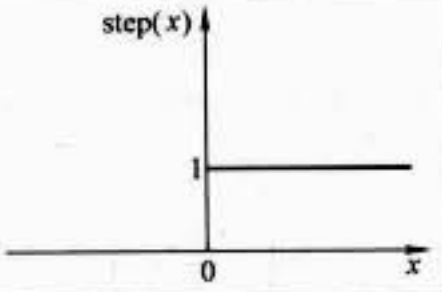
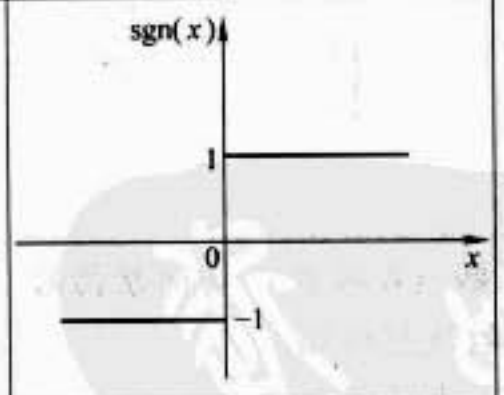
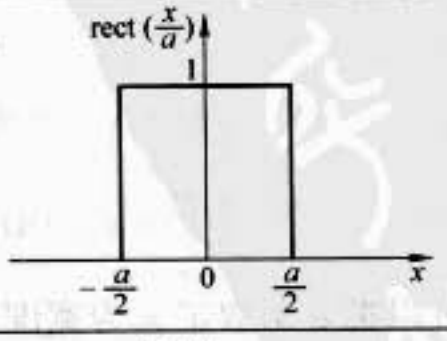
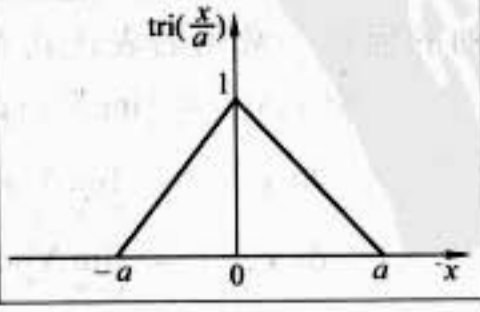
第1章　傅里叶分析

Ⅰ. 基本概念与公式

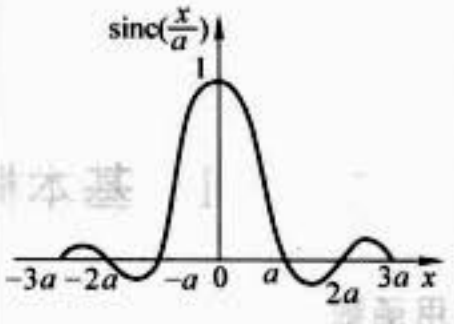
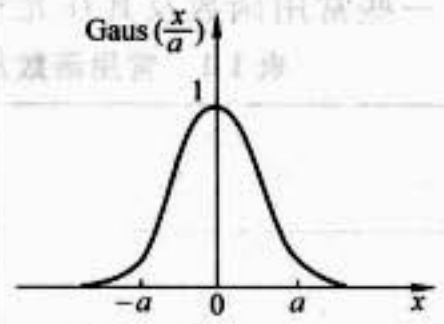
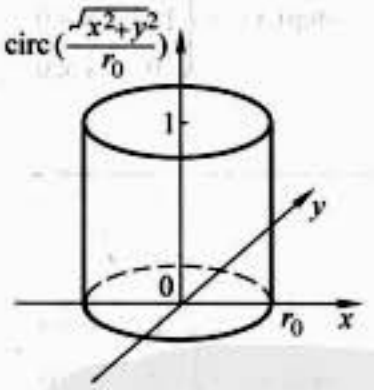
1. 一些常用函数

表 1-1 给出一些常用函数及其在光学中的应用。

表 1-1　常用函数及其在光学中的应用

常用函数 \ 说明	定　义	图形表示	应　用
阶跃函数	$\mathrm{step}(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 1/2 & x=0\\ 0 & x<0\end{cases}$		直边（或刀口）的透过率
符号函数	$\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$		孔径的一半嵌有 π 位相板的复振幅透过率
矩形函数	$\mathrm{rect}\left(\frac{x}{a}\right)=\begin{cases}1 & \lvert x\rvert\leqslant a/2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$		狭缝或矩孔的透过率
三角形函数	$\mathrm{tri}\left(\frac{x}{a}\right)=\begin{cases}1-\frac{\lvert x\rvert}{a} & \lvert x\rvert\leqslant a\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$		光瞳为矩形的非相干成像系统的光学传递函数

（续）

说明 / 常用函数	定　义	图形表示	应　用
sinc 函数	$\operatorname{sinc}\left(\frac{x}{a}\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)}{\frac{\pi x}{a}}$		狭缝或矩孔的夫琅和费衍射图样
高斯函数	$\operatorname{Gaus}\left(\frac{x}{a}\right)=\exp\left[-\pi\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]$		激光器发出的高斯光束
圆域函数	$\operatorname{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r_0}\right)=\begin{cases}1 & \sqrt{x^2+y^2}\leqslant r_0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$		圆孔的透过率

2. 脉冲函数（δ 函数）与梳状函数

（1）δ 函数及其性质

δ 函数有三种定义方式

定义一

$$\begin{cases}\delta(x,y)=0 & x\neq 0,y\neq 0\\ \iint_{-\infty}^{+\infty}\delta(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1\end{cases}\tag{1-1}$$

定义二　可以把 δ 函数定义为宽度逐渐减小、高度逐步增大但体积保持为 1 的一个脉冲序列的极限。常用的表达式有

$$\delta(x,y)=\lim_{N\to\infty}N^2\exp[-N^2\pi(x^2+y^2)]\tag{1-2}$$

$$\delta(x,y)=\lim_{N\to\infty}N^2\operatorname{rect}(Nx)\operatorname{rect}(Ny)\tag{1-3}$$

$$\delta(x,y)=\lim_{N\to\infty}N^2\operatorname{sinc}(Nx)\operatorname{sinc}(Ny)\tag{1-4}$$

定义三 δ函数是一个广义函数，它赋予检验函数 $\phi(x, y)$ 以一个数 $\phi(0, 0)$，即有

$$\iint_{-\infty}^{+\infty}\delta(x,y)\phi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \phi(0,0) \tag{1-5}$$

要求检验函数是连续的、在一个有限区间外为零，并具有所有阶的连续导数。

常用δ函数代表点质量、点电荷、点脉冲、点光源或者其他在某一坐标系中高度集中的物理量。

δ函数的常用性质

筛选性质
$$\iint_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_0,y-y_0)\phi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \phi(x_0,y_0) \tag{1-6}$$

比例变换性质
$$\delta(ax,by) = \left|\frac{1}{ab}\right|\delta(x,y) \tag{1-7}$$

与普通函数的乘积

$$f(x,y)\delta(x-x_0,y-y_0) = f(x_0,y_0)\delta(x-x_0,y-y_0) \tag{1-8}$$

其中假定 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点连续。

（2）梳状函数

沿 x 轴分布，间隔都等于1的无穷多脉冲函数，可用梳状函数表示为

$$\mathrm{comb}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-n) \tag{1-9}$$

同理，间隔为 τ 的等间距脉冲序列表示为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-n\tau) = \frac{1}{\tau}\mathrm{comb}\left(\frac{x}{\tau}\right) \tag{1-10}$$

在 x、y 方向间隔分别等于 a 和 $b(a>0,\ b>0)$ 的二维脉冲阵列为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(x-na,y-mb) = \frac{1}{ab}\mathrm{comb}\left(\frac{x}{a}\right)\mathrm{comb}\left(\frac{y}{b}\right) \tag{1-11}$$

光学上常用梳状函数表示点光源的阵列或小孔阵列的透过率。

梳状函数与普通函数的乘积是

$$f(x)\frac{1}{\tau}\mathrm{comb}\left(\frac{x}{\tau}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n\tau)\delta(x-n\tau) \tag{1-12}$$

可以利用梳状函数对其他普通函数作等间距抽样。

3. 卷积和相关

（1）卷积

两个复值函数 $f(x, y)$ 和 $h(x, y)$ 的卷积定义为

$$f(x, y) * h(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty}f(\xi,\eta)h(x-\xi,y-\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{1-13}$$

卷积计算过程包括折叠、位移、相乘、积分四步。卷积运算满足交换律、分配律和结合律。

任意函数$f(x, y)$与δ函数的卷积

$$f(x,y) * \delta(x,y) = f(x,y) \tag{1-14}$$

$$f(x,y) * \delta(x - x_0, y - y_0) = f(x - x_0, y - y_0)\text{(平移不变性)} \tag{1-15}$$

$f(x, y)$与多个脉冲函数卷积，可在每个脉冲所在位置产生$f(x, y)$的波形。

(2) 相关

两个复值函数$f(x, y)$和$h(x, y)$的互相关定义为

$$r_{fg}(x,y) = f(x,y) \bigstar g(x,y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta) g^*(\xi - x, \eta - y) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \tag{1-16}$$

式中，g^*是函数g的复共轭函数。互相关计算过程包括位移、相乘、积分三步。互相关运算不满足交换律，有$r_{fg}(x, y) = r_{gf}^*(-x, -y)$。

同一函数的相关积分称为自相关，其定义为

$$r_{ff}(x,y) = f(x,y) \bigstar f(x,y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta) f^*(\xi - x, \eta - y) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \tag{1-17}$$

对于复函数，自相关函数是厄米的，即

$$r_{ff}(x,y) = r_{ff}^*(-x, -y) \tag{1-18}$$

对于实函数，自相关函数是实的偶函数，即

$$r_{ff}(x,y) = r_{ff}(-x, -y) \tag{1-19}$$

自相关的模在原点最大，即

$$|r_{ff}(x,y)| \leqslant r_{ff}(0,0) \tag{1-20}$$

4. 傅里叶级数

一个周期性函数$g(x)$，周期为$\tau = \frac{1}{f}$，它满足狄里赫利条件（函数在一个周期内只有有限个极值点和第一类不连续点），则$g(x)$可以展开为三角傅里叶级数和指数傅里叶级数。

三角傅里叶级数

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2\pi nfx) + b_n \sin(2\pi nfx)] \tag{1-21}$$

式中，$a_0 = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} g(x)\mathrm{d}x$；$a_n = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} g(x)\cos(2\pi nfx)\mathrm{d}x$；

$$b_n = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} g(x)\sin(2\pi nfx)\mathrm{d}x \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

指数傅里叶级数

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(\mathrm{j}2\pi nfx) \tag{1-22}$$

其中，$$c_n = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} g(x)\exp(-\mathrm{j}2\pi nfx)\,\mathrm{d}x \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

两种表达形式之间系数的关系为

$$c_0 = \frac{a_0}{2},\ c_n = \frac{1}{2}(a_n - \mathrm{j}b_n),\ c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + \mathrm{j}b_n)(n = 1,2,3,\cdots) \quad (1\text{-}23)$$

傅里叶系数 c_n 是频率 nf 的函数，称为频谱函数。一般 c_n 是复函数，它包括振幅频谱和相位频谱。由于周期性函数只包含 0，$\pm f$，$\pm 2f$，$\pm 3f$，…等频率分量，频率取值是离散的，所以只有离散谱。

5. 傅里叶变换

对非周期函数也可以作傅里叶分析，只是其频率取值不再是离散的，而是连续的。

（1）二维傅里叶变换

非周期函数 $g(x, y)$ 在整个无限 xy 平面上满足狄里赫利条件，而且 $\iint_{-\infty}^{\infty} |g(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 存在，则有

$$g(x,y) = \iint_{-\infty}^{\infty} G(f_x,f_y)\exp[\mathrm{j}2\pi(f_x x + f_y y)]\,\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y = \mathscr{F}^{-1}|G(f_x,f_y)| \quad (1\text{-}24)$$

其中

$$G(f_x,f_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\exp[-\mathrm{j}2\pi(f_x x + f_y y)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathscr{F}|g(x,y)| \quad (1\text{-}25)$$

式中，$G(f_x,f_y)$ 是函数 $g(x,y)$ 的傅里叶变换（或称为傅里叶频谱），$G(f_x,f_y)$ 的作用类似于傅里叶系数 c_n，表示各频率成分的权重因子，描述了各复指数分量的相对幅值和相移；$g(x,y)$ 是频谱函数 $G(f_x,f_y)$ 的傅里叶逆变换。

（2）广义傅里叶变换

若函数可以定义为某个可变换函数所组成的序列的极限，对序列中每一个函数进行变换，组成一个新的变换式序列，这个新序列的极限就是原来函数的广义傅里叶变换。利用广义傅里叶变换的规则，我们可以确定诸如 δ 函数、正/余弦函数、阶跃函数等不满足狄里赫利条件的函数的傅里叶变换。

（3）虚、实、奇、偶函数的傅里叶变换性质

表 1-2 给出虚、实、奇、偶函数的傅里叶变换性质。

表 1-2　虚、实、奇、偶函数的傅里叶变换性质

空域 $g(x,y)$	频域 $G(f_x,f_y)$	空域 $g(x,y)$	频域 $G(f_x,f_y)$
实函数	厄米型函数	虚值偶函数	虚值偶函数
虚函数	反厄米型函数①	虚值奇函数	实值奇函数
实值偶函数	实值偶函数	偶函数	偶函数
实值奇函数	虚值奇函数	奇函数	奇函数

① 若实部为奇函数，虚部为偶函数，则函数是反厄米型函数。

(4) 傅里叶变换定理

设函数 $g(x,y)$ 和 $h(x,y)$ 的傅里叶变换分别是 $G(f_x,f_y)$ 和 $H(f_x,f_y)$，则有

线性定理

$$\mathscr{F}\{ag(x,y) + bh(x,y)\} = aG(f_x,f_y) + bH(f_x,f_y) \tag{1-26}$$

相似性定理

$$\mathscr{F}\{g(ax,by)\} = \frac{1}{|ab|}G\left(\frac{f_x}{a},\frac{f_y}{b}\right) \tag{1-27}$$

位移定理

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\{g(x-a,y-b)\} &= G(f_x,f_y)\exp[-\mathrm{j}2\pi(f_xa+f_yb)]\\ \mathscr{F}\{g(x,y)\exp[\mathrm{j}2\pi(f_ax+f_by)]\} &= G(f_x-f_a,f_y-f_b)\end{aligned} \tag{1-28}$$

帕色伐(Parseval)定理

$$\iint_{-\infty}^{\infty}|g(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{-\infty}^{\infty}|G(f_x,f_y)|^2\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y \tag{1-29}$$

卷积定理

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\{g(x,y)*h(x,y)\} &= G(f_x,f_y)H(f_x,f_y)\\ \mathscr{F}\{g(x,y)h(x,y)\} &= G(f_x,f_y)*H(f_x,f_y)\end{aligned} \tag{1-30}$$

自相关定理

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\{g(x,y)\bigstar g(x,y)\} &= |G(f_x,f_y)|^2\\ \mathscr{F}\{|g(x,y)|^2\} &= G(f_x,f_y)\bigstar G(f_x,f_y)\end{aligned} \tag{1-31}$$

傅里叶积分定理

$$\mathscr{F}\mathscr{F}^{-1}\{g(x,y)\} = \mathscr{F}^{-1}\mathscr{F}\{g(x,y)\} = g(x,y) \tag{1-32}$$

(5) 可分离变量函数的傅里叶变换

若函数 $g(x,y)$ 在直角坐标系内是可分离变量的函数，即 $g(x,y) = g_x(x)\cdot g_y(y)$，则它的二维傅里叶变换式等于两个一维傅里叶变换式的乘积

$$\mathscr{F}\{g(x,y)\} = \mathscr{F}\{g_x(x)\}\mathscr{F}\{g_y(y)\} \tag{1-33}$$

(6) 傅里叶-贝塞尔变换

极坐标系中的函数 $g(r,\theta)$，当它只是半径 r 的函数时，即 $g(r,\theta) = g_R(r)$ 时，则称它为圆对称的。圆对称函数的傅里叶变换式为

$$G(\rho) = 2\pi\int_0^{\infty} rg_R(r)J_0(2\pi r\rho)\mathrm{d}r = \mathscr{B}\{g_R(r)\} \tag{1-34}$$

式中，$\rho = \sqrt{f_x^2+f_y^2}$，是用极坐标表示的频率坐标。

显然，$G(\rho)$ 也是圆对称函数，称之为函数 $g_R(r)$ 的傅里叶-贝塞尔变换，记为 $\mathscr{B}\{g_R(r)\}$，而 $G(\rho)$ 的逆变换记为 $\mathscr{B}^{-1}\{G(\rho)\}$，可计算为

$$g_R(r) = 2\pi\int_0^{\infty}\rho G(\rho)J_0(2\pi r\rho)\mathrm{d}\rho = \mathscr{B}^{-1}\{G(\rho)\} \tag{1-35}$$

(7) 常用傅里叶变换对

表 1-3 给出常用傅里叶变换对。

表 1-3 常用傅里叶变换对

原函数	频谱函数	原函数	频谱函数
1	$\delta(x,y)$	$\mathrm{sgn}(x)\mathrm{sgn}(y)$	$\frac{1}{\mathrm{j}\pi f_x}\frac{1}{\mathrm{j}\pi f_y}$
$\delta(x,y)$	1	$\mathrm{rect}(x)\mathrm{rect}(y)$	$\mathrm{sinc}(f_x)\mathrm{sinc}(f_y)$
$\exp[\mathrm{j}2\pi(f_a x+f_b y)]$	$\delta(f_x-f_a,f_y-f_b)$	$\mathrm{tri}(x)\mathrm{tri}(y)$	$\mathrm{sinc}^2(f_x)\mathrm{sinc}^2(f_y)$
$\delta(x-a,y-b)$	$\exp[-\mathrm{j}2\pi(f_x a+f_y b)]$	$\mathrm{comb}(x)\mathrm{comb}(y)$	$\mathrm{comb}(f_x)\mathrm{comb}(f_y)$
$\cos 2\pi f_0 x$	$\frac{1}{2}[\delta(f_x-f_0)+\delta(f_x+f_0)]$	$\exp[-\pi(x^2+y^2)]$	$\exp[-\pi(f_x^2+f_y^2)]$
$\mathrm{step}(x)$	$\frac{1}{2}\delta(f_x)+\frac{1}{\mathrm{j}2\pi f_x}$	$\mathrm{circ}(r)$	$\frac{J_1(2\pi\rho)}{\rho}$

Ⅱ. 习题解答

本章习题主要内容包括:熟悉 δ 函数、梳状函数、其他常用函数及其傅里叶变换式的运用;熟悉卷积、相关运算以及在实际中的应用,并证明它们的性质;傅里叶变换性质的证明,熟悉这些性质的运用,需要经过大量习题的训练。只有扎实地掌握傅里叶分析的数学处理方法,才能熟练运用这一数学工具对傅里叶光学中的各种问题进行分析和加深理解。习题中特别注意训练用卷积定理的图解分析方法求函数的傅里叶变换或频谱。由于用图形表示出函数在空间域和频率域的对应关系,有利于启迪思维,加深对物理图像的认识。建议读者在后续各章中注意这种方法的运用,把它和公式推导方法更好地结合起来。

1.1 已知函数

$$U(x) = A\exp(\mathrm{j}2\pi f_0 x)$$

求下列函数,并画出函数图形:

(1) $|U(x)|^2$ (2) $U(x)+U^*(x)$ (3) $|U(x)+U^*(x)|^2$

解

(1) $|U(x)|^2 = |A\exp(\mathrm{j}2\pi f_0 x)|^2 = A^2$ (A 为实数)

函数如图 1-1a 所示。

(2) 利用欧拉公式 $\exp(\mathrm{j}\alpha) = \cos\alpha + \mathrm{j}\sin\alpha$, 有

$$U(x)+U^*(x) = A\exp(\mathrm{j}2\pi f_0 x) + A\exp(-\mathrm{j}2\pi f_0 x) = 2A\cos(2\pi f_0 x)$$

函数如图 1-1b 所示。

(3) 利用(2)的结果,有

$$|U(x)+U^*(x)|^2 = 4A^2\cos^2(2\pi f_0 x)$$
$$= 2A^2[1+\cos(4\pi f_0 x)]$$

函数如图 1-1c 所示。

1.2 已知函数

$$f(x) = \text{rect}(x+2) + \text{rect}(x-2)$$

求下列函数,并作出函数图形:

(1) $f(x-1)$

(2) $f(x)\text{sgn}(x)$

解

$f(x)$ 代表两个中心分别在 $x=2$ 和 $x=-2$ 的矩形函数的和,函数图形如图 1-2a 所示。

(1) 利用已知函数,很容易推出

$$f(x-1) = \text{rect}(x-1+2) + \text{rect}(x-1-2)$$
$$= \text{rect}(x+1) + \text{rect}(x-3)$$

这是两个中心分别在 $x=-1$ 和 $x=3$ 的矩形函数的和,函数如图 1-2b 所示。与图 1-2a 相比,图形沿 x 轴整体向右平移了一个单位。

(2) $f(x)\text{sgn}(x) = \text{rect}(x-2) - \text{rect}(x+2)$

函数如图 1-2c 所示。与图 1-2a 相比,图形在 x 的负半轴进行了反转。

1.3 画出下列函数的图形

(1) $f(x) = \text{rect}\left(\frac{x}{4}\right) - \text{rect}\left(\frac{x}{2}\right)$

(2) $g(x) = 2\text{tri}\left(\frac{x}{2}\right) - \text{tri}(x)$

(3) $h(x) = 2\text{tri}\left(\frac{x}{2}\right) - 2\text{tri}(x)$

(4) $p(x) = \text{tri}(x)\text{step}(x)$

解

(1) 函数 $f(x)$ 是两个中心都在

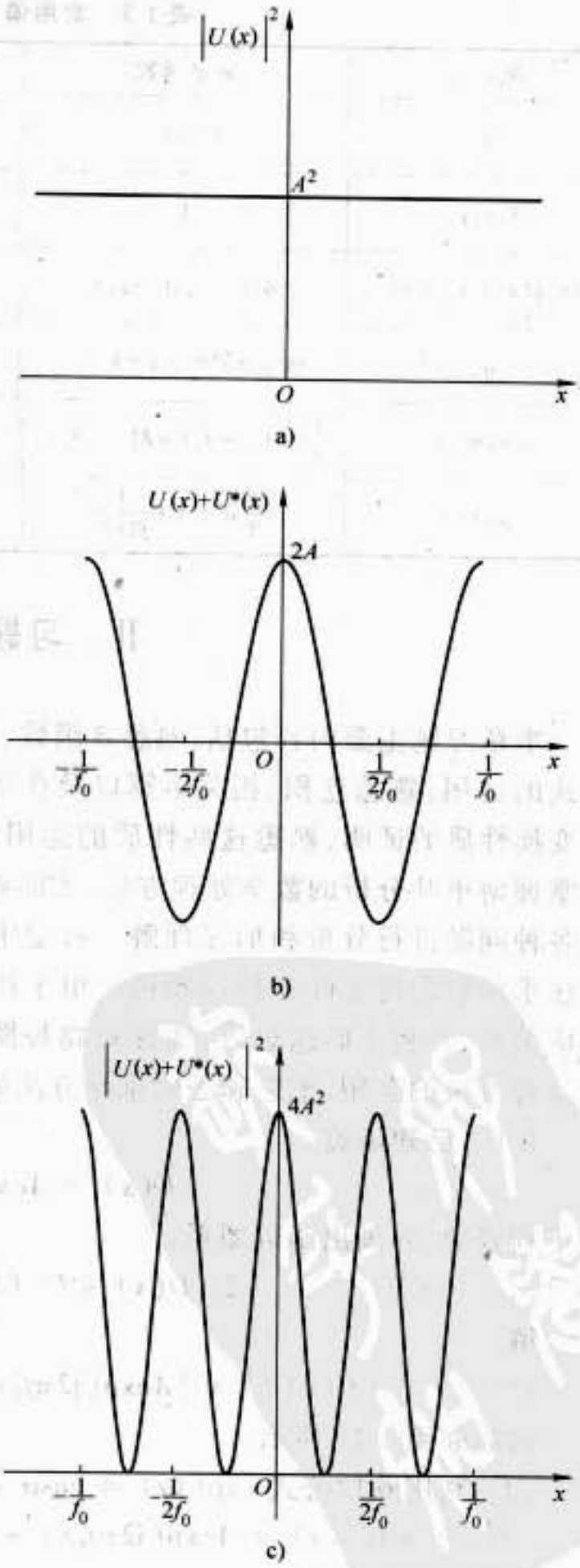


图 1-1

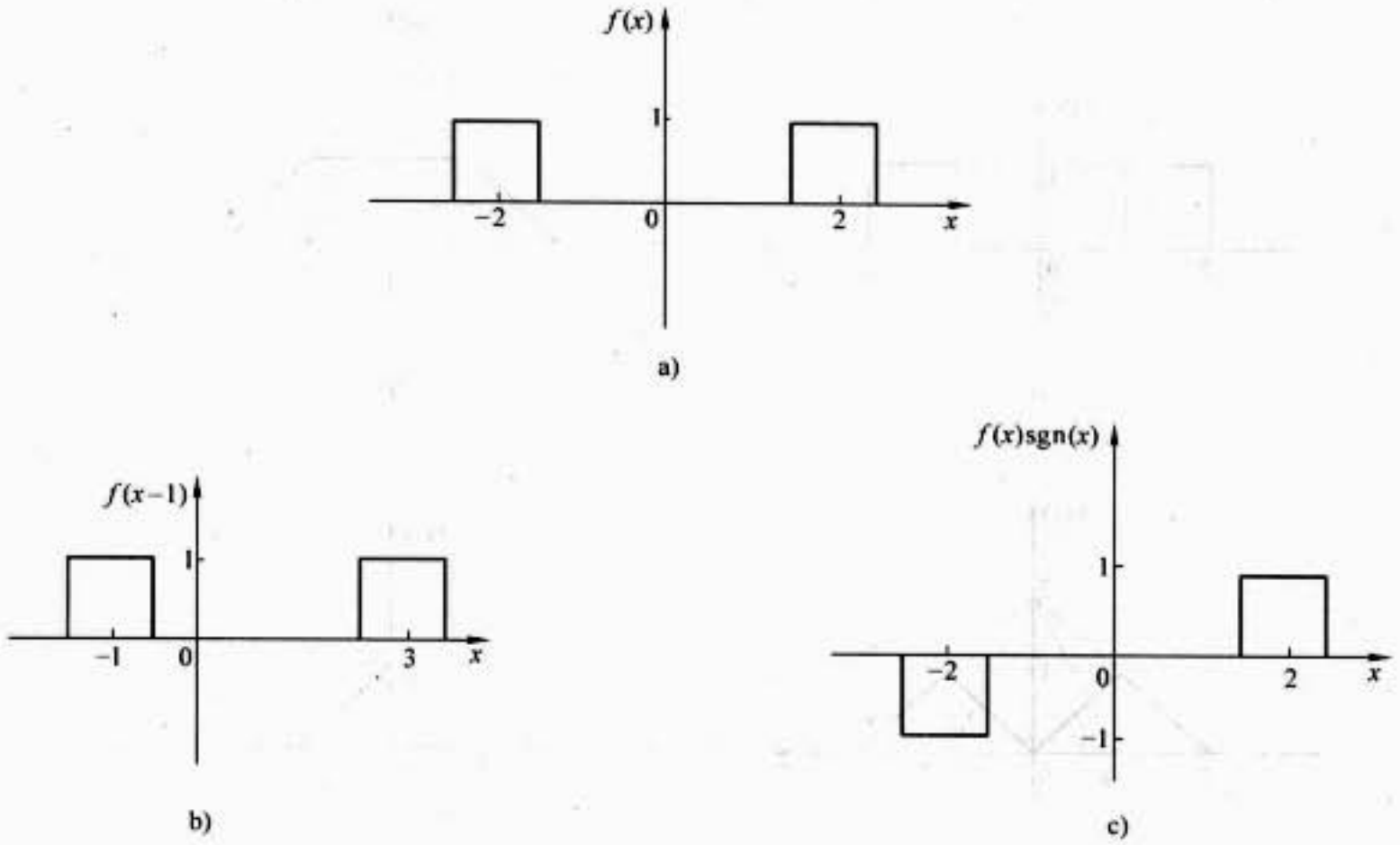


图 1-2

原点，高度都为 1，宽度分别是 4 和 2 的矩形函数的差，如图 1-3a 所示。

（2）函数 $g(x)$ 是两个中心都在原点但中心高度与底边宽度均不同的三角形函数的差，如图 1-3b 所示。

（3）函数 $h(x)$ 是两个中心在原点，中心高度相等，但底边宽度不同的两个三角形函数之差，如图 1-3c 所示。

（4）函数 $p(x)$ 表示用阶跃函数选取三角形函数在 $x>0$ 的区间，如图 1-3d 所示。

1.4　已知连续函数 $f(x)$，若 $x_0>b>0$，利用 δ 函数可筛选出函数在 $x=x_0\pm b$ 的值，试写出运算式。

解

利用 δ 函数的筛选性质，知

$$f(x,y)*\delta(x-x_0,y-y_0)=f(x-x_0,y-y_0)$$

容易推出当 $x_0>b>0$ 时，有

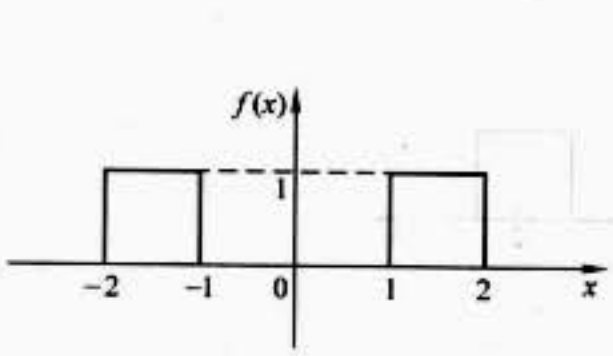
$$f(x_0-b)=f(x)*\delta[x-(x_0-b)]=f(x)*\delta(x-x_0+b)$$

$$f(x_0+b)=f(x)*\delta[x-(x_0+b)]=f(x)*\delta(x-x_0-b)$$

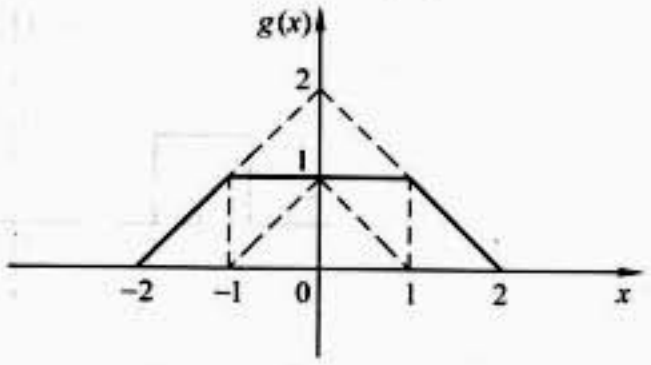
参看图 1-4。

1.5　$f(x)$ 为任意连续函数，$a>0$，求函数

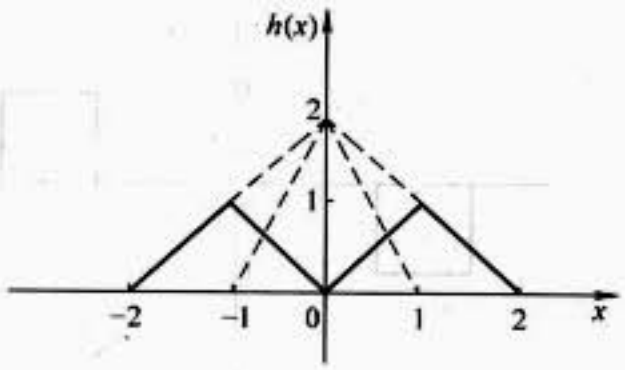
$$g(x)=f(x)[\delta(x+a)-\delta(x-a)]$$



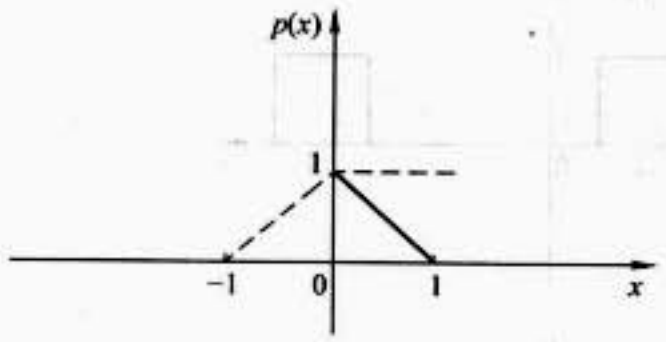
a)



b)



c)



d)

图 1-3

并作出示意图。

解

利用 δ 函数与普通函数的乘积，很容易推出

$$g(x) = f(x)[\delta(x+a) - \delta(x-a)]$$
$$= f(-a)\delta(x+a) - f(a)\delta(x-a)$$

假设 $f(x)$ 如图 1-5a 示，$g(x)$ 则如图 1-5b所示。

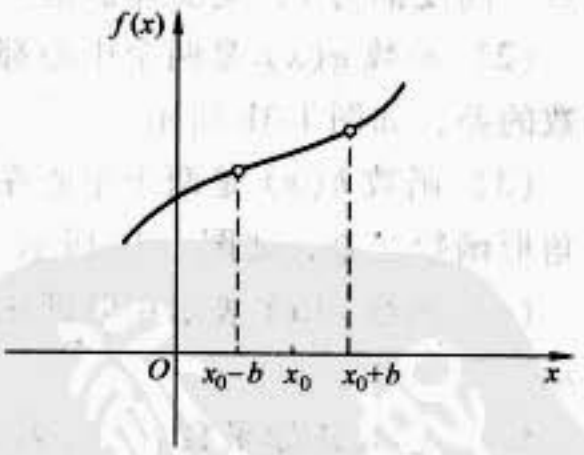


图 1-4

1.6 已知连续函数 $f(x)$，$a>0$ 和 $b>0$，求出下列函数：

(1) $h(x) = f(x)\delta(ax - x_0)$　　(2) $g(x) = f(x)\mathrm{comb}\left(\frac{x-x_0}{b}\right)$

解

(1) 利用 δ 函数的比例性质和筛选性质，且 $a>0$，有

$$h(x) = f(x)\delta(ax - x_0) = \frac{1}{a}f(x)\delta\left(x - \frac{x_0}{a}\right)$$
$$= \frac{1}{a}f\left(\frac{x_0}{a}\right)\delta\left(x - \frac{x_0}{a}\right)$$

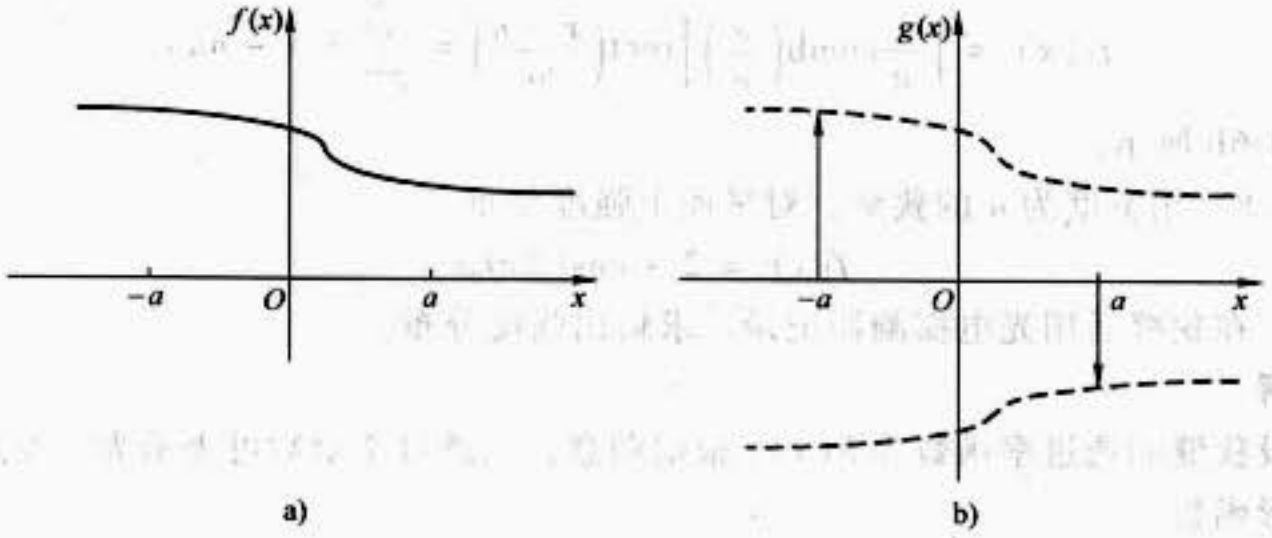


图 1-5

(2) 利用梳状函数的定义，且 $a>0$ 和 $b>0$，有

$$g(x) = f(x)\,\mathrm{comb}\left(\frac{x-x_0}{b}\right) = bf(x)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_0-nb)$$

$$= b\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x_0+nb)\delta(x-x_0-nb)$$

1.7 画出下面函数的图形

(1) $f_1(x) = \left[\frac{1}{a}\mathrm{comb}\left(\frac{x}{a}\right)\right]\mathrm{rect}\left(\frac{x}{5a}\right)$

(2) $f_2(x) = \left[\frac{1}{a}\mathrm{comb}\left(\frac{x}{a}\right)\right]\mathrm{rect}\left(\frac{x-a}{5a}\right)$

解

(1) 利用梳状函数和矩形函数的性质，很容易推出

$$f_1(x) = \left[\frac{1}{a}\mathrm{comb}\left(\frac{x}{a}\right)\right]\mathrm{rect}\left(\frac{x}{5a}\right) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-na)\right]\mathrm{rect}\left(\frac{x}{5a}\right)$$

$$= \sum_{n=-2}^{2}\delta(x-na)$$

如图 1-6a 所示。

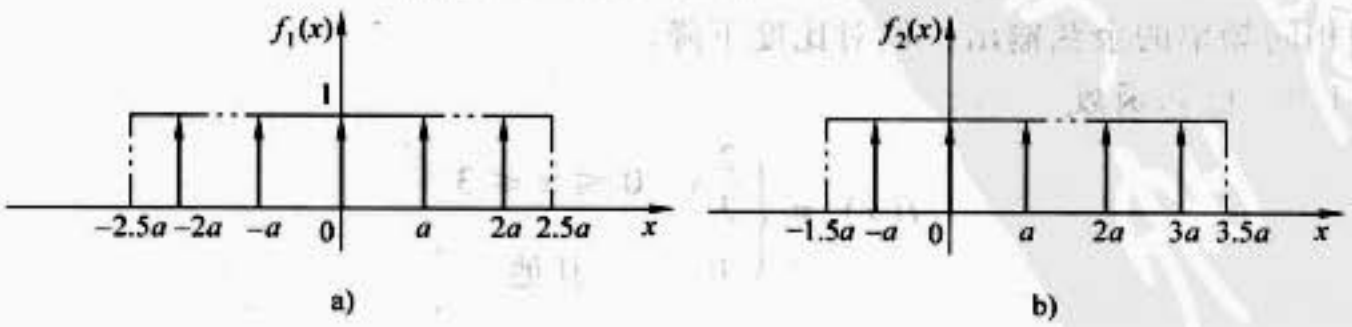


图 1-6

(2) 同理有

$$f_2(x) = \left[\frac{1}{a}\mathrm{comb}\left(\frac{x}{a}\right)\right]\mathrm{rect}\left(\frac{x-a}{5a}\right) = \sum_{n=-1}^{3}\delta(x-na)$$

如图 1-6b 所示。

1.8 用宽度为 a 的狭缝，对平面上强度分布

$$f(x) = 2 + \cos(2\pi f_0 x)$$

扫描，在狭缝后用光电探测器记录。求输出强度分布。

解

设狭缝的透过率函数为 $h(x)$，根据题意，该透过率函数可表示为一宽度为 a 的矩形函数

$$h(x) = \mathrm{rect}\left(\frac{x}{a}\right)$$

若再令在狭缝后用光电探测器记录的光强分布为 $g(x)$，则可知

$$g(x) = f(x) * h(x) = [2 + \cos(2\pi f_0 x)] * \mathrm{rect}\left(\frac{x}{a}\right)$$

将空域中的卷积计算转换到频域中进行处理，将简化计算。令 $g(x)$、$f(x)$ 和 $h(x)$ 对应的傅里叶频谱分别为 $G(f)$、$F(f)$ 和 $H(f)$，则利用上式，如下关系成立：

$$G(f) = F(f)H(f)$$

而且很容易推出

$$F(f) = 2\delta(f) + \frac{1}{2}\delta(f-f_0) + \frac{1}{2}\delta(f+f_0)$$

$$H(f) = a\mathrm{sinc}(af)$$

则

$$G(f) = a\mathrm{sinc}(af)\left[2\delta(f) + \frac{1}{2}\delta(f-f_0) + \frac{1}{2}\delta(f+f_0)\right]$$

$$= 2a\delta(f) + a\mathrm{sinc}(af_0)\left[\frac{1}{2}\delta(f-f_0) + \frac{1}{2}\delta(f+f_0)\right]$$

再利用傅里叶逆变换，不难得出

$$g(x) = 2a + a\mathrm{sinc}(af_0)\cos(2\pi f_0 x)$$

得到相同频率的余弦输出，但对比度下降。

1.9 已知函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x & 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

以及

$$h(x) = \begin{cases} 1 & -1 < x < 3 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

计算 $f(x) * h(x)$，并作图。

解

利用图解的方法来求解 $f(x) * h(x)$，基本过程包括：折叠、位移、相乘和积分四个步骤。$f(x)$ 和 $h(x)$ 的卷积为

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(x-\tau)\mathrm{d}\tau$$

以 τ 为自变量，画出 $f(\tau)$ 和 $h(-\tau)$，如图 1-7a 所示；为计算卷积，对于 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的每一个 x 值，都有一个 $h(x-\tau)$，并存在与之对应的积分值 $g(x)$。

下面，根据位移 x 的大小，分区间进行讨论：

1）当 $x \leqslant -1$ 时，如图 1-7b 所示，$f(\tau)$ 和 $h(x-\tau)$ 乘积为零，所以

$$g(x) = 0$$

2）当 $-1 < x \leqslant 2$ 时，如图 1-7c 所示，有

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(x-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{0}^{3} \frac{2}{3}\tau h(x-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{2}{3}\int_{0}^{x+1} \tau\mathrm{d}\tau = \frac{(x+1)^2}{3}$$

$g(x)$ 是一段抛物线。

3）当 $2 < x \leqslant 3$ 时，如图 1-7d 所示，有

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(x-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{0}^{3} \frac{2}{3}\tau h(x-\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{2}{3}\int_{0}^{3} \tau\mathrm{d}\tau = 3$$

$g(x)$ 是常数。

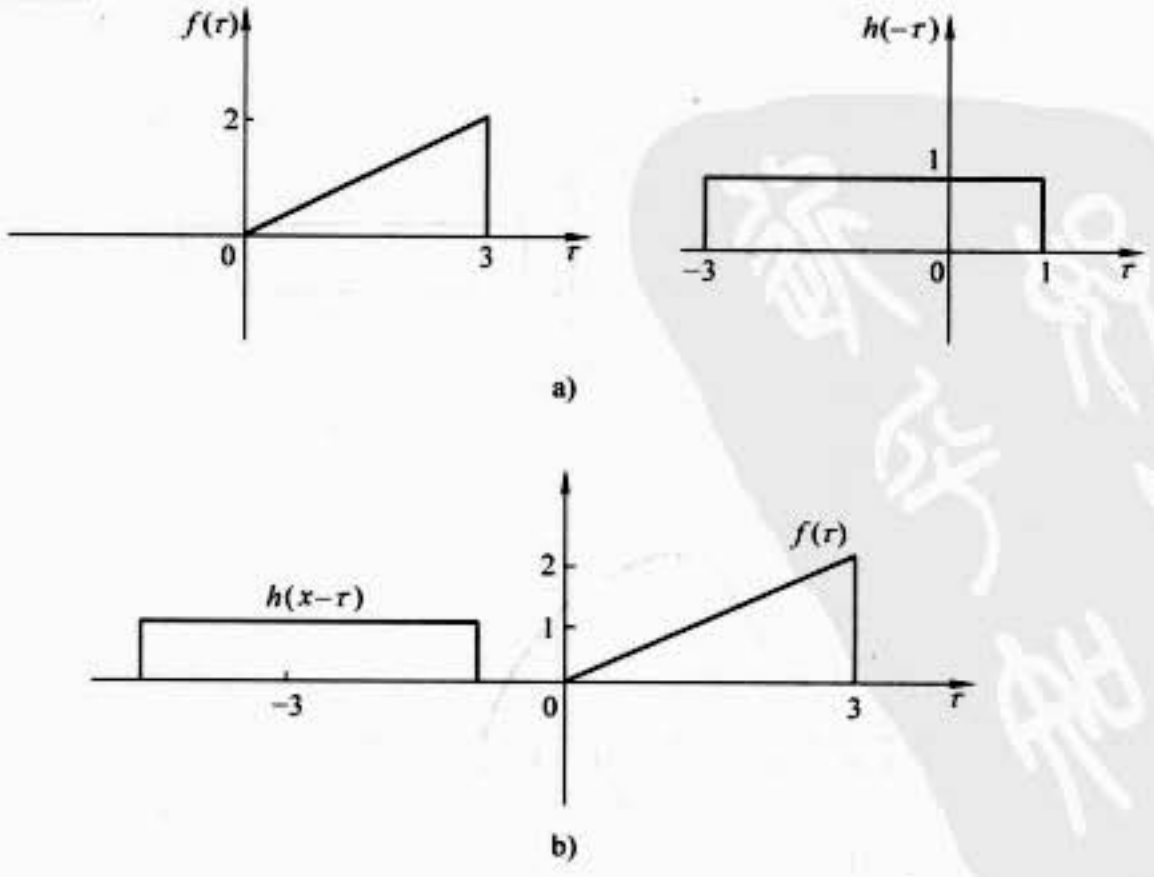
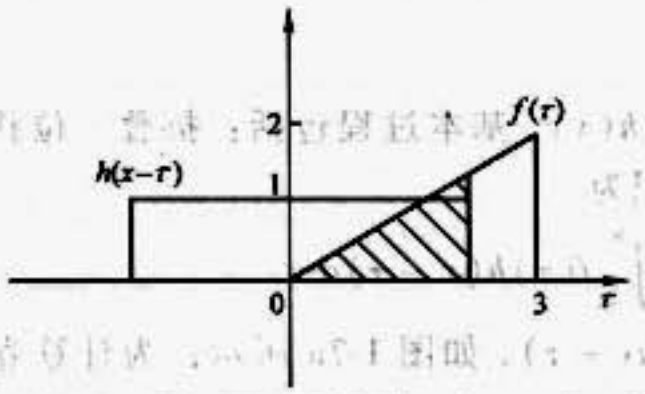
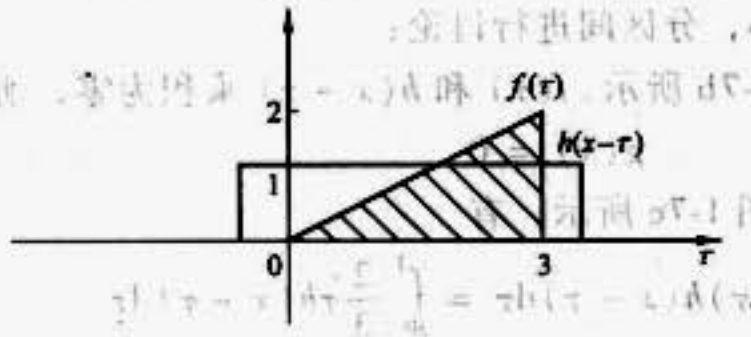


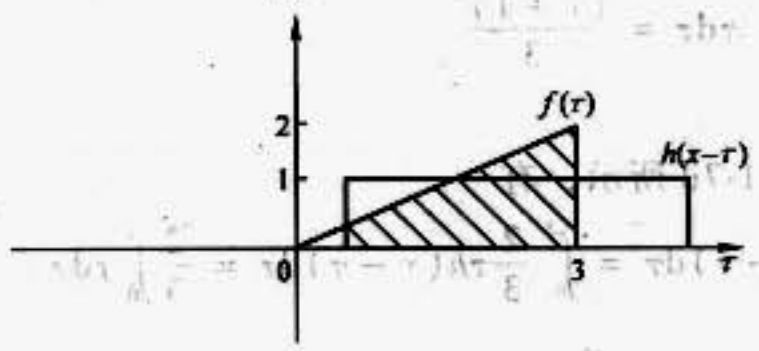
图 1-7


f(τ)
h(x−τ)
2
1
0
3
τ

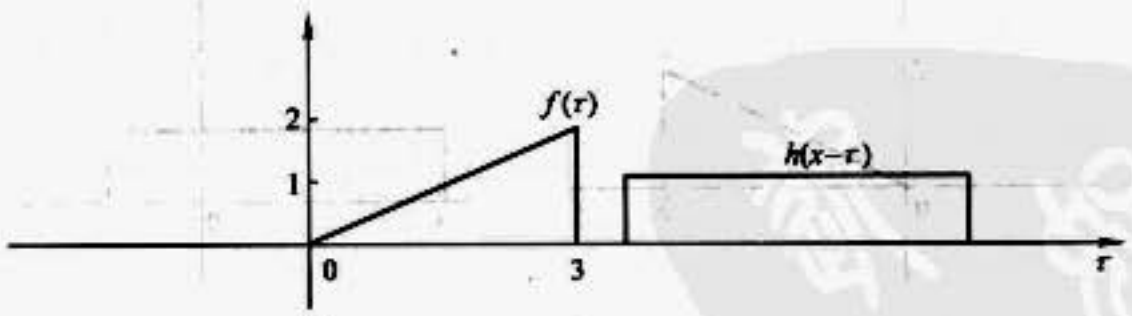
c)


f(τ)
h(x−τ)
2
1
0
3
τ

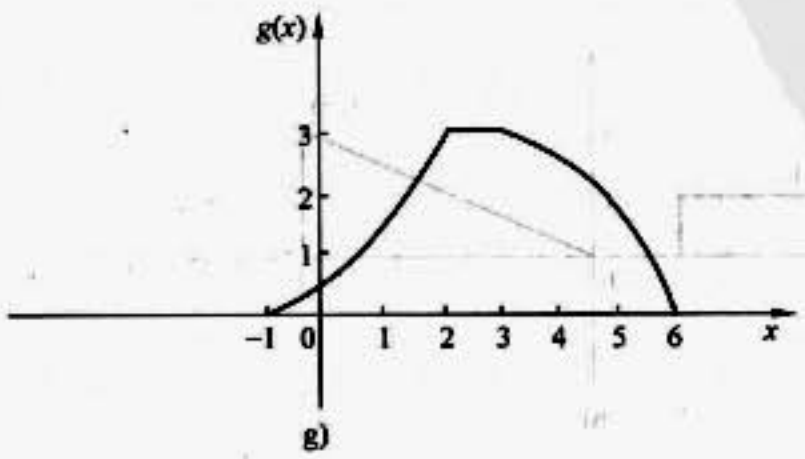
d)


f(τ)
h(x−τ)
2
1
0
3
τ

e)


f(τ)
h(x−τ)
2
1
0
3
τ

f)


g(x)
3
2
1
−1
0
1
2
3
4
5
6
x

g)

图 1-7（续）

4）当 $3 < x \leqslant 6$ 时，如图 1-7e 所示，有

$$g(x) = \frac{2}{3}\int_{x-3}^{3} \tau \mathrm{d}\tau = 3 - \frac{(x-3)^2}{3}$$

$g(x)$ 是另一段抛物线。

5）当 $x > 6$ 时，如图 1-7f 所示，$f(\tau)$ 和 $h(x-\tau)$ 乘积为零，所以

$$g(x) = 0$$

综上所述，最终 $g(x)$ 可以表示为

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant -1 \\ \frac{1}{3}(x+1)^2 & -1 < x \leqslant 2 \\ 3 & 2 < x \leqslant 3 \\ 3 - \frac{1}{3}(x-3)^2 & 3 < x \leqslant 6 \\ 0 & x > 6 \end{cases}$$

如图 1-7g 所示。

1.10　利用梳状函数与矩形函数的卷积表示线光栅的透过率。假定缝宽为 a，光栅常数为 d，缝数为 N。

解

令光栅透过率函数为 $t(x)$，则根据题意，有

$$t(x) = \left[\mathrm{rect}\left(\frac{x}{a}\right) * \frac{1}{d}\mathrm{comb}\left(\frac{x}{d}\right)\right]\mathrm{rect}\left(\frac{x}{Nd}\right)$$

1.11　利用包含脉冲函数的卷积表示图 1-8 所示双圆孔屏的透过率。若在其中任一个圆孔上嵌入 π 位相板，透过率怎样变化？

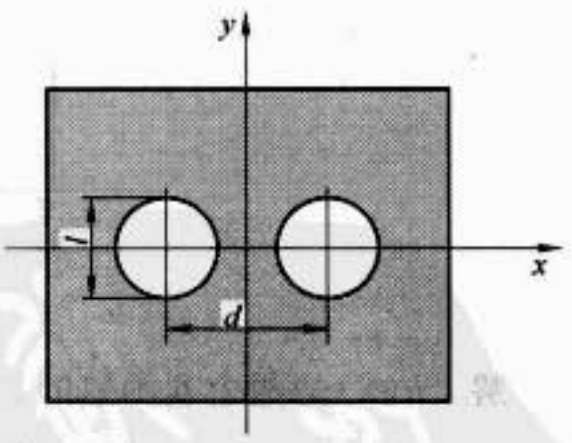


图　1-8

解

每个单孔的透过率都可表示为一个圆域函数

$$\mathrm{circ}(x,y) = \mathrm{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\frac{l}{2}}\right) = \begin{cases} 1 & \sqrt{x^2+y^2} \leqslant l/2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

令透过率为 $t(x,y)$，则图 1-8 所示的双孔透过率可表示为

$$t(x,y) = \mathrm{circ}(x,y) * \left[\delta\left(x - \frac{d}{2}, y\right) + \delta\left(x + \frac{d}{2}, y\right)\right]$$

$$= \mathrm{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\frac{l}{2}}\right) * \left[\delta\left(x - \frac{d}{2}, y\right) + \delta\left(x + \frac{d}{2}, y\right)\right]$$

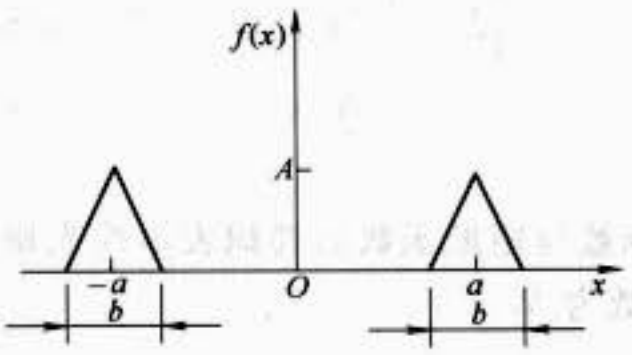
若中心在$\left(-\frac{d}{2},0\right)$的孔嵌入$-\pi$位相板，则透过率$t(x,y)$变为

$$t(x,y) = \mathrm{circ}(x,y) * \left[\delta\left(x-\frac{d}{2},y\right)+\delta\left(x+\frac{d}{2},y\right)\exp(\mathrm{j}\pi)\right]$$

$$= \mathrm{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\frac{l}{2}}\right) * \left[\delta\left(x-\frac{d}{2},y\right)-\delta\left(x+\frac{d}{2},y\right)\right]$$

$$= \mathrm{circ}\left(\frac{\sqrt{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2+y^2}}{\frac{l}{2}}\right) - \mathrm{circ}\left(\frac{\sqrt{\left(x+\frac{d}{2}\right)^2+y^2}}{\frac{l}{2}}\right)$$

1.12　利用图解法求解图 1-9 所示两个函数的卷积$f(x) * h(x)$。



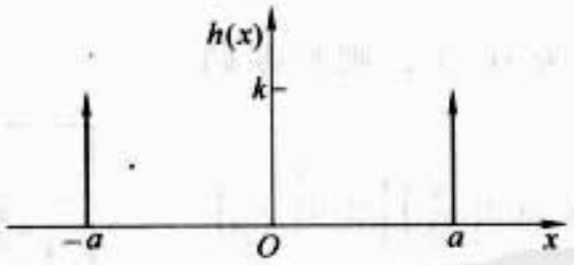


图　1-9

解　$h(x)$是两个 δ 函数的和，可以表示为

$$h(x) = k\delta(x-a) + k\delta(x+a)$$

$f(x)$是两个三角形函数的和，可以表示为

$$f(x) = A\mathrm{tri}\left(\frac{x-a}{0.5b}\right) + A\mathrm{tri}\left(\frac{x+a}{0.5b}\right)$$

将函数$f(x)$与 δ 函数卷积，$f(x)$整体平移，中心移到 δ 函数所在位置。图 1-10 给出了$f(x)$与两个 δ 函数卷积的过程以及最终的结果，最终得到

$$f(x) * h(x) = 2Ak\mathrm{tri}\left(\frac{x}{0.5b}\right) + Ak\mathrm{tri}\left(\frac{x-2a}{0.5b}\right) + Ak\mathrm{tri}\left(\frac{x+2a}{0.5b}\right)$$

1.13　若$f(x) * h(x) = g(x)$，证明下述卷积的性质：

(1) $f(x-x_0) * h(x) = g(x-x_0)$　　(2) $f(x) * h(x) = h(x) * f(x)$

(3) $f\left(\frac{x}{b}\right) * h\left(\frac{x}{b}\right) = |b| g\left(\frac{x}{b}\right)$

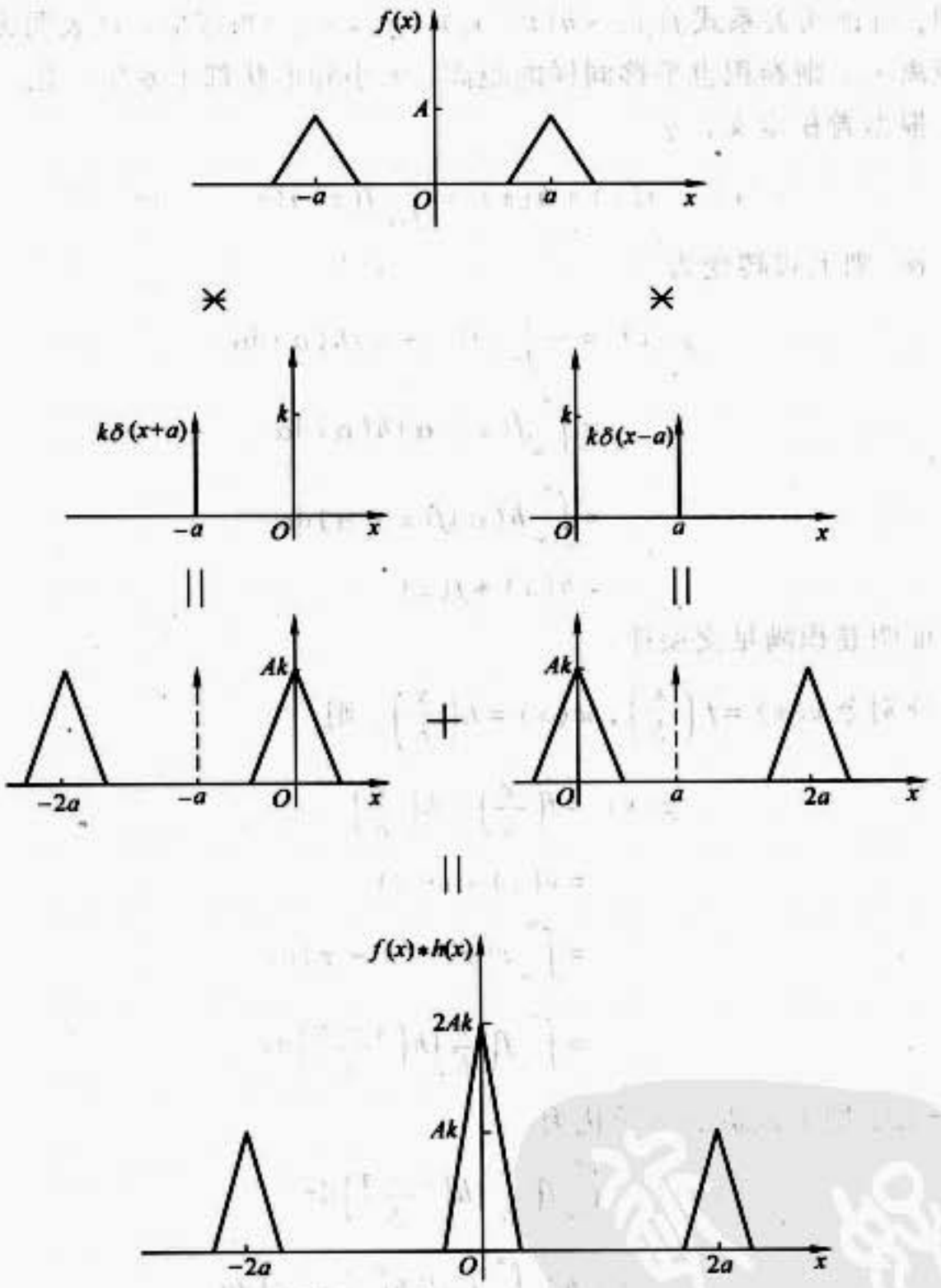


图 1-10

证明

(1) 根据卷积的定义，并令

$$g(x) = f(x) * h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(x-\tau)\mathrm{d}\tau$$

则

$$f(x-x_0) * h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau-x_0)h(x-\tau)\mathrm{d}\tau$$

令 $\tau - x_0 = \alpha$，则上式转变为

$$f(x-x_0) * h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)h[(x-x_0)-\alpha]\mathrm{d}\alpha = g(x-x_0)$$

同理，可证明关系式$f(x)*h(x-x_0)=g(x-x_0)$也成立。这表明无论哪个函数平移距离x_0，则卷积也平移同样的距离，大小和形状都不发生变化。

（2）根据卷积定义，令

$$g(x)=f(x)*h(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)h(x-\tau)\mathrm{d}\tau$$

令$x-\tau=\alpha$，则上式转变为

$$\begin{aligned}g(x)&=-\int_{\infty}^{-\infty}f(x-\alpha)h(\alpha)\mathrm{d}\alpha\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-\alpha)h(\alpha)\mathrm{d}\alpha\\&=\int_{-\infty}^{\infty}h(\alpha)f(x-\alpha)\mathrm{d}\alpha\\&=h(x)*f(x)\end{aligned}$$

于是证明卷积满足交换律。

（3）分别令$v(x)=f\left(\frac{x}{b}\right)$，$w(x)=h\left(\frac{x}{b}\right)$，则

$$\begin{aligned}g(x)&=f\left(\frac{x}{b}\right)*h\left(\frac{x}{b}\right)\\&=v(x)*w(x)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}v(\tau)w(x-\tau)\mathrm{d}\tau\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f\left(\frac{\tau}{b}\right)h\left(\frac{x-\tau}{b}\right)\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

令$\tau=b\beta$，则上式进一步转化为

$$\begin{aligned}g(x)&=\int_{-\infty}^{\infty}f\left(\frac{\tau}{b}\right)h\left(\frac{x-\tau}{b}\right)\mathrm{d}\tau\\&=|b|\int_{-\infty}^{\infty}f(\beta)h\left(\frac{x}{b}-\beta\right)\mathrm{d}\beta\\&=|b|g\left(\frac{x}{b}\right)\end{aligned}$$

即

$$f\left(\frac{x}{b}\right)*h\left(\frac{x}{b}\right)=|b|g\left(\frac{x}{b}\right)$$

该式表明了卷积的定标性质。

1.14　若$g(x,y)=f(x,y)*h(x,y)$，求证

$$\iint_{-\infty}^{\infty}g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left[\iint_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]\left[\iint_{-\infty}^{\infty}h(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$$

即求证卷积下的体积等于两个卷积函数各自体积的乘积。

证明

根据卷积的定义，有

$$\iint_{-\infty}^{\infty} g(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) * h(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty}\left[\iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) h(x-\xi, y-\eta)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

交换积分次序，上式变化为

$$\iint_{-\infty}^{\infty} g(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta)\left[\iint_{-\infty}^{\infty} h(x-\xi, y-\eta)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\left[\iint_{-\infty}^{\infty} h(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$$

$$= \left[\iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]\left[\iint_{-\infty}^{\infty} h(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$$

证明了二维函数卷积下的体积等于两个卷积函数各自体积的乘积。

1.15　已知函数

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{A}{a}x & 0 \leqslant x \leqslant a \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

和

$$h(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < a \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

求下列互相关函数，并画出图形：

(1) $f(x) \bigstar h(x)$　　(2) $h(x) \bigstar f(x)$

解

对于两个函数$f(x)$和$h(x)$，互相关定义为

$$r_{fh}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h^*(\tau - x)\,\mathrm{d}\tau$$

与卷积计算相比，相关运算中函数$h(x)$应取复共轭，不需要进行折叠，而仅进行位移、乘积和积分三个步骤。两个实函数的互相关运算，上式简化为

$$r_{fh}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(\tau - x)\,\mathrm{d}\tau$$

(1) 已知$f(x)$和$h(x)$都是实函数，则可利用上式图解计算其互相关。将τ

取为自变量，画出$f(\tau)$和$h(\tau)$，如图 1-11a 所示；对于$-\infty$到$+\infty$的每一个x值，都有一个$h(\tau-x)$，并存在一个积分值$r_{fh}(x)$与之对应。根据位移x的情况，分区间讨论如下：

若$x\leqslant -a$，如图 1-11b、c 所示，则

$$r_{fh}(x) = 0$$

若$-a<x<0$，如图 1-11d 所示，则

$$r_{fh}(x) = \int_0^{a+x} \frac{A}{a}\tau \mathrm{d}\tau = \frac{A}{2a}(a+x)^2$$

若$0\leqslant x<a$，如图 1-11e 所示，则

$$r_{fh}(x) = \int_x^a \frac{A}{a}\tau \mathrm{d}\tau = \frac{A}{2a}(a^2-x^2)$$

若$x\geqslant a$，如图 1-11f、g 所示，则

$$r_{fh}(x) = 0$$

综上所述，则有

$$r_{fh}(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant -a \\ \dfrac{A}{2a}(a+x)^2 & -a < x < 0 \\ \dfrac{A}{2a}(a^2-x^2) & 0 \leqslant < x < a \\ 0 & x \geqslant a \end{cases}$$

如图 1-11h 所示。

(2) $r_{hf}(x) = h(x)\bigstar f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)f(\tau-x)\mathrm{d}\tau$

求解过程与上面的类似，这里不再赘述，只给出主要结果：

若$x\leqslant -a$，如图 1-12a、b 所示，则

$$r_{hf}(x) = 0$$

若$-a<x<0$，如图 1-12c 所示，则

$$r_{hf}(x) = \int_0^{a+x} \frac{A}{a}(\tau-x)\mathrm{d}\tau = \frac{A}{2a}(a^2-x^2)$$

若$0\leqslant x<a$，如图 1-12d 所示，则

$$r_{hf}(x) = \int_x^a \frac{A}{a}(\tau-x)\mathrm{d}\tau = \frac{A}{2a}(a-x)^2$$

若$x\geqslant a$，如图 1-12e、f 所示，则

$$r_{hf}(x) = 0$$

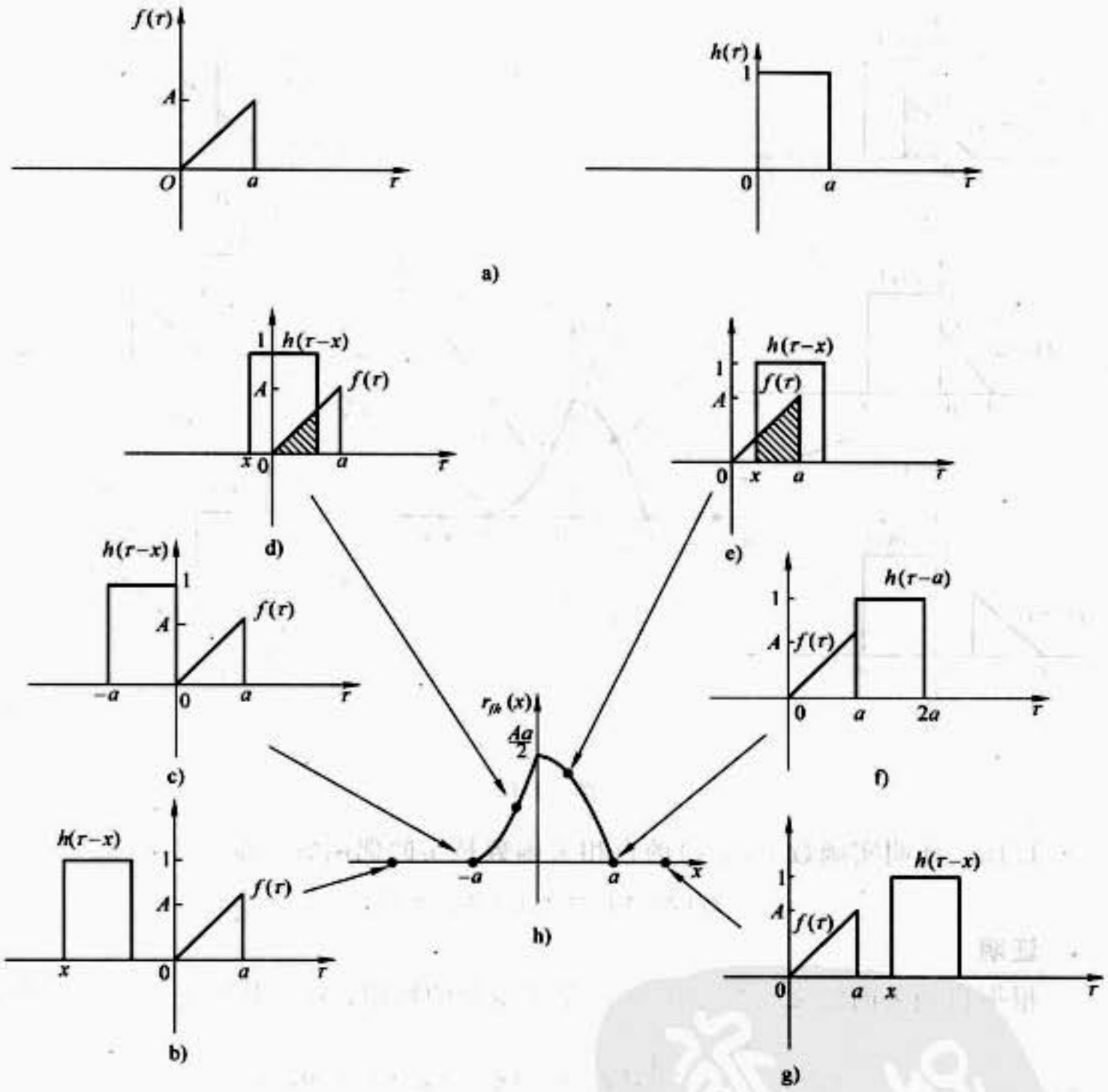


图 1-11

综上所述，则

$$r_{hf}(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant -a\\ \dfrac{A}{2a}(a^2-x^2) & -a<x<0\\ \dfrac{A}{2a}(a-x)^2 & 0\leqslant <x<a\\ 0 & x\geqslant a\end{cases}$$

如图 1-12g 所示。

从上面的计算可见，和卷积不同，互相关运算不遵守交换律，有 $r_{fg}(x,y)=r_{gf}^{*}(-x,-y)$。

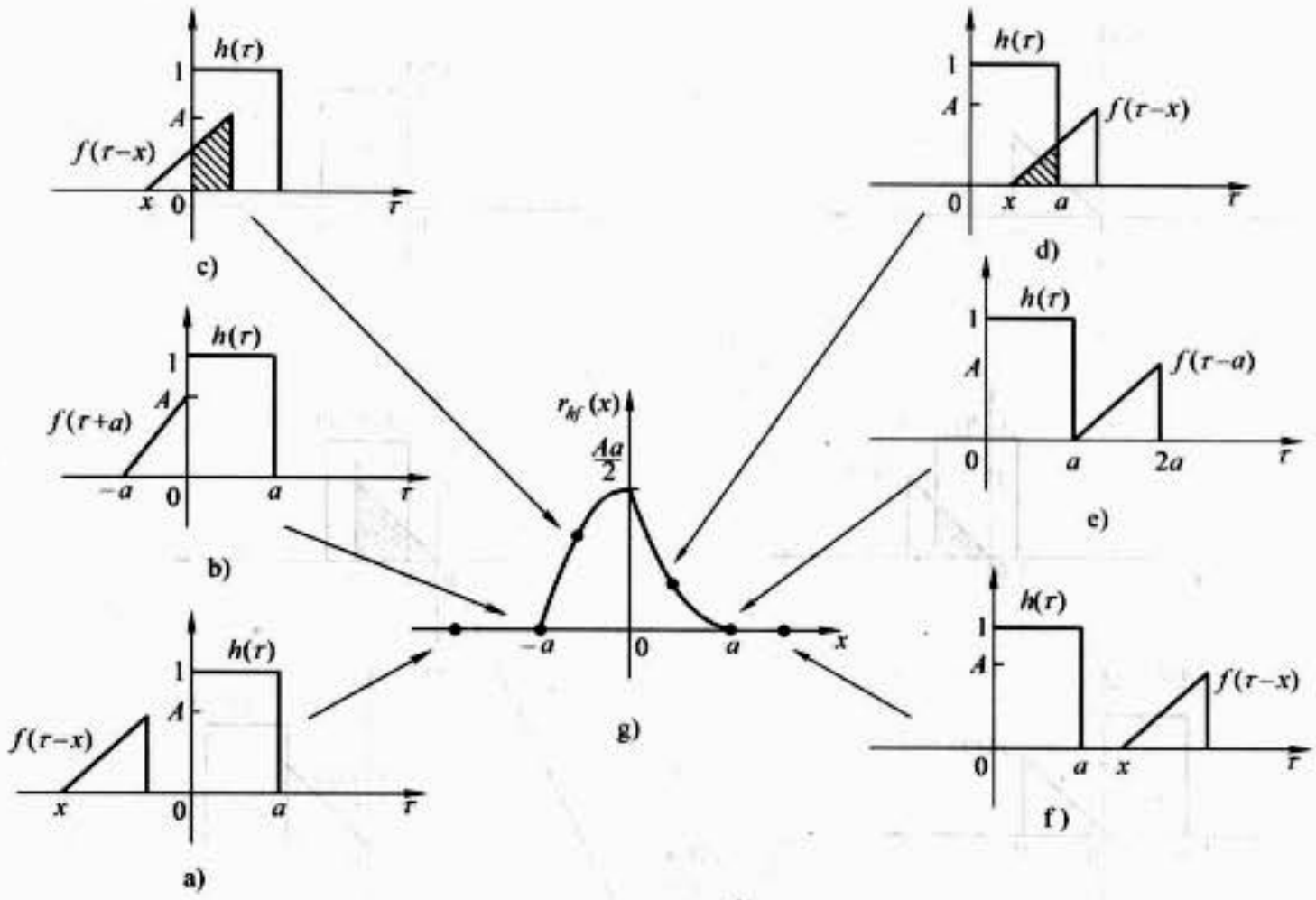


图 1-12

1.16 证明实函数 $f(x, y)$ 的自相关函数是实的偶函数，即

$$r_{ff}(x, y) = r_{ff}(-x, -y)$$

证明

根据自相关的定义，以及 $f(x, y)$ 是实函数的性质，其复共轭是其本身，则有

$$r_{ff}(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) f(\xi - x, \eta - y) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta$$

令 $\xi - x = \alpha$，$\eta - y = \beta$，则上式转换为

$$\begin{aligned} r_{ff}(x, y) &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) f(\alpha + x, \beta + y) \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) f[\alpha - (-x), \beta - (-y)] \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta \\ &= r_{ff}(-x, -y) \end{aligned}$$

于是证明了实函数的自相关函数是实的偶函数。

1.17 已知函数

$$f(x) = \mathrm{rect}(x + 2) + \mathrm{rect}(x - 2)$$

求函数的自相关，并画出图形。

解

本题目可采用图解的方法，其基本思路在 1.15 题中已做详细介绍，这里不再赘述，只给出主要结果。$f(x)$如图 1-13a 所示。

1）当 $x < -5$ 时，如图 1-13b 所示，有

$$r_{ff}(x) = 0$$

2）当 $-5 \leqslant x \leqslant -3$ 时，如图 1-13c 所示，有

$$r_{ff}(x) = \mathrm{tri}(x+4)$$

3）当 $-3 < x < -1$ 时，如图 1-13d 所示，有

$$r_{ff}(x) = 0$$

4）当 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 时，如图 1-13e 所示，有

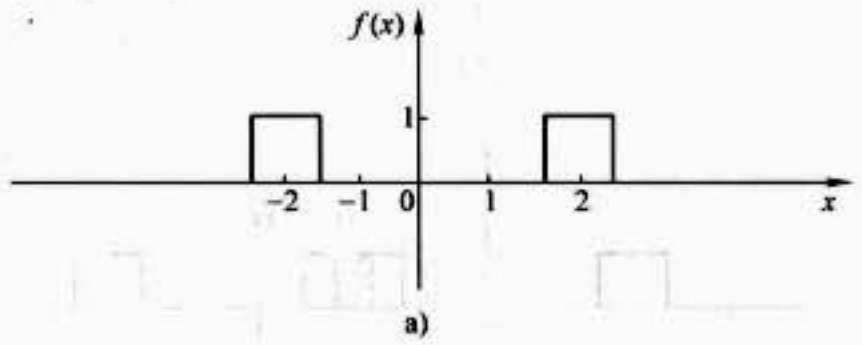
$$r_{ff}(x) = 2\mathrm{tri}(x)$$

5）当 $1 < x < 3$ 时，如图 1-13f 所示，有

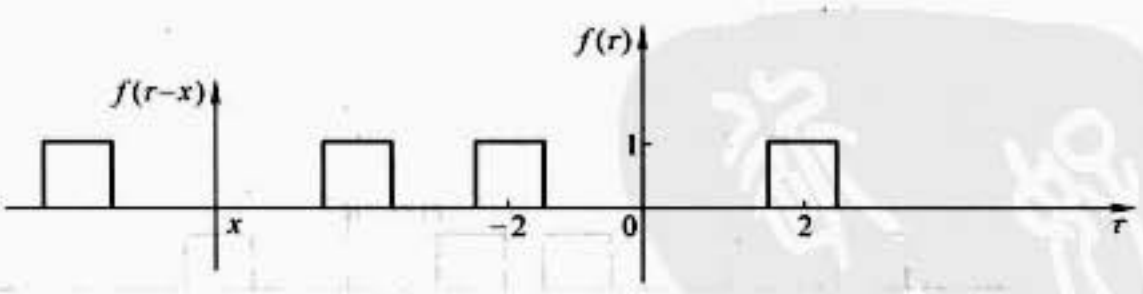
$$r_{ff}(x) = 0$$

6）当 $3 \leqslant x \leqslant 5$ 时，如图 1-13g 所示，有

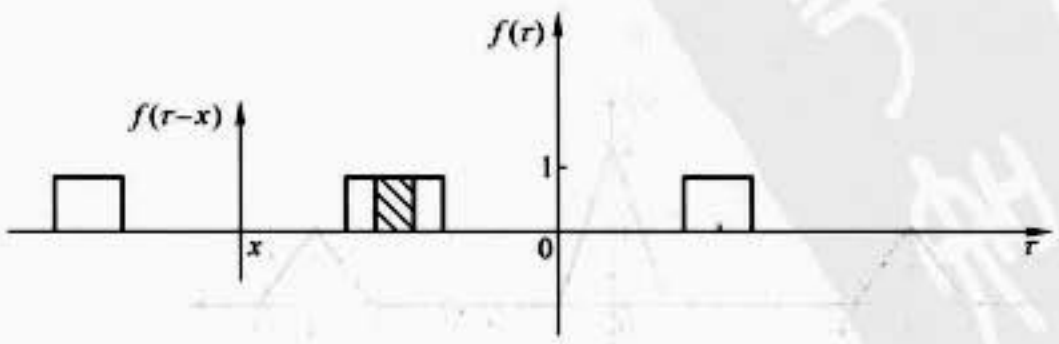
$$r_{ff}(x) = \mathrm{tri}(x-4)$$



a)

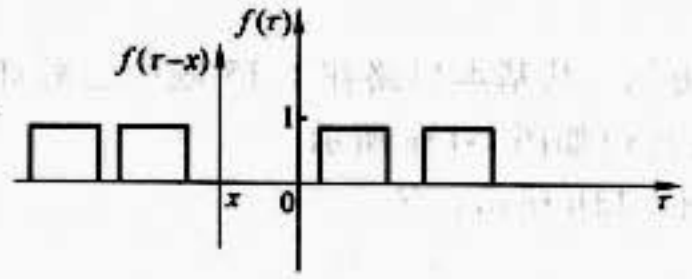


b)

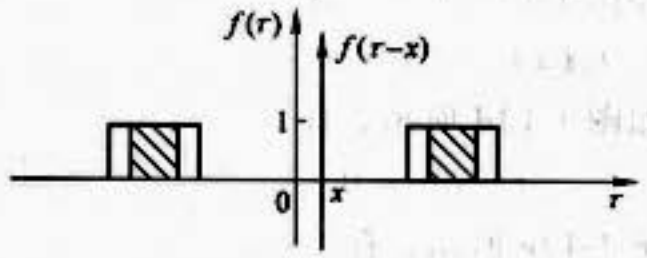


c)

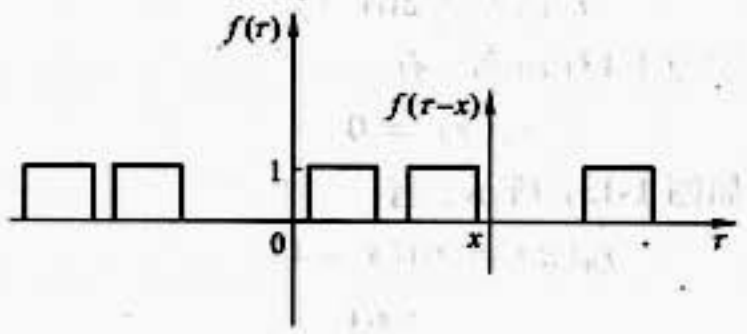
图　1-13



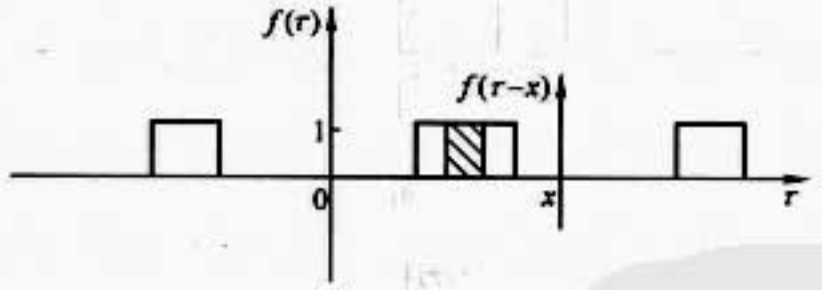
d)



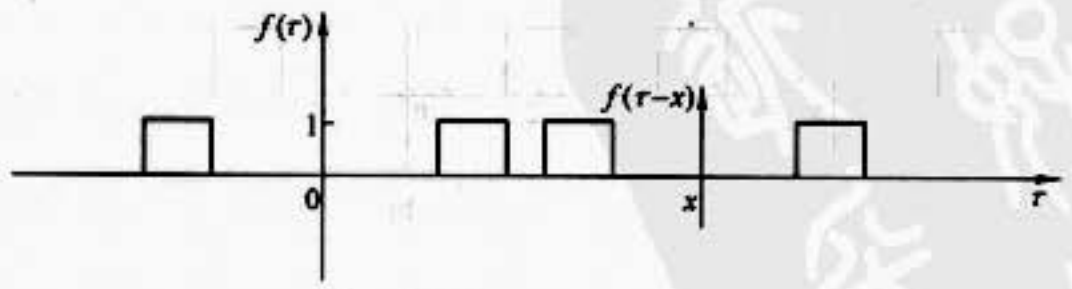
e)



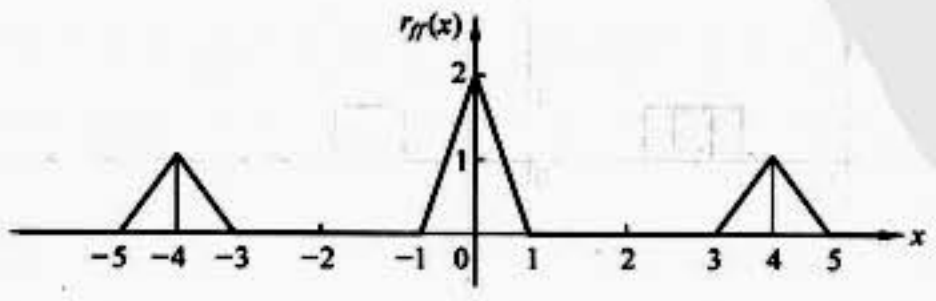
f)



g)



h)



i)

图 1-13 （续）

7）当 $x>5$ 时，如图 1-13h 所示，有

$$r_{ff}(x) = 0$$

综上所述，可确定

$$r_{ff}(x) = 2\mathrm{tri}(x) + \mathrm{tri}(x+4) + \mathrm{tri}(x-4)$$

如图 1-13i 所示。

除了使用图解的方法，本题目也可以利用自相关定理来进行求解：

$$\mathscr{F}[f(x,y) \star f(x,y)] = |F(f_x, f_y)|^2$$

$f(x)$的傅里叶频谱为

$$F(f_x) = 2\mathrm{sinc}(f_x)\cos 4\pi f_x$$

则有

$$|F(f_x, f_y)|^2 = \mathrm{sinc}^2(f_x)[2 + \exp(-\mathrm{j}8\pi f_x) + \exp(\mathrm{j}8\pi f_x)]$$

其傅里叶逆变换为

$$\begin{aligned} f(x,y) \star f(x,y) &= \mathscr{F}^{-1}\{|F(f_x, f_y)|^2\} \\ &= 2\mathrm{tri}(x) + \mathrm{tri}(x-4) + \mathrm{tri}(x+4) \end{aligned}$$

这与上面图解方法得到的结果完全相同。

1.18　把下列函数表示成指数傅里叶级数，并画出频谱：

(1) $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}(x-2n)$

(2) $g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{tri}(x-2n)$

解

（1）函数$f(x)$表示的是周期 $\tau=2$ 的矩形波(方波)，它可以展开为如下的指数傅里叶级数的形式：

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(\mathrm{j}2\pi n f_0 x) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

式中，$f_0 = \dfrac{1}{\tau} = \dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} f(x)\exp(-\mathrm{j}2\pi n f_0 x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_{-0.5}^{0.5} \exp(-\mathrm{j}2\pi n f_0 x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{-\mathrm{j}2\pi n f_0}\right)[\exp(-\mathrm{j}\pi n f_0) - \exp(\mathrm{j}\pi n f_0)] \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{sinc}(n f_0) = \frac{1}{2}\mathrm{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) \end{aligned}$$

即

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)\exp(\mathrm{j}2\pi n f_0 x)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)\exp(\mathrm{j}\pi n x) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

其频谱如图 1-14a 所示。

(2) 函数 $g(x)$表示周期 $\tau = 2$ 的三角波(锯齿波)，同样可以展开为如下的指数傅里叶级数的形式：

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(\mathrm{j}2\pi n f_0 x) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

式中，$f_0 = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2}$

因为 tri(x)是偶函数，故

$$c_n = \frac{2}{\tau}\int_0^1 (1 - x)\cos(2\pi n f_0 x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{4\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{(n\pi)^2} = \operatorname{sinc}^2\left(\frac{n}{2}\right)$$

所以

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{n}{2}\right)\exp(\mathrm{j}\pi n x) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

其频谱如图 1-14b 所示。

1.19 已知复函数 $g(x, y)$的傅里叶变换式为 $G(f_x, f_y)$，证明下列傅里叶变换定理：

(1) $\mathscr{F}\mathscr{F}|g(x, y)| = g(-x, -y)$　　(2) $\mathscr{F}|g^*(x, y)| = G^*(-f_x, -f_y)$

(3) $\mathscr{F}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right]g(x, y)\right\} = \mathrm{j}2\pi(f_x + f_y)G(f_x, f_y)$

证明

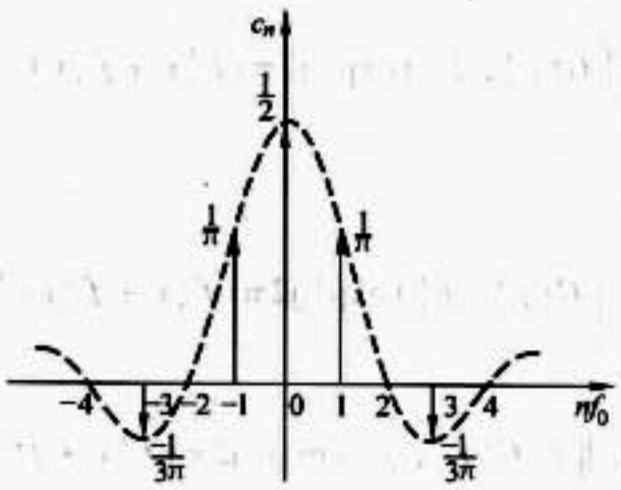
(1) 根据傅里叶变换的基本定义，有

$$\mathscr{F}\mathscr{F}|g(x, y)| = \mathscr{F}|G(f_x, f_y)|$$

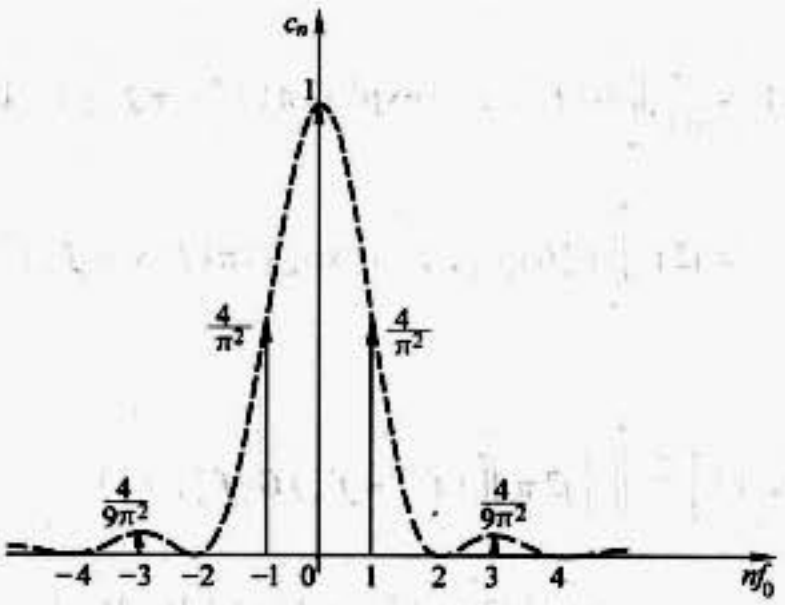
$$= \iint_{-\infty}^{\infty} G(f_x, f_y)\exp[-\mathrm{j}2\pi(xf_x + yf_y)]\,\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} G(f_x, f_y)\exp|\mathrm{j}2\pi[f_x(-x) + f_y(-y)]|\,\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y$$

$$= g(-x, -y)$$



a)



b)

图 1-14

(2) $g(x, y)$是 $G(f_x, f_y)$的傅里叶逆变换，有

$$g(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} G(f_x, f_y)\exp[j2\pi(f_x x + f_y y)]\,df_x df_y$$

其复共轭为

$$g^*(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} G^*(f_x, f_y)\exp[-j2\pi(f_x x + f_y y)]\,df_x df_y$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} G^*(-f_x, -f_y)\exp[j2\pi(f_x x + f_y y)]\,d(-f_x)\,d(-f_y)$$

因此

$$\mathscr{F}|g^*(x, y)| = G^*(-f_x, -f_y)$$

(3) 已知

$$g(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} G(f'_x, f'_y)\exp[\mathrm{j}2\pi(f'_x x + f'_y y)]\mathrm{d}f'_x\mathrm{d}f'_y$$

则

$$\frac{\partial}{\partial x}g(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\iint_{-\infty}^{\infty} G(f'_x, f'_y)\exp[\mathrm{j}2\pi(f'_x x + f'_y y)]\mathrm{d}f'_x\mathrm{d}f'_y$$

$$= \mathrm{j}2\pi\iint_{-\infty}^{\infty} f'_x G(f'_x, f'_y)\exp[\mathrm{j}2\pi(f'_x x + f'_y y)]\mathrm{d}f'_x\mathrm{d}f'_y$$

同理

$$\frac{\partial}{\partial y}g(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\iint_{-\infty}^{\infty} G(f'_x, f'_y)\exp[\mathrm{j}2\pi(f'_x x + f'_y y)]\mathrm{d}f'_x\mathrm{d}f'_y$$

$$= \mathrm{j}2\pi\iint_{-\infty}^{\infty} f'_y G(f'_x, f'_y)\exp[\mathrm{j}2\pi(f'_x x + f'_y y)]\mathrm{d}f'_x\mathrm{d}f'_y$$

则

$$\mathscr{F}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right]g(x, y)\right\} = \iint_{-\infty}^{\infty}\left\{\mathrm{j}2\pi\iint_{-\infty}^{\infty}(f'_x + f'_y)G(f'_x, f'_y)\right.$$
$$\left.\times\exp[\mathrm{j}2\pi(f'_x x + f'_y y)]\mathrm{d}f'_x\mathrm{d}f'_y\right\}$$
$$\times\exp[-\mathrm{j}2\pi(f_x x + f_y y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \mathrm{j}2\pi\iint_{-\infty}^{\infty}(f'_x + f'_y)G(f'_x, f'_y)\mathrm{d}f'_x\mathrm{d}f'_y$$
$$\times\iint_{-\infty}^{\infty}\exp\{-\mathrm{j}2\pi[(f_x - f'_x)x + (f_y - f'_y)y]\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \mathrm{j}2\pi\iint_{-\infty}^{\infty}(f'_x + f'_y)G(f'_x, f'_y)\delta(f_x - f'_x, f_y - f'_y)\mathrm{d}f'_x\mathrm{d}f'_y$$

$$= \mathrm{j}2\pi(f_x + f_y)G(f_x, f_y)$$

1.20 若 $\mathscr{F}\{g(x, y)\} = G(f_x, f_y)$，$\mathscr{F}\{h(x, y)\} = H(f_x, f_y)$，求证：

(1) $\mathscr{F}[g(x, y) \bigstar h(x, y)] = G(f_x, f_y)H^*(f_x, f_y)$

(2) $\iint_{-\infty}^{\infty} g(x, y)h^*(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{-\infty}^{\infty} G(f_x, f_y)H^*(f_x, f_y)\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y$

证明

$$(1)\ \mathscr{F}[g(x,y)\bigstar h(x,y)] = \iint_{-\infty}^{\infty}\left[\iint_{-\infty}^{\infty} g(\xi,\eta)h^*(\xi-x,\eta-y)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right]$$
$$\times \exp[-\mathrm{j}2\pi(f_x x+f_y y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \iint_{-\infty}^{\infty} g(\xi,\eta)\exp[-\mathrm{j}2\pi(f_x\xi+f_y\eta)]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$
$$\times \iint_{-\infty}^{\infty} h^*(\xi-x,\eta-y)$$
$$\times \exp\{-\mathrm{j}2\pi[f_x(x-\xi)+f_y(y-\eta)]\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= G(f_x,f_y)\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} h(\xi-x,\eta-y)\exp\{-\mathrm{j}2\pi\right.$$
$$\left.\times[f_x(\xi-x)+f_y(\eta-y)]\}\mathrm{d}(\xi-x)\mathrm{d}(\eta-y)\right\}^*$$
$$= G(f_x,f_y)H^*(f_x,f_y)$$

$$(2)\ \iint_{-\infty}^{\infty} g(x,y)h^*(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{-\infty}^{\infty}\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} G(f_x,f_y)\exp[\mathrm{j}2\pi(f_x x+f_y y)]\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y\right\}$$
$$\times\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} H^*(-f'_x,-f'_y)\exp[\mathrm{j}2\pi(f'_x x+f'_y y)]\right.$$
$$\left.\times \mathrm{d}f'_x\mathrm{d}f'_y\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \iint_{-\infty}^{\infty}\cdot\iint_{-\infty}^{\infty} G(f_x,f_y)H^*(-f'_x,-f'_y)\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y\mathrm{d}f'_x\mathrm{d}f'_y$$
$$\times \iint_{-\infty}^{\infty}\exp\{\mathrm{j}2\pi[(f_x+f'_x)x+(f_y+f'_y)y]\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \iint_{-\infty}^{\infty} G(f_x,f_y)\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y\iint_{-\infty}^{\infty} H^*(-f'_x,-f'_y)$$
$$\times\delta[-(f_x+f'_x),-(f_y+f'_y)]\mathrm{d}f'_x\mathrm{d}f'_y$$
$$= \iint_{-\infty}^{\infty} G(f_x,f_y)H^*(f_x,f_y)\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y$$

1.21　函数的等效面积 $\Delta_{x,y}$ 和等效带宽 Δ_{f_x,f_y} 分别定义为

$$\Delta_{xy} = \left| \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} g(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{g(0,0)} \right|$$

$$\Delta_{f_x f_y} = \left| \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} G(f_x, f_y)\,\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y}{G(0,0)} \right|$$

证明：$\Delta_{xy}\Delta_{f_x f_y} = 1$，即函数的等效面积和等效带宽成反比。

证明

由傅里叶变换及逆变换的定义，可知

$$G(f_x, f_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} g(x, y)\exp[-\mathrm{j}2\pi(f_x x + f_y y)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

和

$$g(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} G(f_x, f_y)\exp[\mathrm{j}2\pi(f_x x + f_y y)]\,\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y$$

分别取 $f_x = f_y = 0$ 和 $x = y = 0$，分别得到如下关系：

$$G(0, 0) = \iint_{-\infty}^{\infty} g(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

和

$$g(0, 0) = \iint_{-\infty}^{\infty} G(f_x, f_y)\,\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y$$

则

$$\Delta_{xy}\Delta_{f_x f_y} = \left| \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} g(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{g(0,0)} \right| \left| \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} G(f_x, f_y)\,\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y}{G(0,0)} \right|$$

$$= \left| \frac{G(0,0)}{g(0,0)} \right| \left| \frac{g(0,0)}{G(0,0)} \right| = 1$$

即证明了函数的等效面积与等效带宽成反比。

1.22　求下列函数的傅里叶变换式：

(1) $\mathrm{rect}\left(\frac{x-a}{b}\right)$　　(2) $\mathrm{tri}\left(\frac{x}{a}\right)\mathrm{tri}\left(\frac{x}{b}\right)$

解

(1) 根据常用傅里叶变化式，同时结合相似性定理和位移定理，很容易得到

$$\mathscr{F}\left\{\mathrm{rect}\left(\frac{x-a}{b}\right)\right\} = b\,\mathrm{sinc}(bf_x)\exp(-\mathrm{j}2\pi a f_x)$$

(2) 同理可得到

$$\mathscr{F}\left\{\mathrm{tri}\left(\frac{x}{a}\right)\mathrm{tri}\left(\frac{x}{b}\right)\right\} = ab\mathrm{sinc}^2(af_x)\mathrm{sinc}^2(bf_x)$$

1.23 求下列函数的广义傅里叶变换:

(1) $\mathrm{step}(x)$ (2) $\mathrm{sgn}(x)$ (3) $\sin(2\pi f_0 x)$

解

(1) 由阶跃函数定义知

$$\mathrm{step}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \dfrac{1}{2} & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

该函数不满足傅里叶变换条件,需要采用广义傅里叶变换方法。把它表示为负指数函数序列极限的形式,即

$$\mathrm{step}(x) = \begin{cases} \lim\limits_{\alpha\to 0} e^{-\alpha x} & x > 0 \\ \dfrac{1}{2} & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \qquad (\alpha > 0)$$

根据广义傅里叶变换定义并根据脉冲函数的性质,有

$$\begin{aligned} \mathscr{F}|\mathrm{step}(x)| &= \lim_{\alpha\to 0}\left\{\frac{1}{2}\delta(f_x) + \int_0^{\infty}\exp(-\alpha x)\exp(-\mathrm{j}2\pi f_x x)\,\mathrm{d}x\right\} \\ &= \lim_{\alpha\to 0}\left\{\frac{1}{2}\delta(f_x) + \frac{1}{\alpha + \mathrm{j}2\pi f_x}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\delta(f_x) + \frac{1}{\mathrm{j}2\pi f_x} \end{aligned}$$

(2) 符号函数的定义为

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

同样要采用广义傅里叶变换的方法,将符号函数表示为负指数函数序列极限的形式,即

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} \lim\limits_{\alpha\to 0} e^{-\alpha x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ \lim\limits_{\alpha\to 0}(-e^{\alpha x}) & x < 0 \end{cases} \qquad (\alpha > 0)$$

根据广义傅里叶变换的定义,有

$$\begin{aligned}\mathscr{F}|\operatorname{sgn}(x)| &= \lim_{\alpha\to 0}\left\{\int_0^{\infty}\exp(-\alpha x)\exp(-\mathrm{j}2\pi f_x x)\,\mathrm{d}x\right.\\ &\quad\left.+\int_{-\infty}^{0}[-\exp(\alpha x)]\exp(-\mathrm{j}2\pi f_x x)\,\mathrm{d}x\right\}\\ &= \lim_{\alpha\to 0}\left\{\frac{\exp[-(\alpha+\mathrm{j}2\pi f_x)x]}{-(\alpha+\mathrm{j}2\pi f_x)}\Bigg|_0^{\infty}-\frac{\exp[(\alpha-\mathrm{j}2\pi f_x)x]}{(\alpha-\mathrm{j}2\pi f_x)}\Bigg|_{-\infty}^{0}\right\}\\ &= \lim_{\alpha\to 0}\left\{\frac{1}{\alpha+\mathrm{j}2\pi f_x}-\frac{1}{\alpha-\mathrm{j}2\pi f_x}\right\}\\ &= \frac{1}{\mathrm{j}2\pi f_x}+\frac{1}{\mathrm{j}2\pi f_x}\\ &= \frac{1}{\mathrm{j}\pi f_x}\end{aligned}$$

因此

$$\mathscr{F}|\operatorname{sgn}(x)| = \begin{cases}\dfrac{1}{\mathrm{j}\pi f_x} & f_x\neq 0\\ 0 & f_x = 0\end{cases}$$

(3) 根据欧拉公式将下列正弦函数表示为两个指数函数的差的形式:

$$\sin(2\pi f_0 x) = \frac{1}{2\mathrm{j}}[\exp(\mathrm{j}2\pi f_0 x)-\exp(-\mathrm{j}2\pi f_0 x)]$$

则

$$\begin{aligned}\mathscr{F}|\sin(2\pi f_0 x)| &= \int_{-\infty}^{\infty}\sin(2\pi f_0 x)\exp(-\mathrm{j}2\pi f_x x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2\mathrm{j}}\int_{-\infty}^{\infty}[\exp(\mathrm{j}2\pi f_0 x)-\exp(-\mathrm{j}2\pi f_0 x)]\exp(-\mathrm{j}2\pi f_x x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2\mathrm{j}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-\mathrm{j}2\pi(f_x-f_0)x]\,\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-\mathrm{j}2\pi(f_x+f_0)x]\,\mathrm{d}x\right\}\\ &= \frac{1}{2\mathrm{j}}[\delta(f_x-f_0)-\delta(f_x+f_0)]\end{aligned}$$

1.24 已知函数

$$h(x) = \int_{-\infty}^{x} g(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

而且 $\mathscr{F}|g(x)| = G(f)$。求 $h(x)$ 的傅里叶变换。

提示:利用变换式

$$\mathscr{F}|\operatorname{step}(x)| = \frac{1}{\mathrm{j}2\pi f}+\frac{1}{2}\delta(f)$$

解

利用阶跃函数对 $h(x)$ 做如下处理:

$$h(x) = \int_{-\infty}^{x} g(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\,\mathrm{step}(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi$$
$$= g(x) * \mathrm{step}(x)$$

利用卷积定理，并假设 $g(x)$、$\mathrm{step}(x)$ 和 $h(x)$ 对应的傅里叶频谱分别为 $G(f)$、$S(f)$ 和 $H(f)$，则有

$$H(f) = G(f)S(f) = G(f)\left[\frac{1}{\mathrm{j}2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)\right]$$
$$= \frac{G(f)}{\mathrm{j}2\pi f} + \frac{1}{2}G(0)\delta(f)$$

式中，$S(f) = \mathscr{F}\{\mathrm{step}(x)\} = \frac{1}{\mathrm{j}2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)$。

1.25　利用卷积定理的图解方法求下列函数的傅里叶变换：

(1) $h(x) = A\cos^2(2\pi f_0 x)$　　(2) $g(x) = A\sin^2(2\pi f_0 x)$

(3) $f(x) = \left(\frac{\sin 2\pi x}{2\pi x}\right)^2$

解

根据卷积定理

$$\mathscr{F}\{g(x,y)h(x,y)\} = G(f_x, f_y) * H(f_x, f_y)$$

即空间域两个函数的乘积，对应频域内两个函数频谱的卷积。

(1) 先将 $h(x)$ 表示为两个函数乘积的形式

$$h(x) = \sqrt{A}\cos(2\pi f_0 x)\sqrt{A}\cos(2\pi f_0 x)$$

根据卷积定理

$$H(f) = \frac{\sqrt{A}}{2}[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)] * \frac{\sqrt{A}}{2}[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)]$$
$$= \frac{A}{2}\delta(f) + \frac{A}{4}\delta(f-2f_0) + \frac{A}{4}\delta(f+2f_0)$$

使用图解方法求解其傅里叶变换的过程如图 1-15 所示。

(2) 将 $g(x)$ 表示为两个函数乘积的形式，即

$$g(x) = \sqrt{A}\sin(2\pi f_0 x)\sqrt{A}\sin(2\pi f_0 x)$$

根据卷积定理

$$G(f) = \frac{\sqrt{A}}{2\mathrm{j}}[\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)] * \frac{\sqrt{A}}{2\mathrm{j}}[\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)]$$
$$= \frac{A}{2}\delta(f) - \frac{A}{4}\delta(f-2f_0) - \frac{A}{4}\delta(f+2f_0)$$

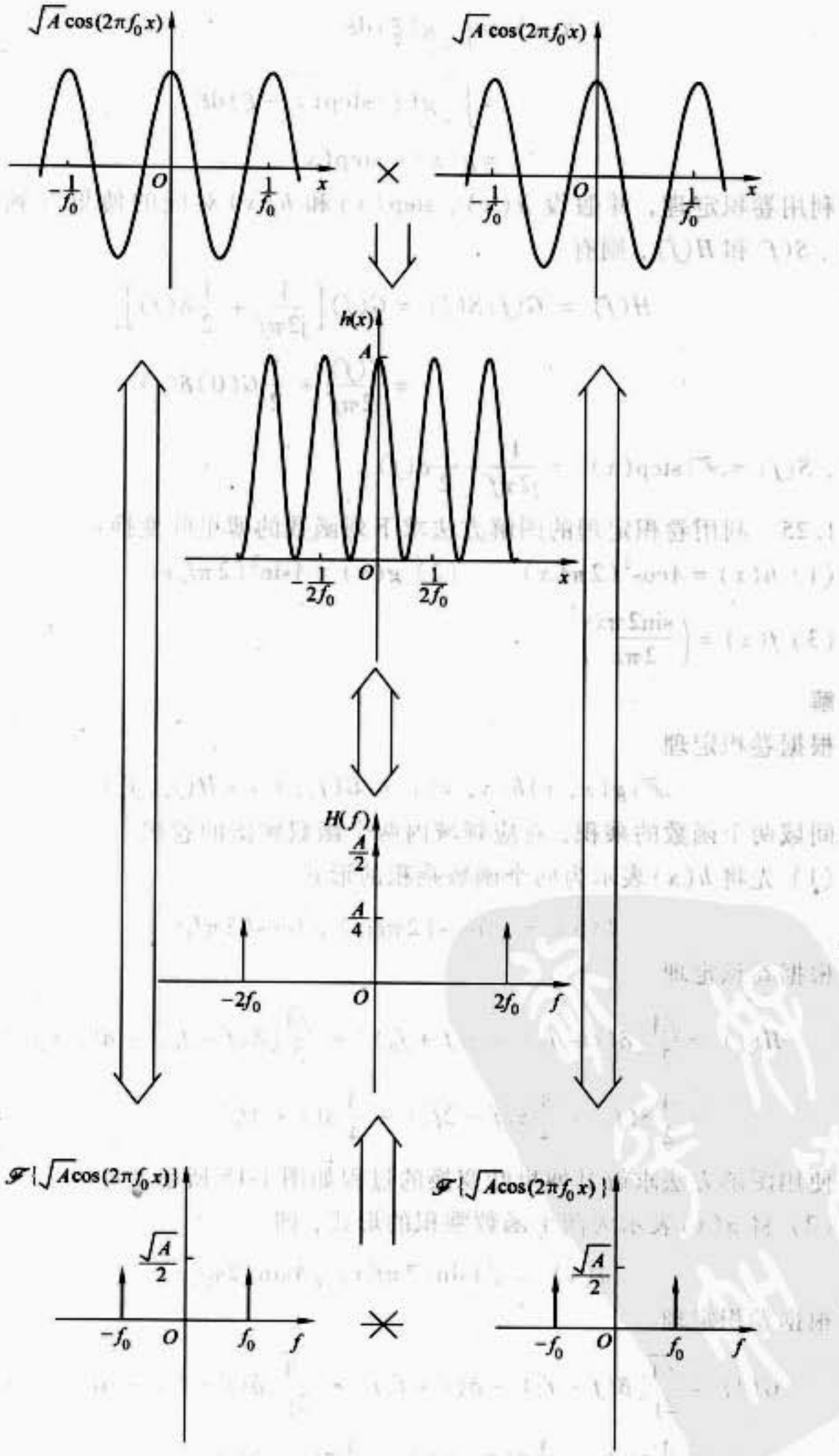

$\sqrt{A}\cos(2\pi f_0 x)$
$-\frac{1}{f_0}$
O
$\frac{1}{f_0}$
x
×
$\sqrt{A}\cos(2\pi f_0 x)$
$-\frac{1}{f_0}$
O
$\frac{1}{f_0}$
x
h(x)
A
$-\frac{1}{2f_0}$
O
$\frac{1}{2f_0}$
x
H(f)
$\frac{A}{2}$
$\frac{A}{4}$
$-2f_0$
O
$2f_0$
f
$\mathscr{F}\{\sqrt{A}\cos(2\pi f_0 x)\}$
$\frac{\sqrt{A}}{2}$
$-f_0$
O
f_0
f
×
$\mathscr{F}\{\sqrt{A}\cos(2\pi f_0 x)\}$
$\frac{\sqrt{A}}{2}$
$-f_0$
O
f_0
f

图 1-15

使用图解方法求其傅里叶变换的过程如图 1-16 所示。

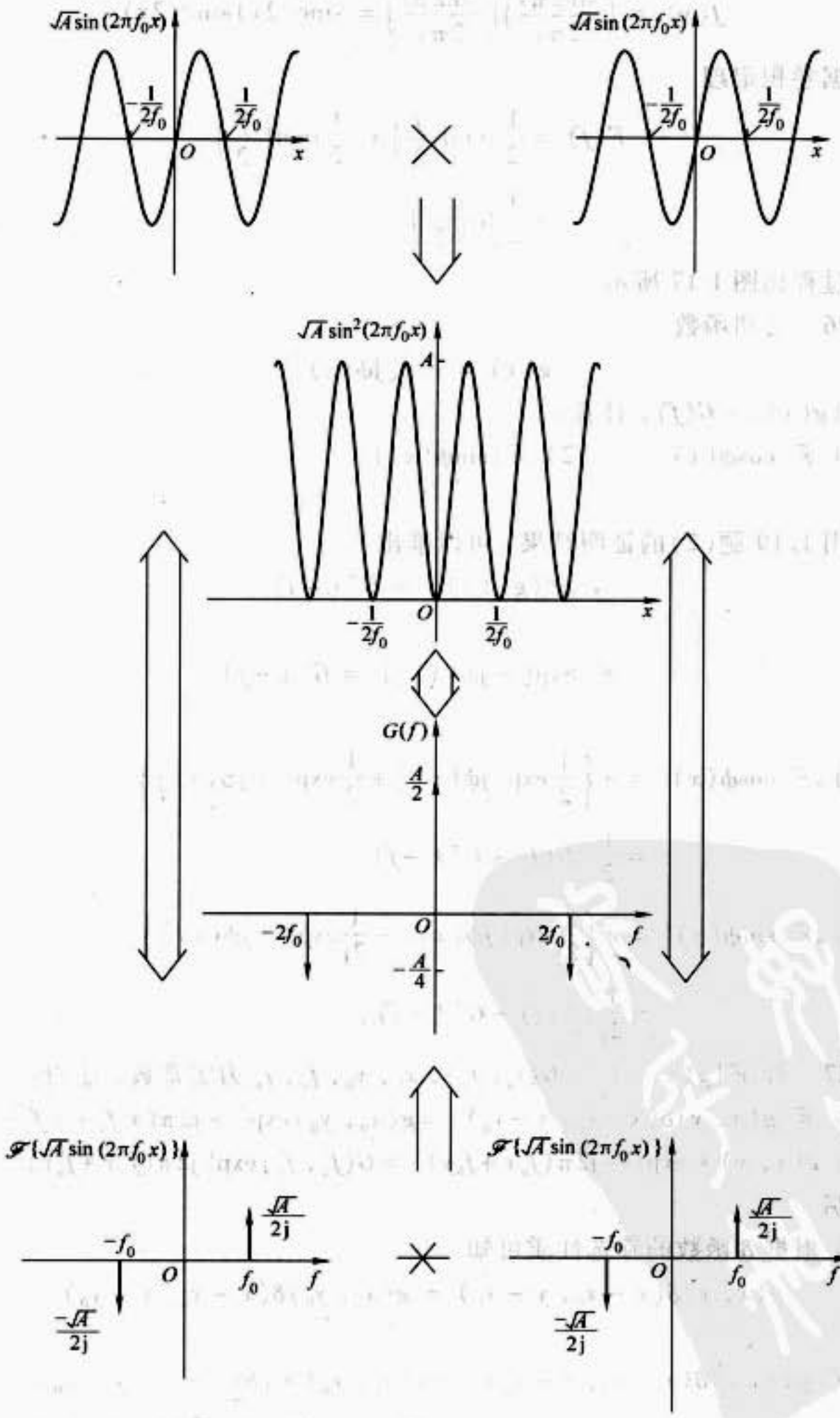


图 1-16

(3) 类似的，先将$f(s)$表示为两个函数乘积的形式，即

$$f(x) = \left(\frac{\sin 2\pi x}{2\pi x}\right)\left(\frac{\sin 2\pi x}{2\pi x}\right) = \mathrm{sinc}(2x)\mathrm{sinc}(2x)$$

根据卷积定理

$$F(f) = \frac{1}{2}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2}\right) * \frac{1}{2}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{tri}\left(\frac{f}{2}\right)$$

其图解过程如图 1-17 所示。

1.26 已知函数

$$g(x) = \exp[\mathrm{j}\phi(x)]$$

而且$\mathscr{F}|g(x)| = G(f)$，计算：

(1) $\mathscr{F}|\cos\phi(x)|$　　(2) $\mathscr{F}|\sin\phi(x)|$

解

利用 1.19 题(2)的证明结果，可以推出

$$\mathscr{F}|g^*(x)| = G^*(-f)$$

即

$$\mathscr{F}|\exp[-\mathrm{j}\phi(x)]| = G^*(-f)$$

则

$$(1)\ \mathscr{F}|\cos\phi(x)| = \mathscr{F}\left\{\frac{1}{2}\exp[\mathrm{j}\phi(x)] + \frac{1}{2}\exp[-\mathrm{j}\phi(x)]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}[G(f) + G^*(-f)]$$

$$(2)\ \mathscr{F}|\sin\phi(x)| = \mathscr{F}\left\{\frac{1}{2\mathrm{j}}\exp[\mathrm{j}\phi(x)] - \frac{1}{2\mathrm{j}}\exp[-\mathrm{j}\phi(x)]\right\}$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{j}}[G(f) - G^*(-f)]$$

1.27 若$\mathscr{F}|g(x, y)| = G(f_x, f_y)$，$x_0$，$y_0$，$f_a$，$f_b$为实常数，证明：

(1) $\mathscr{F}|g(x, y)\delta(x - x_0, y - y_0)| = g(x_0, y_0)\exp[-\mathrm{j}2\pi(x_0 f_x + y_0 f_y)]$

(2) $g(x, y) * \exp[-\mathrm{j}2\pi(f_a x + f_b y)] = G(f_a, f_b)\exp[\mathrm{j}2\pi(f_a x + f_b y)]$

证明

(1) 根据δ函数的筛选性质可知

$$g(x, y)\delta(x - x_0, y - y_0) = g(x_0, y_0)\delta(x - x_0, y - y_0)$$

则

$$\mathscr{F}|g(x, y)\delta(x - x_0, y - y_0)| = g(x_0, y_0)\mathscr{F}|\delta(x - x_0, y - y_0)|$$

$$= g(x_0, y_0)\exp[-\mathrm{j}2\pi(x_0 f_x + y_0 f_y)]$$

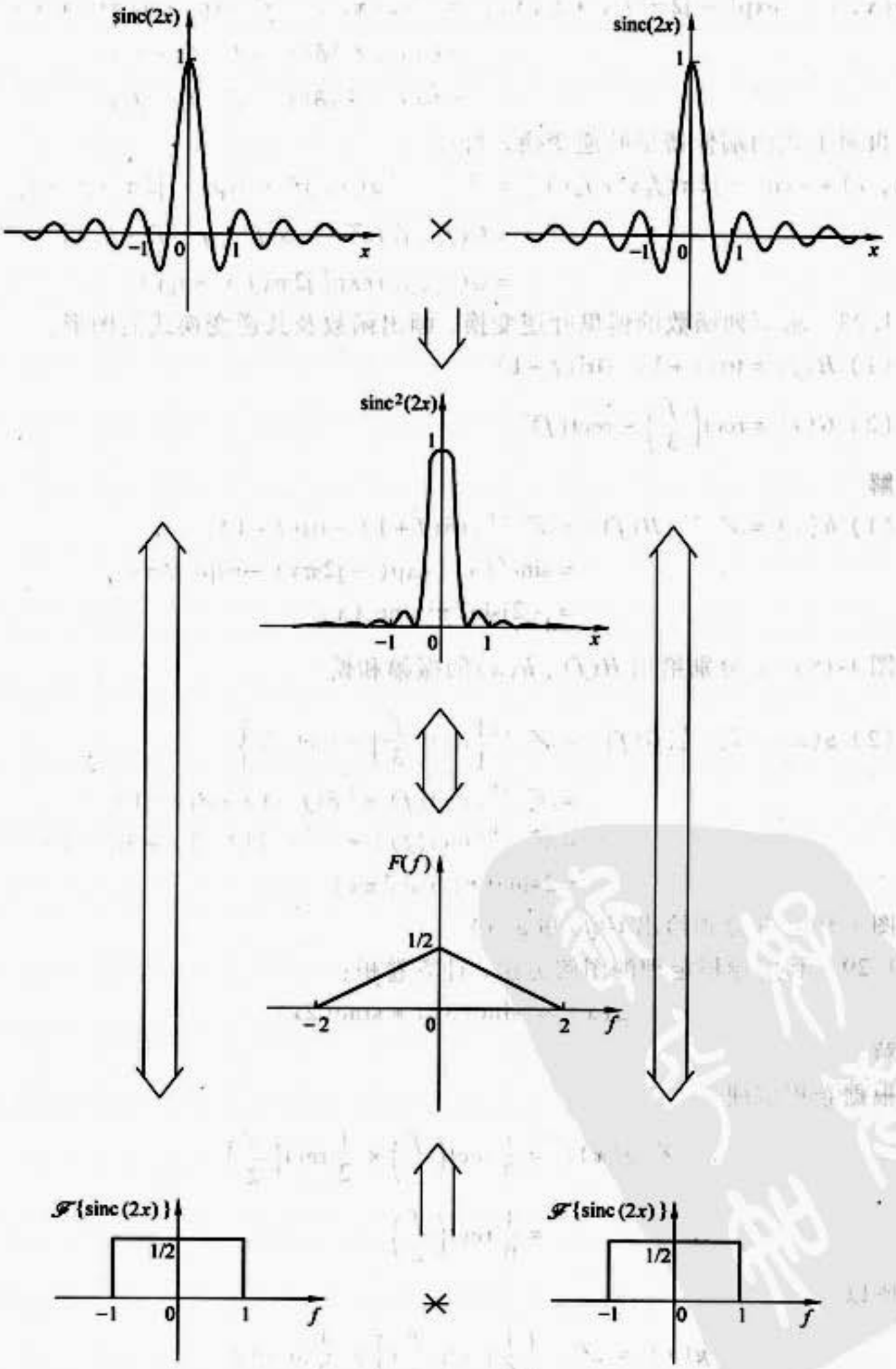

sinc(2x)
1
−1
0
1
x
×
sinc(2x)
1
−1
0
1
x
sinc²(2x)
1
−1
0
1
x
F(f)
1/2
−2
0
2
f
ℱ{sinc (2x)}
1/2
−1
0
1
f
ℱ{sinc (2x)}
1/2
−1
0
1
f

图 1-17

(2) 根据卷积定理

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\{g(x,y)*\exp[-\mathrm{j}2\pi(f_a x+f_a y)]\} &= \mathscr{F}\{g(x,y)\}\mathscr{F}\{\exp[-\mathrm{j}2\pi(f_a x+f_a y)]\}\\ &= G(f_x,f_y)\delta(f_x-f_a,f_y-f_b)\\ &= G(f_a,f_a)\delta(f_x-f_a,f_y-f_b)\end{aligned}$$

再对上式两端作傅里叶逆变换，则有

$$\begin{aligned}g(x,y)*\exp[-\mathrm{j}2\pi(f_a x+f_b y)] &= \mathscr{F}^{-1}\mathscr{F}\{g(x,y)*\exp[-\mathrm{j}2\pi(f_a x+f_b y)]\}\\ &= G(f_a,f_b)\mathscr{F}^{-1}\{\delta(f_x-f_a,f_y-f_b)\}\\ &= G(f_a,f_b)\exp[\mathrm{j}2\pi(f_a x+f_b y)]\end{aligned}$$

1.28 求下列函数的傅里叶逆变换，画出函数及其逆变换式的图形：

(1) $H(f)=\mathrm{tri}(f+1)-\mathrm{tri}(f-1)$

(2) $G(f)=\mathrm{rect}\left(\frac{f}{3}\right)-\mathrm{rect}(f)$

解

$$\begin{aligned}(1)\ h(x)=\mathscr{F}^{-1}\{H(f)\} &= \mathscr{F}^{-1}\{\mathrm{tri}(f+1)-\mathrm{tri}(f-1)\}\\ &= \mathrm{sinc}^2(x)[\exp(-\mathrm{j}2\pi x)-\exp(\mathrm{j}2\pi x)]\\ &= -2\mathrm{j}\sin 2\pi x\,\mathrm{sinc}^2(x)\end{aligned}$$

图 1-18a～c 分别给出 $H(f)$、$h(x)$的振幅和模。

$$\begin{aligned}(2)\ g(x)=\mathscr{F}^{-1}\{G(f)\} &= \mathscr{F}^{-1}\left\{\mathrm{rect}\left(\frac{f}{3}\right)-\mathrm{rect}(f)\right\}\\ &= \mathscr{F}^{-1}\{\mathrm{rect}(f)*[\delta(f-1)+\delta(f+1)]\}\\ &= \mathscr{F}^{-1}\{\mathrm{rect}(f)\}\mathscr{F}^{-1}\{[\delta(f-1)+\delta(f+1)]\}\\ &= 2\mathrm{sinc}(x)\cos(2\pi x)\end{aligned}$$

图 1-19a、b 分别给出 $G(f)$和 $g(x)$。

1.29 利用卷积定理的图解方法，计算卷积：

$$g(x)=\mathrm{sinc}(3x)*\mathrm{sinc}(2x)$$

解

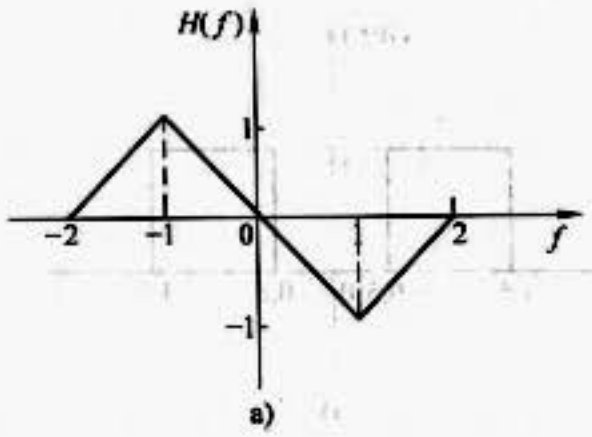
根据卷积定理

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\{g(x)\} &= \frac{1}{3}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{3}\right)\times\frac{1}{2}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2}\right)\\ &= \frac{1}{6}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2}\right)\end{aligned}$$

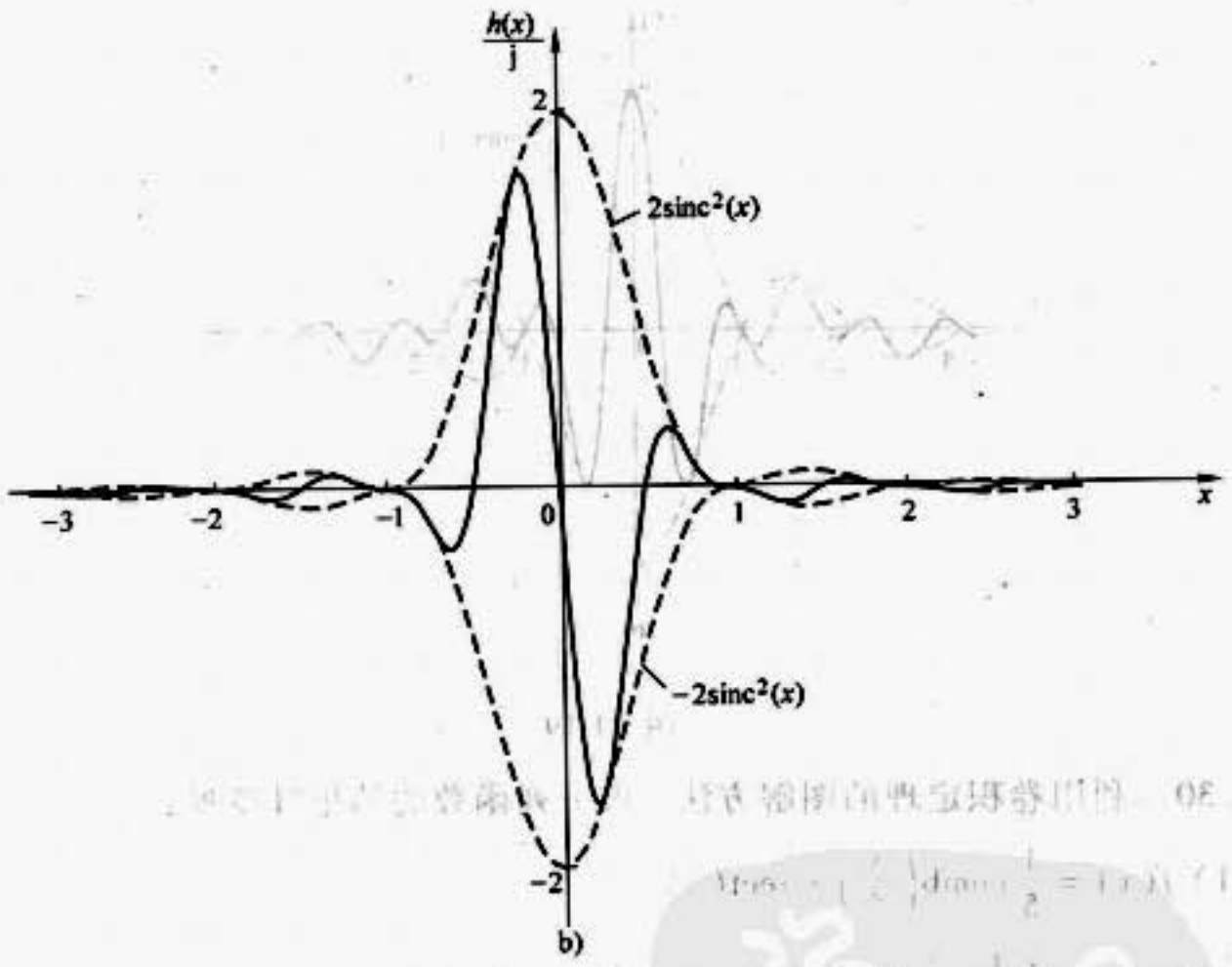
所以

$$g(x)=\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{1}{6}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2}\right)\right\}=\frac{1}{3}\mathrm{sinc}(2x)$$

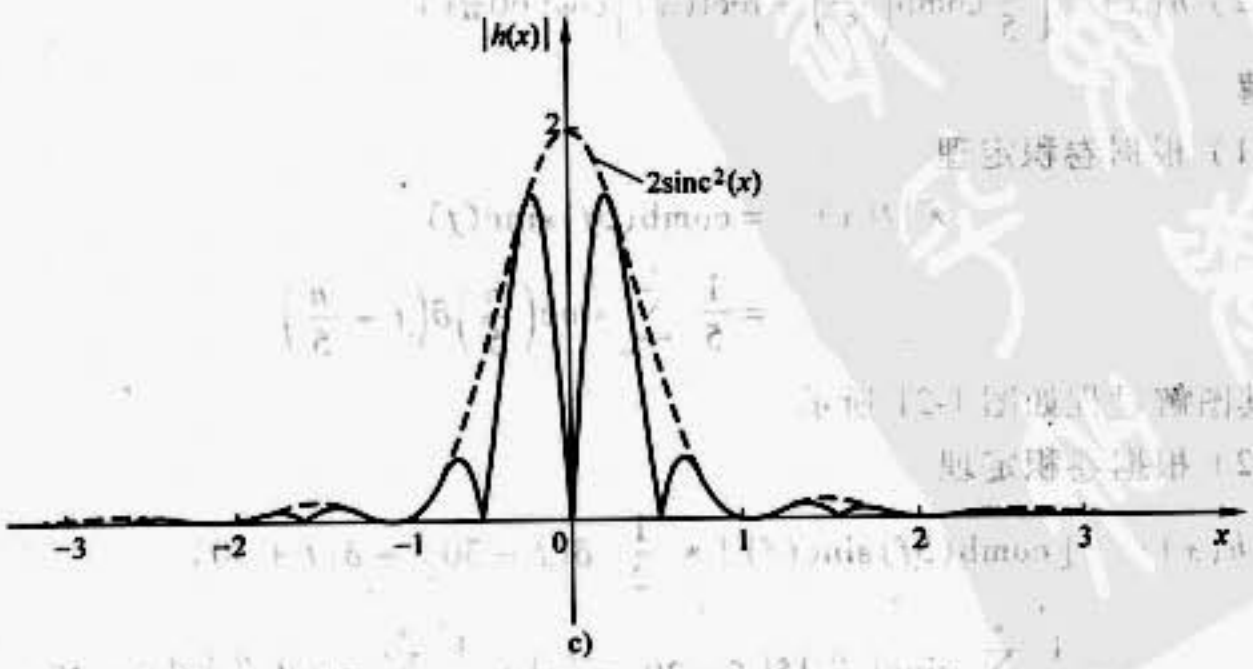
图解过程如图 1-20 所示。


H(f)
1
-1
-2
-1
0
2
f

a)

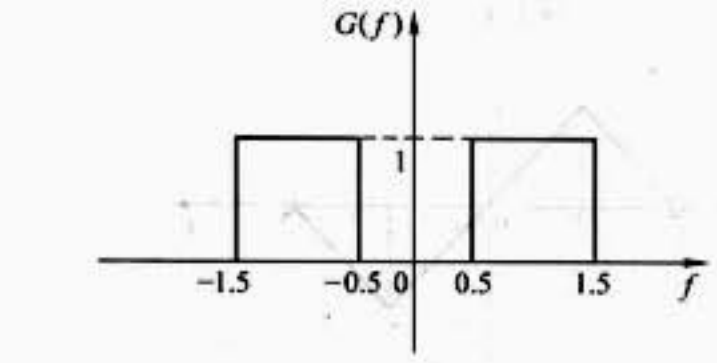

h(x)/j
2
2sinc²(x)
-2sinc²(x)
-2
-3
-2
-1
0
1
2
3
x

b)

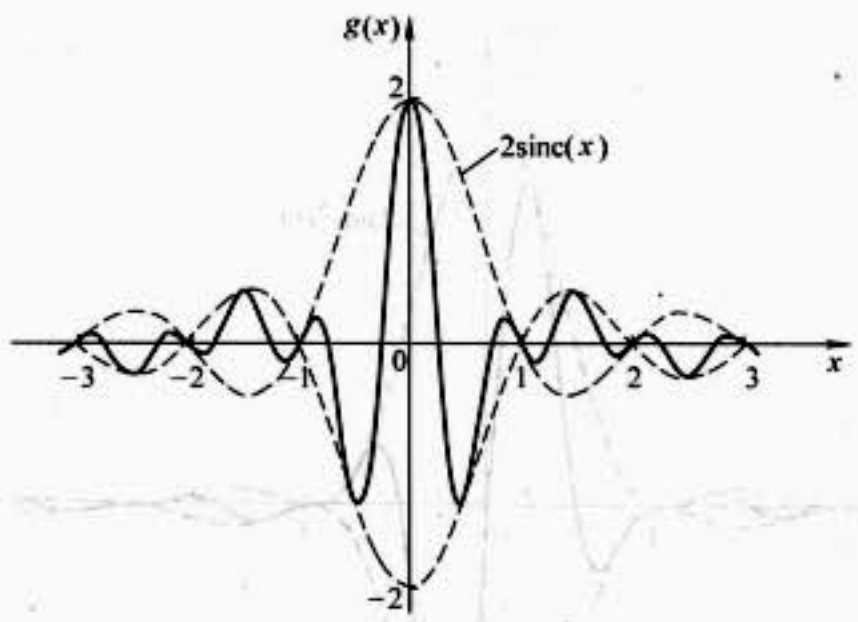

|h(x)|
2
2sinc²(x)
-3
-2
-1
0
1
2
3
x

c)

图 1-18



a)



b)

图 1-19

1.30 利用卷积定理的图解方法，求下列函数的傅里叶变换：

(1) $f(x)=\frac{1}{5}\mathrm{comb}\left(\frac{x}{5}\right)*\mathrm{rect}(x)$

(2) $h(x)=\left[\frac{1}{5}\mathrm{comb}\left(\frac{x}{5}\right)*\mathrm{rect}(x)\right]\cos(60\pi x)$

解

(1) 根据卷积定理

$$\mathscr{F}\{f(x)\}=\mathrm{comb}(5f)\,\mathrm{sinc}(f)$$

$$=\frac{1}{5}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}\left(\frac{n}{5}\right)\delta\left(f-\frac{n}{5}\right)$$

其图解过程如图 1-21 所示。

(2) 根据卷积定理

$$\mathscr{F}\{h(x)\}=[\mathrm{comb}(5f)\,\mathrm{sinc}(f)]*\frac{1}{2}[\delta(f-30)+\delta(f+30)]$$

$$=\frac{1}{5}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}\left(\frac{n}{5}\right)\delta\left(f-30-\frac{n}{5}\right)+\frac{1}{5}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}\left(\frac{n}{5}\right)\delta\left(f+30-\frac{n}{5}\right)$$

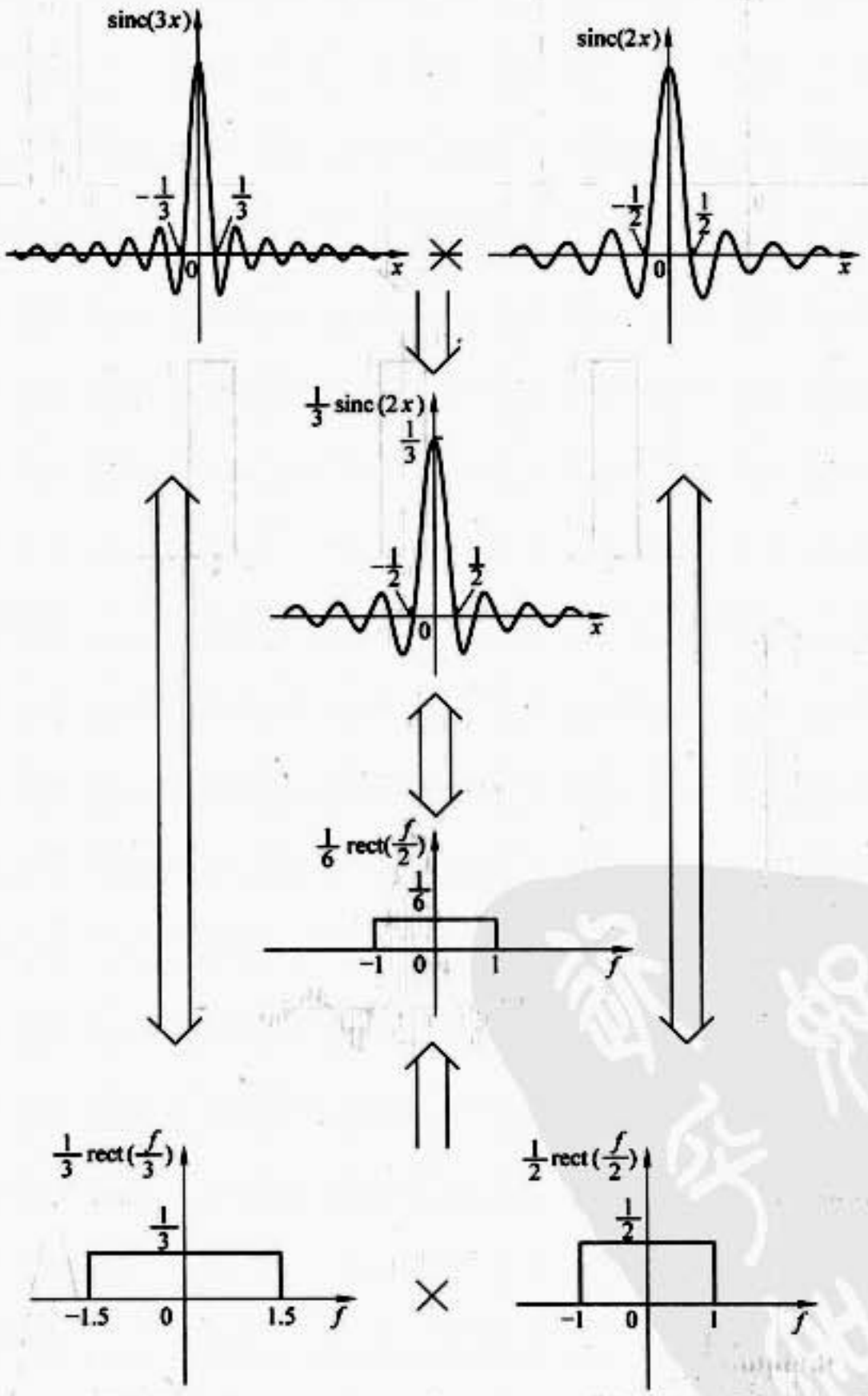

sinc(3x)
sinc(2x)
$-\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}$
$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$
0
x
$\frac{1}{3}$ sinc (2x)
$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{6}$ rect($\frac{f}{2}$)
$\frac{1}{6}$
−1
1
f
$\frac{1}{3}$ rect($\frac{f}{3}$)
$\frac{1}{3}$
−1.5
1.5
$\frac{1}{2}$ rect($\frac{f}{2}$)
$\frac{1}{2}$

图 1-20

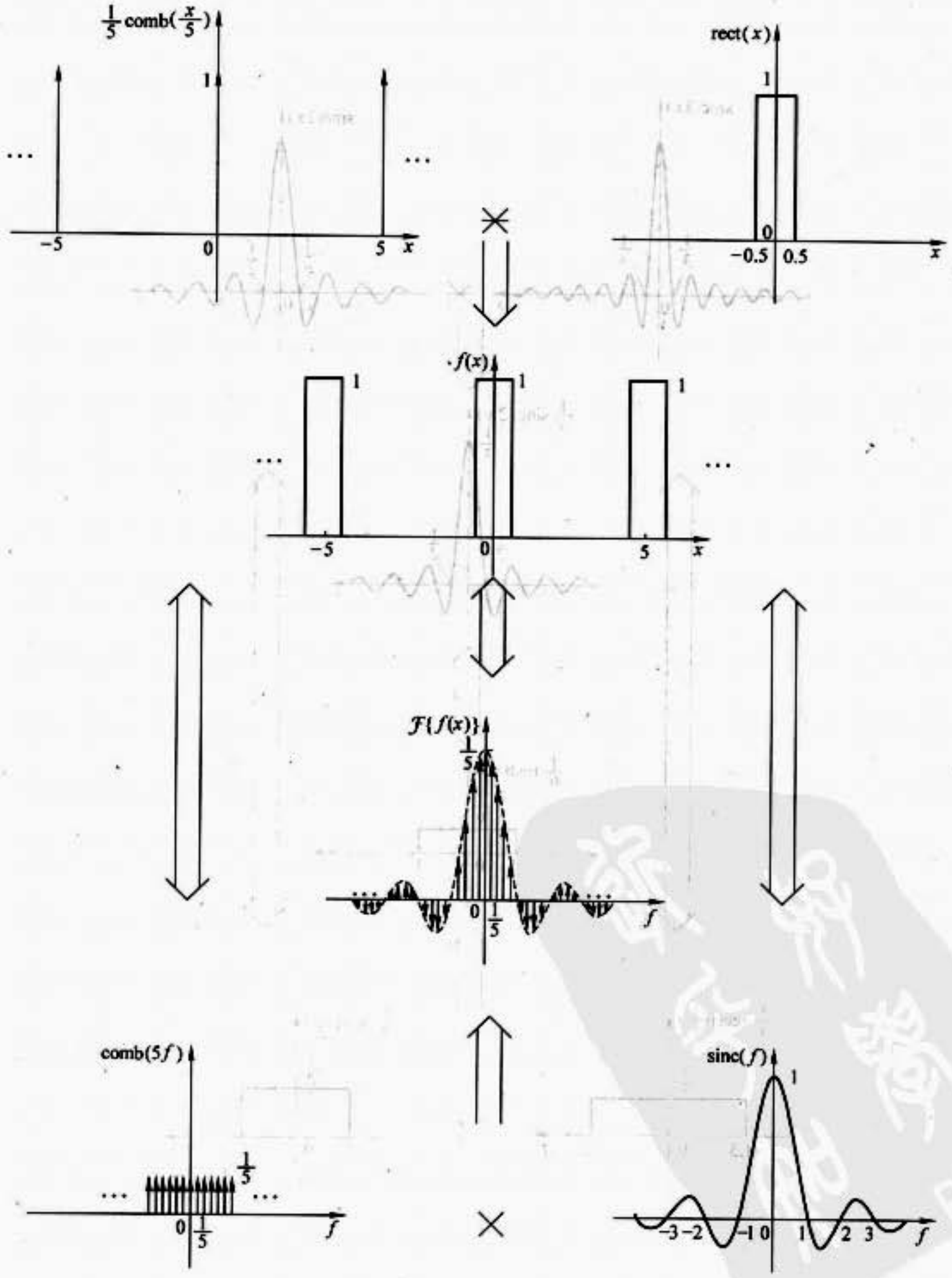

$\frac{1}{5}\text{comb}(\frac{x}{5})$
1
...
...
−5
0
5
x
rect(x)
1
0
−0.5
0.5
x
×
f(x)
1
1
1
...
...
−5
0
5
x
comb(5f)
$\frac{1}{5}$
...
...
0
$\frac{1}{5}$
f
×
$\mathcal{F}\{f(x)\}$
$\frac{1}{5}$
0
$\frac{1}{5}$
f
sinc(f)
1
−3
−2
−1
0
1
2
3
f

图 1-21

其图解过程如图 1-22 所示。

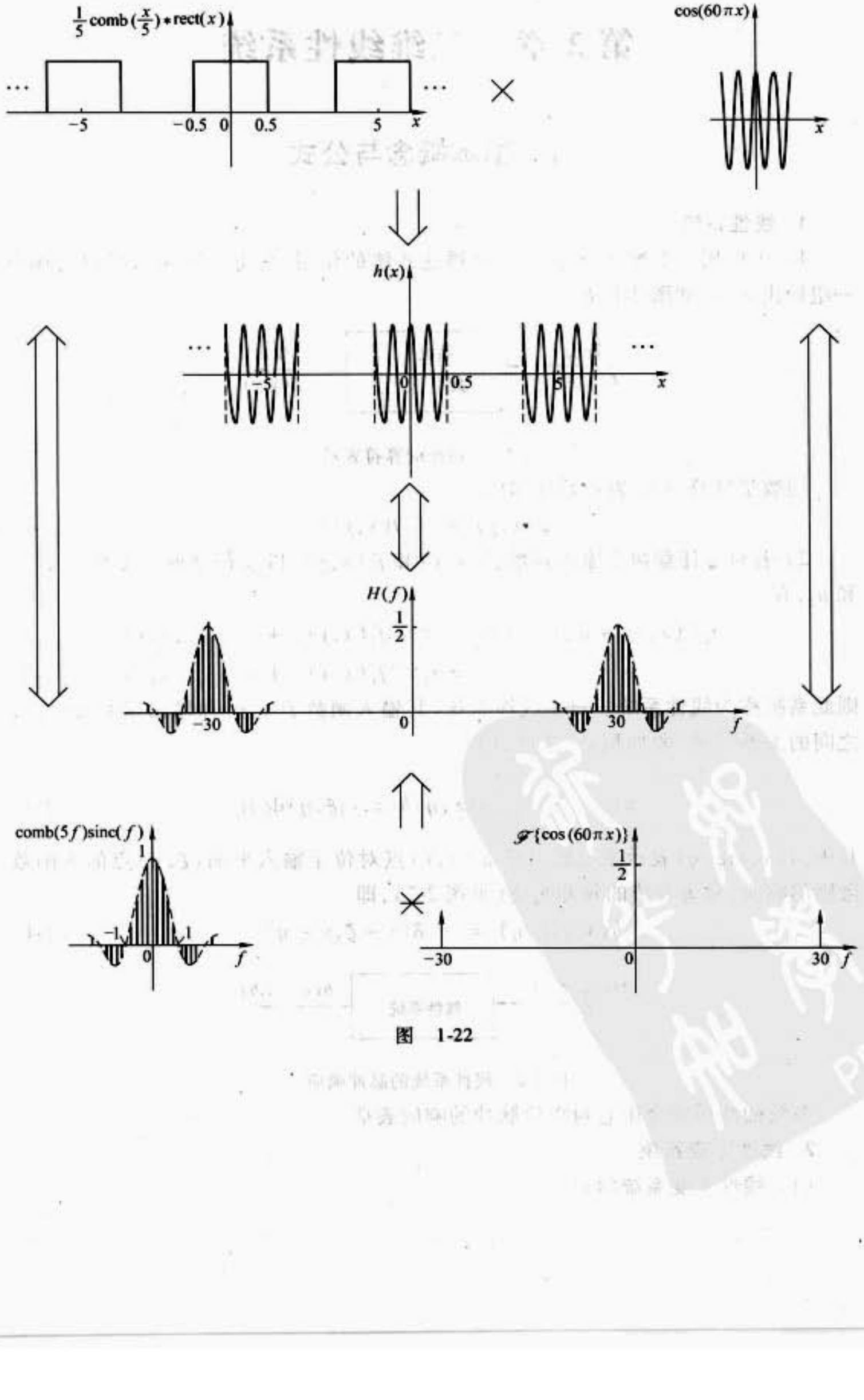


图 1-22

第 2 章　二维线性系统

Ⅰ. 基本概念与公式

1. 线性系统

1）可以用一个数学符号 $\mathscr{S}\{\ \}$ 来描述系统的作用，它将一组输入函数变换成一组输出函数，如图 2-1 所示。

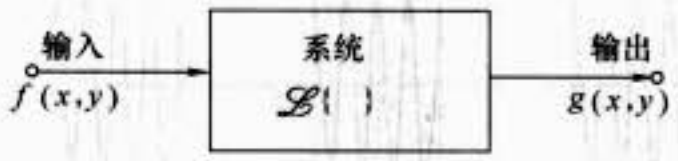


图 2-1　系统的算符表示

用数学算符 $\mathscr{S}\{\ \}$ 表示系统作用

$$g(x,y) = \mathscr{S}\{f(x,y)\} \tag{2-1}$$

2）若对于任意两个输入函数 $f_1(x,y)$ 和 $f_2(x,y)$，以及任意两个复数常数 a_1 和 a_2，有

$$\begin{aligned}\mathscr{S}\{a_1f_1(x,y) + a_2f_2(x,y)\} &= \mathscr{S}\{a_1f_1(x,y)\} + \mathscr{S}\{a_2f_2(x,y)\} \\ &= a_1\mathscr{S}\{f_1(x,y)\} + a_2\mathscr{S}\{f_2(x,y)\}\end{aligned} \tag{2-2}$$

则此系统称为线性系统。对于线性系统，其输入函数 $f(x,y)$ 和输出函数 $g(x,y)$ 之间的关系可用“叠加积分”描述，即

$$g(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int f(\xi,\eta)h(x,y;\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{2-3}$$

其中，$h(x,y;\xi,\eta)$ 表示系统输出平面 (x,y) 点对位于输入平面 (ξ,η) 点的 δ 函数激励的响应，称为系统的脉冲响应（见图 2-2），即

$$h(x,y;\xi,\eta) = \mathscr{S}\{\delta(x-\xi,y-\eta)\} \tag{2-4}$$

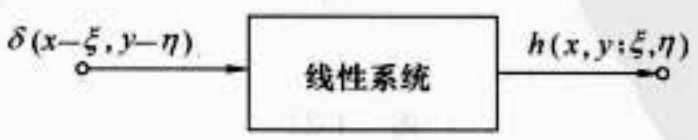


图 2-2　线性系统的脉冲响应

系统的性质完全由它对单位脉冲的响应表征。

2. 线性不变系统

（1）线性不变系统的定义

若一个空间脉冲在输入平面位移，线性系统的响应函数形式不变，只是产生相应位移，则称这样的系统是空间线性不变系统，即有

$$\mathscr{L}\{\delta(x-\xi,y-\eta)\} = h(x,y;\xi,\eta) = h(x-\xi,y-\eta) \tag{2-5}$$

此时的“叠加积分”转化为如下的“卷积积分”形式：

$$\begin{aligned} g(x,y) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int f(\xi,\eta)h(x-\xi,y-\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \\ &= f(x,y) * h(x,y) \end{aligned} \tag{2-6}$$

（2）线性不变系统的传递函数

对于线性不变系统，其传递函数定义为系统脉冲响应的傅里叶变换

$$H(f_x,f_y) = \mathscr{F}\{h(x,y)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int h(\xi,\eta)\exp[-\mathrm{j}2\pi(f_x\xi+f_y\eta)]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{2-7}$$

若系统的输入频谱、输出频谱分别为 $F(f_x,f_y)$、$G(f_x,f_y)$，则根据卷积定理

$$G(f_x,f_y) = H(f_x,f_y)F(f_x,f_y) \tag{2-8}$$

传递函数或称频率响应，表示了系统在频率域的效应。利用傅里叶变换，输入可以分解为具有不同空间频率(f_x,f_y)的基元复指数函数，系统对每个基元复指数函数的效应取决于 $H(f_x,f_y)$（见图 2-3），即

$$\mathscr{L}\{\exp[\mathrm{j}2\pi(f_xx+f_yy)]\} = H(f_x,f_y)\exp[\mathrm{j}2\pi(f_xx+f_yy)] \tag{2-9}$$

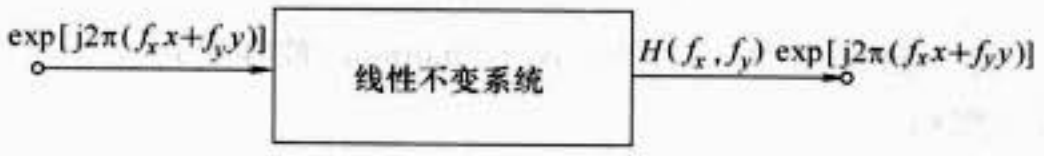


图 2-3　线性不变系统的传递函数

（3）线性不变系统的本征函数

对于线性不变系统，若输入某一函数，相应的输出仅等于输入函数与一个复比例常数的乘积，这个输入函数就称为这种系统的本征函数，即

$$g(x,y) = \mathscr{L}\{f(x,y)\} = Kf(x,y) \tag{2-10}$$

根据以上分析，复指数函数就是线性不变系统的本征函数。对于具有实值脉冲响应的线性不变系统，余（正）弦函数是系统的本征函数。余弦输入将产生同频率的余弦输出，传递函数的模和辐角分别决定了各频率分量的衰减和相移。

（4）系统的功能类似于一种滤波器，它使各种输入频率分量发生振幅的变换和相移，如图 2-4 所示。

3. 抽样定理

一个频带有限的函数 $g(x,y)$，它的频谱 $G(f_x,f_y)$ 在频率空间一个有限区域 $\mathscr{B}$ 上不为零，若 $2B_x$、$2B_y$ 分别表示包围该区域的最小矩形在 f_x 和 f_y 方向上的宽度，当函数在 x、y 方向抽样点的间隔 X、Y 满足

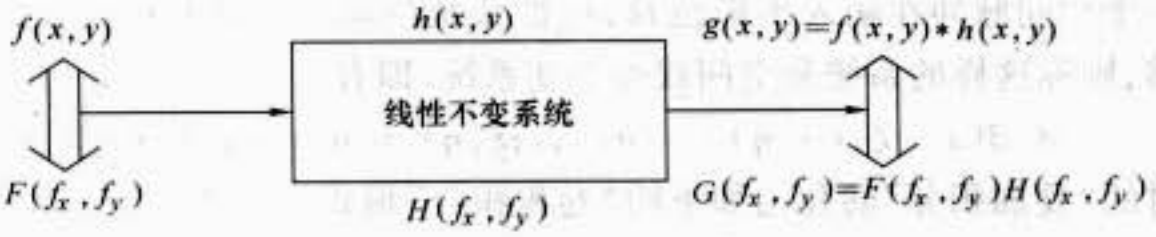


图 2-4　线性不变系统的作用

$$X \leqslant \frac{1}{2B_x} \text{ 及 } Y \leqslant \frac{1}{2B_y} \tag{2-11}$$

则函数唯一地由其抽样值决定。在每个抽样点加上一个以抽样值为权重的 sinc 函数构成的内插函数，由这些 sinc 函数的线性组合就可以准确恢复原函数 $g(x,y)$。

当抽样点间距为允许的最大间隔时，即

$$X = \frac{1}{2B_x} \text{ 及 } Y = \frac{1}{2B_y} \tag{2-12}$$

时，函数 $g(x,y)$ 表示为

$$g(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{n}{2B_x},\frac{m}{2B_y}\right)\text{sinc}\left[2B_x\left(x-\frac{n}{2B_x}\right)\right] \times \text{sinc}\left[2B_y\left(y-\frac{m}{2B_y}\right)\right] \tag{2-13}$$

式(2-13)称为惠特克-香农(Whittaker-Shannon)抽样定理。

4. 空间带宽积

若限带函数 $g(x,y)$ 在频域 $|f_x| \leqslant B_x$、$|f_y| \leqslant B_y$ 以外恒等于零，考虑函数在空域 $|x| \leqslant X$、$|y| \leqslant Y$ 的区间上抽样数目最少应为

$$SW = \left[\frac{2X}{1/(2B_x)}\right]\left[\frac{2Y}{1/(2B_y)}\right] = 16XYB_xB_y \tag{2-14}$$

才不丢失信息。

空间带宽积 SW 定义为函数在空域和频域中所占面积之积($4XY \times 4B_xB_y$)。空间带宽积用来描述空间信号(如图像)的信息量以及光学成像系统、信息处理系统能够传递或处理的信息容量。

Ⅱ. 习题解答

本章习题主要内容包括：加强对线性系统理论的认识，包括：描述线性不变系统输入-输出关系的卷积积分；线性不变系统空间脉冲响应、传递函数的物理意义和应用以及线性不变系统的滤波作用。

熟悉抽样定理及其应用。针对实际应用中遇到的问题，如有限区间抽样、

矩形脉冲抽样等情况，通过习题进行了讨论。

2.1　已知线性不变系统的输入为

$$g(x) = \mathrm{comb}(x)$$

系统的传递函数为 $\mathrm{rect}\left(\frac{f}{b}\right)$。如 b 取下列值，求系统的输出 $g'(x)$，并画出输出函数及其频谱的图形：(1) $b=1$　　(2) $b=3$

解

对于线性不变系统，输入频谱、输出频谱和传递函数满足如下关系：

$$G'(f) = G(f)H(f)$$

即输出频谱等于输入频谱与传递函数的乘积。

在本题目中，已知

$$H(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{b}\right)$$

而且很容易得知

$$G(f) = \mathscr{F}|\mathrm{comb}(x)| = \mathrm{comb}(f)$$

因此

$$G'(f) = G(f)H(f) = \mathrm{comb}(f)\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{b}\right)$$

(1) 当 $b=1$ 时

$$G'(f) = \delta(f)$$

此时

$$g'(x) = \mathscr{F}^{-1}|G'(f)| = 1$$

其输出函数及输出频谱如图 2-5a 所示。

(2) 当 $b=3$ 时

$$G'(f) = \delta(f) + \delta(f+1) + \delta(f-1)$$

此时

$$\begin{aligned} g'(x) &= \mathscr{F}^{-1}|G'(f)| = 1 + \exp(-\mathrm{j}2\pi x) + \exp(\mathrm{j}2\pi x) \\ &= 1 + 2\cos(2\pi x) \end{aligned}$$

其输出函数及输出频谱如图 2-5b 所示。

2.2　已知线性不变系统的输入为

$$g(x) = \mathrm{comb}(x)$$

系统的传递函数为 $\mathrm{tri}\left(\frac{f}{b}\right)$。如 b 取下列值，求系统的输出 $g'(x)$，并画出输出函数及其频谱的图形：(1) $b=0.5$　　(2) $b=1.5$

解

分析思路与题目 2.1 相同，仅仅是传递函数发生了变化。输出频谱为

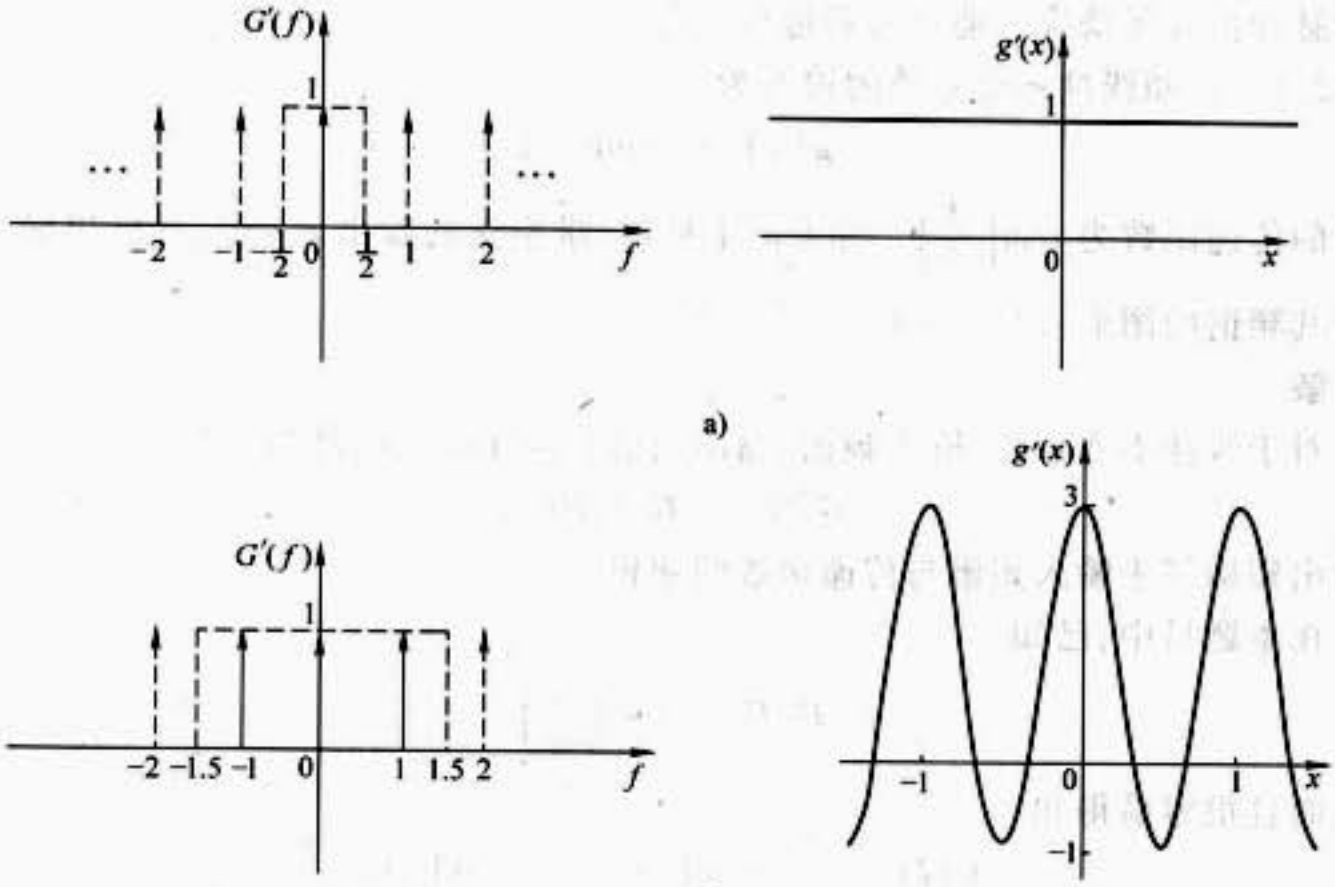


图 2-5

$$G'(f) = G(f)H(f) = \mathrm{comb}(f)\,\mathrm{tri}\left(\frac{f}{b}\right)$$

（1）如图 2-6a 所示，当 $b=0.5$ 时

$$G'(f) = \delta(f)$$

此时

$$g'(x) = \mathscr{F}^{-1}|G'(f)| = 1$$

其输出函数及输出频谱如图 2-6a 所示。

（2）如图 2-6b 所示，当 $b=1.5$ 时

$$G'(f) = \delta(f) + \frac{1}{3}[\delta(f+1) + \delta(f-1)]$$

此时

$$g'(x) = \mathscr{F}^{-1}|G'(f)| = 1 + \frac{1}{3}[\exp(-\mathrm{j}2\pi x) + \exp(\mathrm{j}2\pi x)]$$

$$= 1 + \frac{2}{3}\cos(2\pi x)$$

其输出函数及输出频谱如图 2-6b 所示。

2.3 给定正实常数 f_0 和实常数 a 与 b，求证：

（1）若 $|b| < \frac{1}{2f_0}$，则

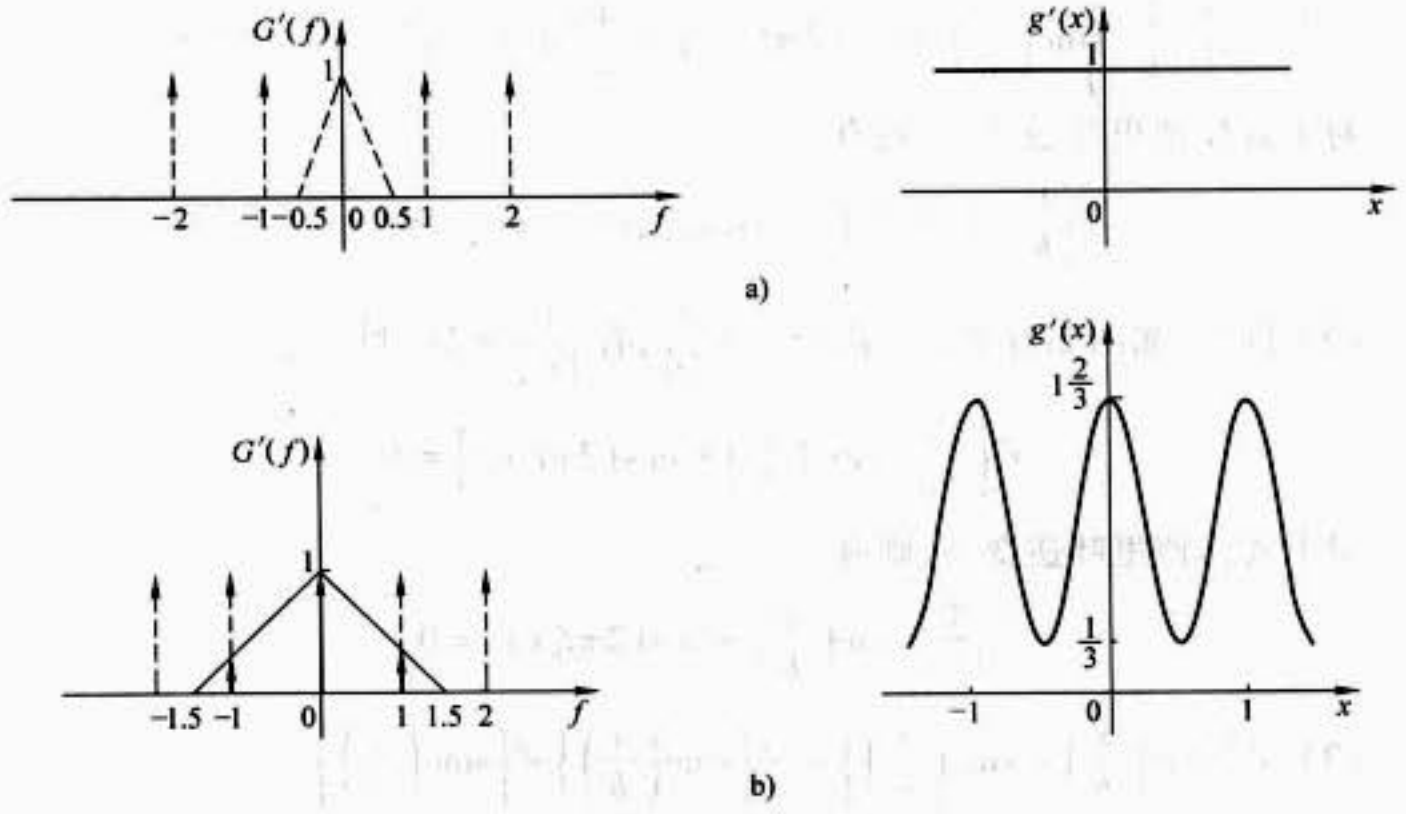


图 2-6

$$\frac{1}{|b|}\mathrm{sinc}\left(\frac{x}{b}\right) * \cos(2\pi f_0 x) = \cos(2\pi f_0 x)$$

(2) 若 $|b| > \frac{1}{2f_0}$,则

$$\frac{1}{|b|}\mathrm{sinc}\left(\frac{x}{b}\right) * \cos(2\pi f_0 x) = 0$$

(3) 若 $|b| < |a|$,则

$$\mathrm{sinc}\left(\frac{x}{b}\right) * \mathrm{sinc}\left(\frac{x}{a}\right) = |b|\,\mathrm{sinc}\left(\frac{x}{a}\right)$$

(4) 若 $|b| < |0.5a|$,则

$$\mathrm{sinc}\left(\frac{x}{b}\right) * \mathrm{sinc}^2\left(\frac{x}{a}\right) = |b|\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{x}{a}\right)$$

证明

本题目都可以利用卷积定理,将空域中的卷积运算转化为频域内的乘积运算,然后再通过傅里叶逆变换即可得最终的卷积结果。

(1) $$\mathscr{F}\left\{\frac{1}{|b|}\mathrm{sinc}\left(\frac{x}{b}\right) * \cos(2\pi f_0 x)\right\} = \frac{1}{|b|}\mathscr{F}\left\{\mathrm{sinc}\left(\frac{x}{b}\right)\right\}\mathscr{F}\{\cos(2\pi f_0 x)\}$$

$$= \mathrm{rect}(bf) \times \frac{1}{2}[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)]$$

如图 2-7a 所示,若 $|b| < \frac{1}{2f_0}$,有 $\frac{1}{|b|} > 2f_0$,则上式等于

$$\mathscr{F}\left\{\frac{1}{|b|}\mathrm{sinc}\left(\frac{x}{b}\right) * \cos(2\pi f_0 x)\right\} = \frac{1}{2}[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)]$$

对上式作傅里叶逆变换,则有

$$\frac{1}{|b|}\mathrm{sinc}\left(\frac{x}{b}\right) * \cos(2\pi f_0 x) = \cos(2\pi f_0 x)$$

(2) 同样,如图 2-7b 所示,若 $|b| > \frac{1}{2f_0}$,有 $\frac{1}{|b|} < 2f_0$,则

$$\mathscr{F}\left\{\frac{1}{|b|}\mathrm{sinc}\left(\frac{x}{b}\right) * \cos(2\pi f_0 x)\right\} = 0$$

对上式作傅里叶逆变换,则有

$$\frac{1}{|b|}\mathrm{sinc}\left(\frac{x}{b}\right) * \cos(2\pi f_0 x) = 0$$

(3) $\mathscr{F}\left\{\mathrm{sinc}\left(\frac{x}{b}\right) * \mathrm{sinc}\left(\frac{x}{a}\right)\right\} = \mathscr{F}\left\{\mathrm{sinc}\left(\frac{x}{b}\right)\right\}\mathscr{F}\left\{\mathrm{sinc}\left(\frac{x}{a}\right)\right\}$

$$= |b|\,\mathrm{rect}(bf)\,|a|\,\mathrm{rect}(af)$$

如图 2-7c 所示,若 $|b| < |a|$,有 $\frac{1}{|b|} > \frac{1}{|a|}$,则上式等于

$$\mathscr{F}\left\{\mathrm{sinc}\left(\frac{x}{b}\right) * \mathrm{sinc}\left(\frac{x}{a}\right)\right\} = |b|\,|a|\,\mathrm{rect}(af)$$

对上式作傅里叶逆变换,则有

$$\mathrm{sinc}\left(\frac{x}{b}\right) * \mathrm{sinc}\left(\frac{x}{a}\right) = |b|\,\mathrm{sinc}\left(\frac{x}{a}\right)$$

(4) $\mathscr{F}\left\{\mathrm{sinc}\left(\frac{x}{b}\right) * \mathrm{sinc}^2\left(\frac{x}{a}\right)\right\} = \mathscr{F}\left\{\mathrm{sinc}\left(\frac{x}{b}\right)\right\}\mathscr{F}\left\{\mathrm{sinc}^2\left(\frac{x}{a}\right)\right\}$

$$= |b|\,\mathrm{rect}(bf)\,|a|\,\mathrm{tri}(af)$$

如图 2-7d 所示,若 $|b| < |0.5a|$,有 $\frac{1}{|b|} > \frac{2}{|a|}$,则上式等于

$$\mathscr{F}\left\{\mathrm{sinc}\left(\frac{x}{b}\right) * \mathrm{sinc}^2\left(\frac{x}{a}\right)\right\} = |b|\,|a|\,\mathrm{tri}(af)$$

对上式作傅里叶逆变换,则有

$$\mathrm{sinc}\left(\frac{x}{b}\right) * \mathrm{sinc}^2\left(\frac{x}{a}\right) = |b|\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{x}{a}\right)$$

2.4 若限带函数 $f(x)$ 的傅里叶变换在带宽 w 之外恒为零,问:

(1) 如果 $|b| < \frac{1}{w}$,证明

$$\frac{1}{|b|}\mathrm{sinc}\left(\frac{x}{b}\right) * f(x) = f(x)$$

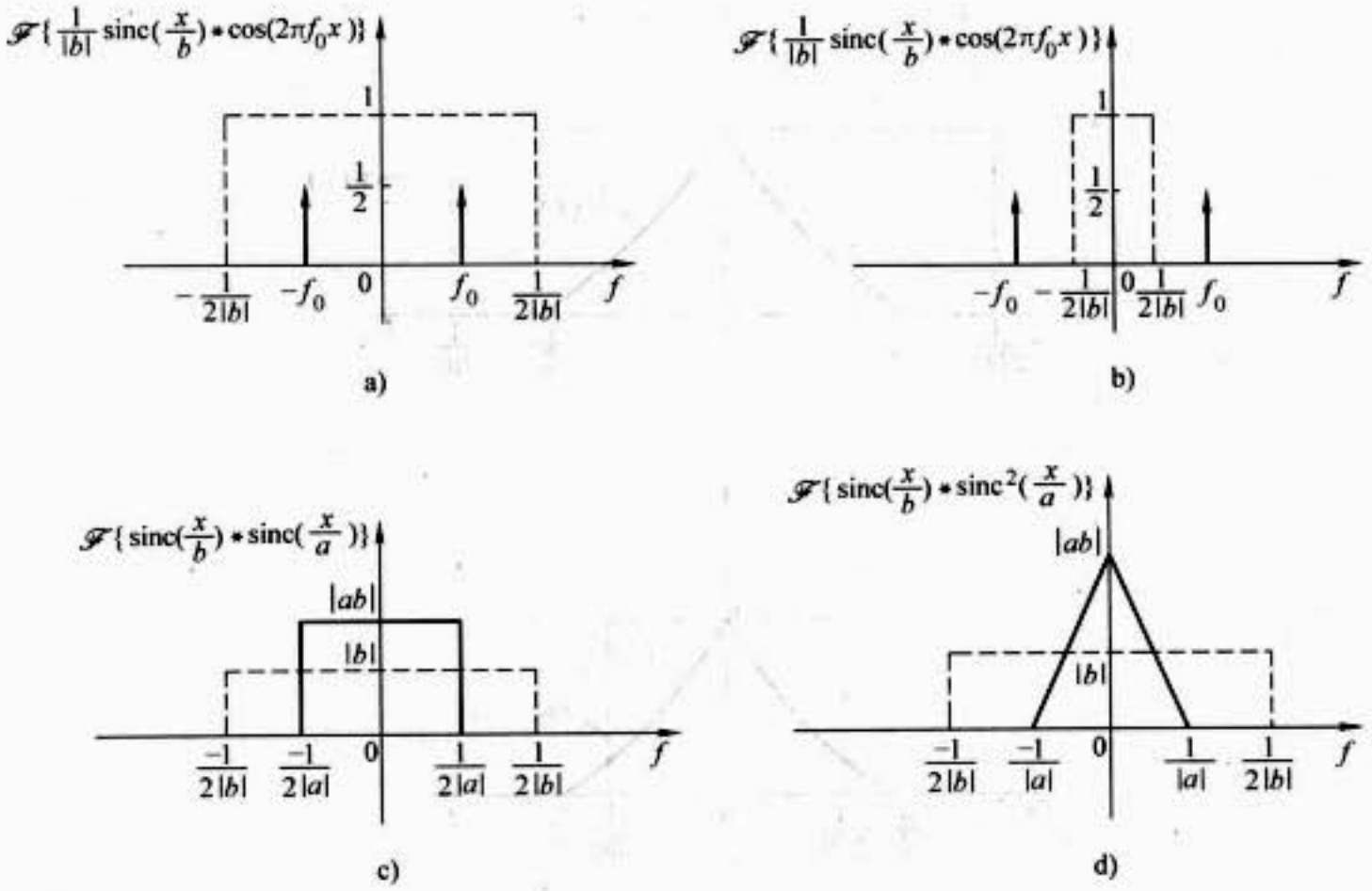


图 2-7

(2) 如果 $|b|>\frac{1}{w}$,还能得出以上结论吗?

证明

采用与题目 2.3 完全相同的思路来分析本题。

(1) $\mathscr{F}\left\{\frac{1}{|b|}\mathrm{sinc}\left(\frac{x}{b}\right)*f(x)\right\}=\mathrm{rect}(bf)G(f)$

式中,$G(f)=\mathscr{F}|f(x)|$。

如图 2-8a 所示,若 $|b|<\frac{1}{w}$,有 $\frac{1}{|b|}>w$,则上式为

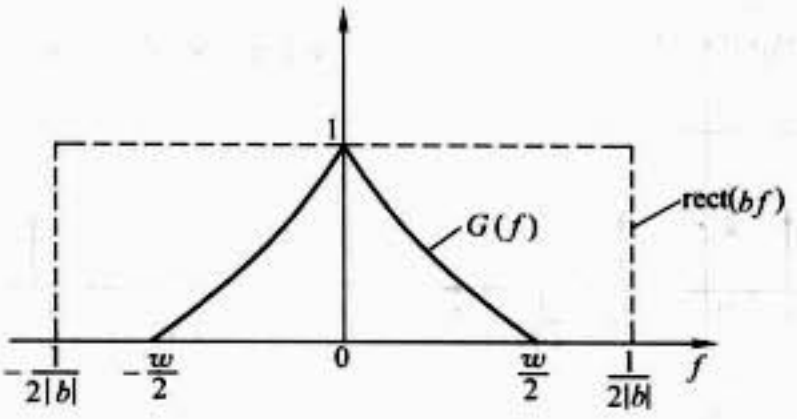
$$\mathscr{F}\left\{\frac{1}{|b|}\mathrm{sinc}\left(\frac{x}{b}\right)*f(x)\right\}=G(f)$$

即输出频谱是限带函数的完全频谱,此时如下关系必成立:

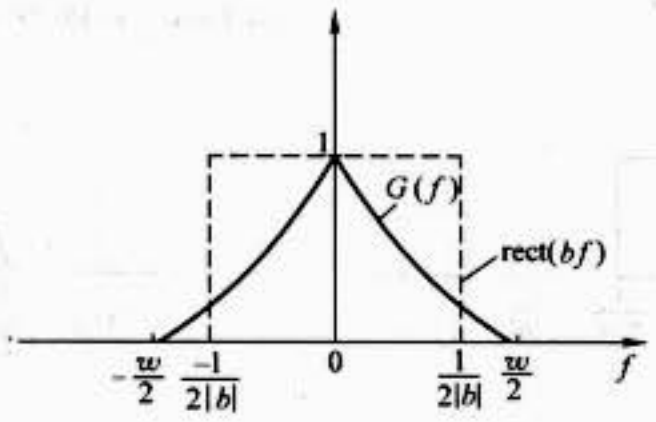
$$\frac{1}{|b|}\mathrm{sinc}\left(\frac{x}{b}\right)*f(x)=f(x)$$

(2) 如图 2-8b 所示,如果 $|b|>\frac{1}{w}$,有 $\frac{1}{|b|}<w$,则输出频谱不再是限带函数的完全频谱了,由于丢失部分频率成分,不能再还原出 $f(x)$,则上式中的关系不再成立。

2.5 对一个线性不变系统,脉冲响应为



a)



b)

图 2-8

$h(x) = 7\mathrm{sinc}(7x)$

用频率域方法对下列每一个输入 $f_i(x)$，求其输出 $g_i(x)$（必要时，可取合理近似）：

(1) $f_1(x) = \cos(4\pi x)$　　(2) $f_2(x) = \cos(4\pi x)\mathrm{rect}\left(\frac{x}{75}\right)$

(3) $f_3(x) = [1 + \cos(8\pi x)]\mathrm{rect}\left(\frac{x}{75}\right)$　　(4) $f_4(x) = \mathrm{comb}(x) * \mathrm{rect}(2x)$

解

系统传递函数为

$$\mathscr{F}\{h(x)\} = \mathscr{F}\{7\mathrm{sinc}(7x)\} = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{7}\right)$$

并假设令输入 $f_i(x)$ 和输出 $g_i(x)$ 对应的频谱分别为 $F_i(f)$ 和 $G_i(f)$，并有如下关系成立：

$$G_i(f) = F_i(f)H(f)$$

(1) $F_1(f) = \mathscr{F}\{f_1(x)\} = \mathscr{F}\{\cos(4\pi x)\} = \frac{1}{2}[\delta(f-2) + \delta(f+2)]$

如图 2-9a 所示，则

$$G_1(f) = F_1(f)H(f) = \frac{1}{2}[\delta(f-2) + \delta(f+2)]\mathrm{rect}\left(\frac{f}{7}\right)$$

$$=\frac{1}{2}[\delta(f-2)+\delta(f+2)]$$

对上式作傅里叶逆变换,有

$$g_1(x)=\mathscr{F}^{-1}|G_1(f)|=\cos(4\pi x)$$

$$(2)\ F_2(f)=\mathscr{F}|f_2(x)|=\mathscr{F}\left\{\cos(4\pi x)\,\mathrm{rect}\left(\frac{x}{75}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}[\delta(f-2)+\delta(f+2)]*75\mathrm{sinc}(75f)$$

如图 2-9b 所示,则

$$G_2(f)=F_2(f)H(f)=\left\{\frac{1}{2}[\delta(f-2)+\delta(f+2)]*75\mathrm{sinc}(75f)\right\}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{7}\right)$$

$$\approx\frac{1}{2}[\delta(f-2)+\delta(f+2)]*75\mathrm{sinc}(75f)$$

对上式作傅里叶逆变换,有

$$g_2(x)=\mathscr{F}^{-1}|G_2(f)|=\cos(4\pi x)\,\mathrm{rect}\left(\frac{x}{75}\right)$$

$$(3)\ F_3(f)=\mathscr{F}|f_3(x)|=\mathscr{F}\left\{[1+\cos(8\pi x)]\,\mathrm{rect}\left(\frac{x}{75}\right)\right\}$$

$$=\left[\delta(f)+\frac{1}{2}\delta(f+4)+\frac{1}{2}\delta(f-4)\right]*75\mathrm{sinc}(75f)$$

如图 2-9c 所示,则

$$G_3(f)=F_3(f)H(f)=\left\{\left[\delta(f)+\frac{1}{2}\delta(f-4)+\frac{1}{2}\delta(f+4)\right]*75\mathrm{sinc}(75f)\right\}$$

$$\times\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{7}\right)\approx 75\mathrm{sinc}(75f)$$

对上式作傅里叶逆变换,有

$$g_3(x)=\mathscr{F}^{-1}|G_3(f)|=\mathrm{rect}\left(\frac{x}{75}\right)$$

$$(4)\ F_4(f)=\mathscr{F}|f_4(x)|=\mathscr{F}|\mathrm{comb}(x)*\mathrm{rect}(2x)|$$

$$=\mathrm{comb}(f)\times\frac{1}{2}\mathrm{sinc}\left(\frac{f}{2}\right)$$

如图 2-9d 所示,则

$$G_4(f)=F_4(f)H(f)=\left[\mathrm{comb}(f)\times\frac{1}{2}\mathrm{sinc}\left(\frac{f}{2}\right)\right]\mathrm{rect}\left(\frac{f}{7}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{2}\mathrm{sinc}\left(\frac{1}{2}\right)[\delta(f-1)+\delta(f+1)]$$

$$+\frac{1}{2}\mathrm{sinc}\left(\frac{3}{2}\right)[\delta(f-3)+\delta(f+3)]$$

$$=\frac{1}{2}[\delta(f-2)+\delta(f+2)]$$

对上式作傅里叶逆变换,有

$$g_1(x)=\mathscr{F}^{-1}|G_1(f)|=\cos(4\pi x)$$

$$(2)\ F_2(f)=\mathscr{F}|f_2(x)|=\mathscr{F}\left\{\cos(4\pi x)\,\mathrm{rect}\left(\frac{x}{75}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}[\delta(f-2)+\delta(f+2)]*75\mathrm{sinc}(75f)$$

如图 2-9b 所示,则

$$G_2(f)=F_2(f)H(f)=\left\{\frac{1}{2}[\delta(f-2)+\delta(f+2)]*75\mathrm{sinc}(75f)\right\}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{7}\right)$$

$$\approx\frac{1}{2}[\delta(f-2)+\delta(f+2)]*75\mathrm{sinc}(75f)$$

对上式作傅里叶逆变换,有

$$g_2(x)=\mathscr{F}^{-1}|G_2(f)|=\cos(4\pi x)\,\mathrm{rect}\left(\frac{x}{75}\right)$$

$$(3)\ F_3(f)=\mathscr{F}|f_3(x)|=\mathscr{F}\left\{[1+\cos(8\pi x)]\,\mathrm{rect}\left(\frac{x}{75}\right)\right\}$$

$$=\left[\delta(f)+\frac{1}{2}\delta(f+4)+\frac{1}{2}\delta(f-4)\right]*75\mathrm{sinc}(75f)$$

如图 2-9c 所示,则

$$G_3(f)=F_3(f)H(f)=\left\{\left[\delta(f)+\frac{1}{2}\delta(f-4)+\frac{1}{2}\delta(f+4)\right]*75\mathrm{sinc}(75f)\right\}$$

$$\times\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{7}\right)\approx 75\mathrm{sinc}(75f)$$

对上式作傅里叶逆变换,有

$$g_3(x)=\mathscr{F}^{-1}|G_3(f)|=\mathrm{rect}\left(\frac{x}{75}\right)$$

$$(4)\ F_4(f)=\mathscr{F}|f_4(x)|=\mathscr{F}|\mathrm{comb}(x)*\mathrm{rect}(2x)|$$

$$=\mathrm{comb}(f)\times\frac{1}{2}\mathrm{sinc}\left(\frac{f}{2}\right)$$

如图 2-9d 所示,则

$$G_4(f)=F_4(f)H(f)=\left[\mathrm{comb}(f)\times\frac{1}{2}\mathrm{sinc}\left(\frac{f}{2}\right)\right]\mathrm{rect}\left(\frac{f}{7}\right)$$

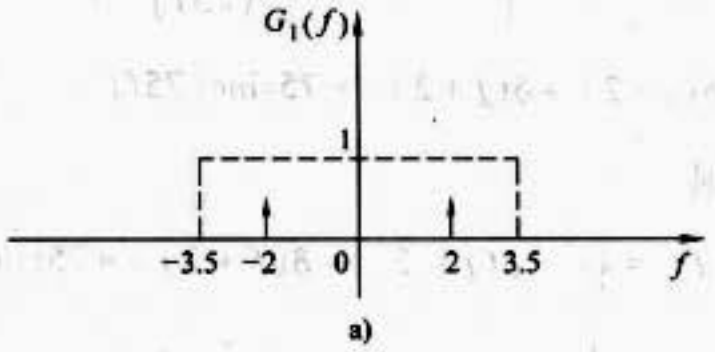
$$=\frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{2}\mathrm{sinc}\left(\frac{1}{2}\right)[\delta(f-1)+\delta(f+1)]$$

$$+\frac{1}{2}\mathrm{sinc}\left(\frac{3}{2}\right)[\delta(f-3)+\delta(f+3)]$$

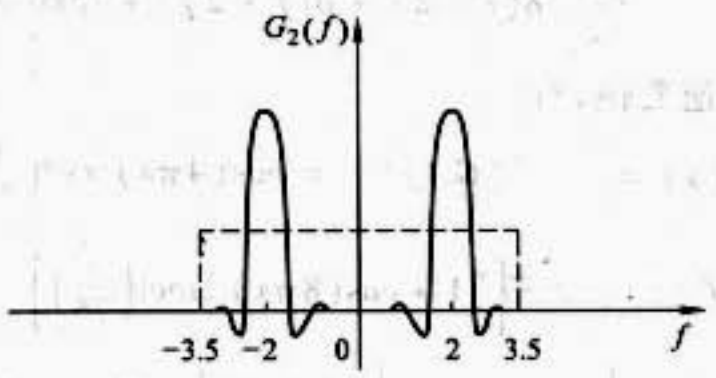
对上式作傅里叶逆变换,有

$$g_4(x) = \mathscr{F}^{-1}|G_4(f)| = \frac{1}{2} + \mathrm{sinc}\left(\frac{1}{2}\right)\cos(2\pi x) + \mathrm{sinc}\left(\frac{3}{2}\right)\cos(6\pi x)$$

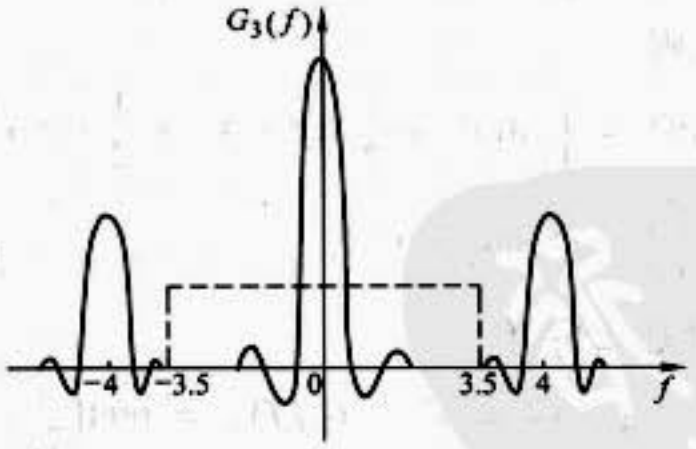
$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos(2\pi x) - \frac{2}{3\pi}\cos(6\pi x)$$



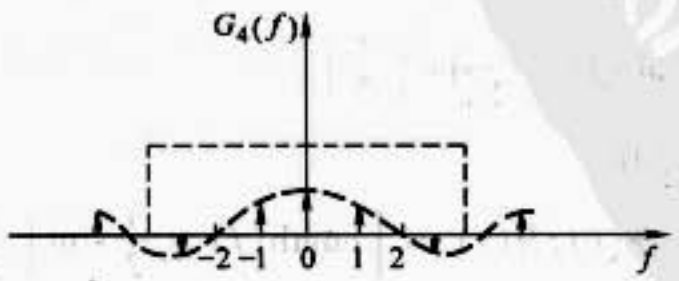
a)



b)



c)



d)

图 2-9

2.6 给定一个线性不变系统,输入函数为有限延伸的三角波

$$g(x) = \left[\frac{1}{2}\mathrm{comb}\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{x}{50}\right)\right] * \mathrm{tri}(x)$$

对下述传递函数利用图解方法确定系统的输出：

(1) $H(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2}\right)$　　(2) $H(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{4}\right) - \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2}\right)$

解

先在频域内求解出输出频谱，然后再利用傅里叶逆变换转化为空域中系统的输出。系统的输入频谱为

$$G(f) = \mathscr{F}|g(x)| = \mathscr{F}\left\{\left[\frac{1}{2}\mathrm{comb}\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{x}{50}\right)\right] * \mathrm{tri}(x)\right\}$$

$$= [\mathrm{comb}(2f) * 50\mathrm{sinc}(50f)]\mathrm{sinc}^2(f)$$

系统输出频谱为

$$G'(f) = G(f)H(f)$$

(1) 当 $H(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2}\right)$ 时，如图 2-10a 所示，系统输出频谱为

$$G'(f) = G(f)H(f)$$

$$= 50\mathrm{sinc}(50f) + \mathrm{sinc}^2\left(\frac{1}{2}\right)[50\mathrm{sinc}(50f - 25) + 50\mathrm{sinc}(50f + 25)]$$

则

$$g'(x) = \mathrm{rect}\left(\frac{x}{50}\right)\left[1 + 2\mathrm{sinc}^2\left(\frac{1}{2}\right)\cos(\pi x)\right] = \mathrm{rect}\left(\frac{x}{50}\right)\left[1 + \frac{8}{\pi^2}\cos(\pi x)\right]$$

(2) 同理，当 $H(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{4}\right) - \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2}\right)$ 时，如图 2-10b 所示，系统输出频谱为

$$G'(f) = \mathrm{sinc}^2\left(\frac{3}{2}\right)[50\mathrm{sinc}(50f - 75) + 50\mathrm{sinc}(50f + 75)]$$

则

$$g'(x) = 2\mathrm{sinc}^2\left(\frac{3}{2}\right)\cos(3\pi x)\mathrm{rect}\left(\frac{x}{50}\right)$$

$$= \frac{8}{9\pi^2}\cos(3\pi x)\mathrm{rect}\left(\frac{x}{50}\right)$$

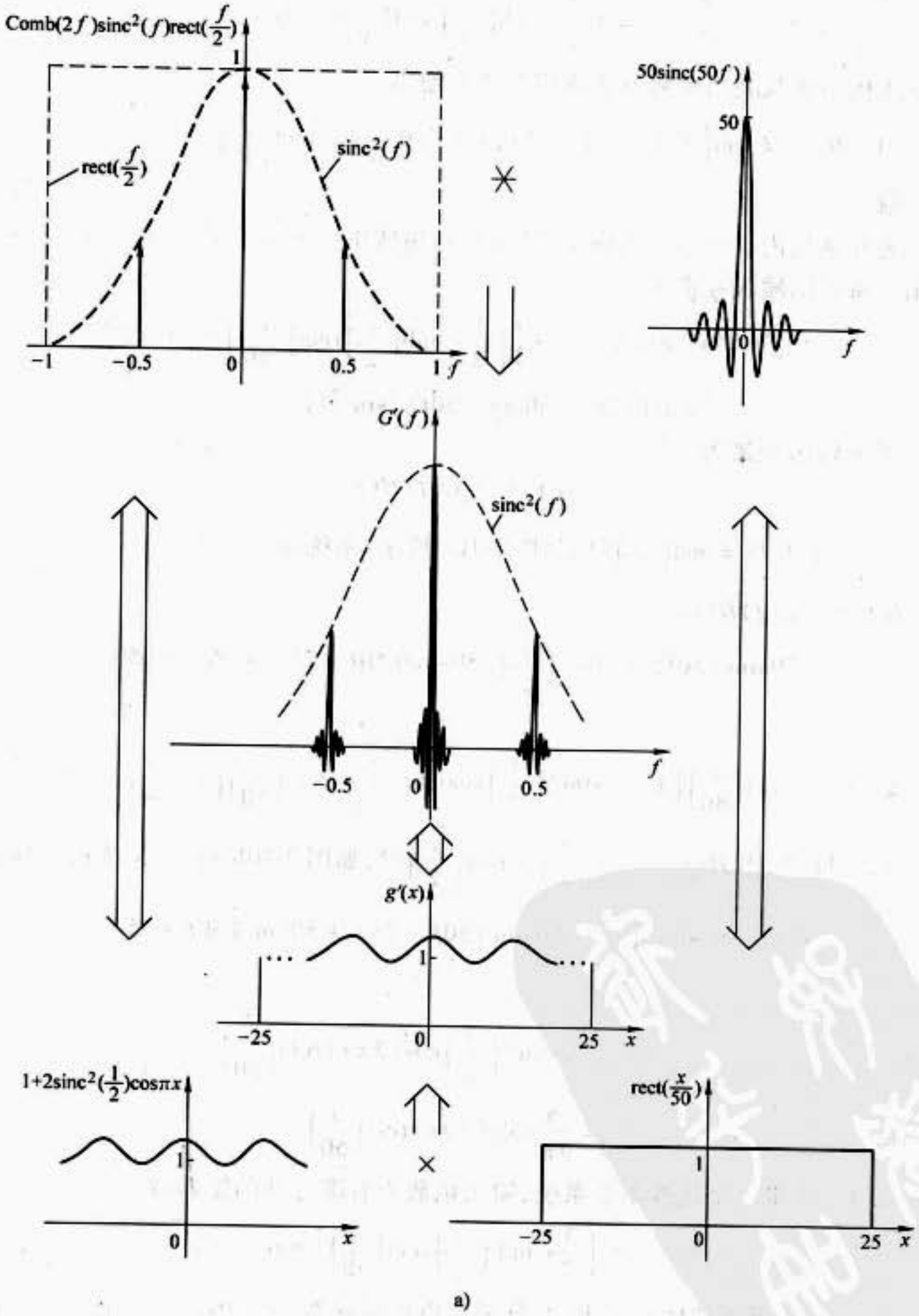
2.7　给定一个线性不变系统，输入函数为有限延伸的矩形波

$$g(x) = \left[\frac{1}{2}\mathrm{comb}\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{x}{50}\right)\right] * \mathrm{rect}(x)$$

对下述传递函数确定输出，并分别绘出传递函数、脉冲响应、输出及其频谱的图形：

(1) $H(f) = \exp(-\mathrm{j}\pi f)$　　(2) $H(f) = \exp(-\mathrm{j}\pi)$

(3) $H(f) = \exp[-\mathrm{j}\pi\mathrm{rect}(2f)]$


Comb(2f)sinc²(f)rect(f/2)
1
rect(f/2)
sinc²(f)
−1
−0.5
0
0.5
1
f
50sinc(50f)
50
0
f
G(f)
sinc²(f)
−0.5
0
0.5
f
g(x)
1
−25
0
25
x
1+2sinc²(1/2)cosπx
1
0
x
rect(x/50)
1
−25
0
25
x

a)

图 2-10

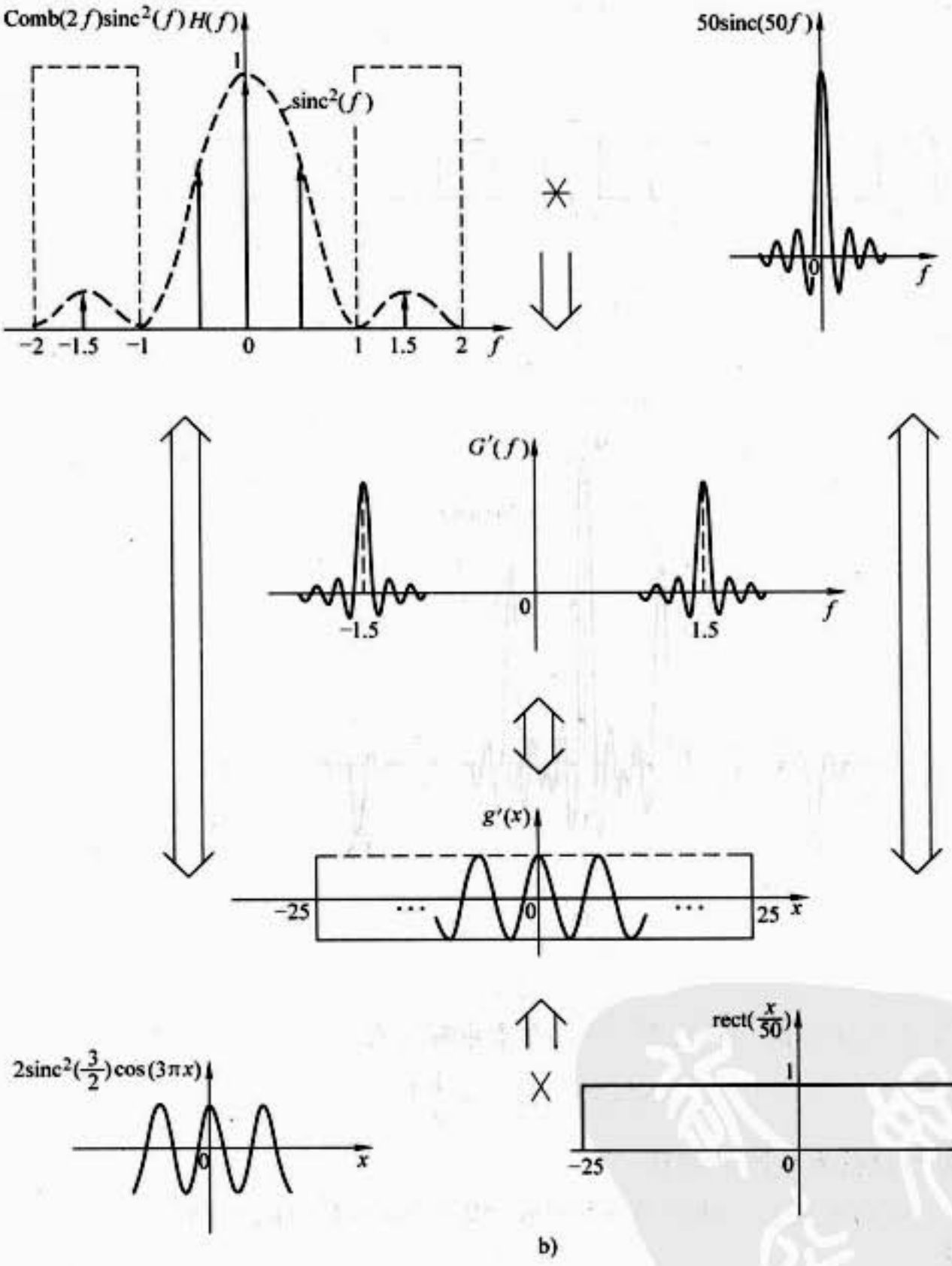


图 2-10 （续）

解

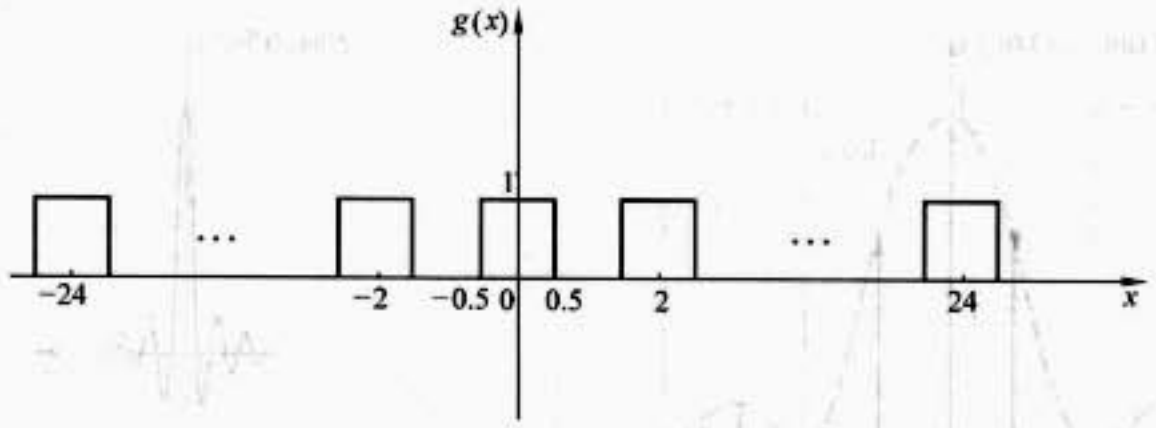
输入函数为

$$g(x) = \left[\frac{1}{2}\mathrm{comb}\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{x}{50}\right)\right] * \mathrm{rect}(x) = \sum_{n=-12}^{12}\mathrm{rect}(x-2n)$$

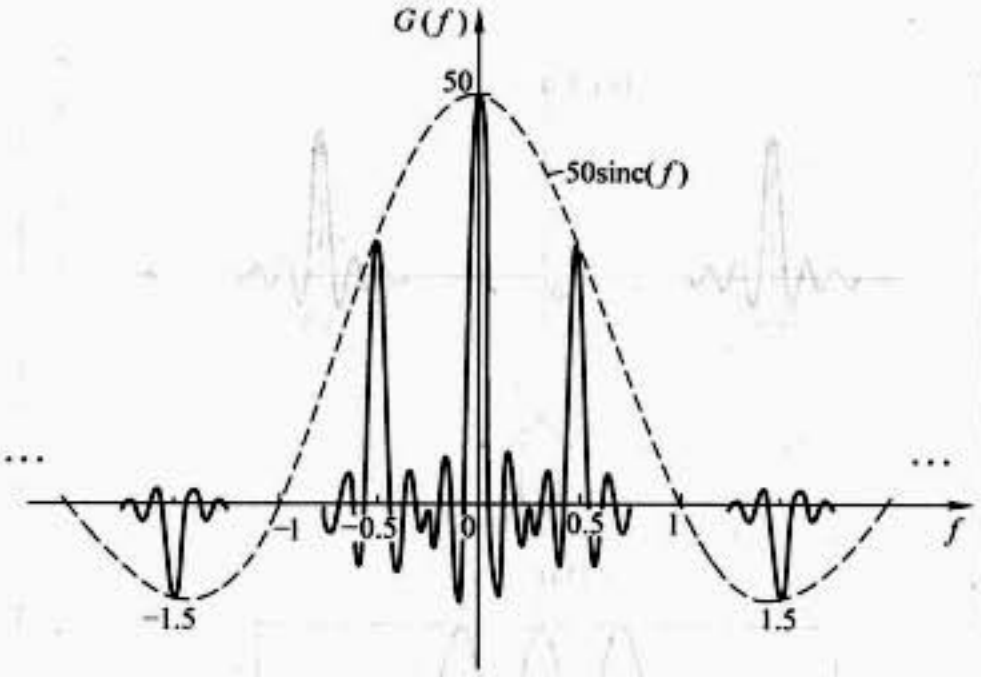
输入频谱为

$$G(f) = [\mathrm{comb}(2f) * 50\mathrm{sinc}(50f)]\mathrm{sinc}(f)$$

输入及其频谱分别如图 2-11a、图 2-11b 所示。



a)



b)

图 2-11

(1) 当 $H(f) = \exp(-j\pi f)$ 时,对应的脉冲响应为

$$h(x) = \delta\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

输出频谱仅仅发生线性相移

$$G'(f) = [\mathrm{comb}(2f) * 50\mathrm{sinc}(50f)]\mathrm{sinc}(f)\exp(-j\pi f)$$

输出为

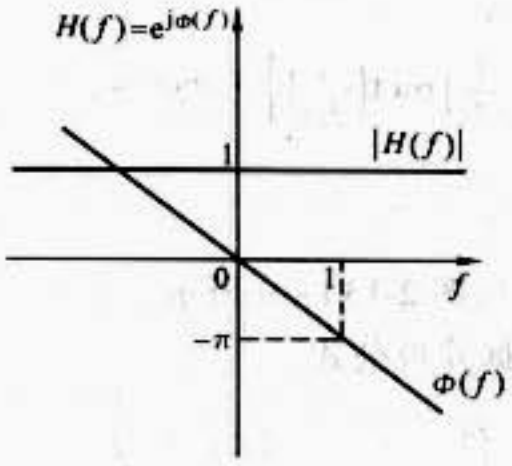
$$g'(x) = g(x) * h(x) = \left[\frac{1}{2}\mathrm{comb}\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{x}{50}\right)\right] * \mathrm{rect}(x) * \delta\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \sum_{n=-12}^{12} \mathrm{rect}\left(x - \frac{1}{2} - 2n\right)$$

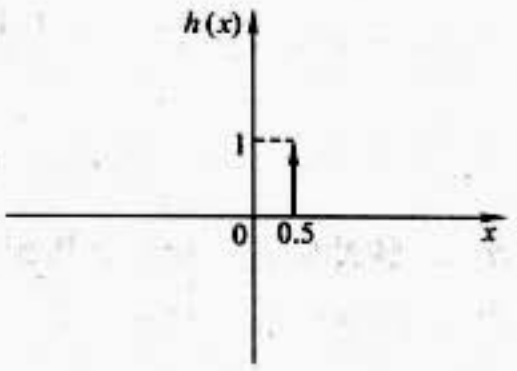
输出函数仅仅发生位移。传递函数、脉冲响应、输出及其频谱分别如图 2-12a ~ d 所示。

(2) 当 $H(f) = \exp(-j\pi)$ 时,根据欧拉公式

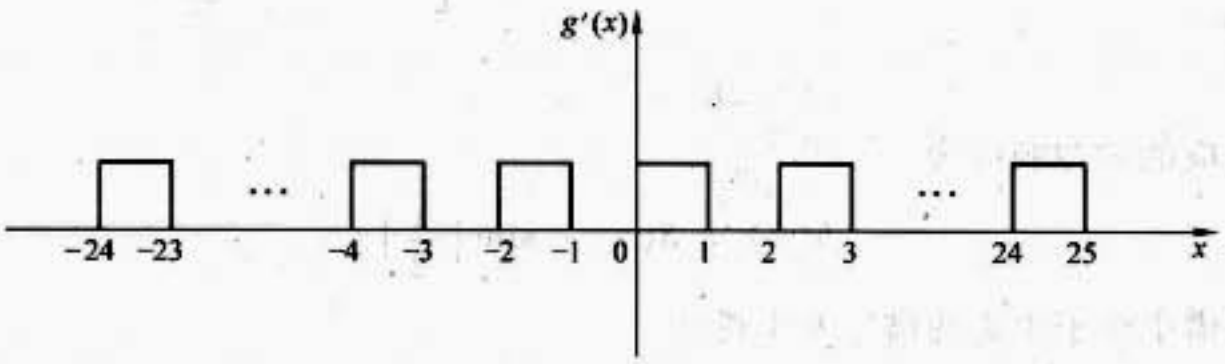
$$H(f) = -1$$



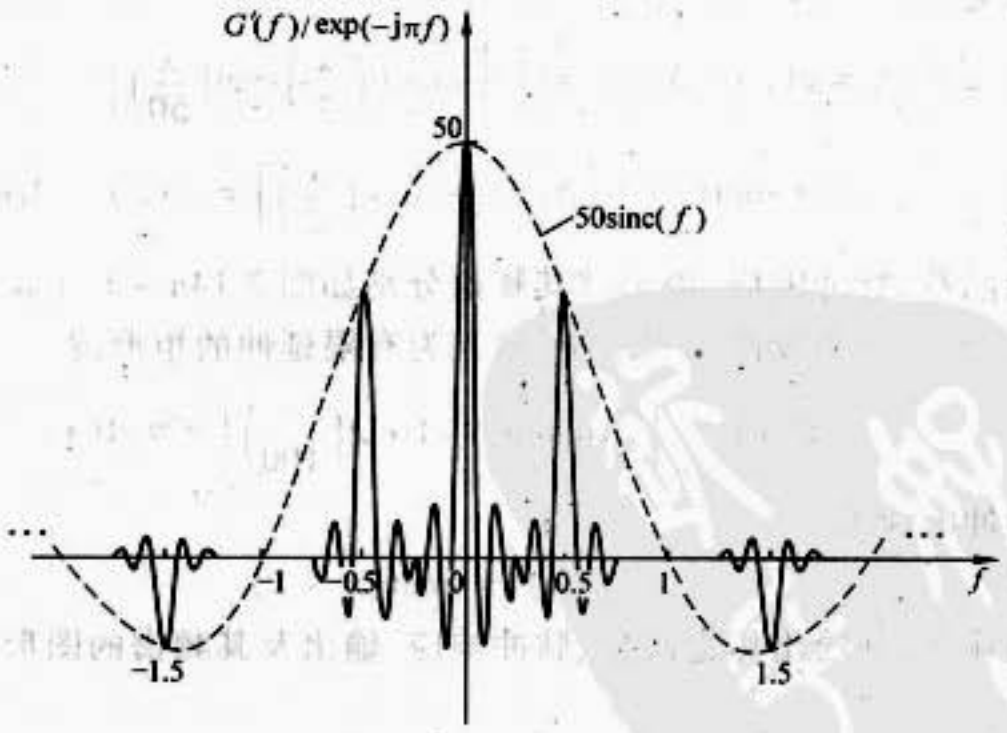
a)



b)



c)



d)

图 2-12

对应的脉冲响应为

$$h(x) = -\delta(x)$$

输出频谱为

$$G'(f) = -G(f) = -[\mathrm{comb}(2f) * 50\mathrm{sinc}(50f)]\mathrm{sinc}(f)$$

输出为

$$g'(x) = -g(x) = -\left[\frac{1}{2}\mathrm{comb}\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{x}{50}\right)\right] * \mathrm{rect}(x)$$

$$= -\sum_{n=-12}^{12}\mathrm{rect}(x-2n)$$

传递函数、脉冲响应、输出及其频谱分别如图 2-13a ~ d 所示。

(3) 当 $H(f) = \exp[-\mathrm{j}\pi\mathrm{rect}(2f)]$ 时,根据欧拉公式

$$H(f) = \exp[-\mathrm{j}\pi\mathrm{rect}(2f)] = \begin{cases} 1 & |f| > \frac{1}{4} \\ -1 & |f| \leqslant \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$= 1 - 2\mathrm{rect}(2f)$$

对应的脉冲响应为

$$h(x) = \delta(x) - \mathrm{sinc}\left(\frac{x}{2}\right)$$

输出频谱中位于中央的谱线发生反转

$$G'(f) = [\mathrm{comb}(2f) * 50\mathrm{sinc}(50f)]\mathrm{sinc}(f)[1 - 2\mathrm{rect}(2f)]$$

输出为

$$g'(x) = g(x) * h(x) = \left[\frac{1}{2}\mathrm{comb}\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{x}{50}\right)\right]$$

$$* \mathrm{rect}(x) * \left[\delta(x) - \mathrm{sinc}\left(\frac{x}{2}\right)\right] = g(x) - 2\mathrm{rect}\left(\frac{x}{50}\right)$$

传递函数、脉冲响应、输出及其频谱分别如图 2-14a ~ d 所示。

2.8 给定一个线性不变系统,输入为有限延伸的矩形波

$$g(x) = \left[\frac{1}{3}\mathrm{comb}\left(\frac{x}{3}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{x}{100}\right)\right] * \mathrm{rect}(x)$$

若系统脉冲响应为

$$h(x) = \mathrm{rect}(x-1)$$

求系统的输出,并绘出传递函数、脉冲响应、输出及其频谱的图形。

解

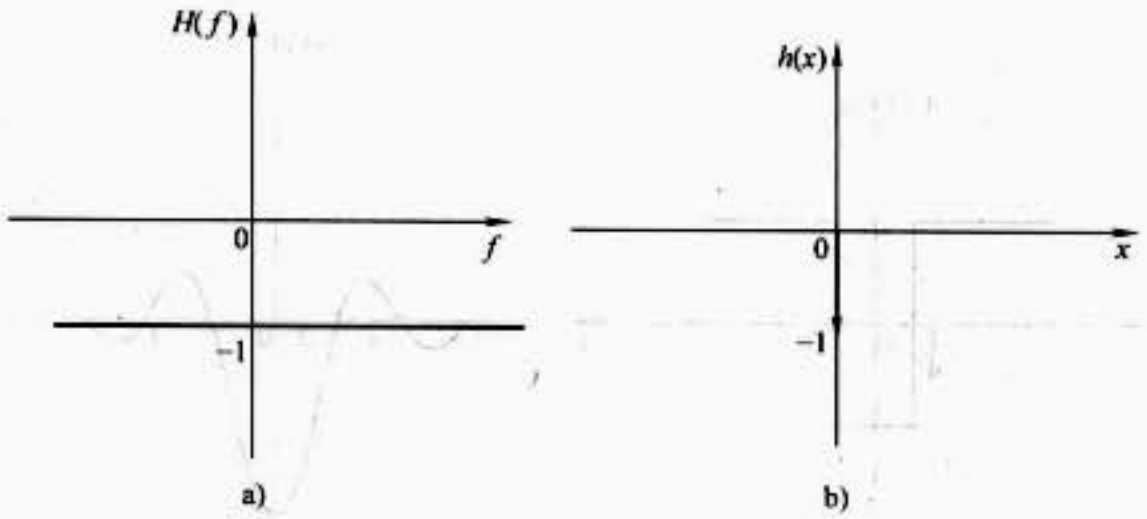
与题目 2.7 类似,采用图解与分析相结合的分析方法。系统的输入频谱和传递函数分别为

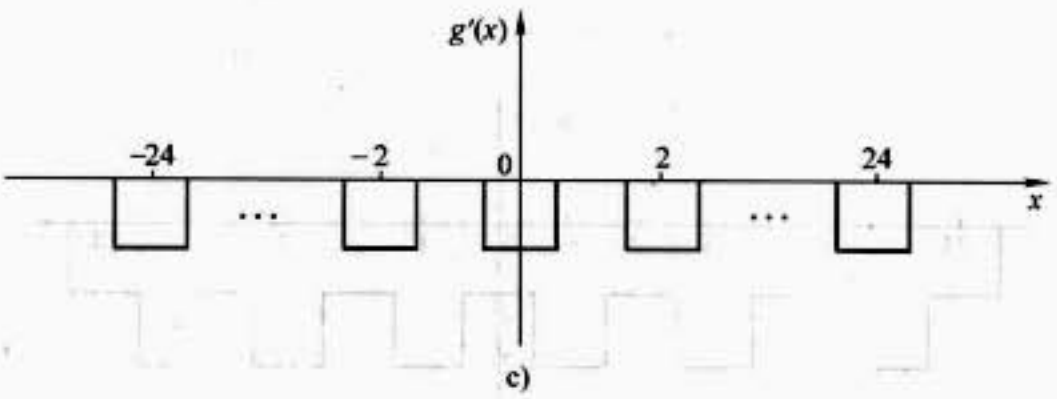
$$G(f) = \mathscr{F}\{g(x)\} = \mathscr{F}\left\{\left[\frac{1}{3}\mathrm{comb}\left(\frac{x}{3}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{x}{100}\right)\right] * \mathrm{rect}(x)\right\}$$

$$= [\mathrm{comb}(3f) * 100\mathrm{sinc}(100f)]\mathrm{sinc}(f)$$

和

$$H(f) = \mathrm{sinc}(f)\exp(-\mathrm{j}2\pi f)$$





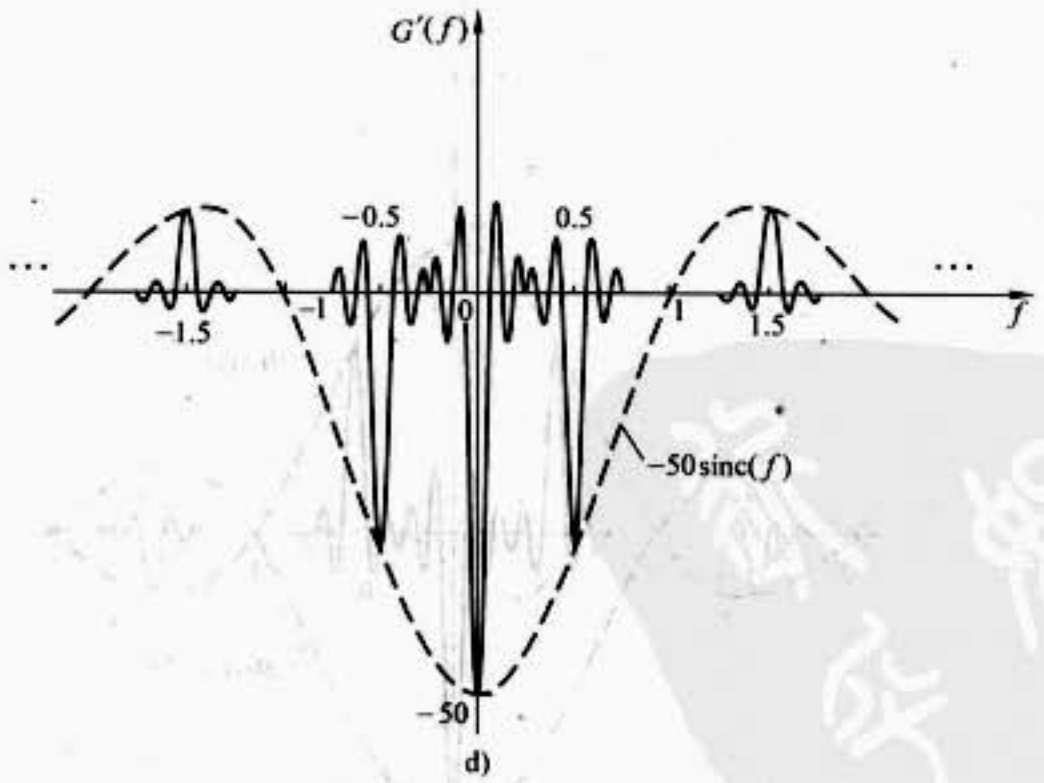


图 2-13

则输出频谱为

$$G'(f) = G(f)H(f) = [\mathrm{comb}(3f) * 100\mathrm{sinc}(100f)]\mathrm{sinc}^2(f)\exp(-\mathrm{j}2\pi f)$$

输出为

$$g'(x) = \mathscr{F}^{-1}|G'(f)| = \left[\frac{1}{3}\mathrm{comb}\left(\frac{x-1}{3}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{x-1}{100}\right)\right] * \mathrm{tri}(x)$$

其传递函数、脉冲响应、输出及其频谱的图形分别如图 2-15a ~ d 所示。

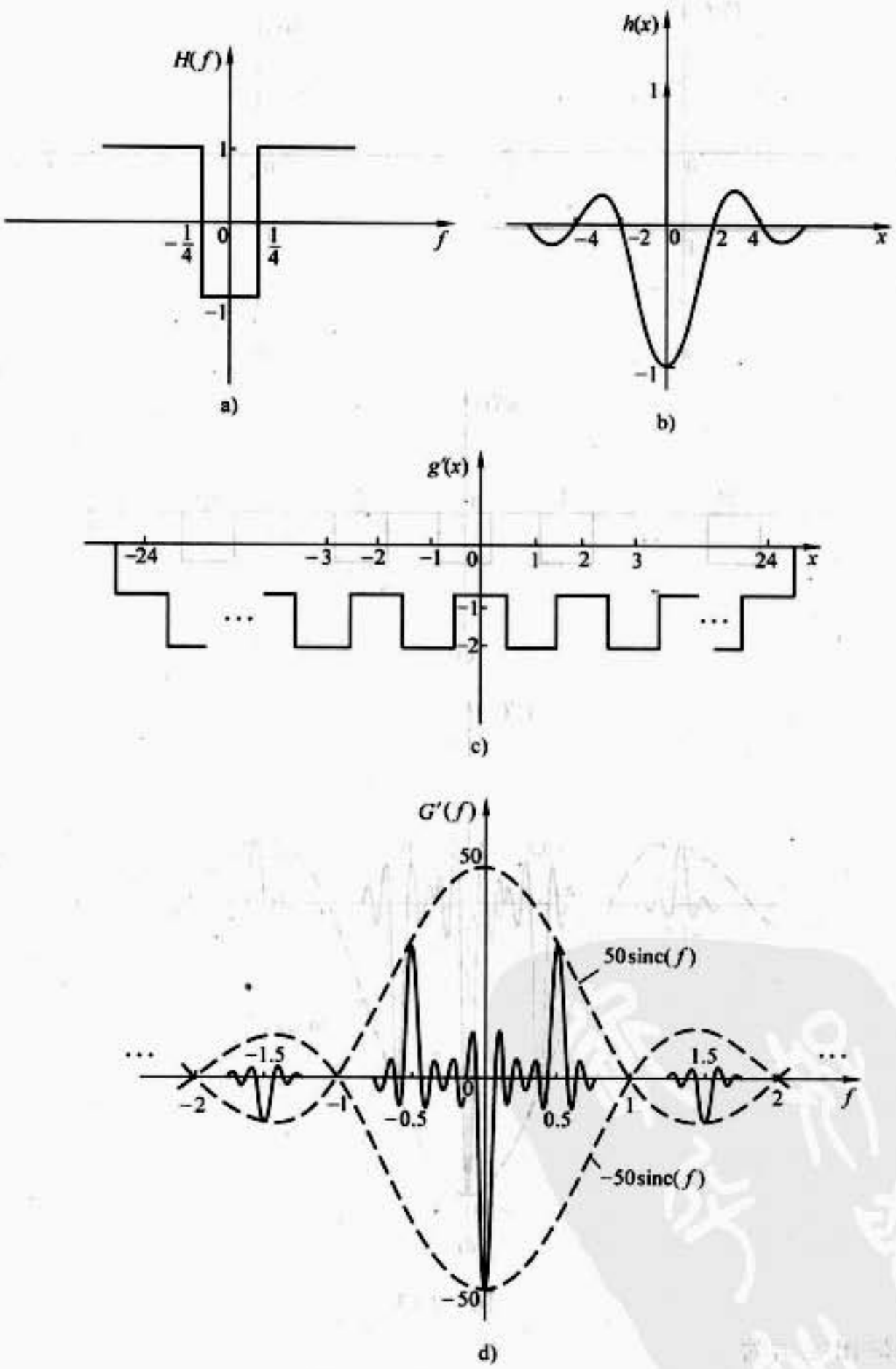


图 2-14

2.9 若对函数

$$h(x) = a\mathrm{sinc}^2(ax)$$

抽样,求允许的最大抽样间隔。

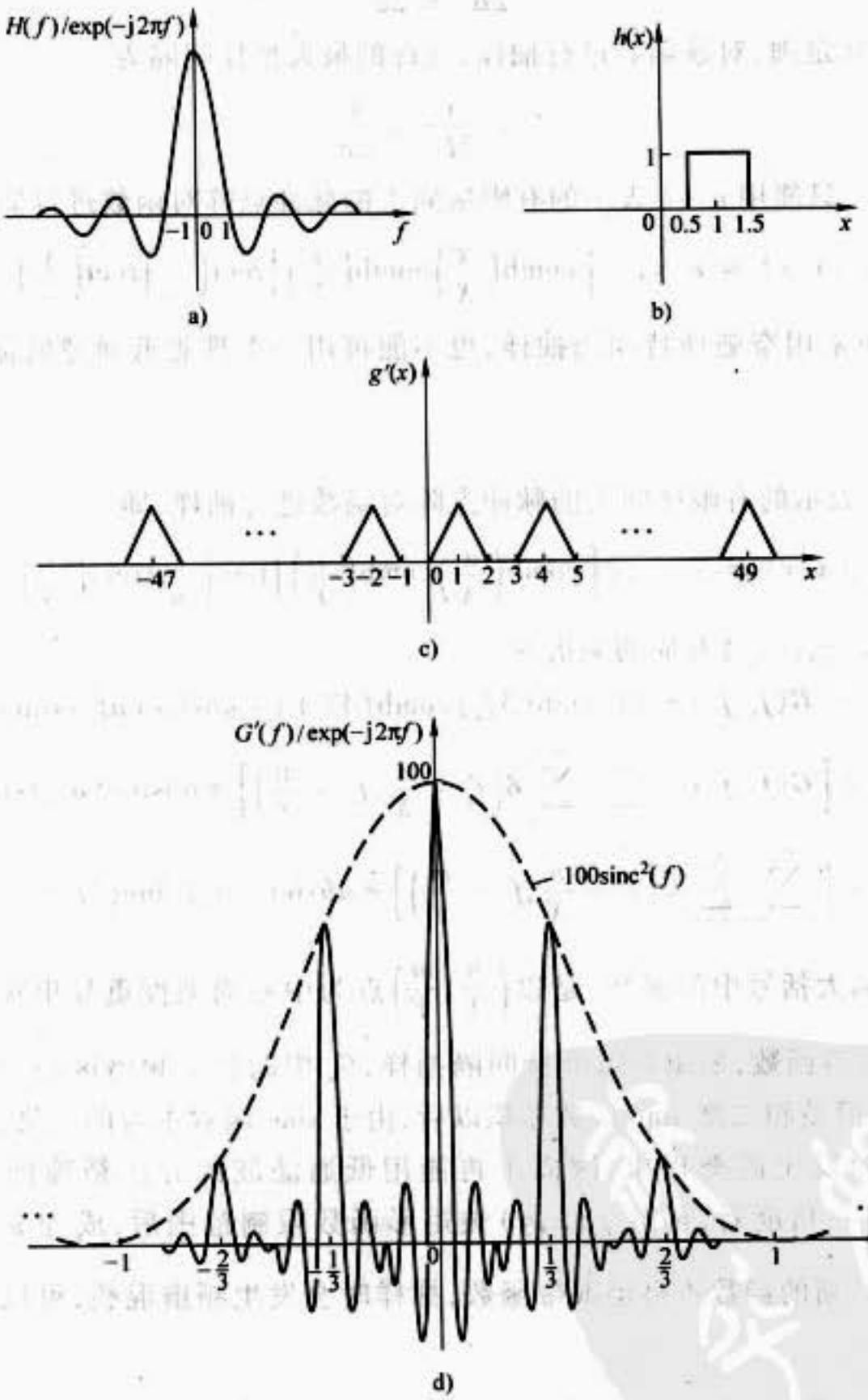


图 2-15

解

函数对应的频谱为

$$H(f) = \mathrm{tri}\left(\frac{f}{a}\right)$$

带宽为

$$2B_x = 2a$$

根据抽样定理，对该函数进行抽样，允许的最大抽样间隔为

$$X = \frac{1}{2B_x} = \frac{1}{2a}$$

2.10　若只能用 $a \times b$ 表示的有限区间上的脉冲点阵对函数进行抽样，即

$$g_s(x,y) = g(x,y)\left[\operatorname{comb}\left(\frac{x}{X}\right)\operatorname{comb}\left(\frac{y}{Y}\right)\right]\operatorname{rect}\left(\frac{x}{a}\right)\operatorname{rect}\left(\frac{y}{b}\right)$$

试说明，即使采用奈魁斯特间隔抽样，也不能再用一个理想低通滤波器精确恢复 $g(x,y)$。

证明

用 $a \times b$ 表示的有限区间上的脉冲点阵对函数进行抽样，即

$$g_s(x,y) = g(x,y)\left[\operatorname{comb}\left(\frac{x}{X}\right)\operatorname{comb}\left(\frac{y}{Y}\right)\right]\operatorname{rect}\left(\frac{x}{a}\right)\operatorname{rect}\left(\frac{y}{b}\right)$$

抽样函数 $g_s(x,y)$ 对应的频谱为

$$\begin{aligned} G_s(f_x,f_y) &= [G(f_x,f_y) * XY\operatorname{comb}(Xf_x)\operatorname{comb}(Yf_y)] * ab\operatorname{sinc}(af_x)\operatorname{sinc}(bf_y) \\ &= \left[G(f_x,f_y) * \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta\left(f_x - \frac{n}{X}, f_y - \frac{m}{Y}\right)\right] * ab\operatorname{sinc}(af_x)\operatorname{sinc}(bf_y) \\ &= \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}G\left(f_x - \frac{n}{X}, f_y - \frac{m}{Y}\right)\right] * ab\operatorname{sinc}(af_x)\operatorname{sinc}(bf_y) \end{aligned}$$

上式右端大括号中的函数，是以 $\left(\frac{n}{X},\frac{m}{Y}\right)$ 点为中心周期性重复出现的函数频谱 G。对于限带函数，采用奈魁斯特间隔抽样，G_s 中的各个频谱区域原本不会发生混叠现象，但是和二维 sinc 函数卷积以后，由于 sinc 函数本身的延展性，会造成各函数频谱间发生混叠现象，因而不再能用低通滤波的方法精确恢复原函数 $g(x,y)$。从另一角度看，函数 $g(x,y)$ 被矩形函数限制范围后，成为 $g(x,y)\operatorname{rect}\left(\frac{x}{a}\right)\operatorname{rect}\left(\frac{y}{b}\right)$，新的函数不再是限带函数，抽样时会发生频谱混叠，可以得出同样解释。

但是，只要采样间隔 $a \times b$ 足够大，二维 sinc 函数的有效区间会很窄（只有当 $a \times b$ 无穷大时，二维 sinc 函数的极限才为 δ 函数）。G_s 中各频谱间的混叠可以忽略，经低通滤波，可近似得到函数频谱，再经傅里叶逆变换可近似恢复原函数 $g(x,y)$。$a \times b$ 尽量大，才会给出良好的近似。当采用有限尺寸的阵列探测器如 CCD 采集图像时，就会遇到这种问题。

2.11　如果用很窄的矩形脉冲阵列对函数抽样（物理上并不可能在一些严格的点上抽样一个函数），即

$$g_s(x,y) = g(x,y)\left[\mathrm{comb}\left(\frac{x}{X}\right)\mathrm{comb}\left(\frac{y}{Y}\right)\right] * \left[\mathrm{rect}\left(\frac{x}{L_x}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y}{L_y}\right)\right]$$

式中，L_x、L_y 为每个脉冲在 x、y 方向的宽度。若抽样间隔合适，说明能否由 g_s 还原函数 $g(x,y)$。

解

用很窄的矩形脉冲阵列对函数抽样，例如当采用 CCD 采集图像，每个像素都有一定的尺寸大小。这时抽样函数

$$g_s(x,y) = g(x,y)\left[\mathrm{comb}\left(\frac{x}{X}\right)\mathrm{comb}\left(\frac{y}{Y}\right)\right] * \left[\mathrm{rect}\left(\frac{x}{L_x}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y}{L_y}\right)\right]$$

抽样函数 g_s 对应的频谱是

$$G_s(f_x,f_y) = \left[G(f_x,f_y) * \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta\left(f_x - \frac{n}{X}, f_y - \frac{m}{Y}\right)\right]L_xL_y\mathrm{sinc}(L_xf_x)\mathrm{sinc}(L_yf_y)$$

$$= \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}G\left(f_x - \frac{n}{X}, f_y - \frac{m}{Y}\right)\right]L_xL_y\mathrm{sinc}(L_xf_x)\mathrm{sinc}(L_yf_y)$$

由于 L_x、L_y 尺寸很小，二维 sinc 函数是平缓衰减的函数，对 G_s 中各个以 $\left(\frac{n}{X},\frac{m}{Y}\right)$ 点为中心的函数频谱 $G(f_x,f_y)$ 的高度给以加权衰减。上式也可以看成是用经 sinc 函数加权衰减的脉冲序列与 $G(f_x,f_y)$ 卷积，结果是一样的。

由于各个重复出现的频谱 $G(f_x,f_y)$ 形状不变，带宽不变，不发生混叠（图 2-16 以一维图形作了说明），因而只要抽样间隔合适，仍然能通过低通滤波还原函数 $g(x,y)$。

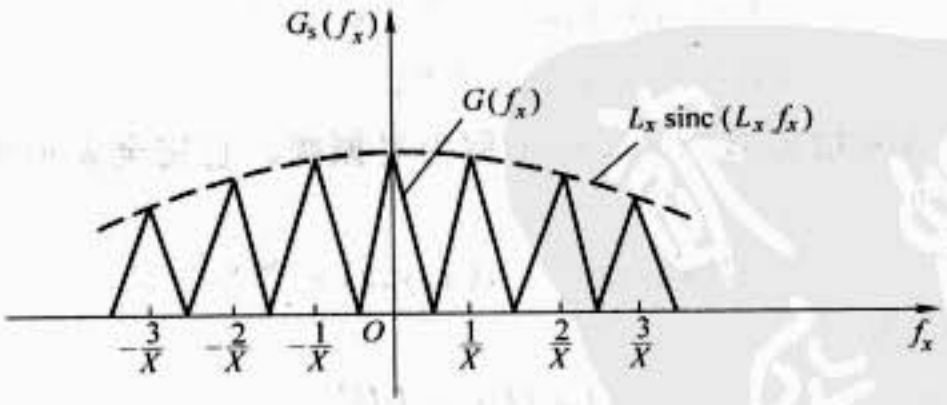


图 2-16

第3章　标量衍射理论

Ⅰ. 基本概念与公式

1. 标量衍射理论适用的条件

光波是矢量波。完备描述光波，应当考虑光波场的矢量性质。然而在光的干涉、衍射等许多现象中，允许把光波近似作为标量波处理。当满足下述条件时，标量衍射理论所给出的结果与实际十分相符：

- 衍射孔径比波长大得多。
- 不在太靠近孔径的地方观察衍射场。

2. 光波的数学描述

1）单色光波场中空间任一点 (x,y,z) 、任一时刻 t 的光振动可以表示为

$$u(x,y,z;t) = a(x,y,z)\cos[2\pi\nu t + \varphi(x,y,x)] \tag{3-1}$$

式中，ν 是光的频率；$a(x,y,z)$ 和 $\varphi(x,y,x)$ 分别是光波在该点的振幅和初相位。

利用欧拉公式，可将式（3-1）表示为

$$\begin{aligned} u(x,y,z;t) &= \mathrm{Re}\{a(x,y,z)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}[2\pi\nu t+\varphi(x,y,z)]}\} \\ &= \mathrm{Re}\{a(x,y,z)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi(x,y,z)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\nu t}\} \\ &= \mathrm{Re}\{U(x,y,z)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\nu t}\} \end{aligned} \tag{3-2}$$

式中，Re {} 表示取实部；$U(x,y,z)$ 称为复振幅，它完全表示了光振动随空间位置的分布，即

$$U(x,y,x) = a(x,y,z)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi(x,y,z)} \tag{3-3}$$

光强分布则为

$$I = |U|^2 = UU^* \tag{3-4}$$

2）球面波

发散球面波

单色的发散球面波在光场中任意一点 (x,y,z) 产生的复振幅为

$$U(x,y,z) = \frac{a_0}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kr} \tag{3-5}$$

式中，r 表示空间点 (x,y,z) 离光源的距离；a_0 为离光源单位距离处的振幅；k 为波数，$k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$。

第3章　标量衍射理论

Ⅰ. 基本概念与公式

1. 标量衍射理论适用的条件

光波是矢量波。完备描述光波，应当考虑光波场的矢量性质。然而在光的干涉、衍射等许多现象中，允许把光波近似作为标量波处理。当满足下述条件时，标量衍射理论所给出的结果与实际十分相符：

- 衍射孔径比波长大得多。
- 不在太靠近孔径的地方观察衍射场。

2. 光波的数学描述

1）单色光波场中空间任一点 (x,y,z) 、任一时刻 t 的光振动可以表示为

$$u(x,y,z;t) = a(x,y,z)\cos[2\pi\nu t + \varphi(x,y,x)] \tag{3-1}$$

式中，ν 是光的频率；$a(x,y,z)$ 和 $\varphi(x,y,x)$ 分别是光波在该点的振幅和初相位。

利用欧拉公式，可将式（3-1）表示为

$$\begin{aligned} u(x,y,z;t) &= \mathrm{Re}\{a(x,y,z)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}[2\pi\nu t+\varphi(x,y,z)]}\} \\ &= \mathrm{Re}\{a(x,y,z)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi(x,y,z)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\nu t}\} \\ &= \mathrm{Re}\{U(x,y,z)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\nu t}\} \end{aligned} \tag{3-2}$$

式中，Re {} 表示取实部；$U(x,y,z)$ 称为复振幅，它完全表示了光振动随空间位置的分布，即

$$U(x,y,x) = a(x,y,z)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi(x,y,z)} \tag{3-3}$$

光强分布则为

$$I = |U|^2 = UU^* \tag{3-4}$$

2）球面波

发散球面波

单色的发散球面波在光场中任意一点 (x,y,z) 产生的复振幅为

$$U(x,y,z) = \frac{a_0}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kr} \tag{3-5}$$

式中，r 表示空间点 (x,y,z) 离光源的距离；a_0 为离光源单位距离处的振幅；k 为波数，$k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$。

当光源在坐标原点，利用傍轴近似，得到与其相距为 $z(z>0)$ 的 xy 平面上的光场分布为

$$U(x,y)=\frac{a_0}{z}\exp(\mathrm{j}kz)\exp\left[\mathrm{j}\frac{k}{2z}(x^2+y^2)\right] \tag{3-6}$$

式中，$\exp\left[\mathrm{j}\frac{k}{2z}(x^2+y^2)\right]$通常称为发散球面波的二次位相因子。

会聚球面波

单色的会聚球面波在光场中任意一点(x,y,z)产生的复振幅为

$$U(x,y)=\frac{a_0}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr} \tag{3-7}$$

其中，r 表示空间点 (x,y,z) 到会聚点的距离。当球面波向 z 轴上一点会聚时，利用傍轴近似，同样可以得到与其相距为 z $(z>0)$ 的 xy 平面上的光场分布为

$$U(x,y,z)=\frac{a_0}{z}\exp(-\mathrm{j}kz)\exp\left[-\mathrm{j}\frac{k}{2z}(x^2+y^2)\right] \tag{3-8}$$

其中，$\exp\left[-\mathrm{j}\frac{k}{2z}(x^2+y^2)\right]$通常称为会聚球面波的二次位相因子。

3）平面波：如图 3-1 所示，沿 k 方向传播的单色平面波在光场中点 (x,y,z) 产生的复振幅可以表示为

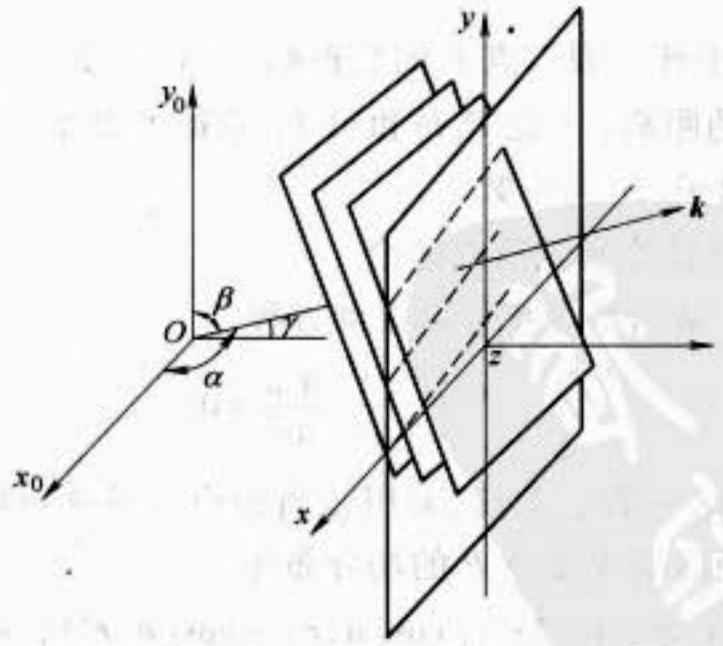


图 3-1　平面波在 xy 平面上的等位相线

$$U(x,y,z)=a\exp[\mathrm{j}k(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)] \tag{3-9}$$

式中，a 为常量振幅；$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 为传播方向的方向余弦。

在 xy 平面上平面波的复振幅分布为

$$U(x,y,z)=A\exp[\mathrm{j}k(x\cos\alpha+y\cos\beta)] \tag{3-10}$$

式中，$A = a\exp\left[\mathrm{j}kz\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}\right]$。在 xy 平面上的复振幅是周期分布的，它在 x、y 方向上变化的空间频率分别为 f_x 和 f_y，并且

$$f_x = \frac{\cos\alpha}{\lambda},\ f_y = \frac{\cos\beta}{\lambda} \tag{3-11}$$

xy 平面上复振幅的周期分布可以用一组空间频率 (f_x, f_y) 来表示，即

$$U(x,y) = A\exp[\mathrm{j}2\pi(f_x x + f_y y)] \tag{3-12}$$

通常称 $\exp[\mathrm{j}2\pi(f_x x + f_y y)]$ 为平面波的线性位相因子。

3. 基尔霍夫衍射理论

（1）惠更斯-菲涅耳原理

波前上的每个面元都可以看做是子波源（见图 3-2），它们向四周发射子波。光场中任何一点的光振动，就是所有子波源发出的子波相干叠加的结果。这就是惠更斯-菲涅耳原理。该原理的数学表达式为

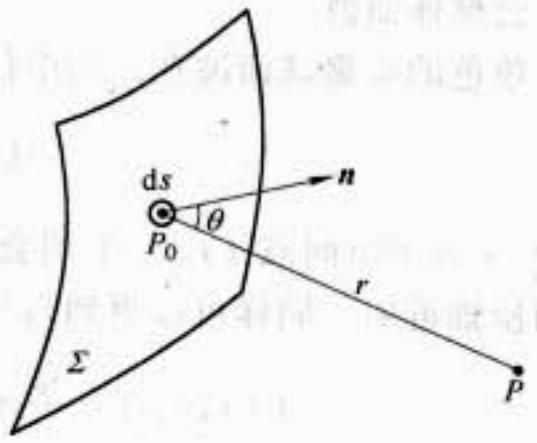


图 3-2　计算波面 Σ 在 P 点产生的复振幅的几何图形

$$U(P) = c\iint_{\Sigma} U(P_0)K(\theta)\frac{\exp(\mathrm{j}kr)}{r}\mathrm{d}s \tag{3-13}$$

式中，$U(P)$ 是光场中任一观察点 P 的复振幅；$U(P_0)$ 是波面上任意一点 P_0 的复振幅；r 是 P_0 到 P 的距离；θ 是 P_0P 和过 P_0 点的元波面法线 $\boldsymbol{n}$ 的夹角；$K(\theta)$ 是与 θ 有关的倾斜因子；c 为常数。

（2）平面屏幕衍射的基尔霍夫理论

对于单色光波，基尔霍夫从标量波动方程

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{3-14}$$

出发，利用格林定理这一数学工具，采用适当的边界条件，推导出图 3-3 所示的无限大不透明屏上孔径后面观察点 P 的场分布为

$$U(P) = \frac{A}{\mathrm{j}\lambda}\iint_{\Sigma}\frac{\exp(\mathrm{j}kr')}{r'}\left[\frac{\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}) - \cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}')}{2}\right]\frac{\exp(\mathrm{j}kr)}{r}\mathrm{d}s \tag{3-15}$$

图中，P' 是照明孔径的点光源；P_0 是孔径上某一点；P 为孔径后面某一观察点；r' 和 r 分别为 P' 和 P 到 P_0 的距离。

式(3-15)称为菲涅耳-基尔霍夫衍射公式，它为惠更斯-菲涅耳原理提供了更可靠的波动理论基础，并证明了在其原理表达式(3-13)中

$$C = \frac{1}{\mathrm{j}\lambda}$$

$$K(\theta)=\frac{\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})-\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}')}{2} \tag{3-16}$$

衍射公式不仅适用于单个点源发出球面波的照明情况，而且适用于更普遍的任意单色光波照明情况，因为一个复杂的场分布可以看做是由无穷多点源发出的球面波复合而成的。

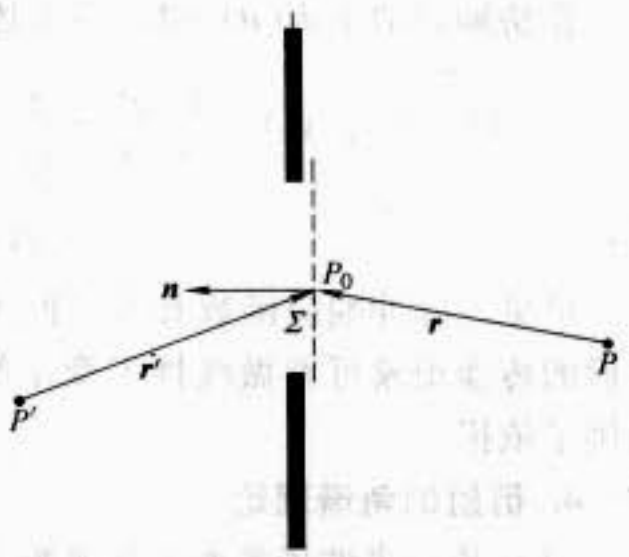


图 3-3　点光源照明平面屏幕

（3）光波传播的线性性质

用 $U(P_0)$ 表示孔径平面的场分布，根据基尔霍夫衍射公式

$$U(P)=\frac{1}{\mathrm{j}\lambda}\iint_{-\infty}^{\infty}U(P_0)K(\theta)\frac{\exp(\mathrm{j}kr)}{r}\mathrm{d}s \tag{3-17}$$

令

$$h(P,P_0)=\frac{1}{\mathrm{j}\lambda}K(\theta)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}kr}}{r} \tag{3-18}$$

则有

$$U(P)=\iint_{-\infty}^{\infty}U(P_0)h(P,P_0)\mathrm{d}s \tag{3-19}$$

如图 3-4 所示，若孔径在 x_0y_0 平面，而观察平面在 xy 平面，上式可进一步表示为

$$U(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty}U(x_0,y_0)h(x,y;x_0,y_0)\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0 \tag{3-20}$$

这正是描述线性系统输入—输出关系的叠加积分。因此，光波的传播现象可以看做是一个线性系统。

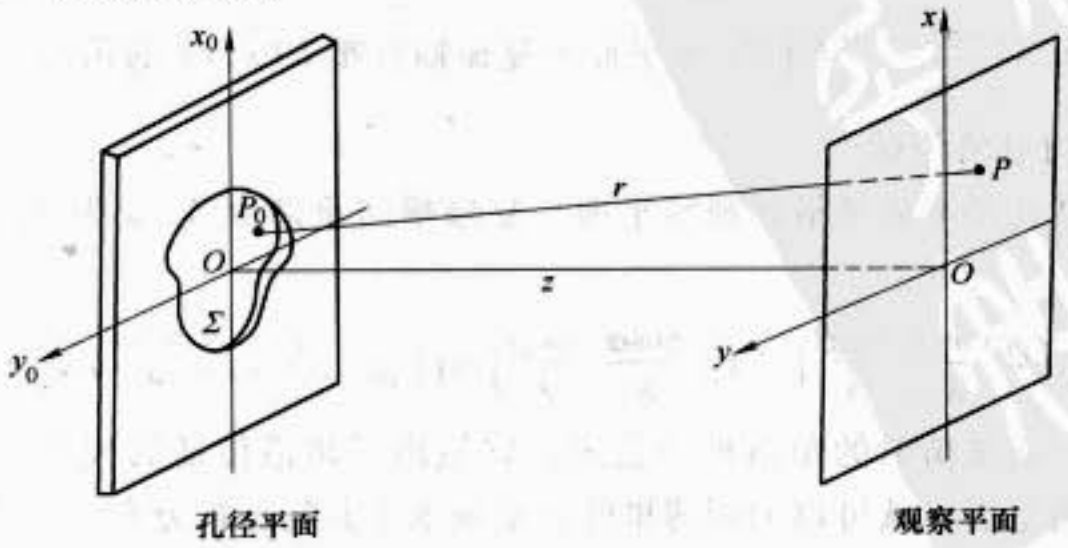


图 3-4　衍射孔径和观察平面

$$A(f_x,f_y)=A_0(f_x,f_y)H(f_x,f_y) \tag{3-26}$$

其中

$$H(f_x,f_y)=\frac{A(f_x,f_y)}{A_0(f_x,f_y)}=\begin{cases}\exp\left[\mathrm{j}kz\sqrt{1-(\lambda f_x)^2-(\lambda f_y)^2}\right] & f_x^2+f_y^2<\dfrac{1}{\lambda^2}\\ 0 & \text{其他}\end{cases} \tag{3-27}$$

若把光波的传播看做线性空间不变系统，$H(f_x,f_y)$ 就是系统的传递函数。由传递函数的表达式可知，系统具有有限的空间带宽，在频率平面上半径为 $1/\lambda$ 的圆之外，透过率为零；在这个圆内，各频率分量引入与频率有关的相移。

基尔霍夫理论和角谱理论是研究两个平面之间单色光波的传播、衍射和成像等问题时的两种不同方法。基尔霍夫理论是在空间域讨论光的传播，是把孔径平面光场看做点源的集合，观察平面上的场分布，则等于它们所发出的带有不同权重因子的球面子波的相干叠加，而球面子波在观察平面上的复振幅分布，就是系统的脉冲响应。角谱理论是在频率域讨论光的传播，是把孔径平面光场分布看作很多不同方向传播的平面波分量的线性组合，观察平面上场分布仍然等于这些平面波分量相干叠加，但每个平面波分量引入相移。相移的大小取决于系统的传递函数，它是系统脉冲响应的傅里叶变换。两种衍射理论的一致性，根本原因还在于标量波动方程是其共同的物理基础。

（3）衍射孔径对角谱的效应

平面屏幕孔径的复振幅透过率为 $t(x,y)$，入射到孔径平面上的光场复振幅为 $U_i(x,y)$，则紧靠屏幕后的平面上透射光场的复振幅分布可以表示为

$$U_t(x,y)=U_i(x,y)t(x,y) \tag{3-28}$$

假定入射光场的角谱和透射光场的角谱分别为 $A_i\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)$ 和 $A_t\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)$，由傅里叶变换的卷积定理可确定两者的关系为

$$A_t\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)=A_i\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)*T\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right) \tag{3-29}$$

式中，$T\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)$ 是孔径透过率函数的傅里叶变换。

采用单位振幅平面波垂直照明孔径，入射光场为

$$U_i(x,y)=1 \tag{3-30}$$

入射光场的角谱为

$$A_i\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)=\mathscr{F}\{U_i(x,y)\}=\delta\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right) \tag{3-31}$$

则有

$$A_t\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)=\delta\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)*T\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)$$

$$=T\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right) \tag{3-32}$$

透射光场等于孔径透过率的傅里叶变换。光波由于衍射孔径的限制，在频率域展宽了入射光场的角谱。

5. 菲涅耳衍射和夫琅和费衍射

（1）菲涅耳衍射

如图 3-4 所示，当孔径平面和观察平面距离 z 满足

$$z^3>>\frac{\pi}{4\lambda}\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right]^2_{\max} \tag{3-33}$$

条件，对 r 作二项式展开时，可略去次高阶项，即

$$r=\sqrt{z^2+(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\approx z\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_0}{z}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{y-y_0}{z}\right)^2\right] \tag{3-34}$$

称之为菲涅耳近似。将它代入脉冲响应表达式，有

$$h(x-x_0,y-y_0)=\frac{1}{j\lambda z}\exp(jkz)\exp\left\{j\frac{k}{2z}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\right\} \tag{3-35}$$

其物理意义是用二次曲面近似表示球面子波。把上述简化的脉冲响应函数代入叠加积分式，则得到卷积形式表达的菲涅耳衍射方程

$$U(x,y)=\frac{1}{j\lambda z}\exp(jkz)\iint_{-\infty}^{\infty}U(x_0,y_0)\exp\left\{j\frac{k}{2z}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\right\}dx_0dy_0 \tag{3-36}$$

将指数中的二次项展开，可得到用傅里叶变换形式表示的菲涅耳衍射方程

$$U(x,y)=\frac{\exp(jkz)}{j\lambda z}\exp\left[j\frac{k}{2z}(x^2+y^2)\right]\times\iint_{-\infty}^{\infty}U(x_0,y_0)\exp\left[j\frac{k}{2z}(x_0^2+y_0^2)\right]$$

$$\times\exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda z}(xx_0+yy_0)\right]dx_0dy_0=\frac{\exp(jkz)}{j\lambda z}\exp\left[j\frac{k}{2z}(x^2+y^2)\right]\times$$

$$\mathscr{F}\left\{U(x_0,y_0)\exp\left[j\frac{k}{2z}(x_0^2+y_0^2)\right]\right\}_{f_x=\frac{x}{\lambda z},f_y=\frac{y}{\lambda z}} \tag{3-37}$$

菲涅耳衍射的传递函数是

$$H(f_x,f_y)=\exp(jkz)\exp[-j\pi\lambda z(f_x^2+f_y^2)] \tag{3-38}$$

它表示菲涅耳衍射在频率域的效应。式（3-38）仅仅是对更普遍的传递函数的

一种近似。

（2）夫琅和费衍射

当距离 z 满足

$$z >> \frac{k}{2}\left(x_0^2 + y_0^2\right)_{\max} \tag{3-39}$$

条件，除了次高阶项外，在 r 展开式中可以进一步略去$\frac{(x_0^2 + y_0^2)}{2z}$项，称此为夫琅和费近似，即

$$r = \sqrt{z^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \approx z + \frac{x^2 + y^2}{2z} - \frac{xx_0 + yy_0}{z} \tag{3-40}$$

此时，衍射方程进一步简化为

$$U(x,y) = \frac{\exp(\mathrm{j}kz)}{\mathrm{j}\lambda z}\exp\left[\mathrm{j}\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)\right] \times \iint_{-\infty}^{\infty} U(x_0,y_0)\exp\left[-\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda z}(xx_0 + yy_0)\right]\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0$$

$$= \frac{\exp(\mathrm{j}kz)}{\mathrm{j}\lambda z}\exp\left[\mathrm{j}\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)\right] \times \mathscr{F}\{U(x_0,y_0)\}_{f_x = \frac{x}{\lambda z}, f_y = \frac{y}{\lambda z}} \tag{3-41}$$

称式（3-41）为夫琅和费衍射方程，说明观察平面上的场分布正比于孔径平面上透射光场分布的傅里叶变换。

夫琅和费衍射图样的强度分布为

$$I(x,y) = \left(\frac{1}{\lambda z}\right)^2 \left| A_0\left(\frac{x}{\lambda z}, \frac{y}{\lambda z}\right)\right|^2 \tag{3-42}$$

式中，$A_0\left(\frac{x}{\lambda z}, \frac{y}{\lambda z}\right) = \mathscr{F}\{U(x_0,y_0)\}_{f_x = \frac{x}{\lambda z}, f_y = \frac{y}{\lambda z}}$。

由于夫琅和费衍射只是菲涅耳衍射的极限情况，可认为传递函数式（3-38）对两种衍射同样适用。

利用上面的夫琅和费衍射方程可以确定一些典型孔径的夫琅和费衍射图样，例如圆孔、矩形孔、单缝以及多缝结构（如光栅）等。

6. 典型孔径的夫琅和费衍射

（1）圆孔衍射

圆孔的复振幅透过率可表示为

$$t(r_0) = \mathrm{circ}\left(\frac{r_0}{a}\right) \tag{3-43}$$

式中，a 为圆孔半径。采用单位振幅的单色平面波垂直照明孔径，距离为 z 的观

察平面上夫琅和费衍射图样的复振幅分布为

$$U(r)=\frac{ka^2}{\mathrm{j}2z}\exp(\mathrm{j}kz)\exp\left(\mathrm{j}\frac{kr^2}{2z}\right)\left[\frac{2\mathrm{J}_1(kar/z)}{kar/z}\right] \tag{3-44}$$

强度分布为

$$I(r)=I(0)\left[\frac{2\mathrm{J}_1(kar/z)}{kar/z}\right]^2 \tag{3-45}$$

通常称之为爱里图样。中央亮斑（爱里斑）的半径为

$$\Delta r=0.61\frac{\lambda z}{a} \tag{3-46}$$

（2）矩孔衍射与单缝衍射

矩孔的复振幅透过率可以表示为

$$t(x_0,y_0)=\mathrm{rect}\left(\frac{x_0}{a}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y_0}{b}\right) \tag{3-47}$$

式中，常数 a、b 分别是孔径在 x_0 和 y_0 方向上的宽度。

采用单位振幅的单色平面波垂直照明孔径，距离为 z 的观察平面上夫琅和费衍射图样的复振幅分布为

$$U(x,y)=\frac{ab}{\mathrm{j}\lambda z}\exp(\mathrm{j}kz)\exp\left[\mathrm{j}\frac{k}{2z}(x^2+y^2)\right]\mathrm{sinc}\left(\frac{ax}{\lambda z}\right)\mathrm{sinc}\left(\frac{by}{\lambda z}\right) \tag{3-48}$$

强度分布为

$$I(x,y)=\left(\frac{ab}{\lambda z}\right)^2\mathrm{sinc}^2\left(\frac{ax}{\lambda z}\right)\mathrm{sinc}^2\left(\frac{by}{\lambda z}\right) \tag{3-49}$$

光能主要集中在中央亮斑，其宽度为

$$\Delta x=2\frac{\lambda z}{a},\quad \Delta y=2\frac{\lambda z}{b} \tag{3-50}$$

假如 $b>>a$，矩孔就变成了平行于 y_0 轴的狭缝，衍射图样将集中在 x 轴上。采用单位振幅的单色平面波垂直照明狭缝，距离为 z 的观察平面上夫琅和费衍射图样的复振幅分布为

$$U(x)=\frac{a}{\mathrm{j}\lambda z}\exp(\mathrm{j}kz)\exp\left(\mathrm{j}\frac{k}{2z}x^2\right)\mathrm{sinc}\left(\frac{ax}{\lambda z}\right) \tag{3-51}$$

强度分布为

$$I(x)=\left(\frac{a}{\lambda z}\right)^2\mathrm{sinc}^2\left(\frac{ax}{\lambda z}\right)=I(0)\mathrm{sinc}^2\left(\frac{ax}{\lambda z}\right) \tag{3-52}$$

（3）双缝衍射

双缝的复振幅透过率可表示为

$$t(x_0) = \mathrm{rect}\left(\frac{x_0 - \frac{d}{2}}{a}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{x_0 + \frac{d}{2}}{a}\right) \tag{3-53}$$

式中，常数 a、d 为狭缝的宽度和中心距。

采用单位振幅的单色平面波垂直照明双缝，距离为 z 的观察平面上夫琅和费衍射图样的复振幅分布为

$$U(x) = \frac{2a}{\mathrm{j}\lambda z}\exp(\mathrm{j}kz)\exp\left(\mathrm{j}\frac{k}{2z}x^2\right)\mathrm{sinc}\left(\frac{ax}{\lambda z}\right)\cos\left(\frac{\pi \mathrm{d}x}{\lambda z}\right) \tag{3-54}$$

强度分布为

$$I(x) = \left(\frac{2a}{\lambda z}\right)^2 \mathrm{sinc}^2\left(\frac{ax}{\lambda z}\right)\cos^2\left(\frac{\pi \mathrm{d}x}{\lambda z}\right) \tag{3-55}$$

可见，双缝夫琅和费衍射图样的强度分布是单缝衍射图样与双光束干涉图样相互调制的结果。

Ⅱ. 习题解答

本章习题主要内容包括：掌握菲涅耳衍射和夫琅和费衍射的特点和计算；通过各种典型孔径的衍射计算，了解夫琅和费衍射是实现傅里叶变换的光学手段；证明泰伯效应；证明会聚光照明时可在近距离实现孔径夫琅和费衍射；分析光栅包括闪耀光栅夫琅和费衍射图样的特点，讨论缺级现象；利用巴比涅原理分析互补屏的夫琅和费衍射；学会应用列阵定理分析周期性结构物体的衍射。

3.1　尺寸为 $a \times b$ 的不透明矩形屏被单位振幅的单色平面波垂直照明，求出紧靠屏后的平面上透射光场的角谱。

解

设入射到屏的复振幅分布为 $U_i(x,y)$，其角谱为 $A_i\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda}, \frac{\cos\beta}{\lambda}\right)$；紧靠屏后的透射复振幅分布为 $U_t(x,y)$，其角谱为 $A_t\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda}, \frac{\cos\beta}{\lambda}\right)$。而且有

$$U_t(x,y) = U_i(x,y)\ t(x,y)$$

式中，$t(x,y)$ 为屏的复振幅透过率。在本题中

$$t(x,y) = 1 - \mathrm{rect}\left(\frac{x}{a}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y}{b}\right)$$

根据卷积定理,则有

$$A_t\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)=A_i\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)*T\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)$$

式中,$\cos\alpha=\lambda f_x$;$\cos\beta=\lambda f_y$。采用单位振幅的单色平面波入射,则有

$$U_i(x,y)=1$$

$$A_i\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)=\mathscr{F}\{U_i(x,y)\}=\delta\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)$$

$$T\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)=\mathscr{F}\{t(x,y)\}$$

$$=\delta\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)-ab\operatorname{sinc}\left(\frac{a\cos\alpha}{\lambda}\right)\operatorname{sinc}\left(\frac{b\cos\beta}{\lambda}\right)$$

于是

$$A_t\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)=A_i\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)*T\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)$$

$$=\delta\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)*\left[\delta\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)-ab\operatorname{sinc}\left(\frac{a\cos\alpha}{\lambda}\right)\operatorname{sinc}\left(\frac{b\cos\beta}{\lambda}\right)\right]$$

$$=\delta\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)-ab\operatorname{sinc}\left(\frac{a\cos\alpha}{\lambda}\right)\operatorname{sinc}\left(\frac{b\cos\beta}{\lambda}\right)$$

本题目也可以由获得的 $U_t(x,y)$ 直接计算 $A_t\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)$,即

$$A_t\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)=\mathscr{F}\{U_t(x,y)\}=\mathscr{F}\{t(x,y)\}$$

$$=\delta\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)-ab\operatorname{sinc}\left(\frac{a\cos\alpha}{\lambda}\right)\operatorname{sinc}\left(\frac{b\cos\beta}{\lambda}\right)$$

而不必使用卷积定理。

可见,当采用单位振幅的单色平面波照射时,透射的角谱即为屏的夫琅和费衍射分布。由巴比涅原理,除轴上点外,不透明屏和同样尺寸的孔径所产生的夫琅和费衍射的强度分布相同。

3.2 采用单位振幅的单色平面波垂直照明具有如下透过率函数的孔径,求菲涅耳衍射图样在孔径轴上的强度分布:

(1) $t(x_0,y_0)=\operatorname{circ}(\sqrt{x_0^2+y_0^2})$ (2) $t(x_0,y_0)=\begin{cases}1 & a\leqslant\sqrt{x_0^2+y_0^2}\leqslant 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

式中,$0<a<1$。

解

(1)设入射光场为 $U_0(x_0,y_0)$,根据题意,知

$$U_0(x_0,y_0)=1$$

圆形孔径的透过率函数为

$$t(x_0,y_0)=\mathrm{circ}\left(\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right)$$

则孔径平面透射光场分布为

$$U(x_0,y_0)=U_0(x_0,y_0)t(x_0,y_0)=\mathrm{circ}\left(\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right)$$

根据菲涅耳衍射方程,其衍射光场为

$$U(x,y)=\frac{\exp(\mathrm{j}kz)}{\mathrm{j}\lambda z}\exp\left[\mathrm{j}\frac{k}{2z}(x^2+y^2)\right]\times\iint_{-\infty}^{\infty}U(x_0,y_0)$$

$$\times\exp\left[\mathrm{j}\frac{k}{2z}(x_0^2+y_0^2)\right]\exp\left[-\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda z}(x_0x+y_0y)\right]\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0$$

当 $x=y=0$ 时,得到衍射图样在轴上的复振幅分布

$$U(0,0)_z=\frac{\exp(\mathrm{j}kz)}{\mathrm{j}\lambda z}\iint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{circ}\left(\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right)\exp\left[\mathrm{j}\frac{k}{2z}(x_0^2+y_0^2)\right]\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0$$

将积分转化到极坐标系中进行求解,上式转化为

$$U(0,0)_z=\frac{\exp(\mathrm{j}kz)}{\mathrm{j}\lambda z}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\exp\left(\mathrm{j}\frac{k}{2z}r^2\right)r\mathrm{d}r$$

$$=\exp(\mathrm{j}kz)\left[1-\exp\left(\mathrm{j}\frac{k}{2z}\right)\right]$$

$$=-\exp(\mathrm{j}kz)\exp\left(\mathrm{j}\frac{k}{4z}\right)\left[\exp\left(\mathrm{j}\frac{k}{4z}\right)-\exp\left(-\mathrm{j}\frac{k}{4z}\right)\right]$$

$$=-2\mathrm{j}\exp(\mathrm{j}kz)\exp\left(\mathrm{j}\frac{k}{4z}\right)\sin\left(\frac{k}{4z}\right)$$

则孔径轴上强度分布为

$$I(0,0)_z=|U(0,0)_z|^2=4\sin^2\left(\frac{k}{4z}\right)=4\sin^2\left(\frac{\pi}{2\lambda z}\right)$$

由上式可知,圆孔菲涅耳衍射图样其中心光强沿着孔径轴是明暗交替变化的,而且

当$\frac{\pi}{2\lambda z}=n\pi(n=1,2,3,\cdots)$,即 $z=\frac{1}{2n\lambda}$时,$I(0,0)_z=0$,为极小值;

当$\frac{\pi}{2\lambda z}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi(n=0,1,2,3,\cdots)$,即 $z=\frac{1}{(2n+1)\lambda}$时,$I(0,0)_z=4$,为极大值。

(2)与(1)的情况类似,孔径平面透射光场分布为

$$U(x_0,y_0)=U_0(x_0,y_0)t(x_0,y_0)=t(x_0,y_0)$$

代入菲涅耳衍射方程，并转化到极坐标系中进行求解，则孔径轴上复振幅分布为

$$U(0,0)_z = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z}\int_0^{2\pi} d\theta \int_a^1 \exp\left(j\frac{k}{2z}r^2\right) r dr$$

$$= \exp(jkz)\left[\exp\left(j\frac{k}{2z}a^2\right) - \exp\left(j\frac{k}{2z}\right)\right]$$

孔径轴上强度分布为

$$I(0,0)_z = |U(0,0)_z|^2 = 2 - \exp\left[j\frac{k}{2z}(1-a^2)\right] - \exp\left[-j\frac{k}{2z}(1-a^2)\right]$$

$$= 2 - 2\cos\left[\frac{k}{2z}(1-a^2)\right]$$

$$= 4\sin^2\left[\frac{\pi}{2\lambda z}(1-a^2)\right]$$

同样地，圆环菲涅耳衍射图样的中心光强沿着孔径轴也是明暗交替变化的，而且

当$\frac{\pi}{2\lambda z}(1-a^2) = n\pi(n=1,2,3,\cdots)$，即 $z=\frac{1-a^2}{2n\lambda}$时，$I(0,0)_z=0$，为极小值；

当$\frac{\pi}{2\lambda z}(1-a^2) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi(n=0,1,2,\cdots)$，即 $z=\frac{1-a^2}{(2n+1)\lambda}$时，$I(0,0)_z=4$，为极大值。

3.3　余弦型振幅光栅的复振幅透过率为

$$t(x_0) = a + b\cos\left(2\pi\frac{x_0}{d}\right)$$

式中，d 为光栅的周期；$a>b>0$。观察平面与光栅相距为 z。当 z 分别取下述值时，试确定单色平面波垂直照明光栅时在观察平面上产生的强度分布。

（1）$z=z_T=\frac{2d^2}{\lambda}$　　（2）$z=\frac{z_T}{2}=\frac{d^2}{\lambda}$　　（3）$z=\frac{z_T}{4}=\frac{d^2}{2\lambda}$

这里，$z_T=\frac{2d^2}{\lambda}$称为泰伯距离。

解　本题讨论周期性物体的泰伯效应，即自成像效应。

讨论与光栅相距为 z 的观察平面上的光场分布，这是一个典型的菲涅耳衍射的问题。我们选择在频率域分析该问题。当单色平面波垂直照明光栅时，光栅透射光场为

$$U(x_0) = At(x_0) = A\left[a + b\cos\left(2\pi\frac{x_0}{d}\right)\right]$$

式中，A 为平面波振幅值。

该透射光场对应的空间频谱为

$$G(f_x) = A\left[a\delta(f_x) + \frac{b}{2}\delta\left(f - \frac{1}{d}\right) + \frac{b}{2}\delta\left(f + \frac{1}{d}\right)\right]$$

根据菲涅耳衍射的传递函数

$$H(f_x) = \exp(-j\pi\lambda z f_x^2)\exp(jkz)$$

可写出观察平面上得到的光场的频谱为

$$G'(f_x) = G(f_x)H(f_x)$$

$$= A\left[a\delta(f_x) + \frac{b}{2}\delta\left(f - \frac{1}{d}\right) + \frac{b}{2}\delta\left(f + \frac{1}{d}\right)\right]\exp(-j\pi\lambda z f_x^2)\exp(jkz)$$

$$= A\exp(jkz)\left\{a\delta(f_x) + \frac{b}{2}\exp\left(-j\pi\lambda z\frac{1}{d^2}\right)\left[\delta\left(f - \frac{1}{d}\right) + \delta\left(f + \frac{1}{d}\right)\right]\right\} \quad (A)$$

下面分三种情况进行讨论：

（1）当 $z = z_T = \frac{2d^2}{\lambda}$ 时，$\exp\left(-j\pi\lambda z\frac{1}{d^2}\right) = 1$，则式（A）变为

$$G'(f_x) = A\exp(jkz)\left\{a\delta(f_x) + \frac{b}{2}\left[\delta\left(f_x - \frac{1}{d}\right) + \delta\left(f_x + \frac{1}{d}\right)\right]\right\}$$

对上式作傅里叶逆变换可得到观察平面上的光场复振幅分布为

$$U(x) = A\left[a + b\cos\left(2\pi\frac{x}{d}\right)\right]\exp(jkz)$$

强度分布为

$$I(x) = |U(x)|^2 = A^2\left[a + b\cos\left(2\pi\frac{x}{d}\right)\right]^2$$

强度分布与光栅透射场分布相同。

（2）同理，当 $z = \frac{z_T}{2} = \frac{d^2}{\lambda}$ 时，$\exp\left(-j\pi\lambda z\frac{1}{d^2}\right) = -1$，式（A）变为

$$G'(f_x) = A\exp(jkz)\left\{a\delta(f_x) - \frac{b}{2}\left[\delta\left(f_x - \frac{1}{d}\right) + \delta\left(f_x + \frac{1}{d}\right)\right]\right\}$$

其对应的光场复振幅分布为

$$U(x) = A\left[a - b\cos\left(2\pi\frac{x}{d}\right)\right]\exp(jkz)$$

其强度分布为

$$I(x) = |U(x)|^2 = A^2\left[a - b\cos\left(2\pi\frac{x}{d}\right)\right]^2$$

与光栅相比，像产生 π 的相移。

（3）同理，当 $z=\frac{z_T}{4}=\frac{d^2}{2\lambda}$ 时，$\exp\left(-j\pi\lambda z\frac{1}{d^2}\right)=-j$，式（A）变为

$$G'(f_x)=A\exp(jkz)\left\{a\delta(f_x)-j\frac{b}{2}\left[\delta\left(f_x-\frac{1}{d}\right)+\delta\left(f_x+\frac{1}{d}\right)\right]\right\}$$

其对应的光场复振幅分布为

$$U(x)=A\left[a-jb\cos\left(2\pi\frac{x}{d}\right)\right]\exp(jkz)$$

其强度分布为

$$I(x)=|U(x)|^2=A^2\left[a^2+b^2\cos^2\left(2\pi\frac{x}{d}\right)\right]$$

$$=A^2\left[a+\frac{b^2}{2}+\frac{b^2}{2}\cos\left(4\pi\frac{x}{d}\right)\right]$$

通过对上面三种情况的分析可以看到：在泰伯距离处，可以观察到物体的像；在 $\frac{z_T}{2}$ 处观察到的是对比度反转的泰伯像；而在 $\frac{z_T}{4}$ 处观察到的则是泰伯副像，条纹频率为原来的两倍。

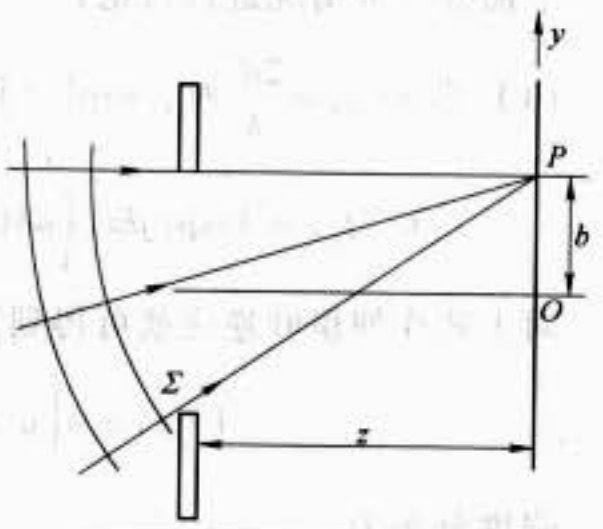


图 3-5

3.4 参看图 3-5，用向 P 点会聚的单色球面波照明孔径 Σ。P 点位于孔径后面距离为 z 的观察平面上，坐标为（0，b）。假定观察平面相对孔径的位置是在菲涅耳区内。试证明观察平面上强度分布是以 P 点为中心的孔径的夫琅和费衍射图样。

证明

设孔径的振幅透射函数为 $t(x_0,y_0)$，当向 P 点会聚的单色球面波照明孔径时，孔径平面上透射波的光场分布为

$$U(x_0,y_0)=\frac{A}{z}\exp(-jkz)\exp\left\{-j\frac{k}{2z}[x_0^2+(y_0-b)^2]\right\}t(x_0,y_0)$$

把它代入菲涅耳衍射方程，得到衍射光场为

$$U(x,y)=\frac{\exp(jkz)}{jkz}\exp\left[j\frac{k}{2z}(x^2+y^2)\right]\times\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{A}{z}\exp(-jkz)$$

$$\times\exp\left\{-j\frac{k}{2z}[x_0^2+(y_0-b)^2]\right\}t(x_0,y_0)\times\exp\left[j\frac{k}{2z}(x_0^2+y_0^2)\right]$$

$$\times \exp\left[-\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda z}(x_0 x + y_0 y)\right]\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0 = \frac{A}{\mathrm{j}\lambda z^2}\exp\left[\mathrm{j}\frac{k}{2z}(x^2+y^2-b^2)\right]$$

$$\times \iint_{-\infty}^{\infty} t(x_0,y_0)\exp\left\{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda z}[x_0 x + (y-b)y_0]\right\}\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0$$

其强度分布为

$$I(x,y) = \left(\frac{A}{\lambda z^2}\right)^2 \left| \iint_{-\infty}^{\infty} t(x_0,y_0)\exp\left\{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda z}[x_0 x + (y-b)y_0]\right\}\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0 \right|^2$$

即证明了观察平面上强度分布是以 P 点为中心的孔径的夫琅和费衍射图样。以上分析表明，若采用向观察平面会聚的球面波照明孔径，在近距离上就可以观察到孔径的夫琅和费衍射分布。

3.5　方向余弦为 $\cos\alpha$、$\cos\beta$，振幅为 A 的倾斜单色平面波照明一个孔径为 a 的圆孔。观察平面位于夫琅和费区，与孔相距为 z。求衍射图样的强度分布。

解

假设圆孔的透射率函数为 $t(x_0,y_0)$，即

$$t(x_0,y_0) = \mathrm{circ}\left(\frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{a}\right) = \begin{cases} 1 & \sqrt{x_0^2+y_0^2} \leqslant a \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

入射的平面波光场分布为

$$U(x_0,y_0) = A\exp\left[\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda}(x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta)\right]$$

透射光场为

$$U_t(x_0,y_0) = U(x_0,y_0)t(x_0,y_0)$$

在距离孔径为 z 的观察屏上观察其衍射图样，而且该观察屏处于夫琅和费区，根据夫琅和费衍射方程，可知观察屏上的光场分布为

$$U(x,y) = \frac{1}{\mathrm{j}\lambda z}\exp(\mathrm{j}kz)\exp\left[\mathrm{j}\frac{k}{2z}(x^2+y^2)\right]\mathscr{F}\{U_t(x_0,y_0)\}\Big|_{f_x=\frac{x}{\lambda z},f_y=\frac{y}{\lambda z}}$$

$$= \frac{A}{\mathrm{j}\lambda z}\exp(\mathrm{j}kz)\exp\left[\mathrm{j}\frac{k}{2z}(x^2+y^2)\right]\delta\left(f_x - \frac{\cos\alpha}{\lambda}, f_y - \frac{\cos\beta}{\lambda}\right) * T(f_x,f_y)$$

$$= \frac{A}{\mathrm{j}\lambda z}\exp(\mathrm{j}kz)\exp\left[\mathrm{j}\frac{k}{2z}(x^2+y^2)\right]T\left(f_x - \frac{\cos\alpha}{\lambda}, f_y - \frac{\cos\beta}{\lambda}\right)$$

式中，$T(f_x,f_y) = \mathscr{F}\{t(x_0,y_0)\} = \left.\dfrac{aJ_1(2\pi a\sqrt{f_x^2+f_y^2})}{\sqrt{f_x^2+f_y^2}}\right|_{f_x=\frac{x}{\lambda z},f_y=\frac{y}{\lambda z}}$；

$$\times \exp\left[-\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda z}(x_0 x + y_0 y)\right]\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0 = \frac{A}{\mathrm{j}\lambda z^2}\exp\left[\mathrm{j}\frac{k}{2z}(x^2+y^2-b^2)\right]$$

$$\times \iint_{-\infty}^{\infty} t(x_0,y_0)\exp\left\{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda z}[x_0 x + (y-b)y_0]\right\}\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0$$

其强度分布为

$$I(x,y) = \left(\frac{A}{\lambda z^2}\right)^2 \left| \iint_{-\infty}^{\infty} t(x_0,y_0)\exp\left\{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda z}[x_0 x + (y-b)y_0]\right\}\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0 \right|^2$$

即证明了观察平面上强度分布是以 P 点为中心的孔径的夫琅和费衍射图样。以上分析表明，若采用向观察平面会聚的球面波照明孔径，在近距离上就可以观察到孔径的夫琅和费衍射分布。

3.5　方向余弦为 $\cos\alpha$、$\cos\beta$，振幅为 A 的倾斜单色平面波照明一个孔径为 a 的圆孔。观察平面位于夫琅和费区，与孔相距为 z。求衍射图样的强度分布。

解

假设圆孔的透射率函数为 $t(x_0,y_0)$，即

$$t(x_0,y_0) = \mathrm{circ}\left(\frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{a}\right) = \begin{cases} 1 & \sqrt{x_0^2+y_0^2} \leqslant a \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

入射的平面波光场分布为

$$U(x_0,y_0) = A\exp\left[\mathrm{j}\frac{2\pi}{\lambda}(x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta)\right]$$

透射光场为

$$U_t(x_0,y_0) = U(x_0,y_0)t(x_0,y_0)$$

在距离孔径为 z 的观察屏上观察其衍射图样，而且该观察屏处于夫琅和费区，根据夫琅和费衍射方程，可知观察屏上的光场分布为

$$U(x,y) = \frac{1}{\mathrm{j}\lambda z}\exp(\mathrm{j}kz)\exp\left[\mathrm{j}\frac{k}{2z}(x^2+y^2)\right]\mathscr{F}\{U_t(x_0,y_0)\}\Big|_{f_x=\frac{x}{\lambda z},f_y=\frac{y}{\lambda z}}$$

$$= \frac{A}{\mathrm{j}\lambda z}\exp(\mathrm{j}kz)\exp\left[\mathrm{j}\frac{k}{2z}(x^2+y^2)\right]\delta\left(f_x - \frac{\cos\alpha}{\lambda}, f_y - \frac{\cos\beta}{\lambda}\right) * T(f_x,f_y)$$

$$= \frac{A}{\mathrm{j}\lambda z}\exp(\mathrm{j}kz)\exp\left[\mathrm{j}\frac{k}{2z}(x^2+y^2)\right]T\left(f_x - \frac{\cos\alpha}{\lambda}, f_y - \frac{\cos\beta}{\lambda}\right)$$

式中，$T(f_x,f_y) = \mathscr{F}\{t(x_0,y_0)\} = \left.\dfrac{aJ_1(2\pi a\sqrt{f_x^2+f_y^2})}{\sqrt{f_x^2+f_y^2}}\right|_{f_x=\frac{x}{\lambda z},f_y=\frac{y}{\lambda z}}$；

$$U(x,y) = \frac{aA}{j\lambda z}\exp(jkz)\exp\left[j\frac{k}{2z}(x^2+y^2)\right] \times \frac{J_1\left[2\pi a\sqrt{\left(f_x-\frac{\cos\alpha}{\lambda}\right)^2+\left(f_y-\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)^2}\right]}{\sqrt{\left(f_x-\frac{\cos\alpha}{\lambda}\right)^2+\left(f_y-\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)^2}}。$$

则衍射图样的强度分布为

$$I(x,y) = \left(\frac{aA}{\lambda z}\right)^2\left\{\frac{J_1\left[2\pi a\sqrt{\left(\frac{x}{\lambda z}-\frac{\cos\alpha}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{y}{\lambda z}-\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)^2}\right]}{\sqrt{\left(\frac{x}{\lambda z}-\frac{\cos\alpha}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{y}{\lambda z}-\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)^2}}\right\}^2$$

这是中心位于（$z\cos\alpha$，$z\cos\beta$）的圆孔的夫琅和费衍射图样。

3.6　环形孔径的外径为 $2a$，内径为 $2\varepsilon a$（$0<\varepsilon<1$）。其透过率可以表示为

$$t(r_0) = \begin{cases}1 & \varepsilon a \leqslant r_0 \leqslant a\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

用单位振幅的单色平面波垂直照明孔径，求距离为 z 的观察屏上夫琅和费衍射图样的强度分布。

解

采用单位振幅的单色平面波垂直照明孔径，则孔径平面的透射光场为

$$U(r_0) = t(r_0) = \begin{cases}1 & \varepsilon a \leqslant r_0 \leqslant a\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

可以进一步表示为两个圆域函数的差值，即

$$U(r_0) = \text{circ}\left(\frac{r_0}{a}\right) - \text{circ}\left(\frac{r_0}{\varepsilon a}\right)$$

其傅里叶-贝塞尔变换式为

$$\mathscr{B}\left\{\text{circ}\left(\frac{r_0}{a}\right) - \text{circ}\left(\frac{r_0}{\varepsilon a}\right)\right\} = \frac{aJ_1(2\pi a\rho) - \varepsilon aJ_1(2\pi\varepsilon a\rho)}{\rho}$$

式中，$\rho = \frac{r}{\lambda z}$。

把它代入夫琅和费衍射方程，则得到孔径的夫琅和费衍射光场分布为

$$\begin{aligned}U(r) &= \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z}\exp\left(j\frac{k}{2z}r^2\right)\mathscr{B}\{U(r_0)\}\\ &= \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z}\exp\left[j\frac{k}{2z}r^2\right]\left[\frac{aJ_1(2\pi a\rho) - \varepsilon aJ_1(2\pi\varepsilon a\rho)}{\rho}\right]\\ &= -ja\exp(jkz)\exp\left[j\frac{k}{2z}r^2\right]\left[\frac{J_1\left(ka\frac{r}{z}\right) - \varepsilon J_1\left(k\varepsilon a\frac{r}{z}\right)}{r}\right]\end{aligned}$$

得到圆环夫琅和费衍射的强度分布为

$$I(r) = \left(\frac{a}{r}\right)^2\left[\mathrm{J}_1\left(ka\frac{r}{z}\right) - \varepsilon\mathrm{J}_1\left(k\varepsilon a\frac{r}{z}\right)\right]^2$$

3.7　图 3-6 所示孔径由两个相同的圆孔组成。它们的半径都为 a，中心距为 d（$d >> a$）。采用单位振幅的单色平面波垂直照射孔径，求出相距孔径为 z 的观察平面上夫琅和费衍射图样的强度分布，并画出沿 y 方向的截面图。

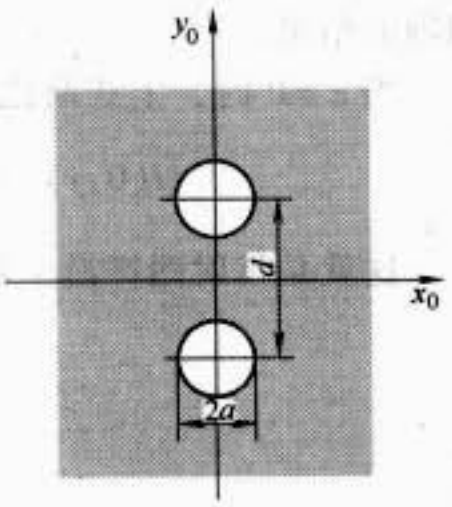


图　3-6

解

孔径的振幅透过率函数可以表示为

$$t(x_0,y_0) = \mathrm{circ}\left(\frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{a}\right) * \left[\delta\left(x_0,y_0-\frac{d}{2}\right)+\delta\left(x_0,y_0+\frac{d}{2}\right)\right]$$

采用单位振幅的单色平面波垂直照明孔径，则孔径平面的透射光场为

$$U(x_0,y_0) = t(x_0,y_0) = \mathrm{circ}\left(\frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{a}\right) * \left[\delta\left(x_0,y_0-\frac{d}{2}\right)+\delta\left(x_0,y_0+\frac{d}{2}\right)\right]$$

其傅里叶变换式为

$$\mathscr{F}\{U(x_0,y_0)\} = \mathscr{B}\left\{\mathrm{circ}\left(\frac{r_0}{a}\right)\right\}\mathscr{F}\left\{\delta\left(x_0,y_0-\frac{d}{2}\right)+\delta\left(x_0,y_0+\frac{d}{2}\right)\right\}$$

$$= \frac{2az\lambda J_1\left(ka\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\pi d\frac{y}{\lambda z}\right)$$

把它代入夫琅和费衍射方程，则得到孔径的夫琅和费衍射光场分布为

$$U(x,y) = \frac{\exp(\mathrm{j}kz)}{\mathrm{j}\lambda z}\exp\left[\mathrm{j}\frac{k}{2z}(x^2+y^2)\right]\mathscr{F}\{U(x_0,y_0)\}$$

$$= \frac{\exp(\mathrm{j}kz)}{\mathrm{j}\lambda z}\exp\left[\mathrm{j}\frac{k}{2z}(x^2+y^2)\right]\frac{2az\lambda\mathrm{J}_1\left(ka\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\pi d\frac{y}{\lambda z}\right)$$

$$= -\mathrm{j}\frac{2a}{\sqrt{x^2+y^2}}\exp(\mathrm{j}kz)\exp\left[\mathrm{j}\frac{k}{2z}(x^2+y^2)\right]\mathrm{J}_1\left(ka\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)\cos\left(\pi d\frac{y}{\lambda z}\right)$$

其强度分布为

$$I(x,y) = \frac{4a^2}{x^2+y^2}\left[\mathrm{J}_1\left(ka\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)\cos\left(\pi d\frac{y}{\lambda z}\right)\right]^2$$

$$= \frac{2a^2}{x^2+y^2}\left[\mathrm{J}_1\left(ka\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)\right]^2\left[1+\cos\left(2\pi d\frac{y}{\lambda z}\right)\right]$$

可见，双孔衍射图样的强度分布是单孔的衍射图样与双光束干涉图样相互

调制的结果。

当 $x=0$ 时，上式简化为

$$I(0,y) = \frac{2a^2}{y^2}\left[\mathrm{J}_1\left(ka\frac{y}{z}\right)\right]^2\left[1+\cos\left(2\pi d\frac{y}{\lambda z}\right)\right]$$

这就是衍射图样沿 y 轴的强度变化，如图 3-7 所示。

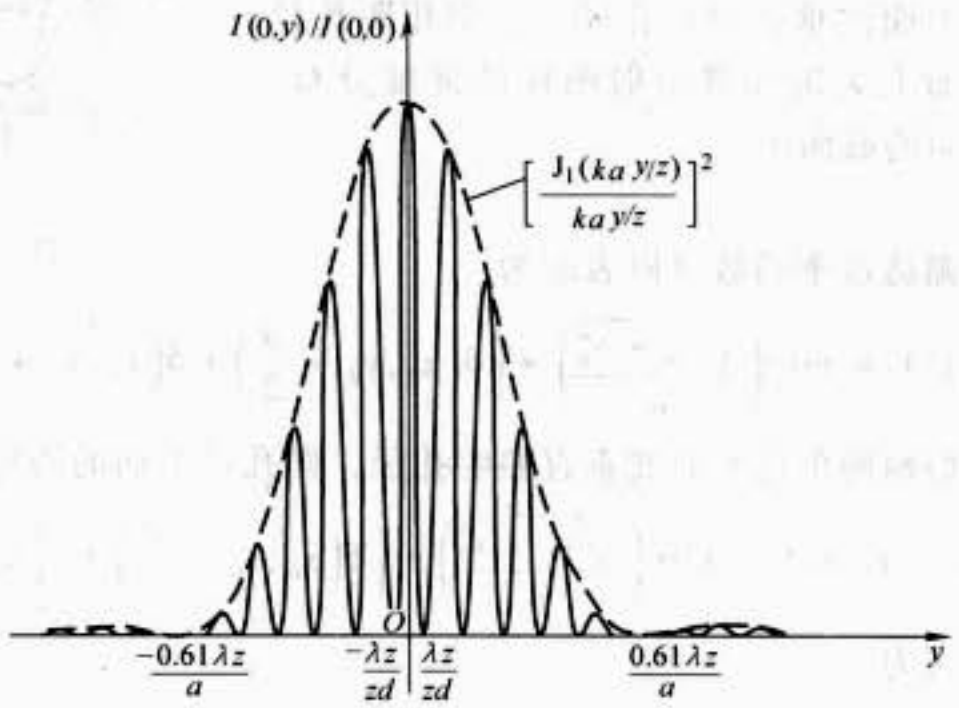


图 3-7

3.8 参看图 3-8，边长为 $2a$ 的正方形孔径内再放置一个边长为 a 的正方形掩膜，其中心落在点 (ξ,η)。采用单位振幅的单色平面波垂直照明，求出与它相距为 z 的观察平面上夫琅和费衍射图样的强度分布。画出 $\xi=\eta=0$ 时，孔径频谱在 x 方向上的截面图。

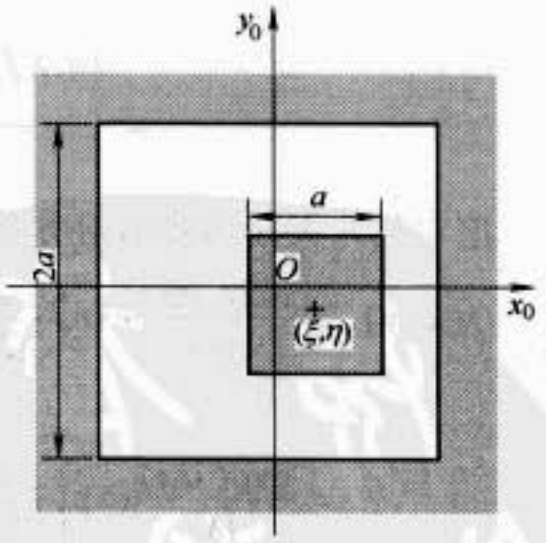


图 3-8

解

孔径的振幅透射函数可以表示为两个矩形函数之差，即

$$t(x_0,y_0) = \mathrm{rect}\left(\frac{x_0}{2a}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y_0}{2a}\right) - \mathrm{rect}\left(\frac{x-\xi}{a}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y-\eta}{a}\right)$$

采用单位振幅的单色平面波垂直照明孔径，则孔径平面的透射光场为

$$U(x_0,y_0) = t(x_0,y_0) = \mathrm{rect}\left(\frac{x_0}{2a}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y_0}{2a}\right) - \mathrm{rect}\left(\frac{x-\xi}{a}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y-\eta}{a}\right)$$

其傅里叶变换式为

$$\mathscr{F}\{U(x_0,y_0)\} = 4a^2\mathrm{sinc}(2af_x)\mathrm{sinc}(2af_y) - a^2\mathrm{sinc}(af_x)\mathrm{sinc}(af_y)\exp[-\mathrm{j}2\pi(f_x\xi + f_y\eta)] \quad (A)$$

这就是孔径的频谱，其中，$f_x = \frac{x}{\lambda z}, f_y = \frac{y}{\lambda z}$。当 $\xi = \eta = 0$，其沿 x 方向的频谱分布为

$$T(f_x,0) = 4a^2\mathrm{sinc}\left(2a\frac{x}{\lambda z}\right) - a^2\mathrm{sinc}\left(a\frac{x}{\lambda z}\right)$$

如图 3-9 所示。

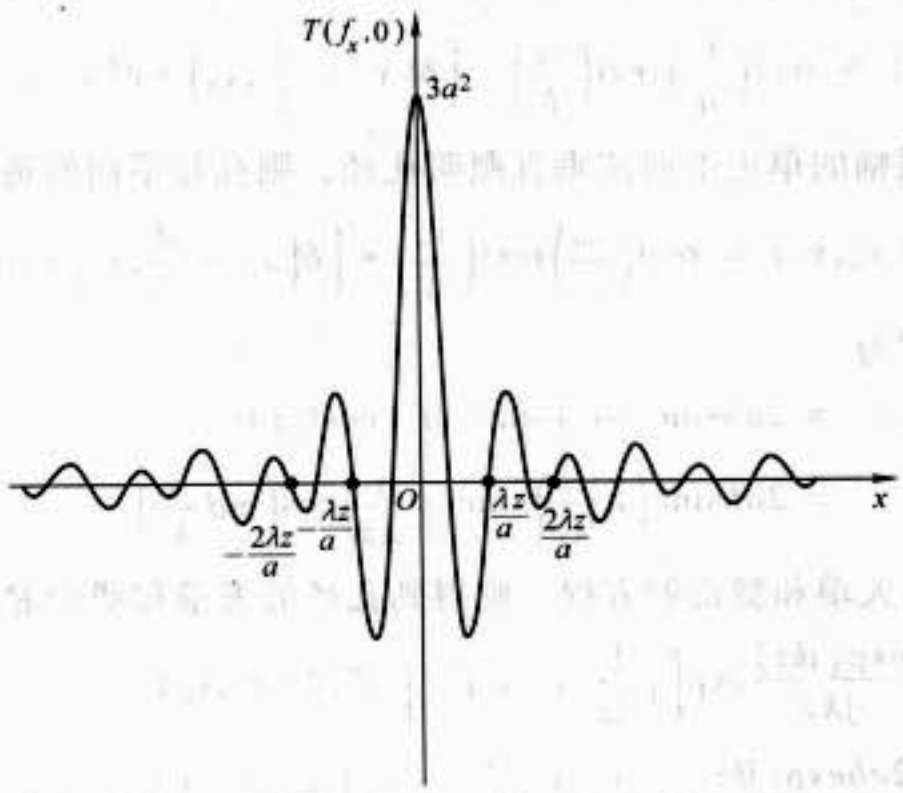


图 3-9

把式（A）代入夫琅和费衍射方程，则得到孔径的夫琅和费衍射分布为

$$\begin{aligned}U(x,y) &= \frac{\exp(\mathrm{j}kz)}{\mathrm{j}\lambda z}\exp\left[\mathrm{j}\frac{k}{2z}(x^2+y^2)\right]\mathscr{F}\{U(x_0,y_0)\}\\ &= \frac{\exp(\mathrm{j}kz)}{\mathrm{j}\lambda z}\exp\left[\mathrm{j}\frac{k}{2z}(x^2+y^2)\right]\times\{4a^2\mathrm{sinc}(2af_x)\mathrm{sinc}(2af_y)\\ &\quad - a^2\mathrm{sinc}(af_x)\mathrm{sinc}(af_y)\exp[-\mathrm{j}2\pi(f_x\xi+f_y\eta)]\}\\ &= \frac{\exp(\mathrm{j}kz)}{\mathrm{j}\lambda z}\exp\left[\mathrm{j}\frac{k}{2z}(x^2+y^2)\right]\times\left\{4a^2\mathrm{sinc}\left(2a\frac{x}{\lambda z}\right)\mathrm{sinc}\left(2a\frac{y}{\lambda z}\right)\right.\\ &\quad \left. - a^2\mathrm{sinc}\left(a\frac{x}{\lambda z}\right)\mathrm{sinc}\left(a\frac{y}{\lambda z}\right)\exp\left[-\mathrm{j}2\pi\left(\frac{x}{\lambda z}\xi+\frac{y}{\lambda z}\eta\right)\right]\right\}\end{aligned}$$

其对应的光强分布为

$$\begin{aligned}I(x,y) &= \left(\frac{a^2}{\lambda z}\right)^2\left\{16\left[\mathrm{sinc}\left(2a\frac{x}{\lambda z}\right)\mathrm{sinc}\left(2a\frac{y}{\lambda z}\right)\right]^2 + \left[\mathrm{sinc}\left(a\frac{x}{\lambda z}\right)\mathrm{sinc}\left(a\frac{y}{\lambda z}\right)\right]^2\right.\\ &\quad \left. - 8\mathrm{sinc}\left(2a\frac{x}{\lambda z}\right)\mathrm{sinc}\left(2a\frac{y}{\lambda z}\right)\mathrm{sinc}\left(a\frac{x}{\lambda z}\right)\mathrm{sinc}\left(a\frac{y}{\lambda z}\right)\cos\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda z}\xi+\frac{y}{\lambda z}\eta\right)\right]\right\}\end{aligned}$$

3.9　图 3-10 所示孔径由两个相同的矩孔构成，它们的宽度为 a，长度为 b，中心相距为 d。采用单位振幅的单色平面波垂直照明，求相距为 z 的观察平面上夫琅和费图样的强度分布。假定 $b=4a$ 及 $d=1.5a$，画出沿 x 和 y 方向上强度分布的截面图。

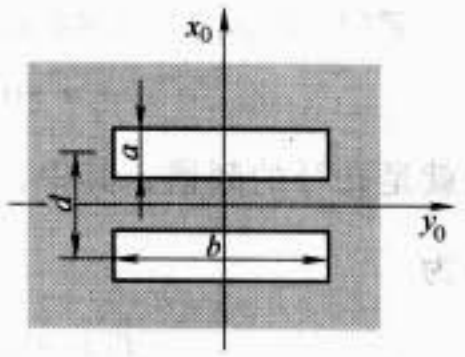


图　3-10

解

孔径的振幅透过率函数可以表示为

$$t(x_0,y_0)=\mathrm{rect}\left(\frac{x_0}{a}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y_0}{b}\right)*\left[\delta\left(x_0-\frac{d}{2},y_0\right)+\delta\left(x_0+\frac{d}{2},y_0\right)\right]$$

采用单位振幅的单色平面波垂直照明孔径，则孔径平面的透射光场为

$$U(x_0,y_0)=t(x_0,y_0)=\mathrm{rect}\left(\frac{x_0}{a}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y_0}{b}\right)*\left[\delta\left(x_0-\frac{d}{2},y_0\right)+\delta\left(x_0+\frac{d}{2},y_0\right)\right]$$

其傅里叶变换式为

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\{U(x_0,y_0)\}&=2ab\mathrm{sinc}(af_x)\mathrm{sinc}(bf_y)\cos(\pi df_x)\\&=2ab\mathrm{sinc}\left(a\frac{x}{\lambda z}\right)\mathrm{sinc}\left(b\frac{y}{\lambda z}\right)\cos\left(\pi d\frac{x}{\lambda z}\right)\end{aligned}$$

将上式代入夫琅和费衍射方程，则得到孔径的夫琅和费衍射分布为

$$\begin{aligned}U(x,y)&=\frac{\exp(\mathrm{j}kz)}{\mathrm{j}\lambda z}\exp\left[\mathrm{j}\frac{k}{2z}(x^2+y^2)\right]\mathscr{F}\{U(x_0,y_0)\}\\&=\frac{2ab\exp(\mathrm{j}kz)}{\mathrm{j}\lambda z}\exp\left[\mathrm{j}\frac{k}{2z}(x^2+y^2)\right]\mathrm{sinc}\left(a\frac{x}{\lambda z}\right)\mathrm{sinc}\left(b\frac{y}{\lambda z}\right)\cos\left(\pi d\frac{x}{\lambda z}\right)\end{aligned}$$

其对应的强度分布为

$$I(x,y)=\left(\frac{2ab}{\lambda z}\right)^2\mathrm{sinc}^2\left(a\frac{x}{\lambda z}\right)\mathrm{sinc}^2\left(b\frac{y}{\lambda z}\right)\cos^2\left(\pi d\frac{x}{\lambda z}\right)$$

可见，双矩孔的衍射图样强度分布是单矩孔的衍射图样与双光束干涉图样相互调制的结果。

当 $b=4a$ 及 $d=1.5a$ 时，上式简化为

$$I(x,y)=\left(\frac{8a^2}{\lambda z}\right)^2\mathrm{sinc}^2\left(a\frac{x}{\lambda z}\right)\mathrm{sinc}^2\left(4a\frac{y}{\lambda z}\right)\cos^2\left(3a\pi\frac{x}{2\lambda z}\right)$$

讨论：

- 当 $x=0$ 时，得到沿 y 方向的强度分布为

$$I(0,y)=\left(\frac{8a^2}{\lambda z}\right)^2\mathrm{sinc}^2\left(4a\frac{y}{\lambda z}\right)$$

其图示如图 3-11a 所示。

- 当 $y=0$ 时，得到沿 x 方向的强度分布为

$$I(x,0) = \left(\frac{8a^2}{\lambda z}\right)^2 \mathrm{sinc}^2\left(a\frac{x}{\lambda z}\right)\cos^2\left(3a\pi\frac{x}{2\lambda z}\right)$$

其图示如图 3-11b 所示。

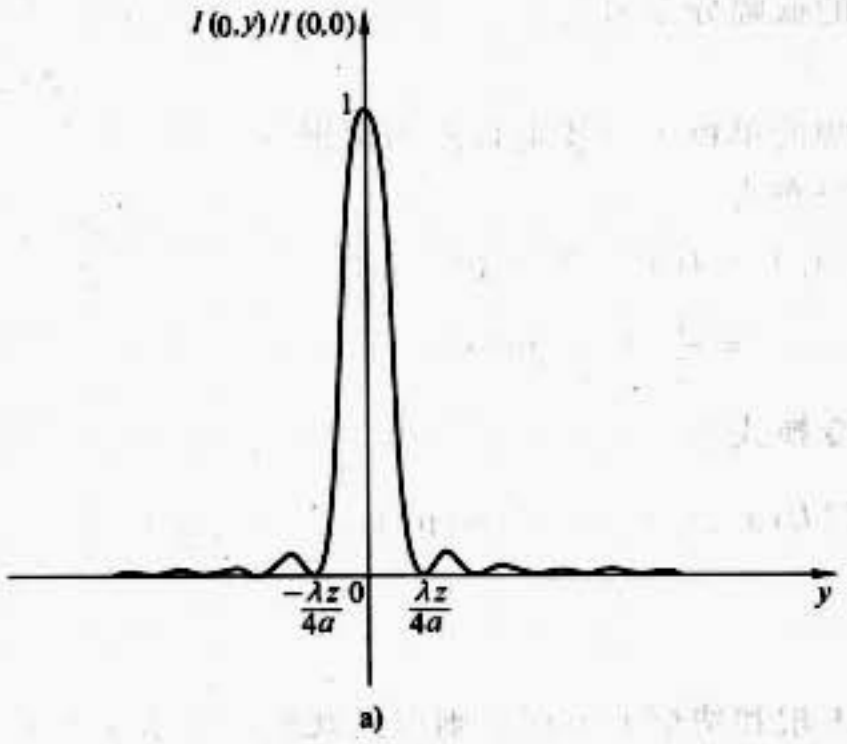


图 3-11

3.10 图 3-12 所示半无穷不透明屏的复振幅透过率可以用阶跃函数表示，即

$$t(x_0) = \text{step}(x_0)$$

采用单位振幅的单色平面波垂直照明衍射屏，求相距为 z 的观察平面上夫琅和费衍射图样的复振幅分布，并画出沿 x 方向的振幅分布曲线。

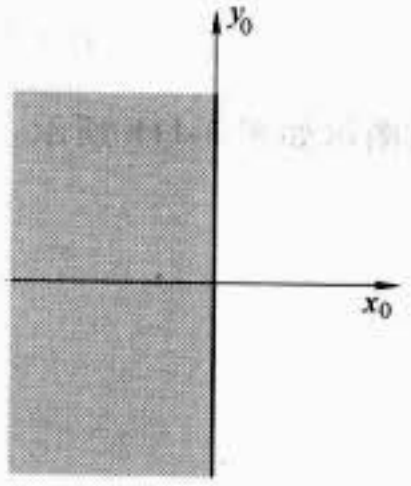


图 3-12

解

采用单位振幅的单色平面波垂直照明衍射屏，则屏上的透射光场分布为

$$U(x_0,y_0) = t(x_0) = \text{step}(x_0)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{sgn}(x_0)$$

其对应的傅里叶变换式为

$$\mathscr{F}\{U(x_0,y_0)\} = \mathscr{F}\{\text{step}(x_0)\} = \frac{1}{2}\delta(f_x) + \frac{1}{\text{j}2\pi f_x}$$

式中，$f_x = \dfrac{x}{\lambda z}$。

把上式代入夫琅和费衍射方程，则得到观察屏上沿 x 方向的衍射分布为

$$U(x,y) = \frac{\exp(\text{j}kz)}{\text{j}\lambda z}\exp\left(\text{j}\frac{k}{2z}x^2\right)\mathscr{F}\{U(x_0,y_0)\}$$
$$= \frac{\exp(\text{j}kz)}{\text{j}\lambda z}\exp\left(\text{j}\frac{k}{2z}x^2\right)\left[\frac{1}{2}\delta\left(\frac{x}{\lambda z}\right) + \frac{\lambda z}{\text{j}2\pi x}\right]$$

其沿 x 方向的振幅分布曲线如图 3-13 所示。由分析可看出，透过半无穷不透明屏的光能量有一半不发生衍射，另一半发生衍射，衍射分布从中间向边缘衰减。

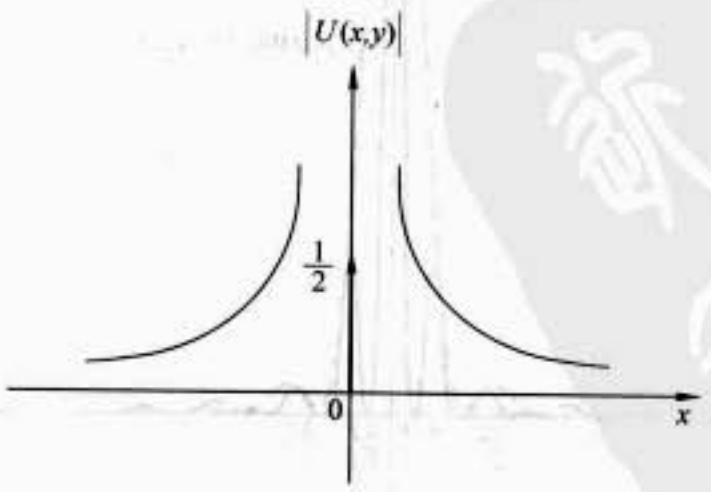


图 3-13

3.11 图 3-14 所示为宽度为 a 的单狭缝，它的两半部分之间通过位相介质引入位相差 π。采用单位振幅的单色平面波垂直照明，求相距为 z 的观察平面上夫琅和费衍射图样的强度分布，并画出沿 x 方向的截面图。

解

单狭缝的复振幅透过率函数可以表示为

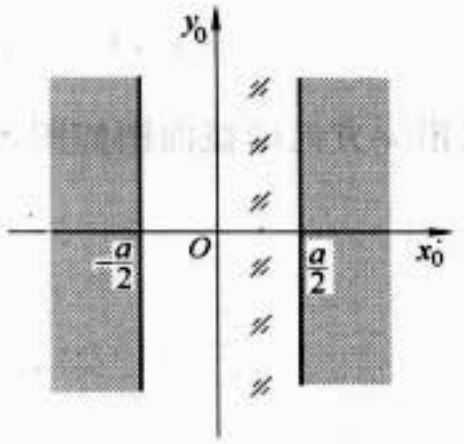


图 3-14

$$t(x_0,y_0) = \exp(j\Phi_0)\operatorname{rect}\left(\frac{x+\frac{a}{4}}{\frac{a}{2}}\right) + \exp[j(\Phi_0+\pi)]\operatorname{rect}\left(\frac{x-\frac{a}{4}}{\frac{a}{2}}\right)$$

$$= \exp(j\Phi_0)\left[\operatorname{rect}\left(\frac{x+\frac{a}{4}}{\frac{a}{2}}\right) - \operatorname{rect}\left(\frac{x-\frac{a}{4}}{\frac{a}{2}}\right)\right]$$

式中，Φ_0 是一相位常数。

当采用单位振幅的单色平面波垂直照明时，狭缝上的透射光场分布为

$$U(x_0,y_0) = t(x_0,y_0) = \exp(j\Phi_0)\left[\operatorname{rect}\left(\frac{x+\frac{a}{4}}{\frac{a}{2}}\right) - \operatorname{rect}\left(\frac{x-\frac{a}{4}}{\frac{a}{2}}\right)\right]$$

其傅里叶变换式为

$$\mathscr{F}\{U(x_0,y_0)\} = \mathscr{F}\left\{\exp(j\Phi_0)\left[\operatorname{rect}\left(\frac{x+\frac{a}{4}}{\frac{a}{2}}\right) - \operatorname{rect}\left(\frac{x-\frac{a}{4}}{\frac{a}{2}}\right)\right]\right\}$$

$$= \frac{a}{2}\exp(j\Phi_0)\operatorname{sinc}\left(\frac{a}{2}f_x\right)\left[\exp\left(j\frac{a}{2}\pi f_x\right) - \exp\left(-j\frac{a}{2}\pi f_x\right)\right]$$

$$= ja\exp(j\Phi_0)\operatorname{sinc}\left(\frac{a}{2}f_x\right)\sin\left(\frac{a}{2}\pi f_x\right)$$

式中，$f_x = \frac{x}{\lambda z}$。

把上式代入夫琅和费衍射方程，得到观察屏上夫琅和费衍射分布为

$$U(x,y) = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z}\exp\left[j\frac{k}{2z}(x^2+y^2)\right]\mathscr{F}\{U(x_0,y_0)\}$$

$$= \frac{a\exp(jkz)}{\lambda z}\exp\left[j\frac{k}{2z}(x^2+y^2)\right]\exp(j\Phi_0)\operatorname{sinc}\left(\frac{a}{2}f_x\right)\sin\left(\frac{a}{2}\pi f_x\right)$$

$$= \frac{a\exp(jkz)}{\lambda z}\exp\left[j\frac{k}{2z}(x^2+y^2)\right]\exp(j\Phi_0)\operatorname{sinc}\left(\frac{ax}{2\lambda z}\right)\sin\left(\frac{\pi ax}{2\lambda z}\right)$$

其对应的强度分布为

$$I(x,y) = |U(x,y)|^2 = \left(\frac{a}{\lambda z}\right)^2 \mathrm{sinc}^2\left(\frac{ax}{2\lambda z}\right)\sin^2\left(\frac{\pi ax}{2\lambda z}\right)$$

其沿 x 方向的截面图如图 3-15 所示。

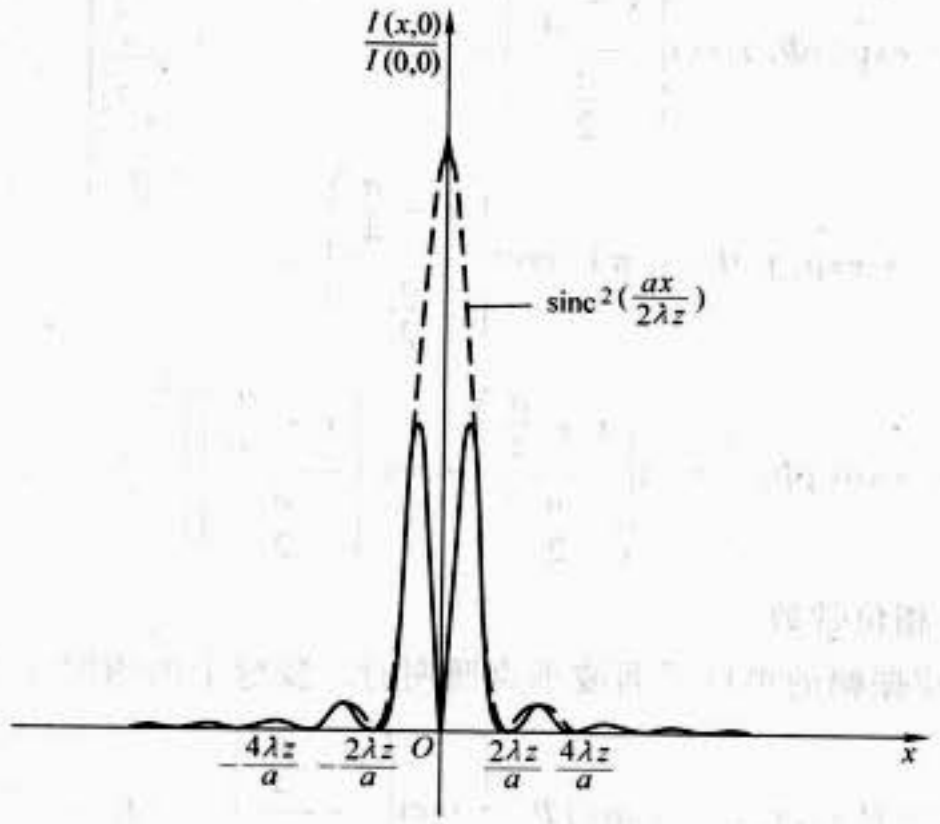


图 3-15

3.12 线光栅的缝宽为 a，光栅常数为 d，光栅整体孔径是边长为 L 的正方形。试根据下述条件，分别确定 a 和 d 之间的关系：

（1）光栅的夫琅和费衍射图样中缺少偶数级。

（2）光栅的夫琅和费衍射图样中第三级为极小。

解

线光栅的复振幅透过率函数可表示为

$$t(x_0,y_0) = \left[\mathrm{rect}\left(\frac{x_0}{a}\right) * \frac{1}{d}\mathrm{comb}\left(\frac{x_0}{d}\right)\right]\mathrm{rect}\left(\frac{x_0}{L}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y_0}{L}\right)$$

假设采用单位振幅单色平面波垂直照射光栅，其透射光场等于光栅的复振幅透过率

$$U(x_0,y_0) = t(x_0,y_0) = \left[\mathrm{rect}\left(\frac{x_0}{a}\right) * \frac{1}{d}\mathrm{comb}\left(\frac{x_0}{d}\right)\right]\mathrm{rect}\left(\frac{x_0}{L}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y_0}{L}\right)$$

其傅里叶变换式为

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\{U(x_0,y_0)\} &= \mathscr{F}\left\{\left[\mathrm{rect}\left(\frac{x_0}{a}\right) * \frac{1}{d}\mathrm{comb}\left(\frac{x_0}{d}\right)\right]\mathrm{rect}\left(\frac{x_0}{L}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y_0}{L}\right)\right\} \\ &= [a\mathrm{sinc}(af_x)\mathrm{comb}(df_x)] * L^2\mathrm{sinc}(Lf_x)\mathrm{sinc}(Lf_y) \\ &= \frac{a}{d}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}\left(\frac{an}{d}\right)\delta\left(f_x - \frac{n}{d}\right) * L^2\mathrm{sinc}(Lf_x)\mathrm{sinc}(Lf_y)\end{aligned}$$

$$= \frac{aL^2}{d}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\operatorname{sinc}\left(\frac{an}{d}\right)\operatorname{sinc}\left[L\left(f_x - \frac{n}{d}\right)\right]\operatorname{sinc}(Lf_y)$$

把上式代入夫琅和费衍射方程，得到夫琅和费衍射图样的复振幅分布为

$$U(x,y) = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z}\exp\left[j\frac{k}{2z}(x^2+y^2)\right]\mathscr{F}\{U(x_0,y_0)\}_{f_x=\frac{x}{\lambda z},f_y=\frac{y}{\lambda z}}$$

$$= \frac{aL^2\exp(jkz)}{j\lambda zd}\exp\left[j\frac{k}{2z}(x^2+y^2)\right]$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\operatorname{sinc}\left(\frac{an}{d}\right)\operatorname{sinc}\left[L\left(\frac{x}{\lambda z}-\frac{n}{d}\right)\right]\operatorname{sinc}\left(L\frac{y}{\lambda z}\right)$$

强度分布为

$$I(x,y) = \left(\frac{aL^2}{\lambda zd}\right)^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{an}{d}\right)\operatorname{sinc}^2\left[L\left(\frac{x}{\lambda z}-\frac{n}{d}\right)\right]\operatorname{sinc}^2\left(L\frac{y}{\lambda z}\right)$$

这就是光栅的夫琅和费衍射图样。

讨论：当单缝衍射的零点位置与某些衍射级重合时，这些衍射级就会消失。

（1）若夫琅和费衍射图样中缺少偶数级（见图 3-16a），则要求

$$\frac{2n}{d} = \frac{n}{a}(n = 1,2,\cdots)$$

即

$$d = 2a$$

（2）若夫琅和费衍射图样中第三级为极小（见图 3-16b），则要求

$$\frac{3}{d} = \frac{1}{a}$$

即

$$d = 3a$$

3.13　衍射屏由两个错开的网格构成，其透过率可以表示为

$$t(x_0,y_0) = \operatorname{comb}\left(\frac{x_0}{a}\right)\operatorname{comb}\left(\frac{y_0}{a}\right) + \operatorname{comb}\left(\frac{x_0-0.1a}{a}\right)\operatorname{comb}\left(\frac{y_0}{a}\right)$$

采用单位振幅的单色平面波垂直照明，求相距为 z 的观察平面上夫琅和费衍射图样的强度分布，并画出沿 x 方向的截面图。

解

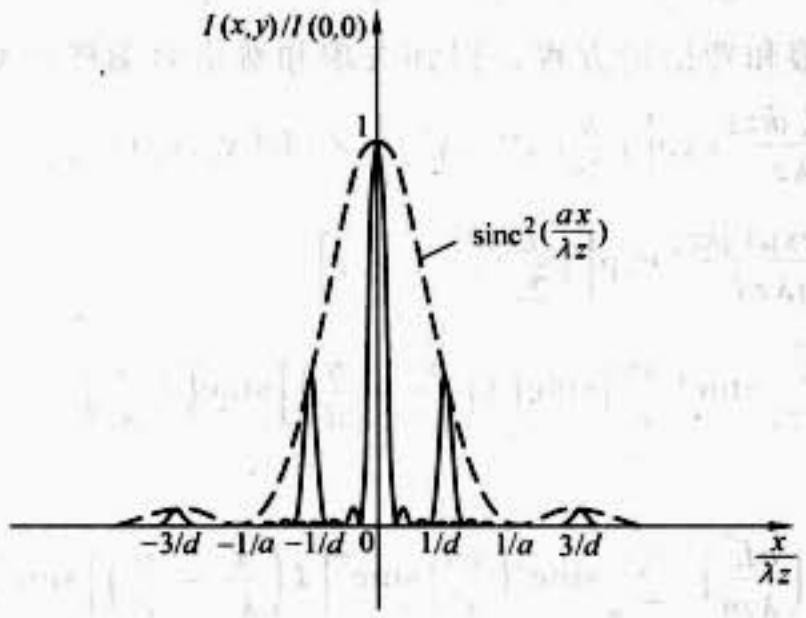
采用单位振幅的单色平面波垂直照明，则衍射屏上的透射光场分布为

$$U(x_0,y_0) = t(x_0,y_0) = \operatorname{comb}\left(\frac{x_0}{a}\right)\operatorname{comb}\left(\frac{y_0}{a}\right) + \operatorname{comb}\left(\frac{x_0-0.1a}{a}\right)\operatorname{comb}\left(\frac{y_0}{a}\right)$$

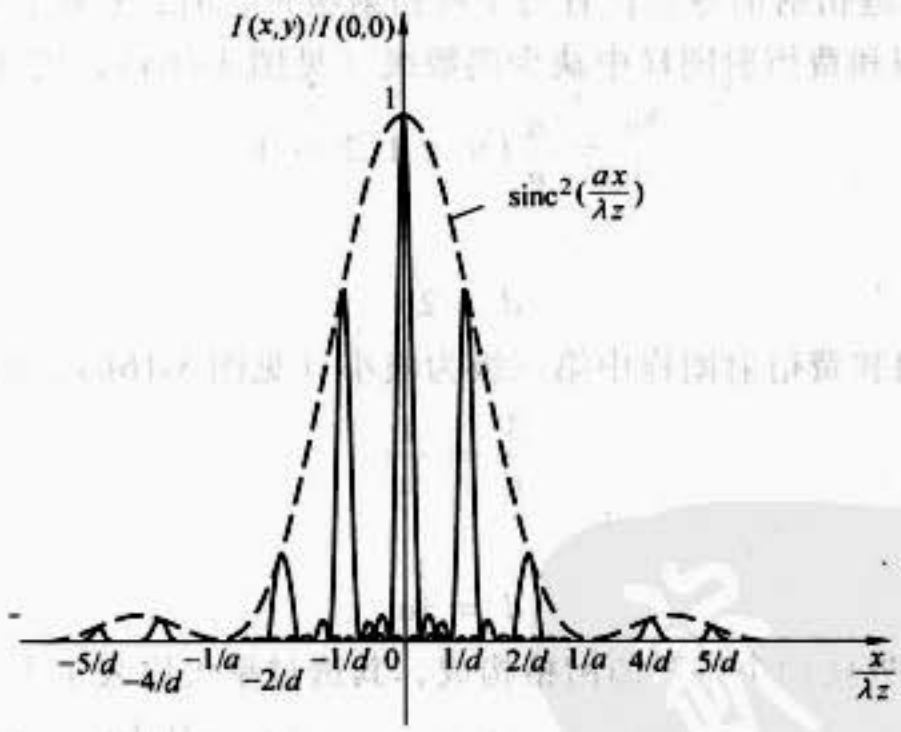
其傅里叶变换式为

$$\mathscr{F}\{U(x_0,y_0)\} = \mathscr{F}\left\{\operatorname{comb}\left(\frac{x_0}{a}\right)\operatorname{comb}\left(\frac{y_0}{a}\right) + \operatorname{comb}\left(\frac{x_0-0.1a}{a}\right)\operatorname{comb}\left(\frac{y_0}{a}\right)\right\}$$

$$= a^2 \mathrm{comb}(af_x)\mathrm{comb}(af_y)[1 + \exp(-\mathrm{j}0.2\pi af_x)]$$



a)



b)

图 3-16

将上式代入夫琅和费衍射方程，则得到观察屏上夫琅和费衍射图样的复振幅分布为

$$U(x,y) = \frac{\exp(\mathrm{j}kz)}{\mathrm{j}\lambda z}\exp\left[\mathrm{j}\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)\right]\mathscr{F}\{U(x_0,y_0)\}\big|_{f_x=\frac{x}{\lambda z},f_y=\frac{y}{\lambda z}}$$

$$= \frac{a^2\exp(\mathrm{j}kz)}{\mathrm{j}\lambda z}\exp\left[\mathrm{j}\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)\right]\mathrm{comb}(af_x)\mathrm{comb}(af_y)$$

$$\times [1 + \exp(-\mathrm{j}0.2\pi af_x)]$$

$$= \frac{a^2\exp(jkz)}{j\lambda z}\exp\left[j\frac{k}{2z}(x^2+y^2)\right]\mathrm{comb}\left(\frac{ax}{\lambda z}\right)\mathrm{comb}\left(\frac{ay}{\lambda z}\right)$$
$$\times\left[1+\exp\left(-j0.2\pi\frac{ax}{\lambda z}\right)\right]$$

强度分布为

$$I(x,y) = 4\left(\frac{a^2}{\lambda z}\right)^2\left[\mathrm{comb}\left(\frac{ax}{\lambda z}\right)\mathrm{comb}\left(\frac{ay}{\lambda z}\right)\right]^2\cos^2\left(\frac{0.1\pi ax}{\lambda z}\right)$$

当 $y=0$ 时，可得到沿 x 方向的强度分布为

$$I(x,0) = 4\left(\frac{a^2}{\lambda z}\right)^2\mathrm{comb}^2\left(\frac{ax}{\lambda z}\right)\cos^2\left(\frac{0.1\pi ax}{\lambda z}\right)$$

其截面图如图 3-17 所示。

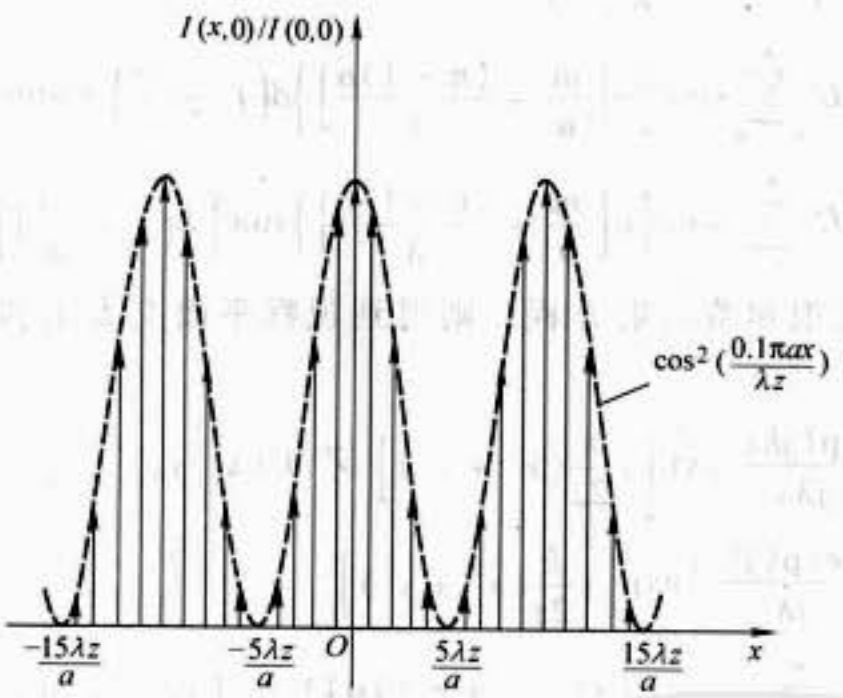


图 3-17

3.14 图 3-18 所示为透射式锯齿形位相光栅。其折射率为 n，齿宽为 a，齿形角为 α，光栅的整体孔径为边长为 L 的正方形。采用单位振幅的单色平面波垂直照明，求相距为 z 的观察平面上夫琅和费衍射图样的强度分布。若使衍射图样中某个一级谱幅值最大，α 角应如何选取？

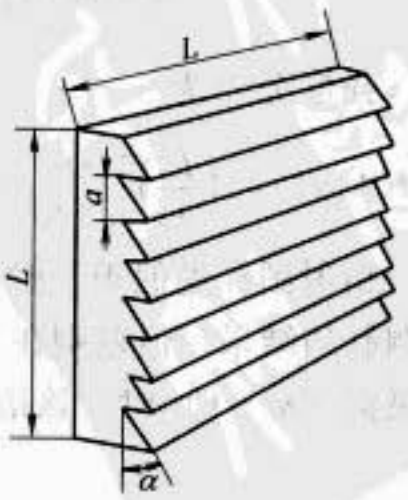


图 3-18

解

透射式锯齿形位相光栅的复振幅透过率可以表示为

$$t(x_0,y_0) = \left[\exp[jk(n-1)\alpha x_0]\mathrm{rect}\left(\frac{x_0}{a}\right)\right.$$
$$\left.* \frac{1}{a}\mathrm{comb}\left(\frac{x_0}{a}\right)\right]\mathrm{rect}\left(\frac{x_0}{L}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y_0}{L}\right)$$