目　　录

迈克尔逊干涉实验 …… H. A. 洛伦兹　1

§1　实验 …… 1

§2　收缩假说 …… 2

§3　关于分子力的收缩 …… 3

§4　关于分子力的收缩(续) …… 4

速度小于光速运动系统中的电磁现象……H. A. 洛伦兹　6

§1　实验证据 …… 6

§2　彭卡莱对收缩假说的批评 …… 7

§3　对运动坐标轴列出的麦克斯韦方程 …… 8

§4　修正的矢量 …… 9

§5　推迟势 …… 11

§6　静电场 …… 13

§7　极化粒子 …… 14

§8　对应状态 …… 17

§9　电子的动量 …… 18

§10　地球运动对光学现象的影响 …… 20

§11　应用 …… 24

§12　分子运动 …… 25

§13　考夫曼的实验 …… 26

论运动物体的电动力学…… A. 爱因斯坦　31

一、运动学部分 …… 32

§1　同时性的定义 …… 32

§2　长度和时间的相对性 …… 34

§3　坐标和时间从静系统到另一个相对于它作匀速平移系统的变换理论 …… 36

§4 关于运动刚体和运动钟所得方程的物理意义 …… 41
§5 速度的合成 …… 43
二、电动力学部分 …… 45
§6 真空中的麦克斯韦-赫兹方程的变换。论磁场中由运动所产生的电动势的性质 …… 45
§7 多普勒原理和光行差理论 …… 48
§8 光能的变换。关于作用在理想反射器上的辐射压力理论 …… 50
§9 计及对流电流的麦克斯韦-赫兹方程的变换 …… 52
§10 缓慢加速的电子的动力学 …… 54
物体的惯性是否与它所含的能量有关？… A. 爱因斯坦 58
空间和时间…… H. 闵可夫斯基 61
§1 牛顿方程的不变性及其在四维空间中的表示 …… 61
§2 世界假设 …… 65
§3 连续区中运动的表示 …… 68
§4 新力学 …… 71
§5 一个电子和两个电子的运动 …… 73
注释 …… A. 索末菲 76
论引力对光传播的影响…… A. 爱因斯坦 83
§1 关于引力场物理性质的假设 …… 83
§2 论能量的引力 …… 85
§3 引力场中的时间和光速 …… 88
§4 光线在引力场中的偏转 …… 90
广义相对论基础…… A. 爱因斯坦 93
一、关于相对性假设的基本考查 …… 93
§1 关于狭义相对论的评述 …… 93
§2 推广相对性假设的必要性 …… 94
§3 时空连续区.表示自然界普遍定律的方程的广义协变性条件 …… 96
§4 四个坐标与空间时间测量的关系 …… 99

二、建立广义协变方程的数学工具 …… 101
§5 逆变四维矢量与协变四维矢量 …… 102
§6 二秩张量和高秩张量 …… 103
§7 张量的乘法 …… 106
§8 基本张量 $g_{\mu\nu}$ 的一些特点 …… 108
§9 短程线方程．粒子的运动 …… 111
§10 用微分法形成张量 …… 113
§11 几个特别重要的情况 …… 117
§12 黎曼-克里斯托菲张量 …… 120
三、引力场理论 …… 122
§13 引力场中质点的运动方程．引力场分量的表达式… 122
§14 物质不存在时的引力场方程 …… 123
§15 引力场的哈密顿函数．动量定律与能量定律 …… 125
§16 引力场方程的一般形式 …… 127
§17 一般情况下的守恒定律 …… 129
§18 由场方程导出的物质的动量与能量定律 …… 130
四、物质现象 …… 131
§19 无摩擦绝热流体的欧勒方程 …… 132
§20 真空中的麦克斯韦电磁场方程 …… 133
五、理论的应用 …… 136
§21 牛顿理论作为一级近似 …… 136
§22 静引力场中杆和钟的行为．光线的偏转．行星轨道近日点的运动…… 139
哈密顿原理与广义相对论…… A. 爱因斯坦 144
§1 变分原理与物质和引力的场方程 …… 144
§2 引力场的独立存在 …… 145
§3 由不变量理论规定的引力场方程的性质 …… 146
根据广义相对论对宇宙学的考查…… A. 爱因斯坦 150
§1 牛顿理论 …… 150
§2 符合广义相对论的边界条件 …… 152

§3 具有物质均匀分布的空间有限的宇宙 …… 156
§4 关于引力场方程的附加项 …… 158
§5 计算与结果 …… 159
在物质的基本粒子结构中引力场是否起着重要的作用?
…… A. 爱因斯坦 161
§1 现有观点的缺陷 …… 161
§2 没有标量的场方程 …… 163
§3 关于宇宙学问题 …… 166
§4 结论 …… 168
引力与电 …… H. 韦尔 169

迈克尔逊干涉实验

H. A. 洛伦兹

§1 实验

麦克斯韦最先注意到（也可以从十分简单的计算得出），当两个点 A，B 一起移动而不带动附近的以太时，光线从点 A 走到点 B 再返回点 A 所需的时间一定会不同。当然，这个差值是个二阶量，但是用灵敏的干涉方法已经足以检测出来。

迈克尔逊于 1881 年做了这样的实验[1]。他的仪器是一种干涉仪，有两个长度相等并互相垂直的水平臂 P 和 Q。两束互相干涉的光线，一束沿 P 臂往返，另一束沿 Q 臂往返。整个仪器包括光源和观察装置，可以绕竖直轴转动。当 P 臂或 Q 臂尽可能与地球运动方向相同时的两个位置值得特别考虑。根据菲涅尔理论可以预言，当仪器从一个主位置转到另一个主位置时，干涉条纹应发生位移。

但是，取决于光传播时间改变的这种位移（为简单起见，称为麦克斯韦位移），没有发现任何迹象，于是迈克尔逊认为有理由断言，地球运动时，以太并不保持静止。但很快就发现这个断言的正确性有问题，由于疏忽，迈克尔逊误把理论所预言的相差变化比其正确值增大了一倍。如果作必要的修正，则所得到的位移值不超过被观察误差可能掩盖的值。

---

1) Michelson, *American Journal of Science*, **22**, 1881, p. 120.

后来迈克尔逊[1]和莫雷合作重新进行研究. 他们用下列方法提高实验的精密度：令每一光束在一系列镜子之间来回反射，这样做的好处是相当于把早先那种仪器的两臂大大加长. 这些镜子固定在浮在水银面上的一个巨大的石圆盘上，所以容易转动. 现在每一光束要走过 22 米的总距离，根据菲涅尔理论，一仪器从一个主位置转动到另一个主位置时，所得到的干涉条纹的位移是干涉条纹之间距离的十分之四. 然而旋转所引起的这种位移不超过干涉条纹距离的百分之二，后者完全可归诸实验误差.

那末这些结果是否允许我们假定以太参与了地球的运动，因而认为斯托克斯的光行差理论是正确的呢？这理论在解释光行差时遇到的困难是太大了，使我很难同意这种见解，我宁愿设法消除菲涅尔理论与迈克尔逊实验结果之间的矛盾. 我在一些时候以前提出的一个假说[2]（后来我获知，斐兹杰惹[3]也想到了同样的假说），使我们能做到这一点，下节将给出这个假说.

§ 2 收缩假说

为了简化问题，设想我们是用第一次实验所用的仪器工作，并假定在一个主位置上，P 臂恰恰处于地球运动方向，设 v 为运动的速度，L 为每个臂的长度，于是 $2L$ 为光线走过的路程. 按照理论[4]，仪器转过 90°，就会使一束光沿 P 臂往返的

---

1) Michelson 和 Morley, *American Journal of Science*, **34**, 1887, p. 333, *Phil. Mag.*, 24, 1887, p.449.

2) Lorentz, *Zittingsverslagen der Akad. v. Wet. te Amsterdam* 1892—93, p. 74

3) 斐兹杰惹告诉我，长时间以来，他已在自己的讲座上阐述了他的假说，而我所能看到的这假说的已出版的参考书，只有 Lodge, "Aberration Problems", *Phil. Trans.* R. S., 184 A, 1893.

4) 参看 Lorentz, *Arch. Néerl.*, **2**, 1887, pp. 168—176.

时间比另一束光走完其路程所费的时间长

$$\frac{Lv^2}{c^3}.$$

假使平移没有影响，而 P 臂比 Q 臂长 $\frac{1}{2}Lv^2/c^2$，也会有相同的差值．第二个主位置的情况也是一样．

由此可见，当仪器转动时，如果首先是这一个臂较长，然后是另一个臂较长，则理论预言的相差也会出现．由此得出，这相差可以由相反地改变尺寸来补偿。

如果我们假定处于地球运动方向的那个臂比另一臂缩短 $\frac{1}{2}Lv^2/c^2$，同时假定平移具有菲涅尔理论所推断的作用，则迈克尔逊实验的结果就能够圆满地解释了．

于是我们不得不设想，固体（例如黄铜杆或后一个实验所用的石圆盘）穿过静止以太的运动会对这固体的尺寸产生影响，影响的大小随着物体相对运动方向的方位而变化．例如，若平行这方向的尺寸按 1 比 $(1+\delta)$ 的比例变化，垂直这方向的尺寸按 1 比 $(1+\varepsilon)$ 的比例变化，则有以下方程：

$$\varepsilon-\delta=\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}, \tag{1}$$

其中量 δ 和 ε 的值有一个待确定．可以是

$$\varepsilon=0,\ \delta=-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2},$$

也可以是

$$\varepsilon=\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2},\quad \delta=0 \quad 或 \quad \varepsilon=\frac{1}{4}\frac{v^2}{c^2},\quad \delta=-\frac{1}{4}\frac{v^2}{c^2}.$$

§3 关于分子力的收缩

初看起来，这个假说似乎不可思议，但我们不能不承认，这决不是牵强附会的，只要我们假定分子力也像电力和磁力

那样通过以太而传递(至于电力和磁力,现在可以明确地作这样断言),若分子力果然是这样传递,平移很可能影响两个分子或两个原子之间的作用,其方式有点类似于荷电粒子之间的吸引或排斥.既然固体的形状和大小最终取决于分子作用的强度,因此物体大小的变化也就不会不存在.

所以从理论方面这假说是无可非议的.至于其实验证明,我们首先必须注意到,这里所说的变长或变短是非常微小的.我们有 $v^2/c^2 = 10^{-8}$, 因此,若 $\varepsilon = 0$, 地球直径之一缩短总共约 6.5 厘米.当米尺从一个主位置移动到另一个主位置时,其长度大约改变 $\frac{1}{200}$ 微米. 如果不用干涉方法,我们要试图发现这样微小的量,那是没有成功的希望的. 我们应该用两个互相垂直的杆和两束互相干涉的光来做实验,令一束光沿第一杆往返,另一束光沿第二杆往返.这样一来,我们又再次回到了迈克尔逊实验,即转动仪器时,我们也应当看不到条纹的位移.将前面所说的过程反过来,我们现在可以断言,长度改变引起的位移为麦克斯韦位移所补偿.

§4 关于分子力的收缩(续)

值得注意的是,如果我们首先不考虑分子运动,假定在不受外界影响的固体内,作用在任何分子上的力(吸力或斥力)保持互相平衡;其次,如果把我们在别处[1]对静电作用导出的定律应用于这些分子力(诚然,这样做是没有理由的),那末我们就正好得到前面所推断的大小变化.因为若我们现在把 S_1 和 S_2 不象以前那样理解为两个荷电粒子系统,而理解为两个分子系统——第二个系统静止,而第一个系统以速度 v 沿 x

1) Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern, § 23.

轴方向运动——那末两个系统的大小之间就存在如前所述的关系;如果我们假定在两个系统内，力的 x 分量相同，而 y 与 z 分量相差一个因子 $\sqrt{1-v^2/c^2}$，那末显然，只要 S_2 里的力处于平衡，则 S_1 里的力一定也处于平衡，所以若 S_2 是静止固体的平衡状态，则 S_1 中的分子正好具有在平移作用下仍能保持的位置．位移自然会引起分子的自动重新分布，从而导致在运动方向上按 $1:\sqrt{1-v^2/c^2}$ 的比例缩短，这与上节给出的公式一致．于是得出

$$\delta = -\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2},\quad \epsilon = 0.$$

这些值与式(1)相符．

实际上，物体分子并不是静止的，而是在每个“平衡态”中都存在一种稳定运动．这种情况对我们所考虑的现象会有什么影响仍然是个问题，在此我们不谈这问题；总之，由于不可避免的观察误差，迈克尔逊-莫雷实验给出的 δ 值和 ϵ 值有颇大的伸缩余地．

速度小于光速运动系统中的电磁现象

H. A. 洛伦兹

§ 1 实验证据

测定平移(例如,由于地球的周年运动，其上一切系统近似地处于平移状态)对于电学和光学现象的影响这个问题,如果仅需考虑与 v/c (v 是平移速度，c 是光速) 的一次幂成正比的项,则可能有比较简单的解. 在二阶(即 v^2/c^2 阶)量能够觉察到的情况下，则会出现较多的困难. 这类问题的第一个例子是著名的迈克尔逊干涉实验. 它的否定结果使菲兹杰惹和我得出下列结论: 固体的尺寸会由于通过以太的运动而略有改变.

近来公布了一些为寻找二阶效应而进行的新实验.瑞利[1]和布雷斯[2]曾经研究地球运动是否会使物体产生双折射现象. 骤然看来,如果承认刚才提到的长度变化,就可期待会发生这一现象. 然而,这两位物理学家都得出了否定的结果.

其次,特劳顿和诺布尔[3]企图测出作用在一个荷电电容器上的转动力偶，这电容器的板是放在与其平移方向成一定角度的位置上. 除非用某些新的假说来修改电子理论,否则,按

---

1) Rayleigh, *Phil. Mag.* (6), **4**, 1902, p. 678.
2) Brace, *Phil. Mag.* (6), **7**, 1904, p. 317.
3) Trouton and Noble, *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.*, **A202**, 1903, p. 165.

电子论的要求，这种力偶无疑是存在的．为了看出这一点，我们考虑一个用以太作为电介质的电容器．可以证明，在每个以速度 **v** 运动的静电系统中，都存在着一定大小的“电磁动量”．用矢量 **G** 表示电磁动量的大小和方向，则上述偶矩由以下矢积确定[1]

$$[\mathbf{G}\cdot\mathbf{v}]. \qquad (1)$$

现在，令 z 轴垂直于电容器板，速度 **v** 的方向由我们任意决定，若按普通方法算出的电容器能量为 U，则 **G** 的分量由下列公式给出(准确到一阶量)[2]：

$$G_x=\frac{2U}{c^2}v_x,\quad G_y=\frac{2U}{c^2}v_y,\quad G_z=0.$$

把这些值代入式(1)，我们就得出力偶的三个分量(准确到二阶项)

$$\frac{2U}{c^2}v_yv_z,\quad -\frac{2U}{c^2}v_xv_y,\quad 0.$$

这些式子表明：力偶的轴处于电容器板面上而垂直于平移方向．设速度方向和板的法线夹角为 α，则力偶矩为 $U(v/c)^2\cdot\sin 2\alpha$；这力矩的方向是试图使电容器转到使其板平行于地球运动的方向．

特劳顿和诺布尔所用的仪器里，这电容器是固定在一个灵敏扭秤的秤杆上的，这扭秤的灵敏度足以测出以上数量级的力偶矩．然而未能观察到任何效应．

§ 2 彭卡莱对收缩假说的批评

刚才谈到的那些实验，并不是值得重新审查与地球运动

---

1) 见我的文章：“Weiterbildung der Maxwell'schon Theorie. Electronentheorie”, Mathem. Encyclopädie, V, 14, § 21, a. 以后引用本文时简称为“M. E.”.)

2) “M. E.”, § 56, c.

相联系的问题的唯一理由，彭卡莱[1]曾对运动物体的电学和光学现象的现有理论提出异议，他认为，如果为了解释迈克尔逊实验的否定结果，需要引入新的假说，那么每当出现新的实验事实时，同样也发生这种需要．无疑地，对每一个新的实验结果创立一种特殊假说这种做法是不自然的．假使能够利用某些基本假定，并且不用忽略这种数量级或那种数量级的量，来证明许多电磁作用都完全与系统的运动无关，那就更好了．几年以前，我已经在探求这种理论[2]．我相信，现在来讨论这个题目，可能会得到较好的结果．唯一关于速度的限制是系统速度要小于光速．

§ 3　对运动坐标轴列出的麦克斯韦方程

我从电子论的基本方程开始讨论[3]．设 **D** 是以太中的电位移，**H** 是磁力，ρ 是电子的电荷密度，**v** 是这种粒子上一个点的速度，**F** 是有质动力，即单位电荷所受的力，这种力是以太作用在电子体积基元上的．若采用一个固定的坐标系，则有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{div}\mathbf{D} = \rho,\\
&\mathrm{div}\mathbf{H} = 0,\\
&\mathrm{curl}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \rho\mathbf{v}\right),\\
&\mathrm{curl}\mathbf{D} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},\\
&\mathbf{F} = \mathbf{D} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\cdot\mathbf{H}].
\end{aligned} \tag{2}$$

---

1) Poincaré, Rapports du Congrès de physique de 1900, Paris, 1, pp. 22, 23.

2) Lorentz, *Zittingsverslag Akad. v. Wet.*, 7, 1899, p. 507, Amsterdam Proc., 1898—99, p.427.

3) "M. E.", § 2.

现在我假定，这系统作为一个整体沿 x 方向以恒定速度 v 运动，系统中的电子除速度 v 以外，还具有速度 $\mathbf{u}$，于是

$$v_x = v + u_x, \quad v_y = u_y, \quad v_z = u_z.$$

若同时把方程 (2) 用随着系统运动的坐标轴为参考，则方程 (2) 变为

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho,$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0;$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - v\frac{\partial}{\partial x}\right)D_x + \frac{1}{c}\rho(v + u_x),$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - v\frac{\partial}{\partial x}\right)D_y + \frac{1}{c}\rho u_y,$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - v\frac{\partial}{\partial x}\right)D_z + \frac{1}{c}\rho u_z;$$

$$\frac{\partial D_z}{\partial y} - \frac{\partial D_y}{\partial z} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - v\frac{\partial}{\partial x}\right)H_x,$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial z} - \frac{\partial D_z}{\partial x} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - v\frac{\partial}{\partial x}\right)H_y,$$

$$\frac{\partial D_y}{\partial x} - \frac{\partial D_x}{\partial y} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - v\frac{\partial}{\partial x}\right)H_z;$$

$$F_x = D_x + \frac{1}{c}(u_y H_z - u_z H_y),$$

$$F_y = D_y - \frac{1}{c}vH_z + \frac{1}{c}(u_z H_x - u_x H_z),$$

$$F_z = D_z + \frac{1}{c}vH_y + \frac{1}{c}(u_x H_y - u_y H_x).$$

§4 修正的矢量

我们将进一步通过改变变量来变换这些公式. 令

$$\frac{c^2}{c^2 - v^2} = \beta^2, \tag{3}$$

l 为有待确定的另一数量，取

$$x' = \beta l x, \quad y' = l y, \quad z' = l z, \tag{4}$$

$$t' = \frac{l}{\beta} t - \beta l \frac{v}{c^2} x \tag{5}$$

作为新的独立变量，并用下列公式来定义两个新矢量 $\mathbf{D}'$, $\mathbf{H}'$：

$$D'_x = \frac{1}{l^2} D_x, \quad D'_y = \frac{\beta}{l^2}\left(D_y - \frac{v}{c} H_z\right),$$

$$D'_z = \frac{\beta}{l^2}\left(D_z + \frac{v}{c} H_y\right);$$

$$H'_x = \frac{1}{l^2} H_x, \quad H'_y = \frac{\beta}{l^2}\left(H_y + \frac{v}{c} D_z\right),$$

$$H'_z = \frac{\beta}{l^2}\left(H_z - \frac{v}{c} D_y\right),$$

根据式 (3)，我们也可以把上式写成，

$$D_x = l^2 D'_x, \quad D_y = \beta l^2\left(D'_y + \frac{v}{c} H'_z\right),$$

$$D_z = \beta l^2\left(D'_z - \frac{v}{c} H'_y\right);$$

$$H_x = l^2 H'_x, \quad H_y = \beta l^2\left(H'_y - \frac{v}{c} D'_z\right), \tag{6}$$

$$H_z = \beta l^2\left(H'_z + \frac{v}{c} D'_y\right).$$

至于系数 l，应该把它当作是 v 的函数，当 $v = 0$ 时，l 的值为 1，对于微小的 v 值，l 与 1 相差的不过是一个二阶量.

变量 t' 可以称为“地方时”；事实上，当 $\beta = 1$ 时，$l = 1$，它和我先前以这个名词标记的量完全相同.

最后，假如我们令

$$\frac{1}{\beta l^3}\rho = \rho', \tag{7}$$

$$\beta^2 u_x = u'_x, \quad \beta u_y = u'_y, \quad \beta u_z = u'_z, \tag{8}$$

其中 u'_x，u'_y，u'_z 认为是一个新矢量 $\mathbf{u}'$ 的分量，于是方程取下列形式：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{div}'\mathbf{D}' = \left(1 - \frac{vu'_x}{c^2}\right)\rho', \\
&\mathrm{div}'\mathbf{H}' = 0, \\
&\mathrm{curl}'\mathbf{H}' = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t'} + \rho'\mathbf{u}'\right), \\
&\mathrm{curl}'\mathbf{D}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t'};
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
F_x &= l^2\left\{D'_x + \frac{1}{c}(u'_y H'_z - u'_z H'_y) + \frac{v}{c^2}(u'_y D'_y + u'_z D'_z),\right\} \\
F_y &= \frac{l^2}{\beta}\left\{D'_y + \frac{1}{c}(u'_z H'_x - u'_x H'_z) - \frac{v}{c^2}u'_x D'_y\right\}, \qquad (10) \\
F_z &= \frac{l^2}{\beta}\left\{D'_z + \frac{1}{c}(u'_x H'_y - u'_y H'_x) - \frac{v}{c^2}u'_x D'_z\right\}.
\end{aligned}$$

式 (9) 中的符号 div′ 和 curl′ 与式 (2) 中 div 和 curl 的意义相似，只是对 x，y，z 的微分应代之以对 x'，y'，z' 的相应微分而已。

§5 推迟势

从方程 (9) 可导致下述结论：矢量 $\mathbf{D}'$ 和 $\mathbf{H}'$ 可以用一个标量势 ϕ' 及一个矢量势 $\mathbf{A}'$ 来表示，这些势满足方程[1]

$$\nabla'^2\phi' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi'}{\partial t'^2} = -\rho', \tag{11}$$

$$\nabla'^2 A' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}'}{\partial t'^2} = -\frac{1}{c}\rho'\mathbf{u}', \tag{12}$$

用这些势，$\mathbf{D}'$ 和 $\mathbf{H}'$ 可表示成

$$\mathbf{D}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial A'}{\partial t'} - \mathrm{grad}'\phi' + \frac{v}{c}\mathrm{grad}'A'_x, \tag{13}$$

1) "M. E.", §4 和 §10。

$$\mathbf{H}' = \mathrm{curl}'\mathbf{A}'. \tag{14}$$

符号∇'^2是 $\frac{\partial^2}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2}{\partial z'^2}$ 的简写，$\mathrm{grad}'\phi'$ 表示一个矢量，其分量为

$$\frac{\partial\phi'}{\partial x'},\qquad \frac{\partial\phi'}{\partial y'},\qquad \frac{\partial\phi'}{\partial z'}.$$

$\mathrm{grad}'A'_x$ 具有类似的意义.

为了求出式(11)和(12)的简单形式的解，可以取x'，y'，z'作为空间S'中点P'的坐标，并且对于每个t'值，我们认为电磁系统中对应点$P(x,y,z)$所具有的ρ'，$\mathbf{u}'$，ϕ'，$\mathbf{A}'$值也属于P'. 对于第四个独立变量t'的一个确定值，在电磁系统的点P上，或者在空间S'的对应点P'上，势ϕ'和$\mathbf{A}'$由下式给出[1]

$$\phi' = \frac{1}{4\pi}\int\frac{[\rho']}{r'}dS', \tag{15}$$

$$\mathbf{A}' = \frac{1}{4\pi c}\int\frac{[\rho'\mathbf{u}']}{r'}dS', \tag{16}$$

其中dS'是空间S'的一个基元，r'是这基元与P'的距离，括弧是用来表示当第四个独立变量的值为$t'-r'/c$时，量ρ'和矢量$\rho'\mathbf{u}'$是在基元dS'中取值的.

考虑到式(4)和(7)，我们可以用下式代替式(15)和(16):

$$\phi' = \frac{1}{4\pi}\int\frac{[\rho]}{r}dS, \tag{17}$$

$$\mathbf{A}' = \frac{1}{4\pi c}\int\frac{[\rho\mathbf{u}]}{r}dS, \tag{18}$$

现在这个积分遍及电磁系统本身. 必须记住，在这些公式中，r'并不表示基元dS到点(x,y,z)的距离，这个距离仍有待计

1) "M. E.", §5和§10.

算. 如果这基元位于点 (x_1, y_1, z_1) 处，我们就必须令

$$r' = l\sqrt{\beta^2(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}.$$

还要记住，如果我们要确定 ϕ' 和 $\mathbf{A}'$ 在 P 点的地方时为 t' 的那瞬间的值，则 ρ 和 $\rho\mathbf{u}'$ 必须在基元 dS 的地方时为 $t'-r'/c$ 那瞬间在 dS 上取值.

§6 静电场

为达到我们的目的，考虑两个特殊情况就够了. 第一个情况是静电系统，即除速度为 v 的平移外没有其他运动的一个系统. 在这种场合，$u'=0$，所以根据式(12)，$\mathbf{A}'=0$. 另外，ϕ' 与 t' 无关，因此，方程(11)，(13)和(14)简化为

$$\begin{aligned}\nabla'^2\phi' &= -\rho',\\ \mathbf{D}' &= -\operatorname{grad}'\phi',\\ \mathbf{H}' &= 0.\end{aligned}\tag{19}$$

利用这些方程确定了矢量 $\mathbf{D}'$ 之后，我们就也可以求出作用在属于这系统的电子上的有质动力. 因为 $\mathbf{u}'=0$，这些力的公式(10)就变为

$$F_x = l^2D'_x, \qquad F_y = \frac{l^2}{\beta}D'_y, \qquad F'_z = \frac{l^2}{\beta}D'_z. \tag{20}$$

若将我们关心的运动系统 Σ 与另一静止静电系统 Σ' 进行比较，上述结果就可以写成简单形式，这两个系统间的关系是：如果平行于 x 轴的尺寸乘上 βl，y 方向或 z 方向上的尺寸乘上 l [这是一种变形，可以恰当地用符号 $(\beta l, l, l)$ 表示]，Σ 就变成 Σ'. 在这新系统(可以假定这系统是处于前述的空间 S' 中的)里，我们应当用式(7)来确定密度 ρ'，以便使相应体积元的电荷和相应的电子电荷在系统 Σ 和 Σ' 中是相同的. 如果先确定在系统 Σ' 里作用在电子上的力，然后将其在 x 轴方向上的分力乘以 l^2，垂直于 x 轴的分力乘以 l^2/β，就

可以得出作用在运动系统 Σ 的电子上对应的力. 这一点可以很方便地用下式表示:

$$\mathbf{F}(\Sigma) = \left(l^2, \frac{l^2}{\beta}, \frac{l^2}{\beta}\right)\mathbf{F}(\Sigma'). \tag{21}$$

此外还要注意,用式(19)找出 $\mathbf{D}'$ 以后,就很容易计算运动系统的电磁动量,更恰当地说是它在运动方向上的分量.公式

$$\mathbf{G} = \frac{1}{c}\int [\mathbf{D}\cdot\mathbf{H}]dS$$

表明,

$$G_x = \frac{1}{c}\int (D_yH_z - D_zH_y)dS.$$

因此根据式(6),由于 $\mathbf{H}' = 0$,

$$G_x = \frac{\beta^2 l^4 v}{c^2}\int (D_y'^2 + D_z'^2)dS = \frac{\beta l v}{c^2}\int (D_y'^2 + D_z'^2)dS'. \tag{22}$$

§ 7 极化粒子

第二种特殊情况是一个具有电矩的粒子,即一个微小的空间 S,其总电荷 $\int \rho dS = 0$,然而其密度分布使积分 $\int \rho x dS$, $\int \rho y dS$, $\int \rho z dS$ 不为零. 设 ξ, η, ζ 是相对于粒子中某一固定点 A(可称之为粒子的中心)的坐标,使电矩定义为这样的矢量 $\mathbf{P}$,其分量为

$$P_x = \int \rho\xi dS, \quad P_y = \int \rho\eta dS, \quad P_z = \int \rho\zeta dS. \tag{23}$$

于是

$$\frac{dP_x}{dt} = \int \rho u_x dS, \quad \frac{dP_y}{dt} = \int \rho u_y dS, \quad \frac{dP_z}{dt} = \int \rho u_z dS. \tag{24}$$

当然,若把 ξ, η, ζ 当作无穷小量,则 u_x, u_y, u_z 一定也是无穷小量. 我们将忽略这六个量的平方以及乘积.

现在用方程(17),来确定对于离极化粒子有限距离的外

部点 $P(x, y, z)$ 在其地方时为某一定值 t' 时的标量势 ϕ'. 现在我们要给符号 $[\rho]$ 以稍微不同的意义，而在(17)式中$[\rho]$和 dS 是与地方时为 $t' - r'/c$ 这一时刻相联系的. 以 r'_0 表示中心 A 的 r' 值，我们把 $[\rho]$ 当作在基元 dS 点 (ξ, η, ζ) 上的密度在时刻 t_0（此时 A 的地方时为 $t' - r_0/c$）的值.

从式(5)可以看出，这个时刻比起我们在式(17)中分子里必须取的时刻要超前若干单位的时间，其值为

$$\beta^2\frac{v\xi}{c^2}+\frac{\beta(r'_0-r')}{lc}=\beta^2\frac{v\xi}{c^2}+\frac{\beta}{lc}\left(\xi\frac{\partial r'}{\partial x}+\eta\frac{\partial r'}{\partial y}+\zeta\frac{\partial r'}{\partial z}\right),$$

式中的微商可以用其在点 A 的值代入.

在式(17)中，现在我们得用下式代替 $[\rho]$:

$$[\rho]+\beta^2\frac{v\xi}{c^2}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}\right]+\frac{\beta}{lc}\left(\xi\frac{\partial r'}{\partial x}+\eta\frac{\partial r'}{\partial y}+\zeta\frac{\partial r'}{\partial z}\right)\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}\right],\quad(25)$$

其中 $\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}\right]$ 又与时间 t_0 有关. 当需要对其进行计算的 t' 值被选定了，时间 t_0 就是外部点 P 的坐标 x, y, z 的函数. 所以 $[\rho]$ 依赖于这些坐标的关系式是

$$\frac{\partial[\rho]}{\partial x}=-\frac{\beta}{lc}\frac{\partial r'}{\partial x}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}\right]$$

等等，利用这些关系式，式(25)就变成

$$[\rho]+\beta^2\frac{v\xi}{c^2}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}\right]-\left(\xi\frac{\partial[\rho]}{\partial x}+\eta\frac{\partial[\rho]}{\partial y}+\zeta\frac{\partial[\rho]}{\partial z}\right).$$

此外，今后如果我们把上面称为 r'_0 的了解为 r'，则 $\frac{1}{r'}$ 应当用

$$\frac{1}{r'}-\xi\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r'}\right)-\eta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r'}\right)-\zeta\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r'}\right)$$

来代替，所以最后在积分(17)中，基元 dS 要乘以下式:

$$\frac{[\rho]}{r'}+\frac{\beta^2 v\xi}{c^2 r'}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}\right]-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\xi[\rho]}{r'}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\eta[\rho]}{r'}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\zeta[\rho]}{r'}.$$

这式子比原来的式子简单，因为无论是 r' 还是括弧中的量要对其取值的时间，都不依赖于 x，y，z。利用式(23)，并记住 $\int\rho dS=0$，便得出

$$\phi'=\frac{\beta^2 v}{4pc^2r'}\left[\frac{\partial P_x}{\partial t}\right]-\frac{1}{4p}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\frac{[P_x]}{r'}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{[P_y]}{r'}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{[P_z]}{r'}\right\},$$

式中所有括弧内的量，都必须在粒子中心的地方时为 $t'-r'/c$ 的时刻取值。

现在我们引入一个新矢量 $\mathbf{P}'$ 来结束这些计算，这矢量的分量为

$$P'_x=\beta lP_x,\quad P'_y=lP_y,\quad P'_z=lP_z, \tag{26}$$

同时改用 x'，y'，z'，t' 作为独立变量。最后结果是

$$\phi'=\frac{v}{4pc^2r'}\frac{\partial[P'_x]}{\partial t'}-\frac{1}{4p}\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\frac{[P'_x]}{r'}+\frac{\partial}{\partial y'}\frac{[P'_y]}{r'}+\frac{\partial}{\partial z'}\frac{[P'_z]}{r'}\right\}.$$

至于矢量势的公式(18)，因为它包含无穷小矢量 $\mathbf{u}'$，变换起来就没有那么复杂。注意到式(8)，(24)，(26)和(5)，就得到

$$\mathbf{A}'=\frac{1}{4\pi cr'}\frac{\partial[\mathbf{P}']}{\partial t'}.$$

极化粒子产生的场现在已完全确定了。由式(13)推出

$$\mathbf{D}'=-\frac{1}{4\pi c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\frac{[\mathbf{P}']}{r'}+\frac{1}{4\pi}\mathrm{grad}'\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\frac{[P'_x]}{r'}+\frac{\partial}{\partial y'}\frac{[P'_y]}{r'}+\frac{\partial}{\partial z'}\frac{[P'_z]}{r'}\right\}, \tag{27}$$

矢量 $\mathbf{H}'$ 由式(14)给定. 如果要研究极化粒子作用在一定距离外的类似粒子上的力,我们就可以进一步用公式(20)代替原来的式(10). 其实不仅在第一个粒子,而且在第二个粒子,速度 $\mathbf{u}$ 都可以保持在无穷小.

应该注意,在前面讨论中的公式是指不作平移运动的系统的公式. 对于这种系统,带撇的量与相应的不带撇的量全等;并且 $\beta = 1$, $l = 1$. 式(27)的分量同时也是一个极化粒子作用在另一极化粒子上的电力分量.

§8 对应状态

到此为止,我们只用了基本方程,而没有作任何新的假定. 现在假定:电子,当它们处于静止状态时我认为是半径为 R 的球状的,但由于平移的影响,它们的大小就发生了变化,沿着运动方向的长度变小到原来长度的 $1/\beta l$,与运动垂直方向的长度变小到 $1/l$.

我们认为,在这种用 $\left(\frac{1}{\beta l}, \frac{1}{l}, \frac{1}{l}\right)$ 表示的变形中,每个体积元里仍保持原有的电荷.

我们的假定等于说,在一个以速度 v 运动的静电系统 Σ 中,所有的电子都是扁平椭球,其短轴是沿着运动方向的. 如果为了应用§6的定理,令系统作变形 $(\beta l, l, l)$,就重新得到半径为 R 的球状电子. 因而,如果用变形 $(\beta l, l, l)$ 来改变电子中心在系统 Σ 里的相对位置,又若把保持静止的电子中心置于这样求得的点上,就会得到一个与§6中提到的假想系统 Σ' 完全一样的系统. 这系统的力与系统 Σ 的力之间的相互关系由式(21)表示.

其次,我假定,不带电粒子之间的力,以及这种粒子和电子之间的力,当系统平移时所受的影响,和静电系统中电力

所受的影响完全一样. 换句话说，如果就粒子的相对位置而论，系统 Σ' 是由 Σ 经变形 $(\beta l, l, l)$ 得出的，或者说系统 Σ 是由 Σ' 经变形 $\left(\frac{1}{\beta l}, \frac{1}{l}, \frac{1}{l}\right)$ 而得出的，那末，不管组成有质物体的粒子的性质怎样，只要他们之间没有相对运动，就可以用(21)式来描述作用在不作平移运动的系统（Σ'）上的力及作平移运动的同一系统（Σ）上的力之间的关系.

由此可见，只要在 Σ' 中的一个粒子所受合力为零，则在 Σ 中对应粒子所受的合力也一定是零. 结果，若忽略分子运动的影响，我们假定固体的每个粒子都在其邻近粒子引力和斥力的作用下处于平衡状态，并认为只存在一种平衡位形，就可以得出下述结论：如果赋予系统 Σ' 以速度 v，它就会自行转变为系统 Σ，换句话说，平移会引起变形 $\left(\frac{1}{\beta l}, \frac{1}{l}, \frac{1}{l}\right)$.

分子运动的情况，将在§ 12 里讨论.

容易看出，前面结合迈克尔逊实验而提出的假说，也包含在刚才的假设之中. 然而现在这假说更加具有一般性，因为在这里加于运动的唯一限制是速度要小于光速.

§ 9 电子的动量

现在我们就能够计算单个电子的电磁动量了. 为简单起见，我将假定，只要电子保持静止，电荷 e 在表面上的分布是均匀的. 那么系统 Σ' [即式(22)的最后一个积分所涉及的系统]里也将存在同样的电荷分布，由此得出

$$\int (D_y'^2 + D_z'^2) dS' = \frac{2}{3} \int D'^2 dS' = \frac{e^2}{6\pi} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{e^2}{6\pi R}$$

和

$$C_x = \frac{e^2}{6\pi c^2 R} \beta l v .$$

必须注意，乘积 βl 是 v 的函数，而且为了对称性，矢量 **G** 取平移的方向。用 **v** 表示这运动的速度，概括地说，我们就有矢量方程

$$\mathbf{G} = \frac{e^2}{6\pi c^2 R}\beta l\,\mathbf{v}. \tag{28}$$

于是每当系统运动状态发生变化时，都将引起电磁动量相应变化，所以也就需要有某种力，其大小和方向由下式给定：

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{G}}{dt}. \tag{29}$$

严格地说，式(28)只适用于匀速直线运动。鉴于这个情况——纵令式(29)总是正确的——电子作迅速变化运动的理论就变得非常复杂了，再考虑到§ 8 的假设，意味着变形的方向和大小都在不断地变化，问题就更加复杂了。事实上，很难说电子的形状仅决定于它在所考虑的时刻的速度。

然而，倘若运动状态的变化充分缓慢的话，用式(28)就能获得在每一时刻的足够的近似结果。把式(29)应用到这种准静态平移（阿伯拉罕[1]这样称呼它）是十分简单的事情。令 $\mathbf{a}_1$ 为在某一时刻运动路线方向上的加速度，$\mathbf{a}_2$ 是与 $\mathbf{a}_1$ 垂直方向的加速度。如果

$$m_1 = \frac{e^2}{6\pi c^2 R}\frac{d(\beta l v)}{dv},\quad m_2 = \frac{e^2}{6\pi c^2 R}\beta l, \tag{30}$$

则这力 **F** 就是由两个分力合成，后二者具有这两个加速度的方向，其值为

$$\mathbf{F}_1 = m_1\mathbf{a}_1,\quad \mathbf{F}_2 = m_2\mathbf{a}_2.$$

因此，在加速度方向与运动方向一致的一些现象里，电子

---

1) Abraham, *Wied. Ann.*, **10**, 1908, p. 105.

的行为就好象它具有质量 m_1 一样，而当加速度方向与运动方向垂直的现象里，则好象具有质量 m_2 一样．因此，m_1 和 m_2 可以恰当地分别称为电子的“纵向”电磁质量和“横向”电磁质量．我将假定，并不存在其它质量，没有什么“真实的”或“物质的”质量，

既然 β 和 l 与 1 相差的量阶为 v^2/c^2，对于十分小的速度，我们有

$$m_1 = m_2 = \frac{e^2}{6\pi c^2 R}.$$

这就是电子在不平移的系统作微小振动时，我们所关心的质量．相反，如果电子在沿着 x 轴的方向以速度 v 运动的物体上作微小振动，当考虑平行于 x 轴的振动时，就得用式(30)给出的质量 m_1 进行计算，而当考虑平行于 OY 或 OZ 轴的振动时，则须用 m_2 进行计算．简单地说，用符号 Σ 表示运动系统，Σ' 表示静止系统，则

$$m(\Sigma) = \left(\frac{d(\beta l v)}{dv}, \beta l, \beta l\right) m(\Sigma'). \qquad (31)$$

§ 10 地球运动对光学现象的影响

现在我们就可以着手研究地球运动对透明物体的体系中的光学现象的影响．讨论时，我们将把注意力集中在系统的粒子或者“原子”的可变电矩．在§ 7 论述的内容可应用于这种电矩．为简单起见，我们假定，每个粒子里面的电荷都是集中在一些分离的电子上的，并假定作用在其中一个电子上的弹性力（它同电力一道决定电子的运动），起源于同一个原子的范围．

我要证明，从不作平移运动的系统里的任一已知运动状态出发，当我们赋予这个系统一个平移运动后，可以推出在这

同一个系统里能够存在一个相应的运动状态，这种对应关系如下：

（a）令不作平移的系统（Σ'）里的粒子中心为 A'_1, A'_2, A'_3 等等，忽略分子运动，我们可以假定这些点是静止的。在运动系统 Σ 中，由粒子中心所形成的点系 A_1, A_2, A_3 等等是由 A'_1, A'_2, A'_3 等等通过变形 $\left(\frac{1}{\beta l}, \frac{1}{l}, \frac{1}{l}\right)$ 而得出的。 如果在平移之前，粒子中心的位置是 A_1, A_2, A_3 等等，按§ 8 所述，它们会自行变更到 A'_1, A'_2, A'_3 等等的位置。

我们可以设想，系统 Σ' 里空间中任一点 P' 因上述变形发生了位移，使得 Σ 中一确定点 P 与它相对应。 我们将这样规定两个对应点 P' 和 P 的对应时刻（一个属于 P' 点，另一个属于 P 点）：第一个时刻的真实时间，等于在第二个时刻为 P 点用式（5）所确定的地方时。我们把两个对应粒子的对应时间了解为，如果我们把注意力集中在这些粒子的中心 A' 和 A，这些时间就可以说是对应的。

（b）关于原子的内部状态，我们假定，Σ 中粒子 A 在某个时间的位形，可以从 Σ' 中相应粒子在相应时刻的位形通过变形 $\left(\frac{1}{\beta l}, \frac{1}{l}, \frac{1}{l}\right)$ 得出来。 就这个假定与电子本身的形状的关系而言，它已包含在§ 8 的第一个假设中了。

显然，如果我们从系统 Σ' 中真实存在的状态出发，现在我们已完全确定了运动系统 Σ 的状态。 不过还有一个问题：这种状态是否同样是一个可能的状态。

为了判明这一点，我们可以首先说，我们所假定的，在运动系统中存在的电矩（用 $\mathbf{P}$ 来表示），是粒子中心 A' 的坐标 x, y, z 的某种函数，或者说，是粒子本身的坐标及时间 t 的函数。表示 $\mathbf{P}$ 与 x, y, z, t 的关系的方程，可以用包含式（26）

定义的矢量 $\mathbf{P}'$ 与式 (4)、(5) 定义的 x', y', z', t' 的其它方程来代替. 根据假定 (a) 和 (b), 如果在运动系统中坐标为 x, y, z 的粒子 A 上, 于时间 t (或者地方时 t') 我们发现有电矩 $\mathbf{P}$, 则式 (26) 定义的矢量 $\mathbf{P}'$ 就是另一系统里存在着的坐标为 x', y', z' 的粒子于真实时间 t' 的电矩. 这样看来, 表示 $\mathbf{P}'$ 与 x', y', z', t' 关系的方程, 在两个系统里都是一样的, 唯一的差别是对于不作平移的系统 Σ', 这些符号表示电矩、坐标以及真实时间, 而对于运动的系统, 它们的意义就不同了, $\mathbf{P}'$, x', y', z', t' 与电矩 $\mathbf{P}$, 坐标 x, y, z 及一般时间 t 的关系是用式 (26), (4) 和 (5) 表示的.

前面已经说过, 方程 (27) 对两个系统都适用. 所以假如我们总是就两个系统中相应的时间和地点进行比较, 则矢量 $\mathbf{D}'$ 在系统 Σ' 和在 Σ 中都是一样的. 但是这矢量在两种场合的意义却不相同. 在 Σ' 中, 它代表电力, 在 Σ 中, 它与电力的关系可用式 (20) 来表示. 由此可以得出结论: 在 Σ 和 Σ' 中于相对应的时刻作用在对应粒子上的有质动力满足关系式 (21). 由于假定 (b) 和§ 8 的第二个假设, "弹性"力之间也会存在同样的关系; 因此公式 (21) 也可以认为是表示对应时刻作用在对应电子上的合力之间的关系的.

显然, 我们假定在运动系统中存在的状态, 的确是可能的, 只要 Σ 与 Σ' 中的电子质量 m 和加速度 $\mathbf{a}$ 之积之间的相互关系, 和两系统中力间的相互关系是一样的, 即

$$m\mathbf{a}(\Sigma) = \left(l^2, \frac{l^2}{\beta}, \frac{l^2}{\beta}\right) m\mathbf{a}(\Sigma'). \tag{32}$$

现在两个系统的加速度之间有以下关系:

$$\mathbf{a}(\Sigma) = \left(\frac{l}{\beta^3}, \frac{l}{\beta^2}, \frac{l}{\beta^2}\right) \mathbf{a}(\Sigma'), \tag{33}$$

这是和由式 (4) 和 (5) 推出的式子相同的. 把它与式 (32) 结

合起来，就可求出质量之间的关系式：

$$m(\Sigma) = (\beta^3 l, \beta l, \beta l) m(\Sigma').$$

把此式与式(31)相比较，似乎可以得出：就考虑垂直于平移方向的振动时所要计算的质量而言，不论 l 值是多少，这个关系式总能成立. 因此，必须对 l 所加的唯一条件是

$$\frac{d(\beta l v)}{dv} = \beta^3 l.$$

基于式(3)，则得

$$\frac{d(\beta v)}{dv} = \beta^3,$$

于是我们必须令

$$\frac{dl}{dv} = 0, \qquad l = \text{常数}.$$

常数值必定是1，因为我们早已知道，当 $v = 0$ 时，$l = 1$.

这就使我们假定：平移对单个电子和整个有质物体的大小所产生的影响，仅限于运动方向上的尺寸，这影响是使这些尺寸变小到其静止时的 $\frac{1}{\beta}$. 如果把这个假说加于前面已经作出的假说上，我们就能肯定，如上所述的两个相对应的状态(一个在运动系统里，另一个在静止时的同一系统里)都是可能存在的. 并且这种对应关系不限于粒子的电矩. 处于粒子间的以太里的，或者处于有质物体周围的以太里的对应点上，在对应的时刻，我们都能找出同样的矢量 **D′**，并可容易地证明，也能找出同样的矢量 **H′**. 我们可以综述如下：在无平移的系统中，若存在这样一个运动状态，在确定的地点上，**P**，**D** 和 **H** 的分量是时间的某种函数，那么，当令这系统发生运动(因而产生变形)时，这个系统就可以是这样一个运动状态的场所，即在其对应地点上，**P′**，**D′** 和 **H′** 的分量是地方时的同一函数.

有一个问题需要进一步考虑. 由准静态运动理论导出质量值 m_1 和 m_2 之后，就发生了这样一个问题：在光的迅速振动情况下，这样考虑它们还是否合理. 通过仔细研究我们发现，电子的运动可以当作准静态运动，只要在光波在走过等于电子直径的距离所需的时间里，电子变化非常小. 在光学现象中，这个条件是满足的，因为电子直径比起光波波长来是非常小的.

§11 应用

容易看出，现在提出的理论可以解释大量事实.

首先让我们考虑一个无平移运动系统，其中某些部分上，到处有 $\mathbf{P}=0, \mathbf{D}=0, \mathbf{H}=0$. 那么在运动系统的相应状态，在相应的部分(或者我们也可以说，在变形后的系统的相同部分)，我们有 $\mathbf{P}'=0, \mathbf{D}'=0, \mathbf{H}'=0$，从式(26)和(6)可以看出，这些方程就表示 $\mathbf{P}=0, \mathbf{D}=0, \mathbf{H}=0$. 看来系统静止时那些黑暗的部分，在系统运动起来时仍然是黑暗的. 所以我们就不可能检测出地球的运动对于用地面光源进行的光学实验(其中待观察的现象是明暗的几何分布)所产生的影响. 许多干涉和衍射实验就属于这个类型.

其次，若在一系统的两点上，具有同样偏振态的光线沿同一方向传播，可以证明，在这两点上光振幅之比不因平移而变化. 这点适用于比较视野邻近部分的光线强度的实验.

以上的结论和我早先用类似的推理（不过那里忽略了二阶量）得出的结果一致. 这些结论也包含了对迈克尔逊实验的否定结果的解释，这解释比前面的解释更加具有普遍意义，而形式稍有不同；同时也说明了为什么瑞利和布雷斯找不出地球运动所引起的双折射现象.

只要承认§ 8 的假说，特劳顿和诺布尔实验的否定结果就

立即得到澄清. 从这些结果以及前面（§ 10）的假定可以推出：平移的唯一效应一定是，组成荷电电容器的电子和其他粒子以及扭秤的秤杆和悬丝，即整个系统都经受了收缩，这种收缩不会引起可觉察的方向变化.

几乎无需说明，在提出这理论时，我作了一切应有的保留. 虽然在我看来，这理论可以说明所有确凿的事实，然而由此导出的某些结果，迄今仍不能付诸实验检验. 其中之一就是假如令干涉光线通过某些有质透明物体，迈克尔逊实验仍然会得到否定结果.

关于电子收缩假说本身，我们既不能断定它是讲得通的，也不能说它是难以承认的. 关于电子的性质，我们知道得非常少，而开辟道路前进的唯一方法，就是去检验我这里作出的假说. 当然，例如只要我们考虑电子的旋转，就会发生困难. 或许我们不得不假定，若球状电子只绕直径旋转而没有平移，则电子上的点在运动系统中将描画出椭圆轨道，这种轨道按§ 10 所述的方式是对应于在另一种情况下描画出的圆轨道的.

§ 12 分子运动

关于分子运动还要说几句话. 我们可以设想，分子运动的影响可以觉察到的或者甚至是占优势的物体，象相对位置是恒定的粒子系（直到现在我们只讨论了这种体系）一样，都要经受这种变形. 事实上，在分子系统 Σ'（不平移的）和 Σ（平移的）里，我们可以想象，两系统的分子运动对应关系是这样的，假如 Σ' 中一个粒子于某一确定时刻处于某个确定的位置，则 Σ 中一个粒子于相应时刻就处于相应的位置. 作出这个假定后，我们就能在分子运动速度比 v 小得多的所有情况下，采用加速度之间的关系式(33). 这时可以认为分子力是

由分子的相对位置确定的，而与分子运动的速度无关. 最后，如果假定这些力是局限于这样小的距离内，以致在这距离内，相互作用在粒子上的地方时之差可以忽略，那么这样一个粒子与处于它的引力球面或斥力球面内的粒子就组成经受我们时常所提到的那种变形一个系统. 所以根据§8的第二个假说，式(21)就可用于作用在粒子上的分子力的合力. 结果，如果我们假定所有粒子的质量受平移影响的程度，和电子的电磁质量所受的影响的程度相同，则在两种情况下，力和加速度之间的原有关系就都成立.

§13 考夫曼的实验

我求出的电子纵质量和横质量的值(30)(用电子速度表示)与先前阿伯拉罕求出的值不同. 其差别的根源只能在下述事实中寻找，即在他的理论中，电子是被当作大小不变的球了. 至于电子的横质量，阿伯拉罕的结果已由考夫曼通过测量镭射线在电场和磁场中的偏转以十分明显的方式证实了. 所以对我目前提出的理论，如果不会有什么太严重的异议，则应当能够证明，那些测量符合我的计算值的程度与符合阿伯拉罕的值差不多同样好.

我将从考夫曼[1] 1902 年发表的一系列测量值中取两个来开始讨论. 从每组测量值里他导出了两个量 η 和 ζ，即“约化”电偏转和“约化”磁偏转，它们和比值 $\gamma = v/c$ 的关系如下：

$$\gamma = k_1 \frac{\zeta}{\eta}, \qquad \psi(\gamma) = \frac{\eta}{k_2 \zeta^2}, \tag{34}$$

其中 $\psi(\gamma)$ 是这样一个函数，它使横质量由下式给出：

$$m_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{e^2}{6\pi c^2 R} \psi(\gamma), \tag{35}$$

1) Kaufmann, *Physik Zeitschr.*, **4**, 1902, p. 55.

而 k_1 和 k_2 在每组值中都是常数。

从式(30)的第二式看来，我的理论同样也导致形如(35)的方程；只是阿伯拉罕的函数 $\psi(\gamma)$ 要代之以

$$\frac{4}{3}\beta = \frac{4}{3}(1-\gamma^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

于是我的理论要求，若以这个值代入式(34)中的 $\psi(\gamma)$，这些方程仍然成立。当然，为了得到良好的一致，我们有理由给 k_1 与 k_2 以不同于考夫曼的值，并且对每个测量取一个适当的速度 v，或者适当的比率 γ。把这些新值写成 sk_1，$\frac{3}{4}k_2'$ 和 γ'，则式(34)可写成

$$\gamma' = sk_1\frac{\zeta}{\eta} \tag{36}$$

和

$$(1-\gamma'^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\eta}{k_2'\zeta^2}. \tag{37}$$

考夫曼曾这样检验他的方程，他适当选择 k_1 的值，使得当按照式(34)计算 γ 和 k_2 时，所得的 k_2 的值尽可能地在每组值里保持不变。这种恒定性就是充分一致的证明。

我采取了类似的方法，然而利用了考夫曼计算的某些值。对每次测量，我计算了下式的值：

$$k_2' = (1-\gamma'^2)^{\frac{1}{2}}\psi(\gamma)k_2, \tag{38}$$

此式可由式(37)和式(34)的第二个方程得出。$\psi(\gamma)$ 和 k_2 的值取自考夫曼的表，对于 γ' 的值，我用考夫曼求得的 γ 值乘以 s 代入。系数 s 的选择要使式(38)尽量保持为常数。这些结果相当于考夫曼论文中的表 III 和 表 IV（即本文末附录中的表 1 和表 2——编者）。

结果可以看出，k_2' 的恒定性不比 k_2 差，尤其是因为在每种情况下，s 值是仅由两个测量确定的。这系数的选择是使在两个观测结果中(表 III 中第一个和倒数第二个，表 IV 中第一个和末一个)，k_2' 的值要与 k_2 的值成正比。

其次，我要考虑考夫曼后来公布的两组值[1]，这些值由隆格用最小二乘法计算过[2]，系数 k_1，k_2 是这样确定的，使得根据考夫曼的方程(34)对从每个观测的 ζ 值算得的 η 尽可能与 η 的观察值一致。

我用相同的条件，也用最小二乘法，求出了下式中的常数 a 和 b，

$$\eta^2 = a\zeta^2 + b\zeta^4.$$

此式可由我的方程(36)和(37)推出。知道了 a，b 以后，我用以下的关系式来找出每个测量中的 γ 值：

$$\gamma = \sqrt{a}\,\frac{\zeta}{\eta}.$$

对于考夫曼用以测量电磁偏转的两板，结果见表(见本文末附录中的表 3 和表 4——编者)，偏转量用厘米表示。

我没有时间去计算考夫曼论文中其它的表。因为(例如板 15 的表)它们是从观察推导出的 η 值与隆格计算的 η 值之间较大的负差开始的，所以可以指望它们会满意地符合我的公式。

---

1) Kaufmann, *Gött. Nachr. Math. Phys.* KI., 1903, p. 90.
2) Runge, 同上书, p. 326.

附　　录

表 1　$s = 0.933$

r	$\psi(r)$	k_2	r'	k_2'
0.851	2.147	1.721	0.794	2.246
0.766	1.86	1.736	0.715	2.258
0.727	1.78	1.725	0.678	2.256
0.6615	1.66	1.727	0.617	2.256
0 6075	1.595	1.655	0.567	2.175

表 2　$s = 0.954$

r	$\psi(r)$	k_2	r'	k_2'
0.963	3.28	8.12	0.919	10.36
0.949	2.86	7.99	0.905	9.70
0.933	2.73	7.46	0.890	9.28
0.883	2.31	8.32	0.842	10.36
0.860	2.195	8.09	0.820	10.15
0.830	2.06	8.13	0.792	10.23
0.801	1.96	8.13	0.764	10.28
0.777	1.89	8.04	0.741	10.20
0.752	1.83	8.02	0.717	10.22
0.732	1.785	7.97	0.698	10.18

表3　15号　　板
$a = 0.06489$,　　$b = 0.3039$

ξ	η					γ	
	观察值	隆　格 计算值	差值	洛伦兹 计算值	差值	隆　格 计算值	洛伦兹 计算值
0.1495	0.0388	0.0404	−16	0.0400	−12	0.987	0.951
0.199	0.0548	0.0550	−2	0.0552	−4	0.964	0.918
0.2475	0.0716	0.0710	+6	0.0715	+1	0.930	0.881
0.296	0.0896	0.0887	+9	0.0895	+1	0.889	0.842
0.3435	0.1080	0.1081	−1	0.1090	−10	0.847	0.803
0.391	0.1290	0.1297	−7	0.1805	−15	0.804	0.763
0.437	0.1524	0.1527	−3	0.1532	−8	0.763	0.727
0.4825	0.1788	0.1777	+11	0.1777	+11	0.724	0.692
0.5265	0.2033	0.2039	−6	0.2033	0	0.688	0.660

表4　19号　　板
$a = 0.05867$,　　$b = 0.2591$

ξ	η					γ	
	观察值	隆　格 计算值	差值	洛伦兹 计算值	差值	隆　格 计算值	洛伦兹 计算值
0.1495	0.0404	0.0388	+16	0.0379	+25	0.990	0.954
0.199	0.0529	0.0527	+2	0.0522	+7	0.969	0.923
0.247	0.0678	0.0675	+3	0.0674	+4	0.939	0.888
0.296	0.0834	0.0842	−8	0.0844	−10	0.902	0.849
0.3435	0.1019	0.1022	−3	0.1026	−7	0.862	0.811
0.391	0.1219	0.1222	−3	0.1226	−7	0.822	0.773
0.437	0.1429	0.1434	−5	0.1437	−8	0.782	0.736
0.4825	0.1660	0.1665	−5	0.1664	−4	0.744	0.702
0.5265	0.1916	0.1906	+10	0.1902	+14	0.709	0.671

论运动物体的电动力学

A. 爱因斯坦

大家知道，按照目前通常的理解，把麦克斯韦电动力学应用于运动物体时，会导致似乎不是现象本身所固有的非对称性．以磁铁和导体之间的电动力的相互作用为例．在这里，可观察到的现象仅取决于导体与磁铁的相对运动，而习惯的看法认为两个物体究竟哪一个在运动是有明显区别的．因为如果磁铁在运动，而导体是静止的，则磁铁邻近就会产生一个具有一定能量的电场，从而在导体所在的地方引起电流．但当磁铁静止而导体运动时，则磁铁附近就不出现电场．可是在导体中却有一个电动势，虽然它本身没有相应的能量，但却能够引起电流．假如上述两种情况的相对运动是相同的，则这种电流的路径和强度应当与前一情况下电力所产生的是一样的．

诸如此类的例子以及寻找地球相对于“光媒质”是否在运动的徒劳的尝试告诉我们，电动力学现象和力学现象一样，并没有对应于绝对静止观念的性质．换句话说，正如对于一阶微量早已证明的那样，凡是力学方程适用的一切参照系，对电动力学和光学的定律也都适用[1]．我们要把这一推测（今后将称这个主要思想为“相对性原理”）提高到假设的地位，并引入另一假设：光在真空中总是以不变的速度 c 传播，而不依赖于发光体的运动状态．这假设与前一假设只在表面上看来象

1）当时作者还不知道洛伦兹的论文．

是不相容的。利用这两个假设，就足以在静止物体的麦克斯韦理论基础上建立起简单而内部一致的运动物体的电动力学。这样，引入“光以太”将成为多余的。因为在这里提出的观点，既用不着具有特殊性质的“绝对静止空间”，也不必对发生电磁过程的真空中的点规定一个速度矢量。

象一切电动力学那样，这里提出的理论是以刚体运动学为基础的，因为任何这类理论的论断，都要涉及刚体（坐标系）、钟和电磁过程之间的关系。对这些情况考虑不周到，正是目前运动物体的电动力学遇到困难的根源。

一、运动学部分

§1 同时性的定义

设有一个坐标系，在这系统里，牛顿力学方程有效[1]。为了更确切地表达我们的思想，并和以后引入的其它系统在字面上有所区别，我们称这个坐标系为“静止系统”。

如果一个质点相对于这个坐标系是静止的，它的位置就可以利用刚尺测量和欧几里德几何的方法来相对地确定，并可用笛卡儿坐标表示。

如果要描写一个质点的运动，我们就把它的坐标值表示成时间的函数。现在我们必须记住，除非完全弄清楚我们对“时间”的理解是什么，否则这种数学描述就没有物理意义。我们需考虑到所有涉及时间的判断，总是关于同时事件的判断。例如，当我说：“火车七点钟到达”，那意思就是：”我的表的时针指 7，与火车的到达是同时的事件。”[2]

1）准确到一阶近似。

2）在此我们不打算讨论隐藏在接近于同一地点发生的两事件的同时性概念里的不精确性。这种不精确性只能通过抽象化来消除。

表面上看似乎可以通过用“表的指针位置”代替“时间”来克服一切伴随着“时间”这个定义带来的困难. 实际上，当涉及的时间是专指时计所在之处的时间，这种定义才适合；而当我们需要把发生在不同地点的一系列事件，用时间联系起来时，也就是说，要计算在远离时计处发生的事件的时间，这定义就不再适用了.

当然，我们也许可以满足于这样测定的时间值：和时计一起位于坐标原点的观察者，把指针的相应位置，同待测定时间的每个事件通过真空发射过来的光信号对应起来. 但是经验告诉我们，这种做法是有缺陷的，因为它并不是与带有钟表的观察者所在位置无关. 按照下面的考虑，我们可以获得更切合实际的测定.

如果在空间的 A 点有一个钟，在 A 点的观察者只要在事件发生的同时记下指针的位置，就能确定 A 点最邻近处的事件的时间值. 若在空间的另一点 B 也有一个钟，此钟在一切方面都与 A 钟类似，那么在 B 点的观察者就能测定 B 点最邻近处的事件的时间值. 但是若无其他假设，就不能把 B 处的事件同 A 处的事件之间的时间关系进行比较. 到此为止，我们只定义了“A 时间”和“B 时间”，还没有定义 A 和 B 的公共“时间”. 除非我们用定义规定，光从 A 走到 B 所需的“时间”等于它从 B 走到 A 所需的“时间”，否则公共“时间”就完全不能确定. 现在令一束光线于“A 时间” t_A 从 A 射向 B，于“B 时间” t_B 又从 B 被反射向 A，于“A 时间” t'_A 再回到 A.

按照定义，两钟同步的条件是

$$t_B - t_A = t'_A - t_B.$$

我们假定，同步性的这个定义是无矛盾的，能适用于任何数目的点，并且下列关系总是成立的：

1. 假如 B 处的钟与 A 处的钟同步，则 A 处的钟与 B 处的

钟也同步.

2. 假如 A 处的钟与 B 及 C 处的钟同步，则 B，C 两处的钟彼此也同步.

这样，借助于某些假想的物理实验，我们解决了如何理解位于不同地点的同步静止钟这个问题，并且显然得到了“同时”或“同步”的定义，以及“时间”的定义. 事件的“时间”就是位于事件所在处的静止钟在事件发生的同时给出的时间，这个静止钟是校准过的，它在一切时间测量上都与一个特定的静止钟同步.

根据经验，我们进一步假定，量

$$\frac{2AB}{t'_A - t_A} = c$$

是个普适恒量，即在真空中的光速.

重要的是，我们要用静止在静系统中的时计来规定时间，而现在所定义的时间既然适合于静系统，我们就称之为“静止系统的时间”.

§2 长度和时间的相对性

下面考虑的基础，是相对性原理和光速恒定原理. 这两条原理定义如下：

（1）若有两个坐标系作相对匀速运动，则物理系统的状态发生变化时，它们所遵循的定律，无论对这两个坐标系中的哪一个来说，都不受到影响.

（2）在“静止”坐标系统中，光线无论从静止物体还是从运动物体上发射出来，都以确定的速度 c 运动. 于是

$$\text{速度} = \frac{\text{光程}}{\text{时间间隔}},$$

其中时间间隔按照§1规定的意义取值.

设有一静止刚杆,用静止量杆测出的长度为 l. 我们设想杆轴是沿着静坐标系的 x 轴放置的，然后令这刚杆以速度 v 沿 x 轴朝 x 增加的方向作匀速平移运动. 现在来考察一下运动杆的长度. 假定它的长度可以用下列两种办法测定:

(a) 观察者同给定的量杆以及待测杆一起运动，将量杆放在待测杆上,直接量出杆的长度;这办法正如三者都是处于静止一样.

(b) 观察者利用设置在静系统并按§1的方法整步的静止钟,记下待测杆两个端点在某一确定时刻,是位于静系统的哪两点上. 用前面所用的量杆测得的这两点之间的距离(本情况下量杆是静止的) 也是一个长度，可以称为“杆的长度”.

按照相对性原理，用方法 (a) 测得的长度(称为“杆在运动系统中的长度”)一定等于静杆长度 l.

用方法(b)测得的长度,称为“静系统中(动)杆的长度”. 这种长度,我们要在以上两条原理的基础上加以确定,以后发现,它并不等于 l.

流行的运动学不言而喻地假定，用以上两种方法所测定的长度恰好相等,换句话说,在时刻 t，一个运动着的刚体,从几何的角度看来，完全可以用静止在某一确定位置上的同一个刚体来代表.

我们进一步设想,在杆的两端 A 与 B 处各放置一只钟,它们与静系统的钟是同步的,也就是说，在任一瞬时，这两只钟的指针位置都对应于它们碰巧所在之处的“静系统时间”. 所以这两只钟也是“在静系统中同步”的.

我们再设想，每一只钟各有一个运动的观察者同它在一起，他们用§1规定的规则对这两只钟进行同步. 令一束光

线在时刻[1] t_A 离开 A，于时刻 t_B 在 B 被反射，在时刻 t'_A 再回到 A．根据光速恒定原理，我们得到

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{c - v} \quad 和 \quad t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{c + v},$$

其中 r_{AB} 表示在静系统中测得的动杆长度．这样一来，随着动杆一起运动的观察者会发现，这两个钟并不是同步的，而静系统中的观察者则会宣称它们是同步的．

由此可见，我们决不能给同时性概念以绝对的意义，相反，两个事件若在某一坐标系看来是同时的，从另一与这坐标系作相对运动的系统来观察，就不能看作是同时的．

§3 坐标和时间从静系统到另一个相对于它作匀速平移系统的变换理论

让我们在“静止”空间取两个坐标系，即两个这样的系统，其中每一个都是从一点引出并互相垂直的三条刚性物质线．设两系统的 Y 轴和 Z 轴分别是平行的，而 X 轴重合．给每一系统配备一支刚性量杆和一些钟，而且这两支量杆以及两系统里所有的钟彼此都完全一样．

现在朝着静系统 (K) 的 x 增加的方向，给系统 (k) 的原点以恒定速度 v，并令这速度也传给坐标轴以及相应的量杆和钟．这样，静系统 K 的任一时刻，都对应着动系统坐标轴的一个确定位置．由于对称性，我们有理由假定 k 的运动可以是这样的，即在时刻 t（这个“t”总是表示静系统的时间），动系统的轴平行于静系统的轴．

现在我们设想：一方面从静系统 K 要用静量杆来测量空间，另一方面从动系统 k 用同 k 一起运动的量杆来测量空间．

1）“时间”在这里表示“静系统的时间”，也表示“位于所考虑的地方的运动钟的指针位置”．

这样分别得到坐标 x, y, z 和 ξ, η, ζ. 然后,按照 § 1 指出的办法, 借助光信号确定静系统里一切有钟的点的静系统时间 t; 类似地,对动系统里一切有对动系统相对静止的钟的点,也按照 § 1 的方法, 即利用这些设置有钟的点之间的光信号来确定动系统时间 τ.

对于完全确定一个事件在静系统中的地点和时间的一组值 x, y, z, t, 相应地有确定同一事件在动系统的地点和时间的一组值 ξ, η, ζ, τ, 而现在我们的任务是找出联系这些量的方程组.

首先,由于我们假定空间和时间是均匀的,显然这些方程就一定是线性方程.

如果令 $x' = x - vt$, 显然,在系统 k 里的一个静止点,一定有与时间无关的一组值 x', y, z. 我们先定义 τ 为 x', y, z, t 的函数. 为此, 我们就必须用方程来表示, τ 只不过是按照 §1 的规则整步的系统 k 里静止钟的读数的总和.

从系统 k 的原点, 令一束光线于时刻 τ_0 沿 X 轴向点 x' 发射,于时刻 τ_1从该点向坐标原点反射, 在时刻 τ_2 到达原点; 于是有 $\frac{1}{2}(\tau_0 + \tau_2) = \tau_1$ 或者以函数 τ 的宗量代入, 并应用静系统中的光速恒定原理,就得出

$$\frac{1}{2}\left[\tau(0, 0, 0, t) + \tau\left(0, 0, 0, t + \frac{x'}{c - v} + \frac{x'}{c + v}\right)\right]$$

$$= \tau\left(x', 0, 0, t + \frac{x'}{c - v}\right).$$

若 x' 取无穷小量,则得出

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c - v} + \frac{1}{c + v}\right)\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial x'} + \frac{1}{c - v}\frac{\partial \tau}{\partial t},$$

或者

$$\frac{\partial \tau}{\partial x'} + \frac{v}{c^2 - v^2}\frac{\partial \tau}{\partial t} = 0.$$

应当指出，我们可以不用坐标原点，而选任何其他点作为光源点，那么刚才得到的方程对 x'，y，z 的一切值都有效.

类似地，把刚才的做法应用于 Y，Z 轴，并记住从静系统看来，光沿这些轴的传播速度为$\sqrt{c^2-v^2}$，就得出

$$\frac{\partial\tau}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial\tau}{\partial z}=0.$$

因为 τ 是线性函数，就可从这些方程推出

$$\tau=a\left(t-\frac{v}{c^2-v^2}x'\right),$$

其中 a 是暂时未知的函数 $\phi(v)$，为简单起见，假定在 k 的原点，当 $t=0$ 时，$\tau=0$.

借助于这些结果，我们不难确定 ξ，η，ζ，办法就是用方程表示出下列事实：光从运动系统测量起来也是以速度 c 传播的(这是光速不变原理和相对性原理的共同要求)．对于在时间 $\tau=0$ 向 ξ 增加的方向发射的光线，有

$$\xi=c\tau \text{ 或 } \xi=ac\left(t-\frac{v}{c^2-v^2}x'\right).$$

但是从静系统测量时，光线相对于 k 的起始点是以速度 $c-v$ 运动的，于是

$$\frac{x'}{c-v}=t.$$

若把这个 t 值代入 ξ 的方程，则得

$$\xi=a\frac{c^2}{c^2-v^2}x'.$$

用类似的方法，考虑光沿另外两轴的运动，我们就得出，当

$$\frac{y}{\sqrt{c^2-v^2}}=t,\quad x'=0,$$

则有

$$\eta = c\tau = ac\left(t - \frac{v}{c^2 - v^2}x'\right),$$

于是

$$\eta = a\frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}y, \quad \zeta = a\frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}z.$$

以 x' 的值代入，就得出

$$\tau = \phi(v)\beta(t - vx/c^2),$$

$$\xi = \phi(v)\beta(x - vt),$$

$$\eta = \phi(v)y,$$

$$\zeta = \phi(v)z,$$

其中

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

而 $\phi(v)$ 仍为未知函数. 如果对运动系统的起始点及 τ 的零点不作任何假定，则这些方程的右边就要加上一个可加常数.

现在我们必须证明，假如在静系统中光速为 c（正如我们假设的那样），则在动系统中测量时，任何光线也是以速度 c 传播的；因为到此为止，我们尚未证实光速不变原理同相对性原理是相容的.

当 $t = \tau = 0$，即这两个系统的坐标原点重合的这一时刻，令一球面波从原点发射，并在系统 K 中以速度 c 传播. 假如 (x, y, z) 是这个波刚刚到达的一个点，则

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2.$$

用我们的变换方程来变换这个方程，经简单计算后就得出

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = c^2\tau^2.$$

因此，在运动系统里看来，所考虑的这个波仍然是具有传播速度 c 的球面波. 这表明我们的两条基本原理是彼此相

容的[1].

在已推演出的变换方程中，还有一个 v 的未知函数 ϕ.现在来确定这个函数.

为此目的，我们引入第三个坐标系 K'，它相对于 k 作平行于 X 轴的平移运动，使得系统 k 的坐标原点在 X 轴上以速度 $-v$ 运动着. 设在时间 $t=0$ 时，令三个坐标系的原点重合，而当 $t=x=y=z=0$ 时，令系统 K' 的时间 t' 为零. 我们把在系统 K' 里测量的坐标记作 x', y', z'，并两次使用我们的变换方程，就得出

$$t' = \phi(-v)\beta(-v)(\tau + v\xi/c^2) = \phi(v)\phi(-v)t,$$

$$x' = \phi(-v)\beta(-v)(\xi + v\tau) = \phi(v)\phi(-v)x,$$

$$y' = \phi(-v)\eta = \phi(v)\phi(-v)y,$$

$$z' = \phi(-v)\zeta = \phi(v)\phi(-v)z.$$

既然 x', y', z' 与 x, y, z 之间的关系不包含时间 t，系统 K 与 K' 就是相对静止的，于是就很明显，从 K 到 K' 的变换显然一定是恒等变换. 因此

$$\phi(v)\phi(-v) = 1.$$

现在我们来探讨一下 $\phi(v)$ 的意义. 我们注意系统 k 的 Y 轴上位于 $\xi=0, \eta=0, \zeta=0$ 和 $\xi=0, \eta=l, \zeta=0$ 这两点之间的部分. Y 轴的这部分，是垂直于它本身的轴以速度 v 相对于系统 K 运动的一根杆. 其端点在 K 中的坐标为

$$x_1 = vt, \quad y_1 = \frac{l}{\phi(v)}, \quad z_1 = 0$$

和

$$x_2 = vt, \quad y_2 = 0, \quad z_2 = 0.$$

所以在系统 K 测得的杆的长度为 $l/\phi(v)$；这就给出了函数

1) 洛伦兹变换方程可以更简单地从下列条件直接导出；即根据这些变换方程，关系式 $x^2+y^2+z^2=c^2t^2$ 的推论应当是 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=c^2\tau^2$.

$\phi(v)$的意义. 根据对称性，垂直于其轴而运动的一个杆，从静系统测得的杆长，显然只取决于速度，而不依赖于运动的方向和指向. 所以如果把 v 与 $-v$ 互换，在静系统中测得的动杆长度不会改变. 由此可见，$l/\phi(v) = l/\phi(-v)$ 或者

$$\phi(v) = \phi(-v).$$

由这个关系式及前面求得的另一关系式推得 $\phi(v) = 1$，因此我们所找到的变换方程就化为下列形式：

$$\tau = \beta(t - vx/c^2),$$
$$\xi = \beta(x - vt),$$
$$\eta = y,$$
$$\zeta = z,$$

其中

$$\beta = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

§4 关于运动刚体和运动钟所得方程的物理意义

让我们观察在运动系统 k 中相对静止的一个刚体球[1]，其半径为 R，球心位于 k 的坐标原点. 相对于系统 K 以速度 v 运动的这个球，其表面的方程是

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2.$$

在时间 $t = 0$，用 x，y，z 表示这球面的方程时，则是

$$x^2/(\sqrt{1 - v^2/c^2})^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

因此，在静止状态下测量为球状的刚体，当处于运动状态时在静系统看来，就具有旋转椭球的形状，其三个轴为

$$R\sqrt{1 - v^2/c^2},\ R,\ R.$$

于是球（因而无论任何形状的刚体也一样）在 Y，Z 方向上的尺寸，看来不因运动而有所改变，但 X 的尺寸看来则按

1）即在静止中观察时为球形的物体。

$1:\sqrt{1-v^2/c^2}$ 的比率缩短了，即 v 值愈大，收缩愈厉害．当 $v=c$ 时，从“静”系统看来，一切运动物体都收缩成扁平形状了．当速度大于光速时，我们的讨论就没有意义了；可是以后会发现，在我们的理论中，光速起着物理学上的无限大速度的作用．

显然，从匀速运动系统去观察“静”系统中的静止物体，也会得出同样结果．

另外，让我们想象有这样一些钟：当它们相对于静系统不动时，能用来指示时间 t；而当它们相对于动系统静止时，能用来指示时间 τ．设把其中一只钟放在 k 的坐标原点上，把它调整好，使它指示时间 τ．从静系统看来，此钟的快慢如何？

与钟的位置有关的量 x，t 与 τ 之间，显然有下列关系：

$$x=vt \text{ 和 } \tau=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(t-vx/c^2),$$

所以

$$\tau=t\sqrt{1-v^2/c^2}=t-(1-\sqrt{1-v^2/c^2})t.$$

由此可见，这钟所指示的时间（在静系统看来）每秒慢 $1-\sqrt{1-v^2/c^2}$ 秒，或者略去四阶以上的量，则慢 $\frac{1}{2}v^2/c^2$ 秒．

由此就产生了以下异乎寻常的结果．假定在 K 中 A，B 两点各有一只静止钟，在静系统看来，这两只钟是同步的；如果 A 点的钟以速度 v 沿 AB 线向 B 点运动，那末当它到达 B 点时，这两只钟就不再同步了．从 A 到 B 的钟，比另一只留在 B 点的钟慢了 $\frac{1}{2}tv^2/c^2$ 秒（准确到四阶量），其中 t 是这只钟从 A 到 B 所费的时间．

立刻可以看出，假如钟沿任何多边形的边从 A 运动到 B，

甚至A点与B点重合，上述结论仍然有效。

如果我们假定，在多边形的场合已经证实的结论，对连续曲线来说也是有效的，那末就会得出下述结论：如果在A点有两只同步的钟，其中一只沿着一条闭合曲线以恒定速度运动，经t秒后回到A．这样，当这只钟回到A点时，比保持静止的钟慢$\frac{1}{2}tv^2/c^2$秒。由此得出结论：当其他条件完全相同，在赤道的平衡轮钟[1]，比起放在两极的完全一样的钟走得慢一些，不过慢很小的数值。

§5 速度的合成

在以速度v沿系统K的X轴运动的系统k中，令一个点按方程

$$\xi = w_\xi \tau, \quad \eta = w_\eta \tau, \quad \zeta = 0$$

运动，其中w_ξ与w_η为常数。

求这个点相对于系统K的运动。如果利用§3的变换方程，把x，y，z，t这些量引入这个点的运动方程中，就得到

$$x = \frac{w_\xi + v}{1 + vw_\xi/c^2} t,$$

$$y = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + vw_\xi/c^2} w_\eta t,$$

$$z = 0.$$

可见，按照我们的理论，速度的平行四边形法则仅仅对第一级近似有效．令

$$V^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2,$$

1）不是摆钟，摆钟在物理学上与地球是属于同一系统的，这种情况必须除外。

$$w^2 = w_\xi^2 + w_\eta^2,$$

$$\alpha = \tan^{-1} w_y / w_x,$$

α 应看作速度 v 和 w 之间的夹角. 经简单计算,有

$$V = \frac{v[(v^2 + w^2 + 2vw\cos\alpha) - (vw\sin\alpha/c^2)^2]}{1 + vw\cos\alpha/c^2}.$$

值得注意的是, v 和 w 以对称的方式出现在合速度表达式中.

若 w 也取 X 轴方向,我们就得到

$$V = \frac{v + w}{1 + vw/c^2}.$$

从这方程可以推出,用两个小于 c 的速度合成所得的速度,总是小于 c 的. 因为若令 $v = c - \kappa$, $w = c - \lambda$, κ 与 λ 取小于 c 的正值,则

$$V = c\frac{2c - \kappa - \lambda}{2c - \kappa - \lambda + \kappa\lambda/c} < c.$$

进一步推出, 光速 c 不会因为与一个小于光速的速度合成而改变,在这情况下,我们有

$$V = \frac{c + w}{1 + w/c} = c.$$

在 v, w 方向相同的情况下,我们也可以按照 §3 那样,把两个变换组合起来求得 V 的公式. 如果除 §3 所指出的系统 K 和 k 之外, 再引入另一平行于 k 而运动的坐标系 k', 其原点以速度 w 沿 X 轴运动,这样, 我们就得到 x, y, z, t 这些量与 k' 中相应量的方程,它们与§3中所得到的方程的区别,仅仅在于用下式代替了"v":

$$\frac{v + w}{1 + vw/c^2};$$

由此可见,这种平行变换当然形成一个群.

我们已经导出了运动学理论的一些必要的定律，这些定律是符合两条基本原理的，现在我们就着手把它们应用于电

动力学.

二、电动力学部分

§6 真空中的麦克斯韦-赫兹方程的变换. 论磁场中由运动所产生的电动势的性质

设真空中的麦克斯韦-赫兹方程在静系统K中成立,我们就得到

$$\frac{1}{c}\frac{\partial X}{\partial t}=\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z},\qquad \frac{1}{c}\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y},$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial Y}{\partial t}=\frac{\partial L}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial x},\qquad \frac{1}{c}\frac{\partial M}{\partial t}=\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z},$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial Z}{\partial t}=\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y},\qquad \frac{1}{c}\frac{\partial N}{\partial t}=\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x},$$

其中(X, Y, Z)表示电力矢量,(L, M, N)表示磁力矢量.

若把 §3 建立的变换应用于这些方程,假定电磁过程是发生在那里引入的以速度v运动的坐标系统中的,则得到以下方程:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial X}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial \eta}\left\{\beta\left(N-\frac{v}{c}Y\right)\right\}-\frac{\partial}{\partial \zeta}\left\{\beta\left(M+\frac{v}{c}Z\right)\right\},$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial \tau}\left\{\beta\left(Y-\frac{v}{c}N\right)\right\}=\frac{\partial L}{\partial \xi}-\frac{\partial}{\partial \zeta}\left\{\beta\left(N-\frac{v}{c}Y\right)\right\},$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial \tau}\left\{\beta\left(Z+\frac{v}{c}M\right)\right\}=\frac{\partial}{\partial \xi}\left\{\beta\left(M+\frac{v}{c}Z\right)\right\}-\frac{\partial L}{\partial \eta},$$

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial L}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial \zeta}\left\{\beta\left(Y-\frac{v}{c}N\right)\right\}-\frac{\partial}{\partial \eta}\left\{\beta\left(Z+\frac{v}{c}M\right)\right\},$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial \tau}\left\{\beta\left(M+\frac{v}{c}Z\right)\right\}=\frac{\partial}{\partial \xi}\left\{\beta\left(Z+\frac{v}{c}M\right)\right\}-\frac{\partial X}{\partial \zeta},$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial \tau}\left\{\beta\left(N-\frac{v}{c}Y\right)\right\}=\frac{\partial X}{\partial \eta}-\frac{\partial}{\partial \xi}\left\{\beta\left(Y-\frac{v}{c}N\right)\right\},$$

其中

$$\beta = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

根据相对性原理，假如真空中的麦克斯韦-赫兹方程在系统 K 里有效，则在系统 k 也有效；这就是说，动系统 k 中的电力矢量 (X', Y', Z') 与磁力矢量 (L', M', N')（这些矢量是分别由它们作用在电质量或磁质量上的质动效应来确定的）满足下列方程：

$$\frac{1}{c}\frac{\partial X'}{\partial \tau} = \frac{\partial N'}{\partial \eta} - \frac{\partial M'}{\partial \zeta}, \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial L'}{\partial \tau} = \frac{\partial Y'}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z'}{\partial \eta},$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial Y'}{\partial \tau} = \frac{\partial L'}{\partial \zeta} - \frac{\partial N'}{\partial \xi}, \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial M'}{\partial \tau} = \frac{\partial Z'}{\partial \xi} - \frac{\partial X'}{\partial \zeta},$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial Z'}{\partial \tau} = \frac{\partial M'}{\partial \xi} - \frac{\partial L'}{\partial \eta}, \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial N'}{\partial \tau} = \frac{\partial X'}{\partial \eta} - \frac{\partial Y'}{\partial \xi}.$$

显然，对系统 k 求出的这两个方程组，必须恰恰表示同一件事，因为两者皆等效于系统 K 的麦克斯韦-赫兹方程组。此外，既然两方程组是一致的，只是矢量的符号不同，因此，两方程组中对应位置上的函数必须一致，只能差一个因子 $\phi(v)$，而这个因子对一个方程组中所有的函数都是一样的，并与 ξ，η，ζ，τ 无关，而只同 v 有关．于是我们有下列关系：

$$X' = \phi(v) X, \qquad L' = \phi(v) L,$$

$$Y' = \phi(v)\beta\left(Y - \frac{v}{c}N\right), \quad M' = \phi(v)\beta\left(M + \frac{v}{c}Z\right),$$

$$Z' = \phi(v)\beta\left(Z + \frac{v}{c}M\right), \quad N' = \phi(v)\beta\left(N - \frac{v}{c}Y\right).$$

现在如果首先通过解刚才得到的方程，其次，用由 $-v$ 表征的逆变换作用于这些方程来求这方程组的逆（方程组），同时我们认为，这样得到的两方程组必须恒等，那么就推出

$\psi(v)\psi(-v)=1$. 更进一步，由于对称性[1]，$\psi(v)=\psi(-v)$，从而

$$\psi(v)=1,$$

于是我们的方程取下列形式：

$$X'=X, \qquad L'=L,$$

$$Y'=\beta\left(Y-\frac{v}{c}N\right), \quad M'=\beta\left(M+\frac{v}{c}Z\right),$$

$$Z'=\beta\left(Z+\frac{v}{c}M\right), \quad N'=\beta\left(N-\frac{v}{c}Y\right).$$

为了解释这些方程，我们作以下的讨论：设有一点电荷，当它在静系统 K 里测量时，其大小为“1”，即当它在静系统中处于静止时，它以 1 达因的力作用于距离 1 厘米远的等量电荷上。根据相对性原理，在动系统里测量时，这电荷的大小也必是“1”。若这个电量相对于静系统是静止的，则根据定义，矢量 (X, Y, Z) 就等于作用在它上面的力。若这电量相对于动系统是静止的(至少在有关的瞬间是如此)，则从动系统测量，作用在它上面的力等于矢量 (X', Y', Z')。因此上面方程中的前三个方程可以用下列两种方式来表达：

1. 如果一个单位点电荷在电磁场中运动，则作用在这点电荷上的，除了电力之外，还有一个“电动势”。如果忽略带有 $(v/c)^2$ 及 v/c 的高次幂的项，这“电动势”就等于电荷速度与磁力的矢积除以光速(旧表述法)。

2. 如果一个单位点电荷在电磁场中运动，则作用在它上面的力就等于电荷所在处的电力。我们可以把这场变换到对于这电荷是相对静止的一个坐标系来确定此力（新表述法)。

类似的讨论也适用于“磁通势”。我们看到，这里提出的

---

1) 比如说，若 $X=Y=Z=L=M=0$，而 $N\neq 0$，则由于对称性，当 v 改变符号而不改变其数值，显然 Y' 也一定改变符号而不改变其数值。

理论中，电动势只起辅助概念的作用．它之所以引入，是由于电力与磁力的存在并不是与坐标系的运动状态无关的．

此外，引论里所提及的当考虑由磁铁与导体相对运动而产生电流时所引起的不对称性，现在看来，显然就消失了．此外，至于电动力电动势的“源”（单极机）这个问题，也就没有意义了．

§7 多普勒原理和光行差理论

在系统 K 中离坐标原点很远处，设有一电动波源，在包含坐标原点的这部分空间，用下列方程表示，就有足够的近似程度，即

$$X = X_0 \sin \Phi, \qquad L = L_0 \sin \Phi,$$
$$Y = Y_0 \sin \Phi, \qquad M = M_0 \sin \Phi,$$
$$Z = Z_0 \sin \Phi, \qquad N = N_0 \sin \Phi,$$

其中

$$\Phi = \omega \left\{ t - \frac{1}{c} (lx + my + nz) \right\}.$$

这里的 (X_0, Y_0, Z_0) 与 (L_0, M_0, N_0) 是确定这波列的振幅矢量；l, m, n 是波面法线的方向余弦．现在我们希望知道，若由一个静止在动系统中的观察者来观察，这些波的性质是怎样的．

利用 §6 中关于电力和磁力的变换方程，以及 §3 中关于坐标与时间的变换方程，我们可以直接得出

$$X' = X_0 \sin \Phi', \qquad L' = L_0 \sin \Phi',$$
$$Y' = \beta (Y_0 - vN_0/c) \sin \Phi', \quad M' = \beta (M_0 + vZ_0/c) \sin \Phi',$$
$$Z' = \beta (Z_0 + vM_0/c) \sin \Phi', \quad N' = \beta (N_0 - vY_0/c) \sin \Phi',$$

$$\Phi' = \omega' \left\{ \tau - \frac{1}{c} (l'\xi + m'\eta + n'\zeta) \right\},$$

其中

$$\omega' = \omega\beta(1 - lv/c),$$

$$l' = \frac{l - v/c}{1 - lv/c},$$

$$m' = \frac{m}{\beta(1 - lv/c)},$$

$$n' = \frac{n}{\beta(1 - lv/c)}.$$

从 ω' 的方程推出，如果一个观察者相对于无穷远处频率为 ν 的光源以速度 v 运动，设“光源-观察者”间的联线与观察者(在与光源相对静止的坐标系中)的速度方向之间的夹角为 ϕ，则观察者接收到的光频率 ν' 由下列方程确定：

$$\nu' = \nu\frac{1 - \cos\phi \cdot v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

这就是对任何速度都成立的多普勒原理．当 $\phi = 0$，这方程具有以下明晰的形式：

$$\nu' = \nu\sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}.$$

我们看到，与通常的观点不同，当 $v = -c$ 时，$\nu' = \infty$.

如果把动系统中波面法线（光线的方向）与“光源-观察者”间的联线的夹角称为 ϕ'，则 ϕ' 的方程取下列形式：

$$\cos\phi' = \frac{\cos\phi - v/c}{1 - \cos\phi \cdot v/c}.$$

这方程表示最一般形式的光行差定律．若 $\phi = \frac{\pi}{2}$，这方程可简化为

$$\cos\phi' = -v/c.$$

我们还得求出波在运动系统看来的振幅．若把电力或磁力的振幅按照在静系统或动系统测量，分别记作 A 或 A'，则得

$$A'^2 = A^2 \frac{(1 - \cos\phi \cdot v/c)^2}{1 - v^2/c^2},$$

当 $\phi = 0$ 时，这方程就简化为

$$A'^2 = A^2 \frac{1 - v/c}{1 + v/c}.$$

由此可见，在以光速接近光源的观察者看来，这光源必定具有无限大的强度.

§8 光能的变换. 关于作用在理想反射器上的辐射压力理论

由于 $A^2/8\pi$ 是单位体积中的光能，根据相对性原理，我们就必须把 $A'^2/8\pi$ 视为运动系统中的光能.这样，如果无论从 K 还是从 k 测量，光复合体的体积都一样，则 A'^2/A^2 是一个给定的光复合体“在运动系统测量”的能量与“在静系统测量的”能量之比. 但情况并不如此. 若 l, m, n 为光的波面法线在静系统的方向余弦，则没有能量通过以光速运动的球面

$$(x - lct)^2 + (y - mct)^2 + (z - nct)^2 = R^2$$

的面元. 因此我们可以说，这一曲面永远把这同一个光复合体包围在内. 我们来探究一下，在系统 k 看来，这曲面所包围的能量有多少. 也就是说，此光复合体相对于系统 k 所具有的能量是多少.

上述球面在运动系统看来是一个椭球面，在时间 $\tau = 0$ 时，它的方程是

$$(\beta\xi - l\beta\xi v/c)^2 + (\eta - m\beta\xi v/c)^2 + (\zeta - n\beta\xi v/c)^2 = R^2.$$

若 S 是球的体积，S' 为椭球的体积，经过简单计算就得出

$$\frac{S'}{S} = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \cos\phi v/c}.$$

设这曲面所包围的光能，从静系统测时为 E，而从动系统测时

为 E'，便有

$$\frac{E'}{E}=\frac{A'^2S'}{A^2S}=\frac{1-\cos\phi\cdot v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

当 $\phi=0$ 时，上式就简化为

$$\frac{E'}{E}=\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}.$$

值得注意的是，光复合体的能量和频率按照相同的定律随着观察者的运动状态而改变.

现在设坐标平面 $\xi=0$ 为一个理想反射面，使§7中所讨论的那种平面波在它上面受到反射. 我们来求作用在这反射面上的光压，以及光经反射后的方向、频率和强度.

假定入射光由量 A，$\cos\phi$，ν 来确定(对系统K). 从系统 k 看来，相应的能量为

$$A'=A(1-\cos\phi\cdot v/c)/\sqrt{1-v^2/c^2},$$

$$\cos\phi'=(\cos\phi-v/c)/(1-\cos\phi\cdot v/c),$$

$$\nu'=\nu(1-\cos\phi\cdot v/c)/\sqrt{1-v^2/c^2}.$$

对于反射光来说，从系统 k 来看这过程，便得出

$$A''=A',$$

$$\cos\phi''=-\cos\phi',$$

$$\nu''=\nu'.$$

最后变换回静系统 K，则对反射光来说，我们有

$$A'''=A''\frac{1+\cos\phi''\cdot v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=A\frac{1-2\cos\phi\cdot v/c+v^2/c^2}{1-v^2/c^2},$$

$$\cos\phi'''=\frac{\cos\phi''+v/c}{1+\cos\phi''\cdot v/c}=-\frac{(1+v^2/c^2)\cos\phi-2v/c}{1-2\cos\phi\cdot v/c+v^2/c^2},$$

$$\nu'''=\nu''\frac{1+\cos\phi''\cdot v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\nu\frac{1-2\cos\phi\cdot v/c+v^2/c^2}{1-v^2/c^2}.$$

单位时间内，在镜面的单位面积上入射的能量(从静系统测量)显然等于 $A^2(c\cos\phi - v)/8\pi$。而从镜面的这个单位面积上，单位时间内离开的能量为 $A'''^2(-c\cos\phi''' + v)/8\pi$。根据能量原理，这两者之差等于单位时间内光压力所做的功。设这功等于乘积 Pv，其中 P 为光压强，则得到

$$P = 2\frac{A^2}{8\pi}\frac{(\cos\phi - v/c)^2}{1 - v^2/c^2}.$$

和实验以及其它理论相一致，我们得到第一近似

$$P = 2\frac{A^2}{8\pi}\cos^2\phi.$$

运动物体的光学的所有问题都可以用这里的方法来解决。主要的是，把受到运动物体影响的光的电力与磁力，变换到与该物体相对静止的坐标系上去。按照这种方法，运动物体光学的所有问题，都可以化为一系列静止物体的光学问题。

§9 计及对流电流的麦克斯韦-赫兹方程的变换

我们从下列方程开始讨论：

$$\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial X}{\partial t} + u_x\rho\right\} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z},\quad \frac{1}{c}\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y},$$

$$\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial Y}{\partial t} + u_y\rho\right\} = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x},\quad \frac{1}{c}\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z},$$

$$\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial Z}{\partial t} + u_z\rho\right\} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y},\quad \frac{1}{c}\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x},$$

其中

$$\rho = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

表示电荷密度的 4π 倍，(u_x, u_y, u_z) 为电荷的速度矢量。倘若我们设想电荷是与一个小刚体（离子、电子）不变地耦合在一起的，这些方程就是洛伦兹的电动力学和运动物体光学的

电磁基础.

设这些方程在系统 K 中是正确的，利用 § 3 和 § 6 的变换方程将其变换到系统 k. 这样，我们便得出下列方程：

$$\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial X'}{\partial \tau}+u_\xi \rho'\right\}=\frac{\partial N'}{\partial \eta}-\frac{\partial M'}{\partial \zeta},$$

$$\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial Y'}{\partial \tau}+u_\eta \rho'\right\}=\frac{\partial L'}{\partial \zeta}-\frac{\partial N'}{\partial \xi},$$

$$\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial Z'}{\partial \tau}+u_\zeta \rho\right\}=\frac{\partial M'}{\partial \xi}-\frac{\partial L'}{\partial \eta},$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial L'}{\partial \tau}=\frac{\partial Y'}{\partial \zeta}-\frac{\partial Z'}{\partial \eta},$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial M'}{\partial \tau}=\frac{\partial Z'}{\partial \xi}-\frac{\partial X'}{\partial \zeta},$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial N'}{\partial \tau}=\frac{\partial X'}{\partial \eta}-\frac{\partial Y'}{\partial \xi},$$

其中

$$u_\xi=\frac{u_x-v}{1-u_x v/c^2},$$

$$u_\eta=\frac{u_y}{\beta\left(1-u_x v/c^2\right)},$$

$$u_\zeta=\frac{u_z}{\beta\left(1-u_x v/c^2\right)},$$

$$\rho'=\frac{\partial X'}{\partial \xi}+\frac{\partial Y'}{\partial \eta}+\frac{\partial Z'}{\partial \zeta}=\beta\left(1-u_x v/c^2\right)\rho.$$

根据速度相加定理（§ 5），矢量 (u_ξ, u_η, u_ζ) 正是在系统 k 测量的电荷速度，因此，基于我们的运动学原理，我们已证明，运动物体电动力学的洛伦兹理论的电动力学基础与相对性原理是一致的.

此外还要简单提一下，从已经建立的方程出发，可以很容易地导出以下的重要定律：如果带电体在空间任何地方运

动，而从与之一起运动的坐标系看来电荷不发生变化时，则从“静”系统K看来，它的电荷也保持不变。

§10 缓慢加速的电子的动力学

设有一带电粒子（以后称为“电子”）在电磁场中运动，关于它的运动规律，我们作以下假定：

假如在某个给定时刻电子是静止的，那么只要电子的运动是缓慢的，在其后的瞬间，它的运动满足下列方程：

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\epsilon X,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=\epsilon Y,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=\epsilon Z,$$

其中x，y，z表示电子的坐标；m为电子的质量。

现在令电子在给定时刻的速度为 v。我们来寻求电子在随后的一瞬间的运动定律。

我们可以并将假定，当我们注意这个电子的一瞬间，它是处于坐标原点的，并以速度v沿系统K的X轴而运动。这种做法并不影响研究的一般性。于是显然，在给定的那一瞬间（$t=0$），对于以速度v沿X轴平行移动的坐标系来说，电子是静止的。

把上述假定和相对性原理结合起来，不难看出，在紧接着的时间（即对很小的t值来说），从系统k看来，电子按照以下方程运动：

$$m\frac{d^2\xi}{d\tau^2}=\epsilon X',$$

$$m\frac{d^2\eta}{d\tau^2}=\epsilon Y',$$

$$m\frac{d^2\zeta}{d\tau^2}=\varepsilon Z',$$

其中符号 $\xi, \eta, \zeta, \tau, X', Y', Z'$ 表示系统 k 里的量. 如果再规定当 $t=x=y=z=0, \tau=\xi=\eta=\zeta=0$ 时, §3 和 §6 的变换方程有效, 那么就得到

$$\xi=\beta(x-vt), \eta=y, \zeta=z, \tau=\beta(t-vx/c^2),$$
$$X'=X, Y'=\beta(Y-vN/c), Z'=\beta(Z+vM/c).$$

借助于这些方程, 把上面的运动方程从系统 k 变换到系统 K, 便得到

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\varepsilon}{m\beta^3}X,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\varepsilon}{m\beta}\left(Y-\frac{v}{c}N\right), \qquad (A)$$
$$\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\varepsilon}{m\beta}\left(Z+\frac{v}{c}M\right).$$

现在我们用普通的观点来探讨一下运动着的电子的"纵"质量和"横"质量. 把方程 (A) 写成下列形式:

$$m\beta^3\frac{d^2x}{dt^2}=\varepsilon X=\varepsilon X',$$
$$m\beta^2\frac{d^2y}{dt^2}=\varepsilon\beta\left(Y-\frac{v}{c}N\right)=\varepsilon Y',$$
$$m\beta^2\frac{d^2z}{dt^2}=\varepsilon\beta\left(Z+\frac{v}{c}M\right)=\varepsilon Z',$$

并首先注意到 $\varepsilon X', \varepsilon Y', \varepsilon Z'$ 是作用在电子上的有质动力的分力; 而且从在这一瞬间以电子速度同电子一起运动的系统观察, 也是如此. (这个力可以用后面提到的系统中的静止弹簧秤来测量.) 现在若把这力简称为"作用在电子上的力"[1] 并

1) 在此给出的力的定义, 正如普朗克最先指出的那样是不利的. 更恰当的是这样定义力, 使得动量定律与能量定律采取最简单形式.

保持

$$\text{质量}\times\text{加速度}=\text{力}$$

这个方程，再规定加速度是在静系统K中测量的，这样，从上述方程就可以导出

$$\text{纵质量}=\frac{m}{(\sqrt{1-v^2/c^2})^3},$$

$$\text{横质量}=\frac{m}{1-v^2/c^2}.$$

采取不同的力与加速度的定义，我们自然会得到其他的质量值．这告诉我们，在比较电子运动的各种理论时，必须十分谨慎地进行．

我们注意到，关于质量的这些结论，对有质的质点来说也有效，因为在有质质点上加上电荷就构成电子（按照我们对这个字的了解），不管这电荷是多么小．

现在来确定电子的动能．如果系统K的坐标原点处有一电子，在静电力X的作用下，从静止开始沿着X轴运动，那么，从静电场取出的能量就是$\int eXdx$．既然电子是缓慢加速的，就不会以辐射形式放出能量，因此从静电场取出的能量必须等于电子的运动能量W．记住在我们所考虑的整个运动过程中，方程（A）的第一式是适用的，于是得出

$$W=\int eXdx=m\int_0^v \beta^3 v dv$$

$$=mc^2\left\{\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right\}.$$

这样一来，当$v=c$，W就变为无穷大．如前所述，大于光速的速度是不可能存在的．

根据以上论证，这个动能表达式也适用于有质质量．

现在我们来列举一下电子运动的性质．这些性质是从方

程组(A)推出的,并且可以和实验进行比较.

1. 从(A)的第二个方程可以推出,当 $Y = Nv/c$ 时,对于以速度 v 运动的电子,电力 Y 与磁力 N,具有等强度的偏转作用. 可见,根据我们的理论,对于任何速度,利用下列定律

$$\frac{A_m}{A_e} = \frac{v}{c}$$

就可能从磁偏转本领 A_m 与电偏转本领 A_e 之比来确定电子的速度.

这个关系式可以用实验来加以检验,因为电子的速度 v 能直接测量,例如利用高频振荡的电磁场.

2. 从电子动能的推导可以看出,电子获得的速度 v 与所经过的势差 P 之间,必须存在下列关系:

$$P = \int X dx = \frac{m}{e} c^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right\}.$$

3. 我们来计算当有一个磁力 N(作为唯一的偏转力)垂直于电子速度而作用时,电子运动路径的曲率半径. 从(A)的第二个方程我们得出

$$-\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{v^2}{R} = \frac{e}{m}\frac{v}{c} N \sqrt{1 - v^2/c^2},$$

或者

$$R = \frac{mc^2}{e} \cdot \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot \frac{1}{N}.$$

按照这里提出的理论,这三个关系式就是电子运动所必须遵循的定律的完整表达式.

最后,我想指出,在研究这里所讨论的问题时,曾得到我的朋友和同事贝索(M. Besso)忠实的帮助. 对于他提出几个有价值的建议,我表示谢意.

物体的惯性是否与它所含的能量有关?

A. 爱因斯坦

先前的研究结果导致一个十分引人注意的结论，现推导如下.

我的研究是基于真空中的麦克斯韦-赫兹方程和空间电磁能的麦克斯韦表达式,此外还有下列原理:

如果有两个作相对匀速平移运动的坐标系，则物理系统在改变状态时所遵循的各种规律，无论对于两个坐标系中的哪一个来说，都是一样的(相对性原理).

以这条原理为基础[1],除其一些结果外，我导出了下列结论(§ 8):

设有一列平面波以坐标系 (x, y, z) 为参照系时具有能量 l; 并令光线的方向(波面法线)与系统的 x 轴间的角为 ϕ. 如果我们引入一个相对于系统 (x, y, z) 作匀速平移的新坐标系 (ξ, η, ζ), 并令其坐标原点以速度 v 沿 x 轴运动，那么从系统 (ξ, η, ζ) 测量时,这些光所具有的能量就等于

$$l^* = l\frac{1-\frac{v}{c}\cos\phi}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

其中 c 表示光速.,以后我们要利用这个结果.

假定在系统 (x, y, z) 中有一个静止物体,令它对此系统

1) 光速恒定原理当然已包含在麦克斯韦方程之内.

的能量为 E_0。 又设这物体相对于上述以速度 v 运动的系统 (ξ, η, ζ) 的能量为 H_0.

令这物体向与 x 轴成角 ϕ 的方向发射的能量为 $\frac{1}{2}L$ [在系统 (x, y, z) 测量]的平面光波，同时向相反方向发出等量的光. 这样做的时候,物体对系统 (x, y, z) 保持静止. 能量原理一定适用于这一过程，而且事实上对两个坐标系都成立(根据相对性原理)。 若把物体在发射光之后的能量，按照在系统 (x, y, z) 或 (ξ, η, ζ) 分别测量的值，分别以 E_1 或 H_1 来表示,然后利用上面的关系式,就得到

$$E_0 = E_1 + \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}L,$$

$$H_0 = H_1 + \frac{1}{2}L\frac{1-\frac{v}{c}\cos\phi}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{1}{2}L\frac{1+\frac{v}{c}\cos\phi}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$= H_1 + \frac{L}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

将这两方程相减,得到

$$H_0 - E_0 - (H_1 - E_1) = L\left\{-\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right\}.$$

式中具有 $H - E$ 形式的两个差值,具有简单的物理意义. H 与 E 是同一物体对两个相对运动参考系的能量值，这个物体相对于其中的一个系统[系统 (x, y, z)] 是静止的。 这样就显然可知,差值 $H - E$ 与这物体对于另一系统 (ξ, η, ζ) 的动能 K, 只能差一个加性常数 C, 这个常数,取决于如何选择能量 H 与 E 的任意加性常数. 于是可以令

$$H_0 - E_0 = K_0 + C,$$
$$H_1 - E_1 = K_1 + C,$$

因为在发射出光的时候，C不改变．这样，我们便有

$$K_0 - K_1 = L\left\{\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right\}.$$

物体对于系统 (ξ, η, ζ) 的动能因发射了光而减少，而所减少的数量与物体的性质无关．此外，差值 $K_0 - K_1$ 象电子的动能那样(见上文 § 10)依赖于速度．

忽略四阶和四阶以上的量，可以令

$$K_0 - K_1 = \frac{1}{2}\frac{L}{c^2}v^2.$$

从这方程可以直接推出：如果一个物体以辐射的形式放出能量 L，则其质量减少 L/c^2．从物体中取出的能量变成了辐射能这件事显然是无关紧要的，于是我们得到更一般的结论：物体的质量是它所包含的能量的度量；如果能量改变 L，则质量也同样要改变 $L/9 \times 10^{20}$，能量用尔格计算，质量以克计算．

利用能量变化很大的物体(如镭盐)也许能够成功地检验这理论，这并不是不可能的．

如果这一理论与事实相符，就说明辐射在发射体与吸收体之间传递着惯量．

空 间 和 时 间

H. 闵可夫斯基

现在我要向你们提出的时空观是在实验物理学的土壤上产生的，其力量就在这里．这些观点是根本性的．从现在起，孤立的空间和孤立的时间注定要消失成为影子，只有两者的统一才能保持独立的存在。

§ 1 牛顿方程的不变性及其在四维空间中的表示

首先我想说明，怎样才能从目前公认的力学出发，用纯粹数学的思想方法得出新的空间时间观念．牛顿力学的方程表现出双重的不变性．首先，如果令基本的空间坐标系作任意的位置改变，方程的形式不变；其次，如果改变坐标系的运动状态，即让它作某种匀速平移运动，方程的形式也不变；此外，时间原点也不起作用．我们惯于视几何公理为完善的东西，与此同时，感到力学公理也是成熟的，因此，两种不变性就很少同时提及．对于力学的微分方程来说，每一种不变性本身都表示某一个变换群．第一个群的存在，被认为是空间的基本特征．而对第二个群则宁可置之不顾，以便能够不费思索地克服下列困难，即从物理现象看来，我们永远不能判断被设想为静止的空间究竟是否就不会处于匀速平移状态．这样，两个群同时并存却毫不相干．可能是它们的截然不同的特征令人没有勇气去把它们结合起来．然而恰恰是把它们结合起来作为一个整体，即作为一个完全群，引起我们思考．

我们试图用图解法来想象事物的情态. 设 x, y, z 为空间的直角坐标, t 表示时间. 我们感觉中的对象,总是牵涉联合着的地点和时间. 从来没有人脱离时间而观察地点,或者脱离地点而观察时间. 尽管如此,我还是尊重空间和时间都具有独立意义这个信条. 我将把在某一时刻的一个空间点,即一组值 x, y, z, t, 叫做一个世界点. 把一切可以设想的数组 x, y, z, t 的全体,称为世界.就用这枝结实的粉笔,我可以把四个世界轴画在黑板上. 既然仅仅是粉笔画的一条轴线(其实它是由全都振动着的分子组成的,并参加地球在宇宙间的运行.)已经给我们提供了抽象化的广大范围, 而与这第四个数相联系的进一步的抽象,对数学家来说是没有困难的.为了在任何地方也不留下空隙,我们假定,在任何地点和任何时间,都存在某种可感知的事物. 这种事物我们用"实体"这个词来表示,以避免说"物质"和"电"这些词. 现在我们把注意力集中在处于世界点 x, y, z, t 的实体点, 并假定在任何其他时间都能认出这实体点, 设这实体点的空间坐标的变化 dx, dy, dz 是对应于一个时间元 dt 的. 这样我们就得到世界中的一条曲线,即世界线, 可以说, 它是这实体点无穷无尽经历的一种表象,线上的点可以由参数 t 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 明晰地确定. 整个宇宙可以看做是分解为无数相似的世界线的, 而我乐于预先说,在我看来,若将物理定律表示成这些世界线之间的互易关系,才会是它们的最完美的表达式.

空间和时间的概念,使在 $t=0$ 的 x, y, z,流形与其两边($t>0$ 和 $t<0$)截然分开. 若为简单起见保留相同的空间和时间零点,则所提及的第一个群表示:在力学上,我们可以于 $t=0$ 时令 x, y, z 三个轴绕着原点作任何转动,这相当于表达式

$$x^2+y^2+z^2$$

的齐次线性变换. 第二个群表示,我们可以用 $x-\alpha t$, $y-\beta t$,

$z - \gamma t$, t（其中 α, β, γ 为任何常数）代替 x, y, z, t，而不会改变力学定律的表达式. 因此，我们可以给时间轴以朝世界的上半部即 $t > 0$ 以任何方向. 现在我们要问，空间的正交条件与时间轴在朝上方向的完全自由选择应当有什么联系?

为了建立这个联系，让我们取一正参数 c，并考虑

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1$$

的图形. 这个图形，类似于一个双叶双曲面，是由被 $t = 0$ 隔开的两个曲面组成的. 我们考虑在 $t > 0$ 区域的那叶双曲面，作从 x, y, z, t 到四个新变量 x', y', z', t' 的齐次线性变换，同时要使此曲面的新变量表达式保持原有形式. 显然，空间绕原点旋转就属于这类变换. 所以只要研究其中一种 y, z 保持不变的变换，就可以充分理解其余的变换. 我们作这叶曲面在 x, t 平面上的截面（图 1）——双曲线 $c^2t^2 - x^2 = 1$ 的上半枝及其渐近线. 从原点 O 出发，我们作这枝双曲线的任一矢径 OA'；在 A' 引此双曲线的切线，直至交右边的渐近线于 B'；作成平行四边形 $OA'B'C'$，最后，为了以后的应用，延长 $B'C'$ 交 x 轴于 D'. 现在若我们取 OC' 与 OA' 作为斜角坐标 x', t' 的轴，令长度 $OC' = 1$，$OA' = 1/c$，则这枝双曲线的表达式仍为 $c^2t'^2 - x'^2 = 1$，$t' > 0$，而这个从 x, y, z, t 到 x', y', z', t' 的变换，也就是上面所说的变换之一. 现在我们用这些变换把空间时间零点的任何移动联系起来，这样组成一个变换群，这个变换群显然也依赖于参数 c，这个群我用 G_c 来表示.

如果我们令 c 增至无穷大，则 $1/c$ 就收敛到零，由图看出，双曲线的枝线越来越倾向 x 轴，渐近角变得越来越钝，而在极限情况下，这特殊的变换就变成这样一种变换，即 t' 轴可以取朝上的任何方向，而 x' 越来越逼近 x. 有鉴于此，就很清

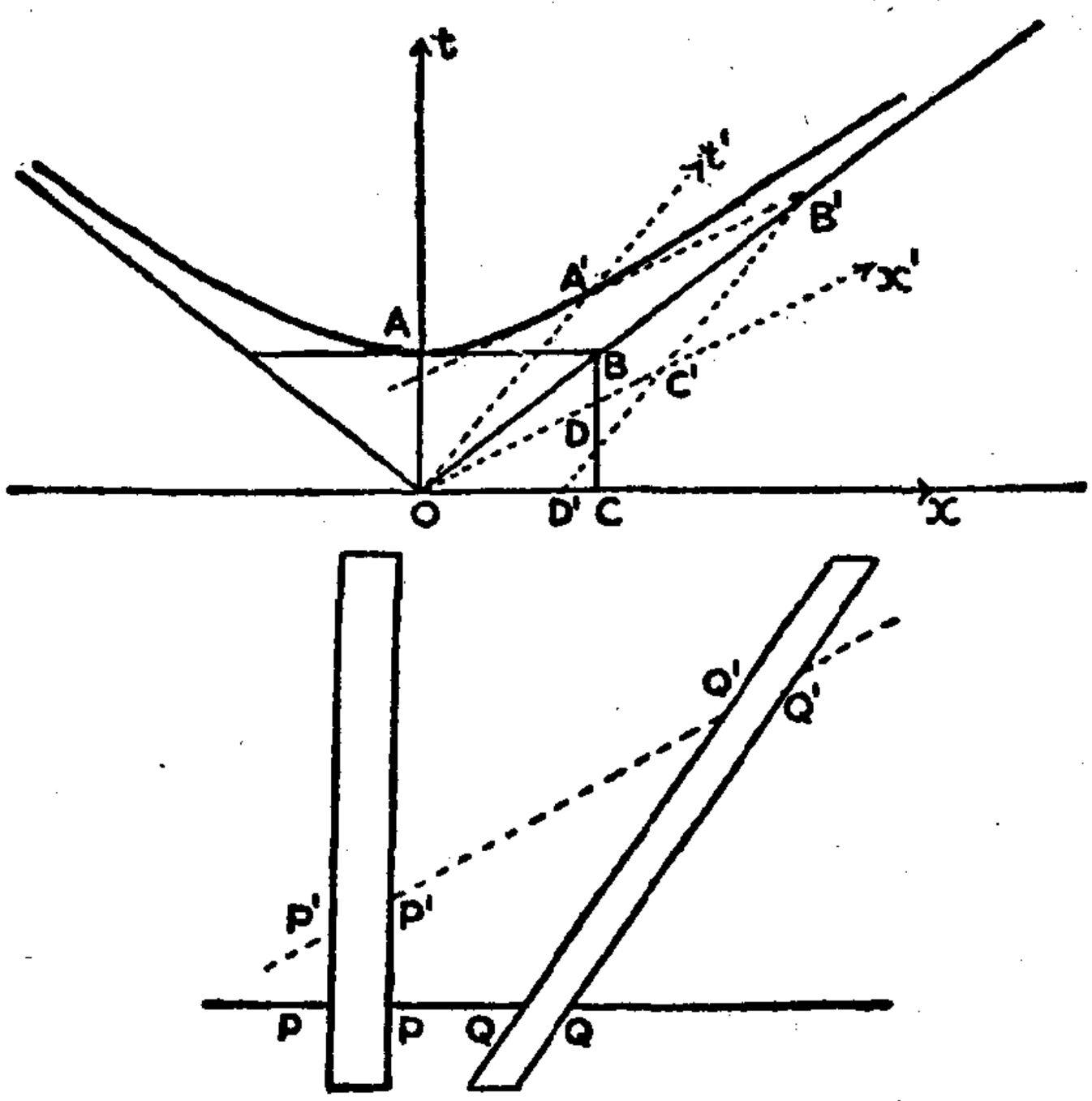

图 1

楚，群 G_c 在 $c = \infty$ 的极限情况下（即 G_∞）正好变成适用于牛顿力学的完全群.既然如此，而且由于 G_c 在数学上又比 G_∞ 更易理解，看来连某些缺乏想象力的数学家也许会想到，事实上，自然现象毕竟不是对于群 G_∞ 而是对于群 G_c 具有不变性，c 为确定的有限值，但按通常单位测量，其值极大. 这样一种预见，将会是纯粹数学的卓越成就. 但是目前数学虽然只能发挥阶梯的作用，却总可以认为是事后聪明而自慰，而由于巧妙的前提，以及因高瞻远瞩而使其领悟能力敏锐，它就能够立即掌握住关于千变万化的自然概念的深远结果.

我想立刻指出，最后要讨论的这个 c 的值是多少. 它就是真空中光的传播速度. 为避免说空间或空虚等字眼，我们可以用另一种方式定义这个量，即把它定义为电学中电磁单位与静电单位之比.

存在着自然定律对于有关的群 G_c 具有不变性这件事，应该按下列方式来理解：

根据自然现象的全体性，通过不断提高近似的方法，有可能追溯到越来越精确的一个参考系 x，y，z，t，即空间和时间．利用这参考系，自然现象就按照确定的自然定律表现出来．但是当我们这样做了以后，绝不能认为这个参考系是由这些自然现象唯一地确定了的．仍然有可能对参考系作某种改变，使这种改变符合群 G_c 的变换，并保持自然定律的表达式不改变．

例如依照上面描述的图形，我们也可以选取时间 t'，但相应地就不可避免要用三个参数 x'，y，z 的流形来定义空间．在这种情况，物理定律可以用 x'，y，z，t' 来表示，其形式与用 x，y，z，t 表示的完全一样．于是在宇宙间，就不再是只有一个空间，而是有无数个空间，就象在三维空间中有无数平面一样．三维几何学，成了四维物理学中的一章．现在大家会明白，为什么我在一开始就说，空间和时间都要消失成为影子，只有世界本身仍然存在．

§2 世界假设

现在的问题是什么情况迫使我们接受这种新的空间时间概念？这种新概念真的永远不会和经验矛盾吗？最后它果真有利于描述自然现象吗？

在探究这些问题之前，我必须作一个重要说明．倘若我们以某种方式区分开空间和时间，那么与静止实体点相对应的世界线就是平行于 t 轴的直线；与匀速运动相对应的世界线是与 t 轴成某个角度的直线，而变速运动实体点的世界线则是某种形式的曲线．若在任一世界点 x，y，z，t 取通过此点的世界线，并发现它平行于上述双曲面的某个矢径 OA'，

这样我们就可以引入 OA' 作为一个新的时间轴，而按照空间时间的新概念，在该世界点上的实体呈现静止状态. 现在我们要引入下列基本公理:

对于适当地确定的空间和时间，在任何世界点上的实体都可以看成是静止的.

这公理意味着在任何世界点上，公式

$$c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

总是取正值，亦即等于说，任何速度 v 皆证实是小于 c 的. 因此 c 就是一切实体的速度的上限. 正是这个事实，显示出量 c 的更深刻的意义. 按照第二种形式，这公理给人留下的初步印象并不全然是令人愉快的. 但我们必须记住，一种修改了形式的力学(其中出现以上二次微分式的平方根)现在就要开辟自己的道路，这样一来，超光速情况只起一种象几何学中具有虚坐标的图形那样的作用.

促使我们假定群 G_c 的真正动机是真空中光传播的微分方程具有群 G_c[1]. 另一方面，刚体的概念仅在满足群 G_∞ 的力学中才有意义. 若我们有一种具有 G_c 的光学理论，又若刚体是存在的，则容易看出，t 的同一方向就会被分别适用于 G_c 和 G_∞ 的两个双曲面区分开，而这又得出进一步的结果，即我们能够用实验室内适当的刚性光学仪器来发现自然现象在相对于地球运动方向改变方位时所发生的变化. 但是向这目标所作的一切努力，特别是著名的迈克尔逊干涉实验，都得出否定的结果. 为了解释这种失败，洛伦兹提出一个假说，其成功之处恰恰就在于光学中关于群 G_c 的这种不变性. 依照洛伦兹的假说，任何物体在其运动方向上都一定经受一种收缩，事实上，当速度为 v 时，则按下列比值收缩:

1) 这事实的主要方面的应用，早已由 W. Voigt 给出，见 *Göttinger Nachrichten*, 1887, p. 41.

$$1:\sqrt{1-v^2/c^2}.$$

这个假说令人觉得十分离奇，因为这种收缩不应看作以太或类似东西的阻力所造成的，而应视为天赋的、伴随运动而存在的现象.

现在我要用我们的图形来表明洛伦兹的假说完全等效于空间时间的新概念，而这些新概念确实使洛伦兹假说更加容易理解. 若为简单起见我们不管 y，z 而设想一个在空间上是一维的世界，那么一条竖直如 t 轴的平行带，和另一条对 t 轴倾斜的平行带(见图1)，就分别代表处于静止或匀速运动的物体的经历，每一个平行带都占有一个恒定的空间范围. 若 OA' 平行于第二条带子，我们可以引入 t' 作为时间坐标，x' 作为空间坐标，这样一来，第二个物体就表现为静止，而第一个物体作匀速运动. 现在我们假定，设想是处于静止的第一个物体的长度为 l，这就是说，第一条带子在 x 轴上的截面 PP 等于 $l\cdot OC$，其中 OC 表示 x 轴上的单位尺度；另一方面假定设想是处于静止的第二个物体具有同样的长度 l，这表示第二条带子的截面 $Q'Q'$ 的长度（平行于 x' 轴方向测量）等于 $l\cdot OC'$. 现在我们用这两个物体得出两个同样的洛伦兹电子的象，一个静止，一个作匀速运动. 但是，若保持原来的坐标 x，t 不变，则对于第二个电子，我们必须用其相应带子的平行于 x 轴的截面作为其大小. 由于 $Q'Q'=l\cdot OC'$，显然 $QQ=l\cdot OD'$. 对第二条带来说，若 dx/dt 等于 v，则简单的计算给出

$$OD'=OC\sqrt{1-v^2/c^2},$$

所以 $PP:QQ=1:\sqrt{1-v^2/c^2}$. 而这就是关于运动着的电子收缩的洛伦兹假说的意义. 另一方面，假使我们把第二个电子看作是静止的，并采用参考系 x'，t'，则第一个电子的长度

就必须用其带子平行于 OC' 的截面 $P'P'$ 来表示；同时我们会发现，第一个电子与第二个电子恰恰按同一比例收缩，因为在图中，

$$P'P' : Q'Q' = OD : OC' = OD' : OC = QQ : PP.$$

洛伦兹把 x 与 t 组合成的 t' 称为匀速运动电子的地方时，并为更好地理解收缩假说而作出关于这概念的物理结构．然而最先清楚地认识到一个电子的时间和另一个的时间完全一样（即 t 与 t' 应同等看待）的荣誉属于爱因斯坦[1]．这样，时间作为由现象毫无歧义地确定了的一个概念，就第一次被取消了其高超的地位．不过无论是爱因斯坦还是洛伦兹，都没有对空间概念提出任何非难，这或许是由于在上述 x'，t' 平面与 x，t 平面是重合的特殊变换中，可能作这样一种解释，即空间的 x 轴保持原有位置．人们会以为能找出对于空间概念的相当的破坏，这种破坏可看成是高等数学方面的另一种大胆尝试．不过这个步骤对于真正了解群 G_c 还是不可缺少的，而一旦采取了这个做法，为表示关于群 G_c 的不变性条件而引用的相对性假设这个词，在我看来是十分无力的．由于这假设导致这样一种意义，即只有由空间和时间构成的四维世界是由现象给定的，而在空间和时间上的投影，在一定程度上仍然可以自由选择，因此我认为最好是把这假设叫做绝对世界假设（或简称为世界假设）．

§3 连续区中运动的表示

世界假设允许我们对四个坐标 x，y，z，t 同等看待．现在我要证明，按照这种方法，物理定律所表现的形式会变得更易理解．特别是加速度概念得到一个鲜明的特征．

---

1) A. Einstein, *Ann. d. Phys.*, **17**, 1905, p. 891; *Jahrb. d. Radioaktivität und Elektronik*, **4**, 1907, p. 411.

我打算采取一种几何学的表示方式，只要我们在三重系 x, y, z 里默默地忽视 z，立刻就会联想起这种表示方式。取任一世界点 O 作为时空零点。顶点为 O 的圆锥 $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$（图 2）是由两部分构成的，一部分 t 值大于零，另一部分 t 值小于零.前一部分即 O 的前锥，由“向 O 发射光”的所有世界点所组成;后一部分,即 O 的后锥,由“从 O 接收光”的所有世界点所组成。只由前锥围绕的区域可称为“先于” O，单由后锥围绕的区域称为“后于” O. 前面讨论的双曲面

$$F = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1 \qquad t > 0$$

位于 O 之后。在两锥之间的区域，被 k 取正值的所有单叶双曲面的图形

$$-F = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = k^2$$

所充满. 我们对于这个图形上以 O 为中心的那些双曲线特别感兴趣。这些双曲线的每一条支线，可以简称为具有中心 O 的内双曲线。其中有一条被当作世界线的支线，它代表这样一种运动，当 $t = -\infty$ 与 $t = +\infty$ 时，速度逐渐增大渐近于光速 c.

现在，若象空间中的矢量那样，把 x, y, z, t 流形中一个有向长度称为矢量，我们就得把从 O 指向 $+F = 1, t > 0$ 的类时矢量与从 O 指向 $-F = 1$ 的类空矢量区别开来. 可使时间轴平行于前一类的任何矢量走向. 在 O 的前锥与后锥之间的任何世界点，可以利用参考系来安排得使其与 O 同时，但同样也可以安排得使其早于 O 或迟于 O. 在 O 的前锥内的任何世界点，必然总是在 O 之前，而在 O 的后锥内的任何世界点，则必然总是在 O 之后. 向 $c = \infty$ 的极限情况过渡，相当于两锥之间的楔形片完全展平成 $t = 0$ 的平面流形。在本图里，这个片子有意用不同的宽度画出.

我们把所选的任一矢量，例如起点为 O，终点为 x，y，

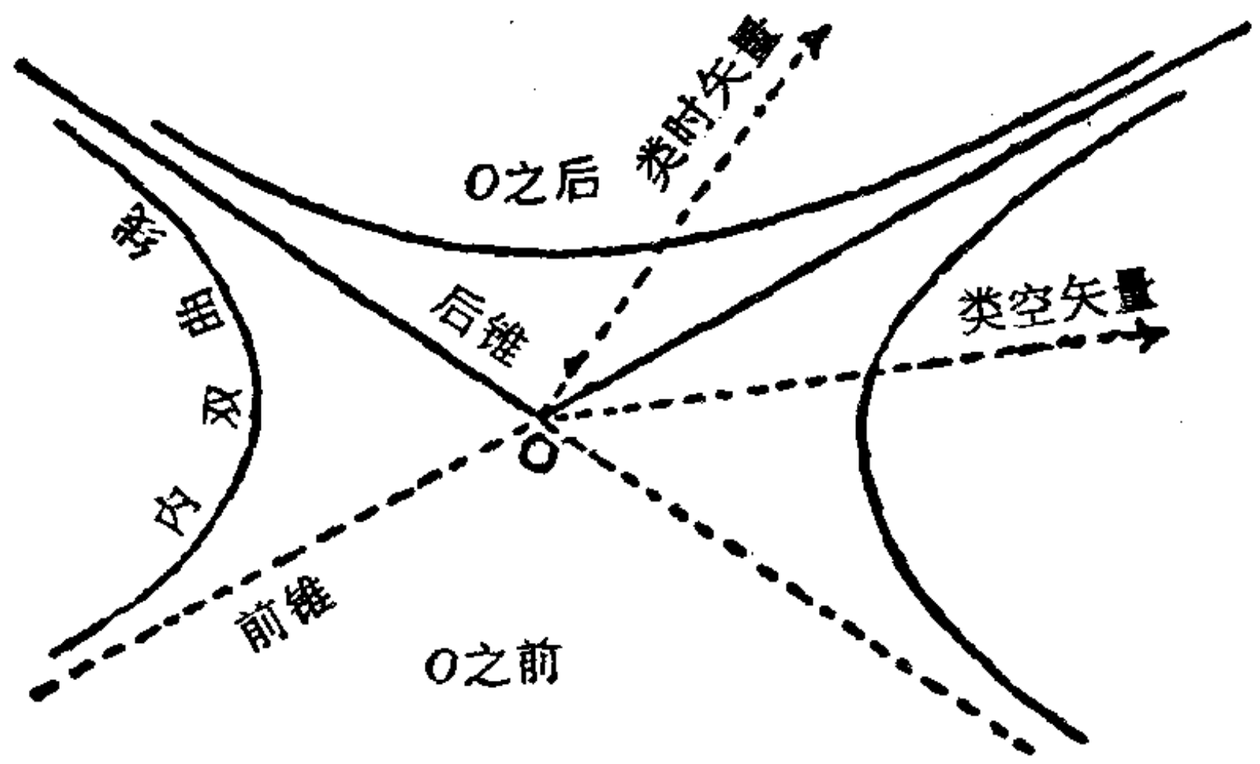

图 2

z, t 的矢量分解成四个分量 x, y, z, t. 如果一个矢量的方向为从 O 至两曲面 $\mp F = 1$ 中之一的矢径 OR 方向，另一矢量的方向为同一曲面上点 R 的切线 RS 方向，我们就说两矢量互相垂直。所以分量为 x, y, z, t 与 x_1, y_1, z_1, t_1 的两矢量可能互相垂直的条件是

$$c^2tt_1 - xx_1 - yy_1 - zz_1 = 0.$$

为了测量不同方向上的矢量，应当这样规定测量单位：规定从 O 到 $-F = 1$ 的某个类空矢量的长度总是 1，从 O 到 $+F = 1$, $t > 0$ 的某个类时矢量的长度总是 $1/c$.

若在世界点 $P(x, y, z, t)$ 处，我们想象有一个实体点通过该点的世界线，则沿此线放置的类时矢量 dx, dy, dz, dt 的长度为

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}.$$

此量沿世界线从任何固定起点 P_0 到变动的终点 P 的积分 $\int d\tau = \tau$，我们称之为实体点在 P 的原时. 在世界线上，我们将 x, y, z, t (即矢量 OP 的分量)看作原时 τ 的函数；它们对 τ 的一阶微商用 $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, $\dot{t}$ 表示；对 τ 的二阶微商用 $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$, $\ddot{t}$

表示；并给相应的矢量以名称：矢量 OP 对 τ 的导数称为点 P 处的速度矢量，这速度矢量对 τ 的导数称为 P 处的加速度矢量．于是因为

$$c^2\dot{t}^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2 = c^2,$$

我们得到

$$c^2\dot{t}\ddot{t} - \dot{x}\ddot{x} - \dot{y}\ddot{y} - \dot{z}\ddot{z} = 0,$$

这就是说，速度矢量是具有单位长度的类时矢量，其方向是世界线在 P 处的方向；而 P 处的加速度矢量是垂直于 P 处的速度矢量的，所以加速度矢量在任何情况下都是类空矢量．

现在就容易看出，存在一条确定的双曲线，它与 P 处的世界线有三个无限接近点，且其渐近线就是“前锥”与“后锥”的母线(图 3)．此双曲线称为 P 处的曲率双曲线．若 M 为这个双曲线的中心，我们就得涉及具有中心 M 的内双曲线．令 ρ 为矢量 MP 的长度，我们就可以看出，P 处的加速度就是在 MP 方向上长度为 c^2/ρ 的矢量．

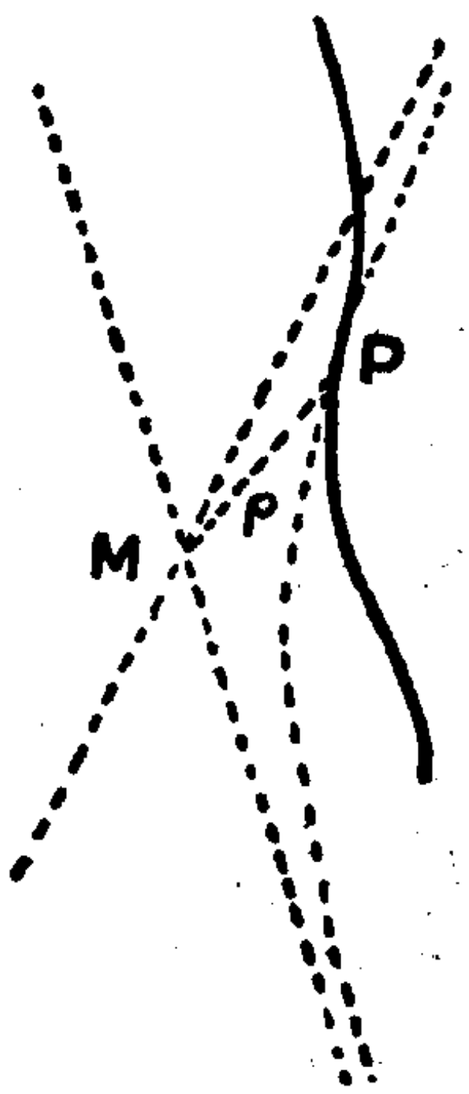

图 3

若 $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$, $\ddot{t}$ 皆为零，曲率双曲线就简化为在 P 与世界线相切的直线，同时我们必须令 $\rho = \infty$．

§4 新力学

为了表明群 G_c 这一假定对于物理定律决不会导致矛盾，就不可避免地要在这假定的基础上对整个物理学作一番修正．对于热力学和热辐射的问题[1]，对于电磁过程，以及在保

1) M. Planck, “Zur Dynamik bewegter Systeme,” Berliner Berichte, 1907, p. 542, 或见 *Ann. d. Phys.*, **26**, 1908, p. 1.

留质量概念的情况下对于力学，这种修正工作在某种程度上已经成功地实现了[1]. 对最后这个物理学分支来说，具有根本意义的是以下问题：设分量为 X, Y, Z 的力平行空间轴而作用于某一世界点 $P(x, y, z, t)$，在此点的速度矢量为 $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, i，当参考系以某种方式改变时，我们必须令此力等于什么？在群 G_c 确实可被采纳的那些情况下，关于电磁场中的有质动力，存在着某些已被承认的论断. 这些论断导致以下简单规则：当参考系改变时，所考虑的力变换成新的空间坐标系中的一个力，变换的方式要使分量为 iX, iY, iZ, iT 的适当的矢量保持不改变，其中

$$T = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\dot{x}}{i}X + \frac{\dot{y}}{i}Y + \frac{\dot{z}}{i}Z\right)$$

是这力在世界点上做功的功率除以 c. 这矢量总是垂直于 P 处的速度矢量. 对应于 P 处的一个力、属于这种类型的力矢量，我们称为 P 处的“发动力矢量”.

现在我描述一下具有恒定力学质量 m 的实体点经过 P 的世界线. 设 P 处的速度矢量乘以 m 称为 P 处的“动量矢量”，P 处的加速度矢量乘以 m 称为 P 处的“力矢量”按照这些定义，具有给定发动力矢量的质点的运动规律可以写成[2]：运动的力矢量等于发动力矢量. 这个论断包含各分量(相应于四个轴)的四个方程，而既然先验地假定了上述两矢量都垂直于速度矢量，所以第四个方程可以看成是由其他三个方程推出的. 依照上面 T 的意义，第四个方程无疑是代表能量定律的. 所以动量矢量沿 t 轴的分量乘以 c，应定义为质点的动能. 其

---

1) H. Minkowski, “Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern,” Göttinger Nachrichten, 1908, p. 53.

2) H.Minkowski, 同本页脚注1)的文献, p. 107, 或参看 M. Planck, *Verhandlungen der Physikalischen Gesellschaft*, **4**, 1906, p. 136.

表达式为

$$mc^2\frac{dt}{d\tau}=mc^2/\sqrt{1-v^2/c^2},$$

在除去加性常数 mc^2 之后，它就是牛顿力学中的表达式 $\frac{1}{2}mv^2$，准确到 $1/C^2$ 阶量. 按照这种方式，能量如何依赖于参考系就变得十分清楚了. 由于 t 轴可以取任何类时矢量的方向，对所有可能的参考系写出的能量定律就同时包含了整个运动方程组. 在我们讨论过的极限过渡中(到 $c=\infty$)，这事实对牛顿力学的公理结构也保持着它的重要地位，在这种意义上，这一事实已经为 I. R. 舒茨所意识到[1].

我们可以预先规定长度单位与时间单位之比，使速度的自然极限变成 $c=1$. 如果我们进一步引入 $\sqrt{-1}\,t=s$ 来代替 t，则二次微分式

$$d\tau^2=-dx^2-dy^2-dz^2-ds^2$$

对于 x, y, z, s 就变成完全对称的；而这种对称性又传给与世界假设不相矛盾的任何定律. 于是这假设的本质在数学上就可以十分含蓄地表示成一个奥妙的公式：

$$3\times10^5\text{千米}=\sqrt{-1}\text{秒}.$$

§5 一个电子和两个电子的运动

最显著地说明世界假设的优越性的例子，或许就是按照麦克斯韦-洛伦兹理论来指出作某种运动的点电荷所产生的效应. 让我们想象一个电荷为 e 的电子的世界线，并引入从任何始点算起的原时 τ. 为了找出在任一世界点 P_1 处电子所产生的场，我们作属于 P_1 的前锥(图 4). 既然这世界线的方

1) I. R. Schütz, "Das Prinzip der absoluten Erhaltung der Energie", Göttinger Nachr., 1897, p. 110.

向处处都是类时矢量的方向，这锥显然与世界线交于一点 P. 在 P 作世界线的切线，并通过 P_1 作这切线的法线 P_1Q. 设 P_1Q 的长度为 r，则根据前锥的定义，PQ 的长度一定是 r/c.

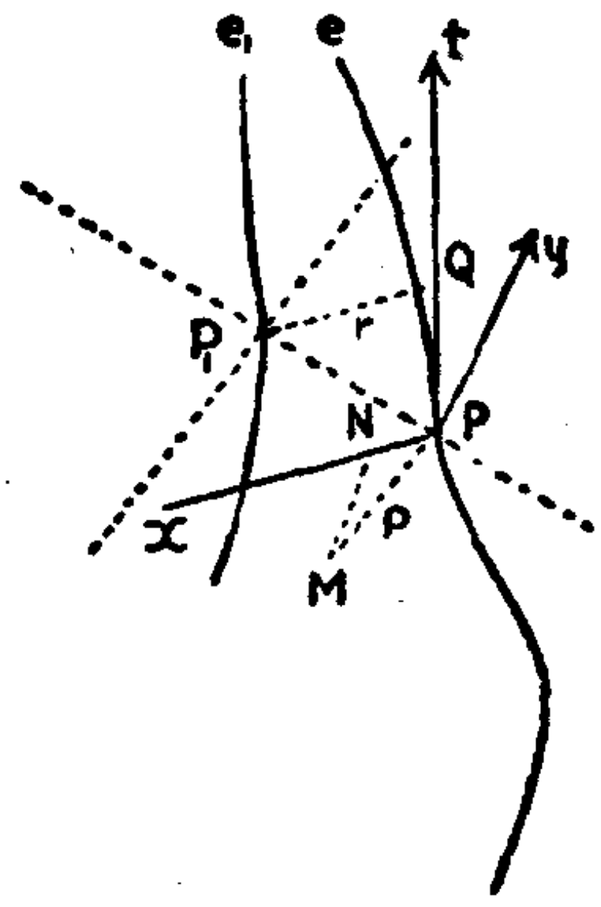

图 4

现在沿 PQ 方向上长度为 e/r 的矢量，以其沿 x, y, z 轴的分量代表在世界点 P 处 e 所激发的场的矢量势乘以 c，而以其沿 t 轴的分量代表在世界点 P 处 e 所激发的场的标量势. 这就是利埃纳和维歇特所表述的基本定律[1].

于是在电子所产生的场的描述中，我们看出，场被分为电力与磁力，对基本时间轴来说，这是一种相对的区分. 将两种力合起来描述的最清楚的方法是由力学中的偶单力组类推而得的，尽管这种类推并不完善.

现在我要描述一个运动着的点电荷对另一运动着的点电荷的有质动力作用. 让我们想象电荷为 e_1 的第二个电子经过世界点 P_1 的世界线. 象前面那样规定 P, Q, r, 然后作 P 处的曲率双曲线的中心 M（图 4），最后，作从 M 到一直线的法线 MN，该直线通过 P，平行 QP_1. 以 P 作为起点，现在我们规定一个参考系如下： t 轴取 PQ 方向，x 轴取 QP_1 方向，y 轴取 MN 方向，最后，z 轴的方向也定义为 t, x, y 轴的垂直线. 设 P 处的加速度矢量为 $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$, $\ddot{t}$; P_1 处的速度矢量为

---

1) A. Liénard, "champ électrique et magnétique produit par une charge concentrée en un point et animée d'un mouvement quelconque", *L'Eclairage Electrique*, **16**, 1898, pp. 5, 53, 106; E. Wiechert, "Elektrodynamische Elementargesetze", *Arch. Néerl.* (2), **5**, 1900, p. 549.

$\dot{x}_1$, $\dot{y}_1$, $\dot{z}_1$, t_1. 第一个运动电子 e 在 P 处作用在第二个运动电子 e_1 上的发动力矢量取下列形式:

$$-ee_1\left(t_1-\frac{\dot{x}_1}{c}\right)\mathfrak{R},$$

其中矢量 $\mathfrak{R}$ 的分量 $\mathfrak{R}_x$, $\mathfrak{R}_y$, $\mathfrak{R}_z$, $\mathfrak{R}_t$ 满足以下三个关系式:

$$c\mathfrak{R}_t-\mathfrak{R}_x=\frac{1}{r^2},\quad \mathfrak{R}_y=\frac{\ddot{y}}{c^2r},\quad \mathfrak{R}_z=0,$$

第四个关系是矢量 $\mathfrak{R}$ 垂直于 P_1 的速度矢量,它也仅仅是通过这个关系而依赖于速度矢量.

当我们把现在这种陈述与先前关于运动着的点电荷之间的有质动力作用的同一基本定律的那些表述[1]作一比较,我们就不能不承认,只有在四维世界中,这里所考虑的各种关系才最简单地表现出其内部本质,而在先验地强加于我们的三维空间中,它们所投下的只是一个非常复杂的投影.

在按照世界假设改造过的力学里,牛顿力学与现代电动力学之间令人不安的不协调就自然消失了. 在结束之前,我想稍微谈谈牛顿引力定律对世界假设的位置. 假定当质量为 m, m_1 的两个点描画出它们的世界线时, m 加在 m_1 上的发动力矢量的表达式,与刚才讨论电子时给出的形式恰好一样,只是必须以 $+mm_1$ 代替 $-ee_1$ 而已. 现在我们专门来讨论 m 的加速度矢量恒为零的情况. 让我们这样引入 t, 使得 m 看作是静止的, 并且假设只有 m_1 在 m 产生的发动力矢量的作用下运动. 现在若我们修改这个给定的矢量, 首先加上因子 $i^{-1}=\sqrt{1-v^2/c^2}$ (准确到 $1/c^2$ 阶量时,这因子等于 1),那么就可以看出[2],对于 m_1 的位置 x_1, y_1, z_1 及其时间变分,我们

---

1) K. Schwarzwald, Göttinger Nachr., 1903, p. 132; H. A. Lorentz, Enzykl. d. math. Wissensch., V, Art., **14**, p. 199.

2) H. Minkowski, 同本页脚注 1)的文献, p. 110.

恰恰又得出开普勒定律，只是 m_1 的原时 τ_1 代替了时间 t_1。由这个简单结论可以看出，在解释天文观察方面，采用与新力学结合的引力定律并不亚于用与牛顿力学结合的引力定律。

有质物体中电磁过程的基本方程也完全可以符合这世界假设。我将在别处证明，为了使这些方程适应世界假设，甚至完全不必放弃洛伦兹所指出的方法，即从电子理论的思想导出这些基本方程。

我想，世界假设毫无例外的有效性是世界的电磁图象的真正核心，由洛伦兹所发现并为爱因斯坦进一步所阐明的这个电磁图象，现在已经十分清楚。在其数学结果的发展中，将会提出大量建议，从实验上来证实这个假设，这样，凭着纯粹数学与物理学之间预先建立的协调思想，甚至足以安慰那些对放弃旧观点抱有反感或感到痛苦的人们。

注　　释

A. 索 末 菲

下列注释仅作为附录，以便完全不影响闵可夫斯基的正文。这些注释完全不是本质的，只是为了消除某些数学上的小困难，以免妨碍理解闵可夫斯基的卓越思想，此外并无其他目的。所给的参考文献只限于专门讨论他演说的论题方面的。从物理学观点来看，除了最后关于牛顿引力定律的讨论，在闵可夫斯基的演说中现在还没有任何东西必须取消。在认识论上如何看待闵可夫斯基关于空间时间问题的概念，那是另一回事，但在我看来，这个问题并不涉及他的物理学。

（1）66 页 16 行“另一方面，刚体的概念仅在满足群 G_∞ 的力学中才有意义。”闵可夫斯基死后一年，他的门生 M. 玻恩在一篇论文（*Ann. d. Physik*, **30**, 1909, p. 1）中从最广泛的意义上证实了这句话。他将相对刚体定义为这样的物体，它的每个体元甚至在加速运动中也经受相应于其速度的洛伦兹收缩。爱伦菲斯特（*Phys. Zeitschr.*, **10**, 1909,

p. 918)指出,不可能使这样一个物体作转动;赫格洛茨(*Ann. d. Phys.*, **31**, 1910, p. 393)和 F. 诺特(*Ann. d. Phys.* **31**, 1910, p. 919)指出,这种物体只有三个运动自由度. 还有人尝试定义具有六个或九个自由度的相对刚体. 但普朗克(*Phys. Zeitschr.*, **11**, 1910, p. 294)提出这样的见解,即相对论只能对略带弹性的物体起作用,而劳埃(*Phys. Zeitschr.*, **12**, 1911, p. 48)利用闵可夫斯基的方法和文中的图 2 证明在相对论中,每个固体都必须具有一定数目的自由度. 最后,赫格洛茨(*Ann. d. Physik*, **36**, 1911, p. 453)提出一个相对论性弹性理论. 按照这理论,若物体的运动在玻恩的意义下不是相对刚性的,则弹性张力总是会出现的. 所以相对刚体在这个弹性理论中所起的作用和通常的刚体在通常的弹性理论中所起的作用相同.

(2) 67 页 21 行. "对第二条带来说,若 dx/dt 等于 v,则简单的计算给出 $OD' = OC\sqrt{1 - v^2/c^2}$." 在图 1 中,令 $\alpha = \angle A'OA$, $\beta = \angle B'OA' = \angle C'OB'$,其中最后两个角的相等是由渐近线对新坐标轴(双线的共轭径)的对称位置推出的[1]. 由于 $\alpha + \beta = \frac{1}{4}\pi$,

$$\sin 2\beta = \cos 2\alpha.$$

在三角形 $OD'C'$ 中,正弦定律给出

$$\frac{OD'}{OC'} = \frac{\sin 2\beta}{\cos\alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha},$$

或者由于 $OC' = OA'$, 所以

$$OD' = OA'\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha} = OA'\cos\alpha(1 - \mathrm{tg}^2\alpha). \qquad (1)$$

若 x, t 是点 A' 在 x, t 系统中的坐标,则 $x \cdot OA$ 和 $ct \cdot OC = ct \cdot OA$ 分别是它与坐标轴的相应距离,于是我们有

$$x \cdot OA = \sin\alpha \cdot OA', \quad ct \cdot OA = \cos\alpha \cdot OA', \frac{x}{ct} = \mathrm{tg}\alpha = \frac{v}{c}. \qquad (2)$$

把 x 与 ct 的这些值代入双曲线方程中,我们就得出

$$OA'^2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = OA^2, \quad OA' = \frac{OA}{\cos\alpha\sqrt{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}}, \qquad (3)$$

---

1) 在图中索末菲似乎以 ct 代替闵可夫斯基的 t 作为一个坐标了. ——英译者注

所以，由于(1)和(2)，得

$$OD' = OA\sqrt{1 - \mathrm{tg}^2\alpha} = OA\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

因为 $OA = OC$，这就是所要证明的公式。

此外，在直角三角形 OCD 中，

$$OD = \frac{OC}{\cos\alpha} = \frac{OA}{\cos\alpha}.$$

所以方程(3)也可以写成

$$OA' = \frac{OD}{\sqrt{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}} \quad 或 \quad \frac{OD}{OA'} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

此式和式(4)一起给出比例

$$OD:OA' = OD':OA,$$

由于 $OA' = OC'$ 和 $OA = OC$，所以这比例式与 68 页第 4 行所用的

$$OD:OC' = OD':OC$$

完全相同。

(3) 69 页第 21 行，“在 O 的前锥与后锥之间的任何世界点，可以利用参考系来安排得使其与 O 同时，但同样也可以安排得使其早于 O 或迟于 O.” M. 劳埃（*Phys. Zeitschr.*, **12**, 1911, p. 48）由探究爱因斯坦定理（在相对论中，没有任何因果过程能够以大于光速的速度传播，即“信号速度$\leqslant c$”）的证明而推溯到上述结果。假定事件 O 引起另一事件 P，又设世界点 P 位于 O 的两锥之间的区域，在这种情况下，结果会以大于光传播的速度（相对于现在讨论的参考系 x, t）从 O 传送到 P，当然其中假定了结果 P 迟于原因 O，即 $t_p > O$ 的。而现在照上述引文，参考系可以改变，使 P 变得早于 O，这就是说，参考系 x', t' 可以用无数种方法选择，使 t'_p 变得小于零。这是与因果观念相矛盾的。因此 P 一定要么位于 O“之后”，要么处于 O 的后锥上，这就是说，从 O 发出以引起世界点 P 处第二个事件的一个信号，其传播速度必定 $\leqslant c$. 当然，即使在相对论中，也可能定义超光速传播的过程。这一点在几何学上可以用十分简单的方法做到。但是这种过程永远不能做信号，也就是说，不可能任意地引入这种过程和用它来推动远处的继电器。例如，或许存在一种光媒质，在其中“光速”大于 c. 但在那种情况下，光速应理解为在一个无限的周期性波列中相的传播。这是决不能用来发

信号的．另一方面，在所有情况下以及对于任何光媒质的结构，波前总是以速度 c 传播的；（例如参看 A. Sommerfeld, "Festschrift Heinrich Weber," Leipzig, Teubner, 1912, p, 338 或 *Ann. d. Physik*, **44**, 1914, p. 177.）

（4）70 页第 15 行．有一次闵可夫斯基对我说，原时的基元 $d\tau$ 不是全微分． 因此若我们用不同的世界线 1，2 把世界点 O 和 P 联结起来，则

$$\int_1 d\tau \neq \int_2 d\tau .$$

若世界线 1 平行于 t 轴，使得在选定的参考系中的第一个转移表示静止，显然

$$\int_1 d\tau = t, \quad \int_2 d\tau < t .$$

运动钟之迟于静止钟即取决于此．正如爱因斯坦曾经指出的那样，这个论断是基于以下不可能验证的假定的，即运动的钟实际上指示它本身的原时，即它总是给出对应于任一瞬间的速度（视为常数）状态的时间． 为了同世界点 P 处的静止钟比较，运动钟自然必须作加速运动（速率或方向的改变）．所以动钟迟缓实际上并不表示"运动"，而是表示"加速运动"． 于是这就与相对性原理不相矛盾．

（5）71 页第 14 行．"曲率双曲线"这术语，完全是仿照曲率圆的基本概念而提出的． 如果不用实时间坐标 t，而用虚坐标 $u = ict$，即 c 倍于闵可夫斯基所用的坐标（见 73 页第 11 行）则这种相似就变成分析上的恒等式了．

根据 69 页，x，t 平面上一条内部双曲线（$k = \rho$）具有下列方程：

$$x^2 - c^2t^2 = \rho^2,$$

所以在 x，u 平面上有

$$x^2 + u^2 = \rho^2 .$$

于是当 ϕ 表示一个纯虚数的角时，上式可写成参数形式：

$$x = \rho\cos\phi, \quad u = \rho\sin\phi .$$

这样，正如我所指出的（见 *Ann. d. Phys.*, **33**, p. 649 §8），双曲线运

动也可以表示成“圆周运动”，利用这种做法，运动的主要特性（场的传递，某种离心力的出现）就特别明晰地表现出来。 对双曲线运动来说，我们有

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{-du^2 - dx^2} = \frac{\rho}{c}|d\phi|,$$

于是

$$\dot{x} = \frac{dx}{d\tau} = -ic\sin\phi, \quad \dot{u} = \frac{du}{d\tau} = +ic\cos\phi,$$

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{d\tau} = \frac{c^2}{\rho}\cos\phi, \quad \ddot{u} = \frac{d\dot{u}}{d\tau} = \frac{c^2}{\rho}\sin\phi.$$

所以在双曲线运动中，加速度矢量的长度为 c^2/ρ. 既然任何给定的世界线都与曲率双曲线在三个点上接触，因此它就具有与双曲线运动相同的加速度矢量，而其长度为 c^2/ρ，正如71页第18行上指出的那样.

圆周运动 $x^2 + u^2 = \rho^2$ 的中心 M，显然是点 $x = 0$，$u = 0$，而所有双曲线上的点都与此中心相隔恒定的“距离”，就是说，具有常值矢径长度. 所以 ρ 表示图3中的间隔 MP.

(6) 72页第9行. 力 X，Y，Z 若要作成一个“力矢量”，就得乘上 $i = dt/d\tau$，这点可解释如下.

依照闵可夫斯基（见72页第16行）动量矢量由 $m\dot{x}$，$m\dot{y}$，$m\dot{z}$，mi 定义，其中 m 表示“常值力学质量”，或者象闵可夫斯基在另一处更明白地指出的那样，表示“静质量”. 若我们保留牛顿运动定律(动量对时间的变化率等于力)，就得令

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = X, \quad \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = Y, \quad \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = Z.$$

乘上 i 就使左边成为闵可夫斯基的意义下的矢量分量. 所以 iX，iY，iZ 也是“力矢量”的头三个分量. 第四个分量 T 可以由以下的条件确定地推出，即力矢量应垂直于运动矢量. 所以当静质量为常值时，质点力学的闵可夫斯基方程是

$$m\ddot{x} = iX, \quad m\ddot{y} = iY, \quad m\ddot{z} = iZ, \quad m\ddot{i} = iT.$$

然而只有当物体所包含的能量不因运动而改变时，或者用普朗克的话

来说，当运动是"绝热和等容"地发生时，才能保持静质量为常值的假定。

(7) 74 页和 75 页。 这里给出的注释的特征，就在于它们完全不依赖于任何特殊参考系。 正如闵可夫斯基在 74 页假设的那样，它们给出"世界线（或世界点）之间的互易关系"作为"物理定律的最完善的表述"。例如在 75 页，电动力的势(四元势)就不涉及坐标轴 x, y, z, t, 除非要照习惯把它分成标量部分和矢量部分。而从相对论的观点来看，这些部分并没有独立的不变性的意义。

作为对闵可夫斯基演说的注释，我曾用闵可夫斯基的方法从麦克斯韦方程导出了四元势的不变的分析形式和两个电子之间的有质动作用，从而给出了关于闵可夫斯基这些解释的另一种见解。 在此不详细研究这些，请读者参看我的文章（*Ann. d. Phys.*, **33**, 1910, p. 649, §7）或劳埃的著作（"Das Relativitätsprinzip," Braunschweig, Vieweg, 1913, §19.）。 也可以同闵可夫斯基关于相对性原理的演说(由我编辑的，见 *Ann. d. Phys.*, **47**, 1915, p. 927）进行比较，其中四元势放在电动力学的开首，这样这理论就化为其最简单形式了。

(8) 74 页第 11 行。用"第二类矢量"（我建议称之为"六元矢量"，这个术语看来逐渐得到承认）以不变的方式表示电磁场是闵可夫斯基关于电动力学的见解中一个特别重要部分，而闵可夫斯基关于第一类矢量(或四元矢量)的思想，在他之前，部分地已由彭加莱考察过了(*Rend. Circ. Mat. Palermo*, **21**, 1906)，六元矢量的引入才是新东西。 象六元矢量那样，力学的偶单力组(代表一个单独的力和一个力偶）依赖于六个独立参数。 既然在电磁场中"分成电力与磁力是一种相对的区分"，那么对偶单力组来说，如所周知，就可以用许多种方法将其分成单个力和力偶。

(9) 75 页第 13 行。 闵可夫斯基表述的相对论形式的牛顿定律，在文中提到的那种加速度为零的特殊情况，已包括在彭加莱提出的更一般的形式中(见上述引文)。但另一方面，当考虑到加速度时，闵可夫斯基的表述又比彭加莱的表述前进了一步。 闵可夫斯基或彭加莱表述的引力定律表明，可以用许多种方法使牛顿定律与相对论一致起来。牛顿定律通常被当作点定律，所以在某种意义上引力被看成是超距作用。

爱因斯坦从 1907 年起提出的广义相对论使我们对于引力问题得到了更深刻的理解. 现在引力不仅被看作是一种场的作用，并由时空微分方程描述的(从现在的观点来看，这似乎是不可反驳的)，同时它也和扩充到任何变换的相对性原理有机地联系起来了，而闵可夫斯基与彭加莱只是以比较表面的方式使引力适应了相对性假设. 在广义相对论中，时空结构是由引力决定的，或者说，同引力一起确定的. 所以利用扩充了的闵可夫斯基的思想可以这样来表述相对性原理，即假设了物理量关于一切点变换的协变性，使得进入物理定律的是不变线素的一些系数.

(10) 76 页第 4 行. 闵可夫斯基发展了“有质物体中电磁过程的基本方程”(见 Göttinger Nachrichten, 1907). 但他没有来得及完成“在电子理论基础上导出这方程”的工作. 他在这方向上的尝试，已为 M. 玻恩所实现，并和“基本方程”一起收集在 Otto Blumenthal 所编辑的论文集第一卷中(莱比锡，1910).

论引力对光传播的影响

A. 爱因斯坦

在四年前发表的一篇论文[1]中，我曾试图解决这样一个问题：光的传播是否受引力影响．现在之所以重新提出这个论题，是因为我感到以前对这个题目的论述不能令人满意，而更有力的理由是现在我看到前一篇论文里一个最重要的结论有可能用实验来检验．因为根据这里提出的理论可以推出，光线在太阳附近经过时，会受到太阳引力场作用而偏转，于是太阳与在它附近出现的恒星之间的角距离会显得增加一弧秒左右．

从这些思想出发，产生了有关引力的进一步的结果．可是由于整个研究的解释比较难于理解，下面给出的仅仅是一些很初步的思想，从这里面读者自己可以容易地领会这理论的假定及其思路．这里导出的关系式，即使理论基础是可靠的，也只是正确到第一近似．

§1 关于引力场物理性质的假设

假定在一个均匀引力场（重力加速度 γ）里有一静止坐标系 K，这系统的取向要使得引力场的力线指向 z 轴的负方向．又假定在无引力场的空间中有第二个坐标系 K'，它以均匀的加速度（γ）向其 z 轴正方向运动．为了避免不必要

1) A. Einstein, *Jahrbuch für Radioakt. und Elektronik*, **4**, 1907.

的复杂化，我们暂且撇开相对论，从通常的运动学观点来考察这两个系统，并以通常的一般力学观点来考虑在其中发生的运动.

当不受其他质点的作用时，任何质点相对于K的运动和相对于K'的运动一样，都满足下列方程：

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0,\qquad \frac{d^2y}{dt^2}=0,\qquad \frac{d^2z}{dt^2}=-\gamma.$$

对加速系统 K' 来说，这方程可以直接从伽利略原理推出，而对于均匀引力场里的静止系统K来说，上述方程来自下列经验事实，即所有物体在这种场里都同样地受到均匀加速. 在引力场里一切物体都同步降落是人们观察自然界总结出的最普遍的经验之一. 尽管如此，这条规律在我们的物理世界图象的基础上却一直找不到应有的地位.

但是如果假定系统K与 K' 在物理上是完全等效的，也就是说，如果我们假定K同样可以被看作是无引力场空间中均匀加速的系统，那么上述经验定律就得到十分令人满意的解释. 这一完全的物理等效性假设，就使谈论参考系统的绝对加速度成为不可能了，正如通常的相对论禁止我们谈论系统的绝对速度一样[1]；并且，使得“一切物体在引力场中以同一加速度落下”成为理所当然的事了.

只要限于在牛顿力学有效的领域内研究纯力学过程，我们就可以肯定系统K与系统 K' 的等效性. 但是除非对一切物理过程来说，K与 K' 都等效，也就是说，除非对K的自然定律与对 K' 的自然定律完全一致，否则我们这个观念就没有什么更深刻的意义. 作了这个假定以后，我们就可以得到

1) 当然，我们不能用无引力场系统的某种运动状态来代替任意引力场，同样我们也不能用一个相对论变换，把媒质中所有点的任一种运动状态变为静止状态.

一条原理，这条原理如果真是正确的，将具有巨大的启发意义．因为这样一来，通过研究在均匀加速参考系发生的过程，我们就能获得均匀引力场中各种过程的发展的知识．现在我们首先要指出，从寻常的相对论的立场来看，在我们的假设里含有多大程度的可能性．

§2 论能量的引力

相对论所给出的结论之一，就是物体的惯性质量随着它所含有的能量而增加；假如能量的总增量为 E，则惯性质量的增加等于 E/c^2，c 表示光速．现在我们要问，相应于惯性质量的增加，引力质量有没有增加？如果没有增加，则物体在同一个引力场中下落的加速度，就会随着它所含有的能量而变化．这样一来，相对论一个非常好的结果，即质量守恒定律可以归并入能量守恒定律这一结果就不能保持了，因为那样将迫使我们放弃质量守恒定律的旧形式，即惯性质量的守恒，而保持引力质量守恒定律的形式．

然而必须承认，这是非常不可能的．另一方面，通常的相对论并未提供任何证据来推断物体的重量依赖于它所含有的能量．但是我们要证明，系统 K 与系统 K' 等效的假设必然导致能量具有引力的结论．

假定在 K 的 z 轴上放着带有测量仪器的物质系统 S_1 与 S_2，两者的距离为 h[1]，使得 S_2 的引力势比 S_1 的引力势大 γh．设想从 S_2 向 S_1 发射一定的能量 E．若 S_1 和 S_2 的能量用完全一样的装置（拿到系统 K 的同一个地方来比较过的）来测量．至于由辐射传送能量的过程，我们不能作先验的断言，因为我们并不知道引力场对辐射以及 S_1 和 S_2 中的测量仪器有

1）S_1 和 S_2 的大小比起 h 来可视为无穷小。

什么影响.

然而根据K和 K' 等效的假设，我们可以用朝着 x 轴的正向作匀加速运动的无引力场系统 K' 来代替均匀引力场中的系统 K，而物系 S_1 和 S_2 是由系统 K' 的 x 轴牢固地连接起来的.

我们试从 K_0 的角度来分析能量以辐射形式从S_2迁移到 S_1 的过程，系统 K_0 是无加速的. 从 S_2 向 S_1 发射辐射能 E_2 这一瞬间,令 K' 相对于 K_0 的速度为零. 经过一段时间 h/c (准确到一阶近似)后，辐射将到达 S_1. 而在这一瞬间，S_1 相对于 K_0 的速度是 $\gamma h/c = v$. 因此根据通常的相对论，辐射到达 S_1 时所具有的能量不是 E_2，而是稍大一点的 E_1. 准确到一阶近似，E_1 和 E_2 是由下列方程联系起来的[1]:

$$E_1 = E_2\left(1 + \frac{v}{c}\right) = E_2\left(1 + \gamma\frac{h}{c^2}\right). \qquad (1)$$

假如在一个不是加速的而是具有引力场的系统K中发生同样的过程,根据我们的假定,完全同样的关系也成立. 在这种情况下，如果在 S_1 处,Φ的任意常数为零，我们可以用在 S_2 的引力矢量的势Φ来代替 γh. 于是我们得到方程

$$E_1 = E_2 + \frac{E_2}{c^2}\Phi. \qquad (1a)$$

这方程表示上述过程的能量定律. 若用同一方法测量，则到达 S_1 的能量 E_1 将大于从 S_2 发射的能量 E_2，其差值就是质量 E_2/c^2 在引力场中的势能. 这就证明了，为了满足能量原理，我们必须把相当于引力质量 E/c^2 的引力势能也归诸发射前的能量E. 于是K与 K' 等效的假设克服了在本节开

1) 见“物体的惯性是否与它所含的能量有关”一文.

始所提到的困难，而这个困难在通常的相对论中是悬而未决的.

如果考虑下列循环操作，以上结果的意义就特别清楚:

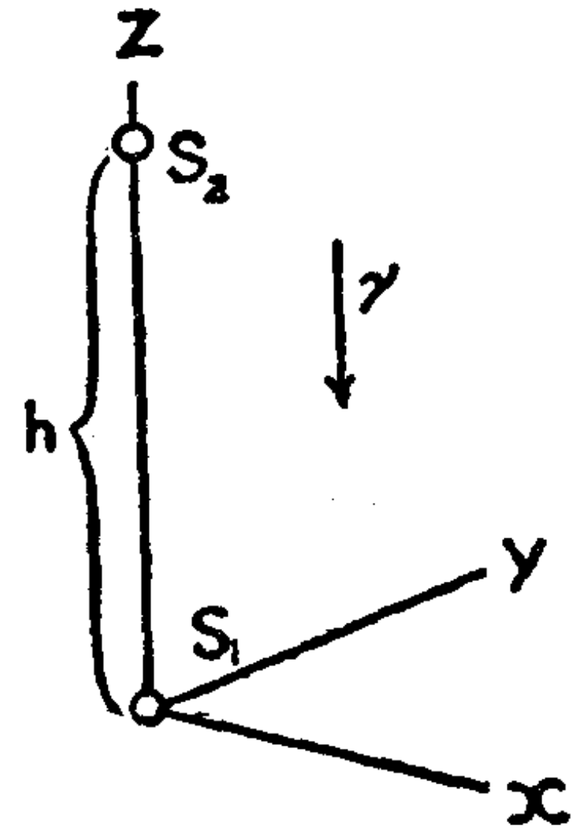

图 1

1. 能量 E（在 S_2 测得的值）以辐射形式从 S_2 向 S_1发射，根据刚才得到的结果，在 S_1吸收到的能量是 $E(1+\gamma h/c^2)$（在 S_1 测得的值）.

2. 把质量为M的物体W从 S_2 放下到 S_1，在这过程中所做的功为 $M\gamma h$.

3. 当物体W处于 S_1 时，能量E从 S_1 传输到 W. 设物体引力质量在该处从 M 改变到 M'.

4. 把 W 再提升到 S_2，在这过程中所做的功为 $M'\gamma h$.

5. 令E从 W 传输回 S_2.

这个循环操作的效果仅仅是 S_1 的能量增加了 $E\gamma h/c^2$，而能量 $M'\gamma h - M\gamma h$ 以机械功的形式传送给了这系统. 根据能量原理，我们必须令

$$E\gamma\frac{h}{c^2}=M'\gamma h-M\gamma h$$

或

$$M'-M=E/c^2. \tag{1b}$$

这样，引力质量的增加等于 E/c^2，所以也就等于惯性质量的增加，正如相对论所给出的那样.

从系统K与 K' 的等效性（即对K的引力质量恰恰等于对 K' 的惯性质量）出发，上述结果将更加直接地显示出来. 因而能量一定具有与其惯性质量相等的引力质量. 设有一个质量 M_0 悬挂在系统 K' 的弹簧秤上，由于 M_0 的惯性，弹

簧秤将指示出视重 $M_0\gamma$. 若把能量 E 传入 M_0，根据能量具有惯性的定律，弹簧秤的读数应为 $(M_0 + E/c^2)\ \gamma$. 假如在系统 K 中(即在引力场中)重复这个实验，根据我们的基本假设，必然产生完全一样的结果.

§3 引力场中的时间和光速

在匀加速系统 K' 里，如果从 S_2 向 S_1 发出的辐射，用 S_2 的时钟为准，具有频率 ν_2，则当辐射到达 S_1 时用一个与 S_1 完全一样的时钟为准，其频率就不再是 ν_2，而是稍大一点的频率 ν_1. 准确到一阶近似，

$$\nu_1 = \nu_2\left(1 + \gamma\frac{h}{c^2}\right). \tag{2}$$

因为若再引入无加速的参考系 K_0，相对于这参考系，在发射光的时刻，K' 速度为零，那么当辐射到达 S_1 时，S_1 相对于 K_0 的速度为 $\gamma h/c$，因此根据多普勒原理，立刻就能得出上述关系.

根据系统 K 与 K' 等效的假设，在有均匀引力场的静坐标系 K 里，如果发生前面描述的那种辐射传输，这个方程也有效. 于是推出：从 S_2 发射的具有一定引力势的光线，如果在发射时的频率为 ν_2 (以 S_2 的时钟为准)，当它到达 S_1 时，就会具有不同的频率 ν_1 (用 S_1 里完全一样的钟测量). 我们用 S_2 的引力势 Φ 代替 γh (令 S_1 的引力势为零)，并假定对均匀引力场导出的关系对其他形式的场也有效，则得

$$\nu_1 = \nu_2\left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right). \tag{2a}$$

这个结果(根据我们的推导，它只准确到一阶近似)首先允许我们作以下的应用. 设 ν_0 为基本光发生器用精确时计在同一地点测得的振动数. 让我们设想，它们都位于太阳表面的某个

地方（S_2 所在之处）。从那里发出的光一部分到达地球（S_1），我们在地球上用同刚才那只完全一样的钟 U 来测量到达的光线的频率。由式（2a）得出

$$\nu = \nu_0\left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right),$$

其中 Φ 是太阳表面和地球之间引力势之差（负值）。按照我们的观点，太阳的光谱线和地面光源相应的光谱线相比较，必然会稍向红端移动，而且事实上移动的相对数值约为

$$\frac{\nu_0 - \nu}{\nu_0} = -\frac{\Phi}{c^2} = 2 \cdot 10^{-6}.$$

如果产生这太阳光谱带的情况是确切地知道的，则这个移动就能够用测量来证实。但是由于其他作用（如压力，温度）会影响谱线的中心位置，因此要判明所推断的引力势的影响是否真的存在仍然是困难的[1]。

肤浅地分别考虑方程（2）或（2a）似乎会得出荒谬的结果。若从 S_2 向 S_1 恒定地发射光线，达到 S_1 的每秒周数怎么会和 S_2 发射的每秒周数不同呢？回答很简单。我们不能简单地分别把 ν_2 或 ν_1 当作频率（即每秒的周数），因为我们还没有确定系统 K 的时间。ν_2 所表示的是按 S_2 的钟 U 的时间单位计算的每秒周数，而 ν_1 则表示以 S_1 里完全一样的钟为准的每秒周数。没有什么理由要求我们假定，位于引力势不同之处的各个钟 U 必须走得一样地快慢。相反，我们恰恰应当这样地定义 K 的时间，使得 S_2 与 S_1 之间波峰和波谷的数目不依赖于时间的绝对值；因为所观察的过程本来是稳定过程。如果不满足这条件，我们就会得出一种时间定义，应用这个定

1) L. F. Jewell (*Journ. de Phys.*, **6**, 1897, p. 84)，特别是 Ch. Fabry 和 H. Boisson (Comptes rendus, 148, 1909, pp. 688—690)，实际上已发现这种精细光谱线朝光谱红端的移动，其数量级与此处算出的相同，但他们把这种移动归诸吸收层的压力效应。

义，时间就要明显地归并到自然定律里去，而这样做当然是不自然和脱离实际的。 所以 S_1 处的钟和 S_2 处的钟并非都能正确地指示“时间”。假如在 S_1 处我们用 U 钟测量时间，则在 S_2 处测量时间就得使用另一只钟 U'，当把钟 U' 和钟 U 放在同一个地点比较时，U' 比 U 走得慢，即 U 的时间为 U' 时间的 $\left(1+\frac{\Phi}{c^2}\right)$ 倍。因为若用这样的钟来进行测量，上述光线从 S_2 发射时的频率为

$$\nu_2\left(1+\frac{\Phi}{c^2}\right),$$

根据式（2a），它就等于这一道光线到达 S_1 时的频率 ν_1。

这对我们的理论有根本性的重要影响。因为若在无引力的加速系统 K' 里的不同地点，用同样构造的钟 U 测量光速，在所有这些地点测得的数值都是一样的。根据我们的基本假设，同一结论对于系统 K 也成立。但是刚才我们说过，在引力势不同的地点测量时间，必须使用构造不一样的钟。 因为要测量相对于坐标原点引力势为 Φ 之处的时间，就得用这样的钟 U'，当它移到坐标原点时，就比在原点测量时间的钟走得慢，即 U 时间为 U' 时间的 $(1+\Phi/c^2)$ 倍。若把坐标原点的光速称为 c_0，则引力势为 Φ 处的光速 c 由下式给出：

$$c=c_0\left(1+\frac{\Phi}{c^2}\right). \tag{3}$$

按照这一理论，光速不变原理仍然有效，但是在形式上，它与基于通常的相对论的光速不变原理有所不同。

§4 光线在引力场中的偏转

刚才已证明：光速在引力场中是地点的函数。从这个前提出发，利用惠更斯原理，我们容易推出，穿过引力场而传播

的光线会经受偏转. 设 E 是平面光波在时间 t 的波前，P_1 和 P_2 为波平面上相距为单位长度的两点. P_1 和 P_2 位于这张

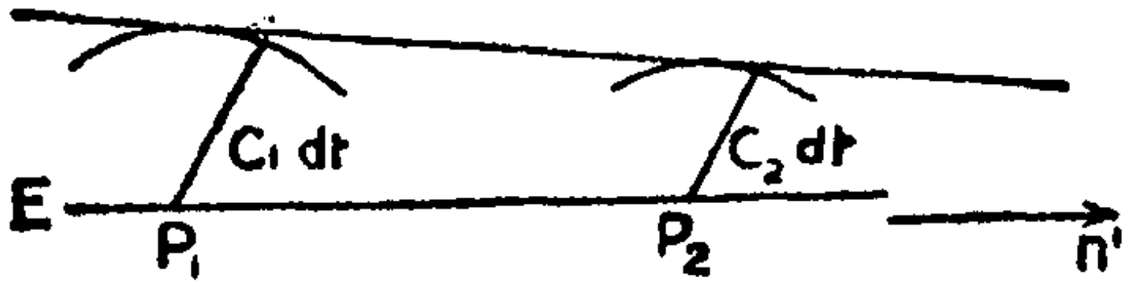

图 2

纸的平面上，而这平面要选取得使 Φ 在平面法线方向所取的微商为零，从而 c 的微商也为零. 以 P_1 和 P_2 为圆心，分别以 c_1dt 和 c_2dt 为半径作圆(其中 c_1 和 c_2 分别表示 P_1 和 P_2 处的光速)，并作两圆的公切线，我们就得到在时间 $t+dt$ 的相应波前，或者不如说，它在纸平面上的截线. 在路程 cdt 上，光线的偏转角度是

$$(c_1 - c_2)dt = -\frac{\partial c}{\partial n'}dt,$$

当光线弯向 n' 增加的方向时，偏转角取正值. 于是光线在单位路程上偏转的角度是

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial n'},$$

或者根据式(3)为

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial n'}.$$

最后，为光线在任何路程 (s) 上朝 n' 正向经受的偏转，我们求得下式:

$$d = -\frac{1}{c^2}\int \frac{\partial \Phi}{\partial n'}ds. \tag{4}$$

如果直接考虑光线在匀加速系统 K' 中的传播，然后把结果转换到系统 K，再由此过渡到任何形式的引力场的情况，我们会获得同样的结果.

根据方程(4)，光线在天体附近经过时，会朝引力势减少的方向(即指向天体)受到偏转，其数值为

$$\alpha = \frac{1}{c^2}\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \frac{kM}{r^2}\cos\theta ds = 2\frac{kM}{c^2\Delta},$$

其中 k 表示引力常数；M 为天体质量；Δ 为光线与天体中心的距离.于是光线经过太阳时受到的偏转总共为 $4.10^{-6}=0.83$ 弧秒. 星体与太阳之间的角距离看上去会增加这样一个数量. 由于日全蚀时，太阳近旁这部分天空的恒星是看得见的，我们的理论的结果就可以同实验相比较. 对木星来说，预计的位移约为上述数值的 1/100. 假如天文学家愿意着手考察在此提出的问题，那是再好没有了. 先不要问是什么理论，现在摆着这样一个问题，我们能不能够就以目前可利用的设备来发现引力场对于光传播的影响.

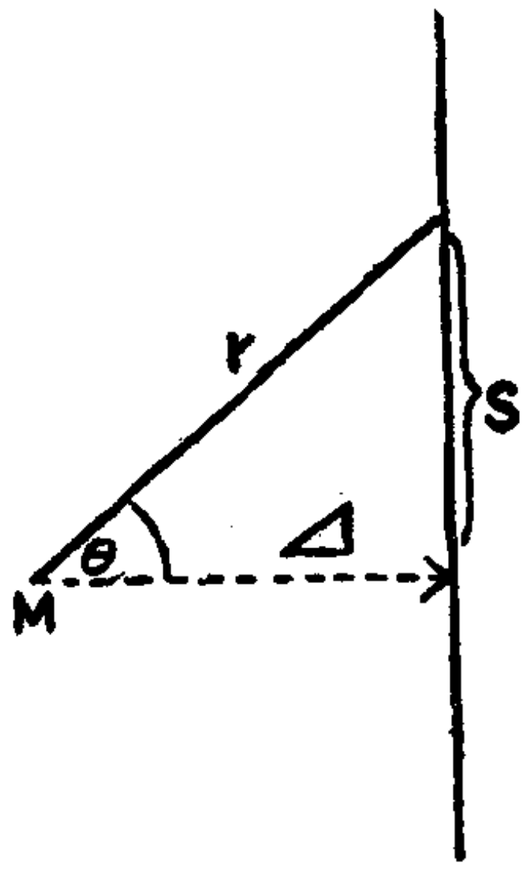

图 3

广义相对论基础

A. 爱因斯坦

一、关于相对性假设的基本考查

§1 关于狭义相对论的评述

狭义相对论是以下述假设为基础的，这个假设也满足伽利略-牛顿力学.

如果这样选取一个坐标系 K，使得对 K 来说物理定律以其最简单的形式成立，那么同一定律在相对于 K 作匀速平移的坐标系 K' 中也成立. 这一假设我们称为“狭义相对性原理”. “狭义”这个词是表示这个原理是局限于 K' 相对于 K 作匀速平移运动的场合的，而 K' 与 K 的等效性不能推广到 K' 相对于 K 作非均匀运动的场合.

这样，狭义相对论并未因相对性假设而背离经典力学.但是把真空中光速不变的假设同狭义相对性假设结合起来，用熟知的方法，可以推出同时性的相对性、洛伦兹变换以及关于运动物体和运动钟的行为的定律.

狭义相对论诚然引起了空间时间理论的深刻改变，但仍然有一个重要的地方未受影响. 因为纵使按照狭义相对论来说，几何学定律还是被直接解释成联系各个静止固体可能的相对位置的定律，更一般地说，运动学定律要解释成测量物体和钟的关系的定律. 对于一个静止刚体上两个选定的质点，

总是对应于一个长度完全确定的距离，这距离与物体的位置、方向、时间都无关. 在优先参考系里相对静钟指针的两个选定的位置，总是对应于一个确定的时间间隔，这个间隔也与地点、时间无关. 我们即将看到，广义相对论不能再固执坚持对空间和时间作这种简单的物理解释.

§2 推广相对性假设的必要性

不仅在经典力学中，甚至在狭义相对论中也仍然存在一个固有的认识论上的缺陷. 这个缺陷或许是 E. 马赫最先清楚地指出的. 现在我们用下面的例子来说明这点. 两块大小、性质都相同的液体自由地飘浮在空间中，两者之间保持很大一段距离，并远离其他一切物体，以致仅需考虑同一物体上各部分相互作用的引力. 设这两个物体之间的距离不变，而且在两个物体上，都不存在各部分之间的相对运动. 但是令每一质量，在与另一质量相对静止的观察者看来都是以恒定的角速度绕着两质量的联线转动. 这是两物体之间能检验出的相对运动. 现在我们设想，每一物体都用相对于自身静止的测量仪器测量过，判明了 S_1 的表面是球面，而 S_2 的表面是迴转椭球面. 于是我们立刻可以提出一个问题：两物体存在这种差别的理由是什么？除非指出的理由是某种可观察的经验事实，否则任何回答都不能认为是在认识论上完善的[1]. 除了在可观察事实归根到底表现为原因和结果时，因果律并没有表达经验世界的意义.

牛顿力学在这问题上并没有给人以满意的回答. 它只是断言：力学定律适用于与物体 S_1 相对静止的空间 R_1，但不适用于与物体 S_2 相对静止的空间 R_2. 然而，这样引入的优先

1）当然从认识论的角度看来是完善的回答，如果与其他经验有矛盾，那么在物理上还会是根据不足的.

的伽利略空间 R_1 不过是虚构的原因，而不是可以观察到的事物．所以很清楚，在所考虑的情况下，牛顿力学仅仅是表面上而不是真正地满足因果律的要求，因为它把物体 S_1 与 S_2 的可观察到的差别归诸虚构的原因 R_1．

唯一能令人满意的解答应当是这样的，从 S_1 与 S_2 所组成的物理系统本身，找不出任何可以设想的原因，能够解释 S_1 与 S_2 的不同性状．所以这原因一定在这个系统以外．我们必须认为，一般的运动定律，特别是确定 S_1 与 S_2 的形状的定律必须是这样的：即 S_1 与 S_2 的力学性状在相当重要的某些方面，部分地取决于遥远的质量，这些质量是没有包括在刚才所考虑的系统之内的．这些远处的质量及其相对于 S_1 与 S_2 的运动，应视为我们这两个物体 S_1 与 S_2 不同性状的原因所在（这一定是可能观察的）．这样，遥远的质量就取代了虚构的 R_1 所扮演的角色，在一切可以设想的彼此作相对运动的空间 R_1，$R_2\cdots$中，没有一个可以先验地当作优先空间而不恢复上述认识论缺陷．物理定律必须具有这样一种性质，即适用于任何一种运动的参考系．沿着这条路线，我们将达到相对性假设的推广．

除了这一认识论上的重要论点之外，还有一个熟知的物理事实，是有利于推广相对论的．设 K 是一个伽利略参考系，就是说，离其他物体充分远的质量，相对于这系统（至少在所考虑的四维区域内）是作匀速直线运动的．令 K' 为第二个参考系，它相对于 K 作匀加速平移．于是离其他物体充分远的一个质量，相对于 K' 就要作加速运动，其加速度的大小与方向，不依赖于这质量的物质成份和物理状态．

这是否就意味着，相对于 K' 静止的观察者，可以推断他是处于一个“真正”加速的参考系呢？回答是否定的；因为可以自由运动的质量对于 K' 的上述关系，也能用以下方法解

释得一样好. 我们可以说,参考系 K' 是无加速的,然而所考虑的时空区域是受到引力场的支配的, 这个引力场使所有的物体相对于 K' 都作加速运动.

我们之所以可能采取这种观点,是由于经验的启示,因为自然界存在一种力场,即引力场,它具有给一切物体以相同加速度这种独特性质[1]. 物体相对于K'的力学性状是同它在通常所谓"静止"或"优先"系统中所表现于经验中的性状是一样的. 所以从物理学的立场来看,这个假设本身自然意味着,系统K与 K' 同样有权被看作是"静止"系统,那就是说,作为描述物理现象的参考系,两者具有平等的地位.

从这些考虑可以看出, 由于探求广义相对论, 就要导致一种引力理论, 因为我们只要一改变坐标系, 就能"产生"一个引力场. 同样也很明显, 真空中光速不变原理必须加以修正, 因为我们容易看出, 如果光在 K 中以某一不变速度沿直线传播, 那么一般来说, 它相对于 K' 的路径就一定是曲线.

§3 时空连续区. 表示自然界普遍定律的方程的广义协变性条件

在经典力学里和在狭义相对论里一样, 空间和时间坐标具有明显的物理意义. 当说一个事件点的 X_1 坐标为 x_1, 就表示事件点在 X_1 轴上按欧几里得几何法则用刚杆确定的投影,是由给定杆(长度单位)从坐标原点起沿 X_1 轴量 x_1 次而得到的. 而说一个事件点的 X_4 坐标是 $x_4 = t$ 的意思是,从事件出现开始测量, 标准钟已经度过了 $x_4 = t$ 个周期,这只标准钟用一定的单位周期来测量时间, 它相对于坐标系是静

1) 厄缶 (Eötvös) 以很大的精确度用实验证明了引力场具有这种性质.

止的，并且实际上与事件点在空间上是重合的[1]。

这样的空间时间观点历来存在于物理学家的头脑中，虽然通常他们未必意识到这一点。从这些概念在物理测量中所起的作用来看，这是清楚的；若读者把他在上节（§2）所读到的内容联系以任何意义，这种观点想必也是他的思想基础。但是现在我们要指出，即使狭义相对论适用于无引力场的特殊情况，也必须抛弃这种观点，而代之以更一般的观点，以便能够贯彻广义相对性的假设。

在一个无引力场的空间中，我们引入一个伽利略参考系 $K\ (x,\ y,\ z,\ t)$，以及相对于 K 均匀地转动的坐标系 $K'\ (x',\ y',\ z',\ t')$. 令两系统的原点以及 Z 轴永远重合。我们要证明，对系统 K' 的空间时间的测量来说，不能仍然象前面那样规定长度和时间的物理意义。由于对称性，K 的 X，Y 平面上以原点为中心的圆，显然也仍然可以看作 K' 的 X'，Y' 平面上的圆。我们假定，这圆的周线和直径已经用比起半径来是无穷小的单位量尺测量过，从而获得这两个长度的商。如果这一实验是用伽里略系统 K 里的静止量杆来做的，则商为 π. 若用相对于 K' 静止的量杆来测量，则商将大于 π。这是容易理解的，只要我们从“静止”系统 K 观察整个测量过程，并考虑到在周线上所用的量杆经受洛伦兹收缩，而在半径上使用的量杆却不收缩。所以欧几里得几何不适用于 K'。上面所定义的坐标概念，预先假定欧几里得几何是有效的，因此这种概念对系统 K' 来说就失效了。这样我们也就不能引入一种由相对于 K' 静止的钟指示，而符合于 K' 里的各种物理条件的时间. 为了证实这种不可能，让我们设想有两个构造完全一样的钟，一个放在原点，另一个放在圆周上，同时从“静止”系统

1）我们假定有可能检验空间极接近的（确切地说，时空极接近或重合）事件的“同时性”，而不给出这基本概念的定义。

K去观察它们.根据狭义相对论的一个熟知结果,圆周上的钟比原点处的钟走得慢些,因为从系统K来看,前者在运动而后者是静止的. 所以在公共坐标原点处的观察者,若能利用光来观察圆周上的钟,就会发现,圆周上的钟落后于它附近的钟.因为这观察者不能断定沿半径的光速明显地依赖于时间,他就会这样解释观察结果: 圆周上的钟"真的"比原点处的钟走得慢. 于是他只好这样地定义时间,使钟的快慢依赖于钟所处的位置.

因此我们得到下列结论: 在广义相对论中,空间和时间不能这样地定义,使得空间的坐标差可以直接利用单位量杆来测量,而时间的坐标差可以用一个标准钟测量.

以一定方式在时空连续区内布置坐标的至今沿用的方法,于是就失败了,并且似乎没有别的方法能使坐标系适应于四维宇宙,以期通过它们的运用而得到自然定律的最简洁表述方式. 这样看来,唯一的出路是,承认所有可以设想的坐标系,原则上同样适合于描述自然,其他办法是没有的. 这就要求:

普遍自然定律,应当用对一切坐标系都适用的方程来描述,也就是说,普遍自然定律对于任何变换都是协变的(广义协变性).

显然,满足这一假设的物理理论,一定也会适合广义相对性假设. 因为一切变换的总和无论如何也包括了与三维坐标系所有相对运动相当的那些变换. 取消了空间时间的物理客观性的最后残余的广义协变性的这个必要性,从下面的思考我们会看出,是一个自然的要求. 我们所有的时空判断往往归结为时空重合的确定. 例如,若事件只由质点的运动组成,那么归根到底,除了两个或多个质点的相遇以外,再没有别的东西能被观察到了. 而且我们的测量结果不外就是测量工具

上的质点与其他质点相遇的证实，表针与表盘刻度的重合，以及发生在同时同地的被观察到的事件点。

引入一个参考系，其作用不过是为了便于描述所有这些重合。我们给宇宙指定四个时空变量 x_1，x_2，x_3，x_4，使每个事件点对应于变量 $x_1 \cdots x_4$ 的一组值。对应于两个重合的事件点，只有变量 $x_1 \cdots x_4$ 的同一组值，也就是说重合是由坐标的完全相同来表征。如果代替变量 $x_1 \cdots x_4$，我们引入它的函数 x_1'，x_2'，x_3'，x_4' 作为新坐标系，使两个数值组一一对应，则在新系统里，两事件点的四个坐标皆相等就也表示两事件点的时空重合。既然所有物理经验最终都能归结为这种重合，就没有任何直接的理由认为某些坐标系比另一些优越，这就是说，我们得到广义协变性条件。

§4 四个坐标与空间时间测量的关系

我不打算在这里把广义相对论表示成公理最少的、尽可能简单和合乎逻辑的体系；我的主要目的在于使读者感到发展这理论所遵循的途径在心理上是最自然的，而其基本假设看来具有最大程度的可靠性。以此为目的，现在我们假定：

只要适当选择坐标系，在无穷小四维区域内狭义相对论是适用的。

为此我们必须这样选择无穷小的（“局部的”）坐标系的加速度，使引力场不出现；对无穷小区域来说这是办得到的。令 X_1，X_2，X_3 为空间坐标，X_4 为按适当单位测量的相应的时间坐标[1]。若设想给定一个刚杆作为单位尺度，具有某一定向的坐标系，在狭义相对论的意义下，就具有明确的物理意义。根据狭义相对论，表达式

1）时间单位的选择要使在“局部”坐标系测得的真空中光速等于1。

$$ds^2 = -dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2 + dX_4^2 \qquad (1)$$

的值与局部坐标系的定向无关，而是可由时空测量来确定的．线素的值属于四维连续区中无限接近的两个点，我们用 ds 表示它．仿照闵可夫斯基，若属于元素 $dX_1 \cdots dX_4$ 的 ds 取正值，我们就称为类时的，若 ds 取负值，则称为类空的．

对于上述的“线素”或者两个无限接近的事件点，也对应着任何选定的参考系的四维坐标的微分 $dX_1 \cdots dX_4$．如果这一参考系象“局部”参考系一样，在所考虑的区域给定了，则 dX_ν 可以表示成 dx_σ 的线性齐次式：

$$dX_\nu = \sum_\sigma \alpha_{\nu\sigma} dx_\sigma . \qquad (2)$$

把此式代入式(1)，就得出

$$ds^2 = \sum_{\tau,\sigma} g_{\sigma\tau} dx_\sigma dx_\tau , \qquad (3)$$

其中 $g_{\sigma\tau}$ 是 x_σ 的函数．这式子不再依赖于“局部”坐标系的定向和运动状态，因为 ds^2 是时空中无限接近事件点的、能用钟-尺测量的确定的量，它与坐标系的特殊选择无关．$g_{\sigma\tau}$ 要选择得使 $g_{\sigma\tau} = g_{\tau\sigma}$；求和当遍及所有的 σ，τ 值，因此和数由 4×4 项组成，其中有 12 项成对相等．

通常的相对论起因于以下考虑的情况：即如果可能时，根据 $g_{\sigma\tau}$ 在某一有限区域内的特殊关系，在这有限区域内适当地选择参考系使 $g_{\sigma\tau}$ 取常值

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 . \end{matrix} \qquad (4)$$

以后我们会发现，对于有限区域，这样选择坐标一般来说是不可能的．

从§2与§3的研究推出，按照物理学观点，$g_{\tau\sigma}$应视为描写关于所选定的参考系的引力场的量．因为如果我们假定狭义相对论适用于带有适当选定的坐标的某四维区域，则$g_{\sigma\tau}$具有式(4)给出的值．于是自由质点相对于这系统作匀速直线运动．然后，如果用我们所选择的任何代换引入新的时空坐标 x_1，x_2，x_3，x_4，那么在新系统里 $g^{\sigma\tau}$ 就不再是常数，而是空间和时间的函数了．同时，自由质点的运动在新坐标系里会表现为非均匀曲线运动，而运动规律与运动粒子的性质无关．所以我们把这种运动解释为在引力场影响下的运动．于是我们发现，出现了与时空中 $g_{\sigma\tau}$ 的变化相联系的引力场，而且在一般情况下，当不能通过适当选择坐标而把狭义相对论用于有限区域时，我们仍然坚持这种观点，即 $g_{\sigma\tau}$ 表示引力场．

所以按照广义相对论，同其他力特别是电磁力比较起来，引力占有一个特殊位置，因为代表引力场的十个函数同时也确定了被测量的空间的度规性质．

二、建立广义协变方程的数学工具

在前面已经看到，广义相对性的假设要求物理学方程对任何坐标（$x_1\cdots x_4$）的变换都是协变的．因此我们必须研究怎样才能找到这种广义协变方程．现在就来讨论这个纯粹的数学课题．我们将会看到，在解决这个问题的过程中，由方程(3)给定的不变量 ds 起着基本作用．这个不变量是从高斯的曲面论那里借来的，我们称为“线素”．

我们的一般协变量理论的基本思想是：设某种事物（“张量”）对任一坐标系来说是由一些坐标函数（称为张量的“分量”）确定的．那么，如果对旧坐标系的分量以及联系新旧坐

标系的变换都是已知的，则存在某种法则来计算对新坐标系的分量. 今后称为张量的这种事物还具有以下特征，即其分量的变换方程是线性齐次的. 于是若张量的所有分量在原坐标系中为零，则在新坐标系中也都等于零. 所以一个自然定律如果用"张量的所有分量都等于零"的方式来表示，则这个定律就是广义协变的. 由此可见，通过研究形成张量的规则，我们就获得表述广义协变定律的方法.

§5 逆变四维矢量与协变四维矢量

逆变四维矢量 线素由四个"分量" dx_ν 确定，这些分量的变换规则是

$$dx'_\sigma = \sum_\nu \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\nu} dx_\nu. \tag{5}$$

这些 dx'_σ 表示成 dx_ν 的线性齐次函数. 于是我们可以把这些坐标微分看作一种特殊类型的"张量"（称为逆变四维矢量）的分量. 任一事物，如果对于坐标系是由四个量 A^ν 确定的，并且按下列规则变换的：

$$A'^\sigma = \sum_\nu \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\nu} A^\nu, \tag{5a}$$

也可以称为逆变四维矢量. 从式 (5a) 立刻推出，倘若 A^σ 与 B^σ 是四维矢量的分量，则 $A^\sigma \pm B^\sigma$ 也是个四维矢量的分量. 相应的关系对下面要引入的所有"张量"都成立(张量的加法和减法).

四维协变矢量 对于任意选择的四维逆变矢量 B^ν，如果

$$\sum_\nu A_\nu B^\nu = \text{不变量}, \tag{6}$$

我们就把 A_ν 称为四维协变矢量的四个分量. 四维协变矢量的变换规则可由上述定义推出. 因为若以式(5a)反演得出的

式子

$$\sum_{\sigma} \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\sigma}} B'^{\sigma}$$

代替方程

$$\sum_{\sigma} A'_{\sigma} B'^{\sigma} = \sum_{\nu} A_{\nu} B^{\nu}$$

右端的 B^{ν}，我们便得出

$$\sum_{\sigma} B'^{\sigma} \sum_{\nu} \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\sigma}} A_{\nu} = \sum_{\sigma} B'^{\sigma} A'_{\sigma}.$$

既然这方程对 B'^{σ} 的任意值都成立，因此变换规则就是

$$A'_{\sigma} = \sum_{\nu} \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\sigma}} A_{\nu}. \tag{7}$$

关于简化表达式写法的说明　粗略地观察一下本节的方程便看出，求和经常都是而且也仅仅是对和号后面出现两次的指标[例如式(5)中的指标 ν] 进行的.所以有可能略去和号而不会影响明确性. 在此我们约定：假如一个指标在式中某一项出现两次，通常就要对这指标求和，除非有相反的声明.

协变与逆变四维矢量的差别在于变换规则不同［分别为式(7)或式(5)］. 两种形式都是一般意义下的张量. 其重要性就在这里. 仿效里奇和勒维-契维塔，我们用上标表示逆变特征，下标表示协变特征.

§6　二秩张量和高秩张量

逆变张量　如果我们作出两个四维逆变矢量的分量 A^{μ} 和 B^{ν} 的所有 16 个乘积 $A^{\mu\nu}$：

$$A^{\mu\nu} = A^{\mu} B^{\nu}, \tag{8}$$

那么根据式(8)和(5a)，$A^{\mu\nu}$ 满足变换规则

$$A'^{\sigma\tau} = \frac{\partial x'_{\sigma}}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial x'_{\tau}}{\partial x_{\nu}} A^{\mu\nu}. \tag{9}$$

一个事物如果相对于任何参考系由 16 个分量描述，并满足变换规则(9)，就称为二秩逆变张量．并非每个二秩张量都能按照式(8)由两个四维矢量形成，不过容易证明，任何 16 个 $A^{\mu\nu}$ 都可以表示成适当选择的四对四维矢量 $A^{\mu}B^{\nu}$ 之和．因此在绝大多数情况下，为了证明适用于式(9)定义的二秩张量的定律，只要简单地对 (8) 型的特殊张量证明这些定律就够了．

任意秩的逆变张量　显然，三秩张量可以用 4^3 个分量按照式(8)和式(9)的方法来定义，高秩的张量也可类似地定义．同样，从式(8)和式(9)推出，在这种意义下四维逆变矢量可以看作是一秩逆变张量．

协变张量　另一方面，倘若我们取两个四维协变矢量 A_μ 与 B_ν 的十六个乘积 $A_{\mu\nu}$：

$$A_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu, \tag{10}$$

则这些量的变换规则是

$$A'_{\sigma\tau} = \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma}\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\tau}A_{\mu\nu}. \tag{11}$$

这个变换规则定义了二秩协变张量．先前关于逆变张量的一切讨论，同样地适用于协变张量．

注释　把标量(或不变量)当作零秩逆变张量和零秩协变张量都是方便的．

混合张量　我们可以定义形如

$$A^\nu_\mu = A_\mu B^\nu \tag{12}$$

的二秩张量，这张量对于指标 μ 是协变的，对指标 ν 是逆变的．其变换规则是

$$A'^{\tau}_{\sigma} = \frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma}A^\nu_\mu. \tag{13}$$

自然，存在着具有任意数目的协变指标和逆变指标的张

量．协变张量和逆变张量可以视为混合张量的特殊情况．

对称张量　二秩或高秩的逆变张量或协变张量，若其任一分量都等于交换指标而得出的另一分量，就叫做对称的．因此，假如对指标 μ, ν 的任何组合都有

$$A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu}, \tag{14}$$

或者

$$A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}, \tag{14a}$$

则张量 $A^{\mu\nu}$ 或 $A_{\mu\nu}$ 就是对称的．

还要证明，这样定义的对称性是一种与参考系无关的性质．事实上考虑到式(14)，从式(9)可以推出

$$A'^{\sigma\tau} = \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu}\frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\nu}A^{\mu\nu} = \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu}\frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\nu}A^{\nu\mu}$$

$$= \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\nu}\frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\mu}A^{\mu\nu} = A'^{\tau\sigma}.$$

这等式的倒数第二个与求和指标的交换有关，所以仅仅是记号上的改变而已．

反对称张量　二秩、三秩、四秩的逆变或协变张量，若其任一分量都等于交换指标而得出的另一分量的负值，就叫做反对称张量．所以假如

$$A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}, \tag{15}$$

或者

$$A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}, \tag{15a}$$

则张量 $A^{\mu\nu}$ 或 $A_{\mu\nu}$ 就是反对称的．

在16个分量 $A^{\mu\nu}$ 当中，四个分量 $A^{\mu\mu}$ 等于零，其余分量成对地数值相等符号相反，因此只有六个分量在数值上不同(六维矢量)．类似地我们看出，三秩反对称张量 $A^{\mu\nu\sigma}$ 只能有四个数值上不同的分量，而反对称张量 $A^{\mu\nu\sigma\tau}$ 则只有一个．在四维连续区中，不存在高于四秩的反对称张量．

§7 张量的乘法

张量的外积　给定一个 n 秩张量和一个 m 秩张量，若把一个张量的每个分量乘以另一张量的每个分量，我们就得到一个 $n+m$ 秩张量．于是张量 T 可以由不同类型的张量 A 和 B 产生，例如

$$T_{\mu\nu\sigma} = A_{\mu\nu}B_{\sigma},$$

$$T^{\mu\nu\sigma\tau} = A^{\mu\nu}B^{\sigma\tau},$$

$$T^{\sigma\tau}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}B^{\sigma\tau}.$$

T 的张量特性可以直接用表达式(8)，(10)，(12)或者利用变换规则(9)，(11)，(13)加以证明．方程(8)，(10)，(12)本身就是一秩张量外积的例子．

混合张量的“降秩”　给定任一混合张量，令其一个协变指标与一个逆变指标相等；并对这指标求和，可以构成一个减少两秩的张量(“降秩”)．例如从四秩混合张量 $A^{\sigma\tau}_{\mu\nu}$ 可以得出二秩混合张量

$$A^{\tau}_{\nu} = A^{\mu\tau}_{\mu\nu}\left(=\sum_{\mu} A^{\mu\tau}_{\mu\nu}\right),$$

再作第二次降秩，便得出零秩张量

$$A = A^{\nu}_{\nu} = A^{\mu\nu}_{\mu\nu}.$$

按照式(12)的推广[与式(6)配合]来表示张量，或利用式(13)的推广，都可以证明降秩的结果确实具有张量特性．

张量的内积与混合乘积　这种运算是由外积与降秩结合而成的．

例子　由二秩协变张量 $A_{\mu\nu}$ 与一秩逆变张量 B^{σ}，可以用外积形成混合张量

$$D^{\sigma}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}B^{\sigma}.$$

对指标 ν 和 σ 降秩，我们得到四维协变矢量

$$D_\mu = D^\nu_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}B^\nu.$$

上式称为张量 $A_{\mu\nu}$ 与 B^σ 的内积. 类似地,通过外积和两次降秩,可以形成张量 $A_{\mu\nu}$ 与 $B^{\sigma\tau}$ 的内积 $A_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$. 而利用外积和一次降秩,从 $A_{\mu\nu}$ 与 $B^{\sigma\tau}$ 可得出二秩混合张量 $D^\tau_\mu = A_{\mu\nu}B^{\nu\tau}$. 这种运算可以恰当地称为混合乘积, 对于指标 μ, τ 为"外"积,而对于指标 ν, σ 为"内"积.

现在我们要证明一个经常用来表明张量特性的命题. 根据刚才的说明,若 $A_{\mu\nu}$ 与 $B^{\sigma\tau}$ 是张量,则 $A_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$ 就是个标量. 然而我们也可以作以下断言: 对任意选择的张量 $B^{\mu\nu}$, 如果只要 $A_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$ 是标量, 则 $A_{\mu\nu}$ 具有张量特性. 因为根据假设, 对任意变换来说,

$$A'_{\sigma\tau}B'^{\sigma\tau} = A_{\mu\nu}B^{\mu\nu},$$

而利用式(9)的反演,有

$$B^{\mu\nu} = \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma}\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\tau}B'^{\sigma\tau}.$$

把它代入上一个方程,便得到

$$\left(A'_{\sigma\tau} - \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma}\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\tau}A_{\mu\nu}\right)B'^{\sigma\tau} = 0.$$

仅当括弧内的值为零,这式子才能对任意 $B'^{\sigma\tau}$ 都成立. 根据方程(11), 上述断言就得到证明. 这条规则适用于任何秩和任何类型的张量,而且其证明方法在所有场合都是相似的.

这条规则也可以用下列方式表述: 若 B^μ 与 C^ν 为任意两个矢量,而若对这两矢量的一切值, 内积 $A_{\mu\nu}B^\mu C^\nu$ 是个标量, 则 $A_{\mu\nu}$ 就是协变张量. 这个命题甚至在更特殊的条件下也仍然成立, 即只要对任意选择的四维矢量 B^μ 来说, 内积 $A_{\mu\nu}B^\mu B^\nu$ 是一个标量,并且已知道 $A_{\mu\nu}$ 满足对称条件 $A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}$. 因为我们可以用前面给出的方法来证明$(A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu})$的张量特性,再考虑到对称性,便推出 $A_{\mu\nu}$ 的张量特性. 这点不

难推广到任意秩协变张量和逆变张量的场合.

最后，从刚才证明的结论可以推出下列规则（这规则也可以推广到任何张量）：如果对任意选择的四维矢量 B^ν，量 $A_{\mu\nu}B^\nu$ 构成一个一秩张量，则 $A_{\mu\nu}$ 就是二秩张量. 因为若 C^μ 是四维矢量，鉴于 $A_{\mu\nu}B^\nu$ 的张量特性，对任何两个四维矢量 B^ν 和 C^μ 来说，内积 $A_{\mu\nu}B^\nu C^\mu$ 都是一个标量，于是命题得到证明.

§8 基本张量 $g_{\mu\nu}$ 的一些特点

协变基本张量　在线素平方不变式

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu$$

中，dx_μ 起着可随意选择的逆变矢量的作用. 此外，既然 $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$，从上节的结果便推出 $g_{\mu\nu}$ 是二秩协变张量. 我们称它为“基本张量”. 下面我们要导出这张量的一些性质，诚然，这些性质也适用于任何二秩张量. 不过，由于基本张量在我们的理论中起着一种特殊的作用，它在一些引力的独特效应里有其物理基础，因此恰巧只是在这基本张量的情况下，以下要阐明的关系式对我们来说才是重要的.

逆变基本张量　在元素 $g_{\mu\nu}$ 所组成的行列式里，如果我们取 $g_{\mu\nu}$ 每个元素的余因子并除以行列式 $g = |g_{\mu\nu}|$，就得到某些量 $g^{\mu\nu}$ $(=g^{\nu\mu})$. 以后会看出，这些量形成逆变张量.

根据行列式的已知性质

$$g_{\mu\sigma}g^{\nu\sigma} = \delta^\nu_\mu, \tag{16}$$

其中符号 δ^ν_μ 当 $\mu = \nu$ 时为 1，当 $\mu \neq \nu$ 时为零.

代替上面 ds^2 的表达式，我们就可以写下

$$g_{\mu\sigma}\ \delta^\sigma_\nu\ dx_\mu\ dx_\nu,$$

或者根据式(16)写成

$$g_{\mu\sigma}\ g_{\nu\tau}\ g^{\sigma\tau}\ dx_\mu\ dx_\nu.$$

但按照上节的乘法规则，量

$$d\xi_\sigma = g_{\mu\sigma}dx_\mu$$

构成四维协变矢量，而且实际上构成一个任意矢量，因为 dx_μ 是任意的．把它引入我们的表达式中，就得到

$$ds^2 = g^{\sigma\tau}d\xi_\sigma d\xi_\tau.$$

由于对任意选择的矢量 $d\xi_\sigma$ 这是个标量，而且按照定义，$g^{\sigma\tau}$ 对于指标 σ，τ 是对称的，因此从上节结果可以推出 $g^{\sigma\tau}$ 是逆变张量．

此外，从式(16)可以推出 δ^ν_μ 也是个张量，我们称它为混合基本张量．

基本张量的行列式　根据行列式乘法规则

$$|g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu}| = |g_{\mu\alpha}||g^{\alpha\nu}|.$$

另一方面，

$$|g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu}| = |\delta^\nu_\mu| = 1.$$

由此得到

$$|g_{\mu\nu}||g^{\mu\nu}| = 1. \tag{17}$$

体积标量　我们首先来找寻行列式 $g = |g_{\mu\nu}|$ 的变换规则．按照式(11)，

$$g' = \left|\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma}\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\tau}g_{\mu\nu}\right|.$$

两次运用行列式乘法，就得出

$$g' = \left|\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma}\right|\left|\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\tau}\right||g_{\mu\nu}| = \left|\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma}\right|^2 g,$$

或者

$$\sqrt{g'} = \left|\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma}\right|\sqrt{g}.$$

另一方面，按照雅可比定理，体积元

$$d\tau = \int dx_1dx_2dx_3dx_4$$

的变换规则为

$$d\tau' = \left|\frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu}\right| d\tau.$$

将最后这两个方程相乘，便得到

$$\sqrt{g'}\, d\tau' = \sqrt{g}\, d\tau. \tag{18}$$

今后我们引入量 $\sqrt{-g}$ 来代替 $\sqrt{g}$，由于时空连续区的双曲特征，量 $\sqrt{-g}$ 总是实值. 若按照狭义相对论的意义用刚杆和钟来测量，不变量 $\sqrt{-g}\, d\tau$ 等于“局部”参考系中四维体积元的值.

关于时空连续区特征的注释　狭义相对论总是能运用到无限小的区域这一假定，意味着 ds^2 永远可以按照式(1)用实数 $dX_1 dX_2 dX_3 dX_4$ 来表示. 若用 $d\tau_0$ 表示“自然”体积元 dX_1, dX_2, dX_3, dX_4, 则

$$d\tau_0 = \sqrt{-g}\, d\tau. \tag{18a}$$

若要使 $\sqrt{-g}$ 在四维连续区的某一点上等于零，那就表示在这个点上，一个无限小的“自然”体积元相当于坐标中一个有限体积. 让我们假定永远不会出现这种情况. 于是 g 不会改变符号. 我们要假定，在狭义相对论的意义下，g 永远取有限的负值. 这是关于所考虑连续区的物理性质的假设，同时也是关于选择坐标的约定.

但是如果量—g永远取有限的正值，最自然就是“后验地”决定坐标的选择，使这个量总是等于 1. 以后我们会看到，对坐标选择加上这种限制，就可能对自然定律作重要的简化.

代替式(18)，我们就简明地得到式子 $d\tau' = d\tau$，根据雅可比定理，由此得出

$$\left|\frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu}\right| = 1. \tag{19}$$

于是对这样选择的坐标只允许作行列式为 1 的变换.

然而如果以为这样就意味着部分地放弃广义相对论，那就错了. 我们不问"对行列式为 1 的所有变换都是协变性的自然定律是怎样的?" 我们的问题是: "广义协变的自然定律是怎样的?"只有在作出了自然定律的公式之后，我们才谈得上通过参考系的特殊选择来简化表达方式.

用基本张量形成新张量　任一张量与基本张量的外积、内积、混合积分别得出不同特性、不同秩的张量. 例如

$$A^{\mu} = g^{\mu\sigma}A_{\sigma},$$

$$A = g_{\mu\nu}A^{\mu\nu}.$$

下列形式特别值得注意:

$$A^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}A_{\alpha\beta},$$

$$A_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}A^{\alpha\beta}$$

(分别为协变张量和逆变张量的"补"张量)和

$$B_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}.$$

$B_{\mu\nu}$ 称为伴随 $A_{\mu\nu}$ 的简约张量. 类似地有

$$B^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}g_{\alpha\beta}A^{\alpha\beta}.$$

注意 $g^{\mu\nu}$ 不过是 $g_{\mu\nu}$ 的补张量，因为

$$g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g_{\alpha\beta} = g^{\mu\alpha}\ \delta^{\nu}_{\alpha} = g^{\mu\nu}.$$

§9　短程线方程. 粒子的运动

由于线素 ds 的定义与坐标系无关，故若在四维连续区内两点 P 与 P' 之间作一条线，使沿此线 $\int ds$ 取逗留值，则这条线(即短程线)也具有与坐标选择无关的意义. 其方程为

$$\delta\int_{P}^{P'} ds = 0. \tag{20}$$

按通常的方法完成变分运算，就从这方程得出确定短程线的四个微分方程; 为完整起见，这里作出这项运算. 令 λ 为坐

标 x_μ 的函数，设这函数确定一族曲面，而这些曲面和短程线邻近所有通过 P, P' 两点的线相交，自然也和所求的短程线相交。因此不妨假定这样的任一条线可以通过将其坐标 x_μ 表示成 λ 的函数来给定。设符号 δ 表示从所求短程线上一点到邻近线上对应于同一 λ 值的点的过渡段。这样式(20)就可用

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \delta w d\lambda = 0, \tag{20a}$$

$$w^2 = g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{d\lambda} \frac{dx_\nu}{d\lambda}$$

来代替。但是因为

$$\delta w = \frac{1}{w} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \frac{dx_\mu}{d\lambda} \frac{dx_\nu}{d\lambda} \delta x_\sigma + g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{d\lambda} \delta \left(\frac{dx_\nu}{d\lambda} \right) \right\}$$

和

$$\delta \left(\frac{dx_\nu}{d\lambda} \right) = \frac{d}{d\lambda} (\delta x_\nu),$$

我们从式(20a)经过分部积分就得出

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \kappa_\sigma \delta x_\sigma d\lambda = 0,$$

其中

$$\kappa_\sigma = \frac{d}{d\lambda} \left\{ \frac{g_{\mu\nu}}{w} \frac{dx_\mu}{d\lambda} \right\} - \frac{1}{2w} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \frac{dx_\mu}{d\lambda} \frac{dx_\nu}{d\lambda}. \tag{20b}$$

既然 δx_σ 的值是任意的，由此推出短程线方程就是

$$\kappa_\sigma = 0. \tag{20c}$$

若沿短程线 ds 不为零，我们可以选择治短程线量取的“弧长” s 作为参数 λ。于是 $w = 1$，而代替式(20c)，就成为[1]

$$g_{\mu\sigma} \frac{d^2 x_\mu}{ds^2} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu} \frac{dx_\sigma}{ds} \frac{dx_\mu}{ds} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} = 0,$$

或者改变一下记号，

1) 下式第一项中 $g_{\mu\sigma}$ 原文误为 $g_{\mu\nu}$，第二项中 $\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu} \frac{\partial x_\mu}{s}$ 原文误为 $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \frac{dx_\sigma}{ds}$。——译者注

$$g_{\alpha\sigma}\frac{d^2x_\alpha}{ds^2}+[\mu\nu,\sigma]\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}=0, \tag{20d}$$

其中我们仿照克里斯托菲，令

$$[\mu\nu,\sigma]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu}+\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right). \tag{21}$$

最后，若用 $g^{\sigma\tau}$ 乘式（20d）（对 τ 是外积，对 σ 是内积），则得到下列形式的短程线方程：

$$\frac{d^2x_\tau}{ds^2}+\{\mu\nu,\tau\}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}=0, \tag{22}$$

其中我们采用了克里斯托菲记号

$$\{\mu\nu,\tau\}=g^{\tau\alpha}[\mu\nu,\alpha]. \tag{23}$$

§10 用微分法形成张量

借助于短程线方程，现在我们可以容易地导出用微分法形成新张量的规则．用这种方法，我们才能写出广义协变的微分方程．为达到此目的，只要重复运用下列简单的定律：

假如在我们的连续区内给定了一条曲线，曲线上的点用线上某固定点到该点的弧长 s 标志，又设 ϕ 为空间的不变量函数，则 $d\phi/ds$ 也是不变量．其理由就在于 ds 和 $d\phi$ 都是不变量．

由于

$$\frac{d\phi}{ds}=\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\frac{dx_\mu}{ds},$$

所以

$$\psi=\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\frac{dx_\mu}{ds}$$

也是不变量，而且它对连续区内一点引出的所有曲线（即对任意选择的矢量 dx_μ）都是不变量．于是立即推出

$$A_\mu = \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} \tag{24}$$

是四维协变矢量——ϕ 的“陡度”.

类似地，按照我们的规则，在一条曲线上取的微商

$$x = \frac{d\phi}{ds}$$

也是不变量. 以 ϕ 的值代入，首先得到

$$x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} \frac{d^2 x_\mu}{ds^2}.$$

从这里还不能立即推断张量的存在. 但若我们令沿它求微商的曲线是短程线，以式(22)中的 d^2x_ν/ds^2 代入上式，便得出

$$x = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \{\mu\nu, \tau\} \frac{\partial \phi}{\partial x_\tau} \right) \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds}.$$

由于求微分的次序可以交换，而根据式(23)和(21)，$\{\mu\nu, \tau\}$ 关于 μ, ν 是对称的，由此可见，括弧内的式子关于 μ, ν 也是对称的. 既然短程线可以从连续区内一点向任何方向引出，所以 dx_μ/ds 是具有任意分量比的四维矢量. 由 §7 的结果推出

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \{\mu\nu, \tau\} \frac{\partial \phi}{\partial x_\tau} \tag{25}$$

是二秩协变张量. 所以我们得到以下结论：从一秩协变张量

$$A_\mu = \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu}$$

可以用微分法形成二秩协变张量

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \{\mu\nu, \tau\} A_\tau. \tag{26}$$

张量 $A_{\mu\nu}$ 称为张量 A_μ 的“扩张”(协变导数). 首先，我们容易证明，即使矢量 A_μ 不能表示成陡度，上述运算也导出一个张量来. 为了看出这一点，让我们注意，如果 ψ 与 ϕ 是标量，

则 $\psi\dfrac{\partial\phi}{\partial x_\mu}$ 是协变矢量. 若 $\psi^{(1)}$, $\phi^{(1)},\cdots,\psi^{(4)}$, $\phi^{(4)}$ 是标量，以下四项之和

$$S_\mu = \psi^{(1)}\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial x_\mu} + \cdot + \cdot + \psi^{(4)}\frac{\partial\phi^{(4)}}{\partial x_\mu},$$

也是协变矢量. 然而很明显，任何协变矢量都能表示成 S_μ 的形式. 因为若矢量 A_μ 的分量是 x_ν 的已知函数，为了保证 S_μ 等于 A_μ，我们只要令(用选定的坐标系表示)

$$\phi^{(1)} = A_1,\ \phi^{(2)} = A_2,\ \phi^{(3)} = A_3,\ \phi^{(4)} = A_4;$$
$$\phi^{(1)} = x_1,\ \phi^{(2)} = x_2,\ \phi^{(3)} = x_3,\ \phi^{(4)} = x_4.$$

所以当用任何协变矢量代替方程右边的 A_μ，为了证明 $A_{\mu\nu}$ 仍是一个张量，我们仅需证明这对矢量 S_μ 也是正确的就行了. 为此目的，观察一下式(26)右边便知，只要证明对于

$$A_\mu = \psi\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}$$

这种情况成立就够了. 式(25)右边乘以 ψ，即

$$\psi\frac{\partial^2\phi}{\partial x_\mu\partial x_\nu} - \{\mu\nu,\tau\}\,\psi\frac{\partial\phi}{\partial x_\tau}$$

是一个张量. 类似地，两矢量的外积

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}\frac{\partial\phi}{\partial x_\nu}$$

也是张量. 根据加法，得知

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\psi\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\right) - \{\mu\nu,\ \tau\}\left(\psi\frac{\partial\phi}{\partial x_\tau}\right)$$

具有张量特性. 从式(26)很易看出，这样已完成了对矢量

$$\psi\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}$$

的证明，因此如前所述，也就完成了对任何矢量 A_μ 的证明.

利用矢量的“扩张”，不难定义任何秩协变张量的“扩张”.

这一运算是矢量“扩张”的推广. 我们限于讨论二秩张量的情况，因为这就足以清楚地说明形成张量的规则了.

我们早已注意到，任何二秩协变张量都能表示成 $A_\mu B_\nu$ 型张量之和[1]. 所以只要导出这种特殊类型张量的扩张的表达式就够了. 根据式(26)，表示式

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\sigma} - \{\sigma\mu,\tau\}A_\tau,$$

$$\frac{\partial B_\nu}{\partial x_\sigma} - \{\sigma\nu,\tau\}B_\tau$$

都是张量. 把第一式外乘以 B_ν，第二式外乘以 A_μ，分别得到一个三秩张量. 将这两个三秩张量相加，就得出这样的三秩张量：

$$A_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} - \{\sigma\mu,\tau\}A_{\tau\nu} - \{\sigma\nu,\tau\}A_{\mu\tau}, \qquad (27)$$

其中令 $A_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu$. 由于式(27)右边对 $A_{\mu\nu}$ 及其一阶导数是线性齐次的，所以不仅在 $A_\mu B_\nu$ 型张量的场合，而且对于这种张量的和，即对于任何二秩协变张量，上述张量形成规则都导出一个张量. 我们把 $A_{\mu\nu\sigma}$ 称为张量 $A_{\mu\nu}$ 的“扩张”.

显然式(26)与(24)仅仅涉及“扩张”的特殊情况(分别为一秩与零秩张量的“扩张”).

一般来说，所有特殊的张量形成规则都已包括在式(27)与张量乘法的组合之内

---

1) 用具有任意分量 A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14} 的矢量和分量为 1, 0, 0, 0 的矢量形成外积，就产生一个张量，其分量为

$$\begin{matrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

把四个这类型的张量相加，就得到一个具有任何指定分量的张量 $A_{\mu\nu}$.

§ 11 几个特别重要的情况

基本张量　首先我们要证明几个今后常用的引理. 根据行列式求微分的规则,有

$$dg = g^{\mu\nu} g dg_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} g dg^{\mu\nu}. \tag{28}$$

这等式最后的项是从倒数第二项得出的，因为我们记得，$g_{\mu\nu}g^{\mu'\nu} = \delta^{\mu'}_{\mu}$，于是 $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 4$，从而

$$g_{\mu\nu} dg^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu} = 0.$$

从式(28)推出

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x_\sigma} = \frac{1}{2} \frac{\partial \lg(-g)}{\partial x_\sigma} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$$

$$= \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}. \tag{29}$$

此外,根据 $g_{\mu\sigma}g^{\nu\sigma} = \delta^{\nu}_{\mu}$，经求微分得出

$$g_{\mu\sigma} dg^{\nu\sigma} = -g^{\nu\sigma} dg_{\mu\sigma},$$

$$g_{\mu\sigma} \frac{\partial g^{\nu\sigma}}{\partial x_\lambda} = -g^{\nu\sigma} \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\lambda}. \tag{30}$$

分别求两式与 $g^{\sigma\tau}$ 和 $g_{\nu\lambda}$ 的混合乘积，并改变一下指标的记号,就得到

$$\begin{aligned} dg^{\mu\nu} &= -g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} dg_{\alpha\beta}, \\ \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} &= -g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} \end{aligned} \tag{31}$$

和

$$\begin{aligned} dg_{\mu\nu} &= -g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} dg^{\alpha\beta}, \\ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} &= -g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma}. \end{aligned} \tag{32}$$

关系式(31)可以改换成以后我们经常要用的形式。　根据式(21),有

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} = [\alpha\sigma, \beta] + [\beta\sigma, \alpha]. \tag{33}$$

把它代入式(31)的第二式，考虑到式(23)，我们得到

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = -g^{\mu\tau}\{\tau\sigma, \nu\} - g^{\nu\tau}\{\tau\sigma, \mu\}. \tag{34}$$

把式(34)的右边代入式(29)，我们有

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x_\sigma} = \{\mu\sigma, \mu\}. \tag{29a}$$

逆变矢量的“散度” 如果我们取式(26)与逆变基本张量 $g^{\mu\nu}$ 的内积，经变换第一项后，右端取下列形式：

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}(g^{\mu\nu}A_\mu) - A_\mu\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2}g^{\tau\alpha}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\right)g^{\mu\nu}A_\tau.$$

根据式(31)与式(29)，此式最后一项可写成

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\tau\nu}}{\partial x_\nu}A_\tau + \frac{1}{2}\frac{\partial g^{\tau\mu}}{\partial x_\mu}A_\tau + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha}g^{\mu\nu}A_\tau.$$

由于求和指标的符号是非本质的，此式的前两项与前一式的第二项相抵消。若我们令 $g^{\mu\nu}A_\mu = A^\nu$。则 A^ν 象 A_μ 一样是任意矢量，最后得到

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\sqrt{-g}\,A^\nu\right). \tag{35}$$

这个标量就是逆变矢量 A^ν 的散度.

协变矢量的“旋度” 式(26)的第二项对于指标 μ，ν 是对称的。所以 $A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}$ 是一个构造特别简单反对称张量。我们得到

$$B_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}. \tag{36}$$

六维矢量的反对称扩张——将式(27)应用到二秩反对称张量 $A_{\mu\nu}$，通过指标的循环置换，得出另外两个方程，把这三个方程加起来，便得出三秩张量

$$B_{\mu\nu\sigma} = A_{\mu\nu\sigma} + A_{\nu\sigma\mu} + A_{\sigma\mu\nu}$$

$$= \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial A_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial A_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu}. \tag{37}$$

容易证明，这张量是反对称的.

六维矢量的散度　取式(27)与 $g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}$ 的混合乘积，我们也获得一个张量. 式(27)右边第一项可写成

$$\frac{\partial}{\partial x_\sigma}(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}A_{\mu\nu}) - g^{\mu\alpha}\frac{\partial g^{\nu\beta}}{\partial x_\sigma}A_{\mu\nu} - g^{\nu\beta}\frac{\partial g^{\mu\alpha}}{\partial x_\sigma}A_{\mu\nu}.$$

若把 $g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}A_{\mu\nu\sigma}$ 写成 $A_\sigma^{\alpha\beta}$，而 $g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}A_{\mu\nu}$ 写成 $A^{\alpha\beta}$，并在变换后的第一项里用式(34)给出的值代替

$$\frac{\partial g^{\nu\beta}}{\partial x_\sigma} 和 \frac{\partial g^{\mu\alpha}}{\partial x_\sigma},$$

则从式(27)右边得出一个由七项组成的式子，其中有四项对消掉，剩下

$$A_\sigma^{\alpha\beta} = \frac{\partial A^{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} + \{\sigma\gamma,\alpha\}A^{\gamma\beta} + \{\sigma\gamma,\beta\}A^{\alpha\gamma}. \tag{38}$$

这就是二秩逆变张量的“扩张”的表达式，对高秩或低秩逆变张量的“扩张”，也可以作出相应的表达式.

我们注意到，用类似的方法也可以构成混合张量的“扩张”：

$$A_{\mu\sigma}^{\alpha} = \frac{\partial A_\mu^\alpha}{\partial x_\sigma} - \{\sigma\mu,\tau\}A_\tau^\alpha + \{\sigma\tau,\alpha\}A_\mu^\tau. \tag{39}$$

将式(38)对指标 β，σ 降秩[即式(38)与 δ_β^σ 的内积]，我们得到矢量

$$A^\alpha = \frac{\partial A^{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \{\beta\gamma,\beta\}A^{\alpha\gamma} + \{\beta\gamma,\alpha\}A^{\gamma\beta}.$$

如果 $A^{\alpha\beta}$ 是反对称张量（正如我们要假设的那样），由于 $\{\beta\gamma,\alpha\}$ 关于指标 β,γ 的对称性，右边第三项等于零. 第二项可以按照式(29a)变换. 于是得出

$$A^{\alpha}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}A^{\alpha\beta})}{\partial x_{\beta}}. \tag{40}$$

这就是六维逆变矢量的散度.

二秩混合张量的散度　对指标 α,σ 将式(39)降秩，并考虑到(29a)，便得出

$$\sqrt{-g}\,A_{\mu}=\frac{\partial(\sqrt{-g}A^{\sigma}_{\mu})}{\partial x_{\sigma}}-\{\sigma\mu,\tau\}\sqrt{-g}\,A^{\sigma}_{\tau}. \tag{41}$$

引入逆变张量 $A^{\rho\sigma}=g^{\rho\tau}A^{\sigma}_{\tau}$，式(41)最后一项就化为

$$-[\sigma\mu,\rho]\sqrt{-g}A^{\rho\sigma}.$$

又若张量 $A^{\rho\sigma}$ 是对称的，这项就简化为

$$-\frac{1}{2}\sqrt{-g}\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x_{\mu}}A^{\rho\sigma}.$$

假如我们引入也是对称的协变张量 $A_{\rho\sigma}=g_{\rho\alpha}g_{\sigma\beta}A^{\alpha\beta}$ 来代替 $A^{\rho\sigma}$，根据式(31)，最后一项就取下列形式：

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}\frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x_{\mu}}A_{\rho\sigma}.$$

在对称的情况下，式(41)可以用下列两种形式代替：

$$\sqrt{-g}\,A_{\mu}=\frac{\partial(\sqrt{-g}\,A^{\sigma}_{\mu})}{\partial x_{\sigma}}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x_{\mu}}\sqrt{-g}\,A^{\rho\sigma}, \tag{41a}$$

$$\sqrt{-g}\,A_{\mu}=\frac{\partial(\sqrt{-g}\,A^{\sigma}_{\mu})}{\partial x_{\sigma}}+\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x_{\mu}}\sqrt{-g}\,A_{\rho\sigma}, \tag{41b}$$

这是我们以后要用的.

§12　黎曼-克里斯托菲张量

现在我们来探求通过单独从基本张量经过微分所能得到

的张量. 初看上去,解答好象是明显的. 只要用基本张量 $g_{\mu\nu}$ 代入式(27)中以代替任意给定的张量 $A_{\mu\nu}$, 就得到一个新张量,即基本张量的"扩张". 但是容易看出,这个"扩张"恒等于零. 不过我们可以用下面的方法达到目的. 在式(27)中,以四维矢量 A_μ 的"扩张"

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \{\mu\nu, \rho\} A_\rho$$

代入. 那么就得到三秩张量(指标的名称稍有不同)

$$A_{\mu\sigma\tau} = \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\sigma \partial x_\tau} - \{\mu\sigma, \rho\} \frac{\partial A_\rho}{\partial x_\tau} - \{\mu\tau, \rho\} \frac{\partial A_\rho}{\partial x_\sigma}$$
$$- \{\sigma\tau, \rho\} \frac{\partial A_\mu}{\partial x\rho} + \left[- \frac{\partial}{\partial x_\tau} \{\mu\sigma, \rho\} \right.$$
$$\left. + \{\mu\tau, \alpha\}\{\alpha\sigma, \rho\} + \{\sigma\tau, \alpha\}\{\alpha\mu, \rho\} \right] A_\rho.$$

这式子使我们想到作张量 $A_{\mu\sigma\tau} - A_{\mu\tau\sigma}$. 因为如果我们这样做时,在 $A_{\mu\sigma\tau}$ 和 $A_{\mu\tau\sigma}$ 的表达式中,下列各项互相抵消: 第一、四项和对应于方括弧中最后一项的式子; 因为所有这些项关于 σ 和 τ 都是对称的. 第二项与第三项之和也是如此. 于是得到

$$A_{\mu\sigma\tau} - A_{\mu\tau\sigma} = B^\rho_{\mu\sigma\tau} A_\rho, \tag{42}$$

其中

$$B^\rho_{\mu\sigma\tau} = - \frac{\partial}{\partial x_\tau} \{\mu\sigma, \rho\} + \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \{\mu\tau, \rho\}$$
$$- \{\mu\sigma, \alpha\}\{\alpha\tau, \rho\} + \{\mu\tau, \alpha\}\{\alpha\sigma, \rho\}. \tag{43}$$

这结果的最重要特征是,在式(42)右边 A_ρ 单独地出现, 而不包含其导数. 由于 $A_{\mu\sigma\tau} - A_{\mu\tau\sigma}$ 的张量特性,而 A_ρ 是任意矢量,根据§ 7,就推出 $B^\rho_{\mu\sigma\tau}$ 是个张量(黎曼-克里斯托菲张量).

这种张量在数学上的重要性如下: 若连续区具有这样一个性质,即在其中有一个坐标系,对于它来说 $g_{\mu\nu}$ 是常数, 则所有的 $B^\rho_{\mu\sigma\tau}$ 都等于零. 如果我们选取任一个新坐标系来代

替原坐标系则对这新坐标系 $g_{\mu\nu}$ 将不是常数，但由于 $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$ 是张量，故其变换后的分量在新坐标系中仍然为零. 因此，通过适当选择坐标系能使 $g_{\mu\nu}$ 为常数的必要条件[1] 是黎曼张量等于零. 在我们的问题里，这相当于下述情况：即经过适当选择参考系，狭义相对论对连续区内一个有限区域是有效的.

将式(43)对指标 τ，ρ 进行降秩，得到二秩协变张量

$$G_{\mu\nu} = B^{\rho}_{\mu\nu\rho} = R_{\mu\nu} + S_{\mu\nu},$$

其中

$$R_{\mu\nu} = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\{\mu\nu, \alpha\} + \{\mu\alpha, \beta\}\{\nu\beta, \alpha\}, \qquad (44)$$

$$S_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 \lg\sqrt{-g}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \{\mu\nu, \alpha\}\frac{\partial \lg\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha}.$$

关于选择坐标的注释　在§ 8 从式（18a）我们已经注意到，选择坐标时使 $\sqrt{-g} = 1$ 是有利的. 看一下前面最后两节中所得出的方程就知道，这样选择坐标，将使形成张量的规则大大简化. 这点尤其适合于刚才提出的张量 $G_{\mu\nu}$，这个张量在我们即将提出的理论中起着基本的作用. 由于这样选择坐标会使 $S_{\mu\nu}$ 等于零，因此 $G_{\mu\nu}$ 就简化为 $R_{\mu\nu}$.

在下面我要用简化的形式给出所有的各个关系，这种简化的形式是坐标选择特殊化造成的. 在特殊情况下如有必要，回复到广义协变方程是很容易的事情.

三、引力场理论

§ 13　引力场中质点的运动方程. 引力场分量的表达式

根据狭义相对论，一个可自由运动的物体当不受外力作

1) 数学家已证明这也是充分条件.

用时，就作匀速直线运动. 按照广义相对论，若在四维空间的某一部分可以选择而且选定了坐标系 K_0，使其具有式(4)的特定常数值，那么对这部分空间来说，情况也一样.

假如我们从任一选定的坐标系 K_1 严谨地考察这种运动，根据§ 2 的研究，在 K_1 看来，物体是在一个引力场内运动的. 相对于 K_1 的运动规律，不难从以下的考虑得出. 对 K_0 来说，运动定律对应于一条四维直线，即短程线. 既然短程线的定义与参考系无关，故其方程也应当是质点对于 K_1 的运动方程. 若我们令

$$\Gamma^{\tau}_{\mu\nu} = -\{\mu\nu, \tau\}, \tag{45}$$

这质点对 K_1 的运动方程就变为

$$\frac{d^2x_\tau}{ds^2} = \Gamma^{\tau}_{\mu\nu}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}. \tag{46}$$

现在我们容易想出以下假设：当不存在这样的参考系 K_0 的情况下(对于 K_0，狭义相对论在有限区域内有效)，这时，上述协变方程也仍然规定了质点在引力场中的运动. 我们有一切理由认为这个假设是合理的，因为式(46)仅包含 $g_{\mu\nu}$ 的一阶导数，甚至存在 K_0 的特殊情况下，这些导数之间也没有任何联系[1].

如果 $\Gamma^{\tau}_{\mu\nu}$ 为零，则质点作匀速直线运动. 所以量 $\Gamma^{\tau}_{\mu\nu}$ 决定着运动对均匀性的偏离. 这些量就是引力场的分量.

§ 14 物质不存在时的引力场方程

今后我们要把“引力场”和“物质”区别开来，即除了引力场以外的一切都称为“物质”. 因此我们所用的这个词，不仅包括通常意义下的物质，也包括电磁场.

---

1) 根据§ 12，只在二阶(和一阶)导数之间，存在关系式 $B^{\sigma}_{\mu\sigma\tau} = 0$.

我们的下一个任务是寻求物质不存在时的引力场方程. 在这里，我们再次应用上节用来列出质点运动方程的方法. 有一种特殊情况是所求的方程无论如何也得满足的，这就是狭义相对论，其中 $g_{\mu\nu}$ 具有某一定的常数值. 假定在某个有限的空间中对于确定的坐标系 K_0，情况是如此. 相对于这个系统，式(43)定义的黎曼张量 $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$ 的所有分量都为零.因此对所考虑的空间来说，这些分量在任何其他坐标系里也为零.

这样,假如所有的 $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$ 都是零,所求的无物质的引力场方程无论如何也得满足. 但是这个条件太过分了. 因为很清楚,比如说,一个质点在它周围产生的引力场无疑是不可能用任何选择坐标的办法"变换掉"的,也就是说,它不可能变换成 $g_{\mu\nu}$ 为常数的情况.

这就促使我们对于无物质的引力场要求由张量 $B^{\rho}_{\mu\nu\tau}$ 导出的对称张量 $G_{\mu\nu}$ 必须等于零. 从而得到关于十个量 $g_{\mu\nu}$ 的十个方程. 在所有的 $B^{\rho}_{\mu\nu\tau}$ 为零的特殊情况下，这些方程都是满足的. 利用我们选择的坐标系,并考虑到式(44),无物质的场方程是

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} = 0, \\ &\sqrt{-g} = 1. \end{aligned} \tag{47}$$

必须指出,在这些方程的选择上,只有极小的任意性. 因为除 $G_{\mu\nu}$ 之外，没有别的二阶张量可以由 $g_{\mu\nu}$ 及其导数形成(不包括二阶以上导数),而且对这些导数是线性的[1].

---

1) 严格地说,这仅仅对张量

$$G_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta}$$

(其中 λ 为常数)才能这样说. 然而，若令此张量等于零，我们就又回到方程式 $G_{\mu\nu} = 0$.

根据广义相对论的条件用纯数学方法导出的这些方程和运动方程(46)结合起来,将给出牛顿引力定律(一级近似),以及勒维里尔所发现的水星近日点运动（经摄动法修正后这种运动仍然存在)的解释(二级近似)．在我看来,应当认为这些事实令人信服地证明了理论的正确性.

§ 15　引力场的哈密顿函数．动量定律与能量定律

为了证明这些场方程相当于动量定律与能量定律，最方便就是把方程写成以下的哈密顿形式:

$$\delta\int H d\tau = 0,$$

$$H = g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}, \tag{47a}$$

$$\sqrt{-g} = 1,$$

这里,在我们打算求积分的有限四维区域的边界上,这些变分都为零.

首先必须证明形式(47a)与方程(47)等价．为此目的，我们把H看作$g^{\mu\nu}$与$g^{\mu\nu}_{\sigma}$($=\partial g^{\mu\nu}/\partial x_{\sigma}$)的函数．于是首先有

$$\begin{aligned}\delta H &= \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\delta g^{\mu\nu} + 2g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\delta\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\\ &= -\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\delta g^{\mu\nu} + 2\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\delta\left(g^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\right).\end{aligned}$$

但是

$$\delta\left(g^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\right) = -\frac{1}{2}\delta\left[g^{\mu\nu}g^{\beta\lambda}\left(\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x_{\nu}} - \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x_{\lambda}}\right)\right].$$

由圆括弧内最后两项所产生的项,其符号不同,并可通过交换指标μ和β而从一项得出另一项（因为求和指标的记号是不重要的)．在δH的表达式中,这两项互相抵消,因为它们被乘上关于指标μ,β对称的量$\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}$．因此，只剩下圆括弧内的第一项需要考虑．注意到(31),我们就得出

$$\delta H = -\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\delta g^{\mu\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\delta g^{\mu\beta}_{\alpha}.$$

于是

$$\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}} = -\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha},$$

$$\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_{\sigma}} = \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}. \tag{48}$$

作出式(47a)中的变分运算,首先得到

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}}\right) - \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}} = 0, \tag{47b}$$

由于式(48),此式与式(47)是一致的. 这就是所要证明的.

若以 $g^{\mu\nu}_{\sigma}$ 乘式(47b),则因为

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}_{\sigma}}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}}{\partial x_\sigma},$$

从而有

$$g^{\mu\nu}_{\sigma}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}}\right) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\mu\nu}_{\sigma}\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}}\right) - \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}}\frac{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}}{\partial x_\sigma},$$

我们就得到方程

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\mu\nu}_{\sigma}\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}}\right) - \frac{\partial H}{\partial x_\sigma} = 0,$$

或者[1)]

$$\frac{\partial t^{\alpha}_{\sigma}}{\partial x_\alpha} = 0,$$

$$-2\kappa t^{\alpha}_{\sigma} = g^{\mu\nu}_{\sigma}\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}} - \delta^{\alpha}_{\sigma}H, \tag{49}$$

考虑到式(48),(47)的第二式和(34),其中

$$\kappa t^{\alpha}_{\sigma} = \frac{1}{2}\delta^{\alpha}_{\sigma}g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\lambda} - g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\sigma}. \tag{50}$$

要注意, t^{α}_{σ} 并不是一个张量;另一方面,(49)适用于一切 $\sqrt{-g} = 1$ 的坐标系. 这方程表示引力场的动量守恒与能量

1) 引入因子 -2κ 的理由以后就会明白.

守恒定律. 实际上,这方程对三维体积 V 的积分给出四个方程

$$\frac{d}{dx_4}\int t_\sigma^4\,dV = \int (lt_\sigma^1 + mt_\sigma^2 + nt_\sigma^3)\,dS, \qquad (49a)$$

其中 l, m, n 表示边界面上元素 dS 的内法线的方向余弦(在欧几里得几何的意义上). 我们看出,这正是寻常形式下的守恒定律的表达式. 量 t_σ^α 称为引力场的"能量分量".

现在我要给方程(47)以第三种形式,为了获得这论题的鲜明概念,这种形式是特别有用的. 将方程(47)乘以 $g^{\nu\sigma}$, 就得到"混合"形式. 注意

$$g^{\nu\sigma}\frac{\partial\Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(g^{\nu\sigma}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}) - \frac{\partial g^{\nu\sigma}}{\partial x_\alpha}\Gamma^\alpha_{\mu\nu},$$

根据(34), 这些量等于

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(g^{\nu\sigma}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}) - g^{\nu\beta}\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - g^{\sigma\beta}\Gamma^\nu_{\beta\alpha}\Gamma^\alpha_{\mu\nu},$$

或者用另一种求和指标写成

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(g^{\sigma\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}) - g^{\gamma\delta}\Gamma^\sigma_{\gamma\beta}\Gamma^\beta_{\delta\mu} - g^{\nu\sigma}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.$$

此式的第三项与场方程(47)的第二项所产生的项对消,利用关系式(50),第二项可写成

$$\kappa\left(t_\mu^\sigma - \frac{1}{2}\delta_\mu^\sigma t\right),$$

其中 $t = t_\alpha^\alpha$. 于是代替方程(47), 我们得到

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(g^{\sigma\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}) = -\kappa\left(t_\mu^\sigma - \frac{1}{2}\delta_\mu^\sigma t\right), \qquad (51)$$

$$\sqrt{-g} = 1.$$

§ 16 引力场方程的一般形式

§ 15 表述的无物质空间的场方程可以同牛顿理论的场方

程

$$\nabla^2\phi = 0$$

相对照. 现在我们要找出另一方程,这方程相当于泊松方程

$$\nabla^2\phi = 4\pi\kappa\rho,$$

其中 ρ 表示物质的密度.

狭义相对论导致了这种结论: 惯性质量恰恰就是能量,其完善的数学表达式是二秩对称张量,即能量张量. 因此在广义相对论里,我们必须引入相应的物质能量张量 T_σ^α, 它象引力场的能量分量 t_σ [方程(49), (50)]一样,具有混合特征,但是它属于对称协变张量[1].

方程组 (51) 表明了应如何把能量张量(与泊松方程里的密度 ρ 相当)引入引力场方程中. 因为若我们考虑一个完整的系统(例如太阳系),则系统的总质量(从而其总引力作用也一样)依赖于系统的总能量,所以也就依赖于有质能量加上引力能量. 因此方程可以用以下方法表示: 在(51)中引入物质的能量分量与引力场的能量分量之和 $t_\mu^\sigma + T_\mu^\sigma$ 来代替单独的引力场能量分量. 于是代替式(51), 我们得出张量方程

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(g^{\sigma\beta}T^\alpha_{\mu\beta}) = -\kappa\left[(t_\mu^\sigma + T_\mu^\sigma) - \frac{1}{2}\delta_\mu^\sigma(t+T)\right], \tag{52}$$

$$\sqrt{-g} = 1,$$

其中我们令 $T = T_\mu^\mu$ (劳厄标量). 这就是所需要的方程,即混合形式的一般引力场方程.

由此倒推回去,代替式(47),我们有

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha} = -\kappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right), \tag{53}$$

$$\sqrt{-g} = 1.$$

---

1) $g_{\sigma\tau}T_\sigma^\alpha = T_{\sigma\tau}$ 和 $g^{\sigma\beta}T_\sigma^\alpha = T^{\alpha\beta}$ 应是对称张量.

必须承认，我们不能单靠相对论假设来证明这样引入物质的能量张量是合理的. 因此，在这里我们从下列条件把它推导出来，这条件是：引力场的能量在引力效应上象其他能量一样地起作用. 至于何以选择这些方程，最有力的理由就是它们导致下列结果：严格地相当于式(49)，(49a) 的动量守恒和能量守恒方程，对总能量分量是有效的. 这点将在§ 17 加以证明.

§ 17 一般情况下的守恒定律

方程（52）不难变换成右边第二项为零的形式. 对指标 μ, σ 把式 (52)降秩，将得出的方程乘以 $\frac{1}{2}\delta^{\sigma}_{\mu}$ 再和方程(52)相减，得出

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\sigma\beta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}-\frac{1}{2}\delta^{\sigma}_{\mu}g^{\lambda\beta}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\beta}\right)=-\kappa(t^{\sigma}_{\mu}+T^{\sigma}_{\mu}). \tag{52a}$$

对这方程作 $\frac{\partial}{\partial x_\sigma}$ 的运算，我们有

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\sigma}(g^{\sigma\beta}\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu})=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\sigma}\left[g^{\sigma\beta}g^{\alpha\lambda}\left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\beta}+\frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x_\mu}-\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\lambda}\right)\right].$$

圆括弧内第一项与第三项的贡献互相抵消，只要在第三项的贡献中，一方面交换求和指标 α 与 σ，另外又交换指标 β 与 λ，就可以看出这一点. 第二项可以仿效 (31) 进行改写，结果就有

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\sigma}(g^{\sigma\beta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta})=\frac{1}{2}\frac{\partial^3 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\mu}. \tag{54}$$

式(52a) 左边第二项首先给出

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\mu}(g^{\lambda\beta}\Gamma^\alpha_{\lambda\beta})$$

或

$$\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\mu}\left[g^{\lambda\beta}g^{\alpha\delta}\left(\frac{\partial g_{\delta\lambda}}{\partial x_\beta}+\frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial x_\lambda}-\frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x_\delta}\right)\right].$$

对于我们所选择的坐标，从圆括弧内最后一项导出的项由于式(29)而消失了。其他两项可以结合起来，而根据式(31)化为

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^3 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\mu},$$

考虑到(54)，我们有恒等式

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\sigma}\left(g^{\sigma\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}-\frac{1}{2}\delta^\sigma_\mu g^{\lambda\beta}\Gamma^\alpha_{\lambda\beta}\right)^{1)}\equiv 0. \tag{55}$$

由式(55)和(52a)得出

$$\frac{\partial(t^\sigma_\mu+T^\sigma_\mu)}{\partial x_\sigma}=0. \tag{56}$$

这样，从我们的引力场方程推出，动量守恒与能量守恒定律是得到满足的.这点从导出方程(49a)的讨论中极易看出；所不同的是，这里我们必须引入作为一个整体的物质和引力场的能量分量来代替引力场的能量分量 t^σ.

§ 18 由场方程导出的物质的动量与能量定律

用 $\partial g^{\mu\nu}/\partial x_\sigma$ 乘式(53)，由于 $g_{\mu\nu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$ 为零，仿照§15采用的方法，我们得到方程

$$\frac{\partial t^\alpha_\sigma}{\partial x_\alpha}+\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}T_{\mu\nu}=0,$$

1) 原文中 $g^{\sigma\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}$ 误为 $g^{\sigma\beta}\Gamma_{\mu\beta}$.——编者注

考虑到式(56)，可以写成

$$\frac{\partial T_\sigma^\alpha}{\partial x_\alpha}+\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}T_{\mu\nu}=0. \tag{57}$$

把它同(41b)比较便看出，对于我们选定的坐标系来说，这方程所表示的恰恰就是说明物质的能量张量的散度为零. 方程左边第二项的出现，在物理上表明动量守恒与能量守恒定律严格地说不能单独地应用于物质，要不然就只能用于 $g^{\mu\nu}$ 为常数，即引力场强度为零的场合. 第二项的物理意义是单位体积单位时间从引力场转移到物质的动量和能量. 按式(41)的意义，把式(57)改写成

$$\frac{\partial T_\sigma^\alpha}{\partial x_\alpha}=-\Gamma_{\alpha\sigma}^{\beta}T_\beta^\alpha, \tag{57a}$$

物理意义就更清楚了. 此式右边表示引力场对物质的能量效应.

可见引力场方程包含四个条件，这些条件支配着物质现象的过程. 只要物质现象能够用四个互相独立的微分方程表征，上述条件就完备地给出了物质现象的方程[1].

四、物质现象

在第二部分发展的数学方法使我们立刻就能把物质的物理定律(流体力学，麦克斯韦电动力学)推广，使其适应广义相对论，因为这些定律原是按照狭义相对论表述的. 当我们这样做时，广义相对论并不会使可能性受到更多限制；而是使我们在完全用不着引入任何新假设的情况下，进一步了解引力场对一切过程的影响.

1) 关于这个问题，参看 H. Hilbert, *Nachr. d. K. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Klasse*, 1915, p. 3.

这样一来，就不必对物质的物理性质（在更狭义上）引入一定的假设. 特别是电磁场理论和引力场理论相结合是否就能给物质理论提供坚实的基础，或许还是个悬而未决的问题. 关于这一点，广义相对性假设在原则上不能给我们任何回答. 完成广义相对论，电磁学与引力论结合起来能否履行前者本身做不到的任务还有待探究.

§ 19 无摩擦绝热流体的欧勒方程

设 p 与 ρ 是两个标量，前者称为流体的“压力”，后者称为流体的密度；并使两者之间存在着一个联系方程. 设对称逆变张量

$$T^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta}p + \rho\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds} \tag{58}$$

是流体的逆变能量张量. 与它相应的有协变张量

$$T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}p + g_{\mu\alpha}g_{\mu\beta}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds}\rho, \tag{58a}$$

以及混合张量[1)]

$$T^\alpha_\sigma = -\delta^\alpha_\sigma p + g_{\sigma\beta}\frac{dx_\beta}{ds}\frac{dx_\alpha}{ds}\rho. \tag{58b}$$

将（58b）的右边代入（57a），我们就得到广义相对论的欧勒流体动力学方程. 在理论上，这些方程给出运动问题的完全解答，因为给定了 $g_{\alpha\beta}$，由（57a）的四个方程加上联系 p，ρ 的方程，以及下列方程

$$g_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds} = 1$$

就足以确定以下六个未知量：

1) 一个观察者如果在狭义相对论的意义下对无穷小区域使用某一个参考系，并与系统一起运动，那么对他来说，能量密度 T^4_4 就等于 $\rho-p$. 这就给出了 ρ 的定义. 因此对不可压缩流体来说，ρ 并不是常数.

$$p,\ \rho,\ \frac{dx_1}{ds},\ \frac{dx_2}{ds},\ \frac{dx_3}{ds},\ \frac{dx_4}{ds}.$$

若 $g_{\mu\nu}$ 也是未知量，则可加上方程(53)。这是用来确定 10 个函数 $g_{\mu\nu}$ 的 11 个方程，所以这些函数看来好像是被过分确定的。然而我们必须记住，方程(57a)已经包含在方程(53)之内，因此后者只有七个独立方程。缺乏确定性是有充分理由的，因为选择坐标的广泛自由使问题留下了数学上的不确定性，以致空间函数之中共有三个可以随意选择[1]。

§20 真空中的麦克斯韦电磁场方程

设 ϕ_ν 是协变矢量(电磁势矢量)的分量。根据式(36)，我们可以用 ϕ_ν 形成电磁场的六维协变矢量 $F_{\rho\sigma}$ 如下：

$$F_{\rho\sigma}=\frac{\partial\phi_\rho}{\partial x_\sigma}-\frac{\partial\phi_\sigma}{\partial x_\rho}. \tag{59}$$

由式(59)推出，方程组

$$\frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial x_\tau}+\frac{\partial F_{\sigma\tau}}{\partial x_\rho}+\frac{\partial F_{\tau\rho}}{\partial x_\sigma}=0 \tag{60}$$

是满足的，根据式(37)，它的左边是反对称三秩张量。于是方程组(60)实质上包含如下四个方程：

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F_{23}}{\partial x_4}+\frac{\partial F_{34}}{\partial x_2}+\frac{\partial F_{42}}{\partial x_3}=0,\\
&\frac{\partial F_{34}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{41}}{\partial x_3}+\frac{\partial F_{13}}{\partial x_4}=0,\\
&\frac{\partial F_{41}}{\partial x_2}+\frac{\partial F_{12}}{\partial x_4}+\frac{\partial F_{24}}{\partial x_1}=0,\\
&\frac{\partial F_{12}}{\partial x_3}+\frac{\partial F_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{31}}{\partial x_2}=0.
\end{aligned} \tag{60a}$$

---

1) 对坐标选择放弃 $g=-1$ 的限制，则剩下四个空间函数可以自由选择，这相应于选择坐标时由我们自由处理的四个任意函数。

只要令

$$F_{23}=H_x,\quad F_{14}=E_x,$$
$$F_{31}=H_y,\quad F_{24}=E_y,\tag{61}$$
$$F_{12}=H_z,\quad F_{34}=E_z,$$

我们立即看出，方程（60a）相当于第二组麦克斯韦方程. 然后按照三维矢量分析通常的记法，可以用下式代替（60a），即

$$-\frac{\partial H}{\partial t}=\mathrm{curl}E,\tag{60b}$$
$$\mathrm{div}H=0.$$

推广闵可夫斯基给出的形式，便得到第一组麦克斯韦方程. 现在我们引入伴随 $F^{\alpha\beta}$ 的六维逆变矢量

$$F^{\mu\nu}=g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}\tag{62}$$

以及电流密度的逆变矢量 J^{μ}. 考虑到（40）就看出，对于不变量为 1 的任何代换，下列方程是不变的（按照选定的坐标）：

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}F^{\mu\nu}=J^{\mu}.\tag{63}$$

令

$$F^{23}=H'_x,\quad F^{14}=-E'_x,$$
$$F^{31}=H'_y,\quad F^{24}=-E'_y,\tag{64}$$
$$F^{12}=H'_z,\quad F^{34}=-E'_z,$$

在狭义相对论的特殊情况下，这些量等于 $H_x\cdots E_z$；此外

$$J^1=j_x,\quad J^2=j_y,\quad J^3=j_z,\quad J^4=\rho,$$

代替（63），我们得

$$\frac{\partial E'}{\partial t}+j=\mathrm{curl}H',$$
$$\tag{63a}$$
$$\mathrm{div}E'=\rho.$$

根据我们对选择坐标所建立的约定，方程（60），（62）和（63）组成真空中麦克斯韦方程的推广.

电磁场能量分量　作内积

$$\kappa_\sigma = F_{\sigma\mu} J^\mu. \tag{65}$$

根据式(61)，其分量写成三维方式：

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \rho E_x + [j \cdot H]^x, \\ &\cdots\cdots, \\ &\cdots\cdots, \\ \kappa_4 &= -(jE). \end{aligned} \tag{65a}$$

κ_σ 是协变矢量，其分量分别等于单位时间内单位体积从电质量转移到电磁场的负动量或能量。 若电质量是自由的，即仅仅受到电磁场的影响，则协变矢量 κ_σ 等于零.

为了获得电磁场的能量分量 T^ν_σ，我们仅需给方程 $\kappa_\sigma = 0$ 以方程(57)的形式. 根据(63)与(65)，首先有

$$\kappa_\sigma = F_{\sigma\mu} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu}(F_{\sigma\mu} F^{\mu\nu}) - F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu}.$$

由于(60)，上式右边第二项可作下列变换：

$$F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} = -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = -\frac{1}{2} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma},$$

考虑到对称性，后面的式子也可以写成下列形式：

$$-\frac{1}{4}\left[g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} F_{\mu\nu}\right].$$

而这式子又可以用下式代替：

$$-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu}) + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\sigma}(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}).$$

这些项的第一项可以更简单地写成

$$-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu});$$

进行微分运算后再作一些简化，第二项就化为[1)]

$$-\frac{1}{2} F^{\mu\tau} F_{\mu\nu} g^{\nu\rho} \frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x_\sigma}.$$

---

1) 下式中 $\frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x_\sigma}$ 似系 $\frac{\partial g_{\rho\tau}}{\partial x_\rho}$ 之误. ——译者注

把这三项合在一起，得到以下关系：

$$\kappa_\sigma = \frac{\partial T_\sigma^\nu}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2} g^{\tau\mu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} T_\tau^\nu, \tag{66}$$

其中

$$T_\sigma^\nu = -F_{\sigma\alpha}F^{\nu\alpha} + \frac{1}{4}\delta_\sigma^\nu F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}.$$

若 κ_σ 为零，由于式(30)，方程（66）等价于式（57）或(57a)．所以 T_σ^ν 是电磁场的能量分量．借助于式（61）和(64)，容易证明，在狭义相对论的情况下，这些电磁场的能量分量给出熟知的麦克斯韦-坡印廷表达式．

现在我们已经导出了引力场和物质所遵循的普遍定律，在推导过程中，始终使用 $\sqrt{-g} = 1$ 的坐标系．这样可以使公式和计算大大简化，而又没有违反广义协变性条件；因为我们是从广义协变性方程出发，通过限定坐标系而导出我们的方程的．

下述问题，至今仍未失去形式上的意义：即是否甚至不限定坐标系，只要用引力场和物质的能量分量的推广定义，就能写出形如式(56)的守恒定律，以及用这样一种方式表示与式（52）或式（52a）性质相同的引力场方程，使其左边是个(通常意义下的)散度，而右边是物质的能量分量与引力的能量分量之和．我发现，这两种场合实际上都是如此的．但是我想，把我在这方面的泛泛的想法发表出来不会有什么价值，因为毕竟其中没有任何本质上的新东西．

五、理论的应用

§ 21 牛顿理论作为一级近似

我们早已不只一次地指出，作为广义相对论的特殊情形，

狭义相对论是由 $g_{\mu\nu}$ 取常数值(4)来表征的. 如前所述,这意味着完全忽略引力的影响. 考虑到 $g_{\mu\nu}$ 与(4)的差值比起 1 来是个小量的情况,并忽略二阶和高阶小量,我们就得到相当接近真实的近似.(第一种近似观点.)

还要进一步假定,在所考虑的时空范围内,若适当选择坐标,在空间无限远处 $g_{\mu\nu}$ 趋向于(4)的值;这就是说,我们所研究的引力场可以认为是完全由有限区域内的物质所产生的.

也许有人以为,这种近似一定引致牛顿理论. 然而为此目的我们还得从第二种观点出发来逼近基本方程. 让我们注意质点按照方程(16)所作的运动. 在狭义相对论的情况下,分量

$$\frac{dx_1}{ds},\quad \frac{dx_2}{ds},\quad \frac{dx_3}{ds}$$

可以取任何值. 这意味着任何小于真空中光速的速度

$$v=\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dx_4}\right)^2+\left(\frac{dx_2}{dx_4}\right)^2+\left(\frac{dx_3}{dx_4}\right)^2}$$

都可以出现. 倘若限于考虑 v 与光速相比为小量的情况(在我们的经验中,几乎毫无例外都是这种情况),这表示分量

$$\frac{dx_1}{ds},\quad \frac{dx_2}{ds},\quad \frac{dx_3}{ds}$$

要当作小量处理,而准确到二阶小量, dx_4/ds 等于 1(第二种近似观点).

现在我们注意到,按照第一种近似观点,所有量 $\Gamma^\tau_{\mu\nu}$ 最低限度也是一阶小量. 看一看式(46)就知道,按照第二种近似观点,在这方程中必须考虑的只有 $\mu=\nu=4$ 的项. 若限于最低阶的项,代替式(46)我们首先得到方程

$$\frac{d^2x_\tau}{dt^2}=\Gamma^\tau_{44},$$

其中我们令 $ds = dx_4 = dt$；或者限于那些按照第一种近似观点为一阶的项，则得

$$\frac{d^2x_\tau}{dt^2} = [44,\tau] \qquad (\tau = 1,\ 2,\ 3),$$

$$\frac{d^2x_4}{dt^2} = -[44,\ 4].$$

如果我们再假定引力场是准静态的场，而把讨论限于产生引力场的物质作缓慢运动(与光速相比)的情况，那么在方程的右边，对时间的微分比起对空间坐标的微分来可以忽略不计，于是我们有

$$\frac{d^2x_\tau}{dt^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_\tau} \qquad (\tau = 1,\ 2,\ 3). \tag{67}$$

这就是牛顿理论的质点运动方程，其中 $\frac{1}{2}g_{44}$ 起引力势的作用．在这个结果里值得注意的是，确定质点运动(准确到一级近似)的只是基本张量的分量 g_{44}.

现在我们来讨论方程(53)．这里我们需要考虑到，在狭义上，“物质”的能量张量差不多是单由物质的密度确定的，也就是说，由式(58)[用式(58a)或式(58b)也一样]右边第二项确定．如果我们取现在这种近似值，则除 $T_{44} = \rho = T$ 之外，所有分量皆为零．在式(53)左边，第二项是个二阶小量；按照这种近似，第一项给出

$$\frac{\partial}{\partial x_1}[\mu\nu,\ 1] + \frac{\partial}{\partial x_2}[\mu\nu,\ 2] + \frac{\partial}{\partial x_3}[\mu\nu,\ 3] - \frac{\partial}{\partial x_4}[\mu\nu,\ 4].$$

对于 $\mu = \nu = 4$，若忽略对时间求微分的项，上式给出

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_3^2}\right) = -\frac{1}{2}\nabla^2 g_{44}.$$

于是方程(53)的最后一式给出

$$\nabla^2 g_{44} = \kappa\rho. \tag{68}$$

方程(67)与(68)合起来就相当于牛顿引力定律.

根据式(67)与(68),引力势的表达式化为

$$-\frac{\kappa}{8\pi}\int\frac{\rho d\tau}{r}, \tag{68a}$$

而如果用我们所选的时间单位,牛顿理论给出

$$-\frac{K}{c^2}\int\frac{\rho d\tau}{r},$$

其中K表示常数 6.7×10^{-8},通常叫做引力常数. 通过比较得出

$$\kappa = \frac{8\pi K}{c^2} = 1.87\times10^{-27}. \tag{69}$$

§ 22 静引力场中杆和钟的行为. 光线的偏转. 行星轨道近日点的运动

为了得到牛顿理论作为一级近似,在引力场的十个 $g_{\mu\nu}$ 中,需要计算的只有一个分量 g_{44},因为只有这个分量进入质点在引力场中的一级近似的运动方程(67). 然而,由此可见 $g_{\mu\nu}$ 的其他分量与式(4)给出的值的差一定是一阶小量. 这是条件 $g=-1$ 所要求的.

对于在坐标原点的产生场的点质量,准确到一级近似,我们得到径向对称解:

$$g_{\rho\sigma} = -\delta_{\rho\sigma} - \alpha\frac{x_\rho x_\sigma}{r^3} \qquad (\rho,\ \sigma = 1,\ 2,\ 3),$$

$$g_{\rho 4} = g_{4\rho} = 0 \qquad (\rho = 1,\ 2,\ 3), \tag{70}$$

$$g_{44} = 1 - \frac{\alpha}{r},$$

其中当 $\rho=\sigma$ 时，$\delta_{\rho\sigma}=1$，当 $\rho\neq\sigma$ 时，$\delta_{\rho\sigma}=0$，而 $r=+\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$．由于(68a)，有

$$\alpha=\frac{\kappa M}{4\pi}, \tag{70a}$$

其中 M 表示产生场的质量．容易证明，准确到一阶小量，场方程(在质量的外部)是满足的．

现在我们来考察质量 M 的场对空间度规性质所产生的影响．“局部地”（§ 4）测得的长度和时间（ds）与坐标差（dx_ν）之间，总是存在下列关系：

$$ds^2=g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu.$$

对于“平行”于 x 轴的单位长度，我们应当令 $ds^2=-1$；$dx_2=dx_3=dx_4=0$．所以 $-1=g_{11}dx_1^2$．此外，若单位尺度位于 x 轴上，则方程（70）的第一式给出

$$g_{11}=-\left(1+\frac{\alpha}{r}\right).$$

从这两个关系推出(准确到一阶小量)

$$dx=1-\frac{\alpha}{2r}. \tag{71}$$

这样，若量杆沿径向放置，由于存在引力场，所以这单位量杆对坐标系来说呈现微小的收缩．

用类似的方式，我们得出沿切向的坐标长度，只要令

$$ds^2=-1;\ dx_1=dx_3=dx_4=0;\ x_1=r,\ x_2=x_3=0.$$

其结果是

$$-1=g_{22}dx_2^2=-dx_2^2. \tag{71a}$$

所以对于切向位置，点质量的引力场对杆长并无影响．

由此可见，如果我们想在任何地点、任何方向上都取同一量杆来代表相同的间隔，那么在引力场中，欧几里得几何甚至作为一级近似也不能成立；虽然，其实看一下（70a）和（69）

就可知道，预计的偏差是太微小了，以致在地球表面的测量中是觉察不出来的。

其次，让我们来考察钟的快慢，假定这钟静止地放在引力场中。对于钟的周期来说，我们有 $ds = 1$；$dx_1 = dx_2 = dx_3 = 0$。所以

$$1 = g_{44}dx_4^2;$$

$$dx_4 = \frac{1}{\sqrt{g_{44}}} = \frac{1}{\sqrt{1+(g_{44}-1)}} = 1 - \frac{1}{2}(g_{44}-1)$$

或者

$$dx_4 = 1 + \frac{\kappa}{8\pi}\int\frac{\rho d\tau}{r}. \tag{72}$$

于是一只钟若放在有质物质附近，它就会走得慢一些。由此推出，从巨大恒星表面射到我们这里来的光，其谱线一定会朝光谱红端移动[1)]。

现在来考察光线在静引力场中经过的路线。根据狭义相对论，光速由方程

$$-dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 + dx_4^2 = 0$$

给定，所以根据广义相对论，光速由方程

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu = 0 \tag{73}$$

给出。如果给定了方向（即给定比值 $dx_1 : dx_2 : dx_3$），则方程(73)就给出量

$$\frac{dx_1}{dx_4}, \quad \frac{dx_2}{dx_4}, \quad \frac{dx_3}{dx_4},$$

于是在欧几里得几何的意义上，速度

$$\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dx_4}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dx_4}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dx_4}\right)^2} = \gamma$$

1) E. 弗洛德利希指出，对某种类型恒星的光谱观察表明，这类效应是存在的，但是这个结论的判决性试验至今还未做过。

就确定了．不难看出，如果 $g_{\mu\nu}$ 不是常数，光线的路径对这坐标系来说一定是弯曲的．设 n 是与光线垂直的方向，那么根据惠更斯原理，若从平面（γ，n）去观察，光线具有曲率 $-\partial\gamma/\partial n$．

现在我们来研究光线在质量 M 附近通过时所经受的弯曲．设光线与质量 M 的垂直距离为 Δ．若我们取坐标系如附图，那么在足够的近似程度内，光线的总弯曲(凹面朝原点为正值)由下式给定：

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\gamma}{\partial x_1} dx_2,$$

而式(73)与式(70)给出

$$\gamma = \sqrt{-\frac{g_{44}}{g_{22}}} = 1 - \frac{\alpha}{2r}\left(1 + \frac{x_2^2}{r^2}\right).$$

完成上述计算，便得到

$$B = \frac{2\alpha}{\Delta} = \frac{\kappa M}{2\pi\Delta}. \tag{74}$$

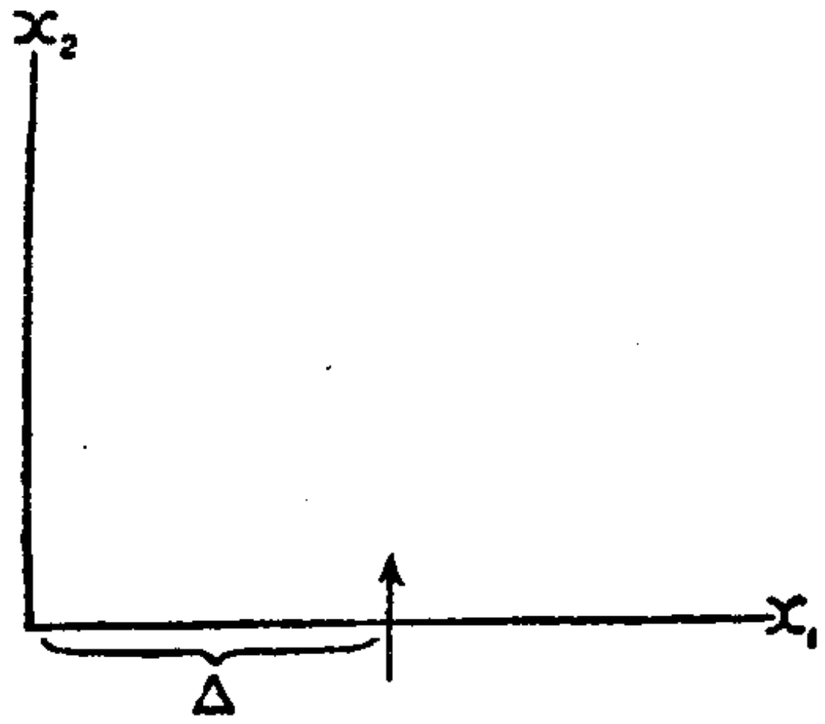

图 1

因此光线从太阳近旁通过，会经受 1.7″ 的偏转，而从木星近旁经过的光线的偏转约为 0.02″．

如果我们用更高的近似程度计算引力场，并以相应的精

确程度计算质量无穷小的质点的轨道运动，就会发现计算结果与开普勒-牛顿的行星运动定律有以下偏差：即行星的轨道椭圆在运动方向上作缓慢转动，其值为每公转

$$\varepsilon = 24\pi^3 \frac{a^2}{T^2c^2(1-e^2)}; \tag{75}$$

式中 a 表示半长轴；c 表示按通常测量单位计算的光速；e 为偏心率；T 为按秒计算的公转周期[1]。

计算给出水星轨道的转动为每世纪 43″，准确地符合天文学观测(勒维里尔)；因为天文学家已经发现，在扣除其他行星的摄动之后，这行星的近日点运动中仍留下这个无法解释的数值。

1) 有关计算见原文：A. Einstein, *Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss*, 1915, p. 831; K. Schwarzschild, *ibid.*, 1916, p. 189.

哈密顿原理与广义相对论

A. 爱因斯坦

最近洛伦兹与希尔伯特[1] 对广义相对论给出了特别清晰的形式，他们仅仅从一条变分原理导出了广义相对论的方程. 本文要做的也正是这件事. 不过我的目的在于用广义相对论所容许的尽可能一般的术语和尽可能明白的方式，来介绍这些基本关系. 特别是同希尔伯特的论述相反，我们将尽可能少地采取特殊假设. 另外又和我最近有关这个课题的论述不同，本文中选择坐标是完全自由的.

§ 1 变分原理与物质和引力的场方程

设引力场照常由张量[2] $g_{\mu\nu}$（或 $g^{\mu\nu}$）来描述；而物质（包括电磁场）由任何数目的空间时间函数 $q(p)$ 来描述. 至于在不变量理论中怎样表征这些函数我们并不关心. 此外，设 $\mathfrak{H}$ 是

$$g^{\mu\nu}, \quad g^{\mu\nu}_{\sigma}\left(=\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right), \quad g^{\mu\nu}_{\sigma\tau}\left(=\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma \partial x_\tau}\right),$$

和

$$q(\rho), \quad q_{(\rho)\alpha}\left(=\frac{\partial q_{(\rho)}}{\partial x_\alpha}\right)$$

的函数. 那么有多少个函数 $g_{\mu\nu}q_{(\rho)}$ 要确定，变分原理

---

1) 洛伦兹的四篇论文见 *Publications of the Koninkl. Akad. van Wetensch. te Amsterdam*, 1915 and 1916; D. Hilbert, *Göttingen Nachr*, 1915, Part 3.

2) 暂且不利用 $g_{\mu\nu}$ 的张量特性.

$$\delta \int \mathfrak{H} d\tau = 0 \tag{1}$$

就给出多少个微分方程，只要 $g^{\mu\nu}$ 和 $q_{(\rho)}$ 互相独立地变分，并使 $\delta q_{(\rho)}$，$\delta g^{\mu\nu}$和 $\frac{\partial}{\partial x_\sigma}(\delta g_{\mu\nu})$ 在积分限上都等于零.

现在我们要假定，$\mathfrak{H}$ 关于 $g_{\sigma\tau}$ 是线性的，而 $g^{\mu\nu}_{\sigma\tau}$ 的系数仅依赖于 $g^{\mu\nu}$. 这样就可以用一个对我们来说更方便的变分原理来代替变分原理 (1). 因为通过适当的分部积分，我们得到

$$\int \mathfrak{H} d\tau = \int \mathfrak{H}^* d\tau + F, \tag{2}$$

其中 F 表示展布在涉及的区域边界上的积分，$\mathfrak{H}^*$ 仅与 $g^{\mu\nu}$，$g^{\mu\nu}_\sigma$，$q_{(\rho)}$，$q_{(\rho)\alpha}$ 有关，而不再依赖于 $g^{\mu\nu}_{\sigma\tau}$. 对于我们关心的这些变分，由式 (2) 得出

$$\delta \int \mathfrak{H} d\tau = \delta \int \mathfrak{H}^* d\tau, \tag{3}$$

于是我们可以用更方便的形式

$$\delta \int \mathfrak{H}^* d\tau = 0 \tag{1a}$$

来代替变分原理 (1).

完成了 $g^{\mu\nu}$ 与 $q_{(\rho)}$ 的变分运算，我们就得到下式作为引力和物质的场方程[1]:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}\right) - \frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial g^{\mu\nu}} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial q_{(\rho)\alpha}}\right) - \frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial q_{(\rho)}} = 0. \tag{5}$$

§2 引力场的独立存在

如果对 $\mathfrak{H}$ 依赖于 $g^{\mu\nu}$，$g^{\mu\nu}_\sigma$，$g^{\mu\nu}_{\sigma\tau}$，$q_{(\rho)}$，$q_{(\rho)\alpha}$ 的方式不作

1) 为简单起见，在公式中略去了求和符号. 指标在一项里出现两次，通常就看作求和. 所以例如在式(4)里，$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}\right)$ 表示 $\sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}\right)$.

任何特殊假定，能量分量就不可能分为两部分，一部分属于引力场，另一部分属于物质．为了保证理论的这个特色，我们作下列假定：

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{G} + \mathfrak{M}, \tag{6}$$

其中 $\mathfrak{G}$ 应当只依赖于 $g^{\mu\nu}$，$g^{\mu\nu}_{\sigma}$，$g^{\mu\nu}_{\sigma\tau}$，而 $\mathfrak{M}$ 仅与 $g^{\mu\nu}$，$q_{(\rho)}$，$q_{(\rho)\alpha}$ 有关．于是方程(4)，(5)取下列形式：

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}}\right) - \frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{\mu\nu}}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial q_{(\rho)\alpha}}\right) - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial q_{(\rho)}} = 0. \tag{8}$$

这里 $\mathfrak{G}^*$ 与 $\mathfrak{G}$ 的关系同 $\mathfrak{H}^*$ 与 $\mathfrak{H}$ 的关系一样．

必须小心注意，倘若我们假定 $\mathfrak{M}$ 或 $\mathfrak{H}$ 也依赖于 $q_{(\rho)}$ 的一阶以上的导数，方程(8)或(5)就让位于其他方程．同样可以设想，$q_{(\rho)}$ 应当看做不是互相独立的，而是由条件方程联系起来的．所有这些对以下的研究并没有什么重要意义，因为那些研究的基础仅仅是对 $g^{\mu\nu}$ 变分我们的积分而得出的方程(7)．

§3 由不变量理论规定的引力场方程的性质

现在我们假设

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu \tag{9}$$

是不变量．这就确定了 $g_{\mu\nu}$ 的变换特征．至于描写物质的 $q(\rho)$ 的变换特征我们不作假定．另一方面，设函数 $H = \dfrac{\mathfrak{H}}{\sqrt{-g}}$，$G = \dfrac{\mathfrak{G}}{\sqrt{-g}}$ 和 $M = \dfrac{\mathfrak{M}}{\sqrt{-g}}$ 对于时空坐标的任何变换来说都是不变量．从这些假设可以推出，由式(1)导出的方程(7)与(8)是广义协变的．进一步又得出，G(不计常数因子)一定等于黎曼曲率张量的标量；因为并无其他不变量带有 G 应当

具备的性质[1]. 因此 $\mathfrak{H}^*$ 也是完全确定的，从而场方程(7)的左边也是完全确定的[2].

现在我们由广义相对性假设来推出函数 $\mathfrak{H}^*$ 的某些性质. 为此目的，我们作一个坐标的无穷小变换，令

$$x'_\nu = x_\nu + \Delta x_\nu, \tag{10}$$

其中 Δx_ν 是坐标的任意无穷小函数；x'_ν 是原坐标为 x_ν 的世界点在新系统中的坐标. 无论是坐标或者任何量 ψ 都服从以下形式的变换规律：

$$\psi' = \psi + \Delta\psi,$$

其中 $\Delta\psi$ 必须能用 Δx_ν 表示. 根据 $g^{\mu\nu}$ 的协变性质，不难导出 $g^{\mu\nu}$ 与 $g^{\mu\nu}_\sigma$ 的变换规律

$$\Delta g^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha}\frac{\partial(\Delta x_\nu)}{\partial x_\alpha} + g^{\nu\alpha}\frac{\partial(\Delta x_\mu)}{\partial x_\alpha}, \tag{11}$$

$$\Delta g^{\mu\nu}_\sigma = \frac{\partial(\Delta g^{\mu\nu})}{\partial x_\sigma} - g^{\mu\nu}_\alpha\frac{\partial(\Delta x_\alpha)}{\partial x_\sigma}. \tag{12}$$

既然 $\mathfrak{H}^*$ 仅依赖于 $g^{\mu\nu}$ 和 $g^{\mu\nu}_\sigma$，就有可能借助(11)和(12)来计算 $\triangle\mathfrak{H}^*$. 于是得出方程

$$\sqrt{-g}\Delta\left(\frac{\mathfrak{H}^*}{\sqrt{-g}}\right) = S^\nu_\sigma\frac{\partial(\Delta x_\sigma)}{\partial x_\nu} + 2\frac{\partial\mathfrak{H}^*}{\partial g^{\mu\sigma}_\alpha}g^{\mu\nu}\frac{\partial^2\Delta x_\sigma}{\partial x_\nu\partial x_\alpha}, \tag{13}$$

为简单起见，这里我们已令

$$S^\nu_\sigma = 2\frac{\partial\mathfrak{H}^*}{\partial g^{\mu\sigma}}g^{\mu\nu} + 2\frac{\partial\mathfrak{H}^*}{\partial g^{\mu\sigma}_\alpha}g^{\mu\nu}_\alpha + \mathfrak{H}^*\delta^\nu_\sigma - \frac{\partial\mathfrak{H}^*}{\partial g^{\mu\alpha}_\nu}g^{\mu\alpha}_\sigma. \tag{14}$$

从这两个方程可以作出两个推论，这推论对下面的讨论是重要的. 我们知道，$\frac{\mathfrak{H}}{\sqrt{-g}}$ 对任何变换都是不变量，但我们并不了解 $\frac{\mathfrak{H}^*}{\sqrt{-g}}$ 是否也如此. 不过容易证明，后者对任何线性坐

1) 由此看出为什么广义相对性假设导致一个十分确定的引力理论.

2) 通过分部积分得

$$\mathfrak{H}^* = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\left[\{\mu\alpha,\beta\}\{\nu\beta,\alpha\} - \{\mu\nu,\alpha\}\{\alpha\beta,\beta\}\right].$$

标变换是不变量. 由此可见,若所有的$\frac{\partial^2 \Delta x_\sigma}{\partial x_\nu \partial x_\alpha}$为零,式(13)右边就一定总是等于零. 于是 $\mathfrak{G}^*$ 必须满足恒等式

$$S_\sigma^\nu \equiv 0. \tag{15}$$

此外,如果我们这样选择 Δx_ν,使其仅在指定区域内部不等于零,而在无限接近边界处则等于零,那么对我们选定的变换来说,方程(2)里的边界积分值不会改变. 所以 $\Delta F = 0$,从而[1]

$$\Delta \int \mathfrak{G} d\tau = \Delta \int \mathfrak{G}^* d\tau.$$

但方程的左边必须等于零,因为 $\mathfrak{G}/\sqrt{-g}$ 和 $\sqrt{-g}d\tau$ 都是不变量. 于是方程右边也等于零. 这样,考虑到式(14),(15),(16),我们首先得到

$$\int \frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g_\alpha^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu} \frac{\partial^2(\Delta x_\sigma)}{\partial x_\nu \partial x_\alpha} d\tau = 0. \tag{16}$$

用两次分部积分来变换这个方程,并注意到 Δx_σ 是自由选择的,我们就得到恒等式

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x_\alpha}\left(g^{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g_\alpha^{\mu\sigma}}\right) \equiv 0. \tag{17}$$

根据由 $\mathfrak{G}/\sqrt{-g}$ 的不变性导出的恒等式(16),(17),这也就是根据广义相对性假设,我们现在就得作出一些结论.

首先把引力的场方程(7)乘以 $g^{\mu\sigma}$(作混合乘积),再交换指标 σ 和 ν,便得到场方程(7)的等效方程

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g_\alpha^{\mu\sigma}}\right) = -(\mathfrak{T}_\sigma^\nu + \mathfrak{t}_\sigma^\nu), \tag{18}$$

其中

$$\mathfrak{T}_\sigma^\nu = -\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu}, \tag{19}$$

1) 通过引入量 $\mathfrak{G}$ 和 $\mathfrak{G}^*$ 来代替 $\mathfrak{H}$ 和 $\mathfrak{H}^*$.

$$\mathfrak{t}_\sigma^\nu = -\left(\frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g_\alpha^{\mu\sigma}} g_\alpha^{\mu\nu} + \frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mathfrak{G}^* \delta_\sigma^\nu - \frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g_\nu^{\mu\alpha}} g_\alpha^{\mu\alpha}\right). \tag{20}$$

最后这个 $\mathfrak{t}_\sigma^\nu$ 的表达式可以由式(14)和(15)来辩明. 将式(18)对 x_ν 微分,然后对 ν 求和,再考虑到(17),就推出

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\mathfrak{T}_\sigma^\nu + \mathfrak{t}_\sigma^\nu) = 0. \tag{21}$$

方程(21)表示动量守恒和能量守恒. 我们把 $\mathfrak{T}_\sigma^\nu$ 称为物质的能量分量, $\mathfrak{t}_\sigma^\nu$ 称为引力场的能量分量.

注意到式(20),把引力的场方程(7)乘以 $g_\sigma^{\mu\nu}$ 并对 μ, ν 求和,就推出

$$\frac{\partial \mathfrak{t}_\sigma^\nu}{\partial x_\nu} + \frac{1}{2} g_\sigma^{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{\mu\nu}} = 0,$$

或根据式(19)和(21),写成

$$\frac{\partial \mathfrak{T}_\sigma^\nu}{\partial x_\nu} + \frac{1}{2} g_\sigma^{\mu\nu} \mathfrak{T}_{\mu\nu} = 0, \tag{22}$$

其中 $\mathfrak{T}_{\mu\nu}$ 表示量 $g_{\nu\sigma}\mathfrak{T}_\mu^\sigma$. 这就是物质的能量分量必须满足的四个方程.

必须着重指出,(广义协变的)守恒定律(21)和(22)是从引力的场方程(7)推出的,推导时仅仅利用了广义协变性(相对性)假设,而没有用到物质现象的场方程(8).

根据广义相对论对宇宙学的考查

A. 爱因斯坦

大家知道，把泊松方程

$$\nabla^2\phi = 4\pi K\rho \tag{1}$$

和质点的运动方程结合起来，至今还不能完全地代替牛顿的超距作用理论。仍有必要考虑到这样一种情况，即在空间无限远处，势 ϕ 趋向于一个固定的极限值。在广义相对论的引力理论中有类似的情况。这里也一样，如果我们实在不得不把宇宙看作具有无限空间广延的存在，那么就必须对微分方程补充上空间无限远处的边界条件。

在关于行星问题的论述中，我是这样选择边界条件的，即假定有可能选出一个参考系，使得在空间无限远处所有引力势 $g_{\mu\nu}$ 变为常数。但是决不能先验地认为，当要考虑物理世界的更大范围时，我们也可以规定同样的边界条件。以下就是到目前为止我对这个基本的重要问题的意见。

§1 牛顿理论

如所周知，ϕ 在空间无限远处趋于常值极限这个牛顿理论边界条件导致了这样一种观点，即物质密度在无限远处为零。因为我们设想，在宇宙空间中也许有某个地方的附近，物质的引力场从大范围看起来是球对称的。因此从泊松方程推出，为使 ϕ 在无限远处趋于某一极限，平均密度 ρ 应该随着离

中心的距离 r 增加而比 $1/r^2$ 更快地趋向于零[1]. 所以在这个意义上，牛顿宇宙是有限的，虽然它可以具有无限巨大的总质量.

由此首先推出，天体所发射出的辐射有一部分离开牛顿宇宙体系向四面八方前进，变成无效的并消失在无穷远. 全部天体会不会这样呢？对这个问题很难作否定的回答. 因为由 ϕ 在空间无限远处趋向于一个有限极限的假设推出，具有有限动能的天体能够克服牛顿引力而达到空间无限远. 根据统计力学，只要星系传给单独一个星体的总能量大到足以把这星体抛向无穷远的行程，使其永远不能返回，那么这种情况就一定时常出现.

我们也许会企图假定无穷远处极限势的值非常高来避免这个独特的困难. 当然，假如引力势的值本身不必受天体的限制，那的确是一个可行的办法. 而实际上我们不能不认为，引力场内任何巨大势差的出现，都是与事实矛盾的. 势差的数量级一定是这样小，以致由此引起的星速不超过实际上观察到的速度.

如果我们把气体分子的玻耳兹曼分布律运用于星体，将星系同处于热平衡的气体进行比较，就会发现，牛顿式星系是根本不可能存在的. 因为对应于中心与空间无穷远之间的一个有限的势差，存在着一个有限的密度比值. 这样，在无穷远处密度为零，这就意味着中心处密度等于零.

看来，在牛顿理论的基础上来克服这些困难几乎是不可能的. 那么是否能通过修正牛顿理论来消除这个困难呢？首先，我们要指出一个本身并不要求认真对待的方法，它只是在下面的讨论中充当一个配角. 代替泊松方程，我们写出

---

1) ρ 是物质的平均密度，计算平均值所取的区域时，应当比两个相邻恒星的距离大，但与整个星系相比则很小.

$$\nabla^2\phi - \lambda\phi = 4\pi\kappa\rho, \tag{2}$$

其中 λ 是一个普适常数. 若 ρ_0 为均匀的质量分布密度,则

$$\phi = -\frac{4\pi\kappa}{\lambda}\rho_0 \tag{3}$$

是方程(2)的解. 假如密度 ρ_0 等于宇宙中物质的真实平均密度,此解就对应于恒星物质均匀地分布在整个空间的情况.于是这个解相当于均匀地充满物质的中心空间的无限广延. 倘若我们在不改变平均密度的前提下, 设想物质是局部非均匀地分布的,那么除了方程(3)的常数 ϕ 以外, 还会有另一个 ϕ, 由于 $\lambda\phi$ 比 $4\pi\kappa\rho$ 小, 这个 ϕ 在较稠密的物质邻近将更加与牛顿场相似.

这样构造的一个宇宙,就其引力场而言是没有中心的.所以我们不一定要假设空间无限远处密度减少, 但平均势和平均密度都应当保持常数直到无穷远. 在牛顿理论中所发现的与统计力学的矛盾, 这里就不再出现了. 在密度为有限然而其值极小的情况下,物质是处于平衡的,用不着任何内部的物质力(压力)来维持平衡.

§2 符合广义相对论的边界条件

在这一节里,我要引导读者到我所走过的、有点崎岖而曲折的道路上去, 因为不这样做就不能指望读者会对旅途的终点发生兴趣. 我们将要得出的结论是, 我一直维护的引力场方程仍须稍微作一些修正, 以便在广义相对论基础上或许能够避免牛顿理论所遇到的基本困难(见 § 1). 这个修正恰恰对应于从泊松方程 (1) 到方程 (2) 的过渡. 我们最后可以推断,空间无穷远的边界条件将要完全消失,因为宇宙连续区就其空间尺度而言, 应视为具有有限空间(三维)体积的独立连续区.

关于在空间无穷远处怎样规定边界条件的意见，直到最近我仍然主张以下列考虑为根据．在一个内部一致的相对论性理论中不能有相对于“空间”的惯性，而只能有质量相互之间的惯性．所以如果有一物体离开宇宙间其他一切质量充分远，则这物体的惯性一定变为零． 现在我们要用数学公式来表述这个条件．

按照广义相对论，负动量由协变张量的头三个分量给定，而能量由协变张量最后一个分量乘以 $\sqrt{-g}$ 给定：

$$m\sqrt{-g}\,g_{\mu\alpha}\frac{dx_\alpha}{ds}, \tag{4}$$

象已往一样，其中我们令

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu. \tag{5}$$

若有可能选择坐标系，使引力场在每个点上都是空间各向同性的，则在这种特别明显的情况下，我们得到更简单的式子

$$ds^2 = -A\,(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + B\,dx_4^2.$$

此外，如果同时有

$$\sqrt{-g} = 1 = \sqrt{A^3B},$$

则由式（4）得出小速度下的一级近似，动量的各分量为

$$m\frac{A}{\sqrt{B}}\frac{dx_1}{dx_4}, \quad m\frac{A}{\sqrt{B}}\frac{dx_2}{dx_4}, \quad m\frac{A}{\sqrt{B}}\frac{dx_3}{dx_4},$$

而能量（在静止情况下）为

$$m\sqrt{B}.$$

从动量的表达式看出，$m\frac{A}{\sqrt{B}}$ 起着静质量的作用．由于 m 是质点所特有的，不依赖于其位置的常数，如果我们保留在空间无限远处 $\sqrt{-g}=1$ 的条件，则仅当 A 减少到零而 B 增至无穷大，此式才会等于零．所以看来系数 $g_{\mu\nu}$ 的这种退化是一

切惯性的相对性假设所要求的. 这个要求意味着势能 $m\sqrt{B}$ 在无限远处变为无穷大. 于是一个质点永远不能离开这个系统;更详细的研究表明,这一点也适用于光线. 所以一个宇宙体系若其无穷远处的引力势具有这种特点，就不会象刚才涉及牛顿理论时所说的那样有耗散掉的危险.

我想指出,作为推理根据的关于引力势的简化了的假设，只是为了易懂起见引入的. 其实不用进一步的限制性假定，也能找出反映问题本质的一般公式，用来表达 $g_{\mu\nu}$ 在无限远处的行为.

在这个阶段，我在数学家 J. 格罗默的友好帮助下，研究了在无限远处按上述方式退化了的、中心对称的静态引力场. 我们应用了引力势 $g_{\mu\nu}$，并在引力场方程的基础上，从 $g_{\mu\nu}$ 计算出物质的能量张量 $T_{\mu\nu}$. 不过同时也证明了，对恒星系来说,这种边界条件完全不会成为问题,天文学家德·西特最近也正确地强调过这一点.

有质物质的逆变能量张量 $T^{\mu\nu}$ 由下式给定:

$$T^{\mu\nu} = \rho \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds},$$

其中 ρ 是按自然度量单位计算的物质密度. 若适当选择坐标系,则星的速度比起光速来是非常小的. 因此可以用 $\sqrt{g_{44}}\,dx_4$ 代替 ds. 这告诉我们,与 $T^{\mu\nu}$ 的最后一个分量 T^{44} 相比，$T^{\mu\nu}$ 的其他分量一定都十分小. 但要靠选择边界条件来协调这个情况是完全不可能的. 回想起来，这个结果也并不奇怪. 从星的速度不大这件事实得出一个结论,在任何有恒星的地方，引力势(在我们的情况下是 $\sqrt{B}$) 也决不会比地球这里大很多. 这是从统计学推理而得出的，正如在牛顿理论的场合那样. 无论如何，计算已经使我确信，$g_{\mu\nu}$ 在空间无限远处退化不可以作为先决条件来假定.

在这个尝试失败之后，出现了两种可能性：

（一）我们可以象处理行星问题那样，在适当选择参考系后，可以要求在空间无限远处 $g_{\mu\nu}$ 接近下列数值：

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{matrix},$$

（二）我们完全可以避免对空间无限远处规定一般有效的边界条件；而在所研究区域的空间边界上，我们必须就各种特殊情况分别给定 $g_{\mu\nu}$，正如习惯上分别地给出时间初始条件那样。

第二种方案对解决问题没有提供任何希望，而是等于放弃。这是德·西特[1]最近提出的一种难以反驳的见解。但是我必须承认，在这个基本问题上完全放弃追究，对我来说是很难堪的。只要向着令人满意的观点进展的各种努力还没有证实是无结果的，我就不应当放弃。

第一种方案在好几个方面都不能令人满意。首先那些边界条件要以选择好一定的参考系为先决条件，这就违背了相对性原理的精神。其次，如果采纳了这种观点，我们就不可能遵循惯性的相对性条件。因为质量为 m 的（按照自然度量单位）质点的惯性与 $g_{\mu\nu}$ 有关；但如前所述，这些量与它们在空间无限远处假定的值差别甚微。所以惯性诚然受到物质的影响，不过它不会为物质（出现在有限空间中的）所决定。按照这种观点，如果只有一个质点出现，它也会具有惯性，而且事实上，这个惯性同当它被真实宇宙中其他质量围绕时具有的惯性差不多一样大。最后，涉及牛顿理论时谈到的统计学

1) de Sitter, *Akad. van Wetensch. te Amsterdam*, 8 Nov., 1916.

上的缺点，又可以用来反对这种观点.

从以上的论述可以看出，我未能把空间无限远处的边界条件列成公式. 不过仍然存在一个可能的解决办法，而不必依从(二)所示的条件. 因为假如有可能把宇宙看成关于它的空间尺度是有限的(封闭的)连续区，我们就完全不需要任何这样的边界条件. 我们将着手证明，广义相对性假设以及星速度不大这个事实，都是同宇宙在空间上是有限的假设相容的；当然，为了贯彻这个思想，需要对引力场方程作一般的修正.

§3 具有物质均匀分布的空间有限的宇宙

根据广义相对论，四维时空连续区中每个点的度规性质(曲率)，由该点的物质及其状态所确定. 所以由于物质分布不均匀，连续区的度规性质就必然是极端复杂的. 但如果我们所关心的只是在大范围内的结构，就不妨把物质设想为均匀地分布在巨大的空间中，于是物质的分布密度是变化极缓慢的函数. 这样，我们的做法就有些类似于测地学家的办法，他们用椭球面来近似地表示地球表面，尽管地球表面从小范围看来是非常复杂的.

在物质分布方面，来自经验的最重要事实就是恒星的相对速度比起光速来十分小. 因此我想，暂时可以认为推理建基于下列近似假设：即存在这样一个参考系，相对于这系统，物质可以看成是永久静止的.所以对这系统来说，根据式(5)，物质的逆变能量张量 $T^{\mu\nu}$ 具有下列简单形式：

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho \end{matrix} \tag{6}$$

(平均)分布密度标量 ρ 先验地可以是空间坐标的函数. 然而如果假定宇宙在空间上是有限的，我们就会想起 ρ 应当与位置无关的假设. 以下的研究就是基于这一假设.

就引力场来说,从质点的运动方程

$$\frac{d^2x_\nu}{ds^2}+\{\alpha\beta,\nu\}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds}=0$$

推出,仅当 g_{44} 与位置无关,质点在静引力场内才能保持静止.

此外,既然我们预先假定了一切量与时间坐标 x_4 无关，对于所需的解,我们可以要求：对于一切 x_ν,

$$g_{44}=1. \tag{7}$$

此外,象通常对静态问题那样,我们必须令

$$g_{14}=g_{24}=g_{34}=0. \tag{8}$$

现在剩下的是要确定那些规定连续区的纯粹空间几何关系的引力势分量 $(g_{11},g_{12},\cdots,g_{33})$. 根据我们的假定,产生场的质量是均匀分布的，由此可见，所求空间的曲率一定是常数. 因此，对于这样的质量分布，所求的 x_1, x_2, x_3 的有限连续区 (x_4 不变)必然是球状空间.

例如用下列方法，我们就可得到这样的空间. 我们从四维欧几里得空间 ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 出发，其线素为 $d\sigma$，令

$$d\sigma^2=d\xi_1^2+d\xi_2^2+d\xi_3^2+d\xi_4^2. \tag{9}$$

在这空间中,我们来研究超曲面

$$R^2=\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2+\xi_4^2, \tag{10}$$

其中 R 为常数. 这超曲面上的点形成三维连续区——曲率半径为 R 的球状空间.

我们从四维欧几里得空间出发，仅仅是为了便于定义超曲面. 在超曲面上,我们感兴趣的只有那些点,它们的度规性质与物质均匀地分布的物理空间的度规性质是相同的. 为了描写这个三维连续区，我们可以使用坐标 ξ_1, ξ_2, ξ_3 (在超

平面 $\xi_4 = 0$ 上的投影)，因为根据式(10)，ξ_4 可以用 ξ_1，ξ_2，ξ_3 来表示. 从式(9)消去 ξ_4，便得出球状空间的线素表达式

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu} d\xi_\mu d\xi_\nu,$$
$$\gamma_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \frac{\xi_\mu \xi_\nu}{R^2 - \rho^2}, \tag{11}$$

其中当 $\mu = \nu$ 时，$\delta_{\mu\nu} = 1$；当 $\mu \neq \nu$ 时，$\delta_{\mu\nu} = 0$，而 $\rho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$. 当所研讨的问题是关于考察坐标为 $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$ 的两个点之一的周围情况时，所选的坐标是方便的.

现在所需的四维时空宇宙的线素也是给定的了. 对于势 $g_{\mu\nu}$(它的两个指标皆不等于4)，我们必须令

$$g_{\mu\nu} = -\left(\delta_{\mu\nu} + \frac{x_\mu x_\nu}{R^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} \right), \tag{12}$$

这个方程和式(7)，(8)结合起来，就完全确定了光线、时钟和量杆的性状.

§4 关于引力场方程的附加项

对任何选定的坐标系，我提出的引力场方程是这样的:

$$G_{\mu\nu} = -\kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right),$$
$$G_{\mu\nu} = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \{\mu\nu,\ \alpha\} + \{\mu\alpha,\ \beta\} \{\nu\beta,\ \alpha\} \tag{13}$$
$$+ \frac{\partial^2 \lg \sqrt{-g}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \{\mu\nu, \alpha\} \frac{\partial \lg \sqrt{-g}}{\partial x_\alpha}.$$

当我们用式(7)，(8)和(12)给定的值代替上式的 $g_{\mu\nu}$ 而用式(6)给定的值代替式中的(协变)物质能量张量，方程组(13)是决不能满足的. 在下一节我们要指出，怎样更简单地作出这项计算. 这样，假如我至今沿用的场方程(13)确实是唯一适合于广义相对性假设的方程，看来我们就得断定，相对

论不容许宇宙在空间上是有限的假设.

不过方程组(13)[1]可以作一个容易想起的、与相对性假设不矛盾的推广，并且恰恰类似于由方程(2)所给出的对泊松方程的推广. 因为在场方程(13)的左边，我们可以加上一项，即基本张量 $g_{\mu\nu}$ 乘上暂时未知的普适常数 $-\lambda$，这样并不破坏广义协变性. 代替场方程 (13)，我们写出

$$G_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = -\kappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right). \qquad (13a)$$

当 λ 充分小时，这个场方程无论如何也符合太阳系的经验事实，它也满足动量守恒定律和能量守恒定律，因为我们是这样获得代替式 (13) 的式 (13a) 的，即在哈密顿原理中，不引入黎曼张量的标量，而是引入这个增加了一个普适常数的标量；而哈密顿原理当然保证了守恒定律有效. 在 § 5 将表明，场方程 (13a) 与我们对场和物质的推测是不矛盾的.

§ 5 计算与结果

由于连续区内一切点都处于平等地位，所以只要对一个点进行计算就够了，例如可以取坐标为

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$$

的两个点中的一个. 对式 (13a) 里的 $g_{\mu\nu}$，无论在哪里，它们只被微分一次或者一次也不微分，就必须用以下的值代入，即

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}.$$

因此首先得出

---

1) 原文误为方程组(14). ——编者

$$G_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_1}[\mu\nu, 1] + \frac{\partial}{\partial x_2}[\mu\nu, 2] + \frac{\partial}{\partial x_3}[\mu\nu, 3] + \frac{\partial^2 \lg\sqrt{-g}}{\partial x_\mu \partial x_\nu}.$$

考虑到(7)、(8)、(13)，从这里就不难看出，如果关系式

$$-\frac{2}{R^2} + \lambda = -\frac{\kappa\rho}{2}, \qquad -\lambda = -\frac{\kappa\rho}{2},$$

或

$$\lambda = \frac{\kappa\rho}{2} = \frac{1}{R^2} \tag{14}$$

成立，则式(13a)的所有方程都是满足的。

这样，新引入的普适常数 λ 既规定了能保持平衡的平均分布密度 ρ，也规定了球状空间的半径 R 和体积 $2\pi^2R^3$。根据我们的观点，宇宙总质量 M 是有限的。事实上等于

$$M = \rho \cdot 2\pi^2R^3 = 4\pi^2\frac{R}{\kappa} = \pi^2\sqrt{\frac{32}{\kappa^3\rho}}. \tag{15}$$

所以如果符合我们的推理，实际宇宙的理论形象就应当是这样的：空间曲率是按照物质分布情况随时间和地点而变化的，然而我们可以粗略地用球状空间来逼近它。不管怎样，这种观点在逻辑上是一致的，而且从广义相对论的立场看来是最近在手边的。至于从目前天文学知识的角度看来是否靠得住，就不在这里讨论了。为了达到这种逻辑上一致的观点，我们就必须推广引力场方程，至于这做法的合理性还未得到有关引力方面的实际知识的证明。然而应该着重指出，即使不引入补充项，我们的结果也给出空间的正曲率。只是为了使物质的准静态分布成为可能，这补充项才是必须的，正如星的速度不大这件事实所要求的那样。

在物质的基本粒子结构中引力场是否起着重要的作用？

A. 爱因斯坦

到目前为止，无论是牛顿的引力论还是相对论性的引力论，对物质结构理论都未导致任何进展．鉴于这种情况，本文将要指出，我们有理由设想，形成原子的基本构造物是由万有引力结合起来的．

§ 1 现有观点的缺陷

人们曾经费尽心机构想出一种理论，以期解释构成电子的电平衡的问题，特别是 G. 米，他一直致力于这个问题的深入研究．他的理论已经在理论物理学家当中得到有力的支持，这个理论的主要基础是，除麦克斯韦-洛伦兹理论的能量项之外，在能量张量中引入依赖于电动力势分量的补充项． 这些新项在电子外部的空间是不重要的，然而在电子内部，为了维持与电斥力相平衡，它是起作用的． G. 米，D. 希尔伯特，H. 韦尔等人创立的理论，尽管在形式结构上美丽，但其物理结果仍旧不能令人满意．一方面，可能性之多就够令人沮丧，另一方面，那些附加项至今仍未能作成一种足够简单的形式，使解答令人满意．

直到现在，广义相对论未能使这个问题的现状有所改变．如果我们暂时撇开附加的宇宙项，场方程取下列形式：

$$G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G = -\kappa T_{\mu\nu}, \tag{1}$$

其中 $G_{\mu\nu}$ 表示短缩的黎曼曲率张量；G 为多次短缩而形成的曲率标量；$T_{\mu\nu}$ 是"物质"能量张量。$T_{\mu\nu}$ 不依赖于 $g_{\mu\nu}$ 的导数这一假定是同本问题的历史发展相一致的。因为这些量当然是狭义相对论意义下的能量分量，而在狭义相对论里，变量 $g_{\mu\nu}$ 是不出现的。这方程左边第二项的选择要使得式(1)左边的散度恒等于零，于是取(1)的散度，就得到方程

$$\frac{\partial \mathfrak{T}_{\mu}^{\sigma}}{\partial x_{\sigma}} + \frac{1}{2} g_{\mu}^{\sigma\tau} \mathfrak{T}_{\sigma\tau} = 0. \tag{2}$$

这方程在狭义相对论的极限情况下，给出全部的守恒方程

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} = 0.$$

方程(1)左边第二项的物理基础就在这里。这种极限过渡具有任何合理的意义还没有先验地确定。因为倘若引力场真的在物质粒子的结构中起着重要作用，则向 $g_{\mu\nu}$ 为常数的极限情况过渡就会失去根据，的确，因为在 $g_{\mu\nu}$ 为常数的情况下就不可能存在任何物质粒子。因此，如果我们期望引力对组成粒子的场的结构有贡献，就不能把方程(1)看成是已证实了的。

以电磁场 $\phi_{\mu\nu}$ 的麦克斯韦-洛伦兹能量分量

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \phi_{\sigma\tau} \phi^{\sigma\tau} - \phi_{\mu\sigma} \phi_{\nu\tau} g^{\sigma\tau} \tag{3}$$

代入式(1)，取散度后再作一些简化，就得出[1)]

$$\phi_{\mu\sigma} \mathfrak{I}^{\sigma} = 0, \tag{4}$$

其中为简洁起见，已令

1) 参看 A. Einstein, *Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss.*, 1916, pp. 187, 188.

$$\frac{\partial}{\partial x_\tau}\left(\sqrt{-g}\phi_{\mu\nu}g^{\mu\sigma}g^{\nu\tau}\right)=\frac{\partial \mathfrak{f}^{\sigma\tau}}{\partial x_\tau}=\mathfrak{J}^\sigma. \tag{5}$$

在计算过程中我们使用了第二组麦克斯韦方程

$$\frac{\partial \phi_{\mu\nu}}{\partial x_\rho}+\frac{\partial \phi_{\nu\rho}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial \phi_{\rho\mu}}{\partial x_\nu}=0. \tag{6}$$

由式(4)看出，电流密度 $\mathfrak{J}^\sigma$ 必须处处为零。 所以正如早已知道的那样，在方程(1)基础上，我们不能局限于麦克斯韦-洛伦兹理论的电磁分量而建立起电子理论。于是如果坚持方程(1)，就会驱使我们走上 G. 米理论的道路[1]。

不仅物质问题，而且宇宙学问题也一样，都会引起对方程(1)的怀疑。 我在早先一篇论文里已经指出，广义相对论要求宇宙在空间上是有限的，然而这个宇宙图象要求推广方程(1)，引入一个新的普适常数 λ，λ 同宇宙总质量(或者物质的平衡密度)有着确定的关系。 这种做法对理论的形式美是有严重损害的。

§2 没有标量的场方程

我们用下列方程来代替方程(1)：

$$G_{\mu\nu}-\frac{1}{4}g_{\mu\nu}G=-\kappa T_{\mu\nu}, \tag{1a}$$

其中 $T_{\mu\nu}$ 表示式(3)给定的电磁场能量，这样上面提到的困难就可以消除。

这方程的第二项带有因子 $-1/4$，其形式上的理由就在于使左边的标量

$$g^{\mu\nu}\left(G_{\mu\nu}-\frac{1}{4}g_{\mu\nu}G\right)$$

恒等于零，正如根据式(3)，使方程(1a)右边的标量 $g^{\nu\mu}T_{\mu\nu}$ 恒

1) 参看 D. Hilbert, *Göttinger Nachr.*, 20 Nov., 1915.

等于零。 假如我们不是在方程 (1a) 而是在方程 (1) 的基础上进行推理，相反地，就会得到条件 $G = 0$，对 $g_{\mu\nu}$ 来说，这条件必须处处成立，而不依赖于电场。显然方程 [(1a), (3)] 是方程 [(1), (3)] 的结果，但反过来不成立。

初看起来我们也许会感到怀疑，式 (1a) 加上式 (6) 是否足以确定整个场。 在广义相对论性理论中，为了确定 n 个独立变量，需要 $n - 4$ 个互相独立的微分方程，因为考虑到选择坐标的任意性，在方程的解里一定自然地出现四个任意的坐标函数。 所以为了确定 16 个独立量 $g_{\mu\nu}$ 和 $\phi_{\mu\nu}$，我们就需要 12 个全部互相独立的方程。碰巧式 (1a) 的 9 个方程和式 (6) 的三个方程是互相独立的。

作式 (1a) 的散度，因为 $G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}G$ 的散度为零，便得到

$$\phi_{\sigma\alpha}J^{\alpha} + \frac{1}{4\kappa}\frac{\partial G}{\partial x_{\sigma}} = 0. \tag{4a}$$

由此我们首先看出，在电荷密度为零的四维区域内，曲率标量 G 是常数。 倘若我们假定空间所有这些部分是连通的，因而电荷密度仅在分离的“世界线”上不等于零，那么在世界线之外，曲率标量就处处都具有常数值 G_0。至于在电荷密度不为零的区域内 G 的性状，方程 (4a) 也能给出一个重要结论。 如果象通常那样，把电流看作运动的电荷密度，令

$$J^{\sigma} = \frac{\mathfrak{J}^{\sigma}}{\sqrt{-g}} = \rho\frac{dx_{\sigma}}{ds}, \tag{7}$$

作式 (4a) 与 J^{σ} 的内积，考虑到 $\phi_{\mu\nu}$ 的反对称性，便得关系式

$$\frac{\partial G}{\partial x_{\sigma}}\frac{dx_{\sigma}}{ds} = 0. \tag{8}$$

于是在电荷运动的每条世界线上，曲率标量都是常数。 方程

(4a) 可以用形象的方式解释如下：曲率标量起着负压力的作用，这种压力在带电粒子外部具有常数值 G_0。在每个粒子的内部，存在负压力（正的 $G - G_0$），其落差使电动力维持平衡．压力的极小值，或者曲率标量的极大值，在粒子内部不随时间而变化．

现在我们把场方程（1a）写成下列形式：

$$\left(G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}G\right) + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}G_0 = -\kappa\left[T_{\mu\nu} + \frac{1}{4\kappa}g_{\mu\nu}(G - G_0)\right]. \tag{9}$$

另一方面，变换前面那个补充了宇宙项的方程

$$G_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = -\kappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right).$$

减去乘以 1/2 的标量方程，就得出

$$\left(G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}G\right) + g_{\mu\nu}\lambda = -\kappa T_{\mu\nu}.$$

现在在只出现电场与引力场的区域里，这方程的右边等于零．对这种区域，通过作出标量，便得到

$$-G + 4\lambda = 0.$$

所以在这种区域里，曲率标量为常数，于是 λ 可以用 $\frac{1}{4}G_0$ 来代替．这样一来，我们可以将前面的场方程（1）写成

$$G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}G + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}G_0 = -\kappa T_{\mu\nu}. \tag{10}$$

把式（9）同式（10）比较，我们发现新场方程与旧场方程没有什么差别，只是作为“引力质量”的张量 $T_{\mu\nu}$ 被 $T_{\mu\nu} + \frac{1}{4\kappa}g_{\mu\nu}\cdot(G - G_0)$ 所代替了，后者不依赖于曲率标量．然而新的表达式具有很大的优越性，即量 λ 在基本方程中是作为积分常

数出现的，而不再是基本定律特有的普适常数.

§3 关于宇宙学问题

从最后这个结果可以推想，根据新的表达式，宇宙可以看作在空间上是有限的，无需再作另外的假设. 和上一篇论文那样，我还要证明，具有均匀物质分布的球状宇宙是适合于这个方程的.

首先我们令

$$ds^2 = -\gamma_{ik}dx_i dx_k + dx_4^2 \qquad (i, k = 1, 2, 3). \quad (11)$$

如果 P_{ik} 和 P 分别是三维空间中的二秩曲率张量和曲率标量，则我们有

$$G_{ik} = P_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3),$$

$$G_4^i = G_{4i} = G_{44} = 0,$$

$$G = -P,$$

$$-g = \gamma.$$

由此推出，在我们讨论的情况下，有

$$G_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik}G = P_{ik} - \frac{1}{2}\gamma_{ik}P \qquad (i, k = 1, 2, 3),$$

$$G_{44} - \frac{1}{2} g_{44}G = \frac{1}{2}P.$$

从这一点出发，我们沿着两个方向进行考虑. 首先以方程(1a)为出发点，在这里，$T_{\mu\nu}$ 表示构成物质的电粒子所产生的电磁场的能量张量. 对这种场来说，处处有

$$\mathfrak{T}_1^1 + \mathfrak{T}_2^2 + \mathfrak{T}_3^3 + \mathfrak{T}_4^4 = 0.$$

各个 $\mathfrak{T}_\mu^\nu$ 是随位置而迅速变化的量，然而为了我们的需要，无疑可以用它们的平均值来代替它们. 所以必须选择

$$\mathfrak{T}_1^1 = \mathfrak{T}_2^2 = \mathfrak{T}_3^3 = -\frac{1}{3}\mathfrak{T}_4^4 = \text{常数},$$

$$\mathfrak{T}_\mu^\nu = 0 \qquad (\text{当}\mu \neq \nu), \qquad (12)$$

于是

$$T_{ik}=\frac{1}{3}\frac{\mathfrak{T}_4^4}{\sqrt{\gamma}}\gamma_{ik},\quad T_{44}=\frac{\mathfrak{T}_4^4}{\sqrt{\gamma}}.$$

考虑到刚才指出的,则代替式(1a)我们得到

$$P_{ik}-\frac{1}{4}\gamma_{ik}P=-\frac{1}{3}\gamma_{ik}\frac{\kappa\mathfrak{T}_4^4}{\sqrt{\gamma}},\tag{13}$$

$$\frac{1}{4}P=-\frac{\kappa\mathfrak{T}_4^4}{\sqrt{\gamma}}.\tag{14}$$

标量方程(13)和(14)是一致的. 正因为这样,我们的基本方程同球状宇宙的观念是相容的. 由式(13)与(14)推出

$$P_{ik}+\frac{4}{3}\frac{\kappa\mathfrak{T}_4^4}{\sqrt{\gamma}}\gamma_{ik}=0,\tag{15}$$

大家知道[1],这方程组为(三维)球状宇宙所满足.

另一方面,我们也可以根据方程(9)来思考. 在式(9)右边的那些项,根据唯象的观点,应当代之以物质的能量张量,也就是说,应当代之以

$$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&\rho\end{matrix},$$

其中 ρ 为物质的平均密度(假设物质是静止的). 由此得出方程

$$P_{ik}-\frac{1}{2}\gamma_{ik}P-\frac{1}{4}\gamma_{ik}G_0=0,\tag{16}$$

$$\frac{1}{2}P+\frac{1}{4}G_0=-\kappa\rho.\tag{17}$$

根据方程(16)的标量和方程(17),我们得到

1) 参看 H. Weyl, "Raum, Zeit, Materie," § 33.

$$G_0 = -\frac{2}{3}P = 2\kappa\rho, \tag{18}$$

从而由式(16)得出

$$P_{ik} - \kappa\rho\gamma_{ik} = 0, \tag{19}$$

这方程除系数表达式外,与式(15)是一致的. 经比较,得

$$\mathfrak{T}_4^4 = \frac{3}{4}\rho\sqrt{\gamma}. \tag{20}$$

这个方程表示,构成物质的能量有四分之三应归诸电磁场,而四分之一归诸引力场.

§4 结论

以上的想法表明,不必象 G. 米理论那样引入假设的补充项,而只是从引力场与电磁场出发来形成一种物质结构的理论是可能的. 这个可能性看来是很有希望的,因为它使我们不必为宇宙学问题的解答而引入特殊常数 λ. 另一方面也存在一个特殊困难.因为若我们限定式(1)于球对称静态情况,就少得到一个确定 $g_{\mu\nu}$ 与 $\phi_{\mu\nu}$ 所需的方程,结果电的任何球对称分布似乎都能保持平衡. 因此基本量子的结构问题仍然不能直接在此处给出的场方程的基础上来解决.

引力与电

H. 韦尔

按照黎曼的意见[1],几何学是根据以下两个论据:

(一) 空间是三维连续区　因此,它的点的流形可以一致地用三个坐标值 x_1, x_2, x_3 来表示.

(二) 毕达哥拉定理　两个无限接近点

$P = (x_1, x_2, x_3)$ 和 $P' = (x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$ (1)

(任何坐标皆可采用)之间的距离 ds 的平方是相对坐标 dx_μ 的二次形式:

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \qquad (g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}). \tag{2}$$

第二点可以简述为空间是度规连续区. 为了与物理学的直接作用的精神完全一致,我们假定毕达哥拉定理仅在距离为无穷小的情况下严格有效.

狭义相对论导致一个发现,即时间是作为第四个坐标以平等的地位和三个空间坐标连系在一起的,于是物质事件的实况即世界,是一个四维度规连续区. 这样一来,确定世界度规性质的二次形式(2),就不必像三维空间几何那样必定是正定二次形式,而是具有惯性指数 3[2]. 黎曼本人没有忘记指出,这二次形式应看作一种物理实在,因为它是作为对物质施加

---

1) Math. Werke (2nd ed., Leipzig, 1892), No. XII, p. 282.

2) 这就是说,如果坐标选择得使其在连续区的一个特殊点上 $ds^2 = \pm dx_1^2 \pm dx_2^2 \pm dx_3^2 \pm dx_4^2$, 则在每一种情况下都是三个符号为+,一个符号为−. ——英译者注

实际影响的根源而出现(例如离心力)的，可想而知，物质也会给它以反作用. 直到那时，所有几何学家和哲学家还把空间的度规性质看成是空间本身固有的，与它所包含的物质无关. 黎曼在当时要贯彻他的思想是简直不可能的；而今天，爱因斯坦正是在这个思想的基础上(与黎曼独立地)建立了他那广义相对论的大厦. 依照爱因斯坦，引力现象也必须纳入几何学，而关于物质如何影响测量的规律不外就是引力定律：即式(2)中 $g_{\mu\nu}$ 组成引力势的分量. 引力势既然是由一个不变的二次微分形式组成的，电磁现象就为一个四元势所支配，这个势的所有分量 ϕ_μ 组成一个不变的线性微分形式 $\Sigma\phi_\mu dx_\mu$. 然而直到现在，引力和电这两类现象仍然互不相干地同时并存.

列维-契维塔[1]，海森伯 (Hessenberg)[2] 和作者[3] 在最近的工作中十分明确地指出，若要与自然现象一致，就必须以矢量的无穷小平行移动作为发展黎曼几何的基本概念. 如果 P 与 P^* 是由一条曲线连结起来的任何两个点，在 P 点一个给定的矢量可以沿这条曲线从 P 平行于它本身而移动到 P^*. 但一般来说，矢量从 P 到 P^* 的这种搬运是不可积的，也就是说，移动终点 P^* 处的矢量与移动的路线有关. 只是在“无引力的”欧几里得几何中，可积性才行得通. 以上提到的黎曼几何仍然包含一些有限几何的残余成分，就我所知，这是没有可靠的理由的. 看来这是由于黎曼几何碰巧是起源于曲面论的缘故. 二次形式 (2) 使我们不仅能够比较在同一点上两个矢量的长度，并且也能把任何两点上的两个矢量的长度加以比较.

---

1) “Nozione di parallelismo…”, Rend. del Circ. Matem. di Palermo, Vol. 42 (1917).

2) “Vektorielle Begründung der Differentialgeometrie”, *Math. Ann.*, **78** (1917).

3) “Space, Time, and Matter” (1st. ed., Berlin, 1918), § 14.

然而真正的无穷小几何必须只容许从一点到另一个无限接近点的长度转移原理. 这样就不允许我们假定从一点到另一有限距离点的长度转移是可积的，尤其是因为方向的转移已经证明了是不可积的. 认定这种假定不成立，就会产生一种几何学，这种几何学运用于我们的世界时，它以出人意外的方式不仅解释了引力现象，而且也解释了电磁场的现象. 依照现在提出的理论，两类现象都来自同一根源；事实上，一般来说我们不能把电和引力主观地区分开. 在这理论中，所有物理量都具有世界几何里的意义. 特别是那些表示物理效应的量同时作为纯数出现. 这理论导致本质上完全确定的世界定律. 在某种意义上，它甚至使我们了解为什么世界是四维的. 现在我首先扼要地叙述一下这个修正的黎曼几何的结构，而不考虑其物理解释. 它在物理学上的应用将自然而然地得出.

在一个给定的坐标系里，与 P 无限接近的点 P^* 的相对坐标 dx_μ [见式 (1)] 就是无限小位移 PP' 的分量. 从一坐标系到另一坐标系的过渡，是由一定的变换公式表示的，即

$$x_\mu = x_\mu(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*) \qquad \mu = 1, 2, \cdots, n,$$

这公式确定了同一点在两系统里的两组坐标之间的联系. 那么在点 P 处具有同一个无穷小位移的两个分量 dx_μ 和 dx_μ^* 就有以下的线性变换公式:

$$dx_\mu = \sum_\nu a_{\mu\nu} dx_\nu^*, \tag{3}$$

其中 $a_{\mu\nu}$ 为导数 $\frac{\partial x_\mu}{\partial x_\nu^*}$ 在点 P 的值. 点 P 处的一个逆变矢量 $\mathbf{X}$，用两个坐标系的任一个表示时，都有 n 个已知数 ξ^μ 作为其分量，这些分量变换到另一系统的方式，与无限小位移分量的变换公式 (3) 相同. 我把在点 P 的矢量的全体称为点 P 的矢量空间. 首先这空间是线性或仿射的，即将 P 点的矢量乘

上一个数以及把两个这样的矢量相加，总是得出 P 点的矢量；其次，这空间是度规的，即对于具有分量 ξ^μ 和 η^μ 的每一对矢量 $\mathbf{X}$ 与 $\mathbf{Y}$ 可以根据属于(2)的对称双线性形式，不变地规定一个标积

$$\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}=\mathbf{Y}\cdot\mathbf{X}=\sum_{\mu\nu}g_{\mu\nu}\xi^\mu\eta^\nu.$$

然而我们认为，这个形式仅仅确定到差一个任意的正值比例因子. 若空间点的流形由坐标 x_μ 来表示，那么根据点 P 的度规性质来确定 $g_{\mu\nu}$，就只准确到各分量之比. 就物理意义而言，也正是 $g_{\mu\nu}$ 各分量的比值具有直接的现实意义. 因为当 P 为一给定的原点时，由 P 发出的光信号所到达的那些无限接近的世界点满足方程

$$\sum_{\mu\nu}g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu=0.$$

为了获得分析表达式，我们首先要选定一个确定的坐标系，其次再在每个点 P 处确定 $g_{\mu\nu}$ 所固有的任意比例因子. 于是即将找出的公式一定具有双重不变性：一方面对任意连续的坐标变换不变，另一方面，如果用 $\lambda g_{\mu\nu}$（其中 λ 为位置的任意连续函数）代替 $g_{\mu\nu}$，也必须保持不变. 附加的第二个不变性是我们这理论的特征.

设 P, P^* 是任意两个点，若对于 P 的每个矢量 $\mathbf{X}$，我们在 P^* 都这样指定一个矢量 $\mathbf{X}^*$，使得一般来说，$\alpha\mathbf{X}$ 变为 $\alpha\mathbf{X}^*$（α 为任意指定的数），$\mathbf{X}+\mathbf{Y}$ 变为 $\mathbf{X}^*+\mathbf{Y}^*$，而在 P 的零矢量唯一地对应于 P^* 的零矢量，这样我们就在 P^* 的矢量空间上作出了 P^* 的矢量空间的一个仿射的或线性的“复制品”. 如果对应于每一对矢量 $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$，在点 P^* 的两个矢量 $\mathbf{X}^*$, $\mathbf{Y}^*$ 的标积都与点 P 的两个矢量 $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ 的标积成正比，这个“复制品”就极其相似了. （在我们看来，正是这种相似“复制品”的观念具有客观意义；以前的理论则容许全等“复制品”的更确

定的概念.）点 P 的矢量平行移动到邻近点 P' 的意义由以下两个假设规定：

（一）利用点 P 的矢量平行移动到邻近点 P'，在 P' 的矢量空间上就作出 P 的矢量空间的相似象.

（二）若 P_1，P_2 为 P 邻近的两个点，设 P 处的无穷小矢量 PP_2 通过平行移动到点 P_1 变为 P_1P_{12}，而 P 处的无穷小矢量 PP_1 通过平行移动到点 P_2 变成 P_2P_{21}，则 P_{12} 与 P_{21} 重合，就是说，无穷小平行移动是可易的.

假设（一）说明平行移动是矢量空间从 P 到 P' 的仿射易位，这假设可以解析地表示如下：在 $P=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的矢量 ξ^μ 经平行移动变换成 $P'=(x_1+dx_1, x_2+dx_2, \cdots, x_n+dx_n)$ 处的矢量 $\xi^\mu+d\xi^\mu$，这矢量的分量与 ξ^μ 就具有线性关系：

$$d\xi^\mu=-\sum_\nu d\gamma^\mu_\nu\xi^\nu. \tag{4}$$

第二个假设告诉我们，$d\gamma^\mu_\nu$ 是线性微分形式

$$d\gamma^\mu_\nu=\sum_\rho\Gamma^\mu_{\nu\rho}dx_\rho,$$

其系数具有对称性

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho}=\Gamma^\mu_{\rho\nu}. \tag{5}$$

如果在 P 的两个矢量 ξ^μ，η^μ 经平行移动，在 P' 变成 $\xi^\mu+d\xi^\mu$ 和 $\eta^\mu+d\eta^\mu$，则（一）所表达的相似性假设（它超出了仿射性）告诉我们，

$$\sum_{\mu\nu}(g_{\mu\nu}+dg_{\mu\nu})(\xi^\mu+d\xi^\mu)(\eta^\nu+d\eta^\nu)$$

一定正比于

$$\sum g_{\mu\nu}\xi^\mu\eta^\nu.$$

如果用 $1+d\phi$ 表示与 1 相差无穷小的比例因子，并象通常那样用公式

$$a_\mu = \sum_\nu g_{\mu\nu} a^\nu$$

规定指标的缩减，我们就得到

$$dg_{\mu\nu} - (d\gamma_{\nu\mu} + d\gamma_{\mu\nu}) = g_{\mu\nu} d\phi. \tag{6}$$

由此可见，$d\phi$ 是线性微分形式

$$d\phi = \sum_\mu \phi_\mu dx_\mu. \tag{7}$$

假使这是已知的，方程 (6) 或者

$$\Gamma_{\mu,\nu\rho} + \Gamma_{\nu,\mu\rho} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\rho} - g_{\mu\nu}\phi_\rho,$$

加上对称条件 (5)，就明确地给出量 Γ. 于是空间的内在度规联络除依赖于二次形式(2)，还取决于线性形式 (7) ——准确到差一个任意比例因子①. 如果我们用 $\lambda g_{\mu\nu}$ 代替 $g_{\mu\nu}$ 而不改变坐标系，则量 $d\gamma^\mu_\nu$ 不改变，$d\gamma_{\mu\nu}$ 带有系数 λ，而 $dg_{\mu\nu}$ 变成 $\lambda dg_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} d\lambda$. 于是方程 (6) 表明 $d\phi$ 变为

$$d\phi + \frac{d\lambda}{\lambda} = d\phi + d(\lg\lambda).$$

所以在线性形式 $\Sigma\phi_\mu dx_\mu$ 里保持不确定的并不是那个取决于测量单位的任意选择的比例因子，更确切地说是其固有的任意成分，实际上是一个可加的全微分. 对于几何学的分析表示来说，形式

$$g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu, \quad \phi_\mu dx_\mu \tag{8}$$

与

$$\lambda g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \text{ 和 } \phi_\mu dx_\mu + d(\lg\lambda) \tag{9}$$

处于平等地位，其中 λ 为任何一个正值位置函数. 于是分量为

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial\phi_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial\phi_\nu}{\partial x_\mu} \tag{10}$$

---

① 作者后加的注释(1)—(4)见文末，

的反对称张量，亦即形式

$$F_{\mu\nu} = dx_\mu \delta x_\nu = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \Delta x_{\mu\nu}$$

具有不变的意义，这张量双线性地依赖于点 P 处的两个任意位移 dx 和 δx——或者不如说，线性地依赖于由这两个位移规定的、分量为 $\Delta x_{\mu\nu} = dx_\mu \delta x_\nu - dx_\nu \delta x_\mu$ 的面元。现在提出的理论有一个特殊情况，即原点处任意选定的单位长度允许以不依赖所经路线的方式，通过平行移动而传送到空间的一切点——当 $g_{\mu\nu}$ 能完全确定，使得 ϕ_μ 为零时，这种特殊情形就会出现。这些 $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ 不外就是克里斯托菲三指标符号。出现上述情况的充分和必要不变性条件就是张量 $\Gamma_{\mu\nu}$ 恒等于零。

这就很自然地使我们想到，在世界几何中把 ϕ_μ 解释为四元势，从而张量 F 可解释为电磁场。因为不出现电磁场是爱因斯坦理论有效的必要条件，直到现在，爱因斯坦理论只说明了引力现象。如果采取这种观点，我们将看出，电量具有这样一种性质，即在确定的坐标系里，它们用数字表示的特征不依赖于测量单位的任意选择。事实上，在测量单位问题和量纲问题上，一定存在着理论的新方向。在任意的测量单位选定之后，如果这量的一个单值在每一坐标系里确定一个数阵 $a_{\mu\nu}$，这些数组成两个任意的无穷小位移的不变双线性形式

$$a_{\mu\nu} dx_\mu \delta x_\nu \qquad (11)$$

的系数，这样的一个量，我们就一直称它为，比如说，二秩张量。但在这里我们要谈及的是一种张量，如果取某一坐标系作为基，在选定 $g_{\mu\nu}$ 所包含的比例因子后，分量 $a_{\mu\nu}$ 就唯一地确定了，并且使得当变换坐标时，形式 (11) 保持不变，然而当用 $\lambda g_{\mu\nu}$ 代替 $g_{\mu\nu}$ 时，$a_{\mu\nu}$ 就变成 $\lambda^e a_{\mu\nu}$。这样我们就说，此张量的权为 e，或者说，如果给线素 ds 以“长度 $= l$”的量纲，则此张量的量纲为 l^e。只有那种其权为零的张量才是绝对不变的。

分量为 $F_{\mu\nu}$ 的场张量就属于这种类型. 根据式(10), 它满足第一组麦克斯韦方程

$$\frac{\partial F_{\nu\rho}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial F_{\rho\mu}}{\partial x_\nu}+\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\rho}=0.$$

一旦弄清楚平行移动的概念, 几何学与张量计算就可以毫无困难地建立起来了.

(a) 短程线　给定一个点 P 及在该点的一个矢量, 在这矢量方向上从 P 出发的短程线可用这矢量平行于其自身, 朝它自己的方向连续运动的方法得出来. 利用适当的参数 τ, 短程线微分方程可写成

$$\frac{d^2x_\mu}{d\tau^2}+\Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{dx_\nu}{d\tau}\frac{dx_\rho}{d\tau}=0.$$

(当然不能够用长度最小表示短程线的特征, 因为曲线长度的概念没有意义.)

(b) 张量计算　例如, 为了用微分法从分量为 f_μ 的零权的一秩协变张量场导出一个二秩张量场, 我们要借助于点 P 的任意矢量 ξ^μ 组成不变量 $f_\mu\xi^\mu$ 及其从点 $P(x_\mu)$ 转移到邻近点 $P'(x_\mu+dx_\mu)$ 时的无穷小变更, 当转移时, 矢量要平行于其自身移动. 对此变更我们有

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}\xi^\mu dx_\nu+f_\rho d\xi^\rho=\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}-\Gamma^\rho_{\mu\nu}f_\rho\right)\xi^\mu dx_\nu.$$

所以右边括弧内的量是权为零的二秩张量场的分量, 这是由场 f 以一种完全不变的方式形成的.

(c) 曲率　为了作出黎曼曲率张量的模拟物, 让我们从前面用过的图形出发, 即由 P, P_1, P_2 和 $P_{12}=P_{21}$ 这些点所构成的无穷小平行四边形②. 如果我们将 P 处的矢量 $\mathbf{X}=\xi^\mu$ 平行于它自身移动到 P_1, 再从 P_1 移往 P_{12}, 第二次, 则首先移

到 P_2 再从那里移往 P_{21}，那么既然 P_{12} 与 P_{21} 重合，在这点得到的两矢量之差 $\Delta\mathbf{X}$ 就有意义了．它们的分量是

$$\Delta\xi^{\mu} = \Delta R^{\mu}_{\nu}\xi^{\nu}, \tag{12}$$

其中 ΔR^{μ}_{ν} 不依赖于被移动的矢量 $\mathbf{X}$，但另一方面，它又线性地依赖于由两个移动 $PP_1 = dx_{\mu}$ 和 $PP_2 = \delta x_{\mu}$ 所确定的面元．所以

$$\Delta R^{\mu}_{\nu} = R^{\mu}_{\nu\rho\sigma}dx_{\rho}\delta x_{\sigma} = \frac{1}{2}R^{\mu}_{\nu\rho\sigma}\Delta x_{\rho\sigma}.$$

曲率的分量 $R^{\mu}_{\nu\rho\sigma}$ 仅依赖于地点 P，它具有两种对称性：(1)当交换后两个指标为 ρ 与 σ 时，它改变符号；(2)如果作 $\nu\rho\sigma$ 的三次循环置换，再把相应的分量加起来，则结果为零．降低指标 μ，我们就得出 $R_{\mu\nu\rho\sigma}$，这是权为 1 的四秩协变张量的分量．甚至不必计算都看得出，R 自然地按不变的方式分成两部分：

$$R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = P^{\mu}_{\nu\rho\sigma} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\nu}F_{\rho\sigma}$$

$$(\delta^{\mu}_{\nu} = 1, \text{当 } \mu = \nu;\ \delta^{\mu}_{\nu} = 0, \text{当 } \mu \neq \nu), \tag{13}$$

其中第一项 $P^{\mu}_{\nu\rho\sigma}$ 不仅关于 $\rho\sigma$ 反对称，而且关于 $\mu\nu$ 也是反对称的．所以方程 $F_{\mu\nu} = 0$ 表示我们的空间是一个无电磁场的空间，即在这种空间中，长度的转运是可积的；而方程 $P^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = 0$ [如式(13)所示]则是引力场不存在的不变性条件，亦即方向转运可积的不变性条件．欧几里得空间本身就是一种既没有电也没有引力的空间．

式(12)的线性模拟物（给每个矢量 $\mathbf{X}$ 配上一个矢量 $\Delta\mathbf{X}$）的最简单的不变量，就是它的“迹”

$$\frac{1}{n}\Delta R^{\mu}_{\mu}.$$

根据式(13)，在本情况下，这不变量取下列形式：

$$-\frac{1}{2}F_{\rho\sigma}dx_\rho\delta x_\sigma.$$

这种形式我们在上面已经遇到过了. 象 $-\frac{1}{2}F_{\rho\sigma}$ 这样的张量的最简单不变量是"其数值的平方":

$$L=\frac{1}{4}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}. \tag{14}$$

L 显然是权为-2的不变量,因为张量F的权为0. 如果 g 是 $g_{\mu\nu}$ 的行列式的负值,而

$$d\omega=\sqrt{g}\,dx_0dx_1dx_2dx_3=\sqrt{g}\,dx$$

是无穷小体积元的体积,则我们知道,麦克斯韦理论就由电的作用量所支配,这作用量等于上述最简单不变量展布在选定区域上的积分 $\int Ld\omega$, 当然所谓支配是指对于 $g_{\mu\nu}$ 与 ϕ_μ 的在世界区域边界上为零的任何变分,我们有

$$\delta\int Ld\omega=\int(S^\mu d\phi_\mu+T^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu})d\omega,$$

其中

$$S^\mu=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}\,F^{\mu\nu})}{\partial x_\nu}$$

是广义麦克斯韦方程的左边(其右边是四元电流的分量),而 $T^{\mu\nu}$ 构成电磁场的能量动量张量.既然 L 是权为-2的不变量,而 n 维几何中体元是权为 $\frac{1}{2}n$ 的不变量,故仅当维数 $n=4$ 时,积分才有意义. 因此根据我们的解释,麦克斯韦理论只能限于四维的情况.可是在四维世界中,电磁作用量变为一个纯数. 不过除非要由观察来检验的物理问题(例如电子)已在本理论的基础上计算过,否则量 1 的大小就不能用传统的 c.g.s. 制来确定.

现在让我们从几何转到物理，仿效 G. 米的理论[1]，我们必须假设，一切自然定律都以一定的积分不变量为根据，即作用量

$$\int W d\omega = \int \mathfrak{M} dx, \quad \mathfrak{M} = W\sqrt{g},$$

使得真实世界与一切可能的四维度规空间由下列特征相区别：对于真实世界中任何一部分区域里，如果势 $g_{\mu\nu}$, ϕ_μ 的变分在这区域的边界上为零，则包括于这区域的任何部分的作用量都取逗留值．作用量的世界密度 W，一定是权为一2 的不变量． 作用量在任何情况下都是纯数；因此我们的理论立即说明了当前认为具有重要意义的世界的原子结构——作用量子．对于 W，我们所能作的最简单而自然的推测是

$$W = R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} R^{\nu\rho\sigma}_{\mu} = |R|^2.$$

根据式 (13)，我们有

$$W = |P|^2 + 4L.$$

(在这里，看来除电项 L 上所加的系数 4 以外，其他任何东西都是无可怀疑的.)但是即使不详细分析作用量，我们也可以从作用原理引出某些一般性的结论． 我们将指出，按照希尔伯特，洛伦兹，爱因斯坦，克莱因和本文作者的研究[2]，物质(指能量动量张量）守恒的四个定律与作用量（包含四个任意函数)对坐标变换的不变性是相联系的；同样地，电的守恒定律与“测度不变性”[从 (8) 过渡到 (9)] 也是相联系的，这种不变性是在这里第一次出现的，它引入了第五个任意函数． 在

---

1) *Ann. d. Physik*, **37**, **39**; **40**, 1912—1913.

2) Hilbert, “Die Grundlagen der Physik,” *Göttinger Nachrichten*, 20 Nov., 1915; H. A. Lorentz in four papers in the Versl. K. Ak. van Wetensch. Amsterdam 1915—16; A. Einstein, Berl. Ber., 1916, pp. 1111—6; F. Klein, *Gött. Nachr.*, 25 Jan., 1918; H. Weyl, *Ann. d. Physik*, **54**, 1917, pp. 121—5.

我看来，后者与能量动量原理相联系的方式是支持这理论的最有力的一般论据之一——只是在纯理论的论证上可能还有一点问题.

对于在所考虑的世界区域边界上为零的任何变分，我们有

$$\delta\int \mathfrak{M}dx = \int (\mathfrak{M}^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} + \mathfrak{m}^{\mu}\delta\phi_{\mu})dx \qquad (\mathfrak{M}^{\mu\nu} = \mathfrak{M}^{\mu\nu}). \quad (15)$$

于是自然定律取下列形式:

$$\mathfrak{M}^{\mu\nu} = 0, \quad \mathfrak{m}^{\mu} = 0. \qquad (16)$$

前者可以看作引力场定律,后者可以看作电磁场定律. 由

$$\mathfrak{M}^{\mu}_{\nu} = \sqrt{g}\, W^{\mu}_{\nu}, \mathfrak{m}^{\mu} = \sqrt{g}\, w^{\mu}$$

规定的量 W^{μ}_{ν}, w^{μ}, 分别是权为—2的二秩混合张量和一秩逆变张量的分量. 在方程组(16)里,依照不变性,有五个方程是多余的. 这点表现在 $\mathfrak{M}^{\mu}_{\nu}$ 与 $\mathfrak{m}^{\mu}$ 之间的五个不变恒等式:

$$\frac{\partial \mathfrak{m}^{\mu}}{\partial x} \equiv \mathfrak{M}^{\mu}_{\nu}, \qquad (17)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{M}^{\mu}_{\nu}}{\partial x_{\mu}} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}\mathfrak{M}^{\beta}_{\alpha} \equiv \frac{1}{2} F_{\mu\nu}\mathfrak{m}^{\mu}. \qquad (18)$$

第一个恒等式由测度不变性得出. 因为当从式(8)过渡到式(9)时,如果取一无穷小位置函数 $\delta\rho$ 来代替 $\lg\lambda$, 我们就得到

$$\delta g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\delta\rho, \quad \delta\phi_{\mu} = \frac{\partial(\delta\rho)}{\partial x_{\mu}}.$$

为此,变分(15)一定等于零. 其次,若我们利用作用量对于世界连续区无穷小变形这种坐标变换的不变性[1],则得恒等式

$$\frac{\partial \mathfrak{M}^{\mu}_{\nu}}{\partial x_{\mu}} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_{\nu}}\mathfrak{M}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{m}^{\mu}}{\partial x_{\mu}}\phi_{\nu} - \Gamma_{\alpha\nu}\mathfrak{m}^{\alpha}\right) \equiv 0.$$

1) Weyl, *Ann. d. Physik*, **54**, 1917, pp. 121—5; F. Klein, *Gött. Nachr.*, 25 Jan., 1918.

若根据式（17）用 $g_{\alpha\beta}\mathfrak{M}^{\alpha\beta}$ 代替 $\partial \mathfrak{m}^{\mu}/\partial x_{\mu}$，这恒等式就变为(18).

所以单从引力定律我们已经得出

$$\frac{\partial \mathfrak{m}^{\mu}}{\partial x_{\mu}} = 0, \tag{19}$$

单从电磁场定律出发，则得

$$\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \mathfrak{M}_{\nu}^{\mu} - \Gamma_{\nu\beta}^{\alpha}\mathfrak{M}_{\alpha}^{\beta} = 0. \tag{20}$$

在麦克斯韦理论中，$\mathfrak{m}^{\mu}$ 取下列形式：

$$\mathfrak{m}^{\mu} \equiv \frac{\partial(\sqrt{g}\, F^{\mu\nu})}{\partial x_{\nu}} - \mathfrak{s}^{\mu},\ \mathfrak{s}^{\mu} = \sqrt{g}\, s^{\mu},$$

其中 s^{μ} 表示四元电流. 由于第一部分恒等地满足方程(19)，故这方程给出电的守恒定律

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g}\, s^{\mu})}{\partial x_{\mu}} = 0.$$

类似地，在爱因斯坦引力理论里，$\mathfrak{M}_{\nu}^{\mu}$ 是由两项组成的，其第一项恒等地满足方程(20)，第二项等于能量动量张量的混合分量 T_{ν}^{μ} 乘以$\sqrt{g}$. 因此方程(20)导致四个物质守恒定律. 如果取(14)为作用量，则完全类似的情况在我们的理论中也成立. 五个守恒原理是场定律的“消元式”，也就是说，这些守恒原理以双重形式从场定律导出，这就表明，其中有五个是多余的.

取式(14)为作用量，则麦克斯韦方程可写成

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g}\, F^{\mu\nu})}{\partial x_{\nu}} = s^{\mu}, \tag{21}$$

而电流是

$$s_{\mu} = \frac{1}{4}\left(R\phi_{\mu} + \frac{\partial R}{\partial x_{\mu}}\right),$$

其中 R 表示权为 -1 的不变量，这是由 $R^{\mu}_{\nu\rho\sigma}$ 经两次(先对 μ, ρ, 后对 ν, σ) 降秩得出的. 如果 R^* 表示仅由 $g_{\mu\nu}$ 构成的黎曼曲率不变量,计算给出

$$R = R^* - \frac{3}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g}\,\phi^{\mu})}{\partial x_{\mu}} + \frac{3}{2}\phi_{\mu}\phi^{\mu}.$$

在静态场合,电磁势的空间分量不出现,而且所有的量都与时间 x_0 无关,根据式(21), 我们有

$$R = R^* + \frac{3}{2}\phi_0\phi^0 = \text{常数}.$$

在 $R \neq 0$ 的世界区域里，我们可以通过适当地规定长度单位使处处有 $R =$ 常数 $= \pm 1$. 可是在随时间而变化的情况下,我们只好期望曲面 $R = 0$, 这些曲面显然将起独特作用. R不能用以充当作用量的密度(在爱因斯坦引力理论中用 R^* 表示),因为它的权不是-2. 结果,尽管我们的理论导致麦克斯韦电磁方程, 然而却不导致爱因斯坦引力方程. 在爱因斯坦引力论中, 出现四阶微分方程. 不过很难说爱因斯坦引力方程是绝对正确的, 首先其中出现的引力常数就与其他自然常数截然不同,例如,电子的质量和电荷的作用半径具有完全不同于电子本身的半径的数量级 (相差 10^{20} 倍或 10^{40} 倍)[1].

在这里,我的意图只是扼要介绍这理论的一般原理③ ,以下问题自然会出现: 在形如式(14)的作用量基础上导出这理论的物理结果,并把这些结果同经验比较;特别是考察一下电子的存在和原子内部至今未能解释的过程的特性是否能从这理论推导出来④. 从数学观点看来,这课题是非常复杂的,因为若局限于线性项, 我们就不可能获得近似解;在电子内部, 忽略高阶项无疑是不容许的,忽略这些项而得出的线性方程,

1) 参看 Weyl, *Ann. d. Physik*, **54**, 1917, p. 133.

一般来说只有零解．我打算在其他地方再详细考虑所有这些问题．

作者后加的附注:

(1) 最近我在下列几点修改了这理论的结构(参看 "Raum, Zeit, Materie", 1921, §13, §18 最后第四版的叙述)．(甲) 代替平行移动所必须满足的假设(一)、(二),现在只有一个假设: 设点 P 处有一坐标系,利用这坐标系, P 处的每个矢量当平行移动至与 P 无限接近的点时,其分量不改变．这一假设表示,平行移动的特性有如易位,就此而论,可以恰当地说,它保持矢量"不受改变".(乙) 对于单个点 P 处的度规(按照这度规, 点 P 的每个矢量 $\mathbf{X} = \xi^{\mu}$ 都附属有这样一个区域,当而且仅当两矢量具有相同的测量数 $l = \Sigma g_{\mu\nu}\xi^{\mu}\xi^{\nu}$ 时,由两个矢量来规定同一区域), 现在必须加上 P 与其邻近点的度规联络: 通过向无限接近点 P' 作全等易位,在 P 处的一个区域就变成 P' 处的一个确定区域．对于区域的全等易位概念,如果规定一个类似对矢量平行移动概念所作的假定(甲)那样的条件,我们就看出,这一过程(其中区域的测量数增加了 dl) 由下列方程表示:

$$dl = l d\phi;\ d\phi = \Sigma \phi_{\mu} dx_{\mu}.$$

在这情况下,度规和度规联络明确地规定了"仿射"联络(平行移动)——诚然,按照现在我在空间问题上的观点, 这是几何学的最基本的事实——而按照本文的表述,在给定的度规里,当平行移动时保持任意的正是线性形式 $d\phi$.

(2) 在这里, 无穷小"平行四边形"的对边是互相由平行移动而得出这一点是不重要的;我们关心的只是 P_{12} 与 P_{21} 的重合.

(3) 关于定义一切可以作为作用量的不变量 W (其中只能包含 $g_{\mu\nu}$ 的至多是二阶的导数和 ϕ_{μ} 的只到一阶的导数) 的问题, 已为 R. 外森伯克所解决 (Sitzungsber. d. Akad. d. Wissensch. in Wien, 129, 1920; 130, 1921). 如果我们忽略其变分 $\delta\int W d\omega$ 恒为零的不变量 W, 根据 R. 巴赫较晚的计算 (*Math. Zeitschrift*, **9**, 1921, pp. 125 和 189)就只剩下三种组合. 看来真实的 W 是麦克斯韦的 L 与 R 的平方的线性组合. 这个推测由泡利 (*Physik. Zeitschrift.*, **20**, 1919, pp. 457—67) 和我更仔细地检验过;特别是我们甚至成功地在这基础上导出了质点的运动方程. 在前面所选定的不变量 (14) 最初是随便取的, 但现在看来, 在自然界中, 它反而是不起作用的. (参看 "Raum, Zeit, Materie" 第四版 §35,36,或Weyl, *Physik. Zeitschr.*, **22**, 1921, pp. 473—80.)

(4) 当时其实我已经完全放弃由 G. 米理论所引起的希望; 我不相信物质问题要单靠场的理论来解决. 参看我有关本题的论文 "Feld und Materie", *Ann. d. Physik*, **65**, 1921, pp. 541—63.

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝相对论原理　　（狭义相对论和广义相对论经典论文集）
作者＝Ａ．爱因斯坦等
页数＝１８３
ＳＳ号＝１０２５３８３５
出版日期＝