- 882238

徐秉业 编

塑性力学

SUXINGLIXUE

2
1

高等教育出版社

封面设计：张 金 标

ISBN7-04-000555-7/TB-116
定价 3.15元

2303

塑性力学

徐秉业 编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书是国家教委工科结构力学课程教学指导小组审订的塑性力学教材。本书不仅对塑性力学的基本理论作了较全面的阐述，而且对工程中大量遇到的塑性成形工艺问题作了深入的讨论。因此，本书很适用于作机械类专业的教材，同时对机械工程界的技术人员有重要的参考价值。

塑 性 力 学

徐秉业 编

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
顺义县印刷厂印装

开本850×1168 1/32 印张13 字数310 000
1988年12月第1版 1989年4月第1次印刷
印数0001—3 1800
ISBN 7-04-000555-7/TB·116
定价3.15元

编 者 的 话

本书是根据国家教委工科结构力学课程教学指导小组提出的要求，为机械类专业编写的塑性力学教材。

塑性力学是固体力学中的一个重要分支，近年来得到了很大的发展。随着新型材料的不断出现以及对问题的分析不断深入，塑性力学已愈来愈为人们所重视。然而，由于塑性力学中的物理关系是非线性的，并且塑性变形又和变形历史有关，因此除简单问题外，直接应用塑性本构关系求解问题往往会遇到许多数学上的困难。为了解决工程实际中的大量课题，在塑性力学中发展简化方法，找出基本符合实际的有应用价值的解具有特别重要的意义，这是塑性力学能否应用于工程实际的关键。本书就这方面作了较多的阐述和探讨。

本书前四章介绍塑性力学的基本理论，重点说明屈服条件和塑性本构关系。为此对等倾面上的应力状态进行了较为深入的讨论，并采用了简明而又清晰的表示方法。第五章为简单静定问题。第六、七、八、九章介绍块体成形，如镦粗、拉拔、挤压等工艺过程中行之有效的计算方法。第十、十一和十二章则介绍了板料成形中的一些分析问题的方法。作者期望本书能对读者理解和掌握塑性力学的基本理论和解决问题的方法起到应有的作用。

本书初稿完成于1983年底，曾多次在清华大学工程力学系研究生班和教师进修班上作为试用教材。清华大学刘信声副教授和陈森灿副教授曾分别撰写了第五章和第七章的部分初稿。

本书由东南大学杨桂通教授、北京农业工程大学黄文彬教授、上海交通大学金永杰副教授初审、并由黄文彬教授复审。他

们对书稿提出了十分重要的修改意见。天津大学严宗达教授、四川工业学院唐俊才教授和重庆建筑工程学院王天明副教授也对书稿提出了十分宝贵的意见和建议。太原工业大学杨桂通教授曾对本书的编写作出了重要贡献。作者谨对以上同志表示衷心的感谢。

书稿虽经反复修改，但由于作者的水平所限，错误和不妥之处仍恐难免，诚恳地欢迎读者批评、指正。

清华大学　徐秉业

1987.2.

目　录

第一章　应力分析 …… (1)
§1-1　一点处的应力状态和平衡方程 …… (1)
§1-2　微四面体斜面上的应力 …… (6)
§1-3　应力张量 …… (9)
§1-4　主应力 …… (12)
§1-5　等倾面上的正应力和剪应力 …… (13)
§1-6　最大剪应力 …… (23)
§1-7　应力莫尔圆 …… (26)
习题 …… (30)
第二章　应变分析 …… (32)
§2-1　应变和位移 …… (32)
§2-2　主应变 …… (35)
§2-3　应变张量 …… (38)
§2-4　三维应变莫尔圆和应变洛德参数 …… (44)
§2-5　应变增量和应变率 …… (46)
§2-6　应变协调方程 …… (50)
习题 …… (53)
第三章　各向同性金属材料的屈服条件 …… (54)
§3-1　简单拉伸和压缩时的塑性变形 …… (54)
§3-2　塑性力学中常用的简化力学模型 …… (61)
§3-3　高静水压力实验 …… (65)
§3-4　特雷斯卡和米泽斯屈服条件 …… (67)
§3-5　两种屈服条件的比较和实验验证 …… (76)
§3-6　各向同性强化和随动强化屈服条件 …… (81)
习题 …… (85)

第四章　塑性本构关系 …… （88）
§4-1　广义虎克定律 …… （88）
§4-2　塑性应力-应变关系 …… （90）
§4-3　德鲁克关于稳定材料的公设 …… （107）
§4-4　塑性本构关系的内在联系 …… （111）
习题 …… （113）
第五章　简单弹塑性问题 …… （115）
§5-1　厚壁柱壳和球壳的弹塑性分析 …… （115）
§5-2　弹塑性旋转圆盘和圆轴 …… （122）
§5-3　圆截面轴的弹塑性扭转 …… （131）
§5-4　用沙堆比拟法求轴的塑性极限扭矩 …… （141）
习题 …… （147）
第六章　滑移线法 …… （148）
§6-1　塑性平面应变问题的基本方程 …… （148）
§6-2　亨奇应力方程 …… （156）
§6-3　滑移线场的几何性质 …… （159）
§6-4　建立滑移线场的边界条件 …… （165）
§6-5　顶部削平的楔体的极限载荷以及利用类推法求解各种边值问题的解 …… （168）
§6-6　轴对称问题的滑移线场 …… （179）
§6-7　应力间断解 …… （186）
§6-8　塑性区中的速度场 …… （189）
§6-9　用差分法建立滑移线场 …… （194）
习题 …… （202）
第七章　界限法 …… （205）
§7-1　一般概念 …… （205）
§7-2　极值定理 …… （212）
§7-3　速度平面和速端图 …… （219）
§7-4　锻粗问题 …… （222）
§7-5　在非均匀场情况下的拉拔和挤压 …… （227）

§7-6 轴对称情况下的挤压 …… (238)
习题 …… (250)
第八章 简化分析法 …… (252)
§8-1 一般概念 …… (252)
§8-2 平面应变条件下镦粗过程的简化分析 …… (252)
§8-3 平面应变条件下的拉拔 …… (261)
§8-4 平面应变条件下的挤压 …… (265)
§8-5 轴对称拉拔 …… (270)
§8-6 轴对称挤压 …… (276)
习题 …… (280)
第九章 能量法 …… (281)
§9-1 能量法的原理 …… (281)
§9-2 平面应变条件下的镦粗 …… (283)
§9-3 平面应变条件下的拉拔和挤压 …… (287)
§9-4 轴对称自由镦粗 …… (292)
§9-5 轴对称挤压和拉拔 …… (295)
§9-6 材料的强化效应对拉拔和挤压的影响 …… (299)
§9-7 几种方法的比较 …… (304)
习题 …… (307)
第十章 弯曲问题 …… (308)
§10-1 矩形截面梁的弹塑性弯曲 …… (308)
§10-2 理想塑性材料大曲率板条的弯曲 …… (312)
§10-3 板条的压弯问题 …… (319)
§10-4 板条的拉弯问题 …… (329)
习题 …… (344)
第十一章 板料冲压的薄膜理论 …… (347)
§11-1 塑性薄膜理论和轴对称平衡方程 …… (347)
§11-2 用特雷斯卡屈服条件和米泽斯屈服条件求薄膜力 …… (349)
§11-3 薄膜理论的应用举例 …… (357)
§11-4 带孔轴对称板料的冲压 …… (363)

§11-5 壳体不受外力作用部分的形状 …… (333)
§11-6 板料的拉伸失稳问题 …… (372)
习题 …… (377)
第十二章 厚壁板料的冲压 …… (379)
§12-1 一般概念 …… (379)
§12-2 开孔板料的翻边 …… (380)
§12-3 缩口问题 …… (390)
§12-4 深拉延问题 …… (392)
§12-5 扩孔问题 …… (396)
§12-6 复合成形问题 …… (397)
习题 …… (400)
参考文献 …… (401)
习题答案 …… (404)

第一章　应力分析

§1-1　一点处的应力状态和平衡方程

物体在外力的作用下将产生变形，而在物体内部将产生应力。外力可以是面力，即分布于物体表面的力，也可以是体积力，即分布于物体内部的力。作用在板材上的滚压力和锻造时的冲击力都是表面力，而重力和惯性力则为体积力。外力与内应力之间满足平衡条件。

设有$Oxyz$直角坐标系（图1-1），若用一平面将处于此坐标系中的物体分为A和B两个部分，并将B部分去掉而在A部分上来分析受力情况。在此物体的截面上取一微面积dA，假设在此微面积上作用有力dP，此时，取

$$\sigma = \lim_{dA \to 0} \frac{dP}{dA} \tag{1-1}$$

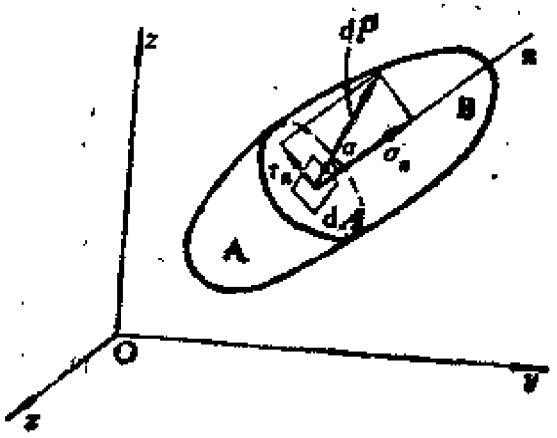


图1-1　物体上一点的应力

式中，σ称为该点的应力。应力是一个向量，它的数值和方向与所研究的截面的位置和方向有关。

一般情况下，应力σ的方向与截面法线方向n之间有一个角度α。这时，应力σ可以分解为垂直于所研究的截面的分量以及平行于所研究的截面的分量。垂直于所研究的截面的应力称为正应力，并用σ_n表示；平行于所研究的截面的应力称为剪应力，并用τ_n表示。在图1-2上，所切的截面垂直于y轴，这时正应力用σ_y表示，而剪应力又可以分解为平行于x轴的τ_{yx}和平行于z轴的τ_{yz}两个分量。剪应力下标的第一个字母表示剪应力作用面法线的方向，后一个字母则表示剪应力的方向平行于此轴。如某一个微面的外法线指向坐标轴的正向，则这个微面上的应力就以沿坐标轴的正向为正，沿坐标轴的负向为负。相反，如某一个微面的外法线指向坐标轴的负向，则这个微面上的应力就以沿坐标轴的负向为正，沿坐标轴的正向为负。

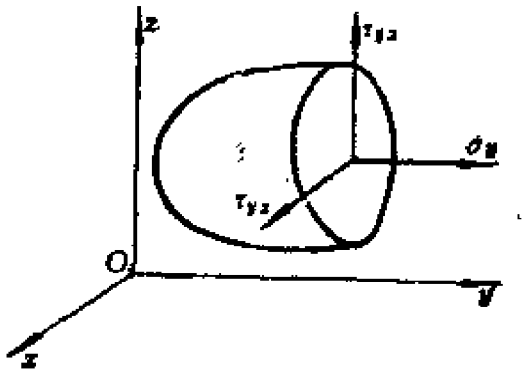


图1－2　垂直于y轴的截面上的应力

设想在受力的物体中取出一个微元体，其边长分别为dx、dy、dz，每个面上都受到一个正应力和两个剪应力的作用，同时物体中有f_x、f_y和f_z三个方向的体积力作用。作用于微元体上的体积力在x、y和z方向分别为$f_x dxdydz$、$f_y dxdydz$和$f_z dxdydz$。在微元体的六个面上的应力分量分别为

$$\sigma_x、\tau_{xy}、\tau_{xz}、\sigma_y、\tau_{yx}、\tau_{yz}、\sigma_z、\tau_{zx}、\tau_{zy}$$

若以上各应力分量为已知，则一点的应力状态便已知。在一般情况下，微元体上的应力与所选点的位置有关，它们是坐标的函数。若由坐标为x、y、z的A点过渡到坐标为$x+\mathrm{d}x$、$y+\mathrm{d}y$、$z+\mathrm{d}z$的A'点，则应力增加后的值为

$$\sigma_x' = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \sigma_x}{\partial z}\mathrm{d}z$$

$$\tau_{xy}' = \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z}\mathrm{d}z$$

$$\tau_{xz}' = \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\mathrm{d}z$$

如沿x轴移动，则$\mathrm{d}y=0$，$\mathrm{d}z=0$，故上式可写为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x' &= \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x \\ \tau_{xy}' &= \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\mathrm{d}x \\ \tau_{xz}' &= \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}\mathrm{d}x\end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}2)$$

当沿y轴或沿z轴移动时，将得到类似的关系式。

考虑式（1-2），标出图1-3中微元体上的应力。为了方便，在图1-3a上只画出了正应力，而在图1-3b上只画出了剪应力。

设所研究的微元体处于平衡状态，如忽略体积力的作用，则应有如下平衡条件：

$$\left.\begin{aligned}\Sigma P_x &= 0, & \Sigma M_x &= 0 \\ \Sigma P_y &= 0, & \Sigma M_y &= 0 \\ \Sigma P_z &= 0, & \Sigma M_z &= 0\end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}3)$$

平行于x轴的分力有：

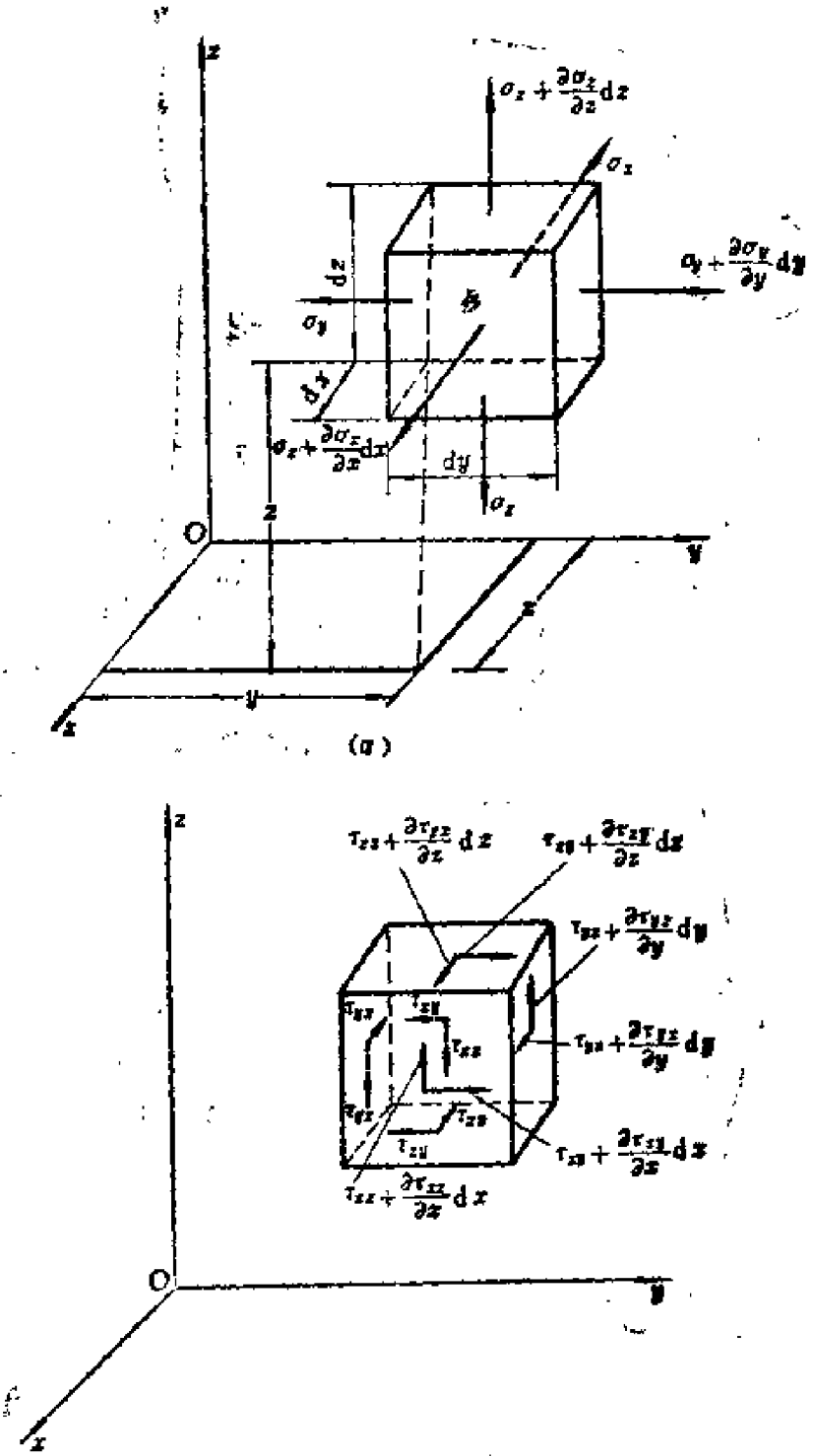


图1－3　微元体上的应力

（1）作用于与x轴垂直而面积为$A_x=\mathrm{d}y\mathrm{d}z$的面上的正应力$\sigma_x$和$\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x\right)$；

（2）作用于与y轴垂直而面积为$A_y=\mathrm{d}x\mathrm{d}z$的面上的剪应力$\tau_{yx}$和$\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y\right)$；

（3）作用于与z轴垂直而面积为$A_z=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$的面上的剪应力$\tau_{zx}$和$\left(\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\mathrm{d}z\right)$。

考虑以上这些力的平衡，可得

$$\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\sigma_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

$$-\tau_{yx}\mathrm{d}x\mathrm{d}z+\left(\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\tau_{zx}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

将上式化简后，则得

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}=0 \qquad (1\text{-}4a)$$

同样，考虑微元体沿y轴和z轴的平衡可得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}=0\\ \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=0\end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}4b)$$

方程式（1-4）首先是由法国力学家纳维（C.-L.-M.-H. Navier）导出的，故又称纳维方程。

若通过微元体的中心作一条与y轴平行的直线，由于正应力σ_x和σ_z通过这一直线，所以对此直线不引起力矩，而σ_y和这一直线平行，也不引起力矩，垂直于这条直线的微面上的剪应力τ_{yx}、τ_{yz}、$\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y\right)$、$\left(\tau_{yz}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}\mathrm{d}y\right)$也由于通过这一

直线而不引起力矩，只有垂直于这条直线并具有力臂$\frac{dz}{2}$、$\frac{dx}{2}$的剪应力τ_{zx}、τ_{xz}以及$(\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dz)$、$(\tau_{xz}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}dx)$才能对这条直线构成力矩，这时可以写出如下方程式：

$$(\tau_{xz}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dz)dxdy\cdot\frac{dz}{2}-(\tau_{xz}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}dx)dydz\cdot\frac{dx}{2}$$

$$+\tau_{xz}dxdy\cdot\frac{dz}{2}-\tau_{xz}dydz\cdot\frac{dx}{2}=0$$

化简后，得

$$2\tau_{xz}-2\tau_{xz}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dz-\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}dx=0$$

由于上式中的后两项为小量，故可忽略不计，因此有

$$\tau_{zx}=\tau_{xz} \tag{1-5a}$$

通过微元体的中心分别引一条与x轴和z轴平行的直线，并用与上述相同的方法对这两条直线取矩，则可得到如下关系式：

$$\left.\begin{aligned}\tau_{xy}&=\tau_{yx}\\ \tau_{yz}&=\tau_{zy}\end{aligned}\right\} \tag{1-5b}$$

式（1-5）称为剪应力互等定理，因此一点的应力状态可以用六个应力分量，即σ_x、σ_y、σ_z、τ_{xy}、τ_{yz}和τ_{zx}确定。

§1-2 微四面体斜面上的应力

设有微四面体，其三个面与坐标平面平行，而第四个面的法线v与三个坐标轴的方向余弦分别为l、m和n。微四面体平行于坐标轴的棱边的长度分别用dx、dy和dz表示，作用于微四面体各面上的应力如图1-4所示。

设斜面的面积为dA，而在斜面上与x轴、y轴和z轴平行的应力分量分别用p_{vx}、p_{vy}、和p_{vz}表示。微四面体各面上的力等于应

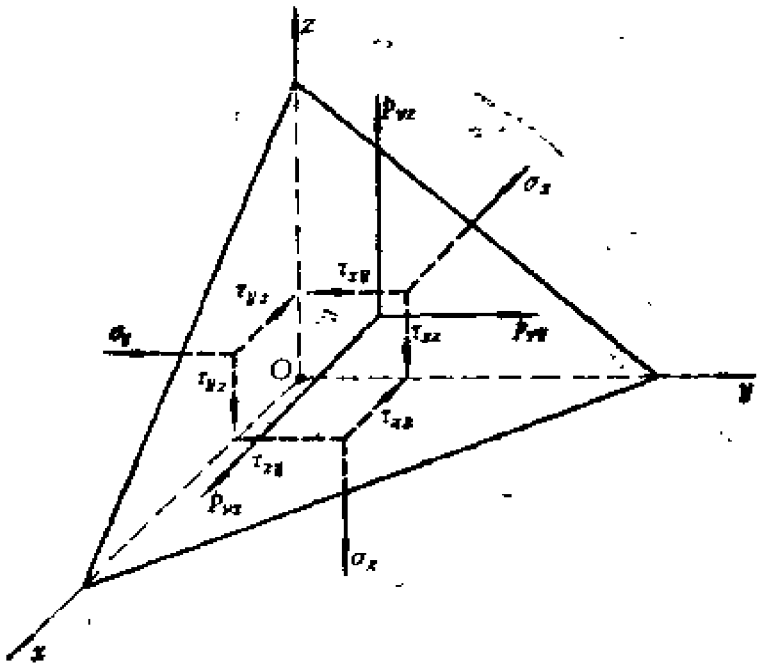


图1－4　微四面体

力与所在平面面积的乘积并作用在相应面的重心上。现将作用于微四面体各面上的应力及这些面的面积列于表1-1中。

表1-1

面的名称	外法线的方向	面积	应力投影		
			在x轴上	在y轴上	在z轴上
yOz	$-x$	$\frac{1}{2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$	$-\sigma_x$	$-\tau_{xy}$	$-\tau_{xz}$
xOz	$-y$	$\frac{1}{2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x$	$-\tau_{yx}$	$-\sigma_y$	$-\tau_{yz}$
xOy	$-z$	$\frac{1}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$	$-\tau_{zx}$	$-\tau_{zy}$	$-\sigma_z$
斜面	v	$\mathrm{d}A$	p_{vx}	p_{vy}	p_{vz}

若忽略体积力不计，由力的平衡条件，沿x轴有

$$-\sigma_x\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\tau_{yx}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\tau_{zx}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+p_{vx}\mathrm{d}A=0 \qquad (1\text{-}6)$$

根据图形投影的几何关系。应有

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}dydz &= l\,dA\\ \frac{1}{2}dzdx &= m\,dA\\ \frac{1}{2}dxdy &= n\,dA\end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}7)$$

将式（1-7）代入式（1-6）后，则有

$$p_{vx} = l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} \qquad (1\text{-}8a)$$

同样可得

$$\left.\begin{aligned}p_{vy} &= l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{zy}\\ p_{vz} &= l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z\end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}8b)$$

由式（1-8）可见，作用在任一斜面上的应力向量的分量，可以用作用在与坐标轴垂直的三个面上的应力向量的分量来表示。如果微四面体的斜面表示物体的边界（图1-5），这时p_{vx}、p_{vy}、p_{vz}相应地用F_x、F_y和F_z来表示，则式（1-8）即为力的边界条件，它表示物体边界上的面力分量与物体内部的应力分量之间的关系。

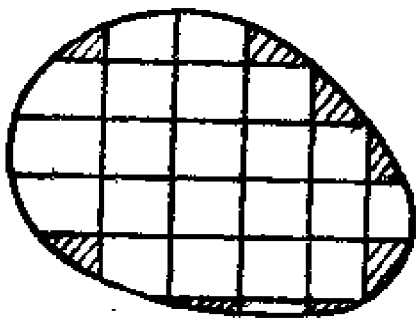


图1－5　斜面为物体的边界

斜面上的总应力p可按下式计算：

$$p^2 = p_{vx}^2 + p_{vy}^2 + p_{vz}^2 \qquad (1\text{-}9)$$

而斜面上的正应力为总应力的分量$p_{n,x}$、$p_{n,y}$和$p_{n,z}$在斜面法线上的投影之和，即

$$\sigma_n = p_{n,x}l + p_{n,y}m + p_{n,z}n \tag{1-10}$$

将式（1-8）代入式（1-10）后，则有

$$\sigma_n = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy}lm + 2\tau_{yz}mn + 2\tau_{zx}nl \tag{1-11}$$

斜面上的剪应力τ_n则为

$$\tau_n^2 = p^2 - \sigma_n^2 \tag{1-12}$$

例1：已知沿轴1、2、3的应力$\sigma_1=100\text{MN/m}^2$、$\sigma_2=50\text{MN/m}^2$、$\sigma_3=20\text{MN/m}^2$，而斜面法线方向与1、2、3轴的方向余弦分别为$l=0.710$、$m=0.565$、$n=0.423$，试求此斜面上的正应力和剪应力。

解：由于剪应力为零，所以有$p_{n,1}=\sigma_1 l=100\times0.710=71\text{MN/m}^2$，$p_{n,2}=\sigma_2 m=50\times0.565=28.2\text{MN/m}^2$，$p_{n,3}=\sigma_3 n=20\times0.423=8.46\text{MN/m}^2$。总应力$p$为

$$p=\sqrt{p_{n,1}^2+p_{n,2}^2+p_{n,3}^2}=76.5\text{MN/m}^2$$

法向应力σ_n为

$$\sigma_n=\sigma_1 l^2+\sigma_2 m^2+\sigma_3 n^2=69.7\text{MN/m}^2$$

剪应力τ_n为

$$\tau_n=\sqrt{p^2-\sigma_n^2}=32\text{MN/m}^2$$

§1-3 应力张量

如果已知方向余弦l、m、n，则可以根据方程式（1-8）及（1-10）计算σ_n。式（1-8）中由九个系数组成的一个数学量便是应力张量，张量的分量随坐标的变换而变化。应力张量是二阶张量。由于式（1-5）成立，故应力张量是二阶对称张量，并且可以写成

$$\sigma_{ij}=\begin{pmatrix}\sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx}\\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z\end{pmatrix} \tag{1-13}$$

由式（1-13）看出，剪应力τ_{xy}、τ_{yz}、τ_{zx}对于由正应力所组成的对角线是对称的。σ_x、σ_y、σ_z、τ_{xy}、τ_{yz}、τ_{zx}等称为应力张量的分量，它们的值与所选择的坐标系有关。

如用σ_0表示平均应力，且有

$$\sigma_0=\frac{1}{3}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) \tag{1-14}$$

将正应力σ_x、σ_y和σ_z都减去平均应力σ_0，则可得到三个新的正应力分量的值，即

$$\left.\begin{aligned}s_x&=\sigma_x-\sigma_0\\ s_y&=\sigma_y-\sigma_0\\ s_z&=\sigma_z-\sigma_0\end{aligned}\right\} \tag{1-15}$$

式（1-15）满足如下条件：

$$s_x+s_y+s_z=0 \tag{1-16}$$

应力张量σ_{ij}可以用两个张量之和来表示，即

$$\sigma_{ij}=s_{ij}+\sigma_0\delta_{ij} \tag{1-17}$$

式中

$$s_{ij}=\begin{pmatrix}s_x & \tau_{yx} & \tau_{zx}\\ \tau_{xy} & s_y & \tau_{zy}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & s_z\end{pmatrix}$$

称为应力偏斜张量，简称应力偏量，而

$$\sigma_0\delta_{ij}=\begin{pmatrix}\sigma_0 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_0 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_0\end{pmatrix}$$

称为球形应力张量。δ_{ij}为克罗内克（Kronecker）符号，它满

足如下关系：

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{当}i=j\\ 0, & \text{当}i\neq j\end{cases}$$

球形应力张量对应于各向均匀拉伸或均匀压缩的应力状态，它只能引起物体体积的变化。应力偏量也是张量，它只能引起物体形状的变化，而不能引起物体体积的变化。

单向拉伸时，应力张量、球形应力张量以及应力偏量的表达式分别为

$$\sigma_{ij}=\begin{pmatrix}\sigma_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\qquad \sigma_0\delta_{ij}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\sigma_1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{3}\sigma_1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\sigma_1\end{pmatrix},$$

$$s_{ij}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\sigma_1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma_1 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma_1\end{pmatrix}$$

例1：已知应力状态的各应力分量分别为$\sigma_1=200\text{MN/m}^2$、$\sigma_2=100\text{MN/m}^2$、$\sigma_3=0$，试写出应力张量、球形应力张量以及应力偏量。

解：平均应力为

$$\sigma_0=\frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)=\frac{1}{3}(200+100+0)=100\text{MN/m}^2$$

可按式（1-15）求得应力偏量的分量为

$$s_1=\sigma_1-\sigma_0=200-100=100\text{MN/m}^2$$

$$s_2=\sigma_2-\sigma_0=100-100=0$$

$$s_3=\sigma_3-\sigma_0=0-100=-100\text{MN/m}^2$$

因此有

$$\sigma_{ij}=\begin{pmatrix}200 & 0 & 0\\ 0 & 100 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\qquad \sigma_1\delta_{ij}=\begin{pmatrix}100 & 0 & 0\\ 0 & 100 & 0\\ 0 & 0 & 100\end{pmatrix},$$

$$s_{ij}=\begin{pmatrix}100 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -100\end{pmatrix}$$

§1-4 主 应 力

如果改变微四面体斜面的方向，则正应力σ_n和剪应力τ_n都将随着变化。若能找到一个方向，使斜面的法线沿此方向时其上的剪应力τ_n为零，则此方向称为主方向，而此时斜面上的正应力等于总应力，这样的正应力称为主应力。

若已知主方向上的正应力为σ，则由式（1-8）可得

$$p_{nx}=\sigma l,\quad p_{ny}=\sigma m,\quad p_{nz}=\sigma n \tag{1-18}$$

由上式和式（1-8）可得如下方程组：

$$\left.\begin{aligned}\sigma l&=\sigma_x l+\tau_{yx}m+\tau_{zx}n\\ \sigma m&=\tau_{xy}l+\sigma_y m+\tau_{zy}n\\ \sigma n&=\tau_{xz}l+\tau_{yz}m+\sigma_z n\end{aligned}\right\} \tag{1-19}$$

或

$$\left.\begin{aligned}(\sigma_x-\sigma)\,l+\tau_{yx}m+\tau_{zx}n&=0\\ \tau_{xy}l+(\sigma_y-\sigma)\,m+\tau_{zy}n&=0\\ \tau_{xz}l+\tau_{yz}m+(\sigma_z-\sigma)\,n&=0\end{aligned}\right\} \tag{1-20}$$

在上式中，l、m、n为未知量，它们确定应力的主方向。利用式（1-20）可以找出主应力σ。l、m、n还应满足如下关系式：

$$l^2+m^2+n^2=1 \tag{1-21}$$

在式（1-20）中包含有四个未知量，即l、m、n和σ。由式（1-20）可以写出l的表达式：

$$l=\begin{vmatrix} 0 & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ 0 & \sigma_y-\sigma & \tau_{zy} \\ 0 & \tau_{yz} & \sigma_z-\sigma \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} \sigma_x-\sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y-\sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z-\sigma \end{vmatrix}$$

由于上式中的分子为零，所以$l=0$，同样也可得到$m=0$，$n=0$，但这一结果与式（1-21）是矛盾的。因此上述方程式只有在分母也为零时，才可能有解，即方程组（1-20）的系数行列式必须为零：

$$\begin{vmatrix} \sigma_x-\sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y-\sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z-\sigma \end{vmatrix}=0$$

将此行列式展开后，得

$$\sigma^3-I_1\sigma^2+I_2\sigma-I_3=0 \qquad (1\text{-}22)$$

式中，

$$I_1=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z$$

$$I_2=\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x-\tau_{xy}^2-\tau_{yz}^2-\tau_{zx}^2$$

$$I_3=\sigma_x\sigma_y\sigma_z+2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}-\sigma_x\tau_{yz}^2-\sigma_y\tau_{zx}^2-\sigma_z\tau_{xy}^2$$

I_1、I_2、I_3称为应力的第一，第二和第三不变量。可以证明式（1-22）具有三个实根，这三个实根即为主应力。由于主应力只与加载的方式和大小有关，而与所选的坐标系无关，因此式(1-22）中的系数I_1、I_2、I_3必须与坐标系的选择无关，一旦应力状态确定之后，I_1、I_2和I_3即为固定不变的量，这样才能保证主应力为确定的值。应力不变量在塑性力学中具有重要的物理意义，

§1-5 等倾面上的正应力和剪应力

等倾面就是和三个主应力轴成相同角度的面，等倾面的法线方向也与三个主应力轴成相同的角度。在塑性力学中，在等倾面上研究应力状态是十分必要的，从中可以得到许多有益的启示。

等倾面法线的方向余弦l、m、n可由如下两个方程式确定：

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

$$l = m = n$$

由以上两式可得

$$l = m = n = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

将l、m、n的值代入式（1-11）、（1-12）后，则得等倾面上的正应力和剪应力为

$$\sigma_s = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \tag{1-23}$$

$$\tau_s^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

$$= \frac{1}{9}\left[2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)\right]$$

$$= \frac{1}{9}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]$$

即

$$\tau_s = \frac{1}{3}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{1-24}$$

式（1-23）和（1-24）也可以由图1-6～图1-8所示的几何关系得出。在图1-6中，正六面体的三条棱边与坐标轴重合，如在棱边AB、AC和AD上取三个点B、C、D，使AD、AB和AC相等并令$\triangle BCD$的面积等于1，则BCD面与三个轴成相同的倾角，BCD面即为等倾面，OA线为等倾面的法线。根据几何投影的关系可知

$$\triangle ABC = \triangle ADC = \triangle ABD = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

在三个面上的力等于应力与相应面积的乘积，即

$$p_1 = \frac{\sigma_1}{\sqrt{3}}, \quad p_2 = \frac{\sigma_2}{\sqrt{3}}, \quad p_3 = \frac{\sigma_3}{\sqrt{3}}$$

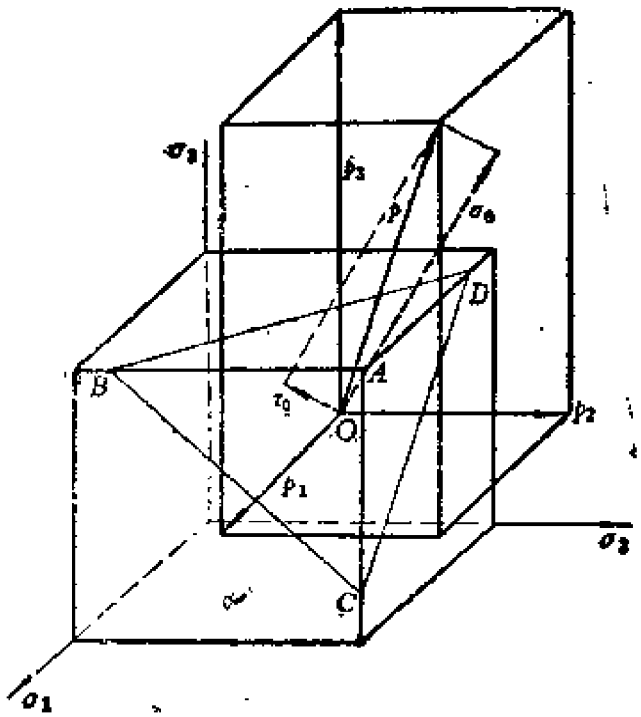


图1－6　作用在等倾面上的力的分解

式中，p_1、p_2、p_3为力p在σ_1、σ_2、σ_3轴方向的分量。在一般情况下，力p和等倾面的法线之间有一个倾角。$\sigma_1\sigma_2\sigma_3$坐标系称为应力空间。若将σ_1、σ_2、σ_3轴在等倾面上投影，则在等倾面上可以得到互相成120°角的三个坐标轴（图1-7）。

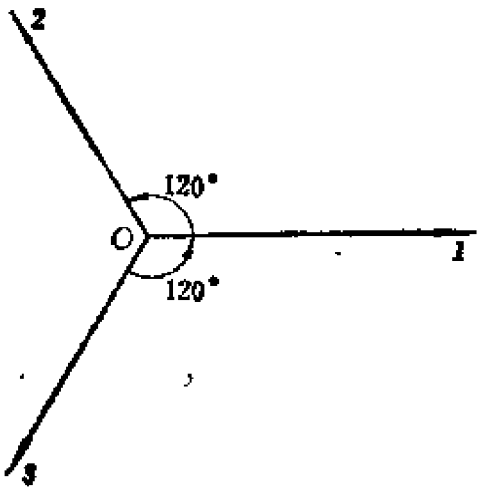


图1－7　等倾面上互相成120°角的坐标

现对一点的应力状态在等倾面上进行研究。这时向量p可用如下三个量来表示：

（1）向量p在OA轴上的投影，用σ_0表示；

（2）向量p在等倾面上的投影，用τ_0表示；

（3）τ_0与轴σ_1在等倾面上的投影之间的夹角，用ω_0表示。

由于OA方向是等倾面的法线方向，向量p在OA方向的投影等于向量p的三个分量p_1、p_2、p_3在OA上的投影之和，而p_1、p_2和p_3与OA之间的方向余弦为$\frac{1}{\sqrt{3}}$，因此有

$$\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sigma_1}{\sqrt{3}} + \frac{\sigma_2}{\sqrt{3}} + \frac{\sigma_3}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

由此可见，p在OA方向的投影即为平均应力，并与式（1-23）相同。为了确定τ_0，需要将p_1、p_2、p_3投影到等倾面BCD上。由于p_1、p_2、p_3和等倾面法线的夹角的余弦为$\sqrt{\frac{1}{3}}$，所以p_1、p_2、p_3和等倾面夹角的余弦为$\sqrt{\frac{2}{3}}$。如用p_1'、p_2'和p_3'分别表示p_1、p_2、p_3在等倾面上的投影，则有

$$p_1' = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{1}{3}}\sigma_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_1$$

$$p_2' = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{1}{3}}\sigma_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_2$$

$$p_3' = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{1}{3}}\sigma_3 = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_3$$

它们的方向分别与坐标轴1、2、3的方向一致。将它们几何相加，便可得到p在等倾面上的投影（即τ_0的表达式）。由图1-8可见：

$$\tau_0^2 = \left\{\sqrt{\frac{2}{3}}\left[\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2+\sigma_3)\right]\right\}^2 + \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_2-\sigma_3)\right\}^2$$

$$= \frac{1}{9}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]$$

此式与式（1-24）相同。

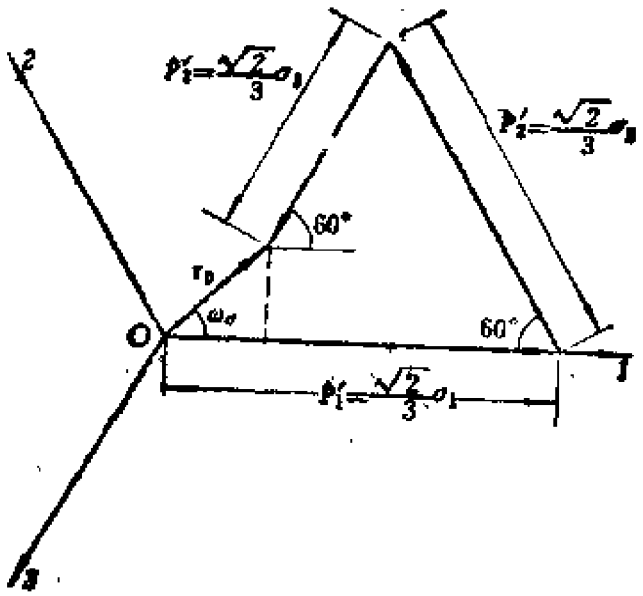


图1-8 p_1、p_2、p_3在等倾面上的投影

若将图1-8上所有的值都乘以系数$\frac{3}{\sqrt{2}}$，则可得到图1-9所示的情况。图1-9比图1-8在计算时更为方便。

τ_0增大$\frac{3}{\sqrt{2}}$倍后的值称为应力强度，它的表达式为

$$\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}}\tau_0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2} \quad (1\text{-}25)$$

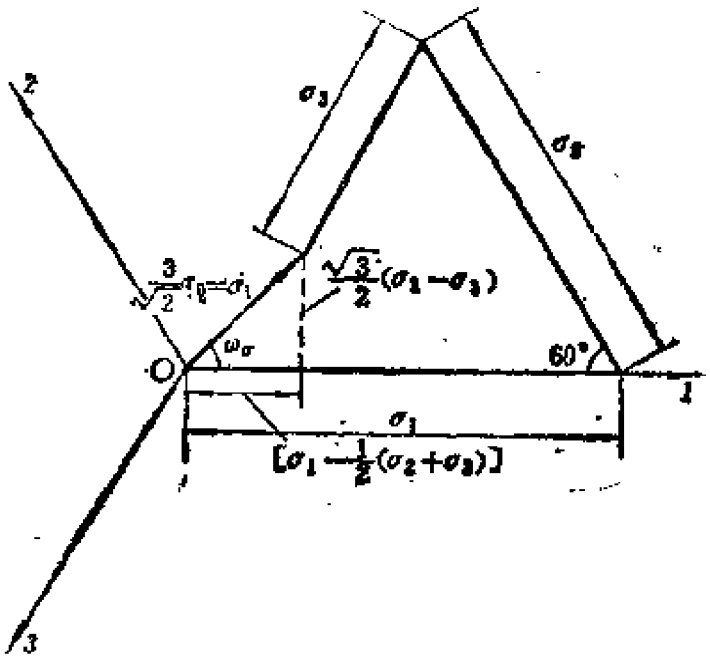


图1－9　放大$3/\sqrt{2}$倍的p_1、p_2、p_3在等倾面上的投影

已知σ_1的值后，便可求出σ_1与1轴的夹角ω_σ，即

$$\cos\omega_\sigma=\frac{\sigma_1-\frac{1}{2}(\sigma_2+\sigma_3)}{\sigma_1}=\frac{2\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3}{2\sigma_1} \tag{1-26}$$

式中，ω_σ称为应力形式指数，有时亦称为应力状态的特征角。

应力偏量分量$s_1=\sigma_1-\frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)=\frac{2}{3}[\sigma_1-\frac{1}{2}(\sigma_2+\sigma_3)]$，由图1-9可知，此值即为$\frac{2}{3}\sigma_1$在1轴上的投影，故可得

$$\left.\begin{aligned}s_1&=\frac{2}{3}[\sigma_1-\frac{1}{2}(\sigma_2+\sigma_3)]=\frac{2}{3}\sigma_1\cos\omega_\sigma\\ s_2&=-\frac{2}{3}\sigma_1\cos(\omega_\sigma-120°)\\ s_3&=\frac{2}{3}\sigma_1\cos(\omega_\sigma-240°)\end{aligned}\right\} \tag{1-27}$$

式（1-27）满足如下条件：

$$s_1 + s_2 + s_3 = \frac{2}{3}\sigma_i\left[\cos\omega_\sigma + \cos(\omega_\sigma - 120°) + \cos(\omega_\sigma - 240°)\right] = 0$$

用正应力σ_1、σ_2、σ_3所表示的σ_0称为静水压力，如前所述，它只引起物体体积的变化，而应力强度σ_i则只引起物体形状的变化，应力形式指数ω_σ与应力状态有关。

由式（1-15）和式（1-27）可知，主应力可用如下关系式表示：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_0 + \frac{2}{3}\sigma_i\cos\omega_\sigma \\ \sigma_2 &= \sigma_0 + \frac{2}{3}\sigma_i\cos(\omega_\sigma - 120°) \\ \sigma_3 &= \sigma_0 + \frac{2}{3}\sigma_i\cos(\omega_\sigma - 240°)\end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}28)$$

以上公式可以用应力星圆来表示。应力星圆是以距原点O为σ_0的一点为圆心，以$\frac{2}{3}\sigma_i$为半径所画的圆。由圆心O'点开始作与轴$O\sigma$成ω_σ角的直线，则此直线与圆的交点在σ轴上的投影即为σ_1。由$O'A$线顺时针旋转120°作一直线，此直线与圆的交点在σ轴上的投影即为σ_2。而由$O'A$线顺时针旋转240°所作的直线与圆的交点在σ轴上的投影即为σ_3。由图1-10可见，应力形式指数ω_σ的值可以表示为

$$\cos\omega_\sigma = \frac{\sigma_1 - \sigma_0}{\frac{2}{3}\sigma_i} \qquad (1\text{-}29)$$

单向拉伸时，有

$$\sigma_1 = \sigma,\quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

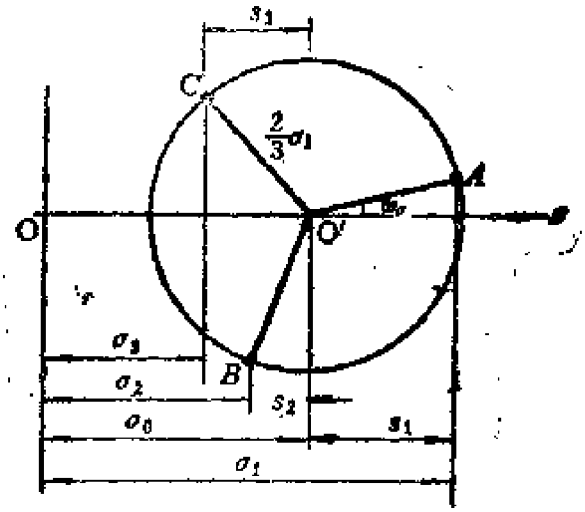


图1－10　应力星圈

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma, \quad \sigma_1 = \sigma$$

由式（1-29）可得

$$\cos\omega_\sigma = \frac{\sigma - \frac{\sigma}{3}}{\frac{2}{3}\sigma} = 1$$

即

$$\omega_\sigma = 0$$

单向拉伸时的应力星圈如图1-11所示。在表1-2中给出了常见的几种简单的应力星圈图。

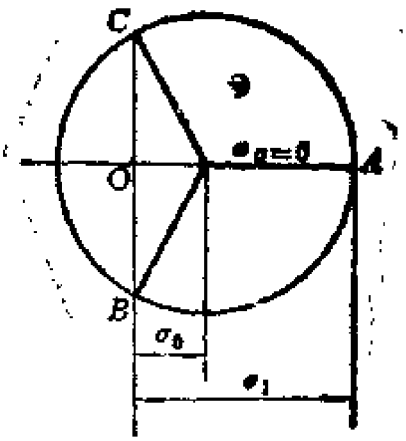
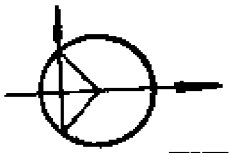
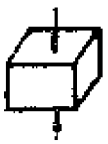
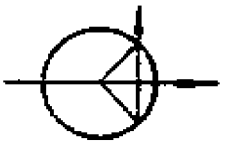
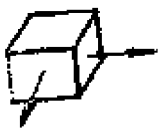
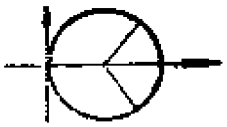
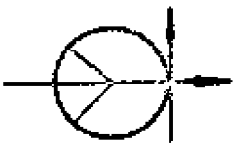
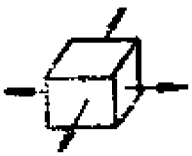
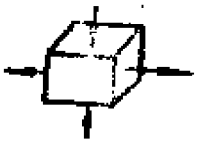
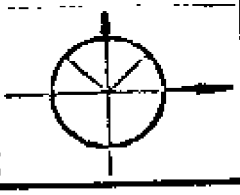


图1－11　单向拉伸时的应力星圈

表1-2

应力状态	应力值 σ_1	σ_2	σ_3	受力图	应力星圆	$\cos\omega_\sigma$
单向拉伸	σ	0	0			1
单向压缩	0	0	$-\sigma$			0.5
双向拉伸	σ	σ	0			0.5
双向压缩	0	$-\sigma$	$-\sigma$			1
双向拉伸	2σ	σ	0			$\frac{\sqrt{3}}{2}$
纯剪	σ	0	$-\sigma$			$\frac{\sqrt{3}}{2}$

例1：若已知应力状态为：$\sigma_1 = 150\ \mathrm{MN/m^2}$，$\sigma_2 = 50\ \mathrm{MN/m^2}$，$\sigma_3 = -50\mathrm{MN/m^2}$，试画出应力星圆。

解：应力星圆的半径为$\frac{2}{3}\sigma_1$，其圆心到原点的距离为σ_2。首先求出应力星圆的半径，此时有

$$R=\frac{2}{3}\sigma_1=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{10}}{2}\sqrt{(15-5)^2+(5+5)^2+(-5-15)^2}$$

$$=\frac{200}{\sqrt{3}}$$

$$=115\mathrm{MN/m^2}$$

平均应力σ_0为

$$\sigma_0=\frac{1}{3}(150+50-50)=50\mathrm{MN/m^2}$$

应力形式指数ω_σ按下式计算：

$$\cos\omega_\sigma=\frac{\sigma_1-\sigma_0}{\frac{2}{3}\sigma_1}=\frac{150-50}{\frac{200}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

故知$\omega_\sigma=30°$。

根据以上所求得的值，可以画出应力星圆，如图1-12所示。

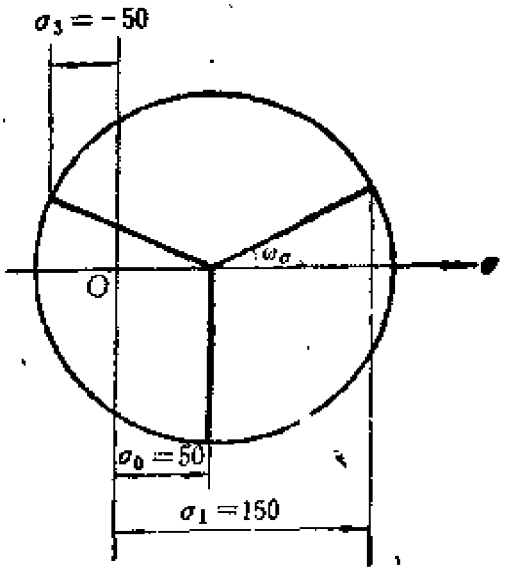


图1-12 应力星圆

§1-6 最大剪应力

对于任一斜面上的剪应力，可按式（1-12）求出，即

$$\tau_\nu^2 = p - \sigma_\nu^2$$

若坐标轴与应力主轴重合，则$p_{\nu 1}$、$p_{\nu 2}$和$p_{\nu 3}$的表达式为

$$p_{\nu 1} = \sigma_1 l,\quad p_{\nu 2} = \sigma_2 m,\quad p_{\nu 3} = \sigma_3 n$$

根据公式（1-9），可以求出总应力的值为

$$p^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 \qquad (1\text{-}30)$$

总应力在斜面法线方向的投影为

$$\sigma_\nu = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 \qquad (1\text{-}31)$$

将式（1-30）和（1-31）代入式（1-12）后，则有

$$\tau_\nu^2 = p^2 - \sigma_\nu^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2)^2 \qquad (1\text{-}32)$$

考虑到$l^2 + m^2 + n^2 = 1$，式（1-32）又可写为

$$\begin{aligned}\tau_\nu^2 &= \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 (1 - l^2 - m^2) - [\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 \\ &\quad + \sigma_3 (1 - l^2 - m^2)]^2 \\ &= (\sigma_1^2 - \sigma_3^2) l^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2) m^2 + \sigma_3^2 - [(\sigma_1 - \sigma_3) l^2 \\ &\quad + (\sigma_2 - \sigma_3) m^2 + \sigma_3]^2\end{aligned}$$

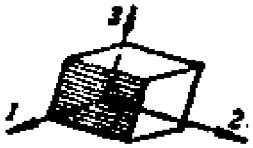
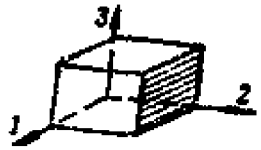
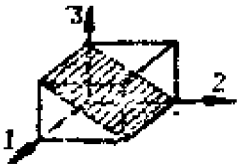
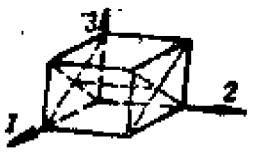
为了找到l和m的极值，令τ_ν^2对l和m的偏导数为零，这时可得

$$l[(\sigma_1 - \sigma_3) l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) m^2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)] = 0$$

$$m[(\sigma_1 - \sigma_3) l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) m^2 - \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)] = 0$$

将以上两式可能求得的结果列于表1-3中。

表1-3

平面位置	方向余弦			剪应力
	l	m	n	
	±1	0	0	$\tau=0$
	0	±1	0	$\tau=0$
	0	0	±1	$\tau=0$
	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$\tau_{12}=\pm\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$
	0	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\tau_{23}=\pm\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}$
	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\tau_{31}=\pm\frac{\sigma_3-\sigma_1}{2}$

由上表可见，主应力平面上的剪应力为零；最大剪应力位于坐标轴的分角面上；而且三个最大剪应力分别等于三个主应力两两之差的一半。

最大剪应力也可用σ_1和ω，来表示，这时有

$$
\left.\begin{aligned}
\tau_{12} &= \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2} = \frac{\sigma_i}{3}[\cos\omega_\tau - \cos(\omega_\tau - 120°)] \\
&= \frac{\sigma_i}{\sqrt{3}}\sin(\omega_\tau - 240°) \\
\tau_{23} &= \frac{\sigma_2-\sigma_3}{2} = \frac{\sigma_i}{3}[\cos(\omega_\tau - 120°) \\
&\quad - \cos(\omega_\tau - 240°)] = \frac{\sigma_i}{\sqrt{3}}\sin\omega_\tau \\
\tau_{31} &= \frac{\sigma_3-\sigma_1}{2} = \frac{\sigma_i}{3}[\cos(\omega_\tau - 240°) - \cos\omega_\tau] \\
&= \frac{\sigma_i}{\sqrt{3}}\sin(\omega_\tau - 120°)
\end{aligned}\right\} \quad (1\text{-}33)
$$

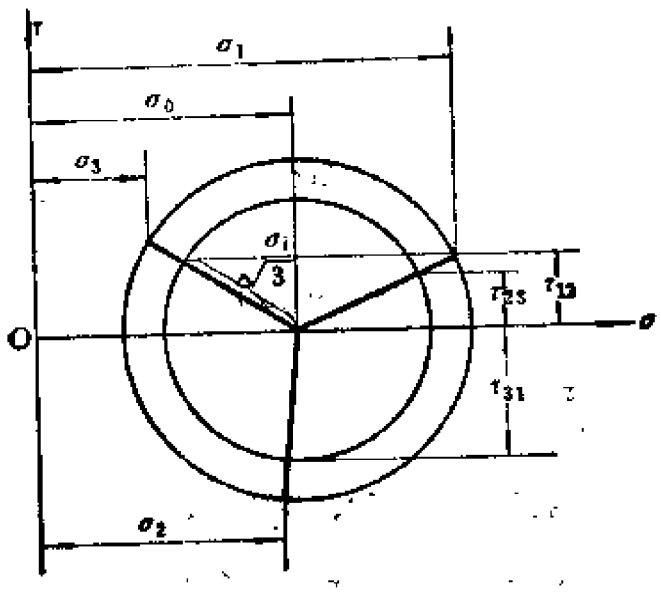


图1-13 应力星圆

应力星圆（图1-13）的半径在剪应力τ轴上的投影等于最大剪应力。应力星圆的半径$R=\sigma_i/\sqrt{3}$，应力星圆的圆心位于距原点为σ_0处。由图上可见，剪应力τ_{31}的绝对值最大。

§1-7 应力莫尔圆

先分析单向拉伸情况。设有一根杆件，其横截面为A，受拉力P作用。若横截面上的应力是均匀的，则$\sigma = P/A$。在法线与轴向成α角的斜截面上，法向应力将有所减小。由于斜截面面积A_α与横截面面积A之间的关系为

$$A_\alpha = A/\cos\alpha$$

因此可得

$$\sigma_\alpha = P\cos\alpha/A$$

若将σ_α分解为法向分量和切向分量，则可得

$$\sigma_\alpha = \sigma_\alpha\cos\alpha = \sigma\cos^2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \sigma_\alpha\sin\alpha = \sigma\cos\alpha\sin\alpha = \frac{\sigma}{2}\sin 2\alpha$$

如考虑$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$，则可得

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\alpha &= \frac{\sigma}{2}(1+\cos 2\alpha)\\ \tau_\alpha &= \frac{\sigma}{2}\sin 2\alpha\end{aligned}\right\} \tag{1-34}$$

将式（1-34）两式平方相加，则可得

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2 = \frac{\sigma^2}{4} \tag{1-35}$$

上式为圆的方程，圆的半径为$\sigma/2$，圆心位于横坐标上$\sigma/2$处，如图1-14所示。在此情况下，最大剪应力等于圆的半径，$2\alpha = 90°$。

再分析沿两个互相垂直的方向受拉伸的情况。设两个主应力的值为σ_1和σ_2。由图1-15可见，法向应力σ_α是σ_1和σ_2分别引起

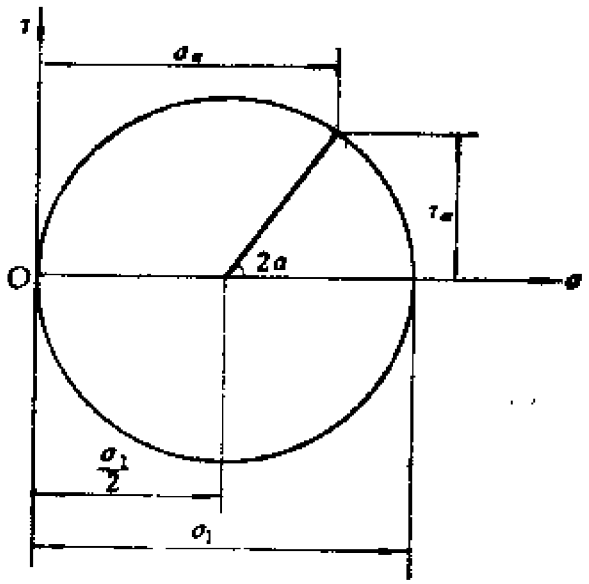


图1－14　单向拉伸莫尔圆

的法向应力之和，即

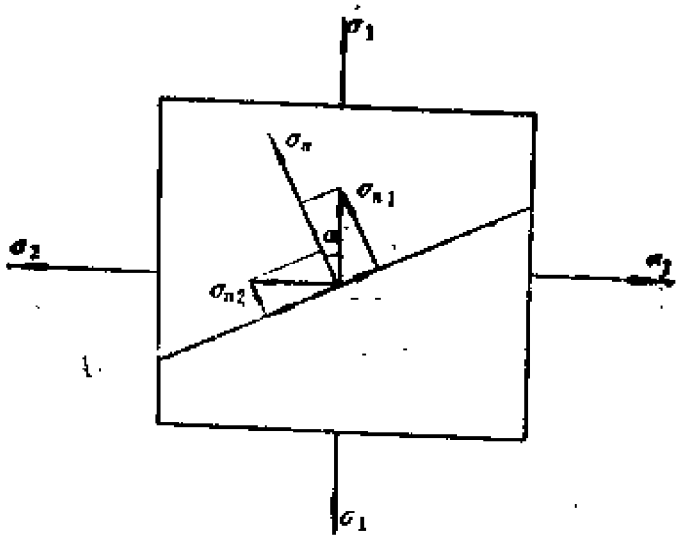


图1－15　两向拉伸时α斜面上的应力

$$\sigma_n = \sigma_{n1} + \sigma_{n2}$$
$$= \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \cos^2(90^\circ - \alpha)$$
$$= \frac{\sigma_1}{2}(1 + \cos 2\alpha) + \frac{\sigma_2}{2}[1 + \cos(180^\circ - 2\alpha)]$$
$$= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\cos 2\alpha \qquad (1\text{-}36)$$

而剪应力的值则为

$$\tau_n = \tau_{n1} - \tau_{n2}$$
$$= \frac{\sigma_1}{2}\sin 2\alpha - \frac{\sigma_2}{2}\sin(180^\circ - 2\alpha)$$
$$= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\sin 2\alpha \qquad (1\text{-}37)$$

由式（1-36）和式（1-37）可得

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau_n^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 \qquad (1\text{-}38)$$

式（1-38）也是圆的方程，圆的半径$R = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$，圆心位于横坐标上$\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$处，如图1-16所示。这个圆表示通过轴3而与轴1和轴2有一倾角的斜面上的应力状态。通过轴2而与轴1和轴3有一倾角的斜面上的应力状态，由圆心为O_2的应力圆表示。通过轴3而与轴1和轴2有一倾角的斜面上的应力状态，由圆心为O_3的应力圆表示。由图1-16可见，最大剪应力在通过轴2而与轴1成45°角的斜面上，其值为

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1}{2}$$

可以证明，圆心为O_1、O_2和O_3的三个应力圆所包围的阴影区（图1-17a），能表示对三个主轴有任何倾角的斜面上的应力状态。对于主应力为σ_1、σ_2和σ_3的任意应力状态，应力莫尔圆如

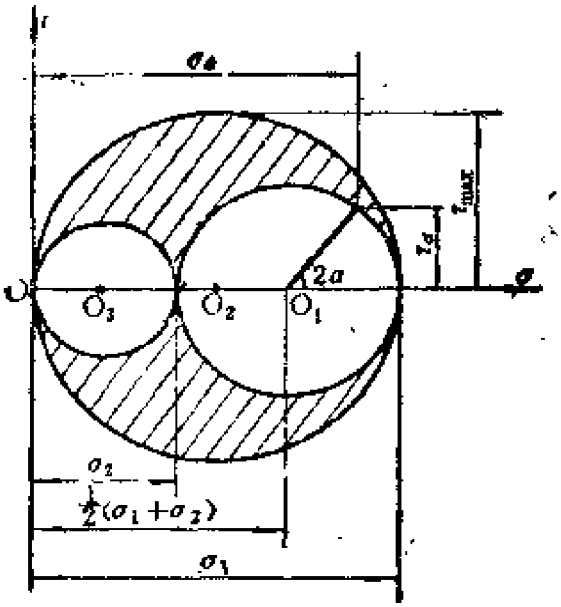
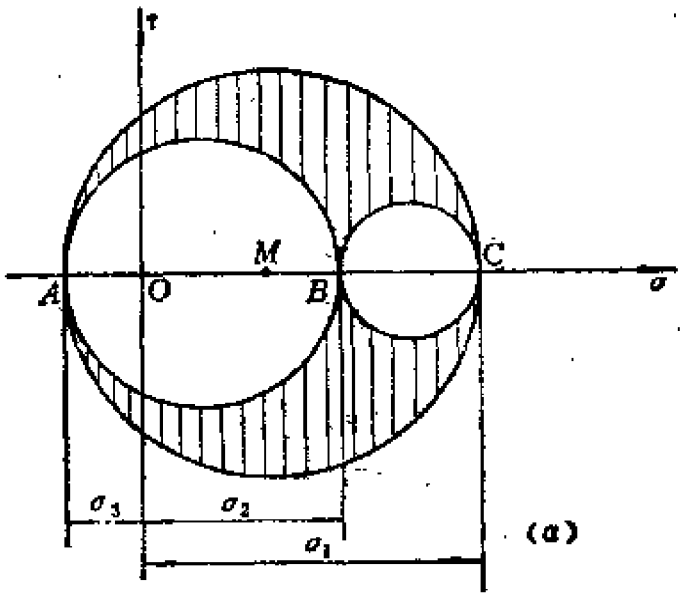
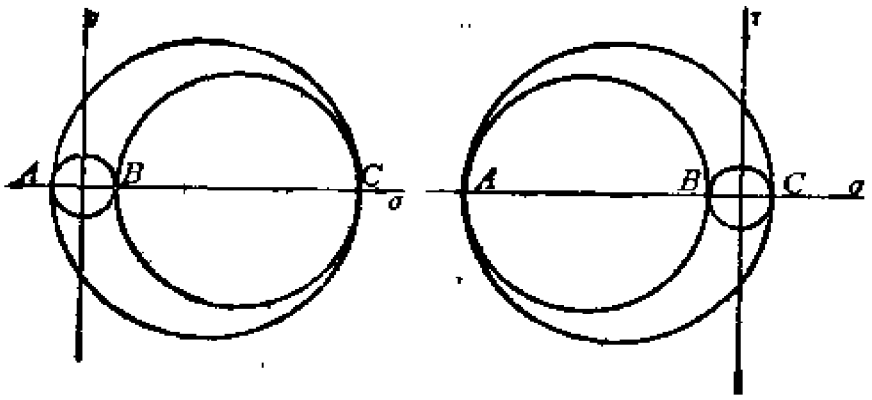


图1－16　双向拉伸莫尔圆

图1-17*a*所示。由图上可见，应力状态与*B*点相对于*A*和*C*点的位置有关。例如对于单向拉伸应力状态，*A*点和*B*点的距离趋近于零，这时可以得到单向拉伸莫尔圆（如图1-17*b*所示）。而当*BC*两点的距离趋近于零时，便可得到单向压缩莫尔圆（如图1-17*c*所示）。





(b)　　(c)

图1－17　三维应力状态的莫尔圆

取图1-17a上大圆中心为M点，则有

$$MC=\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3),\ MB=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}-(\sigma_1-\sigma_2)$$

$$=\frac{1}{2}(2\sigma_2-\sigma_1-\sigma_3)$$

当$\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3$时，比值

$$\mu_\sigma=\frac{MB}{MC}=\frac{2\sigma_2-\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_1-\sigma_3}$$

称为应力洛德(W.Lode)参数，它和应力形式指数类似，也是表征应力状态的量。

习　题

1-1　试以主应力表示与三个主应力轴成等角的斜面上的正应力和剪应力，并以应力不变量表示。

1-2　已知受力物体中某点的应力分量为$\sigma_x=100a$，$\sigma_y=206a$，$\sigma_z=300a$，$\tau_{xy}=-50a$，$\tau_{yz}=\tau_{zx}=0$，试求该点的主应力、主剪应力、八面体剪应力及主应力的方向。

1-3　已知平面问题的应力分量为

$$\sigma_x = qxy,\ \sigma_y = 0,\ \tau_{xy} = C\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

试用平衡方程求出系数C，并在图1-18所示的板的左、右侧面上画出面力的分布图（体力不计）。

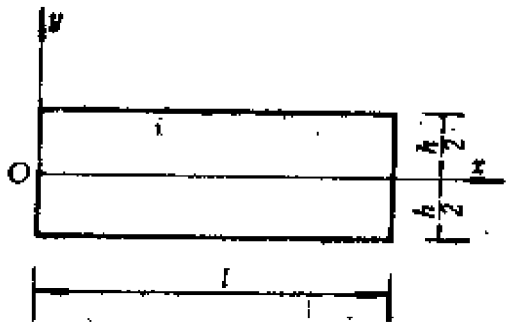


图1－18　平板

1-4　设已知

$$\cos\omega_\sigma = -\frac{(\sigma_1-\sigma_2)+(\sigma_1-\sigma_3)}{2\sigma_i}$$

式中ω_σ为应力形式指数，σ_i为应力强度，其几何意义如图1-9所示。试求表中所列应力状态的应力偏量s_1、s_2、s_3以及σ_i、σ_0、$\cos\varphi_{\sigma_0}$。

	σ_1	σ_2	σ_3
单向拉伸	σ	0	0
双向等压	0	$-\sigma$	$-\sigma$
纯　剪	σ	0	$-\sigma$
两向拉	σ	$\frac{\sigma}{2}$	0

1-5　试根据应力形式指数和应力强度的定义，证明应力洛德参数与应力形式指数有如下关系：

$$\mu_\sigma = \sqrt{3}\ \mathrm{tg}\left(\omega_\sigma - \frac{\pi}{6}\right)$$

第二章　应变分析

§2-1　应变和位移

每一个受外力作用的物体都要产生变形。根据力的大小和材料的性质，变形可能是弹性的，即当除去外载荷后，物体的变形完全消失；变形也可能是塑性的，即当除去外载荷后，物体保持持久变形。变形的结果，使物体上的点产生位移。例如在未变形物体上的点M，其初始坐标为x、y、z，变形后为点M_1，其坐标为$x+u$、$y+v$和$z+w$。将点M和点M_1的连线投影到x、y、z轴上，则可得到位移分量u、v、w。物体上不同点的位移分量是不同的，它们是坐标位置的函数，即

$$u=f_1(x,y,z),\quad v=f_2(x,y,z),\quad w=f_3(x,y,z) \tag{2-1}$$

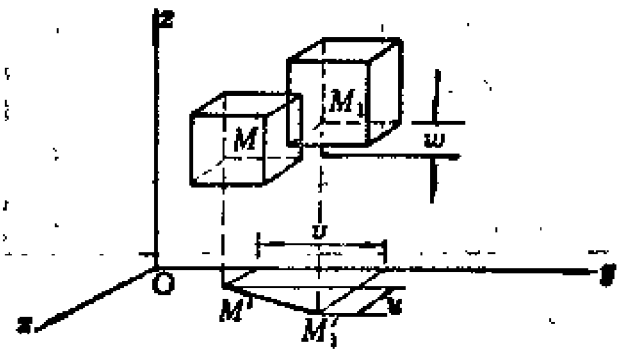


图2-1　位移示意图

这时点M_1的位置将由如下坐标确定：

$$x_1=x+u,\quad y_1=y+v,\quad z_1=z+w \tag{2-2}$$

由于各点的位移不同，所以变形体不但会产生应变，而且还将产生转动。图2-2所示为微元体在xy平面上的投影，u和v将确定M'点的位置。一般来说，微元体不仅边长有变化，而且各边和坐标轴之间的角度也将有变化。Oxy平面上的M、B、C点，在物体变形前的坐标分别为

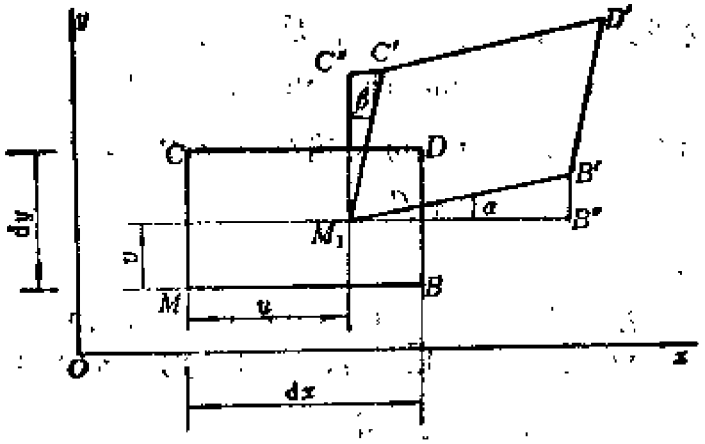


图2－2　微元体的变形

$$M(x,y),\ B\ (x+\mathrm{d}x,y)\ ,C\ (x,y+\mathrm{d}y) \tag{2-3}$$

物体变形后，点M、B、C分别移到点M'、B'、C'，其坐标为

$$\left.\begin{aligned} &M'[\ x+u\ (x,y)\ ,y+v\ (x,y)\ ]\\ &B'[\ x+\mathrm{d}x+u(x+\mathrm{d}x,y),y+v(x+\mathrm{d}x,y)\ ]\\ &C'[\ x+u(x,y+\mathrm{d}y),y+\mathrm{d}y+v(x,y+\mathrm{d}y)\ ] \end{aligned}\right\} \tag{2-4}$$

将上式中的$u\ (x+\mathrm{d}x,y)$、$u\ (x,y+\mathrm{d}y)$、$v(x+\mathrm{d}x,y)$、$v\ (x,y+\mathrm{d}y)$按泰勒级数展开，并略去高阶微量，得

$$\left.\begin{aligned} &u(x+\mathrm{d}x,y)=u+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x,\ u(x,y+\mathrm{d}y)=u+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\\ &v(x+\mathrm{d}x,y)=v+\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x,\ v(x,y+\mathrm{d}y)=v+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y \end{aligned}\right\} \tag{2-5}$$

由图2-2可知，原长为$\mathrm{d}x$的MB边变形后在x轴上的投影的相对伸长ε_x为

$$e_x = \frac{\mathrm{d}x + u_B - u_M - \mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \frac{u(x+\mathrm{d}x, y) - u(x, y)}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2\text{-}6)$$

同理，沿y轴和z轴的相对伸长为

$$e_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad e_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

当$e>0$时，表示微段伸长；当$e<0$时，表示微段缩短。e_x、e_y和e_z称为正应变或线应变，它是一个无量纲的量。

设α为沿x轴的微段转向y轴的角度，β为沿y轴的微段转向x轴的角度，两直角边MB和MC的夹角变化为γ_{xy}，则

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \alpha + \beta \quad (2\text{-}7)$$

由于角α很小，故

$$\alpha = \mathrm{tg}\alpha = \frac{B'B''}{M'B''} = \frac{v(x+\mathrm{d}x, y) - v(x, y)}{\mathrm{d}x + u(x+\mathrm{d}x, y) - u(x, y)} \quad (2\text{-}8)$$

将式（2-5）代入式（2-8）后得

$$\alpha = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x}$$

由于$\frac{\partial u}{\partial x}$与1相比是个微量，故可略去不计，因此有

$$\alpha = \frac{\partial v}{\partial x}$$

用相同的方法可得

$$\beta = \frac{\partial u}{\partial y}$$

将α和β值代入式（2-7）后得

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2\text{-}9)$$

γ_{xy}称为剪应变。用类似的方法在Oyz和Ozx坐标平面上可得

$$\gamma_{yz}=\gamma_{zy}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y},\quad \gamma_{zx}=\gamma_{xz}=\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial x}$$

由图2-2可见，当$\gamma>0$时，表示直角减小；当$\gamma<0$时，表示直角增大。在三维问题中，位移和应变之间的关系可汇总如下：

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x&=\frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy}&=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\\
\varepsilon_y&=\frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz}&=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\\
\varepsilon_z&=\frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zx}&=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}
\end{aligned}\right\}\qquad (2\text{-}10)$$

由于应变和位移都是几何量，所以方程(2-10)称为几何方程。它首先由法国数学家柯西(A.-L. Cauchy)导出，因此有时称为柯西方程。但应注意这个式子只有在小变形条件下才是适用的。当dx、dy、dz收缩为一点时，以上方程则表示一点的六个应变分量。

§2·2 主 应 变

若将图2-2中微元体上的M_1点移到初始状态的M点，并将变形后的微元体和变形前的微元体相比，便可看到微元体不仅有伸长而且有转动。例如在Oxy平面上（图2-3），MA边沿x轴方向有伸长并有转动，而MC边沿y轴方向有伸长并有转动。在MA和MC线段之间一定存在MD这样的线段，它在变形的过程中只有伸长而没有转动。由此可知，在变形体的每一点上都有这样的方向，在此方向上，只有正应变而没有剪应变。这样的方向称为主方向，而在主方向的正应变称为主应变。

若取MB的方向为主方向（图2-4），而MB与x轴和y轴之间夹角的余弦分别为l和m，则由图2-4可得

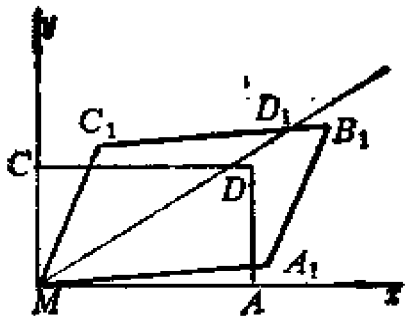


图2-3 Oxy平面上微元体的变形

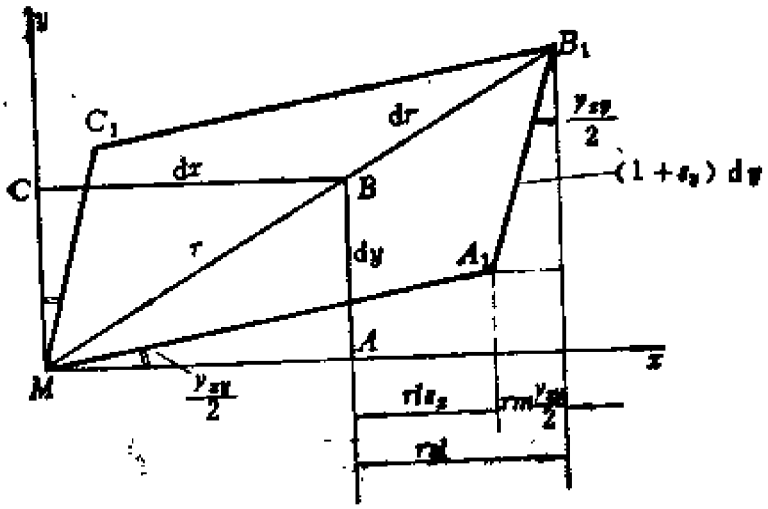


图2-4 主方向示意图

$$erl = rl\varepsilon_x + rm\cdot\frac{\gamma_{xy}}{2}$$

用类似的方法分析空间问题，则有

$$erl = rl\varepsilon_x + rm\cdot\frac{\gamma_{xy}}{2} + rn\cdot\frac{\gamma_{xz}}{2}$$

式中，l、m、n分别为MB方向与x、y、z轴之间夹角的余弦。消去r后，则有

$$el = \varepsilon_x l + \frac{\gamma_{xy}}{2}m + \frac{\gamma_{xz}}{2}n$$

或

$$(\varepsilon_x - e)\, l + \frac{\gamma_{xy}}{2} m + \frac{\gamma_{xz}}{2} n = 0 \qquad (2\text{-}11a)$$

用相同的方法可得

$$\left.\begin{aligned} \frac{\gamma_{yx}}{2} l + (\varepsilon_y - e)\, m + \frac{\gamma_{yz}}{2} &= 0 \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} l + \frac{\gamma_{zy}}{2} m + (\varepsilon_z - e) n &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}11b)$$

而

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

因此l、m和n不可能同时为零。如式（2-11）有解，则l、m、n的系数行列式必须为零，即

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - e & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - e & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - e \end{vmatrix} = 0$$

将此行列式展开后，得

$$e^3 - I_1' e^2 + I_2' e - I_3' = 0 \qquad (2\text{-}12)$$

式中，

$$I_1' = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$I_2' = \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x - \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)$$

$$I_3' = \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z + \frac{1}{4}[\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx} - (\varepsilon_x\gamma_{yz}^2 + \varepsilon_y\gamma_{zx}^2 + \varepsilon_z\gamma_{xy}^2)]$$

三次方程（2-12）、具有三个实根，记作e_1、e_2、e_3，即为主应变。确定了主应变后，便可由式（2-11）求出方向余弦l、m和n，从而找到主轴的方向。由于在应变状态确定后，

e_1、e_2和e_3是不随坐标方向的改变而变化的量，因此方程式（2-12）中的系数也都是不变量，并称I_1'、I_2'、和I_3'为应变的第一、第二和第三不变量。

§2-3 应变张量

确定物体上一点的应变状态的九个应变分量构成应变张量，即

$$e_{ij}=\begin{pmatrix} e_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & e_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & e_z \end{pmatrix} \tag{2-13}$$

由于$\gamma_{xy}=\gamma_{yx}$、$\gamma_{xz}=\gamma_{zx}$、$\gamma_{zy}=\gamma_{yz}$，所以应变张量e_{ij}为对称张量。用$\delta_{ij}e_0$表示应变球形张量，即

$$\delta_{ij}e_0=\begin{pmatrix} e_0 & 0 & 0 \\ 0 & e_0 & 0 \\ 0 & 0 & e_0 \end{pmatrix} \tag{2-14}$$

式中$e_0=\frac{1}{3}(e_x+e_y+e_z)$。应变偏量可以写成

$$e_{ij}=\begin{pmatrix} e_x-e_0 & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & e_y-e_0 & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & e_z-e_0 \end{pmatrix} \tag{2-15}$$

应变球形张量表示各向相同的伸长或缩短，即表示体积的变化。

而应变偏量则表示物体形状的变化。应变张量为应变偏量和应变球形张量之和，即

$$e_{ij}=e'_{ij}+\delta_{ij}e_0 \tag{2-16}$$

当体积应变为零，即$e_0=0$时，应变偏量等于应变张量，即有

$$e_{ij}=e'_{ij} \tag{2-17}$$

对于单向拉伸，可得

$$e_1=e,\quad e_2=-\mu e,\quad e_3=-\mu e$$

此时应变张量为

$$e_{ij}=\begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & -\mu e & 0 \\ 0 & 0 & -\mu e \end{pmatrix}$$

平均应变为

$$e_0=\frac{1}{3}(e_1+e_2+e_3)=\frac{e}{3}(1-2\mu)$$

应变偏量的分量为

$$e'_1=e_1-e_0=\frac{2}{3}e(1+\mu)$$

$$e'_2=e_2-e_0=-\frac{1}{3}e(1+\mu)$$

$$e'_3=e_3-e_0=-\frac{1}{3}e(1+\mu)$$

球形应变张量为

$$\delta_{ij}e_0=\begin{pmatrix} \frac{e}{3}(1-2\mu) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e}{3}(1-2\mu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e}{3}(1-2\mu) \end{pmatrix}$$

应变偏量为

$$e_{ij}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}e(1+\mu) & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{3}e(1+\mu) & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}e(1+\mu)\end{pmatrix}$$

在以主应变为坐标的应变空间中，若将e_1、e_2、e_3轴投影到等倾面上，则可得到三个互相成120°角的坐标轴（图2-5）。若材料是不可压缩的，则应满足$e_{ii}=e_{ij}$的条件，而且有

$$e_1+e_2+e_3=0$$

每一个由e_1、e_2和e_3确定的应变状态，都可以在等倾面坐标上用一个点P来表示。若取OP的长度为e_i，则由图2-5可知

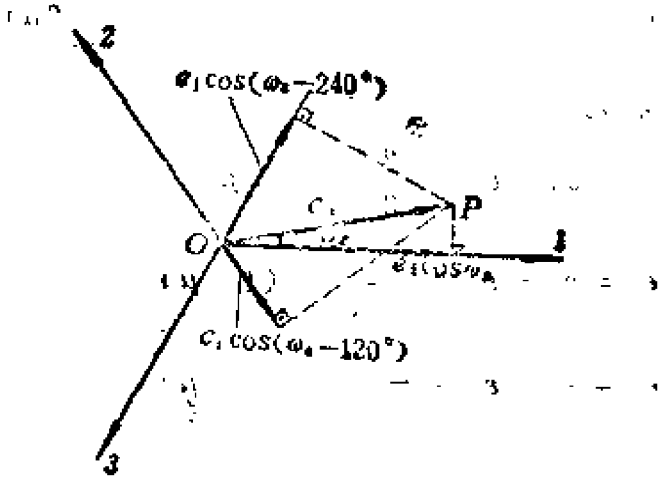


图2-5　应变状态在等倾面上的几何表示

$$e_1=e_i\cos\omega_i,\quad e_2=e_i\cos(\omega_i-120°),$$
$$e_3=e_i\cos(\omega_i-240°) \qquad (2\text{-}18)$$

式中，ω_i为e_i与e_j轴之间的夹角，称为应变形式指数或应变状态特征角。若将式（2-18）的三式平方相加，则有

$$e_1^2+e_2^2+e_3^2=e_1^2[\cos^2\omega_s+\cos^2(\omega_s-120^\circ)$$
$$+\cos^2(\omega_s-240^\circ)]$$

由于

$$\cos^2\omega_s+\cos^2(\omega_s-120^\circ)+\cos^2(\omega_s-240^\circ)=\frac{3}{2}$$

因此有

$$e_1=\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{e_1^2+e_2^2+e_3^2}$$
$$=\frac{2}{3}\sqrt{-\frac{3}{2}(e_1^2+e_2^2+e_3^2)-\frac{1}{2}(e_1+e_2+e_3)^2}$$
$$=\frac{2}{3}\sqrt{e_1^2+e_2^2+e_3^2-e_1e_2-e_2e_3-e_3e_1}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(e_1-e_2)^2+(e_2-e_3)^2+(e_3-e_1)^2}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(e_1-e_2)^2+(e_2-e_3)+(e_3-e_1)^2} \qquad (2\text{-}19)$$

当材料的体积不可压缩时，$e_i=e_1$，e_i称为应变强度或等效应变。e_i的表达式包括了应变状态的所有三个分量，表示变形的程度，它永远是一个正值并且与塑性变形功有直接的联系。

例1：试求单向拉伸时的e_1和ω_s。

解：在单向拉伸时，一个方向的应变伸长，而另外两个方向的应变缩短，即

$$e_1=\varepsilon,\quad e_2=e_3=-\mu\varepsilon$$

如假设材料的体积是不可压缩的，则取$\mu=\frac{1}{2}$。这时有

$$e_1=\varepsilon,\quad e_2=e_3=-\frac{1}{2}\varepsilon$$

由e_1和ω_s的计算式分别得（图2－6a）

$$\varepsilon_1=\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2}$$

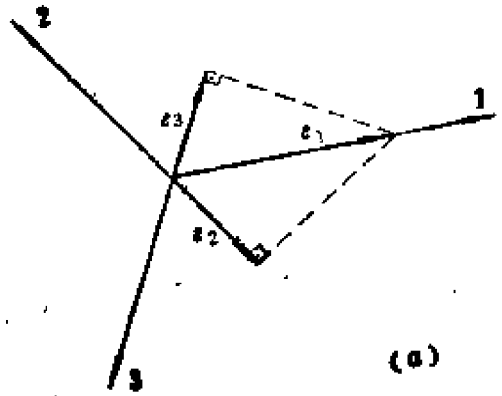
$$=\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{2\left(\frac{3}{2}\varepsilon\right)^2}$$

$$=\varepsilon$$

$$\omega_0=\arccos\frac{F}{B}=\arccos 1$$

于是有

$$\omega_0=0^\circ$$



(a)

图2-6a 单向拉伸应变状态

例2：若已知应变状态为：$\varepsilon_1=-\varepsilon_3=\varepsilon$，$\varepsilon_2=0$，试求$\varepsilon_i$、$\omega_0$，并作几何表示图。

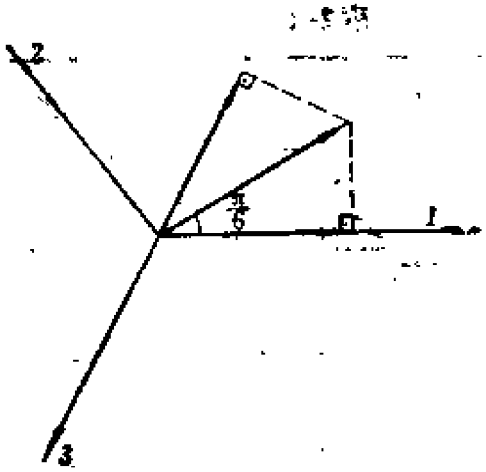
解：由式(2-19)得

$$\varepsilon_i=\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon$$

$$\omega_0=\arccos\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_i}=\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$$

其几何表示如图2-6b所示。



(b)

图2－6b　纯剪应变状态

由公式（2-18）所表示的主应变，也可用应变星圆来表示（图2-7）。在表2-1上给出了几种简单情况的应变星圆。

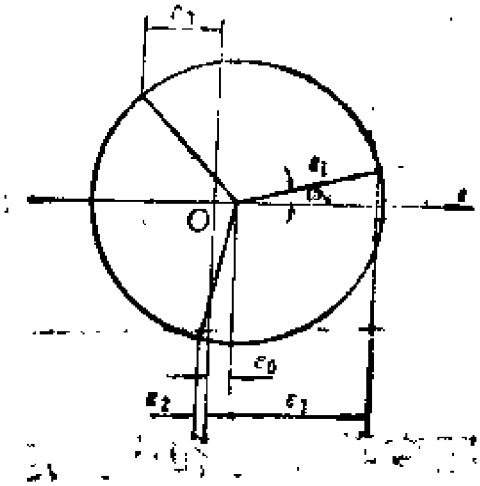
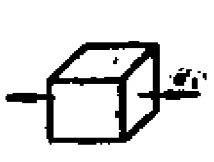
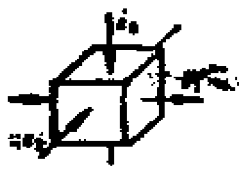
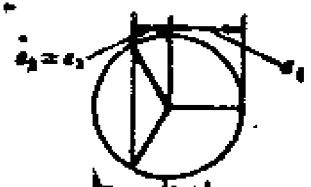
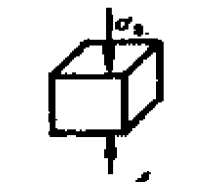
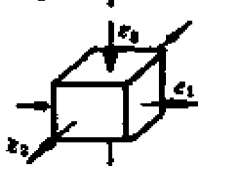
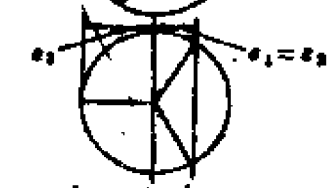
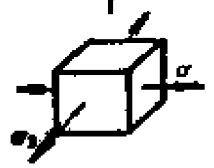
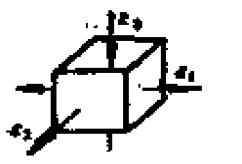
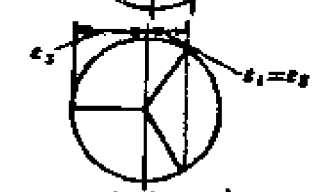
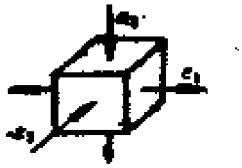
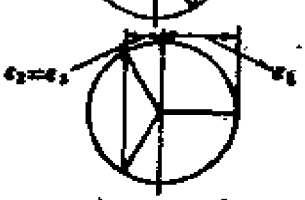
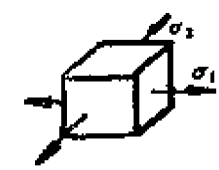
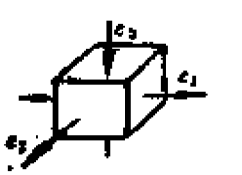
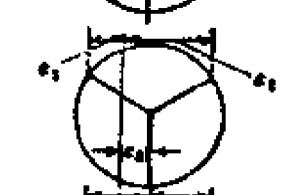
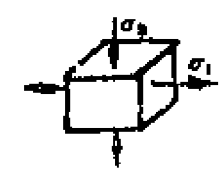
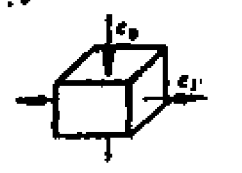
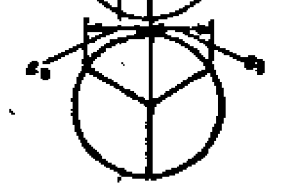


图2－7　应变星圆

表2-1

受力方式	应力状态	应变状态	应变莫圆	$\cos\omega_0$
单向拉伸				1
单向压缩				0.5
双向等拉				0.5
双向等压				1
双向拉伸 ($\sigma_1=2\sigma_2$)				$\frac{\sqrt{3}}{2}$
剪　切				$\frac{\sqrt{3}}{2}$

§2-4　三维应变莫尔圆和应变洛德参数

一点的应变状态也可以用应变莫尔圆表示。取平面坐标的水平轴为ε，纵坐标为$\gamma/2$，在一般情况下，应变莫尔圆如图2-8所示。

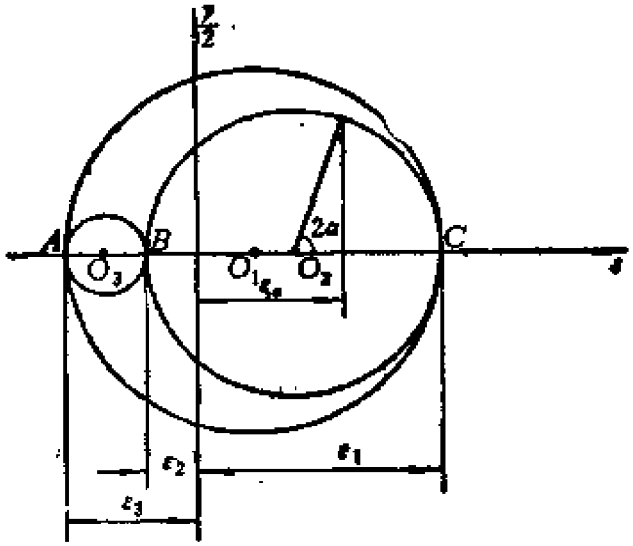


图2－8　应变莫尔圆

对于单向拉伸情况，应变莫尔圆如图2-9所示。在此情况下，A点和B点位于同一点上，是一个特殊的情况。

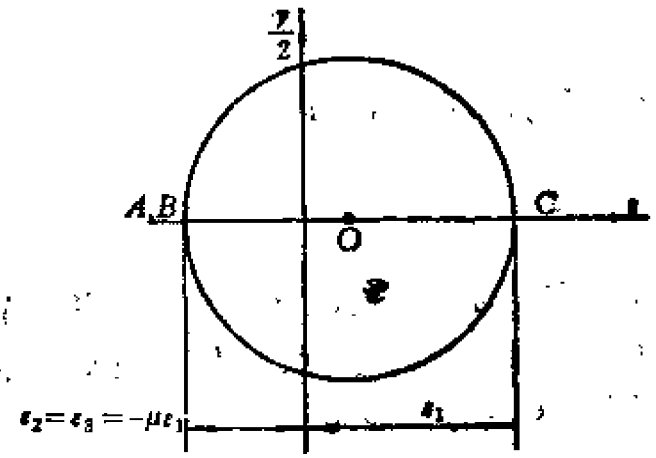


图2－9　单向拉伸应变莫尔圆

应变状态与B点相对于A点和C点的位置有关。确定一点应变状态形式的洛德参数由如下比值确定（图2-8）：

$$\mu_\sigma = \frac{O_1O_2}{O_1C} = \frac{\frac{e_2 - e_3}{2} - (e_1 - e_2)}{\frac{e_1 - e_3}{2}}$$

$$= \frac{2e_2 - e_1 - e_3}{e_1 - e_3} \tag{2-20}$$

应变洛德参数的变化范围为

$$-1 \leqslant \mu_\sigma \leqslant 1$$

应变洛德参数说明主应变值的比例关系，利用它可以表示应变状态的特征。只有满足$e_1 \geqslant e_2 \geqslant e_3$的条件时，式（2-20）所表示的参数才是有意义的。

§2-5 应变增量和应变率

在变形过程中，单位时间中应变值的增量称为应变率，即

$$\dot{e} = \frac{\partial e}{\partial t}$$

在应变率为常数的情况下，有

$$\dot{e} = \frac{e}{t}$$

应变率和位移率是有差别的，这个差别可以用单向拉杆AB来说明（图2-10）。如在杆上的C点加力，使C点的位移率为v_1，则在dt时间中，C点的位移为

$$dl_1 = v_1 dt$$

而在杆AC段的应变增量为

$$de = \frac{v_1 dt}{l_1}$$

应变率则为

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\partial \dot{e}}{\partial t} = \frac{v_1}{l_1}$$

在杆的AC段虽然每个点的位移速度并不一样，但杆的应变增量或应变率却各点相同。在图2-10的右侧，直线OP表示杆AC段各点的位移率，图上杆CB段的位移率是常数而且等于v_1，而这一段的应变率却等于零

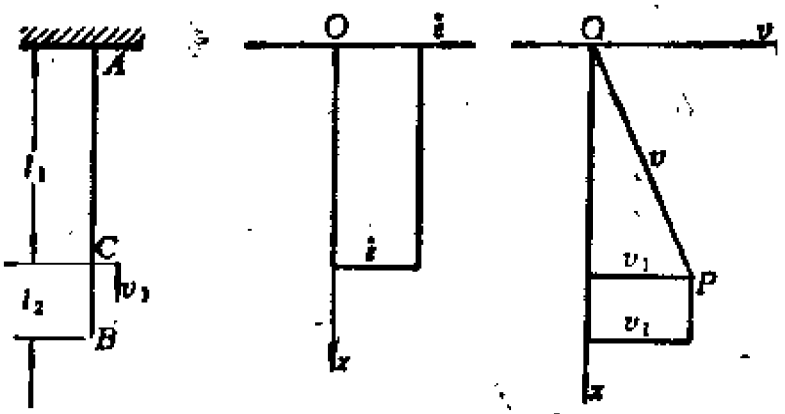


图2－10 拉杆中位移率和应变率的分布规律

在一般情况下，根据小变形的几何关系，正应变率为

$$\dot{\varepsilon}_x = \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} = \frac{\partial \dot{e}_x}{\partial t}, \qquad \dot{\varepsilon}_y = \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} = \frac{\partial \dot{e}_y}{\partial t},$$

$$\dot{\varepsilon}_z = \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} = \frac{\partial \dot{e}_z}{\partial t} \qquad (2\text{-}21a)$$

而剪应变率则为

$$\dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial t},$$

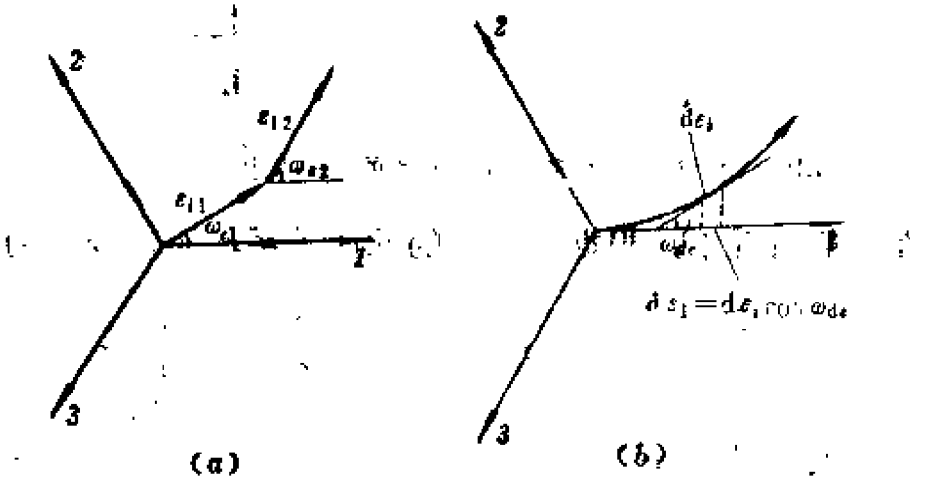
$$\dot{\gamma}_{yz} = \frac{\partial \dot{v}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} = \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial t},$$

$$\dot{\gamma}_{zx} = \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial z} = \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial t} \qquad (2\text{-}21b)$$

应变率分量等于位移率分量对相应坐标的偏导数，也等于应变对时间的偏导数。

在塑性力学中经常使用应变增量的概念。通过大量的实验，发现在静力学中塑性变形规律和时间因素是没有关系的，这里的dt并不代表时间，可以理解为代表某一加载过程。因此，用应变增量来代替应变率，往往更能表示塑性静力学中塑性应变不受时间参数影响的特点。

有了应变增量的概念，则可描述当应变不成比例时应变强度变化的规律。在比例变形的条件下，ε_i是一条直线（在应变空间）。而当各应变分量的变化不成比例时，在三个坐标轴互成120°角的坐标中，e_i将是一条折线或曲线，如图2-11a、b所示。



（a）两个比例变形的组合　　（b）非比例变形过程

图2－11

如果变形过程是由两条折线组成的，则可将这一过程分为两个比例变形的过程，并用公式单独计算应变张量。当变形由曲线表示时，则可认为变形过程的总应变强度等于曲线的总长度，即应变强度e_i不仅与初始应变状态和最终应变状态有关，而且还与应变历史即变形的过程有关。由图2-11b可见，应变强度增量de_i与

应变增量de_1、de_2、de_3有关，而de_1、de_2和de_3分别为

$$\left.\begin{aligned} de_1 &= de_i\cos\omega_{d_s} \\ de_2 &= de_i\cos(\omega_{d_s}-120^\circ) \\ de_3 &= de_i\cos(\omega_{d_s}-240^\circ) \end{aligned}\right\} \tag{2-22}$$

式中，ω_{d_s}为应变强度曲线在所研究点的切线与1轴所成的倾角。角ω_{d_s}表示在变形过程中主应变之间的相互比例关系。

$$\begin{aligned} de_i &= \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{de_1^2+de_2^2+de_3^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(de_1-de_2)^2+(de_2-de_3)^2+(de_3-de_1)^2} \end{aligned} \tag{2-23}$$

上式为应变强度增量的表达式，它是各应变分量增量的函数。

前面所考虑的都是小变形的情况。当应变比较大时，则需要采用另外一种表示应变的方法。若有一截面积为A_0而长度为l_0的受拉杆件，在某一时刻其长度达到l而截面积为A，且杆件伸长量为dl，则应变增量可用下式表示：

$$d\epsilon = \frac{dl}{l}$$

积分上式后，可得应变为

$$\epsilon = \int_{l_0}^{l}\frac{dl}{l} = \ln\frac{l}{l_0} \tag{2-24}$$

应变ϵ称为对数应变。由于工程应变e为

$$e = \frac{l-l_0}{l_0} = \frac{l}{l_0}-1$$

所以有

$$\frac{l}{l_0} = 1+e$$

于是可以写出对数应变和工程应变之间的关系为

$$\epsilon = \ln \frac{l}{l_0} = \ln (1+e) \tag{2-25}$$

若令ψ表示截面的收缩率，则

$$\psi = \frac{A_0 - A}{A_0} = 1 - \frac{A}{A_0} \tag{2-26}$$

因此有

$$\frac{A}{A_0} = 1 - \psi$$

根据体积不可压缩的条件，有

$$\frac{A}{A_0} = \frac{l_0}{l}$$

于是由式（2-25）可得

$$\epsilon = -\ln (1-\psi) \tag{2-27}$$

或

$$\psi = 1 - e^{-\epsilon} \tag{2-28}$$

现将不同应变指数之间的关系列于表2-2中。

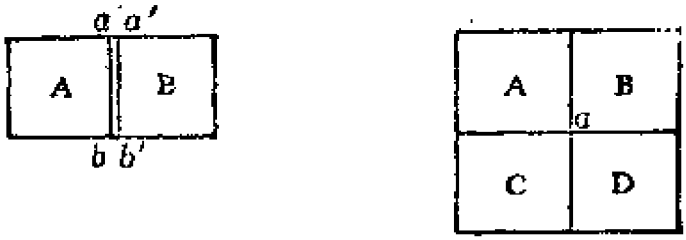
表2-2

	e	ϵ	ψ
e	——	$e^{\epsilon} - 1$	$\frac{\psi}{1-\psi}$
ϵ	$\ln(1+e)$	——	$-\ln(1-\psi)$
ψ	$\frac{e}{1+e}$	$1-e^{-\epsilon}$	——

§2-6 应变协调方程

物体在变形时，各相邻点之间是相互联系的，不能任意变形，即物体在变形前是连续的，变形后也应是连续的，因此六个应变分量e_x、e_y、e_z、γ_{xy}、γ_{yz}、γ_{zx}之间必然存在一定的关系。

例如在相邻的两个六面体上（图2-12a），相邻的棱边为ab和$a'b'$，因为它们是公共边，所以在变形过程中，它们的伸长或缩短量应相同。又如有四个六面体A、B、C、D相交于a点(图2-12b)，



(a)　　(b)

图2-12　应变协调示意图

变形后，每个单元体的形状都有变化，于是各六面体的棱边在a点的夹角都将有所改变，但它们的总和仍应是360°。由此可见，应变之间必须以某种关系相互联系。

设物体中某一点的坐标是x、y、z，其位移为u、v、w，而应变为e_x、e_y、e_z、γ_{xy}、γ_{yz}、γ_{zx}。若在应变的表达式中消去位移u、v、w，则可得到应变之间的关系。为此将正应变e_x对y取二次导数，将正应变e_y对x取二次导数，有

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2}=\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2},\quad \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y}$$

将以上二式相加，得

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y}$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}\qquad(2\text{-}29a)$$

用相同的方法可以得到另外两个类似的关系式：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2}&=\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}\\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2}&=\frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}\end{aligned}\right\} \tag{2-29b}$$

以上三式分别是在某一个平面上必须满足的条件，在不同的平面上也需要满足一定的关系式。现将三个剪应变按如下方式微分：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}&=\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}+\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\\ \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}&=\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}\\ \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}&=\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}\end{aligned}\right\} \tag{2-30}$$

将上式中的第二式和第三式相加，并减去第一式，则得

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}=2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

再将上式对z取导数，得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)\\ &=2\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z}=2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}\end{aligned} \tag{2-31a}$$

用相同的方法可得另外两个关系式：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right)&=2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}\\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right)&=2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}\end{aligned}\right\} \tag{2-31b}$$

式（2-29）及（2-31）称为应变协调方程，又称圣维南（A.J.C.B.de Saint-Venant）方程。它们的物理意义是：如果将变形体分解为许多微元体；每个微元体的变形都用六个应变

分量描述，若应变分量不满足应变协调方程，则这些微元体将不能构成一个连续体，因为这时可能会出现裂纹或发生重叠。满足应变协调方程便能保证变形前后物体的连续性。因此，连续介质的应变状态是否可能，需要利用应变协调方程来检验。

习　题

2-1　已知位移分量为

$$u=-\theta zy,\quad v=\theta zx,\quad w=f\ (x,\ y,\ \theta)$$

式中，θ为常数。试求应变分量的表达式。

2-2　试证明下式为不变量：

$$\varepsilon_i=\alpha\left[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

式中，α为常数。假设材料的体积是不可压缩的，为使$\varepsilon_i=\varepsilon_1$（$\varepsilon_1$为拉伸方向的应变），试求$\alpha$的数值。

2-3　试求应变偏量的第二不变量I_2'与正八面体上的剪应变γ_8之间的关系式。

2-4　设物体变形时产生的应变分量为

$$\varepsilon_x=A_0+A_1(x^2+y^2)+x^4+y^4$$

$$\varepsilon_y=B_0+B_1(x^2+y^2)+x^4+y^4$$

$$\gamma_{xy}=C_0+C_1xy(x^2+y^2+C_2)$$

$$\varepsilon_z=\gamma_{zx}=\gamma_{yz}=0$$

试用应变协调方程求出上式中各系数之间应满足的关系式。

2-5　拉杆的初始截面积和原长分别为A_0和l_0，A和l为拉伸后的截面积和长度。如截面收缩率为$\psi=\dfrac{A_0-A}{A_0}$，而应变$\varepsilon=\dfrac{l-l_0}{l_0}$，试证当体积不变时有如下关系：

$$(1+\varepsilon)(1-\psi)=1$$

第三章　各向同性金属材料的屈服条件

§3-1　简单拉伸和压缩时的塑性变形

设试件的初始截面积为A_0，P为外载荷，若试件中的应力为σ，并且其分布是均匀的，则有

$$\sigma = \frac{P}{A_0}$$

若试件标距长度为l_0，试件的伸长为Δl，则名义应变为

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

这时，韧性材料的拉伸曲线如图3-1所示。

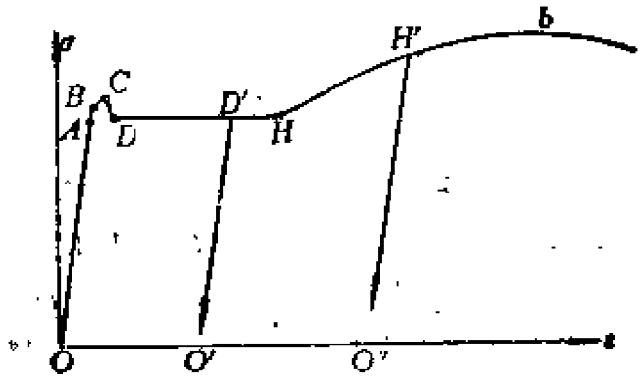


图3-1　简单拉伸时的应力-应变曲线

图中OA为比例变形阶段。在这一阶段中，应力和应变之间的关系是线性的，即可用虎克（R. Hooke）定律表示：

$$\sigma = E\varepsilon$$

式中E称为弹性模量，在弹性变形过程中，E为常数。A点对应的应力称为比例极限。由A点到B点已经不能用线性关系来表示，但变形仍是弹性的。B点对应的应力称为弹性极限。对许多材料，A点到B点的间距是很小的。C点和D点对应的应力分别称为材料的上屈服极限和下屈服极限，应力到达C点时材料开始屈服。一般来说上屈服极限受外界因素的影响较大，如试件截面的形状和大小、加载速度等都对它有影响，因此在实际应用中一般都取下屈服极限作为材料的屈服极限，并记为σ_s。应力由C点降至D点是突然的，但应变却是继续增加的。由D点到H点为一接近水平的线段，在这一阶段中，虽然应力没有增加，但应变却在不断地增加，所以这一阶段又称为流动阶段。有些材料的流动阶段是很长的，应变值可以达到0.01。由H点开始出现强化现象，即试件只有在应力继续增加时，应变才能增加。如果在材料的屈服阶段或强化阶段卸载，则卸载线为图3-1中的$D'O'$、$H'O''$，由图可见$D'O'$、$H'O''$都平行于AO线，即材料虽然有了塑性变形，但它们的弹性性质却没有变化。如果由点O''开始再加载，则加载过程仍沿$O''H'$线进行，直到H'点后材料才开始屈服。在b点之前，试件处于均匀的应变状态，到达b点后，试件往往出现颈缩现象，如果再继续拉伸，则变形将集中在颈缩区进行。由于颈缩区的截面逐渐缩小，所以试件很快将被拉断。试件在被拉断之前，一般将有较大的塑性变形。以上的现象是韧性较好的低碳钢在拉伸试验时的几个典型特征。

有一类金属材料并没有明显的屈服阶段，其应力-应变曲线如图3-2所示。这时屈服极限规定用产生0.2%塑性应变所对应的应力来表示，并将其记为$\sigma_{0.2}$。

在图3-1中，若自点O''起继续卸载（即压缩），则反向加载时的屈服点C对应的应力σ''_s不但比σ_s小，而且还比初始屈服极

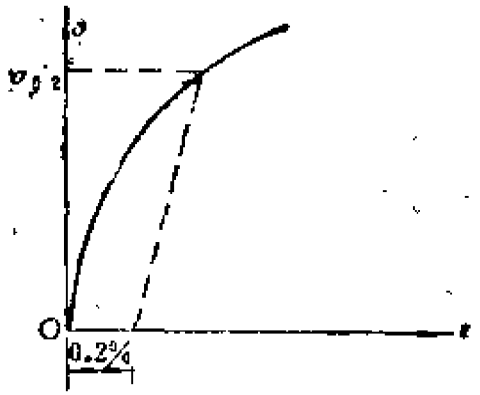


图3-2 无明显屈服阶段的材料的应力-应变曲线

限σ_s小。（图3-3）。这里的σ_s'是自O''点拉伸至屈服时的屈服极限。这种具有强化性质的材料随着塑性变形的增加，屈服极限在一个方向上提高而在反方向降低的效应，是德国的包辛格（J. Bauschinger）首先发现的，故称为包辛格效应。一般认为它是由多晶材料晶界间的残余应力引起的。包辛格效应使材料具有各向异性性质。若一个方向屈服极限提高的数值和相反方向屈服极限降低的数值相等，则称为理想包辛格效应。由于对这一效应的数学描述比较复杂，因而在塑性力学中，对这一效应的数学描述经常要进行相应的简化。

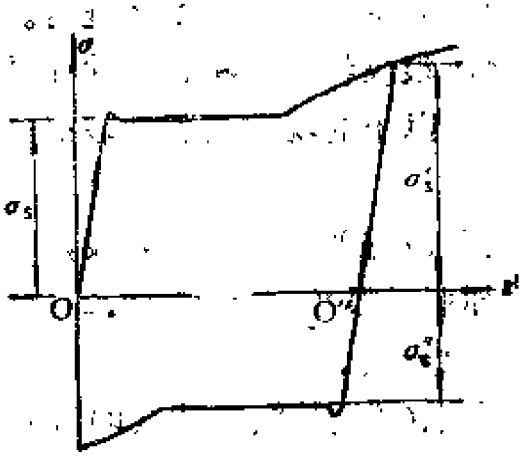


图3-3 包辛格效应

在一般的拉伸试验曲线中，σ并不是试件截面上的真实应力，这是因为在拉伸过程中，试件截面是逐渐缩小的，而σ是由拉力除以初始截面积。这种现象在应力达到b点之前，往往可以认为对应力-应变曲线的精度影响不大。过了b点之后，试件发生颈缩，截面积的较大变化对于应力的计算将有明显的影响。若试件截面上的真实应力用σ_T表示，A为某一瞬间试件的实际截面积，则应有

$$\sigma_T = \frac{P}{A} \tag{3-1}$$

由于A小于初始截面积A_0，故应有$\sigma_T > \sigma$，σ称为名义应力。根据体积不可压缩的假设，应有

$$A_0 l_0 = Al \tag{3-2}$$

式中，l_0和A_0为试件的初始长度和初始截面积，l和A为试件的瞬时长度和瞬时截面积。由式（3-2）可得

$$A = \frac{l_0 A_0}{l} \tag{3-3}$$

将式（3-3）代入式（3-1）后，得

$$\sigma_T = \frac{Pl}{A_0 l_0} = \frac{P}{A_0}\left(\frac{l_0 + \Delta l}{l_0}\right) = \sigma\left(1 + \frac{\Delta l}{l}\right)$$

$$= \sigma(1 + e) \tag{3-4}$$

根据式（3-4），很容易由名义应力-应变曲线得到真实应力-应变曲线。若已知名义应力-应变曲线（图3-4中的实线），则可以横坐标原点的左侧$e = -1$处为O'点，通过名义应力-应变曲线上的某一点A，作一平行于e轴的直线AB，交应力轴σ于B点，联接$O'B$线，并使$O'B$线的延长线与通过A点且平行于σ轴的直线相交于A'点，于是A'点即为真实应力-应变曲线上的点。因为根据比例关系有

$$\frac{A'C}{AC} = \frac{1 + e_A}{1}$$

所以

$$\sigma_{T_A}=\sigma_A(1+\varepsilon_A) \tag{3-5}$$

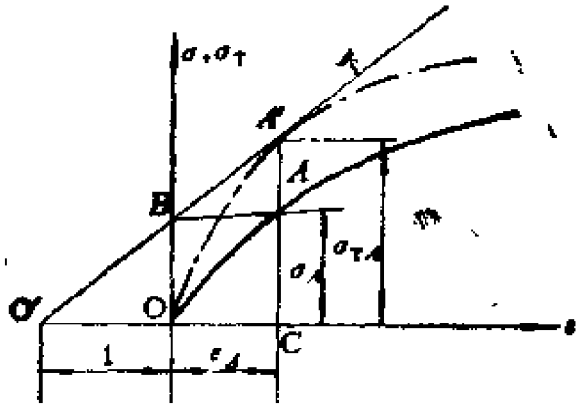


图3-4 真实应力-应变曲线的作法

——名义应力-应变曲线；—·—·—真实应力-应变曲线

重复这一过程，便可得到真实应力-应变曲线，如图3-4中的点划线所示。

拉伸试验的最大应变受到试件颈缩的限制，一般应变可达1左右，而实际上在塑性成形的过程中应变往往超过1，因此，为了获得较大程度塑性变形时的真实应力-应变曲线，往往采用压缩试验。但在压缩试验中，由于压头接触面与试件之间有摩擦力，改变了试件的单向受力状态，故所得到的并不是真正的单向压缩应力。因此，只有消除接触表面的摩擦力，才能得到准确的真实应力-应变曲线。

图3-5是压缩试验简图。上、下压头的表面需进行淬火、回火、磨削和抛光。为减小试件与压头之间的摩擦力，往往在试件的端面上加润滑剂。如消除了试件和压头之间的摩擦力，则此压缩试验可以认为是均匀单向压缩的。设试件为圆柱形，其初始高度为H_0，初始直径为D_0，在压缩过程中，瞬时高度为H，瞬时直径为D，如图3-5所示。压缩时的应变为

$$\varepsilon = \frac{H_0 - H}{H_0} = 1 - \frac{H}{H_0}$$

由上式可得

$$\frac{H}{H_0} = 1 - \varepsilon$$

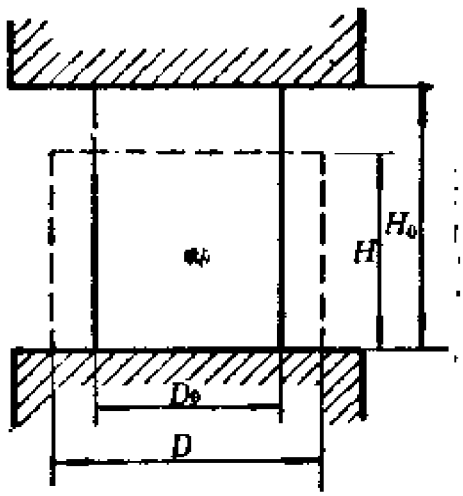


图3-5 压缩试验简图

压缩时的对数应变为

$$\epsilon = \ln \frac{H_0}{H} = \ln\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)$$

若令A_0为圆柱试件的初始截面积，A为变形过程中的瞬时截面积，并认为圆柱试件的体积是不变的，则有

$$A_0 H_0 = AH = \text{const}$$

由此可得

$$A = A_0 \frac{H_0}{H} = A_0 \frac{1}{1-\varepsilon} \tag{3-7}$$

单向压缩应力用下式表示：

$$\sigma_T = \frac{P}{A} = \frac{P}{A_0}(1-\varepsilon) \tag{3-8}$$

圆柱试件的压缩曲线受D_0/H_0比值的影响较大。若试件的接触面积大，则受摩擦力的影响也较大，因而D_0/H_0大的试件所得到的曲线总在D_0/H_0小的试件所得到的曲线的上面。若比值D_0/H_0趋近于零，则摩擦力的影响也将消失，这时便为理想的单向压缩应力状态。然而$D_0/H_0=0$的试件实际上是不存在的，所以往往利用外推的方法间接地推出$D_0/H_0=0$时的真实应力，并求出真实的应力-应变曲线。

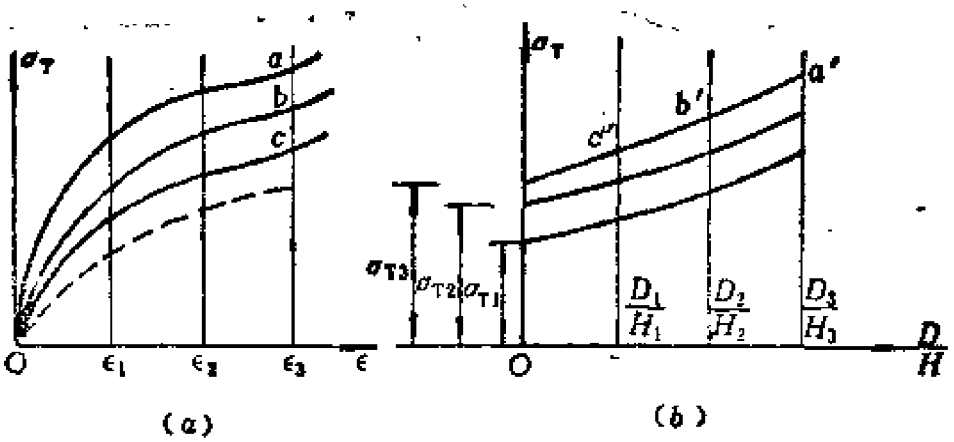


图3-6 单向压缩试验曲线

例如，在压缩试验进行过程中，记录下D_0/H_0、D_1/H_1、D_2/H_2各试件在每次压缩后的高度H和相应的外力P，利用公式（3-8）和（3-6）求得各σ_T-ϵ曲线，如图3-6 a所示；再将图3-6 a转换成σ_T-D/H曲线，如图3-6 b所示，比如图3-6 a中的a、b、c点对应于图3-6b中的a'、b'、c'点，连接a'、b'、c'点的曲线即为ϵ_3对应的σ_T-D/H曲线；再将σ_T-D/H曲线外推到$D/H=0$的纵坐标上；此时纵坐标σ_{T3}即可认为是$D_0/H_0=0$的试件在$\epsilon=\epsilon_3$时的真实应力；利用相同的方法可以求出$D_0/H_0=0$的试件在$\epsilon=\epsilon_1$、$\epsilon=\epsilon_2$时的σ_{T1}、σ_{T2}；再由σ_{T1}、σ_{T2}、σ_{T3}和ϵ_1、ϵ_2和ϵ_3绘出一条曲线，便是所求的$D_0/H_0=0$的试件的真实应力-应变曲线，如图3-6 a中的虚线所示。

§3-2 塑性力学中常用的简化力学模型

对于不同的材料，不同的应用领域，可以采用不同的变形体模型。在确定模型时，有两个问题需要特别注意，即所选取的力学模型必须符合材料的实际情况，这一点是非常重要的，因为只有这样才能使计算结果反映结构或构件中的真实应力及应变状态；其次是所选取的力学模型的数学表达式应该足够简单，以便在求解具体问题时，不出现过大的数学上的困难。

在弹性变形阶段，应力与应变之间是一种线性关系(图3-7)。在此阶段中，外载荷引起的应力、应变及位移，与加载的次序和历史无关。一般的金属材料，当变形较小时，e和σ之间的关系是线性的且变形是可以恢复的。在除去外载后，物体完全恢复到初始状态，而且在物体中没有任何残余应力和残余变形，这时应力和应变关系的数学表达式为

$$\sigma = Ee \tag{3-9}$$

由弹性状态过渡到塑性状态可以是逐步的（图3-8a），也可以是突然的（图3-8b）。铜以及某些金属材料没有明显的线性

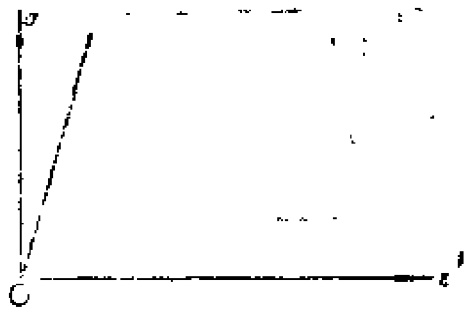


图3-7 线弹性应力-应变关系

段，在此情况下，屈服极限是人为规定的，而卸载线一般平行于应力-应变曲线在O点的切线。在突然进入屈服阶段的情况下，

屈服极限是由材料的物理性质决定的。若不考虑材料的强化性质，且忽略上屈服极限的影响，则可得到如图3-9所示的理想弹塑性力学模型。线段OA是弹性阶段，线段AB是塑性阶段，应力

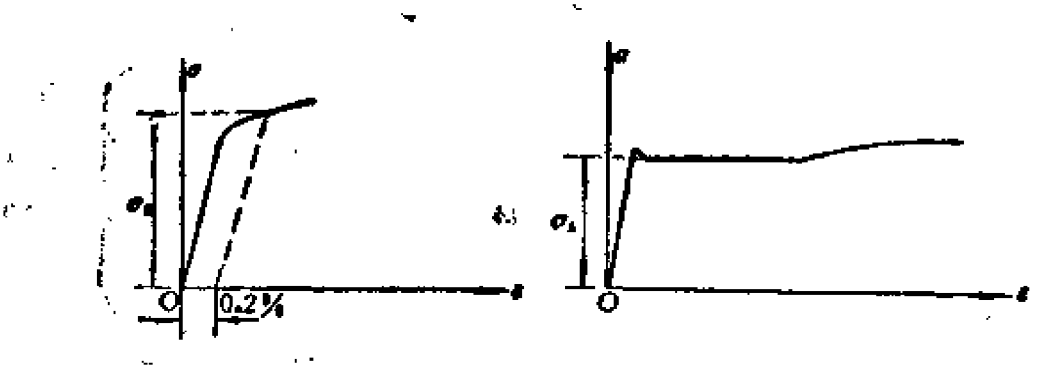


图3-8 应力-应变曲线

（a）无明显屈服极限的情况　　（b）有明显屈服极限的情况

可用如下公式求出：

$$\begin{aligned} \sigma &= Ee && \text{当} e \leqslant e_s \\ \sigma &= Ee_s = \sigma_s && \text{当} e > e_s \end{aligned} \qquad (3\text{-}10)$$

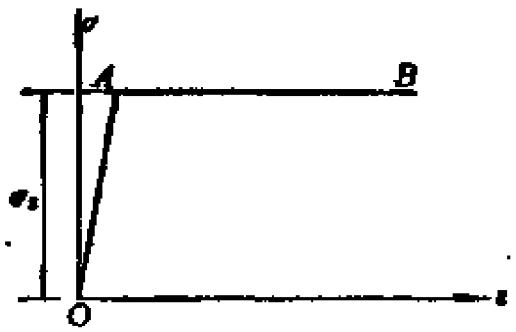


图3-9 理想弹塑性力学模型

由于公式（3-10）只包括了材料常数E和σ_s，故不能描述应力-应变曲线的全部特征；又由于在$e = e_s$处解析表达式有变化，故给具体计算带来一定困难。但应肯定这一力学模型抓住了韧性

材料的主要特征，因而与实际情况符合得较好。

当考虑材料的强化性质时，可采用线性强化弹塑性力学模型（图3-10）。图中有两条直线，即OA和AB线，其解析表达式为

$$\left.\begin{aligned}\sigma &= Ee \qquad \text{当} e \leqslant e_s \\ \sigma &= \sigma_s + E_1(e - e_s) \qquad \text{当} e > e_s\end{aligned}\right\} \tag{3-11}$$

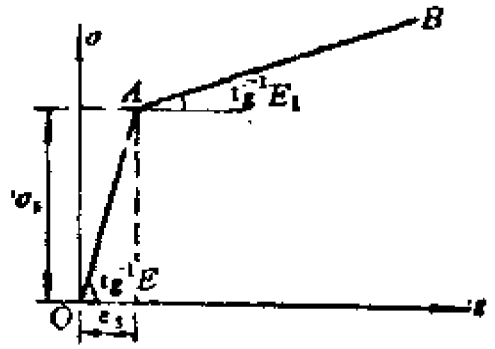


图3-10 线性强化弹塑性力学模型

式中，E及E_1分别为线段OA及AB的斜率。具有这种应力－应变关系的材料，称为弹塑性线性强化材料。由于OA和AB是两条直线，因而有时也称之为双线性强化模型。这种近似的力学模型对某些材料是足够准确的。如果AB的斜率很小，则作为理想弹塑性体来考虑并不致于产生很大的误差，但计算却可大为简化。当AB的斜率大到不能忽略时，则应按式（3-11）进行计算。这个模型和理想弹塑性模型虽然相差不大，但其具体计算却要复杂得多。

为了避免解析式在$e = e_s$处的变化，有时可以采用幂强化力学模型，即取

$$\sigma = Ae^n \tag{3-12}$$

式中，n为幂强化系数，介于0与1之间。式（3-11）所代表的曲线在$e = 0$处与σ轴相切，而且有

$$\left.\begin{aligned}\sigma &= A\varepsilon \qquad \text{当} n=1\\ \sigma &= A \qquad \text{当} n=0\end{aligned}\right\} \tag{3-13}$$

式（3-13）的第一式代表理想弹性模型，若将式中的A用弹性模量E代替，则为虎克定律的表达式。而式(3-13）的第二式若将A用σ_s代替，则为理想塑性（或称刚塑性)力学模型。解式(3-13）则得$\varepsilon=1$，即这两条线在$\varepsilon=1$处相交。由于幂强化模型也只有两个参数A和n，因而也不可能准确地表示材料的所有特征。但由于它的解析式比较简单，而且n可以在较大的范围内变化，所以也经常被采用。其几何表示如图3-11所示。

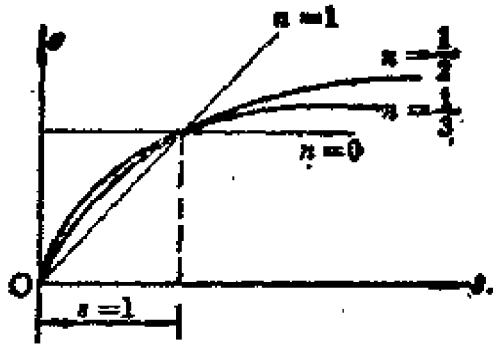
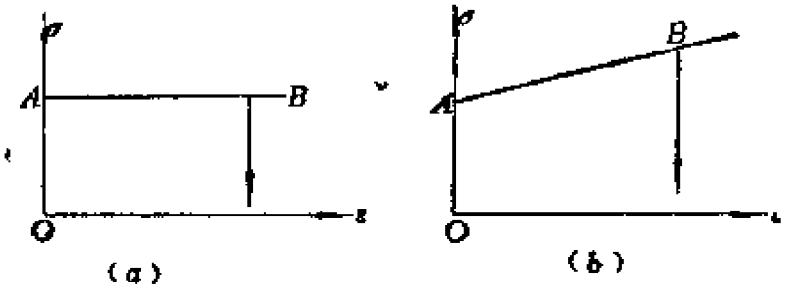


图3-11 幂强化力学模型

在许多实际工程问题中，弹性应变比塑性应变小得多，因而可以忽略弹性应变。若不考虑强化效应，则称这种模型为刚塑性力学模型。这一模型假设：在应力到达屈服极限之前应变为零。在图3-12a中，线段AB平行于ε轴，卸载线平行于σ轴。图3-12b所示为具有线性强化性质的刚塑性力学模型，其卸载线也是平行于σ轴的。

在塑性力学中，刚塑性力学模型具有重要意义。在塑性成形理论中的多数情况下，塑性应变一般都比弹性应变大得多，所以忽略弹性应变而只考虑塑性应变是合理的，对总体的计算结果影响不大。采用刚塑性模型给数学计算带来较大的简化，使许多复



(a) 理想刚塑性力学模型　　(b) 线性强化刚塑性力学模型

图3－12　刚塑性力学模型

杂的问题能获得完整的解析表达式。在以上所提及的几种力学模型中，理想弹塑性力学模型、幂强化力学模型以及理想刚塑性力学模型应用得最为广泛。

§3－3　高静水压力实验

在塑性力学中，静水压力实验是一项非常有意义的研究工作。静水压力实验也就是各向等压实验。勃里奇曼（P.W. Bridgman）曾系统地做过各向等压实验，他提出的各向均匀压力p和材料单位体积变化之间的关系式为

$$\theta = 3e_0 = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{1}{K} p\left(1 - \frac{p}{K_1}\right)$$

式中，K为体积压缩模量，K_1为派生模量，对于不同的材料，其数值是不同的。ΔV及V_0分别为体积变化量和初始体积。当p约为金属材料的屈服极限时，勃里奇曼的公式与弹性规律$\theta = \frac{p}{K}$的偏差约为1%，因此公式中的第二项完全可以忽略，故可认为体积变形是弹性的。上式又可写为

$$\frac{\Delta V}{V_0} = ap + bp^2 \qquad (3\text{-}14)$$

对于铜、铝、铅等材料，系数a、b如表3-1所示。

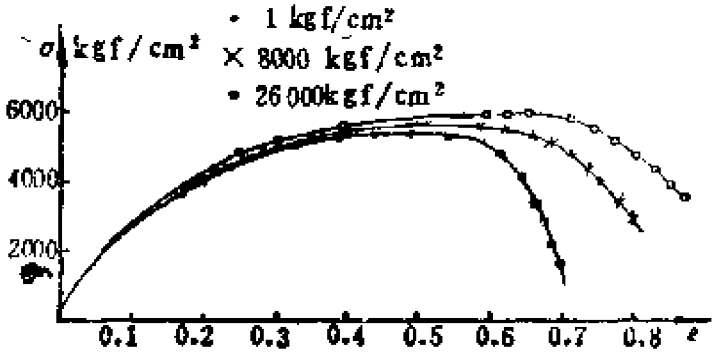
表3-1

	铜	铝	铅
a	7.32×10^{-7}	13.34×10^{-7}	23.73×10^{-7}
b	2.7×10^{-12}	3.5×10^{-12}	17.25×10^{-12}

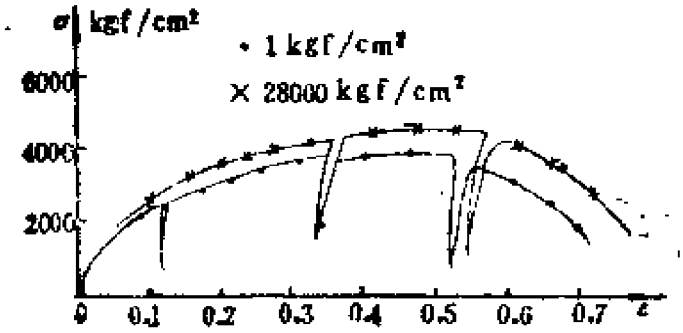
由表中可以看出，系数b比系数a小得多，因而这一项是完全可以忽略的。在10000个大气压下，对弹簧钢作试验，其体积仅缩小2.2%，而镍仅缩小1.8%。但也有一些结构松散的碱性金属，如锶在1.5×10^{4}个大气压下，体积改变量约为$^1/_3$，这时体积的变化量显然不能忽略。但对于一般金属材料，可以认为体积的变化基本上是弹性的，即卸除静水压力后，体积完全可以恢复到初始状态，没有残余的体积变形。在塑性变形过程中，体积应变与塑性应变相比往往是可以忽略的；因此在塑性变形的情况下，往往忽略体积的变化，即认为金属材料的体积是不可压缩的。

勃里奇曼对静水压力对材料屈服极限的影响作过研究，他观察了在不同静水压力作用下镍和铌的拉伸曲线，并获得了相应的试验结果（如图3-13所示）。从图上看出，随着静水压力的增加，塑性强化效应增加不大，但对试件出现颈缩以及破坏时塑性变形的大小却有不小的影响，即静水压力增加了试件颈缩和破坏时的塑性变形。钢和其它金属材料也有相似的情况。但对于铸造金属、矿物土壤等材料，静水压力对材料屈服极限的影响则不能忽略。

变形速度、时间、温度等因素对材料的应力-应变曲线是有影响的，但对这些影响只是在一定的条件下才比较明显。



(a)



(b)

图3-13 在不同静水压力下（a）镍（b）铌的拉伸曲线

§3-4 特雷斯卡和米泽斯屈服条件

屈服条件是塑性力学中的重要概念之一。正确地理解屈服条件的有关概念，对于分析和解决塑性力学问题是十分重要的。在单向拉伸时，标志材料进入塑性状态的是应力达到材料的屈服极限σ_s。对于具有明显屈服极限的材料，σ_s可以在拉伸曲线上找到。而对于没有明显屈服极限的材料，则按规定用对应于残余应变$e=0.2\%$的应力作为材料的σ_s。但对于复杂应力状态，问题就复杂多了，因为一点的应力状态是由六个应力分量确定的，显然不应选取这六个应力分量中的某一个作为判断材料是否进入塑性状

态的标准。因此，在分析中往往引进应力空间和应变空间的概念。所谓应力空间或应变空间就是以应力分量或应变分量作为坐标轴所确定的空间。材料中任一点的应力状态或应变状态，都可以通过转轴的办法用主应力或主应变来表示，因而其几何图形和数学表达式都比较简单，使用起来也是非常方便的。

由主应力σ_1、σ_2、σ_3所确定的应力状态，可以用应力空间中的一个点来表示。在应力空间或应变空间中，每一个点都代表一个应力状态或一个应变状态。应力或应变状态的变化，可以在相应的空间中，绘出一条相应的曲线，这样的曲线称为应力路径或应变路径。根据不同路径所进行的实验，可以确定从弹性阶段进入塑性阶段的界限，即确定屈服点，这些屈服点联结起来便形成一个曲面，这样的曲面称为屈服面（图3-14）。屈服面的数学表达式称为屈服函数。对于理想塑性材料，这个曲面称为极限曲面，应力状态只能在这个曲面之内或在曲面之上。在屈服面内的应力状态为弹性应力状态（弹塑性材料）或刚性状态（刚塑性材料），而在屈服面上的应力状态则为塑性状态，即一旦应力状态到达屈服面之上，则认为材料已进入塑性状态了。理想塑性材料由于屈服极限σ_s不能再增长，因而屈服面也不能继续扩展。然而对于强化材料，由于应力达到屈服极限后仍能继续增长，因此屈服面仍能继续变化。这种情况下的屈服面有时称为加载面。

在用应力表示的屈服条件中，应注意到所有六个应力分量的数值与所选取的坐标方向有关。采取不同的坐标方向，就会得到不同数值的分量。如果材料是各向同性的，就应选用与坐标无关的量来表示屈服条件。在一般情况下，屈服函数可表示为

$$f(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\tau_{xy},\tau_{yz},\tau_{zx})=0 \tag{3-15}$$

由于一点的应力状态总可以用主应力来表示，所以屈服函数又可写为

$$f(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=0 \tag{3-16}$$

式中，σ_1、σ_2和σ_3可以代表所有可能使材料进入塑性状态的应力组合。

对于各向同性材料，在应力空间中如果点（$\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$）在屈服面上，则点（$\sigma_1,\sigma_3,\sigma_2$）也必然在屈服面上，因此屈服面必定对称于$\sigma_1$轴。同理，屈服面对于$\sigma_2$和$\sigma_3$轴也一定是对称的，同时三个应力主轴应该满足互换的条件。如果应力空间的等倾面通过三个应力主轴的原点，则表示在这一平面上的平均应力σ_0为零，将这一特殊平面称为π平面。根据勃里奇曼的研究，平均应力σ_0不影响金属材料的屈服，因此在π平面上对屈服条件进行研究将是比较方便的。假设金属材料拉伸时的屈服应力和压缩时的屈服应力是相等的，即假设正屈服极限和负屈服极限相等，则由图3-15上的A点开始，通过坐标原点O引一条直线，此直线与屈服面相交于C点，OA和OC相等，且三角形ODC和OEA为全等三角形。由A点作垂直于σ_1轴的直线交屈服面于B点，由于$BE=AE$，OE为公共边，所以三角形OAE和OBE也是全等三角形，于是OC和OB一定对称于σ_1轴的垂线。因此屈服函数不仅对称于σ_1、σ_2、σ_3三根轴，而且也对称于这三根轴的垂线。

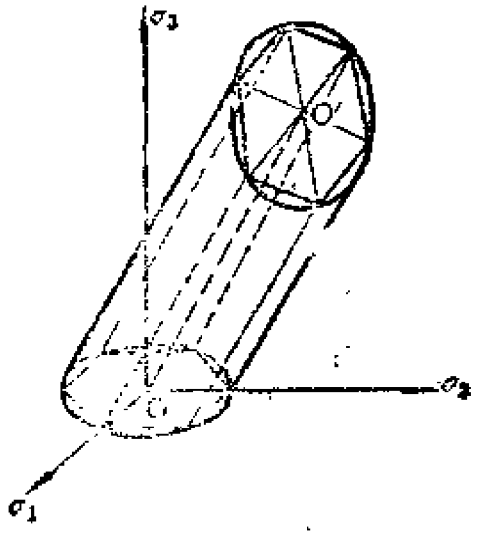


图3-14 屈服面

在物理方面，关于材料进入塑性状态的原因有不同的假设。

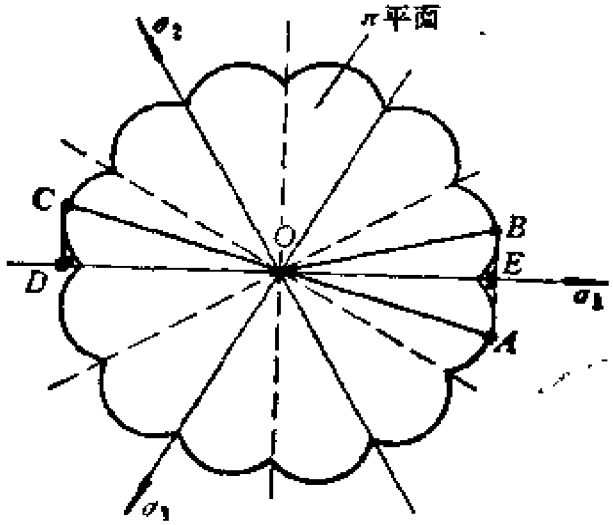


图3-15 等倾面上的屈服极限

第一个假设是伽利略(G.Galileo)在17世纪提出的。他认为材料进入塑性状态是由最大正应力引起的，即当最大正应力达到σ_s时，便认为材料已进入塑性状态。这一假设已被实验否定，因为在各向等压实验中，压应力可以远远超过屈服极限而材料并未进入塑性状态。第二个假设是由圣维南提出的，他认为最大正应变可以使材料进入塑性状态。这个假设同伽利略的假设一样也已被实验结果否定。在此以后，贝尔特拉密（E.Beltrami）曾提出当弹性能达到一定值时，材料便开始屈服，这个假设也与实验不符，因而也被否定了。

正确的屈服条件首先是由特雷斯卡（H.Tresca）于1864年首先提出的。他曾做了大量的金属挤压实验来研究屈服条件。他发现金属挤压变形后表面上有很细的痕纹，而这些痕纹的方向很接近于最大剪应力的方向，因此认为塑性变形是由于最大剪应力引起材料中晶体网络的滑移而产生的。于是特雷斯卡提出：当最大剪应力τ_{max}达到某一极限值时，材料即进入塑性状态，这个

条件的数学表达式为

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k, \qquad \sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$$

在三维应力空间中，这一条件可写为

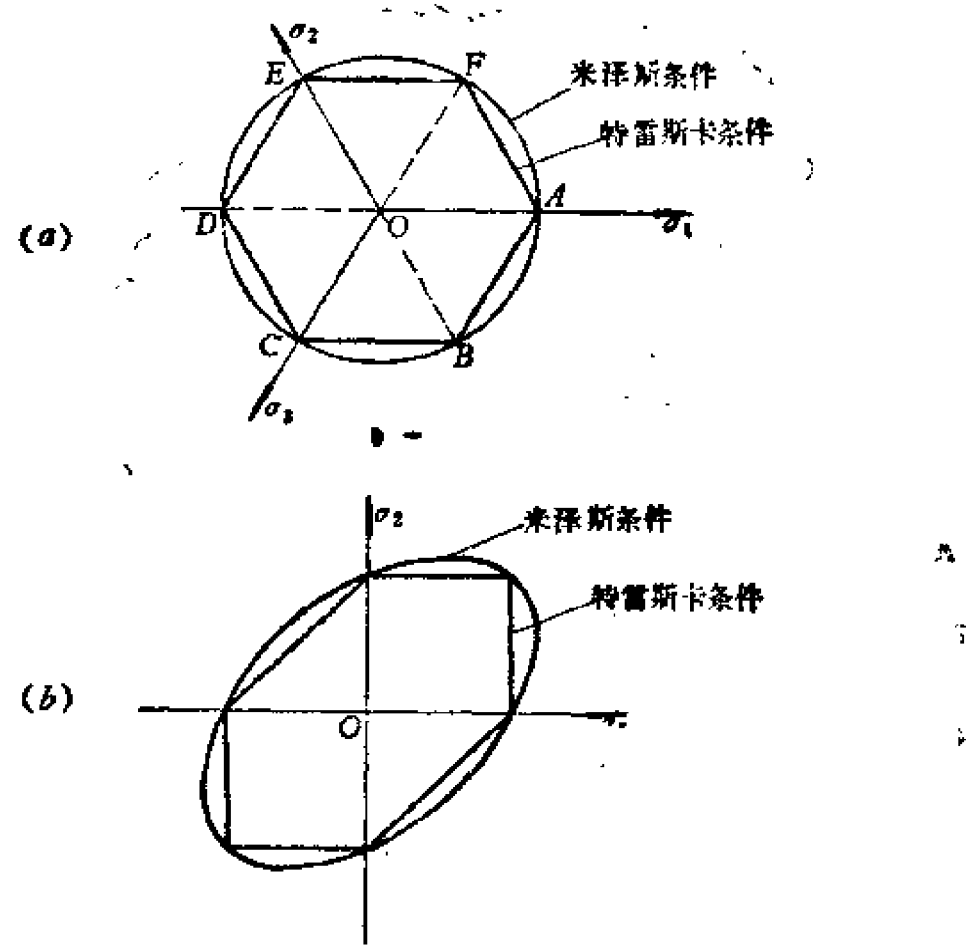
$$\left.\begin{aligned} |\sigma_1 - \sigma_2| &= 2k \\ |\sigma_2 - \sigma_3| &= 2k \\ |\sigma_3 - \sigma_1| &= 2k \end{aligned}\right\} \tag{3-17}$$

在上述三式中，若皆为不等式，则认为材料处于弹性状态或刚性状态，若有一个式子为等式，则材料便进入了塑性状态。在式（3-17）中，应注意到这个条件与静水压力无关，而且式（3-17）是σ_1、σ_2和σ_3的对称函数，因为应力之间可以互相调换。由式（2-17）看出，当取$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k$作为屈服条件时，σ_2并不影响材料的屈服。在三维应力空间中，$|\sigma_1 - \sigma_2| = 2k$表示两个面，即$AB$面和$DE$面（图3-16$a$）。$|\sigma_2 - \sigma_3| = 2k$代表$BC$面和$EF$面，而$|\sigma_3 - \sigma_1| = 2k$代表$AF$面和$CD$面。若将应力空间中的三根应力主轴向通过坐标原点的等倾面（即π平面）投影，则可得到三根轴互相成120°角的平面坐标系。在应力空间中的正六角形棱柱体，在π平面上的投影则是一个正六边形。垂直于π平面的方向代表静水压力值的大小，由于静水压力不影响金属材料屈服，因此在π平面上对屈服轨迹进行研究是非常方便的（图3-16a）。屈服轨迹在$\sigma_3 = 0$平面上是一个六边形，其数学表达式为

$$|\sigma_2| \leqslant 2k, \quad |\sigma_1| \leqslant 2k, \quad |\sigma_1 - \sigma_2| \leqslant 2k$$

其几何图形如图3-16b所示。

最大剪应力条件由于和实验结果符合得较好，因而直到现在还经常被采用。但在使用这一条件时，需要知道主应力的大小和次序，这样才能求出最大剪应力τ_{max}来。但在一般情况下，主应力的次序是未知的，其大小和次序还可能由于加载而改变，并且特雷斯卡条件的一般表达式又非常复杂，因而给使用这一条件增加了许多困难。但在某些简单问题中，如主应力的大小和次序事



(a) π平面上的屈服轨迹　　(b) $\sigma_3=0$平面上的屈服轨迹

图3-16　屈服轨迹

先是知道的，则使用特雷斯卡屈服条件比较方面，因为它的数学表达式是个线性的代数方程式。

1913年，德国的力学家米泽斯（R. von Mises）指出，在π平面上，特雷斯卡六边形的六个顶点是由实验得到的，但连接这六个点的直线却具有假设的性质，这种假设是否合理尚需证明。他认为可以将这六个点用一个圆连接起来。这样，这两个条件在六个点上完全一样，而在其它各点上相当接近，而且又可以避免由于屈服条件不光滑而产生的数学上的困难。米泽斯认为特雷斯

卡条件是准确的，而他提出的条件则是近似的。米泽斯屈服条件在σ_1、σ_2、σ_3应力空间中是一个垂直于π平面的圆柱体，而在π平面上的投影则是一个圆，在$\sigma_3=0$平面上则是一个椭圆。

在π平面上互相成120°的坐标中（图3-17），以O点为圆心，以R为半径的圆的方程为

$$x^2+y^2=R^2$$

若用σ_1、σ_2、σ_3来表示x、y，则应有

$$x=\sigma_1-\frac{1}{2}(\sigma_2+\sigma_3),\quad y=\frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma_2-\sigma_3)$$

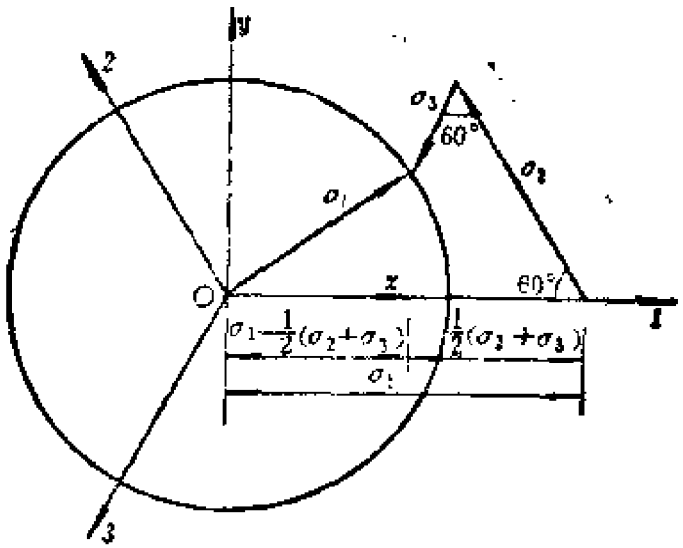


图3-17　π平面上互成120°角的坐标系

将x、y的表达式代入圆的方程后，可得

$$[\sigma_1-\frac{1}{2}(\sigma_2+\sigma_3)]^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2(\sigma_2-\sigma_3)^2\leqslant R^2$$

上式化简后，可得

$$(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\leqslant 2R^2 \qquad (3\text{-}18)$$

如果式（3-18）的左侧小于右侧，则认为材料仍处于弹性状态或刚性状态。如果式（3-18）为等式，则认为材料已进入了塑

性状态。由式（3-18）看出，米泽斯条件与特雷斯卡条件一样也不受静水压力的影响，而且也满足应力互换原则。虽然米泽斯在提出这一条件时，并未认为它是准确的条件，但实验结果证明，对于韧性金属材料，这个条件更接近于实际情况。1924年德国力学家亨奇(H. Hencky) 经过反复研究，对米泽斯条件进行了物理解释，亨奇认为米泽斯条件相当于弹性形变比能（歪形能）达到一定值时，材料便进入塑性状态。若用W、W_r、W_v分别代表弹性总比能、弹性形变比能和体积改变比能，则有

$$W=\frac{1}{2}(\sigma_1 e_1+\sigma_2 e_2+\sigma_3 e_3)$$

$$=\frac{1}{2E}[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\nu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)]$$

$$W_v=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}(e_1+e_2+e_3)$$

$$=\frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2$$

弹性形变比能等于总比能减去体积改变比能，即

$$W_r=W-W_v$$

$$=\frac{1}{2E}[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\nu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)$$

$$-\frac{1-2\nu}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2]$$

$$=\frac{1}{12G}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]$$

亨奇认为当W_r达到一定值时，材料便开始屈服。事实上波兰力学家胡贝尔（M. T. Huber）早在1904年便曾提出过这一条件。因此这一条件有时称为胡贝尔-米泽斯-亨奇屈服条件，或简称米泽斯屈服条件。此后纳戴（A. L. Nadai）对米泽斯屈服条件进行了另一种解释，他认为当正八面体上的剪应力

$$\tau_8=\frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}\quad(3\text{-}19)$$

达到某一定值时，材料便进入塑性状态。但是亨奇和纳戴都没有指出这一定值是多大。苏联力学家伊柳辛（А.А.Ильюшин）提出了应力强度σ_i（或称等效应力）的概念。应力强度是表征物体受力程度的一个参量。伊柳辛认为，当应力强度σ_i等于材料单向拉伸的屈服极限σ_s时，材料便进入塑性状态。伊柳辛的这个提法不仅概念明确，而且将复杂应力状态的σ_i和单向拉伸的屈服极限σ_s联系了起来，因此在使用时是十分方便的。根据伊柳辛的提法，得

$$\sigma_i=\sigma_s$$

或利用公式（1-25），屈服条件可以写为

$$\sigma_i=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}$$
$$=\sigma_s\quad(3\text{-}20)$$

应力强度可以用应力偏量s_1、s_2、s_3来表示。将式(1-27)表示的s_1、s_2、s_3平方相加后，并考虑到

$$\cos^2\omega_\sigma+\cos^2(\omega_\sigma-120^\circ)+\cos^2(\omega_\sigma-240^\circ)=\frac{3}{2}$$

可得

$$\sigma_i=\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{s_1^2+s_2^2+s_3^2}=\sigma_s$$

利用屈服条件往往可以获得某些简单问题的解。

例1：有一薄壁圆筒，直径为d，厚度为t，受内压p作用。若薄壁圆筒的材料满足米泽斯屈服条件，试问当薄壁圆筒完全进入塑性状态时，内压p应为多大？并求出圆筒中的周向应力σ_θ和轴向应力σ_z。

解：若已知薄壁圆筒的内压为p，则根据平衡条件，周向应力$\sigma_\theta=\frac{pd}{2t}$，

轴向应力 $\sigma_z = \frac{pd}{4t}$，即周向应力是轴向应力的两倍。由于σ_r比σ_θ或σ_z小很多，故可忽略不计。这时有

$$\sigma_\theta = 2\sigma_z, \qquad \sigma_r \approx 0$$

将上式代入米泽斯屈服条件，得

$$\sigma_\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s, \qquad \sigma_z = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_s$$

由周向应力σ_θ的表达式可得

$$\sigma_\theta = \frac{pd}{2t} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s$$

由此可得薄壁圆筒完全进入塑性状态时的压力p为

$$p = \frac{4t}{\sqrt{3}d}\sigma_s$$

§3-5 两种屈服条件的比较和实验验证

为了说明两种屈服条件的差别，将米泽斯条件写成

$$(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2 \leqslant 6B^2$$

而将特雷斯卡条件写成

$$|\sigma_1-\sigma_2| \leqslant 2b, |\sigma_2-\sigma_3| \leqslant 2b, |\sigma_3-\sigma_1| \leqslant 2b$$

若规定单向拉伸时两种屈服条件相同，即用$\sigma_1=\sigma_s$，$\sigma_2=\sigma_3=0$的应力状态来确定上式中的B和b，则得

$$b = \frac{\sigma_s}{2}, \qquad B = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$$

于是有

$$(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2 \leqslant 2\sigma_s^2$$

$$|\sigma_1-\sigma_2| \leqslant \sigma_s, |\sigma_2-\sigma_3| \leqslant \sigma_s, |\sigma_3-\sigma_1| \leqslant \sigma_s$$

在此情况下，纯剪状态时两种屈服条件相差最大。纯剪时的应力状态为

$$\sigma_1 = -\sigma_3, \qquad \sigma_2 = 0$$

若将上式代入米泽斯屈服条件，则有

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$$

最大剪应力为

$$\tau_M = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$$

若将纯剪状态代入特雷斯卡屈服条件，则有

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_s}{2}$$

最大剪应力为

$$\tau_T = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_s}{2}$$

因此有

$$\frac{\tau_M}{\tau_T} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.155$$

若规定纯剪时两种屈服条件相同，即用 $\sigma_1 = -\sigma_3 = k$，$\sigma_2 = 0$的应力状态来确定屈服条件中的B和b，则得

$$B = k, \qquad b = k$$

于是有

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \leqslant 6k^2$$

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \leqslant 2k, |\sigma_2 - \sigma_3| \leqslant 2k, |\sigma_3 - \sigma_1| \leqslant 2k$$

在此情况下，单向拉伸时两种屈服条件差别最大，取 $\sigma_1 > 0$，$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$，由米泽斯条件得

$$\sigma_M = \sqrt{3}k$$

由特雷斯卡条件得

$$\sigma_T = 2k$$

比较σ_M和σ_T，得

$$\frac{\sigma_M}{\sigma_T} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$$

若以式（3-20）所表示的米泽斯条件为基础，则可用其内接或外切六边形为两个近似条件。两种屈服条件的差别，取决于屈服条件中常数的确定方法。若用单向拉伸时的屈服极限确定常数，则在纯剪应力状态下两种屈服条件相差最大，米泽斯条件所确定的最大剪应力比特雷斯卡条件所确定的最大剪应力大15.5%。若用纯剪时的屈服极限确定常数，则在单向拉伸应力状态下两种屈服条件相差最大，用米泽斯条件所确定的最大拉应力比用特雷斯卡条件所确定的最大拉应力小13.4%。

由以上分析可见，两种屈服条件的计算结果相差不大。现将两种屈服条件的异同之处列于表3-2中。

表3-2

	不　同　处	共同处
米泽斯条件	(1) 受中间应力影响； (2) 屈服函数是非线性的； (3) 不需要知道应力的大小次序。	(1) 不受静水压力的影响； (2) 应力可以互换。
特雷斯卡条件	(1) 不受中间应力影响； (2) 屈服函数是线性的； (3) 需要知道应力的大小次序。	

这两种条件的正确性容易由实验验证。试验经常采用受内压p、轴向力T以及扭矩M_t共同作用的薄壁圆筒。设t为筒的厚度，d为筒的内径，这时筒内的应力为

$$\sigma_z=\frac{T}{\pi t(d+t)}+\frac{pd^2}{4t(d+t)},\quad \sigma_\theta=\frac{pd}{2t}$$

$$\tau_{\theta z}=\frac{2M_t}{\pi dt(d+t)}$$

由于t比d小得多$\left(\frac{t}{d}=\frac{1}{10}\sim\frac{1}{50}\right)$，因此可认为$\sigma_z$、$\sigma_\theta$、$\tau$均匀分布，且可忽略其余应力分量。这时米泽斯条件的形式为

$$\sigma_\theta^2 - \sigma_\theta\sigma_z + \sigma_z^2 + 3\tau_{\theta z}^2 = \sigma_i^2$$

上式在σ_θ、σ_z、$\tau_{\theta z}$应力空间中是一个椭球面。对于某些特殊情况，这个曲面可以简化。例如当没有扭矩作用时，$\tau_{\theta z}=0$，应力主轴和z、θ方向重合，这时有

$$\sigma_\theta^2 - \sigma_\theta\sigma_z + \sigma_z^2 = \sigma_i^2$$

σ_θ和σ_z为主应力。当只有轴向力和扭矩作用时，有

$$\sigma_z^2 + 3\tau_{z\theta}^2 = \sigma_i^2$$

对于以上两种情况，特雷斯卡条件分别为

$$\sigma_\theta - \sigma_z = \pm\sigma_i,\quad \sigma_\theta = \pm\sigma_i,\quad \sigma_z = \pm\sigma_i$$

$$\sigma_i^2 + 4\tau_{\theta z}^2 = \sigma_i^2$$

泰勒（G.I.Taylor）和奎内（H.Quinney）曾用不同材料做拉扭联合试验，图3-18中给出了他们的实验结果。由图上看出。对于韧性材料，米泽斯屈服条件比特雷斯卡屈服条件更能接近于实验结果。

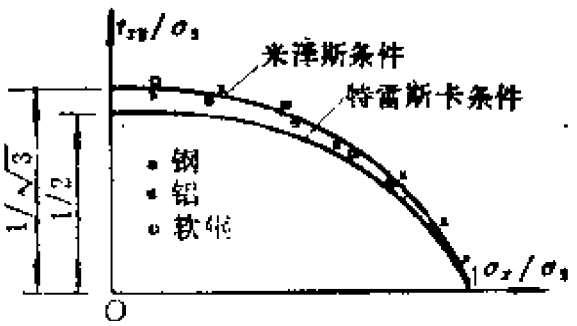


图3-18　泰勒和奎内的实验结果

洛德曾在软钢、铜和镍的薄壁筒上做过试验，使薄壁筒受轴向力和内压作用。应力洛德参数的形式为

$$\mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3},\qquad \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \tag{3-21}$$

由上式可得

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \mu_\sigma \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

由此可得

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_2 &= \sigma_1 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \mu_\sigma \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \\ &= \frac{1 - \mu_\sigma}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \\ \sigma_2 - \sigma_3 &= \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \mu_\sigma \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \sigma_3 \\ &= \frac{1 + \mu_\sigma}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}22)$$

将式（3-22）代入米泽斯屈服条件后，得

$$\left(\frac{1 - \mu_\sigma}{2}\right)^2(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + \left(\frac{1 + \mu_\sigma}{2}\right)^2(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 = 2\sigma_s^2$$

上式整理后，有

$$\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_s}\right)^2 = \frac{4}{3 + \mu_\sigma^2}$$

即

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_s} = \frac{2}{\sqrt{3 + \mu_\sigma^2}} \quad (3\text{-}23)$$

而特雷斯卡屈服条件为

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_s} = 1 \quad (3\text{-}24)$$

实验结果如图3-19所示。图中横坐标为μ_σ，纵坐标为$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_s}$。

轴向拉力与内压采用不同的比例，即采用不同的μ_σ做实验，实验结果比较符合米泽斯屈服条件。

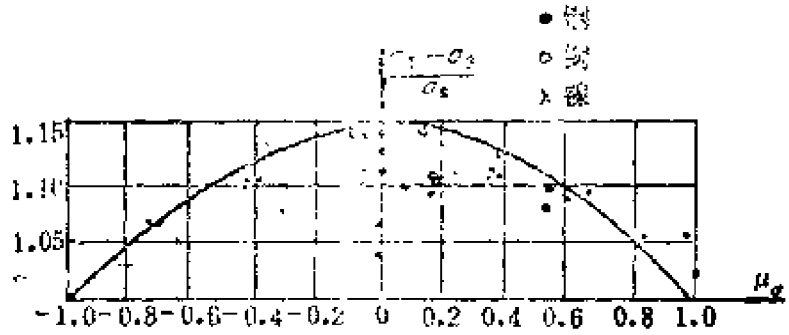


图3-19 洛德实验曲线

§3-6 各向同性强化和随动强化屈服条件

在材料发生塑性变形后，随着塑性变形的增加，若屈服面还不断改变形状，则应采用强化的屈服条件。这时的屈服面称为加载屈服面或强化屈服面，加载屈服面的数学表达式称为加载函数。对于理想塑性材料，初始屈服面和加载屈服面是重合的。对于具有强化性质的材料，加载屈服面将随应变的发展而产生形状和位置的变化。一般来说，加载屈服面的形状和位置不仅依赖于应力状态，而且还依赖于加载历史。

强化模型的选取，决定了加载屈服面的变化规律，这个规律应和实验结果相符。但是，这个问题相当复杂，即使在单向拉压情况下，材料的强化特征也因材料和条件的不同而不同（如图3-20所示）。试件首先受拉并在应力超过屈服极限后的B点开始卸载，当卸到零点后再反向加载，这时所得到的压缩屈服极限因材料的不同和塑性变形的大小而不同。

在图3-20中，$OABDD'E'$代表各向同性强化或称等向强化，即无论在哪个方向加载，拉伸屈服极限和压缩屈服极限总相等。例如当拉伸屈服极限增高到σ_1'时（如图中的B点所示），压缩屈服极限也同时增高到$-\sigma_1'$（如图中的D'点所示）。这是一种假设，

实际的金属材料的行为和这种假设是有差别的，因此只有在塑性

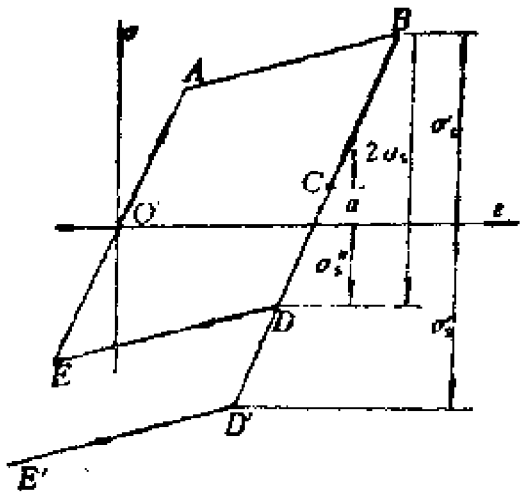


图3－20　单向拉伸的强化曲线

变形较小或强化效应不甚明显的情况下，采用这一假设的计算结果和实际情况才比较接近。但因为这种假设的数学表达式简单，因而经常被采用。其数学表达式为

$$|\sigma| = \sigma_s + H\left(\int |\mathrm{d}\varepsilon^p|\right) \tag{3-25}$$

从式中看出，不论$\mathrm{d}\varepsilon^p$是正还是负，$|\sigma|$都在不断增加。函数$H\left(\int |\mathrm{d}\varepsilon^p|\right)$是表征材料强化程度的参量，曲线$H$可由拉伸实验确定。由前面的分析可见，各向同性强化模型不考虑反向加载时的包辛格效应。

式（3-25）为单向应力状态时的情况。对于复杂应力状态，各向同性强化导致加载屈服面保持原来的形状、中心和方位，而围绕原来的中心产生均匀膨胀，这时加载函数可以写为

$$f(\sigma_{ij}, \kappa) = 0 \tag{3-26}$$

在未出现塑性变形之前，上式中的强化参量$\kappa = \text{const}$。由于采用了各向同性强化的假设，所以κ不应影响塑性变形过程中屈服面的形状，但加载屈服面应随着塑性变形的增加而逐步增大。当采

用米泽斯屈服条件时，有

$$f(\sigma_{ij},\kappa)=\frac{1}{2}s_{ij}s_{ij}-k(\kappa)=0 \qquad (3\text{-}27)$$

式中，当$\kappa=0$时，$k(\kappa)=k$。在π平面上，米泽斯屈服条件是个圆，其半径为$\sqrt{2}k(\kappa)$。当设有塑性变形时，圆的半径为常数且等于$\sqrt{2}k$（图3-21）。

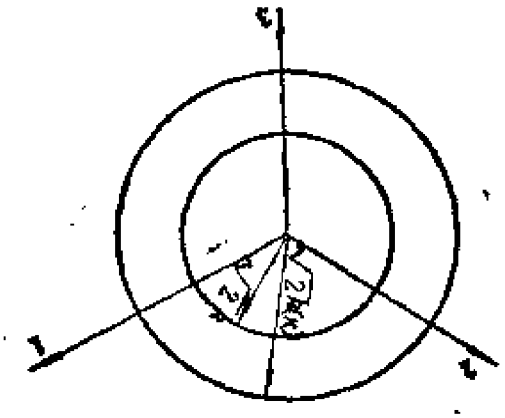


图3-21　各向同性强化的几何图形

描述强化参数κ有两种方案，第一种方案是采用塑性变形功来表示，即取

$$\kappa=W^p=\int_0^{e_{ij}^p}\sigma_{ij}\mathrm{d}e_{ij}^p$$

第二种方案是采用塑性应变强度增量$\mathrm{d}e^p$来表示，即

$$\mathrm{d}e^p=\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\mathrm{d}e_{ij}^p\mathrm{d}e_{ij}^p}$$

而

$$\kappa=\int_0^{e_{ij}^p}\mathrm{d}e^p$$

这两种方案都满足$e_{ij}^p=0$时$\kappa=0$的条件。

图3-20中的$OABCDE$代表随动强化模型，弹性卸载区间是初

始屈服应力σ_s的两倍，材料总的弹性区间保持不变。拉伸时，材料由于强化效应屈服极限提高，但同时使得压缩屈服极限降低。随动强化模型考虑了材料的包辛格效应。在单向受力状态时，随动强化模型应有

$$\sigma_1^I - \sigma_1^{II} = 2\sigma_s$$

图3-20上的C点为线段BD的中点，并记α为C点的纵坐标，则加载曲线可写成

$$f = |\sigma - \alpha| - \sigma_s = 0$$

即

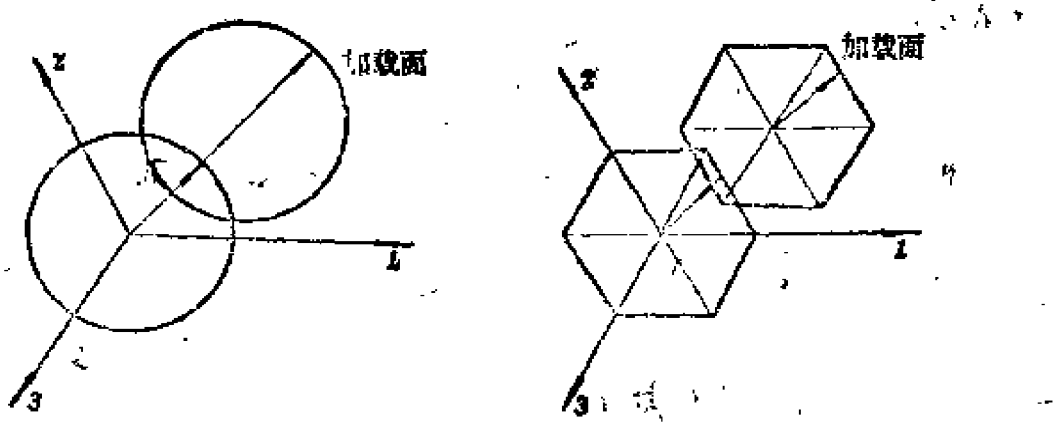
$$|\sigma - \alpha| = \sigma_s$$

对于线性强化材料，可取$\alpha = Ce^p$，此时有

$$f = |\sigma - Ce^p| - \sigma_s = 0 \qquad (3\text{-}28)$$

根据式（3-28），可将随动强化模型推广到复杂的应力状态。

对于复杂的应力状态，假定加载屈服面在塑性变形方向作刚体移动。从图（3-22）和图（3-23）上看出，材料在塑性变形的方向屈服极限提高了，而在塑性变形相反的方向屈服极限降低了。



（a）米泽斯随动强化屈服面　　（b）特雷斯卡随动强化屈服面

图3-22　随动强化屈服面

在复杂应力状态下，随动强化模型的数学表达式为

$$f(\sigma_{ij}-\alpha_{ij})=0$$

式中，对于线性强化材料，$\alpha_{ij}=C\varepsilon^{p}_{ij}$。如果没有塑性应变，则$\alpha_{ij}=0$。$C$为材料常数，可由单向拉伸试验曲线确定。

由于米泽斯屈服条件的形式可以写成

$$\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}=\sigma_s^2$$

因此对于随动强化模型，应有

$$(s_{ij}-\alpha_{ij})\ (s_{ij}-\alpha_{ij})=\frac{2}{3}\sigma_s^2 \qquad (3\text{-}29)$$

随动强化模型首先是由普拉格（W.Prager）提出的，它比较符合材料的实际情况，但由于数学表达式比较复杂，所以用这一模型所获得的解答的数学表达式也比较复杂。

习　题

3-1　若已知$\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\sigma_3$，$\mu_\sigma=\dfrac{2\sigma_2-\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_1-\sigma_3}$，试证明

$$\frac{\tau_0}{\tau_{max}}=\frac{\sqrt{2(3+\mu_\sigma^2)}}{3}$$

且有$0.816<\dfrac{\tau_0}{\tau_{max}}\leqslant 0.943$。

3-2　已知两端封闭的薄壁圆筒内半径为r，厚度为t，受内压p及轴向应力σ作用。试分别按米泽斯屈服条件和特雷斯卡屈服条件求出此圆筒的屈服条件的表达式。

3-3　已知内半径为50mm、厚为3mm的薄壁圆筒承受轴向拉力和扭矩联合作用。设加载过程中保持$\tau_{\theta z}/\sigma_z=1$，而材料的拉伸屈服极限为400N/mm²。试求此圆筒屈服时的轴向拉力P和扭矩M_t的值。

3-4　试分别给出平面应变和平面应力条件下米泽斯屈服条件和特雷斯卡屈服条件的表达式。

第四章　塑性本构关系

§4-1　广义虎克定律

在第一章中，分析了一点处的应力状态的一些性质，在第二章中又讨论了变形体的几何性质，这些分析都没有涉及材料的物理性质，即这些分析适用于任何材料。在第三章中给出了两个常用的屈服条件，根据这两个屈服条件可以判断材料是处于弹性状态还是处于塑性状态。

假设材料在屈服之前是理想线弹性的，而且在变形过程中弹性常数不变。在线弹性状态下，应力和应变是一一对应的且与加载历史无关。

由弹性力学知道广义虎克定律的形式为

$$\left.\begin{aligned} e_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)],\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} \\ e_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)],\ \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{yz} \\ e_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)],\ \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{zx} \end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}1)$$

式中，E为弹性模量，μ为泊松比，G为切变模量，且有 $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$。虎克定律若用主应力表示，则有

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ e_2 &= \frac{1}{E}[\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)] \\ e_3 &= \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] \end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}2)$$

若将式（4-1）的前三式相加，则有

$$\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=\frac{1-2\mu}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)$$

或写为

$$\sigma_\theta=3K\varepsilon_\theta \tag{4-3}$$

式中，$K=\dfrac{E}{3(1-2\mu)}$ 称为体积模量，式（4-3）又称为体积变化规律。如将式（4-2）中的第一式减去第二式，则可得

$$\varepsilon_1-\varepsilon_2=\frac{1+\mu}{E}(\sigma_1-\sigma_2)$$

或写成

$$\sigma_1-\sigma_2=\frac{E}{1+\mu}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)=2G(\varepsilon_1-\varepsilon_2) \tag{4-4a}$$

同理可得

$$\left.\begin{aligned}\sigma_2-\sigma_3&=2G(\varepsilon_2-\varepsilon_3)\\ \sigma_3-\sigma_1&=2G(\varepsilon_3-\varepsilon_1)\end{aligned}\right\} \tag{4-4b}$$

式（4-4）说明在弹性范围内应力莫尔圆和应变莫尔圆是相似的。由式（4-1）的第一式减去式（4-3），则得

$$\begin{aligned}\varepsilon_x-\varepsilon_\theta&=\frac{1}{E}[\sigma_x-\mu(\sigma_y+\sigma_z)]-\frac{\sigma_\theta}{3K}\\&=\frac{2(1+\mu)}{3E}\left[\sigma_x-\frac{1}{2}(\sigma_y+\sigma_z)\right]\\&=\frac{1}{2G}(\sigma_x-\sigma_\theta)\\&=\frac{1}{2G}s_x\end{aligned}$$

因此有

$$\left.\begin{aligned}s_x&=2G\varepsilon_x, & \tau_{xy}&=G\gamma_{xy}\\ s_y&=2G\varepsilon_y, & \tau_{yz}&=G\gamma_{yz}\\ s_z&=2G\varepsilon_z, & \tau_{zx}&=G\gamma_{zx}\end{aligned}\right\} \tag{4-5}$$

用主应力偏量和主应变偏量表示时，则有

$$s_1 = 2Ge_1, \quad s_2 = 2Ge_2, \quad s_3 = 2Ge_3$$

式（4-5）即为弹性变形过程中应力偏量和应变偏量的关系式，且有

$$\frac{e_x}{s_x} = \frac{e_y}{s_y} = \frac{e_z}{s_z} = \frac{\gamma_{xy}}{2\tau_{xy}} = \frac{\gamma_{yz}}{2\tau_{yz}} = \frac{\gamma_{zx}}{2\tau_{zx}} = \frac{1}{2G} \tag{4-6}$$

用主应力偏量和主应变偏量表示时，则有

$$\frac{e_1}{s_1} = \frac{e_2}{s_2} = \frac{e_3}{s_3} = \frac{1}{2G} \tag{4-7}$$

由式（4-4）可得

$$\frac{e_1 - e_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{e_2 - e_3}{\sigma_2 - \sigma_3} = \frac{e_3 - e_1}{\sigma_3 - \sigma_1} = \frac{1}{2G} \tag{4-8}$$

由代数运算规则知，若

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{E}{F}$$

则有

$$\frac{A \pm C}{B \pm D} = \frac{E}{F} \tag{4-9}$$

因此由式（4-8）可得

$$\frac{e_1 + e_3 - 2e_2}{\sigma_1 + \sigma_3 - 2\sigma_2} = \frac{e_3 - e_1}{\sigma_3 - \sigma_1}$$

或写成

$$\frac{2e_2 - e_1 - e_3}{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3} = \frac{e_1 - e_3}{\sigma_1 - \sigma_3}$$

故有

$$\frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{2e_2 - e_1 - e_3}{e_1 - e_3}$$

因此得

$$\mu_\sigma = \mu_e \tag{4-10}$$

但

$$\mu_\sigma = \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(\omega_\sigma - \frac{\pi}{6}\right), \mu_\varepsilon = \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(\omega_\varepsilon - \frac{\pi}{6}\right)$$

所以当$\mu_\sigma = \mu_\varepsilon$时，$\omega_\sigma = \omega_\varepsilon$。由此可见，在弹性阶段，由于应力莫尔圆和应变莫尔圆相似，所以应力洛德参数μ_σ和应变洛德参数μ_ε相等，并且应力形式指数ω_σ和应变形式指数ω_ε也相等。由式（1-25）和式（4-4）知

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}$$

$$= \frac{2G}{\sqrt{2}}\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2}$$

$$= \frac{E}{\sqrt{2}(1+\mu)}\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2} \quad (4\text{-}11a)$$

若取应变强度为

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{(1+\mu)}\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2}$$

则有 $\sigma_i = E\varepsilon_i$

当采用体积不可压缩假设时，取 $\mu = \frac{1}{2}$，此时有

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2}$$

即 $\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{3}E\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2} = E\varepsilon_i \quad (4\text{-}11b)$

式（4-11a）和（4-11b）为弹性阶段中复杂应力状态下应力强度和应变强度之间的关系式，其形式和单向受力状态时的虎克定律是类似的。利用式（4-11）还可写出

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{E}{3} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \quad (4\text{-}12)$$

因此式（4-7）又可写为

$$\frac{\varepsilon_1}{s_1} = \frac{\varepsilon_2}{s_2} = \frac{\varepsilon_3}{s_3} = \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i} \quad (4\text{-}13)$$

在弹性阶段，由于 $\frac{e_i}{\sigma_i} = \frac{1}{E}$ 为一常数，因此表达式往往不采用式（4-13）的形式。但在塑性力学中，由于在不同的变形阶段 $\frac{e_i}{\sigma_i}$ 的值是不同的，因此采用式（4-13）的形式往往更为方便。

由以上的讨论可以得出在弹性阶段有以下几条规律：

（1）应力莫尔圆和应变莫尔圆是相似的，因而应力洛德参数和应变洛德参数相等，即 $\mu_\sigma = \mu_\varepsilon$，同时应力形式指数和应变形式指数也相等，即 $\omega_\sigma = \omega_\varepsilon$。这说明在弹性变形过程中，应力主轴和应变主轴是重合的，同时各应力分量与相应的应变分量的比例是相同的。

（2）平均应力 σ_0 与平均应变 e_0 成比例。

（3）应力偏量分量与应变偏量分量成比例。

（4）应力强度 σ_i 和应变强度 e_i 成比例。

§4-2 塑性应力-应变关系

在塑性变形阶段，应力与应变之间的关系是非线性的，应变不仅和应力状态有关，而且还和变形历史有关。如果不知道变形的历史，便不能只根据即时应力状态唯一地确定塑性应变状态。而且如果只知道最终的应变状态，也不能唯一地确定应力状态。为了考虑变形的历史，应研究应力和应变增量之间的关系，以这种关系为基础的理论称为增量理论。增量理论是塑性力学中最重要、最基本的理论。

为了确定塑性状态中应力和应变增量之间的关系，需要以实验为基础提出它们之间的联系。前面曾介绍过应力洛德参数 μ_σ 是代表应力莫尔圆的相对位置的，而应变增量洛德参数是代表应变增量莫尔圆的相对位置的。洛德曾用受轴向拉伸和内压同时作用

的薄壁圆管作试验，他所采用的参数是

$$\mu_\sigma = 2\frac{\sigma_2-\sigma_3}{\sigma_1-\sigma_3}-1\ ,\quad \mu_{d\varepsilon} = 2\frac{d\varepsilon_2^p-d\varepsilon_3^p}{d\varepsilon_1^p-d\varepsilon_3^p}-1 \qquad (4\text{-}14)$$

通过实验得到$d\varepsilon_1^p$、$d\varepsilon_2^p$、$d\varepsilon_3^p$的值，从而可以得到$\mu_{d\varepsilon}$的值。由算出的应力可以得到μ_σ的值。于是可以画出$\mu_{d\varepsilon}$和μ_σ之间的关系曲线，如图4-1所示。洛德的实验结果表明，$\mu_\sigma=\mu_{d\varepsilon}$大致上是成立的。当考虑塑性变形中产生的各向异性的影响后，完全可以认为应力洛德参数与应变增量洛德参数是相等的。因此可以认为应力形式指数和应变增量形式指数是相等的，即

$$\omega_\sigma = \omega_{d\varepsilon} \qquad (4\text{-}15)$$

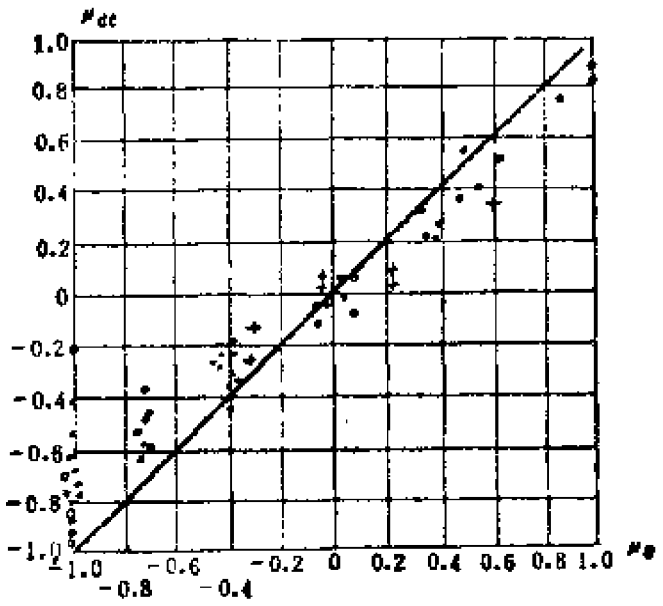


图4-1 关于$d\varepsilon_1^p-\sigma_1$的洛德实验

若有一条复杂的变形路径(图4-2a)，则在描述变形过程的曲线c上，某一点P处的切线与应变轴e_1所成的角度$\omega_{d\varepsilon}$，和当时OP与σ_1所成的角度ω_σ(图4-2b)是相等的。根据式(4-15)以及应力偏量和应变偏量增量的表达式(1-27)和(2-22)，并考虑式(2-17)，则有

$$\frac{de_1^p}{s_1}=\frac{de_2^p}{s_2}=\frac{de_3^p}{s_3}=\frac{de_i^p\cos\omega_{\sigma_1}}{\frac{2}{3}\sigma_i\cos\omega_{\sigma_1}}=$$

$$\frac{de_i^p\cos(\omega_{\sigma_1}-120^\circ)}{\frac{2}{3}\sigma_i\cos(\omega_{\sigma_1}-120^\circ)}=\frac{de_i^p\cos(\omega_{\sigma_1}-240^\circ)}{\frac{2}{3}\sigma_i\cos(\omega_{\sigma_1}-240^\circ)}$$

或写成

$$\frac{de_1^p}{s_1}=\frac{de_2^p}{s_2}=\frac{de_3^p}{s_3}=\frac{de_i^p}{\frac{2}{3}\sigma_i}=d\lambda \tag{4-16}$$

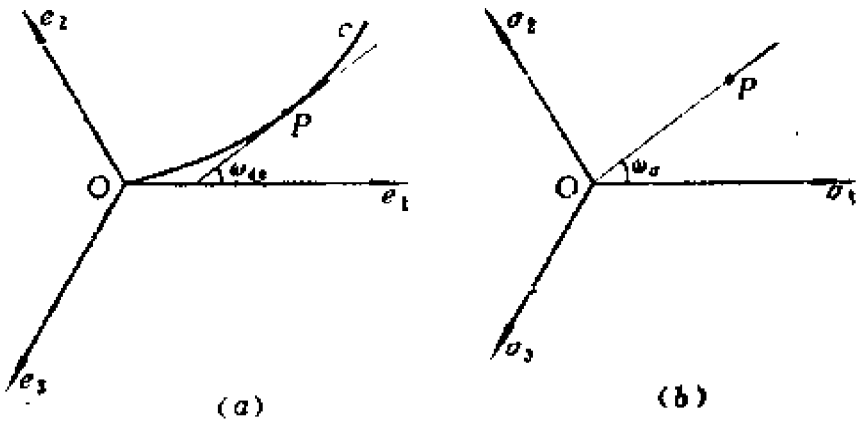
式中，$d\lambda$为比例系数，它在塑性变形过程中，随着de_i^p和σ_i的比值的变化而变化，但在变形的某一瞬间，应变偏量增量的每一分量与相应的应力偏量分量的比值都是相同的$d\lambda$。对于理想塑性材料，$\sigma_i=\sigma_s$，因此比例系数$d\lambda$又可写为

$$d\lambda=\frac{3de_i^p}{2\sigma_s} \tag{4-17}$$

式（4-17）表明，在塑性变形过程中，比例关系$d\lambda$不仅与材料的屈服极限有关，而且还和变形程度有关。当不用主应力表示时，式（4-16）可以写为

$$\frac{de_x^p}{s_x}=\frac{de_y^p}{s_y}=\frac{de_z^p}{s_z}=\frac{d\gamma_{xy}^p}{2\tau_{xy}}=\frac{d\gamma_{yz}^p}{2\tau_{yz}}=\frac{d\gamma_{zx}^p}{2\tau_{zx}}=\frac{3de_i^p}{2\sigma_i}=d\lambda \tag{4-18}$$

式（4-18）是由莱维（M. Lévy）-米泽斯提出的，因此称为莱维-米泽斯塑性本构方程。事实上，对塑性本构关系的研究最早是由圣维南开始的。他认识到，在材料达到塑性状态后，应力和应变没有一一对应的关系，因而提出：在塑性变形的过程中，应力和应变的关系式应以增量的形式给出，而应变增量的主轴和应力偏量的主轴是重合的。这个见解为塑性本构关系的建立奠定了基础，塑性力学中的增量理论就是在这一假设的前提下发展起



(a) (b)

图4-2 复杂的变形路径和应力路径

(a) 非比例变形的路径 (b) 应力路径

来的。在莱维-米泽斯理论中，包括了如下一些假设：

(1) 应变偏量增量与应力偏量成比例；

(2) 材料是不可压缩的；

(3) 材料是理想刚塑性的；

(4) 材料满足米泽斯屈服条件，即$\sigma_i = \sigma_s$。

由上述第二条假设有$e_0 = 0$，因此可认为应变偏量分量e_{ij}和应变分量ε_{ij}是相等的，即

$$e_x = \varepsilon_x, \qquad e_y = \varepsilon_y, \qquad e_z = \varepsilon_z \tag{4-19}$$

因此式(4-18)可以写为

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_x^p}{s_x} = \frac{\mathrm{d}\varepsilon_y^p}{s_y} = \frac{\mathrm{d}\varepsilon_z^p}{s_z} = \frac{\mathrm{d}\gamma_{xy}^p}{2\tau_{xy}} = \frac{\mathrm{d}\gamma_{yz}^p}{2\tau_{yz}} = \frac{\mathrm{d}\gamma_{zx}^p}{2\tau_{zx}} = \mathrm{d}\lambda \tag{4-20}$$

在莱维-米泽斯理论中，若已知三个正应力的值，便可确定应力偏量s_x、s_y、s_z，于是由

$$\mathrm{d}\varepsilon_x^p = s_x\mathrm{d}\lambda, \quad \mathrm{d}\varepsilon_y^p = s_y\mathrm{d}\lambda, \quad \mathrm{d}\varepsilon_z^p = s_z\mathrm{d}\lambda \tag{4-21}$$

便可确定$\mathrm{d}\varepsilon_x^p$、$\mathrm{d}\varepsilon_y^p$、$\mathrm{d}\varepsilon_z^p$以及它们之间的比值，但还不能确定各应变偏量的具体数值，因为$\mathrm{d}\varepsilon_i^p$与应力状态并没有单值的关系。如果给出$\mathrm{d}\varepsilon_1^p$、$\mathrm{d}\varepsilon_2^p$、$\mathrm{d}\varepsilon_3^p$的值，则可求出$s_1$、$s_2$、$s_3$的值，但却求不

出应力σ_1、σ_2和σ_3的值，只有给出σ_0的值后，才能求出σ_1、σ_2和σ_3。

在许多金属塑性成形问题中，弹性应变增量与塑性应变增量相比是完全可以忽略的，因此采用莱维-米泽斯本构方程进行计算是合理的。但在某些情况下，弹性应变不能忽略。例如在某些弹塑性问题中，需要考虑弹性回弹和残余应力，这时必须考虑弹性应变，即认为总应变为弹性应变和塑性应变之和。若用增量形式表示，则有

$$de_{ij} = de^{e}_{ij} + de^{p}_{ij} \tag{4-22}$$

将弹性应变增量与塑性应变增量用式（4-6）和（4-18）代入后，有

$$de_{ij} = \frac{ds_{ij}}{2G} + s_{ij}\,d\lambda \tag{4-23}$$

将式（4-23）展开后，得

$$\left.\begin{aligned} de_x &= \frac{ds_x}{2G} + s_x d\lambda \;,\quad d\gamma_{xy} = \frac{d\tau_{xy}}{G} + 2\tau_{xy}\,d\lambda \\ de_y &= \frac{ds_y}{2G} + s_y d\lambda \;,\quad d\gamma_{yz} = \frac{d\tau_{yz}}{G} + 2\tau_{yz}\,d\lambda \\ de_z &= \frac{ds_z}{2G} + s_z d\lambda \;,\quad d\gamma_{zx} = \frac{d\tau_{zx}}{G} + 2\tau_{zx}\,d\lambda \end{aligned}\right\} \tag{4-24}$$

米泽斯屈服条件可以写成如下形式：

$$(s_x - s_y)^2 + (s_y - s_z)^2 + (s_z - s_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = 2\sigma_s^2$$

上式展开后，得

$$s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 - s_x s_y - s_y s_z - s_z s_x + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = \sigma_s^2$$

或写成

$$\frac{1}{2}(s_x^2 + s_y^2 + s_z^2) + (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = \frac{\sigma_s^2}{3} = k^2 \tag{4-25}$$

将式（4-25）微分后，得

$$s_x ds_x + s_y ds_y + s_z ds_z + 2\tau_{xy} d\tau_{xy} + 2\tau_{yz} d\tau_{yz} + 2\tau_{zx} d\tau_{zx} = 0 \quad (4\text{-}26)$$

用s_x、s_y、s_z分别乘式（4-24）的左三式，而用τ_{xy}、τ_{yz}、τ_{zx}分别乘式（4-24）的右三式，将所得的六个式子相加，并考虑式（4-25）和（4-26），有

$$2k^2 \cdot 2G d\lambda = 2G(s_x de_x + s_y de_y + s_z de_z + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{yz} d\gamma_{yz} + \tau_{zx} d\gamma_{zx}) \quad (4\text{-}27)$$

如令

$$dW = (s_x de_x + s_y de_y + s_z de_z + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{yz} d\gamma_{yz} + \tau_{zx} d\gamma_{zx})$$

则由式（4-27）可得

$$d\lambda = \frac{dW}{2k^2} = \frac{3dW}{2\sigma_i^2}$$

因此式（4-24）又可写为

$$\left.\begin{aligned} de_x &= \frac{ds_x}{2G} + \frac{3dW}{2\sigma_i^2} s_x, \quad d\gamma_{xy} = \frac{d\tau_{xy}}{G} + \frac{3dW}{\sigma_i^2} \tau_{xy} \\ de_y &= \frac{ds_y}{2G} + \frac{3dW}{2\sigma_i^2} s_y, \quad d\gamma_{yz} = \frac{d\tau_{yz}}{G} + \frac{3dW}{\sigma_i^2} \tau_{yz} \\ de_z &= \frac{ds_z}{2G} + \frac{3dW}{2\sigma_i^2} s_z, \quad d\gamma_{zx} = \frac{d\tau_{zx}}{G} + \frac{3dW}{\sigma_i^2} \tau_{zx} \end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}28)$$

式（4-28）称为普朗特-罗伊斯（L. Prandtl-A. Reuss）本构方程。普朗特首先提出了在某些塑性变形问题中，应考虑弹性变形的影响，后来由罗伊斯将这一思想推广到三维问题中去，导出了上述本构方程。普朗特-罗伊斯理论和莱维-米泽斯理论的基本假设是类似的，它们都是塑性力学中的增量理论，都给出了塑性应变偏量的增量与应力偏量之间的关系。整个变形过程可以由各瞬时变形的累积求出，因此增量理论可以描述加载过程对变形的影响，能够反映复杂加载的情况以及塑性变形的本质。然而应该指出，普朗特-罗伊斯理论在应变的表达式中虽然只增加了弹性变形一项，但在计算中却比没有这一项要复杂得多，因而至今仍只有少

数简单的问题获得了解析解。

在塑性力学中，有一种特殊的变形情况，即各应变分量由始至终都按同一比例增加或减少，这种情况称为比例变形。在此情况下，应变强度增量可以积分并求得应变强度，从而建立了与弹性力学类似的应力-应变关系。由于考虑的是全部应变量而不是应变的增量，因此这个理论称为全量理论。全量理论是以比例变形为基础的理论，又称为形变理论。这个理论首先是由亨奇提出的，后来由伊柳辛将它整理得更为完善，问题提得更为明确，并给出了使用条件，因此这个理论有时亦称为亨奇-伊柳辛理论。

形变理论的前提是比例变形，即各应变分量之间在变形过程中始终保持固定的比例。例如当主应变增量成比例增大时，应有

$$de_1 : de_2 : de_3 = C_1 : C_2 : C_3 \qquad (4\text{-}29)$$

上式又可写为

$$\frac{de_1}{de_2} = \frac{C_1}{C_2}, \quad \frac{de_1}{de_3} = \frac{C_1}{C_3}$$

由于在整个变形过程中，C_1/C_2、C_1/C_3保持为常数，故经过积分后，可得

$$e_2 = \frac{C_2}{C_1} e_1 + D_1, \quad e_3 = \frac{C_3}{C_1} e_1 + D_2$$

由于在变形开始时，所有的应变皆为零，即当$e_1 = 0$时，e_2和e_3也同时为零，因此有

$$D_1 = D_2 = 0$$

由此得

$$e_1 : e_2 : e_3 = C_1 : C_2 : C_3 \qquad (4\text{-}30)$$

若将式（4-29）代入应变强度的表达式，则有

$$de_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(de_1-de_2)^2+(de_2-de_3)^2+(de_3-de_1)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\left(1-\frac{C_2}{C_1}\right)^2+\left(\frac{C_2}{C_1}-\frac{C_3}{C_1}\right)^2+\left(\frac{C_3}{C_1}-1\right)^2}de_1$$

由于在de_1前为一常数，故将上式积分后可得

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\left(1-\frac{C_2}{C_1}\right)^2+\left(\frac{C_2}{C_1}-\frac{C_3}{C_1}\right)^2+\left(\frac{C_3}{C_1}-1\right)^2}e_1 + D_3$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2} + D_3$$

在开始时，$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=0$，$e_1=0$，故可得$D_3=0$。由上式看出，在比例变形条件下，有

$$\int de_i = e_i \tag{4-31}$$

伊柳辛证明了比例变形的必要条件是比例加载，而在比例加载的条件下，各应力分量都按比例增长，即

$$s_{ij}=cs_{ij}^0\ ,\quad \sigma_i=c\sigma_i^0\ ,\quad ds_{ij}=s_{ij}^0dc \tag{4-32}$$

式中c为随时间变化的参数，s_{ij}^0为初始应力偏量的分量。由式(4-23)知普朗特-罗伊斯方程为

$$de_{ij} = -\frac{ds_{ij}}{2G}+s_{ij}d\lambda$$

$$= -\frac{s_{ij}^0dc}{2G}+s_{ij}^0cd\lambda$$

将上式积分后，得

$$e_{ij} = s_{ij}^0\left(\frac{c}{2G}+\int cd\lambda\right)$$

由于$d\lambda=\frac{3de_i^p}{2\sigma_i}$，故上式可写为

$$e_{ij}=s_{ij}^{0}\left(\frac{c}{2G}+\int c\cdot\frac{3de_i^p}{2\sigma_i}\right)$$

$$=s_{ij}^{0}c\left(\frac{1}{2G}+\frac{1}{c}\int c\cdot\frac{3de_i^p}{2c\sigma_i^0}\right)$$

$$=s_{ij}^{0}c\left(\frac{1}{2G}+\frac{3}{2c\sigma_i^0}\int de_i^p\right)$$

$$=\frac{s_{ij}}{2G}+\frac{3s_{ij}e_i^p}{2\sigma_i} \qquad (4\text{-}33)$$

若令 $\phi=\frac{3Ge_i^p}{\sigma_i}$，则式(4-33)又可写为

$$e_{ij}=e_{ij}^{e}+e_{ij}^{p}=\frac{1+\phi}{2G}s_{ij} \qquad (4\text{-}34)$$

式（4-34）形式的应力-应变关系首先是亨奇给出的，因此称为亨奇本构方程。此式中的$\frac{s_{ij}}{2G}$表示弹性应变，而$\frac{\phi}{2G}s_{ij}$表示塑性应变。在塑性变形过程中，有

$$\frac{e_x^p}{s_x}=\frac{e_y^p}{s_y}=\frac{e_z^p}{s_z}=\frac{\gamma_{xy}^p}{2\tau_{xy}}=\frac{\gamma_{yz}^p}{2\tau_{yz}}=\frac{\gamma_{zx}^p}{2\tau_{zx}}=\frac{3e_i^p}{2\sigma_i} \qquad (4\text{-}35)$$

若用主应变表示，则有

$$\frac{e_1^p}{s_1}=\frac{e_2^p}{s_2}=\frac{e_3^p}{s_3}=\frac{3e_i^p}{2\sigma_i} \qquad (4\text{-}36)$$

因此应力形式指数ω_σ必定等于应变形式指数，即

$$\omega_\sigma=\omega_\varepsilon$$

在此情况下，表示应变强度的线OP一定是一条直线（图4-3）。

利用式（4-36）可以求出由主应力σ_1、σ_2、σ_3所确定的应力状态中主应变之间的相互关系。

应变状态可以在等倾面上用e_1、e_2、e_3来表示（图4-4）。随着物体的变形，描述应变状态的P点沿应变路径移动。

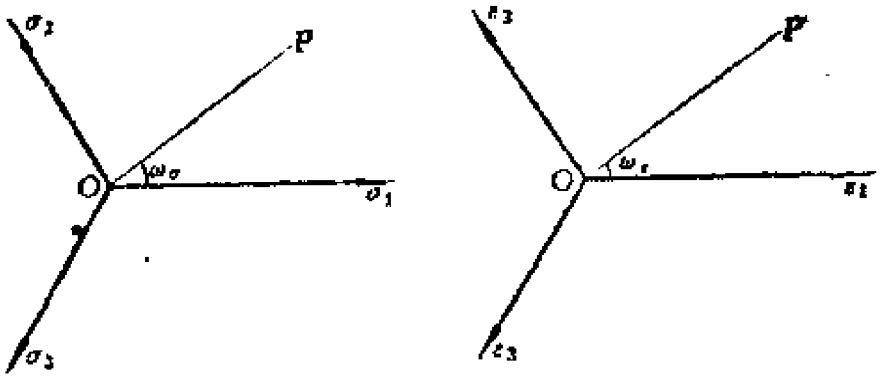


图4－3　比例变形条件下的ω_σ和ω_ε

$$de_i = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{de_1^2 + de_2^2 + de_3^2}$$

线段OPB的增量表示应变的过程且用de_i表示，而线段OPB的全长则表示总应变强度。

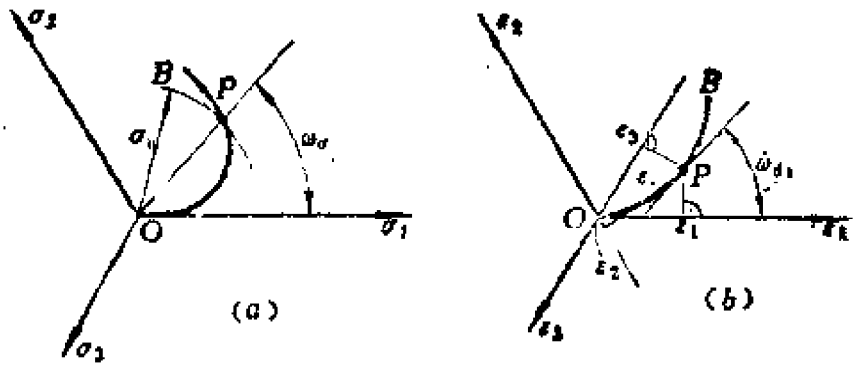


图4－4　非比例变形条件下应力状态和应变状态的变化

随着应变状态的变化，应力状态也在变化，即图4-4a上P点的位置也在变化。P点的位置可以这样来确定：由原点O引一条与σ_1轴的夹角ω_σ等于ω_{d_1}的直线，并以O为圆心，以σ_i为半径作

一圆弧，该圆弧与上述直线的交点即为P点。σ_1的值可通过应力-应变曲线上对应于e_1的点来确定。用这种方法，便能以图1-4b上的曲线OPB为基础，在图4-4a上画出应力变化的曲线。对于比例变形情况，有$\omega_\sigma = \text{const}$，$\omega_\varepsilon = \text{const}$，这时两条线都是直线。

例1：有一受内压p作用的薄壁圆筒，内半径为r，壁厚为t。假设薄壁圆筒的材料是不可压缩的。试求圆筒完全进入塑性状态后主应变之间的比值。

解：圆筒的周向和轴向应力分别为

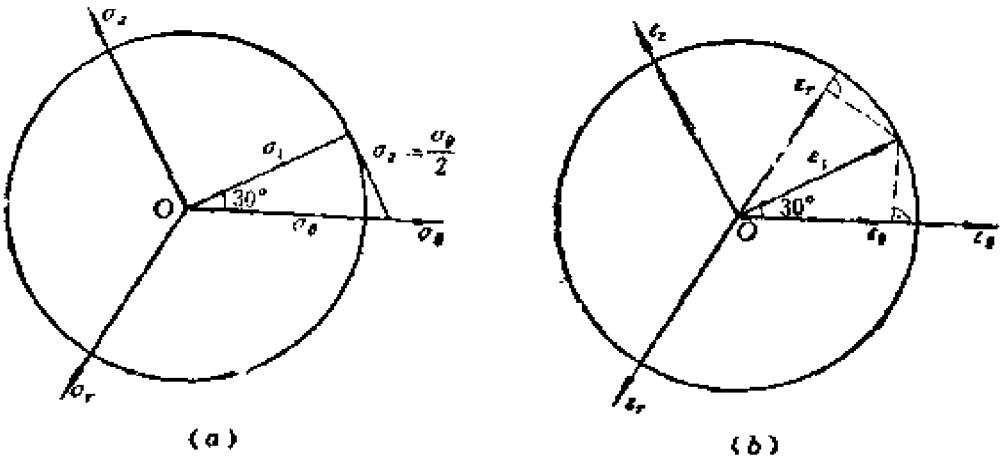


图4-5　受内压作用的圆筒的应力状态和应变状态

$$\sigma_\theta = \frac{pr}{t}, \quad \sigma_z = \frac{pr}{2t}$$

由于r比t大得多，因此径向应力σ_r比σ_θ和σ_z小得多，故可设$\sigma_r = 0$。由以上两式知

$$\sigma_\theta = 2\sigma_z$$

而平均应力为

$$\sigma_\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_\theta + \sigma_z + \sigma_r) = \frac{pr}{2t}$$

故应力偏量的分量为

$$s_\theta = \frac{pr}{2t}, \quad s_z = 0, \quad s_r = -\frac{pr}{2t}$$

由此可知

$$e_\theta = \mathrm{d}\lambda \frac{pr}{2t}, \quad e_z = 0, \quad e_r = -\mathrm{d}\lambda \frac{pr}{2t}$$

由于采用了体积不可压缩的条件，即$e_0=0$，故由上式可得

$$e_\theta = -e_r, \quad e_z = 0$$

故主应变的比值为

$$e_\theta : e_r : e_z = 1 : -1 : 0$$

由以上分析可见，在塑性变形过程中，薄壁筒的长度没有变化，只是由于壁厚的减小而引起直径的变化。这一结果也可以用等倾面上互成120°角的三个应力轴和应变轴表示出来。由上面得到的应力分量，可按下式计算ω_θ角，即

$$\cos\omega_\theta = \frac{2\sigma_\theta - \sigma_z - \sigma_r}{2\sigma_i} = \frac{2\sigma_\theta - \frac{\sigma_\theta}{2}}{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}\sigma_\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

因此得

$$\omega_\theta = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

应变形式指数则由下式计算，即

$$\cos\omega_\theta = \frac{\varepsilon_\theta}{\varepsilon_i} = \frac{\varepsilon_\theta}{\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{6}\,\varepsilon_\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

故

$$\omega_\theta = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

在图4-5b上，应变强度在e_θ轴上的投影落在原点上，因为轴向的伸长为零。

从上例可以看出，如已知应力状态，则可以唯一地确定变形的形式。但若只知应变状态，便得不到唯一解，这是因为这一变形形式可以对应许多只相差一个平均应力σ_0而具有相同应力偏量的应力状态。为了在此情况下获得唯一解，还应当知道某一主应

力的值，这可以在下例中看到。

例2：设有一受轴向力作用的薄壁圆筒，其内半径为r，壁厚为t。若圆筒保持直径不变，只产生轴向伸长，并假设材料是不可压缩的，试求达到塑性状态时需要多大的内压。

解：如在塑性变形过程中，薄壁圆筒的直径保持不变，则周向应变ε_θ为零，因而薄壁筒的伸长只能由筒壁变薄产生，这时各应变分量为

$$\varepsilon_\theta=0,\quad \varepsilon_z=-\varepsilon_r$$

或

$$e_\theta=0,\quad e_z=-e_r$$

由式（4-36）可得

$$s_\theta=0,\quad s_z=-s_r$$

利用屈服条件

$$\sqrt{\frac{3}{2}\left(s_\theta^2+s_z^2+s_r^2\right)}=\sigma_s$$

可得

$$s_\theta=0,\quad s_z=\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}},\quad s_r=-\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$$

为了将应力偏量分量表示成应力分量，引进σ_0，此时有

$$\sigma_\theta=\sigma_0,\quad \sigma_z=\sigma_0+\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}},\quad \sigma_r=\sigma_0-\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$$

由于σ_r比σ_θ和σ_z小得多，因此在本问题中取$\sigma_r\approx0$，于是

$$\sigma_r=\sigma_0-\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}=0$$

故得

$$\sigma_0=\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$$

将σ_0代入σ_θ、σ_z的表达式后，得

$$\sigma_\theta=\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}},\quad \sigma_z=\frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}},\quad \sigma_r=0$$

由平衡方程知

$$\sigma_\theta = \frac{pr}{t}$$

因此当薄壁圆筒进入塑性状态时，内压p的值为

$$p = \sigma_s \frac{t}{r} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} \frac{t}{r} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{t}{d} \sigma_s$$

式中，d为圆筒的内径。

例3：已知受内压p和轴向力P同时作用的薄壁圆筒的内径为d，壁厚为t，且满足体积不可压缩条件，圆筒材料的屈服极限为σ_s。若使圆筒的直径保持不变，试问轴向力P应多大？

解：由例2的分析可知，

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}, \quad \sigma_z = \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}}, \quad \sigma_r = 0$$

由内压引起的轴向应力为

$$\sigma'_z = \frac{dp}{4t}$$

而由外力P引起的轴向应力为

$$\sigma''_z = \frac{P}{\pi t d}$$

两者之和为

$$\sigma_z = \sigma'_z + \sigma''_z = \frac{pd}{4t} + \frac{P}{t\pi d} = \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}}$$

由此得

$$P = t\pi d\left(\frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}} - \frac{pd}{4t}\right)$$

伊柳辛将亨奇形变理论的适用条件作了明确的规定，并证明了简单加载定理。伊柳辛提出，在小弹塑性变形的情况下，总应变偏量与应力偏量成比例，即

$$\frac{e_x}{s_x} = \frac{e_y}{s_y} = \frac{e_z}{s_z} = \frac{\gamma_{xy}}{2\tau_{xy}} = \frac{\gamma_{yz}}{2\tau_{yz}} = \frac{\gamma_{zx}}{2\tau_{zx}} = \lambda \quad (4\text{-}37)$$

当采用主应力表示时，有

$$\frac{e_1}{s_1}=\frac{e_2}{s_2}=\frac{e_3}{s_3}=\lambda \tag{4-38}$$

应变强度的表达式为

$$\begin{aligned}e_i&=\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(e_1-e_2)^2+(e_2-e_3)^2+(e_3-e_1)^2}\\&=\frac{\sqrt{2}}{3}\lambda\sqrt{(s_1-s_2)^2+(s_2-s_3)^2+(s_3-s_1)^2}\\&=\frac{\sqrt{2}}{3}\lambda\sqrt{2}\,\sigma_i\end{aligned}$$

由此得

$$\lambda=\frac{3}{2}\cdot\frac{e_i}{\sigma_i} \tag{4-39}$$

因此，伊柳辛理论的应力-应变关系可以写成

$$\left.\begin{aligned}e_x&=\frac{3e_i}{2\sigma_i}s_x,\quad \gamma_{xy}=\frac{3e_i}{\sigma_i}\tau_{xy}\\e_y&=\frac{3e_i}{2\sigma_i}s_y,\quad \gamma_{yz}=\frac{3e_i}{\sigma_i}\tau_{yz}\\e_z&=\frac{3e_i}{2\sigma_i}s_z,\quad \gamma_{zx}=\frac{3e_i}{\sigma_i}\tau_{zx}\end{aligned}\right\} \tag{4-40}$$

根据虎克定律，弹性应变为

$$\left.\begin{aligned}e_x^e&=\frac{1}{2G}s_x,\quad \gamma_{xy}^e=\frac{\tau_{xy}}{G}\\e_y^e&=\frac{1}{2G}s_y,\quad \gamma_{yz}^e=\frac{\tau_{yz}}{G}\\e_z^e&=\frac{1}{2G}s_z,\quad \gamma_{zx}^e=\frac{\tau_{zx}}{G}\end{aligned}\right\} \tag{4-41}$$

由于总应变为弹性应变和塑性应变之和，故由式（4-40）和式

(4-41) 可得塑性应变的表达式为

$$\left.\begin{aligned} e_x^p &= \left(\frac{3e_i}{2\sigma_i}-\frac{1}{2G}\right)s_x, \quad \gamma_{xy}^p = \left(\frac{3e_i}{\sigma_i}-\frac{1}{G}\right)\tau_{xy} \\ e_y^p &= \left(\frac{3e_i}{2\sigma_i}-\frac{1}{2G}\right)s_y, \quad \gamma_{yz}^p = \left(\frac{3e_i}{\sigma_i}-\frac{1}{G}\right)\tau_{yz} \\ e_z^p &= \left(\frac{3e_i}{2\sigma_i}-\frac{1}{2G}\right)s_z, \quad \gamma_{zx}^p = \left(\frac{3e_i}{\sigma_i}-\frac{1}{G}\right)\tau_{zx} \end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}42)$$

在伊柳辛理论中，问题归结为求出σ_i/e_i值便可以将塑性力学中的物理关系写出来。e_i表示变形程度，而σ_i与具体材料有关。

伊柳辛给出了形变理论应满足的几个条件，它们是：

（1）外载荷（包括体积力）按比例增加，变形体处于主动变形的过程（即应力强度σ_i不断增加，在变形过程中不出现中间卸载的情况）；

（2）材料的体积是不可压缩的，计算时取泊松比$\mu=\frac{1}{2}$；

（3）材料的应力-应变曲线具有幂强化形式，即

$$\sigma = A\varepsilon^n \quad 或 \quad \sigma_i = Ae_i^n \qquad (4\text{-}43)$$

（4）满足小弹塑性变形的各项条件，塑性变形和弹性变形属于同一量级。

在满足以上几个条件后，形变理论将给出正确的结果。外载荷按比例增加是满足简单加载的必要条件，如果载荷不按比例增加，则不仅保证不了物体内部的简单加载状态，而且在物体的表面也满足不了简单加载的条件。采用体积不可压缩假设并取泊松比$\mu=\frac{1}{2}$，不仅简化了具体计算，而且基本上与实验结果相符，使形变理论的物理关系主要表示为应力偏量和应变偏量之间的关系，并使之满足$\sigma_i=Ae_i^n$的规律。采用幂强化模型可以避免区分

弹性区和塑性区，而实际上这一模型对不同材料的限制并不大，因为各种材料都可通过选取公式中的常数A和m来拟合拉伸曲线。采用小变形条件是因为平衡方程和几何关系都是在小变形条件下导出的，而且物理关系也是小变形条件下的关系式。

为了简化计算，形变理论在实验的基础上采用单一曲线假定。戴维斯（H.E.Davis）和儒柯夫（А.М.Жуков）曾用铜和中碳钢制成的薄壁筒做过承受拉伸和内压作用的试验。试验时使拉力和内压的比值k保持为常数，但对于不同的试件比值k是不同的。试验结果（图4-6）表明，只要在简单加载或偏离简单加载不大的条件下，尽管应力状态不同，但应力强度和应变强度的关系曲线都可近似地用单向拉伸曲线来表示。单一曲线假定把复杂应力状态的应力-应变曲线和一维的应力-应变曲线联系起来了，在很大程度上方便了计算。

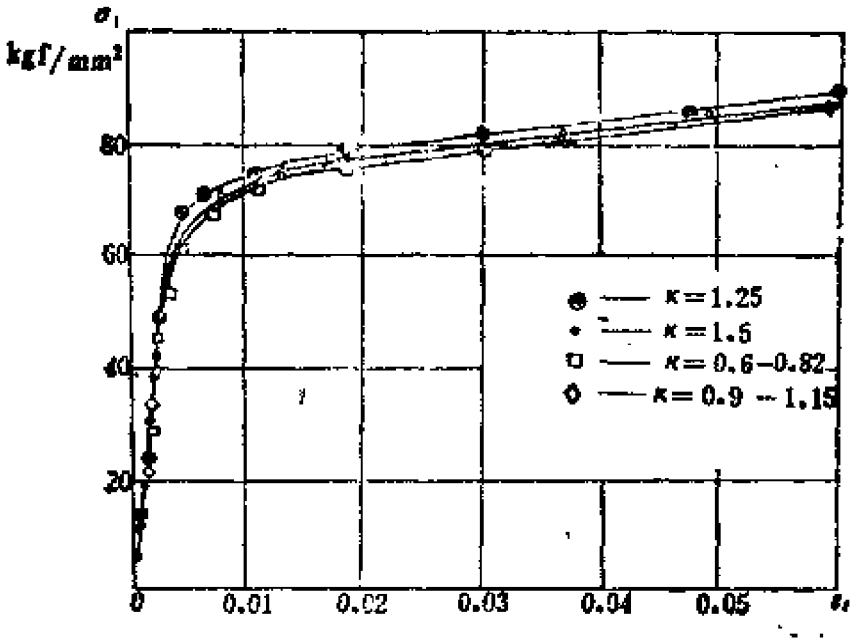


图4-6 单一曲线实验

设E'为材料超出弹性极限后的应力和应变的比例系数，它

是应变e的函数。在单向拉伸时，有

$$\sigma = E'e \tag{4-44a}$$

根据单一曲线假定，在复杂应力状态时超过弹性极限后，应有

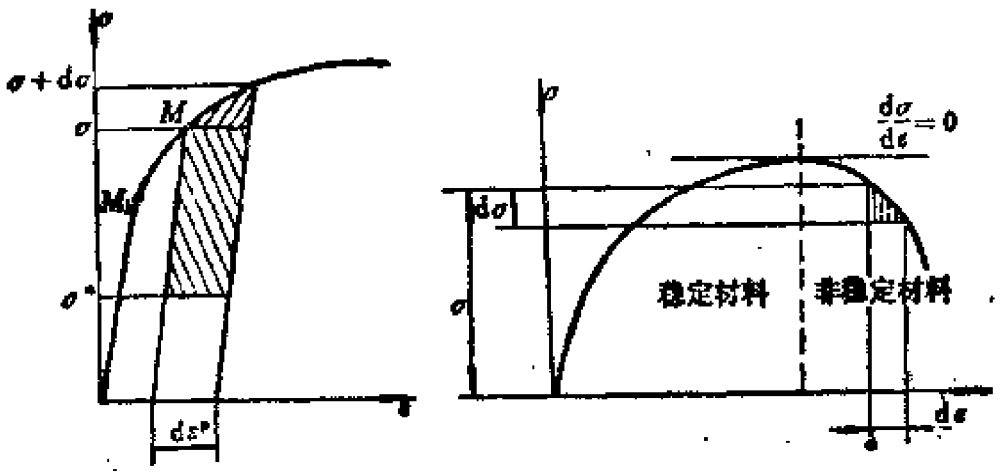
$$\sigma_i = E'e_i \tag{4-44b}$$

在获得了单向拉伸的应力-应变曲线后，若已知应变强度e_i，则可以方便地算出应力强度σ_i。

§4-3 德鲁克关于稳定材料的公设

50年代初期，美国力学家德鲁克(D.C.Drucker)提出了关于稳定材料的公设，它为塑性力学的发展奠定了理论基础，并将增量理论的本构关系与材料的屈服条件联系了起来，对深入理解塑性力学中的物理关系具有十分重要的意义。

在图4-7中给出了两条拉伸应力-应变曲线。在图4-7a中，应



(a) 稳定材料　　(b) 非稳定材料

图4-7 单向拉伸时的应力-应变曲线

力-应变曲线是单调递增的，因而任一应力增量$d\sigma>0$都将引起

正应变增量$de^p>0$，应力增量和应变增量的乘积将大于零，即$d\sigma de^p>0$，这种材料称为稳定材料。没有强化效应的材料也属于稳定材料，这时$d\sigma=0$，因而$d\sigma de^p=0$。对于稳定材料，一般应写成

$$d\sigma de^p\geqslant 0$$

对于非稳定材料（图4-7*b*），在应力-应变曲线中有一段是递减的，应力增量为负值，即$d\sigma<0$。因此，对于非稳定材料，应有

$$d\sigma de<0$$

这里将只考虑稳定材料。现分析一下单向拉伸的如下过程：试件从初始应力σ^*加载至屈服极限σ（图4-7*a*中的M点），再加载至$\sigma+d\sigma$，$d\sigma$为应力增量，它引起相应的塑性应变增量；然后卸载到初始应力σ^*，这便完成了一个应力循环。图4-7*a*中阴影部分的面积代表附加应力所做的塑性功，这一面积给出如下不等式：

$$(\sigma-\sigma^*)de^p>0\ ,\ d\sigma de^p>0 \qquad (4\text{-}45)$$

德鲁克曾将以上两式推广到复杂应力状态[40]，其形式为

$$(\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^*)de_{ij}^p\geqslant 0\ ,\ d\sigma_{ij}de_{ij}^p\geqslant 0 \qquad (4\text{-}46)$$

式（4-46）在塑性力学中具有非常重要的意义。首先分析一下式（4-46）第一式的几何意义。在应力空间中，将$(\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^*)$作为向量$\sigma_{ij}$与向量$\sigma_{ij}^*$之差来研究。由于应力主轴与应变增量主轴是重合的，因此应变增量也可在同一空间中看作是一个向量。利用两个向量点积的定义可以写出如下关系式：

$$(\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^*)de_{ij}^p=|\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^*|\,|de_{ij}^p|\cos\psi\geqslant 0 \qquad (4\text{-}47)$$

式中，ψ为两个向量之间的夹角。因为$|\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^*|$和$|de_{ij}^p|$都是正值，故若式（4-47）成立，角$\psi$必须是锐角。为了满足这一条件，屈服曲面必须是凸形的，这是因为若屈服曲面是凹形的（如图4-8所示），则在屈服曲面上总可以找到某一点A，使得

$(\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^*)$与$de_{ij}^p$之间的夹角$\psi$为钝角，从而使两个向量的点积为负值。由此可知，式（4-46）要求屈服面必须是凸形的，即屈服面必须位于每一切面的一侧。

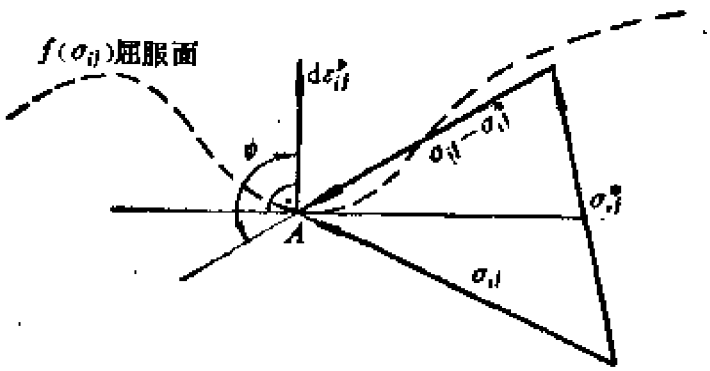


图4－8　不满足式（4－46）的凹形屈服面

若屈服面是凸形的，而塑性应变增量的方向是任意的（如图4-9所示），则向量$(\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^*)$与$de_{ij}^p$之间仍有可能形成钝角，从而又与式（4-46）相矛盾。故只有当应变增量de_{ij}^p垂直于屈服面时，才能使式（4-46）永远被满足。

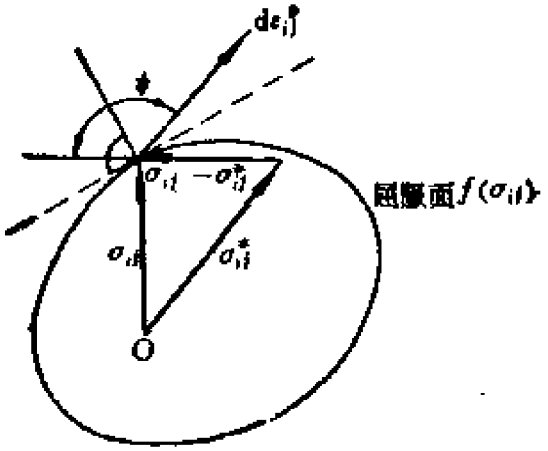


图4－9　不满足式（4－46）的情况

由矢量分析知道，在标量场中，每一点处的梯度垂直于过此

点的等值面，且指向函数增大的方向。根据这一性质，若将屈服面的外法线方向用屈服函数的梯度矢量来表示，则塑性应变增量与屈服面的正交性可表示为

$$de_{ij}^{p}=d\lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}} \tag{4-48}$$

式中$d\lambda$为大于零的标量。若将式（4-48）中的f作为塑性势函数并令它等于屈服函数，则可称式（4-48）为与屈服条件相关联的塑性流动法则。这一关系式将塑性应变增量与屈服条件联系了起来，即一旦屈服条件确定后，塑性应变增量便可按式（4-48）确定，因此它对研究塑性力学中的物理关系具有重要意义。

式（4-46）的第二式是加载准则，它的几何意义是当de_{ij}^{p}不为零时，$d\sigma_{ij}$的方向必须指向加载面的外法线一侧，即

$$d\lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}d\sigma_{ij}\geqslant 0$$

由于比例系数$d\lambda>0$，故上式又可写为

$$\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}d\sigma_{ij}\geqslant 0$$

对于强化材料，当应力增量沿加载面的切线方向变化而加载面并不扩大时，不产生新的塑性变形，这种情况称为中性变载。当$\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}d\sigma_{ij}<0$时，$d\sigma_{ij}$的方向必将指向加载面的内侧（如图4-10所示），此时为卸载情况。因此强化材料的加载和卸载准则可以写成

$f=0$，$d\sigma_{ij}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}>0$，　加载；

$f=0$，$d\sigma_{ij}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}=0$，　中性变载；

$f=0$，$d\sigma_{ij}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}<0$，　卸载。

对于理想塑性材料，则没有中性变载的情况，这时有

$f=0$ ， $\mathrm{d}\sigma_{ij}\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}=0$， 加载；

$f=0$ ， $\mathrm{d}\sigma_{ij}\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}<0$， 卸载。

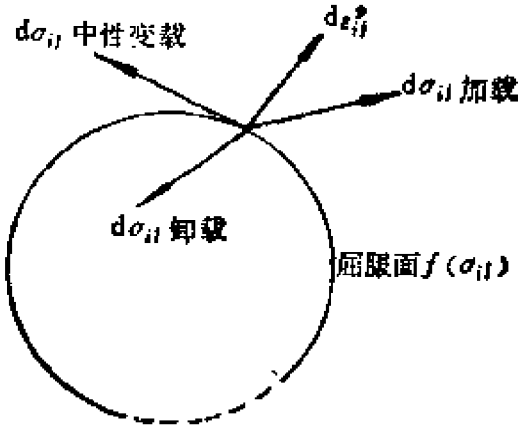


图4－10 加载和卸载准则

§4-4 塑性本构关系的内在联系

在前面的讨论中，提到了两种类型的塑性本构关系，即增量型的莱维-米泽斯本构关系和普朗特-罗伊斯本构关系，以及全量型的亨奇本构关系和伊柳辛本构关系。事实上这些本构关系之间都有一定的关系。

莱维-米泽斯本构关系是塑性力学中最基本的物理关系，这个理论不仅能反映塑性变形的本质，而且数学表达形式简单，因此在实际中得到了广泛的应用。如结构极限分析理论、滑移线场理论都是以这一本构关系为基础进行研究的。

在某些实际问题中，若弹性应变与塑性应变相比不能忽略，则应认为总应变为弹性应变和塑性应变之和，此时在莱维-米泽斯

方程中加上弹性应变项，便可以得到普朗特-罗伊斯本构方程。这一方程式一般在考虑加载历史或分析弹性回弹及残余应力时才使用。但应指出，增加弹性项后，求解问题变得复杂，比采用莱维-米泽斯本构方程要困难得多。

在比例变形条件下，将增量理论的普朗特-罗伊斯方程直接积分，便可得到形变理论的亨奇本构方程。伊柳辛方程与亨奇方程本质上是一样的，只是伊柳辛方程将弹性应变与塑性应变作为总应变反映在本构方程中，而亨奇方程则将弹性应变与塑性应变分别考虑。

根据德鲁克关于稳定材料的公设，附加应力在附加应变上所做的功是非负的，由此导出了塑性应变增量的向量与屈服面的法线方向是一致的，而塑性应变增量与屈服面的正交性则用下式表示：

$$\mathrm{d}e_{ij}^{p}=\mathrm{d}\lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}$$

若取f为米泽斯屈服函数，则由上式可得

$$\mathrm{d}e_{ij}^{p}=s_{ij}\mathrm{d}\lambda$$

此式即为莱维-米泽斯理论的本构方程。由此可见，将米泽斯屈服函数作为塑性位势时，由塑性流动法则式（4-48）便可得到莱维-米泽斯本构方程。因此可以认为，屈服条件与塑性本构方程具有密切的联系。现将上面提到的常用的本构关系列表如下：

表4-1 常用的本构关系

增量理论		形变理论	
莱维－米泽斯理论	普朗特－罗伊斯理论	亨奇理论	伊柳辛理论
$\mathrm{d}e_{ij}^{p}=s_{ij}\mathrm{d}\lambda$	$\mathrm{d}e_{ij}=\frac{\mathrm{d}s_{ij}}{2G}+s_{ij}\mathrm{d}\lambda$	$e_{ij}=\frac{1+\phi}{2G}s_{ij}$	$e_{ij}=\frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i}s_{ij}$

以屈服函数为基础的塑性本构关系，是以实验作为理论依据

的。对于理想弹塑性或理想刚塑性材料，屈服面不随塑性变形的增加而变化。这种模型虽然是近似的，但对于相当一部分韧性材料，与实验结果符合得很好。由于这种模型在数学处理上比较简便，因而在工程实际中被大量采用，并获得了塑性力学中大量边值问题的解析解。只要材料的性质基本上与模型假设一致，所得到的问题的解便大体上与实验结果相符。因此，理解和掌握这部分内容及求解问题的思路和方法，便能正确地处理实际工程中所遇到的大量课题。

现将强化条件、屈服条件和塑性本构关系之间的内在联系列于表4-2中。

习　题

4-1　在如下两种情况下，试求塑性应变增量的比值：

(a)单向拉伸应力状态$\sigma_1=\sigma_s$；

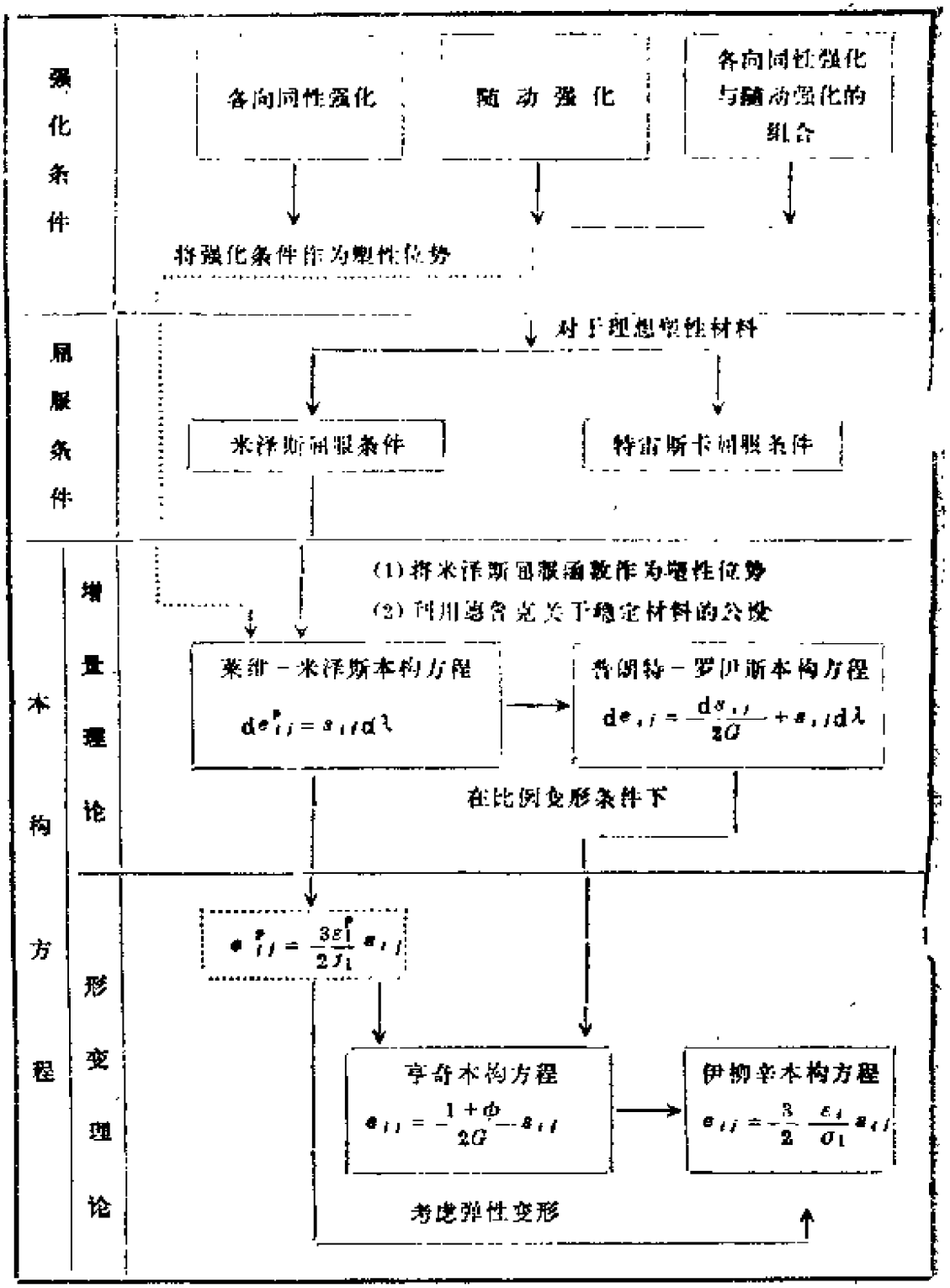
(b)纯剪应力状态 $\tau=\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$。

4-2　已知薄壁球壳的内半径为r，壁厚为t，承受内压p。若忽略弹性应变，并不考虑径向应力σ_r的影响，试求塑性应变增量的比值，并给出应力强度σ_i的表达式。

4-3　已知由不可压缩理想弹塑性材料制成的薄壁圆筒，承受轴向拉力和扭矩的作用，材料服从米泽斯屈服条件。若首先使筒的剪切应变 $\gamma=\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}G}$，从而使筒进入屈服状态，然后再拉伸使拉应变 $\varepsilon=\frac{\sigma_s}{E}=\frac{\sigma_s}{3G}$，试用普朗特-罗伊斯理论计算此时筒中的应力$\sigma$和$\tau$。

4-4　已知厚壁球的内半径为a，外半径为b，受内压p作用。若厚壁球的材料服从幂强化规律$\sigma=A\varepsilon^m$，而且是不可压缩的，试求此厚壁球的应力分量以及内压p的表达式。

表4.2 塑性力学中诸理关系的内在联系



第五章　简单弹塑性问题

§5－1　厚壁柱壳和球壳的弹塑性分析

当厚壁柱壳和球壳的塑性变形量级和弹性变形量级相当时，应采用弹塑性力学模型进行分析。在这类问题中，由于平衡方程与屈服条件中的未知量和方程式的数目相等，因此联立求解这些方程并利用边界条件找出积分常数，便可确定应力分布规律。

设圆柱形厚壁筒的内半径为a，外半径为b，受内压p作用，由弹性力学得知，当此容器处于弹性阶段时，其应力分量为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= -\frac{pa^2}{b^2-a^2}\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right)\\ \sigma_\theta &= \frac{pa^2}{b^2-a^2}\left(1+\frac{b^2}{r^2}\right)\end{aligned}\right\} \tag{5-1}$$

由上式得知，在内压力p的作用下，$\sigma_\theta>0,\sigma_r<0$。设厚壁筒处于平面应变状态，即$\varepsilon_z=0$，若采用体积不可压缩假设，则由广义虎克定律可得

$$\sigma_z=\frac{1}{2}(\sigma_r+\sigma_\theta)$$

将上式代入米泽斯屈服条件，即

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_r-\sigma_\theta)^2+(\sigma_\theta-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_r)^2}=\sigma_s$$

考虑到$\sigma_\theta>\sigma_z>\sigma_r$，故得

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s = 1.155\sigma_s \tag{5-2}$$

而特雷斯卡屈服条件为

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_s \tag{5-3}$$

两个屈服条件在此情况下都是线性的，其差别只是σ_s前的系数不同。为了求解方便，这里将采用特雷斯卡屈服条件。若欲获得米泽斯屈服条件的解，则应在上述解中σ_s处均乘以系数1.155。

在厚壁筒的内壁处，$(\sigma_\theta - \sigma_r)$有最大值，因此将首先进入塑性状态。将$r=a$代入式（5-1），再将$\sigma_\theta$和$\sigma_r$代入式（5-3），则得

$$p_s = \frac{\sigma_s}{2}\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \tag{5-4}$$

式中p_s称为弹性极限压力，它是筒体刚开始进入塑性状态时的压力。

当内压超过p_s时，在筒体内将出现塑性区。令r_s为弹塑性区的分界半径，则在r_s的内侧为塑性区，r_s的外侧为弹性区。为了分析方便，将弹性区和塑性区分别考虑，并设分界面上的压力为q，如图5－1所示。内部的塑性区可以看作为受内、外压力同时作用的厚壁圆筒，在这一区域应满足平衡方程和屈服条件，即

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_r}{\mathrm{d}r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_s$$

将屈服条件代入平衡方程后，得

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_r}{\mathrm{d}r} - \frac{\sigma_s}{r} = 0$$

或写成

$$\mathrm{d}\sigma_r = \sigma_s \frac{\mathrm{d}r}{r} \tag{5-5}$$

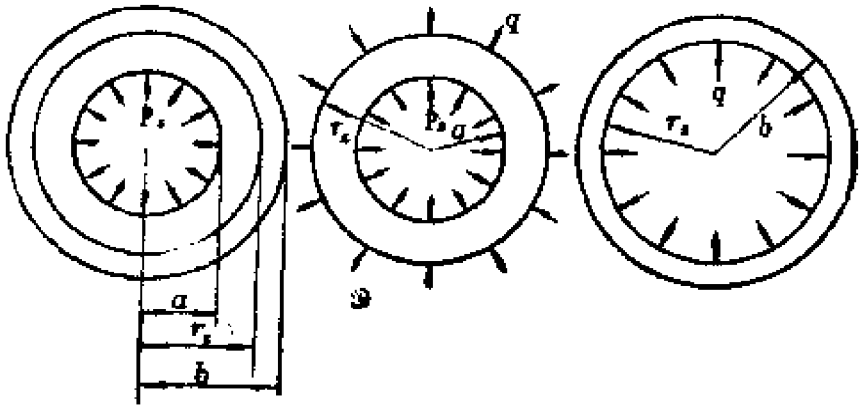


图5－1　弹塑性状态的筒体

上式积分后得

$$\sigma_r = \sigma_s \ln r + C$$

积分常数C由内壁处的边界条件确定，即在$r = a$处，$\sigma_r = -p_s$，由此得

$$C = -p_s - \sigma_s \ln a$$

式中，p_s为厚壁筒处于弹塑性状态时的内压力。将C代入σ_r的表达式后，则有

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \sigma_s \ln\frac{r}{a} - p_s \\ \sigma_\theta &= \sigma_s\left(1 + \ln\frac{r}{a}\right) - p_s\end{aligned}\right\} \tag{5-6}$$

在弹性区，将r_s作为内半径，外半径为b，内压为q，由式(5-1)得

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= -\frac{qr_s^2}{b^2 - r_s^2}\left(\frac{b^2}{r^2} - 1\right) \\ \sigma_\theta &= \frac{qr_s^2}{b^2 - r_s^2}\left(\frac{b^2}{r^2} + 1\right)\end{aligned}\right\} \tag{5-7}$$

式中，q、r_s为未知量，可利用弹塑性交界面$r = r_s$处应力的连续

条件求得。在$r=r_s$处应进入屈服状态，故有

$$\sigma_\theta-\sigma_r=\frac{2qb^2}{b^2-r_s^2}=\sigma_s$$

由此得

$$q=\frac{\sigma_s}{2}(1-\frac{r_s^2}{b^2}) \tag{5-8}$$

在塑性区的$r=r_s$处，$\sigma_r=-q$，因此有

$$q=p_s-\sigma_s\ln\frac{r_s}{a} \tag{5-9}$$

上两式分别计算的q应相等，故有

$$\frac{\sigma_s}{2}(1-\frac{r_s^2}{b^2})=p_s-\sigma_s\ln\frac{r_s}{a}$$

由此得

$$p_s=\sigma_s\ln\frac{r_s}{a}+\frac{\sigma_s}{2}(1-\frac{r_s^2}{b^2}) \tag{5-10}$$

由上式可知，给定p_s后便可确定r_s，或已知r_s后便可确定p_s。

将式（5-8）代入式（5-7）后，得

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=-\frac{\sigma_s}{2}\frac{r_s^2}{b^2}(\frac{b^2}{r^2}-1)\\ \sigma_\theta&=\frac{\sigma_s}{2}-\frac{r_s^2}{b^2}(\frac{b^2}{r^2}+1)\end{aligned}\right\} \tag{5-11}$$

当塑性区扩大到整个厚壁筒时，即$r_s=b$，由式（5-10）得

$$p_s=\sigma_s\ln\frac{b}{a} \tag{5-12}$$

式中，p_s为塑性极限载荷。将式（5-12）代入式（5-6），且p_s用p_s代替后，便得到塑性区中应力的分布规律为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \sigma_s \ln\frac{r}{b}\\ \sigma_\theta &= \sigma_s\left(1+\ln\frac{r}{b}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}13)$$

若采用米泽斯屈服条件，则塑性极限载荷为

$$p_p = 1.155\sigma_s \ln\frac{b}{a}$$

用完全相同的方法，可以求得内半径为a、外半径为b、受均匀内压p作用的厚壁球壳的弹性极限载荷、弹塑性 载荷和塑性极限载荷的表达式。弹性极限载荷为

$$p_e = \frac{2}{3}\sigma_s\left(1-\frac{a^3}{b^3}\right)$$

弹塑性载荷为

$$p_s = 2\sigma_s\left[\ln\frac{r_s}{a} + \frac{1}{3}\left(1-\frac{r_s^3}{b^3}\right)\right]$$

塑性极限载荷为

$$p_p = 2\sigma_s \ln\frac{b}{a}$$

在塑性极限载荷作用下，应力分量的表达式为

$$\sigma_r = 2\sigma_s \ln\frac{r}{b}$$

$$\sigma_\theta = 2\sigma_s \ln\frac{r}{b} + \sigma_s$$

若载荷加至p_s后卸载至零，则由于卸载是按弹性规律进行的，因而在厚壁容器中将产生残余应力。残余应力按下式计算：

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma^e_{ij} \qquad (5\text{-}14)$$

式中，σ_{ij}为载荷加至p_s时壳体中所产生的应力；σ^e_{ij}为由p_s卸至零时，按弹性规律卸除的应力；σ'_{ij}为残余应力。

对于内半径为a、外半径为b、受内压作用的厚壁圆筒，载荷由p_s卸至零时，筒体内卸除的应力为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r' &= -\frac{a^2 p_s}{b^2-a^2}\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right)\\ \sigma_\theta' &= -\frac{a^2 p_s}{b^2-a^2}\left(1+\frac{b^2}{r^2}\right)\end{aligned}\right\} \tag{5-15}$$

加载时筒体内产生的应力应按式（5-6）、(5-11)分别计算，塑性区的残余应力为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r' &= \sigma_r-\sigma_r' = \sigma_s\ln\frac{r}{a}-p_s-\frac{a^2}{b^2-a^2}p_s\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right)\\ \sigma_\theta' &= \sigma_\theta-\sigma_\theta' = \sigma_s\left(1+\ln\frac{r}{a}\right)-p_s-\frac{a^2}{b^2-a^2}p_s\left(1+\frac{b^2}{r^2}\right)\end{aligned}\right\} \tag{5-16}$$

在弹性区的残余应力为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r' &= \left(\frac{\sigma_s}{2}\frac{r_s^2}{b^2}-\frac{p_s a^2}{b^2-a^2}\right)\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right)\\ \sigma_\theta' &= \left(\frac{\sigma_s}{2}\frac{r_s^2}{b^2}-\frac{p_s a^2}{b^2-a^2}\right)\left(1+\frac{b^2}{r^2}\right)\end{aligned}\right\} \tag{5-17}$$

式中的r_s与p_s由式（5-10）确定。

若厚壁筒加载至塑性极限压力后再卸载至零，则可将$r_s=b$、$p_s=\sigma_s\ln\frac{b}{a}$代入式(5-16)，求得残余应力为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r' &= \sigma_s\ln\frac{r}{b}-\frac{a^2\sigma_s}{b^2-a^2}\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right)\ln\frac{b}{a}\\ \sigma_\theta' &= \sigma_s\left(1+\ln\frac{r}{b}\right)-\frac{a^2\sigma_s}{b^2-a^2}\left(1+\frac{b^2}{r^2}\right)\ln\frac{b}{a}\end{aligned}\right\} \tag{5-18}$$

由弹塑性状态卸载所产生的残余应力的数值，不仅与σ_s和r有关，而且和b/a及p_s有关。设$b/a=2$、$r_s=1.5a$，则可由式（5-16）和（5-17）算出残余应力的值。现将计算结果列于表

5-1中，残余应力的分布见图5-2a。

表5-1

$r(\times a)$	1.0	1.2	1.343	1.4	1.5	1.6	1.8	2.0
$\sigma'_\theta(\times\sigma_s)$	-0.667	-0.230	0	0.079	0.202	0.187	0.195	0.146
$\sigma'_r(\times\sigma_s)$	0	-0.073	-0.076	-0.071	-0.057	-0.041	-0.017	0

若内压加至塑性极限载荷再卸载，则残余应力应由式(5-18)

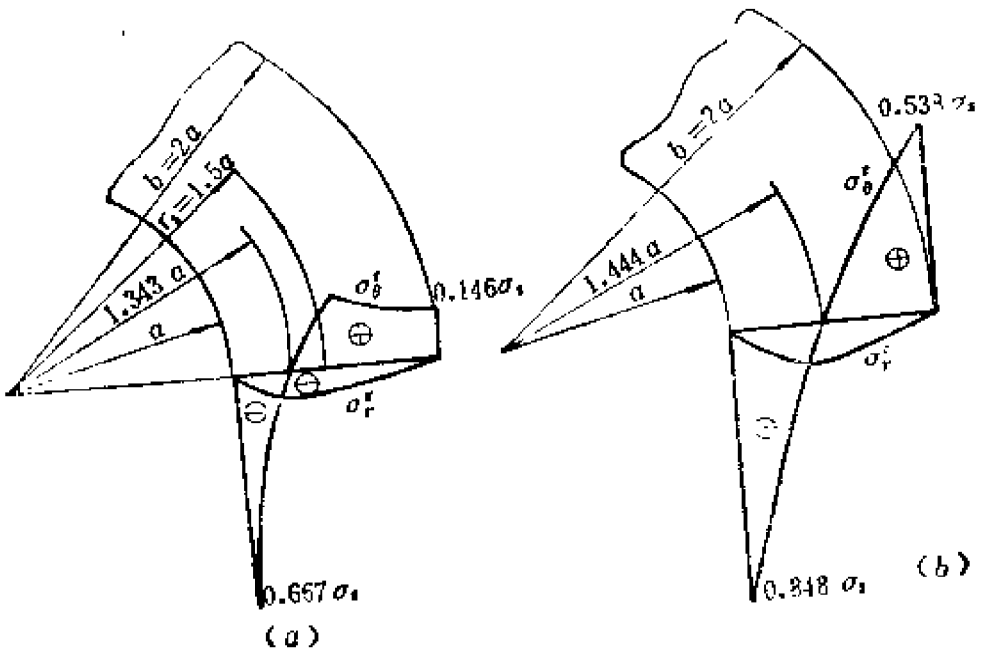


图5－2　残余应力

计算。计算结果如图5-2b所示。由以上分析可见，残余应力在整个厚壁筒内都存在，随着塑性区的扩大，卸载后残余应力的梯度也在加大。

§5-2 弹塑性旋转圆盘和圆轴

旋转圆盘和圆轴是工程中经常遇到的研究对象。这类问题由于利用平衡方程和屈服条件便能确定应力的值，所以是塑性力学中的静定问题。

等厚旋转圆盘绕轴以等角速度ω旋转时，圆盘的径向单位体积力为

$$f_r = \rho\omega^2 r$$

式中，ρ为圆盘材料的密度，r为各点到轴的距离。

当角速度ω较小时，旋转圆盘处于弹性状态，由弹性力学知圆盘内的应力分量为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= C_1 + \frac{C_2}{r^2} - \frac{3+\mu}{8}\rho\omega^2 r^2 \\ \sigma_\theta &= C_1 - \frac{C_2}{r^2} - \frac{1+3\mu}{8}\rho\omega^2 r^2\end{aligned}\right\} \tag{5-19}$$

式中，C_1和C_2为积分常数，由力的边界条件确定。

对于半径为b的实心圆盘，在$r=0$处σ_r和σ_θ为有限值，故式(5-19)中的C_2应为零；在$r=b$处$\sigma_r=0$，由此得应力分量为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{3+\mu}{8}\rho\omega^2(b^2 - r^2) \\ \sigma_\theta &= \frac{3+\mu}{8}\rho\omega^2 b^2 - \frac{1+3\mu}{8}\rho\omega^2 r^2\end{aligned}\right\} \tag{5-20}$$

在圆盘中心，σ_r和σ_θ最大，

$$\sigma_{r\max} = \sigma_{\theta\max} = \frac{3+\mu}{8}\rho\omega^2 b^2$$

对于内半径为a、外半径为b的空心圆盘，由于在$r=a$和$r=b$处$\sigma_r=0$，故可确定式(5-19)中的积分常数C_1和C_2，最后得应

力分量为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{3+\mu}{8}\rho\omega^2\left(b^2+a^2-\frac{a^2b^2}{r^2}-r^2\right)\\ \sigma_\theta &= \frac{3+\mu}{8}\rho\omega^2\left(b^2+a^2+\frac{a^2b^2}{r^2}-\frac{1+3\mu}{3+\mu}r^2\right)\end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}21)$$

在此情况下，$\sigma_\theta > \sigma_r$。在$r=a$处，周向应力达最大值，

$$\sigma_{\theta\max} = \frac{3+\mu}{4}\rho\omega^2\left(b^2+\frac{1-\mu}{3+\mu}a^2\right)$$

当旋转圆盘的角速度ω增大时，盘中的应力σ_θ和σ_r均增大。设圆盘的材料是理想弹塑性的。当σ_θ和σ_r的组合达到某一临界值时，在圆盘中将出现塑性变形，即圆盘进入弹塑性应力状态。在平面应力状态下，$\sigma_z=0$，这时特雷斯卡屈服条件将如图5-3所示。对于实心圆盘，由于在弹性状态时有$\sigma_\theta > \sigma_r > 0$，所以在圆盘进入屈服状态时，应选取特雷斯卡屈服条件的BC边进行分析。旋转圆盘的最大应力在中心处，设中心点开始屈服时的角速度为ω_s，则有

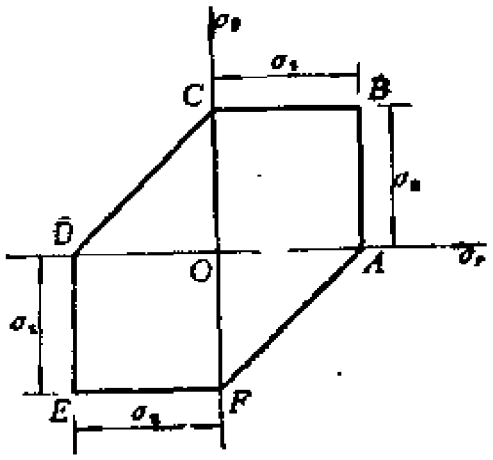


图5－3　特雷斯卡屈服条件

$$\sigma_\theta = \frac{3+\mu}{8}\rho\omega_s b^2 = \sigma_s$$

由此得

$$\omega_s = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{8\sigma_s}{(3+\mu)\rho}} \tag{5-22a}$$

ω_s称为弹性极限转速。当泊松比$\mu = 0.3$时，

$$\omega_s = \frac{1.56}{b}\sqrt{\frac{\sigma_s}{\rho}} \tag{5-22b}$$

当$\mu = 0.5$时，

$$\omega_s = \frac{1.51}{b}\sqrt{\frac{\sigma_s}{\rho}} \tag{5-22c}$$

以上两式的结果仅相差3.3%，故在弹性分析时取$\mu = 0.5$对计算结果影响不大，并可使计算大为简化。将式(5-22a)代入式(5-20)，得在弹性极限转速下的应力分量为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right)\sigma_s \\ \sigma_\theta &= \left(1 - \frac{1+3\mu}{3+\mu}\frac{r^2}{b^2}\right)\sigma_s\end{aligned}\right\} \tag{5-23}$$

若旋转圆盘的转速达到ω_s后继续加速，则由于材料是理想弹塑性的，故在$\sigma_\theta = \sigma_s$后，此点的σ_θ不会继续增加，但圆盘中σ_θ达到σ_s的范围却在不断扩大，即塑性区由圆盘的中心向外扩展。设塑性区与弹性区的分界半径为r_s，此时的转速为ω_s。由于旋转圆盘中的应力仍是$\sigma_\theta > \sigma_r > 0$，故仍取$\sigma_\theta = \sigma_s$作为屈服条件。旋转圆盘的平衡方程为

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho\omega_s^2 r = 0 \tag{5-24}$$

将屈服条件$\sigma_\theta = \sigma_s$代入平衡方程后，则有

$$r\frac{d\sigma_r}{dr}+\sigma_r=\sigma_\theta-\rho\omega_s^2r^2$$

或写成

$$\frac{d}{dr}(r\sigma_r)=\sigma_\theta-\rho\omega_s^2r^2$$

上式积分后得

$$r\sigma_r=\sigma_\theta r-\frac{1}{3}\rho\omega_s^2r^3+C_3$$

即

$$\sigma_r=\sigma_\theta-\frac{1}{3}\rho\omega_s^2r^2+\frac{C_3}{r}$$

在实心圆盘中心，σ_r为有限值，故$C_3=0$，因此在塑性区应力分量的分布规律为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=\sigma_s-\frac{1}{3}\rho\omega_s^2r^2\\ \sigma_\theta&=\sigma_s\end{aligned}\right\}\qquad(5\text{-}25)$$

在弹性区，应力分量由式(5-19)确定，式中的ω以ω_s代替，C_1、C_2和ω_s由力的边界条件及$r=r_s$处应力的连续条件确定。可求得

$$C_1=\sigma_s+\frac{1+3\mu}{12}\rho\omega_s^2r_s^2,\qquad C_2=-\frac{1+3\mu}{24}\rho\omega_s^2r_s^4$$

$$\omega_s^2=\frac{24\sigma_s b^2}{\rho\left[(1+3\mu)r_s^4-2(1+3\mu)b^2r_s^2+3(3+\mu)b^4\right]}\qquad(5\text{-}26)$$

将C_1、C_2代入式（5-19），得弹性区内的应力分量为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=\sigma_s-\rho\omega_s^2r^2\left[\frac{3+\mu}{8}+\frac{1+3\mu}{24}\left(\frac{r_s}{r}\right)^4-\frac{1+3\mu}{12}\left(\frac{r_s}{r}\right)^2\right]\\ \sigma_\theta&=\sigma_s-\rho\omega_s^2r^2\left[\frac{1+3\mu}{8}-\frac{1+3\mu}{24}\left(\frac{r_s}{r}\right)^4-\frac{1+3\mu}{12}\left(\frac{r_s}{r}\right)^2\right]\end{aligned}\right\}$$

(5-27)

随着旋转圆盘的转速继续增加，塑性区将不断扩大。当$r_s=b$时，塑性区扩大至整个圆盘，此时为塑性极限状态。塑性极限转速可由式（5-26）求得，用b取代式中的r_s，得

$$\omega_p^2=\frac{3\sigma_s}{\rho b^2}$$

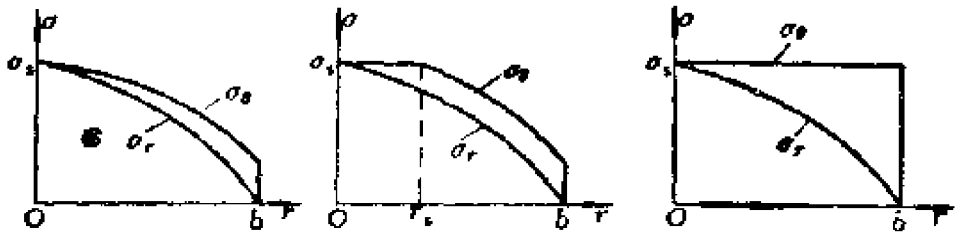
即

$$\omega_p=\frac{1.73}{b}\sqrt{\frac{\sigma_s}{\rho}} \tag{5-28}$$

将上式与式（5-22c）相比，可知，$\frac{\omega_p}{\omega_s}=1.15$，即塑性极限转速比弹性极限转速大15%。若将式（5-25）中的ω_s用ω_p代替，则可得旋转圆盘在塑性极限状态时的应力分布为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=\sigma_s\left(1-\frac{r^2}{b^2}\right)\\ \sigma_\theta&=\sigma_s\end{aligned}\right\} \tag{5-29}$$

旋转圆盘在弹性状态、弹塑性状态和塑性极限状态时的应力分布规律，分别如图5-4a、b、c所示。



（a）弹性状态　（b）弹塑性状态　（c）塑性极限状态

图5－4　实心旋转圆盘的应力分布

旋转圆盘在塑性极限状态下的应力分量以及塑性极限转速，也可直接用平衡方程和屈服条件联立求解，可得到与式（5-28）

和式（5-29）完全相同的结果。

对于内半径为a、外半径为b的空心圆盘，由于在弹性状态时有$\sigma_\theta > \sigma_r > 0$，故仍可采用特雷斯卡屈服条件中的$\sigma_\theta = \sigma_s$。将此条件代入式（5-21）的第二式，并令$r=a$，则得弹性极限转速为

$$\omega_e = 2\sqrt{\frac{\sigma_s}{\rho}\cdot\frac{1}{(1-\mu)a^2+(3+\mu)b^2}} \tag{5-30}$$

当取$\mu=0.5$时，得

$$\omega_e = 2.83\sqrt{\frac{\sigma_s}{\rho(7b^2+a^2)}}$$

将式（5-30）代入式（5-21）后，得

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{\sigma_s}{2}\,\frac{1+\dfrac{a^2}{b^2}-\dfrac{a^2}{r^2}-\dfrac{r^2}{b^2}}{1+\dfrac{1-\mu}{3+\mu}\,\dfrac{a^2}{b^2}}\\ \sigma_\theta &= \frac{\sigma_s}{2}\,\frac{1+\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{a^2}{r^2}-\dfrac{1+3\mu}{3+\mu}\,\dfrac{r^2}{b^2}}{1+\dfrac{1-\mu}{3+\mu}\,\dfrac{a^2}{b^2}}\end{aligned}\right\} \tag{5-31}$$

在弹塑性状态时，空心旋转圆盘的转速ω_s和应力分布规律可由平衡方程和屈服条件联立求解。在塑性区，利用边界条件：$r=a$，$\sigma_r=0$，求得应力分量为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \sigma_s\left(1-\frac{a}{r}\right)-\frac{1}{3}\rho\omega_s^2 r^2\left(1-\frac{a^3}{r^3}\right)\\ \sigma_\theta &= \sigma_s\end{aligned}\right\} \tag{5-32}$$

在弹性区，利用边界条件：$r=b$，$\sigma_r=0$；$r=r_s$处应力连续，求得积分常数为

$$C_1 = \sigma_s\left(1-\frac{a}{2r_s}\right)-\rho\omega_s^2 r_s^2\left[\frac{1}{6}\left(1-\frac{a^3}{r_s^3}\right)-\frac{1+\mu}{4}\right]$$

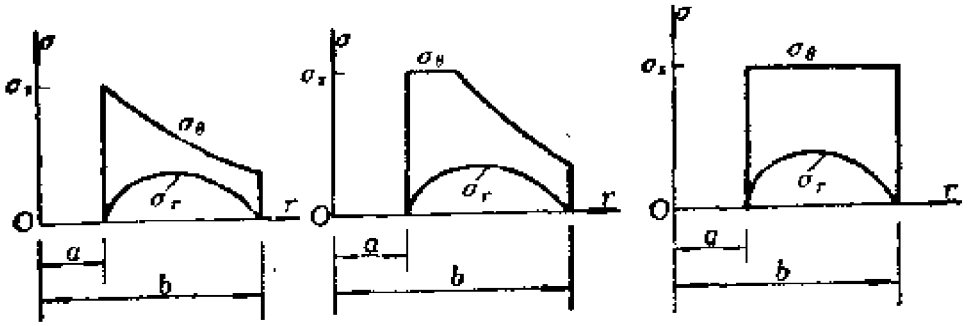
$$C_2 = -\frac{r_s a}{2}\sigma_s + \rho\omega_s^2 r_s^4\left[1 - \frac{1-\mu}{8} - \frac{1}{6}\left(1 - \frac{a^3}{r_s^3}\right)\right]$$

$$\omega_s^2 = \frac{24\sigma_s b^2}{\rho}\left(1 - \frac{a}{2r_s} - \frac{r_s a}{2b^2}\right)\left[(1+3\mu)r_s^4 - 2(1+3\mu)r_s^2 b^2 + 3(3+\mu)b^4 - \frac{4a^3 b^2}{r_s}\left(1 + \frac{r_s^2}{b^2}\right)\right]^{-1} \tag{5-33}$$

将常数C_1和C_2代入式（5-19），则可得到弹性区中应力分量的表达式。当$r_s = b$时，空心旋转圆盘达到塑性极限状态，其塑性极限转速为

$$\omega_p = \sqrt{\frac{3\sigma_s}{\rho(a^2 + ab + b^2)}}$$

空心旋转圆盘在各种转速时的应力分布如图5-5所示。



（a）弹性极限转速（b）弹塑性转速（c）塑性极限转速

图5-5 空心旋转圆盘的应力分布

下面进行旋转圆轴的弹塑性分析。旋转圆轴是平面应变轴对称问题，应力分量中除σ_θ和σ_r外，还有轴向应力σ_z。引用几何关系$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}$、$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$，并采用体积不可压缩条件，则有

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} + \varepsilon_z = 0$$

上式的解为

$$u = -\frac{\varepsilon_z}{2}r + \frac{C}{r}$$

由于圆轴中心处的位移不可能无穷大，因此积分常数 C 必须为零，于是得

$$u = -\frac{\varepsilon_z}{2}r, \quad \varepsilon_r = \varepsilon_\theta = -\frac{\varepsilon_z}{2}$$

由以上分析可见，旋转圆轴内不论材料的力学性质如何，各点均处于同一应变状态。若取泊松比 $\mu = \frac{1}{2}$，由上式及虎克定律可得

$$\left.\begin{aligned} 2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_z &= -3G\varepsilon_z \\ 2\sigma_\theta - \sigma_r - \sigma_r &= -3G\varepsilon_z \\ 2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_\theta &= 6G\varepsilon_z \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}34)$$

由式（5-34）的前两式可得 $\sigma_\theta = \sigma_r$，因此平衡方程为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_r}{\mathrm{d}r} + \rho\omega^2 r = 0$$

解得

$$\sigma_r = C_1 - \frac{\rho\omega^2 r^2}{2}$$

在圆柱体表面，径向应力等于零，即在 $r = b$ 处 $\sigma_r = 0$，由此得

$$C_1 = \frac{\rho\omega^2 b^2}{2}$$

将 C_1 的值代入 σ_r 的表达式后，得

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{\rho\omega^2(b^2 - r^2)}{2} \qquad (5\text{-}35)$$

由式（5-34）的第三式得

$$\sigma_z = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} + 3G\varepsilon_z = \frac{\rho\omega^2}{2}(b^2 - r^2) + 3G\varepsilon_z$$

因为轴向载荷为零，故有

$$\begin{aligned}&\int_0^b \sigma_z \cdot 2\pi r \mathrm{d}r\\&=\int_0^b\left[-\frac{\rho\omega^2}{2}(b^2-r^2)+3Ge_z\right]\cdot 2\pi r\mathrm{d}r\\&=\frac{\pi\rho\omega^2 b^4}{4}+3Ge_z\pi b^2\\&=0\end{aligned}$$

由此得

$$e_z=-\frac{\rho\omega^2 b^2}{12G}$$

于是

$$\sigma_z=\frac{\rho\omega^2}{2}\left(\frac{b^2}{2}-r^2\right) \qquad (5-36)$$

当圆轴开始屈服时，也应有$\sigma_\theta=\sigma_r$，且应满足屈服条件：

$$\sigma_r-\sigma_z=\sigma_s$$

将式（5-35）及式（5-36）代入屈服条件后，得

$$\frac{\rho\omega^2 b^2}{4}=\sigma_s$$

由此可见，当ω等于如下数值时，圆轴内各点将同时开始屈服，即

$$\omega=\omega_s=\frac{2}{b}\sqrt{\frac{\sigma_s}{\rho}}$$

若用ω_s代替式（5-35）及式（5-36）中的ω，则可得塑性极限状态时的应力分布为

$$\sigma_r=\sigma_\theta=2\sigma_s\left(1-\frac{r^2}{b^2}\right)$$

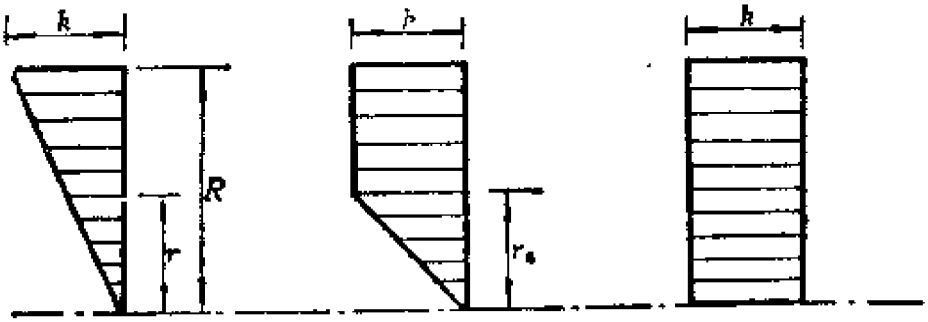
$$\sigma_z=2\sigma_s\left(\frac{1}{2}-\frac{r^2}{b^2}\right)$$

§5-3 圆截面轴的弹塑性扭转

圆截面轴的扭转问题是工程中经常遇到的问题之一。由弹性力学可知，处于弹性状态的圆截面轴，横截面上的剪应力与到圆心的距离成正比，即

$$\tau=\sqrt{\tau_{zx}^2+\tau_{zy}^2}=\frac{M}{I_p}\sqrt{x^2+y^2}=\frac{Mr}{I_p} \tag{5-37}$$

式中，$I_p=\frac{\pi R^4}{2}$，R为轴的半径。最大剪应力产生在圆截面的边缘上。设轴由理想弹塑性材料制成。当最大剪应力达到剪切屈服极限时（图5-6a），轴的最外层将出现塑性变形，此时截面上



（a）弹性状态　（b）弹塑性状态　（c）塑性极限状态

图5-6　圆轴截面上的应力分布

的剪应力可表示为

$$\tau=k\cdot\frac{r}{R}$$

在$r=R$处，$\tau=k$，将此条件代入τ的表达式（5-37）后，得

$$M_s=\frac{\pi}{2}R^3k \tag{5-38}$$

M_e的表达式也可通过截面上的剪力对圆心取矩得到，即

$$M = 2\pi \int_0^R \tau r^2 \mathrm{d}r \tag{5-39}$$

将 $\tau = k\frac{r}{R}$ 代入式（5-39），积分后便可得到式（5-38）。式（5-39）对圆轴处于弹性状态或塑性状态均适用。

当作用于轴上的扭矩$M > M_e$时，塑性区将由外表面向内部逐渐扩大。若弹塑性区的分界半径用r_s表示(图5-6*b*)，则截面上的剪应力可表示为

$$\tau = \begin{cases} \dfrac{r}{r_s}k & (0 \leqslant r \leqslant r_s) \\ k & (r_s \leqslant r \leqslant R) \end{cases} \tag{5-40}$$

若用M_s表示圆轴处于弹塑性状态时的扭矩，将式（5-40）代入式（5-39）并积分后，便可得到

$$M_s = \frac{2}{3}\pi R^3 k\left[1 - \frac{1}{4}\left(\frac{r_s}{R}\right)^3\right] \tag{5-41}$$

当整个截面上的剪应力都达到k值时（图5-6*c*），取$r_s = 0$，由式（5-41）可得

$$M_p = \frac{2}{3}\pi R^3 k \tag{5-42}$$

M_p称为轴的塑性极限扭矩。由式（5-38）和（5-42）可得

$$\frac{M_p}{M_e} = 1.33$$

上式表明，塑性极限扭矩比弹性极限扭矩大33%。

在弹性状态时，圆轴的扭转角为

$$\theta_e = \frac{M}{I_p G} = \frac{2M}{GR^4\pi} \tag{5-43}$$

在弹塑性状态时，仍采用平截面假设，则由图5-7可见，在$r = r_s$处

有

$$\gamma_s = r_s\theta_s \tag{5-44}$$

由于在$r = r_s$处仍满足弹性的物理关系，故有

$$\gamma_s = \frac{k}{G} \tag{5-45}$$

由式（5-44）和（5-45）可得

$$\theta_s = \frac{k}{Gr_s} \tag{5-46}$$

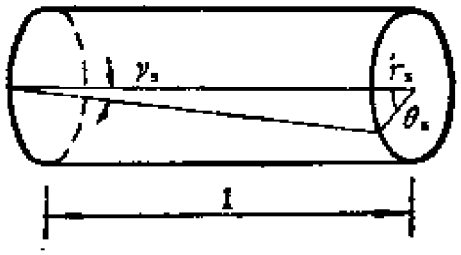


图5－7　圆轴的弹塑性扭转

当给定弹塑性扭矩M_s后，由式（5-41）计算r_s，再将r_s代入式（5-46），便可得到θ_s。由式(5-46)可见，当$r_s \to 0$时，$\theta_s \to \infty$，即当受扭轴达到全塑性状态时，将产生无约束的塑性变形，此时轴将失去承载能力。

利用相同的方法，可以求解内半径为a、外半径为b的空心圆轴的扭转问题（见图5-8）。空心圆轴的极惯性矩为

$$I_p = \frac{\pi}{2}(b^4 - a^4)$$

当轴处于弹性状态时，横截面上的剪应力为

$$\tau = \frac{2Mr}{\pi(a^4 - b^4)}$$

单位长度上的扭转角为

$$\theta = \frac{2M}{G\pi(b^4 - a^4)} \tag{5-47}$$

设轴的材料是理想弹塑性的。当轴处于弹塑性状态时（图5-8），其应力为

$$\tau = \begin{cases} k\dfrac{r}{r_s} & (a \leqslant r \leqslant r_s) \\ k & (r_s \leqslant r \leqslant b) \end{cases} \tag{5-48}$$

将式（5-48）代入式（5-39）后得

$$M_s = \frac{2}{3}\pi b^3 k\left[1 - \frac{1}{4}\left(\frac{r_s}{b}\right)^3 - \frac{3}{4}\frac{a}{r_s}\left(\frac{a}{b}\right)^3\right] \tag{5-49}$$

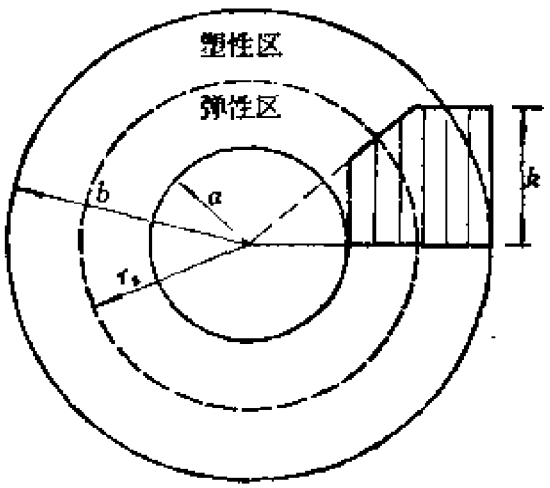


图5-8 空心圆轴的应力分布

上式给出了M_s和r_s之间的关系，给定了r_s后便可确定M_s，同样给定了M_s后则可确定r_s。当$r_s = b$时，轴的外表面刚进入塑性状态，此时的扭矩为弹性极限扭矩，即

$$M_e = \frac{\pi}{2}b^3 k\left[1 - \left(\frac{a}{b}\right)^4\right] = \frac{\pi}{2}b^3 k(1 - k^4) \tag{5-50}$$

式中，$\kappa=\frac{a}{b}$。当轴全部进入塑性状态时，在式（5-49）中，取$r_s=a$，得塑性极限扭矩为

$$M_p=\frac{2}{3}\pi b^3k\left[1-\left(\frac{a}{b}\right)^3\right]=\frac{2}{3}\pi b^3k(1-\kappa^3) \tag{5-51}$$

由以上两式可得

$$\frac{M_p}{M_e}=\frac{4(1-\kappa^3)}{3(1-\kappa^4)}$$

对于实心圆轴，$a=0$，即$\kappa=0$，由此可得$\frac{M_p}{M_e}=1.33$，与前面所得的结果一致。

若空心圆轴的壁厚（$b-a$）较大，则轴在扭转后的变形仍由式（5-43）和（5-46）确定，即

$$\theta=\begin{cases}\dfrac{M}{GI_p} & (0\leqslant M\leqslant M_e)\\[2ex] \dfrac{k}{Gr_s} & (a\leqslant r_s\leqslant b)\end{cases}$$

前面研究了理想弹塑性材料圆轴的扭转问题，而实际结构所采用的材料总具有一定的强化效应，因此对材料具有强化效应的圆轴进行研究具有重要的意义。研究时仍采用平截面假设，于是几何关系为

$$\gamma=r\theta \tag{5-52}$$

设圆轴的材料服从幂强化规律，即

$$\sigma=Ae^n$$

式中，A和n都是材料常数，且$0\leqslant n\leqslant 1$。

在复杂应力状态下，若满足简单加载条件，则可取

$$\sigma_i=Ae_i^n \tag{5-53}$$

当应力分量和应变分量用柱坐标表示时，应力强度σ_i和应变强度e_i可分别表示为

$$\sigma_i=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\sigma_r-\sigma_\theta)^2+(\sigma_\theta-\sigma_z)^2+\right.$$

$$\left.+(\sigma_z-\sigma_r)^2+6(\tau_{r\theta}^2+\tau_{\theta z}^2+\tau_{zr}^2)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$e_i=\frac{\sqrt{2}}{3}\left[(e_r-e_\theta)^2+(e_\theta-e_z)^2+(e_z-e_r)^2\right.$$

$$\left.+\frac{3}{2}(\gamma_{r\theta}^2+\gamma_{\theta z}^2+\gamma_{zr}^2)\right]^{\frac{1}{2}}$$

受扭圆轴的应力分量和应变分量分别为

$$\sigma_r=\sigma_\theta=\sigma_z=\tau_{r\theta}=\tau_{zr}=0,\quad \tau_{z\theta}=\tau$$

$$e_r=e_\theta=e_z=\gamma_{r\theta}=\gamma_{zr}=0,\quad \gamma_{z\theta}=\gamma$$

将以上各值分别代入σ_i和e_i的表达式，得

$$\sigma_i=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{6\tau_{z\theta}^2}=\sqrt{3}\,\tau$$

$$e_i=\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\frac{3}{2}\gamma_{z\theta}^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\gamma$$

由以上两式可得

$$\tau=\frac{\sigma_i}{\sqrt{3}},\quad \gamma=\sqrt{3}\,e_i \tag{5-54}$$

利用几何关系（5-52）式，有

$$r=\frac{\sqrt{3}}{\theta}e_i$$

由上式得

$$\mathrm{d}r=\frac{\sqrt{3}}{\theta}\mathrm{d}e_i$$

扭矩M与剪应力τ之间的关系由式（5-39）确定，即

$$M=2\pi\int_0^R\tau r^2\mathrm{d}r$$

将τ、r、$\mathrm{d}A$的表达式代入上式，并考虑到在$r=0$处$e_i=0$，在$r=R$处$e_i=\frac{R\theta}{\sqrt{3}}$，可得

$$M=2\pi\int_0^{\frac{R\theta}{\sqrt{3}}}\frac{\sigma_i}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{\theta^2}e_i^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{\theta}\mathrm{d}e_i$$

$$=\frac{6\pi}{\theta^3}\int_0^{\frac{R\theta}{\sqrt{3}}}\sigma_i e_i^2\mathrm{d}e_i$$

将式（5-53）代入上式，得

$$M=\frac{6\pi}{\theta^3}\int_0^{\frac{R\theta}{\sqrt{3}}}Ae_i^n e_i^2\mathrm{d}e_i$$

$$=\frac{6A\pi}{\theta^3}\cdot\frac{e_i^{n+3}}{n+3}\Bigg|_0^{\frac{R\theta}{\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{6A\pi}{(n+3)\theta^3}\cdot\frac{R^{n+3}\theta^{n+3}}{(\sqrt{3})^{n+3}}$$

$$=\frac{6A\pi R^{n+3}}{(n+3)3^{\frac{n+3}{2}}}\theta^n \tag{5-55}$$

由上式可得

$$\theta=\frac{(n+3)^{\frac{1}{n}}3^{\frac{n+3}{2n}}M^{\frac{1}{n}}}{(6A\pi R^{n+3})^{\frac{1}{n}}} \tag{5-56}$$

对于幂强化材料，在加载过程中，θ和M有一一对应的关系，给定了扭矩M便可确定扭转角θ，然后利用关系式$e_i=\frac{\theta r}{\sqrt{3}}$可求得应变强度$e_i$，再将$e_i$代入式（5-54）可求得剪应变$\gamma$；若将$e_i$代入式（5-53）则可求得应力强度$\sigma_i$，利用式（5-54）便可求得剪应力$\tau$。

当$n=1$时，$\sigma=Ae$，即材料服从虎克定律，设$A=E$，由式

(5-56) 可知

$$\theta = \frac{6M}{A\pi R^4} = \frac{3M}{EI_p} \tag{5-57}$$

假设材料的体积不可压缩，则 $\mu = \frac{1}{2}$，$E = 3G$，因此式(5-57)又可写成

$$\theta = \frac{M}{GI_p}$$

上式与式（5-43）的弹性解一致。

当$n = 0$时，为刚塑性材料。将$n = 0$代入式（5-56），θ角将趋于无穷大，即受扭轴处于塑性极限状态。将$n = 0$、$\tau = k$、$A = \sqrt{3}k$代入式（5-55），得塑性极限扭矩为

$$M_p = \frac{2}{3}\pi kR^3$$

上式与式（5-42）一致。

当扭矩$M \leqslant M_e$时，圆轴尚处于弹性状态，卸载后变形将完全恢复到初始状态，轴中没有残余应力和残余应变。当扭矩使圆轴处于弹塑性状态，即$M_e \leqslant M \leqslant M_p$时，卸载后轴中将有残余应力和残余扭转角。残余应力可由下式计算：

$$\tau^r = \tau - \tau^e \tag{5-58}$$

式中，τ为加载至弹塑性阶段时的剪应力，τ^e为由M_e卸载至零时按弹性规律计算的剪应力。

设受扭的实心圆轴处于弹塑性状态，为了计算卸除的剪应力τ^e，将M_e作为外载荷的改变量，由虎克定律有

$$\tau^e = \frac{M_e}{I_p}r = \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{R}k\left[1 - \frac{1}{4}\left(\frac{r_e}{R}\right)^3\right] \tag{5-59}$$

在弹性区（$0 \leqslant r \leqslant r_e$），残余应力为

$$\tau^{p}=k\frac{r}{r_s}\left\{1-\frac{4}{3}\frac{r_s}{R}\left[1-\frac{1}{4}\left(\frac{r_s}{R}\right)^3\right]\right\} \qquad (5\text{-}60)$$

在塑性区（$r_s\leqslant r\leqslant R$），残余应力为

$$\tau^{r}=k\left\{1-\frac{4}{3}\frac{r}{R}\left[1-\frac{1}{4}\left(\frac{r_s}{R}\right)^3\right]\right\} \qquad (5\text{-}61)$$

残余应力的分布如图5-9a所示。若加载至塑性极限弯矩时卸载，则将$r_s=0$代入式（5-61）可得

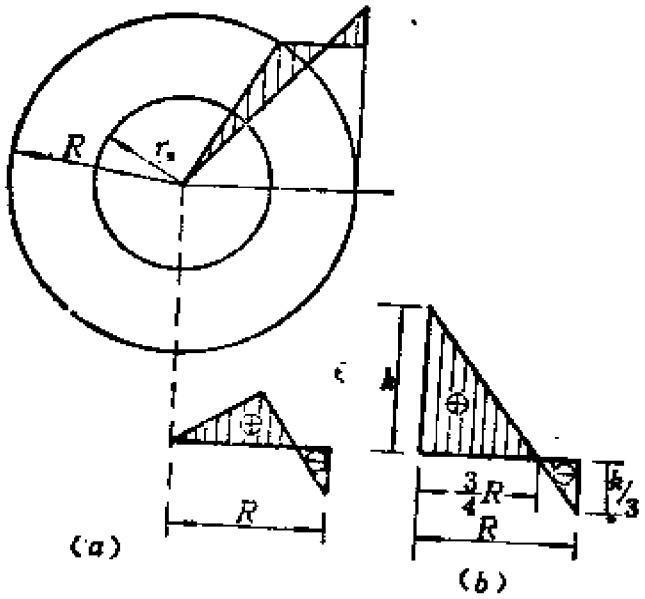


图5-9 实心圆轴的残余应力分布

$$\tau^{r}=k\left(1-\frac{4}{3}\frac{r}{R}\right)$$

残余应力的分布规律如图5-9b所示。

由以上计算可知，随着载荷的增大，卸载后的残余应力逐渐增加。在圆轴的中心处，弹塑性状态时残余应力为零，而塑性极限状态时残余应力为k；在轴的最外层，残余应力由零逐渐变为$-k/3$。

残余扭转角的计算式为

$$\theta^r = \theta_s - \theta^e \tag{5-62}$$

式中，θ^e为由M_s卸载至零时按虎克定律计算的扭转角，即

$$\theta^e = \frac{M_s}{GI} = \frac{4k}{3GR}\left[1 - \frac{1}{4}\left(\frac{r_s}{R}\right)^3\right] \tag{5-63}$$

在弹塑性阶段，θ_s的值可由式（5-46）计算，即

$$\theta_s = \frac{k}{r_s G}$$

将上式代入式（5-63）后，有

$$\theta^e = \frac{4}{3}\theta_s \frac{r_s}{R}\left[1 - \frac{1}{4}\left(\frac{r_s}{R}\right)^3\right]$$

由此得

$$\theta^r = \theta_s\left\{1 - \frac{4}{3}\frac{r_s}{R}\left[1 - \frac{1}{4}\left(\frac{r_s}{R}\right)^3\right]\right\} \tag{5-64}$$

若加载至M_s后卸载，则可由式(5-41)求得r_s，然后由式（5-64）求得残余扭转角θ^r。

利用上述分析方法，同样可求得内半径为a、外半径为b的空心圆轴的残余应力和残余扭转角。若扭矩加至M_s后卸载至零，则空心圆轴内的残余应力及残余扭转角为

$$\tau^r = \begin{cases} k\dfrac{r}{r_s}\left\{1 - \dfrac{4r_s}{3b(1-\kappa^4)}\left[1 - \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{r_s}{b}\right)^3 - \dfrac{3}{4}\kappa^4\dfrac{b}{r_s}\right]\right\} & (a \leqslant r \leqslant r_s) \\ k\left\{1 - \dfrac{4r}{3b(1-\kappa^4)}\left[1 - \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{r_s}{b}\right)^3 - \dfrac{3}{4}\kappa^4\dfrac{b}{r_s}\right]\right\} & (r_s \leqslant r \leqslant b) \end{cases} \tag{5-65}$$

$$\theta^r = \theta_s\left\{1 - \frac{4}{3}\frac{r_s}{b}\frac{1}{1-\kappa^4}\left[1 - \frac{1}{4}\left(\frac{r_s}{b}\right)^3 - \frac{3}{4}\frac{b}{r_s}\kappa^4\right]\right\} \tag{5-66}$$

式中，$\kappa=\frac{a}{b}$。残余应力的分布如图5-10a所示。当$a\to 0$，即$\kappa=0$时，由上式可以得到与式（5-60）、(5-61)和(5-64)完全相同的结果。

若加载至M_p后卸载，则$r_s=a$，空心圆轴的残余应力和残余扭转角分别为

$$\left.\begin{aligned}\tau^r&=k\left[1-\frac{4}{3}\frac{r}{b}\frac{1-\kappa^3}{1-\kappa^4}\right]\\ \theta^r&=\theta_s\left[1-\frac{4}{3}\frac{\kappa(1-\kappa^3)}{1-\kappa^4}\right]\end{aligned}\right\}\qquad(5\text{-}67)$$

残余应力的分布如图5-10b所示。

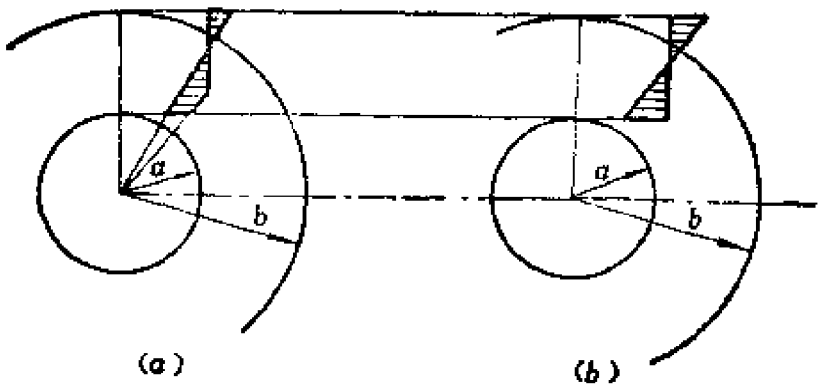


图5－10　空心圆轴的残余应力分布

§5-4　用沙堆比拟法求轴的塑性极限扭矩

对于理想弹塑性材料制成的任意截面的轴，当截面完全进入塑性状态后，其应力分量应满足平衡方程和屈服条件，即

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}=0\\ &\tau=\sqrt{\tau_{zx}^2+\tau_{zy}^2}=k\end{aligned}\right\}\qquad(5\text{-}68)$$

若将剪应力分量用应力函数Φ'表示，则有

$$\tau_{zx}=-\frac{\partial\Phi'}{\partial y},\quad \tau_{zy}=-\frac{\partial\Phi'}{\partial x}$$

上式显然满足平衡方程，若将其代入屈服条件，则有

$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)^2=k^2$$

或表示为

$$|\mathrm{grad}\,\Phi'|=k \tag{5-69a}$$

即

$$\frac{\partial\Phi'}{\partial n}=k \tag{5-69b}$$

上式表明，当受扭轴进入塑性极限状态后，塑性应力曲面$z=\Phi'(x,y)$上任意一点的梯度都等于常数k，即应力曲面是斜率为k的等倾面。受扭轴的边界条件为

$$(\Phi')_s=0 \tag{5-70}$$

$$2\int\int\Phi'\mathrm{d}x\mathrm{d}y=M' \tag{5-71}$$

式（5-69）为受扭轴达到塑性极限状态时，应力函数Φ'应满足的基本方程。若按轴的截面形状制成一平板，在此平板上堆放沙子，并使其形成等斜度的表面，则沙堆表面的方程为

$$|\mathrm{grad}\,\omega|=\mathrm{tg}\alpha \tag{5-72}$$

式中，α为沙堆表面与水平面的夹角，它等于沙子的内摩擦角。若令沙堆表面与平板交界处的高度为零，则有

$$\omega_s=0 \tag{5-73}$$

沙堆的体积为

$$V=\int\int\omega\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5-74}$$

将式（5-69）、(5-70)、(5-71）与式(5-72）、（5-73）、

(5-74) 相比较，可知若用w比拟Φ^*，则有

$$\mathrm{tg}\alpha = k \tag{5-75}$$

$$M_p = 2V = 2\int\int w\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由于求解塑性极限扭矩问题的方程与沙堆的基本方程一致，而且边界条件也相似，所以在满足式（5-75）的条件下，可以用沙堆比拟方法求解塑性极限扭矩的问题。这一方法首先是由纳戴（A.L.Nadai）提出的，所以有时称这一方法为纳戴沙堆比拟法。利用沙堆比拟法，可以简便地通过计算底面与受扭轴横截面相同的沙堆的体积，求出该轴的塑性极限扭矩。下面举几个简单的例子来说明这一方法的应用。

例1：已知受扭圆轴的半径为R，试求此轴的塑性极限扭矩。

解：为求此轴的塑性极限扭矩，在半径为R的平板上建成一个沙堆，如图5-11所示。由图中可得

$$h = R\mathrm{tg}\alpha$$

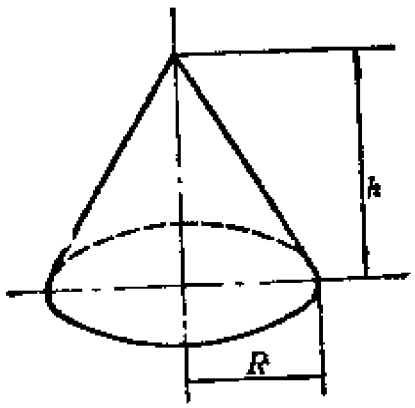


图5-11 受扭圆轴的沙堆比拟

将比拟条件(5-75)式代入上式，得

$$h = Rk$$

沙堆的体积为

$$V=\frac{1}{3}Ah$$

$$=\frac{1}{3}\pi R^3 k$$

因此，圆轴的塑性极限扭矩为

$$M_s=2V=\frac{2}{3}\pi R^3 k$$

例2：已知矩形截面受扭轴的边长为a和b，试用沙堆比拟法求出塑性极限扭矩。

解：沙堆的形状如图5-12所示。由图中可得

$$h=\frac{a}{2}\mathrm{tg}\alpha$$

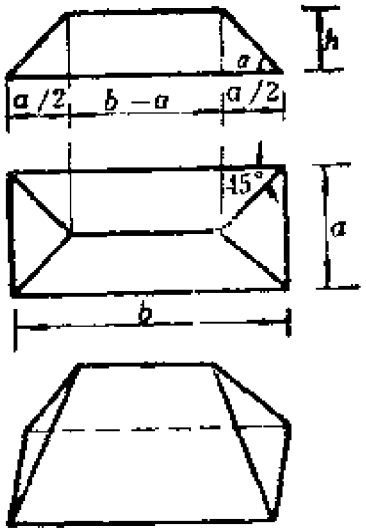


图5-12　受扭矩形截面轴的沙堆比拟

将比拟条件$\mathrm{tg}\alpha=k$代入上式后，得

$$h=\frac{a}{2}k$$

沙堆的体积为

$$V=\frac{1}{2}(b-a)ah+\frac{1}{3}a^2h$$

$$=\frac{1}{4}(b-a)a^2k+\frac{1}{6}a^3k$$

于是矩形截面轴的塑性极限扭矩为

$$M_p = 2V = \frac{1}{6}a^2 k(3b-a)$$

当$a=b$时，即对于正方形截面受扭轴，塑性极限扭矩为

$$M_p = \frac{1}{3}a^3 k$$

例3：已知正六边形截面受扭轴的边长为a，试求其塑性极限扭矩。

解：等倾面的沙堆如图5-13所示。由图中的几何关系可得

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{2h}{\sqrt{3}a}$$

即

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}ak$$

沙堆的体积为

$$V = \frac{1}{3}Ah = \frac{3}{4}a^3 k$$

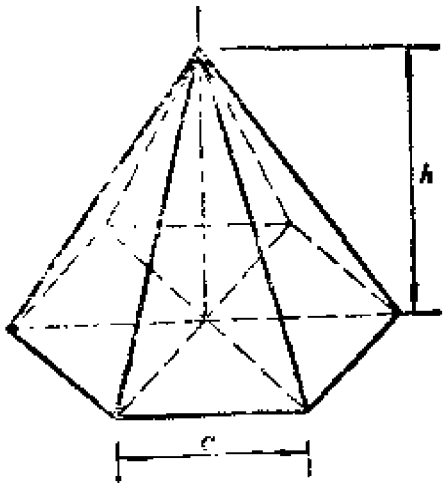


图5-13　正六边形截面受扭轴的沙堆比拟

于是塑性极限扭矩为

$$M_p = 2V = \frac{3}{2}a^3 k$$

对截面形状比较复杂的受扭轴，沙堆比拟时可采用称沙堆重量的方法。设底面为所求轴截面形状的沙堆的重量为W，底面半径为R的圆截面沙堆的重量为W_0，半径为R的圆轴的塑性极限扭矩为M_p^0，则所求轴的塑性极限扭矩为

$$M_p = M_p^0 \frac{W}{W_0}$$

当受扭轴的截面中间有孔时，例如空心圆轴（图5-14），应力函数在外边界上应满足式（5-70），在内边界上应有

$$(\Phi^0)_i = \text{const}$$

于是，沙堆在相应于内边界处的高度为$(h-h')$，以满足$\omega_i=$const的条件。沙堆的体积为

$$V = \frac{\pi}{3}b^2h - \frac{\pi}{3}a^2h'$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{h}{b} = \frac{h'}{a}$$

根据比拟条件，有

$$h = b\,\text{tg}\alpha = bk,\quad h' = a\,\text{tg}\alpha = ak$$

于是空心圆轴的塑性极限扭矩为

$$M_p = 2V = \frac{2}{3}\pi k(b^3 - a^3)$$

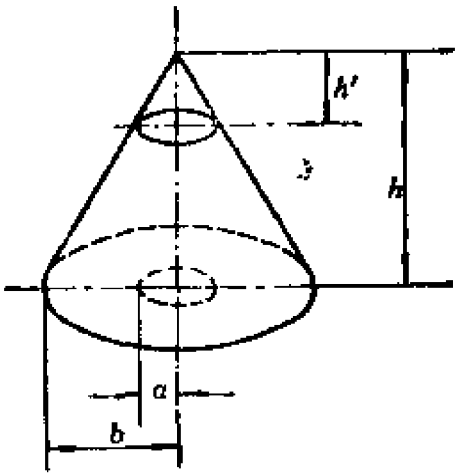


图5-14 受扭空心圆轴的沙堆比拟

习　题

5-1　已知厚壁球壳的内半径为a、外半径为b。若$b\to a$，求$\frac{p_p}{p_s}=?$ 若$b=2a$，求$\frac{p_p}{p_s}=?$

5-2　设厚壁圆筒中的屈服极限不均匀，沿圆筒半径屈服极限的平均值为σ_s，且按如下规律变化：

$$\sigma=\left(\frac{2r}{b}-\frac{1}{2}\right)\sigma_s$$

式中，$\frac{1}{2}\leqslant\frac{r}{b}\leqslant 1$。厚壁筒内外半径之比为$\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$，筒的内压为$p_i$，外压为$p_e$，材料是不可压缩的，并服从特雷斯卡屈服条件，圆筒处于平面应变状态。试将圆筒在此情况下的承载能力与具有均匀屈服极限σ_s的厚壁筒的承载能力相比较。

5-3　设一均质锥形旋转圆盘的屈服极限为σ_s，半径为b，厚度按如下规律变化：

$$h=h_0\left(1-\frac{r}{b}\right)$$

试求此盘在塑性极限状态下的转速ω_p。

5-4　已知空心圆柱的内外半径之比为κ，试求此圆柱受扭时，塑性极限扭矩比弹性极限扭矩提高了多少？并分别给出$\kappa=0$和$\kappa=\frac{1}{2}$时所提高的值。

第六章　滑移线法

§6-1　塑性平面应变问题的基本方程

塑性平面应变问题是工程中经常遇到的问题之一。但是，由于塑性本构关系是非线性的，因而在求解问题的过程中，往往遇到许多数学上的困难。在本世纪二十年代初，亨奇首先提出了滑移线场理论。这个理论根据平面塑性应变问题的一些特点，将问题转化成首先建立滑移线场，然后根据滑移线场的几何性质研究塑性变形过程中的力学参数，从而为解决塑性加工工艺中的挤压、拉拔、锻造、冲压和轧制等问题提供了有用的参考数据，并为模具设计、最佳毛坯尺寸计算等课题的研究提供了有利的条件。

滑移线法不仅可以计算变形体内任意一点的应力分量，而且也能计算该点的速度分量。平面应变问题有以下几个特点：

（1）应变是平面的，即$\varepsilon_z=0$；

（2）应力是空间的，即不仅有σ_x、σ_y、τ_{xy}，而且还有σ_z；

（3）应力分量和应变分量只与坐标x、y有关，与坐标z无关；

（4）与变形平面相平行的各层之间没有相对错动，因而剪应力τ_{xz}和τ_{yz}都为零。

由以上特点可以得到平面应变条件下的位移表达式：

$$u=u(x,y),\quad v=v(x,y),\quad w=0 \tag{6-1}$$

由此得到应变分量为

$$\left.\begin{aligned} e_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_z = 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = 0, \gamma_{yz} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{6-2}$$

根据体积不可压缩条件$\varepsilon_0 = 0$，有$e_z = e_z$，因此由塑性应力-应变关系可得

$$\mathrm{d}e_z = \mathrm{d}e_z = s_z \mathrm{d}\lambda = 0$$

即

$$\begin{aligned} s_z &= \sigma_z - \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \\ &= \frac{2}{3}\left[\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

由上式得

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$$

平均应力σ_0为

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= -\frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \\ &= -\frac{1}{3}\left[(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)\right] \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \end{aligned}$$

因此，在平面塑性应变条件下，垂直于变形平面的法向应力等于平均应力，即

$$\sigma_z = \sigma_0 = -\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$$

为了方便，将平均应力写成σ，于是上式可写成

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{2}(\sigma_{max} + \sigma_{min}) \qquad (6\text{-}3)$$

由最大和最小主应力可以求得最大剪应力为

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_{max} - \sigma_{min}) \qquad (6\text{-}4)$$

于是由式（6-3）和（6-4）可得

$$\sigma_{max} = \sigma + \tau, \quad \sigma_{min} = \sigma - \tau, \quad \sigma_z = \sigma \qquad (6\text{-}5)$$

由上式可见，任意一点的应力状态都可以用平均应力σ和剪应力τ来表示，最大剪应力所在的面与应力主平面成45°角。

在平面应变问题中，米泽斯屈服条件为

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = 2\sigma_s^2$$

若将$\sigma_z = -\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$及$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$代入上式，则有

$$\frac{3}{2}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6\tau_{xy}^2 = 2\sigma_s^2$$

或

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = \frac{4}{3}\sigma_s^2$$

若取$k = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$，则上式又可以写成

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2 \qquad (6\text{-}6a)$$

在采用特雷斯卡屈服条件时，根据主应力的表达式

$$\begin{matrix}\sigma_1 \\ \sigma_3\end{matrix} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

又由

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{1}{2}\sigma_s$$

故有

$$(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2=\sigma_s^2$$

若取 $k=\frac{\sigma_s}{2}$，则有

$$(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2=4k^2 \tag{6-6b}$$

式（6-6）如用主应力来表达，米泽斯屈服条件为

$$\sigma_1-\sigma_3=\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s \tag{6-7a}$$

特雷斯卡屈服条件为

$$\sigma_1-\sigma_3=\sigma_s \tag{6-7b}$$

可见在塑性平面应变问题中，两种屈服条件的形式是相同的，只是σ_s前面的系数不同。

在平面塑性应变条件下，应力莫尔圆如图6-1所示，大圆的直径为$2k$，圆心的横坐标为σ。由图中可见，最大切应力平面上的正应力等于平均压力σ，即在塑性平面应变情况下，应力由σ和k确定。由于k对于理想塑性材料是常数，因此只要找到平均应力

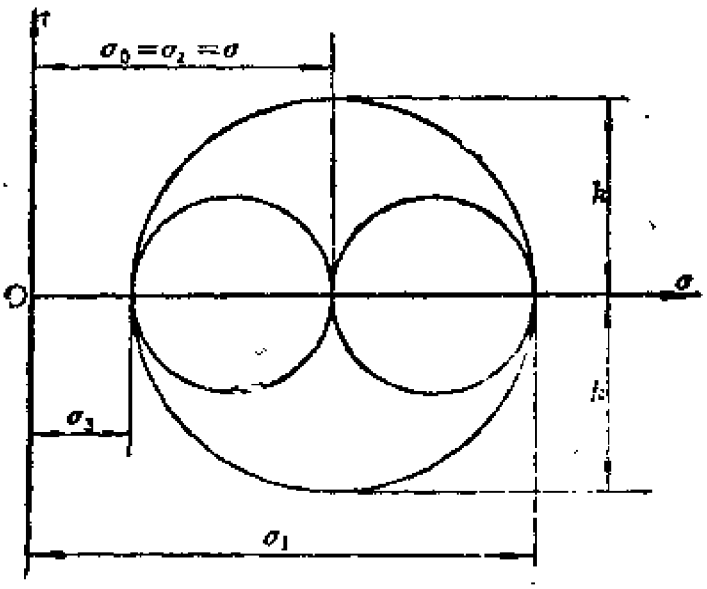


图6-1 应力莫尔圆

σ，一点的应力状态便可以确定。若给定了大圆的直径和大圆圆心的坐标，便可以画出一个应力莫尔圆，也就等于给定了一点的应力状态。不同的应力状态反映在几何图形上是一系列直径相同的莫尔圆，由于各圆所对应的单元体上的平均应力σ不同，因而使它们的圆心坐标沿σ轴变化（图6-2）。

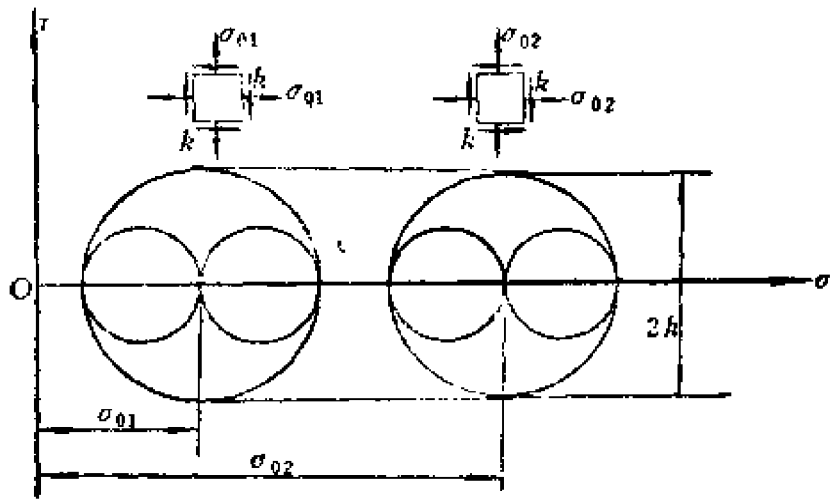


图6-2 直径相同的莫尔圆

为了进一步说明图6-1，取一斜三角形微元体进行研究（图6-3）。设作用于a b面上的法向应力为σ_x，剪应力为τ；在Oa和Ob面上，仅有法向应力σ_1和σ_2，a b的长度为单位长度。根据单元体的平衡条件，可得

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_1\cos^2\alpha + \sigma_2\sin^2\alpha \\ &= \sigma_1\frac{1+\cos2\alpha}{2} + \sigma_2\frac{1-\cos2\alpha}{2} \\ &= \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cdot\cos2\alpha \\ &= \sigma + \tau_{max}\cos2\alpha \end{aligned} \qquad (6\text{-}8a)$$

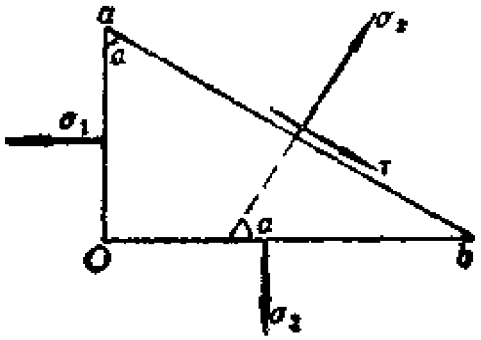


图6-3 三角形微元体

$$\tau = \sigma_1 \cos\alpha \sin\alpha - \sigma_2 \cos\alpha \sin\alpha$$

$$= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha$$

$$= \tau_{max} \sin 2\alpha \qquad (6\text{-}8b)$$

将上两式平方相加，可得

$$(\sigma_x - \sigma)^2 + \tau^2 = \tau_{max}^2 \qquad (6\text{-}9a)$$

用类似的方法可得

$$(\sigma_y - \sigma)^2 + \tau^2 = \tau_{max}^2 \qquad (6\text{-}9b)$$

上两式可以用一个方程式来表示，即以σ_n代替σ_x和σ_y，则有

$$(\sigma_n - \sigma)^2 + \tau^2 = \tau_{max}^2 \qquad (6\text{-}9c)$$

由上式可知，当$\tau = \tau_{max}$时，$\sigma_n = \sigma$，即在剪应力达到最大值时，正应力σ_n等于平均应力σ。方程式（6-9c）代表在$\sigma_n - \tau$坐标中半径为τ_{max}的圆，圆心在σ_n轴上距原点为σ处，如图6-4所示。若在圆周上取任意点A，则可求出对应截面上的剪应力τ和法向应力σ_x，如延长半径到圆周上另一点B，则可求出法向应力σ_y。应力σ_x、σ_y、τ_{xy}的解析表达式为

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma + k\cos 2\alpha \\ \sigma_y &= \sigma - k\cos 2\alpha \\ \tau_{xy} &= k\sin 2\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}10)$$

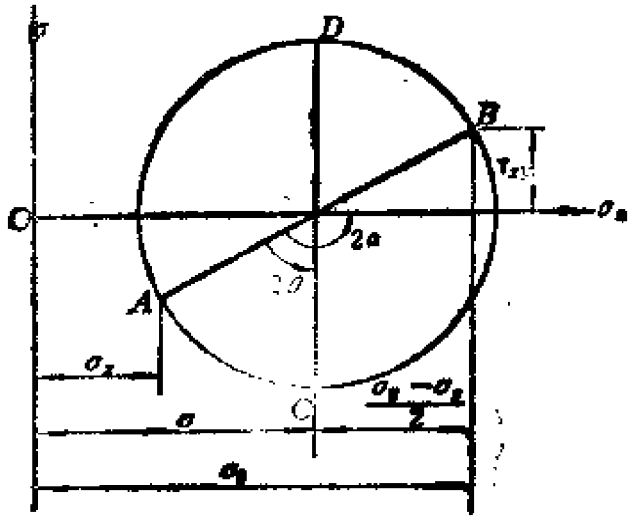


图6－4　应力莫尔圆

上式中的α角也可以用确定主剪应力平面的θ角来代替。由图6-4可得

$$\alpha = \theta + \frac{\pi}{4}$$

代入式（6-10）后则有

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma - k\sin 2\theta \\ \sigma_y &= \sigma + k\sin 2\theta \\ \tau_{xy} &= k\cos 2\theta \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}11)$$

当已知滑移线上各点的平均应力σ和θ角后，便可根据式（6-11）求出各点的应力分量σ_x、σ_y和τ_{xy}。由图6-4还可以看出最大剪应力位于D点对应的截面上（图6-5），其值等于圆的半径，该截面上的法向应力为σ。由式（6-11）还可求出$\mathrm{tg}2\theta$的值，即

$$\mathrm{tg}2\theta = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \qquad (6\text{-}12)$$

平面问题的平衡方程为

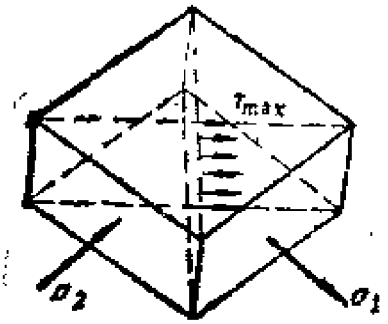


图6－5　最大剪应力方向示意图

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}&=0\\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}&=0\end{aligned}\right\}\qquad (6\text{-}13)$$

由增量理论中的莱维-米泽斯方程可得

$$\left.\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_x&=\lambda\ (\sigma_x-\sigma)\\ \dot{\varepsilon}_y&=\lambda\ (\sigma_y-\sigma)\\ \dot{\gamma}_{xy}&=2\lambda\tau_{xy}\end{aligned}\right\}\qquad (6\text{-}14)$$

由上式得

$$\frac{\sigma_y-\sigma_x}{2\tau_{xy}}=\frac{\dot{\varepsilon}_y-\dot{\varepsilon}_x}{\dot{\gamma}_{xy}}=\frac{\dfrac{\partial v}{\partial y}-\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}}\qquad (6\text{-}15)$$

式中u、v为位移速度。由材料不可压缩条件有

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0\qquad (6\text{-}16)$$

由以上分析可见，对于五个未知函数σ_x、σ_y、τ_{xy}、u、v，有五个方程式，即两个平衡方程（6-13），一个屈服条件（6-6）

式，以及条件（6-15）和（6-16）式。因此，从形式上看来问题是可解的。但是由于屈服条件是非线性的，所以将它和平衡方程直接联立求解会在数学上遇到很大困难。于是采用滑移线法求解这类问题将是有意义的。

§6-2 亨奇应力方程

在滑移线场理论中，假设材料是理想刚塑性体，即在变形过程中不考虑材料的弹性变形，而且不管材料的变形程度有多大，每点的最大剪应力都等于k，最大剪应力面上的正应力都等于该点的平均应力。将塑性区内各点的最大剪应力的方向连接起来，并绘成连续的曲线，由于每点的两个最大剪应力互相垂直，所以得到的是两族正交的曲线，这两族正交的曲线称为滑移线。根据剪应力方向的不同，一族曲线称为α族滑移线，另一族曲线称为β族滑移线。在处理具体问题时，正确确定α族滑移线和β族滑移线是非常重要的，因为它涉及能否正确地利用滑移线法来解决塑性平面应变的边值问题。受最大剪应力作用的微元体两侧的剪应力，若能使微元体产生顺时针旋转的趋势，则其方向为α族滑移线的方向（图6-6a）；若能使微元体产生逆时针旋转的趋势，则其方向为β族滑移线的方向（图6-6b）。

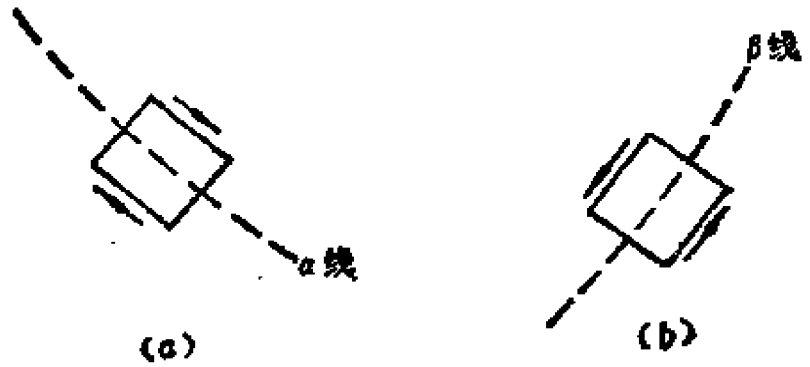


图6－6 确定α线和β线的方法

在图6-7上，P为塑性变形体上的一个点，其坐标为（x，y）。设α线在P点的切线的正向与x轴的正向的夹角为θ。θ角的正负号规定如下：自x轴的正向起，逆时针旋转的θ角为正，顺时针旋转的θ角为负。α线切线的正向就是α线的正向，而β线切

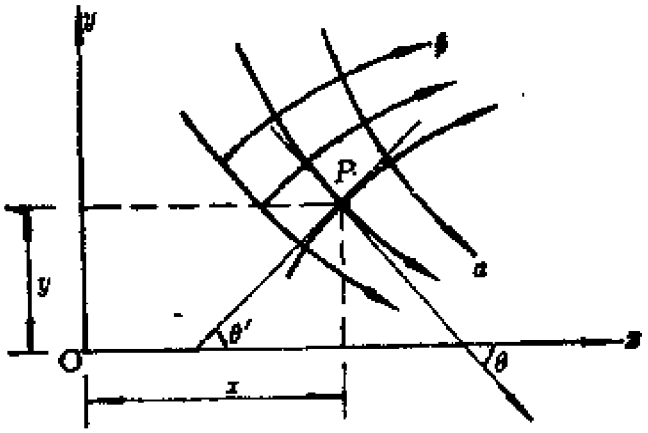


图6－7　θ角的确定

线的正向与x轴正向之间的夹角为$\theta' = \theta + \frac{\pi}{2}$。滑移线上的应力如图6-8所示。两族滑移线的微分方程为

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta && (\alpha\text{族}) \\ &\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta' = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\operatorname{ctg}\theta && (\beta\text{族}) \end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}17)$$

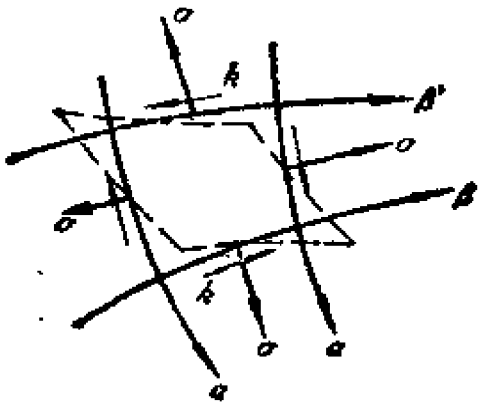


图6－8　滑移线上的应力示意图

根据以上的讨论，可以归纳出滑移线场具有如下特点：

（1）滑移线是变形体进入塑性状态后最大剪应力的迹线，是两族正交的曲线，过一点只能有两条滑移线；

（2）滑移线与主应力迹线成45°角；

（3）滑移线场分布于整个塑性变形体中，而且可以延伸到边界；

（4）应力场不同，滑移线场也不同；

（5）在滑移线场中，任意点的最大剪应力都等于k，但各点的平均应力σ则不一定相同；

（6）找出平均应力σ和α族滑移线切线的倾角θ之间的关系，是研究这类问题的关键。

亨奇应力方程是塑性变形体中一点的平均应力σ和该点α族滑移线切线的倾角θ之间的关系式。亨奇应力方程的推导方法有许多种，这里采用移动坐标系的概念进行推导。设任意点P的坐标为（x，y），若已知这一点的θ角和平均应力σ，则应力分量便可由式（6-11）求出。将式（6-11）代入式（6-13），有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma}{\partial x}-2k\left(\cos2\theta\frac{\partial\theta}{\partial x}+\sin2\theta\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)=0\\ \frac{\partial\sigma}{\partial y}-2k\left(\sin2\theta\frac{\partial\theta}{\partial x}-\cos2\theta\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)=0\end{aligned}\right\}\quad(6\text{-}18)$$

上式是包含未知函数σ（x，y）和θ（x，y）的一阶偏导数的非线性微分方程组。若取x和y轴分别与α线和β线的切线s_α和s_β相重合，则$\theta=0$，这时由式（6-18）可得

$$\frac{\partial\sigma}{\partial s_\alpha}-2k\frac{\partial\theta}{\partial s_\alpha}=0$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial s_\beta}+2k\frac{\partial\theta}{\partial s_\beta}=0$$

上式的第一式沿α线积分，有

$$\sigma - 2k\theta = C_\alpha \tag{6-19a}$$

第二式沿β线积分，有

$$\sigma + 2k\theta = C_\beta \tag{6-19b}$$

式（6-19）为亨奇应力方程，它是满足屈服条件的平衡方程。在塑性区内，沿任一条α线，C_α为一常数；沿任一条β线，C_β为一常数。一般来说，从一条滑移线移到另一条滑移线，常数C_α或C_β是要变化的。C_α和C_β的量纲为应力的量纲，其数值可以根据边界条件确定。若C_α和C_β已知，并根据边界条件绘制出滑移线场，则可根据各点的θ值求出σ值，进而由式（6-11）便可确定各点的σ_x、σ_y和τ_{xy}的值。

§6-3 滑移线场的几何性质

根据式（6-19）可以得出滑移线场的许多重要性质，现说明如下：

（1）沿滑移线σ的变化与θ角的变化成正比。

设图6-9上a点的平均应力为σ_a，b点的平均应力为σ_b，根据亨奇应力方程有

$$\sigma_a - 2k\theta_a = \sigma_b - 2k\theta_b = C_\alpha$$

即

$$\sigma_a - \sigma_b = 2k\ (\theta_a - \theta_b)$$

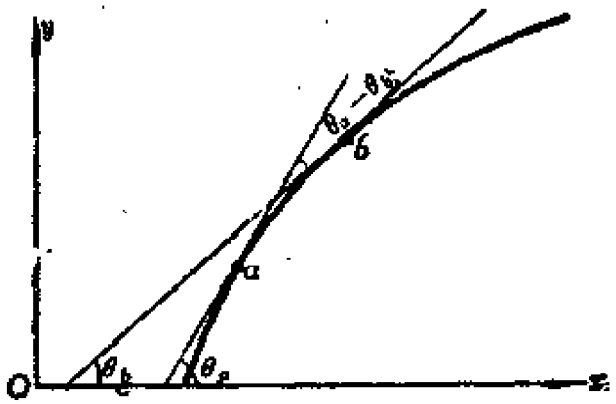


图6-9 σ的变化与θ的变化成正比

由此可见，$(\theta_a-\theta_b)$的变化愈大，$(\sigma_a-\sigma_b)$的变化也愈大。

（2）若滑移线场中各点的坐标（x，y）及θ均已知，则只要知道任何一点的σ值，就可以确定各点的σ值。

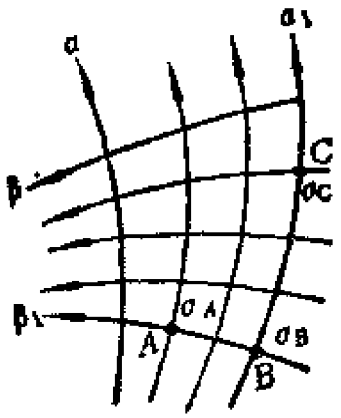


图6-10 滑移线场中已知σ_A求σ_B和σ_C

设已知A点的平均应力为σ_A，则沿β_1线应有

$$\sigma_A+2k\theta_A=C_{\beta 1}$$

由亨奇应力方程知

$$\sigma_B+2k\theta_B=\sigma_A+2k\theta_A=C_{\beta 1}$$

因此

$$\sigma_B=\sigma_A+2k\ (\theta_A-\theta_B)$$

利用相同方法，沿α_1线有

$$\sigma_C-2k\theta_C=\sigma_B-2k\theta_B$$

即

$$\sigma_C=\sigma_B-2k\ (\theta_B-\theta_C)$$

（3）如果滑移线为直线，则平均应力σ和C_α、C_β在此直线上都将是常数。

设α线的某线段是直线，则沿此线段的θ角为常数，因而$\sigma=2k\theta+C_\alpha=\text{const}$，此线段上的$C_\beta$也为常数。由此可知，在此线段上，

$$\sigma_x = \sigma - k\sin 2\theta = \text{const}$$
$$\sigma_y = \sigma + k\sin 2\theta = \text{const}$$
$$\tau_{xy} = k\cos 2\theta = \text{const}$$

若两族滑移线都是直线，则在此区域中的应力是均匀分布的，而且C_α和C_β都是常数。

（4）沿任何一条β滑移线，由α族滑移线中的一条α_1转到另一条α_2，θ角的变化和平均应力σ的变化将保持为常数。

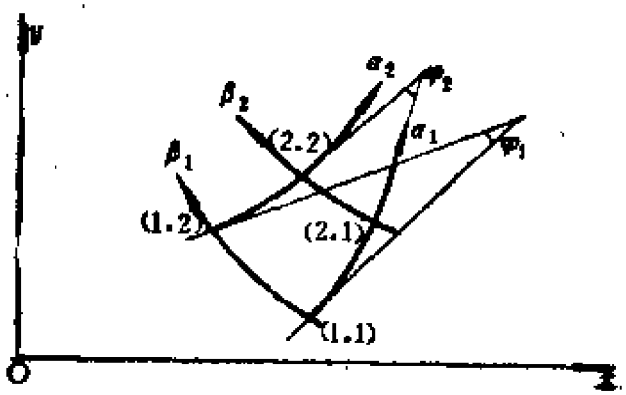


图6-11　θ角和平均应力σ的变化规律

在α族滑移线中任取两条滑移线α_1和α_2，在β族滑移线中也任取两条滑移线β_1和β_2，组成滑移线场单元网格（图6-11）。四个交点的坐标分别为（1，1）、（1，2）、（2，1）和（2，2），β族线的序号在前，α族线的序号在后。由式（6-19）可得

$$\left.\begin{aligned}\sigma &= \frac{1}{2}(C_\alpha + C_\beta)\\ \theta &= \frac{1}{4k}(C_\beta - C_\alpha)\end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}20)$$

上式为两条滑移线相交于同一点时，σ、θ、C_α和C_β之间的关系式。在不同的点，θ和σ的值是不同的。在图6-11上，各交点的θ

角分别为

$$\theta_{1,1}=\frac{1}{4k}(C_{\beta_1}-C_{\alpha_1})\ ,\ \theta_{1,2}=\frac{1}{4k}(C_{\beta_1}-C_{\alpha_2})$$

$$\theta_{2,1}=\frac{1}{4k}(C_{\beta_2}-C_{\alpha_1})\ ,\ \theta_{2,2}=\frac{1}{4k}(C_{\beta_2}-C_{\alpha_2})$$

由图上可知

$$\varphi_1=\theta_{1,1}-\theta_{1,2}=\frac{1}{4k}(C_{\alpha_2}-C_{\alpha_1})$$

$$\varphi_2=\theta_{2,1}-\theta_{2,2}=\frac{1}{4k}(C_{\alpha_2}-C_{\alpha_1})$$

因此

$$\theta_{1,1}-\theta_{1,2}=\theta_{2,1}-\theta_{2,2}$$

即

$$\varphi_1=\varphi_2 \tag{6-21}$$

利用相同方法可得

$$\sigma_{1,1}=\frac{1}{2}(C_{\alpha_1}+C_{\beta_1})\ ,\quad \sigma_{1,2}=\frac{1}{2}(C_{\alpha_2}+C_{\beta_1})$$

$$\sigma_{2,1}=\frac{1}{2}(C_{\alpha_1}+C_{\beta_2})\ ,\quad \sigma_{2,2}=\frac{1}{2}(C_{\alpha_2}+C_{\beta_2})$$

前两式和后两式两两相减，则有

$$\sigma_{1,1}-\sigma_{1,2}=\frac{1}{2}\left(C_{\alpha_1}-C_{\alpha_2}\right)$$

$$\sigma_{2,1}-\sigma_{2,2}=\frac{1}{2}\left(C_{\alpha_1}-C_{\alpha_2}\right)$$

因此 $$\sigma_{1,1}-\sigma_{1,2}=\sigma_{2,1}-\sigma_{2,2} \tag{6 22}$$

若沿任意一条α线，由β_1线转到β_2线，则按上述方法可 得

$$\left.\begin{aligned}\theta_{1,1}-\theta_{2,1}&=\theta_{1,2}=\theta_{2,2}\\ \sigma_{1,1}-\sigma_{2,1}&=\sigma_{1,2}-\sigma_{2,2}\end{aligned}\right\} \tag{6-23}$$

滑移线场的这个性质称为亨奇第一定理。

（5）若β族（或α族）滑移线的某一段为直线，则被α族（或β族）滑移线所切割的所有相应的β（或α）线段都将是直线（图6-12）。

这一性质很容易由亨奇第一定理证明。设图6-12上线段AB为直线，则由亨奇第一定理得

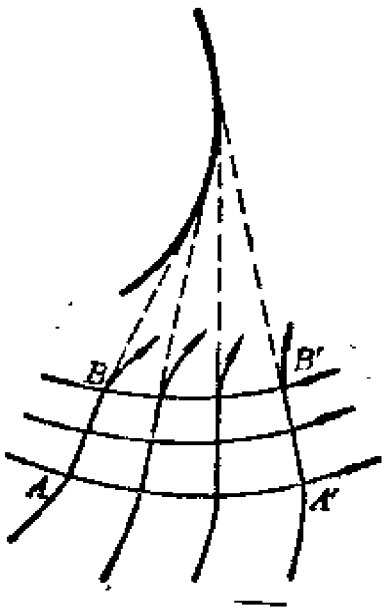


图6-12 滑移线的某一段为直线的情况

$$\theta_A-\theta_B=\theta_{A'}-\theta_{B'}=0$$

即

$$\theta_{A'}=\theta_{B'}$$

这说明$A'B'$也是直线段。

（6）在滑移线场中，若沿某一条滑移线移动，则所移动的距离与另一族滑移线的曲率半径的变化量相等。

设α线和β线的曲率半径为R_α和R_β。若α（或β）族滑移线的曲率中心处于s_β（或s_α）增加的方向，则曲率半径R_α（或R_β）定为正。这时有（图6-13）

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{R_\alpha} &= \frac{\partial\theta}{\partial s_\alpha}\\ \frac{1}{R_\beta} &= -\frac{\partial\theta}{\partial s_\beta}\end{aligned}\right\} \tag{6-24}$$

现在研究由无限接近的α族和β族滑移线所围成的滑移线单元$\Delta s_\alpha\Delta s_\beta$。曲线$AB$为$\alpha$线，其正向由$A$到$B$；曲线$AD$为$\beta$线，其正向由$A$到$D$。在图6-13中$\theta_D>\theta_A$故有

$$\Delta\theta=\theta_D-\theta_A>0$$

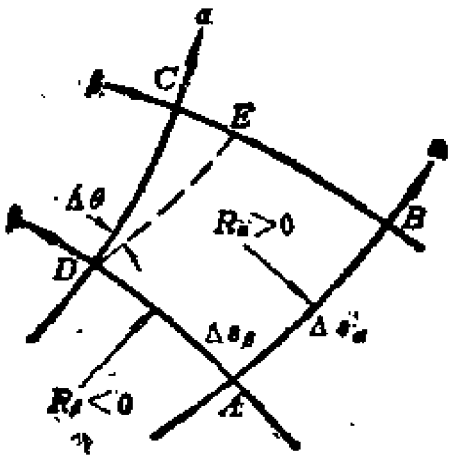


图6-13 滑移线的几何性质

由式（6-24）有

$$-\Delta\theta R_\beta=\Delta s_\beta=AD$$

由D点开始作AB的平行线，则有$AD=BE$，故

$$BC=\Delta s'_\beta=AD+CE=\Delta s_\beta+\Delta s_\alpha\Delta\theta$$

由此得

$$\Delta s'_\beta-\Delta s_\beta=\Delta s_\alpha\Delta\theta$$

于是有

$$\frac{\partial\Delta s_\beta}{\partial s_\alpha}=\frac{\Delta s'_\beta-\Delta s_\beta}{\Delta s_\alpha}=\Delta\theta=-\frac{\partial(R_\beta\Delta\theta)}{\partial s_\alpha}$$

由亨奇第一定理可知，$\Delta\theta$为常数，故在最后一项中，可将$\Delta\theta$提到微分号外，于是可得

$$\Delta\theta = -\Delta\theta\frac{\partial R_\beta}{\partial s_\alpha}$$

即

$$\frac{\partial R_\beta}{\partial s_\alpha} = -1$$

同理可得

$$\frac{\partial R_\alpha}{\partial s_\alpha} = -1$$

滑移线场的这个性质称为亨奇第二定理。

§6-4 建立滑移线场的边界条件

建立某一问题的滑移线场，需要利用边界上的受力条件。在边界上，一般给出的是法向应力和剪应力，而滑移线法涉及的是平均应力和角度θ，因此需要将法向应力σ_n和剪应力τ_n转化成平均应力σ和角度θ。

设在边界上的一点P给定法向应力σ_n和剪应力τ_n，该点处法线n和x轴的夹角为φ，如图6-14所示。φ角自x轴起逆时针旋转为正。边界上的正应力和剪应力与应力分量σ_x、σ_y、τ_{xy}之间的关系为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_x\cos^2\varphi + \sigma_y\sin^2\varphi + \tau_{xy}\sin 2\varphi \\ \tau_n &= \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x)\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi\end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}25)$$

图6-14中所示的剪应力τ_n为正向剪应力。

若物体已进入塑性状态，则物体内各点必定满足屈服条件。将满足屈服条件的参数方程（6-11）代入式（6-25），可得

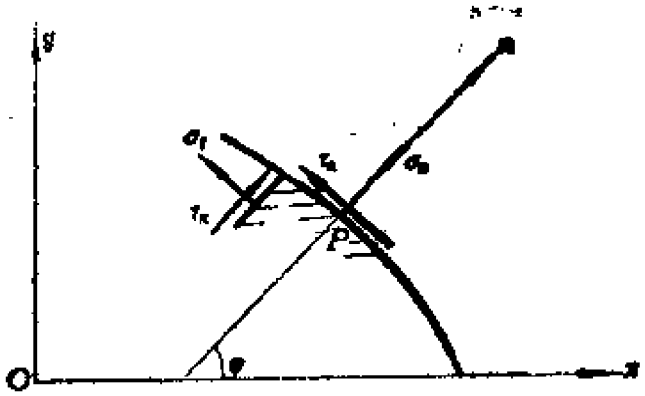


图6－14　滑移线的边界条件

$$\left.\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma - k\sin 2(\theta-\varphi)\\ \tau_n &= k\cos 2(\theta-\varphi)\end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}26)$$

在上式中若σ_n和τ_n给定，则未知量σ和θ便可求出，即

$$\left.\begin{aligned}\sigma &= \sigma_n + k\sin 2(\theta-\varphi)\\ \theta &= \varphi \pm \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{\tau_n}{k} + m\pi\end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}27)$$

若将边界上垂直于法线方向的正应力用σ_t表示，则平均应力σ可表示为

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_n + \sigma_t)$$

由上式得

$$\sigma_t = 2\sigma - \sigma_n$$

当边界上仅存在法向应力σ_n而不存在剪应力τ_n时，则有

$$\theta = \varphi \pm \frac{\pi}{4} + m\pi \qquad (6\text{-}28)$$

式中m为任意整数，它取决于θ角的选取m取不同值表明α线或β线的取向不同。式（6-27）中取正号或取负号都将满足屈服条

件，出现多值解的原因是由于屈服条件具有二次方的性质。

当边界给出后，边界法线与x轴的夹角便已知，再根据边界上的σ_n和τ_n，便可确定边界上各点的θ、σ和σ_1，然后可作出边界附近区域的滑移线场，并按前面给出的方法确定哪一族是α线，哪一族是β线。例如在边界上σ_n为零而$\sigma_1=2k$（图6-15），这时单元体在σ_1的作用下，沿水平方向伸长，剪应力的方向与剪应变的方向应一致，按剪应力的作用趋势便可确定α线的方向。一旦α线的方向确定后，便可根据式（6-27）或（6-28）确定m的值。在给定边界上的σ_n和τ_n后，式（6-27）和（6-28）都有两组解，而实际上只有一组解是真实的解，因此还应根据所取的θ角和φ角，用式（6-27）和（6-28）来检查是否能找到相应的m值和式中的正负号，使这两个式子被满足。即一旦θ值确定后，式（6-27）和（6-28）只起一个校核的作用。

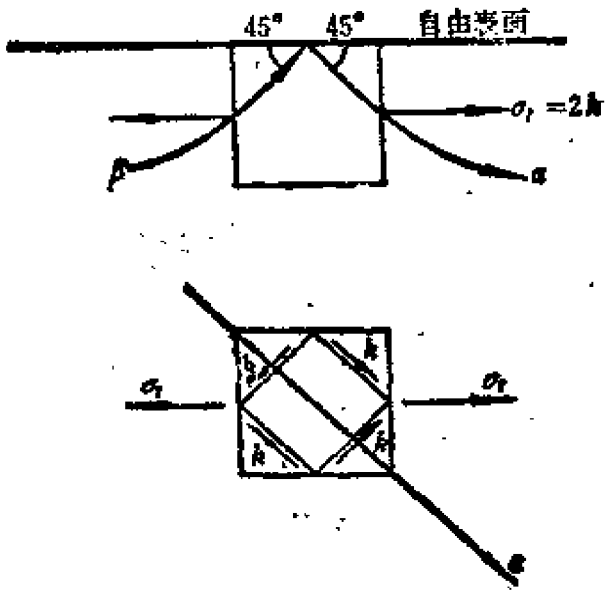


图6-15　自由表面处的滑移线

§6-5 顶部削平的楔体的极限载荷以及利用类推法求解各种边值问题的解

设有一顶部削平的楔体，在削平面上受均匀压力q作用，楔体的顶角为2δ，顶宽为$2b$，如图6-16所示。因楔体是对称的，故只需研究楔体的一半。由于OB边只受压力q作用，故$\sigma_\rho = -q$，$\tau_\rho = 0$，于是可按式（6-28）确定θ的值。

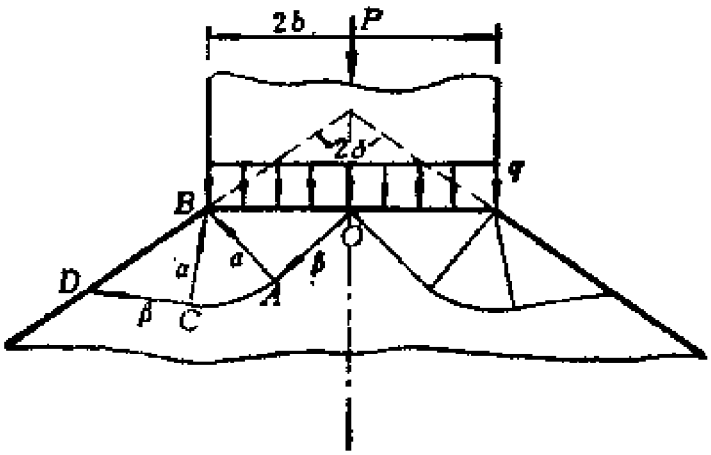


图6-16 顶部削平的楔体

在$\triangle BOA$中取一小单元体（图6-17a），根据其受力情况，可以确定α线的方向。φ为OB边的法线与x轴的夹角，即$\varphi = \frac{\pi}{2}$，取θ角为$\frac{3}{4}\pi$，于是有

$$\theta = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4} + m\pi = \frac{3}{4}\pi$$

因此，m应取0且式中取正号。若θ角取为$-\frac{\pi}{4}$，则

$$\theta = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4} + m\pi = -\frac{\pi}{4}$$

此时m应取-1且式中取正号。如前所述，θ角取$\frac{3}{4}\pi$或取$-\frac{\pi}{4}$，计算结果是一样的。现取$\theta=\frac{3}{4}\pi$，此时有

$$\theta-\varphi=\frac{\pi}{4}$$

由式（6-27）的第一式可得平均应力为

$$\sigma=\sigma_0+k\sin 2(\theta-\varphi)$$

$$=\sigma_0+k\sin\left(2\times\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=-q+k$$

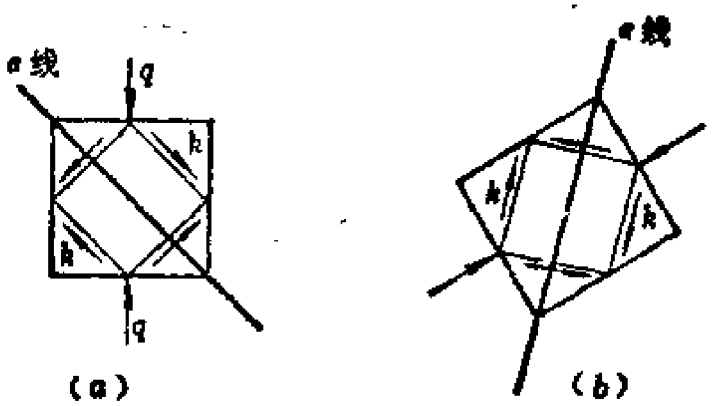


图6-17 楔体上的α线

而切向正应力为

$$\sigma_t=2\sigma-\sigma_0=-q+2k$$

即在$\triangle OAB$中有

$$\theta_0=\frac{3}{4}\pi,\quad \sigma_0=-q+k,\quad \sigma_{t0}=-q+2k$$

在$\triangle BCD$中，BD为自由边界，其上$\sigma_0=\tau_0=0$。从$\triangle BCD$中取出一小单元体（图6-17b），则根据其受力情况可以确定α线的

方向，此时有

$$\theta = -\frac{3}{4}\pi - \delta,\quad \varphi = \frac{\pi}{2} + \left(-\frac{\pi}{2} - \delta\right) = \pi - \delta$$

于是$\theta - \varphi = -\frac{\pi}{4}$。由式(6-27)的第一式得

$$\sigma = \sigma_s + k\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -k$$

切向正应力为

$$\sigma_t = 2\sigma - \sigma_s = -2k$$

即在$\triangle BCD$中有

$$\theta_D = -\frac{3}{4}\pi - \delta,\quad \sigma_D = -k, \sigma_{tD} = -2k$$

由于$OACD$为同一条β滑移线，故根据亨奇应力方程可得

$$\sigma_O + 2k\theta_O = \sigma_D + 2k\theta_D$$

即

$$-q + k + 2k\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -k + 2k\left(\frac{3}{4}\pi - \delta\right)$$

由此得

$$q = 2k\ (1 + \delta) \qquad (a)$$

这就是顶部削平的楔体的极限载荷。本题也可通过画出图6-18所示的滑移线场求出极限载荷。这时$\triangle BAB'$中的σ和θ与图6-16上$\triangle OAB$中的σ和θ完全一样，$\triangle BCD$中的σ和θ与图6-16上$\triangle BCD$中的σ和θ完全一样，因此所求的极限载荷q也必然完全一样。

利用上面求得的顶部削平的楔体的塑性解，可以得到平冲头压入半无限体（图6-19）的塑性解，因为后者是前者在$\delta = \frac{\pi}{2}$时的情况。只要将$\delta = \frac{\pi}{2}$代入(a)式，便可求出平冲头压入问

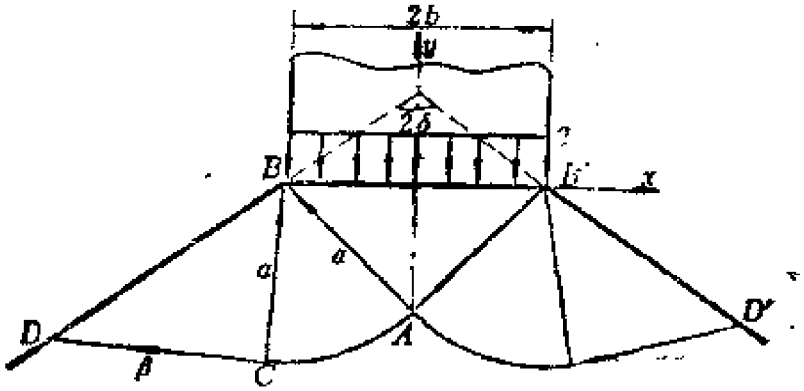


图6－18　顶部削平的楔体上的另一种滑移线场

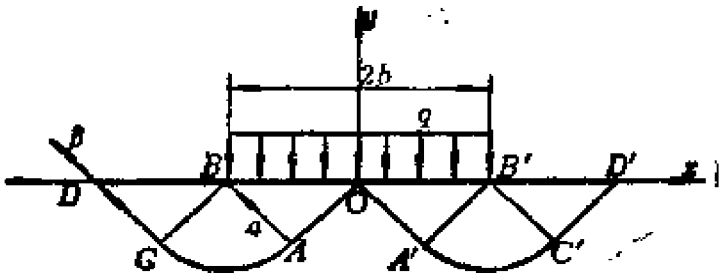


图6-19　平冲头压入

题的极限载荷为

$$q=2k\ (1+\delta)\ =2k\ (1+\frac{\pi}{2})\ =k\ (2+\pi)$$

对于含有裂纹的受拉板块（图6-20），在板块达到塑性状态后，可建立如图所示的滑移线场。对比图6-19和图6-20，便可发现两图所示的滑移线场的分布规律完全一样，因此只要将平冲头压入问题的极限载荷由压应力改为拉应力，便可得到此问题的解。

对于单边受均布载荷作用的钝角楔体，其滑移线场如图6-21a所示。注意到滑移线场$BDCAO$与图6-16所示的滑移线场$BDCAO$是完全一样的，故可利用顶部削平的楔体的塑性解来求

解此问题的极限载荷。

对比图6-16和6-21a可得

$$2\gamma = \frac{\pi}{2} + \delta$$

或

$$\delta = 2\gamma - \frac{\pi}{2}$$

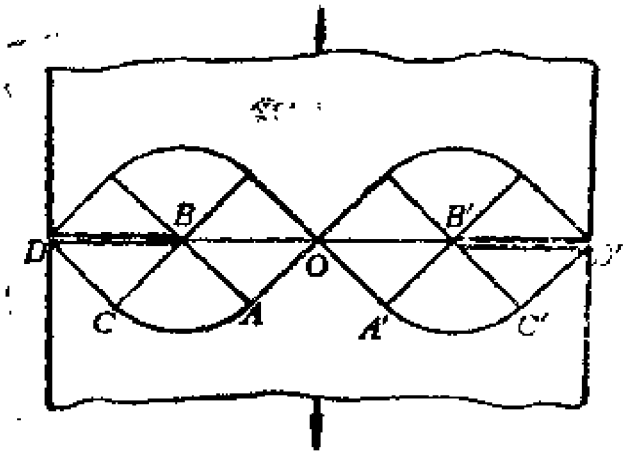
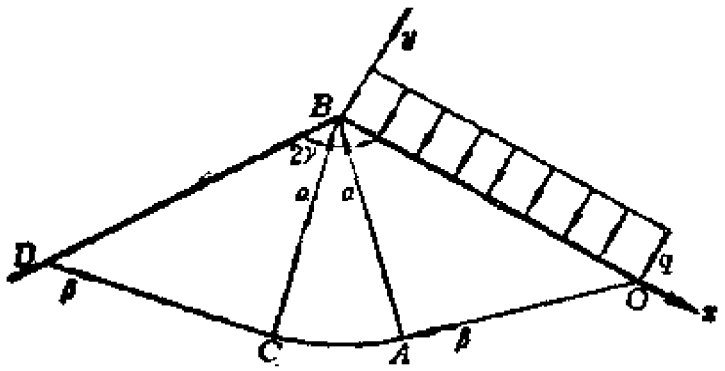
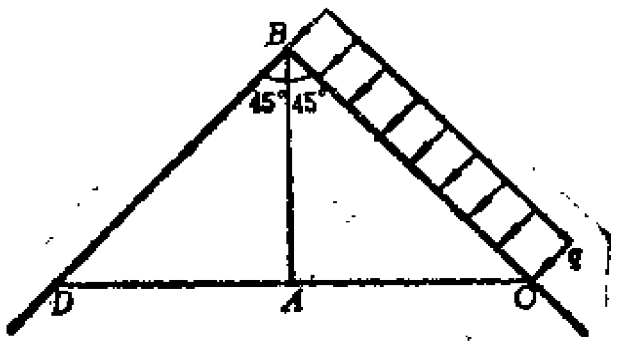


图6-20 含有裂纹的受拉板块



(a) 钝角楔体



(b) 直角楔体

图6-21 单边受均布载荷作用的楔体

代入式（a）可得此问题的极限载荷为

$$q = 2k\ (1+\delta)\ = 2k\ (1+2\gamma - \frac{\pi}{2})$$

对于直角楔体（图6-21b），则有

$$2\gamma = \frac{\pi}{2}$$

即

$$\delta = 0$$

于是直角楔体的极限载荷为

$$q = 2k$$

对于带有V形切口的受拉板块，其滑移线场如图6-22所示。对比图6-16和图6-22，又发现这两个问题的滑移线场也完全一样。由两图的几何关系可得

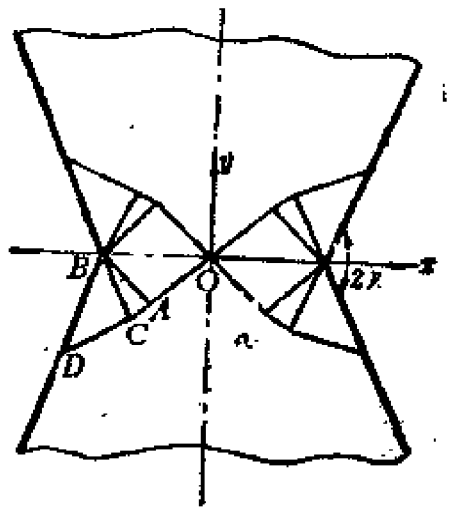


图6-22　带有V形切口的受拉板块

$$\delta = \frac{\pi}{2} - \gamma$$

于是板块的极限载荷为

$$q = 2k\ (1+\delta) = 2k\ \left(1 + \frac{\pi}{2} - \gamma\right)$$

下面再来讨论一下式(6-27)的使用方法。式中的φ角是边界法线与x轴的夹角，在选定坐标后，φ角便已知。利用边界受力情况确定了α线后，θ角也已确定。值得注意的是，在同一问题的不同边界上，计算α线与x轴的夹角θ应按同一方向，或均由x轴按逆时针方向计算，或均由x轴按顺时针方向计算。在取定θ角后，可以利用式（6-27）确定相应的m值以及$\frac{1}{2}\cdot\cos^{-1}\frac{\tau_n}{k}$前的正负号。现以图6-22所示的带V形切口的受拉板块为例，说明具体使用方法。若α线按图6-23所示的取法，则在$\triangle ABO$中可有两种计算θ角的方法：由x轴按逆时针方向计算时（图6-23a），$\theta = \frac{\pi}{4}$；由x轴按顺时针方向计算时（图6-23b），$\theta = -\frac{7}{4}\pi$。

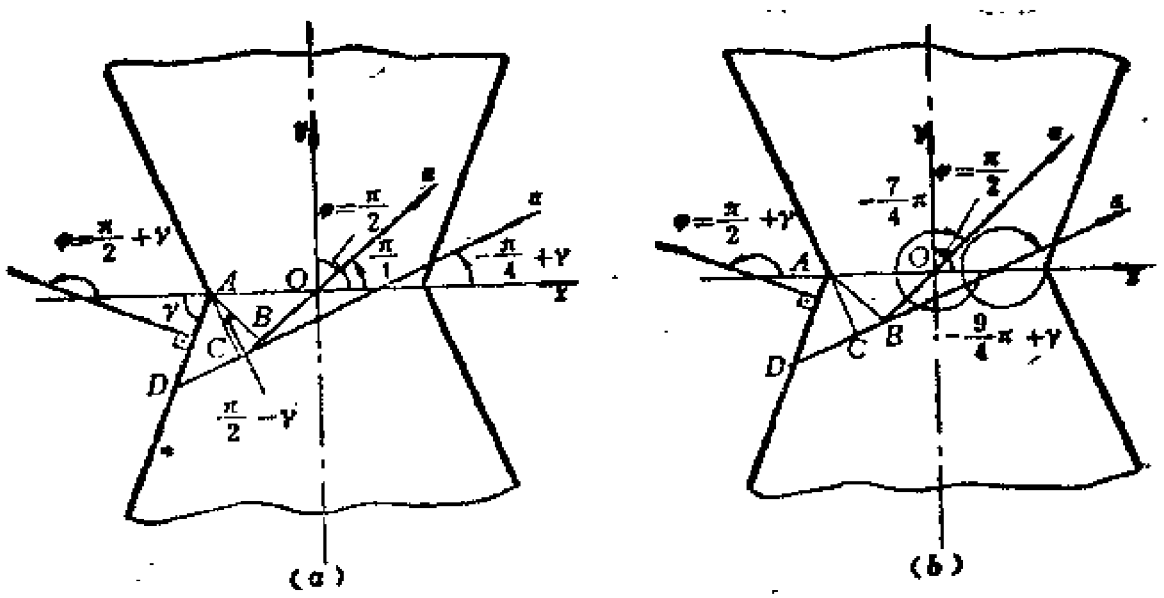
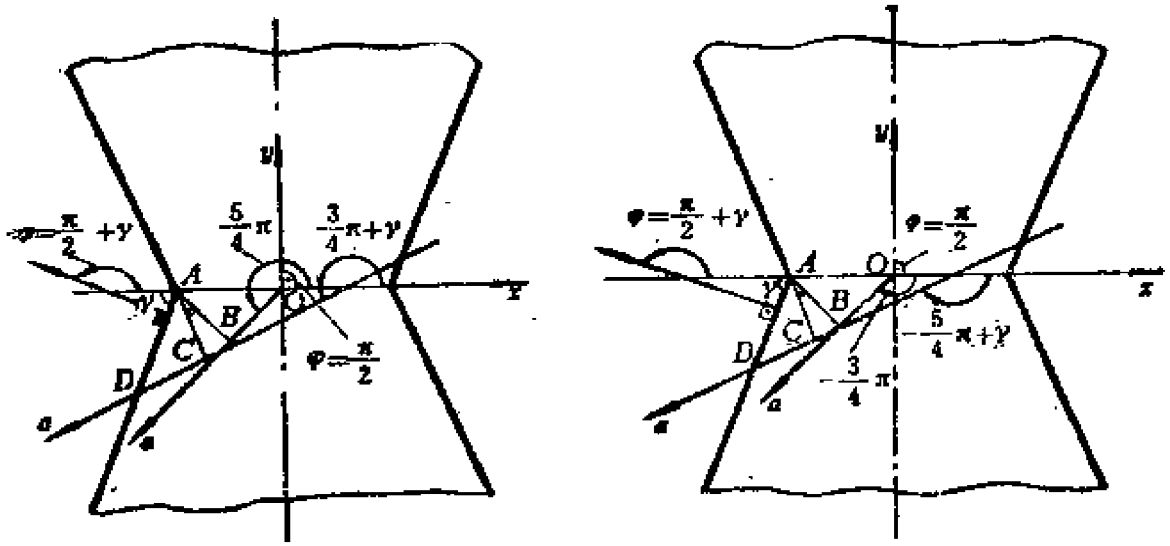


图6-23 带V形切口的板块x线的不同取法

若α线按图6-24所示的取法，则在$\triangle ABO$中有$\theta = \frac{5}{4}\pi$ 或 $\theta =$



(a) (b)

图6-24 带V形切口的板块α线的不同取法

$-\frac{3}{4}\pi$。如在$\triangle ABO$和$\triangle ACD$中按相同方向计算θ角，则由以上四种方法选取θ角后所求得的极限载荷完全相同。现将按四种方法求得的各有关值列入表6-1。

沿着$DCBO$线（即α线）C_0应相等，于是在以上四种情况下均有

$$q=2k\left(1+\frac{\pi}{2}-\gamma\right)$$

由以上分析可以得出如下结论：

（1）α线确定后，θ角便已确定，式（6-27）的第二式只起一个校核的作用；

（2）α线的指向可以任意选取，不影响最后的计算结果；

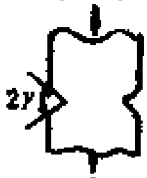
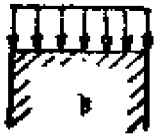
（3）取定α线的指向后，在不同边界上须按相同方向计算θ角，即均按逆时针方向计算或均按顺时针方向计算，尽管θ角的数值不同，但都能得到相同的极限载荷。现将不同边值问题的极限

续6-1

	α线按图6－23所示的取法		α线按图6－24所示的取法	
	逆针时方向	顺时针方向	逆时针方向	顺时针方向
θ	$\pi/4$	$-7\pi/4$	$5\pi/4$	$-3\pi/4$
φ	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$
$\theta-\varphi$	$-\pi/4$	$-9\pi/4$	$3\pi/4$	$-5\pi/4$
$\sin 2(\theta-\varphi)$	-1	-1	-1	-1
m	0	-2	1	-1
$\cos^{-1}\frac{r_a}{k}$的土号	$-$	$-$	$-$	$-$
α	$q-k$	$q-k$	$q-k$	$q-k$
C_a	$q-k-2k\ (\pi/4)$	$q-k-2k\ (-\frac{7\pi}{4})$	$q-k-2k\ (\frac{5\pi}{4})$	$q-k-2k\ (-\frac{3\pi}{4})$
θ	$-\frac{\pi}{4}+\gamma$	$-\frac{9\pi}{4}+\gamma$	$\frac{3\pi}{4}+\gamma$	$-\frac{5\pi}{4}+\gamma$
φ	$\frac{\pi}{2}+\gamma$	$\frac{\pi}{2}+\gamma$	$-\frac{\pi}{2}+\gamma$	$\frac{\pi}{2}+\gamma$
$\theta-\varphi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{11}{4}\pi$	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{7\pi}{4}$
$\sin 2(\theta-\varphi)$	1	1	1	1
m	-1	-2	0	-2
$\cos^{-1}\frac{r_a}{k}$的土号	+	+	+	+
α	k	k	k	k
C_a	$k-2k\ (-\frac{\pi}{4}+\gamma)$	$k-2k\ (-\frac{9}{4}\pi+\gamma)$	$k-2k\ (\frac{3\pi}{4}+\gamma)$	$k-2k\ (-\frac{5\pi}{4}+\gamma)$

载荷列于表6-2中。

表9-2 常见问题的极限载荷

问题名称	几何图形	δ	q
顶部削平的楔体		δ	$2k\ (1+\delta)$
平冲头压入半无限体		$\frac{\pi}{2}$	$k\ (2+\pi)$
平冲头压入斜边半无限体		$\frac{\pi}{2}+\gamma$	$k\ (2+\pi+2\gamma)$
平冲头压入深孔		π	$2k\ (1+\pi)$
具有V形切口的板条		$\frac{\pi}{2}-\gamma$	$k\ (2+\pi-2\gamma)$
双边切口板条		$\frac{\pi}{2}$	$k\ (2+\pi)$
钝角楔体		$2\gamma-\frac{\pi}{2}$	$2k(1+2\gamma-\frac{\pi}{2})$
直角楔体		0	$2k$
矩形板条		0	$2k$

在边界上有剪应力τ_s作用时，情况将变得复杂，但若剪应力为剪切屈服极限，则分析将明显简化。这是因为根据滑移线的定义，当边界上的剪应力等于剪切屈服极限k时，该边界就是滑移线，于是能容易地建立起滑移线场。现以具体例子说明这类问题的处理方法。

例1 图6-25a所示为一尖角为2δ的楔体，在外力P作用下，插入具有相同角度的V形切口内。如楔体与V形切口接触处因摩擦而产生的剪应力为k，试求此情况下的极限载荷。

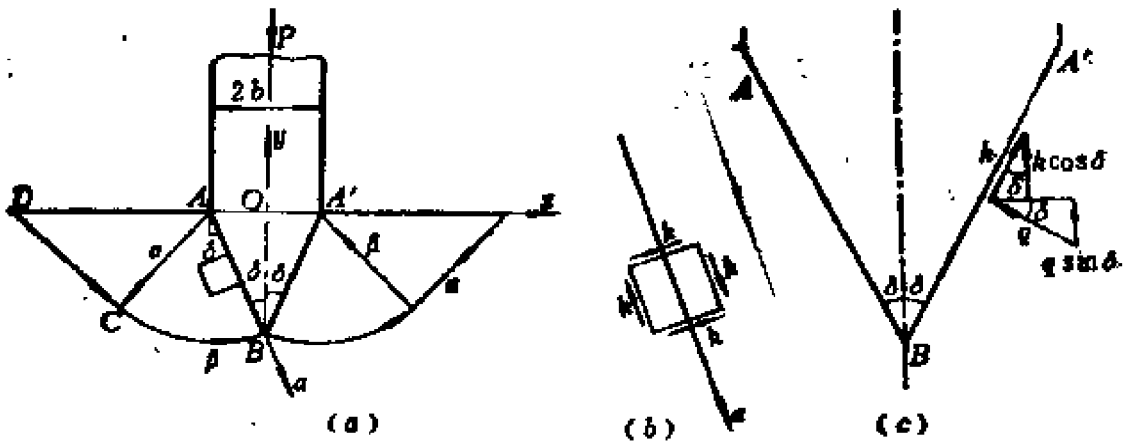


图6-25 楔体插入相同形状的切口

解：在扇形区域ABC中取出一小单元体(图6-25b)，根据剪应力作用的情况可以定出α线的方向，AB线即为α滑移线。若α线的正向如图6-25b所示，则在AB边上有

$$\theta=-\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right),\quad \sigma=\sigma_s=-q$$

在$\triangle ADC$中，AD边为自由边，$\varphi=\frac{\pi}{2}$，$\tau_s=0$，由图6-25a可知$\theta=-\frac{3}{4}\pi$，故有

$$\theta-\varphi=-\frac{5}{4}\pi$$

由式（6-27）的第一式有

$$\sigma=\sigma_x+k\sin 2\left(-\frac{5}{4}\pi\right)=-k$$

由亨奇应力方程可得

$$-q+2k\left(-\frac{\pi}{2}+\delta\right)=C_{\beta\alpha}$$

$$-k+2k\left(-\frac{3}{4}\pi\right)=C_{\beta\alpha}$$

因$C_{\beta\alpha}=C_{\beta D}$，故

$$q=2k\left(-\frac{\pi}{2}+\delta+\frac{3}{4}\pi+\frac{1}{2}\right)=k\left(\frac{\pi}{2}+2\delta+1\right)$$

由图6-25c可以算得力P为

$$P=(AB+A'B)\quad(q\sin\delta+k\cos\delta)$$

$$=\frac{2b}{\sin\delta}\quad(q\sin\delta+k\cos\delta)$$

$$=2b\quad(q+k\operatorname{ctg}\delta)$$

$$=2bk\left(\frac{\pi}{2}+2\delta+1+\operatorname{ctg}\delta\right)$$

§6-6　轴对称问题的滑移线场

在平面轴对称问题中，剪应力为零，因而正应力即为主应力，主方向为周向和径向。滑移线的方向与主方向成45°角，由于主方向已知，故滑移线的方向也已知。对于图6-26所示的轴对称问题，在C点，由于HCI和OCA都是主方向，因此滑移线为与这两个方向成45°角的迹线。设OA线与x轴的夹角为ϕ，当ϕ角增加$\mathrm{d}\phi$时，α线与OB线相交于J点。在$\triangle HCJ$中，$HC=r\mathrm{d}\phi$，$HJ=\mathrm{d}r$，因此有

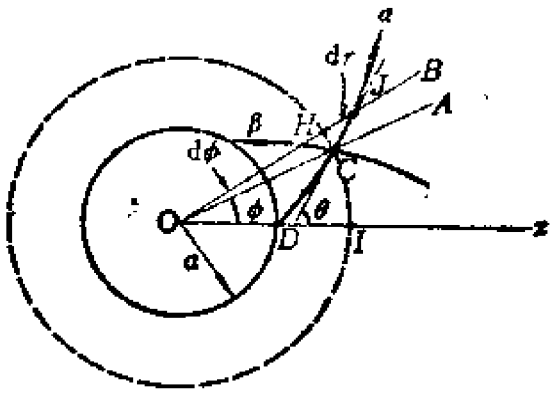


图6－26　轴对称问题滑移线场的建立

$$\pm \operatorname{tg}45^\circ = \frac{HJ}{HC} = \frac{\mathrm{d}r}{r\mathrm{d}\phi} = \pm 1 \tag{6-29}$$

即

$$\mathrm{d}\phi = \pm \frac{\mathrm{d}r}{r} \tag{6-30}$$

上式积分后得

$$\phi = \pm \ln \frac{r}{C} \tag{6-31}$$

在x轴上，$\phi = 0$，$r = a$，由此得

$$0 = \pm \ln \frac{a}{C}$$

即

$$C = a$$

因此式（6-31）又可写为

$$\phi = \pm \ln \frac{r}{a} \tag{6-32}$$

或

$$\left.\begin{aligned}\phi-\ln\frac{r}{a}&=D_\alpha\\ \phi+\ln\frac{r}{a}&=D_\beta\end{aligned}\right\}\qquad(6\text{-}33)$$

上式为滑移线的轨迹方程。由式（6-32），可得

$$r=ae^{\pm\phi}\qquad(6\text{-}34)$$

在$\triangle ODC$中可见$\phi=\theta-\frac{\pi}{4}$，故上式又可写成

$$r=ae^{\pm\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$$

当取正号时，上式可写成

$$\theta=\ln\frac{r}{a}+\frac{\pi}{4}\qquad(6\text{-}35)$$

有了以上的关系式，便可求出轴对称问题的极限载荷。现举例说明这类问题的处理方法。

例1：设有一受内压作用的厚壁圆筒(图6-27)，其内半径为a，外半径为b。试用滑移线法求此厚壁圆筒的极限载荷。

解：在用滑移线法求解问题时，需要找出平均应力的表达式，即

$$\sigma=-\frac{\sigma_\theta+\sigma_r}{2}\qquad(a)$$

由亨奇应力方程可得

$$\sigma_\theta+\sigma_r-4k^2=\text{const}\qquad(b)$$

将式（6-35）代入上式，则有

$$\sigma_\theta+\sigma_r-4k\left(\ln\frac{r}{a}+\frac{\pi}{4}\right)=\text{const}\qquad(c)$$

对于平面应变问题，屈服条件为

$$\sigma_\theta-\sigma_r=2k\quad\text{或}\quad\sigma_\theta=\sigma_r+2k\qquad(d)$$

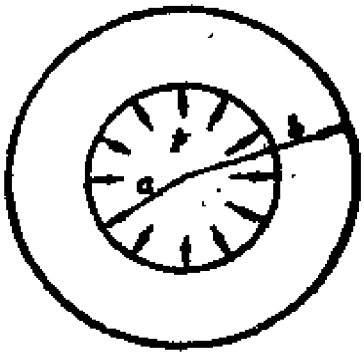


图6－27　厚壁圆筒

将上式代入式（c），则有

$$2\sigma_r+2k-4k\ln\frac{r}{a}-k\pi=\text{const} \tag{e}$$

厚壁圆筒的外边界条件为：当$r=b$时$\sigma_r=0$，代入式（e）后可得

$$2k-4k\ln\frac{b}{a}-k\pi=\text{const} \tag{f}$$

厚壁圆筒的内边界条件为：当$r=a$时$\sigma_r=-p$，代入式（e）后可得

$$-2p+2k-4k\ln\frac{a}{a}-k\pi=\text{const} \tag{g}$$

由于是在同一条滑移线上，故式（f）和（g）中的常数应相等。由式（f）减去式（g）后得

$$2p-4k\ln\frac{b}{a}=0$$

故得

$$p=2k\ln\frac{b}{a}$$

例2：已知具有圆弧切口的板条受拉力P作用(图6-28)，a为圆弧的半径，$2h$为板条的宽度，圆弧角为$2\nu_0$。若在整个宽度上板条的塑性区都受圆弧的影响，则滑移线可按对数螺线画出。试求：(1)在此情况下板条的最大宽度；(2)板条的极限载荷。

解：在板条的整个宽度上按对数螺线画出滑移线，如图6-28所示。沿β线AB，在A点有$\varphi=0$，$r=a+h$，由式(6-33)的第二式可得

$$\ln\frac{a+h}{a}=C_{\beta A} \tag{a}$$

在B点有$\varphi=\gamma_1$，$r=a$，由式（6-33）的第二式可得

$$\gamma_1+\ln\frac{a}{a}=C_{\beta B} \tag{b}$$

由于A点和B点在同一条滑移线上，所以$C_{\beta A}=C_{\beta B}$，于是由式（a）、（b）得

$$\gamma_1=\ln\frac{h+a}{a} \tag{c}$$

当$\gamma_1=\frac{\pi}{2}$时，对数螺线的影响范围为

$$\gamma_1=\frac{\pi}{2}=\ln\frac{h+a}{a} \tag{d}$$

由上式可得

$$\frac{h+a}{a}=e^{\frac{\pi}{2}} \tag{e}$$

即

$$\frac{h}{a}=e^{\frac{\pi}{2}}-1=3.81$$

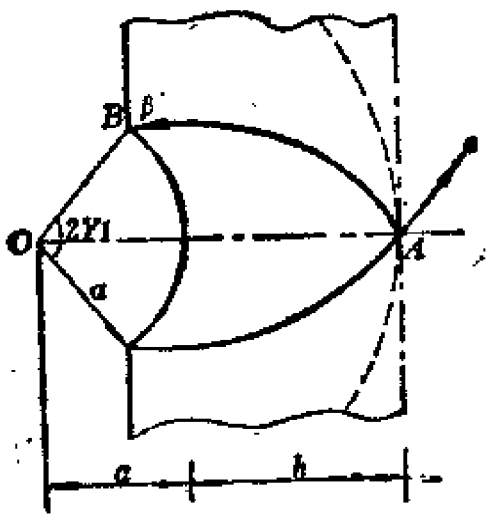


图6－28　具有圆弧切口的板条

当板条宽度$h \angle 3.81a$时，滑移线都可按对数螺线圆出，于是可按前例中的（d）式和（e）式确定应力分布规律。本例的边界条件为：当$r=a$时$\sigma_r=0$，由前例中的式（e）得

$$2k-k\pi=\text{const}$$

前例中的式（e）减去上式，由于是在同一条滑移线上，故有

$$\sigma_r=2k\ln\frac{r}{a}$$

再由屈服条件可得

$$\sigma_\theta=2k\ (1+\ln\frac{r}{a})$$

本例中的极限载荷可以通过以下积分求出：

$$P=2\times 2k\int_a^{a+h}(1+\ln\frac{r}{a})\,dr$$

$$=4k[r\ (\ln r-\ln a)\ ]_a^{a+h}$$

$$=4k(a+h)\ln\frac{a+h}{a}$$

设有圆弧切口的板条的极限载荷为

$$P^*=4kh$$

两种情况的极限载荷的比值为

$$\frac{P}{P^*}=\ (1+\frac{a}{h})\ \ln\ (1+\frac{h}{a})$$

例3：已知中心角为$2\gamma_1$的圆弧形楔体，在外力P作用下，插入具有相同圆弧的切口内(图6-29)。若楔体与圆弧切口之间无摩擦力作用，楔体的厚度为1，试求此情况下的极限载荷。

解：在圆弧附近，滑移线场由对数螺线构成。在圆弧上的A点，OA与y轴的夹角为γ，这时在A点有

$$\theta=-\ -\frac{\pi}{4}+\gamma,\quad \varphi=\gamma+\frac{\pi}{2},\quad \theta-\varphi=-\frac{3}{4}\pi$$

由式（6-27）的第一式可得

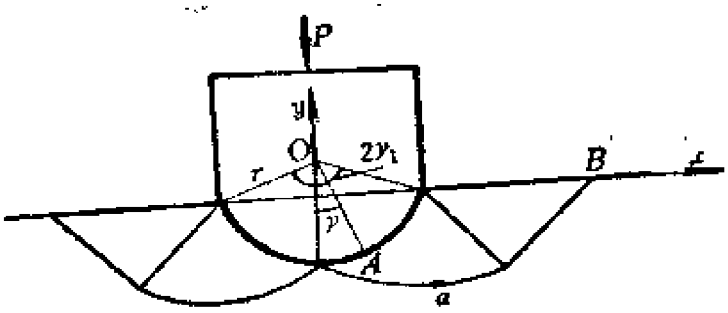


图6－29　圆弧形楔体的压入

$$\sigma=\sigma_x+k\sin 2\left(-\frac{3}{4}\pi\right)=-q\ (\gamma)+k$$

式中$q\ (\gamma)$为圆弧上的压应力。

在B点，由于是自由边，故$\sigma_x=0$，$\theta=-\frac{\pi}{4}$，$\varphi=-\frac{\pi}{2}$，因此平均应力为

$$\sigma=k\sin 2\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-k$$

根据亨奇应力方程有

$$-q\ (\gamma)+k-2k\left(-\frac{\pi}{4}+\gamma\right)=-k-2k\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

即

$$q\ (\gamma)=2k\left(1+\frac{\pi}{2}-\gamma\right)$$

由上式看出$q\ (\gamma)$随角度γ的变化而变化，通过积分便可求得极限载荷P，即

$$P=2\int_0^{\gamma_1}q\ (\gamma)\cos\gamma\cdot 1\cdot r\mathrm{d}\gamma$$

$$=4kr\left[\left(1+\frac{\pi}{2}-\gamma_1\right)\sin\gamma_1-\cos\gamma_1+1\right]$$

§6-7 应力间断解

采用理想塑性材料模型分析问题时，由于塑性区受力状况不同，所以应力组合有可能达到正的σ_s而进入屈服状态，也有可能达到负的σ_s而进入屈服状态。于是两个塑性区连在一起时，便可能出现应力间断。若这时能满足力的边界条件、平衡条件，而且不破坏屈服条件，则所获得的解仍是静力容许的。在间断面上，为了满足平衡条件，应力σ_n和τ_n不允许间断，但平行于间断面的正应力σ_t允许间断，因为这并不破坏平衡条件。

设在xy平面坐标中，L为间断面，间断面的法线与x轴的夹角为ψ，间断面两侧的正应力为σ_n^+、σ_t^+以及σ_n^-、σ_t^-，而剪应力为τ_n^+和τ_n^-，如图6-30所示。

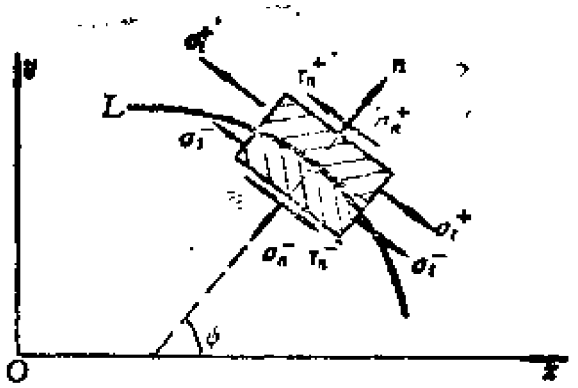


图6-30 应力间断

由平衡条件有

$$\sigma_n^+ = \sigma_n^-, \quad \tau_n^+ = \tau_n^-$$

由屈服条件

$$(\sigma_t - \sigma_n)^2 + 4\tau_n^2 = 4k^2$$

可得

$$\sigma_1^{\pm} = \sigma_n \pm 2\sqrt{k^2 - \tau_n^2}$$

因此σ_1的间断值为

$$\sigma_1^+ - \sigma_1^- = 4\sqrt{k^2 - \tau_n^2} \tag{6-36}$$

平均应力为

$$\sigma^{\pm} = \frac{\sigma_1 + \sigma_n}{2} = \sigma_n \pm \sqrt{k^2 - \tau_n^2}$$

因此平均应力的间断值为

$$\sigma^+ - \sigma^- = 2\sqrt{k^2 - \tau_n^2} \tag{6-37}$$

由式（6-36）和(6-37)可见，一旦τ_n的值确定后，σ_1和σ的间断值都将是常数。在间断面上的正应力σ_n和剪应力τ_n可用下式表示：

$$\sigma_n = \sigma - k\sin 2(\theta - \psi)$$
$$\tau_n = k\cos 2(\theta - \psi)$$

式中，ψ为应力间断面的法线与x轴的夹角。间断面两侧的θ角分别用θ^+和θ^-表示。根据力的连续条件，应有

$$\left.\begin{aligned} \sigma^+ - k\sin 2(\theta^+ - \psi) &= \sigma^- - k\sin 2(\theta^- - \psi) \\ k\cos 2(\theta^+ - \psi) &= k\cos 2(\theta^- - \psi) \end{aligned}\right\} \tag{6-38}$$

由上式的第一式可得平均应力的间断值为

$$\sigma^+ - \sigma^- = k[\sin 2(\theta^+ - \psi) - \sin 2(\theta^- - \psi)]$$

由式（6-38）的第二式可得

$$\cos 2(\theta^+ - \psi) = \cos 2(\theta^- - \psi)$$

即

$$2(\theta^+ - \psi) = \pm[2(\theta^- - \psi) + 2m\pi]$$
$$\theta^+ - \psi = \pm(\theta^- - \psi) \pm m\pi \tag{6-39}$$

在上式中，若取正号，则得

$$\theta^+ = \theta^- + m\pi$$

这时将不出现应力间断。若取负号，则有

$$\theta^+ - \psi = -\theta^- + \psi - m\pi$$

或

$$\theta^- = -\theta^+ + 2\psi - m\pi$$

这时有

$$\begin{aligned}\sigma^- &= \sigma_0 + k\sin 2(\theta^- - \psi)\\ &= \sigma_0 + k\sin 2(-\theta^+ + 2\psi - m\pi - \psi)\\ &= \sigma_0 + k\sin[-2(\theta^+ - \psi + m\pi)]\\ &= \sigma_0 - k\sin 2(\theta^+ - \psi)\end{aligned}$$

于是可得

$$\sigma^+ - \sigma^- = 2k\sin 2(\theta^+ - \psi) \qquad (6\text{-}40)$$

利用式（6-40）可以求出应力间断问题的解。

例1：设有一锐角单边受压的楔体，顶角为2γ(图6-31)。试求此楔体所能承受的均布极限载荷q。

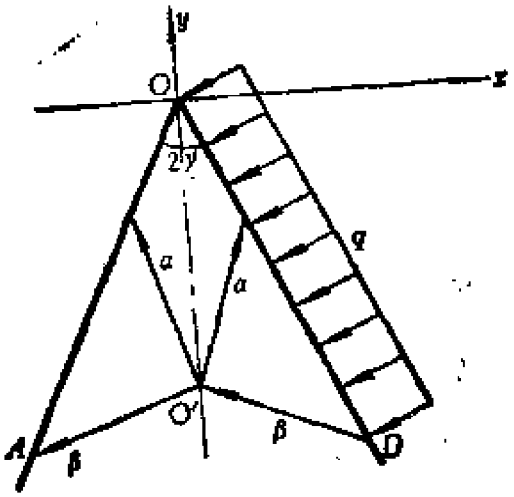


图6-31　锐角楔体

解：取楔体顶点O为坐标原点，过O点的横轴为x轴，纵轴为y轴。利用前述确定α线的方法，首先画出OD边上的α线。设OD边上的α线与x轴的夹角为θ^+，则由几何关系可得

$$\theta^+ = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + \gamma = -\frac{3\pi}{4} + \gamma$$

$$\psi^+ = \gamma$$

平均应力σ^+为

$$\sigma^+=\sigma_m+k\sin 2(\theta^+-\varphi^+)=-q+k \qquad (a)$$

设OA边上的α线与x轴的夹角为θ^-，则由几何关系可得

$$\theta^-=-\left(\frac{\pi}{4}+\gamma\right)$$

$$\varphi^-=\pi-\gamma$$

平均应力σ^-为

$$\sigma^-=\sigma_m+k\sin 2(\theta^--\varphi^-)$$

$$=0+k\sin\left(-\frac{5}{2}\pi\right)$$

$$=-k \qquad (b)$$

将式（a）、（b）代入式（6-10），并考虑到间断线OO'的法线与x轴重合，即$\gamma=0$，于是可得

$$-q+2k=2k\sin 2\left(-\frac{3}{4}\pi+\gamma\right)$$

$$=2k\cos 2\gamma$$

即

$$q=2k(1-\cos 2\gamma)$$

当$2\gamma=-\frac{\pi}{2}$时，即对于直角楔体，有

$$q=2k$$

这一结果与§6-5中求得的结果完全一样。

§6-8 塑性区中的速度场

了解变形材料中每点的变形路径，对许多工艺过程都是十分重要的。变形材料的流动方式可以通过实验方法确定，也可以通过理论分析方法确定。材料的变形速度都以塑性流动理论为基础

进行分析。塑性流动理论假设存在如下比例关系式：

$$\frac{\dot{\varepsilon}_x}{s_x}=\frac{\dot{\varepsilon}_y}{s_y}=\frac{\dot{\varepsilon}_z}{s_z}=\frac{\dot{\gamma}_{xy}}{2\tau_{xy}}=\frac{\dot{\gamma}_{yz}}{2\tau_{yz}}=\frac{\dot{\gamma}_{zx}}{2\tau_{zx}}=\dot{\lambda} \tag{6-41}$$

在图6-32中，设点P沿x、y方向的位移速度为v_x和v_y，沿滑移线α和β方向的位移速度为v_α和v_β。v_α、v_β与v_x、v_y之间须满足如下关系式：

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_\alpha\cos\theta - v_\beta\sin\theta \\ v_y &= v_\alpha\sin\theta + v_\beta\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{6-42}$$

应力偏量s_x与应变速度$\dot{\varepsilon}_x$分别为

$$s_x=\sigma_x-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2},\qquad \dot{\varepsilon}_x=\frac{\partial v_x}{\partial x}$$

由式（6-11）可得

$$s_x=-k\sin2\theta$$

因此由式（6-41）可得

$$\dot{\lambda}=\frac{\dfrac{\partial v_x}{\partial x}}{s_x}=\frac{\dfrac{\partial v_\alpha}{\partial x}\cos\theta-v_\alpha\sin\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial x}-\dfrac{\partial v_\beta}{\partial x}\sin\theta-v_\beta\cos\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial x}}{-k\sin2\theta} \tag{6-43}$$

当$\theta=0$时、$\dot{\lambda}$为有限值的条件是

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial x}-v_\beta\frac{\partial\theta}{\partial x}=0$$

用相同的方法可得

$$\frac{\partial v_\beta}{\partial y}+v_\alpha\frac{\partial\theta}{\partial y}=0$$

由于在α线上$dy=0$，在β线上$dx=0$，因此有

$$\left.\begin{aligned} dv_\alpha-v_\beta d\theta&=0 \qquad (\text{沿}\alpha\text{线}) \\ dv_\beta+v_\alpha d\theta&=0 \qquad (\text{沿}\beta\text{线}) \end{aligned}\right\} \tag{6-44}$$

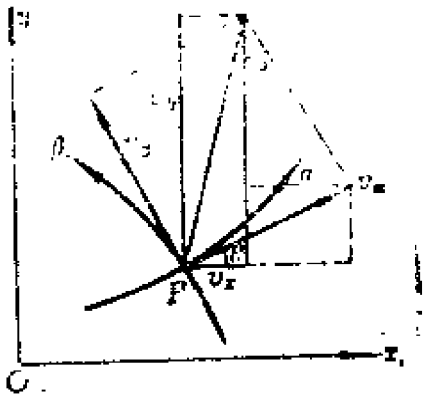


图6－32　速度场的变换关系

上式为在α线和β线上速度增量应满足的关系式，它是盖林格(H. Geiringer)在1930年首先导出的，故又称盖林格速度方程式，其几何意义如图6-33所示。图中，滑移线上A点的速度分量

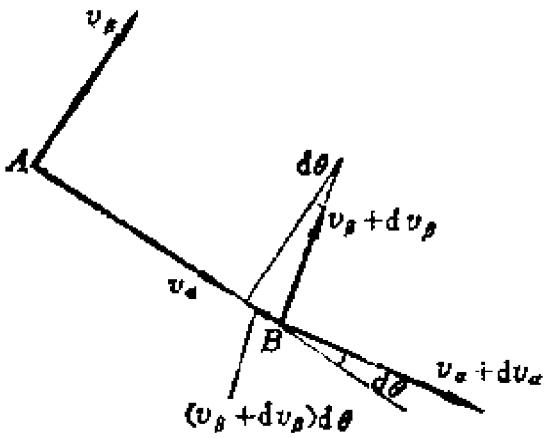


图6－33　沿滑移线速度分量的增量

是v_α和v_β。当A点移至B点后，速度分量相应增加到$v_\alpha+dv_\alpha$和$v_\beta+dv_\beta$。将速度分量投影到直线AB上，并略去高阶微量，则得

$$dv_\alpha - v_\beta d\theta = 0$$

例1：试求平冲头压入半无限体时的速度场。

解：设滑移线场如图6-34所示(普朗特场)，冲头下的压力均匀分布。当外载荷q达到极限值时，塑性区将产生运动。冲头的刚度足够大，在加载过程中可当作刚体。

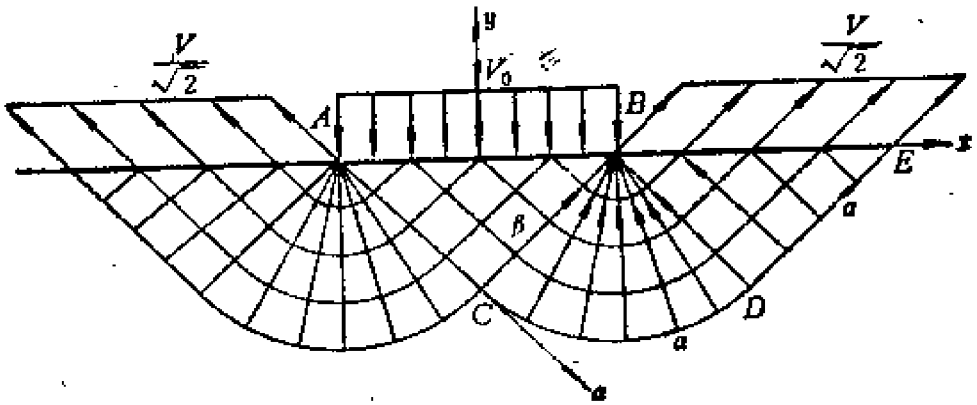


图6－34　平冲头压入时的速度场（普朗特解）

在图6-34中，A、B、C点是速度场的奇异点。在C点以下质点的位移速度为零，而在C点以上质点以速度V向下运动。在C点以上有如下关系式：

$$v_x=v_\alpha\cos\vartheta-v_\beta\sin\vartheta=0$$

$$v_y=v_\alpha\sin\vartheta+v_\beta\cos\vartheta=-V$$

在C点 $\theta_C=-\frac{\pi}{4}$，因此有

$$\frac{1}{\sqrt{2}}v_\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}v_\beta=0$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}v_\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}v_\beta=-V$$

由以上两式可得$\triangle ABC$内的速度分量为

$$v_\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}V,\quad v_\beta=-\frac{1}{\sqrt{2}}V$$

沿BC线的切向速度分量是不连续的，在其左侧$v_\beta=-\frac{V}{\sqrt{2}}$，而在其

不难$v_\beta=0$。但沿BC线的法向速度分量应该连续，即在BC线上应有$v_\alpha=\frac{V}{\sqrt{2}}$。由于在扇形区域$BCD$中，$\beta$线是直线族，$d\theta=0$，所以$dv_\beta=0$，即$v_\beta=\text{const}=0$。在$\triangle BDE$中，滑移线场是由两族正交直线组成的，故$d\theta=0$，于是有

$$dv_\alpha-v_\beta d\vartheta=dv_\alpha=0,\quad v_\alpha=\text{const}=\frac{1}{\sqrt{2}}V$$

$$dv_\beta+v_\alpha d\vartheta=dv_\beta=0,\quad v_\beta=\text{const}=0$$

后求得

在$\triangle ABC$中，$v_\alpha=\frac{V}{\sqrt{2}}$，$v_\beta=-\frac{V}{\sqrt{2}}$

在扇形BCD中，$v_\alpha=\frac{V}{\sqrt{2}}$，$v_\beta=0$

在$\triangle BDE$中，$v_\alpha=\frac{V}{\sqrt{2}}$，$v_\beta=0$

由于以上解法是由普朗特首先提出的，故称为普朗特解。

又设滑移线场如图6-35所示，这是希尔（R·Hill）给出的。

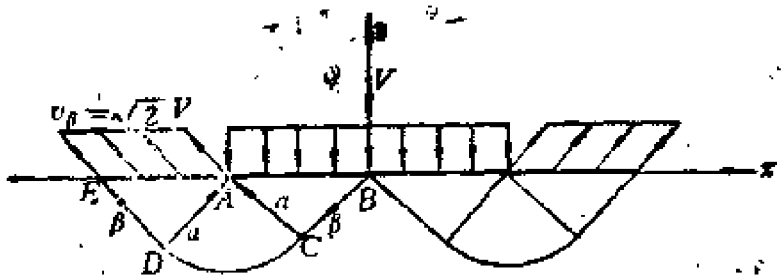


图6－35　平冲头压入时的速度场（希尔解）

冲头向下移动的速度为$v_y=-V$，在$\triangle ABC$中，$v_\alpha=0$，$\theta=\frac{3}{4}\pi$，于是由

$$v_x=v_\alpha\cos\vartheta-v_\beta\sin\theta$$

$$v_y=v_\alpha\sin\vartheta+v_\beta\cos\theta$$

可得

$$v_x=-v_\beta\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}v_\beta$$

$$v_y=v_\beta\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}v_\beta=-V$$

即在$\triangle ABC$中，$v_\beta=\sqrt{2}V$，$v_\alpha=0$。

利用式（6-44）可求得

在$\triangle ABC$中，$v_\alpha=0$，$v_\beta=\sqrt{2}V$

在扇形ACD中，$v_\alpha=0$，$v_\beta=\sqrt{2}V$

在$\triangle ADE$中，$v_\alpha=0$，$v_\beta=\sqrt{2}V$

对比普朗特解和希尔解可见，在不同的滑移线场中，速度场是不相同的，这正是刚塑性材料模型的特点，但用这两种不同的滑移线场所求得的极限载荷却完全一样。在这两种解中，希尔解比较合理，因为在到达普朗特滑移线场之前，已经到达希尔滑移线场，这时便已产生塑性流动。

§6-9 用差分法建立滑移线场

在工程中，当问题比较复杂时，可以利用差分法建立滑移线场。根据给出的边界条件，可将问题分为如下四类：

（1）初始值问题；

（2）特征值问题；

（3）特征值的奇异点问题；

（4）混合问题。

以上四类问题都需要按不同的方法建立滑移线场，现分别加以叙述。

一、初始值问题

设在所研究的区域D的边界L上给出了σ和θ。为了确定应力状态，在图6-36上取两个点，即点$(a-1,\ b)$和点$(a,\ b-1)$，根据亨奇应力方程可以求出点$(a,\ b)$上的σ值和θ值。

亨奇应力方程为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{(a,b)} - 2k\theta_{(a,b)} &= \sigma_{(a,b-1)} - 2k\theta_{(a,b-1)} \\ \sigma_{(a,b)} + 2k\theta_{(a,b)} &= \sigma_{(a-1,b)} + 2k\theta_{(a-1,b)}\end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}45)$$

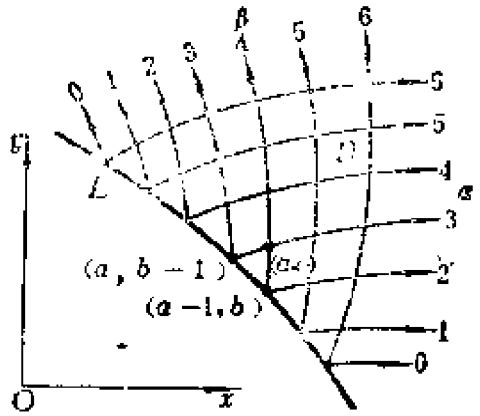


图6－36　初始值问题

从上式便可解出

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{(a,b)} &= \frac{1}{2}\left[\sigma_{(a,b-1)} + \sigma_{(a-1,b)}\right] - k\left[\theta_{(a,b-1)} - \theta_{(a-1,b)}\right] \\ \theta_{(a,b)} &= -\frac{1}{4k}\left[\sigma_{(a,b-1)} - \sigma_{(a-1,b)}\right] + \frac{1}{2}\left[\theta_{(a,b-1)} + \theta_{(a-1,b)}\right]\end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}46)$$

于是可求出（a，b）点的应力状态，即

$$\sigma_{x(a,b)} = \sigma_{y(a,b)} - k\sin 2\theta_{(a,b)}$$

$$\sigma_{(a,b)} = \sigma_{(a,b)} + k\sin 2\theta_{(a,b)}$$

$$\tau_{xy(a,b)} = k\cos 2\theta_{(a,b)}$$

用相同的方法可以求出$a=1$　2、3、…，$b=1$、2、3、…各点的应力。

为了确定（a，b）点的坐标，取如下公式（图6-37）：

$$-\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta \text{（沿}\alpha\text{线）}，\qquad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg}\theta \text{（沿}\beta\text{线）}$$

由此可得

$$\left.\begin{aligned} y_{(a,b)} - y_{(a,b-1)} &= [x_{(a,b)} - x_{(a,b-1)}]\operatorname{tg}\theta_{(a,b-1)} \\ y_{(a,b)} - y_{(a-1,b)} &= -[x_{(a,b)} - x_{(a-1,b)}]\operatorname{ctg}\theta_{(a-1,b)} \end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}47)$$

根据以上两个差分方程式，可以解出未知数$y_{(a,b)}$和$x_{(a,b)}$。这一方法称为切线法，求得的是图6-37中的点（a'，b'）。

为了提高计算精度，再采用割线法确定（a，b）点的坐标。先由公式

$$\left.\begin{aligned} & y_{(a,b)} - y_{(a,b-1)} \\ &= [x_{(a,b)} - x_{(a,b-1)}]\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\theta_{(a,b)} + \theta_{(a,b-1)}) \\ & y_{(a,b)} - y_{(a-1,b)} \\ &= -[x_{(a,b)} - x_{(a-1,b)}]\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\theta_{(a,b)} + \theta_{(a-1,b)}) \end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}48)$$

求出未知数$x_{(a,b)}$和$y_{(a,b)}$，并将这一点的坐标用（a''，b''）表示，然后将切线法求得的坐标（a'，b'）与（a''，b''）连接起来，取其中点作为点（a，b），如图6-38所示。

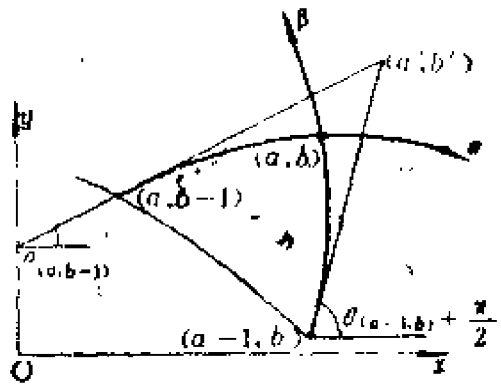


图6-37　速度场的切线法

如果在边界上给定了v_α和v_β，则可根据盖林格方程写出如下差分方程式：

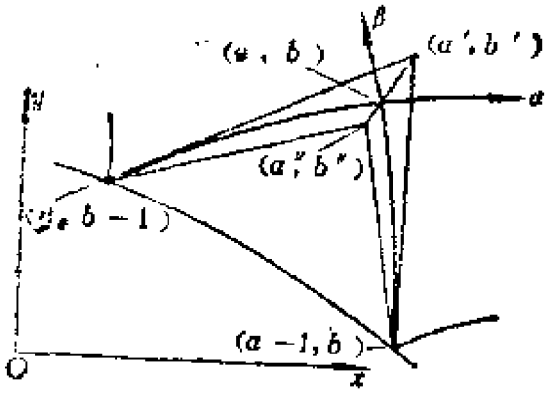


图6-38 速度场的剃线法

$$\left.\begin{aligned} &v_{\alpha(a,b)} - v_{\alpha(a,b-1)} - \\ &\frac{1}{2}\left[v_{\beta(a,b)} + v_{\beta(a,b-1)}\right]\left[\theta_{(a,b)} - \theta_{(a,b-1)}\right] = 0 \\ &v_{\beta(a,b)} - v_{\beta(a-1,b)} + \\ &\frac{1}{2}\left[v_{\alpha(a,b)} + v_{\alpha(a-1,b)}\right]\left[\theta_{(a,b)} - \theta_{(a-1,b)}\right] = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}49)$$

上式中$v_{\alpha(a,b)}$及$v_{\beta(a,b)}$为未知量，其余为边界上的已知量。利用这一方法可以算出整个区域中的速度场。

二、特征值问题

若已知两相交滑移线上的应力分量和位移分量，则可求出区域D中的应力场和位移场（图6-39）。

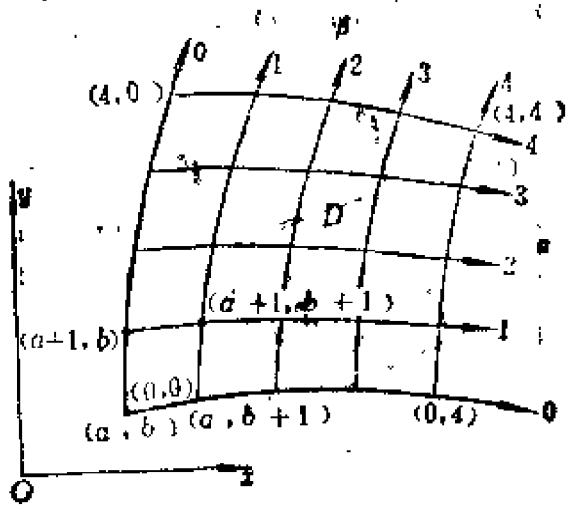


图6-39 特征值 题

在两相交滑移线上，只要知道（0，0）点的应力便可以了，其余各点的应力可以通过亨奇应力方程求出，即

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{(0,1)}-2k\theta_{(0,1)}&=\sigma_{(0,0)}-2k\theta_{(0,0)}\\ \sigma_{(1,0)}+2k\theta_{(1,0)}&=\sigma_{(0,0)}+2k\theta_{(0,0)}\end{aligned}\right\}\quad(6\text{-}50)$$

又由

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{(a+1,b+1)}-2k\theta_{(a+1,b+1)}&=\sigma_{(a+1,b)}-2k\theta_{(a+1,b)}\\ \sigma_{(a+1,b+1)}+2k\theta_{(a+1,b+1)}&=\sigma_{(a,b+1)}+2k\theta_{(a,b+1)}\end{aligned}\right\}(6\text{-}51)$$

可以求出未知量$\sigma_{(a+1,b+1)}$和$\theta_{(a+1,b+1)}$，然后由下式算出（$a+1,b+1$）点的应力：

$$\sigma_{x(a+1,b+1)}=\sigma_{(a+1,b+1)}-k\sin 2\theta_{(a+1,b+1)}$$

$$\sigma_{y(a+1,b+1)}=\sigma_{(a+1,b+1)}+k\sin 2\theta_{(a+1,b+1)}$$

$$\tau_{xy(a+1,b+1)}=k\cos 2\theta_{(a+1,b+1)}$$

按照这一方法可以求出域中各点的应力。而点的坐标同前面一样可按切线法与割线法求出。切线法的公式为

$$\left.\begin{aligned}y_{(a+1,b+1)}-y_{(a+1,b)}&=[x_{(a+1,b+1)}-x_{(a+1,b)}]\operatorname{tg}\theta_{(a+1,b)}\\ y_{(a+1,b+1)}-y_{(a,b+1)}&=-[x_{(a+1,b+1)}-x_{(a,b+1)}]\operatorname{ctg}\theta_{(a,b+1)}\end{aligned}\right\}\quad(6\text{-}52)$$

利用这一公式可以求出未知量$y_{(a+1,b+1)}$、$x_{(a+1,b+1)}$，该点用（$a'+1$，$b'+1$）表示（图6-40）。而割线法的公式是

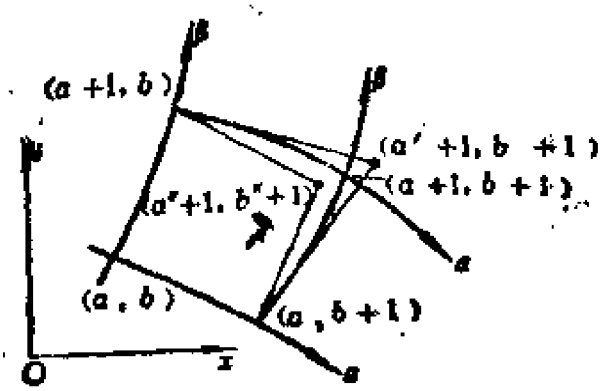


图6-40 速度场的割线法

$$
\left.\begin{aligned}
y_{(a+1,b+1)}-y_{(a+1,b)}&=[x_{(a+1,b+1)}-\\
&\quad x_{(a+1,b)}]\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\theta_{(a+1,b+1)}+\theta_{(a+1,b)})\\
y_{(a+1,b+1)}-y_{(a,b+1)}&=-[x_{(a+1,b+1)}-\\
&\quad x_{(a,b+1)}]\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\theta_{(a+1,b+1)}+\theta_{(a,b+1)})
\end{aligned}\right\}\qquad(6\text{-}53)
$$

利用上式求出$y_{(a+1,b+1)}$和$x_{(a+1,b+1)}$，该点用$(a''+1,\ b''+1)$表示（图6-40）。取点$(a'+1,\ b'+1)$与点$(a''+1,\ b''+1)$连线的中点作为点$(a+1,\ b+1)$。

位移场由如下差分方程计算：

$$
\left.\begin{aligned}
v_{\alpha(a+1,b+1)}-v_{\alpha(a+1,b)}-\frac{1}{2}[v_{\beta(a+1,b+1)}+\\
v_{\beta(a+1,b)}][\theta_{(a+1,b+1)}-\theta_{(a+1,b)}]=0\\
v_{\beta(a+1,b+1)}-v_{\beta(a,b+1)}+\frac{1}{2}[v_{\alpha(a+1,b+1)}+\\
v_{\alpha(a,b+1)}][\theta_{(a+1,b+1)}-\theta_{(a,b+1)}]=0
\end{aligned}\right\}\qquad(6\text{-}54)
$$

上式中，未知量是$v_{\alpha(a+1,b+1)}$和$v_{\beta(a+1,b+1)}$，其余为边界上的已知量。

三、特征值的奇异点问题

特征值的奇异点是指一族滑移线都通过一个点，从而形成一个滑移线束，如图6-41所示。在这一点，另一族的一条滑移线退化为一个点。这种问题在实际中经常遇到，特别是当载荷间断时。

设α族滑移线都通过奇异点（0，0），在a_0上给出了σ和θ，在点（0，0）给出了$\Delta\theta$。首先将$\Delta\theta$分成相等的n个角，

$$
\delta\theta=\frac{1}{n}\Delta\theta\qquad(6\text{-}55)
$$

由于$\theta_{(a,b)}$是已知的，所以其余的角可按下式计算：

$$\theta_{(a+n,b)} = \theta_{(a,b)} + n\delta\theta$$

按照滑移线场的性质可以写出如下关系式：

$$\theta_{(a+n,b+1)} - \theta_{(a+n-1,b+1)} = \theta_{(a+n,b)} - \theta_{(a+n-1,b)} \qquad (6\text{-}56)$$

式中，$n = 1、2、3\cdots$。式（6-56）的右侧可以写为

$$\theta_{(a+n,b)} - \theta_{(a+n-1,b)} = \delta\theta_n$$

因$\Delta\theta$角被等分，故$\delta\theta_n = \delta\theta$。因为$\theta_{(a+n-1,b+1)}$已知，所以由式（6-56）便可求出$\theta_{(a+n,b+1)}$。利用同样的方法可以求出其它点处的$\theta$值，在滑移线$\alpha_0$上已知$\sigma$值，于是可按滑移线场的性质求出其它点处的$\sigma$值，即

$$\sigma_{(a+n+1,b+1)} + 2k\theta_{(a+n+1,b+1)} = \sigma_{(a+n,b+1)} + 2k\theta_{(a+n,b+1)}$$

在（0，0）点，σ为未定值，因此这一点的应力状态是不定的。超过奇异点后，便可按前面给出的计算特征值的方法算出相应的应力和位移。

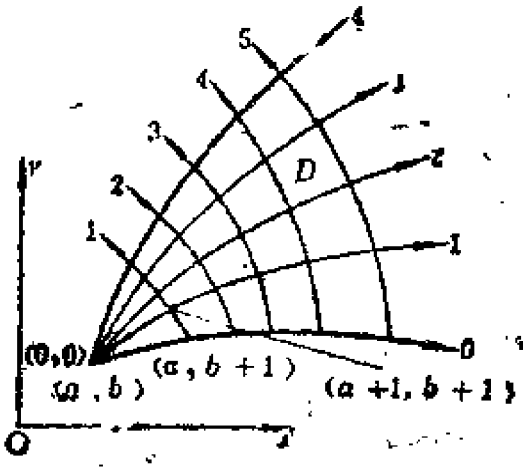


图6-41 奇异点问题

计算位移时，需要知道边界滑移线上的v_α和v_β，按计算特征值的方法，利用盖林格公式便可算出整个区域的速度场。

四、混合问题

若一部分已知量是在滑移线上给出的，而另一部分已知量是

在非滑移线的物理边界上给出的，则称这类问题为混合问题。

在图6-42中，设在α_0滑移线上给出了σ、θ以及速度分量v_x，而在L线上给出了$y=f(x)$、θ以及$F(v_x, v_y)=0$，便可求出区域D内的θ、σ、节点坐标以及位移速度场。做法如下。

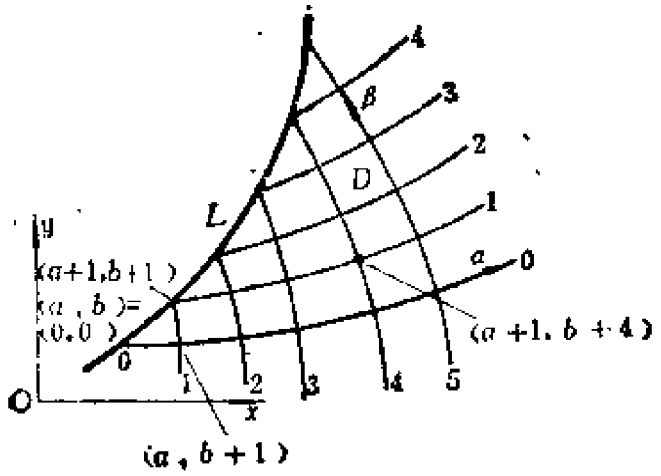


图6-42 混合问题

首先确定节点$(a+1, b+1)$处的σ。在点$(a+1, b+1)$处θ是已知的，由亨奇应力方程

$$\sigma_{(a+1,b+1)}+2k\theta_{(a+1,b+1)}=\sigma_{(a,b+1)}+2k\theta_{(a,b+1)}$$

可以直接算出$\sigma_{(a+1,b+1)}$。同样可以算出L线上各点的σ值。由于有了两族特征线，因而又可以按照前面的方法确定区域D内各点的θ和σ值。

边界L上的节点坐标可以由通过这些节点的β滑移线来确定。例如对于节点$(a+1, b+1)$，有如下关系式：

$$y_{(a+1,b+1)}-y_{(a,b+1)}$$

$$=-[x_{(a+1,b+1)}-x_{(a,b+1)}]\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\theta_{(a+1,b+1)}+\theta_{(a,b+1)})$$

$$y_{(a+1,b+1)}=f[x_{(a+1,b+1)}]$$

解出以上方程式便可求出节点$(a+1, b+1)$的坐标值。

位移速度由节点 (a, b) 开始计算。在此节点处，v_α、v_β 可由下式计算：

$$F[v_{\alpha(a,b)},\ v_{\beta(a,b)}] = 0$$

上式在边界 L 上是已知的。然后沿边界 α_0 计算 v_α：

$$v_{\alpha(a,b+1)} = \int v_{\beta(a,b+1)} d\theta + C_\alpha$$

式中，常数 C_α 通过节点 (a, b) 处的 v_α 和 v_β 来确定。节点 $(a+1, b+1)$ 处的位移速度利用通过这一点的 β 滑移线来确定，即

$$v_{\beta(a+1,b+1)} - v_{\beta(a,b+1)} + \frac{1}{2}[v_{\alpha(a+1,b+1)} + v_{\alpha(a,b+1)}][\theta_{(a+1,b+1)} - \theta_{(a,b+1)}] = 0$$

$$F[v_{\alpha(a+1,b+1)},\ v_{\beta(a+1,b+1)}] = 0$$

解出以上方程式便可求得 $v_{(a+1,b+1)}$ 和 $v_{\beta(a+1,b+1)}$。区域 D 中的位移速度场可按求特征值问题的方法进行求解。由以上分析可知，只有在滑移线的初始点处需要按混合问题进行求解。

习　题

6-1　图6-43所示半圆弧凸模作用于形状相同的凹模中，设模具的厚度为1，试求极限载荷 P（设模具处于平面应变状态）。

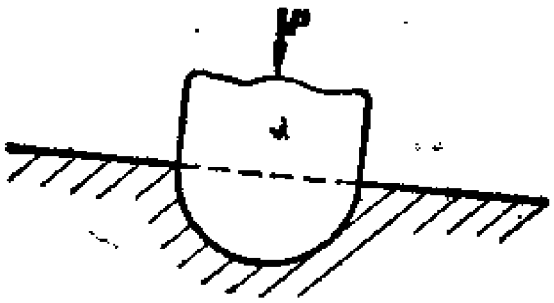


图6-43　半圆弧凸模的压入

6-2　已知顶部削平的模体的受力状态如图6-44所示，试求极限载荷

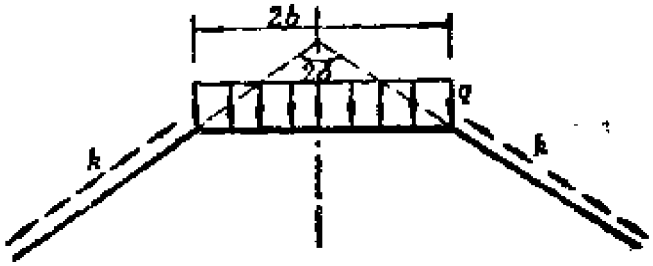


图6－44　顶部削平的楔体的压入

6-3　已知图6-45所示的半无限平面，受均布载荷q和剪应力k作用，试求极限载荷q。

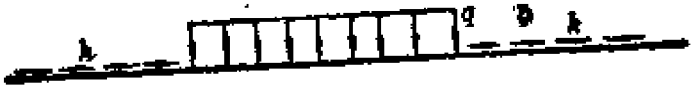


图6－45　平冲头压入

6-4　已知具有半圆形切口的板条受外力P作用，如图6-46所示。设a为圆弧半径，$2h$为板条的宽度，试求当滑移线场只由对数螺线组成时，$\frac{h}{a}$的最大值，并求出此时板条所能承受的极限载荷。

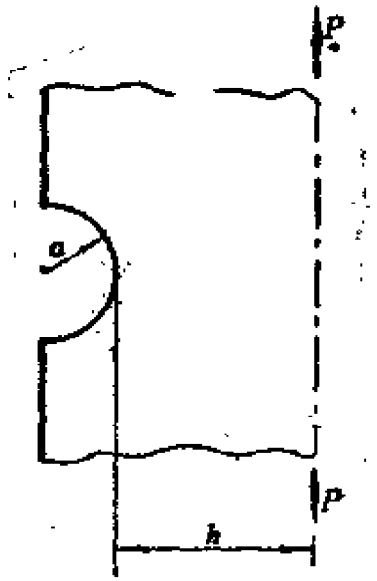


图6－46　具有半圆形切口的板条

6-5　板条在图6-47所示的楔形模中受挤压。若板条的初始厚度为 H，通过模孔后厚度减小到 h，缩减比为

$$r=\frac{H-h}{H}=\frac{2\sin\alpha}{1+2\sin\alpha}$$

试求作用于模上的压力以及挤压力 p 的表达式。

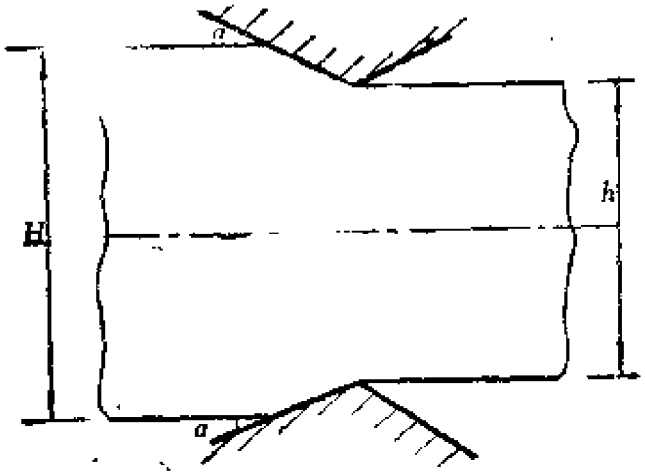


图6－47　板条的挤压

第七章 界 限 法

§7-1 一 般 概 念

由于塑性力学中的物理关系是非线性的，因此在解题时往往遇到许多数学上的困难，不少工程问题都未获得精确的解，于是采用某些近似分析方法来研究这类问题便很有意义。

对于由理想塑性材料制成的构件或结构，当外载荷达到某一值时，既使载荷不再增加，塑性变形仍可继续增长，这种状态称为极限状态，而这种状态所对应的外载荷称为极限载荷。

若弹性变形比塑性变形小得多，则可将弹性变形略去不计，这时可认为材料是刚塑性的，即在外载荷未达到极限载荷前，物体完全没有变形，一旦产生变形，就是塑性变形，塑性变形的开始也就是极限状态的开始。

界限法分上、下限法，它是求解塑性极限载荷的有效方法。用下限法求解极限载荷时，完全不考虑变形的情况，只由静力方面的条件去分析。由于忽略了机动方面的要求，所以使分析大为简化，但这样求得的极限载荷比实际所能承受的载荷要小，最多和实际的极限载荷相等。而用上限法求极限载荷时，则完全不考虑静力方面（平衡方程、力的边界条件等）的要求，只根据所假设的变形机构，用内力功率和外力功率相等的原理求出极限载荷。用这种方法求出的极限载荷比实际的极限载荷要大，其最小值可以等于实际的极限载荷。由于在分析中忽略了静力方面的要求，因而计算过程也是比较简单的。当用上限法和下限法所求得

的极限载荷相等时，这个极限载荷才是真实解的极限载荷，而这时所假设的应力场和位移速度场是真实的应力场和位移速度场。由于这样的解满足塑性力学中的全部条件，因而称之为完全解。

用界限法求解塑性成形问题时，应先假设应力场或位移速度场。所假设的应力场应是静力容许的，即应满足平衡方程和力的边界条件，并且不违背屈服条件。而所假设的位移速度场应是机动容许的，即满足几何约束条件并能使外力作正功。用界限法分析问题时，尽管采用了许多简化假设，但在不少情况下，计算结果和实验结果符合得很好。由于这一方法简便易行，计算工作量小，所以在实际中得到了广泛的应用。所获得的分析结果对于设备选择、工艺设计及设备使用，都具有重要的参考价值。

下面介绍几个基本概念：

（1）间断问题

当采用理想塑性材料模型分析问题时，一般允许在某一平面上出现应力间断或位移间断，这样的平面称为应力间断面或位移间断面。这样的间断面可出现在塑性变形的区域中(图7-1)。若所出现的应力间断满足力的边界条件且不破坏平衡条件，则是静力容许的。

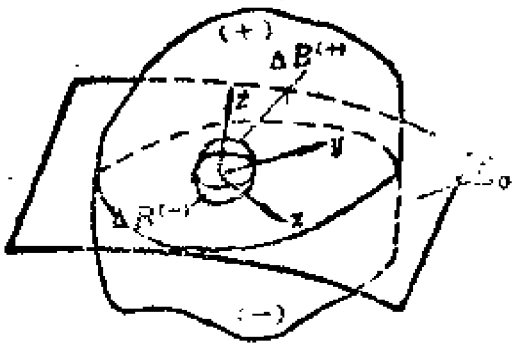


图7－1　应力间断面

在第六章中，我们已经讨论过应力间断的问题了。设在图

7-1上，物体B有应力间断面L_σ，它将物体分为两个部分，这两个部分分别用(+)和(-)来表示。在应力间断面上，取一个$Oxyz$坐标系，令z轴垂直于间断面。以坐标原点为中心取一小区域ΔB，间断面也将此小区域ΔB分为$\Delta B^{(+)}$和$\Delta B^{(-)}$，而应力状态分别是$\sigma_{ij}^{(+)}$和$\sigma_{ij}^{(-)}$。为了满足平衡条件，在间断面上的正应力和剪应力都应保持连续，只有平行于间断面的其它应力分量才允许有间断，因此有

$$\left.\begin{aligned}\tau_{zx}^{(+)} &= \tau_{zx}^{(-)}\\ \tau_{zy}^{(+)} &= \tau_{zy}^{(-)}\\ \sigma_{z}^{(+)} &= \sigma_{z}^{(-)}\end{aligned}\right\} \qquad (7-1)$$

下面再分析一下位移速度的间断问题。设在图7-2上，物体B中的位移速度间断面将物体分为两个部分，将这两个部分分别用（+）和（-）来表示。和前面的分析一样，也在位移速度间断面上取一个$Oxyz$坐标系，并令z轴垂直于这一间断面。间断面将O点的周围分成两个部分，即$\Delta B^{(+)}$和$\Delta B^{(-)}$。这两个部分分别以$u_i^{(+)}$和$u_i^{(-)}$的位移速度移动，但物体仍保持连续性，不产生裂纹和重叠。为了保持物体的连续性，垂直于速度间断面的位移速度应相等。令

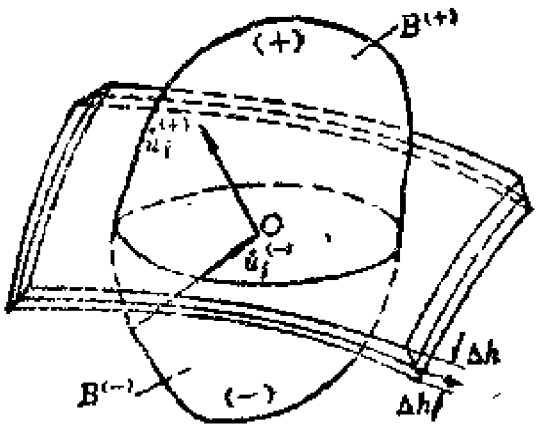


图7-2 位移速度间断面

$$\dot{u}^{(+)} = \dot{u}_i^{(+)} e_i, \quad \dot{u}^{(-)} = \dot{u}_i^{(-)} e_i \tag{7-2}$$

现要求

$$\dot{u}^{(+)} \cdot e_z = \dot{u}^{(-)} \cdot e_z \tag{7-3}$$

由此可得

$$\dot{u}_z^{(+)} = \dot{u}_z^{(-)} \tag{7-4}$$

上式中的e_z为单位向量。由此可知，在z方向的位移速度必须是连续的，而只有在间断面的切面上，才允许出现位移速度间断。间断值一般用如下形式表示：

$$[\dot{u}_i] = \dot{u}_i^{(+)} - \dot{u}_i^{(-)} \tag{7-5}$$

式中，$[\dot{u}_i]$称为位移速度间断值。在物理方面可认为位移速度间断面是厚度为$2\Delta h$的薄层（图7-2），在此薄层中，当$\Delta h \to 0$时位移速度值发生变化。

（2）耗散功率

耗散功率又称能量的耗散速率，它可以是内力在塑性位移速度场上所做功的功率，也可以是塑性材料在位移速度间断面上或工具粗糙面上移动时，内力所做功的功率。

塑性耗散功率是由应力场和塑性应变率场确定的。单位体积中的塑性耗散功率可用下式确定：

$$\dot{\omega}_p = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p$$

若在上式中，应力张量用下式表示：

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \sigma_0 \delta_{ij}$$

则有

$$\dot{\omega}_p = (s_{ij} + \sigma_0 \delta_{ij}) \dot{\varepsilon}_{ij}^p = s_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p + \sigma_0 \dot{\varepsilon}_{ii}^p$$

对于一般的金属材料，经常采用体积不可压缩假设，即取$\dot{\varepsilon}_{ii}^p = 0$。于是单位体积中的塑性耗散功率可用应力偏量和应变率张量来表示，即

$$\dot{w}_p = s_{ij}\dot{\varepsilon}^p_{ij} \tag{7-6}$$

由莱维-米泽斯理论，本构关系为

$$\dot{\varepsilon}^p_{ij} = \dot{\lambda} s_{ij}$$

式中，$\dot{\lambda} = \frac{3\dot{\bar{\varepsilon}}^p}{2\sigma_s} = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{1}{2}\dot{\varepsilon}^p_{ij}\dot{\varepsilon}^p_{ij}}$，为$k$材料的剪切屈服极限。

利用莱维-米泽斯本构关系，可将式（7-6）写成

$$\dot{w}_p = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}\dot{\varepsilon}^p_{ij}\dot{\varepsilon}^p_{ij}}}{k} s_{ij}s_{ij} \tag{7-7}$$

米泽斯屈服条件可以写为

$$\frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} = k^2$$

因此式（7-7）又可写成

$$\dot{w}_p = 2k\sqrt{\frac{1}{2}\dot{\varepsilon}^p_{ij}\dot{\varepsilon}^p_{ij}}$$

若令

$$\dot{\gamma} = 2\sqrt{\frac{1}{2}\dot{\varepsilon}^p_{ij}\dot{\varepsilon}^p_{ij}}$$

$$= \sqrt{2}\sqrt{(\dot{\varepsilon}^p_x)^2 + (\dot{\varepsilon}^p_y)^2 + (\dot{\varepsilon}^p_z)^2 + 2[(\dot{\varepsilon}^p_{xy})^2 + (\dot{\varepsilon}^p_{yz})^2 + (\dot{\varepsilon}^p_{zx})^2]}$$

则单位体积中的塑性耗散功率便可用如下形式表示：

$$\dot{w}_p = k\dot{\gamma}$$

材料的屈服极限σ_s可由单向拉伸试验确定。由米泽斯屈服条件有

$$k = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_s$$

因此式（7-7）又可写成

$$\dot{a}_p = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s \sqrt{\frac{1}{2}\dot{\varepsilon}^p_{ij}\,\dot{\varepsilon}^p_{ij}}$$

若用下式表示应变强度增量：

$$\dot{\varepsilon}^p_i = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\dot{\varepsilon}^p_{ij}\,\dot{\varepsilon}^p_{ij}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}}\left\{(\dot{\varepsilon}^p_x)^2 + (\dot{\varepsilon}^p_y)^2 + (\dot{\varepsilon}^p_z)^2 + 2\left[(\dot{\varepsilon}^p_{xy})^2 + (\dot{\varepsilon}^p_{yz})^2 + (\dot{\varepsilon}^p_{zx})^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

则单位体积中的塑性耗散功率便可表示为

$$\dot{w}_p = \sigma_i \dot{\varepsilon}^p_i \tag{7-8}$$

在体积为V的物体中，总耗散功率为

$$\dot{W}_p = \int_V \dot{w}_p \mathrm{d}V = \int_V \sigma_i \dot{\varepsilon}^p_i \mathrm{d}V$$

对于理想塑性材料，有

$$\dot{W}_p = \sigma_s \int_V \dot{\varepsilon}^p_i \mathrm{d}V \tag{7-9}$$

下面再来分析一下在位移速度间断面上的耗散功率。由式(7-5)，位移速度的间断量为

$$[\dot{u}_i] = \dot{u}_i^{(+)} - \dot{u}_i^{(-)}$$

由于其方向与间断面上的剪应力的方向一致，因而在单位面积间断面上的耗散功率将由材料的剪切屈服极限和位移速度间断量的乘积来表示（见图7-3），即

$$\dot{w}_s = k[\dot{u}]$$

在间断面上的总耗散功率为

$$W_s = \int_{L_s} \tau_s \mathrm{d}L_s = \int_{L_s} k\,[\dot{u}]\mathrm{d}L_s \qquad (7\text{-}10)$$

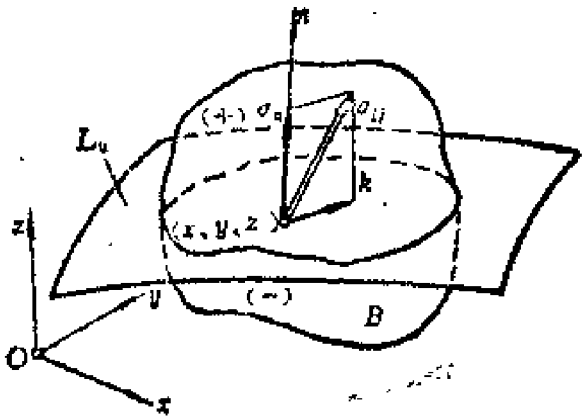


图7-3 位移速度间断面上的耗散功率

和塑性材料相接触的模具表面也是间断面。一般情况下，它们是速度间断面。接触面上的剪应力由正应力和摩擦系数确定（图7-4），即

$$\tau_s = \nu\sigma_s$$

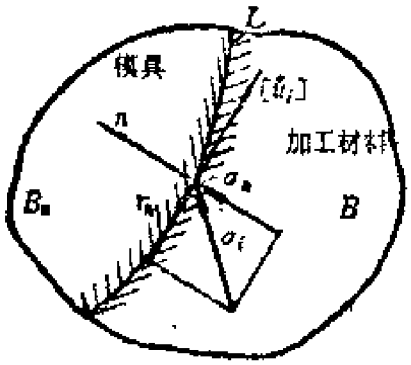


图7-4 模具表面上的耗散功率

式中ν为接触表面的摩擦系数。模具表面的粗糙系数和摩擦系数

的概念是类似的，因为它们都描述相似的物理现象。模具表面的粗糙性用粗糙系数m来描述，这一系数介于0和1之间。当表面理想光滑时，$m=0$；而当表面理想粗糙时，$m=1$。对于理想粗糙表面，材料粘附于其上，于是在塑性变形过程中，模具表面上的剪应力等于材料的剪切屈服极限。若使用粗糙系数的概念，则在模具表面上的剪应力用下式表示：

$$\tau_s = mk$$

于是单位面积模具表面上的耗散功率为

$$\dot{w}_s = mk|\Delta\dot{u}| \tag{7-11}$$

模具表面上的总耗散功率为

$$\dot{W}_s = \int_L mk|\Delta\dot{u}|\mathrm{d}L \tag{7-12}$$

§7-2 极值定理

极限分析的两个基本定理就是上限定理和下限定理。为了证明上、下限定理，首先需要证明虚功率原理。

设变形体内部的受力状态满足平衡方程

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0$$

式中，f_i为单位体积力。表面力q_i为

$$q_i = \sigma_{ij}n_j$$

式中，n_j为表面外法线的方向余弦。设物体B由表面S包围（图7-5），其内部有间断面L。整个表面S分为给定力的边界S_σ和给定位移的边界S_u。外力所做功的功率可用下式表示：

$$\dot{W}_e = \int_S q_i\dot{u}_i\mathrm{d}S + \int_V f_i\dot{u}_i\mathrm{d}V \tag{7-13}$$

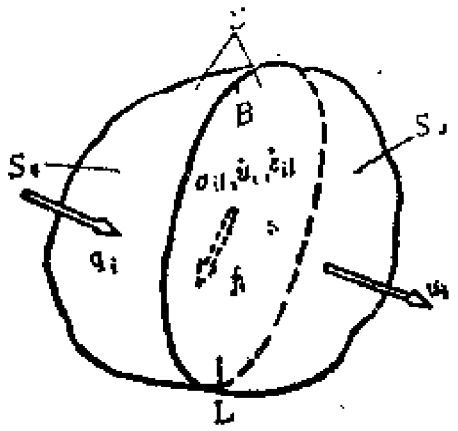


图7-5 变形体

等式右侧的第一项在物体的整个表面上积分，第二项在物体的整个体积中积分。表面积分可用下式表示：

$$\int_S q_i \dot{u}_i \mathrm{d}S = \int_S \sigma_{ij} n_j \dot{u}_i \mathrm{d}S$$

代入式(7-13)可得

$$\dot{W}_e = \int_S \sigma_{ij} n_j \dot{u}_i \mathrm{d}S + \int_V f_i \dot{u}_i \mathrm{d}V \qquad (7\text{-}14)$$

利用高斯公式得

$$\dot{W}_e = \int_V \frac{\partial(\sigma_{ij}\dot{u}_i)}{\partial x_j}\mathrm{d}V + \int_V f_i \dot{u}_i \mathrm{d}V$$

$$= \int_V \left[\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i\right)\dot{u}_i + \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}\right]\mathrm{d}V \qquad (7\text{-}15)$$

由式(7-13)和(7-15)并考虑平衡条件，可得

$$\int_S q_i \dot{u}_i \mathrm{d}S + \int_V f_i \dot{u}_i \mathrm{d}V = \int_V \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}\mathrm{d}V \qquad (7\text{-}16)$$

当体积力f_i为零时，上式为

$$\int_S q_i \dot{u}_i \mathrm{d}S = \int_V \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}\mathrm{d}V \qquad (7\text{-}17)$$

当有位移速度间断面时，上式又可写为

$$\int_S q_i \dot{u}_i \mathrm{d}S = \int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \mathrm{d}V + \int_{S_D} k[\dot{u}_i] \mathrm{d}S_D \quad (7\text{-}18)$$

一、下限定理

设在物体B中的应力状态σ'_{ij}满足下列条件：

（1）平衡条件；

（2）在S_σ上满足力的边界条件；

（3）不破坏屈服条件。

满足以上条件的应力场称为静力容许应力场。静力容许应力场与真实应力场的区别是：真实应力场还要满足问题的机动条件，而静力容许应力场则不一定要满足问题的机动条件。

下限定理可叙述如下：在塑性流动过程中，物体B的表面力q_i在真实位移速度场$\dot{u}_i$上所做功的功率，将大于或等于任一静力容许应力场σ'_{ij}在真实位移速度场上所做功的功率。

对于真实应力场和位移场，若不考虑体积力，则虚功率原理的方程为

$$\int_S q_i \dot{u}_i \mathrm{d}S = \int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \mathrm{d}V + \int_{S_D} k[\dot{u}_i] \mathrm{d}S_D \quad (7\text{-}19)$$

对于某一静力容许应力场σ'_{ij}，按虚功率原理应有

$$\int_S q'_i \dot{u}_i \mathrm{d}S = \int_V \sigma'_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \mathrm{d}V + \int_{S_D} \tau' [\dot{u}_i] \mathrm{d}S_D \quad (7\text{-}20)$$

式中，τ'为速度间断面上静力容许应力场中的切向应力，其方向与速度间断量的方向相同。若物体总表面S分为给定位移的边界S_u和给定力的边界S_σ，则有

$$\int_S q_i \dot{u}_i \mathrm{d}S = \int_{S_u} q_i \dot{u}_i \mathrm{d}S_u + \int_{S_\sigma} q_i \dot{u}_i \mathrm{d}S_\sigma \quad (7\text{-}21)$$

若取静力容许应力场，则上式又可写为

$$\int_S q_i^* \dot{u}_i \mathrm{d}S = \int_{S_\sigma} q_i^* \dot{q}_i \mathrm{d}S_\sigma + \int_{S_u} q_i^* \dot{u}_i \mathrm{d}S_u$$

由于在边界S_σ上$q_i = q_i^*$，故上式又可写为

$$\int_S q_i^* \dot{u}_i \mathrm{d}S = \int_{S_\sigma} q_i \dot{u}_i \mathrm{d}S_\sigma + \int_{S_u} q_i^* \dot{u}_i \mathrm{d}S_u \tag{7-22}$$

将式（7-21）代入式（7-19）可得

$$\int_{S_\sigma} q_i \dot{u}_i \mathrm{d}S_\sigma + \int_{S_u} q_i \dot{u}_i \mathrm{d}S_u = \int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \mathrm{d}V + \int_{S_D} k[\dot{u}] \mathrm{d}S_D \tag{7-23}$$

由式（7-20）和（7-22）可得

$$\int_{S_\sigma} q_i \dot{u}_i \mathrm{d}S_\sigma + \int_{S_u} q_i^* \dot{u}_i \mathrm{d}S_u = \int_V \sigma_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij} \mathrm{d}V + \int_{S_D} \tau^* [\dot{u}_i] \mathrm{d}S_D \tag{7-24}$$

由式（7-23）减去式（7-24），得

$$\int_{S_u} (q_i - q_i^*) \dot{u}_i \mathrm{d}S_u = \int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \dot{\varepsilon}_{ij} \mathrm{d}V + \int_{S_D} (k - \tau^*) [\dot{u}] \mathrm{d}S_D \tag{7-25}$$

由于应变率向量$\dot{\varepsilon}_{ij}$垂直于极限曲面，而应力向量σ_{ij}^*是在极限曲面之内（因为它满足静力容许条件），所以向量差$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*)$与应变率向量$\dot{\varepsilon}_{ij}$的点积应大于零（图7-6），即满足如下条件：

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \dot{\varepsilon}_{ij} \geqslant 0$$

若$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^*$，则上式即为等式。又由于剪切屈服极限$k \geqslant \tau^*$，而且$k[\dot{u}_i] \geqslant 0$，所以式（7-25）非负，即

$$\int_{S_u} (q_i - q_i^*) \dot{u}_i \mathrm{d}S_u \geqslant 0$$

或

$$\int_{S_\sigma} q_i \dot{u}_i \mathrm{d}S_\sigma \geqslant \int_{S_\sigma} q_i^* \dot{u}_i \mathrm{d}S_\sigma \tag{7-26}$$

由此可见，满足静力容许条件的q_i^*总比真实的q_i要小。

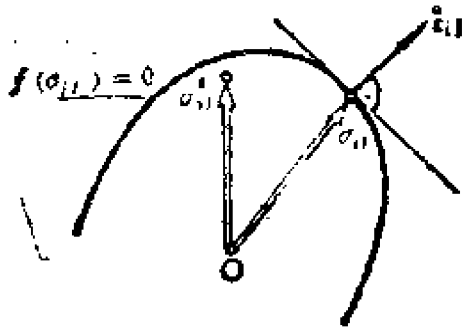


图7-6 $(\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^*)$ 与 $\dot{\varepsilon}_{ij}$ 的点积大于零

二、上限定理

设在物体B中形成任一塑性流动机构，此机构所对应的应变率场$\dot{\varepsilon}_{ij}^*$满足下列条件：

（1）机动边界条件；

（2）连续条件；

（3）耗散功率非负条件，即$\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^* \geqslant 0$。

满足以上条件的应变率场称为机动容许应变率场，它和真实塑性流动机构的差别是：真实塑性流动机构还应满足静力容许条件，而机动容许应变率场则不要求满足静力容许条件（图7-7）。

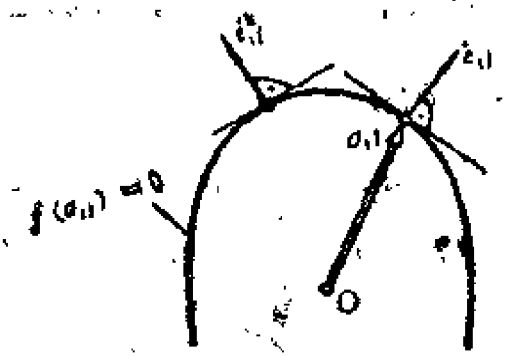


图7-7 机动容许应变率场

上限定理可叙述如下：当物体B塑性流动时，表面力q_i在真实位移速度场$\dot{u}_i$上所做功的功率，将小于或等于任一机动容许应变率场$\dot{\varepsilon}_{ij}^k$在与其相应的应力场σ_{ij}^k上所做功的功率(图7-8)。

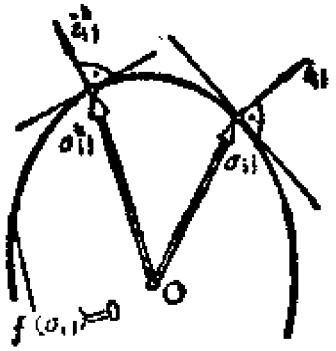


图7-8 $(\sigma_{ij}^k-\sigma_{ij})$与$\dot{\varepsilon}_{ij}^k$的点积大于零

设σ_{ij}、$\dot{\varepsilon}_{ij}$和$\dot{u}_i$为问题的真实解，而$\dot{u}_i^k$为机动容许位移速度场，根据虚功率原理有

$$\int_S q_i\dot{u}_i^k\mathrm{d}S=\int_V\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^k\mathrm{d}V+\int_{S_D}\tau[\dot{u}_i^k]\mathrm{d}S_D \qquad (7\text{-}27)$$

根据德鲁克公设有

$$\int_V(\sigma_{ij}^k-\sigma_{ij})\dot{\varepsilon}_{ij}^k\mathrm{d}V\geqslant 0$$

式中，σ_{ij}^k为机动容许应变率场所对应的应力场。由于$k\geqslant\tau$，故式(7-27)可以写为

$$\int_S q_i\dot{u}_i^k\mathrm{d}S\leqslant\int_V\sigma_{ij}^k\dot{\varepsilon}_{ij}^k\mathrm{d}V+\int_{S_D}k[\dot{u}_i^k]\mathrm{d}S_D \qquad (7\text{-}28)$$

在边界S_σ上$\dot{u}_i^k=\dot{u}_i$，因此有

$$\int_S q_i\dot{u}_i^k\mathrm{d}S=\int_{S_\sigma}q_i\dot{u}_i\mathrm{d}S_\sigma+\int_{S_i}q_i\dot{u}_i^k\mathrm{d}S_\sigma \qquad (7\text{-}29)$$

将上式代入式(7-28)，得

$$\int_{S_\sigma} q_i \dot{u}_i \mathrm{d}S_\sigma \leqslant \int_V \sigma_{ij}^k \dot{\varepsilon}_{ij}^k \mathrm{d}V + \int_{S_D} k[\dot{u}_i^k]\mathrm{d}S_D - \int_{S_q} q_i \dot{u}_i^k \mathrm{d}S_q \qquad (7\text{-}30)$$

若物体只在位移速度间断面上相互错动，而在物体内没有应变率，即物体只按由间断面分割成的刚性块变形，则式（7-30）右侧的第一项为零。若取外载荷作用处为S_σ，而在S_q上q_i为零，则式（7-30）右侧的第三项亦为零。在此情况下，式（7-30）可以写成

$$\int_{S_\sigma} q_i \dot{u}_i \mathrm{d}S_\sigma \leqslant \int_{S_D} k[\dot{u}_i^k]\mathrm{d}S_D$$

若有n个位移速度间断面，则

$$\int_{S_\sigma} q_i \dot{u}_i \mathrm{d}S_\sigma \leqslant \sum_1^n \int_{S_D} k[\dot{u}_i^k]\mathrm{d}S_D \qquad (7\text{-}31)$$

由上式可见，表面力在位移速度场上所做功的功率比间断面上剪切屈服应力在机动容许速度场上所做功的功率要小。

静力容许应力场和机动容许位移速度场是可以任意选择的。满足静力容许条件的应力场和满足机动容许条件的位移速度场有无穷多个。根据上述两个极值定理，可以得到如下结论：

（1）在两个静力容许应力场中，哪一个应力场所对应的外载荷大，则该外载荷更接近于真实的外载荷；

（2）在两个机动容许位移速度场中，哪一个位移速度场所对应的外载荷小，则该外载荷更接近于真实的外载荷；

（3）若由上限法和下限法所求得的极限载荷相等，则这个解便是真实解，称之为完全解。

由于静力容许应力场和机动容许位移速度场的选择是任意的，所以在实际中可按不同的方案选择。若所选择的场与坐标无关，则这样的场称为均匀场；反之则为非均匀场。例如在所分析

的区域中，若σ_{ij} = const，则应力场即为均匀场。若机动场是均匀场，则物体将按刚性块沿间断面移动。

§7-3 速度平面和速端图

在应用极值定理时，首先需要假定静力容许应力场或机动容许位移速度场。根据下限定理，以静力容许应力场为基础计算出来的极限载荷，不会比实际的极限载荷大。根据上限定理，以机动位移速度场为基础计算出来的极限载荷，不会比实际的极限载荷小。在应用下限法计算极限载荷时，由于要用到表示平衡条件的偏微分方程以及非线性的屈服条件，所以往往会遇到一些数学上的困难。如果过份简化这些方程式，则得到的极限载荷的下限值与真实的极限载荷值相差甚远。因此，在实际中应用上限法更为简便。如果所假设的位移速度场和实际的位移速度场相近，则求得的极限载荷也一定和实际的极限载荷相近。上限法的基础是公式（7-31），前提是假设塑性区由速度间断面分割成有限个刚性块（子区域），而在刚性块内部没有应变，刚性块沿速度间断面相互错动。为此需要建立速度平面和速端图。速端图又称速度平面图，它反映了物理平面上质点的速度（图7-9）。

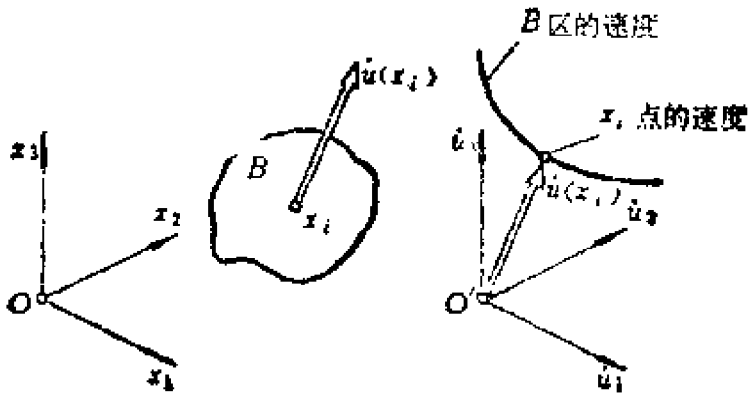


图7-9 速度平面

若在整个区域中 $\dot{u}_i = \text{const}$，则此区域的速度在速端图上只是一个点（图7-9a），在一般情况下速端图将是一条曲线（图7-9b）。若在区域B中，有几个均匀速度场，则这些区域之间的分界面便是速度间断面L_v（图7-10）。速度间断值由下式确定：

$$\dot{u}_{i(n,n+1)} = \dot{u}_{i(n)} - \dot{u}_{i(n+1)} \tag{7-32}$$

式中，n表示子区域的序号，而序号$(n, n+1)$表示两个相邻子区域之间的间断面。

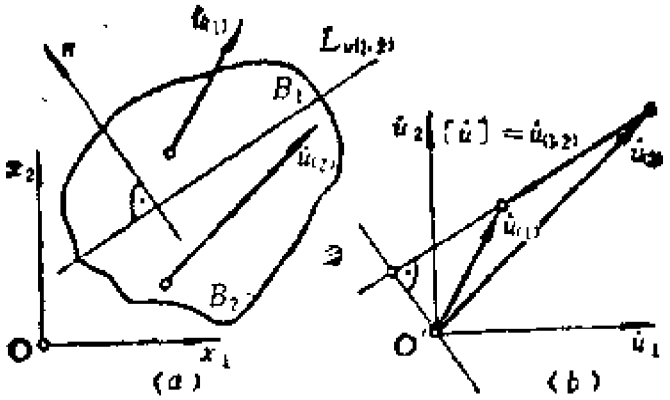


图7－10　速度间断值的计算

图7-10a表示物体B被速度间断面$L_{v(1,2)}$分成B_1和B_2两个部分，它们作为刚性块以不同的速度$\dot{u}_1$和$\dot{u}_2$移动，但保持物体的连续性。图7-10b为这一物体的速端图。速度间断值$[\dot{u}] = \dot{u}_{(1,2)}$出现在间断面$L_{v(1,2)}$上，并称此速度间断值为块体$B_1$和$B_2$之间的滑移速度。

例 1：图7-11所示为平滑冲头压入半无限体，试求极限载荷的上限值。

解：图中假设BB'为速度边界，在此边界上速度$V_0 = 1$；而冲头的均匀压力为p。当冲头向下压入时，冲头下面的金属向下和两侧流动，其变形方式

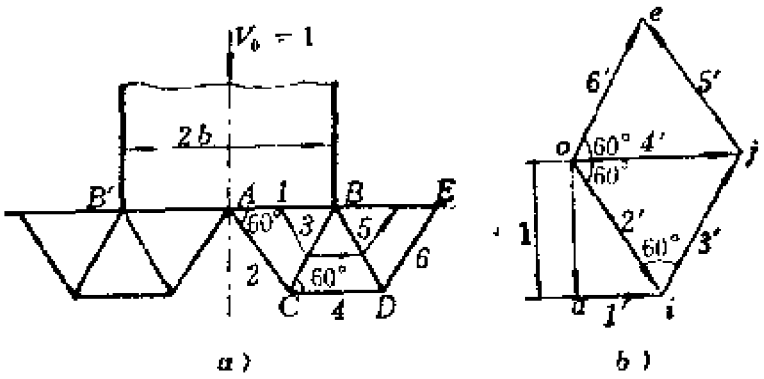


图7-11 平滑冲头压入半无限体

近似地用三个等边三角形相互错动来表示。由于对称，故只考虑右侧的三角形ABC、BCD、BDE。这些三角形的内部是刚性区，三角形之间以及三角形和其余部分之间由速度间断面AC、BC、CD、BD、DE隔开。$ACDE$以下视为刚性区。

在$\triangle ABC$中的各质点被迫向下移动，其移动方向平行于AC；当其中的质点到达BC时，则被剪切而发生平行于CD的移动；此后再在BD发生剪切，作平行于DE的移动（即$\triangle ABC$向右下移动，$\triangle BCD$向右平移，$\triangle BDE$向右上移动）。

因冲头向下移动的速度$V_0=1$，故$\triangle ABC$沿AC以速度$\vec{oi}$移动，$\triangle ABC$和$\triangle BCD$之间的相对移动速度为$\vec{ij}$，$\triangle BCD$和$\triangle BDE$之间的相对移动速度为$\vec{je}$，$\triangle ABC$和冲头表面的相对移动速度为$\vec{ai}$，如图7-11b所示。由于刚性块是等边三角形，故由速端图可得

$$|\vec{oi}|=|\vec{ij}|=|\vec{oj}|=|\vec{je}|=|\vec{oe}|=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$|\vec{oe}|=V_0=1,\ |\vec{ai}|=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\triangle ABC$、$\triangle BCD$、$\triangle BDE$各边的边长皆为b，冲头向下的平均压力为q，向下的移动速度$V_0=1$。于是根据式（7-31），外力所做功的功率为

$$\dot{W}_e = q \cdot b \cdot V_0 = q \cdot b$$

内力功率为间断面上的耗散功率，即

$$\Sigma k|[\dot{u}]| = 5b \times \frac{2}{\sqrt{3}} k = \frac{10}{\sqrt{3}} bk$$

由式（7-31）得

$$qb \leqslant \frac{10}{\sqrt{3}} bk$$

即

$$\frac{q}{2k} \leqslant 2.89$$

由滑移线法求得的完全解为$\frac{q}{2k}=2.57$，因此本题求得的上限解比完全解大12.4%。由前面的讨论可知，若改进所假设的机动容许位移速度场，则能获得更接近于真实解的极限载荷。

§7-4 镦粗问题

在金属塑性成形工艺中，用两个刚性块镦粗一板块是经常遇到的（图7-12a）。现在利用界限法分析这一问题。设板块处于平面应变状态，在研究时可取其厚度为单位厚度，但在计算中应考虑它的量纲。

（1）下限解

选取静力容许应力场为$\sigma_x=0$，$\sigma_y=-2k$。这一均匀应力场满足平衡方程和边界条件，而且不破坏屈服条件。可以用应力莫尔圆表示这种应力状态（图7-12 b）。由y方向的平衡条件可得

$$\frac{q^{(-)}}{2k} = 1 \qquad (7\text{-}33)$$

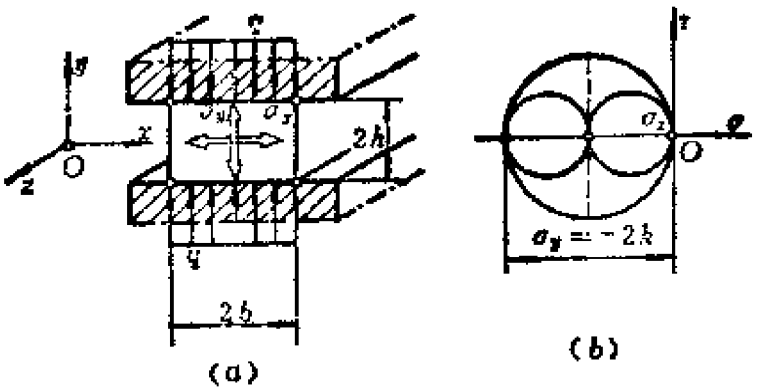


图7-12 平面应变镦粗

式中，$q^{(-)}$为镦粗所需要的外载荷的一个下限值。

(2) 上限解

设两刚性块分别以速度$\dot{u}_0$作相对移动，板块的截面上由对角线分成四个子区域，这些子区域都作为刚体沿分界面移动，如图7-13a所示。块体①和③的垂直移动引起块体②和④以相同的速度作水平移动。这样选择的位移速度场满足边界条件、介质的连续性条件和耗散功率非负的条件。由图7-13a所示的几何关系可得

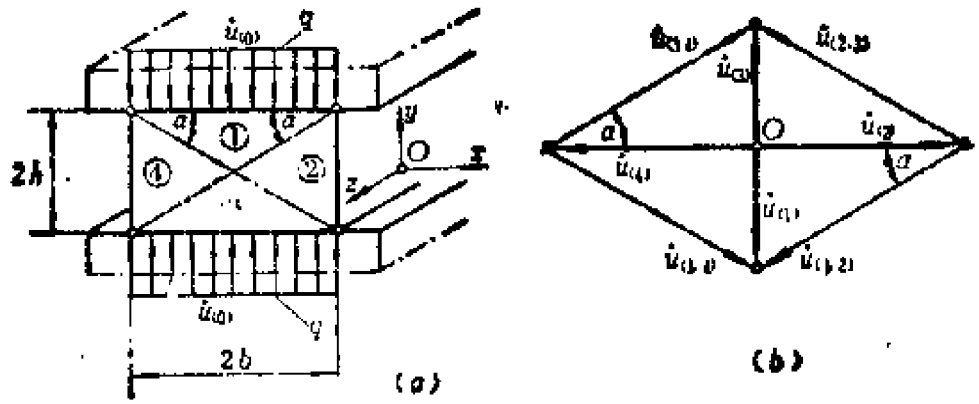


图7-13 镦粗问题的机动容许位移速度场

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{h}{b}$$

由图7-13b所示的速端图可得块体之间的相对移动速度为

$$[\dot{u}] = \dot{u}_{(1,2)} = \dot{u}_{(2,3)} = \dot{u}_{(3,4)} = \dot{u}_{(1,4)} = \frac{\dot{u}_0}{\sin\alpha} \qquad (7\text{-}34)$$

由三角函数关系可得

$$\sin\alpha = \frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} = \frac{\frac{h}{b}}{\sqrt{1+\left(\frac{h}{b}\right)^2}}$$

或

$$\frac{1}{\sin\alpha} = \sqrt{1+\left(\frac{b}{h}\right)^2}$$

代入式(7-34) 可得

$$[\dot{u}] = \dot{u}_{(1,2)} = \dot{u}_{(2,3)} = \dot{u}_{(3,4)} = \dot{u}_{(1,4)} = \sqrt{1+\left(\frac{b}{h}\right)^2}\ \dot{u}_0$$

间断面的长度为

$$l_{(1,2)} = l_{(2,3)} = l_{(3,4)} = l_{(1,4)} = \sqrt{h^2+b^2}$$

于是耗散功率为

$$\begin{aligned}\dot{W}_* &= 4\int_{L_*} k[\dot{u}]\mathrm{d}L_* \\ &= 4k\sqrt{1+\left(\frac{b}{h}\right)^2}\dot{u}_0\int_{L_*}\mathrm{d}L_* \\ &= 4k\sqrt{1+\left(\frac{b}{h}\right)^2}\dot{u}_0\sqrt{b^2+h^2} \\ &= 4hk\left[1+\left(\frac{b}{h}\right)^2\right]\dot{u}_0\end{aligned}$$

令$\dot{W}_*$与外力功率相等，得

$$2\times 2bq^{(+)}\dot{u}_0 = 4hk\left[1+\left(\frac{h}{b}\right)^2\right]\dot{u}_0$$

即

$$\frac{q^{(+)}}{2k} = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{b}+\frac{b}{h}\right) \tag{7-35}$$

当$h=b$时可得极小值$\frac{q^{(+)}}{2k}=1$。由以上分析可知，镦粗力的值在如下范围中：

$$1\leqslant\frac{q}{2k}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{h}{b}+\frac{b}{h}\right)$$

当$h=b$时，极限载荷的上限值与下限值相等，故是完全解。

下面再来分析一下具有连续位移速度场的情况。在图7-14所示的平面应变镦粗过程中，设上模板和下模板分别以速度$-\dot{u}_0$和$\dot{u}_0$压向水平对称轴Ox，坐标原点在坯料中心，坯料的尺寸如图所示。

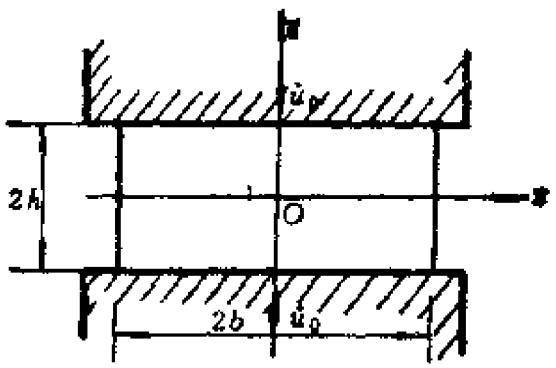


图7-14 平面应变镦粗

现设整个坯料的位移速度场是连续的，坯料内部不存在速度间断面，并设x方向的速度分量只与坐标x有关而与坐标y无关，y方向的速度分量只与坐标y有关而与坐标x无关。由于对称性，现仅分析坯料右上角的四分之一部分。

设y方向的位移速度为

$$v = -\frac{\dot{u}_0}{h}y \tag{7-36}$$

此位移速度场满足几何约束条件，即当$y=0$时$v=0$，当$y=h$时$v=-\dot{u}_0$。由几何方程和体积不可压缩条件可得

$$\left.\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\dot{u}_0}{h}\\ \dot{\varepsilon}_x &= -\dot{\varepsilon}_y = \frac{\dot{u}_0}{h}\\ \dot{\varepsilon}_z &= 0\end{aligned}\right\} \tag{7-37}$$

由上式的第二式可得

$$\dot{u} = \int \dot{\varepsilon}_x \mathrm{d}x = \frac{\dot{u}_0}{h}x + f(y)$$

因$x=0$时$\dot{u}=0$，故$f(y)=0$。由式(7-37)、式(7-9)及$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}y\cdot 1$可得

$$\dot{W}_p = \sqrt{2}k\int_0^h\int_0^b\sqrt{2\left(\frac{\dot{u}_0}{h}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \sqrt{2}k\times\sqrt{2}\frac{\dot{u}_0}{h}\int_0^h\int_0^b\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2k\dot{u}_0 b \tag{7-38}$$

若模板与坯料之间的粗糙系数为m，则摩擦力$\tau_s = mk$。坯料沿模板表面的位移速度为

$$\dot{u} = \frac{\dot{u}_0}{h}x$$

将上式代入式（7-12）后得

$$\dot{W}_s = \int_0^b mk\frac{\dot{u}_0}{h}\cdot x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot mk\frac{\dot{u}_0}{h}\,b^2 \tag{7-39}$$

根据耗散功率等于外力功率的条件可得

$$W_s = q^{(+)}b\dot{u}_0 = \dot{W}_p + \dot{W}_s$$

将式(7-38)和(7-39)代入上式后得

$$q^{(+)}b\dot{u}_0 = 2k\dot{u}_0 b + \frac{1}{2}\,mk\frac{\dot{u}_0}{h}b^2$$

即

$$\frac{q^{(+)}}{2k} = 1 + \frac{m}{4}\frac{b}{h} \tag{7-40}$$

§7-5 在非均匀场情况下的拉拔和挤压

平面应变条件下的拉拔和挤压问题可以用上、下限法求解。假设静力容许应力场或机动容许位移速度场是非均匀的。将子区域按圆柱单元划分（图7-15）。在这些单元里，应力满足平衡条件和力的边界条件且不破坏屈服条件，而径向位移速度满足机动边界条件和连续条件。

首先分析一下对称模具中平面应变条件下的拉拔过程。

（1）下限解

在寻找下限解时，首先应假设一个静力容许应力场，为此划分几个子区域。由于拉拔过程中几何平面的对称性，可以认为子区域是厚壁筒的一部分，它的边界是模具的表面以及半径为a和b的圆弧（图7-15）。在此区域中，可以认为应力状态是轴对称的。在

区域④为零应力状态，在区域②为复杂应力状态，在区域①为单向拉伸应力状态且不能进入塑性状态。变形过程主要在区域③中进行。由于在区域③中主方向为径向和环向，所以这一区域中的平衡方程为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_r^{(3)}}{\mathrm{d}r}+\frac{\sigma_r^{(3)}-\sigma_\theta^{(3)}}{r}=0$$

屈服条件为

$$\sigma_r^{(3)}-\sigma_\theta^{(3)}=2k$$

采用特雷斯卡屈服条件时$k=\frac{\sigma_s}{2}$，采用米泽斯屈服条件时$k=\sqrt{\frac{\sigma_s}{3}}$。将屈服条件代入平衡方程并积分，则得

$$\sigma_r^{(3)}=-2k\ln r+C$$

式中的积分常数C由如下边界条件确定：在$r=b$处$\sigma_r^{(3)}=0$，故得

$$C=2k\ln b$$

因此在区域③中径向应力为

$$\sigma_r^{(3)}=2k\ln\frac{b}{r}$$

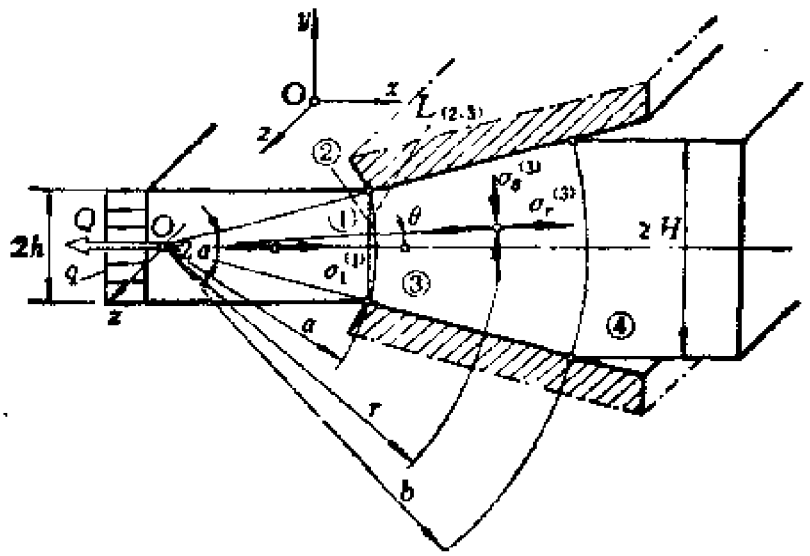


图7-15 拉拔问题的静力容许应力场

由屈服条件可得环向应力为

$$\sigma_\theta^{(3)} = -2k\left(1-\ln\frac{b}{r}\right)$$

在$r=a$处，

$$\sigma_{r\,a}^{(3)} = 2k\ln\frac{b}{a} \qquad (a)$$

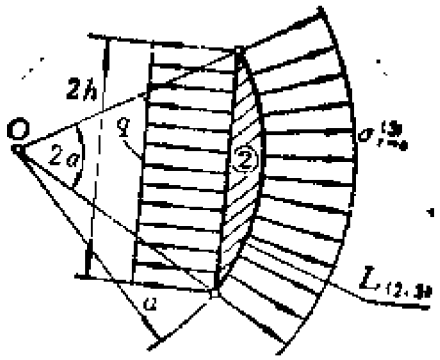


图7-16　区域②的平衡

对于区域②(图7-16)，可以写出如下方程式：

$$q^{(-)}\cdot 2h = \int_{L_{(2,3)}} \sigma_r^{(3)}\cos\theta\,\mathrm{d}L \qquad (b)$$

在$r=a$处有如下关系：

$$\mathrm{d}L = a\,\mathrm{d}\theta$$

将上式和(a)式代入(b)式，有

$$q^{(-)}\cdot 2h = 2k\ln\frac{b}{a}\cdot a\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

积分后得

$$q^{(-)}\cdot 2h = 4ka\ln\frac{b}{a}\sin\alpha \qquad (c)$$

由图7-15中的几何关系可得

$$\sin\alpha = \frac{h}{a}, \qquad \frac{b}{a} = \frac{H}{h}$$

将上式代入(c)式可得

$$\frac{q^{(-)}}{2k}=\ln\frac{H}{h} \tag{7-41}$$

(2) 上限解

在选取机动容许位移速度场时，和前面一样假想塑性变形区在范围$a\leqslant r\leqslant b$及$\theta=\pm\alpha$内。这个子区域在图7-17中用数码② 表示。设子区①和③为刚性区，这两个区域中的位移速度分别为$\dot{u}_{(1)}$和$\dot{u}_{(3)}$。在区域②中，材料沿径向以$\dot{u}_{(2)r}$的速度移动。在分界面$L_{(1,2)}$上，速度$\dot{u}_{(1)}$平行于对称平面，而速度$\dot{u}_{(2)r}$沿径向，由此可知，在此分界面上将出现速度间断。为了保证物体的连续性，在此分界面上的速度由图7-18确定。从图上可见

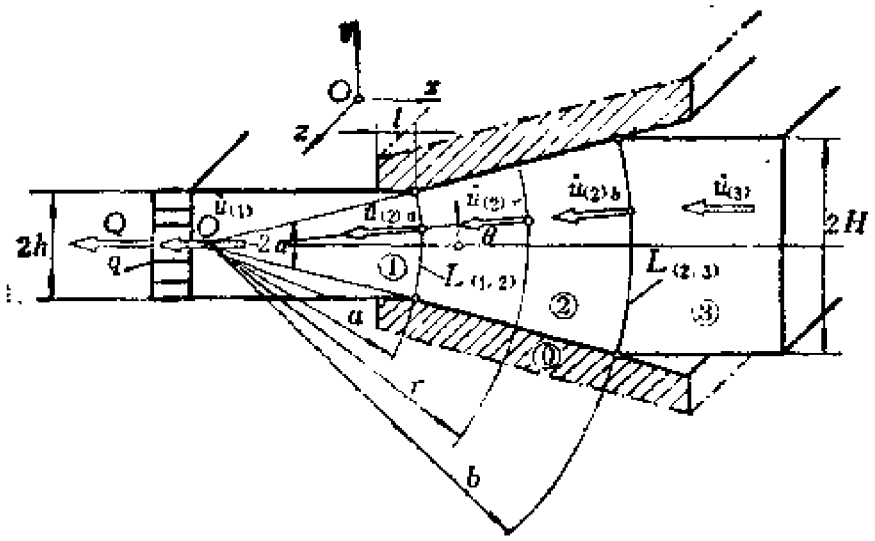


图7-17 拉拔问题的机动容许位移速度场

$$\left.\begin{aligned}\dot{u}_{(2)\theta}&=\dot{u}_{(1)}\cos\theta\\ \dot{u}_{(1,2)}&=\dot{u}_{(1)}\sin\theta\end{aligned}\right\} \tag{7-42}$$

区域②内部的位移速度分布由不可压缩条件确定。

根据图7-19给出的小单元体可以写出

$$\dot{u}_{(2)\theta}\mathrm{d}A_\theta - \dot{u}_{(2)r}\mathrm{d}A_r = 0$$

即

$$\dot{u}_{(2)\theta}a\mathrm{d}\theta - \dot{u}_{(2)r}r\mathrm{d}\theta = 0$$

将式(7-42)代入上式得

$$\dot{u}_{(2)r} = \dot{u}_{(1)}\frac{a}{r}\cos\theta \tag{7-43}$$

在分界面$L_{(2,3)}$上，有

$$\dot{u}_{(2)b} = \dot{u}_{(1)}\frac{a}{b}\cos\theta \tag{7-44}$$

在分界面$L_{(2,3)}$上，速度$\dot{u}_{(2)b}$沿径向，而速度$\dot{u}_{(3)}$平行于对称平面，所以此分界面是速度间断面。为了保证介质的连续性，由图7-18可得

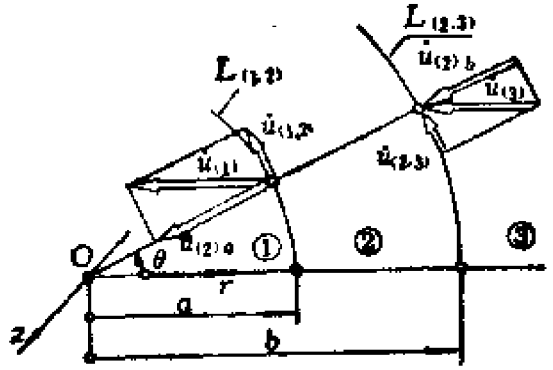


图7-18 分界面上位移速度的确定

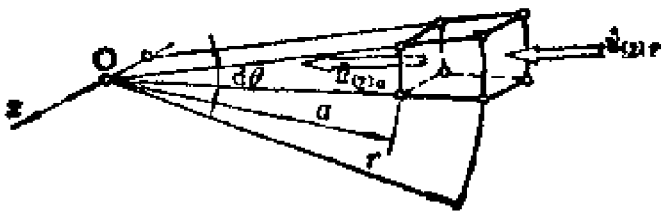


图7-19 区域②中位移速度的分布

$$\left.\begin{aligned}\dot{u}_{(3)} &= \dot{u}_{(2)}\frac{1}{\cos\theta} = \dot{u}_{(1)}\frac{a}{b}\\ \dot{u}_{(2,3)} &= \dot{u}_{(3)}\sin\theta = \dot{u}_{(1)}\frac{a}{b}\sin\theta\end{aligned}\right\} \tag{7-45}$$

区域②中的应变率分量为

$$\dot{\varepsilon}_r^{(2)} = -\frac{\partial \dot{u}_{(2)r}}{\partial r} = -\dot{u}_{(1)}\frac{a}{r^2}\cos\theta$$

$$\dot{\varepsilon}_\theta^{(2)} = \frac{\dot{u}_{(2)r}}{r} = \dot{u}_{(1)}\frac{a}{r^2}\cos\theta$$

$$\dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \dot{u}_{(2)r}}{\partial\theta} + \frac{\partial \dot{u}_{(2)\theta}}{\partial r} - \frac{\dot{u}_{(2)\theta}}{r}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\dot{u}_{(1)}\frac{a}{r^2}\sin\theta$$

其余应变率分量皆为零。上式的第一式和第二式自然满足材料不可压缩的条件。应变率强度按下式计算：

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_i^{(2)} &= \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(\dot{\varepsilon}_r^{(2)})^2 + (\dot{\varepsilon}_\theta^{(2)})^2 + 2(\dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(2)})^2}\\ &= \sqrt{\frac{2}{3}}\dot{u}_{(1)}\frac{a}{r^2}\sqrt{\cos^2\theta + \cos^2\theta + \frac{1}{2}\sin^2\theta}\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\dot{u}_{(1)}\frac{a}{r^2}\sqrt{1+3\cos^2\theta}\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\dot{u}_{(1)}\frac{a}{r^2}\sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2\theta}\end{aligned} \tag{7-46}$$

由上式可见，应变率强度在区域②中的分布是不均匀的。

拉拔力的上限值通过外力功率和耗散功率相等的条件得到，即

$$q^{(+)}\cdot 2h\dot{\lambda}_{(1)}=\int_{V_2}\sigma_s\dot{\varepsilon}_i^{(2)}\,\mathrm{d}V+\int_{L_{(1,2)}}k\dot{u}_{(1,2)}\,\mathrm{d}L$$
$$+\int_{L_{(2,3)}}k\dot{u}_{(2,3)}\,\mathrm{d}L+\int_{L_{(0,2)}}mk\dot{\lambda}_{(0,2)}\,\mathrm{d}L$$
$$+\int_{L_{(0,1)}}mk\dot{\lambda}_{(0,1)}\,\mathrm{d}L \qquad (7\text{-}47)$$

式中，k和σ_s分别为材料的剪切屈服极限和拉伸屈服极限，m为模具表面的粗糙系数。下面分别计算式(7-47)右侧各项的积分值。

第一项积分表示区域②中的塑性耗散功率。由于

$$\mathrm{d}V=r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$$

所以

$$\dot{w}_{\mathrm{p}}=\int_{V_2}\sigma_s\dot{\varepsilon}_i^{(2)}\,\mathrm{d}V=\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s a\dot{\lambda}_{(1)}\int_a^b\frac{\mathrm{d}r}{r}$$
$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2\theta}\;\mathrm{d}\theta$$
$$=\frac{4}{\sqrt{3}}\sigma_s a\dot{\lambda}_{(1)}\ln\frac{b}{a}E\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\alpha\right) \qquad (7\text{-}48)$$

式中，$E\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\alpha\right)=\int_0^{\alpha}\sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2\theta}\;\mathrm{d}\theta$，为第二类椭圆积分。一种求解方法是将积分号内的各项展开成级数。注意到积分号内为$n=\frac{1}{2}$的二项式，在一般情况下，

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\cdots$$

将$a=1$、$b=-\frac{3}{4}\sin^2\theta$、$n=\frac{1}{2}$代入上式后得

$$\left(1-\frac{3}{4}\sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{3}{8}\sin^2\theta-\frac{9}{128}\sin^4\theta-\cdots$$

于是可对这一展开式进行积分。另一种求解方法是查椭圆积分表。当角度α很小时，有

$$\frac{E\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\alpha\right)}{\sin\alpha}\approx 1$$

这时式(7-48)可表示为

$$\dot{w}_p=\sqrt{\frac{4}{3}}\sigma_s a\dot{u}_{(1)}\ln\frac{b}{a}\sin\alpha \tag{7-49}$$

式(7-47)中的第二项积分表示间断面$L_{(1,2)}$上的耗散功率。利用式(7-42)的第二式可得

$$\begin{aligned}\dot{w}_{(1,2)}&=\int_{L_{(1,2)}}k\dot{i}_{(1,2)}\mathrm{d}L\\&=k\dot{u}_{(1)}a\left(\int_0^{\alpha}\sin\theta\mathrm{d}\theta-\int_{-\alpha}^{0}\sin\theta\mathrm{d}\theta\right)\\&=2ka\dot{u}_{(1)}(1-\cos\alpha)\end{aligned}$$

式(7-47)中的第三项积分表示间断面$L_{(2,3)}$上的耗散功率。利用式(7-45)的第二式可得

$$\begin{aligned}\dot{w}_{(2,3)}&=\int_{L_{(2,3)}}k\dot{u}_{(2,3)}\mathrm{d}L\\&=k\dot{u}_{(1)}a\left(\int_0^{\alpha}\sin\theta\mathrm{d}\theta-\int_{-\alpha}^{0}\sin\theta\mathrm{d}\theta\right)\\&=2ka\dot{u}_{(1)}(1-\cos\alpha)\end{aligned}$$

式(7-47)中的第四项积分表示模具斜面上因摩擦而引起的耗散功率。材料在模具斜面上的位移速度可令式(7-43)中的$\theta=\pm\alpha$得到。由于$\mathrm{d}L=\mathrm{d}r$，所以

$$\dot{w}_{(0,2)} = \int_{L_{(0,2)}} mk\dot{u}_{(0,2)}\,\mathrm{d}L$$
$$= 2mk\dot{u}_{(1)}a\cos\alpha \int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r}$$
$$= 2mka\dot{u}_{(1)}\cos\alpha \ln\frac{b}{a}$$

式(7-47)中的第五项积分表示模具平面上因摩擦而引起的耗散功率。材料在模具平面上的位移速度$\dot{u}_{(0,1)} = \dot{u}_{(1)}$。于是

$$\dot{w}_{(0,1)} = \int_{L_{(0,1)}} mk\dot{u}_{(0,1)}\,\mathrm{d}L$$
$$= 2mk\dot{u}_{(1)} \int_{L_{(0,1)}} \mathrm{d}L$$
$$= 2mk\dot{u}_{(1)}l$$

将以上所得结果代入式（7-47），得

$$q^{(+)} \cdot 2h = \frac{4}{\sqrt{3}}\sigma_s a\ln\frac{b}{a}\mathrm{E}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \alpha\right) + 4ka(1-\cos\alpha)$$
$$+ 2kma\left(\frac{l}{a} + \cos\alpha\ln\frac{b}{a}\right)$$

若采用米泽斯屈服条件，则有$\sigma_s = \sqrt{3}k$，上式可写为

$$q^{(+)} \cdot 2h = 2h\left[2a\ln\frac{b}{a}\mathrm{E}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \alpha\right) + 2a(1-\cos\alpha)\right.$$
$$\left. + ma\left(\frac{l}{a} + \cos\alpha\ln\frac{b}{a}\right)\right]$$

考虑几何关系

$$za = 2h\frac{1}{\sin\alpha}, \quad \frac{b}{a} = \frac{H}{h}$$

最后得

$$\frac{q^{(+)}}{2k}=\ln\frac{H}{h}\left(\frac{E\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\alpha\right)}{\sin\alpha}+\frac{m}{2}\operatorname{ctg}\alpha\right)+\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}+m\frac{l}{2h} \tag{7-50}$$

于是，平面应变条件下拉拔力的取值范围为

$$\ln\frac{H}{h}\leqslant\frac{q}{2k}\leqslant\left(\frac{E\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\alpha\right)}{\sin\alpha}+\frac{m}{2}\operatorname{ctg}\alpha\right)\ln\frac{H}{h}+\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}+m\frac{l}{2h}$$

当 $m=0.02$ 和 $m=0.2$ 且 $\lambda=l/h=0$时，令 $R=H/h$，将 $\frac{q}{2k}-R$函数曲线画于图7-20a、b上，由图可见，上限解与润滑情况及角 α 有明显关系。当 $R=1.5$ 和 $R=1.2$ 且$\lambda=0$时，将 $\frac{q}{2k}-\alpha$函数曲线画于图7-21a、b上，由图可见，α角有一个最佳值，在此最佳值情况下，上限解有最小值。随着m和R值的增加，最佳角也将变化。

由上限解（7-50）可将厚度变化比表示为

$$R=\exp\left\{\frac{\frac{q^{(+)}}{2k}-\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{m\lambda}{2}}{\frac{E(\sqrt{3}/2,\alpha)}{\sin\alpha}+\frac{m}{2}\operatorname{ctg}\alpha}\right\} \tag{7-51}$$

当$q^{(+)}/2k=1$且$\lambda=0$时，将$R-\alpha$函数曲线画于图7-22上。由图可见，最佳角大致在45° 左右。

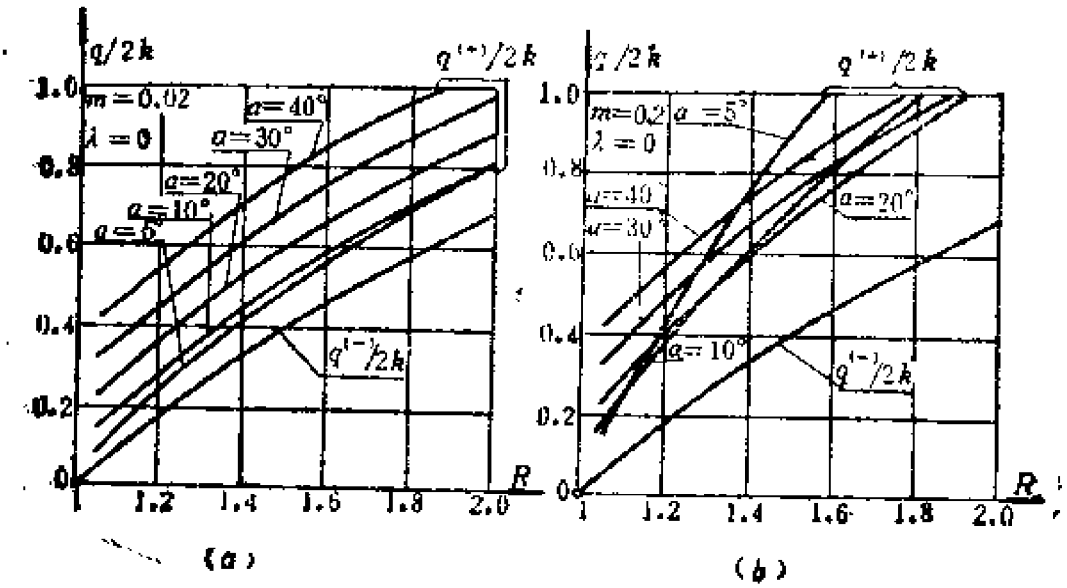
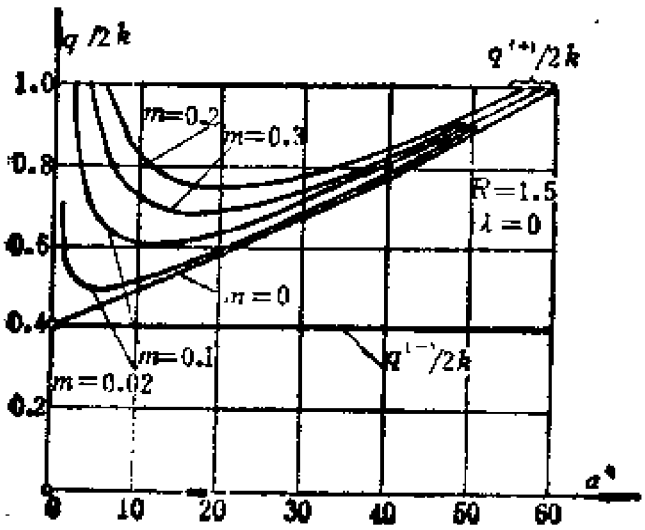
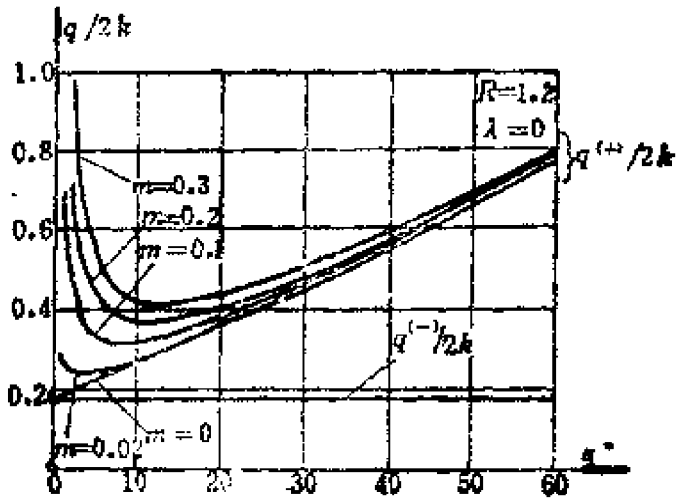


图7 - 20 $q/2k - R$曲线



(a)



(b)

图7－21　$q/2k-\alpha$曲线

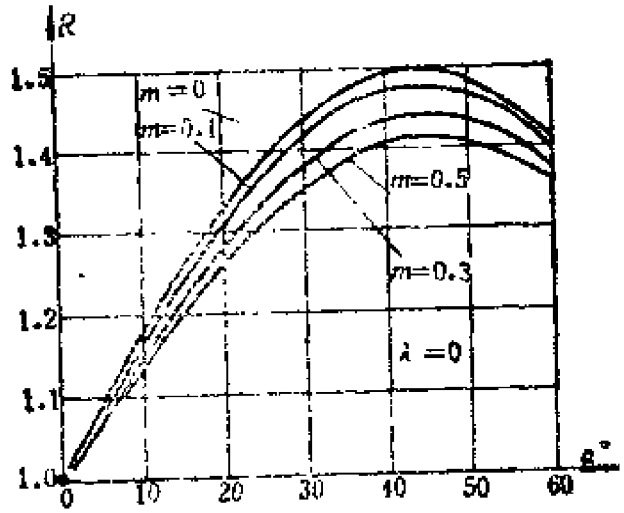


图7－22　$R-\alpha$曲线

§7－6　轴对称情况下的挤压

利用上、下限法也可以求解轴对称问题。假设有一圆杆通过锥形模具受挤压（图7-23），这时可用上、下限法求解挤压力。现将所分析的问题的静力容许应力场和机动容许位移速度场都按

厚壁球壳单元进行研究。

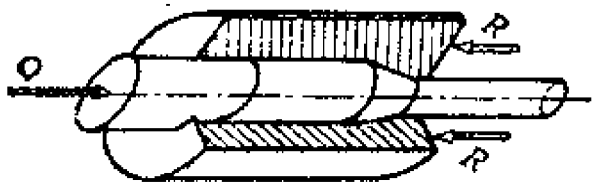


图7－23　轴对称挤压

（1）下限解

首先划分子区域如图7-24所示。区域②由模具的锥面与半径为a和b的两个球面包围，球心就是锥形的顶点。假设区域②已进入塑性状态，其中的应力场是球对称的；区域①是刚性区，其中的应力状态是未知的；区域③是零应力区，即

$$\sigma_{ij}^{(3)} = 0$$

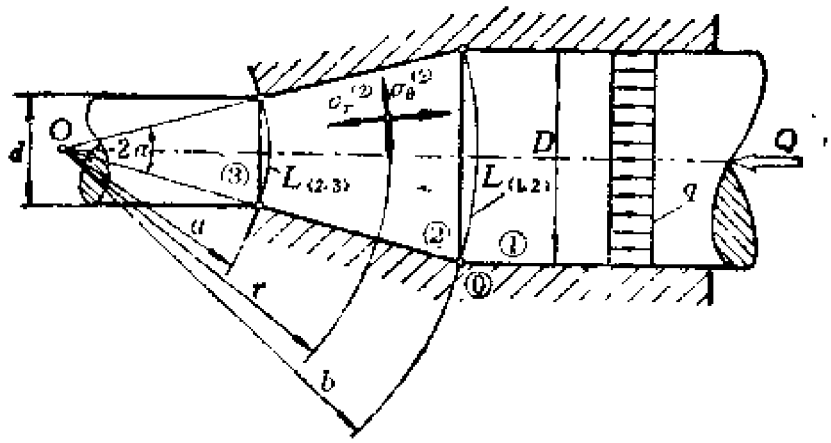


图7－24　圆杆挤压问题的静力容许应力场

以上所取的应力场满足力的边界条件和平衡条件，而且不破坏屈服条件，因而是静力容许的。在区域②中，认为r、θ、φ是主方向。图7-25所给出的微元体的平衡方程为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_r^{(2)}}{\mathrm{d}r} + 2\frac{\sigma_r^{(2)} - \sigma_\theta^{(2)}}{r} = 0$$

$$\sigma_\theta^{(2)} = \sigma_\varphi^{(2)}$$

屈服条件的形式为

$$\sigma_r^{(2)} - \sigma_\theta^{(2)} = \sigma_s$$

当选用特雷斯卡屈服条件时，$\sigma_s = 2k$；当选用米泽斯屈服条件时，$\sigma_s = \sqrt{3}k$。由平衡方程及屈服条件消去应力σ_θ后，可得

$$\frac{d\sigma_r^{(2)}}{dr} = -\frac{2\sigma_s}{r}$$

上式积分后得

$$\sigma_r^{(2)} = -2\sigma_s \ln r + C$$

利用边界条件：在$r=a$处$\sigma_r^{(2)}=0$，可得积分常数$C=2\sigma_s\ln a$，于是

$$\sigma_r^{(2)} = 2\sigma_s \ln\frac{a}{r}$$

在分界面$r=b$处，

$$\sigma_{r=b}^{(2)} = 2\sigma_s \ln\frac{a}{b}$$

其余应力分量由屈服条件确定，即

$$\sigma_\theta^{(2)} = \sigma_\varphi^{(2)} = -\sigma_s\left(1 + 2\ln\frac{r}{a}\right)$$

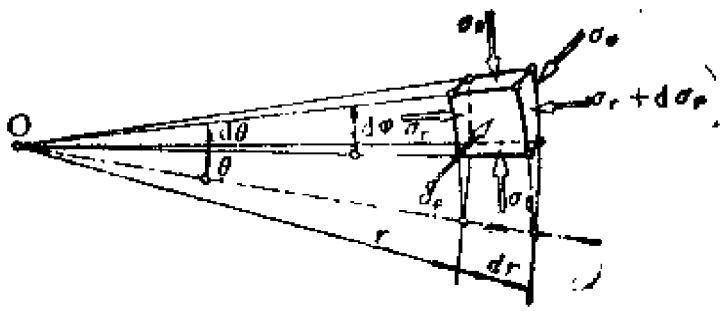


图7－25　微元体

现分析刚性区域Ⅰ的平衡情况（图7-26a）。由于是球对称

问题，故可直接写出平衡条件

$$q^{(-)}\cdot\frac{\pi}{4}D^2=\int_{L_{(1,2)}}\sigma_{n_0}^{(2)}\cos\theta\mathrm{d}L \qquad (7\text{-}52)$$

由图7-26b可见

$$\mathrm{d}L=(b\sin\theta\mathrm{d}\varphi)(b\mathrm{d}\theta)=b^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

于是式(7-52)为

$$q^{(-)}\cdot\frac{\pi D^2}{4}=2\sigma_s b^2\ln\frac{a}{b}\int_0^{\alpha}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi$$

由于$D=2b\sin\alpha$，故上式又可写为

$$q^{(-)}\pi b^2\sin^2\alpha=4\sigma_s b^2\pi\ln\frac{a}{b}\int_0^{\alpha}\sin\theta\mathrm{d}(\sin\theta)$$

上式化简后得

$$-\frac{q^{(-)}}{\sigma_s}=2\ln\frac{a}{b}=-2\ln\frac{b}{a}$$

由上式可见，$q^{(-)}/\sigma_s$与角α无关。

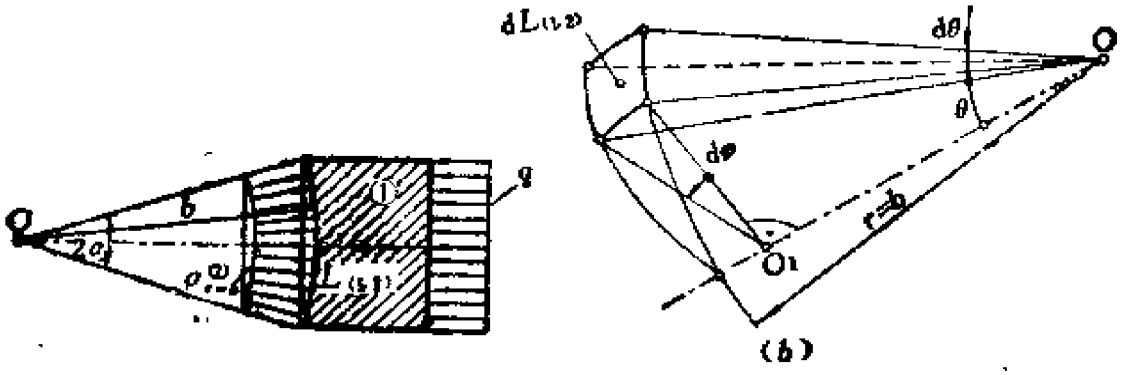


图7-26 区域①的平衡

(2) 上限解

在选择机动容许位移速度场时，首先假设只有区域②进入塑性状态，并设区域①和③为刚性区。设区域①和③分别以速度

$\dot{u}_{(1)}$和$\dot{u}_{(3)}$沿轴向移动，并设塑性区域②中的质点沿球坐标的径向移动，其速度与质点的位置有关，如图7-27所示。

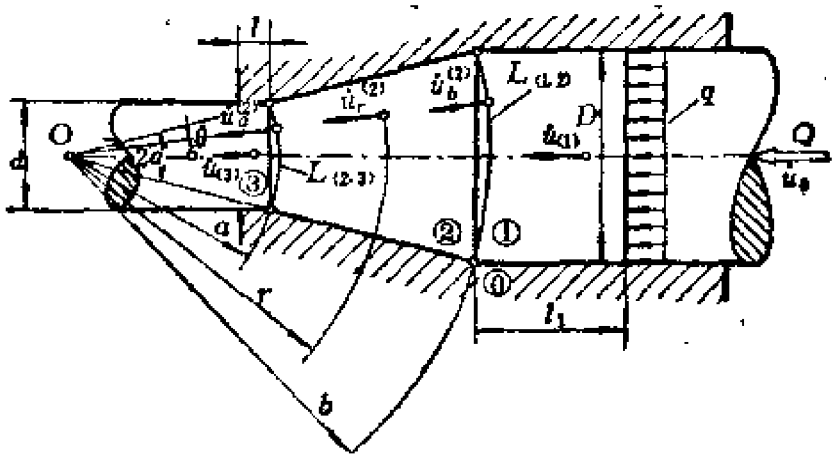


图7－27　圆杆挤压问题的机动容许位移速度场

$r=a$和$r=b$处的球面为位移速度间断面。若已知挤压活塞的速度为$\dot{u}_0$，则子区域①的位移速度为

$$\dot{u}_{(1)}=\dot{u}_0 \tag{7-53}$$

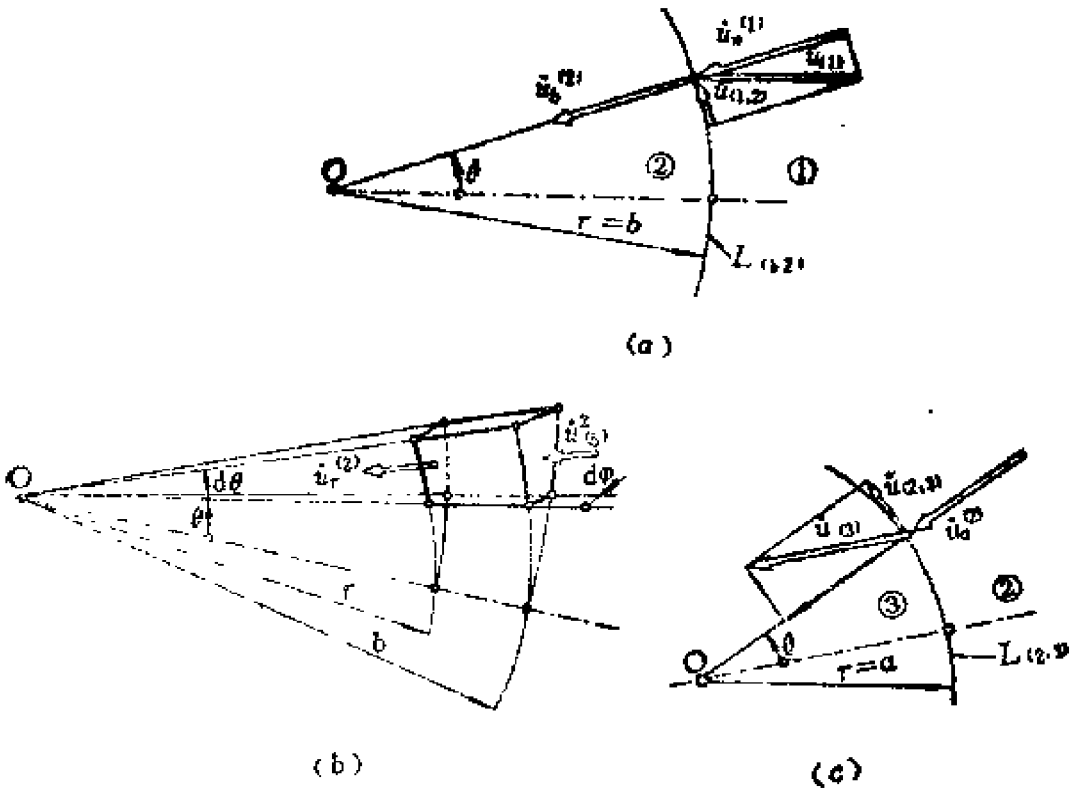
由于需满足介质的连续性条件，故由图7-28a可知，在间断面$L_{(1,2)}$上有

$$\begin{aligned}\dot{u}_b^{(2)}&=\dot{u}_{(1)}\cos\theta=\dot{u}_0\cos\theta\\ \dot{u}_{(1,2)}&=\dot{u}_{(1)}\sin\theta=\dot{u}_0\sin\theta\end{aligned} \tag{7-54}$$

区域②中的位移速度由不可压缩条件获得。由图7-28b所示的微元体有

$$\dot{u}_r^{(2)}\,\mathrm{d}A_r-\dot{u}_b^{(2)}\,\mathrm{d}A_b=0$$

式中，$\mathrm{d}A_r=r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$，$\mathrm{d}A_b=b^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$。由此可得



(a)　　(b)　　(c)

图7-28　求子区域中的位移速度

$$\dot{u}_r^{(2)} = \left(\frac{b}{r}\right)^2 \dot{u}_0^{(2)} = \left(\frac{b}{r}\right)^2 \dot{u}_0 \cos\theta \qquad (7\text{-}55)$$

在分界面$L_{(2,3)}$处有

$$\dot{u}_\theta^{(2)} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \dot{u}_0 \cos\theta$$

区域③的位移速度由分界面$L_{(2,3)}$上的介质连续性条件确定。由图7-27c可知

$$\dot{u}_{(3)} = \dot{u}_\theta^{(2)} \frac{1}{\cos\theta} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \dot{u}_0 \qquad (7\text{-}56)$$

$$\dot{u}_{(2,3)} = \dot{u}_{(3)} \sin\theta = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \dot{u}_0 \sin\theta \qquad (7\text{-}57)$$

以上求得的$\dot{u}_{(3)}$及$\dot{u}_{(1)}$满足体积不可压缩的条件。

在塑性区域②中，应变率分量为

$$\dot{\varepsilon}_r^{(2)} = \frac{\partial \dot{u}_r^{(2)}}{\partial r} = -2\frac{b^2}{r^3}\dot{u}_0\cos\theta$$

$$\dot{\varepsilon}_\theta^{(2)} = \frac{1}{r}\frac{\partial \dot{u}_\theta^{(2)}}{\partial \theta} + \frac{\dot{u}_r^{(2)}}{r} = \frac{b^2}{r^3}\dot{u}_0\cos\theta$$

$$\dot{\varepsilon}_\varphi^{(2)} = \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial \dot{u}_\theta^{(2)}}{\partial \theta} + \frac{\dot{u}_r^{(2)}}{r} + \frac{\dot{\varepsilon}_\theta^{(2)}}{r}\operatorname{ctg}\theta = \frac{b^2}{r^3}\dot{u}_0\cos\theta$$

$$\dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{u}_\theta^{(2)}}{\partial r} - \frac{\dot{u}_\theta^{(2)}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \dot{u}_r^{(2)}}{\partial \theta}\right) = -\frac{b^2}{2r^3}\dot{u}_0\sin\theta$$

其余的应变率分量皆为零。正应变率之和为零，即满足体积不可压缩的条件。在区域②中，应变率强度为

$$\dot{\varepsilon}_i^{(2)} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(\dot{\varepsilon}_r^{(2)})^2 + (\dot{\varepsilon}_\theta^{(2)})^2 + (\dot{\varepsilon}_\varphi^{(2)})^2 + 2(\dot{\varepsilon}_{r\theta}^{(2)})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{b^2}{r^3}\dot{u}_0\sqrt{6\cos^2\theta + \frac{1}{2}\sin^2\theta}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{b^2}{r^3}\dot{u}_0\sqrt{1 + 11\cos^2\theta} \qquad (7\text{-}58)$$

挤压力的上限值由外力功率与耗散功率相等的条件求得，即

$$q^{(+)}\pi b^2\sin^2\alpha\dot{u}_0 = \int_{V_2}\sigma_s\dot{\varepsilon}_i^{(2)}\mathrm{d}V + \int_{L_{(1,2)}}k\dot{u}_{(1,2)}\mathrm{d}L + \int_{L_{(2,3)}}k\dot{u}_{(2,3)}\mathrm{d}L + \int_{L_{(0,2)}}mk\dot{u}_{(0,2)}\mathrm{d}L + \int_{L_{(0,3)}}mk\dot{u}_{(0,3)}\mathrm{d}L \qquad (7\text{-}59)$$

下面分别计算上式右侧的各项积分。第一项积分表示区域②中的塑性耗散功率。利用式(7-58)及下式（图7-29）：

$$dV = (r d\theta)(r\sin\theta d\varphi)dr = r^2\sin\theta d\theta d\varphi dr$$

可得

$$\begin{aligned}\dot{W}_{(2)} &= \int_{V_2}\sigma_s\dot{\varepsilon}_e^{(2)}dV \\ &= \sigma_s\frac{b^2}{\sqrt{3}}\dot{\varepsilon}_0\int_a^b\frac{dr}{r}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\sqrt{1+11\cos^2\theta}\,d\theta \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\pi\sigma_s b^2\dot{\varepsilon}_0\ln\frac{b}{a}\int_0^{\pi}\sin\theta\sqrt{1+11\cos^2\theta}\,d\theta \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\pi\sigma_s b^2\dot{\varepsilon}_0\ln\frac{b}{a}f(\alpha)\end{aligned} \tag{7-60}$$

式中，$f(\alpha)=\int_0^{\pi}\sin\theta\sqrt{1+11\cos^2\theta}\,d\theta$。若取$\cos\theta=x$，$\sin\theta d\theta=-dx$，则$f(\alpha)=\int_{\cos\alpha}^{1}\sqrt{1+11x^2}\,dx$。此积分的解的形式为

$$f(\alpha)=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{1+11x^2}+\frac{1}{\sqrt{11}}\ln\left(x\sqrt{11}+\sqrt{1+11x^2}\right)\right]_{\cos\alpha}^{1}$$

最后得

$$f(\alpha)=\frac{1}{2}\left[\sqrt{12}-\cos\alpha\sqrt{1+11\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sqrt{11}}\ln\left(\frac{\sqrt{11}+\sqrt{12}}{\sqrt{11}\cos\alpha+\sqrt{1+11\cos^2\alpha}}\right)\right]$$

第二项积分为间断面$L_{(1,2)}$上的耗散功率。利用式（7-54）可得

$$\dot{W}_{(1,2)} = \int_{L_{(1,2)}} k\dot{u}_{(1,2)}\,dL$$

$$= kb^2\dot{u}_0 \int_0^{\alpha} \sin^2\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= 2\pi kb^2\dot{u}_0\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) \qquad (7\text{-}61)$$

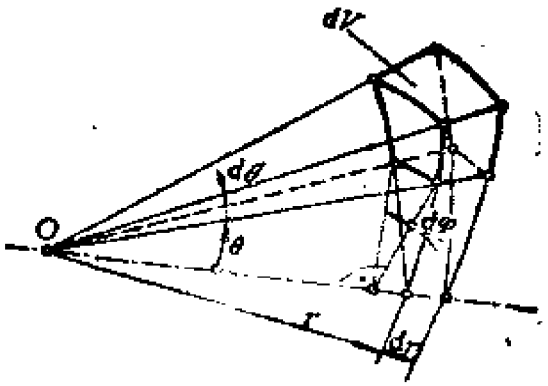


图7-29 球坐标系中的微元体体积

第三项积分为间断面$L_{(2,3)}$上的耗散功率。根据式(7-57)可得

$$\dot{W}_{(2,3)} = \int_{L_{(2,3)}} k\dot{u}_{(2,3)}\,dL$$

$$= kb^2\dot{u}_0 \int_0^{\alpha} \sin^2\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= 2\pi kb^2\dot{u}_0\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) \qquad (7\text{-}62)$$

第四项积分表示锥形模具表面上因摩擦而引起的耗散功率。材料在模具表面上的位移速度可令式(7-55)中的$\theta = \alpha$得到，即

$$\dot{u}_{(0,2)} = \left(\frac{b}{r}\right)^2 \dot{u}_0 \cos\alpha$$

锥形表面上的微面积为

$$dL = 2\pi(r\sin\alpha)dr$$

于是

$$\dot{W}_{(0,2)} = \int_{L(0,2)} mk\dot{u}_{(0,2)}dL$$

$$= 2\pi k m b^2 \dot{u}_0 \sin\alpha\cos\alpha \int_a^b \frac{dr}{r}$$

$$= 2\pi k m b^2 \dot{u}_0 \sin\alpha\cos\alpha \ln\frac{b}{a} \qquad (7\text{-}63)$$

第五项积分表示出口处表面因摩擦而引起的耗散功率。材料在出口处表面上的位移速度为

$$\dot{u}_{(0,3)} = \dot{u}_{(3)} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \dot{u}_0$$

表面上的微面积为

$$dL = 2\pi a\sin\alpha dl$$

于是

$$\dot{W}_{(0,3)} = \int_{L(0,3)} mk\dot{u}_{(0,3)}dL$$

$$= 2\pi k m \frac{b^2}{a}\sin\alpha\,\dot{u}_0 \int_0^l dl$$

$$= 2\pi k m \frac{b^2}{a}\sin\alpha\,\dot{u}_0 l \qquad (7\text{-}64)$$

将式(7-60)、(7-61)、(7-62)、(7-63)和(7-64)代入式(7-59)，得

$$q^{(+)}\pi b^2\sin^2\alpha = \pi b^2\sin^2\alpha \left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s - \frac{f(\alpha)}{\sin^2\alpha}\right.\right.$$

$$\left. + 2km\operatorname{ctg}\alpha\right)\ln\frac{b}{a} + \left(\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)\frac{2k}{\sin^2\alpha}$$

$$\left. + 2k\frac{m}{a}\frac{l}{\sin\alpha}\right]$$

令$\sigma_s=\sqrt{3}k$，将上式化简后得

$$\frac{q^{(+)}}{c}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\left(\frac{f(\alpha)}{\sin^2\alpha}+m\operatorname{ctg}\alpha\right)\ln\frac{b}{a}+\frac{\alpha-\frac{1}{2}\sin2\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{m}{a}\frac{l}{\sin\alpha}\right]$$

考虑如下几何关系：

$$\frac{b}{a}=\frac{D}{d},\quad a=\frac{d}{2\sin\alpha}$$

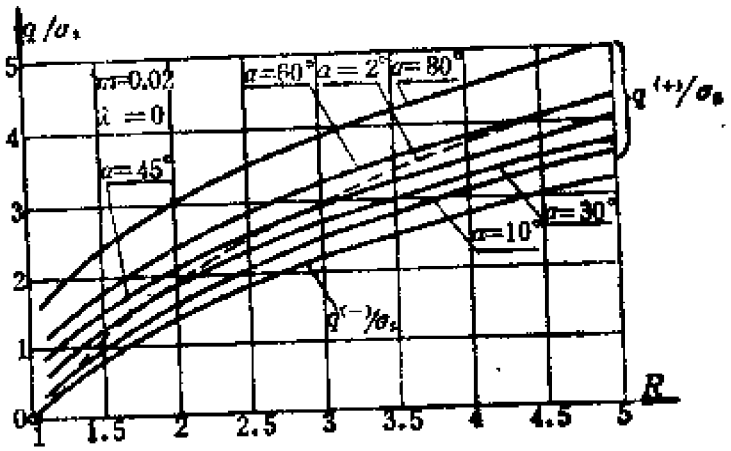
并取如下系数：

$$R=\frac{D}{d},\quad \lambda=\frac{l}{a}$$

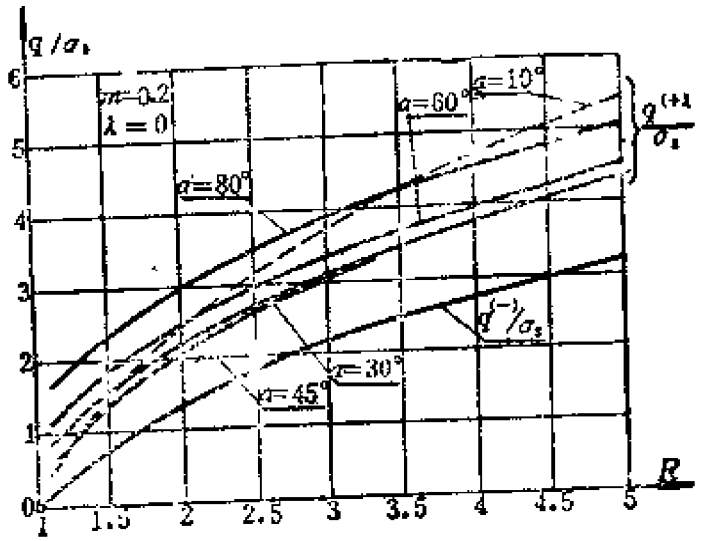
则可得挤压力的取值范围如下：

$$2\ln R\leqslant\frac{q}{\sigma_s}\leqslant\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\left(\frac{f(\alpha)}{\sin^2\alpha}+m\operatorname{ctg}\alpha\right)\ln R+\frac{2\alpha-\sin2\alpha}{2\sin^2\alpha}+m\frac{\lambda}{\sin\alpha}\right]$$

现将$m=0.02$及$m=0.2$而$\lambda=0$时的q/σ_s-R曲线画于图7-30a、b上。由图可见，角α的影响是明显的。



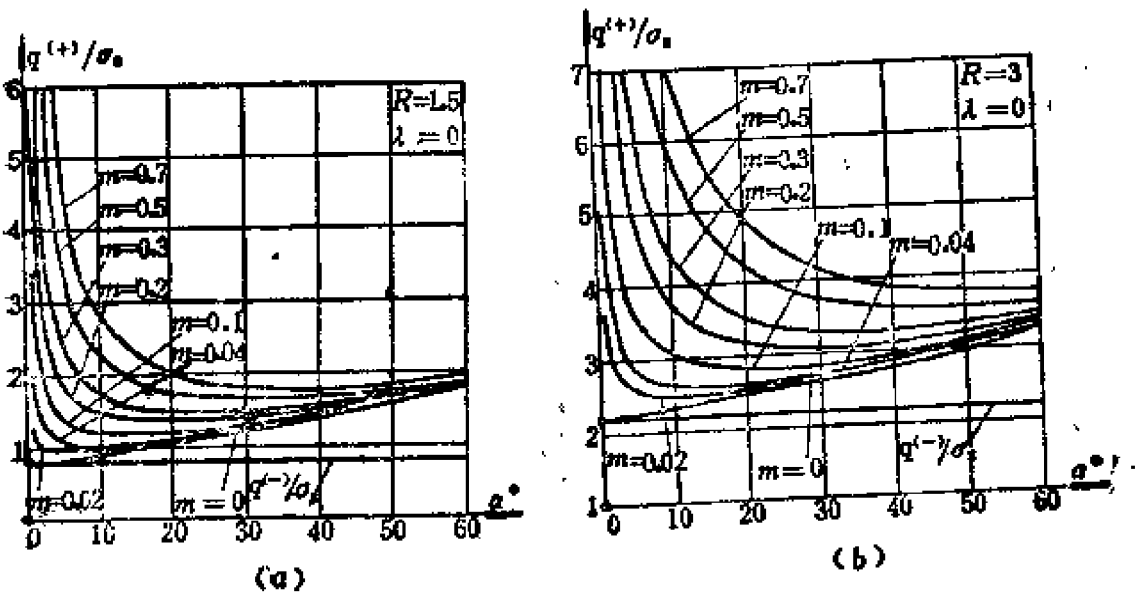
(a)



(b)

图7－30 $q/\sigma_s - R$曲线

挤压力与角α的关系曲线画于图7-31a、b上。从图上看出，角α也有一个最佳值，对应此最佳值，极限载荷$q^{(+)}$取最小值。这一角度也随R及m的变化而变化。



(a)　　(b)

图7－31 $q/\sigma_s - \alpha$曲线

习　题

7-1　半径为R的圆柱体坯料在上、下刚性模板间镦粗。假设径向位移速度$\dot{u}_r=\frac{1}{2}\frac{R}{H}\dot{u}$，轴向位移速度$\dot{u}_z=-\frac{z}{H}\dot{u}$，周向位移速度$\dot{u}_\theta=0$，式中$H$为上、下模板间的距离，模板与坯料间的粗糙系数为$m$，并将整个坯料看作是具有连续位移速度场的塑性变形区，试求镦粗力的上限值。

7-2　已知矩形金属块的厚度为$2h$，在刚性平行模板间压缩，模板以单位速度移动，如图7-32所示。图中的交叉线代表速度不连续线，与模板的夹角为θ。若伸出部分视为刚性体，试求极限载荷q。

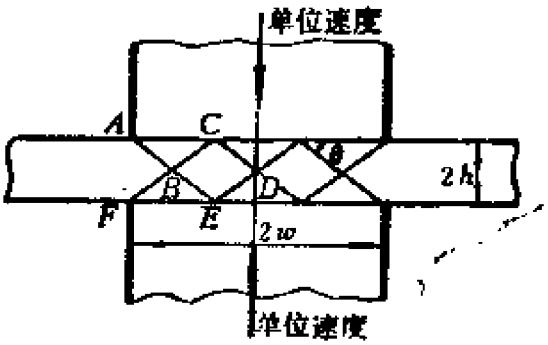


图7－32　矩形金属块受压缩

7-3　当冲头压入金属内部时，试按图7-33所示的速度间断线求出压力q的上限值。

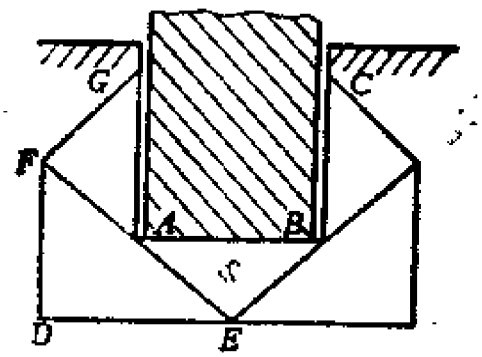


图7－33　冲头压入金属内部

7-4　设有一光滑的方模，材料在挤压时能自由流经模的平面。若已知$\frac{H}{a}=r$，试按图7-34所示的速度间断线求出挤压应力q的值。

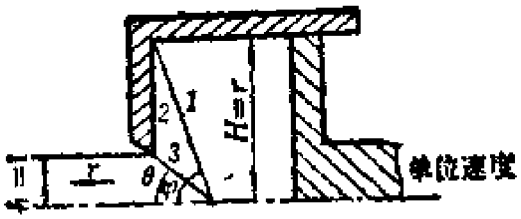


图7-34　材料在方模中滚压

第八章　简化分析法

§8-1　一般概念

简化分析法又称切块法或主应力法。这是一种将屈服条件和应力分布进行简化的分析方法，一般应用于平面问题或轴对称问题。其基本出发点是根据金属变形的方向，沿变形体截面切取单元体，假定切面上的正应力是主应力，且主应力的分布是均匀的。由于剪应力不在屈服条件中出现，因而屈服条件的数学形式大为简化。

简化分析法的优点是数学计算简单，它不仅能求出各种工艺过程中的总力（如镦粗力、挤压力、拉拔力等），而且还能找出应力分布规律以及某些参数（如变形体的几何参数、模孔角度、摩擦系数等）的影响。计算结果的准确程度和所作假设与实际情况的接近程度有关。

本章主要介绍平面应变条件下和轴对称条件下的主应力法。

§8-2　平面应变条件下镦粗过程的简化分析

图8-1所示为一介于上、下刚性压块之间的矩形截面板块，在镦粗过程中可作如下简化假设：

（1）应力分量σ_x和σ_y与坐标y无关，即沿厚度方向为常数；

（2）剪应力τ_{xy}与y成线性关系，在表面上即$y=\pm h$处，剪应力$\tau_{xy}=\nu\sigma_y$，ν为摩擦系数；

（3）剪应力τ_{xy}在材料进入塑性状态的过程中影响很小，因此可以在屈服条件中将它略去，这时屈服条件的形式为

$$\sigma_x - \sigma_y = 2l \tag{8-1}$$

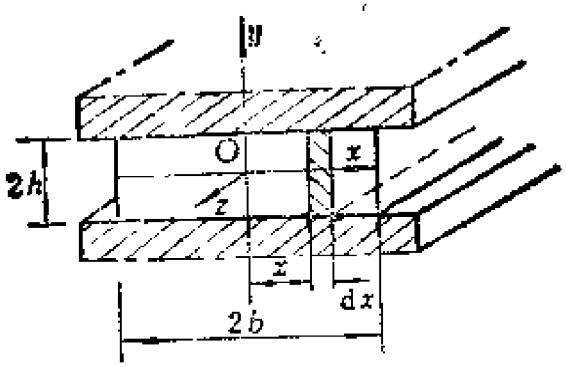


图8-1 平面应变微粗

以上各量都画于图8-2中。根据第二条假设可得

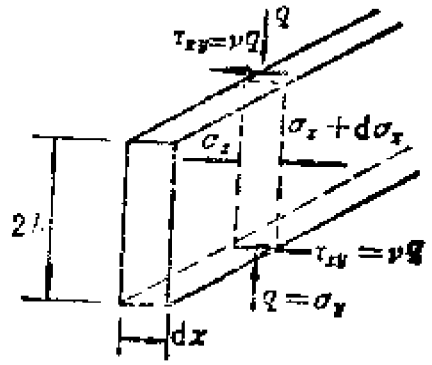


图8-2 微粗块体单元受力简图

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \frac{v}{h}\sigma_y \tag{8-2}$$

式（8-1）中对x求导后得

$$\frac{d\sigma_x}{dx} = \frac{d\sigma_y}{dx} \tag{8-3}$$

平面问题的平衡方程为

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{8-4}$$

将式（8-2）代入上式的第一式可得

$$\frac{d\sigma_x}{dx}+\frac{\nu}{h}\sigma_y=0$$

将式（8-3）代入上式又得

$$\frac{d\sigma_y}{dx}+\frac{\nu}{h}\sigma_y=0$$

上式积分后得

$$\sigma_y=C\exp\left(-\frac{\nu}{h}x\right) \tag{8-5}$$

积分常数C由边界条件：$x=\pm b$处$\sigma_x=0$来确定。根据简化的屈服条件，在这一边界上应有

$$\sigma_y=-2k$$

由此可得积分常数为

$$C=-2k\exp\left(\frac{\nu}{h}b\right)$$

将积分常数代回式（8-5），得

$$\frac{\sigma_y}{2k}=-\exp\left[\frac{\nu}{h}(b-x)\right] \tag{8-6}$$

由简化屈服条件可以求出σ_x的表达式，即

$$\frac{\sigma_x}{2k}=1-\exp\left[\frac{\nu}{h}(b-x)\right] \tag{8-7}$$

将式（8-6）代入式（8-2）并积分，得

$$\tau_{xy}=\frac{\nu}{h}\sigma_y y+C_1$$

因$y=0$时$\tau_{xy}=0$，故$C_1=0$。最后得

$$\frac{\tau_{xy}}{2k}=-\frac{\nu}{h}y\exp\left[\frac{\nu}{h}(b-x)\right] \tag{8-8}$$

由以上各式可知，应力分布是不均匀的，当$x=0$时，各应力

分量的绝对值最大。

刚性压块上的平均压力q可通过积分σ_y计算，即

$$q=\frac{1}{b}\int_0^b \sigma_y \mathrm{d}x$$

$$=-\frac{2k}{b}\int_0^b \exp\left[\frac{\nu}{h}(b-x)\right]\mathrm{d}x$$

积分时作如下变换：

$$\frac{\nu}{h}(b-x)=z,\quad \mathrm{d}x=-\frac{h}{\nu}\mathrm{d}z$$

最后得

$$\frac{q}{2k}=\frac{1}{\nu}\frac{h}{b}\quad(1-\mathrm{e}^{-\frac{b}{h}}) \tag{8-9}$$

以上的解只有在剪应力不超过剪切屈服极限时才是正确的，即

$$\tau_{xy}=\nu\sigma_y\geqslant -k$$

利用式（8-6），上式为

$$\exp\left[-\frac{\nu}{h}(b-x)\right]\leqslant\frac{1}{2\nu}$$

在$x=0$处，上式左端取最大值，此时有

$$\exp\left(\frac{\nu}{h}b\right)\leqslant\frac{1}{2\nu}$$

上式又可写为

$$\frac{\nu}{h}b\leqslant\ln\frac{1}{2\nu}\quad 或\quad \frac{b}{h}+\frac{\ln 2\nu}{\nu}\leqslant 0 \tag{8-10}$$

在实际问题中还经常遇到这样的情况，即剪应力在块体上、下表面的中间部分达到了剪切屈服极限，而在左右两侧小于剪切屈服极限。设a为这两个区域的分界线，这时有

$$|\tau_{xy}|=\nu|\sigma_y|\leqslant k\quad(a\leqslant x\leqslant b)$$

$$|\tau_{xy}| = k \qquad (0 \leqslant x \leqslant a)$$

区域$a \leqslant |x| \leqslant b$中的解已经在前面得到，现在求区域$0 \leqslant x \leqslant a$中的解。首先应找出两个区域的分界线。若已知$x = a$处$\nu\sigma_x = k$，则由式(8-6)可得

$$a = h\frac{\ln 2\nu}{\nu} + b \tag{8-11}$$

由上式可见，a的值与摩擦系数和板块的尺寸有关。当$\nu = 0.5$时，可得$a = b$，即在整个表面有$|\tau_{xy}| = k$。若$y = \pm h$时$\tau_{xy} = \pm k$，则根据τ_{xy}的线性分布规律可得

$$\frac{\mathrm{d}\tau_{xy}}{\mathrm{d}y} = -\frac{k}{h}$$

由式（8-4）的第一式可得

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_x}{\mathrm{d}x} - \frac{k}{h} = 0$$

上式积分后得

$$\sigma_x = \frac{k}{h}x + C$$

由式（8-7）可得$x = a$处的σ_x为

$$\sigma_x = 2k\left\{1 - \exp\left[\frac{\nu}{h}(b-a)\right]\right\}$$

因此积分常数C可通过在$x = a$处σ_x相等的条件定出，即

$$C = 2k\left\{1 - \exp\left[\frac{\nu}{h}(b-a)\right]\right\} - k\frac{a}{h}$$

于是

$$\frac{\sigma_x}{2k} = 1 - \exp\left[\frac{\nu}{h}(b-a)\right] - \frac{1}{2h}(a-x) \tag{8-12a}$$

由式(8-11)有

$$b - a = \frac{h}{\nu}\ln\frac{1}{2\nu}$$

将上式代入式(8-12a)后得

$$\frac{\sigma_x}{2k}=1-\frac{1}{2\nu}-\frac{1}{2h}(a-x) \tag{8-12b}$$

由屈服条件式(8-1)得

$$\frac{\sigma_y}{2k}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\nu}+\frac{a-x}{h}\right) \tag{8-13}$$

由式(8-12b)和(8-13)可见，应力分布是线性的。由于σ_x在$y=\pm h$处不是均匀分布的，因此刚性压块上的平均压力仍需通过积分σ_y来求得，此时有

$$\begin{aligned}\frac{q}{2k}&=-\frac{1}{b}\left\{\int_0^a-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\nu}+\frac{a-x}{h}\right)dx+\int_a^b\exp\left[\frac{\nu}{h}(b-x)\right]dx\right\}\\&=-\frac{1}{2b}\left(\frac{a^2}{2h}+\frac{a}{\nu}+\frac{h}{\nu^2}-\frac{2h}{\nu}\right)\end{aligned}$$

或

$$\frac{q}{2k}=-\frac{h}{b}\frac{1}{\nu}\left\{\frac{1}{4\nu}\left[\left(\nu\frac{a}{h}+1\right)^2+1\right]-1\right\} \tag{8-14}$$

式中的a由式（8-11）确定。现将不同ν值对应的$\frac{q}{2k}-\frac{b}{h}$曲线画于图8-3中。

在以上所作的简化假设下，静力场不是静力容许的，因为它不满足在$x=\pm b$及对称轴处剪应力τ_{xy}为零的条件，而满足这些条件的静力容许应力场在板块上、下表面处的应力为

在$x=\pm b$处，　　$\sigma_x=0,\sigma_y=-2k$

在$x=0、\pm b$处，　　$\tau_{xy}=0$

图8-4　给出的剪应力分布满足这些条件。图中，m为粗糙系数。

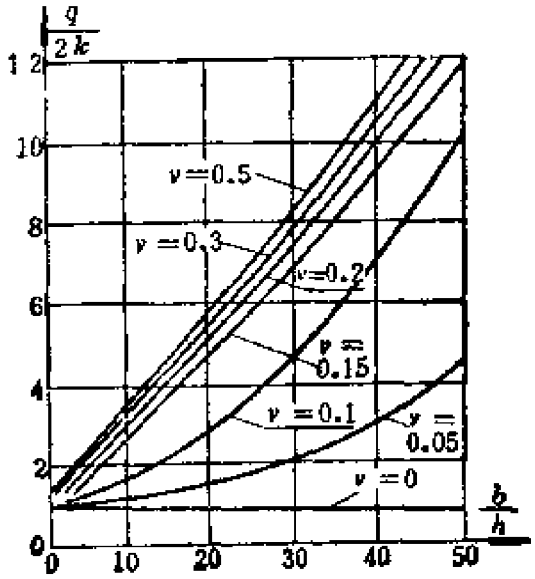


图8-3 $q/2k-b/h$曲线

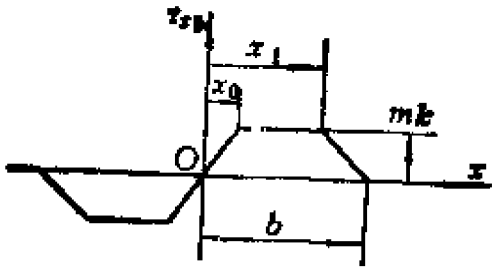


图8-4 在板块上、下表面处的剪应力分布

前面推得的公式可以用来分析图8-5所示的模锻问题。在初始阶段如满足不等式（8-10），则应力分量σ_y、σ_x、τ_{xy}可用式（8-6）、（8-7）和（8-8）表示，而平均压力则用式（8-9）表示。若不等式（8-10）不能被满足，则可按式（8-11）求出分界线a；在$a\leqslant x\leqslant b$区间中，各应力分量仍由式（8-6）、（8-7）和（8-8）确定；在$0\leqslant x\leqslant a$区间中，应力分量σ_x和σ_y则按式（8-12b）和（8-13）确定；而平均压力则由式（8-14）确定。

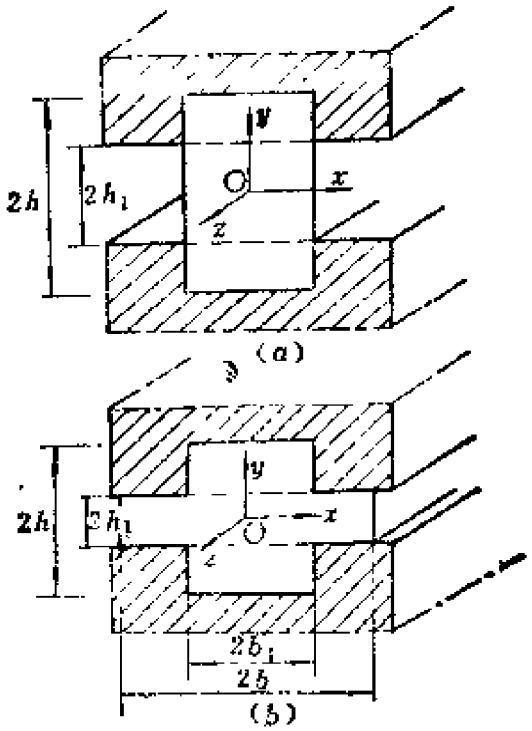


图8-5　平面应变模锻

下面再来分析一下模锻的中间过程（图8-5b），这一阶段的特点是材料流入膜膛。设材料流入模膛的高度h_1，将这一区域分为两个部分，，即$0\leqslant x\leqslant b_1$为区域①，$b_1\leqslant x\leqslant b$为区域②。

设在$y=\pm h_1$剖面上，区域①的剪应力$\tau_{xy}=\pm k$，而区域②的τ_{xy}与条件（8-11）式有关（图8-6）。如满足

$$a=h_1\frac{\ln 2\nu}{\nu}+b\leqslant b_1 \tag{8-15}$$

即材料尚未流满模具，则此时区域②中的应力状态由下式确定：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sigma_x^{(2)}}{2k}&=1-\exp\left[\frac{\nu}{h_1}(b-x)\right]\\ \frac{\sigma_y^{(2)}}{2k}&=-\exp\left[\frac{\nu}{h_1}(b-x)\right]\\ \frac{\tau_{xy}^{(2)}}{2k}&=-\frac{\nu y}{h_1}\exp\left[\frac{\nu}{h_1}(b-x)\right]\end{aligned}\right\} \tag{8-16}$$

在区域①，由$y=h_1$处的边界条件可得

$$\frac{\partial \tau_{xy}^{(1)}}{\partial y}=-\frac{k}{h_1}$$

代入平衡方程（8-4）的第一式得

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_x^{(1)}}{\mathrm{d}x}-\frac{k}{h_1}=0$$

上式积分后得

$$\sigma_x^{(1)}=k\frac{x}{h_1}+C \qquad (8\text{-}17)$$

积分常数由条件$x=b_1$处$\sigma_x^{(1)}=\sigma_x^{(2)}$来确定，即

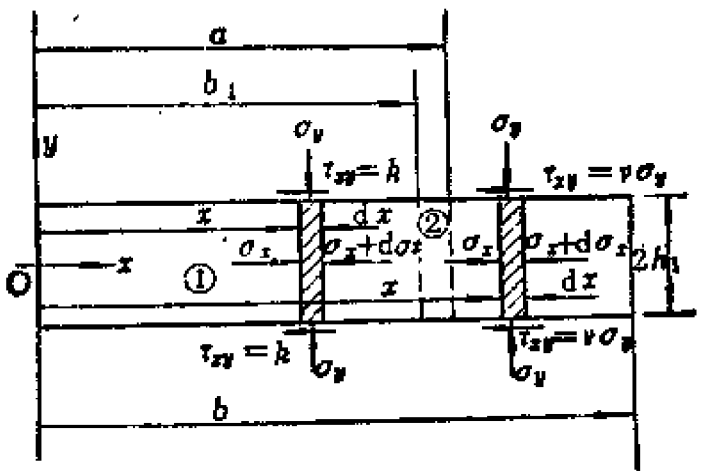


图8-6 横锻块体受力简图

$$C=2k\left\{1-\exp\left[\frac{\nu}{h_1}(b-b_1)\right]\right\}-k\frac{b_1}{h_1}$$

将C代回式（8-17）后有

$$\frac{\sigma_x^{(1)}}{2k}=1-\exp\left[\frac{\nu}{h_1}(b-b_1)\right]-\frac{1}{2}\left(\frac{b_1-x}{h_1}\right) \qquad (8\text{-}18)$$

由屈服条件可得

$$\frac{\sigma_y^{(1)}}{2k} = -\exp\left[\frac{\nu}{h_1}(b-b_1)\right] - \frac{1}{2}\frac{b_1-x}{h_1} \qquad (8\text{-}19)$$

平均压力由下式计算：

$$\frac{q}{2k} = \frac{1}{b}\left[\int_0^{b_1}\frac{\sigma_y^{(1)}}{2k}\mathrm{d}x + \int_{b_1}^{b}\frac{\sigma_y^{(2)}}{2k}\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{1}{b}\left\{-\left(b_1 + \frac{h_1}{\nu}\right)\exp\left[\frac{\nu}{h_1}(b-b_1)\right] - \frac{b_1^2}{4h_1} + \frac{h_1}{\nu}\right\} \qquad (8\text{-}20)$$

如果

$$a = h_1\frac{\ln 2\nu}{\nu} + b \geqslant b_1$$

则在区域$0 \leqslant x \leqslant a$中，应力分量由式（8-12$b$)和(8-13)表示；在区域$a \leqslant x \leqslant b$中，应力分量由式(8-6)、(8-7)和(8-8)表示；平均压力由式（8-14)表示。在以上各式中，须将h改为h_1。

§8-3 平面应变条件下的拉拔

平面应变条件下的拉拔(图8-7)采用下列简化假设：

(1) 应力σ_x和σ_y与坐标y无关；

(2)应力σ_y按图8-8所示，当α角较小时，取

$$\sigma_y = -q(1-\nu\mathrm{tg}\alpha) \approx -q$$

(3) 剪应力τ_{xy}较小，取屈服条件为

$$\sigma_x - \sigma_y = \pm 2k$$

在变形区取出厚度为$\mathrm{d}x$的微元体（图8-8），其上作用有表面压力q、摩擦力νq及轴向应力σ_x。将这些力投影到x轴上，由平衡条件得

$$-\sigma_x h + (\sigma_x + \mathrm{d}\sigma_x)(h+\mathrm{d}h) + \nu q\mathrm{d}l\cos\alpha + q\mathrm{d}l\sin\alpha = 0 \qquad (8\text{-}21)$$

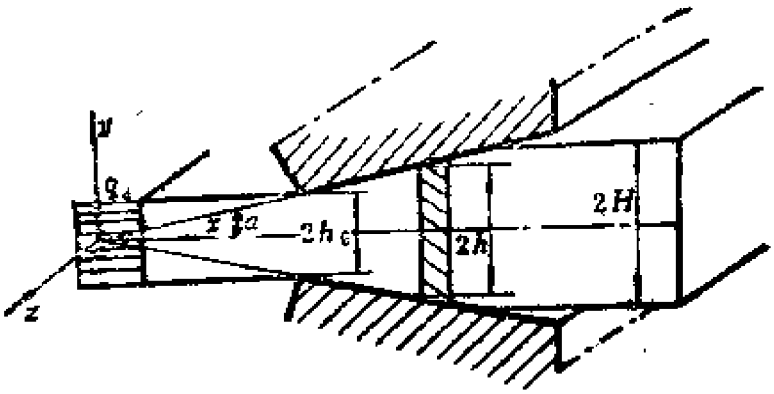


图8-7 平面应变拉拔

由几何关系知

$$dl\cos\alpha = dx, \qquad dx = dh\,\mathrm{ctg}\alpha$$

将上式代入式(8-21)，化简后得

$$[\sigma_x + q(1 + \nu\,\mathrm{ctg}\alpha)]dh + h d\sigma_x = 0 \tag{8-22}$$

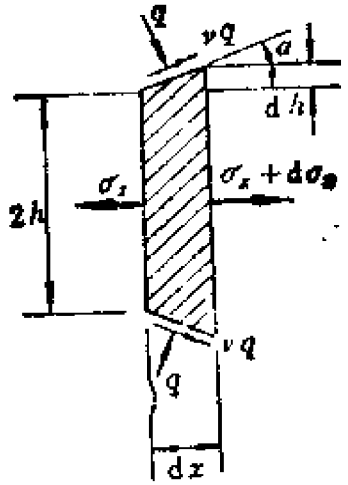


图8-8 微元体的受力简图

由简化假设(2)和(3)可得屈服条件为

$$\sigma_x - \sigma_y = \sigma_x + q = 2k \tag{8-23}$$

将上式代入式（8-22）并化简，可得

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_x}{\sigma_x\nu\mathrm{ctg}\alpha-2k(1+\nu\mathrm{ctg}\alpha)}=\frac{\mathrm{d}h}{h} \tag{8-24}$$

如将上式的分母用z表示，则有

$$\sigma_x\nu\mathrm{ctg}\alpha-2k(1+\nu\mathrm{ctg}\alpha)=z$$

$$\mathrm{d}\sigma_x=\frac{\mathrm{d}z}{\nu\mathrm{ctg}\alpha}$$

将上式代入式（8-24）并积分，得

$$\frac{1}{\nu\mathrm{ctg}\alpha}\ln z=\ln h+\ln C$$

或

$$z^{\frac{1}{\nu\mathrm{ctg}\alpha}}=[\sigma_x\nu\mathrm{ctg}\alpha-2k(1+\nu\mathrm{ctg}\alpha)]^{\frac{1}{\nu\mathrm{ctg}\alpha}}=Ch \tag{8-25}$$

当$h=H$时$\sigma_x=0$，由此得积分常数C为

$$C=\frac{1}{H}[-2k(1+\nu\mathrm{ctg}\alpha)]^{\frac{1}{\nu\mathrm{ctg}\alpha}}$$

将常数C代回式（8-25），经化简得

$$\frac{\sigma_x}{2k}=\frac{1+\nu\mathrm{ctg}\alpha}{\nu\mathrm{ctg}\alpha}\left[1-\left(\frac{h}{H}\right)^{\nu\mathrm{ctg}\alpha}\right] \tag{8-26}$$

由屈服条件（8-23）式得

$$\frac{\sigma_y}{2k}=\frac{1+\nu\mathrm{ctg}\alpha}{\nu\mathrm{ctg}\alpha}\left[1-\left(\frac{h}{H}\right)^{\nu\mathrm{ctg}\alpha}\right]-1 \tag{8-27}$$

拉拔力q_d相当于$h=h_0$处的σ_x，即

$$\frac{q_d}{2k}=\frac{1+\nu\mathrm{ctg}\alpha}{\nu\mathrm{ctg}\alpha}\left[1-\left(\frac{h_0}{H}\right)^{\nu\mathrm{ctg}\alpha}\right] \tag{8-28}$$

令$R=H/h_0$及$a=\nu\mathrm{ctg}\alpha$，将$\frac{q_d}{2k}$-R曲线画在图8-9上，而将$\frac{q_d}{2k}-\alpha$曲线画于图8-10上。由图8-10可见，随着角α的增大，拉拔

力$\frac{q_d}{2k}$逐渐减小，直到等于摩擦系数$\nu=0$时的拉拔力。

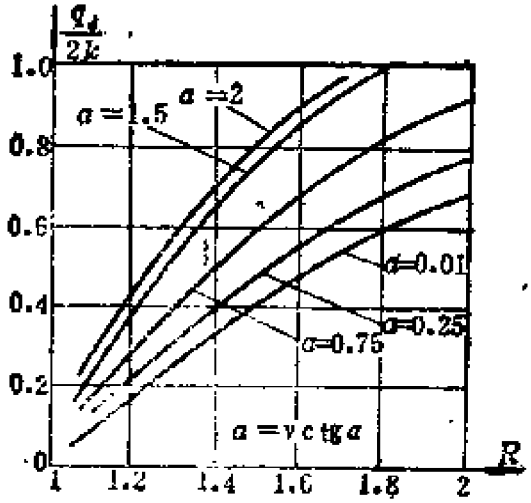


图8-9 $\frac{q_d}{2k}-R$曲线

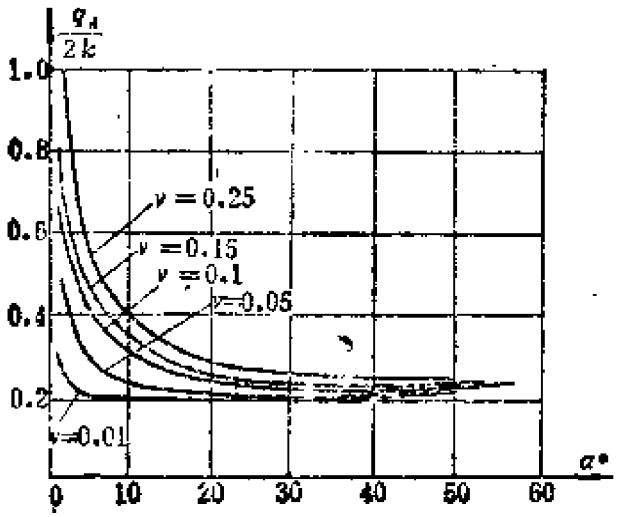


图8-10 $\frac{q_d}{2k}-\alpha$曲线

当拉拔力q_d未达到屈服极限时，以上的分析才是正确的，即要求

$$q_c = \sigma_z < 2k$$

利用式（8-28）可将上面的极限条件写为

$$\frac{1+\nu\mathrm{ctg}\alpha}{\nu\mathrm{ctg}\alpha}\left[1-\left(\frac{h_0}{H}\right)^{\nu\mathrm{ctg}\alpha}\right]=1$$

由此得极限减薄比为

$$R_{极} = (H/h_0)_{极} = (1+\nu\mathrm{ctg}\alpha)^{\frac{1}{\nu\mathrm{ctg}\alpha}} \qquad (8\text{-}29)$$

§8-4 平面应变条件下的挤压

平面应变条件下的挤压过程的分析和拉拔过程的分析完全类似，所作的简化假设也一样。利用与§8-2节相同的方法，可以得到应力σ_x、σ_y、挤压力q_c以及极限减薄比$R_{极}$。现在分析图8-11所示的挤压情况。

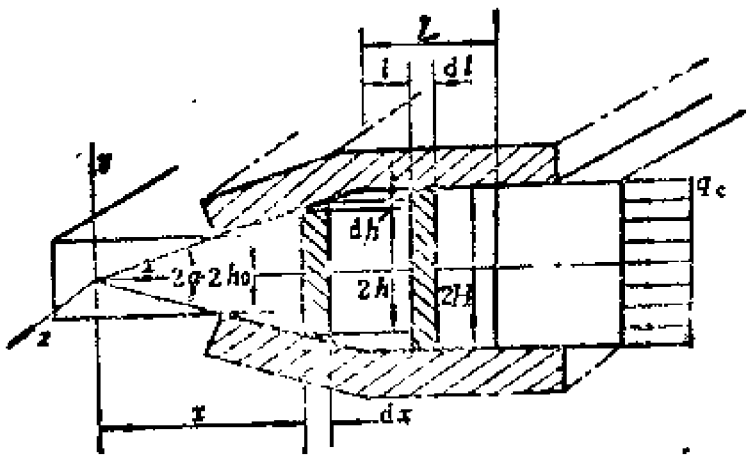


图8-11 平面应变挤压

当材料填满整个模具时，模具壁开始承受压力，从而产生了摩擦力。为了考虑摩擦对应力分布及挤压力的影响，首先分析一下厚度为dl的微元体的平衡（图8-12）。在此微元体上。作用有

应力σ_x、模具的挤压力q和摩擦力$\nu_1 q$，将这些力投影到x轴上，得

$$-\sigma_x H+(\sigma_x+\mathrm{d}\sigma_x)H+\nu_1 q\mathrm{d}l=0 \tag{8-30}$$

由于在此情况下$\sigma_y>\sigma_x$，故屈服条件为

$$\sigma_y-\sigma_x=2k$$

因$\sigma_y=-q$，所以

$$q=-(\sigma_x+2k)$$

将上式代入式(8-30)，得

$$H\mathrm{d}\sigma_x-\nu_1(\sigma_x+2k)\mathrm{d}l=0$$

由此得

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_x}{\sigma_x+2k}=\frac{\nu_1}{H}\ \mathrm{d}l$$

积分后得

$$\ln(\sigma_x+2k)=\frac{\nu_1}{H}l+C \tag{8-31}$$

在$l=0$处，挤压力由下式计算：

$$\sigma_x=2k\frac{1+\nu\mathrm{ctg}\alpha}{\nu\mathrm{ctg}\alpha}\left[1-\left(\frac{H}{h_0}\right)^{\nu\mathrm{ctg}\alpha}\right] \tag{8-32}$$

由于在$l=0$处式（8-31）和（8-32）所计算的应力σ_x应相等，所以得积分常数C为

$$C=\ln\left\{2k\frac{1+\nu\mathrm{ctg}\alpha}{\nu\mathrm{ctg}\alpha}\left[1-\left(\frac{H}{h_0}\right)^{\nu\mathrm{ctg}\alpha}\right]+2k\right\}$$

将积分常数C代回式（8-31）得

$$\frac{\sigma_x}{2k}=e^{\nu_1\frac{l}{H}}\left\{\frac{1+\nu\mathrm{ctg}\alpha}{\nu\mathrm{ctg}\alpha}\left[1-\left(\frac{H}{h_0}\right)^{\nu\mathrm{ctg}\alpha}\right]+1\right\}-1 \tag{8-33}$$

应力分量σ_y由屈服条件求出：

$$\frac{\sigma_y}{2k}=e^{\nu_1\frac{l}{H}}\left\{\frac{1+\nu\mathrm{ctg}\alpha}{\nu\mathrm{ctg}\alpha}\left[1-\left(\frac{H}{h_0}\right)^{\nu\mathrm{ctg}\alpha}\right]+1\right\}$$

(8-34)

挤压力q_c相当于$l=L$处的应力分量σ_z，即

$$\frac{q_c}{2k}=e^{\nu_1\frac{L}{H}}\left\{\frac{1+\nu\mathrm{ctg}\alpha}{\nu\mathrm{ctg}\alpha}\left[1-\left(\frac{H}{h_0}\right)^{\nu\mathrm{ctg}\alpha}\right]+1\right\}-1$$

(8-35)

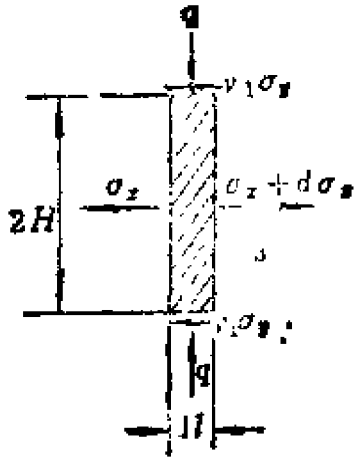


图8-12　微元体的受力简图

公式（8-33）～（8-35）只有当$\nu_1\sigma_y\leqslant k$时才是正确的，当超过这一值时，材料将粘着在模具表面上。利用式（8-34）则上述条件为

$$-2\nu_1 e^{\nu_1\frac{l}{H}}\left\{\frac{1+\nu\mathrm{ctg}\alpha}{\nu\mathrm{ctg}\alpha}\left[1-\left(\frac{H}{h_0}\right)^{\nu\mathrm{ctg}\alpha}\right]+1\right\}=1$$

由此可得

$$\left(\frac{l}{H}\right)_{极}=-\frac{1}{\nu_1}\ln\left\{-2\nu_1\left[\frac{1+\nu\mathrm{ctg}\alpha}{\nu\mathrm{ctg}\alpha}\left(1-\left(\frac{H}{h_0}\right)^{\nu\mathrm{ctg}\alpha}\right)+1\right]\right\}$$

(8-36)

当 $(l/H) > (l/H)_{极}$ 时，模具中的摩擦力达到了极限值，并等于剪切屈服极限k。将微元体（图8-13）上的各力沿x轴投影，由平衡条件得

$$-\sigma_x H + (\sigma_x + d\sigma_x)H + k dl = 0$$

上式积分后得

$$\sigma_x = -k\frac{l}{H} + C$$

由式(8-33)，当$(l/H) = (l/H)_{极}$时有

$$\sigma_x = 2k\exp\left[\nu_1\left(\frac{l}{H}\right)_{极}\right]\left\{\frac{1+\nu\mathrm{ctg}\alpha}{\nu\mathrm{ctg}\alpha}\left[1-\left(\frac{H}{h_0}\right)^{\nu\mathrm{ctg}\alpha}\right]+1\right\}-2k$$

利用力的连续条件可以求出积分常数C，并最后求得应力分量σ_x为

$$\frac{\sigma_x}{2k} = \exp\left[\nu_1\left(\frac{l}{H}\right)_{极}\right]\left\{\frac{1+\nu\mathrm{ctg}\alpha}{\nu\mathrm{ctg}\alpha}\left[1-\left(\frac{H}{h_0}\right)^{\nu\mathrm{ctg}\alpha}\right]+1\right\}-1 - \frac{1}{2}\left[\frac{l}{H}-\left(\frac{l}{H}\right)_{极}\right]$$

当$l = L$时，得挤压力为

$$\frac{q_x}{2k} = \exp\left[\nu_1\left(\frac{l}{H}\right)_{极}\right]\left\{\frac{1+\nu\mathrm{ctg}\alpha}{\nu\mathrm{ctg}\alpha}\left[1-\left(\frac{H}{h_0}\right)^{\nu\mathrm{ctg}\alpha}\right]+1\right\}-1 - \frac{1}{2}\left[\frac{L}{H}-\left(\frac{l}{H}\right)_{极}\right]$$

将挤压力$q_x/2k$与角α的关系曲线画于图8-14上。这里取R($=H/h_0$)与λ($=L/H$)为固定值，而摩擦系数ν取不同值。由图8-13可见，随着角度α的增大，挤压力不断减小。

当$\alpha = 20°$、$\lambda = 4$时，不同摩擦系数对应的$q_x/2k - R$曲线画于图8-15上。

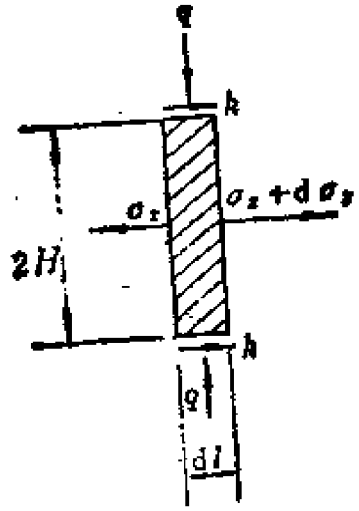


图8-13　$(l/H)>(l/H)_{临}$时的微元体受力简图

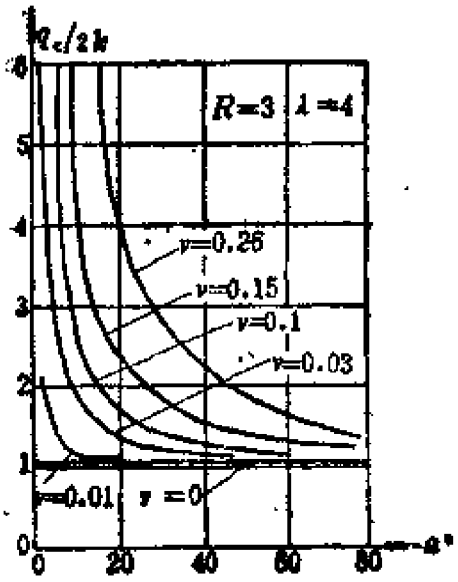


图8-14　$q_e/2k-\alpha$曲线

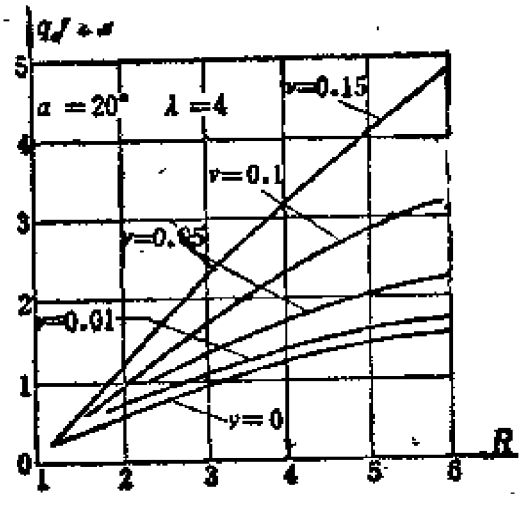


图8-15　$q_e/2k-R$曲线

考虑材料的强化效应时，仍假设应变分量与坐标y无关，应变分量仍用增量形式表示，即

$$de_x=-\frac{dh}{h},\quad de_y=\frac{dh}{h}$$

应变强度的增量则为

$$\mathrm{d}\varepsilon_i = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(\mathrm{d}\varepsilon_x)^2 + (\mathrm{d}\varepsilon_y)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\mathrm{d}h}{h}$$

上式积分后可得

$$\varepsilon_i = \int_h^H \mathrm{d}\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \frac{H}{h}$$

如取幂强化的应力-应变关系为$\sigma = a(\varepsilon_i + \varepsilon)^n$，则在使用米泽斯屈服条件时有

$$k = \frac{1}{\sqrt{3}} a(\varepsilon_i + \varepsilon_i)^n$$

在塑性变形过程中，应力分量σ_z满足以下微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_z}{\mathrm{d}h} = \frac{1}{h}\left\{\sigma_z \nu \operatorname{ctg}\alpha - \frac{2}{\sqrt{3}} a\left(\varepsilon_i + \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \frac{H}{h}\right)^n (1 + \nu \operatorname{ctg}\alpha)\right\}$$

以上微分方程应按给定的边界条件解出。边界条件与塑性成形的类别有关。对于拉拔，在$h = H$处$\sigma_z = 0$；若有反向拉力，则在$h = H$处$\sigma_z = q_0$。对于挤压，在$h = h_0$处$\sigma_z = 0$。在拉拔情况下，$q_1 = \sigma_z(h_0)$。在挤压情况下，$q_1 = \sigma_z(H)$。

§8-5 轴对称拉拔

通过锥形孔进行轴对称拉拔是工程中经常遇到的问题。这一过程的分析也可采用简化分析法。在轴对称问题中，采用柱坐标更为方便。这里作下列简化假设：

(1) 塑性变形区集中于锥形模具中z_0到z_1之间（图8-16a）；

(2) 应力分量σ_r、σ_θ及σ_z和坐标θ无关；

(3) 锥形模具表面上的剪应力由摩擦引起，其大小等于νq，ν为摩擦系数，q为法向压力；

(4) 剪应力τ_{rz}对材料进入塑性状态的影响可以忽略不

计。

由于所研究的是轴对称问题，因而各物理量与坐标θ无关。

体积不可压缩条件可以写为

$$de_r + de_\theta + de_z = 0 \tag{8-37}$$

以及

$$\frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial z}dz = 0 \tag{8-38}$$

式中，V为材料的体积。对于微元体，其体积为

$$V = \pi r^2 dz \tag{8-39}$$

于是式（8-38）可以写为

$$\frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial (dz)}d(dz) = 0 \tag{8-40}$$

式（8-39）代入上式后可得

$$2\frac{dr}{r} + \frac{d(dz)}{dz} = 0 \tag{8-41}$$

由于$de_r = \frac{d(dz)}{dz}$，$de_\theta = \frac{dr}{r}$，所以根据式（8-41）、（8-37）有

$$de_r = de_\theta = \frac{dr}{r}$$

根据上式，由塑性流动法则可知

$$s_r = s_\theta \quad , \quad \sigma_r = \sigma_\theta$$

所以在此情况下，米泽斯屈服条件的形式为

$$\sigma_z - \sigma_r = \sigma_s \tag{8-42}$$

从锥形区域中取出一厚度为dz的微元体（图8-16b）其上作用有锥形表面上的压力q、摩擦力νq以及轴向力σ_z。将这些力沿z轴投影，由平衡条件得

$$\nu q \cdot 2\pi r ds\cos\alpha - \sigma_z \pi r^2 + (\sigma_z + d\sigma_z)\pi(r+dr)^2 + q \cdot 2\pi r ds\sin\alpha = 0$$

化简后得

$$r d\sigma_z + 2[\sigma_z dr + q(ds \cdot \sin\alpha + \nu ds\cos\alpha)] = 0 \qquad (8\text{-}43)$$

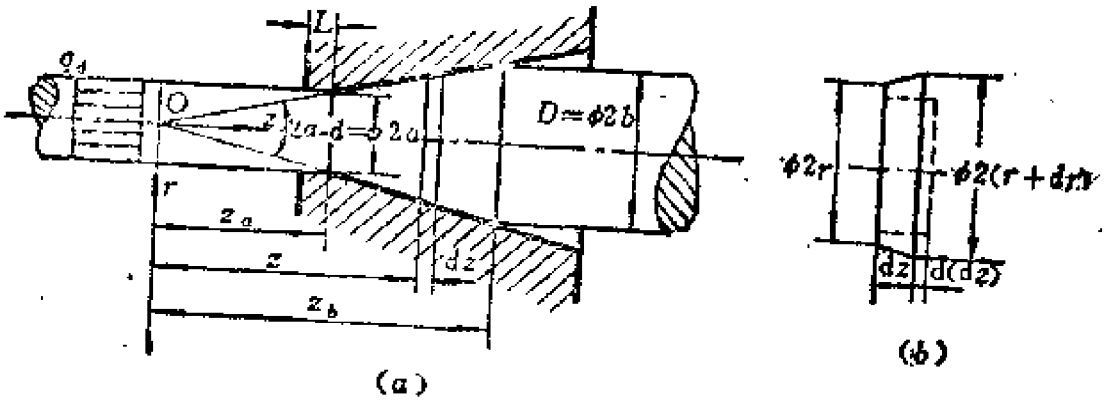


图8-10 轴对称拉拔

由微元体的几何关系有

$$\frac{dr}{dz} = tg\alpha, \quad ds\cos\alpha = dz = dr\,ctg\alpha, \quad ds\sin\alpha = dr$$

将这些关系代入式（8-43）后可得

$$r d\sigma_z + 2[\sigma_z + (1 + \nu ctg\alpha)q]dr = 0 \qquad (8\text{-}44)$$

由于拉拔是在倾角α不大的条件下进行的，因此可以作如下简化假设：

$$\sigma_r = -q(1 - \nu tg\alpha) \approx -q$$

由于材料轴向受拉，故有$\sigma_z \geqslant 0$，于是屈服条件为

$$\sigma_z - \sigma_r = \sigma_z + q = \sigma_s \qquad (8\text{-}45)$$

由式（8-44）和（8-45）可得

$$r d\sigma_z - 2[\nu ctg\alpha\sigma_s - (1 + \nu ctg\alpha)\sigma_z]dr = 0 \qquad (8\text{-}46a)$$

将上式分离变量后得

$$\frac{d\sigma_r}{\nu ctg\alpha\sigma_r-(1+\nu ctg\alpha)\sigma_r}=2\frac{dr}{r}$$

上式积分后得

$$\frac{1}{\nu ctg\alpha}\ln[\nu ctg\alpha\sigma_r-(1+\nu ctg\alpha)\sigma_r]=2\ln r+C \tag{8-46b}$$

在$r=b$处$\sigma_r=0$，由此边界条件可以确定常数C。最后得

$$\frac{\sigma_z}{\sigma_s}=\frac{1+\nu ctg\alpha}{\nu ctg\alpha}\left[1-\left(\frac{r}{b}\right)^{2\nu ctg\alpha}\right] \tag{8-47}$$

由上式及屈服条件可得

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_s}=\frac{\sigma_\theta}{\sigma_s}=\frac{1+\nu ctg\alpha}{\nu ctg\alpha}\left[1-\left(\frac{r}{b}\right)^{2\nu ctg\alpha}\right]-1 \tag{8-48}$$

圆杆的拉拔力等于$r=a$处的轴向应力σ_z，即

$$\frac{q_d}{\sigma_s}=\frac{1+\nu ctg\alpha}{\nu ctg\alpha}\left[1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2\nu ctg\alpha}\right]$$

或

$$\frac{q_d}{\sigma_s}=\frac{1+\nu ctg\alpha}{\nu ctg\alpha}\left[1-\left(\frac{d}{D}\right)^{2\nu ctg\alpha}\right] \tag{8-49}$$

令$R=\frac{D}{d}$，$a=\nu ctg\alpha$，将q_d/σ_s-R曲线画于图8-17上，将$R\leqslant 1.2$时的q_{d0}/σ_s-a曲线画于图8-18上。

上述拉拔过程的限制条件是圆杆细端不进入塑性状态，即要求

$$q_d<\sigma_s$$

由式（8-49）可得

$$\frac{1+\nu ctg\alpha}{\nu ctg\alpha}\left[1-\left(\frac{d}{D}\right)^{2\nu ctg\alpha}\right]=1$$

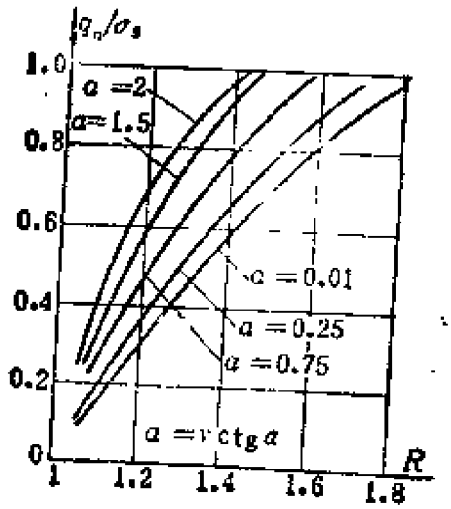


图8－17 q_d/σ_s －R曲线

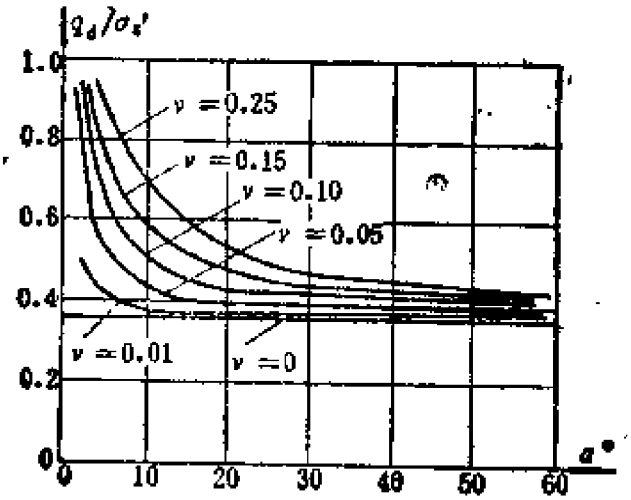


图8－18 $R\leqslant1.2$时的q_d/σ_s' －α曲线

由此得圆杆直径的极限变化量为

$$R_{极}=\left(\frac{D}{d}\right)_{极}=(1+\nu\mathrm{ctg}\alpha)^{\frac{1}{2\nu}\mathrm{ctg}\alpha} \qquad (8\text{-}50)$$

将$R_{极}$－α曲线画于图8-19上。

若在拉拔过程中有反向拉力q_0作用，则应力分布和拉拔力都

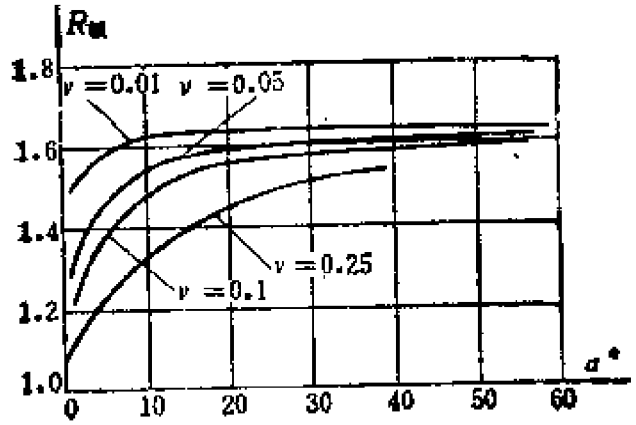


图8－19　$R_{极}-\alpha$曲线

将有相应的变化(图8-20)。此时，在$r=b$处，轴向应力$\sigma_z=q_0$，由式（8-46b）可得积分常数为

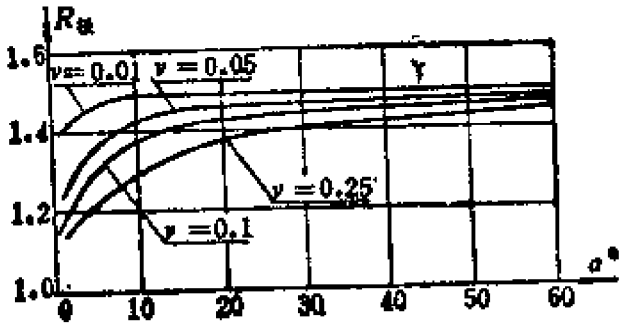


图8－20　有反向拉力时的R极－α曲线

$$C=-2\ln b+\frac{1}{\nu\operatorname{ctg}\alpha}\ln[\nu\operatorname{ctg}\alpha q_0-(1+\nu\operatorname{ctg}\alpha)\sigma_z]$$

将C代回式（8-46）可得

$$\frac{\sigma_z}{\sigma_s}=\frac{1+\nu\operatorname{ctg}\alpha}{\nu\operatorname{ctg}\alpha}\left[1-\left(\frac{r}{b}\right)^{2\nu\operatorname{ctg}\alpha}\right]+\frac{q_0}{\sigma_s}\left(\frac{r}{b}\right)^{2\nu\operatorname{ctg}\alpha}$$

(8-51)

其余的应力分量由屈服条件算出：

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_s}=\frac{\sigma_\theta}{\sigma_s}=\frac{1+\nu\mathrm{ctg}\alpha}{\nu\mathrm{ctg}\alpha}\left[1-\left(\frac{r}{b}\right)^{2\nu\mathrm{ctg}\alpha}\right]+\frac{q_0}{\sigma_s}\left(\frac{r}{b}\right)^{2\nu\mathrm{ctg}\alpha}-1$$

(8-52)

拉拔力为

$$\frac{q_a}{\sigma_s}=\frac{1+\nu\mathrm{ctg}\alpha}{\nu\mathrm{ctg}\alpha}\left[1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2\nu\mathrm{ctg}\alpha}\right]+\frac{q_0}{\sigma_s}\left(\frac{a}{b}\right)^{2\nu\mathrm{ctg}\alpha}$$

或写为

$$\frac{q_a}{\sigma_s}=\frac{1+\nu\mathrm{ctg}\alpha}{\nu\mathrm{ctg}\alpha}\left[1-\left(\frac{d}{D}\right)^{2\nu\mathrm{ctg}\alpha}\right]+\frac{q_0}{\sigma_s}\left(\frac{d}{D}\right)^{2\nu\mathrm{ctg}\alpha}$$

(8-53)

有反向力作用时的拉拔过程的限制条件，也是圆杆的细端不进入塑性状态，由此可得圆杆直径的极限变化量为

$$R_a=\left(\frac{D}{d}\right)_a=\left(1+\nu\mathrm{ctg}\alpha-\frac{q_0}{\sigma_s}\nu\mathrm{ctg}\alpha\right)^{\frac{1}{2\nu\mathrm{ctg}\alpha}}\quad(8\text{-}54)$$

§8 6 轴对称挤压

轴对称挤压过程（图8-21）和轴对称拉拔过程是相似的，因

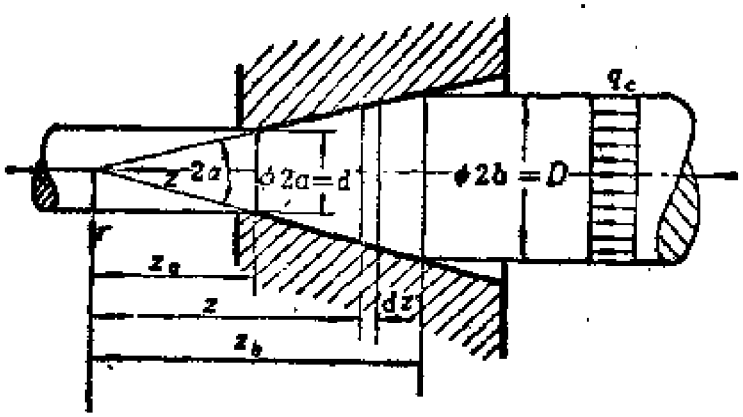


图8-21 轴对称挤压

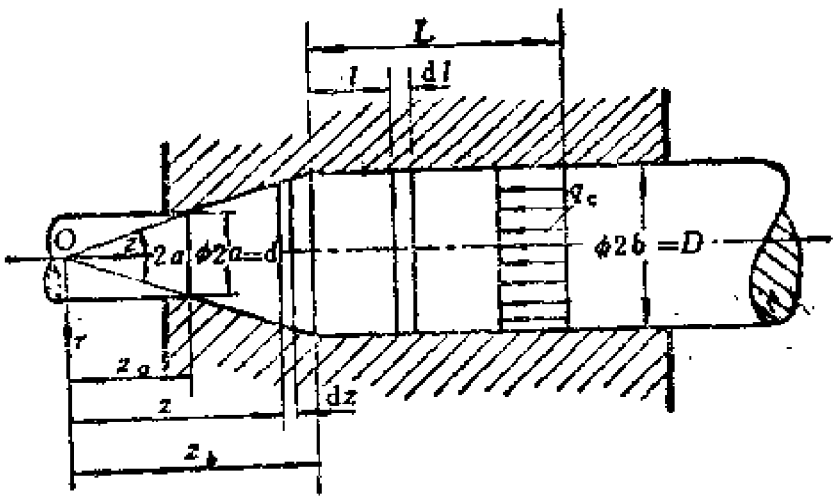
此两者的分析方法也类似。在材料进入塑性状态的锥形区切出厚度为dz的微元体并分析它的平衡，由于微元体的平衡方程和拉拔过程中的平衡方程完全一样，而且屈服条件的形式也相同，所以挤压过程的应力表达式也类似，即

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sigma_z}{\sigma_s}&=-\frac{1+\nu\mathrm{ctg}\alpha}{\nu\mathrm{ctg}\alpha}\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^{2\nu\mathrm{ctg}\alpha}\right]\\ \frac{\sigma_r}{\sigma_s}&=\frac{\sigma_\theta}{\sigma_s}=\frac{1+\nu\mathrm{ctg}\alpha}{\nu\mathrm{ctg}\alpha}\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^{2\nu\mathrm{ctg}\alpha}\right]-1\\ \frac{q}{\sigma}&=\frac{1+\nu\mathrm{ctg}\alpha}{\nu\mathrm{ctg}\alpha}\left[1-\left(\frac{b}{a}\right)^{2\nu\mathrm{ctg}\alpha}\right]\end{aligned}\right\}\quad(8\text{-}55)$$

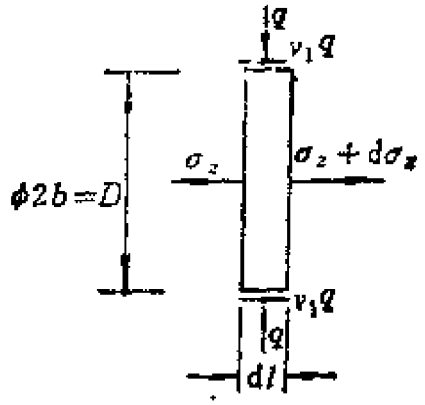
圆杆直径的极限变化量为

$$K_{极}=\left(\frac{D}{d}\right)_{极}=\left(\frac{1}{1+\nu\mathrm{ctg}\alpha}\right)^{\frac{1}{2\nu\mathrm{tg}\alpha}}\quad(8\text{-}56)$$

若挤压过程如图8-22a所示，则在圆柱模具中的材料进入塑性状态后，材料对圆柱壁也将有压力，从而产生摩擦力。微元体（图8-22b）上的所有力沿z轴投影后，由平衡条件得



(a)



(b)

图8-22 轴对称挤压

$$-\sigma_r \pi b^2 + (\sigma_r + d\sigma_r)\pi b^2 + \nu_1 q \cdot 2\pi b dl = 0$$

化简后得

$$b d\sigma_r + 2\nu_1 q dl = 0 \tag{8-57}$$

在圆柱部分的屈服条件为

$$\sigma_r - \sigma_z = -q - \sigma_r = \sigma_s$$

由此得

$$q = -(\sigma_r + \sigma_s) \tag{8-58}$$

将上式代入式（8-57）得

$$\frac{d\sigma_r}{\sigma_s + \sigma_r} = 2\frac{\nu_1}{b} dl \tag{8-59}$$

上式积分后得

$$\ln(\sigma_r + \sigma_s) = 2\frac{\nu_1}{b} l + C$$

在$l = 0$处，σ_r又可用式（8-55）的第一式令$r = b$来表示，从而可定出积分常数C。最后得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sigma_r}{\sigma_s}&=\exp\left(2\nu_1\frac{l}{b}\right)\left\{\frac{1+\nu\mathrm{ctg}\alpha}{\nu\mathrm{ctg}\alpha}\left[1-\left(\frac{b}{a}\right)^{2\nu\mathrm{ctg}\alpha}\right]+1\right\}-1\\ \frac{\sigma_r}{\sigma_s}&=\exp\left(2\nu_1\frac{l}{b}\right)\left\{\frac{1+\nu\mathrm{ctg}\alpha}{\nu\mathrm{ctg}\alpha}\left[1-\left(\frac{b}{a}\right)^{2\nu\mathrm{ctg}\alpha}\right]+1\right\}\end{aligned}\right\}$$

(8-60)

挤压力由$l=L$时的σ_r算出：

$$\frac{q_0}{\sigma_s}=\exp\left(2\nu_1\frac{L}{b}\right)\left\{\frac{1+\nu\mathrm{ctg}\alpha}{\nu\mathrm{ctg}\alpha}\left[1-\left(\frac{b}{a}\right)^{2\nu\mathrm{ctg}\alpha}\right]+1\right\}-1$$

(8-61)

以上所得到的解只有在$-\nu_1\sigma_r\leqslant k$时才是正确的，由此条件以及式（8-60）的第二式可得(l/b)的极限值，即

$$(l/b)_{极}=-\frac{1}{2\nu_1}\ln\left\{-\nu_1\sqrt{3}\left[\frac{1+\nu\mathrm{ctg}\alpha}{\nu\mathrm{ctg}\alpha}\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^{2\nu\mathrm{ctg}\alpha}\right)+1\right]\right\}\qquad(8\text{-}62)$$

当材料有幂强化效应并可用$\sigma=C(e_s+e_i)^n$表示时，则应首先求出应变强度e_i的表达式。由体积不可压缩条件可得

$$\mathrm{d}e_r=\mathrm{d}e_\theta=\frac{\mathrm{d}r}{r},\qquad \mathrm{d}e_z=-2\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

因此，应变强度的表达式为

$$\mathrm{d}e_i=\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(\mathrm{d}e_r)^2+(\mathrm{d}e_\theta)^2+(\mathrm{d}e_z)^2}=2\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

上式积分后可得

$$e_i=2\int_r^b\frac{\mathrm{d}r}{r}=2\ln\frac{b}{r}$$

由平衡方程（8-46a）可得

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = -\frac{2}{r}\left[\nu \operatorname{ctg}\alpha\sigma_r - (1+\nu\operatorname{ctg}\alpha)C\left(\varepsilon_r + 2\ln\frac{b}{r}\right)^n\right] \tag{8-63}$$

上式需要在具体边界条件下求解。对于拉拔，应取$r=b$时$\sigma_r=0$；若有反向拉力作用，则应取$r=b$时$\sigma_r=q_0$。对于挤压应取$r=a$时$\sigma_r=0$。

习　题

8-1　在平面应变拉拔时，若有反向拉力q_0（图8-23），试求σ_x、σ_y以及$R_{拉}=(H/h_0)_{极}$的表达式。

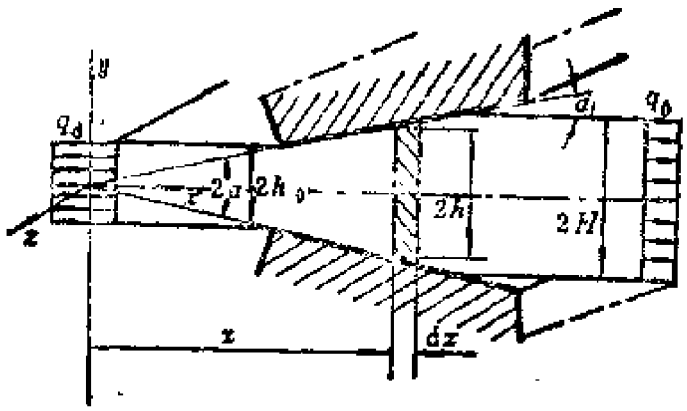


图8-23　平面应变拉拔

8-2　在轴对称挤压时，若$(l/b)>(l/b)_{极}$，试求应力σ_r的表达式。

第九章 能 量 法

§9-1 能量法的原理

能量法是利用能量守恒原理对塑性成形问题进行分析的一种方法。它的理论基础是认为外力功与内力功相等。这里所说的外力功是指外力在塑性成形时所做的功，而内力功则是系统内塑性变形和摩擦所引起的耗散能。

能量法不仅能分析理想塑性材料的成形问题，而且也能分析强化材料的成形问题。

在塑性区，塑性变形引起的耗散能是由应力场σ_{ij}和应变增量场de_{ij}确定的。单位体积中的耗散能由下式确定：

$$\mathrm{d}\ w_p = \sigma_{ij}\ \mathrm{d}e_{ij} \tag{9-1}$$

由于采用体积不可压缩假设，因而有

$$\mathrm{d}\ w_p = s_{ij}\mathrm{d}\ e_{ij} \tag{9-2}$$

利用莱维-米泽斯本构关系，上式又可写成

$$\mathrm{d}\ w_p = \sigma_i\ \mathrm{d}e_i \tag{9-3}$$

对于理想塑性材料，上式为

$$\mathrm{d}\ w_p = \sigma_s\ \mathrm{d}e_i \tag{9-4}$$

上式与第七章中的式（7-8）完全一样。在整个塑性变形体中的总耗散能为

$$W_p = \int_V w_p\ \mathrm{d}V \tag{9-5}$$

式中，V为变形体的体积。

塑性变形体在模具上移动时，摩擦引起的耗散能与垂直于模具表面的正应力σ_n有关。由于模具表面上的剪应力（图 9-1）为

$$\tau_n = \nu\sigma_n \tag{9-6}$$

式中ν为摩擦系数，所以单位面积上的材料移动dl距离所引起的耗散能为

$$dw_n = \tau_n dl \tag{9-7}$$

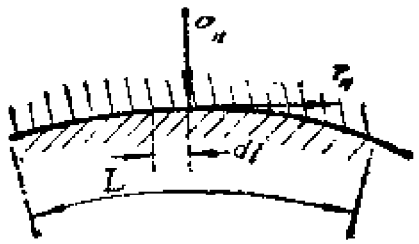


图9-1 模具表面上的正应力和摩擦力

于是模具表面上的总耗散能为

$$W_n = \int_S \int_L \tau_n dl ds \tag{9-8}$$

式中，S为塑性材料与模具的接触表面，L为材料沿表面的位移。

在式（9-8）中，必须知道应力场的分布情况，才能求出摩擦引起的耗散能。但在能量法中，并不需要去求应力场，只需引进一个比例系数η。比例系数定义为

$$\eta = \frac{W_p}{W_i} \tag{9-9}$$

式中，W_i为总耗散能，即

$$W_i = W_p + W_n \tag{9-10}$$

摩擦耗散能也可以通过模具表面的粗糙系数m表示，即

$$W_n = \int_L \int_S m k dl ds \tag{9-11}$$

式中，k为材料的剪切屈服极限。

摩擦系数ν、表面粗糙系数m以及比例系数η都要用实验方法确定。

在塑性成形过程中，外力功W_e与耗散能W_i应相等，即

$$W_e = W_i = W_p + W_s \tag{9-12}$$

上式有时取能量的增量形式表示，即

$$dW_e = dW_p + dW_s \tag{9-13}$$

§9-2 平面应变条件下的镦粗

由于用能量法计算比较简单，所以在工程中经常用它求解塑性成形所需要的外力。下面分析平面应变镦粗问题（图9-2），用能量法计算镦粗矩形截面块体所需的平均压力q。

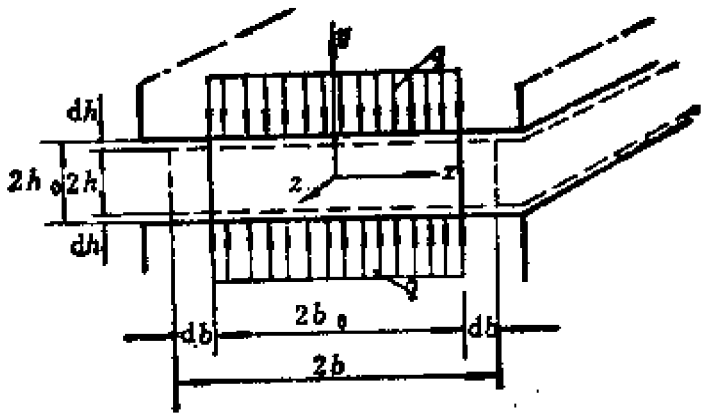


图9-2 平面应变镦粗

由于对称性，只需研究块体的四分之一或上半部即可。对于上半部，外力q在位移dh上所做的功为

$$dW_e = q \cdot 2b\,dh$$

当材料为理想塑性体时，屈服极限为常数。对应于刚性板的

位移dh，塑性变形能的增量为

$$dW_p = 2bh\sigma_s de_i$$

式中，de_i为应变强度增量。由于在塑性阶段满足体积不可压缩条件，即

$$de_1 + de_2 + de_3 = 0$$

而在平面应变问题中$de_3 = 0$，故

$$de_1 = -de_2 = -\frac{dh}{h}$$

由此得应变强度增量为

$$de_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{dh}{h}$$

于是

$$dW_p = 2bh\sigma_s \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{dh}{h} = 4bkdh$$

当刚性板的位移为dh时，刚性板表面的摩擦耗散能的增量为摩擦力与平均位移$\frac{1}{2}db$的乘积，即

$$dW_s = 2vqb \cdot \frac{1}{2}db = vqbdb \qquad (9\text{-}14)$$

根据体积不可压缩条件，有

$$bdh = hdb$$

即

$$db = \frac{b}{h}dh$$

将上式代入式(9-14)，得

$$dW_s = vq\frac{b^2}{h}dh \qquad (9\text{-}15)$$

令外力功增量和耗散能增量相等，得

$$q \cdot 2b\mathrm{d}h = 4bk\mathrm{d}h + \nu q\frac{b^2}{h}\mathrm{d}h \qquad (9\text{-}16a)$$

由此求得平均压力为

$$\frac{q}{2k} = \frac{1}{1 - \frac{\nu b}{2h}} \qquad (9\text{-}16b)$$

上式只有在满足如下条件时才是正确的，即

$$\nu q \leqslant k$$

根据式（9-16b），这一条件又可写为

$$\nu\left(4 + \frac{b}{h}\right) \leqslant 2$$

即式（9-16b）只有在满足

$$\frac{b}{h} \leqslant \frac{2}{\nu} - 4$$

时才是正确的。当$\frac{b}{h} > \frac{2}{\nu} - 4$时，则应取板块表面上的平均剪应力等于材料的剪切屈服极限，即$\nu q = k$。此时，表示摩擦耗散能增量的式（9-15）有如下形式：

$$\mathrm{d}W_* = k\frac{b^2}{h}\mathrm{d}h$$

能量守恒方程式（9-16a）变为

$$q \cdot 2b\mathrm{d}h = 4bk\mathrm{d}h + k\frac{b^2}{h}\mathrm{d}h$$

由此可得

$$\frac{q}{2k} = 1 + \frac{b}{4h} \qquad (9\text{-}17)$$

由式（9-16b）确定的$q/2k$-b/h关系曲线画于图9-3上。由式（9-17）确定的$q/2k$-b/h关系曲线画于图9-4上。

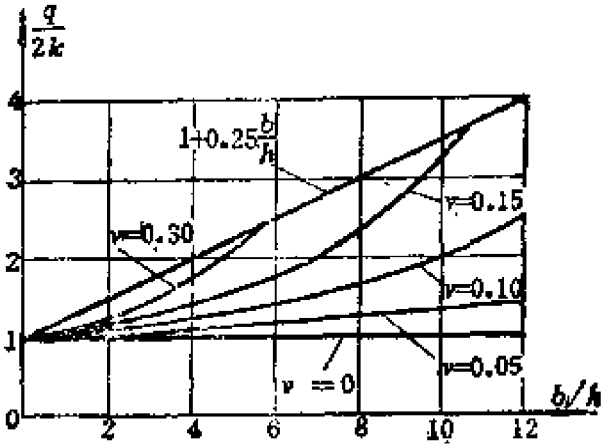


图9-3 式（9-16b）确定的$q/2k$-b/h关系曲线

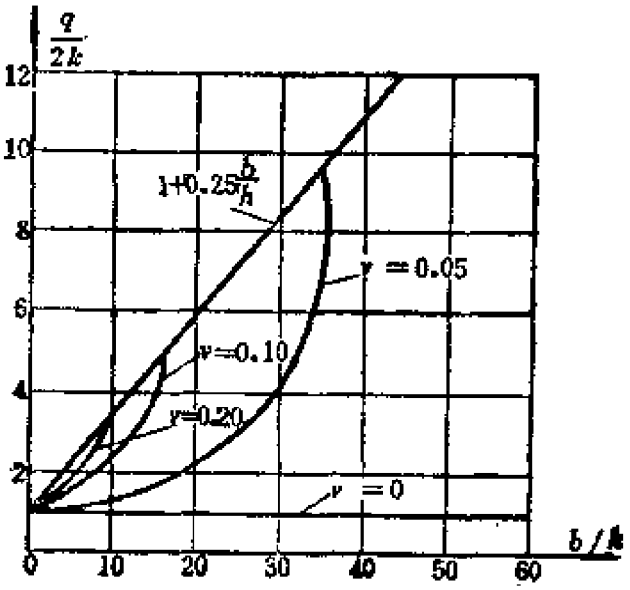


图9-4 式（9-17）确定的$q/2k$-b/h关系曲线

当材料具有强化效应时，材料的屈服极限在变形过程中不断变化。应力强度σ_i可表示为

$$\sigma_i = A(e_s + e_i)^n \tag{9-18}$$

由体积不可压缩条件，应变强度可表示为

$$e_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \frac{h_0}{h}$$

由上式可得

$$k(e_i) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_i(e_i) = \frac{A}{\sqrt{3}} \left(e_i + \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \frac{h_0}{h} \right)^n$$

此时用式（9-16b）表示的平均压力为

$$\frac{q}{2k(e_i)} = \frac{1}{1 - \frac{\nu b}{2h}}$$

上式中的q不仅与物体的几何尺寸b/h和高度变化h_0/h有关，而且还和材料的强化系数有关。此时，限制条件为$\nu q \leqslant k(e_i)$。若$q > k(e_i)$，则应采用下式：

$$\frac{q}{2k(e_i)} = 1 + \frac{b}{4h}$$

§9-3 平面应变条件下的拉拔和挤压

设平面应变条件下的拉拔过程如图9-5所示。已知模具表面的粗糙系数为m。现用能量法求拉拔力q_d。

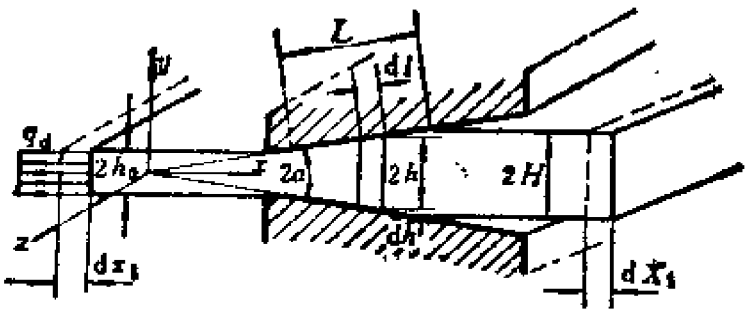


图9-5 平面应变拉拔

设板料在拉拔一侧移动了距离dx_1，则拉拔力q_0在距离dx_1上所做的外力功为

$$dW_a = q_0 \cdot 2h_0 dx_1 \tag{9-19}$$

式中，h_0为拉拔一侧板料的厚度。

设板料是理想刚塑性体，对应于位移dx_1的塑性变形能的增量由下式表示：

$$dW_p = 2h_0 dx_1 \sigma_s e_i \tag{9-20}$$

式中，e_i为应变强度。体积取为$2h_0 dx$是因为假设了体积不可压缩，即在模具中塑性变形部分的体积增量和$2h_0 dx$相等。由于体积不可压缩，故有$de_x = \frac{dh}{h}$，$de_y = -\frac{dh}{h}$，于是应变强度增量为

$$de_i = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(de_x)^2 + (de_y)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{dh}{h}$$

上式积分后得

$$e_i = \int_{h_0}^{H} de_i = \int_{h_0}^{H} \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{dh}{h} = \frac{2}{\sqrt{3}}\ln\frac{H}{h_0}$$

将上式代入式（9-20）后，得

$$dW_p = 4h_0 dx_1 k \ln\frac{H}{h_0}$$

摩擦耗散能增量为

$$dW_s = 2mkL dl \tag{9-21}$$

式中，dl为材料沿模具表面移动的距离的平均值，即

$$dl = \frac{dX_1 + dx_1}{2\cos\alpha} \tag{9-22}$$

式中，dX_1为板料厚度为$2H$一侧所移动的距离，由体积不可压缩条件得

$$H dX_1 = h_0 dx_1$$

将上式代入式（9-22）后，得

$$dl = \frac{h_0/H + 1}{2\cos\alpha} dx_1 \tag{9-23}$$

由图9-5所示的几何关系可得

$$L = \frac{H - h_0}{\sin\alpha} \tag{9-24}$$

将式（9-23）、（9-24）代入式（9-21），可得

$$dW_s = mk \frac{H^2 - h_0^2}{H} \frac{dx_1}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

令外力功增量与耗散能增量相等，则有

$$q_d \cdot 2h_0 dx_1 = 4h_0 dx_1 k \ln\frac{H}{h_0} + 2mk \frac{H^2 - h_0^2}{H} \frac{dx_1}{\sin 2\alpha} \tag{9-25}$$

化简后得

$$\frac{q_d}{2k} = \ln\frac{H}{h_0} + \frac{1}{2} m \left(\frac{H}{h_0} - \frac{h_0}{H}\right) \frac{1}{\sin 2\alpha} \tag{9-26}$$

令$R = H/h_0$，将 $\frac{q_d}{2k}$ -R曲线画于图9-6上。当$R = 1.2$时，将$\frac{q_d}{2k}$ -α曲线画于图9-7上。

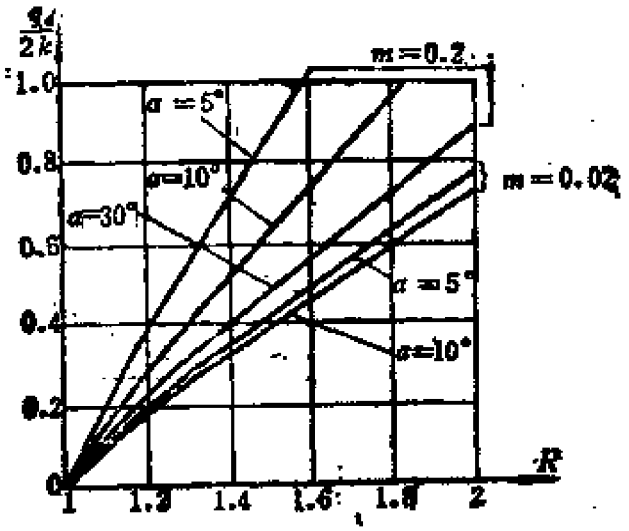


图9-6 $\frac{q_d}{2k}$ -R曲线

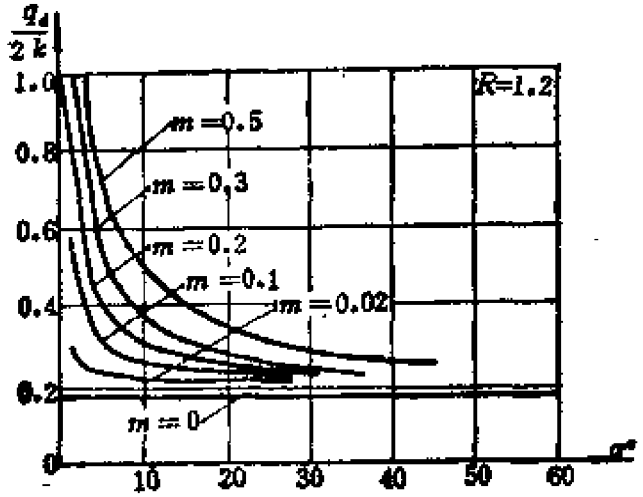


图9-7 $\frac{q_d}{2k}-\alpha$曲线

以上公式只有在$q_d<2k$时才是正确的。利用式（9-26）可以得到极限条件，即

$$\ln\frac{H}{h_0}+\frac{1}{2}m\left(\frac{H}{h_0}-\frac{h_0}{H}\right)\frac{1}{\sin 2\alpha}=1 \qquad (9-27)$$

分析挤压问题和分析拉拔问题是类似的。对于图9-8所示的挤压过程，挤压力q_c在位移dX_1上所做的功为

$$dW_c=q_c\cdot 2HdX_1 \qquad (9-28)$$

在此情况下，能量守恒方程式和式（9-25）完全一样。如果此时仍满足式（9-27）的限制条件，则在模具水平段（图9-9）中的材料仍是刚性的，挤压力q_c和拉拔力q_d的表达式完全一样。若式

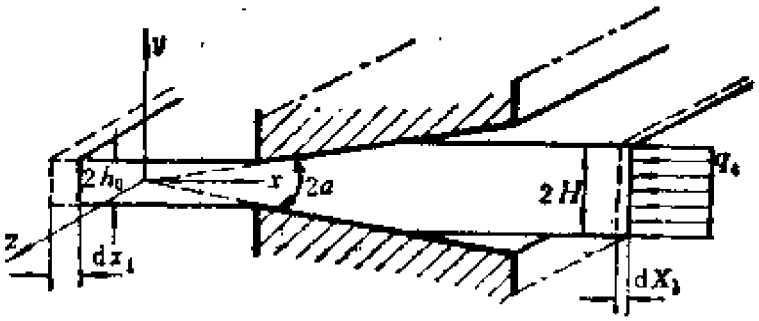


图9-8 平面应变挤压

(9-27) 的条件不满足，则在模具水平段中的材料也进入了塑性状态，于是模具水平段的表面上便有压力。这一压力在材料移动时会引起能量消耗，能量消耗值为

$$dW_c' = 2m_1 kL dX_1 \tag{9-29}$$

式中，m_1为模具水平段表面的粗糙系数，L为模具水平段的长度。这时式 (9-26) 中增加了dW_c'，最后得

$$\frac{q_c}{2k} = \ln\frac{H}{h_0} + \frac{1}{2}\left[m\left(\frac{H}{h_0} - \frac{h_0}{H}\right)\frac{1}{\sin 2\alpha} + m_1\frac{L}{H}\right] \tag{9-30}$$

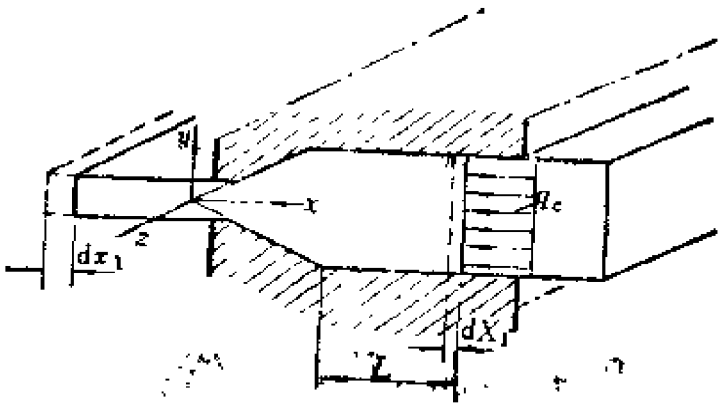


图9-9 有水平段模具的挤压

当$R = H/h_0 = 3$、$\lambda = L/H = 4$时，将$q_c/2k$-α曲线画于图9-10a上。当$\lambda = 0$和4、$\alpha = 20°$时，将$q_c/2k$-R曲线画于图9-10b上。

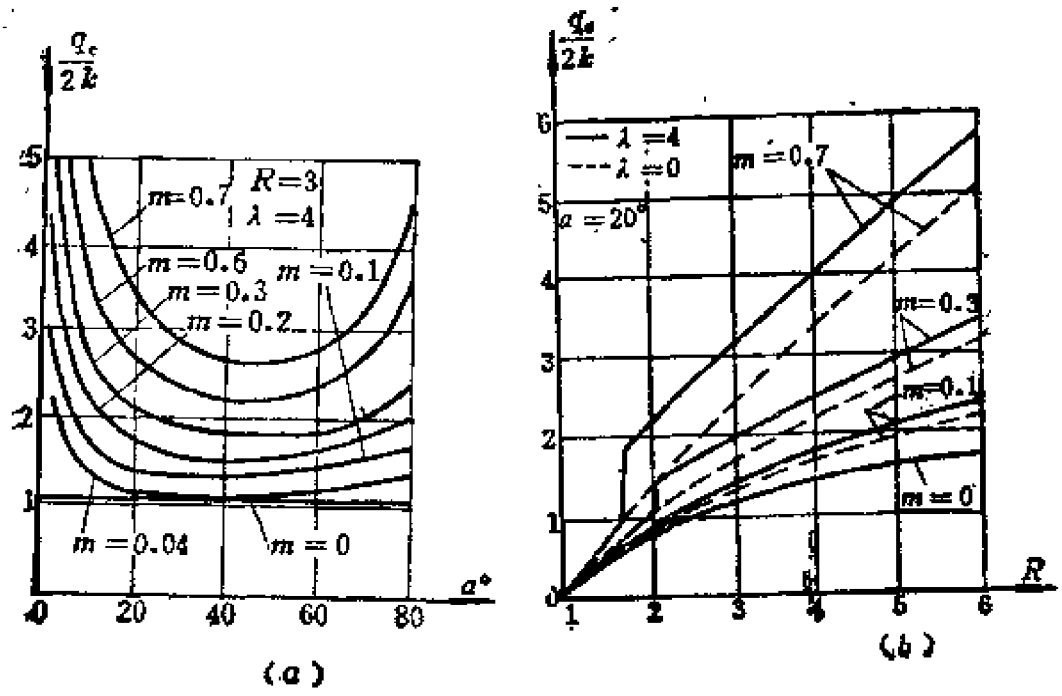


图9-10 $q_c/2k-\alpha$和$q_c/2k-R$曲线

§9-4 轴对称自由镦粗

轴对称的塑性加工问题在工程中经常遇到，能量法也能很方便地用来分析这一类问题。由于是轴对称问题，所以采用柱坐标进行分析。

图9-11所示为两刚性压头镦粗圆柱体的情况。外力q在位移$\mathrm{d}h$上所做的功为

$$\mathrm{d}W_e = q\pi a^2 \mathrm{d}h$$

当材料是理想塑性体时，屈服极限为常数且等于σ_s，塑性变形能增量为

$$\mathrm{d}W_p = \pi a^2 h \sigma_s \mathrm{d}e_1$$

e_1轴向应变分量为

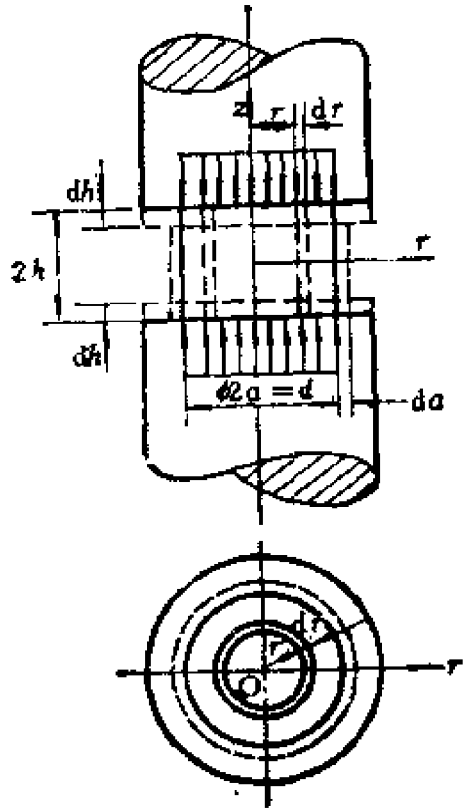


图9-11 圆柱体的自由膨胀

$$de_r = -\frac{dh}{h}$$

由体积不可压缩条件有

$$\pi a^2 dh = 2\pi a da h$$

因此有

$$\frac{dh}{h} = 2\frac{da}{a} = 2de_r$$

由体积不可压缩条件有

$$de_\theta = -de_r - de_r = \frac{da}{a}$$

由此可得应变强度增量为

$$d\varepsilon_i = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(d\varepsilon_r)^2 + (d\varepsilon_\theta)^2 + (d\varepsilon_z)^2} = \frac{dh}{h}$$

于是塑性变形能的增量为

$$dW_p = \pi a^2 \sigma_s h d\varepsilon_i = \pi a^2 h \sigma_s \frac{dh}{h} = \pi a^2 \sigma_s dh$$

微面积上的摩擦耗散能增量为

$$d\omega_n = \nu q \cdot 2\pi r dr dl$$

式中，dl为径向位移，其值为

$$dl = -\frac{r}{a} da$$

由体积不可压缩条件得

$$da = \frac{a}{2h} dh$$

由此可得

$$d\omega_n = \nu q \frac{\pi}{h} dh r^2 dr$$

于是摩擦总耗散能的增量为

$$dW_s = \nu q \frac{\pi}{h} dh \int_0^a r^2 dr = \frac{\pi}{3} \nu q \frac{a^3}{h} dh$$

令耗散能增量与外力功增量相等，则得

$$q\pi a^2 dh = \pi a^2 \sigma_s dh + \frac{1}{3}\pi a^2 dh \nu q \frac{a}{h}$$

上式化简后得

$$\frac{q}{\sigma_s} = \frac{1}{1 - \frac{\nu a}{3h}} \tag{9-31}$$

当$\nu q \leqslant k$时，上式才是正确的，因此可得限制条件

$$\nu\left(3\sqrt{3} + \frac{a}{h}\right) \leqslant 3 \quad 或 \quad \frac{a}{h} \leqslant \frac{3}{\nu} - 3\sqrt{3}$$

当$\frac{a}{h}>\frac{3}{\nu}-3\sqrt{3}$时，在刚性压头表面上应取剪应力等于剪切屈服极限，即$\nu q=k$。这时，摩擦耗散能增量为

$$dW_*=\frac{\pi}{3}\cdot k\ \frac{a^3}{h}dh$$

令耗散能增量与外力功增量相等，有

$$q\pi a^2dh=\pi a^2\sigma_*dh+\frac{1}{3}\pi a^2dh\frac{a}{h}$$

由此得

$$\frac{q}{\sigma_*}=1+\frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{a}{h} \tag{9-32}$$

将q/σ_*-a/h曲线画于图9-12上。

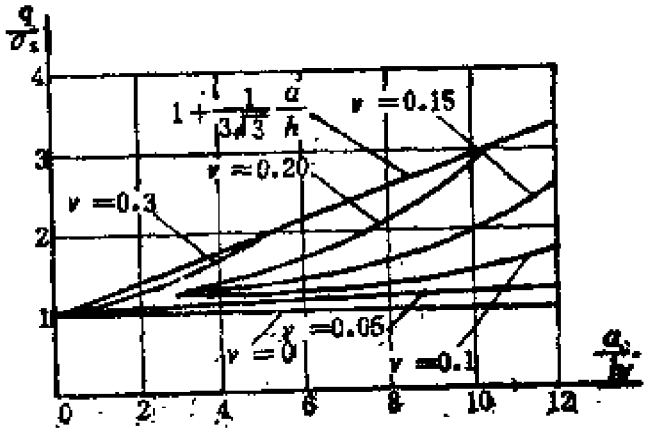


图9-12 q/σ_*-a/h曲线

§9-5 轴对称挤压和拉拔

设圆棒的挤压过程如图9-13所示。挤压力q_e在位移dZ上所做的外力功为

$$dW_*=q_e\pi b^2dZ$$

当圆棒的材料为理想塑性体时，塑性变形能的增量为

$$dW_p = \pi a^2 dz \sigma_s e_i \qquad (a)$$

式中，e_i为应变强度。由于体积是不可压缩的，故有

$$dz = \left(\frac{b}{a}\right)^2 dZ \qquad (9\text{-}33)$$

将上式代入（a）式得

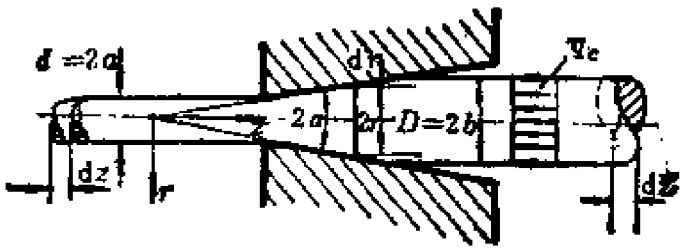


图9-13 圆棒的挤压

$$dW_p = \pi b^2 dZ \sigma_s e_i$$

由于$de_r = de_\theta = -\frac{dr}{r}$，$de_z = 2\frac{dr}{r}$，故$de_i = 2\frac{dr}{r}$。于是

$$e_i = \int_a^b de_i = \int_a^b 2\frac{dr}{r} = 2\ln\frac{b}{a} = 2\ln\frac{D}{d}$$

最后得塑性变形能的增量为

$$dW_p = 2\pi b^2 dZ \sigma_s \ln\frac{b}{a} \qquad (9\text{-}34)$$

模具表面的摩擦耗散能的增量为

$$dW_s = mkSdl \qquad (9\text{-}35)$$

式中，S为锥体的侧表面积，由几何关系知

$$S = \pi(b^2 - a^2)\frac{1}{\sin\alpha} \qquad (9\text{-}36)$$

dl为材料沿锥面移动的距离的平均值，由下式计算：

$$dl = \frac{1}{2}\frac{dZ + dz}{\cos\alpha} \tag{9-37}$$

将式（9-33）、（9-36）、（9-37）代入式（9-35）后有

$$dW_* = mk\frac{b^4 - a^4}{a^2}\cdot\frac{\pi}{2\sin\alpha\cos\alpha}dZ$$

令外力功增量与耗散能增量相等，则有

$$q_e\pi b^2 dZ = 2\pi b^2 dZ\sigma_s\ln\frac{b}{a} + mk\frac{b^4 - a^4}{a^2}\cdot\frac{\pi}{\sin 2\alpha}dZ$$

上式化简后得

$$\frac{q_e}{\sigma_s} = 2\ln\frac{b}{a} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{a}{b}\right)^2\right]\frac{m}{\sin 2\alpha} \tag{9-38}$$

可以证明，在圆棒细端拉拔时，拉拔力的计算式与式(9-38)完全一样。

以上结果只有在$q_e < \sigma_s$时才是正确的。这一极限条件可以写为

$$2\ln\frac{b}{a} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{a}{b}\right)^2\right]\frac{m}{\sin 2\alpha} = 1 \tag{9-39}$$

现在再来分析图9-14所示模具的挤压过程。如果挤压力$q_e < \sigma_s$，则材料在模具的圆柱段将是刚性的，这时挤压力可用式

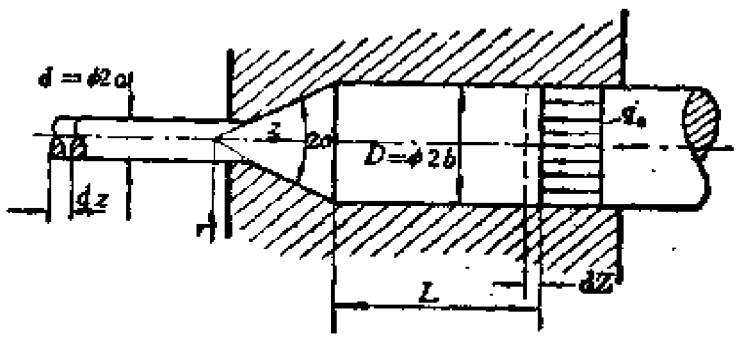


图9-14 有圆柱段模具的轴对称挤压

(9-38) 计算。如果挤压力$q_c \geqslant \sigma_s$，则在模具圆柱段中的材料也进入了塑性状态，这时模具的圆柱壁上将有压力，从而产生摩擦耗散能。这部分摩擦耗散能可用下式计算：

$$dW_1' = 2m_1 k L \pi b dZ$$

式中，m_1为圆柱壁的粗糙系数，L为其长度。将dW_1'计入式(9-38)中，得

$$\frac{q_c}{\sigma_s} = 2\ln\frac{b}{a} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{m\left[\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{a}{b}\right)^2\right]\frac{1}{\sin 2\alpha} + 2m_1\frac{L}{b}\right\} \tag{9-40}$$

在上式中取$R = \frac{b}{a} = 3$、$\lambda = \frac{L}{b} = 4$，将$\frac{q_c}{\sigma_s}$-$\alpha$关系曲线画于图9-15上。从图中可见，存在一个使挤压力值为最小的α角的最佳值。$\alpha \approx 20°$、$\lambda = 0$和4时的$\frac{q_c}{\sigma_s}$-R曲线画于图9-16上。

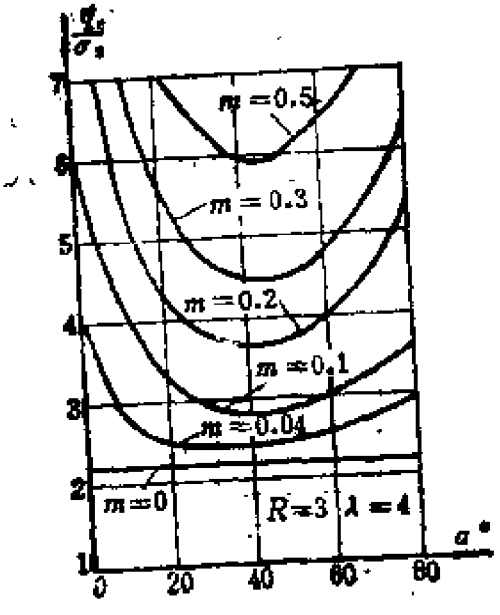


图9-15 q_c/σ_s-α曲线

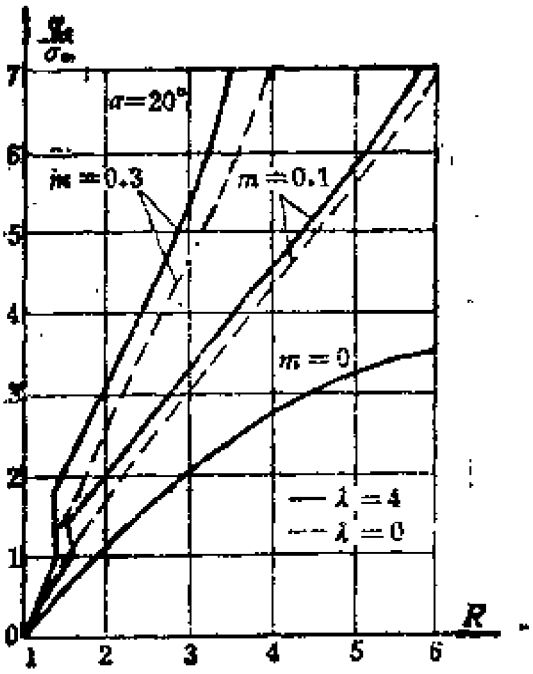


图9-16 q_c/σ_s-R曲线

§9-6 材料的强化效应对拉拔和挤压的影响

多数金属材料在塑性变形时都呈现强化效应，从而改变了材料的屈服极限。采用幂强化模型不仅数学表达式简单，而且能反映大多数金属材料的强化特点，其形式为

$$\sigma = A(e_s + e)^n \tag{9-41a}$$

根据单一曲线假定，在复杂应力状态下其表达式为

$$\sigma_i = A(e_s + e_i)^n \tag{9-41b}$$

当取米泽斯屈服条件时，由上式可得

$$k = \frac{A}{\sqrt{3}}(e_s + e_i)^n \tag{9-42}$$

在图9-5所示的平面应变拉拔过程中，$e_x = \frac{\mathrm{d}h}{h}$，$e_y = -\frac{\mathrm{d}h}{h}$，$e_z = 0$，因此，应变强度的增量为

$$\mathrm{d}e_i = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}h}{h} \tag{9-43}$$

经过塑性变形，板料由厚度H变为h，因此上式积分后便有

$$e_i = \frac{2}{\sqrt{3}}\ln\frac{H}{h}$$

故式（9-42）又可写为

$$k = \frac{A}{\sqrt{3}}\left(e_s + \frac{2}{\sqrt{3}}\ln\frac{H}{h}\right)^n \tag{9-44}$$

根据体积不可压缩条件可得

$$\mathrm{d}V = 2h_0\,\mathrm{d}x_1 = 2H\mathrm{d}X_1 \tag{a}$$

金属材料通过模具时，单位体积中的塑性耗散能为

$$w_p = \int_0^{e_i}\sigma_i\mathrm{d}e_i = A\int_0^{e_i}(e_s + e_i)^n\mathrm{d}e_i$$

上式积分后可得

$$w_p = \frac{1}{n+1}[(e_i + \varepsilon_i)\sigma_i - e_s\sigma_s] \qquad (9\text{-}45)$$

式中，e_i和σ_i分别为应变强度和应力强度，σ_s为初始屈服极限。上式的几何表示如图9-17所示。

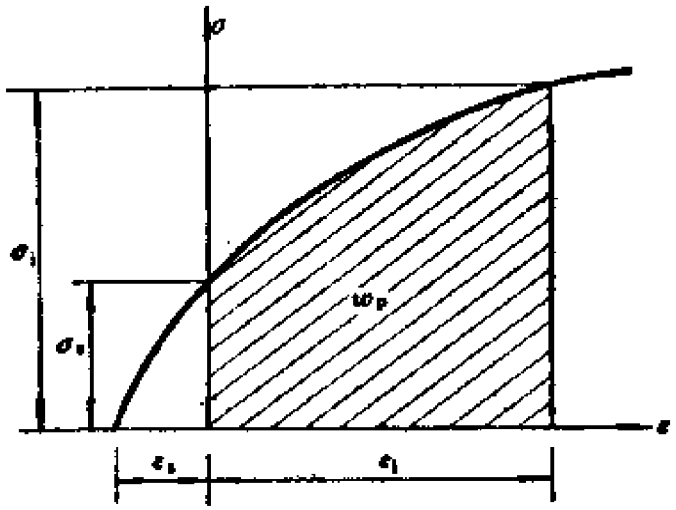


图9-17 塑性耗散能的几何表示

设在变形体中塑性耗散能是均匀的，则由式（a）和（9-45）可得体积dV中的塑性耗散能为

$$dW_p = 2h_0\,dx_1 \cdot \frac{1}{n+1}[(e_i + \varepsilon_i)\sigma_i - \sigma_s e_s] \qquad (9\text{-}46)$$

在模具表面上的摩擦耗散能与应力强度和粗糙系数有关。单位面积上的摩擦耗散能为

$$dw_s = 2mk\,dl \qquad (9\text{-}47)$$

式中，位移dl由dX_1或dx_1确定。由图9-18可得

$$dl = \frac{dx}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}\frac{H}{h}dX_1 = \frac{1}{\cos\alpha}\frac{h_0}{h}dx_1 \qquad (9\text{-}48)$$

上式代入式（9-47）可得

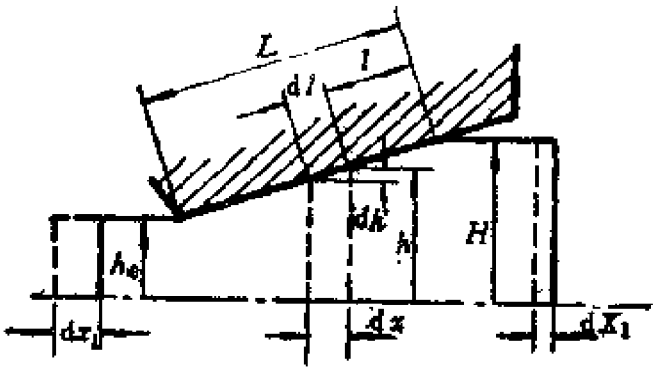


图9-18 模具的几何关系

$$d\omega_s = 2mk\frac{1}{\cos\alpha}\left(\frac{h_0}{h}\right)^n dx_1 \tag{9-49}$$

于是总摩擦耗散能为

$$dW_s = \int_L d\omega_s dl \tag{9-50}$$

由图9-18可知

$$dl = \frac{dh}{\sin\alpha}$$

将上式和式（9-49）代入式（9-50）可得

$$\begin{aligned} dW_s &= 2\frac{mh_0^n dx_1}{\sin\alpha\cos\alpha}\int k\frac{dh}{h^n} + C \\ &= 2\frac{mh_0^n dx_1}{\sin 2\alpha}A\int(e_s+e_1)^n de_1 + C \\ &= 2\frac{mh_0^n dx_1}{\sin 2\alpha}\frac{A}{n+1}(e_s+e_1)^{n+1} + C \end{aligned} \tag{9-51a}$$

当$e_1=0$时$dW_s=0$，由此可确定积分常数C：

$$C = -2\frac{mh_0^n dx_1}{\sin 2\alpha}\frac{A}{n+1}e_s^{n+1}$$

将C值代回式（9-51a），并考虑式（9-41b），有

$$dW_s = 2\frac{mh_0 dx_1}{\sin 2\alpha}\cdot\frac{1}{n+1}[(e_s+e_i)\sigma_s - e_s\sigma_s] \quad (9\text{-}51b)$$

式中，σ_s为材料的初始屈服极限，σ_i为最终的应力强度，e_i为最终的应变强度。

例如在拉拔时，外力功可用式（9-19）表示，由于材料有强化效应，故塑性耗散能可用式（9-46）表示，摩擦耗散能用式（9-51b）表示，于是便可得到如下关系式：

$$q_a \cdot 2h_0 dx_1 = 2h_0 dx_1 \frac{1}{n+1}[(e_s+e_i)\sigma_i - e_s\sigma_s]$$

$$+ 2h_0 dx_1 \frac{m}{\sin 2\alpha}\cdot\frac{1}{n+1}[(e_s+e_i)\sigma_i - e_s\sigma_s]$$

令$\sigma_s = \sqrt{3}k_1$，上式化简后得

$$\frac{q_a}{2k_1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{m}{\sin 2\alpha}\right)\left[(e_s+e_i) - e_s\frac{\sigma_s}{\sigma_i}\right]$$

若在拉拔过程中有反向拉力q_0作用，则有

$$\frac{q_a}{2k_1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{m}{\sin 2\alpha}\right)\left[(e_s+e_i) - e_s\frac{\sigma_s}{\sigma_i}\right] + \frac{q_0}{2k_i}$$

上述拉拔过程的限制条件是$q_a < 2k_1$。

对于轴对称拉拔和挤压问题，在考虑材料的强化效应时，其分析方法和平面应变问题的分析方法是类似的。但由于两者的几何参数不同，所以表达式也有所不同。例如在圆棒的拉拔过程中，塑性耗散能为

$$dW_p = \frac{1}{n+1}\pi a^2 dz[(e_s+e_i)\sigma_i - \sigma_s e_s]$$

式中，a为圆棒细端的半径（见图9-19）。式（9-47）中的dl则由下式表示：

$$dl = \frac{dx_1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}\left(\frac{b}{r}\right)^2 dZ = \frac{1}{\cos\alpha}\left(\frac{a}{r}\right)^2 dz \quad (9\text{-}52)$$

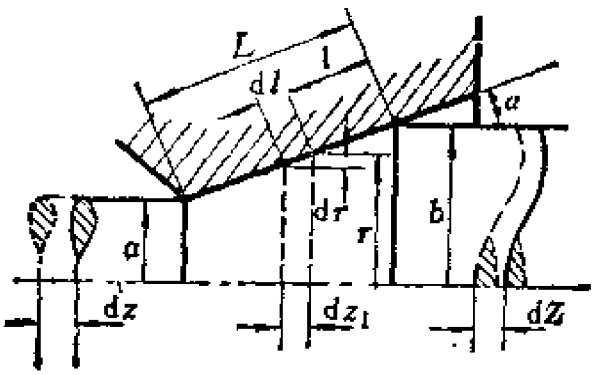


图9-19 轴对称拉拔时的几何关系

于是单位面积上的摩擦耗散能为

$$\mathrm{d}w_s = mk\frac{1}{\cos\alpha}\left(\frac{a}{r}\right)^3\mathrm{d}z \tag{9-53}$$

总的摩擦耗散能为

$$\mathrm{d}W_s = \int_S \mathrm{d}w_s\mathrm{d}S \tag{9-54}$$

式中，S为锥形模具的表面积，由图9-19可得

$$\mathrm{d}S = 2\pi r\mathrm{d}l = \frac{2\pi}{\sin\alpha}r\mathrm{d}r$$

将上式和式（9-53）代入式（9-54），得

$$\mathrm{d}W_s = 2\pi\frac{ma^2\mathrm{d}z}{\sin\alpha\cos\alpha}\int_a^b k\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

$$= \pi\frac{ma^2\mathrm{d}zA}{\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha}\int_0^{\varepsilon_1}(\varepsilon_0+\varepsilon_1)^n\mathrm{d}\varepsilon_1$$

$$= 2\pi\frac{ma^2\mathrm{d}z}{\sin 2\alpha}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{n+1}[(\varepsilon_0+\varepsilon_1)\sigma_1-\varepsilon_0\sigma_0]$$

根据以上公式可以求出考虑强化效应时的拉拔力，即

$$\frac{q_d}{\sigma_1} = \frac{1}{n+1}\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{m}{\sin 2\alpha}\right)\left(\varepsilon_0+\varepsilon_1-\varepsilon_0\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)$$

若有反向拉力q_0作用，则拉拔力为

$$\frac{q_d}{\sigma_1}=\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{m}{\sin 2\alpha}\right)\left(e_s+e_1-e_s\frac{\sigma_s}{\sigma_1}\right)+\frac{q_0}{\sigma_1}$$

以上各式的限制条件是

$$q_d<\sigma_1$$

同理可得圆棒挤压时的挤压力为

$$\frac{q_e}{\sigma_s}=\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{m}{\sin 2\alpha}\right)\left[(e_s+e_1)\frac{\sigma_1}{\sigma_s}-e_s\right]$$

§6-7 几种方法的比较

利用不同的方法分析各种工艺过程所得的结果是不同的，因此对这些结果进行比较，从中得到一些结论是很有意义的。因为这不仅能看出这些计算结果和实际情况的接近程度，而且能评价在什么情况下使用什么计算方法更为合理。

图9-20给出了平面应变镦粗情况下摩擦系数较小（或粗糙系

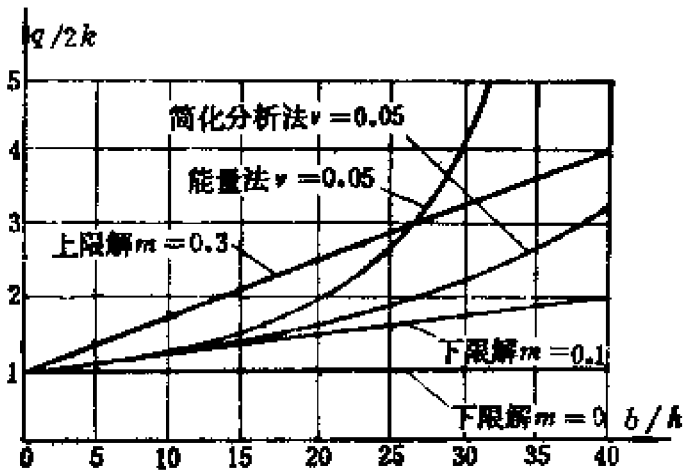


图9-20 平面应变镦粗的$q/2k-b/h$曲线

数较小）时的$\frac{q}{2k}-\frac{b}{h}$曲线，而图9-21则给出了摩擦系数较大时的

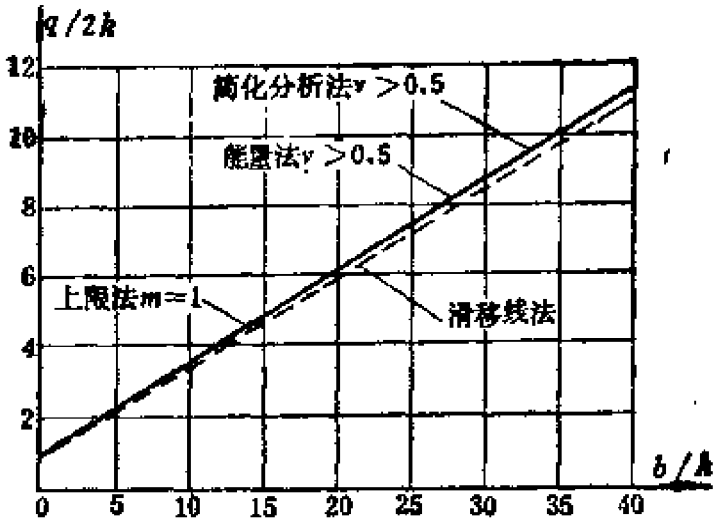


图9-21　粗糙表面锻粗时的$q/2k-b/h$曲线

$\frac{q}{2k}-\frac{b}{h}$曲线。由曲线看出，当比值b/h较小时，各种方法所得的结果都相似；而在表面粗糙情况下，对于各种比值b/h，各种方法所得的结果也都相近。

图9-22给出了平面应变拉拔情况下，模具角$\alpha=20°$且摩擦系数较小（$\nu=0.15$，$m=0.3$）时的$q_d/2k-R$曲线。从图上看出，对于较小的厚度比R，各种方法所得的结果都是相近的。

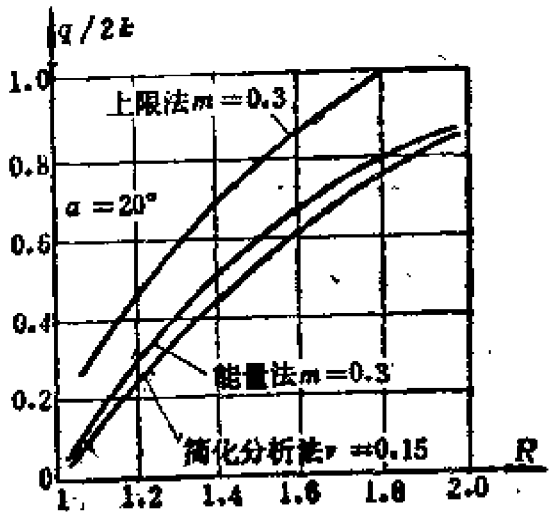


图9-22　平面应变拉拔时的$q_d/2k-R$曲线

图9-23给出了轴对称镦粗时的q/σ_s-a/h曲线，铝材镦粗时的实验结果用点标出。而图9-24上的黑点则给出了铝材的实验结果。从图上看出，合适地选择摩擦系数是能否正确描述实际情况的关键。

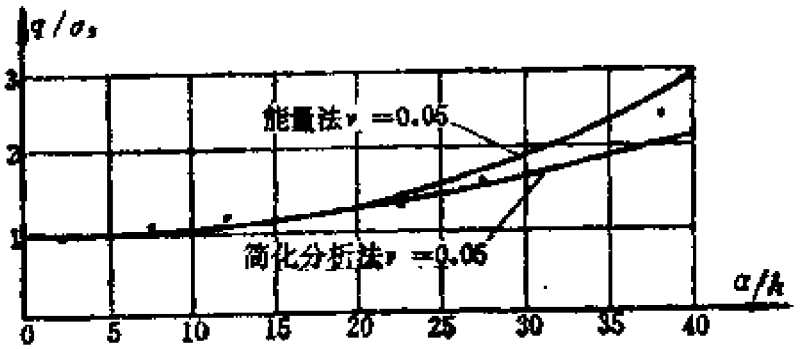


图9-23　铝材轴对称镦粗时的q/σ_s-a/h曲线及实验结果

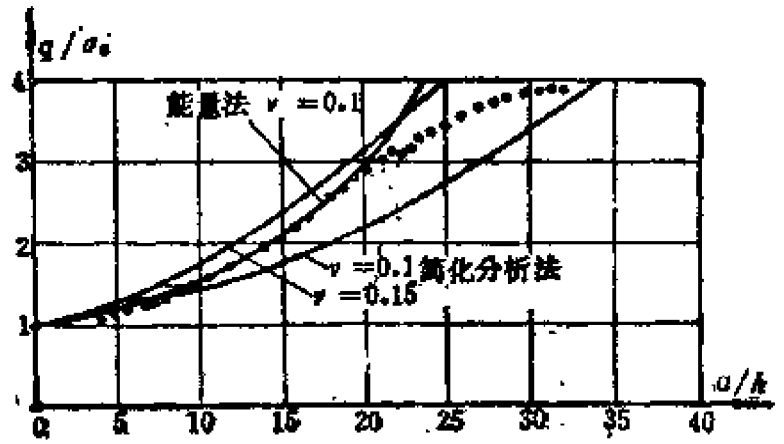


图9-24　铝材轴对称镦粗时的q/σ_s-a/h曲线及实验结果

图9-25给出了轴对称拉拔时，各种方法所得的q_d/σ_s-R曲线。图中取$\alpha=20°$。图上的黑点是钢材的实验点。从图上看出，计算结果和实验结果有一定差距。

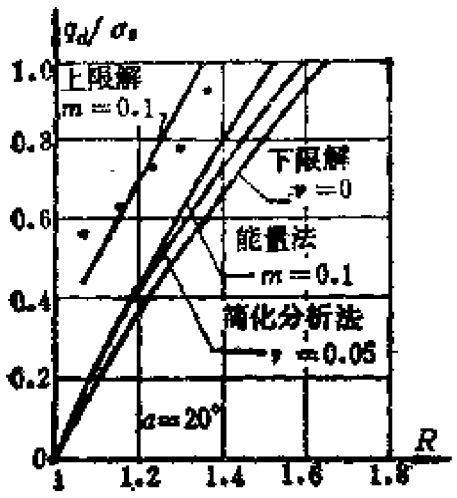


图9-25　轴对称拉拔时的q_d/σ_s-R曲线

习　题

9-1　在图9-5所示的平面应变拉拔过程中，若有反向拉力q_1作用，试给出拉拔力q的表达式。

9-2　试证明轴对称挤压力和轴对称拉拔力的表达式是完全一样的。

9-3　若考虑材料的强化效应，试给出轴对称镦粗时的平均压力q的表达式。

第十章　弯曲问题

§10-1　矩形截面梁的弹塑性弯曲

首先研究矩形截面梁小曲率弹塑性弯曲问题。设梁的横截面的宽度比高度小，故可忽略梁在横截面宽度方向的应力，于是在梁的中性层的外侧单向受拉，在中性层的内侧单向受压。

在弯曲开始时，先产生弹性变形，梁的横截面上的应力σ_x和应变ε_x线性分布，距中性轴为z处的应变和应力值分别为

$$\varepsilon_x = \frac{z}{\rho}\quad,\quad \sigma_x = E\,\frac{z}{\rho}. \tag{10-1}$$

式中，ρ为中性层的曲率半径，E为弹性模量。应力和应变的最大值在梁的最外层（图10-1a），其值为

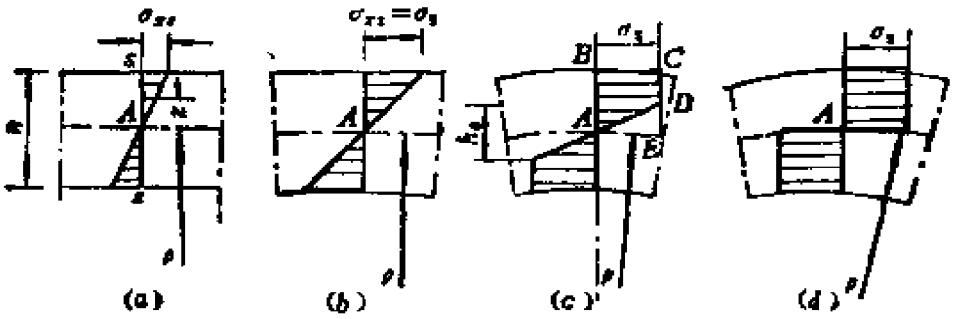


图10－1　不同阶段梁横截面上的应力分布

$$\varepsilon_{x1} = \frac{h}{2\rho},\quad \sigma_{x1} = E\,\frac{h}{2\rho} \tag{10-2}$$

式中，h为梁的高度。因在横截面上应力的分布是线性的，故由

静力学关系可得横截面上的弯矩为

$$M = \frac{bh^2}{6}\sigma_{x} \qquad (a)$$

式中，b为横截面的宽度。将式(10-2)代入上式，则得

$$M = E\frac{bh^3}{12}\frac{1}{\rho} \qquad (10-3)$$

或

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \qquad (10-4)$$

式中，I为横截面的惯性矩，对于矩形截面，$I = \frac{bh^3}{12}$。式（10-4）给出了弹性阶段的$\frac{1}{\rho}$—M关系。当σ_{x}达到屈服极限时（图10-16），梁开始进入弹塑性状态，此时的弯矩称为弹性极限弯矩，记作M_e。令（a）式中的$\sigma_{x} = \sigma_s$，可得弹性极限弯矩为

$$M_e = \frac{bh^2}{6}\sigma_s$$

在弯矩达到弹性极限值后，若曲率继续增加，则塑性区将向中性层扩展。此时，截面中心部分的弹性区称为弹性核，其高度用h_e表示(图10-1c)。弹性区与塑性区交界处的应力为σ_s，因此有

$$h_e = 2\rho\frac{\sigma_s}{E} \qquad (10-5)$$

对于软钢，$\sigma_s \approx 210\mathrm{N/mm^2}$，$E = 2.1\times10^5\mathrm{N/mm^2}$，因此弹性核的高度约为曲率半径$\rho$的0.002倍。

为了确定弹性核高度为h_e时的弯矩值，可将梯形应力分布（图10-1c）看成是由矩形应力分布$ABCE$减去三角形应力分布ADE。取这两个应力分布相对于中性轴的弯矩便可得到

$$M = \frac{bh^2}{4}\sigma_s - \frac{bh_e^2}{12}\sigma_s = \frac{bh^2}{4}\sigma_s\left(1 - \frac{h_e^2}{3h^2}\right) \qquad (10-6)$$

将式（10-5）代入上式，便可得到弯矩和曲率半径在弹塑性阶段的关系式，即

$$M=\frac{bh^2}{4}\sigma_s\left[1-\frac{4\rho^2}{3h^2}\left(\frac{\sigma_s}{E}\right)^2\right] \tag{10-7}$$

上式即为图10-2中的曲线PG。由式（10-5）可知，随着曲率$\frac{1}{\rho}$的增加，弹性核的高度h_0不断减小。在极限状态时，h_0减小至零（图10-1d），此时的弯矩称为塑性极限弯矩，记为M_p。令式（10-6）中的$h_0=0$，可得

$$M_p=\frac{bh^2}{4}\sigma_s \tag{10-8}$$

将M_p和M_e相比，可知M_p比M_e大50%。

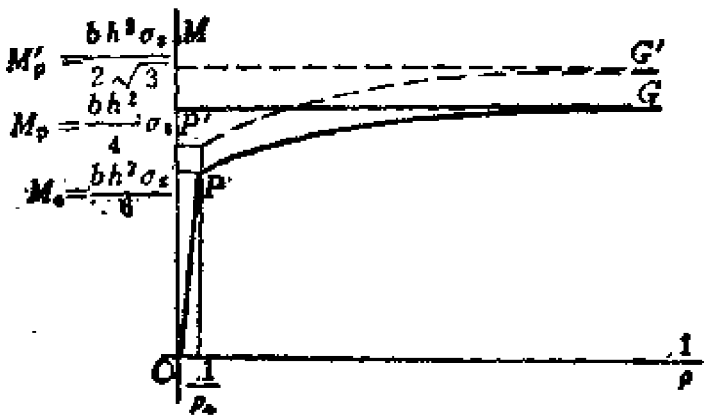
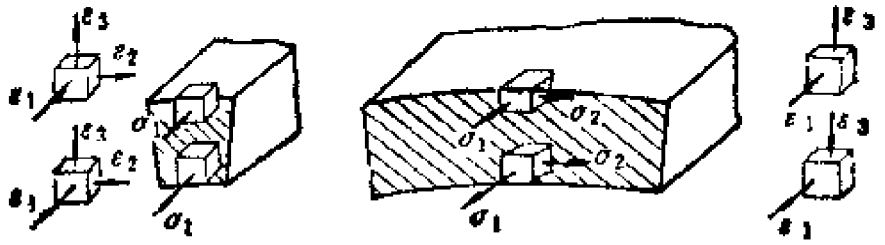


图10-2　$M-\frac{1}{\rho}$曲线，实线代表窄梁，虚线代表宽板

对于窄梁，弯曲时横截面的宽度将有变化，如图10-3a所示。若梁的横截面较宽，如图10-3b所示，便成为板条，其横截面的宽度方向的变形将受到限制。若假设横截面的宽度方向没有变形，则将出现平面应变状态（$e_2=0$，$e_1=-e_3$），即轴向长度的变化将只与板条的厚度变化有关。为了使横截面的宽度不变，

除了出现轴向应力σ_1之外，还将出现沿板宽方向的应力σ_2（图10-3b），于是应力状态便由单向变为双向。

在弹性阶段，应力σ_2可由应变e_2为零的条件得到，即



（a）窄梁　　（b）宽板

图10-3　弯曲时的应力与应变以及横截面的变化

$$e_2=\frac{1}{E}[\sigma_2-\mu(\sigma_3+\sigma_1)]=0$$

如忽略应力σ_3，则有

$$\sigma_2=\mu\sigma_1$$

于是由广义虎克定律可得

$$\sigma_1=\frac{E}{(1-\mu^2)}e_1$$

由此可知，在应变e_1相同的情况下，宽板的应力σ_1将比窄梁的应力σ_1大$1/(1-\mu^2)$倍，弯矩M也将增大同样的倍数，于是对于宽板，有

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1-\mu^2}{EI}M \qquad (10\text{-}9)$$

上式在图10-2中用虚线OP'表示。

在塑性阶段，应力σ_2由$e_2=0$、$e_1=-e_3$、$\sigma_3=0$及米泽斯屈服条件确定。此时有

$$\sigma_1=\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s,\quad \sigma_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_s,\quad \sigma_3=0$$

与此应力状态对应的塑性极限弯矩为

$$M_s' = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{bh^2}{4} \sigma_s \qquad (10\cdot10)$$

此值比窄梁的塑性极限弯矩大15%。

§10-2 理想塑性材料大曲率板条的弯曲

在上节的分析中，由于忽略了应力σ_θ的影响，而且设梁的应变沿截面高度线性变化，所以有一定误差。在小曲率的情况下，这个误差很小。随着曲率的增加，误差便增大。

为了分析这一复杂过程，不仅需要考虑沿高度方向的应力的作用，而且还要考虑曲率的影响。为了分析方便，采用以下两点简化：

(1) 横截面的宽度不变（平面应变状态），

(2) 材料是理想刚塑性体，即忽略弹性变形和在弯曲过程中材料的强化效应。

在板条中取一微元体，如图10-4所示。在此微元体上，作用有周向应力σ_θ、径向应力σ_r以及沿截面宽度方向的应力σ_z。将微单元体上所有的力沿径向投影，由平衡条件得

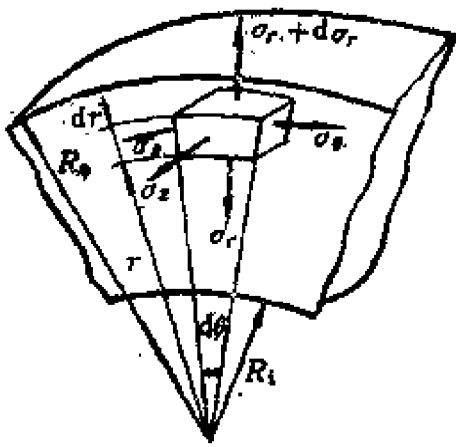


图10-4 大曲率弯曲

$$\sigma_\theta \mathrm{d}r b\mathrm{d}\theta + \sigma_r r b\mathrm{d}\theta - (\sigma_r + \mathrm{d}\sigma_r)(r + \mathrm{d}r)b\mathrm{d}\theta = 0$$

化简后得

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_r}{\mathrm{d}r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \tag{10-11}$$

对于三维应力状态，取$e_z = \mathrm{d}\lambda_z = 0$，故有$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_\theta + \sigma_r)$。

将σ_z代入屈服条件后，得

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s \tag{10-12}$$

将上式代入式（10-11），得

$$\pm \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\mathrm{d}\sigma_r}{\sigma_s}$$

上式积分后得

$$\sigma_r = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s \ln r + C$$

上式中的负号对应于受压区，而正号则对应于受拉区。在板条的内表面$r = R_i$处以及外表面$r = R_\theta$处，径向应力$\sigma_r = 0$，由此可确定常数C。在受压区，有

$$\sigma_r = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s \ln \frac{r}{R_i} \tag{10-13}$$

在受拉区则有

$$\sigma_r = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s \ln \frac{R_\theta}{r} \tag{10-14}$$

由于径向应力σ_r在受拉区和受压区的交界处应连续，所以有

$$\ln \frac{r_\theta}{R_i} = \ln \frac{R_\theta}{r_\theta}$$

由此得

$$r_\theta = \sqrt{R_\theta R_i} \tag{10-15}$$

式中，r_0为中性层的位置，它是板条内、外半径的几何平均值。随着中性层曲率的增加，中性层将向内表面移动因为几何平均值总比算数平均值小。

当弯曲板条的内表面受压力作用时（图10-5a），中性层将向内表面移动，此时半径r_0满足如下不等式：

$$r_0 < \sqrt{R_i R_0}$$

当弯曲板条的外表面受压力作用时（图10-5c），中性层将向外表面移动，此时半径r_0满足如下不等式：

$$r_0 > \sqrt{R_i R_0}$$

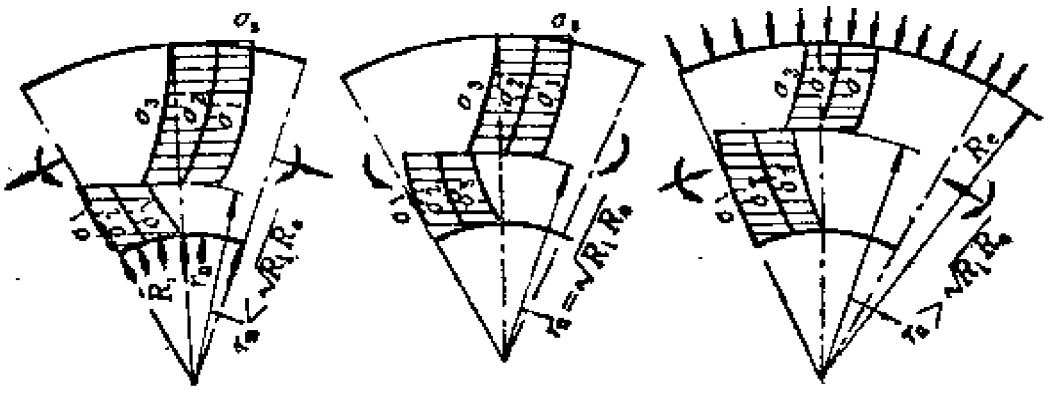
由式（10-12）、（10-13）、（10-14）可得周向应力σ_θ的表达式。在受压区，

$$\sigma_\theta = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s\left(1 + \ln\frac{r}{R_i}\right) \qquad (10\text{-}16)$$

在受拉区，

$$\sigma_\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s\left(1 - \ln\frac{R_0}{r}\right) \qquad (10\text{-}17)$$

同样，可以算出应力σ_z的分布。各应力分量的分布情况如图10-5所示。以上的分析适用于大曲率全塑性的极限状态。



（a）拉弯　　（b）纯弯　　（c）压弯

图10－5　板条弯曲时的应力分布；σ_1——轴向，σ_2——横截面的宽度方向，σ_3——径向

若已知周向应力σ_θ的分布，则可以通过积分求得此时的弯矩值，即

$$M = b\int_{R_i}^{R_e}\sigma_\theta r\,dr \tag{10-18}$$

将式（10-16）和（10-17）代入上式，积分后得

$$M_p = \frac{bh^2}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s \tag{10-19}$$

下面再来分析板条横截面的高度也即厚度的变化规律和变形过程。若已知受弯板条横截面上的应力以及中性层的位置，则可确定每一点的应变率比值以及弯曲时的变形过程。

在中性层为r_s的受弯板条中，中性层外部的纤维将被拉长，而中性层内部的纤维将被压短。由于假设了板条横截面的宽度是不变的，所以中性层外部因纤维拉长其厚度将要减小，而中性层内部因纤维压短其厚度将要增加。若外层厚度的减小量比内层厚度的增加量大，则板条的总厚度将要减小；若内层厚度的增加量比外层厚度的减小量大，则板条的总厚度将要增加。

为了找出受弯板条的厚度变化与中性层位置之间的关系，需要研究中心角为θ、内半径为R_i、外半径为R_e的微元体（图10-6）。由于曲率的增加，中心角增加了$d\theta$，此时外半径和内半径分别改变了dR_e和dR_i。这些变化须符合微元体面积不变的条件。介于外半径R_e和中性层r_s之间的扇形$ABCD$的面积为

$$\frac{\theta}{2}(R_e^2 - r_s^2) = \text{const} \tag{10-20}$$

将上式微分后得

$$d\theta R_e^2 + 2\theta R_e dR_e - d\theta r_s^2 - 2\theta r_s dr_s = 0 \tag{10-21}$$

由于中性层的长度$\theta r_s = \text{const}$，所以在增量$d\theta$和$dr_s$之间应有如下关系式：

$$d\theta r_s + \theta dr_s = 0 \tag{10-22}$$

若将式（10-21）中的θdr_n用$-r_n d\theta$代替，则有

$$d\theta R_0^2 + 2\theta R_0 dR_0 + d\theta r_n^2 = 0 \tag{10-23}$$

由上式得

$$dR_0 = -\frac{R_0^2 + r_n^2}{2R_0}\frac{d\theta}{\theta} \tag{10-24}$$

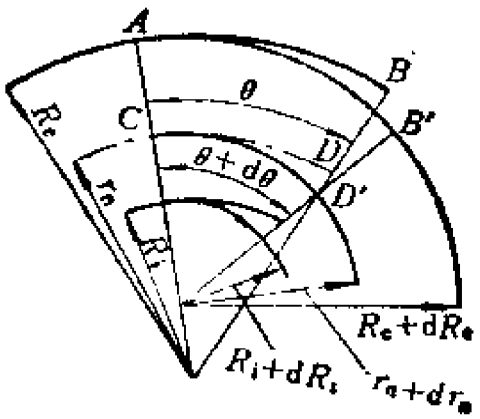


图10－6　变形过程示意图

利用类似的方法可以求出内半径增量的表达式：

$$dR_i = -\frac{R_i^2 + r_n^2}{2R_i}\frac{d\theta}{\theta} \tag{10-25}$$

式（10-24）减去（10-25），则得板条总厚度的变化为

$$dh = \left[-\frac{R_0^2 + r_n^2}{R_0} + \frac{R_i^2 + r_n^2}{R_i}\right]\frac{d\theta}{2\theta}$$

由于$R_0 - R_i = h$，故上式可化简为

$$dh = -\frac{h}{2\theta}\left(\frac{r_n^2}{R_0 R_i} - 1\right)d\theta \tag{10-26}$$

由上式可见，对于没有轴向力作用的纯弯问题，即当$r_n^2 = R_0 R_i$时，板条的厚度将没有任何变化。当有轴向拉伸，即$r_n^2 < R_i R_0$时，板条将变薄。当有轴向压缩，即$r_n^2 > R_i R_0$时，板条将变厚。

中性层外部厚度的不断减小以及中性层内部厚度的不断增加，使得任意质点越来越离开内表面而越来越靠近外表面，因而出现了质点向外移动的现象。图10-7*a*中，在弯曲的初始阶段，黑线位于中线下部的受压区，中性层位于板厚的中间。在曲率增加的过程中，受压区变薄（图10-7*b*），黑线向外移动，并逐渐与向内移动的中性层相遇（图10-7*c*）。在这一瞬间，黑线的长度不变。随着曲率的继续增加，黑线移动到受拉区（图10-7*e*），开始被拉长。而在这之前的某一瞬间，黑线的长度等于它的初始长度（图10-7*d*），这一位置称为应变中性层。

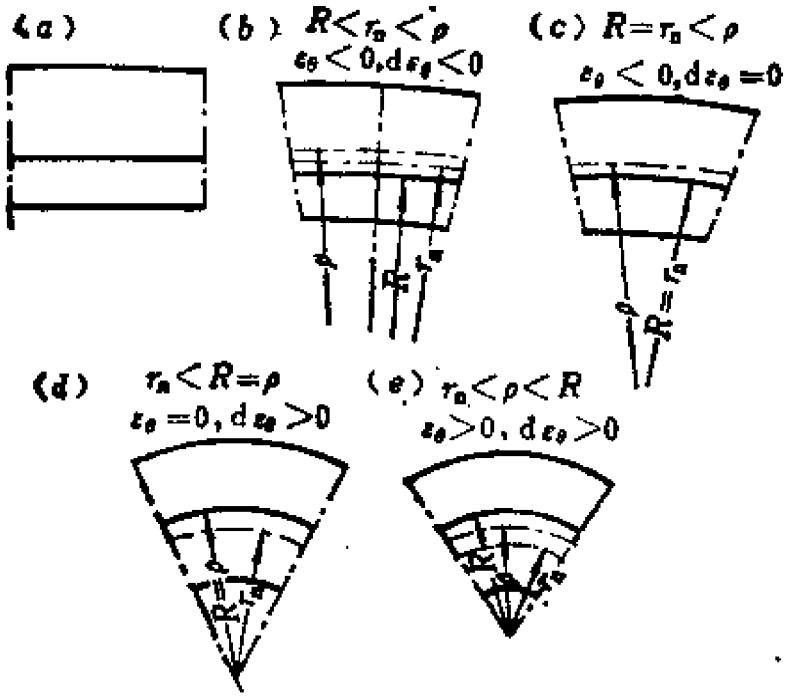


图10－7　材料层随曲率的增加而变形的过程

根据以上分析，在受弯板条中，有三个中性层，即

（1）应力中性层，其曲率半径为r_n。在这一层的两侧，应变率和应力改变符号。

（2）应变中性层，其曲率半径为r_0。在这一层中，周向应

e_θ为零，但$\sigma_\theta > 0$。

(3)曲率半径$r_m = \frac{1}{2}(R_0 - R_i)$的中间层。

为了确定应变中性层的曲率半径r_0，应利用下式：

$$r_0 = \frac{l_0}{\theta} \tag{10-27}$$

式中，l_0为纤维的初始长度，而θ角可以由这一块扇形面积等于$l_0 h_0$的条件确定，即

$$l_0 h_0 = \frac{\theta}{2}(R_0^2 + R_i^2) \tag{10-28}$$

由式（10-27）和（10-28）可得

$$r_0 = \frac{R_0^2 - R_i^2}{2h_0}$$

式中，h_0为板条的初始厚度。若用$h = R_0 - R_i$表示板条的瞬时厚度，而中间层的曲率半径$r_m = \frac{1}{2}(R_0 + R_i)$，则上式为

$$r_0 = r_m \frac{h}{h_0} \tag{10-29}$$

若板条的厚度无变化，即$h = h_0$，则应变中性层与中间层相重合。

已知应变中性层的位置，便很容易确定周向应变的分布。若微元体所对应的夹角为θ，则在曲率半径为r处的纤维的长度为$l = r\theta$，其初始长度为$l_0 = r_0\theta$，由此可得

$$e_\theta = \ln\frac{l}{l_0} = \ln\frac{r}{r_0}$$

在图10-8上，给出了两个中性层的位置，以及e_θ和e_θ的分布规律。由前面的分析可知，中间部分的变形非常复杂，因为不是线性的。但在最外层附近的区域，应变的分布可近似地认为是线

性的。从图10-8c可见，内层的ε_θ比外层的ε_θ要大，于是对于具有强化效应的材料，内层的应力比外层应力大。为了使周向应力的合力不发生变化，应力中性层将向内移动，即$r_n<\sqrt{R_0R_i}$，从而在曲率增加的过程中使板条的厚度变薄，并导致应变中性层的移动（$r_0<r_m$）。板条厚度的减薄以及应变中性层的移动都是材料的强化效应引起的，而且是在没有轴向力作用的纯弯情况下发生的。但在大多数工艺过程中，板条横截面上都有拉力作用，这又是板条在弯曲过程中减薄的原因之一。

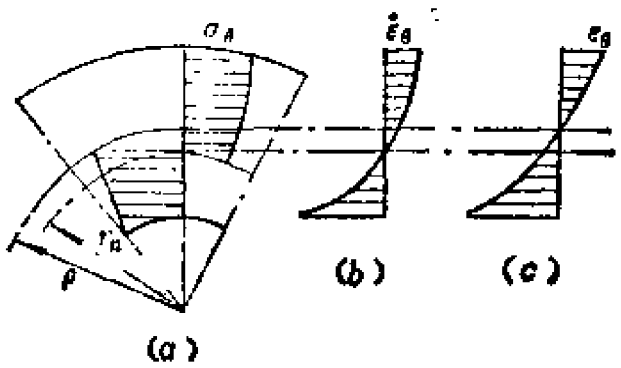


图10－8　板条横截面上的应力、应变率和应变的分布规律

§10-3　板条的压弯问题

由前面的分析可知，在板条塑性弯曲的过程中会出现许多复杂的现象。例如，板条厚度的变化、质点沿径向移动、中性层位置的变化、应变的非线性分布等，而且在加载过程中某些区域可能卸载，某些层中的应变可能改变符号。对于强化材料，考虑这些问题是非常困难的。但如果物理关系不用单向拉伸的应力-应变关系，而改用反映弯曲特点的弯矩和曲率的关系，则可以避免上述困难。

为了使所研究的问题不和受弯板条的具体尺寸有关，将所有弯矩都除以截面抗弯系数$W(\approx bh^2/6)$。这时，纵坐标为$\sigma(=M/W)$，而在横坐标上将曲率$1/\rho$用$h/2\rho$代替。用这种方法所获得的曲线将只与材料的性质有关。对于钢材和铝材，这样的实验曲线分别画于图10-9和10-10上。

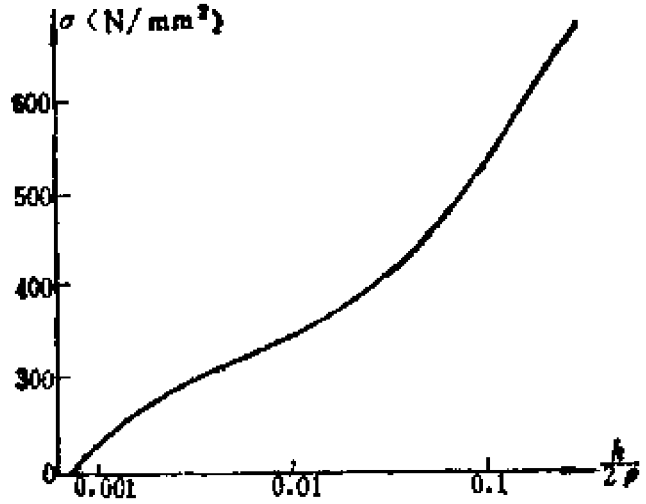


图10－9　软钢的弯曲曲线

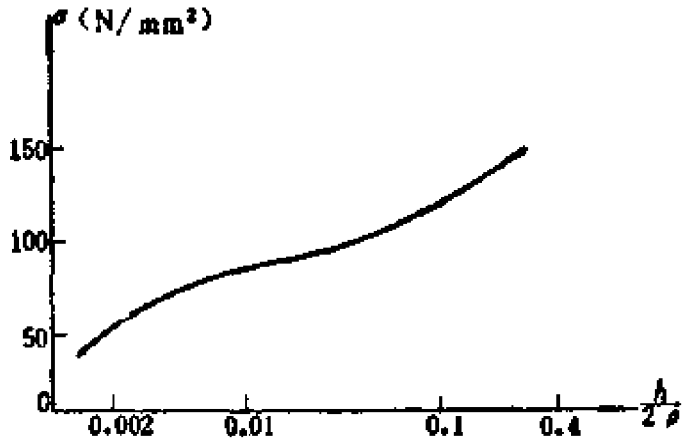


图10－10　铝的弯曲曲线

图10-11上所示的弯矩在转角α'上所做的功可用如下积分表示：

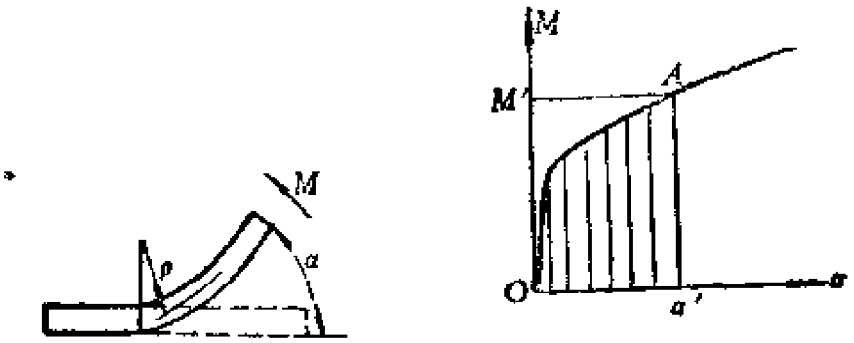


图10－11　弯矩和转角曲线图

$$L=\int_0^{\alpha'} M\mathrm{d}\alpha$$

弯矩和转角之间的关系可从图10-9和图10-10上得出。纵坐标与弯矩成比例，而横坐标与转角成比例。这是因为

$$\frac{h}{2\rho}=\frac{h}{2l}\alpha$$

式中，l为弯曲段的弧长。

现引入充实系数的概念。所谓充实系数，就是图10-11中阴影部分的面积和矩形$OM'A\alpha'$面积的比值，并用ψ表示，即

$$\psi=\frac{\int_0^{\alpha'} M\mathrm{d}\alpha}{M'\alpha'} \tag{10-30}$$

于是弯曲功L可表示为

$$L=\psi M'\alpha' \tag{10-31}$$

若考虑$\alpha'=l/\rho'$，则上式可以写为

$$L=\psi M' l/\rho' \tag{10-32}$$

在上式中包含有M'和ψ，它们对应于板条的曲率$1/\rho'$或转角α'，这些值都可以由$M-\alpha$曲线确定。由于$M-\alpha$曲线中的曲率既包括弹性曲率，又包括塑性曲率，所以L中既包括弹性能，又

包括塑性耗散能。而弹性能可以通过卸载曲线得到。在图10-12中，三角形CBD表示弹性能，于是塑性耗散能L_p（$=L-L_e$）等于图10-12中区域$OABC$的面积，它可以用下式表示：

$$L_p = \psi_p M_B \alpha_c \tag{10-33}$$

式中，α_c为板条卸载后的转角；ψ_p为塑性充实系数，它是面积$OABC$与面积$OEBC$的比例系数。

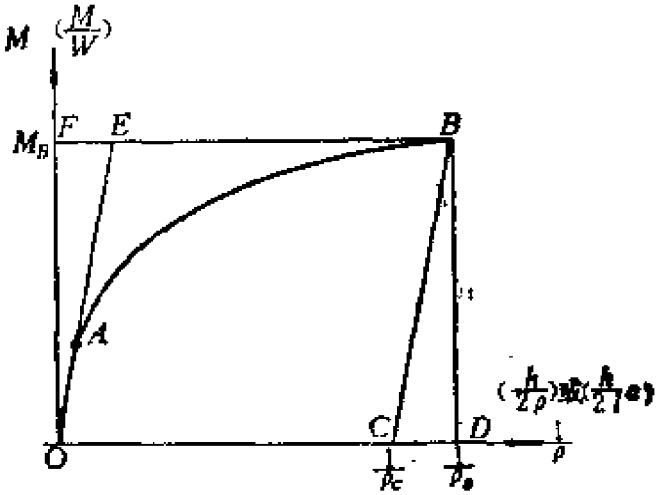


图10－12　弯矩和曲率的关系曲线

下面分析在已知弯矩作用下，等截面受弯板条的变形问题。这里假设板条的轴向力很小，可以忽略。

当弯矩M为常数时，板条是半径为ρ的一段圆弧，ρ的值可以直接由曲线$M-\frac{1}{\rho}$确定。若弯矩沿板条的长度变化，则板条的曲率将是变化的。设板条的一端为固支，而另一端受集中力S作用，如图10-13所示。由于弯矩M和截面到力S作用点的距离成正比，所以可以将距离c以及和它对应的弯矩M（$=Sc$）在同一区间表示。这时，板条上任一点B'处的曲率可按如下方法确定：通过B'点引一条水平线，与曲线$M-\frac{1}{\rho}$相交于B点，B点的横坐标

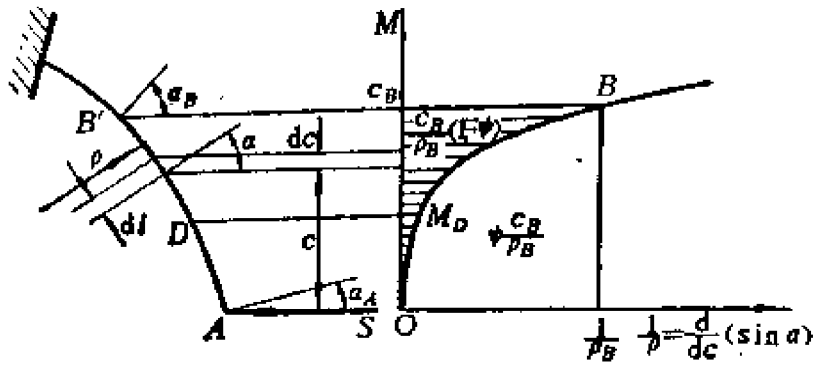


图10－13　一端固支板条的弯曲

便是所求的曲率$\frac{1}{\rho_B}$（图10-13）。在板条的AD段，变形是弹性的，因为这里的弯矩比极限弯矩M_s要小。

设α为板条挠曲线的法线与集中力作用方向的夹角，由图10-13所示的几何关系可得

$$\frac{dl}{\rho}=d\alpha,\qquad dc=dl\cos\alpha$$

于是有

$$\frac{dc}{\rho}=\cos\alpha d\alpha \quad 或 \quad \frac{dc}{\rho}=d(\sin\alpha)$$

上式积分后得

$$\int_0^{c_B}\left(\frac{1}{\rho}\right)dc=\int_{\alpha_A}^{\alpha_B}d\ (\sin\alpha) \qquad (10\text{-}34a)$$

上式的左侧表示图10-13中阴影部分的面积，它可表示为

$$\int_0^{c_B}\left(\frac{1}{\rho}\right)dc=\ (1-\psi)\ \frac{c_B}{\rho_B}$$

将上式代入式（10-34a）后得

$$\sin\alpha_B-\sin\alpha_A=\ (1-\psi)\ \frac{c_B}{\rho_B} \qquad (10\text{-}34b)$$

式（10-34b）对于分析弯曲过程是很有用的。设有一角度为2（90°－α）的凸模，其尖角处用半径为r_t的圆弧过渡（图10-14），而凹模的工作面与凸模的工作面是完全平行的。当凸模向凹模接近时，板条开始弯曲。这一过程可分为三个阶段：（1）弹性弯曲阶段，（2）塑性弯曲阶段，（3）压成阶段。

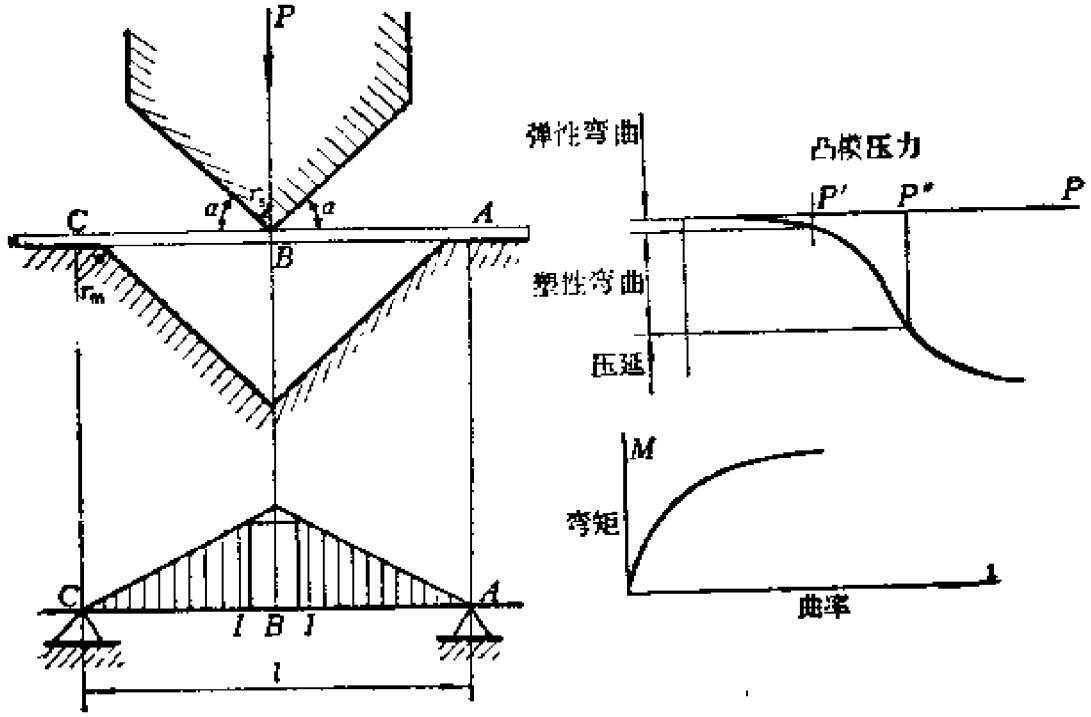


图10－14　弯曲的初始阶段

（1）弹性阶段

在弯曲的初始阶段，凸模压在板条的B点，使板条产生弹性弯曲。板条两端支承于相距为l的A点和C点。A点和C点处的过渡圆弧的曲率半径为r_m。板条的受力情况与集中力P作用于中点的简支梁一样，其弯矩如图10-14所示。从图上看出，最大弯矩出现在力作用点处的横截面上，其值为

$$M_B = \frac{Pl}{4} \qquad (10\text{-}35)$$

随着外力P的增加，弯矩不断增大。在某一瞬间板条的最外层开始塑性变形，这时有

$$M_s = \frac{bh^2}{6}\sigma_s' \qquad (10\text{-}36)$$

式中，$\sigma_s' = 2\sigma_s/\sqrt{3}$，条件是假设泊松比$\mu = 0.5$而且板条处于平面应变状态。将式（10-35）与（10-36）相比，可得此时的外力值为

$$P' = \frac{2bh^2}{3l}\sigma_s'$$

（2）塑性阶段

若凸模继续向下移动，则塑性区将向板条的两端逐渐扩展，例如扩展至图10-14上的IJ段。此时，IJ段内的弯矩超过了极限弯矩M_s，并产生了变曲率的持久变形，最大值在B点。同时，板条的两端将逐渐抬起，与水平面成γ角（图10-15a），而A点则将沿FE弧向E方向移动。

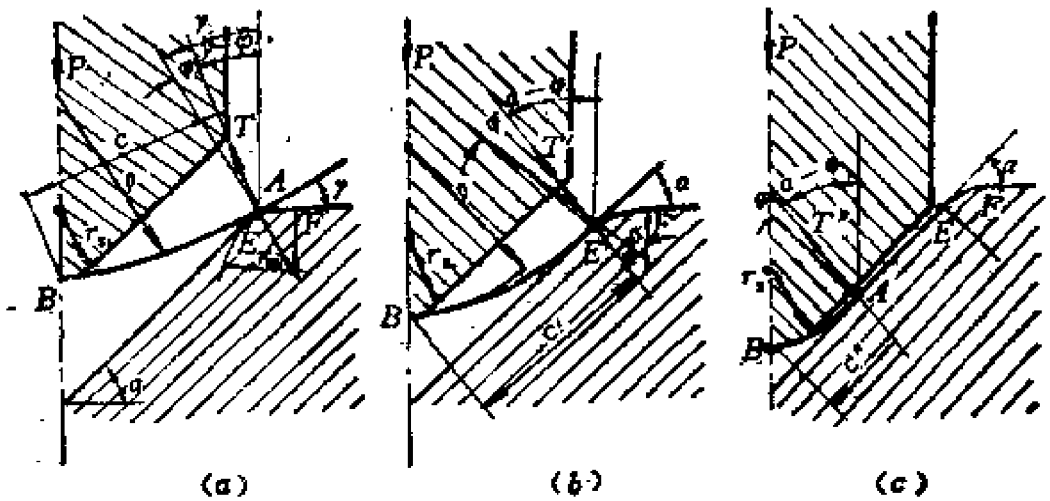


图10－15　板条塑性弯曲的几个阶段

由于板料沿模具表面向中心移动，所以模具在A点的反力T

将与板条端部的法线成一摩擦角φ，即反力与凸模运动方向的夹角为$\gamma-\varphi$。利用式（10-34b），取$\alpha_B=\gamma-\varphi$，$\alpha_A=-\varphi$，可得如下关系式：

$$\sin(\gamma-\varphi)+\sin\varphi=\frac{c}{\rho}(1-\psi) \qquad (10\text{-}37)$$

当板条上的A点与模具上的E点（过渡圆弧与直线的交点）相遇时，γ获得所要求的α值，而反力T'与凸模运动方向的夹角变为$\alpha-\varphi$（图10-15b）。若凸模继续向下移动，则γ角和T力的方向将保持不变。根据式(10-34b)，B点的曲率半径将在某一瞬时缩小到所要求的$\rho_1\left(=r_1+\frac{h}{2}\right)$。这时，便完成了板条的成形过程，即得到了所要求的曲率半径ρ_1和弯曲角α。由式（10-37）可知，若要同时达到这两个要求，只有当反力T''对于B点的作用臂c''（图10-15c）由下式确定时才是可能的，即

$$c''=\frac{\sin(\alpha-\varphi)+\sin\varphi}{1-\psi}\rho_1 \qquad (10\text{-}38)$$

若已知c''，便可以合理地设计模具的形状。在弯曲的初始阶段，如支承点的间距太大，则在最终阶段可能使板条在比c''更大的范围内有不可恢复的曲率、其结果是板条在A点之外也将有曲率出现，即在曲率半径为ρ_1的情况下所形成的弯曲角比α大。为了避免这一情况，c''应比塑性区域的最大长度还大，而且在弯曲的过程中不应有较大的变化。因此在弯曲的最后阶段，反力作用点A应该靠近E点。

因为B点处于凸模之下，所以在塑性弯曲阶段的最后，B点处板条的曲率是已知的，曲率半径等于给定的ρ_1，于是利用$M-\frac{1}{\rho}$曲线可以计算对应于这一曲率的弯矩M_1。将M_1与c''相除，便可得到T''值，即

$$T'' = \frac{M_s}{c''} = \frac{1}{\sin(\alpha-\varphi)+\sin\varphi}\,\frac{(1-\psi)M_s}{\rho_s}$$

由于T''力与凸模移动方向的夹角为$\alpha-\varphi$，因此，凸模的压力为

$$P'' = 2T''\cos(\alpha-\varphi)$$

将前面得到的T''值代入上式后，可得塑性弯曲阶段终了时的压力为

$$P'' = \frac{2\cos(\alpha-\varphi)}{\sin(\alpha-\varphi)+\sin\varphi}\,\frac{(1-\psi)M_s}{\rho_s}$$

（3）压成阶段

在塑性弯曲阶段结束后，所加工的板条将如图10-16*a*所示。在B点曲率半径为ρ_s，离开B点后曲率将逐渐减小。当到达I点和J点时，便过渡到互成$180°-2\alpha$角的两条直线上。尽管α和ρ_s是一致的，但从图上看出仍有一些误差，在一般情况下，这种误差关系不大，但有时要求板条和模具的形状完全一致（图10-16*c*），这时便需要进一步压延。

当凸模继续下压时，板条将逐步沿GB弧紧贴于凸模上（图10-16*d*），OB和OG之间的夹角β将逐渐缩小，力臂c也同时减小。由图10-16*d*可见，力T和板条法线的夹角在A点为摩擦角φ，而在B点为$\beta-\varphi$，于是由式（10-34*b*）可得

$$\sin(\beta-\varphi)+\sin\varphi = \frac{c}{\rho_s}(1-\psi)$$

从上式可得力臂为

$$c = \frac{\sin(\beta-\varphi)+\sin\varphi}{1-\psi}\rho_s \qquad (10\text{-}39)$$

式中，ρ_s和系数ψ为常数，但由于角度β在压延过程中是变化的，所以力臂c也是变化的。当β趋近于零时，力臂也趋近于零。在极限状态时，板条与凸模贴合，而点A和点B都接近于点H。

随着力臂c的减小，合力T必然增大，这是因为弯矩是常数。

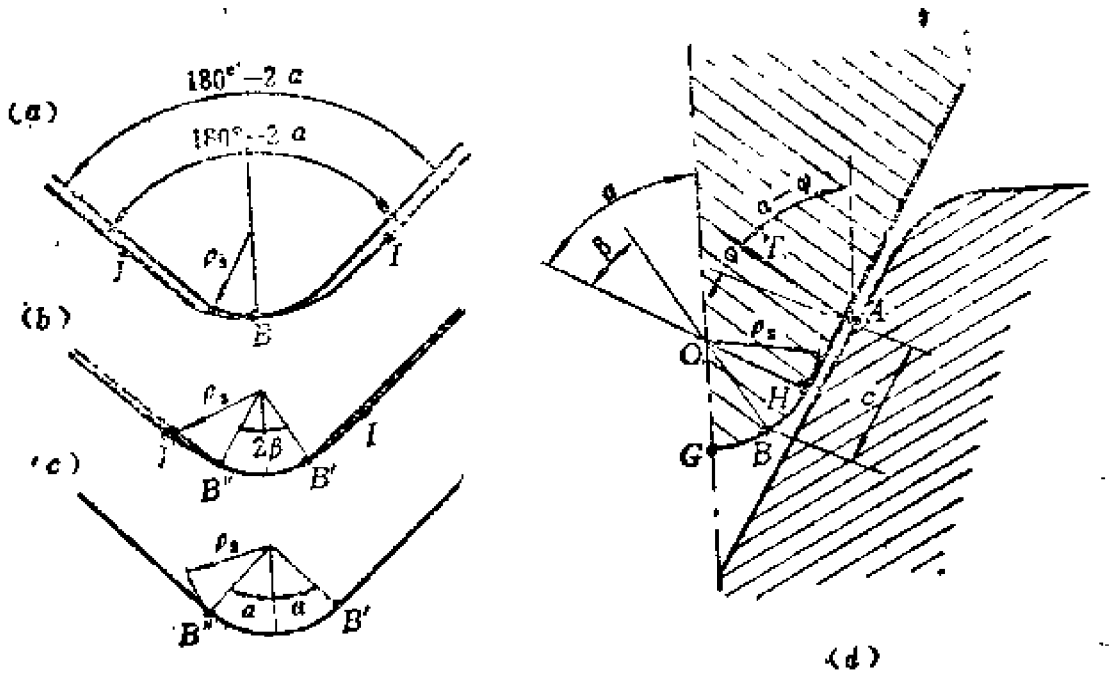


图10－16　压成过程的几个阶段

考虑式（10-39）可得

$$T_d = \frac{M}{c} = \frac{(1-\psi)M_s}{[\sin(\beta-\varphi)+\sin\varphi]\rho_s}$$

于是凸模在压延过程中的压延力为

$$P_d = 2T_d\cos(\alpha-\varphi) = \frac{2\cos(\alpha-\varphi)}{\sin(\beta-\varphi)+\sin\varphi} \cdot \frac{(1-\psi)M_s}{\rho_s} \qquad (10\text{-}40)$$

在整个压延过程中，φ、M_s、ρ_s和α皆为常数。上式表示压延力P_d与表征板条弯曲形状的β角之间的关系。

角β的减小将引起凸模压力的迅速增加，在一般情况下不可能获得$\beta=0$的状态，因为这将要求压力无穷大。

§10-4 板条的拉弯问题

在某些情况下，板条在弯曲过程中由于受某些因素的干扰而不能获得所需要的形状，例如在受压区形成折叠（薄壁杆件的弯曲）。弹性回弹及残余应力等都是影响塑性成形的因素。折叠现象是在受压区失稳的一种形式（图10-17）。

在弯曲板条的卸载过程中，弯矩减小至零。这时曲率由对应于最大弯矩值的$1/\rho$减小到$1/\rho'$（图10-18）。

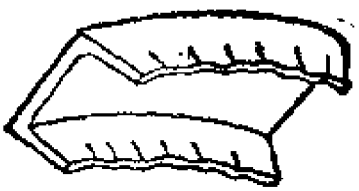


图10-17 受弯型钢起皱

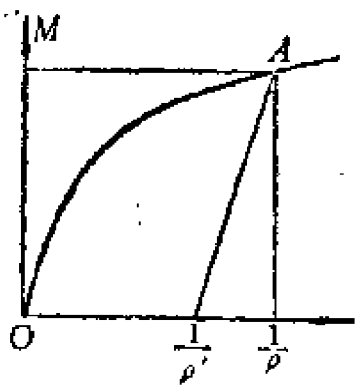


图10-18 弯矩和曲率关系曲线

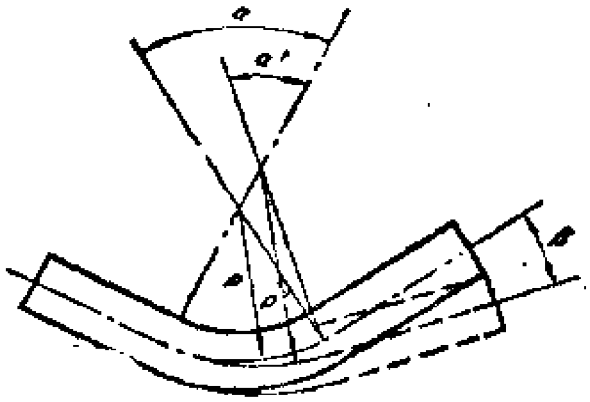


图10-19 受弯板条的回弹

恢复的弹性变形由曲率$1/\rho$与$1/\rho'$之差确定。由前面的弹性关系

式可知，对于窄板条有

$$\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho'}=\frac{M}{EI}=\frac{\sigma_s W}{EI}=\frac{2\sigma_s}{Eh} \qquad (10\text{-}41)$$

对于宽板条则有

$$\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho'}=\frac{M(1-\mu^2)}{EI}=\frac{\sigma_s W(1-\mu^2)}{EI}$$

$$=\frac{2(1-\mu^2)\sigma_s}{Eh} \qquad (10\text{-}42)$$

曲率半径ρ及ρ'可用转角α及α'确定（图10-19），即

$$\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho'}=\frac{1}{l}(\alpha-\alpha')$$

式中，$l=\alpha\rho=\alpha'\rho'$为受弯板条的弧长。可恢复的弹性转角$\beta$可用下式表示，对于窄板条有

$$\beta=\alpha-\alpha'=\frac{Ml}{EI}=\frac{2l\sigma_s}{Eh}$$

对于宽板条有

$$\beta=\alpha-\alpha'=\frac{Ml}{EI}(1-\mu^2)=\frac{2l\sigma_s}{Eh}(1-\mu^2)$$

角β的值与许多因素有关，例如：

（1）几何因素　随着曲率半径ρ的增加和厚度h的减小，角β增加。如引进相对半径ρ/h，则可认为随着ρ/h的增加β也增加。随着转角的增加，弹性恢复角也增加；而随着平均板宽b/h的增加，弹性恢复角稍有下降。

（2）材料因素　随着材料屈服极限的增加，β角也增加。

（3）工艺因素　应变率的增加将引起β角的增加，但若保持外载不变，则由于松弛的结果，弹性恢复角也将下降。

由于存在回弹以及残余应力（图10-20），模具的形状应与产品的形状稍有不同。用理论的方法和实验的方法找出这一差别

往往有不少困难。但以上这些现象在拉弯过程中却可以大大减少。

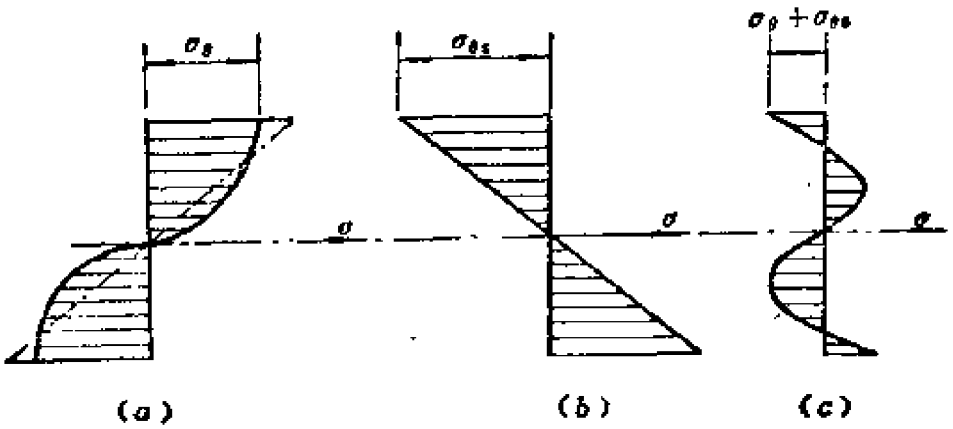


图10-20 受弯板条中的残余应力

下面分析固定宽度板条的拉弯问题。

设板条的厚度为h，宽度为b，拉伸和弯曲同时作用(图10-21)。

由静力平衡条件得

$$r_i \mathrm{d}\alpha b p = bh\bar{\sigma}\mathrm{d}\alpha$$

式中，p为板条内表面上的压力，$\bar{\sigma}=\dfrac{S}{bh}$为周向平均应力。由上式可得

$$p=\frac{h}{r_i}\bar{\sigma} \tag{10-43}$$

取内表面上的径向应力$\sigma_r=p$，外表面上的$\sigma_r=0$，若板较宽，即$b\gg h$，则σ_r是很小的，在分析中可以忽略。

轴向力S会引起板条的附加伸长和厚度的减薄，这将影响弯矩的值。为了使分析方便，采用刚塑性模型。假设板条的曲率不大，$b=\mathrm{const}$。根据米泽斯屈服条件，可得如下应力分量

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\theta &= \pm\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s = \sigma\\ \sigma_r &= \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_s = \frac{\sigma}{2}\\ \sigma_z &= 0\end{aligned}\right\} \qquad (10\text{-}44)$$

由于轴向力的作用，使得中性层向内移动一个距离a，由平衡条件得

$$\left(\frac{h}{2}+a\right)b\sigma-\left(\frac{h}{2}-a\right)b\sigma=S$$

由此可得

$$a=\frac{S}{2b\sigma}$$

由上式和周向平均应力的表达式可得

$$\frac{2a}{h}=\frac{\bar{\sigma}}{\sigma} \qquad (10\text{-}45)$$

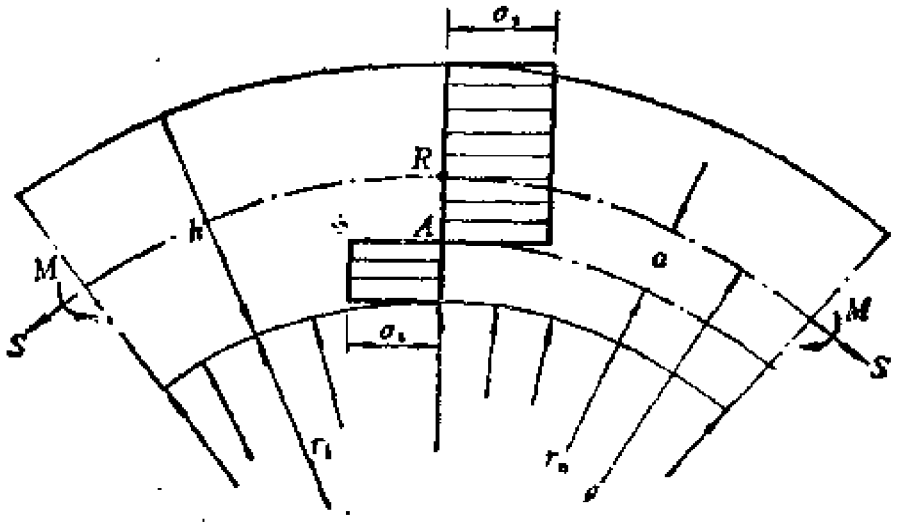


图10－21　拉弯板条

在板条的横截面上，受拉区的合力为$\left(\frac{h}{2}+a\right)b\sigma$，对截面中

心线的力臂为 $\frac{h}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}+a\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}-a\right)$，同样也可以在受压区得到类似的表达式。于是横截面上的弯矩为

$$M=\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}+a\right)b\sigma\left(\frac{h}{2}-a\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}-a\right)b\sigma\left(\frac{h}{2}+a\right)$$

化简后，得

$$M=\frac{bh^2}{4}\sigma\left(1-\frac{4a^2}{h^2}\right) \tag{10-46}$$

如取 $M_p=\frac{bh^2}{4}\sigma$，并考虑式（10-43），则上式可写为

$$\frac{M}{M_p}=1-\left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma}\right)^2 \tag{10-47}$$

上式描述的曲线画于图10-22上。

轴向力的存在将引起受弯板条的轴向变形。若取 $S=\text{const}$，并假设中性轴近似地没有变形，则中心线的长度为

$$l=l_0\frac{\rho}{r_0}=l_0\frac{\rho}{\rho-a}$$

式中，l_0 为板条的初始长度。中心线的伸长为

$$e=\frac{l-l_0}{l_0}=\frac{a}{r_0}=\frac{a}{\rho-a}$$

而板条厚度的变化为

$$h=h_0\left(1-\frac{a}{\rho}\right)$$

或

$$h=h_0\left(1-\frac{h}{2\rho}\frac{\bar{\sigma}}{\sigma}\right) \tag{a}$$

在受拉区近似地取平均应变值为 $\bar{e}_0=e_{0_0}/2$，其中 e_{0_0} 为最外层纤维的应变，并等于

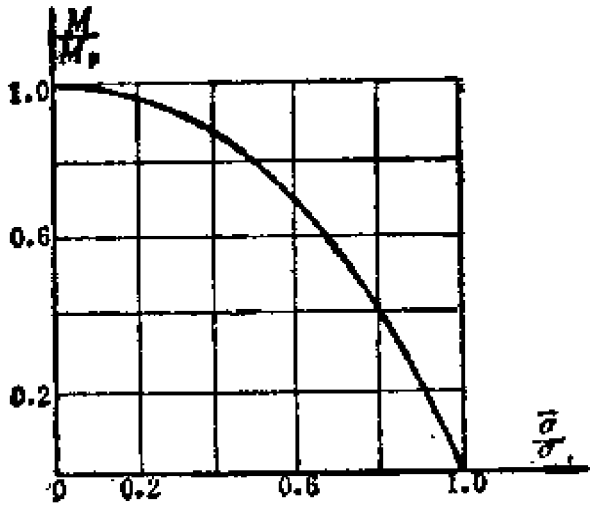


图10－22　轴向力对弯矩的影响

$$e_{\theta\theta}=\frac{-\frac{1}{2}h+a}{r_a}=\frac{h}{2r_a}\left(1+\frac{2a}{h}\right)$$

由于所分析的是平面应变状态，所以在受拉区的应变强度值为

$$e_i^t=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}e_{\theta\theta}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{h}{4r_a}\left(1+\frac{2a}{h}\right)$$

受拉区的体积$V^t=\frac{bhl}{2}\left(1+\frac{2a}{h}\right)$，在此体积中的塑性耗散能为

$$L^t=V^te_i^t\sigma_s=\frac{bhl}{2}\cdot\frac{h}{4r_a}\left(1+\frac{2a}{h}\right)^2\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s$$

用类似的方法可得受压区的塑性耗散能为

$$L^c=V^ce_i^c\sigma_s=\frac{bhl}{2}\cdot\frac{h}{4r_a}\left(1-\frac{2a}{h}\right)^2\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s$$

于是塑性总耗散能为

$$L=L^t+L^c=bhl\cdot\frac{h}{4r_a}\left[1+\left(\frac{2a}{h}\right)^2\right]\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s \quad (10\text{-}48)$$

由于理想塑性材料的总耗能为$L = Ve_i\sigma_s$，所以由上式可得应变强度的平均值为

$$e_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{h}{4r_n}\left[1 + \left(\frac{2a}{h}\right)^2\right]$$

或

$$e_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{h}{4r_n}\left[1 + \left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma}\right)^2\right] \qquad (10\text{-}49)$$

由上式可见，由于有轴向力的作用，在板条弯曲的过程中需要做更多的功。当$\bar{\sigma} = \sigma$时，所需做的功增加了一倍。若$\bar{\sigma}$比σ小得多，则可以忽略式（10-49）中的平方项，这时有

$$e_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{h}{4r_n}$$

当已知应变强度e_i时，便可求出弯曲过程中轴向力的变化值。

在板条通过柱形滚筒缠绕的过程中，板条的曲率将变化两次：在AC段，板条将弯曲；而在BD段，板料又将伸直（图10-23）。设板条伸直展开段的拉力为S_B，而在缠绕段的作用反

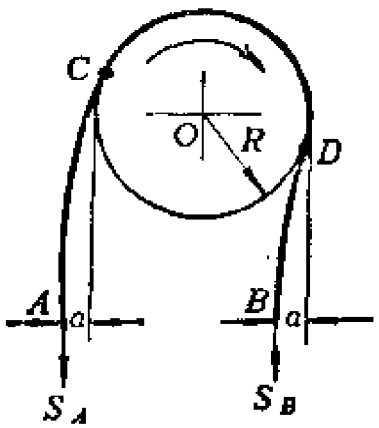


图10－23　板条的缠绕和伸直

力用S_A表示。若在某一阶段缠绕部分移动了距离l_A，而展开部分移

动了距离l_B，则由于在弯曲过程中板条有伸长，因而l_B将比l_A略大一些。于是，外力S_A和S_B所做的功为$S_Bl_B-S_Al_A$，其值应等于板条在弯曲和展开时的塑性耗散能。利用公式（10-49）可以写出

$$S_Bl_B-S_Al_A=2V\frac{h}{4r_n}\left[1+\left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma}\right)^2\right]\sigma$$

如用F_A表示板条的初始截面积，用$\bar{\sigma}_A$表示在该截面上的轴向应力，用F_B和$\bar{\sigma}_B$表示展开端的截面积和轴向应力，则上式又可写为

$$\bar{\sigma}_Bl_BF_B-\bar{\sigma}_Al_AF_A=V\frac{h}{2r_n}\left[1+\left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma}\right)^2\right]\sigma \quad (10\text{-}50)$$

式中，$\bar{\sigma}$为截面A和B上应力的平均值。由于板条的体积在缠绕过程中是不变的，因此

$$F_Al_A=F_Bl_B=V \quad (10\text{-}51)$$

利用上式，式（10-50）可简化为

$$\Delta\bar{\sigma}=\bar{\sigma}_B-\bar{\sigma}_A=\frac{h}{2r_n}\left[1+\left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma}\right)^2\right]\sigma \quad (10\text{-}52)$$

由上式可见，$\bar{\sigma}$愈大则$\Delta\bar{\sigma}$也愈大。当$\bar{\sigma}$与σ相比很小时，上式中$(\bar{\sigma}/\sigma)^2$项可以忽略，此时有

$$\Delta\bar{\sigma}=\frac{h}{2r_n}\sigma \quad (10\text{-}53)$$

展开端的拉力S_B可用下式求出：

$$S_B=F_B\bar{\sigma}_B=F_B(\bar{\sigma}_A+\Delta\bar{\sigma}) \quad (10\text{-}54)$$

如板条的宽度不变，则由式（a）可得

$$F_B=F_A\left(1-\frac{h}{2\rho}\frac{\bar{\sigma}}{\sigma}\right) \quad (10\text{-}55)$$

将式（10-52）、（10-55）代入式（10-54）后，得

$$S_B = F_A\left(1-\frac{h}{2\rho}\cdot\frac{\bar{\sigma}}{\sigma}\right)\left[\bar{\sigma}_A+\frac{h}{2r_n}\left(1+\frac{\bar{\sigma}^2}{\sigma^2}\right)\sigma\right] \tag{10-56}$$

上式中若近似地取$r_n\approx\rho$，$\bar{\sigma}_A\approx\bar{\sigma}$，则经化简并忽略$\frac{h}{2r_n}$的平方项后，可得

$$\Delta S = S_B - S_A = F_A\sigma\cdot\frac{h}{2\rho}\left[1-\left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma}\right)^2\right] \tag{10-57}$$

由上式可见，随着拉应力$\bar{\sigma}$的增加，力的变化ΔS在不断减小，因此可以认为横截面积F的减小比由于弯曲而引起的轴向力的增加效果要大。

如已知力的增量ΔS，则可以求出板条缠绕端和展开端的偏离距离a（图10-23）。由对于滚筒轴心的力矩平衡条件可得

$$S_A(R+a) = S_B(R-a)$$

由此得

$$a = \frac{(S_B-S_A)R}{S_B+S_A} = \frac{\Delta SR}{2S_A+\Delta S}$$

将式（10-57）代入上式后，得

$$a = \left[1-\left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma}\right)^2\right]R\Big/\left[1+\frac{4R}{h}\left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma}\right)-\left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma}\right)^2\right] \tag{10-58}$$

在前面的分析中，假设了板条的宽度在弯曲的过程中是不变的，即为平面应变状态（$e_2=0$）。现在来分析一下板条的宽度发生变化但横截面保持平行的情况（$e_2=\text{const}\neq 0$）。

若板条的厚度比曲率半径小得多，则在板条的轴向、宽度方向和厚度方向的应变e_1、e_2和e_3近似地按如下规律变化：

$$e_1 = \frac{x}{\rho} + e_{01},\quad e_2 = e_{02},\quad e_3 = -\frac{x}{\rho} - e_{01} - e_{02} \qquad (10\text{-}59)$$

式中，x为所求应变处沿厚度方向到中心面的距离，e_{01}和e_{02}为中心面在1方向和2方向的应变。设板条的材料是理想刚塑性体，而且是比例变形过程。在上述假设下，应力偏量与应变偏量的关系可用下式表示：

$$s_1 = \frac{2}{3}\sigma_s\frac{e_1}{e_i},\quad s_2 = \frac{2}{3}\sigma_s\frac{e_2}{e_i},$$

$$s_3 = \frac{2}{3}\sigma_s\frac{e_3}{e_i} \qquad (10\text{-}60)$$

如果采用体积不可压缩条件，应变强度可用下式表示：

$$e_i = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{e_1^2 + e_1 e_2 + e_2^2} \qquad (10\text{-}61)$$

大曲率板条的平衡方程为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_3}{\mathrm{d}r} + \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{r} = 0 \qquad (10\text{-}62)$$

式中，σ_3和σ_1分别为径向和轴向的应力。由于板条的厚度比曲率半径小得多，因此可近似地将变化的半径r（$=\rho + x$）取为平均值ρ。同时利用关系式

$$\sigma_3 - \sigma_1 = s_3 - s_1 = \frac{e_3 - e_1}{e_i}\cdot\frac{2}{3}\sigma_s \qquad (10\text{-}63)$$

可将式（10-62）写成

$$\mathrm{d}\sigma_3 = \frac{2}{3}\sigma_s\frac{e_1 - e_3}{e_i}\frac{\mathrm{d}x}{\rho} \qquad (10\text{-}64)$$

由式（10-59）的第一式可得$\mathrm{d}x/\rho = \mathrm{d}e_1$，而$e_3 = -e_1 - e_2$，因此由式（10-64）和（10-61）可得

$$\mathrm{d}\sigma_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_s\frac{(2e_1 + e_2)\mathrm{d}e_1}{\sqrt{e_1^2 + e_1 e_2 + e_2^2}}$$

上式积分后得

$$\sigma_3 = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s\sqrt{e_1^2 + e_1 e_2 + e_2^2} + C$$

或

$$\sigma_3 = \sigma_s e_1 + C$$

积分常数C可通过在板条外表面$\sigma_3 = 0$的条件确定。于是可得

$$\sigma_3 = \sigma_s (e_1 - e_{1o})$$

式中，e_{1o}为外表面处的应变强度。由上式便可以确定内表面的压力值，即

$$p = \sigma_s (e_{1o} - e_{1i}) \tag{10-65}$$

式中，e_{1i}为内表面处的应变强度。

应力分量σ_1和σ_2由下式确定：

$$\sigma_2 = s_2 + \sigma_0, \quad \sigma_1 = s_1 + \sigma_0 \tag{10-66}$$

上式中可将σ_0用$\sigma_3 - s_3$表示，于是得

$$\sigma_2 = (s_2 - s_3) + \sigma_3, \sigma_1 = (s_1 - s_3) + \sigma_3 \tag{10-67}$$

上式括号中的值可表示如下：

$$s_2 - s_3 = \frac{e_2 - e_3}{e_1} \cdot \frac{2}{3}\sigma_s$$

$$s_1 - s_3 = \frac{e_1 - e_3}{e_1} \cdot \frac{2}{3}\sigma_s$$

将上式代入式（10-67），得

$$\sigma_1 = \sigma_s \left[\frac{2}{3}\frac{e_1 - e_3}{e_1} + e_1 - e_{1o}\right]$$

$$\sigma_2 = \sigma_s \left[\frac{2}{3}\frac{e_2 - e_3}{e_1} + e_1 - e_{1o}\right]$$

弯曲问题的分析方法，经常应用到各种板料成形的工艺中去。将板条加工成凸形构件的卷绕工艺，便是一个典型的例子。为了简化分析，采用如下假设：

(1) 卷绕在柱形滚筒上进行；

(2) 拉力方向与滚筒的切线方向重合；

(3) 忽略径向应力σ_3；

(4) 在弯曲过程中，板条的宽度不变；

(5) 体积不可压缩，即泊松比$\mu=0.5$。

在分析中考虑弹性变形以及材料的强化效应。通过分析卷绕过程，确定板条中的应力分布以及弹性恢复应变值。板条的一端作用有拉力S，而另一端固定在半径为r_w的圆柱形模具上（图10-24）。拉力的值为

$$S=\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_{s,A}bh^0$$

式中，$\sigma_{s,A}$、b、h^0为截面$A-A$上应力的屈服极限、宽度和初始厚度。

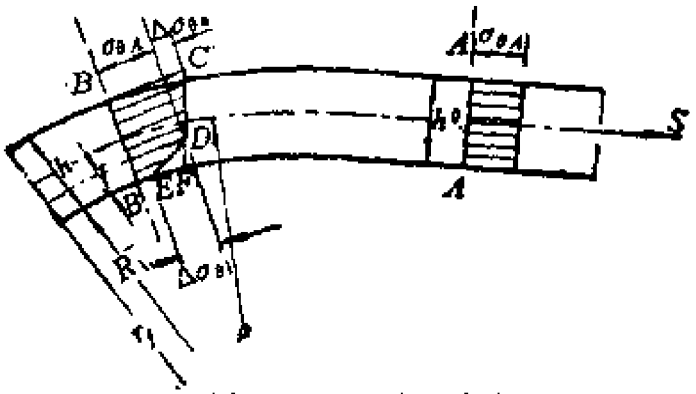


图10-24 板条的卷绕

在圆柱形模具上的卷绕引起板条外层应变的增加，从而导致材料强化效应的增加和轴向应力的增加。为了使总力S不减小，在板条内层的应力必须减小，于是板条内层尚处于弹性状态。

由于增加了附加应变$\Delta e_{\theta\theta}$（$=(h-f)/r_f$），板条外层的纤维应力便增加了

$$\Delta\sigma_{e0}\approx\frac{d\sigma_e}{de_e}\Delta e_{e0}=\frac{d\sigma_e}{de_e}\frac{h-f}{r_f} \qquad (10\text{-}68)$$

式中，r_f为中性层的曲率半径，f为内表面到中性层的距离（图10-24）。

$\frac{d\sigma_e}{de_e}$可以用强化曲线的导数$\left(D=\frac{d\sigma_i}{de_i}\right)$表示，$D$称为强化模量。由于

$$\sigma_e=\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_i \quad , \quad e_e=\frac{\sqrt{3}}{2}e_i$$

故有

$$d\sigma_e=\frac{2}{\sqrt{3}}d\sigma_i \quad , \quad de_e=\frac{\sqrt{3}}{2}de_i$$

因此强化模量D可表示为

$$\frac{d\sigma_e}{de_e}=\frac{4}{3}\frac{d\sigma_i}{de_i}=\frac{4}{3}D$$

上式代入式（10-68）可得

$$\Delta\sigma_{e0}=\frac{4}{3}D\frac{h-f}{r_f} \qquad (10\text{-}69)$$

利用类似的方法可以计算板条内层应力的减少量$\Delta\sigma_{e1}$。由于板条在弯曲过程中最内层应变的减少量为$\Delta e_{e1}=-\frac{f}{r_f}$，故

$$\Delta\sigma_{e1}=\frac{E}{1-\mu^2}\Delta e_{e1}=\frac{E}{1-\mu^2}\left(-\frac{f}{r_f}\right)$$

若取泊松比$\mu=0.5$，则上式又可写为

$$\Delta\sigma_{e1}=\frac{4}{3}E\frac{f}{r_f} \qquad (10\text{-}70)$$

应力分布如图10-24所示。合力S可按下式计算：

$$S=\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_{s,A}hb+\frac{1}{2}\Delta\sigma_{s,0}(h-f)b-\frac{1}{2}\Delta\sigma_{s,f}fb$$

将式（10-69）和（10-70）代入上式后，则有

$$S=\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_{s,A}hb+\frac{2}{3}D\frac{(h-f)^2}{r_f}b-\frac{2}{3}E\frac{f^2}{r_f}b \tag{10-71}$$

将截面B-B的力S和截面A-A的力S相比，则有

$$\frac{2}{\sqrt{3}}h^0b\sigma_{s,A}=\frac{2}{\sqrt{3}}hb\sigma_{s,A}+\frac{2}{3}D\frac{(h-f)^2}{r_f}b-\frac{2}{3}E\frac{f^2}{r_f}b \tag{10-72}$$

在上式中，还应考虑板条厚度的减薄量。由于在弯曲过程中，曲率半径为r_f的中性层的长度l_f不变，因此曲率半径为$\rho\left(=R_1+\frac{h}{2}\right)$处的纤维将按如下比例伸长：

$$\frac{l}{l_f}=\frac{R_1+\frac{h}{2}}{r_f}$$

板条的厚度也将按同样的比例减小：

$$\frac{h^0}{h}=\frac{l}{l_f}=\frac{R_1+\frac{h}{2}}{r_f} \tag{10-73}$$

由于中性层的移动量与板条厚度相比是很小的，因此为了简化计算可取$R_1\approx r_f$，这时由式（10-73）可得

$$h^0=h\left(1+\frac{h}{2r_f}\right)$$

将上式代入式（10-72）后，便可得

$$\left(E-D\right)\left(\frac{f}{h}\right)^2+2D\left(\frac{f}{h}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{s,A}-D\right)=0$$

由此式可得比值f/h为

$$\frac{f}{h}=\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}D\sigma_{s,A}+E\left(D-\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{s,A}\right)}-D}{E-D} \tag{10-74}$$

由上式可见，比值f/h只与材料的常数，即弹性模量E、强化模量D和弯曲时的屈服极限$\sigma_{s,A}$有关。

已知中性层的位置和周向应力σ_θ的分布规律，便可求出弯距的值为

$$M=\frac{bh^2}{6}\cdot\frac{4}{3}D\cdot\frac{h}{2r_f}+\frac{4}{3}(E-D)\cdot\frac{bf^2}{2r_f}\left(\frac{h}{2}-\frac{f}{3}\right) \tag{10-75}$$

上式右侧的第一项为按直线CF（图10-24）计算的弯矩，根据式（10-69），C点和F点的应力差为$\frac{4}{3}D\frac{h}{r_f}$。而上式右侧的第二项则为在直线$DF$外的卸载区由于应力的减少所引起的弯矩。在最内层的点E，应力减少值为$\frac{4}{3}(E-D)\frac{f}{r_f}$。若近似地取$r_f\approx\rho$，则式（10-75）可以写为

$$M=\frac{bh^3}{12\rho}\cdot\frac{4}{3}\left\{D+(E-D)\left[3\left(\frac{f}{h}\right)^2-2\left(\frac{f}{h}\right)^3\right]\right\}$$

若忽略小量$\left(\frac{f}{h}\right)^3$，则有

$$M\approx\frac{bh^3}{12\rho}\cdot\frac{4}{3}\left[D+3(E-D)\left(\frac{f}{h}\right)^2\right] \tag{10-76}$$

卸载后，弯矩降至零，弹性应变将恢复，曲率半径由ρ变为ρ'。由式（10-42）知，

$$\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho'}=\frac{M(1-\mu^2)}{EI}$$

若取泊松比$\mu=0.5$，$I=bh^3/12$，将式（10-69）代入上式可得

$$1-\frac{\rho}{\rho'}=\frac{D}{E}+3\left(1-\frac{D}{E}\right)\left(\frac{f}{h}\right)^2 \qquad (10\text{-}77)$$

式中的f/h由已知的D、E和σ_s确定。参量$1-\frac{\rho}{\rho'}$为板条的弹性恢复量，这个值愈小，板条的几何形状愈与模具相近。

习　题

10-1　已知理想弹塑性材料的矩形截面梁高为$2h$，宽为b，受外力作用。当弹性核$h_e=\frac{h}{2}$时，试求弯矩值为多少？并求出卸载后的残余曲率半径与卸载前的曲率半径之比（图10-25）。

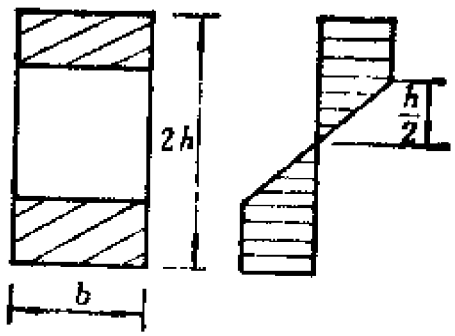


图10－25　矩形截面梁

10-2　已知理想弹塑性材料的矩形截面悬臂梁一端受集中力P作用，截面尺寸如图10-26所示，材料的屈服极限为σ_s。试求极限状态时力作用点的挠度。

10-3　对于图10-27所示的受弯板条，为了使B点的曲率达到$1/\rho_B$，试

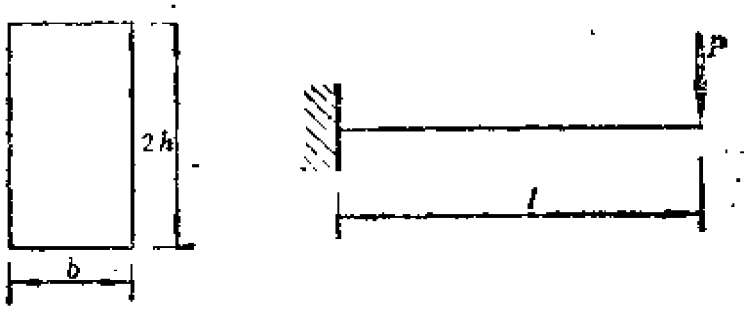


图10－26　矩形截面悬臂梁

求力P的作用臂c_B应多大？

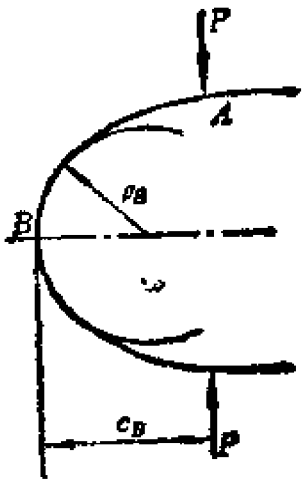


图10－27　板条弯曲

10-4　已知板条卷在圆筒上，受P力作用，如图10-28所示。B点与圆心的连线和P力作用方向的夹角为α_B，而P力与A点板条法线的夹角为α_A。试求在板条压至圆筒上时，角α_A与α_B之间的关系。

10-5　板条的卷绕过程如图10-29所示，板条在B点与卷筒接触。若已知B截面上的弯矩为M，充实系数为k，试求距离c、力P和转矩M_t的表达式。

10-6　已知直径为d、壁厚为h的薄壁圆筒，在通过图10-30所示的一

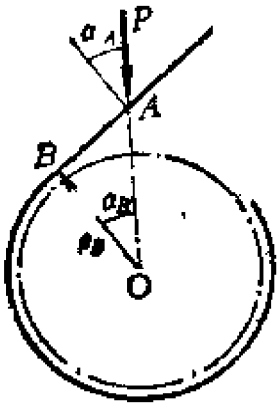


图10－28　板条卷在圆筒上

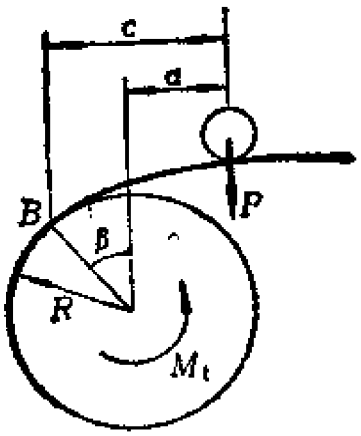


图10－29　板条的卷绕

对滚筒之后，成为高度为b的扁平筒。如单位长度上的弯矩为$M_p=\frac{h^2}{4}\sigma_s$=const，试求拉力$T$的值。

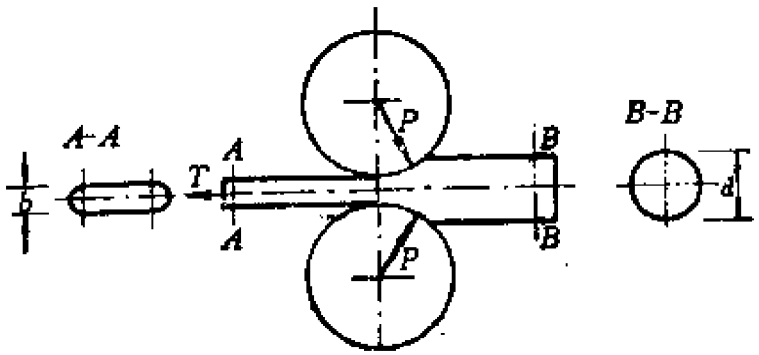


图10－30　薄壁圆筒的挤压

第十一章　板料冲压的薄膜理论

§11-1　塑性薄膜理论和轴对称平衡方程

板料冲压是塑性加工中经常遇到的一种工艺过程，其特点是板料获得塑性变形并且在变形中不发生破坏、不失去稳定性。

一块平板在凸模的压力作用下，形成一个空心的构件，即被加工成一个壳体，这种工艺过程称为板料冲压过程。冲压过程不仅用料省、加工方便，而且加工出的构件还具有较好的力学性能，因此在工程中经常采用这种工艺，以获得各种形状的构件。板料冲压工序除第十章中介绍的弯曲外，还有翻边、深拉延、缩口和扩口等。

当板料的厚度较薄时，采用薄膜理论进行分析是非常方便的。薄膜理论不仅分析简单，而且也能合理地应用于塑性变形较大的冲压工序。采用薄膜理论进行分析时，作如下几条假设：

（1）板料只承受平面内主方向的单位力p_1（$=h\sigma_1$）、p_2（$=h\sigma_2$）；

（2）板料不能承受任何弯矩的作用，即认为$M_1=M_2=0$；

（3）当满足屈服条件$f(p_1, p_2)=0$时，将产生塑性变形，而且不考虑弹性变形，即采用刚塑性体模型；

（4）板料是均匀的，每一点的屈服极限都相等，即$\sigma_s=$const；

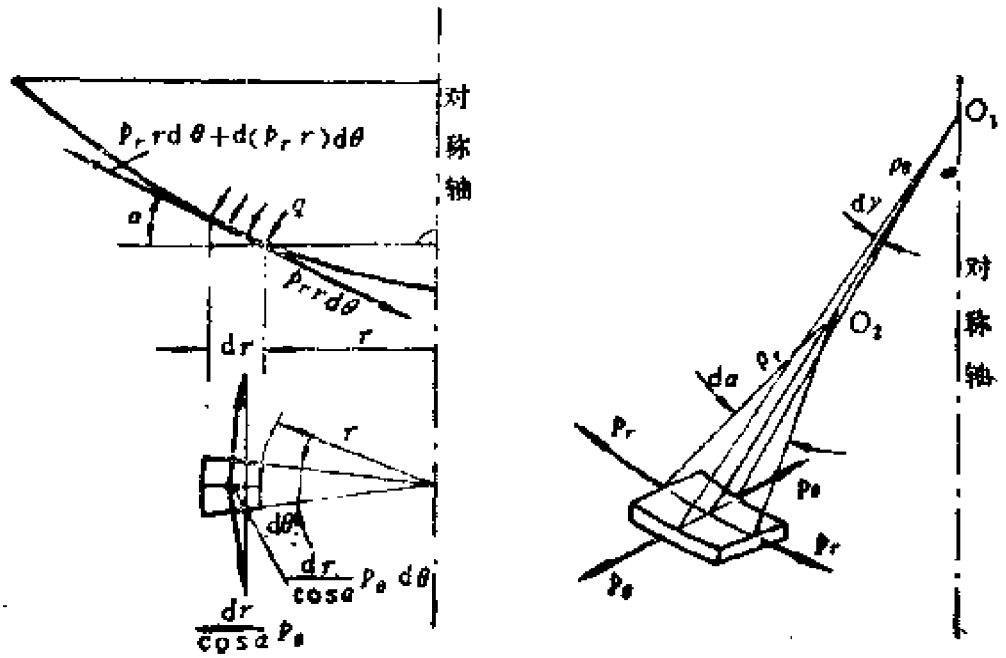
（5）模具和板料之间没有摩擦，模具的压力q垂直作用于板料平面。

由以上假设可见，与其它尺寸相比板料的厚度越小、摩擦力越小、材料越均匀，便越接近于实际情况。

首先分析一下薄膜的平衡问题。取半径为r和$r+\mathrm{d}r$的两个柱面以及通过对称轴互成$\mathrm{d}\theta$角的两个平面所围成的薄膜微元体，在此微元体上作用有周向薄膜力p_θ、径向薄膜力p_r和垂直于薄膜平面的均匀压力q，如图11-1a所示。若外载荷和板料以及支承条件都是轴对称的，则应力场和应变场也将是轴对称的，于是各物理量与θ角无关。

微元体各面上的合力如图11-1a所示，于是微元体平面内的平衡方程为

$$\mathrm{d}(p_r r)\mathrm{d}\theta - \frac{p_\theta \mathrm{d}r}{\cos\alpha}\cos\alpha\mathrm{d}\theta = 0$$



(a) (b)

图11－1 受薄膜力作用的微元体

上式化简后得

$$d(p_r r) - p_\theta dr = 0$$

将$p_r r$微分，并用rdr除上式，得

$$\frac{dp_r}{dr} + \frac{p_r - p_\theta}{r} = 0 \tag{11-1}$$

或

$$\frac{dp_r}{p_r - p_\theta} = -\frac{dr}{r}$$

设ρ_r为薄膜子午向的曲率半径，其中心为O_2，而与此方向垂直的曲率半径为ρ_θ，其中心为O_1且位于对称轴上，如图11-1*b*所示。于是薄膜微元体的边长相应为$\rho_r d\alpha$和$\rho_\theta d\gamma$，$d\alpha$和$d\gamma$分别为O_2和O_1处的曲率半径间的夹角。由薄膜法线方向的平衡条件可得

$$p_r \rho_\theta d\alpha d\gamma + p_\theta \rho_r d\alpha d\gamma = q\rho_\theta \rho_r d\alpha d\gamma$$

在等式两侧消去$d\gamma d\alpha \rho_r \rho_\theta$后，则有

$$\frac{p_\theta}{\rho_\theta} + \frac{p_r}{\rho_r} = q \tag{11-2}$$

由平衡方程式(11-1)和(11-2)以及屈服条件，可以求出单位力p_θ和p_r的分布规律以及外载荷q沿半径r的变化规律。由于外载荷并未出现在平衡方程（11-1)及屈服条件中，因此薄膜力$p_\theta(r)$和$p_r(r)$可以通过求解平衡方程（11-1）获得。

§11－2 用特雷斯卡屈服条件和米泽斯屈服条件求薄膜力

设薄膜力p_r和p_θ满足特雷斯卡屈服条件，如图11-2所示。下面的分析只涉及子午向受拉的情况（$p_r > 0$）。这时特雷斯卡屈服条件可以写成如下形式：

AB边　　$p_\theta = p_s$　$(0 < p_r < p_s)$

BC边　$p_r = p_s$　　$(0 < p_\theta < p_s)$

CD边　$p_r - p_\theta = p_s$　$(0 < p_r < p_s,\ -p_s < p_\theta < 0)$

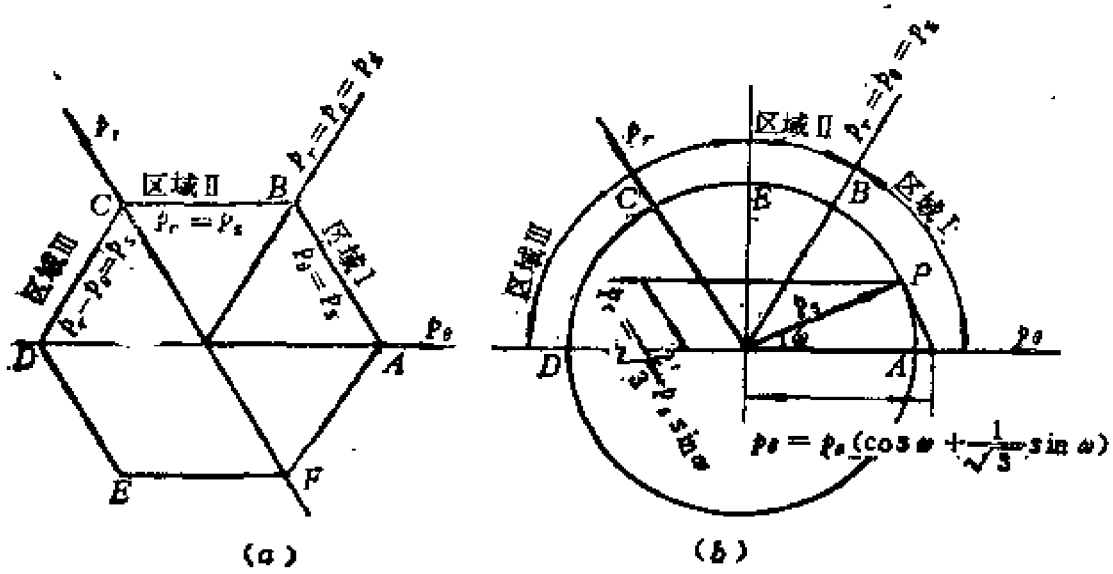


图11－2　屈服条件

以上各式都只适用于一定的受力情况。根据外载荷的不同作用方式，可以区分如下几个应力区域：

区域Ⅰ（AB边）　$p_\theta = p_s$，$0 < p_r < p_s$

为了确定p_r的值，应求解如下方程式：

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}p_r}{p_r - p_\theta} = -\frac{\mathrm{d}r}{r} \\ &p_\theta = p_s \end{aligned}\right\} \qquad (11\text{-}3)$$

将上式中的第二式代入第一式并积分，可得

$$\ln(p_r - p_s) = -\ln r + C \qquad (11\text{-}4)$$

为了确定积分常数C，设在$r = r_0$处$p_r = 0$，即认为$r = r_0$处为薄膜的自由边界。这时有

$$\ln(-p_s) = -\ln r_0 + C \qquad (11\text{-}5)$$

式（11-4）减去式（11-5）可得

$$\ln\frac{p_r-p_1}{-p_1}=\ln\frac{r_0}{r}$$

由上式得

$$p_r=p_1\left(1-\frac{r_0}{r}\right),\ p_\theta=p_1 \tag{11-6}$$

$p_r>0$的条件要求$r>r_0$，因此所获得的应力分布对应于内半径为r_0的圆环，在$r=r_0$处没有外力作用，而在$r>r_0$处作用有单位拉力p_r。这一应力分布画于图11-3上。

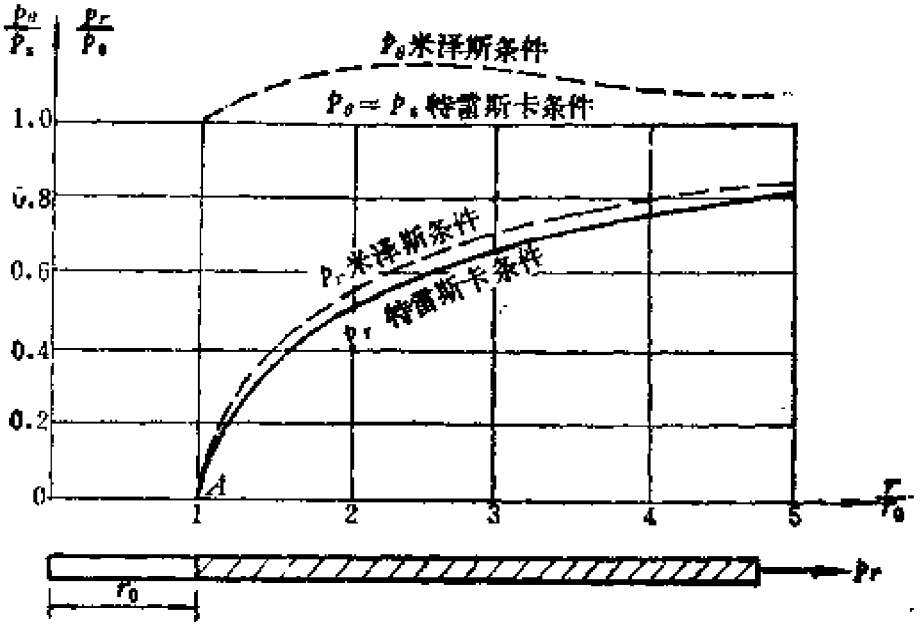


图11-3 带孔圆板的拉伸

区域II（BC边） $p_r-p_\theta=0$，$0<p_\theta<p_1$

由于$p_r=p_1=\text{const}$，故有$-\frac{\mathrm{d}p_r}{\mathrm{d}r}=0$，由平衡方程（11-1）可得

$$p_r=p_\theta=p_1 \tag{11-7}$$

这时的应力状态由图11-2上的B点表示，相当于均匀受力状态，对应于双向受拉伸的无孔薄膜（图11-4）。

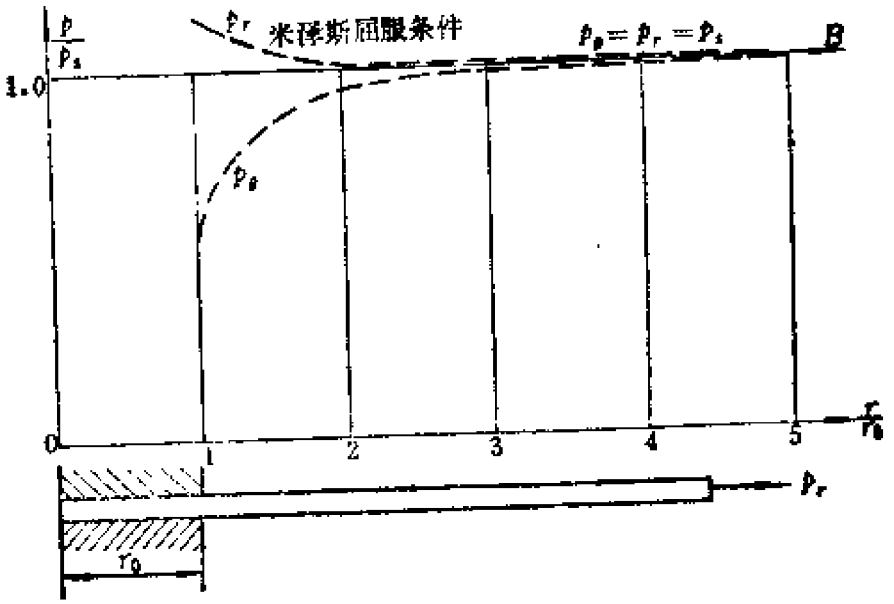


图11－4　无孔受拉板料

区域Ⅲ（CD边）　$-p_s < p_\theta < 0$，$0 < p_r < p_s$

在此情况下，平衡方程和屈服条件为

$$\frac{\mathrm{d}p_r}{p_r - p_\theta} = -\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

$$p_r - p_\theta = p_s$$

将第二式代入第一式并积分，得

$$\frac{p_r}{p_s} = -\ln r + C$$

若令R为薄膜自由边界的半径，则积分常数C可通过在$r = R$处$p_r = 0$的边界条件确定。最后得

$$\left.\begin{aligned} p_r &= p_s \ln\frac{R}{r} \\ p_\theta &= p_s\left(\ln\frac{R}{r} - 1\right) \end{aligned}\right\} \qquad (11\text{-}8)$$

根据条件$0<p_r<p_i$可得$0<\ln\frac{R}{r}<1$，因此有

$$\frac{R}{e}<r<R$$

这一条件说明，由式（11-8）所确定的应力分布，可以在外半径为R的圆环中出现；而圆环的内半径至少应为$\frac{R}{e}$，否则作用于内边缘的p_r将不能使整个圆环按区域Ⅲ的屈服条件进入塑性状态，而只能使内边缘附近的局部区域进入塑性状态。式（11-8）确定的应力分布画于图11-5中。

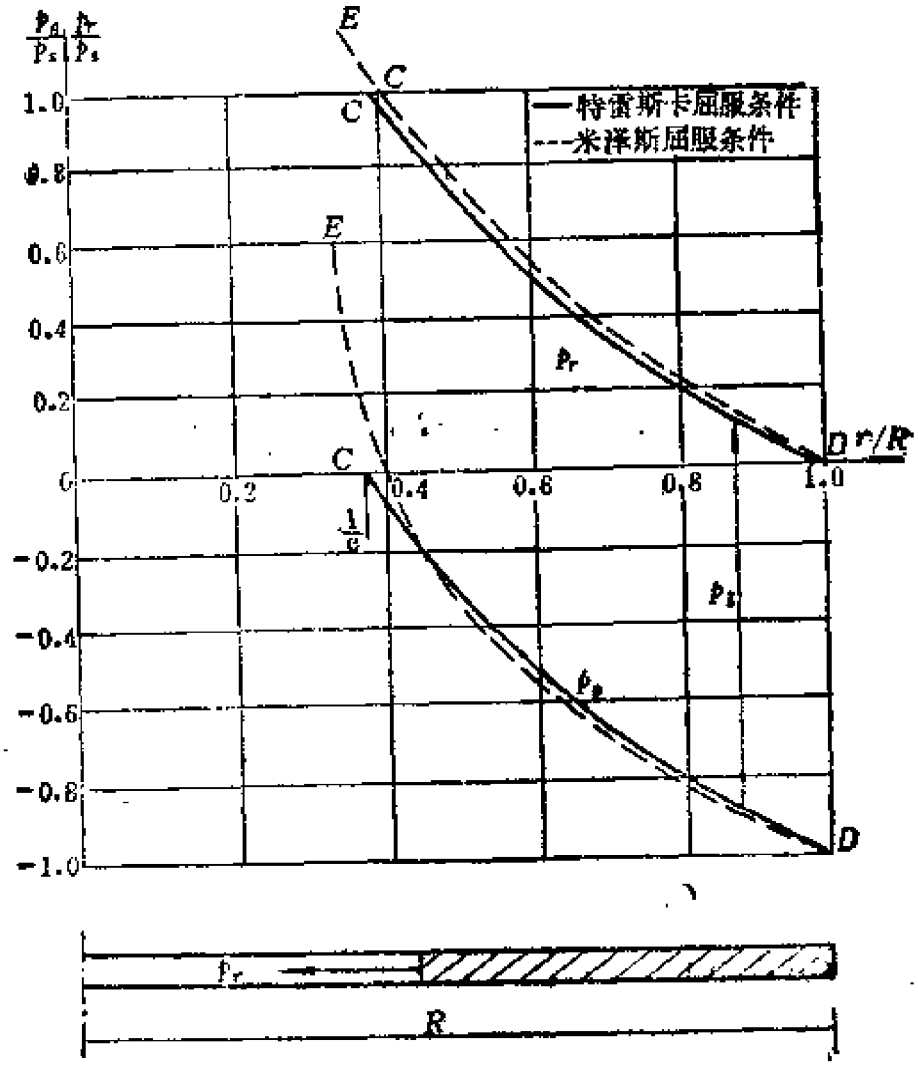


图11-5 深冲

当采用米泽斯屈服条件时，薄膜力应满足如下条件：

$$p_t^2 - p_r p_\theta + p_\theta^2 = p_s^2 \tag{11-9}$$

米泽斯屈服条件在等倾面上是一个圆，由于p_r只能是拉力，所以研究半个圆便可以了。在图11-2b上，P为屈服面上的任意点。从图上可见，P点对应的p_θ和p_r分别为

$$\left.\begin{aligned} p_\theta &= p_s\cos\omega + p_s\sin\omega\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} \\ &= p_s\left(\cos\omega + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\omega\right) \\ p_r &= p_s\sin\omega\frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{2}{\sqrt{3}}p_s\sin\omega \end{aligned}\right\} \tag{11-10}$$

由上式可见，不同的ω对应于不同的应力状态，例如：

$\omega = 0$　　$p_\theta = p_s$，$p_r = 0$

$\omega = \frac{\pi}{3}$　　$p_\theta = p_s$，$p_r = p_s$

$\omega = -\frac{\pi}{2}$　　$p_\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}p_s$，$p_r = \frac{2}{\sqrt{3}}p_s$，$p_\theta = -\frac{1}{2}p_r$

$\omega = \frac{2}{3}\pi$　　$p_\theta = 0$，$p_r = p_s$

$\omega = \pi$　　$p_\theta = -p_s$，$p_r = 0$

将式（11-10）代入式（11-9）后，得

$$p_s^2\left(\cos^2\omega + \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\omega\sin\omega + \frac{1}{3}\sin^2\omega - \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\omega\sin\omega - \frac{2}{3}\sin^2\omega + \frac{4}{3}\sin^2\omega\right) = p_s^2$$

因此参数方程（11-10）满足米泽斯屈服条件。

将式（11-10）代入平衡方程（11-1）得

$$\frac{2\cos\omega d\omega}{\sin\omega-\sqrt{3}\cos\omega}=-\frac{dr}{r} \tag{11-11}$$

由三角函数关系得

$$\left.\begin{aligned}\cos\left(\frac{5}{6}\pi-\omega\right)&=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega+\frac{1}{2}\sin\omega\\ \sin\left(\frac{5}{6}\pi-\omega\right)&=\frac{1}{2}\cos\omega+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega\\ \cos\omega&=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{5}{6}\pi-\omega\right)\\ &\quad+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\omega\right)\end{aligned}\right\} \tag{11-12}$$

于是式（11-11）可写成

$$\frac{\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{5}{6}\pi-\omega\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\omega\right)\right]d\omega}{\cos\left(\frac{5}{6}\pi-\omega\right)}=-\frac{dr}{r}$$

上式经化简后得

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}d\omega+\frac{1}{2}tg\left(\frac{5}{6}\pi-\omega\right)d\omega=-\frac{dr}{r} \tag{11-13}$$

上式积分后得

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\omega+\frac{1}{2}\ln\cos\left(\frac{5}{6}\pi-\omega\right)=-\ln r+\ln C \tag{11-14}$$

根据上式和参数方程（11-10），按问题的边界条件便可确定常数C。例如，若$r=r_0$处$p_r=0$，则有$\omega=0$，

$$\frac{1}{2}\ln\cos\frac{5}{6}\pi=-\ln r_0+\ln C \tag{11-15}$$

由式（11-14）减去式（11-15），可得

$$-\sqrt{3}\omega+\ln\frac{\cos\left(\frac{5}{6}\pi-\omega\right)}{\cos\frac{5}{6}\pi}=2\ln\frac{r_0}{r}$$

由于$-\sqrt{3}\omega=\ln e^{-\sqrt{3}\omega}$，故有

$$\ln\left[e^{-\sqrt{3}\omega}\frac{\cos\left(\frac{5}{6}\pi-\omega\right)}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right]=\ln\left(\frac{r_0}{r}\right)^2$$

上式化简后得

$$e^{-\sqrt{3}\omega}\left[\cos\omega-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\omega\right]=\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \qquad (11\text{-}16)$$

上式显然满足$r=r_0$时$\omega=0$、$p_r=0$的边界条件。

区域Ⅰ对应于图11-2b上的AB弧，代表内边缘自由的圆环受拉伸。其应力状态可由式(11-10)求出，并用虚线画在图11-3上。

区域Ⅱ对应于图11-2b上的BE段，这一段有两种可能出现的情况：

(1) 无孔板料的均匀受拉状态，即$p_\theta=p_r=p_0$，由图上的B点代表；

(2) 内边缘固支的板料，固支处的半径为r_0，而在板料的外边缘受单位拉力p_r作用。p_r和p_θ的分布规律在图11-4上用虚线表示，固支处的应力状态由图11-2b上的E点表示。

区域Ⅲ对应于图11-2b上的DE弧，代表外边缘自由的板料在内边缘受拉。其应力分布情况由图11-5上的虚线表示。

从图上可见，用米泽斯屈服条件和用特雷斯卡屈服条件求出的应力分布规律基本上是一致的。因此，下面将主要利用式(11-6)、(11-7)和(11-8)进行分析。

§11-3 薄膜理论的应用举例

先分析图11-6所示无孔圆形板料在凹形模具上的深拉延。已知板料外边缘的半径为R，凹模的环向半径为r_1。下面求板料作用于圆形凹模上的压力q。

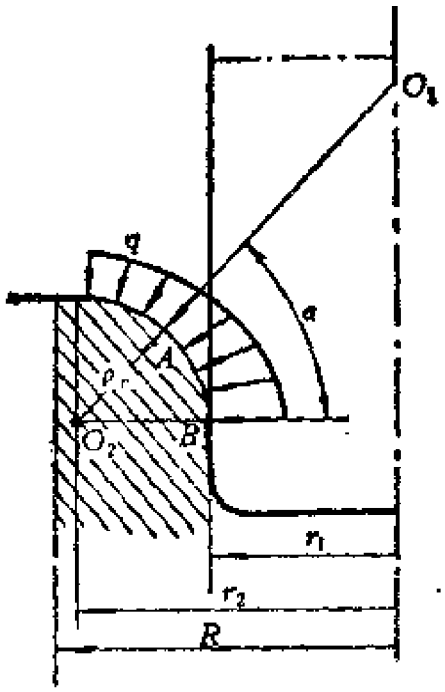


图11－6 板料作用在凹模上的压力

设A为板料上的任意一点，A点与对称轴的距离为$r_A(=r_2-\rho_t\cos\alpha)$。子午向的曲率半径$\rho_t$为常数，而环向的曲率半径$\rho_\theta$由$AO_1$表示，可以求得

$$\rho_\theta=-\left(\frac{r_2}{\cos\alpha}-\rho_t\right)$$

由于ρ_θ的方向与推导公式（11-2）时所取的方向相反，所以取负值。在深拉延过程中，板料的受力方式与图11-5所示的相同，因此由式（11-8）可得A点处的薄膜力为

$$p_r = p_s \ln \frac{R}{r_A}$$

$$p_\theta = p_s \left(\ln \frac{R}{r_A} - 1 \right)$$

式中，r_A与角度α有关。将上式代入平衡方程式（11-2），便可求出法向压力q随角度α的变化规律。现将结果画于图11-6上。压力的最大值在B点，此处有

$$\rho_\theta = r_1$$

$$p_r = p_s \ln \frac{R}{r_1}$$

$$p_\theta = p_s \left(\ln \frac{R}{r_1} - 1 \right)$$

代入式（11-2）便得

$$q_B = p_s \left(\frac{\ln \frac{R}{r_1}}{\rho_r} + \frac{\ln \frac{R}{r_1} - 1}{r_1} \right)$$

已知p_r和p_θ的表达式，便可由平衡条件求出在凸模上作用的轴向力P。例如在图11-7中的A点，子午向的单位力为p_{rA}，而p_{rA}与

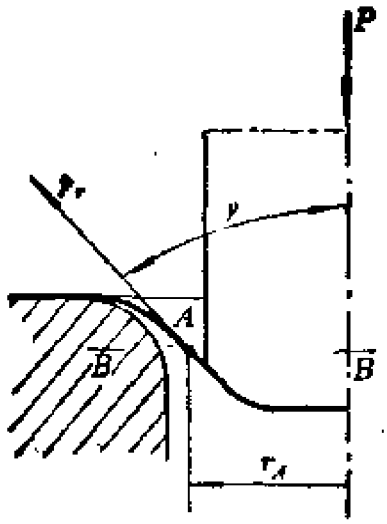


图11-7　深拉延过程

对称轴成γ角，于是由轴向平衡条件可得

$$P = 2\pi r_A p_{rA} \cos\gamma$$

最大的深拉延力为

$$P = 2\pi r_1 p_s \ln\frac{R}{r_1}$$

在许多深拉延过程中，通过流体将压力q作用于板料表面。若压力q足够大，则板料将在模具中被加工成所需要的形状。图11-8所示便是这种情况。下面求板料在周围固定的条件下，压至模具中的A点时所需的液压q。

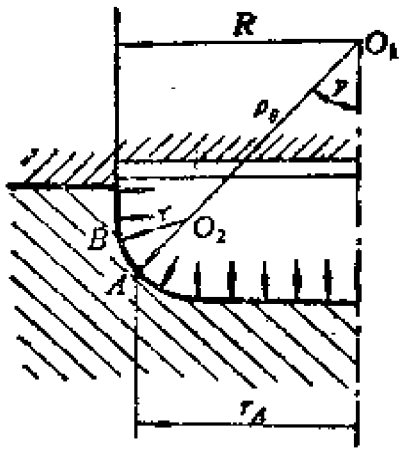


图11－8　板料的液压成型

由图11-8可知，A点处的曲率半径为

$$\rho_{\theta A} = \frac{r_A}{\sin\gamma}, \quad \rho_{rA} = r$$

由前面的讨论可知，此冲压件处于两向均匀受拉的应力状态，即

$$p_\theta = p_r = p_s$$

因此，将板料压至模具中的A点时所需的压力为

$$q_A = p_s\left(\frac{1}{r} + \frac{\sin\gamma}{r_A}\right)$$

板料压至B点时所需的压力最大，此时

$$\rho_{\theta B}=R\ ,\quad \rho_{rB}=r$$

因此有

$$q_B=p_s\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{R}\right)$$

在上面的计算中，完全没有考虑板料的抗弯刚度，而板料实际上多少总有一些抗弯刚度，所以真实的压力值总比上面所计算的值要大一些，板愈厚，大得愈多。

已知单位力p_θ和p_r的分布规律，便可利用塑性流动法则，在壳体上的任意一点求出主应变率之间的比例关系，即

$$\frac{\dot{e}_\theta}{2p_\theta-p_r}=\frac{\dot{e}_r}{2p_r-p_\theta}=\frac{\dot{e}_\theta}{-p_\theta-p_r}=\frac{\dot{e}_1}{2p_1}$$

如在此过程中变形按比例变化，则可以求出壳体中的应变分布规律。

图11-9所示为球盖的成形过程。板料在边缘处固定，通过外力使板料的受力状态为双向拉伸并形成半径为R的球盖。下面求

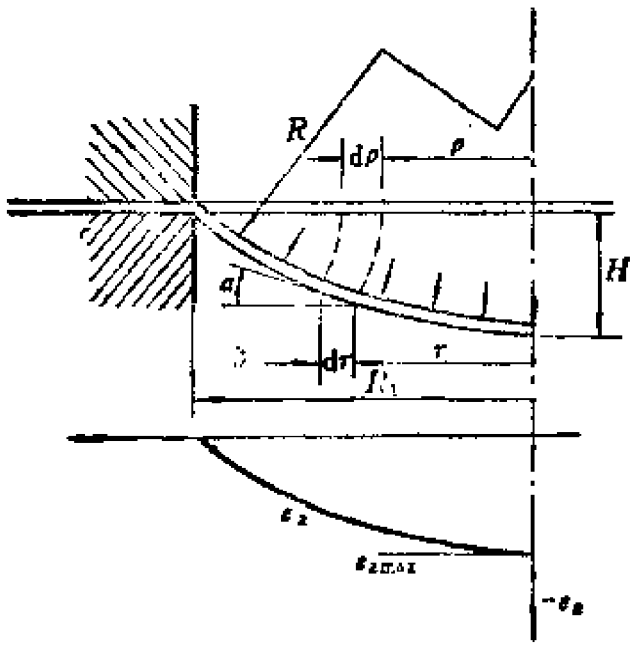


图11－9　球盖的成形

此时应变e_r的表达式。

设一微元在半径为ρ处，其径向初始长度为$\mathrm{d}\rho$，变形后此微元移至r（$>\rho$）处，其长度为$\frac{\mathrm{d}r}{\cos\alpha}$，如图11-9所示。此微元的周向应变为

$$e_\theta = \ln\frac{r}{\rho} \tag{a}$$

而子午向的应变为

$$e_r = \ln\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\rho\cos\alpha} \tag{b}$$

由于板料处于两向均匀受力状态，即$\widetilde{p_\theta} = p_r$，故有$e_\theta = e_r$，即

$$\frac{r}{\rho} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\rho\cos\alpha} \tag{c}$$

对于半径为R的球壳，有如下关系：

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R}$$

将上式代入式（c），可得

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = \frac{R\mathrm{d}r}{r\sqrt{R^2 - r^2}}$$

对上式积分，并考虑$\rho = R_1$时$r = R_1$的边界条件，可得

$$\frac{\rho}{r} = \frac{R + \sqrt{R^2 - R_1^2}}{R + \sqrt{R^2 - r^2}} \tag{d}$$

由于$-e_\theta = \ln\frac{\rho}{r}$，厚度方向的应变$e_t = -2e_\theta$，故有

$$e_t = 2\ln\frac{R + \sqrt{R^2 - R_1^2}}{R + \sqrt{R^2 - r^2}}$$

将e_t沿r方向的变化规律画于图11-9上。从图上可见，在$r = 0$处壳体的厚度减薄最多，此处有

$$e_{z\max}=2\ln\frac{R+\sqrt{R^2-R_1^2}}{2R}$$

上式又可表示为

$$e_{z\max}=2\ln\left(1-\frac{H}{2R}\right) \qquad (e)$$

式中，$H=R-\sqrt{R^2-R_1^2}$ 为球盖的高度。$H/2R$与$e_{z\max}$的关系曲线画于图11-10上。

式（e）是理想均匀壳体薄膜理论的计算结果。实际上，这

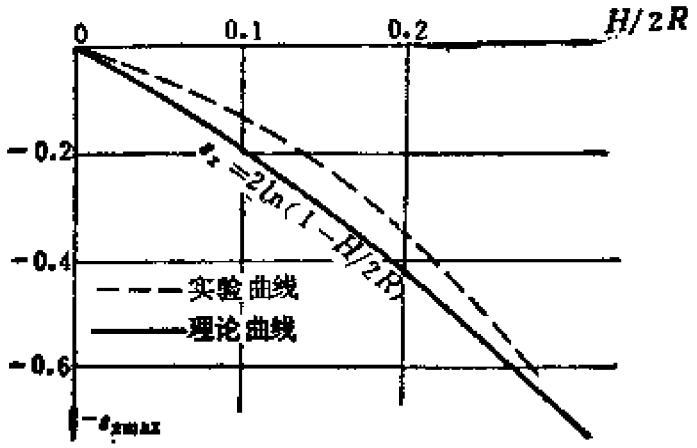


图11－10　球盖成型时的应变e_z

一计算式只是在变形开始时（即$\sigma_s=\text{const}$，$h=\text{const}$）才是正确的。随着变形的继续，板厚和材料的屈服极限都将变得不均匀。在双向均匀拉伸时，$e_1=-e_z$，而$p_s=\sigma_s h$，开始时是递增的，随着板的厚度的减薄，p_s也将减小。若材料有强化效应，即$\sigma_s=ce_1^n$，则函数$p_s=c(-e_z)^n h_0 e^{e_z}$在$-e_z=n$时获最大值。

由于应变e_z是不均匀的，使得p_s沿半径变化，同时使板料在顶点处的减薄量与按公式（e）算得的结果稍有不同。由实验得到的$e_{z\max}-\frac{H}{2R}$曲线用虚线画在图11-10上。从图上看出，板料在

顶点处的实际减薄量比薄膜理论的计算值要小。开始时，材料在球盖的顶点强化，p_r在此处有所增加。而在变形的第二阶段，在顶点处的p_r开始减小，应变e_{max}迅速增加，从而出现了在壳体中间应变局部化的问题。

§11-4 带孔轴对称板料的冲压

由前面的分析可知，带圆孔板料的受力状态由图11-2*b*上的*AB*弧表示，在自由边处$\sigma_r=0$，对应于图中的*A*点。从图11-3上可见，离圆孔越远，应力σ_r越大，而周向应力σ_θ却变化不大，只在σ_r和$\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_r$范围内变化。

为了计算方便，采用线性的特雷斯卡屈服条件。根据受力情况，取

$$p_\theta = p_z = \text{const}$$

将上式代入平衡方程（11-1），有

$$\frac{dp_r}{dr} + \frac{p_r - p_\theta}{r} = 0 \qquad (11\text{-}17)$$

式（11-6）即为上式的解，并将解写在下面：

$$p_r = p_z\left(1 - \frac{r_0}{r}\right),\quad p_\theta = p_z$$

将上式表示的应力分布规律画于图11-11上。图上的虚线为采用米泽斯屈服条件的结果。从图上可见，两种屈服条件的计算结果相差不大。

根据求得的应力表达式，可以算出应变率的分布。由流动法则可知，板料表面法线方向的应变率e_r与周向应变率e_θ之间的比例关系为

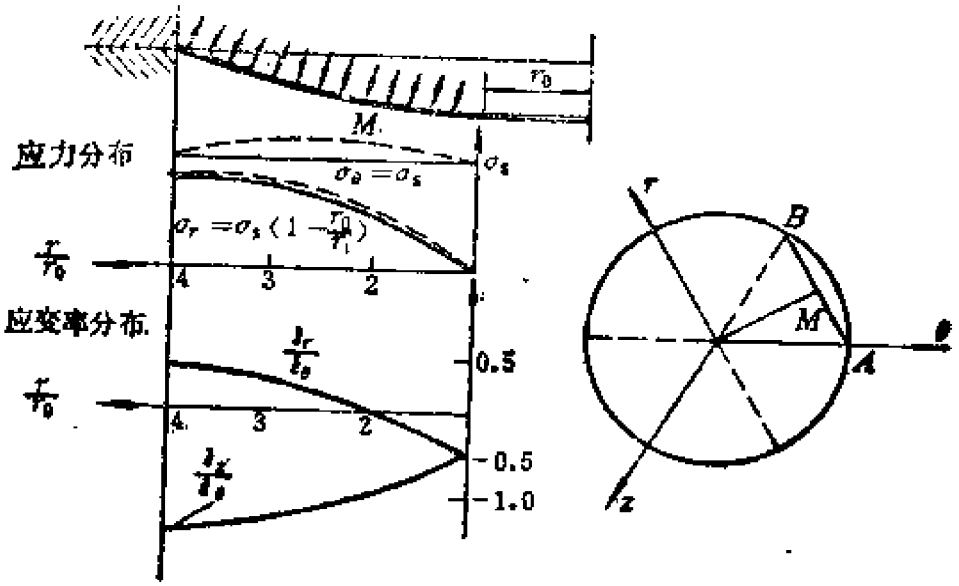


图11－11　带圆孔板料的深拉延

$$\frac{\dot{\varepsilon}_z}{\dot{\varepsilon}_\theta}=\frac{p_z-p_0}{p_\theta-p_0} \tag{11-18}$$

考虑到$p_z=0$，$p_0=-\frac{1}{3}(p_\theta+p_r)$，故上式可写为

$$\frac{\dot{\varepsilon}_z}{\dot{\varepsilon}_\theta}=\frac{-(p_\theta+p_r)}{2p_\theta-p_r} \tag{11-19}$$

将前面求得的p_θ和p_r代入上式后，得

$$\dot{\varepsilon}_z=\frac{-2+\frac{r_0}{r}}{1+\frac{r_0}{r}}\dot{\varepsilon}_\theta=-\frac{2r-r_0}{r+r_0}\dot{\varepsilon}_\theta \tag{11-20}$$

同样可得

$$\dot{\varepsilon}_r=\frac{r-2r_0}{r+r_0}\dot{\varepsilon}_\theta \tag{11-21}$$

将以上各式用曲线表示于图11-11上。

为了简化计算，设应变率的比例关系在变形过程中不变，因而可取$\dot{\varepsilon}_r/\dot{\varepsilon}_\theta = e_r/e_\theta$，于是便可确定开始时距离为$r^0$处的厚度在变形后的变化。设板料在$r^0$处的初始厚度为$h^0$，最终的厚度为$h$，则由公式（11-20）并考虑到$e_r = \ln\frac{h}{h^0}$、$e_\theta = \ln\frac{r}{r^0}$可得

$$\ln\frac{h}{h^0} = -\frac{2r - r_0}{r + r_0}\ln\frac{r}{r^0}$$

由此得

$$h = h^0\left(\frac{r^0}{r}\right)^{\frac{2r-r_0}{r+r_0}}$$

在孔的边缘处，板料的减薄量最大。将$r = r_0$、$r^0 = r_0^0$代入上式后，可得孔边板料厚度的变化为

$$h = h^0\sqrt{\frac{r_0^0}{r_0}} \qquad (11\text{-}22)$$

为了确定孔的初始直径，需要知道在变形过程中子午向长度的变化规律。由于沿半径方向主应变的比值是变化的，因而准确地找出这一变化规律是困难的。作为一种近似的考虑，可以取子午向的长度变化为零。

对于应力状态的分析，也能得到相同的结论。在图11-11上，应力状态由AB段表示。在此线段上，应变状态为

$$e_r = 0,\quad e_\theta = -e_z$$

于是由M点表示。由此可见子午向的应变接近于零。如果已知孔的初始直径，便可确定壳体的最终尺寸。如果已知壳体的最终尺寸，则可确定孔的初始直径。

若将p_θ和p_r的表达式代入式（11-2）后，则有

$$\frac{t\sigma_s\left(1-\frac{r_0}{r}\right)}{\rho_r}+\frac{h\sigma_s}{\rho_\theta}=q$$

或

$$q=\sigma_s h\left(\frac{r-r_0}{r\rho_r}+\frac{1}{\rho_\theta}\right) \qquad (a)$$

上式可以确定凸模作用于板料任意一点上的压力值。式中r_0表示孔的半径，ρ_θ和ρ_r分别表示该点处的周向和径向曲率半径。

图11-12所示为球形凸模在带圆孔的板料上深冲。下面求固支点B处的压力q_B。

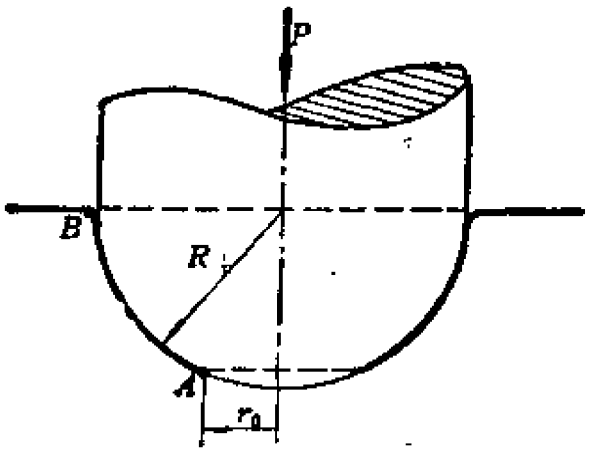


图11－12　用球形凸模深冲

由于凸模是球形的，因而$\rho_\theta=\rho_r=R$。于是由（a）式可得孔边（$r=r_0$）的压力为

$$q_A=\sigma_s h\frac{1}{R}$$

将$r=R$代入式（a）后，便可求得B点处的压力为

$$q_B=\sigma_s h\left(\frac{R-r_0}{R^2}+\frac{1}{R}\right)=\sigma_s h\frac{2R-r_0}{R^2}$$

对于已知形状的板料，可以由平衡条件确定总的深冲力P。

在距壳体对称轴为r处，子午向的力为p_r，而切向角为α（图11-13），由平衡条件可得

$$P = 2\pi r h \sigma_r \sin\alpha$$

将σ_r用$\sigma_r\left(1-\frac{r_0}{r}\right)$代替，则上式为

$$P = 2\pi\sigma_r h(r - r_0)\sin\alpha \qquad (11\text{-}23)$$

例如对于图11-13所示的锥形凸模深冲问题，由上式可以求出初始圆孔半径为r_0^0的板料被压至图示位置时的深冲力P。

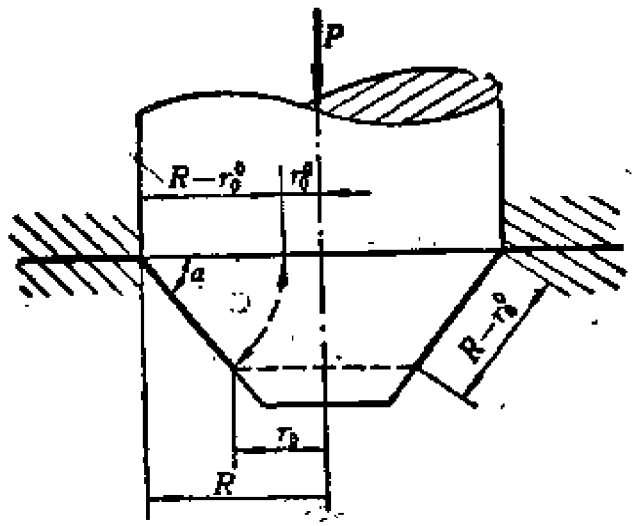


图11－13　用锥形凸模深冲

设在变形过程中子午线的长度不变，便可确定深冲后的圆孔半径r_0，即

$$r_0 = r_0^0 + (R - r_0^0)(1 - \cos\alpha)$$

将上式代入式（11-23）后，便可求得此时的深冲力为

$$P = \pi h \sigma_r (R - r_0^0)\sin 2\alpha \qquad (11\text{-}24)$$

由上式可知，当$\alpha = \pi/4$时，P力最大。

§11-5 壳体不受外力作用部分的形状

设柱形凸模作用于轴对称的板料上（图11-14）。深冲后，壳体不受外力作用部分的形状可由轴向平衡条件求出。在中间不开孔的板料上，子午向的应力等于材料的屈服极限，因此由轴向平衡条件可得深冲力为

$$P = 2\pi r h \sigma_s \sin\alpha = \text{const}$$

式中，α为距轴线r处壳体的切向倾角。由上式可知，在壳体不受力的部分有如下关系式：

$$r\sin\alpha = C \quad 或 \quad \sin\alpha = \frac{C}{r}$$

式中$C = \dfrac{P}{2\pi h\sigma_s}$。对于给定的壳体和载荷，$C$为常数。

若用df表示对应于半径变化量dr的壳体的高度变化量，则有

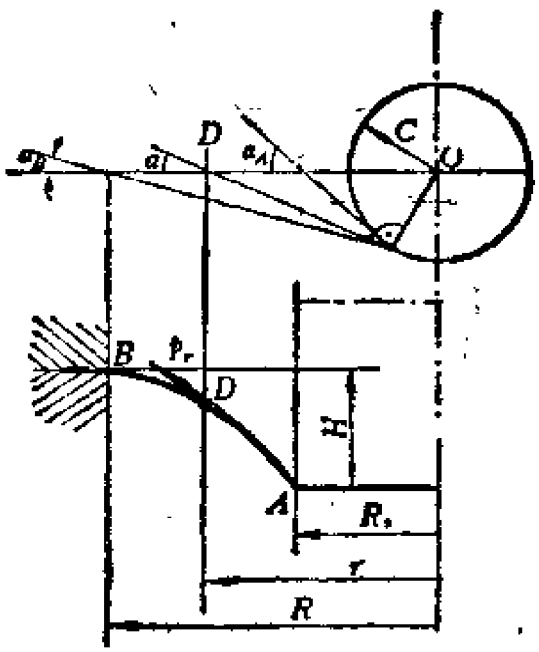


图11－14 壳体自由表面的形状

$$\frac{df}{dr} = \operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$$

将$\sin\alpha$用C/r代替后，上式为

$$df = -\frac{C\,dr}{\sqrt{r^2-C^2}}$$

将上式由凸模半径R_t处到板料固支处R积分，便可求出深冲高度H的值，即

$$H = \int_{R_t}^{R} \frac{C\,dr}{\sqrt{r^2-C^2}} = C\ln\frac{R+\sqrt{R^2-C^2}}{R_t+\sqrt{R_t^2-C^2}} \quad (11\text{-}25)$$

在上式中，若将半径R用r代替，则变为在坐标f-r中壳体的轮廓线方程。

壳体的轮廓线也可通过作图法作出。在图11-14中，将轴心O点作为圆心，以常数C为半径作一圆，过水平线上任意一点D作此圆的切线，则此切线的方向就是D点对应处壳体轮廓线的切线方向。因为从图上可见，这样作出的切线满足$C=\frac{P}{2\pi h\sigma_t}$的要求。此点处的曲率半径$\rho_t$可由式（11-2）求出，即

$$\frac{1}{\rho_\theta}+\frac{1}{\rho_t}=0$$

面曲率半径$\rho_\theta=\frac{r}{\sin\alpha}$，因此由图11-14可知$AB$段即为曲率半径的值。当找到几个切向角$\alpha$以及曲率半径$\rho_t$后，便可近似地画出不受外力作用部分的轮廓形状。

当板料中心开有圆孔时，可由式（11-23）得出

$$\sin\alpha = \frac{C}{r-r_0} \quad (11\text{-}26)$$

式中$C=P/2\pi\sigma_t h$。对于给定的载荷，C为常数。利用与前面类似的方法，可得

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}=\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$$

若将$\sin\alpha$用$C/(r-r_0)$代替，则上式为

$$\mathrm{d}f=\frac{C\mathrm{d}r}{\sqrt{(r-r_0)^2-C^2}} \tag{11-27}$$

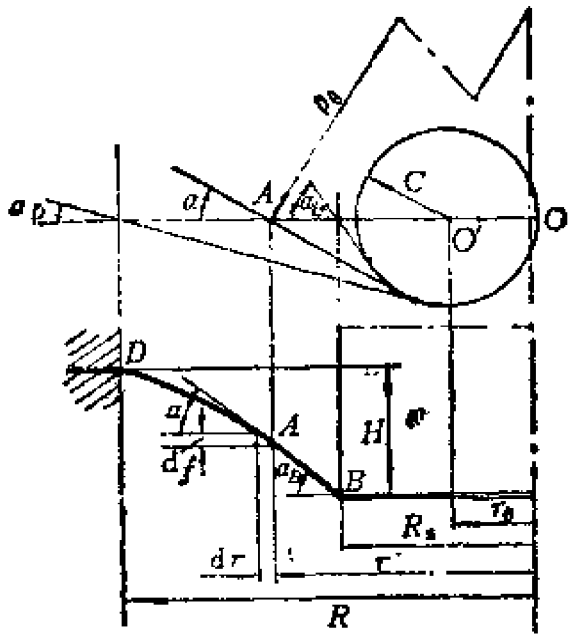


图11-15 确定带孔壳体自由表面形状的图解法

将上式由R_1到R积分，可得深冲高度H的值，即

$$H=C\int_{R_1}^{R}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{(r-r_0)^2-C^2}}$$

$$=C\ln\frac{R-r_0+\sqrt{(R-r_0)^2-C^2}}{R_1-r_0+\sqrt{(R_1-r_0)^2-C^2}} \tag{11-28}$$

壳体轮廓上任意点处的切向角也可用作图法求出。在图11-15上，以距轴心r_0处为圆心O'，以C为半径作一圆，过任意点A作此圆的切线，切线的方向便是A点对应处壳体轮廓线的切

线方向。从图上可见，以上作法满足关系式（11-26）。利用相同方法找出B点，D点处的切线后，便可近似地画出壳体上不受载荷作用处的轮廓。

图11-16所示为锥形凸模冲压带圆孔的板料，凸模的锥角为α，冲压力为P。下面求深冲高度。

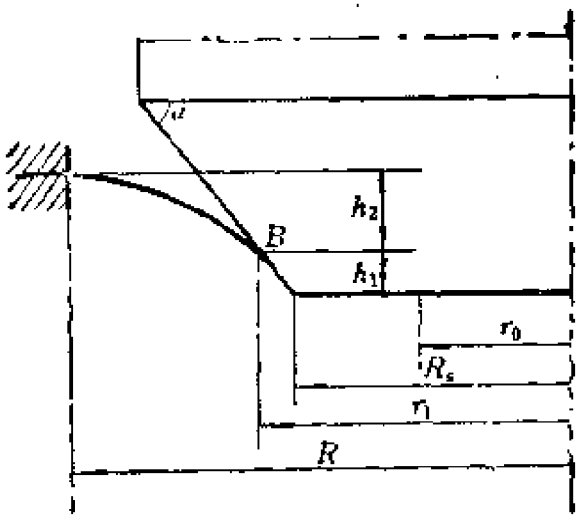


图 11-16 用锥形凸模冲压

板料只是部分地受锥形凸模的压力作用，而其它部分仍是自由的。设B点处的半径为r_1，这时平衡方程为

$$P = 2\pi\sigma_s h \sin\alpha (r_1 - r_0) \tag{11-29}$$

如已知半径r_1，则可确定凸模与板料接触部分的高度h_1，即

$$h_1 = (r_1 - R_0)\operatorname{tg}\alpha$$

而壳体不受载荷作用部分的高度h_2可由式(11-28)确定。其中常数C由式（11-26）确定，即$C = (r_1 - r_0)\sin\alpha$。最后得

$$h_2 = (r_1 - r_0)\sin\alpha \ln \frac{R - r_0 + \sqrt{(R - r_0)^2 + (r_1 - r_0)^2 \sin^2\alpha}}{(r_1 - r_0)\left[1 + \sqrt{1 + \sin^2\alpha}\right]} \tag{11-30}$$

将h_1和h_2相加，便得壳体的深冲高度。

§11-6 板料的拉伸失稳问题

板料在拉伸的过程中，由于出现颈缩等现象，可能会失稳。若材料不需要外界提供能量，仅由于系统内部能量的消耗便能发生塑性变形，则称这种现象为材料在能量意义上的失稳。

设物体在外载荷的作用下内部产生主应力σ_1和σ_2($\sigma_3=0$)，这时应力强度为

$$\sigma_i^2=\sigma_1^2-\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2$$

若物体处于塑性状态，则应满足屈服条件$\sigma_i=\sigma_s$。σ_s为与塑性应变有关的屈服应力。

为了检查物体是否处于稳定状态，可以假设物体有一个应变增量de以及与其对应的$d\sigma_1$、$d\sigma_2$和应力强度增量$d\sigma_i$。此时，由于强化效应而导致屈服应力的变化为$d\sigma_s$，即

$$d\sigma_s=\left(\frac{d\sigma_s}{de}\right)de$$

式中，$\frac{d\sigma_s}{de}$为强化曲线$\sigma_s(e)$的导数，

若将应力强度增量$d\sigma_i$与变形材料因强化效应而引起的屈服应力的增量$d\sigma_s$相比，则可能有三种情况，即

(1) $d\sigma_i<d\sigma_s$，物体处于弹性状态，并停止变形，因而将保持稳定性；

(2) $d\sigma_i>d\sigma_s$，物体可以通过消耗系统内的能量而继续变形；

(3) $d\sigma_i=d\sigma_s$，物体处于由稳定状态向非稳定状态过渡的中间状态。

材料在能量意义上的失稳现象可以在许多塑性成形工程中遇到。

对于初始均匀应力场，应变的分布可能是均匀的，也可能是不均匀的，如图11-17所示。为了确定在所研究的物体中是否会出现一定形式的局部应变，应假设物体的某一部分B产生与边界条件不相矛盾的应变增量$d\varepsilon$。在B部分产生局部应变的结果使应力状态发生变化，从而导致应力强度（或称等效应力）σ_i发生变化。应变增量$d\varepsilon$还将导致材料由于强化而产生相应的屈服应力增量$d\sigma_s = \frac{d\sigma_s}{d\varepsilon} d\varepsilon$。若$d\sigma_i < d\sigma_s$，则在区域B将停止变形。若$d\sigma_i > d\sigma_s$，则在区域B将继续变形，而邻近的区域A还处于弹性状态。若$\sigma_i = \sigma_s$，则由均匀变形阶段向局部变形阶段过渡。

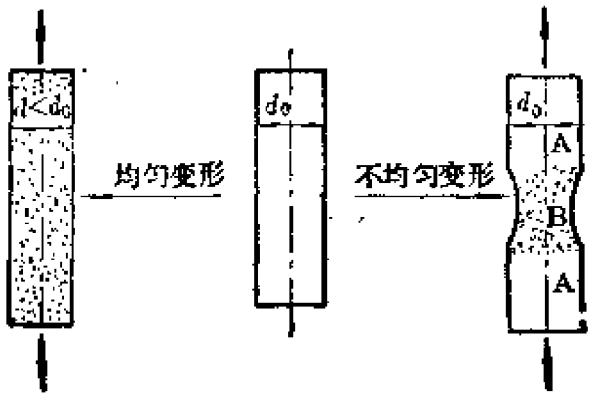


图11－17　拉伸时的局部应变

根据物体的形状和加载方式，局部变形可以有不同的形式。在图11-18上给出了板料失稳的几种局部应变的形式。图11-18a所示是颈缩式的局部变形，这是由于轴向伸长分布不均匀而出现的情况。

假设试件的截面积为A，在轴向受拉时其长度方向产生应变增量$d\varepsilon$，于是轴向应力$\sigma_1\left(=\frac{P}{A}\right)$的增量为

$$d\sigma_1 = d\left(\frac{P}{A}\right) = Pd\left(\frac{1}{A}\right) + \frac{1}{A}dP$$

在失稳时，$dP = 0$，因此有

$$d\sigma_1 = Pd\left(\frac{1}{A}\right)$$

或写为

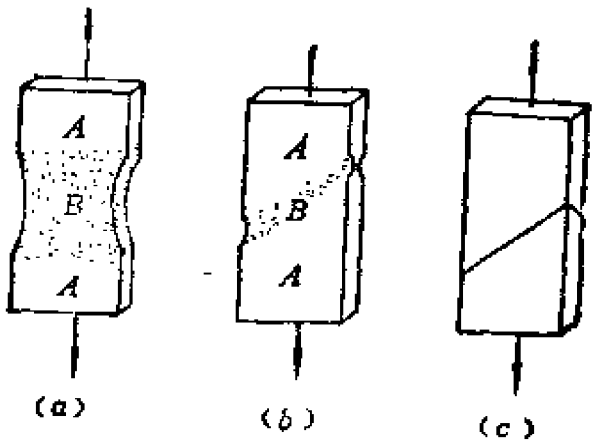


图11－16　拉伸时局部应变的基本形式

$$d\sigma_1 = -\sigma_1 \frac{dA}{A}$$

对于单向拉伸，$-\frac{dA}{A} = de$，$\sigma_1 = \sigma_i$，$d\sigma_1 = d\sigma_i$，因此有

$$d\sigma_i = \sigma_i de \tag{11-31}$$

由于材料强化而引起的屈服应力的增量为

$$d\sigma_s = \frac{d\sigma_s}{de} de \tag{11-32}$$

强化曲线的导数 $\frac{d\sigma_s}{de}$ 与屈服极限 σ_s 之比称为强化指数，并用 U 表示，即

$$U \xrightarrow{\text{def}} \frac{d\sigma_s}{de} \frac{1}{\sigma_s} \tag{11-33}$$

利用式（11-31）和（11-32），并考虑$\sigma_1=\sigma_s$时的局部应变条件$d\sigma_1>d\sigma_s$，便可写出如下不等式：

$$\frac{d\sigma_s}{de}\frac{1}{\sigma_s}<1$$

或

$$U<1$$

图11-18b所示为沟痕形式的局部应变。在此情况下发生局部减薄，局部应变区域B是与试件轴向倾斜某一角度的一个窄条。此时，局部应变区与试件的厚度有关，而与试件的宽度无关。这种局部应变形式也与板材失稳相联系。

在变形区B和区域A的边界线上出现机动场的间断，若在机动间断线的两侧是均匀受拉状态，则这两个区域的边界线的长度在所研究的变形过程中不发生改变。为了确定这条线与拉伸方向的倾角，需要在图11-19上找出M点相对于O点的移动速度。设用$\dot{\varepsilon}_x$表示x方向的应变率，$\dot{\varepsilon}_y$表示横截面的应变率，$\dot{\varepsilon}_y=-\frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_x$。

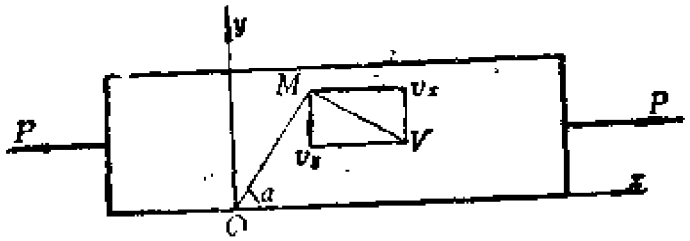


图11－19　拉伸时机动场的间断

在Oxy坐标系中，M点相对于坐标原点O的位移速度v_x和v_y分别为

$$v_x=\dot{\varepsilon}_x x,\quad v_y=\dot{\varepsilon}_y y=-\frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_x y \tag{11-34}$$

为了使OM的长度在变形过程中不发生变化，M点的速度向量$\overrightarrow{V}$必须垂直于线段OM，因此有

$$\frac{y}{x} = -\frac{v_x}{v_y}$$

将式（11-34）代入上式，得

$$\frac{y}{x} = 2\frac{\dot{\varepsilon}\, x}{\dot{\varepsilon}_x y}$$

即

$$\frac{y^2}{x^2} = 2$$

因机动间断线的倾角α必须满足条件$\frac{y}{x} = \mathrm{tg}\alpha$，故由上式可得$\alpha = 54°44'$，沿此方向将产生应变带。

为了确定区域B中可能出现局部应变的位置，要找出由局部应变增量de引起的轴向应力增量。若在区域A的轴向应力$\sigma_1 = \frac{P}{A}$，则在区域B由应变增量引起的应力增量为

$$d\sigma_1 = -\sigma_1 \frac{dA}{A}$$

在此情况下，试件的宽度并不改变，因而截面积的减少量dA只是由于厚度h的变小而引起的，即

$$\frac{dA}{A} = \frac{dh}{h}, \quad \frac{dh}{h} = de_3$$

在单向拉伸的情况下，$\sigma_1 = \sigma_1$，$d\sigma_1 = d\sigma_1$，因此有

$$d\sigma_1 = -\sigma_1 de_3 \tag{11-35}$$

若局部应变继续发展，则由于强化效应而引起的屈服应力增量

$d\sigma_1\left(=\frac{d\sigma_2}{de}de\right)$必须小于由式（11-35）确定的$d\sigma_1$，即

$$\frac{d\sigma_2}{de}de<-\sigma_1 de_3$$

在初始时，$\sigma_1=\sigma_1$，而$\frac{de_3}{de}=\frac{e_3}{e}$，因此有如下关系式：

$$\frac{d\sigma_1}{de}\frac{1}{\sigma_1}<-\frac{e_3}{e}\quad 或\quad U<-\frac{e_3}{e}$$

对于单向拉伸，$-\frac{e_3}{e}=\frac{1}{2}$，故有$U<\frac{1}{2}$。

图11-18c所示为剪切带形式的局部应变。剪切带一般在与拉伸方向成45°角的方向产生。剪切带的厚度与试件的厚度和宽度都无关，而只与材料的塑性性质有关。在此情况下，试件的横截面积A将没有变化，即$dA=0$，而$d\sigma_1=0$，因此产生剪切带的条件是

$$\frac{d\sigma_1}{de}\frac{1}{\sigma_1}<0\quad 或\quad U<0$$

这种形式的局部应变可能在屈服应力随着应变的增加而减小的情况下出现$\left(\frac{d\sigma_1}{de}<0\right)$，并与材料的失稳相联系。

习　题

11-1　图11-20所示为球形冲头将薄板中间压成球形。已知薄板球形部分的水平半径为r_1，冲头半径为R，板厚为h，试求此时的冲压力P。

11-2　图11-21所示为锥形冲头在开孔圆板上冲压。板与冲头之间的摩擦系数为ν，若不考虑摩擦，冲压力为P_0。试求考虑摩擦时的冲压力P。

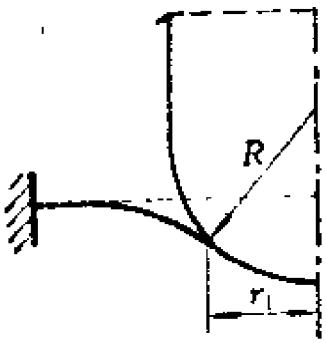


图11-20　球形冲头冲压薄板

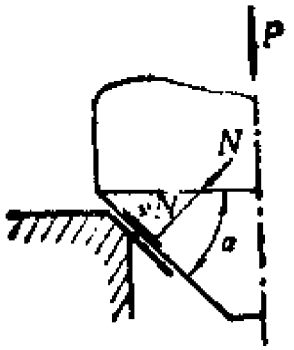


图11-21　锥形冲头冲压开孔翻边

第十二章　厚壁板料的冲压

§12-1　一般概念

在第十一章中，板料的冲压问题是用薄膜理论进行分析的。用这一方法得到的结果只有在板料较薄的情况下才是正确的。当板料较厚时，仍用薄膜理论进行分析将和实际情况相差较大，因为随着板料厚度的增加，它承受弯矩和剪力的能力也将迅速增加，而在薄膜理论中却完全没有考虑这一效应。然而精确地考虑弯矩和剪力对壳体形状和应力分布的影响将遇到许多困难，因此需要进行必要的简化。

设由两个子午面切出一个壳体单元，在此单元体上作用有各种外力，如将分离出来的壳体单元作为一个受外力作用的梁来研究，则将使问题大为简化。在壳体单元的侧面上作用有周向均布载荷。

为了使问题的分析简化，现采用如下假设：

（1）　在子午线方向的最大曲率处出现塑性铰线；

（2）　不考虑剪力对屈服条件的影响，当外力的作用距离比板料的厚度大许多倍时。这一假设不会引起很大的误差；

（3）　除在形成塑性铰线处外，壳体曲率的变化率比中心面的应变率小得多。这可以在互成120°角的坐标中加以说明（图12-1*b*）。图上的*A*点和*B*点分别代表壳体上表面和下表面的应变状态。这个假设说明，线段*AB*的长度比*AB*线中点*C*距坐标原点的距离*OC*小得多。应力状态由圆上的*A′*和*B′*表示。有了*A′*和

B'点，便可求出周向应力σ_θ和子午向应力σ_r沿壳体厚度近似地线性分布。可以认为，作用于壳体截面上的应力σ_θ和σ_r等于壳体中面上的$\bar{\sigma}_\theta$和$\bar{\sigma}_r$。平均应力$\bar{\sigma}_\theta$和$\bar{\sigma}_r$满足平面应力的屈服条件。

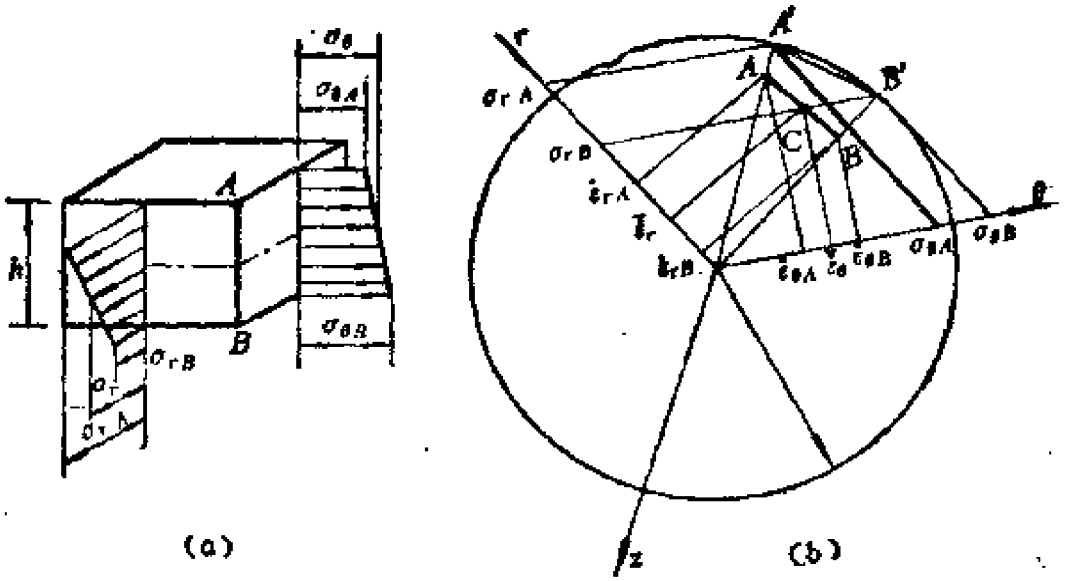


图 2-1 两向受拉、受弯板料的应力圆和应变圆

$\bar{\sigma}_\theta$和$\bar{\sigma}_r$应满足壳体单元的平衡条件。由平衡条件和屈服条件求出的$\bar{\sigma}_r$和$\bar{\sigma}_\theta$应和用薄膜理论求出的表达式完全一样。因此，可按第十一章中介绍的薄膜理论求出$\tilde{\sigma}_\theta$和$\tilde{\sigma}_r$，然后再进行必要的修正。

§12-2 开孔板料的翻边

一、用有圆弧过渡的柱形凸模进行翻边

开孔板的翻边过程如图12-2a所示。为了简化计算，设在开孔板与模具的接触处（B点）形成理性铰，除这一点外，板料在子午线方向不出现曲率。因此可设翻边后的板材在孔边处是与水

平方向成α角的一个锥体。

根据前面的假设，应力$\bar{\sigma}_t$和应力$\bar{\sigma}_\theta$沿壳体子午向的分布规律，应与等厚度的薄膜壳体完全一样。由第十一章的计算结果可知，它们的表达式为

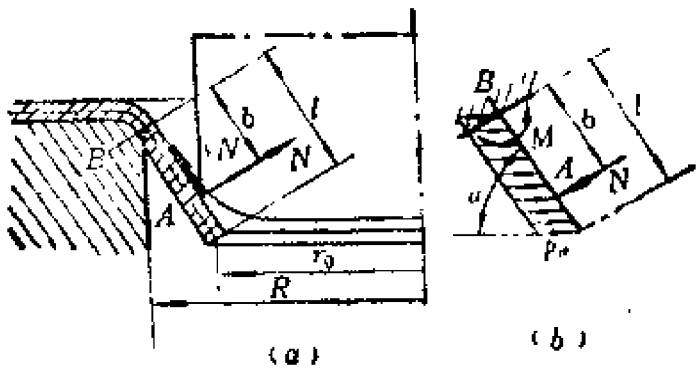


图12-2　开孔板的翻边

$$\left.\begin{aligned}\bar{\sigma}_\theta &= \bar{\sigma}_t \\ \bar{\sigma}_r &= \bar{\sigma}_t\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\end{aligned}\right\} \tag{12-1}$$

式中，r_0为圆孔的半径，r为壳体的半径。

为了确定凸模的轴向力P，分析一下由夹很小角度θ的两个子午面切出的单元体的平衡条件。设凸模的过渡圆弧在A点与板料相碰。这样可将切出的单元体视作固支在B点的悬臂梁（图12-2 b）。在此悬臂梁上作用有如下一些载荷：

(1)　凸模在A点作用于板料表面的压力。在中心角为θ的范围中，这一压力可分解成垂直于表面的分力N和平行于表面的分力νN。在整个圆周上，这两个分力沿轴向的投影之和应等于凸模的总压力。因此有

$$\frac{2\pi}{\theta}(N\cos\alpha+\nu N\sin\alpha)=P$$

或

$$N = -\frac{P}{\cos\alpha + \nu\sin\alpha} \cdot \frac{\theta}{2\pi} \tag{12-2}$$

(2) 在壳体单元侧面的周向拉应力$\bar{\sigma}_\theta$。这相当于在单元体上沿径向作用单位力$p_\theta = \bar{\sigma}_\theta h\theta$。根据式(12-1)，$\bar{\sigma}_\theta$等于单向拉伸时的屈服极限$\sigma_s$，因此$p_\theta$是常数，并且等于

$$p_\theta = h\sigma_s\theta \tag{12-3}$$

(3) 作用于B点，由应力σ_r引起的弯矩M。单元体B截面的厚度为h，宽度为$R\theta$。设在弯曲过程中，单元体的宽度没有变化。根据式(10-45)便可求出弯矩为

$$M = M_p\left[1 - \left(\frac{\bar{\sigma}_r}{\sigma_s}\right)^2\right] \tag{12-4a}$$

由于极限弯矩

$$M_p = \frac{R\theta h^2}{4}\sigma_s$$

因此式(12-4a)又可写为

$$M = \frac{R\theta h^2}{4}\left[1 - \left(\frac{\bar{\sigma}_r}{\sigma_s}\right)^2\right]\sigma_s \tag{12-4b}$$

在B点，$\bar{\sigma}_r$的值为

$$\bar{\sigma}_{r,B} = \sigma_s\left(1 - \frac{r_0}{R}\right)$$

由于$r_0 = R - l\cos\alpha$，l为常数，因此有

$$\frac{\bar{\sigma}_{r,B}}{\sigma_s} = \frac{l\cos\alpha}{R}$$

将此式代入(12-4b)后，得

$$M = \frac{R\theta h^2}{4}\left[1 - \left(\frac{l}{R}\right)^2\cos^2\alpha\right]\sigma_s \tag{12-4c}$$

壳体单元的受力情况如图12-2b所示。由对B点的力矩平衡条件可得

$$M+\frac{1}{2}P_{\theta}l^{2}\sin\alpha=Nb \tag{12-5}$$

式中，b为力N到B点的力臂。在上式中，忽略了周向弯矩M_{θ}的影响。将式（12-2）、（12-3）及（12-4c）代入式（12-5）后，则得

$$\frac{R\theta h^{2}}{4}\sigma_{s}\left[1-\left(\frac{l}{R}\right)^{2}\cos^{2}\alpha\right]+\frac{1}{2}h\sigma_{s}\theta l^{2}\sin\alpha=\frac{Pb}{\cos\alpha+\nu\sin\alpha}\cdot\frac{\theta}{2\pi}$$

由此式可得与力臂l、α角有关的压力P的表达式：

$$P=2\pi Rh\sigma_{s}(\cos\alpha+\nu\sin\alpha)\left[\frac{h}{4b}\left(1-\frac{l^{2}}{R^{2}}\cos^{2}\alpha\right)+\frac{l^{2}}{2Rb}\sin\alpha\right] \tag{12-6}$$

以上的分析是在假设B点的弯矩为最大弯矩的情况下进行的，这给所分析的问题带来了尺寸上和加载方式上的某些限制。例如当凸模与板材的接触点距孔口有一定距离时，则在此接触点处可能出现第二个塑性铰，此时的翻边情况如图12-3所示。

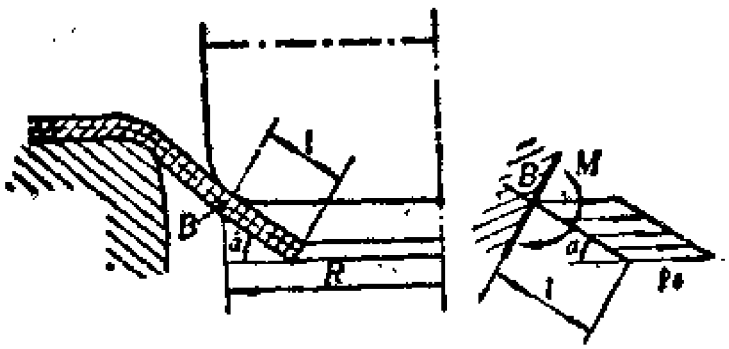


图12-3　出现第二个塑性铰的翻边情况

对于图12-3所示的情况，由于在开孔边界至凸模接触点之间，除有周向拉应力作用外，没有任何其它力作用，因此对B点的力矩平衡条件可简化为如下形式：

$$\frac{R\theta h^2}{4}\sigma_s\left[1-\left(\frac{l}{R}\right)^2\cos^2\alpha\right]-\frac{1}{2}h\sigma_s\theta l^2\sin\alpha=0 \tag{12-7}$$

如果长度l与半径R相比很小，则在上式中可将$(l/R)^2$项忽略，这时可得

$$\frac{Rh}{4}\approx\frac{1}{2}l^2\sin\alpha$$

由此可得锥体的倾角为

$$\sin\alpha\approx\frac{Rh}{2l^2}$$

由上式可见，随着长度l的减小，α角急剧增加。当$\alpha=\frac{\pi}{2}$时，$\sin\frac{\pi}{2}=1$，这时有

$$l=\sqrt{\frac{Rh}{2}}$$

下面再来分析另一种极端情况。设l与R相比差不了多少，而圆孔半径r_0却比R小得多。在此情况下，圆孔附近的板料接近于平面，如图12-4所示。

由于板料的刚性，作用于单元体上的周向应力的合力T与凸模表面有一距离a。距离a可以由对B点的力矩平衡条件得到。为了简化计算，认为翻边基本上是水平的，即$\cos\alpha\approx1$。于是有

$$\frac{R\theta h^2}{4}\sigma_s\left[1-\left(\frac{l}{R}\right)^2\right]-\sigma_s\theta hla=0$$

又$l\approx R-r_0$，故上式可化简为

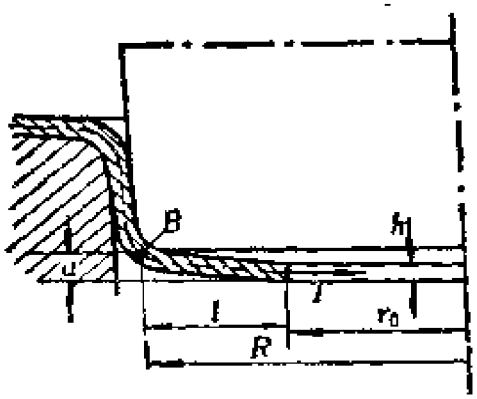


图12-4　圆孔附近的板料接近于平面的情况

$$\frac{a}{h}=\frac{1}{4}\left(\frac{R}{l}-\frac{l}{R}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{r_0(2R-r_0)}{R(R-r_0)} \tag{12-8}$$

现将$\frac{a}{h}-\frac{r_0}{R}$曲线画于图12-5上。从图上可见，当圆孔半径$r_0$比$0.7R$小时，距离$a$比板的厚度$h$要小。

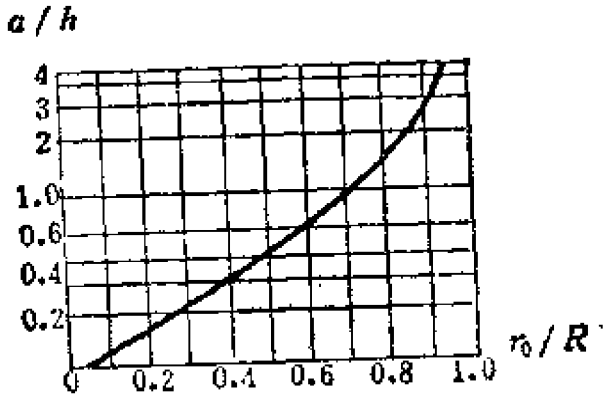


图12-5　$a/h-r_0/R$曲线

为了避免板料离开凸模表面，可以采用有弹簧压板的装置（图12-6）。设压板作用于翻边板料上的力为P_c。若P_c距B点的力臂为b，而板料和凸模间的距离a接近零，则单元体对B点的力矩平衡方程式为

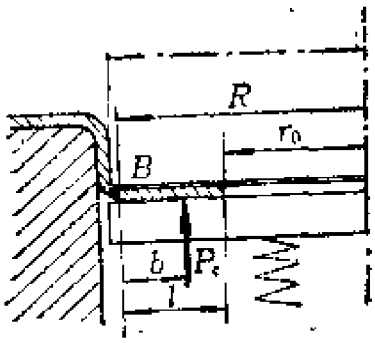


图12-6 有反弹压板的深冲

$$\frac{R\theta h^2}{4}\left[1-\left(\frac{l}{R}\right)^2\right]\sigma_s - P_c \cdot \frac{\theta}{2\pi} b = 0$$

由此得

$$P_c = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{Rh^2}{b}\left[1-\left(\frac{l}{R}\right)^2\right]\sigma_s$$

如果给出的条件使距离b不超过板厚的三倍（$b \leqslant 3h$），则由上式可得

$$P_c \geqslant \frac{\pi}{6} Rh\left[1-\left(\frac{l}{R}\right)^2\right]\sigma_s$$

二、用锥形凸模进行翻边

按照前面给出的方法，可以分析用倾角为γ的锥形凸模进行翻边的问题（图12-7）。锥形凸模的压力作用于圆孔的边缘上。设最大弯矩产生在凹模边缘的B点处，并设翻边接近于锥形，其倾角α逐步增大至γ。

单元体对于B点的力矩平衡方程为

$$M + \frac{p_s l^2}{2}\sin\alpha = Tl\cos(\gamma-\rho-\alpha)$$

式中，T为常数，是锥形凸模作用在壳体上的外力；T力与凸模表面的法线成一摩擦角ρ，因而与翻边表面的法线成一$\gamma-\rho-\alpha$角

（图12-7）。由前面的分析可知：

$$M = \frac{R\theta h^2}{4}\sigma_s\left[1-\left(\frac{l}{R}\right)^2\cos^2\alpha\right]$$

$$p_\theta = h\sigma_s\theta$$

$$P = \frac{2\pi}{\theta}T\cos(\gamma-\rho)$$

将以上各式代入平衡方程后可得

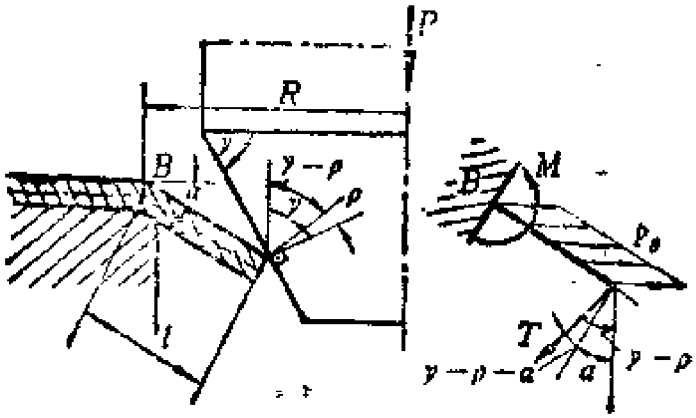


图12-7 用锥形凸模进行翻边

$$P = 2\pi Rh\sigma_s\frac{\cos(\gamma-\rho)}{\cos(\gamma-\rho-\alpha)}\left\{\frac{h}{4l}\left[1-\left(\frac{l}{R}\right)^2\cos^2\alpha\right]+\frac{l}{2R}\sin\alpha\right\} \quad (12\text{-}9)$$

上式表示凸模压力与翻边倾角α之间的关系。长度l可以近似地认为是常数。如l与R相比很小，则在上式中可将$(l/R)^2$一项略去，这时上式便可简化为

$$P = 2\pi Rh\sigma_s\frac{\cos(\gamma-\rho)}{\cos(\gamma-\rho-\alpha)}\left(\frac{h}{4l}+\frac{l}{2R}\sin\alpha\right) \quad (12\text{-}10)$$

当α角等于γ角时，则有

$$P = 2\pi R h \sigma_s (\cos\gamma + \nu \sin\gamma)\left(\frac{h}{4l} + \frac{l}{2R}\sin\gamma\right) \quad (12\text{-}11)$$

式中，$\nu = \sin\rho/\cos\rho$。

三、用曲面凸模翻边

凸模的曲面可以这样选择：使得凸模与板料的接触点总是在圆孔的边缘上，而且在接触点，凸模的表面总是与板料相切。设翻边的长度是常数，此时可用作图法近似地求出凸模的形状（图12-8）。由B点引出半径BC'、BD'和BE'，用它们确定C、D和E点处凸模表面的切线方向。所求的凸模形状便是这些切线方向的连线。

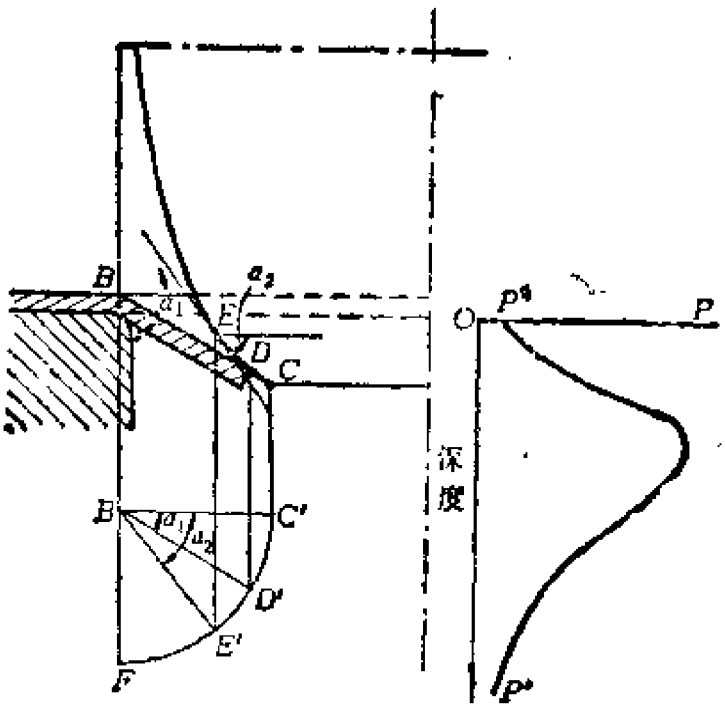


图12－8　用曲面凸模翻边

采用这种形状的凸模翻边时所需的冲压力P，可由式(12-6)确定。计算时取$b = l$。设l近似为常数，冲压力便只与倾角α有关。

初始时$\alpha=0$，冲压力为

$$P^0=2\pi R\cdot\frac{h^2}{4l}\sigma_s$$

当凸模下压时，冲压力随角度α的增加而增加，在达到最大值后开始下降，并在$\alpha=\frac{\pi}{2}$时为

$$P'=2\pi Rh\sigma_s\nu\left(\frac{h}{4l}+\frac{l}{2R}\right)$$

此时翻边垂直于板料平面。

P随α变化的曲线画于图12-9中。其间忽略了材料的强化效应，并取$\sigma_s h=\text{const}$。如果需要考虑材料的强化效应，作为一种

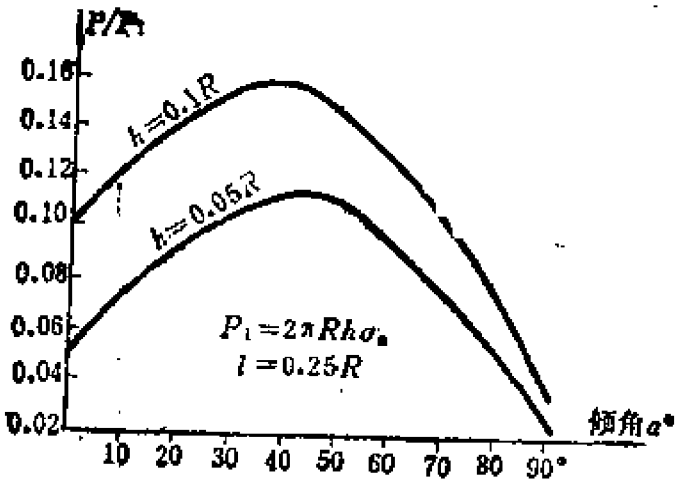


图12-9 用曲面凸模翻边时冲压力随倾角的变化规律

近似，可在公式（12-6）中使用屈服极限的平均值，即取$\bar{\sigma}_s=\frac{1}{2}(\sigma_s^0+\sigma_s')$。式中$\sigma_s^0$为未变形时材料的屈服极限，而$\sigma_s'$为变形最大时材料的屈服极限。$\sigma_s'$由强化曲线确定。

§12-3 缩口问题

如果改变翻边过程中所有力、力矩、应力和应变的符号，则将出现与翻边相反的过程，即缩口问题。在这一过程中，板料受两向压缩应力作用，使壳体的直径减小。因此缩口过程中的应力分布规律为

$$\left.\begin{aligned}\bar{\sigma}_\theta &= -\sigma_\theta \\ \bar{\sigma}_r &= -\sigma_\theta\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\end{aligned}\right\} \tag{12-12}$$

图12-10给出了这一过程的受力情况。圆筒的端部在锥形凹模的作用下变成锥形体，若圆筒的长度l足够小，则塑性铰将在端部B点处出现。为了求出凹模的压力值，应写出对于B点的力矩平衡方程，即

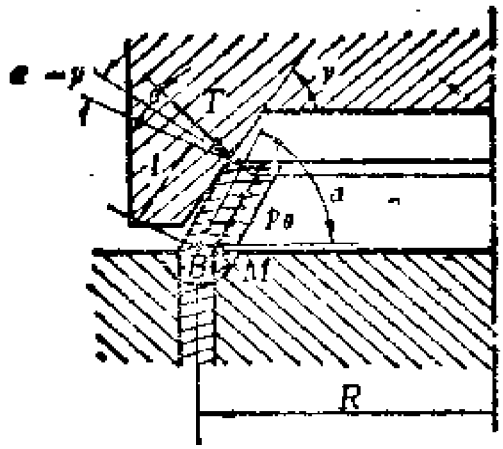


图12-10 用锥形凹模对厚壁筒缩口

$$M+\frac{p_\theta l^2}{2}\sin\alpha = Tl\cos(\alpha-\gamma+\rho)$$

将上节中的M、p_θ、T的表达式代入上式，便可得到凹模上的压

力为

$$P=2\pi Rh\sigma_s\frac{\cos(\gamma-\rho)}{\cos(\alpha-\gamma+\rho)}\left[\frac{h}{4l}-\frac{hl}{4R^2}\cos^2\alpha+\frac{l}{2R}\sin\alpha\right] \tag{12-13}$$

在缩口的初始阶段，即当$\alpha=90°$时，压力为

$$P^0=2\pi Rh\sigma_s\operatorname{ctg}(\gamma-\rho)\left[\frac{h}{4l}+\frac{l}{2R}\right] \tag{12-14}$$

以上的分析是在假设塑性铰出现在圆筒固支处的前提下进行的。这一假设只有在距圆筒上端越远弯矩越大的情况下才是正确的。壳体单元在距固支点为x处的截面上，由集中力T和周向压力p_θ引起的弯矩为（图12-11）

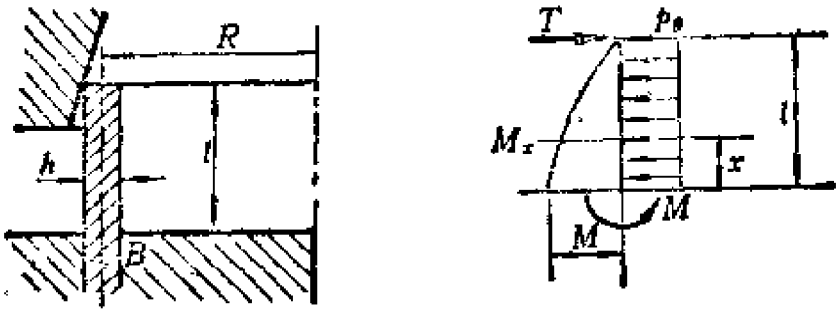


图12-11　壳体单元上的载荷

$$M_x=-p_\theta\cdot\frac{(l-x)^2}{2}+T(l-x)$$

上式描述的是变形初始阶段，即当$\alpha=90°$时的情况。集中力T必须满足如下平衡方程：

$$M_p=-p_\theta\cdot\frac{l^2}{2}+Tl$$

式中，$M_p=R\theta h^2\sigma_s/4$，$p_\theta=\sigma_s\theta h$。由以上两个方程可以消去$T$，并获得弯矩$M_x$的表达式，即

$$M_x = M_B \frac{l-x}{l} + \frac{1}{2} p_0 x(l-x) \qquad (12\text{-}15)$$

弯矩M_x必须随x的增加而减小，因此在B点出现塑性铰的条件是弯矩的导数为零，即

$$\left(\frac{\mathrm{d}M_x}{\mathrm{d}x}\right)_{x=0} = 0$$

由上式和式（12-15）可得

$$l \leqslant \sqrt{\frac{\bar{h}R}{2}} \qquad (12\text{-}16)$$

上式给出了式（12-13）的正确使用范围。当圆筒的长度l比$\sqrt{\frac{\bar{h}R}{2}}$大时，塑性铰将在固支端的上部出现。

§12-4 深拉延问题

厚壁容器的深拉延与薄壁容器的深拉延所采用的方法是不一样的。在具有足够厚度的板料上进行深拉延，一般都采用平压头，同时在设计凹模时，要尽量使板料的弯曲不要太大。厚壁容器深拉延经常采用图12-12所示的凹模轮廓线。此轮廓线使得变形容器的斜边与水平线之间的夹角α逐渐增加，最后达到所需要的形状。

在深拉延的过程中，压力P的确定和研究翻边问题时所采用的方法是一样的。这里，假设边缘是锥形的，在B点子午向发生弯曲（图12-12）。取平均应力$\bar{\sigma}_\theta$和$\bar{\sigma}_r$，由薄膜理论可知，在此情况下应力的表达式为

$$\left.\begin{aligned} \bar{\sigma}_\theta &= \sigma_s\left(\ln\frac{R}{r} - 1\right) \\ \bar{\sigma}_r &= \sigma_s \ln\frac{R}{r} \end{aligned}\right\} \qquad (12\text{-}17)$$

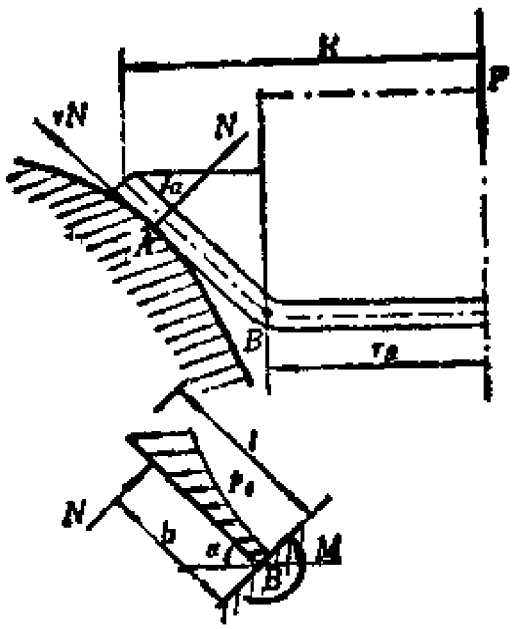


图12-12　深拉延时的外力示意图

式中，R为锥体的外半径。由上式可知，平均周向应力$\bar{\sigma}_t$在深拉延过程中与半径r有关。为了分析周向应力对深拉延的影响，将壳体上的单元体作为梁来研究，并取p_t沿r方向按如下规律变化：

$$p_t = -h\theta\sigma_t\left(\ln\frac{R}{r}-1\right) \qquad (12\text{-}18)$$

图12-12中B点处的弯矩可由式(12-4b)确定，即将子午向的平均应力$\bar{\sigma}_t=\sigma_t\ln\frac{R}{r_B}$代入此式，从而求出

$$M=\frac{r_B\theta h^2}{4}\sigma_t\left[1-\left(\ln\frac{R}{r_B}\right)^2\right] \qquad (12\text{-}19)$$

式中，r_B为B点到对称轴的距离。由于周向弯矩对单元体的平衡影响较小，故可以将它忽略。

凹模作用于单元体上的压力N可以通过总的轴向力P来表

示，即

$$N=\frac{P}{\cos\alpha+\nu\sin\alpha}\cdot\frac{\theta}{2\pi} \tag{12-20}$$

由对B点的力矩平衡条件可得

$$M+\int_{r_B}^{R}\frac{p_\theta \mathrm{d}r}{\cos\alpha}(r-r_B)\operatorname{tg}\alpha-Nb=0$$

式中，b为力N距B点的力臂。将式（12-18）、（12-19）和（12-20）代入上式，可得

$$P=\frac{\pi}{2}r_B h\sigma_s(\cos\alpha+\nu\sin\alpha)\left\{\frac{h}{r_B}\left[1-\left(\ln\frac{R}{r_B}\right)^2\right]+\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\times\left(\frac{R^2}{r_B^2}-1-2\ln\frac{R}{r_B}\right)\right\}\frac{r_B}{b} \tag{12-21}$$

为了确定锥体外边缘半径R与倾角α之间的关系式，可假设锥体表面积在变形过程中是常数，这时有

$$R_0^2-r_B^2=\frac{R^2-r_B^2}{\cos\alpha} \tag{12-22}$$

式中，R_0为圆板的初始半径。由式（12-22）可得

$$\frac{R}{r_B}=\sqrt{\left[\left(\frac{R_0}{r_B}\right)^2-1\right]\cos\alpha+1}$$

将此式代入式（12-21）后，便可得到以角α和力臂b为变量的压力P的表达式。

若支承点离凸模边缘较远，则可能在图12-13所示的B点处出现附加弯曲。若板料位于凹模外部的宽度l与厚度h相比并不大，则外部的倾角比中间部分的倾角要小。当自由边缘的长度与半径r_B相比不大时，可近似地求得α角。这时可不考虑子午向的应力对B点弯矩值的影响，而取$\ln R/r_B=1$，同时也不考虑这些应力对周向应力的影响，取$\bar{\sigma}_\theta=-\sigma_s=\text{const}$。于是中心角为$\theta$的壳体单元对$B$点的力矩平衡条件为

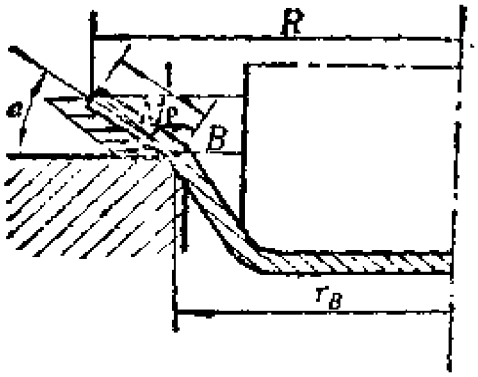


图12-13　拉延时在板料边缘出现弯曲

$$\frac{\sigma_s h\theta l^2 \sin\alpha}{2} = \frac{r_B\theta h^2}{4}\sigma_s$$

由上式可得

$$\sin\alpha = \frac{r_B h}{2l^2} \qquad (12\text{-}23)$$

上式与圆孔翻边时的公式的差别是将半径R换成r_B。

在凹模与板料的接触处产生附加弯曲，会使凸模的压力P增加。为了获得最佳的深拉延条件，应选用图12-14所示的凹模形状，使凹模永远在板料的边缘处与板料接触。这样的凹模将使压力P的值最小，并将减小形成折叠的危险。

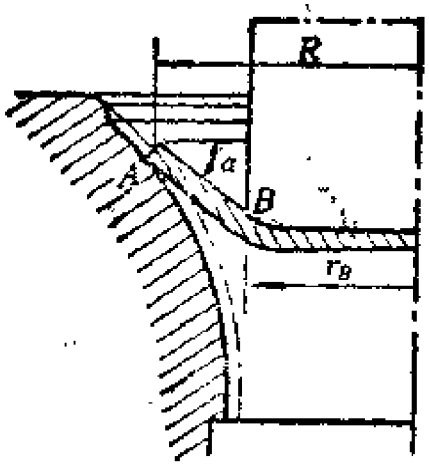


图12-14　与板料边缘接触的凹模的形状

满足上述条件的凹模的轮廓线，可以近似地用作图法画出。对于给定的半径R，可利用下式算出切线的倾角：

$$\cos\alpha = \frac{R^2 - r_B^2}{R_0^2 - r_B^2}$$

有了一系列倾角后，便可描绘出凹模的轮廓线（图12-14中的点划线）。考虑到板料的厚度为h，故在以上描出的轮廓线外$h/2$处为最终的凹模轮廓线。

对于图12-14所示的情况，凸模的压力P可用式（12-21）确定。式中，力臂b应等于锥壳边的长度l，即

$$b = l = \frac{R - r_B}{\cos\alpha}$$

最后得

$$P = 2\pi r_B h\sigma_s(\cos\alpha + \nu\sin\alpha)\left(A\frac{h}{r_B}\cos\alpha + B\operatorname{tg}\alpha\right) \tag{12-24}$$

式中的系数A、B由下式确定：

$$A = \frac{1 - \left(\ln\frac{R}{r_B}\right)^2}{4\left(\frac{R}{r_B} - 1\right)}, \quad B = \frac{1}{4}\left(\frac{R}{r_B} + 1 - \frac{2\ln\frac{R}{r_B}}{\frac{R}{r_B} - 1}\right)$$

§12-5 扩孔问题

在扩孔过程中，由于周向应力是拉应力而径向应力是压应力，因此它是深拉延问题的相反过程。这个过程是要将柱壳的直径扩大，变形是在周向拉应力$\bar{\sigma}_\theta$以及径向压应力$\bar{\sigma}_r$的作用下产生的。这些应力的分布只与深拉延问题差一个符号，即

$$\left.\begin{aligned}\bar{\sigma}_\theta &= \sigma_s\left(1-\ln\frac{R}{r}\right)\\ \bar{\sigma}_r &= -\sigma_s\ln\frac{R}{r}\end{aligned}\right\} \tag{12-25}$$

式中，R为壳体的外半径

图12-15给出了扩孔的例子，锥形凸模作用于圆筒的端部，使圆筒按锥形扩大。在初始阶段，扩孔凸模的压力与具有相同倾角的缩孔凹模的压力应是一样的。这个压力值可以利用公式(12-14)确定。若l满足不等式（12-16），则计算结果是正确的。

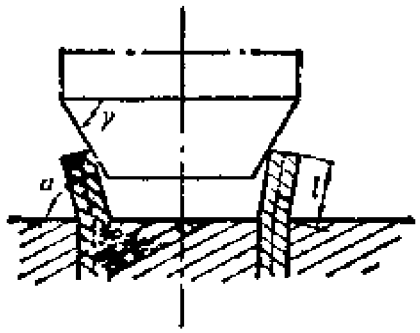


图12-15　用锥形凸模对圆筒扩孔

§12-6　复合成形问题

在厚壁壳体成形过程中，可以出现几个塑性区，各塑性区的应力分布规律，将分别对应于某一简单成型过程的应力分布规律。用锥形凸模和锥形凹模将环形板材加工成锥形构件，便是复合成形的例子，如图12-16所示。

如果圆环的宽度比它的半径小得多，则在板料足够厚的情况下，板料的形状在整个加工过程中都接近于锥形，并且在边缘处与凸模和凹模相接触。随着凸模的下压，倾角α将逐渐增大，并

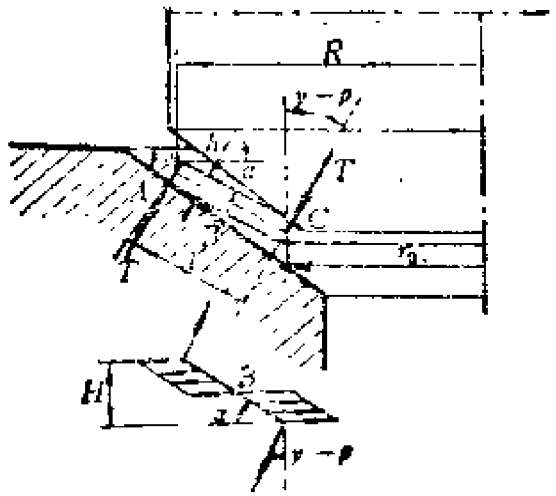


图12－14　将平环板深拉延成筒形

在最后达到γ值，即板料的倾角与凸模和凹模的倾角完全一样。在此情况下，将出现两个独立的塑性区：一个是由外部边缘向中心扩展的塑性区，其应力分布与深拉延时一致；而另一个是由内部向外扩展的塑性区，其应力分布与翻边时一致。两个区域在开始时都有弹性区，随着角度α的增加，将出现周向应力$\bar{\sigma}_\theta$的间断。由于子午向的应力$\bar{\sigma}_r$在间断线上不可能间断，所以周向应力间断处的半径r_*由下式确定：

$$\ln\frac{R}{r_a}=1-\frac{r_*}{r_a} \tag{12-26}$$

上式是通过使翻边区的径向应力与深拉延区的径向应力相等而得到的。在间断线的外部，周向应力为压应力；而在间断线的内部，周向应力为拉应力，且这个拉应力为常数，等于材料的屈服极限σ_s。在深拉延区，周向应力只在外边缘处等于屈服极限σ_s，随着r向中心变化，周向应力逐渐减小。在窄圆环的情况下，可以忽略周向应力的变化，并在两个区域中分别取$\bar{\sigma}_\theta=\pm\sigma_s$。

为了确定变形过程中任一瞬间凸模上的轴向压力，需要研究

中心角为θ的单元体上力矩的平衡问题。为了简化计算，对环板宽度中心B点取矩。周向应力在B点以外向外作用，而在B点以内则向内作用（图12-16）。为了保持平衡，应满足如下条件：

$$\theta\sigma_s h\frac{(R-r_0)^2}{4\cos\alpha}\operatorname{tg}\alpha=\frac{T(R-r_0)}{\cos\alpha}\cos(\gamma-\rho-\alpha) \qquad (12\text{-}27)$$

式中，ρ为摩擦角。将作用在圆周上的力T向对称轴投影，便可得到力T和凸模轴向压力P之间的关系式，即

$$T\cos(\gamma-\rho)\cdot\frac{2\pi}{\theta}=P$$

将上式代入式（12-27）后，可得

$$P=\frac{1}{2}\pi\sigma_s h(R-r_0)\operatorname{tg}\alpha\frac{\cos(\gamma-\rho)}{\cos(\gamma-\rho-\alpha)} \qquad (12\text{-}28)$$

再将$H=(R-r_0)\operatorname{tg}\alpha$代入上式，则得

$$P=\frac{1}{2}\pi\sigma_s hH\frac{\cos(\gamma-\rho)}{\cos(\gamma-\rho-\alpha)}$$

在变形的最终阶段有$\gamma\to\alpha$，于是

$$P'=\frac{\pi}{2}(\cos\gamma+\nu\sin\gamma)\sigma_s hH \qquad (12\text{-}29)$$

与上述过程相反的过程是将锥形圆环用两块刚性平板压成平面圆环，如图12-17所示。这也是一个复合成形过程。在此过程中有两个塑性区域，即内部的缩孔区域和外部的扩孔区域。在缩孔区域中，在周向压应力作用下圆环半径缩小；而在扩孔区域中，在周向拉应力作用下圆环半径增大。和前面一样，当环的宽度很窄时，可以假设$\bar{\sigma}_s=\pm\sigma_s$。于是便可用与前面类似的方法求出将锥形圆环压平的力P，即

$$P=\frac{\pi}{2}\frac{\sigma_s hH}{\cos\gamma+\nu\sin\gamma} \qquad (12\text{-}30)$$

由上式可见，P是角度α的函数。由于上式中没有考虑子午向压

应力对屈服条件的影响，因此这一公式只能限制在角度 α 不大的情况下使用。

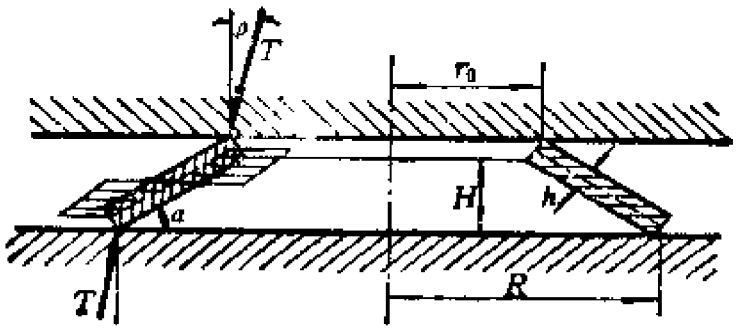


图12-17 锥环压平

习 题

12-1 已知翻边板料的尺寸如下：初始圆孔半径 $r_0=30\text{mm}$，凹模半径 $R=42\text{mm}$，板厚 $h=3\text{mm}$，材料的屈服极限 $\sigma_s=200\text{N/mm}^2$，凸模倾角 $\alpha=30°$。试求图12-7所示锥形凸模在翻边最终阶段所需的压力 P。

12-2 已知图12-18所示锥形容器成型过程中的几何尺寸为：$r_0=30\text{mm}$，$R=51\text{mm}$，$h=5\text{mm}$，$\alpha=30°$。材料的屈服极限 $\sigma_s=320\text{ N/mm}^2$。试求深拉延最后阶段的压力 P。

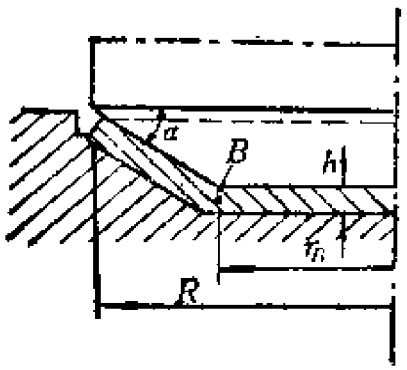


图12-18 锥形容器的深拉延

参考文献

〔1〕 王龙甫编，《弹性理论》（第二版），科学出版社，1984。

〔2〕 徐芝纶编，《弹性力学》（第二版），高等教育出版社，1982。

〔3〕 Н.Н. 别茹霍夫著，杜庆华、庞家驹、黄克智、张福范、解伯民译，《弹性与塑性理论》，高等教育出版社，1956。

〔4〕 钱伟长、叶开源著，《弹性力学》，科学出版社，1956。

〔5〕 杨桂通编，《弹塑性力学》，人民教育出版社，1981。

〔6〕 王仁、熊祝华、黄文彬著，《塑性力学基础》，科学出版社，1982。

〔7〕 徐秉业、陈森灿编著，《塑性理论简明教程》，清华大学出版社，1981。

〔8〕 蒋咏秋、穆霞英编，《塑性力学基础》，机械工业出版社，1981。

〔9〕 庄燃年、马晓士、蒋澍编，《工程塑性力学》，高等教育出版社，1984。

〔10〕 熊祝华、洪善桃编著，《塑性力学》，上海科学技术出版社，1984。

〔11〕 徐秉业、黄炎、刘信声、孙学伟编，《弹塑性力学及其应用》，机械工业出版社，1984。

〔12〕 Z.Marciniak, J.Kolodziejski, *Teoria procesow obrobki plastycznej*, WPW, 1983.

〔13〕 Z.Marciniak, *Mechanika Procesow Tloczenia Blach*, PWN, 1961.

〔14〕 T.Bednarski, *Teoria procesow obrobki plastycznej (Tloczenie blach)*, WPW, 1983.

〔15〕 T.W.Pelczynski, T.A.Pelczynski, *Teoria procesow obrobki plastycznej*, Czesc I(*Mechanika procesow obrobki plastycznej*), WPW, 1982.

〔16〕 W.Olszak, P.Perzyna, A.Sawczuk, *Teoria plastycznosci*, PWN, 1965.

〔17〕 W.什格申斯基等，徐秉业、刘信声、孙学伟译，《金属塑性成形力学导论》，机械工业出版社，1987。

〔18〕 W.Johnson, P.B.Mellor, *Engineering Plasticity*, VNRC 1973.

〔19〕 E.G.Thomsen, T.Y.Charles, S.Kobayashi, *Mechanics of plastic deformation in metal processing*, The Macmillan Campany, 1965.

〔20〕 M.B.斯德洛日夫、E.A.波波夫，哈尔滨工业大学锻压教研室、吉林工业大学锻压教研室译，《金属压力加工原理》，机械工业出版社，1980。

〔21〕 L.M.Kachanov, *Foundations of the theory of plasticity*, NHPC, 1971.

〔22〕 G.W.Rowe, *An Introduction to the Principles of Metalwoking*, 1975.

〔23〕 黄鸿德编，《塑性变形力学基础与轧制原理》，机械工业出版社，1981。

〔24〕 赵之业等编，《金属塑性变形与轧制理论》，冶金工业出版社，1990。

〔25〕 曹乃光主编，《金属塑性加工原理》，冶金工业出版社，1983。

〔26〕 汪大年主编，《金属塑性成形原理》，机械工业出版社，1982。

〔27〕 徐秉业、刘信声编著，《结构塑性极限分析》，中国建筑工业出版社，1985。

〔28〕 刘信声、徐秉业编，《工程塑性力学选讲》，清华大学出版社，1986。

〔29〕 王仁、黄文彬著，《塑性力学引论》，北京大学出版社，1982。

〔30〕 徐秉业主编，《弹性与塑性力学——例题和习题》，机械工业出版社，1981。

〔31〕 徐秉业、黄炎、刘信声、孙学伟编，《弹性力学与塑性力学解题指导及习题集》，高等教育出版社，1985。

〔32〕 Z.Marciniak，塑性流动理论的图解法，《锻压技术》，Vol.9，No.5，1984。

〔33〕 Z.Marciniak，拉伸失稳和极限应变，《锻压技术》，Vol.10 No.3，1985。

〔34〕 徐秉业、刘信声、陈森灿，塑性本构关系的内在联系，《教育研究通讯》，No.2，清华大学出版社，1982。

〔35〕 徐秉业、陈森灿，滑移线场理论的两个问题，《上海力学》，No.4，1982。

〔36〕 徐秉业、刘信声，关于确定滑移线场中α线和β角的讨论，《机械强度》，Vol 8，No.1，1986。

〔37〕 王仲仁，塑性力学加工基础(技术讲座)，《锻压技术》。

〔38〕 徐秉业，孟凡中，金属塑性成型，《中国大百科全书·力学》，中国大百科全书出版社，1985。

〔39〕 D.C.Drucker,A more fundamental approach to plastic stress-strain relations, Ist *USNCAM*, pp.487-491, 1951.

〔40〕 徐秉业、宋国华，非均匀屈服极限厚板的深拉延，《锻压技术》，Vol.11，No.4，1986。

〔41〕 胡世光编，《板料冷压成形原理》，国防工业出版社，1979。

习 题 答 案

1-1 $\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3) = \frac{1}{3}I_1$

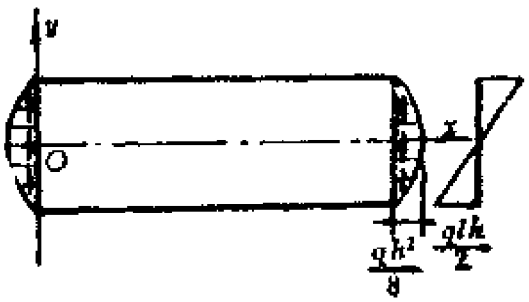
$$\tau_8 = \frac{1}{3}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{3}(2I_1^2-6I_2)^{\frac{1}{2}}。$$

1-2 $\sigma_1=300.0a$, $\sigma_2=220.7a$, $\sigma_3=79.3a$;

$\tau_1=70.7a$, $\tau_2=110.1a$, $\tau_3=39.7a$;

$\tau_8=91.3a$, (0,0,1), (0.383,0.924,0), (0.924,0.383,0)。



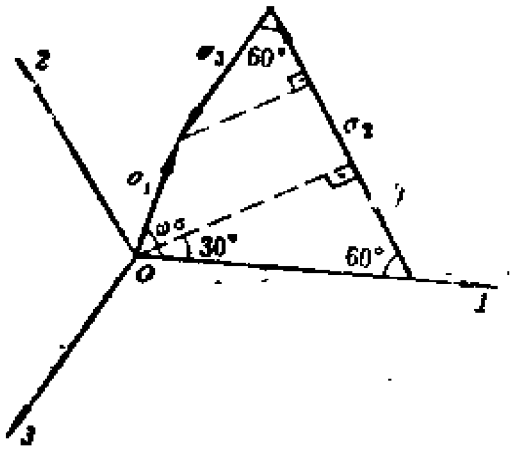
1-3 题1-3答案

$c=\frac{q}{2}$，面力分布如图所示。

1-4

	s_1	s_2	s_3	σ_t	σ_n	$\cos\omega_\sigma$
a	$\frac{2}{3}\sigma$	$-\frac{1}{3}\sigma$	$-\frac{1}{3}\sigma$	σ	$\frac{1}{3}\sigma$	1
b	$\frac{2}{3}\sigma$	$-\frac{1}{3}\sigma$	$-\frac{1}{3}\sigma$	σ	$-\frac{2}{3}\sigma$	1
c	σ	0	$-\sigma$	$\sqrt{3}\sigma$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
d	$\frac{1}{2}\sigma$	0	$-\frac{1}{2}\sigma$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma$	$\frac{1}{2}\sigma$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

1-5 由图上的几何关系有



题1－5答案

$$\operatorname{tg}\left(\omega_\sigma-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sigma_2-(\sigma_1+\sigma_3)\cos 60^\circ}{(\sigma_1-\sigma_3)\sin 60^\circ}$$

$$=\frac{2\sigma_2-(\sigma_1+\sigma_3)}{\sqrt{3}(\sigma_1-\sigma_3)}=\frac{1}{\sqrt{3}}\mu_\sigma$$

故得证

2-1 $\varepsilon_x=\varepsilon_y=\varepsilon_z=\gamma_{xy}=0$, $\gamma_{zx}=\frac{\partial f}{\partial x}-\theta y$,

$\gamma_{zy}=\frac{\partial f}{\partial y}+\theta x$。

2-2 $\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}$。

2-3 $J'_2=\frac{3}{8}\tau_0^2$。

2-4 $C_1=4$, $A_1+B_1-2C_1=0$

3-2 米泽斯条件 $\sigma^2+3\left(\frac{pr}{2t}\right)^2=\sigma_s^2$

特雷斯卡条件 $\sigma+\frac{pr}{2t}=\sigma_s$, $\sigma>\frac{pr}{2t}$。

$\frac{pr}{t}=\sigma_s$, $\sigma<\frac{pr}{2t}$。

3-3 $P=1.884\times10^{5}N$, $M_x=9.42\times10^{3}N\cdot m$

3-4 平面应变条件下

米泽斯条件为 $\frac{(\sigma_x-\sigma_y)^2}{4}+\tau_{xy}^2=\frac{\sigma_s^2}{3}$,

特雷斯卡条件为 $\frac{(\sigma_x-\sigma_y)^2}{4}+\tau_{xy}^2=\frac{\sigma_s^2}{4}$。

平面应力条件下

米泽斯条件为 $\sigma_x^2-\sigma_x\sigma_y+\sigma_y^2+3\tau_{xy}^2=\sigma_s^2$;

特雷斯卡条件为 $\left|\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2}\right|\leqslant\sigma_s$,

$$\left|\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2}\right|\leqslant\sigma_s$$

$$|(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2|\leqslant\sigma_s^2$$

4-1 (a) $de_1^p:de_2^p:de_3^p=2:(-1):(-1)$,

(b) $de_1^p:de_2^p=1:(-1)$, $de_3^p=0$。

4-2 $de_\theta^p:de_z^p:de_r^p=1:1:(-2)$, $\sigma_t=\frac{pr}{2t}$。

4-3 $\sigma=\sigma_s\text{thl}=0.762\sigma_s$, $\tau=\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}\text{chl}}=0.374\sigma_s$。

4-4 $\sigma_r=-\frac{2^{n+1}}{3n}AB^n\left(\frac{1}{b^{3n}}-\frac{1}{r^{3n}}\right)$,

$$\sigma=\sigma_\theta=\frac{2^{n+1}}{3n}AB^n\left[-\frac{1}{b^{3n}}+\left(\frac{3n}{2}-1\right)\frac{1}{r^{3n}}\right],$$

$$p=\frac{2^{n+1}}{3n}AB^n\left(\frac{1}{a^{3n}}-\frac{1}{b^{3n}}\right)。$$

B为积分常数，当p已知时便可确定B

5-1 当$b=a$时，$\frac{p_s}{p_s}=1$；当$b=2a$时，$\frac{p_s}{p_s}=2.38$。

5-2 $p_i-p_e=0.654\sigma_s$，屈服极限均匀时，$p_i-p_e=0.693\sigma_s$，两者相差$\frac{0.693-0.654}{0.693}=5.6\%$。

5-3 $\omega_p^2 = 5.920 \frac{g\sigma_s}{\gamma b^2}$，$\gamma$为单位体积的重量，$g$为重力加速度。

5-4 $\frac{M_p}{M_s} = \frac{4}{3} \frac{1-\kappa^3}{1-\kappa^4}$，当$\kappa=0$时，$\frac{M_p}{M_s} = \frac{4}{3}$，$\frac{M_p - M_s}{M_s} = 33.3\%$；当$\kappa = \frac{1}{2}$时，$\frac{M_p}{M_s} = \frac{56}{45}$，$\frac{M_p - M_s}{M_s} = 24.4\%$。

6-1 $P = 8\pi r$。

6-2 $q = k\left(1 + \frac{\pi}{2} + 2\delta\right)$。

6-3 $q = k\left(1 + \frac{3}{2}\pi\right)$。

6-4 $h/a = 3.81$，$P = 30.2hak$。

6-5 $\sigma = 4k \frac{(1+a)\sin a}{1+2\sin a}$，$P = H\sigma = 4Hk \frac{(1+a)\sin a}{1+2\sin a}$。

7-1 $p = \sigma_s \left(+\frac{2}{3} \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{R}{H}\right)$。

7-2 $q = k(\mathrm{tg}\theta + \mathrm{ctg}\theta)$。

7-3 $q = 10k$。

7-4 $q = 2k \frac{1+r}{\sqrt{r}}$。

8-1 $F_{极} = (1 + \nu \mathrm{ctg}\alpha - \frac{q}{2k} \nu \mathrm{ctg}\alpha)^{-\frac{1}{\nu \mathrm{ctg}\alpha}}$。

8-2 $\sigma_r = \sigma_s \left\{\exp\left[2\nu_s \left(\frac{1}{b}\right)_{极}\right]\left[\frac{1+\nu \mathrm{ctg}\alpha}{\nu \mathrm{ctg}\alpha}\left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{2\nu \mathrm{ctg}\alpha}\right) + 1\right] - 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{b} - \left(\frac{1}{b}\right)_{极}\right]\right\}$。

9-1 $\frac{q}{2k} = \ln \frac{H}{h_0} + \frac{1}{2} m \left(\frac{H}{h_0} - \frac{h_0}{H}\right) \frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{q_0}{2k}$。

9-3 $-\frac{q}{\sigma_s(\varepsilon)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}\nu \frac{r}{h}}$。

10-1 $M=\frac{11}{12}bh^2\sigma_s$，$\frac{\rho_r}{\rho}=\frac{16}{5}$。

10-2 $w_p=\frac{20}{27}\frac{\sigma_s l^2}{Eh}$。

10-3 $c_B=\frac{1}{1-\psi}\rho_B$

10-4 $\sin\alpha_A=\psi\sin\alpha_B$

10-5 $c=\frac{a}{\psi}$，$P=\frac{M\psi}{a}$，$M_t=P\rho_0$。

10-6 $T=\pi h^2\left(1-\frac{b}{d}\right)\sigma_s$

11-1 $P=2\pi h\sigma_s\frac{r_1^2}{R}$。

11-2 $P=P_0\left(1-\frac{\nu\sin\alpha}{\nu\sin\alpha+\cos\alpha}\right)^{n-1}$

12-1 $P\approx 2\times 10^6\,\mathrm{N}$。

12-2 $P\approx 6\times 10^6\,\mathrm{N}$。