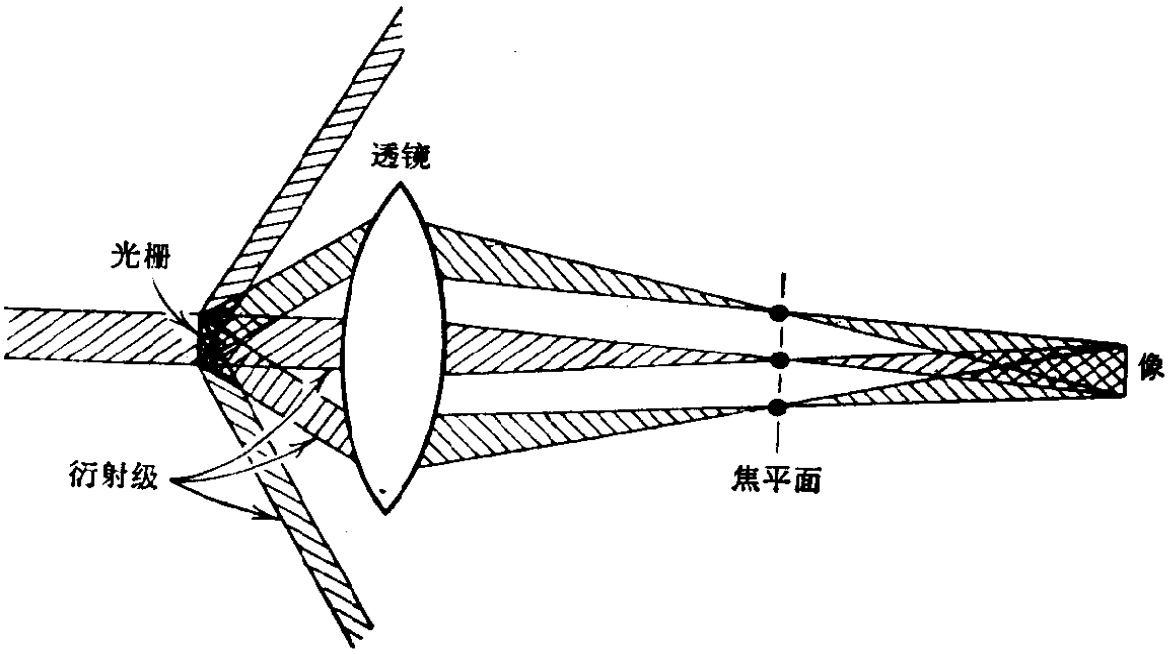


图 6-2　阿贝的成像理论

一个实质上等价的看法是认为衍射效应来自有限的出射光瞳，这个看法是瑞利在1896年提出的[6-8]. 在§5-3中采用过这个观点，我们在这里仍将采用它.

像的振幅[1]仍用叠加积分表示：

$$\mathbf{U}_i(x_i, y_i)=\int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{h}(x_i, y_i; x_0, y_0)\mathbf{U}_0(x_0, y_0)dx_0dy_0, \qquad (6\text{-}1)$$

其中 $\mathbf{h}$ 是(x_0, y_0)处的点光源在像上的 (x_i, y_i) 点产生的振幅．在没有像差时，响应 $\mathbf{h}$ 是由一个从出射光瞳向一个理想的成像点 $(x_i=Mx_0, y_i=My_0)$ 会聚的有限大小的球面波产生的．在这个更一般的情形下，我们容许放大率 M 可负可正，依像是倒立还是正立而定．

从习题 4-3 的结果和 §5-3 的讨论得知，理想成像点周围光的振幅的分布简单地是出射光瞳的夫琅和费衍射图样，其中心的坐标是(Mx_0, My_0)．因此

$$\mathbf{h}(x_i, y_i; x_0, y_0)=\mathbf{K}\int_{-\infty}^{\infty}\int P(x, y)\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{-j\frac{2\pi}{\lambda d_i}[(x_i-Mx_0)x+(y_i-My_0)y]\right\}dxdy, \qquad (6\text{-}2)$$

其中 $\mathbf{K}$ 是个复数常数，P 为光瞳函数，它在光瞳内之值为 1，在光瞳之外为零．在写出这个方程时，我们再次忽略了物平面和像平面上的二次位相因子，其理由如 §5-3 所述．作变数代换

$$\tilde{x}=\frac{x}{\lambda d_i}, \quad \tilde{y}=\frac{y}{\lambda d_i}, \quad \tilde{x}_0=Mx_0, \quad \tilde{y}_0=My_0,$$

我们得到

$$\mathbf{h}(x_i-\tilde{x}_0, y_i-\tilde{y}_0)=\mathbf{K}\lambda^2 d_i^2\int_{-\infty}^{\infty}\int P(\lambda d_i\tilde{x}, \lambda d_i\tilde{y})\cdot$$

---

1) 我们仍保留单色光照明的假定，但是在下一节将取消此假定．

$$\cdot \exp\{-j2\pi[(x_i-\tilde{x}_0)\tilde{x}+(y_i-\tilde{y}_0)\tilde{y}]\}d\tilde{x}\,d\tilde{y}. \tag{6-3}$$

最后定义

$$\tilde{\mathbf{h}}=\frac{1}{\mathbf{K}\lambda^2 d_i^2}\mathbf{h},$$

$$\mathbf{U}_g(\tilde{x}_0,\ \tilde{y}_0)=\mathbf{K}\frac{\lambda^2 d_i^2}{M^2}\mathbf{U}_0\left(\frac{\tilde{x}_0}{M},\ \frac{\tilde{y}_0}{M}\right).$$

叠加积分(6-1)就变成

$$\mathbf{U}_i(x_i,y_i)=\int_{-\infty}^{\infty}\int\tilde{\mathbf{h}}(x_i-\tilde{x}_0,y_i-\tilde{y}_0)\mathbf{U}_g(\tilde{x}_0,\tilde{y}_0)\,d\tilde{x}_0\,d\tilde{y}_0, \tag{6-4}$$

其中 $\mathbf{U}_g$ 是由几何光学预言的理想的像，而

$$\tilde{\mathbf{h}}(x_i,y_i)=\int_{-\infty}^{\infty}\int P(\lambda d_i\tilde{x},\lambda d_i\tilde{y})\cdot$$

$$\cdot\exp[-j2\pi(x_i\tilde{x}+y_i\tilde{y})]\,d\tilde{x}\,d\tilde{y}, \tag{6-5}$$

因此，在这个更普遍的情形下，我们可以再次认为，实际的像是几何光学所预言的像与系统的出射光瞳所确定的脉冲响应的卷积。

非单色照明：相干情形和非相干情形

我们对成像系统的整个讨论中都用到了严格的单色光照明的假定。这个假定是限制太严了，因为实际的照明光源(包括激光器)绝不会是理想单色的。事实上，照明光束的振幅和位相随时间的变化的统计性质，将会对一个成像系统的性能产生非常深刻的影响。因此我们暂时离开正题，来考虑非单色光的十分重要的效应。

要十分令人满意地解决这个问题，就必须绕一个相当大的圈子去研究部分相干性理论。但就我们的目的来说，这样做是不切实际的。因此我们从两个观点来讨论这个问题，第一个观点纯粹是定性的讨论，第二个观点则更严格些，但不够普遍。关于更全面的讨论，有兴趣的读者可参阅 Beran 和 Parrent 的书[6-9]。

在单色光照明的情形下，用一个复数相幅矢量 U 来代表场的振幅是方便的，U 是空间坐标的函数。当用非单色光照明时，可以推广这个方法，将场用随时间变化的相幅矢量来表示，此相幅矢量既与时间坐标又与空间坐标有关。当用准单色光（即窄频带）照明时，不难把随时间变化的相幅矢量的振幅和位相与光波的包络和位相等同起来。随时间变化的相幅矢量的概念还可以加以推广，用到非准单色光波照明情形（例如，参阅[6-9]第二章）。

现在来考察一个用非单色光照明的物体所透射或反射的光的性质。由于相幅矢量的振幅随时间的变化是统计性的，只有用统计的概念才能对光场提供令人满意的描述。前面已看到，物体上的每一点都在像平面上产生一个脉冲响应。如果物体上一点的光的振幅和位相随时间无规地变化，那末脉冲响应的总体的振幅和位相也将相应地这样变化。这样，物体上不同点的相幅矢量的振幅之间的统计关系将会影响像平面上相应的脉冲响应之间的统计关系。这些统计关系对给出最后的像强度分布的对时间求平均的运算的结果有极大的影响。

下面我们只考虑两种类型的物体照明方式。第一种照明具有下述特性：物体的所有各点上相幅矢量的振幅的变化是一致的；这样，尽管物体的任意两点可有不同的固定相对位相，但它们的绝对位相随时间变化的方式是相同的。这种照

明称为空间相干的。第二种照明性质相反，物平面上所有各点的相幅矢量的振幅随时间变化的方式是统计无关的或无关联的。这种照明称为空间非相干的（以后我们提到这两类照明时简称为相干的和非相干的）。当光束显然是从单一点光源发出时，就得到相干光[1]。这样的光源的最普通的例子是激光器，虽然更常用的光源（例如锆弧灯）若是其输出先通过一个针孔也可以得到相干光(尽管它的强度要比激光弱)。非相干光可从漫射或扩展光源中获得，譬如气体放电管[2]。

若物体是用相干光照明，那么像平面上各个脉冲响应的变化是一致的，因此它必须按复数振幅相加。这样，相干成像系统对复数振幅就是线性的。因此，我们对单色光分析的结果可以直接应用，只要把复数振幅 U 理解为不随时间变化的相幅矢量的振幅，它描述光场的相对振幅和位相。

若物体是非相干光照明的，则像平面上的各个脉冲响应的变化是统计无关的。因此它们必须按功率或强度相加。由于任何给定的脉冲响应的强度和产生它的物体点上的光强成正比，因此非相干系统是对强度进行线性变换，并且强度变换的脉冲响应正比于相干光的脉冲响应的模的平方。

上面的论述完全是定性的，并且实际上隐含着某些假定和近似。因此我们下面来更严格地考察这个问题。首先注意，在用单色光照明的情形下，得出相幅矢量表示的办法是：弃去余弦场变化的正频率分量并为剩下的负频率分量指定一个复数振幅。现在我们把这个概念推广到非单色波 $u(P,t)$。

---

1) 这是一个充分条件但不是必要条件。例如，一个点光源发出的光通过一固定的漫散体时，在漫射体后面的任意两点上光波的相对位相都与时间无关。因此透射光仍然是空间相干的，尽管它不再显得是从一个单一点光源发出的。

2) 借助于量子场论还可以给出相干性的另一种定义（例如见文献 [6-10]，[6-11]），但是对于我们的目的，上述的简单概念已经足够。

弃去 $u(P,t)$ 的傅里叶频谱中的全部正频率分量，得出一个新的(复)函数 $\mathbf{u}_-(P,t)$。若进一步写成

$$\mathbf{u}_-(P,t)=\mathbf{U}(P,t)\exp(-j2\pi\bar{\nu}t),$$

其中 $\bar{\nu}$ 是扰动的平均频率，则复函数 $\mathbf{U}(P,t)$ 可看成是 $u(P,t)$ 随时间变化的相幅矢量表示。

现在请读者参看习题 3-5 的结果，从该题可看到，若满足两个特殊条件，则相幅矢量 $\mathbf{U}(P,t)$ 遵从的传播规律与频率为 $\bar{\nu}$ 的单色扰动的与时间无关的相幅矢量所遵循的传播规律相同。所需的两个条件是

$$\frac{\Delta\nu}{\bar{\nu}}\ll 1 \qquad \text{(准单色假定)}$$

和

$$\frac{1}{\Delta\nu}\gg\frac{d}{c},$$

其中 $\Delta\nu$ 是扰动的带宽，d 是问题中所包含的最长光程的长度，c 是光速。在这两个条件下，可以用方程(6-4)通过卷积方程直接推出表示像的相幅矢量的振幅：

$$\mathbf{U}_i(x_i,y_i;t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int\tilde{\mathbf{h}}(x_i-\tilde{x}_0,y_i-\tilde{y}_0)\mathbf{U}_g(\tilde{x}_0,\tilde{y}_0;t)d\tilde{x}_0d\tilde{y}_0, \tag{6-6}$$

其中 $\mathbf{U}_g$ 是几何光学所预言的像的相幅矢量的振幅，而 $\tilde{\mathbf{h}}$ 由方程(6-5)给出，但其中 λ 换成平均波长 λ。

我们最终所关心的量当然是像平面上的强度[1]

$$I_i(x_i,y_i)=\langle\mathbf{U}_i(x_i,y_i;t)\mathbf{U}_i^*(x_i,y_i;t)\rangle. \tag{6-7}$$

为了求出这个量，把(6-6)代入(6-7)，并交换积分与求平均的次序，得

---

1) 角括弧表示对无限长时间求平均。

$$I_i(x_i, y_i)=\int_{-\infty}^{\infty}\int d\tilde{x}_0 d\tilde{y}_0 \int_{-\infty}^{\infty}\int d\tilde{\tilde{x}}_0 d\tilde{\tilde{y}}_0 \tilde{\mathbf{h}}(x_i-\tilde{x}_0, y_i-\tilde{y}_0)$$

$$\tilde{\mathbf{h}}^*(x_i-\tilde{\tilde{x}}_0, y_i-\tilde{\tilde{y}}_0)\langle \mathbf{U}_g(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0; t)\mathbf{U}_g^*(\tilde{\tilde{x}}_0, \tilde{\tilde{y}}_0; t)\rangle. \quad (6\text{-}8)$$

由于 $\mathbf{U}_g$ 的统计性质与 $\mathbf{U}_0$ 相同，因此可以看出，在角括弧中的最后一个量依赖于物体照明的空间相干性.

当照明是完全相干光时，物平面上各处的相幅矢量的振幅仅差一复常数.可以等价地写作

$$\mathbf{U}_g(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0; t)=\mathbf{U}_g(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)\frac{\mathbf{U}_g(0,0;t)}{\langle|\mathbf{U}_g(0,0;t)|^2\rangle^{1/2}},$$

$$\mathbf{U}_g(\tilde{\tilde{x}}_0, \tilde{\tilde{y}}_0; t)=\mathbf{U}_g(\tilde{\tilde{x}}_0, \tilde{\tilde{y}}_0)\frac{\mathbf{U}_g(0,0;t)}{\langle|\mathbf{U}_g(0,0;t)|^2\rangle^{1/2}}, \quad (6\text{-}9)$$

其中与时间无关的 $\mathbf{U}_g$ 是相对于原点处的随时间变化的相幅矢量的振幅而言的相幅矢量的振幅. 把这些关系式代入(6-8)，发现对 $\tilde{x}_0$, $\tilde{y}_0$ 的积分和对 $\tilde{\tilde{x}}_0$, $\tilde{\tilde{y}}_0$ 的积分可以分开，得

$$I_i(x_i, y_i)=\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int \tilde{\mathbf{h}}(x_i-\tilde{x}_0, y_i-\tilde{y}_0)\,\mathbf{U}_g(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)d\tilde{x}_0 d\tilde{y}_0\right|^2. \quad (6\text{-}10)$$

最后，定义 $\mathbf{U}_i(x_i, y_i)$ 为 $\mathbf{U}_i(x_i, y_i; t)$ 相对于原点上 $\mathbf{U}_g$ 的振幅而言的相幅矢量振幅，得到相干成像系统由下面的卷积方程描述：

$$\mathbf{U}_i(x_i, y_i)=\int_{-\infty}^{\infty}\int \tilde{\mathbf{h}}(x_i-\tilde{x}_0, y_i-\tilde{y}_0)\mathbf{U}_g(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)d\tilde{x}_0 d\tilde{y}_0. \quad (6\text{-}11)$$

于是我们得出结论：用相干光照明物体时所得的成像系统对于复数振幅是线性的.

当用完全非相干光照明物体时，物平面上各点的相幅矢量的振幅的变化方式是统计无关的. 这一理想化的性质可用

如下方程表示：

$$\langle \mathbf{U}_g(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0;t)\mathbf{U}_g^*(\tilde{\tilde{x}}_0, \tilde{\tilde{y}}_0;t)\rangle = \kappa \mathbf{I}_g(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)\delta(\tilde{x}_0-\tilde{\tilde{x}}_0, \tilde{y}_0-\tilde{\tilde{y}}_0), \tag{6-12}$$

其中 κ 是一个实常数.但是这个表示式不是精确的，因为可以证明这个式子意味着唯一被物体所透过的波是倏逝波. 实际上，相干性可以存在的最小距离约为一个波长（详见文献[6-9]第 4.4 节）.但是对于绝大多数实际目的，(6-12)式是正确的.把它代入(6-8)式，得到

$$I_i(x_i, y_i) = \kappa \int_{-\infty}^{\infty}\int |\tilde{\mathbf{h}}(x_i-\tilde{x}_0, y_i-\tilde{y}_0)|^2 \mathbf{I}_g(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)d\tilde{x}_0 d\tilde{y}_0. \tag{6-13}$$

于是得到像的强度是理想化的物强度 $\mathbf{I}_g$ 与脉冲响应 $|\tilde{\mathbf{h}}|^2$ 的卷积。我们由此得出结论：当物体用非相干光照明时，成像系统是对强度进行线性变换.此外，这一强度变换的脉冲响应简单地正比于相干光照明下所得到的脉冲响应的模的平方.

§ 6-2 衍射受限的相干成像系统的频率响应

现在我们回过头来讨论更切合本章题目的内容，即成像系统的频谱分析。本节只考虑相干照明的成像系统.非相干照明系统在 §6-3 讨论.

前面已经强调指出，相干成像系统对于复场振幅是线性的.这当然就意味着，这样的系统所给出的强度变换是高度非线性的.如果要在通常形式下应用频谱分析概念，它们只能用于线性的振幅变换.

相干传递函数

从我们对相干系统所作的分析可以得出，振幅变换的形

式是空间不变的，这从下述卷积方程看得很清楚：

$$\mathbf{U}_i(x_i, y_i) = \int_{-\infty}^{\infty}\int \tilde{\mathbf{h}}(x_i-\tilde{x}_0, y_i-\tilde{y}_0)\mathbf{U}_g(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)d\tilde{x}_0 d\tilde{y}_0. \tag{6-14}$$

于是我们会预料到，传递函数的概念可以直接应用于这个系统．为了这个目的，我们分别定义系统的输入和输出的频谱为：

$$\mathbf{G}_g(f_X, f_Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{U}_g(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)\exp[-j\,2\pi(f_X\tilde{x}_0 + f_Y\tilde{y}_0)]d\tilde{x}_0 d\tilde{y}_0, \tag{6-15}$$

$$\mathbf{G}_i(f_X, f_Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{U}_i(x_i, y_i)\exp[-j\,2\pi(f_X x_i + f_Y y_i)]dx_i dy_i.$$

此外，我们把空间不变的脉冲响应的傅里叶变换定义为传递函数：

$$\mathbf{H}(f_X, f_Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int \tilde{\mathbf{h}}(x_i, y_i)\exp[-j2\pi(f_X x_i + f_Y y_i)]dx_i dy_i. \tag{6-16}$$

将卷积定理应用于(6-14)，立即得到

$$\mathbf{G}_i(f_X, f_Y) = \mathbf{H}(f_X, f_Y)\mathbf{G}_g(f_X, f_Y). \tag{6-17}$$

于是，至少在形式上，我们就在频域中把衍射受限成像系统的作用表示出来了．下面我们把函数 $\mathbf{H}(f_X, f_Y)$ 叫做相干传递函数．剩下要做的就是把 $\mathbf{H}$ 与成像系统本身的一种物理性质更直接联系起来．

为此，我们要注意，虽然方程(6-16)把 $\mathbf{H}$ 定义为 $\tilde{\mathbf{h}}$ 的傅里叶变换式，但是 $\tilde{\mathbf{h}}$ 函数本身又由傅里叶变换关系给出[见方程(6-5)]：

$$\tilde{\mathbf{h}}(x_i, y_i)=\int_{-\infty}^{\infty}\int P(\lambda d_i\tilde{x}, \lambda d_i\tilde{y})\exp[-j2\pi(x_i\tilde{x}+y_i\tilde{y})]d\tilde{x}d\tilde{y}.$$

于是我们得到，对于一个衍射受限系统，

$$\mathbf{H}(f_X, f_Y)=\mathscr{F}\{\mathscr{F}\{P(\lambda d_i\tilde{x}, \lambda d_i\tilde{y})\}\}=$$
$$=P(-\lambda d_i f_X, -\lambda d_i f_Y). \qquad (6\text{-}18)$$

这个关系式极为重要.在频域上，这个关系式所提供的关于衍射受限相干系统行为的情况十分清楚. 光瞳函数 P 之值不是 1 就是 0，相干传递函数之值也是如此. 这当然就意味着，在频域中存在一个有限通频带，衍射受限系统可以通过此通带内的全部频谱分量，而没有振幅或位相畸变[1]. 在这个通带的边界上，频率响应突然降到零，这意味着在通带之外的频率分量完全被衰减掉.

最后，注意 (6-18) 式中的 P 的自变量带有负号，这意味着相干传递函数正比于经过反射的光瞳函数. 我们可以省掉

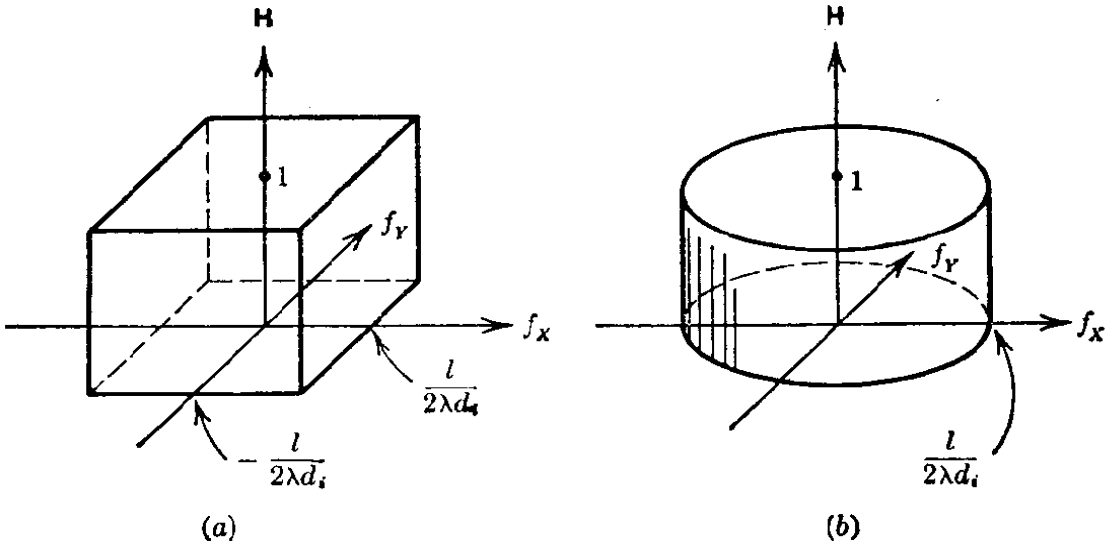


图 6-3　衍射受限系统的相干传递函数
(a)出射光瞳为正方形　　(b)出射光瞳为圆形

1) 注意，这个结论只是对无像差的系统才能得出。我们在 §6-4 将看到，一个有像差的系统在它的通带之内也有畸变.

这个符号上的累赘，只要今后我们是在一个反射坐标系中而不是在图 6-1 的通常坐标系中来定义 P. 于是，可以写成

$$\mathbf{H}(f_X, f_Y)=P(\lambda d_i f_X, \lambda d_i f_Y), \qquad (6\text{-}19)$$

这个区别在这里对我们并不重要，因为下面要讨论的所有问题在 f_X 和 f_Y 坐标系中全是对称的.

衍射受限系统的相干传递函数的例子

为了说明衍射受限的相干成像系统的频率响应特性，我们来考虑系统的出射光瞳是正方形（宽度为 l）和圆形（直径为 l）时的相干传递函数.对于这两个情形，我们分别有：

$$P(x, y)=\mathrm{rect}\left(\frac{x}{l}\right)\ \mathrm{rect}\left(\frac{y}{l}\right),$$

$$P(x, y)=\mathrm{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{l/2}\right).$$

于是，根据(6-19)，相应的相干传递函数是

$$\mathbf{H}(f_X, f_Y)=\mathrm{rect}\left(\frac{\lambda d_i f_X}{l}\right)\ \mathrm{rect}\left(\frac{\lambda d_i f_Y}{l}\right),$$

$$\mathbf{H}(f_X, f_Y)=\mathrm{circ}\left(\frac{\sqrt{f_X^2+f_Y^2}}{l/2\,\lambda d_i}\right).$$

这些函数如图 6-3 所示. 注意，在这两种情形下都可定义一个截止频率 f_0

$$f_0=\frac{l}{2\lambda d_i}\ . \qquad (6\text{-}20)$$

其中在圆形光瞳情况下，截止对频率平面上的一切方向都是均匀的；但在正方形光瞳的情况下，截止只适用于沿 f_X 和 f_Y 轴的方向. 为了说明 f_0 的大小的典型的数量级，假定 $l=2$ cm，$d_i=10$ cm，以及 $\lambda=10^{-4}$cm，那么，截止频率为 100 周/mm.

§6-3 衍射受限的非相干成像系统的频率响应

我们已经看到，出射光瞳与相干传递函数之间的关系是非常直接而简单的. 当物体照明为非相干光时，我们将会看到，成像系统的传递函数仍由出射光瞳确定，但是二者之间的关系较为间接一些并且更有趣一些. 因此，非相干成像理论比起相干成像理论内容更为丰富. 现在我们就来考虑这个理论. 和以前一样，我们仍然只限于注意衍射受限系统，虽然下面紧接着的讨论对一切非相干系统都适用，不管它们有没有像差.

光学传递函数和它与相干传递函数的关系

前面已经看到，使用非相干光照明的成像系统遵从强度卷积积分

$$\mathbf{I}_i(x_i, y_i)=\kappa\int_{-\infty}^{\infty}\int|\tilde{\mathbf{h}}(x_i-\tilde{x}_0, y_i-\tilde{y}_0)|^2\mathbf{I}_g(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)d\tilde{x}_0 d\tilde{y}_0. \tag{6-21}$$

因此，这样的系统应当作为强度分布的线性变换而进行频谱分析. 为此，我们定义 $\mathbf{I}_g$ 和 $\mathbf{I}_i$ 的规范化频谱为

$$\mathscr{G}_g(f_X, f_Y)=$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int\mathbf{I}_g(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)\exp[-j2\pi(f_X\tilde{x}_0+f_Y\tilde{y}_0)]d\tilde{x}_0 d\tilde{y}_0}{\int_{-\infty}^{\infty}\int\mathbf{I}_g(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)d\tilde{x}_0 d\tilde{y}_0}, \tag{6-22}$$

$$\mathscr{G}_i(f_X,f_Y)=$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{I}_i(x_i,y_i)\exp[-j2\pi(f_X x_i+f_Y y_i)]dx_i dy_i}{\int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{I}_i(x_i,y_i)\,dx_i dy_i}.$$

(6-23)

用频谱的"直流分量"之值来对频谱进行规范化，一方面是为了数学上的方便，另一方面还有更根本的原因．由于强度是一个非负值的量，一个强度分布总是带有一个非零的"直流分量"或定常的本底．一个像的视觉质量在很大程度上依赖于"反衬度"，或者说是依赖于像的携带信息的部分相对于总要有的本底的相对强度．因此用这个本底来对频谱规范化．

相仿地，系统的规范化传递函数可定义为

$$\mathscr{H}(f_X,f_Y)=$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int |\tilde{\mathbf{h}}(x_i,y_i)|^2\exp[-j2\pi(f_X x_i+f_Y y_i)]dx_i dy_i}{\int_{-\infty}^{\infty}\int |\tilde{\mathbf{h}}(x_i,y_i)|^2 dx_i dy_i}.$$

(6-24)

对方程(6-21)应用卷积定理，便得出频域内的关系式

$$\mathscr{G}_i(f_X,f_Y)=\mathscr{H}(f_X,f_Y)\mathscr{G}_g(f_X,f_Y). \qquad (6\text{-}25)$$

函数$\mathscr{H}$通常称为系统的光学传递函数(optical transfer function下面简写为OTF)．它的模$|\mathscr{H}|$称为调制传递函数(modulation transfer function下面简写为MTF)．注意，$\mathscr{H}(f_X,f_Y)$简单地表示系统施加于频率分量(f_X,f_Y)的复数权重因子相对于施加于直流分量的权重因子的比值．

因为相干传递函数和光学传递函数二者的定义中都含有函数 $\tilde{\mathbf{h}}$，我们预料它们二者之间应有某种特殊关系。实际上也的确存在这样的关系，并且不难利用第二章中的自相关定理求出。由于

$$\mathbf{H}(f_X, f_Y) = \mathscr{F}\{\tilde{\mathbf{h}}\},$$

和

$$\mathscr{H}(f_X, f_Y) = \frac{\mathscr{F}\{|\tilde{\mathbf{h}}|^2\}}{\mathscr{F}\{|\tilde{\mathbf{h}}|^2\}|_{f_x=0, f_x=0}},$$

立即得出

$$\mathscr{H}(f_X, f_Y) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{H}(\xi', \eta')\mathbf{H}^*(\xi' + f_X, \eta' + f_Y)\,d\xi' d\eta'}{\int_{-\infty}^{\infty}\int |\mathbf{H}(\xi', \eta')|^2 d\xi' d\eta'}. \tag{6-26}$$

作简单的变数变换

$$\xi = \xi' + \frac{f_X}{2}, \quad \eta = \eta' + \frac{f_Y}{2},$$

结果得到对称的表示式

$$\mathscr{H}(f_X, f_Y) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{H}\left(\xi - \frac{f_X}{2}, \eta - \frac{f_Y}{2}\right)\mathbf{H}^*\left(\xi + \frac{f_X}{2}, \eta + \frac{f_Y}{2}\right)d\xi d\eta}{\int_{-\infty}^{\infty}\int |\mathbf{H}(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta}. \tag{6-27}$$

方程(6-27)是相干系统的性质与非相干系统的性质之间的主要联系。注意，它对有像差的系统和没有像差的系统都完全成立。

OTF 的一般性质

直接从方程 (6-27) 可导出 OTF 的一系列非常简单而普遍的性质. 最重要的几个性质列举如下:

1. $\mathscr{H}(0,0)=1$,

2. $\mathscr{H}(-f_X,-f_Y)=\mathscr{H}^*(f_X,f_Y)$,

3. $|\mathscr{H}(f_X,f_Y)|\leqslant|\mathscr{H}(0,0)|$.

在方程(6-27)中令 $f_X=0, f_Y=0$, 即可直接得出性质 1. 性质 2 的证明留给读者作为一个练习, 它只不过说明了一个实函数的傅里叶变换式是厄米的.

证明 MTF 在任何频率下之值总是小于它的直流分量值 1, 更要费劲些. 为了证明性质 3, 我们要利用 schwarz 不等式[6-12], 它可表述如下: 若 $\mathbf{X}(\xi,\eta)$和$\mathbf{Y}(\xi,\eta)$是(ξ,η)的任意两个复值函数, 那末

$$\left|\iint \mathbf{XY}\,d\xi\,d\eta\right|^2\leqslant\iint|\mathbf{X}|^2d\xi d\eta\cdot\iint|\mathbf{Y}|^2d\xi d\eta,\quad(6\text{-}28)$$

其中等号只当 $\mathbf{Y}=\mathbf{KX}^*$ 时才成立, $\mathbf{K}$ 是一个复数常数. 令

$$\mathbf{X}(\xi,\eta)=\mathbf{H}\left(\xi-\frac{f_X}{2},\ \eta-\frac{f_Y}{2}\right)\ \text{及}\ \mathbf{Y}(\xi,\eta)=$$

$$=\mathbf{H}^*\left(\xi+\frac{f_X}{2},\ \eta+\frac{f_Y}{2}\right),$$

我们就得到

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\iint\mathbf{H}\left(\xi-\frac{f_X}{2},\eta-\frac{f_Y}{2}\right)\mathbf{H}^*\left(\xi+\frac{f_X}{2},\eta+\frac{f_Y}{2}\right)d\xi d\eta\right|^2\leqslant$$

$$\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\iint\left|\mathbf{H}\left(\xi-\frac{f_X}{2},\eta-\frac{f_Y}{2}\right)\right|^2d\xi d\eta\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\iint\left|\mathbf{H}^*\left(\xi+\frac{f_X}{2},\eta+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{f_Y}{2}\right)\right|^2d\xi d\eta=\left[\int_{-\infty}^{\infty}\iint\left|\mathbf{H}(\xi,\eta)\right|^2d\xi d\eta\right]^2.$$

用不等式的右边一项进行规范化，便得到 $|\mathscr{H}(f_X,f_Y)|$ 决不大于 1 .

最后应该指出，虽然 OTF 在零频率下之值恒为 1 ，但这并不意味着像的本底的绝对强度水平等于物体的本底的绝对强度水平. 实际上，由于系统的入射孔径大小有限，绝对强度水平总是降低的，但是由于 OTF 的特殊的规范化方法，使得这种降低不明显.

无像差系统的 OTF

迄今为止，我们的讨论对有像差和无像差的系统都同样适用. 现在来考虑一个衍射受限的非相干系统的特殊情形. 我们还记得，对于相干系统，有

$$\mathbf{H}(f_X,f_Y)=P(\lambda d_i f_X,\ \lambda d_i f_Y),$$

对于非相干系统，从方程(6-27)作简单的变数变换可得

$$\mathscr{H}(f_X,f_Y)=\frac{\displaystyle\int\int_{-\infty}^{\infty} P\left(\xi-\frac{\lambda d_i f_X}{2},\eta-\frac{\lambda d_i f_Y}{2}\right)P\left(\xi+\frac{\lambda d_i f_X}{2},\eta+\frac{\lambda d_i f_Y}{2}\right)d\xi d\eta}{\displaystyle\int\int_{-\infty}^{\infty} P(\xi,\eta)d\xi d\eta}. \tag{6-29}$$

上式中利用了 P 不等于 1 就等于 0 的性质把分母中的 P^2 换成 P.

式(6-29)给出 $\mathscr{H}$ 的一个极为重要的几何解释. 它的分子代表两个错开的光瞳函数相互重叠的面积，其中一个的中心在$(\lambda d_i f_X/2,\lambda d_i f_Y/2)$点，而另一个的中心则位于径向相对的点 $(-\lambda d_i f_X/2,-\lambda d_i f_Y/2)$，其分母只不过是用光瞳的总面积来对这个重叠面积规范化. 因此

$$\mathscr{H}(f_X, f_Y) = \frac{\text{重叠面积}}{\text{总面积}}.$$

要计算一个衍射受限系统的 OTF，可直接按照这个几何解释所指明的几个步骤进行，如图 6-4 所示。对于简单的几何形状，可以求出规范化的重叠面积的完整表达式(见下面的例子)。对于很复杂的光瞳，可用面积仪或数字计算机算出 OTF 在一系列分立频率上的值。

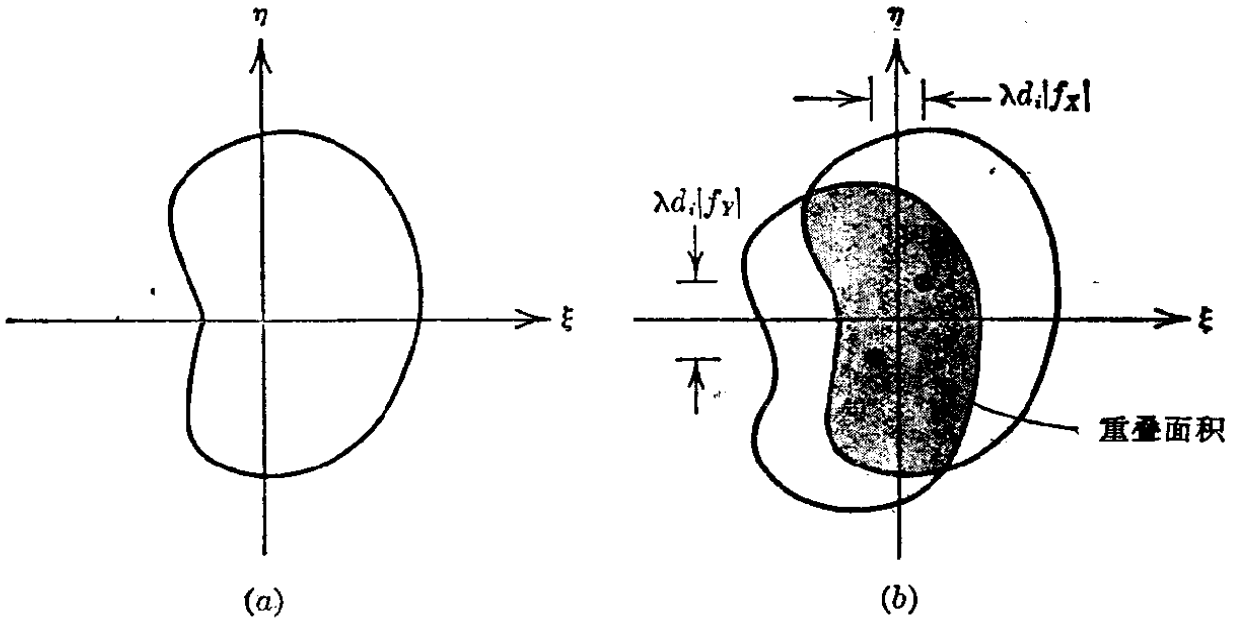


图6-4　衍射受限系统的 OTF 的几何解释
(*a*) 光瞳函数——总面积是 OTF 的分母；
(*b*) 两个错开的光瞳函数——阴影部分的面积是 OTF 的分子。

最后，注意这个几何解释表明一个衍射受限系统的 OTF 恒为实值并且是非负的。但是，它并不一定是频率的一个单调下降函数(例如见习题 6-1)。

衍射受限系统的 OTF 的例子

现在我们来讨论具有正方形出射光瞳（宽度为 l）和圆形出射光瞳（直径为 l）的衍射受限系统所对应的 OTF。图 6-5 *a* 形象地说明了在正方形光瞳情况下的计算方法。重叠面

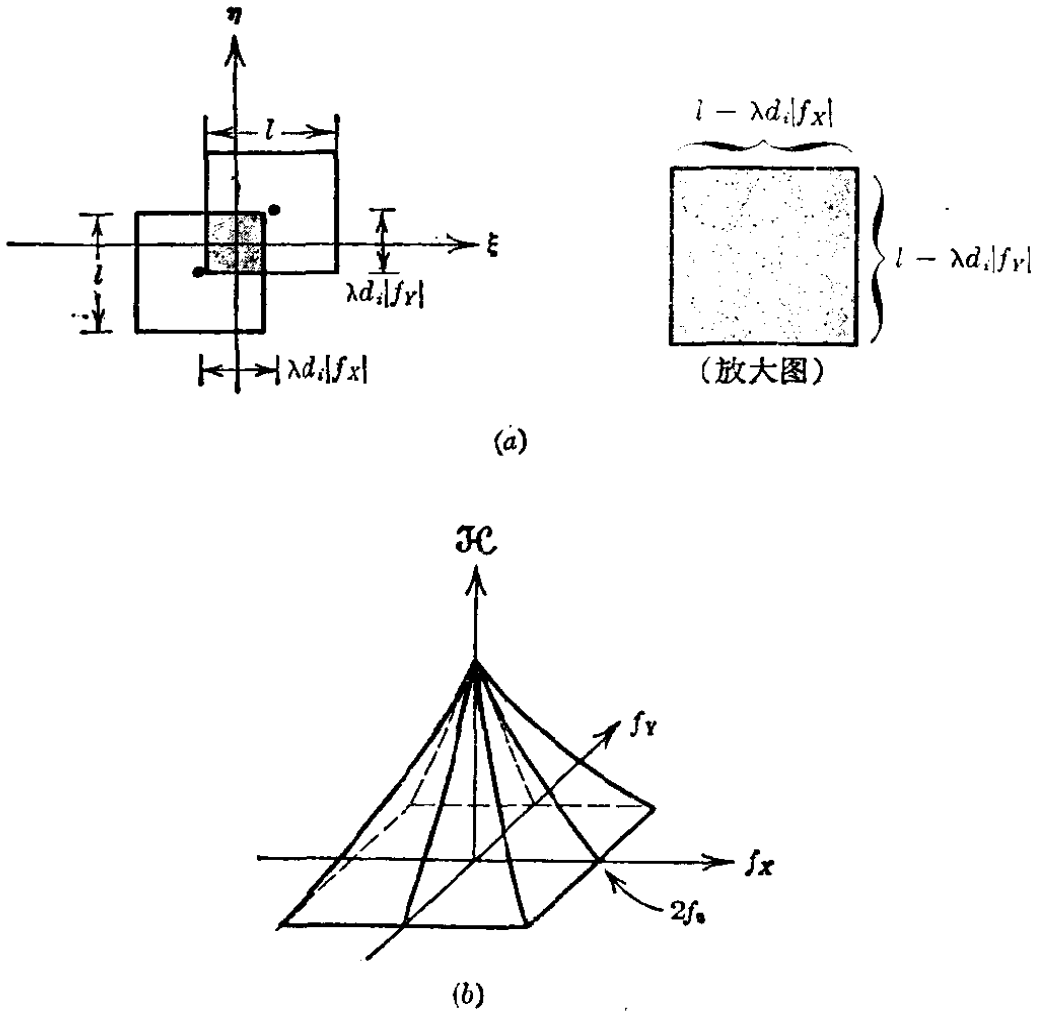


图 6-5　具有正方形出射光瞳的衍射受限系统的 OTF
(a) 重叠面积的计算；(b)所得出的 OTF

积显然为

$$\alpha(f_X,f_Y)=\begin{cases}(l-\lambda d_i|f_X|)(l-\lambda d_i|f_Y|) & |f_X|\leqslant l/\lambda d_i \\ & |f_Y|\leqslant l/\lambda d_i \\ 0 & \text{其它情形}\end{cases}$$

用总面积 l^2 来规范这块面积，结果变为

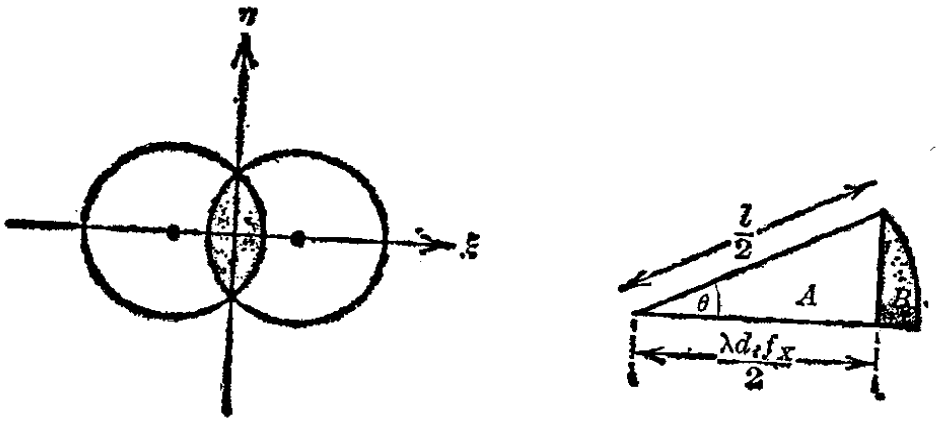
$$\mathscr{H}(f_X,f_Y)=\Lambda\left(\frac{f_X}{2f_0}\right)\Lambda\left(\frac{f_Y}{2f_0}\right), \qquad (6\text{-}30)$$

其中 Λ 是第二章中所述的三角状函数，而 f_0 是同一系统用相干光照明时的截止频率

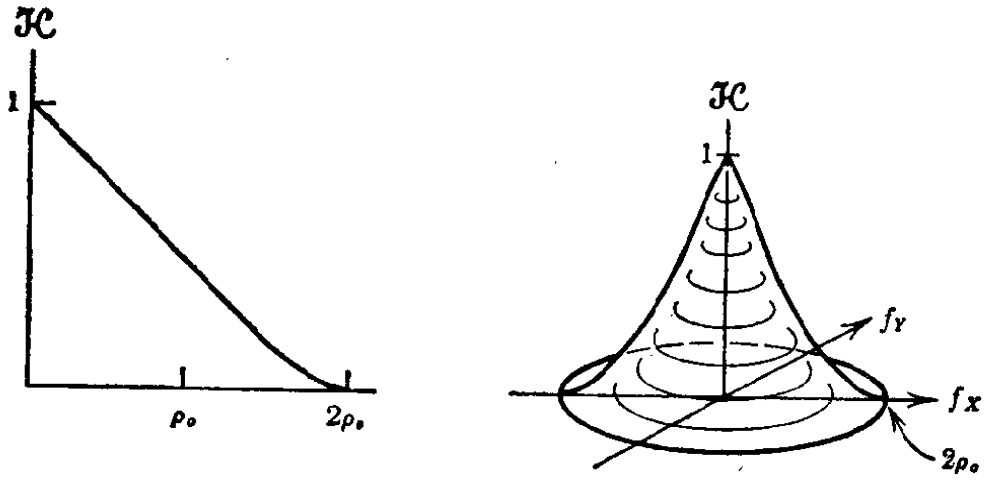
$$f_0=\frac{l}{2\lambda d_i}.$$

注意，非相干系统沿f_X和f_Y轴方向上的截止频率是$2f_0$[1]. 方程(6-30)所表示的OTF画在图6-5 b中.

当出射光瞳是圆形时，计算没有这样直接了当. 由于OTF显然应该是圆对称的，故只须沿f_X轴正向计算$\mathscr{H}$就够



(a)



(b)

图 6-6 具有圆形出射光瞳的衍射受限系统的OTF
(a) 重叠面积的计算；(b)所得出的OTF

1) 不应由这一点就以为非相干系统的分辨本领是相干系统的两倍，见§6-5.

了．如图 6-6 所示，重叠面积是圆扇形 $A+B$ 中的阴影部分 B 的面积的四倍．但圆扇形面积是

$$(A+B)\text{的面积}=\left[\frac{\theta}{2\pi}\right]\left[\pi\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]=$$

$$=\left[\frac{\cos^{-1}(\lambda d_i f_x/l)}{2\pi}\right]\left[\pi\left(\frac{l}{2}\right)^2\right],$$

而三角形 A 的面积是

$$(A)\text{的面积}=\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda d_i f_x}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2-\left(\frac{\lambda d_i f_x}{2}\right)^2},$$

最后我们有

$$\mathscr{H}(f_x,0)=\frac{4[(A+B)\text{的面积}-(A)\text{的面积}]}{\pi(l/2)^2},$$

或者，对于频率平面上的一个任意方向上的径向位移 ρ，有

$$\mathscr{H}(\rho)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\left[\cos^{-1}\left(\dfrac{\rho}{2\rho_0}\right)-\dfrac{\rho}{2\rho_0}\sqrt{1-\left(\dfrac{\rho}{2\rho_0}\right)^2}\right] & \rho\leqslant 2\rho_0\\ 0 & \text{其它},\end{cases}\tag{6-31}$$

式中的 ρ_0 这个量是相干系统的截止频率

$$\rho_0=\frac{l}{2\lambda d_i},$$

从图 6-6 b，再次看到 OTF 扩展到相干截止频率的二倍值处．

§ 6-4 像差及其对频率响应的影响

在讨论成像系统的普遍模型时，曾特别假设，点光源物体将在出射光瞳上产生一个理想球面波，这个球面波向理想的几何像点会聚．这样的系统称为衍射受限的．现在我们考虑各种像差的影响，所谓像差即是出射光瞳上的波前对理想球面的各种偏离．像差可以由各种原因引起，从聚焦不良之类的简单缺陷，到理想的球面透镜的固有性质如球面像差．对

像差以及它们对频率响应的细致影响的完善讨论已超出本书范围。我们只集中讨论非常一般的影响，并举一个比较简单的例子来说明。对各种类型的像差及其对频率响应的影响的较完善的讨论，读者可参看例如文献[3—4](第九章)。

广义光瞳函数

我们前面已经看到，当成像系统是衍射受限系统时，(相干)脉冲响应是出射孔径的夫琅和费衍射图样，其中心在理想像点上，这件事向我们提示了一个方便的方法，使得可以把像差直接包括到我们所得到的结果中来。特别是，当存在波前偏差时，我们可以设想照射出射光瞳的仍是一个理想球面波，但在孔径内有一块移相板，因而使离开孔径的波前变形。若出射光瞳中(x, y)点的位相偏差用$kW(x, y)$表示，其中$k=2\pi/\lambda$，W是有效的光程偏差，那末，虚拟的移相板的复数透射比$\mathbf{P}$便是

$$\mathbf{P}(x, y)=P(x, y)\exp[jkW(x, y)]. \qquad (6\text{-}32)$$

复函数$\mathbf{P}$可称为广义光瞳函数。于是，一个有像差的相干系统的脉冲响应就简单地是一个透射比为$\mathbf{P}$的孔径的夫琅和费衍射图样。有像差的非相干系统的脉冲响应当然仍是其相干系统的脉冲响应的模的平方。

像差对相干传递函数的影响

在考虑衍射受限的相干系统时，它的传递函数是由以下的考虑求得的：(1)脉冲响应是光瞳函数的傅里叶变换式，而(2)相干传递函数是脉冲响应的傅里叶变换式。由于这两个傅里叶变换关系的结果，求得传递函数正比于光瞳函数$\mathbf{P}$。当存在像差时，可以用完全相同的推理，只要用广义光瞳函数$\mathbf{P}$代替P。因此，相干传递函数可写成

$$\mathbf{H}(f_X, f_Y)=\mathbf{P}(\lambda d_i f_X, \lambda d_i f_Y)=$$
$$=P(\lambda d_i f_X, \lambda d_i f_Y)\exp[jkW(\lambda d_i f_X, \lambda d_i f_Y)]. \quad (6\text{-}33)$$

显然，像差的出现，并不会影响到相干传递函数的通带限制，这个限制是由出射孔径的大小有限造成的。我们看到，像差的唯一影响是在通带内引入了位相畸变。当然，位相畸变对系统的保真度可以有严重的影响。

关于波前像差对相干系统的影响的一般性质就只有这么多可说的。结果仍然很简单。下面我们就要看到，对于非相干系统，结果仍然更要复杂些，而且在许多方面也更有趣些。

像差对 OTF 的影响

在求出像差对相干传递函数的影响之后，借助于方程(6-27)，我们就能够求像差对光学传递函数的影响了，为了简化记号，我们定义函数 $\alpha(f_X, f_Y)$ 为下面两个光瞳函数

$$P\left(\xi-\frac{\lambda d_i f_X}{2}, \eta-\frac{\lambda d_i f_Y}{2}\right)\text{和}\ P\left(\xi+\frac{\lambda d_i f_X}{2}, \eta+\frac{\lambda d_i f_Y}{2}\right)$$

的重叠面积。用这种新记号，衍射受限系统的 OTF 为

$$\mathscr{H}(f_X, f_Y)=\frac{\iint d\xi d\eta}{\iint_{\alpha(0,0)} d\xi d\eta}.$$

当存在像差时，将(6-33)代入(6-27)，给出 $\mathscr{H}(f_X, f_Y)$

$$\iint_{\alpha(f_X,f_Y)} \exp\left\{jk\left[W\left(\xi-\frac{\lambda d_i f_X}{2}, \eta-\frac{\lambda d_i f_Y}{2}\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-W\left(\xi+\frac{\lambda d_i f_X}{2}, \eta+\frac{\lambda d_i f_Y}{2}\right)\right]\right\} d\xi d\eta$$
$$=\frac{}{\iint_{\alpha(0,0)} d\xi d\eta}. \quad (6\text{-}34)$$

这个式子使得我们可以把波前偏差与OTF直接联系起来.

做为一个重要的普遍性质，可以证明像差绝不会增大MTF(OTF的模)之值. 为了证明这一性质，要利用Schwarz不等式[方程(6—28)]. 令该方程中的$\mathbf{X}$和$\mathbf{Y}$为

$$\mathbf{X}(\xi,\eta)=\exp\left[\ jkW\left(\xi-\frac{\lambda d_i f_X}{2},\eta-\frac{\lambda d_i f_Y}{2}\right)\right],$$

$$\mathbf{Y}(\xi,\eta)=\exp\left[\ -jkW\left(\xi+\frac{\lambda d_i f_X}{2},\eta+\frac{\lambda d_i f_Y}{2}\right)\right].$$

注意到$|\mathbf{X}|^2=|\mathbf{Y}|^2=1$,可得

$$|\mathscr{H}(f_X,f_Y)|^2_{\text{有像差}}$$

$$=\left|\frac{\iint\limits_{a(f_X,f_Y)}\exp\left\{jk\left[W\left(\xi-\frac{\lambda d_i f_X}{2},\eta-\frac{\lambda d_i f_Y}{2}\right)-W\left(\xi+\frac{\lambda d_i f_X}{2},\eta+\frac{\lambda d_i f_Y}{2}\right)\right]\right\}d\xi d\eta}{\iint\limits_{a(0,0)}d\xi d\eta}\right|^2$$

$$\leqslant\left[\frac{\iint\limits_{a(f_X,f_Y)}d\xi d\eta}{\iint\limits_{a(0,0)}d\xi d\eta}\right]^2=|\mathscr{H}(f_X,f_Y)|^2_{\text{无像差}}.$$

因此，像差一般将会降低像的强度中各个空间频率分量的反衬度. 绝对截止频率仍保持不变，但是严重的像差将使OTF的高频部分减小到这种程度，以至有效截止频率要远低于衍射受限系统的截止频率. 此外，像差可以使OTF在某些频率上取负值，这个结果是无像差系统绝不会发生的. 当OTF为负值时，像在这个频率上的分量的反衬度发生反转，

即强度的峰值变为强度的零点，反之亦然。在下面一段中将看到这一效应的例子。

简单像差举例：聚焦误差

数学上最容易讨论的像差之一是简单的聚焦误差。但是甚至在这种简单情形下，为了保持数学上的简单，也必须假定孔径为正方形的(而不是更有实际意义的圆孔径)。

如§ 5-3 所述，聚焦条件由透镜定律决定：

$$\frac{1}{d_i}+\frac{1}{d_0}-\frac{1}{f}=0\,.$$

当像平面是在焦外时，下述更普遍的关系式成立：

$$\frac{1}{d_i}+\frac{1}{d_0}-\frac{1}{f}=\epsilon.$$

比较方程(5-30)与(6-33)，得像差函数 W 为

$$W(x,\,y)=\frac{\epsilon(x^2+y^2)}{2}. \tag{6-35}$$

对于宽度为 l 的方孔径，在孔径边缘上 (沿 x 或 y 轴)的最大的位相偏差为 $\epsilon kl^2/8$. 因此其最大的光程差 w 为

$$w=\frac{\epsilon l^2}{8}, \tag{6-36}$$

数 w 是聚焦误差严重程度的一个方便的指标.

若把(6-35) 式所给出的像差函数 W 代入 OTF 的表示式(6-34)，经过一系列直接运算后，给出

$$\mathscr{H}(f_X,f_Y)=\Lambda\left(\frac{f_X}{2f_0}\right)\Lambda\left(\frac{f_Y}{2f_0}\right)$$

$$\operatorname{sinc}\left[\frac{8w}{\lambda}\left(\frac{f_X}{2f_0}\right)\left(1-\frac{|f_X|}{2f_0}\right)\right]\operatorname{sinc}\left[\frac{8w}{\lambda}\left(\frac{f_Y}{2f_0}\right)\left(1-\frac{|f_Y|}{2f_0}\right)\right]. \tag{6-37}$$

这个 OTF 的截面图见于图 6-7．注意当 $w=0$ 时，的确就得到衍射受限的 OTF．还要注意到，对于大于 $\lambda/2$ 的 w 值，OTF 的符号发生反转．若用图 6-8 *a* 中的“辐条”靶作为物，很容易观察到这种反衬度的反转．当系统的聚焦失调时，随着空间频率的增高（亦即半径的减小），反衬度逐渐减弱，并且观察到一系列的反衬度反转，如图 6-8 *b* 所示．

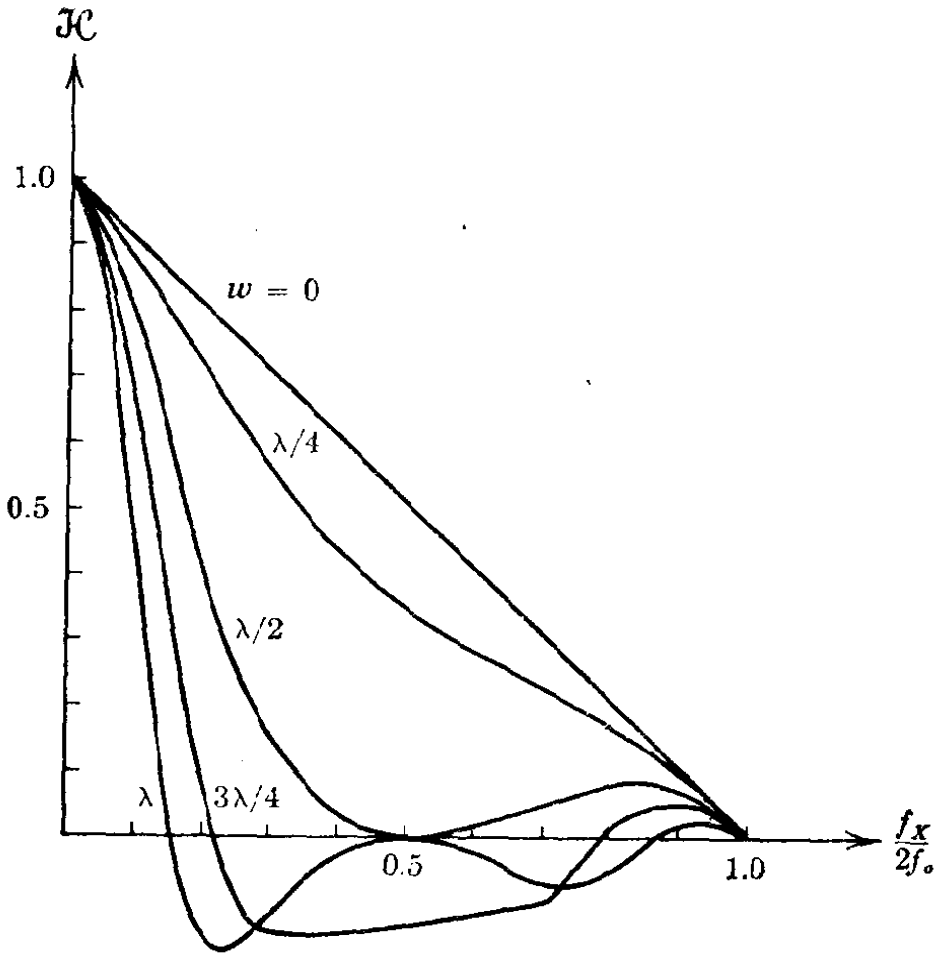
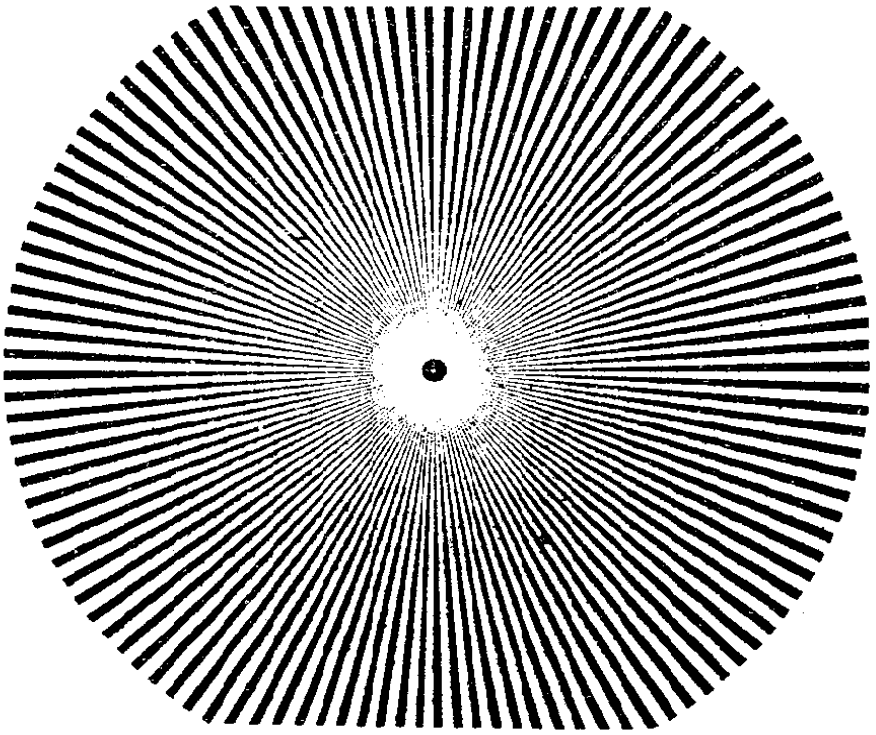


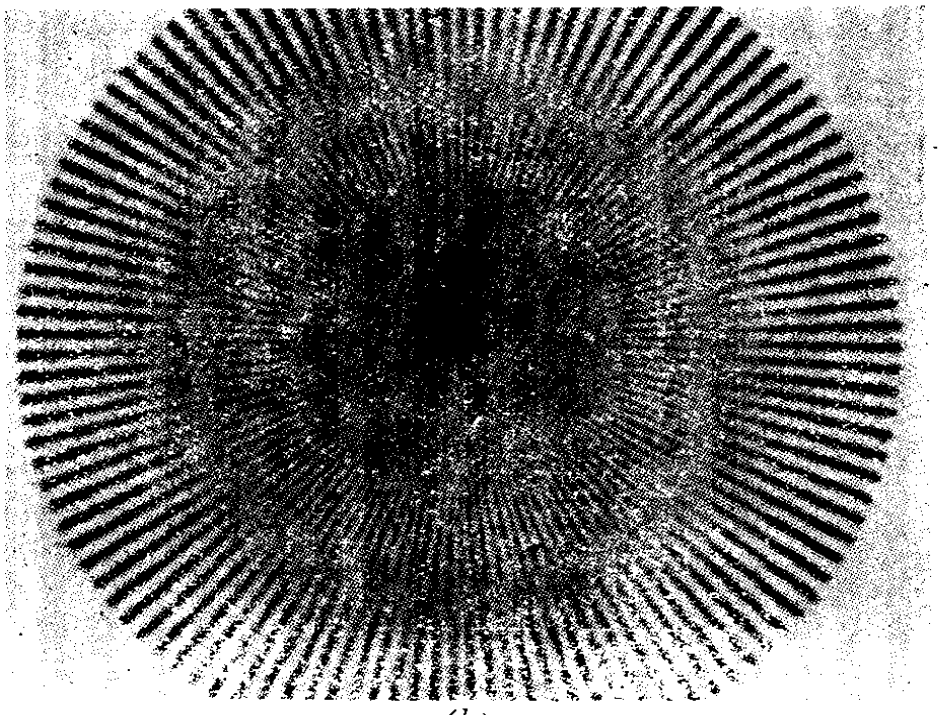
图 6-7　一个聚焦有误差并且光瞳为方形的系统的 OTF 的截面图

最后，考虑散焦十分严重（即 $w \gg \lambda$）时 OTF 的形式．在这种情况下，对于比较小的 $f_X/2f_0$ 和 $f_Y/2f_0$ 值，频率响应即已降为零．因此我们可以写

$$1-\frac{|f_X|}{2f_0}\cong 1, \qquad 1-\frac{|f_Y|}{2f_0}\cong 1.$$



(*a*)



(*b*)

图 6-8 (*a*) 辐条靶的一个正确聚焦的像；(*b*) 散焦的像

而 OTF 简化为：

$$\mathscr{H}(f_X, f_Y) \simeq \mathrm{sinc}\left[\frac{8w}{\lambda}\left(\frac{f_X}{2f_0}\right)\right] \mathrm{sinc}\left[\frac{8w}{\lambda}\left(\frac{f_Y}{2f_0}\right)\right]. \quad (6\text{-}38)$$

有兴趣的读者可以验证(见习题 6-6)这正是几何光学所预言的 OTF! 更普遍的，当任何一种像差很严重时，对几何 光学所预言的脉冲 响应进行 傅里叶 变换，就可以得出 该系统的 OTF 的一个良好的近似.

§ 6-5 相干成像和非相干成像的比较

我们在 § 6-2 和 § 6-3 中看到，衍射受 限系统的 OTF 扩展到相干传递函数的截止频率的两倍处. 因此似乎可以得出结论：对于同一个成像系统，使用非相干照明 必定要比相干照明得到“更好”的像. 下面我们即可看到的，这个结论一般说来不正确. 这两种照明的比较要比这种肤浅的考察得出的结论远为复杂.

上述论据的主要毛病在于对这两种情形下的截止频率直接进行比较. 实际上，这二者是不可直 接比较的. 相干截止频率确定像的振幅的最高频率分量，而非相 干截止频 率则是对像的强度的频率分量而言的；但是在两种情形下最后的 可观察量都是强度. 无疑，两个系统的任何 直接比较 必须通过同一可观察量——像的强度来进行.

但是，即使进行比较的 物理量一致，也还 有一个 基本原因，使得进行这种比较仍是一个困难问题，即，究竟怎样才算“更好”，我们并没有下过定义. 这样，我们就没有一个普适的质量判据来作为判断的依据. 可以考虑一些可能的这一类的判据(例如，物强度和像强度之间的最小的均方差)，但遗憾的是，作为观察者的人最后一个相互作用是如此复杂而且对它了解得如此之少，以至很难提出一个真正有意义的判据.

由于缺乏有意义的质量判据，我们就只能考察这两类像的某些有限的方面，这时应当认识到，这样进行的比较可能与像的总体质量没有什么直接关系。但是，这样的比较仍是富有启发性的，因为它们指出了这两种类型照明之间的某些基本差异。

像强度的频谱

像强度的一个可对这两种照明情形进行比较的简单属性是它的频谱。虽然非相干系统对强度变换是线性的，但相干系统对此变量则是高度非线性的。因此在求相干系统的像的频谱时必须小心。

非相干情形下，确定像的强度的卷积方程是

$$I_i = |\tilde{\mathbf{h}}|^2 * I_g = |\tilde{\mathbf{h}}|^2 * |\mathbf{U}_g|^2.$$

另一方面，对于相干情形，我们有

$$I_i = |\tilde{\mathbf{h}} * \mathbf{U}_g|^2.$$

令符号★代表自相关积分

$$\mathbf{X}(f_X, f_Y) \bigstar \mathbf{X}(f_X, f_Y) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{X}(\xi, \eta) \cdot \mathbf{X}^*(\xi + f_X, \eta + f_Y)\, d\xi\, d\eta. \tag{6-39}$$

那末，在这种情形下像强度的频谱可直接写出如下：

$$\begin{aligned} &\text{非相干时} \quad \mathscr{F}\{I_i\} = [\mathbf{H} \bigstar \mathbf{H}]\ [\mathbf{G}_g \bigstar \mathbf{G}_g], \\ &\text{相干时} \quad \mathscr{F}\{I_i\} = \mathbf{H}\mathbf{G}_g \bigstar \mathbf{H}\mathbf{G}_g, \end{aligned} \tag{6-40}$$

其中 $\mathbf{G}_g$ 是 $\mathbf{U}_g$ 的频谱，$\mathbf{H}$ 是相干传递函数。

从普遍结果(6-40)并不能得出结论说，就频谱内容而言，一种照明要比另一种照明更好些。但是它的确表明这两种情形下的频谱内容可以很不相同，并且进一步表明，任何这一类比较的结论将十分强烈地依赖于物的强度分布和位相分布。

为了强调后面这一点，我们现在来考虑两个物体，它们具

有同样的强度透射率但位相的分布不同，其中一个在相干光照明下成像较好，而另一个则在非相干光下成像较好. 令这两个物体的强度透射率为

$$\tau(x_0, y_0)=\cos^2 2\pi\tilde{f}x_0.$$

这里我们假定

$$\frac{f_0}{2}<\tilde{f}<f_0,$$

f_0 是相干截止频率. 两个物的振幅透射率则取成

$$\begin{aligned} &A: \quad \mathrm{t}_a(x_0, y_0)=\cos 2\pi\tilde{f}x_0, \\ &B: \quad \mathrm{t}_b(x_0, y_0)=|\cos 2\pi\tilde{f}x_0|, \end{aligned} \tag{6-41}$$

于是二者只差一个周期性的位相分布.

图 6-9 形象地说明了频域中的各步运算，它们最后得出了物 A 的像的频谱. 在一切情况下都假定成像系统是衍射受限的. 注意像的强度分布的反衬度在非相干情形下要比相干情形差一些. 因此，对于这个特殊的物，我们必须说相干照明更好一些.

对物 B 进行的相应的比较就不必讲得这么详细了. 物 B 的振幅是周期性变化的，基频为 $2\tilde{f}$. 但由于 $2\tilde{f}>f_0$，因此对于相干情形，像的强度不出现变化；然而对于非相干系统，所成的像与对物 A 所成的像则相同. 于是在这种情形下必须认为非相干照明要更好些.

总之，从像的频谱内容的观点来看，到底哪种特殊照明更好，这个问题的答案十分强烈地依赖于物的精细结构，特别是它的位相分布. 不能得出结论说某种照明在所有的情形下都更为可取. 对两种照明进行比较一般来说是很复杂的，虽然也存在着如上述那样的简单情形. 关于另一个简单例子，读者可参看习题 6-3.

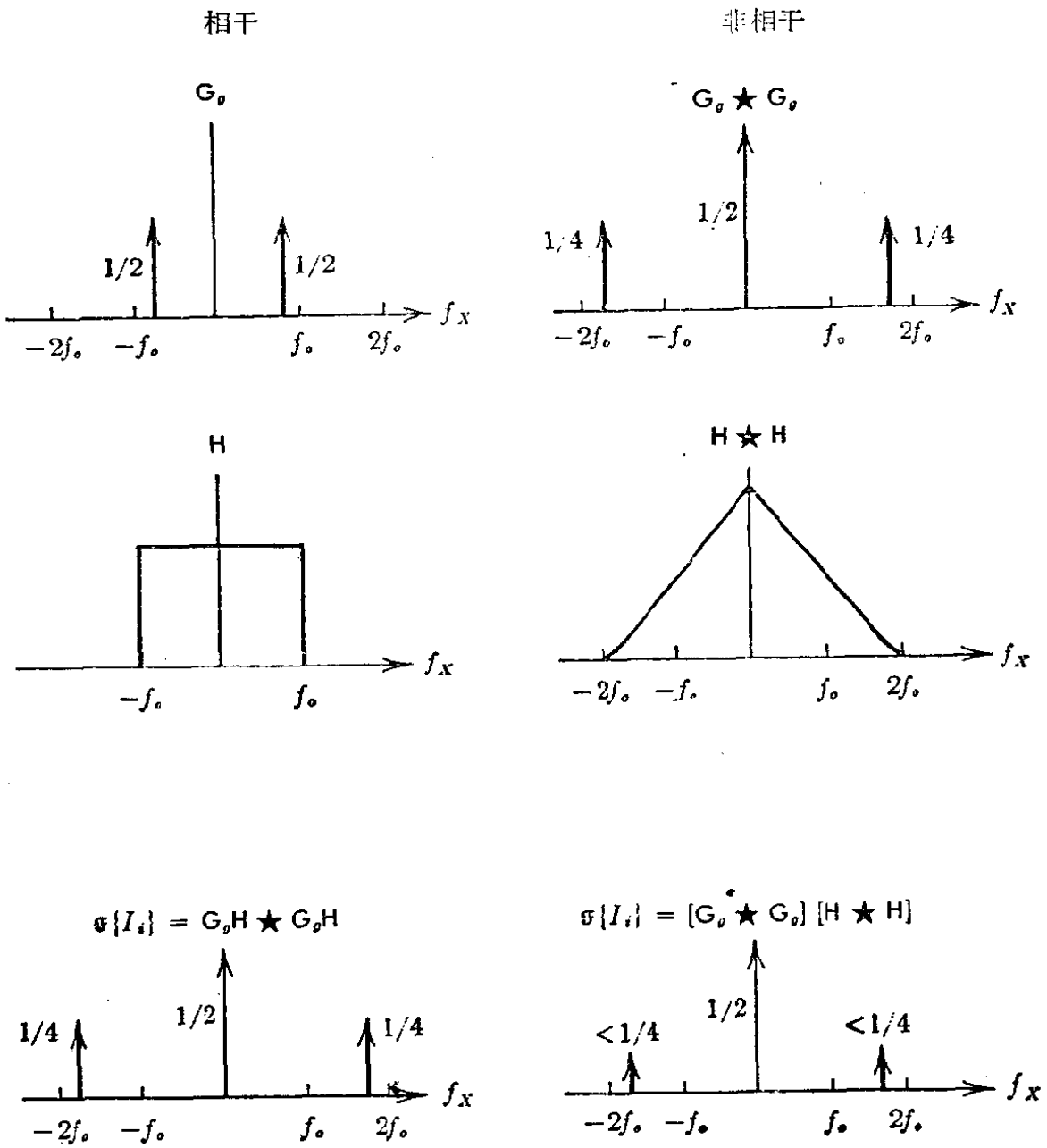


图 6-9　计算物 A 的像强度的频谱

两点间分辨率

第二个可能作为比较的判据的，是各个系统分辨很靠近的两个点光源的本领。两点分辨率判据早就用来作为光学系统的一个品质因数，尤其是在天文学的应用中，它有着非常实在的实际意义。

根据所谓瑞利分辨率判据，两个非相干点光源，若一个点光源产生的爱里斑的中心正好落在第二个点光源所产生的爱里斑的第一零点上，则说它们是一个（衍射受限）系统“刚刚能够分辨”的两个点光源。因此，在几何像上的最小可分辨间隔是

$$\delta = 1.22\frac{\lambda d_i}{l}, \tag{6-42}$$

其中 l 是出射光瞳的直径［参看方程 (4-18)］。图 6-10 对这个最小间隔画出了像的强度分布。我们看到，其中心凹陷的大小约为最大强度的 19 %。

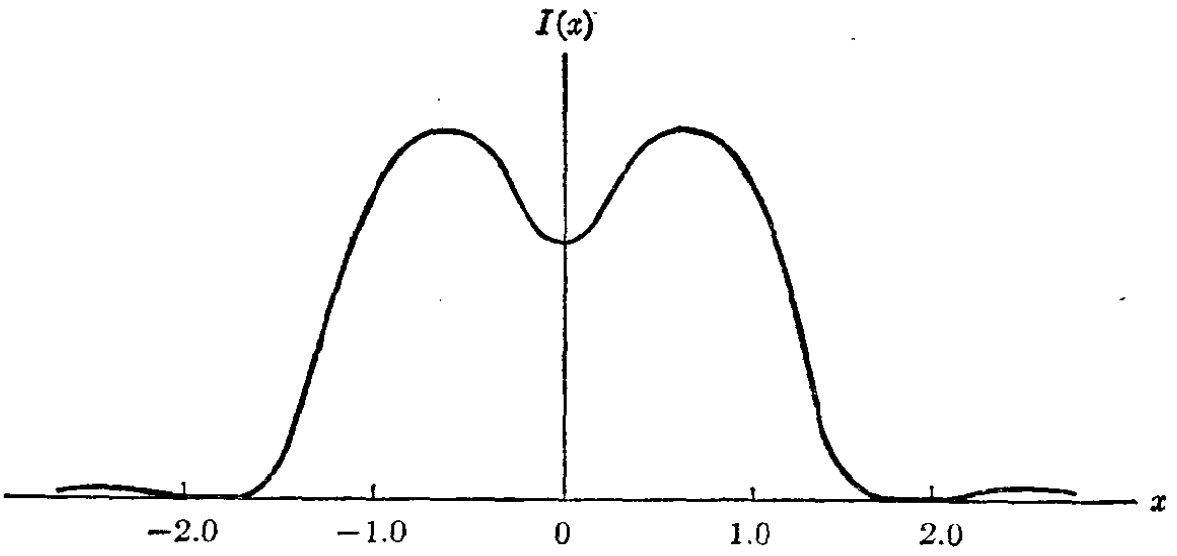


图 6-10　相距为瑞利间隔的两个非相干点光源的像的强度分布

现在我们可以问这样一个问题：要分辨相距为瑞利间隔 δ 的两个点光源，用相干照明比起非相干照明是来得更容易些还是更难些？当然，对于天体来说，这个问题纯粹是学院式的，因为天体永远是非相干的。但是这个问题在显微术中是有一定意义的，这里相干照明或非相干照明可随意选用。

和前面的例子一样，我们发现这个问题的答案依赖于物

上的位相分布．在规范化的像坐标中，可立即写出像的强度的截面为

$$I(x)=\left|2\frac{J_1[\pi(x-0.61)]}{\pi(x-0.61)}+e^{j\phi}2\frac{J_1[\pi(x+0.61)]}{\pi(x+0.61)}\right|^2,$$

其中 ϕ 是两个点光源之间的相对位相．图 6-11 对于两个点光源同相($\phi=0°$)、位相差 90° 以及反相($\phi=180°$) 三种情形画出了像的强度分布．当两个点光源位相差90°时，像的强度分布与非相干点光源所得结果全同．当两个物同相时，像的强度分布中不出现中心凹陷，因此这两点间的分辨不如非相干照明的情形．最后当两个物反相时，中心凹陷大于 19%，这两点间的分辨用相干照明要比用非相干照明更清楚．因此，到底哪种照明对提高两点分辨率更为可取，同样也不能得出一个普遍结论．

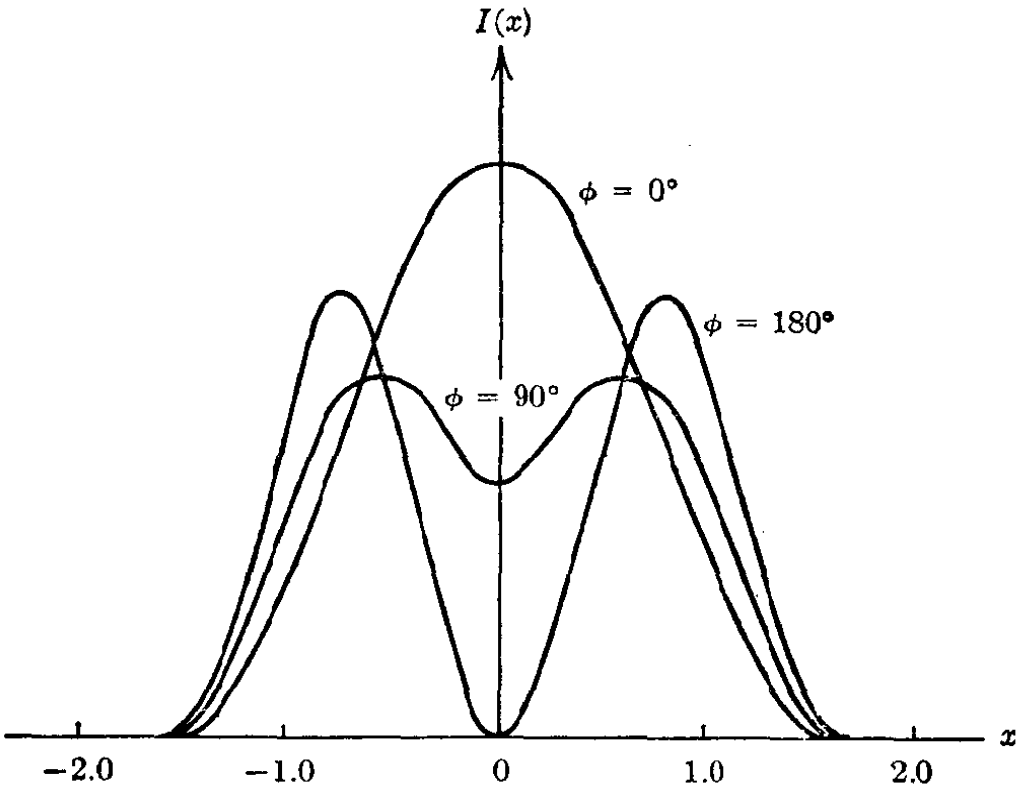


图 6-11　相距为瑞利间隔的两个互相相干的点光源的像的强度分布

其它效应

相干光成像和非相干光成像比较，还有其它一些各种各样的性质[6-13]。首先，非相干系统和相干系统对锐边的响应迥然不同。图 6-12 画出了一个具有方形出射光瞳的系统对一个阶跃函数物体的理论响应曲线。图 6-13 则是在两种照明情况下一个锐边的像的真实照片。我们看到，相干系统显现出相当显著的“振铃振荡(ringing)”。这个性质类似于传递函数下降过于陡峭的视频放大器电路中所出现的振铃振荡。相干成像系统的传递函数当然具有陡峭的不连续性，但 OTF 的下降是较为平缓的。从图 6-12 的曲线也可看到锐边的表观位置（即半强度响应值的位置）在两种照明下是不同的，相干照明情形下有小的误差。

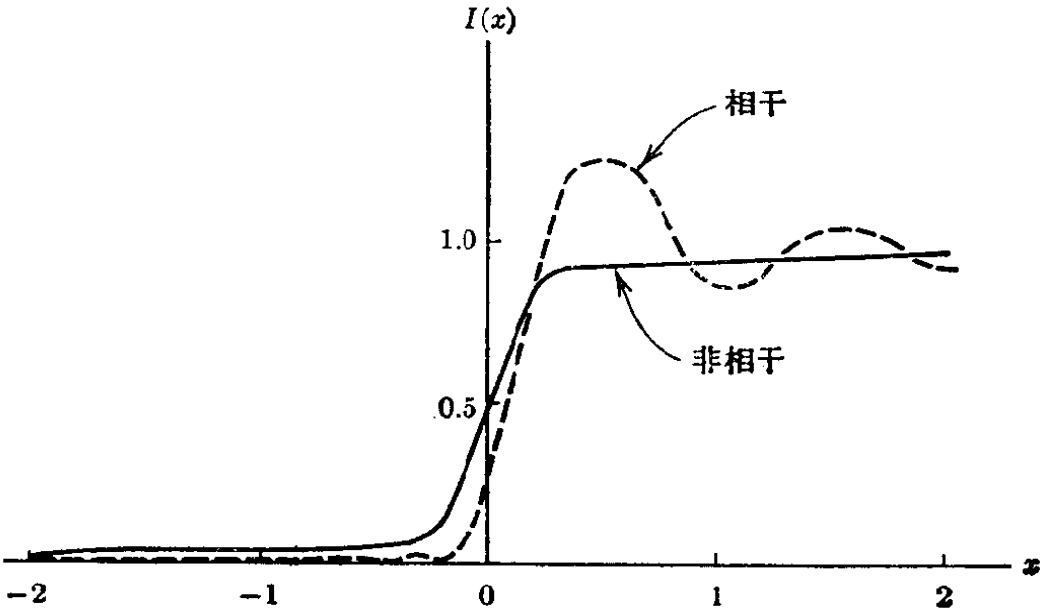
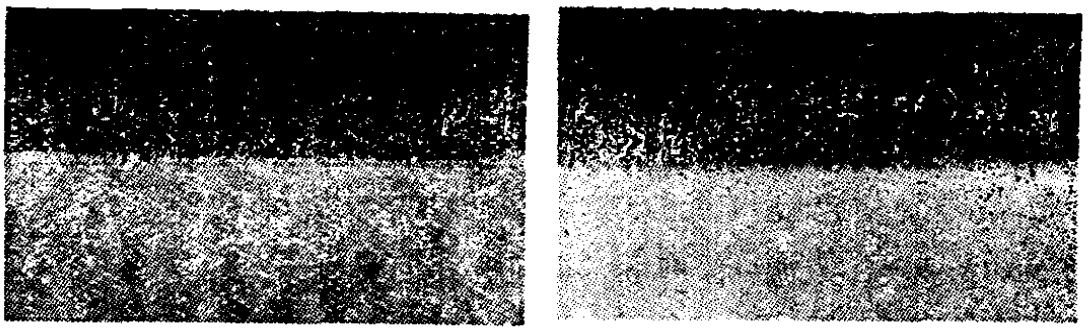


图 6-12　相干系统和非相干系统对一个阶跃函数物体的理论响应曲线

此外，我们还必须提到所谓斑纹效应(speckle effect)，这个效应在高度相干照明下很容易观察到。图 6-14 是一个物



(a) (b)

图 6-13 一个阶跃函数物体在(a)相干照明和(b)非相干照明下的照片



(a) (b)

图 6-14 显示斑点效应的(a)相干像和(b)非相干像(物是一幅透明照片，通过一个漫射体照明)

在相干光和非相干光照明下摄得的照片. 相干光照明下所成的像上的颗粒状特性是物体表面的光洁度不高和用来照明的激光光源的高度相干性的直接结果(例如，参看文献[6-14]，[6-15]). 可以证明[6-16]，单个斑纹的大小约为物上单个分辨单元(resolution cell)的大小. 因此，当我们所研究的特定物体接近光学系统的分辨率极限时，斑纹效应是相当讨厌的事. 在照明光束中放一块毛玻璃并且在观察时使之运动，可以在很大程度上解决这个问题. 这时光源的高度相干性被部

分破坏，而斑纹在很大程度上被“洗去”。

最后，高度相干照明对可能存在于到观察者的光程上的光学缺陷是特别敏感的。例如，透镜上微小的尘粒可以引起十分显著的衍射图样迭加在像上。在照明光束中放一块运动的散射体如毛玻璃，也可以使这些效应减小。

§ 6-6 超越经典衍射极限的分辨率

直到不久以前，还普遍认为，衍射效应是对光学系统性能的基本限制。人们都以为，要使像的分辨率高于经典衍射极限是毫无希望的。即使一个无穷大的透镜，其分辨率也由于倏逝波现象而被限制为一个光波波长的数量级。但是，最近的工作[6-17]-[6-19]表明，对于一定类型的物，分辨率的确有可能超越经典衍射极限[1]。事实上，我们在本节将看到，对于空间有界物体，无限精密的分辨率在原则上是可能的。

基本的数学原因

分辨率之所以可能超越经典极限，有着很基本的数学原因。它们的基础是两条基本的数学原理，我们把它们作为定理列举如下。这些原理的证明见例如文献[6-20]。

定理 1. 一个空间有界函数的二维傅里叶变换是$f_x f_y$平面上的解析函数.

定理 2. $f_x f_y$平面上的一个任意的解析函数，若在此平面上的一个任意小(但有限)的区域内，精确地知道这个函数的值，那末整个函数可通过解析延拓(唯一地)求出。

---

1) 特别有趣的是 G. Toraldo di Francia 的工作[6-17]，他利用超增益天线的理论证明，通常的“瑞利分辨极限”与其说是一个理论极限不如说是一个实用上的极限。

对于任何成像系统，不论是相干的还是非相干的，像的信息都仅仅来自物的频谱[1]的有限的一部分，即系统的传递函数所通过的那一部分。如果物的频谱的这一有限部分能够根据像来精确地确定，那末，对于一个有界物体，通过解析延拓就能求得物的全部频谱。而物的全部频谱如果能够求得，那末该物就可以无限精确地重现。

一个特殊的复原方案

虽然基本数学原理用解析延拓三两句话就可以讲清，但是可以设想出各种各样的具体复原手续以得到相同的结果。J. L. Harris 讨论了特别简单的一种[6-18]。设物的边界位于边长分别为 L_X 和 L_Y 的矩形之内，那末根据 Whittaker-Shannon 定理，物的频谱 $\mathbf{G}_0(f_X, f_Y)$ 可通过它在 $(n/L_X, m/L_Y)$ 点上的抽样值表示出来[2]：

$$\mathbf{G}_0(f_X, f_Y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_0(n/L_X, m/L_Y) \cdot$$

$$\cdot \operatorname{sinc}\left[L_X\left(f_X - \frac{n}{L_X}\right)\right] \operatorname{sinc}\left[L_Y\left(f_Y - \frac{m}{L_Y}\right)\right]. \qquad (6\text{-}43)$$

但是，由于光学系统的通频带有限，只是对于 (n, m) 中少数几个较小的整数值，才能得到 $\mathbf{G}_0(n/L_X, m/L_Y)$ 之值。我们当然希望把我们的知识扩展到更大的整数值上，比如说 $(n = \pm N, m = \pm M)$，使得近似式

$$\mathbf{G}_0(f_X, f_Y) \cong \sum_{n=-N}^{N} \sum_{m=-M}^{M} \mathbf{G}_0(n/L_X, m/L_Y) \cdot$$

---

1) 所谓物的频谱，在相干情形下当然指的是物的振幅的频谱，而在非相干情形下则指的是物的强度的频谱。

2) $\mathbf{G}_0$ 的解析性可直接从(6-43)式证明，方法如下：把 sinc 函数展成幂级数，因而表明 $\mathbf{G}_0$ 也具有幂级数展开的形式。

$$\cdot \operatorname{sinc}\left[L_X(f_X - n/L_X)\right] \operatorname{sinc}\left[2L_Y\left(f_Y - \frac{m}{L_Y}\right)\right]. \quad (6\text{-}44)$$

至少在系统的通频带之外某一有限区域内给出 $\mathbf{G}_0(f_X, f_Y)$ 的精确值. 换句话说，如果在通带之外有足够多的抽样值可以确定，那末(6-44)式将帮助我们至少在通带之外某个有限区域内确定物的频谱.

为了确定通带之外的抽样值，方程(6-44)可以起第二个作用：我们在通带之内的任意$(2N+1)\cdot(2M+1)$个频率上测量 $\mathbf{G}_0$ 之值. 若把任何一个测量值代替(6-44)式左边的 $\mathbf{G}_0$，那末就得到含有$(2N+1)(2M+1)$个未知量[1]

$$\mathbf{G}_0\left(\frac{n}{L_X}, \frac{m}{L_Y}\right): \quad n = 0, \pm 1, \cdots, \pm N;$$

$$m = 0, \pm 1, \cdots, \pm M$$

的一个方程. 因而由 $\mathbf{G}_0$ 的$(2N+1)(2M+1)$个已知值就得到含$(2N+1)(2M+1)$个未知量的$(2N+1)(2M+1)$个线性方程. 这个方程组原则上可以求解，以给出远远超出通带范围之外的抽样值的一个阵列. 然后，抽样定理使得我们可以在这些抽样点之间逼近 $\mathbf{G}_0$，于是我们就能够得到通带之外的至少某一部分物频谱. 再经过一次傅里叶变换，就得到分辨率优于经典极限的像.

实际的限制

作为物像复原理论的基础的数学原理现在已经充分理解了. 但是，这些原理应用到实际光学系统能得到多大程度的成功，还得等着瞧. 基本的困难在于对通带内的物的频谱进行任何测量都不可避免地要出现噪声. 为了求出通带之外的

1) 实际上，这些未知量中有些可能在通带之内，因而是已知的，但是这只是使得复原更加容易.

抽样值而求解线性方程组，我们关于通带之内的测量值的知识的误差会放大许多倍，这是因为这些要求解的抽样值是表示成全部测量值的线性组合，每一个测量值都贡献一定的噪声。物像复原的问题现在仍是一个积极研究中的题目，只有时间才会告诉我们这些技术在实际中应用成功的程度。

习　题

6-1　一个非相干成像系统，其光瞳函数是宽度为 l 的正方形。在出射光瞳的中心放一个宽度为 $l/2$ 的正方形光阑，如图 6-15 所示。

(a) 画出有光阑时和没有光阑时光学传递函数的截面图。

(b) 画出当光阑的大小趋于出射光瞳大小时光学传递函数的极限形式。

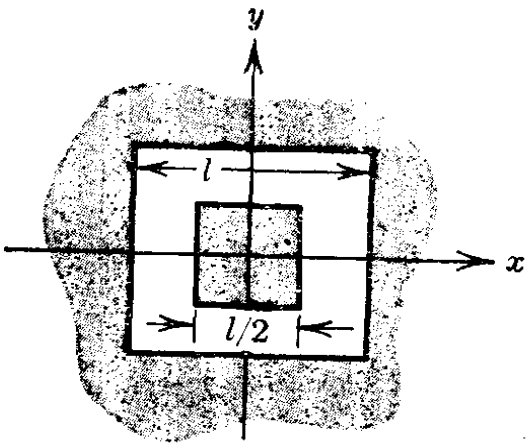


图 6-15

6-2　一个非相干成像系统，其出射光瞳是直径为 l 的圆。在出射光瞳内嵌入一个半平面光阑，最后得到的光瞳如图 6-16 所示。求沿 f_X 轴和 f_Y 轴的光学传递函数的表达式。

6-3　一个物体的振幅透射率为一方波(见图 6-17)，通过一光瞳为圆形的透镜成像。透镜的焦距为 10 厘米，方波的基频是 1000 周/厘米，物距为 20 厘米，波长为 10^{-4} 厘米。试问在下述两种情形下：

(a) 物体用相干光照明时，

(b) 物体用非相干光照明时，

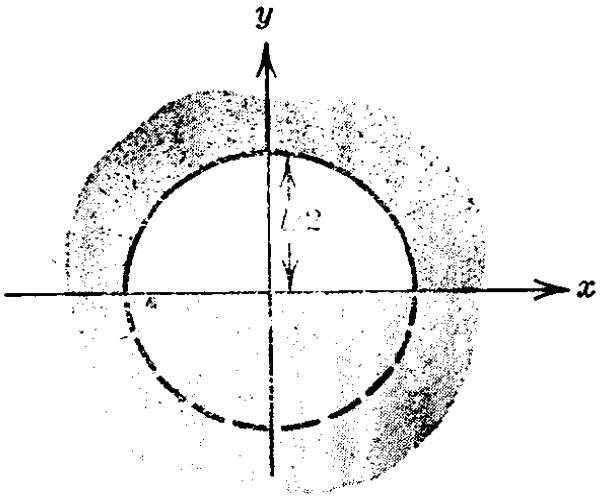


图 6-16

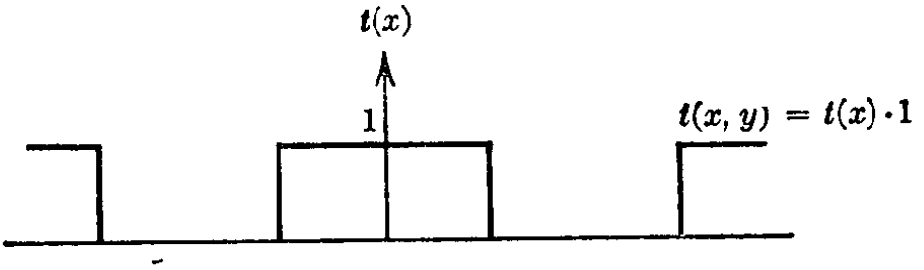


图 6-17

透镜的直径最小应为多少，才会使像平面的出现强度的任何变化

6-4 一个正弦试样物体，其振幅透射率为

$$t(x,y)=\frac{1}{2}(1+\cos 2\pi \tilde{f} x)$$

用相干成像系统对它成像。设频率 $\tilde{f}$ 足够低，可以通过此系统，并且忽略放大和系统的总体的衰减。

(a) 若系统无像差，求像平面上的强度分布；

(b) 证明，同样的强度分布也出现在无穷多个未聚焦好的像平面上。

6-5 一个正弦振幅光栅，振幅透射率为

$$t(x,y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\pi \tilde{f} x,$$

放在一个直径为 l 的圆形会聚透镜(焦长为 f)之前，并且用平面单色波倾斜照射，平面波的传播方向在 x_0z 平面内，与 z 轴夹角为 θ，

如图 6-18 所示。

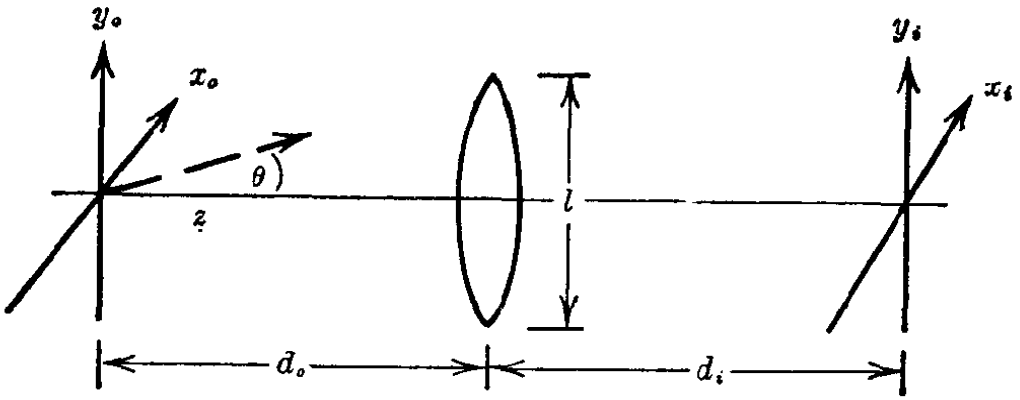


图 6-18

(a) 求通过物透射的光的振幅分布的频谱。

(b) 假定 $d_0=d_i=2f$，问像平面上会出现强度变化的 θ 角最大值是多少？

(c) 假定用的倾斜角 θ 就是这个最大值，求像平面上的强度分布。它与 $\theta=0°$ 时相应的强度分布比较，情况如何？

(d) 假定照明倾角 θ 采用上述极大值，问使得像平面上出现强度变化的最大光栅频率是多少？这个频率与 $\theta=0$ 时截止频率比较，结论如何？

6-6 参看方程(6-38)，证明对于一个具有正方形光瞳的聚焦失调的系统，几何光学预言的 OTF 为

$$\mathscr{H}(f_X,f_Y)=\mathrm{sinc}\left[\frac{8w}{\lambda}\left(\frac{f_X}{2f_0}\right)\right]\mathrm{sinc}\left[\frac{8w}{\lambda}\left(\frac{f_Y}{2f_0}\right)\right],$$

其中 w 是沿着 x 轴或 y 轴的最大的光程偏差，f_0 为相干截止频率。

6-7 一个物体的强度透射率为

$$\tau(x,y)=\frac{1}{2}(1+\cos 2\pi\ \tilde{f}x),$$

并且在整个物平面上引入恒定的、均匀的位相延迟。如图 6-19 所示，用一个直径为 l、焦距为 f 的正透镜对该物成像。比较在相干照明和非相干照明两种情形下，系统所透射的最大频率。

6-8 一个非相干成像系统，其光瞳函数为图 6-20 所示的孔径，画出它

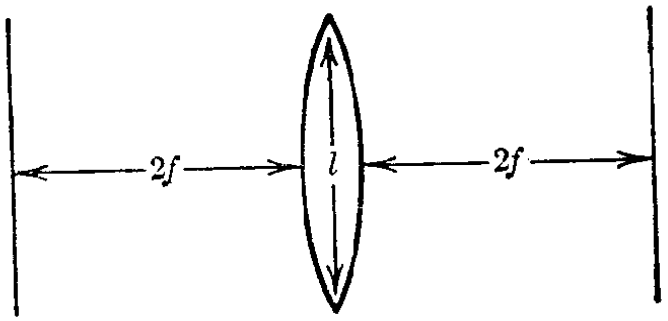


图 6-19

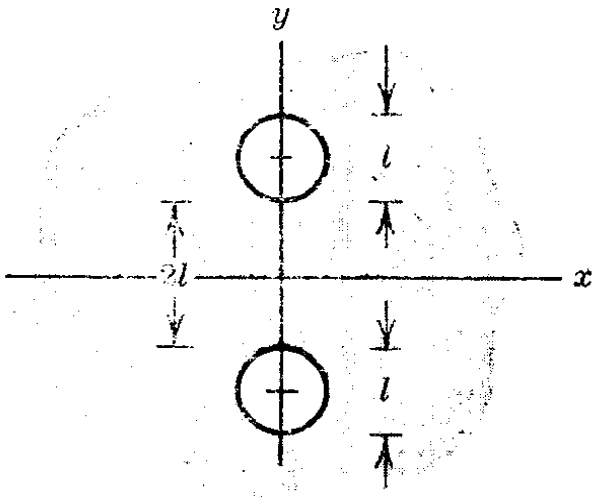


图 6-20

的光学传递函数沿 f_X 轴和 f_Y 轴的截面图（图上要求标明各个截止频率值）。

6-9 某物体具有如下性质：它的振幅透射率中全部频率分量都在频率平面内的一个圆周上，圆的半径为

$$\rho_m=\sqrt{2\,ma},\quad m=0,1,2,3,\cdots$$

假定用均匀的平面波照明，并忽略物体的大小有限所引起的衍成在物射效应。试证明这个物体是“自成像的”，意即理想的像体后面周期性距离上，而不需要透镜。

6-10 在确定一个非相干系统的像差的严重程度时，一个颇为有用的量是 Strehl 清晰度 $\mathscr{D}$，其定义为系统存在像差时的点扩展函数（即脉冲响应）的光强最大值与同一仪器在无像差时的点扩展函数的光强最大值之比。证明：$\mathscr{D}$ 等于仪器考虑有像差时的光学传递函数下面的体积经规范化后之值，即：

$$\mathscr{D}=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int \mathscr{H}(f_X,f_Y)\Big|_{\text{有像差}}\,df_X df_Y}{\int_{-\infty}^{\infty}\int \mathscr{H}(f_X,f_Y)\Big|_{\text{无像差}}\,df_X df_Y}$$

参 考 文 献

6-1 Duffieux, P. M., *L'Intégrale de Fourier et ses Applications à L' Optique*, Faculté des Sciences, Besançon, 1946.

6-2 Schade, O. H., Electro-optical Characteristics of Television Systems, *RCA Rev.*, IX, 5 (Part I), 245 (Part II), 490 (Part III), 653 (PartIV) (1948).

6-3 O'Neill, E. L., *Introduction to Statistical Optics*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1963.

6-4 Françon, M., *Modern Applications of Physical Optics*, John Wiley & Sons, New York, 1963.

6-5 Linfoot, E. H., *Fourier Methods in Optical Image Evaluation*, Focal Press Ltd., London, 1964.

6-6 Stroke, G. W., *An Introduction to Coherent Optics and Holography*, Academic Press, New York, 1966.

6-7 Abbe, Ernst, *Archiv Mikroskopische Anat.*, **9**:413(1873).

6-8 Rayleigh, Lord, On the Theory of Optical Images, with Special Reference to the Microscope, *Phil. Mag.*, (5)**42**:167(1896).

6-9 Beran, M. J., and G. B. Parrent, Jr., *Theory of Partial Coherence*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1964.

6-10 Mandel, L., and E. Wolf, Coherence Properties of Optical Fields, *Rev. Mod. Phys.*, **37**,231(1965).

6-11 Glauber, R. J., Coherent and Incoherent States of the Radiation Field, *Phys. Rev.*, **131**,2766(1963).

6-12 Schwartz, M., *Information Transmission, Modulation, and Noise*, McGraw-Hill Book Company, New York, p. 285,1959.

6-13 Considine, P. S., Effects of Coherence on Imaging Systems, *J. Opt. Soc. Am.*, **56**,1001(1966).

6-14 Oliver, B. M., Sparkling Spots and Random Diffraction, *Proc IEEE*, **51**,220(1963).

6-15 Goodman, J. W., Some Effects of Target-induced Scintillation on Optical Radar Performance, *Proc. IEEE*, **53**,1688(1965).

6-16 Skinner, T. J., Surface Texture Effects in Coherent Imaging, *J. Opt. Soc. Am.*, **53**,1350 A (1963).

6-17 di Francia, G. Toraldo, Super-Gain Antennas and Optical Resolving Power, *Nuovo Cimento, Suppl.*, (9)**9**,426(1952).
6-18 Harris, J. L., Diffraction and Resolving Power, *J. Opt. Soc. Am.*, **54**,931(1964).
6-19 Barnes, C. W., Object Restoration in a Diffraction-Limited Imaging System, *J. Opt. Soc. Am.*, **56**,575(1966).
6-20 Guillemin, E. A., *The Mathematics of Circuit Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York, p. 288,1949.

第七章　空间滤波和光学信息处理

从上一章我们已经清楚地看到，线性系统概念对于分析成像系统有广泛的用途．但是，如果这些概念仅仅只对分析的目的才有用，那末它们在近代光学中的地位将远没有它们今天实际上所享有的地位那么重要．只有在考虑到应用于系统综合的令人鼓舞的可能性时，我们才能完全理解这些概念的真正重要性．

把线性系统概念应用于光学系统综合因而得益的例子是很多的．其中一类是应用频域中的论据来改进各种成像仪器．这类问题的例子将在§7-1里在其历史背景中讨论．

还有另一些同等重要的应用，它们不属于成像范围，归到信息处理这一普遍领域内更为恰当．这类应用是基于光学系统对输入数据实行普遍的线性变换的本领．在有些情形下，极大量数据的处理，由于其绝对数量之庞大，一般是人们力所不能及的．这时一个线性变换可以对大量数据的约化起决定性的作用，得出引起观察者注意的数据的特殊部分的指示．在讨论特征识别（§7-6）时将看到这类应用的一个例子．在另外一些情形中，一堆数据可能只是没有以适合人类观察者的形式出现，而对数据的一个线性变换将使它取合适的形式．在讨论综合孔径天线的数据处理(§7-7)时，将看到这类应用的一个例子．

光学信息处理这整个题目是太宽了，不可能在单独一章中全面讨论；实际上，专门讨论这个题目的已经不只有一本书（例如，文献[7-1]，[7-2]）．我们在这里只打算指出几条概

括性的原理，并选择一些例子来说明这些原理．在这样做时，不免要省略掉许多有趣的和有用的技术，但是有兴趣的读者可以查阅有关文献，以得到这一领域的更完整的全貌．

§ 7-1 历史背景

傅里叶综合技术的历史，可以说是从首次有意改变像的频谱开始的．这类实验首先是 Abbe 于 1893 年[6-7]、然后是 Porter 于 1906 年[7-3]报道的．在这两次实验中，实验的明确目的都是要验证 Abbe 的显微镜成像理论并研究它的全部含意．由于这些实验漂亮而且简单，下面我们对它们作比较详细的讨论．

Abbe-Porter 实验

Abbe 和 Porter 所做的实验对相干成像的详细机制，并且实际上也就是对傅里叶分析的最基本的原理提供了有力的证明．这些实验的一般做法如图 7-1 所示．用相干光源照明一张细丝网格．在成像透镜的后焦面上出现周期性网格的傅里叶频谱，最后通过透镜的各个傅里叶分量在像平面上重新组合，以复现网格的像．把各种遮断物(例如，光圈、狭缝或小

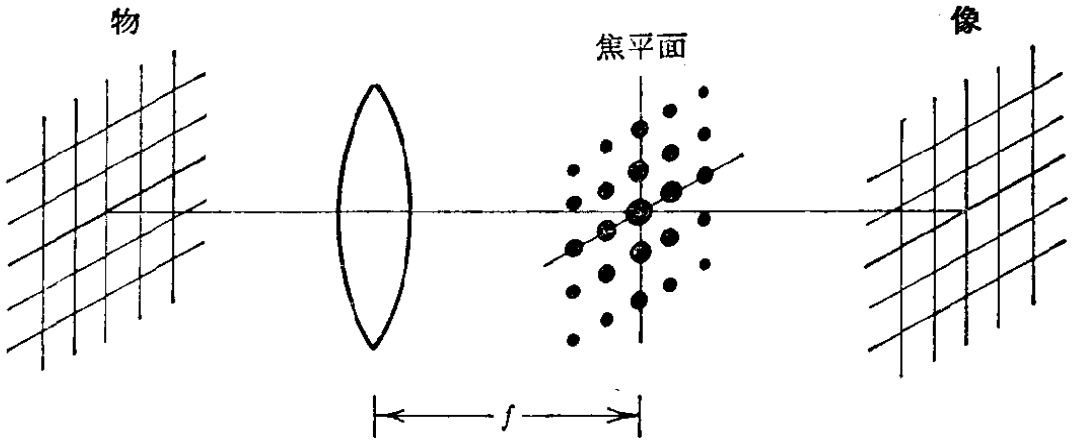
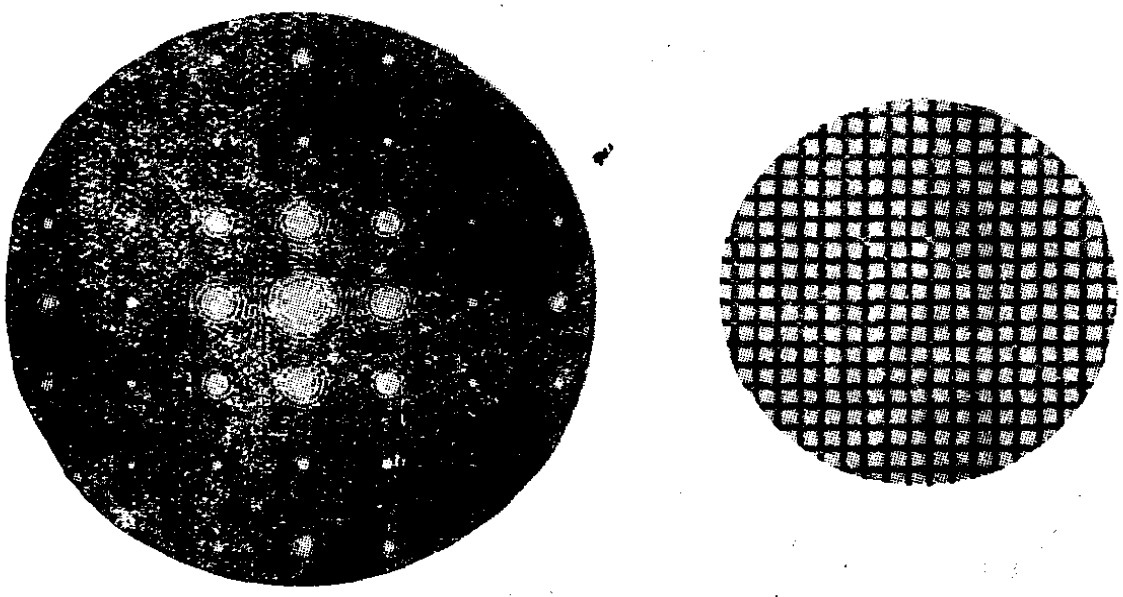


图 7-1 Abbe-Porter 实验

光阑)放到焦平面上，就能够以各种方式直接改变像的频谱。

图7-2*a*示出网格的未经改变的频谱照片；图7-2*b*是相应的像。物的周期性结构在焦平面上产生出一系列分立的频谱分量，由于网格所在的圆形孔径的有限大小，使得每个频谱分量都有一定的扩展。焦平面上沿水平轴的亮点对应于物的水平指向的复指数分量(比较图2-1)；沿垂直轴的亮点则对应于垂直指向的复指数分量。不在轴上的亮点对应于在物平面上相应角度指向的分量。

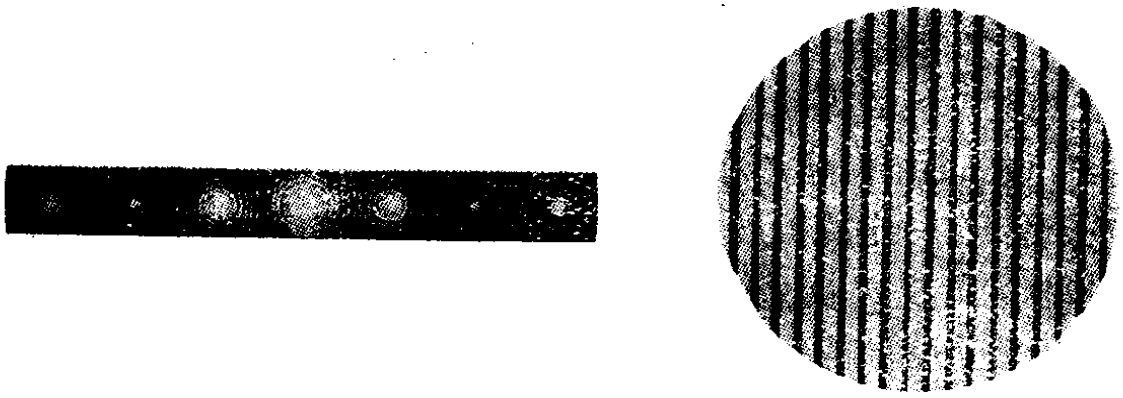


(*a*)　　(*b*)

图 7-2　未经改变频谱的网格及其频谱的照片　(*a*)频谱；(*b*)像

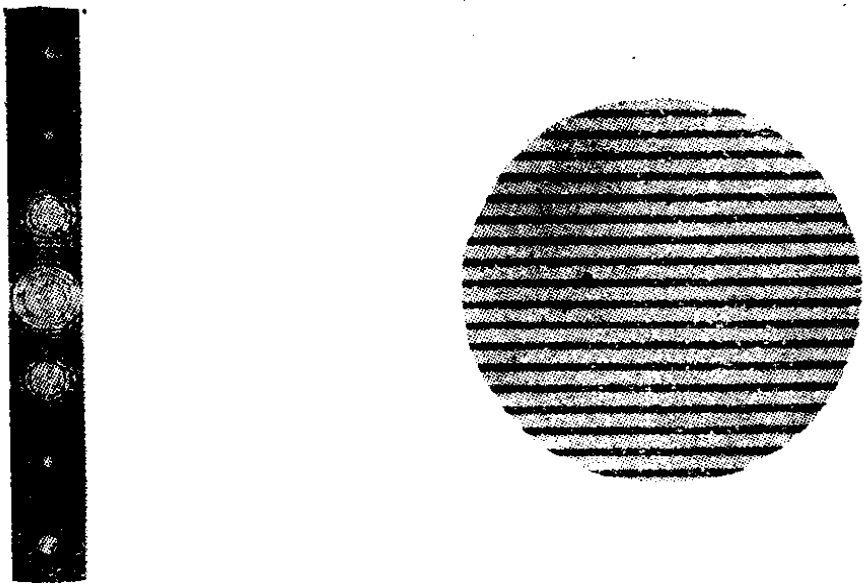
在焦平面上插入一个狭缝，使得只通过单独一行频谱分量，就可以清楚地说明空间滤波技术的功能。图7-3*a*示出当使用一条水平狭缝时透过的频谱。对应的像示于图7-3*b*中，它只包含网格的垂直结构；对像的垂直结构有贡献的正是水平指向的复指数分量。对水平结构的抑制是相当彻底的。

若把狭缝旋转90°以通过图7-4*a*所示的垂直的一行频谱，则会看到像只包含水平结构。还不难观察到别的有趣的



(a)　　(b)

图 7-3　网格经过一条水平狭缝滤波　(a)频谱；(b)像



(a)　　(b)

图 7-4　网格经过一条垂直狭缝滤波 (a)频谱；(b)像

效应。例如，若在焦平面上放一个可变光圈，开始光圈放小使得只通过轴上的傅里叶分量，然后逐渐加大光圈，就可以看到网格的一步步的傅里叶综合。此外，如果去掉光圈而在焦平面内的透镜轴处放一个小光阑，使其只挡住中心级或“直流”分量，那末就会看到在网格的像中会发生反衬度的反转(见习题7-1)。

Zernike 相衬显微镜

显微术中所观察的许多物体，其透明度很高，对光吸收很小或不吸收(例如未染色的细菌)．光通过这样的物体时，最主要的效应是产生一个随空间变化的相移；这个效应用通常的显微镜和只对光的强度有响应的感受器当然是不能直接观察到的．观察这类物体的一些方法已经知道多年了．这包括干涉量度技术；用一个小光阑只挡住中心的零阶频谱分量的中央暗场方法(见习题7-2)；以及把中心级一边的所有频谱分量全部挡掉的纹影法（也称 Schlieren方法）(见习题 7-3)．所有这些方法都有一个缺点，就是所观察到的强度变化与相移不成线性关系，因而就不能用它来作物体的厚度变化的直接指示．

1935 年，F. Zernike[7-4] 根据空间滤波原理提出一个新的位相反衬方法，这个方法的优点是，观察到的强度与物体引起的相移是成线性关系的(在一定的条件下，下面要讨论这条件)．这个新方法代表了综合概念的早期成就，因此将比较详细地讨论．

设透明物体的振幅透射率为

$$\mathbf{t}(x, y)=\exp[j\phi(x, y)], \qquad (7\text{-}1)$$

此物体在成像系统中用相干光照明．为了数学上简单起见，我们假定放大率为 1，并且忽略系统的出射光瞳和入射光瞳的有限大小．此外，要使相移与强度之间成线性关系，一个必要条件是相移 ϕ 小于 1 弧度，这时振幅透射率可以近似写成

$$\mathbf{t}(x, y)\simeq 1+j\phi(x, y). \qquad (7\text{-}2)$$

当然，在这个近似式中我们忽略了 ϕ^2 及更高阶的项．注意 (7-2) 式中的第一项将带来一个通过样品而不发生变化的强的分量波，而第二项则产生较弱的偏离系统光轴的衍射光．

一个通常显微镜对上述物体所成的像可以写成

$$I_i \simeq |1 + j\phi|^2 \simeq 1,$$

其中 ϕ^2 项用零代替，以同我们前面的近似相一致. Zernike 认识到，衍射光之所以观察不到是由于它与很强的本底之间位相差 90°；如果能够改变这个位相正交关系，那末两项就会更直接地干涉，产生可观察的像强度变化. Zernike 认识到本底在焦平面上将会聚成轴上的一个焦点而衍射光——包含较高的空间频率——则会离开焦点而散开，因此他提出在焦平面上放一块变相板 (phase-changing plate) 以改变被聚焦的光和衍射光之间的位相关系.

变相板可以由一块玻璃基片上涂一小滴透明的电介质构成. 电介质小点位于焦平面的中心，其厚度及折射率使得受聚焦的光在通过它后，其位相相对于衍射光的位相延迟 $\pi/2$ 弧度或 $3\pi/2$ 弧度. 在前一情形下像平面上的强度为

$$I_i = |\exp[j(\pi/2)] + j\phi|^2 = |j(1+\phi)|^2 \simeq 1 + 2\phi, \quad (7\text{-}3)$$

而在后一情形下为

$$I_i = |\exp[j(3\pi/2)] + j\phi|^2 = |-j(1-\phi)|^2 \simeq 1 - 2\phi. \quad (7\text{-}4)$$

于是像的强度与相移成线性关系. 当本底位相被延迟 $\pi/2$ 时，方程(7-3)的结果称为正的位相反衬，而延迟 $3\pi/2$ 时则说方程(7-4) 给出负的位相反衬. 还能够通过制作部分吸收的移相小点来改善像的反衬度(见习题 7-4).

位相反衬方法是一种将空间位相调制转换成空间强度调制的方法. 对电子学有一定基础的读者会感兴趣地注意到，在 Zernike 的建议提出一年之后，E. H. Armstrong[7-5]提出了一个相当类似的方法来把调幅电信号变换成调相信号. 我们在第六章已经看到而且在下面还将继续看到，电工和光学这两门学科在随后年代中已建立起更紧密的联系.

照片质量的改善：Maréchal 的工作

在五十年代初期，巴黎大学光学研究所的工作人员开始积极从事用相干光空间滤波的方法来改善照片质量．这些人中最著名的是 A. Maréchal，他在这方面的成功为后来对光学信息处理兴趣的增长提供了强有力的推动．

Maréchal 认为照片中的各种不想要的缺陷是由产生照片的成像系统的光学传递函数中相应的缺陷引起的．他进而推论，如果把透明照片放在另一个(相干)系统的物平面上，那么，在这个系统的焦平面上插入适当的衰减板和移相板，就可以合成一个补偿滤波器，使得至少能部分地消除那些不想要的缺陷．虽然原来的成像系统的传递函数可能很差，但是这个传递函数与补偿系统的传递函数的乘积将有希望得出一个更加令人满意的频率响应．

Maréchal 和他的同事们成功地显示了对照片质量的各种不同类型的改善．例如他们曾表明只要衰减掉物频谱的低频分量，那末像中的微小细节就会得到强烈的突出．在消除像的模糊圈方面也显得相当成功．这时原来的成像系统离焦很厉害，产生的脉冲响应（在几何光学近似下）是一个均匀的圆形光圈．因此相应的传递函数形式为

$$\mathscr{H}(\rho)\simeq 2\frac{J_1(\pi a\rho)}{\pi a\rho},$$

式中 a 是常数，而 $\rho=\sqrt{f_X^2+f_Y^2}$．补偿滤波器由安放在滤波系统的焦平面上的一块吸收板和一块退相板 (dephasing plate)合成．吸收板使 $\mathscr{H}$ 的很强的低频峰受到衰减，而退相板使 $\mathscr{H}$ 的第一个负瓣的位相移动 180°．图 7-5 示出原来的传递函数和补偿后的传递函数．

另一个例子是，他们曾指出用一个简单的空间滤波器，可

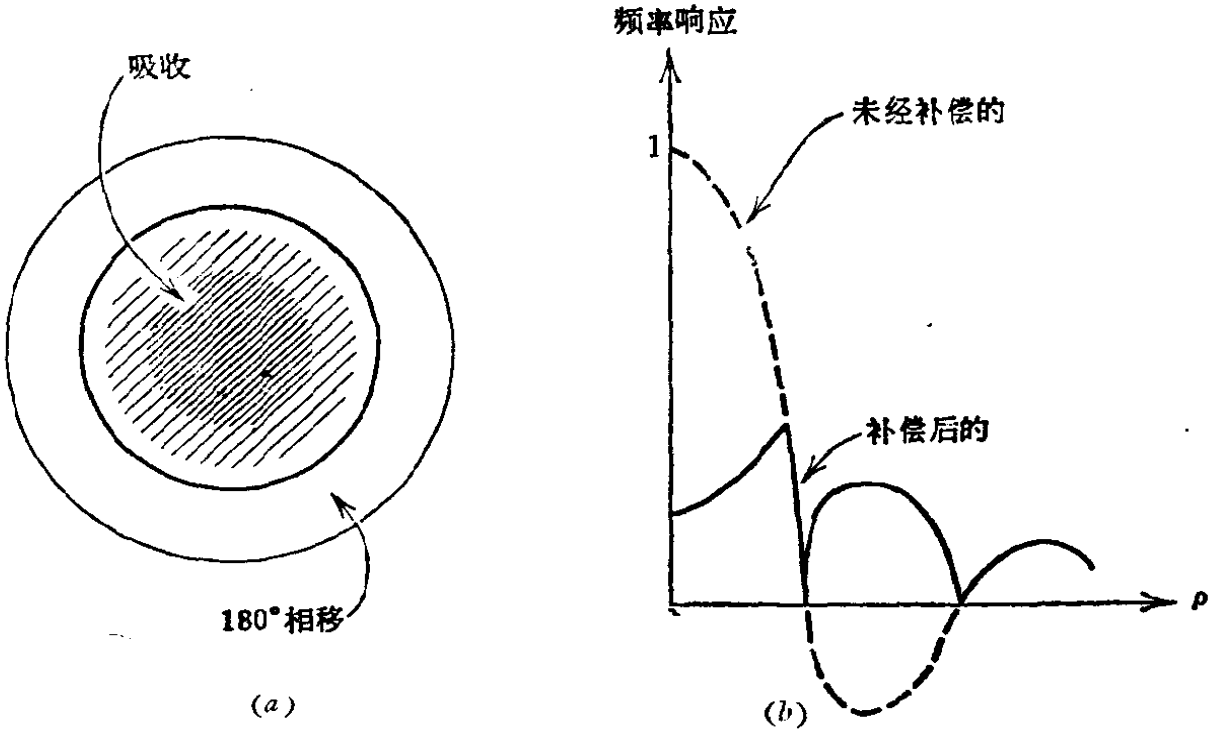


图 7-5　对于像的模糊圈的补偿　(a)焦平面滤波器;(b)传递函数

以抑制与印刷照片(如我们在报纸上所见到的照片)的点染制版法(halftone process)相伴而来的周期结构. 点染制版法在许多方面都和§2-3中所讨论的周期性抽样程序类似. 用这种方法印制的图片的频谱，有一种与图2-5所示很相像的周期性结构. 在滤波系统的焦平面上加上一个光圈，就能够只让中心位于零频率上的谐波频带通过，从而去掉图像的周期性结构,而同时让全部所需的像结构通过.

通讯理论观点的兴起[1)]

在五十年代初期就已经很明显，通讯理论和光学这两门学科之间的交流将会大有收益. 光学工作者所面对的许多问题与通讯理论中的最优滤波、检波和估值问题极为相似. 一

1) 我们在这里并不想讲述有助于这两个观点结合的全部早期贡献，而是集中介绍为熟悉电气工程知识的读者所最感兴趣的那些文献.

位通讯理论家 P. Elias 和他的两位同事 D. S. Grey 和 D. E. Robinson，在1952年发表了一篇论文，题为“光学过程的傅里叶处理方法”[7-6]，然后 Elias 于 1953 年又发表了“光学和通讯理论”[7-7]一文，他们的工作是这两门学科之间的交流的最初推动力的主要来源。物理学家 E. L. O'Neill，通过他 1956 年所发表的论文“光学中的空间滤波器”，更一般地说，通过他的研究和教学活动对光学界的巨大影响，使得两种观点真正结合起来。这两门学科的结合已经带来并将继续带来丰硕的成果，这从 1960 年召开的一次名为“近代光学中的通讯和信息论方面”的会议文集[7-9]中的论文质量以及人们对这些论文的兴趣就可以看出。此后，这两种观点已经融合成一体，以致有时难以判断一篇具体论文是应该发表在光学期刊上还是应该发表在电工期刊上。

相干光学对更普遍的数据处理的应用

虽然五十年代初期，物理学家已越来越认识到电工学的某些方面和光学有着特殊的联系，但直到五十年代末和六十年代初，电气工程师才逐渐认识到，空间滤波系统可以有效地应用于更普遍的数据处理问题。相干滤波的潜力在雷达信号处理这一领域内特别明显，密执安大学雷达实验室的 L. J.Cutrona 和他的同事们在比较早的阶段就挖掘了这种潜力。密执安小组于 1960 年发表的论文“光学数据处理和滤波系统”[7-10]在电气工程师和物理学家中引起了对这些技术的浓厚兴趣。相干滤波在雷达领域中应用最为成功的一例是处理“综合列阵”天线所收集的数据[7-11]，这个问题将在§ 7-7简单地讨论。概观六十年代中期以来的文献表明，相干处理技术已成功地应用于相差极远的许多领域，例如傅里叶光谱学[7-12]和地震波分析[7-13]。

§ 7-2 照相胶片

照相胶片已经是并且将仍是光学处理和滤波系统的基本元件. 在滤波过程中它可以起三种非常基本的作用. 第一，它可以用作将输入数据馈送到光学处理系统中去的媒质. 第二，它可以用来做印载滤波信息的媒质；例如，它可以提供频率平面上所需的衰减，以综合出一个所要求的传递函数. 第三，它又可以提供做为处理系统的输出的记录手段. 通常它起着所有这三个作用.

还有一些其它材料在有限程度上被使用，用来在上述的一个或几个用途方面取代胶片. 这些材料包括液体声池(Sonic cell)，可变形油，热塑带以及光色胶片和光色玻璃. 种种迹象表明，这些材料的重要性将日益增长，但是，它们最终是否会完全取代胶片作为光学信息处理系统中的主要元件，还是很值得怀疑的.

因此，我们先来简短地讨论照相胶片的一些基本性质. 更全面的讨论，读者可参看文献[7-14]和[7-15].

曝光的物理过程

一张未经曝光的胶片或干板一般是由大量微小的卤化银晶粒悬浮在明胶衬底上构成，明胶衬底又附着在一层坚实的"片基"上，胶片的典型片基材料是醋酸盐，而干板的片基则是玻璃. 当感光材料曝光时，卤化银晶粒吸收光能，并发生复杂的物理变化. 那些吸收了足够能量的晶粒会出现金属银的小斑；这些小斑称作显影中心. 然后曝过光的胶片再经过化学处理——显影，在显影过程中，单个细小的显影中心的存在，会促使整个卤化银晶粒变成金属银沉积下来，而不含显影中心的晶粒则不发生这样的变化. 最后胶片再经过一次"定影"

的化学处理去掉剩余的卤化银晶粒而留下金属银，以防止未感光的晶粒随后再变质为金属银。金属银粒在可见光频段当然是非常不透明的；因此显影后的胶片或干板的不透明度将取决于在透明片上各个区域中的银粒密度。

术语的定义

胶片或干板所受的曝光量 E 定义为入射到感光表面上每一点的单位面积的能量。若用 $\mathscr{I}$ 表示入射光的强度[1]，曝光时间为 T 秒，则有

$$E=\mathscr{I}T.$$

显影后透明片的强度透射率 $\tau(x, y)$ 定义为

$$\tau(x, y)=\left\{\frac{I_{\text{在}(x,y)\text{点的透射光强}}}{I_{\text{在}(x,y)\text{点的入射光强}}}\right\}\text{的局域平均},$$

其中局域平均是在这样大小的面积上进行的：这一面积比胶片的晶粒大小要大，但比透射光强要在其中有重大变化的面积要小。

F. Hurter 和 V. C. Driffield 在 1890 年发表了一篇经典性论文，他们在文中证明，$\log(1/\tau)$ 应当与显影后透明片的单位面积上的含银量成正比。因此他们定义照片密度 D 为

$$D=\log\left(\frac{1}{\tau}\right). \tag{7-5}$$

用得最广泛的描述照相胶片的感光性能的方法，是照片密度与曝光量的对数之间的关系的曲线图，它通常称作 Hurter-Driffield 曲线（或简称为 H-D 曲线）。图 7-6 示出照相负片的典型的 H-D 曲线。当曝光量低于一定水平时，密度与曝光量无关，并且等于一个极小值，称为灰雾(gross fog).

1) 我们始终用 $\mathscr{I}$ 表示曝光前或曝光期间有关的光强，而用 I 表示显影后的有关光强。

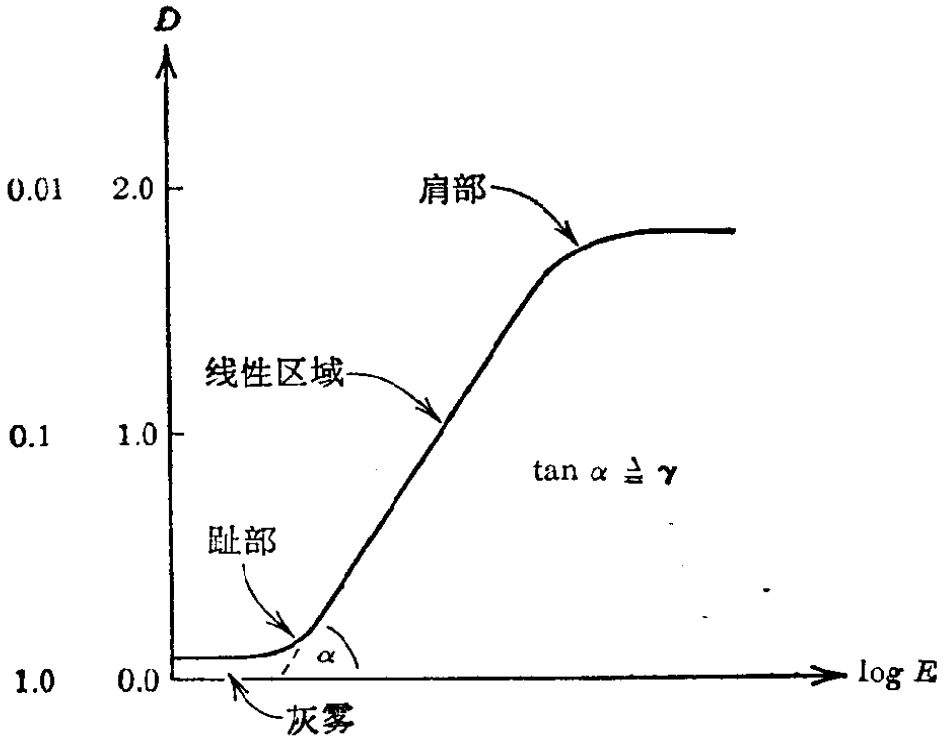


图 7-6 Hurter-Driffield 曲线

在曲线的"趾"部，密度开始随曝光量的增加而增加。随后是一个密度与曝光量的对数成线性关系的区域；曲线的这一线性区域的斜率称为胶片的 γ 值。最后，曲线在肩部达到饱和，这时，随着曝光量的增加密度又不变化了。

H-D 曲线的线性区段是通常的照相术中一般所用的部分。γ 值大的胶片叫做高反差胶片，γ 值低的则称为低反差胶片。图 7-7 示出低反差胶片和高反差胶片的 H-D 曲线。实际得到的具体的 γ 值主要由以下三个因素决定：(1)所用乳胶[1]的类型（例如 Plus-X 和 Tri-X 是低反差胶片，γ 为 1 或更小，然而高反差复印片之 γ 值则为 2 至 3)；(2) 所用的具体显影剂；以及(3)显影时间。图 7-8 示出 γ 对显影时间的典型依赖关系。如果胶片、显影剂和显影时间选得合适，就能够

1) 乳胶一词是用来代表胶片的感光部分的，因此不包括片基。

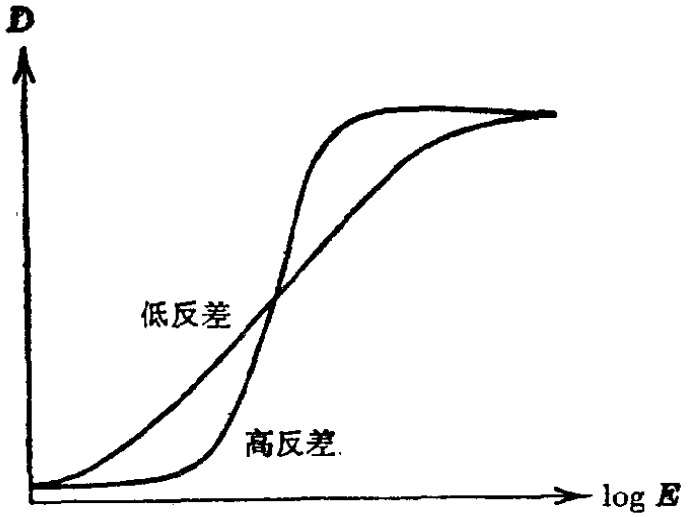


图 7-7　高反差胶片和低反差胶片的 H-D 曲线

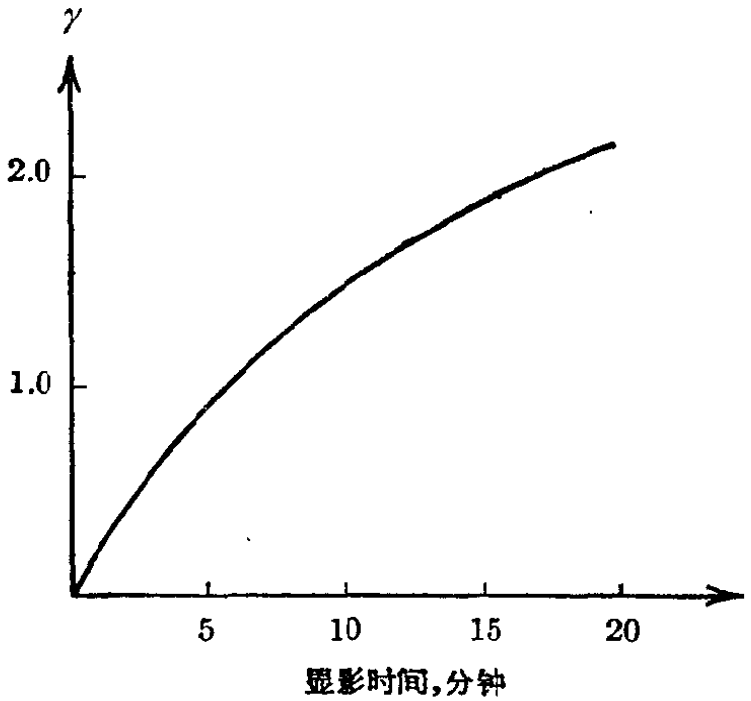


图 7-8　胶片的 γ 与显影时间的关系

相当精确地得到预先指定的 γ 值。

胶片用于非相干光学系统中

在许多应用中，胶片可以看成是一个将曝光时的入射光强度分布 $\mathscr{E}$ 变换为显影后的透射光强度分布 I 的元件。这种观点特别适用于当胶片用作非相干光学系统的元件时。我

们现在来考虑这样定义的变换的详细性质.

假定胶片是在 H-D 曲线的线性区段中使用，密度 D 可写成

$$D=\gamma_n \log E-D_0=\gamma_n \log(\mathscr{I}T)-D_0, \qquad (7\text{-}6)$$

式中 γ_n 是曲线线性区段的斜率，$-D_0$ 是如果没有趾部的话曲线的直线近似的延线与 D 轴的交点的 D 值. γ 的下角标 n 用来表示我们讨论的是负透明片.

曝光期间的入射光强可以和显影后的强度透射率联系起来. 我们还记得，照片密度的定义为

$$D=\log\left(\frac{1}{\tau_n}\right),$$

把这一定义代入(7-6)式，得

$$\log\tau_n=-\gamma_n \log(\mathscr{I}T)+D_0,$$

或者等价地

$$\tau_n=10^{D_0}(\mathscr{I}T)^{-\gamma_n}.$$

最后

$$\tau_n=K_n \mathscr{I}^{-\gamma_n}, \qquad (7\text{-}7)$$

式中 K_n 是正常数. 注意由这个关系式所规定的强度变换不论胶片的 γ 取任何正值都是高度非线性的.

在强度透射率与曝光期间入射光强之间也能够得到一个正幂次定律的关系，虽然要做到这点一般需要一个两步照相过程. 第一步，用通常形式制得一张负透明片. 第二步，再用这张负片透射的光对另一张胶片曝光，结果就得到最后的正透明片. 为了对这个过程有更定量的理解，由(7-7)式写出头一张透明片的透射率为

$$\tau_{n1}=K_{n1}\ \mathscr{I}^{-\gamma_{n1}}.$$

若把这张透明片紧贴在另一张未曝光的胶片上并用强度为 I_0 的光照射，那么作用于第二张胶片上的光强就简单地为 $\tau_{n1}I_0$，

因此所得的强度透射率为

$$\tau_p = K_{n2}(I_0\tau_{n1})^{-\gamma_{n2}} = K_{n2}\ I_0^{-\gamma_{n2}}K_{n1}^{-\gamma_{n2}}\ \mathscr{E}^{\gamma_{n1}\gamma_{n2}},$$

或等价地

$$\tau_p = K_p\mathscr{E}^{\gamma_p}, \tag{7-8}$$

其中 K_p 是正常数，而 $\gamma_p = \gamma_{n1}\gamma_{n2}$ 是这个两步过程的总的 γ。显然，当(而且只当)总的 γ 为 1 时，正透明片给出光强的一个线性变换.

虽然我们看到，只是在十分特殊的条件下，曝光期间入射光强才能线性地变换成显影后的透射光强，但是可以证明在一组更广泛得多的条件下，胶片能够提供对强度变化增量的线性变换. 为了进一步讨论这点，读者可参看习题 7-5。

胶片用于相干光学系统中

当胶片用作相干光学系统的元件时，更合理的看法是认为胶片提供了下述变换：(1) 将曝光期间的入射光强变换成显影后透射光的复振幅，或是(2)将曝光期间入射光的复振幅变换成显影后透射光的复振幅. 当然，第二种观点只有当使透明片曝光的光本身是相干光时才能用.

因为从这两种观点来看，透射光的复振幅都是相干系统中一个重要的量，因此一张透明片必须用其复振幅透射率 t 来描写. 最吸引人的当然是把 t 简单地定义为强度透射率 τ 的平方根的正值. 但是这个定义忽略了光通过胶片时可能发生的相对相移. 这种相移是由胶片厚度变化所引起的，而厚度变化有两个不同的原因. 第一，胶片片基的厚度一般存在无规变化，亦即片基不是光学平面. 第二，人们发现，乳胶的厚度随着显影后的透明片中的银粒密度变化. 后一种变化是决定性的，并且强烈依赖于胶片所受的曝光量的变化. 因此，胶片的振幅透射率的完备描述必须写成

$$\mathbf{t}(x, y) = +\sqrt{\tau(x, y)}\exp[j\phi(x, y)], \qquad (7\text{-}9)$$

其中 $\phi(x, y)$描述透明片所引进的相移的图样.

在大多数应用中，厚度变化是我们完全不希望有的，因为不容易控制它们. 利用一个叫做液门(liquid gate) 的器件可以消除这种厚度变化的影响. 这种器件由两块光学平板组成，在两块平板之间夹入透明片和折射率匹配油(如图 7-9 所示). 油的折射率必须折衷地选择，因为不可能同时与片基、乳胶和玻璃(通常它只有一面为光学平面)的不同的折射率相匹配. 但是，在对油作适当选择之后，可以使通过液门的光程接近常数，这时，胶片和液门的振幅透射率才可以写成

$$\mathbf{t}(x, y) = +\sqrt{\tau(x, y)}. \qquad (7\text{-}10)$$

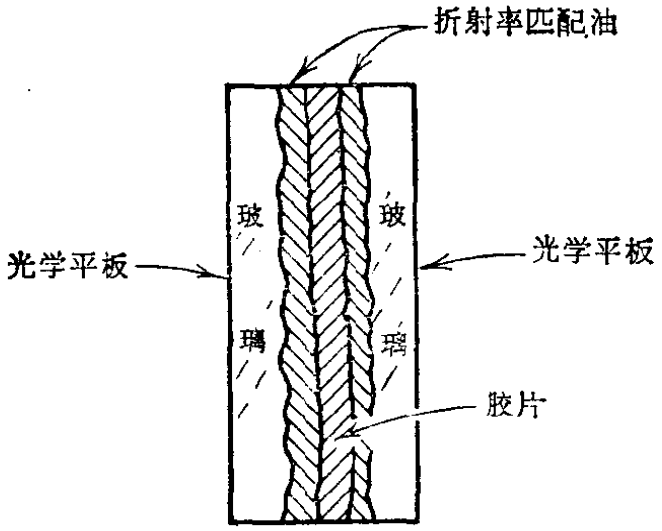


图 7-9　消除胶片厚度变化的液门

相移消除之后，方程(7-10)与(7-7)及 (7-8) 合起来就可将振幅透射率表示为

$$\begin{aligned} &\text{负透明片：} \quad \mathbf{t}_n = k_n \mathscr{I}^{-\gamma_n/2} = k_n |\mathbf{U}|^{-\gamma_n}, \\ &\text{正透明片：} \quad \mathbf{t}_p = k_p \mathscr{I}^{+\gamma_p/2} = k_p |\mathbf{U}|^{+\gamma_p}, \end{aligned} \qquad (7\text{-}11)$$

其中 $\mathbf{U}$ 是曝光期间入射光场的复振幅，$k_n = K_n^{1/2}$，$k_p = K_p^{1/2}$.

在后面几节要讨论的许多例子中将会看到，常常希望胶

片能够按平方律对复振幅进行变换．这一性能可以有很多方法实现，其中之一是制作一张总 γ 值为 2 的正透明片，这从(7-11)式即可看到．为了得到此关系式成立的最大的曝光量动态范围，常常选择两步过程中的头一个 γ 小于 1 (例如 $\gamma_{n1}=1/2$)，而选择第二个大于 2(例如 $\gamma_{n2}=4$)，使它们的乘积仍保持等于 2．

但是，用任意 γ 值的透明片(不论为正片或负片)，都能够在有限的动态范围内得到平方律作用．如果我们放弃传统的用 H-D 曲线来描述胶片的方法，而代之以直接作振幅透射率对曝光量（用线性标尺）关系的曲线图，很容易看出这一点．这种描述方法是 Maréchal 提倡的(见文献[7-9]第48页)，Kozma[7-16]把这种描述方法十分成功地应用于分析照片的非线性效应．图 7-10 示出一张典型的负透明片的振幅透射率对曝光量的关系曲线(t-E 曲线)．如果把胶片“偏置”到 t-E 曲线的最大线性区域内的一个工作点上，那末在一定的动态范围内，胶片将给出振幅变化增量的一个平方律变换．于是

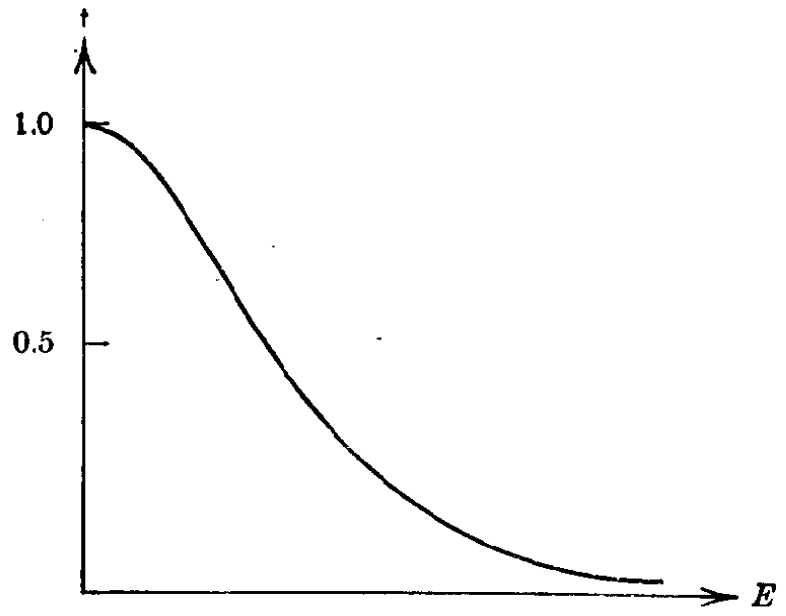


图 7-10　负透明片的典型的透射率-曝光量曲线

若用 E_b 表示偏置曝光量，t_b 表示相应的偏置透射率，那么 t-E 曲线在它的线性区域内可表示为

$$\mathbf{t}_n \simeq t_b + \beta(E - E_b) = t_b + \beta' |\Delta \mathbf{U}|^2, \qquad (7\text{-}12)$$

式中 β 是曲线在偏置点的斜率，$\Delta\mathbf{U}$ 代表振幅变化增量，β' 是 β 和曝光时间的乘积．注意，对于负片，β 和 β' 是负数．

图 7-11 比较了高反差胶片和低反差胶片的 t-E 曲线．注意高反差曲线有更陡的斜率，因此更有效地将小曝光量变化转换为透射率的变化．但是这种效率的提高总是以伴随着 t-E 曲线仍保持线性的曝光量动态范围的减小．最后，一件有趣的事是，我们发现能得到最大的动态范围的偏置点一般落在相应的 H-D 曲线的趾部附近．

对进一步讨论照相胶片在相干光学系统中的性能感兴趣的读者可参看文献[7-17]和[7-18]．

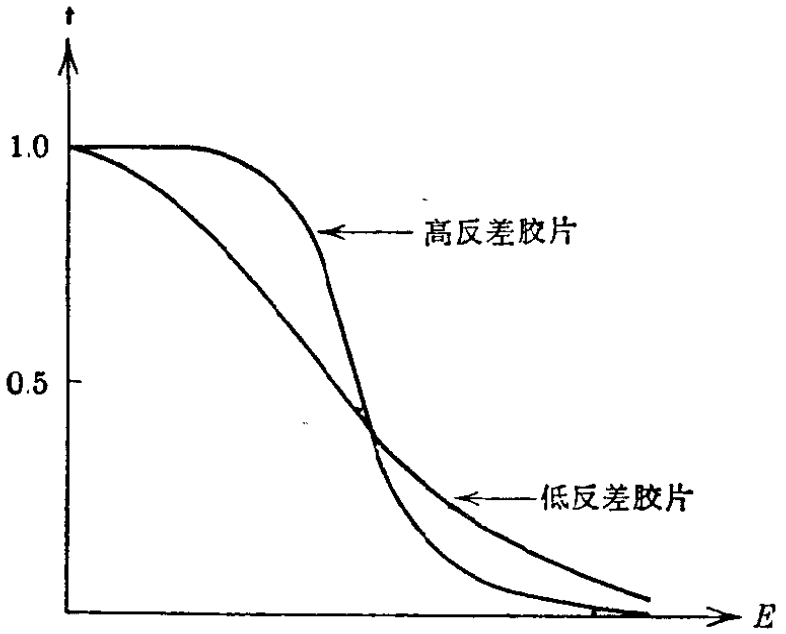


图 7-11　高反差胶片和低反差胶片的透射率-曝光量曲线

调制传递函数

迄今为止，我们实际上都假定曝光量的任何变化，不论其

空间尺度如何细微，都将根据乳胶的 H-D 曲线的规定转换为对应的密度变化．实际上人们发现，当曝光量变化的空间尺度过小时，在最后的透明片上可能不会发生相应的密度变化．这时，我们可以用很一般的术语说，一张给定的胶片必定具有有限的频率响应．

前面我们看到，胶片一般表现出高度非线性的性能，因此，肯定不好对胶片变换给出一个传递函数．但是，限制频率响应的物理现象却大多是线性的（例如，曝光时光在乳胶中的散射及显影时的化学扩散）．因此可以期望，限制频率响应的线性现象能够从非线性性质中分离出来．实际上这种方法在大多数情形下是相当准确的．因此一般可以把照片变换看成是由一个具有一定的传递函数的线性的空间不变滤波器，后面接上一个所谓无记忆的非线性元件（它具有前节所讨论的全部性质）级联而成[1)]．

为了测量胶片所属线性滤波器的详细特性，可以用余弦型曝光量

$$E=E_0+E_1\cos 2\pi fx. \tag{7-13}$$

这种曝光量的“调制度”的定义是变化的峰值与本底水平的比值，即

$$M_i=E_1/E_0. \tag{7-14}$$

若测量出这样曝光的透明片上的密度变化，那末通过已知的 H-D 曲线由密度变化可以反推出一个推断的或“有效的”余弦型曝光量分布，如图 7-12 所示．有效曝光量分布的调制度 M_{eff} 将永远小于真实的曝光量分布的调制度 M_i．因此，胶片的调制传递函数定义为

1）一个更准确的表示是由一个线性滤波器、一个无记忆的非线性元件和另一个线性滤波器级联而成．但是对于我们的目的，上述较简单的表示已足够了．

$$M(f)=\frac{M_{eff}(f)}{M_i(f)},$$

式中着重指出它对曝光量的空间频率的依赖关系。此外，有效曝光量分布相对于真实的曝光量分布还将发生一个相移 $\Omega(f)$，它取决于胶片变换的线性部分的脉冲响应或点扩散函数的细致形状。因此胶片变换的线性部分的频率响应可用复数的传递函数

$$\mathbf{M}(f)=M(f)\ \exp\ [-j\Omega(f)]$$

来描写。而适用于胶片变换的非线性部分的有效曝光量分布，因而可写为

$$E=E_0+M(f)E_1\cos[2\pi fx-\Omega(f)]. \qquad (7\text{-}15)$$

图 7-13 示出一张胶片的典型的 MTF 对频率的依赖曲线。响应明显不为零的频率范围对于不同的胶片变化很大，它依赖于晶粒大小、乳胶厚度和其它一些因素。例如，Plus-X

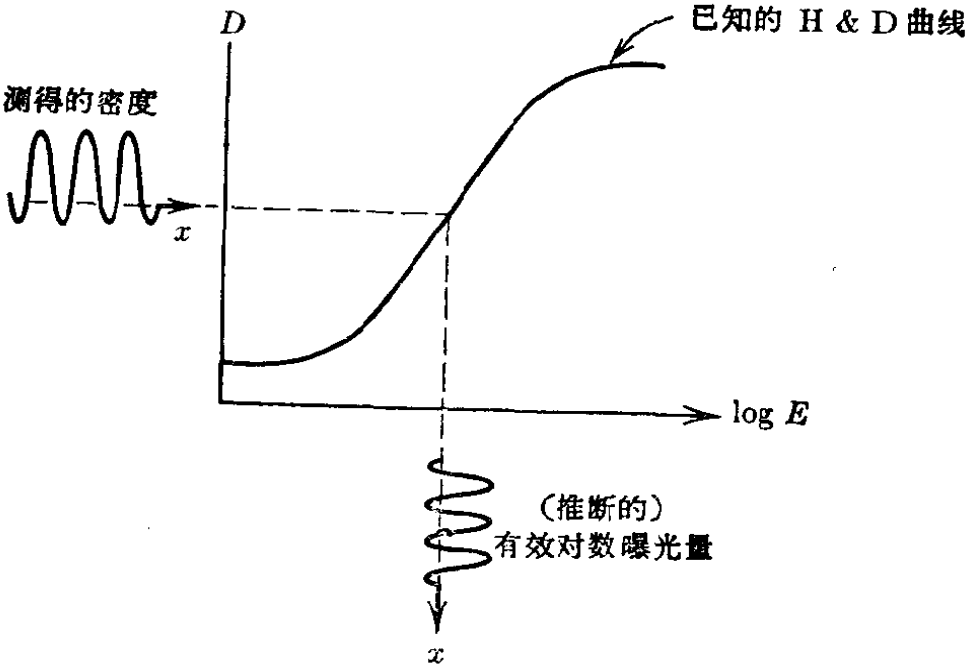


图 7-12　有效曝光量分布的测量

胶片有明显响应的频率约到 50 条线/毫米，而 Kodak 649 F 光谱干板则扩展到至少 2500 条线/毫米.

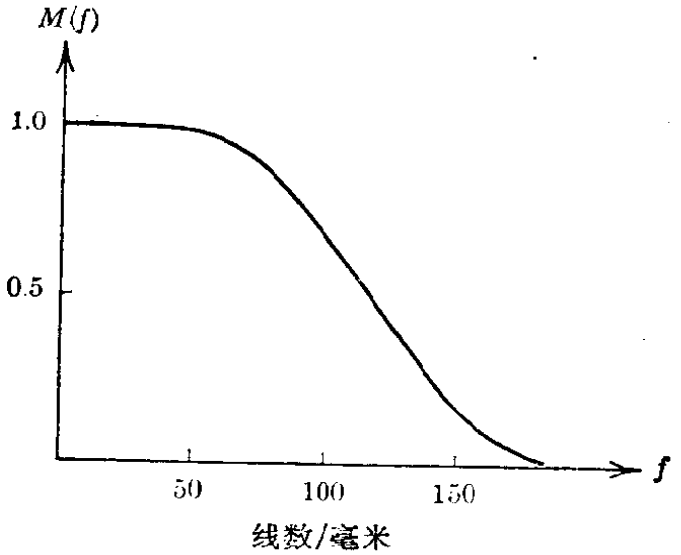


图 7-13　胶片的典型调制传递函数

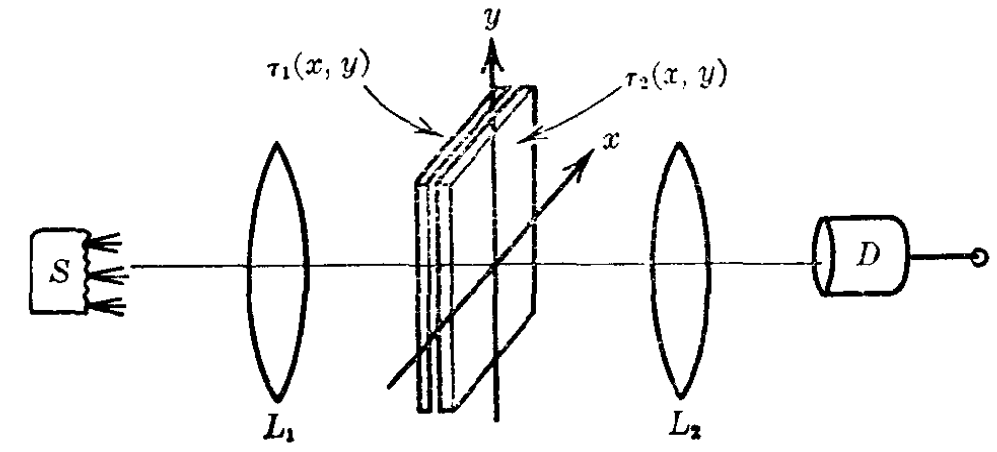
§ 7-3　根据几何光学的非相干处理系统

有一类重要的光学处理系统，其特点是它们的设计完全根据几何光学理论. 这些系统大多数是造来供非相干照明用的. 它们的结构和操作比较简单，但是我们将看到，这种简单性有时是以限制数据处理容量为代价的. 应当把下面讨论的系统只看成为一种特殊的设计原理的例子.

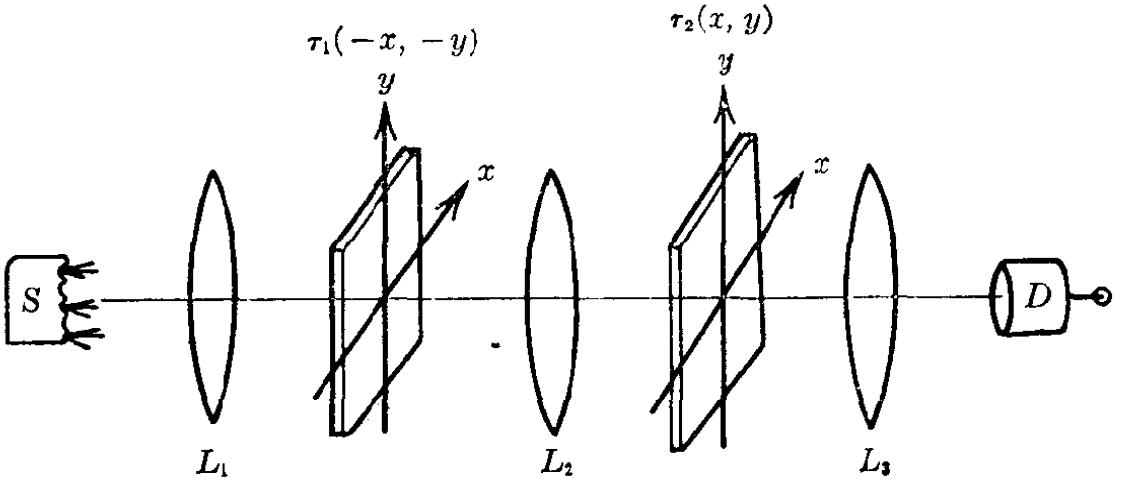
成像

利用透镜的简单成像性质可以设计出一种最简单的光学处理系统. 这种系统早在 1927 年就已经由德国德累斯顿的 E. Goldberg 在一项德国专利申请中提出来. Goldberg 后来于 1931 年得到了美国的专利[7-19]，他充分认识到他的发明在我们现在称为特征识别的这一领域内的应用潜力.

成像系统的基本原理是简单的. 若把强度透射率为 τ_1



(a)



(b)

图 7-14　实现一个乘积的积分的系统

的一张透明片在强度透射率为 τ_2 的另一张透明片上成像，那么，在第二张透明片后面每一点的光强都正比于乘积 $\tau_1\tau_2$. 可以用一个光电探测器来测量透过这两块透明片的总强度，给出的光电流 I 为[1)]

1) 在把积分限写成无穷大时，我们假定透明片的有限大小已包括在 τ 的定义中.

$$I=k\int_{-\infty}^{\infty}\int\tau_1(x,y)\tau_2(x,y)dxdy. \qquad (7\text{-}16)$$

图 7-14 示出了实现这一运算的两种办法. 在方法(a)中,透镜 L_1 把均匀非相干光源 S 的一个放大像投射在紧贴着的两张透明片上. 然后透镜 L_2 再把 τ_2 所透射的光的缩小像投射在小的光电探测器 D 上. 于是光电流由方程(7-16)给出.

如果两张透明片或其中之一必须迅速更换,那末在上述安置下,要使透明片紧贴着就有着机械上的困难. 因此,如图 7-14b 所示把两张透明片在物理上分开是有好处的. 透镜 L_1 仍把光源的一个放大像投射到 τ_1 上. 透镜 L_2 将 τ_1 成像在 τ_2 上,而透镜 L_3 把透过 τ_2 的光的一个缩小像投射到探测器上. 注意透明片 τ_1 必须按镜面反射的几何位置装入系统中,以补偿 L_2 的成像操作所引起的倒向. 光电流仍由方程(7-16)给出.

虽然上述运算在包括特征识别的许多应用中是很有用的,但是常常还希望实现和它有联系但更普遍的卷积运算. 用上述任意一个系统,使其中一张透明片匀速运动,并测量光电流响应作为时间的函数,就可实现函数 τ_1 和 τ_2 的一维卷积. 更具体地讲(参看图 7-14b),让透明片 τ_2 按反射的几何位置放入,使得运算(7-16)变成

$$I=k\int_{-\infty}^{\infty}\int\tau_1(x,y)\tau_2(-x,-y)dxdy,$$

若令 τ_2 在负 x 方向上以速度 v 运动,那末探测器的响应便是

$$I(t)=k\int_{-\infty}^{\infty}\int\tau_1(x,y)\tau_2(vt-x,-y)dxdy.$$

若 x 方向上的扫描依序重复,每次扫描时 y 有不同的位移

$-y_m$，那么探测器的响应是

$$I_m(t)=k\int_{-\infty}^{\infty}\int\tau_1(x,y)\tau_2(vt-x,y_m-y)dxdy,$$

$$m=1,2,3\cdots. \qquad (7\text{-}17)$$

函数$I_m(t)$的阵列就代表一个完整的二维卷积，虽然在y方向是抽样的.

无运动元件的卷积运算

由于要用机械扫描，上述实现卷积的办法是极其麻烦而且费时的. 如果对光路的安排加以修改，就能够不作相对运动而实现同一运算[7-20]. 参看图7-15，分布光源S放在透镜L_1的前焦面上. 透射率为$\tau_1(-x,-y)$的透明片紧贴着放在L_1之后. 在离τ_1的距离为d处，并且紧贴在透镜L_2的前面，放置透明片$\tau_2(+x,+y)$. 然后测量透镜L_2后焦面上的强度分布，可以用胶片，也可以用电子探测器[如视像管(vidicon)].

为了解释这个系统的工作，首先考虑由光源上特定一点$(-x_s,-y_s)$发出的光. 来自这一点的各条光线经透镜L_1(和τ_1)后变成平行光照明τ_2，照明光的强度分布正比于$\tau_1[-x+(d/f)x_s,-y+(d/f)y_s]$. 通过$\tau_2$后，这些平行光线再聚焦到探测器的$(x_s,y_s)$点上，这里我们假定两个透镜的焦距相同. 于是探测器上的强度分布为

$$I(x_d=x_s,y_d=y_s)=k\int_{-\infty}^{\infty}\int\tau_1\left(\frac{d}{f}x_s-x,\ \frac{d}{f}y_s-y\right)\cdot$$

$$\cdot\tau_2(x,y)dxdy, \qquad (7\text{-}18)$$

这正是所要求的卷积.

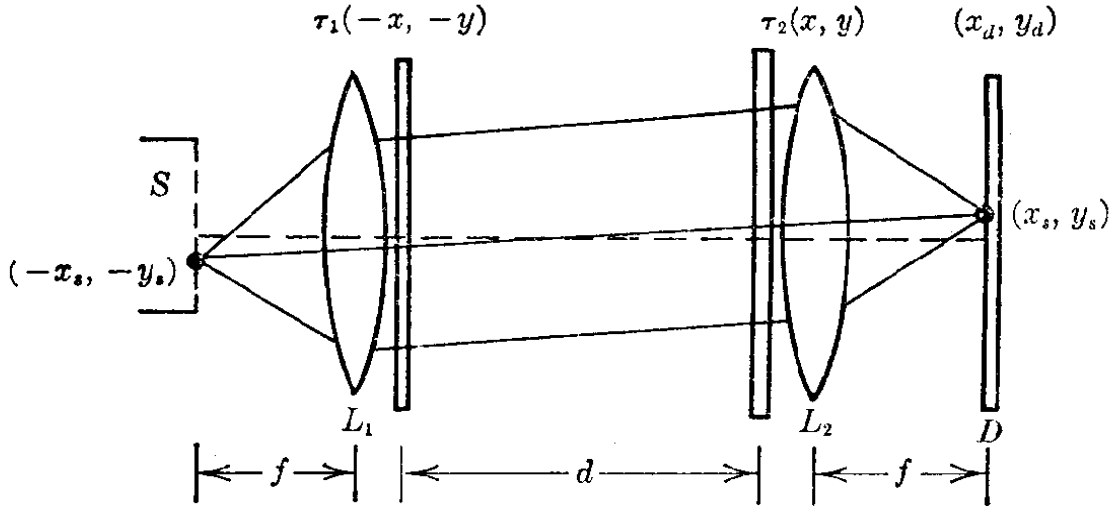


图 7-15　无需运动而能实现卷积运算的系统

用散焦系统得到脉冲响应的综合

借助于图 7-16 所示的“散焦”系统[1)]，能够直接综合出一个所要求的脉冲响应[7-21]。透镜 L_1 仍将使分布光源 S 在透射率为 τ_1 的“输入”透明片上成像。透镜 L_2 使 τ_1 在平面 P' 上成像。为了简单起见，我们假定 τ_1 和 P' 距透镜 L_2 的距离都是 $2f$，于是放大率为 1。具有所要求的脉冲响应形式的透明片 τ_2 直接放在透镜 L_2 的后面；在离像平面 P' 距离为 Δ 的平面 P 上得到系统的输出。

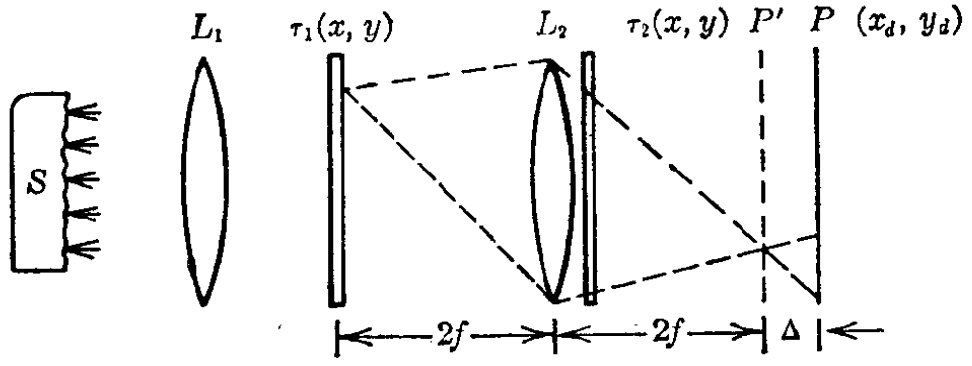


图 7-16　用散焦系统脉冲响应的综合

1) 这个系统事实上和图 7-19 的系统几乎全同，但是观点迥异，应当分别讨论。

在 τ_1 上坐标(x, y)处放一个单位强度的点光源并求在平面 P 上所得出的强度分布，很容易解释这个系统的工作原理。在几何光学近似下，穿过 τ_2 的光线会聚在平面 P' 上的一个理想点，然后发散开，在平面 P 上形成 τ_2 的一个缩小的投影。投影中心的坐标为$\{x_d=-[1+(\Delta/2f)]x, y_d=-[1+(\Delta/2f)]y\}$，$\tau_2$ 缩小的比率是 $\Delta/2f$。考虑到投影时 τ_2 的方向将发生几何反射，对点光源的响应可写成

$$|\mathbf{h}(x_d, y_d; x, y)|^2=$$

$$=k\tau_2\left\{-\frac{2f}{\Delta}\left[x_d+\left(1+\frac{\Delta}{2f}\right)x\right], \frac{2f}{\Delta}\left[y_d+\left(1+\frac{\Delta}{2f}\right)y\right]\right\}.$$

于是输出点$(-x_d, -y_d)$的强度可以写成卷积积分

$$I(-x_d, -y_d)=$$

$$=k\int_{-\infty}^{\infty}\int\tau_1(x, y)\tau_2\left\{\frac{2f}{\Delta}\left[x_d-\left(1+\frac{\Delta}{2f}\right)x\right],\right.$$

$$\left.\frac{2f}{\Delta}\left[y_d-\left(1+\frac{\Delta}{2f}\right)y\right]\right\}dxdy. \qquad (7\text{-}19)$$

限制

以几何光学为基础的非相干处理系统有一个共同的限制：由于照明的非相干性质，所以输入数据和脉冲响应都限于非负的(强度)分布。虽然也存在有实现等价于负的强度分布的方法(例如见文献[7-21])，但这些方法通常是冗烦的，而且不方便。因此在使用非相干光照明时，没有简单而直接的方法来处理具有双极性脉冲响应的双极性输入。

此外，一切根据几何光学原理设计的系统还必须满足一

个共同的约束：系统的几何安置必须经过挑选，使得衍射效应可以完全忽略。图 7-14a 的系统很容易满足这个要求，图 7-14b 的系统满足这个要求也不困难。但是图 7-15 和图 7-16 的系统在这方面会有很大的缺陷，这从下面的讨论即可明白。参看习题 2-12，一个给定函数的复杂程度的一种方便的量度是其空间-带宽积。这个乘积以很好的近似表示了该函数所包含的独立数据点的数目。在一个数据处理系统中，为了得到尽可能高的效率，系统应设计成能够处理尽可能大的空间-带宽积的输入函数。

考虑图 7-15 的处理系统。为了极度增大系统的空间-带宽积，我们将力图在透明片上放置尽可能多的独立数据点。但是随着透明片上的空间结构变得越来越精细，通过第一张透明片的光就越来越多地被衍射，只剩下越来越少的光遵从几何光学定律。这样，分析这个系统所用的方法就变得越来越不准确，因而其输出就偏离所要求的结果。

类似的讨论也适用于图 7-16 的系统。随着第二张透明片上的结构越来越精细，从 τ_1 上的一个点光源投射到平面 P 上的光就越来越不像 τ_2 的几何投影，当透明片的空间-带宽积变大时，用来预言系统性能的分析方法就不再准确了。

虽然我们只考虑了一些特例，但是一个基本的事实是清楚的：如果把大量数据塞入一个给定大小的孔径，那末最终总是必须要考虑衍射效应。因此，如果系统是根据几何光学设计的，那末这种系统也只能在保证几何光学定律准确成立的条件下使用，明确这一点是很重要的。

§7-4 频域综合

也能够在频域内而不是在空域内来综合出所需要的各种线性滤波运算。当使用相干光照明时，可以由直接改变变换

透镜后焦面上的振幅透射率来综合所需要的滤波运算。在讨论照片的滤波(Maréchal)和相衬显微术(Zernike)时，我们已经看到这种类型的处理系统的例子。

当使用非相干光照明时，频域综合仍然是可能的，因为在光瞳的透射率和系统的光学传递函数之间存在着一个简单的自相关函数关系。但是，非相干系统有两个明显的缺点。第一，它们能直接综合的传递函数只限于全部自相关函数，也就是说，只能实现非负的实数脉冲响应，而在许多实际应用中需要更普遍的传递函数。第二，即使所需要的传递函数刚好对应于一个非负的实数脉冲响应，但是所要求的光瞳函数不是唯一的，而且还不知道为求得会给出所需要的传递函数的最简单的光瞳函数的系统步骤.

由于这些理由，我们只限于注意用相干光照明的频域处理。这并不意味着当照明为非相干光时频域处理毫无价值。使用频域综合的非相干系统[1)]的一个例子，可见文献[7-22].

相干系统的光路图

相干系统对复振幅是线性的，它能实现下述形式的运算：

$$I(x, y)=K\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{g}(\xi, \eta)\mathbf{h}(x-\xi, y-\eta)d\,\xi d\,\eta\right|^2. \quad (7\text{-}20)$$

图 7-17 中示出了实现这种类型的运算的两种可能的光路图. 在系统(*a*)中，点光源 S 发出的光经透镜 L_1 进行准直。要滤波的输入插在 P_1 平面上，使得 P_1 上有一个随空间变化的振幅透射率 $\mathbf{g}(x_1, y_1)$. 透镜 L_2 对 $\mathbf{g}$ 进行傅里叶变换[2)]，在 P_2 平

1) 这个系统在其最初一步也使用相干光，但只是用来把输入变换成一个特殊形式，使得可以用非相干照明来实现所需要的运算。

2) 当然，透镜尺寸必须选得足够大，以保证可以忽略格晕效应(见习题5-4).

面上产生一个振幅分布 $k_1\ \mathbf{G}(x_2/\lambda f, y_2/\lambda f)$，其中 $\mathbf{G}$ 是 $\mathbf{g}$ 的傅里叶变换式，k_1 是一个复常数。在 P_2 平面上插入一个滤波器以改变频谱 $\mathbf{G}$ 的振幅和位相。若用 $\mathbf{H}$ 表示 $\mathbf{h}$ 的傅里叶变换式，那末，频率平面上的滤波器的振幅透射率应为

$$\mathbf{t}(x_2, y_2) = k_2\mathbf{H}\left(\frac{x_2}{\lambda f}, \frac{y_2}{\lambda f}\right). \tag{7-21}$$

于是在滤波器后面的振幅分布正比于 $\mathbf{GH}$。最后，透镜 L_3 将这个振幅分布变换为 P_3 平面上的强度分布

$$I(x_3, y_3) = K\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{g}(\xi, \eta)\mathbf{h}(-x_3-\xi, -y_3-\eta)\,d\xi\,d\eta\right|^2.$$

式中 x_3 和 y_3 前面的负号是由于接连两次傅里叶变换（而不是一次傅里叶变换加上一次逆傅里叶变换）引起输出的空间反射的结果（见习题 2-3 a）。这一符号上的麻烦可以由用反射方式重新定义 (x_3, y_3) 坐标系来消除，图 7-17 a 中已经这样画了。今后我们将采用这一符号规则，于是输出强度分布可表示为

$$I(x_3, y_3) = K\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{g}(\xi, \eta)\mathbf{h}(x_3-\xi, y_3-\eta)\,d\xi\,d\eta\right|^2. \tag{7-22}$$

图 7-18 示出上述类型的一个光学处理系统的照片。

实现同一运算的第二种光路图示于图 7-17b 中。透镜 L_1 仍对点光源 S 发出的光进行准直。现在透镜 L_2 同时履行傅里叶变换和重新成像这两种操作。输入透射率 $\mathbf{g}$ 加在 P_1 平面上，P_1 平面现在位于 L_2 之前距离为 $2f$ 处[1]。在 L_2 的后焦面上出现频谱 $\mathbf{G}$，但这时要乘上二次位相因子

1) 距离 $2f$ 并不重要。只要求 P_1 平面和 P_3 平面满足透镜定律即可。

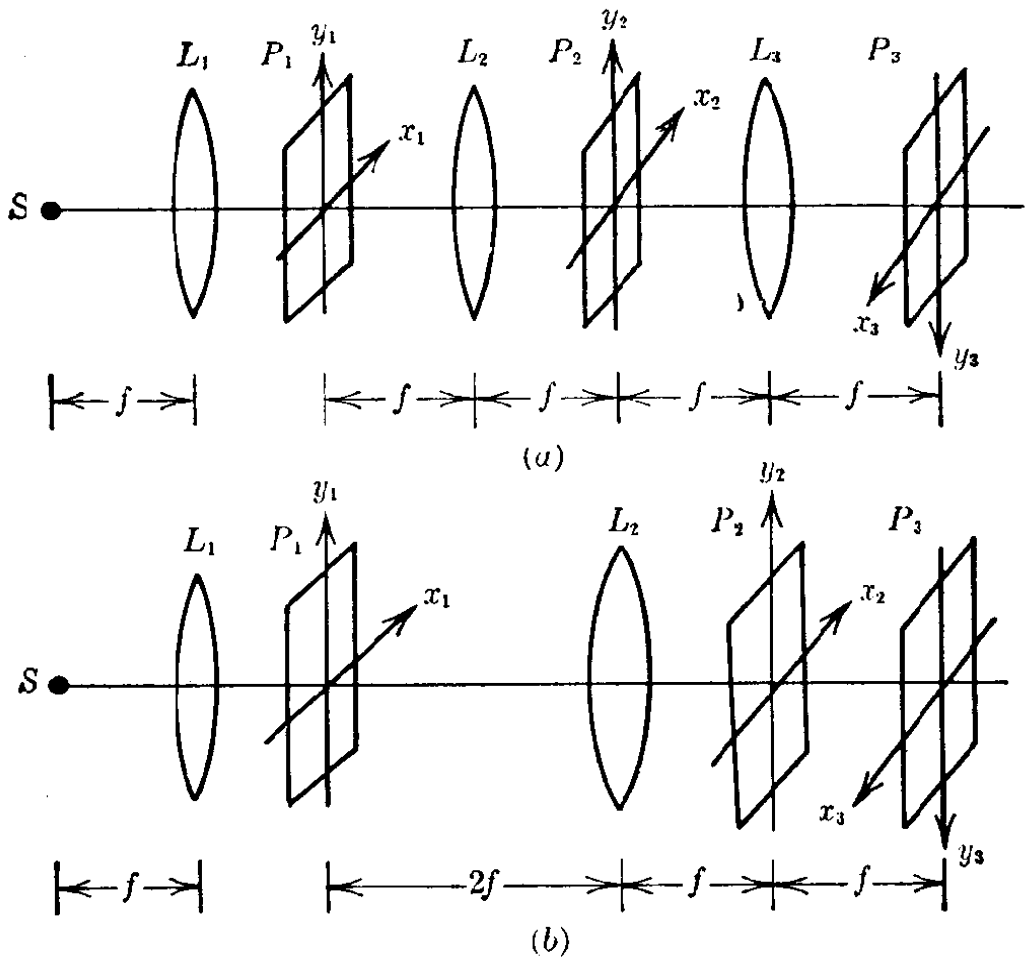


图 7-17　相干处理系统的两种可能的光路图

$\exp\left[-j\frac{k}{2f}(x_2^2+y_2^2)\right]$，因为输入不在前焦面上[见方程 (5-19)]．振幅透射率正比于 **H** 的频率平面滤波器仍安放在 P_2 平面上．P_3 平面位于透镜后面距离为 $2f$ 处；因此 P_1 平面和 P_3 平面满足透镜定律．因为物的频谱被乘上**H**，所以 P_3 平面上的强度仍为

$$I(x_3, y_3)=K\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{g}(\xi,\eta)\mathbf{h}(x_3-\xi,\ y_3-\eta)\,d\xi d\eta\right|^2.$$

第二种光路有两个实际的缺点．第一，和系统(*a*)比较，系统(*b*)的输入与变换透镜 L_2 的距离是前一情形的两倍．

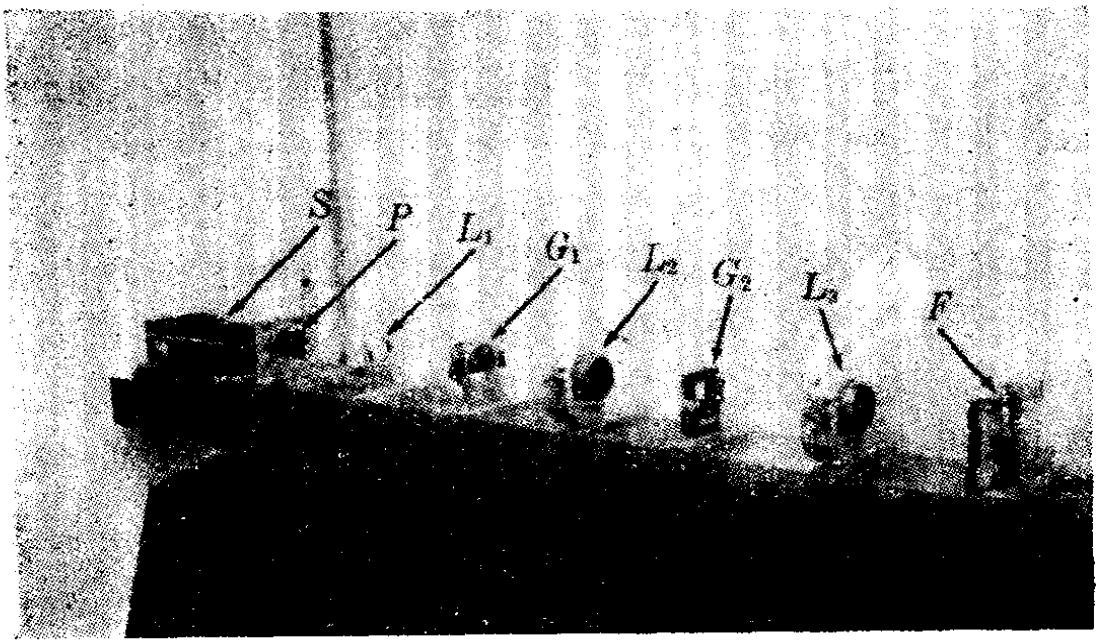


图 7-18　相干处理系统的照片。S，激光光源；P，针孔滤波器；L_1，准直透镜；G_1，液门(输入平面)；L_2，变换透镜；G_2，液门(频率平面)；L_3，变换透镜；F，底片夹(输出平面)

这意味着，对于给定的焦距和输入的尺寸大小，系统 (b) 的 L_2 必须比系统(a)的要大，以保证可以忽略格晕效应；第二个缺点是由于与分析透镜的相干成像性质时导至近似式(5-29)的同样的考虑引起的。在那里，我们发现必须假定，任一特定点上像的振幅，只是由物上的对应几何点周围一个小区域内的物光源振幅贡献而成。如果**H**所代表的滤波操作具有很大的空间-带宽积，那末脉冲响应 **h** 将扩展到一个相当大的区域，这时系统(b)的输出必须看成是对函数 $\mathbf{g}(x_1, y_1)\exp\left[j\frac{k}{4f}\cdot\right.$ $\left.\cdot(x_1^2+y_1^2)\right]$ 而不是对 $\mathbf{g}(x_1, y_1)$ 的经过滤波后的形式。系统(a)不会遇到这个问题，它是把一个平面 P_1 成像到另一平面 P_3 上，而不是把一个球面成像到另一个球面上。

最后应当着重指出，相干系统常常用来处理一大批一元函数而不是单个的二元函数。图 7-19 示出这些所谓像散处

理器的一个例子. 准直透镜 L_1 后面是 P_1 平面内的输入数据. 输入数据是由垂直的一列一维透射率函数组成；每个函数沿水平方向变化. 后面放一个柱面透镜 L_2，它和 P_1 的距离为其焦距 f，并且只对垂直方向才起作用. 在透镜 L_2 后面距离为 $2f$ 处放一个球面透镜 L_3，它的焦距也是 f. 现在的"频率平面"在 P_2. 透镜组合 L_2、L_3 在 y 方向作了两次傅里叶变换，于是在垂直方向上起成像作用. 因为在 x 方向上 L_2 不起作用，所以球面透镜 L_3 在 P_2 上给出了水平方向的傅里叶变换$\left[\text{只差一个位相因子 } \exp\left(-j\frac{k}{f}x_2^2\right)\right]$. 在 P_2 前面紧接着放一个焦距为 $f/2$ 的负柱面透镜，可以消除这个位相因子，这时负柱面透镜引进了一个相乘的位相变换

$$\mathbf{t}_l(x_2)=\exp\left(j\frac{k}{f}x_2^2\right), \tag{7-23}$$

它抵消了位相弯曲. 如果输入阵列是一组透射率函数 $\mathbf{g}_k(x_1)$，$k=1,2,\cdots,K$，那末在 P_2 平面上出现对应的一组变换式 $\mathbf{G}_k(x_2)$，$k=1,2,\cdots,K$，其垂直次序由于成像操作和原来颠倒了.

现在在 P_2 平面上引进一组一维滤波器的线性阵列. 透镜组 L_4、L_5 仍在 y 方向成像而在 x 方向进行傅里叶变换，这样保持了阵列结构，但是把各个函数送回到"空域". 与最后的

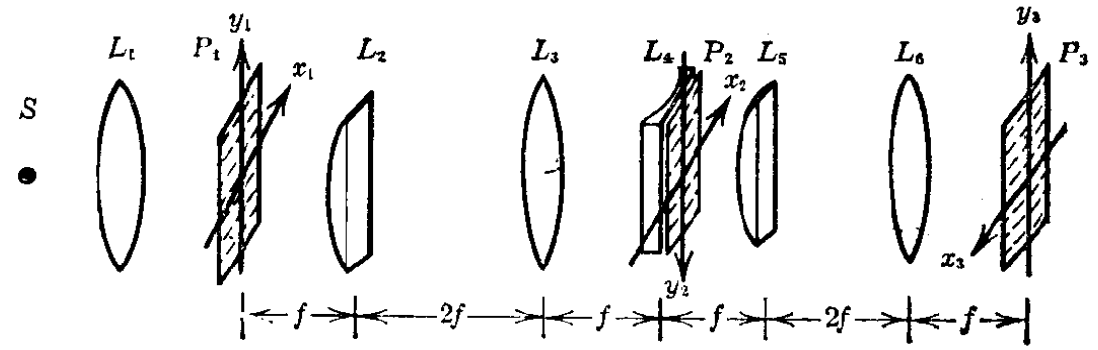


图 7-19　一个像散处理器的例子

傅里叶变换相联系的位相因子一般不必考虑.

限制

虽然相干系统一般说来比非相干系统更为灵活而且有更大的数据处理容量，但是对它们能够完成的运算种类仍有一定的限制. 我们在这里只考虑靠独立控制频率平面内的振幅透射率和位相透射率的方法来得到想要的传递函数的系统所受的限制. 更完善的利用干涉量度方法记录来制作频率平面模片(mask)的方法，可以摆脱一部分限制，我们将在§7-5讨论.

实现一个给定传递函数的传统方法，是在频率平面上放置独立的振幅模片和位相模片. 用浸在液门中的照相底板很容易控制振幅透射率. 位相透射率可以由插入一块厚度适当变化的透明板来控制. 一般地说，用这个方法要实现多于两个值的位相控制(即相对延迟 0° 或 180°)是困难的. 移相板可以刻制在衬底上，大致同刻制衍射光栅的方法一样，也可以用蒸发技术或胶片浮雕 (film-reliefing) 技术来实现. 所有这些方法都很麻烦，并且只有当所要求的两个值的位相控制的图样比较简单时才能成功地使用. 因此有着一定的实际限制，只能实现相当简单的传递函数. 应当注意，即使所需要的脉冲响应非常简单(例如字母"P")，但对应的传递函数也可能是(1)难以预先解析地算出，以及(2)过于复杂不能用这些方法来综合的.

最后，如果空间-带宽积很大的输入函数用空间-带宽积很大的脉冲响应来滤波，那末滤波器模片在频率平面上的对准将要求极高的定位准确度(见习题7-6). 但是，这个问题通常用精确的测微定位计可以克服.

总之，对传统的相干处理器的最严重的限制，在于难以通

过任意的而且是简单的图样来同时控制频率平面上的振幅和位相. 直到 1963 年,随着用干涉度量方法记录的频率平面滤波器的发明,才在很大程度上克服了这个严重的限制. 光学处理领域中这一新进展是下一节的题目.

§ 7-5 Vander Lugt 滤波器

1963 年密执安大学雷达实验室的 A. B. Vander Lugt 提出并显示了综合出相干处理器用的频率平面模片的一个新方法[7-23,7-24]. 用这个方法综合出的模片具有这样一个值得注意的性质:尽管它们只由吸收图样组成[1],但它们能够同时有效地控制传递函数的振幅和位相. 利用这一方法能够克服传统的相干处理系统的两个最严重的限制.

频率平面模片的综合

Vander Lugt 滤波器的频率平面模片是用图 7-20 所示

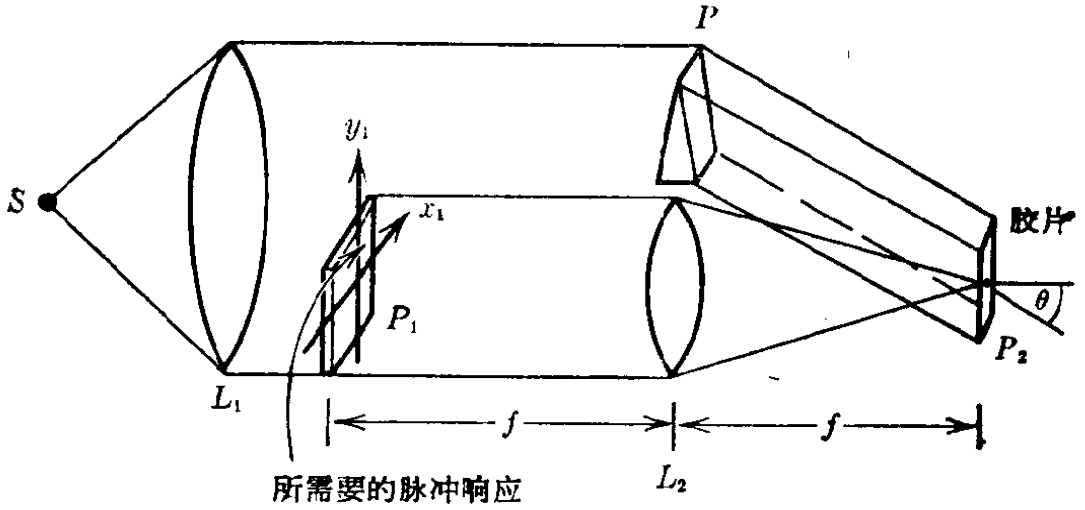


图 7-20 记录 Vander Lugt 滤波器的频率平面模片的方法

1) 在历史上,Vander Lugt 滤波器之前已出现了一种十分类似的方法,现在称为硬限幅滤波器. 这种滤波器的频率平面模片是用数字方法计算出来的而不是用光学方法记录下来的. 虽然硬限幅滤波器早在 1961 年已经用于雷达数据处理,但由于保密关系,直到 1965 年才出现在公开文献上[7-25].

的干涉度量系统综合成的。透镜 L_1 使点光源 S 发出的光准直。一部分光射到模片 P_1 上，P_1 的振幅透射率等于所需要的脉冲响应 $\mathbf{h}$。透镜 L_2 对振幅分布 $\mathbf{h}$ 进行傅里叶变换，在胶片上产生一个振幅分布 $\frac{1}{\lambda f}\mathbf{H}\left(\frac{x_2}{\lambda f}, \frac{y_2}{\lambda f}\right)$。此外，另一部分准直光从模片 P_1 之上通过，射到棱镜 P 上，最后以图示角度 θ 入射到胶片上。

入射到胶片上每一点的总强度决定于所出现的两个振幅分布的干涉。由棱镜射来的倾斜入射平面波产生的场分布为

$$\mathbf{U}_r(x_2, y_2)=r_0\exp(-j2\pi\alpha y_2), \tag{7-24}$$

其中空间频率 α 为

$$\alpha=\frac{\sin\theta}{\lambda}, \tag{7-25}$$

因此总强度分布可以写成

$$\mathscr{I}(x_2, y_2)=\left|r_0\exp(-j2\pi 2y_2)+\frac{1}{\lambda f}\mathbf{H}\left(\frac{x_2}{\lambda f}, \frac{y_2}{\lambda f}\right)\right|^2=$$

$$=r_0^2+\frac{1}{\lambda^2 f^2}\left|\mathbf{H}\left(\frac{x_2}{\lambda f}, \frac{y_2}{\lambda' f}\right)\right|^2+\frac{r_0}{\lambda f}\mathbf{H}\left(\frac{x_2}{\lambda f}, \frac{y_2}{\lambda f}\right)\exp(j2\pi\alpha y_2)+$$

$$+\frac{r_0}{\lambda f}\mathbf{H}^*\left(\frac{x_2}{\lambda f}, \frac{y_2}{\lambda f}\right)\exp(-j2\pi\alpha y_2). \tag{7-26}$$

注意：如果复函数 $\mathbf{H}$ 有振幅分布 A 和位相分布 ψ，亦即如果

$$\mathbf{H}\left(\frac{x_2}{\lambda f}, \frac{y_2}{\lambda f}\right)=A\left(\frac{x_2}{\lambda f}, \frac{y_2}{\lambda f}\right)\exp\left[-j\psi\left(\frac{x_2}{\lambda f}, \frac{y_2}{\lambda f}\right)\right],$$

那末 $\mathscr{I}$ 的表达式可重新写成下述形式：

$$\mathscr{I}(x_2, y_2) = r_0^2 + \frac{1}{\lambda^2 f^2} A^2\left(\frac{x_2}{\lambda f}, \frac{y_2}{\lambda f}\right) +$$

$$+ \frac{2r_0}{\lambda f} A\left(\frac{x_2}{\lambda f}, \frac{y_2}{\lambda f}\right) \cos\left[2\pi\alpha y_2 - \psi\left(\frac{x_2}{\lambda f}, \frac{y_2}{\lambda f}\right)\right], \quad (7\text{-}27)$$

这种形式说明了干涉量度方法为什么可以在一个只对强度响应的探测器上记录下一个复函数**H**：振幅信息和位相信息分别是作为一个高频载波的调幅和调相而记录下来的。这个高频载波就是由棱镜引入的倾斜"参考"波。

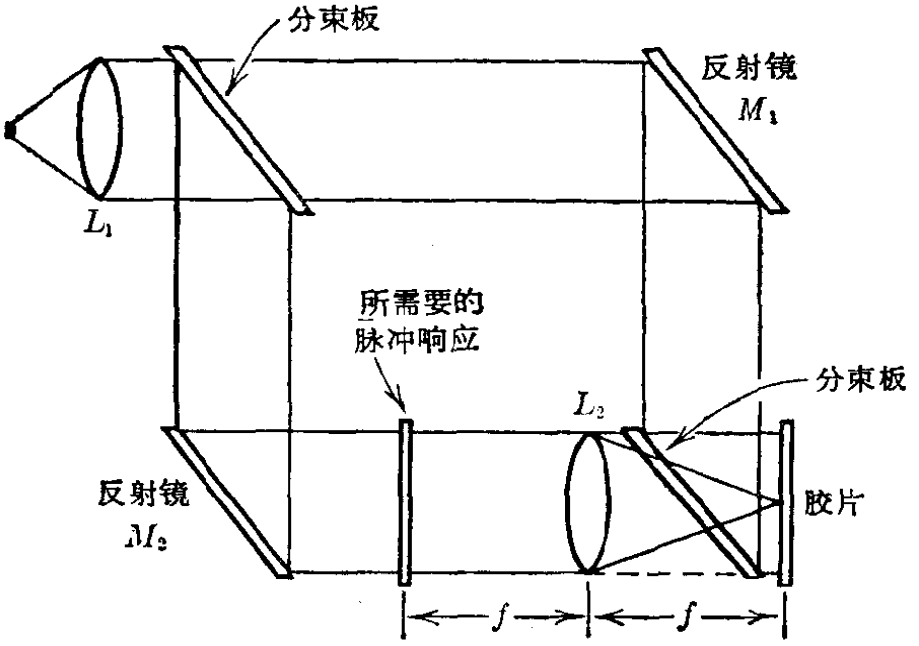
当然，还有别的光学系统也会产生与(7-27)式相同的强度分布。图7-21示出了另外两种可能性。系统(*a*)由改装过的Mach-Zehnder干涉仪构成。使反射镜M_1倾斜，在(胶片)平面P_2上产生一个倾斜平面波.在干涉仪的下面一臂上，透镜L_2仍对所需要的脉冲响应进行傅里叶变换。最后的分束板使得这两束波在胶片平面上相加。

系统(*b*)是一个改装过的瑞利干涉仪，它提供了产生同一强度分布的第三种方法(见文献[7-2]第128页)。准直透镜L_1后面有一个较小的透镜L_2，它将一部分准直光聚焦成透镜L_3的前焦面上的一个亮斑。这一"参考点"所产生的球面波经透镜L_3准直，在胶片平面上产生一个倾斜平面波。透过脉冲响应模片的振幅以通常的方式进行傅里叶变换。于是在记录平面上又得到一个类似方程(7-27)的强度分布。

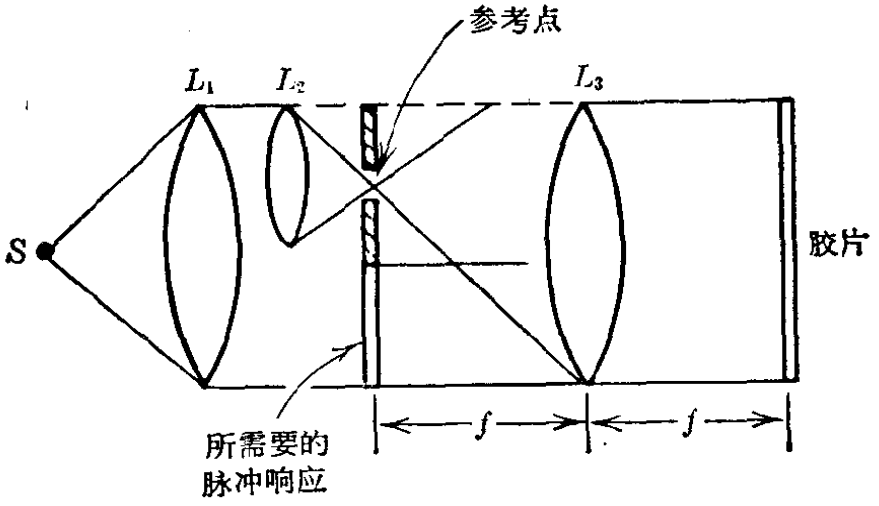
综合频率平面模片的最后一步，是将经过曝光的胶片显影，以制得一张透明片，其振幅透射率正比于曝光期间所受照射的强度分布。这样，

$$\mathbf{t}(x_2, y_2) \propto r_0^2 + \frac{1}{\lambda^2 f^2}|\mathbf{H}|^2 + \frac{r_0}{\lambda f}\mathbf{H}\exp(j2\pi\alpha y_2) + \\ + \frac{r_0}{\lambda f}\mathbf{H}^*\exp(-j2\pi\alpha y_2). \qquad (7\text{-}28)$$

注意：上式中的第三项，除了一个简单的复指数因子外，正比于 **H**，因此它的形式正好与为综合出一个脉冲响应为 h 的滤



(*a*)



(*b*)

图 7-21　制作频率平面横片的另外两种系统
(*a*) 改装的 Mach-Zehnder 干涉仪；(*b*) 改装过的瑞利干涉仪

波器所需要的形式相同．下面还需要说明，怎样才能利用透射率中这一特定项，而同时排除掉其它项．

处理输入数据

在综合出频率平面模片之后，就可以把它插进前面已示于图 7-17 a 的通常处理系统中．如果要进行滤波的输入函数是 $\mathbf{g}(x_1, y_1)$，那末投射到频率平面模片上的光的振幅分布就是 $\frac{1}{\lambda f}\mathbf{G}\left(\frac{x_2}{\lambda f}, \frac{y_2}{\lambda f}\right)$．于是透过模片的光的场强遵从比例式

$$\mathbf{U}_2 \propto \frac{r_0^2\mathbf{G}}{\lambda f} + \frac{1}{\lambda^3 f^3}|\mathbf{H}|^2\,\mathbf{G} + \frac{r_0}{\lambda^2 f^2}\mathbf{H}\mathbf{G}\,\exp(j2\pi\alpha y_2) +$$

$$+ \frac{r_0}{\lambda^2 f^2}\mathbf{H}^*\mathbf{G}\,\exp(-j2\pi\alpha y_2).$$

图 7-17 a 中的最后一个透镜 L_3 对 $\mathbf{U}_2$ 进行傅里叶变换（并乘上 $1/\lambda f$ 倍）．注意 P_3 平面上是使用反射坐标系，我们得到这个平面上的场强遵从比例式

$$\mathbf{U}_3(x_3, y_3) \propto r_0^2\mathbf{g}(x_3, y_3) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda^2 f^2}[\mathbf{h}(x_3, y_3) * \mathbf{h}^*(-x_3, -y_3) * \mathbf{g}(x_3, y_3)] +$$

$$+ \frac{r_0}{\lambda f}[\mathbf{h}(x_3, y_3) * \mathbf{g}(x_3, y_3) * \delta(x_3, y_3 + \alpha\lambda f)] +$$

$$+ \frac{r_0}{\lambda f}[\mathbf{h}^*(-x_3, -y_3) * \mathbf{g}(x_3, y_3) * \delta(x_3, y_3 - \alpha\lambda f)]. \tag{7-29}$$

我们对上式中的第三项特别感兴趣．注意，

$$\mathbf{h}(x_3, y_3) * \mathbf{g}(x_3, y_3) * \delta(x_3, y_3 + \alpha\lambda f) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{h}(x_3 - \xi, y_3 + \alpha\lambda f - \eta)\;\mathbf{g}(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta. \tag{7-30}$$

我们看到这一部分输出在 x_3y_3 平面上给出 **h** 和 **g** 的卷积，其中心坐标为$(0, -\alpha\lambda f)$。

为了以后参考起见，方程(7-29)的第四项可改写为

$$\mathbf{h}(-x_3, -y_3) * \mathbf{g}(x_3, y_3) * \delta(x_3, y_3-\alpha\lambda f) =$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{g}(\xi, \eta)\mathbf{h}^*(\xi-x_3, \eta-y_3+\alpha\lambda f)d\xi d\eta. \quad (7\text{-}31)$$

它是 x_3y_3 平面上 **g** 和 **h** 的**交叉关联**，中心点的坐标为$(0, \alpha\lambda f)$。

注意，方程(7-29)的第一项和第二项在通常的滤波运算中没有什么特别的用处，它们的中心在 x_3y_3 平面的原点上。于是很清楚，如果“载波频率”α 选得足够高，也就是说，如果采用的参考波具有足够斜的倾角，那末卷积项和交叉关联项将(沿相反方向)偏离轴足够远，使得这两项可以独立观察。要得到 **h** 和 **g** 的卷积，观察者只要考察坐标 $(0, -\alpha\lambda f)$ 周围的光场分布即可。要得到 **h** 和 **g** 的交叉关联，则观察中心位于坐标$(0, \alpha\lambda f)$。

为了更精确地说明对 α 的要求，考虑图 7-22 所示的各个输出项的宽度。若 **h** 在 y 方向的最大宽度为 W_h，**g** 在 y 方向的最大宽度为 W_g，那末各个输出项的宽度如下：

1. $r_0^2\mathbf{g}(x_3, y_3) \longrightarrow W_g$，

2. $\frac{1}{\lambda^2 f^2}[\mathbf{h}(x_3, y_3) * \mathbf{h}^*(-x_3, -y_3) * \mathbf{g}(x_3, y_3)] \longrightarrow 2W_h + W_g$，

3. $\frac{r_0}{\lambda f}[\mathbf{h}(x_3, y_3) * \mathbf{g}(x_3, y_3) * \delta(x_3, y_3+\alpha\lambda f)] \longrightarrow W_h + W_g$，

4. $\frac{r_0}{\lambda f}[\mathbf{h}^*(-x_3, -y_3) * \mathbf{g}(x_3, y_3) * \delta(x_3, y_3-\alpha\lambda f)]\longrightarrow$

W_h+W_g。

由图可清楚看出，若

$$\alpha>\frac{1}{\lambda f}\left(\frac{3W_h}{2}+W_g\right),$$

亦即若

$$\theta>\frac{3}{2}\frac{W_h}{f}+\frac{W_g}{f}, \tag{7-32}$$

(其中用了小角度近似：$\sin\theta\simeq\theta$)则各项将会完全分离。

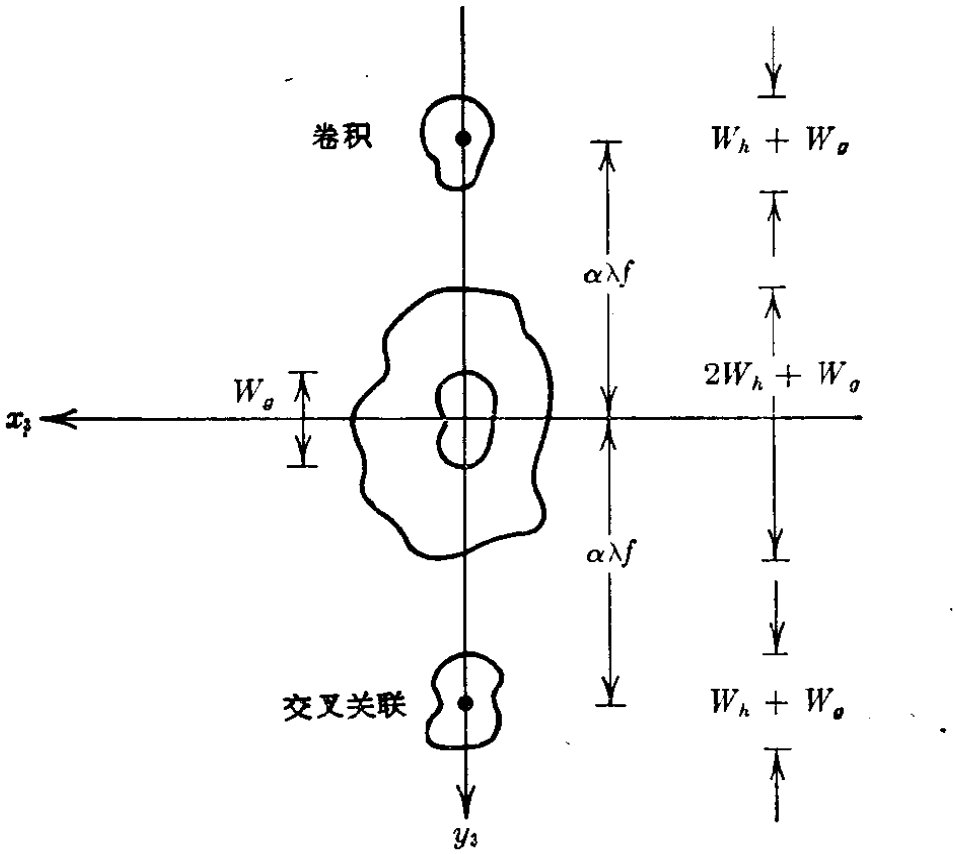


图 7-22 处理器的各个输出项的位置

Vander Lugt 滤波器的优点

使用 Vander Lugt 滤波器可以消除通常的相干处理器所

受的两个最严重的限制. 第一，当想要得到一个 指定的脉冲响应时，就不必去求所需要的传递函数了(这是一个数学上非常复杂而繁重的工作)；而是通过综合频率平面模片的系统用光学方法对脉冲响应进行傅里叶变换. 第二，一般比较复杂的复数值传递函数，用单个吸收模片就综合出来了；而不再需要用复杂的方法来控制频率平面的位相透射率. 吸收模片只要浸在液门中就消除了所有的相对相移.

Vander Lugt 滤波器对频率平面模片 的精确位置仍然是十分灵敏的，但其灵敏程度并不比通常的 相干处理器更高. 记录受调制的高频载波的胶片要求比通常用来综合模片的胶片有更高的分辨率，但是具有合用的分辨率的胶片有现成的(例如 Kodak 光谱底板)，这个要求并不提出什么特殊难题.

注意 Vander Lugt 方法对相干处理提供了一种重要的新的灵活性. 在以前，频率平面模片的制备是重要的实际问题，但是现在的困难又回到空域去了. 一般说来，在空域中 的困难程度要轻得多，因为所需要的脉冲响应常常是简单的，并且所必需的模片可以用常规的照相方法 制 备. 于是 Vander Lugt 滤波器将相干 处理系统的 用途扩展到 一个前所未有的新的应用领域. 相干处理的许多最有前途的应用正是在这个新领域中.

§ 7-6 对特征识别的应用

光学处理多年以来一直受到人们关注的一项特殊应用是在特征识别这一领域中. 我们将看到，这方面的应用提供了一个极好的例子，表明所需的处理操作具有简单的脉冲响应，但其传递函数未必简单. 因此 Vander Lugt 综合技术特别适宜于用到这个方面.

匹配滤波器

匹配滤波器的概念在特征识别问题中起着重要作用，其定义如下：对于一个特定的信号 $\mathbf{s}(x, y)$，若有一个线性的空间不变滤波器，其脉冲响应 $\mathbf{h}(x, y)$ 为

$$\mathbf{h}(x, y)=\mathbf{s}^*(-x, -y), \tag{7-33}$$

则称此滤波器与信号 $\mathbf{s}(x, y)$ 匹配。如果将一输入 $\mathbf{g}(x, y)$ 加到与 $\mathbf{s}(x, y)$ 匹配的滤波器上，则输出 $\mathbf{v}(x, y)$ 为

$$\mathbf{v}(x, y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int\mathbf{h}(x-\xi, y-\eta)\mathbf{g}(\xi, \eta)d\xi d\eta=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int\mathbf{g}(\xi, \eta)\mathbf{s}^*(\xi-x, \eta-y)\,d\xi d\eta, \tag{7-34}$$

它正是 $\mathbf{g}$ 和 $\mathbf{s}$ 的交叉关联函数。

历史上，匹配滤波器概念最初是在信号检测领域内出现的；如果要检测一个埋没在“白”噪声之中的已知形式的信号，那末匹配滤波器提供了使瞬时信号功率（在一特定时刻）与平均噪声功率之比为极大的线性运算[7-26]。但是在我们现在的应用中，假定要识别的特征是无噪声的，因此必须依据别的理由来论证为什么要使用一种特殊的滤波运算。

从图 7-23 所示的光学解释，可以深入理解匹配滤波器操作的本质。假如要在通常的相干处理系统中用频率平面模片综合出一个与输入信号 $\mathbf{s}(x, y)$ 匹配的滤波器。脉冲响应 (7-33) 的傅里叶变换式表明，所要的传递函数是

$$\mathbf{H}(f_X, f_Y)=\mathbf{S}^*(f_X, f_Y), \tag{7-35}$$

其中 $\mathbf{H}=\mathscr{F}\{\mathbf{h}\}$，$\mathbf{S}=\mathscr{F}\{\mathbf{s}\}$。于是频率平面模片的振幅透射率应与 $\mathbf{S}^*$ 成正比。

现在考虑当信号 $\mathbf{s}$（滤波器与之匹配）在输入上出现时模

片所透射的场分布的特性.入射到模片上的场分布正比于 **S**，而透过模片的场分布则正比于 **SS***. **SS*** 这个量完全是实数，这意味着频率平面模片完全抵消了入射波前 **S** 的全部弯曲. 于是透射的场分布是一列平面波，它被最后的变换透镜聚成一亮焦点. 当出现的输入信号不是 $\mathbf{s}(x, y)$ 时，波前弯曲一般不会被频率平面模片所抵消，透射光也不会被最后的透镜聚为一个亮焦点. 于是可以想象，通过测量最后的变换透镜的焦点上的光强度，可以检测出信号 **s** 的出现(如果输入 **s** 的中心不在原点，那么输出平面上的亮点只是移动一段距离，等于错位距离；参看习题 7-7).

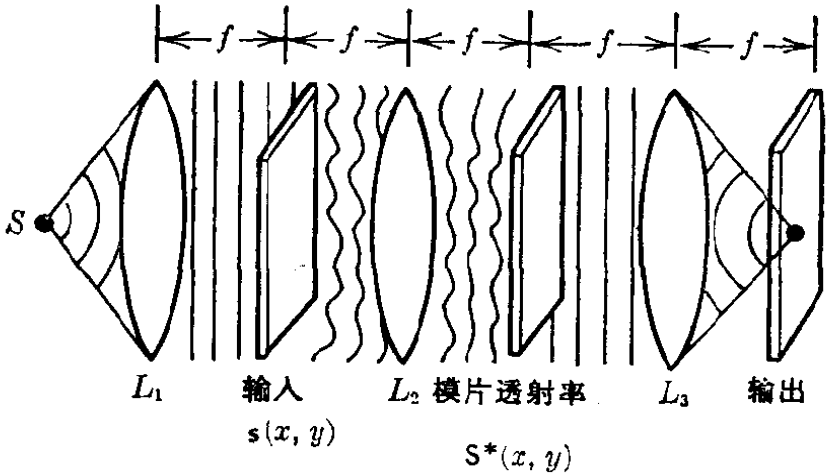


图 7-23　匹配滤波操作的光学解释

一个特征识别问题

考虑下面这个具体的特征识别问题：一个处理系统的输入 **g** 可以是 N 个可能字符 $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \cdots, \mathbf{s}_N$ 之中的任何一个，要由处理器来确定到底出现哪个具体字符. 下面将要证明，把此输入加到一组 N 个滤波器上，其中每一个滤波器各自与一个可能的输入字符相匹配，那末就可以实现辨认过程.

图 7-24 示出识别机的一个方框图. 输入同时(或依次地)加到传递函数分别为 $\mathbf{S}_1^*, \mathbf{S}_2^*, \cdots, \mathbf{S}_N^*$ 的 N 个匹配滤波器

上．每个滤波器的响应用各自所匹配的字符中的总能量的平方根值来规范化．这种规范化可以在滤波器输出检波之后用电子学方法实现．之所以要进行规范化是考虑到各个输入字符的能量一般不相等．最后，在预期各滤波器的输出将取极大值的那些特定点上，对各个输出的模的平方$|\mathbf{v}_1|^2, |\mathbf{v}_2|^2, \cdots, |\mathbf{v}_N|^2$进行比较（假定每一次都出现滤波器所匹配的字符）．下面要证明，如果在输入上实际出现的是特定字符

$$\mathbf{g}(x, y) = \mathbf{s}_k(x, y),$$

那末特定的输出$|\mathbf{v}_k|^2$将是N个响应中最大的一个．

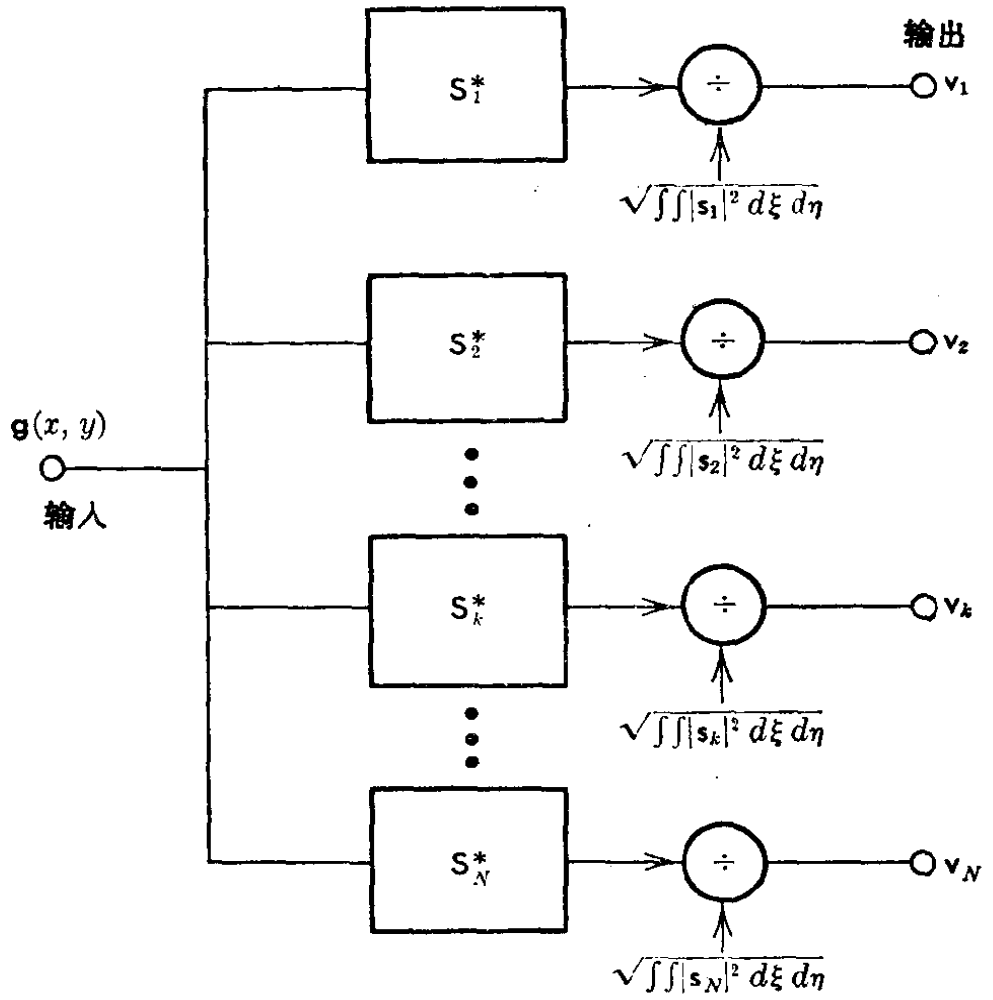


图 7-24　字符辨认系统的方框图

要证明这个结论，首先注意，从方程(7-34)可知，正确的

匹配滤波器的峰值输出$|\mathbf{v}_k|^2$为

$$|\mathbf{v}_k|^2=\frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int|\mathbf{s}_k|^2d\xi d\eta\right]^2}{\int_{-\infty}^{\infty}\int|\mathbf{s}_k|^2d\xi d\eta}=\int_{-\infty}^{\infty}\int|\mathbf{s}_k|^2d\xi d\eta, \quad (7\text{-}36)$$

另一方面，不正确的匹配滤波器的响应$|\mathbf{v}_n|^2(n\neq k)$为

$$|\mathbf{v}_n|^2=\frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int\mathbf{s}_k\mathbf{s}_n^*d\xi d\eta\right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty}\int|\mathbf{s}_n|^2\,d\xi d\eta}. \quad (7\text{-}37)$$

但是，利用 Schwarz 不等式，我们有

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int\mathbf{s}_k\mathbf{s}_n^*d\xi d\eta\right|^2\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\int|\mathbf{s}_k|^2d\xi d\eta\int_{-\infty}^{\infty}\int|\mathbf{s}_n|^2d\xi d\eta.$$

由此直接推出

$$|\mathbf{v}_n|^2\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\int|\mathbf{s}_k|^2d\xi d\eta=|\mathbf{v}_k|^2, \quad (7\text{-}38)$$

其中等号是在而且只在

$$\mathbf{s}_n(x,y)=\kappa\mathbf{s}_k(x,y)$$

时才成立.

从这个结果可以明显看出，匹配滤波器的确提供了一种方法以辨认在一组可能的字符中究竟是哪一个字符实际输入到系统. 应当强调指出，这个本领并不是匹配滤波器独有的. 实际上，在某些情况下，我们能够修改全部滤波器（即使之失配），使得特征之间的甄别更加改善（例如，见文献 [7-2]，第 130—133 页）.

用前面讨论过的 Vander Lugt 方法很容易综合出匹配滤波器运算。这是特别简单的，因为读者还会记得，Vander Lugt 滤波器的各输出项中有一项本身就是输入与用来综合出该滤波器的原始特征的交叉关联函数。若只限于注意输出空间的适当区域，那么很容易观察到匹配滤波输出。

图 7-25 *a* 是对字母“P”综合出的一个 Vander Lugt 滤波器的脉冲响应的照片。响应的上面部分将产生输入数据与符号 P 的卷积，而下面部分则将产生输入与字母 P 的交叉关联。响应的中心部分是不需要的，我们不感兴趣。

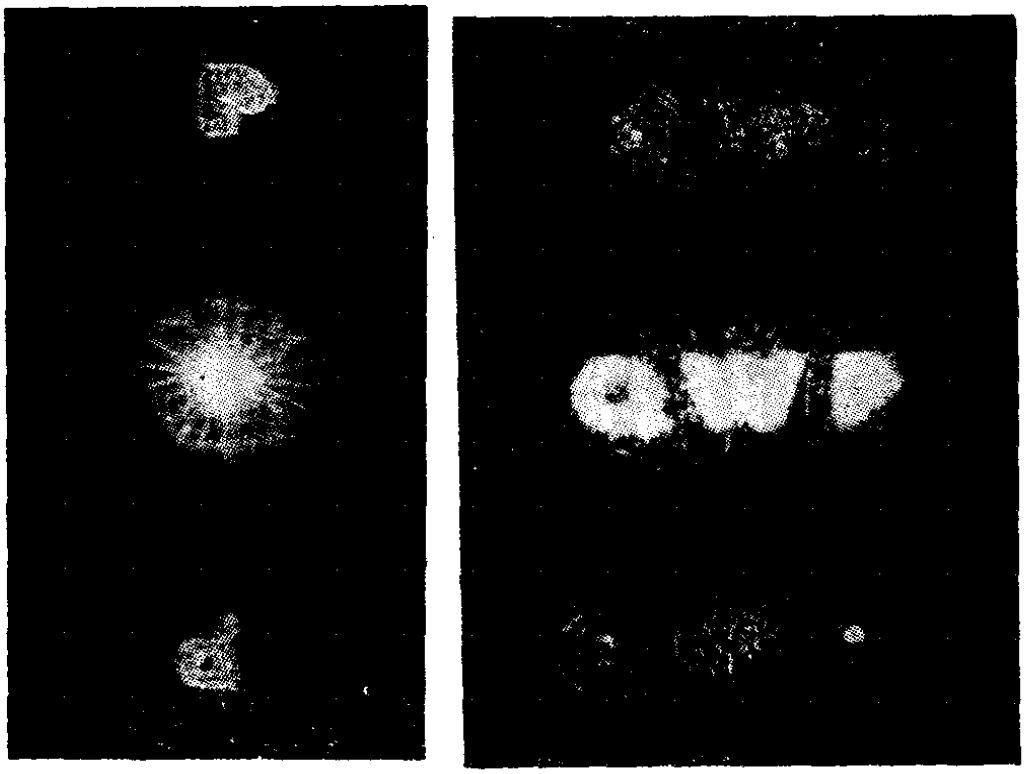


图 7-25 (*a*) 一个 Vander Lugt 滤波器的脉冲响应的照片；
(*b*) 输出的匹配滤波器部分对字母 Q、W 和 P 的响应的照片

图 7-25 *b* 示出输出的匹配滤波器部分对于字母 Q、W 和 P 的响应。注意在对 P 的响应中有亮点出现，它表明输入与

滤波器所匹配的字母之间有高度的关联。

为了实现图 7-24 所示的匹配滤波器组，可以综合出 N 个分开的 Vander Lugt 滤波器，而将输入依次加到每个滤波器上。另一种方法，如果 N 这个数目不太大，也可以把整个滤波器组综合在单独一个频率平面模片上。这可以用频率多路法 (multiplexing) 的办法来做到，即用不同的载波频率将各个频率平面模片记录在单独一张透明片上。图 7-26 a 示出记录多路滤波器的一种方法。字母 Q、W 和 P 相对于参考平面成不同角度，因此 Q、W 和 P 与输入字符的交叉关联

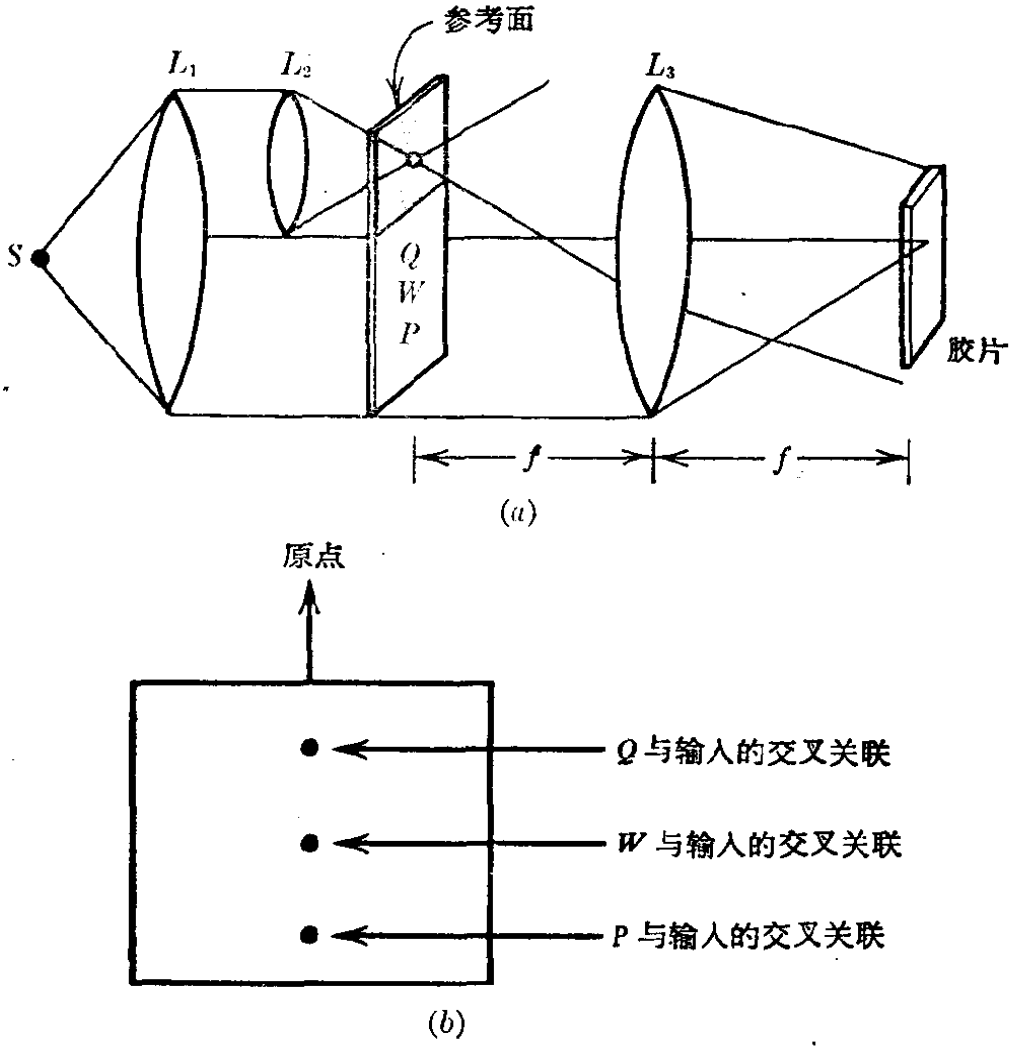


图 7-26　用单个频率平面模片综合出一组匹配滤波器。(a)综合频率平面模片的光路图；(b)输出的匹配滤波器部分的样式

出现在离原点不同的距离上，如图 7-26 b 所示.

用这个方法可以实现的不同滤波器的数目为在频率平面模片上所能达到的动态范围所限制. Vander Lugt 曾表明，能用单独一个模片综合出九个不同的脉冲响应(见文献[7-2]第133—139页).

对尺寸大小和旋转的敏感程度

相干光学特征识别方法有一些缺点，这些缺点是一切用匹配滤波器来解决特征识别问题的方法所共有的.具体地说，滤波器一般对输入字符的尺寸大小的变动和字符的旋转相当敏感. 当输入字符出现时，如果其角度取向或放大率不合适，正确的匹配滤波器的响应就会减小，同时在特征辨认过程中就发生误差. 对旋转和尺寸大小的灵敏程度在很大程度上取决于各个字符的结构(例如，“L”比“O”对旋转更敏感)，但是用能够降低这种敏感程度的巧妙的滤波操作，可以把这种敏感程度控制在一定的范围内. 一个合理的解决办法常常是对各种尺寸大小和方向实行机械的探索，但是这种操作是费时的. 对这些问题的更详细的讨论见文献[7-2]第七章.

§ 7-7 对处理综合孔径天线数据的应用

光学信息处理技术最成功的应用之一，是从所谓综合孔径雷达所收集到的数据绘制出高分辨率地形图. 以下的全部讨论是根据 Cutrona 等人的一篇论文[7-11]，读者欲知其详可参看原文.

综合孔径的构成

参看图 7-27，我们来研究由以匀速 v_a 沿 x 方向的直线航线飞行的飞机携带的一具雷达系统. 假定雷达的作用是要

得到航线的邻近区域的一幅高分辨率的地形反射率地图。通过发射脉冲雷达信号并记录接收到的作为时间函数的回波，可以分辨离航线的距离。使用方位范围极窄的雷达波束，在原则上可以分辨方位。但是一个线度大小为 D 的天线在距离 R 上所能得到的方位分辨率大致为 $\lambda_r R/D$。因为微波波长 λ_r 比光波波长要大几个数量级，因此要得到可以与光学勘察系统相比较的分辨率，天线就需要大到不切实际的地步。

综合孔径技术提供了解决这个问题的一种办法。令飞机携带一具小的宽束天线，它相对于飞机指向一个固定的侧视方向。从沿航线的一系列位置上发射雷达脉冲，并且记录在这些位置上所观察到的雷达回波与时间的关系（振幅和位相）。每个这样的记录可以看作是从天线阵的一个单元得到的信号，并且只需把各个记录下来的波形适当组合就可以综合出一个长达几百几千米的有效孔径。注意，为了实现尽

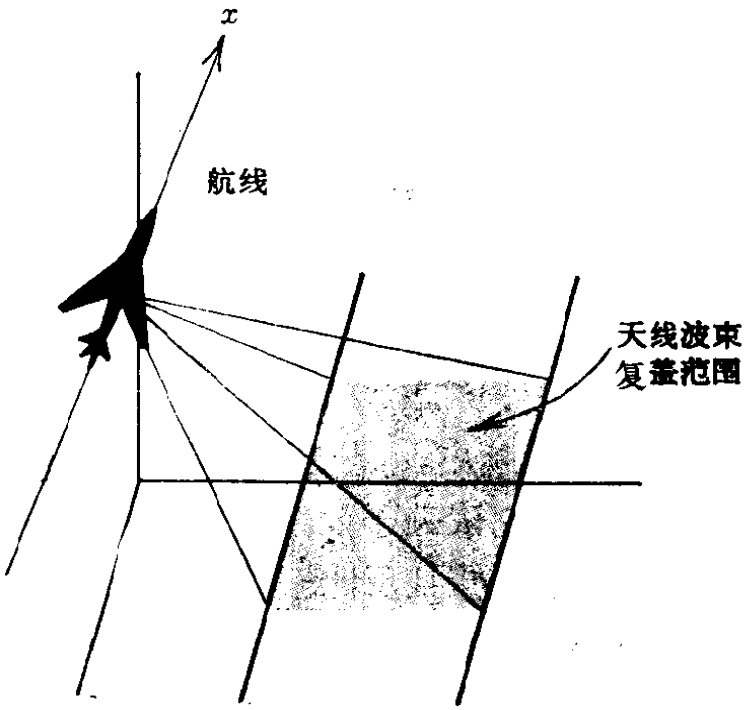


图 7-27　侧视雷达的几何关系图

量长的综合天线阵，雷达天线必须在航线的尽可能长的部分上照射一个给定的地形点。于是雷达天线的束宽越宽，从接收到的数据中可能得到的分辨率就越高。要达到天线阵的最高分辨率，进一步还要求飞机上有一个稳定的位相参考波束，使得沿航线能够同时把回波的振幅和位相都记录下来。

收集到的数据和记录式样

要更详细地考察信号收集过程，首先考虑图 7-28 所示的几何关系。用坐标 x 代表沿航线的距离。为了简单起见，我们假定在坐标 x_1 处有单个的点散射体，它与航线的垂直距离为 r_1。为了进一步简单化，假定雷达发射的波形是频率为 f_r 的稳定正弦波。实际发射的信号的脉冲特性产生的结果不过是对所假设的正弦信号进行周期性的抽样。抽样理论（见 §2-3）预言：若飞机在两次抽样点之间飞过的距离小于 $(2B_X)^{-1}$（其中 B_X 是地形反射率的空间带宽），则在考虑方位分辨问题时抽样的分立特性可以忽略。当然，对于获得其它方向上的分辨率，即离航线的距离的分辨率，考虑信号的脉冲性质是极为重要的。

从所设的点散射体返回飞机的信号可表示成随时间变化的相幅矢量：

$$\mathbf{s}_1(t)=\boldsymbol{\sigma}_1\exp\left[j\,2\pi f_r\left(t-\frac{2r}{c}\right)\right], \qquad (7\text{-}39)$$

其中 f_r 是雷达的射频频率，r 是飞机与目标的距离，c 是光速，σ_1 是复数振幅因子，它依赖于如下这些参量，诸如发射功率、目标的反射率和相移，并且反比于传播衰减因子的四次方。距离 r 可用 r_1、x_1 和 x（航线坐标）表示成

$$r=\sqrt{r_1^2+(x-x_1)^2}\simeq r_1+\frac{(x-x_1)^2}{2r_1}, \qquad (7\text{-}40)$$

于是回波信号为

$$\mathbf{s}_1(t)=\boldsymbol{\sigma}_1(x_1, r_1)\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{j\left[2\pi f_r t-\frac{4\pi r_1}{\lambda_r}-\frac{2\pi(x-x_1)^2}{\lambda_r r_1}\right]\right\}. \qquad (7\text{-}41)$$

飞机的运动把空间变量 x 与时间变量 t 联系起来，其关系为

$$x=v_a t.$$

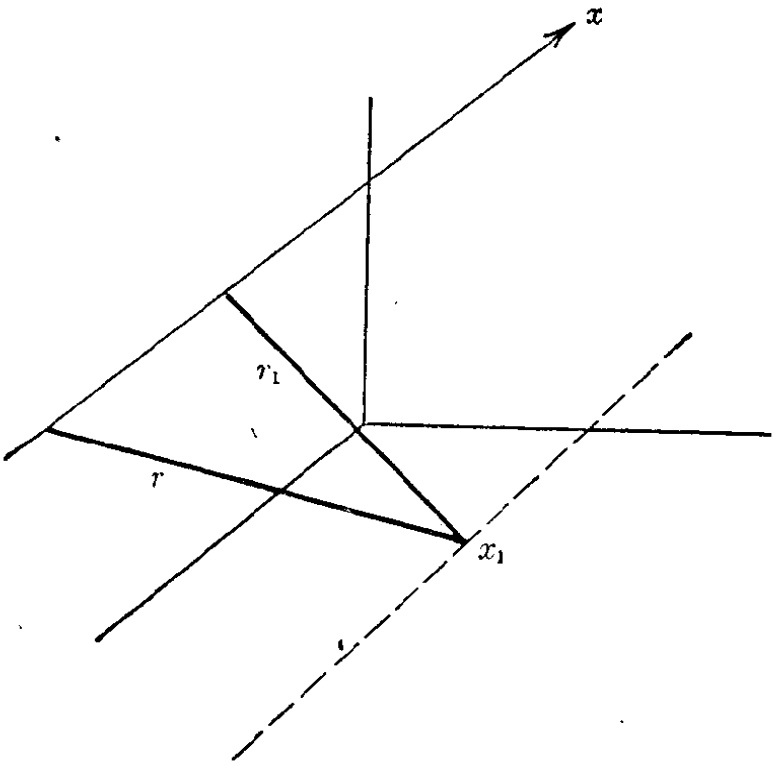


图 7-28　航线上的几何关系

如果把在距离 r_1 上的地形看成是由许多的点散射体汇集而成，那么总的回波信号可以写成

$$\mathbf{s}(t)=\sum_n \mathbf{s}_n(t)=\sum_n \boldsymbol{\sigma}_n(x_n, r_1)\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{j\left[2\pi f_r t-\frac{4\pi r_1}{\lambda_r}-\frac{2\pi}{\lambda_r r_1}(v_a t-x_n)^2\right]\right\}. \qquad (7\text{-}42)$$

回波信号经过同步解调，也就是把回波的中心频率从f_r移到一个新的更低的频率f_r'，得到

$$s'(t)=\sum_n|\sigma_n(x_n,r_1)|\cos\left[2\pi f_r't-\frac{4\pi r_1}{\lambda_r}-\right.$$

$$\left.-\frac{2\pi}{\lambda_r r_1}(v_at-x_n)^2+\phi_n\right], \qquad (7\text{-}43)$$

这里我们弃去了相幅矢量记号.

用经过解调的信号对一阴极射线管进行强度调制，而电子束在发射每个脉冲之后的一定时间间隔内垂直扫描. 如果将胶片以水平速度v_f移过示波管的表面，就得到如图7-29所示的记录式样. 垂直线表示相继各次距离扫描，而一个给定的散射体相对于雷达的方位则沿水平方向变化.

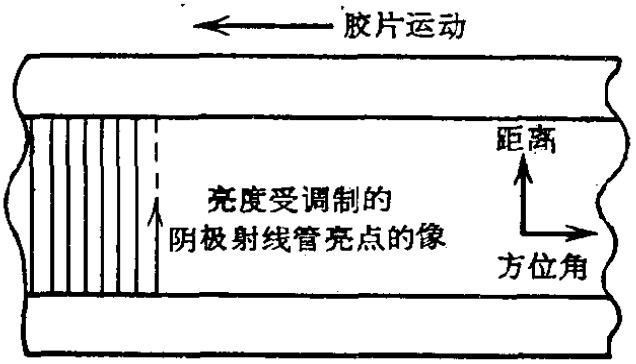


图 7-29　记录式样

透明胶片的聚焦性质

我们仍然只注意一个固定距离r_1，因而只考虑沿直线$y=y_1$记录在胶片上的数据，并且仍然忽略发射信号的脉冲性质. 只要曝光时适当注意，接收信号随方位角的变化过程就

能形成一张照相记录，其振幅透射率为

$$t(x, y_1) = t_b + \chi \sum_n |\sigma_n(x_n, r_1)| \cdot$$

$$\cdot \cos\left[2\pi f_X x - \frac{4\pi r_1}{\lambda_r} - \frac{2\pi}{\lambda_r r_1}\left(\frac{v_a}{v_f}x - x_n\right)^2 + \phi_n\right], \quad (7\text{-}44)$$

其中 t_b 是为了便于记录双极性视频信号而引入的偏置透射率，而 χ 只是一个常数。在写出(7-44)式时，利用了关系式[1)]

$$x = v_f t,$$

由此推出

$$f_X = \frac{f_r'}{v_f}.$$

将方程 (7-44) 中的余弦函数分解成两个复指数因子，那末透射率可以表示成偏置透射率 t_b 和另外两项之和，这两项是

$$\mathbf{t}_\alpha(x, y_1) = \frac{\chi}{2}\sum_n \sigma_n'(x_n, r_1) \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{j\left[2\pi f_X x - \frac{2\pi}{\lambda_r r_1}\left(\frac{v_a}{v_f}\right)^2\left(x - \frac{v_f}{v_a}x_n\right)^2\right]\right\} \quad (7\text{-}45\,a)$$

和

$$\boldsymbol{t}_\beta(x, y_1) = \frac{\chi}{2}\sum_n \sigma_n'^*(x_n, r_1) \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{-j\left[2\pi f_X x - \frac{2\pi}{\lambda_r r_1}\left(\frac{v_a}{v_f}\right)^2\left(x - \frac{v_f}{v_a}x_n\right)^2\right]\right\}, \quad (7\text{-}45\,b)$$

其中已把常数位相 $4\pi r_1/\lambda_r$ 及位相 ϕ_n 吸收到 σ_n' 的定义中。

---

1) 注意变量 x 现在是用作胶片坐标，而在前面则代表雷达坐标。

若只注意各个点散射体中的一个，比方说指标为 $n=N$ 的那一个，则 $\mathbf{t}_\alpha$ 的相应分量是

$$\mathbf{t}_\alpha^{(N)}(x, y_1)=\frac{\chi}{2}\sigma'_N(x_N, y_1)\exp(j2\pi f_X x)\cdot$$

$$\cdot\exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda_r r_1}\left(\frac{v_a}{v_f}\right)^2\left(x-\frac{v_f}{v_a}x_N\right)^2\right], \tag{7-46}$$

头一个指数项的位相与坐标 x 成线性关系，它只使透射光中这一分量的波前发生简单的倾斜。对透明片平面的倾角 θ 由关系式

$$\sin\theta=\lambda_0 f_X \tag{7-47}$$

确定，其中 λ_0 是光波波长。

至于第二个指数因子，我们注意到它和中心在坐标 $x=x_0$ 上的一个正柱面透镜的透射率函数很相象，后者为

$$\mathbf{t}_p(x)=\exp\left[-j\frac{\pi}{\lambda_0 f_1}(x-x_0)^2\right], \tag{7-48}$$

其中 f_1 是焦距。令 (7-46) 中的第二个指数因子等于 (7-48) 式，我们发现 $\mathbf{t}_\alpha$ 的这个因子的行为像是一个正柱面透镜，其焦距为

$$f_1=\frac{1}{2}\frac{\lambda_r}{\lambda_0}\left(\frac{v_f}{v_a}\right)^2 r_1, \tag{7-49}$$

并且透镜的轴位于下述坐标上：

$$x=\frac{v_f}{v_a}x_N. \tag{7-50}$$

相仿地，$\mathbf{t}_\beta$ 的第 N 个分量是

$$\mathbf{t}_{\beta}^{(N)}(x,y_1)=\frac{\chi}{2}\sigma_N'^{*}(x_N,y_1)\exp(-j2\pi f_X x)\cdot$$

$$\cdot\exp\left[j\frac{2\pi}{\lambda_r r_1}\left(\frac{v_a}{v_f}\right)^2\left(x-\frac{v_f}{v_a}x_N\right)^2\right]. \qquad (7\text{-}51)$$

头一个指数因子引起波前往相反方向上倾斜，即倾角为$-\theta$，而第二个指数因子等同于一个负的柱面透镜的透射率，透镜的中心仍在$x=(v_f/v_a)x_N$，其焦距f_1仍由方程(7-49)给出.

图 7-30 画出了在单个点散射体情形下透射光的三个分量. 偏置透射率t_b使入射光波通过透明片时受到均匀衰减但不发生别的变化. 透射率分量$\mathbf{t}_{\alpha}^{(N)}$和$\mathbf{t}_{\beta}^{(N)}$在下述意义下可以看成是在点散射体的方位角方向上的一对"像"：$\mathbf{t}_{\alpha}^{(N)}$分量

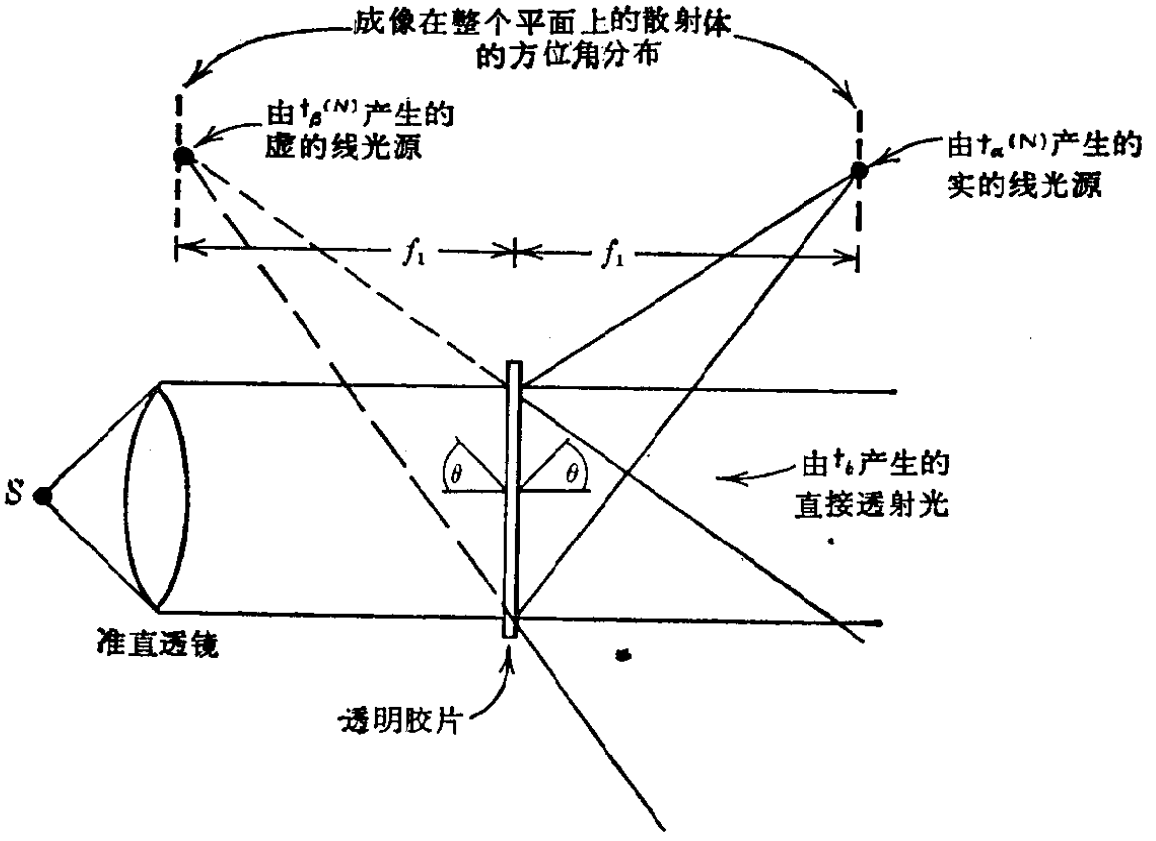


图 7-30　由透明胶片上的一条线$y=y_1$所透射的光

把光聚焦到透明片后面的一条明亮的焦线上，而 $t_\beta^{(N)}$ 分量则产生一列看来是从透明片前面的一个线光源发出的波(见图7-30)。

设在距离 r_1 上有许多点散射体，在光学处理阶段中，每个点散射体都要产生自己的一对实焦线和虚焦线。点散射体的相对方位决定了胶片上的类透镜结构的中心的相对位置，因此点散射体的相对方位的信息就储存在相应焦线的相对位置中。这样，距离 r_1 上散射体的方位角分布的一个完整的像便将在透明片前后的适当平面上重现出来。我们再一次强调，这个像在 y 方向是散开的，因为胶片在 y 方向上无聚焦能力。

构成最后的像

我们最终的希望是构成一个像，它不仅显示散射体随方位角的分布而且也显示它们随距离的分布。一个散射体的距离坐标在胶片上已变换为散射体在方位角上的变化过程的 y 坐标，于是必须把胶片透射率在 y 方向的变化直接成像到方位角信号的焦平面上。这个任务是相当复杂的，因为方位变化的焦距是距离 r_1 的函数[见方程(7-49)]，因此依赖所考虑的具体 y 值。为了构成最后的雷达地图，显然必须把透射率在 y 方向的变化成像到方位角焦线所在的一个倾斜平面上。

利用图7-31的光学系统可以完成这一任务。将一个正锥面透镜(见习题5-3)紧贴着放在透明片之后，这个透镜的透射率函数是

$$t_l(x, y_1)=\exp\left(-j\frac{\pi}{\lambda_0 f_1}x^2\right), \qquad (7\text{-}52)$$

其焦距则与距离坐标(或者等价的 y 坐标)成线性关系：

$$f_1=\frac{1}{2}\frac{\lambda_r}{\lambda_0}\left(\frac{v_f}{v_a}\right)^2 r_1. \tag{7-53}$$

比较方程 (7-51)、(7-52) 和 (7-53) 可看出，这个透镜把包含全部虚的线光源的整个倾斜平面移到无穷远，但是 y 方向的透射率变化则保持无畸变. 通过无穷远的虚的线光源所在的特殊角度，保存了有关方位角的信息. 一个柱面透镜放在离胶片一个焦距的距离上，它使 y 方向的结构在无穷远处成一虚像. 现在 x 方向和 y 方向的像的聚焦已经一致，只须把它们从无穷远处回复到一个实像就行了. 在柱面透镜后面放一球面透镜，使它距最后的观察平面有一个焦距的距离，就可以实现最后这一步操作，得出原来的地形的距离和方位角坐标的实像，二者都很好地聚焦在输出平面上.

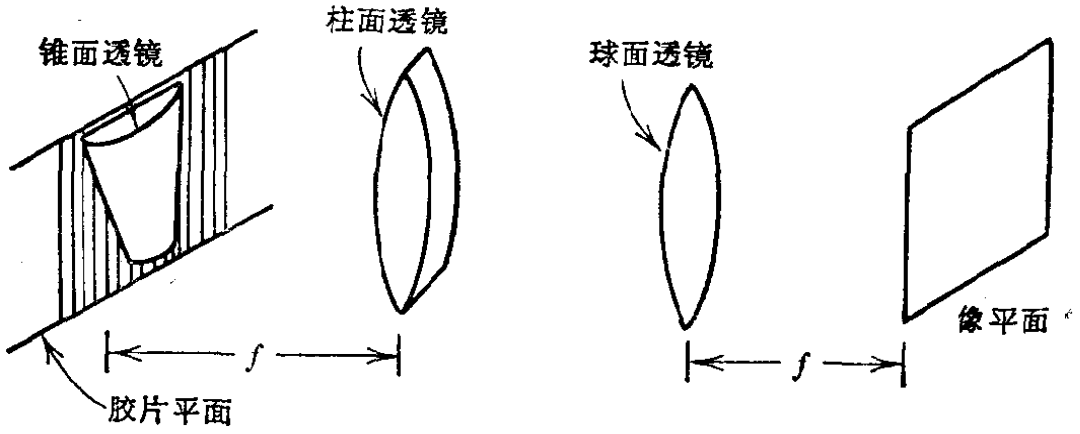


图 7-31　成像的光学系统

结束语

在由综合孔径数据构成地形图这个问题中，光学处理方法的好处在于，光学系统极其简单地实现了为了得出像所需要的相当错综复杂的线性变换. 从基本原理的角度来看，光学系统之所以这样简单，在很大程度上是由于雷达反射波传播的规律与处理器中光波传播的规律具有相同的性质（只差

标度因子)。就方位角信息来说,可以认为处理器对入射在综合天线阵上的雷达波作出了精确的光学模拟。一旦得出了光学模拟,就可以用标准的光学方法实现成像过程。

应当强调指出,对雷达波进行光学模拟的基础,是在照相透明片上既能保存振幅信息也能保存位相信息。在同步解调之后所留下的非零的时间频率f_r'和由此产生的胶片上的空间频率f_x,对于实现光学模拟起着极重要的作用。从方程(7-44)明显看出,方位角上的振幅和位相变化是作为频率为f_x的空间载波的振幅调制和位相调制而记录下来的。正是由于这个载波的存在,使得图 7-30 的实焦线和虚焦线对透明片的轴分别偏离一个角度θ和$-\theta$。如果没有这样的偏离,就不能观察虚焦线,而不受直接透射光和产生实焦线的光的干扰。

使用空间频率载波的重要性,在讨论 Vander Lugt 滤波器时已强调过了,在这里又再一次明显看出。在最后一章中我们将看到,波前重现成像法或称全息照相这一课题之所以获得这样崭新的重要性,在很大程度上也是由于用了空间频率载波的方法。

习　题

7-1　一个物体有如下的周期性的振幅透射率:

$$t(x,y)=t(x)\cdot 1,$$

式中$t(x)$如图 7-32 所示。将此物体置于图 7-1 的物平面上,并且在焦平面中在透镜轴上引进一个小的不透明光阑。大致画出在像平面上得到的强度分布。

7-2　观察位相型物体的所谓中心暗场方法,是在成像透镜的后焦面上放一个细小的不透明光阑以阻挡不衍射的光。假定通过物体的位相延迟远小于 1 弧度,求所观察到的像强度(用物体的位相延迟表示出来)。

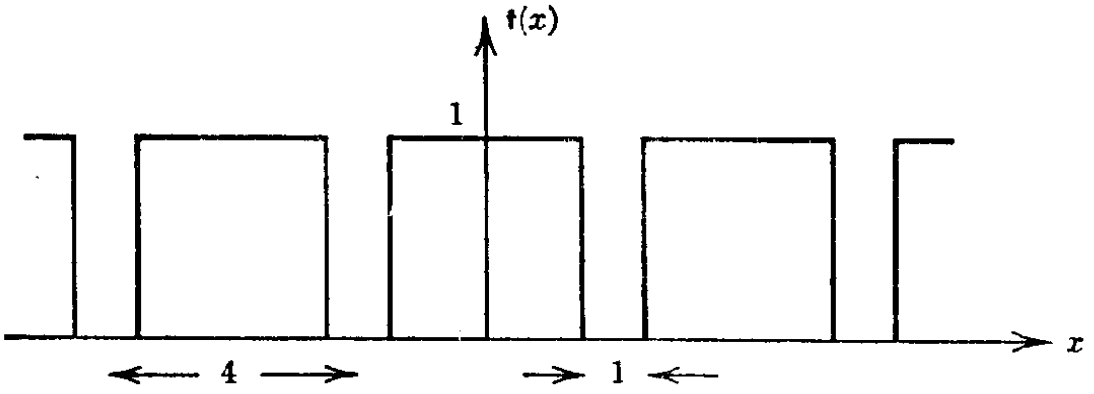


图 7-32

7-3 观察位相型物体的纹影法是在焦平面上加一刀口以阻挡一半衍射光。于是通过焦平面的透射率可写成

$$t_f(x, y)=\frac{1}{2}(1+\mathrm{sgn}x)\ .$$

(a) 假定放大率为 1 并且忽略像的倒置，证明像振幅 $\mathbf{U}_i$ 与物的振幅 $\mathbf{U}_0$ 之关系为

$$\mathbf{U}_i(x_i, y_i)=\frac{1}{2}\left[\mathbf{U}_0(x_i, y_i)+\frac{j}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathbf{U}_0(x', y_i)}{x_i-x'}dx'\right].$$

(b) 令物场为

$$\mathbf{U}_0(x_0, y_0)=\exp\left[j\phi(x_0, y_0)\right],$$

其中 $\phi\ll 1$. 证明像强度可近似表示为

$$I_i(x_i, y_i)\simeq\frac{1}{4}\left[1-\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi(x', y_i)}{x_i-x'}dx'\right].$$

(c) 当

$$\phi(x_0, y_0)=\phi_0\mathrm{rect}\left(\frac{x_0}{X}\right),$$

式中 $\phi_0\ll 1$，求出并且画出像强度的分布。

7-4 当 Zernike 相衬显微镜的相移点还有部分吸收，其强度透射率等于 $\alpha(0<\alpha<1)$时，求观察到的像强度的表示式。

7-5 用低反衬强度分布

$$\mathscr{I}(x, y)=\mathscr{I}_0+\Delta\mathscr{I}(x, y)\quad |\Delta\mathscr{I}|\ll\mathscr{I}_0$$

的光场使一张照相底片曝光，由此制出一张负透明片。假定 $\mathscr{I}_0$ 把底片偏置于 H-D 曲线的线性区段内，证明当反差 $\Delta\mathscr{I}/\mathscr{I}_0$ 足够

低时，透明片所透射的反衬度分布与曝光的反衬度分布成线性关系.

7-6 某一相干处理系统的输入孔径，宽为 3 cm。头一个变换透镜的焦距为10cm，波长是 0.6328 微米。假定频率平面模片的结构的精细程度可与输入频谱相比较，问此模片在焦平面上的定位必须精确到何种程度？

7-7 证明：匹配滤波器输入的位置对输出的影响仅在于预期响应出现极大值的位置。

7-8 一个透明物体，其振幅透射率为复数值 $\mathbf{t}(x,y)$，紧靠着放在一个会聚透镜之前．它由一单色平面波垂直照明，用一照相底片记录后焦面上的强度分布。由此制得一张 γ 值为 2 的正透明片．然后用一平面波垂直照明显影后的透明片，把同一会聚透镜紧靠着放在正透明片之后。问原来的物的振幅透射率与在过程的第二步中在透镜的后焦面上所观察到的强度分布之间有什么关系？

7-9 振幅透射率为 $\mathbf{h}(x,y)$和$\mathbf{g}(x,y)$ 的两张输入透明片放在一个会聚透镜之前，其中心位于坐标 $(x=0,y=Y/2)$ 和 $(x=0,y=-Y/2)$ 上，如图 7-33 所示。把透镜后焦面上的强度分布记录下来，由此制得一张 γ 为 2 的正透明片。

把显影后的透明片放在同一透镜之前，再次进行变换。证明透镜的后焦面上的光场振幅含有 $\mathbf{h}$ 和 $\mathbf{g}$ 的交叉关联。在什么样条件下交叉关联项可以从其它的输出分量中分离出来？

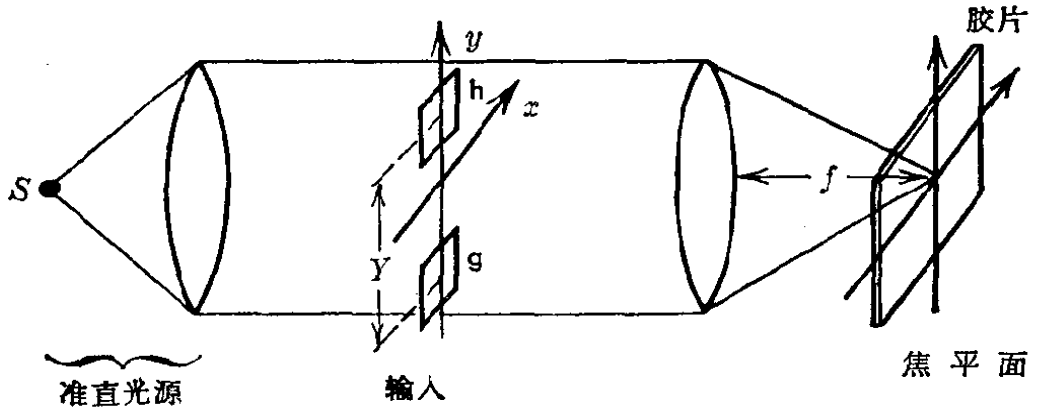


图 7-33

7-10 振幅透射率为 $\mathbf{t}(x,y)=\exp[j\phi(x,y)]$的一个位相型物体放在相

干成像系统的物平面上。在系统的后焦面上，加一块（厚度均匀的）衰减板，其强度透射率为

$$\tau(x,y)=\alpha(x^4+2x^2y^2+y^4),$$

问所得到的像强度与物体的位相关系如何？

7-11 振幅分布为

$$U(x,y)=\exp(j2\pi f_1x)+\exp(j2\pi f_2x)$$

的光场入射到一张照相底片上。底片的调制传递函数为 $M(f)$。制成一张显影后 γ 为 4 的正透明片。假定工作在 H-D 曲线的线性区段内，求出透明片所透射的复振幅分布的频谱。用 f_1 和 f_2 表示透射分量的频率，并用 $M(f)$ 在适当的宗量上之值表示透射分量的振幅。

7-12 参看图 7-34，要设计一个“散焦”的（非相干）空间滤波系统（参看§7-3），使得它的传递函数的第一个零点落在 f_0 周/cm 的频率上。假定要进行滤波的数据放在一个直径为 L 的圆透镜前面距离 $2f$ 处，问所要求的“误聚焦距离” Δ 为多少（用 f、L 和 f_0 表示）？对于 $f_0=10$ 周/cm、$f=10$ cm 和 $L=2$ cm，Δ 的数值是多少？

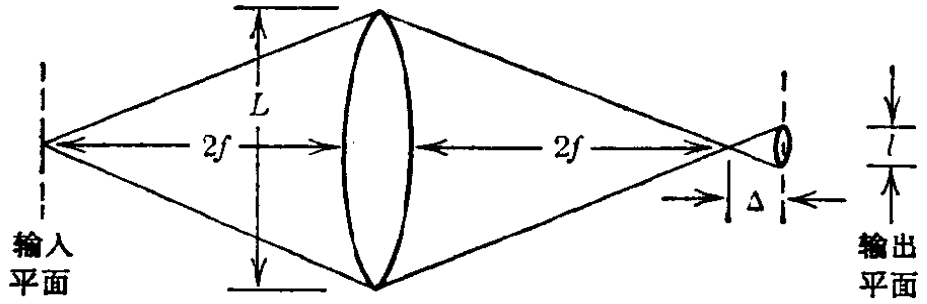


图 7-34

7-13 用 Vander Lugt 方法来综合一个频率平面滤波器。如图 7-35（上）所示，一个振幅透射率为 $s(x,y)$ 的“信号”底片紧贴着放在一个会聚透镜前面（而不是放在前焦面上），用照相底片记录后焦面上的强度。使显影后底片的振幅透射率正比于曝光量，这样制得的透明片放在图 7-35（下）的系统中。假定在下述每种情形下考查输出平面的适当部位，问输入平面和第一个透镜之间的距离 d 应为多少，才能综合出

(a) 脉冲响应为 $s(x,y)$ 的滤波器？

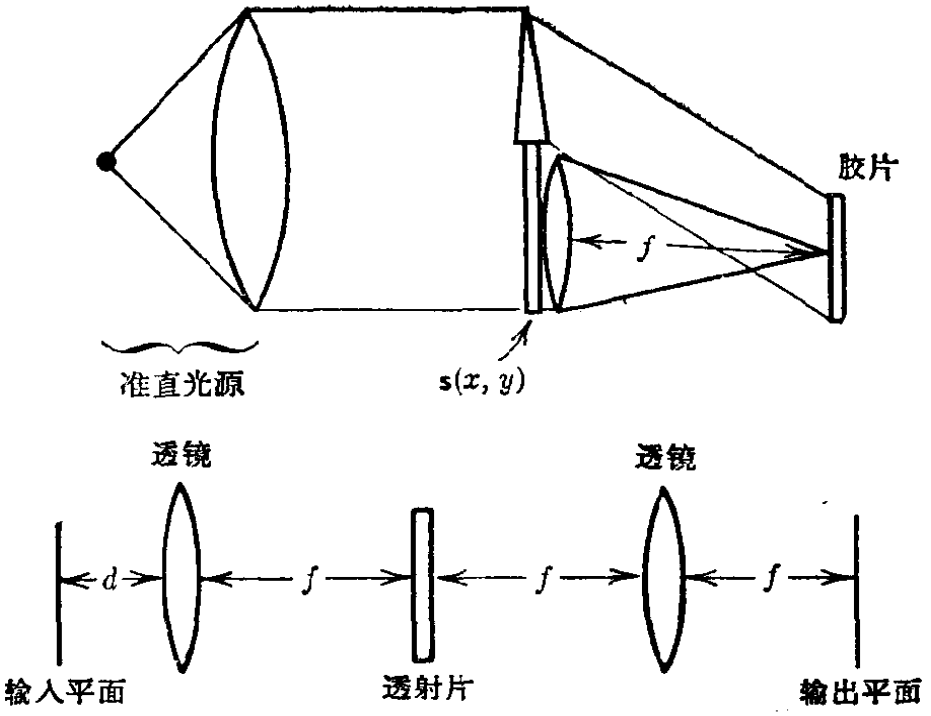


图 7-35

(b) 脉冲响应为 $s^*(-x, -y)$的"匹配"滤波器?

7-14 某雷达发射所谓啁啾声(chirp)波形,它可用下述方程描述:

$$s(t)=\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)\cos\left(2\pi f_r t+\frac{\Delta}{2\tau}t^2\right),$$

这个波从与雷达距离未知的一个不动的目标上反射回来.

(a) 怎样用光学技术对在发射脉冲之后的一个 T 秒长的时间间隔内接收到的波形实现匹配滤波操作?

(b) 怎样从光学处理器的输出推得目标的距离?

(c) 怎样用一个处理器同时对在大量 T-秒距离扫描中接收到的信号进行滤波?

参 考 文 献

7-1 Pollack, D. K., C. J. Koester and J. T. Tippett (eds), *Optical Processing of Information*, Spartan Books, Inc., Baltimore, Md., 1963.

7-2 Tippett, J. T., et al. (eds), *Optical and Electro-optical Information Processing*, The M. I. T. Press, Cambridge, Mass., 1965.

7-3 Porter, A. B., On the Diffraction Theory of Microscope Vision,

Phil. Mag., (6)11,154(1906).

7-4 Zernike, F., Das Phasenkontrastverfahren bei der Mikroskopischen Beobachtung, *Z. Tech. Phys.*, **16**,454(1935).

7-5 Armstrong, E. H., A Method of Reducing Disturbances in Radio Signalling by a System of Frequency Modulation.,*Proc. IRE*, **24**,689(1936).

7-6 Elias, P., D. S. Grey, and D. Z. Robinson, Fourier Treatment of Optical Processes, *J. Opt. Soc. Am.*, **42**,127(1952).

7-7 Elias, P., Optics and Communication Theory, *J. Opt. Soc. Am.*, **43**,229(1953).

7-8 O'Neill, E. L., Spatial Filtering in Optics, *IRE Trans. Inform. Theory*, **IT-2**,56(1956).

7-9 O'Neill, E. L. (ed.), *Communication and Information Theory Aspects of Modern Optics*, General Electric Co., Electronics Laboratory, Syracuse, N. Y., 1962.

7-10 Cutrona, L. J., et al., Optical Data Processing and Filtering Systems, *IRE Trans. Inform. Theory*, **IT-6**,386(1960).

7-11 Cutrona, L. J., et al., On the Application of Coherent Optical Processing Techniques to Synthetic-aperture Radar, *Proc. IEEE*, **54**,1026(1966).

7-12 Stroke, G. W., and A. T. Funkhouser, Fourier-transform Spectroscopy Using Holographic Imaging without Computing and with Stationary Interferometers, *Phys. Lett.*, **16**,272(1965).

7-13 Jackson, P. L., Diffractive Processing of Geophysical Data, *Appl. Opt.*, **4**,419(1965).

7-14 Mess, C. E. K., The Theory of the Photographic Process (rev. ed.), The Macmillan Company, New York, 1954.

7-15 *Kodak Plates and Films for Science and Industry*, Kodak Data Book P-9, Eastman Kodak Co., Rochester, N. Y., 1962.

7-16 Kozma, Adam, Photographic Recording of Spatially Modulated Coherent Light, *J. Opt. Soc. Am.*, **56**,428(1966).

7-17 Leith, E. N., Photographic Film as an Element of a Coherent Optical System, *Phot. Sci. Eng.*, **6**,75(1962).

7-18 Ingalls, A. L., The Effect of Film Thickness Variations on Coherent Light, *Phot. Sci. Eng.*, **4**,135(1960).

7-19 Goldberg, Emanuel, Statistical Machine, U. S. Patent 1,838,389, Dec. 29,1931.

7-20 Kovasnay, L. S. G., and A. Arman, Optical Autocorrelation Measurement of Tow-dimensional Random Patterns, *Rev. Sci. Instr.*, **28**,793(1957).

7-21 Trabka, E. A., and P. G. Roetling, Image Transformations for Pattern Recognition Using Incoherent Illumination and Bipolar

Aperture **Masks**, *J. Opt. Soc. Am.*, **54**, 1242(1964).

7-22 Armitage, J. D., and A. W. Lohmann, Character Recognition by Incoherent Spatial Filtering, *Appl. Opt.*, 4, 461(1965).

7-23 Vander Lugt, A. B., Signal Detection by Complex Spatial Filtering, *Radar Lab., Rept.* №. 4594-22-T, Institute of Science and Technology, The University of Michigan, Ann, Arbor, 1963.

7-24 Vander Lugt, A. B., Signal Detection by Complex Spatial Filtering, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **IT-10**, 2(1964).

7-25 Kozma, A., and D. L. Kelly, Spatial Filtering for Detection of Signals Submerged in Noise, *Appl. Opt.*, **4**, 387(1965).

7-26 Turin, G. L., An Introduction to Matched Filters, *IRE Trans. Inform. Theory*, **IT-6**, 311(1960).

第八章　波前重现成像或全息术

1948年，D. 盖伯提出了一种新的两步无透镜成像法[8-1]，他称之为波前重现。盖伯发现，若有一个合适的相干参考波与一个物体衍射的光波同时存在，此衍射波的振幅和位相的信息就都能被记录下来，尽管摄影胶片只对强度有响应。盖伯证明了，由这样一张记录下来的干涉图样（盖伯称它为全息图，意即"完全的记录"）最后可得到原来物体的像。

虽然这种成像技术（现在我们叫它全息术）当初并不太引人注目，但最近由于方法和工艺的改进而大大扩充了它的应用范围．结果，全息术在现代成像理论中占有很重要的地位。

§8-1　历史导言

盖伯开始研究波前重现是受了 W. L. 布喇格在X射线晶体学方面的工作[8-2]的影响，但原始的推动力是盖伯认为这门新发现的技术可能应用于电子显微术。盖伯继自己的原始想法之后，于1949和1951年发表的两篇长文[8-3,8-4]中，研究了波前重现对显微术的应用。虽然这个设想的对电子显微术的应用由于实际原因直到现在仍未成功，但是显微术仍是全息术的一个重要推动力。

在五十年代，一些作者（包括 G. L. Rogers[8-5]，H. M. A. El-Sum[8-6] 和 A. Lohmann[8-7]）大大地扩充了波前重现成像的理论和了解。

然而，直到六十年代初，才开始了全息术的现代革命。这一次仍是密执安大学雷达实验室的工作人员，特别是利思

(E. N. Leith)和乌帕特尼克斯(J. Upatnieks)[8-8]，他们发现盖伯的波前重现法与综合孔径天线问题的类似性，并提出了改进盖伯原始技术的方案，从而改善了成像方法并大大扩充了它的应用范围．密执安大学的研究人员立即把这一新发展与初露头角的激光技术结合起来以实现三维摄影[8-9]．由全息术所摄得的三维像的高质量和逼真感是使波前重现技术受到广泛注意的原因．

全息术工艺在六十年代初期所获得的巨大的新进展，立即使人们提出并实现了这一方法的各种各样的应用．与一般的印象相反，全息图的许多最有意义和应用潜力最大的性能，都与它的三维成像本领完全无关，这一点将在§8-9详细讨论．

§ 8-2 波前重现问题

本节要讨论的具体问题是如何记录以及重现来自相干照明物体的光波的振幅和位相．这个问题当然是一个相当普遍的问题，对于电磁波的整个频谱范围以及声波这个问题都是有意义的．然而我们在这里仅限于考虑光学方面的问题．所采用的一般方法与 Collier 所介绍的[8-10]相似．

振幅与位相的记录

如上所述，波前重现过程必须包含两个不同的操作步骤：一步是记录或存储信息，一步是最后的重现．暂时我们只限于讨论第一步．

由于所讨论的波前是相干的，就必须同时储存波动的振幅和位相的信息．然而现有的所有记录介质仅对光强有响应．因此，就必须设法把位相信息转换成强度的变化才能记录下来．能完成此任务的标准方法是干涉量度法；即把另一

个振幅和位相已知的相干波前加到未知波前上，如图 8-1 所示．总的强度既取决于初始波前的振幅，又取决于它的位相．因此，若

$$\mathbf{a}(x, y)=a(x, y)\exp[-j\phi(x, y)] \qquad (8\text{-}1)$$

表示待记录的波前，而

$$\mathbf{A}(x, y)=A(x, y)\exp[-j\psi(x, y)] \qquad (8\text{-}2)$$

表示与 **a** 发生干涉的“参考”波前，则总的强度为

$$\mathscr{I}(x, y)=|\mathbf{A}(x, y)|^2+|\mathbf{a}(x, y)|^2+$$
$$+2A(x, y)a(x, y)\cos[\psi(x, y)-\phi(x, y)]. \qquad (8\text{-}3)$$

虽然上式的头两项仅取决于两个波的强度，但第三项却取决于它们的相对位相关系．结果，**a**波前的振幅和位相二者的信息均已被记录．这样一个被记录下来的两个波前之间的干涉图样就可看成是一个全息图．

在这里我们没有说明参考波 A 的任何详细特征．在下面的讨论过程中，参考波所应当或必须具有的性质将可清楚看出．

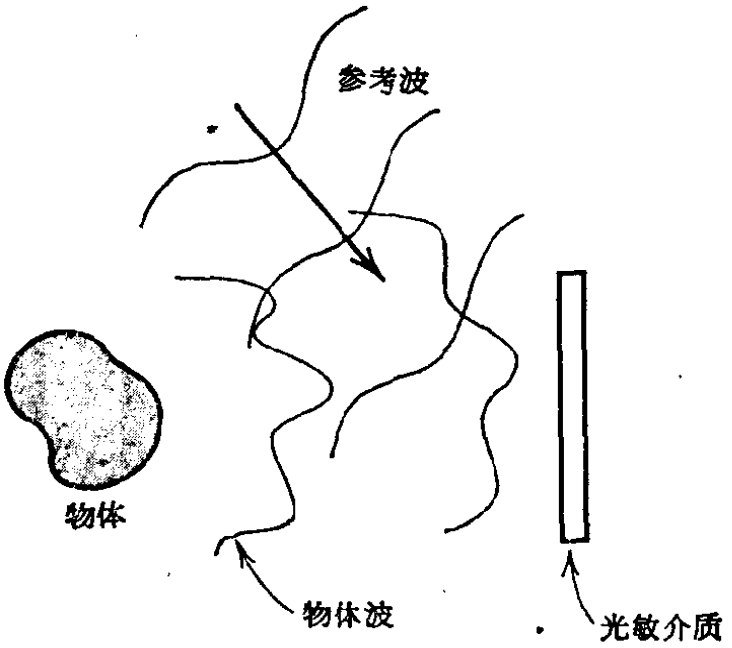


图 8-1　干涉量度的记录

记录介质

我们将假定记录介质是照相干板或胶片．虽曾用过其他器件诸如光色玻璃及电子学探测器来记录全息图，胶片仍为最重要的和用得最多的记录介质．

同前面几处（如§7-5及§7-7）一样，我们假定摄影材料把曝光时的入射光强线性地变换为显影后的振幅透射率．因此，我们假定曝光量的变化范围限于该种胶片的 t-E 曲线的线性区域内（t-E 曲线的非线性的影响在§8-4中有简短讨论）．此外，还假设乳胶的 MTF（调制传递函数）延伸到足够高的频率以便能记录全部入射空间结构（§8-5考察了取消这一假设的后果）．最后我们还假定参考光束的强度 $|\mathbf{A}|^2$ 在整个记录表面是均匀的．这时显影后的胶片的振幅透射率可写为

$$\mathbf{t}_f(x, y)=\mathbf{t}_b+\beta'(|\mathbf{a}|^2+\mathbf{A}^*\mathbf{a}+\mathbf{A}\mathbf{a}^*), \qquad (8\text{-}4)$$

其中 $\mathbf{t}_b$ 是由参考波产生的一项均匀的“偏置”透射率，β' 代表 t-E 曲线在偏置点的斜率 β 和曝光时间的乘积．要注意：对于负片，β'为负值；对于正片，β'为正值．

原始波前的重现

一旦物体波束 $\mathbf{a}$ 的振幅和位相信息被记录下来，剩下要做的就是重现此波束．若用一束相干的重现波 $\mathbf{B}(x, y)$ 来照射显影后的透明底片，显然，透过透明底片的光为

$$\mathbf{B}(x, y)\mathbf{t}_f(x, y)=\mathbf{t}_b\mathbf{B}+\beta'\mathbf{a}\mathbf{a}^*\mathbf{B}+\beta'\mathbf{A}^*\mathbf{B}\mathbf{a}+$$
$$+\beta'\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{a}^*=\mathbf{U}_1+\mathbf{U}_2+\mathbf{U}_3+\mathbf{U}_4. \qquad (8\text{-}5)$$

若$\mathbf{B}$只是原来的参考波前 $\mathbf{A}$ 的准确的再现，则方程中第三项变为

$$\mathbf{U}_3(x, y)=\beta'|\mathbf{A}|^2\mathbf{a}(x, y). \qquad (8\text{-}6)$$

记住我们假设参考光束强度$|\mathbf{A}|^2$是均匀的，显然$\mathbf{U}_3$就是原来的物体波前 a 的准确重现，只差一简单的常数因子，如图 8-2 *a* 所示。

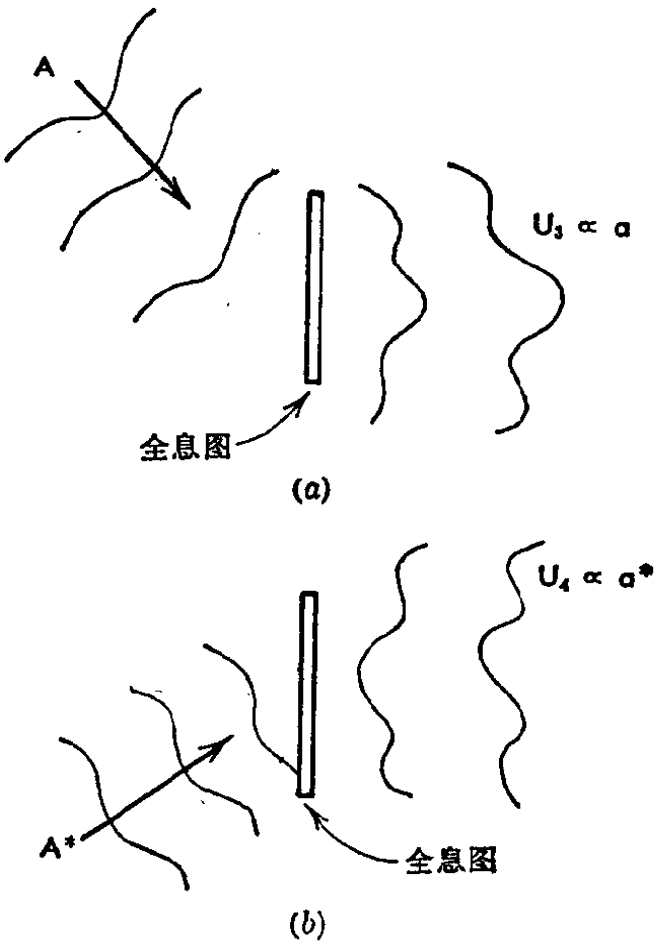


图 8-2　波前重现
(*a*)以原始参考波 **A** 作照明；(*b*)以共轭参考波**A***作照明

同理，若选 $\mathbf{B}(x, y)$正好是参考波的共轭，即 $\mathbf{A}^*(x, y)$，则重现场的第四项变为

$$\mathbf{U}_4(x, y)=\beta'|\mathbf{A}|^2\mathbf{a}^*, \tag{8-7}$$

$\mathbf{U}_4$正比于原始物体波前的共轭，如图 8-2 *b* 所示。

注意，不论上述两种情况中的哪一种，除了我们感兴趣的那个特定场分量（即当$\mathbf{B}=\mathbf{A}$时的$\mathbf{U}_3$项及$\mathbf{B}=\mathbf{A}^*$时的$\mathbf{U}_4$项）之外，另外总是伴随着三项附加的场分量，每一项都可看

成是外加的干扰. 很明显,若要得到 a (或 $\mathbf{a}^*$)的一个可用的再现，就需要有某种方法来分离透射光中的各个分量.

波前重现过程的线性性质

方程(8-4)所表示的摄影胶片的特性对应于曝光时的入射场与显影后的透射场之间的一个高度非线性的变换关系. 乍看起来，线性系统概念似乎对波前重现理论不能起作用. 幸好事情并非如此,虽然胶片带来的总变换是非线性的,但从物体场 a 到透射场的单项分量 U_3 的变换却完全是线性的，方程(8-6) 的简单比例关系清楚地表明了这一点. 同样，方程(8-7)所表示的由 a 到透射场分量 U_4 的变换也是线性的. 因此,若把物体场 a 看作输入,而透射场分量 U_3 (或 U_4)看作输出，那么这样定义的系统就是一个线性系统. 胶片的非线性性质表现为产生了几个输出项，但只要曝光量的变化范围保持在 t-E 曲线的线性区域内，则我们感兴趣的那一输出项并没有非线性畸变.

波前重现成像

迄今，我们只讨论了重现一个从相干照明物体来到记录表面的波前. 上述讨论只需在观点上稍加改变，就可以把波前重现过程看作为一种成像方法.

要采用这种观点，让我们注意到，方程(8-6)所表示的波动分量 U_3 既然是原来的物体波 a 的一个复现,那么在一个观察者看来，U_3 一定是从原来物体发出的波，尽管物体早就移开了. 因此,在重现时若用参考波 A来照明,就可把透射波分量U_3看作是形成原物体的一个虚像. 图(8-3 a 及 3 b)对一简单的点光源物体画出了这一情况.

相仿地,重现时若用参考波的共轭 $\mathbf{A}^*$来照明,方程(8-7)

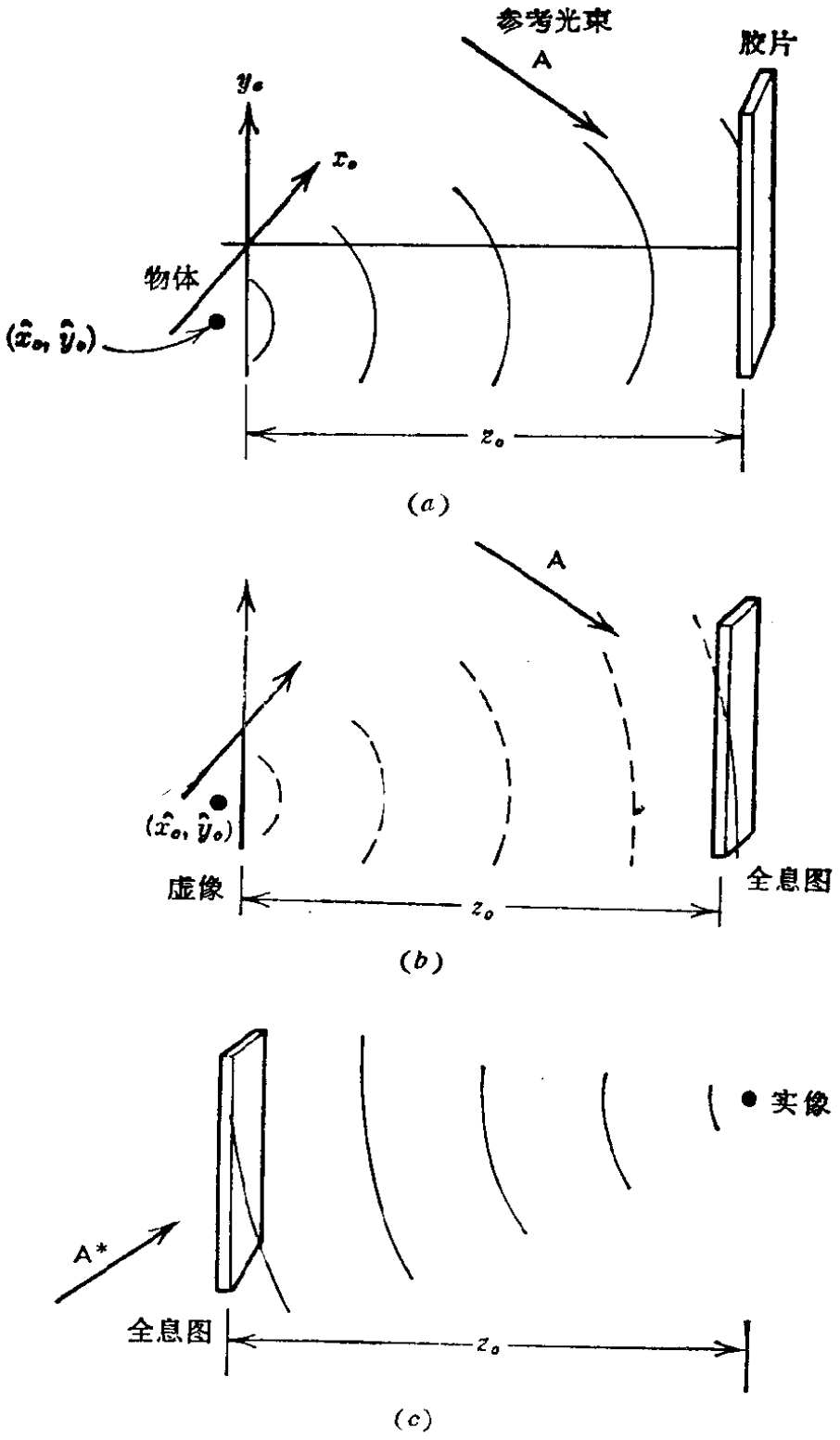


图 8-3　波前重现成像
(a)记录一点源物体的全息图；(b)产生虚像；(c)产生实像

的波动分量 U_4 也形成一个像，但这时是一个实像，相应于光在空间的实际聚焦．要证明这个结论，我们利用前面讨论过的线性特性，考虑仅由一个点光源构成的物体．更复杂的物体的相应结果可由点光源的解的线性叠加来得到．

投射到胶片上的波是参考波 $\mathbf{A}$ 和一个简单球面波之和，球面波为

$$\mathbf{a}(x, y)=\mathbf{a}_0\exp\left[jk\sqrt{z_0^2+(x-\hat{x}_0)^2+(y-\hat{y}_0)^2}\right], \tag{8-8}$$

其中 $(\hat{x}_0, \hat{y}_0)$ 是物体点的 (x, y) 坐标，z_0 是它对记录平面的垂直距离．用 $\mathbf{A}^*$ 照射显影后的全息图，得透射波分量为

$$\mathbf{U}_4(x, y)=\beta'|\mathbf{A}|^2\mathbf{a}^*(x, y)=$$

$$=\beta'|\mathbf{A}|^2\mathbf{a}_0^*\exp\left[-jk\sqrt{z_0^2+(x-\hat{x}_0)^2+(y-\hat{y}_0)^2}\right]. \tag{8-9}$$

它是向与全息图的距离为 z_0 的实焦点会聚的一个球面波，如图 8-3c 所示．一个比较复杂的物体可看作是由大量具有不同振幅和位相的点源组成，根据线性特性，每一个这样的点源都如上所述形成它自己的实像．因此，整个物体的实像就用这种方式形成．

注意方程 (8-9) 描述的波的振幅正比于原来的物体点源振幅的共轭 $\mathbf{a}_0^*$．同样，对于更复杂的物体，其全息图所形成的实像总是原来物体的复数共轭．这一位相变化并不影响像的强度，但是在既要用到像的振幅又要用到像的位相的某些应用中(见§8-9)，这一点可能是重要的．

应当再次强调，在每种情况下我们都只考虑全息图透射波的四个分量中的一个．如果通过适当选取参考光束，可以把不想要的分量加以削弱或把它与所需要的像分离开来，那

么上述方法就是可行的。否则就必须考虑透射光各分量的相互干扰。

§ 8-3 盖伯全息图

根据上述的一般讨论，我们现在来研究盖伯原来所提出和实现的那种形式的波前重现过程。下面在§8-4我们再回到它的改进型式，此改进型能改善它的成像本领。

参考波的来源

记录盖伯全息图所需的光路如图 8-4 所示。设物体是高度透明的，其振幅透射率为

$$\mathbf{t}(x_0, y_0) = \mathbf{t}_0 + \Delta\mathbf{t}(x_0, y_0), \tag{8-10}$$

其中 $\mathbf{t}_0$ 是一个很高的平均透射率，$\Delta\mathbf{t}$ 表示在此平均值上下的变化，并且

$$|\Delta\mathbf{t}| \ll |\mathbf{t}_0|. \tag{8-11}$$

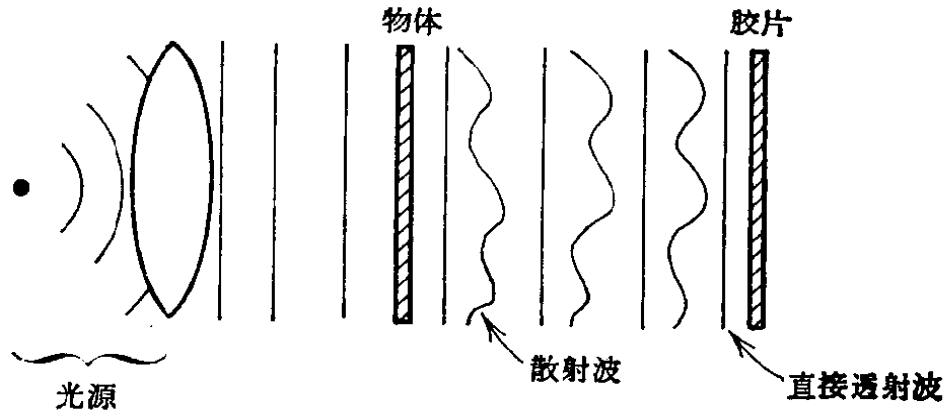


图 8-4 记录盖伯全息图的光路

当这样一个物体被图 8-4 所示的准直光源相干照明时，透射光由两个分量组成：(1) 由 $\mathbf{t}_0$ 项透过的一个强而均匀的平面波，及(2)由透射率变化 $\Delta\mathbf{t}(x_0, y_0)$ 形成的弱的散射波。投射在离物体距离为 z_0 处的照相底版上的光强可写为

$$\begin{aligned}\mathscr{I}(x, y) &= |A + \mathbf{a}(x, y)|^2 \\ &= A^2 + |\mathbf{a}(x, y)|^2 + A\mathbf{a}(x, y) + A\mathbf{a}^*(x, y)\end{aligned} \tag{8-12}$$

其中 A 是平面波的振幅，$\mathbf{a}(x, y)$ 是散射光的振幅。

因此，由于物体的高平均透射率 $\mathbf{t}_0$，在某种意义上，物体本身就提供了所需要的参考波。直接透射光与散射光相互干涉产生一个强度图样，这个图样既取决于散射波 $\mathbf{a}(x, y)$ 的振幅也取决于其位相。

李生像

假设显影后的透明照相底片有一正比于曝光量的振幅透射率。则

$$\mathbf{t}_f(x, y) = \mathbf{t}_b + \beta'(|\mathbf{a}|^2 + A\mathbf{a} + A\mathbf{a}^*). \qquad (8\text{-}13)$$

现若用一垂直入射、各点振幅均为 B 的平面波来照明底片，则所产生的透射场振幅由四项之和组成：

$$B\mathbf{t}_f = B\mathbf{t}_b + \beta' B|\mathbf{a}(x, y)|^2 + \beta' AB\mathbf{a}(x, y) + \\ + \beta' AB\mathbf{a}^*(x, y). \qquad (8\text{-}14)$$

第一项是直接通过透明底片的平面波，它受到均匀衰减而未受散射。第二项可忽略不计，因为我们的假设(8-11)意味着

$$|\mathbf{a}(x, y)| \ll A. \qquad (8\text{-}15)$$

第三项表示一个正比于原始散射波 $\mathbf{a}(x, y)$ 的场分量.这个波看起来是从原来的物体的一个虚像（位于离透明底片距离为 z_0 处）发出的，如图 8-5 所示. 同样，第四项正比于 $\mathbf{a}^*(x, y)$，根据我们前面的讨论，它将形成一实像，位于透明底片的和虚像相反的另一面，离透明底片的距离为 z_0（见图 8-5）

因此，盖伯全息图同时产生物体透射率变化 $\Delta\mathbf{t}$ 的实像和虚像，两个像的中心都在全息图的轴上。我们把这两个像称之为孪生像，它们相隔距离为 $2z_0$，并且有一相干背景 $B\mathbf{t}_b$ 伴随出现。

注意由方程(8-14)可得，透明底片的正负使成像波相对于相干背景波有不同的符号(对正片，β' 为正；对负片，β' 为

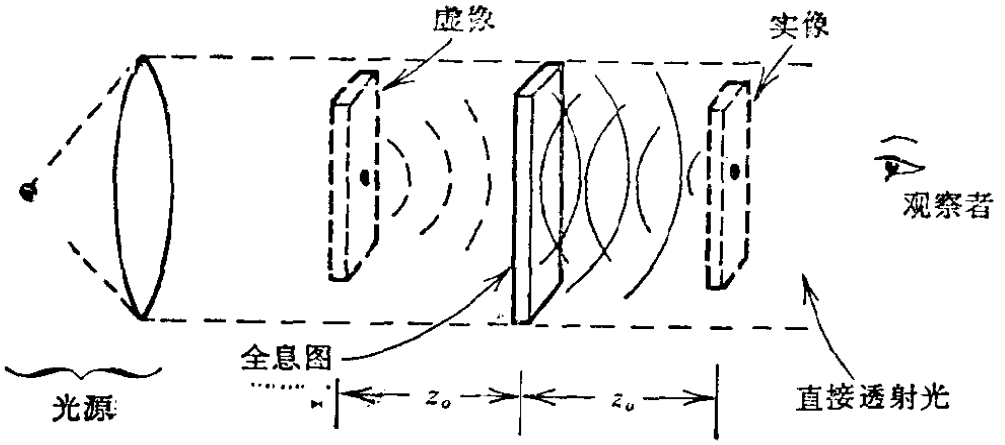


图 8-5　孪生像的产生

负)。因为在最后观察过程中成像波要和背景发生干涉,所以正片全息图产生反差为正的像，而负片全息图则产生反差为负(即反差相反)的像。

盖伯全息图的局限性

盖伯全息图具有某些弱点，限制了它的应用范围．最大的局限性也许是假定物体透明度很高(8-11)以及随之而来的假定(8-15)所带来的．如果不采用这个假设，那么全息图所透射的波还要多一个分量：

$$U(x, y)=\beta' B|a(x, y)|^2, \qquad (8\text{-}16)$$

此分量将不再可以忽略不计了．事实上，若物体的平均透射率很低,这个分量可成为透射项中最大的透射项,从而可能使较弱的像完全湮没．因此,用一张盖伯全息图,只能对透明的背景上的不透明字母这样的物体实现波前重现成像；而对于不透明背景上的透明字母却不行．这一限制严重地妨碍了盖伯全息图在许多可能的应用中的使用．

第二个严重的限制在于它产生孪生像，而不是产生一个像．问题并不在于出现两个像这件事本身，而在于它们是不

可分离的。当对实像聚焦时，总是伴随有一个离焦的虚像。同样，观察者对虚像聚焦的同时也看到由实像项引起的一个离焦像。因此即使对于高透明物体，其像的质量也将由于这个孪生像问题而降低。为了消除或减少孪生像问题，已提出了很多办法[8-7]，其中包括盖伯本人提出的一个办法[8-11]。所有这些方案中最为成功的是利思和乌帕特尼克斯提出的方法[8-8]，详见下节。

§ 8-4 利思-乌帕特尼克斯全息图

使用最广的全息图是所谓利思-乌帕特尼克斯全息图，也叫做偏斜参考光束全息图。它和盖伯全息图之间的主要差别是不靠由物体直接透射的光作参考光束，而是在记录过程中引入单独一束分离的参考波。并且，参考光束成一个倾斜角射入，而不是和物体-胶片轴共线。

此种全息图的首次成功由利思和乌帕特尼克斯发表于1962年[8-8]。在历史上有意义的是，这种方法最初的演示是在没有激光光源情况下完成的。但是，只有在这种方法与高相干性激光照明相结合之后，才发挥了它的巨大潜力[8-9,8-12]。

全息图的记录

记录利思-乌帕特尼克斯全息图的一种可能的光路示于图 8-6。点光源被透镜 L 准直。所得平面波的一部分射在物体上，设物体为具有一般振幅透射率 $t_0(x_0, y_0)$ 的底片。平面波的第二部分投射到位于物体之上的棱镜 P 上，然后偏向下部，与胶片轴成 θ 角。结果在记录表面上得到两束相干波之和，一束是物体的透射光，第二束是倾斜平面波。整个胶片上的振幅分布可以写为

$$\mathbf{U}(x, y)=A\ \exp(-j\,2\,\pi\alpha y)+\mathbf{a}(x, y), \qquad (8\text{-}17)$$

其中参考波的空间频率是

$$\alpha=\frac{\sin\theta}{\lambda}. \qquad (8\text{-}18)$$

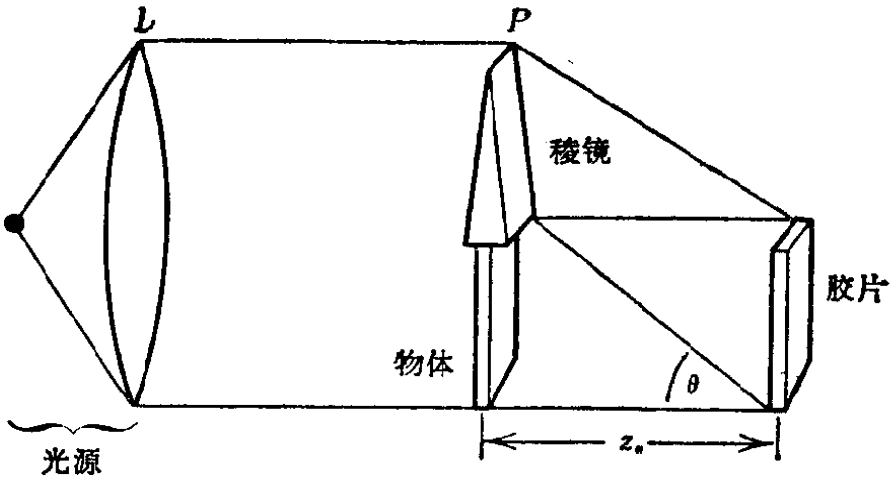


图 8-6　记录利思-乌帕特尼克斯全息图光路

胶片上的强度分布显然为

$$\mathscr{I}(x, y)=A^2+|\mathbf{a}(x, y)|^2+A\mathbf{a}(x, y)\cdot \cdot\exp(j2\pi\alpha y)+A\mathbf{a}^*(x, y)\exp(-j2\pi\alpha y). \qquad (8\text{-}19)$$

把 **a** 明显地表示为振幅和位相分布

$$\mathbf{a}(x, y)=a(x, y)\exp[-j\phi(x, y)], \qquad (8\text{-}20)$$

而后合并(8-19)的最后两项，就可以得到强度分布的另一个表达式

$$\mathscr{I}(x, y)=A^2+a^2(x, y)+2\,Aa(x, y)\cdot \cdot\cos[2\,\pi\alpha y-\phi(x, y)]. \qquad (8\text{-}21)$$

此式表明透过物体的光的振幅和位相已相应地被记录为一个频率为 α 的空间载波的振幅与位相调制。若载波频率足够高(必须高到什么程度下面就会看到)，由此干涉图案即可准确恢复原来的振幅和位相分布。

得到重现像

通常，显影后所得的照相底版的振幅透射率应正比于曝光量．因此胶片的透射率可写为

$$\mathbf{t}_f(x,y)=\mathbf{t}_b+\beta'[|\mathbf{a}|^2+A\mathbf{a}\exp(j\,2\pi\alpha y)+ +A\mathbf{a}^*\exp(-j\,2\pi\alpha y)], \tag{8-22}$$

为了方便我们把透射率的四项写成

$$\begin{aligned}\mathbf{t}_1&=\mathbf{t}_b,\\ \mathbf{t}_2&=\beta'|\mathbf{a}(x,y)|^2,\\ \mathbf{t}_3&=\beta' A\mathbf{a}(x,y)\exp(j\,2\pi\alpha y),\\ \mathbf{t}_4&=\beta' A\mathbf{a}^*(x,y)\exp(-j\,2\pi\alpha y).\end{aligned} \tag{8-23}$$

我们暂且假设全息图由一束垂直入射、振幅为B的均匀平面波照明，如图 8-7 所示．透过全息图的光场有四个不同的分量，每一分量由方程(8-23)中的一个透射项形成：

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_1&=\mathbf{t}_bB,\\ \mathbf{U}_2&=\beta'B|\mathbf{a}(x,y)|^2,\\ \mathbf{U}_3&=\beta'BA\mathbf{a}(x,y)\exp(j\,2\pi\alpha y),\\ \mathbf{U}_4&=\beta'BA\mathbf{a}^*(x,y)\exp(-j\,2\pi\alpha y).\end{aligned} \tag{8-24}$$

分量 $\mathbf{U}_1$ 只不过是经过衰减的入射重现波，因此，它代表一个沿透明底片轴传播的平面波．第二项$\mathbf{U}_2$是在空间变化的，因此具有和光轴成各种角度传播的各个平面波分量．但是，我们很快就会更详细地看到，若$\mathbf{a}(x,y)$的带宽比载波频率α小得多，则 $\mathbf{U}_2$ 波中的能量仍然非常靠近透明底片轴，从而在空间上可与所感兴趣的像分离开来．

波 $\mathbf{U}_3$ 正比于原来的物体波前 $\mathbf{a}$ 乘以一线性指数因子．正比于 $\mathbf{a}$ 就意味着该项将在离透明底片 z_0 处形成物体的一个虚像，线性指数因子 $\exp(j2\pi\alpha y)$表示这虚像偏离片轴一个角度θ，如图 8-7 所示．同理，波 $\mathbf{U}_4$ 正比于共轭波前 $\mathbf{a}^*$，它

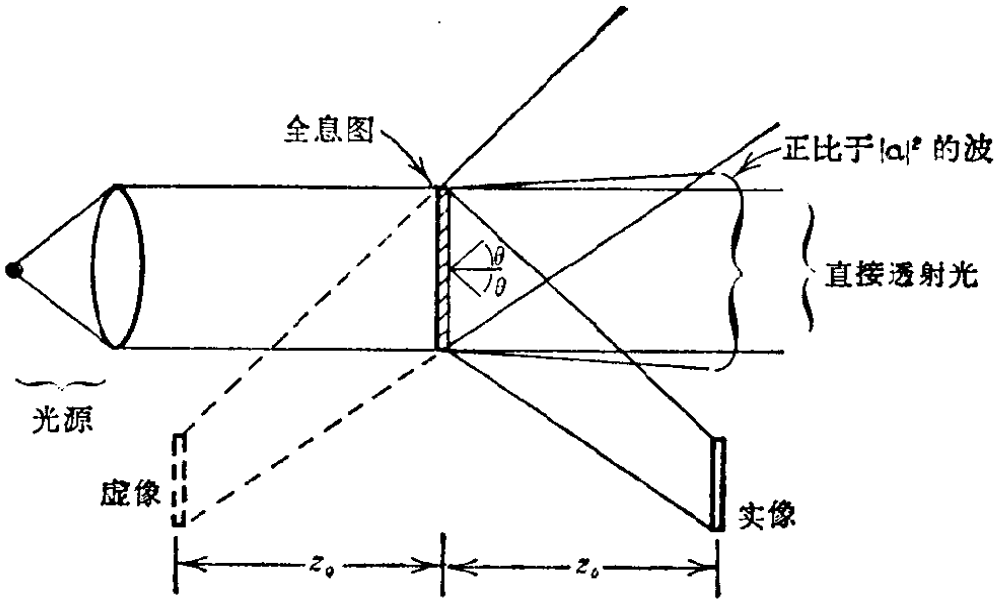


图 8-7 像的重现

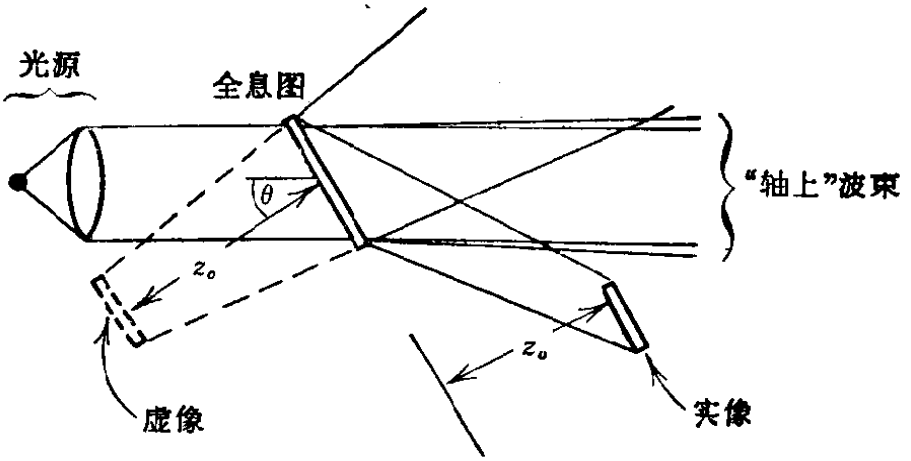
表明在虚像的相反一侧离透明片距离为z_0处形成一实像。线性指数因子$\exp(-j2\pi\alpha y)$的存在说明实像是偏离片轴一个角度θ，这也可在图 8-7 中看到。

当然，从上述结果推出的最重要的结论是：虽然在重现过程中仍同时形成实像和虚像，但它们在方向上相互偏离，并且还和分量波U_1及U_2分开。这种分离是由于采用了具有一偏角的参考光束。要成功地分离实像和虚像就要选参考角θ大于某一下限θ_{min}(最小参考角θ_{min}即将更详细讨论)。一当θ超过θ_{min}，实像和虚像就不受其他波分量的干扰。

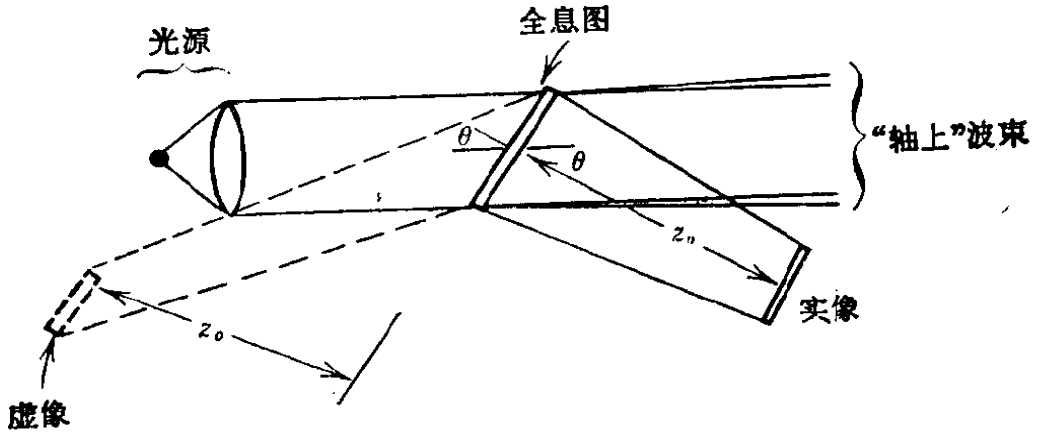
另外要注意，由于这两个像可以独立于平均透射率所形成的任何相干背景来观察，于是方程(8-24)中分量波U_3及U_4所带的特定符号就无所谓了。这样透明底片用正片或负片都可以，都能得到一个“正”像。由于实际的原因，一般都宁可直接采用负片，以避免制作透明正片所需的两步过程。

最后应当指出，我们是选用一个垂直入射的平面波来照明全息图，这个平面波既不是初始参考波的复现也不是它的复共轭，但我们仍然同时得到一个实像和一个虚像.显然我们

在§8-2中关于重现光束所需性质的假定是过于严格了。但是当记录乳胶的厚度与曝光时投射的干涉图样的横向结构差不多大小时，重现光束的精确性质就变得更为重要了。下面在§8-7中将会讨论到，这时必须用与参考光波完全相同的光束来照射全息图以得到一个虚像，或者用参考波的复共轭作



(a)



(b)

图 8-8　重现成像的另外两种光路
(a) 以原来参考波的全同波束照射全息图；
(b) 以原来参考波的共轭波束照射全息图

照明以得到一个实像．这两种情况下的重现光束、全息图及所形成的像之间的关系如图 8-8 所示，其证明留给读者作为练习(见习题 8-1)．

最小参考角

我们回过头看图 8-7 的重现光路，如果要使孪生像彼此分开并和片轴近傍的透射光分开，那么参考光束的偏角 θ 必须要大于某一最小角 $\theta_{\min}$．为了求出这个最小值，求出 $\mathbf{t}_3$ 和 $\mathbf{t}_4$(即全息图透射的虚像和实像项) 的空间频谱不至互相重叠、并且 θ 同 $\mathbf{t}_1$ 和 $\mathbf{t}_2$ 的频谱也不重叠的最低载波频率 α 即已足够．如果没有这样的重叠，那么在原则上可以用一个会聚透镜对全息图进行傅里叶变换，在焦平面上用适当的光阑来消除不需要的频谱分量，然后实行第二次傅里叶变换以得出孪生像中之一[1]．

考虑方程(8-23)中列出的各个透射率项的空间频谱．忽略透明底片的有限孔径，我们直接有

$$\mathbf{G}_1(f_X, f_Y)=\mathscr{F}\{\mathbf{t}_1(x, y)\}=\mathbf{t}_b\delta(f_X, f_Y)．\quad (8\text{-}25)$$

利用自相关定理，还有

$$\mathbf{G}_2(f_X, f_Y)=\mathscr{F}\{\mathbf{t}_2(x, y)\}=$$
$$=\beta'\mathbf{G}_a(f_X, f_Y)\bigstar\mathbf{G}_a(f_X, f_Y)，\quad (8\text{-}26)$$

其中

$$\mathbf{G}_a(f_X, f_Y)=\mathscr{F}\{a(x, y)\}，\quad (8\text{-}27)$$

而★表示自相关运算．最后我们有

$$\mathbf{G}_3(f_X, f_Y)=\mathscr{F}\{\mathbf{t}_3(x, y)\}=$$

---

1) 实用上很少用空间滤波操作来分离孪生像．如果参考角满足下面要推导的要求，那么两个像由于各个分量波有不同的传播方向（参看图 8-7 ）自然会分开．然而，空间滤波的论据为寻求两个像分离所需的充分条件提供了一个概念上很简单的方法．

$$=\beta' A\mathbf{G}_a(f_X, f_Y-\alpha) \tag{8-28}$$

以及

$$\mathbf{G}_4(f_X, f_Y)=\mathscr{F}\{\mathbf{t}_4(x, y)\}=$$
$$=\beta' A\mathbf{G}_a^*(-f_X, -f_Y-\alpha) \tag{8-29}$$

现在注意：$\mathbf{G}_a$ 的带宽和物体的带宽相同，因为这两个频谱的差别仅在于传播现象的传递函数，这个传递函数是方程(3-47)那种纯位相函数。假定物体没有高于 B 周/毫米的频率分量。于是频谱$|\mathbf{G}_a|$可能如图 8-9 a 所示。全息图透射率的相应频谱示于图 (8-9 b)。 $\mathbf{G}_1$ 项只不过是f_X, f_Y 平面的

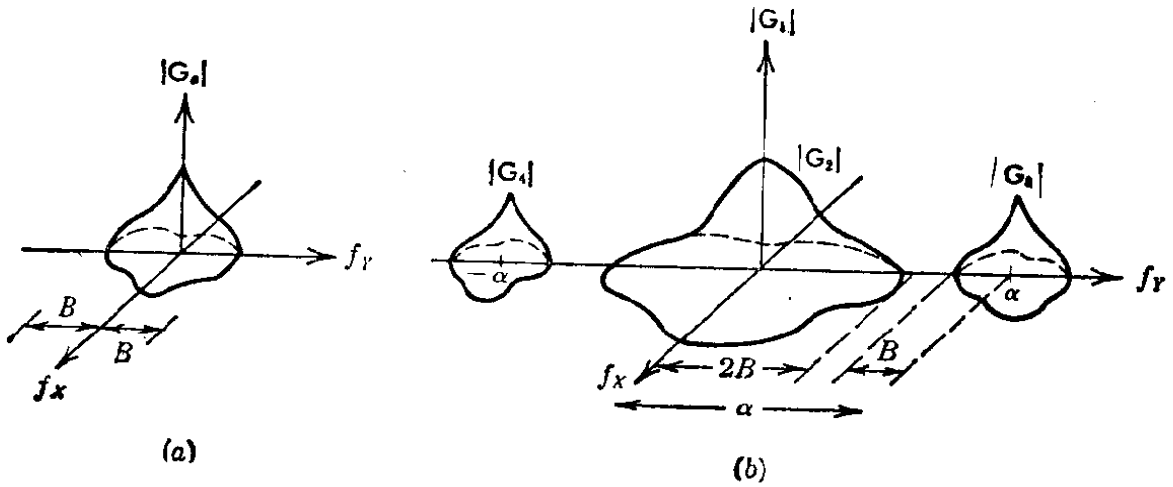


图 8-9　物体(a)和全息图(b)的频谱

原点上的一个 δ 函数。$\mathbf{G}_2$ 项正比于$|\mathbf{G}_a|$的自相关函数，其频率扩展到 $2B$。 最后，$|\mathbf{G}_3|$与$|\mathbf{G}_a|$简单成正比，且中 心频率移到$(0, \alpha)$处，而$|\mathbf{G}_4|$则正比于 $|\mathbf{G}_a|$ 的镜像，中心位于频率$(0, -\alpha)$。

考察图(8-9 b) 可知$|\mathbf{G}_3|$和$|\mathbf{G}_4|$可以和$|\mathbf{G}_2|$分开的条件为

$$\alpha \geqslant 3B. \tag{8-30}$$

上式可等价地写为

$$\sin\theta \geqslant 3B\lambda. \tag{8-31}$$

显然可容许的最小参考角为

$$\theta_{\min}=\sin^{-1}3B\lambda. \tag{8-32}$$

当参考波束比物波束强得多时，这个要求可以减弱一些. 从物理上来看，$|\mathbf{G}_2|$项是由物体上每一点和物体上所有其他点的光干涉产生的，而$|\mathbf{G}_3|$和$|\mathbf{G}_4|$都是参考波和物波的干涉所引起的. 当物波大大弱于参考波（即$a\ll A$）时，$\mathbf{G}_2$项的大小要比$\mathbf{G}_1$,$\mathbf{G}_3$和$\mathbf{G}_4$小得多，可以忽略不计. 这时可容许的最小参考角只要使$\mathbf{G}_3$和$\mathbf{G}_4$彼此分离就行了，或

$$\theta_{\min}=\sin^{-1}B\lambda. \tag{8-33}$$

推广到非准直的参考波和重现波，

对记录全息图和重现像的更一般的光路进行讨论当然是很自然的. 其中最有意义的是使用球面参考波和球面重现波[1]的波前重现系统的性质. 参看图8-10a，设参考波是由坐标为(x_r, y_r, z_r)的点光源形成的. 由于不论参考波的具体形式如何，物体振幅的变换都保持为线性（见§ 8-2），我们讨论坐标在(x_0, y_0, z_0)的一个点光源物体就足够了[2]. 如图8-10b所示，在重现过程中，透明底片由从坐标(x_p, y_p, z_p)发出的一球面波照明. 为了更加普遍起见，重现时的波长λ_2可以不同于记录时所用的波长λ_1.

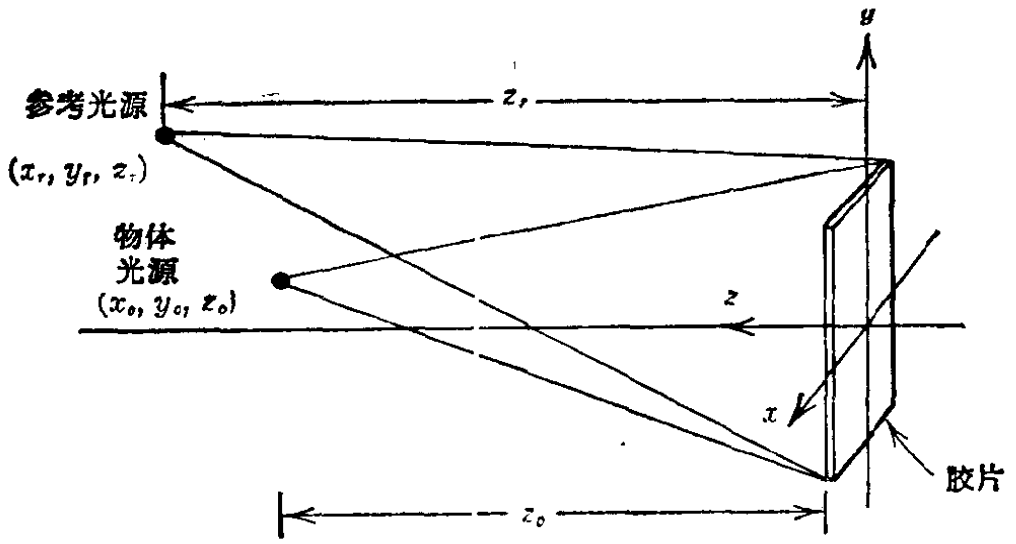
对球面波使用二次式近似，投射在照相底片上的总光场可以写为

$$\mathbf{U}(x, y)=\mathbf{A}\ \exp\left\{j\frac{\pi}{\lambda_1 z_r}[(x-x_r)^2+(y-y_r)^2]\right\}+$$

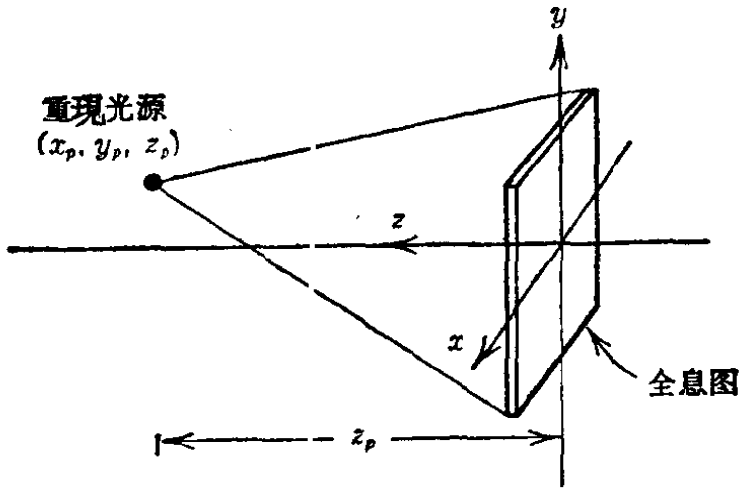
---

1) 有关这方面的更全面的讨论，包括对所存在的像差的考虑，见[8-13]及[8-14].

2) 这种简化已隐含了下述假定：参考光束的偏斜角已足以把实像和虚像分开.



(a)



(b)

图 8-10　推广的光路装置(a)记录(b)重现

$$+\mathbf{a}\exp\left\{j\frac{\pi}{\lambda_1 z_0}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\right\}, \qquad (8\text{-}34)$$

其中 **A** 和 **a** 是两个复常数，代表两个球面波的相对振幅和位相. 干涉图样上相应的强度分布为

$$\mathscr{I}(x,y)=|\mathbf{A}|^2+|\mathbf{a}|^2+$$

$$+\mathbf{A}\mathbf{a}^*\exp\left\{j\frac{\pi}{\lambda_1 z_r}[(x-x_r)^2+(y-y_r^2)]\right\}-$$

$$-j\frac{\pi}{\lambda_1 z_0}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\Big\}+$$

$$+\mathbf{A}^*\mathbf{a}\ \exp\Big\{-j\frac{\pi}{\lambda_1 z_r}[(x-x_r)^2+(y-y_r)^2]+$$

$$+j\frac{\pi}{\lambda_1 z_0}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\Big\}. \tag{8-35}$$

若显影后的底片的振幅透射率正比于曝光量，那么透射率中重要的项是

$$\mathbf{t}_3=\beta'\mathbf{A}\mathbf{a}^*\ \exp\Big\{j\frac{\pi}{\lambda_1 z_r}[(x-x_r)^2+(y-y_r)^2]-$$

$$-j\frac{\pi}{\lambda_1 z_0}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\Big\}, \tag{8-36}$$

$$\mathbf{t}_4=\beta'\mathbf{A}^*\mathbf{a}\ \exp\Big\{-j\frac{\pi}{\lambda_1 z_r}[(x-x_r)^2+(y-y_r)^2]+$$

$$+j\frac{\pi}{\lambda_1 z_0}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\Big\}.$$

全息图由下述球面波照明：

$$\mathbf{U}_p(x,y)=\mathbf{B}\ \exp\Big\{j\frac{\pi}{\lambda_2 z_p}[(x-x_p)^2+(y-y_p)^2]\Big\}. \tag{8-37}$$

透过底片的两个我们所需要的波前由(8-36)式和(8-37)式相乘而得到：

$$\mathbf{U}_3(x,y)=\mathbf{t}_3\mathbf{B}\ \exp\Big\{j\frac{\pi}{\lambda_2 z_p}[(x-x_p)^2+(y-y_p)^2]\Big\}$$

$$\mathbf{U}_4(x,y)=\mathbf{t}_4\mathbf{B}\ \exp\Big\{j\frac{\pi}{\lambda_2 z_p}[(x-x_p)^2+(y-y_p)^2]\Big\}. \tag{8-38}$$

为了判明这些透射场的性质，我们必须考察它们对 (x, y) 的依赖关系. 因为仅出现关于 x 和 y 的线性项和二次项，这两个表示式 $\mathbf{U}_3$ 和 $\mathbf{U}_4$ 可看作是球面波的二次式近似；线性项的存在仅表示波是会聚到(或发散自)不在 z 轴上的某些点. 还

需要确定这些会聚点(实的或虚的)的精确位置.

注意,与 x^2 和 y^2 有关的位相项决定了焦点的 z 坐标,而线性项则决定了离轴坐标. 若把(x^2+y^2)项并项,我们就求得形式为

$$\exp\left[j\pi\left(\pm\frac{1}{\lambda_1 z_r}\mp\frac{1}{\lambda_1 z_0}+\frac{1}{\lambda_2 z_p}\right)(x^2+y^2)\right] \tag{8-39}$$

的一个指数函数. 其中上面的一组符号适用于一个分量波 U_3,下面的一组符号则适用于另一分量波 U_4. 将此式子与从图 8-10 b 中全息图左方距离为 z_i 的一点发出的球面波的式子

$$\exp\left[\ j\frac{\pi}{\lambda_2 z_i}(x^2+y^2)\right] \tag{8-40}$$

加以比较,我们就得到点源的像到全息图的距离 z_i 为

$$z_i=\left(\frac{1}{z_p}\pm\frac{\lambda_2}{\lambda_1 z_r}\mp\frac{\lambda_2}{\lambda_1 z_0}\right)^{-1}, \tag{8-41}$$

其中仍是上面的一组符号适用于第一个波,下面的一组符号适用第二个波. 当 z_i 为正,像是虚像,并位于图 8-10 b 中全息图的左边;当 z_i 为负,像是实像,并且位于全息图的右边.

虽然方程(8-41)确定了像的 z 轴坐标,像的 x 和 y 坐标仍有待确定. 这些坐标可以这样求出:对方程(8-38)中的 x 和 y 的线性项集项,然后将它们与下式比较:

$$\exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda_2 z_i}(xx_i+yy_i)\ \right], \tag{8-42}$$

有关的两项是

$$\exp\left\{-j2\pi\left[\left(\mp\frac{x_0}{\lambda_1 z_0}\pm\frac{x_r}{\lambda_1 z_r}+\frac{x_p}{\lambda_2 z_p}\right)x+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\mp\frac{y_0}{\lambda_1 z_0}\pm\frac{y_r}{\lambda_1 z_r}+\frac{y_p}{\lambda_2 z_p}\right)y\ \right]\right\}. \tag{8-43}$$

比较(8-42)和(8-43),我们可看出

$$x_i = \mp\frac{\lambda_2 z_i}{\lambda_1 z_0}x_0 \pm \frac{\lambda_2 z_i}{\lambda_1 z_r}x_r + \frac{z_i}{z_p}x_p$$
$$y_i = \mp\frac{\lambda_2 z_i}{\lambda_1 z_0}y_0 \pm \frac{\lambda_2 z_i}{\lambda_1 z_r}y_r + \frac{z_i}{z_p}y_p \qquad (8\text{-}44)$$

就是两个像的离轴坐标。

特别注意，物体坐标的改变 $(\Delta x_0, \Delta y_0)$ 会引起像坐标的改变

$$\left(\mp\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{z_i}{z_0}\Delta x_0, \mp\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{z_2}{z_0}\Delta y_0\right).$$

因此，在这种推广的光路中，波前重现过程附有一个放大率

$$M = \left|\frac{\Delta x_i}{\Delta x_0}\right| = \left|\frac{\Delta y_i}{\Delta y_0}\right| = \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{z_i}{z_0}\right|. \qquad (8\text{-}45)$$

将(8-41)代入(8-45)，得到等价的表示式

$$M = \left|1 - \frac{z_0}{z_r} \mp \frac{\lambda_1 z_0}{\lambda_2 z_p}\right|^{-1}. \qquad (8\text{-}46)$$

若用一准直参考波($z_r = \infty$)和一准直重现波($z_p = \infty$)，可看到放大率为-1，与波长比 λ_1/λ_2 无关[1)]。对于虚像，当 $\lambda_2 = \lambda_1$，$z_p = z_r$ 时，也得到放大率为 1；对于实像，当 $\lambda_2 = \lambda_1$，$z_p = -z_r$ 时亦然(见问题 8-3)。

推广到三维照相术

1964 年，利思和乌帕特尼克斯报告了他们首次成功地把全息术推广到三维成像[8-9]。这一努力的成功在很大程度上应归功于具有极好的时间和空间相干性的He-Ne激光器的使用。

图 8-11 *a* 画出了用来记录三维景物的全息图的一般光路安排。用相干光照明待摄景物。同时，照明光束的一部分射到一块紧靠景物的"参考束"反射镜上。由这块反射镜反射

1) 但轴向的像距 z_i 并不依赖于 λ_1/λ_2。

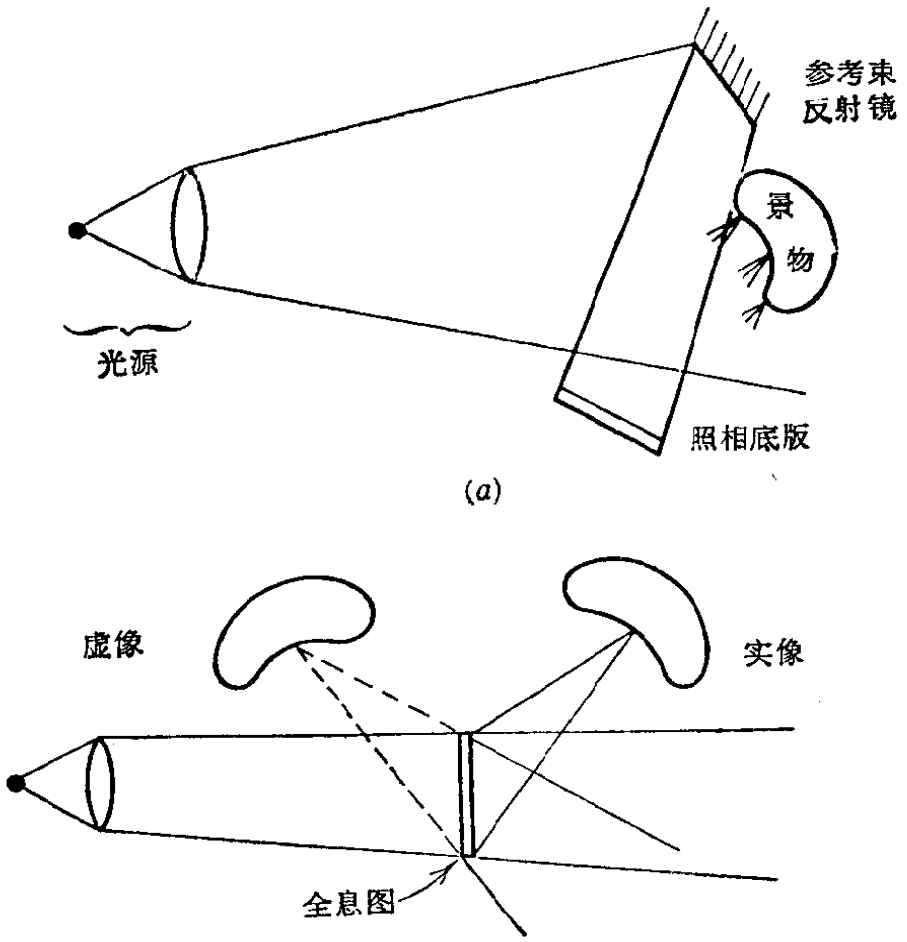


图 8-11　三维景物的全息成像　(*a*) 全息图的记录；(*b*) 像的重现

的光直接照到照相底版上，它就作为参考波束与从景物本身反射的光相干涉。这样照相底版就记录了三维景物的一个全息图。

为了重现像，用一重现波照射显影后的底版，如图 8-11*b* 所示。虚像出现在底版后面确定的三维空间位置上。由于在重现过程中复现了原来投射在底版上的波前，所以像保持了原来物体的全部三维特性。特别是视差效应很易看出，观察者只要改变他观看的位置就能看到前排物体后面的东西。

重现过程所产生的实像形成于照相底版和观察者之间。

对三维物体而言，此实像所具有的某些性质使它不如虚像有用．首先，物体上离照相底版最近的点（即离原来景物的观察者最近的点）在重现出的实像中仍离照相底版最近，但这时却是离观察者最远（见图 8-11 *b*）．因此对观看实像的观察者来说，视差关系不是原来物体的视差关系，而看到的像则与原来物体的凸凹相反，给人以某种特殊的感觉，它只有经过本人亲自观察之后才能充分体会．这种像称为赝视像（pseudoscopic image）．

实像的第二个缺点是，若插入一个照相底片以试图直接记录实像，实验者立刻会发现（对一个有合理大小的全息图），景深一般是如此之小以致于不能得到一个可辨认的记录．若只照明全息图的一小部分，这个问题可以减轻一些，这时景深增大了，可以记录下一个能用的二维象．如果照明光斑在全息图上移动，那么二维像配景（perspective）就会变化．于是一张大全息图的每一小区域都能够产生原始目标的具有不同配景的一个实像！

图 8-12 表示用来记录三维景物全息图的一套实验装置．发自激光器 S 的光，经反射镜 M_1 反射到分束器 BS 上．一部分光透过分束器，然后由反射镜 M_2 射到三维景物上，现在的待摄景物是置于一块铭牌之前的两个动物小塑像．光的另一部分被分束器 BS 反射，照到参考束反射镜 R 上，图中碰巧在 R 里看到一个动物塑像的反射像．来自参考束反射镜的光和来自景物的光在照相底版 P 上发生干涉．

图 8-13 是已显影的全息图本身的照片．我们看到记录下来的结构与景物的任何特定部分毫无相同之处．事实上，大部分能看到的结构可以说与重现无关，因为它们是由于光学设备的不完善引起的（例如，由反射镜上的尘粒引起）．而实际形成重现像的结构则过于细微，在这张照片中是分辨不



图 8-12　用来记录三维景物全息图的实验装置：S，激光源；M_1 反射镜；BS，光束分光器；M_2 反射镜；O，景物；R，参考束反射镜；P，照相底版。

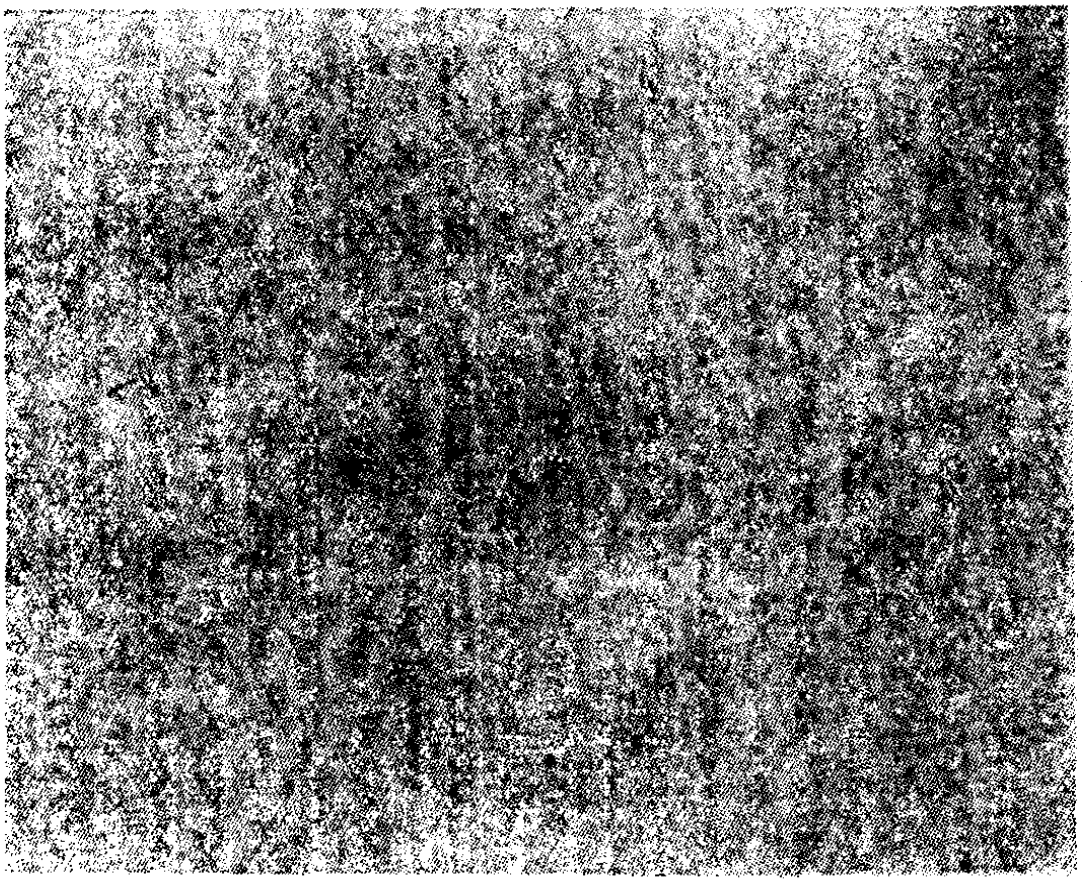


图 8-13　全息图本身的照片

出的。

图 8-14 表示观察虚像的方法。此时激光器不在图内，图中仅能看到反射光束的镜子M。在被照明的全息图后面看到了塑像小马的虚像。

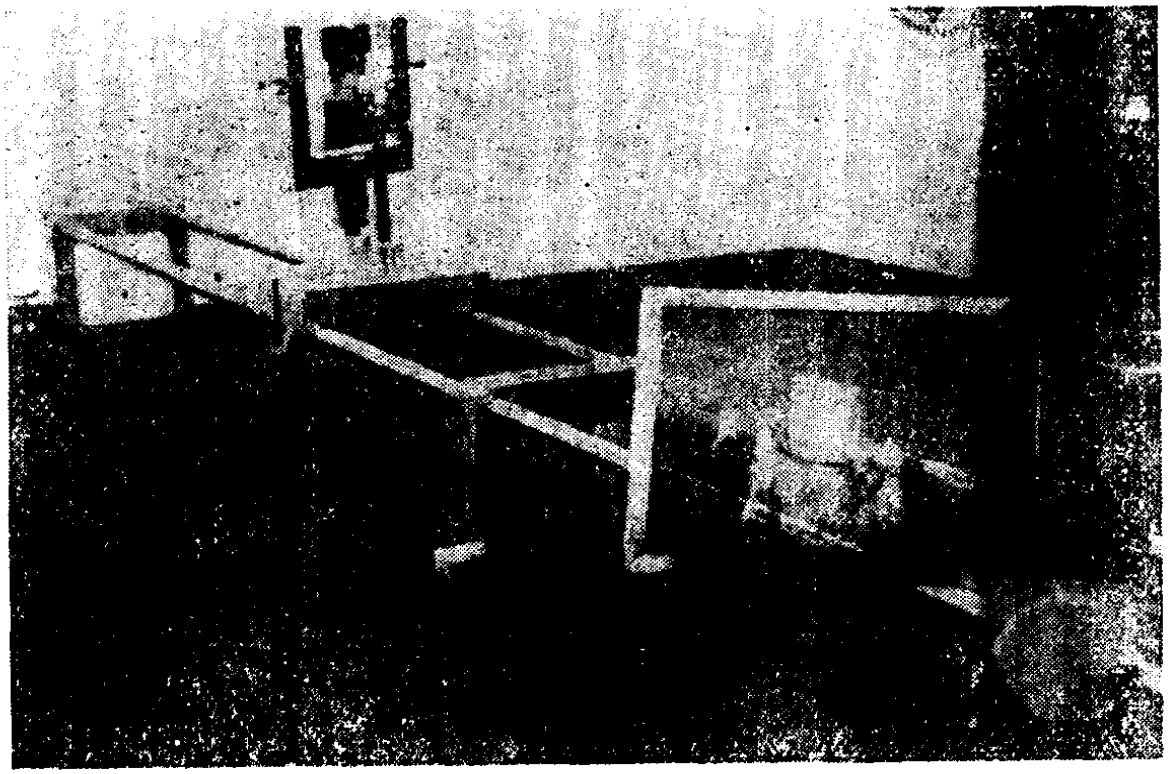
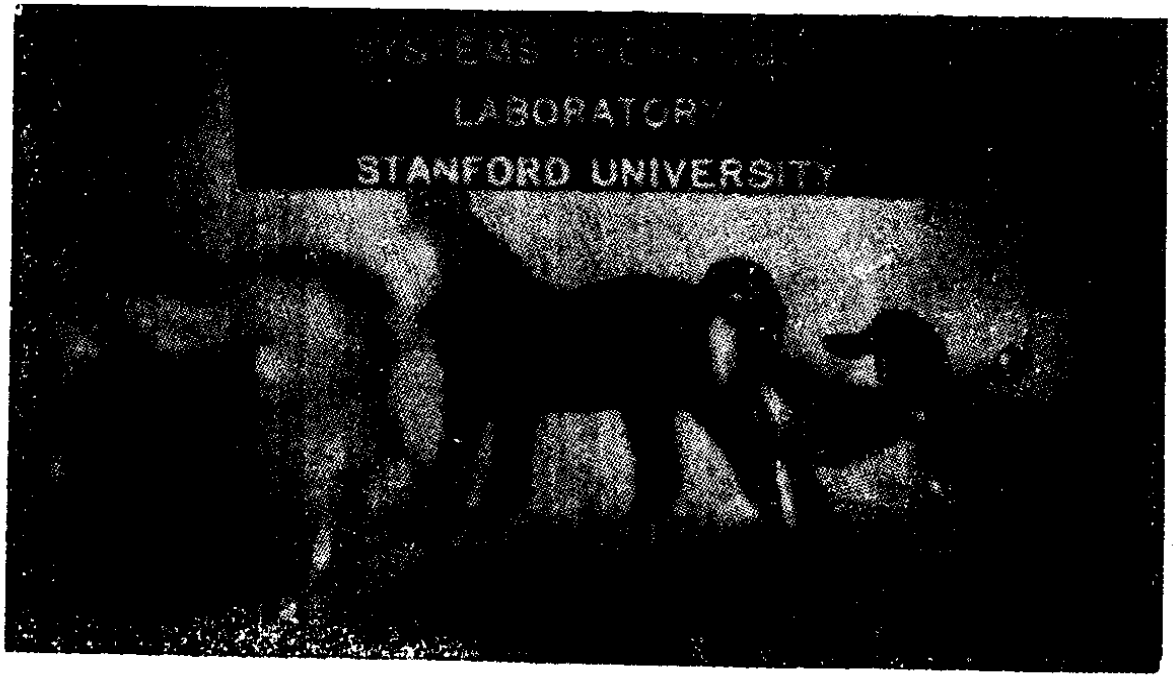


图 8-14　观察虚像的实验装置

为了显示虚像的真实三维特征，请参看图8-15，其中示出了虚像的两张照片。图 8-15 a是把照相机聚焦在虚像的背景上，背景中的铭牌聚焦清晰，而前景中的小动物都是离焦的。还可以看到马尾巴遮住了马的影子的头部。然后把相机重新聚焦到前景上，并且移动相机以改变透视关系。图 8-15 b 显出所获得的像，现在前景聚焦很好，而背景则是离焦的.此时，马尾巴不再遮挡马影的头部了，这是由于透视关系变化的结果。因此，通过简单地横向移动相机，成功地看到了马尾后面的东西。



(*a*)



(*b*)

图　8-15 表明虚像的三维特性的照片

实际问题

从全息照相开始以来最突出的实际问题无疑是如何得到一个相干性和强度都足够高的光源。随着激光器的出现，这个问题已在很大的程度上解决了。但是，激光光源的好用又使全息照相获得了新的更复杂的应用，如上述的三维摄影术。许多这样的新应用已经达到功率比较低的连续工作激光器的能力的最大限度了，光源的工艺仍然是对全息术的新应用的主要限制。

全息图的记录过程只不过相当于干涉量度技术的一次实习。和任何一个干涉量度实验一样，如果要记录到清晰的干涉条纹的话，主要的要求是在曝光期间光学设备要稳定到几分之一波长之内。光源强度越高，所需曝光时间就越短，稳定性要求也就越不苛刻。在具体情况下所需的曝光时间取决于各种各样的因素，其中包括待摄物体的透射率或反射率、相对距离和几何位置以及所用的是什么胶片。曝光时间从短到十分之一秒至长到数小时都是常见的。在某些情况下，使用脉冲激光器作光源，此时曝光时间短至几毫微秒。

一些最严格的实验要求是三维景物的全息照相提出来的。为了记录这种目标的全息图，要求底片具有极高的分辨率(进一步讨论对底片分辨率的要求见§ 8-5)。最常作此用的胶片是649 F型Kodak光谱干版，其分辨本领优于2000条线/毫米。不幸，高分辨率乳胶的灵敏度很低（649 F干版的感光速度约为ASA 0.03，对比Tri-X的速度为ASA 400[1]）。低灵敏度当然就要求曝光时间更长，对稳定性要求也更高。

1）ASA是底片感光速度的美国标准，数值越大，速度越高，二者大致成正比。ASA400约相当于我国标准GB 27°或DIN$\frac{27^\circ}{10}$，因此，649 F干版的速度只有GB 27°的万分之一不到。——译者注

在某些情况下，另一个很重要的实际问题是照相记录介质的有限的动态范围．参看图 7-11，振幅透射率仅在一有限范围内才与曝光量成正比，当然最理想的是选择平均曝光量落在线性区域的中点附近．但是，当物体是结构相当粗糙的透明片时，全息图上将有大面积的曝光大大地高出或低于t-E曲线的线性区域．我们可以预料，这种非线性会引起像的反差发生某种畸变．在 §8-6 将更详细研究非线性的影响．

用利思和乌帕特尼克思首先提出的一种方法[8-9]，动态范围问题可在很大程度上得到克服．如图 8-16 所示．物体通过一漫射体来照射．由于漫射体把光散射到很广的角度范围里，因此来自物体每一小区域的光都散布到整个照相底版上，从而消除了曝光很强和很弱的区域，而如果对物体直接照明的话，这种情况本来是会出现的．可以料到，这时所得的虚像看起来是由弥散光源从背后照亮的．

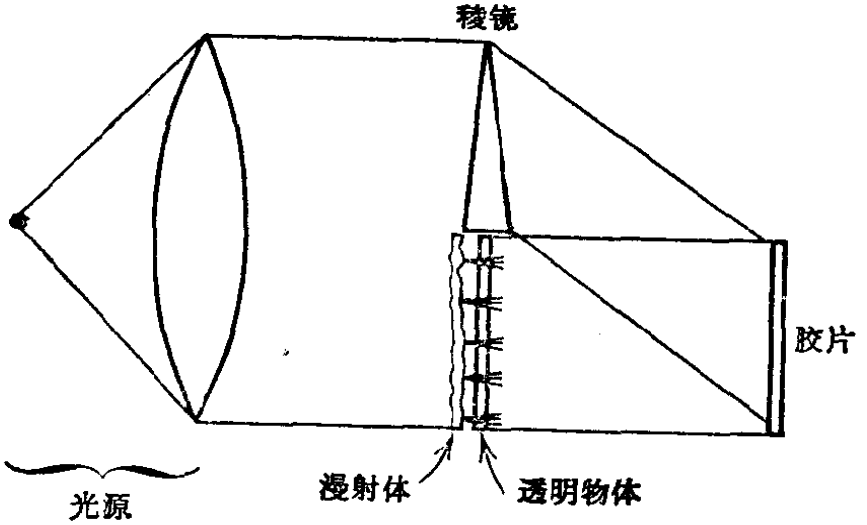


图 8-16　采用漫射照明记录全息图

§ 8-5 底片的 MTF(调制传递函数)的影响

迄今为止，我们一直都假设用来记录全息图的照相乳胶的 MTF 对于入射干涉条纹的一切空间频率都是 1．现在我

们要转而考虑底片的频率响应对重现像质量的影响。我们对两种特别重要的记录光路进行分析。这个题目的进一步讨论，包括一个可适用于更一般的光路的分析，读者可参阅 R. F. van. Ligten 的工作[8-15,8-16]。

准直参考波

首先我们来考察，使用平面参考波时底片的 MTF 对于从物振幅到实像振幅变换的影响。同样的结果可以用于通过辅助透镜系统由虚像形成的任何实像。

前面曾讨论过，若曝光量的变化保持在 t-E 曲线的线性区域内，则物振幅到像振幅的变换是线性的(见 §8-2)。这种线性性质不会为降低底片的频率响应的线性过程所破坏。因此只要找出 MTF 对物体的一个一般的频率分量的影响就够了，更普遍的结果可由线性叠加得到。

为此，考虑由下式给出的参考光波和物光波：

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_r(x, y)&=A\ \exp(-j\,2\pi\alpha y),\\ \mathbf{U}_0(x, y)&=\mathbf{a}\ \exp[-j\,2\pi(f_X x+f_Y y)],\end{aligned}\tag{8-47}$$

于是到达乳胶上的物光波和参考光波是在不同方向上传播的平面波。因此曝光强度的分布为

$$\begin{aligned}\mathscr{I}(x, y)=A^2+|\mathbf{a}|^2+2A|\mathbf{a}|\cos\{2\pi[f_X x+\\ +(f_Y-\alpha)y]+\phi\},\end{aligned}\tag{8-48}$$

其中 $\phi=\arg\mathbf{a}$。如果我们用 $\mathbf{M}(f_X, f_Y)$ 来表示乳胶的频率响应，这里

$$\mathbf{M}(f_X, f_Y)=M(f_X, f_Y)\exp[-j\Omega(f_X, f_Y)],\tag{8-49}$$

那么，根据方程(7-15)，有效曝光强度分布为

$$\begin{aligned}\mathscr{I}_{eff}(x, y)=A^2+|\mathbf{a}|^2+2A|\mathbf{a}|M(f_X, f_Y-\alpha)\cdot\\ \cdot\cos\{2\pi[f_X x+(f_Y-\alpha)y]-\Omega(f_X, f_Y-\alpha)+\phi\}.\end{aligned}\tag{8-50}$$

由此我们得出结论：与用理想乳胶(即在所有频率上 $\mathbf{M}=1$ 的

乳胶）所获得的振幅和位相比较起来，物体的空间频率为(f_X, f_Y)的傅里叶分量衰减了一个因子$M(f_X, f_Y-\alpha)$并且有一相移$\Omega(f_X, f_Y-\alpha)$。

图8-17用图示出这个结果。假设物体的频谱的中心频率在$(f_X=0, f_Y=0)$处。乳胶的MTF建立在频率$(f_X=0, f_Y=\alpha)$附近，物的频谱和胶片MTF的乘积得出像频谱。

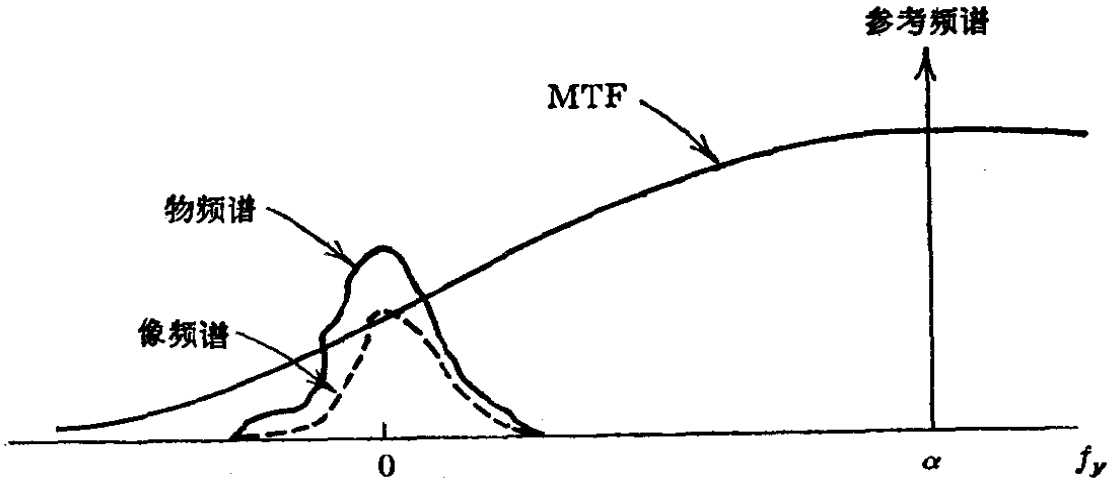


图 8-17　底片的MTF的效果：准直参考波

由以上的分析可清楚知道，应用一束准直参考波，底片的频率响应的效果就可以通过对物频谱乘上一个简单的相乘因子$\mathbf{M}(f_X, f_Y-\alpha)$来代表。由这个结果立即可推出，成像过程有一个相干传递函数

$$\mathbf{H}(f_X, f_Y)=\mathbf{M}(f_X, f_Y-\alpha).$$

但是，系统的空间频率响应不仅受胶片的MTF所限制，而且也受透明胶片的有限孔径所引起的衍射作用的限制。因此，若$P(x, y)$表示透明片的孔径函数，即若

$$P(x, y)=\begin{cases}1 & \text{于胶片孔径内的}(x, y)\text{点上}\\ 0 & \text{在其他地方,}\end{cases}$$

那么，完整的相干传递函数可写为

$$\mathbf{H}(f_X, f_Y)=P(\lambda d_i f_X, \lambda d_i f_Y)\,\mathbf{M}(f_X, f_Y-\alpha) \quad (8\text{-}51)$$

其中第一个因子P出现的理由和方程(6-19)完全类似。我们可看到，底片的MTF的作用可以看成是完全等效于在波前重现成像系统的输入光瞳上插入一块具有衰减和相移作用的模片，其振幅透射率为

$$\mathbf{t}(x, y)=\mathbf{M}\left(\frac{x}{\lambda d_i}, \frac{y}{\lambda d_i}-\alpha\right). \tag{8-52}$$

无透镜傅里叶变换全息图

下面我们讨论另一种记录光路，在这种光路中底片MTF的影响和以前的情况大不相同。所要讨论的记录光路示于图8-18；参考光束是从和物体共面的一点发出的一个球面波。用这种特殊光路所记录的全息图可称为无透镜傅里叶变换全息图[8-17]，其理由下面即阐明。

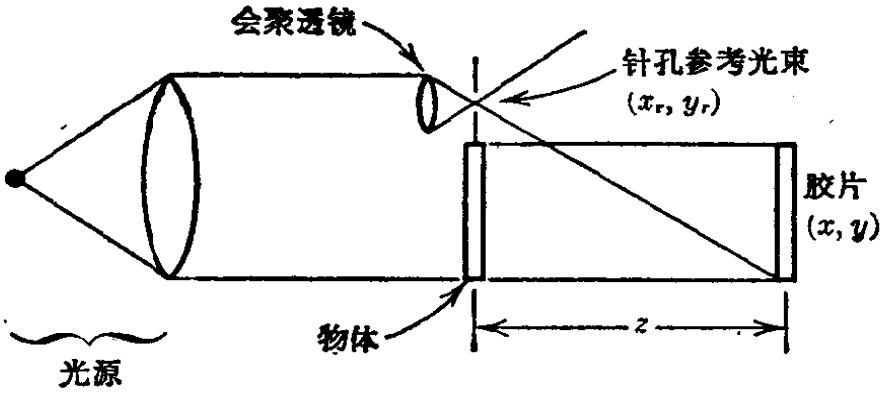


图 8-18　记录一个无透镜傅里叶变换全息图

为研究这类全息图的性质，我们仍要用到成像过程的线性特性，但这次是考虑成像系统对单个点光源物体的响应，而不是对一平面波物光束的响应。用(x_r, y_r)和(x_0, y_0)各自代表参考光束和物光束的点光源的坐标，它们在乳胶上对应的振幅分布可以写为(用二次型近似)

$$\mathbf{U}_r(x, y)=A\ \exp\left\{j\frac{\pi}{\lambda z}[(x-x_r)^2+(y-y_r)^2]\right\},$$

$$U_0(x,y)=\mathbf{a}\ \exp\left\{j\frac{\pi}{\lambda z}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\right\}.$$

因此曝光时入射光强度为

$$\mathscr{I}(x,y)=A^2+|\mathbf{a}|^2+2A|\mathbf{a}|\cos\left[2\pi\frac{(x_0-x_r)x}{\lambda z}+\right.$$

$$\left.+2\pi\frac{(y_0-y_r)y}{\lambda z}+\theta(x_r,y_r;x_0,y_0)\right],\qquad(8\text{-}53)$$

其中 $\theta(x_r, y_r; x_0, y_0)$ 是与(x_r,y_r)和(x_0, y_0) 有关的相角，但与底片坐标(x, y)无关。

无透镜傅里叶变换全息图这个名称的理由现在就清楚了。由坐标为(x_0, y_0)的物体点发出的波与参考波相干涉，形成一个正弦形的条纹图样，其空间频率为

$$f_X=\frac{x_0-x_r}{\lambda z},$$

$$f_Y=\frac{y_0-y_r}{\lambda z}.\qquad(8\text{-}54)$$

因此，对于这种特殊的记录光路，物点的坐标和全息图上的空间频率之间具有一一对应的关系。这样一种变换关系正是傅里叶变换运算的特征，但是没有用变换透镜就完成了。

为了从这个全息图得到像，我们用相干光照明底片并且在它后面加一正透镜，如图 8-19 所示。在方程 (8-41) 中令

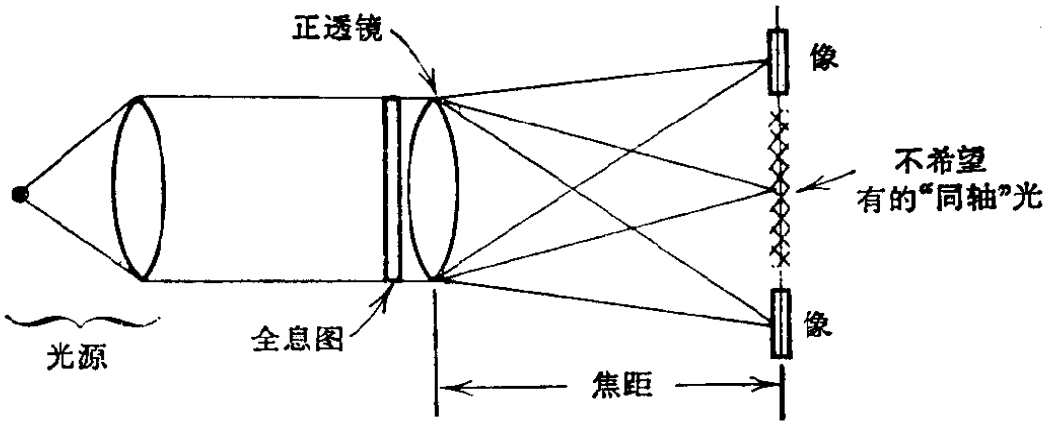


图 8-19　从无透镜傅里叶变换全息图得到像

$z_p=\infty$ 及 $z_0=z_r$ 表明，全息图本身所形成的两个孪生像都位于离底片无穷远距离处。正透镜使无穷远处的像成像在透镜之后距离为一个焦距 f 的实焦点上。

为了求胶片的MTF对重现像的影响，我们将方程(7-15)及(8-53)联立，得到一有效强度分布

$$\mathscr{I}_{\mathrm{eff}}(x,y)=A^2+|\mathbf{a}|^2+2A|\mathbf{a}|M\left(\frac{x_0-x_r}{\lambda z},\ \frac{y_0-y_r}{\lambda z}\right)\cdot$$

$$\cdot\cos\left[2\pi\frac{x_0-x_r}{\lambda z}x+2\pi\frac{y_0-y_r}{\lambda z}y+\theta(x_r,y_r;x_0,y_0)-\right.$$

$$\left.-\Omega\left(\frac{x_0-x_r}{\lambda z},\ \frac{y_0-y_r}{\lambda z}\right)\right]. \tag{8-55}$$

胶片的MTF所引起的相移 Ω 只会影响对应于 $(x_0,\ y_0)$ 的像点的光的位相，因此它是无关紧要的。然而，因子 M 却使点 $(x_0,\ y_0)$ 的像受到衰减。由于离参考点最远的物点在全息图上形成的干涉条纹的空间频率最高，这些点的像衰减得最厉害。

因此，对于无透镜傅里叶变换记录光路，胶片的有限的频率响应将会限制参考点附近的视场，但不会影响此视场内所得到的分辨率。粗略地说，若 $f_{\max}$ 表示乳胶能分辨的最高空间频率，那么只有其坐标满足

$$\sqrt{(x_0-x_r)^2+(y_0-y_r)^2}\leqslant\lambda z f_{\max} \tag{8-56}$$

的那些物点才实际出现在像中。对于一准直参考波，我们看到胶片的有限分辨率的效果等于在入口孔径上放一模片[见方程(8-52)]，而对于现在这种记录光路，则胶片有限分辨率的效果等于放在物体本身上的一个模片。这时等效模片的透射率由下式给出：

$$\mathbf{t}(x_0,y_0)=\mathbf{M}\left(\frac{x_0-x_r}{\lambda z},\ \frac{y_0-y_r}{\lambda z}\right). \tag{8-57}$$

由于这个成像系统对各个物体点加权的程度与该点的具体坐标有关，所以这个成像系统不是空间不变的，并且严格说来对它不存在有相应的相干传递函数。但是从实际观点来看，我们可以把物体空间分成所谓的等晕区 (isoplanatic regions)，这些区域足够小，以保证方程 (8-57) 在任意一区里近似为常数，并且为每个这样的区域指定一个合适的相干传递函数。这时相干传递函数可写为

$$\mathbf{H}(f_X, f_Y) \cong \mathbf{M}P(\lambda d_i f_X, \lambda d_i f_y), \qquad (8\text{-}58)$$

其中 $\mathbf{M}$ 是方程(8-57)在该等晕区的特定值，而 P 仍是描述系统有效光瞳的光瞳函数。

更普遍的记录光路

Van Ligten[8-16]对前面图 8-9 所示的更普遍的记录光路作了全面的分析，但他的分析太长，不便在此重复。分析表明，在所有情况下，胶片的 MTF 的影响都等效于一个放在物体和胶片之间的某一位置上的模片，模片的振幅透射率仍正比于 $\mathbf{M}$ 的大小。等效模片的具体位置取决于所用的记录光路。本节详细研究的两种光路仅仅代表两种极端情况；一种情况是有效模片放在输入光瞳上，而另一种情况是模片放在物体上。

关于底片的MTF的影响的进一步讨论，读者可以参考所引用的文献；在习题 8-5 中也有附加的材料。

§ 8-6 底片的非线性效应

在我们对全息摄影的全部讨论中曾多次假定，记录介质曝光的程度是要使得保证工作在振幅透射率-曝光量曲线的线性区域内。但是，实际的照相软片和底版在这方面并不是完全线性的，它对线性性质的偏离在很大程度上取决于介质

所受曝光量的变化的幅度．在这一节里我们要简短地讨论胶片的非线性对再现像的影响．应当强调指出，当物光束所产生的平均曝光量与参考光束产生的曝光量可比较时，非线性效应恐怕是对像的质量的最严重的限制．这种情况与很弱的物光束的情况相反，后一情况下的限制因素一般是底片颗粒噪声[8-18]．

Kozma 模型

为了分析胶片的非线性对全息照相的重现波前的影响，Kozma[8-19]提出了一个有用的模型．Kozma 方法中对照相乳胶的处理方式很像通讯理论问题中对非线性系统元件的处理[8-20,8-21]．令乳胶所形成的曝光图样为这一元件的输入．而输出则为显影后的底片的振幅透射率图样．

为简单起见，我们假定参考波为平面波，参考场和物场分布分别为

$$\mathbf{U}_r(x, y)=A\exp(-j\,2\pi\alpha y),$$
$$\mathbf{U}_0(x, y)=a(x, y)\exp[-j\phi(x, y)]. \tag{8-59}$$

总曝光量因此可写为

$$E(x, y)=|\mathbf{U}_r(x, y)+\mathbf{U}_0(x, y)|^2T=$$
$$=A^2T+a^2(x, y)T+2Aa(x, y)T\cos[2\pi\alpha y-\phi(x, y)], \tag{8-60}$$

其中 T 是曝光时间．我们可以把这个曝光分布看成是由两项构成：由参考光束所引起的比较均匀的一项曝光量 $E_r=A^2T$，加上围绕 E_r 变化的一项 $E_1(x, y)$，这里

$$E_1(x, y)=a^2(x, y)T+2Aa(x, y)T\cos[2\pi\alpha y-$$
$$-\phi(x, y)]. \tag{8-61}$$

显影后底片的振幅透射率 $t(x, y)$ 也可以表示为两项之和，一项是由参考光引入的恒定的“偏置”透射率 t_b，另一项则

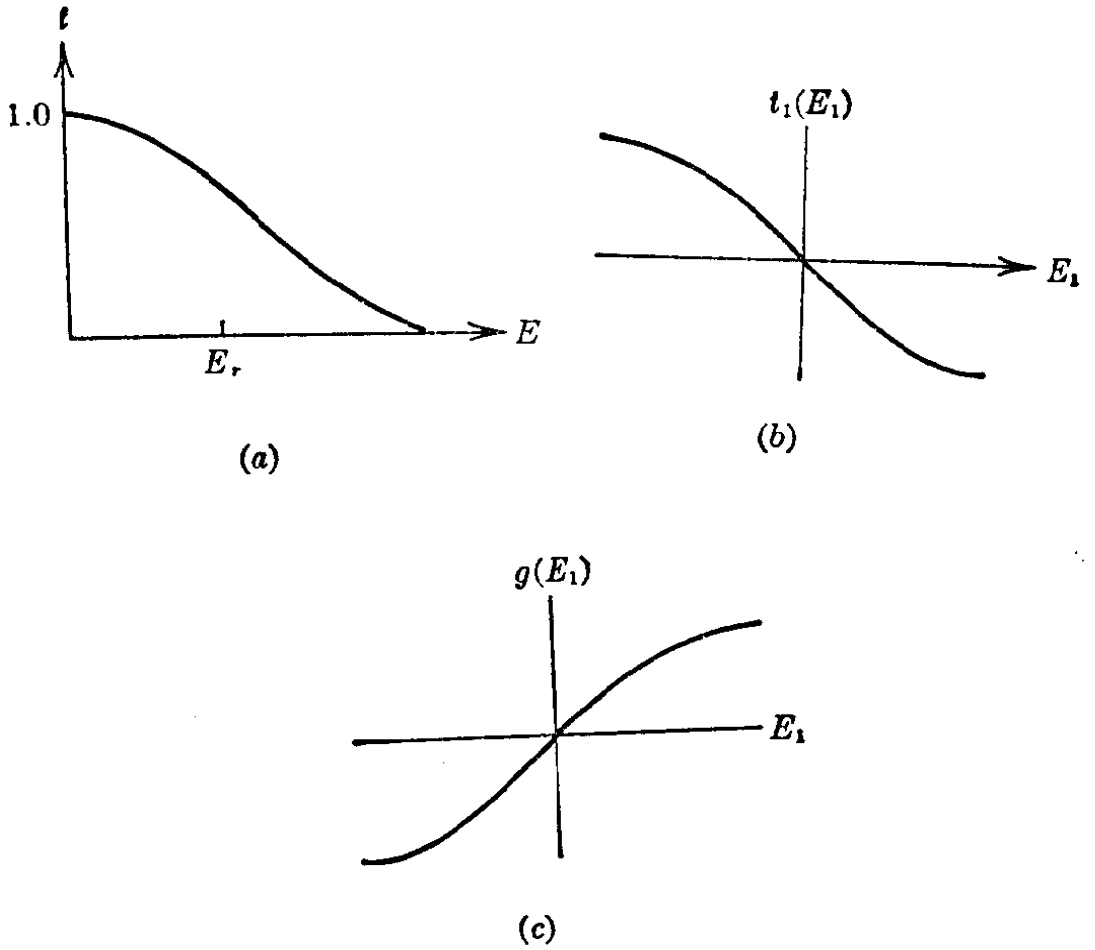


图 8-20　底片的非线性性质　(a) t-E 曲线；(b) t_1 对 E_1 的依赖关系；(c) 函数 $g(E_1)$

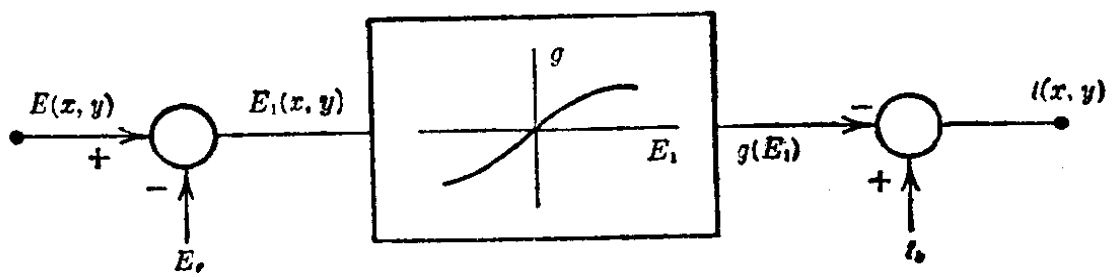


图 8-21　Kozma 模型

是透射率的变化 $t_1(x, y)$。于是

$$t(x, y) = t_b + t_1(x, y). \tag{8-62}$$

正是 t_1 对 E_1 的函数关系[即函数 $t_1(E_1)$] 决定过程的线性性

质．为了以后的方便，我们最好用 $g(E_1)$ 来表示这个函数关系，这里

$$g(E_1)=-t_1(E_1). \tag{8-63}$$

图 8-20 画出了典型的 t 对 E、t_1 对 E_1 以及 g 对 E_1 的函数关系．

Kozma 模型详见图 8-21．由 $E(x,y)$中减去恒定曝光量 E_r，然后把余项 $E_1(x,y)$作用到特性曲线为 $g(E_1)$的非线性元件上．再从一项恒定的透射率减去这个元件的输出，而得到总的振幅透射率 $t(x,y)$．剩下的工作当然就是求出非线性变换 $g(E_1)$对底片透射的光场的影响．

变换式分析法

分析 Kozma 模型的一种可能的方法是通讯理论中的所谓变换式方法[8-20,8-21]．这个方法的基础是纯数学的技巧．令非线性特性曲线 $g(E_1)$的傅里叶变换式定义为

$$\mathbf{G}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}g(E_1)\exp(-j\,2\pi fE_1)\,dE_1. \tag{8-64}$$

这个变换式没有实际的物理意义，因为它不是通常所称的时间函数或空间函数的一个“谱”．然而，当 $g(E_1)$ 通过其变换式 $\mathbf{G}(f)$来表示时，它的用处便很明显了：

$$g(E_1)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{G}(f)\exp(j\,2\pi fE_1)\,df$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{G}(f)\exp[j\,2\pi fa^2(x,y)T]\cdot$$

$$\cdot\exp\{j\,4\pi fAa(x,y)T\cos[2\pi\alpha y-\phi(x,y)]\}df.$$

第二项指数因子可用 Jacobi-Anger 公式[8-22]展开：

$$\exp(j\gamma\cos\theta)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\epsilon_\nu j^\nu J_\nu(\gamma)\cos\nu\theta, \qquad (8\text{-}65)$$

其中 ϵ_ν 是 Neumann 因子

$$\epsilon_\nu=\begin{cases}1 & \nu=0\\ 2 & \nu>0,\end{cases} \qquad (8\text{-}66)$$

J_ν 是一个 ν 阶的第一类贝塞尔函数. 因此

$$g(E_1)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\epsilon_\nu j^\nu\Big[\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{G}(f)\exp(j\,2\pi fa^2T)\cdot$$

$$\cdot J_\nu(4\pi TAaf)\,df\Big]\cos(2\pi\nu\alpha y-\nu\phi).$$

最后

$$t(x,y)=t_b-\sum_{\nu=0}^{\infty}H_\nu(a(x,y))\cos[2\pi\nu\alpha y-\nu\phi(x,y)], \qquad (8\text{-}67)$$

其中

$$H_\nu(a(x,y))=\epsilon_\nu j^\nu\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{G}(f)\exp(j2\pi fa^2T)\cdot$$

$$\cdot J_\nu(4\pi TAaf)\,df. \qquad (8\text{-}68)$$

所得结果(8-67)的具体形式是很说明问题的. 相应于 $\nu=1$ 的一项就是产生通常的实像和虚像的那项分量. 此项分量的位相调制 $\phi(x,y)$ 与入射的曝光分布的位相调制相同, 因此位相调制不受非线性的影响. 但是振幅调制则根据非线性函数 $H_1(a(x,y))$ 而发生畸变, 对于任何具体的非线性 $g(E_1)$, $H_1(a(x,y))$ 在原则上都是可以算出的.

此外, 还产生了空间载频 α 的各次谐波. 第 ν 次谐波的载频是 $\nu\alpha$, 它意味着由这些谐波所产生的波动分量的传播方

向与未衍射光成更陡的角度。第 ν 次谐波的位相调制只简单地是入射位相调制的 ν 倍，而振幅调制则是入射振幅调制 $a(x, y)$ 的非线性函数 $H_\nu(a(x, y))$。可以认为这些谐波形成了原来物体的"高次像"，由于透明底片所产生的各个对应波分量的不适当的振幅和位相分布，这些像一般有很大的畸变。

虽然我们求出了非线性透明片的透射率的一般形式，但还有另外两个问题未涉及到：(1)对某个关于胶片的非线性性质 $g(E_1)$ 的合理的模型来计算函数 $H_\nu(a)$；(2)决定这些畸变对于像本身的影响，而不只是对透射波分量的影响。我们在这里不准备详细讨论这些问题。但是在下一段讨论"硬限幅"底片时要研究这两个问题的特殊情况。此外，读者可以参看 Kozma 的工作[8-19]，此文中用所谓误差函数限幅器模型来决定函数 H_ν。

直接分析法：硬限幅器

虽然变换式分析法由于它的普遍性而吸引人，但在有些情况下，一种更直接的方法可以比较容易地得出简单的结果。在这里我们将对硬限幅底片的情况来讨论这种直接方法的一个例子。所谓硬限幅底片，就是其振幅透射率与曝光量的关系曲线如图 8-22 所示的底片。对于低于某一阈值 E_0 的一切曝光量，振幅透射率都保持为 1，而对于高于 E_0 的所有曝光量，振幅透射率下降为 0。这样一个模型充其量也只是反差度极高的底片的一个粗略近似。在对一张全息图进行扫描、模拟-数字转换并且用电子技术量子化为两个电平时，对于这时所遇到的非线性特性，硬限幅底片也许是一个较好的近似。

为分析这个模型，我们作两个主要假设。第一，我们假设

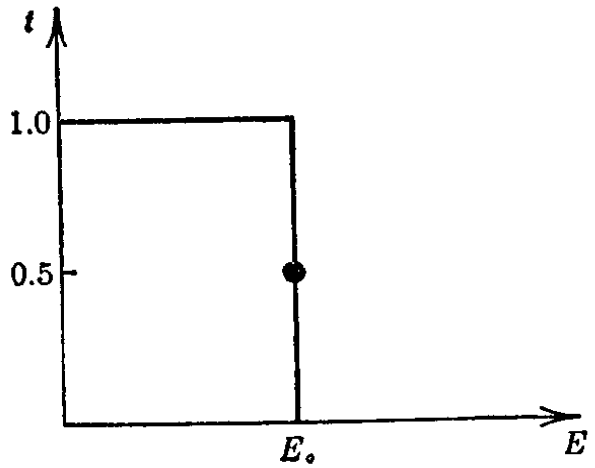


图 8-22　对一种理想的硬限幅底片的振幅透射率-曝光量曲线

方程(8-60)中的"载波频率"α 远远大于 $a(x, y)$和 $\phi(x, y)$的空间带宽. 如果情况是这样,那么在比 $a(x, y)$ 和 $\phi(x, y)$的带宽倒数小的任何区域里,曝光量可以看作是下面两项的和,即近似为常数的偏置曝光量 $E_r + a^2T$ 加上空间频率为 α 的正弦型条纹,正弦型条纹的振幅 $2AaT$ 和位相 ϕ 近似为常数. 其次我们假设,选择参考光束的曝光量 E_r 刚好等于阈值曝光量 E_0. 于是由曝光量变化到透射率变化的变换可用下式描述:

$$t=\begin{cases}1 & \text{当 } a^2T+2AaT\cos(2\pi\alpha y-\phi)<0\\ \frac{1}{2} & \text{当 } a^2T+2AaT\cos(2\pi\alpha y-\phi)=0\\ 0 & \text{在其他地方.}\end{cases}$$

图 8-23 显示了底片的非线性作用,并且定义了几个重要的量. 我们用 $L=\alpha^{-1}$ 表示周期性透射率函数 $t(y)$ 的周期,用 l 表示振幅透射率为 1 的脉冲的宽度. 脉冲中心离 y 轴原点的位移是 $\phi L/2\pi$. 可以看到入射的条纹图样的振幅调制 $a(x, y)$并不因限幅作用而完全丧失,因为它影响到透射率脉冲的宽度 l. 因此振幅信息通过透射率的脉冲宽度调制保留了下来,当然是以一种经过畸变的形式保留下来. 相仿地,位

相调制 $\phi(x, y)$ 影响到透射率脉冲相对于空间原点的位置。因此位相信息以脉冲位置调制的形式保存下来。

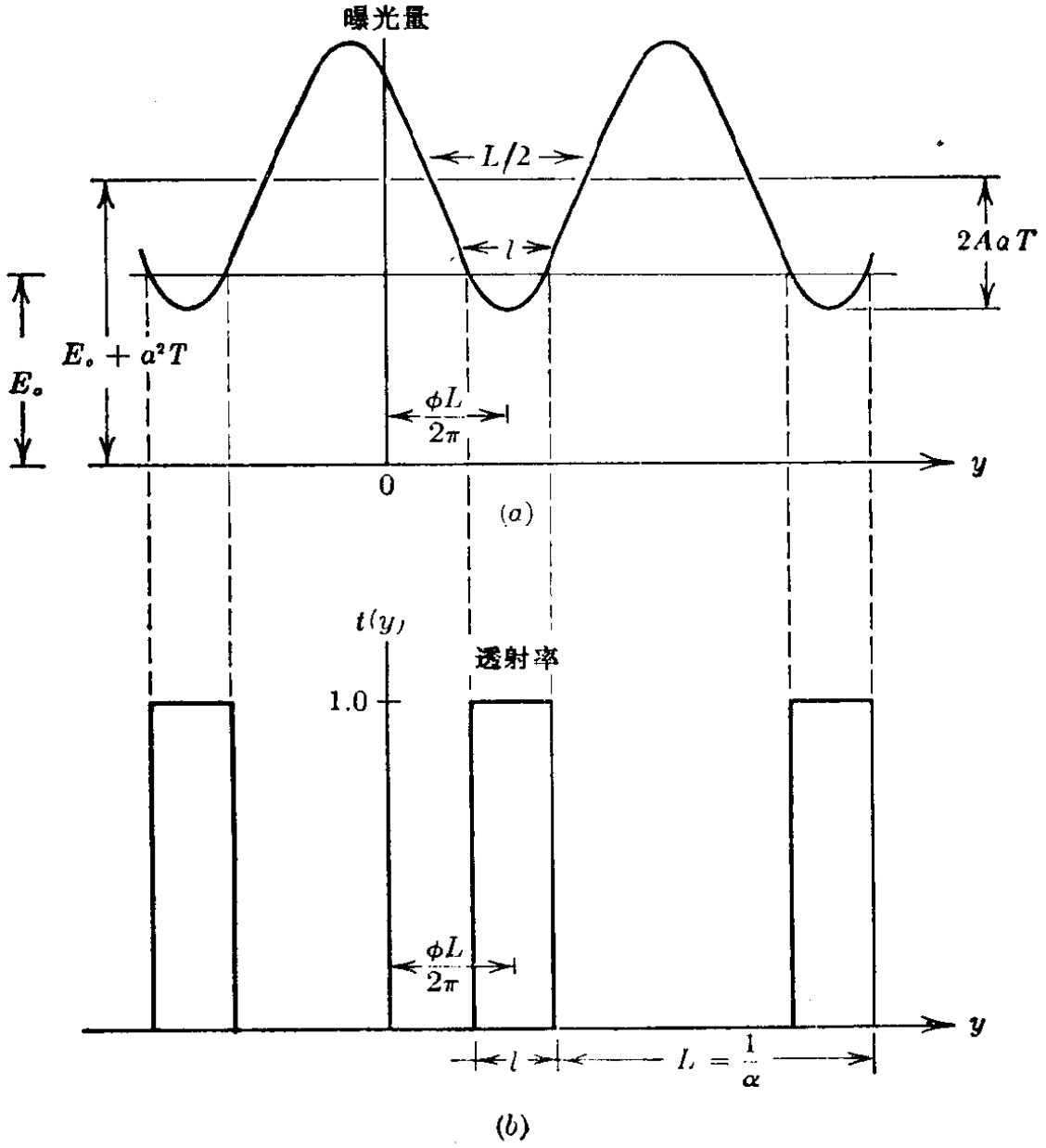


图 8-23 (*a*)曝光量的变化到(*b*)透射率的变化的非线性变换

在确定非线性性质对全息图所透射的各个波动分量的影响之前，我们首先来确定脉冲宽度 l 和入射物波的振幅 a 之间的精确关系。这个关系可由图 8-24 求出。首先看到在图(*a*)部分上所定义的相角 θ 由下式给出：

$$\theta=\frac{2\pi}{L}\frac{l}{2} \tag{8-69}$$

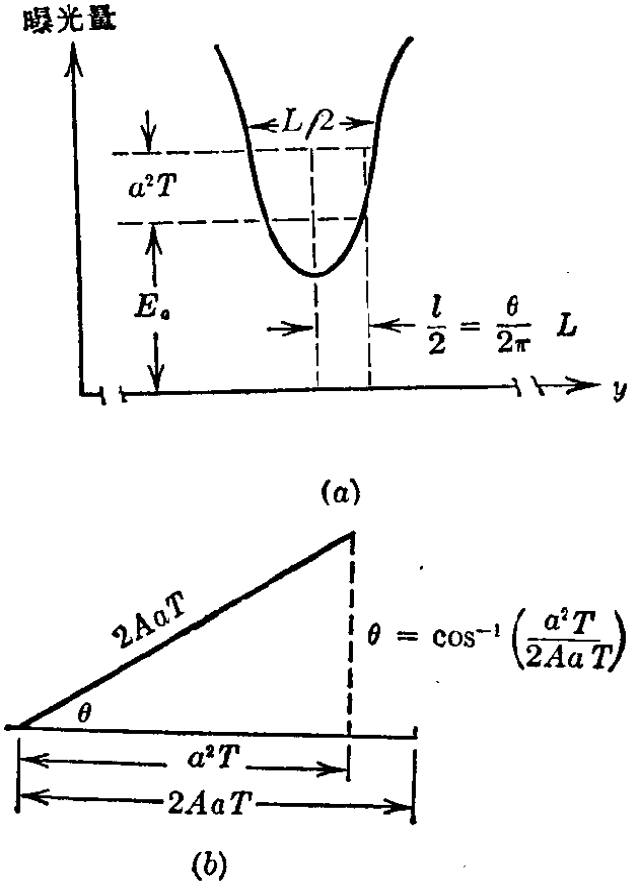


图 8-24 脉冲宽度 l 的确定

此外，由图(b)部份的相幅矢量图，得出 θ 为

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{a^2T}{2AaT}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{a}{2A}\right). \tag{8-70}$$

由上两式得

$$l=\frac{L}{\pi}\cos^{-1}\left(\frac{a}{2A}\right). \tag{8-71}$$

这个结果表明了由振幅调制 $a(x,y)$ 到脉冲宽度调制 $l(x,y)$ 的转换的非线性特性。

为了确定全息图所透射的各个波动分量的振幅和位相调制，我们采用一种“窄带”方法。先假设透射率 $t(x,y)$ 是 y 方

向的理想周期函数而与 x 无关，对 $\mathbf{t}(x, y)$ 进行傅里叶分析，然后让解中的函数 a 和 ϕ 缓慢变化。如果满足我们上述第一个假设，那么这个方法就是一个准确的方法。这时，周期函数 $\mathbf{t}(x, y)=\mathbf{t}(y)$ 展为傅里叶级数

$$\mathbf{t}(y)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\mathbf{C}_\nu\exp\left(j\frac{2\pi\nu y}{L}\right), \tag{8-72}$$

其中

$$\mathbf{C}_\nu=\frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2}\mathbf{t}(y)\exp\left(-j\frac{2\pi\nu y}{L}\right)dy \tag{8-73}$$

作变量替换 $y'=y-(\phi L/2\pi)$，透射率脉冲的中心就移到 y' 坐标系的原点上来，得

$$\mathbf{C}_\nu=\frac{\exp(-j\nu\phi)}{L}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\exp\left(j\frac{2\pi\nu y'}{L}\right)dy'. \tag{8-74}$$

算出此积分，得到

$$\mathbf{C}_\nu=\begin{cases}\dfrac{l}{L} & \nu=0\\[2ex] \dfrac{1}{\pi\nu}\sin\left(\pi\nu\dfrac{l}{L}\right)\exp(-j\nu\phi) & \nu\neq 0.\end{cases} \tag{8-75}$$

把这个结果代入方程(8-71)和(8-72)，我们就求得[1]

$$\mathbf{t}(x, y)=\frac{1}{\pi}\cos^{-1}\left(\frac{a}{2A}\right)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2}{\pi\nu}\sin\left[\nu\cos^{-1}\left(\frac{a}{2A}\right)\right]\cdot$$

$$\cdot\cos(2\pi\nu\alpha y-\nu\phi). \tag{8-76}$$

1) 这个结果的简单性以及得出这个结果的直接方法，最初是由作者的学生 Gordon Knight 向作者指出的。

现在我们把其中的 a 和 ϕ 理解为(x, y)的变化缓慢的函数. 如果把这个结果和前面由变换式方法推出的(8-67)式加以比较，显然，对于硬限幅器，函数 H_ν 由下式给出：

$$H_\nu(a)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\pi}\cos^{-1}\left(\dfrac{a}{2A}\right) & \nu=0\\ -\dfrac{2}{\pi\nu}\sin\left[\nu\cos^{-1}\left(\dfrac{a}{2A}\right)\right] & \nu>0.\end{cases} \tag{8-77}$$

最重要的傅里叶分量是产生一级像的分量，也就是 $\nu=1$ 的分量. 注意

$$\sin\left[\cos^{-1}\left(\frac{a}{2A}\right)\right]=\sqrt{1-\left(\frac{a}{2A}\right)^2}\ , \tag{8-78}$$

容易看出透射率的相应分量为

$$\mathbf{t}_1(x, y)=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-\left[\frac{a(x, y)}{2A}\right]^2}\cos[2\pi\alpha y-\phi(x, y)]. \tag{8-79}$$

因此载波的振幅调制以图 8-25 a 所示的方式发生畸变，而位相调制则保持不畸变. 我们看到，当 $a\ll 2A$ 时，全部振幅调制都解除，底片的性能完全类似于通讯理论中的带通限幅器(见[8-20]第 288 页). 但是当 a 的大小与 $2A$ 可以比较时，物光束所产生的变动的偏置 a^2T 将导至 $\mathbf{t}_1$ 的振幅调制发生畸变.

最后，我们考虑产生二级像的透射分量

$$\mathbf{t}_2(x, y)=\frac{1}{\pi}\sin\left[2\cos^{-1}\left(\frac{a}{2A}\right)\right]\cos[2\pi(2\alpha)y-2\phi]. \tag{8-80}$$

应用关系

$$\sin\left[2\cos^{-1}\frac{a}{2A}\right]=2\sin\left[\cos^{-1}\left(\frac{a}{2A}\right)\right]\cos\left[\cos^{-1}\left(\frac{a}{2A}\right)\right]=$$

$$=\frac{a}{A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{2A}\right)^2}, \qquad (8\text{-}81)$$

我们得到

$$\mathbf{t}_2(x,y)=\frac{1}{\pi}\ \frac{a}{A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{2A}\right)^2}\cos[2\pi(2\alpha)y-2\phi]. \qquad (8\text{-}82)$$

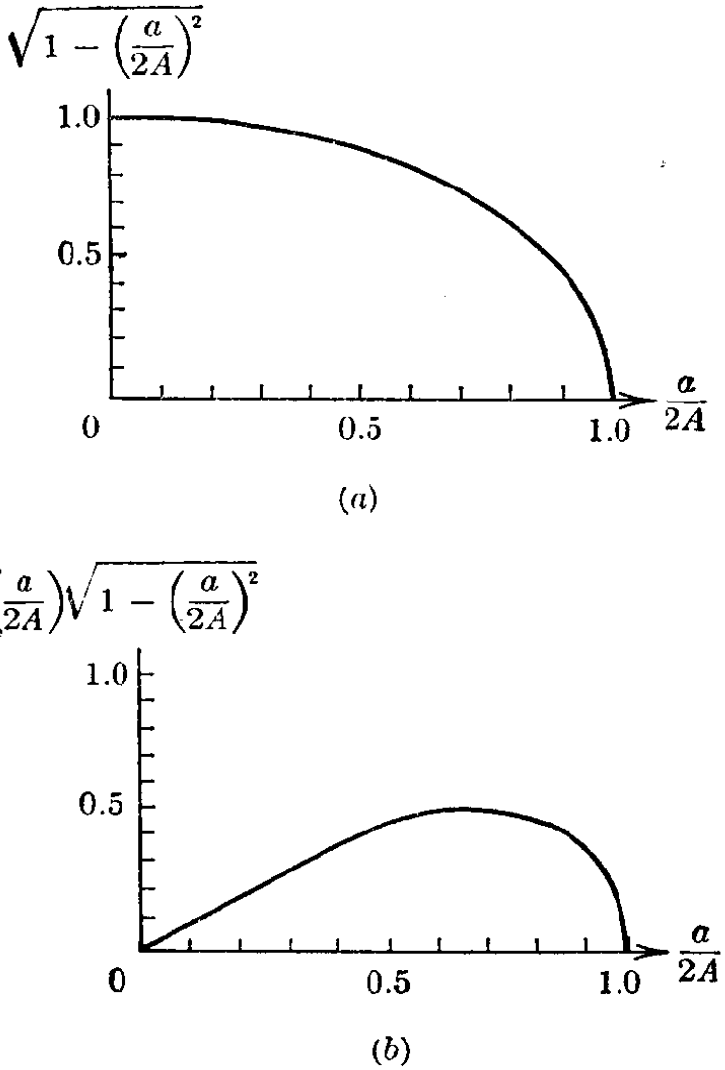


图 8-25　振幅调制的畸变　(a) 一级分量；(b) 二级分量

这个波分量的振幅调制的畸变示于图 8-25 b.注意，在 $a/2A$ 之值小时，振幅调制不发生畸变！但是，位相调制却是它应取之值的两倍，因此可以预期，二级像会发生畸变．请读者参看习题 8-7，其中说明了一个能够在 $a \ll 2A$ 时恢复正确的振幅调制和正确的位相调制的方法．

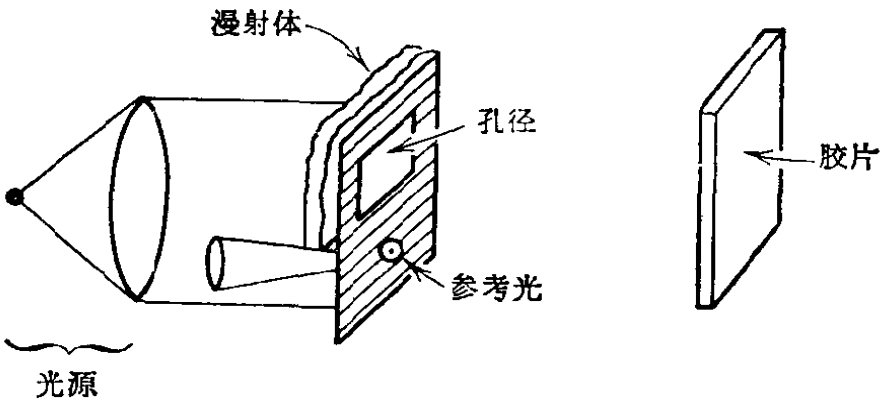
非线性对重现像的影响

确定非线性对重现像本身的影响，一般说来是一个困难问题，我们不打算在这里详细讨论．但是，可以提出几个简单的结果．

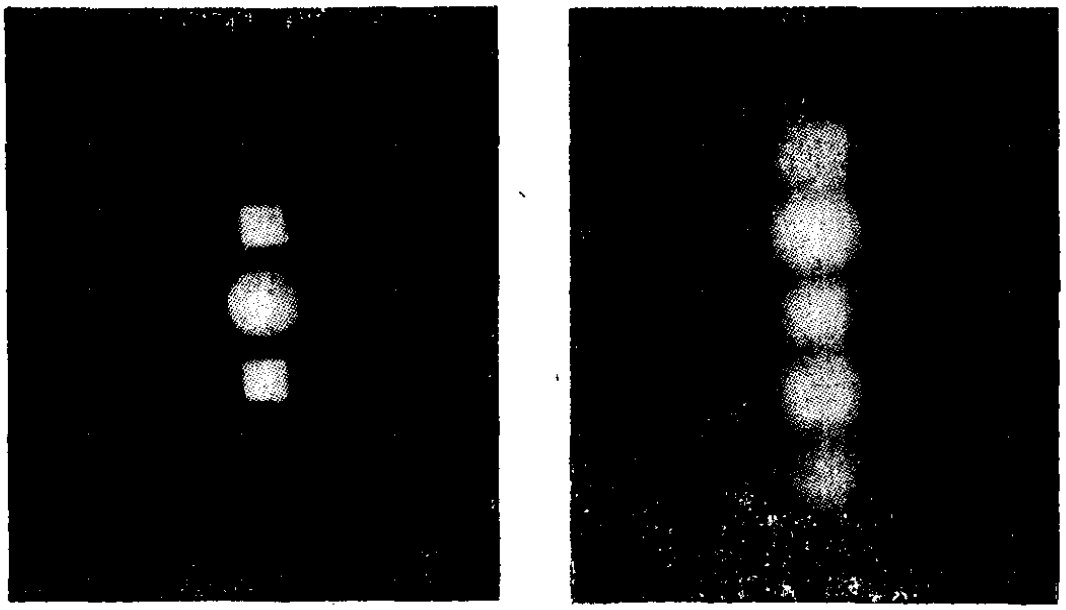
首先，对于曝光结果为 $a \ll 2A$ 的硬限幅底片，可以用通讯理论中的带通限幅器的许多熟知特性[8-23]来预言对一级像的影响．Friesem 和 Zelenka[8-24]探索过这种方法，他们既从理论上也从实验上证明了几个重要效应．若物体由两个点光源组成，一个的振幅比另一个大，这时曾预言了并观察到了小信号抑制效应，即较弱的点光源的像的振幅相对于较强的点光源的像的振幅要受到抑制．此外，由于交互调制效应 (intermodulation effect)，通过两个点光源的相互作用可能产生出虚假的像，产生出物体上实际并没有的点光源的表观像。

也有人研究过当物体是漫射照明时底片的非线性的影响[8-25,8-26]．这时最好是把曝光作为随机过程来处理，所用的分析方法已超出本书范围之外．读者要了解细节可参看上述文献．

最后我们请读者看几张照片，它们说明了实际中遇到的像的品质退化的本性．图 8-26 a 是用来记录这里所选的几幅全息图的光路草图．物体简单地是不透明屏上的一个方孔，通过一个漫射体从后面对它照明．参考光束从与物体在



(a)



(b) (c)

图 8-26 底片的非线性对重现像的影响 (a) 记录用的光路；(b) $t_b=0.5$ 时所得到的像； (c) $t_b=0.24$ 时所得到的像

同一平面上的一点发出；因此，所用的是无透镜傅里叶变换的光路. 全息图记录在 Kodak 649 F 型光谱底版上. 在记录平面上参考光强和物光强之间始终保持 1.4 比 1. 在图 8-26 *b* 中所看到的是，选取平均曝光量使偏置振幅透射率为 0.5 时所得到的两个一级像 (以及零级像). 这一偏置点提供了 t-E 曲线上的最大线性动态范围，因而非线性效应可以忽略不计. 图 8-26 *c* 则示出了增加曝光时间使偏置透射率为 0.24 时所

得到的像，其它因素（包括参考光强与物光强之比）保持不变．此时 t-E 曲线被逼到一个高度非线性的区段上，其结果是非常明显的．首先，容易观察到二级像的出现．更重要的是，一级像现在变成为物体的一个清楚的像叠加在一个宽阔的辉光背景上．这个背景是由底片的非线性产生的互调失真直接引起的[8-26]。

§ 8-7 乳胶厚度的影响

在以前的讨论中都假设照相乳胶的厚度可以忽略，并且全息图的记录完全是一种“二维”现象．但事实上，乳胶总是有一定的厚度，研究这一厚度可能对成像过程的影响是很重要的。

作为一个典型例子，全息照相中广泛应用的 Kodak 649 F 型光谱底版的典型乳胶厚度约为 16 μ（1μ=10^{-6}米）．乍一看来这个尺寸似乎完全可以忽略；但是应当记住，投射到乳胶面上的条纹，其周期常常可以和一个光波波长相比较，如常用的 He-Ne 激光器的红光波长约为 0.6 μ．因此乳胶厚度有时可能超过 20 个条纹周期．在这种情况下肯定必需考虑记录过程的这种“三维”特性。

我们对这个题目的讨论将完全参照 Collier 的工作[8-10]，读者要更详细了解可参看原文。

基元全息图

首先我们考虑一个很简单的情形：一束平面参考波和一束平面物体波入射到厚度不能忽略的一片乳胶上．可以认为这两束平面波产生了一张基元全息图。

参看图 8-27，为了简单，假设两束波的法线（用箭头表示）各与乳胶表面法线成$\frac{\theta}{2}$角，它们之间的总角度是 θ．波前

或相继的零位相线用虚线表示；任何一个波的相邻波前之间的垂直间距等于一个光波波长。沿着乳胶层内两个波的波前的交线(在这张平面图里为交点)，两个波的振幅同相相加，得到大曝光量。随着时间的推移，各波前沿着它们各自的法线方向移动，而得到相长干涉的线也在乳胶内移动，其轨迹是一

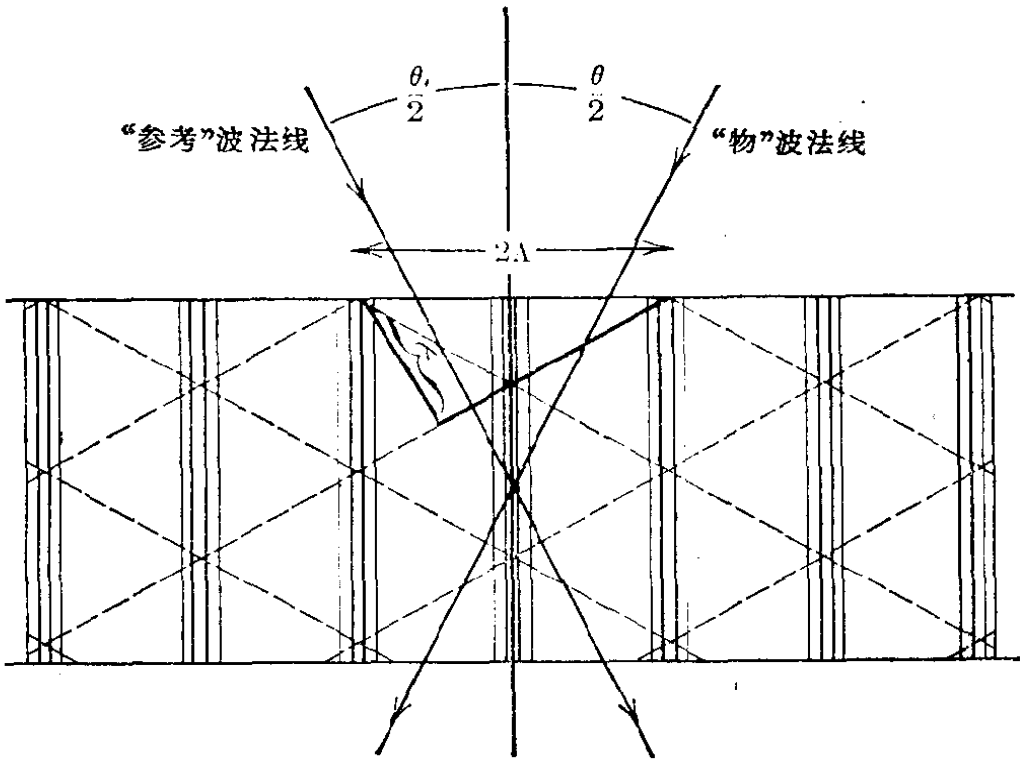


图 8-27　用厚乳胶记录一张基元全息图

些强曝光的平面。简单的几何论证表明，这些平面是两个波束法线之间的夹角 θ 的二等分面，并且在乳胶层内周期地出现。

若把这块照相底版显影，则银原子将沿着这些强曝光量的平面形成叠层。借助于图 8-27 中画加重线的三角形，很容易证明银层的间距 Λ 满足

$$2\Lambda\sin\frac{\theta}{2}=\lambda. \tag{8-83}$$

布喇格条件

假设我们用一平面波重现光束来照射基元全息图，以试图重现原来的平面物波．很自然提出了一个问题，就是应当用多大的照射角才能得到强度最大的重现的物体波．为了回答这个问题，我们可以把每一银层看作一面部份反射镜，它按照通常的反射定律，使部份入射平面波反射回去．若平面波照明是以角度 ψ 投射到银层结构上，如图 8-28 所示，那么反射的平面波将按图中所示方向传播．但是，如果各个被反射的平面波要能同相相加，则相邻的银层所反射的波所经的光程必须刚好差一个光波波长[1]；参看上图，由简单的几何论证可知，只有当入射角 ψ 满足所谓布喇格条件

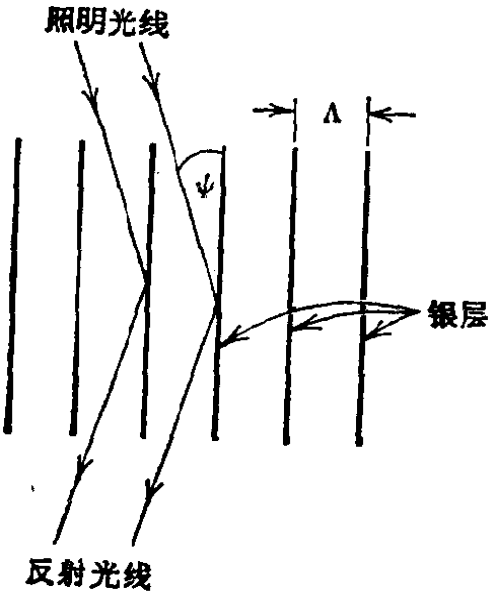


图 8-28　重现光路

$$\sin\psi=\pm\frac{\lambda}{2\Lambda} \tag{8-84}$$

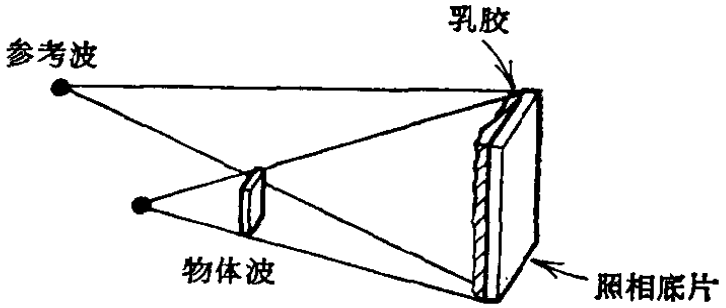
时，才能达到上述要求．比较方程 (8-83) 及 (8-84) 可知，要得到最大强度，只有

$$\psi=\begin{cases}\pm\theta/2 & \text{或}\\ \pm(\pi-\theta/2).\end{cases} \tag{8-85}$$

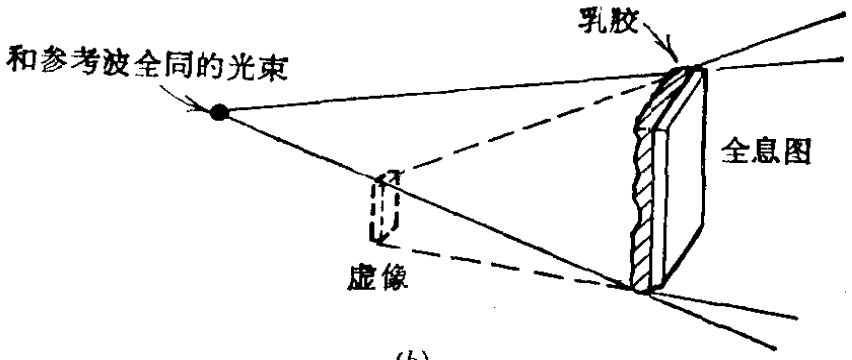
这是一个很重要的结果，因为它表明，要得到原来的物体波的最亮的重现，就应该用和原来的参考波同样的波 ($\psi=+\theta/2$)

1）光程差为任意整数个波长时将得到相长干涉．这里我们只考虑对应于一个波长的光程差的一级条件．

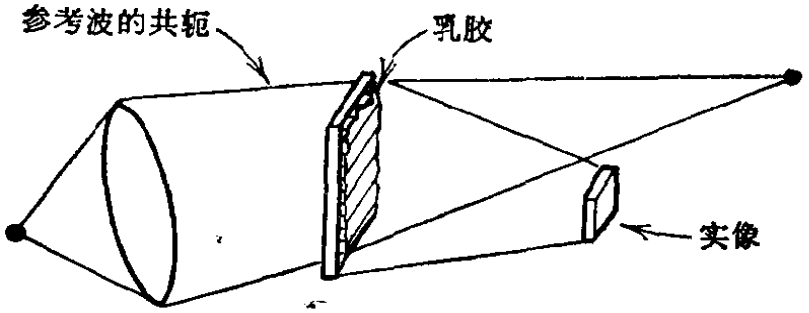
来照射全息图．这个重现波形成物体的一个虚像．我们也看到，若用原来的物体波来照射全息图，就会重现出参考波($\psi=-\theta/2$)．此外，与原来波传播方向相反的波也满足布喇格条件．如果用一束沿参考波反向传播的波[$\psi=-(\pi-\theta/2)$]



(a)



(b)



(c)

(a) 全息图的记录；(b) 得到虚像；(c) 得到实像

图 8-29　从"厚"全息图得到实像和虚像

照射全息图，那么将重现出传播方向和原入射的物体波方向相反的物平面波．这种“共轭”物体波将产生原来物体的一个实像．同理，用物体波的共轭波（$\psi=\pi-\theta/2$）照射全息图可得到参考波的一个实像．

上面全部讨论的要点就是，当乳胶为“厚”乳胶时，只有恰当地照射全息图才能获得最亮的实像或虚像．为了获得虚像，应当用和参考波全同的光束来照射全息图．为了获得实像，应当用参考波的共轭（从相反的一面）来照射全息图．对于参考波为发散球面波的简单情况，这些结果表示在图 8-29 中．

最后应当认识到，任何一种给定的乳胶，都是既可以作为平面衍射光栅（这是薄乳胶的典型特性），也可以作为银层的三维集合（这是厚乳胶的典型特性）．至于到底是以平面效应还是以体积效应为主，这个问题取决于乳胶的厚度以及使乳胶曝光的各个平面波的角频谱．作为一条普遍的经验规则，若乳胶的厚度 L 比银层的最短周期 Λ 小得多，则可视为薄乳胶；同样，若 $L\gg\Lambda$，则可视为厚乳胶．当然，存在着一个虽有布喇格效应但却不明显的中间范围．

§ 8-8 几种推广

下面简单地讨论我们前面分析的一些推广，有兴趣的读者要了解某个题目的更完整的讨论，应当参看所引的文献．

运动物体的全息照相[8-27]

我们以前的分析全都假设参考场和物场分布不随时间而变，至少在曝光期间是如此．但有些情况下物体可能随时间而运动，结果在曝光期间干涉图样变了．现在我们把理论推广到包括物体运动的效应．

我们假设参考光源是单色的，因此入射到底片上的参考

场用复数表示式可写为

$$\mathbf{U}_r(x, y; t) = \mathbf{A}(x, y)\exp(-j\,2\pi\nu_0 t). \tag{8-86}$$

我们允许物体场随时间变化，采用复数表示式：

$$\mathbf{U}_0(x, y; t) = \mathbf{a}(x, y; t)\exp(-j\,2\pi\nu_0 t), \tag{8-87}$$

因此总曝光量是

$$E(x, y) = E_r(x, y) + E_0(x, y) + \mathbf{A}(x, y) \cdot \int_{-T/2}^{T/2} \mathbf{a}^*(x, y; t)\,dt +$$

$$+ \mathbf{A}^*(x, y \int_{-\frac{\pi}{2}}^{T/2} \mathbf{a}(x, y; t)\,dt, \tag{8-88}$$

其中 E_r 和 E_0 只是由参考光束和物光束产生的曝光量，T 是曝光时间.

我们只限于注意最后形成虚像的那一曝光量分量，写出

$$\mathbf{E}'(x, y) = \mathbf{A}^*(x, y) \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathbf{a}(x, y; t)\,dt, \tag{8-89}$$

这个方程已包含了预言物体运动对像的影响所必需的全部信息. 然而，在许多情况下，把这个结果写成等效的频域表示式要更方便些. 特别是，我们可以写出（用表 2-1）

$$\mathbf{E}'(x, y) = \mathbf{A}^*(x, y) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\mathbf{a}(x, y; t)\,dt =$$

$$= \mathbf{A}^*(x, y)T \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(T\nu)\mathbf{G}_a(x, y; \nu)\,d\nu, \tag{8-90}$$

其中 $\mathbf{G}_a(x, y; \nu)$ 由下式定义：

$$\mathbf{G}_a(x, y; \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{a}(x, y; t) \exp(-j2\pi\nu t)\, dt, \qquad (8\text{-}91)$$

在写出最后的等式时，用了广义的 Parseval 定理。

从方程(8-90)明显看出，时间长短为 T 秒的一次均匀时间曝光的效果完全等效于作用在 $a(x, y, t)$ 上的一次线性滤波操作，其(时间)传递函数为

$$\mathbf{H}(\nu) = \mathrm{sinc}(T\nu). \qquad (8\text{-}92)$$

这个结果的解释如下：若从给定的一物点射到底片上的辐射(在整个底片上都一律)和参考波相差 ν 周/秒；那么对应的像点的强度将受到抑制，抑制因子为 $\mathrm{sinc}^2(T\nu)$。

这个结果在§8-9 中我们讨论振动分析时将要用到。其他方面的应用读者可参看原始文献[8-27]。

空间非相干光的全息术

全息照相原来被想象为是一种相干成像方法，但是现在已经有一些技术，能够记录非相干光照明的物体的全息图。把全息技术推广到非相干光情况首先是由 Mertz 和 Young[8-29] 提出的。非相干光全息照相的理论和实践随后由 Lohmann [8-30]，Stroke 和 Restrick [8-31]及 Cochran [8-32] 加以发展。

从非相干照明的物体上任一点发出的光，当然不会与从物体上任何别的一点发出的光发生干涉。然而，如果用某种适当的光学办法使得每一物体点发出的光分成为两部份，那么就有可能使这样同源的各对波束发生干涉而形成干涉条纹图样。于是，可以对物体上每一点编码使之对应于适当的一组条纹，而如果这种编码是唯一的，即物体上不同两点不会产生出相同的条纹图样的话，在原则上就可以得出物体的一个像。

虽然已经知道了好几种光学系统可以实现上面所要求的物光束的分割[8-30,8-31]，我们这里只用 Cochran 所提出的一个具体系统[8-32]来举例说明.此系统如图 8-30 所示，由一个三角形干涉仪构成，其中安置有焦距分别为 f_1 及 f_2 的两个透镜 L_1 及 L_2。我们在这里假设两个透镜都是正的（虽然一个

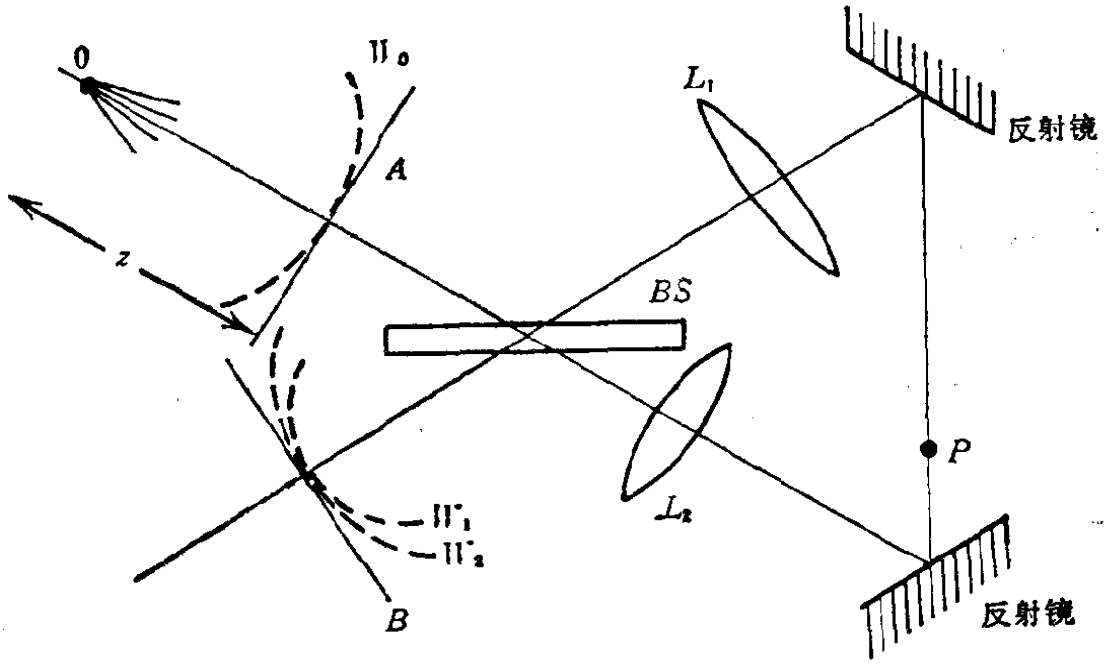


图 8-30　非相干光全息照相用的三角形干涉仪

正透镜和一个负透镜的组合也可以用）。两个透镜相隔一段光程 f_1+f_2，它们的焦点在图中的 P 点重合。平面 A 离透镜 L_1 的光程为 f_1，平面 B 离透镜 L_2 的光程为 f_2。

光从平面 A 传播到平面 B 可以沿两条路径，一条沿顺时针方向绕干涉仪一周，另一条则沿反时针方向绕干涉仪一周。首先考虑顺时针的那条路，光由于在分光器 BS 上发生反射而从平面 A 传播一段距离 f_1 到达透镜 L_1。从 L_1 到 L_2 的光程长 f_1+f_2，而从 L_2 到平面 B（又是通过在 BS 上的反射）的光程长 f_2.由于我们对光程长度与焦长 f_1 及 f_2 的关系作了特定的选择，平面 A 将成像到平面 B 上；由于在这段光程中

遇到 L_1 及 L_2 的具体的先后顺序，成像的放大率为 $M_1=-f_2/f_1$.

对于反时针方向那条光路，光线每次都是透射穿过分光器(而不是被分光器反射)．平面 A 再一次成像到平面 B 上，但在这条光路里遇到两个透镜的顺序与前相反，而放大率为 $M_2=-f_1/f_2$.

现考虑非相干照明物体上的一点 0 (图 8-30)，它和平面 A 之距离为 z. 以这点发出的光作为位相的参考点，我们可以把从 0 点投射到平面 A 上的球面波(图 8-30 中的波前 W_0)表示为复函数

$$\mathbf{U}_a(x,y)=\mathbf{U}_0\exp\left[j\frac{\pi}{\lambda z}(x^2+y^2)\right]. \tag{8-93}$$

在平面 B 上我们得到两个球面波(图 8-30 中的波前 W_1 和 W_2)，一个放大了 $M_1=-f_2/f_1$ 倍，另一个放大了 $M_2=-f_1/f_2$ 倍．因此总的振幅为

$$\mathbf{U}_b(x,y)=\mathbf{U}_1\exp\left\{j\frac{\pi}{\lambda z}\left[\left(\frac{x}{M_1}\right)^2+\left(\frac{y}{M_1}\right)^2\right]\right\}+$$

$$+\mathbf{U}_2\exp\left\{j\frac{\pi}{\lambda z}\left[\left(\frac{x}{M_2}\right)^2+\left(\frac{y}{M_2}\right)^2\right]\right\}, \tag{8-94}$$

对应的强度分布为

$$\mathscr{I}_b(x,y)=|\mathbf{U}_1|^2+|\mathbf{U}_2|^2+2|\mathbf{U}_1||\mathbf{U}_2|\cdot$$

$$\cdot\cos\left[\frac{\pi}{\lambda z}\left(\frac{f_1^4-f_2^4}{f_1^2f_2^2}\right)(x^2+y^2)+\psi\right], \tag{8-95}$$

其中我们用到了关系式

$$\frac{1}{M_1^2}-\frac{1}{M_2^2}=\frac{f_1^4-f_2^4}{f_1^2f_2^2}.$$

若一块照相底版被图(8-95)的强度图案曝光，然后经过处理得出一张透明正片，其振幅透射率与曝光量成线性关系，

那么所得出的透射率可写为

$$\mathbf{t}(x,y)=\mathbf{t}_b+\beta'\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2^*\exp\left\{j\left[\frac{\pi}{\lambda z}\left(\frac{f_1^4-f_2^4}{f_1^2f_2^2}\right)(x^2+y^2)\right]\right\}+$$

$$+\beta'\mathbf{U}_1^*\mathbf{U}_2\exp\left\{-j\left[\frac{\pi}{\lambda z}\left(\frac{f_1^4-f_2^4}{f_1^2f_2^2}\right)(x^2+y^2)\right]\right\}. \quad (8\text{-}96)$$

我们还认出，第二项和第三项分别是负透镜和正透镜的透射率函数[见方程(5-10)]，透镜的焦距为

$$f=\frac{f_1^2f_2^2}{f_1^4-f_2^4}z. \quad (8\text{-}97)$$

因此，如果用一相干光源照射透明片，就同时形成原来的点光源的一个虚像和一个实像.

现推广到由大量互不相干的点光源组成的一个物体，每个点源在底片上形成自己的干涉条纹. 由于各个点光源不是相干的，只要把这样产生的各个强度图样相加即可求得总强度. 每个点光源的(x,y)坐标确定了相应的条纹图样的中心，从而决定了实像和虚像的(x,y)坐标. 同样，点光源的z坐标影响该点光源对透射率函数的贡献中出现的焦距[见方程(8-97)]，因此所成的像是三维像.

虽然用非相干光照明代替相干光照明的可能性在许多应用中是令人响往的，但存在一个严重的实际问题，使得非相干全息术的应用至今受到限制. 这个问题是，每个基元干涉条纹图样是由入射到底片上的总光场中的两个极其微小的部份干涉而成. 虽然在相干全息术中，来自每一物体点的光与参考光束的全部相干涉，但在非相干全息术中，发生干涉的波仅是总光场的一个很小的部份. 因此总要出现一个很大的"偏置"曝光. 由于这个偏置问题的结果，非相干光全息照相仅对由不多的分辨单元构成的物体才得到成功的应用. 非相干全

息术未来的用处在很大的程度上取决于发明简单的技术来克服这个问题.

反射式全息图

通过对相干全息照相技术作适当改进,我们能够用(近单色的)相干光来记录全息图,而用"白光"照明来得到重现像.这时重现波前是由全息图反射获得的,而不是通过全息图透射的方式.这个方法应用了照相乳胶的三维性质,并且在许多基本方面与 Lippmann 的彩色照相方法有紧密的联系[8-33].

这种全息照相方法的基本思想是苏联的丹尼苏克在1962年首先阐述的[8-34].在美国,直到1966年 Stroke 和 Labeyrie 的著作[8-35]与 Lin 等人的著作[8-36]发表后,才对这个概念给以足够的重视.利思等人对这种类型的全息照相作了一个相当全面的分析[8-37].

为了记录一张反射式全息图,我们把相干的物波束和参考波束从照相乳胶的相反的两面引入,如图 8-31 a 所示.我们先前在§8-7的讨论中曾指出,两束波的干涉将形成(在显影处理后)一张透明底片,其中含有成片的金属银层,其作用相当于一些反射平面.由于 θ 角接近 180°,因此反射平面(角θ的等分面)近似平行于乳胶表面,从方程(8-83)可知,各反射平面的间隔为

$$\Lambda \simeq \frac{\lambda}{2}. \tag{8-98}$$

为了获得原来物体的虚像,我们必须用与参考光全同的光来照明显影后的透明片.如图 8-31 b 所示,这时会再现出原来的物体波前,在我们现在这种情况下,这必然意味着像是由反射光形成的.我们还看到,对于给定的一种照明光路和观

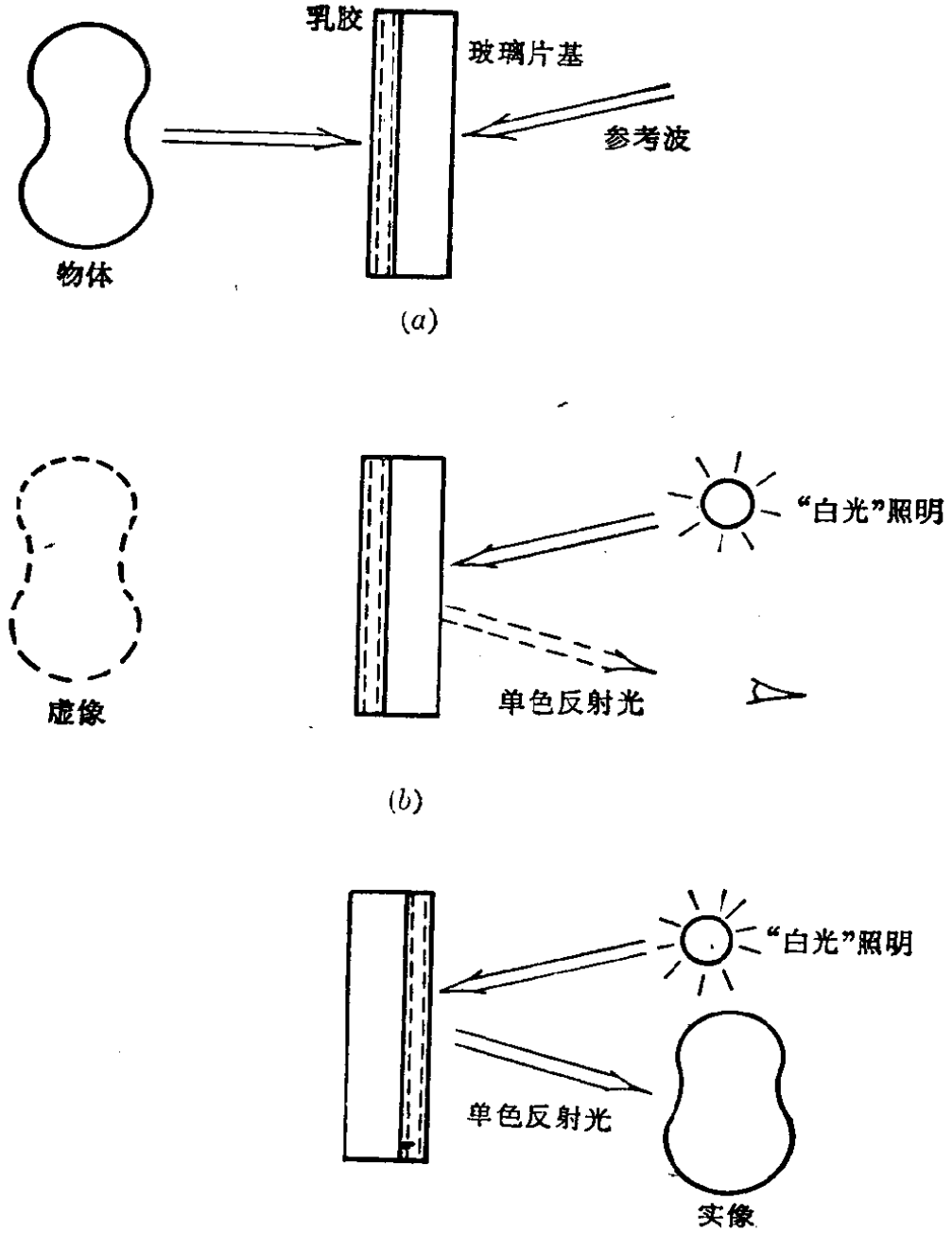


图 8-31　反射式全息照相　(*a*) 记录全息图；
(*b*) 获得虚像；　(*c*) 获得实像

察光路，只有一个重现波长满足布喇格定律. 这样，如果使用白光照明，则满足布喇格定律所要求的那一种波长的光被反射，而其余的则透过乳胶或被部分吸收.

如果要得到一个实像，则从反面来照射透明底片，而像仍然由单色反射光形成，如图 8-31 c 所示。

原则上，我们总会预期像的颜色和记录全息图所用的光的颜色大致相同。但实际上，反射光的波长却短于曝光时光的波长，原因在于在显影和定影过程中乳胶发生了皱缩，因而银层的间隔要比预期的密一些。如果要完全复制出原来的波长（如彩色全息照相中就要求这样[8-36]），那么可以采取一些步骤来防止皱缩。缩短定影过程能消除大部分皱缩，但这时显影后的底版会缓慢地损坏。最满意的解决办法也许是在定影处理后再用某些方法把乳胶重新泡胀。小心地应用这些方法可以使乳胶在广阔的光谱范围内对预定的任何波长发生反射。

§ 8-9 全息术的应用

六十年代初期对波前重现过程的改进和完善，导致了全息术的大量应用。下面我们讨论这些应用中最重要的几种。我们的注意力仅限于光学全息；读者还应该知道，在微波和射频频谱区域[8-38]以及在声学成像领域内[8-39]，波前重现过程的应用正在不断发展。

显微术

显微术作为全息术的一种可能的应用，在历史上曾推动了关于波前重现的大多数早期工作；它肯定是盖伯[8-1,8-3,8-4]以及 El-Sum[8-6]早期工作的主要推动力。

在全息术发展的现阶段，已发现它的大量新应用，以致不能再把显微术说成是和以前一样，是全息术的主要推动力了。此外，虽然曾经详细演示过全息图在显微术中的应用，但是很清楚，在通常的显微术中，这门新技术并不是普通显微镜的一个严重的竞争者。然而，的确存在有两个领域，在这两个领

域内全息术能对显微术提供独特的潜力. 第一个领域是高分辨率体积成像，这在后面一节中要更详细地讨论. 在普通的显微术中只有以有限的焦深做代价，才能获得高的横向分辨率. 全息图提供了焦深比较大的显微术的可能性，这是由于它的三维成像本领.

在显微术中第二方面的应用，是用全息图来建造一个 X 射线显微镜的可能性，要对这一应用作全面估价还为时过早. 这里基本的想法是用 X 射线照射来记录全息图而用可见光照明来重现. 由于改变波长，可以得到很大的放大率[见方程(8-46)]；而更重要的是，使用X射线作照明能够获得几个Å的分辨率(1 Å $=10^{-10}$ 米). 这样的分辨率已经可以与电子显微镜所能达到的分辨率媲美了，而使用 X 射线对于待观察样品的加热作用要比电子束所产生的加热作用为小，并且它的操作也不需要电子显微镜所必需的真空条件. 全息 X 射线显微镜最后是成功还是失败，无疑将取决于射线源和传感器工艺未来的发展.

干涉量度

全息术能够实现好几种(而不只是一种)干涉量度. 用波前重现之所以能够实现干涉量度，其基本原因在于：所成的像是相干的，具有确定的振幅和位相分布. 任何一种用全息术来得到两个相干像的叠加的方法，都将导致一种可能的干涉量度技术.

最有力的全息干涉量度技术，是基于由盖伯等人[8-40]所强调过的一个性质，即通过全息图的多次曝光，可以获得复杂波前的相干叠加. 这一性质很容易证明如下：设照相乳胶依次对 N 个不同的强度分布 $\mathscr{I}_1, \mathscr{I}_2, \cdots\cdots, \mathscr{I}_n$ 曝光. 乳胶所受的总曝光量可写为

$$E=\sum_{k=1}^{N}T_k\mathscr{I}_k, \tag{8-99}$$

其中 $T_1,T_2,\cdots\cdots,T_N$ 是 N 个单次曝光时间. 现在假设在每个单次曝光期间，入射光是由一固定的参考波 $\mathbf{A}(x,y)$ 和逐次不同的物体波 $\mathbf{a}_k(x,y)$相加而成，总的曝光量为

$$E=\sum_{k=1}^{N}T_k|\mathbf{A}|^2+\sum_{k=1}^{N}T_k|\mathbf{a}_k|^2+\sum_{k=1}^{N}T_k\mathbf{A}^*\mathbf{a}_k+\sum_{k=1}^{N}T_kA\mathbf{a}_k^*. \tag{8-100}$$

假定工作在乳胶的 t-E 曲线线性区域内，我们求出透射率的一个分量.

$$\mathbf{t}_a=\beta'\sum_{k=1}^{N}T_k\mathbf{A}^*\mathbf{a}_k \tag{8-101}$$

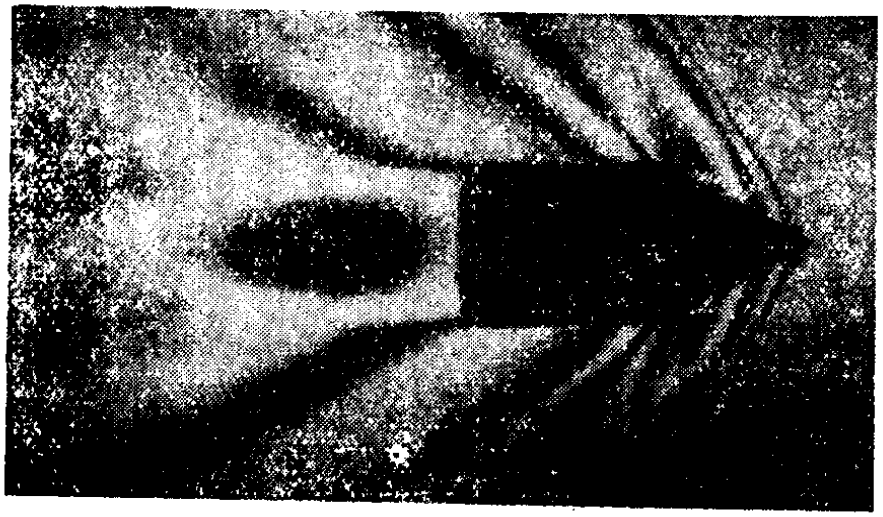
及另一个分量

$$\mathbf{t}_\beta=\beta'\sum_{k=1}^{N}T_k\mathbf{A}\mathbf{a}_k^*. \tag{8-102}$$

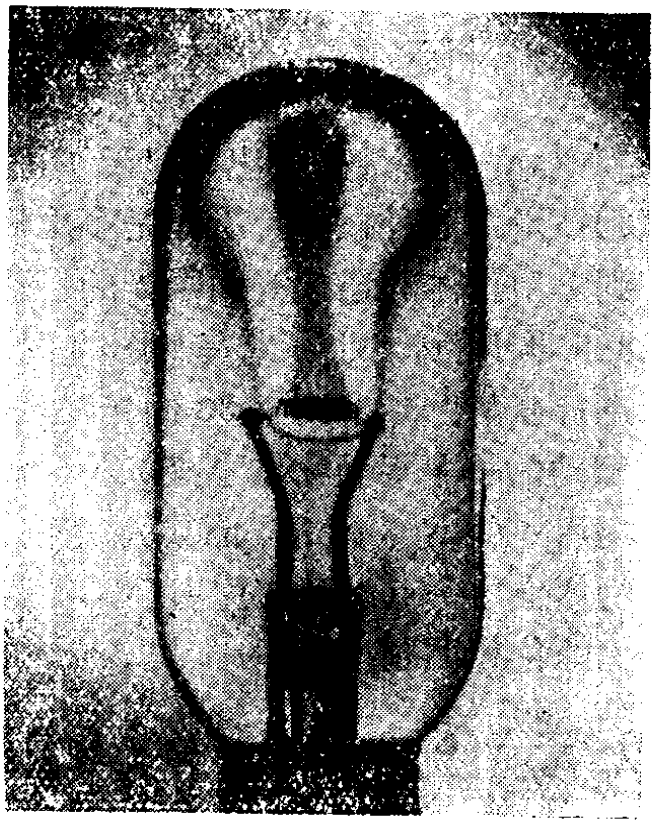
从方程(8-101)清楚看出，用波前 $\mathbf{A}$ 照射透明片，将得到一透射场分量，它正比于各个复杂波前 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots\cdots,\mathbf{a}_N$ 的加权和. 结果，产生各个 $\mathbf{a}$ 的原来那些物体的 N 个相干虚像将会线性叠加，从而相互干涉.

相仿地，由方程(8-102)，用波前 $\mathbf{A}^*$ 照射透明底片，将会产生 N 个相干实像，它们也同样将发生干涉.

Brooks 等人[8-41]采用一个 Q 开关红宝石激光器，最生动地显示了这种干涉量度技术的潜力. 图 8-32 示出了 所得到的两张照片，每张照片都是由一张用两个 激光脉冲二次曝光的全息图得到的. 在图(a)中第一个脉冲仅记录了一 个漫射背景的全息图，而第二个脉冲则记录了在同一漫射背景前飞行的一颗子弹的全息图. 子弹所产生的冲击波引起了空气折射率的改变. 结果，漫射背景的两个像——一个是无子弹时



(*a*)



(*b*)

图 8-32　用一个 Q 开关红宝石激光器做光源的全息图干涉量度技术[8-41]

记录的，另一个是通过空气折射率的扰动时记录的——将互相干涉，所产生的干涉条纹描绘出子弹所产生的冲击波的形状．这些条纹看来好像是固定在子弹周围的三维空间中．

图(*b*)是用类似方法得到的一个白炽灯的像．在第一次曝光时灯丝未通电，仍是记录了一个漫射背景的全息图，但是是通过灯泡的玻璃泡记录的．然后接通灯丝，用第二个激光脉冲使全息图曝光．灯本身所产生的非相干光与激光不发生干涉，所以在最后的像中灯丝看来并不是亮的．然而灯泡内气体受热将引起折射率的变化，这个变化仍将在最后的像中产生干涉条纹，描绘出气体膨胀的图景．应该强调指出，这些干涉条纹是在有光学缺陷的玻璃泡的情形下得到的，这用其他"经典"的干涉量度技术将是不可能的．

振动分析

Powell 及 Stetson[8-42]最先提出并显示了进行振动分析的一种全息照相技术．这种技术可看作是多次曝光干涉量度技术方法推广到振动物体的连续时间曝光的情形．

利用在§8-8导出的时间曝光全息图的时间滤波特性，容易对此技术进行分析．参考图8-33的光路，我们考虑以角频率 Ω 作正弦振动的一个平面物体上坐标为(x_0, y_0)的一点．振动的峰值振幅用 $m(x_0, y_0)$表示，而其固定位相则表示为 $\mu(x_0, y_0)$．从物体上这一点射到胶片上(x, y)点的光可看成具有随时间变化的位相调制：

$$\phi(x, y; t)=\frac{2\pi}{\lambda}(\cos\theta_1+\cos\theta_2)m(x_0, y_0)\cos[\Omega t+ \\ +\mu(x_0, y_0)], \qquad (8\text{-}103)$$

其中 λ 是照明光源的光波波长，θ_1 是向量位移与(x_0, y_0)点和(x, y)点连线之间的夹角，θ_2 是向量位移和入射到 (x_0, y_0)点

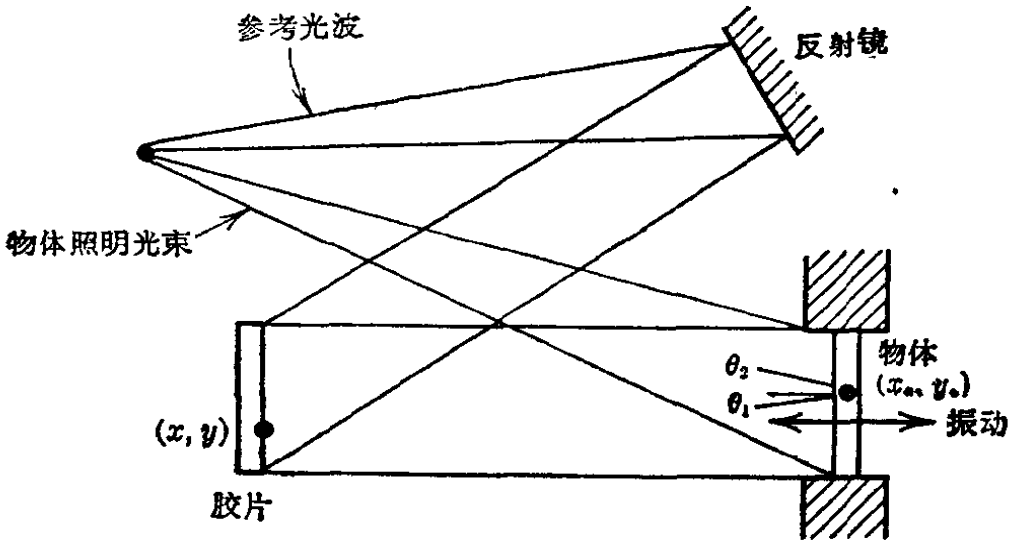


图 8-33 记录一个振动物体的全息图

上的光的传播方向之间的夹角。由于这一正弦位相调制的结果，射到(x, y)点上的相幅矢量随时间而变的光的频谱$\mathbf{F}(\nu)$可以用正弦式调相波的通常的贝塞尔函数展开式来表示：

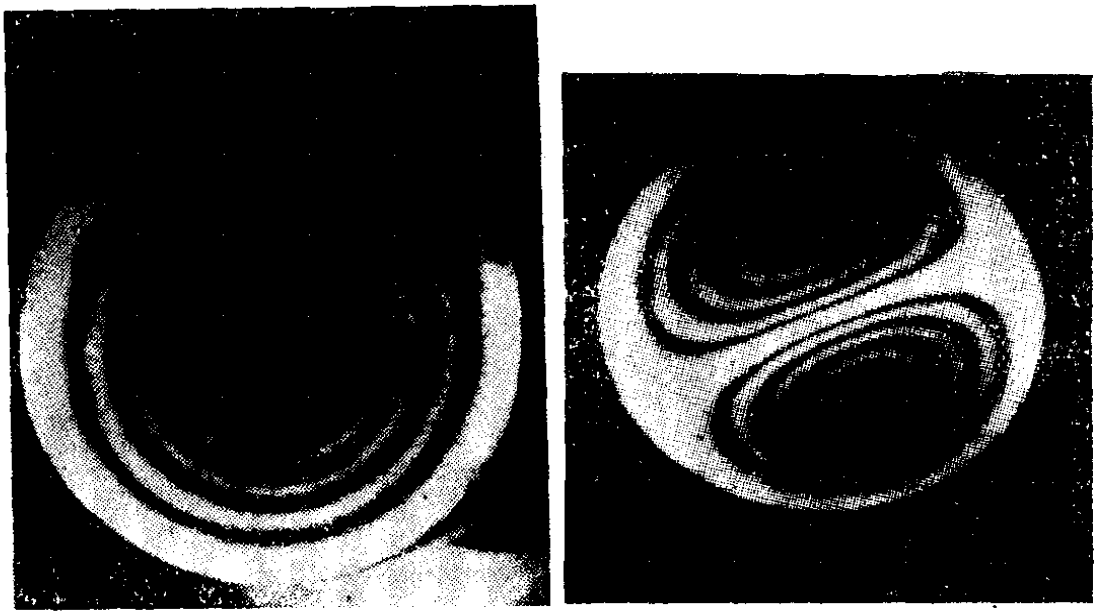
$$\mathbf{F}(\nu)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k\left[2\pi\frac{\cos\theta_1+\cos\theta_2}{\lambda}m(x_0, y_0)\right]\delta\left(\nu-\frac{k\Omega}{2\pi}\right). \tag{8-104}$$

当曝光时间比振动周期大得多时(即$T\gg 2\pi/\Omega$)，仅有$k=0$或"载波"项落在传递函数(8-92)的通带之内。如果由$\cos\theta_1$项引入的调制深度的变化近似地与(x, y)无关[即如果胶片对(x_0, y_0)点所张的角很小]，那么(x_0, y_0)的像的振幅将被抑制而减小一个因子

$$J_0\left[\frac{2\pi}{\lambda}(\cos\theta_1+\cos\theta_2)m(x_0, y_0)\right], \tag{8-105}$$

而强度将减小这个因子的平方这么多倍。因此各点上像的强度依赖于对应的物点上的振动振幅$m(x_0, y_0)$。

图(8-34)示出 Powell 和 Stetson 由实验得到的振动膜片的像。在图(a)中膜片振动在它的最低次模式，只有一个振动



(a) (b)

图 8-34 在两种不同的模式中振动的膜片的全息像照片[8-42]

的极大值在膜片中心处。在图(b)中膜片振动在较高次模式，具有两个振动极大值。数出从膜片边缘到任意一点的条纹数目，就可以通过方程(8-105)确定该点的振幅。

高分辨率体积成像

前面在关于显微术的一段中已经讲过，全息像的最有用的性质之一是其很大的潜在焦深。如果要把一个通常的成像系统(例如一具显微镜)，设计成具有很高的横向分辨率，那么根据很基本的原因，在一个时刻，物空间只有一个有限体积可以对好焦。固然，我们可以用不断重新聚焦以探索物体体积的新区域的办法，来依次探索一个大体积，但是，如果物体是不断运动的动态物体，这种方法往往就不能令人满意了。

对这种物体拍摄全息图(但要用脉冲激光器作光源以使曝光时间短)，可以作为上述问题的一个解决办法。这时动态物体在时间上被“冻结”起来，而全息图中却保存了探索全部

物体体积所需的全部信息。只要照射全息图，再用一辅助的光学系统来探索所得的实像或虚像即可。现在可以依次来观察像空间了，因为物体(即全息图所生的像)已不再是动态的了。

C. Knox 已把这一方法卓有成效地用于活的生物标本的三维体积显微术[8-43]。Thompson, Ward 及 Zinky 则成功地用它来测量气溶胶(aerosol)中的质点大小分布[8-44]。读者欲知其详可以参考这些文献。

三维物体的等高轮廓线的生成

前面所述的多重相干像的干涉也导致了下列技术的发展，即获得其上叠加有定高度间隔等高轮廓线族的三维象。这类技术可用于截面描绘及等高线绘制。Hildebrand 及 Haines[8-45]已提出了两种迥然不同的方法。第一种方法是，物体由两个互相相干但在空间分离的点光源来照明，物体的这两束照明光可以同时加上，也可以对全息图进行两次曝光，每次曝光时物光源的位置不同。

如果研究一下物体的两个照明光源之间的干涉图样，就会发现它是由明暗干涉条纹所组成，这些明暗条纹沿着定程差的双曲线，如图 8-35 所示。若物体从侧面照明而从顶面记录全息图，那么在重现象中很容易看到深度等高轮廓线。不论是在单次曝光中同时使用两个光源还是在两次曝光中每次单独各用一个光源都会得到完全一样的结果，因为不论是哪一种情况，两次照明的结果都会相干地叠加。

生成等高线的双源法有一缺点，即要求照明方向和观察方向必须相差约 90°。这样，如果物体具有突出的轮廓，就会投射出阴影而物体的一些部分就照不到。产生等高线的双频法克服了这个缺点。在这个方法中物光束和参考光束都含有

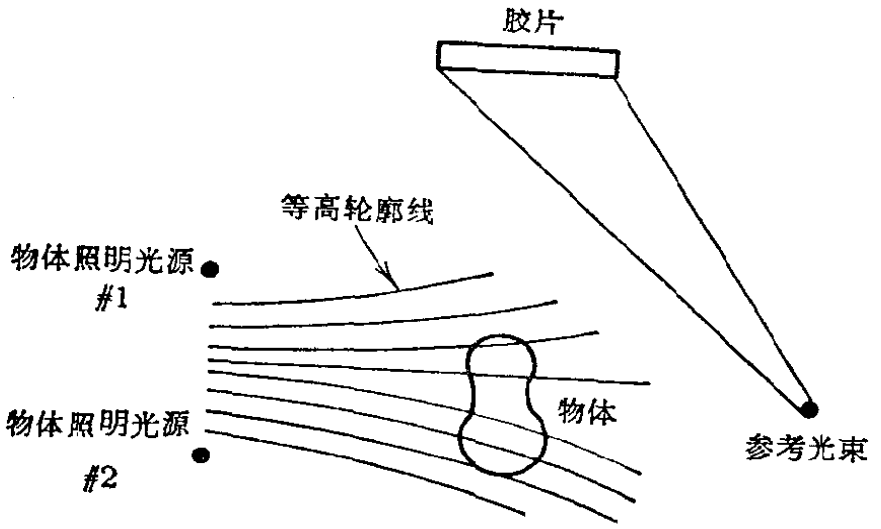


图 8-35　双源法产生等高线

两个频率分量.用单一频率的光束照射所得的全息图,就会产生位置和放大率稍有不同的两个像. 这两个像将发生干涉,在一定的几何条件下,所得到的像的等高线将准确指示出深度. 我们不准备详细分析这个更复杂的方法;感兴趣的读者可参考原始文献[8-45],以得到更详细的了解. 图 8-36 示出了用双频法绘制等高线的结果. 在(a)我们看到一个银币的全息像,是用单频光按通常方法照明的. 若用双频光来记录全息图,便获得(b)的像. 这里是从氩激光器的两条不同谱线来获得两个频率的. 两条激光谱线相隔 65 Å,像上所得到的等高线其代表的高度相隔 0.02 毫米.

通过像差介质成像

在许多有实际意义的情况下,要求光学系统在出现有无法控制的像差时成像. 这些像差可能是由于成像元件本身的缺陷所引起,也可能是外部介质(如大气)所带来的.对于存在这些像差时的成像问题,全息照相方法具有几个独特的优点.下面我们讨论在出现严重像差的情况下获得高分辨率的三种



(*a*)

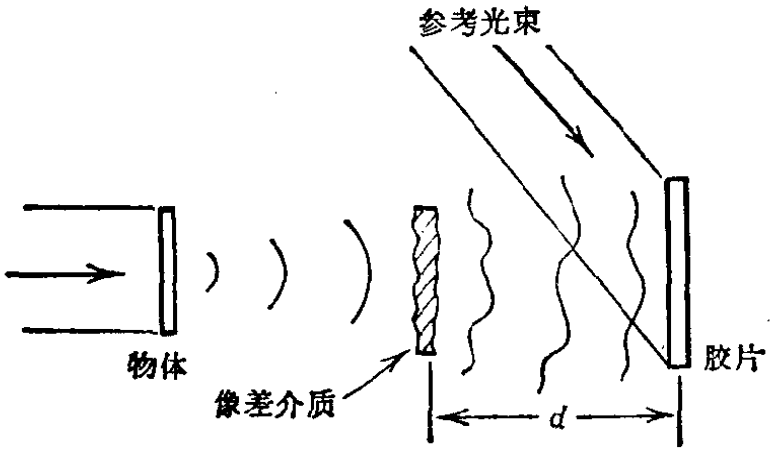


(*b*)

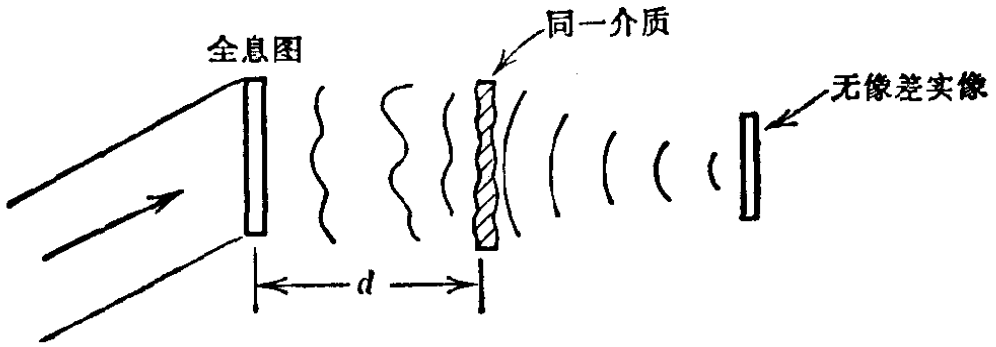
图 8-36　用双频法生成等高线[8-45]

不同的全息照相方法。

我们要讨论的第一种方法[8-46,8-47]可用于像差介质不随时间而变并且可以在空间移动的情形。如图 8-37 所示，用一



(a)



(b)

图 8-37　用原来的像差介质来补偿像差
(a) 记录全息图；　(b) 重现像

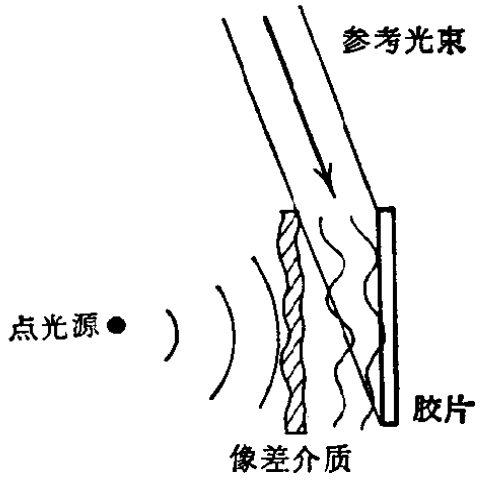
个未发生像差的参考光束来记录有像差的物光束的全息图。如果我们这样来照明全息图，使之形成物体的一个实像，那么在全息图和像平面之间也将形成像差介质的一个实像。设投射到像差介质上的原来的物体波用 $U_0(\xi,\eta)$ 表示，并设像差介质的振幅透射率是 $\exp[jW(\xi,\eta)]$，则在像差介质的实像处产生的波是共轭波 $U_0^*(\xi,\eta)\exp[-jW(\xi,\eta)]$。我们看到，

若重现时把原来形成像差的介质插入光路，使它与它的共轭像精确符合，这样，由介质所透射的波变为

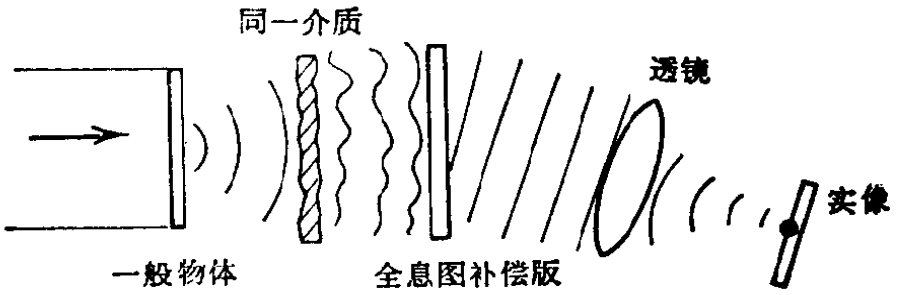
$$U_0^*(\xi,\eta)\exp[-jW(\xi,\eta)]\exp[jW(\xi,\eta)]=U_0^*(\xi,\eta),$$

于是像差就被完全抵消，因而可以形成一个无像差的像[1)]。

这种方法无疑将在密码术或情报的安全编码中得到应用。要编码的通信情报作为物体，一块漫射体插在物体和底



(a)



(b)

图 8-38　全息图补偿板的使用　(a)补偿板的记录；(b)像差的抵消

1) 在重现时像差介质定位的精确度要求很高．要通过一块磨得很细的毛玻璃成像，甚至几微米的误差也不能容许．

片平面之间。用通常方法重现全息图所产生的像，其像差如此之厉害以致无法读出。但是，拥有记录过程中所用过的同一漫射体的人，只要把他的“译码版”插在合适位置，就会获得一个无像差的像。

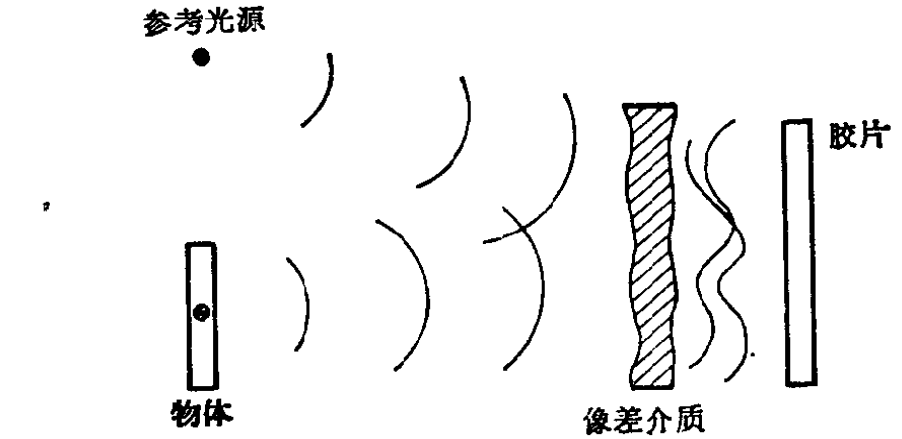
我们感兴趣的第二种方法如图 8-38 所示。在这种情况下，像差介质可以固定在空间(即不能移动)，但必须不随时间变化(或者至多很缓慢地变化)。为了在有像差情况下获得高分辨率的像，采用一个无像差的参考光束来记录一个由一点光源物体形成的有像差的波前的全息图。然后可用这张全息图作为一块“补偿板”，它能使较平常的光学系统形成无像差的像。令由单个点光源投射到照像底片上的波用 $\exp[jW(x, y)]$ 表示。这里我们假设像差介质离胶片足够近，因而强度变化不显著。但是，全息图透射率中通常产生实像的那一部分是正比于 $\exp[-jW(x, y)]$ 的。因此若我们将这个点源换成一个更一般的物体，并把这张全息图放回原来记录此全息图时的同一位置，我们就发现，到达全息图的物体波的弯曲在通过全息图后被抵消，从物体上不同点射来的波变成以不同角度传播的平面波，然后透镜按通常方式形成一个无像差的像。

这种方法只对有限的视场才能得到良好结果，因为如果一个物体点离原来记录全息图时所用的点源的位置太远，则此物体点所发出的波所具有的像差将与记录在全息图上的像差不同。当全息图是在很靠近像差介质的地方记录时这个限制最小。乌帕特尼克斯等人[8-48]曾成功地用这个技术来补偿透镜的像差。

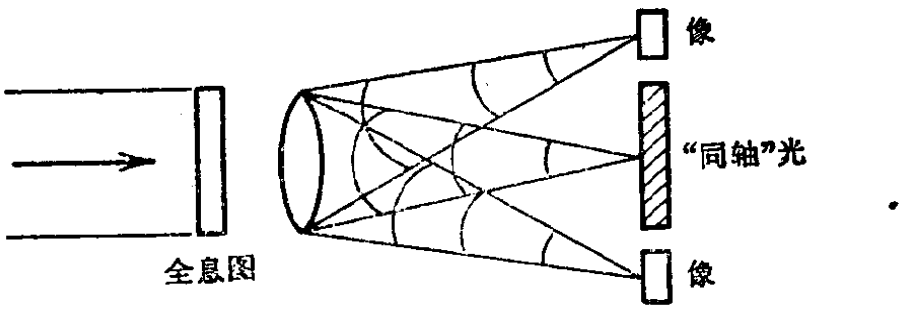
第三种方法是使参考光波和物光波二者都通过同一像差介质，这个方法可以用于通过介质成像，不论此介质可以移动还是不能移动，也不论它随时间变化还是不随时间变化。如

图 8-40 所示，所用的记录光路是无透镜傅里叶变换. 为简单起见，设像差介质紧靠在记录平面之前. 到达胶片的参考波和物波因此可写为 $\mathbf{A}(x, y)\exp[j\mathbf{W}(x, y)]$ 和 $\mathbf{a}(x, y)\exp[j\mathbf{W}(x, y)]$. 这两个有像差的波发生干涉，所得到的干涉图样不受像差介质存在的影响

$$\mathscr{I}(x, y)=|\mathbf{A}(x, y)\exp[j\mathbf{W}(x, y)]+$$
$$+\mathbf{a}(x, y)\exp[j\mathbf{W}(x, y)]|^2=|\mathbf{A}|^2+|\mathbf{a}|^2+\mathbf{A}^*\mathbf{a}+\mathbf{A}\mathbf{a}^*.$$



(a)



(b)

图 8-39 当参考波和物波具有同样像差时的无像差成像 (a) 记录全息图；(b) 像的获得

因此，此全息图不受像差介质存在的影响。

这个方法也只适用于有限的物体场，因为离参考光源太远的点产生的波的像差和参考波的像差不同[1)]。当像差是在记录平面附近发生的时候，拍摄场最大。关于这一过程的细节，读者可参看[8-49]。

图 8-40 至图 8-43 示出用这个方法所得到的实验结果。这时物体是一个透明片，其上有一条铭牌及一个亮参考点，见图 8-40。像差介质是普通的磨砂玻璃，见图 8-41。图 8-42 示出有像差介质存在时所得到的波前重现像。为了比较起见，图 8-43 示出用通常方法所成的像，即用一块正透镜代替底片在存在像差介质时直接形成的像。通常方法所成的像的分辨率已经由于像差而全部破坏。然而，波前重现像的质量则降低不多。

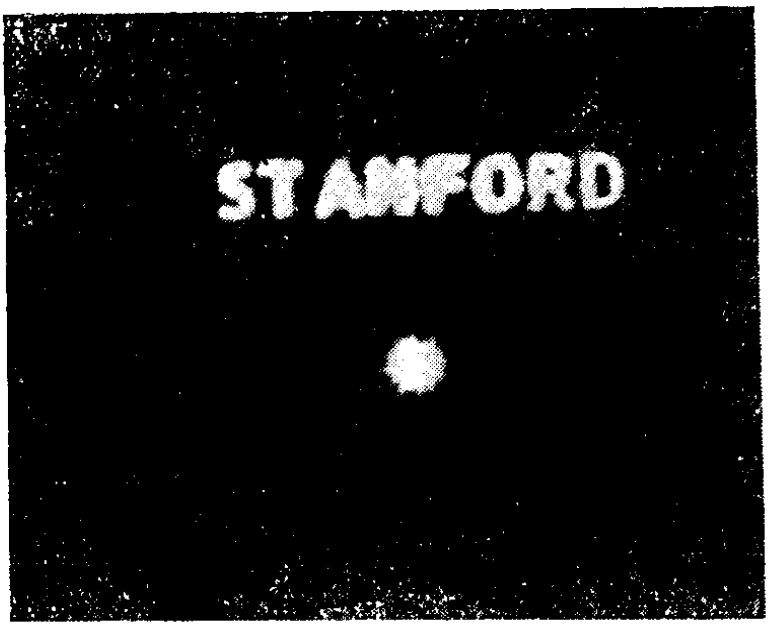


图 8-40　物体和参考光点

1）更具体地说，要物体上一给定点的成像没有像差，只有当从该点和从参考光源射到胶片上任一点的光线经受全同的光程延迟才行。

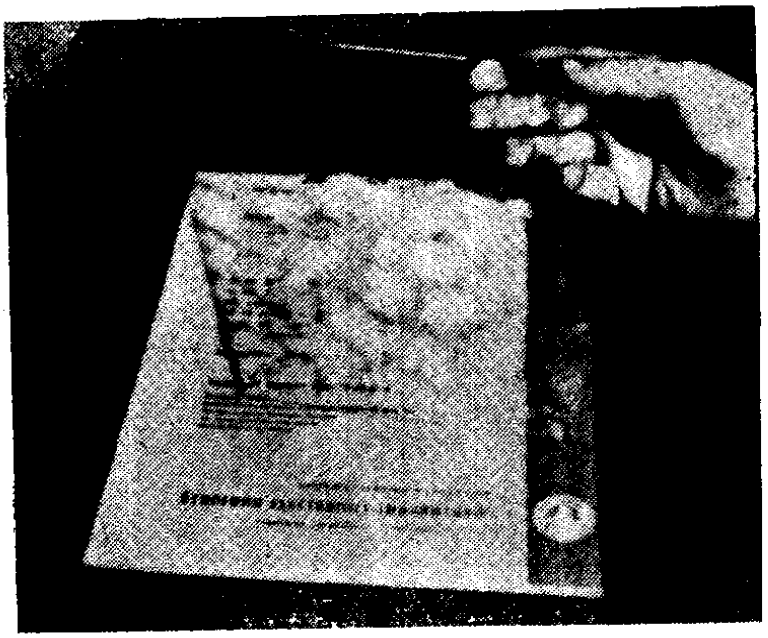


图 8-41　像差介质

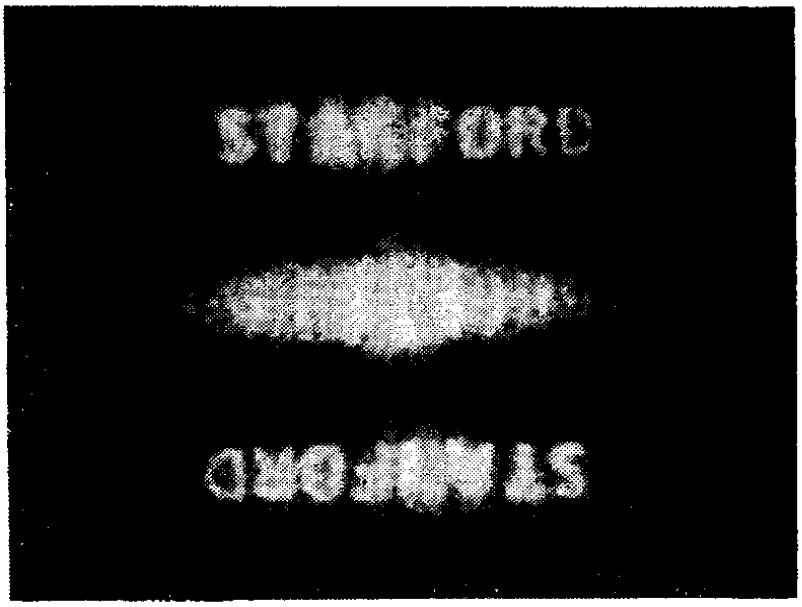


图 8-42　存在像差介质时所得到的波前重现像

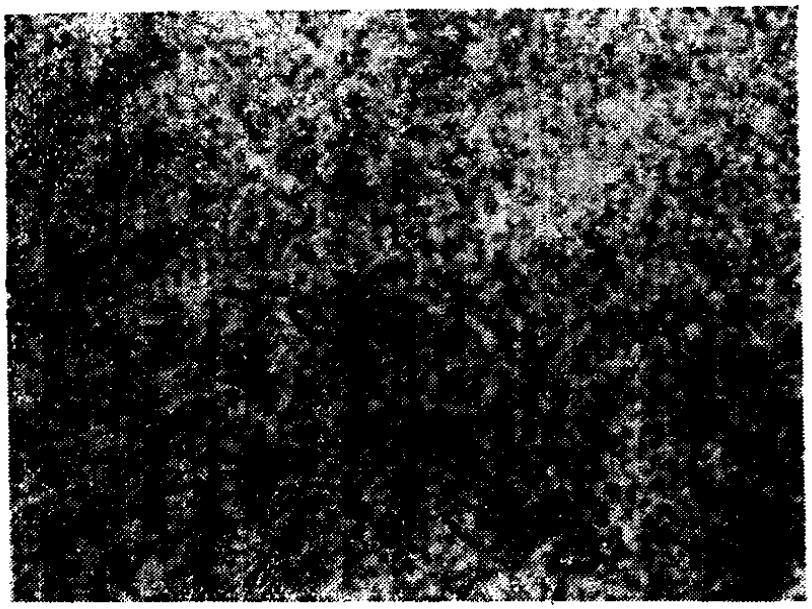


图 8-43　存在像差介质时用通常方法所成的像

习　题

8-1　证明：若一平面物体的全息图记录在一个与物体相平行的平面内，则最后所得的像将成在一个与全息图平行的平面内。
（为了简单起见，可设参考波为一平面波）

8-2　一张全息图，记录时用的是氩激光器的波长为 4880 Å 的光，而成像则是用 He-Ne 激光器的波长为 6328 Å 的光。
(a) 设 $z_p=\infty, z_r=\infty, z_0=10$ cm，问像距 z_i 是多少？
(b) 设 $z_p=\infty, z_r=2z_0, z_0=10$ cm，问 z_i 是多少？放大率 M 是多少？

8-3　证明：若 $\lambda_2=\lambda_1$，及 $z_p=z_r$，则得到一个放大率为 1 的虚像；而若 $\lambda_2=\lambda_1$，及 $z_p=-z_r$，则得到一个放大率为 1 的实像。

8-4　用图 8-10 所示方法记录一张全息图。然后把透明底片放大 m 倍。证明：由这张放大的全息图所成的像的成像距离 z_i 为

$$z_i=\left[\frac{1}{z_p}\pm\frac{\lambda_2}{\lambda_1 z_r m^2}\mp\frac{\lambda_2}{\lambda_1 z_0 m^2}\right]^{-1},$$

并且像的放大率

$$M=\left|\frac{\lambda_2 z_i}{m\lambda_1 z_0}\right|.$$

8-5 下表列举了几种底片的 MTF 的近似的截止频率：

型号		线/毫米
Kodak	Tri-X	50
Kodak	高反差片	60
Kodak	SO-243	300
Agfa	Agepam FF	600.

设照明用6328Å 波长，记录光路是用无透镜傅里叶变换，参考点和物体离底片为 10 cm。若物点位于某一大小之圆(在参考点附近)之外，则不能产生对应的像点。试对每种底片估计这个圆的半径大小。

8-6 某种底片的 t-E 曲线是非线性的，在其工作区域上 t-E 曲线可写为

$$t=t_b+\beta E_1^3,$$

其中 E_1 代表相对于参考光束曝光量的曝光量变化。

(a) 假设在底片上参考波为 $\exp[-j2\pi\alpha y]$，而物体波为 $a(x,y)\exp[-j\phi(x,y)]$，试求产生两个一级像的那一部分透射率的表示式。

(b) 若 $A\gg a$，此表示式如何简化？

(c) (a)和(b)部分中所得的振幅和位相调制，与底片具有线性的 t-E 曲线时出现的理想的振幅和位相调制相比较将如何？

8-7 一个强参考波 $A\exp[-j2\pi\alpha y]$ 和弱物体波 $a(x,y)\exp[-j\phi(x,y)]$ 在一张理想的硬限幅底片(即 t-E 曲线如图 8-22 所示的底片)上发生干涉。然后通过接触复印，制出所得全息图的完善的复制品，

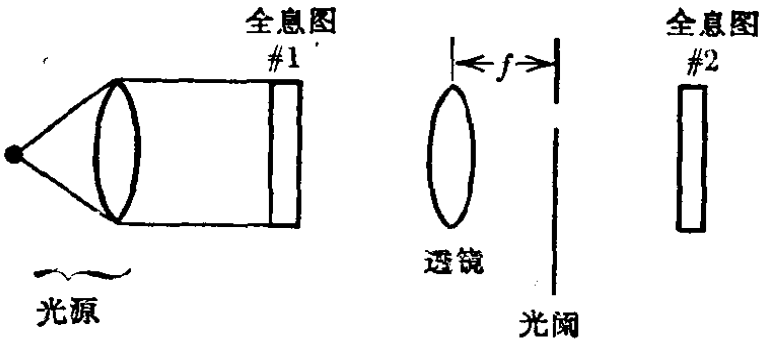


图 8-44

从而得到两张完全相同的全息图。

用相干光照明这两张 全息图中的一张，在中间加进一个光学系统以使这张全息图成像在另一张全同的全息图上，如图 8-44 所示。在成像透镜的后焦面上加一个光阑，使得透过光阑 射到像平面上的光分量只是第一张全息图的两个一阶透射项中之一。证明：若假定 $a \ll A$，则第二张全息图所透射的光有一个分量具有无畸变的振幅调制 $a(x, y)$及无畸变的位相调制 $\phi(x, y)$，尽管采用了硬限幅底片。

8-8 采用图 8-18 所示的无透镜傅里叶变换光路来记录一个宽为 L 的方形透明片物体的全息图。物体的振幅透射率为 $t_0(x_0, y_0)$，从物体到底片的距离为 z。用一个焦距为 f 的正透镜来获得重现像，如图 8-19 所示。

(a) 两个一阶像的放大率 M 是多少？

(b) 证明，零阶像项(即两个一阶像之间的亮光)的振幅正比于

$$t_0\left(\frac{x_0}{M}, \frac{y_0}{M}\right) \exp\left[j \frac{\pi}{\lambda z M^2}(x_0^2+y_0^2)\right]$$

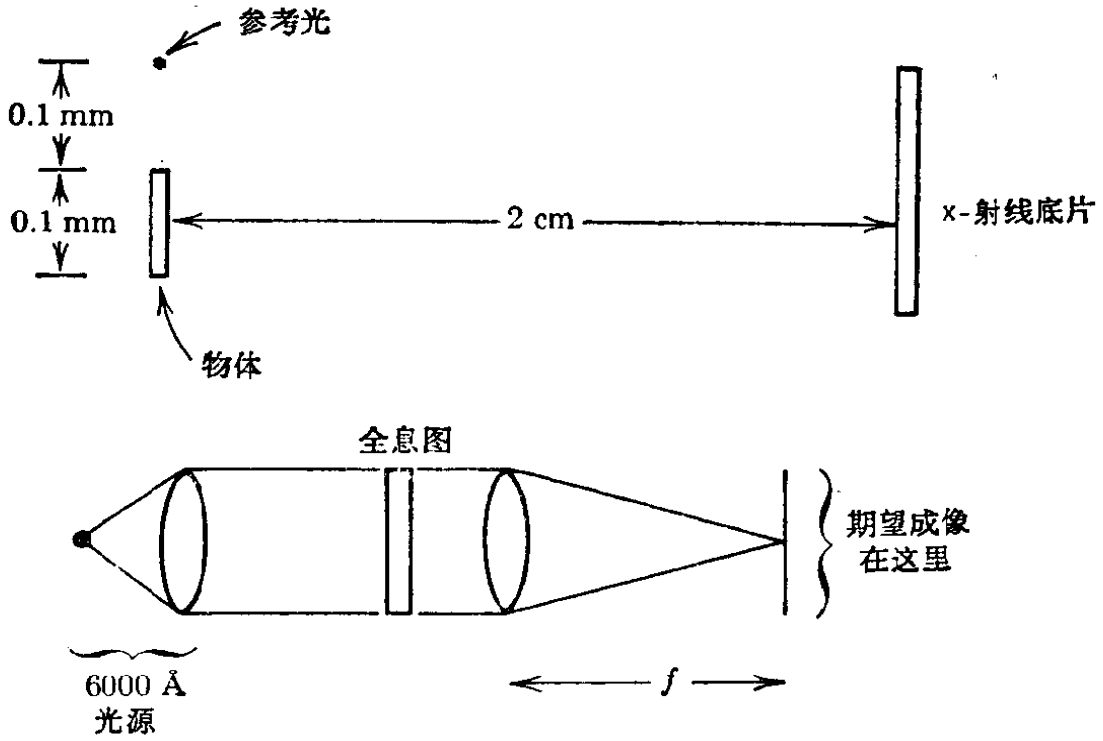


图 8-45

的自相关函数加上一个中心衍射受限亮斑。

(c) 参考点源应放在离透明片物体中心多远的地方才可以确保零阶光和一阶像不重叠?

8-9 曾有人提出用波长为 1 A(10^{-10}m)的辐射来记录一张X射线全息图,然后用波长为 6000 A 的可见光来重现像。选择如图 8-45(上图)所示的无透镜傅里叶变换记录光路。物体的宽度为 0.1 mm,物体和参考点源之间的最小距离选为 0.1 mm,以确保孪生像和"同轴"干涉分离开。X射线底片放在离物体 2 cm 处。

(a) 投射到底片上的强度图案中的最大空间频率(周/mm)是多少?

(b) 假设底片分辨率足以记录所有的入射强度变化。有人提议用图 8-45(下图)所示的通常方法来重现成像。为什么这个实验是不会成功的?

参 考 文 献

8-1 Gabor, D., A New Microscope Principle, *Nature*, **161**, 777(1948).

8-2 Bragg, W. L., The X-ray Microscope, *Nature*, **149**, 470(1942).

8-3 Gabor, D., Microscopy by Reconstructed Wavefronts, *Proc. Roy. Soc.*, **A 197**, 454(1949).

8-4 Gabor, D., Microscopy by Reconstructed Wavefronts, II, *Proc. Phys. Soc.*, **B64**, 449(1951).

8-5 Rogers, G. L., Gabor Diffraction Microscopy:The Hologram as a Generalized Zone Plate, *Nature*, **166**, 237(1950).

8-6 El-Sum, H. M. A., "Reconstructed Wavefront Microscopy," doctoral dissertation, Stanford University, 1952. (Available from University Microfilm, Inc., Ann Arbor, Mich.).

8-7 Lohmann, A., Optical Single-Sideband Transmission Applied to the Gabor Microscope, *Opt. Acta*, **3**, 97(1956).

8-8 Leith, E. N. and J. Upatnieks:Reconstructed Wavefronts and Communication Theory. *J. Opt. Soc. Am.*, **52**, 1123(1962).

8-9 Leith, E. N. and J. Upatnieks, Wavefront Reconstruction With Diffused Illumination and Three-dimensional Objects, *J. Opt. Soc. Am.*, **54**, 1295(1964).

8-10 Collier, R. J., Some Current Views on Holography, *IEEE Spectrum*, **7**, 67(1966).

8-11 Gabor, D. and W. P. Goss, Interference Microscope with Total Wavefront Reconstruction, *J. Opt. Soc. Am.*, **56**, 849(1966).

8-12 Leith, E. N. and J. Upatnieks, Wavefront Reconstruction With

Continuoustone Objects, *J. Opt. Soc. Am.*, **53**,1377(1963).
8-13 Leith, E. N., J. Upatnieks and K. A. Haines, Microscopy by Wavefront Reconstruction, *J. Opt. Soc. Am.*, **55**,981(1965).
8-14 Meier, R. W., Magnification and Third-order Aberrations in Holography, *J. Opt. Soc. Am.*, **55**,987(1965).
8-15 van Ligten, R. F., Influence of Photographic Film on Wavefront Reconstruction. I: Plane Wavefronts, *J. Opt. Soc. Am.*, **56**, 1(1966).
8-16 van Ligten, R. F., Influence of Photographic Film on Wavefront Reconstruction. II: "Cylindrical" Wavefronts, *J. Opt. Soc. Am.*, **56**,1009(1966).
8-17 Stroke, G. W., An Introduction to Coherent Optics and Holography, p. 116, Academic Press, New York, 1966.
8-18 Goodman, J. W., Film-grain Noise in Wavefront-Reconstruction Imaging, *J. Opt. Soc. Am.*, **57**,493(1967).
8-19 Kozma, A., Photographic Recording of Spatially Modulated Coherent Light, *J. Opt. Soc. Am.*, **56**,428(1966).
8-20 Davenport, W. B., Jr. and W. L. Root, Random Signals and Noise, chaps. 12 and 13, McGraw-Hill Book Company, New York. 1958.
8-21 Middleton, D., Statistical Communication Theory, chap. 5 , McGraw-Hill Book Company, New York, 1960.
8-22 Magnus, W. and F. Oberhettinger, Formulas and Theorems for the Functions of Mathematical Physics, p. 18, Chelsea Publishing Company, New York, 1954.
8-23 Davenport, W. B., Jr., Signal-to-Noise Ratios in Bandpass Limiters, *J. Appl. Phys.*, **24**,720(1953).
8-24 Friesem, A. A. and J. S. Zelenka, Effects of Film Nonlinearities in Holography, *Appl. Opt.*, **6**,1755(1967).
8-25 Goodman, J. W., Effects of Film Nonlinearities on Wavefront-Reconstruction Images of Diffuse Objects, *J. Opt. Soc. Am.*, **57**, 560(1967).
8-26 Knight, G., "Effects of Film Non-linearities in Holography." doctoral dissertation, Stanford University, 1967.
8-27 Goodman, J. W., Temporal Filtering Properties of Holograms, *Appl. Optics*, **6**,857(1967).
8-28 Papoulis, A., The Fourier Integral and Its Applications, P. 27, McGraw-Hill Book Company, New York, 1963.
8-29 Mertz, L., and N. O. Young, "Fresnel Transformations of Images," in K. J. Habell (ed.), *Proc. Conf. Optical Instruments and Techniques*, P. 305, John Wiley & Sons, New York, 1963.
8-30 Lohmann, A. W., Wavefront Reconstruction for Incoherent

Objects, *J. Opt. Soc. Am.*, **55**,1555(1965).
8-31 Stroke, G. W. and R. C. Restrick III, Holography with Spatially Noncoherent Light, Appl. *Phys. Lett.*, **7**,229(1965).
8-32 Cochran, G., New Method of Making Fresnel Transforms with Incoherent Light, *J. Opt. Soc. Am.*, **56**,1513(1969).
8-33 Lippmann, G., *J. Physique*, **3**,97(1894).
8-34 Denisyuk, Y. N., *Soviet Phys.-Dokl.*, **7**,543(1962).
8-35 Stroke, G. W. and A. E. Labeyrie, White-light Reconstruction of Holographic Images Using the Lippmann-Bragg Diffraction Effect, *Phys. Lett.*, **20**,368(1966).
8-36 Lin, L. H. et al., Multicolor Holographic Image Reconstruction with White-Light Illumination, *Bell System Tech. J.*, **45**, 659 (1966).
8-37 Leith, E. N. et al., Holographic Data Storage in Three-dimensional Media, *Appl. Opt.*, **5**,1303(1966).
8-38 Tyler, G. L., The Bistatic, Continuous-wave Radar Method for the Study of Planetary Surfaces, *J. Geophys. Res.*, **71**,1559(1966).
8-39 Kreuzer, J. L., Ultrasonic Three Dimensional Imaging Using Holographic Techniques, *Proc. Symp. Modern Optics*, Polytechnic Press, New York (in press).
8-40 Gabor, D. et al., Optical Image, Synthesis (Complex Amplitude Addition and Subtraction) by Holographic Fourier Transformation, *Phys. Letl.*, **18**,116(1965).
8-41 Brooks, R. E., L. O. Heflinger and R. F. Wuerker, Pulsed Laser Holograms, *IEEE J. Quantum Electron.*, **QE-2**,275(1966).
8-42 Powell, R. L. and K. A. Stetson, Interferometric Vibration Analysis by Wavefront Reconstruction, *J. Opt. Soc. Am.*, **55**,1593(1965).
8-43 Knox, C., Holographic Microscopy as a Technique for Recording Dynamic Microscopic Subjects, *Science*, **153**,989(1966).
8-44 Thompson, B. J., J. H. Ward and W. R. Zinky, Application of Hologram Techniques for Particle Size Analysis, *Appl. Opt.*, **6**, 519(1967).
8-45 Hildebrand, B. P. and K. A. Haines, Multiple-wavelength and Multiplesource Holography Applied to Contour Generation, *J. Opt. Soc. Am.*, **57**,155(1967).
8-46 Leith, E. N. and J. Upatnieks, Holographic Imagery through Diffusing Media, *J. Opt. Soc. Am.*, **56**,523(1966).
8-47 Kogelnik, H., Holographic Image Projection through Inhomogeneous Media, *Bell System Tech. J.*, **44**,2451(1965).
8-48 Upatnieks, J., A. Vander Lugt and E. Leith, Correction of Lens Aberrations by Means of Holograms, *Appl. Opt.*, **5**,589(1966).
8-49 Goodman, J. W. et al., Wavefront-Reconstruction Imaging through Random Media, *Appl. Phys. Lett.*, **8**,311(1966).

附　录

A. 狄拉克 δ 函数

电路分析中广泛应用的一维狄拉克 δ 函数，可以定义为宽度逐步减小、高度逐步增大但面积保持为 1 的一个脉冲序列的极限。当然，有大量形状不同的脉冲可用于这个定义；三种同样可取的定义是

$$\delta(t)=\lim_{N\to\infty}N\exp(-N^2\pi t^2), \qquad (\text{A-1 } a)$$

$$\delta(t)=\lim_{N\to\infty}N\,\mathrm{rect}(Nt), \qquad (\text{A-1 } b)$$

$$\delta(t)=\lim_{N\to\infty}N\,\mathrm{sinc}(Nt). \qquad (\text{A-1 } c)$$

我们在电路中是用 δ 函数来代表一个窄而强的电流或电压脉冲，而在光学中类似的概念是一个点光源，或一个单位面积的空间脉冲。二维 δ 函数的定义只是一维情形的简单推广，虽然这时有更多的脉冲函数形式可供选择。空间 δ 函数的各种可能的定义包括

$$\delta(x,y)=\lim_{N\to\infty}N^2\exp[-N^2\pi(x^2+y^2)], \qquad (\text{A-2 } a)$$

$$\delta(x,y)=\lim_{N\to\infty}N^2\,\mathrm{rect}(Nx)\,\mathrm{rect}(Ny), \qquad (\text{A-2 } b)$$

$$\delta(x,y)=\lim_{N\to\infty}N^2\,\mathrm{sinc}(Nx)\,\mathrm{sinc}(Ny), \qquad (\text{A-2 } c)$$

$$\delta(x,y)=\lim_{N\to\infty}\frac{N^2}{\pi}\,\mathrm{circ}\ (N\sqrt{x^2+y^2}), \qquad (\text{A-2 } d)$$

$$\delta(x,y)=\lim_{N\to\infty}N\frac{J_1(2\pi N\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}. \qquad (\text{A-2 } e)$$

定义(A-2a)至(A-2c)在直角坐标系中可以分离变量，而定义(A-2d)及(A-2e)是圆对称的．在某些应用中一种定义可能要比另一种定义来得方便些，我们可以选用对该问题最合适的定义．

空间δ函数的上述每一种定义都有下列基本性质：

$$\delta(x, y)=\begin{cases}\infty & x=y=0\\ 0 & \text{其他地方},\end{cases} \tag{A-3}$$

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\int\delta(x, y)dxdy=1 \quad \text{任意}\ \epsilon>0, \tag{A-4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int\mathbf{g}(\xi, \eta)\delta(x-\xi, y-\eta)d\xi d\eta=\mathbf{g}(x, y) \tag{A-5}$$

在$\mathbf{g}$连续的各点上．

性质(A-5)往往称为δ函数的筛选性质．从δ函数的任何一种定义还可证明另外一个相当重要的性质(参看习题2-1a)，即

$$\delta(ax, by)=\frac{1}{|ab|}\delta(x, y). \tag{A-6}$$

当然，也可以在维数大于2的更高维空间中定义δ函数，但是这种函数的性质和较低维空间中的δ函数完全类似．

B. 傅里叶变换式定理的推导

在这一节中，我们将叙述傅里叶变换式的一些基本定理的简短的证明．更严格的推导读者应参考[2-1]或[2-2]．

1．线性定理　$\mathscr{F}\{\alpha\mathbf{g}+\beta\mathbf{h}\}=\alpha\mathscr{F}\{\mathbf{g}\}+\beta\mathscr{F}\{\mathbf{h}\}$

证明：这一定理从定义傅里叶变换的积分的线性性质直接得到．

2．相似性定理　若$\mathscr{F}\{\mathbf{g}(x, y)\}=\mathbf{G}(f_X, f_Y)$，则

$$\mathscr{F}\{\mathbf{g}(ax, by)\}=\frac{1}{|ab|}\mathbf{G}\left(\frac{f_X}{a}, \frac{f_Y}{b}\right).$$

证明：

$$\mathscr{F}\{\mathbf{g}(ax, by)\}=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int\mathbf{g}(ax, by)\exp[-j2\pi(f_Xx+f_Yy)]\,dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int\mathbf{g}(ax, by)\exp\left[-j2\pi\left(\frac{f_X}{a}ax+\frac{f_Y}{b}by\right)\right]\frac{dax}{|a|}\frac{dby}{|b|}$$

$$=\frac{1}{|ab|}\mathbf{G}\left(\frac{f_X}{a}, \frac{f_Y}{b}\right).$$

3．相移定理　若$\mathscr{F}\{\mathbf{g}(x, y)\}=\mathbf{G}(f_X, f_Y)$，则

$$\mathscr{F}\{\mathbf{g}(x-a, y-b)\}=\mathbf{G}(f_X, f_Y)\exp[-j2\pi(f_Xa+f_Yb)].$$

证明：

$$\mathscr{F}\{\mathbf{g}(x-a, y-b)\}=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int\mathbf{g}(x-a, y-b)\exp[-j2\pi(f_Xx+f_Yy)]dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int\mathbf{g}(x', y')\exp[-j2\pi[f_X(x'+a)+f_Y(y'+b)]\}dx'dy'$$

$$=\mathbf{G}(f_X, f_Y)\exp[-j2\pi(f_Xa+f_Yb)].$$

4．**Parseval** 定理　若$\mathscr{F}\{\mathbf{g}(x, y)\}=\mathbf{G}(f_X, f_Y)$，则

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int|\mathbf{g}(x, y)|^2dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\int|\mathbf{G}(f_X, f_Y)|^2df_Xdf_Y.$$

证明：$\int_{-\infty}^{\infty}\int|\mathbf{g}(x, y)|^2dxdy=\int_{\infty}^{\infty}\int\mathbf{g}(x, y)\mathbf{g}^*(x, y)dxdy$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int dxdy\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int d\xi d\eta\mathbf{G}(\xi, \eta)\exp[j2\pi(x\xi+y\eta)]\right\}.$$

$$\cdot\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int d\alpha d\beta \mathbf{G}^*(\alpha,\beta)\exp[-j\,2\,\pi(x\alpha+y\beta)]\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int d\xi d\eta\cdot$$

$$\cdot\mathbf{G}(\xi,\eta)\int_{-\infty}^{\infty}\int d\alpha d\beta\,\mathbf{G}^*(\alpha,\beta)\Big[\int_{-\infty}^{\infty}\int\exp\{j\,2\,\pi[x(\xi-\alpha)+$$

$$+y(\eta-\beta)]\}dxdy\Big]=\int_{-\infty}^{\infty}\int d\xi d\eta\;\mathbf{G}(\xi,\eta)\int_{-\infty}^{\infty}\int d\alpha d\beta\mathbf{G}^*(\alpha,\beta)\cdot$$

$$\cdot\delta(\xi-\alpha,\eta-\beta)=\int_{-\infty}^{\infty}\int|\mathbf{G}(\xi,\eta)|^2 d\xi d\eta.$$

5. 卷积定理　若$\mathscr{F}\{\mathbf{g}(x,y)\}=\mathbf{G}(f_X,f_Y)$及$\mathscr{F}\{\mathbf{h}(x,y)\}=\mathbf{H}(f_X,f_Y)$，则

$$\mathscr{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int\mathbf{g}(\xi,\eta)\mathbf{h}(x-\xi,y-\eta)d\xi d\eta\right\}=$$

$$=\mathbf{G}(f_X,f_Y)\mathbf{H}(f_X,f_Y).$$

证明：　$\mathscr{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int\mathbf{g}(\xi,\eta)\mathbf{h}(x-\xi,y-\eta)\,d\xi d\eta\right\}=$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int\mathbf{g}(\xi,\eta)\mathscr{F}\{\mathbf{h}(x-\xi,y-\eta)\}d\xi d\eta=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int\mathbf{g}(\xi,\eta)\exp[-j\,2\,\pi(f_X\xi+f_Y\eta)]d\xi d\eta\mathbf{H}(f_X,f_Y)=$$

$$=\mathbf{G}(f_X,f_Y)\;\mathbf{H}(f_X,f_Y).$$

6. 自关联定理　若$\mathscr{F}\{\mathbf{g}(x,y)\}=\mathbf{G}(f_X,f_Y)$，则

$$\mathscr{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int\mathbf{g}(\xi,\eta)\mathbf{g}^*(\xi-x,\eta-y)d\xi d\eta\right\}=|\mathbf{G}(f_X,f_Y)|^2.$$

证明：

$$\mathscr{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{g}(\xi,\eta)\mathbf{g}^*(\xi-x,\eta-y)\,d\xi d\eta\right\}=$$

$$=\mathscr{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{g}(\xi'+x,\eta'+y)\mathbf{g}^*(\xi',\eta')\,d\xi' d\eta'\right\}=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int d\xi' d\eta' \mathbf{g}^*(\xi',\eta')\mathscr{F}\{\mathbf{g}(\xi'+x,\eta'+y)\}=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int d\xi' d\eta' \mathbf{g}^*(\xi',\eta')\exp[j\,2\pi(f_X\xi'+f_Y\eta')]\mathbf{G}(f_X,f_Y)$$

$$=\mathbf{G}^*(f_X,f_Y)\mathbf{G}(f_X,f_Y)=|\mathbf{G}(f_X,f_Y)|^2.$$

7．傅里叶积分定理　在 $\mathbf{g}$ 的各个连续点上，

$$\mathscr{F}\mathscr{F}^{-1}\{\mathbf{g}(x,y)\}=\mathscr{F}^{-1}\mathscr{F}\{\mathbf{g}(x,y)\}=\mathbf{g}(x,y)$$

在 $\mathbf{g}$ 的各个间断点上，这样两次相继变换给出该点的一个小邻域内 $\mathbf{g}$ 的角向平均值.

证明：定义函数 $\mathbf{g}_R(x,y)$

$$\mathbf{g}_R(x,y)=\int_{A_R}\int \mathbf{G}(f_X,f_Y)\exp[j\,2\pi(f_Xx+f_Yy)]df_Xdf_Y,$$

其中 A_R 是一个中心在 f_Xf_Y 平面原点而半径为 R 的圆. 要证明这条定理，只需证明在 $\mathbf{g}$ 的各个连续点上：

$$\lim_{R\to\infty}\mathbf{g}_R(x,y)=\mathbf{g}(x,y),$$

而在 $\mathbf{g}$ 的各个间断点上：

$$\lim_{R\to\infty}\mathbf{g}_R(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int^{2\pi}\mathbf{g}_0(\theta)\,d\theta,$$

其中 $\mathbf{g}_0(\theta)$ 是 $\mathbf{g}$ 在该点周围一个小邻域内对角度的依赖关系.

一些初步的直接运算如下：

$$\mathbf{g}_R(x,y)=\iint_{A_R}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int d\xi d\eta \mathbf{g}(\xi,\eta)\exp[-j2\pi(f_X\xi+f_Y\eta)]\right\}\cdot$$

$$\cdot\exp[j2\pi(f_Xx+f_Yy)]df_Xdf_Y=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int d\xi d\eta\ \mathbf{g}(\xi,\eta)\iint_{A_R}df_Xdf_Y\exp\{j2\pi[f_X(x-\xi)+$$

$$+f_Y(y-\eta)]\}.$$

注意$\iint_{A_R}df_Xdf_Y\exp\{j2\pi[f_X(x-\xi)+f_Y(y-\eta)]\}$

$$=R\left[\frac{J_1(2\pi Rr)}{r}\right].$$

其中$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$，我们有

$$\mathbf{g}_R(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int d\xi d\eta\mathbf{g}(\xi,\eta)R\left[\frac{J_1(2\pi Rr)}{r}\right].$$

先设(x,y)是$\mathbf{g}$的一个连续点．则

$$\lim_{R\to\infty}\mathbf{g}_R(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int d\xi d\eta\ \mathbf{g}(\xi,\eta)\lim_{R\to\infty}R\left[\frac{J_1(2\pi Rr)}{r}\right]=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int d\xi d\eta\mathbf{g}(\xi,\eta)\delta(x-\xi,y-\eta)=\mathbf{g}(x,y),$$

其中第二步中我们用了方程(A-2e)．于是就证明了定理的第一部分．

其次考虑$\mathbf{g}$的一个间断点．我们可取这点为原点，这并不妨碍普遍性．于是我们有

$$\mathbf{g}_R(0,0)=\int_{-\infty}^{\infty}\int d\xi d\eta\mathbf{g}(\xi,\eta)R\left[\frac{J_1(2\pi Rr)}{r}\right],$$

其中 $r=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$. 但是当 R 充分大时，括号里的量只在原点的一个小邻域内才有较大的值.此外，在这一小邻域内函数 $\mathbf{g}$ 只(近似地)依赖于环绕这一点的角度 θ，所以

$$\mathbf{g}_R(0,0)\cong\int_0^{2\pi}\mathbf{g}_0(\theta)d\theta\int_0^{\infty}rR\left[\frac{J_1(2\pi Rr)}{r}\right]dr,$$

其中 $\mathbf{g}_0(\theta)$ 代表 $\mathbf{g}$ 在原点周围对 θ 的依赖关系. 最后，注意

$$\int_0^{\infty}rR\left[\frac{J_1(2\pi Rr)}{r}\right]dr=\frac{1}{2\pi}.$$

我们得出结论

$$\lim_{R\to\infty}\mathbf{g}_R(0,0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathbf{g}_0(\theta)d\theta,$$

于是定理证完.