由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

$$\zeta_c = -\frac{b-a}{b+a} < 0 \qquad (6\text{-}79)$$

来决定的。因而，中性面初始时同板中面相重合，而在弯曲过程中移向内表面。进而可知，按照应变历史的不同，承受弯曲的板可被划分为三个不同的区域：

i) $\zeta \geqslant 0$，或即$r \geqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$区域内的材料，在弯曲过程中始终受拉；

ii) $\zeta \leqslant \zeta_c$，或即$r \leqslant c = \sqrt{ab}$区域内的材料，在弯曲过程中始终受压；

iii) $\zeta_c < \zeta < 0$，或即$c < r < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$区域内的材料，在弯曲过程中的某一时刻被中性面超越，因而先受压后受拉，会出现卸载并可能受到Baushinger效应的影响。

在弯曲过程中，中性层移过的距离为

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = a + \frac{t}{2} + a\sqrt{1+\frac{t}{a}} \simeq t^2/8a; \qquad (6\text{-}80)$$

而上述区域iii) 的厚度则为

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \sqrt{ab} \simeq t^2/4a. \qquad (6\text{-}81)$$

在弯曲过程中的每一时刻，总有一层材料经历过等量的拉伸和压缩，其周向长度的总变化为零。由(6-75)式知，这一层的半径是

$$r = \frac{1}{\alpha} = \frac{a+b}{2}, \qquad (6\text{-}82)$$

由此可见，总长未发生变化的层，在该时刻是同板中面相重合的。根据(6-77)式算出这一层的初始位置是

$$\zeta = -\frac{1}{2} \cdot \frac{b-a}{b+a}. \qquad (6\text{-}83)$$

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

板在弯曲过程中几个有代表意义的层的位置关系见图6-15。

本节的分析表明，在弯曲过程中中性层是要不断移动的，且中性层也不是总长不发生变化的层；尤为重要的是，在弯曲过程中板的不同层可能经历互不相同的应变历史。由此可见，Hill精确理论给出的弯曲图象同§6.3中工程理论给出的弯曲图象有很大的不同。

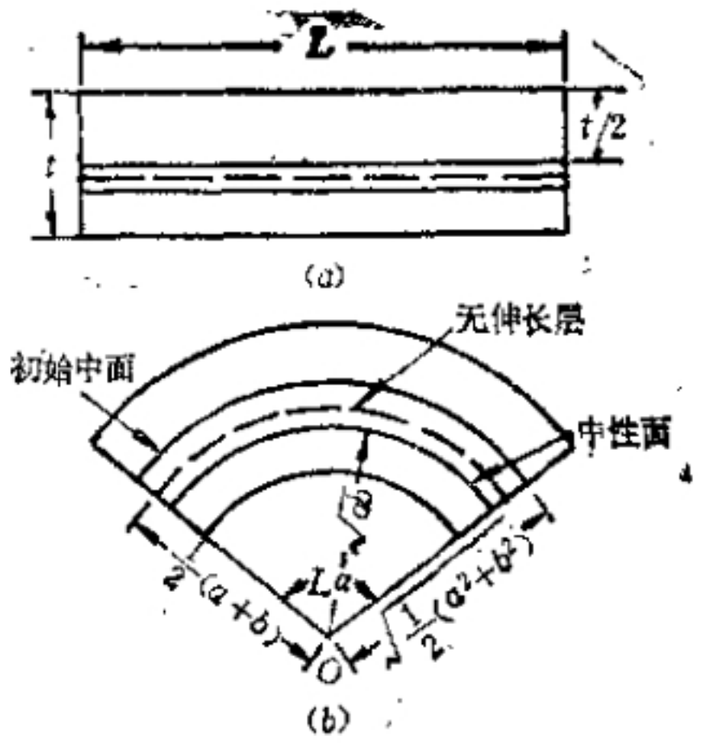


图 6-15

§6.5 柱体的弹塑性自由扭转

一、研究范围和基本方程

现讨论任意截面形状的长柱体，在扭转力矩T作用下的自由扭转问题。为讨论方便起见，假定截面是单连通的，如图6-16。取柱体的轴线为z轴。

实验观察证实，在塑性状态下仍可采取材料力学和弹性力学中关于扭转的假定，即柱体在弹塑性自由扭转状态下，截面只在自身平面内转动，但可以发生轴向自由翘曲。

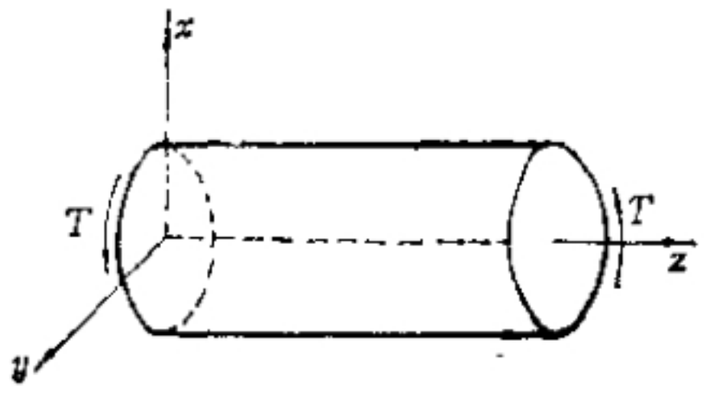


图 6-16

以α表示柱体单位长度的扭转角，则小变形时的位移分量为

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

$$\left.\begin{aligned} u &= -\alpha yz, \\ v &= \alpha xz, \\ w &= \alpha\phi(x, y), \end{aligned}\right\} \tag{6-84}$$

其中$\phi(x, y)$是截面的翘曲函数。

从小应变下的Cauchy公式得出应变为

$$\left.\begin{aligned} &\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xy} = 0, \\ &\gamma_{zx} = \alpha\left(\frac{\partial\phi}{\partial x} - y\right), \gamma_{yz} = \alpha\left(\frac{\partial\phi}{\partial y} + x\right). \end{aligned}\right\} \tag{6-85}$$

此式与材料的本构关系无关，不论是弹性还是塑性时都成立。

在弹性时按Hooke定律求得

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \\ &\tau_{zx} = G\alpha\left(\frac{\partial\phi}{\partial x} - y\right), \tau_{yz} = G\alpha\left(\frac{\partial\phi}{\partial y} + x\right). \end{aligned}\right\} \tag{6-86}$$

在进入塑性之后，为零的应变分量仍如(6-85)，因此恒有$de_x = de_y = de_z = de_{xy} = 0$，按照增量本构关系，从刚进入塑性开始，可以推知

$$d\sigma_x = d\sigma_y = d\sigma_z = d\tau_{xy} = 0,$$

进而在变形的一切阶段均有$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$，也就是说在塑性阶段不为零的应力分量仍只有$\tau_{zx}$和$\tau_{yz}$。代入(3-10)至(3-12)式求得此应力状态的应力不变量为

$$J_1 = 0, J_2 = \tau_{zx}^2 + \tau_{yz}^2, J_3 = 0, \tag{6-87}$$

且主应力为

$$\sigma_1 = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{yz}^2} = \tau, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\tau, \tag{6-88}$$

其中τ为合剪应力。在整个弹塑性变形过程中，(6-87)和(6-88)式始终成立，且$\mu_\sigma = 0$。可见，在扭转时柱体各点的应力状态始终是纯剪切，这是一个简单加载过程。

二、弹性扭转和薄膜比拟

从(6-85)式中消去翘曲函数，得协调方程

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} = 2\alpha, \tag{6-89}$$

或由(6-86)式得到的应力分量表示的协调方程

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = 2G\alpha. \tag{6-90}$$

同时，只有一个平衡方程

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \tag{6-91}$$

因此，可以引进弹性应力函数Φ_*，使有

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Phi_*}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \Phi_*}{\partial x}, \tag{6-92}$$

则平衡方程自动满足，而协调方程(6-90)化为

$$\nabla^2 \Phi_* = -2G\alpha, \tag{6-93}$$

式中$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$为Laplace算子。

在弹性力学中，研究了Φ_*和Poisson方程(6-93)，并导致以下结论(此处不再证明)：

i) 合剪应力为

$$\tau = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi_*}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_*}{\partial y}\right)^2}$$

$$= |\operatorname{grad}\Phi_*|, \tag{6-94}$$

即τ等于Φ_*的梯度的模。

ii) 合剪应力的方向沿$\Phi_* = \text{const}$曲线的切向，也就是与Φ_*的梯度方向相垂直。

iii) 柱体截面的周界也是$\Phi_* = \text{const}$曲线族之一，对单连通截面可令周界上$\Phi_* = 0$。

iv) 扭矩T与Φ_*的关系可按St. Venant条件求得：

$$T = 2\iint_A \Phi_* \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{6-95}$$

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

其中A为柱体的一个截面。

v）Prandtl薄膜比拟：将薄膜张于与柱体截面边界形状相同的边框上，加均匀压力，则Φ_p与薄膜的高度成正比，τ的大小与薄膜的斜率成正比，扭矩T与薄膜曲面下的体积成正比。

当材料进入塑性时，$\tau = |\mathrm{grad}\Phi_p| = \tau_s$。因此，按弹性考虑，只要截面上有一点的$|\mathrm{grad}\Phi_p|$达到$\tau_s$，就算达到了弹性极限状态，相应的扭矩为弹性极限扭矩。以半径为a的圆柱体为例，

$\Phi_p = C(x^2 + y^2 - a^2)$，代入方程(6-93)得$C = -aG/2$。于是$\Phi_p = \frac{Ga}{2}(a^2 - r^2)$，$T = \frac{\pi}{2}Ga a^4$，$\tau = Gar$。在截面边缘上$\tau$最大，令$r = a$处$\tau = \tau_s$导出

$$\alpha_s = \tau_s/Ga, \quad T_s = \frac{\pi}{2}\tau_s a^3, \tag{6-96}$$

这里α_s和T_s分别是弹性极限状态的单位长度扭转角和弹性极限扭矩。

三、全塑性扭转和沙堆比拟

在塑性阶段，平衡方程(6-91)不变，并仍可由引入应力函数Φ_p来满足，此时

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Phi_p}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \Phi_p}{\partial x}, \tag{6-97}$$

这里我们用下标p来表征Φ_p是塑性阶段的应力函数。这时，我们不用(也不再有)应力协调方程，而代之以屈服条件

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = \tau_s^2, \tag{6-98}$$

导出$\left(\frac{\partial \Phi_p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_p}{\partial y}\right)^2 = \tau_s^2$，或即

$$|\mathrm{grad}\Phi_p| = \tau_s. \tag{6-99}$$

这样，只从平衡方程、屈服条件和应力边条件就能够求出理想塑性体内的应力分布。这种情况叫做塑性力学中的静定问题。

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

对于理想塑性材料，τ_s是常数，(6-99)式说明Φ_p在截面上保持斜率不变。根据Φ_p的这个性质，Nadai提出下述沙堆比拟。将一个水平的底面做成截面的形状，在其上堆放干沙，由于沙堆的静止摩擦角为常数，则沙将形成一个斜率为常数的表面。因此，这表面可用来代表塑性应力函数Φ_p，只相差一个可由屈服应力和沙堆摩擦角决定的比例因子。由于沙堆比拟相应于整个截面都进入塑性，因此

$$T_p = 2\iint_A \Phi_p \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{6-100}$$

就是截面的塑性极限扭矩。

仍以半径为a的圆柱体为例，它处于全塑性扭转状态时，Φ_p表面必然是一个圆锥，既然斜率是τ_s，高度就应为$\tau_s a$，按(6 100)式求出

$$T_p = \frac{2}{3}\pi\tau_s a^3. \tag{6-101}$$

与(6-96)式相比可知对圆柱体

$$T_p/T_e = 4/3. \tag{6-102}$$

沙堆比拟的思想，不仅可直接应用于实验，也可用来指导计算三角形、矩形、任意正多角形等规则截面的柱体的塑性极限扭矩，因为这只需计算某些等斜"屋顶"下的体积，如图6-17所示。例如对于$b \geqslant a$的矩形截面，由沙堆体积求得T_p为

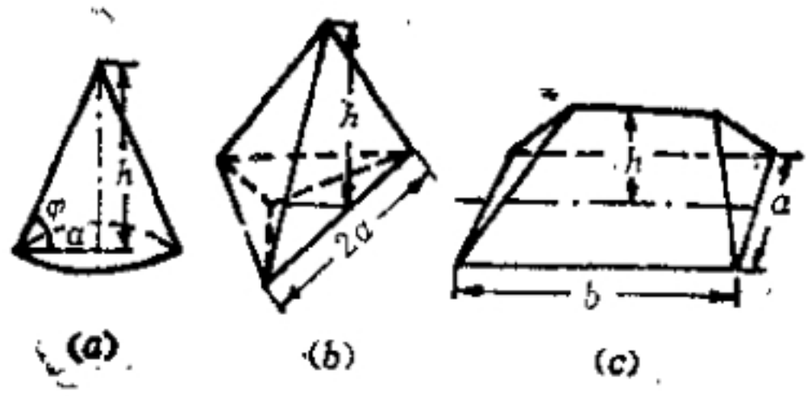


图 6-17

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

$$T_p = \left(\frac{1}{2}a\tau_s\right)(b-a)\,a + 2\left(\frac{1}{2}a\tau_s\right)\cdot\frac{a^2}{2}\cdot\frac{2}{3}$$

$$= \frac{1}{6}a^2(3b-a)\tau_s. \qquad (6\text{-}103)$$

从沙堆比拟中看出，沙堆的梯度垂直于边界，等Φ_p线平行于边界，每点的合剪应力方向平行于边界，大小为τ_s。同时我们也看到，一般说来，在截面内部，沙堆会出现尖顶和棱线，在这些点和线的两侧剪应力不连续。它们是弹性区域收缩时的极限。当弹性区域收缩时，从不同方向扩展过来的两个塑性区域相遇，因此会造成剪应力间断。如果截面边界上有凸角（如三角形截面和矩形截面的顶点），从弹性力学知道，在凸角处剪应力等于零，因而尽管T增大，这里始终处于弹性阶段。所以，作为弹性区域收缩极限的剪应力间断线必定通过这样的凸角。反之，如果截面边界上有凹角，从弹性力学知道，这里剪应力无限大，因而一开始就进入塑性阶段，棱线就一定不经过这里。

四、弹塑性扭转和薄膜-玻璃盖比拟

当$T_e < T < T_p$时，柱体的截面上会存在一部分弹性区、一部分塑性区，其上应力函数分别具有Φ_e的性质（满足Poisson方程）和Φ_p的性质（梯度的模为常数）。因此，提出的数学问题如下：寻求应力函数Φ，在弹性区内满足方程(6-93)，在塑性区内满足(6-99)，在截面边界上$\Phi = 0$，在弹塑性区域交界线Γ上Φ、$\frac{\partial\Phi}{\partial x}$、$\frac{\partial\Phi}{\partial y}$都要连续（这是由于应力分量在$\Gamma$上应该连续）。

在解具体问题时，确定弹塑性交界线Γ是一个极其困难的数学问题。Nadai指出，可以联合应用薄膜比拟和沙堆比拟来求解。在一块水平平板上，挖一个具有截面形状的孔，复盖以薄膜。在薄膜的上面，放上一个按沙堆比拟形状作成的等倾玻璃盖（图6-18(a)）。如若压力较小时，薄膜的变形不受"屋盖"的影响，这是弹性扭转的情况。随着压力的增加，薄膜逐渐贴到屋盖上，贴附的区域

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

就是塑性区域。在贴附区域以外的自由薄膜仍满足Poisson 方程，所以仍是弹性区。由此可以确定弹塑性交界线Γ的形状。最后薄膜将全部贴附在玻璃盖上，弹性区域退化为棱线。图6-18(*b*)显示了矩形截面柱体在弹塑性扭转时Γ线的变化，其中阴影区是塑性区域。从实验中可以看出，对一般截面的柱体，Γ线的变化是非常复杂的。在分析计算时通常只能采用数值方法一步一步地将Γ近似求出。

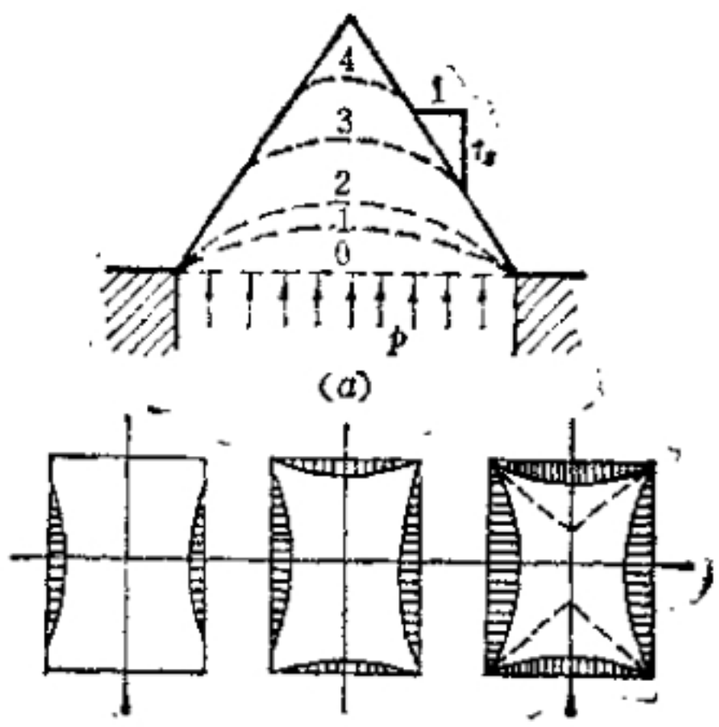


图 6-18

在圆截面情形，由于对称性，可设Γ是$r=\rho$的一个圆。在弹性区，$0\leqslant r\leqslant\rho$，有

$$\nabla^2\Phi_e=\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}\Phi_e}{\mathrm{d}r}\right)=-2\alpha G,$$

积分得到

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_e}{\mathrm{d}r}=-\alpha Gr+\frac{C_1}{r}.$$

由剪应力在$r=0$处有限定出$C_1=0$。再积分一次，得

$$\Phi_e=-\frac{1}{2}\alpha Gr^2+C_2, \qquad (6\ 104)$$

其中C_2要由$r=\rho$的连续条件确定。

在塑性区，$\rho\leqslant r\leqslant a$，有

$$|\operatorname{grad}\Phi_p|=-\frac{\mathrm{d}\Phi_p}{\mathrm{d}r}=\tau_s,$$

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

利用边条件$\Phi_p|_{r=a}=0$积分一次得

$$\Phi_p=\tau_s(a-r)。\tag{6-105}$$

由$\Phi_e|_{\rho=\rho}=\Phi_p|_{r=\rho}$定出(6-104)式中的常数

$$C_2=\frac{1}{2}\alpha G\rho^2+\tau_s(a-\rho),$$

故有

$$\Phi=\begin{cases}\Phi_e=-\dfrac{1}{2}\alpha G(r^2-\rho^2)+\tau_s(a-\rho), & 0\leqslant r\leqslant\rho;\\ \Phi_p=\tau_s(a-r), & \rho\leqslant r\leqslant a。\end{cases}\tag{6-106}$$

由$r=\rho$处的剪应力连续，要求

$$\left.\frac{d\Phi_e}{dr}\right|_{r=\rho}=\left.\frac{d\Phi_p}{dr}\right|_{r=\rho},$$

于是$-\alpha G\rho=-\tau_s$。由此定出弹塑性交界线的半径为

$$\rho=\tau_s/\alpha G。\tag{6-107}$$

记$\rho=a$时的α为$\alpha_e=\tau_s/aG$，则对$\alpha>\alpha_e$有

$$T=4\pi\int_0^a\Phi r\,dr=\frac{4}{3}T_e\left[1-\frac{1}{4}\left(\frac{\alpha_e}{\alpha}\right)^3\right],\tag{6-108}$$

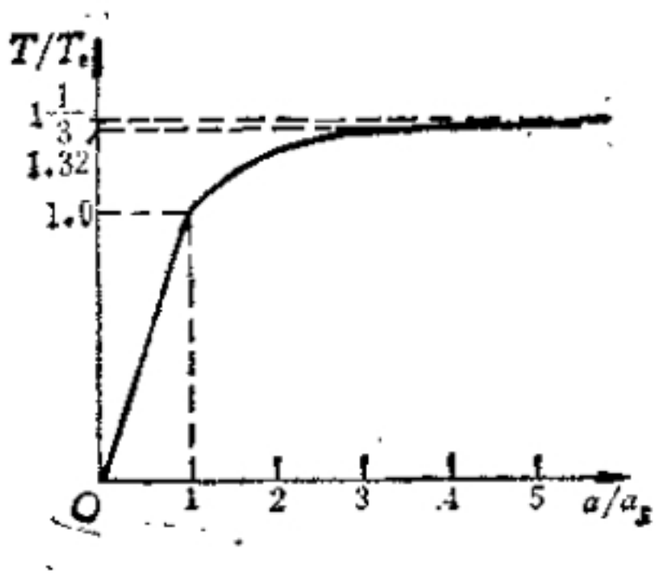


图 6-19

其中T_e是弹性极限扭矩，见(6-96)式。按照(6-108)式确定的载荷-变形关系，即$T/T_e\sim\alpha/\alpha_e$曲线见图6-19。它同弹塑性弯曲的载荷-变形关系(图6-6)很相象：当变形仍处于弹性变形量级时，截面已经接近于塑性极限状态了。

由(6-107)和(6-108)

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

式，并注意$T_p=\frac{4}{3}T_s$，可给出弹塑性边界随扭矩变化的规律：

$$\frac{T}{T_p}=1-\frac{\rho^3}{4a^3},\quad \rho\leqslant a; \tag{6-109}$$

或即

$$\frac{\rho}{a}=\sqrt[3]{4\left(1-\frac{T}{T_p}\right)},\quad \rho\leqslant a. \tag{6-110}$$

五、卸载、回弹和残余应力

同§6·3中讨论弹塑性弯曲后的卸载相似，弹塑性扭转后的卸载也相当于在反方向作用一个等值的弹性扭矩。仍以圆柱体扭转为例，加载时的扭转角α可由(6-107)式求出为$\alpha=\tau_s/\rho G$，而卸载时的回弹角是

$$\alpha'=T/GJ_z=\frac{4}{3}\cdot\frac{\rho}{a}\alpha\left(1-\frac{\rho^3}{4a^3}\right),$$

因此，单位长度上的残余扭转角为

$$\alpha^F=\alpha-\alpha'=\alpha\left[1-\frac{4}{3}\cdot\frac{\rho}{a}\left(1-\frac{\rho^3}{4a^3}\right)\right]. \tag{6-111}$$

也可写出回弹比与所加扭矩的关系为

$$\frac{\alpha^F}{\alpha}=1-t\cdot\sqrt[3]{4-3t}, \tag{6-112}$$

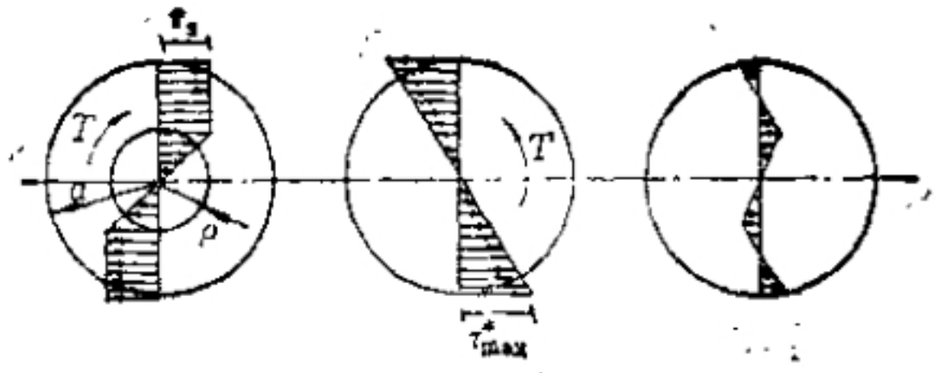
其中$t=T/T_s=4T/3T_p$。

卸载后的残余应力分布可计算出为

$$\tau^F=\begin{cases}\tau_s\left[1-\dfrac{4r}{3a}\left(1-\dfrac{\rho^3}{4a^3}\right)\right], & \rho\leqslant r\leqslant a;\\ \tau_s\left[\dfrac{r}{\rho}-\dfrac{4r}{3a}\left(1-\dfrac{\rho^3}{4a^3}\right)\right], & 0\leqslant r\leqslant\rho.\end{cases} \tag{6-113}$$

其分布如图6-20所示。

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。



(a) 加载　　(b) 卸载　　(c) 残余应力

图 6-20

六、弹塑性强化材料圆柱体的扭转

对于柱体的自由扭转，如前面所述，所经历的是简单加载过程，因此可不用增量理论而直接用全量理论求解。以圆柱体为例，现在只有一个应变分量$\gamma_{\theta z}=\gamma=\alpha r$和一个应力分量$\tau_{\theta z}=\tau$，于是全量理论的本构关系为

$$\tau=\frac{\bar{\sigma}}{3\bar{\epsilon}}\gamma,$$

其中$\bar{\sigma}=\sqrt{3}\tau$，$\bar{\epsilon}=\gamma/\sqrt{3}=\alpha r/\sqrt{3}$。因为$\tau$只与$r$有关，平衡方程和边界条件均自动满足。从截面扭矩与外扭矩平衡的条件，可以建立扭矩T与扭转角α的关系如下：

$$T=2\pi\int_0^a\tau r^2\mathrm{d}r=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\int_0^a\bar{\sigma}r^2\mathrm{d}r. \qquad (6\text{-}114)$$

由$\bar{\epsilon}=\alpha r/\sqrt{3}$可将(6-114)式中的积分变量转化为$\bar{\epsilon}$：

$$T=\frac{6\pi}{a^3}\int_0^{\bar{\epsilon}_a}\bar{\epsilon}^2 f(\bar{\epsilon})\,\mathrm{d}\bar{\epsilon}, \qquad (6\text{-}115)$$

其中$\bar{\sigma}=f(\bar{\epsilon})$为材料的强化规律，一旦它给定，就可计算出$T$随$\alpha$变化的规律及截面内的应力分布；$\tau_a=\tau|_{r=a}=\alpha a/\sqrt{3}$。

例如，设材料的强化规律为

$$\bar{\sigma}=\sigma_s\left(\frac{\bar{\epsilon}}{\epsilon_s}\right)^m,\quad 0<m<1, \qquad (6\text{-}116)$$

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

代入(6-115)式积分可得

$$T=\frac{6\pi\sigma_s\varepsilon_e^{m+3}}{(m+3)\alpha^3\varepsilon_s^m}. \tag{6-117}$$

若在半径ρ处的材料达到屈服，则$\varepsilon_s=\alpha\rho/\sqrt{3}$，再注意到$\sigma_s=\sqrt{3}\tau_s$，$\varepsilon_e=\alpha a/\sqrt{3}$，从(6-117)式得出

$$T=\frac{2\pi\tau_s}{m+3}\cdot\frac{a^{m+3}}{\rho^m}. \tag{6-118}$$

由此可以讨论以下两个特例：i) 当$m=1$（理想线弹性材料），$\rho=a$(柱体边缘开始屈服)时，$T=\frac{\pi}{2}\tau_s a^3=T_e$；ii) 当$m=0$（理想塑性材料)时，$T=\frac{2}{3}\pi\tau_s a^3=T_p$。

对于强化材料的非圆截面柱体的扭转问题，无论是用增量理论还是全量理论，都没有得到解析解，通常只能用数值方法求近似解。

§6.6 受内压的厚壁圆筒

一、研究对象和基本方程

承受内压的厚壁圆筒是工程中广泛应用的结构物，如国防工业中的炮筒、化学工业中的高压容器、动力工业中输送高压高温流体的管道、土木工程中的涵管等等。下面可以看到，若按弹性分析，则未能充分发挥材料的潜力；而按塑性分析，就可以更好地利用厚壁筒的承载能力。

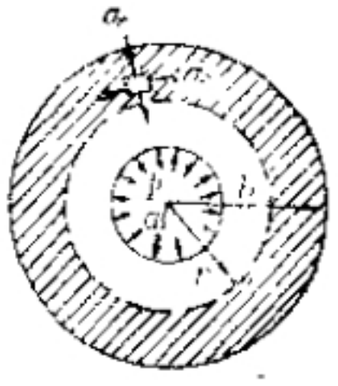


图 6-21

考虑一个在均匀内压p作用下的厚壁筒，其内半径为a，外半径为b，参见图6-21。我们只研究以下简单情况，即筒很长，且由于载荷的作用形式和约束条件，使得圆筒在轴线方向的应变为常数

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

ϵ_θ或零，而在圆筒每一截面内的应力状态和应变状态都相同。

取柱坐标(r, θ, z)，且令z轴与筒轴重合。设筒内一点在r方向的位移为u。由于问题是轴对称的，周向位移$v = 0$。于是，几何关系为

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r}. \tag{6-119}$$

在轴对称条件下的平衡方程为

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \tag{6-120}$$

在下面的讨论中，暂时仍采用小变形假定，即不考虑内外半径a、b的变化对基本方程和边条件的影响。这时，应力边条件为

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= -p, \quad \text{当} r = a; \\ \sigma_r &= 0, \quad \text{当} r = b. \end{aligned}\right\} \tag{6-121}$$

而筒两端的端面条件按St. Venant条件给出为

$$P = \int_A \sigma_z dA = 2\pi \int_a^b \sigma_z r dr, \tag{6-122}$$

这里P是端面的轴向拉力。

二、弹性解

在弹性范围内，本构关系是Hooke定律

$$\left.\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{1}{E}[\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)], \\ \epsilon_\theta &= \frac{1}{E}[\sigma_\theta - \nu(\sigma_z + \sigma_r)], \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)] = \epsilon_0. \end{aligned}\right\} \tag{6-123}$$

(6-119)至(6-123)式构成厚壁筒的弹性问题，它的解可以在一般弹性力学书籍中查到，其结果为：

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_r = \bar{p}\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right)<0\ ,\quad \sigma_\theta = \bar{p}\left(1+\frac{b^2}{r^2}\right)>0,\\
&\sigma_z = 2\nu\bar{p} + E\epsilon_0 = T/\pi(b^2-a^2),\\
&u = \frac{1+\nu}{E}\bar{p}\left[(1-2\nu)r + \frac{b^2}{r}\right] - \nu\epsilon_0 r,
\end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}124)$$

其中

$$\bar{p} = \frac{pa^2}{b^2-a^2}\ ,\quad \epsilon_0 = \frac{P-2\nu p\pi a^2}{E\pi(b^2-a^2)}. \quad (6\text{-}125)$$

由(6-124)式可知 σ_r 是压应力，σ_θ 是拉应力. 现在讨论在什么条件下 σ_z 是中间主应力。由于 $\sigma_{\theta\min} = 2\bar{p}$，$\sigma_{r\max} = 0$，$\sigma_z = P/\pi(b^2-a^2)$，可知若要 σ_z 是中间主应力，以下条件应成立：

$$0 \leqslant P/\pi(b^2-a^2) \leqslant 2\bar{p} = 2pa^2/(b^2-a^2),$$

或即

$$0 \leqslant P \leqslant 2\pi pa^2. \quad (6\text{-}126)$$

如果圆筒两端是自由的，则 $P = 0$；如果圆筒两端是封闭的，则 $P = \pi pa^2$。可见这两种情况都符合(6-126)条件，能保证 σ_z 是中间主应力。

由于在现在这个问题中，不但主方向已知，而且主应力次序也已知，所以采用Tresca屈服条件最为方便。于是，当屈服时有

$$\sigma_\theta - \sigma_r = 2\bar{p}\frac{b^2}{r^2} = \sigma_s,$$

可见屈服将首先在内壁 $r = a$ 处发生，且此时

$$\bar{p} = \frac{a^2}{2b^2}\sigma_s,$$

相应的内压 p 即为厚壁筒的弹性极限压力

$$p_e = \frac{\sigma_s}{2}\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right). \quad (6\text{-}127)$$

从(6-127)式看出，若按弹性设计，对于给定的 a 值，可以增加壁厚，即增加 b 值，使得 p_e 增大；但无论怎样增加 b，p_e 都不会超过

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

$\sigma_s/2$。也就是说，当$b \to \infty$时，$p_e \to \sigma_s/2 = \text{const}$。这说明：i) 一味增加壁厚，不会明显地提高筒的弹性极限压力值，在设计高压筒（如炮管）时应采取其他措施（如下面将要介绍的经过局部塑性变形使之产生有利的残余应力，以及装配有预应力的套筒等）来加以增强。ii) 当弹性无限空间内的圆柱形孔洞受到内压作用时（例如对于有压隧洞），其内表面开始屈服时的压力值只与周围的材料的性质有关，而与孔洞的半径无关。

三、弹塑性解（理想塑性材料）

由上可知，$p = p_e$时，筒的内壁首先屈服。当$p > p_e$时，塑性区便由$r = a$逐渐向外扩张。由问题的轴对称性，可设弹塑性边界为$r = c$，其中$a \leqslant c \leqslant b$。

（1）弹性区$c \leqslant r \leqslant b$。应力通解是

$$\sigma_r' = A - \frac{B}{r^2}, \quad \sigma_\theta' = A + \frac{B}{r^2}, \tag{6-128}$$

这里我们用上标′表示弹性区内的各量。现在的边界条件是

$$r = b, \quad \sigma_r' = 0;$$
$$r = c, \quad \sigma_\theta' - \sigma_r' = \sigma_s.$$

由这两个条件可以定出(6-128)式中的常数

$$A = c^2\sigma_s/2b^2, \quad B = c^2\sigma_s/2.$$

代回(6-128)式，得出应力分布为

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r' &= -\frac{c^2\sigma_s}{2b^2}\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right), \\ \sigma_\theta' &= -\frac{c^2\sigma_s}{2b^2}\left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{6-129}$$

进而根据弹性区满足的基本方程求出

$$\left.\begin{aligned} \sigma_z' &= \nu\frac{c^2\sigma_s}{b^2} + E\epsilon_0, \\ u' &= \frac{1+\nu}{2E}c^2\sigma_s\left[\frac{1-2\nu}{b^2}r + \frac{1}{r}\right] - \nu\epsilon_0 r. \end{aligned}\right\} \tag{6-130}$$

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

（2）塑性区$a \leqslant r \leqslant c$。各量标以上标″，这时平衡方程为

$$\frac{d\sigma_r''}{dr} + \frac{\sigma_r' - \sigma_\theta''}{r} = 0 \,. \tag{6-131}$$

同时，仍假定σ_r''为中间主应力（待事后校核），则对理想塑性材料在塑性区内屈服条件为

$$\sigma_\theta'' - \sigma_r'' = \sigma_s \,. \tag{6-132}$$

在方程(6-131)和(6-132)中只有σ_r''、σ_θ''两个未知数，于是问题是静定的。将(6-132)代入(6-131)式得

$$\frac{d\sigma_r''}{dr} = \frac{\sigma_s}{r} \,.$$

积分一次，并利用边条件$\sigma_{r|r=a}'' = -p$定常数，则

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r'' &= \sigma_s \ln \frac{r}{a} - p < 0 \,, \\ \sigma_\theta'' &= \sigma_s \left(1 + \ln \frac{r}{a}\right) - p > 0 \,. \end{aligned}\right\} \tag{6-133}$$

这里我们看到，由于材料是理想塑性的、问题又是静定的，塑性区内的应力分布σ_r''、σ_θ''只与厚壁筒内表面的边界条件有关，而与弹性区的应力场无关。

（3）弹塑性边界的确定。上面已分别给出了弹性区的应力场(6-129)和塑性区的应力场(6-133)，这二者在弹塑性边界$r = c$上应满足σ_r的连续条件，即

$$\sigma_r'|_{r=c} = \sigma_r''|_{r=c} \,.$$

由此导出

$$-\frac{\sigma_s}{2}\left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right) = \sigma_s \ln \frac{c}{a} - p \,,$$

从而

$$p = \sigma_s \left[\ln \frac{c}{a} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right)\right], \tag{6-134}$$

此式给出了c与p的关系。将(6-134)式代回(6-133)式得出

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r'' &= \sigma_s\left[\ln\frac{r}{c}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)\right],\\ \sigma_\theta'' &= \sigma_s\left[\ln\frac{r}{c}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{c^2}{b^2}\right)\right].\end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}135)$$

（4）塑性极限状态。当$c=b$时，塑性区扩展到整个圆筒，外载p就不能再增加了。因此，用$c=b$代入(6-134)式得出厚壁筒的塑性极限压力为

$$p_s=\sigma_s\ln\frac{b}{a}. \qquad (6\text{-}136)$$

前面说过，由(6-127)式算出的弹性极限压力p_e是有限的，即$b\to\infty$时$p_e\to\sigma_s/2$；现在这里由(6-136)式算出的塑性极限压力却是无限的，即$b\to\infty$时$p_s\to\infty$，只要b增加，p_s就能不断增加。

在塑性极限状态下，周向应力σ_θ的最大值发生在筒的外壁，它恰等于σ_s。

在加载的各个阶段，厚壁筒内的应力分布如图6-22。

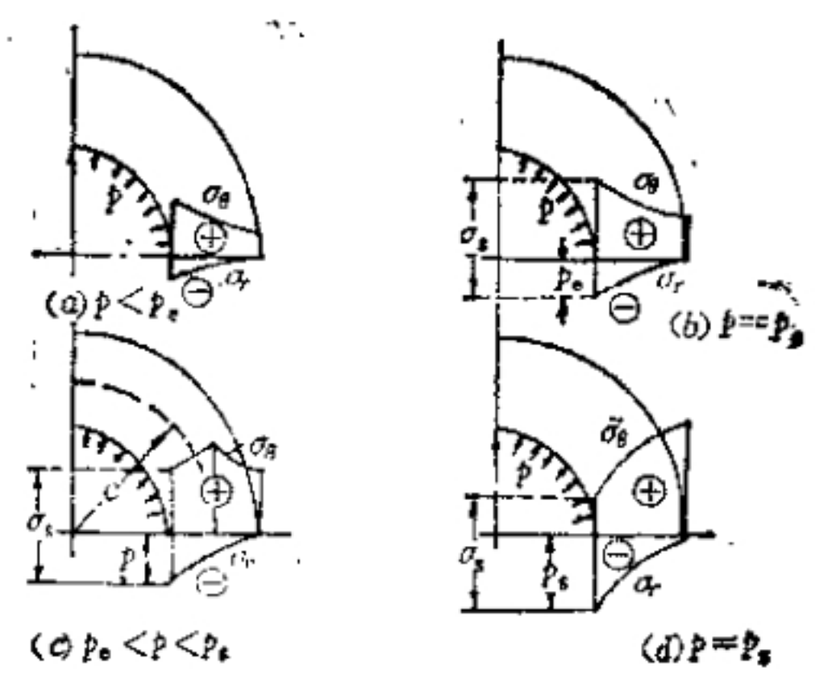


图 6-22

（5）塑性区内的位移u''和应力σ_r''。

在塑性区内求σ_r''和σ_θ''是静定问题，但是要求σ_r''和u''，就必须用到本构关系。下面用与Tresca 屈服条件相关连的流动法则来解

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

σ_r''和u''。

厚壁筒塑性区应力所在的屈服面是

$$f - \sigma_\theta'' - \sigma_r'' - \sigma_s = 0,$$

于是，相关连的流动法则给出

$$d\epsilon_\theta^p : d\epsilon_z^p : d\epsilon_r^p = 1 : 0 : (-1),$$

即$d\epsilon_r^p = -d\epsilon_\theta^p$, $d\epsilon_z^p = 0$。这说明，在全部筒壁内$\epsilon_z = \epsilon_z^e = \epsilon_0 = \text{const}$，即$\epsilon_z$必是弹性的，且为常数。于是在$a \leqslant r \leqslant c$范围内

$$\sigma_z'' = \nu(\sigma_r'' + \sigma_\theta'') + E\epsilon_0$$

$$= -2\nu p + \nu\sigma_s\left(1 + 2\ln\frac{r}{a}\right) + E\epsilon_0. \qquad (6\text{-}137)$$

现在端面条件(6-122)可以写成

$$P = 2\pi\int_a^c \sigma_z'' r\,dr + 2\pi\int_c^b \sigma_z' r\,dr,$$

将(6-130)和(6-137)给出的σ_z'和σ_z''代入得到

$$\epsilon_0 = \frac{P}{E\pi(b^2-a^2)} - \frac{2\nu}{E}\cdot\frac{pa^2}{b^2-a^2} = \frac{P - 2\nu p\pi a^2}{E\pi(b^2-a^2)}. \qquad (6\text{-}138)$$

此式与弹性解完全相同。这说明在完全卸去外载P和p时，轴向残余应变必为零。

(6-138)式中有三个参量：P、p和ϵ_0，根据圆筒的端面条件，总可确定其中之一。例如：

i) 开口圆筒，$P = 0$，于是$\epsilon_0 = -2\nu pa^2/E(b^2-a^2)$；

ii) 封闭圆筒，$P = \pi a^2 p$，于是$\epsilon_0 = (1-2\nu)pa^2/E(b^2-a^2)$；

iii) 无穷长圆筒，即平面应变情形，$\epsilon_0 = 0$，于是$P = 2\nu p\pi a^2$。

注意，当$\nu = 1/2$即材料不可压缩时，ii)与iii)就完全一致。这说明材料不可压的封闭圆筒受内压正好实现了平面应变条件。这时$\sigma_z'' = \nu(\sigma_r'' + \sigma_\theta'')$显然是中间主应力。对其他常见情形，也可验证$\sigma_z''$是中间主应力。例如，不难验证，当$0 \leqslant P \leqslant 2\pi a^2 p$及$\nu = 1/2$时，$\sigma_z''$确是中间主应力。

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

求位移时利用体积变化的弹性公式计算比较方便，即

$$\frac{du''}{dr}+\frac{u''}{r}+\epsilon_0=\frac{1-2\nu}{E}(\sigma_r''+\sigma_\theta''+\sigma_z'')$$

$$=\frac{1-2\nu}{E}[(1+\nu)(\sigma_r''+\sigma_\theta'')+E\epsilon_0],$$

故有

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ru'')=\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E}(\sigma_r''+\sigma_\theta'')-2\nu\epsilon_0$$

$$=\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E}\sigma_s\left(2\ln\frac{r}{c}+\frac{c^2}{b^2}\right)-2\nu\epsilon_0.$$

积分得出

$$u''=\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E}\sigma_s\left[r\ln\frac{r}{c}+\frac{r}{2}\cdot\frac{c^2}{b^2}-\frac{r}{2}\right]$$

$$-\nu\epsilon_0 r+\frac{C_1}{r}, \qquad (6\text{-}139)$$

其中常数C_1可由$r=c$处的位移连续条件$u'=u''$定出为

$$C_1=(1-\nu^2)\sigma_s c^2/E. \qquad (6\text{-}140)$$

当$\nu=1/2$时$u''=\frac{C_1}{r}-\frac{1}{2}\epsilon_0 r=\frac{3}{4}\cdot\frac{\sigma_s c^2}{Er}-\frac{1}{2}\epsilon_0 r$。例如，取$\epsilon_0=0$，$b=2a$，$c=b$，$E/\sigma_s=1000$，则在筒内壁$r=a$处$u''_a=3\times10^{-3}$。可见刚达到$p_s$时，筒的变形相对筒本身的几何尺寸还是小的。

四、卸载和残余应力

设厚壁筒内压力增加到p^*（$p_s<p^*<p_s$）后实行完全卸载，卸载应力可按弹性解计算，即

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r^*&=\bar{p}^*\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right),\\ \sigma_\theta^*&=\bar{p}^*\left(1+\frac{b^2}{r^2}\right),\\ \sigma_z^*&=2\nu\bar{p}^*+E\epsilon_0^*=P^*/\pi(b^2-a^2),\end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}141)$$

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

其中 $p^* = p^* a^2/(b^2 - a^2)$。叠加到弹塑性应力状态上去后得到残余应力分布

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r^\circ = {} & -p^* + \sigma_s \ln\frac{r}{a} - \frac{p^* a^2}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right), && a \leqslant r \leqslant c;\\
& \left(\frac{c^2\sigma_s}{2b^2} - \frac{p^* a^2}{b^2 - a^2}\right)\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right), && c \leqslant r \leqslant b;\\
\sigma_\theta^\circ = {} & -p^* + \sigma_s\left(1 + \ln\frac{r}{a}\right) - \frac{p^* a^2}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right), && a \leqslant r \leqslant c;\\
& \left(\frac{c^2\sigma_s}{2b^2} - \frac{p^* a^2}{b^2 - a^2}\right)\left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right), && c \leqslant r \leqslant b;\\
\sigma_z^\circ = {} & \nu\left[\sigma_s\left(2\ln\frac{r}{a} + 1\right) - 2p^* - 2p^*\frac{a^2}{b^2 - a^2}\right], && a \leqslant r \leqslant c;\\
& \nu\left(\frac{c^2\sigma_s}{b^2} - 2p^*\frac{a^2}{b^2 - a^2}\right), && c \leqslant r \leqslant b.
\end{aligned}\right\} \tag{6-142}$$

在上式中 p^* 与 c 间的关系由(6-134)式确定，即

$$p^*/\sigma_s = \ln\frac{c}{a} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right).$$

上面计算残余应力的公式，只有在完全卸去载荷后，筒内处处都不在相反方向发生塑性变形时才有效。下面来计算保证完全卸载后不出现反号塑性变形条件下的最大内压 $p^*_{\max}$。

为了不发生反向屈服，要求

$$|\sigma_\theta^\circ - \sigma_r^\circ| \leqslant \sigma_s, \tag{6-143}$$

而从(6-142)式可以算出

$$\sigma_\theta^\circ - \sigma_r^\circ = \begin{cases} \sigma_s - \dfrac{2p^* a^2 b^2}{(b^2 - a^2)r^2}, & a \leqslant r < c; \\ \left(c^2\sigma_s - \dfrac{2p^* a^2 b^2}{b^2 - a^2}\right)\cdot\dfrac{1}{r^2}, & c \leqslant r \leqslant b, \end{cases} \tag{6-144}$$

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

其最大值在内壁$r=a$处，等于$\sigma_s-\frac{2p^*b^2}{b^2-a^2}$于是，从(6-143)式得到

$$p^*<\sigma_s\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)=2p_e. \qquad (6-145)$$

由此可见，如果一次加载的内压$p^*\leqslant 2p_e$，则完全卸载后不会在相反方向引起新的塑性变形。只要以后重新加载时压力不超过p^*，整个筒就处于弹性状态，没有新的塑性变形。这就是前面§2·6提到的"安定状态"。这种利用先加载超过初始弹性极限压力，然后卸载，产生某种残余应力分布，使得再加载时弹性极限压力提高的办法，称为自增强或自紧(autofrettage)处理，在炮筒和高压容器的制造中有着广泛的应用。

从(6-145)式我们知道，对于有反复加载的情形，所加内压p不应超过$2p_e$；另一方面，内压p又不能大于塑性极限压力p_e。当这二者相等时，有

$$2p_e=\sigma_s\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)=p_e=\sigma_s\ln\frac{b}{a}.$$

从此式解出$b/a=2.22$。当$b/a>2.22$时$p_e>2p_e$，这时可以把工作内压p提高到$2p_e$之上而筒仍处于约束塑性状态，但卸载时会发生反向屈服，在反复加载(如炮筒反复承受发射炮弹时的高压)的条件下筒就会发生塑性循环(低周疲劳)破坏。因此，采用大于2.22的b/a值实际意义不大。

五、几何变形对承载能力的影响

当厚壁筒承受的内压接近于塑性极限压力时，筒内位移与筒径相比较已不再是一个小量，因此有必要考虑筒径变化对承载能力的影响。设以a'、b'表示变形后的内、外半径，则以变形后的尺寸求得筒的塑性极限压力为

$$p_e'=\sigma_s\ln\frac{b'}{a'}. \qquad (6-146)$$

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

假设材料不可压，且$\epsilon_z = 0$，则从变形前后体积不变知

$$b'^2 - a'^2 = b^2 - a^2 = \text{const} = F,$$

从而得出

$$\left(\frac{b'}{a'}\right)^2 = 1 + \frac{F}{a'^2}.$$

在内压作用下，a'单调增长，故b'/a'单调减小，由(6-146)式知p'也随之单调减小。这说明，计及几何尺寸改变时，由理想塑性材料制成的厚壁筒承受内压的塑性极限状态是不稳定的。

六、强化材料长厚壁圆筒的分析

前面分析的都是理想塑性材料的厚壁筒。对于强化材料制成的长厚壁圆筒，为了简化分析，我们假设：

i）材料是不可压的，即

$$\epsilon_r + \epsilon_\theta + \epsilon_z = 0; \tag{6-147}$$

ii）轴向应变为0，即

$$\epsilon_z = 0. \tag{6-148}$$

将几何关系$\epsilon_r = -\frac{du}{dr}$，$\epsilon_\theta = \frac{u}{r}$及(6-148)式代入(6-147)式得

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = 0, \tag{6-149}$$

其解为

$$u = \frac{A}{r}, \tag{6-150}$$

其中A为一个正的积分常数。进而从几何关系得出

$$\left.\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{du}{dr} = -\frac{A}{r^2}, \\ \epsilon_\theta &= \frac{u}{r} = \frac{A}{r^2}. \end{aligned}\right\} \tag{6-151}$$

现在我们采用全量理论求解；并且，由于在本问题中主方向已知，为方便起见可采用Tresca屈服条件和Ludwik理论$\tau_{max} = \tau_0 \gamma_{max}^m$，其中$\tau_0 > 0$，$0 \leqslant m \leqslant 1$。

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

由全量理论知

$$\frac{s_r}{\epsilon_r} = \frac{s_\theta}{\epsilon_\theta} = \frac{s_z}{\epsilon_z}. \tag{6-152}$$

因为$\epsilon_z = 0$，所以

$$s_z = \sigma_z - \sigma_m = 0,$$

从而易求出

$$\sigma_m = \sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta). \tag{6-153}$$

这表明σ_z是中间主应力，因此最大剪应力为

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_\theta - \sigma_r), \tag{6-154}$$

而最大剪应变为

$$\gamma_{max} = \epsilon_\theta - \epsilon_r = \frac{2A}{r^2}. \tag{6-155}$$

将上述关系代入平衡方程 $\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$ 得出

$$r\frac{d\sigma_r}{dr} = \sigma_\theta - \sigma_r = 2\tau_{max} = 2\tau_0\gamma_{max}^m$$

$$= 2\tau_0\left(\frac{2A}{r^2}\right)^m, \tag{6-156}$$

进而积分得到

$$\sigma_r = -\frac{\tau_0}{m}(2A)^m \cdot \frac{1}{r^{-m}} + C,$$

利用边条件

$$\sigma_r|_{r=a} = -p, \sigma_r|_{r=b} = 0$$

求得

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{\tau_0}{m}\left(\frac{2A}{a}\right)^m\left[1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2m}\right], \\ \sigma_r &= \frac{-p}{b^{-2m} - a^{-2m}}(b^{-2m} - r^{-2m}). \end{aligned}\right\} \tag{6-157}$$

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

τ_0和m是材料常数。当p已知时，从(6-157)式可确定A，代回(6-150)、(6-151)式可确定u、ϵ_r和ϵ_θ。又由(6-156)和(6-153)式可分别得到

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\theta &= \sigma_r + 2\tau_0\left(\frac{2A}{r^2}\right)^m,\\ \sigma_z &= \sigma_r + \tau_0\left(\frac{2A}{r^2}\right)^m.\end{aligned}\right\} \tag{6-158}$$

至此、位移、应变和应力均已完全确定，问题得解。

在图6-23中，给出了$m=0$（理想刚塑性），$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$和1（线弹性）时厚壁筒内的应力分布。由图可以看出，径向应力分量σ_r与弹性解相差不大，周向应力分量σ_θ则差别较大。其中$(\sigma_\theta)_{max}$在弹性状态下($m=1$)是在内壁处；在塑性状态下，若$m>\frac{1}{2}$，则$(\sigma_\theta)_{max}$在内壁处，若$m<\frac{1}{2}$，则$(\sigma_\theta)_{max}$转到外壁处。

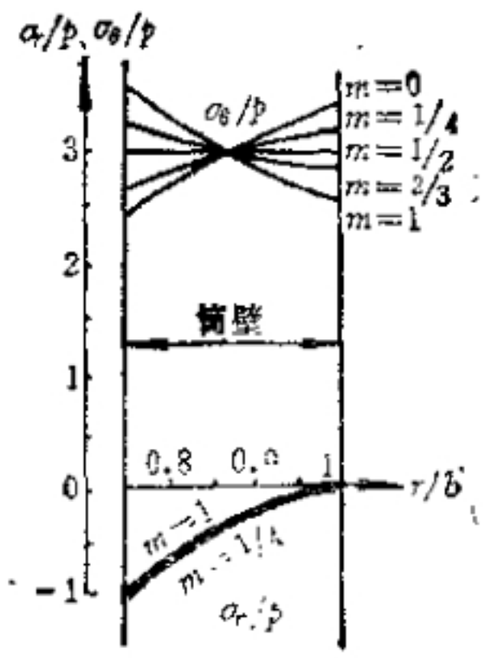


图 6-23

上面的分析由于采用了材料不可压和轴向应变为零的假设，使问题的求解得到很大的简化。对于材料可压缩及轴向应变不为零的强化材料的厚壁筒问题，Ильюшин等人[6.7]曾按全量理论作过分析，计算过程十分复杂。

§6.7 旋转圆盘

一、研究对象

旋转圆盘，如汽轮机和透平压缩机上的叶轮，是机械工程中经常遇到的构件。本节将研究等厚度的薄圆盘，其半径为b，厚度为h，并以均匀角速度ω绕其中心轴旋转。由于圆盘很薄，在整个厚度

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

上可取$\sigma_z = 0$，因此这里所处理的是一个平面应力问题。我们在这里只介绍理想弹塑性材料的旋转圆盘的解；对于强化材料的旋转圆盘的问题，请参考有关文献，例如[6.8]。

二、弹性解

考虑转盘从弹性状态开始由于转速增加而开始屈服的过程。转盘的单位体积力（离心力）为$\rho\omega^2 r$，其中ρ为转盘材料的质量密度，ω为角速度，r为微元的径向坐标；则平衡方程为

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho\omega^2 r = 0,$$

或即

$$\frac{d}{dr}(r\sigma_r) - \sigma_\theta + \rho\omega^2 r^2 = 0. \tag{6-159}$$

引入应力函数$F = r\sigma_r$，则应力分量满足

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{F}{r}, \\ \sigma_\theta &= \frac{dF}{dr} + \rho\omega^2 r^2. \end{aligned}\right\} \tag{6-160}$$

从柱坐标下的几何关系$\epsilon_r = \frac{du}{dr}$，$\epsilon_\theta = \frac{u}{r}$中消去$u$（径向位移），得变形协调方程

$$\frac{d}{dr}(r\epsilon_\theta) - \epsilon_r = 0. \tag{6-161}$$

在弹性范围内，以Hooke定律和(6-160)式代入(6-161)式得到

$$\frac{d^2F}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dF}{dr} - \frac{F}{r^2} + (3+\nu)\rho\omega^2 r = 0, \tag{6-162}$$

其解为

$$F = \frac{C_1}{r} + C_2 r - \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 r^3. \tag{6-163}$$

代回(6-160)式得出应力为

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{C_1}{r^2} + C_2 - \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 r^2,\\ \sigma_\theta &= -\frac{C_1}{r^2} + C_2 - \frac{(1+3\nu)}{8}\rho\omega^2 r^2,\end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}164)$$

其中积分常数C_1、C_2应由具体问题的边界条件确定。

对于实心圆盘，因$r=0$处应力为有限值，故$C_1=0$，另一常数C_2由盘边$r=b$处$\sigma_r=0$决定。其结果，实心圆盘的应力分量为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2(b^2-r^2),\\ \sigma_\theta &= \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 b^2 - \frac{1+3\nu}{8}\rho\omega^2 r^2.\end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}165)$$

由于$\nu \leq \frac{1}{2}$，有$\sigma_\theta \geq \sigma_r \geq \sigma_z = 0$；且$r$越小，应力就越大，最大应力在盘心$r=0$处：

$$(\sigma_r)_{max} = (\sigma_\theta)_{max} = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 b^2.$$

因此，当转速增加时，转盘中心首先开始屈服。这时利用Mises条件和Tresca条件给出同样结果：

$$\frac{3+\nu}{8}\rho\omega_e^2 b^2 = \sigma_s,$$

其中ω_e是弹性极限状态时的转盘的角速度，称为弹性极限转速，它为

$$\omega_e = \sqrt{\frac{8\sigma_s}{(3+\nu)\rho b^2}}, \quad (6\text{-}166)$$

当$\nu = 1/3$时，

$$\omega_e = \frac{1.55}{b}\sqrt{\frac{\sigma_s}{\rho}}. \quad (6\text{-}167)$$

三、弹塑性解

当转速$\omega > \omega_e$时，转盘为部分塑性，即内部区域为塑性区，外

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

部区域为弹性区。根据轴对称性，设弹塑性交界线为$r=a$的圆。

（1）塑性区，$0 \leqslant r \leqslant a$，将各量标以上标″。

平衡方程仍为(6-159)。由于$\sigma_\theta'' > \sigma_r'' > \sigma_z'' = 0$，故Tresca屈服条件给出$\sigma_\theta'' = \sigma_s$。问题成为静定的。事实上，以$\sigma_\theta'' = \sigma_s$代入(6-159)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r\sigma_r'') = \sigma_s - \rho\omega^2 r^2.$$

积分，并利用盘心应力有界的条件定常数，则得塑性区内的应力分布为

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r'' &= \sigma_s - \frac{1}{3}\rho\omega^2 r^2, \\ \sigma_\theta'' &= \sigma_s. \end{aligned}\right\} \tag{6-168}$$

（2）弹性区，$a \leqslant r \leqslant b$，将各量标以上标′。

应力分布仍由(6-164)式给出，但其中积分常数应由边条件$\sigma_r'|_{r=b} = 0$和弹塑性交界线上应力分量的连续条件来确定。后者可写为：当$r=a$时

$$\sigma_r' = \sigma_r''、\sigma_\theta' = \sigma_\theta''. \tag{6-169}$$

将(6-164)和(6-168)式代入(6-169)式，可解出

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= -\frac{1}{24}\rho\omega^2 a^4(1+3\nu), \\ C_2 &= \sigma_s + \frac{1}{12}\rho\omega^2 a^2(1+3\nu). \end{aligned}\right\} \tag{6-170}$$

此式与(6-164)式一起，给出了弹性区的σ_r'、σ_θ'。再用$r=b$处$\sigma_r' = 0$，则得

$$\omega^2 = \frac{24b^2\sigma_s/\rho}{(1+3\nu)a^4 - 2(1+3\nu)a^2b^2 + 3(3+\nu)b^4}. \tag{6-171}$$

此式给出了转速ω与弹塑性交界半径a之间的关系。例如，以$a=0$代入(6-171)式，就得到弹性极限转速ω_e的表达式(6-166)。

现设转盘全部进入塑性，即$a=b$，从(6-171)式得

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

$$\omega_p^2 = 3\sigma_s/\rho b^2,$$

于是塑性极限转速为

$$\omega_p = \frac{\sqrt{3}}{b}\sqrt{\frac{\sigma_s}{\rho}} = \frac{1.73}{b}\sqrt{\frac{\sigma_s}{\rho}}. \qquad (6\text{-}172)$$

注意ω_p与ν无关。当$\nu = 1/3$时，$\omega_p/\omega_e \approx 1.73/1.55 \simeq 1.12$，可见这时转盘从开始屈服到全部屈服，其转速只能增加12%左右。转盘内的应力分布情况如图6-24所示。

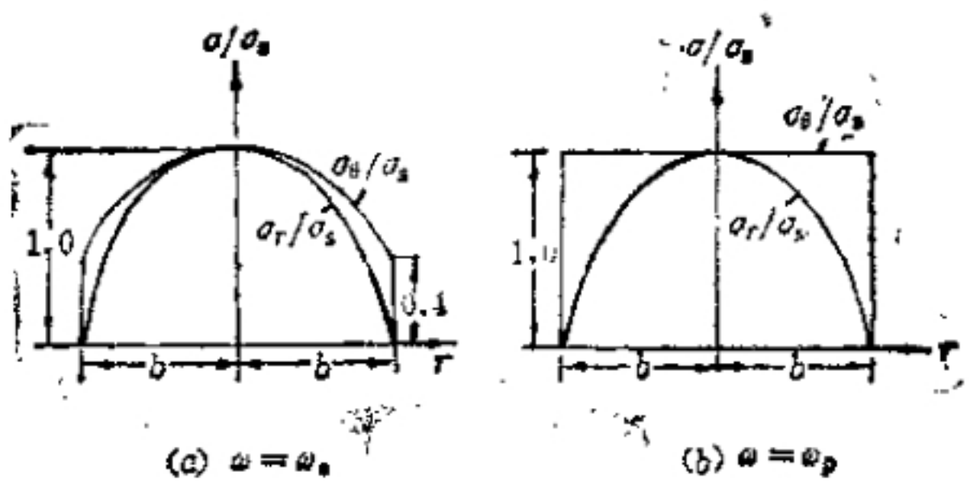


图 6-24

上述弹塑性分析的一个实际应用是所谓"超速工艺"，即在转盘按额定转速使用前，先使之经历一个超速运转，使$\omega_e < \omega < \omega_p$，这样就能在盘中产生有利的残余应力分布，从而扩大使用时的弹性范围。显然，转盘的超速工艺同厚壁筒的自紧在原理上是相似的。

参 考 文 献

[6.1] 王仁、熊祝华、黄文彬，《塑性力学基础》，科学出版社，1982

[6.2] Gardiner, F. J., *The spring back of metals*, *Trans ASME*, 79, 1—9, 1957.

[6.3] Yu T. X. (余同希) and W. Johnson, The Plastica: The large elastic-plastic deflection of a strut, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 17, 195—209, 1982.

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

[6.4] 伍小强，余同希，悬臂梁弹塑性大挠度全过程的分析，《力学学报》，1986年第6期，516—527页。

[6.5] Yu T. X. (余同希)and W. Johnson, The influence of axial force on the elastic-plastic bending and springback of a beam, *J. Mechanical Working Technology*, 6, 5—21, 1982.

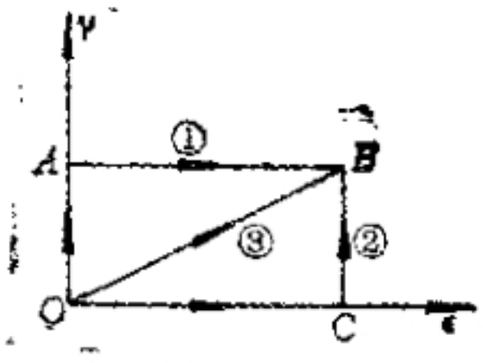
[6.6] Hill, R. *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford, 1950. 中译本：R.希尔，《数学塑性理论》，王仁等译，科学出版社，1966

[6.7] Ильюшин. А. А., Огибалов. П. М., Упруго-Пластические Диформации Полых Цилиндров, Изд. МГУ, 1960.

[6.8] 李敏华，《硬化材料的轴对称塑性平面应力问题的研究》，科学出版社，1960。

习　题

6.1　考虑§6·2中的薄壁圆筒承受拉伸和扭转，对图示的变形路径①OAB，②OCB和③OB，求从$O(0,0)$到达$B(2,1)$时，所对应的无量纲应力σ和τ。



题6.1附图

6.2　对于§6·2中的薄壁圆筒的拉扭联合变形，如果将Mises屈服条件改为Tresca屈服条件，问方程(6-16)、(6-18)和(6-20)应如何改变？

6.3　空心圆截面梁，已知内径d与外径D之比为$d/D=\alpha$，在受纯弯曲时求$\eta=M_s/M_e$与α的关系。

6.4　半径为a的实心圆截面梁，受弯矩M的作用，材料是理想弹塑性的，求弯矩M与曲率κ之间的关系。

6.5　由理想弹塑性材料制成的、截面为$2b\times 2h$、跨度为$2l$的简支梁，在梁跨的中点受集中载荷P，材料的拉压屈服极限为σ_s。求：

i)极限载荷P_s；

ii)当$P_e\leqslant P\leqslant P_s$时，弹塑性区域交界线的方程；

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

iii)在进入极限状态时,梁中点的挠度值.

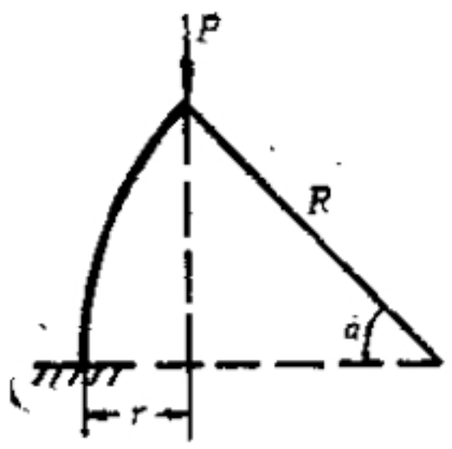
6.6 图示半径为R的悬臂曲杆,自由端受集中力P的作用,求考虑轴向力时的极限载荷P_s.

6.7 对于同时承受弯矩M和轴力N的矩形截面梁,证明在载荷平面($n=N/N_s, m=M/M_s$)上E(弹性)区域与P I (单侧塑性)区域的分界线是$m=1-n$,P I 区域与P II (双侧塑性)区域的分界线是$m=1+n-2n^2$.

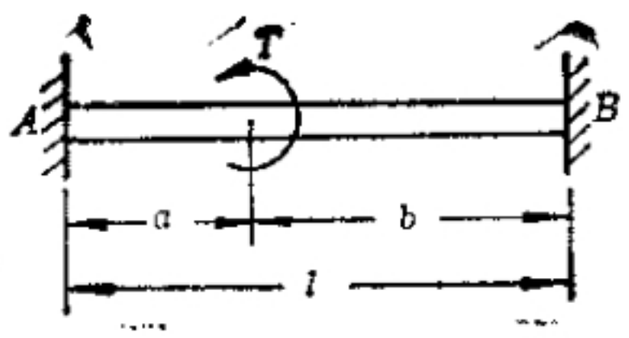
6.8 图示两端固定的圆轴,受扭矩T作用. 若材料是理想塑性的, $b>a$, $l=a+b$,问

i) T能加到多大?

ii) 当T从零逐渐增大时,两端反力矩T_A、T_B的变化规律如何?



题6.6附图



题6.8附图

6.9 有内半径为a、外半径为b的空心圆轴,材料是理想弹塑性的,试求

i) 弹性极限扭矩T_e和塑性极限扭矩T_p;

ii) 扭矩T与单位长度扭转角α之间的关系.

6.10 已知空心圆轴内外半径之比为$\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$,受扭直至半径为$\frac{3}{4}b$处进入塑性状态后卸载,试画出残余剪应力沿直径的分布图,并求出在完全卸载后,所保留的扭角为原扭角的几分之几.

6.11 试用沙堆比拟法说明开口薄壁截面的极限扭矩远比相同形状的闭口薄壁截面的极限扭矩为小.

6.12 试用沙堆比拟法计算下述截面的柱体受扭时的塑性极限扭矩值.

i) 边长为$2a$的正三角形;

ii) 外半径为b、内半径为a的环形;

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

iii) 内切圆半径为a的正n边形；

iv) 三边长度分别为a、b、c的不等边三角形。

6.13 由理想刚塑性材料制成的半径为a的实心圆杆，当受纯拉时$P=P_s=\pi a^2\sigma_s$达到塑性极限状态，当受纯扭时$T=T_p=\frac{2}{3}\pi a^3\sigma_s$达到塑性极限状态。证明在$P$与$T$同时作用下达到塑性极限状态时$P$和$T$应满足下述关系：

$$\left(\frac{T}{T_p}\right)^2+\frac{3}{4}\left(\frac{P}{P_s}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{P}{P_s}\right)^4=1\ .$$

6.14 设材料不可压，且服从Mises屈服条件，有一内外半径比为$\beta=a/b$的封闭厚壁圆筒，承受内压p和扭矩T的同时作用，求使内、外表面同时达到屈服时的T/p之值。

6.15 已知厚壁筒内、外半径分别为a、b，材料的屈服极限为σ_s，采用Mises屈服条件，求在以下情况下筒内壁进入塑性状态时的弹性极限压力p_s：

i) 两端封闭；

ii) 两端自由，$\sigma_z=0$；

iii) 两端受约束，$\epsilon_z=0$。

6.16 设有两种材料组成的组合厚壁筒，其材料的屈服极限分别为σ_{s1}(内筒)和σ_{s2}(外筒)。如果此组合筒在承受内压p作用时，内筒和外筒同时进入全塑性状态，试求对于给定的p、r_i(内筒内半径)、r_e(外筒外半径)值，两筒的接触半径r_1值应为多少？

6.17 已知无穷大薄板，为平面应力状态，在板中在一半径为a的圆孔，孔壁受均匀内压p的作用。试用Tresca屈服条件求出

i) 孔壁$r=a$处进入塑性状态时的压力p_s；

ii) 当$p=\sigma_s$时板内弹塑性分界半径r_s的值。

6.18 环状平板内半径为a、外半径为b，孔壁受内压p。若材料为理想弹塑性，服从Mises屈服条件，求

i) 在弹塑性状态下，弹塑性分界半径c与内压p的关系；

ii) 能使整个环屈服的最大b/a值及此时的塑性极限载荷p_s。

6.19 由屈服极限为σ_s的理想弹塑性材料制成的、内半径为a、外半径为b的厚壁球壳，受有内压p的作用。试用Tresca屈服条件求

i) 弹性极限压力p_s；

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

ii）塑性极限压力p_s；

iii）弹塑性交界半径c与压力p之间的关系；

iv）用Mises屈服条件计算和用Tresca屈服条件计算塑性状态结果是否相同？

6.20 内半径为a、外半径为b的匀质等厚旋转圆盘，由不可压缩的、拉压屈服应力为σ_s的理想弹塑性材料制成，试用Tresca屈服条件求

i）弹性极限转速ω_e；

ii）塑性极限转速ω_p；

iii）弹塑性交界半径c与转速ω间的关系；

iv）极限状态时σ_r的表达式及其最大值。

6.21 设有一旋转圆柱体，处于广义平面应变状态($\epsilon_z=\text{const}$)，若圆柱体的材料是不可压缩的，而且轴向载荷为零(即$\int_a^b \sigma_z \cdot 2\pi r dr = 0$)。试求此圆柱体在弹性状态和弹塑性状态下的应力分布以及圆柱体极限转速ω_p的表达式，并分析用Tresca屈服条件和Mises屈服条件计算时对结果有无影响。

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

第七章　理想刚塑性平面应变问题

§7.1 基 本 概 念

当物体的形状是很长的或两端固定的等截面柱体，所受载荷与横截面平行且其分布沿长度不变，便象在弹性力学中所遇到过的那样，可以按照平面应变问题来处理。平面应变问题的变形特点是沿长度（设为 z 轴）方向的应变为零，横截面（设为 xy 平面）内的应变与 z 无关，即

$$\left.\begin{aligned}&\epsilon_x=\epsilon_x(x,\ y),\ \epsilon_y=\epsilon_y(x,\ y),\ \gamma_{xy}=\gamma_{xy}(x,\ y),\\&\epsilon_z=0,\ \gamma_{zx}=0,\ \gamma_{yz}=0.\end{aligned}\right\}\quad(7\text{-}1)$$

在工程中遇到的一些问题，如金属成形加工中的辊轧、抽拉等等以及土木工程中的挡土墙和重力坝等等问题，都是很接近于平面应变问题的。

从第六章中研究的梁的弯曲、柱体的扭转、厚壁圆筒和旋转圆盘等问题中看到，它们同第二章中研究的三杆桁架一样，随着外载的增加，一般都要先后经历弹性状态、弹塑性状态（约束塑性变形状态）和极限状态（无限塑性变形状态）这样三种状态。极限状态是同对材料的理想化（忽略材料的强化，即假设为理想塑性的）相联系的，它指的是：当外载达到物体或结构的极限载荷时，载荷无须继续增长，也将产生无限的塑性变形。在工程上不论是利用无限塑性流动来对金属进行成形加工的大变形问题，还是防止无限塑性流动避免结构破损的小变形问题，都需要知道物体或结构的极限状态和极限载荷。

从第二章和第六章的例子中我们还看到，如果只要确定极限载荷，就无须从弹塑性状态一步步求解，而可以采用刚塑性模型，所得出的极限状态和极限载荷同弹塑性结果是一样的。在这一章里我们将研究理想刚塑性材料在平面应变条件下的极限状态和极

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

限载荷。由于忽略弹性变形，以下所讲的刚性区实际上将包括弹性区和变形与弹性变形同量级的约束塑性变形区。

显然，在这样的理论中没有考虑真实材料的某些性质，例如材料的强化、在大变形过程中因能量耗散引起的温度效应、惯性力和应变率效应，等等。但是，实践证明这样的理论仍然是极有用的，特别是对于金属成形加工过程的分析研究。

§7.2 平面应变问题的基本方程

一、平面应变问题的特点

从(7-1)式可知，在平面应变条件下，塑性流动具有下列特征：

i) 流动平行于某一固定平面(如 xy 平面)；

ii) 流动与垂直于该平面的坐标(如 z)无关。

于是，速度场为

$$v_x = v_x(x, y), \quad v_y = v_y(x, y), \quad v_z = 0. \tag{7-2}$$

相应的应变率张量为

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_x}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_x}{\partial y} + \dfrac{\partial v_y}{\partial x}\right) & 0 \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_x}{\partial y} + \dfrac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \dfrac{\partial v_y}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7-3}$$

即只有 $\dot{\epsilon}_x$、$\dot{\epsilon}_y$ 和 $\dot{\gamma}_{xy}$ 三个应变率分量不为零。

我们采用 Mises 屈服条件和与其相关连的流动法则。在理想刚塑性情形，就是Lévy-Mises关系，即(5-39)式的"率形式"

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\lambda} s_{ij} \tag{7-4}$$

由(7-4)式可知在平面应变问题中 $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$，因而 z 为一主方向，σ_z 为一主应力。

由(7-4)式还可知

$$s_z = \sigma_z - \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3}(2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y) = 0,$$

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

于是
$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \sigma_m, \tag{7-5}$$

这表明 σ_z 永远是中间主应力，它也就等于平均正应力 σ_m。

这样，塑性区内任一点的应力张量和应力偏张量分别为

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \end{pmatrix} \tag{7-6}$$

和
$$s_{ij} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \dfrac{\sigma_y - \sigma_x}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7-7}$$

而未知的应力分量只为 σ_x、σ_y、τ_{xy} 三个分量。

二、基本方程组

i）平衡方程：

讨论即将开始流动的瞬时，不计体力和惯性力，且考虑到各量与 z 无关，故有

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{7-8}$$

ii）屈服条件：

将（7-7）代入 Mises 屈服条件 $J_2' = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = k^2$ 就有

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 = k^2, \tag{7-9}$$

其中 $k = \tau_s$ 是材料的剪切屈服应力。采用 Tresca 屈服条件所得的表达式亦相同。于是，

$$\left.\begin{aligned} &\text{在刚性区内}\quad (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 \leqslant 4k^2; \\ &\text{在塑性区内}\quad (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2. \end{aligned}\right\} \tag{7-10}$$

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

iii) 本构关系：

按 Lévy-Mises关系(7-4)式有

$$\frac{\dfrac{\partial v_x}{\partial x}}{\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}}=\frac{\dfrac{\partial v_y}{\partial y}}{\dfrac{\sigma_y-\sigma_x}{2}}=\frac{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_x}{\partial y}+\dfrac{\partial v_y}{\partial x}\right)}{\tau_{xy}}=\lambda, \tag{7-11}$$

或即

$$\frac{\dfrac{\partial v_x}{\partial x}-\dfrac{\partial v_y}{\partial y}}{\sigma_x-\sigma_y}=\frac{\dfrac{\partial v_x}{\partial y}-\dfrac{\partial v_y}{\partial x}}{2\tau_{xy}}. \tag{7-12}$$

iv) 体积不可压缩条件：

由于忽略弹性变形，材料成为不可压缩的，故有

$$\dot{\varepsilon}_{kk}=0, \tag{7-13}$$

或即

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0. \tag{7-14}$$

注意到方程(7-12)和(7-14)是关于速度的齐次方程，因此和时间度量无关，可以选取任意单调增长的参量作为时间的度量。

这样，在塑性区我们有五个方程，即(7-8)、(7-9)、(7-12)和(7-14)，求五个未知量 σ_x、σ_y、τ_{xy}、v_x、v_y；而在刚性区要求应力满足整体平衡条件，且不违背屈服条件，以及 v_x、v_y 为零或作刚体运动。如果塑性区的边界条件都是应力边条件，则平衡和屈服，即(7-8)和(7-9)，共三个方程就能将 σ_x、σ_y、τ_{xy} 解出，这时在塑性区求应力就是一个静定问题。

除了应力边条件和速度边条件外，在刚塑性交界线 Γ 处，应力和速度也应满足一定的条件。设 Γ 的法向和切向以 n 和 t 表示，从应力平衡要求 σ_n 和 τ_{nt} 是连续的，但可允许 σ_t 有间断。在准静态问题中，质量密度是连续的，因而对速度场，从质量守恒要求 v_n 连续，但可允许 v_t 有间断，即允许塑性区相对于刚性区有一个

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

滑动。

三、完全解

能满足塑性区的五个方程、刚性区的三个条件(整体平衡，不违背屈服条件，只作刚体运动)、应力和速度边条件、刚塑性交界线的应力和速度的连续条件的解称为完全解。因为一般说来刚性区的具体应力分布是求不出来的，所以完全解有别于通常意义下的真实解。再若对于刚性区的应力是否不违背屈服条件($J_2' \leq k^2$)也无法检验的话，则求出的极限载荷只是真实载荷的上限，证明见第八章。

§7.3 滑移线及其几何性质

一、应力方程和滑移线

现在先对应力分量满足的两个平衡方程(7-8)和一个屈服条件(7-9)作一些演变，以揭示平面应变问题中应力分布的特点。

首先看到，屈服条件(7-9)，即

$$\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2=k^2$$

对应于材料力学中半径为 k 的一个Mohr应力圆，如图7-1所示。它描述了 xy 平面上的应力状态。以 σ_1、σ_2 代表平面内的主应力，且规定 $\sigma_1\geqslant\sigma_2$，则由图7-1易见

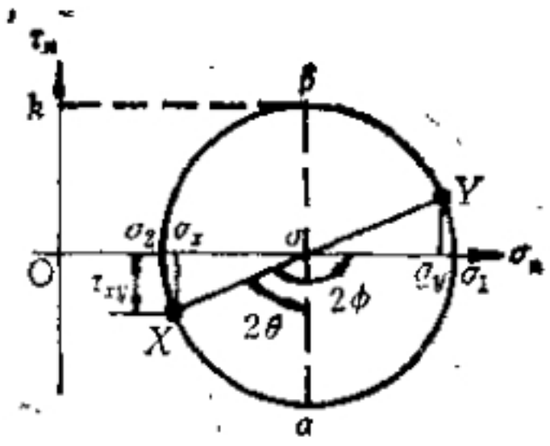


图 7-1

$$\left.\begin{aligned}\sigma&=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2},\ k=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2},\\ \sigma_1&=\sigma+k,\qquad \sigma_2=\sigma-k,\end{aligned}\right\}\tag{7-15}$$

且有

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\sigma+k\cos 2\phi,\\ \sigma_y&=\sigma-k\cos 2\phi,\\ \tau_{xy}&=k\sin 2\phi,\end{aligned}\right\}\tag{7-16}$$

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

其中 ϕ 表示从 x 轴逆时针旋转到 σ_1 方向的转角，这时在 Mohr圆上从 X 点到 σ_1 点相应地转过 2ϕ 角。图 7-1 中 X 点的 $\tau_n<0$，而(7-16)式中 $\tau_{xy}>0$，这是由于材料力学和弹性力学对剪应力的符号规定相差一个负号，即 $\tau_n=-\tau_{nl}$，在以 x 轴为法向的面元上 τ_{nl} 就是 τ_{xy}。

(7-15)式说明，塑性区内任一点的应力状态由静水应力 σ 和纯剪应力 k 叠加而成，参看图 7-2。最大剪应力方向与主应力方向夹角为 $\pm 45°$。我们规定从 σ_1 顺时针转过 $15°$ 转到的最大剪应力方向为 α 方向，另一个则是 β 方向。若从 x 轴逆时针转过 θ 角到达 α 方向，则从图 7-2 看出

$$\phi=\theta+45°,$$

因而

$$\cos 2\phi=-\sin 2\theta,\quad \sin 2\phi=\cos 2\theta,$$

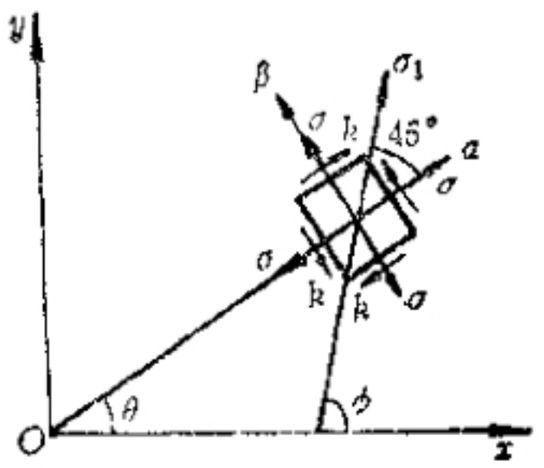


图 7-2

代入(7-16)式得

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\sigma-k\sin 2\theta,\\ \sigma_y&=\sigma+k\sin 2\theta,\\ \tau_{xy}&=k\cos 2\theta.\end{aligned}\right\}\qquad(7\text{-}17)$$

由于这样构造出来的 σ_x、σ_y、τ_{xy} 自动满足屈服条件，所以求 σ_x、σ_y、τ_{xy} 的问题就变成求 $\sigma(x,y)$ 和 $\theta(x,y)$ 的问题。换句话说，利用屈服条件，三个未知函数减少为两个未知函数。

将(7-17)式代入平衡方程(7-8)，得到

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma}{\partial x}-2k\left(\cos 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial x}+\sin 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)=0,\\ &\frac{\partial\sigma}{\partial y}-2k\left(\sin 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial x}-\cos 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)=0.\end{aligned}\right\}\qquad(7\text{-}18)$$

这是含有未知函数 $\sigma(x,y)$ 和 $\theta(x,y)$ 的一阶偏导数的非线性微分

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

方程组。可以证明，这个方程组属于双曲型。事实上，将(7-18)的第一式对 y 微分，第二式对 x 微分，然后相减，可得

$$-\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+2\cot 2\theta\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}-4\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial y}$$

$$+2\cot 2\theta\left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2\right]=0, \qquad (7\text{-}19)$$

写成一般形式是

$$A\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+F\left(x,y,\theta,\frac{\partial\theta}{\partial x},\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)=0,$$

其特征方程是

$$A\mathrm{d}y^2-2B\mathrm{d}x\mathrm{d}y+C\mathrm{d}x^2=0,$$

相应的特征方向是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{B\pm\sqrt{B^2-AC}}{A}.$$

方程(7-19)的判别式为 $B^2-AC=\csc^2 2\theta>0$，故有两个实的特征方向

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\left\{\begin{array}{ll}\tan\theta & \text{即 }\alpha\text{ 方向；}\\ -\cot\theta & \text{即 }\beta\text{ 方向。}\end{array}\right\} \qquad (7\text{-}20)$$

由此可见，方程组(7-18)确为双曲型，具有两族实特征线，且特征方向就是极值剪应力所在的 α、β 方向。因为 α、β 线是极值剪应力线，习惯上称之为滑移线 (slip-line)，因此应力方程组(7-18)的特征线就是滑移线。

在塑性区内的每一点都可以找到一对正交的特征方向或即滑移方向；于是在塑性区内可以作出两组正交的连续曲线，曲线上的每一点的切线方向即为该点的极值剪应力方向，所以它们是极值剪应力的方向线。在塑性区内布满了这种正交网络，称为滑移线场(slip-line field)。

下面就用特征线方法来求解双曲型方程组 (7-18)。取 α、β

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

为曲线坐标，如图 7-3 所示，并以 s_α、s_β 代表沿 α、β 线的弧长。

当将 x、y 轴转到某一点的 α、β 方向时，这一点的屈服条件和平衡方程并不改变，而角度变成 $\theta=0$，对 x、y 求微商就相当于对 s_α、s_β 求微商，于是从方程组(7-18)得到

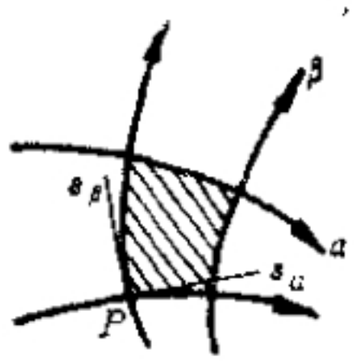


图 7-3

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s_\alpha}(\sigma-2k\theta)=0,\\ \frac{\partial}{\partial s_\beta}(\sigma+2k\theta)=0.\end{aligned}\right\}\qquad(7\text{-}21)$$

此式分别沿 α 线（$\beta=\text{const}$）和沿 β 线（$\alpha=\text{const}$）积分得出

$$\left.\begin{aligned}&\text{沿}\,\alpha\,\text{线}\ \frac{dy}{dx}=\tan\theta,\quad \frac{\sigma}{2k}-\theta=\eta=\text{const};\\ &\text{沿}\,\beta\,\text{线}\ \frac{dy}{dx}=-\cot\theta,\quad \frac{\sigma}{2k}+\theta=\xi=\text{const}.\end{aligned}\right\}\qquad(7\text{-}22)$$

沿一根滑移线，ξ（或 η）值不变，但由同族中某一条滑移线转移到另一条滑移线时，ξ（或η）值一般是要变化的。(7-22)式也可写成增量形式：

$$\left.\begin{aligned}&\text{沿}\,\alpha\,\text{线}\quad \Delta\sigma=2k\Delta\theta,\\ &\text{沿}\,\beta\,\text{线}\quad \Delta\sigma=-2k\Delta\theta.\end{aligned}\right\}\qquad(7\text{-}23)$$

这些方程就是沿 α、β 特征线上的平衡方程，各自表示沿该线上 σ、θ 的变化关系。若知道滑移线的形状，则 θ 为已知，从(7-22)或(7-23)式就可以求出这些线上 σ 的变化。这样从某点的 σ、θ 值开始，顺着滑移线就可以求得整个区域内的 σ 分布。这就是理想刚塑性平面应变问题中的特征线方法。

二、速度方程

从图 7-1 的 Mohr 圆易见 $\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2\tau_{xy}}=-\tan 2\theta$，于是由 (7-12) 和(7-14)式得

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial v_x}{\partial x}-\frac{\partial v_y}{\partial y}+\tan 2\theta\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)=0,\\&\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0.\end{aligned}\right\}\qquad(7\text{-}24)$$

这两个方程的背景是本构关系和不可压条件，现在构成了速度方程组。这组方程的特征线也是上面定义的滑移线。事实上，根据本构关系，最大剪应力方向同最大剪应变率方向是一致的，因此应力方程和速度方程的特征线互相重合应在意料之中。

将 v_x 和 v_y 沿 α 和 β 方向分解，得速度的坐标变换关系

$$\left.\begin{aligned}v_x&=v_\alpha\cos\theta-v_\beta\sin\theta,\\v_y&=v_\alpha\sin\theta+v_\beta\cos\theta.\end{aligned}\right\}\qquad(7\text{-}25)$$

代入方程组(7-24)并令 $\theta=0$（这意味着取 x、y 局部地与 α、β 标架一致），则

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial v_\alpha}{\partial s_\alpha}-v_\beta\frac{\partial\theta}{\partial s_\alpha}=0,\\&\frac{\partial v_\beta}{\partial s_\beta}+v_\alpha\frac{\partial\theta}{\partial s_\beta}=0.\end{aligned}\right\}\qquad(7\text{-}26)$$

沿 α、β 线分别考察得到

$$\left.\begin{aligned}&\text{沿}\,\alpha\,\text{线}\quad dv_\alpha-v_\beta d\theta=0,\\&\text{沿}\,\beta\,\text{线}\quad dv_\beta+v_\alpha d\theta=0.\end{aligned}\right\}\qquad(7\text{-}27)$$

这是沿滑移线的速度方程，它们把速度的变化同 θ 的变化联系起来了。

顺便指出，滑移线具有刚性性质。事实上，在(7-24)中取 $\theta=0$（这意味着取 x、y 局部地与滑移线方向一致）就可解得

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}=0,\qquad\frac{\partial v_y}{\partial y}=0.\qquad(7\text{-}28)$$

它们的意义是沿特征线的正应变率等于零，也就是滑移线没有伸缩。

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

下面介绍滑移线具有的一些固有的几何性质，这些性质对于求解具体问题很有帮助。

三、Hencky 第一定理

在同族两条滑移线和另一族滑移线的交点上，其切线间的夹角沿前者不变。如图 7-4 所示，有 $\Delta\theta_{AB}=\Delta\theta_{CD}$。

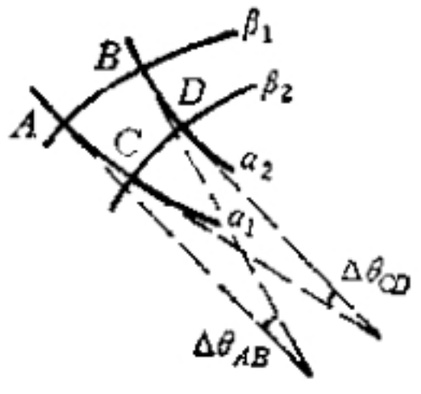


图 7-4

证：考察一个以两条α线（AC, BD）和两条β线（AB, CD）为界的曲边四边形 $ACDB$。沿 α_1 线 $\eta=\eta_1$，沿 α_2 线 $\eta=\eta_2$；沿 β_1 线 $\xi=\xi_1$，沿 β_2 线 $\xi=\xi_2$。则由(7-22)式知

$$\theta_A=\frac{1}{2}(\xi_1-\eta_1),\qquad \theta_B=\frac{1}{2}(\xi_1-\eta_2),$$

$$\theta_C=\frac{1}{2}(\xi_2-\eta_1),\qquad \theta_D=\frac{1}{2}(\xi_2-\eta_2).$$

因此有

$$\Delta\theta_{AB}=\theta_B-\theta_A=\frac{1}{2}(\eta_1-\eta_2),$$

$$\Delta\theta_{CD}=\theta_D-\theta_C=\frac{1}{2}(\eta_1-\eta_2),$$

于是 $\Delta\theta_{AB}=\Delta\theta_{CD}$，证毕。

推论 1。若一族滑移线中有一条是直线，则同族其他滑移线都是直线。

证：这相当于 $\Delta\theta_{AB}=\Delta\theta_{CD}=0$ 的情况。

推论 2。在直的滑移线上，应力是常数。

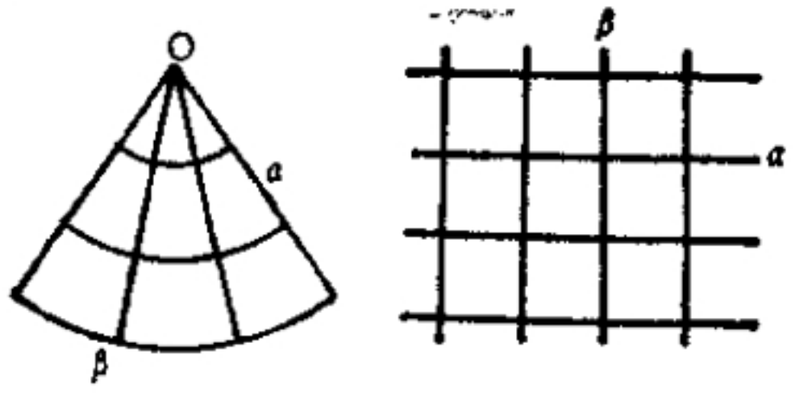
证：在直滑移线上 $\Delta\sigma=\pm 2k\Delta\theta=0$，因 σ、θ 都不变，从(7-17)式推知 σ_x、σ_y、τ_{xy} 沿直滑移线也都不变。证毕。

有一族直滑移线的场叫简单应力场，其中最常见的情形是这族直滑移线都汇交在一点，如图 7-5(a)，叫做中心场。

推论 3。若在一区域内，两族滑移线都是直线，则整个区域为

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

σ 和 θ 都不变，即为均匀应力状态。这样的场简称均匀场，如图 7-5(*b*) 所示。



(*a*) 中心场　　(*b*) 均匀场

图 7-5

四、Hencky 第二定理

沿一族的某一滑移线移动，则另一族滑移线在交点处的曲率半径的改变量，在数值上等于所移动过的距离。设 α、β 线的曲率半径分别为 R_α、R_β，则此定理可表述为

$$\frac{\partial R_\alpha}{\partial s_\beta} = -1, \quad \frac{\partial R_\beta}{\partial s_\alpha} = -1, \tag{7-29}$$

证：根据曲率的定义

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{\partial \theta}{\partial s_\alpha}, \quad \frac{1}{R_\beta} = -\frac{\partial \theta}{\partial s_\beta}. \tag{7-30}$$

这里规定，当 α（或 β）线的曲率中心位于 s_β（或 s_α）的增加方向时，曲率半径为正，反之为负。图 7-6 所示的 R_α 和 R_β 均为正。由于沿着 α 线的增加方向，角增加，而沿着 β 线增加方向，角减小，因此 (7-30) 式中 $-\frac{\partial \theta}{\partial s_\beta}$ 前出现负号。

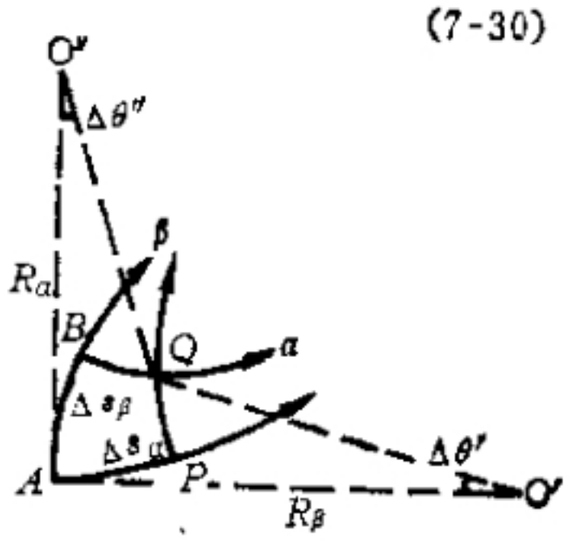


图 7-6

考虑图 7-6 中的由无限接近的 α、β 族滑移线所围成的曲边

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

四边形$ABQP$，由(7-30)式知

$$R_\alpha \Delta\theta'' = \Delta s_\alpha, \quad -R_\beta \Delta\theta'' = \Delta s_\beta.$$

沿β线对Δs_α计算导数：

$$\frac{\partial}{\partial s_\beta}(\Delta s_\alpha) = \frac{\partial}{\partial s_\beta}(R_\alpha \Delta\theta'').$$

另一方面，从图7-6中的几何关系来求此导数。因为研究的是微弧，可以用割线代替切线，故

$$\widehat{BQ} \simeq \Delta s_\alpha - \Delta s_\beta \Delta\theta'',$$

从而

$$\frac{\partial}{\partial s_\beta}(\Delta s_\alpha) = \frac{\widehat{BQ} - \widehat{AP}}{\Delta s_\beta} \simeq -\Delta\theta'',$$

进而有

$$\frac{\partial}{\partial s_\beta}(R_\alpha \Delta\theta'') = -\Delta\theta''.$$

根据 Hencky 第一定理，$\Delta\theta''$是不随s_β变化的常数，于是

$$\frac{\partial R_\alpha}{\partial s_\beta} = -1.$$

同理可证

$$\frac{\partial R_\beta}{\partial s_\alpha} = -1.$$

证毕。

Hencky 第二定理也可改写成：

$$\left.\begin{aligned} &\text{沿}\alpha\text{线}, \mathrm{d}R_\beta + \mathrm{d}s_\alpha = 0, \text{或} \mathrm{d}R_\beta + R_\alpha \mathrm{d}\theta = 0; \\ &\text{沿}\beta\text{线}, \mathrm{d}R_\alpha + \mathrm{d}s_\beta = 0, \text{或} \mathrm{d}R_\alpha - R_\beta \mathrm{d}\theta = 0. \end{aligned}\right\} \quad (7\text{-}31)$$

由图7-7可见，β线在A点处的曲率半径AP等于β线在B点处的曲率半径BQ与弧AB的长度之和。因此，Prandtl 将 Hencky 第二定理叙述为：β线族与某一α线交点处的曲率中心构成该α线的渐伸线PO。

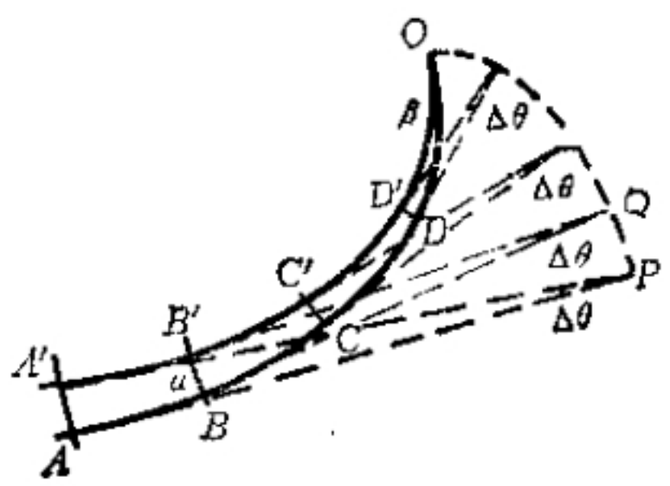


图 7-7

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

推论。同族的滑移线必向同一方向凹，并且曲率半径逐渐变为零。

图 7-5(a) 所示的中心场中的圆弧线族正是这样的一个典型实例。

五、间断值定理

(1) 在滑移线两侧，应力不会发生间断。

证：在§7.2中曾指出，在刚塑性交界线Γ上，σ_n和τ_{nt}连续，亦即$[\sigma_n]=[\tau_{nt}]=0$。这里符号$[\ ]$表示所考察的量在线两侧的值之差，即间断值。在滑移线上，不但仍有$[\sigma_n]=[\tau_{nt}]=0$，而且$|\tau_{nt}|=k$。这样，由于线的两侧都满足屈服条件

$$(\sigma_n-\sigma_t)^2+4\tau_{nt}^2=4k^2,$$

易推知$[\sigma_t]=0$，也就是说，任何应力分量都不会发生间断。

(2) 如果沿某一滑移线，其曲率半径发生跳跃，则对应的应力微商也要发生跳跃。

证：沿α线，$\dfrac{\partial\sigma}{\partial s_\alpha}=2k\dfrac{\partial\theta}{\partial s_\alpha}=2k/R_\alpha$，故

$$\left[\frac{\partial\sigma}{\partial s_\alpha}\right]=2k\left[\frac{1}{R_\alpha}\right]. \quad (7\text{-}32)$$

沿β线可建立类似的关系。

这说明应力导数的不连续性只能在跨过另一族滑移线时发生，并且体现在曲率的不连续性上。图 7-8 是一例。

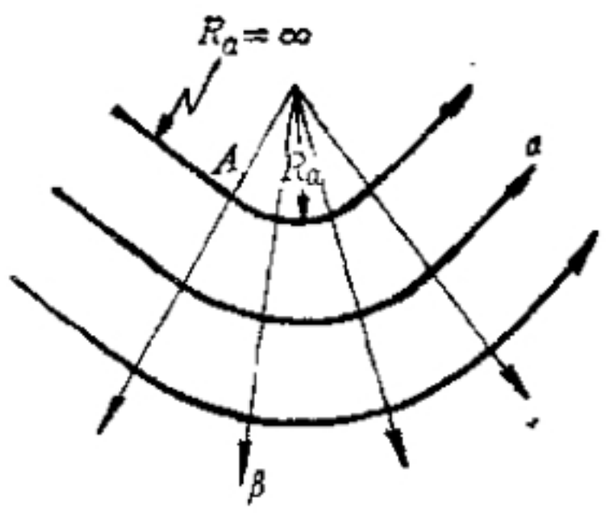


图 7-8

(3) 沿任何线的法向速度一定连续，而切向速度的间断线一定是滑移线，并且间断值沿滑移线不变。

证：先把间断线看成有限宽度的线，速度间断可以看成在此

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

宽度内 $\frac{\partial v_t}{\partial n}$ 值很大，即 $\dot{\epsilon}_{nt}$ 很大。由 $\dot{\epsilon}_{ij}=\lambda s_{ij}$ 推知 τ_{nt} 比别的应力偏量分量大得多，于是从屈服条件可知 $|\tau_{nt}|=k$。因此，这条速度间断线是滑移线。

其次设这条滑移线是 α 线，由速度方程(7·27)得知该线两侧分别有

$$dv_t^+=v_n^+d\theta,\quad dv_t^-=v_n^-d\theta,$$

于是

$$[dv_t]=dv_t^+-dv_t^-=(v_n^+-v_n^-)d\theta=0,$$

这表明间断值$[v_t]$沿滑移线是常数。

六、小结

以上我们得到了沿滑移线的应力、速度和曲率半径的三组方程，为今后应用方便起见，将它们归纳如下：

$$\left.\begin{aligned}&\text{沿 }\alpha\text{ 线，}d\sigma-2kd\theta=0,\quad dv_\alpha-v_\beta d\theta=0,\quad dR_\beta+R_\alpha d\theta=0;\\&\text{沿 }\beta\text{ 线，}d\sigma+2kd\theta=0,\quad dv_\beta+v_\alpha d\theta=0,\quad dR_\alpha-R_\beta d\theta=0.\end{aligned}\right\}\tag{7-33}$$

此外，还已经知道，在滑移线两侧，应力不会发生间断，切向速度可以间断；沿滑移线曲率半径发生间断时，应力导数也同时发生间断。

§7.4 边界条件

上一节已将基本方程变换成沿滑移线的方程，因此边界条件也要作相应的变换。

一、应力边界S_T

若已知塑性区应力边界 S_T 上的法向正应力 σ_n 和剪应力 τ_n，则因为塑性区内任一点的应力都满足屈服条件，所以可以通过 Mohr 圆求出 σ 和 θ。Mohr 圆的半径为 k，这是没有问题的；但是，如图 7-9 所示，通过 (σ_n,τ_n) 点的半径为 k 的 Mohr 圆有两个，因而与边界面垂直的截面上的应力也有两个可能的值 σ_{t1} 和 σ_{t2}，确

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

定从中选取哪一个必须从问题的整体来考虑。

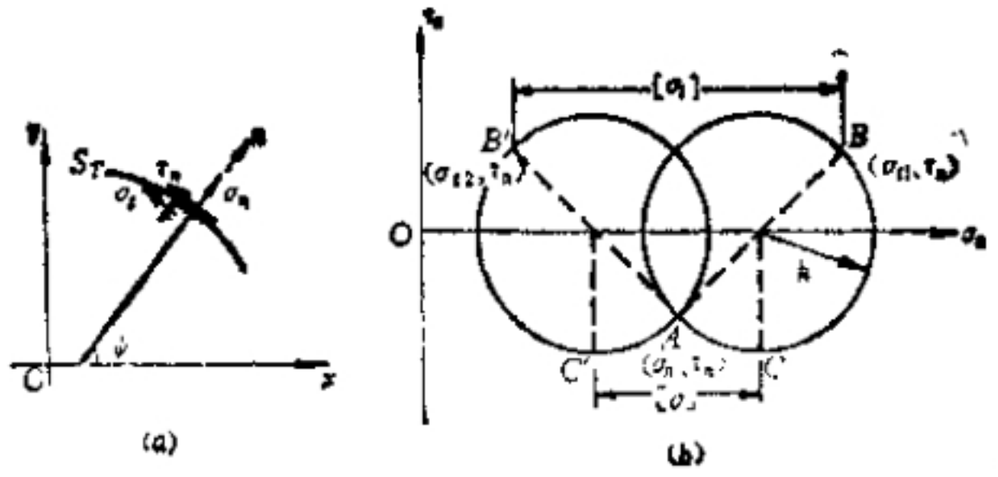


图 7-9

例 1．双向拉伸的长方块，如图7-10.考察右边界，$\sigma_n=\sigma_1$，$\tau_n=0$。但通过$(\sigma_1,0)$有两个 Mohr 圆，分别给出 $\sigma_{t1}=\sigma_1+2k$ 和 $\sigma_{t2}=\sigma_1-2k$。如果 $\sigma_2<\sigma_1$，就应取 $\sigma_{t2}=\sigma_1-2k$。这是根据相邻边界的受力状况来判断的。

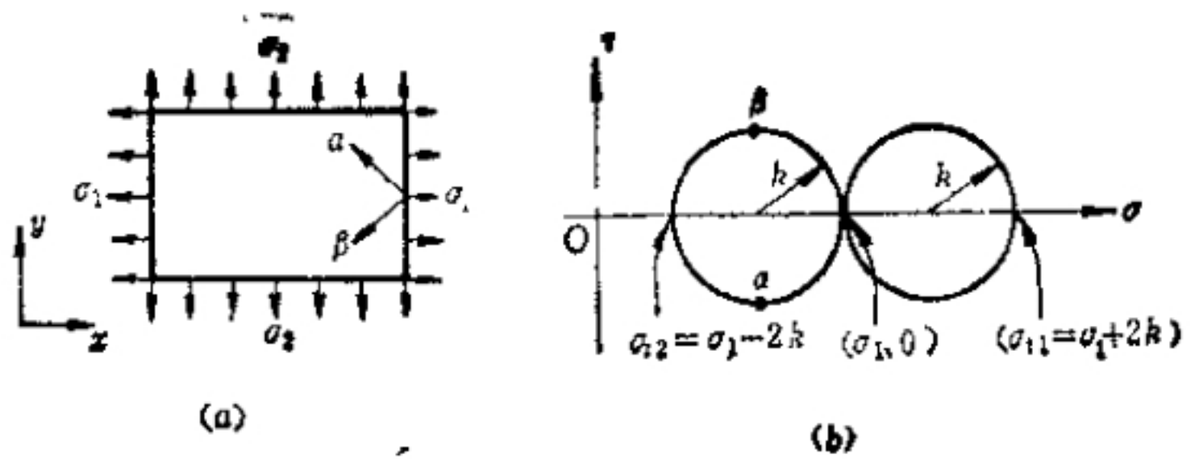


图 7-10

例 2．张角为 $2\gamma>\frac{\pi}{2}$的无限楔体，如图 7-11．考察自由边界 AC，$\sigma_n=\tau_n=0$。通过$(0,0)$作两个 Mohr 圆，给出 $\sigma_t=\pm 2k$。根据楔体受力后的变形分析，AC 边受压，故应取 $\sigma_t=-2k$。这是根据 σ_t 的符号来判断的。

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

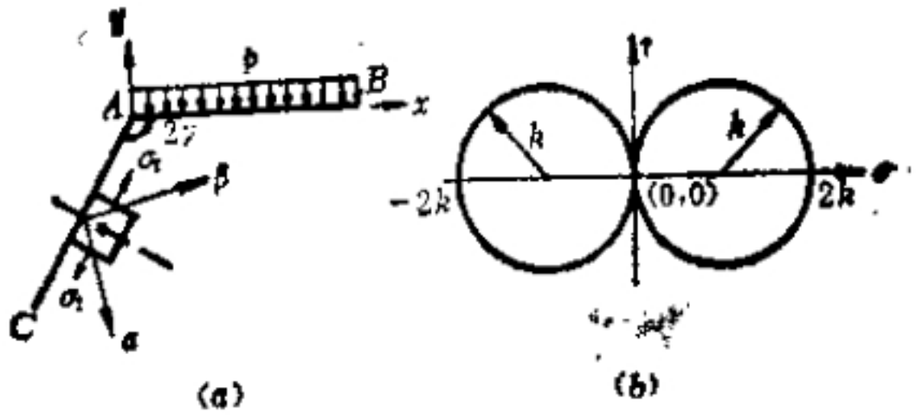


图 7-11

应力圆确定后，边界上的 α、β 线的方向就可以确定了。以上两例的 α、β 线走向，已标明在图上。

下面讨论两种特殊情况：

i）光滑接触表面，或自由表面。这时边界上 $\tau_n = 0$，通过 $(\sigma_n, 0)$ 可作出两个在这点相切的 Mohr 圆，如上面二例都是这样的情形。这时在 Mohr 圆上从 n 方向转到 α、β 方向都是 90°，这表明滑移线与边界方向交成45°。当边界为直线时，滑移线场如图 7-12。

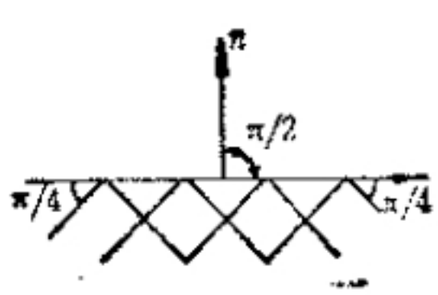


图 7-12

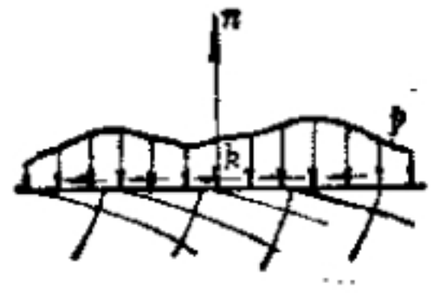


图 7-13

ii）接触表面的摩擦力达到变形金属的物理性质所能允许的最大值，即 $\tau_n = \pm k$。这时，通过 (σ_n, τ_n) 只能作出一个半径为 k 的 Mohr 圆（或说两个 Mohr 圆相重合），且 n 方向本身就是 α 方向（若 $\tau_n = -k$），或 β 方向（若 $\tau_n = k$）。因此，在这种情况下，一族滑移线与边界成90°，另一族则与边界线有公切线或以边界线为其包络线。当边界线为直线时，滑移线场如图 7-13。

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

上面讨论的是两种极端情况，对其它情况，滑移线与边界的夹角关系介于这二者之间。

二、刚塑性交界线 Γ

如果不计整体的刚体位移，可认为在刚性区内速度 $v_\alpha = v_\beta = 0$，而在塑性区内 v_α 和 v_β 不能全为零（否则也成为刚性区），故在它们的交界线 Γ 上必有速度间断，这只有当 Γ 为滑移线或滑移线的包络线时才有可能。

三、两个塑性区的交界线 L

如果两个塑性区的交界线 L 不是滑移线，则 σ、θ 通过 L 时要产生间断。这种间断相当于通过一点有两个不同的 Mohr 圆，即法向应力连续而切向正应力间断，$[\sigma_n]=[\tau_n]=0$，$[\sigma_t]=\sigma_{t1}-\sigma_{t2}$，参见图 7-9。同时，从 Mohr 圆上转角的关系可知 L 与两边滑移线的夹角必相等，即图 7-14 中的 $\omega^+ = \omega^-$。

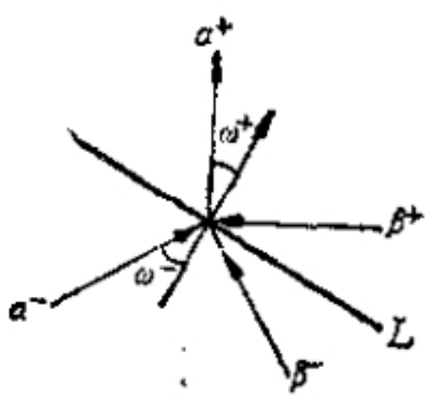


图 7-14

§7.5 几种边值问题的提法

从已知边界条件，利用特征线，就可以逐步从边界开始将区域内的 σ、θ、v_α、v_β 求出。根据边界条件的不同，可以建立以下三类基本边值问题。这些问题都可以借助差分法求得数值解，详见有关书籍，例如[7.1]和[7.2]。

(1) 第一类边值问题 (Riemann 问题)：

如图 7-15，已知两相交滑移线 OA、OB 上的 σ 值

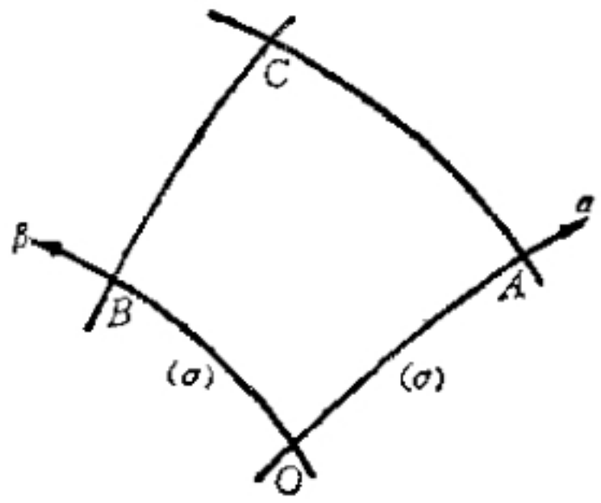


图 7-15

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

(图上加括号表示σ,θ为已知),则可求出由四条滑移线围成的曲边四边形区域$OACB$内的θ值(即作出滑移线网)及σ值。

图 7-16 则是第一类边值问题的退化情形——所有α线(或β线)汇聚在一点,应力在O点发生间断。这时,由已知的$\angle AOC$和OA上的σ值,可以求出由三条滑移线围成的曲边三角形区域OAC(可以看成是图 7-15 中的OB凝缩为一点)内的θ值及σ值。

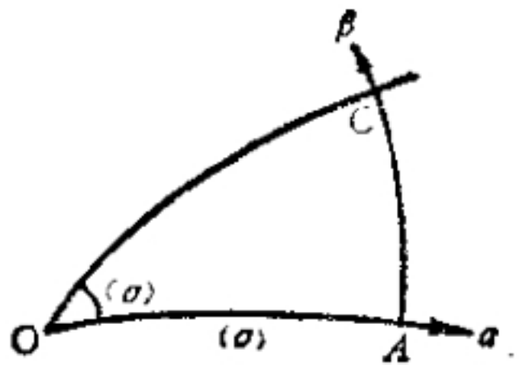


图 7-16

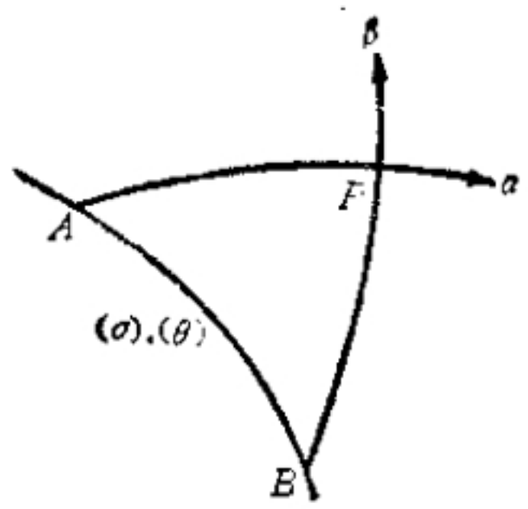


图 7-17

(2) 第二类边值问题(Cauchy 问题):

如图 7-17, 沿一根非滑移线段AB上给定σ和θ值,则可求出以滑移线AP、BP为界的区域ABP内部的θ值(即作出滑移线网)及σ值。严格说来,应要求AB本身光滑,不与任一滑移线相交两次,还要求在AB上所给的σ和θ函数值及其一、二阶导数值均连续。

在图 7-18 所示的例子中,若已知直线光滑边界AB上的σ和θ值为常数,则由§7.1 知滑移线必与边界成 45°角,再由(7-23)式可推知ABC区域内必为均匀应力场。

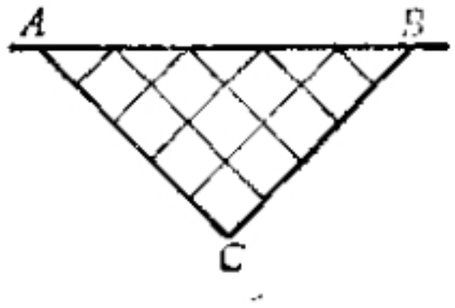


图 7-18

(3) 第三类边值问题(混合问题):

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

如图 7-19，已知一条滑移线 OA（设为 α 线）上的 σ、θ 值，又已知另一条非滑移线 OB 上的 θ 值，则可求出 OAB 区域内的 θ 值（即作出滑移线网）及 σ 值，这里 AB 是一条 β 线。

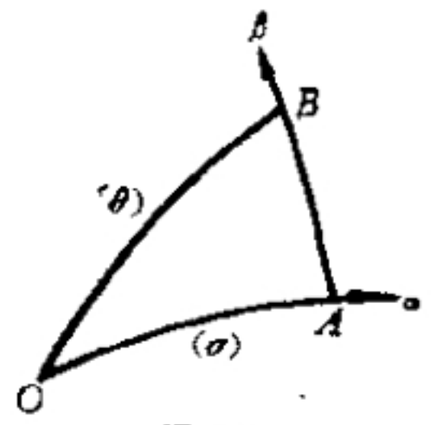


图 7-19

上面是对应力场提出的三类边值问题。对于速度场，也可以类似地提出这三类边值问题。必须注意，在各类边值问题中，边界上给定的条件都不能多于也不能少于以上提及的条件。若条件太少，解一般不能唯一确定；若条件太多，则不一定有解。这些条件称为问题的适定条件。

§7.6 单边受压的楔

作为滑移线场的第一个典型例子，考虑一个钝角楔，即如图 7-20所示的 $2\gamma > \frac{\pi}{2}$ 的楔形体，它的一条边上自楔的角点开始有一段承受一个均布压力 p。这个问题在研究土坡稳定性时有意义。

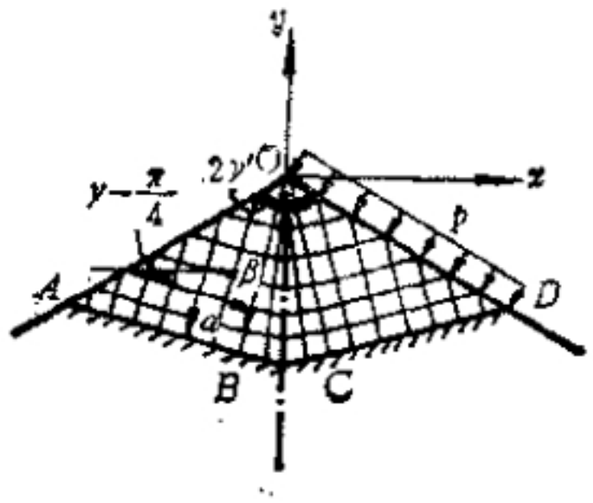


图 7-20

选坐标系 XOY 如图 7-20。因 OA 是直线自由边界，由 OA 出发的 45° 滑移线组成的区域 AOB 是一个均匀应力区，其中 α、β 线都是直线，且 β 方向与 x 轴成 $(\gamma - \frac{\pi}{4})$ 角，如图。同时，因 OD 是承受均布压力的直线边界，三角形区域 COD 中滑移线亦为两族直线，构成另一个均匀应力区，但应力值与 AOB 内不同。这是两个不同的塑性应力区。连接二者的过渡区具有一族直滑移线，为简单应力场。因此，区域 BOC 是一个中心场，相应于一个退化 Riemann 问题。这样，区域 $OABCD$ 是塑性区，$ABCD$ 是一条滑移线，也是刚塑性区域分界线。

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

确定α、β线的方法是记住最大主应力σ_1一定处在α、β构成的标架的Ⅰ、Ⅲ象限内；或者说，从α方向逆时针旋转时一定是经过σ_1方向而到达β方向的。例如，在OA上$\sigma_n=0$，$\sigma_t<0$，σ_n就是σ_1，OA的法向就是σ_1方向，从而定出OA和OB方向是α方向，AB方向是β方向。

现在来定应力场。在区域AOB内，$\sigma_n=\sigma_1=\sigma+k=0$，故$\sigma=-k$，$\psi=\pi-\gamma$，$\theta=\psi\pm\frac{\pi}{4}$。再考虑区域$BOC$，沿$BC$（$\beta$线）有$\Delta\sigma=-2k\Delta\theta$，由于从$B$到$C$的滑移线倾角变化为$\Delta\theta=2\gamma-\frac{\pi}{2}$，故

$$\sigma_C=\sigma_B-2k(2\gamma-\frac{\pi}{2})=-2k(2\gamma+\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2})=\sigma_D,$$

式中σ_C、σ_B、σ_D分别表示C、B、D诸点的平均正应力σ。在图7-21中，右边的一个Mohr圆表征区域AOB的应力状态，左边的一个Mohr圆则表征区域COD的应力状态，两个圆的圆心距为$\sigma_B-\sigma_C=-\Delta\sigma=2k\Delta\theta=2k(2\gamma-\frac{\pi}{2})$。在$OD$边上从$\alpha$、$\beta$线的方向可知$OD$的法向是最小主应力的方向，从而$-p=\sigma_n=\sigma_D-k=-2k(2\gamma+1-\frac{\pi}{2})$。由此可知单边受压的钝角楔的塑性极限载荷为

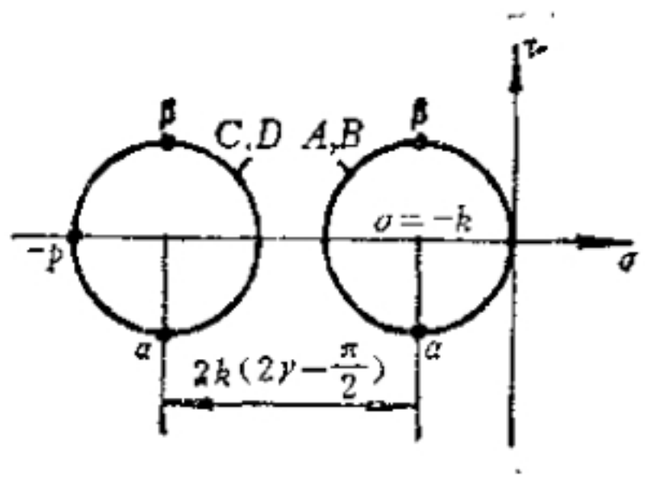


图 7-21

$$p_s=2k(2\gamma+1-\frac{\pi}{2}).\qquad(7\text{-}34)$$

当在OD边上给定法向速度分布时，根据滑移线场亦可确定区域$OABCD$内的速度场，且在刚塑性边界$ABCD$上法向速度为零。请参见[7.1]，或参照下节（§7.7）作出。

根据上述滑移线场求得了区域$OABCD$中的应力分布和速度分布，它们是否构成一个完全解（其概念见§7.2）了呢？这还需

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

要校核刚性区条件后才能回答。具体到本问题，需要在刚性区(楔形体在 $OABCD$ 以外的部分)内寻找一组应力分布，它们满足平衡方程、不违背屈服条件、在边界 $ABCD$ 上与塑性区的应力值连续、在无穷远处各应力分量都趋于零。寻找这样一组应力分布通常是十分困难的事情。Shield 在文献[7.3]中证明了，对于 $2\gamma \geq \frac{3}{4}\pi$ 的楔，刚性区条件能得到满足，因而已求得的滑移线场解是完全解；对于 $2\gamma < \frac{3}{4}\pi$ 的楔，刚性区条件未能满足，因而由(7-34)式求出的 p_s 只是极限载荷的一个上限。

对于 $2\gamma < \frac{\pi}{2}$ 的锐角楔，作不出图 7-20 形式的分区塑性应力场。。这时由 OA 和 OD 两边作出的均匀应力场要发生重叠，其结果是在楔的角平分线上形成应力间断线，如图 7-22 所示。楔体的左半部和右半部将被分成逐步缩小的三角形的无限序列。在间断线 OO' 上，法向应力 σ_n (按图 7-22 的坐标取法，也就是 σ_x)应连续，而切向正应力 σ_t(按图 7-22 的坐标取法，也就是 σ_y) 发生间断。参照图 7-9 及图 7-14，现在有

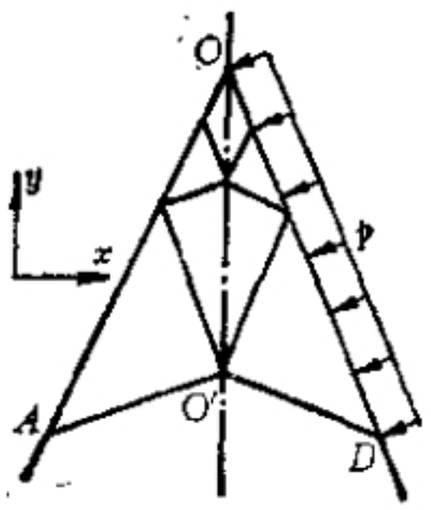


图 7-22

$$\omega = \theta^+ = \frac{\pi}{4} + \gamma = -\theta^-,$$

其中 θ^+ 与 θ^- 分别表示右半部和左半部 α 线的 θ 角。于是，借助于图 7-9(b) 可求得平均应力的间断量为

$$[\sigma] = 2k\sin 2\omega = 2k\cos 2\gamma.$$

在右半部，$\sigma_t = \sigma_n = -p$，故 $\sigma^+ = -p + k$，在左半部，$\sigma_t = \sigma_n = 0$，故 $\sigma^- = 0 - k = -k$。于是，$[\sigma] = \sigma^+ - \sigma^- = -p + 2k$。与上面的 $[\sigma]$ 表达式相比较，得出极限载荷为

$$p_s = 2k(1 - \cos 2\gamma). \qquad (7\text{-}35)$$

此式仅当 $2\gamma < \frac{\pi}{2}$(即锐角楔情形)适用。当 $2\gamma = \frac{\pi}{2}$(直角楔)时，(7-34)与(7-35)式都给出 $p_s = 2k$。

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

锐角楔单边受压时的速度场的计算，请参看[7.4]，也可以参照下节（§7.7）介绍的速度矢端图方法来进行。

§7.7 半平面上的刚性压模

今讨论图7-23所示的宽为$2b$的刚性平头压模以速度V压入半平面（半无限刚塑性体）在极限状态下的塑性流动问题。若不考虑压模与刚塑性体之间的摩擦作用，并设压模的压力p沿$2b$的宽度均匀分布，则显然这相当于一个$2\gamma=\pi$的钝角楔单边受压的问题。利用§7.6的结果，但注意到介质可以向压模的两侧运动，Prandtl(1920)提出了图7-23(a)所示的滑移线场，且相应的极限载荷为

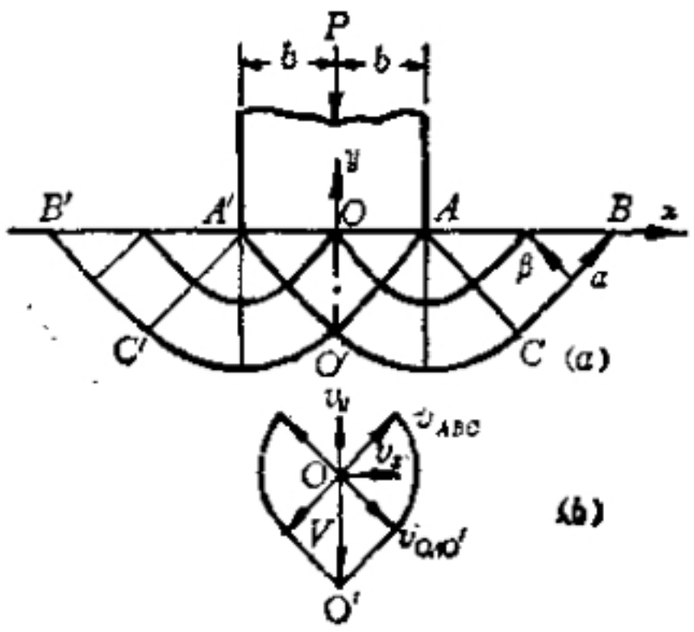


图 7-23

$$p_s=2k\left(1+\frac{\pi}{2}\right), \tag{7-36}$$

作用在压模上的总压力则为

$$P_s=2bp_s=2bk(2+\pi), \tag{7-37}$$

现在来看速度场。压模具有向下的速度V。在AA'边上质点要向左右两边运动，故$v_\alpha=v_\beta=V/\sqrt{2}$。图7-23(b)是这个问题的速度图。由之求得区域ACB的速度是$v_\alpha=V/\sqrt{2}$，$v_\beta=0$。这时AB段速度的向上分量是$V/2$。从材料的不可压缩性也很容易证实这个结论的正确性。因为当AA'段向下移动时，AB和$A'B'$两段同时向上运动，而从几何关系，$\overline{AB}+\overline{A'B'}=2\overline{AA'}$于是从质量守恒可知$AB$段向上的速度应恰为$AA'$段向下速度的一半。

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

在§7.6中曾经说过，对于$2\gamma \geqslant \frac{3}{4}\pi$的钝角楔单边受压的问题，经校核刚性区条件也完全满足。因此，上述 Prandtl 解，就是一个完全解。

但是，对半平面上的刚性压模的问题，还可以作出另一滑移线场，如图 7-24(a) 所示。这是Hill (1949) 首先提出的，故称为 Hill 解。Hill 解的塑性区比 Prandtl 解要小，但可以看出其极限压力和在塑性区内的应力与 Prandtl 解都是一样的，这只要注意到(7-36)式决定的 p_s 与压模宽度$2b$无关就行了。值得注意的是，Hill解的速度图(图 7-24(b))与Prandtl解的速度图是不同的。对于 Hill 解，OA 边上 $v_s = \sqrt{2}V$，因而区域 ACB 的速度场是 $v_s = \sqrt{2}V$，$v_y = 0$，从而 AB 段速度的向上分量是 V。从材料的不可压缩性和$\overline{AB} + \overline{A'B'} = \overline{AA'}$，也能直接证明这一点。

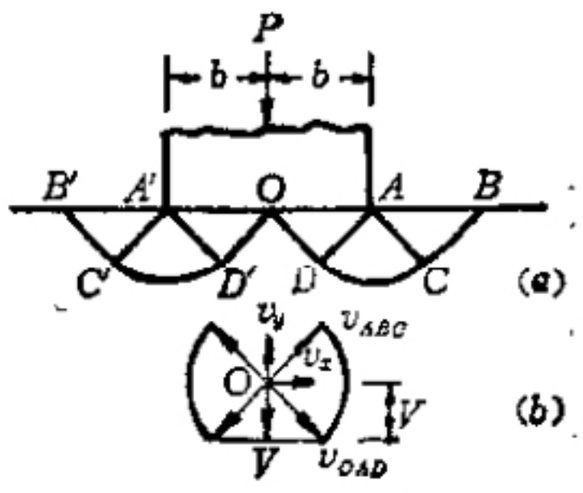


图 7-24

从这个例子中我们看到，对同一问题可以有滑移场范围不同的两个完全解，在两者都是塑性区的地方应力分布是相同的，对应的塑性极限载荷也相同，但速度场有差别。事实上，还可以由 Prandtl 解和 Hill 解组合得到第三种解，这是由 Prager 和 Hodge [7.5] 得出的。如图 7-25 所示，区域 $DEFG$ 中的应力和速度与 Hill 解相同；区域 $ODEFG$ $BCHO'$ 中的应力和速度则与 Prandtl 解一致。因此，$DEFG$ 和 DO' 是速度场的间断线，而 $O'HCB$ 则为刚塑性边界。

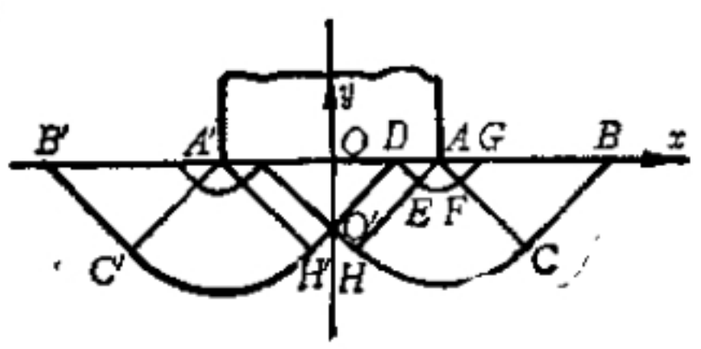


图 7-25

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

关于这些解中何者为正确的问题，Hill [7.6]提出了以下看来是合理的说法。由弹性力学知，由于应力集中在 A、A' 两点可能产生很大应力而首先发生屈服，塑性区域是在 A、A' 开始形成然后扩展而合并的。因此，在上述三种解中相比较，塑性区应先达到 Hill 解所给出的塑性流动场所需的大小。于是，看来 Hill 解给出了正确的速度场。

还应注意到这三种解的另一差别。Prandtl 解压模正下方的材料速度是铅直向下的，即图 7 23 中的区域 AOA' 随同压模一起向下运动，它与压模之间没有相对运动，因而相应于粗糙压模的情形。而 Hill 解压模下方的材料速度有水平分量，介质与压模表面发生相对滑移，因而相应于光滑压模的情形。至于 Prager 和 Hodge 给出的第三种解，可以解释为压模表面部分粗糙部分光滑。

综上所述，不论压模表面是光滑还是粗糙，使半无限刚塑性介质发生初始塑性流动的极限压力是一样的，总是 $p_s = 2k(1 + \frac{\pi}{2})$。如果压模表面光滑，Hill 解给出的塑性流动区较小，速度分布较接近真实；如果压模表面粗糙，可期望塑性流动区较大，Prandtl 解更接近真实。

将以上刚塑性分析结果与实验比较时，发现如果被压的塑性层很厚，则必须考虑它的弹性变形，这时压模两侧的材料并不向上运动(挤出)，压模向下的运动被底层中的弹性变形所吸收。实验表明，当被压材料厚度大于 $1.5 \times 2b$ 时，$p_s/2k \simeq 2.75 \left(> 1 + \frac{\pi}{2}\right)$。反之，当底层材料较薄，压模两侧的材料向上挤出，结果接近于上述刚塑性滑移线场解。但是，弹塑性分析表明，滑移线场解中的刚塑性边界并不代表真实的弹塑性边界，刚塑性解中的刚性区还包含一部分约束塑性变形区(见图 7-26)，这里虽

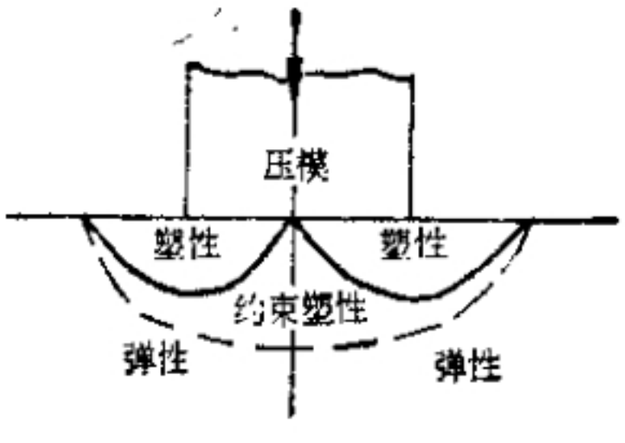


图 7-26

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

也有塑性变形，但在介质发生初始流动时，其塑性变形比较小，可以与弹性区的弹性变形同时被略去。

§7.8 圆孔周围的轴对称滑移场

设半径为 a 的圆孔内作用有均布压力 p（图 7-27），求圆孔周围区域发生塑性流动时的滑移线场。这个问题在压力容器等工程问题中有应用。

取极坐标 (r, φ)，根据问题的轴对称性，径向 r 和周向 φ 必是主方向。因此，滑移线必是这样两族曲线，其中任一曲线上各点与该点的径向射线夹角恒为 45°。设以 $r = f(\varphi)$ 表示滑移线的极坐标方程，则有

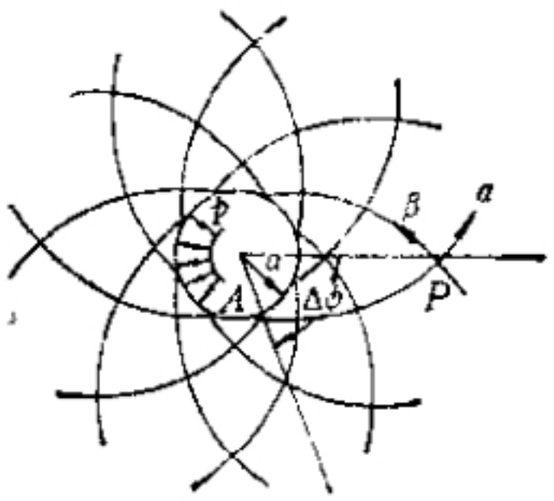


图 7-27

$$\frac{r d\varphi}{dr} = \pm \tan\frac{\pi}{4} = \pm 1.$$

积分得 $\varphi = \varphi_0 \pm \ln\frac{r}{a}$，其中 φ_0 是在 $r = a$ 处的 φ 角。由此可知，圆孔周围的滑移线是两族对数螺线

$$\left.\begin{aligned} \varphi - \ln\frac{r}{a} &= \alpha, \\ \varphi + \ln\frac{r}{a} &= \beta. \end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}38)$$

这里 α 和 β 表示两族螺线的参数，在同一螺线上 α 或 β 的数值为一常数。不难证明，上述两族螺线是相互正交的，构造出的滑移线场是轴对称的。

以 σ_r、σ_φ 代表场内任一点的径向应力和周向应力。现在来求场内的应力分布。先看孔边任一点 A，从边条件知 $\sigma_r = \sigma_n = -p$ 及 $\tau_n = 0$，因 σ_φ 是拉应力，故 $\sigma_\varphi > \sigma_r = \sigma_2$，进而 $\sigma_A = \sigma_r + k = -p + k$。从 A 点出发沿一条 α 线求其上任一点 P 的应力如下：

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

$$\Delta\sigma = 2k\Delta\theta = 2k\Delta(\varphi \pm 45^\circ) = 2k\Delta\varphi = 2k\Delta(\ln\frac{r}{a}),$$

因此

$$\sigma_r = \sigma_A + 2k\ln\frac{r}{a} = -p + k + 2k\ln\frac{r}{a}.$$

在 P 点 $\sigma_P = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\varphi)$ 而 $\sigma_\varphi - \sigma_r = 2k$，于是得

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \sigma_P - k = -p + 2k\ln\frac{r}{a},\\ \sigma_\varphi &= \sigma_P + k = -p + 2k\left(1 + \ln\frac{r}{a}\right).\end{aligned}\right\} \tag{7-39}$$

此式给出了距中心为 r 的任一点的应力，它同平面应变条件下厚壁筒塑性区内的应力分布规律是一致的。若受内压作用的圆筒外径为 b，该处 $\sigma_r = 0$，则由(7-39)式得出极限载荷为

$$p_s = 2k\ln\frac{b}{a} = \sigma_s\ln\frac{b}{a},$$

同前面§6.6中的(6-136)式完全相同。

§7.9 切口试件的拉伸

在断裂力学试验中，常用到中心切口试件和双边切口试件，现讨论它们的极限载荷。对这类问题，假定试件具有规则整齐的理想切口，并假定试件足够长，因而加载端的具体条件不影响切口附近的塑性流动。

一、中心切口试件

如图 7-28 所示，宽为 $2b$ 的板状拉伸试件上开有宽为 $2a$ 的无限狭窄的中心切口，其滑移线场是由切口两端出发各有一个均匀应力场。取 x 轴方向与切口方向一致，则在试件边界上

$$\psi = 0, \quad \sigma_n = \sigma_x = 0, \quad \tau_n = \tau_{xy} = 0,$$

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

因此在均匀应力场内

$$\theta = \pm\frac{\pi}{4},\ \sigma = \pm k, \sigma_y = \sigma_1 = 2k。$$

由此求得受拉伸时的极限载荷为

$$P_s = \sigma_s(2b-2a)t = 2k(2b-2a)t, \qquad (7\text{-}40)$$

其中 t 为试件的厚度。注意 $(2b-2a)t$ 正是具有中心切口的横截面的净面积。

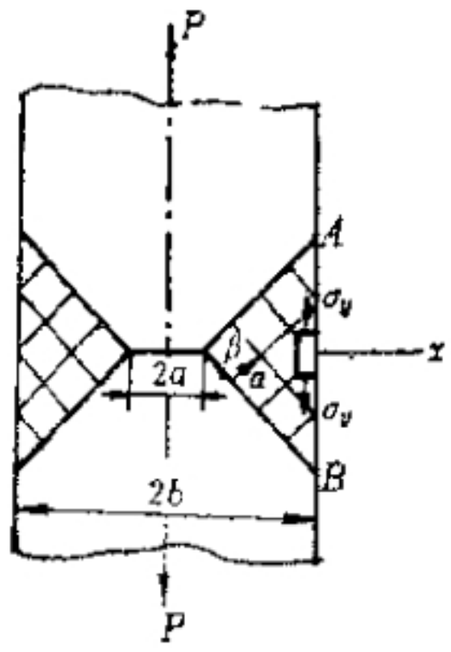


图 7-28

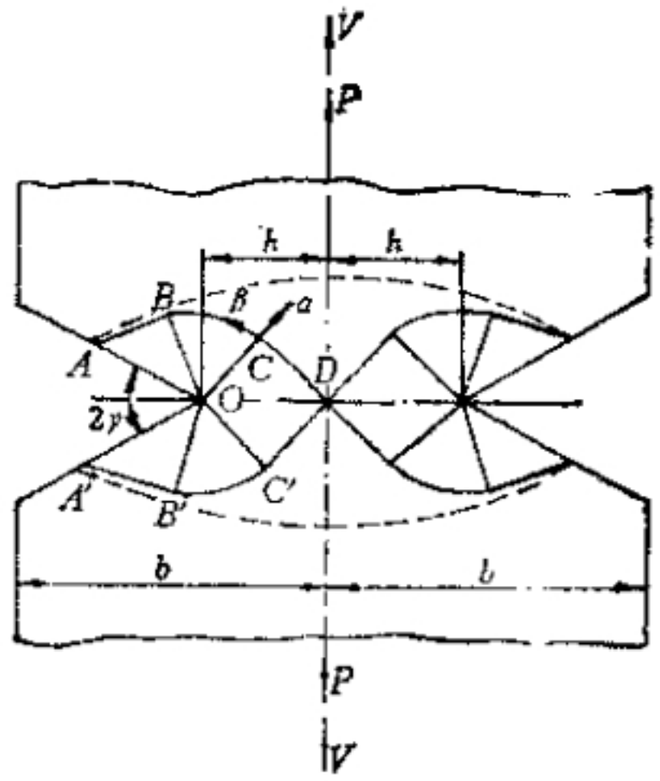


图 7-29

二、切口根部半径为零的双边深切口试件

考虑图 7-29 所示的双边深切口试件，切口的张角为 2γ，切口根部的曲率半径为零，试件在轴向受到拉力 P。

从弹性解来看，塑性区应首先在切口根部形成，然后逐渐向内扩张。两侧的塑性区在试件的中心线处汇合时，就达到塑性流动状态，即极限状态。如果切口很深，利用问题的对称性，取试件的四分之一来看，就同钝角楔单边受载问题相似，只要把压力改为拉力就行了。令 $2\gamma' = \angle AOD = \pi - \gamma$，则求得极限载荷为

$$P_s = 2h\cdot 2k\left(1+2\gamma'-\frac{\pi}{2}\right)t = 2h\cdot 2k\left(1+\frac{\pi}{2}-\gamma\right)t, \qquad (7\text{-}41)$$

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

此处要求 $\gamma<\frac{\pi}{2}$，故在 OD 线上

$$\sigma_y=2k(1+\frac{\pi}{2}\cdot\gamma)>2k\ . \qquad (7\text{-}42)$$

这说明由于深切口的存在，中间部分的材料可以承受高于 $2k=\sigma_s$ 的应力。事实上，这时中间部分的材料处于复杂应力状态，而不是在简单拉伸试件中的那种单向应力状态。上述分析也说明，在理想塑性的情形，只要在原构件的自由边界上增加材料，极限载荷就会增加，或至少不降低。进一步的讨论参见 § 8.3。

对于拉伸试件两侧对称地开有理想窄缝的问题，相当于 $\gamma\to 0$ 的情形。这时有

$$\sigma_y=2k(1+\frac{\pi}{2}),$$

及

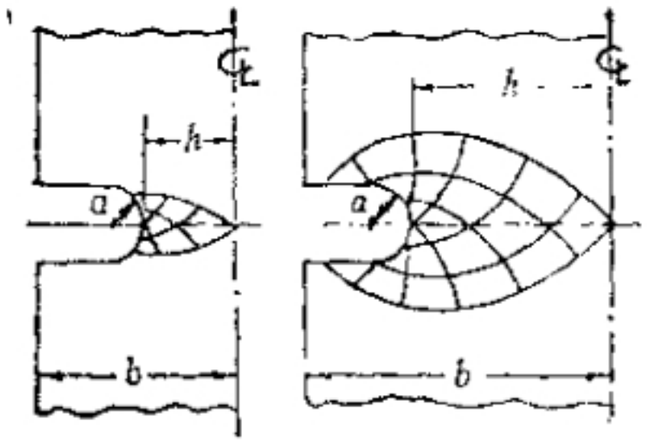
$$P_s=2h\cdot 2k(1+\frac{\pi}{2})t. \qquad (7\text{-}43)$$

从(7-41)式算出的 P_s 与 b 无关，那么板宽 $2b$ 对试件的极限承载能力还起不起作用呢？首先应该看到，至少要 $2b\geqslant 2h(1+\cos\gamma)$，才能构造出图 7-29 那样的滑移线场。其次，即使这样的场能构造出来，刚性区条件也还有待校核，所以 (7-41) 式只给出了 P_s 的一个上限。当 $b/h>1+\cos\gamma$ 时，仍然存在各种与试件侧边相牵连的滑移线场。文献[7.7]的研究指出，对于 $\gamma=0$ 的情形，只有当 $b/h>8.62$ 时，图 7-29 的滑移线场才提供最低的 P_s；否则，试件侧边都将对滑移线场产生影响。当然，当 b/h 超过 8.62 后，继续增加 b 是不能提高 P_s 的。

三、切口根部具有圆角的双边切口试件

当试件的切口根部具有半径为 a 的圆角时，其滑移线场如图 7-30 所示，其中 (a) 为 $h/a\leqslant 3.81$ 的情形，(b) 为 $h/a>3.81$ 的情形。在圆弧附近，滑移线的几何特性可参照 § 7.8得到。考察图7 31 中的螺线 QP，利用(7-38)的第二式得：

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。



(a) (b)

图 7-30

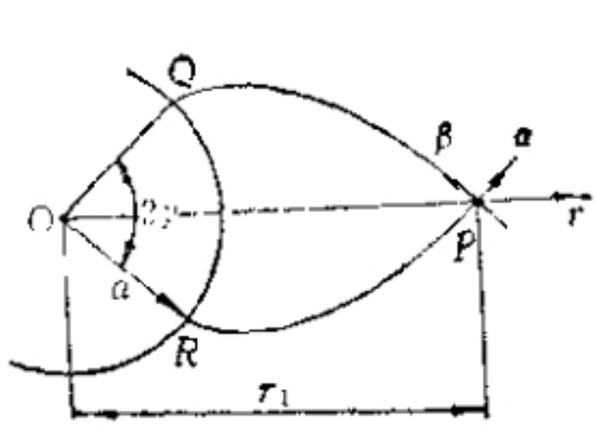


图 7-31

$$\gamma = \ln\frac{r_1}{a}$$

或

$$r_1 = ae^{\gamma} \tag{7-44}$$

因此，对于通过O点的水平线上的任一点 P，铅垂方向的正应力便可按照(7-39)的第二式求出为：

$$\sigma_y = \sigma_\theta = 2k(1 + \ln\frac{r_1}{a}) = 2k(1 + \gamma)。 \tag{7-45}$$

这里已取圆孔内压 $p = 0$。由此求出极限载荷

$$P_s = 2t\int_h^{a+h}\sigma_y dr_1 = 4kat\int_0^{\gamma_1}(1+\gamma)e^{\gamma}d\gamma$$

$$= 4kat\gamma_1 e^{\gamma_1} = 4kat(1 + \frac{h}{a})\ln(1 + \frac{h}{a}),$$

或即

$$P_s/2k \cdot 2h \cdot t = (1 + \frac{a}{h})\ln(1 + \frac{h}{a})。 \tag{7-46}$$

以上是 $h/a \leqslant 3.81$ 的结果。若 $h/a > 3.81$，滑移线场除包含对数螺线外，还有直线段和圆弧段。读者可以自己证明这时有

$$P_s/2k \cdot 2h \cdot t \approx 1 + \frac{\pi}{2} - \frac{a}{h}(e^{\pi/2} - 1 - \frac{\pi}{2})。 \tag{7-47}$$

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

因而，当其他条件相同时，切口根部的圆弧半径 a 越大，试件的极限载荷就越低。而当 $a \to 0$ 时，(7-47)式就与(7-43)式相一致。

§7.10 定常塑性流动问题

§7.6至§7.9所举的例子都是求物体的极限承载能力，或者叫做初始塑性流动问题，所求的速度分布是指开始发生塑性变形那一瞬时的流动趋势，因此是小变形问题。而在金属成形(压力加工)中常会遇到另一类型的问题，如金属的抽拉(drawing)、挤压(extrusion)、辊轧(rolling)、切削(cutting)等等。这时，对于材料中的一个微元来说，要经历尺寸和形状的变化，其过程是相当复杂的；但对流动区域中某一固定点来说，材料通过该点时的速度和应力状态都不随时间而变化，因而运动是定常的。这样，在采用Enler坐标后，仍可应用前述分析方法。下面以板条的抽拉为例来加以说明。

一、板条抽拉问题的滑移线场

如图7-32所示，厚度为H的板料通过光滑的锥形刚性模，被抽拉成厚度为h的板条。设抽拉力为P，抽拉速度为v。如果锥模倾角γ同抽拉前后的厚度比h/H之间满足一定的关系，滑移线场将由均匀应力区ACB和中心扇形区CBO所组成。从几何关系求出

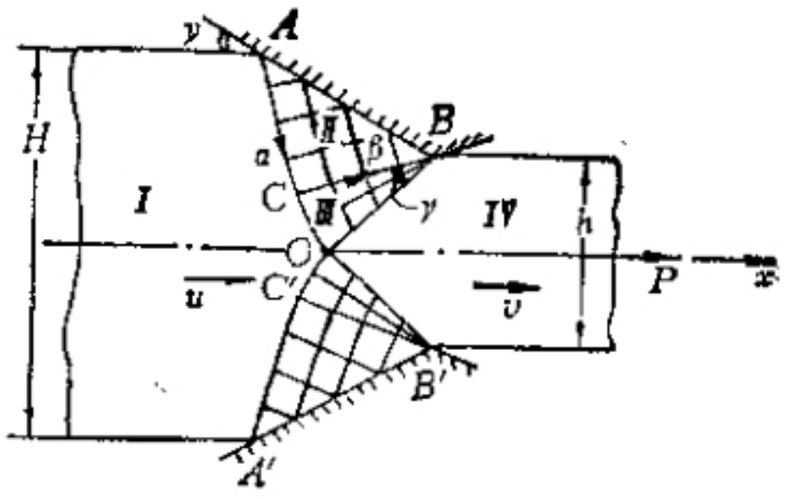


图 7-32

$$\overline{AB} = \sqrt{2}\,\overline{BC} = \sqrt{2}\,\overline{BO} = h$$

及

$$2\overline{AB}\sin\gamma = H - h.$$

因此得

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

$$h/H = 1/(1+2\sin\gamma)\,. \tag{7-48}$$

这正是图 7-32 滑移线场能够成立的几何条件。

由于板条轴线是对称线，上面没有剪应力，故轴线方向必为主应力方向，滑移线 OB 与之交成 45° 角。在 AB 边上正应力是压应力，$\sigma_n<0$，故 $\sigma_n=\sigma_2$。由此可定出 ACO 是 α 线，CB 和 OB 则是 β 线。

二、应力分布与抽拉力

在均匀应力区 ABC 中，假定 AB 边上压力 p 均匀分布，则 $\sigma_n=\sigma_2=-p$，于是 $\sigma_c=-p+k$，$\theta_c=-(\frac{\pi}{4}+\gamma)$。

在中心扇形区 CBO 中，σ 和 θ 仅沿 α 线发生变化，且满足 $\Delta\sigma=2k\Delta\theta$。因为 $\Delta\theta=\theta_o-\theta_c=\gamma$，所以有 $\sigma_o=\sigma_c+2k\Delta\theta=-p+k+2k\gamma$，这是 OB 线上任一点的平均应力值。

为求抽拉力，考虑板条上 BOB' 以右部分的总体平衡（图 7-33(a)），得

$$\begin{aligned} P &= (\sigma_o+k)h \\ &= [-p+2k(1+\gamma)]h. \end{aligned} \tag{7-49}$$

再考虑整个板条的总体平衡（图 7-33(b)），得

$$\begin{aligned} P &= 2p\cdot\overline{AB}\cdot\sin\gamma \\ &= p(H-h)\,. \end{aligned} \tag{7-50}$$

在(7-49)和(7-50)中消去 P，再利用(7-48)式，可得

$$\begin{aligned} p/2k &= (1+\gamma)h/H \\ &= (1+\gamma)/(1+2\sin\gamma)\,. \end{aligned} \tag{7-51}$$

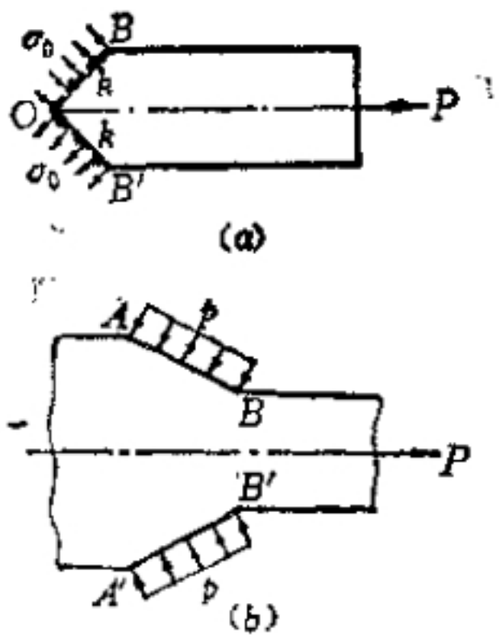


图 7-33

代回(7-49)式得到抽拉力 P 的计算公式

$$P/2kh = (1+\gamma)\left(1-\frac{h}{H}\right) = 2(1+\gamma)\sin\gamma/(1+2\sin\gamma)\,. \tag{7-52}$$

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

三、速度分布

与物理平面上的图 7-32 相对应，图 7-34 给出了速度矢端图。$v_{\mathrm{I}}=u$，v_{II} 和 $v_{\mathrm{IV}}=v$ 分别代表物理平面上区域 I、II 和 IV 的速度向量。$v_{\mathrm{I}}=u$ 与 v_{II} 的向量差代表沿 AC 线的速度间断量。在 AC 上，法向速度应连续，而切向速度的间断值为

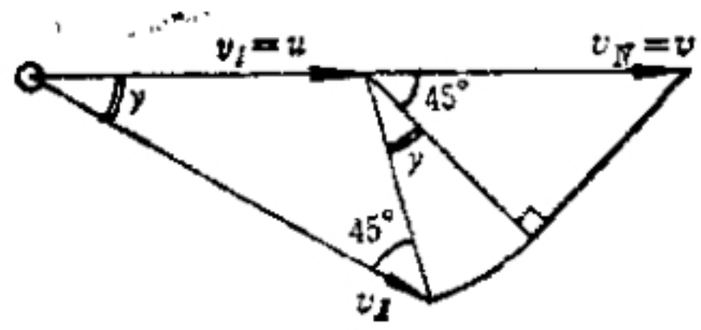


图 7-34

$$[v]_{AC}=\sqrt{2}u\sin\gamma;$$

进而由速度图的几何关系易证明

$$v-u=\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}u\sin\gamma)=2u\sin\gamma,$$

于是

$$v=(1+2\sin\gamma)u=\frac{H}{h}u. \qquad (7\text{-}53)$$

最后一步用到了(7-48)式。(7-53)式也可写成 $hv=Hu$，这正反映了材料的不可压缩性。

由上可见，速度矢端图是显示物理平面上的速度分布的有力工具。还可以看出在本问题中，速度间断引起的滑动方向与剪应力方向是一致的，符合塑性功率大于零的要求。

四、刚性区的校核

在 AOA' 以左的部分所受的合力为零，这里不会违反屈服条件。在 BOB' 以右的部分应力是均匀的，要求 $P<2kh$ 才能不违反屈服条件。根据抽拉力公式(7-52)，就要

$$2(1+\gamma)\sin\gamma<1+2\sin\gamma,$$

或即

$$\gamma\sin\gamma<\frac{1}{2}.$$

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

解此不等式得

$$\gamma < \gamma_1 = 42°27'. \tag{7-54}$$

对于 $\gamma \geq \gamma_1$ 的情形，在 BOB' 以右的部分将首先被拉伸破坏（例如发生颈缩），无法实现连续的抽拉过程。

五、板条抽拉的其他情形

对于几何参数不符合(7-48)，即 $h/H \leqslant 1/(1+2\sin\gamma)$ 的情形，其滑移线场将变得复杂。如图 7-35 所示，除均匀应力场 ABC 和简单应力场 ACD 和 BCE 之外，还出现复杂应力场曲边四边形 $CDOE$。在求解这样的问题时，滑移线场可用数值积分法绘制，应力场和速度场可用Hencky定理计算。

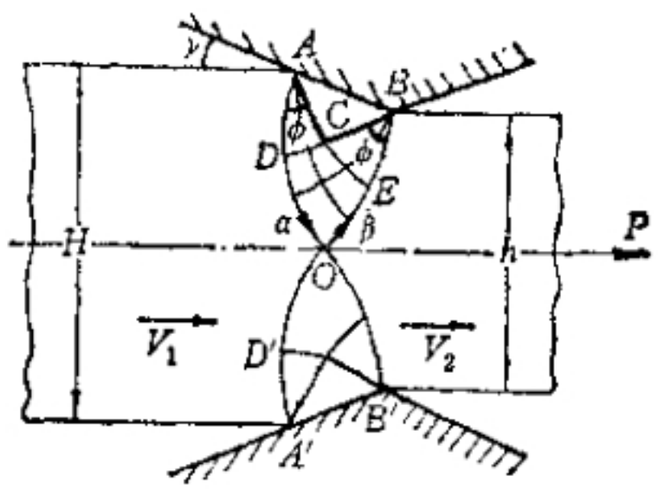


图 7-35

此外，也有人求解了模具表面粗糙的情形。

本节所介绍的方法也广泛地应用于正向挤压、反向挤压，侧向挤压和其他定常塑性流动问题，请读者通过习题进行练习。在 Johnson 等人的专著 [7.8] 中，收集了有关滑移线场理论和应用的书籍、文献目录共 545 种，其中大部分都与金属成形加工有关，可供查考。

§7.11 拟定常塑性流动问题

在工程实际中，还会遇到另一类大变形问题。在这类问题中，滑移线场虽然不象定常塑性流动问题中那样固定不变，但它在变化时只改变大小不改变形状，即始终与某一初始状态保持几何相似。这可称之为拟定常塑性流动问题。下面以刚性楔对半平面的楔入为例来加以说明。

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

图7-36显示了一个顶角为 2γ 的对称刚性楔正在切入半无限的刚塑性介质，假设沿着接触线不存在摩擦，且压力 p 均匀分布。当楔切入介质时，材料从两旁被挤出，形成凸起。参照钝角楔问题的Hill解(见§7.6)，可认为凸起部分的边界 AC 为直线，且滑移线场如图7-37。

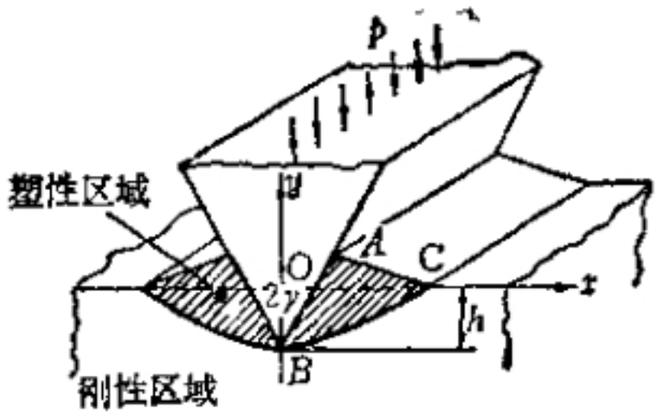


图 7-36

在此滑移线场中，三角形 ACE 和 ABD 为均匀应力区，其中的滑移线分别与边界 AC 和 AB 夹 $\pi/4$ 角。联系两均匀应力区的是具有展开角 φ 的中心扇形场。因为 $\triangle ACE$ 与 $\triangle ABD$ 全等，所以 $\overline{AB}=\overline{AC}=l$。在现在的问题中，楔入深度 h 已知，而压力 P 和长度 l 均未知。

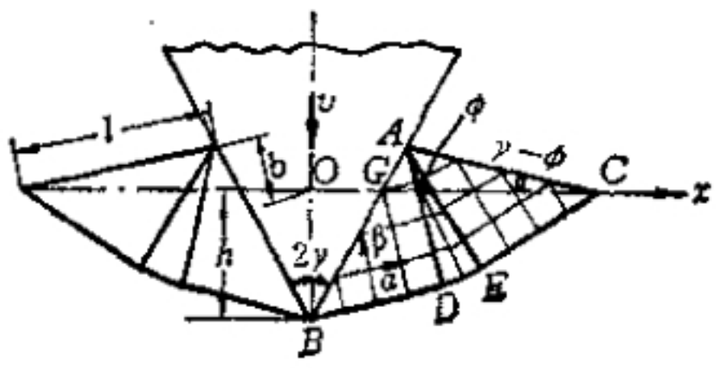


图 7-37

在区域 ACE 中，$\theta=\frac{\pi}{4}-\gamma+\varphi$，$\sigma_E=-k$。

在区域 ABD 中，$\theta=\frac{\pi}{4}-\gamma$，$\sigma_D=\sigma_E+2k\Delta\theta=-k+2k(-\varphi)$ $=-k(1+2\varphi)$。设 AB 边上的均布压力为 p，则

$$-p=\sigma_n=\sigma_D-k=-2k(1+\varphi)。$$

由此求出楔切入时需要的合力为

$$P=2p\cdot l\sin\gamma=4kl(1+\varphi)\sin\gamma。\qquad(7\text{-}55)$$

此式中，楔角 γ 是给定的，但 l 和 φ 要从几何关系中寻找。从几何关系有

$$l\cos\gamma-h=l\sin(\gamma-\varphi)；\qquad(7\text{-}56)$$

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

又从材料的不可压缩性，$\triangle OBG$ 与 $\triangle AGC$ 应该面积相等，得出

$$h^2\tan\gamma = (l\cos\gamma - h)[l\cos(\gamma - \varphi) + (l\cos\gamma - h)\tan\gamma]. \tag{7-57}$$

从(7-56)和(7-57)二式中消去 l/h 并加以简化，就得到确定 φ 的超越方程

$$\varphi + \cos^{-1}\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}) = 2\gamma. \tag{7-58}$$

由给定的 γ 求出 φ 后代入(7-56)式，就得到了 l/h，再代入(7-55)就可计算出 P 来。

关于刚性楔切入半平面问题的速度场、质点的运动轨线以及网格畸变等等，在文献 [7.5] 中有详细的讨论，有兴趣的读者可以参阅。

参 考 文 献

[7.1]王仁、熊祝华、黄文彬 《塑性力学基础》，科学出版社 1982

[7.2]北川浩，《塑性力学基础》，刘文斌、张宏译、王仁校，高等教育出版社，1986

[7.3]Shield. R. T., Plastic potential theory and Prandtl bearing capacity solution, *J. Appl. Mech.*, 21, 193-194, 1954

[7.4]Geiringer. H., Some recent results in the theory of an ideal plastic body, *Advances in Applied Mechanics*, Vol. Ⅰ, 197—249, 1953

[7.5]Prager. W. and Hodge. P. G., *Theory of Perfectly. Plastic Solids*, John Wiley, 1951. 中译本：W. 普拉格、P. G. 霍奇，《理想塑性固体理论》，陈森译，科学出版社，1964

[7.6]Hill. R. The plastic yielding of notched bars under tension *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 2, 40—52, 1949

[7.7]Ewing, D. J. F. and Hill, R. The plastic cohstraint of V-notched tension bars, *J. Mech, Phys, Solids*, 15, 115-124, 1967.

[7.8]Johnson. W., Sowerby. R. and Venter. R. D. *Plane Strain*

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

习　题

7.1　在理想刚塑性平面应变问题中，如果采用 Tresca 屈服条件，证明当 $\frac{2}{3}k \geqslant sz \geqslant -\frac{2}{3}k$ 时，平面应变的条件仍然成立。

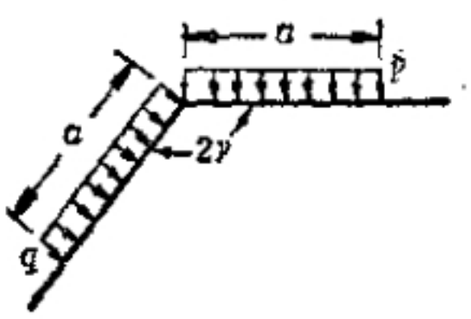
7.2　证明：

i）在塑性区中与均匀应力场相紧接的区域是简单应力场，常见的是中心扇形区；

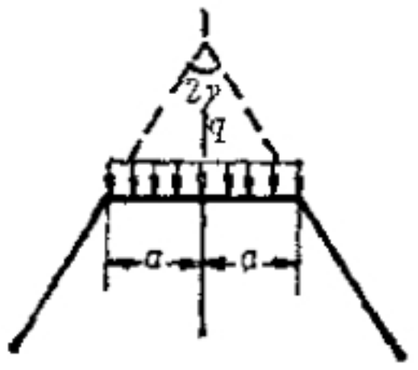
ii）中心扇形区中同一根径向线上各点的 $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma$。

7.3　图示的楔体，两侧在长为 a 的线段上分别承受均匀压力 p 和 q，已知 $2\gamma = \frac{3\pi}{4}$，分别就 $q = \frac{1}{2}p$ 及 $q = p$ 两种情形，求极限载荷 p_u。

7.4　对称楔块顶部被削平的面积上受有均匀压力 q，如附图所示，试求极限载荷 q_u。



题7.3附图

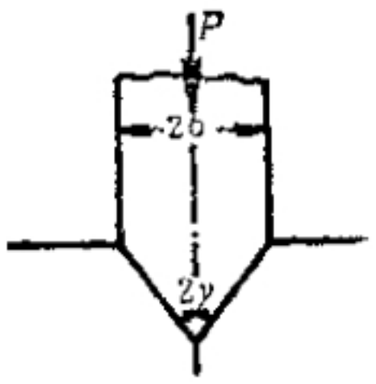


题7.5附图

7.5　具有尖角为 2γ 的楔体，在外力 P 的作用下插入具有相同角度的 V 形缺口内，如附图所示，试分别按以下两种情况画出滑移线场并求出极限载荷：

i）楔体与 V 形缺口间完全光滑；

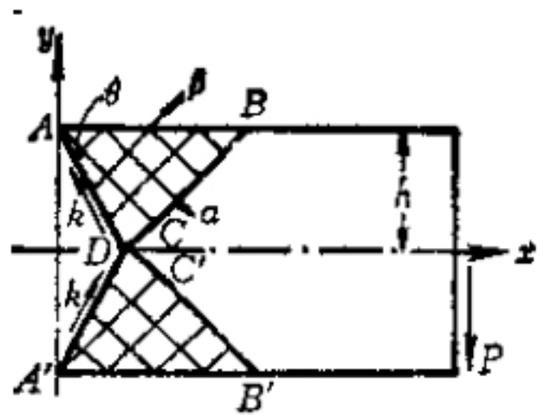
ii）楔体与 V 形缺口接触处因摩擦作用其剪应力为 k。



题7.5附图

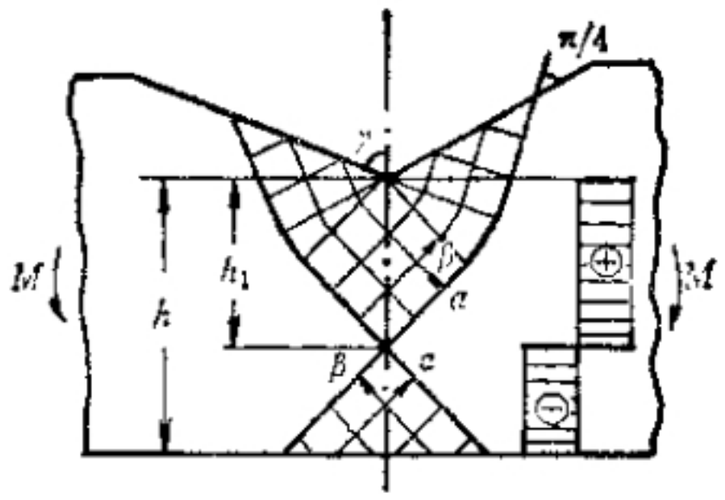
由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

7.6 设有短悬臂梁，长为 l，高为 $2h$，宽为 b，其滑移线场如附图所示，试求极限载荷 P_u。



题7.6附图

7.7 具有对称角形深切口的厚板，其滑移线场构造如附图，求此时该板所能承受的弯矩。

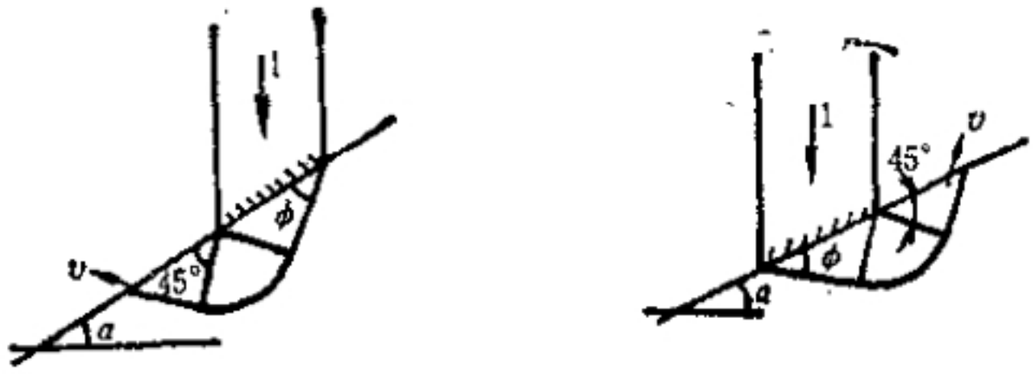


题7.7附图

7.8 对于图 7-30(b)中的圆形切口板条，若 $h/a>3.81$，画出滑移线场，并证明(7-47)式。

7.9 附图表示冲头倾斜压入半平面、接触面粗糙时的两种可能的滑移线场，试画出各自相应的速度矢端图。

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估.



题7.9附图

7.10 通过矩形模正挤板料，板的厚度由原来的 $2h$ 变为 h，在刚性砧上作用总的推力 P，速度为 V，滑移线场已作出如附图，其中 $\triangle ABC$ 是静止不动的刚性区（工程上称为死角）。

i）标出 α、β 线，求出应力分布和极限推力 P_s；

ii）求出速度分布并验证速度边条件.

iii）速度间断线与剪应力方向是否一致？

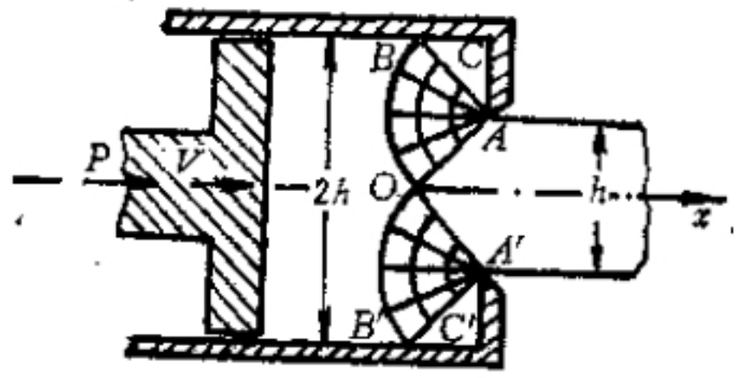


图7.10附图

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

第八章　极限分析原理

§8.1　极限状态和极限分析

在弹塑性问题中，由于应力全量和应变全量之间一般不存在单值对应关系，本构方程是非线性的、且一般只能写成增量之间的关系，因此，不但不能采用叠加原理，而且若只在边界上给定载荷和位移的最终值，仍然不能确定物体内的应力、应变和位移。只有在给定从自然状态开始的全部边界条件变化过程的情况下，才能跟踪给定的加载历史，确定物体内应力、应变和位移的相应变化过程，经过累计，计算出最终状态下的应力、应变和位移分布。

同时，从前面各章中的许多例子中我们看到，如果忽略材料的强化和物体由于变形而引起的几何尺寸的变化，则当外载达到某一定值时，理想塑性体可在外载不变的情况下发生塑性流动，即无限制的塑性变形。这时称物体或结构处于极限状态；所受的载荷称为物体或结构的极限承载能力，或极限载荷；与之相应的速度场称为塑性破损机构，或塑性流动机构。

对于理想弹塑性物体或结构，如果只要求它的极限承载能力，那就可以不必考虑加载历史而直接应用极限分析原理，也就是说，可以对问题直接求解而不必通过对微分方程进行积分来求解。为什么一般的弹塑性问题为了求得一定的"状态"必须追溯"历史"，而求解极限状态却可以完全不顾历史呢？这是因为对于理想塑性材料，屈服曲面是固定的，不因加载历史而改变，因而在载荷空间内的极限曲面（参看§2.5）也是固定不变的、与加载历史无关。事实上，极限状态不同于一般的弹塑性状态，它是一种十分特殊的状态，具有以下两个重要性质：

（1）在极限状态下，应变率的弹性部分恒为零，也就是说，塑性流动时的应变率是纯塑性应变率。

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

设极限状态下的应力率场为 $\dot{\sigma}_{ij}$，应变率场为 $\dot{\epsilon}_{ij}=\dot{\epsilon}^{e}_{ij}+\dot{\epsilon}^{p}_{ij}$，其中$\dot{\epsilon}^{e}_{ij}$和$\dot{\epsilon}^{p}_{ij}$分别表示应变率的弹性部分和塑性部分。利用虚功率原理并设S_u上$\dot{u}_i=0$，有

$$\int_V \dot{\sigma}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}\mathrm{d}V=\int_V \dot{F}_i\dot{u}_i\mathrm{d}V+\int_{S_\sigma}\dot{T}_i\dot{u}_i\mathrm{d}S. \qquad (8\text{-}1)$$

在极限状态下，面力T_i和体力F_i均不再增长，保持为常值，即$\dot{F}_i=0$，$\dot{T}_i=0$。于是

$$\int_V \dot{\sigma}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}\mathrm{d}V=0. \qquad (8\text{-}2)$$

考察V内任一点的状态，有以下几种情况：

i）若σ_{ij}位于屈服面之内，则该点不发生塑性流动，$\dot{\epsilon}^{p}_{ij}=0$；

ii）若σ_{ij}位于屈服面上，但处于卸载状态，则也有$\dot{\epsilon}^{p}_{ij}=0$；

iii）若σ_{ij}位于屈服面上且在其上移动（对理想塑性材料而言这就是加载，参见§5.3），则由流动法则之正交性有$\dot{\sigma}_{ij}\dot{\epsilon}^{p}_{ij}=0$。

总之，对理想塑性材料，$\dot{\sigma}_{ij}\dot{\epsilon}^{p}_{ij}=0$在$V$内处处成立。从而

$$\dot{\sigma}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}=\dot{\sigma}_{ij}(\dot{\epsilon}^{e}_{ij}+\dot{\epsilon}^{p}_{ij})=\dot{\sigma}_{ij}\dot{\epsilon}^{e}_{ij}=C_{ijkl}\dot{\sigma}_{ij}\dot{\sigma}_{kl}\geqslant 0. \qquad (8\text{-}3)$$

这里已用到弹性范围内的 Hooke 定律，即$\dot{\epsilon}^{e}_{ij}=C_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl}$。分析(8-3)式可知其等号仅当$\dot{\sigma}_{ij}=0$时成立。因此，对比(8-2)和(8-3)式可知要求$\dot{\sigma}_{ij}=0$，进而必然有$\dot{\epsilon}^{e}_{ij}\neq 0$。这说明在极限状态下$\dot{\epsilon}_{ij}=\dot{\epsilon}^{p}_{ij}$，即塑性流动机构是纯塑性的，不包含任何弹性部分。

这一性质表明，如果不关心达到极限状态前的弹性变形，只关心极限载荷和相应的流动机构，那么采用理想弹塑性模型和采用理想刚塑性模型所求出的极限状态将是完全一样的。这样，我们就有理由在极限分析时采用刚塑性模型、完全忽略掉弹性效应，或者说，可以在完全没有变形的初始构形上讨论极限状态。这样做，给极限分析带来了很大的方便与简化。回忆第六章中梁的弯曲和长柱体的扭转，它们的极限状态都与弹性效应的大小无关，这可以帮助我们理解现在这一论断。

（2）极限状态的唯一性，即：极限状态与加载历史无关，也与初始状态无关（事实上，初始状态总可以看成是经过某种加载历史而形成的状态）。

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

这里我们不去严格证明唯一性(有兴趣的读者可参看[8.1]或[8.2]),只指出极限状态的唯一性实际上包含以下两重意义:

i) 对某一物体或结构,当加载方式确定(即载荷的方向和分布规律已知)时,极值载荷的数值是唯一确定的,不因加载历史和初始状态而变。例如厚壁圆筒受均布内压,极限载荷必为 $p_u = \sigma_s \ln \frac{b}{a}$,此值不因 p 是从零单调增长或忽升忽降而变,也不因筒内原来有某种残余应力而变。

ii) 当极限载荷给定时,极限状态也唯一,这是指在一定条件下 σ_{ij} 的唯一性(不排除 σ_{ij} 在一个屈服平面上游动),也指 ϵ_{ij} 方向的唯一性(因为是塑性流动状态,ϵ_{ij} 的大小是不可能确定的,只是各分量之间的比值确定,也就是方向唯一)。

有了这种唯一性,我们可以只研究极限状态的应力场,而不必追究它形成的历史。与极限状态的应力场相平衡的外载就是极限载荷,所对应的速度场就是塑性破坏机构。换句话说,在极限状态下,所求的 $T_i, \sigma_{ij}, \epsilon_{ij}$ 间都有确定的相互关系。这种只寻求极限状态和极限载荷的分析方法就叫极限分析。

§8.2 虚功率原理

设 σ_{ij}° 是在区域 V 内任一满足平衡方程 $\sigma_{ij,j}^{\circ} + F_i = 0$ 及 S_T 上应力边条件 $\sigma_{ij}^{\circ} n_j = T_i^{\circ}$ 的应力场,又设 v_i^* 为在区域内任一满足 S_v 上速度边条件 $v_i^* = 0$ 的速度分布;则虚功率原理可以表示为

$$\int_V F_i v_i^* \mathrm{d}V + \int_{S_T} T_i^{\circ} v_i^* \mathrm{d}S = \int_V \sigma_{ij}^{\circ} \epsilon_{ij}^* \mathrm{d}V \qquad (8\text{-}4)$$

证:由 $\epsilon_{ij}^* = \frac{1}{2}(v_{i,j}^* + v_{j,i}^*)$ 及 $\sigma_{ij}^{\circ} = \sigma_{ji}^{\circ}$,有

$$\int_V \sigma_{ij}^{\circ} \epsilon_{ij}^* \mathrm{d}V = \int_V \sigma_{ij}^{\circ} v_{i,j}^* \mathrm{d}V.$$

利用分部积分,上式右端等于

$$\int_V (\sigma_{ij}^{\circ} \cdot v_i^*)_{,j} \mathrm{d}V - \int_V \sigma_{ij,j}^{\circ} v_i^* \mathrm{d}V;$$

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

再应用 Gauss 散度定理和平衡方程，得

$$\int_V \sigma_{ij}^{\circ}\, \varepsilon_{ij}^{*}\, \mathrm{d}V = \int_{S_T} T_i^{\circ}\, v_i^{*} \mathrm{d}S + \int_V F_i v_i^{*} \mathrm{d}V .$$

证毕。

不考虑体力时，虚功率原理为

$$\int_{S_T} T_i^{\circ}\, v_i^{*}\, \mathrm{d}S = \int_V \sigma_{ij}^{\circ}\, \varepsilon_{ij}^{*}\, \mathrm{d}V , \qquad (8\text{-}5)$$

这是最常用的形式。上式左端是外力的虚功，右端是内力的虚功。

不难看出，在推导(8-4)或(8-5)式时，要求被积函数在V内连续；而在极限分析中常会遇到应力场或速度场内有间断面的情形(在第六章和第七章已多次遇到这样的情形)，这时我们可以把物体沿间断面分开，使应力、速度等量在每部分是连续的并应用虚功率原理，但这样做增加了一些内部边界，因而有必要对虚功率原理加以适当的修正。下面就来讨论场内有间断面时的虚功率原理。

i）应力间断面：在梁的弯曲(§6.3)、长柱体的扭转(§6.5)中都曾遇到过。在一般情形，由于作用在间断面两侧的作用力与反作用力大小相等、方向相反，应有

$$\sigma_{ij}^{+} n_j = T_i^{+} = T_i^{-} = \sigma_{ij}^{-} n_j ,$$

其中上标$^{+}$和$^{-}$分别表示间断面两侧的量。从上式可知，沿间断面两侧的$\int_{S_T} T_i^{\circ}\, v_i^{*}\, \mathrm{d}S$项将相互抵消，不影响虚功率原理的表达式(8-4)或(8-5)。

ii）速度间断面：因为物体变形时不能出现裂缝或重叠，故法向速度应保持连续，但切向速度则可以间断。如果将间断面看成一个薄层，速度在层内急剧然而仍是连续地变化。由于薄层的宽度趋于零时，剪应变率将趋于∞，这说明速度间断面必是滑移面，沿其切向的应力必为τ_s，并将消耗塑性功率

$$\int_{S_D} \tau_s |[v_t]| \mathrm{d}S > 0$$

这里S_D表示速度间断面，$[v_t]$是切向速度间断量。于是，在有速度间断面S_D的情况下，虚功率原理(8-5)应修正为

$$\int_{S_T} T_i^{\circ} v_i^{*} \mathrm{d}S = \int_V \sigma_{ij}^{\circ}\, \varepsilon_{ij}^{*}\, \mathrm{d}V + \Sigma \int_{S_D} \tau^{\circ} |[v_t^{*}]| \mathrm{d}S , \qquad (8\text{-}6)$$

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

其中 Σ 表示对各个间断面求和，τ° 是应力场 σ_{ij}° 在 S_D 上的切向分量，且 $|\tau^\circ| \leqslant \tau_s$，$[v_i^*] = (v_i^*)^+ - (v_i^*)^-$ 是速度场 v_i^* 沿 S_D 的速度间断值。

§8.3 极限分析定理

一、机动场和静力场

为了建立极限分析定理，首先要引入机动场和静力场的概念。

运动许可速度场（简称机动场）v_i^* 的定义如下：

i）在 V 内满足连续条件，但可存在有限个切向速度间断面；

ii）在速度边界 S_v 上满足 $v_i^* = 0$；

iii）在应力边界 S_T 上满足 $\int_{S_T} T_i v_i^* \mathrm{d}S > 0$，这意味着外力 T_i 在机动场上作正功。

由机动场 v_i^* 可决定应变速率场 $\varepsilon_{ij}^* = \frac{1}{2}(v_{i,j}^* + v_{j,i}^*)$，然后由 ε_{ij}^* 的方向，可以在屈服面上找出对应的 σ_{ij}^*，但这个应力场是否满足平衡条件和应力边条件可以不顾。

静力许可应力场（简称静力场）σ_{ij}° 的定义如下：

i）在 V 内满足平衡方程 $\sigma_{ij,j}^\circ + F_i = 0$；

ii）在 V 内不违反屈服条件，即 $f(\sigma_{ij}^\circ) \leqslant 0$；

iii）在 S_T 上满足应力边条件 $\sigma_{ij}^\circ n_j = T_i^\circ = \eta^\circ \bar{T}_i$，其中 n_j 为物体表面外法线的方向余弦，T_i° 是与 σ_{ij}° 相平衡的面力，$\bar{T}_i$ 是 S_T 上给定的面力分布规律，比例因子 η° 则称为静力许可载荷因子。

由于极限载荷 T_i 本身是待求的，因此问题中的应力边条件只是给定的面力的分布规律。为便于比较，可设极限载荷为 $T_i = \eta \bar{T}_i$，式中 η 称为极限载荷因子。

在一般情况下，静力场 σ_{ij}° 是连续的，但也允许存在应力间断面。由应力场 σ_{ij}° 按本构方程可求得一个相应的应变率场 ε_{ij}°，但这个应变率场是否协调（即是否能从一个速度场导出）则可以不顾。

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

二、极限分析定理(界限定理)

(1) 下限定理。由任一静力许可应力场 σ_{ij}°，求得的静力许可载荷因子 η° 是极限载荷因子 η 的下限，即 $\eta^{\circ}\leqslant\eta$。

证　下面的证明中不考虑体力（如需要考虑体力则须与面力共同提出一个载荷因子）。对真实场用虚功率原理得：

$$\int_V \sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}\mathrm{d}V+\Sigma\int_{S_D}\tau_s|[v_i]|\mathrm{d}S=\int_{S_T}T_iv_i\mathrm{d}S=\eta\int_{S_T}\bar{T}_iv_i\mathrm{d}S, \tag{8-7}$$

这里所有的量都不带上标 $^{\circ}$ 或 *，表示是真实场中的量。再对静力场与真实速度场用虚功率原理得：

$$\int_V\sigma_{ij}^{\circ}\dot{\epsilon}_{ij}\mathrm{d}V+\Sigma\int_{S_D}|\tau^{\circ}|\cdot|[v_i]|\mathrm{d}S=\int_{S_T}T_i^{\circ}v_i\mathrm{d}S$$
$$=\eta^{\circ}\int_{S_T}\bar{T}_iv_i\mathrm{d}S, \tag{8-8}$$

其中带上标 $^{\circ}$ 的量表示是静力场中的量。

(8-7)式与(8-8)式相减得到

$$(\eta-\eta^{\circ})\int_{S_T}\bar{T}_iv_i\mathrm{d}S=\int_V(\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^{\circ})\dot{\epsilon}_{ij}\mathrm{d}V+$$
$$+\Sigma\int_{S_D}(\tau_s-|\tau^{\circ}|)|[v_i]|\mathrm{d}S. \tag{8-9}$$

对于刚塑性材料，Drucker 公设给出

$$(\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^{\circ})\dot{\epsilon}_{ij}=(\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^{\circ})\dot{\epsilon}_{ij}^{p}\geqslant 0;$$

同时，由静力场不违反屈服条件的假定，$\tau_s-|\tau^{\circ}|\geqslant 0$；又因外力作的总功须为正，即 $\int_{S_T}\bar{T}_iv_i\mathrm{d}S>0$。将这些不等式代入(8-9)式，就给出

$\eta-\eta^{\circ}\geqslant 0$，或即 $\eta^{\circ}\leqslant\eta$。

证毕。

(2) 上限定理。由任一运动许可速度场，按下式定义一个运动许可载荷因子 η^{*}：

$$\eta^{*}=\frac{\int_V\sigma_{ij}^{*}\dot{\epsilon}_{ij}^{*}\mathrm{d}V+\sum\int_{S_D^{*}}\tau_s\left|[v_i^{*}]\right|\mathrm{d}S}{\int_{S_T}\bar{T}_iv_i^{*}\mathrm{d}S}=\frac{\mathscr{D}^{*}}{\mathscr{L}^{*}}, \tag{8-10}$$

则 η^{*} 是极限载荷因子 η 的上限，即 $\eta^{*}\geqslant\eta$。

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

在(8-10)式中，$\mathscr{D}^*_i=\int_V \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}^*_{ij}\mathrm{d}V+\sum\int_{S^*_D}\tau_s\left|[v^*_i]\right|\mathrm{d}S$是在机动场上耗散的塑性内功率，$\overline{\mathscr{D}}^*_i=\int_{S_T}\bar{T}_i v^*_i\mathrm{d}S$则是面力分布函数$\bar{T}_i$在机动场上作的外功率。$\eta^*\mathscr{D}^*_i=\mathscr{D}^*_i$是$T^*_i=\eta^*\bar{T}_i$在机动场上作的外功率。所以，(8-10)式意味着内外功率的相等，即$\mathscr{D}^*_i=\mathscr{D}^*_i$。

上限定理的证明如下。对真实应力场加上机动场应用虚功率原理得：

$$\int_V \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}^*_{ij}\mathrm{d}V+\sum\int_{S^*_D}\tau_{nt}\left|[v^*_i]\right|\mathrm{d}S=\eta\int_{S_T}\bar{T}_i v^*_i\mathrm{d}S,\tag{8-11}$$

其中τ_{nt}是真实应力场σ_{ij}在机动场所假定的速度间断面S^*_D上的切向分量。换言之，τ_{nt}的下标n和t应理解为S^*_D的法向和切向。同时，根据定义η^*的(8-10)式有

$$\int_V \sigma^*_{ij}\dot{\varepsilon}^*_{ij}\mathrm{d}V+\sum\int_{S^*_D}\tau_s\left|[v^*_i]\right|\mathrm{d}S=\eta^*\int_{S_T}\bar{T}_i v^*_i\mathrm{d}S.\tag{8-12}$$

(8-12)式减去(8-11)式得到：

$$(\eta^*-\eta)\int_{S_T}\bar{T}_i v^*_i\mathrm{d}S$$
$$=\int_V(\sigma^*_{ij}-\sigma_{ij})\dot{\varepsilon}^*_{ij}\mathrm{d}V+\sum\int_{S^*_D}(\tau_s-\tau_{nt})\left|[v^*_i]\right|\mathrm{d}S.\tag{8-13}$$

由 Drucker 公设，$(\sigma^*_{ij}-\sigma_{ij})\dot{\varepsilon}^*_{ij}\geqslant 0$；由于$\tau_{nt}$来自真实应力场，$\tau_s-\tau_{nt}\geqslant 0$；又因机动场满足外力作正功的条件，即$\int_{S_T}\bar{T}_i v^*_i\mathrm{d}S>0$.将这些不等式代入(8-13)式.就给出

$$\eta^*-\eta\geqslant 0,\text{或即}\eta^*\geqslant\eta.$$

证毕。

上下限定理联合在一起给出对极限载荷因子的估计

$$\eta^\circ\leqslant\eta\leqslant\eta^*.\tag{8-14}$$

三、界限定理的推论

根据界限定理，可以作出一些对极限分析很有用的推论，它们

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

在解决实际问题时得到了广泛的应用。现列举几个主要的推论如下。

(1) 如果找到一个静力场 σ_{ij}°，而按流动法则所求得的 ϵ_{ij}° 恰好又是一个机动场，则所求得的载荷因子 η° 就是极限载荷因子 η，所对应的外载 $T_i^{\circ}=\eta^{\circ}\bar{T}_i$ 就是极限载荷 T_i。

(2) 如果有一个机动场 v_i^* 及其相应的应变率场 ϵ_{ij}^*，而按屈服面与应变率向量的正交法则求得的 σ_{ij}^* 恰好又是一个静力场，则所求得的载荷因子 η^* 就是极限载荷因子 η，所对应的外载 $T_i^*=\eta^*\bar{T}_i$ 就是极限载荷 T_i。

(3) η 是 η° 的最大值，也是 η^* 的最小值，即

$$\eta=\max(\eta^{\circ})=\min(\eta^*) \tag{8-15}$$

(4) 如果从一个静力场 σ_{ij}° 求出的 η° 与从另一个机动场 v_i^* 求出的 η^* 在数值上相等，则它们就是 η。

(5) 在结构的任何部分提高材料的屈服极限，不会降低结构的极限载荷。这是因为原结构的极限应力场必是新结构的静力场。

反之，在结构的任何部分降低材料的屈服极限，不会提高结构的极限载荷。

(6) 在结构的自由边界上增加物质（不考虑自重），不会降低其极限载荷。反之，在自由边界上减少物质，不会提高其极限载荷。

推论(6)可从推论(5)推出。

根据推论(6)，图 8-1 所示的开切口的受拉板条的极限载荷必在宽为 $2h$ 的均匀受拉板条的极限载荷和宽为 $2b$ 的均匀受拉板条的极限载荷之间，即

$$2ht\sigma_s\leqslant P_s\leqslant 2bt\sigma_s, \tag{8-16}$$

其中 t 为板条的厚度。在 §7.9 中曾用滑移线方法求解过这一问题(图 7-29)。将(8-16)

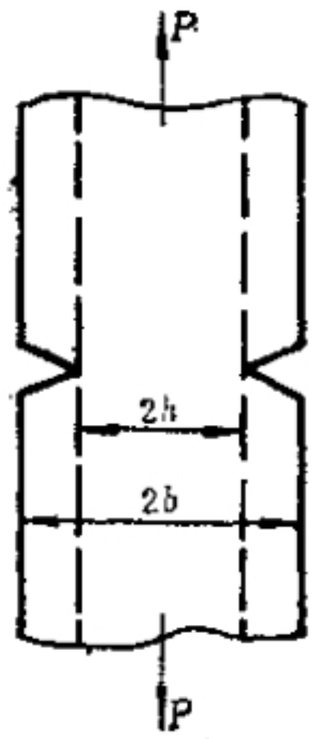


图 8-1

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

式与(7-41)式相比较可知滑移线解出的 P_s 符合界限定理推论所给出的估计。

另一个例子是对图 8-2 所示的外方内圆管，容易从推论(6)得出对极限内压的下述估计：

$$\sigma_s \ln \frac{b}{a} \leqslant p_s \leqslant \sigma_s \ln \frac{\sqrt{2}\,b}{a}$$

$$= \sigma_s \left(\ln \frac{b}{a} + 0.3466\right).$$

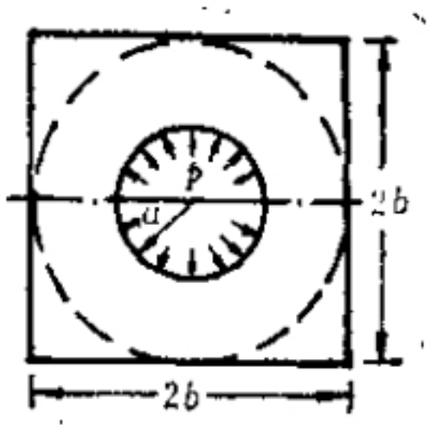


图 8-2

这里的上下限分别得自外接和内切的圆管(厚壁圆筒)。

(7) 设有 A、B、C 三个屈服面，A 内接于 B，B 又内接于 C。若以 η_A 和 η_A^* 表示对应于屈服面 A 的极限因子和静力因子，以 η_B 表示对应于屈服面 B 的极限因子，以 η_C 和 η_C^* 表示对应于屈服面 C 的极限因子和机动因子，则有

$$\eta_A^* \leqslant \eta_A \leqslant \eta_B \leqslant \eta_C \leqslant \eta_C^*. \qquad (8\text{-}17)$$

这个推论提供了寻求极限载荷上下限的又一途径，这就是利用内接(或外接)于真实屈服面的表达式较为简单的近似屈服面来求解，相应得到的极限载荷是真实极限载荷的一个下限(或上限)。在Hodge的专著[8.1]中可以找到不少应用实例。文献[8.2]则研究了将这一方法应用于估计结构大变形后的承载能力的可能性。

四、小结

物体的极限状态是介于静力平衡与塑性流动之间的临界状态。因此极限状态的特征是：应力场为静力许可的，应变率场和位移场为运动许可的。如果只有这二特征之一，则分别为静力场和机动场，相应于极限载荷的下限和上限。

§8.4 界限定理的应用

一、塑性内功率的计算

在应用上限定理时，为求得运动许可载荷因子（即机动因

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

子)η^*，从(8·10)式可知，需要计算塑性内功率

$$\mathscr{D}_1^* = \int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* \mathrm{d}V + \sum \int_{S_D^*} \tau_s \left| [v_i^*] \right| \mathrm{d}S. \qquad (8\text{-}18)$$

首先，我们来考察上式右端第一项，它代表在场内分散耗散的塑性功率；而塑性比功率(即单位体积内的塑性功率) $D = \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^*$ 的计算是依赖于具体的屈服条件的。下面就两种常用的屈服条件进行讨论。

(1) Mises 屈服条件。这时，因为材料已假定为理想刚塑性的，故有 $\varepsilon_{ij}^* = \lambda^* s_{ij}^*$，其中 $\lambda^* = \sqrt{\varepsilon_{ij}^* \varepsilon_{ij}^*} / \sqrt{s_{kl}^* s_{kl}^*}$。于是

$$D = \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* = s_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* = \lambda^* s_{ij}^* s_{ij}^*$$
$$= \sqrt{s_{kl} s_{kl}}\, \sqrt{\varepsilon_{ij}^* \varepsilon_{ij}^*} = \sqrt{2 J_2'^*}\, \sqrt{2 I_2'^*}.$$

引用等效应力和等效应变率

$$\bar{\sigma}^* = \sqrt{3 J_2'^*} = \sigma_s, \quad \bar{\varepsilon}^* = \sqrt{\frac{4}{3} I_2'^*},$$

则有

$$D = \sigma_s \bar{\varepsilon}^*. \qquad (8\text{-}19)$$

(2) Tresca 屈服条件。这时可以证明

$$D = \sigma_s |\varepsilon_1^*|_{\max}, \qquad (8\text{-}20)$$

其中 $|\varepsilon_1^*|_{\max}$ 是指主应变率绝对值中最大的一个值。

公式(8-19)和(8-20)虽然不算复杂，但对于整个塑性变形区，要计算作为空间点的位置的函数 $\bar{\varepsilon}^* = \sqrt{\frac{2}{3} \varepsilon_{ij}^* \varepsilon_{ij}^*}$ 或 $|\varepsilon_1^*|_{\max}$，然后在 V 内积分，这即使对于简单的实际问题，也仍然十分复杂。考虑到建立机动场的目的是对极限载荷作上限估计，因此最实用的方法是选择分块均匀的速度场。这时速度场是不连续的，由若干块被速度间断线分开的均匀速度区构成。在每一区内速度均匀，所以在区内有 $\varepsilon_{ij}^* = 0$，从而在区内 $D = D(\varepsilon_{ij}^*) = 0$。这样，在塑性内功率的计算式(8-18)中右端第一项就消失了，只需要计算其第二项，也就是沿速度间断线 S_D 消耗的那部分塑性内功率，而这通常是较为简单的。下面举一些例子。

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

二、单面切口板在两端受到力偶M的作用

假定板足够宽，可近似地当作平面应变问题。板的截面如图 8-3 所示，开切口后最小高度为 h。于是，以下应力场是静力许可的：在高度 h 范围内与无切口板纯弯曲的极限应力场相同，而在切口两侧区域内应力为零。显然，这样的应力场在与切口根部等高的面层内有应力间断，但这不妨碍这一应力场为静力许可的。与此静力场相对应，可给出外载(弯矩)的下限

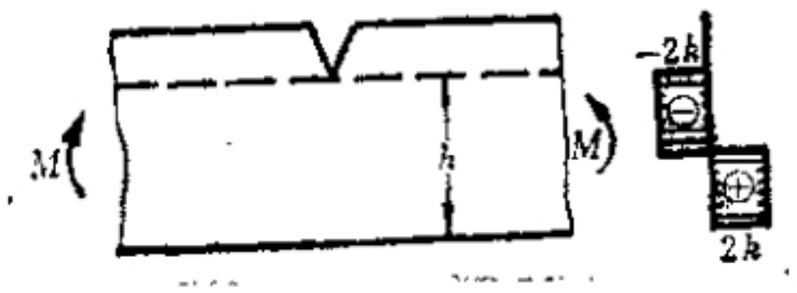


图 8-3

$$M^{*}=\frac{1}{4}(2k)h^{2}=\frac{1}{2}kh^{2},$$

其中 k 为材料的剪切屈服应力，此处假定 $\sigma_s=2k$。

为得到上限，就要构造一个机动场。如图 8-4 所示，假设沿 ACB和ADB有两条圆弧形速度间断线，在被这两条间断线分开的三块区域内材料都处于刚性状态（即前面提到的均匀速度区）。根据对称性，不妨设中心部分不动，两侧的刚性区则相对于中心部分以角速度 ω 作刚体转动，于是沿间断线的切向速度间断值为 $|[v_t^*]|=r\omega=\text{const}$，其中$r$为圆弧$ACB$和$ADB$的半径。若每条圆弧的弧长为 s，又 $\tau_s=k$，则塑性内功率为

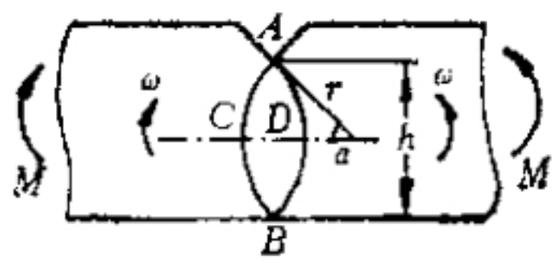


图 8-4

$$\mathscr{D}_1^{*}=\sum\int_{S_D^{*}}\tau_s\left|[v_t^{*}]\right|\mathrm{d}S=2kr\omega s;$$

而外载在这一机动场上所作的外功率为

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

$$\mathscr{D}_1^* = 2M^*\omega.$$

令 $\mathscr{D}_1^* = \mathscr{D}_2^*$，就得出

$$M^* = krs.$$

从几何关系知 $s = 2r\alpha$ 和 $r = \frac{h}{2}\csc\alpha$，其中 α 是圆弧 ACB 所对圆心角的一半。于是

$$M^* = krs = \frac{1}{2}kh^2\alpha\csc^2\alpha.$$

为取到极小的上限估计，令 $\frac{dM^*}{d\alpha} = 0$，得出 $2\alpha = \tan\alpha$，其解为 $\alpha \simeq 67°$，且相应有

$$M^* = 0.69kh^2.$$

把上面得到的上、下限联合起来便有

$$0.5 \leqslant \frac{M^*}{kh^2} \leqslant 0.69. \qquad (8\text{-}21)$$

对这一问题，Green[8.3]曾用滑移线场得到完全解，其极限载荷为

$$\frac{M}{kh^2} = 0.63. \qquad (8\text{-}22)$$

上面构造的机动场，恰如一个铰链机构。因而，它可以看成是对在梁和刚架的极限分析（参见§6.3及第九章）中经常用到的“塑性铰”的一个具体描述。

三、冲模对半无限刚塑性介质的压入

用机动法来求解刚性冲模压入半无限刚塑性介质的问题时，可以参照这个问题的滑移线场（图 7-24(a)）假设机动场如图8-5(a)所示。这个速度场，包含六个等腰三角形的刚性刚速区 AC、BC、CD、BD、DE 及其对称线是速度间断线。

设冲模铅垂向下的速度为1，则可根据速度图（图8-5(b)）求出间断线上的速度间断值。在 AB、BC、BD、DE 上，$|[v_1^*]| = v_1 =$

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

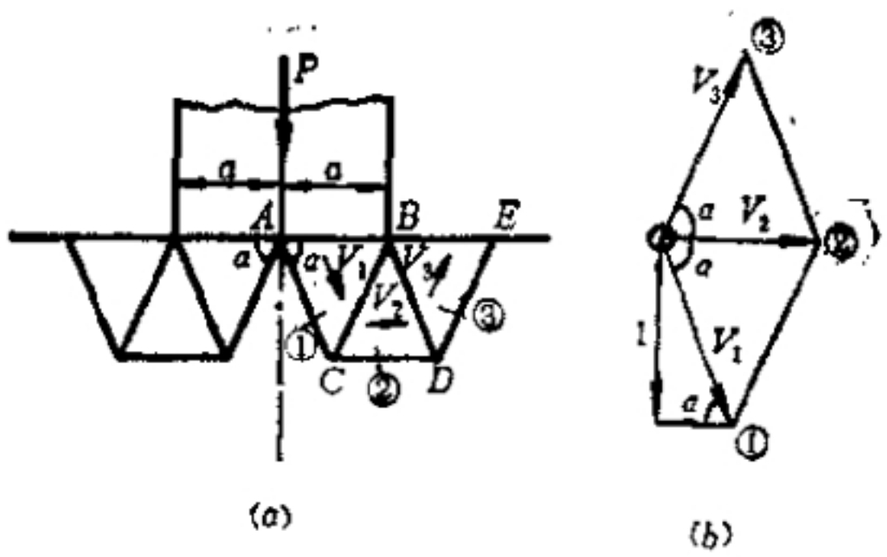


图 8-5

$\csc\alpha$；在 CD 上，$|[v_i^*]| = v_2 = 2\cot\alpha$，因此，在右半部速度场上，

$$\mathscr{D}_1^* = \sum\int_{S_D^*} \tau_s |[v_i^*]| \mathrm{d}S = k[4\csc\alpha \cdot \frac{a}{2}\sec\alpha + 2\cot\alpha \cdot a]$$

$$= 2ak\left(\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right),$$

$$\mathscr{D}_0^* = p^* \cdot a \cdot 1.$$

令 $\mathscr{D}_0^* = \mathscr{D}_1^*$，得

$$p^*/2k = (1 + \cos^2\alpha)/\sin\alpha\cos\alpha. \qquad (8\text{-}23)$$

例如，当取 $\alpha = 60°$ 时，$p^*/2k = 5/\sqrt{3} = 2.89$；取 $\alpha = 45°$ 时，$p^*/2k = 3$. 为使 p^* 极小化，取 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}(p^*/2k) = 0$，得 $\alpha = \tan^{-1}\sqrt{2} = 54.7°$，且相应地有

$$p^*/2k = 2\sqrt{2} = 2.83. \qquad (8\text{-}24)$$

从 §7.7 中已经知道，按滑移线场求出的极限载荷为 $p/2k = 1 + \frac{\pi}{2} = 2.57$。可见机动法给出的 (8-24) 式的确为极限载荷的上限，相对误差为10%。

四、通过对称楔形模的挤压

在平面应变条件下，金属坯料在模角为 α 的对称楔形模中，受到刚性推料板的挤压，厚度从 H 变为 h。假定模壁光滑，且推料板

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

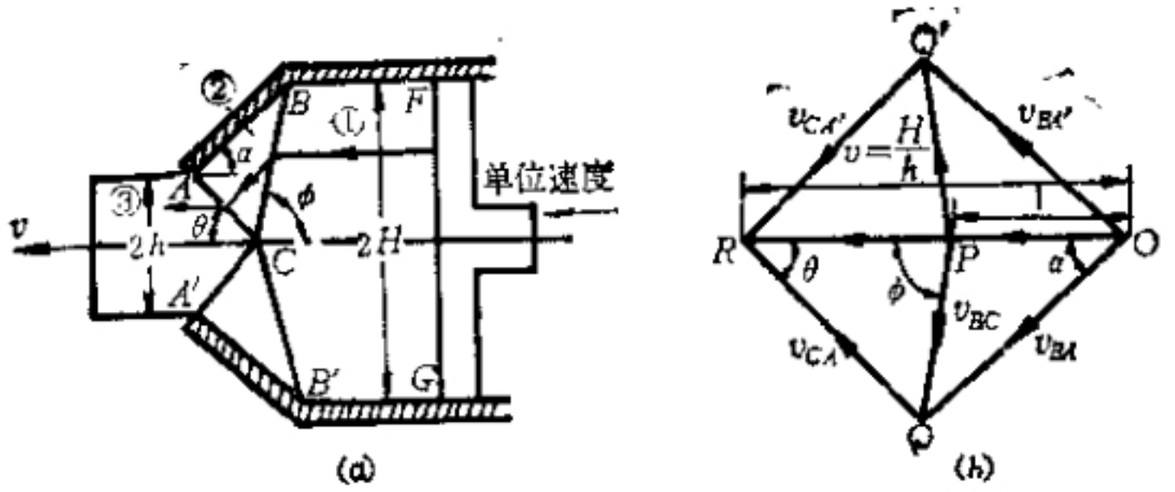


图 8-6

作用在坯料上的压力 p 均匀分布。受滑移线场解的启示，设不连续的速度场如图 8-6(a) 所示，其中 AC、$A'C$ 及 BC、$B'C$均为速度间断线。在极限状态下，BCB' 右面的材料，由于推料板推动而以单位速度沿轴向作刚体运动。至 BC 时，速度发生间断，使刚性区 BAC 沿 BA 方向运动。到 AC 时，速度又发生间断，最后坯料以速度 v 沿轴向流出楔形模。

根据上述速度场画出的速度图如图 8-6(b) 所示，其中 OP、OQ、OR 分别代表物理平面上区域①、②、③ 的速度。根据不可压条件，当取 $OP=1$ (单位速度)时，$OR=v=H/h$。

假定模壁光滑，因而材料沿AB滑移时不消耗功率。当只考虑上半部时，内外功率相等就给出

$$p^*\cdot H\cdot 1=2k(\overline{BC}\cdot v^*_{BC}+\overline{AC}\cdot v^*_{AC}). \qquad (8\text{-}25)$$

因此，p^* 值不但与模角 α 有关，还与表征 C 点位置的 θ 角有关。当 α 和 θ 角都给定时，可以从图 8-6(a) 上量取$\overline{BC}$和$\overline{AC}$，同时从图 8-6(b) 上量取 v^*_{BC}和v^*_{AC}，把这些量代入(8-25)式就能算出p^*。例如，对于 $\alpha=40°$和$\theta=45°$，缩减比 $\frac{H-h}{H}=0.56$ 的情形，计算出 $p^*/2k=1.01$；而此时由滑移线场求得的值(数值解)为 $p/2k=0.95$。

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

对于一定的 α 值，$p^*/2k$ 的最佳值（即极小值）总相应于一定的 θ。通过数值计算可以得出 $p^*/2k$ 与 θ 的关系曲线，见图 8-7。可以注意到，当最佳角 $\theta \simeq 40°$ 时，得到 $p^*/2k$ 的最佳值（也就是 $p/2k$ 的最佳上限估计）近似等于1.0。

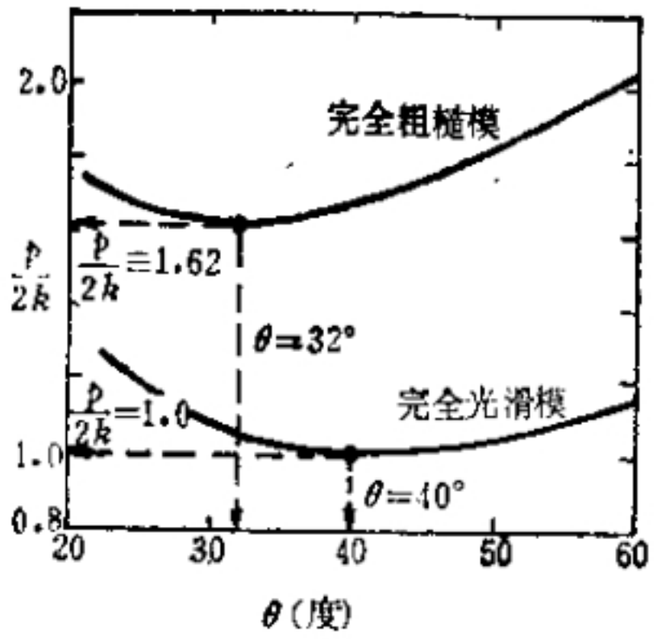


图 8-7

当模子为完全粗糙时，相应的曲线也表示在图 8-7 中。这时最佳角 $\theta \simeq 32°$，相应的最佳上限估计为 $p^*/2k \simeq 1.62$。在这一情况下，从滑移场解得到的极限载荷值是 $p/2k = 1.48$。

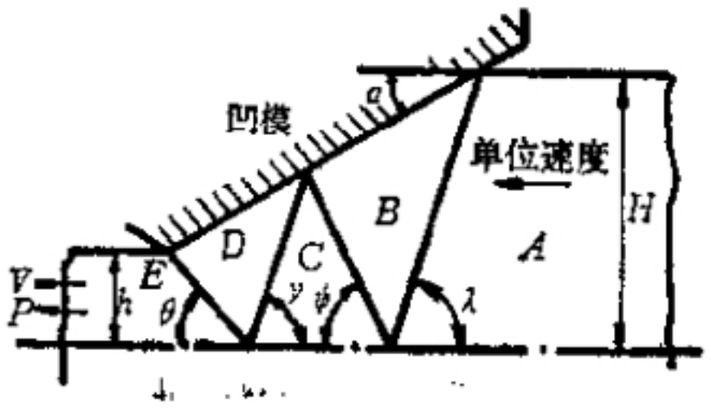


图 8-8

上述分析适用于中等程度的相对缩减比$\left(\frac{H-h}{H}\right)$的情形。对于大的相对缩减比，为得到较好的 $p/2k$ 上限估计，可以引入包含若干个三角形刚性匀速区的速度场，如图 8-8。对于小的相对缩减比，则最好是参照此时的滑移线场引入图 8-9 所示的速度场。较详细的讨论参见 [8.4]。对金属压力加工问题应用界限定理的更多例子，可以从 Johnson 和 Mellor 的著作

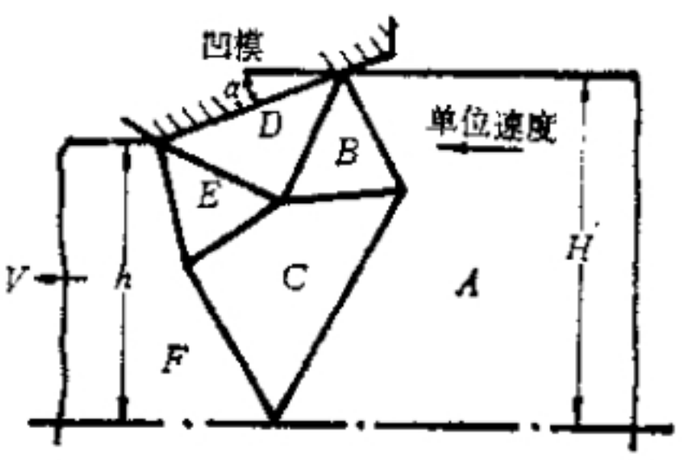


图 8-9

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

[8.5]中找到。

五、钝角楔的单边受压

作为应用静力法的一个例子，研究图 8-10(a) 所示的单边受压的钝角楔。假定楔角 $2\gamma > \frac{\pi}{2}$，可设 $2\gamma = \frac{\pi}{2} + 2\varphi$，并设应力场由两个全等的均匀应力区 I 和 II 所构成，在这两个区域之间，AC 为一应力间断线。

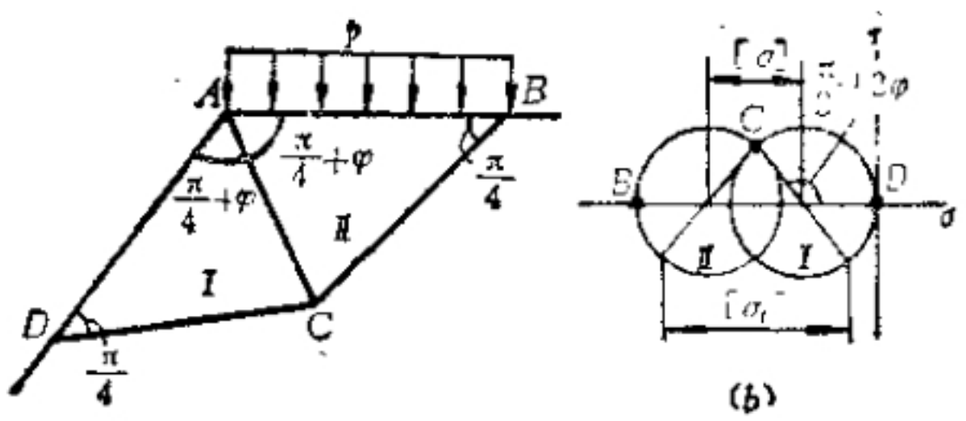


图 8-10

因为 AD 是自由边界，故在区域 I 中 $\sigma_1^{\mathrm{I}} = 0$，且从图 8-10(b) 的 Mohr 应力圆可知 $\sigma_2^{\mathrm{I}} = -2k = -\sigma_s$。在物理平面上，从 AD 到 AC 逆时针转过了 $\frac{\pi}{4} + \varphi$ 角；因此在 Mohr 圆上从 $D(0,0)$ 点逆时针转 $\frac{\pi}{2} + 2\varphi$ 就能找到 C 点。于是对于 C 点有

$$\sigma_n = -\frac{\sigma_s}{2}(1 + \sin 2\varphi),$$

$$\tau_{nt} = -\frac{\sigma_s}{2}\cos 2\varphi.$$

跨过 AC 线时应保持 σ_n 和 τ_{nt} 连续，但 σ_t 可间断。据此，可作出通过 C 点、半径为 $\frac{\sigma_s}{2}$ 的另一 Mohr 圆，也就是相应于区域 II 的 Mohr 圆。不难看出，区域 I 的 Mohr 圆和区域 II 的 Mohr 圆的圆心距离(即跨过 AC 线时平均正应力的跳跃)为

$$[\sigma] = \sigma_s \sin 2\varphi.$$

进而，对应于 AB 段的 Mohr 圆上的 B 点应力为

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

$$\sigma_n|_{AB} = -\sigma_s(1+\sin 2\varphi) = -p_s$$

于是上述静力场导致一个下限估计

$$p^\circ = \sigma_s(1+\sin 2\varphi)。 \tag{8-26}$$

事实上，在§7.6中用滑移线场已求得

$$p_s = 2k(2\gamma + 1 - \frac{\pi}{2}) = \sigma_s(1+2\varphi) > p^\circ$$

当 2γ 接近于 $\pi/2$，亦即 2φ 很小时，(8－26) 式给出的 p° 就十分接近 p_s。这可以这样理解：上述静力场用一条应力间断线 (AC) 代替了滑移线场中应力连续变化的扇形区，φ 越小这扇形区越小，这种替代造成的误差也越小。对于 φ 不太小的情形，读者也可以试用由三个三角形均匀应力区构成有间断的应力场，以中间一个三角形来代替滑移线场中的扇形区，这样可以得到更好的下限估计。

六、端部承受横向载荷的锥形悬臂梁

图 8-11(a) 是一根具有 30° 锥角的悬臂梁，其宽度为 b，在端部受有横向集中载荷 P。设不连续的应力场由四个均匀应力区 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ构成。

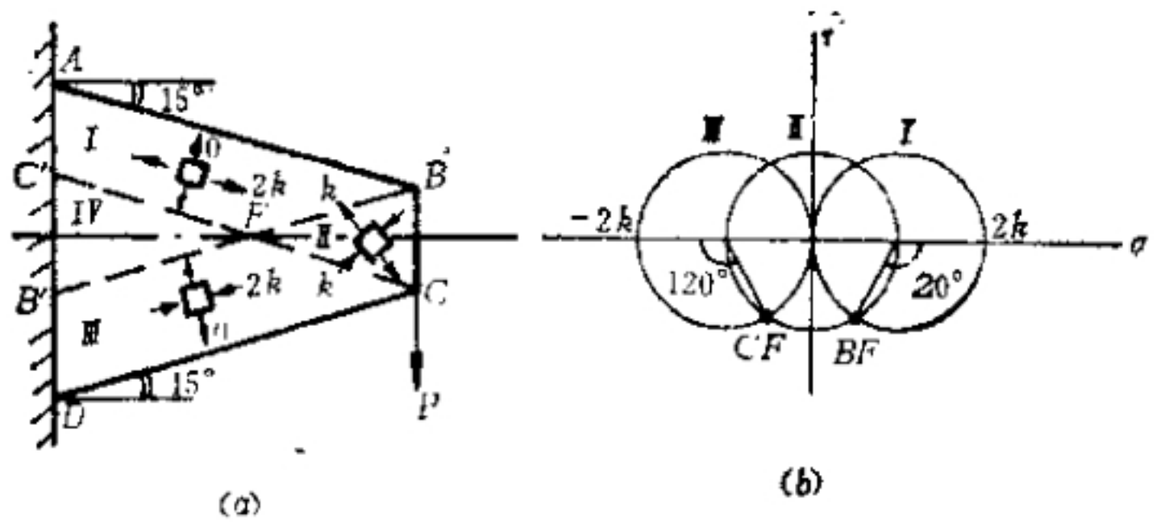


图 8-11

区域Ⅰ和Ⅲ各有一条自由边界，同时由受力状况可知区域Ⅰ受拉、区域Ⅲ受压。在区域Ⅰ中从 σ_1 方向到 BF 的法向需顺时针转 60°，故在 Mohr 圆Ⅰ上从 $(2k, 0)$ 顺时针转 120° 得 BF 点；同理在 Mohr 圆Ⅲ上从 $(-2k, 0)$ 逆时针转 120° 得 CF 点。考察梁

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

上 F 点的受力可知，上述 BF 点和 CF 点应关于 τ_n 轴对称。代表区域Ⅱ的应力状态的 Mohr 圆Ⅱ应通过 BF 和 CF 点，结果 Mohr 圆Ⅱ也关于 τ_n 轴对称，这表明区域Ⅱ处于纯剪应力状态。于是，锥形悬臂梁的极限载荷的下限为

$$P^{\circ}=k\cdot\overline{BC}\cdot b.$$

在上述静力场中可证明区域Ⅳ为零应力区域。

基于极限分析原理的上下限方法(包括机动法和静力法)在塑性力学中是一种应用广泛而非常有效的方法。本章已对平面应变问题举了若干例子。对平面应力问题的应用可参看[8.6]和[8.1]；对梁和刚架问题的应用见本书第九章；对板的弯曲问题的应用见本书第十章；对壳体和容器问题的应用可参看[8.1]和[8.7]；对轴对称压力加工问题的上限估计可参见[8.4]。

参 考 文 献

[8.1] Hodge. P. G., Jr., *Plastic Analysis of Structures*, McGraw-Hill, 1959. 中译本，P. G. 霍奇，《结构的塑性分析》，蒋咏秋、熊祝华译，科学出版社，1966.

[8.2]余同希，对径受拉圆环的塑性大变形，《力学学报》，1979年第1期，88—91页。

[8.3]Green, A. P., The plastic yielding of notched bars due to bending, *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 6, 223, 1953.

[8.4]Slater. R. A. C., *Engineering Plasticity, Theory and Application to Metal Forming Processes*, Mac Millan, 1977.中译本：R. A. C. 斯莱特，《工程塑性理论及其在金属成形中的应用》，王仲仁、袁祖培等译，机械工业出版社，1983.

[8.5]Johnson. W. and Mellor. P. B., *Engineering Plasticity*, Van Nostrand Reinhold, 1973

[8.6]王仁、熊祝华、黄文彬，《塑性力学基础》，科学出版社，1982.

[8.7]徐秉业、刘信声，《结构塑性极限分析》，中国建筑工业出版社，1985.

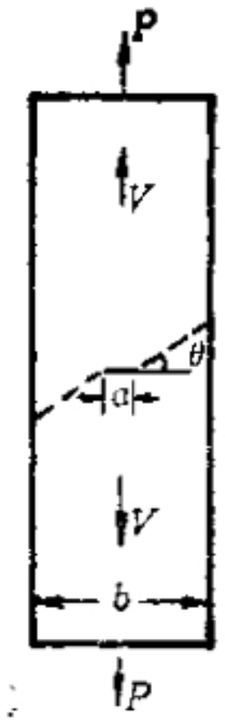
由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

习　题

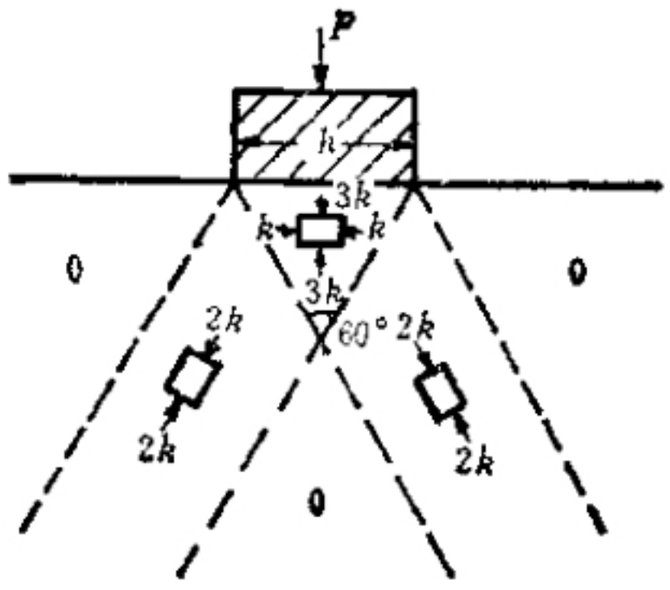
8.1　图示的矩形长条，宽为 b，厚为 h，中间裂纹的宽度为 a，两端受力 P 拉伸。试用界限定理证明极限拉力为 $P_s=\sigma_s h(b-a)$。

机动场可采用图示的间断速度场。

8.2　图示的半无限平面上的压模受集中力 P 的作用，已作出某种应力分布如图所示，图中的 0 表示零应力区。问这个应力场是否是静力许可的。

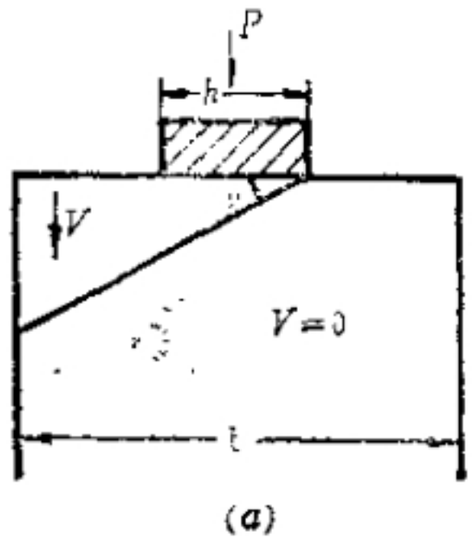


题8.1附图

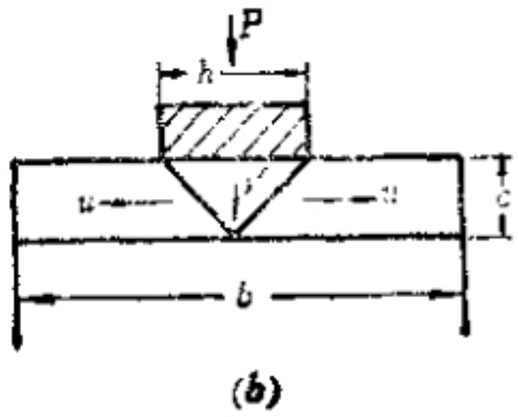


题8.2附图

8.3　图示的宽为 b 的半无限长条，上面作用着宽 h 的压模，压模上作用



(a)



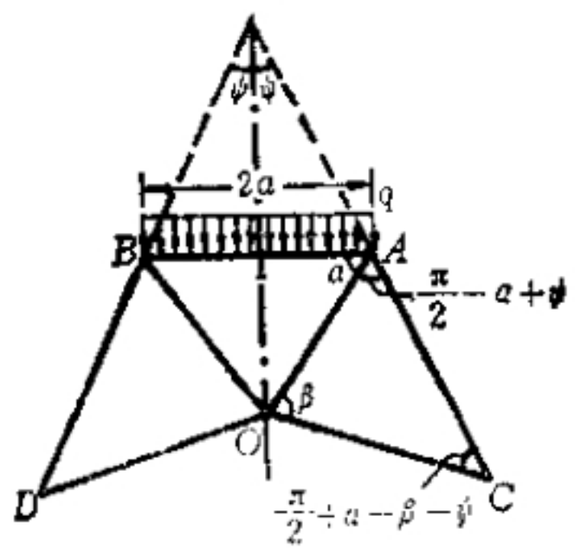
(b)

题8.3附图

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

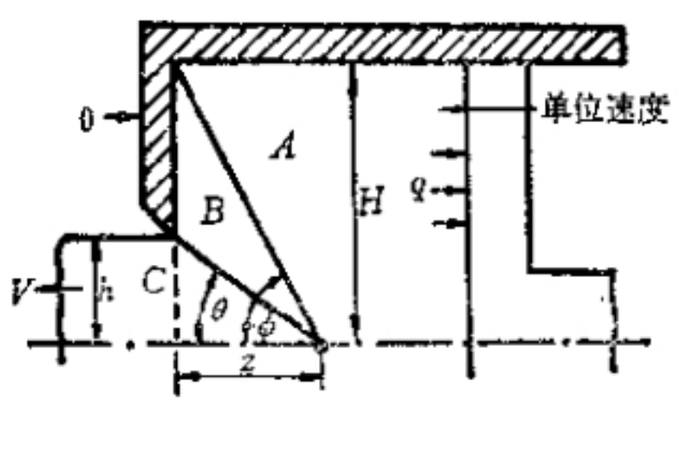
有集中力 P。对于图示的两种机动场，当 $b=3h$ 及 $b=4h$ 时，比较两种方案求出的上限 P^* 中哪一种较好。

8.4 图示的顶部被削平的对称楔体在顶部受均布载荷 q 作用，设机动场如图，其中有四条速度间断线。由此求极限载荷的上限，并在 $\psi=\pi/6$ 时给出 q^* 的数值。



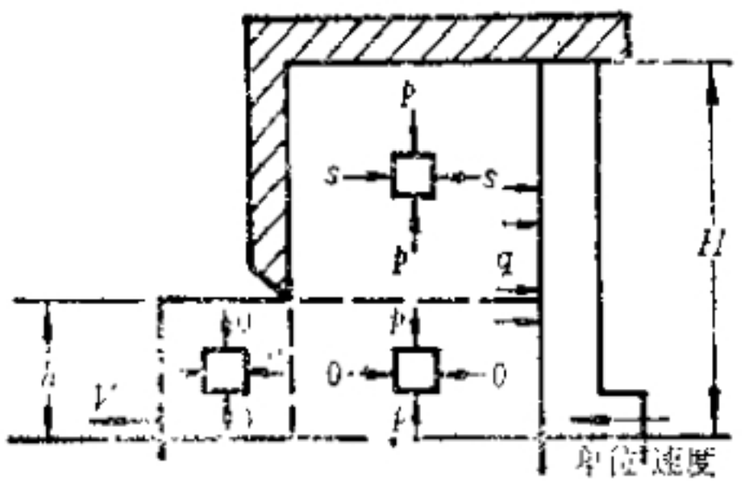
题8.4附图

8.5 设有一光滑的方模，在挤压时材料能自由流经模的表面，若已知 $H/h=r$，试按图示间断速度场求出挤压应力 q 的上限值。



题8.5附图

8.6 对于通过方模挤压的问题为求出挤压应力的下限，设间断应力场如图，由三个矩形的均匀应力区组成，试定出图中 λ、p 和 s 为多大并由此求出挤压应力 q 的下限值。



题 .6附图

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

第九章　梁和刚架的极限分析和安定分析

§9.1　包含塑性铰的破损机构

在工程中广泛应用的梁和刚架结构，通常承受着横向载荷，在小变形条件下，它们主要依靠弯曲变形来承载。在前面§6.3中分析承受横向载荷的悬臂梁时曾指出，当梁或刚架中某一截面上的弯矩M达到塑性极限弯矩M_p(其值由构件的截面尺寸和材料的屈服应力所决定)时，这个截面上就可能发生梁的转角（挠曲线的斜率)的间断，即形成所谓的塑性铰。对于受端部集中载荷的悬臂梁，分析表明，其塑性破损机构是在梁的根部形成一个塑性铰，而且由根部弯矩等于M_p的条件即可直接定出梁的极限载荷$P_s=M_p/l$，此处l是梁的长度。对于较为复杂的静不定梁，下面的例子将说明，在极限状态下一般会出现包含若干个塑性铰的塑性破损机构。

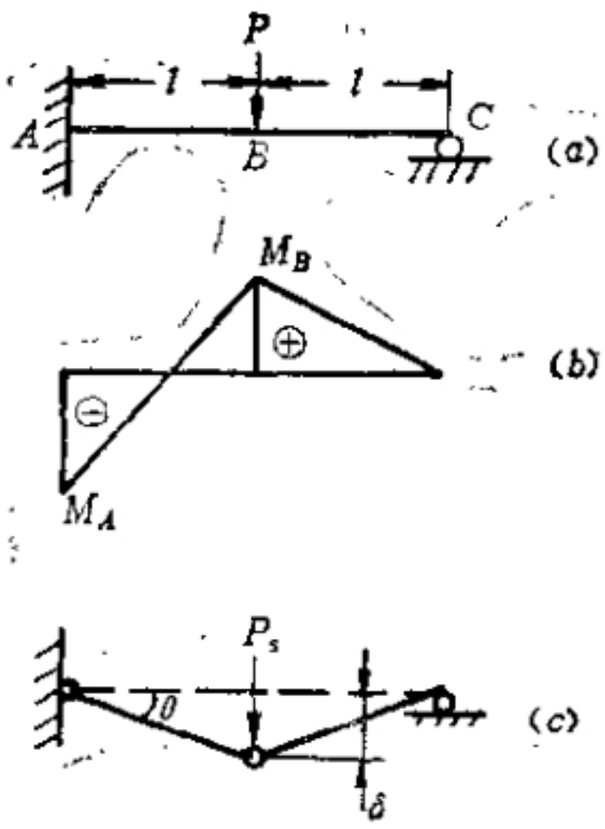


图 9-1

考虑图9-1所示的一次静不定梁，它一端固支，一端铰支，集中载荷P作用在梁长的中点。从材料力学可以解出弯矩分布为

$$M(x)=\begin{cases} P\left[\frac{5}{16}(2l-x)-(l-x)\right], & 0\leqslant x\leqslant l; \\ P\cdot\frac{5}{16}(2l-x), & l\leqslant x\leqslant 2l. \end{cases} \tag{9-1}$$

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

注意此式不包含 E，可见与材料屈服前是弹性还是刚性（相当于 $E\to\infty$ 的情形）无关。弯矩图如图9-1(*b*)，最大弯矩发生在梁的固支端 A：

$$|M|_{\max}=|M_A|=\frac{3}{8}Pl.$$

令 $|M_A|=M_p$，则相应的载荷为 $P_1=\frac{8M_p}{3l}$。当 $P\geqslant P_1$ 时，A点形成塑性铰，可以发生转角的间断；不过由于梁的其它部分仍处在弹性（或刚性）状态，铰受到约束，并不可能发生自由转动，因而，梁还并没有变成一个可以随意运动的机构。但是，在 A 点成为塑性铰之后，这里的弯矩恒等于 $-M_p$，不再变化，于是梁成为静定的了。此时，容易求出 C 点处的反力 R_C 和梁内的弯矩分布分别为

$$R_C=\frac{P}{2}-\frac{M_p}{2l},$$

$$M(x)=\begin{cases}R_C(2l-x)-P(l-x), & 0\leqslant x\leqslant l;\\ R_C(2l-x), & l\leqslant x\leqslant 2l.\end{cases}\tag{9-2}$$

正弯矩的最大值发生在梁的中点 B，为

$$M_B=R_Cl=\frac{Pl}{2}-\frac{M_p}{2}.$$

当 P 继续增大时，会使得 $M_B=M_p$，相应的载荷为 $P_2=3M_p/l$。这时A点和B点都变成塑性铰，如图 9-1(*c*) 所示，因而梁成为一个可以随意运动的机构，不能再承受更大的载荷。这样，我们对这个一次静不定梁构造出了包含两个塑性铰的破损机构（图9-1(*c*)），并由之确定了静不定梁的极限载荷 $P_s=3M_p/l$。

以上分析中 $M(x)$、R_C、P_s 等都与弹性模量无关，这就说明对梁的材料采用理想弹塑性模型和采用理想刚塑性模型，所求得的极限载荷是完全相同的。这与 § 8.1中的一般性论断相符。在下面求解问题时，我们都将假定材料是理想刚塑性的，由此可以带来不少简化。

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

§9.2 梁和刚架极限分析中的界限定理

§8.3中所建立的极限分析定理（界限定理）原则上适用于任何构形的固体和结构。对于梁和刚架的极限分析，还可以根据结构和受载的特点，对界限定理和极限分析方法给出更加具体实用的形式。

如所周知，对梁和刚架结构，通常总可以引进截面上的弯矩M作为广义应力，同时以截面的转角θ作为相应的广义应变。这样，结构内的应力应变状态就不由σ和ϵ来描述，而由M和θ来描述。进而，我们可以定义下述三种状态：

i）真实极限状态（真实场）：外力P_s（极限载荷），与之相对应的广义位移Δ，截面i的弯矩M_i及相应的转角θ_i。

当外载不是一个单个的力而是一个力系时，要求力系的分布规律已知，也就是力系中的不同的力的相互比值恒定，因而总可以用其中的一个力的大小来表征整个力系量值的大小。这就是说，上面用一个单一的量值P_s来给出结构的极限载荷并不排除结构承受一分布规律已知的力系的一般情形。

ii）运动许可状态（机动场）：一组满足运动约束条件的位移Δ^*和转角θ^*，且对应的外力P^*在Δ^*上做正功，即$P^*\Delta^*>0$。

iii）静力许可状态（静力场）：一组满足内部平衡条件的弯矩分布M_i°，它与外力P°相平衡，并且各处的弯矩在数值上都不超过极限弯矩，即$|M_i^\circ|\leqslant M_p$。

定义了梁和刚架结构的上述三种状态，则界限定理可以具体表述如下。

上限定理。设取定一机动场Δ^*、θ^*，则由下列内、外功等式可求出极限载荷的一个上限$P^*\geqslant P_s$：

$$P^*\Delta^*=\sum_i M_i^*\theta_i^*, \tag{9-3}$$

其中M_i^*是与θ_i^*相对应的，且$M_i^*=M_p\cdot\mathrm{sgn}\theta_i^*$。

下限定理。设取定一静力场M_i°，则与之平衡的载荷P°是

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

极限载荷的一个下限，即$P^{\circ}\leqslant P_{s}$。

这两个定理可以用以广义应力、广义应变表示的虚功原理来证明，也可以作为特例从§8.3的极限分析定理推出，因此此处不再证明。§8.3中给出的界限定理的推论也同样可以应用于梁和刚架的极限分析，下面我们将可以看到一些具体应用实例。

§9.3 机动法和静力法

根据界限定理，在极限分析中可以采用两类方法：机动法和静力法。

一、机动法

当结构和外载分布规律给定时，先假设一种可能的破损机构，再令外载在这个机构的运动过程中所做的功等于在塑性铰上消耗的内功，就可以得到形成这个机构所需要的外载。根据上限定理，这样得到的是真实极限载荷的一个上限。

例如，仍考察§9.1中的静不定梁的例子，这时只要取图9-1(c)作为破损机构，建立外功与内功相等的条件就有

$$P^{*}\delta=M_{p}\theta+M_{p}\cdot 2\theta=3M_{p}\theta,$$

其中δ是梁中点即B点的位移，θ是A点处梁的转角。在A点的塑性铰处消耗的塑性功为$M_{p}\theta$，在B点的塑性铰处消耗的塑性功则为$M_{p}\cdot 2\theta$。在小变形情形下有几何关系$\delta=\theta l$，于是从上式求出

$$P^{*}=3M_{p}/l.$$

一般说来，这样求出的$P^{*}\geqslant P_{s}$。在本例中，由于A点和B点是弯矩最大的截面，所以图9-1(c)的机构是唯一可能的破损机构，上面这样求得的P^{*}也就恰等于极限载荷P_{s}。当结构本身或受载情况比较复杂时，可能的破损机构很可能不止一个，这时就要对各种可能的破损机构分别计算出相应的载荷，然后从中选出最小的一个作为极限载荷的上限估值。如若这种检验计算已经遍及所有可能的破损机构，那么由§8.3中界限定理的推论(3)不难证

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

明$P_k = \min(P^*)$。

对静不定梁和刚架采用机动法时，一般并无必要对整个结构写出弯矩分布，而可以参照以下原则来建立可能的破损机构：

i）若结构仅承受集中力作用，则可能的铰点是：支座点，刚架杆件的两端，集中力作用点。

ii）若梁的某一跨内或刚架的某一杆件上作用有分布载荷，预先无法知道铰在这一梁跨或这一杆件内的位置，这时可假定塑性铰的位置用待定的几何参数 x 来描述，用机动法求出相应的q^*（q 是分布载荷的量值，q^* 依赖于 x，即 $q^* = q^*(x)$），然后由

$$\frac{\partial}{\partial x} q^*(x) = 0$$

确定出 x 值及相应的q^*_{min}。这样求得的q^*_{min}就是 q_s或q_u的最佳上限估值。

iii）铰点的数目要适当，配备铰点后静不定梁或刚架要确实成为可动的机构，同时这个机构只应该有一个自由度。

iv）注意区分结构中原有的铰点（例如铰支支座）和设定的塑性铰，前者不消耗塑性功，而对后者应逐一计算所消耗的塑性功然后累加。

二、静力法

对于梁和刚架，在弯矩可能达到最大的一些截面处（例如固支支座处，刚架杆件的两端，集中力作用点），令弯矩达到塑性极限弯矩，即$|M| = M_p$，然后利用平衡方程求得整个结构内的弯矩分布图，再校核各截面的弯矩，若各处的弯矩的绝对值均未超过 M_p，则所设的弯矩分布就是一个静力许可状态（静力场）。根据下限定理，与这个静力场相平衡的载荷是真实极限载荷的一个下限。

例如，采用静力法求解图 9-1 中的静不定梁时，可先考察梁在弹性弯曲时的弯矩分布图（即图 9-1(*b*)）。这一弯矩分布在 A点和 B 点分别达到最大负值和最大正值，于是可令 $M_A = -M_p$，$M_B = M_p$，这时易见梁内各截面的弯矩的绝对值均未超过M_p，因此所设

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

的弯矩分布是一个静力许可状态。从这一静力许可状态可以求出相应的外载，步骤如下：先由 $M_B = M_p$ 定出 $R_C = M_p/l$，再由 $M_A = R_C \cdot 2l - Pl = 2M_p - P^0 l = -M_p$ 解出 $P^0 = 3M_p/l$。这个值与前面按机动场求得的极限载荷上限值相等，这并不是偶然的，因为由这个静力场出发，按流动法则求出的位移场恰是一个机动场。

对于比较复杂的静不定梁和刚架的问题，由于弯矩分布的规律本身就难以求出，所以选取静力场通常远比选取机动场要困难，换句话说，求得一个好的极限载荷下限估计通常要比求得一个好的上限估计更困难。

三、应用机动法和静力法的例子

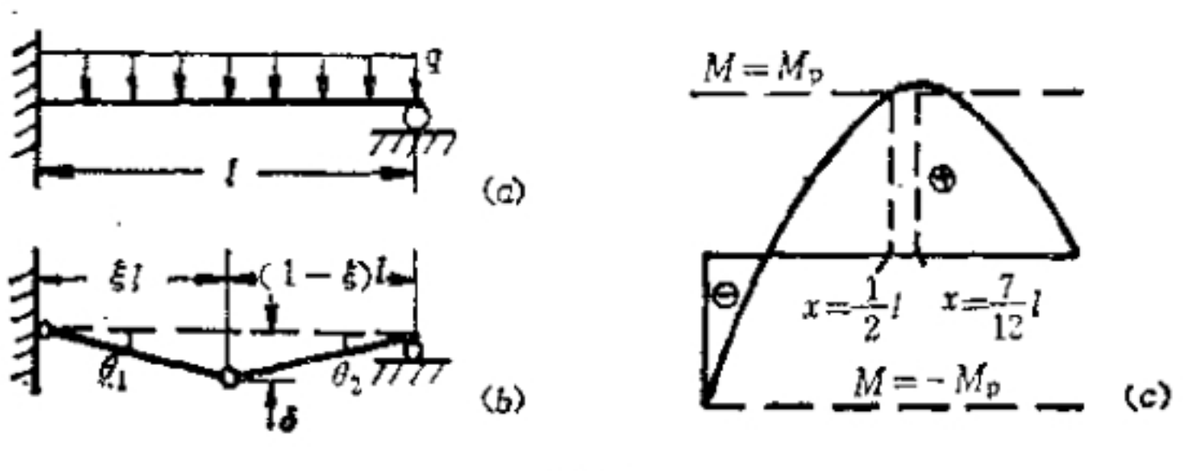


图 9-2

例1. 考虑图 9-2 所示的承受均布载荷 q 的静不定梁。先采用机动法求解。显然，可以采用这样的破损机构：设根部 A 点成铰，同时梁中某一未知截面 $x = \xi l$ 处也形成铰。于是，由内外功相等给出

$q^* \cdot \frac{1}{2}\delta l = M_p(2\theta_1 + \theta_2)$，其中 δ、θ_1、θ_2 的意义见图 9-2(b)。利用几何关系 $\theta_1 = \delta/\xi l$、$\theta_2 = \delta/(1-\xi)l$ 可得

$$q^* = \frac{2M_p}{l} \cdot \frac{2-\xi}{\xi(1-\xi)}. \tag{9-4}$$

为了使 q^* 取极小值，令 $\frac{\partial q^*}{\partial \xi} = 0$，导致方程

$$\xi^2 - 4\xi + 2 = 0,$$

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

其界于0和1之间的根是 $\xi = 2 - \sqrt{2} \approx 0.586$. 此值决定了梁中铰的位置。将其代回(9-4)式,得到的是$q^*_{\min}$,也就是梁的极限载荷

$$q_u = q^*_{\min} = 2(3 + \sqrt{2})M_p/l^2 \simeq 11.656 M_p/l^2. \quad (9\text{-}5)$$

应用机动法时,如果不把梁中铰点的位置设作未知和待定的,而是取定某一位置,那么也能得出对极限载荷的一个上限估计。例如,假设铰位于梁的中点,这相当于取定 $\xi = \frac{1}{2}$。代入(9-4)式得 $q^* = 12M_p/l^2$,它比(9-5)式给出的 q_u 要大3%左右。

现在再用静力法来求解。从材料力学知识可知,在均布载荷作用下的梁,弯矩分布是 x 的二次函数。假定 $M|_{x=0} = -M_p$ 和 $M|_{x=\frac{l}{2}} = M_p$,这两个条件加上梁右端的简支条件 $M|_{x=l} = 0$,三个条件可以确定弯矩分布二次函数的三个系数,结果就得到了满足平衡方程的一个弯矩分布:

$$\frac{M}{M_p} = 5\left(1 - \frac{x}{l}\right) - 6\left[1 - \left(\frac{x}{l}\right)^2\right], \quad (9\text{-}6)$$

其图象如图9-2(c)所示。这个弯矩分布在靠近 $\frac{x}{l} = \frac{1}{2}$ 的地方超过了极限弯矩,在 $\frac{x}{l} = \frac{7}{12}$ 处取最大值 $\frac{M}{M_p} = \frac{25}{24}$。因此,如果把(9-6)式给出的弯矩分布通乘以 $\frac{24}{25}$,就在梁内处处不违背屈服条件,并将与以下外载相平衡:

$$q^\circ = \left(\frac{24}{25}\right) \cdot 12\frac{M_p}{l^2} = 11.52 M_p/l^2, \quad (9\text{-}7)$$

它比(9-5)式给出的极限载荷 q_u 仅小1%左右。

例2. 考虑图9-3所示的简单刚架,各杆截面积相等,受两个集中力作用。这个刚架是二次静不定的。例如,可取 E 点的铅直

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

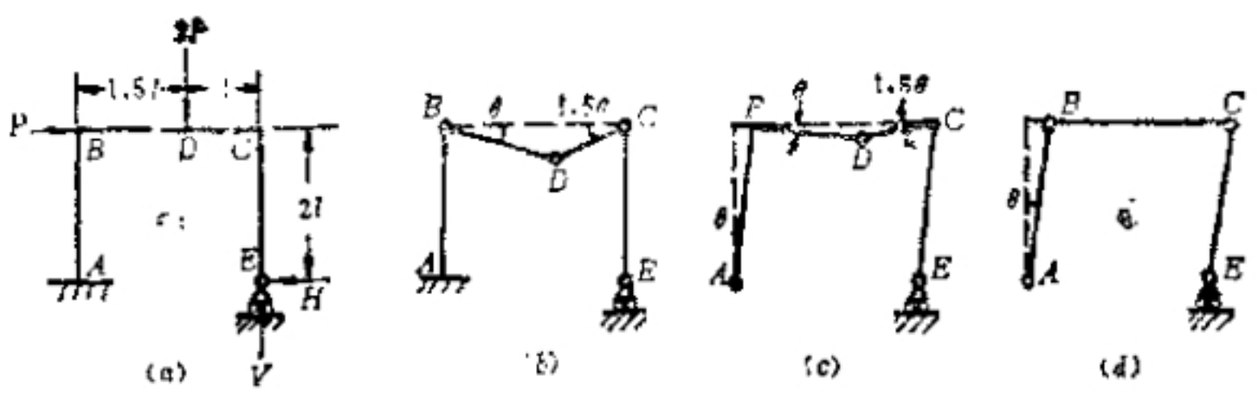


图 9-3

反力 V 和水平反力 H 为赘余反力。

先用机动法。根据结构的静不定次数和受载特点可知，只要形成三个塑性铰，刚架就会变成单自由度的机构。而可能发生的截面有 A、B、C、D 四点。搭配起来有图 9-3(b)、(c)、(d) 三种可能的机构，可分别计算如下：

机构(b)：B、C、D 三点成铰，这时

$$2P^*\cdot 1.5\theta l = M_p(\theta + 2.5\theta + 1.5\theta),$$

故
$$P_1^* = \frac{5}{3}\cdot\frac{M_p}{l} = 1.67M_p/l.$$

机构(c)：A、C、D 三点成铰，这时

$$2P^*\cdot 1.5l + P\cdot\theta\cdot 2l = M_p(\theta + 2.5\theta + 2.5\theta).$$

故
$$P_2^* = \frac{6}{5}\cdot\frac{M_p}{l} = 1.2M_p/l.$$

机构(d)：A、B、C 三点成铰，这时

$$P\cdot\theta\cdot 2l = M_p(\theta + \theta + \theta),$$

故
$$P_3^* = \frac{3}{2}\cdot\frac{M_p}{l} = 1.5M_p/l.$$

比较这三种机构可知，由机动法算出的极限载荷的上限值以 P_2^* 为最小。同时，由于我们已经检验了所有可能的破损机构，所以这个值也就是刚架的极限载荷：

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

$$P_u = P^*_{机构} = 1.2M_p/l. \tag{9-8}$$

再用静力法。仍可参照上述(b)、(c)、(d)三种机构，但不去建立机动场、不去计算内外功的平衡，而是利用平衡方程和屈服条件对外载进行估值。

为避免混乱，先对作用在刚架上的弯矩的符号作如下规定：令使刚架朝内凸(使内层纤维受拉)的弯矩为正，使刚架朝外凸(使内层纤维受压)的弯矩为负，参见图9-4。于是，根据平衡条件可以写出以下方程式：

$$\left.\begin{aligned} M_C &= -2lH, \\ M_D &= -2lH + lV, \\ M_B &= -2lH + 2.5lV - 3lP, \\ M_A &= 2.5lV - 5lP. \end{aligned}\right\} \tag{9-9}$$

由于刚架上只作用有集中力，因此弯矩分布必定是分段线性的，只要M_C、M_D、M_B和M_A四值被给定或被求出，整个刚架的弯矩分布图就可画出来了。

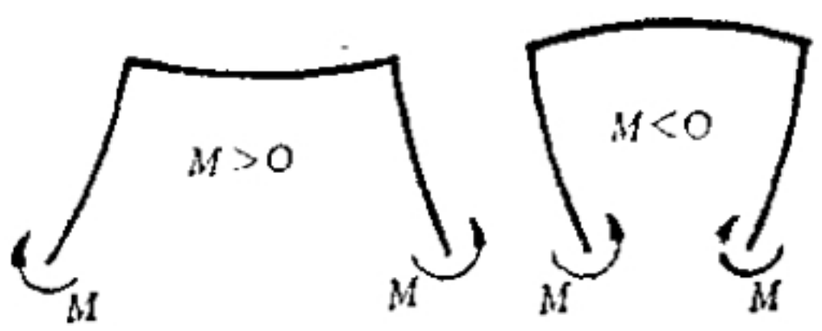


图 9-4

例如，参照机构(b)，令$M_C = -M_p$，$M_D = M_p$及$M_B = -M_p$，则代入(9-9)式可顺次求得

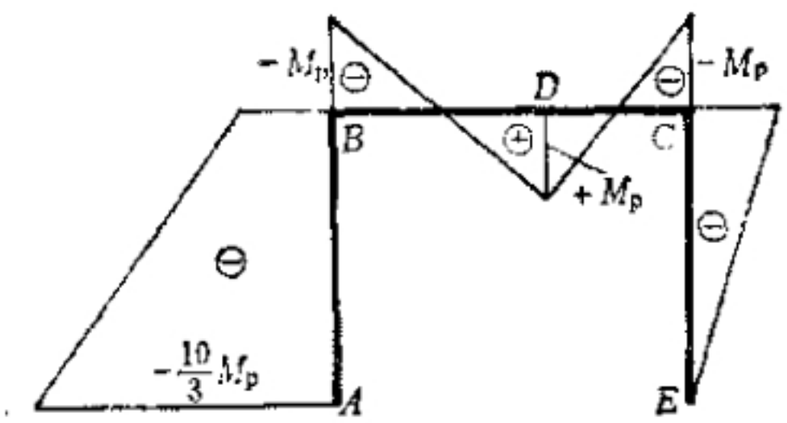


图 9-5

$$H = M_p/2l,\ V = 2M_p/l,\ P = \frac{5}{3}\frac{M_p}{l},\ M_A = -\frac{10}{3}M_p.$$

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

于是，刚架的弯矩分布图如图 9-5 。这样一个弯矩分布是满足平衡方程的，但在 AB 杆上违背屈服条件。为了保证刚架上任一截面处的弯矩都不违背屈服条件，可将这一弯矩分布乘以因子3/10，这时 $M_A=-M_p$，即 A 点成铰，但 B、C、D 三点都不再成铰，所以不再形成一个机构。相应的载荷为 $P_1^*=\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{3}\frac{M_p}{l}=0.5M_p/l$，这个值是比(9-8)式给出的 P_s 低很多的下限估值。

类似地，参照机构(c)和(d)，可分别求得（请读者自行练习其推算过程） $P_2^*=1.2M_p/l$ 和 $P_3^*=\frac{15}{16}\frac{M_p}{l}\simeq 0.94M_p/l$。于是有

$$P_1^*=0.5M_p/l<P_s<P_b^*=1.67M_p/l,$$
$$P_2^*=1.2M_p/l=P_s=P_c^*=1.2M_p/l,$$
$$P_3^*=0.94M_p/l<P_s<P_d^*=1.5M_p/l.$$

由此看到，对机构(c)，机动法和静力法求得的外载值相等并等于结构的极限载荷 P_s；而对另两种机构，机动法和静力法只能分别给出 P_s 的上限估值和下限估值 。所假设的机构偏离真实机构越远，则上下限估值相差也越大。

§9.4 极限曲线及其应用

当作用在结构上的载荷系统中的各载荷相互间存在着恒定的比例关系时，它们总可以用单一的载荷参数表示出来，并应用§9.2中的定理和§9.3中的方法来求极限载荷。事实上，§9.3末的例2就是这样做的。但是，当有若干个独立的外载或若干组独立的外载系统同时作用在结构上时，为了研究极限载荷和破损机构，就需要用到载荷空间内的极限曲面的概念。这个概念曾在§2.5中通过三杆桁架的例子引入，它同样也适用于梁和刚架的极限分析。

下面举一个刚架的例子来说明二维载荷空间(即载荷平面)内的极限曲线及其应用。考虑图 9-6(a) 所示的刚架，并设各截面具有相同的塑性极限弯矩 M_p，刚架上作用有两个独立的载荷 P 和

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

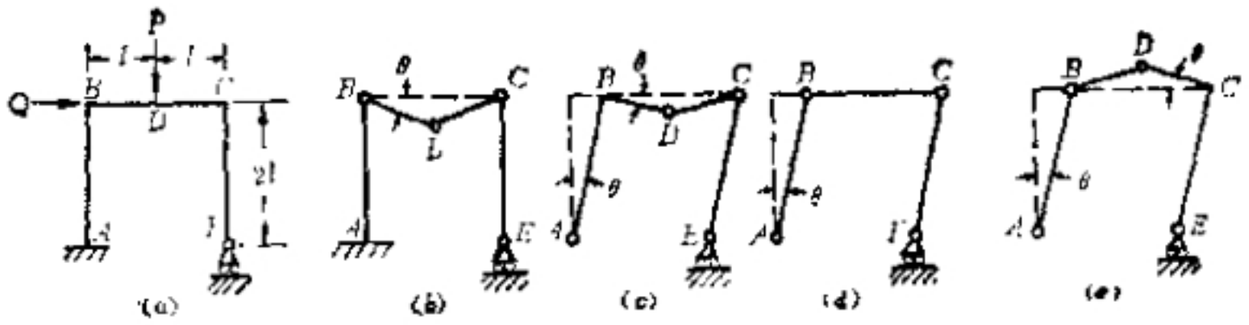


图 9-6

Q。类似于§9.3的例2，可能发生的破损机构有图9-6(*b*)、(*c*)、(*d*)、(*e*)四种形式，采用机动法可以求出相应的极限载荷估值：

机构 (*d*)：B、C、D三点成铰，由 $Pl\theta = M_p \cdot 4\theta$ 求出$P = 4M_p/l$，对Q没有限制。

机构 (*c*)：A、C、D三点成铰，由 $Q \cdot 2l\theta + Pl\theta = M_p \cdot 5\theta$ 得 $2Q + P = 5M_p/l$。

机构(*d*)：A、B、C三点成铰，由 $Q \cdot 2l\theta = M_p \cdot 3\theta$ 得 $Q = \frac{3}{2}M_p/l$，对P没有限制。

机构(*e*)：A、B、D三点成铰，由$Q \cdot 2l\theta - P \cdot l\theta = M_p \cdot 5\theta$ 得 $2Q - p = 5M_p/l$。

这样，在载荷平面$\left(\frac{Ql}{M_p}, \frac{Pl}{M_p}\right)$上，根据上述计算，四种机构各相应于一条直线，见图9-7。从原点(即外载为零的初始状

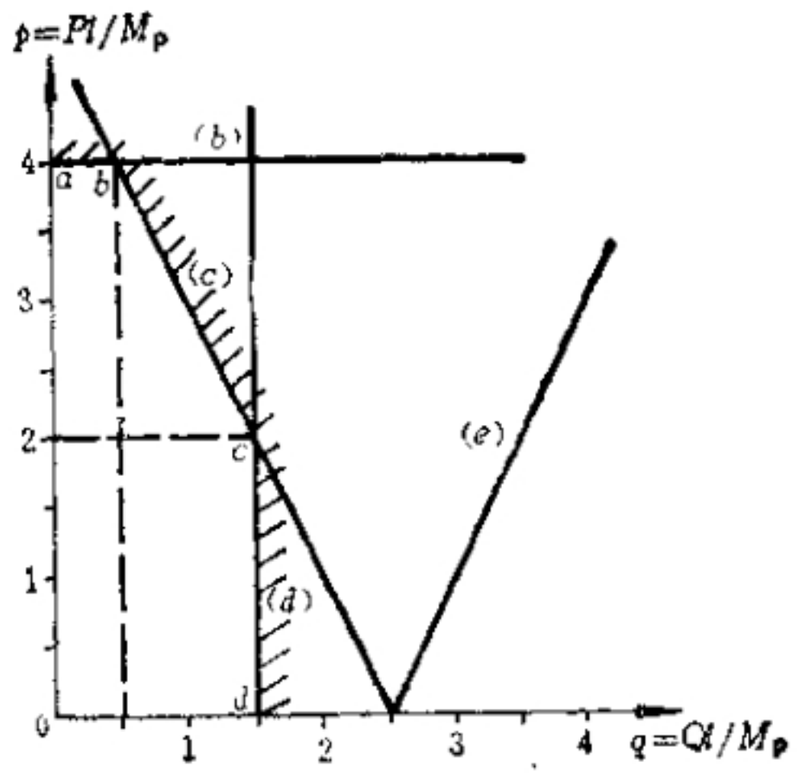


图 9-7

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

态)出发的任何射线，表示 P 与 Q 的比例加载，此射线首先遇到的直线，就表示了在这种比例载荷作用下，结构将以该直线所对应的机构形式破损。因此，折线 $abcd$ 就给出了极限曲线。在 ab 段（$0 \leqslant \frac{Q}{P} \leqslant \frac{1}{8}$），刚架按机构(b)破损；在 bc 段（$\frac{1}{8} \leqslant \frac{Q}{P} \leqslant \frac{3}{4}$），刚架按机构(c)破损；在 cd 段（$\frac{3}{4} \leqslant \frac{Q}{P}$），刚架按机构(d)破损。当 P、Q 均为正值时，不可能出现机构(e)的破损形式。在区域 $Oabcd$ 内，载荷 P、Q 的任何组合，都不会形成破损机构，因而称为安全区。

极限曲线的应用如下：

i）对给定的载荷组合（P、Q），可判断它是否安全。例如从图 9-7 知 $P=2M_p/l$，$Q=M_p/l$ 的组合是安全的，而 $P=M_p/l$，$Q=2M_p/l$ 的组合是不安全的。

ii）对给定的加载比例，可求出极限载荷的大小。例如对 P：$Q=1:1$ 的加载，从图 9-7 可求得极限载荷是 $P=Q=\frac{3}{2}M_p/l$。

iii）当 P 和 Q 中已知一个时，可求出对另一个的限制。例如给定 $Q=M_p/l$，从图 9-7 可求得 $P \leqslant 3M_p/l$ 时是安全的。

§9.5 梁和刚架的安定分析

在前面 §2.6 中曾研究过三杆桁架在变值载荷作用下的弹塑性性态，并引进了安定状态的概念。安定状态是指弹塑性结构内的一种有利的残余应力状态，一旦达到了这种状态，当作用在结构上的外载在一定范围内变动时，结构将只产生弹性变形而不产生新的塑性变形。

在梁和刚架的情形，设以 m_i^+ 表示在变值载荷作用下在截面 i 处按弹性力学规律可能产生的最大(正号)无量纲弯矩（$m_i^+=M_i^+/M_p$），以 m_i^- 表示同一截面上可能产生的最小(负号)无量纲弯矩，以 m_i^0 表示对应于安定状态的残余无量纲弯矩。那么，根据安定状态的条件，应该满足下述不等式：

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

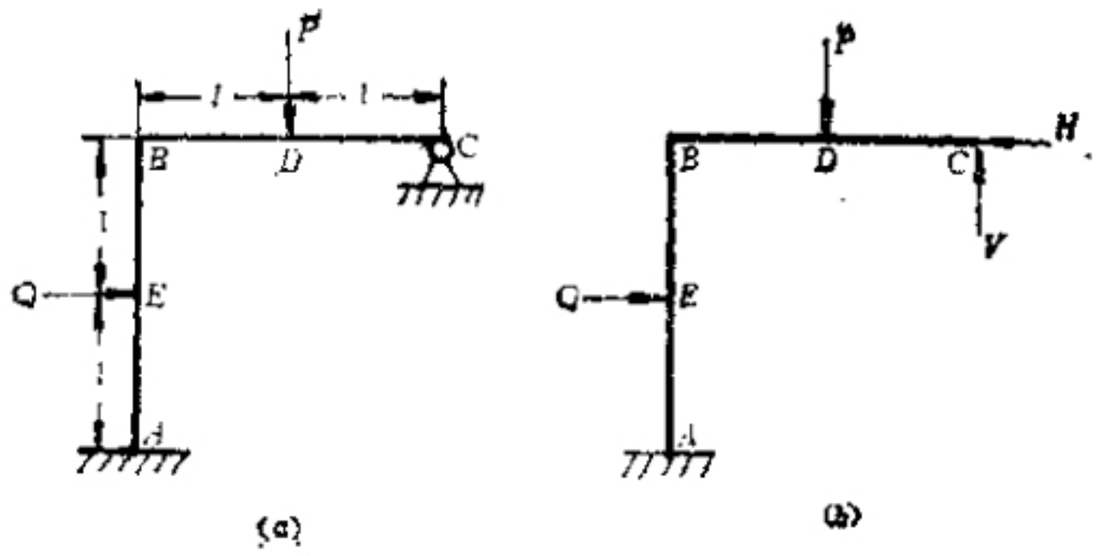


图 9-8

$$-1\leqslant m_i^0+m_i^-\leqslant m_i^0+m_i^+\leqslant 1. \tag{9-10}$$

下面举一个例子来说明如何求安定状态对载荷变化范围的限制。考虑图 9-8(a) 所示的刚架，二杆截面相同且均为矩形，受力 $P\geqslant 0$ 及 $Q\geqslant 0$. 首先，按照结构力学的方法可求得弹性解为

$$\left.\begin{aligned} m_A&=\frac{3}{28}(p-3q),\quad m_B=-\frac{3}{28}(2p+q),\\ m_D&=\frac{1}{56}(22p-3q),\ m_E=-\frac{1}{56}(3p-16q),\end{aligned}\right\} \tag{9-11}$$

其中 $m_i=M_i/M_p$，$p=Pl/M_p$，$q=Ql/M_p$。由于弹性解要求 $|m_i|\leqslant m_0=\frac{2}{3}$, $i=A,B,D,E$, $m_0=M_0/M_p$，因此从(9-11)式易知在载荷平面(q,p)的第一象限 $(p\geqslant 0, q\geqslant 0)$ 内弹性区域由以下三条直线与坐标轴围成：

$$\left.\begin{aligned} &3q-p=\frac{56}{9},\ (\text{对应于}\ |m_A|=\frac{2}{3});\\ &2p+q=\frac{56}{9},\ (\text{对应于}\ |m_B|=\frac{2}{3});\\ &22p-3q=\frac{112}{3},\ (\text{对应于}\ |m_D|=\frac{2}{3}).\end{aligned}\right\} \tag{9-12}$$

其图象见图 9-9 内划有阴影线的区域。

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

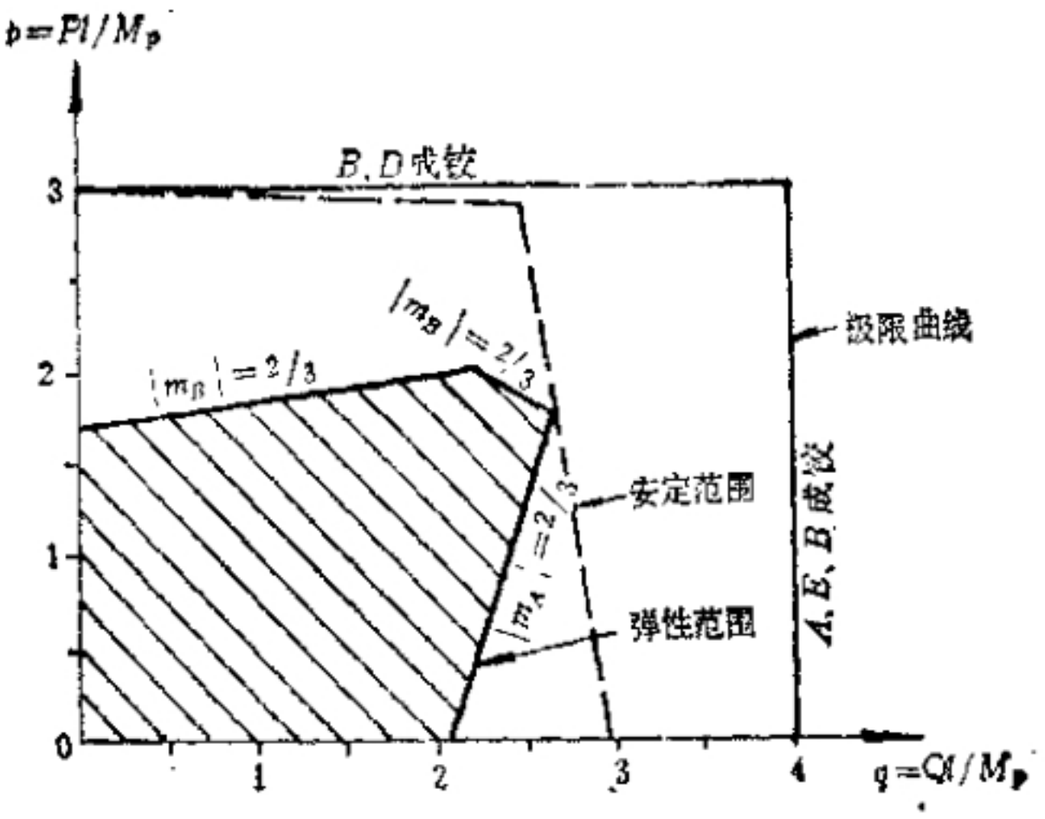


图 9-9

为求 P、Q 共同作用下的极限曲线，可以利用 § 9.4中的方法。当 B、D 二点成铰时得出 $p_u=3$；当 A、E、B 三点成铰时得出 $q_u=4$。这是按机动法求出的结果。也可以按静力法来求，这时注意到刚架是二次静不定的，引入 C 点的铅直反力 V 和水平反力 H（见图 9-8(b)），则由平衡条件可写出

$$M_D=Vl,\quad M_B=2Vl-Pl,$$
$$M_E=M_B+Hl,\quad M_A=M_B+2Hl-Ql.$$

从中消掉 V 和 H，得到两个平衡方程

$$\left.\begin{aligned} m_B&=2m_D-p,\\ m_B&=2m_E-m_A-q. \end{aligned}\right\}\qquad(9\ 13)$$

要使 $|m_i|\leqslant 1$，$(i=A,B,C,E)$，就有

$$\left.\begin{aligned} -2-p\leqslant m_B&\leqslant 2-p,\\ -3-q\leqslant m_B&\leqslant 3-q,\\ -1\leqslant m_B&\leqslant 1. \end{aligned}\right\}$$

从这个不等式方程组中消去 m_B，就得到

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

$$\left.\begin{aligned} -2-p\leqslant 3-q,\quad & -2-p\leqslant 1,\\ -3-q\leqslant 1,\quad & -3-q\leqslant 2-p,\\ -1\leqslant 2-p,\quad & -1\leqslant 3-q. \end{aligned}\right\}$$

在 $p\geqslant 0$，$q\geqslant 0$ 的条件下，给出的限制正是

$$0\leqslant p\leqslant 2,\quad 0\leqslant q\leqslant 4. \tag{9-14}$$

这与机动法求出的结果相同。因此，在载荷平面 (q,p) 上，极限曲线围出一个矩形，见图 9-9 的实线所限定的范围。

现在来求安定状态的载荷区域。从(9-11)式知，在 $p\geqslant 0$，$q\geqslant 0$ 范围内变动 p、q 产生的 A、B、D、E 各截面上的弹性弯矩的最大值和最小值分别为

$$\left.\begin{aligned} m_A^+ &= \frac{3}{28}p, \qquad m_A^- = -\frac{9}{28}q;\\ m_B^+ &= 0, \qquad\qquad m_B^- = -\frac{3}{28}(2p+q);\\ m_D^+ &= \frac{11}{28}p, \qquad m_D^- = -\frac{3}{56}q;\\ m_E^+ &= \frac{2}{7}q, \qquad m_E^- = -\frac{3}{56}p. \end{aligned}\right\}$$

由于安定条件(9-10)式可改写为

$$-1-m_i^-\leqslant m_i^\circ\leqslant 1-m_i^+, \tag{9-15}$$

所以对本问题可写出

$$\left.\begin{aligned} -1+\frac{9}{28}q\leqslant m_A^\circ &\leqslant 1-\frac{3}{28}p,\\ -1-\frac{3}{11}p+\frac{3}{28}q\leqslant m_B^\circ &\leqslant 1,\\ -1+\frac{3}{56}q\leqslant m_D^\circ &\leqslant 1-\frac{11}{28}p,\\ -1+\frac{3}{56}p\leqslant m_E^\circ &\leqslant 1-\frac{2}{7}q. \end{aligned}\right\} \tag{9-16}$$

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

又由于残余弯矩 m_A°，m_B°，m_D°，m_E° 间应满足 $p=q=0$ 情况下的平衡方程，从(9-13)式得知

$$m_E^\circ = 2m_D^\circ,\quad m_E^\bullet = 2m_E^\circ - m_A^\circ. \tag{9-17}$$

利用(9-17)式改写不等式方程组(9-15)，就有

$$\left.\begin{aligned} &-1+\frac{3}{14}p+\frac{3}{28}q\leqslant m_E^\circ\leqslant 1,\\ &-2+\frac{3}{28}q\leqslant m_E^\circ\leqslant 2-\frac{11}{14}p,\\ &-1+\frac{3}{28}p-\frac{9}{28}q\leqslant m_E^\circ\leqslant 1-\frac{4}{7}q+\frac{3}{28}p. \end{aligned}\right\} \tag{9-18}$$

在不等号左边的三个数中，$-1+\frac{3}{14}p+\frac{3}{28}q$ 为最大，令其小于不等号右边的三个数，分别给出

$$\left.\begin{aligned} &p+\frac{1}{2}q\leqslant\frac{28}{3},\\ &p+\frac{3}{28}q\leqslant 3,\\ &p+\frac{19}{3}q\leqslant\frac{56}{3}. \end{aligned}\right\} \tag{9-19}$$

这个不等式组限定的 p、q 范围就是安定状态对载荷变化限制的范围，见图 9-9 中的虚线所围的区域。

从这个例子可以看到，在载荷平面上，安定范围一般比结构的初始弹性范围大，但比极限范围小。同时，我们也看到，求安定范围常比求极限曲线要繁冗，因而在实用上，有时也把极限载荷乘以适当的安全系数拿来近似作为安定状态所允许的载荷。

安定状态的一般性质已先后被 Bleich，Melan，Symonds 和 Koiter 等人研究过，并被归纳为安定定理。对于梁和刚架，安定定理可被表述为：

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

如果存在任何安定弯矩分布 m_1^*，则梁和刚架从它的任一残余应力状态出发，可以经过有限量的塑性变形逐步达到 m_1^*。换句话说，只要满足(9-10)式的 m_1^* 是存在的，结构就能够达到安定状态。

对于这个定理的证明，可参看[9.1]或[9.2]。

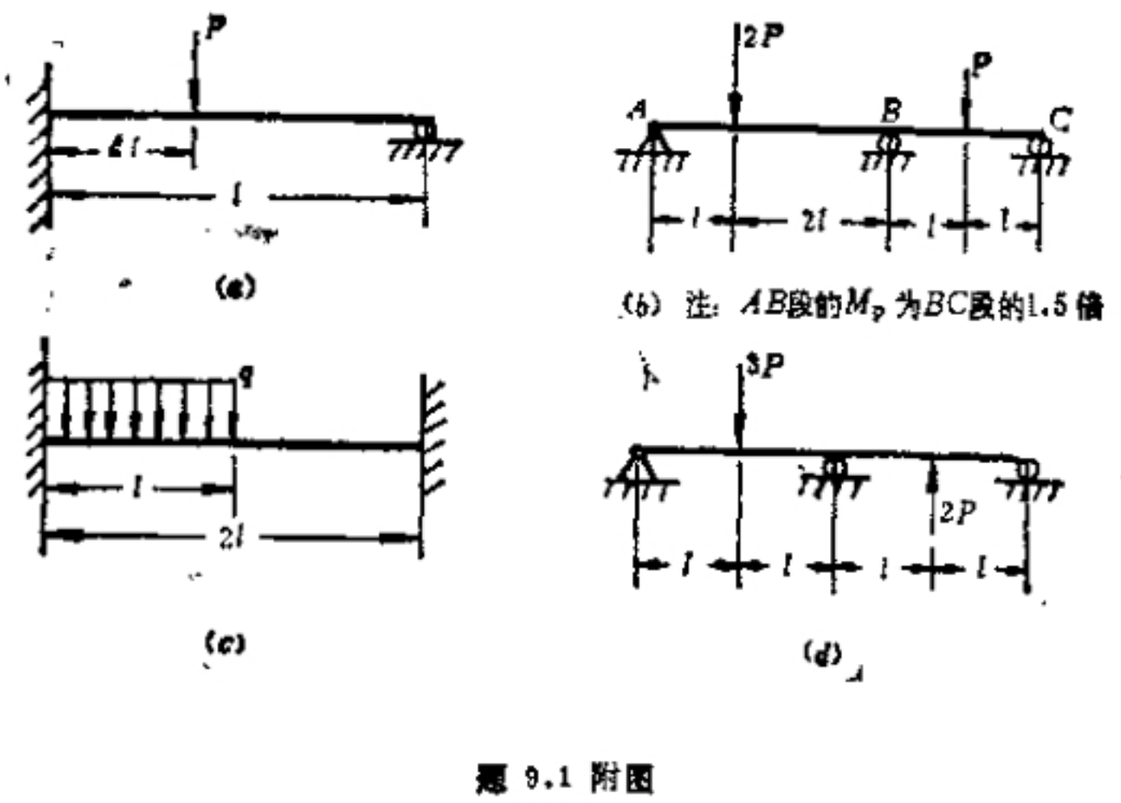
参考文献

[9.1]Hodge. P. G., Jr., *Plastic Analysis of Structures*, McGraw-Hill, 1959. 中译本：P. G. 霍奇，《结构的塑性分析》，萬咏秋、熊祝华译，科学出版社，1966

[9.2]Martin. J. B., *Plasticity: Fundamentals and General Results*, MIT Press, 1975

习　题

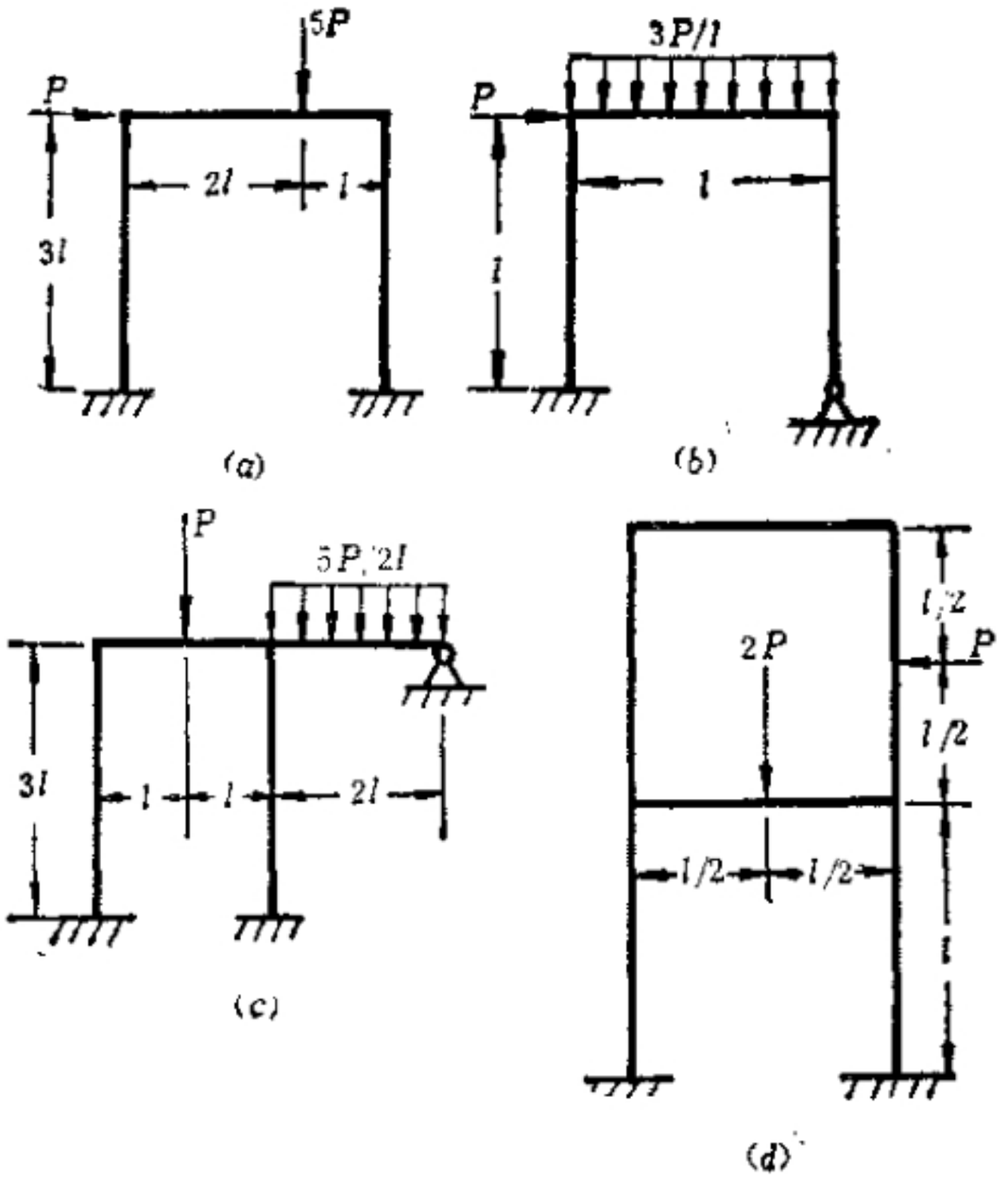
9.1　用静力法或机动法求图示静不定梁的极限载荷。除注明者外，各段梁的极限弯矩 M_p 均相同。



题 9.1 附图

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

9.2 求图示刚架的极限载荷。



题 9.2 附图

9.3 长轴为 $2a$，短轴为 $2b$ 的椭圆环，截面的塑性极限弯矩为 M_p，沿长轴两端受拉力 P，求极限载荷 P_u。

9.4 对图 9-6(a)所示的刚架，求弹性解和安定解各自要求的载荷 P、Q 的变化范围，并在载荷平面（$p=Pl/M_p$，$q=Ql/M_p$）上表示出来。

9.5 对题 9.1(b) 中的静不定梁的问题，将力 $2P$ 改为 Q，P 与 Q 各自独立变化，但 $P\geqslant 0$，$Q\geqslant 0$，求载荷平面（$p=Pl/M_p$，$q=Ql/M_p$）上的极限曲线的方程。

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

第十章　板的极限分析

§10.1　板的基本方程

一、薄板弯曲问题的基本假设

薄板是指这样一种结构：其一个维度远较其他两个维度为小。薄板的弯曲问题只考虑载荷沿这个小维度方向作用。通常我们取 z 轴沿这个方向，而 x 和 y 轴则取在板的中面内，如图 10-1。

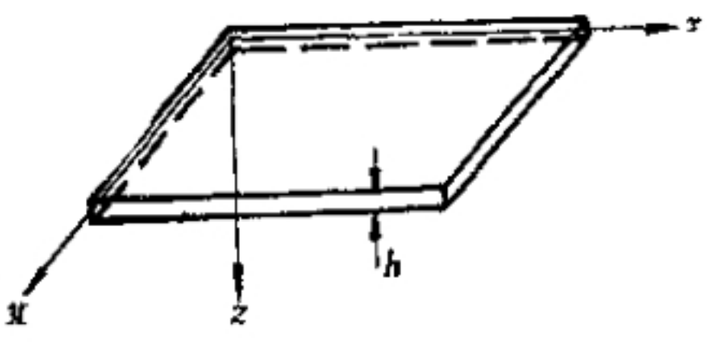


图 10-1

在弹性力学中，对于薄板在横向载荷作用下的弯曲问题，曾引进几条基本假设：

i）在变形过程中，板的中面不伸长或压缩；

ii）中面的挠度与板厚相比很小；

iii）变形前正交于中面的法线，变形后仍保持为直线，并且正交于变形后的中面；

iv）垂直于中面的正应变可略去不计。

这里，i）和ii）是互相联系的，没有小挠度假定，一般就无法保证中面不伸长或压缩。iii）通常被称为直法线假定，它起着类似于梁的初等弯曲理论中的平截面假定的作用。

若以 u、v、w 记板内一点在 x、y、z 方向的位移，则由假定iv），$\dfrac{\partial w}{\partial z}=0$ 可知 $w=w(x,y)$。同时，由假定iii）得 $\gamma_{zx}=\gamma_{yz}=0$，因此

$$\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}=0.$$

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

对 z 积分，并注意 w 与 z 无关，就有

$$u = -z\frac{\partial w}{\partial x} + f_1(x,y),$$

$$v = -z\frac{\partial w}{\partial y} + f_2(x,y),$$

其中 f_1、f_2 可为 x、y 的任意函数。但从假设 i） 必须有 $f_1(x,y) = f_2(x,y) = 0$，于是

$$\left.\begin{aligned} u &= -z\frac{\partial w}{\partial x}, \\ v &= -z\frac{\partial w}{\partial y}, \\ w &= w(x,y). \end{aligned}\right\} \qquad (10\text{-}1)$$

这表明，板的变形完全由中面的挠度 $w(x,y)$ 决定。

二、广义应力和广义应变

从位移场(10 1)出发，利用小变形时的几何关系，可求得相应的应变场为

$$\left.\begin{aligned} &\epsilon_x = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \epsilon_y = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \epsilon_z = 0, \\ &\gamma_{xy} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (10\text{-}2)$$

如所周知，在板壳问题中，如同在杆和梁的问题中一样，采用应力和应变的合量，即采用广义应力和广义应变，要比直接采用应力和应变来得方便。当然，这些合量也是从应力和应变的实际分量出发，经过适当的积分而得到的。而且，一旦选定了广义应力之后，应该按照内功的公式来决定相应的广义应变。

因此，对板的弯曲，可考察单位面积上的内功

$$W_i = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{xy}\gamma_{xy})\,\mathrm{d}z$$

$$= \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_x \mathrm{d}z + \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_y \mathrm{d}z$$

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

$$+\left(-2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)\int_{-h/2}^{h/2}z\tau_{xy}\mathrm{d}z,$$

这里 h 是板的厚度。于是，

$$W_i = M_x\kappa_x + M_y\kappa_y + M_{xy}\kappa_{xy}, \tag{10-3}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \int_{-h/2}^{h/2}z\sigma_x\mathrm{d}z, \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2}z\sigma_y\mathrm{d}z, \\ M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2}z\tau_{xy}\mathrm{d}z \end{aligned}\right\} \tag{10-4}$$

是弯矩和扭矩，均为广义应力；而

$$\left.\begin{aligned} \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ \kappa_{xy} &= -2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{10-5}$$

是中面的曲率和扭曲率，均为广义应变。

根据前述假设建立起来的弹性薄板理论是成功的，是与实验相符的。同时，由于这些假设纯属几何性质，并不涉及材料的本构关系，因此可以期望只要小变形假定成立，它们对于弹塑性薄板或刚塑性薄板的弯曲问题依然有效。下面我们就假定(10-1)至(10-5)或在板的塑性弯曲问题中仍然成立。

三、广义屈服条件

现在我们来讨论用广义应力表示的屈服条件。从（10-2）式可知，在中面的一条法线上，应变正比于距中面的距离 z。因此，在中面同一侧的所有点的应变率向量必具有相同的方向，即它的各分量间的比值不依赖于 z：

$$\dot{\epsilon}_x : \dot{\epsilon}_y : \dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2} : \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y^2} : 2\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x\partial y}. \tag{10-6}$$

而在中面的另一侧，则都具有与此相反的应变率向量方向。如果材料的屈服条件 $f(\sigma_{ij}) = 0$ 在应力空间中对称于原点，则沿中面

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

同一法线上各点的应力状态将位于屈服曲线的两个对称点上（例如图 10 2(a) 中的 P_1 和 P_2 点），其应力分布反对称于中面，如图10-2(b) 所示。如果 $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ 表示 z 为正时的极限应力状态，则 z 为负时的极限应力状态就是 $(-\sigma_x, -\sigma_y, -\tau_{xy})$，因而当全板进入极限状态时力矩为

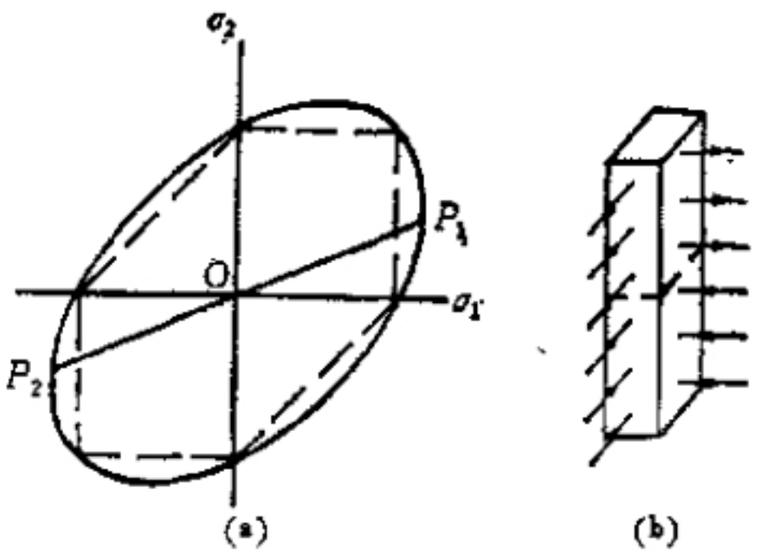


图 10-2

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z \mathrm{d}z = 2\sigma_x \int_0^{h/2} z dz = \sigma_x h^2/4, \quad (10\text{-}7a)$$

同理

$$M_y = \sigma_y h^2/4, \quad M_{xy} = \tau_{xy} h^2/4. \quad (10\ 7b)$$

类似于梁的弯曲理论中的塑性极限弯矩 M_p，单位宽度的板的塑性极限弯矩为(当采用 Tresca 屈服条件时)

$$M_0 = Yh^2/4, \quad (10\text{-}8)$$

其中 Y 是材料的屈服应力，h 是板的厚度。

在一般情况下，总可以将屈服条件写成无量纲形式

$$f\left(\frac{\sigma_x}{Y}, \frac{\sigma_y}{Y}, \frac{\tau_{xy}}{Y}\right) = 0. \quad (10\text{-}9)$$

引入无量纲弯矩作为广义应力，并利用(10-7)和(10-8)式，则有

$$\left.\begin{aligned} m_x &= M_x/M = \sigma_x/Y, \\ m_y &= M_y/M_0 = \sigma_y/Y, \\ m_{xy} &= M_{xy}/M_0 = \tau_{xy}/Y. \end{aligned}\right\} \quad (10\text{-}10)$$

把 (10-10) 式代入 (10-9) 式就得到广义屈服条件

$$f(m_x, m_y, m_{xy}) = 0. \quad (10\text{-}11)$$

这表明，以无量纲弯矩表示的屈服条件和以无量纲应力表示的屈服条件具有完全相同的函数形式。

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

例如，Mises 屈服条件

$$\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 = Y^2$$

可立即改写成广义应力的屈服条件

$$m_x^2 - m_x m_y + m_y^2 + 3m_{xy}^2 = 1. \tag{10-12}$$

相应的流动法则就给出了曲率变化率

$$\left.\begin{aligned} \kappa_x &= \mu(2m_x - m_y), \\ \kappa_y &= \mu(2m_y - m_x), \\ \kappa_{xy} &= 6\mu m_{xy}. \end{aligned}\right\} \tag{10-13}$$

其中 μ 为任一正的数量因子。

又如，在主应力已知时 Tresca 条件为

$$\max(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_2|) = Y,$$

则广义应力的屈服条件为

$$\max(|m_1|, |m_2|, |m_1 - m_2|) = 1 \tag{10-14}$$

其中 m_1, m_2 是在主方向上的无量纲弯矩。相应的流动法则可以根据塑性位势理论分段写出。

§10.2 圆板轴对称弯曲的极限分析

轴对称载荷作用下的圆板，是主方向为已知的一个例子。假定板的支承也是轴对称的，则圆板内的应力场和速度场都是轴对称的。采用柱坐标(r, θ, z)，则板内不为零的应力分量为 σ_r、σ_θ、τ_{rz} 和 σ_z。在薄板的情况下，往往将 τ_{rz} 和 σ_z 忽略不计，只剩σ_r和 σ_θ 两个应力分量。显然它们都是主应力。

从 σ_r 和 σ_θ 可引进两个广义应力

$$M_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r z\,dz, \qquad M_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta z\,dz; \tag{10-15}$$

相应的广义应变率为

$$\kappa_r = -\dot{w}'', \qquad \kappa_\theta = -\frac{1}{r}\dot{w}', \tag{10-16}$$

其中 $'$ 代表 $\frac{\partial}{\partial r}$，$\cdot$ 代表 $\frac{\partial}{\partial t}$，但这里 t 不一定是真实时间，而可

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

能是变形过程的某个参量，"率"也不一定是真实的速率，而是相对于这一过程参量的变化率。上述广义应力与广义应变率由塑性内功率的表达式联系：

$$W_i = M_r\dot{\kappa}_r + M_\theta\dot{\kappa}_\theta. \tag{10-17}$$

注意这里只有 M_r、M_θ 两个广义应力，剪力 Q 不作塑性功（这是直法线假定的结果），因而只能看成是反力而不是广义应力。

考虑一个单元体的平衡，如图 10-3，可得平衡方程

$$\left.\begin{aligned}(rM_r)' - M_\theta &= rQ,\\ (rQ)' + rp(r) &= 0,\end{aligned}\right\} \tag{10-18}$$

其中 $p(r)$ 为横向载荷的集度。剪力 Q 是反力，因而总可以在平衡方程中消去，于是从(10-18)式得到

$$(rM_r)' - M_\theta = -\int_0^r rp(r)\,dr. \tag{10-19}$$

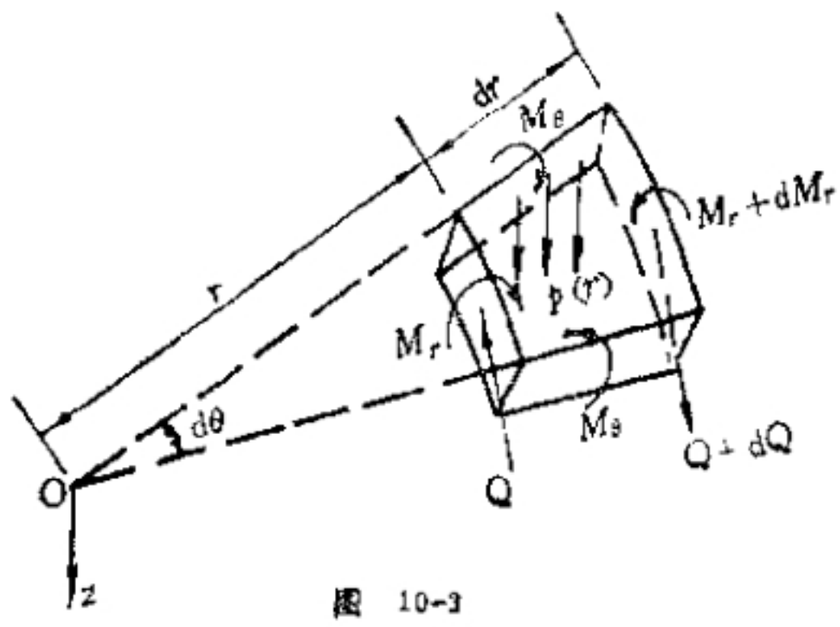


图 10-3

同时，因主方向已知，应用 Tresca 屈服条件较为方便，有

$$\left.\begin{aligned}|M_r| &= M_0,\\ |M_\theta| &= M_0,\\ |M_r - M_\theta| &= M_0.\end{aligned}\right\} \tag{10-20}$$

反力 Q 也不出现在屈服条件中。于是(10-19)和(10-20)是只包含 M_r 与 M_θ 的两个应力方程，一般说来，只要有足够的应力边条件，这个问题就属于"静定"的。求得应力场后，利用流动法则给出的关于曲率变化率($\dot{\kappa}_r$, $\dot{\kappa}_\theta$)的两个方程式，从中消去不定因子 μ，可得关于 w 的一个方程式，只要有足够的速度边条件，也就可以

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

确定与上述应力场相关连的速度场。这就是求解轴对称圆板弯曲问题的一般步骤。

如果全板的应力状态都位于 Tresca 屈服曲线的一条直线段上，那么极易得到完全解，只须根据边条件计算任意常数就行。但一般地说，在轴对称变形条件下的圆板处于极限状态时，板内可分为若干个环形区域，不同区域内的应力状态位于 Tresca 屈服六边形的不同直线段。在这种情况下，就需要确定区域间的边界 Γ。在 Γ 上，根据平衡条件，M_r 和 Q 应该连续；但在 Γ 两侧，M_θ^- 和 M_θ^+ 是独立地平衡的，故 M_θ 可沿 Γ 有间断。若 M_θ 不连续，则从平衡方程(10 19)可知 $\frac{dM_r}{dr}$ 也不连续。此外，由于材料必须保持连续性，因而在 Γ 上 w 必须连续，但 w' 和 w'' 可以间断，因而在 Γ 上 κ_r 和 κ_θ 也可以有间断。

当 w' 在 Γ 上不连续时，$\kappa_r \to \infty$，或即 $\kappa_\theta/\kappa_r = 0$，因而应力点必定在屈服六边形的 $|M_r| = M_0$ 段落上或在相应的角点上。这时在 Γ 处就形成所谓塑性铰圆，它的性质和梁中的塑性铰很相似。实际上，可以将塑性铰圆看作宽为 δ 的狭窄环形区，在其内 w'' 变化急剧，但仍连续。当 $\delta \to 0$ 时，$\kappa_\theta/\kappa_r = 0$。反过来，也可以看出，凡 $|M_r| < M_0$ 处，即非塑性铰圆处，w' 一定连续。

板的边界条件是：在中心处 $(r = 0)$，$M_r = M_\theta$；在简支边上，$w = 0$，$M_r = 0$；在固支边上，$w = 0$，$w' = 0$；若在固支边上形成了塑性铰圆，则有 $w = 0$，$|M_r| = M_0$。

有了这些基本关系，我们即可着手对圆板弯曲的具体问题进行极限分析了。

§10.3 简支圆板的极限载荷

设半径为 a 的简支圆板上作用着两组轴对称的横向载荷 p_1 和 p_2，如图 10-4(a) 所示，即有

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

$$p=\begin{cases} p_1+p_2, & 0\leqslant r\leqslant b; \\ p_1 & b\leqslant r\leqslant a. \end{cases} \tag{10-21}$$

在这些载荷的作用下，圆板发生下凸的轴对称变形，因此板内弯矩 M_r 和 M_θ 都为正值，应用 Tresca 屈服条件（见图10-4(b)）时，应力剖面只可能在屈服曲线的 ABC 段上。又因在板的中心 $(r=0)$ 处 $M_r=M_\theta$，故应力点在 B 点；在简支边上 $M_r=0$，故应力点在 C 点。根据板内广义应力的连续性，由此估计应力剖面在 BC 段。

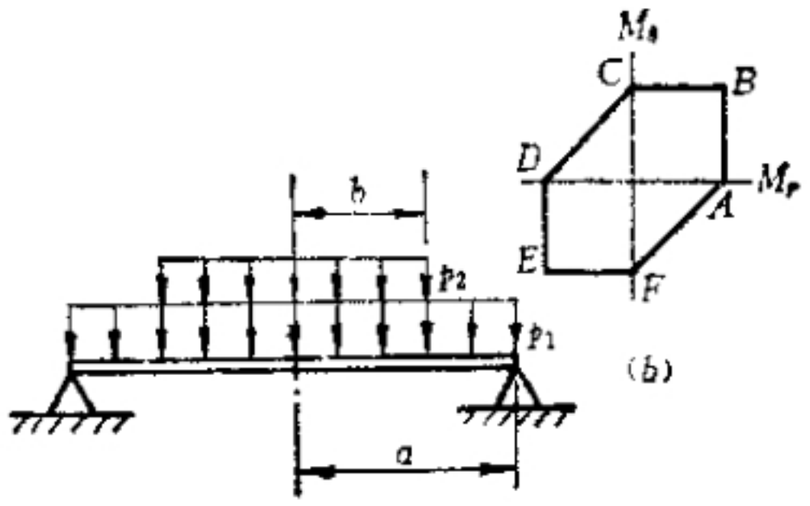


图 10-4

事实上，我们可以排除应力剖面位于 AB 段的可能性，理由如下。在 AB 段上，$M_r=M_0$，故 $\dfrac{\mathrm{d}M_r}{\mathrm{d}r}=0$，代入平衡方程得

$$M_\theta=M_0+\int_0^r pr\mathrm{d}r\geqslant M_0,$$

这就破坏了屈服条件。

从应力剖面位于 BC 段可知板内应力满足

$$M_\theta=M_0,\ 0\leqslant M_r\leqslant M_0.$$

由于本问题中有两组独立的外载 p_1 和 p_2，在作极限分析时必须共同提出一个载荷因子 η，而极限分析的目标就是求出 η 的准确值或其上下限。在平衡方程(10-19)中，分布载荷用 ηp 代入，同时 M_θ 以 $M_\theta=M_0$ 代入，分别在 $0\leqslant r\leqslant b$ 及 $b\leqslant r\leqslant a$ 段内积分，将出现两个积分常数、连同极限载荷因子 η，共有三个待定量，它们可以利用以下三个条件定出：

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

在 $r=0$ 处，$M_r=M_0$；

在 $r=a$ 处，$M_r=0$；

在 $r=b$ 处，M_r 连续。

结果得到

$$M_r=\begin{cases} M_0-\dfrac{1}{6}\eta(p_1-p_2)r^2, & 0\leqslant r\leqslant b, \\ M_0-\dfrac{1}{6}\eta p_1 r^2-\dfrac{1}{6}\eta p_2\left(3b^2-\dfrac{2b^3}{r}\right), & b\leqslant r\leqslant a, \end{cases} \tag{10-22}$$

及

$$\eta=\frac{6M_0}{a^2p_1+b^2p_2\left(3-\dfrac{2b}{a}\right)}>0. \tag{10-23}$$

这是用平衡方程求得的结果，还应校核一下是否下述背屈服条件。从(10-22)得

$$\frac{\mathrm{d}M_r}{\mathrm{d}r}=\begin{cases} -\dfrac{1}{3}\eta(p_1+p_2)r\leqslant 0 & 0\leqslant r\leqslant b, \\ -\dfrac{1}{3}\eta r\left(p_1+p_2\dfrac{b^3}{r^3}\right)<0, & b\leqslant r\leqslant a, \end{cases}$$

且 M_r 在 $r=b$ 连续，因而 $\dfrac{\mathrm{d}M_r}{\mathrm{d}r}<0$ 说明 M_r 在 $[0,a]$ 区间内是单调下降的。又因 $M_r|_{r=0}=M_0$，$M_r|_{r=a}=0$，可知 M_r 确在 M_0 与 0 之间，即不破坏屈服条件。这证明了(10-23)式所给出的 η 满足全部静力条件，它至少是真实载荷因子的一个下限。

与屈服曲线 BC 段相关连的速度场为

$$\kappa_r=-w''=0,$$

积分得

$$w=A+Br.$$

根据边条件 $w|_{r=a}=0$ 及 $\kappa_\theta=-\dfrac{1}{r}w'>0$ 得出

$$w=w_0\left(1-\frac{r}{a}\right), \tag{10 24}$$

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

式中 $\omega_0>0$ 为板中心的速度，其值不定。在板中心 ω' 不连续，亦即有一个集中铰圆；但因此处应力处在角点 B 上，这种不连续是允许的。这样，就证明了与因子 η 相关连的速度场也是一个机动场，所以(10-23)式所给出的 η 又是真实载荷因子的一个上限。因之，上面得到的已是完全解，而 η 就是所求的极限载荷因子。

下面讨论几种特殊情况：

i) 当 $p_2=0$ 时，(10-23)式给出

$$\eta p_1 = 6M_0/a^2, \tag{10-25}$$

这是简支圆板在全板受到均布载荷作用时的极限载荷。这时，从(10-22)式可知

$$M_r = M_0 - \frac{1}{6}\left(\frac{6M_0}{a^2}\right)r^2 = M_0\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right),$$

而 $M_\theta = M_0$，故板内弯矩分布如图 10-5。

ii) 当 $p_1=0$ 时，(10-23)式给出

$$\eta p_2 = 6M_0/b^2\left(3-\frac{2b}{a}\right), \tag{10-26}$$

这是简支圆板在其中心部分 ($0\leqslant r\leqslant b$) 受到均布载荷作用时的极限载荷。

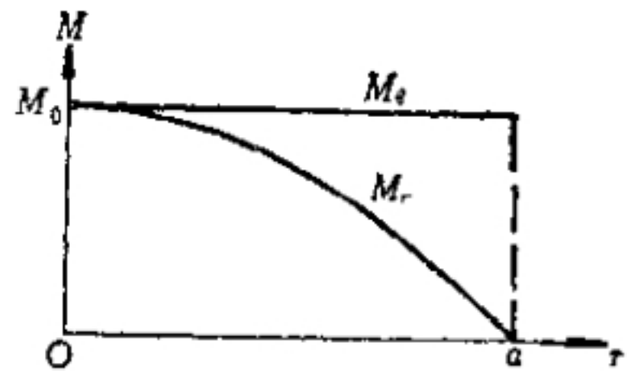


图 10-5

iii) 当 $p_1=0$ 及 $b\to 0$ 时得到集中力作用在圆板中心时的极限载荷值

$$P_0 = \lim_{b\to 0}\pi b^2\cdot\eta p_2 = 2\pi M_0. \tag{10-27}$$

注意对于厚度为 h 的板，$M_0=\frac{1}{4}Yh^2$ 具有力的量纲，所以 $2\pi M_0$ 代表一个力。(10-27)式还表明，当考虑集中力作用下的圆板时，极限载荷 P_0 与板的半径 a 无关。

对于机动场，我们注意到，不论是 p_1 与 p_2 联合作用，还是其中之一单独作用，由(10-24)式所描述的机动场总是一个以板中心

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

为顶点的锥形速度场。这就是说，刚塑性简支圆板在轴对称载荷作用下，至少在刚开始发生塑性流动的那个时刻，它一定是变成一个圆锥壳。锥形速度场的重要性，在下面的大变形分析（§ 10.6）中还可看到。

§ 10.4 固支圆板的极限载荷

设圆板的外周边是固定的，受到均匀满布的载荷 p 作用，如图 10-6。在板中心，因 $M_r = M_\theta$，应力点必在屈服六边形的角点 B。由板的变形的情况可以期望 M_r 向外逐渐减小且在固支边上取负值，因而应力剖面可望在 BCD 段上，但是否会到达 D 点尚不知道。事实上，在固支边界 $r = a$ 上可能有两种情况：

i）不形成塑性铰圆而保持为固支，即 $w' = 0$，这相当于应力点未到达 D 点；

ii）形成塑性铰圆，因而 $M_r = -M_0$，这相当于应力点到达 D 点。

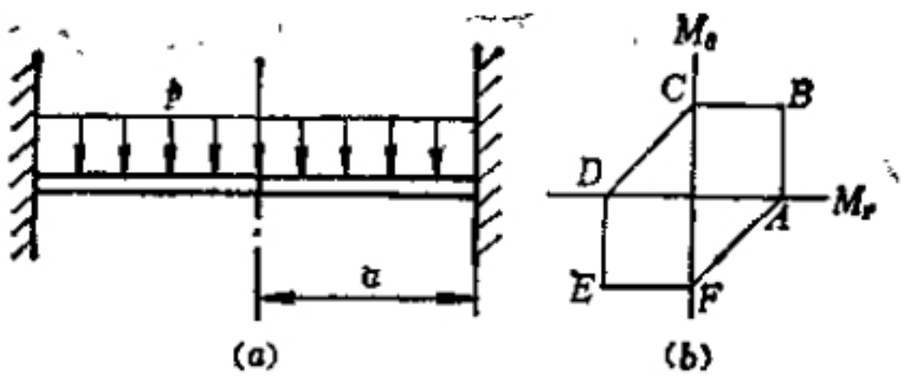


图 10-6

但无论是哪种情况，在与固支边紧邻的一个环形区域内，应力剖面必定在 CD 上。从流动法则可知在这个区域内

$$\kappa_r + \kappa_\theta = 0,$$

或即

$$w'' + \frac{1}{r}w' = 0. \tag{10 28}$$

积分此式并注意到边界条件及 $w' \leqslant 0$（因为 $\kappa_r \geqslant 0$）可得

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

$$w = A\ln\left(\frac{a}{r}\right). \tag{10-29}$$

对于这一速度场，$w' = -\frac{A}{r} \neq 0$，不能满足上述情形 i）的条件。

因此，固支边界一定要形成塑性铰圆，于是，在 $r = a$ 处 $M_r = -M_0$，$M_\theta = 0$。

既然应力剖面是在 BCD 上而 M_r 在板内又是连续变化的，板内必有某处应力点在 C 点。设该处为 $r = r_1$，则中心部分 $0 \leqslant r \leqslant r_1$ 处于 BC 段，与 §10.3的简支圆板的解相一致，为

$$\left.\begin{aligned} M_\theta &= M_0, \\ M_r &= M_0 - \frac{1}{6}pr^2, \end{aligned}\right\} \quad 0 \leqslant r \leqslant r_1, \tag{10-30}$$

而 $M_r|_{r=r_1} = 0$，故有

$$r_1 = \sqrt{6M_0/p}. \tag{10-31}$$

在外环区域 $r_1 \leqslant r \leqslant a$，应力处于 CD 段，即

$$M_\theta - M_r = M_0.$$

代入平衡方程(10-19)式，得到

$$M_r' - \frac{M_0}{r} = -\frac{1}{2}pr.$$

对 r 积分，并用边条件 $M_r|_{r=r_1} = 0$ 定常数，得

$$M_r = M_0\ln\frac{r}{r_1} - \frac{1}{4}p(r^2 - r_1^2), \quad r_1 \leqslant r \leqslant a. \tag{10-32}$$

利用(10-31)式并用固支边形成塑性铰圆的条件 $M_r|_{r=a} = -M_0$，可得

$$2\ln\left(\frac{a}{r_1}\right) - 3\left(\frac{a}{r_1}\right)^2 + 5 = 0. \tag{10-33}$$

这是关于 a/r_1 的一个超越方程，解之得到

$$r_1/a = 0.730, \tag{10-34}$$

因而

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

$$p=\frac{6M_0}{r_1^2}=11.26\frac{M_0}{a^2}. \tag{10-35}$$

这是固支圆板承受均布载荷时的极限载荷，与简支圆板承受均布载荷时的 $p=6\frac{M_0}{a^2}$ 相比，为其 1.88 倍。固支圆板内的弯矩分布如图 10-7。

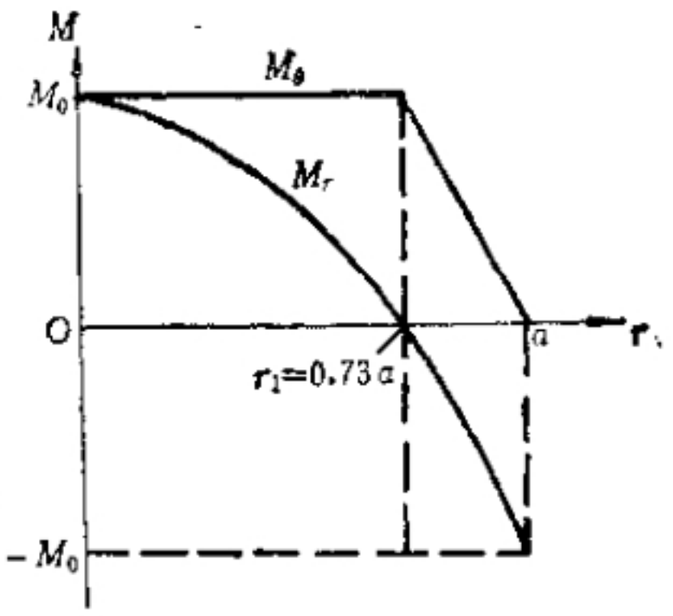


图 10-7

与上述应力场相关连的速度场将满足下述方程：

$$\left.\begin{aligned}&\varkappa_r=-w''=0,\ 0\leqslant r\leqslant r_1;\\&\varkappa_r+\varkappa_\theta=0,\\&\varkappa_\theta=-\frac{w'}{r}>0,\end{aligned}\right\}r_1\leqslant r\leqslant a.$$

积分上式，并利用边界条件和连接条件

在 $r=0$ 处，$w=w_0$（不定值），

在 $r=a$ 处，$w=0$，

在 $r=r_1$ 处，w 和 w' 都连续；

同时要求在整个板内，$\varkappa_\theta>0$ 或即 $w'<0$，可得到下述速度场：

$$w=\begin{cases}w_0\left[1-\dfrac{r}{r_1}+\ln\left(\dfrac{a}{r_1}\right)\right]\Big/\left[1+\ln\left(\dfrac{a}{r_1}\right)\right], & 0\leqslant r\leqslant r_1;\\[2ex] w_0\ln\left(\dfrac{a}{r}\right)\Big/\left[1+\ln\left(\dfrac{a}{r_1}\right)\right], & r_1\leqslant r\leqslant a.\end{cases}$$

(10-36)

或即

$$w=\begin{cases}0.761w_0\left(1.313-\dfrac{r}{r_1}\right), & 0\leqslant r\leqslant r_1;\\[2ex] 0.761w_0\ln\left(\dfrac{a}{r}\right), & r_1\leqslant r\leqslant a.\end{cases} \tag{10-37}$$

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

可见，在板的中部($0 \leqslant r \leqslant r_1 = 0.730a$) 仍为锥形速度场，而外环区域($r_1 \leqslant r \leqslant a$) 则不再为锥形。在连接处速度为 $0.240\dot{w}_0$。整个速度分布如图 10-8 所示。

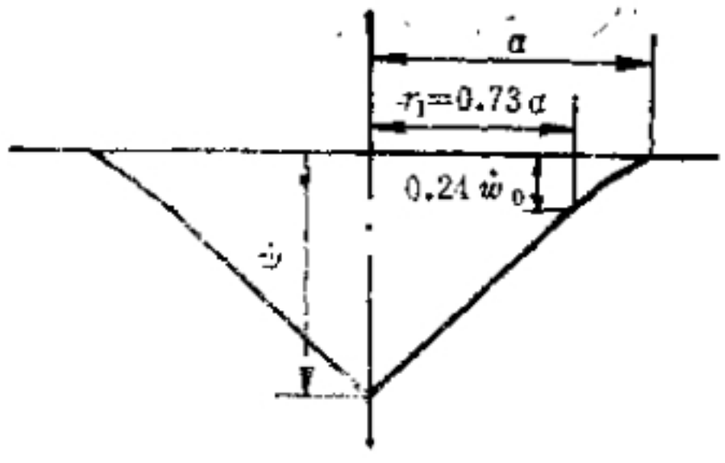


图 10-8

§10.5 非圆板的机动解

从§10.2至§10.4我们看到，圆板的轴对称弯曲问题在适当的边界条件下总可以得到静定的应力场，同时相应的速度场满足运动许可条件，因此得到的都是完全解。对非圆板则一般无法求得完全解，这时需要应用界限定理来获得对极限载荷的估计。一般说来，构造上限解比构造下限解要容易一些，因为通过实验观察或弹性分析，往往比较容易估计板的最大弯矩发生在哪些地方或哪些地方容易最先发生破坏，据此可以猜测机动场；而要构造一个处处满足平衡方程且不违背屈服条件的应力场则相当困难。

本世纪三十年代，德国的 Johansen 提出了破裂线 (yield-line) 理论，其工程背景是从观察钢筋混凝土破裂的机制出发，认为当混凝土表面出现裂纹的时候，其内部钢筋的相应部位也出现了塑性铰。破裂线就是这种塑性铰的连线，通常是若干条直线，而破裂线两侧的板块则绕着这些直线作相对转动。当载荷单调增加时，铰线不断扩展，直至板成为几何可变的机构而破坏。

Johansen 理论是独立于结构的极限分析原理提出来的，并且早已为土木工程界所接受。到了五十年代，准确地建立了界限定理之后，才弄清了 Johansen 方法实质上是构造一种有间断的机动场。同§10.2—§10.4中的圆板完全解中全板都处于塑性屈服状态不同，这种机动场假定塑性屈服只沿有限条直线发生，而被这些

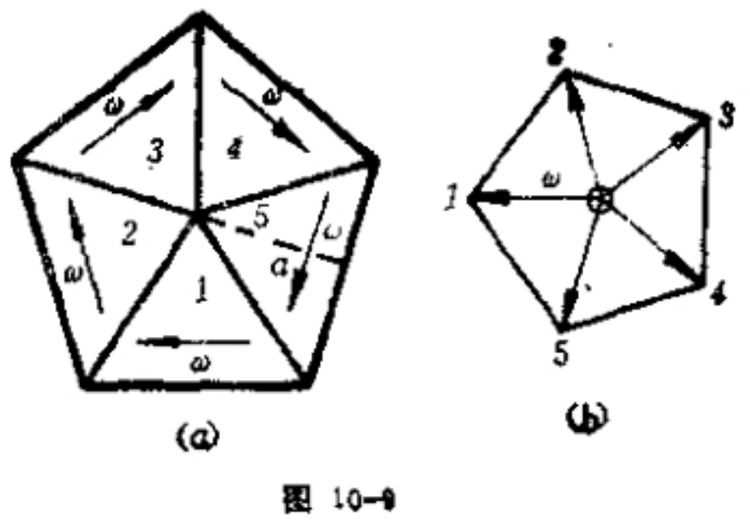
由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

直线分割开来的板块则只作刚体运动(平动和转动)。如同在第八章中讨论过的那样，这种有间断的机动场只给出极限载荷的上限。

从假设的机动场求极限载荷的上限，关键在于计算内功率。Johansen 理论中对内功率的计算是比较繁琐的，而且有比较麻烦的符号规定。1969年，W. Johnson 采用速度矢端图作为工具，才使这个方法变得简明、系统（参见[10.1]）。下面结合几个例子讲解 Johnson 上限方法。

例 1．正多边形板。

设正 n 边形板外边固支，中心到边的距离为 a（图10-9(a)），板上作用着均匀满布的载荷 p。假设机动场是使板变成一个正 n 边的角锥，则除了角锥侧面的 n 条棱边以外，板的固支边界即正 n 边形的边界上也要形成铰线，所以共有 $2n$ 条铰线。设板中心的速度指向图面内，速度大小为 u，则被上述铰线分割出来的 n 个三角形板块都具有角速度 $\omega = u/a$，同时角速度的方向可按右手法则决定，结果每个三角形板块的角速度向量都平行于该三角形的外边(即正 n 边形的一个边)，并在总体上绕板中心呈顺时针转向。据此可以画出角速度的矢端图，如图 10-9(b) 所示。



(a) (b)

图 10-9

现在，可以利用速度矢端图来计算塑性铰线上消耗的内功率。由于沿外周边 n 条铰线转动的角速度是 ω，所以内功率是 $n\left(2a\tan\frac{\pi}{n}\right)\omega M_0$，其中 $2a\tan\frac{\pi}{n}$ 是每条周边铰线的长度。对于放射形铰线，每条长度为 $\left(a/\cos\frac{\pi}{n}\right)$，铰线两侧板块的相对角速度可

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

从速度矢端图求出(如图 10-9(b)中点 1 至点 2 的距离)，为 $2\omega\sin\frac{\pi}{n}$。因此，n 条放射形铰线共消耗内功率 $n\left(a/\cos\frac{\pi}{n}\right)\cdot 2\omega\sin\frac{\pi}{n}\cdot M_0 = 2na\omega\tan\frac{\pi}{n}M_0$，与外周边铰线消耗的内功率恰恰相等。

注意到三角形板块重心的速度是板中心速度 u 的1/3，同时板的总面积为 $n\cdot\frac{1}{2}a\cdot 2a\tan\frac{\pi}{n} = na^2\tan\frac{\pi}{n}$，易计算出外功率为 $pna^2\tan\frac{\pi}{n}\cdot\frac{u}{3}$。

令内、外功率相等，得到

$$p^* = 12M_0/a^2. \tag{10-38}$$

这是固支正 n 边形板承受均布载荷时极限载荷的一个上限。注意它与 n 无关，因此当 $n\to\infty$时，它也给出固支圆板承受均布载荷时极限载荷的一个上限。事实上，由 § 10.4中的(10-35)式知此时极限载荷的准确值是 $11.26M_0/a^2$，可见 (10-38) 式给出了一个相当好的上限估计。

如果固支正 n 边形板承受的是作用于板中心的集中力 P，则上述计算中内功率仍不变，即

$$W_i = 4na\omega\tan\frac{\pi}{n}\cdot M_0,$$

而外功率为

$$W_e = Pu,$$

由 $W_i = W_e$ 得极限载荷的上限为

$$P^* = 4n\tan\frac{\pi}{n}\cdot M_0, \tag{10-39}$$

此值与 n 有关。当 $n\to\infty$时，给出固支圆板受中心集中力时极限载荷的一个上限

$$P^* = 4\pi M_0. \tag{10-40}$$

如果正 n 边形板是周边简支而非固支的，从上述计算中可以

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

看出，沿外周边铰线消耗的内功率将不再出现，于是总的内功率恰恰减少一半，而外功率的计算并无差别。于是，极限载荷的上限值可从(10-38)至(10-40)式减半得到，即：

对承受均布载荷的简支正 n 边形板和圆板，

$$p^* = 6M_0/a^2; \tag{10-41}$$

对承受中心集中力的简支正 n 边形板，

$$P^* = 2n\tan\frac{\pi}{n} \cdot M_0; \tag{10-42}$$

对承受中心集中力的简支圆板，

$$P^* = 2\pi M_0. \tag{10-43}$$

将(10-41)、(10-43)式同 § 10.3的结果比较，可知这里对简支圆板求得的极限载荷上限值实际上就是极限载荷的准确值。这也是不奇怪的，因为 $n \to \infty$ 时上面假设的正 n 边角锥的机动场就变为圆锥形的机动场，同 § 10.3中完全解的机动场一模一样，因而简支圆板的这一机动解也就是完全解。

例 2． 圆环板。

设有外边固支、内边自由的圆环板如图 10-10 所示，内外半径分别为 b 和 a，在内边上承受均布环形载荷 q。

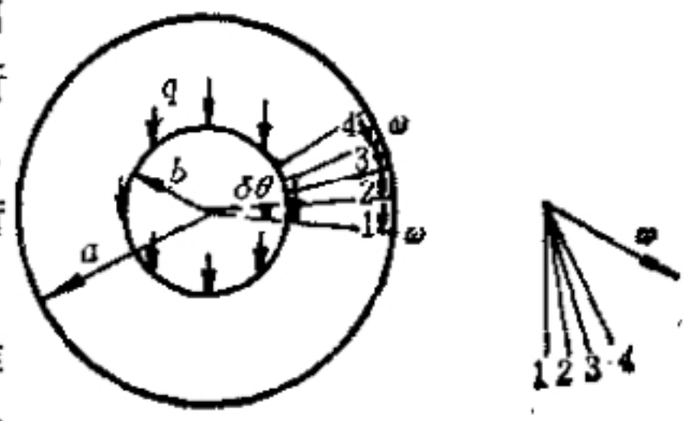


图 10-10

假设速度场为截头圆锥面(即漏斗状)，则除全部外部成铰线外，有大量放射形铰线把环板分割成许多刚性块。设内边速度为 u，则刚性块转动的角速度为 $\omega = u/(a-b)$。作出相应的速度矢端图便可发现，当板块变小，$\delta\theta \to 0$，则速度矢端曲线便变成半径为 ω 的圆。计算内、外功率并令二者相等，可得

$$2\pi bqu = 2\pi a\omega M_0 + (a-b)\,2\pi\omega M_0.$$

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

因此，极限载荷的上限为

$$q^* = \frac{M_0}{b} \cdot \frac{2a-b}{a-b}, \qquad (10\text{-}44)$$

相应的合力为

$$P^* = 2\pi b q^* = 2\pi M_0 \cdot \frac{2a-b}{a-b}. \qquad (10\text{-}45)$$

当 $b \to 0$ 时给出 $P^* = 4\pi M_0$，与前面的(10-40)式结果相同。

以同样的方法可以处理圆环板在其他边界条件(如内边简支、外边自由)及其他轴对称载荷(如均布载荷)下的极限分析问题。

例 3．承受均布载荷的简支矩形板。

设有边长为 $2a$ 和 $2b$ 的简支矩形板(为确定起见，设 $a \leqslant b$)，承受均匀满布的载荷 p。可以设想如图 10-11 所示的三种机动场，板中心的速度皆为 u，则借助于速度矢端图及内外功率相等的原则，可分别计算如下：

(i) $$p \cdot 4ab \cdot \frac{u}{3} = 4M_0 \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2},$$

但
$$u = a\omega_1 = b\omega_2,$$

故
$$p_1^* = \frac{6M_0}{a^2} \cdot \frac{(1+a^2/b^2)}{2}. \qquad (10\text{-}46)$$

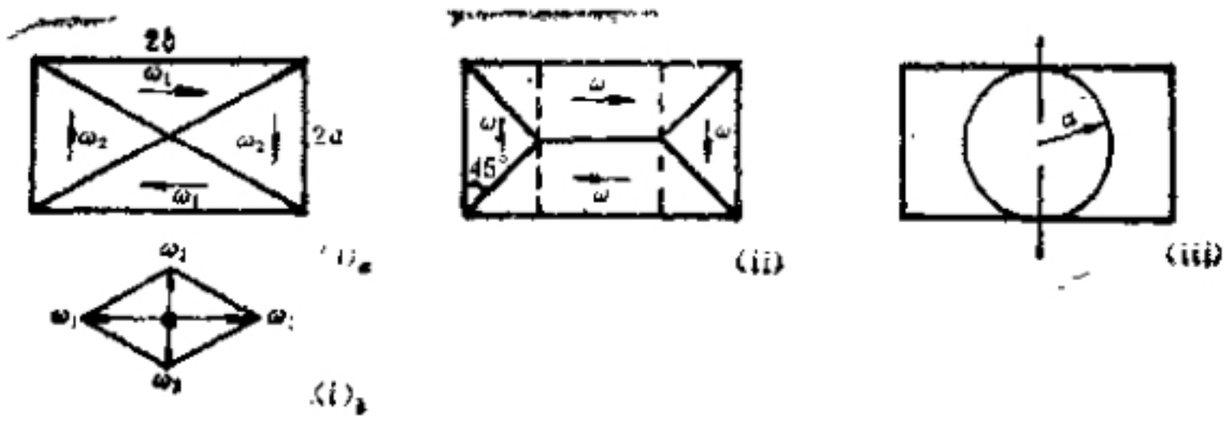


图 10-11

(ii) $$p \cdot \left\{2a^2 \cdot \frac{u}{3} + 4 \cdot \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{u}{3} + 2a(2b-2a) \cdot \frac{u}{2}\right\}$$

$$= M_0\left\{4 \cdot \sqrt{2}a \cdot \sqrt{2}\omega + 2(b-a) \cdot 2\omega\right\},$$

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

但 $$v = a\omega,$$

故 $$p_2^* = \frac{6M_0}{a^2} \cdot \frac{1+\frac{a}{b}}{3-\frac{a}{b}}. \tag{10-47}$$

(iii) 机动场设为局部的锥形场，这时由于圆的周边应成铰，所以相当于半径为 a 的固支圆板的极限载荷的问题。由(10-35)式知

$$p_3^* = 11.26M_0/a^2 = \frac{6M_0}{a^2} \cdot 1.88. \tag{10-48}$$

由于已设 $a \leqslant b$，只须考虑 $0 \leqslant \frac{a}{b} \leqslant 1$ 的情形。在此范围内不难证明

$$p_3^* \leqslant p_1^* < p_2^*.$$

因此，机动场(ii)给出的上限最低。

事实上，这个上限还可以再改进。在机动场(ii)中把 45° 改为一待定的角度 ϕ，则可导出

$$p^* = \frac{6M_0}{a^2} \cdot \frac{1+\left(\frac{a}{b}\right)\cot\phi}{3-\left(\frac{a}{b}\right)\tan\phi},$$

对 ϕ 求极值得出

$$\tan\phi = \sqrt{3+(a/b)^2} - (a/b),$$

结果有

$$p^* = \frac{6M_0}{a^2} \cdot \frac{1}{[\sqrt{3+(a/b)^2} - (a/b)]^2}. \tag{10-49}$$

这个值比(10-47)给出的 p_2^* 更低，可以取作本问题极限载荷的上限。

对于正方板，相当于 $a/b = 1$，此时 $\phi = 45°$，且

$$p^* = 6M_0/a^2,$$

这同前面对简支正 n 边形板分析结果一致。

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

当 $a/b\to 0$ 时，$\phi\to 60^\circ$，而

$$p^* = 2M_0/a^2, \tag{10-50}$$

这是对非常狭长的板条的极限载荷的上限。

以同样的方法可以处理矩形板在其他边界条件和其他载荷条件下的问题。事实上，从上面几个例子我们已经看到，这种假定塑性屈服只沿若干条直线塑性铰发生的机动法，适用于任意形状板的极限分析，对于边界条件和载荷的对称性没有任何限制，所以这是一种有广泛实用价值的方法。

§10.6 圆板大变形后的承载能力

一、概述

前几节的中心目标都在于求板的极限载荷。但是，极限载荷 (limit load)，或者叫破坏载荷 (collapse load)，的意义究竟是什么呢？可以有两种理解：

i）对理想刚塑性结构而言，极限载荷是使这个结构能发生任何变形的最小载荷；

ii）当不考虑结构几何形状改变的效应时，极限载荷是这样一种载荷，就是在载荷没有任何增加的情况下结构可以发生无限大的变形。

显然，后一种提法也适用于理想弹塑性材料制成的结构。由此可见，当有理由忽略应变强化和几何形状改变的效应时，对于由真实材料制成的真实结构，其承载能力也能由极限载荷给出一个合理的估计。许多实验研究表明，极限载荷往往对应于实际结构的载荷-

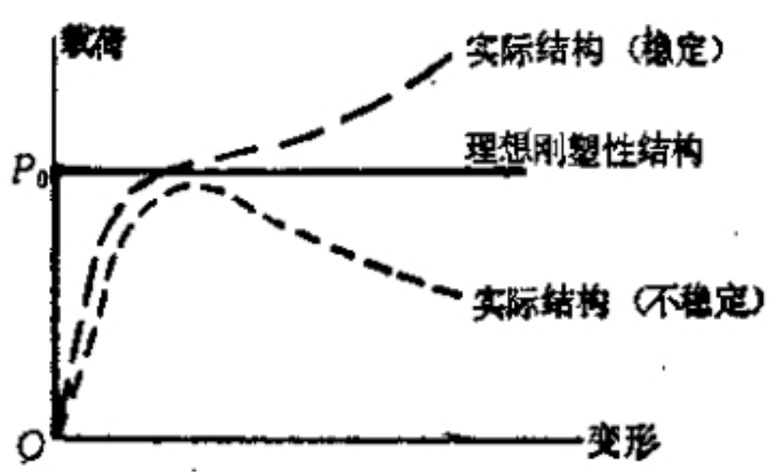


图 10-12

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

变形曲线的斜率明显变缓的点，如图 10-12 所示意的那样。

但是人们很快要问，到达这样一种载荷水平之后，结构将会发生什么变化？保持极限载荷 P_0 而发生无限大的变形显然是不实际的。那么承载能力是随着变形增大而继续上升，还是会下降？如果是前者，那么在“破坏载荷”下结构实际上并未破坏，而且如果不继续增加载荷，结构根本不再“流动”。如果是后者，P_0 就具有失稳的临界载荷的性质，一达到 P_0 结构就完全垮掉，所以实际使用这种结构时就要非常小心。

大变形如果伴随有大应变，那么应变强化会影响大变形后的承载能力。但是大多数结构材料在实际有用的应变范围内，应变强化都比较小；即使必须计及，也往往可以用适当加大屈服应力数值的方法来估计这种效应。再者，可以注意到，略去应变强化总是导致对承载能力的保守估计，因而是偏于安全的。

更难以预计的是几何形状改变的影响，它可能提高也可能降低结构的承载能力。例如，在沿直径方向向内的一对集中力作用下的圆环，当变形增大时其承载能力会下降，因而是一个“不稳定”的结构(参见[10.2])。而圆板的弯曲则是承载能力随几何变形的增加而提高的一个典型例子。

事实上，弹性薄板理论的研究已经表明，前面对薄板弯曲作的那些基本假定，仅对小挠度成立。Timoshenko[10.3]曾对圆板纯弯曲证明了，当挠度达到与板厚同一量级时，板中面的膜应变会达到与最大弯曲应变的同一量级，因而中面膜应变和膜力(即面内应变和面内应力)就不可忽略了。对于板弯曲的其他情形，从板壳理论可以证明，除了将板弯曲成可展曲面的特殊情形外，都会有膜力产生，而且膜力随变形的增大而增大。这种膜力参加承载，一般将使大变形后板的承载能力不断提高。

对于弹塑性板，应该看到薄板与厚板有所不同。对薄板，是先变成弹性膜，再变成弹塑性膜。对厚板，可能在小挠度（即挠度小于板厚)时就已产生塑性，也就是说，膜力是在发生塑性变形后

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

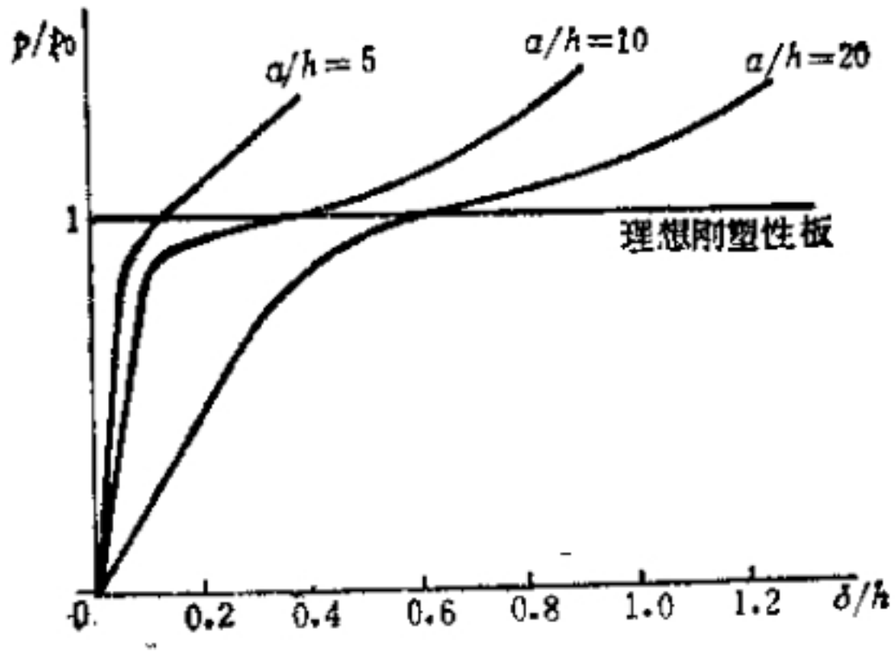


图 10-13

才加入承载的。图 10-13 是在均布载荷作用下的固支圆板的承载能力随中心挠度的变化，实验结果是由软钢试件得到的。由图可见，对于中等厚度的板(图中的 $a/h=10$)，极限载荷的实际意义比较明显。当然，具体的特性曲线不仅取决于材料，还取决于载荷条件和支承方式。

Onat 等人首先研究了刚塑性圆板发生大挠度后的承载能力。他们的想法是：既然刚塑性圆板在初始极限载荷作用下的速度场是锥形场，那么很可能大挠度后就变成一个扁圆锥，如果对扁圆锥作极限分析，得到的完全解仍然给出一个锥形速度场，那么圆板大挠度的承载能力问题就变成一系列锥角逐渐减小的扁圆锥的极限分析问题。根据扁锥壳极限分析的结果，对于中心集中力作用下的简支圆板得到(参见[10.4]和[10.5])：

$$P/P_0 = 1 + \frac{1}{3}(\delta/h)^2, \qquad (10\text{-}51)$$

其中 $P_0 = 2\pi M_0$ 是初始($\delta=0$ 时)极限载荷，δ 是板中心的挠度，P 是当板中心挠度为 δ 时的力。他们的实验结果同(10-51) 式符合得相当好。

但是，即使限于圆板的轴对称弯曲，在不同载荷、不同支承条

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

件下，圆板仍可能变成不同形状的旋转壳，所以只能对特定问题追踪变形过程求解并利用十分复杂的旋转壳的屈服条件，其繁冗程度可想而知。下面我们转而介绍两种简明的近似分析方法。

二、Calladine 方法

传统的分析方法都是把板、壳看成是二维问题，在变形分析上只考察中面，在应力分析上只考虑弯矩、膜力等内力，即广义应力。这种传统方法在弹性板壳理论中取得了很大的成功，但在塑性理论范围内这样做不见得更有利，特别是当我们要采用界限定理来近似分析问题的时候，往往需要考察物理应力分布究竟有什么规律。于是，Calladine[10.6]在 1968 年提出了一个新的观点：放弃以中面代替板的思想，而把板看成一个三维实体来研究它在大变形下的应力分布规律。这样做貌似复杂，实则简化。下面我们通过一个例子来说明这一点。

设半径为 a 的刚塑性简支圆板承受中心集中力，支承不限制板边缘的径向移动。既然圆板在初始极限载荷 $P_0=2\pi M_0$ 的作用下有一个锥形速度场，那么在一个沿直径的剖面（图 10-14）上看，被中心线分开的两半块都将发生一个转动。设转动的瞬心为 I。因为支承处不能有垂直位移，所以 I 必在支承的正上方，距离多少暂时不知道。

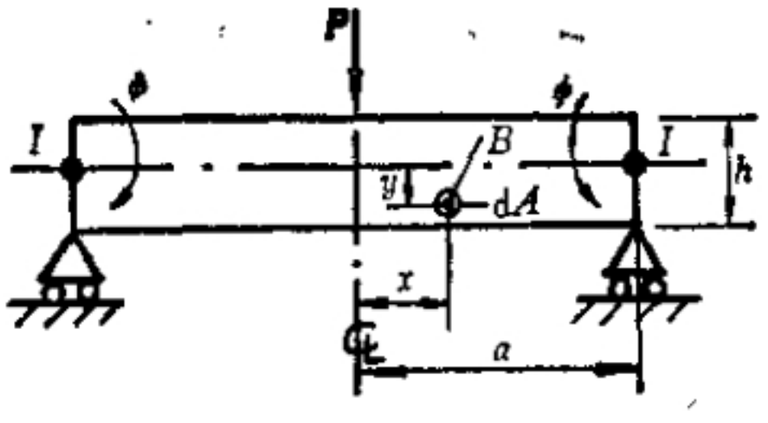


图 10-14

设直径剖面的一半绕 I 作刚体转动的角增量为 ϕ，则板内任一点 $B(x,y)$ 会有一个向下的位移增量 $\phi(a-x)$，同时会有一个径向的向外位移增量 ϕy，此处坐标 x、y 的取法如图 10-14 所示。B 点向外的运动产生一个周向应变增量 $\epsilon_\theta=\frac{\phi y}{x}$。考虑 B 点附近的一

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

个小面积元 dA，相应的旋转体积元是 $dV = 2\pi x dA$。于是在这个体积元上耗散的塑性功是 $Y|\epsilon_\theta| dV = 2\pi Y\phi|y| dA$，其中 Y 是单向拉伸屈服应力。ϵ_θ 取绝对值是因为不论拉应变还是压应变，塑性功均为正。值得注意的是在塑性元功的表达式中并不出现 x，这说明能量沿半径是均匀地被吸收的。

对于这样一个机动场建立内、外功率相等的条件，得

$$P\phi a = 2\pi Y\phi\int_A |y| dA,$$

这里的 A 是指"直径半剖面"的区域。于是，

$$P = \frac{2\pi Y}{a}\int_A |y| dA. \qquad (10\text{-}52)$$

这里 ϕ 被消掉了，如同 §8.5 中求非圆板的机动解时所见到的那样。显然，这是一个上限。

为了计算(10-52)式中的积分，就必须确定 I-I 线的位置。上面求出的 $\epsilon_\theta = \phi y/x$ 表明，在直径剖面上，低于 I-I 线的任何点都受到周向拉伸，因而其周向应力为 $+Y$；高于 I-I 线的任何点都受到周向压缩，因而其周向应力为 $-Y$。

考虑图 10-15 所示的半块圆板，由于假定了板边缘可以自由地径向移动，因而支承不提供任何水平反力；于是，从半块圆板的总体平衡可知在直径剖面上，周向应力为 $+Y$ 的区域面积应与周向应力为 $-Y$ 的区域面积相等，这叫做"等面积原则"。不难证明，按照"等面积原则"确定 I-I 线的位置，恰使积分 $\int_A |y| dA$ 取极小值。这就是说，利用半块圆板在水平方向的总体平衡得到的"等面积原则"，可以使(10-52)式给出的载荷上限得以最小化。但要注意，这样做并不能保证处处满足平衡方程，因而一般并不形成一个下限，只是一个优化的上限。

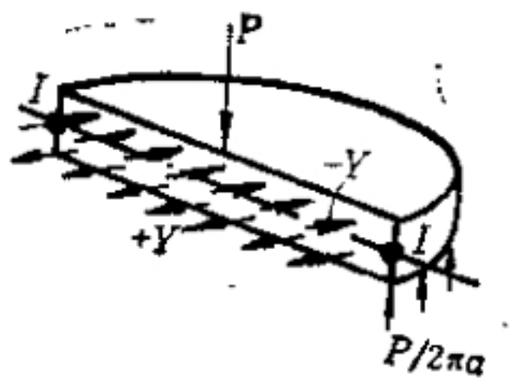


图 10-15

对于圆板的初始极限状态，"等面积原则"所确定的 I-I 线正

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

与板中面重合，因而

$$\int_A |y| \mathrm{d}A = 2a\int_0^{h/2} y\mathrm{d}y = ah^2/4,$$

代回到(10-52)式得

$$P_0 = \frac{1}{2}\pi Y h^2 = 2\pi M_0, \qquad (10\text{-}53)$$

这与前面得到的(10-27)式一致。

当然，Calladine 方法的主要用途不在于求初始极限载荷 P_0，而在于推广到大挠度情形。

当板中心挠度小于板厚，即 $\delta \leqslant h$ 时，I-I 线的位置按图 10-16(a)确定，计算$\int_A |y| \mathrm{d}A$ 变成一个纯几何的问题，从而得出

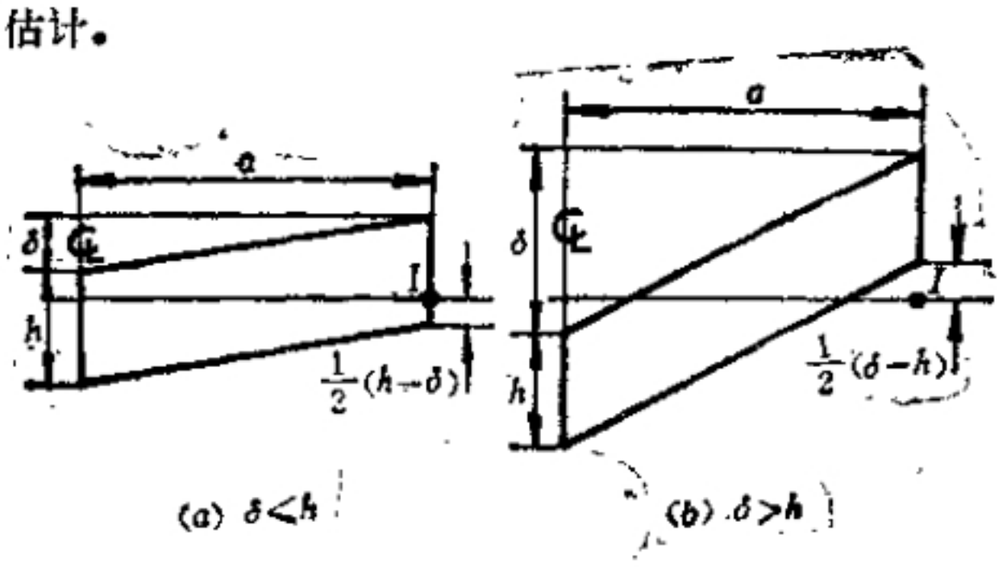
$$P/P_0 = 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{\delta}{h}\right)^2, \quad \delta/h \leqslant 1. \qquad (10\text{-}54)$$

这与 Onat 等人按锥壳极限分析作长篇推导的结果，即(10-51)式完全一样。

当 $\delta > h$时，"等面积原则"所确定的 I-I 线位置如图10-16(b)所示，计算后得到

$$P/P_0 = \frac{\delta}{h} + \frac{1}{3}\frac{h}{\delta}, \quad \delta/h \geqslant 1. \qquad (10\text{-}55)$$

(10-54) 和 (10-55)式合在一起，就给出了简支圆板大挠度时承载能力的估计。



(a) $\delta < h$　　(b) $\delta > h$

图 10-16

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

Calladine 方法也可用于固支圆板、夹层板及钢筋混凝土板等的大挠度承载能力的分析。

三、广义屈服线方法

在§10.5中已经提到过屈服线或破坏线，在这样的线上 $M=M_0$。后来，Rzhanitsyn(1957)和 Sawczuk(1963) 相继提出了广义屈服线(generalized yield line)的概念，大意是，在板壳的某些线上，如果内力的某种组合达到一个值，那么沿这些线就形成塑性区，即广义屈服线。例如，当考虑圆板的轴对称弯曲时，若应用 Tresca 条件，就可以假设板将变形为若干个圆锥，在圆锥面内没有径向应变，而圆锥的连接处是集中铰圆，并且可证明：

i) 在圆锥上，

$$\left|\frac{M_\theta}{M_0}\right|+\left(\frac{N_\theta}{N_0}\right)^2=1, \tag{10-56}$$

$$\frac{\epsilon_{\theta 0}}{|\kappa_\theta|}=\frac{h}{2}\left(\frac{N_\theta}{N_0}\right), \tag{10-57}$$

其中 N_0 是塑性极限拉力，$\epsilon_{\theta 0}$ 是中面周向应变率。

ii) 在铰圆上，

$$\left|\frac{M_r}{M_0}\right|+\left(\frac{N_r}{N_0}\right)^2=1, \tag{10-58}$$

$$\frac{\epsilon_{r0}}{|\kappa_r|}=\frac{h}{2}\left(\frac{N_r}{N_0}\right), \tag{10-59}$$

其中 ϵ_{r0} 是中面径向应变率。

Kondo 和 Pian[10.7]应用上述广义屈服线方法分析了简支圆板受集中力发生大挠度后的承载能力。对于支承径向可移的情形，他们所得的结果与 Calladine 完全一致，即为 (10-54) 和(10-55)式。对于支承径向不可移动的情形，广义屈服线方法得出

$$\frac{P}{P_0}=\begin{cases}1+\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{\delta}{h}\right)^2, & \delta/h\leqslant 1/2;\\[2ex] 2\left(\dfrac{\delta}{h}\right)+\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{h}{\delta}\right), & \delta/h\geqslant 1/2.\end{cases} \tag{10-60}$$

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

这些结果可以归纳为图 10-17。当 δ/h 很大时，对于径向可移和径向不可移的简支圆板，承载能力将分别趋近于 $P/P_0=\delta/h$ 和 $2\delta/h$，相差一倍。这说明板的支承条件对于它大变形后的承载能力影响极大。

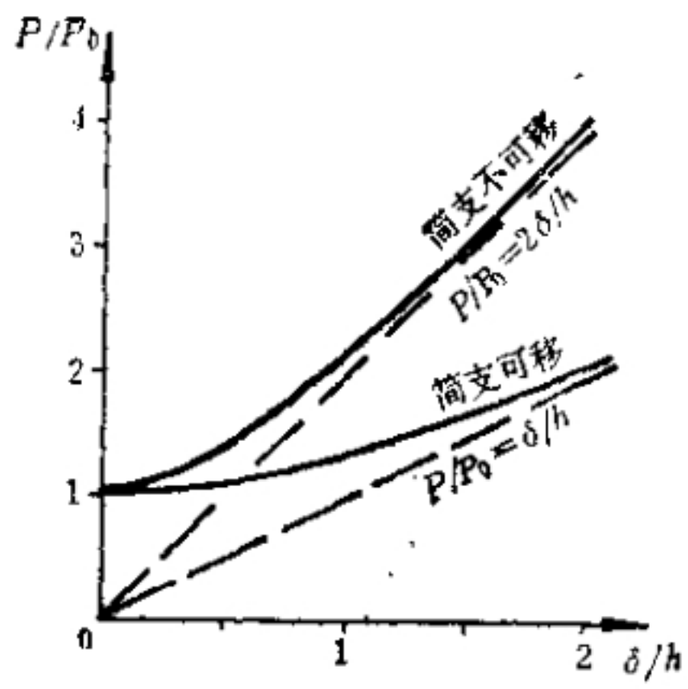


图 10-17

§10.7 圆板的冲压

在生产中，常采用一对冲模（即一对互相匹配的凸模和凹模）对圆板进行冲压成形，来制造球壳的一块或其它轴对称壳体的一块（例如制造锅炉和压力容器的封头）。通常的问题是，已知需要制作的壳体的几何形状，要求确定冲模的几何尺寸以及所需的冲压力。引起成品与冲模几何形状差异的原因，主要是卸载后的回弹，因此也必须对回弹的规律加以研究。

圆板在一对半球形的冲模中进行冲压，是这类冲压中最简单的情形。在用低碳钢圆板进行的一系列实验的基础上，余同希等人（参见[10.8]）指出，受冲压的圆板的几何形状可以用图10-18所示的模型来近似描述。这个模型是：板的中部为一包住凸模表面的球面，而中部以外的环形区域则为一截头圆锥面，球面与圆锥面在半径为 b 的圆上光滑连接。在冲压过程中随着凸模位移的增加，b 值从 0 逐渐增大，在冲压完成时 b 等于圆板的半径 a。

由图 10-18 的几何关系易知，圆板中心相对于圆板边缘的挠度为

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

$$\Delta = (a-b)\sin\beta + R(1-\cos\beta), \tag{10-61}$$

其中 R 是半球形模具的半径，$\beta = b/R$ 是长度为 b 的圆弧所对应的中心角。若 β 是一个小量，则从(10-61)式近似给出无量纲相对挠度为

$$\delta \equiv \Delta/h \simeq \alpha\rho\left(1-\frac{\rho}{2}\right), \tag{10-62}$$

其中 h 为板厚，$\alpha \equiv a^2/Rh$ 和 $\rho \equiv b/a$ 是两个无量纲几何参数。

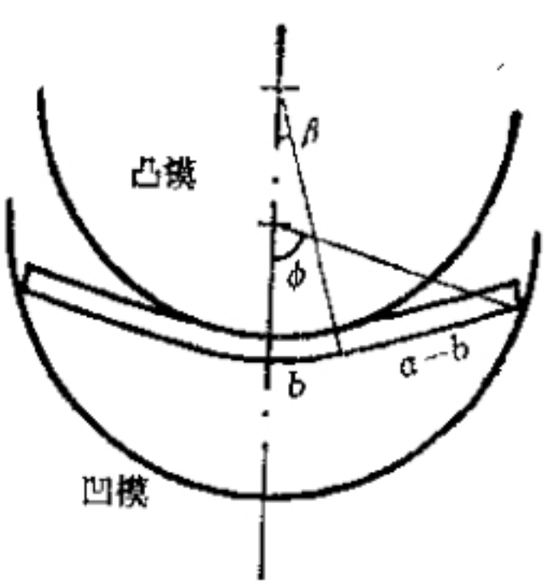


图 10-18

当被冲压的圆板发生大挠度时，膜力将成为板内的主要广义应力。这时，可以应用 §10.6 中介绍的 Calladine 方法的思想按以下步骤求得圆板大挠度时的膜力分布和承载能力。

(1) 对于设定的变形模式，按照“等面积原则”确定周向拉应力与周向压应力的区域分界线 I-I。当 $\rho < \frac{1}{2}$ 时，I-I 线与板的直径剖面的中线交在圆锥面部分；当 $\rho > \frac{1}{2}$ 时，交在球面部分，如图10-19所示。

(2) 当 I-I 线的位置确定之后，根据(10-52)式便可计算出相应的外载 P，结果对于本问题，无量纲载荷为

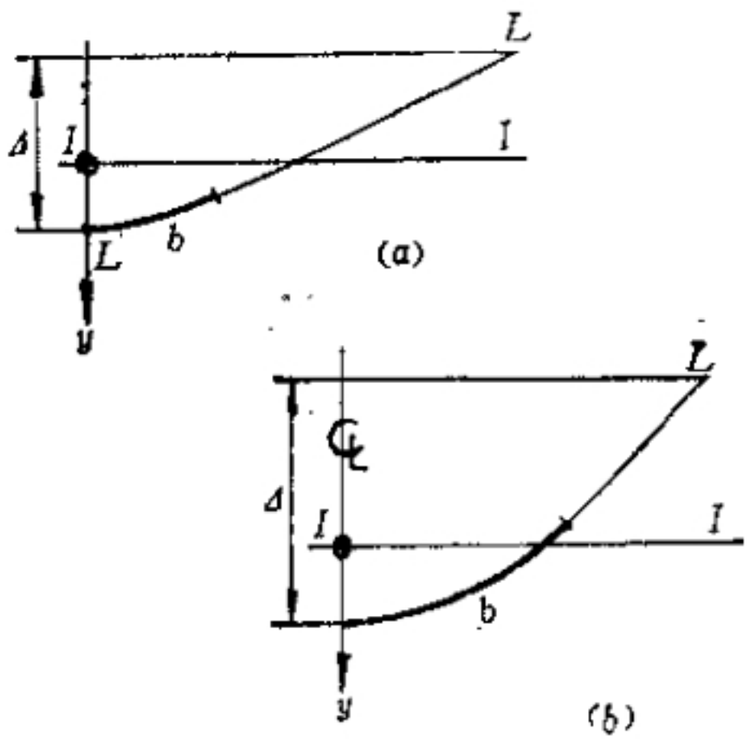


图 10-19

$$p \equiv \frac{P}{P_0} = k\alpha, \tag{10-63}$$

其中 P_0 为初始极限载荷，即 $P_0 = 2\pi M_0 = \frac{1}{2}\pi Y h^2$，$Y$ 为材料的屈

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

形应力，系数 k 依赖于 ρ，为

$$k=\begin{cases}\dfrac{\rho\left(1-\frac{2}{3}\rho^2\right)}{1-\rho}, & \rho\leqslant\dfrac{1}{2};\\[2ex] \dfrac{1+\rho-\frac{1}{2}\rho^2}{1-\rho}, & \rho\geqslant\dfrac{1}{2}.\end{cases}\tag{10-64}$$

(10-62)至(10-64)式就给出了以 ρ 为过程参量的载荷-挠度关系式。

(3) 由于 I-I 线已经划分出了板的直径剖面上 $\sigma_\theta=+Y$ 和 $\sigma_\theta=-Y$ 的区域，将周向应力 σ_θ 沿板厚积分便可得到周向膜力(广义应力)沿半径的分布：

$$N_\theta=N_\theta(r)=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_\theta(r,z)\,\mathrm{d}z.\tag{10-65}$$

结果表明，N_θ 在板的中心部分为正，而在外部环形区域内为负。后者正是导致圆板可能发生皱曲(wrinkling)的直接原因。

(4) 已知 $N_\theta(r)$ 后，根据平衡微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rN_r)=N_\theta\tag{10-66}$$

可以求解出径向膜力沿半径的分布 $N_r(r)$，积分常数由 $N_r(a)=0$ 确定。结果表明，N_r 在全板内均为正值，在板中心其值最大。

用以上方法求出的圆板冲压过程中的载荷-位移关系与较薄的板(例如 $a/h\geqslant30$)的实验结果符合较好，但在板发生皱曲后理论与实验的 p-δ 曲线会有较大偏离。由以上方法求得的膜力场出发，应用能量法，则可建立圆板在冲压过程中发生皱曲的临界条件。

假定冲压结束时，全板成为无皱曲的球面块，即 $\rho=b/a=1$，这时 $N_r(r)$ 和 $N_\theta(r)$ 业已由上述计算确定。再设卸载时这些膜力完全被释放，则可估算出圆板边缘上的 A 点经过回弹到达 A' 点

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

(参见图 10-20)，二者空间位置的差异是

$$c_1 = \frac{Y(1-\nu^2)}{E} R \sin\left(\frac{a}{R}\right), \tag{10-67}$$

$$c_2 = \frac{Y(1-\nu^2)}{E} \cdot \frac{9}{4} R, \tag{10-68}$$

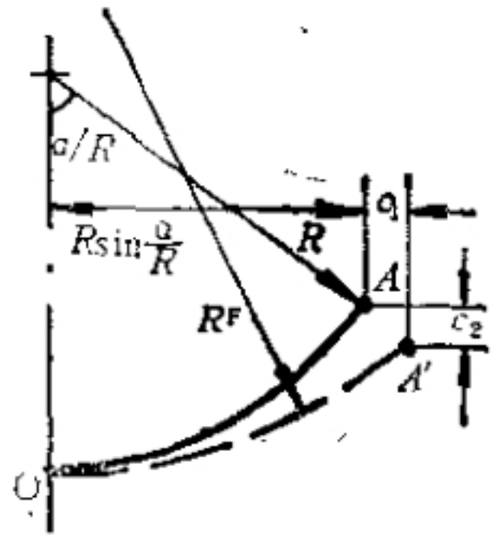


图 10-20

其中 E 为弹性模量，ν 为 Poisson 比。由此推算出回弹前后的曲率半径之比，即回弹比为

$$\frac{\kappa^F}{\kappa^D} = \frac{R}{R^F} \simeq 1 - \frac{9Y(1-\nu)}{2E}\left(\frac{R}{a}\right)^2, \tag{10-69}$$

其中 $\kappa^D = 1/R$ 为冲模曲率，$\kappa^F = 1/R^F$ 为圆板在回弹后的最终曲率

关于圆板冲压的 $p \sim \delta$ 关系、回弹和皱曲的详细讨论，请参阅文献[10.8]。相关地，对于矩形板在双向弯曲的冲模中的冲压成形，文献[10.9]作了实验和理论研究。

参 考 文 献

[10.1]Johnson. W. and Mellor. P. B., *Engineering Plasticity*, Ch. 15, Van Nostrand Reinhold, London, 1973.

[10.2]Ghosh. S. K., Johnson. W., Reid. S. R. and Yu, T. X.(余同希), On thin rings and short tubes subjected to centrally opposed concentrated loads, *Int. J. Mech. Sci.*, 23, 183-194, 1981.

[10.3]Timoshenko. S. and Woinowsky Krieger. S., *Theory of Plates and Shells*, 2nd edition, McGraw-Hill, 1959. 中译本，S. 铁摩辛柯、S. 沃诺斯基，《板壳理论》(第二版)，第二章第13节，科学出版社，1977。

[10.4]Onat. E. T., Plastic analysis of shallow conical shells, *J.*

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

Eng. Mech. Div., Proc. ASCE, 86, EM6, 2675—2678, 1960.

[10.5]Lance, R. H. and Onat, E. T., Analysis of plastic shallow conical shells, *J. Appl. Mech.*, 30, 199—209, 1963.

[10.6]Calladine, C. R., Simple ideas in the large-deflection plastic theory of plates and slabs *Engineering Plasticity* (Eds. J. Heyman and F. A. Leckie), 93—127, Cambridge University Press, 1968.

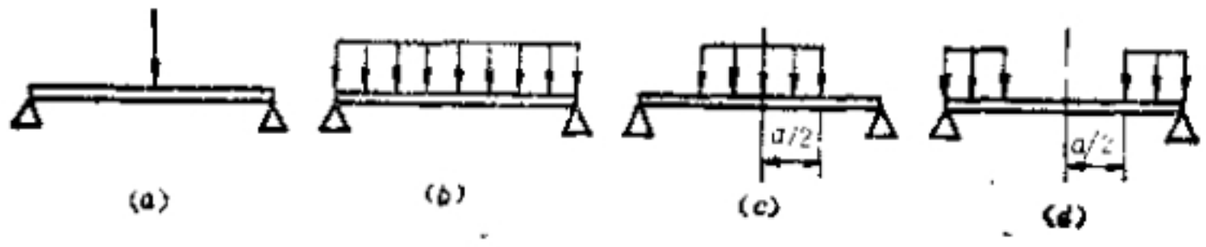
[10.7]Kondo, K. and Pian, T. H. H., Large deformation of rigid-plastic circular plates, *Int. J. Solids Structures*, 17, 1043—1055, 1981.

[10.8]Yu T. X.(余同希), Johnson W. and Stronge, W. J. Stamping and springback of circular plates deformed in hemispherical dies, *Int. J. Mech. Sci.*, 26, 131—148, 1984.

[10.9]Yu T. X.(余同希), Johnson W. and Stronge, W. J. Stamping rectangular plates into doubly-curved dies, *Proceedings of Institution of Mechanical Engineers*, 198C, 109—125, 1984.

习　题

10.1　有一半径为 a 的简支圆板，比较图中四种载荷条件下的极限载荷的合力值。



题10.1附图

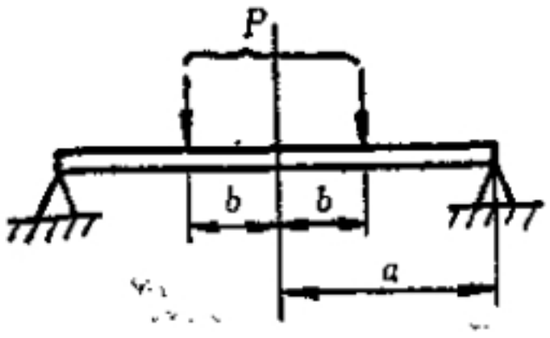
10.2　半径为 a 的圆板，板中心受集中力 P 的作用，证明不论 $r=a$ 处是简支边还是固支边，不论是用 Tresca 屈服条件还是 Mises 屈服条件，其极限载荷都是 $P=2\pi M_0$；同时分析这时板的弯矩分布规律。

10.3　按 Tresca 屈服条件求图示圆板的极限载荷。

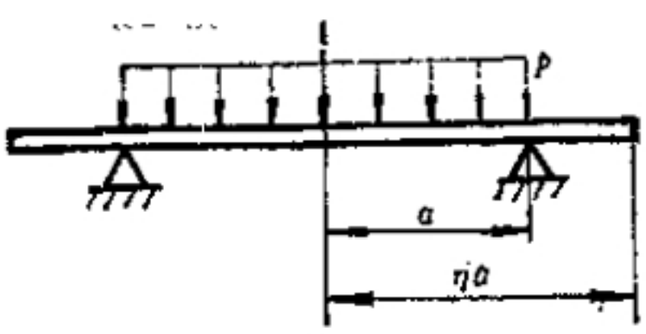
10.4　半径为 $\eta a(\eta>1)$ 的圆板，支承在 $r=a$ 处，分布载荷 p 的半径也

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

为 a，按 Tresca 屈服条件对 $\eta=2$ 和 $\eta=e$ 两种情形求极限载荷 p。

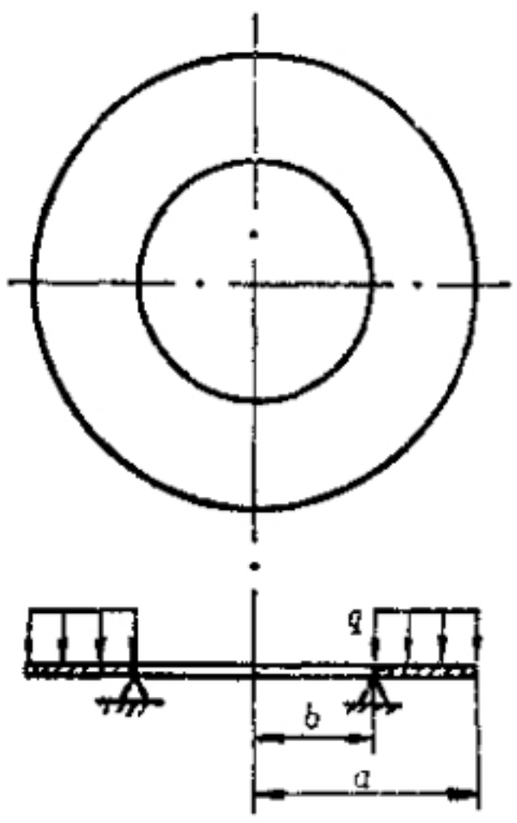


题10.3附图



题10.4附图

10.5 按 Tresca 屈服条件求图示环形板的极限载荷。

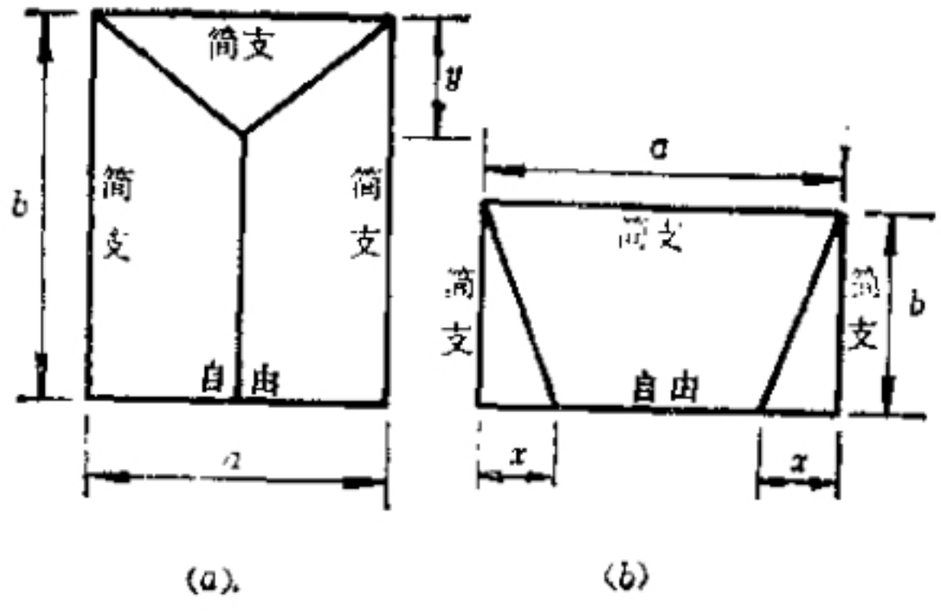


题10.5附图

10.6 有四边简支、边长为 a 的正方形板，集中力作用在板的中央，试用上限法求板的极限载荷。

10.7 已知边长为 a 和 b 的矩形板受均布载荷 p 作用，板的三边简支、一边自由，如附图所示。试按图示的塑性铰线求板的极限载荷（上限）。

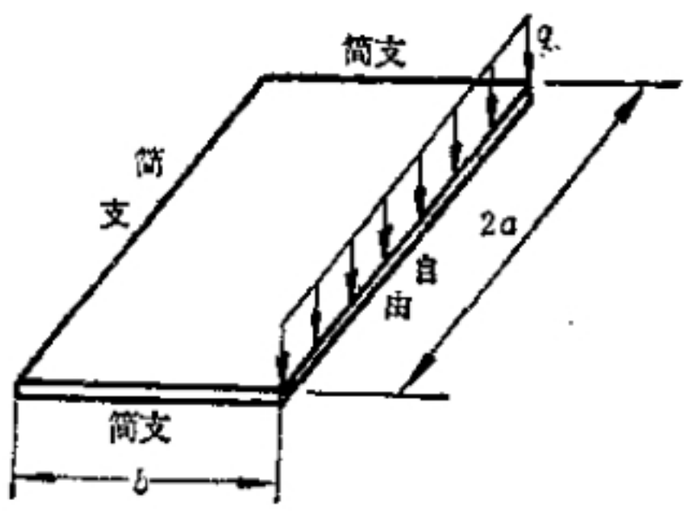
由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。



(a)　　(b)

题10.7附图

10.8　有矩形板，边长为 $2a$ 和 b，三边简支、一边自由，如图所示．自由边上作用着均匀线分布载荷 q，求塑性铰线分布和极限载荷（上限）。



题10.8附图

10.9　矩形板在双向弯曲的冲模中受冲压时，其初始状态可以认为是：一块边长为 a 和 b 的矩形板仅在四个角点上有支承，在板中心作用有集中力 P，试求此时板的极限载荷(上限)和相应的变形机构。

10.10　夹层圆板在板中心受集中力的作用，支承为简支并允许板边缘发生径向位移。设此夹层圆板在大变形下变成圆锥面，试用 Calladine方法求承载能力与板中心挠度的关系。

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估。

索　引

Baushinger 效应	§ 1.2
Bridgman 试验	§ 1.2
Calladine 方法	§10.6
Cauchy 关系	§ 3.2
Cauchy 问题	§ 7.5
Coulomb 屈服条件	§ 5.6
Drucker 公设	§ 5.2
Drucker 稳定性条件	§ 5.2
Gardiner 公式	§ 6.3
Haigh-Westergaard 应力空间	§ 3.1
Hencky 定理	§ 7.3
Johnson 上限方法	§10.5
Lévy-Mises 关系	§ 5.4
Lode 薄管实验	§ 4.3
Lode 应变参数	§ 3.2
Lode 应力参数	§ 3.1
Mises 屈服条件	§ 4.2
Mohr 应变圆	§ 3.2
Mohr 应力圆	§ 3.1
Prandtl-Reuss 关系	§ 5.4
Riemann 问题	§ 7.5
Taylor & Quinney 薄管实验	§ 4.3
Tresca 屈服条件	§ 4.2
Ильюшин 公设	§ 5.2
Ильюшин 函数	§ 5.5
Ильюшин 理论	§ 5.5

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估.

（以下按汉语拼音排列）

A

安定定理 § 9.5
安定状态 § 2.6, §9.5

B

八面体面 § 3.1
薄壁圆管 § 4.3, §6.2
比例极限 § 1.2
比例加载 § 2.4, §5.5
变值载荷 § 2.6

C

材料稳定性 § 1.4, §5.2
残余应力 § 2.1
超速工艺 § 6.7
初始塑性流动 § 7.10

D

单一曲线假定 § 5.5
等向强化 § 1.5, §4.4
等斜面 § 3.1
等效剪应变 § 3.2
等效剪应力 § 3.1
等效应变 § 3.2
等效应力 § 3.1
定常塑性流动 § 7.10
对数应变 § 1.4

由 Foxit PDF Editor 编辑
版权所有 (c) by Foxit Software Company, 2003 - 2009
仅用于评估.

F

非关连的流动法则 § 5.4

G

刚架 § 9.2
刚塑性 § 1.5
刚-线性强化 § 1.5
各向同性强化 § 4.4
工程应变 § 1.2
广义 Hooke 定律 § 5.1

H

后继屈服条件 § 4.4
厚壁圆筒 § 6.6
滑移系 § 1.3
滑移线 § 7.3
滑移线场 § 7.3
回弹 § 6.3,§10.7
回弹比 § 6.3
混合问题 § 7.5

J

几何大变形 § 2.3,§10.6
机动场 § 8.3, §9.2
机动法 § 8.4, §9.3
极限分析 § 8.1
极限分析定理 § 8.3
极限曲线 § 2.5, §9.4
极限弯矩 § 6.4
极限载荷 § 2.1