## 内 容 简 介

本书先通过对简单应力状态下的问题分析，建立塑性力学中的物理概念，然后再逐步将有关的基本概念推广到复杂应力状态中去。难点分散，由浅入深，是一本为初学者易于接受的入门性教材。第一版出版于 1982 年，曾获 1988 年国家教委优秀教材二等奖。

修订版结合国内外二十年来塑性力学的研究进展以及作者长期的教学与研究实践对第一版做了较大的修改。加强了基本概念和问题提法的准确性以及理论上的严密性，可供理工科大学力学及相关专业的师生、科技人员学习参考。

# 修 订 版 前 言

《塑性力学引论》是一本为初学者所写的入门性教材。该书的初版为王仁、黄文彬所著，出版于1982年。它是自五十年代以来，在为北京大学数力系力学专业学生开设塑性力学课程的讲义基础上写成的。初版的主要特点是难点分散、由浅入深、循序渐进。在前两章中，初学者可以通过对简单应力状态下的问题分析树立塑性力学中的物理概念，了解处理问题的方法和特点。然后，再逐步将有关的基本概念推广到复杂应力状态中去，使学生能够较顺利地掌握塑性力学的主要内容。初版曾于1988年获得国家教委优秀教材二等奖。

由于塑性力学不仅是断裂力学、损伤力学等许多研究领域的理论基础，而且在结构分析，金属压力加工和其它一些工程实际问题中有着重要的应用。因此，近二十年来，国内外在塑性力学的研究方面一直是很活跃的。近年来，我国已经出版了相当一批有关的教科书[14-28]，它们都各有其自身的特点和侧重面。不过，作为一本少学时的入门性教材，我们感到应把重点放在正确建立基本概念和基本理论上。为此，在王仁教授指导和建议下，黄筑平根据多年教学实践经验并结合塑性理论的近代进展对初版做了较大的修改。在力图保留初版的体系和特点的前提下，更加强调了基本概念和问题提法的准确性以及理论上的严密性，使通常塑性力学书籍中在有关概念上出现的一些含混之处得到了澄清。这不仅对初学者是重要的，而且对曾经学过塑性力学的人来说，在理解近代文献方面也是有裨益的。

鉴于目前已出现不少介绍有限元方面的专著，本修订版删去了初版关于有限元方法的第八章。其余几章的主要增改内容有：

在前两章中，通过对简单问题的分析，除初版所引进和介绍的约束塑性变形的概念、强化和几何非线性对弹塑性解的影响、加载路径对解的影响等外，还增加了结构物的弹性极限曲线（面）以及它与残余应力状态的关系，结构物的塑性极限曲线（面）的基本性质，安定状态分析等问题的讨论。第三、四章改为在引进内变量的基础上来讨论屈服曲面、加载曲面和本构方程。突出了应力空间描述和应变空间描述的对偶关系以及在应变空间中给出加、卸载准则的合理性。强调了稳定材料假设，Drucker 公设和伊留辛公设等关于材料性质假设的区别和联系，并在此基础上讨论了它们与建立本构方程之间的关系。另外，还增加了关于全量理论适用范围的极值路径的讨论。在第五、六章关于增量理论和全量理论的弹塑性力学边值问题的提法中，增加了对解的唯一性和间断条件的讨论。在柱体扭转和平面应变问题中，对间断线的性质做了更详细的介绍。在关于平面应变问题完全解的讨论中，给出了塑性区内塑性功率非负的基本不等式以及对刚性区进行校核的具体实例。第七章对全量理论的势能原理和余能原理进行了更为深入的讨论。在安定分析中，增加了关于静力安定定理和机动安定定理的证明。在以上所增加的内容中，有些章节是带“*”号的。根据教学的具体情况，这些带“*”号的部分也可略去不讲。

在文献[12]的基础上，本书对各章的习题作了较大的调整和充实，书后还附有关于习题的详细提示和解答，便于自学者查用。

在本书初版的使用期间，许多兄弟院校教师以及各届同学曾提出过有益的意见，仅在此表示深切的谢意！

作　者

1989 年 10 月

# 目　录


第一章　简单应力状态下的弹塑性力学问题 ……（1）

§1.1　引言 ……（1）

§1.2　材料在简单拉压时的实验结果 ……（2）

§1.3　应力-应变关系的简化模型……（7）

§1.4　轴向拉伸时的塑性失稳 ……（10）

§1.5　简单桁架的弹塑性分析 ……（13）

§1.6　强化效应的影响 ……（18）

§1.7　几何非线性的影响 ……（19）

§1.8　弹性极限曲线 ……（21）

§1.9　加载路径的影响 ……（23）

§1.10　极限载荷曲线(面) ……（26）

§1.11* 安定问题 ……（28）

习题 ……（34）

第二章　梁的弹塑性弯曲及梁和刚架的塑性极限分析……（38）

§2.1　矩形截面梁的弹塑性纯弯曲……（38）

§2.2　横向载荷作用下梁的弹塑性分析……（45）

§2.3　强化材料矩形截面梁的弹塑性纯弯曲……（48）

§2.4　超静定梁的塑性极限载荷……（50）

§2.5　用静力法和机动法求刚架的塑性极限载荷……（53）

§2.6　极限分析中的上下限定理……（59）

§2.7　最轻结构的极限设计……（62）

§2.8　弯矩和轴向力同时作用的情形……（66）

习题 ……（68）

第三章　应变分析、应力分析和屈服条件 ……（74）

§3.1　应变张量和应力张量……（74）

§3.2　应变张量或应力张量的不变量……（77）

§3.3 偏应变张量和偏应力张量 …… (79)
§3.4 屈服条件 …… (83)
§3.5 几个常用的屈服条件 …… (88)
§3.6 屈服条件的实验验证 …… (96)
§3.7* 岩土力学中的库伦屈服条件 …… (101)
§3.8 加载条件 …… (105)
习题 …… (111)
第四章 本构关系 …… (113)
§4.1 塑性应力率和塑性应变率 …… (113)
§4.2 应变空间中的加载曲面和加、卸载准则 …… (116)
§4.3 有关材料性质的几个假设 …… (120)
§4.4 加载面的外凸性和正交流动法则 …… (126)
§4.5 增量（率型）本构关系的一般形式 …… (130)
§4.6 本构关系的一些常用表达式 …… (133)
§4.7 简单加载时的全量理论 …… (138)
§4.8* 关于极值路径的一些基本概念 …… (142)
习题 …… (147)
第五章 弹塑性力学边值问题的简单实例 …… (150)
§5.1 弹塑性力学边值问题的提法 …… (150)
§5.2 薄圆管的拉扭联合变形 …… (160)
§5.3 厚壁圆柱筒的弹塑性分析 …… (168)
§5.4 理想弹塑性柱体的自由扭转 …… (182)
§5.5 刚塑性薄圆板的轴对称弯曲 …… (193)
习题 …… (201)
第六章 理想刚塑性材料的平面应变问题 …… (209)
§6.1 基本方程 …… (209)
§6.2 滑移线 …… (214)
§6.3 边界条件 …… (219)
§6.4 滑移线和间断线的主要性质 …… (221)
§6.5 基本边值问题及其数值积分 …… (230)
§6.6 楔的单边受压 …… (238)

§6.7 半平面上刚性冲模的压入和切口板条的拉伸……(246)
§6.8 定常塑性流动的板条抽拉问题……(251)
§6.9 塑性力学中平面应变问题与平面应力问题的区别……(257)
习题 ……(259)
第七章 塑性力学中的能量原理和极限载荷的限界定理
……(264)
§7.1 存在间断场时的虚功率原理……(264)
§7.2 弹塑性增量理论中的最小势能原理和最小余能原理……(267)
§7.3* 弹塑性全量理论中的最小势能原理和最小余能原理……(270)
§7.4 全量理论中关于最小势能原理和最小余能原理的应用
……(274)
§7.5 极限分析中的下限定理和上限定理……(279)
§7.6 关于极限载荷限界定理的应用实例……(285)
§7.7* 安定定理……(293)
习题 ……(301)
习题解答 ……(306)
主要参考书目 ……(342)

# 第一章　简单应力状态下的弹塑性力学问题

## §1.1　引　　言

塑性力学往往是相对于弹性力学而言的。在弹性力学中，物质微元的应力和应变之间具有单一的对应关系。然而，材料在一定的外界环境和加载条件下，其变形往往会具有非弹性性质，即应力和应变之间不具有单一的对应关系。非弹性变形主要有塑性变形和粘性变形两种。塑性变形是指物体在除去外力后所残留下来的永久变形，在给定的外力下，物体的变形并不随时间而改变。粘性变形则随时间而改变。例如蠕变、应力松弛等现象就是粘性效应的反映。另外，在习惯上也用塑性和脆性这一对概念来区别物体在经受变形直至破坏时变形的大小。如果变形很小就破坏，便称是脆性的。这时材料的塑性变形能力较差，通常可近似地用弹性理论来进行分析直至破坏。如果经受了很大的变形才破坏，便称材料具有较好的韧性或延性，这时材料的塑性变形能力较强。在这种情况下，物体从开始出现永久变形到最终破坏之间仍具有承受载荷的能力。因此，为了发挥材料的潜力，就应该采用塑性力学的分析方法。当然，脆性和塑性之间并没有严格的界限。即使是脆性材料，其裂纹尖端附近的塑性变形也会对裂纹的扩展起重要的作用。

学习塑性力学的目的之一是研究在哪些条件下可以允许结构中某些部位的应力超过弹性极限的范围，以充分发挥材料的强度潜力。例如，当物体事先经受了某些塑性变形而获得有利的残余应力分布后，其承载能力就可能有较大的提高。其次是研究物体在不可避免地产生某些塑性变形后，对承载能力和（或）抵抗变

形能力的影响。最后是研究如何利用材料的塑性性质以达到加工成形的目的。例如，在加工过程中如何使物体内的变形更均匀，以防止材料的破坏，以及如何使施加的力最小或消耗的能量最少等等。

塑性力学是连续介质力学的一个分支，故研究时仍采用连续介质力学中的假设和基本方法。其基本方程有：①描述物体变形和运动的几何关系(位移-应变关系)，②守恒定律(如质量守恒，动量守恒，动量矩守恒和能量守恒等等)，③刻画材料物理状态和力学性质的方程（通常称之为本构方程）.前两类方程与材料性质无关，故是普遍适用的。连续介质力学各个分支(如弹性力学，粘弹性力学，塑性力学，流体力学等）的区别主要在于第三类方程的不同。这类方程的建立也是塑性力学研究的重点之一。当然，随之而来的也就会使塑性力学在处理问题的方法上有其自身的特点.

塑性本构方程的建立开始是以材料的宏观实验为依据的。随着研究的深化，就需要从不可逆过程热力学的观点和用更系统的研究方法来进行深入的探讨。有些人从塑性变形的微观机理出发，用宏观和微观相结合的方法来研究塑性变形的规律，这也是一个重要的研究方向。这些研究成果和理论正有待进一步的发展和完善，在这本简短的引论性教程中将不作讨论。在第一章和第二章里，我们将从简单应力状态入手，着重建立有关的物理概念，突出塑性力学的特点和研究方法，为以后几章的学习打下必要的基础。

## §1.2 材料在简单拉压时的实验结果

研究塑性变形规律的最简单实验是金属多晶材料的单向拉伸或压缩实验。这类实验通常在室温下进行。试件如图 1 所示，在载荷 $P$ 的作用下，试件的长度和横截面面积将由初始值 $l_0$ 和 $A_0$ 分别变为 $l$ 和 $A$。试件中部的应力和变形要求是均匀的，故可定

义名义应力 $\sigma = P/A_0$ 和名义应变 $\varepsilon = (l - l_0)/l_0$。材料的拉伸实验曲线有图 2 所示的两种形态。

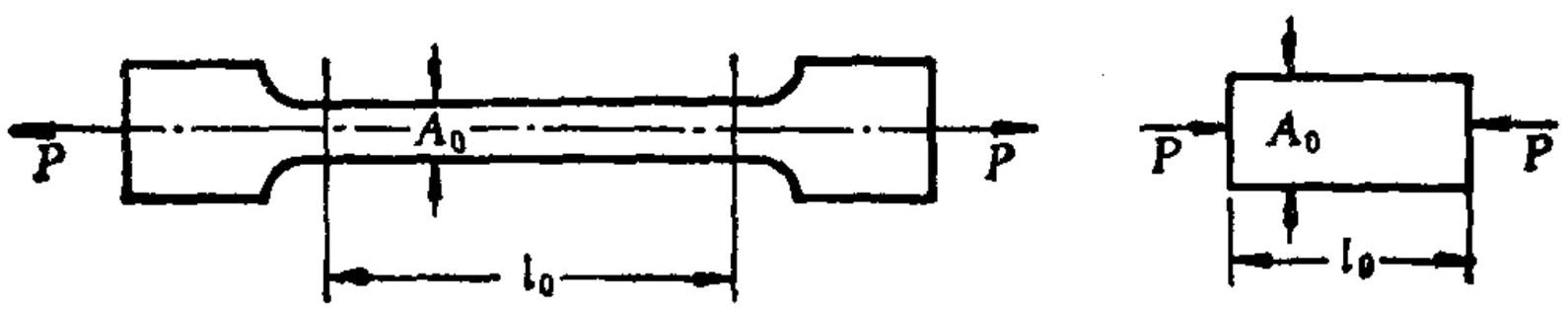



图 1

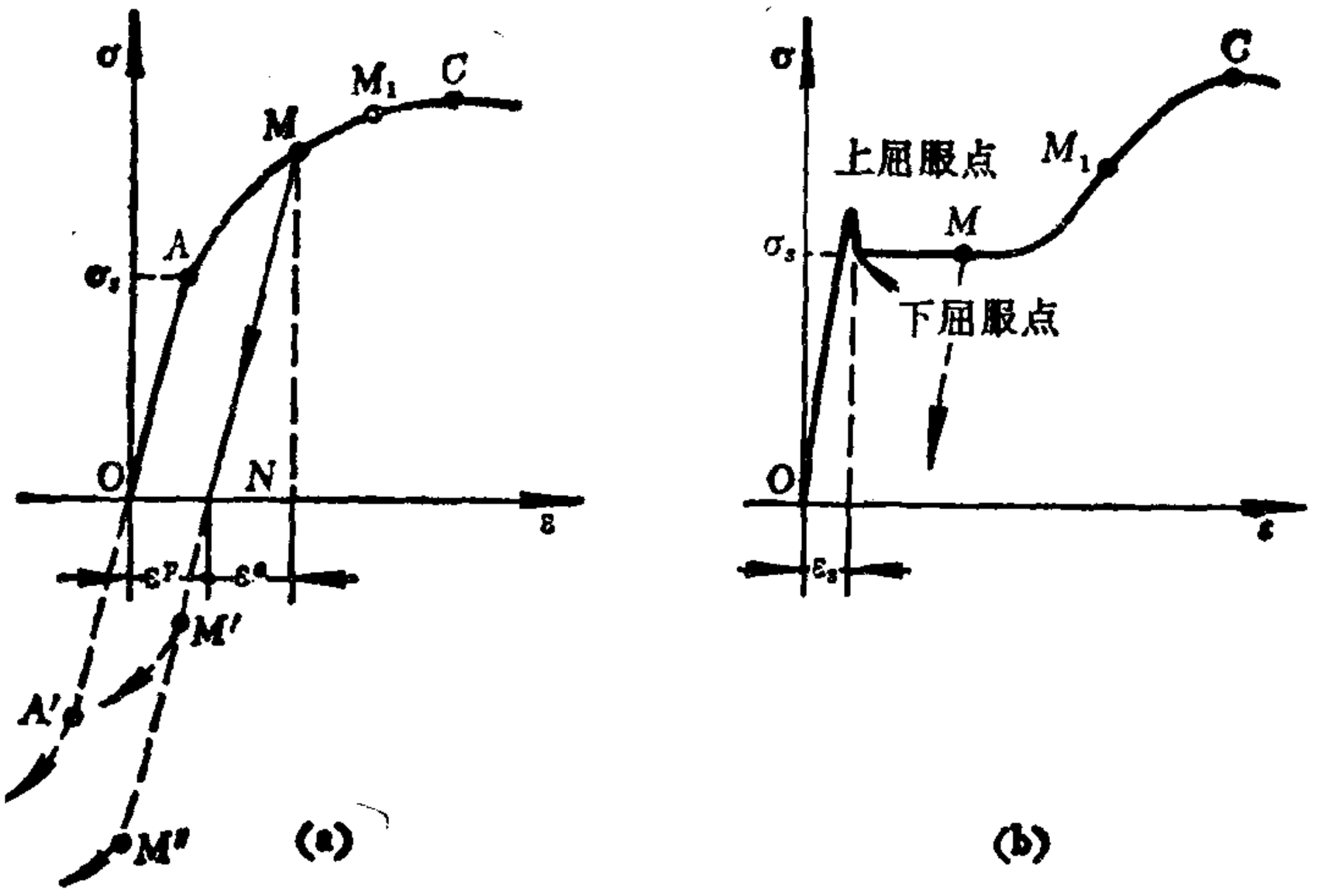



图 2

随着载荷的缓慢增加，应力和应变之间通常是成比例的。在到达比例极限以后，曲线开始向下弯曲，直到弹性极限。在弹性极限以前，如果卸去载荷而使应力下降到零，则应变也沿原有曲线下降到零。在应力超过弹性极限后，虽然应力降到了零，应变仍不为零，残留的这部分应变称为塑性应变 $\varepsilon^p$。产生和不产生塑性应变的分界应力就是弹性极限 $\sigma_e$。图 2(b)是关于低碳钢和某

些铝合金的拉伸曲线。这时在弹性极限以后有一个屈服阶段，即当应力（称为屈服应力）保持不变时应变仍然可以有很大的增长。如果 $\varepsilon_s$ 对应于刚达到弹性极限时的应变，则屈服阶段末的应变可大到 $\varepsilon_s$ 的十多倍。由于一般材料的比例极限、弹性极限和屈服应力相差不大，通常在工程上可不加区分，我们以后将用 $\sigma_s$ 表示之，并统称为屈服应力。

如果在产生了不太大的塑性变形之后再逐渐减小载荷，则如图 2(a)中的 $MN$ 线那样，应力和应变的变化规律基本上是一直线，其斜率大致上与最初加载时的斜率相同。这表明在产生塑性变形以后，材料内部的晶格结构并没有发生本质的变化。如果从卸载后的点 $N$ 重新再加载，则开始时应力和应变之间仍按原始比例作线性变化，而在 $M$ 点附近才急剧地弯曲并开始产生新的塑性变形。以后的曲线将沿 $OAM$ 的延长线延伸，这就好像是把初始屈服应力 $\sigma_s$ 提高到 $M$ 点所对应的（屈服）应力 $\sigma_M$（它与塑性应变 $\varepsilon^p$ 的大小有关），材料经过塑性变形得到了强化，因此，这种现象称为应变强化或应变硬化。

如果材料从 $M$ 点卸载并进行反向加载，则对单晶体来说，其压缩时的屈服应力也有相似的提高（图 2(a)中的 $M''$ 点）。然而，对多晶体材料来说，其压缩屈服应力（$M'$ 点）一般要低于一开始就反向加载时的屈服应力（$A'$ 点），即图 2(a)中 $M'$ 点应力的代数值要大于 $A'$ 点应力的代数值。这种由于拉伸时强化影响到压缩时弱化的现象称为包氏效应（Bauschinger effect）。

由上述实验现象可归纳出以下两点：

1. 在材料的弹塑性变形过程中，应力与应变之间已不再具有单一的对应关系。由于加载路径的不同，同一个应力 $\sigma$ 可对应于不同的应变 $\varepsilon$，或同一个应变 $\varepsilon$ 可对应于不同的应力 $\sigma$。$\sigma$ 与 $\varepsilon$ 之间的关系依赖于加载路径（path-dependent）。人们通常是通过引进一组称之为内变量的宏观参量来刻画加载历史的。这组内变量刻画了材料在经受塑性变形过程后内部微观结构的变化。例

如，作为最简单的近似，可以取内变量 $\xi$ 为塑性应变 $\varepsilon^p$，而将简单受拉（压）时的应力应变关系写为

$$\varepsilon = \sigma/E + \varepsilon^p \qquad (1)$$

其中 $E$ 为杨氏模量。上式表明，当 $\varepsilon^p$(内变量)一定时，$\sigma$ 与 $\varepsilon$ 之间有单一的对应关系。

2. $\sigma$ 与 $\varepsilon$ 之间的线性关系(1)式 是 有适用范围的。对于固定的内变量 $\varepsilon^p$，$\sigma$ 或 $\varepsilon$ 并不能随意地取值。例如，对处于图 2(a)中的 $M$ 点，当加载时即应力(或应变)继续增长时，应力应变曲线将沿 $AMM_1$ 方向延伸，仅当卸载时即应力（或应变）减小时，应力应变曲线才以(1)式的规律沿 $MN$ 方 向下降。为了区分以上这种加载和卸载所具有的不同规律，就必须给出相应的加卸载准则。

现考察图 2(a)中的 $N$ 点，其内变量可取为塑性应变 $\varepsilon^p$，从 $N$ 点拉伸到 $M$ 点或压缩到 $M'$ 点后，材 料 将开始产生新的塑性变形（这里 $M$ 点对应于正向屈服点，$M'$ 点对应于反向屈服点）。故(1)式仅在直线段 $M'NM$ 的范围内（即弹性范围内）才适用。设 $M$ 点的应力和应变分别 为 $\sigma_M$ 和 $\varepsilon_M$，$M'$ 点的应力和应变分别为 $\sigma'_M$ 和 $\varepsilon'_M$，它们依赖于 $\varepsilon^p$，故可写成

$$\sigma_M = \sigma_M(\varepsilon^p), \varepsilon_M = \varepsilon_M(\varepsilon^p)$$

和

$$\sigma'_M = \sigma'_M(\varepsilon^p), \varepsilon'_M = \varepsilon'_M(\varepsilon^p).$$

显然，它们还满足关系式

$$\sigma_M = E(\varepsilon_M - \varepsilon^p), \sigma'_M = E(\varepsilon'_M - \varepsilon^p).$$

现定义函数：

$$f(\sigma, \varepsilon^p) = \begin{cases} (\sigma - \sigma_M) & \text{(当正向加载时)}, \\ (\sigma'_M - \sigma) & \text{(当反向加载时)}; \end{cases} \qquad (2)$$

或

$$g(\varepsilon, \varepsilon^p) = \begin{cases} E(\varepsilon - \varepsilon_M) & \text{(当正向加载时)}, \\ E(\varepsilon'_M - \varepsilon) & \text{(当反向加载时)}. \end{cases} \qquad (3)$$

不难看出，对于固 定的 $\varepsilon^p$，(1)式仅当 $\sigma_M \geqslant \sigma \geqslant \sigma'_M$ 或 $\varepsilon_M \geqslant \varepsilon \geqslant \varepsilon'_M$

时才适用，即仅当 $f(\sigma,\varepsilon^p)\leqslant 0$ 或 $g(\varepsilon,\varepsilon^p)\leqslant 0$ 时才适用。当 $f(\sigma,\varepsilon^p)=0$ 或 $g(\varepsilon,\varepsilon^p)=0$ 时，由于应力或应变的继续改变，所得到的应力应变关系要根据加卸载准则来判断。

$\frac{\partial f}{\partial\sigma}\mathrm{d}\sigma>0$ 或 $\frac{\partial g}{\partial\varepsilon}\mathrm{d}\varepsilon>0$ 对应于加载。这时始终要求 $f=0$ 或 $g=0$，故有

$$\mathrm{d}\sigma=(\mathrm{d}\sigma)_M\ (\text{或}(\mathrm{d}\sigma)_M')$$

或

$$\mathrm{d}\varepsilon=(\mathrm{d}\varepsilon)_M\ (\text{或}(\mathrm{d}\varepsilon)_M'),$$

其中 $(\mathrm{d}\sigma)_M$ 和 $(\mathrm{d}\varepsilon)_M$ 分别为正向屈服时 $M$ 点应力值和应变值的增量，$(\mathrm{d}\sigma)_M'$ 和 $(\mathrm{d}\varepsilon)_M'$ 分别为反向屈服时 $M'$ 点应力值和应变值的增量。

$\frac{\partial f}{\partial\sigma}\mathrm{d}\sigma<0$ 或 $\frac{\partial g}{\partial\varepsilon}\mathrm{d}\varepsilon<0$ 对应于卸载。这时有

$$\mathrm{d}\sigma=E\mathrm{d}\varepsilon,$$

即卸载时应力增量与应变增量之间满足线弹性关系。

最后再简单提一下影响材料性质的其它几个因素。

1. **温度** 当温度上升时，材料的屈服应力将会降低而塑性变形的能力则有所提高。在高温条件下，就需要考虑像蠕变、应力松弛等具有明显粘性效应的现象。在本课程中将不准备讨论这些问题。

2. **静水压力** Bridgeman 对许多金属材料的实验结果表明，当静水压力不太大时，材料体积的变化服从弹性规律而不产生永久的塑性体积改变。故当材料有较大的塑性变形时（弹性变形相对地很小），可近似地认为体积是不可压的。此外，静水压力对屈服应力的影响也是不大的。

3. **应变速率** 如果实验时将加载速度提高几个数量级，则屈服应力也会相应地提高，但材料的塑性变形能力会有所下降。

对于受高速撞击载荷或爆炸载荷作用的结构，就需要考虑应变率效应对材料性质的影响。但在一般加载速度条件下，我们将不考虑这一因素。

## §1.3 应力-应变关系的简化模型

将具体材料的简单拉伸（或压缩）实验曲线直接用于实际计算往往是很不方便的。为此，常常根据不同的问题，对不同材料在不同的条件下进行不同的简化。从而可得到基本上能反映该材料的力学性质而又便于进行数学计算的简化模型。最常用的模型有以下几种。

1. **理想弹塑性模型** 对于低碳钢或强化率较低的材料，在应变不太大时可忽略强化效应而简化为如图 3 所示的情形。假定拉伸和压缩时屈服应力的绝对值相同，则当应力从零开始作单调变化（不卸载）时，应力应变关系可写为：

$$\begin{cases} \text{当}|\sigma|<\sigma_s \text{ 时}, & \varepsilon=\sigma/E \\ \text{当}|\sigma|=\sigma_s \text{ 时}, & \varepsilon=\dfrac{\sigma}{E}+\lambda\,\operatorname{sign}\sigma \end{cases} \tag{4}$$

其中 $\lambda$ 是一个非负的参数，而

$$\operatorname{sign}\sigma=\begin{cases} 1, & \text{当 } \sigma>0, \\ 0, & \text{当 } \sigma=0, \\ -1, & \text{当 } \sigma<0. \end{cases}$$

类似地，上式也可用应变表示为：

$$\begin{cases} \text{当}|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_s \text{ 时}, & \sigma=E\varepsilon, \\ \text{当}|\varepsilon|>\varepsilon_s \text{ 时}, & \sigma=\sigma_s\operatorname{sign}\varepsilon, \end{cases}$$

其中 $\varepsilon_s=\sigma_s/E$。

2. **线性强化弹塑性模型** 当材料的强化率较高且在一定范围内变化不大时，可用两条直线来表示原有的正向拉伸或反向压

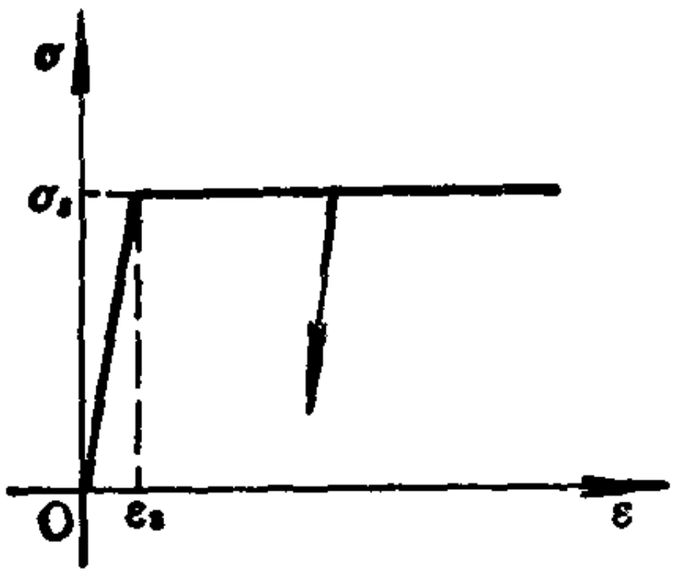



图 3

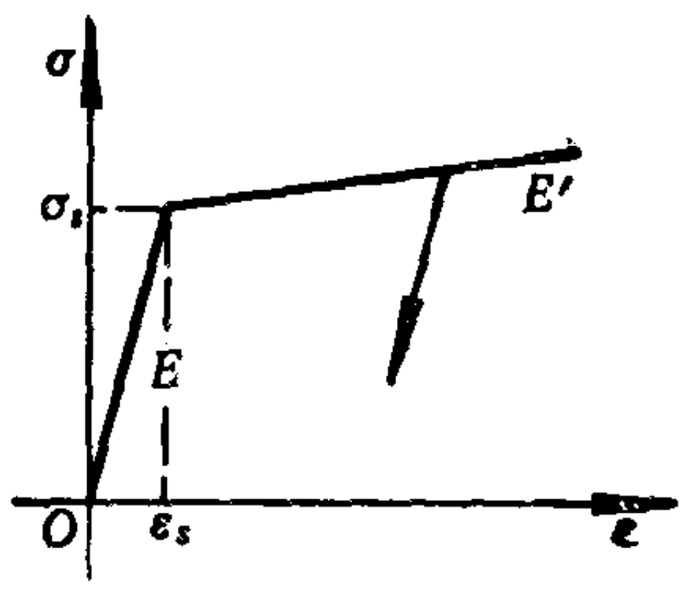



图 4

缩实验曲线（见图4）。如假定拉伸和压缩时屈服应力的绝对值和强化模量 $E'$ 都相同，则当不卸载时，应力应变关系可写成：

$$\begin{cases} \text{当}|\sigma|\leqslant\sigma_s\text{ 时}, & \varepsilon=\sigma/E, \\ \text{当}|\sigma|>\sigma_s\text{ 时}, & \varepsilon=\sigma/E+(|\sigma|-\sigma_s)\left(\dfrac{1}{E'}-\dfrac{1}{E}\right)\operatorname{sign}\sigma. \end{cases} \tag{5}$$

类似地，上式也可由应变表示为

$$\begin{cases} \text{当}|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_s\text{ 时}, & \sigma=E\varepsilon, \\ \text{当}|\varepsilon|>\varepsilon_s\text{ 时}, & \sigma=[\sigma_s+E'(|\varepsilon|-\varepsilon_s)]\operatorname{sign}\varepsilon. \end{cases}$$

**3. 一般加载规律** 对于一般的单向拉伸曲线，在不卸载时可将应力-应变关系写为

$$\sigma=\phi(\varepsilon)=E\varepsilon[1-\omega(\varepsilon)], \tag{6}$$

其中

$$\omega(\varepsilon)=\begin{cases} 0, & \text{当}|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_s, \\ [E\varepsilon-\phi(\varepsilon)]/(E\varepsilon), & \text{当}|\varepsilon|>\varepsilon_s \end{cases}$$

表示图 5 (a)中的线段比 $\overline{AC}/\overline{AB}$。上式在用迭代法求解问题时较方便。不难验证，对于线性强化材料，当 $|\varepsilon|>\varepsilon_s$ 时有

$$\omega(\varepsilon)=(1-E'/E)[1-\varepsilon_s/|\varepsilon|] \tag{7}$$

**4. 幂次强化模型** 其加载规律可写为

$$\sigma=B|\varepsilon|^m\operatorname{sign}\varepsilon, \tag{8}$$

其中材料常数 $B$ 和 $m$ 满足条件 $B>0, 0<m<1$。这种模型在 $\varepsilon=0$

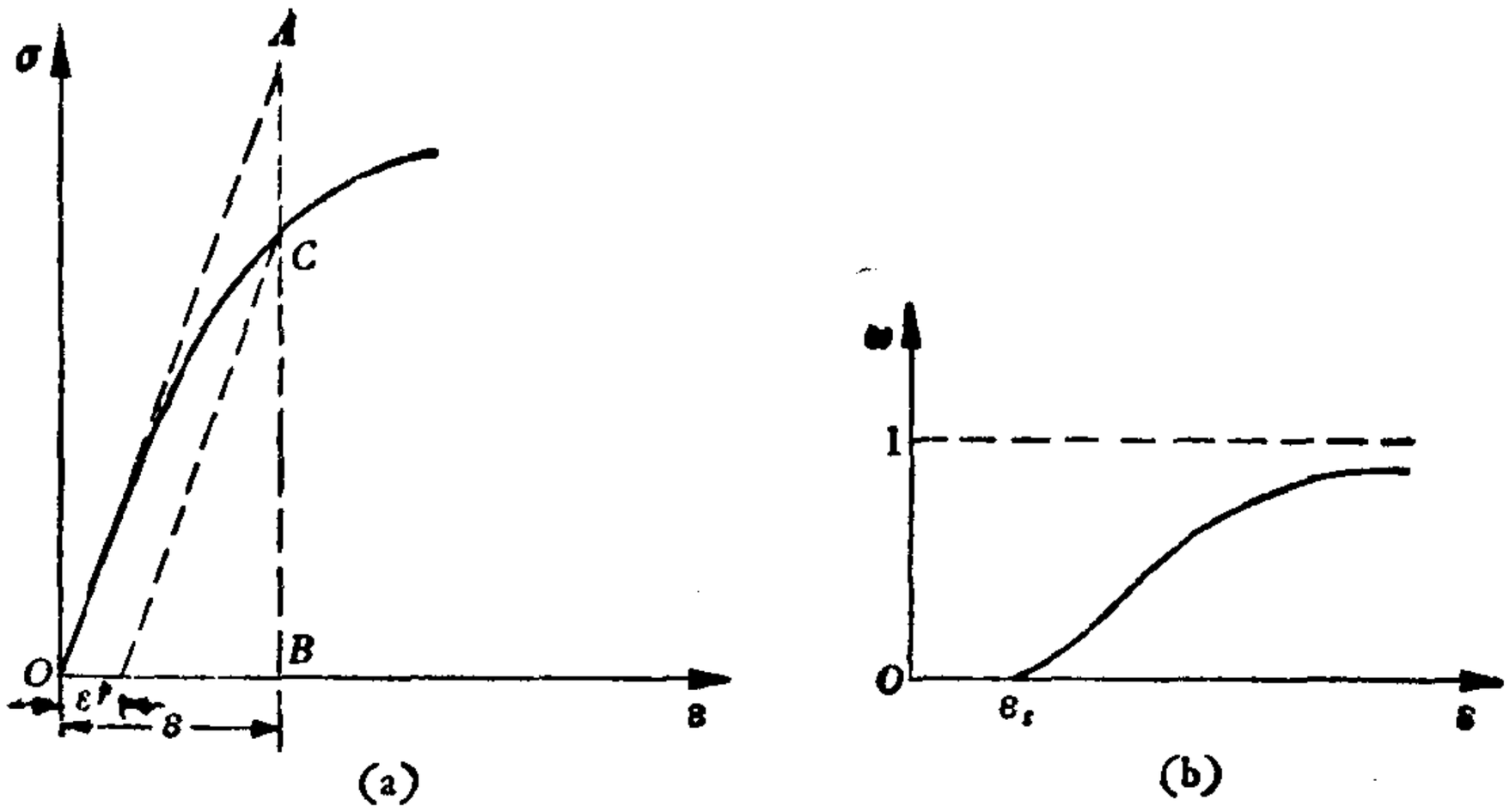



图 5

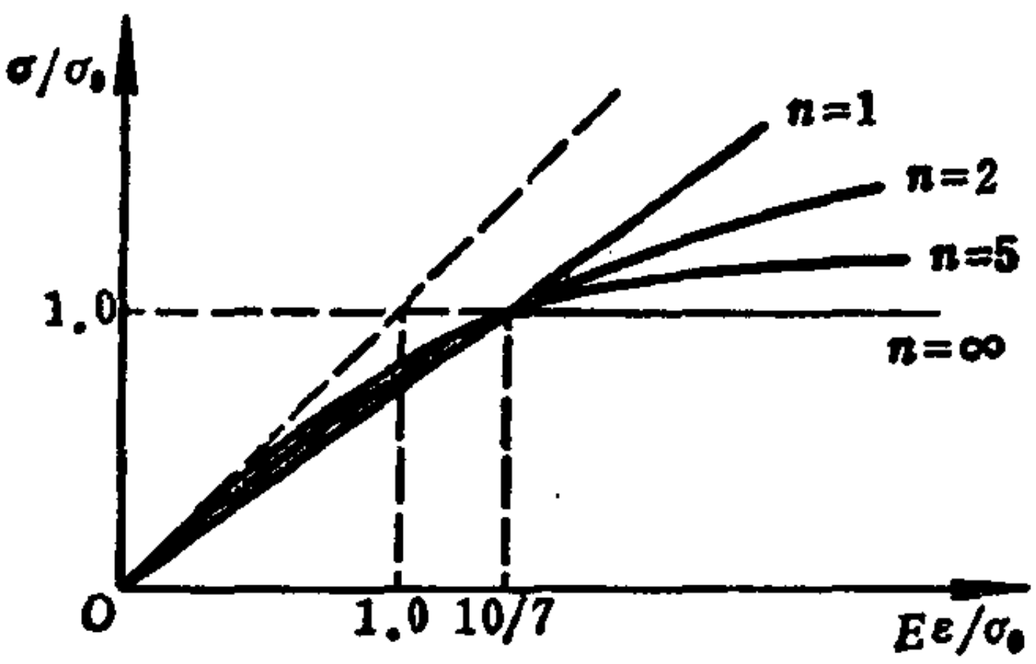



图 6

处的斜率为无穷大，近似性较差，但在数学上比较容易处理。

5. Ramberg-Osgood 模型　其加载规律可写为：

$$\varepsilon/\varepsilon_0 = \sigma/\sigma_0 + \frac{3}{7}(\sigma/\sigma_0)^n。 \qquad (9)$$

如取 $\sigma = \sigma_0$，就有

$$\varepsilon = \frac{10}{7}\varepsilon_0 = \frac{10}{7}\frac{\sigma_0}{E},$$

这对应于割线斜率为$0.7E$的应力和应变。上式中有三个参数可

用来刻画实际材料的拉伸特性，而在数学表达式上也较为简单。

如果总应变较大，则由于弹性应变远小于塑性应变而常常可被忽略。这样的本构模型被称为刚塑性模型。采用这种模型可以使许多问题得到很大的简化。

对于应力改变符号后产生反向屈服的情形，经常采用的简化模型有以下两种：

1．**等向强化模型**　认为拉伸时的强化屈服应力和压缩时的强化屈服应力（绝对值）始终是相等的。其表达式为

$$|\sigma| = \psi(\xi), \tag{10}$$

其中 $\xi$ 是刻画塑性变形历史的参数。例如可取 $\xi = \int |\mathrm{d}\,\varepsilon^p|$ 为塑性应变增量的绝对值累积值，或取 $\xi = W^p = \int \sigma \mathrm{d}\varepsilon^p$ 为塑性功。该模型不论是拉伸还是压缩都使屈服应力（绝对值）提高。这对应于图 2 (a)中的 $NM$ 和 $NM''$。

2．**随动强化模型**　考虑到包氏效应，认为拉伸屈服应力和压缩屈服应力（的代数值）之差，即弹性响应的范围始终是不变的。这对应于图2(a)中的 $NM$ 和 $NM'$。其表达式可写为

$$|\sigma - \psi(\varepsilon^p)| = \sigma_s, \tag{11}$$

其中 $\psi(\varepsilon^p)$是塑性应变 $\varepsilon^p$的单调递增函数。上式在线性强化情形下也可写为

$$|\sigma - h\varepsilon^p| = \sigma_s, \tag{11'}$$

式中$h = \dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\varepsilon^p}$是一个常数。

## §1.4　轴向拉伸时的塑性失稳

由图 2 可见，在应力达到最高点 $C$ 以前，要增加应变就必须增加应力，通常称这时材料是稳定的。而在 $C$ 点以后，增加应变

时应力反而下降，这在通常意义下称试件是不稳定的，即所谓的拉伸失稳。其实，在拉伸时试件的横截面积一般将会减小。尤其当出现颈缩后，试件局部区域的截面积会有明显的减小，再用名义应力 $\sigma$ 和名义应变 $\varepsilon$ 来描述这时的材料拉伸特性是不适当的。

为此，我们可定义真应力

$$\tilde{\sigma} = \frac{P}{A},$$

对数应变

$$\tilde{\varepsilon} = \int_{l_0}^{l} \frac{\mathrm{d}l'}{l'} = \ln(l/l_0) = \ln(1+\varepsilon)$$

和截面积收缩比

$$q = (A_0 - A)/A_0.$$

如假定材料是不可压缩的：$A_0 l_0 = Al$，并认为名义应力达到最高点 $C$ 时出现颈缩：

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon} = 0,$$

则由

$$\tilde{\sigma} = \frac{P}{A_0}\cdot\frac{A_0}{A} = \frac{P}{A_0}\cdot\frac{l}{l_0} = \sigma e^{\tilde{\varepsilon}}$$

可知在颈缩时真应力应满足条件

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\sigma}}{\mathrm{d}\tilde{\varepsilon}} = \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon}\cdot\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\tilde{\varepsilon}}\right)e^{\tilde{\varepsilon}} + \sigma\cdot e^{\tilde{\varepsilon}} = \sigma e^{\tilde{\varepsilon}} = \tilde{\sigma} \qquad (12)$$

图7(a)给出了拉伸时的 $\tilde{\sigma}$-$\tilde{\varepsilon}$ 曲线。拉伸失稳分界点 $C'$ 的斜率正好和该点的纵坐标值相等。

注意到 $\tilde{\sigma} = \sigma(1+\varepsilon)$，

颈缩时的条件也可写为：

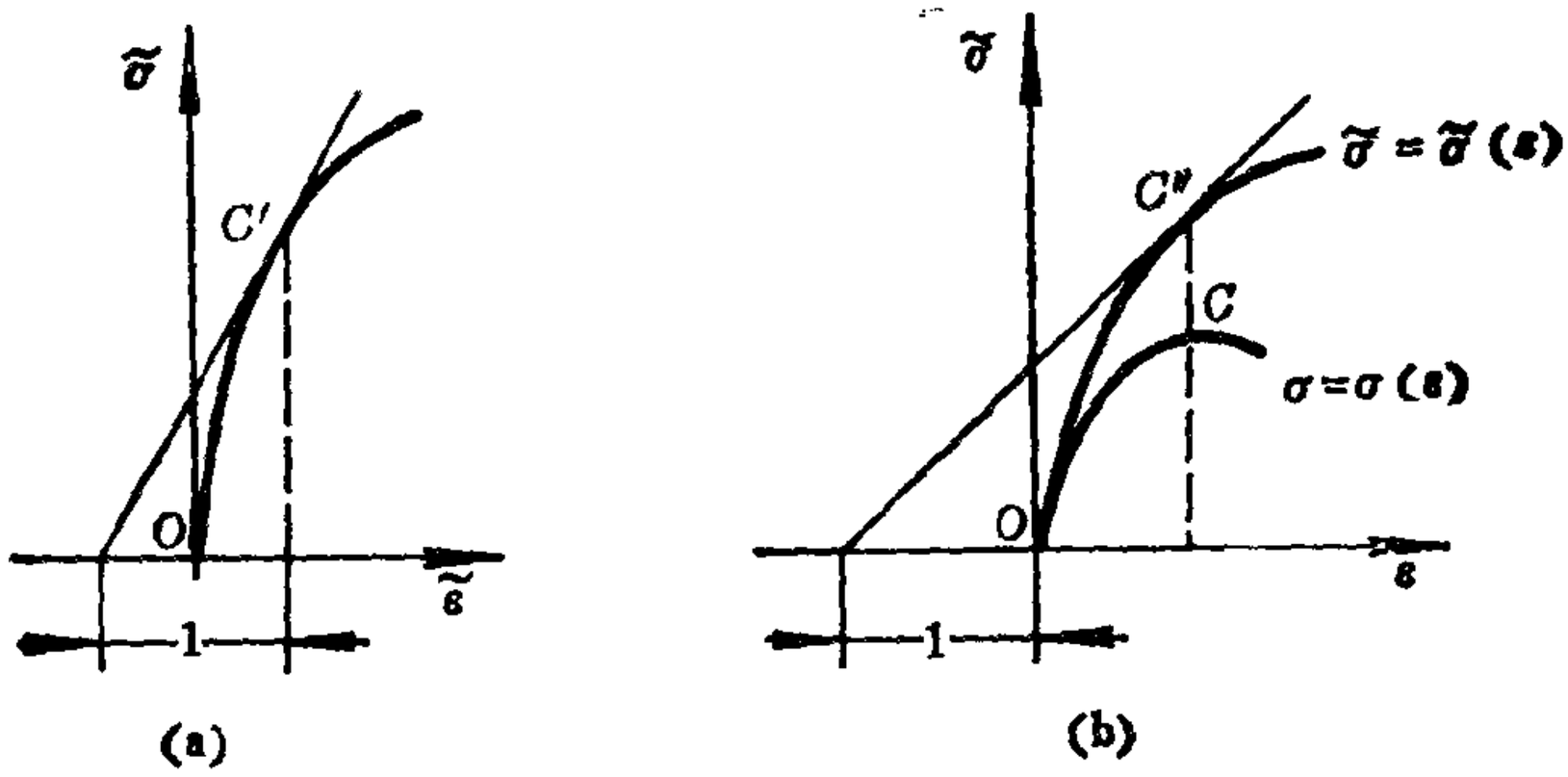



图 7

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\sigma}}{\mathrm{d}\varepsilon}=\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon}\ (1+\varepsilon)+\sigma=\sigma=\frac{\tilde{\sigma}}{1+\varepsilon},$$

即

$$\tilde{\sigma}=\frac{\mathrm{d}\tilde{\sigma}}{\mathrm{d}\varepsilon}(1+\varepsilon)。\qquad(12')$$

故 $\tilde{\sigma}$-ε 曲线在拉伸失稳点 $C''$ 的斜率为其纵坐标值除以$(1+\varepsilon)$(见图7(b))。

如以截面积收缩比 $q$ 为自变量，则由

$$\tilde{\sigma}=\frac{\sigma}{(1-q)},\quad \mathrm{d}\tilde{\varepsilon}=\frac{\mathrm{d}q}{(1-q)}$$

和颈缩时的条件：

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}q}=0$$

可知在拉伸失稳时真应力所满足的条件为

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\sigma}}{\mathrm{d}q}=\frac{\tilde{\sigma}}{(1-q)}。\qquad(12'')$$

除了以上讨论的失稳现象外，还有另一种类型的失稳，称之

为材料本身的失稳现象。例如，在低碳钢拉伸实验中由上屈服应力突然下降到下屈服应力的现象，它与材料变形的内部微观机制的变化有关。此外，随着材料的变形，微裂纹和(或)孔洞的形核，生成及汇合也将会造成材料的弱化而导致失稳，通常称之为应变弱化。当然，在许多问题（如拉伸失稳等）中，以上两种现象往往是耦合的。本书将不准备对此作更多的讨论。

## §1.5 简单桁架的弹塑性分析

本章从这一节开始，将要对图8(a)所示的一次超静定三杆桁架进行有关的弹塑性分析，以期使读者对塑性力学的特点和物理实质有一个较为全面的了解。由于一般的多晶金属材料是由许多取向各不相同的单晶体的集合组成，如将单根杆件与单晶作比拟时，以上的分析对于理解多晶金属材料的弹塑性性质也是有帮助的。

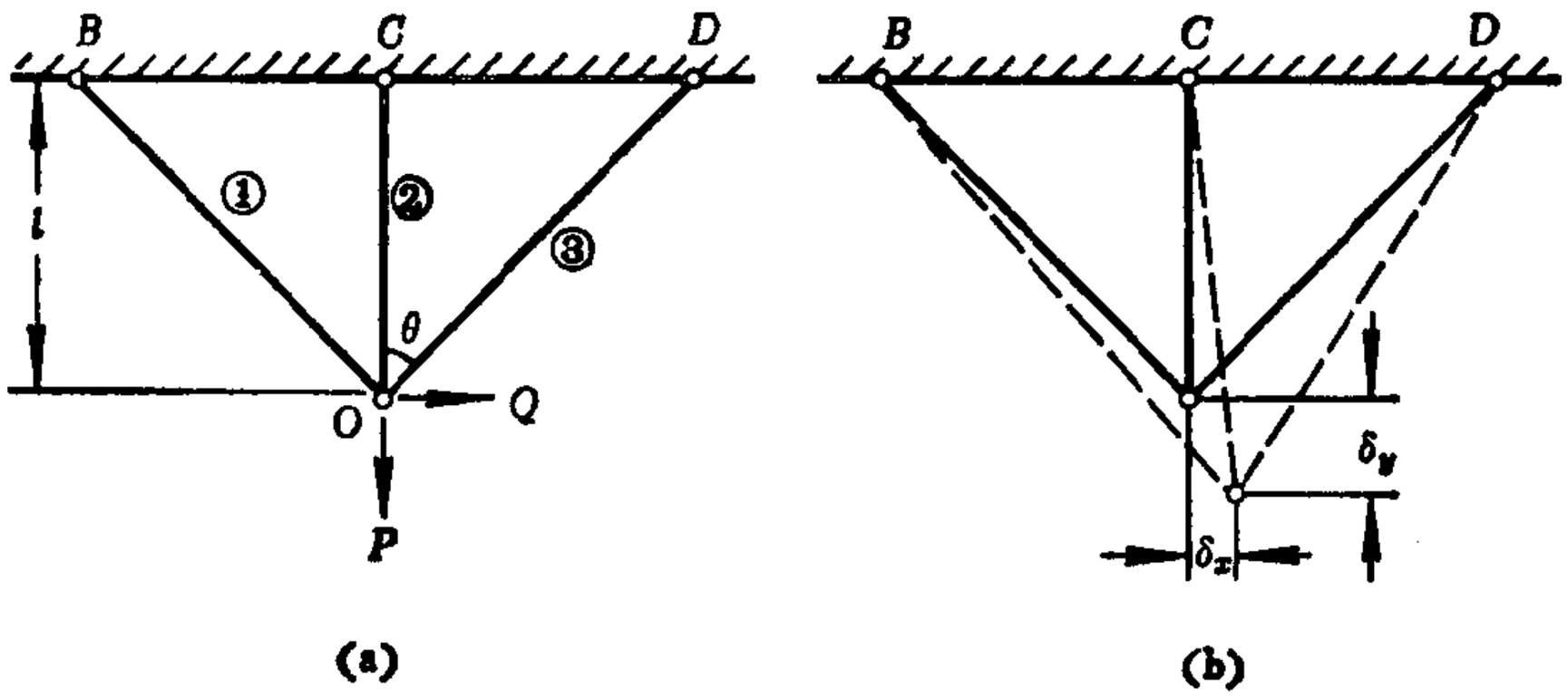



图 8

在图8(a)中，三根杆的截面积均为$A$，中间第二杆的杆长为$l$，它与相邻的第一杆和第三杆的夹角均为$\theta = 45°$，在其交汇点$O$处作用水平力$Q$和垂直向下的力$P$后，$O$点将产生水平位移$\delta_x$和垂直位移$\delta_y$。如定义第$i$ ($i = 1,2,3$)根杆的名义应力为$\sigma_i$，

名义应变为 $\varepsilon_i$，则有如下平衡方程

$$\left.\begin{aligned}\sigma_2+\frac{\sqrt{2}}{2}(\sigma_1+\sigma_3)&=P/A,\\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\sigma_1-\sigma_3)&=Q/A,\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

和几何关系

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_1&=(\delta_y+\delta_x)/(2l),\\ \varepsilon_2&=\delta_y/l,\\ \varepsilon_3&=(\delta_y-\delta_x)/(2l).\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

由上式可知协调条件为

$$\varepsilon_2=\varepsilon_1+\varepsilon_3\tag{15}$$

为了要得到问题的解，还必须补充本构关系。这里，我们先假定材料是理想弹塑性的。

## 一、$Q=0$ 时的弹性解和弹塑性解

现假定水平载荷 $Q$ 始终为零。则由(13)式可知

$$\sigma_1=\sigma_3,\quad \sigma_2+\sqrt{2}\,\sigma_1=P/A.\tag{16}$$

当 $P$ 从零开始增长时，则材料起初处于弹性阶段，本构方程为

$$\sigma_i=E\varepsilon_i,\quad (i=1,2,3)\tag{17}$$

故(15)式可写为

$$\sigma_2=\sigma_1+\sigma_3=2\sigma_1.$$

再与(16)式联立而解得

$$\left\{\begin{aligned}\sigma_1=\sigma_3&=\left(\frac{1}{2+\sqrt{2}}\right)\frac{P}{A}=\frac{\sigma_s}{2}\left(\frac{P}{P_e}\right)\\ \sigma_2&=\left(\frac{2}{2+\sqrt{2}}\right)\frac{P}{A}=\sigma_s\left(\frac{P}{P_e}\right)\end{aligned}\right.\tag{18}$$

上式中 $\sigma_s$ 为屈服应力，而

$$P_s = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) A\sigma_s \qquad (19)$$

为垂直方向上的弹性极限载荷。

垂直向下位移 $\delta_y$ 可由(14),(17)和(18)式求得：

$$\delta_y = \varepsilon_2 l = \left(\frac{\sigma_2}{E}\right) l = \left(\frac{\sigma_s l}{E}\right)\left(\frac{P}{P_e}\right).$$

若令

$$\delta_e = \frac{\sigma_s l}{E},$$

则当 $P$ 由零增至 $P_e$ 时，载荷-位移曲线在图 9 的 $\delta_y/\delta_e \sim P/P_e$ 坐标中为区间[0,1]上斜率等于 1 的直线段 $OA$。

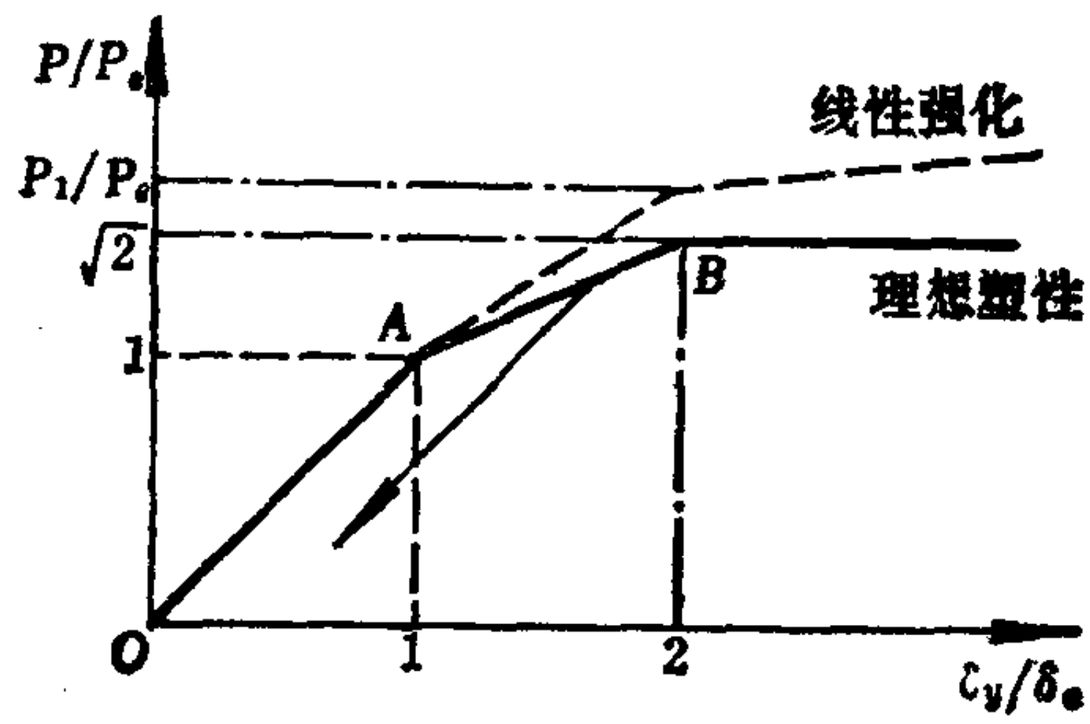



图 9

当 $P$ 由零逐渐增大到 $P_e$ 时，第 2 杆的应力也逐渐增大而达到屈服状态：$\sigma_2 = \sigma_s$。如果 $P$ 的值再继续增加，则(17)式已不再适用，相应的本构方程应改写为

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1, \quad \sigma_2 = \sigma_s, \quad \sigma_3 = E\varepsilon_3. \qquad (20)$$

上式与(15)式和(16)式联立，可得

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{P}{A} - \sigma_s\right) \\ \qquad = \dfrac{\sigma_s}{2}\left[(1+\sqrt{2})\left(\dfrac{P}{P_e}\right) - \sqrt{2}\right], \\ \sigma_2 = \sigma_s, \end{cases} \tag{21}$$

和

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \sigma_1/E, \quad \varepsilon_2 = 2\varepsilon_1. \tag{22}$$

这时的第 2 杆虽然已经屈服而失去了进一步的承载能力，但由于它还受到第 1 杆和第 3 杆弹性变形的制约，其塑性变形不能任意增长，这种状态称为约束塑性变形。直到 $P$ 值逐渐增大到使 $\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma_s$ 时，三根杆将全部进入屈服阶段，变形已不再受任何约束，结构才完全丧失进一步的承载能力。由(21)式可知，这时的载荷 $P$ 为

$$P_s = (1+\sqrt{2})A\sigma_s = \sqrt{2}P_e, \tag{23}$$

称为塑性极限载荷。

与此相应的垂直向下位移可利用(14)式和(22)式求得：

$$\delta_y = \varepsilon_2 l = 2\varepsilon_1 l = \left(\frac{2l}{E}\right)\sigma_1,$$

或

$$\delta_y/\delta_e = (1+\sqrt{2})\left(\frac{P}{P_e}\right) - \sqrt{2}. \tag{24}$$

当 $P = P_s$ 时，

$$P/P_e = \sqrt{2}, \quad \delta_y/\delta_e = 2.$$

(24)式对应于图 9 中在区间[1,2]上斜率为 $\dfrac{1}{(1+\sqrt{2})}$ (<1) 的直线段 $AB$。可见当考虑塑性变形时，结构的变形要比纯弹性变形为大，但仍属同一数量级，而相应的承载能力将会有相当的提高。

## 二、卸载

现将 $P$ 的值加载到处于 $P_e<P<P_s$ 范围内的某一值 $P^*$，然后再卸载使 $P$ 的改变量 $\Delta P<0$. 由于卸载服从弹性规律，利用(18)式的增量形式，可知应力和应变的改变量分别为

$$\Delta\sigma_1=\Delta\sigma_3=\frac{\sigma_s}{2}\left(\frac{\Delta P}{P_e}\right),\quad \Delta\sigma_2=\sigma_s\left(\frac{\Delta P}{P_e}\right),\tag{25}$$

$$\Delta\varepsilon_1=\Delta\varepsilon_3=\Delta\sigma_1/E,\qquad \Delta\varepsilon_2=\Delta\sigma_2/E.\tag{26}$$

卸载时的载荷-位移曲线(见图9)与初始弹性加载时的曲线有相同的斜率。

最终的应力和应变值可由(21)式和(25)式以及(22)式和(26)式的叠加求得。特别地，当载荷 $P$ 值全部卸除后，由 $\Delta P=-P^*$，便得到杆中的残余应力和残余应变(见图10)为：

$$\begin{cases}\sigma_1^r=\sigma_3^r=-\sigma_s\gamma^*>0\\ \sigma_2^r=\sqrt{2}\,\sigma_s\gamma^*<0\\ \varepsilon_1^r=\varepsilon_3^r=-\left(\dfrac{\sigma_s}{E}\right)\gamma^*>0\\ \varepsilon_2^r=2\varepsilon_1^r=-\left(\dfrac{2\sigma_s}{E}\right)\gamma^*>0\end{cases}\tag{27}$$

其中

$$\gamma^*=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{P^*}{P_e}\right)<0,$$

$$(P^*>P_e)\tag{28}$$

而节点 $O$ 的向下残余位移为

$$\delta_y^r=\varepsilon_2^r\cdot l.$$

显然，残余应力应该满足与零外载相对应的平衡方程。由于这里所讨论的是一

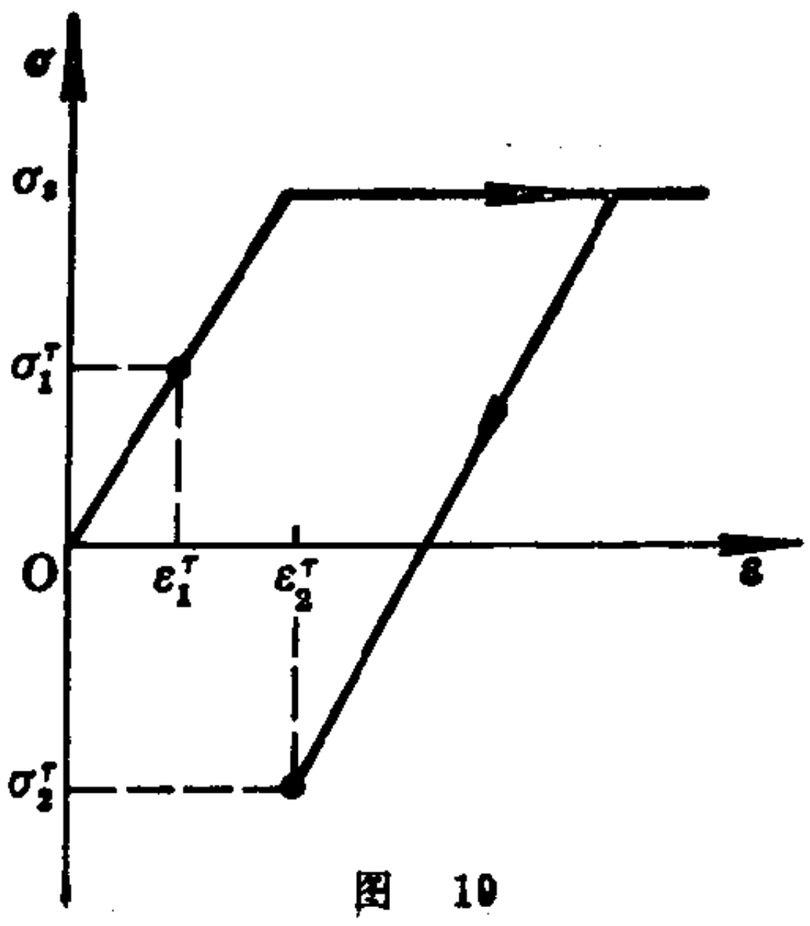


图 10

次超静定结构，故在残余应力表达式中只含有一个与塑性变形历史有关的参数 $\gamma^*$。相应的残余应变由(1)式可分为弹性应变和塑性应变两部分之和：

$$\varepsilon_i^r = \sigma_i^r/E + \varepsilon_i^p \quad (i=1,2,3),$$

由此可见，在超静定结构中残余应变一般并不等于塑性应变。实际上，第 1 杆和第 3 杆并未经受塑性变形，其变形规律始终是弹性的，如果卸去载荷并解除三杆之间约束的话，第 1 杆和第 3 杆中的弹性应变和塑性应变都等于零，而第 2 杆则有塑性应变。故在原有的约束下，就必然会引起内应力而使这三根杆件的残余应变不等于零。

## §1.6 强化效应的影响

本节仍讨论 $Q\equiv 0$ 的情形。现假定材料是线性强化的，不卸载时其拉伸曲线可写为

$$\begin{cases} \sigma = E\varepsilon, & \text{当 } 0\leqslant\sigma\leqslant\sigma_s, \\ \sigma = \sigma_s + E'(\varepsilon-\varepsilon_s), & \text{当 } \sigma>\sigma_s, \end{cases} \tag{29}$$

其中 $\varepsilon_s = \sigma_s/E$。

当 $P\leqslant P_e$ 时，杆中的应力值仍由(18)式表示。

当 $P>P_e$ 时，有

$$\sigma_1=\sigma_3=E\varepsilon_1=E\varepsilon_3,\quad \sigma_2=\sigma_s+E'(\varepsilon_2-\varepsilon_s)$$

将上式与(15)式和(16)式联立，可解得

$$\begin{cases} \sigma_1=\sigma_3=\dfrac{\sigma_s}{2}\left[a_0\left(\dfrac{P}{P_e}-1\right)+1\right], \\ \sigma_2=\sigma_s\left[a_0\left(\dfrac{E'}{E}\right)\left(\dfrac{P}{P_e}-1\right)+1\right], \end{cases} \tag{30}$$

其中

$$\alpha_0 = \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}\,(E'/E)}.$$

再由(14)式，可知垂直向下的位移可表为

$$\frac{\delta_y}{\delta_e} = \left(\frac{E}{\sigma_s}\right)\varepsilon_2 = 2\left(\frac{E}{\sigma_s}\right)\varepsilon_1 = 2\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_s}\right) = \alpha_0\left(\frac{P}{P_e}-1\right)+1.$$

这在图 9 中对应于斜率为$1/\alpha_0$的虚线。因为 $0\leqslant E'/E<1$，故斜率$1/\alpha_0$的值在$\frac{1}{1+\sqrt{2}}$和 1 之间。

当 $P$ 增至使 $\sigma_1=\sigma_3=\sigma_s$ 时，第 1 杆和第 3 杆也开始屈服。此时的载荷值为

$$P_1 = P_s\left[1+\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)\left(\frac{E'}{E}\right)\right].$$

如取 $E'/E=1/10$，则 $P_1=1.041P_s$。与理想弹塑性材料相比，相应的载荷值并没有很大的增加。这说明采用理想弹塑性模型可得到较好的近似，而计算却有相当的简化。当 $P$ 小于 $P_1$ 时，结构的变形仍属于弹性变形的量级，而当 $P$ 超过 $P_1$ 后继续增加时，由于强化效应，结构并不会进入塑性流动状态，但这时的变形将会有较快的增长（图9）。

## §1.7 几何非线性的影响

平衡方程(13)式和几何关系(14)式是在小变形的假设下建立的。当杆件的塑性变形很大时，结构几何尺寸的改变将会产生显著的影响。这时可采用真应力 $\bar{\sigma}_i$ 和对数应变 $\bar{\varepsilon}_i$ 来进行讨论。

现仍考虑$Q\equiv 0$的情形。假定材料是刚塑性线性强化的：

$$\bar{\sigma}_i = E'\bar{\varepsilon}_i + \sigma_s \quad (i=1,2,3), \tag{31}$$

而且满足不可压条件：

$$\begin{cases} l_1 A_1 = l_3 A_3 = \sqrt{2}\, lA, \\ l_2 A_2 = lA. \end{cases}$$

令 $\alpha = \varepsilon_2 = \delta_y / l$，则 $l_2/l = 1 + \alpha$。再通过对图8(b)所作的几何分析可知

$$\frac{l_1}{\sqrt{2}\, l} = \sqrt{1 + \alpha + \frac{1}{2}\alpha^2}.$$

于是

$$\left.\begin{aligned} A_1 = A_3 &= A \Big/ \sqrt{1 + \alpha + \frac{1}{2}\alpha^2}, \\ A_2 &= A/(1+\alpha). \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

在变形后的结构上所建立的平衡方程为

$$2A_1\sigma_1\cos\theta + A_2\sigma_2 = P, \tag{33}$$

其中 $\theta$ 为变形后第 2 杆与第 1 杆(和第 3 杆)之间的夹角，

$$\cos\theta = (1+\alpha) \Big/ \sqrt{2\left(1 + \alpha + \frac{1}{2}\alpha^2\right)},$$

而 $A_1$ 和 $A_2$ 可通过(32)式表出。故(33)式中有三个未知量 $\sigma_1, \sigma_2$ 和$\alpha$。在不卸载的情况下，需要补充的两个本构方程 可 由(31)式给出，其中

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \frac{1}{2}\ln\left(1 + \alpha + \frac{1}{2}\alpha^2\right), \quad \varepsilon_2 = \ln(1+\alpha) \tag{34}$$

这样，我们便得到了 $P$ 与 $\alpha$ 之间的非线性关系。随着 $\alpha = \delta_y/l$ 的增长，$P$ 的值将会由于强化效应和 $\theta$ 角的减小而提高，但也会随着杆件截面积的收缩而下降。故当 $\alpha$ 很大时，结构将可能变成不稳定的(见图11)。

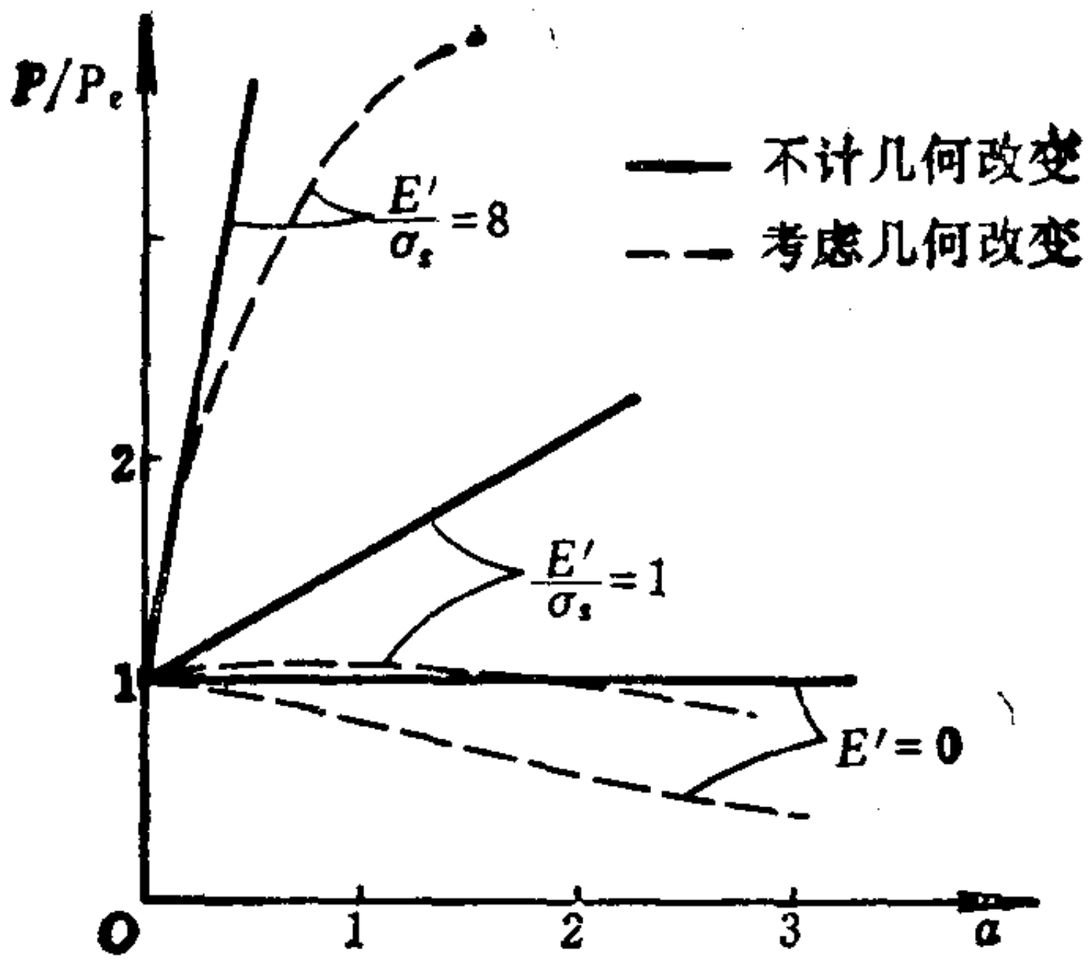



图 11

## §1.8 弹性极限曲线

从本节起，我们将考虑前述桁架同时受垂直载荷 $P$ 和水平载荷 $Q$ 作用的情形。如果桁架中的三根杆件都处于弹性阶段，则由(13),(14),(15)和(17)各式，可求得杆中应力为

$$\begin{cases} \sigma_1 = \left(\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}\right)\dfrac{P}{A} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{Q}{A} = \dfrac{\sigma_s}{2}\left(\dfrac{P}{P_e}\right) + \sigma_s\left(\dfrac{Q}{Q_e}\right), \\ \sigma_2 = \left(\dfrac{2}{2+\sqrt{2}}\right)\dfrac{P}{A} = \sigma_s\left(\dfrac{P}{P_e}\right), \\ \sigma_3 = \left(\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}\right)\dfrac{P}{A} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{Q}{A} = \dfrac{\sigma_s}{2}\left(\dfrac{P}{P_e}\right) - \sigma_s\left(\dfrac{Q}{Q_e}\right), \end{cases} \tag{35}$$

其中，$Q_e = \sqrt{2}A\sigma_s$ 表示只作用水平力时的弹性极限载荷。

(35)式成立的条件为

$$|\sigma_i| \leqslant \sigma_s \quad (i = 1,2,3)。$$

这相当于对 $P$ 和 $Q$ 的限制条件：

$$\left.\begin{aligned}&\left|\frac{P}{2P_e}\pm\frac{Q}{Q_e}\right|\leqslant 1,\\&\left|\frac{P}{P_e}\right|\leqslant 1.\end{aligned}\right\}\tag{36}$$

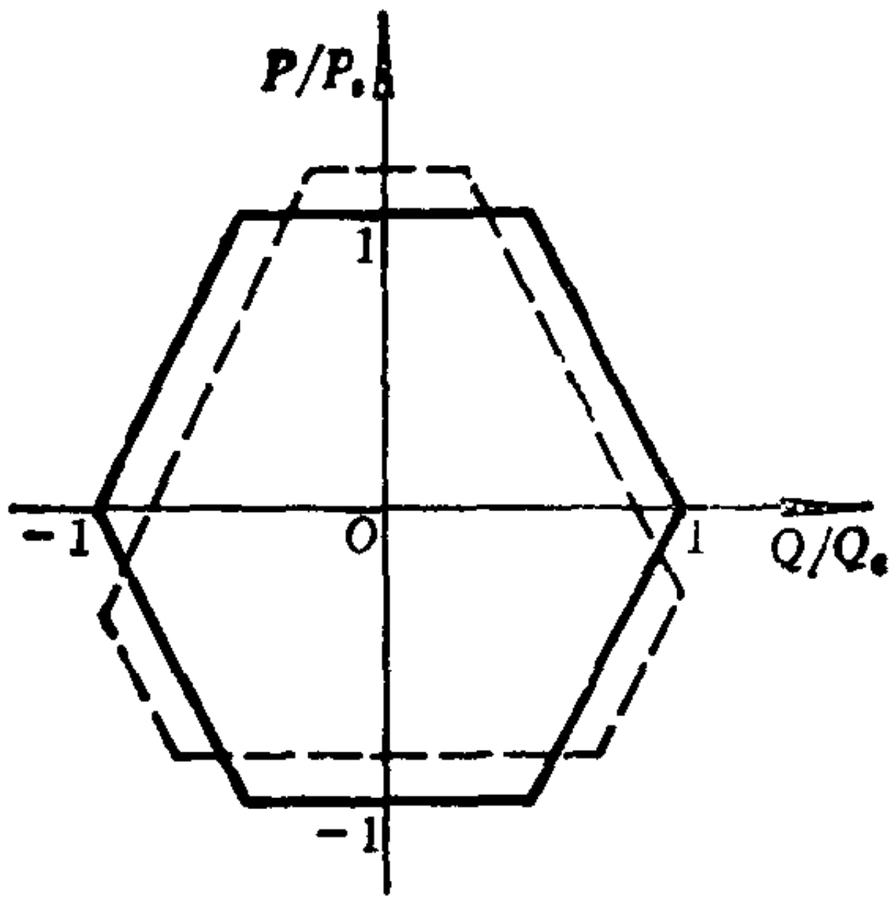



图 12

上式对应于图12中粗线六边形区域，其中等号则对应于该六边形的边界，称为弹性极限曲线，表示至少有一根杆件已达到屈服状态。

如果作用于结构上的载荷先是超出了弹性极限曲线，然后又完全卸回到零，那么结构中将存在残余应力。由于残余应力与零外载相平衡，故可写成(27)式的形式：

$$\begin{cases}\sigma_1^r=\sigma_3^r=-\sigma_s\gamma^*,\\ \sigma_2^r=\sqrt{2}\,\sigma_s\gamma^*,\end{cases}$$

其中 $\gamma^*$ 是一个可以变化的参数。例如，与加载历史 $Q=0, P=P^*>P_e$ 相对应的 $\gamma^*$ 值可由(28)式来表示。

在存在残余应力的情况下，如果再重新对结构施加载荷 $Q$ 和 $P$ 而未能再次屈服，那么结构中的应力值就应该是以上的残余应力与(35)式的叠加。不产生新的塑性变形的限制条件可写为

$$\left.\begin{aligned}&\left|\frac{P}{2P_e}\pm\frac{Q}{Q_e}-\gamma^*\right|\leqslant 1,\\&\left|\frac{P}{P_e}+\sqrt{2}\,\gamma^*\right|\leqslant 1,\end{aligned}\right\}\tag{37}$$

其中与(28)式相对应的 $\gamma^*$ 值满足 $(\sqrt{2}/2-1)\leqslant\gamma^*<0$。(37)式

对应于图12中由虚线所构成的六边形区域。可见，在加载方向一侧屈服载荷有所提高而与加载方向相反的一侧屈服载荷有所降低。这与多晶体内各晶粒由于其变形程度不同而产生微观残余应力的情形很类似，可用来对应变硬化和包氏效应等现象做一个比较形象的解释。

## §1.9 加载路径的影响

塑性力学的特点之一就是解对加载路径的依赖性。现以上述的理想弹塑性三杆桁架为例，来计算在两种不同加载路径下O点的最终水平位移和最终垂直位移($\delta_x, \delta_y$)。

在第一种路径下，$(Q,P)$先由$(0,0)$线性地变化为$(0,P_s)$，再在垂直位移保持不变的条件下增加$Q$使达到$Q_e$。以下的分析表明，这对应于图13(a)中的路径①。

由以前计算结果可知，当$Q=0$，$P=P_s$时，

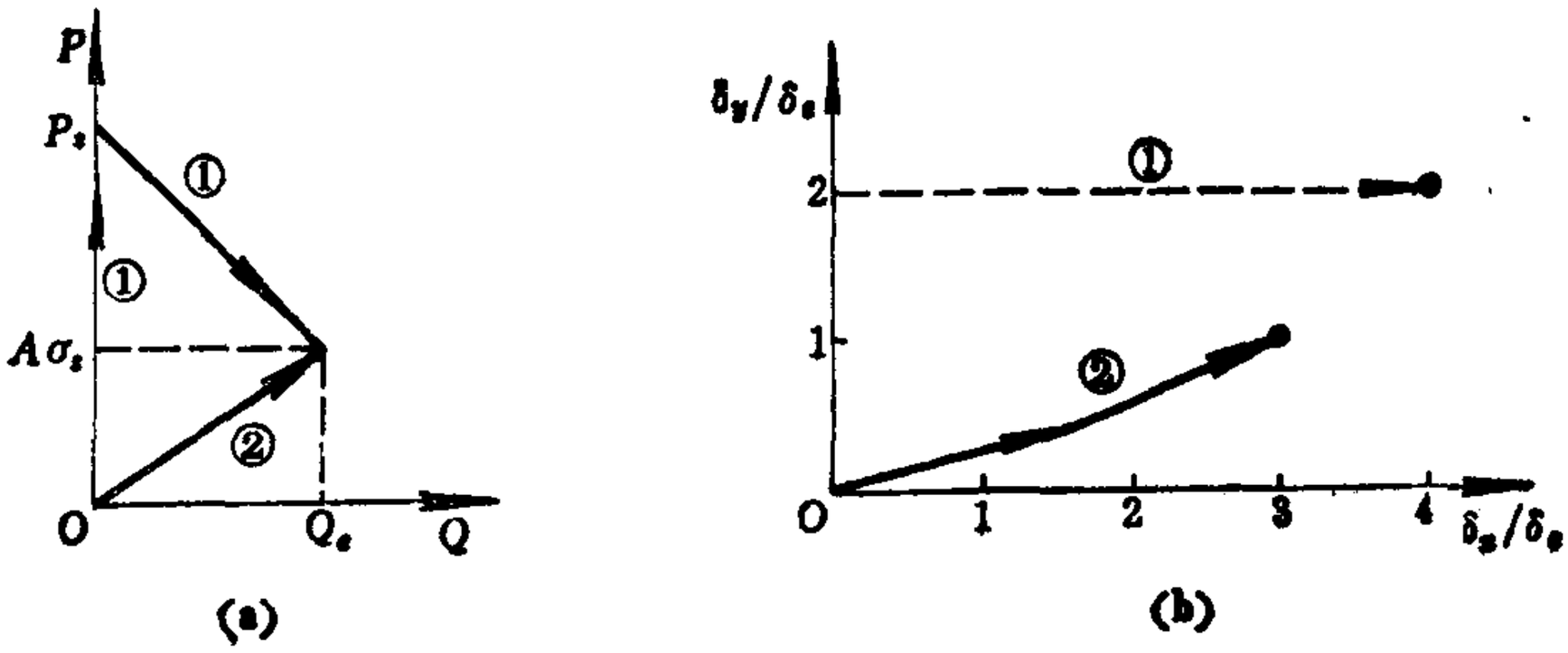



图 13

$$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\sigma_s,\quad \delta_y=2\delta_e=2\left(\frac{\sigma_s l}{E}\right).$$

如保持$\delta_y=2\delta_e$不变而施加水平方向的载荷$Q$，使点$O$有一个水

平方向的位移增量 $\Delta\delta_x=\delta_x>0$，则由几何关系(14)式：

$$\Delta\varepsilon_1=\frac{\Delta\delta_x}{2l}>0,\quad \Delta\varepsilon_2=\frac{\Delta\delta_y}{l}=0,\quad \Delta\varepsilon_3=-\frac{\Delta\delta_x}{2l}<0,$$

可知第 1 杆和第 2 杆并未卸载：

$$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_s,\quad \Delta\sigma_1=\Delta\sigma_2=0,$$

而第 3 杆以弹性规律卸载：

$$\Delta\sigma_3=E\Delta\varepsilon_3=-E\left(\frac{\delta_x}{2l}\right). \tag{38}$$

于是，由(13)式可求得载荷增量为：

$$\Delta P=\left(\frac{\sqrt{2}A}{2}\right)\Delta\sigma_3,\quad Q=\Delta Q=-\left(\frac{\sqrt{2}A}{2}\right)\Delta\sigma_3=-\Delta P,$$

即 $Q$ 与 $P$ 之间的变化规律是线性的。当第 3 杆卸载到 $\sigma_3=-\sigma_s$ 时，由 $\Delta\sigma_3=-2\sigma_s$ 得

$$Q=\Delta Q=\sqrt{2}A\sigma_s,\Delta P=-\sqrt{2}A\sigma_s,\quad P=P_s+\Delta P=A\sigma_s.$$

这时三根杆同时屈服，即结构再次进入塑性流动状态。各杆的应力为

$$(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=(\sigma_s,\sigma_s,-\sigma_s).$$

水平位移 $\delta_x$ 可由(38)式中取 $\Delta\sigma_3=-2\sigma_s$ 求得，垂直位移 $\delta_y$ 始终保持不变。因此有：

$$(\bar{\delta}_x,\bar{\delta}_y)=(4\delta_e,2\delta_e) \tag{39}$$

在第二种路径下，$(Q,P)$ 由 $(0,0)$ 作单调的比例加载而达到 $(\sqrt{2}A\sigma_s,A\sigma_s)$。这对应于图13(a)中的路径②。

由于加载时始终有关系式 $Q=\sqrt{2}P$，故将其代入(35)式可得初始弹性阶段的解为：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1 &= \left(\frac{1}{2+\sqrt{2}}+1\right)\frac{P}{A}>0,\\ \sigma_2 &= \left(\frac{2}{2+\sqrt{2}}\right)\frac{P}{A}>0,\\ \sigma_3 &= \left(\frac{1}{2+\sqrt{2}}-1\right)\frac{P}{A}<0,\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

上式表明，随着 $P$(和 $Q=\sqrt{2}P$)的增长，第 1 杆最先达到屈服，当 $\sigma_1=\sigma_s$ 时，

$$P=\bar{P}_e=\left(\frac{2+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}\right)A\sigma_s,$$

而各杆的应力为：

$$\sigma_1^e=\sigma_s,\quad \sigma_2^e=\left(\frac{2}{3+\sqrt{2}}\right)\sigma_s,\quad \sigma_3^e=-\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}\right)\sigma_s. \tag{41}$$

再由各杆的应变值 $\varepsilon_i^e=\sigma_i^e/E$，$(i=1,2,3)$和几何关系(14)式可求得此时 $O$ 点的位移值为

$$\delta_x^e=2\left(\frac{2+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}\right)\delta_e,\quad \delta_y^e=\left(\frac{2}{3+\sqrt{2}}\right)\delta_e. \tag{42}$$

如继续加载，则第 1 杆进入屈服阶段，$\sigma_1=\sigma_s$，$\Delta\sigma_1=0$。故由 $\Delta Q=\sqrt{2}\,\Delta P$ 和(13)式的增量形式可知

$$\Delta\sigma_2=(1+\sqrt{2})\Delta P/A>0,\ \Delta\sigma_3=-2\Delta P/A<0. \tag{43}$$

这说明第 2 杆继续受拉，第 3 杆继续受压。各杆应力可由(41)式和(43)式计算：

$$\sigma_1=\sigma_s,\quad \sigma_2=\sigma_2^e+\Delta\sigma_2,\quad \sigma_3=\sigma_3^e+\Delta\sigma_3.$$

当 $\Delta P=\left(\frac{1}{3+\sqrt{2}}\right)A\sigma_s$，三杆同时进入塑性状态，即

$$(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=(\sigma_s,\sigma_s,-\sigma_s).$$

再利用(43)式

$$\Delta\varepsilon_2 = \Delta\sigma_2/E = (1+\sqrt{2})\left(\frac{\Delta P}{AE}\right),\quad \Delta\varepsilon_3 = \Delta\sigma_3/E = -\frac{2\Delta P}{AE}$$

和(14)式的增量形式

$$\Delta\delta_x = (\Delta\varepsilon_2 - 2\Delta\varepsilon_3)l,\quad \Delta\delta_y = \Delta\varepsilon_2 l$$

便可求出对应于 $\Delta P = \left(\frac{1}{3+\sqrt{2}}\right)A\sigma_s$ 时的位移增量：

$$\Delta\delta_x = \left(\frac{5+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}\right)\delta_e,\quad \Delta\delta_y = \left(\frac{1+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}\right)\delta_e.$$

最终位移则是上式和(42)式的叠加：

$$\delta_x = 3\delta_e,\quad \delta_y = \delta_e. \tag{44}$$

比较(39)式和(44)式，可知在两种加载路径下虽然可得到相同的应力值，但各杆的应变和O点最终位移值却是不同的。对于更复杂的超静定结构和更复杂的加载路径，结构中的应力值一般也是不相同的。

## §1.10 极限载荷曲线(面)

当(37)式中有两个不等式同时变为等式(而其余的不等式仍成立)时，$(Q,P)$的值将处于图12的虚线六边形的顶点。这相当于桁架中已有两根杆达到屈服，结构变为一个能产生塑性流动的机构而丧失了进一步承载的能力。相应的载荷就是塑性极限载荷。随着 $\gamma^*$ 的改变，这个极限载荷在$(Q,P)$平面上的轨迹将形成一条曲线，称为极限载荷曲线(在多维载荷空间中则称为极限载荷曲面)。

与图12的弹性极限曲线不同，我们将会发现极限载荷曲线是结构的固有属性，它不依赖于加载历史。对于图8的三杆桁架，

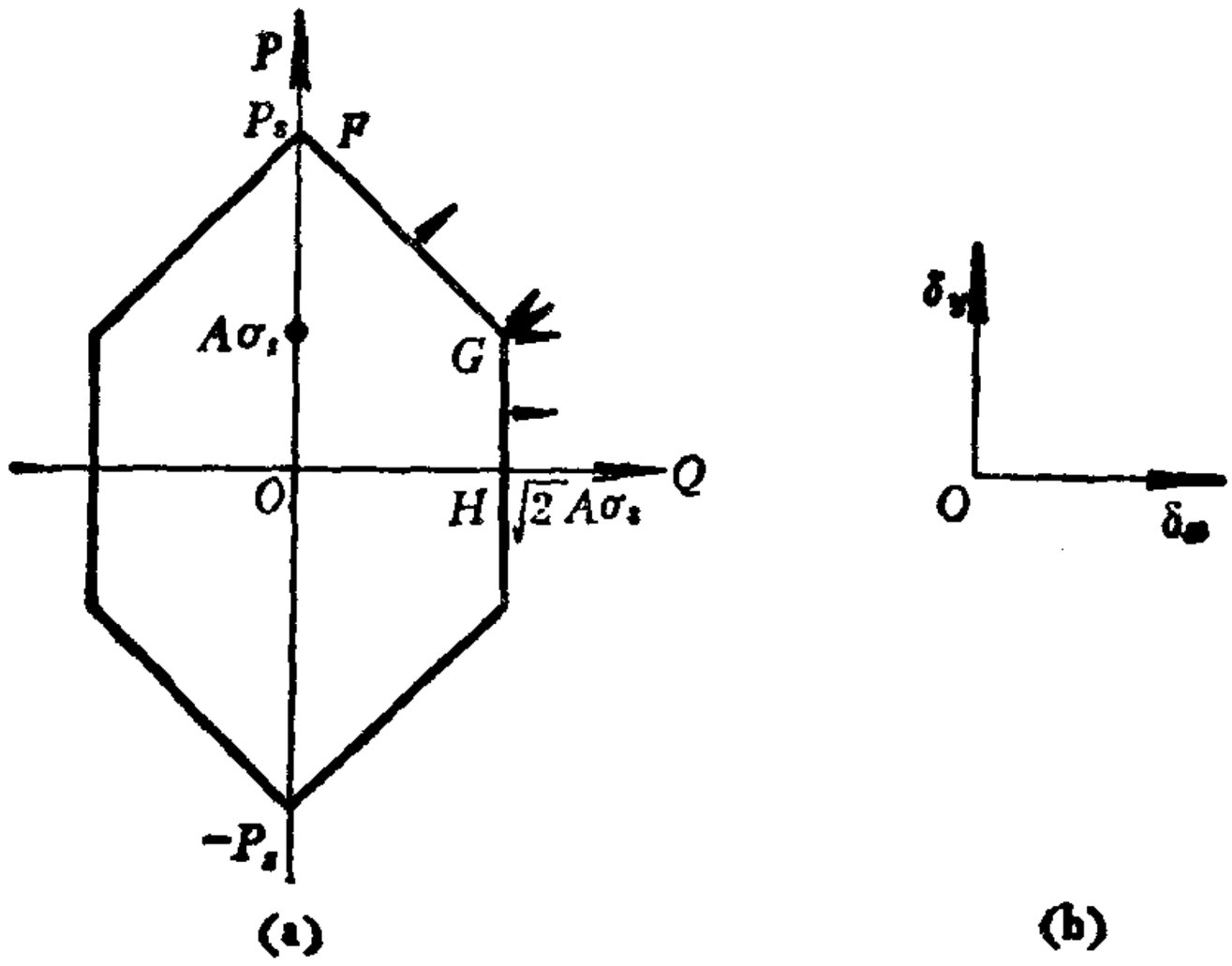



图 14

可先设法求得$(Q,P)$平面在第一象限$(Q,P\geqslant 0)$内的极限载荷曲线，再根据$\pm Q$和$\pm P$的四种组合和拉、压屈服应力相等的假设，由对称性条件来获得整个平面上的极限载荷曲线(见图14)。

$(Q,P)$平面在第一象限内的极限载荷曲线可由以下方法求得：设加载是按比例$P=\eta Q(\eta>0)$增至极限载荷的。当$\eta$很大时，第1杆和第2杆先达到拉伸屈服，即$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_s$。故由(13)式可得

$$P=\frac{\eta}{1+\eta}P_s,\quad Q=\frac{1}{1+\eta}P_s,$$

其中$P_s$由(23)式给出。于是有：

$$Q+P=P_s=\text{常数} \tag{45}$$

这对应于图14中的线段$FG$。当$\eta$很小时，第1杆达到拉伸屈服而第3杆达到压缩屈服：

$$\sigma_1=-\sigma_3=\sigma_s.$$

同样由(13)式可得

$$P=\eta Q_e,\quad Q=Q_e,$$

其中 $Q_e=\sqrt{2}A\sigma_s$。　也即

$$Q=Q_e=\text{常数}。\tag{46}$$

这对应于图14中的线段 $GH$。图中的 $G$ 点相当于在(45)式或(46)式中取 $\eta=\frac{1}{\sqrt{2}}$。这时三根杆同时进入屈服状态。

最后，我们将不加证明地给出极限载荷曲线(面)的以下几点性质：(1) 极限载荷曲线(面)是唯一的，它与加载路径无关。(2) 极限载荷曲线(面)是外凸的。(3) 在极限载荷曲线(面)上，与外载荷相对应的位移增量的方向指向该曲线(面)的外法向。例如，当载荷值$(Q,P)$取定在图14的线段 $FG$ 上时，第1杆和第2杆将产生沿拉伸方向的塑性流动，而第3杆的长度保持不变。因此，位移增量(或位移的变化率)只可能沿着 $FG$ 的外法向。当载荷值$(Q,P)$取定在线段 $GH$ 上时，第1杆将沿拉伸方向，第3杆将沿压缩方向塑性流动，而第2杆的长度不变，因此位移增量只可能沿 $GH$ 的外法向。最后，当载荷值$(Q,P)$在角点 $G$ 上时，由于第1杆和第2杆沿拉伸方向塑性流动，第3杆沿压缩方向塑性流动，因此，位移增量的方向可在 $FG$ 线外法向与 $GH$ 线外法向之间的45°角内变化。

## §1.11* 安定问题

由上节讨论可知，外载荷的变化范围是不能超出极限载荷曲线(面)的。现假定结构受到周期性变化或某种规律变化的载荷的作用。这种加载称为变值加载。人们自然会问：变值加载在多大的范围内变化时才能保证结构不被破坏？显然，当变值加载在弹性极限曲线(面)的范围内变化时，结构始终呈弹性响应而不致破坏。此外，变值加载的变化范围也可能会超出弹性极限曲线(面)，但如果结构在经过有限次塑性变形而达到一定的残余应力状态

后，外载荷的继续作用将使该结构在此残余应力之上仍然作弹性响应的话，则结构也可认为是安全的。这时我们就称结构处于安定状态(shake-down state)。反之，在循环载荷的作用下，结构也可能会产生如下两种形式的破坏。其一是在外载的重复作用下，结构中的某些部位总是交替地产生异号的塑性变化，从而导致结构的塑性循环(或称低周疲劳)破坏；其二是外载在每一次重复过程中，结构中的某些部位总要产生同号的塑性变形，经过多次重复后，由于塑性变形的累积而导致结构的塑性累积破坏。处于以上两种状态下的结构则称为是不安定的。

现在，我们来对图 8 所示的理想弹塑性桁架进行安定分析。如前所叙，该桁架中的残余应力可表示为：

$$\begin{cases} \sigma_1^r = \sigma_3^r = -\sigma_s \gamma^*, \\ \sigma_2^r = \sqrt{2}\,\sigma_s \gamma^*. \end{cases} \tag{47}$$

杆中可能的应力值可由上式与弹性解(35)式的叠加求得：

$$\begin{cases} \sigma_1 = \left[ -\gamma^* + \frac{1}{2}\left(\frac{P}{P_e}\right) + \frac{Q}{Q_e} \right]\sigma_s \\ \sigma_2 = \left[ \sqrt{2}\,\gamma^* + \left(\frac{P}{P_e}\right) \right]\sigma_s \\ \sigma_3 = \left[ -\gamma^* + \frac{1}{2}\left(\frac{P}{P_e}\right) - \frac{Q}{Q_e} \right]\sigma_s \end{cases} \tag{48}$$

在经过一定的塑性变形之后，如果结构不再产生新的塑性变形的话，就意味着存在某一个残余应力状态(即某一固定的 $\gamma^*$ 值)，使以后的响应始终满足条件

$$|\sigma_i| \leqslant \sigma_s \quad (i = 1,2,3), \tag{49}$$

而其中的 $\sigma_i$ 由(48)式给出。

根据(48)式和(49)式，我们可以确定当结构安定时，载荷

$P/P_e$ 和 $Q/Q_e$ 所允许的变化范围。例如，对于 $Q=0$ 的情形，若假定 $P/P_e$ 的最大值和最小值分别为 $(P/P_e)^+$ 和 $(P/P_e)^-$，则由(48)式和(49)式可知 $(P/P_e)^+$ 和 $(P/P_e)^-$ 应满足：

$$-1\leqslant -\gamma^* + \frac{1}{2}\left(\frac{P}{P_e}\right)^-,\quad -\gamma^* + \frac{1}{2}\left(\frac{P}{P_e}\right)^+ \leqslant 1,$$

$$-1\leqslant \sqrt{2}\gamma^* + \left(\frac{P}{P_e}\right)^-,\quad \sqrt{2}\gamma^* + \left(\frac{P}{P_e}\right)^+ \leqslant 1.$$

即有

$$\begin{cases} -1+\frac{1}{2}\left(\frac{P}{P_e}\right)^+ \leqslant \gamma^* \leqslant 1+\frac{1}{2}\left(\frac{P}{P_e}\right)^-, \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\left[1+\left(\frac{P}{P_e}\right)^-\right] \leqslant \gamma^* \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1-\left(\frac{P}{P_e}\right)^+\right]. \end{cases}$$

因此要求有

$$\left(\frac{P}{P_e}\right)^+ - \left(\frac{P}{P_e}\right)^- \leqslant 2,\quad -\sqrt{2} \leqslant \left(\frac{P}{P_e}\right)^-,\ \left(\frac{P}{P_e}\right)^+ \leqslant \sqrt{2}.$$

(48)式表明，结构中真实的应力 $\sigma_i$ 是纯弹性解应力 $\sigma_i^E$ 和残余应力 $\sigma_i^r$ 的叠加：

$$\sigma_i = \sigma_i^E + \sigma_i^r,$$

其中 $\sigma_i^E$ 与外载荷 $(Q,P)$ 相平衡，相应的应变可记为 $\varepsilon_i^E = \sigma_i^E/E$，$\sigma_i^r$ 与零外载相平衡，相应的残余应变可定义为 $\varepsilon_i^r = \varepsilon_i - \varepsilon_i^E$。

注意到 $\varepsilon_i = \varepsilon_i^e + \varepsilon_i^p$ 和 $\varepsilon_i^e = \sigma_i/E$，残余应变可写为

$$\varepsilon_i^r = \frac{\sigma_i^r}{E} + \varepsilon_i^p \quad (i=1,2,3), \tag{50}$$

另外，由于残余应变 $\varepsilon_i^r$ 也满足协调条件(15)式，故由(47),(50)式可得

$$(\varepsilon_1^p + \varepsilon_3^p - \varepsilon_2^p) = (\sigma_2^r - \sigma_1^r - \sigma_3^r)/E = (2+\sqrt{2})\left(\frac{\sigma_s}{E}\right)\gamma^*.$$

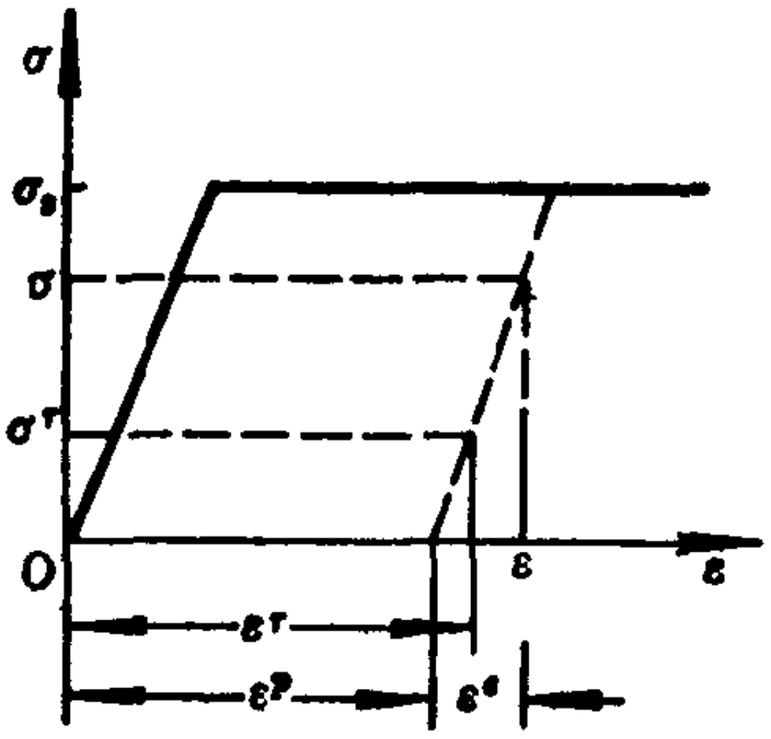



图 15

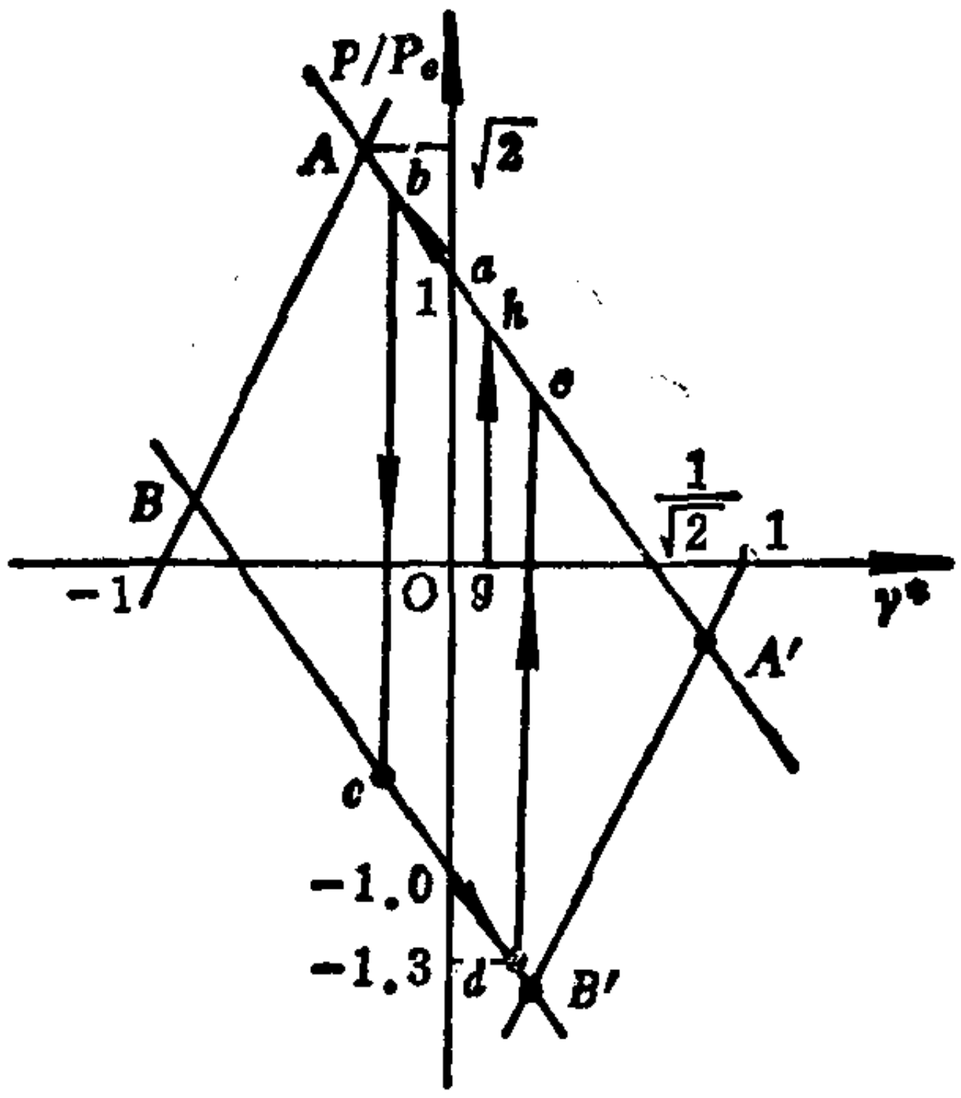



图 16

于是，杆中塑性应变的改变量和残余应力的改变量之间存在关系式

$$\Delta\varepsilon_1^p + \Delta\varepsilon_3^p - \Delta\varepsilon_2^p = (2+\sqrt{2})\left(\frac{\sigma_s}{E}\right)\Delta\gamma^*. \tag{51}$$

可见当残余应力有改变时，就意味着结构中发生过进一步的塑性变形。

下面来考虑两种使结构不安定的加载路径。

1. **Q 始终为零** (49)式所表示的区域可由图 16 给出。区域边界对应于(49)式中的等式，即

$$\begin{cases} \dfrac{\sigma_1}{\sigma_s} = \dfrac{\sigma_3}{\sigma_s} = -\gamma^* + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{P}{P_e}\right) = \pm 1, \\ \dfrac{\sigma_2}{\sigma_s} = \sqrt{2}\,\gamma^* + \left(\dfrac{P}{P_e}\right) = \pm 1. \end{cases} \tag{52}$$

这表明至少有一杆已达到屈服。 例如线段 $AA'$ 对应于 $\sigma_2 = \sigma_s$，进一步的塑性变形将使 $\varepsilon_2^p$ 有一增量，而 1 杆和 3 杆 仍 处于弹性

阶段，故由 $\Delta\varepsilon_1^p=\Delta\varepsilon_3^p=0$，(51)式可写为

$$\Delta\gamma^*=-\frac{E\Delta\varepsilon_2^p}{(2+\sqrt{2})\sigma_s}.$$

对于其它的边界，也可有相应的关系。

现假定载荷 $P$ 在 $-1.3P_e$ 和 $1.2P_e$ 之间循环地变化（注意，这里 $|P|<P_s$，故在一次加载下结构是安全的），如果初始残余应力对应于图16中的 $g$ 点。在循环加载过程中，相应的状态可由如下的点列表示：

$$g\to h\to a\to b\to c\to d\to e\to b\to c\to\cdots$$

以后的状态总是 $b\to c\to d\to e\to b\to\cdots$ 而与初始残余应力无关。在 $e\to b$ 段上，由 $\Delta\gamma^*<0$ 可知 $\Delta\varepsilon_2^p>0$，第 2 杆产生拉伸塑性变形；在 $c\to d$ 段上，由 $\Delta\gamma^*>0$ 可知 $\Delta\varepsilon_2^p<0$，第 2 杆产生压缩塑性变形。载荷的每一循环都使第 2 杆产生数值上相等的正向和反向塑性变形，这种交替的塑性变形将导致结构的塑性疲劳破坏。

显然，如果 $P/P_e$ 的最大值与最小值的差不大于 2，则经过一定的循环加载后，结构的状态将会与某一固定的残余应力状态（即某一固定的 $\gamma^*$ 值）相对应。以后始终有

$$\Delta\gamma^*=0,\quad \varepsilon_i^p=0\ (i=1,2,3),$$

结构是安定的。这与以前的讨论是一致的。

2．加载方式始终满足如下的规律：

$$P-Q=\sqrt{2}A\sigma_s.$$

这时，(48)式可写为：

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_1&=\left[-\gamma^*+(1+\sqrt{2})\left(\frac{Q}{P_s}\right)+\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)\right]\sigma_s,\\
\sigma_2&=\sqrt{2}\left[\gamma^*+\left(\frac{Q}{P_s}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)\right]\sigma_s,\\
\sigma_3&=\left[-\gamma^*-\left(\frac{Q}{P_s}\right)+\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)\right]\sigma_s.
\end{aligned}\right\}\qquad(53)$$

(49)式所表示的区域可由图17给出，其中 $AB$ 对应于 $\sigma_1=\sigma_s$ 或

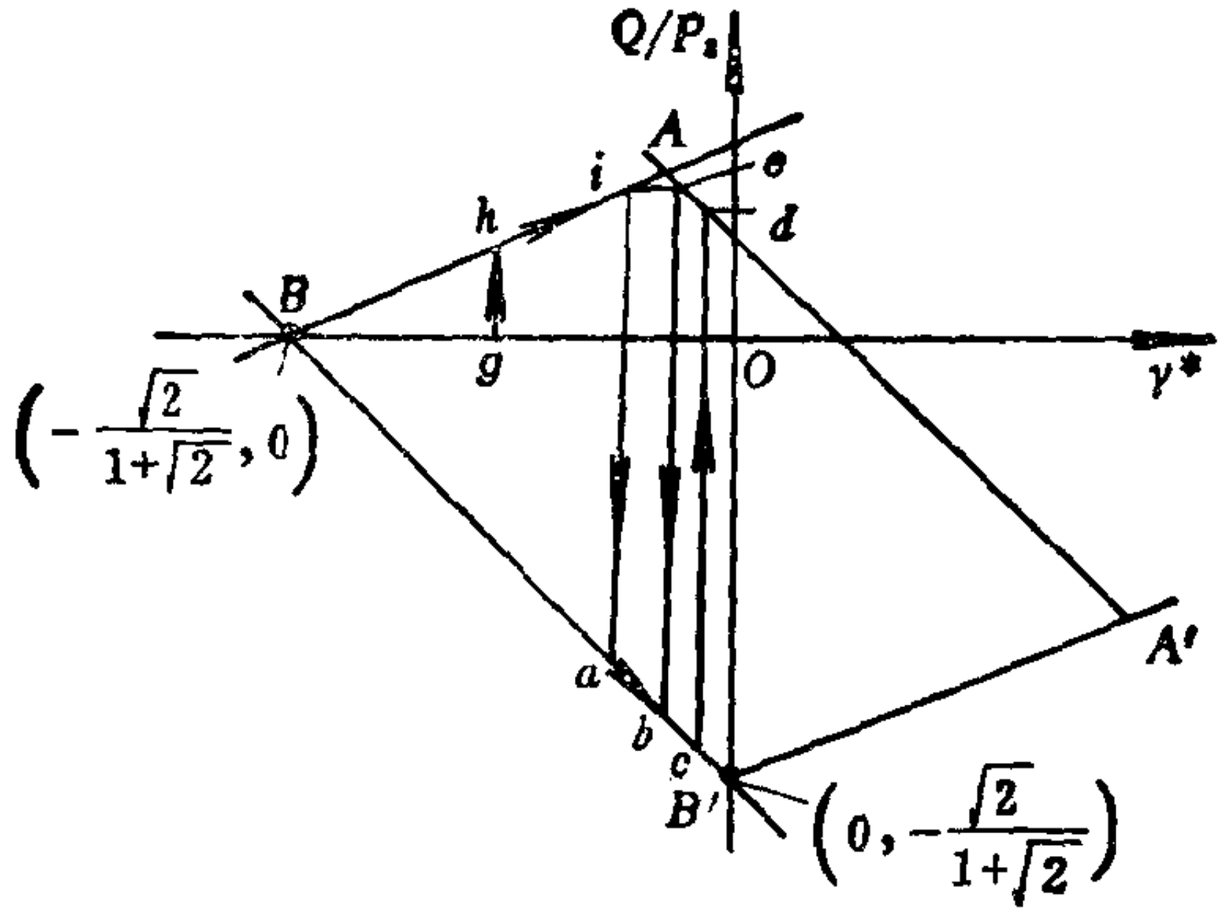



图 17

$$\left(1+\sqrt{2}\right)\left(\frac{Q}{P_s}\right)-\gamma^*=\left(\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right);$$

$A'B'$ 对应于 $\sigma_1=-\sigma_s$ 或

$$\left(1+\sqrt{2}\right)\left(\frac{Q}{P_s}\right)-\gamma^*=-\sqrt{2};$$

$AA'$ 对应于 $\sigma_2=\sigma_s$ 或

$$\left(\frac{Q}{P_s}\right)+\gamma^*=\frac{\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{2})^2};$$

$BB'$ 对应于 $\sigma_3=\sigma_s$ 或

$$\left(\frac{Q}{P_s}\right)+\gamma^*=-\left(\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right).$$

与 $\sigma_2=-\sigma_s$ 和 $\sigma_3=-\sigma_s$ 相对应的直线在区域 $ABA'B'$ 之外，是结构不可能达到的状态，故图中没有画出。

现假定载荷 $Q$ 在 $-0.55P_s$ 和 $0.2P_s$ 之间循环地变化，并设初始残余应力对应于图17中的 $g$ 点。在循环加载过程中，相应的状态可由如下的点列表示：

$$g\to h\to i\to a\to b\to c\to d\to e\to b\to\cdots$$

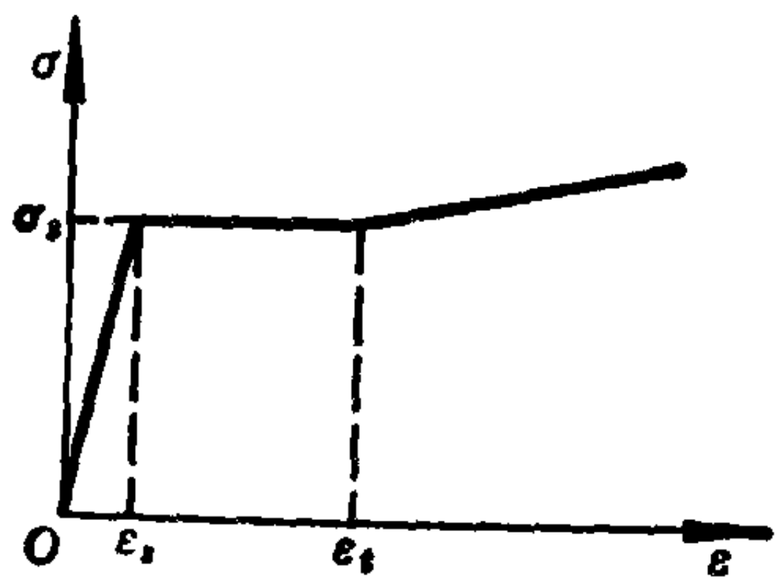
以后的状态总是 $b\to c\to d\to e\to b\to\cdots$而与初始残余 应 力无关。在 $h\to i$ 段上，由 $\Delta\gamma^*>0$ 和(51)式可知 $\Delta\varepsilon_1^p>0$，第 1 杆产生拉伸塑性变形。 在 $b\to c$ 段上， 由 $\Delta\gamma^*>0$ 和(51)式可知 $\Delta\varepsilon_3^p>0$，第 3 杆产生拉伸塑 性变形。 在 $d\to e$ 段上， 由 $\Delta\gamma^*<0$ 和(51)式可知 $\Delta\varepsilon_2^p>0$,第 2 杆产生拉伸塑性变形。载荷的每一循环都 使第 2 杆和第 3 杆产生数值上相等的正向塑性变形，因此，经过多次重复加载后，结构将由于过大的塑性变形而导致塑性累积破坏。

显然，如果 $Q/P_s$ 的最大值与最小值的差不大于$\sqrt{2}/2$，循环载荷的作用将会使结构的残余应力状态稳定在某一固定的$\gamma^*$值上，这时的结构是安定的。

此外，由于温度变化而引起的循环热应力也可能会造成结构的不安定性，读者不难做出类似的讨论。

## 习　　题

1.1　已知简单拉伸时的应力应变曲线 $\sigma=f_1(\varepsilon)$如图所示，并可用下式表示




题　1.1

$$\sigma=f_1(\varepsilon)=\begin{cases}E\varepsilon, & 0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_s,\\ \sigma_s, & \varepsilon_s\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_t,\\ \sigma_s+E'(\varepsilon-\varepsilon_t), & \varepsilon_t\leqslant\varepsilon.\end{cases}$$

问当采用刚塑性模型时，略去 $\varepsilon^e$，取 $\varepsilon=\varepsilon^p$，应力应变曲线变成 $\sigma=f_2(e^p)=f_2(\varepsilon)$形式，试给出 $f_2(\varepsilon)$表达式。

1.2 为了使幂次强化应力应变曲线在 $\varepsilon\leqslant\varepsilon_s$ 时能满足虎克定律，建议采用以下应力应变曲线

$$\sigma=\begin{cases}E\varepsilon, & 0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_s,\\ B(\varepsilon-\varepsilon_0)^m, & \varepsilon_s\leqslant\varepsilon.\end{cases}$$

1）为保证 $\sigma$ 及 $d\sigma/d\varepsilon$ 在 $\varepsilon=\varepsilon_s$ 处连续，试确定 $B,\varepsilon_0$ 值。

2）如将该曲线表示成 $\sigma=E\varepsilon[1-\omega(\varepsilon)]$形式，试给出 $\omega(\varepsilon)$的表达式。

1.3 设材料在单向拉伸时的 $\sigma=f_1(\varepsilon)$曲线由题 1.1 的公式给出。对于等向强化模型取 $|\sigma|=\psi(\xi)$形式，这里取

$$\xi=W^p=\int_0^{\varepsilon^p}\sigma d\varepsilon^p,$$

即以塑性功作为刻划塑性变形历史的参数，试导出$\psi(\xi)$的表达式。

1.4 对于线性随动强化模型，屈服时的应力与塑性应变之间满足关系

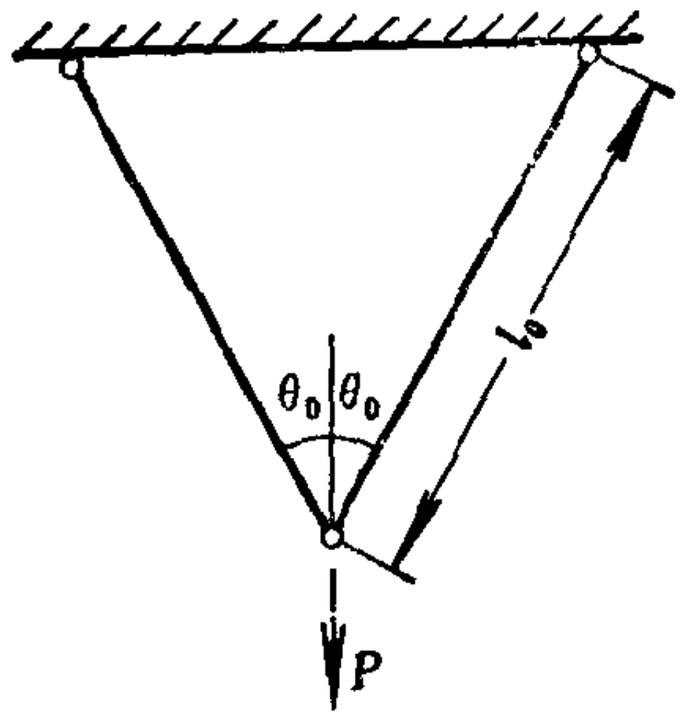
$$|\sigma-h\varepsilon^p|=\sigma_s,\quad h=\frac{EE'}{E-E'}.$$

若设 $E'=E/100$，并给出应力路径为 $0\to1.5\sigma_s\to0\to-\sigma_s\to0$，试求对应的应变值

1.5 已知某材料的拉伸曲线为 $\sigma=c\varepsilon^{0.2}$，问对应的 $\sigma=\sigma(\varepsilon)$曲线是什么形式？又失稳时的 $\varepsilon=\varepsilon_c$ 值等于多少？

1.6 由题 1.5 中的材料所组成的二杆桁架受垂直向下力 $P$ 的作用如图所示。在加载前杆长为 $l_0$，杆截面积为$A_0$，杆与铅垂线夹角为 $\theta_0$，加载后这些值相应的用 $l,A,\theta$ 表示。杆的材料假定是不可压缩的。

1）夹角 $\theta$ 随 $P$ 而变，试导出 $P=P(\theta)$表达式。



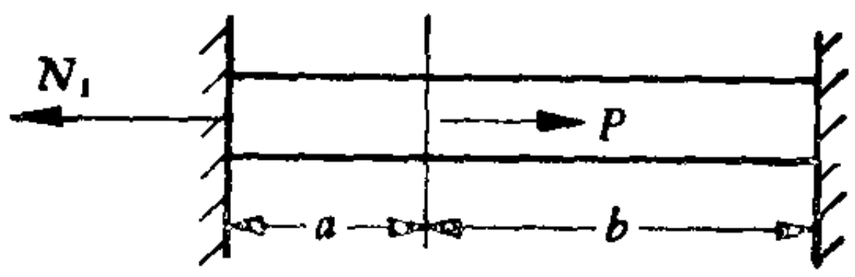

题 1.6

2）当 $P$ 达到最大值时，求这时对应的杆应变 $\varepsilon=\varepsilon_m$ 值。

3）当杆出现拉伸失稳时，求这时对应的 $P=P_c$ 值。

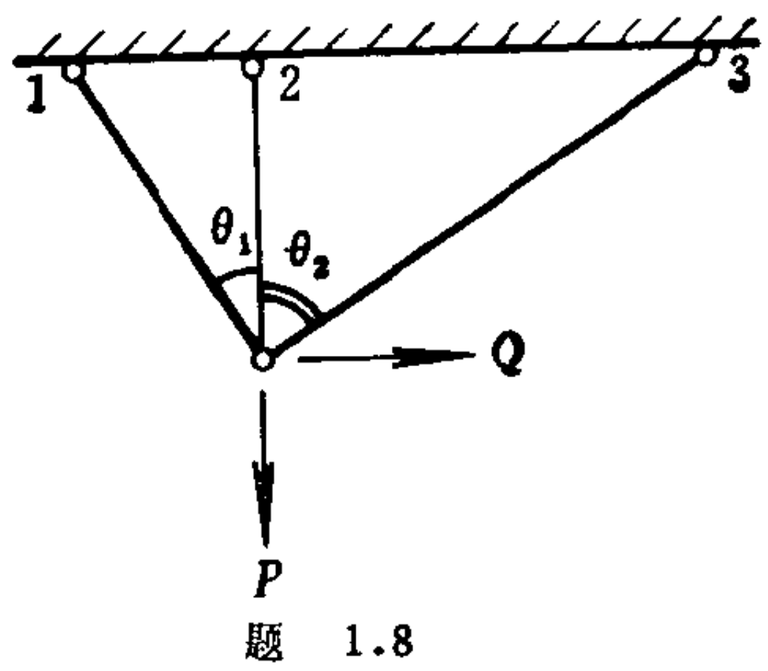
4）根据 $\varepsilon_m$ 及拉伸失稳时 $\varepsilon_c$ 值，判断桁架的承载能力由什么来确定？

1.7 如图所示的等截面杆，截面积为 $A$。在 $x=a$ 处 $(b>a)$ 作用一逐渐增加的力 $P$。该杆的材料是线性强化弹塑性的，拉伸和压缩时规律一样，求左端反力 $N_1$ 与力 $P$ 的关系。




题 1.7

1.8 如图所示的三杆桁架，杆的材料是理想弹塑性的，并有同样的截面积 $A$。杆 1 和杆 3 与铅垂线的夹角分别为 $\theta_1$ 和 $\theta_2$，桁架受外载 $P\geqslant 0$ 和 $Q\geqslant 0$ 作用。求桁架在达到塑性极限状态时由 $P$ 和 $Q$ 表示的极限载荷曲线。分别对 $\theta_1=30°$，$\theta_2=60°$ 及 $\theta_1=60°$，




题 1.8

$\theta_2 = 30°$ 两种情形进行讨论。

1.9 对题 1.8 所示桁架，取$\theta_1 = \theta_2 = 60°$。杆的材料是理想弹塑性的。加载时保持$P = Q$并从零开始增加。求三杆内力 $N_1, N_2, N_3$ 随 $P$ 变化的规律。

1.10 对上题的桁架，除了将杆的材料改为幂次强化

$$\sigma = B|\varepsilon|^{0.5}\operatorname{sign}\varepsilon$$

以外，其它条件都不改变，求三杆内力随 $P$ 变化的规律。

1.11 对 §1.11的桁架例子，已知外载的变化范围是

$$0 \leqslant P/P_e \leqslant \lambda,\quad 0 \leqslant Q/Q_e \leqslant \lambda,$$

试确定能保证桁架处在安定状态时所允许的最大 $\lambda$ 值。

# 第二章　梁的弹塑性弯曲及梁和刚架的塑性极限分析

## §2.1　矩形截面梁的弹塑性纯弯曲

本章将对梁和刚架进行弹塑性分析。仍采用材料力学中关于梁的两个假定：

①平截面假定：梁的横截面在变形之后仍然保持平面。

②截面上正应力对变形的影响是主要的，其它应力分量的影响可以忽略。故应力应变关系可简化为正应力 $\sigma$ 和正应变 $\varepsilon$ 之间的关系。

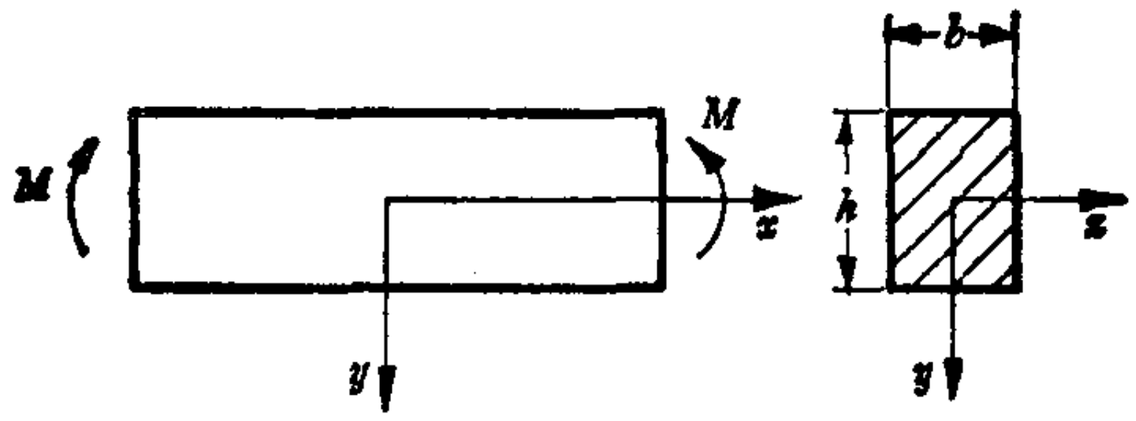



图　1

在图 1 所示的矩形截面梁中，如取 $x$ 轴为其中心线，$y$ 轴指向梁的挠度方向，梁的受力状态对称于 $x$–$y$ 平面时，由平截面假定可知截面上的正应变 $\varepsilon$ 为：

$$\varepsilon = Ky + \varepsilon_0. \tag{1}$$

其中 $K$ 为曲率，$K$ 和 $\varepsilon_0$ 都只是 $x$ 的函数。对于小变形情形，有

$$K = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{2}$$

上式中挠度 $w$ 以指向 $y$ 轴的方向为正。

因为正应变与坐标 $z$ 无关，故由第二个假定，可知正应力 $\sigma$ 也与坐标 $z$ 无关。因此，轴向力 $N$ 和弯矩 $M$ 可写为

$$N = b\int_{-h/2}^{h/2} \sigma(x,y)\,\mathrm{d}y, \qquad (3)$$

$$M = b\int_{-h/2}^{h/2} y\sigma(x,y)\,\mathrm{d}y, \qquad (4)$$

上式中 $b$ 和 $h$ 分别为矩形截面的宽度和高度。由于本节只考虑梁的纯弯曲问题，故(3)式中轴向力为零，$N=0$，而(4)式的弯矩 $M$ 与 $x$ 无关。

## 一、弹性阶段

将

$$\sigma = E\varepsilon = E(Ky + \varepsilon_0) \qquad (5)$$

代入(3)式和(4)式，则由条件 $N=0$ 可得 $\varepsilon_0 = 0$，因此有

$$M = 2bEK\int_0^{h/2} y^2 dy = EJK, \qquad (6)$$

其中，$J = \frac{1}{12}bh^3$ 为截面的惯性矩。这说明弯矩和曲率之间有线性关系。再代回(5)式，得

$$\sigma = \frac{M}{J}y, \qquad (7)$$

即应力分布与 $y$ 成比例。在梁的最上层和最下层，应力的绝对值最大，故开始屈服所对应的弯矩为

$$M = M_e = \frac{bh^2}{6}\sigma_s \qquad (8)$$

称为弹性极限弯矩．相应的曲率可由最外层处应力 $\sigma=\sigma_s$ 求得：

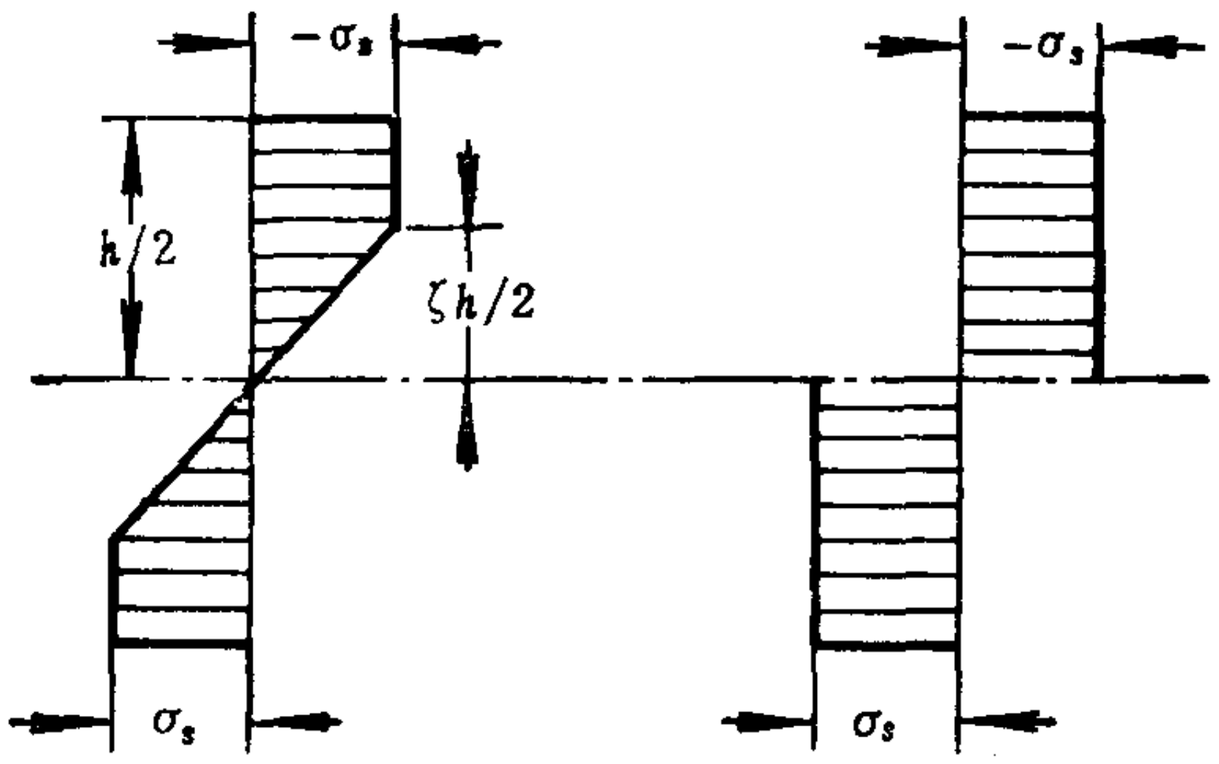
$$K_e=\frac{2\sigma_s}{Eh}=\frac{2\varepsilon_s}{h}. \tag{9}$$

于是，（6）式的无量纲形式可写为

$$M/M_e=K/K_e. \tag{6'}$$

## 二、弹塑性阶段

现考虑 $M>M_e$ 的情形．随着$M$值的增长，塑性区将由梁的外层向内逐渐扩大(见图 2)．设弹塑性区交界处的 $y$ 值为 $\pm y_0$，




$(M_e<M<M_s)$　　$(M=M_s)$

图　2

而 $y_0=\zeta h/2$，则有

$$\sigma=\begin{cases}EKy, & \text{当 } |y|\leqslant y_0,\\ \sigma_s, & \text{当 } y_0\leqslant y\leqslant h/2,\\ -\sigma_s, & \text{当 } -y_0\geqslant y\geqslant -h/2.\end{cases} \tag{10}$$

截面上的弯矩可写为

$$M(y_0)=2b\left\{\int_0^{y_0} y\cdot\left(\frac{y}{y_0}\right)\sigma_s\,\mathrm{d}y+\int_{y_0}^{h/2} y\cdot\sigma_s\,\mathrm{d}y\right\}$$

或

$$|M(\zeta)| = \frac{M_e}{2}(3-\zeta^2) \quad (0\leqslant\zeta\leqslant 1). \tag{11}$$

(10)式中，对应于 $y=y_0$ 的应力为 $\sigma=\sigma_s$，故 $\zeta$ 与曲率 $K$ 之间有关系

$$K = K_e/\zeta.$$

因为以上推导是在 $M>0$ 的情形下求得的，故当同时考虑 $M<0$ 的情形时，上式应写为

$$K = (\text{sign } M)K_e/\zeta, \tag{12}$$

其中假定 $\zeta$ 始终是非负的。于是，(11)式也可写为

$$\left|\frac{M}{M_e}\right| = \frac{1}{2}[3-(K_e/K)^2] \tag{13}$$

或

$$\frac{K}{K_e} = (\text{sign } M)\frac{1}{\sqrt{3-2|M|/M_e}}. \tag{14}$$

以上关系表示在图 3 中。它表明虽然梁截面的外层纤维已进入塑性屈服阶段，但由于其中间部分仍处于弹性阶段，“平截面”的变形特性限制了外层纤维塑性变形的大小，因而它们是处于约束塑性变形状态，梁的曲率完全由中间弹性部分控制。

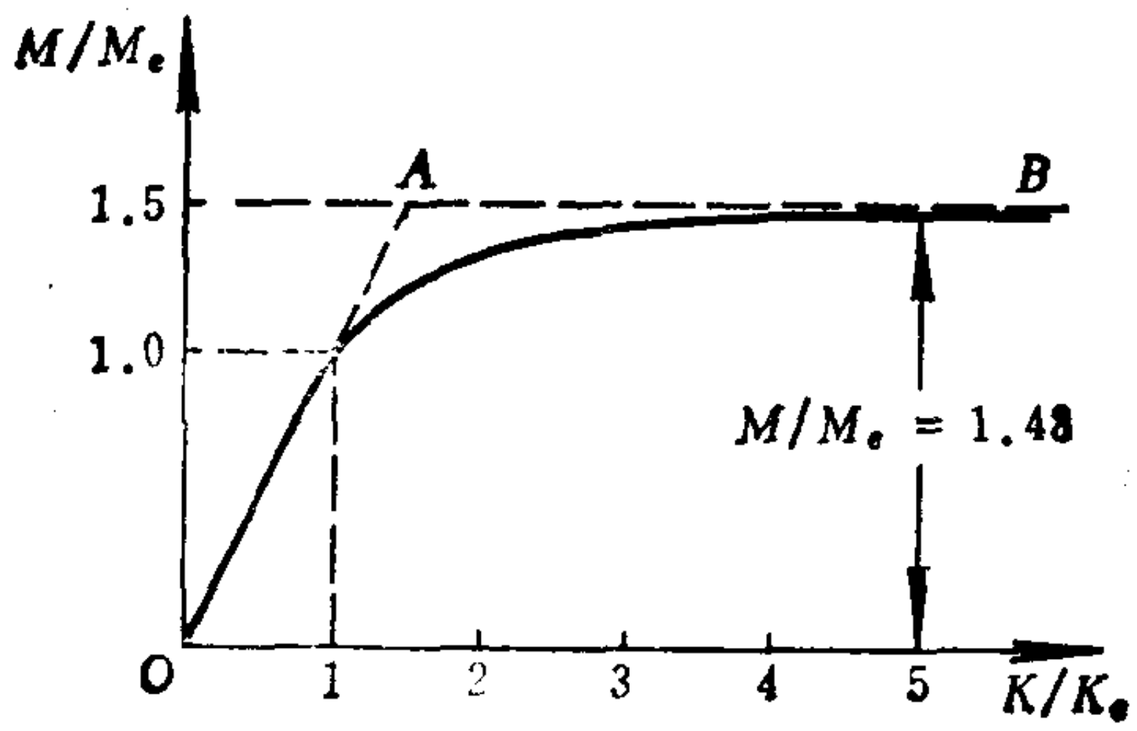



图 3

随着$M$的增大，$\zeta$将逐渐减小。当$\zeta$趋于零时，$M$趋近于塑性极限弯矩：

$$M = M_s = \frac{3}{2}M_e = \frac{\sigma_s}{4}bh^2 \qquad (15)$$

这时梁丧失了进一步承受弯矩的能力。而弹性区也收缩为零。在$y = \pm 0$处上下纤维的正应力从$+\sigma_s$跳到$-\sigma_s$，出现了正应力的强间断。这种由于弹性区趋于零而出现应力间断的现象在塑性力学中是经常会遇到的。

由图3可以看出，当$K = 5K_e$时，$M = 1.48M_e$，说明当变形限制在弹性变形的量级时，材料的塑性变形可以使梁的抗弯能力得到提高。(15)式表明，对于矩形截面梁，$M_s/M_e = 1.5$。对于不同形状的截面，$M_s/M_e$的值也不相同。例如，对圆形截面，有$M_s/M_e = 16/3\pi \approx 1.7$；对薄圆管，有$M_s/M_e \approx 1.27$；而工字梁的$M_s/M_e$约为1.07。

最后指出，非线性关系(13)式或(14)式在实际计算中往往是很不方便的。为简单起见，$M \sim K$之间的关系也常用图3中的折线$OAB$来近似。

## 三、卸载时的残余曲率和残余应力

如果起初加在梁段上的弯矩超过弹性极限弯矩，$M^* > M_e$，则在卸载时$M \sim K$之间应服从弹性规律。弯矩的改变量$\Delta M$和曲率的改变量$\Delta K$之间的关系可由(6′)式给出：

$$\Delta M/M_e = \Delta K/K_e,$$

而应力的改变量为

$$\Delta\sigma = (\Delta K)Ey = \left(\frac{\Delta M}{J}\right)y. \qquad (16)$$

若弯矩$M^*$完全卸到零，则由$\Delta M = -M^*$和(14)式可得残余曲率的表达式为

$$\frac{K^0}{K_e}=\frac{1}{\sqrt{3-2M^*/M_e}}-\frac{M^*}{M_e}. \tag{17}$$

由于在 $M^*$ 作用下的曲率 $K^*$ 满足(14)式，故卸载后的残余曲率 $K^0$ 与未卸载时的曲率 $K^*$ 之比为：

$$K^0/K^*=1-\left|\frac{M^*}{M_e}\right|\sqrt{3-2\left|\frac{M^*}{M_e}\right|},$$

或利用(13)式而写为

$$K^0/K^*=1-\frac{3}{2}\left|\frac{K_e}{K^*}\right|+\frac{1}{2}\left|\frac{K_e}{K^*}\right|^3,$$

上式适用于 $M_s>|M^*|\geqslant M_e$ 或 $|K^*|\geqslant K_e=\frac{2\sigma_s}{Eh}$ 的情形，当 $|K^*|\leqslant K_e$ 时，显然有 $K^0=0$。

残余应力分布是(10)式和(16)式的叠加，在 $y>0$ 的区域内的表达式可写为

$$\sigma^0=\begin{cases} EK^*y-\dfrac{M^*}{J}y=\dfrac{1}{J\zeta_*}(M_e-\zeta_*M^*)y, & 0\leqslant y\leqslant\zeta_*h/2, \\ \sigma_s-\dfrac{M^*}{J}y, & \zeta_*h/2\leqslant y\leqslant h/2, \end{cases} \tag{18}$$

其中 $K^*=K_e/\zeta_*$ 与 $M^*$ 之间的关系由(13)式或(14)式给出。

由(18)式可知：

1. $M_e-\zeta_*M^*=M_e\left(1-\frac{3}{2}\zeta_*+\frac{1}{2}\zeta_*^3\right)\geqslant 0$，故在内部弹性区$\left(\text{即}|y|\leqslant\frac{h}{2}\zeta_*\right)$的残余应力 $\sigma^0$ 仍保留原来的符号。

2. 卸载时，应力变化最大的部位在梁的最外层：$|y|=h/2$。由

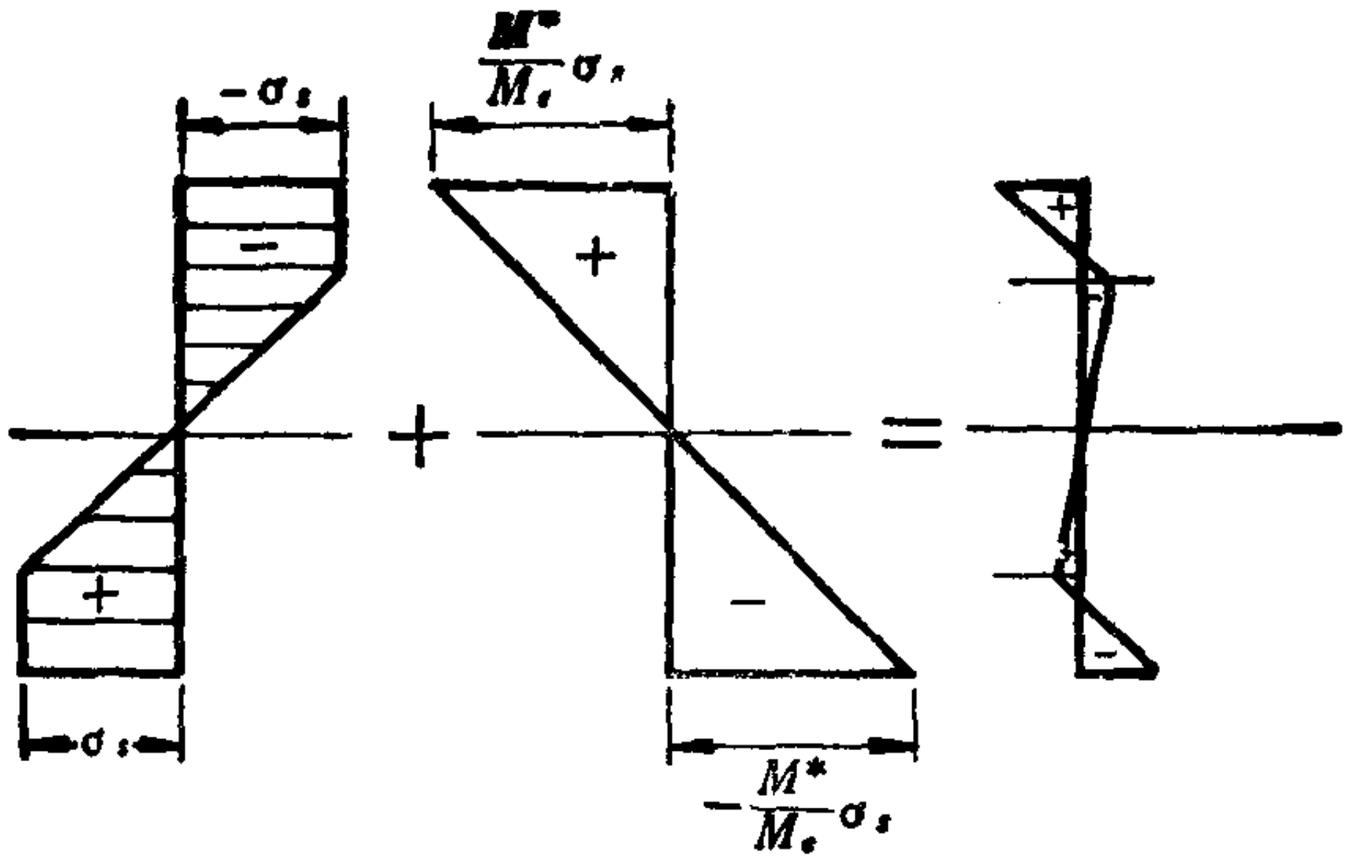



图 4

$$\frac{M^*}{J}y\Big|_{\frac{h}{2}}=\frac{M^*}{M_e}\sigma_s$$

和

$$1<\frac{M^*}{M_e}\leqslant 1.5,$$

可知

$$\sigma^0\Big|_{\frac{h}{2}}=\sigma_s\left(1-\frac{M^*}{M_e}\right)<0,$$

即外层的正应力改变了符号但未出现反向屈服。

3．当再次施加的正向弯矩值不超过 $M^*$ 时，梁将呈弹性响应。说明以上的残余应力分布可提高梁的弹性抗弯能力。

4．如卸载到零以后再施加反向弯矩，则开始时的响应仍是弹性的，当弯矩改变量 $\Delta M$ 满足：

$$\sigma_s+\left(\frac{\Delta M}{M_e}\right)\sigma_s=-\sigma_s,$$

或

$$\Delta M = -2M_e$$

时，外层纤维开始反向屈服。这就是说，当弯矩的变化范围不大于 $2M_e$ 时，结构将是安定的。

## §2.2 横向载荷作用下梁的弹塑性分析

考虑图 5 所示的矩形截面的理想弹塑性悬臂梁，在端点受集中力 $P$ 的作用。根据上节中的假定，当梁长 $L$ 远大于梁高 $h$ 时，可忽略剪应力对变形的影响。

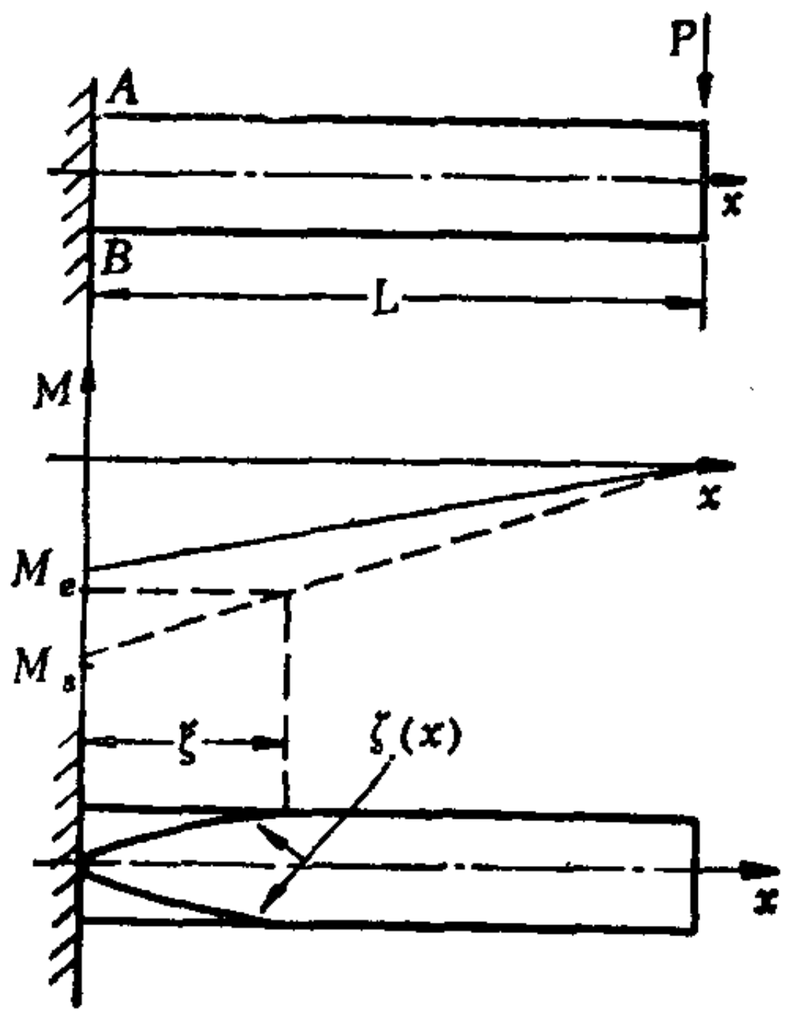


图 5

梁的弯矩分布可由平衡方程得到：

$$M(x) = -(L-x)P \qquad (19)$$

绝对值为最大的弯矩在梁的根部 $x=0$ 处：

$$M = -LP.$$

当 $P$ 增至

$$P_e = \frac{M_e}{L} = \frac{bh^2}{6L}\sigma$$

时，根部的弯矩为 $M = -M_e$，$x=0$ 截面的最外层纤维开始屈服故 $P_e$ 称为弹性极限载荷。

当 $P > P_e$ 时，弯矩分布仍服从(19)式。设开始进入塑性状态的截面在 $x=\xi$ 处，则有

$$M = -(L-\xi)P \approx -M_e.$$

位于 $0 \leqslant x < \xi$ 的各截面上均有部分区域进入屈服状态，其弹塑性交界位置 $\zeta(x)$ 可由(11)式确定：

$$|M| = \frac{P_e L}{2}[3 - \zeta^2(x)] = (L - x)P,$$

或者

$$\zeta(x) = \left[3 - 2\frac{P}{P_e}(1 - x/L)\right]^{\frac{1}{2}} \quad (0 \leqslant x \leqslant \xi), \qquad (20)$$

在 $x = 0$ 处有

$$\zeta(0) = (3 - 2P/P_e)^{\frac{1}{2}}.$$

当 $\zeta(0) = 0$ 时， $M(0) = -M_s$，

$$P = \frac{3}{2}P_e = P_s,$$

梁根部的整个截面都进入塑性流动状态而丧失进一步的承载能力，故 $P_s$ 为梁的塑性极限载荷。与 $P_s$ 相应的 $\zeta$ 值可由

$$(L - \xi)P_s = M_e$$

给出： $\xi = L/3$。

如果梁的某个截面处的弯矩达到了塑性极限弯矩，则相应的曲率可任意地增长，就好像一个铰那样。这样的铰称为塑性铰。它与通常的铰有两点区别：

①通常的铰不承受弯矩，而在塑性铰处保持有 $|M| = M_s$。

②通常铰两侧的梁段可在两个方向作相对转动，而塑性铰作反方向相对转动对应于卸载，即 $|M|$ 的减小将服从弹性规律。

下面来计算梁的挠度 $w = w(x)$。

当 $P \leqslant P_e$ 时梁处于弹性状态。由

$$\frac{K(x)}{K_e} = \frac{M(x)}{M_e} = -\left(1 - \frac{x}{L}\right)\left(\frac{P}{P_e}\right),$$

或

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \left(1 - \frac{x}{L}\right)\left(\frac{P}{P_e}\right)K_e$$

以及端条件

$$w(0)=\frac{\mathrm{d}w(0)}{\mathrm{d}x}=0,$$

可得

$$w(x)=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6L}\right)\left(\frac{P}{P_e}\right)K_e.$$

特别地当 $P=P_e$ 时，$x=L$ 处的挠度为

$$w(L)=\delta_e=\frac{L^2}{3}K_e. \tag{21}$$

当 $P_e<P\leqslant P_s$ 时，弹塑性梁段 $0\leqslant x\leqslant\xi$ 中的 $K(x)/K_e$ 由 (14) 式给出，而弹性梁段 $\xi\leqslant x\leqslant L$ 中的 $K(x)/K_e$ 由 (6′) 式给出。特别当 $P=P_s=\frac{3}{2}P_e$ 时，$\xi=L/3$，(20)式化为

$$\zeta(x)=(3x/L)^{\frac{1}{2}}.$$

区间 $0\leqslant x\leqslant L/3$ 中的曲率可由 (12) 式给出：

$$-\frac{\mathrm{d}^2w_1}{\mathrm{d}x^2}=K=-K_e/\zeta=-\left(\frac{L}{3x}\right)^{\frac{1}{2}}K_e.$$

利用以上的端条件后，可得

$$w_1(x)=\frac{4}{3\sqrt{3}}(Lx^3)^{\frac{1}{2}}K_e\quad\left(0\leqslant x\leqslant\frac{L}{3}\right). \tag{22}$$

在区间 $\frac{L}{3}\leqslant x\leqslant L$ 中的曲率可由(6′)式给出：

$$-\frac{\mathrm{d}^2w_2}{\mathrm{d}x^2}=K=\frac{3}{2}\left(1-\frac{x}{L}\right)K_e.$$

利用 $x=L/3$ 处的连接条件可得：

$$w_2(x)=\frac{1}{4}\left[-\left(\frac{x}{L}\right)^3+3\left(\frac{x}{L}\right)^2+\left(\frac{x}{L}\right)-\frac{1}{27}\right]L^2K_e, \tag{23}$$

其中 $$\frac{L}{3}\leqslant x\leqslant L,$$

自由端的挠度为

$$w_2(L)=\delta_s=\frac{20}{27}L^2K_e=\frac{20}{9}\delta_e.$$

可见与弹性变形是同数量级的。读者不难计算当载荷 $P$ 先加载到 $P$。然后又卸载到零时，自由端的残余挠度为

$$\delta_s^0=\frac{13}{54}L^2K_e.$$

## §2.3 强化材料矩形截面梁的弹塑性纯弯曲

现考虑由第一章(6)式所表示的一般强化材料：

$$\sigma=E\varepsilon[1-\omega(\varepsilon)],$$

并假定压缩和拉伸具有相同的规律：

$$\omega(-\varepsilon)=\omega(\varepsilon),$$

则在纯弯曲条件下，(1)式中的 $\varepsilon_0=0$。单调加载时，弯矩表达式(4)可写为

$$M=2bE\left[\int_0^{h/2}y\varepsilon dy-\int_0^{h/2}y\varepsilon\omega(\varepsilon)dy\right]. \tag{24}$$

因为仅当 $\frac{\zeta h}{2}\leqslant y\leqslant\frac{h}{2}$ 时，上式中的 $\omega$ 才不为零，故作变数替换 $\varepsilon=Ky$ 后，上式可写为

$$M=EJK-\frac{2bE}{K^2}\int_{\zeta hK}^{hK}\varepsilon^2\omega(\varepsilon)d\varepsilon. \tag{25}$$

上式中已设 $K>0$。对于给定的材料，$\omega(\varepsilon)$ 是已知的，由此可得到 $M\sim K$ 关系。

1．如已知 $K>0$，则由(9)式和(12)式，

$$\zeta = K_e/|K|,$$

可直接求得$M$值．例如，当材料为线性强化时，可求得

$$M = EJK - M_e(1 - E'/E)\left(\frac{1}{\zeta} - \frac{3}{2} + \frac{\zeta^2}{2}\right)$$
$$(M \geqslant M_e). \qquad (26)$$

2．如已知 $M>0$，则需用叠代法求出相应的$K$值和应力分布。为此，可利用 $\varepsilon = Ky$ 将(24)式改写为

$$K = \frac{M}{EJ} + \frac{2b}{J}\int_0^{h/2} y[Ky\omega(Ky)]\mathrm{d}y, \qquad (27)$$

上式右端的第一项为纯弹性部份，第二项是由于梁的塑性变形而对曲率的修正。注意到 $0 < \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon} \leqslant E$，有

$$0 \leqslant \frac{\mathrm{d}[\varepsilon\omega(\varepsilon)]}{\mathrm{d}\varepsilon} < 1.$$

再令

$$\max \frac{\mathrm{d}[\varepsilon\omega(\varepsilon)]}{\mathrm{d}\varepsilon} = \beta_0 < 1,$$

则对任意的两个曲率 $K_1$ 和 $K_2$，由中值定理可得

$$|K_2 y\omega(K_2 y) - K_1 y\omega(K_1 y)| \leqslant \beta_0 |(K_2 - K_1)y|.$$

现定义算子$T$：

$$K \to TK = \frac{2b}{J}\int_0^{h/2} y[Ky\omega(Ky)]\mathrm{d}y,$$

而将(27)式写成

$$K = \frac{M}{EJ} + TK \qquad (28)$$

采用迭代法时可先令 $K^{(0)}=\frac{M}{EJ}$，则第一次迭代为

$$K^{(1)}=\frac{M}{EJ}+TK^{(0)},\cdots$$

第 $n$ 次迭代为

$$K^{(n)}=\frac{M}{EJ}+TK^{(n-1)}\ .$$

由于

$$|TK^{(m)}-TK^{(m-1)}|\leqslant\beta_0|K^{(m)}-K^{(m-1)}|,$$

可见 $T$ 是一个压缩映象，以上迭代过程是收敛的。

## §2.4 超静定梁的塑性极限载荷

现考虑图 6 所示的一次超静定梁，设其 $M$-$K$ 曲线可由图 7 中的理想弹塑性模型表示，即

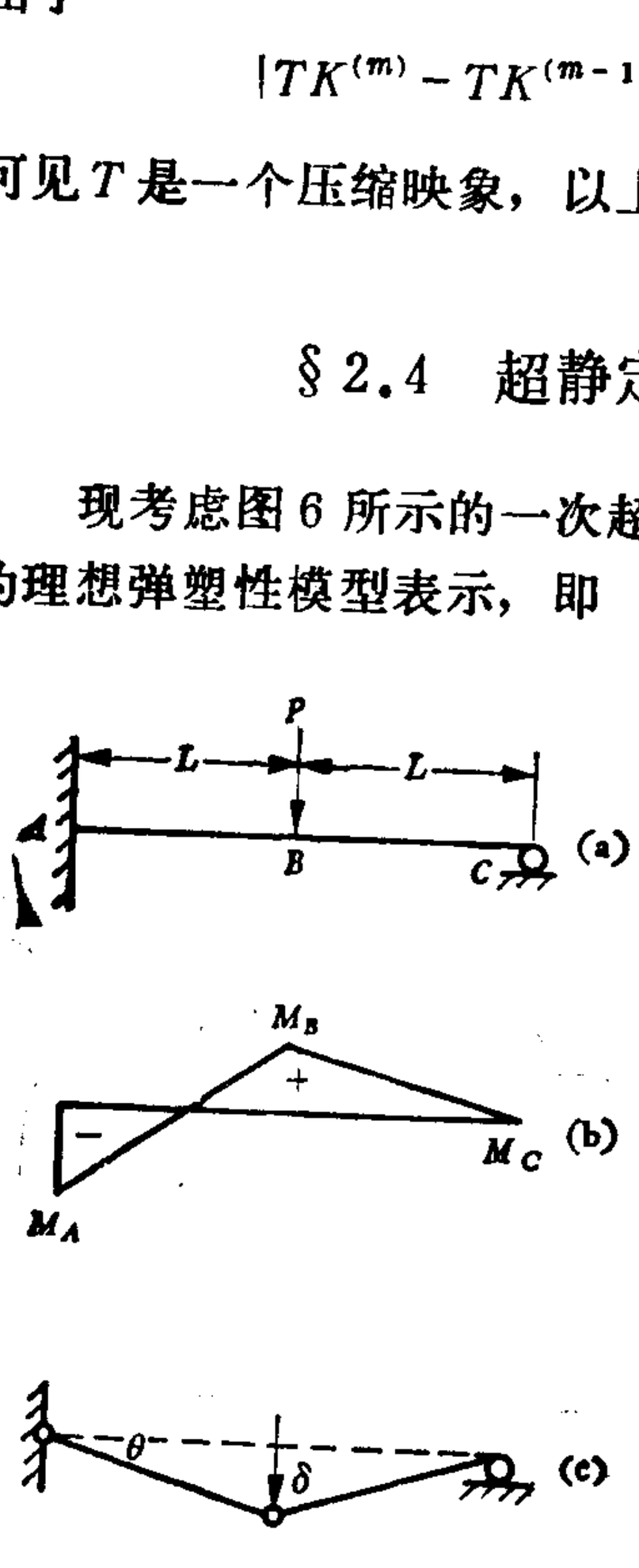



图 6

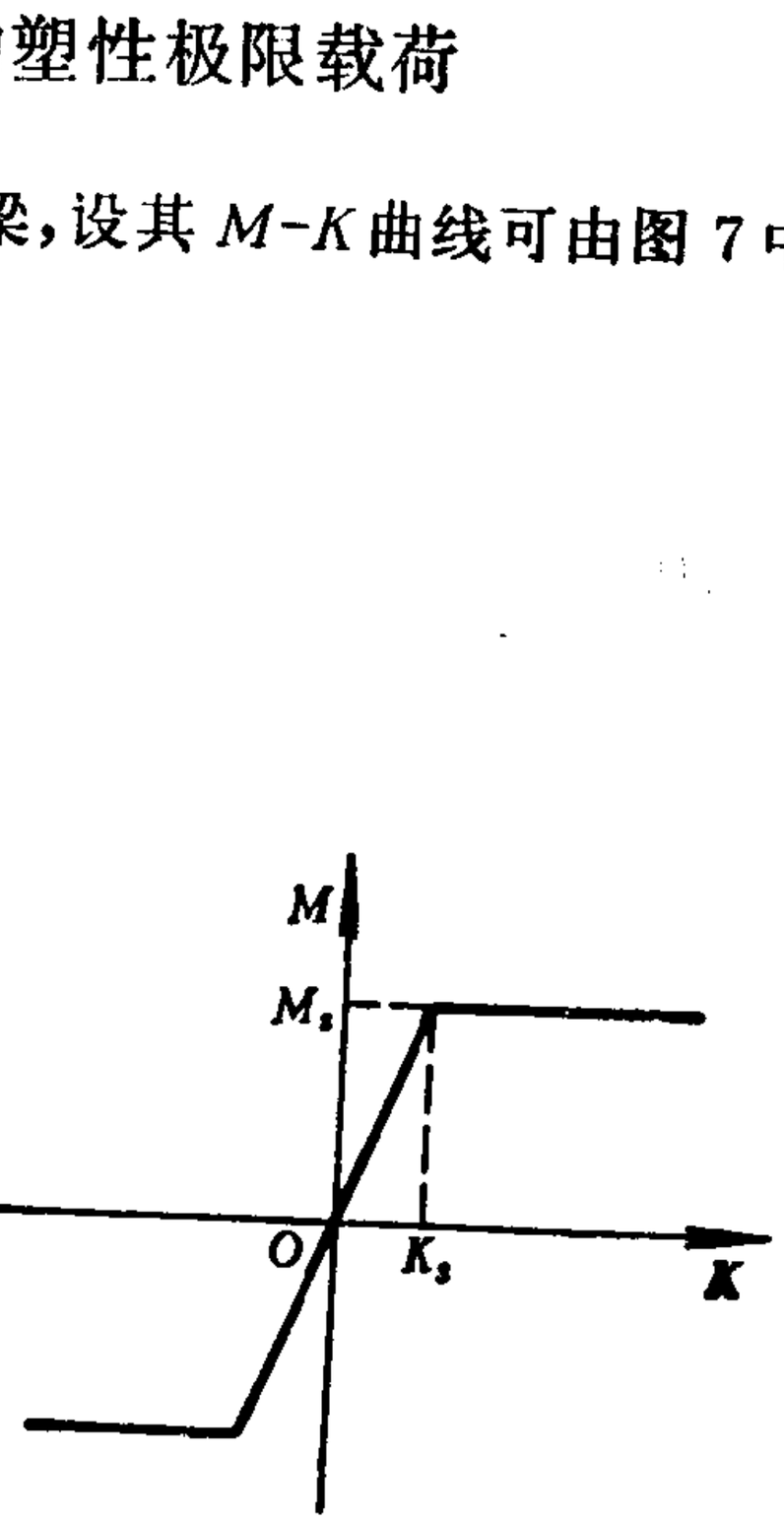



图 7

$$K=\begin{cases} M/EJ, & \text{当}|M|<M_s, \\ (\operatorname{sign}M)K_1\left(\dfrac{M_s}{EJ}\right)\quad (K_1\geqslant 1), & \text{当}|M|=M_s. \end{cases}$$

设载荷 $P$ 从零开始增长。如果梁内各截面的弯矩均未达到极限弯矩 $M_s$ 时，由结构力学可知在 $AB$ 段和 $BC$ 段弯矩是线性分布的。其中

$$M_A=-3PL/8,\quad M_B=5PL/16,\quad M_C=0.$$

绝对值最大的弯矩在根部截面 $A$ 处。当 $M_A=-M_s$ 时，对应的载荷为

$$P=P_e=\frac{8M_s}{3L}.$$

当 $P>P_e$ 时，$A$ 点的弯矩(绝对值)已不能再增长。梁的根部形成一个塑性铰，可以产生任意大的曲率。不过，由于梁的其它部位仍处于弹性阶段，根部曲率的大小要受到这些部位变形的约束。此外，当 $A$ 点成为塑性铰后，该处的弯矩已知：$M_A=-M_s$，结构成为静定的。由平衡条件可得 $C$ 点的反力

$$R_C=\frac{P}{2}-\frac{M_s}{2L}$$

和 $B$ 点的弯矩

$$M_B=R_CL=\frac{PL}{2}-\frac{M_s}{2}.$$

当 $P=P_s=\dfrac{3M_s}{L}$ 时，$B$ 点的弯矩为 $M_s$。这时 $A$ 点和 $B$ 点都变成塑性铰，梁成为一个机构而不能再进一步承受载荷了。因此，$P_s$ 就是梁的塑性极限载荷。

由以上讨论可以看出，塑性极限载荷 $P_s=3M_s/L$ 并不依赖于弹性模量 $E$。如果梁是由理想刚塑性材料构成的，则也会得到同样的极限载荷。以后我们将会看到，在更一般的情形下，弹塑

性结构的极限载荷与刚塑性结构的极限载荷是相同的。其值仅仅与结构本身和载荷形式有关，而与结构的残余应力状态和加载历史是无关的。因此，如果仅仅是为了计算极限载荷，就无须像以上例题那样来逐步追索结构的弹塑性变形过程，而可以采用刚塑性模型，用更为简便的方法来进行计算。这样的计算方法通常有两种，其一是以应力作为基本未知量，称为静力法；其二是以位移作为基本未知量，称为机动法。下面我们就来对这两种方法作具体的介绍。

静力法是通过与外载荷相平衡且在结构内处处不违反屈服条件的广义应力场来寻求所对应外载荷的最大值的一种方法。对于图 6 所示的梁，与力 $P$ 相平衡的弯矩分布可由 $M_A, M_B$ 和 $M_C$ 确定，因为在 $AB$ 段和 $BC$ 段上弯矩是线性分布的。弯矩（绝对值）的最大值只可能在 $A$ 点和 $B$ 点。以 $C$ 点的支座反力 $R_C$ 为参数时，有

$$M_B = R_C L, \quad M_A = 2R_C L - PL.$$

梁内处处不违反屈服条件就要求

$$|M_B| \leqslant M_s, \quad |M_A| \leqslant M_s.$$

这可等价地写为

$$-2M_s \leqslant 2R_C L \leqslant 2M_s,$$

$$-M_s + PL \leqslant 2R_C L \leqslant M_s + PL.$$

仅当 $|PL| \leqslant 3M_s$ 时，这两个不等式才可能同时成立，所对应的最大外载荷为

$$P = 3M_s/L$$

（取负号相当于反向加载）。这正是以前分析所得到的塑性极限载荷 $P_s$。

机动法是当结构的变形可能成为一个塑性流动（或破损）机构时，通过外载荷所做的功与内部耗散功的关系来寻求所对应外载荷的最小值的一种方法。对于图 6 所示的梁，可能的破损机构

只有一种，即根部$A$和中点$B$都成为塑性铰。令$B$点向下移动的距离为$\delta$，则力$P$所作的功为$P\delta$。另外，$A$点处梁的转角为$\theta=\delta/L$，$B$点两侧梁段的相对转角为$2\theta=2\delta/L$。因此在塑性铰上所作的耗散功为

$$3M_s\theta=3M_s\delta/L。$$

由外力功和内部耗散功相等的条件可得

$$P\delta=3M_s\delta/L$$

或

$$P=3M_s/L。$$

同样可得到$P_s$值。

对于较为复杂的结构，可能的破损机构一般有好几种。对应于每一种机构，都可以令外载荷在该机构上所作的功与塑性铰在同一机构上的耗散功相等，由此求得一个载荷值。真实的极限载荷是所有这些载荷中的最小者，因为当外载荷增加到一定的值而使结构变成机构的话，对应于更大载荷的机构就不可能再出现了。在下一节中，我们将对上述计算极限载荷的方法作进一步的说明。

## §2.5 用静力法和机动法求刚架的塑性极限载荷

现考虑一个$n$次超静定刚架，它有$n$个赘余反力$R_i(i=1,2,\cdots,n)$。此外，从弯矩分布的形式还可以判断刚架中可能出现塑性铰的节点个数，现设为$m$。这$m$个节点处的弯矩$M_j^0(j=1,2,\cdots,m)$可由外力$P_a^0(a=1,2,\cdots,r)$和赘余反力$R_i(i=1,2,\cdots,n)$表示：

$$M_j^0=M_j^0(R_i,P_a^0)\quad(j=1,2,\cdots,m)。$$

消去$R_i$而得到的$m-n$个方程反映了结构的平衡条件（在结构力学中，还须补充$n$个变形协调条件才能解出$M_j^0$），因此$\{M_j^0,P_a^0\}$

构成一个平衡体系，称为静力场。如果还要求结构内处处不违反屈服条件：

$$|M_j^0| \leqslant M_s, \quad (j=1,2,\cdots,m),$$

那么我们就称$\{M_j^0, P_a^0\}$是一个静力许可场。这样的静力许可场有无穷多个，静力法就是要在一切可能的静力许可场中寻求取值最大的外载荷。

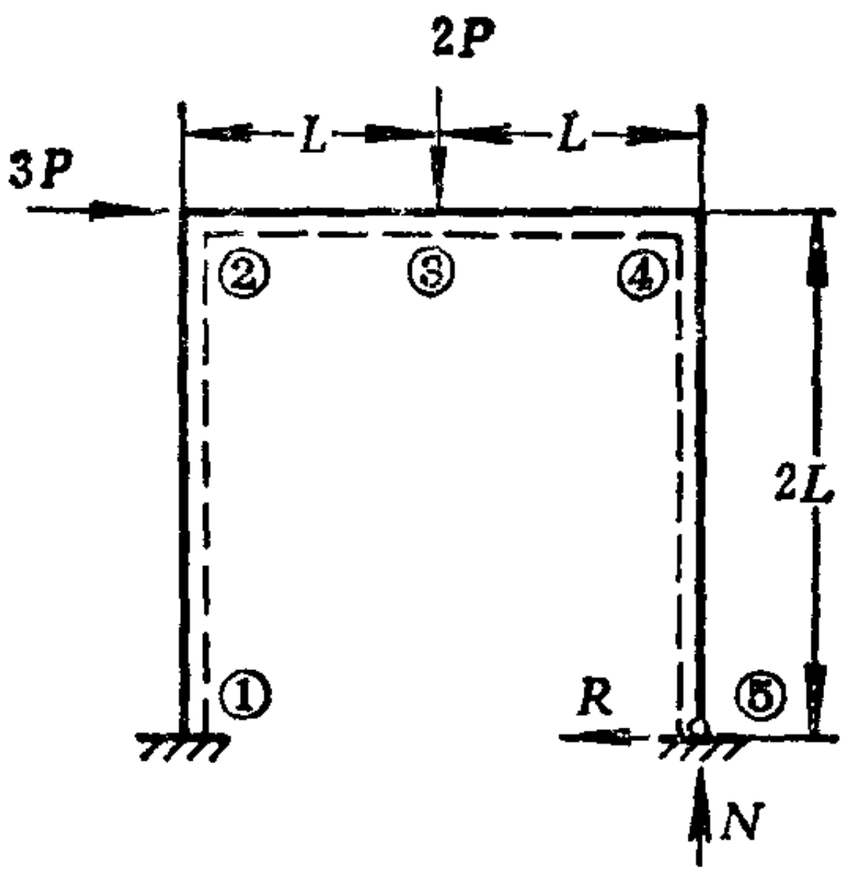



图 8

作为例子，我们来考虑图 8 所示的平面刚架。设各截面的塑性极限弯矩为$M_s$。在水平力$3P$和竖直力$2P$的作用下，求出结构最大可能承受的载荷$P$。

显然，该结构的超静定次数$n=2$。考虑到节点间的弯矩是线性变化的，故弯矩的极值都在节点处，即在节点①，②，③，④处可能出现塑性铰，故有$m=4$。如取节点⑤处的支座反力$R$和$N$为赘余反力并规定弯矩的符号以刚架内侧受拉为正，则相应的平衡方程为

$$M_4 = -2RL, \quad M_3 = -2RL + NL,$$

$$M_2 = -2RL + 2NL - 2PL, \quad M_1 = 2NL - 2PL - 3P \times 2L.$$

消去$R$和$N$，便得到$m-n=2$个独立的平衡方程

$$\begin{aligned} -M_2 + 2M_3 - M_4 &= 2PL, \\ -M_1 + M_2 - M_4 &= 6PL. \end{aligned} \tag{29}$$

附带指出，当利用虚功原理时，上两式恰好和结构的两种破损机构相对应。

令

$$m_j = M_j/M_s \quad (j=1,2,3,4),\ f=\frac{PL}{M_s},$$

上式也可写为

$$m_1 = m_2 - m_4 - 6f,\ \ 2m_3 = m_2 + m_4 + 2f. \tag{30}$$

如果 $m_j$ 还满足

$$-1 \leqslant m_j \leqslant 1,\ \ (j=1,2,3,4) \tag{31}$$

则$\{m_j, f\}(j=1,2,3,4)$就构成一个静力许可场。利用(30)式，条件(31)式可等价地写为

$$\begin{aligned} &-1 \leqslant m_2 - m_4 - 6f \leqslant 1, \quad -1 \leqslant m_2 \leqslant 1, \\ &-2 \leqslant m_2 + m_4 + 2f \leqslant 2, \quad -1 \leqslant m_4 \leqslant 1, \end{aligned}$$

或

$$\left.\begin{aligned} &-1 + m_4 + 6f \leqslant m_2 \leqslant 1 + m_4 + 6f, \quad -1 \leqslant m_2 \leqslant 1, \\ &-2 - m_4 - 2f \leqslant m_2 \leqslant 2 - m_4 - 2f, \quad -1 \leqslant m_4 \leqslant 1. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

因为(32)式中的各式要同时成立，所以可消去 $m_2$ 而得到关于 $m_4$ 和 $f$ 的联立不等式：

$$\begin{aligned} &-2-6f \leqslant m_4 \leqslant 2-6f, \quad -3-2f \leqslant m_4 \leqslant 3-2f, \\ &-\frac{3}{2}-4f \leqslant m_4 \leqslant \frac{3}{2}-4f, \quad -1 \leqslant m_4 \leqslant 1. \end{aligned} \tag{33}$$

类似地，在以上各式中消去 $m_4$，就有

$$\begin{aligned} &|6f| \leqslant 3, \quad |2f| \leqslant 4, \quad |4f| \leqslant \frac{5}{2}, \\ &|4f| \leqslant 5, \quad |2f| \leqslant \frac{7}{2}, |2f| \leqslant \frac{9}{2}, \end{aligned} \tag{34}$$

仅当

$$|f| \leqslant \frac{1}{2} \tag{35}$$

时，(34) 式中的各式才可能都成立。因此 (35) 式是存在静力许

可场的条件。而 $f=1/2$ （负号对应于反向加载)对应于最大载荷值

$$P_s=\frac{1}{2}\frac{M_s}{L}. \tag{36}$$

对应于 $f=1/2$ 的弯矩分布可通过回代过程来确定。以 $f=1/2$ 代入(33)式，可知必然有 $m_4=-1$，再以 $f=1/2, m_4=-1$ 代入(32)式，便有 $m_2=1$，最后由(30)式得 $m_1=-1$，$m_3=1/2$。由此求得的 $\{m_j, f\}$ 不仅满足(30)式和(31)式，而且使所讨论的二次超静定结构中有三个节点①，②，④成为塑性铰，结构变成机构而开始塑性流动。这说明(36)式的 $P_s$ 的确是一个极限载荷。

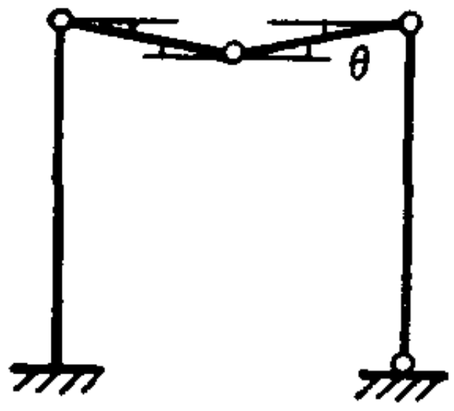
以上推导过程是静力法中的一种求解方法，称为不等式法。该方法比较繁复。更通常的方法是将以上问题化归为一个线性规划问题而采用标准的计算机程序来进行求解的。

再来讨论机动法.首先，对于 $n$ 次超静定刚架，当出现 $(n+1)$ 个塑性铰时，结构就会变成机构而产生塑性流动。因为可能出现塑性铰的节点数为 $m$，所以可能的破损机构的总数将不少于

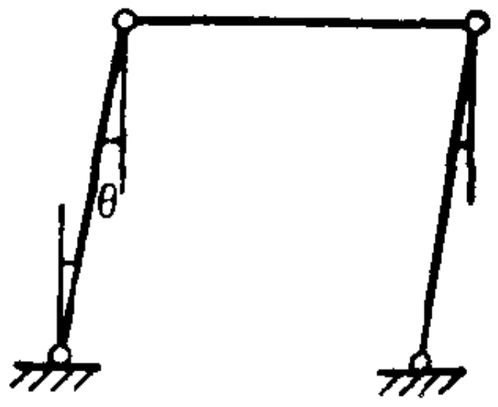
$$C_m^{n+1}=\frac{m(m-1)\cdots(m-n)}{(n+1)!}.$$

其次，我们知道，可列出的独立的平衡方程个数为 $m-n$。这 $m-n$ 个方程可利用虚功原理与结构的 $m-n$ 个破损机构相对应，故称这样的破损机构为基本机构，其它的破损机构可通过基本机构的组合而得到。最后，可以认为每一种破损机构都是一个机动场，如果该机构中在塑性铰 $x_k^*$ 点两侧梁段的相对转角为 $\theta_k^*(k=1,2,\cdots,n+1)$，与外载荷相对应的广义位移为 $\Delta_a^*(a=1,2,\cdots,r)$，那么这个机动场也可表示为 $\{\theta_k^*, \Delta_a^*\}$。我们称那些使外载荷在 $\Delta_a^*$ 上所作的总功取正值的机动场为运动许可场。对于每一个运动许可场，当令外载荷作的总功与塑性铰的总耗散功相等(注意，这里并未用到虚功原理）时，便得到一个载荷值。机动法就是要在一切可能的运动许可场中寻求取值最小的外载荷。

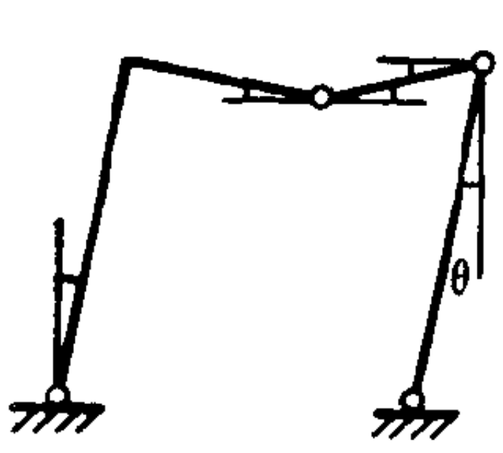
对于图 8 的刚架，可能的破损机构总数为 $C_m^{n+1}=C_4^3=4$。这些机构已示于图 9 中。基本机构的个数为 $m-n=2$。例如可取图 9 中的(a)和(b)为基本机构。如果将这两种机构叠加以消去节点②处的铰，就得到机构(c)，当消去节点④处的铰时，便得到机构(d)。



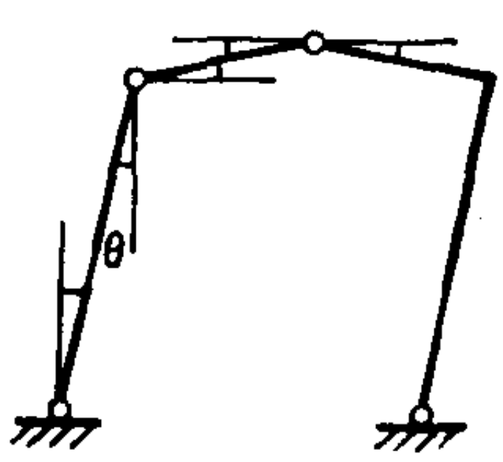

(a) ②,③,④ 成铰




(b) ①,②,④ 成铰




(c) ①,③,④ 成铰




(d) ①,②,③成铰

图 9

下面我们用机动法来计算对应于每个破损机构的载荷值。对机构(a)，由

$$2P\times L\theta=4M_s\theta,$$

得

$$P=\frac{2M_s}{L}.$$

对机构(b)，由

$$3P\times 2L\theta=3M_s\theta,$$

得

$$P=\frac{M_s}{2L}.$$

对机构(c)，由

$$3P\times 2L\theta+2P\times L\theta=5M_s\theta,$$

得

$$P=5M_s/8L.$$

对机构(d)，由

$$3P\times 2L\theta-2P\times L\theta=5M_s\theta,$$

得

$$P=5M_s/4L.$$

以上四种载荷值中的最小者对应于机构(b)，最先形成塑性铰的节点为①，②，④。因此，$P=\frac{M_s}{2L}$就是该结构的塑性极限载荷。这与用静力法求得的结果是一致的。

还需指出，在实际问题中，结构的超静定次数和结构中可能成铰的节点数目往往都很大，这时结构可能出现的塑性流动机构的数目也将是很大的。这就使塑性极限载荷的计算变得十分繁复。较简便的一种方法就是在以上这些塑性流动机构中事先选取其中的某几个，并分别算出这几个机构所对应的“上限载荷”。进而考察这些“上限载荷”中取最小值的塑性流动机构，并将其铰点上的弯矩值取为极限弯矩（其正负号与成铰时相对转角的方向一致），然后再根据平衡条件求出其它各节点处的弯矩值。如果所有截面上弯矩的绝对值都没有超过极限弯矩，那么我们就找到了一个静力许可场，因为它同时对应于某个运动许可场，所以以上所求得的载荷值就是真实的极限载荷。否则，以上的载荷只能是真实极限载荷的上限，而需要对其它的塑性流动机构再重新进行计算。

例如，对图 8 所示的刚架，可先取使节点②，③，④成铰的机

构为塑性流动机构，这时有

$$M_2 = -M_s, M_3 = M_s, M_4 = -M_s.$$

由(29)式，所对应的载荷值为$\frac{2M_s}{L}$。根据柱$\overline{45}$的平衡条件，可知节点⑤处的水平力为

$$H_5 = M_s/2L = P/4,$$

因此节点①处的水平力为

$$H_1 = 11P/4.$$

再由柱$\overline{12}$的平衡条件得

$$M_1 = -12M_s,$$

即节点①处已违反屈服条件，以上的机构并不是真实的塑性流动机构。下次选取的机构应该使节点①成铰，例如选机构(b)。成铰的节点为①,②,④，即有

$$M_1 = -M_s,\quad M_2 = M_s,\quad M_4 = -M_s.$$

由(29)式，相应的载荷值为$\frac{M_s}{2L}$。类似地，由柱$\overline{45}$的平衡条件得

$$H_5 = \frac{M_s}{2L} = P,$$

于是可求得 $H_1 = 2P$，节点⑤的垂直反力 $V_5 = 3P$ 以及 $M_3 = 0.5M_s$，这说明它没有超过极限弯矩。于是，

$$P_s = \frac{M_s}{2L}$$

就是结构真实的塑性极限载荷。

## §2.6 极限分析中的上下限定理

在上节中，我们没有追踪结构的实际加载过程去逐步地进行结构的弹塑性计算，而是设法直接求出结构的塑性极限载荷及其

相应的塑性流动机构。这样的分析方法通常称为极限分析。在极限分析中，最常用的方法就是静力法和机动法。这两种方法是以本节将要讨论的上、下限定理为理论依据的。

假定作用在结构上的各个外载荷 $P_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,r)$为集中力，它们以共同的比例因子 $\eta(>0)$逐渐增长。当 $\eta=\eta$ 时，外载荷对应于真实的塑性极限载荷

$$P_\alpha=\eta N_\alpha \quad (\eta>0,\alpha=1,2,\cdots,r), \tag{37}$$

其中 $N_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,r)$表示给定的关于各载荷间的相对比值。与真实的塑性流动机构相对应的运动许可场可写为$\{\theta_k,\Delta_\alpha\}$,其中 $\theta_k(k=1,2,\cdots,n+1)$是在实际出现塑性铰 $x_k$ 点两侧梁段的相对转角。

静力法要求构造某个静力许可场 $\{M_j^0,P_\alpha^0\}(j=1,2,\cdots,m)$，由此可得到一个载荷乘子 $\eta^0$：

$$P_\alpha^0=\eta^0 N_\alpha \quad (\alpha=1,2,\cdots,r)。 \tag{38}$$

机动法要求构造某个运动许可场$\{\theta_k^*,\Delta_\alpha^*\}$，然后通过计算外载荷在该运动许可场上所作的功和塑性铰的耗散功来得到相应的载荷值：

$$P_\alpha^*=\eta^* N_\alpha,$$

其中 $\eta^*$ 满足

$$\eta^*\sum_{\alpha=1}^{r}N_\alpha\Delta_\alpha^*=\sum_{k=1}^{n+1}M_s|\theta_k^*| \tag{39}$$

根据运动许可场的定义，上式中$\sum_{\alpha=1}^{r}N_\alpha\Delta_\alpha^*>0$。

应该指出，在很多情况下，结构上还作用有分布载荷（例如结构的自重），相应的广义位移将由分布挠度来表示。这样，在计算外力的功时，相应的求和号就应改为积分号。因为对于这种情形的讨论并无原则的困难，所以这里仅考虑外载荷为集中力的情形。

上、下限定理可表述为：由静力法得到的载荷乘子 $\eta^0$ 小于或等于真实的载荷乘子 $\eta$，由机动法得到的载荷乘子 $\eta^*$ 大于或等于真实的载荷乘子 $\eta$，即有

$$\eta^0 \leqslant \eta \leqslant \eta^*. \tag{40}$$

(40) 式可证明如下。由虚功原理可知，当任意一个静力许可场 $\{M_j^0, P_a^0\}$ 在任意一个运动许可场 $\{\theta_k^*, \Delta_a^*\}$ 上作功时，外载荷的虚功应等于内力的虚功。由于真实场 $\{M_k(x_k), P_a\}$（$M_k(x_k)$ 表示弯矩在实际出现塑性铰的 $x_k$ 点取值）是静力许可场的一种，而真实场 $\{\theta_k, \Delta_a\}$ 是运动许可场的一种，因此根据不同的组合，可得到虚功方程的几种具体表达式：

$$\sum_{a=1}^{r} P_a^0 \Delta_a = \sum_{k=1}^{n+1} M_k^0(x_k)\theta_k, \tag{41}$$

$$\sum_{a=1}^{r} P_a \Delta_a^* = \sum_{k=i}^{n+1} M_k(x_k^*)\theta_k^* \tag{42}$$

和

$$\sum_{a=1}^{r} P_a \Delta_a = \sum_{k=1}^{n+1} M_k(x_k)\,\theta_k = \sum_{k=1}^{n+1} M_s|\theta_k| > 0. \tag{43}$$

注意到(41)式中的 $M_k^0(x_k)$ 在 $x_k$ 处取值，而(42)式中的 $M_k(x_k^*)$ 在 $x_k^*$ 处取值，故有

$$|M_k^0(x_k)| \leqslant M_s, \quad |M_k(x_k^*)| \leqslant M_s.$$

此外，(43)式大于零的条件可写为

$$\sum_{a=1}^{r} N_a \Delta_a > 0.$$

于是，从(43)式减去(41)式并利用条件

$$M_s|\theta_k| - M_k^0(x_k)\theta_k \geqslant 0,$$

可得

$$(\eta - \eta^0)\sum_{a=1}^{r} N_a \Delta_a \geqslant 0$$

或

$$\eta^0 \leqslant \eta .$$

类似地，从(39)式减去(42)式并利用

$$M_s|\theta_k^*| - M_k(x_k^*)\theta_k^* \geqslant 0,$$

可得

$$(\eta^* - \eta)\sum_{a=1}^{r} N_a \Delta_a^* \geqslant 0$$

或

$$\eta \leqslant \eta^* .$$

这便证明了上、下限定理。

以上定理说明，由静力许可场可得到极限载荷的下限，由运动许可场可得到极限载荷的上限。如果能同时找到一个既是静力许可场又是运动许可场的体系，那么相应的载荷就必然是结构的塑性极限载荷。如果不能精确地求出极限载荷，那么也可分别由静力许可场和运动许可场求得极限载荷的下限和上限，并由上限与下限之差来估计极限载荷近似值的精确度。

## §2.7 最轻结构的极限设计

在极限分析中，结构的外形、尺寸和承载方式已事先给定，所要计算的是结构的最大承载能力。但在实际设计中往往会提出相反的问题：在给定外载和某些其它条件下，如何来设计一种最优的结构。这样的问题称之为极限（或优化）设计。最优的标准可以有多种。这里的讨论将以重量最轻为准则，故又称为最轻结构的极限设计。

为简单起见，我们假定除给定载荷外，结构的形状也是给定的，即结构中各部分构件的长度 $L_i$ 是已知的，所要求的是结构中各个截面上的塑性极限弯矩。由于极限弯矩 $M_s$ 与截面的尺寸（或单位长度构件的重量 $G$）有关。故一般可有关系式

$$G = f(M_s).$$

当 $f$ 为线性函数时，上式可简化为

$$G = a + bM_s.$$

对于同一类型的构件，式中的 $a$ 和 $b$ 可取为常数。于是，整个结构的重量可写为

$$W = \sum_i (a + bM_{s\,i})L_i = a\sum_i L_i + b\sum_i M_{s\,i}L_i \qquad (44)$$

上式中 $M_{s\,i}$ 表示第 $i$ 个构件的塑性极限弯矩，求和是对所有的构件进行的。由于(44)式右端第一项的值始终不变，因此，问题就化为如何来选取各个构件的 $M_{s\,i}$，使得在保证结构安全的前提下，

$$X = \sum_i M_{s\,i}L_i \qquad (45)$$

为最小。

以上的叙述也可用数学表达式写出。为此，可设想结构出现了第 $q$ 种破损机构而产生塑性流动，相应的运动许可场为$\{\theta_i^q, \Delta_a^q\}$。这里，我们略去了 * 号，$\theta_i^q$ 表示第 $i$ 个构件上位于$x_j^*$点处两侧梁段的相对转角。这时有

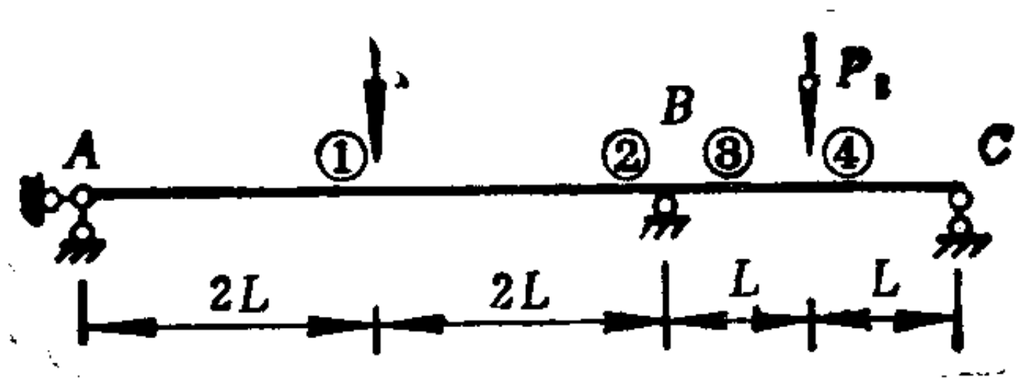
$$\sum_{a=1}^{r} P_a\Delta_a^q = \sum_i M_{s\,i}|\theta_i^q|.$$

那么，为保证结构安全就要求对一切可能的 $q$，都有

$$\sum_{a=1}^{r} P_a\Delta_a^q < \sum_i M_{s\,i}|\theta_i^q|. \qquad (46)$$

于是，最轻结构的极限设计问题便归结为在满足(46)式的条件下选取$M_{s\,i}$，使(45)式中的 $X$ 为最小的问题。这在数学上是一个线性规划问题。

例　图10表示了一个双跨连续梁。设两段梁的极限弯矩分别为$M_{s\,1}$和$M_{s\,2}$，在外载 $P_1$和 $P_2(=3P_1)$的作用下有四处可能出现塑性铰(如图中的①，②，③，④)，因为 $M_{s\,1}$和 $M_{s\,2}$可以不相等，



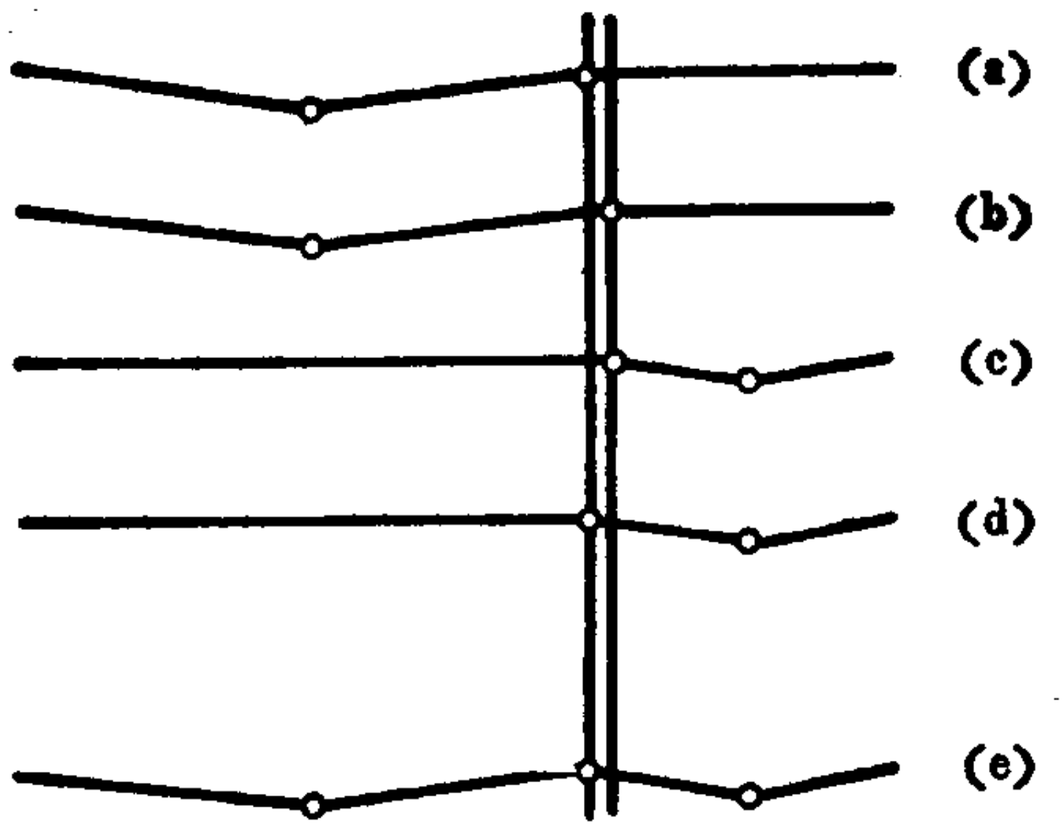




图 10

$B$处将在薄弱的一侧形成铰，所以$B$点有两个可能成铰的截面，即在其左侧或在其右侧。于是，在外载的作用下，就可能出现图10中(a),(b),(c),(d)所示的四种机构，当然也可 能 会是以上机构的组合，如图10中的(e)就是(a)和(d)的组合。

相应的(46)式可分别写为

$$\left.\begin{aligned}
&\text{(a)}\quad 2P_1L\leqslant 3M_{s1},\\
&\text{(b)}\quad 2P_1L\leqslant 2M_{s1}+M_{s2},\\
&\text{(c)}\quad 3P_1L\leqslant 3M_{s2},\\
&\text{(d)}\quad 3P_1L\leqslant M_{s1}+2M_{s2}.
\end{aligned}\right\}\qquad (47)$$

这里，为了把“安全”的临界状态也包括进来以便于讨论，我们把(46)式中的“<”号改成了上式的“≤”号。当引进无量纲量

$$m_{s1}=\frac{M_{s1}}{P_1L},\quad m_{s2}=\frac{M_{s2}}{P_1L},\quad x=\frac{X}{P_1L^2}$$

后，问题就化为：在条件

$$2\leqslant 3m_{s1},\ 2\leqslant 2m_{s1}+m_{s2},\ 3\leqslant 3m_{s2},\ 3\leqslant m_{s1}+2m_{s2} \tag{48}$$

下来确定 $m_{s1}$和 $m_{s2}$，使得

$$x=4m_{s1}+2m_{s2} \tag{49}$$

取最小值。

将(49)式改为

$$m_{s2}=\frac{x}{2}-2m_{s1}$$

并代入(48)式后，有

$$m_{s1}\geqslant\frac{2}{3},\ x\geqslant 4,\ m_{s1}\leqslant\frac{x}{4}-\frac{1}{2},\ m_{s1}\leqslant\frac{x}{3}-1.$$

上式中消去$m_{s1}$，可得 $x\geqslant 14/3$，$x\geqslant 4, x\geqslant 5$。当结构安全时，以上各式应同时成立，因此 $x$ 的最小值应取为 5。再以$x=5$代回以上各个不等式，便有

$$m_{s1}=\frac{2}{3},\quad m_{s2}=\frac{7}{6},$$

或

$$M_{s1}=\frac{2}{3}P_1L,\quad M_{s2}=\frac{7}{6}P_1L.$$

这正是在给定载荷下的最轻设计。如将上式中的极限弯矩值代到(47)式，可知(a)和(d)式中的等号是成立的。这说明在作这种设计时破损机构是(a)和(d)的组合(e)。从直观上讲，最优设计应该要求当结构破坏时，能同时出现更多的机构，这才能够最充分地发挥所有材料的潜力。

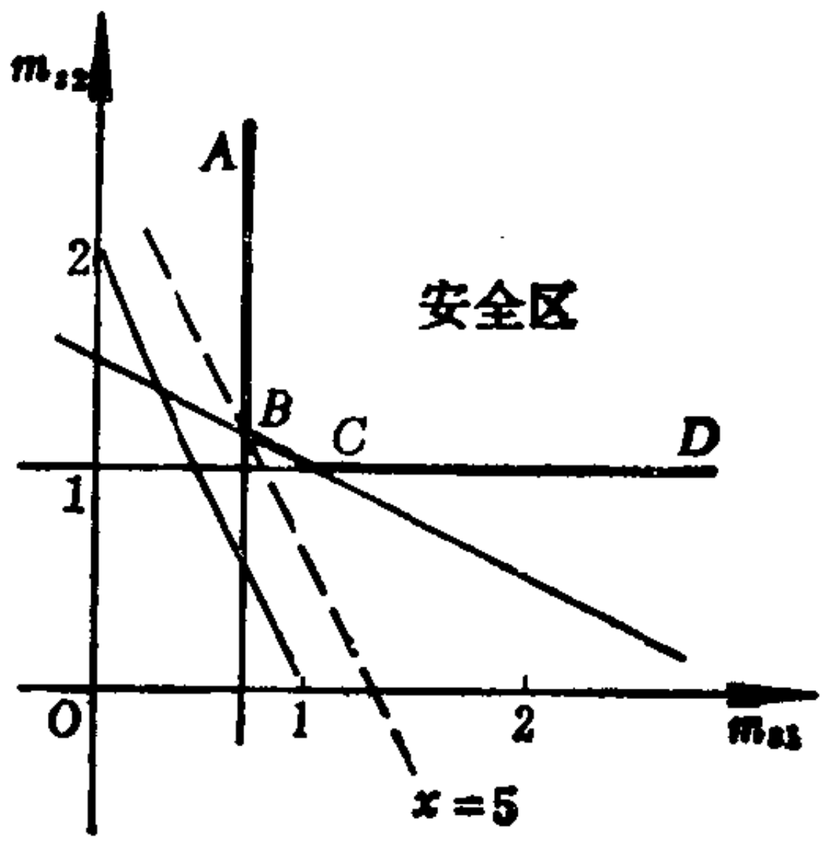



图 11

以上分析可以清晰地用作图法表示出来。在图11中，如以$m_{s1}, m_{s2}$为坐标，则(48)各式表示了在一些直线右方的半平面，同时满足(48)各式的区域$ABCD$为结构的安全区。(49)式可看作是以$x$为参数的直线族，其斜率等于$-2$,称为重量线。$x$愈大，直线愈向右移，结构也愈重。因此，临界状态将对应于重量线与安全区的切点$B$。$B$点的坐标(2/3,7/6)就是所要求的($m_{s1}$, $m_{s2}$)值。

## §2.8 弯矩和轴向力同时作用的情形

本节将讨论关于广义内力(或称广义应力)的弹性极限曲线和塑性极限曲线。仍考虑由理想弹塑性材料构成的矩形截面梁。该梁受到弯矩$M$和轴向力$N$的联合作用。在未达到失稳之前，可认为本章第一节中的两个假定仍然成立。相应的正应力分布表示在图12中。

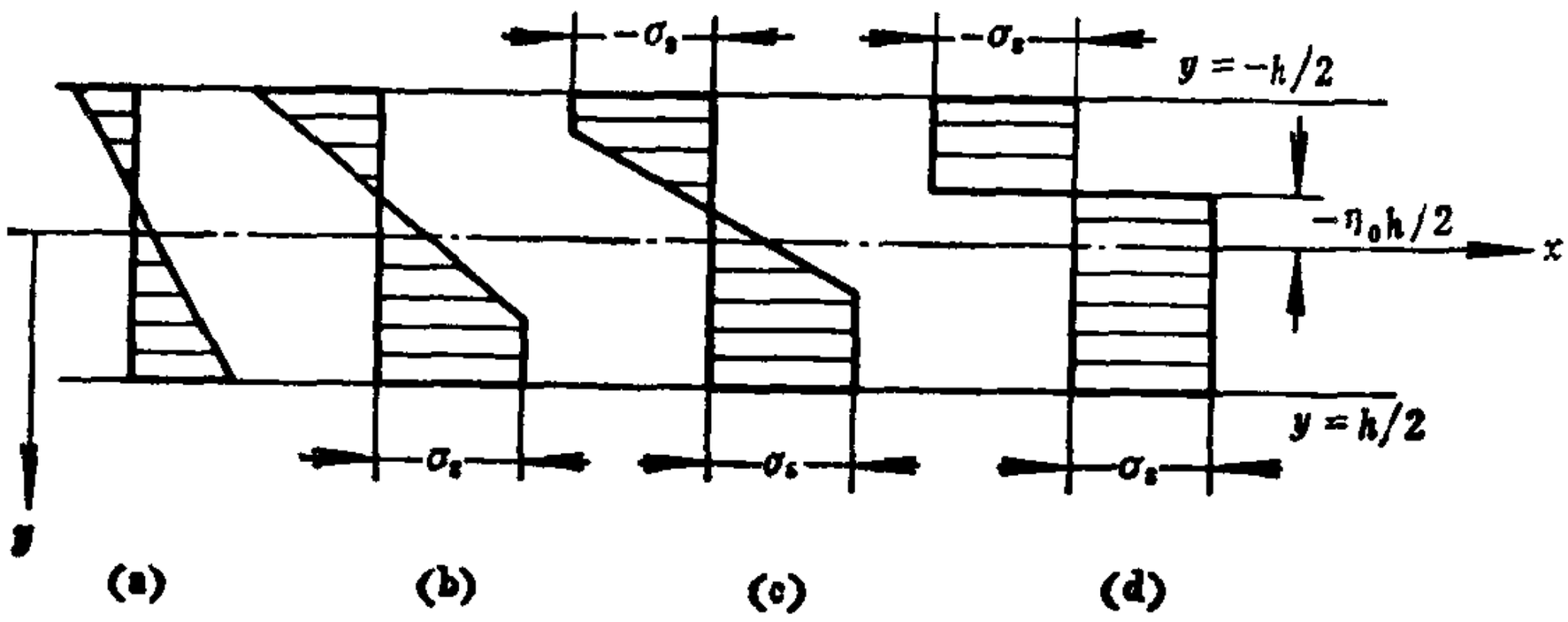



图 12

梁中应变为零的纤维称为中性层。由(1)式可知，中性层的$y$坐标为：

$$y=-\varepsilon_0/K=-\frac{1}{2}\eta_0 h。\tag{50}$$

当梁处于弹性阶段时，应力分布由(5)式给出：

$$\sigma = EK\left(y + \frac{1}{2}\eta_0 h\right). \tag{51}$$

故由(3),(4)式得：

$$N = E\varepsilon_0 A,\quad M = EKJ, \tag{52}$$

其中$A = bh$为梁的截面积，$J$为截面的惯性矩。在纯拉伸情况下，最大轴向力为$N_s = A\sigma_s$。因此，(52)式的无量纲形式可写为

$$n = \frac{N}{N_s} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_s},\quad m = \frac{M}{M_s} = \frac{2K}{3K_e}, \tag{53}$$

其中$\varepsilon_s = \sigma_s/E$，$K_e$由(9)式给出。

若$K$和$\varepsilon_0$都不为零，而且$\eta_0 > 0$，则截面上最大正应力将出现在$y = h/2$处，其值为$\frac{1}{2}EKh(1+\eta_0)$。因此，当该处应力达到屈服应力时，就有

$$\sigma_s = \frac{1}{2}EKh(1+\eta_0).$$

由此求得

$$K = \frac{2\sigma_s}{Eh(1+\eta_0)} = \frac{K_e}{1+\eta_0}$$

和

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\eta_0 hK = \left(\frac{\sigma_s}{E}\right)\left(\frac{\eta_0}{1+\eta_0}\right) = \varepsilon_s\left(\frac{\eta_0}{1+\eta_0}\right).$$

因此，截面上开始出现屈服状态的条件可由(53)式写为

$$n = \frac{\eta_0}{1+\eta_0},\quad m = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{1+\eta_0}\right).$$

消去$\eta_0$后便有

$$2n + 3m = 2. \tag{54}$$

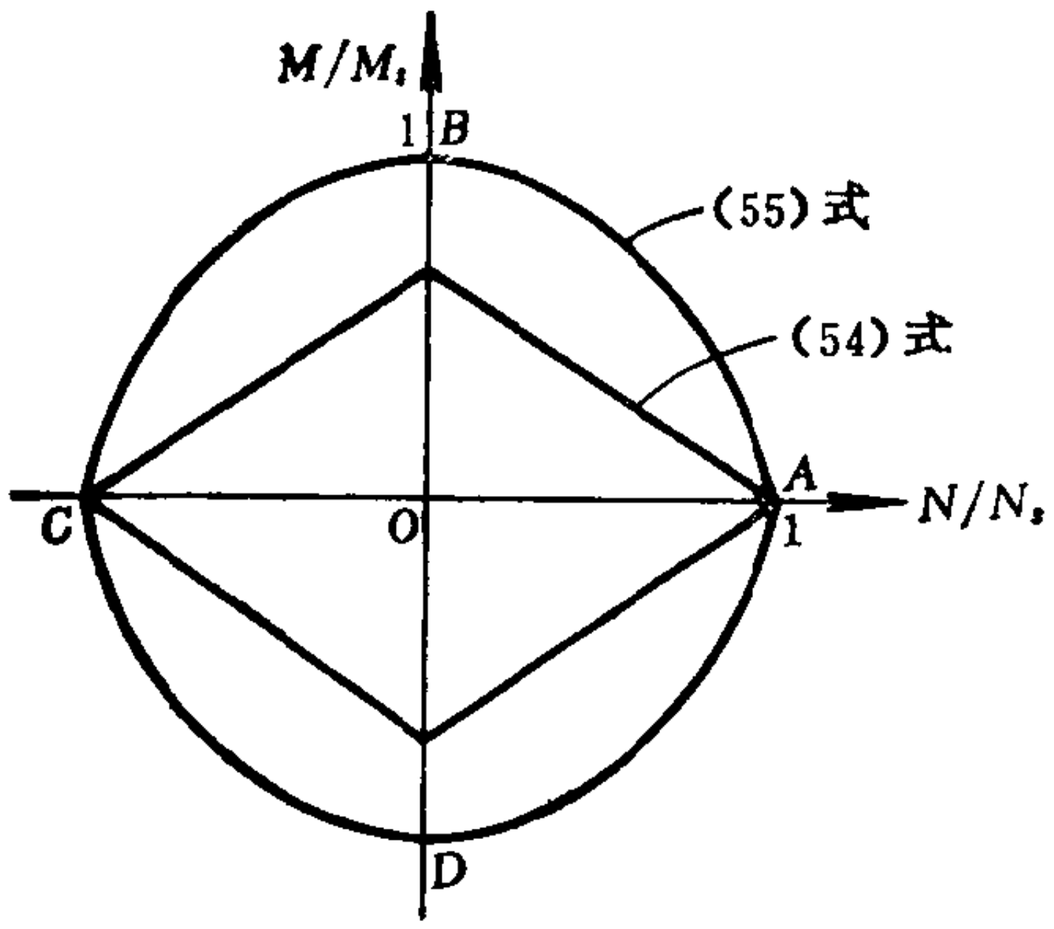



图 13

这就是 在 $N>0, M>0$ 的条件下的弹性极限曲线。

再来讨论梁的塑性极限载荷。假定梁的整个截面都处于屈服阶段，中性层(实际上已成为应力间断线)的位置为

$$\bar{y} = -\frac{1}{2}\eta_0 h,$$

则由图12(d)便不难计算出(3)式和(4)式中

$$N = \eta_0 bh\sigma_s,$$

和

$$M = (1-\eta_0^2)\frac{bh^2}{4}\sigma_s.$$

其无量纲形式为

$$n = \eta_0,\quad m = 1-\eta_0^2.$$

因此有

$$m = 1 - n^2. \tag{55}$$

上式称为在弯曲和拉伸同时作用下的交互曲线。它是一种用广义应力表示的屈服条件。在对梁、板、壳等结构进行塑性极限分析时，就经常会用到这类屈服条件，例如可参考《结构的塑性分析》一书[4]。

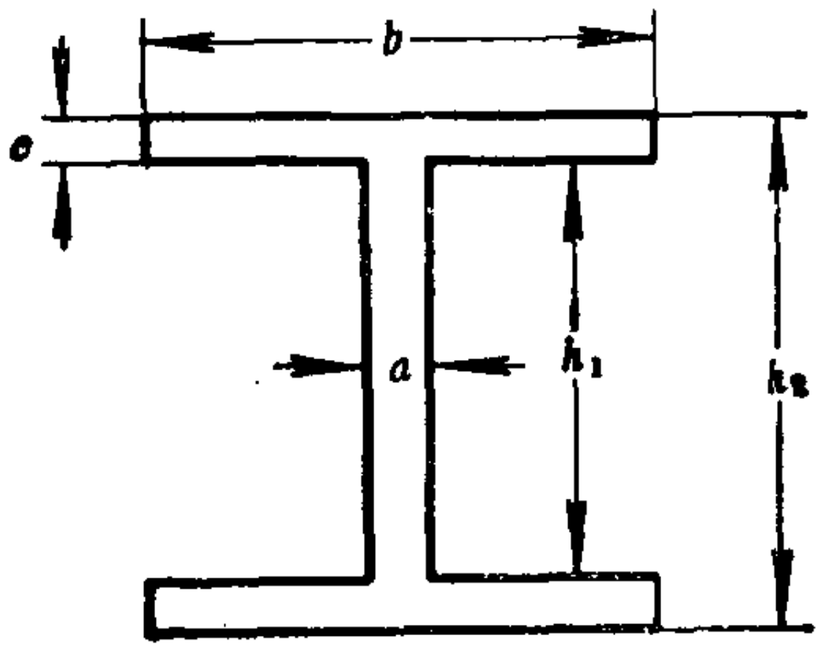
## 习　题

2.1　空心圆截面梁，已知内径 $d$ 与外径 $D$ 之比为 $d/D = a$，

在受纯弯曲时，求比 $M_s/M_e$ 与 $\alpha$ 的关系。

2.2 半径为 $R$ 的实心圆截面梁受弯矩 $M$ 的作用，材料是理想弹塑性的，求弯矩 $M$ 与曲率 $K$ 之间的关系。

2.3 工字形截面梁如图所示，受纯弯作用，材料是理想弹塑性的。引进下列无量纲参数：




题 2.3

$$m = M/M_e,\quad k = K/K_e,$$

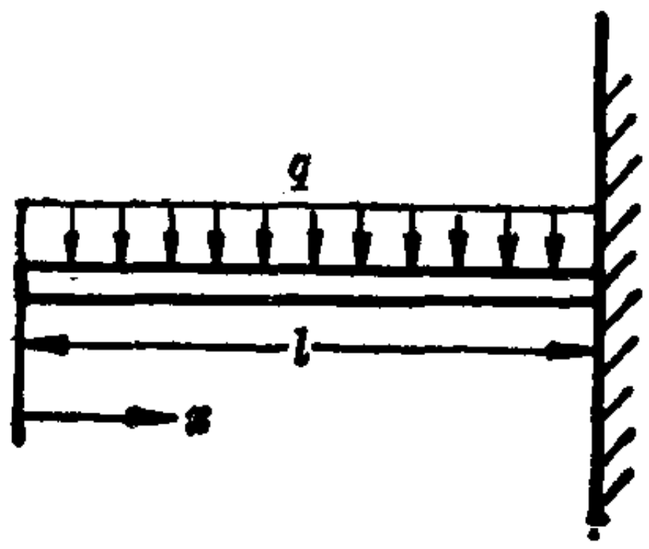
$$c = bh^2/2w,$$

$w = 2J/h$ 是抗弯截面系数。

证明当塑性区只局限在翼板上时有关系

$$m = (1 - c/3)k + \frac{c}{2}(1 - 1/3k^2)。$$

当塑性区进入腹板后有关系




题 2.4

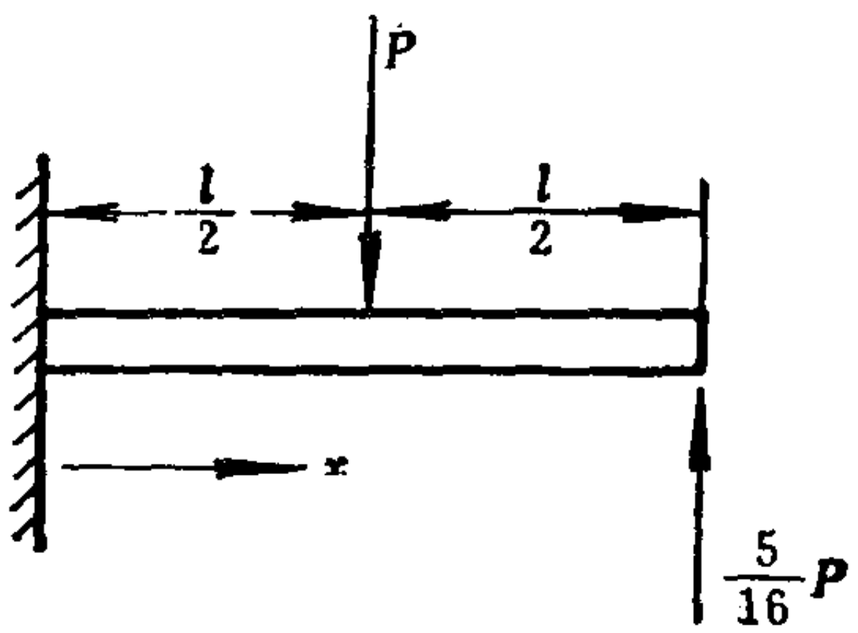
$$m = m_0 - ac/6bk^2,$$

式中$m_0 = M_s/M_e$。

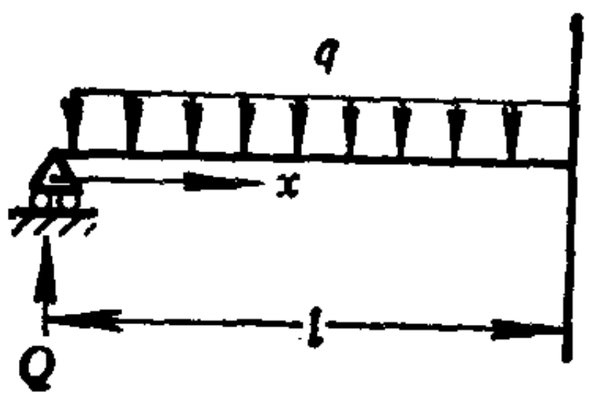
2.4 如图所示的悬臂矩形截面梁，长$l$，宽$b$，高$h$。受均布载荷$q$的作用，材料是理想弹塑性的，求自由端的挠度$\delta$和转角$\theta$与$q$的关系。

2.5 图5(见第45页)所示的悬臂矩形截面梁，当$P$加载到$P_s$后卸载，求梁的上半部分($0 \leqslant x \leqslant L, 0 \leqslant y \leqslant h/2$)在卸载后的残余应力分布$\sigma^0(x, y)$。

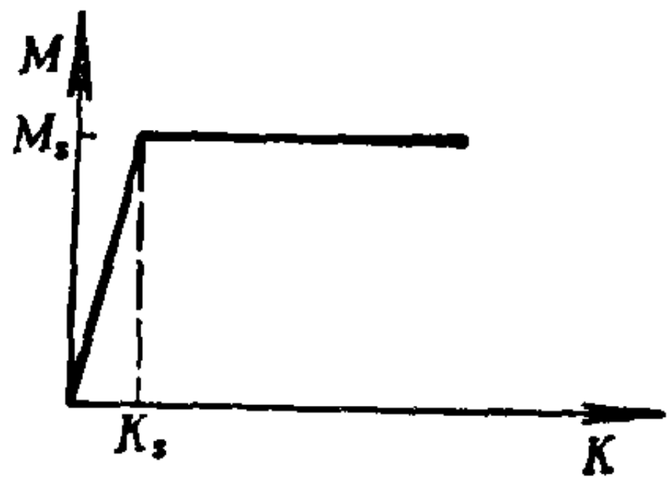
2.6 如图所示的矩形截面悬臂梁，在梁的中点受力$P$向下




题 2.6




(a)




(b)

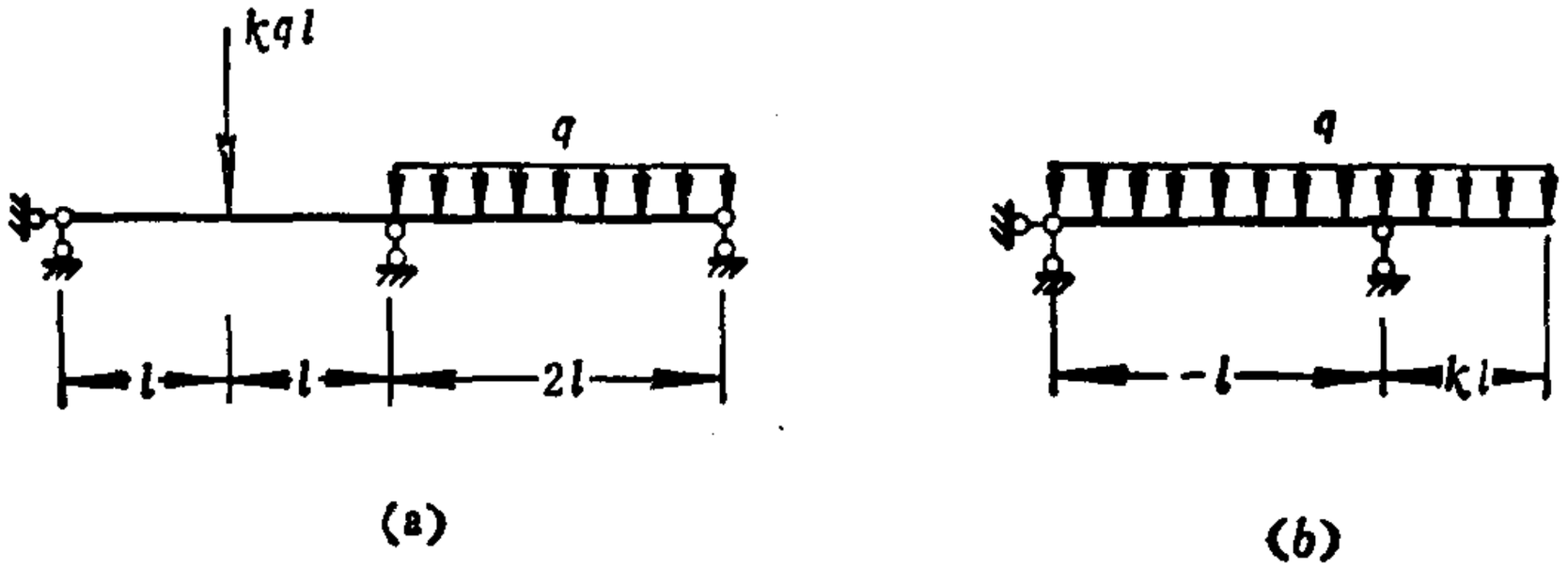
题 2.7

作用。在自由端受力$\frac{5P}{16}$向上作用。梁材料的$\sigma$-$\varepsilon$曲线是理想弹塑性的。求梁的塑性极限载荷$P_s$值及当$P = P_s$时弹塑性交界$\zeta(x)$的

表达式。

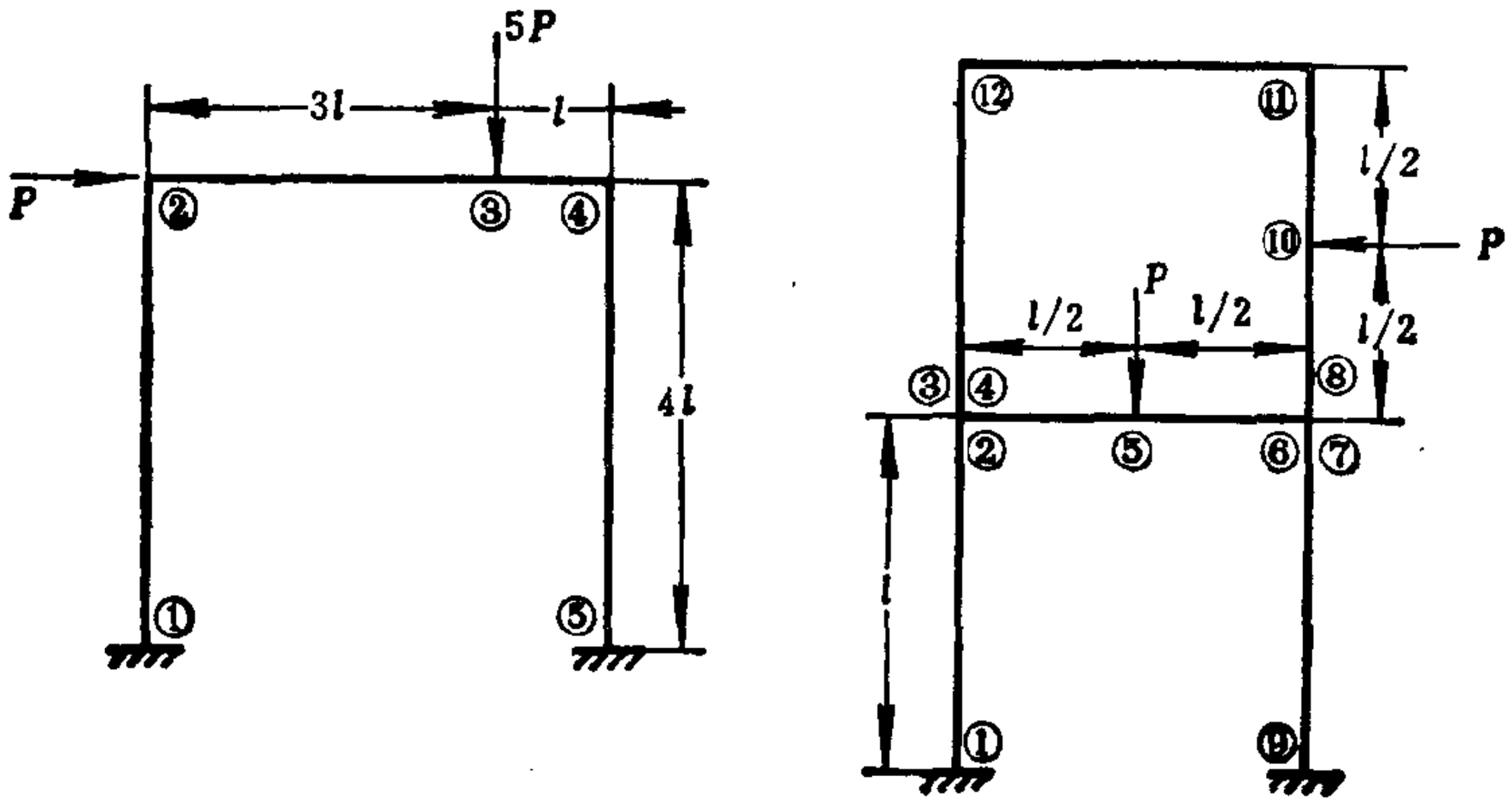
2.7　如图所示梁，一端简支一端固定，受均布载荷 $q$ 的作用。梁的 $M$-$K$ 曲线采用图示的简化模型，求 $q_e$ 与 $q_s$。当载荷 $q$ 从零开始增加时，求铰支座反力 $Q$ 与外载 $q$ 的关系。

2.8　利用上限定理求下图所示连续梁的极限载荷 $q$ 值。



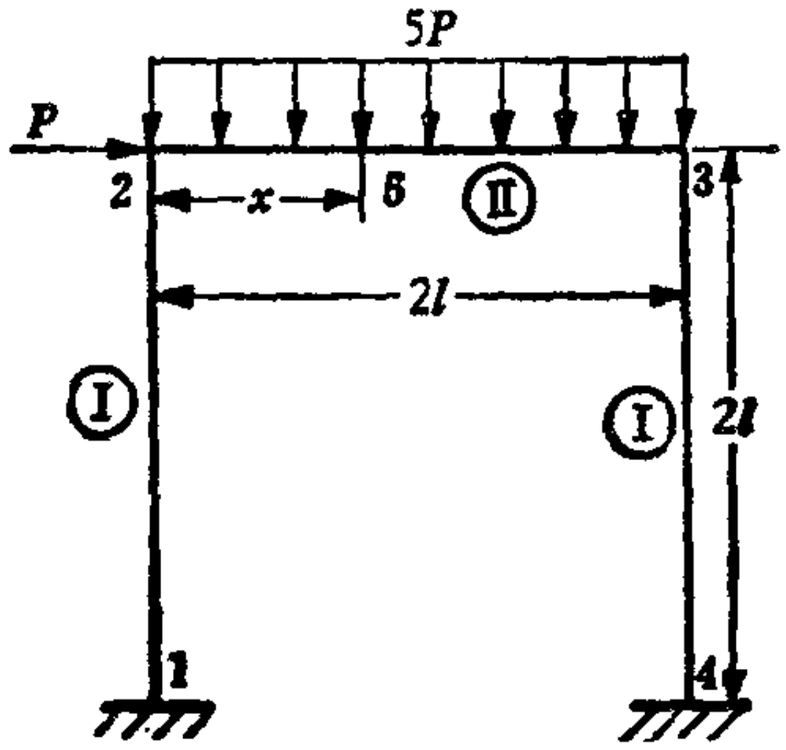

题 2.8

2.9　利用上限及下限定理，求下图所示刚架的极限载荷 $P$ 值，并给出该载荷下所有节点处的弯矩值(规定刚架内侧受拉时弯矩为正)。



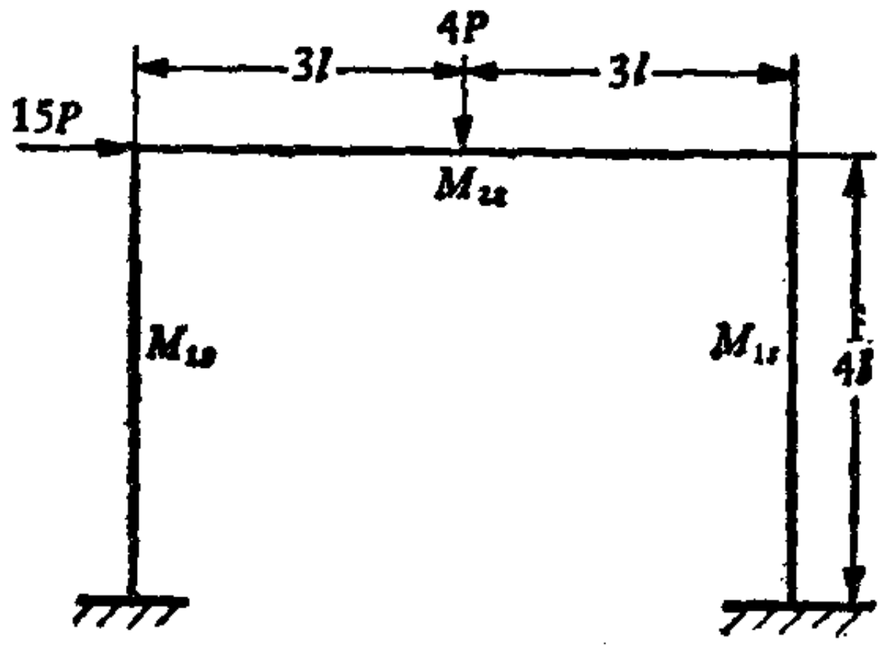

题 2.9

2.10　利用上限及下限定理求如图所示刚架的极限载荷$P$值。均布载荷的合力用$5P$表示，图中①所示柱的极限弯矩是$M_s$，③所示梁的极限弯矩是$2M_s$，在形成机构时，在梁距左端$x$处可能形成铰，这里用节点5表示。




题　2.10

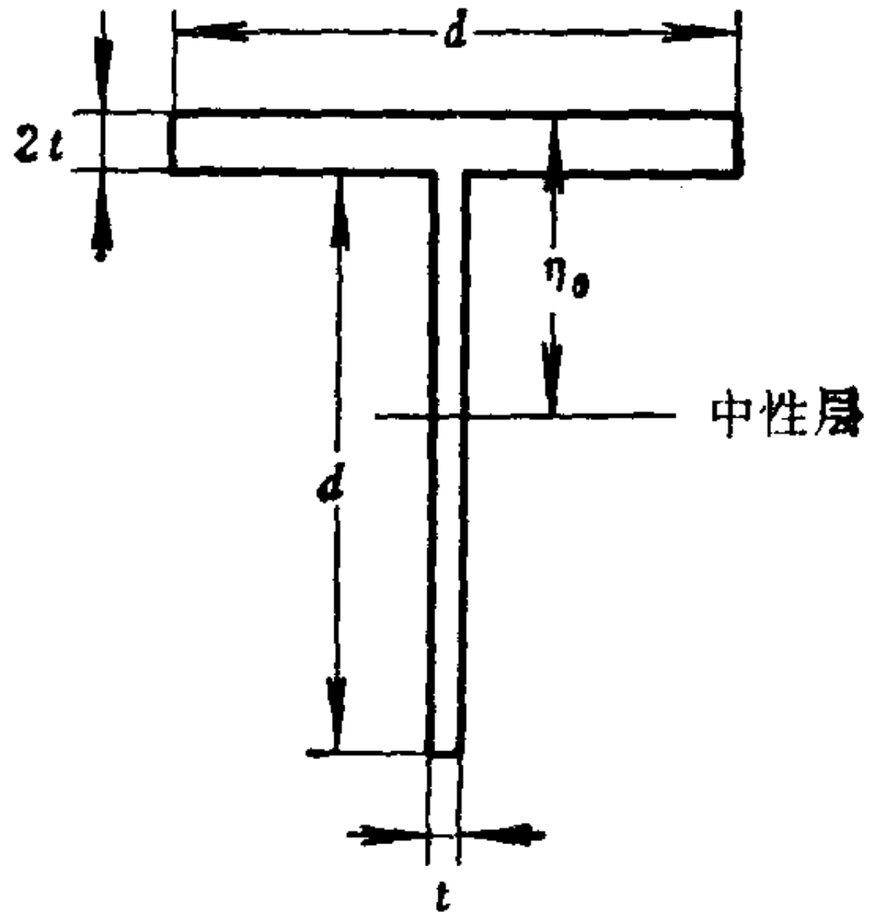
2.11　如图所示刚架，外载$P$及刚架外形尺寸已定，只是柱的极限弯矩$M_{1s}$及梁的极限弯矩$M_{2s}$需要确定。试根据最轻设计的原则，求出$M_{1s}$及$M_{2s}$。




题　2.11

2.12　如图所示T字型截面梁，取$d=16t$，材料是理想弹塑性的，受轴力$N$及弯矩$M$的作用。在极限状态时中性层离顶部的

距离为$\eta_0$，先求出纯拉与纯弯时的$N_s$及$M_s$值。再给出用广义应力$M$与$N$表示极限状态时的屈服条件，并从分析中得出当存在$N$时，$M$有可能比纯弯时的$M_s$值还大。




题 2.12

# 第三章　应变分析、应力分析和屈服条件

前两章通过简单应力状态下的弹塑性分析对塑性力学中的基本概念、特点和研究方法进行了初步的介绍。从而为以后的学习作出了必要的准备。从本章起，我们将转入一般应力状态下的弹塑性变形问题的讨论。这里假定读者对经典弹性力学是熟悉的。因为有关应变分析和应力分析的内容并不涉及到材料本身的性质，所以它们不仅在弹性力学中适用，而且在塑性力学中也同样是适用的。本章只打算讨论在塑性力学中常用到的和比较基本的有关问题。此外，为了分散难点，本章还要将简单应力状态下屈服应力的概念推广到一般应力状态中，对屈服条件和加载条件进行重点的介绍。

## §3.1　应变张量和应力张量

在直角坐标系中，物体内任一代表点的位置可用三个坐标值$(x,y,z)$或$(x_1,x_2,x_3)$来表示。如果该点的位移为$(u,v,w)$或$(u_1,u_2,u_3)$，那么在小变形假设下，相应的应变可表示为①：

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \gamma_{yz}=2\varepsilon_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=\gamma_{zy},\\
&\varepsilon_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \gamma_{zx}=2\varepsilon_{zx}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}=\gamma_{xz},\\
&\varepsilon_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z}, \qquad \gamma_{xy}=2\varepsilon_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=\gamma_{yx}.
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

① 虽然弹塑性变形要比纯弹性变形大，但当外载荷未达到极限载荷前，对大多数问题来说，小变形假定仍然是适用的。

上式采用的是工程上惯用的符号。但需注意，（1）式中的各量并不是张量的分量，只有当把$\gamma_{yz},\gamma_{zx},\gamma_{xy}$分别改为

$$\frac{1}{2}\gamma_{yz}=\varepsilon_{yz},\quad \frac{1}{2}\gamma_{zx}=\varepsilon_{zx},\quad \frac{1}{2}\gamma_{xy}=\varepsilon_{xy}$$

后，（1）式中各量才构成张量的分量，称为应变张量。

为了书写方便起见，通常把质点坐标值的分量记为$(x_1,x_2,x_3)$，位移的分量记为$(u_1,u_2,u_3)$。这时应变分量就可写为

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\ (i,j=1,2,3)。\qquad (2)$$

上式中的逗号表示对坐标分量的偏导数。由上式立刻可知，应变是一个二阶对称张量：$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ji}$。

（2）式中应变的六个分量是通过三个位移分量的偏导数给出的。在（2）式中消去位移后，便可得到应变分量之间的关系，称为协调条件。这些问题在弹性力学中已作了充分的讨论，这里就不作详细介绍了。

在物体的变形和运动过程中，质点的速度分量$v_i$可通过其位移分量$u_i$的时间变化率表示。在小变形假设下，相应的表达式可简单地写为

$$v_i=\frac{\partial u_i}{\partial t}=\dot{u}_i\quad (i=1,2,3)。\qquad (3)$$

上式中$u_i$上的一点表示对时间的偏导数。

另外，可定义变形率张量$\frac{1}{2}(v_{i,j}+v_{j,i})$，只有在小变形的情况下，它才是应变张量的时间变化率，即有

$$\dot{\varepsilon}_{ij}=\frac{1}{2}(v_{i,j}+v_{j,i})。\qquad (4)$$

如将上式两端乘以时间增量$dt$，便得到应变增量的表达式

$$d\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(du_{i,j}+du_{j,i})。\qquad(5)$$

由于塑性力学着重讨论物体的变形过程和变形规律，故对于率无关材料来说，任何与真实时间成单调递增关系的参量往往也可取作为时间参量。因此，以上各式中的 $t$ 有时并不一定代表真实的时间。

下面来进行应力分析。现考虑一个在外力作用下处于平衡状态的物体。在通过物体内任一代表点的面元上，可引进应力向量 $T_i(i=1,2,3)$，它是面元的一侧作用于另一侧的单位面积上的力。$T_i(i=1,2,3)$的值不仅与该点的位置有关，而且还与该面元的取向有关。设面元的单位法向量为$\nu_i(i=1,2,3)$，则由 Cauchy 基本定理，有

$$T_1=\sigma_{11}\nu_1+\sigma_{12}\nu_2+\sigma_{13}\nu_3=\sum_{j=1}^{3}\sigma_{1j}\nu_j,$$

$$T_2=\sigma_{21}\nu_1+\sigma_{22}\nu_2+\sigma_{23}\nu_3=\sum_{j=1}^{3}\sigma_{2j}\nu_j,$$

$$T_3=\sigma_{31}\nu_1+\sigma_{32}\nu_2+\sigma_{33}\nu_3=\sum_{j=1}^{3}\sigma_{3j}\nu_j。$$

上式中的

$$\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{pmatrix}$$

是一个二阶张量，称之为 Cauchy 应力张量，通常简记为 $\sigma_{ij}(i,j=1,2,3)$，它刻画了所讨论物体中代表点的应力状态。如采用 Einstein 求和约定，上式还可写为

$$T_i=\sigma_{ij}\nu_j\quad(i,j=1,2,3),\qquad(6)$$

式中指标 $j$ 重复出现，表示要对它从 1 到 3 求和，由此可省略求和号$\sum_{j=1}^{3}$。重复的指标称为哑指标，它也可用任何不与 $i$ 相同的其它重复字母代替，因为这里 $i$ 已在式中出现但并不求和，所以 $i$ 称为自由指标。

由动量守恒定律和动量矩守恒定律，可得应力张量所满足的运动方程和应力张量的对称性条件：

$$\sigma_{ij,i}+F_i=\rho v_i \quad (i,j=1,2,3), \tag{7}$$

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ji}, \tag{8}$$

(7)式中 $F_i(i=1,2,3)$ 为单位体积的体力分量，$\rho$ 为密度。方程(7)和(8)式是在物体变形后的几何位置上建立的，但在小变形假设下，物质点在变形前和变形后的坐标可以在上式中不加区别。

对于准静态变形过程，(7)式右端的惯性项可以忽略，由此便得到平衡方程：

$$\sigma_{ij,j}+F_i=0 \quad (i,j=1,2,3). \tag{9}$$

## §3.2 应变张量或应力张量的不变量

现在来讨论物体内某一代表点上具有如下性质的单位向量 $\nu_i(i=1,2,3)$，当所截取的面元是以 $\nu_i$ 为法向量时，面元上只有正应变(或正应力)而没有剪应变(或剪应力)。这时，向量 $\nu_i$ 称为主方向。相应的正应变(或正应力)则称为主应变(或主应力)。

设 $\tau_{ij}(i,j=1,2,3)$ 是一个二阶对称张量，它可以是应变张量 $\varepsilon_{ij}$，也可以是应力张量 $\sigma_{ij}$。当 $\nu_i(i=1,2,3)$ 是 $\tau_{ij}$ 的主方向时，$\tau_{ij}\nu_j$ 就应该与 $\nu_i$ 成比例，即有

$$\begin{aligned}
\tau_{11}\nu_1+\tau_{12}\nu_2+\tau_{13}\nu_3&=\lambda\nu_1,\\
\tau_{21}\nu_1+\tau_{22}\nu_2+\tau_{23}\nu_3&=\lambda\nu_2,\\
\tau_{31}\nu_1+\tau_{32}\nu_2+\tau_{33}\nu_3&=\lambda\nu_3.
\end{aligned}$$

上式也可写为

$$(\tau_{ij} - \lambda\delta_{ij})\nu_j = 0, \tag{10}$$

其中记号

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当} i = j \text{时}, \\ 0, & \text{当} i \neq j \text{时}, \end{cases}$$

称为 Kronecker 符号，它是一个二阶单位张量。

(10)式存在非零解$\nu_j$的条件是其系数行列式等于零：

$$\det(\tau_{ij} - \lambda\delta_{ij}) = 0,$$

由此得到关于 $\lambda$ 的三次多项式：

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 - I_2\lambda - I_3 = 0, \tag{11}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \operatorname{tr}\tau_{ij} = \tau_{kk}, \\ I_2 &= -\frac{1}{2}(\tau_{ii}\tau_{kk} - \tau_{ik}\tau_{ik}), \\ I_3 &= \det(\tau_{ij}) \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

称为$\tau_{ij}$的第一、第二和第三不变量。因为在进行坐标变换时，$\tau_{ij}$的分量将作相应的改变，但 $I_1$，$I_2$和$I_3$的值仍然不变。

可以证明，(11)式有三个实根 $\lambda_1$，$\lambda_2$，$\lambda_3$，称为 $\tau_{ij}$的主值(如$\tau_{ij}$是应变张量，则称主应变；如$\tau_{ij}$是应力张量，则称主应力)。以后将$\tau_{ij}$的主值记为$\tau_1$，$\tau_2$，$\tau_3$，并且规定总有 $\tau_1 \geqslant \tau_2 \geqslant \tau_3$。

显然，(12)式也可用主值表示为：

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \tau_1 + \tau_2 + \tau_3, \\ I_2 &= -(\tau_1\tau_2 + \tau_2\tau_3 + \tau_3\tau_1), \\ I_3 &= \tau_1\tau_2\tau_3. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

对应于主值$\tau_\alpha(\alpha = 1,2,3)$的主方向可分别写为$\nu_i(\alpha)(\alpha = 1,2,3)$。不难证明，当三个主值互不相同时，这三个主方向是相互垂直的。此外，主方向还具有如下的性质：对于任意的单位向量$\nu_i$ $(i = 1,2,3)$，总可定义标量 $N = \tau_{ij}\nu_i\nu_j$(当$\tau_{ij}$表示应力张量时，$N$就是$\nu_i$方向上的正应力)，这时，使$N$取极值的方向$\nu_i$就一定

对应于主方向$\nu_i(\alpha)$。故有

$$\max_{\nu_i} N = \tau_1 .$$

## §3.3 偏应变张量和偏应力张量

实验表明，对于大多数金属材料，在较大的静水压力作用下，材料仍表现为弹性性质。因此，在塑性力学中引进偏应变张量和偏应力张量的概念是十分重要的。现令

$$\tau_m = \frac{1}{3}\tau_{kk} = \frac{1}{3}I_1, \tag{14}$$

$$\zeta_{ij} = \tau_{ij} - \tau_m \delta_{ij}, \tag{15}$$

其中$\zeta_{ij}$称为张量$\tau_{ij}$的偏量。当$\tau_{ij}$为应变张量时，(14)式中的$\tau_m$就表示平均正应变$\varepsilon_m$，而(15)式称为偏应变张量，以后用$e_{ij}$表示之；当$\tau_{ij}$为应力张量时，(14)式中的$\tau_m$就表示平均正应力$\sigma_m$(取负号后即为静水压力部分)，而(15)式称为偏应力张量，以后用$s_{ij}$表示之。

张量$\tau_{ij}$的偏量$\zeta_{ij}$有如下几点性质。

1. $\zeta_{ij}$和$\tau_{ij}$具有相同的主方向，其不变量可表示为

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= \zeta_{kk} = 0, \\ J_2 &= \frac{1}{2}\zeta_{ij}\zeta_{ij} = I_2 + 3\tau_m^2, \\ J_3 &= \det(\zeta_{ij}) = \frac{1}{3}\zeta_{ij}\zeta_{jk}\zeta_{ki} = I_3 + I_2\tau_m + 2\tau_m^3 . \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

2. $J_2$可通过$\tau_{ij}$表示为

$$J_2 = \frac{1}{6}[(\tau_{11}-\tau_{22})^2 + (\tau_{22}-\tau_{33})^2 + (\tau_{33}-\tau_{11})^2 + 6(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2)] . \tag{17}$$

**证明** 由 $(\zeta_{11}+\zeta_{22}+\zeta_{33})^2=0$ 可得

$$\zeta_{11}^2+\zeta_{22}^2+\zeta_{33}^2=-2(\zeta_{11}\zeta_{22}+\zeta_{22}\zeta_{33}+\zeta_{33}\zeta_{11})\text{。}$$

令上式的值为 $\Delta$ 并将其写为 $\frac{2}{3}\Delta$ 和 $\frac{1}{3}\Delta$ 之和，第一部分取上式左端的 $\frac{2}{3}$，第二部分取上式右端的 $\frac{1}{3}$，就有

$$\Delta=\frac{2}{3}[(\zeta_{11}^2+\zeta_{22}^2+\zeta_{33}^2)-(\zeta_{11}\zeta_{22}+\zeta_{22}\zeta_{33}+\zeta_{33}\zeta_{11})]$$

$$=\frac{1}{3}[(\zeta_{11}-\zeta_{22})^2+(\zeta_{22}-\zeta_{33})^2+(\zeta_{33}-\zeta_{11})^2]\text{。}$$

因此，

$$J_2=\frac{1}{2}\zeta_{ij}\zeta_{ij}=\frac{1}{2}(\zeta_{11}^2+\zeta_{22}^2+\zeta_{33}^2)+\zeta_{12}^2+\zeta_{23}^2+\zeta_{31}^2$$

$$=\frac{1}{6}[(\zeta_{11}-\zeta_{22})^2+(\zeta_{22}-\zeta_{33})^2+(\zeta_{33}-\zeta_{11})^2$$

$$+6(\zeta_{12}^2+\zeta_{23}^2+\zeta_{31}^2)]\text{。}$$

注意到

$$\zeta_{11}-\zeta_{22}=\tau_{11}-\tau_{22},\quad \zeta_{22}-\zeta_{33}=\tau_{22}-\tau_{33},$$
$$\zeta_{33}-\zeta_{11}=\tau_{33}-\tau_{11}$$

和

$$\zeta_{ij}=\tau_{ij}\ (\text{当 } i\neq j),$$

可知(17)式是成立的。特别当 $J_2$ 用主值表示时，有

$$J_2=\frac{1}{3}(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2-\tau_1\tau_2-\tau_2\tau_3-\tau_3\tau_1)\text{。}\qquad(18)$$

3．如 $\tau_{ij}$ 的主值满足 $\tau_1\geqslant\tau_2\geqslant\tau_3$，则有基本不等式

$$1\leqslant\frac{2\sqrt{J_2}}{\tau_1-\tau_3}\leqslant\frac{2}{\sqrt{3}}\approx1.15\text{。}\qquad(19)$$

**证明** 由 $(\tau_1-\tau_2)\geqslant0$ 和 $(\tau_2-\tau_3)\geqslant0$，可知

$$(\tau_1-\tau_3)^2\geqslant(\tau_1-\tau_3)^2-2(\tau_1-\tau_2)(\tau_2-\tau_3)$$
$$=[(\tau_1-\tau_2)+(\tau_2-\tau_3)]^2-2(\tau_1-\tau_2)(\tau_2-\tau_3)$$
$$=(\tau_1-\tau_2)^2+(\tau_2-\tau_3)^2$$
$$\geqslant\frac{1}{2}[(\tau_1-\tau_2)^2+(\tau_2-\tau_3)^2]+\frac{2}{2}(\tau_1-\tau_2)(\tau_2-\tau_3)$$
$$=\frac{1}{2}(\tau_1-\tau_3)^2,$$

或

$$\frac{1}{2}(\tau_1-\tau_3)^2\leqslant(\tau_1-\tau_2)^2+(\tau_2-\tau_3)^2\leqslant(\tau_1-\tau_3)^2.$$

将上式各项同加 $(\tau_1-\tau_3)^2$再除以6，就有

$$\frac{1}{4}(\tau_1-\tau_3)^2\leqslant J_2\leqslant\frac{1}{3}(\tau_1-\tau_3)^2,$$

这正是(19)式。

下面，我们将给出与$J_2$有关的几个定义：

**定义1**

$$\bar{\varepsilon}=\sqrt{\frac{2}{3}e_{ij}e_{ij}}\tag{20}$$

称为等效应变（或应变强度）。

$$\bar{\sigma}=\sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}}\tag{21}$$

称为等效应力（或应力强度）。

在简单拉伸时，如果材料不可压缩，由

$$\varepsilon_{11}=\varepsilon>0,\quad \varepsilon_{22}=\varepsilon_{33}=-\frac{1}{2}\varepsilon$$

和

$$\varepsilon_{ij}=0\quad(\text{当 } i\neq j)$$

可得

$$\bar{\varepsilon}=\varepsilon,$$

由

$$\sigma_{11}=\sigma>0,\quad \sigma_{22}=\sigma_{33}=0$$

和

$$\sigma_{ij}=0\ (\text{当 } i\neq j),$$

可得

$$\bar{\sigma}=\sigma.$$

**定义2**

$$\Gamma=\sqrt{2e_{ij}e_{ij}} \tag{22}$$

称为等效剪应变（或剪应变强度）。

$$T=\sqrt{\frac{1}{2}s_{ij}s_{ij}} \tag{23}$$

称为等效剪应力（或剪应力强度）。

在纯剪切时，由 $\varepsilon_{11}=-\varepsilon_{33}=\frac{1}{2}\gamma>0$ 和其它应变分量为零的条件，可得 $\Gamma=\gamma$；由 $\sigma_{11}=-\sigma_{33}=\tau>0$ 和其它应力分量为零的条件，可得 $T=\tau$。

**定义3**

$$\gamma_8=\sqrt{\frac{4}{3}e_{ij}e_{ij}} \tag{24}$$

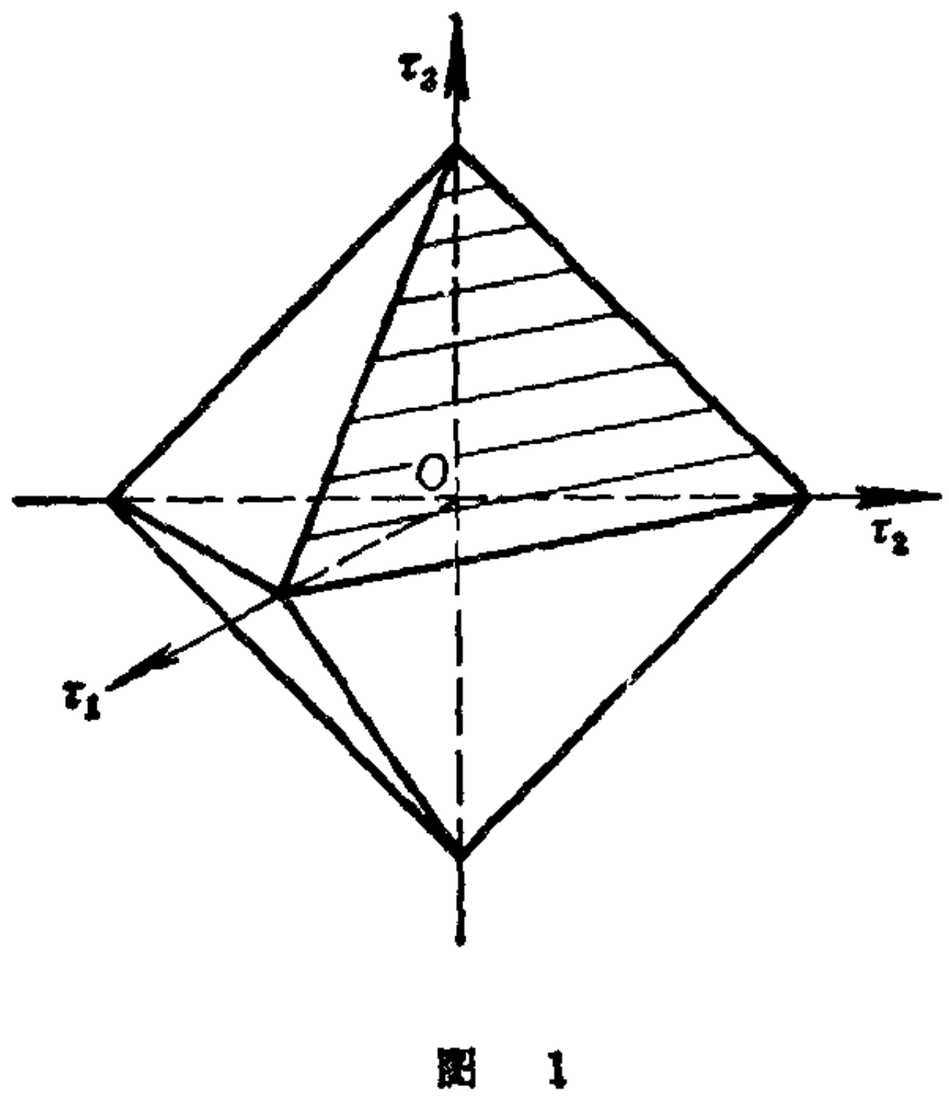



图 1

称为八面体剪应变。

$$\tau_8=\sqrt{\frac{1}{3}s_{ij}s_{ij}} \tag{25}$$

称为八面体剪应力。

以上两式分别表示了法向与三个主方向之间有相同夹角的平面上的工程剪应变（$\gamma_8$）和剪应力（$\tau_8$）。如果选取坐标轴的方向与主方向一致，则上述平面的外法向量 $\nu_i$ 可写为

$$(\nu_1,\nu_2,\nu_3)=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)。$$

这样的平面共有八个，故称为八面体（见图1）。该平面上的面力向量可由(6) 式写为

$$T_i=(\sigma_{11}\nu_1,\sigma_{22}\nu_2,\sigma_{33}\nu_3),$$

而正应力为

$$N=\sigma_{ij}\nu_i\nu_j=\sigma_{11}\nu_1^2+\sigma_{22}\nu_2^2+\sigma_{33}\nu_3^2=\frac{1}{3}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})。$$

因此，该平面上的剪应力可表示为

$$t_8=\sqrt{T_iT_i-N^2}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{3}(\sigma_{11}^2+\sigma_{22}^2+\sigma_{33}^2)-\frac{1}{9}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})^2}$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2}$$

注意到 $\sigma_{ij}=0$（当 $i\neq j$），可见以上所定义的 $\tau_8$ 就是八面体上的剪应力 $t_8$。显然，也可对八面体剪应变作类似的讨论，但由于工程剪应变是通常剪应变分量的两倍，故有以上关于 $\gamma_8$ 的定义式。

## §3.4 屈服条件

在本节中，我们要把简单应力状态下屈服应力的概念推广到一般应力状态中去。现设想作用于物体上的外载荷是逐渐增加的。在其变形的初始阶段，每个微元将处于弹性状态。我们称上述弹性状态的界限为屈服条件。当微元的应力状态达到该界限时，进一步的加载就可能使微元产生不可恢复的塑性变形。屈服条件可以用表达式 $f(\sigma_{ij})=0$ 写出。它在以应力分量为坐标的应力空间中是一个曲面，称为屈服曲面。当应力 $\sigma_{ij}$ 位于此曲面之内，即

$f(\sigma_{ij})<0$ 时，材料处于弹性状态；当应力 $\sigma_{ij}$ 位于此曲面之上，即 $f(\sigma_{ij})=0$ 时，材料将开始屈服而进入塑性状态。

在讨论屈服曲面的一般形式之前，我们先给出如下的两个假定：

1．材料是初始各向同性的．即当材料在未经受过塑性变形之前，屈服条件与材料的取向无关，即与建立在物体上的坐标轴的取向无关。因此，屈服条件可表示成三个主应力的函数

$$f(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=0, \tag{26}$$

或表示成应力张量不变量的函数①

$$f_0(I_1,I_2,I_3)=0. \tag{27}$$

2．静水压力不影响材料的塑性性质。这时，屈服条件只与应力偏量有关。故(27)式可进一步简化为

$$f_0(J_2,J_3)=0, \tag{28}$$

其中 $J_2,J_3$ 是偏应力张量 $s_{ij}$ 的第二和第三不变量。

需要说明，在静水压力不太大的情况下，这个假设对许多金属和饱和土质是适用的，但对于岩土一类材料，这个假定并不符合实际，这时就要采用(27)式或对(28)式进行相应的修正。

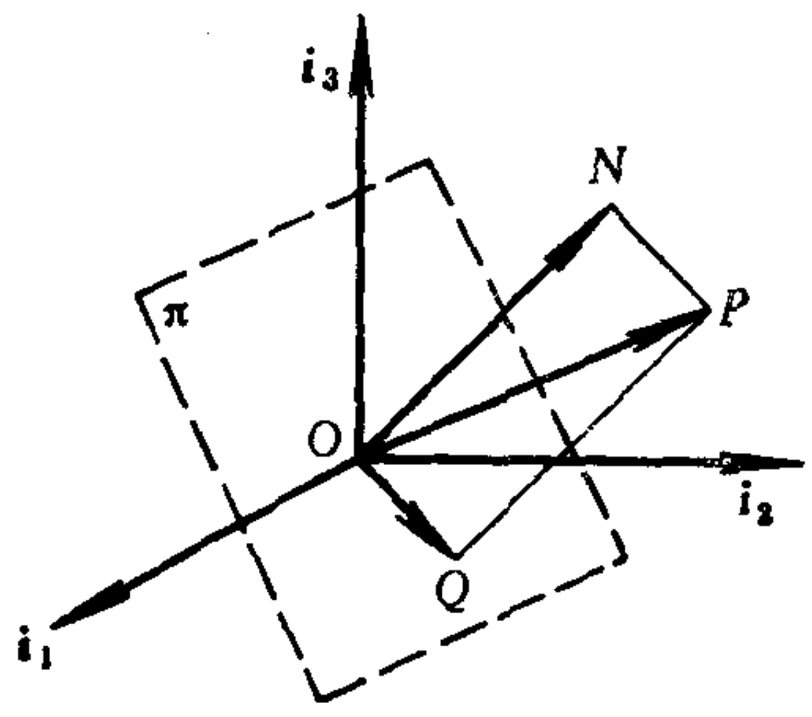



图 2

由(27)式或(28)式可以看出，屈服条件是三个变量或两个变量的函数。因此，有可能用几何方法将其形象地表示出来。为此，我们将在主应力空间中，即在以 $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ 为坐标轴所构成的应力空间中来进行讨论。如以三个相互垂直的单位向量 $i_1,i_2,i_3$ 来作为主应力空间中的基向量，则任意一个应力状态都可用该空间中一个向径

① 在以后的讨论中，$I_1,I_2,I_3$ 和 $J_2,J_3$ 将分别表示应力张量和偏应力张量的不变量。

$\overrightarrow{OP}$ 表示（图2）。

$$\overrightarrow{OP} = \sigma_1 i_1 + \sigma_2 i_2 + \sigma_3 i_3.$$

上式还可分解为偏量部分和静水压力部分：

$$\overrightarrow{OP} = (s_1 i_1 + s_2 i_2 + s_3 i_3) + (\sigma_m i_1 + \sigma_m i_2 + \sigma_m i_3)$$

$$= \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{ON},$$

其中 $\overrightarrow{OQ}$ 为主偏应力向量，其分量为

$$s_a = \sigma_a - \sigma_m \quad (a = 1,2,3),$$

而 $\overrightarrow{ON}$ 与向量 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 相平行。过原点 $O$ 以 $\overrightarrow{ON}$ 为法向的平面可写为

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0 \tag{29}$$

习惯上称之为 $\pi$ 平面。注意到

$$s_1 + s_2 + s_3 = 0,$$

可知 $\overrightarrow{OQ}$ 总是在 $\pi$ 平面内的。

现将基向量 $(i_1, i_2, i_3)$ 在 $\pi$ 平面上的投影记为 $(i'_1, i'_2, i'_3)$，并在 $\pi$ 平面上建立直角坐标系 $Oxy$，使 $y$ 轴与 $i'_2$ 相重合（见图3）。这时，$\pi$ 平面上任一点的位置既可用坐标 $(x,y)$ 来表示，也可用 $(s_1, s_2, s_3)$ 来表示。因为

$$s_1 + s_2 + s_3 = 0,$$

所以在 $(s_1, s_2, s_3)$ 中只有两个独立的参数。

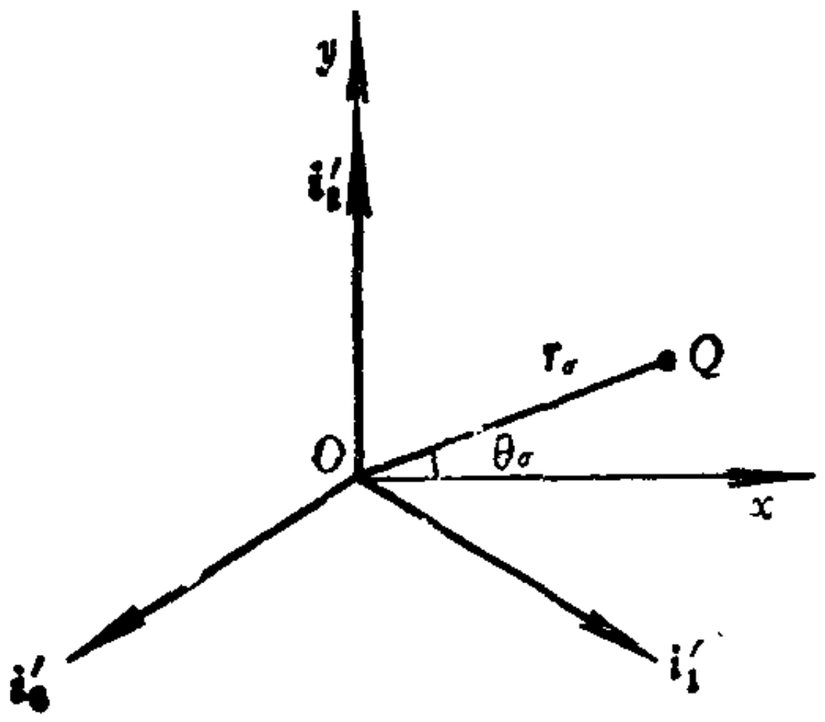



图 3

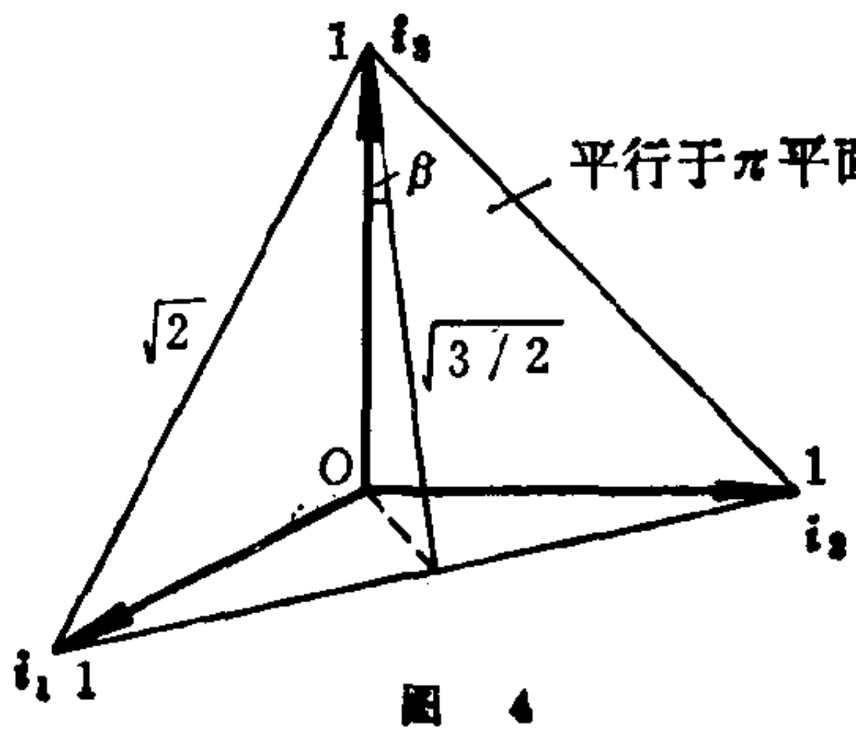



图 4

$(x,y)$ 与 $(s_1,s_2,s_3)$ 之间有单一的对应关系。利用简单的几何作图（见图 4，图中的斜面与 $\pi$ 平面平行），可知 $i'_a$ 与 $i_a$ $(a=1,2,3)$ 之间的夹角 $\beta$ 满足

$$\cos\beta=\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

这说明向量 $i'_a$ $(a=1,2,3)$ 的长度为 $\sqrt{\frac{2}{3}}$。于是，把 $s_1i_1$，$s_2i_2$ 和 $s_3i_3$ 投影到 $\pi$ 平面上时，可分别得到它们的 $(x,y)$ 坐标值为

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s_1\cos\beta,-\frac{1}{2}s_1\cos\beta\right),$$

$$(0,s_2\cos\beta),$$

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}s_3\cos\beta,-\frac{1}{2}s_3\cos\beta\right).$$

因此，$\overrightarrow{OQ}$（或 $\overrightarrow{OP}$）在 $\pi$ 平面上的坐标可写为

$$\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(s_1-s_3)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sigma_1-\sigma_3),\\[2ex] y=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(2s_2-s_1-s_3)=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(2\sigma_2-\sigma_1-\sigma_3).\end{cases}\tag{30}$$

当采用极坐标表示时，则有

$$\begin{cases}r_\sigma=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\dfrac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)^2+\dfrac{1}{6}(2\sigma_2-\sigma_1-\sigma_3)^2}=\sqrt{2J_2},\\[2ex] \operatorname{tg}\theta_\sigma=\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{2\sigma_2-\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_1-\sigma_3}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\mu_\sigma,\end{cases}\tag{31}$$

上式中的 $\mu_\sigma=\dfrac{2\sigma_2-\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_1-\sigma_3}$ 称为罗地（Lode）参数，它表示了主应力之间的相对比值。如规定 $\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\sigma_3$，则 $\mu_\sigma$ 的变化范围为 $-1\leqslant\mu_\sigma\leqslant1$ 或 $-30^\circ\leqslant\theta_\sigma\leqslant30^\circ$。例如：

纯拉伸（$\sigma_1=\sigma$，$\sigma_2=\sigma_3=0$）对应于 $\mu_\sigma=-1$；

纯剪切（$\sigma_1=-\sigma_3=\sigma$，$\sigma_2=0$）对应于 $\mu_\sigma=0$；

纯压缩（$\sigma_1=\sigma_2=0$，$\sigma_3=-\sigma$）对应于 $\mu_\sigma=1$。

最后，将 $s_2=-(s_1+s_3)$ 代入(30)式，就有

$$s_1-s_3=\sqrt{2}x=\sqrt{2}r_\sigma\cos\theta_\sigma,$$

$$s_1+s_3=-\sqrt{\frac{2}{3}}y=-\sqrt{\frac{2}{3}}r_\sigma\sin\theta_\sigma,$$

故得：

$$\left.\begin{aligned}
s_1&=\frac{1}{\sqrt{2}}x-\frac{1}{\sqrt{6}}y=\sqrt{\frac{2}{3}}r_\sigma\sin\left(\theta_\sigma+\frac{2\pi}{3}\right),\\
s_2&=\sqrt{\frac{2}{3}}y=\sqrt{\frac{2}{3}}r_\sigma\sin\theta_\sigma,\\
s_3&=-\frac{1}{\sqrt{2}}x-\frac{1}{\sqrt{6}}y=\sqrt{\frac{2}{3}}r_\sigma\sin\left(\theta_\sigma-\frac{2\pi}{3}\right).
\end{aligned}\right\}\qquad(32)$$

现来讨论屈服曲面的一般形式。为此，可先讨论屈服曲面与 $\pi$ 平面的交线所具有的形状。这样的交线称之为屈服曲线。当屈服条件不受静水压力的影响时，屈服曲线也可用(28)式来表示。如再回到主应力空间$(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$，$f_0(J_2,J_3)=0$ 所表示的就是一个母线垂直于 $\pi$ 平面(或平行于 $\vec{ON}$ 方向）的柱面(图5)。因此，

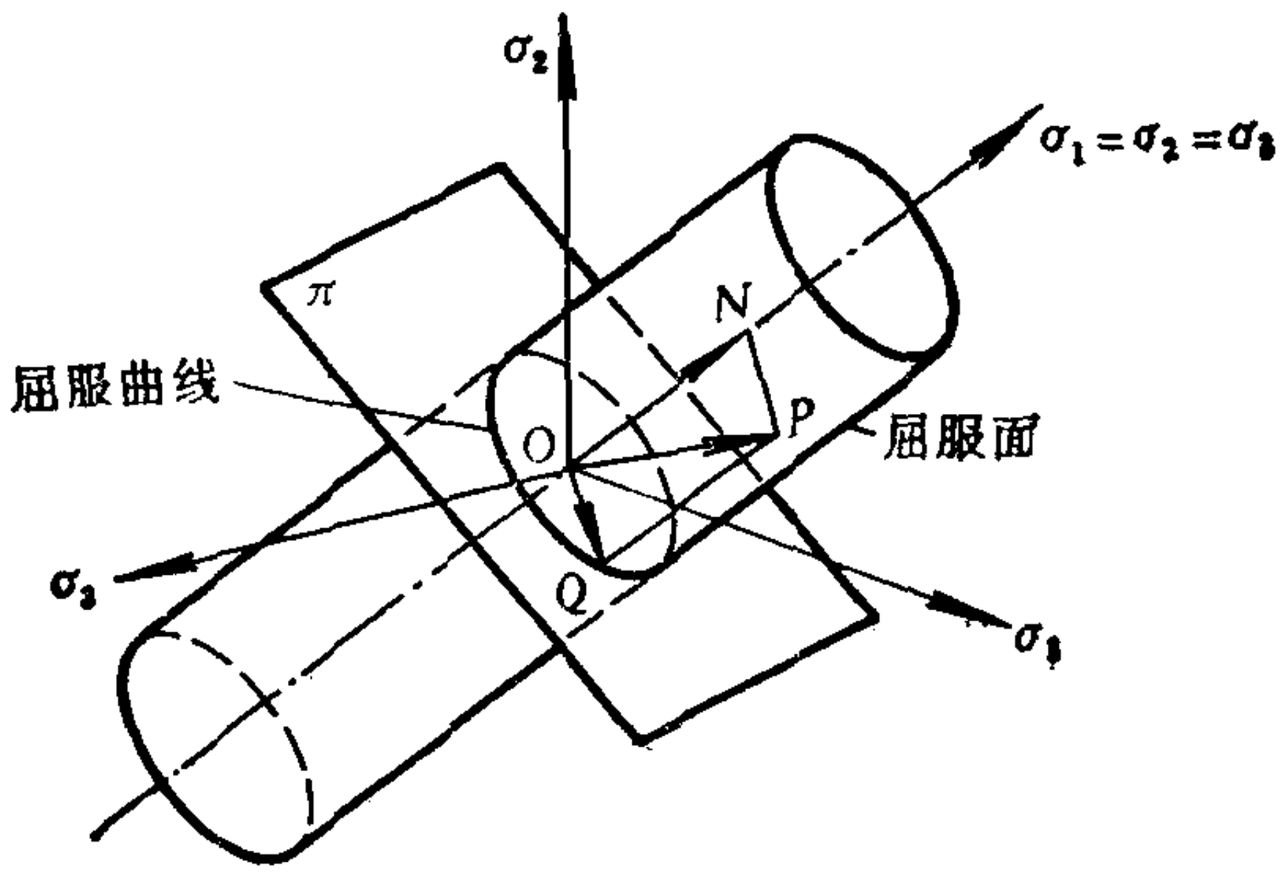



图 5

如果对 $\pi$ 平面上屈服曲线的形式了解清楚了，在一般主应力空间中屈服曲面的形式自然也就清楚了。

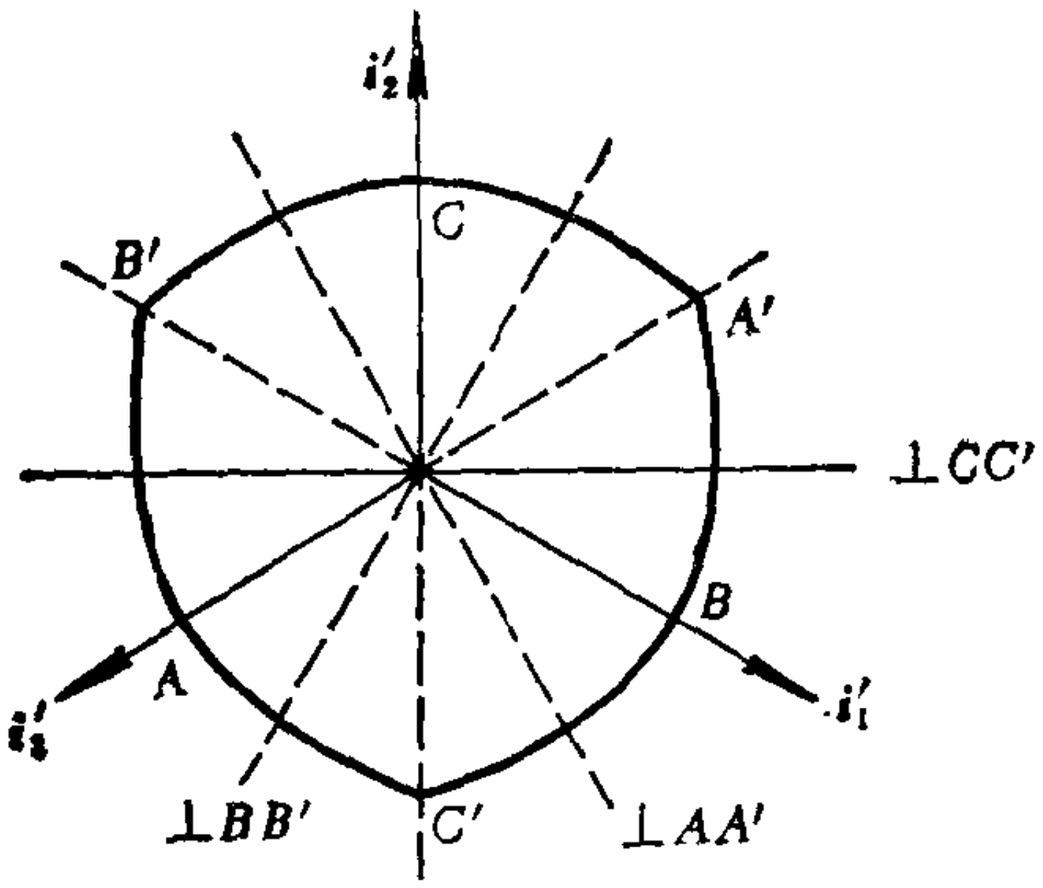


图 6

根据初始各向同性假定，如果 $(s_1, s_2, s_3)$ 是屈服曲线上的一点，那么 $(s_1, s_3, s_2)$ 也一定是屈服曲线上的一点。这说明，在 $\pi$ 平面上屈服曲线关于 $i'_1$ 轴（图 6 中的 $BB'$ 线）是对称的。同理，屈服曲线关于 $i'_2$ 轴和 $i'_3$ 轴也是对称的。由此可见，在 $\pi$ 平面上屈服曲线有三条对称轴。如能通过实验确定在 60° 范围内的屈服曲线，那么就可由对称性确定整个平面上的屈服曲线（图6）。

如果还进一步假定拉伸和压缩时的屈服极限相等（这对许多金属材料是近似成立的），则当 $(s_1, s_2, s_3)$ 是屈服曲线上的一点时，$(-s_1, -s_2, -s_3)$ 也一定是屈服曲线上的一点。这时，在 $\pi$ 平面上屈服曲线关于 $\perp AA'$，$\perp BB'$，$\perp CC'$ 也是对称的。在这种情况下，$\pi$ 平面上的屈服曲线有六条对称轴，只需要在 30° 范围内进行实验就可以完全确定屈服曲线的形状了。

## §3.5 几个常用的屈服条件

### 一、Tresca 屈服条件（1864年）

Tresca 屈服条件认为，当最大剪应力达到某一极限值 $k_1$ 时，材料开始产生屈服。如规定 $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$，则此条件可表示为：

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = k_1. \tag{33}$$

这就是材料力学中的第三强度理论。由(30)式可知，上式在 $\pi$ 平面上相当于角 $\theta_\sigma$ 从 $-30°$ 到 $30°$ 的范围内与 $y$ 轴相平行的直线段：

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sigma_1-\sigma_3)=\sqrt{2}k_1=\text{const}. \tag{34}$$

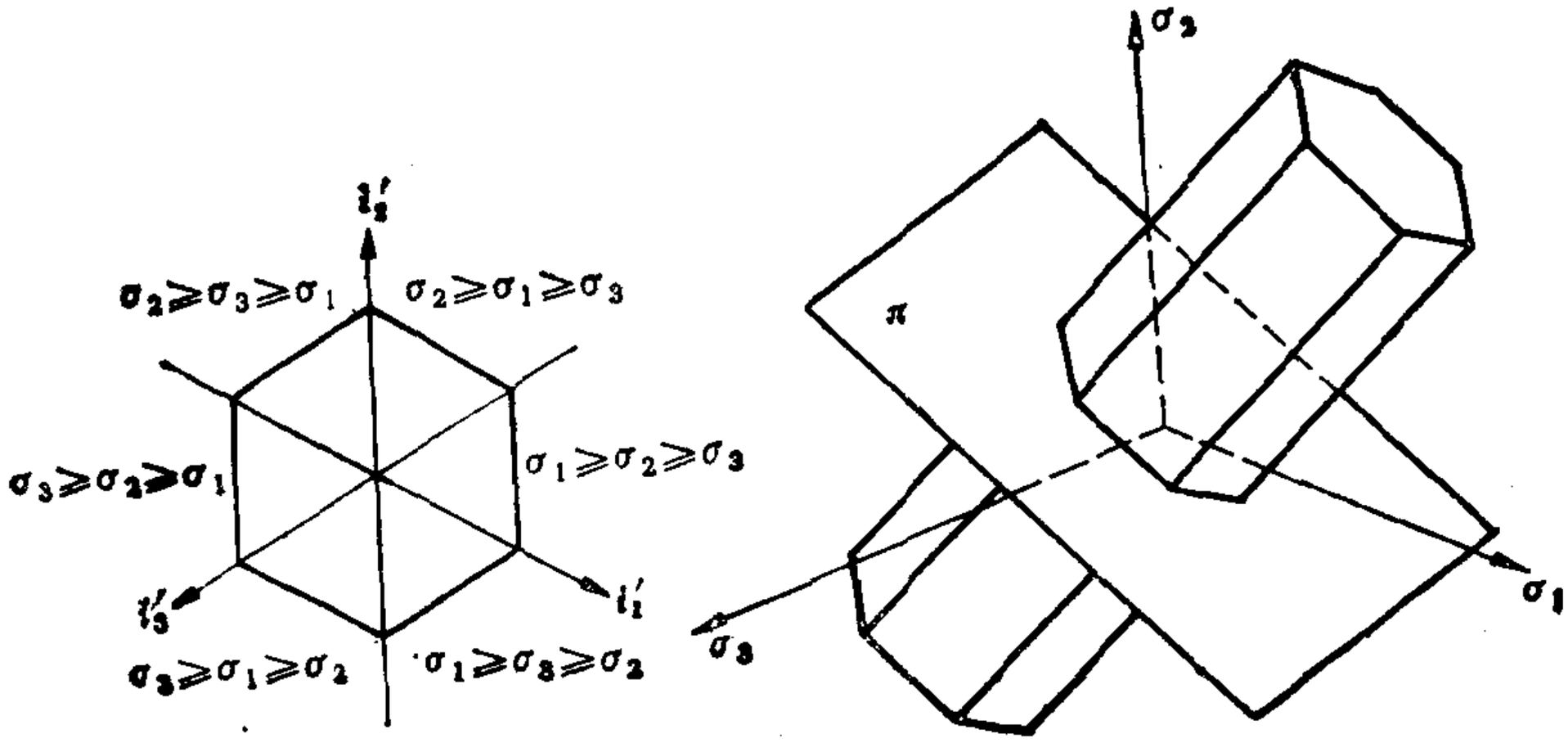
再根据对称性将其开拓后，就得到一个正六边形（图7(a)）。如不规定 $\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\sigma_3$，则(33)式应写为：

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_1-\sigma_2=\pm 2k_1 \quad (\sigma_3\text{为中间主应力}),\\
&\sigma_2-\sigma_3=\pm 2k_1 \quad (\sigma_1\text{为中间主应力}),\\
&\sigma_3-\sigma_1=\pm 2k_1 \quad (\sigma_2\text{为中间主应力}).
\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

这在主应力空间中是六个平面，由它们构成一正六面体的柱面。柱面的母线方向与轴线 $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$ 相平行（见图7(b)）。

对于平面应力状态，当 $\sigma_3=0$ 时，(35)式就成为

$$\sigma_1-\sigma_2=\pm 2k_1,\ \sigma_2=\pm 2k_1,\ \sigma_1=\pm 2k_1. \tag{36}$$




(a)　　(b)

图 7

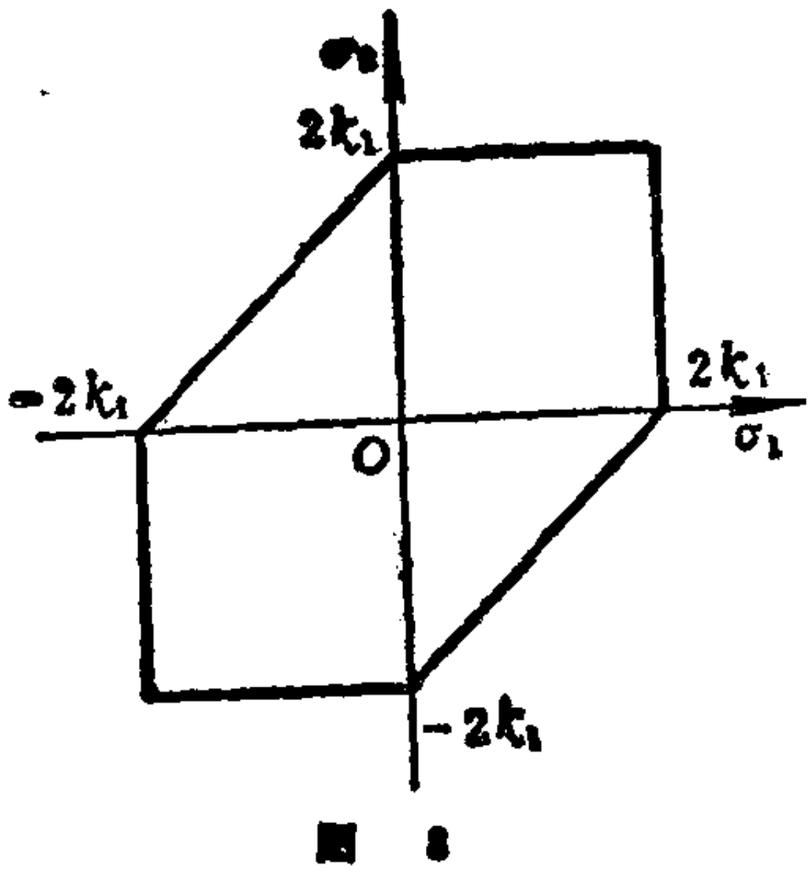



图 8

这在 $\sigma_1-\sigma_2$ 应力平面上相当于由六条直线所构成的六边形（见图8）。此图形是图7(b)的六棱柱面与 $\sigma_3=0$ 平面相截所得到的交线。

(33) 式中的 $k_1$ 值一般应由实验确定。如采用简单拉伸实验，则由

$$\sigma_1=\sigma_s,\quad \sigma_2=\sigma_3=0,$$

可得

$$k_1=\frac{\sigma_s}{2}. \tag{37}$$

如采用纯剪切实验，则由

$$\sigma_1=-\sigma_3=\tau_s,\quad \sigma_2=0,$$

可得

$$k_1=\tau_s. \tag{38}$$

这说明，如果 Tresca 屈服条件正确的话，拉伸屈服应力 $\sigma_s$ 和剪切屈服应力 $\tau_s$ 之间应有关系式

$$\sigma_s=2\tau_s. \tag{39}$$

下面将提到，对于多数材料来说，上式只是近似成立的。

在主方向已知的情况下，用 Tresca 屈服条件求解问题是比较方便的。因为在一定范围内，应力分量之间满足线性关系。但在主应力未知的情况下，使用 Tresca 屈服条件往往就很不方便了。这时，可用应力偏量的两个不变量来表示 Tresca 屈服条件①。

暂规定 $s_1\geqslant s_2\geqslant s_3$，即 $|\theta_\sigma|\leqslant\frac{\pi}{6}$，则由(31)式和(32)式可知：

① 请参见《力学与实践》12 (4)，(1990) 33—35。

$$J_3 = s_1 s_2 s_3$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} r_\sigma^3 \sin\left(\theta_\sigma - \frac{2\pi}{3}\right)\sin\left(\theta_\sigma + \frac{2\pi}{3}\right)\sin\theta_\sigma$$

$$= -\frac{2}{3\sqrt{3}}(J_2)^{3/2}\sin 3\theta_\sigma .$$

故有

$$\theta_\sigma = \frac{1}{3}\sin^{-1}\left[\frac{-3\sqrt{3}\,J_3}{2(J_2)^{3/2}}\right],\ \left(|\theta_\sigma| \leqslant \frac{\pi}{6}\right).$$

于是，Tresca 屈服条件(33)式将变得很复杂：

$$s_1 - s_3 = \sqrt{2}\,r_\sigma \cos\theta_\sigma = 2\sqrt{J_2}\,\cos\theta_\sigma = \sigma_s,$$

或一般地写为

$$f_0 = \frac{2\sqrt{J_2}}{\sigma_s}\cos\left\{\frac{1}{3}\sin^{-1}\left[\frac{-3\sqrt{3}\,J_3}{2(J_2)^{3/2}}\right]\right\} - 1 = 0.$$

## 二、Mises 屈服条件（1913年）

Tresca 屈服条件并没有考虑到中间主应力的影响，故有时会带来一定的误差。Mises 屈服条件则假定(28) 式具有如下的最简单形式：

$$f_0(J_2, J_3) = J_2 - k_2^2 = 0, \tag{40}$$

其中 $k_2$为材料常数。这时，屈服条件并不依赖于 $J_3$。

由(31)式，上式也可写为

$$r_\sigma = \sqrt{2J_2} = \sqrt{2}\,k_2 = \text{const}. \tag{41}$$

因此，在 $\pi$ 平面上 Mises 屈服条件可用一个圆来表示。对应到主应力空间后，Mises 屈服曲面则是一个以 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ 为轴线的圆柱面。

对于 $\sigma_3 = 0$ 的平面应力状态，Mises 屈服条件可表示成

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = 3k_2^2. \tag{42}$$

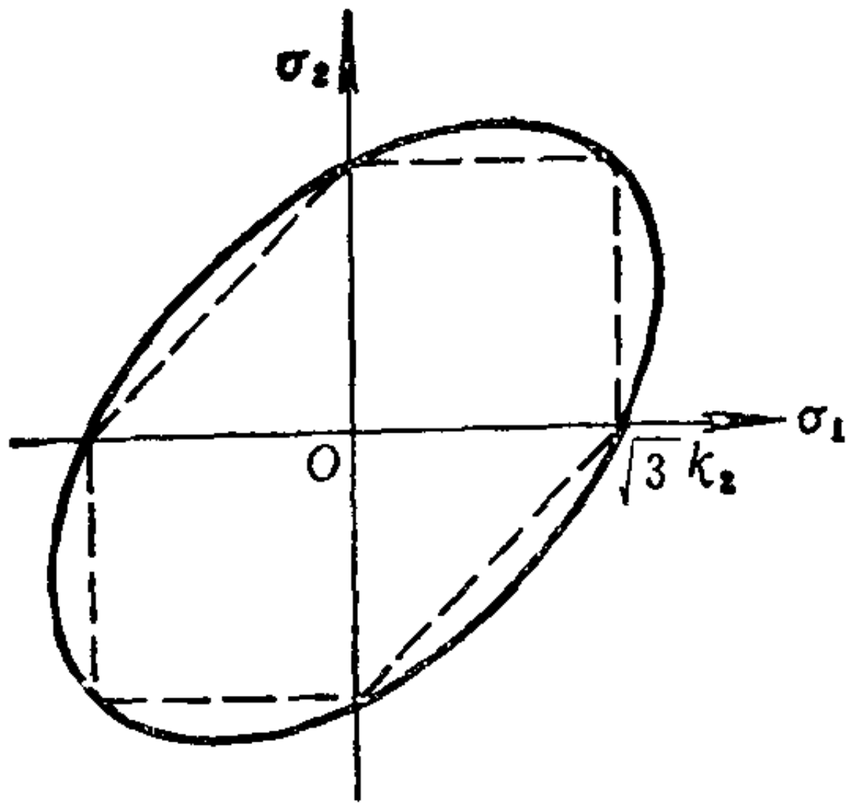



图 9

这在 $\sigma_1$-$\sigma_2$ 应力平面上是一个椭圆（见图9）。

现可对 Mises 屈服条件作如下的物理解释：当材料微元的八面体剪应力达到一定的数值时，或材料中单位体积的剪切应变能达到一定的数值时，就开始产生塑性变形。如将应力 $\sigma_{ij}$ 和应变 $\varepsilon_{ij}$ 分解为偏量部分与球量部分之和：

$$\sigma_{ij}=s_{ij}+\sigma_m\delta_{ij},\quad \varepsilon_{ij}=e_{ij}+\varepsilon_m\delta_{ij},$$

则材料的应变比能可写为

$$\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}=\frac{3}{2}\sigma_m\varepsilon_m+\frac{1}{2}s_{ij}e_{ij}\ \text{（不对 } m \text{ 求和）},$$

上式右端的第一项为体积应变比能，在静水压力不影响材料塑性性质的假定下，这一项对材料的屈服条件并无贡献。上式右端的第二项就是剪切应变比能。对于线性弹性材料，可由

$$e_{ij}=\frac{1}{2\mu}s_{ij}$$

求得

$$\frac{1}{2}s_{ij}e_{ij}=\frac{1}{2\mu}J_2,$$

其中 $\mu=\dfrac{E}{2(1+\nu)}$ 为材料的剪切模量，$E$ 和 $\nu$ 分别为杨氏模量和泊松比。因此，剪切应变比能（除差一个材料常数因子外）是可以用 $J_2$ 来表示的。

(40)式中的常数 $k_2$ 可由实验确定。对于简单拉伸实验，由

$$J_2 = \frac{\sigma_s^2}{3} = k_2^2$$

可得

$$k_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_s, \tag{43}$$

对于纯剪切实验，由 $J_2 = \tau_s^2 = k_2^2$，可得

$$k_2 = \tau_s. \tag{44}$$

这说明，如果 Mises 屈服条件正确的话，应有

$$\sigma_s = \sqrt{3}\tau_s \tag{45}$$

对于多数材料，上式符合得较好。

现将 Tresca 屈服条件和 Mises 屈服条件作一简单比较。在 $\pi$ 平面上，如假定简单拉伸时两个屈服面相重合，则 Tresca 六边形内接于 Mises圆(图10)。由(37)式和 (43)式可 知 $k_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}k_1$ 而在纯剪切时两者误差最大。如假定纯剪切时两个屈服面相重合，则 Tresca 六边形外切于 Mises 圆。由(38)式和(44) 式 可知 $k_2 = k_1$，

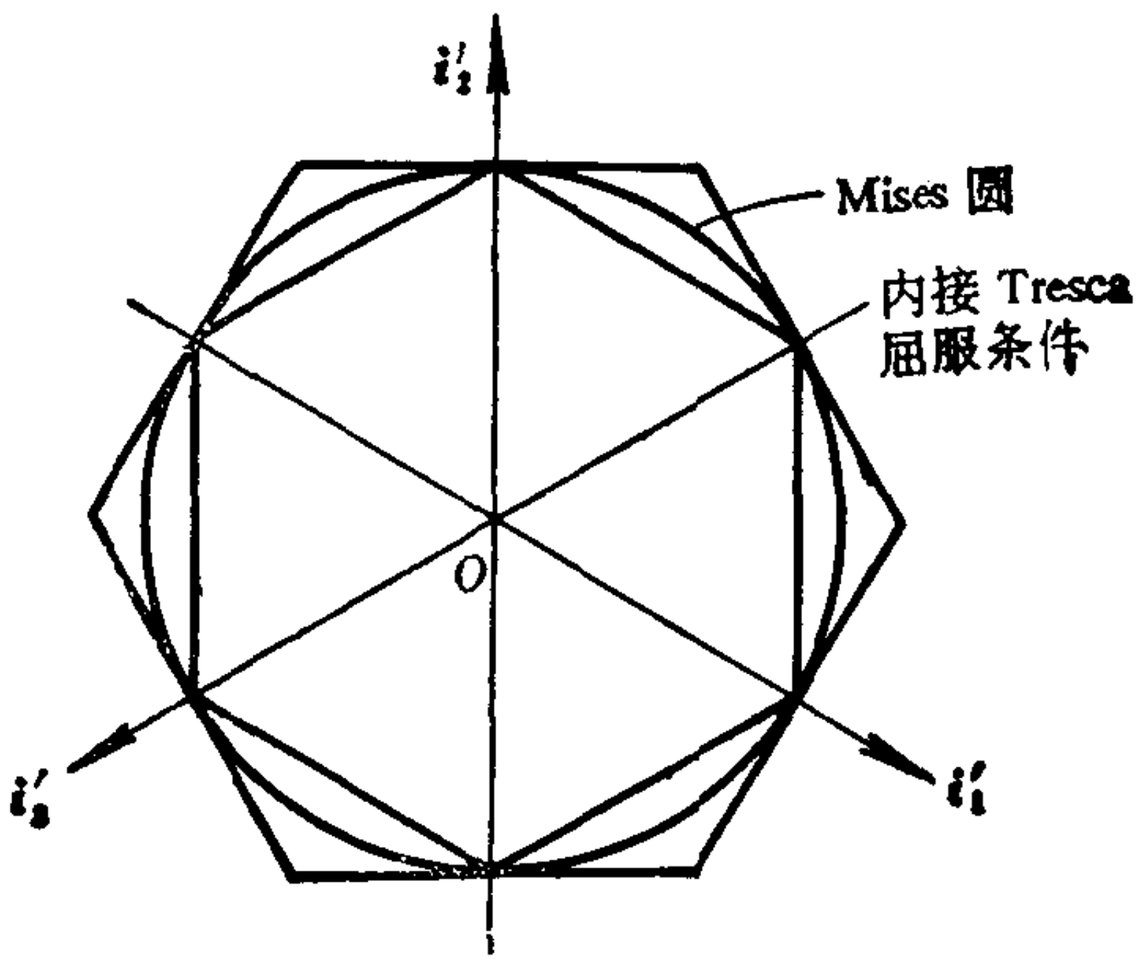



图 10

而在简单拉伸时两者误差最大。不难看出，以上最大的相对误差为

$$\frac{2}{\sqrt{3}}-1\approx 15\%.$$

这一结果也可由基本不等式（19）得到。

## 三、最大偏应力屈服条件（或双剪应力屈服条件）

最大偏应力屈服条件的概念最早是由 R.Schmidt 在1932年提出的。后来，我国的俞茂鋐① （1961年）用双剪应力的概念对上述屈服条件进行了说明，故又称为双剪应力屈服条件。下面将对此作简要的介绍。

在材料力学中，我们知道有第一强度理论。该理论认为当材料的最大正应力（的绝对值）达到某一数值时，材料将开始破坏。对于脆性材料来说，第一强度理论还是比较适用的。然而，对大多数金属来说，静水压力对屈服条件并没有显著影响。故拟对以上理论进行修正而采用最大偏应力（的绝对值）来作为材料开始产生塑性变形的准则。当假定拉伸和压缩的屈服极限相同时，最大偏应力屈服条件可写为：

$$\max(|s_1|,|s_2|,|s_3|)=k_3, \tag{46}$$

其中的常数 $k_3$可由简单拉伸实验确定：$k_3=\frac{2}{3}\sigma_s$。

上式可等价地表示为

$$\left.\begin{aligned} 3s_1&=2\sigma_1-(\sigma_2+\sigma_3)=\pm 2\sigma_s,\\ 3s_2&=2\sigma_2-(\sigma_1+\sigma_3)=\pm 2\sigma_s,\\ 3s_3&=2\sigma_3-(\sigma_1+\sigma_2)=\pm 2\sigma_s. \end{aligned}\right\}$$

在$\pi$平面上，它是一个外切于 Mises 圆的正六边形，与内接的

① 俞茂鋐等，《双剪应力强度理论研究》，西安交通大学出版社，1988。

Tresca 正六边形相比，其方位转过了30°（参见图10）。如果由实验可确定$\theta_s=-30°$和$\theta_s=30°$的$\gamma_s$值，并认为屈服面是外凸的，则不难看出，Tresca 屈服条件和最大偏应力屈服条件分别对应于屈服面的下界和上界。

以上屈服条件也可用双剪应力屈服条件来进行解释：当两个主剪应力的绝对值之和达到某一极限值时，材料将开始屈服。为此可设$\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\sigma_3$。则主剪应力的绝对值可定义为

$$|\tau_{12}|=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2},\quad |\tau_{13}|=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2},\quad |\tau_{23}|=\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2} \tag{47}$$

以上三个主剪应力（的绝对值）中，$|\tau_{13}|$最大。用双剪应力屈服条件来解释时，则认为当两个较大的主剪应力的绝对值之和达到某一数值时，材料将开始屈服。故得到如下的表达式：

$$\left.\begin{aligned}&|\tau_{13}|+|\tau_{12}|=\sigma_1-\frac{1}{2}(\sigma_2+\sigma_3)=\sigma_s,\quad 当|\tau_{12}|\geqslant|\tau_{23}|,\\&|\tau_{13}|+|\tau_{23}|=\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2)-\sigma_3=\sigma_s,\quad 当|\tau_{12}|\leqslant|\tau_{23}|.\end{aligned}\right\} \tag{48}$$

上式与(46)式是等价的。因为如果规定$s_1\geqslant s_2\geqslant s_3$，则(46)式可表示为

$$\max(|s_1|,|s_2|,|s_3|)=\begin{cases}s_1=\dfrac{2}{3}\sigma_s,\quad 当\ s_2\leqslant 0,\\-s_3=\dfrac{2}{3}\sigma_s,\quad 当\ s_2\geqslant 0;\end{cases}$$

或

$$s_1=\frac{2\sigma_1-(\sigma_2+\sigma_3)}{3}=\frac{2}{3}\sigma_s,\quad 当\ 2\sigma_2-(\sigma_1+\sigma_3)\leqslant 0,$$

$$-s_3=\frac{-2\sigma_3+(\sigma_1+\sigma_2)}{3}=\frac{2}{3}\sigma_s,\quad 当\ 2\sigma_2-(\sigma_1+\sigma_3)\geqslant 0.$$

可见这与(48)式是等价的。

下面将会看到，在某些情况下，最大偏应力屈服条件也能与实验结果有较好的符合。而且在主应力空间中，相应的屈服面是平面，在进行实际计算时较为方便，因此该屈服条件也开始受到人们的注意。如果事先并不知道主应力的方向，以上的最大偏应力屈服条件应改写为

$$f_0=\frac{\sqrt{3J_2}}{\sigma_s}\max\left\{\left|\sin\left(\theta_\sigma-\frac{2\pi}{3}\right)\right|,\left|\sin\left(\theta_\sigma+\frac{2\pi}{3}\right)\right|\right\}-1=0,$$

其中

$$\theta_\sigma=\frac{1}{3}\sin^{-1}\left[\frac{-3\sqrt{3}\,J_3}{2(J_2)^{3/2}}\right]\left(|\theta_\sigma|\leqslant\frac{\pi}{6}\right).$$

## §3.6 屈服条件的实验验证

各种屈服理论的可靠性需要由实验来加以验证。以往所作的大多数实验是利用薄圆管试件的拉伸和内压或者拉伸和扭转的联合作用来实现双向应力状态的。通过调整应力分量间的比值便可得到$\pi$平面上不同的$\theta_\sigma$值(或Lode参数$\mu_\sigma$)。下面只介绍两个较重要的实验结果

### 一、薄圆管受拉力和内压的联合作用(Lode，1926年)

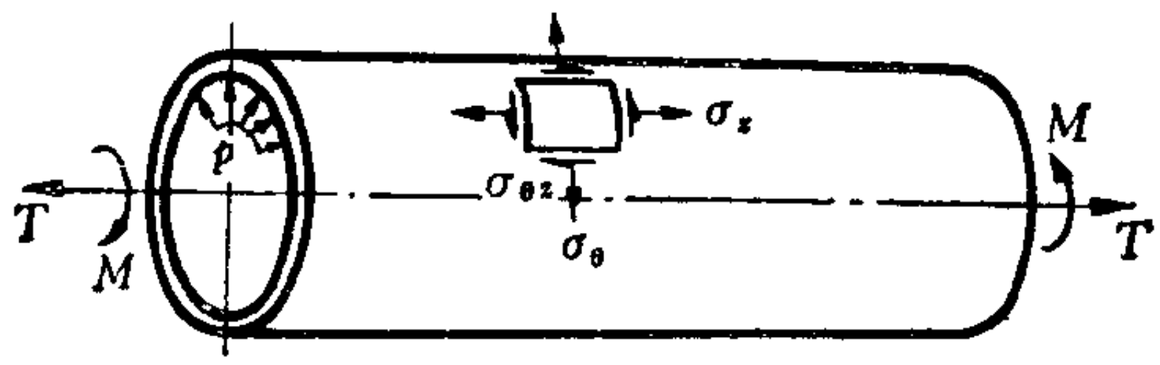



图 11

现设圆管的平均半径为$R$，壁厚为$h$，$h\ll R$，在拉力$T$和内压$p$的作用下，圆管近似地处于均匀应力状态(图11)。在柱坐标中其应力分量为

$$\sigma_\theta = \frac{pR}{h}, \quad \sigma_z = \frac{T}{2\pi R h}, \quad \sigma_r \approx 0. \tag{49}$$

如果 $\sigma_\theta \geqslant \sigma_z \geqslant \sigma_r$，则可取 $\sigma_1 = \sigma_\theta$，$\sigma_2 = \sigma_z$，$\sigma_3 = \sigma_r = 0$，故有

$$\mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{T - \pi R^2 p}{\pi R^2 p}. \tag{50}$$

当 $T = 0$ 时，

$$\mu_\sigma = -1 \quad (\theta_\sigma = -30^\circ),$$

这对应于简单拉伸的情形；当 $T = \pi R^2 p$ 时，

$$\mu_\sigma = 0 \quad (\theta_\sigma = 0),$$

这对应于纯剪切的情形，因为如减去静水应力 $\frac{pR}{2h}$ 后，应力的各分量为

$$\sigma_\theta = -\sigma_r = \frac{pR}{2h}, \quad \sigma_z = 0.$$

最后，当 $T = 2\pi R^2 p$ 时，就有 $\mu_\sigma = 1 (\theta_\sigma = 30^\circ)$。于是，在 $0 \leqslant T \leqslant 2\pi R^2 p$ 的范围内来改变 $T$ 和 $p$ 的比值时，就可以得到各种不同的 $\mu_\sigma$ 值（$-1 \leqslant \mu_\sigma \leqslant 1$）。

为了比较上节中所介绍的各种屈服条件，Lode 曾对铁、铜等材料进行了上述的拉伸-内压实验。现设 $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$，并规定拉伸时各种屈服条件是相重合的，则对于 Tresca 屈服条件，可有

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_s} = 1. \tag{51}$$

对于 Mises 屈服条件，由(41)式和(43)式，有

$$\sigma_s = \sqrt{3} k_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} r_\sigma.$$

利用(30)式和(31)式，上式还可表示为

$$\sigma_s=\sqrt{\frac{3}{2}}x\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma_1-\sigma_3)\sqrt{1+\frac{1}{3}\mu_\sigma^2},$$

因此，Mises 屈服条件可写为

$$\frac{\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_s}=\frac{2}{\sqrt{3+\mu_\sigma^2}}. \tag{52}$$

最后来考察最大偏应力屈服条件。因为 $s_1\geqslant s_2\geqslant s_3$，所以

$$\mu_\sigma=\frac{2\sigma_2-\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_1-\sigma_3}=\frac{3s_2}{s_1-s_3}=\frac{3(s_1+s_3)}{s_3-s_1}$$

（其中 $-1\leqslant\mu_\sigma\leqslant1$）

与 $s_2$ 有相同的符号。由上式可解出

$$\frac{s_1}{s_3}=\frac{\mu_\sigma-3}{\mu_\sigma+3}.$$

故最大偏应力屈服条件(48)式可等价地写为：

当 $-1\leqslant\mu_\sigma\leqslant0$（或 $s_2\leqslant0$）时，有

$$s_1=\frac{2}{3}\sigma_s.$$

因此

$$\frac{\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_s}=\frac{s_1-s_3}{\sigma_s}=\frac{s_1}{\sigma_s}\left(1-\frac{\mu_\sigma+3}{\mu_\sigma-3}\right)=\frac{4}{3-\mu_\sigma}.$$

当 $0\leqslant\mu_\sigma\leqslant1$（或 $s_2\geqslant0$）时，有

$$s_3=-\frac{2}{3}\sigma_s.$$

因此

$$\frac{\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_s}=\frac{s_1-s_3}{\sigma_s}=\frac{s_3}{\sigma_s}\left(\frac{\mu_\sigma-3}{\mu_\sigma+3}-1\right)=\frac{4}{3+\mu_\sigma}.$$

可见对于最大偏应力屈服条件，有

$$\frac{\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_s}=\frac{4}{3+|\mu_\sigma|}\quad(-1\leqslant\mu_\sigma\leqslant1)。\tag{53}$$

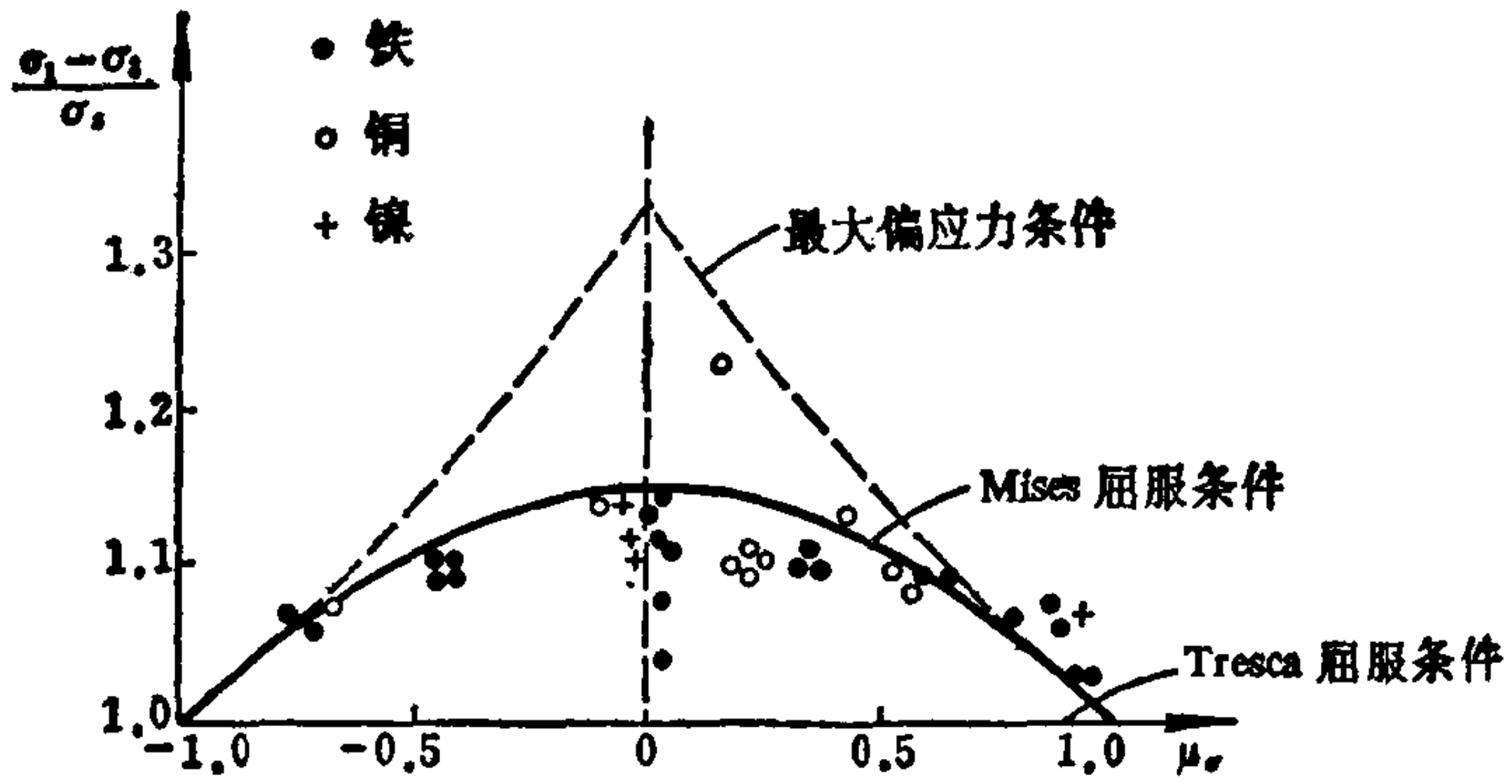



图 12

如将表达式(51)，(52)和(53)以及实验点绘于以$\frac{\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_s}$为纵坐标，以$\mu_\sigma(-1\leqslant\mu_\sigma\leqslant1)$为横坐标的图上，就不难看出实验结果更接近于 Mises 屈服条件(参见图12)。

## 二、薄圆管受拉力和扭矩的联合作用
## (Taylor-Quinney，1931年)①

仍考虑如图11所示的薄圆管。在拉力$T$和扭矩$M$的作用下，其应力分量可写为

$$\sigma_z=\frac{T}{2\pi Rh},\quad \sigma_{\theta z}=\frac{M}{2\pi R^2h}。\tag{54}$$

相应的主应力为：

① G. I. Taylor, H. Quinney, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A230 (1931), pp.323。

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{\sigma_z}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_z^2 + 4\sigma_{\theta z}^2} \geqslant 0,\\ \sigma_2 &= \sigma_r \approx 0,\\ \sigma_3 &= \frac{\sigma_z}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_z^2 + 4\sigma_{\theta z}^2} \leqslant 0,\end{aligned}\right\} \tag{55}$$

而主偏应力为：

$$\left.\begin{aligned}s_1 &= \frac{1}{6}\left[\sigma_z + 3\sqrt{\sigma_z^2 + 4\sigma_{\theta z}^2}\right],\\ s_2 &= -\sigma_z/3,\\ s_3 &= \frac{1}{6}\left[\sigma_z - 3\sqrt{\sigma_z^2 + 4\sigma_{\theta z}^2}\right].\end{aligned}\right\} \tag{56}$$

故有

$$\mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{-T}{\sqrt{T^2 + 4M^2/R^2}}. \tag{57}$$

当 $M=0$，$T>0$ 时，$\mu_\sigma = -1$，这对应于简单拉伸的情形。

当 $T=0$，$M \neq 0$ 时，$\mu_\sigma = 0$，这对应于纯剪切的情形。

改变 $T$ 和 $M$ 的比值，便可得到 $-1 \leqslant \mu_\sigma \leqslant 0$ 的各种应力状态。

为了检验屈服条件，Taylor-Quinney 对软钢、铜、铝等进行了上述的拉-扭实验。仍规定拉伸时各种屈服条件是相重合的。则 Tresca 屈服条件可写为

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_z^2 + 4\sigma_{\theta z}^2} = \frac{\sigma_s}{2},$$

或

$$\left(\frac{\sigma_z}{\sigma_s}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_{\theta z}}{\sigma_s}\right)^2 = 1. \tag{58}$$

而 Mises 屈服条件可写为

$$J_2 = \frac{1}{6}(2\sigma_z^2 + 6\sigma_{\theta z}^2) = \frac{1}{3}\sigma_s^2,$$

或

$$\left(\frac{\sigma_z}{\sigma_s}\right)^2+3\left(\frac{\sigma_{\theta z}}{\sigma_s}\right)^2=1. \tag{59}$$

比较(58)式和(59)式可知，两者在纯剪切($\mu_\sigma=0$)时的误差最大，其值约为15.5%。

最后，再看一下最大偏应力屈服条件。由(56)式可知，当 $\sigma_z\geqslant 0$ 时，$s_2\leqslant 0$，$s_1=\frac{2}{3}\sigma_s$ 可写为

$$\frac{1}{4}[\sigma_z+3\sqrt{\sigma_z^2+4\sigma_{\theta z}^2}\,]=\sigma_s,$$

故有

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\sigma_z}{\sigma_s}\right)+\frac{3}{4}\sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{\sigma_s}\right)^2+4\left(\frac{\sigma_{\theta z}}{\sigma_s}\right)^2}=1. \tag{60}$$

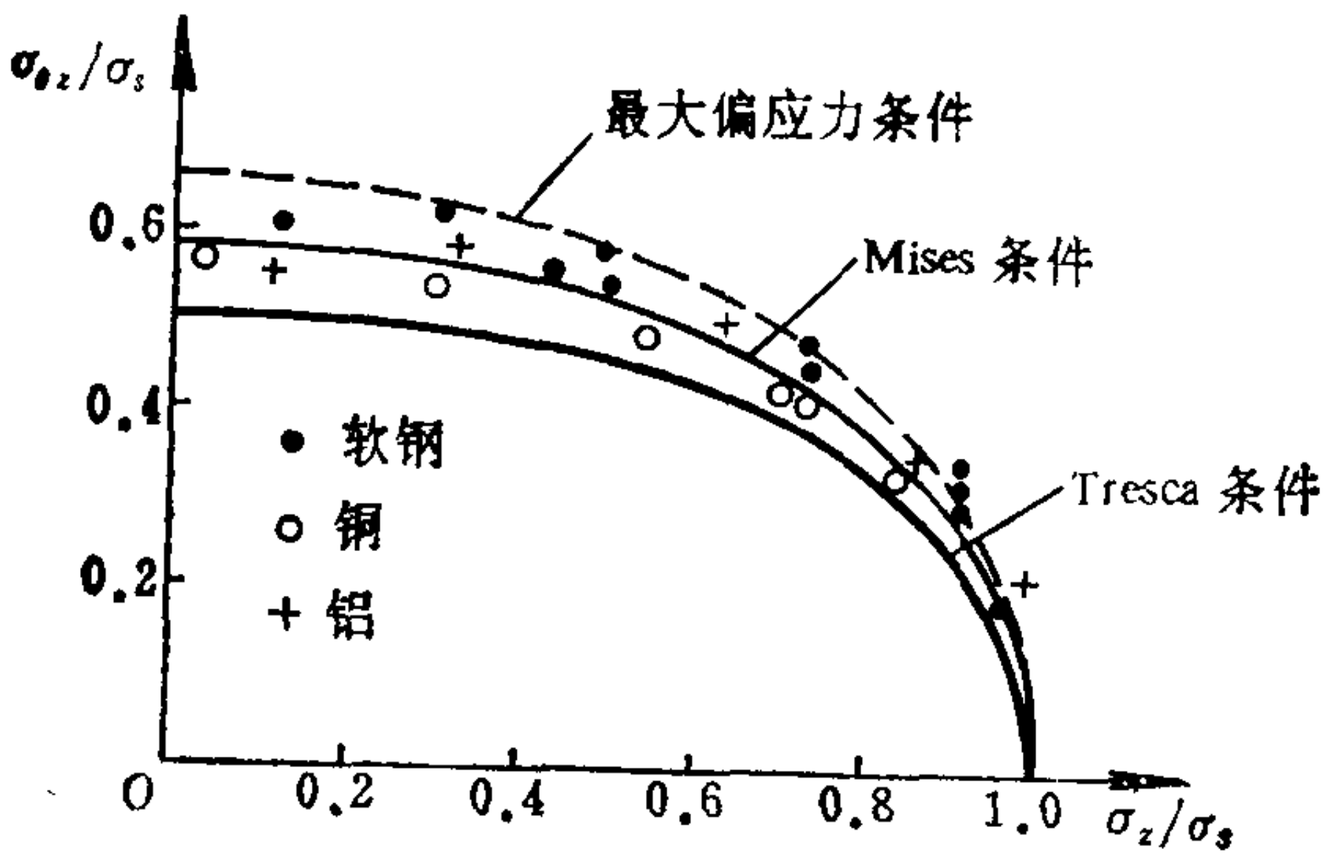



图 13

如将表达式(58)或(59)式和(60)式以及实验点绘于以 $\sigma_{\theta z}/\sigma_s$ 为纵坐标，以 $\sigma_z/\sigma_s$ 为横坐标的图上时，可见实验结果更接近于 Mises 屈服条件和最大偏应力屈服条件(参见图13)。

## §3.7* 岩土力学中的库伦屈服条件

以上所讨论的屈服条件是和静水应力部分 $I_1$ 无关的。但对

于一般的土质和岩石来说，随着静水压力的增加，屈服应力和破坏应力都有很大的增长。即使在初始各向同性的假定下，也应该对(28)式进行修正而采用形为

$$f_0(I_1, J_2, J_3) = 0$$

的屈服条件。

岩土力学中的破裂准则通常可表述如下：在介质微元的任何截面上，其剪应力 $\tau_n$ 的大小都不能超过某一临界值。当 $|\tau_n|$ 达到该临界值时，材料就要产生剪切滑移。在最简单的情况下，上述的临界值和破裂面上的正应力 $\sigma_n$ 之间呈线性关系，即有

$$|\tau_n| = C - \sigma_n \operatorname{tg} \phi. \tag{61}$$

这就是库伦剪切破裂准则。上式中的 $C$ 为粘聚力，$\phi$ 为内摩擦角(在岩土力学中，一般取压应力为正，那时 $\sigma_n$ 前的负号应改为正号)。在更一般的情况下，(61)式中的 $\phi$ 值将随 $(-\sigma_n)$ 的增加而减小，称之为莫尔破裂准则。这里我们仅考虑 $\phi$ 值为常数的情形。

实验表明，用(61)式表示材料中的微裂纹即将开始活动可能要更恰当些，故通常以它来作为岩土介质的屈服条件。

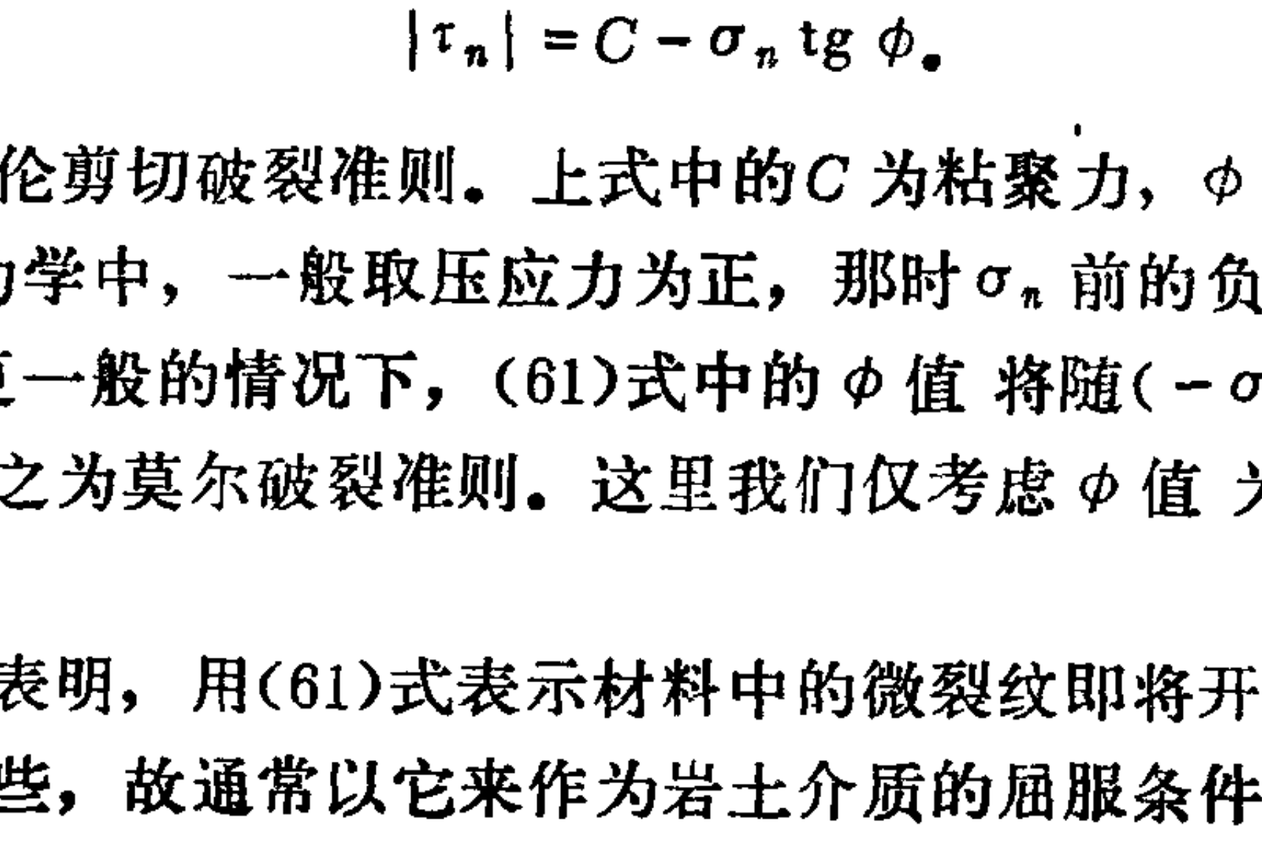



图 14

在$(\sigma_n,\tau_n)$的应力平面上,(61)式表示的是一对射线(图14)。介质应力状态的莫尔圆应处于由这两条射线所构成的楔形区域内。当发生剪切滑移时，莫尔圆与射线相切。切点的$(\sigma_n,\tau_n)$值对应于剪切滑移面上的正应力和剪应力。它们也可由主应力表示为

$$\begin{cases}\sigma_n = \dfrac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3)+\dfrac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)\sin\phi,\\[2ex] \tau_n = \dfrac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)\cos\phi.\end{cases}\tag{62}$$

这里，我们已规定有$\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\sigma_3$。因此，(61)式也可写为

$$f(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)+\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3)\sin\phi-C\cos\phi=0\tag{63}$$

上式右端的第二项反映了静水应力对屈服条件的影响。注意到

$$\sigma_m=\frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3),\quad s_a=\sigma_a-\sigma_m(a=1,2,3),$$

(63)式还可写为

$$\frac{1}{2}(s_1-s_3)+\frac{1}{2}(s_1+s_3)\sin\phi+\sigma_m\sin\phi-C\cos\phi=0.\tag{64}$$

屈服面(63)式(或(64)式)与$\pi$平面相交的图形可简单地导出如下：利用$s_2=-(s_1+s_3)$，(30)式也可写为：

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}(s_1-s_3),\quad y=-\sqrt{\frac{3}{2}}(s_1+s_3).$$

故在$\pi$平面上，(64)式为

$$\frac{\sqrt{2}}{2}x=\frac{\sin\phi}{\sqrt{6}}y+C\cos\phi\tag{65}$$

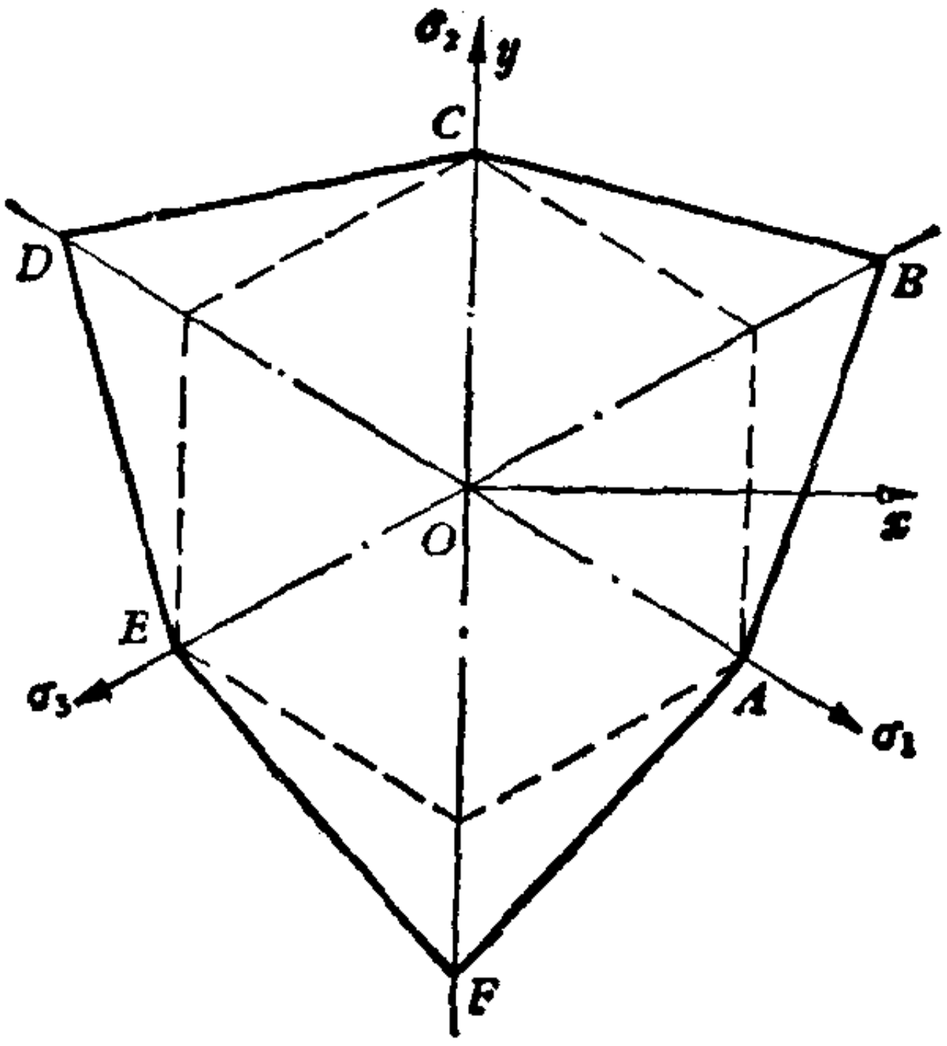



图 15

由于规定了 $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$，因此(65)式仅在 $-30° \leqslant \theta_\sigma \leqslant 30°$ 范围内适用。它对应于图15中的线段 $AB$。如不规定 $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$，采用对称开拓的方法，便得到图15所示的图形。

屈服面(64)式与 $\sigma_m = \text{const}$ 平面相截的图形是随着 $\sigma_m$ 的增加而线性地缩小的。当

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = C \operatorname{ctg} \phi$$

时，图形收缩为一点 $O^*$。因此，屈服面(63)式(或(64)式)是一个以 $\pi$ 平面上六边形 $ABCDEF$ 为底，以 $O^*$ 为顶的六棱锥体的侧面。

另一种计及静水压力的屈服条件可简单地由 Mises 屈服条件推广为：

$$\tilde{f} = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0, \qquad (66)$$

其中 $\alpha$ 和 $k$ 为正的常数。上式称为 Drucker-Prager 屈服条件。在主应力空间中，它是一个圆锥面。

下面我们给出一种由材料常数 $C$ 和 $\phi$ 确定 $\alpha$ 和 $k$ 的方法。如假定圆锥面(66)式的顶点与六棱锥面(63)式的顶点相重合，就有

$$k = 3C \operatorname{ctg} \phi \cdot a_{\circ}$$

再假定 $\pi$ 平面上 Mises 圆 的半径与图15中 $OB$ 的长度相等，还可得

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}} r_{\sigma} = \frac{2\sqrt{3} C \cos \phi}{(3 - \sin \phi)} \cdot$$

于是有

$$a = \frac{2\sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)}, \quad k = \frac{6 \cdot C \cdot \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \cdot \tag{67}$$

## §3.8 加 载 条 件

屈服条件是指当材料未经受任何塑性变形时的弹性响应的界限。但是，当材料经历了一定的塑性变形历史后，材料内部的微观结构就会产生相应的变化。我们将用一组称之为内变量的参量 $\xi_{\beta}(\beta = 1,2,\cdots,n)$来刻划上述的这种塑性变形历史。$\xi_{\beta}$ 可以是标量，也可以是张量，在实验中它们是不能用宏观手段来加以控制的(除非特别说明，以后我们总是形式地把内变量写为标 量 $\xi_{\beta}$，$\beta = 1,2,\cdots,n$)。因此，经受过塑性变形后的弹性响应的界限就应该与 $\xi_{\beta}$ 有 关。我们称这样的界限为加载条件，其表达式可写为：

$$f(\sigma_{ij}, \xi_{\beta}) = 0_{\circ} \tag{68}$$

在应力空间中，这是一个以 $\xi_{\beta}$ 为参数的曲面，通 常 称之为加载曲面或后继屈服面。取 $\xi_{\beta} = 0(\beta = 1,2,\cdots,n)$时，上 式 就化为以前讨论过的屈服曲面。随着 $\xi_{\beta}$ 的变化，加载曲面的大小、形状和位置都可能产生相应的改变。

在不考虑应变率效应的假定下，应力状态将始终不能位于加载曲面之外。当应力位于加载曲面之内时，应力的变化将不引起内变量 $\xi_{\beta}$ 的变化，材料不产生新的塑性变形，故可认为应力与应

变之间呈弹性响应。当应力位于加载面之上并继续加载时，应力的变化就会引起内变量 $\xi_\beta$ 的改变而使材料进一步产生新的塑性变形。此时的加载曲面将变为：

$$f(\sigma_{ij}+\mathrm{d}\sigma_{ij},\xi_\beta+\mathrm{d}\xi_\beta)=0。\tag{69}$$

由此可见，在材料的弹-塑性加载过程中，加载曲面应满足

$$\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\sigma_{ij}+\frac{\partial f}{\partial\xi_\beta}\xi_\beta=0。\tag{70}$$

这就是通常所说的一致性条件。

加载曲面的演化规律可以和第一章的三杆桁架在存在残余应力时的弹性极限曲线进行比拟。由于在塑性变形过程中不同取向晶粒的滑移及其相互制约，在一个加载方向上屈服应力的提高(即应变强化)往往伴随着在相反加载方向上屈服应力的降低（包氏效应)。因此，对于比较复杂的加载历史，实际材料的加载曲面的演化规律往往是十分复杂的。在应用中常需要提出一些简化模型。这里只介绍最简单的两种模型。

1．**等向强化模型**　认为加载曲面就是屈服曲面在应力空间中的相似扩大。它忽略了由于塑性变形所引起的材料各向异性性质，因此在加载过程中，仅当应力分量之间的比值变化不大时，这种模型才与实际符合得较好。等向强化模型的表达式可写为

$$f^*(\sigma_{ij})-\psi(\xi)=0,\tag{71}$$

上式中 $\xi$ 是一个标量内变量。在工程上，$\xi$ 的增量常取为等效塑性应变增量：

$$\mathrm{d}\xi=\sqrt{\frac{2}{3}}(\mathrm{d}\varepsilon^p_{kl}\mathrm{d}\varepsilon^p_{kl})^{\frac{1}{2}}=\overline{\mathrm{d}\varepsilon^p},$$

或塑性功增量：

$$\mathrm{d}\xi=\sigma_{kl}\mathrm{d}\varepsilon^p_{kl}=\mathrm{d}W^p。$$

这里，$\varepsilon^p_{ij}$ 和 $\mathrm{d}\varepsilon^p_{ij}$ 分别称为塑性应变和塑性应变增量，其确切的定义将在下一章再予以讨论。

特别地，对于 Mises 屈服条件，其相应的等向强化模型为

$$\begin{cases}\bar{\sigma}=\sqrt{\dfrac{3}{2}s_{ij}s_{ij}}=\psi(\xi),\\ \psi(0)=\sigma_s.\end{cases}\tag{72}$$

函数 $\psi$ 的形式可由简单拉伸实验确定。因为在简单拉伸时，有

$$\overline{\mathrm{d}\varepsilon^p}=\mathrm{d}\varepsilon^p$$

和

$$\mathrm{d}W^p=\sigma\mathrm{d}\varepsilon^p,$$

所以当取 $\xi=\varepsilon^p$，或 $\xi=\int\sigma\mathrm{d}\varepsilon^p$ 时，便可较容易地由实验来确定函数 $\psi$。

对于 Tresca 屈服条件，其相应的等向强化模型为

$$\tau_{max}=\psi(\xi),\tag{73}$$

其中 $\psi$ 的形式可由简单拉伸实验确定。在不卸载的情况下，$\psi(\xi)$ 也可用函数 $\psi_r(\varepsilon_c)$代替，这里 $\psi_r$ 是一个单调递增函数，$\varepsilon_c$ 是某一特征应变，通常取为绝对值最大的主应变的两倍 $2|\varepsilon|_{max}$。只有当应力点始终不在加载面的角点上时，才可将 $\varepsilon_c$ 取为绝对值最大的工程剪应变 $\gamma_{max}$。

**2. 随动强化模型** 等向强化模型并未考虑到包氏效应，故在分析应力作反复变化的问题时，往往会带来较大的误差。基于这种情况，经常采用的另一种简化模型就是随动强化模型。该模型认为，加载曲面就是屈服曲面随着塑性变形的过程而在应力空间中作刚性移动。这时，屈服曲面的大小和形状都没有改变。其表达式可写为：

$$f^*(\sigma_{ij}-\alpha_{ij})-\psi_0=0,\tag{74}$$

上式中内变量 $\alpha_{ij}$ 是一个表征加载曲面中心移动的对称的二阶张量，称为移动张量或背应力(the shift tensor 或 the back stress)。关于 $\alpha_{ij}$ 的演化规律，通常有以下几种：

(1) 线性随动强化模型

$$\dot{\alpha}_{ij} = c\dot{\varepsilon}^p_{ij}(c>0), \tag{75}$$

式中 $c$ 是一个材料常数，故(74)式可写为：

$$f^*(\sigma_{ij} - c\varepsilon^p_{ij}) - \psi_0 = 0.$$

特别地，对于 Mises 屈服条件，其相应的表达式为

$$\bar{\sigma}(\sigma_{ij} - c\varepsilon^p_{ij}) = \sqrt{\frac{3}{2}(s_{ij} - c\varepsilon^p_{ij})(s_{ij} - c\varepsilon^p_{ij})} = \sigma_s. \tag{76}$$

在简单拉伸时，$s_{ij}$ 和 $\varepsilon^p_{ij}$ 有如下的非零分量：

$$s_{11} = \frac{2}{3}\sigma, \quad s_{22} = s_{33} = -\frac{1}{3}\sigma; \quad \varepsilon^p_{11} = \varepsilon^p, \quad \varepsilon^p_{22} = \varepsilon^p_{33} = -\frac{1}{2}\varepsilon^p.$$

这里已假定塑性变形不引起体积的改变。因此，在简单拉伸时(76)式可简化为：

$$\sigma = \sigma_s + \frac{3}{2}c\varepsilon^p.$$

再由线性强化材料的简单拉伸实验曲线：

$$\sigma = \sigma_s + h\varepsilon^p$$

(参见第一章的(11′)式)，便得到 $c$ 与材料常数 $h$ 之间的关系：

$$c = \frac{2}{3}h.$$

(76)式称为完全随动强化模型。但在 $\sigma_3 = 0$ 的平面应力状态下，它并不表示 Mises 椭圆屈服曲线((42)式)在$(\sigma_1, \sigma_2)$平面上的刚性平移。我们称那种在低维应力空间中屈服曲线作平移的模型为简单随动强化模型。在早期它曾被 Prager 研究过①。

(2) Ziegler 模型②。

$$\dot{\alpha}_{ij} = \eta(\sigma_{ij} - \alpha_{ij})(\eta>0) \tag{77}$$

① W. Prager, *J. Appl. Mech.*, 23(1956), pp.493—496.
② M. Ziegler, *Quart. Appl. Math.*, 17(1959), pp.55—65.

其中 $\eta$ 可利用一致性条件确定。在弹塑性加载过程中，由(74)式可得

$$\frac{\partial f^*}{\partial \sigma_{ij}}(\sigma_{ij}-\alpha_{ij})=0,$$

故有

$$\eta=\left(\frac{\partial f^*}{\partial \sigma_{ij}}\sigma_{ij}\right)\Big/\left[\frac{\partial f^*}{\partial \sigma_{kl}}(\sigma_{kl}-\alpha_{kl})\right]. \tag{78}$$

(3) 线性随动强化模型有时与实际有较大的误差。因此，Armstrong 等人于1966年[1]提出了形如

$$\dot{\alpha}_{ij}=c\dot{\varepsilon}^p_{ij}-\gamma(\dot{\varepsilon}^p_{kl}\dot{\varepsilon}^p_{kl})^{\frac{1}{2}}\alpha_{ij} \tag{79}$$

的非线性演化规律。式中右端的第二项称为阻尼项，$c$ 和 $\gamma$ 为材料常数。但以上的非线性关系增加了计算的复杂性，使用时往往感到不很方便。

在 $\pi$ 平面上，我们可对以上两种模型作一形象的比较。采用

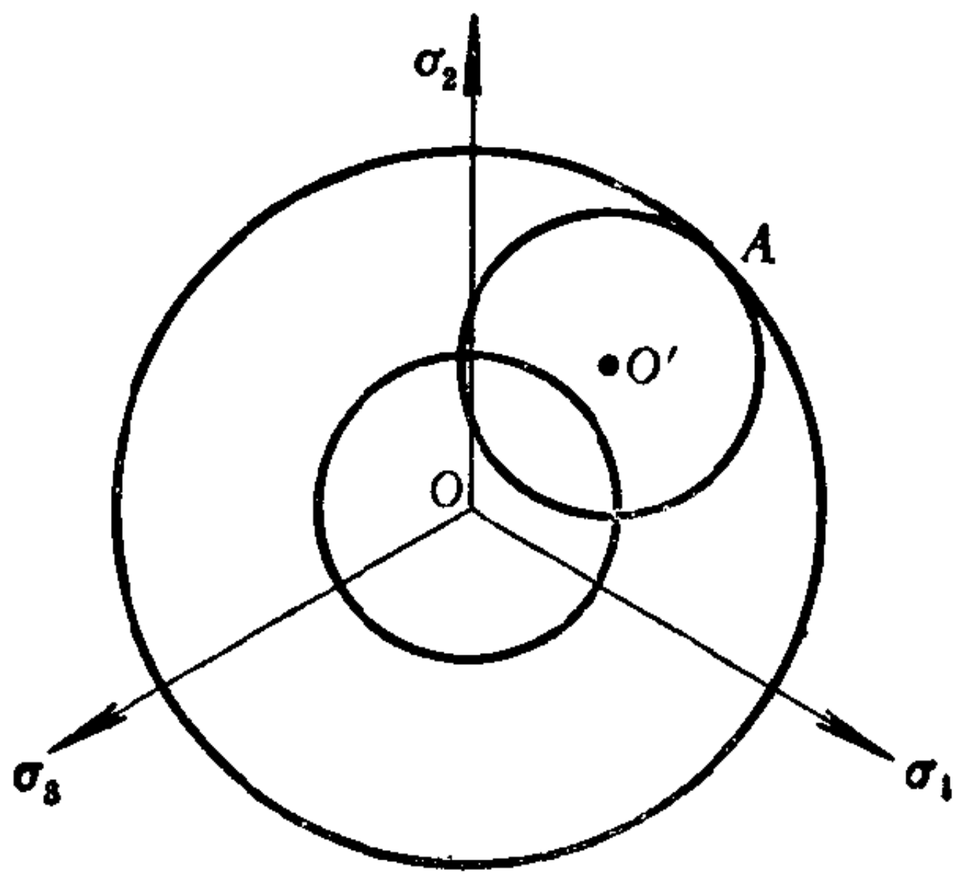



图 16

① P. J. Armstrong, C. O. Frederick, CEGB report n° RD/B/N731(1966).

Mises 屈服条件时，屈服曲线是一个半径为$r_0=\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_s$的圆。如应力状态达到$A$点(图16)，则等向强化模型将是一个半径为$\overline{OA}$的圆。而在随动强化模型中，圆心移到了图中的$O'$点，但其半径$\overline{O'A}=\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_s$并没有改变。当然，如将以上结果稍加推广，便不难给出以上两种模型的组合(参考(71)式和(74)式)：

$$f^*(\sigma_{ij},-\alpha_{ij})-\psi(\xi)=0。\tag{80}$$

Ivey① 曾对铝合金薄圆管进行了拉扭实验，初始屈服面与(59)式较符合，但随着剪应力的增加，整个加载曲面都向剪应力增加的方向移动，接近于随动强化模型(图17)。另外，Naghdi等人在对24S-T铝合金所作的类似实验中，观察到随着剪应力的增加，初始时为圆的Mises屈服曲线将会在加载点附近逐渐形成尖

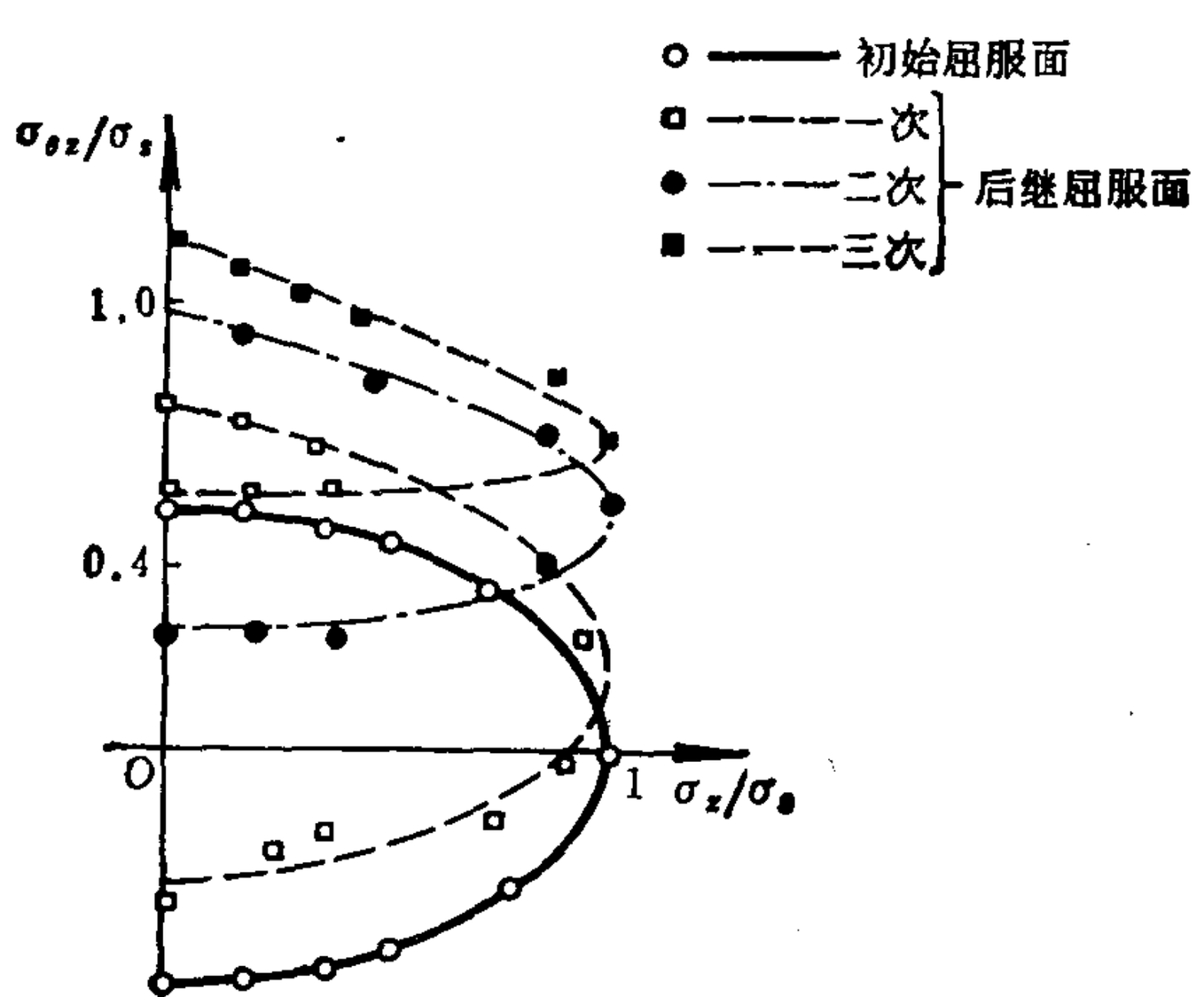
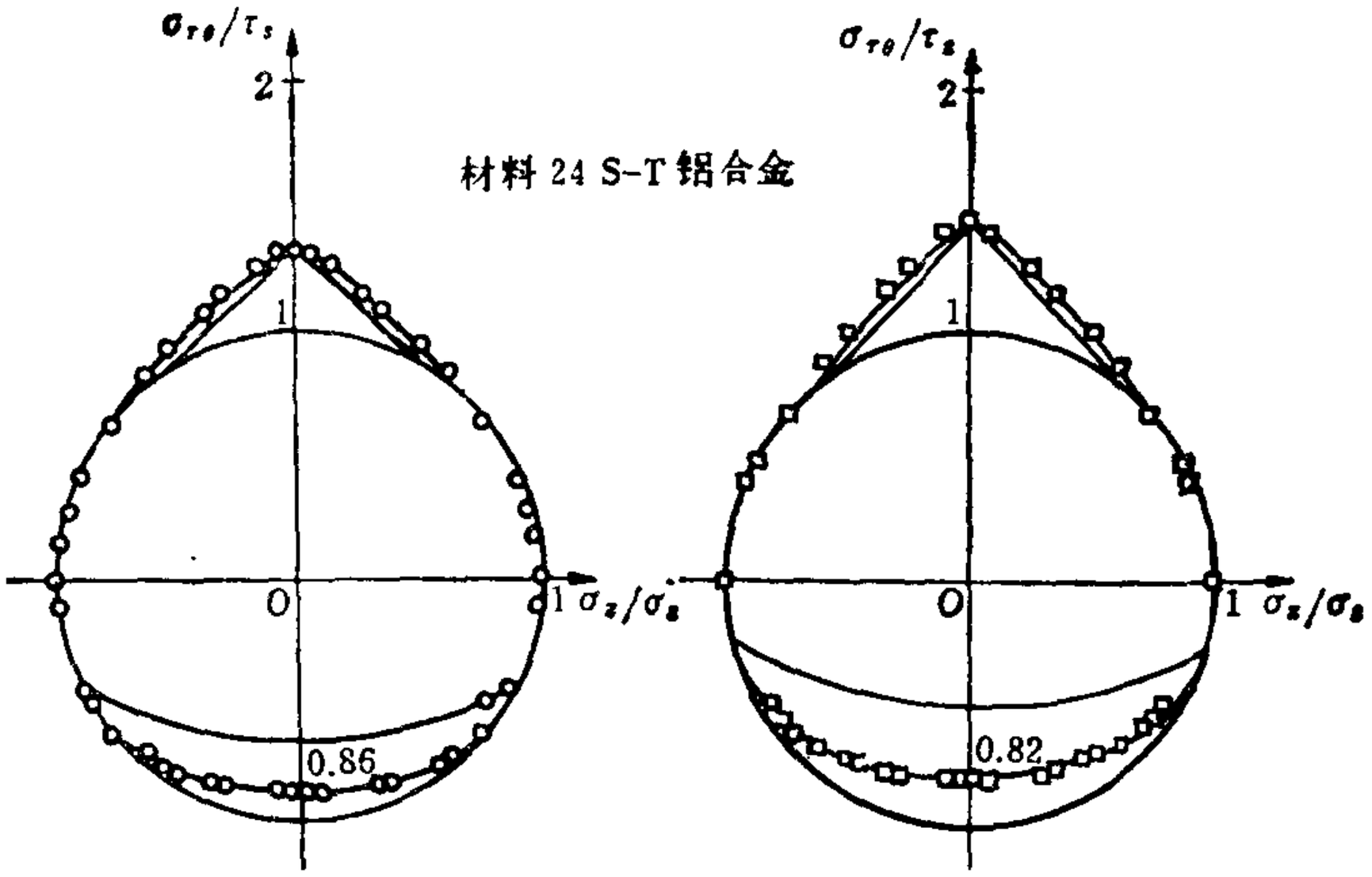



图 17

① J. H. Ivey, *J. Mech. Eng. Sci.*, 3(1961), pp.15—31。




(a) 第一次后继屈服面　　(b) 第二次后继屈服面

图 18

角[①](图18)。这个现象接近于一些学者所提出和发展的“尖角模型”理论，被用来解释弹塑性分叉和稳定性中的某些实验现象。

在结束本章之前，我们还要指出，以上关于屈服条件和加载条件的讨论都是在应力空间中进行的。当应力可通过应变来表示时，屈服条件和加载条件同样也可在应变空间中来进行讨论。对于理想塑性或应变软化材料来说，这可能会更方便些。这些内容将在下一章中再予以介绍。

## 习　题

### 3.1 证明

$$\frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial J_2}{\partial s_{ij}} = s_{ij}.$$

① 参见文献[8]，第332页。

3.2 设已知应力张量 $\sigma_{ij}$ 的各分量为

$$[\sigma]=\sigma_s\begin{bmatrix}0.8 & 0.1 & 0.2\\ 0.1 & 0.3 & 0.2\\ 0.2 & 0.2 & 0.2\end{bmatrix}$$

1) 求应力偏量不变量 $J_2, J_3$ 的值。

2) 求该应力状态在 $\pi$ 平面上的 $r_\sigma, \theta_\sigma$ 值。

3) 分别对 Tresca, Mises 及最大偏应力三种屈服条件，判别该应力状态是否违反该屈服条件？

3.3 一薄壁圆管，平均半径为 $R$，壁厚为 $t$。管的两端封闭，内部作用有压力 $p_1$，外部作用有压力 $p_2$($p_2$ 对轴向应力无影响)。记比值 $p_2/p_1=x$，分别对 Mises, Tresca 及最大偏应力三种屈服条件讨论 $p_1$ 多大时管子开始屈服。

3.4 一薄壁圆管同时受拉力、内压和扭矩的作用，要考虑的应力分量是 $\sigma_z, \sigma_\theta, \sigma_{\theta z}$，试用该三个应力分量表示Mises, Tresca及最大偏应力三种屈服条件。

3.5 一薄壁圆管受拉扭作用，管的材料在屈服后满足 Mises 线性随动强化模型，即

$$\frac{3}{2}(s_{ij}-c\varepsilon^p_{ij})(s_{ij}-c\varepsilon^p_{ij})=\sigma_s^2。$$

1) 用 $\sigma_z, \sigma_{\theta z}, \varepsilon^p_z, \varepsilon^p_{\theta z}$ 来表示该加载条件。

2) 先将应力分量 $\sigma_z$ 从零加载到 $1.5\sigma_s$，然后卸载到零，求这时的 $\varepsilon^p_z$ 与 $\varepsilon^p_{\theta z}$ 值。

3) 接着让应力分量 $\sigma_{\theta z}$ 从零开始增加。问 $\sigma_{\theta z}$ 多大时开始进入屈服。

# 第四章　本构关系

塑性力学与连续介质力学的其它分支的主要区别就在于刻划材料力学性质的本构关系的不同。因此，本构关系的建立不仅是塑性力学的基础，而且也是塑性力学的重要研究课题之一。这里我们所介绍的弹塑性体的本构关系将基于如下的两个假设：(1) 小变形假设；(2) 仅考虑等温过程中的应变率无关材料，即忽略了应变率大小（或粘性效应）对变形规律的影响。这时，任何与时间呈单调递增关系的参数都可取作为变形过程的时间参数。由此得到的本构关系将会有相当的简化。

## §4.1　塑性应力率和塑性应变率

前面已经说过，在塑性力学中，应力不仅与应变有关，而且还与其整个变形历史有关。我们将用一组称之为内变量$\xi_\beta(\beta=1,2,\cdots,n)$的参量来刻划这一变形历史。因此，应力可表示为

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ij}(\varepsilon_{kl},\xi_\beta)。\tag{1}$$

当$\xi_\beta$固定时，应力$\sigma_{ij}$和应变$\varepsilon_{ij}$之间具有单一的对应关系，即弹性关系。这时，应变也可通过应力来表示：

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}(\sigma_{kl},\xi_\beta)。\tag{2}$$

以后我们仅在直角坐标系中来进行讨论，这时，应力和应变的增量或变化率可写为

$$\left.\begin{aligned}\dot\sigma_{ij}&=L_{ijkl}\dot\varepsilon_{kl}+\dot\sigma^{p}_{ij},\\ \dot\varepsilon_{ij}&=M_{ijkl}\dot\sigma_{kl}+\dot\varepsilon^{p}_{ij},\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

其中

$$\dot\sigma^{e}_{ij}=L_{ijkl}\dot\varepsilon_{kl}$$

和

$$\sigma^{p}_{ij}=\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\xi_{\beta}}\dot{\xi}_{\beta}$$

分别称为弹性应力率和塑性应力率；

$$\dot{\varepsilon}^{e}_{ij}=M_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl}$$

和

$$\dot{\varepsilon}^{p}_{ij}=\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial\xi_{\beta}}\dot{\xi}_{\beta}$$

分别称为弹性应变率和塑性应变率。

$$L_{ijkl}=\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\varepsilon_{kl}}$$

和

$$M_{ijkl}=\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial\sigma_{kl}}$$

是两个四阶的弹性张量，它们是正定的，且满足对称性条件：

$$\left.\begin{aligned}L_{ijkl}&=L_{jikl}=L_{ijlk}=L_{klij},\\M_{ijkl}&=M_{jikl}=L_{ijlk}=L_{klij},\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

和互逆关系

$$M_{ijkl}L_{klpq}=L_{ijkl}M_{klpq}=\frac{1}{2}(\delta_{ip}\delta_{jq}+\delta_{iq}\delta_{jp})。\qquad(5)$$

在一般情况下，$L_{ijkl}$不仅与应变有关，而且还与内变量有关；同样地，$M_{ijkl}$不仅与应力有关，而且还与内变量有关，也就是说，弹性性质是依赖于塑性变形的，或称弹性变形与塑性变形是耦合的。为了简化问题的讨论，本书仅考虑弹性变形与塑性变形之间没有耦合的情形。这时，(1)式和(2)式可分别写为：

$$\sigma_{ij}=\sigma^{e}_{ij}+\sigma^{p}_{ij},\quad\varepsilon_{ij}=\varepsilon^{e}_{ij}+\varepsilon^{p}_{ij}\qquad(6)$$

这里，弹性应力$\sigma^{e}_{ij}=L_{ijkl}\varepsilon_{kl}$和弹性应变$\varepsilon^{e}_{ij}=M_{ijkl}\sigma_{kl}$中

的四阶弹性张量仅依赖于材料常数，而塑性应力 $\sigma^p_{ij}$ 和塑性应变 $\varepsilon^p_{ij}$ 仅仅是内变量的函数，并且只有当内变量改变时，塑性应力或塑性应变才可能有相应的改变。

对于弹性张量为四阶各向同性张量的情形，$L_{ijkl}$ 和 $M_{ijkl}$ 还可具体地写为

$$\left.\begin{aligned} L_{ijkl} &= \lambda_0\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \\ M_{ijkl} &= -\frac{\nu}{E}\delta_{ij}\delta_{kl} + \left(\frac{1+\nu}{2E}\right)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

上式中 $E$ 为杨氏模量，$\nu$ 为泊松比，$\lambda_0$ 和 $\mu$ 称为拉梅（Lamé）常数①，它们可由 $E$ 和 $\nu$ 表示为：

$$\lambda_0 = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (8)$$

当 $\xi_\beta$ 固定（$\dot{\xi}_\beta = 0$）时，(3) 式将化为应力率与应变率之间的弹性关系。对于由 (7) 式所表示的弹性张量，(3)式的 $\dot{e}_{ij}$ 分量形式为

$$\left.\begin{aligned} \dot{e}_{11} &= \frac{1}{E}[\dot{\sigma}_{11} - \nu(\dot{\sigma}_{22} + \dot{\sigma}_{33})], \quad \dot{e}_{23} = \left(\frac{1+\nu}{E}\right)\dot{\sigma}_{23}, \\ \dot{e}_{22} &= \frac{1}{E}[\dot{\sigma}_{22} - \nu(\dot{\sigma}_{33} + \dot{\sigma}_{11})], \quad \dot{e}_{31} = \left(\frac{1+\nu}{E}\right)\dot{\sigma}_{31}, \\ \dot{e}_{33} &= \frac{1}{E}[\dot{\sigma}_{33} - \nu(\dot{\sigma}_{11} + \dot{\sigma}_{22})], \quad \dot{e}_{12} = \left(\frac{1+\nu}{E}\right)\dot{\sigma}_{12}. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

上面这六个式子也可改写为偏应力率 $\dot{s}_{ij}$ 和偏应变率 $\dot{e}_{ij}$ 之间的关系：

$$\dot{e}_{ij} = \left(\frac{1+\nu}{E}\right)\dot{s}_{ij} = \frac{1}{2\mu}\dot{s}_{ij}, \quad (10)$$

---

① 拉梅常数通常用 $\lambda$ 和 $\mu$ 来表示，但为了避免与下文中的符号相重复，这里将 $\lambda$ 改成了 $\lambda_0$。

以及

$$\dot{e}_{kk}=\left(\frac{1-2\nu}{E}\right)\dot{\sigma}_{kk}=\frac{1}{3k}\dot{\sigma}_{kk}, \tag{11}$$

其中 $k=\dfrac{E}{3(1-2\nu)}=\lambda_0+\dfrac{2}{3}\mu$ 称为压缩模量。因为 $\dot{s}_{kk}=0$，所以(10)式中只有五个方程是独立的。

由以上讨论可见，当弹性张量已知时，弹-塑性本构关系的建立就归结为如何正确地给出关于塑性应力率和（或）塑性应变率表达式的问题。下面我们就转入这方面的讨论。

## §4.2 应变空间中的加载曲面和加、卸载准则①

上一章对屈服条件和加载条件的讨论是在应力空间中进行的。对于任意固定的内变量，可将（1)式代入上一章的(68)式而得到应变空间中的加载面：

$$f(\sigma_{ij}(\varepsilon_{kl},\xi_\delta),\xi_\beta)=g(\varepsilon_{kl},\xi_\beta)=0。 \tag{12}$$

反之，也可将(2)式代入上式，得

$$g(\varepsilon_{ij}(\sigma_{kl},\xi_\delta),\xi_\beta)=f(\sigma_{kl},\xi_\beta)=0。 \tag{13}$$

因此，(12)式与(13)式是互为对偶的（对于一维情形，它们与第一章的(2)式和(3)式相对应)。

由(12)，(13) 式，可有

$$\frac{\partial g}{\partial\varepsilon_{kl}}=\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\varepsilon_{kl}}=L_{ijkl}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}=L_{klij}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial f}{\partial\sigma_{kl}}=\frac{\partial g}{\partial\varepsilon_{ij}}\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial\sigma_{kl}}=M_{ijkl}\frac{\partial g}{\partial\varepsilon_{ij}}=M_{klij}\frac{\partial g}{\partial\varepsilon_{ij}}, \tag{15}$$

① §4.2至§4.5的结果也可推广到有限变形中去，其中弹性变形与塑性变形之间是耦合的。有兴趣的读者可参考《力学与实践》，1988年第四期，pp. 1—14。

其中我们已经用到了弹性张量的对称性条件(4)式。$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$和$\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ij}}$分别表示了应力空间和应变空间中加载面的外法向。上式给出了这两个外法向之间的关系。

与上一章的（70）式相对应，在弹塑性加载过程中，一致性条件也可由应变空间中的加载面表示为

$$\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{kl}}\dot{\varepsilon}_{kl}+\frac{\partial g}{\partial \xi_\beta}\dot{\xi}_\beta=0 \tag{16}$$

由于当产生新的塑性变形时内变量会有相应的改变，故通常还需要给出内变量的演化方程。现假定该方程具有如下的形式：

$$\dot{\xi}_\beta=\gamma Z_\beta(\varepsilon_{ij},\xi_\delta), \tag{17}$$

将其代入（16）式可求得：

$$\gamma=-\left(\frac{\partial g}{\partial \xi_\beta}Z_\beta\right)^{-1}\left(\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{kl}}\dot{\varepsilon}_{kl}\right).$$

如令

$$\omega=-\left(\frac{\partial g}{\partial \xi_\beta}Z_\beta\right)^{-1},\quad \hat{g}=\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{kl}}\dot{\varepsilon}_{kl}, \tag{18}$$

就有

$$\dot{\xi}_\beta=\omega Z_\beta(\varepsilon_{ij},\xi_\delta)\hat{g}. \tag{19}$$

可见对于率无关材料，$\dot{\xi}_\beta$与$\dot{\varepsilon}_{ij}$之间具有一次齐次的关系。

（19）式仅适用于弹塑性加载过程，即仅适用于应变状态已在加载曲面$g=0$之上，而且应变增量指向$g=0$之外（即$\hat{g}>0$）的情形，因为只有在这种情形下才可能产生新的塑性变形。如果材料处于弹性状态，即应变在加载面曲之内：$g<0$；或者材料处于中性变载或卸载状态，即应变虽然已在加载曲面$g=0$之上，但应变增量指向$g=0$的切向或内部（即$\hat{g}\leqslant 0$），则内变量仍然是没有变

化的：$\dot{\xi}_\beta = 0$。这时并不产生新的塑性变形。因此，（18）式的完整写法应该是：

$$\dot{\xi}_\beta = \begin{cases} 0，\ 当 g<0\ （弹性状态），\\ 0，\ 当 g=0, \hat{g}<0\ （卸载），\\ 0，\ 当 g=0, \hat{g}=0\ （中性变载），\\ \omega Z_\beta \hat{g}，当 g=0, \hat{g}>0（弹塑性加载）。\end{cases} \tag{20}$$

在以后的讨论中，我们将上式统一地简写为

$$\dot{\xi}_\beta = \omega Z_\beta \langle \hat{g} \rangle。 \tag{21}$$

在（21）式中，已对记号

$$\langle \hat{g} \rangle = \begin{cases} 0，\ 当 \hat{g} \leqslant 0, \\ \hat{g}，\ 当 \hat{g}>0 \end{cases}$$

的含义作了适当的扩充。

（20）式就是塑性力学中关于率无关材料的加载和卸载准则，它是由$g$的符号来决定的。在传统的塑性力学中，常用应力来表示加、卸载准则，即以

$$\hat{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} \tag{22}$$

的符号来作为加载和卸载准则的判据，$\hat{f}>0$时加载，$\hat{f}=0$时中性变载而$\hat{f}<0$时卸载。

为了说明用应力表示加，卸载准则的局限性，下面来讨论$\hat{g}$和$\hat{f}$之间的关系。将塑性应变率写为

$$\dot{\varepsilon}^p_{ij} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \xi_\beta} \dot{\xi}_\beta = \omega \left( \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \xi_\beta} Z_\beta \right) \langle \hat{g} \rangle = e_{ij} \langle \hat{g} \rangle, \tag{23}$$

其中

$$e_{ij} = \omega \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \xi_\beta} Z_\beta,$$

则由（3）式和（15）式可知，在弹塑性加载（$\hat{g}>0$）时，有

$$\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} = \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} (M_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} + \dot{\varepsilon}^{p}_{ij})$$

$$= \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} + \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}^{p}_{ij}$$

$$= \dot{f} + \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{e}_{ij} \langle \dot{g} \rangle$$

故得：

$$\dot{f} = \phi \dot{g} \quad (\text{当} \dot{g} > 0), \tag{24}$$

其中

$$\phi = 1 - \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} \tag{25}$$

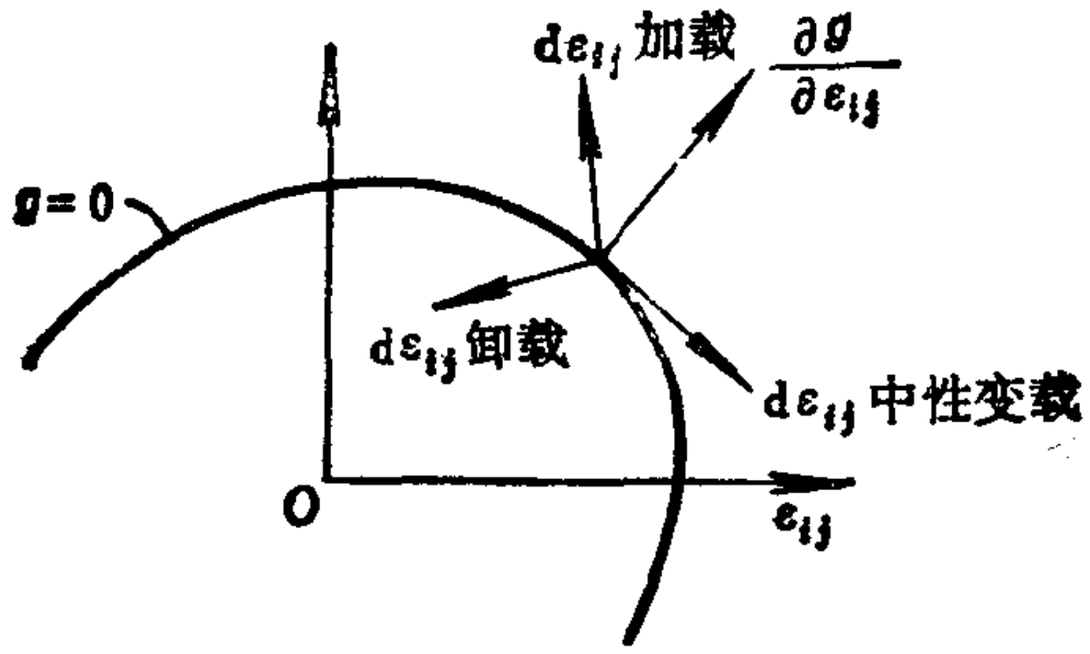



图 1

是一个表征材料硬化（强化）特性的参数。$\phi > 0$ 时 材 料 处于硬化阶段，$\phi < 0$时材料处于软化阶段，$\phi = 0$ 时 材 料处于理想塑性阶段。

因为在弹塑性加载过程中始终有$g = 0$，$\dot{g} > 0$，所以在应变空间中加载面$g = 0$在应变状态附近将局部地向外移动。与此同时，应力空间中的加载面$f = 0$在应力状态附近的移动方向则由$\phi$ 的符号确定：$\phi > 0$ 对应于加载面 $f = 0$ 局部地向外移 动，$\phi < 0$ 对 应

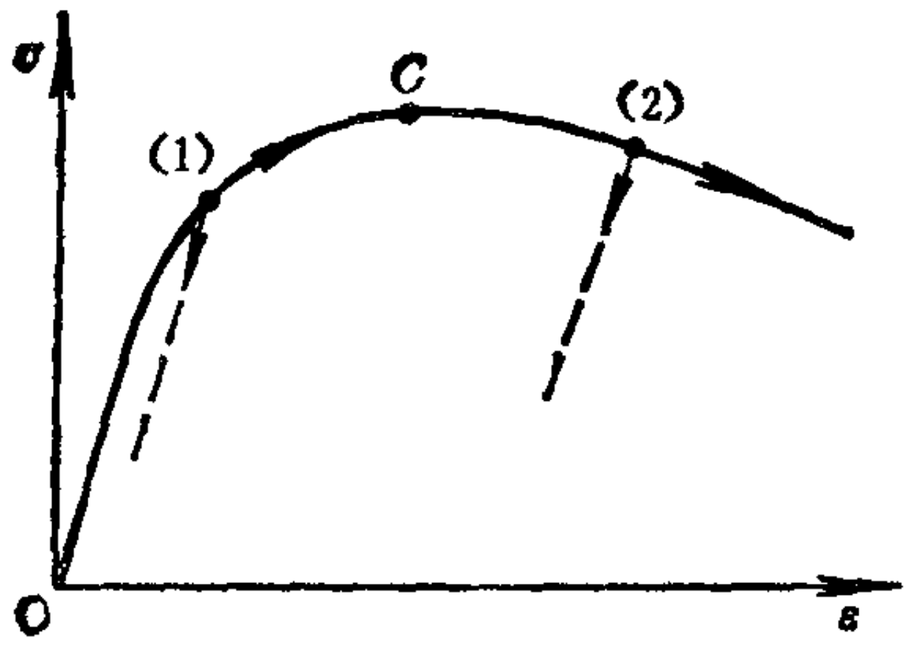



图 2

于加载面 $f=0$ 局部地向内移动，而 $\phi=0$ 对应于加载面 $f=0$ 局部地驻留不动。这就是(24)式的几何意义。

由以上讨论可知，当材料处于硬化（强化）阶段，即 $\phi>0$ 时，采用 $g$ 的符号与采用 $f$ 的符号来作为加、卸载准则的判据是完全等价的。而当材料处于软化阶段或理想塑性阶段时，只有用 $g$ 的符号来作为加、卸载准则的判据才是合理的。这一点也可通过图 2 所示的简单拉伸曲线来加以说明。对于图中的(1)点，加载时应变增量和应力增量都大于零，卸载时应变增量和应力增量都小于零。但是，对于(2)点，无论是加载还是卸载，应力增量总是小于零的，这时就不能再根据应力增量的符号来作为加、卸载的准则了。

## §4.3 有关材料性质的几个假设

本节将介绍关于材料性质的几个常用的假设或公设。

### 一*、稳定材料假设

当应力的单调变化会引起应变的同号的单调变化，或反之，应变的单调变化会引起应力的同号的单调变化时，就称材料是稳定的。

对于简单拉伸情形，稳定材料的应力-应变曲线的斜率应该是非负的。如图 3(a)中的曲线(1)→(2)→(3)。至于图 3(b) 和图 3(c)中的曲线(2)→(3)（实际上并无图 3(c)这种材料），则不

满足稳定材料的定义。

现将状态(1)的应力和应变分别记为$\sigma_{ij}^{(1)}$和$\varepsilon_{ij}^{(1)}$，状态(2)的应力和应变分别记为$\sigma_{ij}^{(2)}$和$\varepsilon_{ij}^{(2)}$，则稳定材料的数学表达式为：对任

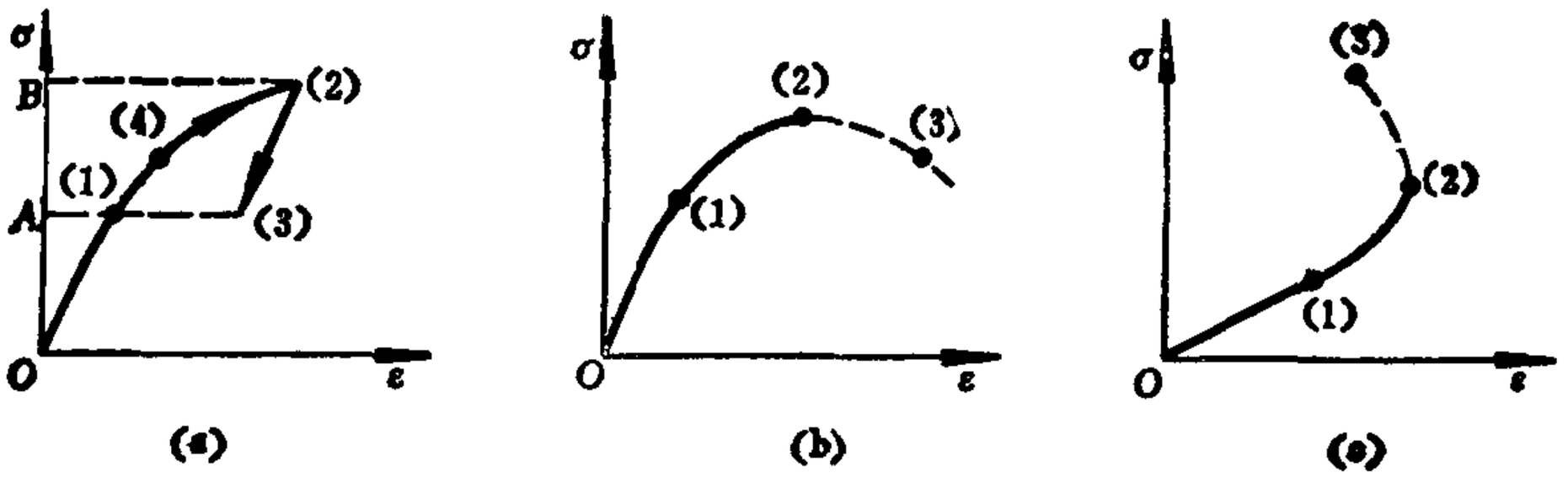



图 3

意的状态(1)和状态(2)，当$\sigma_{ij}$在应力空间中沿直线路径由状态(1)单调地变化到状态(2)时，或当$\varepsilon_{ij}$在应变空间中沿直线路径由状态(1)单调地变化到状态(2)时，必然有

$$(\sigma_{ij}^{(2)}-\sigma_{ij}^{(1)})(\varepsilon_{ij}^{(2)}-\varepsilon_{ij}^{(1)})\geqslant 0, \tag{26}$$

或

$$\mathrm{d}\sigma_{ij}\mathrm{d}\varepsilon_{ij}\geqslant 0. \tag{27}$$

如果（26）式中的等号仅当$\sigma_{ij}^{(2)}=\sigma_{ij}^{(1)}$或$\varepsilon_{ij}^{(2)}=\varepsilon_{ij}^{(1)}$时才成立，则称该材料是在严格意义下稳定的。

需要说明，在以上稳定材料的定义中，所要求的应力路径或应变路径是沿直线路径作单调变化的。这是因为对于稳定材料来说，对应于任意选取的两个状态，(26)式并不总是成立的。例如，在图 3 (a)中有

$$(\sigma^{(3)}-\sigma^{(4)})(\varepsilon^{(3)}-\varepsilon^{(4)})<0.$$

不过，在实际应用中，以（27）式来判别材料的稳定性或许会更加方便。

不难证明，稳定材料的以上两个定义（26)式和(27）式是相互等价的，而且它们还满足

$$\sigma_{ij}^{(2)}(\varepsilon_{ij}^{(2)}-\varepsilon_{ij}^{(1)})\geqslant\int_{(1)}^{(2)}\sigma_{kl}\mathrm{d}\varepsilon_{kl}\geqslant\sigma_{ij}^{(1)}(\varepsilon_{ij}^{(2)}-\varepsilon_{ij}^{(1)}),\qquad(28)$$

$$\varepsilon_{ij}^{(2)}(\sigma_{ij}^{(2)}-\sigma_{ij}^{(1)})\geqslant\int_{(1)}^{(2)}\varepsilon_{kl}\,\mathrm{d}\sigma_{kl}\geqslant\varepsilon_{ij}^{(1)}(\sigma_{ij}^{(2)}-\sigma_{ij}^{(1)}).\qquad(29)$$

下面我们就来证明这些论断。

首先我们来证明（26）式和（27）式的等价性。当状态(1)到状态(2)的变化为一阶小量时，有 $\sigma_{ij}^{(2)}=\sigma_{ij}^{(1)}+\mathrm{d}\sigma_{ij}$，$\varepsilon_{ij}^{(2)}=\varepsilon_{ij}^{(1)}+\mathrm{d}\varepsilon_{ij}$。因此由（26）式立即可得到（27）式。反之，现假定(27)式成立，并设应力沿直线路径单调地由$\sigma_{ij}^{(1)}$变化到$\sigma_{ij}^{(2)}$，即

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^{(1)}+\eta(\sigma_{ij}^{(2)}-\sigma_{ij}^{(1)})\quad(\mathrm{d}\eta>0,0\leqslant\eta\leqslant1),$$

这时由$\mathrm{d}\sigma_{ij}=\mathrm{d}\eta(\sigma_{ij}^{(2)}-\sigma_{ij}^{(1)})$ 和$\mathrm{d}\eta>0$，可将（27）式写为

$$\mathrm{d}\eta(\sigma_{ij}^{(2)}-\sigma_{ij}^{(1)})\mathrm{d}\varepsilon_{ij}\geqslant0\quad(\mathrm{d}\eta>0)。$$

再由$0\leqslant\eta\leqslant1$，可得

$$(\sigma_{ij}^{(2)}-\sigma_{ij}^{(1)})\mathrm{d}\varepsilon_{ij}\geqslant\eta(\sigma_{ij}^{(2)}-\sigma_{ij}^{(1)})\mathrm{d}\varepsilon_{ij}=(\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^{(1)})\mathrm{d}\varepsilon_{ij}\geqslant0$$

和

$$(\sigma_{ij}^{(2)}-\sigma_{ij}^{(1)})\mathrm{d}\varepsilon_{ij}\geqslant(1-\eta)(\sigma_{ij}^{(2)}-\sigma_{ij}^{(1)})\mathrm{d}\varepsilon_{ij}=(\sigma_{ij}^{(2)}-\sigma_{ij})\mathrm{d}\varepsilon_{ij}\geqslant0。$$

对以上两式由状态(1)到状态(2)作积分，就有

$$(\sigma_{ij}^{(2)}-\sigma_{ij}^{(1)})(\varepsilon_{ij}^{(2)}-\varepsilon_{ij}^{(1)})\geqslant\int_{(1)}^{(2)}(\sigma_{kl}-\sigma_{kl}^{(1)})\mathrm{d}\varepsilon_{kl}\geqslant0\qquad(30)$$

和

$$(\sigma_{ij}^{(2)}-\sigma_{ij}^{(1)})(\varepsilon_{ij}^{(2)}-\varepsilon_{ij}^{(1)})\geqslant\int_{(1)}^{(2)}(\sigma_{kl}^{(2)}-\sigma_{kl})\mathrm{d}\varepsilon_{kl}\geqslant0。\qquad(31)$$

由此可见（26）式是成立的。如设应变沿直线路径单调地由$\varepsilon_{ij}^{(1)}$变化到$\varepsilon_{ij}^{(2)}$时，也可用类似的方法导出（26)式。

其次我们将从（26）式出发来导出（28）式和（29）式。实际上，(30)式的右端与（28）式的右端是等价的，而（31）式的右端与(28)式的左端是等价的。故只需证明(29)式。为此，可沿应力直线路径对全微分

$$\mathrm{d}[(\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^{(1)})(\varepsilon_{ij}-\varepsilon_{ij}^{(1)})],\ \mathrm{d}[(\sigma_{ij}^{(2)}-\sigma_{ij})(\varepsilon_{ij}^{(2)}-\varepsilon_{ij})]$$

进行积分，由此得到恒等式

$$\begin{aligned}(\sigma_{ij}^{(2)}-\sigma_{ij}^{(1)})(\varepsilon_{ij}^{(2)}-\varepsilon_{ij}^{(1)}) &= \int_{(1)}^{(2)}(\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^{(1)})\mathrm{d}\varepsilon_{ij} \\ &+\int_{(1)}^{(2)}(\varepsilon_{ij}-\varepsilon_{ij}^{(1)})\mathrm{d}\sigma_{ij} \\ &=\int_{(1)}^{(2)}(\sigma_{ij}^{(2)}-\sigma_{ij})\mathrm{d}\varepsilon_{ij} \\ &+\int_{(1)}^{(2)}(\varepsilon_{ij}^{(2)}-\varepsilon_{ij})\mathrm{d}\sigma_{ij}. \quad (32)\end{aligned}$$

再利用（30）式的左端，可知(29)式的右端是成立的；利用(31)式的左端，可知(29)式的左端也是成立的。

由于在以上关系中应力和应变是完全对等的，故对于应变沿直线路径单调变化的情形可作完全类似的讨论。

下面来介绍塑性力学中两个常用的基本公设，即 Drucker 公设和 Ильюшин 公设。以后我们将会看到，根据 Drucker 公设或 Ильюшин 公设，塑性力学中的本构方程就可以得到很大的简化。

## 二、Drucker公设①

现来考察如图 3 (a)所示的加卸载过程。当应力由 $\sigma_A$ 加载到 $\sigma_B$然后又卸回到$\sigma_A$时，相应的应力-应变值将由状态(1)到状态（2）然后再到状态(3)。实验表明，在$\varepsilon$-$\sigma$平面上，迴路(1)→(2)→(3)总是顺时针的。在物理上，这表明在一个应力闭循环中将不可能提取有用的功。以上性质也可推广到三维应力状态中去，表述为：当材料的物质微元在应力空间的任意应力闭循环中的余功非正时，

① D. C. Drucker, Proc. Ist U. S. Nat. Cong. Appl. Mech., (1952)pp. 481—491.

$$\oint \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} \leqslant 0, \tag{33}$$

就称材料满足Drucker公设。

需注意，当应力经过闭循环而回到初值时，相应的应变并不一定也回到初值。因此，一般说，它并不构成热力学循环。但当应力始终在加载面之内时，应力的闭循环将对应于应变的闭循环。由于这时并未产生新的塑性变形，材料呈弹性响应，故(33)式应该取为等号。因为这时的应力和应变之间具有单一的对应关系，如果上式取为小于号的话，那么沿相反的路径积分时就应取为大于号，而这与Drucker公设是相矛盾的。由此可见，在上述情况下，被积函数是一个全微分，即存在函数$\Phi(\sigma_{ij}, \xi_\beta)$，使得

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}},$$

其中$\varepsilon_{ij}$是与应力空间加载面内的任一应力$\sigma_{ij}$相对应的应变，而$\Phi$称为弹性余势。

下面我们给出与（33）式等价的另一表达式。设应力闭循环所经历的状态分别为(1)→(2)→(3)，即有$\sigma_{ij}^{(1)} \to \sigma_{ij}^{(2)} \to \sigma_{ij}^{(3)} = \sigma_{ij}^{(1)}$和$\varepsilon_{ij}^{(1)} \to \varepsilon_{ij}^{(2)} \to \varepsilon_{ij}^{(3)}$，则由恒等式

$$\int_{(1)}^{(3)} \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} + \int_{(1)}^{(3)} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij}^{(3)} \varepsilon_{ij}^{(3)} - \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(1)}$$

或

$$\oint \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} + \int_{(1)}^{(3)} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} (\varepsilon_{ij}^{(3)} - \varepsilon_{ij}^{(1)})$$

可知(33)式与

$$\int_{(1)}^{(3)} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(1)}) d\varepsilon_{ij} \geqslant 0 \tag{34}$$

是完全等价的，其中状态(3)与初始状态(1)有相同的应力值。

(33)式和（34）式的含义可由简单拉伸曲线来予以说明。在

图 3 (a)中，应 力闭循环的余功为$AB(2)(1)$的面积减去$AB(2)(3)$的面积，Drucker公设则要求其值是非正的。

## 三、依留辛(Ильюшин)公设①

Drucker 公 设 是在应力空间中进行讨论的。类似地，我们也可在应变空间中来建立相应的公设。特别是当材料存在应变软化时，在应变空间中进行讨论可能会更方便些。这时，相应的公设可表述为：当材料的物质微元在应变空间的任意应变闭循环中的功非负时，

$$\oint \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \geqslant 0 \tag{35}$$

就称材料满足依留辛公设。

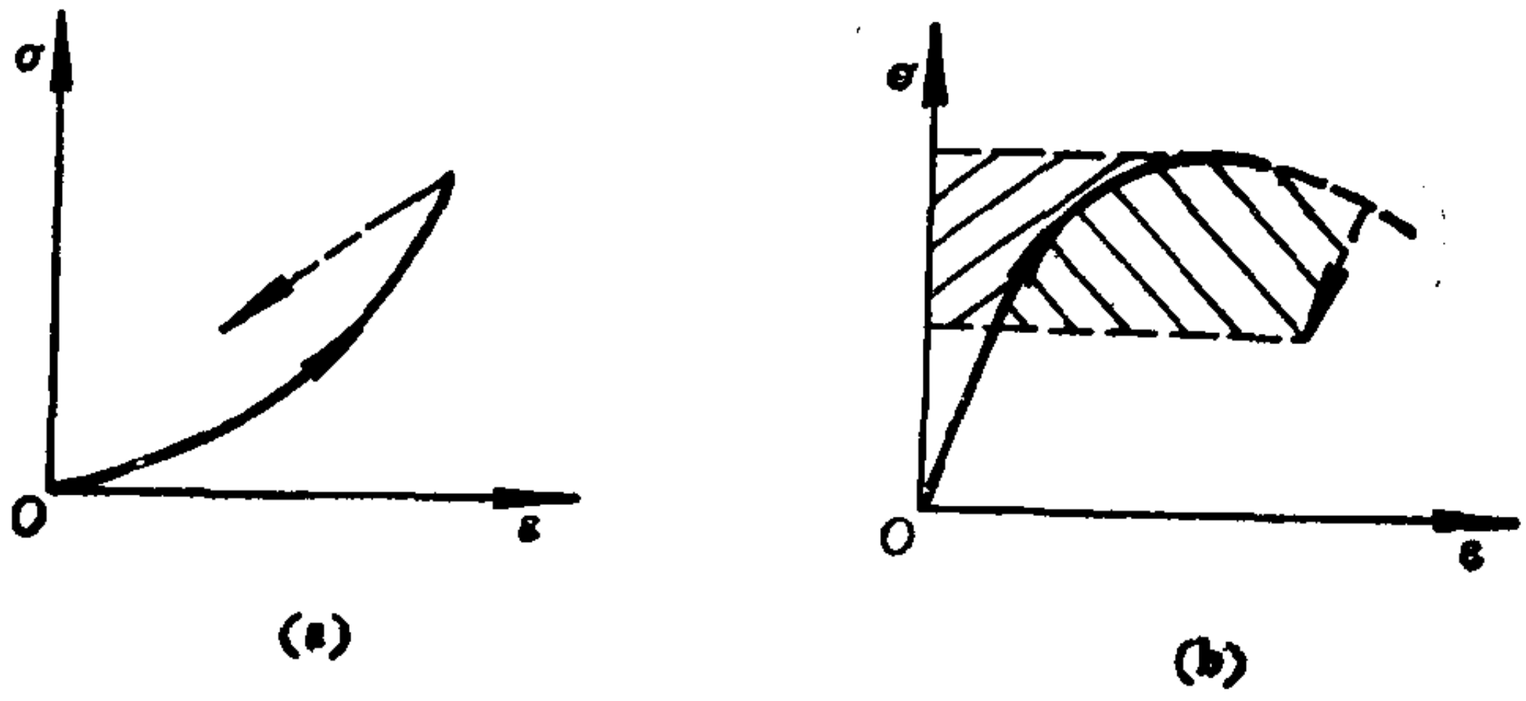



图 4

类似于以前的讨论，可知应变的闭循环一般并不对应于应力的闭循环。因此，一般说，它并不构成热力学循环。但当应变的循环始终在加载面之内时，上式就应取为等号。这 时 存 在 函数$\Psi(\varepsilon_{ij}, \overset{\kappa}{\zeta}_{\beta})$，使得

① А. А.Ильюшин, ПММ, 25 (1961), pp. 503—507.

$$\sigma_{ij}=\frac{\partial\Psi}{\partial\varepsilon_{ij}},$$

其中$\sigma_{ij}$是与应变空间加载面内的任一应变$\varepsilon_{ij}$相对应的应力，而$\Psi$称为弹性势。

以上关于材料性质的假设或公设并不是由热力学定律导出的，而是在大量宏观实验基础上总结出来的，它们对许多材料都适用。基于这些假设（或公设），材料本构关系的形式就可得到很大的简化。无论是从应力空间的 Drucker 公设出发，还是从应变空间的 Ильюшин公设出发，都可以导出下一节中将要介绍的加载面的外凸性和正交流动法则，而稳定材料假设又将保证全量理论解的唯一性（见第五章）。由此可以看出以上这些假设（或公设）的重要性。但需指出，以上这三个关于材料性质的假设或公设是互不等价的。例如，图 4 表示了两种材料的拉伸曲线，由图4(a)所示的是一种假想的材料，它满足稳定材料假设但不满足 Drucker 公设，而图 4 (b)所示的材料则不满足稳定材料假设，但仍满足 Drucker公设。不过，当材料既满足稳定材料假设，又满足 Drucker公设时，便不难证明材料也一定满足Ильюшин公设。这一性质的证明可以由读者自己来完成。

## § 4.4 加载面的外凸性和正交流动法则

本节将从Drucker公设出发来导出一个基本不等式。为此，可在应力空间中构造一个应力闭循环：此循环由加载面$f=0$内的任何一点$\sigma_{ij}^{(1)}$出发，沿某一路径达到加载面$f=0$上的任何一点$\sigma_{ij}^{(2)}$，在此过程中材料并未产生新的塑性变形。此后，可作一微小的应力增量$\Delta\sigma_{ij}$而使材料产生一微小的塑性应变增量$\Delta\varepsilon_{ij}^{p}$，相应的应力为$\sigma_{ij}^{(3)}=\sigma_{ij}^{(2)}+\Delta\sigma_{ij}$，$\Delta\sigma_{ij}$是指向加载面之外还是指向加载面之内应根据材料是处于硬化阶段还是软化阶段而定。最后，再通过某一弹性卸载路径使应力由$\sigma_{ij}^{(3)}$回到初值$\sigma_{ij}^{(4)}=\sigma_{ij}^{(1)}$，在此过

程中材料也未进一步产生新的塑性变形。

如将(6)式写为增量形式：

$$d\varepsilon_{ij} = M_{ijkl} d\sigma_{kl} + d\varepsilon^p_{ij},$$

则Drucker公设可由(34)式表示为

$$\int_{(1)}^{(4)} (\sigma_{ij} - \sigma^{(1)}_{ij}) M_{ijkl} d\sigma_{kl} + \int_{(1)}^{(4)} (\sigma_{ij} - \sigma^{(1)}_{ij}) d\varepsilon^p_{ij} \geqslant 0.$$

由$\sigma^{(4)}_{ij} = \sigma^{(1)}_{ij}$可知，上式左端的第一项是等于零的。又因为只有从状态(2)到状态(3)的过程中才产生塑性应变增量。所以上式可写为

$$\int_{(2)}^{(3)} (\sigma_{ij} - \sigma^{(1)}_{ij}) d\varepsilon^p_{ij} \geqslant 0.$$

如略去高阶小量，就有

$$(\sigma^{(2)}_{ij} - \sigma^{(1)}_{ij}) \Delta\varepsilon^p_{ij} + \frac{1}{2} \Delta\sigma_{ij} \Delta\varepsilon^p_{ij} \geqslant 0. \qquad (36)$$

这正是我们所需要的基本不等式。为了叙述方便起见，以后我们将（36）式中的$\Delta\varepsilon^p_{ij}$和$\Delta\sigma_{ij}$分别写为$d\varepsilon^p_{ij}$和$d\sigma_{ij}$，它们分别表示塑性应变增量和应力增量。

根据不等式(36)，可得到以下几点推论。

**推论1** 如果把应力的起始点$\sigma^{(1)}_{ij}$取在加载面上，而且仍然能构造出上述的应力闭循环的话，则由 Drucker 公设可知材料一定是稳定的。

**证明** 因为此时有$\sigma^{(1)}_{ij} = \sigma^{(2)}_{ij}$，故(36)式为

$$d\sigma_{ij} d\varepsilon^p_{ij} \geqslant 0$$

再由$M_{ijkl}$的正定性：

$$d\sigma_{ij} M_{ijkl} d\sigma_{kl} = d\sigma_{ij} d\varepsilon^e_{ij} \geqslant 0,$$

便有

$$d\sigma_{ij} (d\varepsilon^e_{ij} + d\varepsilon^p_{ij}) = d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \geqslant 0.$$

这说明材料是稳定的。这一推论也表明，对于非稳定材料，当把应力的起始点选在加载面上时，将无法作出本节所构造的应力闭循

环。

**推论2** 加载面$f=0$是外凸的。

在$m$维空间中，一个图形外凸的充要条件是：对于该图形的任一边界点，总存在一个通过此点的$(m-1)$维超平面，使该图形完全位于这个超平面的一侧。现在，我们在应力空间中来讨论加载面的外凸性。

当$\sigma_{ij}^{(1)}$是加载面内的任一应力状态时，$d\sigma_{ij}$与$(\sigma_{ij}^{(2)}-\sigma_{ij}^{(1)})$相比为高阶小量，故(36)式可写为

$$(\sigma_{ij}^{(2)}-\sigma_{ij}^{(1)})d\varepsilon_{ij}^{p}\geqslant 0, \tag{37}$$

其中$d\varepsilon_{ij}^{p}$是对应于应力状态$\sigma_{ij}^{(2)}$的塑性应变增量。

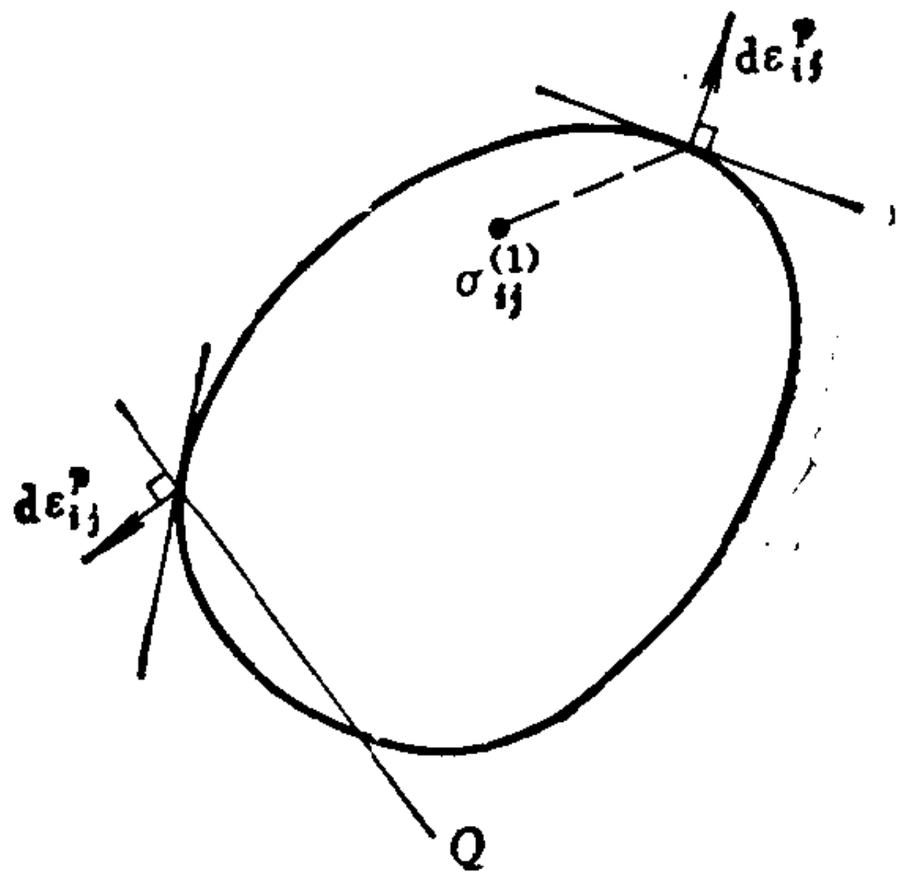



图 5

如果将应力空间的坐标轴与塑性应变空间的坐标轴相重合，并且在应力空间中经过$\sigma_{ij}^{(2)}$作一个与$d\varepsilon_{ij}^{p}$相垂直的超平面，那么(37)式表明，$\sigma_{ij}^{(1)}$将位于此超平面的与$d\varepsilon_{ij}^{p}$方向相反的一侧。但$\sigma_{ij}^{(1)}$是加载面内的任一点，可见整个加载面都位于此超平面的与$d\varepsilon_{ij}^{p}$方向相反的一侧。再由$\sigma_{ij}^{(2)}$是加载面上的任一点，可知加载面$f=0$是外凸的。

因为应力空间中加载面$f=0$内的任意两点之差和应变空间中

加载面$g=0$内的任意两点之差之间具有线性弹性关系，所以在应力空间中$f=0$内的直线段和在应变空间中$g=0$内的直线段是互为对应的。由此不难证明应变空间中加载面$g=0$也是外凸的。

推论3　如果加载面在某应力点处是光滑的，则相应的塑性应变增量（率）必指向加载面在该点的外法向：

$$\mathrm{d}\varepsilon^{p}_{ij}=\mathrm{d}\lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\qquad(\mathrm{d}\lambda\geqslant 0)$$

或　　(38)

$$\dot{\varepsilon}^{p}_{ij}=\lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\qquad(\lambda\geqslant 0)。$$

如果加载面在某应力点处是$r$个光滑曲面$f_s=0$的交点，则相应的塑性应变增量（率）可写为

$$\mathrm{d}\varepsilon^{p}_{ij}=\mathrm{d}\lambda_s\frac{\partial f_s}{\partial\sigma_{ij}}\qquad(\mathrm{d}\lambda_s\geqslant 0,s=1,2,\cdots,r)$$

或　　(39)

$$\dot{\varepsilon}^{p}_{ij}=\lambda_s\frac{\partial f_s}{\partial\sigma_{ij}}\qquad(\lambda_s\geqslant 0,s=1,2,\cdots,r)。$$

它表示塑性应变增量（率）的方向处于由这$r$个加载面$f_s=0$的外法线所组成的锥体内。关系式(38)和(39)通常称为正交流动法则。

**证明**　当加载面在应力点$\sigma^{(2)}_{ij}$处光滑时，经过$\sigma^{(2)}_{ij}$且与加载面相切的平面将是唯一的。另外，再作一个与$\mathrm{d}\varepsilon^{p}_{ij}$相垂直的超平面$Q$，如果它不与上述的切平面相重合的话，那么它就必然与加载面相割(见图5)。这时，在超平面$Q$的两侧都有加载面的内点，即在加载面内总存在这样的应力状态$\sigma^{(1)}_{ij}$，使得(37)式不成立。由此可见，超平面$Q$只能是加载面在$\sigma^{(2)}_{ij}$处的切平面，而$\mathrm{d}\varepsilon^{p}_{ij}$应垂直于这个切平面，这就证明了（38）式。(39)式也可作类似的证明，此处从略。

由以上讨论可见，无论是稳定材料还是非稳定材料，只要满足Drucker公设，就可导出加载面的外凸性和塑性应变增量的正交流动法则。还要说明的是，如果考虑到弹性与塑性相耦合的情形，则从(3)式出发而不从(6)式出发来进行讨论，也可得到类似的结果。此外，对满足依留辛公设的材料，同样可以证明应变空间中以及应力空间中加载面的外凸性和正交流动法则，这一推导将留给读者来完成。

## §4.5 增量（率型）本构关系的一般形式

本节将给出塑性应力率$\dot{\sigma}^p_{ij}$和塑性应变率$\dot{\varepsilon}^p_{ij}$的具体形式。

首先，（38）式和（23）式表明，塑性应变率$\dot{\varepsilon}^p_{ij}$具有方向$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$而与$\langle \hat{g} \rangle$成正比。故可将$\dot{\varepsilon}_{ij}$写为

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \bar{\nu}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\bar{\nu} \geqslant 0), \tag{40}$$

而有

$$\dot{\varepsilon}^p_{ij} = \lambda\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \bar{\nu}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\langle \hat{g} \rangle \quad (\bar{\nu} \geqslant 0). \tag{41}$$

其次，如将（3）式中的第一式代入第二式并利用（5）式，就有

$$\dot{\varepsilon}^p_{ij} = -M_{ijkl}\dot{\sigma}^p_{kl}, \quad \dot{\sigma}^p_{ij} = -L_{ijkl}\dot{\varepsilon}^p_{kl}. \tag{42}$$

故由（15）式和（41）式，可得

$$\dot{\sigma}^p_{ij} = -\bar{\nu}L_{ijkl}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}\langle \hat{g} \rangle = -\bar{\nu}\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ij}}\langle \hat{g} \rangle \quad (\bar{\nu} \geqslant 0). \tag{43}$$

这说明塑性应力率指向应变空间中加载面$g = 0$的内法向。最后，注意到（40）式，（25）式还可写为

$$\phi = 1 - v\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ij}} = 1 - vH, \tag{44}$$

其中

$$H = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} L_{ijkl}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} > 0.$$

当$v>0$时，可引进参数$h=\phi/v$，故有

$$v = \frac{1}{H+h} > 0.$$

因为 $h$ 的符号与$\phi$ 的符号相同，所以也可用 $h$ 来判断在加载过程中材料是处于硬化阶段还是软化阶段或理想塑性阶段。

现来考虑弹塑性加载过程，即 $\hat{g}>0$ 的情形。(43) 式可写为

$$\dot{\sigma}^{p}_{ij} = -v\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ij}}\left(\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{kl}}\dot{\varepsilon}_{kl}\right) = -\left(\frac{1}{H+h}\right)\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ij}}\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{kl}}\dot{\varepsilon}_{kl} \tag{45}$$

如果$\phi\neq 0$，由（24）式$\hat{g}=\hat{f}/\phi$，可将（41）式写为

$$\dot{\varepsilon}^{p}_{ij} = \frac{v}{\phi}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}\dot{\sigma}_{kl}\right) = \frac{1}{h}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}\dot{\sigma}_{kl}\ (h\neq 0), \tag{46}$$

于是，(3) 式具有如下的形式

$$\left.\begin{aligned}\dot{\sigma}_{ij} &= \left[L_{ijkl} - \left(\frac{\alpha}{H+h}\right)\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ij}}\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{kl}}\right]\dot{\varepsilon}_{kl},\\ \dot{\varepsilon}_{ij} &= \left[M_{ijkl} + \left(\frac{\alpha}{h}\right)\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}\right]\dot{\sigma}_{kl}\ (h\neq 0),\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

其中

$$\alpha = \begin{cases} 1, & \text{在弹塑性加载时,}\\ 0, & \text{在弹性状态，或卸载，或中性变载时。}\end{cases}$$

(47)式的第二式并不适用于材料处于理想塑性阶段（$h=0$）的情形。对于理想塑性材料，其应力空间中的加载面就是应力空

间中的初始屈服面。应力状态只可能在此屈服面之内或之上，而不可能在此屈服面之外。当应力点在屈服面之上且有

$$\hat{f}=\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}\sigma_{kl}=0$$

时，材料的塑性应变增量可能为零（对应于中性变载），也可能不为零（对应于弹塑性加载）。这时有 $\phi=0$，$h=0$ 和 $\nu=\frac{1}{H}$，(47) 式最后一项中的因子 $\left(\frac{1}{h}\right)\hat{f}$ 是不定的。因此，当材料为理想塑性时，可直接利用 (38) 式而将 (47) 式改写为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{ij}&=\left[L_{ijkl}-\left(\frac{\alpha}{H}\right)\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ij}}\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{kl}}\right]\dot{e}_{kl},\\ \dot{e}_{ij}&=M_{ijkl}\sigma_{kl}+\alpha\lambda\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\quad(\lambda\geqslant 0),\end{aligned}\right\}\tag{48}$$

上式中 $\alpha$ 的含义同前。

以上所导出的本构关系的形式（47）式和（48）式并未受到塑性变形的体积不可压的限制，故对于相当广泛的材料都是适用的。

对于不同的材料和加载环境，其内变量的选取以及相应的演化方程（如（17)式)将是不相同的，这可能会使塑性本构理论的研究变得相当复杂。但通过以上的讨论我们可以清楚地看到，如果材料服从 Drucker 公设（或Ильюшин 公设)，那么，无论内变量的选取及其演化方程（17）式如何，只要在存在加载面的条件下，其本构方程总可以写成（47）式或（48）式的形式，从而使问题得到相当的简化，因为这时仅需对加载面所依赖的内变量及其演化规律进行讨论了（见第三章）。

## §4.6 本构关系的一些常用表达式

在本章的前几节中，我们对屈服面或加载面的形式并未作出具体的规定。本节将具体地写出几种常见的增量（率型）形式的本构表达式。

### 一、具有 Mises 屈服条件的理想塑性材料

Mises 屈服条件可由上一章的（40）式和（43）式写为

$$f = J_2 - \frac{\sigma_s^2}{3} = 0,$$

故有

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} = s_{ij}.$$

如将弹性张量取为由（7）式所表示的各向同性张量时，（48）式中的 $\dot{e}_{ij}$ 就可具体地写为

$$\dot{e}_{ij} = \left(\frac{1+\nu}{E}\right)\dot{\sigma}_{ij} - \left(\frac{\nu}{E}\right)\dot{\sigma}_{kk}\delta_{ij} + a\lambda s_{ij} \tag{49}$$

或写为

$$\begin{cases} \dot{e}_{ij} = \dfrac{1}{2\mu}\dot{s}_{ij} + a\lambda s_{ij}, \\ \dot{e}_{kk} = \left(\dfrac{1-2\nu}{E}\right)\dot{\sigma}_{kk}, \end{cases} \tag{50}$$

其中 $\frac{1}{2\mu} = \frac{1+\nu}{E}$，$\lambda \geqslant 0$，$a$ 的含义与上一节相同。上式称为 Prandtl-Reuss 关系。当弹性应变很小而可被略去时，材料常被简化为刚-塑性模型。这相当于上式中的杨氏模量 $E$ 趋于无穷大的情形，而

(49) 式化为：

$$\dot{e}_{ij} = a\lambda s_{ij} \tag{51}$$

称之为Levy-Mises关系，它是最早提出来的塑性本构关系。

现对（49）式作以下两点讨论：

1. 塑性应变率$\dot{e}^p_{ij}$的方向可由$s_{ij}$确定，但其大小是无法确定的（即$\lambda$是不确定的）。这说明当材料屈服后，塑性应变是可以任意增长的(和简单应力状态时一样，这是理想塑性体的特点)。只有当被研究的物质微元受到周围介质的约束时，才可通过变形协调条件来确定$\lambda$的值。这时，如已给定$\dot{e}^p_{ij}$，则由

$$J_2 = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} = (\dot{e}^p_{ij}\dot{e}^p_{ij})/(2\lambda^2) = \frac{\sigma_s^2}{3},$$

可知

$$\lambda = \left(\frac{3}{2}\dot{e}^p_{ij}\dot{e}^p_{ij}\right)^{\frac{1}{2}} \Big/ \sigma_s,$$

故有

$$s_{ij} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_s \dot{e}^p_{ij} \Big/ \sqrt{\dot{e}^p_{kl}\dot{e}^p_{kl}}。 \tag{52}$$

因此，$s_{ij}$是$\dot{e}^p_{ij}$的零次齐次式，当$\dot{e}^p_{ij}$的各分量按比例增长时，$s_{ij}$保持不变。

2. 现通过塑性应变率的主值来定义相应的Lode参数：

$$\mu_{\dot{e}^p} = \frac{2\dot{e}^p_2 - \dot{e}^p_1 - \dot{e}^p_3}{\dot{e}^p_1 - \dot{e}^p_3}。 \tag{53}$$

由于$\dot{e}^p_{ij}$的分量与$s_{ij}$的分量之间成比例关系，故应有

$$\mu_{\dot{e}^p} = \mu_\sigma \tag{54}$$

这一点曾被Ohashi① 的实验所证实。

① Y. Ohashi, et al, *J. Mech. Phys. Solids*, 23 (1975), pp.277—294, pp.295—323.

## 二、具有 Tresca 屈服条件的理想塑性材料

在主应力空间中，Tresca 屈服条件可由上一章的（36）式和（37）式写为

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_s = 0, \\ f_2 &= -\sigma_3 + \sigma_1 - \sigma_s = 0, \\ f_3 &= \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_s = 0, \\ f_4 &= -\sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_s = 0, \\ f_5 &= \sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_s = 0, \\ f_6 &= -\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_s = 0. \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

应力状态应同时满足$f_q \leqslant 0 (q = 1,2,\cdots,6)$。当应力点位于第 $q$ 个面上时，则可由正交流动法则（38）式来确定主塑性应变率；而当应力点位于两个面的交点上时，则可由（39）式来确定相应的主塑性应变率。例如，当应力点位于 $f_1 = 0$ 上时，有

$$\dot{\varepsilon}_i^p = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_i} \quad (i = 1,2,3),$$

或

$$(\dot{\varepsilon}_1^p, \dot{\varepsilon}_2^p, \dot{\varepsilon}_3^p) = (0, \lambda_1, -\lambda_1) \quad (\lambda_1 \geqslant 0). \tag{56}$$

当应力点位于 $f_2 = 0$ 上时，有

$$\dot{\varepsilon}_i^p = \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_i} \quad (i = 1,2,3),$$

或

$$(\dot{\varepsilon}_1^p, \dot{\varepsilon}_2^p, \dot{\varepsilon}_3^p) = (\lambda_2, 0, -\lambda_2) \quad (\lambda_2 \geqslant 0). \tag{57}$$

而当应力点位于 $f_1 = 0$ 和 $f_2 = 0$ 的交线上时，则有

$$(\dot{\varepsilon}_1^p, \dot{\varepsilon}_2^p, \dot{\varepsilon}_3^p) = (\lambda_2, \lambda_1, -\lambda_1 - \lambda_2), \tag{58}$$

主塑性应变率的分量间的比值也可写为

$$\dot{\varepsilon}_1^p : \dot{\varepsilon}_2^p : \dot{\varepsilon}_3^p = (1 - \bar{\lambda}) : \bar{\lambda} : -1,$$

其中

$$0\leqslant\chi=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\leqslant 1.$$

这时，塑性应变率的方向是介于$f_1=0$的外法向和$f_2=0$的外法向之间的。如考虑平面应力状态$\sigma_3=0$（图6），并分别将$f_1=0$和

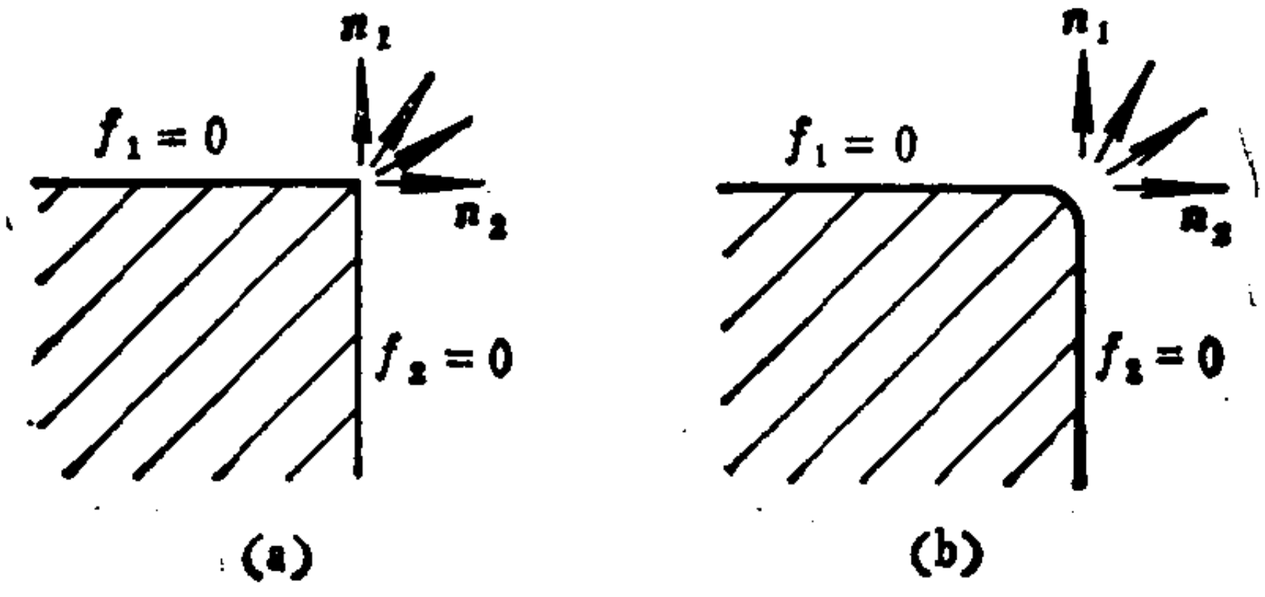



图 6

$f_2=0$的外法向在$\sigma_3=0$平面上的分量记为$n_1$和$n_2$，则$(\dot{e}_1^p,\dot{e}_2^p)$的方向应介于$n_1$和$n_2$之间(图6(a))。通常也可理解该处是一个曲率变化很大的光滑曲面，这时$(\dot{e}_1^p,\dot{e}_2^p)$的方向将很快地由$n_1$变化到$n_2$（图6(b)）。

## 三、具有 Mises 加载条件的等向强化材料

现将加载面取为上一章的（72）式

$$f=\bar{\sigma}-\psi(\xi)=0, \tag{59}$$

其中

$$\xi=\left(\frac{2}{3}\dot{e}_{kl}^p\dot{e}_{kl}^p\right)^{\frac{1}{2}}=\overline{\dot{e}^p},\quad \psi(0)=\sigma_s,$$

则不难写出关于（47）式的具体形式。

注意到$\bar{\sigma}^2=3J_2$，可得

$$2\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial\sigma_{ij}}=3\frac{\partial J_2}{\partial\sigma_{ij}}=3s_{ij}.$$

故有

$$\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}=\frac{\partial\sigma}{\partial\sigma_{ij}}=\frac{3}{2}\frac{s_{ij}}{\sigma}. \tag{60}$$

因此，在弹塑性加载时，由（47）式得：

$$\dot{\varepsilon}^p_{ij}=\frac{3}{2h}\frac{\dot{\sigma}}{\sigma}s_{ij}, \tag{61}$$

其中

$$\dot{\sigma}=\frac{\partial\sigma}{\partial\sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij}=\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij}.$$

上式中的参数 $h$ 可由 $\psi(\xi)$ 的形式确定。为此，可将一致性条件

$$\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij}+\frac{\partial f}{\partial\bar{\xi}}\dot{\xi}=0$$

具体地写为

$$\dot{\sigma}=\frac{\partial\psi}{\partial\bar{\xi}}\dot{\xi}=\psi'\ \dot{\bar{\varepsilon}}^p, \tag{62}$$

这里$\psi'=\frac{\partial\psi}{\partial\xi}$。将（62）式代入（61）式，再写出$(\dot{\bar{\varepsilon}}^p)^2$的表达式，就有

$$(\dot{\bar{\varepsilon}}^p)^2=\left(\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}^p_{kl}\dot{\varepsilon}^p_{kl}\right)$$

$$=\left(\frac{\psi'}{h}\right)^2\left(\frac{3}{2}\frac{s_{ij}s_{ij}}{\sigma^2}\right)(\dot{\bar{\varepsilon}}^p)^2.$$

于是得

$$h=\psi'。\tag{63}$$

在简单拉伸时，$\bar{\sigma}=\sigma$，$\xi=\varepsilon^p$，而（59）式化为$\sigma=\psi(\varepsilon^p)$。因此 $\psi'=\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\varepsilon^p$ 的值可通过简单拉伸时的实验曲线来确定。

## §4.7 简单加载时的全量理论

在塑性力学中，因为应力不仅与应变有关，而且还与其变形历史有关，尤其是因为弹塑性加载过程和卸载过程具有不同的规律，所以以上所建立的本构关系都是增量型的，称为增量理论或流动理论。然而，增量理论在实际应用中往往是很不方便的，因此就需要研究：在什么条件下，物质微元的应力和应变之间存在单一的对应关系以及如何来确定这样的关系等问题。这样的理论称为全量理论或形变理论。例如，对于一个受简单拉伸的杆件来说，若始终没有卸载，应力和应变之间就存在一一对应关系，这相当于一个非线弹性力学问题，而不必像增量理论那样来逐步进行求解。

本节将讨论 Mises 等向强化或随动强化材料在简单加载条件下的本构关系。所谓简单加载，是指应力各分量之间的比值保持不变且单调增长的加载过程。在这种情况下，通过对增量形式的应力应变关系的积分，便可以得到应力和应变之间的全量关系。

### 一、简单加载和单一曲线假定

由于在简单加载过程中应力各分量之间的比例不变且单调增长，故这时的应力主方向也是不变的，可写为

$$\sigma_{ij}=t\sigma_{ij}^0,\quad s_{ij}=ts_{ij}^0\ (t>0,\ \mathrm{d}t>0),\tag{64}$$

其中$\sigma_{ij}^0$和 $s_{ij}^0$ 分别为固定不变的应力张量和偏应力张量，$t$ 为单调递增的参数。

简单加载路径在$\pi$平面上可表示为$\theta_\sigma=\text{const}$的射线。现假定材料的初始屈服面为Mises圆，则加载路径将始终沿其半径$r_\sigma$的方向（见图7）。$d\varepsilon^p_{ij}$的方向应该和$r_\sigma$的方向相同，因为即使不采用等向强化的假定，加载面不一定是同心圆，但是从加载点附近的对称性来看，仍然可认为$d\varepsilon^p_{ij}$是沿着$r_\sigma$的方向的。注意到$r_\sigma$的方向可由$\frac{\partial J_2}{\partial\sigma_{ij}}=s_{ij}$表示，就有

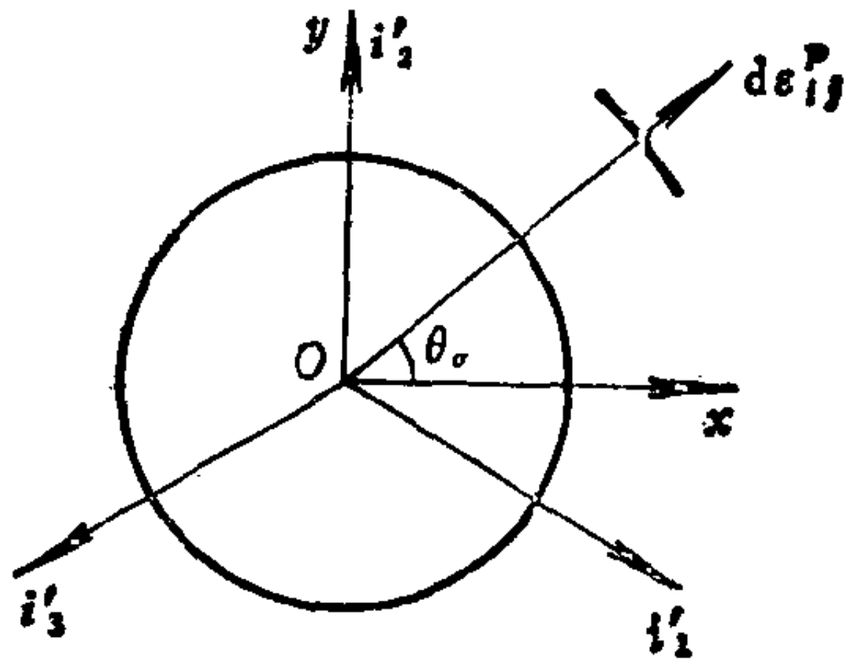


图 7

$$d\varepsilon^p_{ij}=d\lambda s_{ij}.$$

计入弹性应变增量后，得

$$\left.\begin{aligned} de_{ij}&=\frac{1}{2\mu}ds_{ij}+d\lambda s_{ij},\\ d\varepsilon_{kk}&=\left(\frac{1-2\nu}{E}\right)d\sigma_{kk}. \end{aligned}\right\}\tag{65}$$

上式与理想弹塑性材料的Prandtl-Reuss关系（50）式在形式上是一样的，只是$d\lambda$的含义不同。对于理想弹塑性材料，$d\lambda$（或$\lambda$）是不确定的，但对于强化材料，$d\lambda$是确定的。例如，对等向强化材料，由（61）式可知

$$d\lambda=\frac{3}{2h}\frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}}.$$

因此当（64）式成立时，

$$d\lambda=\frac{3}{2h}\frac{dt}{t}.$$

将（64）式代入（65）式后积分，就有

$$e_{ij}=\Lambda s_{ij},\qquad \varepsilon_{kk}=\left(\frac{1-2\nu}{E}\right)\sigma_{kk},\tag{66}$$

其中

$$\Lambda=\frac{1}{2\mu}+\frac{1}{t}\int_0^t t\mathrm{d}\lambda.$$

再由$e_{ij}e_{ij}=\Lambda^2 s_{ij}s_{ij}$ 可得

$$\Lambda=\sqrt{\frac{e_{ij}e_{ij}}{s_{kl}s_{kl}}}=\frac{3\bar{\varepsilon}}{2\bar{\sigma}}.\tag{67}$$

这里用到了定义式 $\bar{\varepsilon}=\sqrt{\frac{2}{3}e_{ij}e_{ij}}$，$\bar{\sigma}=\sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}}$。因此，(66)式中的 $e_{ij}$ 可写为

$$e_{ij}=\left(\frac{3}{2}\frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}}\right)s_{ij},$$

或

$$s_{ij}=\left(\frac{2}{3}\frac{\bar{\sigma}}{\bar{\varepsilon}}\right)e_{ij}.\tag{68}$$

如果 $\bar{\varepsilon}$ 是 $\bar{\sigma}$ 的单值函数：$\bar{\varepsilon}=\bar{\varepsilon}(\bar{\sigma})$，或反之 $\bar{\sigma}$ 是 $\bar{\varepsilon}$ 的单值函数：$\bar{\sigma}=\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})$，则（68）式表明 $e_{ij}$ 可以唯一地由 $s_{ij}$ 表示，或 $s_{ij}$ 可以唯一地由 $e_{ij}$ 表示。再补充（66）式中的第二式，便得到全量理论的应力-应变关系：

$$e_{ij}=\frac{3}{2}\frac{\bar{\varepsilon}(\bar{\sigma})}{\bar{\sigma}}s_{ij},\qquad \varepsilon_{kk}=\left(\frac{1-2\nu}{E}\right)\sigma_{kk}\tag{69}$$

或

$$\begin{cases} s_{ij} = \dfrac{2}{3}\dfrac{\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})}{\bar{\varepsilon}} e_{ij} = 2\mu[1-\varpi(\bar{\varepsilon})]e_{ij}, \\ \sigma_{kk} = \dfrac{E}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}. \end{cases} \tag{70}$$

实验已经证实，当材料几乎为不可压时，由不同的应力组合所得到的$\bar{\sigma}-\bar{\varepsilon}$ 曲线与简单拉伸的 $\sigma-\varepsilon$ 曲线十分相近，在工程计算中可视为相同而称之为**单一曲线假定**。这时，（70）式中的

$$\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}) = 3\mu\bar{\varepsilon}[1-\varpi(\bar{\varepsilon})]$$

或$\varpi(\bar{\varepsilon})$ 可通过简单拉伸实验来确定。特别当 $\varpi(\bar{\varepsilon})=0$ 时，上式就化为弹性力学中的广义胡克定律。

## 二、简单加载定理

以上的全量关系（69）式和（70）式是在简单加载条件下得到的。如果物体内每个微元都处于简单加载状态，那么就可以用全量理论来求解实际的弹塑性力学的边值问题，从而使问题大为简化。伊留辛曾提出保证物体内部的每个微元都处于简单加载状态的一组充分条件，称之为简单加载定理。该定理可表述为：在小变形分析下，对具有幂次关系

$$\bar{\sigma} = B\bar{\varepsilon}^m (B, m>0)$$

的不可压材料，当外载荷（体力和面力）按比例单调增长，而位移边界条件为零时，物体内的每个微元将处于简单加载状态。这一定理的证明比较简单。如果在某时刻，作用于该物体的体力为 $F_i^0$，在应力边界 $S_T$上的面力为 $T_i^0$，相应的位移场、应变场和应力场分别为 $u_i^0$，$\varepsilon_{ij}^0$ 和 $\sigma_{ij}^0$，那么当载荷按比例增长，即

$$F_i = tF_i^0,\ \ T_i = tT_i^0\ \ (t\geqslant 1, \mathrm{d}t>0)$$

时，相应的位移场、应变场和应力场将分别以如下的规律增长：

$$u_i = \sqrt[m]{t}\,u_i^0,\ \ \varepsilon_{ij} = \sqrt[m]{t}\,\varepsilon_{ij}^0,\ \ \sigma_{ij} = t\sigma_{ij}^0.$$

也就是说，如果$u_i^0, \varepsilon_{ij}^0$和$\sigma_{ij}^0$满足下列方程：

①平衡方程

$$\sigma_{ij,j}^0 + F_i^0 = 0,$$

②几何关系

$$\varepsilon_{ij}^0 = \frac{1}{2}(u_{i,j}^0 + u_{j,i}^0),$$

③本构关系

$$s_{ij}^0 = \left(\frac{2}{3}\frac{\overline{\sigma^0}}{\overline{\varepsilon^0}}\right)\varepsilon_{ij}^0 = \frac{2}{3}B_0(\overline{\varepsilon^0})^{m-1}\varepsilon_{ij}^0 \quad \left(\nu = \frac{1}{2}\right),$$

④边界条件

$$\sigma_{ij}^0 n_j = T_i^0 \quad \text{(在应力边界}S_T\text{上)},$$
$$u_i^0 = 0 \quad \text{(在位移边界}S_u\text{上)}$$

（上式中$n_i$为边界$S_T$上的单位外法向量），则容易验证$u_i, \varepsilon_{ij}$和$\sigma_{ij}$将满足与$F_i, T_i$相对应的全部场的方程和边界条件。

在简单加载条件不成立的情况下，全量本构关系（69）式和（70）式一般是不能使用的。但由于用全量理论解题要比用增量理论方便得多，因此在简单加载条件不成立时，也经常采用全量理论来解题。事实上，全量理论的适用范围要比简单加载宽得多。通过下一节所介绍的极值路径概念，我们将会对此有进一步的了解，因为在极值路径下，应力和应变之间就可以写成全量关系。例如，对于具有分片线性加载面的强化材料，那些不使任何一个加载面产生卸载的路径都可以作为极值路径。由此可见，在全量理论中的加载路径是允许和简单加载路径有一定偏离的（这种路径也称为偏离简单加载）。

## §4.8* 关于极值路径的一些基本概念

全量理论在早期曾被Hencky，伊留辛（Ильюшин）等人研究

过，后来，Martin等人[8]提出了极值路径的概念，扩展了该理论的合理使用范围。在本节中，我们将对极值路径的概念作一初步的介绍。

**定义1** 在应变空间中给定一个由 0 到$\varepsilon_{ij}$的应变路径，由此求得比功为

$$W(\varepsilon_{ij})=\int_0^{\varepsilon_{ij}}\sigma_{kl}\mathrm{d}\varepsilon_{kl}。$$

在一切由0到 $\varepsilon_{ij}$ 的可能路径中，使$W(\varepsilon_{ij})$ 取最小值的路径就称为最小功极值路径（它可能不唯一）。其相应的比功记为$W^0(\varepsilon_{ij})$，满足$W^0(\varepsilon_{ij})\leqslant W(\varepsilon_{ij})$。

**定义2** 在应力空间中给定一个由 0 到$\sigma_{ij}$的应力路径，由此求得比余功为

$$\Omega(\sigma_{ij})=\int_0^{\sigma_{ij}}\varepsilon_{kl}\mathrm{d}\sigma_{kl}。$$

在一切由 0 到 $\sigma_{ij}$ 的可能路径中，使$\Omega(\sigma_{ij})$ 取最大值的路径就称为最大余功极值路径（它可能不唯一）。其相应的比余功记为$\Omega^0(\sigma_{ij})$，满足

$$\Omega^0(\sigma_{ij})\geqslant\Omega(\sigma_{ij})。$$

下面仅给出关于极值路径的两条性质。

**性质1** $W^0(\varepsilon_{ij})$ 由应变$\varepsilon_{ij}$唯一确定，当应变路径为最小功极值路径时，其相应的应力 $\sigma_{ij}$ 满足：

$$\sigma_{ij}=\frac{\partial W^0}{\partial\varepsilon_{ij}}。\tag{71}$$

类似地，$\Omega^0(\sigma_{ij})$ 由应力 $\sigma_{ij}$唯一确定，当应力路径为最大余功极值路径时，其相应的应变$\varepsilon_{ij}$满足：

$$\varepsilon_{ij}=\frac{\partial\Omega^0}{\partial\sigma_{ij}}。\tag{72}$$

**证明** 在应变空间中任取某一应变 $\varepsilon_{ij}$ 和任意一个二阶对称张量$a_{ij}$，则可作以下两种路径：

(a) 由 0 到 $\varepsilon_{ij}$ 的极值路径，从而得 $W^0(\varepsilon_{ij})$；

(b) 先作由 0 到$\varepsilon_{ij}+\Delta\theta a_{ij}$的极值路径，并由此得$W^0(\varepsilon_{ij}+\Delta\theta a_{ij})$，再作由$\varepsilon_{ij}+\Delta\theta a_{ij}$到$\varepsilon_{ij}$的直线路径，得

$$W(\varepsilon_{ij})=W^0(\varepsilon_{ij}+\Delta\theta a_{ij})+\int_{\varepsilon_{ij}+\Delta\theta a_{ij}}^{\varepsilon_{ij}}\sigma_{kl}\mathrm{d}\varepsilon_{kl} \tag{73}$$

可见当$\Delta\theta\to 0$时，路径 (b) 趋近于路径 (a)。

现假定对于$\varepsilon_{ij}$的极值路径 (a)，$W^0(\varepsilon_{ij})$ 不仅取最小值，而且也取极小值（即驻值），则$W(\varepsilon_{ij})$ 在极值路径 (a) 上的一阶变分应等于零，即

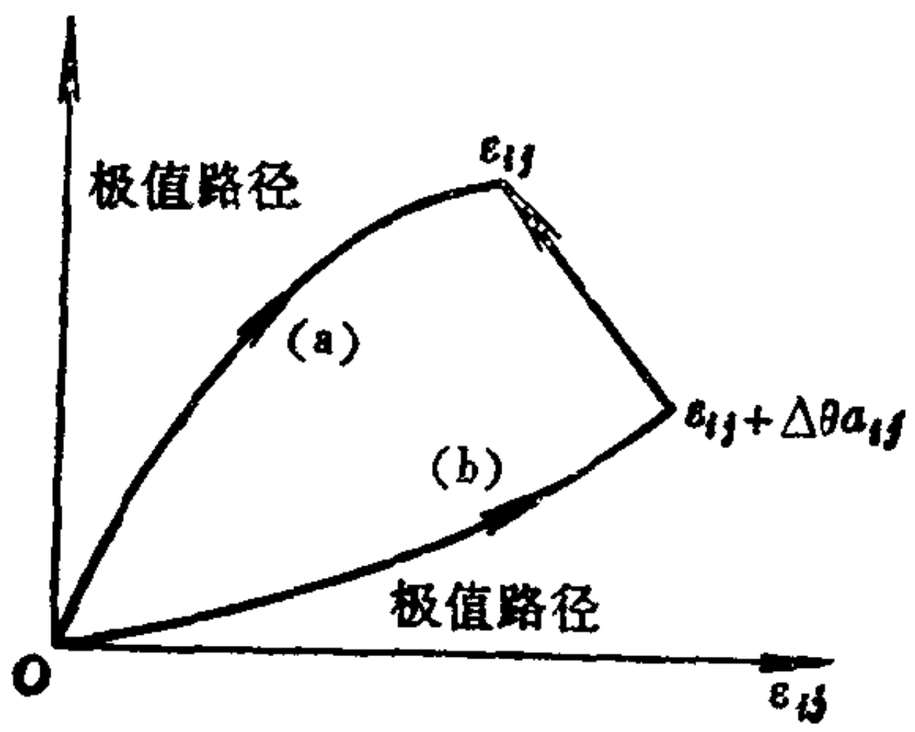



图 8

$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{W(\varepsilon_{ij})-W^0(\varepsilon_{ij})}{\Delta\theta}=0.$$

将 (73) 式代入上式后，就有

$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{W^0(\varepsilon_{ij}+\Delta\theta a_{ij})-W^0(\varepsilon_{ij})}{\Delta\theta}-\sigma_{ij}a_{ij}=0,$$

或

$$\frac{\partial W^0}{\partial\varepsilon_{ij}}a_{ij}-\sigma_{ij}a_{ij}=\left(\frac{\partial W^0}{\partial\varepsilon_{ij}}-\sigma_{ij}\right)a_{ij}=0.$$

由$a_{ij}$的任意性可知 (71) 式是成立的。(72) 式也可类似地予以证明。

上述性质说明，$W^0(\varepsilon_{ij})$ 和 $\Omega^0(\sigma_{ij})$ 可看作为势函数。如

果物体内每一点在加载过程中的应变和应力状态所经历的路径是一条极值路径，那么我们就可以把该物体看作是一个非线性弹性体而用全量理论来进行求解。

**性质2** 如果材料是稳定的，则$W^0(\varepsilon_{ij})$和$\Omega^0(\sigma_{ij})$是凸函数，即满足

$$W^0(\varepsilon_{ij}^{(2)}) - W^0(\varepsilon_{ij}^{(1)}) \geqslant (\varepsilon_{ij}^{(2)} - \varepsilon_{ij}^{(1)}) \frac{\partial W^0}{\partial \varepsilon_{ij}}\Big|_{\varepsilon_{ij}^{(1)}}, \tag{74}$$

$$\Omega^0(\sigma_{ij}^{(2)}) - \Omega^0(\sigma_{ij}^{(1)}) \geqslant (\sigma_{ij}^{(2)} - \sigma_{ij}^{(1)}) \frac{\partial \Omega^0}{\partial \sigma_{ij}}\Big|_{\sigma_{ij}^{(1)}}. \tag{75}$$

**证明** 首先，在应力空间中作两种路径，第一种是沿极值路径由0到$\sigma_{ij}^{(2)}$，相应的应变由0到$\varepsilon_{ij}^{(2)}$；第二种是沿任意路径由0到$\sigma_{ij}^{(1)}$，相应的应变由0到$\varepsilon_{ij}^{(1)}$，然后由$\sigma_{ij}^{(1)}$到$\sigma_{ij}^{(2)}$作直线路径（这时与$\sigma_{ij}^{(2)}$相对应的应变不一定等于$\varepsilon_{ij}^{(2)}$）。根据极值路径的性质，可得

$$\Omega^0(\sigma_{ij}^{(2)}) \geqslant \Omega(\sigma_{ij}^{(1)}) + \int_{(1)}^{(2)} \varepsilon_{kl} \mathrm{d}\sigma_{kl}.$$

因为材料是稳定的，由（29）式有

$$\int_{(1)}^{(2)} \varepsilon_{kl} \mathrm{d}\sigma_{kl} \geqslant (\sigma_{ij}^{(2)} - \sigma_{ij}^{(1)}) \varepsilon_{ij}^{(1)},$$

故得

$$\Omega^0(\sigma_{ij}^{(2)}) - \Omega(\sigma_{ij}^{(1)}) \geqslant (\sigma_{ij}^{(2)} - \sigma_{ij}^{(1)}) \varepsilon_{ij}^{(1)}. \tag{76}$$

特别当由0到$\sigma_{ij}^{(1)}$的路径也为极值路径时，上式中的$\Omega(\sigma_{ij}^{(1)})$可写为$\Omega^0(\sigma_{ij}^{(1)})$，$\varepsilon_{ij}^{(1)}$可写为$\dfrac{\partial \Omega^0}{\partial \sigma_{ij}}\Big|_{\sigma_{ij}^{(1)}}$，由此证得（75）式。

其次，可利用恒等式

$$\Omega(\sigma_{ij}^{(1)}) + W(\varepsilon_{ij}^{(1)}) = \int_0^{(1)} \varepsilon_{kl} \mathrm{d}\sigma_{kl} + \int_0^{(1)} \sigma_{kl} \mathrm{d}\varepsilon_{kl}$$

$$= \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(1)},$$

而将（76）式写为

$$\Omega^0(\sigma_{ij}^{(2)}) + W(\varepsilon_{ij}^{(1)}) \geqslant \sigma_{ij}^{(2)}\varepsilon_{ij}^{(1)}.$$

特别地，可在应变空间中作一条由 0 到 $\varepsilon_{ij}^{(2)}$ 的任意路径，并将与之相应的应力路径取为上述的由 0 到 $\sigma_{ij}^{(1)}$ 的路径，则以上的不等式可写为

$$W(\varepsilon_{ij}^{(2)}) \geqslant \sigma_{ij}^{(2)}\varepsilon_{ij}^{(2)} - \Omega^0(\sigma_{ij}^{(2)}). \qquad (77)$$

再将上述的恒等式用于由 0 到$\sigma_{ij}^{(2)}$的应力极值路径，就有

$$W(\varepsilon_{ij}^{(2)}) = \sigma_{ij}^{(2)}\varepsilon_{ij}^{(2)} - \Omega^0(\sigma_{ij}^{(2)}),$$

其中$W(\varepsilon_{ij}^{(2)})$表示积分$\int_0^{(2)} \sigma_{kl}\mathrm{d}\varepsilon_{kl}$是沿由 0 到$\sigma_{ij}^{(2)}$ 的极值路径求得的。与（77）式比较后可知，应变空间中的最小功极值路径恰好与应力空间中的最大余功极值路径相对应。故有

$$\Omega^0(\sigma_{ij}^{(2)}) + W^0(\varepsilon_{ij}^{(2)}) = \sigma_{ij}^{(2)}\varepsilon_{ij}^{(2)}$$

和

$$\Omega^0(\sigma_{ij}^{(1)}) + W^0(\varepsilon_{ij}^{(1)}) = \sigma_{ij}^{(1)}\varepsilon_{ij}^{(1)}.$$

再利用（75）式，并注意到状态（1）和状态（2）是可以交换的，便可证明（74）式也成立。

这里我们不打算详细讨论如何确定极值路径的问题，但以下几点是不难证明的。[8]

1. 对于理想弹塑性材料，应力空间中的弹性路径是一条最大余功极值路径。

2. 对于强化材料，当应力状态位于初始屈服面之外时，最大余功极值路径一定是某一条没有卸载的应力路径。

3. 如上一节所讨论的那样，对于 Mises 等向强化或随动强化材料，极值路径就是简单加载路径。

4. 对具有分片线性加载面的强化材料，应力点始终处于加载面上且对所有的加载面都没有卸载的路径是一条最大余功极值路径。这说明极值路径是允许和简单加载路径有一定偏离的。

## 习　题

4.1　已知简单拉伸时的应力应变曲线由 题 1.1 的 $\sigma = f_1(e)$ 曲线给出，现在考虑横向应变 $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ 与轴向拉伸 应 变 $\varepsilon_1 = \varepsilon$ 的比值，用 $\nu(\varepsilon) = -\varepsilon_2/\varepsilon_1 = -\varepsilon_3/\varepsilon_1$ 表示。在弹性 阶 段，$\nu(\varepsilon) = \nu$ 为泊松比，进入塑性后由于塑性体积变形为零，将有

$$-\mathrm{d}\varepsilon_2^p/\mathrm{d}\varepsilon_1^p = -\mathrm{d}\varepsilon_3^p/\mathrm{d}\varepsilon_1^p = 0.5.$$

因此$\nu(\varepsilon)$将从 $\nu$ 逐 步变成 0.5，试 给 出$\nu(\varepsilon)$的变化规律。

4.2　设材料在简 单 拉 伸 时 的 $\sigma = f_1(\varepsilon)$曲 线 同 上 题，当 $\nu = \frac{1}{2}$时，　$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}$与$\bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij} e_{ij}}$之间的关系 将 同 样 为 $\bar{\sigma} = f_1(\bar{\varepsilon})$，而当$\nu \neq \frac{1}{2}$时，$\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})$曲 线 将 与 $f_1(\bar{\varepsilon})$不 同。试 给 出 $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})$曲线，使其在简单拉伸时退化成 $\sigma = f_1(\varepsilon)$曲线。

4.3　已知简单拉伸时的应力应变曲线由下式给出

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} E\varepsilon, & 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_s, \\ \sigma_s, & \varepsilon_s \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_t, \\ \sigma_s \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_t}}, & \varepsilon_t \leqslant \varepsilon. \end{cases}$$

1）导出 $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})$曲线$\left(\nu \neq \frac{1}{2}\right)$。

2）由 $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})$曲线，给出纯扭情 况 $\tau = \tau(\gamma)$的曲线。

4.4　已知 Mises 等向强化材料满足规律

$$\bar{\sigma} = \psi(\xi) = \sigma_s + \frac{EE'}{E - E'}\xi \qquad (\xi \geqslant 0),$$

式中 $\xi = \overline{\dot{e}^p} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{e}_{ij}^p \dot{e}_{ij}^p}$，证明在纯扭情况下进入强化后，有

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\gamma}=\frac{EE'}{3E-(1-2\nu)E'}.$$

4.5 对 Mises 等向强化材料 $\sigma=\psi(\int \mathrm{d}\bar{\varepsilon}^p)$，考虑平面应力问题，只考虑应力分量 $\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{12}$ 及应变分量 $\varepsilon_{11},\varepsilon_{22},\gamma_{12}=2\varepsilon_{12}$，现采用以下矩阵记号：

$$\{\sigma\}=[\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{12}]^T,\quad \{\varepsilon\}=[\varepsilon_{11},\varepsilon_{22},\gamma_{12}]^T,$$
$$\{\varepsilon^p\}=[\varepsilon^p_{11},\varepsilon^p_{22},\gamma^p_{12}]^T,$$

$$[P]=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&0\\0&0&6\end{bmatrix},\quad [D]=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1&\nu&0\\\nu&1&0\\0&0&\dfrac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}.$$

试证明以下关系成立

1) $\{\dot{\sigma}\}=[D](\{\dot{\varepsilon}\}-\{\dot{\varepsilon}^p\})$.

2) $\bar{\sigma}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}\{\sigma\}^T[P]\{\sigma\}$.

3) $\{\dot{\varepsilon}^p\}=\lambda[P]\{\sigma\},\quad \overline{\dot{\varepsilon}^p}=\lambda\sqrt{\dfrac{2}{3}\{\sigma\}^T[P]\{\sigma\}}$.

4) $\lambda=\dfrac{\{\sigma\}^T[P]\{\sigma\}}{\varphi+\dfrac{4}{9}\bar{\sigma}^2\psi'},\quad \varphi=\{\sigma\}^T[P][D][P]\{\sigma\}$.

5) $\{\dot{\sigma}\}=\left([D]-\dfrac{\{n\}\{n\}^T}{\varphi+\dfrac{4}{9}\bar{\sigma}^2\psi'}\right)\{\dot{\varepsilon}\},\quad \{n\}=[D][P]\{\sigma\}$.

4.6 Mises 线性随动强化条件可表示为

$$\frac{1}{2}(s_{ij}-c\varepsilon^p_{ij})(s_{ij}-c\varepsilon^p_{ij})=\frac{1}{3}\sigma_s^2,$$

式中 $s_{ij}$ 是应力偏量，$\varepsilon^p_{ij}$ 是塑性应变分量，$c$ 是常数。试导出塑

性应变增量的表达式

$$d\varepsilon_{ij}^{p}=\frac{3}{2c}\frac{(s_{mn}-c\varepsilon_{mn}^{p})ds_{mn}}{\sigma_s^2}(s_{ij}-c\varepsilon_{ij}^{p}).$$

4.7 Mises 线性随动强化还可用另一种形式表示，记

$$\eta_{ij}=\sigma_{ij}-\alpha_{ij},$$

用 $\alpha'_{ij}$ 及 $\eta'_{ij}$ 分别表示 $\alpha_{ij}$ 及 $\eta_{ij}$ 的偏量，则强化规律可表示为

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\eta'_{ij}\eta'_{ij}=\frac{1}{3}\sigma_s^2,\\ d\alpha'_{ij}=cd\varepsilon_{ij}^{p}.\end{cases}$$

对于平面应力问题，如果还采用题 4.5 的矩阵记号，并设

$$\{\alpha\}=[\alpha_{11},\alpha_{22},\alpha_{12}]^T,\quad \{\eta\}=\{\sigma\}-\{\alpha\}.$$

试证以下关系：

1） $\{\dot{\varepsilon}^p\}=\lambda[P]\{\eta\}$.

2） $\{\dot{\alpha}\}=c\lambda\{\eta\}$.

3） $\{\eta\}^T[P]\{\eta\}=\frac{2}{3}\sigma_s^2$.

4） $\lambda=\frac{\{\eta\}^T[P][D]\{\dot{\varepsilon}\}}{\varphi+\frac{2c}{3}\sigma_s^2}$，$\varphi=\{\eta\}^T[P][D][P]\{\eta\}$.

5） $\{\dot{\sigma}\}=\left([D]-\frac{\{n\}\{n\}^T}{\varphi+\frac{2c}{3}\sigma_s^2}\right)\{\dot{\varepsilon}\}$，$\{n\}=[D][P]\{\eta\}$.

4.8 对Mises 全量理论 $s_{ij}=\frac{2}{3}\frac{\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})}{\bar{\varepsilon}}e_{ij}$，$\sigma_{kk}=\frac{E}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}$，

设曲线 $\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})$已知，泊松比 $\nu\fallingdotseq\frac{1}{2}$.

1）对平面应变问题，已知 $\varepsilon_z=\varepsilon_{xz}=\varepsilon_{yz}=0$. 试用 $\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_{xy}$ 来表示应力分量 $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$ 及 $\sigma_{xy}$.

2）对平面应力问题，已知$\sigma_z=\sigma_{xz}=\sigma_{yz}=0$. 试用 $\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_{xy}$ 表示 $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_{xy}$.

# 第五章　弹塑性力学边值问题的简单实例

## §5.1　弹塑性力学边值问题的提法

前几章已对塑性力学的基本规律作了必要的介绍，这就使我们有可能完整地写出弹塑性力学的基本方程和边界条件（称为边值问题）。由于弹塑性本构关系有增量（率型）和全量两种形式，因此相应的边值问题的提法也有增量理论和全量理论两种。为简单计，下面仅在直角坐标系中来进行讨论。

### 一、弹塑性增量(率型)理论的边值问题

设物体经某一加载历史后已求得在时刻 $t$ 的位移场 $u_i$，应变场 $\varepsilon_{ij}$ 和应力场 $\sigma_{ij}$（由此可知该时刻各点的加载面方程）。如果在此基础上再在物体 $V$ 内给定体力率 $\dot{F}_i$，在边界 $S_T$ 上给定面力率 $\dot{T}_i$ 和在边界 $S_u$ 上给定速度分布 $\dot{\bar{u}}_i$，要求出该时刻相应的速度场 $\dot{u}_i$，应变率场 $\dot{e}_{ij}$ 和应力率场 $\dot{\sigma}_{ij}$。以上各未知量所满足的方程和边界条件为：

(1) 平衡方程

$$\dot{\sigma}_{ij,j} + \dot{F}_i = 0 \quad (V\text{内}) \qquad (1)$$

(2) 几何关系

$$\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) \quad (V\text{内}) \qquad (2)$$

(3) 本构关系

$$\dot{e}_{ij} = \left[M_{ijkl} + \left(\frac{\alpha}{h}\right)\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}\right]\dot{\sigma}_{kl} \quad (\text{当 } h \neq 0), \qquad (3)$$

或　$\dot{\varepsilon}_{ij}=M_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl}+a\lambda\dfrac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}$（$\lambda\geqslant 0$，当$h=0$，即理想塑性时），

（4）

其中 $f=0$ 为应力空间中的屈服面或加载面，而

$$a=\begin{cases}1，\text{弹塑性加载时，}\\0，\text{弹性状态，或卸载，或中性变载时。}\end{cases}$$

此外，还需要给出加载面 $f(\sigma_{ij},\xi_\beta)=0$ 的 形式及其演化规律。这通常是由内变量的演化方程来实现的（见第三章）。因此，内变量的演化方程也应作为本构方程的一部分。

(4) 边界条件

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_{ij}n_j&=\dot{T}_i\ （\text{在边界 }S_T\text{ 上}），\\ \dot{u}_i&=\dot{\bar{u}}_i\ （\text{在边界 }S_u\text{ 上}），\end{aligned}\qquad（5）$$

上式中 $n_i$ 为边界 $S_T$ 上的单位外法向量。

如已求得 $t$ 时刻的 $\dot{u}_i,\dot{\varepsilon}_{ij}$ 和 $\dot{\sigma}_{ij}$，那么 $t+\Delta t$ 时刻的位移场、应变场和应力场就可近似地写为 $u_i+\dot{u}_i\Delta t,\varepsilon_{ij}+\dot{\varepsilon}_{ij}\Delta t$ 和 $\sigma_{ij}+\dot{\sigma}_{ij}\Delta t$。再根据内变量 $\xi_\beta$ 的演化方程，该时刻的内变量应写为 $\xi_\beta+\dot{\xi}_\beta\Delta t$。故可求出新的加载面：

$$f(\sigma_{ij}+\dot{\sigma}_{ij}\Delta t,\xi_\beta+\dot{\xi}_\beta\Delta t)=0。$$

在求解实际问题时，可将加载过程划分为许多步增量之和：

$$F_i=\Sigma\Delta F_i,\quad T_i=\Sigma\Delta T_i,\quad \bar{u}_i=\Sigma\Delta\bar{u}_i。$$

例如，由 $t$ 到 $t+\Delta t$ 的增量为

$$\Delta F_i=\dot{F}_i\Delta t,\quad \Delta T_i=\dot{T}_i\Delta t,\quad \Delta\bar{u}_i=\dot{\bar{u}}_i\Delta t。$$

每作一步增量就要对上述的边值问题进行一次求解。当步长取得过大时，将会引起较大的误差，而步长取得过小时，计算量又将会大大增加。因此，合理选取增量的步长是十分重要的。

## 二、增量理论中解的唯一性

对应于弹塑性增量理论的边值问题，假定有两组解同时满足(1)式、(2) 式和(3)式（或(4) 式）以及相应的边界 条 件(5)

式：第一组解为$(\dot{u}_i^{(1)},\dot{e}_{ij}^{(1)},\dot{\sigma}_{ij}^{(1)})$，第二组解为$(\dot{u}_i^{(2)},\dot{e}_{ij}^{(2)},\dot{\sigma}_{ij}^{(2)})$。这时，$\Delta\dot{\sigma}_{ij}=\dot{\sigma}_{ij}^{(2)}-\dot{\sigma}_{ij}^{(1)}$满足如下的平衡方程和$S_T$上的边界条件：

$$\Delta\dot{\sigma}_{ij,j}=0\ (V\text{内}),\quad \Delta\dot{\sigma}_{ij}n_j=0\ (S_T\text{上})。$$

而$\Delta\dot{u}_i=\dot{u}_i^{(2)}-\dot{u}_i^{(1)}$和$\Delta\dot{e}_{ij}=\dot{e}_{ij}^{(2)}-\dot{e}_{ij}^{(1)}$满足如下的几何关系和$S_u$上的边界条件：

$$\Delta\dot{e}_{ij}=\frac{1}{2}(\Delta\dot{u}_{i,j}+\Delta\dot{u}_{j,i})\quad (V\text{内}),$$

$$\Delta\dot{u}_i=0\quad (S_u\text{上})。$$

对$\Delta\dot{\sigma}_{ij}$和$\Delta\dot{u}_i,\Delta\dot{e}_{ij}$应用虚功原理①，可知有

$$\int_V\Delta\dot{\sigma}_{ij}\Delta\dot{e}_{ij}\mathrm{d}v=\int_V(\dot{\sigma}_{ij}^{(2)}-\dot{\sigma}_{ij}^{(1)})(\dot{e}_{ij}^{(2)}-\dot{e}_{ij}^{(1)})\mathrm{d}v=0\quad (6)$$

下面，我们将利用本构关系(3)式或(4)式来判断上式中被积函数的符号。为此，我们先来证明一个不等式：

$$I=\dot{\sigma}_{ij}^{(1)}\dot{e}_{ij}^{(1)}+\dot{\sigma}_{ij}^{(2)}\dot{e}_{ij}^{(2)}-2\dot{\sigma}_{ij}^{(1)}\dot{e}_{ij}^{(2)}\geqslant 0。\quad (7)$$

如将应变率分为弹性部分和塑性部分，则(7)式左端可由两部分组成。其中的第一部分与应变率的弹性部分相对应：

$$I_e=\dot{\sigma}_{ij}^{(1)}\dot{e}_{ij}^{(1)e}+\dot{\sigma}_{ij}^{(2)}\dot{e}_{ij}^{(2)e}-2\dot{\sigma}_{ij}^{(1)}\dot{e}_{ij}^{(2)e}。$$

由$\dot{e}_{ij}^{(1)e}=M_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl}^{(1)}$，$\dot{e}_{ij}^{(2)e}=M_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl}^{(2)}$可知

$$I_e=M_{ijkl}(\dot{\sigma}_{ij}^{(1)}-\dot{\sigma}_{ij}^{(2)})(\dot{\sigma}_{kl}^{(1)}-\dot{\sigma}_{kl}^{(2)})\geqslant 0。$$

而上式中的等号仅当$\dot{\sigma}_{ij}^{(1)}=\dot{\sigma}_{ij}^{(2)}$时才成立。其中的第二部分与应变率的塑性部分相对应：

$$I_p=\dot{\sigma}_{ij}^{(1)}\dot{e}_{ij}^{(1)p}+\dot{\sigma}_{ij}^{(2)}\dot{e}_{ij}^{(2)p}-2\dot{\sigma}_{ij}^{(1)}\dot{e}_{ij}^{(2)p}。$$

先考虑强化材料（$h>0$），注意到$\dot{\sigma}_{ij}^{(1)}$和$\dot{\sigma}_{ij}^{(2)}$都对应于同一应力$\sigma_{ij}$，故当应力处于加载面上时，所对应的法向$\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}$也相同。因此由(3)式，有

① 有关虚功原理的讨论将在第七章中给出。

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{(1)p}=\frac{\alpha^{(1)}}{h}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{kl}}\dot{\sigma}_{kl}^{(1)},$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{(2)p}=\frac{\alpha^{(2)}}{h}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{kl}}\dot{\sigma}_{kl}^{(2)},$$

故得

$$I_p=\left(\frac{1}{h}\right)\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{kl}}(\alpha^{(1)}\dot{\sigma}_{ij}^{(1)}\dot{\sigma}_{kl}^{(1)}+\alpha^{(2)}\dot{\sigma}_{ij}^{(2)}\dot{\sigma}_{kl}^{(2)}-2\alpha^{(2)}\dot{\sigma}_{ij}^{(1)}\dot{\sigma}_{kl}^{(2)}).$$

这可分为四种情形来讨论：

(1) $\dot{\sigma}_{ij}^{(1)},\dot{\sigma}_{ij}^{(2)}$ 同时都加载，则 $\alpha^{(1)}=\alpha^{(2)}=1$，因此有

$$I_p=\left(\frac{1}{h}\right)\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{kl}}(\dot{\sigma}_{ij}^{(1)}-\dot{\sigma}_{ij}^{(2)})(\dot{\sigma}_{kl}^{(1)}-\dot{\sigma}_{kl}^{(2)})\geqslant 0.$$

等号仅当 $\dot{\sigma}_{ij}^{(1)}=\dot{\sigma}_{ij}^{(2)}$ 时成立。

(2) $\dot{\sigma}_{ij}^{(1)},\dot{\sigma}_{ij}^{(2)}$ 同时都卸载，则 $\alpha^{(1)}=\alpha^{(2)}=0$，因此有 $I_p=0$。

(3) 如 $\dot{\sigma}_{ij}^{(1)}$ 加载，$\dot{\sigma}_{ij}^{(2)}$ 卸载，则

$$\alpha^{(1)}=1,\quad \alpha^{(2)}=0,$$

$$I_p=\left(\frac{1}{h}\right)\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{kl}}\dot{\sigma}_{ij}^{(1)}\dot{\sigma}_{kl}^{(1)}>0.$$

(4) 如$\dot{\sigma}_{ij}^{(1)}$ 卸载，$\dot{\sigma}_{ij}^{(2)}$ 加载，则

$$\alpha^{(1)}=0,\quad \alpha^{(2)}=1.$$

注意到这时有 $\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij}^{(1)}\leqslant 0$ 和 $\frac{\partial f}{\partial\sigma_{kl}}\dot{\sigma}_{kl}^{(2)}>0$，同样可得 $I_p>0$。

再来考虑理想塑性材料 ($h=0$)。由(4)式，有

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{(1)p}=\alpha^{(1)}\lambda^{(1)}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}},\quad \dot{\varepsilon}_{ij}^{(2)p}=\alpha^{(2)}\lambda^{(2)}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}.$$

故得

$$I_p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}(\alpha^{(1)}\lambda^{(1)}\sigma_{ij}^{(1)} + \alpha^{(2)}\lambda^{(2)}\sigma_{ij}^{(2)} - 2\alpha^{(2)}\lambda^{(2)}\sigma_{ij}^{(1)}).$$

这同样可分为四种情形来讨论：

(1) 如 $\sigma_{ij}^{(1)}$ 和 $\sigma_{ij}^{(2)}$ 同时都加载，则

$$\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\sigma_{ij}^{(1)} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\sigma_{ij}^{(2)} = 0.$$

故有 $I_p = 0$.

(2) 如 $\sigma_{ij}^{(1)}$ 和 $\sigma_{ij}^{(2)}$ 同时都卸载，则

$$\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = 0,$$

故有 $I_p = 0$.

(3) 如 $\sigma_{ij}^{(1)}$ 加 载，$\sigma_{ij}^{(2)}$ 卸载，则由 $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\sigma_{ij}^{(1)} = 0$ 和 $\alpha^{(2)} = 0$

也有 $I_p = 0$

(4) 最后，如 $\sigma_{ij}^{(1)}$ 卸载，$\sigma_{ij}^{(2)}$ 加载，则有

$$\alpha^{(1)} = 0, \quad \alpha^{(2)} = 1$$

以及

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\sigma_{ij}^{(1)} \leqslant 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\sigma_{ij}^{(2)} = 0.$$

注意到 $\lambda^{(2)} \geqslant 0$，可知

$$I_p = -2\lambda^{(2)}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\sigma_{ij}^{(1)} \geqslant 0.$$

综合以上的讨论，可见(7)式是成立的。类似地，交换指标后，也应有

$$\text{II} = \sigma_{ij}^{(1)}\dot{e}_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}\dot{e}_{ij}^{(2)} - 2\sigma_{ij}^{(2)}\dot{e}_{ij}^{(1)} \geqslant 0. \qquad (8)$$

而且(7)式和(8)式中等号成立的条件为 $\sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(2)}$.

将(7)式和(8)式相加，便有

$$(\sigma_{ij}^{(2)}-\sigma_{ij}^{(1)})(\dot{\varepsilon}_{ij}^{(2)}-\dot{\varepsilon}_{ij}^{(1)})\geqslant 0. \qquad (9)$$

上式中等号仅当 $\sigma_{ij}^{(1)}=\sigma_{ij}^{(2)}$ 时成立。

于是，由(6)式可知物体内处处都有

$$(\sigma_{ij}^{(2)}-\sigma_{ij}^{(1)})(\dot{\varepsilon}_{ij}^{(2)}-\dot{\varepsilon}_{ij}^{(1)})=0.$$

这说明：

(1) 对于强化或理想弹塑性材料 ($h\geqslant 0$)，由增量理论求得的应力率是唯一的。

(2) 因为对于强化材料 ($h>0$)，由应力率可唯一确定应变率，所以这时由增量理论求得的应变率也是唯一的。但对于理想弹塑性材料，应变率可能不唯一。

(3) 因为每个增量步的应力率都唯一，所以对于给定的加载历史，由弹塑性增量理论求得的应力本身也是唯一的。

## 三、弹塑性全量理论的边值问题

如果物体在加载过程中，每一点的应变（或应力）路径都对应于极值路径，例如对 Mises 等向强化材料，每点都对应于简单加载，则应力与应变之间存在单一的对应关系。在上述情况下，如给定物体 $V$ 内的体力 $F_i$，应力边界 $S_T$ 上的面力 $T_i$ 和位移边界 $S_u$ 上的位移 $\bar{u}_i$，便可设法求出位移场 $u_i$，应变场 $\varepsilon_{ij}$ 和应力场 $\sigma_{ij}$。它们所满足的方程和边界条件可写为

(1) 平衡方程

$$\sigma_{ij,j}+F_i=0 \quad (V\text{内}). \qquad (10)$$

(2) 几何关系

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \quad (V\text{内}). \qquad (11)$$

(3) 本构关系

$$\sigma_{ij}=\frac{\partial W^0}{\partial e_{ij}} \text{ 或 } e_{ij}=\frac{\partial \Omega^0}{\partial \sigma_{ij}}. \tag{12}$$

例如，可具体地写为上一章（69）式的形式：

$$e_{ij}=\frac{3}{2}\frac{\varepsilon(\sigma)}{\sigma}s_{ij},\quad \varepsilon_{kk}=\left(\frac{1-2\nu}{E}\right)\sigma_{kk}. \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{(4) 边界条件}\quad \sigma_{ij}n_j=T_i \quad (S_T\text{上}),\\ &\qquad\qquad\quad u_i=\bar{u}_i \quad (S_u\text{上}).\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

## 四*、全量理论中解的唯一性

对应于全量理论的边值问题，假定有两组解同时满足(10)—(12)式以及边界条件（14）式：第一组解 为$(u_i^{(1)},\varepsilon_{ij}^{(1)},\sigma_{ij}^{(1)})$，它是由第一条极值路径达到的，第二组解 为$(u_i^{(2)},\varepsilon_{ij}^{(2)},\sigma_{ij}^{(2)})$，它是由第二条极值路径达到的。这时，

$$\Delta\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^{(2)}-\sigma_{ij}^{(1)}$$

满足如下的平衡方程和应力边界条件：

$$\Delta\sigma_{ij,j}=0 \quad (V\text{内}),\quad \Delta\sigma_{ij}n_j=0 \quad (S_T\text{上}).$$

而 $\Delta u_i=u_i^{(2)}-u_i^{(1)}$ 和 $\Delta\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}^{(2)}-\varepsilon_{ij}^{(1)}$ 满足几何关系和如下的位移边界条件

$$\Delta\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(\Delta u_{i,j}+\Delta u_{j,i}) \quad (V\text{内}),$$

$$\Delta u_i=0 \quad (S_u\text{上}).$$

对 $\Delta\sigma_{ij}$ 和 $\Delta u_i,\Delta\varepsilon_{ij}$ 应用虚功原理，就有

$$\int_V\Delta\sigma_{ij}\Delta\varepsilon_{ij}\,dv=\int_V(\sigma_{ij}^{(2)}-\sigma_{ij}^{(1)})(\varepsilon_{ij}^{(2)}-\varepsilon_{ij}^{(1)})\,dv=0. \tag{15}$$

在全量理论中，物体内每一点的加载路径都是极值路径，故应变可由应力唯一确定：$\varepsilon_{ij}=\frac{\partial\Omega^0}{\partial\sigma_{ij}}$。现假定材料不仅是稳定

的，而且是在严格意义下稳定的。即假定上一章（26）式中的等号仅当两应力差或两应变差为零时才成立。这时，当应力沿直线路径由 $\sigma_{ij}^{(1)}$ 单调变化到 $\sigma_{ij}^{(2)}$ （$\neq\sigma_{ij}^{(1)}$）时，相应的应变将由 $\varepsilon_{ij}^{(1)}=\dfrac{\partial\Omega^0}{\partial\sigma_{ij}}\Big|_{\sigma_{ij}^{(1)}}$ 变化到 $\varepsilon_{ij}^{(2)}$（不一定等于 $\varepsilon_{ij}^{(2)}=\dfrac{\partial\Omega^0}{\partial\sigma_{ij}}\Big|_{\sigma_{ij}^{(2)}}$）。严格意义下的稳定材料将使不等式

$$\int_{(1)}^{(2)}\varepsilon_{kl}\mathrm{d}\sigma_{kl}>(\sigma_{ij}^{(2)}-\sigma_{ij}^{(1)})\varepsilon_{ij}^{(1)}$$

成立。因此，上一章中的（75）式可写为

$$\Omega^0(\sigma_{ij}^{(2)})-\Omega^0(\sigma_{ij}^{(1)})\geqslant(\sigma_{ij}^{(2)}-\sigma_{ij}^{(1)})\varepsilon_{ij}^{(1)},$$

其中等号仅当 $\sigma_{ij}^{(1)}=\sigma_{ij}^{(2)}$ 时才成立。类似地，有

$$\Omega^0(\sigma_{ij}^{(1)})-\Omega^0(\sigma_{ij}^{(2)})\geqslant(\sigma_{ij}^{(1)}-\sigma_{ij}^{(2)})\varepsilon_{ij}^{(2)}.$$

将以上两不等式相加，可得

$$(\sigma_{ij}^{(2)}-\sigma_{ij}^{(1)})(\varepsilon_{ij}^{(2)}-\varepsilon_{ij}^{(1)})\geqslant0, \tag{16}$$

上式中的等号仅当 $\sigma_{ij}^{(1)}=\sigma_{ij}^{(2)}$ 时才成立。

于是，由（15）式和（16）式可知，在物体内处处都有

$$(\sigma_{ij}^{(2)}-\sigma_{ij}^{(1)})(\varepsilon_{ij}^{(2)}-\varepsilon_{ij}^{(1)})=0.$$

这说明，对于严格意义下的稳定材料来说，由全量理论求得的应力和应变是唯一的。

## 五、间断条件

在塑性力学中，有时会出现速度场或应力场的强间断（如第二章，当梁受极限弯矩作用时，将出现正应力的间断），间断面 $\Sigma$ 可能是塑性区和弹性区（或刚性区）的交界面，也可能是两个塑性区中间的弹性区退化为某一曲面时这两个塑性区的交界面。对于存在速度或应力间断的情形，相应的边值问题除应给出上述的基本方程和边界条件外，还需要补充间断条件。

现将间断面 $\Sigma$ 一侧的量标以“－”号，另一侧的量标以“＋”号，由“－”区指向“＋”区的单位法向量为 $n_i$，而某物理量

$Z$ 在 $\Sigma$ 上的间断值记为$[\![Z]\!] = Z^+ - Z^-$，那么，相应的间断条件一般有以下几类。

(1)* 几何相容性条件和运动相容性条件

在最简单的情况下，可设物理量 $Z$ 在 $\Sigma$ 上是连续的，但其一阶导数有间断。现假想地将 $Z$ 在“－”区的值延拓到“＋”区中，记为 $Z^-$，使 $Z^-$ 在 $\Sigma$ 上连续且有连续的一阶导数。则 $Z - Z^-$ 在“－”区中恒等于零而在 $\Sigma$ 的另一侧（即“＋”区）有一阶单边导数。

显然 $Z - Z^-$ 沿 $\Sigma$ 的切向导数恒为零，故 $\Sigma$ 可看作是函数 $Z - Z^-$ 的等值面。$Z - Z^-$ 在 $\Sigma$ 的“＋”区一侧的梯度（即单边导数）可表示为

$$\frac{\partial(Z - Z^-)}{\partial x_i} = Bn_i,$$

因此有

$$\left[\!\left[\frac{\partial Z}{\partial x_i}\right]\!\right] = Bn_i, \tag{17}$$

其中 $B = \left[\!\left[\frac{\partial Z}{\partial x_k}\right]\!\right] n_k$。上式通常称为一阶几何相容性条件。

其次来考虑 $Z$ 在 $\Sigma$ 上有强间断的情形。设在时刻 $t$ 的间断面为 $\Sigma(t)$，在 $\Sigma(t)$ 上 $P$ 点的两侧，$Z$ 值分别为 $Z^+$ 和 $Z^-$。在时刻 $t + \Delta t$ 的间断面为 $\Sigma(t + \Delta t)$。由 $P$ 点作 $\Sigma(t)$ 的法线与 $\Sigma(t + \Delta t)$ 相交于 $P_1$ 点，在 $P_1$ 点两侧的 $Z$ 值分别为 $Z_1^+$ 和 $Z_1^-$。于是可有

$$\frac{\delta[\![Z]\!]}{\delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(Z_1^+ - Z_1^-) - (Z^+ - Z^-)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(Z_1^+ - Z^+) - (Z_1^- - Z^-)}{\Delta t}$$

$$= \frac{\delta Z^+}{\delta t} - \frac{\delta Z^-}{\delta t} = \left[\!\left[\frac{\delta Z}{\delta t}\right]\!\right].$$

因为 $\Sigma(t)$ 是运动的，在 $\Sigma$ 两侧物理量的自变量 $x_i$ 应看作为时间的函数，故由

$$\frac{\delta Z^+}{\delta t}=\frac{\partial Z^+}{\partial t}+\left(\frac{\partial Z^+}{\partial x_i}\right)Gn_i,\quad \frac{\delta Z^-}{\delta t}=\frac{\partial Z^-}{\partial t}+\left(\frac{\partial Z^-}{\partial x_i}\right)Gn_i$$

和（17）式，可得

$$\left[\!\left[\frac{\partial Z}{\partial t}\right]\!\right]=-BG+\frac{\delta[\![Z]\!]}{\delta t},\tag{18}$$

其中 $G$ 为间断面的法向速度。上式通常称为一阶运动相容性条件。

（2）动力学间断条件

由质量守恒、动量守恒等物理规律所导出的间断条件通常称为动力学间断条件。

由质量守恒定律可知，从界面 $\Sigma$ 的“－”区一侧流出的物质应等于从界面 $\Sigma$ 的“＋”区一侧流入的物质。当假定物体内的密度 $\rho$ 处处连续时，上述条件就相当于要求在间断面 $\Sigma$ 两侧的法向速度连续，即有

$$[\![v_n]\!]=[\![v_i]\!]n_i=0,\tag{19}$$

而切向的两个速度分量可能会是间断的。

此外，如果仅考虑静力学问题，则动量守恒定律就相当于静力学中的平衡条件。这时，在间断面 $\Sigma$ 的两侧，面力应该连续，即

$$[\![\sigma_{ij}]\!]n_j=0.\tag{20}$$

而沿间断面切向的两个正应力和一个剪应力分量可能会是间断的。（19）式和（20）式在塑性力学中经常会用到，故应对该式的物理意义有确切的理解。

（3*）在动力学间断条件中，有时还希望给出当应力连续时关于应力率的间断条件，现来讨论这个问题。

因为应力是连续的，故由（17）式，有

$$[\![\sigma_{ij,k}]\!]=B_{ij}n_k,\tag{21}$$

式中 $B_{ij}=[\![\sigma_{ij,l}]\!]n_l$。

当体力连续时，由平衡方程可得$[\![\sigma_{ij,j}]\!]=0$。这说明（21）式中的$B_{ij}$满足条件

$$B_{ij}n_j=0. \tag{22}$$

因此，由（18）式得：

$$[\![\sigma_{ij}]\!]=-B_{ij}G, \tag{23}$$

其中$G$为间断面$\Sigma$的法向速度，$B_{ij}$满足（22）式。

当应力本身也存在间断时，应力率的间断条件将会稍微复杂一些，这里将不再作介绍。此外，关于位移场、应变场或应力场的高阶导数的间断条件以及考虑到材料本身性质后的间断条件等问题已经超出本书范围，故只能略去这方面的讨论了①。

## §5.2 薄圆管的拉扭联合变形

当建立了塑性力学的基本方程和边界条件后，我们就可能对塑性力学问题进行求解。本章的以后几节将介绍几个最简单的弹塑性问题的求解过程。

本节讨论薄圆管的拉扭问题。这时，管内各点的应变状态和应力状态都是相同的。故本节并不是来求解塑性力学的边值问题。由于在薄管的拉扭实验中，应力加载路径和应变加载路径都比较容易得到控制，这就使我们可通过不同加载路径的实验来验证本构关系，并由此说明全量理论的适用范围，这就是本节将要讨论的内容。

为简单计，假定材料的体积是不可压缩的$\left(\nu=\frac{1}{2}\right)$，故有：

$$\mu=\frac{E}{2(1+\nu)}=\frac{E}{3},\qquad \varepsilon_{kk}=0,\qquad \varepsilon_{ij}=e_{ij}.$$

① 有兴趣的读者可参见《力学学报》，1983年第5期，500—508。

引入无量纲变量：

$$\sigma=\frac{\sigma_z}{\sigma_s},\quad \tau=\frac{\sigma_{\theta z}}{\tau_s},\quad \varepsilon=\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_s},\quad \gamma=\frac{\gamma_{\theta z}}{\gamma_s},\tag{24}$$

其中$\varepsilon_s=\frac{\sigma_s}{E}$，$\gamma_s=\frac{\tau_s}{\mu}$。对于 Mises 屈服条件，由$\sigma_s=\sqrt{3}\tau_s$，可知上式中

$$\varepsilon_s=\frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_s,\quad E=\frac{\sigma_s}{\varepsilon_s}=3\frac{\tau_s}{\gamma_s}.$$

下面将分别对理想塑性材料和强化材料进行讨论。

## 一、Mises 理想塑性材料

在弹性阶段，无量纲化后的胡克定律为

$$\sigma=\varepsilon,\quad \tau=\gamma.\tag{25}$$

当进入塑性阶段后，屈服条件

$$J_2=\frac{1}{3}\sigma_z^2+\sigma_{\theta z}^2=\tau_s^2$$

可写为

$$\sigma^2+\tau^2=1.\tag{26}$$

### (1) 增量理论 (Prandtl-Reuss 方程)

注意到$s_z=\frac{2}{3}\sigma_z$ 和 $\varepsilon_{\theta z}=\frac{1}{2}\gamma_{\theta z}$，第四章(49)式的分量形式可写为

$$\begin{cases}\mathrm{d}\varepsilon_z=\dfrac{1}{E}\,\mathrm{d}\sigma_z+\dfrac{2}{3}\sigma_z\mathrm{d}\lambda,\\ \dfrac{1}{2}\mathrm{d}\gamma_{\theta z}=\dfrac{1}{2\mu}\mathrm{d}\sigma_{\theta z}+\sigma_{\theta z}\mathrm{d}\lambda.\end{cases}$$

无量纲化后，得：

$$\mathrm{d}\varepsilon=\mathrm{d}\sigma+\sigma\mathrm{d}\lambda',\quad \mathrm{d}\gamma=\mathrm{d}\tau+\tau\mathrm{d}\lambda'\tag{27}$$

其中 $d\lambda' = 2\mu d\lambda = \frac{2}{3}Ed\lambda$。

当材料屈服时（$d\lambda' > 0$），可从上式中消去 $d\lambda'$ 得

$$\frac{d\varepsilon - d\sigma}{d\gamma - d\tau} = \frac{\sigma}{\tau}。 \tag{28}$$

再利用由（26）式所得的$\sigma d\sigma + \tau d\tau = 0$和$\tau = \sqrt{1-\sigma^2}$，可消去（28）式中的 $d\tau$ 和 $\tau$ 而有

$$\frac{d\varepsilon - d\sigma}{d\gamma + \frac{\sigma d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}} = \frac{\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}},$$

或移项后得

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \sqrt{1-\sigma^2}\,(\sqrt{1-\sigma^2} - \sigma\gamma'(\varepsilon)) \tag{29}$$

其中$\gamma' = \frac{d\gamma}{d\varepsilon}$。类似地，如在（28）式中消去 $d\sigma$ 和 $\sigma$，可得

$$\frac{d\tau}{d\gamma} = \sqrt{1-\tau^2}(\sqrt{1-\tau^2} - \tau\varepsilon'(\gamma)) \tag{30}$$

其中$\varepsilon' = \frac{d\varepsilon}{d\gamma}$。可见当已知应变路径 $\gamma = \gamma(\varepsilon)$或$\varepsilon = \varepsilon(\gamma)$后，就可积分上式而得到 $\sigma$-$\varepsilon$ 和 $\tau$-$\gamma$ 的规律。①

① 如作因变量的变数替换：

$$\sigma = \sin v,\ \tau = \cos v,\ \left(0 \leqslant v \leqslant \frac{\pi}{2}\right),$$

和

$$w = \operatorname{tg}\frac{v}{2} = \frac{1-\cos v}{\sin v} = \frac{1-\tau}{\sigma},\quad (0 \leqslant w \leqslant 1),$$

则（26）式自动满足，而（29）式化为：

$$\frac{dw}{de} = -\frac{1}{2}w^2 - w\gamma'(e) + \frac{1}{2}.$$

这是一个 Riccatti 方程.对某些特殊的应变路径 $\gamma = \gamma(e)$，上式的解是容易求得的.

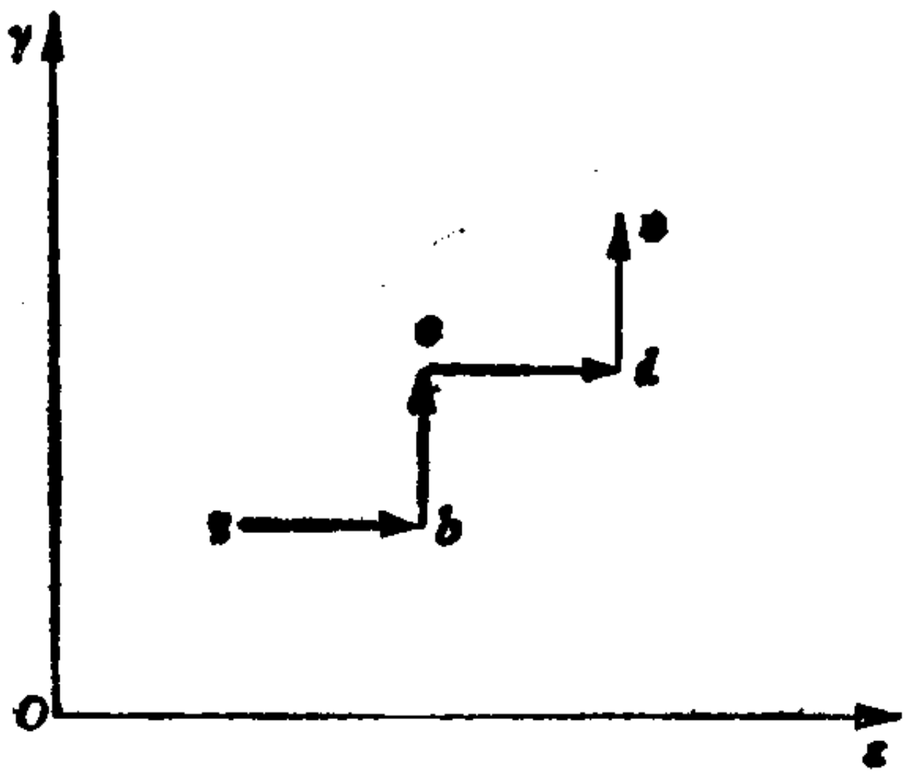



图 1

例 考虑图1所示的阶梯应变路径.假定在某时刻已知$\sigma=\sigma_0$, $\tau=\tau_0,\varepsilon=\varepsilon_0,\gamma=\gamma_0$, 若保持 $\gamma=\gamma_0$ (如 $a\to b$ 段), 由(29) 式中 $\gamma'(\varepsilon)=0$可积分得

$$\varepsilon-\varepsilon_0=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sigma}{1+\sigma_0}\cdot\frac{1-\sigma_0}{1-\sigma}\right), \tag{31}$$

若保持 $\varepsilon=\varepsilon_0$ (如$b\to c$段)时, 由 (30) 式中$\varepsilon'(\gamma)=0$可积分得

$$\gamma-\gamma_0=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\tau}{1+\tau_0}\cdot\frac{1-\tau_0}{1-\tau}\right). \tag{32}$$

通过对上述路径所作的实验, 可以对增量理论和全量理论的差别予以检验.

(2) 全量理论

注意到 $\varepsilon_{ij}=e_{ij}$, 第四章 (70) 式的分量形式可写为

$$\begin{cases}\dfrac{2}{3}\sigma_z=\dfrac{2}{3}\dfrac{\sigma(\bar{\varepsilon})}{\bar{\varepsilon}}\varepsilon_z,\\ \sigma_{\theta z}=\dfrac{1}{3}\dfrac{\sigma(\bar{\varepsilon})}{\bar{\varepsilon}}\gamma_{\theta z}.\end{cases}$$

由于理想塑性材料在屈服时有 $\sigma=\sigma_s$, 而 $\varepsilon_x=\varepsilon_y=-\dfrac{1}{2}\varepsilon_z$ 时的

等效应变可写为

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_z^2 + \frac{1}{3}\gamma_{\theta z}^2},$$

故上式的无量纲形式为

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \gamma^2}}, \quad \tau = \frac{\gamma}{\sqrt{\varepsilon^2 + \gamma^2}}. \tag{33}$$

为了对增量理论和全量理论进行比较，现来具体计算图 2 中三条不同的应变路径到达同一个终点$C$ （即$\varepsilon = 1, \gamma = 1$)时，它们各自所对应的应力值。

在弹性阶段，由（25）式和（26）式可知应变空间中的弹性区为$\varepsilon^2 + \gamma^2 \leqslant 1$，它由图中的阴影区域表示。

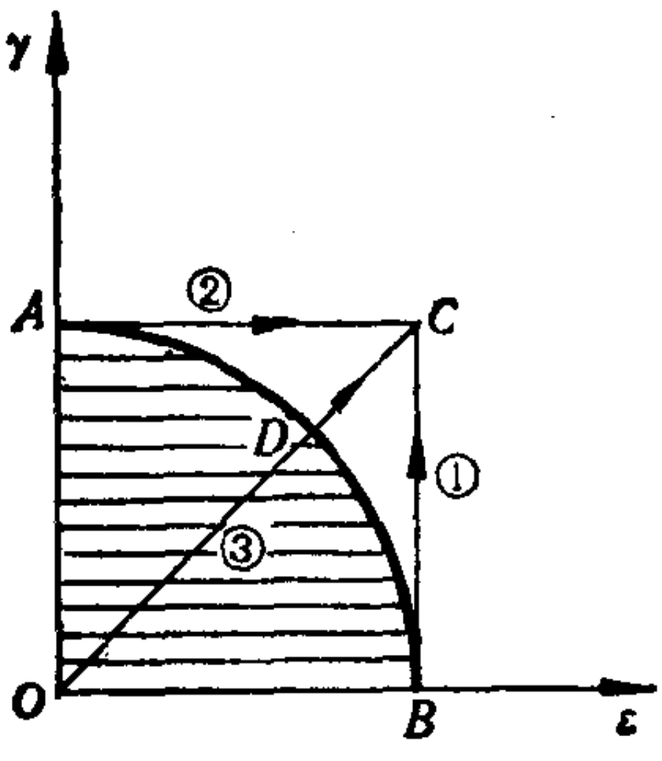



图 2

首先采用增量理论求解。

路径①为$OBC$。$B$点对应于$\tau_0 = 0, \gamma_0 = 0$，故由(32）式可知在$BC$段，有

$$\gamma = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\tau}{1-\tau}\right),$$

或

$$\frac{1+\tau}{1-\tau} = e^{2\gamma},$$

解得

$$\tau = \frac{e^{2\gamma} - 1}{e^{2\gamma} + 1} = \text{th}\,\gamma.$$

$C$点对应于$\gamma = 1$，故有

$$\tau = \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} = 0.76, \quad \sigma = \sqrt{1 - \tau^2} \doteq 0.65.$$

路径②为$OAC$。用类似的方法得$C$点的应力为

$$\sigma = 0.76, \quad \tau = 0.65.$$

路径③为$ODC$，其中$D$点为弹性区的边界，满足$\sigma^2 + \tau^2 = 1$和$\sigma = \tau$，故$D$点的应力值为

$$\sigma_D = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707, \quad \tau_D = 0.707.$$

在$DC$段，由$d\varepsilon = d\gamma$，可将（27）式写为

$$\frac{d(\sigma - \tau)}{(\sigma - \tau)} = -d\lambda'.$$

积分后有

$$\ln(\sigma - \tau)\Big|_D^C = \lambda'_D - \lambda'_C,$$

或

$$(\sigma - \tau)|_C = (\sigma - \tau)_D e^{(\lambda'_D - \lambda'_C)}.$$

故由$\sigma_D = \tau_D$可得 $\sigma_C = \tau_C$，可见$C$点与$D$点的应力值相同：

$$\sigma_C = 0.707, \quad \tau_C = 0.707.$$

若采用全量理论来进行求解，应力只与应变有关，将$\varepsilon = \gamma = 1$代入（33）式可得

$$\sigma = 0.707, \quad \tau = 0.707.$$

这与增量理论中的路径③的结果一样。

以上分析说明，当加载路径不同时，虽然最终的应变一样，对应的应力却不一样。只有在比例加载的条件下，增量理论才与全量理论有相同的结果。

## 二、Mises 等向强化材料

### （1）增量理论

由第四章的（61）式和（63）式以及不可压条件，本构方程可写为

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{ds_{ij}}{2\mu} + \frac{3}{2\psi'}\frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} s_{ij},$$

其中 $\bar{\sigma}=\sqrt{\sigma_z^2+3\sigma_{\theta z}^2}$，而 $\psi'$ 为材料的硬化参数。注意到

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}}=\frac{\bar{\sigma}\mathrm{d}\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}^2}=\frac{\mathrm{d}(\sigma_z^2+3\sigma_{\theta z}^2)}{2(\sigma_z^2+3\sigma_{\theta z}^2)}=\frac{\sigma_z\mathrm{d}\sigma_z+3\sigma_{\theta z}\mathrm{d}\sigma_{\theta z}}{\sigma_z^2+3\sigma_{\theta z}^2}$$

和 $s_z=\frac{2}{3}\sigma_z$，$E=3\mu$，上式的分量形式可写为

$$\mathrm{d}\varepsilon_z=\frac{\mathrm{d}\sigma_z}{E}+\frac{1}{\psi'}\left(\frac{\sigma_z\mathrm{d}\sigma_z+3\sigma_{\theta z}\mathrm{d}\sigma_{\theta z}}{\sigma_z^2+3\sigma_{\theta z}^2}\right)\sigma_z,$$

$$\mathrm{d}\gamma_{\theta z}=\frac{\mathrm{d}\sigma_{\theta z}}{\mu}+\frac{3}{\psi'}\left(\frac{\sigma_z\mathrm{d}\sigma_z+3\sigma_{\theta z}\mathrm{d}\sigma_{\theta z}}{\sigma_z^2+3\sigma_{\theta z}^2}\right)\sigma_{\theta z}.$$

无量纲化后，得

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}\varepsilon&=\mathrm{d}\sigma+\frac{E}{\psi'}\left(\frac{\sigma\mathrm{d}\sigma+\tau\mathrm{d}\tau}{\sigma^2+\tau^2}\right)\sigma,\\ \mathrm{d}\gamma&=\mathrm{d}\tau+\frac{E}{\psi'}\left(\frac{\sigma\mathrm{d}\sigma+\tau\mathrm{d}\tau}{\sigma^2+\tau^2}\right)\tau.\end{aligned}\right\}\tag{34}$$

（2）全量理论

将（13）式无量纲化后，可得其分量形式为

$$\varepsilon=\frac{\sqrt{\varepsilon^2+\gamma^2}}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}\sigma,\quad \gamma=\frac{\sqrt{\varepsilon^2+\gamma^2}}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}\tau\tag{35}$$

上式中并没有 $\sigma^2+\tau^2\leqslant 1$ 的限制。

为了对以上两种理论进行比较，现来考虑一个先拉后扭的应变加载路径。假设先拉伸到 $\varepsilon=\varepsilon_0>1$（即已进入塑性阶段），然后在保持 $\varepsilon$ 不变的条件下进行扭转，并计算扭转开始时的剪切模量值：$\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}\gamma|_{\gamma=0}$。

采用增量理论时，由初条件 $\tau_0=0,\gamma_0=0,\sigma=\sigma_0,\varepsilon=\varepsilon_0>1$ 以及扭转时 $\varepsilon=\mathrm{const}$ 的要求，可将初始时刻的增量本构关系（34）式的第一式写为

$$0 = \mathrm{d}\sigma + \frac{E}{\psi'}\left(\frac{\sigma_0 \mathrm{d}\sigma}{\sigma_0^2}\right)\sigma_0 = \left(1 + \frac{E}{\psi'}\right)\mathrm{d}\sigma,$$

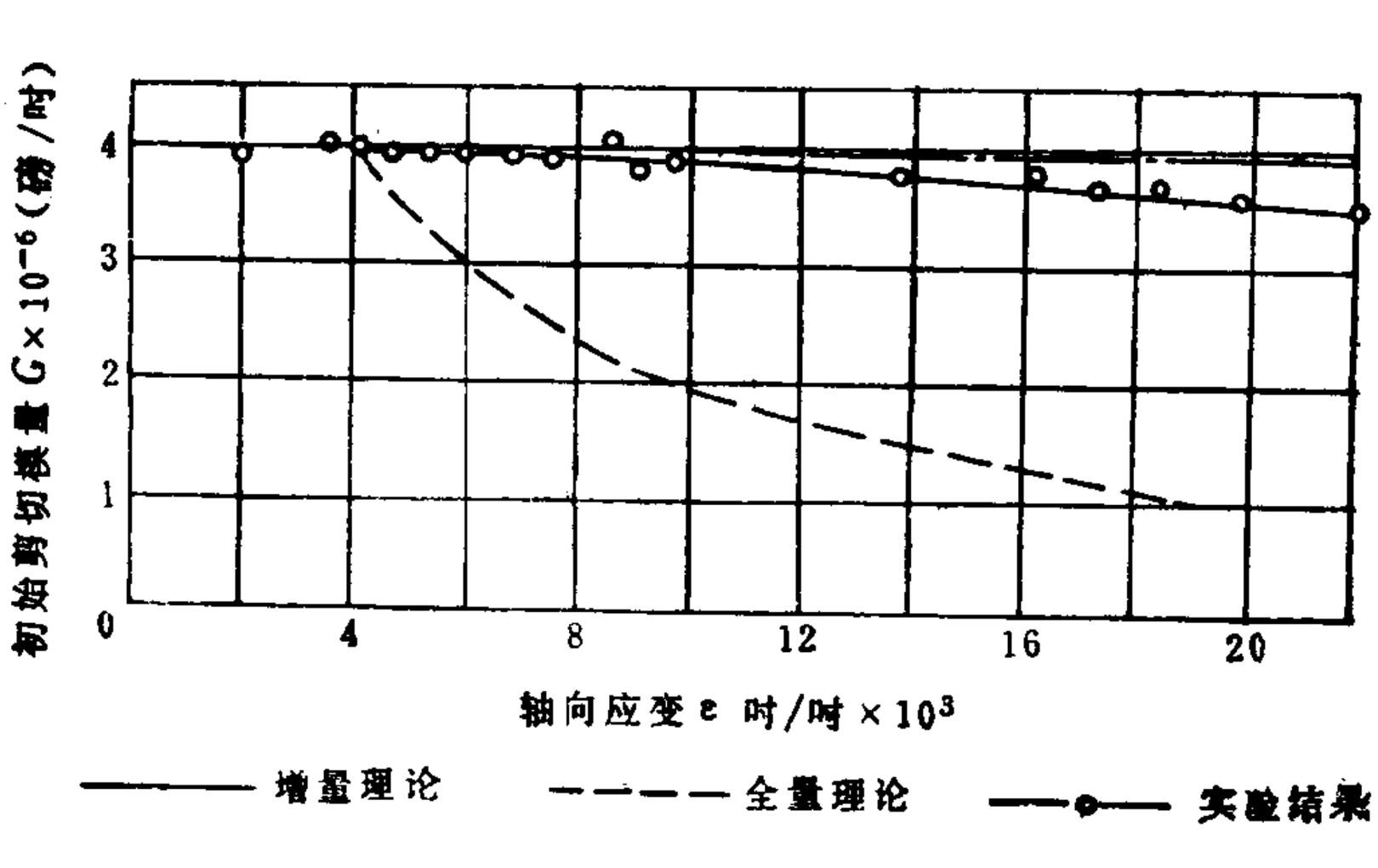
故有 $\mathrm{d}\sigma = 0$。再代入（34）式的第二式，可知在初始时刻有

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\gamma} = 1.$$

采用全量理论时，由（35）式得$\frac{\tau}{\gamma} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$。刚开始扭转时有 $\tau = \mathrm{d}\tau$，$\gamma = \mathrm{d}\gamma$。故得

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\gamma} = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}.$$

因为在简单拉伸曲线中，$\left(\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\right)$将随 $\varepsilon_0$ 的增大而减小，所以对于全量理论，$\left.\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\gamma}\right|_{\gamma=0}$也应随 $\varepsilon_0$ 的增大而减小。




1磅 = 0.453592千克，1吋 = 0.0254米

图 3

从图 3 所示的 M.Feigen① 的实验结果中可以看出，增量理

① M.Feigen, Proc.2nd U.S.Nat.Cong.Appl.Mech., (1954) pp.469—476.

论更符合实际。当然，由于等向强化模型也是近似的，因此增量理论与实验结果的差异也随着 $\varepsilon_0$ 的增大而增大。

## §5.3 厚壁圆柱筒的弹塑性分析

受内压的厚壁容器是工程中常见的结构物。我们这里只讲圆柱形筒，例如炮筒、压力气缸和高压罐等。下面可以看到，若仅在弹性范围内进行分析，则材料的潜力还未能得到充分的发挥，而在塑性范围内进行分析时，筒体的承压能力就可能会有相当的提高。

### 一、理想弹塑性厚壁圆筒的轴对称变形

现考虑一个内径为 $a$，外径为 $b$ 的长圆柱筒在均匀内压 $p$ 的作用下的弹塑性变形问题。由于问题是轴对称的，故可采用柱坐标 $(r,\theta,z)$。又因为筒体很长，所以上述问题还可简化为平面应变问题：$\varepsilon_z=\varepsilon_0=\text{const}$，$\varepsilon_{rz}=0$。注意到 应力、应变和位移都只是半径 $r$ 的函数，基本方程可写为

$$\text{平衡方程}\qquad \frac{d\sigma_r}{dr}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=0, \tag{36}$$

$$\text{几何关系}\qquad \varepsilon_r=\frac{du}{dr},\quad \varepsilon_\theta=\frac{u}{r}, \tag{37}$$

上式中 $u$ 为径向位移。由此得协调方程

$$\frac{d\varepsilon_\theta}{dr}+\frac{\varepsilon_\theta-\varepsilon_r}{r}=0. \tag{38}$$

此外还需补充本构关系和相应的边界条件：

$$\sigma_r=\begin{cases}-p & (r=a),\\ 0 & (r=b),\end{cases} \tag{39}$$

$$T = 2\pi\int_a^b \sigma_z r\,dr。 \tag{40}$$

（40）式为筒体两端的圣维南应力边界条件，其中$T$为总的轴向力。

现在分几种情形来加以讨论。

（1） 弹性解

应力应变关系可写为

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_r &= \frac{1}{E}[\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)],\\
\varepsilon_\theta &= \frac{1}{E}[\sigma_\theta - \nu(\sigma_z + \sigma_r)],\\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)] = \varepsilon_0。
\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

将上式代入（38）式并利用平衡方程，可得应力协调方程：

$$\frac{d(\sigma_r + \sigma_\theta)}{dr} - \nu\frac{d\sigma_z}{dr} = 0。$$

再由（41）式的最后一式：

$$E\frac{d\varepsilon_z}{dr} = \frac{d\sigma_z}{dr} - \nu\frac{d(\sigma_r + \sigma_\theta)}{dr} = 0$$

以及条件$\nu^2 \fallingdotseq 1$，就有

$$\frac{d(\sigma_r + \sigma_\theta)}{dr} = 0, \quad \frac{d\sigma_z}{dr} = 0,$$

或

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 2A = \text{const}, \quad \sigma_z = \text{const}。$$

如引进应力函数$\Phi$：

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dr}, \quad \sigma_\theta = \frac{d^2\Phi}{dr^2},$$

则平衡方程（36）式自动满足。故上式化为

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}=2A,$$

解得

$$\Phi=\frac{A}{2}r^2-B\ln r+C,$$

$$\sigma_r=A-\frac{B}{r^2},\quad \sigma_\theta=A+\frac{B}{r^2}.$$

常数$A$和$B$由边界条件（39）式确定，故有

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=\bar{p}\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right)\qquad(\leqslant 0),\\ \sigma_\theta&=\bar{p}\left(1+\frac{b^2}{r^2}\right)\qquad(>0),\end{aligned}\right\}\tag{42}$$

其中 $\bar{p}=\left(\frac{a^2}{b^2-a^2}\right)p$.

此外，由

$$\sigma_z=\nu(\sigma_r+\sigma_\theta)+E\varepsilon_0=2\bar{p}\nu+E\varepsilon_0=\text{const}\tag{43}$$

和（40）式，可得

$$\sigma_z=\frac{T}{\pi(b^2-a^2)},\quad \varepsilon_0=\frac{T-2\nu\pi a^2p}{\pi E(b^2-a^2)}.\tag{44}$$

再由（37）式，得

$$u=\left(\frac{1+\nu}{E}\right)\bar{p}\left[(1-2\nu)r+\frac{b^2}{r}\right]-\nu\varepsilon_0 r.\tag{45}$$

以上计算表明，在$r=b$处，$\sigma_r$将取最大值：$\sigma_r|_b=0$，$\sigma_\theta$将取最小值：$\sigma_\theta|_b=2\bar{p}$. 故当$0\leqslant\sigma_z\leqslant 2\bar{p}$时，$\sigma_z$为中间主应力. 这相当于条件

$$0\leqslant\frac{T}{\pi(b^2-a^2)}\leqslant\frac{2a^2p}{b^2-a^2}\tag{46}$$

或

$$0 \leqslant T \leqslant 2\pi a^2 p. \tag{47}$$

也就是说，当轴向力$T$和内压$p$满足（47）式时（例如，对于自由端$T=0$或对于封闭端$T=\pi a^2 p$），$\sigma_z$将是中间主应力。如采用Tresca屈服条件，就只需考虑最大主应力$\sigma_\theta$与最小主应力$\sigma_r$之差。其次，由(42)式可知$\sigma_\theta$与$\sigma_r$的差为$2\bar{p}\,\frac{b^2}{r^2}$，它在$r=a$处取最大值，故当

$$\sigma_\theta - \sigma_r = 2\bar{p}\,\frac{b^2}{a^2} = \sigma_s$$

或

$$p = p_e = \frac{\sigma_s}{2}\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right) \tag{48}$$

时，根据Tresca屈服条件，筒体内径处将首先进入塑性状态。读者可试用Mises条件求$p_e$。

$p_e$称为弹性极限压力。如在弹性范围内进行设计，对给定的$a$和$\sigma_s$，要增加筒体所能承受的内压，就必须增加壁厚(即$b$值)，但$p_e$的值不可能超过$\frac{\sigma_s}{2}$。但如果允许部分材料产生塑性变形，那么，由于筒内的有利残余应力分布，就可能提高材料实际使用的弹性范围。

(2) 弹塑性解

当内压逐渐增大到$p>p_e$，塑性区将逐渐从内径$r=a$处向外扩张。设弹性区和塑性区的交界处在$r=c$，则可分别对塑性区$a \leqslant r \leqslant c$和弹性区$c \leqslant r \leqslant b$进行计算。

(a) 塑性区$a \leqslant r \leqslant c$的解。

现暂时假定$\sigma_z$仍为中间主应力（这一假定的合理性在以后再予以验证)。采用Tresca屈服条件$\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_s$时，可将平衡

方程（36）式写为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_r}{\mathrm{d}r}=\frac{\sigma_s}{r}.$$

积分之，并利用应力边界条件$\sigma_r|_{r=a}=-p$，求得

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=-p+\sigma_s\ln\frac{r}{a},\\ \sigma_\theta&=-p+\sigma_s\left(1+\ln\frac{r}{a}\right).\end{aligned}\right\}\tag{49}$$

由于我们在求$\sigma_r,\sigma_\theta$时只用到了屈服条件和平衡方程，并未用到几何关系，故对应力$\sigma_r,\sigma_\theta$而言，问题是静定的。

(b) 弹性区$c\leqslant r\leqslant b$的解。

如将内层塑性区对外层弹性区的压应力$\sigma_r|_{r=c}$看作是作用于内径为$c$外径为$b$的弹性圆筒上的内压力，则仍可利用(42)式和（45）式来得到相应的解。但这时需要把以上公式中的$a$改为$c$，内压$p$改为

$$\sigma_r|_{r=c}=\bar{p}_e=\frac{\sigma_s}{2}\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right),$$

因为在$r=c$处，材料刚达到屈服，所以对外层弹性圆筒来说，（48）式的$p_e$应改为$\bar{p}_e$。因此，（42）式和（45）式中的$\bar{p}$需改为

$$\bar{p}_c=\left(\frac{c^2}{b^2-c^2}\right)\bar{p}_e=\left(\frac{c^2}{2b^2}\right)\sigma_s.$$

于是有

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=\frac{\sigma_s c^2}{2b^2}\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right),\\ \sigma_\theta&=\frac{\sigma_s c^2}{2b^2}\left(1+\frac{b^2}{r^2}\right),\end{aligned}\right\}\tag{50}$$

和

$$u = \frac{(1+\nu)\sigma_s}{2E}\left(\frac{c^2}{b^2}\right)\left[(1-2\nu)r + \frac{b^2}{r}\right] - \nu\varepsilon_0 r. \tag{51}$$

根据弹塑性区交界处正应力 $\sigma_r$ 的连续性要求，(49)式和(50)式中的 $\sigma_r$ 在 $r=c$ 处应相等，由此求得 $c$ 和 $p$ 之间所满足的关系式：

$$\frac{p}{\sigma_s} = \ln\frac{c}{a} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right). \tag{52}$$

当 $c=b$ 时，塑性区扩展到整个圆筒，内压 $p$ 已不能再增加。在上式中令 $c=b$，就得到塑性极限压力 $p_s$：

$$p_s = \sigma_s \ln\frac{b}{a}. \tag{53}$$

可见 $p_s$ 随 $b$ 的增加而增加。

以上结果是在 $\sigma_z$ 为塑性区的中间主应力的假定下得到的。现来考察这一假定成立的条件。

如果在塑性区中 $\sigma_z$ 为中间主应力，则屈服条件可写为 $\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_s$。由流动法则可得 $d\varepsilon_z^p = 0$。积分 $d\varepsilon_z^p$ 并注意到初始时刻的 $\varepsilon_z^p$ 为零，就有 $\varepsilon_z^p \equiv 0$。因此，无论在弹性区还是在塑性区，轴向塑性应变 $\varepsilon_z^p$ 总是恒等于零的。故由

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_z = \varepsilon_z^e = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)],$$

可知表达式

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) + E\varepsilon_0 \tag{54}$$

在弹性区和塑性区都成立。

为了给出由（54）式表示的 $\sigma_z$ 为中间主应力所需的条件，现来计算 $\varepsilon_0$ 值。将（54）式代入端条件，有

$$T = 2\pi\int_a^b \sigma_z r\,\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi\left\{\int_a^c\left[-2\nu p + \nu\sigma_s\left(1+2\ln\frac{r}{a}\right)\right]r\,\mathrm{d}r\right.$$

$$\left.+\int_c^b \nu\sigma_s\frac{c^2}{b^2}r\,\mathrm{d}r+\int_a^b E\varepsilon_0 r\,\mathrm{d}r\right\}$$

$$=2\pi a^2\nu p + E\varepsilon_0\pi(b^2-a^2),$$

即

$$\varepsilon_0=\frac{T-2\nu\pi a^2 p}{\pi E(b^2-a^2)}. \tag{55}$$

这与弹性解中的表达式（44）式相同。

现假定 $\nu=\frac{1}{2}$，则不难证明当 $T$ 和 $p$ 之间满足（47）式时，$\sigma_z$ 确实是塑性区内的中间主应力。为此可将 $\sigma_z$ 写为

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_r+\sigma_\theta)+\frac{T-\pi a^2 p}{\pi(b^2-a^2)} \tag{56}$$

上式中的 $p$ 应满足

$$p\leqslant p_s=\sigma_s\ln\frac{b}{a}=\frac{\sigma_s}{2}\ln\left(\frac{b^2}{a^2}\right)$$

$$=\frac{\sigma_s}{2}\ln\left[1+\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)\right]<\frac{\sigma_s}{2}\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right),$$

或

$$\frac{a^2 p}{b^2-a^2}<\frac{\sigma_s}{2}.$$

这里已用到不等式 $\ln(1+X)<X$（当 $X>0$）。故当（47）式成立时，有

$$-\frac{\sigma_s}{2}<-\left(\frac{a^2p}{b^2-a^2}\right)\leqslant\frac{T-\pi a^2p}{\pi(b^2-a^2)}\leqslant\frac{a^2p}{b^2-a^2}<\frac{\sigma_s}{2}.$$

于是，在塑性区内由 $\sigma_\theta-\sigma_r=\sigma_s$ 和（56）式，可知

$$\sigma_\theta-\sigma_z=\frac{1}{2}(\sigma_\theta-\sigma_r)-\frac{T-\pi a^2p}{\pi(b^2-a^2)}=\frac{\sigma_s}{2}-\frac{T-\pi a^2p}{\pi(b^2-a^2)}>0,$$

$$\sigma_z-\sigma_r=\frac{1}{2}(\sigma_\theta-\sigma_r)+\frac{T-\pi a^2p}{\pi(b^2-a^2)}=\frac{\sigma_s}{2}+\frac{T-\pi a^2p}{\pi(b^2-a^2)}>0.$$

这说明 $\sigma_z$ 为中间主应力。

图 4 给出了由（49）式和（50）式以及（52）式所求得的应力分布，其中已取 $\varepsilon_0=0$ $(T=\pi a^2p)$，$b=2a$。

还需说明，以上的结果是在内压 $p$ 逐渐增加的前提下得到的。这时，塑性区内任何一点的应力都是由弹性状态进入到塑性

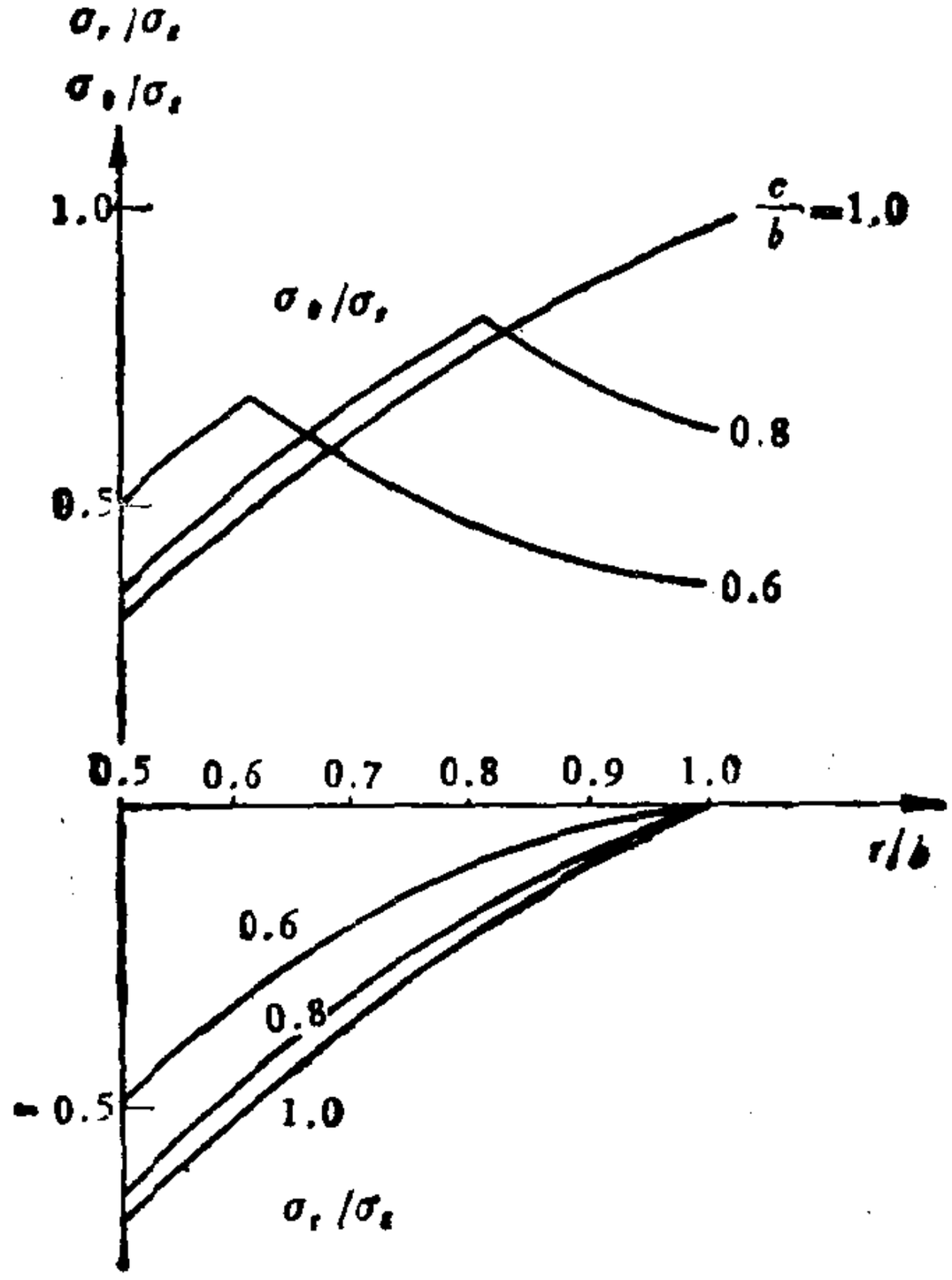



图 4

状态并始终停留在 Tresca 屈服面 $\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_s$ 上的。故在内压没有卸载的条件下，以上的求解过程是合理的。

(3) 位移的计算

因为无论是弹性区还是塑性区，其体积都是以弹性规律变化的，故在计算位移时可采用下式：

$$\varepsilon_{kk} = \frac{du}{dr} + \frac{u}{r} + \varepsilon_0 = \left(\frac{1-2\nu}{E}\right)(\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z)$$

$$= \left(\frac{1-2\nu}{E}\right)[(1+\nu)(\sigma_r + \sigma_\theta) + E\varepsilon_0],$$

或

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ru) = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E}(\sigma_r + \sigma_\theta) - 2\nu\varepsilon_0. \qquad (57)$$

在塑性区 $a \leqslant r \leqslant c$ 内，由 (49) 式和 (52) 式得

$$\sigma_r + \sigma_\theta = -2p + \sigma_s\left(1 + 2\ln\frac{r}{a}\right)$$

$$= \sigma_s\left(\frac{c^2}{b^2} + 2\ln\frac{r}{c}\right),$$

故积分 (57) 式后，有

$$u = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E}\sigma_s\left[\frac{r}{2}\frac{c^2}{b^2} + r\ln\frac{r}{c} - \frac{r}{2}\right] - \nu\varepsilon_0 r + \frac{c_1}{r}, \qquad (58)$$

上式中 $c_1$ 为积分常数，它需由 $r=c$ 处的位移连续性条件来确定。这是由于内层塑性区的变形受到外层弹性区的约束，故是一个约束塑性变形的问题。

在弹性区 $c \leqslant r \leqslant b$ 内的位移 $u$ 已在 (51) 式中给出。故由 $r=c$ 处的位移连续性要求，可得

$$c_1 = \frac{(1-\nu^2)\sigma_s c^2}{E}.$$

特别地，当 $\nu=\frac{1}{2}$ 时，弹性区和塑性区有相同的位移表达式：

$$u=\frac{3}{4}\frac{\sigma_s}{E}\frac{c^2}{r}-\frac{1}{2}\varepsilon_0 r. \tag{59}$$

例如，对于 $\varepsilon_0=0$，$c=b=2a$，$\sigma_s=10^{-3}\times E$ 的情形，有

$$\left.\frac{u}{a}\right|_{r=a}=3\times10^{-3}.$$

这说明在内压刚刚达到塑性极限压力 $p_s$ 时，圆筒 的变形还是很小的。

（4）卸载后的残余应力

若内压加载到 $p^*(p_e<p^*<p_s)$，轴向力加载到 $T^*$，然后再以弹性规律卸载到零，则可在原有应力分布 $\sigma_r^*,\sigma_\theta^*$ 的基础上叠加一个反向弹性解：

$$\left.\begin{aligned}
\Delta\sigma_r&=-\left(\frac{a^2p^*}{b^2-a^2}\right)\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right),\\
\Delta\sigma_\theta&=-\left(\frac{a^2p^*}{b^2-a^2}\right)\left(1+\frac{b^2}{r^2}\right)=\Delta\sigma_r-\frac{2a^2b^2p^*}{(b^2-a^2)r^2},\\
\Delta\sigma_z&=-\frac{2\nu a^2p^*}{b^2-a^2}-E\varepsilon_0^*=-\frac{T^*}{\pi(b^2-a^2)}.
\end{aligned}\right\} \tag{60}$$

再由（49）式和（50）式，可得残余应力分布

$$\sigma_r^0=\sigma_r^*+\Delta\sigma_r=\begin{cases}-p^*+\sigma_s\ln\dfrac{r}{a}+\Delta\sigma_r & (a\leqslant r\leqslant c),\\ \dfrac{\sigma_s c^2}{2b^2}\left(1-\dfrac{b^2}{r^2}\right)+\Delta\sigma_r & (c\leqslant r\leqslant b),\end{cases}$$

$$\sigma_\theta^0=\sigma_\theta^*+\Delta\sigma_\theta=\begin{cases}\sigma_r^0+\sigma_s-\dfrac{2a^2b^2p^*}{(b^2-a^2)r^2} & (a\leqslant r\leqslant c),\\ \sigma_r^0+\dfrac{\sigma_s c^2}{r^2}-\dfrac{2a^2b^2p^*}{(b^2-a^2)r^2} & (c\leqslant r\leqslant b).\end{cases} \tag{61}$$

因为无论是在弹性区还是在塑性区，(54) 式总是成立的，所以由

$$\sigma_z^* = \nu(\sigma_r^* + \sigma_\theta^*) + E\varepsilon_\theta^*,$$

可得

$$\sigma_z^0 = \sigma_z^* + \Delta\sigma_z = \nu(\sigma_r^0 + \sigma_\theta^0),$$

故当$\nu = \frac{1}{2}$时，$\sigma_z^0$仍然是中间主应力。

现来讨论在卸载过程中是否可能出现反向屈服的问题。由 (61) 式可知

$$\sigma_\theta^0 - \sigma_r^0 = \begin{cases} \sigma_s - \dfrac{2a^2b^2p^*}{(b^2-a^2)r^2} < \sigma_s & (a \leqslant r \leqslant c), \\ \left(\sigma_s c^2 - \dfrac{2a^2b^2p^*}{b^2-a^2}\right)\dfrac{1}{r^2} < \sigma_s \dfrac{(c^2-a^2)}{r^2} & \\ \leqslant \sigma_s\left(1 - \dfrac{a^2}{c^2}\right) & (c \leqslant r \leqslant b), \end{cases} \tag{62}$$

上式的第二式已用到条件

$$p^* > p_e = \frac{\sigma_s}{2}\left(\frac{b^2-a^2}{b^2}\right).$$

(62) 式说明：(a) 残余应力状态是不可能再次正向屈服的。(b) $\sigma_\theta^0 - \sigma_r^0$在$r=c$处是连续的。(c) $r$越大，第二式的绝对值越小。因此，反向屈服只可能在$r=a$处最先开始。所需的条件为

$$(\sigma_\theta^0 - \sigma_r^0)|_{r=a} = -\sigma_s,$$

或

$$p^* = \sigma_s\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) = 2p_e. \tag{63}$$

于是，对一个反复经受内压作用的圆筒来说，当始终满足条件$p = p^* \leqslant 2p_e$时，就不可能产生反向屈服。筒体处于“安定状态”。

另一方面，内压值又不能大于塑性极限压力 $p_s$。如令

$$p_s = 2p_e$$

或

$$\sigma_s \ln\frac{b}{a} = \sigma_s\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right),$$

便可解得 $b/a\approx 2.22$。可见当 $b/a<2.22$，即 $2p_e>p_s$ 时，只要内压不超过 $p_s$ 值，圆筒是不可能产生反向 屈服的；而当 $b/a>2.22$，即 $2p_e<p_s$ 时，对于一个反复承受内压值为 $p^*(2p_e<p^*<p_s)$ 的圆筒来说，其内壁就会交替地出现正向和反向的塑性变形。这将使筒体很快遭到破坏。这说明，对反复受内压作用的圆筒来说，单凭增加壁厚使 $\frac{b}{a}>2.22$ 是没有用的。

（5）几何变形对承载能力的影响

当筒壁很厚时，内表面附近的径向位移可能会很大，以致不能忽略几何尺寸改变对承载能力的影响。设变形后圆筒的内外径分别为 $a'$ 和 $b'$，相应的塑性极限压力为

$$p_s' = \sigma_s \ln\left(\frac{b'}{a'}\right).$$

当 $\nu=\frac{1}{2}$，$\varepsilon_0=0$ 时，变形前后体积不变的条件可写为

$$(b')^2-(a')^2=b^2-a^2.$$

故由 $a'>a$ 得

$$p_s' = \frac{\sigma_s}{2}\ln\left(\frac{b'}{a'}\right)^2 = \frac{\sigma_s}{2}\ln\left[1+\frac{(b')^2-(a')^2}{(a')^2}\right]$$

$$=\frac{\sigma_s}{2}\ln\left[1+\frac{b^2-a^2}{(a')^2}\right]<\frac{\sigma_s}{2}\ln\left(1+\frac{b^2-a^2}{a^2}\right)=p_s.$$

这说明，当 $a$ 增大时 $p_s'$ 是减小的，因此这个极限压力是不稳定的。

## 二、由强化材料构成的厚壁圆筒的轴对称变形

现来进行对幂次强化材料厚壁圆筒的小变形分析。若假定 $\nu=\frac{1}{2}$，$\varepsilon_z=\varepsilon_0=0$，则当内压 $p$ 单调增加时，可根据第四章的简单加载定理而采用全量理论计算。

基本方程除平衡方程

$$r\frac{\mathrm{d}\sigma_r}{\mathrm{d}r}=\sigma_\theta-\sigma_r,$$

几何关系

$$\varepsilon_r=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r},\quad \varepsilon_\theta=\frac{u}{r},$$

和不可压条件

$$e_{kk}=\varepsilon_r+\varepsilon_\theta+\varepsilon_z=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}+\frac{u}{r}=0 \tag{64}$$

外，还有本构方程

$$s_{ij}=\frac{2}{3}\frac{\sigma}{\varepsilon}e_{ij},$$

上式中的 $\sigma$ 和 $\varepsilon$ 分别为等效应力和等效应变。如采用等效剪应力 $T$ 和等效剪应变 $\Gamma$ 时（见第三章的（22）—(23)式），上式还可写为

$$s_{ij}=\frac{2T}{\Gamma}\varepsilon_{ij}. \tag{65}$$

对于幂次强化材料，可有

$$T=T_0\Gamma^m \quad (T_0>0,\ 0<m\leqslant 1), \tag{66}$$

现令 $\tau_{max}$ 和 $\gamma_{max}$ 分别为最大剪应力和最大工程剪应变，由第三章的基本不等式（19）式

$$1\leqslant\frac{T}{\tau_{max}}\leqslant\frac{2}{\sqrt{3}},\quad 1\leqslant\frac{\Gamma}{\gamma_{max}}\leqslant\frac{2}{\sqrt{3}}$$

或

$$1\leqslant\left(\frac{\Gamma}{\gamma_{max}}\right)^m\leqslant\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^m\qquad(0<m\leqslant 1),$$

可得

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)T_0\leqslant\frac{\tau_{max}}{(\gamma_{max})^m}\leqslant\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^m T_0.$$

再由假定 $\varepsilon_z=0$，可知 $\sigma_z$ 为中间主应力，即应力点始终不在加载面的角点上。因此，可近似地采用 Tresca 等向强化模型而将第三章的（73）式 $\tau_{max}=\psi_\tau(\varepsilon_e)$ 写为

$$\tau_{max}=\tau_0(\gamma_{max})^m\qquad(\tau_0>0,\ 0<m\leqslant 1)。\qquad(67)$$

当然，我们也可认为材料是服从 Tresca 幂次强化的。这时，只要应力状态始终保持在某个线性加载面上，加载路径就是一个极值路径，故可采用全量理论。在这种情况下，（67）式就不再是近似的了。

积分（64）式，就有

$$u=\frac{A}{r}.$$

在内压作用下的径向位移应取正值，故上式中的积分常数 $A>0$。于是有

$$\gamma_{max}=\varepsilon_\theta-\varepsilon_r=\frac{2A}{r^2}.$$

代入平衡方程后得

$$r\frac{d\sigma_r}{dr}=\sigma_\theta-\sigma_r=2\tau_{max}=2\tau_0\left(\frac{2A}{r^2}\right)^m.$$

其解为

$$\sigma_r = -\frac{\tau_0}{m}(2A)^m\left(\frac{1}{r}\right)^{2m} + C,$$

式中的积分常数$C$可由边界条件

$$\sigma_r\Big|_{r=a} = -p,\quad \sigma_r\Big|_{r=b} = 0$$

来确定，故得

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{\tau_0}{m}(2A)^m\left[\left(\frac{1}{a}\right)^{2m} - \left(\frac{1}{b}\right)^{2m}\right], \\ \sigma_r &= \frac{-p}{b^{-2m} - a^{-2m}}(b^{-2m} - r^{-2m}). \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

最后，由条件$\varepsilon_z = 0$和(65)式可知

$$s_z = \sigma_z - \frac{1}{3}(\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z) = 0.$$

因此在本问题中，$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta)$是中间主应力.应力保持在$\sigma_\theta - \sigma_r = 2\tau_0\left(\frac{2A}{r^2}\right)^m$的加载面上.

## §5.4 理想弹塑性柱体的自由扭转

### 一、基本方程

现来考虑一理想弹塑性等截面柱体，在其两端作用有逐渐增加的扭矩$M$. 如取直角坐标的$z$轴平行于柱体的母线，则可类似于弹性力学中的半逆解法而假定

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_{xy} = 0. \tag{69}$$

这时，相应的基本方程有：

平衡方程

$$\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z} = 0,\quad \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z} = 0, \tag{70}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y}=0. \tag{71}$$

几何关系

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}). \tag{72}$$

屈服条件 (Mises)

$$J_2=\sigma_{xz}^2+\sigma_{yz}^2=\tau_s^2.$$

本构关系 (Prandtl-Reuss)

$$\begin{cases} \mathrm{d}\,e_{ij}=\dfrac{1}{2\mu}\mathrm{d}s_{ij}+\alpha \mathrm{d}\lambda s_{ij}, \\ \mathrm{d}\,\varepsilon_{kk}=\left(\dfrac{1-2\nu}{E}\right)\mathrm{d}\,\sigma_{kk}, \end{cases} \tag{73}$$

其中

$$\alpha=\begin{cases} 1, & \text{当 } J_2=\tau_s^2 \quad \text{且 } \mathrm{d}J_2=0, \\ 0, & \text{当 } J_2<\tau_s^2 \quad \text{或 } J_2=\tau_s^2,\ \mathrm{d}J_2<0. \end{cases}$$

现对以上假定（69）式和基本方程作几点讨论。

（1）由（70）式可知 $\sigma_{xz},\sigma_{yz}$ 仅是 $x$ 和 $y$ 的函数。如引进应力函数 $\Phi(x,y)$：

$$\sigma_{xz}=\frac{\partial \Phi}{\partial y},\quad \sigma_{yz}=-\frac{\partial \Phi}{\partial x},$$

则（71）式可自动满足。

（2）由（69）式和（73）式可知 $\mathrm{d}\sigma_{kk}=0$，$\mathrm{d}\varepsilon_{kk}=0$，对加载过程进行积分并利用 $\varepsilon_{kk}$ 初值为零的条件，得 $\varepsilon_{kk}=0$，即 $e_{ij}=\varepsilon_{ij}$。

（3）由 $s_x=s_y=s_z=0$，可对（73）式的第一式作积分。再利用零初值条件而得

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}=0,\quad \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

即有

$$u=u(y,z),\ v=v(x,z),\ w=w(x,y).$$

(4) 同理，由 $\sigma_{xy}=s_{xy}=0$，对（73）式的第一式作积分后，有

$$\varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=0,$$

即

$$\frac{\partial u(y,z)}{\partial y}=-\frac{\partial v(x,z)}{\partial x}.$$

上式左端与 $x$ 无关，右端与 $y$ 无关，故仅是 $z$ 的函数。令其各等于 $-f_1(z)$ 并积分之，得

$$u=-f_1(z)y+g_1(z),\ v=f_1(z)x+h_1(z).$$

(5) 由于 $\sigma_{xz},\sigma_{yz}$ 与 $z$ 无关，故由（73）式可认为 $\mathrm{d}\varepsilon_{xz}$，$\mathrm{d}\varepsilon_{yz}$ 也与 $z$ 无关。对加载过程进行积分并由零初值条件可知 $2\varepsilon_{xz}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}$ 和 $2\varepsilon_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}$ 是与 $z$ 无关的。因此，$f_1,g_1,h_1$ 只可能是 $z$ 的线性函数，即

$$\begin{cases}u=-ayz-\zeta_1 y+\psi_1 z+\delta_1,\\ v=axz+\zeta_1 x+\xi_1 z+\delta_2,\end{cases}$$

其中 $\zeta_1,\xi_1,\psi_1$ 和 $\delta_1,\delta_2$ 都是常数。注意到

$$\begin{cases}\bar{u}=-\zeta_1 y+\psi_1 z+\delta_1,\\ \bar{v}=\zeta_1 x+\xi_1 z+\delta_2,\\ \bar{w}=-\psi_1 x-\xi_1 y,\end{cases}$$

对应于刚体位移。于是，当扣除这部分位移后，就得到如下的位移场：

$$\begin{cases}u=-ayz,\\ v=axz,\\ w=a\varphi(x,y),\end{cases}\tag{74}$$

其中 $\alpha$ 为沿 $z$ 轴单位长度的扭转角，$\varphi$ 为翘曲函数。

与（74）式相应的应变场为

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0, \\ \gamma_{xz} = \alpha\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} - y\right), \\ \gamma_{yz} = \alpha\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + x\right). \end{cases} \tag{75}$$

上式中消去 $\varphi(x,y)$，得协调条件

$$\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = -2\alpha. \tag{76}$$

对于以上问题，还应给出边界条件和端部的圣维南条件。因为边界上是自由的，所以由剪应力为零的条件得

$$\{\sigma_{xz}\cos(n,x) + \sigma_{yz}\cos(n,y)\}\big|_{C_i} = 0, \tag{77}$$

其中$C_i(i=0,1,2,\cdots)$为多连通区 的边界。$\cos(n,x)$，$\cos(n,y)$ 为边界法向的方向余弦。特别地，对单连通截面，边界只有一个 $C_0$。利用 $\sigma_{xz} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}$，$\sigma_{yz} = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}$，（77）式也可 通 过应力函数 $\Phi$表示为

$$\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right\}\Big|_{C_i} = 0$$

或

$$\Phi\big|_{C_i} = k_i, \tag{78}$$

这里 $s$ 为边界的弧长，积分常数 $k_i$中只有一个可 任 意 选取，其它常数需由位移单值性条件来确定。特别地，对单连通区域的截面，$k_0$ 可取为零，即有

$$\Phi\big|_{C_0} = 0.$$

圣维南端条件可通过应力函数 $\Phi$表示为

$$M=\iint_A(x\sigma_{yz}-y\sigma_{xz})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_A\Phi\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\sum k_iA_i, \qquad (79)$$

其中$A_i$是多连通截面内边界$C_i$所包围的面积。

## 二、弹性解

当材料处于弹性状态时，本构关系为

$$\sigma_{xz}=\mu\gamma_{xz}, \qquad \sigma_{yz}=\mu\gamma_{yz}. \qquad (80)$$

如从（74）式出发，即以位移为基本未知量，则由(75)式和(80)式可将平衡方程（71）式写为

$$\nabla^2\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0. \qquad (81)$$

说明这时的翘曲函数$\varphi$是一个调和函数。相应的边界条件给出了$\varphi$在边界上的法向导数，因此这是一个关于$\varphi$的 Neumann 问题。

如从（71）式出发，即以应力为基本未知量，则利用应力函数和（80）式后，可将协调条件（76）式写为

$$\nabla^2\Phi=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=-2\alpha\mu, \qquad (82)$$

而边界条件为（78）式。当然，$\Phi$与$\varphi$并不是独立的，它们之间的关系可通过（80）式表示出来。

柱体中合剪应力的大小可写为

$$\tau=\sqrt{\sigma_{xz}^2+\sigma_{yz}^2}=\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2}=|\mathrm{grad}\Phi|, \qquad (83)$$

或有

$$\tau^2=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2.$$

容易验证，$\tau^2$是一个次调和函数，即

$$\nabla^2\tau^2 = 2\left[\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)^2\right] \geqslant 0.$$

因为任何一个二次连续可微的次调和函数必在其边界上达到其最大值，所以最大剪应力将出现在截面的边界上。再注意到在本问题中 Tresca 屈服条件与 Mises 屈服条件相同，可知屈服一定是从边界开始的。

## 三、理想塑性解

随着扭矩的逐渐增加，从截面的外边界开始将有部分区域进入塑性状态并逐渐向内部扩展（对于单连通区域，可以证明在加载过程中塑性区内各点都不会发生卸载）。相应的屈服条件可写为：

$$|\tau_{max}| = (J_2)^{1/2} = |\mathrm{grad}\Phi| = \tau_s. \tag{84}$$

即应力函数$\Phi$的梯度为常数值 $\tau_s$。

如令合剪应力 $\tau_s$ 与 $x$ 轴的夹角为 $\theta$，则有

$$\sigma_{xz} = \tau_s\cos\theta, \quad \sigma_{yz} = \tau_s\sin\theta. \tag{85}$$

而平衡方程（71）式变为

$$\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} - \cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial y} = 0. \tag{86}$$

假定已知某一曲线 $L$ 上的 $\theta$ 值，则沿此曲线有

$$\mathrm{d}x\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mathrm{d}y\frac{\partial\theta}{\partial y} = \mathrm{d}\theta. \tag{87}$$

为了得到 $L$ 上的$\frac{\partial\theta}{\partial x}, \frac{\partial\theta}{\partial y}$，可联立（86）式和（87）式来进行求解。

但当此联立方程的系数行列式等于零，即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\mathrm{ctg}\,\theta \tag{88}$$

时，将不可能唯一求得$\frac{\partial\theta}{\partial x}$和$\frac{\partial\theta}{\partial y}$的值。(88) 式称为关于微分方程

(86)式的特征线微分方程。这时，沿特征线就必然有 $d\theta=0$ 或 $\theta=\text{const}$，这是 $\theta$ 函数在特征线上需满足的关系。

积分 (88) 式并利用特征线上的关系，可得特征线方程

$$y+\operatorname{ctg}\theta\, x=V(\theta)。\tag{89}$$

与 (85) 式比较得知它是一条与合剪应力相垂直的直线。上式右端的积分常数 $V(\theta)$通常可由边界点的坐标 $(x_0,y_0)$ 以及边界线切向与 $x$ 轴的夹角 $\theta_0$ 来确定，因为合剪应力在边界应该沿切线方向。

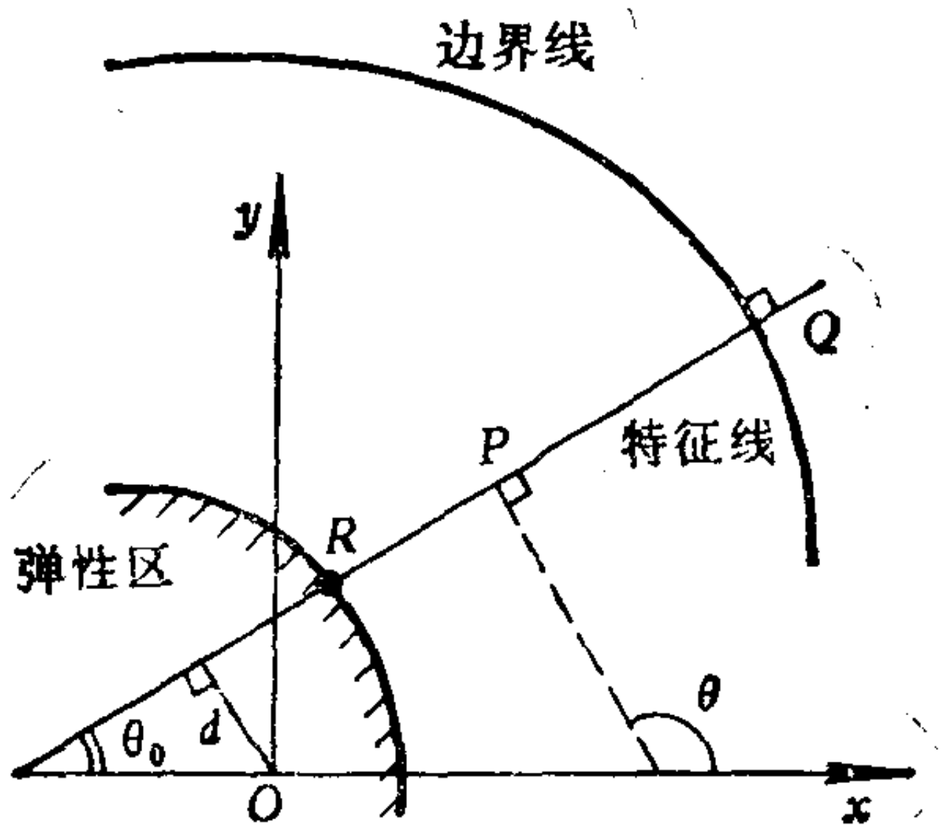



图 5

下面来计算塑性区内的翘曲函数。因为合剪应力方向在加载过程中始终垂直于特征线而保持不变，所以由 Prandtl-Reuss 关系 (73) 式可得

$$\frac{\sigma_{xz}}{\sigma_{yz}}=\frac{\gamma_{xz}}{\gamma_{yz}}。\tag{90}$$

利用 (75) 式和 (85) 式，上式也可写为

$$\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\cos\theta x+\sin\theta y, \tag{91}$$

其意义可由图 5 来加以说明。现设坐标原点到特征线 $RQ$ 的距离为$d$，而特征线 $RQ$ 与 $x$ 轴的夹角为 $\theta_0=\theta-\frac{\pi}{2}$，则由

$$\cos\theta=-\sin\theta_0,\quad \sin\theta=\cos\theta_0,$$

(91) 式可改为

$$\cos\theta_0\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\sin\theta_0\frac{\partial\varphi}{\partial y}=d.$$

再以 $l$ 表示特征线上任一点 $P$ 到特征线上另一参考点 $R$ 的距离，则上式左端还可写为沿 $RP$ 的方向导数$\frac{\partial\varphi}{\partial l}$。可见翘曲函数沿特征线的变化率为常数 $d$，故有

$$\varphi(P)=\varphi(R)+dl.$$

最后，我们来看一下截面边界线上有外凸角点的情形。由于在角点两侧的特征线一般是要相交的，因此将存在一条通过角点的应力间断线$\Sigma$，它对应于弹性区趋于零时，两个相遇塑性区的交界线。如以间断线的切向 $t$ 和法向 $n$ 构成一个新的局部标架 $(t,n)$，则沿间断线的切向剪应力 $\sigma_{tz}$和法向剪应力 $\sigma_{nz}$ 可写为

$$\sigma_{tz}=\tau_s\cos(\theta-\omega),$$

$$\sigma_{nz}=\tau_s\sin(\theta-\omega),$$

其中 $\omega$ 为间断线切向与 $x$ 轴的夹角。

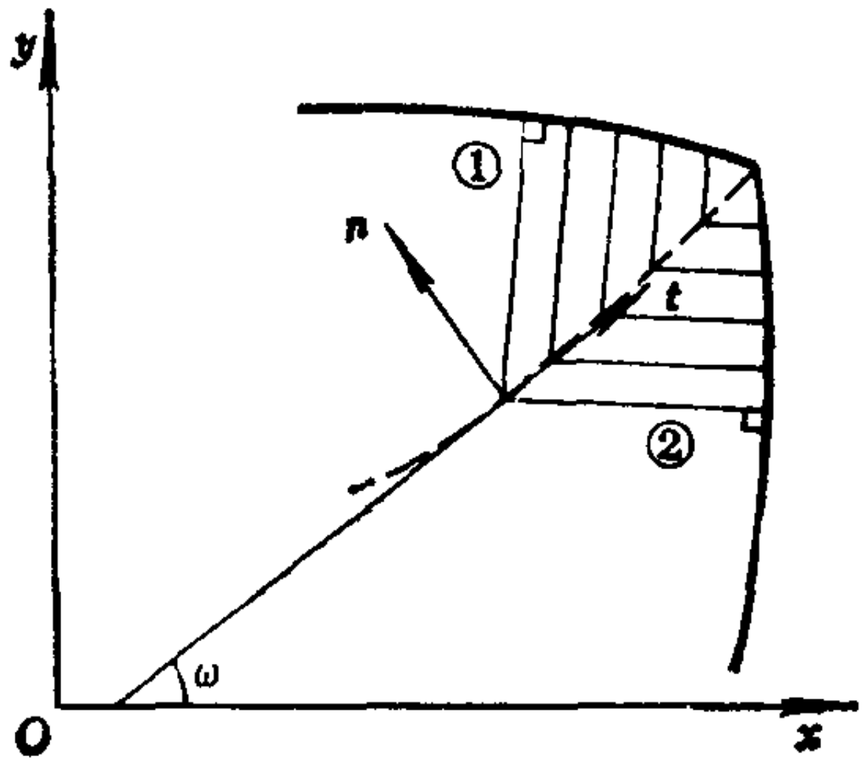



图 6

在应力间断线两侧的 $\theta$ 值是不同的（否则应力就没有间断），可分别记为 $\theta_1$ 和 $\theta_2$。根据间断条件 (20)式，间断线两侧的法向剪应力应该连续，即有

$$[\![\sigma_{nz}]\!] \approx \tau_s(\sin(\theta_1-\omega)-\sin(\theta_2-\omega))=0.$$

故得

$$\theta_2-\omega=\pi-(\theta_1-\omega)$$

或

$$\omega=\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)-\frac{\pi}{2}.$$

于是，间断线方程为

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\Sigma}=\operatorname{tg}\omega=-\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2).$$

可见间断线是其两侧相交特征线的角平分线。

## 四、扭转问题中的物理比拟

在弹性力学中，我们知道如取 $2\alpha\mu=p/N$，(82) 式就与张力为$N$受均布侧压 $p$ 的弹性膜的挠度方程相同。故可采用薄膜比拟方法来得到应力函数 $\Phi(x,y)$。当柱体截面全部进入塑性状态(对应于极限扭矩)时，应力函数满足(84)式。这表明 $\Phi$的最大斜率将保持不变。为此，Nadai 提出了沙堆比拟方法，即在与柱体截面有相同形状的平板上堆上干沙，由于干沙的静摩擦角为常数，因此沙堆将形成一个最大斜率为常数的表面。沙堆表面的高度将与 $\Phi$ 成正比，其高度在外边界为零，相当于

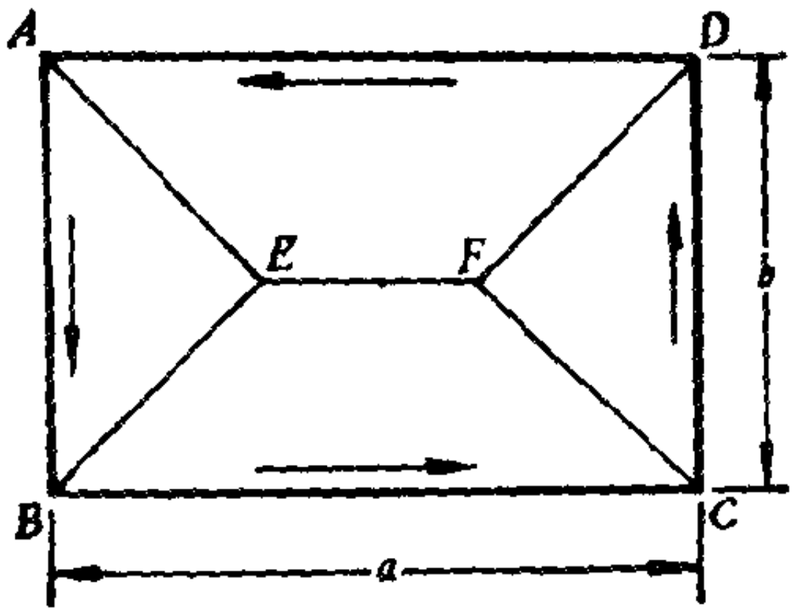


图 7

$$\Phi|_{c_0}=0.$$

由

$$M=2\iint_A \Phi\,dxdy,$$

可知扭矩$M$与沙堆的体积成正比。

因为以上讨论的是整个截面都处于塑性状态的情形，所以相

应的$M$也就是塑性极限扭矩$M_s$。$M_s$与斜率为1的沙堆体积$V$之间的关系为：$M_s=2\tau_s V$。例如，对于矩形截面的柱体，当边长$a$不小于边长$b$时，由沙堆的体积可求得（图7）

$$M_s=\frac{1}{6}b^2(3a-b)\tau_s。$$

关于柱体截面为多连通域的情形，可请读者自己来加以考虑。

如果扭矩$M$介于弹性极限扭矩和塑性极限扭矩之间，则柱体截面上一部分是弹性区，而另一部分是塑性区。在弹性区内，$\Phi$的曲面与薄膜受侧压的曲面相似。在塑性区内，$\Phi$的最大斜率为常数，故可设想一种**薄膜-玻璃盖板比拟**。即在薄膜的上方安放一个由沙堆比拟实验所作成的等倾玻璃盖板。随着侧压力$p$的增加，薄膜将逐渐与盖板相贴合，贴合的区域就是塑性区。由此可以定出弹性区与塑性区的交界线。

对于一般形状的截面，随着扭矩的增加，弹塑性区交界线的变化规律是十分复杂的。这也是求解柱体弹塑性扭转问题的困难所在。为此，也曾提出过一些近似计算弹塑性区交界线的数值方法①。

例　圆柱体的弹塑性扭转问题

设圆截面的半径为$a$，由于对称性，弹塑性区交界线将是一个圆，设其半径为$r=\rho_0$。

在弹性区$0\leqslant r\leqslant\rho_0$内，(82)式为

$$\nabla^2\Phi=\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}\right)=-2a\mu,$$

积分并利用$r=0$处剪应力为零的条件，可得

$$\Phi=-\frac{1}{2}a\mu r^2+\bar{c},$$

其中积分常数$\bar{c}$要由$r=\rho_0$处的连接条件来定。

① 附带指出，柱体的弹塑性扭转在数学上对应于变分不等式问题。这里不可能详细介绍这方面的内容，有兴趣的读者可参考法国G.Duvaut，J.L.Lions著的《力学和物理学中的变分不等方程》一书（中译本，王耀东译，科学出版社，1987年）。

在塑性区 $\rho_0 \leqslant r \leqslant a$ 内，(84) 式为

$$\frac{d\Phi}{dr} = -\tau_s .$$

积分并注意到 $\Phi|_{r=a} = 0$，便有

$$\Phi = \tau_s (a - r) .$$

由 $r = \rho_0$ 处 $\Phi$ 和 $\frac{d\Phi}{dr}$ 的连续性条件，可得

$$\bar{c} = \frac{1}{2} a\mu\rho_0^2 + \tau_s (a - \rho_0)$$

和

$$\rho_0 = \frac{\tau_s}{a\mu} . \tag{92}$$

故有

$$\Phi = \begin{cases} -\frac{1}{2} a\mu (r^2 - \rho_0^2) + \tau_s (a - \rho_0) & (0 \leqslant r \leqslant \rho_0), \\ \tau_s (a - r) & (\rho_0 \leqslant r \leqslant a), \end{cases}$$

其中 $\rho_0$ 与 $a$ 之间的关系由 (92) 式给出。

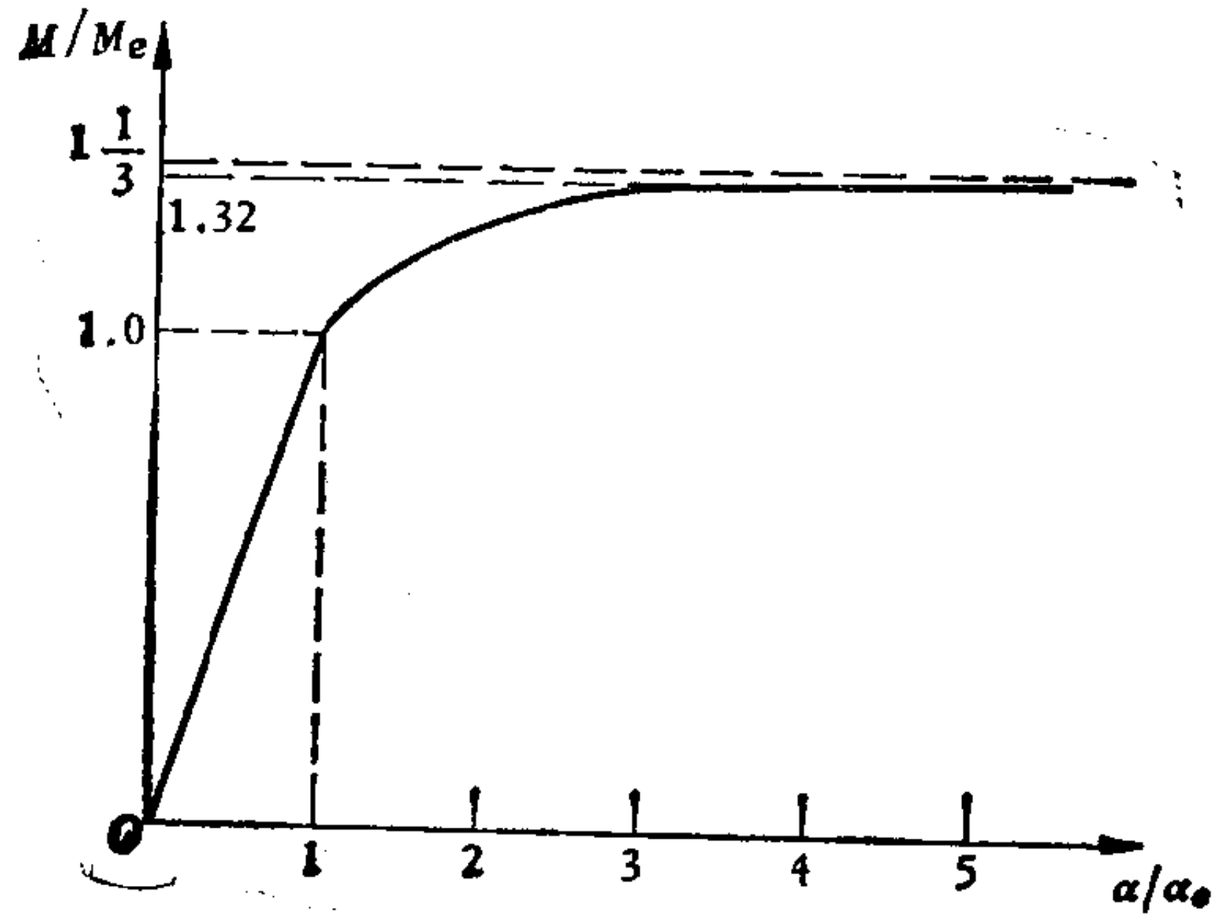



图 8

$\rho_0 = a$ 时，

$$a = a_e = \frac{\tau_s}{a\mu},$$

相应的弹性极限扭矩为

$$M_e = 4\pi\int_0^a r\Phi|_{\rho_0=a}\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\tau_s a^3,$$

$\rho_0 < a$ 时 $a > a_e$，可求得扭矩为

$$M = \frac{4}{3}M_e\left[1 - \frac{1}{4}\left(\frac{a_e}{a}\right)^3\right].$$

当 $a \to \infty$ 时，得塑性极限扭矩为

$$M_s = \frac{4}{3}M_e = \frac{2}{3}\pi\tau_s a^3.$$

在图 8 中给出了 $M/M_e \sim a/a_e$ 曲线，当 $a/a_e = 3$ 时，$M/M_e = 1.32$，可见当扭矩十分接近塑性极限扭矩 $\frac{4}{3}M_e$ 时，其变形仍具有弹性变形的量级。

## §5.5 刚塑性薄圆板的轴对称弯曲

### 一、圆板中的广义应变率和广义应力

现讨论圆板的轴对称弯曲变形问题。当板厚 $2h$ 较小时，则可在柱坐标中对位移分量沿厚度展开：

$$\begin{cases} u(r) = u_0(r) + u_1(r)z + \cdots, \\ v(r) = 0, \\ w(r) = w_0(r), \end{cases}$$

其中挠度 $w(r)$ 的展式仅保留零次项。

如果板的挠度很小，则 Kirchhoff 假定仍然成立，即有：

（1）在 $z=0$ 的中面内的变形可以忽略：$u_0(r)=0$。

（2）变形前垂直于中面的直线段在变形过程中仍然垂直于变形后的中面，且保持为直线段。这时，$u(r)$的展开式中只需保留一次项：

$$u(r)=u_1(r)z,$$

而中面剪应变为零：

$$\gamma_{rz}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}=u_1(r)+\frac{\partial w_0}{\partial r}=0.$$

因此，在轴对称变形下，圆板的速度场和应变率场为

$$\dot{u}(r)=-\frac{\mathrm{d}\dot{w}}{\mathrm{d}r}z,\quad \dot{v}(r)=0,\quad \dot{w}(r)=\dot{w}_0(r), \tag{93}$$

$$\begin{cases}\dot{\varepsilon}_r=\dfrac{\mathrm{d}\dot{u}}{\mathrm{d}r}=-\dfrac{\mathrm{d}^2\dot{w}}{\mathrm{d}r^2}z, & \dot{\varepsilon}_\theta=\dfrac{\dot{u}}{r}=-\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}\dot{w}}{\mathrm{d}r}z,\\ \dot{\varepsilon}_z=0, & \dot{\gamma}_{\theta z}=\dot{\gamma}_{zr}=\dot{\gamma}_{r\theta}=0.\end{cases} \tag{94}$$

上式表明，应变率完全由

$$\dot{\kappa}_r=-\frac{\mathrm{d}^2\dot{w}}{\mathrm{d}r^2},\quad \dot{\kappa}_\theta=-\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\dot{w}}{\mathrm{d}r} \tag{95}$$

确定，$\dot{\kappa}_r$ 和$\dot{\kappa}_\theta$ 称为广义应变率，它们分别表示板的径向曲率和周向曲率的变化率。

单位面积上，应变能的变化率为

$$\begin{aligned}\int_{-h}^{h}\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}\mathrm{d}z&=\int_{-h}^{h}(\sigma_r\dot{\varepsilon}_r+\sigma_\theta\dot{\varepsilon}_\theta)\mathrm{d}z\\&=\left(-\frac{\mathrm{d}^2\dot{w}}{\mathrm{d}r^2}\right)\int_{-h}^{h}\sigma_r z\mathrm{d}z+\left(-\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\dot{w}}{\mathrm{d}r}\right)\int_{-h}^{h}\sigma_\theta z\mathrm{d}z\\&=\dot{\kappa}_r M_r+\dot{\kappa}_\theta M_\theta\end{aligned}$$

这里

$$M_r = \int_{-h}^{h} \sigma_r z \mathrm{d}z, \qquad M_\theta = \int_{-h}^{h} \sigma_\theta z \mathrm{d}z \tag{96}$$

为与广义应变率相对应的广义应力，它们分别表示板的径向弯矩和周向弯矩。

下面来给出广义应力所应满足的平衡方程。为此，考虑任意一组满足平衡方程的应力场$(\sigma_r, \sigma_\theta \sigma_z, \sigma_{\theta z}, \sigma_{zr}, \sigma_{r\theta})$和任意一组由(94)式表示的应变率场$(\dot{\varepsilon}_r, \dot{\varepsilon}_\theta, \dot{\varepsilon}_z, \dot{\gamma}_{\theta z}, \dot{\gamma}_{zr}, \dot{\gamma}_{r\theta})$。相应的虚功方程可写为

$$2\pi \int_{R_0}^{R} r \int_{-h}^{h} (\sigma_r \dot{\varepsilon}_r + \sigma_\theta \dot{\varepsilon}_\theta) \mathrm{d}z \mathrm{d}r$$

$$= 2\pi \int_{R_0}^{R} r\dot{w}(r) p(r) \mathrm{d}r + \left[ 2\pi r \int_{-h}^{h} (\sigma_r \dot{u} + \sigma_{zr} \dot{w}) \mathrm{d}z \right] \Big|_{R_0}^{R},$$

上式中 $p(r)$是垂直于板中面的轴对称分布外力（以挠度方向为正），$R_0$ 和 $R$ 是板的内、外径，它们可以任意选取。由（93）式和（94）式，上式还可改写为

$$-\int_{R_0}^{R} \left( r \frac{\mathrm{d}^2 \dot{w}}{\mathrm{d}r^2} M_r + \frac{\mathrm{d}\dot{w}}{\mathrm{d}r} M_\theta \right) \mathrm{d}r$$

$$= \int_{R_0}^{R} r\dot{w}(r) p(r) \mathrm{d}r + \left[ -r \frac{\mathrm{d}\dot{w}}{\mathrm{d}r} M_r \right] \Big|_{R_0}^{R} + [r \dot{w} Q_r] \Big|_{R_0}^{R},$$

其中

$$Q_r = \int_{-h}^{h} \sigma_{zr} \mathrm{d}z \tag{97}$$

是单位弧长上的剪力。对上式左端进行分部积分，便有

$$\int_{R_0}^{R} \left[ \frac{\mathrm{d}^2(rM_r)}{\mathrm{d}r^2} - \frac{\mathrm{d}M_\theta}{\mathrm{d}r} + rp \right] \dot{w} \mathrm{d}r$$

$$- \left\{ \left[ \frac{\mathrm{d}(rM_r)}{\mathrm{d}r} - M_\theta - rQ_r \right] \dot{w} \right\} \Big|_{R_0}^{R} = 0.$$

注意到 $w$ 以及 $R_0$ 和 $R$ 的任 意性，就得到关于广义应力的平衡方程：

$$\frac{\mathrm{d}(rM_r)}{\mathrm{d}r} - M_\theta = rQ_r \tag{98}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}(rQ_r)}{\mathrm{d}r} = -rp(r) \tag{99}$$

如取 $R_0=0$，则以上两式 也可统一写为

$$\frac{\mathrm{d}M_r}{\mathrm{d}r} + \frac{M_r - M_\theta}{r} = Q_r = -\frac{1}{r}\int_0^r rp(r)\mathrm{d}r. \tag{100}$$

## 二、理想刚塑性圆板的广义屈服条件

由直法线假定，应变率张量的各分量之间的比例沿厚度 $z$ 不变（参见(94)式），因此，当屈服面为严格凸时，由应变率可唯一定出相应的在屈服面上的应 力值，该应力值沿 $z>0$ 和 $z<0$ 分别都是常数。由于非严格凸的屈服面（例如，分片线性屈服面）可看作是具有小曲率严格凸屈服面的极限，故可认为以上分析对非严格凸的屈服面也成立。

于是，当 沿 板的厚度 应力都达到屈服时（其上半部应力和下半部应力仅差一个符号，与梁的情况类似），广 义 应力表达式(96)式为

$$\left.\begin{aligned} M_r &= 2\int_0^h \sigma_r z\mathrm{d}z = \sigma_r h^2, \\ M_\theta &= 2\int_0^h \sigma_\theta z\mathrm{d}z = \sigma_\theta h^2, \end{aligned}\right\} \tag{101}$$

其中 $\sigma_r$ 和 $\sigma_\theta$ 分别为板的中性面上半部 ($z>0$) 的 径向应力和周向应力。

考虑到薄板中 $\sigma_z=0$，Mises 屈服条件可写为

$$\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_r\sigma_\theta = \sigma_s^2$$

（见第三章(42)式）。故由(101)式，得广义屈服条件为

$$M_r^2 + M_\theta^2 - M_r M_\theta = M_s^2, \tag{102}$$

其中 $M_s = \sigma_s h^2$。

若整个圆板都达到屈服，则平衡方程(100)式变为

$$\frac{\mathrm{d}M_r}{\mathrm{d}r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{2}M_r \mp \sqrt{M_s^2 - \frac{3}{4}M_r^2}\right) = Q_r, \tag{103}$$

而相应的流动法则为

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_r &= -\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} = \lambda(2M_r - M_\theta), \\ \varkappa_\theta &= -\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} = \lambda(2M_\theta - M_r), \end{aligned}\right\} \tag{104}$$

其中 $\lambda \geqslant 0$。

Tresca 屈服条件可写为

$$\max\{|\sigma_r - \sigma_\theta|, |\sigma_r|, |\sigma_\theta|\} = \sigma_s。$$

故广义屈服条件为：

$$\max\{|M_r - M_\theta|, |M_r|, |M_\theta|\} = M_s, \tag{105}$$

其图形如图 9 所示。由正交流动法则可知，在屈服面的直线段上，$\varkappa_r : \varkappa_\theta$ 是唯一确定的；而在屈服面的角点上，$\varkappa_r : \varkappa_\theta$ 不唯一，但 $M_r$ 和 $M_\theta$ 是唯一确定的。

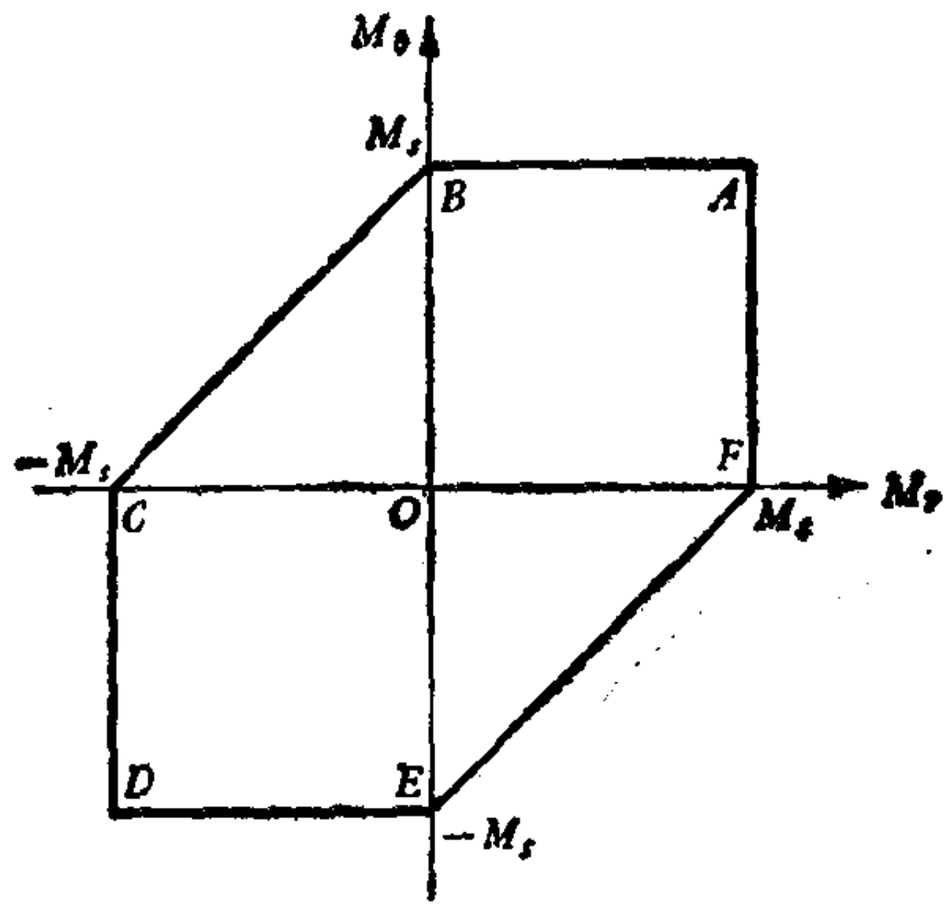



图 9

附带说明，第二章第八节中所讨论的交互曲线实际上就是梁的整个截面都进入塑性状态时，关于广义应力的屈服条件。它与以上关于圆板的广义屈服条件(102)式和(105)式是完全类似的。

## 三、在均布载荷 $p$ 作用下的圆板

当 $p$ 为常数时，(100)式就简化为

$$\frac{\mathrm{d}M_r}{\mathrm{d}r}+\frac{M_r-M_\theta}{r}=-\frac{1}{2}pr. \tag{106}$$

显然，如采用 Tresca 屈服条件(105)式，上式可以大为简化。现分两种情形来加以讨论。

(1) 半径为 $a$ 的简支圆板

因为在板中心 $r=0$ 处，$M_r=M_\theta$；在简支边 $r=a$ 处，$M_r=0$，所以当全板都达到屈服时，$r=0$ 对应于图 9 中的 $A$ 点，即 $M_r=M_\theta=M_s$，$r=a$ 对应于图 9 中的 $B$ 点，即 $M_r=0$，$M_\theta=M_s$。因此可设 $0\leqslant r\leqslant a$ 区间对应于图 9 的 $AB$ 段，即 $M_\theta=M_s$，$0\leqslant M_r\leqslant M_s$。

这样，由(106)式

$$\frac{\mathrm{d}M_r}{\mathrm{d}r}+\frac{M_r}{r}=\frac{M_s}{r}-\frac{1}{2}pr,$$

积分得

$$M_r=M_s\left(\frac{1}{6}pr^2+\frac{A}{r}\right).$$

考虑到 $r=0$ 处 $M_r$ 有限，积分常数 $A$ 应等于零。又由 $r=a$ 处 $M_r=0$，就有

$$p_s=\frac{6M_s}{a^2},\quad M_r=M_s\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right), \tag{107}$$

上式中的 $p_s$ 就是全板达到塑性状态时的极限载荷。

下面再来计算速度场 $w(r)$。对应于图 9 中屈服面的 $AB$ 边，流动法则可写为

$$(\varkappa_r:\varkappa_\theta)=(0:1),\ \text{即}\ \varkappa_r=-\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}r^2}=0,$$

积分并利用边界条件 $w|_{r=a}=0$，便有

$$w(r)=w(0)\left(1-\frac{r}{a}\right). \tag{108}$$

这里 $w(0)$是不确定的，因为在极限载荷作用下，板的变形的大小并不受数量上的限制。(108) 式说明，板在塑性流动瞬间的速度场具有锥体的形式。

(2) 半径为 $a$ 的固支圆板

类似于简支圆板的分析，可先写出边界条件。在 $r=0$ 处，有 $M_r=M_\theta$ 而在 $r=a$ 处有 $w=0,\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}=0$。因此，当全板都达到屈服时，$r=0$ 对应于图 9 中的 $A$ 点，即 $M_r=M_\theta=M_s$。而由流动法则，$r=a$ 对应于图 9 中的 $AF$ 边或 $CD$ 边$\left(\text{即}\ \varkappa_\theta=-\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}=0\right)$。也就是说，随着半径 $r$ 的增大，板内屈服弯矩值或由图 9 中的 $A$ 点向 $F$ 点延伸，或由 $A$ 点向 $B$ 点和 $C$ 点延伸。然而，前一种情况是应该被排除的，因为这时 $w=\text{const}$，板要作刚体平动。此外，由 (106) 式得 $M_\theta=M_s+\frac{1}{2}pr^2$，这是违背屈服条件的。因此，可设 $0\leqslant r\leqslant\rho_0$ 区间对应于屈服面的 $AB$ 段，有

$$M_\theta=M_s,\quad 0\leqslant M_r\leqslant M_s$$

$\rho_0\leqslant r\leqslant a$ 区间对应于屈服面的 $BC$ 段，有

$$M_\theta-M_r=M_s,$$

而在 $r=a$ 处的广义应力对应于图 9 的 $C$ 点。

对于 $0\leqslant r\leqslant\rho_0$ 区间，类似于简支圆板的计算，可得

$$M_r=M_s-\frac{1}{6}pr^2,\quad p=\frac{6M_s}{\rho_0^2}. \tag{109}$$

对于 $\rho_0 \leqslant r \leqslant a$ 区间，(106)式为

$$\frac{\mathrm{d}M_r}{\mathrm{d}r} = \frac{M_s}{r} - \frac{1}{2}pr,$$

积分之，就有

$$M_r = M_s \ln r - \frac{1}{4}pr^2 + B.$$

上式中的积分常数 $B$ 和 $\rho_0$ 的值要满足条件：

$$M_r|_{r=\rho_0} = 0, \quad M_r|_{r=a} = -M_s.$$

由前一条件得：

$$M_r = M_s \ln\frac{r}{\rho_0} + \frac{1}{4}p(\rho_0^2 - r^2), \tag{110}$$

而 $\rho_0$ 的值可由后一条件来确定，利用(109)式和(110)式，有

$$\ln\left(\frac{a}{\rho_0}\right) + \frac{3}{2}\left(1 - \frac{a^2}{\rho_0^2}\right) = -1.$$

故解得 $(a/\rho_0)^2 = 1.88$ 或 $\rho_0 = 0.729a$。于是，

$$p_s = \frac{6M_s}{\rho_0^2} = \left(\frac{a}{\rho_0}\right)^2\left(\frac{6M_s}{a^2}\right) = \frac{1.88 \times 6M_s}{a^2} \approx 11.26\frac{M_s}{a^2} \tag{111}$$

这说明固支圆板的极限载荷是简支圆板极限载荷的 1.88 倍。

最后来计算速度场。

在区间 $0 \leqslant r \leqslant \rho_0$，类似于简支圆板的讨论，可知速度场是线性分布的：

$$\dot{w}(r) = \dot{w}(0) + C_1 r,$$

其中 $C_1$ 为待定常数。

在区间 $\rho_0 \leqslant r \leqslant a$，流动法则给出 $(\dot{\kappa}_r : \dot{\kappa}_\theta) = (\quad 1:1)$，即

$$\frac{\mathrm{d}^2\dot{w}}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\dot{w}}{\mathrm{d}r} = 0.$$

注意到 $w|_{r=a}=0$，对上式积分后得

$$w(r)=C_2\ln\frac{r}{a}.$$

积分常数 $C_1$ 和 $C_2$ 可由 $r=\rho_0$ 处 $w$ 和 $\frac{dw}{dr}$ 的连续性条件求得：

$$C_1=\frac{C_2}{\rho_0},\quad C_2=-\dot{w}(0)\Big/\left(1+\ln\frac{a}{\rho_0}\right).$$

因此可写出对应于极限载荷时的速度场为：

$$\dot{w}(r)=\begin{cases}\dot{w}(0)\left[1+\ln\frac{a}{\rho_0}-\frac{r}{\rho_0}\right]\Big/\left(1+\ln\frac{a}{\rho_0}\right), & 0\leqslant r\leqslant\rho_0,\\ \dot{w}(0)\ln\frac{a}{r}\Big/\left(1+\ln\frac{a}{\rho_0}\right), & \rho_0\leqslant r\leqslant a,\end{cases}\tag{112}$$

其中 $\rho_0=0.729a$。

## 习　题

5.1　一满足 Mises 理想弹塑性规律的单元体，$\nu<\frac{1}{2}$，已知其受力状态为 $\sigma_x=\sigma,\sigma_y=0,\varepsilon_z=0$ 且 $x,y,z$ 为主方向。

1）当 $\sigma$ 从零增加到开始屈服，求对应的 $\sigma_0$ 值。

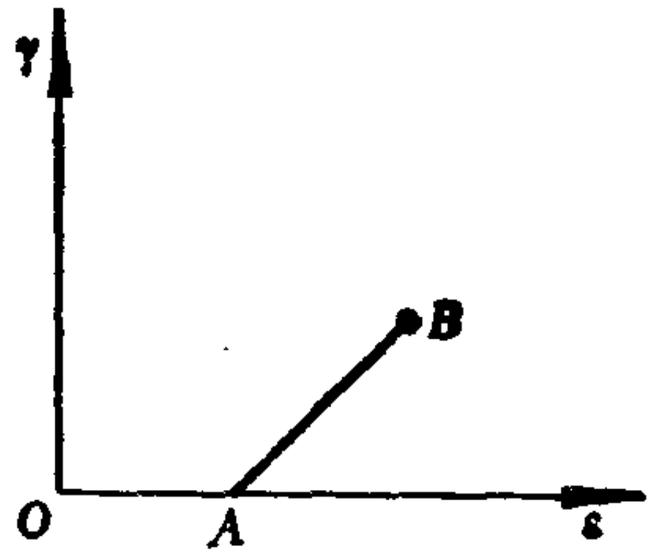
2）当 $\sigma_x=\sigma_0$ 后继续加载到 $\sigma_x=\sigma_0+d\sigma$，求这时的 $d\sigma_z$ 及 $d\varepsilon_x^p$ 值。

5.2　薄壁圆管受拉扭作用，对于 Mises 理想弹塑性材料，$\nu=0.5$，设无量纲应变由(24)式表示，加载路径为如图所示的 $OAB$，$A,B$ 点的 $\varepsilon,\gamma$ 值为 $A(1,0),B(2,1)$。

1）在 $AB$ 段如引进变换 $\sigma=\cos v$，证明增量本构方程可写为如下形式

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varepsilon}=-\sqrt{2}\sin\left(v-\frac{\pi}{4}\right).$$

2) 用增量理论求 $B$ 点处的 $v_B,\sigma_B,\tau_B$ 值。




题 5.2

5.3 对题 5.2 的问题，现在改为 $\nu<0.5$,用增量理论

1) 导出无量纲形式的本构关系。

2) 无量纲应变加载路径仍为 $OAB$。但 $A,B$ 点的 $\varepsilon,\gamma$ 值为 $A(1,0),B(1,1)$。取 $\nu=1/3$ 时求对应的 $\sigma_B,\tau_B$ 值。

5.4 对题 5.2,试用全量理论进行计算，但泊松比 $\nu<0.5$。

1) 导出用无量纲量 $\sigma,\tau,\varepsilon,\gamma$ 表示的本构关系。

2) 如取 $\nu=1/3$,已知 $\varepsilon=\gamma=1$ 求对应的 $\sigma,\tau$ 值。

5.5 薄壁圆管受拉扭作用，若材料为 Tresca 理想弹塑性，则 $\sigma_s=2\tau_s$,并有 $\nu=0.5$。试用增量理论

1) 导出用无量纲量表示的本构方程。

2) 如无量纲应变加载路径与题 5.3 相同。求到达 $B$ 点时的 $\sigma_B,\tau_B$ 值。

5.6 将题 5.5 的问题改为 $\nu=1/3$。列出无量纲本构关系及到达 $B$ 点的 $\sigma_B,\tau_B$ 值。

5.7 对题 5.5 的问题改用全量理论处理。

1) 列出用无量纲量表示的本构关系。

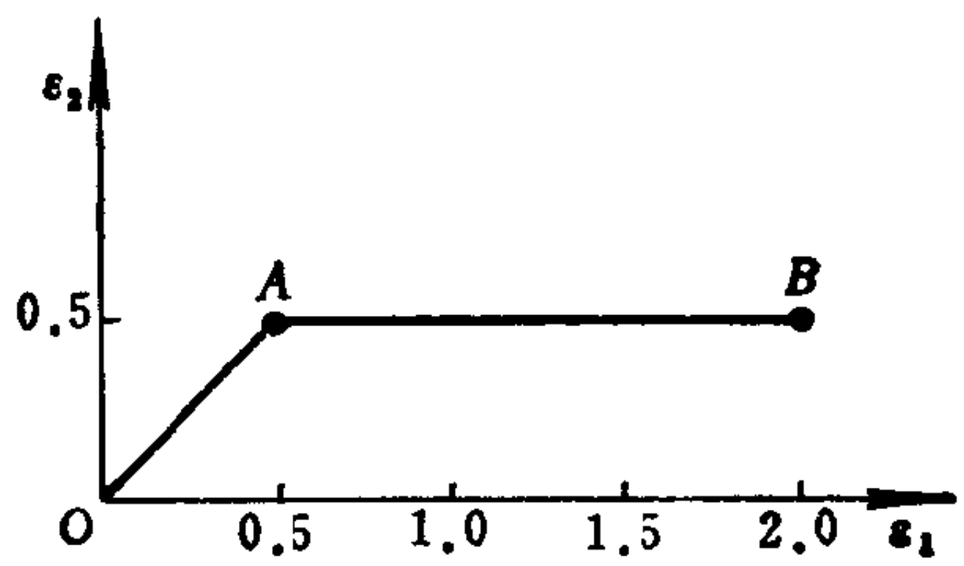
2) 当应变值为 $\varepsilon=\gamma=1$ 时分别对 $\nu=0.5$ 及 $\nu=1/3$ 两种情形求出对应的 $\sigma,\tau$ 值。

5.8　薄壁圆管受拉扭作用，材料是理想弹塑性的，满足最大偏应力屈服条件。并设 $\nu=0.5$。

1）列出屈服条件和增量本构关系。

2）设应变加载路径为先拉伸到 $\varepsilon_z=\varepsilon_s$，然后保持 $\varepsilon_z=\varepsilon_s$ 不变，使 $\gamma_{\theta z}$ 从零增加到 $\varepsilon_s$。求加载终点时的 $\sigma_z,\sigma_{\theta z}$ 值。

5.9　一开口薄壁圆管在轴力和内压作用下有应力分量 $\sigma_z$，$\sigma_\theta$及应变分量 $\varepsilon_z,\varepsilon_\theta$。材料为 Mises 理想弹塑性的，并有$\nu=0.5$。




题　5.9

引进无量纲量 $\sigma_1=\sigma_z/\sigma_s,\sigma_2=\sigma_\theta/\sigma_s,\varepsilon_1=\varepsilon_z/\varepsilon_s$。$\varepsilon_2=\varepsilon_\theta/\varepsilon_s$。用增量理论

1）给出无量纲量表示的本构关系。

2）应变加载路径为 $OAB$。$A,B$ 点的 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 值为$A(0.5,0.5)$，$B(2,0.5)$。求 $A,B$ 点处对应的 $\sigma_1,\sigma_2$ 值。

5.10　薄管受拉扭作用，材料为 Mises 线性等向强化的，并有 $\nu=0.5,K=E/\psi'=10$，设在无量纲应力空间 $\sigma,\tau$ 上的加载路径是 $OAB$。其坐标值为 $O(0,0),A(1,0),B(1,1)$，

1）用增量理论求到达 $B$ 点时 $\varepsilon_B,\gamma_B$ 值。

2）用全量理论求对应的 $\varepsilon_B,\gamma_B$ 值。

5.11　将题 5.10 的问题改为Tresca线性强化材料，分别对增量和全量理论导出用无量纲量表示的本构关系，并求出 $\varepsilon_B,\gamma_B$ 值。

5.12　薄管受拉扭作用，材料满足线性随动强化规律

$(s_{ij}-c\varepsilon^p_{ij})(s_{ij}-c\varepsilon^p_{ij})=\frac{2}{3}\sigma_s^2$。在无量纲化时，增加引进两个无量纲量 $\alpha=\frac{3}{2}\frac{c\varepsilon^p}{\sigma_s}$，$\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{c\gamma^p_{\theta z}}{\sigma_s}$。

1）导出无量纲本构关系具有如下形式：

$$\begin{cases}(\sigma-\alpha)^2+(\tau-\beta)^2=1,\\ \mathrm{d}\alpha=(\sigma-\alpha)[(\sigma-\alpha)\mathrm{d}\sigma+(\tau-\beta)\mathrm{d}\tau],\\ \mathrm{d}\beta=(\tau-\beta)[(\sigma-\alpha)\mathrm{d}\sigma+(\tau-\beta)\mathrm{d}\tau].\end{cases}$$

2）当在 $\sigma,\tau$ 平面上的加载路径为 $OAB$。其坐标值为 $O(0,0)$，$A(2,0)$，$B(2,2)$。求 $A,B$ 点对应的 $\alpha,\beta$ 值。

5.13　对受内压 $p$ 和轴力 $T$ 作用的厚壁筒，如目的是求塑性极限载荷，可以采用刚塑性模型。在 $0\leqslant T\leqslant 2\pi a^2 p$ 条件下，使用 Tresca 条件能保证 $\sigma_z$ 是中间主应力并求得 $p_s=\sigma_s\ln\frac{b}{a}$。现在讨论 $T>2\pi a^2 p$ 情况，仍用 Tresca 刚塑性模型求解。

1）虽然 $\sigma_z\geqslant\sigma_\theta\geqslant\sigma_r$，证明不能存在满足 $\sigma_z-\sigma_r=\sigma_s$ 屈服条件的塑性区。

2）证明按以下规律分布的塑性区

$$\begin{cases}\sigma_z=\sigma_\theta>\sigma_r, & \sigma_\theta-\sigma_r=\sigma_s, & a\leqslant r\leqslant c,\\ \sigma_z=\sigma_s, & \sigma_r=\sigma_\theta=0, & c\leqslant r\leqslant b,\end{cases}$$

能满足应力边条件与 $r=c$ 处的 $\sigma_r$ 连续条件。根据流动法则能使筒产生塑性流动。求出这时对应的 $p,T$ 值。

5.14　对题 5.13 的问题，当 $0\leqslant T\leqslant 2\pi a^2 p$ 时，只有当 $\nu=0.5$ 时才能保证 $\sigma_z$ 是中间主应力，现在讨论 $\nu<0.5$ 情况：

1）证明当 $T$ 和 $b/a$ 满足以下不等式时能保证 $\sigma_z$ 是中间主应力

$$\pi[-b^2(1-2\nu)+a^2]\sigma_s\ln\frac{b}{a}+\pi(b^2-a^2)(1-\nu)\sigma_s\geqslant T,$$

$$2\nu\pi a^2\sigma_s\ln\frac{b}{a}-\pi\nu\sigma_s(b^2-a^2)\leqslant T.$$

2) 当 $T=0,\nu=0.25$ 时，求 $k$ 值，当 $b/a\leqslant k$ 时能保证上式成立。

5.15 厚壁筒受内压 $p$ 及轴力 $T$ 的作用，材料是理想弹塑性的并满足 Mises 屈服条件，泊松比 $\nu=0.5$，这时位移具有如下形式

$$u=\frac{A}{r}-\frac{1}{2}\varepsilon_0 r,$$

如引进 $\mu(r)=\dfrac{2A}{\varepsilon_0 r^2},(\varepsilon_0\neq 0),a=b^2/a^2$，试导出下列关系。

$$\begin{cases}\bar{\varepsilon}=\dfrac{\varepsilon_0}{\sqrt{3}}\sqrt{\mu^2+3},\\ \sigma_\theta-\sigma_r=\dfrac{2\sigma_s}{\sqrt{3}}\dfrac{\mu}{\sqrt{\mu^2+3}}\operatorname{sign}\mu,\\ \sigma_z-\sigma_r=\dfrac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\dfrac{\mu+3}{\sqrt{\mu^2+3}}\operatorname{sign}\mu,\\ p_s=\sigma_s\ln\dfrac{b}{a}\left[1+\dfrac{\ln\left(\dfrac{k+\sqrt{k^2+3/a^2}}{k+\sqrt{k^2+3}}\right)}{\ln a}\right]\operatorname{sign}k,\end{cases}$$

其中 $k=\mu(b)$。

5.16 双层厚壁筒采用 Tresca 理想塑性材料，并设 $\varepsilon_z=0$。在内筒 $a\leqslant r\leqslant b$ 屈服极限为 $\sigma_{s1}$，在外筒 $b\leqslant r\leqslant c$ 屈服极限为 $\sigma_{s2}$。初始筒内无应力，然后在 $r=a$ 处作用有内压 $p$。

1) 什么条件下外筒先进入屈服。

2) 当两个筒都全部进入塑性时，求极限压力 $p_s$。

5.17 半径为 $R$ 长为 $l$ 的圆轴，同时受轴向力 $N$ 与扭矩 $M$ 的作用。轴的材料是理想刚塑性的，并满足 Mises 屈服条件，在

达到极限状态时，轴有伸长 $\mathrm{d}l$ 与单位长扭转角 $\mathrm{d}\theta$，记比值 $a=\dfrac{3\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\theta}$。

1）证明轴中任一点 $r$ 处的应力分布为

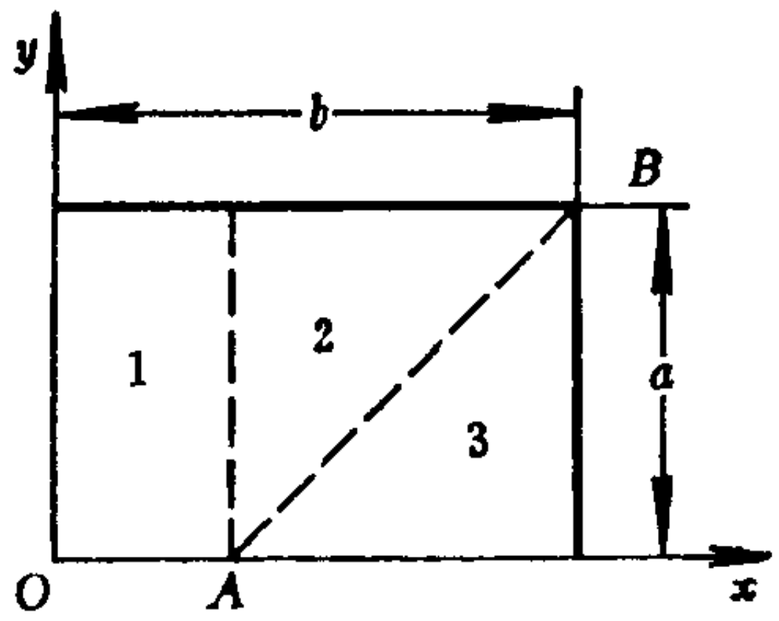
$$\sigma_z=\frac{a\sigma_s}{\sqrt{a^2+3r^2}},\quad \sigma_{\theta z}=\frac{\sigma_s r}{\sqrt{a^2+3r^2}}.$$

2）对应的 $M,N$ 值满足以下关系

$$\left(\frac{M}{M_s}\right)^2+\frac{3}{4}\left(\frac{N}{N_s}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{N}{N_s}\right)^3\operatorname{sign}N=1,$$

$$M_s=\frac{2\pi R^3}{3\sqrt{3}}\sigma_s,\quad N_s=\pi R^2\sigma_s.$$

5.18　对 $2a\times 2b$ 的矩形截面轴受扭矩作用，材料是理想塑性的。求达到塑性极限扭矩时截面翘曲函数 $\varphi(x,y)$ 的分布规律，由

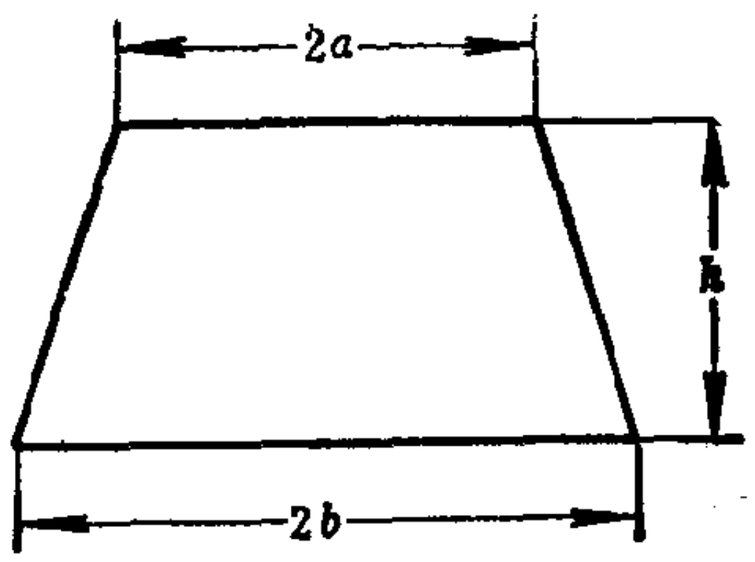



题　5.18

于 $\varphi$ 沿 $x$ 轴和 $y$ 轴是反对称分布的，故只列出如图所示 1/4 区域。并分成三个区域求解。

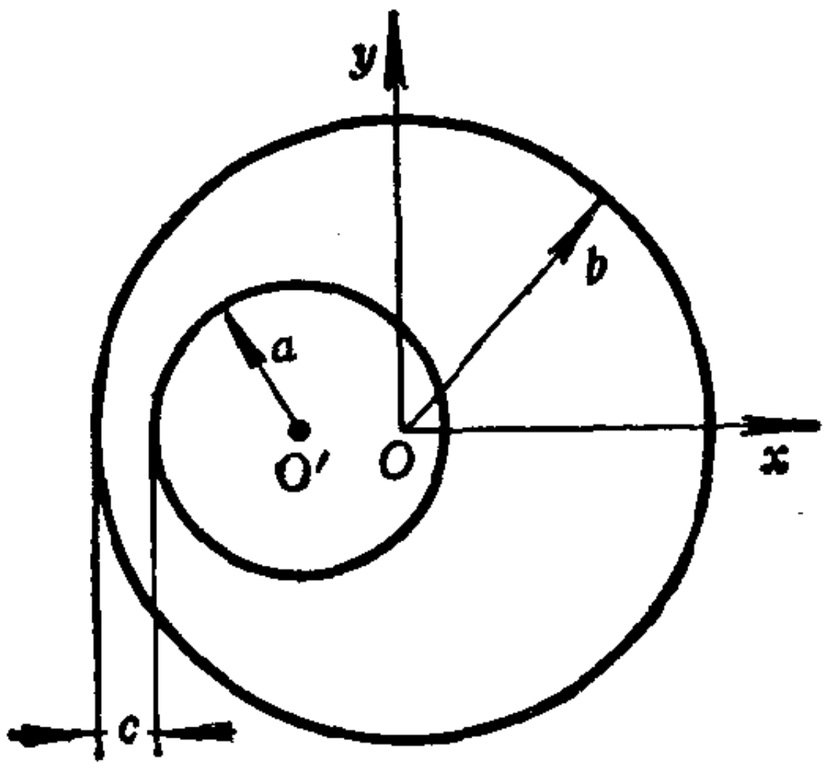
5.19　用沙堆比拟方法求如图所示梯形截面理想塑性轴的塑性极限扭矩。证明当 $h^2\leqslant 4ab$ 时将有

$$M_s=\frac{\tau_s h^2}{6}\left[3(a+b)-\sqrt{h^2+(b-a)^2}\right]$$

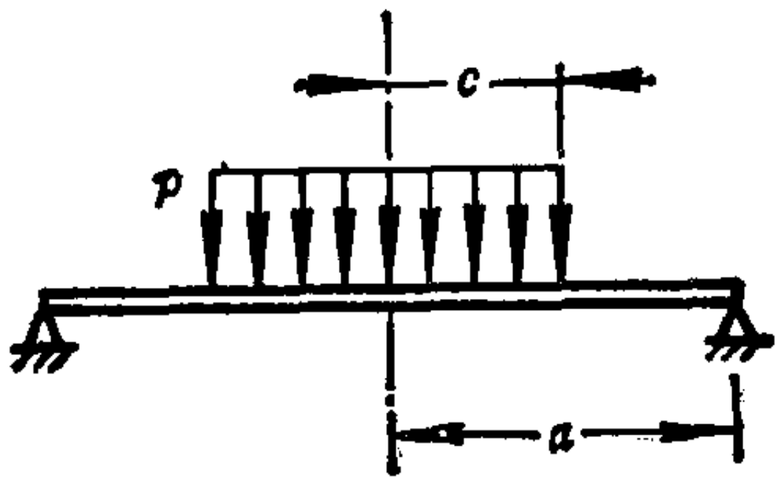



题　5.19

5.20　如图所示，有一偏心圆孔圆轴的截面，轴的外半径为 $b$，孔的半径为 $a$，圆孔离边界的距离为 $c$，当用沙堆比拟方法求轴的塑性极限扭矩时，试给出沙堆稜线轨迹方程。




题　5.20



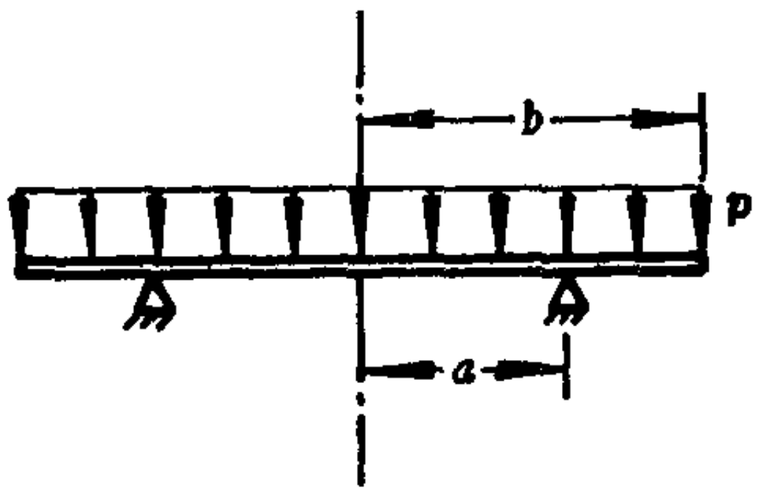

题　5.21

5.21　半径为 $a$ 的简支圆板，受半径为 $c$ 的均布载荷 $p$ 的作

用(如图所示)，总外载为 $P=\pi c^2 p$。用 Tresca 刚塑性模型，求极限外载 $p_s$ 及对应的 $M_r(r)$分布规律。

5.22　题 5.21 的圆板边界改为固支边。分别对$\frac{c}{a}=0.1$ 及 0.9 两种情形求极限外载 $p_s$ 及对应的 $M_r(r)$分布规律。

5.23　半径为 $b$ 的圆板受均载 $p$ 的作用，简支在半径为 $a$ 的圆上，用 Tresca 刚塑性模型，当$\frac{b}{a}=1.1$ 时，求 $p_s$ 值及相应的 $M_r(r)$分布规律。




题　5.23

# 第六章　理想刚塑性材料的平面应变问题

对于长的棱柱形状的一类物体，若载荷的方向垂直于棱柱的母线而其大小沿母线不变，就可简化为平面应变问题来进行分析。现取直角坐标系中的 $z$ 轴平行于柱体母线方向，那么除了相差一个沿 $z$ 轴均匀的轴向正应变外，位移场可写为：

$$u_x = u_x(x,y), u_y = u_y(x,y), u_z = 0 \qquad (1)$$

理想刚塑性体的平面应变问题是经典塑性理论中研究得最多并有实际应用背景（如金属的压力加工等）的问题。尽管采用理想刚塑性模型会带来一定的误差，但这可使问题大为简化。当物体的弹性变形与塑性变形相比可以忽略时，或者只需要计算塑性极限载荷时，采用这样的模型还是较为合理的。

## §6.1　基 本 方 程

本节将给出理想刚塑性体平面应变问题的基本方程。因为刚性区内的应变率场等于零，所以那些不违背屈服条件且满足平衡方程和应力边界条件的应力场都可作为刚性区的应力场。这样的应力场可以是不唯一的。

下面，我们着重讨论塑性区内的基本方程。

由（1）式，几何关系为：

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\varepsilon}_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \dot{\varepsilon}_y = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \dot{\varepsilon}_z = 0, \\ &\dot{\varepsilon}_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right), \dot{\varepsilon}_{yz} = \dot{\varepsilon}_{zx} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

其中 $\dot{u}_x = v_x$ 和 $\dot{u}_y = v_y$ 是速度场 $v(x,y)$在直角坐标系 中 的 两个分量，$(\dot{\varepsilon}_x, \dot{\varepsilon}_y, \dot{\varepsilon}_z, \dot{\varepsilon}_{xy}, \dot{\varepsilon}_{yz}, \dot{\varepsilon}_{zx})$为应变率场的六个分量，其中有三个分量始终为零。

**本构关系**可采用 Levy-Mises 关系：

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \lambda s_{ij} \quad (\lambda \geqslant 0)。 \tag{3}$$

注意到(2)式中 $\dot{\varepsilon}_{yz} = \dot{\varepsilon}_{zx} = \dot{\varepsilon}_z = 0$，就有

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0,$$

$$s_z = \sigma_z - \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 0$$

可见

$$\sigma_z = \sigma = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \tag{4}$$

永远是中间主应力，其中 $\sigma$ 表示平均正应力：

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)。$$

由 $s_x = \sigma_x - \sigma = \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$，$s_y = -s_x$ 和 $s_z = 0$，(3)式 可等价地写为

$$\frac{\dot{\varepsilon}_x}{s_x} = \frac{\dot{\varepsilon}_y}{-s_x} = \frac{\dot{\varepsilon}_{xy}}{\sigma_{xy}} = \lambda \geqslant 0, \tag{5}$$

上式中 $\lambda$ 无法事先给定，故只有两个独立的方程。例如，可将这两个方程写成如下的形式：

$$\frac{\dot{\varepsilon}_x - \dot{\varepsilon}_y}{2s_x} = \frac{\dot{\varepsilon}_{xy}}{\sigma_{xy}}, \quad \dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y = 0 \tag{6}$$

对应的 Mises 屈服条件是：

$$J_2 = \frac{1}{2}(s_x^2 + s_y^2) + \sigma_{xy}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2 = \frac{\sigma_s^2}{3} = \tau_s^2,$$

或写为

$$(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\sigma_{xy}^2=4k^2, \qquad (7)$$

其中

$$k=\tau_s=\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_s.$$

这表明，在塑性区内的应力状态$(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_{xy})$位于以$k$为半径的应力莫尔圆上（见图1）。

需要指出，当采用Tresca屈服条件时，由$\varepsilon_z=0$可知$\sigma_z$为中间主应力，故屈服条件具有与(7)式相同的表达式，但其中的常数$k$应取为$\tau_s=\frac{1}{2}\sigma_s$。

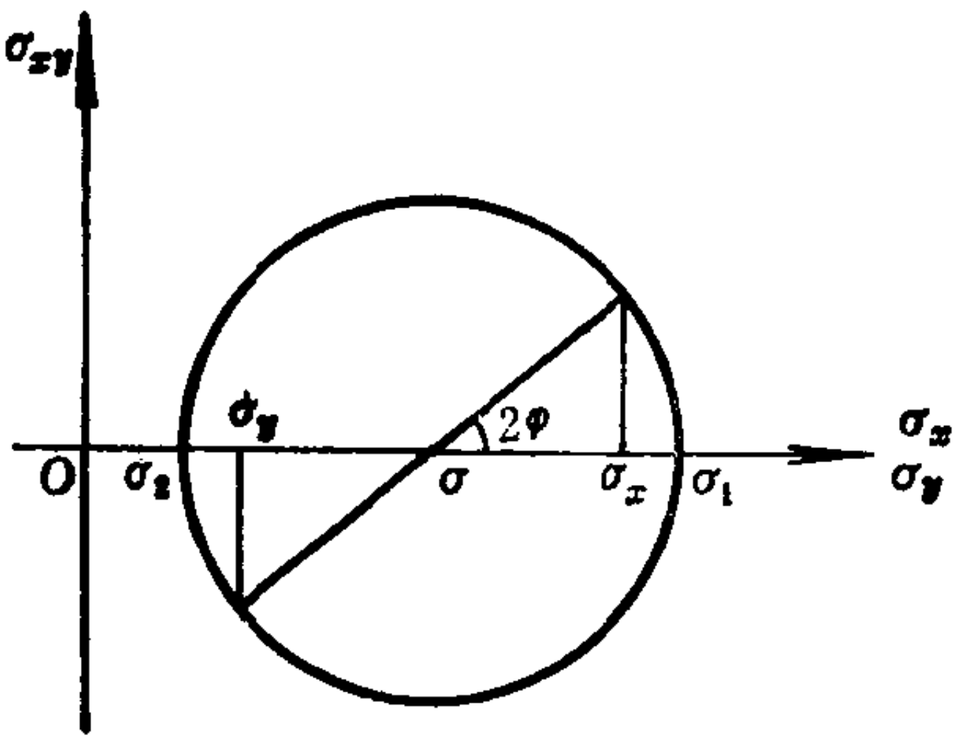



图 1

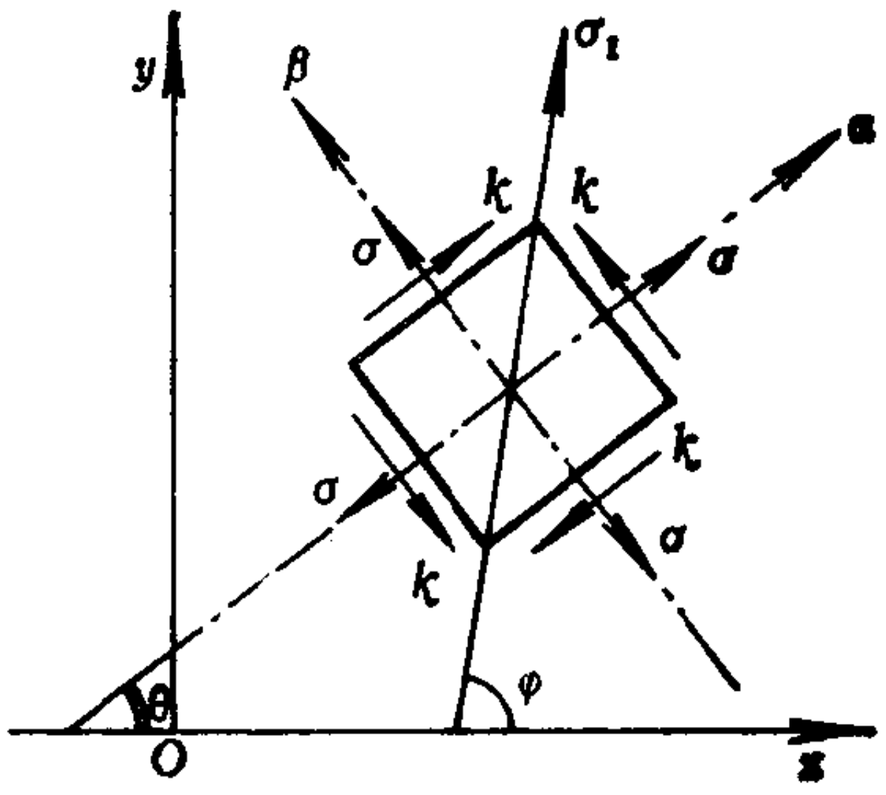



图 2

现以$\sigma_1$和$\sigma_2$表示两个主应力$(\sigma_1\geqslant\sigma_2)$，$\varphi$表示由$x$轴逆时针旋转到大主应力$\sigma_1$所对应的主方向的旋转角(图2)，则塑性区内的应力可写成

$$\begin{cases}\sigma_x=\sigma+k\cos2\varphi\\ \sigma_y=\sigma-k\cos2\varphi\\ \sigma_{xy}=k\sin2\varphi\end{cases} \qquad (8)$$

其中应力张量的静水应力部分$\sigma=\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2)=\frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y)$为

莫尔圆圆心的横坐标，而最大剪应力 $k=\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)$ 为莫尔圆的半径。故有

$$\sigma_1=\sigma+k,\quad \sigma_2=\sigma-k \tag{9}$$

最大剪应力所对应的方向与主应力方向的夹角为 $\pm 45°$。以后我们规定，从 $\sigma_1$ 的主方向顺时针转过45°后的最大剪应力方向为 $\alpha$ 方向，逆时针转过45° 后所得到的方向为 $\beta$ 方向(这时，在垂直于 $\alpha$ 方向或 $\beta$ 方向的截面上，剪应力达到最大值)。再令从 $x$ 轴逆时针旋转到 $\alpha$ 方向的转角为 $\theta$(图2)，则有

$$\varphi=\theta+\frac{\pi}{4},\quad \cos 2\varphi=-\sin 2\theta,\quad \sin 2\varphi=\cos 2\theta.$$

故(8)式也可写为：

$$\begin{cases}\sigma_x=\sigma-k\sin 2\theta,\\ \sigma_y=\sigma+k\sin 2\theta,\\ \sigma_{xy}=k\cos 2\theta.\end{cases} \tag{10}$$

由此可见，当塑性区内的应力由(10)式表示时，屈服条件(7)式就可自动满足。这时，计算 $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_{xy}$ 的问题便化为计算 $\sigma=\sigma(x,y)$ 和 $\theta=\theta(x,y)$ 的问题了。

最后，在不考虑体力作用的情况下，静力平衡方程为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}=0,\\ \dfrac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0.\end{cases} \tag{11}$$

如应力已满足屈服条件，则平衡方程也可利用(10)式而写为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma}{\partial x}-2k\left(\cos 2\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial x}+\sin 2\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial y}\right)=0,\\ \dfrac{\partial\sigma}{\partial y}-2k\left(\sin 2\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial x}-\cos 2\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial y}\right)=0.\end{cases} \tag{12}$$

此外，还需要给出刚-塑性区交界线上的间断条件和相应的边界条件。这将在以后再专门讨论。

由以上分析我们不难看出：

(1) 如在塑性区的边界上给定应力边界条件，则由(7)式和(11)式这三个方程就可以求出 $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_{xy}$ 这三个未知函数。这样的问题将称为是静定的。但如果给定的有速度边界条件，那么还需同时计算未知函数 $v_x,v_y$。注意到

$$-\operatorname{tg}2\theta=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2\sigma_{xy}},$$

并利用几何关系(2)式，(6)式还可写为

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}-\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)+\operatorname{tg}2\theta\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)=0,\\ \frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0.\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

于是，在塑性区内可通过(12)式和(13)式来求解四个未知函数$\sigma$，$\theta,v_x,v_y$。这是以 $x,y$ 为自变量的一阶拟线性偏微分方程组。其性质将在下一节再进行详细讨论。

(2) 如果在塑性区能求得一组满足(11)式和(13)式以及屈服条件(7)式的解，并使对应的塑性耗散功率非负（即要求(5)式中的 $\lambda\geqslant0$），而在刚性区(相应的应变率场为零)能求得满足平衡方程(11)式以及不违反屈服条件(7)式，即：

$$(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\sigma_{xy}^2\leqslant4k^2$$

的应力场。此外，如果应力和速度边界条件以及刚-塑性区交界线上的间断条件也得到满足。那么，我们就称以上所得到的解为**完全解**。如果不能校核刚性区内的应力是否违反屈服条件，那么对应于以上解的极限载荷只能算是真实极限载荷的上限。关于极限载荷的讨论将在下一章给出。

## §6.2 滑 移 线

在数学物理方程中我们知道，当

$$\sum_{j=1}^{2} a_{ij}\frac{\partial \mathscr{U}_j}{\partial x}+\sum_{j=1}^{2} b_{ij}\frac{\partial \mathscr{U}_j}{\partial y}+d_i=0\ (i=1,2), \qquad (14)$$

中的系数矩阵 $a_{ij},b_{ij}$ 和 $d_i$ 是自变量 $x,y$ 以及未知函数 $\mathscr{U}_1,\mathscr{U}_2$ 的光滑函数时，(14)式就称为是关于 $\mathscr{U}_j(j=1,2)$的 一阶拟线性偏微分方程组。

现假定在某一光滑曲线 $\mathscr{L}$：$y=y(x)$上给定了 $\mathscr{U}_j(j=1,2)$ 的值，则其沿$\mathscr{L}$的微分可写为

$$\frac{\partial \mathscr{U}_j}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial \mathscr{U}_j}{\partial y}\mathrm{d}y=\mathrm{d}\mathscr{U}_j|_{\mathscr{L}}\ (j=1,2), \qquad (15)$$

如果由(14)式和(15)式所决定的关于$\frac{\partial \mathscr{U}_j}{\partial x},\frac{\partial \mathscr{U}_j}{\partial y}$的系数行列式不为零：

$$\Delta=\det|a_{ij}\mathrm{d}y-b_{ij}\mathrm{d}x|\neq 0\ (i,j=1,2),$$

那么由(14)式和(15)式就能唯一确定$\mathscr{L}$上$\mathscr{U}_j(j=1,2)$的所有一阶偏导数。反之，如果

$$\Delta=\det|a_{ij}\mathrm{d}y-b_{ij}\mathrm{d}x|=0\ (i,j=1,2) \qquad (16)$$

时，就不能唯一确定$\mathscr{L}$上关于$\mathscr{U}_j$的所有一阶偏导数。 当曲线$\mathscr{L}$上处处都满足(16)式时，我们就称$\mathscr{L}$是方程(14)式的特征线方程。而称方向$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$为相应的特征方向。这时，$\mathscr{U}_j$在特征线上的值并不能随意给定，它们必须满足一定的关系，称之为特征线上的关系。

如果对于(14)式的解，在某区域中的每一点上(16)式都有两个相异实根，在数学上就称(14)式对于该解是狭义双曲型的，这

时区域中每一点都有两条实的特征线通过。反之，如果对某区域中的每一点，(16)式都不存在实根，则称(14)式对该解在上述区域中是椭圆型的。

下面，我们对前一节的基本方程作具体的讨论。

## 一、应力方程

如在(12)式中取 $\sigma$ 为 $\mathscr{U}_1$，取 $\theta$ 为 $\mathscr{U}_2$，则对应于(14)式的系数矩阵就是

$$a_{ij}=\begin{pmatrix}1 & -2k\cos 2\theta\\ 0 & -2k\sin 2\theta\end{pmatrix},\quad b_{ij}=\begin{pmatrix}0 & -2k\sin 2\theta\\ 1 & 2k\cos 2\theta\end{pmatrix}.$$

相应于(16)式的方程为

$$\begin{vmatrix} y' & (-2k\cos 2\theta)y'+2k\sin 2\theta\\ -1 & (-2k\sin 2\theta)y'-2k\cos 2\theta\end{vmatrix}=0,$$

即有

$$(y')^2+2\operatorname{ctg}2\theta y'-1=0$$

或

$$(y'-\operatorname{tg}\theta)(y'+\operatorname{ctg}\theta)=0,$$

其中 $y'=\dfrac{dy}{dx}$。这说明(12)式是狭义双曲型的，其特征线方程为

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\theta,\quad \frac{dy}{dx}=-\operatorname{ctg}\theta. \tag{17}$$

这两族特征线是相互正交的。

由 $\theta$ 角的定义可知，以上两族特征线就是最大剪应力线，即 $\alpha$ 线和 $\beta$ 线，在塑性力学中又称为滑移线。

在特征线上，$\sigma$ 和 $\theta$ 的值是不能任意变化的，它们要满足特征线上的关系，其表达式可简单推导如下。

现给定两族相互正交的滑移线（特征线）族 $\alpha$ 和 $\beta$，则沿 $\alpha$ 和 $\beta$ 的弧微分可写为

$$\frac{\partial}{\partial s_\alpha} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial s_\beta} = -\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial y}. \tag{18}$$

利用平衡方程(12)式，就有

$$\frac{\partial\sigma}{\partial s_\alpha} = \cos\theta\frac{\partial\sigma}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial\sigma}{\partial y} = 2k\frac{\partial\theta}{\partial s_\alpha},$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial s_\beta} = -\sin\theta\frac{\partial\sigma}{\partial x} + \cos\theta\frac{\partial\sigma}{\partial y} = -2k\frac{\partial\theta}{\partial s_\beta}.$$

因此，特征线上的关系为

$$\frac{\partial}{\partial s_\alpha}(\sigma - 2k\theta) = 0,\ \frac{\partial}{\partial s_\beta}(\sigma + 2k\theta) = 0. \tag{19}$$

积分上式可得，

$$\left.\begin{aligned} &\text{沿 } \alpha \text{ 线：} \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta,\ \sigma - 2k\theta = \eta = \text{const};\\ &\text{沿 } \beta \text{ 线：} \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg}\theta,\ \sigma + 2k\theta = \xi = \text{const}. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

上式相当于在滑移线 $\alpha$ 和 $\beta$ 上的平衡方程，它表示了沿 $\alpha$ 线和 $\beta$ 线关于 $\sigma$ 和 $\theta$ 的变化规律。如果事先已知这两族滑移线的形状，即 $\theta$ 值是已知的，由上式就可得到 $\sigma$ 沿 $\alpha$ 线和 $\beta$ 线的变化规律。

## 二、速度方程

再来讨论(13)式，如取 $v_x$ 为 $\mathscr{Y}_1$，取 $v_y = \mathscr{Y}_2$，则对应于(14)式的系数矩阵为

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \operatorname{tg}2\theta \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad b_{ij} = \begin{pmatrix} \operatorname{tg}2\theta & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

相应的特征线方程可由(16)式求得，即由

$$\begin{vmatrix} y' - \operatorname{tg} 2\theta & (\operatorname{tg}2\theta)y' + 1 \\ y' & -1 \end{vmatrix} = 0$$

可得

$$(y')^2 + 2\operatorname{ctg} 2\theta y' - 1 = 0.$$

于是，关于速度的特征线方程仍然为

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta, \quad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg}\theta.$$

它与(17)式完全相同，即与滑移线是完全重合的。这表明，最大剪应变率的方向与最大剪应力的方向是一致的。如果注意到(13)式和(3)式（或(5)式）的等价性，这一点是十分显然的。

关于速度的特征线上的关系也可类似地导出，但为了突出方程的力学意义，我们准备从稍微不同的角度来进行讨论①。

如令 $i_\alpha$ 为 $\alpha$ 线的单位切向量，$i_\beta$ 为 $\beta$ 线的单位切向量，则 $\{i_\alpha, i_\beta\}$ 将构成滑移线上的局部直角标架，它与原直角坐标系$(x, y)$中固定标架$\{i_x, i_y\}$之间的关系为：

$$\begin{cases} i_\alpha = \cos\theta i_x + \sin\theta i_y, \\ i_\beta = -\sin\theta i_x + \cos\theta i_y, \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} i_x = \cos\theta i_\alpha - \sin\theta i_\beta, \\ i_y = \sin\theta i_\alpha + \cos\theta i_\beta. \end{cases} \tag{21}$$

因为$\{i_\alpha, i_\beta\}$是活动标架，其弧微分可利用(18)式而写为

$$\frac{\partial i_\alpha}{\partial s_\alpha} = \frac{\partial\theta}{\partial s_\alpha} i_\beta, \quad \frac{\partial i_\beta}{\partial s_\alpha} = -\frac{\partial\theta}{\partial s_\alpha} i_\alpha,$$

$$\frac{\partial i_\alpha}{\partial s_\beta} = \frac{\partial\theta}{\partial s_\beta} i_\beta, \quad \frac{\partial i_\beta}{\partial s_\alpha} = -\frac{\partial\theta}{\partial s_\beta} i_\alpha. \tag{22}$$

---

① 黄筑平，《力学与实践》，1983年第 6 期，51—52。

所以，当速度 $v$ 在$\{i_\alpha, i_\beta\}$上作分解时：

$$v = v_\alpha i_\alpha + v_\beta i_\beta,$$

就有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial s_\alpha} &= \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial s_\alpha} - v_\beta \frac{\partial \theta}{\partial s_\alpha}\right) i_\alpha + \left(\frac{\partial v_\beta}{\partial s_\alpha} + v_\alpha \frac{\partial \theta}{\partial s_\alpha}\right) i_\beta \\ \frac{\partial v}{\partial s_\beta} &= \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial s_\beta} - v_\beta \frac{\partial \theta}{\partial s_\beta}\right) i_\alpha + \left(\frac{\partial v_\beta}{\partial s_\beta} + v_\alpha \frac{\partial \theta}{\partial s_\beta}\right) i_\beta\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

于是，应变率张量在局部标架$\{i_\alpha, i_\beta\}$中的分量应写为①

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\varepsilon}_{\alpha\alpha} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial s_\alpha} - v_\beta \frac{\partial \theta}{\partial s_\alpha}, \dot{\varepsilon}_{\beta\beta} = \frac{\partial v_\beta}{\partial s_\beta} + v_\alpha \frac{\partial \theta}{\partial s_\beta}, \\ &\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial s_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial s_\alpha} + v_\alpha \frac{\partial \theta}{\partial s_\alpha} - v_\beta \frac{\partial \theta}{\partial s_\beta}\right).\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

注意到 $s_{\alpha\alpha} = s_{\beta\beta} = 0$， $s_{\alpha\beta} = k$， Levy-Mises 关系(即(3)式) 可在局部标架$\{i_\alpha, i_\beta\}$中表示为如下的矩阵形式

$$\begin{pmatrix}\dot{\varepsilon}_{\alpha\alpha} & \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} \\ \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} & \dot{\varepsilon}_{\beta\beta}\end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix}0 & k \\ k & 0\end{pmatrix} \quad (\lambda \geqslant 0). \tag{25}$$

故有

$$\left.\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{\alpha\alpha} &= \frac{\partial v_\alpha}{\partial s_\alpha} - v_\beta \frac{\partial \theta}{\partial s_\alpha} = 0, \\ \dot{\varepsilon}_{\beta\beta} &= \frac{\partial v_\beta}{\partial s_\beta} + v_\alpha \frac{\partial \theta}{\partial s_\beta} = 0\end{aligned}\right. \tag{26}$$

和

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial s_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial s_\alpha} + v_\alpha \frac{\partial \theta}{\partial s_\alpha} - v_\beta \frac{\partial \theta}{\partial s_\beta}\right) \geqslant 0. \tag{27}$$

(26)式就是关于速度的特征线上的关系，又称为 Geiringer 关系。它表示沿滑移线方向的正应变率应等于零，即在该方向上没有相对的伸长或缩短。(26)式也可写为

① 以下各式中，对重复指标$\alpha$或$\beta$不求和。

$$\left.\begin{aligned} &\text{沿 } \alpha \text{ 线}, && \mathrm{d}v_\alpha - v_\beta \mathrm{d}\theta = 0, \\ &\text{沿 } \beta \text{ 线}, && \mathrm{d}v_\beta + v_\alpha \mathrm{d}\theta = 0. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

(27)式则表示了塑性区内剪应变率与剪应力方向一致的条件，即要求塑性耗散功率非负或 $\lambda \geqslant 0$。它在校核速度场时是十 分 有用的。

## §6.3 边 界 条 件

现讨论塑性区内以 $\sigma, \theta$ 为未知函数的应 力 边 界 条 件。设应力边界 $S_T$ 上的 单位法向量和单位切向量分别为 $n$ 和 $t$，则在局部标架$\{n, t\}$中，边界上的法向正应力 $\sigma_n$ 和边界上的剪应力 $\tau_{nt}$ 可由边界条件给出。假定由 $x$ 轴反时针旋转到 $n$ 方向的转角为 $\psi$，那么，由 $n$ 到滑移线 $\alpha$ 切向的夹角为$\theta - \psi$(见图3)。故(10)式可在局部标架$\{n, t\}$中写为

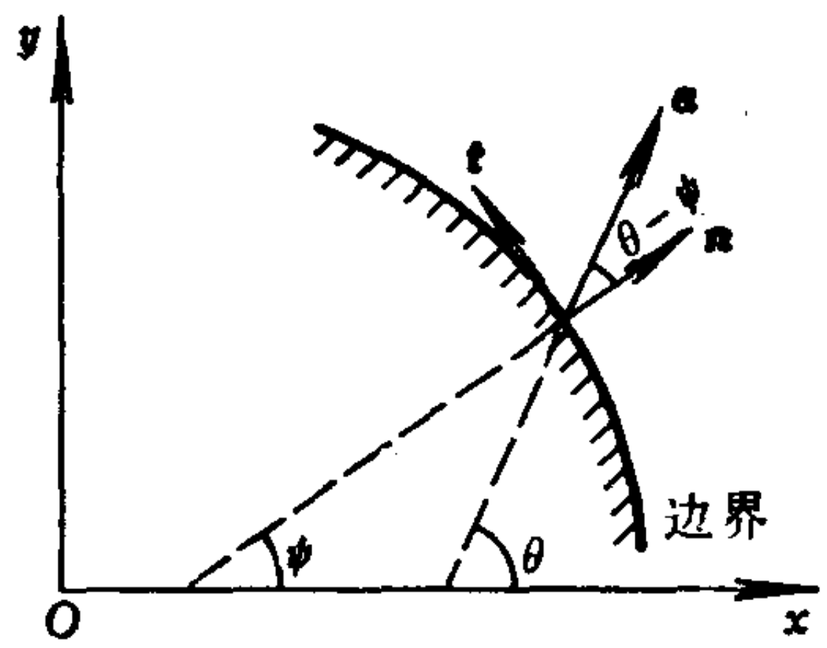


图 3

$$\begin{cases} \sigma_n = \sigma - k \sin 2(\theta - \psi), \\ \sigma_t = \sigma + k \sin\ 2(\theta - \psi), \\ \tau_{nt} = k \cos 2(\theta - \psi), \end{cases} \tag{29}$$

其中 $\sigma_t$ 为边界上的切向正应力。由于 $\psi$ 是给定的，故由上式 可解出：

$$\begin{aligned} &\sigma = \sigma_n + k \sin 2(\theta - \psi), \\ &\theta = \psi \pm \frac{1}{2} \cos^{-1}\left(\frac{\tau_{nt}}{k}\right) + m\pi, \end{aligned} \tag{30}$$

其中 $\cos^{-1}$ 取主值，$m$ 取 0 或 1。上式对应于$(\sigma, \theta)$的两组解，其中一组解在(30)式第二式右端第二项前取正号，而另一组解则在

(30)式第二式右端第二项前取负号。这一事实可由图 4 来加以说明：当在局部标架$\{n,t\}$中给定 $\sigma_n$ 和 $\tau_{nt}$ 后，一般可作两个半径为 $k$ 的莫尔圆来通过同一点$(\sigma_n,\tau_{nt})$，这两个莫尔圆圆心的坐标之差为

$$[\sigma]=2k\sin\left[\cos^{-1}\left(\frac{\tau_{nt}}{k}\right)\right].$$

至于应该选取哪一组解，还要由整个问题的力学性质来决定。由于在边界上的切向正应力为 $\sigma_t=2\sigma-\sigma_n$，故当 $\sigma$ 取不同 值时，

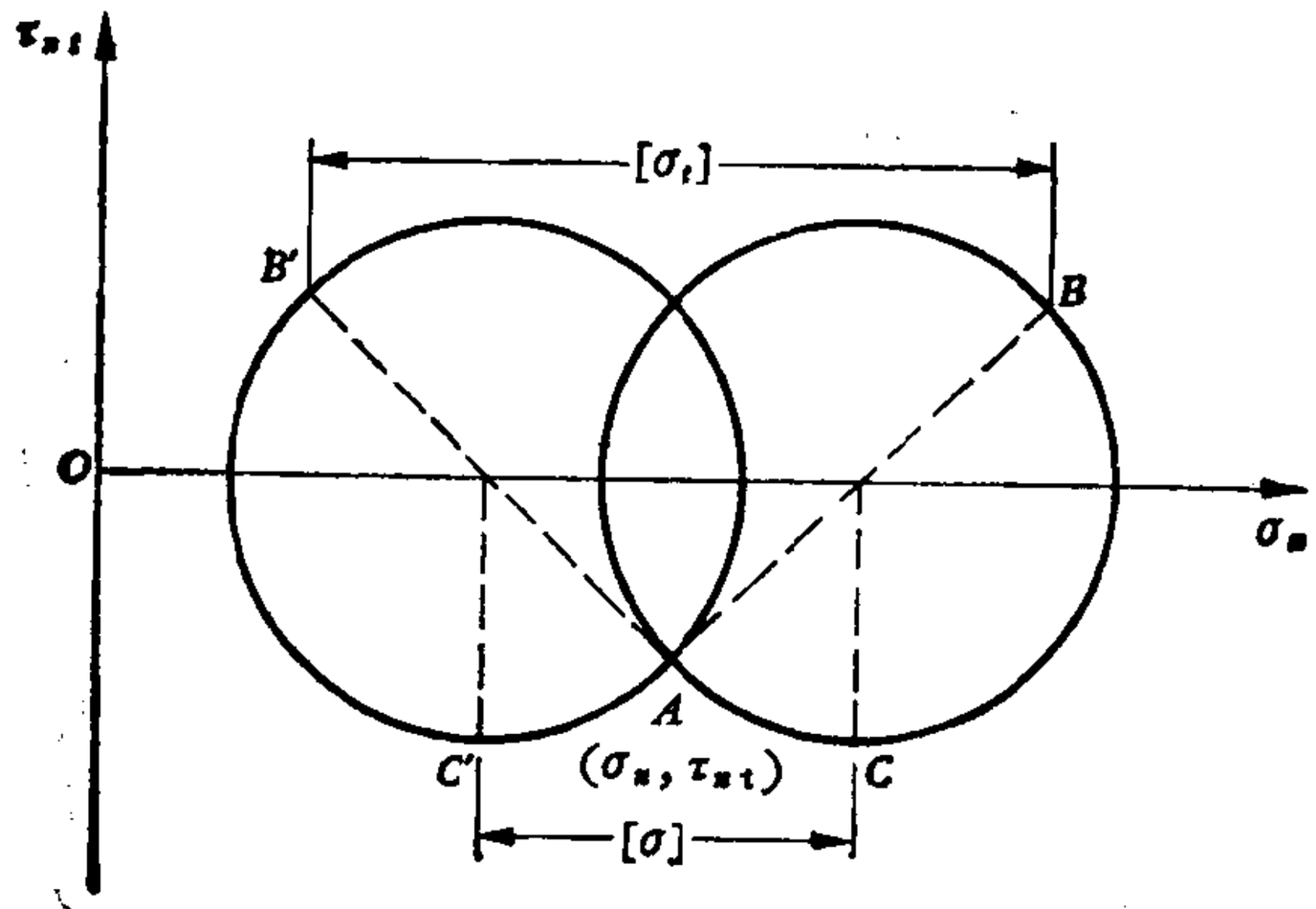



图 4

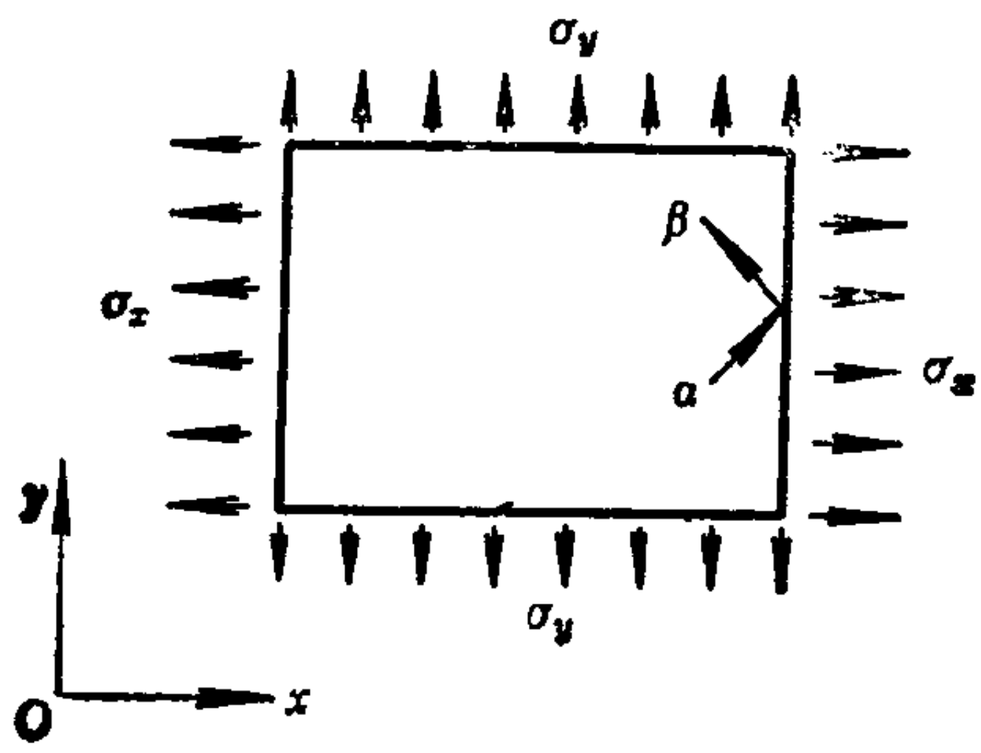



图 5

$\sigma_t$ 也应有不同的值。而 $\sigma_t$ 的大小往往可由问题的性质来确定。

例如，图 5 所示的是一个受双向拉伸的长方柱体，在其左右边界上给定 $\sigma_n=\sigma_x, \tau_{nt}=0$。故由

$$\cos 2(\theta-\psi)=0, \quad \sin 2(\theta-\psi)=\pm 1,$$

可知(30)式第一式为 $\sigma=\sigma_n \pm k$，因此有

$$\sigma_t=\sigma_n \pm 2k。$$

即 $\sigma_t$ 既可取为 $\sigma_1=\sigma_x+2k$，也可取为 $\sigma_2=\sigma_x-2k$。到底应选取哪一个可根据该柱体的上下边界的边条件来确定。若那里的拉应力大于 $\sigma_x$，则 $\sigma_t$ 为大主应力 $\sigma_x+2k$，这对应于 $\sin 2(\theta-\psi)=1$，或 $\theta-\psi=\frac{\pi}{4}$。再由大主应力必指向滑移线$(\alpha,\beta)$一、三象限的约定，便可完全确定边界上 $\alpha$ 线和 $\beta$ 线的方向(如图5，若将(30)式中的 $m=0$改为 $m=1$，则$(\alpha,\beta)$线将同时反一个方向)。若上下边界上的拉应力小于 $\sigma_x$ 时，则 $\sigma_t$ 为小主应力 $\sigma_x-2k$，这对应于$\sin 2(\theta-\psi)=-1$ 或 $\theta-\psi=-\frac{\pi}{4}$，这同样也可确定边界上$(\alpha,\beta)$线的方向。

除应力边条件外，有时我们还会遇到速度边界条件，或者边界上一部分是应力边条件而另一部分是速度边条件的情形。这些问题将准备通过具体实例来加以说明。此外，对于一个理想刚塑性平面应变问题，在其完整提法中还应包括刚-塑性区交界线或者两个塑性区之间的交界线上的连接条件或间断条件。因为这些条件与滑移线和间断线的性质密切有关，所以我们将在下一节中来对此作专门的介绍。

## §6.4 滑移线和间断线的主要性质

滑移线和间断线有许多重要特性，这里只介绍其中最主要的

一些性质。

## 一、滑移线的性质

性质1　若滑移线场已知，则由场中某一点的平均应力 $\sigma$ 值就可求出任意一点的 $\sigma$ 值。

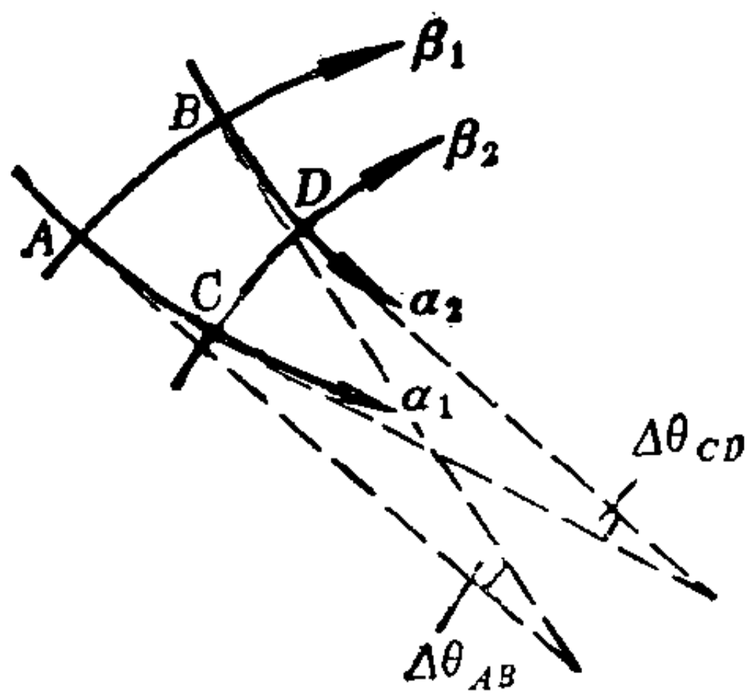



图　6

证明　由于滑移线场已知，故场中每一点的 $\theta$ 值是已知的。现假定 $A$ 点的 $\sigma$ 值（即 $\sigma_A$）已经给定（图6），则场中另一点 $D$ 的 $\sigma$ 值（即 $\sigma_D$）也可相应地求出。为此，过 $A$ 点作 $\alpha$ 线和 $\beta$ 线，它们与过 $D$ 点所作的 $\beta$ 线和 $\alpha$ 线分别相交于 $C$ 点和 $B$ 点。

由（20）式可知，沿 $\alpha$ 线 $AC$ 和 $\beta$ 线 $CD$ 分别有

$$\sigma_C-\sigma_A=2k(\theta_C-\theta_A),\quad \sigma_D-\sigma_C=-2k(\theta_D-\theta_C).$$

故得

$$\sigma_D-\sigma_A=2k(2\theta_C-\theta_A-\theta_D). \tag{31}$$

类似地，沿 $\beta$ 线 $AB$ 和 $\alpha$ 线 $BD$ 也可有

$$\sigma_B-\sigma_A=-2k(\theta_B-\theta_A),\quad \sigma_D-\sigma_B=2k(\theta_D-\theta_B).$$

因此，$D$ 点的 $\sigma$ 值也可通过公式

$$\sigma_D-\sigma_A=2k(-2\theta_B+\theta_A+\theta_D) \tag{32}$$

来计算。证讫。

性质2（Hencky 第一定理）　在同族的两滑移线与另一族滑移线的交点上，其切线间的夹角不随另一族滑移线的改变而改变。

证明　设 $\alpha$ 线族中的两滑移线与某一 $\beta$ 线相交于 $A$ 点和 $B$ 点（图6），过这两点分别作 $\alpha$ 线的切线，其间的夹角为 $\Delta\theta_{AB}=\theta_A-\theta_B$。那么，当以上的两条 $\alpha$ 滑移线与另一 $\beta$ 线相交于 $C$ 点和 $D$ 点时，其切线间的夹角应为 $\Delta\theta_{CD}=\theta_C-\theta_D$。联立（31）式和（32）式，就得：

$$\theta_A - \theta_B = \theta_C - \theta_D。 \tag{33}$$

这正是定理所要证明的。

**推论1** 若一族滑移线中有一段直线，则同族滑移线的其它相应各线段也都是直线。例如，若图6中的$AC$为直线段时，$\alpha_1$线的切线沿$AC$不变：$\theta_A = \theta_C$，故由(33)式可知$\theta_B = \theta_D$，$\alpha_2$线的切线沿$BD$也不变，即$BD$也是直线段。

**推论2** 在直的滑移线上应力为常数。

**证明** 因为沿直滑移线的$\theta$值不变，故由（20）式可知其上的$\sigma$值也是不变的。再由（10）式，可见在直滑移线上应力$\sigma_x$，$\sigma_y$,$\sigma_{xy}$为常数。

以上两个推论说明，如果一族滑移线中有一段直线，则沿同族滑移线的每条相应直线段上的应力将保持常数。这样的塑性区称为简单应力区。如果在某一区域内两族滑移线都是直线，则在整个区域内应力将为常数，这样的塑性区称为均匀应力区。

**性质3（Hencky第二定理）** 如果某族的一条滑移线与另一族滑移线相交，则在交点处另一族滑移线的曲率半径改变量等于沿该条滑移线所移动的距离。其表达式可写为

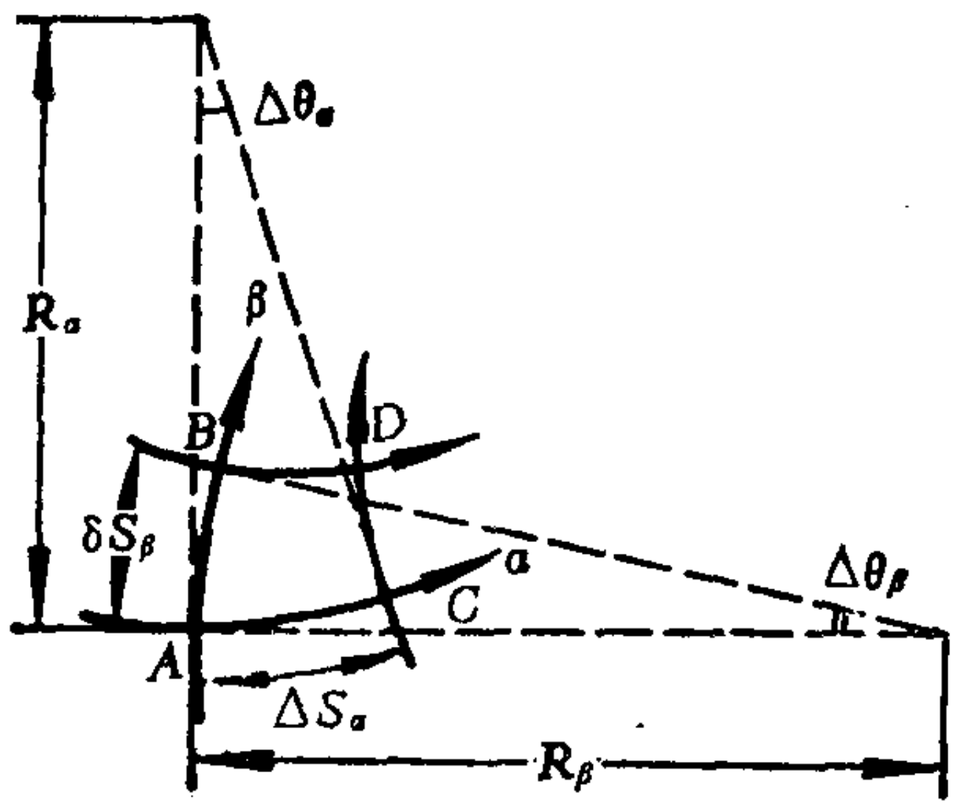



图 7

$$\frac{\partial R_\alpha}{\partial s_\beta} = -1, \quad \frac{\partial R_\beta}{\partial s_\alpha} = -1, \tag{34}$$

其中 $\alpha$ 线和 $\beta$ 线的曲率半径 $R_\alpha$ 和 $R_\beta$ 分别定义为

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{\partial \theta}{\partial s_\alpha}, \qquad \frac{1}{R_\beta} = -\frac{\partial \theta}{\partial s_\beta}. \tag{35}$$

即规定当 $\alpha$ 线（或 $\beta$ 线）的曲率中心位于 $\beta$ 线（或 $\alpha$ 线）增加方向的一侧时，$R_\alpha$（或 $R_\beta$）取为正值。

证明　如图 7 所示，现取定$\beta$族中两条十分邻近的滑移线$AB$与$CD$，它们与$\alpha$线相交的弧元为 $\Delta s_\alpha$。由图中的几何关系，可将该弧元两端点$\theta$值之差近似写为：

$$\Delta\theta_\alpha = \frac{\Delta\theta_\alpha \delta s_\beta}{\delta s_\beta} = \frac{\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{BD}}{\overset{\frown}{AB}} = -\frac{\partial(\Delta s_\alpha)}{\partial s_\beta},$$

其中 $\delta s_\beta$ 表示沿 $\beta$ 线的弧微分。将（35）式中 $\Delta s_\alpha = R_\alpha \Delta\theta_\alpha$ 代入上式中并利用Hencky 第一定理：$\dfrac{\partial(\Delta\theta_\alpha)}{\partial s_\beta} = 0$，

就有

$$\Delta\theta_\alpha = -\Delta\theta_\alpha\left(\frac{\partial R_\alpha}{\partial s_\beta}\right),$$

于是（34）式第一式得证。

类似地可证（34）式第二式。

如将（35）式表示为：

沿 $\alpha$ 线，$\mathrm{d}s_\alpha = R_\alpha \mathrm{d}\theta$，

沿 $\beta$ 线，$\mathrm{d}s_\beta = -R_\beta \mathrm{d}\theta$，

则（34）式还可写为：

$$\left.\begin{aligned} &\text{沿 } \alpha \text{ 线，} \mathrm{d}R_\beta + R_\alpha \mathrm{d}\theta = 0, \\ &\text{沿 } \beta \text{ 线，} \mathrm{d}R_\alpha - R_\beta \mathrm{d}\theta = 0. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

**推论1** $\beta$族（或$\alpha$族）滑移线在与某一条$\alpha$线（或$\beta$线）交点处的曲率中心的轨迹形成$\alpha$线（或$\beta$线）的渐伸线（如图8中的$PQ$）。

这可认为是Hencky第二定理的另一种表述。当沿$\alpha$线移动时，$\beta$族滑移线的曲率半径所减小的数值正好等于沿该$\alpha$线移动的距离，故其曲率中心形成了一条渐伸线。

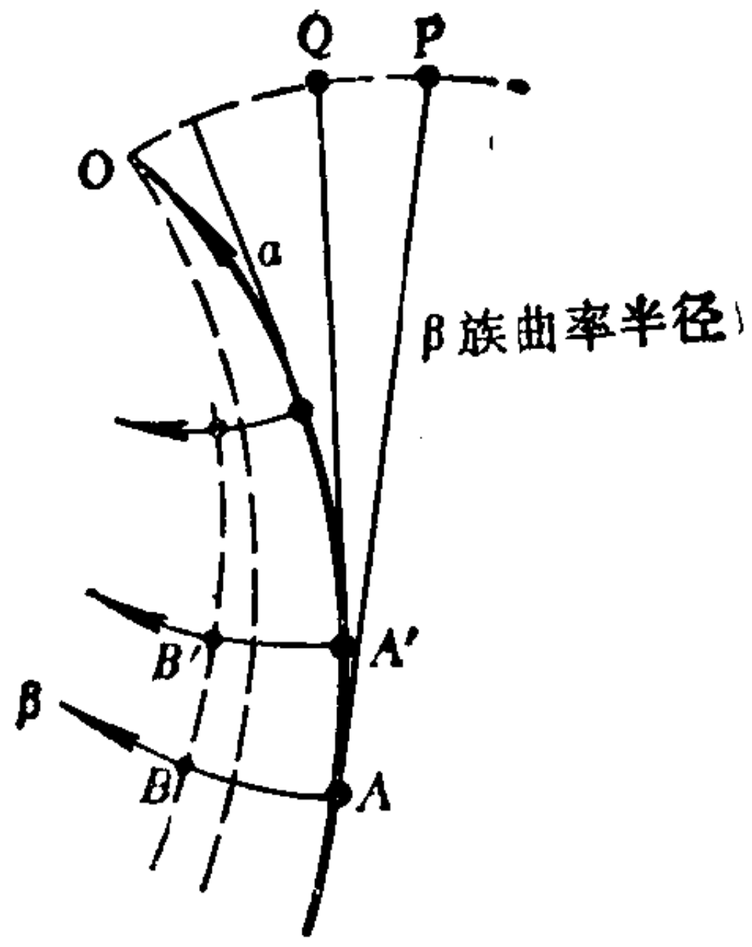



图 8

**推论2** 同族滑移线的凹向相同。如在$\alpha$线上沿$\beta$族线的凹侧移动，$\beta$族线的曲率半径将会减小。当曲率半径为零时，$\alpha$族滑移线相交，交点的轨迹形成$\alpha$族滑移线的包络线。

**推论3** 若$\beta$族滑移线有一段直线，则被$\alpha$族滑移线所截的相应各条$\beta$族线段不仅是直线段，而且长度也相等。

## 二、间断线的性质

前面已经提到，刚-塑性区交界线或者两个塑性区的交界线上的连续条件是与滑移线和间断线的性质密切相关的。下面，我们从应力间断线开始来讨论有关的这些问题。

现假定$\Sigma$为应力（或速度）的间断线，其两侧都为塑性区，即都满足屈服条件。类似于§6.3中的做法，可作$\Sigma$的单位法向量$n$和单位切向量$t$，$x$轴反时针旋转到$n$方向的转角为$\psi$。这时，在局部标架$\{n,t\}$中的应力分量可由$(\sigma_n,\sigma_t,\tau_{nt})$表示。为了区分$\Sigma$两侧不同的塑性区，我们将在应力分量的右上角分别标以“+”和“-”。于是，屈服条件（7）式可写成：

$$(\sigma_n^+-\sigma_t^+)^2+4(\tau_{nt}^+)^2=4k^2,$$

$$(\sigma_n^- - \sigma_t^-)^2 + 4(\tau_{nt}^-)^2 = 4k^2.$$

注意到 $\Sigma$ 两侧法向正应力和剪应力的连续性，即

$$[\![\sigma_n]\!] = [\![\tau_{nt}]\!] = 0,$$

或

$$\sigma_n^+ = \sigma_n^- = \sigma_n, \quad \tau_{nt}^+ = \tau_{nt}^- = \tau_{nt},$$

就有

$$\sigma_t^{\pm} = \sigma_n \pm 2\sqrt{k^2 - \tau_{nt}^2}, \tag{37}$$

因此，切向正应力的间断量可写为

$$[\![\sigma_t]\!] = \sigma_t^+ - \sigma_t^- = 4\sqrt{k^2 - \tau_{nt}^2}, \tag{38}$$

由此可见，$\Sigma$为应力间断线，即$[\![\sigma_t]\!] \neq 0$ 的充要条件为$|\tau_{nt}| < k$。

**性质1** 滑移线一定不是应力间断线。反之，应力间断线也一定不是滑移线。

因为在滑移线上 $|\tau_{nt}| = k$，所以（38）式中 $[\![\sigma_t]\!] = 0$。说明在滑移线上应力不可能间断。反之，在应力间断线上$|\tau_{nt}| < k$，故它一定不是滑移线。

**性质2** 若沿某滑移线其曲率半径发生跳跃，则相应的平均应力的微商也要发生跳跃。

**证明** 由（19）式和（35）式，可知沿 $\alpha$ 线有：

$$\frac{\partial \sigma}{\partial s_\alpha} = 2k\frac{\partial \theta}{\partial s_\alpha} = 2k\left(\frac{1}{R_\alpha}\right),$$

故得

$$\left[\!\left[\frac{\partial \sigma}{\partial s_\alpha}\right]\!\right] = 2k\left[\!\left[\frac{1}{R_\alpha}\right]\!\right].$$

因此，当 $\alpha$ 线的曲率半径有间断时，$\sigma$ 沿 $\alpha$ 线的微商也要产生间断。对于 $\beta$ 线也可作类似的讨论。

**性质3** 速度间断线一定是滑移线或滑移线的包络线，而且切向速度分量的间断值沿该滑移线是不变的。

**证明** 速度的间断只可能是速度切向分量的间断，即有

$[\![v_n]\!]=0$，$[\![v_t]\!]\neq 0$。

现将以上的速度间断线看作是厚度为 $h$ 的薄层在$h\to 0$的极限情形。由于薄层内 $\left|\frac{\partial v_t}{\partial n}\right|$ 趋于无穷大，故在相对于间断线的局部标架$\{n,t\}$中应变率张量的$\dot{\varepsilon}_{nt}$分量要比其它分量 $\dot{\varepsilon}_{nn}$ 和 $\dot{\varepsilon}_{tt}$ 大一个数量级，即

$$\dot{\varepsilon}_{nn}:\dot{\varepsilon}_{tt}:\dot{\varepsilon}_{nt}=0:0:1。$$

再由 Levy-Mises 关系并注意到 $\lambda\geqslant 0$ 可知有

$$s_{nn}=s_{tt}=0,\quad \tau_{nt}=\begin{cases} k, & 当[\![v_t]\!]>0 \\ -k, & 当[\![v_t]\!]<0。\end{cases}$$

这说明，速度间断线的切向 $t$ 沿滑移线的方向，因此它一定是滑移线或滑移线的包络线。

现设以上的速度间断线为 $\beta$ 族中的某条滑移线，其切向 $t$ 指向 $\beta$ 线的方向，其法向 $n$ 指向 $\alpha$ 线的方向。根据（28）式，

沿$\beta$线的“+”侧，有$\mathrm{d}v_t^+ + v_n^+\mathrm{d}\theta=0$，

沿$\beta$线的“−”侧，有$\mathrm{d}v_t^- + v_n^-\mathrm{d}\theta=0$。

再由 $v_n^+=v_n^-=v_n$，可得 $\mathrm{d}v_t^+-\mathrm{d}v_t^-=0$。这说明切向速度间断量 $v_t^+-v_t^-=[\![v_t]\!]$沿$\beta$线是不变的。证讫。

**推论** 在应力间断线上速度不可能间断。

这一推论可由关于间断线的性质 1 和性质 3 得到。

**性质4** 应力间断线两侧的应变率都为零，它可理解为两个塑性区之间的刚性区收缩时的极限情形，因而是不可伸长的。

**证明** 仍在应力间断线 $\Sigma$ 上建立局部标架$\{n,t\}$。类似于对（24）式的讨论，便可写出相对于该局部标架的应变率张量的各分量。例如，有

$$\dot{\varepsilon}_{tt}=\frac{\partial v_t}{\partial t}+v_n\frac{\partial \psi}{\partial t},$$

上式中的 $\psi$ 为 $x$ 轴到 $n$ 方向的夹角。

由于应力间断线上速度不可能间断，即$[\![v_n]\!]=[\![v_t]\!]=0$，故在$\Sigma$两侧$\dot{\varepsilon}_{tt}$的间断量为零：即

$$[\![\dot{\varepsilon}_{tt}]\!]=\left[\!\left[\frac{\partial v_t}{\partial t}\right]\!\right]+\left[\!\left[v_n\frac{\partial \psi}{\partial t}\right]\!\right]=0.$$

利用Levy-Mises关系，就有$[\![\lambda s_{tt}]\!]=0$，其中

$$s_{tt}=\sigma_t-\sigma=\sigma_t-\frac{1}{2}(\sigma_n+\sigma_t)=\frac{1}{2}(\sigma_t-\sigma_n).$$

注意到（37）式，便有

$$s_{tt}^{+}=\sqrt{k^2-\tau_{nt}^2},\quad s_{tt}^{-}=-\sqrt{k^2-\tau_{nt}^2}=-s_{tt}^{+}.$$

但应力间断线要求$|\tau_{nt}|<k$，即$s_{tt}^{+}\neq 0$，故由

$$[\![\lambda s_{tt}]\!]=\lambda^{+}s_{tt}^{+}-\lambda^{-}s_{tt}^{-}=(\lambda^{+}+\lambda^{-})s_{tt}^{+}=0$$

可知必然有$\lambda^{+}=-\lambda^{-}$。由于$\lambda^{+},\lambda^{-}$都不可能取负值，故得$\lambda^{+}=\lambda^{-}=0$。这表明应变率张量

$$\begin{pmatrix}\dot{\varepsilon}_{nn},\dot{\varepsilon}_{nt}\\ \dot{\varepsilon}_{nt},\dot{\varepsilon}_{tt}\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}s_{nn},\tau_{nt}\\ \tau_{nt},s_{tt}\end{pmatrix}$$

在应力间断线$\Sigma$两侧为零。证讫。

由以上讨论我们不难给出关于刚-塑性区交界线和两个塑性区的交界线的性质。

**性质5** 刚-塑性区的交界线一定是滑移线或滑移线的包络线。

**证明** 若不计整体的刚体运动，可认为刚性区内的速度全为零。而在塑性区内的速度可假定不全为零（否则它也有一部分成为刚性区）。现用反证法来证明刚-塑性区交界线一定沿滑移线方向。如果上述交界线的切向处处不与滑移线方向重合，那么由性质3可知交界线上的速度一定连续，即速度为零。因此，对于塑性区来说这构成了一个关于（28）式的具有零边界值的Cauchy问题（关于Cauchy问题的讨论将在下一节中给出）。由此可知这部分塑性区内的速度全为零，但这与假定是矛盾的。

其次，当刚-塑性区交界线为$\alpha$族的某一滑移线时，在塑性区的一侧，(28) 式就可写为

$$(\mathrm{d}v_\alpha - v_\beta \mathrm{d}\theta)\,|_{\Sigma^+} = 0,$$

其中$v_\beta$是交界线的法向速度分量。故由$[\![v_\beta]\!] = 0$或$v_\beta^+ = 0$，可得

$$\mathrm{d}v_\alpha\,|_{\Sigma^+} = 0.$$

即在塑性区一侧，交界线上的切向速度分量保持为常值：

$$v_t^+ = [\![v_\alpha]\!] = \mathrm{const}.$$

**性质6** 两个塑性区的交界线或者是滑移线，或者是应力间断线。当交界线是滑移线时，这两个塑性区可以不加区分；当交界线是应力间断线时，其两侧的滑移线与应力间断线有相同的夹角。

**证明** 现在在两塑性区的交界线上建立局部标架$\{n,t\}$，根据对 (37)式的讨论可知，如在两个塑性区的交界线上$|\tau_{nt}| = k$，则该交界线就是滑移线。这时应力是连续的。如在两个塑性区的交界线上$|\tau_{nt}| < k$，则该交界线就是应力间断线，而切向正应力的间断量由 (38) 式表示。

在应力间断线的局部标架$\{n,t\}$中，各应力分量可类似于 (29) 式写为

$$\sigma_n = \sigma - k\sin 2(\theta - \psi),$$

$$\sigma_t = \sigma + k\sin 2(\theta - \psi),$$

$$\tau_{nt} = k\cos 2(\theta - \psi),$$

故由$\sigma_n$和$\tau_{nt}$的连续性，可得

$$\sigma^+ - k\sin 2(\theta^+ - \psi) = \sigma^- - k\sin 2(\theta^- - \psi),$$

和

$$\cos 2(\theta^+ - \psi) = \cos 2(\theta^- - \psi).$$

这要求

$$\theta^+ - \psi = \pm(\theta^- - \psi) + m\pi \quad (m = 0, 1).$$

但上式右端第一项取正号时应力是连续的。故应取负号，即有

$$\omega = \theta^+ - \psi = \begin{cases} -(\theta^- - \psi) \quad (\text{当} m = 0), \\ \pi - (\theta^- - \psi) \quad (\text{当} m = 1), \end{cases} \tag{39}$$

和

$$[\![\sigma]\!] = \sigma^+ - \sigma^- = 2k \sin 2(\theta^+ - \psi). \tag{40}$$

这说明应力间断线是两侧同名滑移线的角平分线（见图9）。

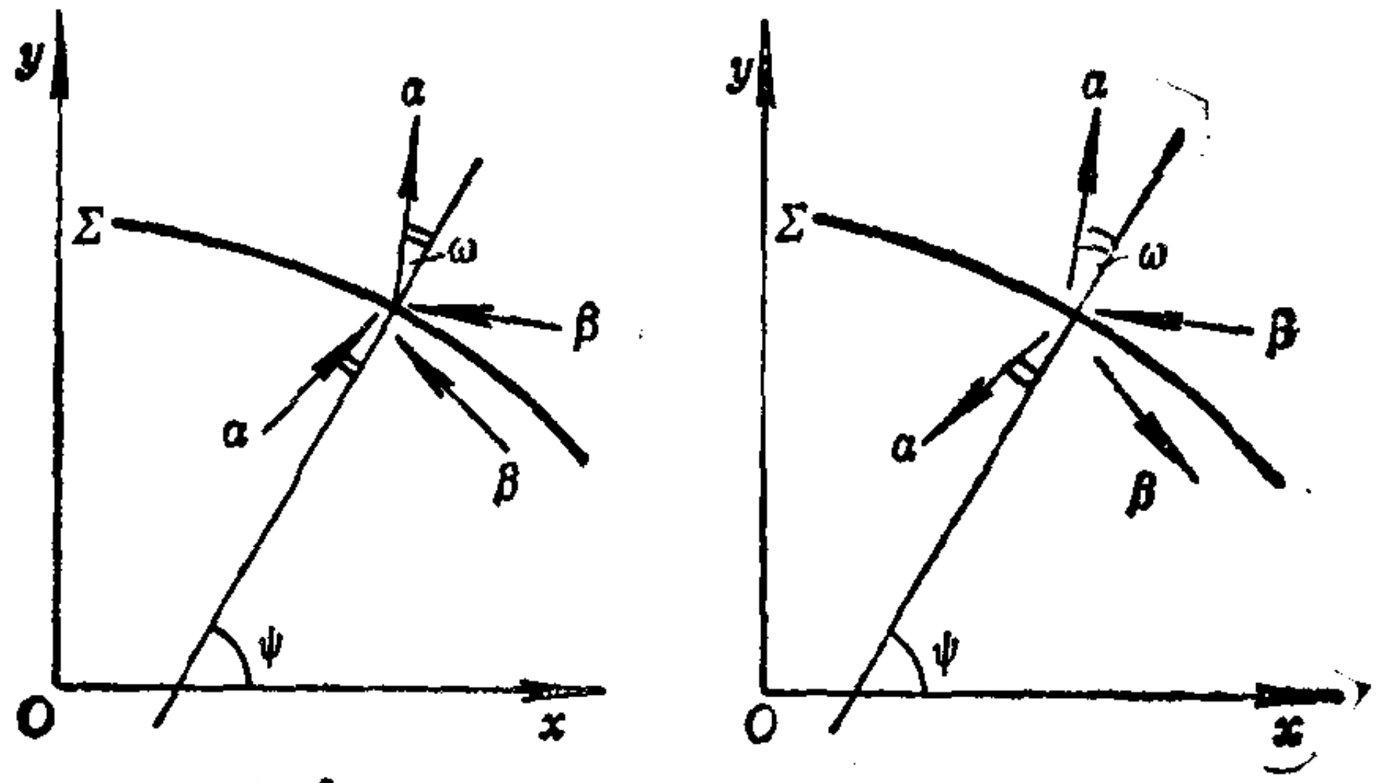



图 9

## §6.5 基本边值问题及其数值积分

对于前面所讨论的双曲型方程(12)式和(13)式，通常可将它们归结为相应的边值问题来进行求解。下面将根据不同的边界条件来分别加以讨论。

### 一、关于应力场的基本边值问题

(1) 应力场的第一边值问题（Riemann问题）

若已知两相交滑移线$OA$和$OB$上的$\sigma$值（当已知滑移线时，$\theta$值也就自然给定了。此外，所给的$\sigma$值和$\theta$值在$OA$和$OB$上还应满足特征线上的关系(19)式），则可求出与另两条滑移线$AC$和$BC$所围区域$OABC$内的$\sigma$值和$\theta$值（图10）。

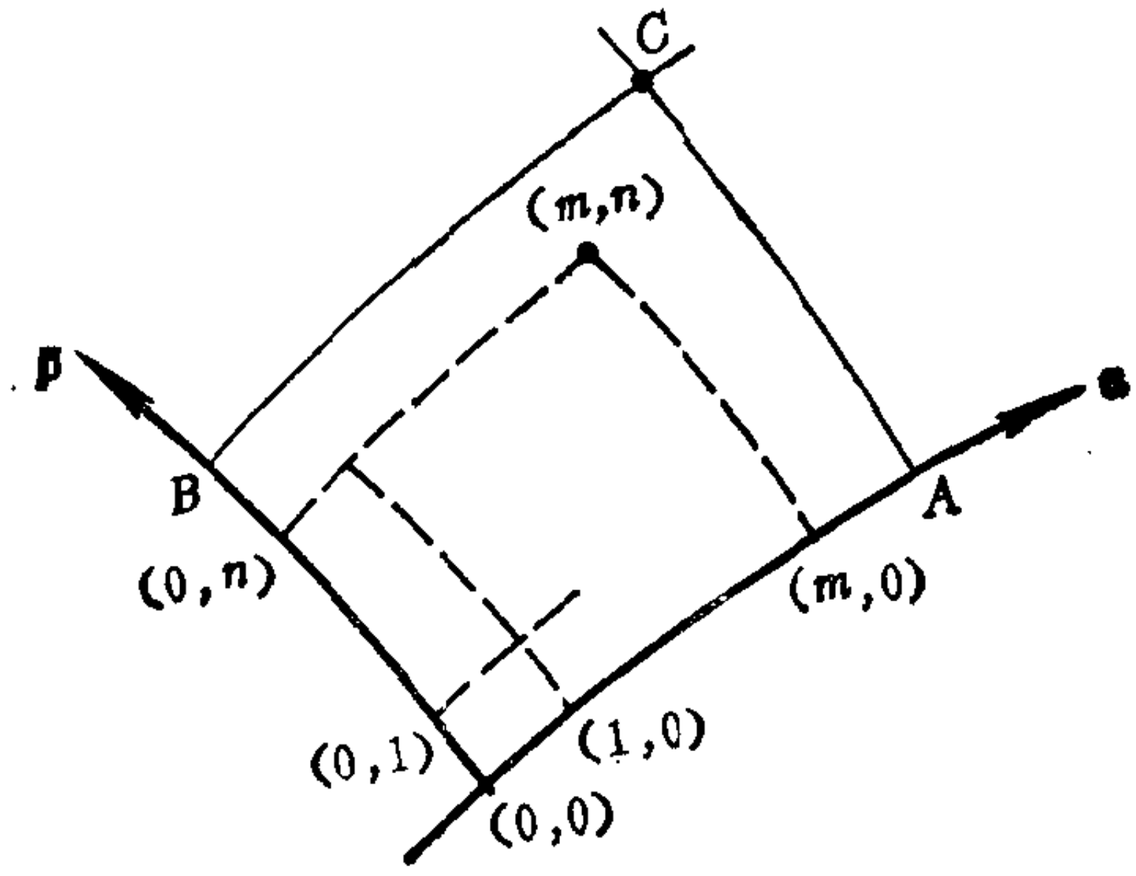



图 10

如能作出滑移线网，也就相当于求得了在区域 $OABC$ 内各点的$\theta$值。为此，可将 $OA$ 和 $OB$ 分别用点 $(1,0)$，$(2,0)$，…，$(m,0)$，…，和点 $(0,1)$，$(0,2)$，…，$(0,n)$，…，分成许多小段。用点 $(m,n)$ 表示分别通过点 $(m,0)$ 和 $(0,n)$ 的两条滑移线的交点。由 Hencky 第一定理（(33) 式）和滑移线上的关系 (20) 式，可得到如下的递推关系：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{m,n} &= \sigma_{m,n-1} + \sigma_{m-1,n} - \sigma_{m-1,n-1},\\ \theta_{m,n} &= \theta_{m,n-1} + \theta_{n-1,n} - \theta_{m-1,n-1}.\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

于是，问题的关键在于如何来计算滑移线网中各节点的坐标值。这里只介绍一种确定节点坐标值的方法。

滑移线的微分方程 (17) 式为：

沿 $\alpha$ 线 $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta$，沿 $\beta$ 线 $\dfrac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg}\theta$。

将其写为差分形式后，有

$$\left.\begin{aligned}y_{m,n} - y_{m-1,n} &= (x_{m,n} - x_{m-1,n})\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(\theta_{m,n} + \theta_{m-1,n})\right]\\ y_{m,n} - y_{m,n-1} &= -(x_{m,n} - x_{m,n-1})\operatorname{ctg}\left[\frac{1}{2}(\theta_{m,n} + \theta_{m,n-1})\right]\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

由于$\theta_{m,n}$的值可由（41）式给出，故（$x_{m,n}$ $y_{m,n}$）可利用以上递推关系逐次求得。因此，当边界$OA$和$OB$上的$\sigma$值和$\theta$值已知时，就可从边界开始，逐次求出区域内任意点（$m,n$）的坐标值（$x_{m,n}$，$y_{m,n}$）以及相应的$\sigma_{m,n}$值和$\theta_{m,n}$值。

如果滑移线$OB$的曲率很大，在极限情形下还可能退化为一点$O$。这时，在某一张角内，一切$\alpha$线都通过$O$点。这样的问题称为退化的Riemann问题（见图11）。

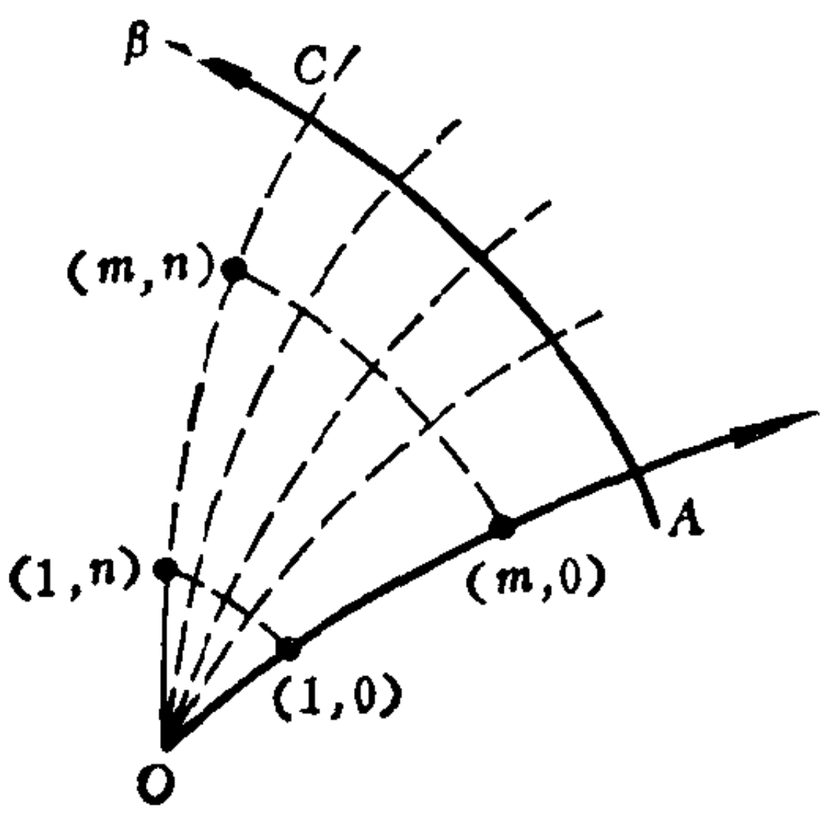



图 11

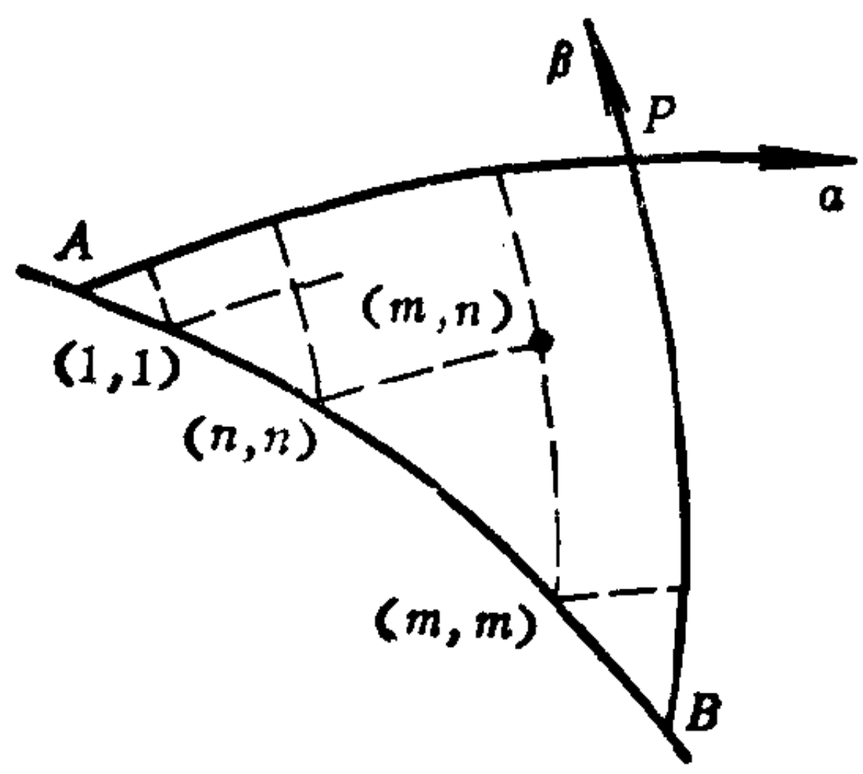



图 12

现将以上的张角分为$\theta_{0,0},\theta_{0,1},\theta_{0,2},\cdots,\theta_{0,n},\cdots$，并以此作为各条$\alpha$线在$O$点的$\theta$值，则仍然可利用上述递推关系来得到一个滑移线网。节点（$m,n$）上的$\theta_{m,n}$可由（41）式给出。不过，在$O$点的$\sigma$值不唯一，故要特别注意。利用关于$\beta$线上的关系（20）式，就有

$$\sigma_{0,0}+2k\theta_{0,0}=\sigma_{0,1}+2k\theta_{0,1}=\cdots=\sigma_{0,n}+2k\theta_{0,n}=\text{const}.$$

其中$\sigma_{0,0}$为$OA$线在$O$点的$\sigma$值，是已知的。故由上式可求得与$\theta_{0,n}$相对应的$\sigma_{0,n}$。再利用（41）式和（42）式，便可得到（$m,n$）点的坐标值和$\sigma_{m,n}$。

（2）应力场的第二边值问题（Cauchy问题）

如果某一光滑曲线 $AB$ 的切向处处不与滑移线方向重合，则当给定$AB$上的 $\sigma$ 值和 $\theta$ 值后，可计算分别由 $A$ 点和 $B$ 点出发的$\alpha$和$\beta$滑移线与$AB$所围的$ABP$区域内的$\sigma$值和$\theta$值（见图12)。

具体计算步骤如下：先将曲线 $AB$ 用分点 $(0,0),(1,1),(2,2),\cdots,(n,n),\cdots,(m,m),\cdots$分成若干小段。过每一分点都可作两条滑移线，由此得到一个滑移线网。节点 $(m,n)$ 处的 $\sigma$ 值和 $\theta$ 值可利用（20）式而写为如下的递推关系：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{m,n}-2k\theta_{m,n}&=\sigma_{n,n}-2k\theta_{n,n},\\ \sigma_{m,n}+2k\theta_{m,n}&=\sigma_{m,m}+2k\theta_{m,m}.\end{aligned}\right\}\qquad(43)$$

由此解出 $\sigma_{m,n}$ 和$\theta_{m,n}$。节点 $(m,n)$ 的坐标值仍可利用以前的方法来计算。

**例1** 如果在一直线边界上给定 $\sigma_n=\text{const}$ 和 $\tau_{nt}=0$，则由（30）式可求得边界上的$\sigma$ 和 $\theta$（其中有两组解)。因为是直线边界，(30）式中的$\psi$为已知常数，所以由$\tau_{nt}=0$可知边界上$\theta=\psi\pm45°$，$\sigma=\sigma_n\pm k$ 也都是常数。这说明：a）边界的切向不与滑移线方向重合，这是一个 Cauchy 问题。b）边界上$\sigma$ 和 $\theta$ 为常值，故由（43）式可知，在相应的求解区域内 $\sigma$ 和 $\theta$ 也与边界值相同且为常值。c）两族滑移线是与边界成45°的直滑移线，以上的求解区域是一个等腰直角三角形的均匀应力区。

**例2** 现有一个半径为 $a$ 的圆形边界，在边界上所给定的正应力是均匀的（设为$-p$)，而剪应力为零。则相应的滑移线是两族对数螺线（图13)。

由于这是一个轴对称问题，故可在极坐标 $(r,\varphi)$中来讨论。这时有$\tau_{r\varphi}=0$，而$\sigma_r$ 和 $\sigma_\varphi$ 是主应力。可见在每一点上，滑移线的方向与半径 $r$ 的交角都是45°（图14)。于是可写出关于滑移线的微分方程：

$$\pm r\mathrm{d}\varphi=\mathrm{d}r,$$

积分上式，就有

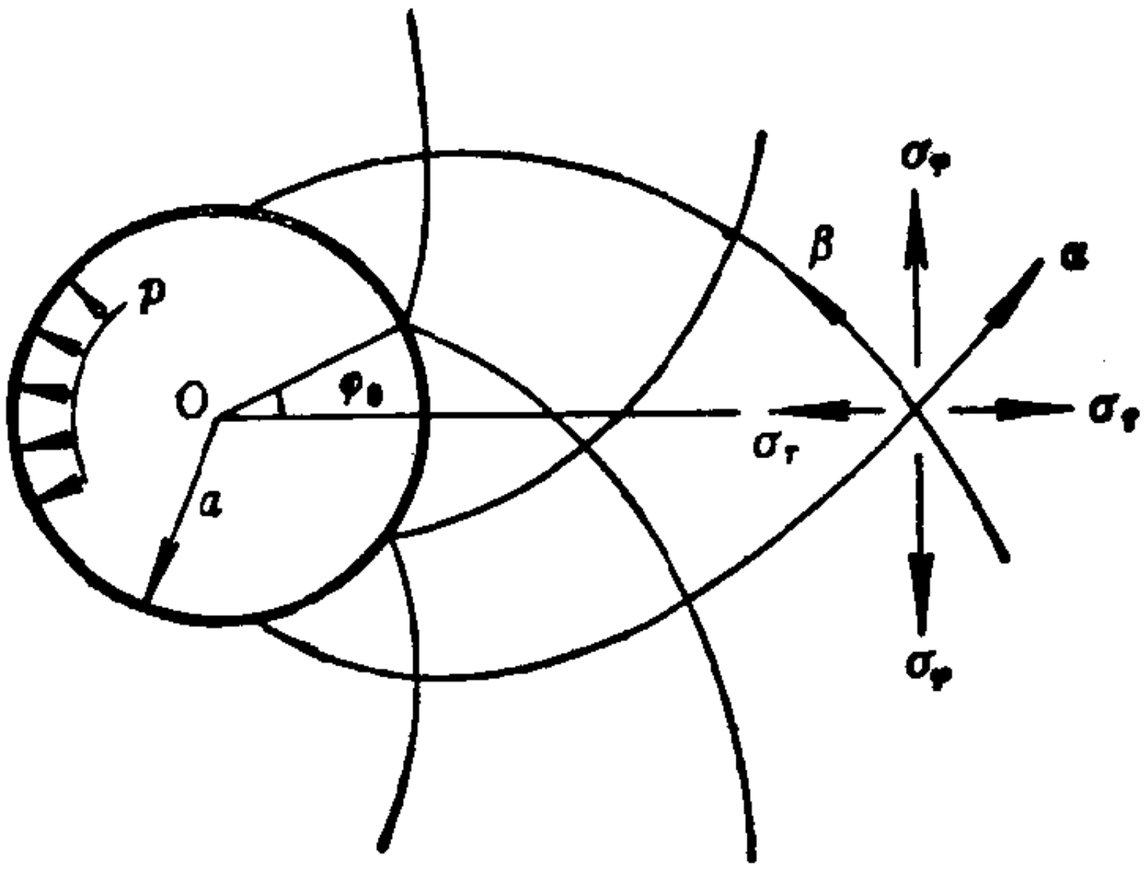



图 13

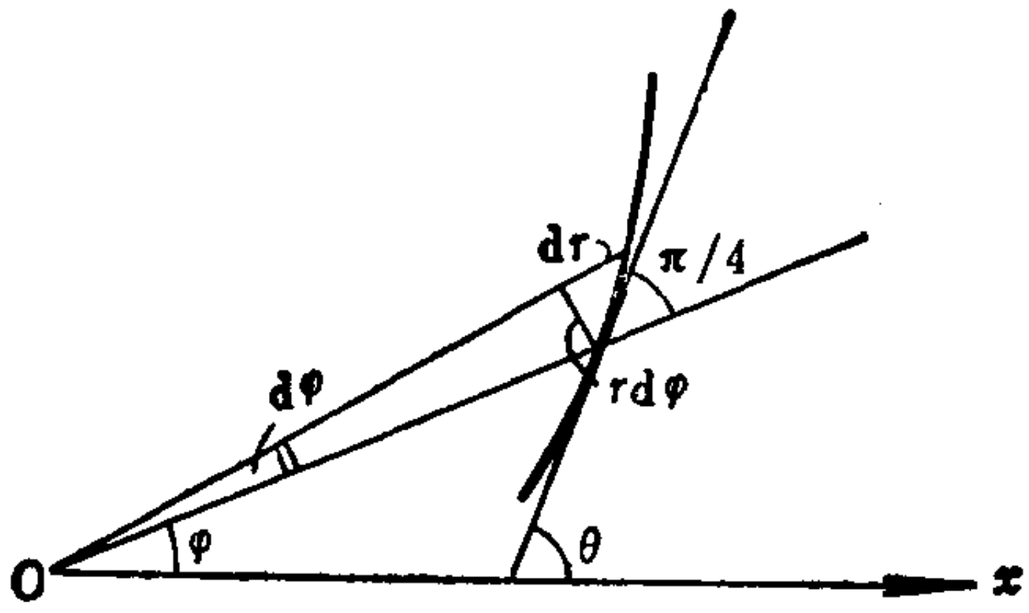



图 14

$$\varphi = \varphi_0 \pm \ln\frac{r}{a},$$

其中 $\varphi_0$ 为边界 $r = a$ 上该滑移线所对应的 $\varphi$ 值。如果 $\sigma_\varphi$ 为大主应力，则可取$\alpha$线对应于上式中的“+”号，$\beta$线对应于上式中的“−”号。

$\alpha$ 线上的关系（20）式可由 $\theta = \varphi + \frac{\pi}{4}$而写为

$$\mathrm{d}\sigma = 2k\mathrm{d}\theta = 2k\mathrm{d}\varphi = 2k\mathrm{d}\left(\ln\frac{r}{a}\right),$$

积分上式并注意到$\sigma_\varphi - \sigma_r = 2k$，可得

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\varphi) = \sigma_r + k = 2k \ln\frac{r}{a} + C,$$

其中的积分常数$C$可利用边界$r = a$处的条件$\sigma_r|_{r=a} = -p$定出。因此有：

$$\begin{cases} \sigma_r = -p + 2k\ln\dfrac{r}{a}, \\ \\ \sigma_\varphi = -p + 2k\left(1 + \ln\dfrac{r}{a}\right). \end{cases}$$

这与平面应变条件下厚壁筒的应力分布规律是一致的（这里的$\sigma_\varphi$相当于第五章（49）式中的$\sigma_\theta$，材料常数$2k$在Tresca屈服条件下取为$\sigma_s$）。

在使用上述对数螺线滑移场时，不一定要求边界是整个圆：$0 \leqslant \varphi_0 \leqslant 2\pi$。只要在一段圆弧上$\tau_{r\varphi} = 0$，就可构造由对数螺线形成的塑性区，这一点在某些具体问题的计算中常常是有用的。

（3）应力场的第三边值问题（混合问题）

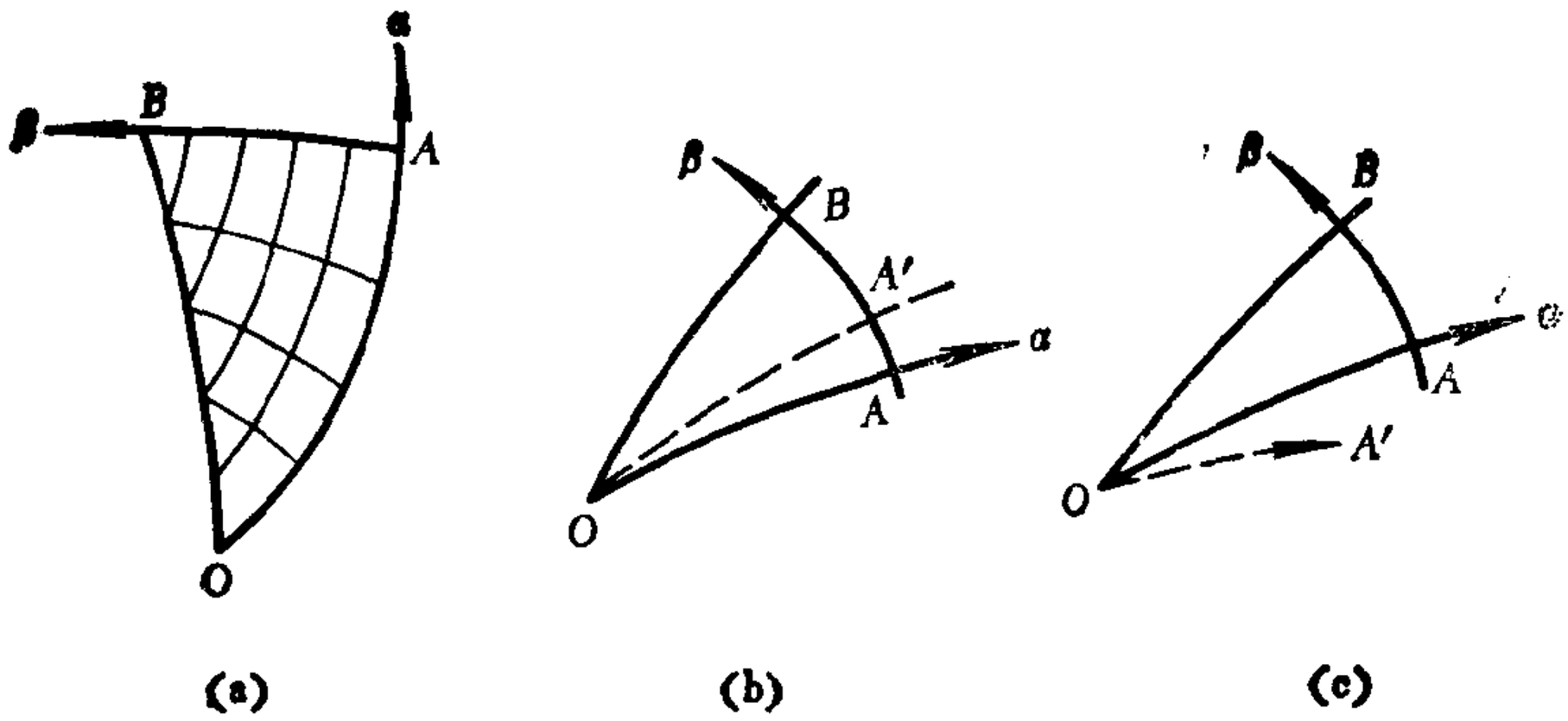
如果在$\alpha$族滑移线$OA$上给定$\sigma$值和$\theta$值，在另一条非滑移线$OB$上给定$\theta$值，则可求出过$B$点的$\beta$族滑移线与$OA$和$OB$所构成的$OAB$区域内的$\sigma$值和$\theta$值。

这里可能会有三种情形，现分别加以讨论。

(a) 在$OB$边的$O$点上所给定的$\theta$值正好等于$OA$滑移线在$O$点的$\theta$值（图15(a)）。

这时，可在$OA$上用点(1,0),(2,0),…来进行分割，从这些分点引出的$\beta$线与$OB$交于(1,1),(2,2),…，再从(1,1),(2,2),…各点作$\alpha$线，便可得到滑移线网。于是，当已知滑移线网中各节点的坐标值后，$OAB$内的$\sigma$值和$\theta$值就可由递推公式求得。

具体作法是：先由（1,0）点作$OA$的垂线交$OB$于$P'$点。取




(a) (b) (c)

图 15

(1,0) 上的 $\theta$ 值和$OB$线在$P'$上 $\theta$ 值的平均来作为新的 $\theta$ 值，重新由 (1,0) 点出发作直线，交 $OB$ 于 $P''$ 点。此后还可再次以 (1,0) 点的$\theta$值和$P''$点的$\theta$值的平均作为新的$\theta$值，重新过 (0,1) 点作直线而求得与 $OB$ 的新交点。继续以上过程直至所要求的精度，便得到 $OB$ 上的点 (1,1)。

因为 $OA$ 是 $\alpha$ 族滑移线，由 (1,0) 到 (1,1) 的线段是 $\beta$ 族滑移线，故由Riemann问题的作法，可求得 (2,1),(3,1),(4,1),…各点的坐标以及相应的 $\sigma$ 值和 $\theta$ 值。

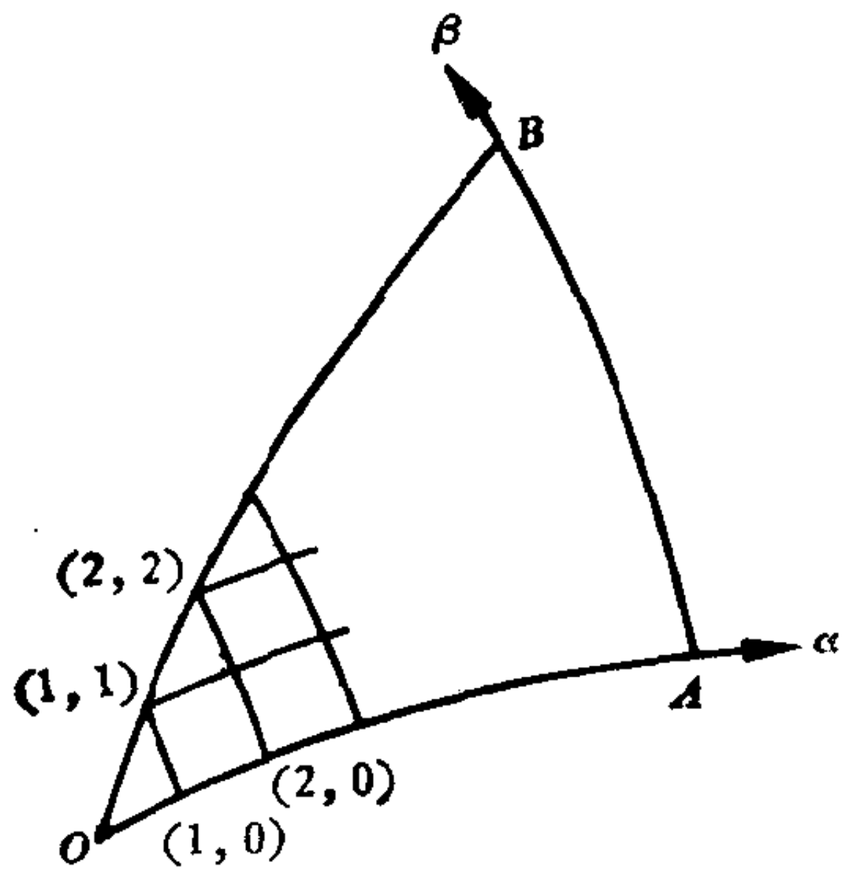



图 16

对于$OB$线上的 (2,2),(3,3),…各点的坐标，可用完全类似的方法来确定(图16)。

(b) 由$OB$边在$O$点的 $\theta$ 值可确定相应的 $\alpha$ 线方向，此方向位于由$OA$和$OB$在$O$点所形成的交角内（图15(b))。

这时，可根据$OB$边在$O$

点的 $\theta$ 值，由 $O$ 点出发引出另一条 $\gamma$ 族滑移线 $OA'$。求解 $OAA'$ 区域的问题对应于退化的 Riemann 问题。当求得以上区域内的 $\sigma$ 值和 $\theta$ 值后，$OA'B$ 区域内的问题就归结为混合问题的第（a）种情形了。

(c) 由$OB$ 边在$O$ 点的$\theta$值可确定相应的 $\alpha$ 线方向，但此方向位于角$AOB$以外（图15(c)），情形较为复杂。这时会出现应力间断线，我们将在以后通过算例来对此进行具体的讨论。

## 二、关于速度场的基本边值问题

对于静定问题，滑移线场可由应力边值问题求得，故区域内各点的 $\theta$ 值是已知的。反之，当必须同时考虑速度边条件才可能得到滑移线场时，一般就要用试算法来进行求解。

在下面的讨论中，我们假定区域内的 $\theta$ 值已通过应力边值问题求出，并记$v_\alpha = u$，$v_\beta = v$。

(1) 速度场的第一边值问题（Riemann问题）

相应的区域如图10 所示。已知两相交滑移线$OA$和$OB$上的法向速度值（即$OA$ 上给定 $v$，$OB$ 上给定 $u$），则可求出区域$OABC$内各点的速度 $u$ 和 $v$。

为此，仍可用分点 $(1,0),(2,0),\cdots,(m,0),\cdots$和 $(0,1),(0,2),\cdots,(0,n),\cdots$，分别将 $OA$ 和 $OB$ 分为许多小段。则当滑移线网已知时，可将（28）式写为如下的差分格式

$$\left.\begin{aligned} u_{m,n} - u_{m-1,n} &= \frac{1}{2}(v_{m,n} + v_{m-1,n})(\theta_{m,n} - \theta_{m-1,n}) \\ v_{m,n} - v_{m,n-1} &= -\frac{1}{2}(u_{m,n} + u_{m,n-1})(\theta_{m,n} - \theta_{m,n-1}) \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

由于$OA$上已知 $v_{0,0}, v_{1,0}, \cdots, v_{m,0}, \cdots$，$OB$ 上已知 $u_{0,0}, u_{0,1}, \cdots, u_{0,n}, \cdots$，故利用上式就可逐次求得各点的速度值。

需要指出，通常并没有速度场的退化 Riemann 问题，因为在

退化点$O$处的速度是无法给出的。

(2) 速度场的第二边值问题 (Cauchy问题)

相应的区域如图12所示，在某一非滑移线$AB$上给定$u$和$v$，则可求出区域$ABP$内各点的速度值$u$和$v$。这只要利用(44)式，就可从边界开始逐次求出各点的速度值。

(3) 速度场的第三边值问题

相应的区域如图15所示。在$\alpha$族滑移线$OA$上给定法向速度$v$值，在另一条非滑移线$OB$上给定速度分量之间的关系

$$a(s)u + v = b(s)$$

(其中$s$为沿$OB$的弧长)，就可以求出区域$OAB$内各点的$u$,$v$值。

首先，利用$\alpha$线上的关系(28)式，可求得$OA$上的切向速度分量，即$(u_{1,0}, v_{1,0}), (u_{2,0}, v_{2,0}), \cdots$其次，(1,1)点上的速度可由$\beta$线上的关系和给定条件求出：

$$\begin{cases} v_{1,1} - v_{1,0} = -\dfrac{1}{2}(u_{1,1} + u_{1,0})(\theta_{1,1} - \theta_{1,0}) \\ a_{1,1}u_{1,1} + v_{1,1} = b_{1,1}. \end{cases}$$

最后，由(44)式就得到(2,1),(3,1),(4,1),…各点的速度值。至于点(2,2),(3,3),…的速度值，则可用完全类似的方法求得。

## §6.6 楔的单边受压

从本节开始的以后几节里，我们将用滑移线方法来分析某些典型的例子。它们通常可分为以下几类：(1)初始塑性流动 (incipient plastic flow) 问题，只研究刚要开始产生塑性流动时的应力场和速度场，这相当于在极限载荷作用下的情形。在塑性流动开始以后，物体的几何外形将要发生改变，相应的分析要建立在变形以后的边界条件上。除以下两种情形外，通常很难再用解析方法对后继塑性流动进行求解。(2)定常塑性流动 (steady

plastic flow）问题。这时，应力场和速度场相对于固定的空间坐标来说是不随时间改变的。(3)准定常塑性流动（pseudo-steady plastic flow）问题。这时，塑性区的形状以及相应的滑移线场将按几何相似的规律扩大。因此，在空间坐标中，各点的速度可由某一时刻速度值的相似变换而求得。

作为初始塑性流动问题的算例之一，本节将讨论楔的单边受压，它在分析边坡稳定性等实际问题时是有参考意义的。

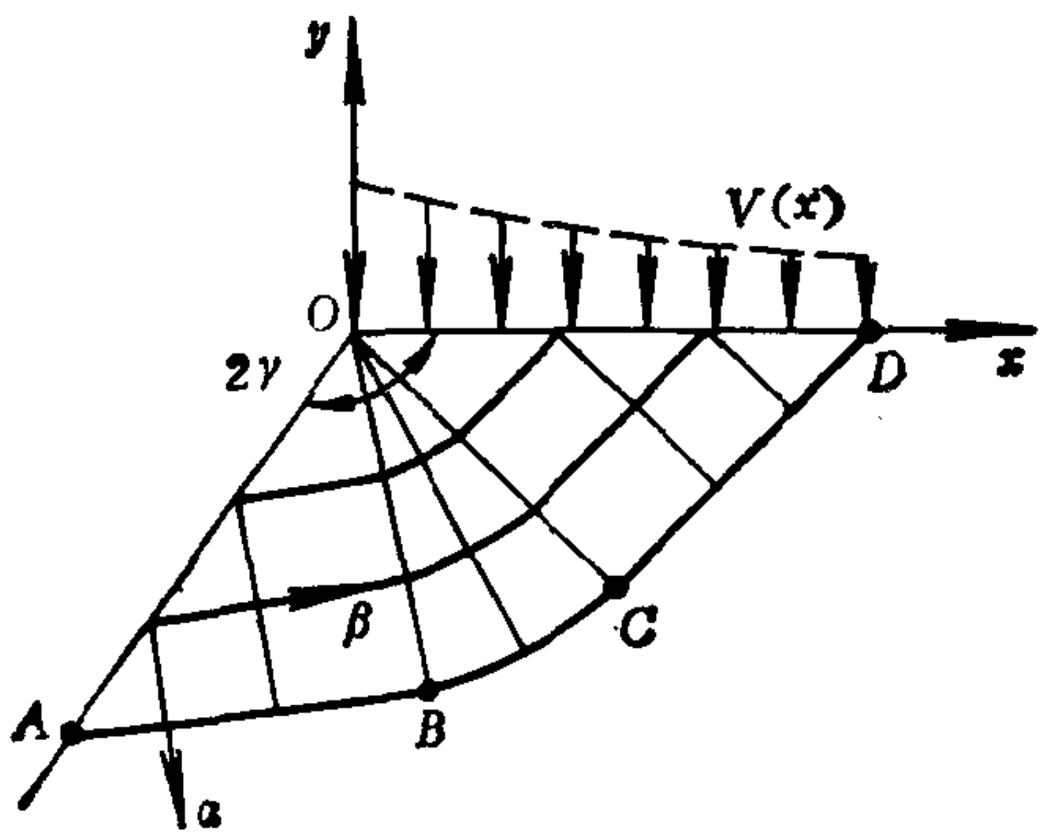



图 17

如图17所示，设楔的张角为$2\gamma$。在$OA$边上的法向正应力和剪应力都为零，即$\sigma_n=\tau_{nt}=0$。在$OD$边的某一段上则给定法向速度分布$-V(x)$（这时不能再给定法向正应力）和零剪应力。楔的底部可延伸至无穷。现在要来计算当开始塑性流动时的应力分布和速度分布以及在$OD$边上所需施加的正压力$p(x)$(也就是塑性极限载荷$p_s(x)$)。下面，我们分五个方面来进行讨论。

## 一、滑移线网（$\alpha,\beta$）的确定

由于$OA$是直线边界，且在边界上正应力和剪应力都为零，故由应力场的第二边值问题（Cauchy问题）中的例1可知，等腰直角三角形$AOB$为均匀应力区，其中的两族直线滑移线与边界

成45°，即$\theta-\psi=\pm45°$。区域 $AOB$ 中应力 $\sigma=\sigma_n\pm k=\pm k$ 的符号可暂时取定为其中之一，其正确性可通过以后的分析来判断。这样，在区域 $BOD$ 中，滑移线 $OB$ 上的 $\sigma$ 值和 $\theta$ 值就成为已知的。再由 $OD$ 上剪应力为零的条件，可知 $OD$ 是一条非滑移线，且其上的 $\theta$ 值为 $\pm45°$。这说明，当$2\gamma>\frac{\pi}{2}$时，区域 $BOD$ 对应于应力场的第三边值问题的（b）种情形：区域 $BOC$ 对应于退化的 Riemann 问题，区域 $COD$ 对应于应力场的第三边值问题的(a)种情形。因为滑移线 $OB$ 是直线，所以区域 $BOC$ 中同族的滑移线也是直线。故区域 $BOC$ 为简单应力区，其中的滑移线网是以$O$为圆心的同心圆和半射线。又由于 $OC$ 是直线，故在区域$COD$中的同族滑移线也都是直线，且与$OD$交成45°。可见它们是平行线，而且另一族滑移线也是平行的直线族。于是，区域$COD$是一个均匀应力区。在 $OD$ 边上，法向载荷必然是均匀分布的。

下面来确定哪一族滑移线是 $\alpha$ 线。这可根据大主应力必通过由（$\alpha,\beta$）线构成的一、三象限的规定来加以判断。考虑到$OD$边上的法向速度是向下的，故法向正应力（正压力）应取为小主应力。因此，直线 $OC$ 为 $\alpha$ 线，直线 $CD$ 为 $\beta$ 线。滑移线网已示于图17中。

## 二、应力分布以及塑性极限载荷$p_s$的确定

由以上分析可知，在区域 $AOB$ 的自由边界 $OA$ 上法向正应力 $\sigma_n=0$ 为大主应力.由此可定出该区域内的 $\sigma$ 值为$\sigma|_A=\sigma|_B=-k$。再利用沿 $\beta$ 线 $BC$ 上的关系：

$$\sigma+2k\theta=\text{const},$$

就有

$$\sigma|_C-\sigma|_B=-2k(\theta_C-\theta_B)$$

$$=-2k\left(2\gamma-\frac{\pi}{2}\right),$$

或

$$\sigma|_C = \sigma|_B - 2k\left(2\gamma - \frac{\pi}{2}\right) = -2k\left(2\gamma + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2}\right),$$

上式中$\left(2\gamma - \frac{\pi}{2}\right)$为 $\alpha$ 线切向从 $B$ 点到 $C$ 点所转过的角度。

因为 $COD$ 是均匀应力区，在该区域内的 $\sigma$ 值即为 $\sigma|_C$。再注意到 $OD$ 上的法向正应力 $-p_s$ 为小主应力：

$$-p_s = \sigma|_C - k,$$

便求得

$$p_s = 2k\left(2\gamma + 1 - \frac{\pi}{2}\right) \quad \left(2\gamma > \frac{\pi}{2}\right). \tag{45}$$

## 三、速度场的确定与校核

在 $OD$ 边上已知法向速度 $v_y = -V(\bar{x})$（其中 $\bar{x}$ 表示在 $OD$ 上的 $x$ 值），而在刚-塑性区交界线 $DCBA$ 上已知法向速度 $v_\alpha = 0$，故求解区域 $COD$ 内的速度分布相应于速度场的第三边值问题。得到 $OC$ 上的法向速度后，求解区域 $OCBA$ 内的速度分布就相应于速度场的第一边值问题（Riemann问题）。

在以上两个区域中，沿 $\alpha$ 线有 $\mathrm{d}v_\alpha - v_\beta \mathrm{d}\theta = 0$。因为 $\alpha$ 线是直线，上式中 $\mathrm{d}\theta \equiv 0$，所以沿 $\alpha$ 线 $v_\alpha$ 为常数。考虑到刚塑性区交界线上法向速度为零的条件，可定出上述常数应等于零。故在整个塑性区内恒有 $v_\alpha = 0$。

沿 $\beta$ 线，$\mathrm{d}v_\beta + v_\alpha \mathrm{d}\theta = 0$。现因 $v_\alpha = 0$，可知沿 $\beta$ 线 $v_\beta$ 为常数，其大小应根据 $OD$ 边界上给定的法向速度来计算。

在区域 $COD$ 中，速度分量 $(v_x, v_y)$ 与 $(\alpha, \beta)$ 坐标中的速度分量 $(v_\alpha, v_\beta)$ 之间有如下的关系：

$$v_\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(v_x - v_y),$$

$$v_\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}(v_x + v_y)\,.$$

因此由 $v_\alpha = 0$ 和 $v_y|_{y=0} = -V(\bar{x})$ 可知，在经过 $x = \bar{x}$，$y = 0$ 的 $\beta$ 线上有

$$v_\beta = -\sqrt{2}\,V(\bar{x})\,. \tag{46}$$

现来校核以上速度分布的合理性，即要验证塑性区内是否处处满足 $\lambda \geqslant 0$，即(27)式。由于 $v_\alpha \equiv 0$，(27)式变为

$$\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\beta}{\partial s_\alpha} - v_\beta \frac{\partial \theta}{\partial s_\beta}\right) \geqslant 0\,. \tag{47}$$

在均匀应力区 $AOB$ 和 $COD$ 内，$\dfrac{\partial \theta}{\partial s_\beta} = 0$. 再由

$$\mathrm{d}s_\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{d}\bar{x},$$

可得

$$\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\frac{\partial v_\beta}{\partial s_\alpha} = -\frac{\mathrm{d}V(\bar{x})}{\mathrm{d}\bar{x}} \geqslant 0\,.$$

故要求

$$\frac{\mathrm{d}V(\bar{x})}{\mathrm{d}\bar{x}} \leqslant 0 \tag{48}$$

在简单应力区 $BOC$ 内，由 $v_\beta < 0$ 和 $\dfrac{\partial \theta}{\partial s_\beta} \geqslant 0$，可知(47)式等号右端第二项是非负的。因此，只要在边界 $OD$ 上所给定的速度分布满足（48）式，以上求得的速度场就处处满足（47）式。(48)式要求 $OD$ 边的左方应比右方下滑得更快。这时，与滑动相对应的剪应力才可能与我们以前求得的剪应力相一致。

## 四、刚性区的校核

在刚性区速度场为零（$v_\alpha = v_\beta = 0$）的条件是满足的。如果

能在刚性区找到一组既满足平衡方程和应力边条件而又不违反屈服条件的应力场，那么以上的解就是完全解。否则，由(45)式所得到的 $p_s$ 只是极限载荷的上限。对于任意张角 $2\gamma>\frac{\pi}{2}$ 的刚性区校核问题是较为复杂的，这里将略去这方面的讨论。

## 五、张角 $2\gamma<\frac{\pi}{2}$ 时的分析

现考虑张角 $2\gamma<\frac{\pi}{2}$ 的情形。如设想由 $OA$ 边可构造一个等腰直角三角形的均匀应力区 $AOB$，则对于区域 $BOD$ 来说，就成为应力场的第三边值问题的(c)种情形。反之，也可由 $OD$ 边来构造相应的均匀应力区，并作类似的讨论。

因为由边界 $OA$ 和 $OD$ 所作出的两个均匀应力区会发生重叠，所以当以上两个均匀应力区的滑移线网分别向中心延伸时，其交线将构成应力间断线。根据§6.4中间断线的性质6，在间断线两侧的（同名）滑移线与间断线的交角要相等，故间断线只

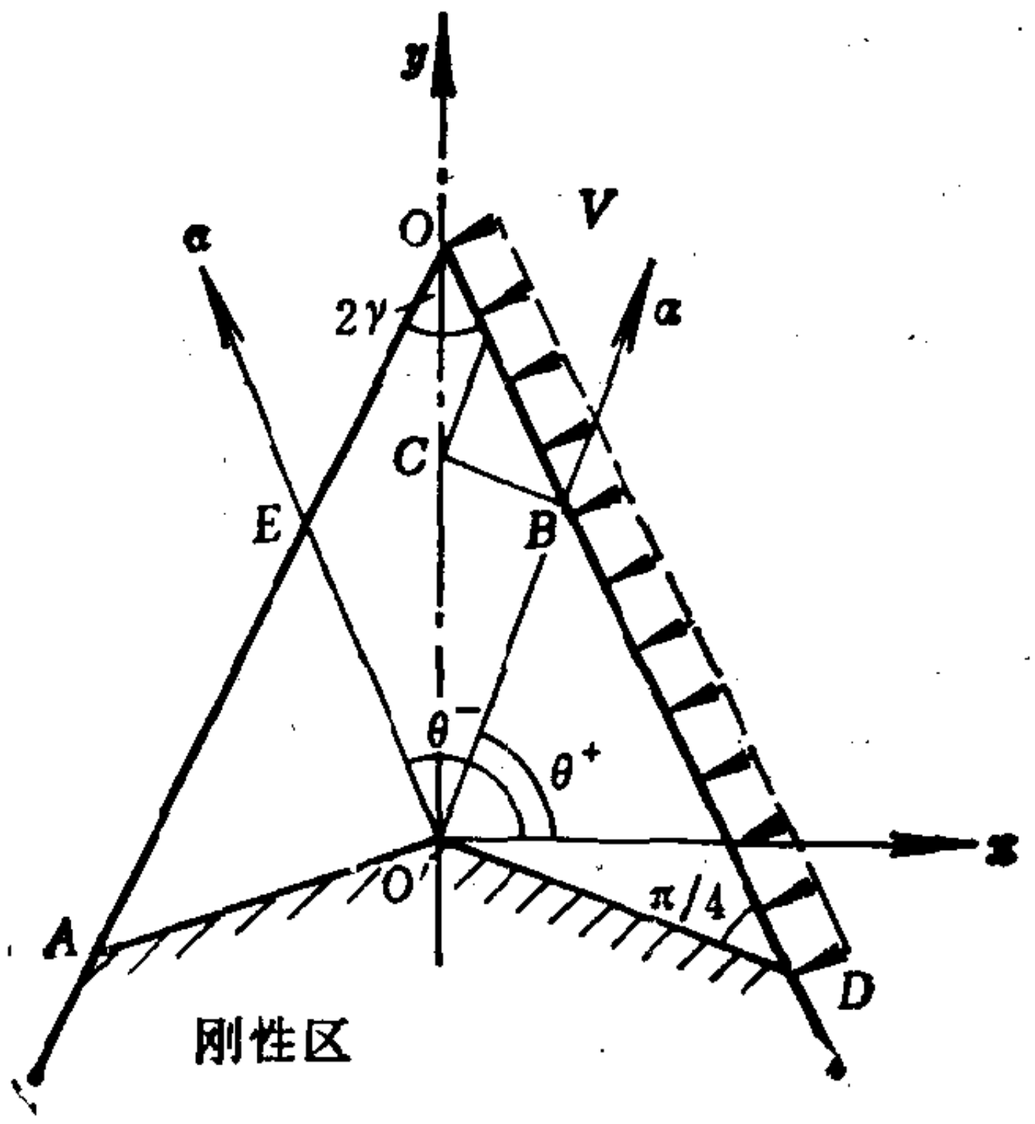



图 18

能是楔的角平分线（见图18）。

设图18中的$OO'$为应力间断线，其法向与$x$轴的夹角$\psi=0$。现将间断线左侧的量标以“$-$”号，间断线右侧的量标以“$+$”号，则右侧$\alpha$线$O'B$的$\theta^+$值可由图中的几何关系：

$$\left(\frac{\pi}{4}-\gamma\right)+\theta^+=\frac{\pi}{2}$$

求得，即有

$$\theta^+=\gamma+\frac{\pi}{4}.$$

取（39）式中的$m=1$时，有$\theta^-=\pi-\theta^+$。于是，（40）式可写为

$$[\![\sigma]\!]=\sigma^+-\sigma^-=2k\sin 2\theta^+=2k\cos 2\gamma \qquad (49)$$

在$OO'$线右侧的$OD$边上，小主应力为法向正应力$\sigma_n^+=-p$，故有

$$\sigma^+=\sigma_n^++k=-p+k;$$

在$OO'$线左侧的$OA$边上，大主应力为法向正应力$\sigma_n^-=0$，故有$\sigma^-=\sigma_n^--k=-k$。因此(49)式为

$$[\![\sigma]\!]=-p+2k=2k\cos 2\gamma.$$

由此求得塑性极限载荷：

$$p_s=2k(1-\cos 2\gamma)\quad\left(2\gamma<\frac{\pi}{2}\right). \qquad (50)$$

间断线$OO'$两侧的法向正应力$\sigma_x^+$，$\sigma_x^-$和切向正应力$\sigma_y^+$,$\sigma_y^-$可计算如下。由(10)式可得

$$\sigma_x^+=\sigma^+-k\sin 2\theta^+=k(-1+\cos 2\gamma),$$

$$\sigma_x^-=\sigma^--k\sin 2\theta^-=k(-1+\cos 2\gamma).$$

可见$\sigma_x$在$OO'$线上是连续的。而

$$\sigma_y^+=\sigma^++k\sin 2\theta^+=k(-1+3\cos 2\gamma),$$

$$\sigma_y^-=\sigma^-+k\sin 2\theta^-=k(-1-\cos 2\gamma),$$

即$\sigma_y$在$OO'$线上有间断，其间断量为

$$[\![\sigma_y]\!]=4k\cos 2\gamma=2[\![\sigma]\!].$$

现在来讨论速度场。若在间断线右侧 $OD$ 边上已给定法向速度，而滑移线 $O'D$ 是刚-塑性区的交界线，其上的法向速度为零，则区域 $BO'D$ 对应于速度场的第三边值问题。其次，由间断线的性质 4 可知，$OO'$ 上的应变率为零：即沿 $OO'$ 有 $\frac{dv_y}{dy}=0$。但 $O'$ 点上的 $v_y=0$，因此在 $OO'$ 上也有 $v_y=0$。现从 $B$ 点出发作另一族（$\beta$ 族）滑移线交 $OO'$ 于 $C$ 点。对于区域 $BO'C$ 来说，$O'B$ 上的速度是已知的（已由区域 $BO'D$ 的解求出），而 $OO'$ 上 $v_y=0$，故也对应于速度场的第三边值问题。此后，所要讨论的区域 $BOC$ 与原来的区域 $DOO'$ 是相似的，只是 $BC$ 上的法向速度已不为零（但已求出）。故同样是第三边值问题。重复采用类似的方法，便得到间断线右侧一个无穷序列区域上的速度分布。

当已知 $OO'$ 上的法向速度 $v_x$（在 $OO'$ 两侧 $v_x$ 是连续的）和 $v_y=0$，间断线左侧的区域 $OO'E$ 便对应于速度场的第二边值问题（Cauchy问题），而区域 $AO'E$ 则对应于速度场的第一边值问题（Riemann问题）。因此，$OO'$ 线左侧区域内的速度分布也是可以得到的。

综合以前的讨论，可将塑性极限载荷 $p_s$ 与 $2\gamma$ 的关系绘于图19中。当 $2\gamma>\frac{\pi}{2}$ 时，与(50)式相对应的塑性流动场是不存在的。

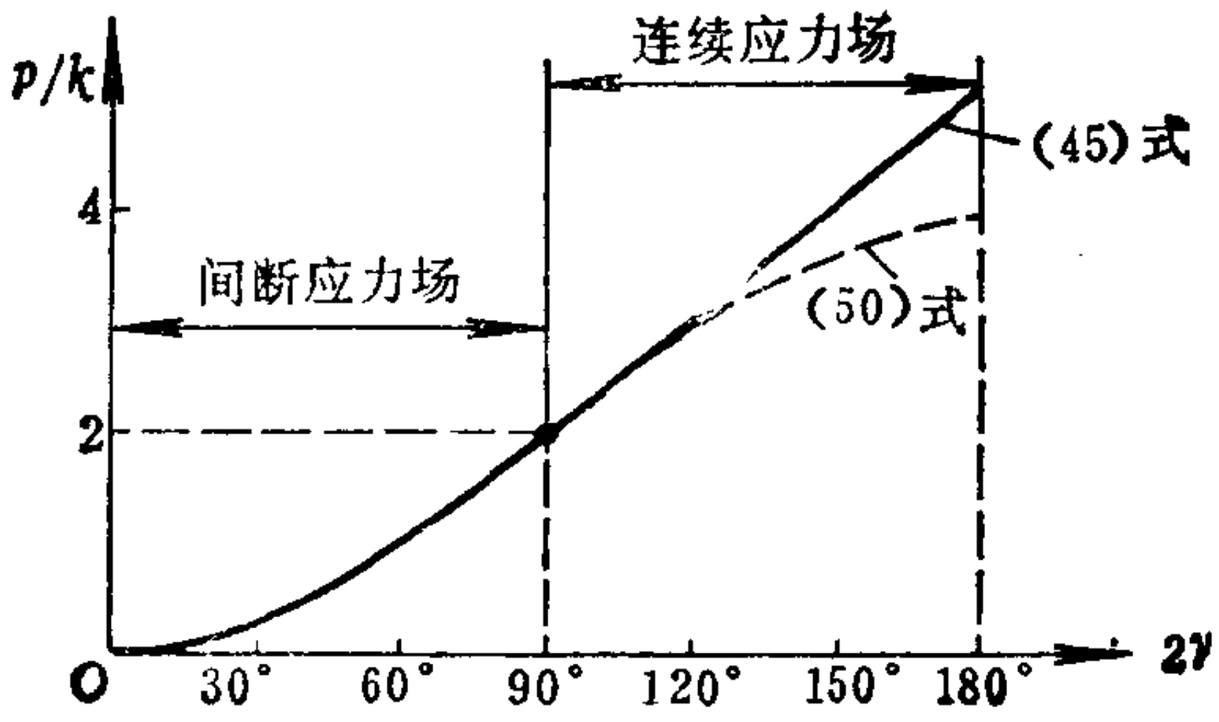



图 19

因此该式只能作为真实极限载荷的下限（刚性区的校核见§7.6的例2）。

## §6.7 半平面上刚性冲模的压入和切口板条的拉伸

本节将讨论初始塑性流动问题的其它两个例子，它们与上一节的分析是十分类似的。

### 一、半平面上刚性冲模的压入

如图20所示，现考虑一个宽度为$2a$的刚性冲模向半平面的压入问题。假定接触面是光滑的，则可直接利用上节的结果而取$2\gamma=\pi$。由于问题是对称的，压入后介质将分别向模的两侧运动。故可作出如图20所示的滑移线场。极限载荷由（45）式求得

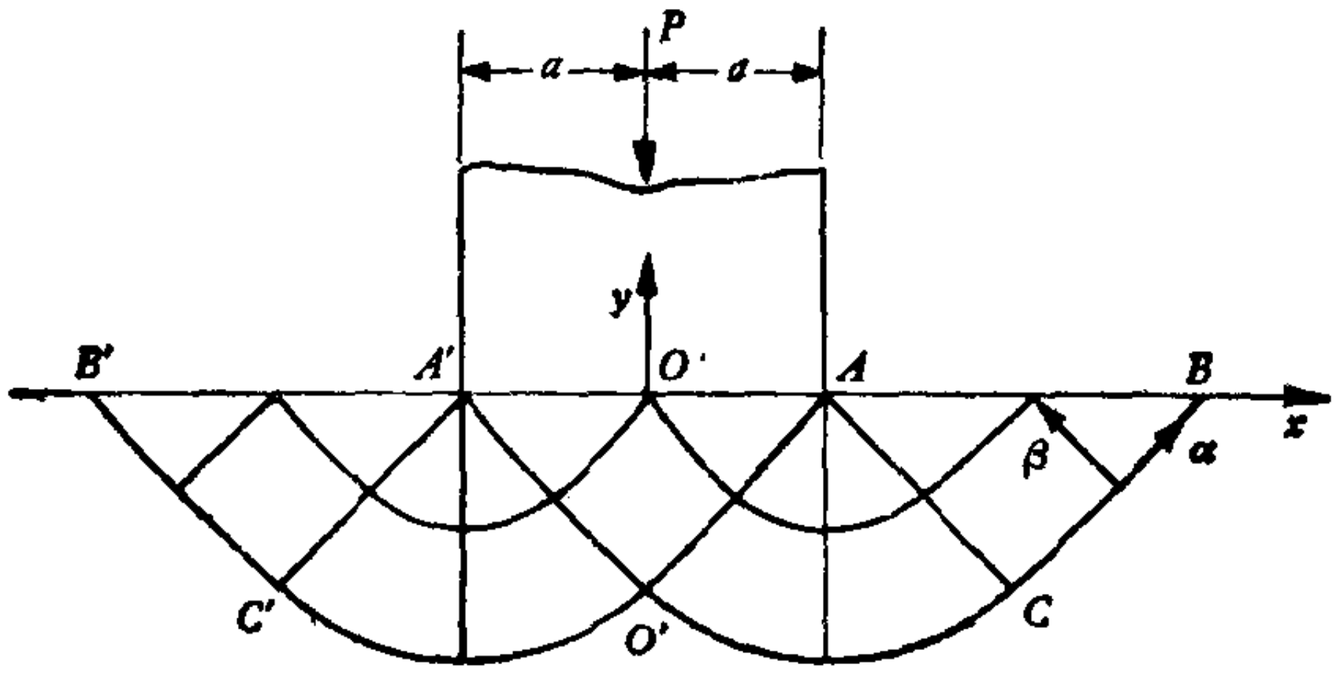



图 20

$$p_s=2k\left(1+\frac{\pi}{2}\right)。\tag{51}$$

因此，向下的总压力为$2ak(2+\pi)$。

现在来讨论速度场。设冲模底部 $A'A$ 的向下速度为 $V$，由于在区域 $A'O'A$ 内的滑移线是直线，故

沿 $\alpha$ 线（例如 $A'O'$ 线）　　$\mathrm{d}v_\alpha - v_\beta \mathrm{d}\theta = \mathrm{d}v_\alpha = 0$,

沿 $\beta$ 线（例如 $O'A$ 线）　　$\mathrm{d}v_\beta + v_\alpha \mathrm{d}\theta = \mathrm{d}v_\beta = 0$.

这说明，在区域 $A'O'A$ 内，$v_\alpha$ 沿每一条 $\alpha$ 线以及 $v_\beta$ 沿每一条 $\beta$ 线都是常数：

$$v_\alpha = v_\alpha(\beta), v_\beta = v_\beta(\alpha).$$

现将接触面 $A'A$（$y=0$）上的 $x$ 坐标值记为 $\bar{x}$，经过点（$\bar{x}$,0）的 $\alpha$ 线（或 $\beta$ 线）上的 $v_\alpha$（或 $v_\beta$）记为 $v_\alpha(\bar{x})$（或 $v_\beta(\bar{x})$），则由联线 $OO'$ 上的对称性条件，有

$$v_x|_{OO'} = \frac{\sqrt{2}}{2}[v_\alpha(-\bar{x}) + v_\beta(\bar{x})] = 0.$$

再根据 $A'A$ 面上给定的向下速度 $V$ 的条件：

$$v_y|_{A'A} = \frac{\sqrt{2}}{2}[-v_\alpha(\bar{x}) + v_\beta(\bar{x})] = -V,$$

可知

$$v_\alpha(\bar{x}) + v_\alpha(-\bar{x}) = \sqrt{2}V, \quad v_\beta(\bar{x}) = -v_\alpha(-\bar{x}).$$

由以上两个条件还不能唯一确定速度分布。实际上，对应于本问题的速度分布可以有无穷多个解，其唯一需要附加的条件就是速度分布应该与以上的滑移场相一致（即满足（27）式）。例如，可取

$$v_\alpha(\bar{x}) = \frac{\sqrt{2}}{2}V(1+e\bar{x}), \quad v_\beta(\bar{x}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}V(1-e\bar{x}), \qquad (52)$$

其中 $e$ 是一个满足 $0 \leqslant e \leqslant \frac{1}{a}$ 的参数。L. Prandtl（1920年）曾取 $e=0$，这时在区域 $A'OA$ 内的速度可写成

$$v_\alpha = -v_\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}V.$$

称为 Prandtl 解。

在区域 $AO'CB$ 内，$\beta$ 族滑移线(如 $O'A, CA$ 等)都是直线，故沿 $\beta$ 线 $dv_\beta = 0$。考虑到刚性区速度为零以及刚-塑区交界线上法向速度的连续性条件，可知 $v_\beta = 0$。因此，沿 $\alpha$ 线有

$$dv_\alpha - v_\beta d\theta = dv_\alpha = 0,$$

即沿每一条 $\alpha$ 线，都有 $v_\alpha = \text{const}$。特别地，经过点 $(\bar{x}, 0)$ 的 $\alpha$ 线上的速度分量可由(52)式而写为：

$$v_\alpha(\bar{x}) = \frac{\sqrt{2}}{2}V(1 + e\bar{x}), \quad v_\beta = 0.$$

当取 $e = \frac{1}{a}$ 时，刚塑性交界线上的速度将是连续的。

区域 $A'O'C'B'$ 内的速度分布与区域 $AO'CB$ 内的速度分布完全是对称的，故无需再作讨论。

如计算在 $AB$ 边和 $A'B'$ 边上速度的垂直向上分量，则不难验证材料的不可压缩性，因为这里采用的是刚塑性模型。

下面，我们来作如图 21 所示的滑移线场，则所有的 $\beta$ 线不仅都是直线（这时沿 $\beta$ 线，$dv_\beta = 0$），而且还都是下部刚性区的法线。因此，由刚性区速度为零以及刚塑性区交界线上法向速度

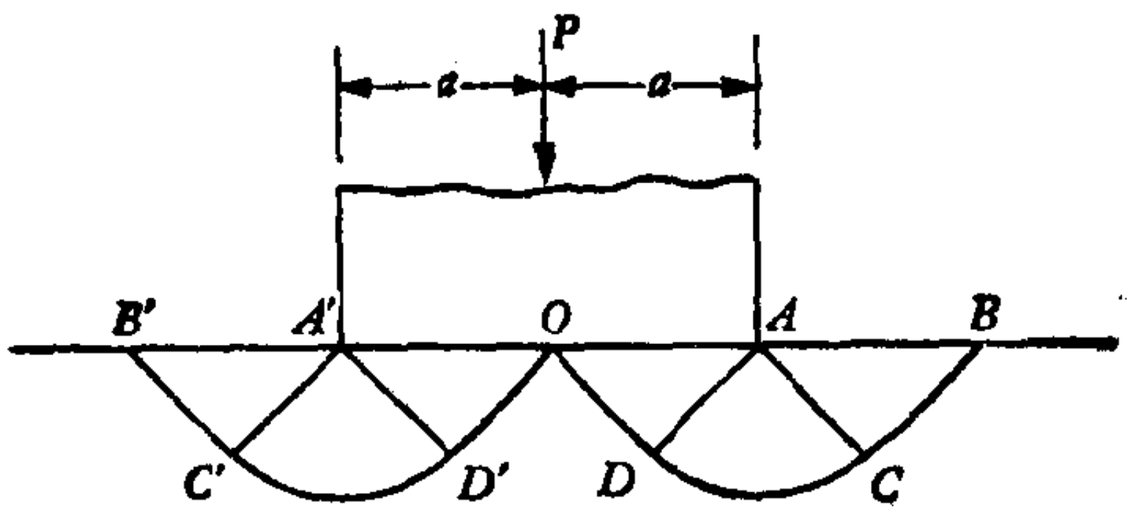



图 21

的连续性条件，可知处处有 $v_\beta = 0$。在 $OA$ 上，由

$$v_y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-v_\alpha + v_\beta) = -V,$$

可求得$v_\alpha = \sqrt{2}V$。但是，沿$\alpha$线有

$$dv_\alpha - v_\beta d\theta = dv_\alpha = 0.$$

这说明在整个塑性区$OABCD$，处处有$v_\alpha = \sqrt{2}V$。在边界$AB$（以及$A'B'$）上，垂直向上的速度分量为$V$，这同样与材料的不可压缩性是相一致的。

对应于图21的解称为Hill解。此外，读者还可构造Prandtl解与Hill解相组合的滑移线场。但在这些解中，极限载荷都是一样的，在共同的塑性区内的应力场也是一样的，而且可以证明它们都是完全解。可是，这些解　对应的速度场却是不相同的。

## 二、带有切口板条的拉伸

现讨论如图22所示的带有切口板条的拉伸问题。如设想板条

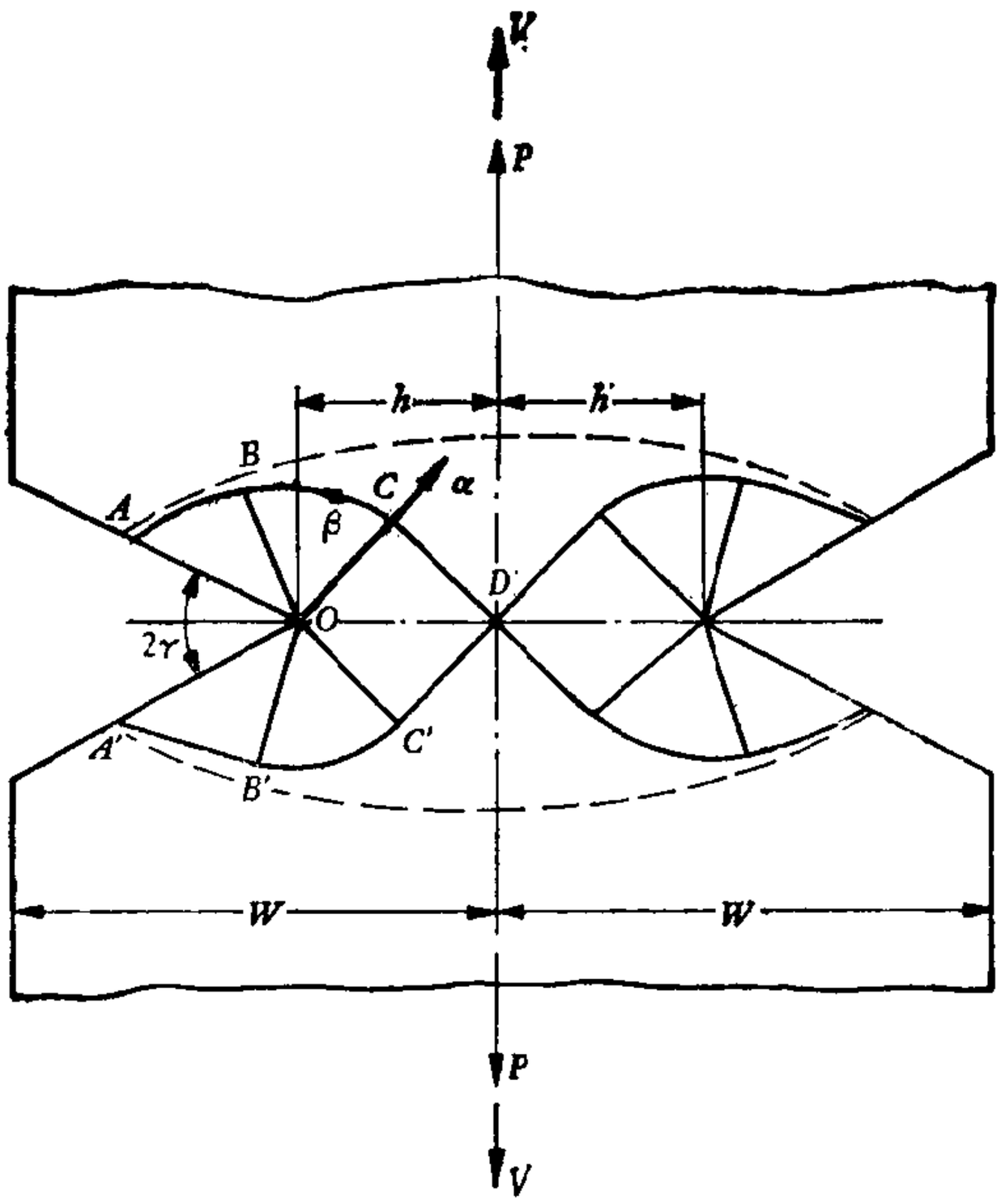



图　22

由弹性材料组成，则在切口附近将会形成应力集中。故对于弹塑性材料或刚塑性材料来说，有理由认为塑性区是从切口根部开始形成并逐渐向里发展的。当两边的塑性区在中间汇合时，板条便开始产生塑性流动。现利用问题的对称性而取四分之一区域来进行讨论。如果切口很深，两侧的边界影响可不考虑，那么只需把压力改为拉力，塑性区的分析就与前面讨论过的楔的单边受载问题完全一样了。

现令$\angle AOD = 2\gamma' \mid = \pi - \gamma$，总的极限拉力就可写为

$$P_s = 2h \cdot 2k\left(1 + 2\gamma' - \frac{\pi}{2}\right) \quad \left(\frac{\pi}{2} \leqslant 2\gamma' \leqslant \pi\right). \tag{53}$$

在$OD$线上应力是均匀的，它等于

$$\sigma_y = 2k(1 + 2\gamma' - \pi/2) = 2k(1 - \gamma + \pi/2) \geqslant 2k.$$

这说明，由于切口的存在，中间段的应力会有所提高。可见理想塑性材料会使在切口尖端处的局部应力集中分散到一个区域之中。虽然中部截面的宽度$2h$(注意，这是平面应变问题，厚度十分大)没有改变，但宽度为$2W$($\gg 2h$)的带切口板条的承载能力要比宽度为$2h$的无切口板条的承载能力为高，而且切口愈尖，增高愈多。这一点也说明了理想塑性极限分析的一个性质：当增加材料时，极限载荷是不会降低的。

下面来计算速度场。和以前不同，在本问题中，上(下)部刚性区将以速度$V$向上(下)作刚体运动。考虑到沿刚塑性区交界线$ABCD$上法向速度连续的条件，就有

$$v_n = v_\alpha = V \sin\theta.$$

由于$\alpha$线是直线，故沿$\alpha$线$\mathrm{d}v_\alpha = 0$，可知处处有$v_\alpha = V \sin\theta$。这样，沿$\beta$线就有

$$\mathrm{d}v_\beta = -v_\alpha \mathrm{d}\theta = -V \sin\theta \, \mathrm{d}\theta. \tag{a}$$

$OD$线上的对称性条件可写为

$$v_y = \frac{\sqrt{2}}{2}(v_\alpha + v_\beta) = 0.$$

即在 $OD$ 线上，$\theta = \pi/4$，

$$v_\beta = -v_\alpha = -V\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}V. \qquad \text{(b)}$$

从$OD$ 线开始积分(a)式，可得

$$v_\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}V - V\int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta}\sin\theta\mathrm{d}\theta = V(\cos\theta - \sqrt{2}). \qquad \text{(c)}$$

刚塑性区交界线$ABCD$是速度间断线。如将其刚性区一侧的量标以“－”号，其塑性区一侧的量标以“＋”号，则切向速度分量的间断值可计算如下。

在刚性区一侧，

$$v_\alpha^- = V\sin\theta,\quad v_\beta^- = V\cos\theta \qquad \text{(d)}$$

$$\mathrm{d}v_\beta^- = -V\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = -v_\alpha^-\,\mathrm{d}\theta.$$

在塑性区一侧，沿$\beta$ 线有

$$\mathrm{d}v_\beta^+ = -v_\alpha^+\mathrm{d}\theta.$$

因为法向速度是连续的：$v_\alpha^+ = v_\alpha^-$，所以 $\mathrm{d}v_\beta^+ = \mathrm{d}v_\beta^-$，即

$$\mathrm{d}(v_\beta^+ - v_\beta^-) = \mathrm{d}[\![v_\beta]\!] = 0$$

或

$$[\![v_\beta]\!] = \mathrm{const}.$$

这正是间断线的性质 3 。

在 $CD$ 线上 $\theta = \pi/4$，故(d)式为 $v_\beta^- = \sqrt{2}V/2$，而(c)式给出 $v_\beta^+ = -\sqrt{2}V/2$。由此得间断值：

$$[\![v_\beta]\!] = -\sqrt{2}V.$$

## §6.8 定常塑性流动的板条抽拉问题

在前两节的例子中，我们主要关心的是物体的承载能力，所

求得的速度分布实际上是指塑性变形开始瞬间的流动趋势，因此并未计及物体形状的改变。本节将讨论定常塑性流动问题。它们在金属压力加工(如金属的抽拉、冷拔过程)中是经常会遇到的。这时，对于材料中的每一个微元来说，其变形过程是比较复杂的。然而，对于空间中某个固定点来说，由于运动是定常的，材料在通过该固定点时的应力值和速度值都不随时间改变。因此，当采用固定的空间坐标时，以前的分析方法仍然是有效的。

现在来考虑板条抽拉问题中最简单的一种情形。设板原来的厚度为$H$，经过光滑的锥形刚模后，其厚度变为$h$。由于问题是对称的，可只讨论其上半部分(图23)。如果锥形刚模的倾角$\gamma$与$h/H$之间满足某种关系，滑移线场就将如图23所示的那样。上述这种关系不难从几何的角度求得。因为$AB$边的长度既可写为

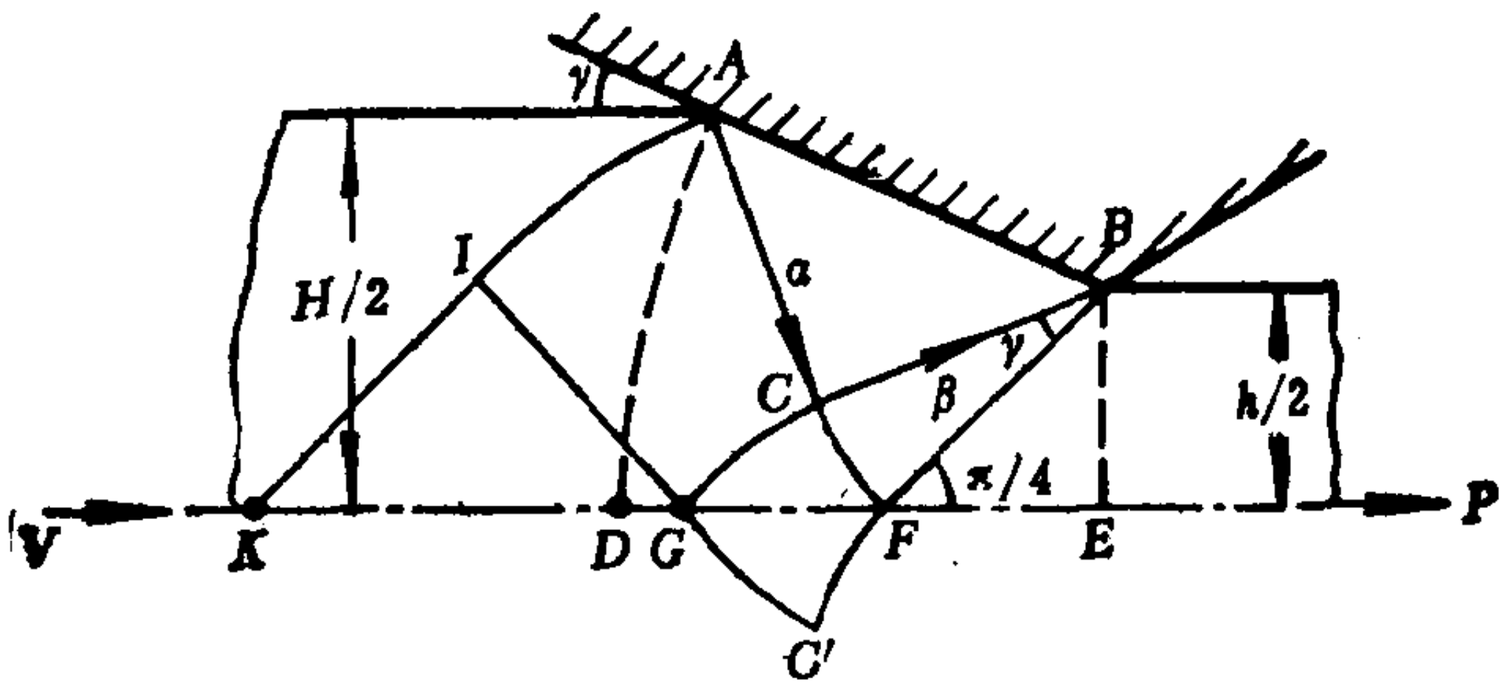



图 23

$$\overline{AB}=\sqrt{2}\ \overline{BC}=\sqrt{2}\ \overline{BF}=h,$$

又可写为

$$\overline{AB}=\frac{(H-h)}{2}\cdot\frac{1}{\sin\gamma}.$$

所以$\gamma$与$h/H$之间满足关系：

$$\frac{h}{H}=\frac{1}{1+2\sin\gamma}. \tag{54}$$

在板条的抽拉过程中，$AB$ 边上受到压应力 $q$ 的作用，它对应于小主应力，由此可确定 $\alpha$ 线和 $\beta$ 线(见图23)。

由对称性，轴线上的剪应力为零，故轴线方向与主应力方向是一致的。滑移线 $CF$ 和 $FB$ 在 $F$ 点的切向与轴线的交角为45°。

$q$ 值可确定如下：在区域 $ABC$ 内，$\sigma = -q + k$。$\sigma$ 沿 $\alpha$ 线的改变量为 $\mathrm{d}\sigma = 2k\mathrm{d}\theta$，故

$$\sigma|_{BF} = \sigma|_{BC} + 2k\gamma = -q + k(1 + 2\gamma)。$$

考虑到 $AB$ 边上压应力 $q$ 合力的水平分量应与板条右侧的水平总拉力 $P$ 相平衡，就有

$$P = q(H - h)。$$

另一方面，在截面 $BF$ 上，根据其左右侧水平作用力的平衡条件，可得

$$\frac{P}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \overline{BF} \times (k + \sigma|_{BF})$$

$$= \frac{h}{2}[-q + 2k(1 + \gamma)]。$$

从以上两式中消去 $P$，便得到

$$q = 2k(1 + \gamma)\left(\frac{h}{H}\right) = \frac{2k(1 + \gamma)}{1 + 2\sin\gamma}。 \tag{55}$$

由此不难求得滑移场中各点的应力值。上式的 $q$ 值对模具的设计是有重要意义的。

再来计算速度分布。设板条左侧的运动速度为 $V$，右侧的运动速度为 $v$。根据不可压条件，就有

$$VH = vh。$$

对应于 $\angle CBF$，可引进角度 $\omega$ 来度量扇形区内的 $\beta$ 线，使 $BC$ 边上 $\omega = 0$，$BF$ 边上 $\omega = \gamma$。这时，塑性区内 $\beta$ 线的切向与对称轴的夹角为 $\frac{\pi}{4} - \gamma + \omega$。在刚塑性区交界线 $ACF$ 上，由法向速度的连续

性，可得

$$v_\beta^+ = v_\alpha^- = V\cos\left(\frac{\pi}{4} - \gamma + \omega\right), \tag{a}$$

上式中“－”号表示在交界线左侧刚性区中的量，“＋”号表示其右侧塑性区中的量。由于$\beta$线为直线，沿$\beta$线$\mathrm{d}v_\beta = 0$，故在整个塑性区$ABFC$内，有

$$v_\beta = V\cos\left(\frac{\pi}{4} - \gamma + \omega\right). \tag{56}$$

特别地，在区域$ABC$内，有$v_\beta = V\cos\left(\frac{\pi}{4} - \gamma\right)$。

根据$AB$边上法向速度为零的条件，还可知在区域$ABC$内

$$v_\alpha = v_\beta = V\cos\left(\frac{\pi}{4} - \gamma\right).$$

但是在$AC$边的刚性区一侧，

$$v_\alpha^- = V\sin\left(\frac{\pi}{4} - \gamma\right).$$

可见在刚塑性区交界线$ACF$上，切向速度的间断值为

$$[\![v_\alpha]\!] = V\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \gamma\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \gamma\right)\right] = \sqrt{2}\,V\sin\gamma \tag{57}$$

不难看出，由速度间断所引起的滑移方向与剪应力的方向是一致的。

最后来计算区域$CBF$内的$v_\alpha$。由于沿$\alpha$线

$$\mathrm{d}v_\alpha = v_\beta \mathrm{d}\theta = v_\beta \mathrm{d}\omega,$$

故积分并应用(56)式得

$$v_\alpha = v_\alpha|_{BC} + \int_0^\omega v_\beta \mathrm{d}\omega = V\cos\left(\frac{\pi}{4} - \gamma\right) + V\int_0^\omega \cos\left(\frac{\pi}{4} - \gamma + \omega\right)\mathrm{d}\omega$$

$$= V\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}-\gamma+\omega\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-\gamma\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\gamma\right)\right]$$

$$= V\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}-\gamma+\omega\right)+\sqrt{2}\sin\gamma\right]. \tag{58}$$

特别地，在 $BF$ 边上($\omega=\gamma$)

$$v_n=\frac{\sqrt{2}}{2}V(1+2\sin\gamma)=\frac{\sqrt{2}}{2}V\cdot\frac{H}{h}=\frac{\sqrt{2}}{2}v.$$

这正好与 $BF$边右侧刚性区在法向上的速度分量相同，满足在$BF$两侧法向速度的连续性要求。由此可见，以上所求得的速度场能满足所有的边界条件。在 $BF$ 边上，切向速度也有间断，其间断值为

$$\frac{\sqrt{2}}{2}v-\frac{\sqrt{2}}{2}V=\sqrt{2}V\sin\gamma,$$

它与(57)式中的间断值相同。

为了要得到完全解，还必须对刚性区进行校核。对于 $BF$ 右侧的区域，可由 $B$ 点引出垂直于对称轴的直线$BE$。如把 $BE$作为应力间断线，使其右侧的板条处于单向均匀受拉状态，那么，根据间断线两侧法向正应力的连续性，可知右侧板条不违反屈服条件的表达式为

$$P\leqslant 2kh$$

或

$$q(H-h)\leqslant 2kh.$$

利用(55)式 后，可得$\gamma\sin\gamma\leqslant\frac{1}{2}$，即要求有$\gamma\leqslant\gamma_1=42°27'$。

下面来讨论滑移线$ACF$左侧的区域。设与 $CF$ 相对称的下半部滑移线为 $C'F$，由于在 $\alpha$线 $CF$和 $\beta$线 $C'F$上的 $\theta$值和 $\sigma$值是已知的，故对应于应力边值问题中的 Riemann 问题，由此可得到区

域$C'GCF$中的滑移线网和$\sigma$值。此后，对应于 $\alpha$线$AC$ 和 $\beta$ 线$CG$上已知的 $\theta$ 值和 $\sigma$ 值，又构成了关于应力边值问题的 Riemann 问题，进而可求得区域$ACGI$ 和区域 $KIG$中的滑移线网和 $\sigma$值。显然，$ACGI$ 和 $KIG$分别对应于简单应力区和均匀应力区。所不同的是，虽然以上各区域中的应力已达到屈服状态，但由于这些区域中每一点都以相同的速度$V$向右运动，其应变率为零，故仍然可认为它们是刚性区。

现在来构造应力间断线$AD$，使得在$AD$右侧的应力场与以上所求得的在区域$ACGI$和区域$KIG$(或区域 $C'GCF$)中的应力场相一致(相应的 $\sigma$值以后将记为 $\sigma^+$)。而在 $AD$左侧的应力场为单向应力状态：

$$\sigma_x^- = \sigma_x(y),\quad \sigma_y^- = 0,\quad \tau_{xy}^- = 0,$$

这样的应力场将自然满足平衡方程和上下边界上的应力边条件。

应力间断线 $AD$ 和函数 $\sigma_x(y)$可由应力间断线两侧的法向正应力和剪应力的连续性条件确定：

$$[\![\sigma_n]\!] = [\![\tau_{nt}]\!] = 0. \tag{b}$$

如设间断线$AD$的法向与 $x$ 轴(即对称轴)的夹角为 $\psi$，则在 $AD$右侧的法向正应力 $\sigma_n^+$和剪应力 $\tau_{nt}^+$可分别写为

$$\sigma_n^+ = \sigma^+ - k\sin 2(\theta-\psi),\quad \tau_{nt}^+ = k\cos 2(\theta-\psi).$$

而在$AD$左侧的法向正应力$\sigma_n^-$和剪应力 $\tau_{nt}^-$可分别写为

$$\sigma_n^- = \frac{1}{2}\sigma_x(y)(1+\cos 2\psi),\quad \tau_{nt}^- = \frac{1}{2}\sigma_x(y)\sin 2\psi.$$

因此，(b)式可具体地写为

$$\operatorname{ctg}\psi\cos 2(\theta-\psi) = \left(\frac{\sigma^+}{k}\right) - \sin 2(\theta-\psi),$$

$$\frac{\sigma_x(y)}{k} = 2\left[\left(\frac{\sigma^+}{k}\right) - \sin 2(\theta-\psi)\right] \Big/ (1+\cos 2\psi).$$

利用上式便可确定各滑移线场中每一点的 $\psi$ 值，并由此得到相应

的间断线 $AD$ 和 $\sigma_x(y)$。数值计算表明(详见《力学与实践》，12(5)(1990)，67—70)，当 $0<\gamma<\gamma_0=26°48'$ 时，应力间断线 $AD$ 将通过区域 $ACGI$ 和区域 $KIG$ 达到对称轴，当 $\gamma_0<\gamma\leqslant\gamma_1$ 时，应力间断线 $AD$ 将通过区域 $ACGI$ 和区域 $GCF$ 而达到对称轴。在 $0<\gamma<\gamma_1$ 的范围内，所求得的 $\sigma_x(y)$ 始终满足条件

$$|\sigma_x(y)|\leqslant 2k.$$

可见所求得的解是一个完全解。当然，以上所求得的 $\sigma_x(y)$ 还自动满足整体平衡条件

$$\int_0^{H/2}\sigma_x(y)\mathrm{d}y=0.$$

## §6.9 塑性力学中平面应变问题与平面应力问题的区别

对于弹性力学中的平面问题，只要将弹性常数作相应的改变，平面应变问题和平面应力问题就可以看作是等价的。但对于理想刚塑性材料，情况则完全不同。这主要是由于在理想刚塑性体的平面应变问题中，$\sigma_z$ 永远是中间主应力，Mises 屈服条件和 Tresca 屈服条件是一致的，可写为：

$$|\sigma_1-\sigma_2|=2k, \tag{59}$$

其中 $\sigma_1$ 和 $\sigma_2$ 为 $xy$ 平面内的两个主应力。

可是，在理想刚塑性体的平面应力问题中，$\sigma_3=0$ 并不总是中间主应力，而 Mises 屈服条件

$$\sigma_1^2+\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_2=4k^2 \tag{60}$$

在 $\sigma_1$-$\sigma_2$ 应力平面上是一个椭圆，Tresca 屈服条件

$$|\sigma_1|=2k,\quad |\sigma_2|=2k,\quad |\sigma_1-\sigma_2|=2k \tag{61}$$

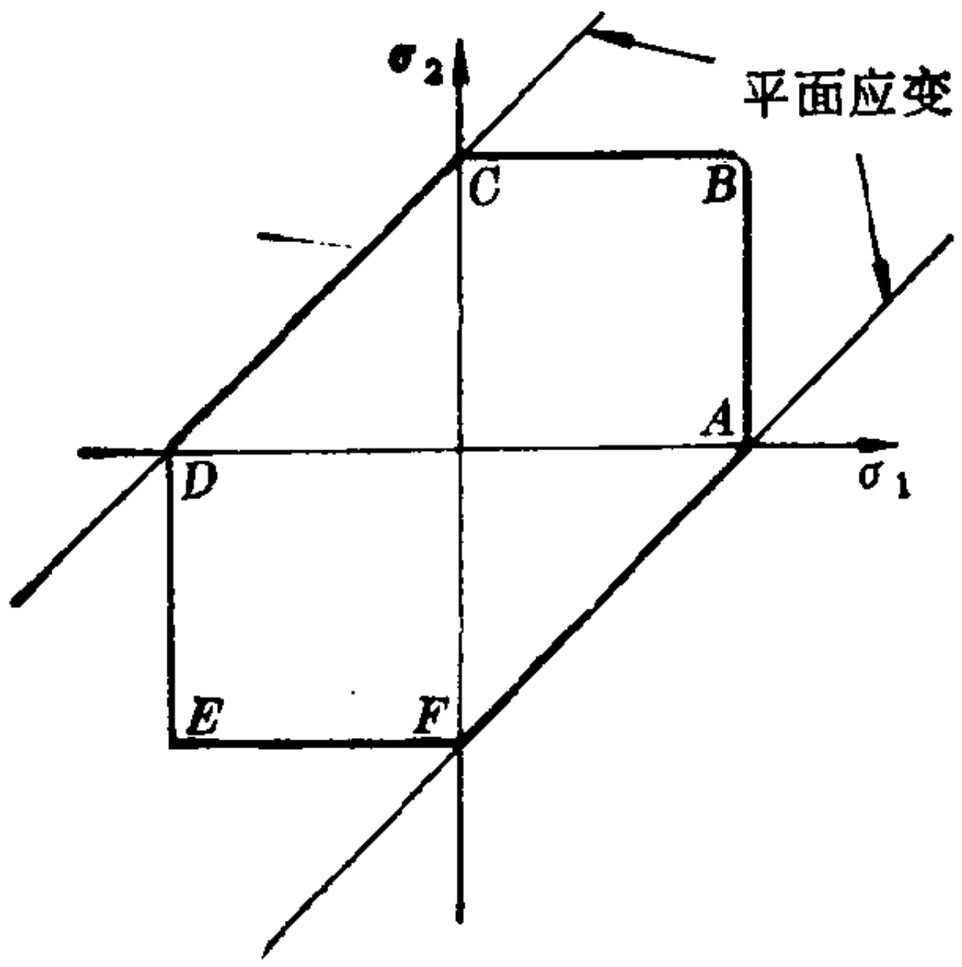



图 24

在 $\sigma_1$-$\sigma_2$ 应力平面上是一个如图24所示的六边形。两者是不同的。

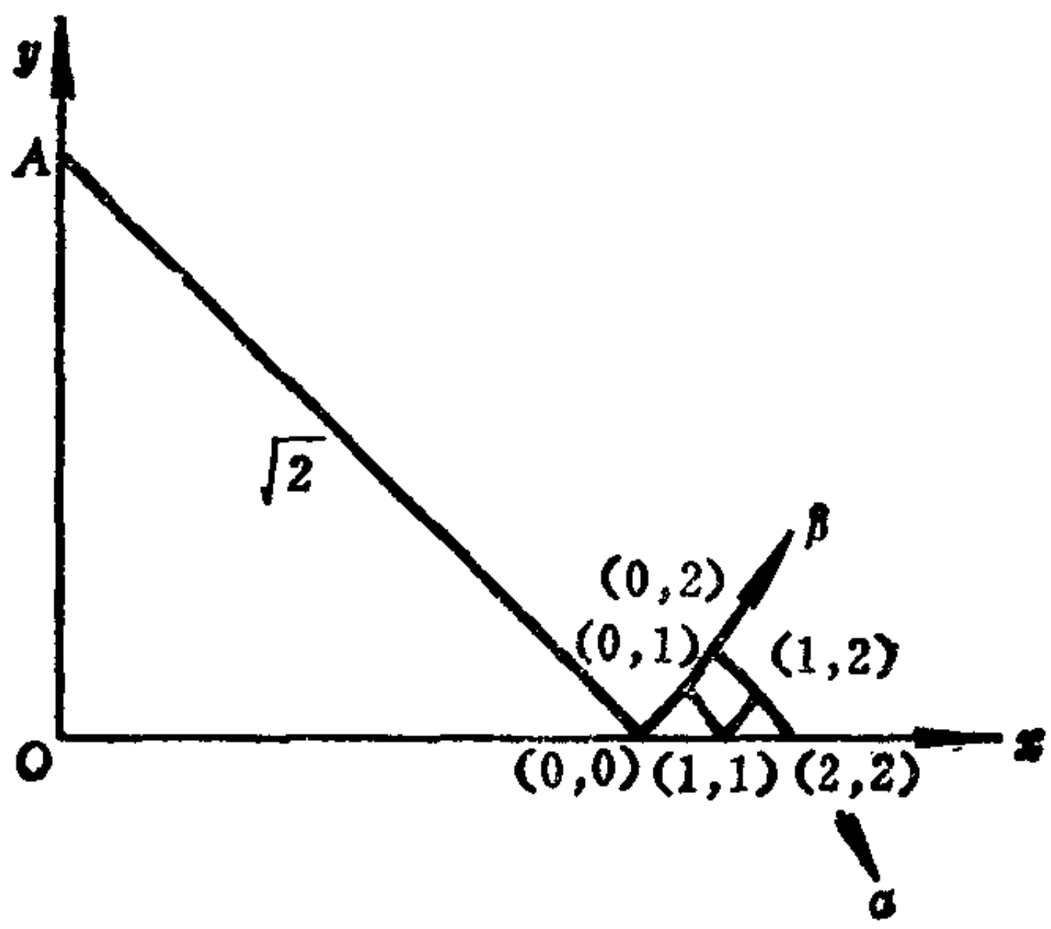
由此可见：(1) 在平面应力问题中，仅当采用Tresca屈服条件(61)式，且塑性区的应力状态满足$|\sigma_1-\sigma_2|=2k$(对应于图中的$CD$边或$AF$边)时，它才和平面应变问题中的屈服条件(59)式相一致。(2) 在平面应力问题中，屈服条件是 $\sigma_1$-$\sigma_2$ 应力平面上的一条封闭曲线，故其主应力的绝对值不能超过某一数值(对于Mises屈服条件，它不能超过$4k/\sqrt{3}$，对于Tresca屈服条件，它不能超过$2k$)。因此，作用于物体边界上的面力或极限载荷的值要受到一定的限制。而在平面应变问题中，屈服条件是两条平行线，只要主应力差一定，主应力本身是可以任意变化的，故对于极限载荷值可不必事先给予限制。

进一步的分析表明，由服从Mises屈服条件的理想刚塑性平面应力问题所导出的应力微分方程既可能是双曲型的，也可能是抛物型或椭圆型的。而且在双曲型的情况下，两族特征线也不一定正交。此外，对于平面应力问题来说，经常还需要考虑板厚的变化。这一切都说明，理想刚塑性体的平面应力问题要比相应的平面应变问题复杂得多。这方面的详细讨论可见文献[1]。

## 习　　题

6.1　在刚塑性平面应变问题中，$\varepsilon_z=\varepsilon_{xz}=\varepsilon_{yz}=0$，试对Mises,Tresca及最大偏应力三种屈服条件，给出用$\sigma_x,\sigma_y,\sigma_{xy}$表示的屈服条件并讨论$\sigma_z$的表达式。

6.2　如图所示的滑移线场共有6个点。已知$x_{0,0}=1,y_{0,0}=0$，点(0,1),(0,2)在原点为$A$半径为$\sqrt{2}$的圆弧上，间隔为$\theta=\frac{\pi}{40}$，点(1,1),(2,2)处在$x$轴上，$\sigma_{0,0}=-k$，　$\theta_{0,0}=\theta_{1,1}=\theta_{2,2}=-\frac{\pi}{4}$，




题　6.2

1）求出这6个点上的$x,y,\theta,\frac{\sigma}{k}$值。

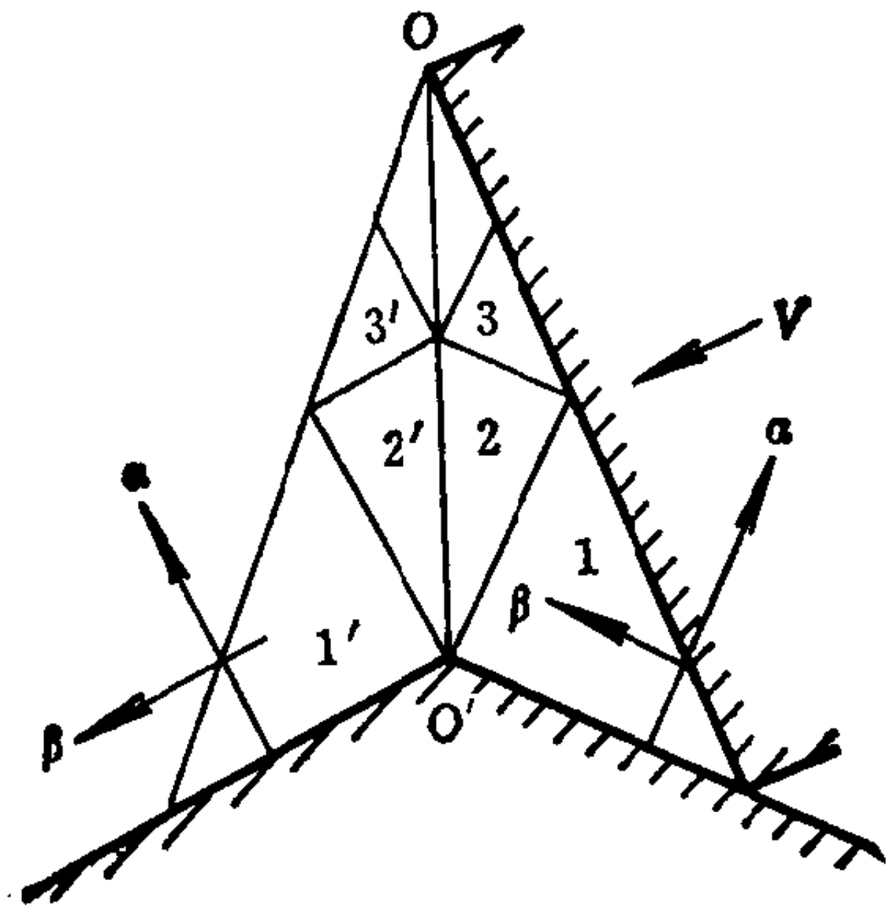
2）已知沿圆弧上给定法向速度$v_\alpha=1$，沿$x$轴上的点满足$v_y=0$，求出各点的$v_\alpha,v_\beta$值。

6.3　对图18楔的单边受压问题，其夹角为$2\gamma$，现在要具体求速度场的分布规律。其右边的区域号用1,2,3,…表示，左边的

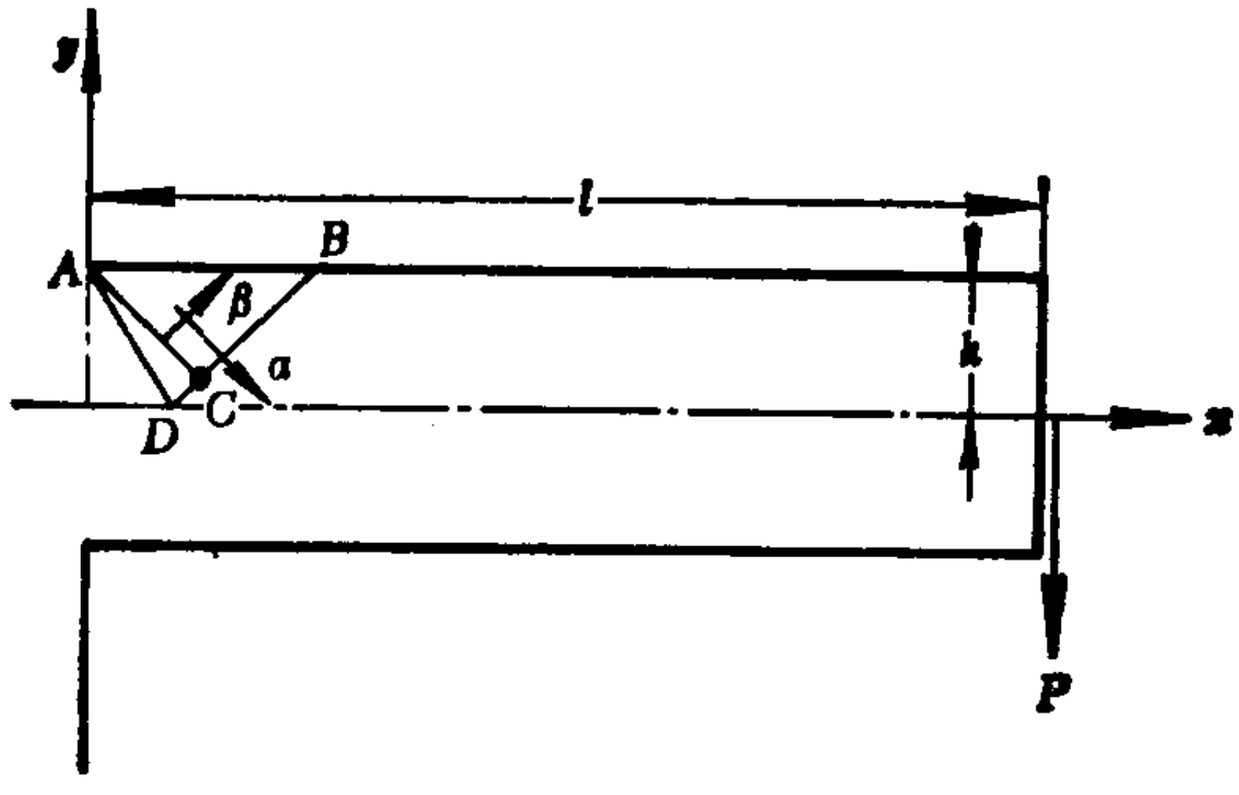
区域号用1′，2′，3′，…表示(如图所示)。右边界表面上作用法向速度为$V$。记$u=v_\alpha$，$v=v_\beta$，在左边区域用$u'$，$v'$表示。

1）求区域1，2，3，1′，2′，3′上的$u$，$v$值。

2）求顶上$O$点处的$u$，$v$值。




题 6.3




题 6.4

6.4 如图所示刚塑性平面应变悬臂梁，长$l$，高$2h$，端部受集中力$P$作用，已作出一上下部分对称的滑移场。其上半部分为图示的$ADCB$区域。$ADC$扇形区的夹角用$\omega$表示。

1）试导出下列关系：

$$\frac{P}{2kh} = 1 - (1 + 2\omega)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \omega\right), \qquad (1)$$

$$\frac{l}{h} = \frac{(1 + 2\omega)\sin 2\omega + \cos 2\omega}{(1 + \sin 2\omega) - (1 + 2\omega)\cos 2\omega}. \qquad (2)$$

2) 当$\frac{l}{h} = 20$时求$\frac{P}{2kh}$值。

3) 如将该问题作为理想弹塑性梁来处理，求$\frac{P_0}{2kh}$值。

6.5 对题6.4的悬臂梁，现在将外载改为在上表面作用均布载荷$q$。极限状态时的滑移场还与题6.4时的一样。但由于上、下条件不同，滑移场内的应力状态是不同的。

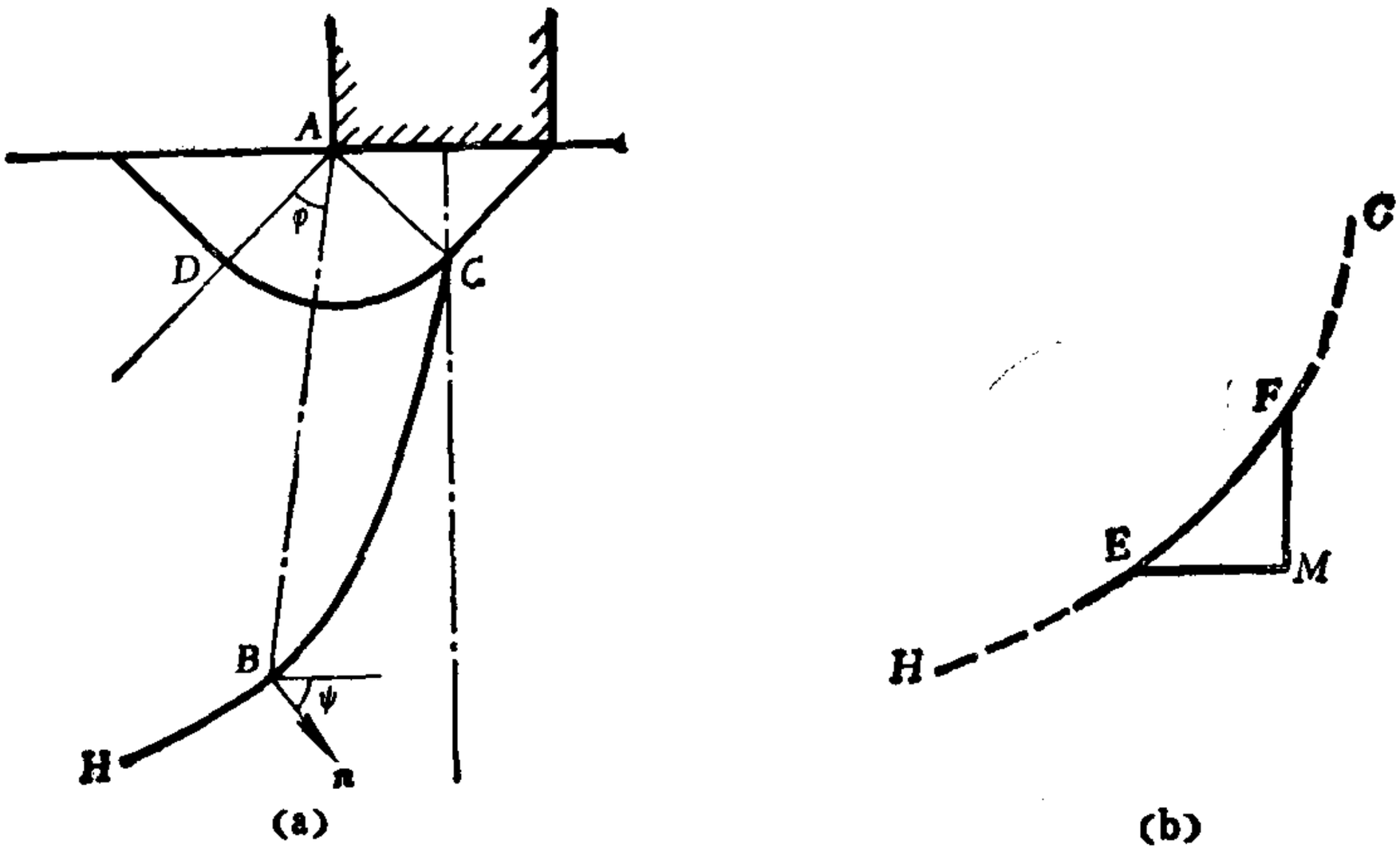
1) 导出$q,\omega$应满足以下方程

$$\frac{q}{2k} = \frac{(1 + 2\omega)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \omega\right) - 1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \omega\right) - \frac{l}{h}}$$

$$= \frac{1 + 2\omega}{1 + \frac{l^2}{h^2}\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \omega\right) - \frac{l}{h}\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2\omega\right)}.$$

2) 对$\frac{l}{h} = 10$时，求出$\omega$及$\frac{q}{2k}$值，并与按梁理论求得极限载荷值$\frac{q_0}{2k}$作比较。

6.6 对半平面上刚性冲模问题，已找出如图所示的 Prandtl 滑移场解，如果能进一步校核刚性区的条件，所得的解就是完全解。下面介绍一种校核办法，在刚性区取$\sigma_x = \sigma_x(y)$，$\sigma_y = \sigma_y(x)$，$\sigma_{xy} = 0$形式的应力场，它已自动满足平衡方程，只要使其不违反屈服条件即可。其次将塑性区的应力场向外开拓，这两个场必然




题 6.6

在某一条线上相交。由于对称性，我们只画出左边的图形，用$CH$线表示交线(如图(a)所示)，考虑开拓后塑性区的任一$\alpha$线$AB$，它与$AD$边夹角为$\varphi$，交$CH$线于$B$点。该点法线$n$方向与$x$轴夹角为$\psi$。

请读者证明在刚性区任一点$M$(如图(b)所示)都满足关系$\sigma_y(M)-\sigma_x(M)\leqslant 2k$。即不违反屈服条件。

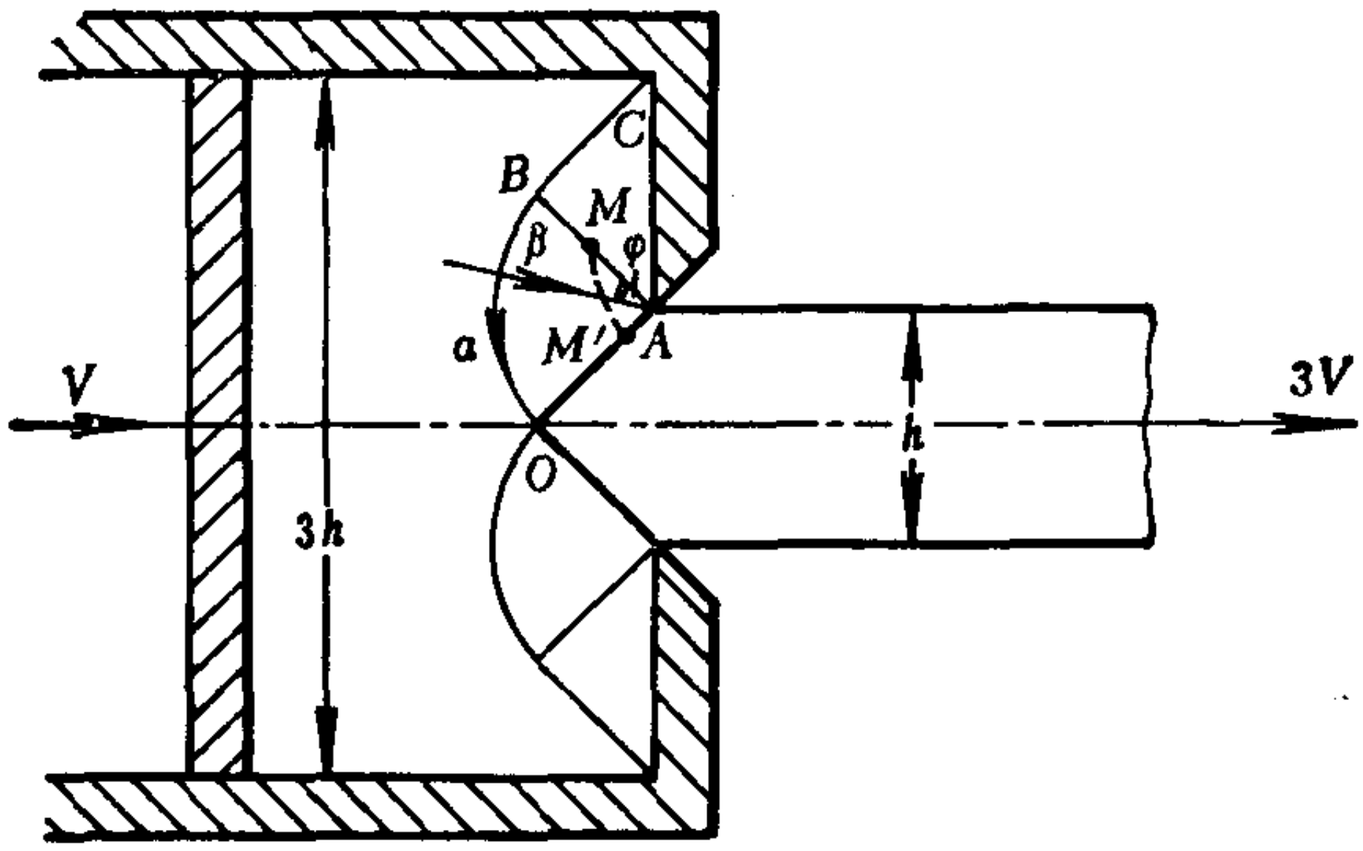
(提示：1. $\sigma_x(M)=\sigma_x(E)$，$\sigma_y(M)=\sigma_y(F)$

2. 在刚塑性交界处$\sigma_n,\sigma_{nt}$连续。)

6.7 内径为$a$，外径为$b$的圆环，受内压$p$的作用，设环很薄可作为平面应力问题来处理，如材料满足Mises理想塑性条件。对$b/a=2$时求塑性极限压力$P_s$。并与平面应变时的$P_s$值作一比较。 (提示：如令 $\sigma_\theta=\frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}}\cos\left(\omega-\frac{\pi}{6}\right)$，$\sigma_r=\frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}}\sin\left(\omega+\frac{\pi}{6}\right)$，则Mises屈服条件将自动满足)。

6.8 设材料由如图所示的框子中挤出，板的厚度由原来的$3h$变为$h$。材料与框壁的摩擦作用略去不计。后面刚板以速度$V$

向前推进。已作出塑性区的滑移场如图所示。求以下几个问题




题 6.8

1）在扇形区$OAB$中求速度分布规律$v_\alpha(\varphi)$，$v_\beta(\varphi)$。

2）利用关系

$$v_\alpha = v_\varphi = r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t},\quad v_\beta = -v_r = -\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

求$AB$线中点$M$，经过塑性区$OAB$到达$M'$时的质点移动轨迹曲线$r = r(\varphi)$。

3）利用关系$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{v_\alpha^2 + v_\beta^2}$及$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}r)^2 + (r\mathrm{d}\phi)^2$求质点从$M$到达$M'$时所需经历的时间。

# 第七章　塑性力学中的能量原理和极限载荷的限界定理

本章将讨论塑性力学中的最小势能原理和最小余能原理，以及在塑性极限分析中的下限定理和上限定理。塑性力学中的能量原理是进行弹塑性问题的数值计算的理论基础，根据这些原理，我们就可以用近似方法来求解弹塑性物体内的应力分布和位移分布。此外，对于理想弹塑性体或理想刚塑性体，它所能承受的外载荷是有一定界限的，因此，在实际问题中，常需要计算其塑性极限载荷及相应的瞬时速度场，而塑性极限分析中的上、下限定理则是进行上述这种计算的有力工具。由于在讨论以上这些问题时经常要用到虚功率原理，因此我们先来介绍当存在应力或速度间断时的虚功率原理。

## §7.1　存在间断场时的虚功率原理

现考虑某个应力场 $\sigma^0_{ij}$，它满足平衡方程

$$\sigma^0_{ij,j} + F_i = 0$$

和边界 $S_T$ 上的应力边界条件

$$\sigma^0_{ij} n_j = T_i .$$

我们称这样的应力场为静力场。再考虑某个速度场 $v^*_i$，它满足边界 $S_u$ 上的速度边界条件：$v^*_i = \bar{v}_i$，而且由 $v^*_i$ 可得到相应的应变率

$$\dot{e}^*_{ij} = \frac{1}{2}(v^*_{i,j} + v^*_{j,i}) .$$

我们称这样的速度场和应变率场为机动场。除了在一些间断面上，应力场 $\sigma_{ij}^{0}$ 和速度场 $v_i^*$ 都是连续可微的，而在间断面 $\Sigma$ 上（为简单起见，假定只有一个间断面。有几个间断面的情形可类似地加以讨论），允许存在应力或速度的间断，但它们必须满足第五章中给出的间断条件，即在 $\Sigma$ 上有 $[\![\sigma_{ij}]\!]n_j=0$ 和（或）$[\![v_i]\!]n_i=0$，这里的 $n_i$ 为间断面 $\Sigma$ 的单位法向量。

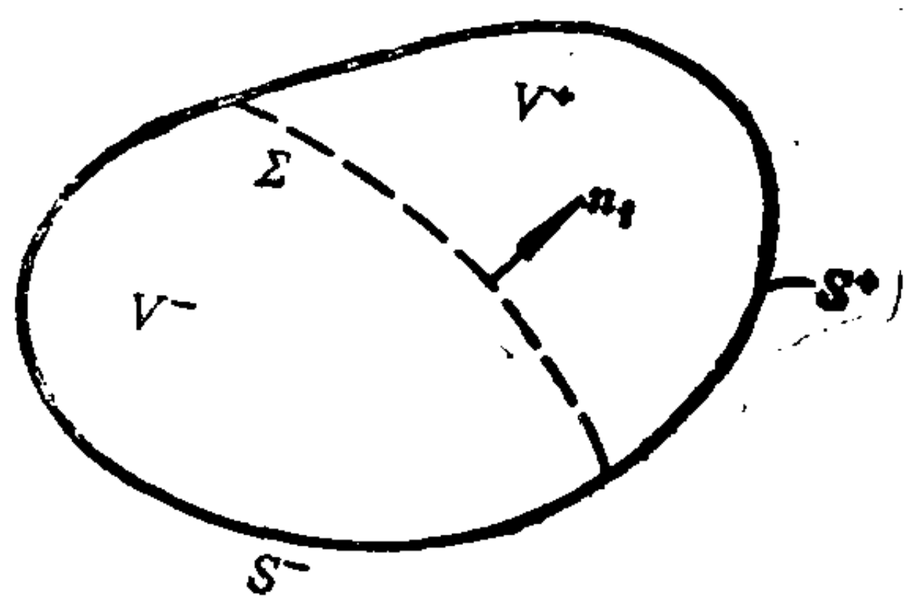


图 1

间断面 $\Sigma$ 将物体 $V$ 分成了两个区域 $V^-$ 和 $V^+$。区域 $V^-$ 的边界为 $S^-$ 和 $\Sigma$，区域 $V^+$ 的边界为 $S^+$ 和 $\Sigma$。对于区域 $V^-$，可计算

$$\begin{aligned}\int_{V^-}\sigma_{ij}^{0}\dot{e}_{ij}^{*}\mathrm{d}v &= \int_{V^-}\sigma_{ij}^{0}v_{i,j}^{*}\,\mathrm{d}v\\ &=\int_{V^-}[(\sigma_{ij}^{0}v_i^*)_{,j}-\sigma_{ij,j}^{0}v_i^*]\mathrm{d}v\\ &=\int_{S^-}\sigma_{ij}^{0}v_i^*n_j\mathrm{d}s+\int_{\Sigma}\sigma_{ij}^{0}v_i^*n_j\mathrm{d}s\\ &\quad+\int_{V^-}F_iv_i^*\mathrm{d}v,\end{aligned}$$

上式中的第一个等号利用了应力张量 $\sigma_{ij}^{0}$ 的对称性，第三个等号利用了散度定理和 $\sigma_{ij}^{0}$ 所满足的平衡方程。另外，上式右端沿间断面的积分中，被积函数是在区域 $V^-$ 内取值的。由于取间断面 $\Sigma$ 上的单位法向量 $n_j$ 与区域 $V^-$ 在边界 $\Sigma$ 上的外法向相一致，故该项取正号。类似地，在区域 $V^+$ 内可计算

$$\int_{V^+}\sigma_{ij}^{0}\dot{e}_{ij}^{*}\mathrm{d}v=\int_{S^+}\sigma_{ij}^{0}v_i^*n_j\mathrm{d}s-\int_{\Sigma}\sigma_{ij}^{0}v_i^*n_j\mathrm{d}s+\int_{V^+}F_iv_i^*\mathrm{d}v.$$

上式右端第二项的被积函数是在区域 $V^+$ 内 取值的．由于间断面 $\Sigma$ 上的单位法向量 $n_j$ 与区域 $V^+$ 在边界 $\Sigma$ 上 的 外法向相反，故该项取为负号。

将以上两式相加并利用边界条件和 $\Sigma$ 上 关 于 面力的连续性条件(第五章(20)式)，就有

$$\int_V \sigma_{ij}^0 \dot{\varepsilon}_{ij}^* \mathrm{d}v + \int_\Sigma \sigma_{ij}^0 [\![\dot{v}_i^*]\!] n_j \mathrm{d}s$$

$$= \int_{S_T} T_i \dot{v}_i^* \mathrm{d}s + \int_{S_u} \sigma_{ij}^0 \bar{v}_i n_j \mathrm{d}s + \int_V F_i \dot{v}_i^* \mathrm{d}v. \qquad (1)$$

这就是存在间断场时的虚功率原理（也可称为虚速度原理）。

现对(1)式作几点说明：

(1) 因为在(1)式的推导中并未用到本构关系，所以虚功率原理对任何材料都是适用的。

(2) 如将应力场 $\sigma_{ij}^0$ 改为应力率场 $\dot{\sigma}_{ij}^0$，则只要相应地将体力改为体力率 $\dot{F}_i$，将 $S_T$ 上的面力改为面力 率 $\dot{T}_i$，便仍可得到与(1)式相类似的虚功率方程；同样，如将速度场 $\dot{v}_i^*$ 改 为 虚位移场 $u_i^*$，应变率场 $\dot{\varepsilon}_{ij}^*$ 改为虚应变场

$$\varepsilon_{ij}^* = \frac{1}{2}(u_{i,j}^* + u_{j,i}^*),$$

将 $S_u$ 上 的已知速度改为已知位移，也可得到与(1)式相类似的方程，通常称之为虚功方程。

(3) (1)式左端的第二项是关于速 度 $\dot{v}_i^*$ 间 断 面 $\Sigma$ 上 的 积分，故以后将 $\Sigma$ 改为 $\Sigma^*$。现设想在间断面 $\Sigma^*$ 的 一 侧 有一个薄层过渡区，由于薄层的存在，速度场 $\dot{v}_i^*$ 是 连 续可微的，故有相应的应变率 $\dot{\varepsilon}_{ij}^*$。当薄层的厚度趋于零时，$\dot{\varepsilon}_{ij}^*$ 将 趋 于无穷大，而层内平均应变率与厚度的乘积则等于：

$$\eta_{ij}^* = \frac{1}{2}([\![\dot{v}_i^*]\!] n_j + [\![\dot{v}_j^*]\!] n_i), \qquad (2)$$

这说明，在间断面 $\Sigma^*$ 上与 $v_i^*$ 相对应的应变率虽然为无穷大，但其方向却仍与 $\eta_{i,j}^*$ 的相同。

（4）考虑到在 $\Sigma^*$ 上速度 $v_i^*$ 的法向分量的连续性，可取 $\Sigma^*$ 的某一单位切向量（记为 $t_i$），使它沿着 $[\![v_i^*]\!]$ 的方向。这时就有

$$[\![v_i^*]\!] = [\![v_\tau^*]\!] t_i .$$

另外，$\Sigma^*$ 上的面力 $\sigma_{ij}^0 n_j = T_i^0$ 在单位切向量 $t_i$ 上的分量可记为 $\tau^0$，即

$$\tau^0 = T_i^0 t_i .$$

于是，（1）式左端第二项也可写为

$$\int_{\Sigma^*} \tau^0 [\![v_\tau^*]\!] \mathrm{d}s .$$

## §7.2 弹塑性增量理论中的最小势能原理和最小余能原理

类似于上一节的讨论，我们可定义关于应力率的静力场 $\dot{\sigma}_{ij}^0$，它满足率型平衡方程

$$\dot{\sigma}_{ij,j}^0 + \dot{F}_i = 0$$

和边界 $S_T$ 上的率型边界条件：

$$\dot{\sigma}_{ij}^0 n_j = \dot{T}_i .$$

至于机动场 $v_i^*$ 和 $\dot{e}_{ij}^*$ 的定义则仍与以前相同。这时，相应的虚功率原理可写为

$$\int_V \dot{\sigma}_{ij}^0 \dot{e}_{ij}^* \mathrm{d}v = \int_{S_T} \dot{T}_i v_i^* \mathrm{d}s + \int_{S_u} \dot{\sigma}_{ij}^0 \bar{v}_i n_j \mathrm{d}s + \int_V \dot{F}_i v_i^* \mathrm{d}v, \quad (3)$$

上式中我们假定 $v_i^*$ 是连续的。当 $v_i^*$ 存在间断时，也可作类似的讨论。

## 一、最小势能原理

在一切可能的机动场 $v_i^*$ 和 $\dot{e}_{ij}^*$ 中，真实的机动场 $v_i$ 和 $\dot{e}_{ij}$ 使下列泛函取最小值：

$$\pi(\dot{e}_{ij}^*)=\frac{1}{2}\int_V \dot{\sigma}_{ij}^*\dot{e}_{ij}^*\mathrm{d}v-\int_{S_T}\dot{T}_i v_i^*\mathrm{d}s-\int_V \dot{F}_i v_i^*\mathrm{d}v, \quad (4)$$

即有

$$\pi(\dot{e}_{ij}^*)\geqslant\pi(\dot{e}_{ij}), \quad (5)$$

上式中的 $\dot{\sigma}_{ij}^*$ 与 $\dot{e}_{ij}^*$ 之间满足率型本构方程（即第四章 的(47)式或（48）式，其中要求 $h\geqslant 0$），故 $\dot{\sigma}_{ij}^*$ 不一定满足率型平衡方程和 $S_T$ 上的率型边界条件。

**证明** 现考虑

$$\pi(\dot{e}_{ij}^*)-\pi(\dot{e}_{ij})=\frac{1}{2}\int_V(\dot{\sigma}_{ij}^*\dot{e}_{ij}^*-\dot{\sigma}_{ij}\dot{e}_{ij})\mathrm{d}v$$
$$-\int_{S_T}\dot{T}_i(v_i^*-v_i)\mathrm{d}s-\int_V\dot{F}_i(v_i^*-v_i)\mathrm{d}v. \quad (6)$$

由于 $v_i^*-v_i$ 是在边界 $S_u$ 上取零值的机动场，而真实的应力率 $\dot{\sigma}_{ij}$ 是静力场，故利用虚功率原理（3）式后，就有

$$\int_V\dot{\sigma}_{ij}(\dot{e}_{ij}^*-\dot{e}_{ij})\mathrm{d}v=\int_{S_T}\dot{T}_i(v_i^*-v_i)\mathrm{d}s+\int_V\dot{F}_i(v_i^*-v_i)\mathrm{d}v.$$

于是，（6）式可写为

$$\pi(\dot{e}_{ij}^*)-\pi(\dot{e}_{ij})=\frac{1}{2}\int_V(\dot{\sigma}_{ij}^*\dot{e}_{ij}^*+\dot{\sigma}_{ij}\dot{e}_{ij}-2\dot{\sigma}_{ij}\dot{e}_{ij}^*)\mathrm{d}v.$$

因为 $\dot{\sigma}_{ij}^*$ 与 $\dot{e}_{ij}^*$ 之间以及 $\dot{\sigma}_{ij}$ 与 $\dot{e}_{ij}$ 之间分别都满足弹塑性率型本构关系，所以由第五章的基本不等式（7）式可知上式右端的被积函数是非负的。故证。

## 二、最小余能原理

在一切可能的静力场 $\sigma^0_{ij}$ 中，真实的应力率 $\dot{\sigma}_{ij}$ 使下列泛函取最小值：

$$\pi^0(\sigma^0_{ij}) = \frac{1}{2}\int_V \sigma^0_{ij}\dot{e}^0_{ij}\mathrm{d}v - \int_{s_u} \sigma^0_{ij}\bar{v}_i n_j \mathrm{d}s, \qquad (7)$$

即有

$$\pi^0(\sigma^0_{ij}) \geqslant \pi^0(\dot{\sigma}_{ij}), \qquad (8)$$

上式中的 $\dot{e}^0_{ij}$ 与 $\sigma^0_{ij}$ 之间满足率型本构方程（即第四章的(47)式或（48）式，其中要求 $h\geqslant 0$），故 $\dot{e}^0_{ij}$ 不一定满足协调条件。

**证明** 现考虑

$$\pi^0(\sigma^0_{ij}) - \pi^0(\dot{\sigma}_{ij}) = \frac{1}{2}\int_V (\sigma^0_{ij}\dot{e}^0_{ij} - \dot{\sigma}_{ij}\dot{e}_{ij})\mathrm{d}v$$

$$- \int_{s_u} (\sigma^0_{ij} - \dot{\sigma}_{ij})\bar{v}_i n_j \mathrm{d}s. \qquad (9)$$

由于 $\sigma^0_{ij} - \dot{\sigma}_{ij}$ 是与零体力率相平衡且满足零面力率边界条件的静力场，而真实的速度场 $v_i$ 和真实的应变率场 $\dot{e}_{ij}$ 是机动场，故利用虚功率原理（3）式后，就有

$$\int_V (\sigma^0_{ij} - \dot{\sigma}_{ij})\dot{\varepsilon}_{ij}\mathrm{d}v = \int_{s_u} (\sigma^0_{ij} - \dot{\sigma}_{ij})\bar{v}_i n_j \mathrm{d}s.$$

代入（9）式后，得

$$\pi^0(\sigma^0_{ij}) - \pi^0(\dot{\sigma}_{ij}) = \frac{1}{2}\int_V (\sigma^0_{ij}\dot{\varepsilon}^0_{ij} + \dot{\sigma}_{ij}\dot{e}_{ij} - 2\sigma^0_{ij}\dot{e}_{ij})\mathrm{d}v.$$

因为 $\sigma^0_{ij}$ 与 $\dot{e}^0_{ij}$ 之间以及 $\dot{\sigma}_{ij}$ 与 $\dot{e}_{ij}$ 之间分别都满足弹塑性率型本构关系，所以由第五章的基本不等式（7）式可知上式右端的被积函数是非负的。故证。

对真实的速度场 $v_i$，应变率场 $\dot{e}_{ij}$ 和应力率场 $\dot{\sigma}_{ij}$ 应用虚功率原理（3）式，可得

$$\pi(\dot{e}_{ij}) = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}\dot{e}_{ij}\mathrm{d}v - \int_{S_T} \dot{T}_i v_i \mathrm{d}s - \int_V \dot{F}_i v_i \mathrm{d}s$$

$$= -\left(\frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}\dot{e}_{ij}\mathrm{d}v - \int_{S_u} \sigma_{ij}\dot{v}_i n_j \mathrm{d}s\right) = -\pi^0(\sigma_{ij}).$$

因此(5)式和(8)式还可统一地写为

$$\pi(\dot{e}^*_{ij}) \geqslant \pi(\dot{e}_{ij}) = -\pi^0(\sigma_{ij}) \geqslant -\pi^0(\sigma^0_{ij}). \quad (10)$$

## §7.3* 弹塑性全量理论中的最小势能原理和最小余能原理

以前曾经提到，当物体内每一点的加载路径都是极值路径时，我们就可以采用全量理论来进行求解，这时的物体相当于一个非线性弹性体．现假定在 $t=0$ 的初始时刻，作用于物体上的体力，边界 $S_T$ 上的面力和边界 $S_u$ 上的位移都等于零，与此相应的位移场、应变场和应力场的值也都等于零．在以后的加载过程中，作用于物体上的体力为 $F_i(x,t)$，$S_T$ 上的面力为 $T_i(x,t)$，$S_u$ 上给定的位移为 $\bar{u}_i(x,t)$，相应的位移场，应变场和应力场分别记为 $u_i(x,t)$，$\varepsilon_{ij}(x,t)$ 和 $\sigma_{ij}(x,t)$，它们与加载历史有关．现来考虑与上述问题相对应的第二个问题，它与上述问题的不同之处仅仅在于材料的本构方程，将由极值路径下的全量理论给出（参见第四章的（71）式和（72)式）：

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W^0}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Omega^0}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (11)$$

由此所得到的位移场，应变场和应力场将分别记为 $\tilde{u}_i(x,t)$，$\tilde{e}_{ij}(x,t)$ 和 $\tilde{\sigma}_{ij}(x,t)$，它们与加载历史无关，即只依赖于 $t$ 时刻的体力 $F_i(x,t)$，面力 $T_i(x,t)$ 和 $\bar{u}_i(x,t)$，而与 $t$ 时刻以前的体力、面力以及边界上给定的位移无关．

为了讨论与上述两类问题有关的势能和余能，我们先来写出

相应的虚功方程。设 $u_i^*$ 为任意一个满足位移边界条件的位移场，和它相对应的应变为 $\varepsilon_{ij}^* = \frac{1}{2}(u_{i,j}^* + u_{j,i}^*)$。如果 $\sigma_{ij}^0$ 仍然表示任意一个静力场，则虚功方程可写为：

$$\int_V \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^* \mathrm{d}v = \int_{S_T} T_i u_i^* \mathrm{d}s + \int_{S_u} \sigma_{ij}^0 \bar{u}_i n_j \mathrm{d}s + \int_V F_i u_i^* \mathrm{d}v. \quad (12)$$

上式中我们假定了 $u_i^*$ 是连续的（如果 $u_i^*$ 不连续，也可作类似的讨论）。

考虑到 $\sigma_{ij}$ 是一个静力场，而 $\tilde{u}_i$ 和 $\tilde{e}_{ij}$ 是一个满足位移边界条件的协调场（即机动场），故由（12）式，还可有

$$\int_V \sigma_{ij} \tilde{e}_{ij} \mathrm{d}v = \int_{S_T} T_i \tilde{u}_i \mathrm{d}s + \int_{S_u} \sigma_{ij} \bar{u}_i n_j \mathrm{d}s + \int_V F_i \tilde{u}_i \mathrm{d}v \quad (13)$$

和

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* \mathrm{d}v = \int_{S_T} T_i u_i^* \mathrm{d}s + \int_{S_u} \sigma_{ij} \bar{u}_i n_j \mathrm{d}s + \int_V F_i u_i^* \mathrm{d}v. \quad (14)$$

如果材料是稳定的，则由第四章的（74）式和（75）式可知，对于 $\varepsilon_{ij}^*$ 和 $\tilde{e}_{ij}$，有

$$W^0(\varepsilon_{ij}^*) - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* \geqslant W^0(\tilde{e}_{ij}) - \sigma_{ij} \tilde{e}_{ij}, \quad (15)$$

而对于 $\sigma_{ij}^0$ 和 $\sigma_{ij}$，有

$$\Omega^0(\sigma_{ij}^0) - \sigma_{ij}^0 \tilde{e}_{ij} \geqslant \Omega^0(\sigma_{ij}) - \sigma_{ij} \tilde{e}_{ij}. \quad (16)$$

对（15）式积分并利用（13）式和（14）式，得

$$\begin{aligned} \Pi(\varepsilon_{ij}^*) &\xlongequal{\text{def}} \int_V W^0(\varepsilon_{ij}^*) \mathrm{d}v - \int_{S_T} T_i u_i^* \mathrm{d}s - \int_V F_i u_i^* \mathrm{d}v \\ &\geqslant \int_V W^0(\tilde{e}_{ij}) \mathrm{d}v - \int_{S_T} T_i \tilde{u}_i \mathrm{d}s - \int_V F_i \tilde{u}_i \mathrm{d}v = \Pi(\tilde{e}_{ij}), \end{aligned} \quad (17)$$

上式中的 $\Pi(\varepsilon_{ij}^*)$ 称为与位移场 $u_i^*$ 相对应的势能。

此外，对于由任意加载历史所求得的真实场 $u_i, \varepsilon_{ij}$ 和 $\sigma_{ij}$，

总有

$$\int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{kl} \mathrm{d}\varepsilon_{kl} = W(\varepsilon_{ij}) \geqslant W^0(\varepsilon_{ij}).$$

因此，眞实势能

$$\Pi(\varepsilon_{ij}) \xlongequal{\text{def}} \int_V W(\varepsilon_{ij}) \mathrm{d}v - \int_{S_T} T_i u_i \mathrm{d}s - \int_V F_i u_i \mathrm{d}v$$

总不会小于与眞实位移场 $u_i$ 相对应的势能 $\Pi(\varepsilon_{ij})$，
即有

$$\overline{\Pi}(\varepsilon_{ij}) \geqslant \Pi(\varepsilon_{ij}) \geqslant \Pi(\varepsilon_{ij}) \tag{18}$$

由此可得到以下两点结论：

（1）如果物体内每一点的加载路径都是极值路径，则由全量理论求得的 $\tilde{u}_i, \varepsilon_{ij}$ 和 $\sigma_{ij}$ 就是真实的位移场、应变场和应力场。这时，（17）式表明：在一切满足位移边条件的机动场 $u_i^*$ 和 $\varepsilon_{ij}^*$ 中，与眞实位移场 $\tilde{u}_i$ 相对应的势能取最小值。

（2）如果物体内每一点的加载路径不都是极值路径，则由全量理论求得的 $\tilde{u}_i, \varepsilon_{ij}$ 和 $\sigma_{ij}$ 并不是真实的位移场、应变场和应力场。这时，（18）式表明，与位移场 $\tilde{u}_i$ 相对应的势能 $\Pi(\varepsilon_{ij})$ 是真实势能 $\Pi(\varepsilon_{ij})$ 的下限。但这并不能提供计算真实位移场的近似计算方法。

再来讨论最小余能原理。如果对静力场 $\sigma_{ij}^0$ 以及 $\tilde{u}_i, \varepsilon_{ij}$ 应用虚功方程（12）式，就有

$$\int_V \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij} \mathrm{d}v = \int_{S_T} T_i \tilde{u}_i \mathrm{d}s + \int_{S_u} \sigma_{ij}^0 \bar{u}_i n_j \mathrm{d}s + \int_V F_i \tilde{u}_i \mathrm{d}v. \tag{19}$$

对（16）式进行积分并利用（13）式和（19）式，可得

$$\Pi_c(\sigma_{ij}^0) \xlongequal{\text{def}} \int_V \Omega^0(\sigma_{ij}^0) \mathrm{d}v - \int_{S_y} \sigma_{ij}^0 \bar{u}_i n_j \mathrm{d}s$$

$$\geqslant\int_V \Omega^0(\bar{\sigma}_{ij})\mathrm{d}v-\int_{S_u}\bar{\sigma}_{ij}\bar{u}_i n_j\mathrm{d}s=\Pi_c(\bar{\sigma}_{ij}),\quad(20)$$

上式中的 $\Pi_c(\sigma^0_{ij})$ 称为**与静力场 $\sigma^0_{ij}$ 相对应的余能。**

此外，对于由任意加载历史所求得的真实场 $u_i,\varepsilon_{ij}$ 和 $\sigma_{ij}$，第四章的（76）式可写为

$$\Omega^0(\bar{\sigma}_{ij})-\bar{\sigma}_{ij}\varepsilon_{ij}\geqslant\Omega(\sigma_{ij})-\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}.\quad(21)$$

再对 $\bar{\sigma}_{ij}$ 和 $\varepsilon_{ij}$ 以及 $\sigma_{ij}$ 和 $\varepsilon_{ij}$ 写出各自的虚功方程：

$$\int_V\bar{\sigma}_{ij}\varepsilon_{ij}\mathrm{d}v=\int_{S_T}T_iu_i\mathrm{d}s+\int_{S_u}\bar{\sigma}_{ij}\bar{u}_in_j\mathrm{d}s+\int_V F_iu_i\mathrm{d}v,$$

$$\int_V\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\mathrm{d}v=\int_{S_T}T_iu_i\mathrm{d}s+\int_{S_u}\sigma_{ij}\bar{u}_in_j\mathrm{d}s+\int_V F_iu_i\mathrm{d}v.$$

便可得到以下的不等式：

$$\Pi_c(\bar{\sigma}_{ij})=\int_V\Omega^0(\bar{\sigma}_{ij})\mathrm{d}v-\int_{S_u}\bar{\sigma}_{ij}\bar{u}_in_j\mathrm{d}s$$

$$\geqslant\int_V\Omega(\sigma_{ij})\mathrm{d}v-\int_{S_u}\sigma_{ij}\bar{u}_in_j\mathrm{d}s=\overline{\Pi}_c(\sigma_{ij}),\quad(22)$$

**即真实余能 $\overline{\Pi}_c(\sigma_{ij})$ 总不会大于与极值路径解 $\bar{\sigma}_{ij}$ 相对应的余能 $\Pi_c(\bar{\sigma}_{ij})$。**

联合(20)式和(22)式，有

$$\Pi_c(\sigma^0_{ij})\geqslant\Pi_c(\bar{\sigma}_{ij})\geqslant\overline{\Pi}_c(\sigma_{ij}).\quad(23)$$

由此可得到以下两点结论：

（1）如果物体内每一点的加载路径都是极值路径，则由全量理论求得的 $\tilde{u}_i,\tilde{\varepsilon}_{ij}$ 和 $\bar{\sigma}_{ij}$ 就是真实的位移场、应变场和应力场。即有 $\bar{\sigma}_{ij}=\sigma_{ij}$ 和 $\Pi_c(\bar{\sigma}_{ij})=\overline{\Pi}_c(\sigma_{ij})$。这时，（20）式表明：在一切与静力场 $\sigma^0_{ij}$ 相对应的余能中，真实余能取最小值。

（2）如果物体内每一点的加载路径不都是极值路径，则由全量理论求得的 $\bar{\sigma}_{ij}$ 一般并不等于真实应力场 $\sigma_{ij}$。这时，（22）式表明：与 $\bar{\sigma}_{ij}$ 相对应的余能 $\Pi_c(\bar{\sigma}_{ij})$ 是真实余能 $\overline{\Pi}_c(\sigma_{ij})$ 的

上限.

## §7.4 全量理论中关于最小势能原理和最小余能原理的应用

本节假定全量理论始终是适用的，这时，物体的本构方程与一个非线性弹性体相类似.

如果在真实的位移场 $u_i$ 和真实的应变场 $\varepsilon_{ij}$ 附近对势能 $\Pi(\varepsilon^*_{ij})$ 作变分：

$$\delta\Pi(\varepsilon_{ij}) = \int_v \frac{\partial W^0}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta\varepsilon_{ij} \mathrm{d}v - \int_{S_T} T_i \delta u_i \mathrm{d}s - \int_V F_i \delta u_i \mathrm{d}v,$$

则由下相应的 $\sigma_{ij} = \dfrac{\partial W^0}{\partial \varepsilon_{ij}}$ 是真实的应力，而 $\delta u_i$ 在位移边界 $S_u$ 上为零，故由虚功原理可知以上的变分为零：

$$\delta\Pi(\varepsilon_{ij}) = 0.$$

这说明，在一切与机动场 $u^*_i$ 相对应的势能 $\Pi(\varepsilon^*_{ij})$ 中，真实势能不仅取最小值（即(17)式），而且取极小值.

特别是，如果体力 $F_i$ 为零，而在 $S_T$ 上作用有 $k$ 个广义力 $P_1, P_2, \cdots, P_k$，相应的广义位移为 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_k$，就有

$$\int_{S_T} T_i \delta u_i \mathrm{d}s = \sum_{i=1}^{k} P_i \delta \Delta_i.$$

这时，$\delta\Pi(\varepsilon_{ij}) = 0$ 的条件可写为

$$\delta\Pi(\varepsilon_{ij}) = \delta \int_v W^0(\varepsilon^*_{ij}) \mathrm{d}v - \sum_{i=1}^{k} P_i \delta \Delta_i = 0.$$

如令 $W^0 = \int_v W^0(\varepsilon^*_{ij}) \mathrm{d}v$，则由 $\delta\Delta_i$ 的任意性，可得.

$$P_i = \frac{\partial \bar{W}^0}{\partial \Delta_i} \quad (i = 1,2,\cdots,k)。 \tag{24}$$

上式通常称为卡氏（Castigliano，1879年）第一定理.

类似地，如果在真实的应力场 $\sigma_{ij}$ 附近对余能 $\Pi_c(\sigma^0_{ij})$作变分：

$$\delta\Pi_c(\sigma_{ij}) = \int_V \frac{\partial \Omega^0}{\partial \sigma_{ij}} \delta\sigma_{ij} \mathrm{d}v - \int_{S_u} \delta\sigma_{ij} \bar{u}_i n_j \mathrm{d}s,$$

则由于相应的$\varepsilon_{ij} = \dfrac{\partial \Omega^0}{\partial \sigma_{ij}}$是真实的应变，而 $\delta\sigma_{ij}$ 与零体力相平衡且在 $S_T$ 上的面力为零：$\delta\sigma_{ij}n_j = 0$，故由虚功原理可知以上的变分为零：

$$\delta\Pi_c(\sigma_{ij}) = 0。$$

这说明，在一切与静力场 $\sigma^0_{ij}$ 相对应的余能 $\Pi_c(\sigma^0_{ij})$中，真实余能不仅取最小值（即(20)式），而且取极小值。

特别地，如果在位移边界 $S_u$ 上给定 $k$ 个广义位移 $\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_k$，相应的广义力为 $P_1,P_2,\cdots,P_k$，就有

$$\int_{S_u} \delta\sigma_{ij} \bar{u}_i n_j \mathrm{d}s = \sum_{i=1}^{k} \Delta_i \delta P_i。$$

于是，$\delta\Pi_c(\sigma_{ij}) = 0$ 的条件可具体地写为

$$\delta\int_V \Omega^0(\sigma^0_{ij})\mathrm{d}v - \sum_{i=1}^{k} \Delta_i \delta P_i = 0。$$

如令 $\bar{\Omega}^0 = \int_V \Omega^0(\sigma^0_{ij})\mathrm{d}v$，则由 $\delta P_i$ 的任意性，可得

$$\Delta_i = \frac{\partial \bar{\Omega}^0}{\partial P_i} \quad (i = 1,2,\cdots,k)。 \tag{25}$$

上式通常称为卡氏第二定理（或 Grotti-Engesser 定理）。

此外，在工程上往往需要在已知应变场 $\varepsilon_{ij}$ 的情况下求出物

体中某一点的位移 $u_i$。为此，可在该点上施加一个单位大小但具有某给定方向的集中力 $P_i$。现将任意一个与 $P_i$ 相平衡的应力场记为 $\sigma^0_{ij}$（即除了该点上的力 $P_i$ 外，$\sigma^0_{ij}$ 与零体力和 $S_T$ 上的零面力相平衡），并假定 $S_u$ 上的给定位移为零，则根据虚功原理，可得：

$$P_i u_i = \int_V \sigma^0_{ij}\varepsilon_{ij}\mathrm{d}v, \tag{26}$$

上式左端给出沿 $P_i(=1)$ 方向上的位移 $u_i$ 的分量值。这就是通常所说的单位载荷法。

例1　图 2 所示的是由理想弹塑性材料构成的一次超静定桁架。各杆的截面积都为 $A$，中间杆②的长度为 $L$，它与相邻的杆①和杆③的夹角均为 60°。如在 $O$ 点上作用单调增长的外载 $P$ 和 $Q$，试用最小势能原理来计算当杆②进入塑性阶段后 $O$ 点的水平位移 $\delta_x$ 和垂直向下位移 $\delta_y$。

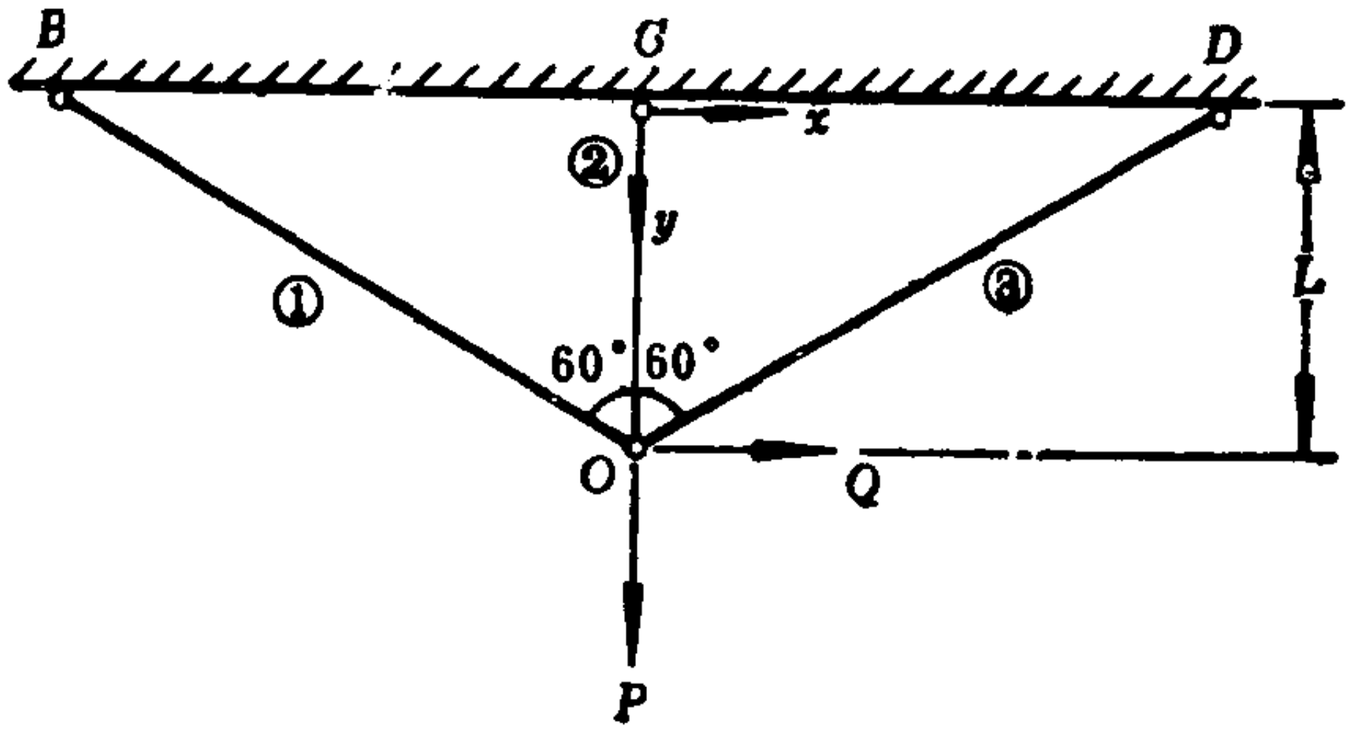



图　2

**解**　由几何关系可知各杆的应变为

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = (\sqrt{3}\,\delta_x + \delta_y)/4L, \\ \varepsilon_2 = \delta_y/L, \\ \varepsilon_3 = (-\sqrt{3}\,\delta_x + \delta_y)/4L. \end{cases} \tag{27}$$

而单位杆长的应变能可写为

$$U=\begin{cases}\dfrac{1}{2}AE\varepsilon_i^2, & \text{当}\ \varepsilon_i\leqslant\varepsilon_s=\dfrac{\sigma_s}{E},\\[2ex] A\sigma_s\left(\varepsilon_i-\dfrac{1}{2}\varepsilon_s\right), & \text{当}\ \varepsilon_i>\varepsilon_s=\dfrac{\sigma_s}{E},\end{cases}$$

其中 $i=1,2,3$。因为杆②已进入塑性阶段，故可求出桁架的总应变能为

$$\overline{W}^0=\frac{1}{2}AE(\varepsilon_1^2+\varepsilon_3^2)2L+A\sigma_s\left(\varepsilon_2-\frac{1}{2}\varepsilon_s\right)L$$

$$=\frac{AE}{8L}(3\delta_x^2+\delta_y^2)+A\sigma_s\delta_y-\frac{1}{2}AE\varepsilon_s^2L,$$

由（24）式，

$$Q=\frac{\partial\overline{W}^0}{\partial\delta_x}=\frac{3AE}{4L}\delta_x,\quad P=\frac{\partial\overline{W}^0}{\partial\delta_y}=\frac{AE}{4L}\delta_y+A\sigma_s$$

便得到

$$\delta_x=\frac{4LQ}{3AE},\quad \delta_y=\frac{4L}{AE}(P-A\sigma_s)\tag{28}$$

例2　在上例中假定杆件由幂次强化材料构成，即应力应变关系可写为 $\sigma=B\varepsilon^{\frac{1}{2}}$（其中 $B$ 为材料常数）。试用最小余能原理计算当三根杆件都受拉时杆中的内力 $N_i(i=1,2,3)$。

解　各杆的内力应满足平衡方程：

$$\begin{cases}N_1=\dfrac{Q}{\sqrt{3}}+P-N_2,\\[2ex] N_3=-\dfrac{Q}{\sqrt{3}}+P-N_2.\end{cases}\tag{29}$$

由于单位杆长上的余应变能可写为

$$A\int_0^{\sigma}\varepsilon d\sigma = A\int_0^{\sigma}\left(\frac{\sigma}{B}\right)^2 d\sigma = \frac{A}{3B^2}\sigma^3,$$

或由内力表示为$\frac{N_i^3}{3B^2A^2}$ $(i=1,2,3)$，而本问题中的位移边界条件为零，故结构的余能等于

$$\Pi_c = \frac{L}{3B^2A^2}(2N_1^3 + 2N_3^3 + N_2^3).$$

将（29）式代入上式后，有

$$\Pi_c = \frac{L}{3B^2A^2}[4(P-N_2)^3 + 4(P-N_2)Q^2 + N_2^3]$$

$$= \frac{L}{3B^2A^2}[4(P^3+PQ^2) - 4(3P^2+Q^2)N_2 + 12PN_2^2 - 3N_2^3].$$

故由 $\delta\Pi_c = 0$，可得

$$N_2 = \frac{4}{3}P \pm \frac{2}{3}\sqrt{P^2-Q^2}.$$

考虑到真实的余能应取极小值，故上式右端只能取负号。于是得：

$$\begin{cases} N_1 = \dfrac{Q}{\sqrt{3}} - \dfrac{P}{3} + \dfrac{2}{3}\sqrt{P^2-Q^2}, \\ N_2 = \dfrac{4}{3}P - \dfrac{2}{3}\sqrt{P^2-Q^2}, \\ N_3 = -\dfrac{Q}{\sqrt{3}} - \dfrac{P}{3} + \dfrac{2}{3}\sqrt{P^2-Q^2}. \end{cases} \tag{30}$$

由于假设三根杆都处于拉伸状态，即上式中 $N_i \geqslant 0$，$(i=1,2,3)$，故要求有

$$0 \leqslant |Q| \leqslant (2\sqrt{2}-1)\sqrt{3}\,P/7 \approx 0.4524P.$$

例3　试用单位载荷法计算上题中的水平位移 $\delta_x$ 和垂直向下

位移 $\delta_y$。

**解** 如要计算 $\delta_x$，则可令 $P=0$，$Q=1$，并任取一个与它相平衡的内力 $N_i^0(i=1,2,3)$。例如可取

$$N_1^0=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad N_2^0=0,\quad N_3^0=-\frac{1}{\sqrt{3}}。$$

注意到

$$\varepsilon_i=\left(\frac{N_i}{BA}\right)^2\quad(i=1,2,3),$$

(26)式可写为：

$$\delta_x=L(2N_1^0\varepsilon_1+2N_3^0\varepsilon_3+N_2^0\varepsilon_2)=\frac{2L}{\sqrt{3}B^2A^2}(N_1^2-N_3^2)。\tag{31}$$

类似地，如要计算 $\delta_y$，则可令 $P=1$，$Q=0$，并任取一个与它相平衡的内力 $N_i^0(i=1,2,3)$。例如可取

$$N_1^0=0,\quad N_2^0=1,\quad N_3^0=0。$$

这时，(26)式便可写为

$$\delta_y=L(2N_1^0\varepsilon_1+2N_3^0\varepsilon_3+N_2^0\varepsilon_2)=\frac{LN_2^2}{B^2A^2}。\tag{32}$$

如将(30)式中的 $N_1,N_2,N_3$ 代入(31)式和(32)式，就可具体写出相应的位移值。

## §7.5 极限分析中的下限定理和上限定理

在第二章中，我们曾对由理想塑性材料构成的梁和刚架结构的极限分析进行了讨论，并给出了计算塑性极限载荷的下限定理和上限定理。本节将在三维空间中讨论理想弹塑性(或理想刚塑性)物体的极限载荷的限界定理。

现假定物体内的体力 $F_i$ 和应力边界 $S_T$ 上的面力 $T_i$ 由两部

分组成：

$$F_i = F_{0i} + \eta F_{1i}(V\text{内}),\quad T_i = T_{0i} + \eta T_{1i}(S_T\text{上}) \tag{33}$$

其中 $F_{0i}, F_{1i}$ 以及 $T_{0i}, T_{1i}$ 都不随时间变化，而参数 $\eta(\geqslant 0)$由零单调地增长。当 $\eta = \eta$ 时，物体将开始产生塑性流动，相应的载荷称为塑性极限载荷，$\eta$ 称为极限载荷乘子。需要指出的是，以上叙述中已经隐含了一个假设，这就是 $F_{0i}$ 和 $T_{0i}$ 都比较小，即在体力 $F_{0i}$ 和 $S_T$ 上的面力 $T_{0i}$ 的作用下，物体并不产生塑性流动。以下的讨论都将采用这一假设。此外，我们还假定速度边界$S_u$上的给定速度 $v_i$ 等于零。对于一个理想塑性体，当在其边界上给定非零的速度分布后，在该边界上所作用的面力一般就对应于一个塑性极限载荷，可以同样地设法求出这部分边界上面力(或其合力)的下限和上限。关于这个问题，我们将留到本节的最后再作专门的讨论。

对应于真实的塑性极限载荷，虚功率方程(1)式可写为：

$$\begin{aligned}\int_V \sigma_{ij}\dot{e}_{ij}\mathrm{d}v + \int_\Sigma \sigma_{ij}[\![v_i]\!]n_j\mathrm{d}s &= \int_{S_T} T_{0i}v_i\mathrm{d}s + \int_V F_{0i}v_i\mathrm{d}v \\ &+ \eta\left(\int_{S_T} T_{1i}v_i\mathrm{d}s + \int_V F_{1i}v_i\mathrm{d}v\right),\end{aligned} \tag{34}$$

其中 $\Sigma$ 为真实塑性流动场中的速度间断面。(34)式左端实际上是物体内的塑性耗散功率，右端是外力在该物体上所作的功率。因为 $F_{0i}$ 和 $T_{0i}$ 不超过塑性极限载荷，所以

$$\begin{aligned}\Lambda(\sigma_{ij}, v_i) = \int_V \sigma_{ij}\dot{e}_{ij}\mathrm{d}v + \int_\Sigma \sigma_{ij}[\![v_i]\!]n_j\mathrm{d}s \\ -\left(\int_{S_T} T_{0i}v_i\mathrm{d}s + \int_V F_{0i}v_i\mathrm{d}v\right) > 0.\end{aligned} \tag{35}$$

再由 $\eta \geqslant 0$，故应该有

$$\Theta(v_i)=\int_{S_T}T_{1i}v_i\mathrm{d}s+\int_V F_{1i}v_i\mathrm{d}v>0. \tag{36}$$

而真实的极限载荷乘子为

$$\eta=\Lambda(\sigma_{ij},v_i)/\Theta(v_i). \tag{37}$$

在证明塑性极限载荷的下限定理和上限定理之前，我们先给出几个定义：

**定义1** 如果应力场 $\sigma_{ij}$ 不仅满足平衡方程：

$$\sigma^0_{ij,j}+F_i=0$$

和 $S_T$ 上的边条件

$$\sigma^0_{ij}n_j=T_i,$$

而且还处处不违反屈服条件，即 $f(\sigma^0_{ij})\leqslant 0$，则称 $\sigma^0_{ij}$ 为静力许可场。

**定义2** 现给定某个 $\eta^0(>0)$，则由(33)式可确定体力 $F_i$ 和 $S_T$ 上的面力 $T_i$。如果存在一个与以上的 $F_i$ 和 $T_i$ 相对应的静力许可场 $\sigma^0_{ij}$，那么就称 $\eta^0$ 为静力许可载荷乘子。

**定义3** 如果 $v^*_i$ 和 $\dot{e}^*_{ij}$ 不仅是一个机动场(即 $v^*_i$ 在 $S_u$ 上的值为零。除了在 $\Sigma^*$ 上允许 $v^*_i$ 的切向分量有间断外，$v^*_i$ 处处连续可微。此外，对于塑性体积不可压材料，一般还要求 $\dot{e}^*_{kk}=0$)，而且满足 $\Theta(v^*_i)>0$，则称 $v^*_i$ 和 $\dot{e}^*_{ij}$ 为运动许可场。

**定义4** 对于给定的运动许可场 $v^*_i$ 和 $\dot{e}^*_{ij}$，可由屈服条件和相应的流动法则来确定位于屈服面上的应力 $\sigma^*_{ij}$(在间断面 $\Sigma^*$ 上，$\sigma^*_{ij}$ 应由

$$\eta^*_{ij}=\frac{1}{2}(\llbracket v^*_i\rrbracket n_j+\llbracket v^*_j\rrbracket n_i)$$

和相应的流动法则确定，这时 $\eta^*_{ij}$ 与 $\left.\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\right|_{\sigma^*_{ij}}$ 有相同的方向)。

由此所得到的

$$\eta^*=\Lambda(\sigma^*_{ij},v^*_i)/\Theta(v^*_i), \tag{38}$$

就称为运动许可载荷乘子。

现来证明以下两个定理。

**下限定理(静力定理)** 真实的极限载荷乘子是最大的静力许可载荷乘子，即

$$\eta^0 \leqslant \eta. \tag{39}$$

**证明** 对于静力许可场 $\sigma_{ij}^0$，以及真实的速度场 $v_i$ 和应变率场 $\dot{e}_{ij}$，可写出虚功率方程(1)式为：

$$\int_V \sigma_{ij}^0 \dot{e}_{ij} \mathrm{d}v + \int_\Sigma \sigma_{ij}^0 [\![v_i]\!] n_j \mathrm{d}s$$

$$= \int_{S_T} T_{0i} v_i \mathrm{d}s + \int_V F_{0i} v_i \mathrm{d}v$$

$$+ \eta^0 \left( \int_{S_T} T_{1i} v_i \mathrm{d}s + \int_V F_{1i} v_i \mathrm{d}v \right). \tag{40}$$

由于 $\sigma_{ij}^0$ 不能超出屈服面，而在应力不随时间变化的条件下，应变率本身就是塑性应变率，故在物体内处处有

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0)\dot{e}_{ij} \geqslant 0.$$

又由于间断面 $\Sigma$ 上的真实应力应该位于屈服面上，而且屈服面在该应力点处的法向 $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$ 与

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2}([\![v_i]\!] n_j + [\![v_j]\!] n_i)$$

的相同，故在间断面 $\Sigma$ 上还有

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0)\eta_{ij} \geqslant 0.$$

因此，由(34)式减去(40)式后，就有

$$(\eta - \eta^0)\Theta(v_i) \geqslant 0.$$

注意到(36)式 $\Theta(v_i) > 0$，可知下限定理是成立的。

**上限定理(机动定理)** 真实的极限载荷乘子是最小的运动许可载荷乘子，即

$$\eta \leqslant \eta^* . \tag{41}$$

证明　对于真实的应力场$\sigma_{ij}$以及运动许可场$v_i^*$和$\dot{e}_{ij}^*$，可写出虚功率方程为

$$\begin{aligned}&\int_V \sigma_{ij}\dot{e}_{ij}^* dv + \int_{\Sigma^*} \sigma_{ij}[\![v_i^*]\!]n_j ds \\ &= \int_{S_T} T_{0i}v_i^* ds + \int_V F_{0i}v_i^* dv \\ &\quad + \eta \left( \int_{S_T} T_{1i}v_i^* ds + \int_V F_{1i}v_i^* dv \right). \end{aligned} \tag{42}$$

根据$\sigma_{ij}^*$的定义，可知在物体内有

$$(\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij})\dot{e}_{ij}^* \geqslant 0,$$

而在$v^*$的间断面$\Sigma^*$上，有

$$(\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij})\eta_{ij}^* \geqslant 0.$$

故得

$$\Lambda(\sigma_{ij}^*, v_i^*) \geqslant \Lambda(\sigma_{ij}, v_i^*),$$

或由(38)式和(42)式，有

$$(\eta^* - \eta)\Theta(v_i^*) \geqslant 0.$$

再注意到条件$\Theta(v^*) > 0$，可知上限定理是成立的。

联合(39)式和(41)式，以上两个定理可统一地写为

$$\eta^0 \leqslant \eta \leqslant \eta^* . \tag{43}$$

需要指出，由于以上讨论并未用到材料的弹性常数，因此极限载荷的大小是与材料的弹性性质无关的。

最后，我们来讨论在速度边界$S_u$上给定非零的速度分布$\bar{v}_i$的情形。这时，对应于真实场$v_i, \dot{e}_{ij}, \sigma_{ij}$，静力许可场$\sigma_{ij}^0$以及满足速度边条件的运动许可场$v_i^*, \dot{e}_{ij}^*$，可应用虚功率原理而写出

$$\int_V \sigma_{ij}\dot{e}_{ij} dv + \int_\Sigma \sigma_{ij}[\![v_i]\!]n_j ds$$

$$= \int_{S_T} T_i v_i \mathrm{d}s + \int_V F_i v_i \mathrm{d}v + \int_{S_u} \sigma_{ij} \bar{v}_i n_j \mathrm{d}s,$$

$$\int_V \sigma^0_{ij} \dot{e}_{ij} \mathrm{d}v + \int_\Sigma \sigma^0_{ij} [\![v_i]\!] n_j \mathrm{d}s$$

$$= \int_{S_T} T_i v_i \mathrm{d}s + \int_V F_i v_i \mathrm{d}v + \int_{S_u} \sigma^0_{ij} \bar{v}_i n_j \mathrm{d}s,$$

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{e}^*_{ij} \mathrm{d}v + \int_{\Sigma^*} \sigma_{ij} [\![v^*_i]\!] n_j \mathrm{d}s$$

$$= \int_{S_T} T_i v^*_i \mathrm{d}s + \int_V F_i v^*_i \mathrm{d}v + \int_{S_u} \sigma_{ij} \bar{v}_i n_j \mathrm{d}s.$$

上式中假定所给定的体力 $F_i$ 和 $S_T$ 上的面力 $T_i$ 不超过塑性极限载荷。

另外，还可引进定义式

$$\int_V \sigma^*_{ij} \dot{e}^*_{ij} \mathrm{d}v + \int_{\Sigma^*} \sigma^*_{ij} [\![v^*_i]\!] n_j \mathrm{d}s$$

$$= \int_{S_T} T_i v^*_i \mathrm{d}s + \int_V F_i v^*_i \mathrm{d}v + \int_{S_u} \mu^* \sigma^*_{ij} \bar{v}_i n_j \mathrm{d}s,$$

其中 $V$ 内的 $\sigma^*_{ij}$ 可根据屈服条件和相应的流动法则由 $\dot{e}^*_{ij}$ 确定，$\Sigma^*$ 上的 $\sigma^*_{ij}$ 可根据屈服条件和相应的流动法则由

$$\eta^*_{ij} = \frac{1}{2}([\![v^*_i]\!] n_j + [\![v^*_j]\!] n_i)$$

确定(如果 $S_u$ 为某个应变率 $\dot{e}^*_{ij}$ 为零的区域的边界，则 $S_u$ 上的 $\sigma^*_{ij}$ 可取为任意一个满足条件$\int_{S_u} \mu^* \sigma^*_{ij} \bar{v}_i n_j \mathrm{d}s \geqslant 0$ 的应力场)，而参数 $\mu^*$ 是由以上定义式来确定的。

由于在 $V$ 内 有$(\sigma_{ij} - \sigma^0_{ij}) \dot{e}_{ij} \geqslant 0$ 和$(\sigma^*_{ij} - \sigma_{ij}) \dot{e}^*_{ij} \geqslant 0$，在 $\Sigma$ 上和在 $\Sigma^*$ 上 分别有$(\sigma_{ij} - \sigma^0_{ij}) \eta_{ij} \geqslant 0$ 和$(\sigma^*_{ij} - \sigma_{ij}) \eta^*_{ij} \geqslant 0$，故可类似于以前的讨论而得到：

$$\int_{S_\sigma} \sigma_{ij}^0 v_i n_j \mathrm{d}s \leqslant \int_{S_u} \bar{\sigma}_{ij} \bar{v}_i n_j \mathrm{d}s \leqslant \int_{S_\sigma} \mu^* \sigma_{ij}^* \bar{v}_i n_j \mathrm{d}s$$

由运动许可场 $v_i^*, \varepsilon_{ij}^*$ 以及以上定义式所得到的在 $S_\sigma$ 上的面力分布 $\mu^* \sigma_{ij}^* n_j$ 也可看作是极限载荷的上限。如能同时找到一个静力许可场，使其在 $S_u$ 上的面力 $\sigma_{ij}^0 n_j$ 与 $\mu^* \sigma_{ij}^* n_j$ 相同，则以上的面力分布也就是真实的极限载荷。但当 $S_u$ 为某个应变率 $\varepsilon_{ij}^*$ 为零的区域边界时，$\mu^* \sigma_{ij}^*$ 的分布形式并不能唯一确定。如果进一步假定 $S_u$ 上的 $\bar{v}_i$ 为常数，以上连续不等式中的 $v_i$ 就可提到积分号之外，由此得到的便是一个关于边界 $S_u$ 上面力合力的下限和上限估计。

## §7.6 关于极限载荷限界定理的应用实例

在上节中，我们需要计算单位体积上对应于 $\varepsilon_{ij}^*$ 的塑性耗散功率

$$D(\varepsilon_{ij}^*) = \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^*.$$

对于不同的屈服条件，其表达式是不相同的。以下就 Mises 屈服条件和 Tresca 屈服条件分别进行讨论。

对于 Mises 屈服条件，由 $\varepsilon_{ij}^* = \lambda^* s_{ij}^*$ 可得

$$\varepsilon_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* = (\lambda^*)^2 s_{ij}^* s_{ij}^* = \frac{2}{3}(\lambda^*)^2 \sigma_s^2,$$

故有

$$\lambda^* = \frac{3}{2} \bar{\varepsilon}^* / \sigma_s,$$

其中 $\bar{\varepsilon}^*$ 为等效应变率 $\sqrt{\frac{2}{3} \varepsilon_{ij}^* \varepsilon_{ij}^*}$。由此求得

$$D(\varepsilon_{ij}^*) = \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* = s_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* = \lambda^* s_{ij}^* s_{ij}^* = \sigma_s \bar{\varepsilon}^*. \tag{44}$$

在以上推导中已用到了塑性体积不可压条件 $\varepsilon_{kk}^p = 0$。

对于 Tresca 屈服条件，可分为两种情形来加以讨论：

(1) $\dot{\varepsilon}_{ij}^*$ 沿六棱柱形屈服面中的某个面的外法向。

现设该屈服面在主应力空间中为 $\sigma_1^* - \sigma_3^* = \sigma_s$，故由

$$(\dot{\varepsilon}_1^*, \dot{\varepsilon}_2^*, \dot{\varepsilon}_3^*) = \lambda_2(1, 0, -1) \quad (\lambda_2 \geqslant 0),$$

可求得

$$D(\dot{\varepsilon}_{ij}^*) = \sigma_1^* \dot{\varepsilon}_1^* + \sigma_2^* \dot{\varepsilon}_2^* + \sigma_3^* \dot{\varepsilon}_3^* = \sigma_s \lambda_2 = \sigma_s |\dot{\varepsilon}^*|_{\max}.$$

这里 $|\dot{\varepsilon}^*|_{\max}$ 表示绝对值最大的主应变率。对于应变率沿其它屈服面外法向的情况，也可类似地进行讨论。

(2) $\dot{\varepsilon}_{ij}^*$ 沿六棱柱形屈服面中某两个屈服面的外法线所构成的交角内。

现设这两个屈服面为 $\sigma_1^* - \sigma_3^* = \sigma_s$，$\sigma_2^* - \sigma_3^* = \sigma_s$，则

$$(\dot{\varepsilon}_1^*, \dot{\varepsilon}_2^*, \dot{\varepsilon}_3^*) = (\lambda_2, \lambda_1, -\lambda_1 - \lambda_2) \quad (\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0).$$

由正交流动法则可知，相应的应力点位于以上两屈服面的交线上。故得

$$\begin{aligned} D(\dot{\varepsilon}_{ij}^*) &= \sigma_1^* \lambda_2 + \sigma_2^* \lambda_1 - \sigma_3^* (\lambda_1 + \lambda_2) = \sigma_s (\lambda_1 + \lambda_2) \\ &= \sigma_s |\dot{\varepsilon}^*|_{\max}. \end{aligned}$$

这是因为上式中绝对值最大的主应变率为 $\lambda_1 + \lambda_2 = |\dot{\varepsilon}_3^*|$。

由此可见，在任何情况下，Tresca 屈服条件所对应的塑性耗散功率都为：

$$D(\dot{\varepsilon}_{ij}^*) = \sigma_s |\dot{\varepsilon}^*|_{\max}. \tag{45}$$

在间断面 $\Sigma^*$ 上，(38)式中的 $\sigma_{ij}^*$ 是由 $\eta_{ij}^* = \frac{1}{2}([\![v_i^*]\!] n_j + [\![v_j^*]\!] n_i)$ 和相应的流动法则来确定的。因为 $[\![v_i^*]\!] n_i = 0$，这时的应变率状态处于纯剪切状态，所以无论对于 Mises 屈服条件还是 Tresca 屈服条件，间断面上总的塑性耗散功率都可写为，

$$\int_{\Sigma^*} \sigma_{ij}^* [\![v_i^*]\!] n_j \, ds = \int_{\Sigma^*} \tau_s [\![v_\tau^*]\!] \, ds,$$

其中 $\tau_s$ 为剪切屈服应力。

例1　图 3 是一个边长为 $2b$，厚度为 $t$ 的正方形板，板中间

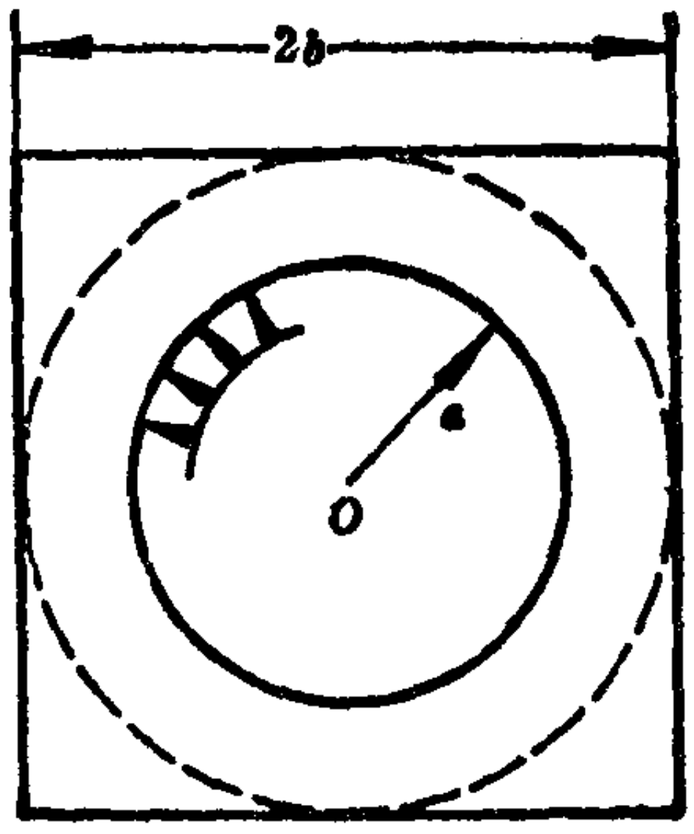



图 3

有一个半径为 $a$ ($a<b$)的圆孔，在圆孔的内壁作用有均布压应力 $p$ 。设材料为服从Tresca 屈服条件的理想塑性体，试求 $p$ 的上、下限。

**解** 由于 $p$ 是均布的，故不必采用载荷乘子而可以直接求 $p$ 。

(1) 静力解

在 $a\leqslant r\leqslant b$ 的 环形区域内，假设应力分布与厚壁圆筒在塑性区内的解相同，即

$$\begin{cases}\sigma_r = -p+\sigma_s \ln r/a,\\ \sigma_\theta = -p+\sigma_s\left(1+\ln\dfrac{r}{a}\right) \quad (a\leqslant r\leqslant b),\\ \sigma_{r\theta}=0.\end{cases} \tag{46}$$

它满足 $r=a$ 上的应力边界条件和平衡方程。在 $r>b$ 的 区域内，可取应力值为零。这时，在 $r=b$ 的交界线上法向应力连续的条件为

$$\sigma_r|_{r=b} = -p+\sigma_s \ln\frac{b}{a}=0,$$

故解得

$$p=\sigma_s\ln\frac{b}{a}.$$

以上的 $p$ 值随 $b/a$ 的增大而增大。另外，对于平面应力问题来说，当平面内的主应力较大时，还可能产生平面外的屈服，即还需要考虑屈服条件 $|\sigma_r|\leqslant\sigma_s$ 和 $|\sigma_\theta|\leqslant\sigma_s$。由于主应力的绝对值中以 $|\sigma_r|$ 在 $r=a$ 处的值(即 $p$ )为最大，故还要求 $p\leqslant\sigma_s$。因此，$p$ 的下限值为

$$p^0=\begin{cases}\sigma_s\ln\dfrac{b}{a}, & \text{当}\dfrac{b}{a}\leqslant e=2.718,\\[2ex] \sigma_s\ , & \text{当}\dfrac{b}{a}>e=2.718.\end{cases}\tag{47}$$

(2) 机动解

现将运动许可场取为一个轴对称的速度场：

$$v_r^*=v(r),\quad v_\theta^*=v_z^*=0.$$

由体积不可压条件，要求

$$\dot{\varepsilon}_r^*+\dot{\varepsilon}_\theta^*+\dot{\varepsilon}_z^*=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}+\frac{v}{r}=0,$$

解得：

$$v(r)=\frac{c}{r}.$$

外力的功率为

$$\int_{s_T}T_iv_i^*\mathrm{d}s=2\pi atp^*v|_{r=a}=2\pi tp^*c.$$

根据运动许可场的条件(36)式，上式中的常数 $c$ 应该是正的：$c>0$。

再由 $|\dot{\varepsilon}^*|_{\max}=\dot{\varepsilon}_\theta^*=\dfrac{c}{r^2}$，可计算塑性耗散功率为

$$\int_V \sigma^*_{ij}\dot{\varepsilon}^*_{ij}\mathrm{d}v = \int_V \sigma_s |\dot{\varepsilon}^*|_{\max}\mathrm{d}v$$

$$= 8t\sigma_s c\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_a^{b/\cos\theta}\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

$$= 8t\sigma_s c\int_0^{\pi/4}\ln\frac{b}{a\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$= 8t\sigma_s c\left(\frac{\pi}{4}\ln\frac{b}{a}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos\theta\mathrm{d}\theta\right).$$

由通常的数学手册可查得

$$\ln\cos\theta = -\frac{1}{2}\theta^2-\frac{1}{12}\theta^4-\frac{1}{45}\theta^6-\cdots$$

$$-\frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)B_{2n-1}\theta^{2n}}{n(2n)!}\cdots$$

$$\left(\text{当}\ \theta^2<\frac{1}{4}\pi^2\right),$$

其中 $B_{2n-1}$ 为 Bernoulli 数。

故有

$$\int_V \sigma^*_{ij}\dot{\varepsilon}^*_{ij}\mathrm{d}v\approx 2\pi t\sigma_s c\left(\ln\frac{b}{a}+0.110\right).$$

由此得

$$p^* = \sigma_s\left(\ln\frac{b}{a}+0.110\right). \tag{48}$$

当$\frac{b}{a}=2$时，有 $p^0=0.693\sigma_s$，$p^*=0.803\sigma_s$，而真实的极限载荷 $p$ 应介于以上两个值之间，可取 为$(0.748\pm 7.35\%)\sigma_s$。

例2　在第六章楔的单边受压问题中设$2\gamma=\frac{\pi}{2}+2\theta$，试用极限分析中的下限定理和上限定理来估计边坡 $AB$ 上的极限压力 $p$

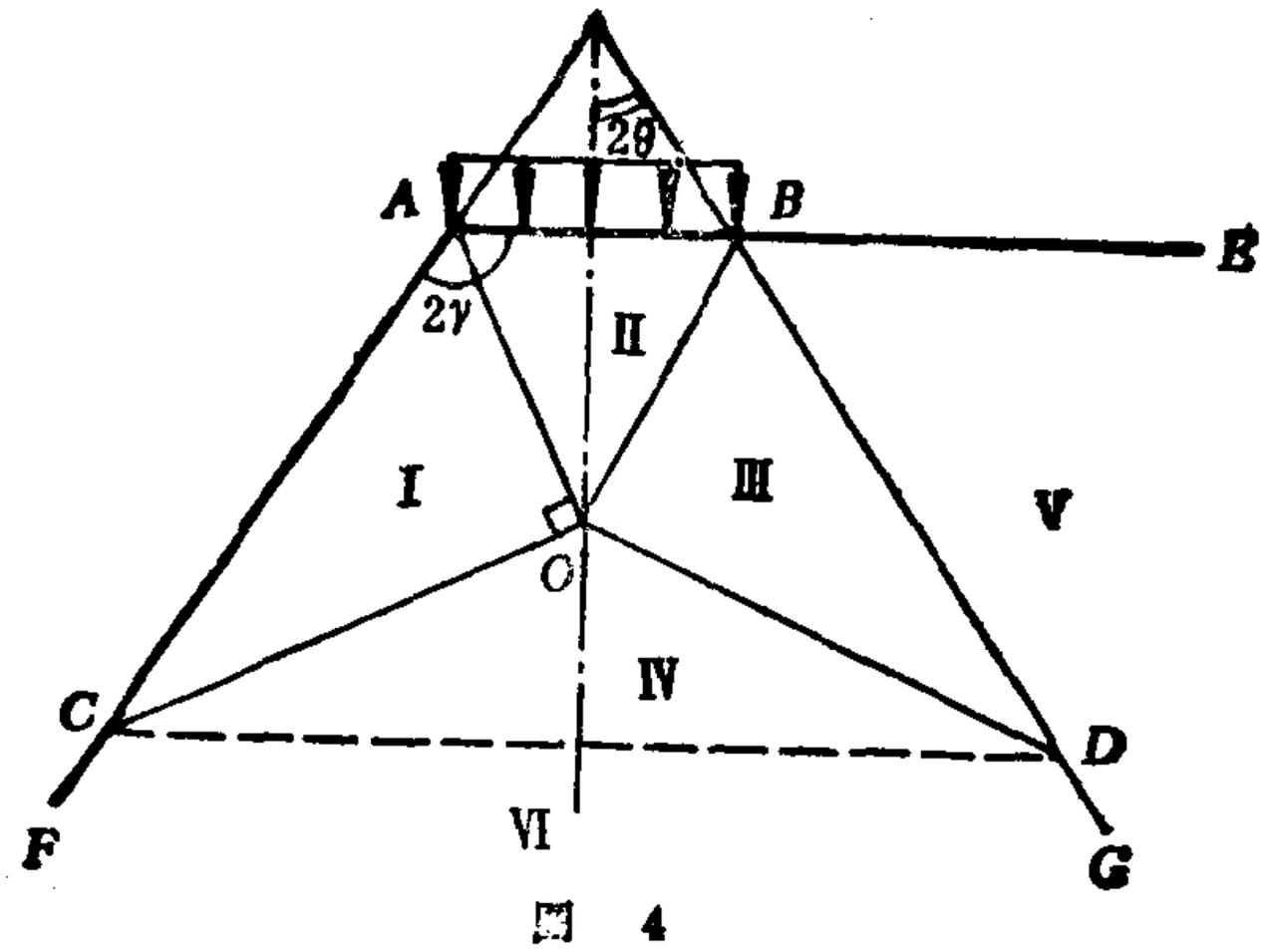



图 4

的值。

**解**

(1) 静力解。

首先，引进应力间断线 $AO$，它是$\angle CAB$ 的角平分线，并假定间断线 $AO$ 两侧的应力状态都处于屈服面之上。在区域 I (即区域 $AOC$)内，与 $AC$ 边相垂直的方向为大主应力方向，该大主应值为 $\sigma_1|_{\mathrm{I}}=0$，故小主应力为 $\sigma_2|_{\mathrm{I}}=-2k$($k$ 为莫尔圆半径，对于 Mises 屈服条件，它等于 $\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_s$，对于Tresca 屈服条件，它等于 $\sigma_s/2$)，平均应力为 $\sigma|_{\mathrm{I}}=-k$。相应的 $\alpha$ 族和 $\beta$ 族滑移线与边界 $AC$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$。考虑到该区域中 $\alpha$ 线与间断线 $AO$ 法向的夹角为 $\theta+\frac{\pi}{2}$，故由第六章的(39)式和(40)式可知，由区域 I 到区域 II (即区域 $AOB$)平均应力的间断值为 $[\![\sigma]\!]_{\mathrm{II},\mathrm{I}}=-2k\sin\theta$。因此，区域 II 内的大主应力、小主应力和平均应力的值分别为：

$$\sigma_1|_{\mathrm{II}}=-2k\sin 2\theta,\quad \sigma_2|_{\mathrm{II}}=-2k(1+\sin 2\theta),$$

$$\sigma|_{\mathrm{II}}=-k(1+2\sin 2\theta)。$$

$AB$ 边上的压应力就是区域Ⅱ中的小主应力值，故得

$$-p^0 = -2k(1+\sin 2\theta)。 \tag{49}$$

其次，还需要证明以上求得的$p^0$是极限载荷的下限，即要在整个边坡区域内构造一个静力许可场$\sigma^0_{ij}$，使它处处满足平衡方程且不违反屈服条件。

为此，可作应力间断线 $BO,CO,DO$ 和 $BDG$，使得

$$\angle CAB = \angle ABD = \frac{\pi}{2} + 2\theta,$$

$$\angle AOC = \angle BOD = \frac{\pi}{2},$$

而且 $BO,CO$ 和 $DO$ 分别为$\angle ABD$，$\angle ACD$ 和$\angle BDC$的角平分线。于是，在整个边坡区域内，除区域Ⅰ，Ⅱ之外，还有区域Ⅲ，Ⅳ以及区域Ⅴ(即角形区域 $EBG$)和Ⅵ(即区域 $FCDG$)。

和区域Ⅰ，Ⅱ一样，现设区域Ⅲ，Ⅳ内的应力状态不仅是均匀的，而且还处于屈服面之上，即以上各区域内的应力状态可以用某个半径为$k$的莫尔圆表示，而应力间断线 $AO,BO,CO,DO$ 分别为其相邻两塑性区内同名滑移线的角平分线。

类似于以前的讨论，由于区域Ⅰ中 $\alpha$ 线与间断线 $CO$ 法向的夹角为 $\theta$，故由第六章(39)式和(40)式，可知从区域Ⅰ到区域Ⅳ，平均应力的间断值为$[\![\sigma]\!]_{\text{Ⅳ,Ⅰ}} = 2k\sin 2\theta$。再根据对称性，可知区域Ⅰ和区域Ⅲ的平均应力是相同的。于是，便得到如下的表1：

表 1

| 区域 | 平均应力 | 大主应力 | 小主应力 | 大主应力的方向 |
|---|---|---|---|---|
| Ⅰ | $-k$ | 0 | $-2k$ | 垂直于 $AC$ 边 |
| Ⅱ | $-k(1+2\sin 2\theta)$ | $-2k\sin 2\theta$ | $-2k(1+\sin 2\theta)$ | 平行于 $AB$ 边 |
| Ⅲ | $-k$ | 0 | $-2k$ | 垂直于 $BD$ 边 |
| Ⅳ | $-k(1-2\sin 2\theta)$ | $2k\sin 2\theta$ | $-2k(1-\sin 2\theta)$ | 平行于 $CD$ 边 |

最后还剩下区域Ⅴ和Ⅵ．区域Ⅴ中的应力可设为零。至于区域Ⅵ，注意到区域 $FABG$ 和区域 $FCDG$ 的相似性，可将区域Ⅳ中的小主应力 $-2k(1-\sin 2\theta)$ 作为垂直于 $CD$ 边的压应力值 $-p_1$，而构造与以前完全类似的应力场。其中唯一的区别是应将 $k$ 值改为

$$k_1=\left(\frac{1-\sin 2\theta}{1+\sin 2\theta}\right)k<k。$$

故区域 $FCDG$ 内的应力值将始终在屈服面内。反复构造与以上相似的区域和应力场直至无穷，便得到了一个满足所需要求的静力许可场．因此，(49)式的确是极限载荷的下限。

(2) 机动解。

设 $AB$ 边以均匀速度 $u$ 垂直向下运动，则单位厚度的外力功率为 $p^*ul$，其中 $l$ 为 $AB$ 边的长度，$p^*$ 为 $AB$ 边上的压应力值。下面来计算单位厚度的塑性耗散功率。为此可利用第六章的图17，而对区域 $AOB$，区域 $COD$ 以及区域 $BOC$ 分别进行讨论。

现采用滑移线 $(\alpha,\beta)$ 上的局部标架 $\{i_\alpha,i_\beta\}$，则由于区域 $AOB$ 和 $COD$ 中的速度是均匀的，故有 $\dot{\varepsilon}^*_{\alpha\beta}=0$。而在扇形区域 $BOC$ 中，应变率的非零分量为

$$\dot{\varepsilon}^*_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^*_\alpha}{\partial s_\beta}+\frac{\partial v^*_\beta}{\partial s_\alpha}+v^*_\alpha\frac{\partial\theta}{\partial s_\alpha}-v^*_\beta\frac{\partial\theta}{\partial s_\beta}\right)$$

(见第六章的(26)式和(27)式)。如取 $r$ 为某代表点到 $O$ 点的距离，就有

$$\mathrm{d}s_\alpha=\mathrm{d}r,\quad \mathrm{d}s_\beta=r\mathrm{d}\theta。$$

再注意 $v^*_\alpha=0$，$v^*_\beta=-\sqrt{2}u$ 以及 $\alpha$ 线为直线，上式可写为：

$$\dot{\varepsilon}^*_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v^*_\alpha}{\partial\theta}+\frac{\partial v^*_\beta}{\partial r}-\frac{1}{r}v^*_\beta\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{u}{r}。$$

因此，对于 Mises 屈服条件，由(44)式可得(注意 $\sigma_s=\sqrt{3}k$)

$$D(\dot{\varepsilon}^*_{ij}) = \sigma_s \overline{\dot{\varepsilon}^*} = \sqrt{2}k\frac{u}{r}.$$

而对于 Tresca 屈服条件，由(45)式可得(注意 $\sigma_s = 2k$)

$$D(\dot{\varepsilon}^*_{ij}) = \sigma_s |\dot{\varepsilon}^*|_{\max} = 2k\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{u}{r}\right) = \sqrt{2}k\frac{u}{r}.$$

可见用 $k$ 来表示时，以上两式是相同的。

在扇形区域 $BOC$ 内积分，有

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}l}\int_0^{2\theta} D(\dot{\varepsilon}^*_{ij})r\,d\theta dr = 2kul\theta.$$

此外，在第六章图17中的 $ABCD$ 线是速度间断线 $\Sigma^*$，切向速度的间断值为 $|[\![v^*_\tau]\!]| = \sqrt{2}u$，由此产生的切向剪应力为 $\tau^* = \tau_s = k$。故在单位厚度上，沿间断线所耗散的功率为

$$\sqrt{2}ku \times \sqrt{2}l(1+\theta) = 2kul(1+\theta),$$

其中 $\sqrt{2}l(1+\theta)$ 为间断线 $ABCD$ 的长度。

令总的塑性耗散功率 $2kul(1+2\theta)$ 与外力功率 $p^*ul$ 相等，可得

$$p^* = 2k(1+2\theta). \tag{50}$$

联立以上结果，可得真实极限压力 $p$ 的下限和上限：

$$1+\sin 2\theta \leqslant \frac{p}{2k} \leqslant 1+2\theta. \tag{51}$$

## §7.7* 安 定 定 理

### 一、残余应力-应变状态的基本性质

本节将讨论理想弹塑性体在交变载荷作用下的安定性问题。这时，在平衡方程 $\sigma_{ij,j} + F_i(x,t) = 0$ ($V$ 内)，以及边界条件 $\sigma_{ij}n_j = T_i(x,t)$，($S_T$ 上)和 $u_i = \bar{u}_i(x,t)$ ($S_u$ 上) 中的 $F_i, T_i$ 和

$u_i$不仅与空间的位置 $x$ 有关，而且也与时间 $t$ 有关。但这里讨论的是准静态过程，因此仍然忽略惯性力的影响。又由于不考虑粘性效应，实际上 $t$ 代表的是一个加载序列过程。

在问题的分析中，除几何关系 $\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})$ 之外，还需要给出相应的本构关系。由第四章的(48)式，有

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon^e_{ij}+\varepsilon^p_{ij}, \tag{52}$$

$$\varepsilon^e_{ij}=M_{ijkl}\sigma_{kl},\quad \dot{\varepsilon}^p_{ij}=\alpha\lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\ (\lambda\geqslant 0), \tag{53}$$

上式中的 $\alpha$ 当加载时取为 1，在其它情形时则取为零，而应力始终不超出屈服面，即 $f(\sigma_{ij})\leqslant 0$。显然，在上述问题中，所给出的交变外载荷始终都不允许超过物体的极限载荷。

若设想物体是完全弹性的，由平衡方程、几何关系和边界条件所求得的完全弹性解为 $u^E_i,\varepsilon^E_{ij}$和 $\sigma^E_{ij}$，那么，真实的位移、应变和应力还可分解为：

$$u_i=u^E_i+u^r_i,\quad \varepsilon_{ij}=\varepsilon^E_{ij}+\varepsilon^r_{ij},\quad \sigma_{ij}=\sigma^E_{ij}+\sigma^r_{ij}, \tag{54}$$

其中 $u^r_i,\varepsilon^r_{ij}$和 $\sigma^r_{ij}$分别称为残余位移、残余应变和残余应力。因为真实解 $u_i,\varepsilon_{ij},\sigma_{ij}$和完全弹性解 $u^E_i,\varepsilon^E_{ij},\sigma^E_{ij}$ 不仅与 $x$ 有关，而且也与 $t$ 有关，因此残余应变 $\varepsilon^r_{ij}$ 和残余应力 $\sigma^r_{ij}$ 一般也随时间 $t$ 变化。

根据以上讨论，可知残余应变是一个在位移边界 $S_u$上取零值的协调应变场，即

$$\begin{cases}\varepsilon^r_{ij}=\dfrac{1}{2}(u^r_{i,j}+u^r_{j,i})\ (V\text{ 内}),\\ u^r_i=0\qquad\qquad\qquad (S_u\text{上}),\end{cases} \tag{55}$$

而残余应力是一个与零外载荷相平衡的应力场，即

$$\begin{cases}\sigma^r_{ij,j}=0\ (V\text{ 内}),\\ \sigma^r_{ij}n_j=0\ (S_T\text{上}).\end{cases} \tag{56}$$

此外，残余应变和残余应力之间满足关系：

$$\varepsilon^{r}_{ij}=\varepsilon^{e}_{ij}+\varepsilon^{p}_{ij}-\varepsilon^{E}_{ij}=M_{ijkl}(\sigma_{kl}-\sigma^{E}_{kl})+\varepsilon^{p}_{ij}$$
$$=M_{ijkl}\sigma^{r}_{kl}+\varepsilon^{p}_{ij}. \tag{57}$$

关于残余应力-应变状态的性质还可作如下的讨论。

在塑性力学中我们知道，物体中的应变状态和应力状态不仅依赖于体力$F_i$，$S_T$上的面力$T_i$和$S_u$上的给定位移$\bar{u}_i$的当前值，而且还与加载历史有关。这就是说，$F_i$，$T_i$和$\bar{u}_i$的当前值只能唯一确定$u^{E}_{i}$，$\varepsilon^{E}_{ij}$和$\sigma^{E}_{ij}$，但不能唯一确定$u^{r}_{i}$，$\varepsilon^{r}_{ij}$和$\sigma^{r}_{ij}$。然而，我们可有如下性质：

**性质1** 给定$F_i$($V$内)，$T_i$($S_T$上)和$\bar{u}_i$($S_u$上)的当前值后，由$\varepsilon^{p}_{ij}$可唯一确定$\sigma^{r}_{ij}$。

这一性质说明$\varepsilon^{p}_{ij}$反映了物体的变形历史。

**证明** 反证法。设对于确定的$\varepsilon^{p}_{ij}$，有两组残余应力$\sigma^{r\,1}_{ij}$和$\sigma^{r\,2}_{ij}$与之相对应。这时$\sigma^{r\,1}_{ij}-\sigma^{r\,2}_{ij}$构成一个与零外载相平衡的静力场。此外，由(57)式可知$\varepsilon^{r\,1}_{ij}-\varepsilon^{r\,2}_{ij}=M_{ijkl}(\sigma^{r\,1}_{kl}-\sigma^{r\,2}_{kl})$是一个与零位移边界条件相对应的协调应变场，故虚功原理可写为

$$\int_V(\sigma^{r\,1}_{ij}-\sigma^{r\,2}_{ij})(\varepsilon^{r\,1}_{ij}-\varepsilon^{r\,2}_{ij})\mathrm{d}v$$
$$=\int_V M_{ijkl}(\sigma^{r\,1}_{ij}-\sigma^{r\,2}_{ij})(\sigma^{r\,1}_{kl}-\sigma^{r\,2}_{kl})\mathrm{d}v=0.$$

由$M_{ijkl}$的正定性，必有$\sigma^{r\,1}_{ij}=\sigma^{r\,2}_{ij}$。故证。

**性质2** 设$\sigma^{r\,0}_{ij}$是任意一个与零外载相平衡的应力场，则当给定塑性应变$\varepsilon^{p}_{ij}$后，真实的残余应力$\sigma^{r}_{ij}$使下列泛函取最小值：

$$I^{R}(\sigma^{r\,0}_{ij})=\int_V\left(\frac{1}{2}M_{ijkl}\sigma^{r\,0}_{ij}\,\sigma^{r\,0}_{kl}+\sigma^{r\,0}_{ij}\,\varepsilon^{p}_{ij}\right)\mathrm{d}v. \tag{58}$$

**证明** 若$\sigma^{r}_{ij}$是真实的残余应力，则由

$$\frac{1}{2}M_{ijkl}(\sigma^{r\,0}_{ij}-\sigma^{r}_{ij})(\sigma^{r\,0}_{kl}-\sigma^{r}_{kl})\geqslant 0$$

可得

$$\frac{1}{2}M_{ijkl}\sigma^{r0}_{ij}\sigma^{r0}_{kl}-\frac{1}{2}M_{ijkl}\sigma^{r}_{ij}\sigma^{r}_{kl}\geqslant M_{ijkl}(\sigma^{r0}_{ij}-\sigma^{r}_{ij})\sigma^{p}_{kl},$$

其中等号仅当$\sigma^{r0}_{ij}=\sigma^{r}_{ij}$时才成立。

因此，

$$I^R(\sigma^{r0}_{ij})-I^R(\sigma^{r}_{ij})$$

$$\geqslant\int_V[M_{ijkl}(\sigma^{r0}_{ij}-\sigma^{r}_{ij})\sigma^{r}_{kl}+(\sigma^{r0}_{ij}-\sigma^{r}_{ij})\varepsilon^{p}_{ij}]\mathrm{d}v$$

$$=\int_V(\sigma^{r0}_{ij}-\sigma^{r}_{ij})\varepsilon^{r}_{ij}\mathrm{d}v。$$

考虑到$(\sigma^{r0}_{ij}-\sigma^{r}_{ij})$是一个与零外载相平衡的静力场，$\varepsilon^{r}_{ij}$是一个与零位移边界条件相对应的协调应变场，故由虚功原理可知上式右端应等于零。证讫。

现来考虑$F_i$,$T_i$和$\bar{u}_i$以周期$T$作循环变化的情形.即对于任意时刻$t$，都有

$$F_i(x,t)=F_i(x,t+T),\ T_i(x,t)=T_i(x,t+T),$$

$$\bar{u}_i(x,t)=\bar{u}_i(x,t+T)。$$

经过一个周期后，设塑性应变由$\varepsilon^{p}_{ij}(x,t)$变到

$$\varepsilon^{p}_{ij}(x,t+T)=\varepsilon^{p}_{ij}(x,t)+\Delta\varepsilon^{p}_{ij},$$

而残余应力也由$\sigma^{r}_{ij}(x,t)$变到

$$\sigma^{r}_{ij}(x,t+T)=\sigma^{r}_{ij}(x,t)+\Delta\sigma^{r}_{ij}。$$

**性质3** 经过一个周期后，残余应力不改变（即$\Delta\sigma^{r}_{ij}=0$)的充要条件是$\Delta\varepsilon^{p}_{ij}$是一个对应于零位移边界条件的协调应变场。

**证明** 先证必要性：经过一个周期后，完全弹性解的增量应等于零：$\Delta\sigma^{E}_{ij}=0$，故由$\Delta\sigma^{r}_{ij}=0$可知总应力增量为零：

$$\Delta\sigma_{ij}=0。$$

但应变场$\varepsilon_{ij}$是一个协调场，因此，经过一个周期后，应变的增量

$$\Delta\varepsilon_{ij}=\Delta\varepsilon^{e}_{ij}+\Delta\varepsilon^{p}_{ij}=M_{ijkl}\Delta\sigma_{kl}+\Delta\varepsilon^{p}_{ij}=\Delta\varepsilon^{p}_{ij}$$

将是一个与零位移边界条件相对应的协调应变场。

再证充分性：由性质 2，在 $t$ 时刻给定$\varepsilon^{p}_{ij}$后，$\sigma^{r}_{ij}$应使$I^{R}_{t}(\sigma^{r0}_{ij})$取最小值；在 $t+T$ 时刻给定 $\varepsilon^{p}_{ij}+\Delta\varepsilon^{p}_{ij}$后，$\sigma^{r}_{ij}+\Delta\sigma^{r}_{ij}$应使下列泛函取最小值：

$$I^{R}_{t+T}(\sigma^{r0}_{ij}+\Delta\sigma^{r0}_{ij})$$

$$=\int_{V}\left[\frac{1}{2}M_{ijkl}(\sigma^{r0}_{ij}+\Delta\sigma^{r0}_{ij})(\sigma^{r0}_{kl}+\Delta\sigma^{r0}_{kl})\mathrm{d}v\right.$$

$$+\int_{V}(\sigma^{r0}_{ij}+\Delta\sigma^{r0}_{ij})\,\varepsilon^{p}_{ij}\mathrm{d}v+\int_{V}(\sigma^{r0}_{ij}+\Delta\sigma^{r0}_{ij})\Delta\varepsilon^{p}_{ij}\mathrm{d}v.$$

因为 $\sigma^{r0}_{ij}+\Delta\sigma^{r0}_{ij}$是一个与零外载相平衡的静力场，$\Delta\varepsilon^{p}_{ij}$是对应于零位移边界条件的协调应变场，所以上式右端的最后一项等于零。于是 $I^{R}_{t+T}(\sigma^{r0}_{ij}+\Delta\sigma^{r0}_{ij})$ 的最小值应取为 $t$ 时刻与 $\varepsilon^{p}_{ij}$相应的泛函 $I^{R}_{t}(\sigma^{r0}_{ij})$ 的最小值。这实际上就要求真实的残余应力增量为零，即$\Delta\sigma^{r}_{ij}=0$。证讫。

下面来考虑两个完全相同的理想弹塑性体，在完全相同的外载荷和边界条件作用下的情形，其间的唯一差别就是它们的初始残余应力不同。这可理解为实际结构中存在的装配应力、焊接应力等的差异，也可理解为同一物体在周期为$T$的循环载荷作用下，相差整数倍周期的两个状态中的残余应力的差异。

假设在周期外力作用下，与以上两个初始残余应力相对应的残余应力值分别为 $\sigma^{r1}_{ij}(x,t)$ 和 $\sigma^{r2}_{ij}(x,t)$，而相应的总应力分别为

$$\sigma^{(1)}_{ij}(x,t)=\sigma^{E}_{ij}(x,t)+\sigma^{r1}_{ij}(x,t),$$

和

$$\sigma^{(2)}_{ij}(x,t)=\sigma^{E}_{ij}(x,t)+\sigma^{r2}_{ij}(x,t),$$

则可有以下性质：

**性质4**

$$H(t)=\frac{1}{2}\int_V M_{ijkl}(\sigma_{ij}^{\tau 1}-\sigma_{ij}^{\tau 2})(\sigma_{kl}^{\tau 1}-\sigma_{kl}^{\tau 2})\mathrm{d}v \tag{59}$$

的时间变化率非正，即

$$\dot{H}\leqslant 0. \tag{60}$$

**证明** 注意到

$$\sigma_{ij}^{\tau 1}-\sigma_{ij}^{\tau 2}=\sigma_{ij}^{(1)}-\sigma_{ij}^{(2)}$$

和

$$M_{ijkl}(\sigma_{kl}^{(1)}-\sigma_{kl}^{(2)})=(\dot{\varepsilon}_{ij}^{(1)}-\dot{\varepsilon}_{ij}^{(1)p})-(\dot{\varepsilon}_{ij}^{(2)}-\dot{\varepsilon}_{ij}^{(2)p}),$$

(59) 式$H$的时间变化率可写为

$$\dot{H}=\int_V M_{ijkl}(\sigma_{ij}^{(1)}-\sigma_{ij}^{(2)})(\dot{\sigma}_{kl}^{(1)}-\dot{\sigma}_{kl}^{(2)})\mathrm{d}v$$

$$=\int_V(\sigma_{ij}^{(1)}-\sigma_{ij}^{(2)})(\dot{\varepsilon}_{ij}^{(1)}-\dot{\varepsilon}_{ij}^{(2)})\mathrm{d}v$$

$$-\int_V(\sigma_{ij}^{(1)}-\sigma_{ij}^{(2)})(\dot{\varepsilon}_{ij}^{(1)p}-\dot{\varepsilon}_{ij}^{(2)p})\mathrm{d}v. \tag{61}$$

因为 $\sigma_{ij}^{(1)}-\sigma_{ij}^{(2)}$ 是与零外载相平衡的静力场，$\dot{\varepsilon}_{ij}^{(1)}-\dot{\varepsilon}_{ij}^{(2)}$ 是与零速度边界条件相对应的机动场，故由虚功率原理可知上式右端的第一项等于零。再由 $(\sigma_{ij}^{(1)}-\sigma_{ij}^{(2)})\dot{\varepsilon}_{ij}^{(1)p}\geqslant 0$ 和 $(\sigma_{ij}^{(2)}-\sigma_{ij}^{(1)})\dot{\varepsilon}_{ij}^{(2)p}\geqslant 0$，可知(60)式是成立的。证讫。

## 二、安定定理①

根据以上讨论，我们不难给出静力安定定理（Melan，1938年）和机动安定定理（Koiter，1956年）。

① 本书仅给出两个最基本的安定定理。这些定理现已推广到计及强化、惯性力、温度，蠕变以及几何非线性效应等因素影响的情形。例如，可参考：

1) 黄筑平，杜森田，《力学学报》，17(5)，(1985)445—452。

2) J.A.König, Shakedo[illegible] of Elastic-plastic structures, Elsevier, Amsterdam, 1987.

**静力安定定理** 对于作用有体力 $F_i(x,t)$，面力 $T_i(x,t)$ 和在位移边界上给定位移 $\bar{u}_i(x,t)$ 的理想弹-塑性体，如果在某一时刻以后能找到一个不依赖时间 $t$ 的虚设残余应力 $\bar{\sigma}^r_{ij}(x)$，使得此后的完全弹性解 $\sigma^E_{ij}(x,t)$ 在物体内处处满足

$$f(\sigma^E_{ij}+\bar{\sigma}^r_{ij})<0 \tag{62}$$

则该物体是安定的。

**证明** 现取与虚设残余应力 $\bar{\sigma}^r_{ij}(x)$ 相对应的解为性质 4 中的第二种状态：

$$\sigma^{(2)}_{ij}=\sigma^E_{ij}(x,t)+\bar{\sigma}^r_{ij}(x),$$

则由(62)式可知 $\sigma^{(2)}_{ij}$ 始终在屈服面内。因此，第二种状态的塑性应变率为零

$$\dot{\varepsilon}^{(2)p}_{ij}=0.$$

再取真实的状态为第一种状态，则由(61)式得

$$\dot{H}=-\int_V(\sigma_{ij}-\sigma^{(2)}_{ij})\dot{\varepsilon}^p_{ij}\,dv\leqslant 0,$$

其中等号仅当真实的塑性应变率为零时成立。

因为 $H$ 是非负的，故当 $t\to\infty$ 时，$\dot{H}\to 0$。这说明物体内的塑性应变率将趋于零。由此可见该弹-塑性体是安定的。

此外，静力安定定理也有相应的逆定理。这里不再予以讨论。

最后，我们来考虑物体在循环载荷作用下的情形。如果对于某个假想的塑性应变率 $\dot{\varepsilon}^{*p}_{ij}$，经过一个周期后，其累积值

$$\Delta\varepsilon^{*p}_{ij}=\int_t^{t+T}\dot{\varepsilon}^{*p}_{ij}\,dt$$

是一个与零位移边条件相对应的协调应变场，则我们就称 $\dot{\varepsilon}^{*p}_{ij}$ 是一个**运动允许塑性应变率循环**(admissible plastic strain rate cycle)。根据性质 1 和性质 2，由 $\varepsilon^{*p}_{ij}$ 可唯一确定与之相应的残余应力 $\sigma^{*r}_{ij}$，故得相应的残余应变（参见(57)式）：

$$\varepsilon^{*r}_{ij}=M_{ijkl}\sigma^{*r}_{kl}+\varepsilon^{*p}_{ij} \tag{63}$$

和残余应变率 $\dot{e}^{*r}_{ij}$，它是一个与零位移边条件相对应的机动场。因此有相应的速度场 $\dot{u}^{*r}_i$，满足

$$\dot{e}^{*r}_{ij}=\frac{1}{2}(\dot{u}^{*r}_{i,j}+\dot{u}^{*r}_{j,i})。$$

**机动安定定理** 对于作用有周期变化的体力 $F_i(x,t)$，面力 $T_i(x,t)$ 和零位移边界条件的理想刚塑性体，如果它是安定的，则对一切可能的运动允许塑性应变率循环 $\dot{e}^{*p}_{ij}$，在每一循环中其塑性耗散功不小于外载荷在 $\dot{u}^{*r}_i$ 上所作的功：

$$\int_t^{t+T}\mathrm{d}t\left(\int_V F_i\dot{u}^{*r}_i\,\mathrm{d}v+\int_{S_T}T_i\dot{u}^{*r}_i\,\mathrm{d}s\right)\leqslant\int_t^{t+T}\mathrm{d}t\left(\int_V\sigma^{*}_{ij}\dot{e}^{*p}_{ij}\,\mathrm{d}v\right)。\tag{64}$$

上式中 $\sigma^{*}_{ij}$ 是由 $\dot{e}^{*p}_{ij}$ 通过正交流动法则求得的在屈服面上的应力。

**证明** 由静力安定定理的逆定理可知，当物体安定时，一定存在一个与时间无关的残余应力场 $\bar{\sigma}^{r}_{ij}$，使得

$$f(\sigma^{E}_{ij}+\bar{\sigma}^{r}_{ij})\leqslant 0。$$

现对静力场 $\sigma^{E}_{ij}+\bar{\sigma}^{r}_{ij}$ 以及机动场 $\dot{u}^{*r}_i$ 和 $\dot{e}^{*r}_{ij}$ 写出虚功率方程，并注意到(63)式，就有

$$\begin{aligned}\int_V F_i\dot{u}^{*r}_i\,\mathrm{d}v+\int_{S_T}T_i\dot{u}^{*r}_i\,\mathrm{d}s&=\int_V(\sigma^{E}_{ij}+\bar{\sigma}^{r}_{ij})\dot{e}^{*r}_{ij}\,\mathrm{d}v\\&=\int_V M_{ijkl}\sigma^{E}_{ij}\sigma^{*r}_{kl}\,\mathrm{d}v+\int_V M_{ijkl}\bar{\sigma}^{r}_{ij}\sigma^{*r}_{kl}\,\mathrm{d}v\\&\quad+\int_V(\sigma^{E}_{ij}+\bar{\sigma}^{r}_{ij})\dot{e}^{*p}_{ij}\,\mathrm{d}v。\end{aligned}\tag{65}$$

上式右端的第一项中，$\sigma^{*r}_{kl}$ 是与零外力相平衡的应力率，另一方面，$M_{ijkl}\sigma^{E}_{ij}=\varepsilon^{E}_{kl}$ 是与零位移边条件相对应的协调应变场，故由虚功原理可知其值为零。上式右端第二项中 $\bar{\sigma}^{r}_{ij}$ 是不随时间变化的，故在一个周期上的时间积分为

$$\int_t^{t+T} \mathrm{d}t \int_V M_{ijkl}\sigma'_{ij}\sigma^{*T}_{kl}\,\mathrm{d}v = \int_V M_{ijkl}\sigma'_{ij}\Delta\sigma^{*T}_{kl}\mathrm{d}v.$$

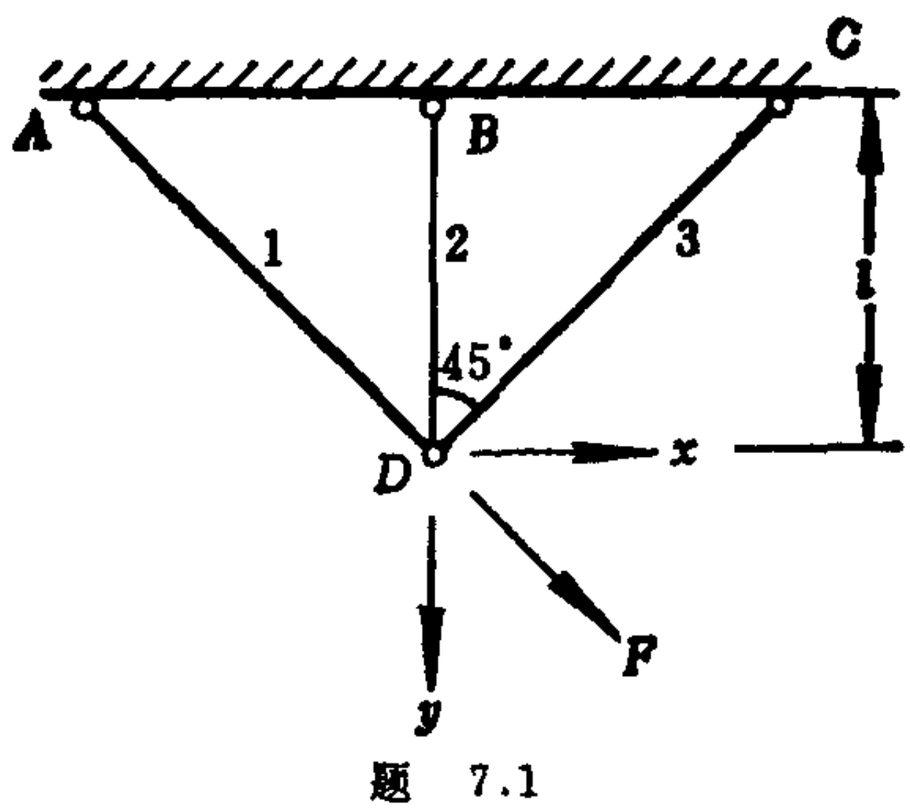
但 $\dot{\varepsilon}^{*P}_{ij}$ 是一个运动允许塑性应变率循环，故由性质 3 可知 $\Delta\sigma^{*T}_{kl}=0$，即上式右端第二项在一个周期上的时间积分为零。最后，由条件 $f(\sigma^E_{ij}+\sigma'_{ij})\leqslant 0$，得

$$(\sigma^*_{ij}-\sigma^E_{ij}-\sigma'_{ij})\dot{\varepsilon}^{*P}_{ij}\geqslant 0.$$

因此，(65)式右端的第三项不大于$\int_V \sigma^*_{ij}\dot{\varepsilon}^{*P}_{ij}\mathrm{d}v$。故在一个周期上对(65)式作时间积分后，可知(64)式是成立的。证讫。

## 习　题

7.1　如图所示桁架，各杆的截面积都为 $A$，杆的材料是线性强化的，弹性时 $\sigma=E\dot{\varepsilon}$，强化时 $\sigma=H\dot{\varepsilon}^P$，外载 $F$ 沿杆 1 方向，现已知杆 1 已进入强化阶段，试利用公式(4) 所定义的增量型势能 $\pi(\dot{\varepsilon}^*_{ij})$取极值的条件，导出 $D$ 点速度 $u,v$ 和外载速率 $\dot{F}$ 之间的关系。




题　7.1

7.2　对题 7.1 的问题，试采用公式(7)的增量型余能取极值的原理，导出各杆的内力率 $\dot{N}_1,\dot{N}_2,\dot{N}_3$ 与 $\dot{F}$ 的关系，这里还假

定杆 1 已进入强化阶段

7.3　考虑276页例 1 的问题，设材料是理想弹塑性的，且在问题中杆①已进入塑性状态，试利用全量理论的势能原理，求出位移 $\delta_x,\delta_y$和作用外力 $P,Q$ 之间的关系。

7.4　考虑277页例 2 的问题，设材料是幂次强化 $\sigma=B\sqrt{|\varepsilon|}\cdot$ signε 的，且 $Q$ 值较大，使杆①，②受拉，而杆③受压，试用全量理论的余能原理证明各杆的内力如下：

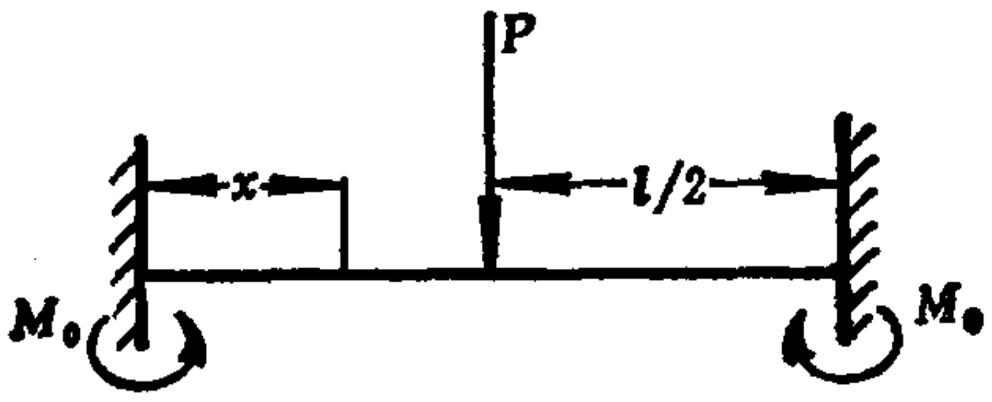
$$N_1=\left[\left(k_1+\frac{5}{\sqrt{3}}\right)-\sqrt{\frac{8k_1}{\sqrt{3}}+\frac{16}{3}}\right]Q>0,$$

$$N_2=\left[\frac{-4}{\sqrt{3}}+\sqrt{\frac{8k_1}{\sqrt{3}}+\frac{16}{3}}\right]Q>0,$$

$$N_3=\left[(k_1+\sqrt{3})-\sqrt{\frac{8k_1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}}\right]Q<0,$$

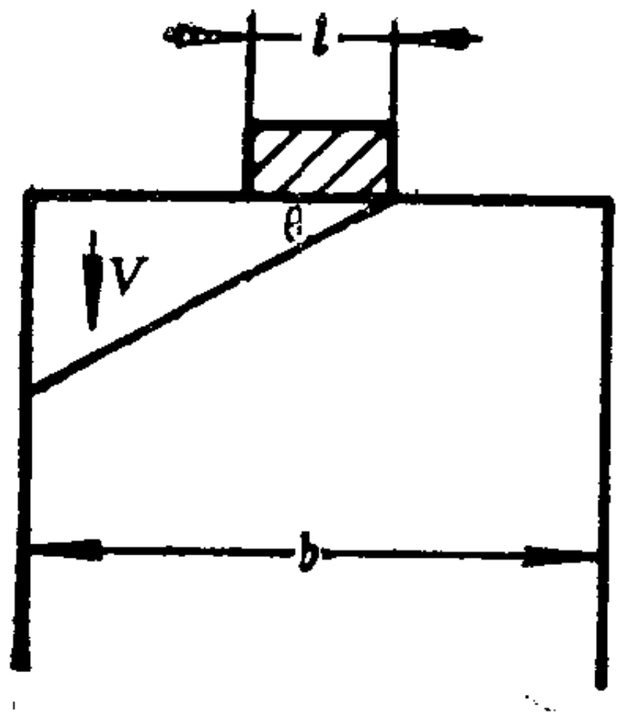
其中 $0\leqslant k_1=\frac{p}{Q}\leqslant 2.21$。

7.5　如图所示两端固定的梁长为 $l$，中间受集中力 $P$ 的作用，梁的弯矩 $M$ 和曲率 $K$ 之间满足关系 $M=c|K|^n\mathrm{sign}K$ $(0\leqslant n\leqslant 1)$。试利用全量的最小余能原理求端点弯矩 $M_0$。

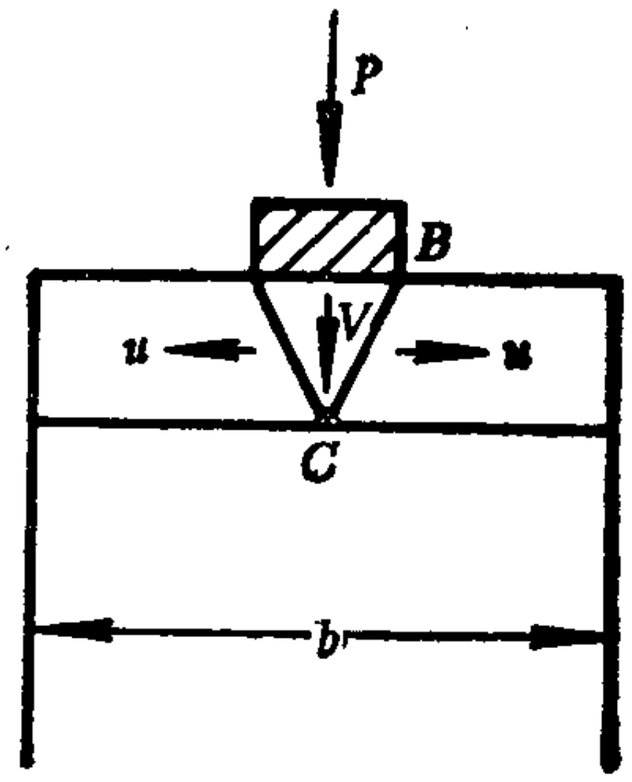



题 7.5

7.6　如图所示的宽度为 $b$ 的半无限长条，上面中间部分作用宽 $l$ 的压模。以速度 $V$ 压入物体，如给出图(a)，(b) 所示的两种运动许可场，试采用 Tresca屈服条件，用上限定理求出压模上总合力 $P$ 的上限值 $P^*$

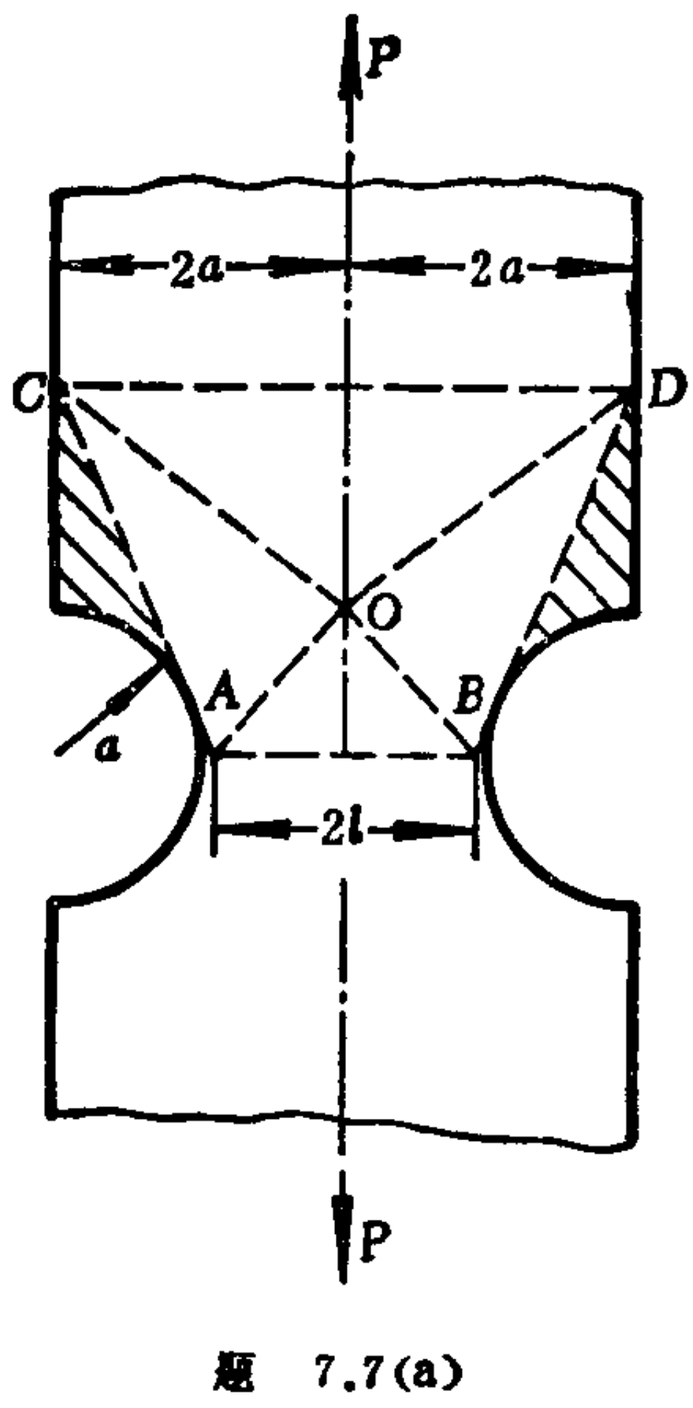



(a)

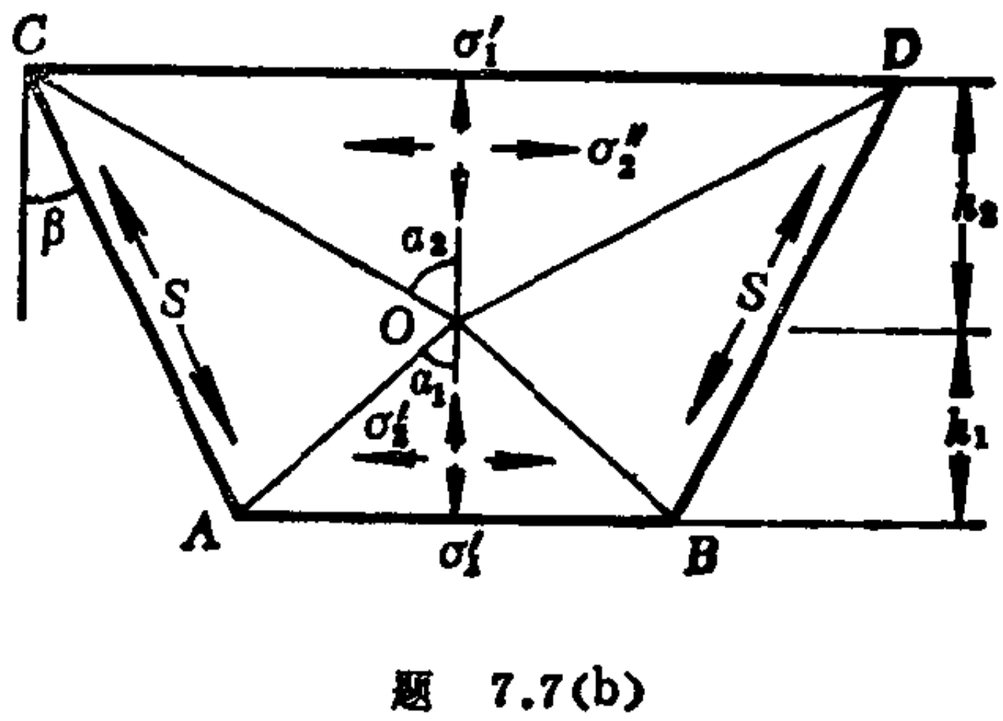



(b)

题 7.6




题 7.7(a)




题 7.7(b)

7.7 如图(a)所示一圆形切口板条的拉伸问题，切口半径为 $a$，板宽为 $4a$。已构造出由若干均匀应力区组合 而成的间断应力

场。由于上下对称，图中只给出了上半部分的 $ABCD$ 区域，图中的阴影区是零应力区。为了把 $ABCD$ 区的应力场表示得更清楚些，图(b)中标出每个区的应力分量。在 $OAB$ 区有二个分量 $\sigma_1'$，$\sigma_2'$。在 $OCD$ 区有二个分量 $\sigma_1''$，$\sigma_2''$，在 $OAC$ 与 $OBD$ 区则只有一个应力分量 $s$ 平行于边界。在所有应力间断线上都要求 $\sigma_n$，$\sigma_{nt}$ 连续，板的材料满足 Mises 屈服条件，试分别对平面应力和平面应变两种情况求出最大的下限值 $P^0$（单位厚度合力）。

7.8 半径为 $a$，厚为 $2h$ 的简支圆板，受均布载荷 $p$ 的作用。试采用机动法求 $p$ 的上限。如果任取一连续可微的挠度率分布 $w(r)$，则可求得曲率率 $\dot{\kappa}_r = -\dfrac{d^2w}{dr^2}$，$\dot{\kappa}_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{dw}{dr}$，再由不可压条件，形式上给出 $\dot{\kappa}_z = -(\dot{\kappa}_r + \dot{\kappa}_\theta)$，塑性耗散功率可沿板厚积分得

$$D = \int_{-h}^{h} D(\dot{e}_{ij})dz = \int_{-h}^{h} (\sigma_r \dot{e}_r + \sigma_\theta \dot{e}_\theta)dz = M_r \dot{\kappa}_r + M_\theta \dot{\kappa}_\theta .$$

1）对不同的屈服条件，试证明以下 $D$ 的公式

① Mises：$D = \dfrac{2M_s}{\sqrt{3}}(\dot{\kappa}_r^2 + \dot{\kappa}_\theta^2 + \dot{\kappa}_r\dot{\kappa}_\theta)^{\frac{1}{2}}$。

② Tresca：$D = M_s|\dot{\kappa}|_{\max}$，

$$|\dot{\kappa}|_{\max} = \max(|\dot{\kappa}_r|, |\dot{\kappa}_\theta|, |\dot{\kappa}_r + \dot{\kappa}_\theta|).$$

③ 最大偏应力：$D = \dfrac{2}{3}M_s(\dot{\kappa}_{\max} - \dot{\kappa}_{\min})$，

$$\dot{\kappa}_{\max} = \max(\dot{\kappa}_r, \dot{\kappa}_\theta, \dot{\kappa}_z),$$
$$\dot{\kappa}_{\min} = \min(\dot{\kappa}_r, \dot{\kappa}_\theta, \dot{\kappa}_z).$$

2）取 $w(r) = A_0\left(1 - \dfrac{r}{a}\right)$ 形式，对上述三种屈服条件，用上限法求出对应的 $p^*$ 值。

7.9 半径为$R$长为$l$的圆轴，同时受轴力$N$和扭矩$M$的作用，在题5.17中对 Mises 屈服条件已求得极限状态时，下列关系成立

$$q^2+\frac{3}{4}p^2+\frac{1}{4}p^3\operatorname{sign}p=1,$$

这里 $p=\frac{N}{N_s}$，$q=\frac{M}{M_s}$。

现在考虑安定解的问题，载荷变动范围是

$$0\leqslant p\leqslant\frac{1}{2},\quad 0\leqslant q\leqslant q_1,$$

要求确定$q_1$值的大小，以保证轴是安定的。(提示：可采用静力安定定理，选取残余应力分布规律为

$$\sigma_z(r)=0,\quad \sigma_{\theta z}(r)=\lambda\left(1+k\frac{r}{a}\right).$$

它要满足与零外载平衡的条件

$$\int_0^R\sigma_z(r)r\mathrm{d}r=0,\quad \int_0^R\sigma_{\theta z}(r)r^2\mathrm{d}r=0,$$

在加上弹性解的应力后要求不违反屈服条件。从而确定出安定解所需的$q_1$值)。试与极限载荷的$q_1$值作比较。

# 习 题 解 答

## 第 一 章

**1.1** $$\sigma = f_2(\varepsilon) = \begin{cases} \sigma_s, & 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_t - \varepsilon_s, \\ \sigma_s + \dfrac{EE'}{E - E'}(\varepsilon - \varepsilon_t + \varepsilon_s), & \varepsilon_t - \varepsilon_s \leqslant \varepsilon. \end{cases}$$

**1.2** $$B = \frac{E\varepsilon_s}{(m\varepsilon_s)^m}, \qquad \varepsilon_0 = (1-m)\varepsilon_s,$$

$$\omega(\varepsilon) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_s, \\ 1 - [1 + (\varepsilon/\varepsilon_s - 1)/m]\varepsilon_s/\varepsilon, & \varepsilon_s \leqslant \varepsilon. \end{cases}$$

**1.3** $$\psi(\xi) = \begin{cases} \sigma_s, & 0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0, \\ \sqrt{\sigma_s^2 + 2H'(\xi - \xi_0)}, & \xi_0 \leqslant \xi, \end{cases}$$

式中$H' = EE'/(E - E')$，$\xi_0 = \sigma_s(\varepsilon_t - \varepsilon_s)$。

**1.4** 对应的应变值 $\varepsilon$ 是$0, 51\varepsilon_s, 49.5\varepsilon_s, -\varepsilon_s, 0$。

**1.5** $\sigma = c\dfrac{[\ln(1+\varepsilon)]^{0.2}}{(1+\varepsilon)}$，失稳时$\varepsilon_c = e^{0.2} - 1 = 0.2214$。

**1.6** 1) $P = \dfrac{cA_0}{\sin\theta_0}\sin 2\theta\left[\ln\left(\dfrac{\sin\theta_0}{\sin\theta}\right)\right]^{0.2}$。

2) $\varepsilon_m = 0.3685$。 3) $P_c = 0.9923cA_0$。

4) 由于$\varepsilon_c = 0.2214 < \varepsilon_m$。因此桁架的承载能力由拉伸失稳时的 $P_c$ 值确定。

1.7

$$N_1=\begin{cases}\dfrac{P}{1+a/b}, & 0\leqslant P\leqslant P_1,\\ \dfrac{b(1-\lambda)P/a+\lambda N_s}{1+b(1-\lambda)/a}, & P_1\leqslant P\leqslant P_2,\\ \dfrac{P-\lambda(1-a/b)N_s}{1+a/b}, & P_2\leqslant P,\end{cases}$$

式中 $N_s=A\sigma_s$，$\lambda=1-E'/E$，

$P_1=(1+a/b)N_s$，$P_2=[(1+b/a)+\lambda(1-b/a)]N_s$。

1.8 1) $\theta_1=30°$，$\theta_2=60°$。

极限载荷曲线由两段折线组成。

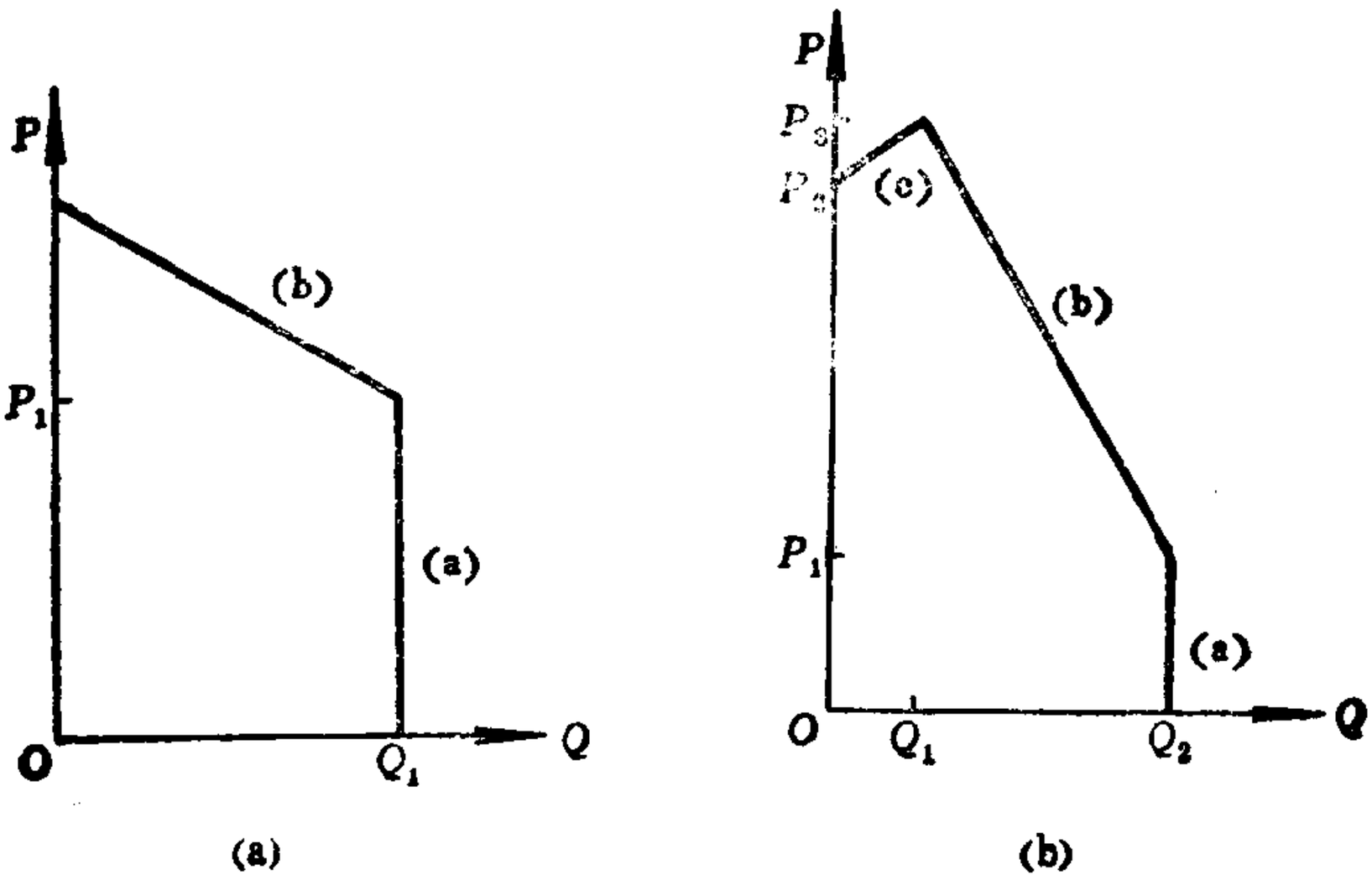
$$Q=Q_1,\ 0\leqslant P\leqslant P_1, \qquad \text{(a)}$$

$$P+Q/\sqrt{3}=(1+2/\sqrt{3})N_s,\ 0\leqslant Q\leqslant Q_1, \qquad \text{(b)}$$

式中 $P_1=Q_1=(1+\sqrt{3})/2\ N_s=1.366N_s$。如图所示，情况(a)对应于$N_1=N_s, N_3=-N_s$，情况 (b)对应于$N_1=N_s, N_2=N_s$。

2) $\theta_1=60°$，$\theta_2=30°$。

在 $\theta_1>\theta_2$ 情况，还会出现 $N_2=N_3=N_s$ 的极限状态 (c)。




题 1.8

故极限载荷曲线将由三段折线组成，分别为

$$0\leqslant P\leqslant P_1,\ Q=Q_2, \tag{a}$$

$$P+\sqrt{3}Q=3N_s,\ Q_1\leqslant Q\leqslant Q_2, \tag{b}$$

$$P-Q/\sqrt{3}=P_2,\ 0\leqslant Q\leqslant Q_1. \tag{c}$$

如图所示，式中

$$P_1=(1.5-\sqrt{3}/2)N_s=0.634N_s,$$

$$P_2=(1+2/\sqrt{3})N_s=2.155N_s,$$

$$Q_1=(\sqrt{3}-1)/2N_s=0.366N_s,$$

$$Q_2=Q_1+N_s=1.366N_s.$$

图中的$P_3=(1.5+\sqrt{3}/2)N_s=2.366N_s$.

1.9
$$\begin{cases}N_1=(1/\sqrt{3}+0.2)P=0.777P,\\ N_2=0.8P,\\ N_3=(-1/\sqrt{3}+0.2)P=-0.377P.\end{cases}\qquad 0\leqslant P\leqslant P_1,$$

$$\begin{cases}N_1=(1+1/\sqrt{3})P-N_s=1.577P-N_s,\\ N_2=N_s,\\ N_3=(1-1/\sqrt{3})P-N_s=0.423P-N_s.\end{cases}\qquad P_1\leqslant P\leqslant P_2,$$

$$P_1=1.25N_s,\ P_2=2N_s/(1+1/\sqrt{3})=1.268N_s.$$

1.10 注意杆3受压，协调方程$\varepsilon_2=2(\varepsilon_1+\varepsilon_3)$变成$\sigma_2^2=2(\sigma_1^2-\sigma_3^2)$。求得

$$\begin{cases}N_1=[(1+5/\sqrt{3})-\sqrt{8/\sqrt{3}+16/3}]P=0.732P,\\ N_2=(1+1/\sqrt{3})P-N_1=0.845P,\\ N_3=N_1-2P/\sqrt{3}=-0.422P.\end{cases}$$

1.11 记$\bar{P}=P/P_e\geqslant 0$，$\bar{Q}=Q/Q_e\geqslant 0$，这时各杆的应力状态为$\sigma_1/\sigma_s=-\gamma^*+0.5\bar{P}+\bar{Q}$，$\sigma_2/\sigma_s=\sqrt{2}\gamma^*+\bar{P}$，$\sigma_3/\sigma_s=-\gamma^*+0.5\bar{P}-\bar{Q}$。在$0\leqslant\bar{P}\leqslant\lambda$，$0\leqslant\bar{Q}\leqslant\lambda$条件下，各杆在最不利外载组合条件下都不应违反屈服条件，则有

杆1：$-1\leqslant-\gamma^*$，$-\gamma^*+1.5\lambda\leqslant 1$。

杆2：$-1\leqslant\sqrt{2}\gamma^*$，$\sqrt{2}\gamma^*+\lambda\leqslant 1$。

杆3：$-1\leqslant-\gamma^*-\lambda$，$-\gamma^*+0.5\lambda\leqslant 1$。

利用不等式方法可求出满足上述不等式的最大 $\lambda$ 值为

$$\lambda_0 = \frac{2+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = 0.773.$$

# 第 二 章

**2.1** $\dfrac{M_s}{M_e} = \dfrac{16}{3\pi}\dfrac{1-\alpha^3}{1-\alpha^4}$.

**2.2** $M_e = R^3\pi\sigma_s/4$, $K_e = \sigma_s/ER$。当 $M \geqslant M_e$ 时，有

$$M = 4\left[\int_0^{R\zeta}\sigma_s y^2\sqrt{R^2-y^2}/\zeta R\,dy + \int_{R\zeta}^{R}\sigma_s y\sqrt{R^2-y^2}\,dy\right].$$

记 $m = \dfrac{M}{M_e}$, $\dfrac{1}{\zeta} = \dfrac{K}{K_e} = k$ 可积分求得

$$m = \begin{cases} k, & k \leqslant 1, \\ \dfrac{16}{3\pi}\left(1-\dfrac{1}{k^2}\right)^{3/2} + \dfrac{2}{\pi}\left[k\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{k}\right) + \left(\dfrac{2}{k^2}-1\right)\sqrt{1-\dfrac{1}{k^2}}\right], & 1 \leqslant k. \end{cases}$$

**2.3** 当塑性区还在翼板上时有

$$M = 2EK\left[a\int_0^{h_1/2} y^2dy + b\int_{h_1/2}^{\eta/2} y^2dy\right] + 2b\sigma_s\int_{\eta/2}^{h/2} ydy$$

$$= EKJ - bEK(h^3-\eta^3)/12 + b\sigma_s(h^2-\eta^2)/4.$$

当塑性区进入腹板时有

$$M = 2EKa\int_0^{\eta/2} y^2dy + 2a\sigma_s\int_{\eta/2}^{h_1/2} ydy + 2b\sigma\int_{h_1/2}^{h/2} ydy$$

$$= EKa\eta^3/12 + \sigma_s a(h_1^2-\eta^2)/4 + \sigma_s b(h^2-h_1^2)/4,$$

$$M_s = \sigma_s a h_1^2/4 + \sigma_s b(h^2-h_1^2)/4,$$

$$W = (bh^3 + (a-b)h_1^3)/6h, \quad k = h/\eta,$$

即可求得所需结果。

2.4 记$\bar{\delta}=\delta/\delta_e$，$\bar{\theta}=\theta/\theta_e$，$\bar{q}=q/q_e$，其中

$$\delta_e=\frac{l^2\sigma_s}{2hE},\quad \theta_e=\frac{2l\sigma_s}{3hE},\quad q_e=\frac{bh^2\sigma_s}{3l^2},$$

则有

$$\begin{cases}\bar{\delta}=\bar{q},\\ \bar{\theta}=\bar{q},\end{cases}\qquad \text{当}\bar{q}\leqslant 1.$$

$$\begin{cases}\bar{\delta}=(3-2\sqrt{3-2\bar{q}})/\bar{q},\\ \bar{\theta}=\dfrac{3}{\sqrt{2\bar{q}}}\left(\sin^{-1}\sqrt{\dfrac{2}{3}\bar{q}}-0.484\right),\end{cases}\qquad \text{当}1\leqslant\bar{q}\leqslant 1.5.$$

2.5

$$\sigma^0(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sigma_s y}{h}\left[\dfrac{2}{\sqrt{3x/L}}-3(1-x/L)\right], & 0\leqslant y\leqslant\sqrt{\dfrac{3x}{L}}\,\dfrac{h}{2},\\ \sigma_s\left[1-\dfrac{3}{h}\left(1-\dfrac{x}{L}\right)y\right], & \sqrt{\dfrac{3x}{L}}\,\dfrac{h}{2}\leqslant y\leqslant\dfrac{h}{2}.\end{cases}$$

2.6

$$P_s=\frac{16}{3}\frac{M_s}{l}.$$

$$\zeta(x)=\begin{cases}\sqrt{11\dfrac{x}{l}}, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{l}{11},\\ \sqrt{6-11\dfrac{x}{l}}, & (0.5-1/22)l\leqslant x\leqslant 0.5l,\\ \sqrt{-2+\dfrac{5x}{l}}, & 0.5l\leqslant x\leqslant 0.6l.\end{cases}$$

2.7 $q_e=\dfrac{8M_s}{l^2}$，$q_s=q_e+3.657\dfrac{M_s}{l^2}$。

记$K=q_s/q_e$，$0\leqslant\eta\leqslant 1$，反力$Q$与外载$q$有关系

$$\frac{Q}{ql}=\begin{cases}\dfrac{3}{8}, & 0\leqslant q/q_e\leqslant 1,\\[2ex] \dfrac{3+4(K-1)\eta}{8+8(K-1)\eta}, & 1\leqslant q/q_e\leqslant 1+(K-1)\eta.\end{cases}$$

**2.8 连续梁 (a)**

$$q=\begin{cases}2.914\ \dfrac{M_s}{l^2}, & 0\leqslant K\leqslant 1.029,\\[2ex] \dfrac{3}{K}\dfrac{M_s}{l^2}, & 1.029\leqslant K.\end{cases}$$

**连续梁 (b)**

$$q=\begin{cases}\dfrac{8}{(1-K^2)^2}\dfrac{M_s}{l^2}, & 0\leqslant K\leqslant 0.441, \quad \text{(a)}\\[2ex] \dfrac{2}{K^2}\dfrac{M_s}{l^2}, & 0.441\leqslant K. \quad \text{(b)}\end{cases}$$

(a) 式对应于图 (a) 的破损机构，(b) 式对应于图 (b) 的破损机构。



(a) (b)

题 2.8

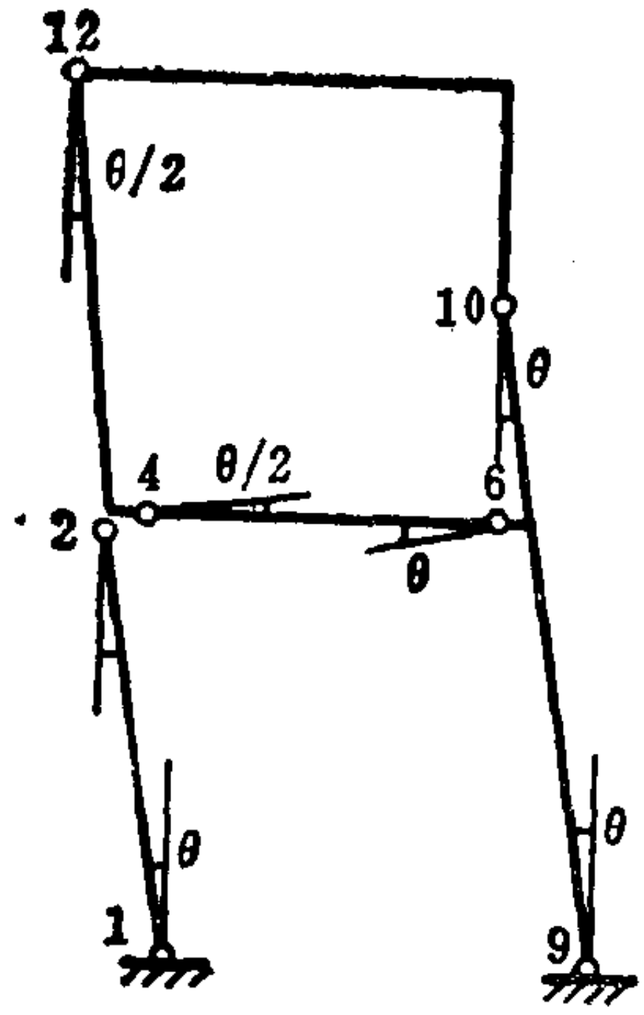
**2.9 刚架 (a)：**

设1,3,4,5 点成铰，由上限定理求出 $P=\frac{10}{19}\frac{M_s}{l}$。采用下限定理时，已知 $M_1=M_4=-M_s$，$M_3=M_5=M_s$，再由平衡方程 $-M_2+4M_3-3M_4=5P\times 3l$。求出 $M_2=-\frac{17}{19}M_s$，绝对值未超过

$M_s$，也满足下限定理条件，故$P=\frac{10}{19}\frac{M_s}{l}$是极限载荷。

刚架（b)：

设破损机构为1,2,4,6,9,10,12，7个点成铰如图4所示。由上限定理可求得$P=\frac{11}{3}\frac{M_s}{l}$。




题 2.9

使用下限定理时已知

$$M_1=M_6=M_{10}=M_s,$$

$$M_2=M_4=M_9=M_{12}=-M_s.$$

剩下5个节点处的弯矩，需列出5个平衡方程来求，由交点2,3,4和6，7,8本身平衡列出二个方程，由每个载荷$P$产生局部破损机构又可列出二个方程，最后假设整个刚架在水平力作用下向左倾斜使点1,9,4,6,11,12成铰又可列出一个方程，五个方程列出如下：

$$M_2-M_3-M_4=0,$$

$$M_6-M_7+M_8=0,$$

$$-M_4+2M_5-M_6=\frac{Pl}{2},$$

$$-M_8+2M_{10}-M_{11}=\frac{Pl}{2},$$

$$M_1-M_4+M_6-M_9+M_{11}-M_{12}=P\frac{3l}{2}.$$

可解出$M_8=0$，$M_5=\frac{11}{12}M_s$，$M_{11}=0.5M_s$，$M_6=-\frac{1}{3}M_s$，

$M_7 = \frac{2}{3}M_s$。所有的节点弯矩都不违反屈服条件，故 $P = \frac{11}{3}\frac{M_s}{l}$ 是极限载荷。

2.10　设破损机构为点 1,3,4,5 处成铰，且铰 3 处在极限弯矩弱的柱上（$M_3 = -M_s$），由上限定理，求出最小的 $P$ 值对应于点 5 的铰处在 $x = 0.83l$ 处，并有 $P \approx 1.75M_s/l$。

用下限定理进行校核时，由于在梁跨度上已求得最大弯矩点在点 5 其值等于 $2M_s$，则其余点的弯矩不会超过 $2M_s$，因此只要检查两端的弯矩就行了。现在只有点 2 处的弯矩不知道，由平衡方程 $M_1 + M_2 - M_3 - M_4 = 2Pl$，可求得 $M_2 = 0.5M_s$，故

$$P \approx 1.75M_s/l$$

是极限载荷。

2.11　把问题归结为求

$$\min X/l = 8M_{1s} + 6M_{2s}。$$

满足

$$12Pl \leqslant 4M_{2s},\quad 12Pl \leqslant 2(M_{1s} + M_{2s}),$$

$$60Pl \leqslant 4M_{1s},\quad 60Pl \leqslant 2(M_{1s} + M_{2s}),$$

可求得 $M_{1s} = M_{2s} = 15Pl$。

2.12

$$N_s = 3\sigma_s dt = 48\sigma_s t^2,\quad M_s = \sigma_s td(3.5t + d)/2 = 156\sigma_s t^2。$$

$$N = \begin{cases} \sigma_s d(3t - 2d), & 0 \leqslant \eta \leqslant 2t, \\ \sigma_s(-td - 2\eta t + 4t^2), & 2t \leqslant \eta \leqslant 2t + d。 \end{cases}$$

$$M = \begin{cases} \sigma_s d\eta(8t - \eta), & 0 \leqslant \eta \leqslant 2t, \\ \sigma_s d(180t^2 - \eta^2 + 8\eta t)/16, & 2t \leqslant \eta \leqslant 2t + d。 \end{cases}$$

引进无量纲量 $n = \frac{N}{N_s}$，$m = \frac{M}{M_s}$，及 $d = 16t$ 得

$$n=\begin{cases}1-\dfrac{2\eta}{3t}, & 0\leqslant\eta\leqslant 2t,\\[2ex] -0.25-\dfrac{\eta}{24t}, & 2t\leqslant\eta\leqslant 18t.\end{cases}$$

$$m=\begin{cases}\dfrac{8\eta-\eta^2/t}{9.75t}, & 0\leqslant\eta\leqslant 2t,\\[2ex] \dfrac{(18t-\eta)(10t+\eta)}{156t^2}, & 2t\leqslant\eta\leqslant 18t.\end{cases}$$

消去 $\eta$ 得

$$m=\begin{cases}\dfrac{(1-n)(13+3n)}{13}, & -\dfrac{1}{3}\leqslant n\leqslant 1,\\[2ex] \dfrac{8}{13}(1+n)(1-6n), & -1\leqslant n\leqslant -\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$

最大的 $m$ 在 $n=-\dfrac{5}{12}$，这时有 $m=\dfrac{49}{39}=1.256>1$。

## 第 三 章

3.1 以 $\sigma_{11}$ 为例，

$$\frac{\partial J_2}{\partial\sigma_{11}}=\frac{\partial J_2}{\partial s_{11}}\frac{\partial s_{11}}{\partial\sigma_{11}}+\frac{\partial J_2}{\partial s_{22}}\frac{\partial s_{22}}{\partial\sigma_{11}}+\frac{\partial J_2}{\partial s_{33}}\frac{\partial s_{33}}{\partial\sigma_{11}}$$
$$=\frac{2}{3}s_{11}-\frac{1}{3}s_{22}-\frac{1}{3}s_{33}=s_{11}.$$

3.2 1) $J_2=0.34\sigma_s^2$，$J_3=-0.007\sigma_s^3$。

2) $r_\sigma=0.825\sigma_s$，$\theta_\sigma=0.03062$（弧度）。

该应力状态违反 Tresca 及 Mises 屈服条件，但不违反最大偏应力屈服条件。

3.3 记

$$\bar{p}_1 = \frac{Rp_1}{\sigma_s t},$$

Mises,

$$\bar{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1.5x + 0.75}}.$$

Tresca,

$$\bar{p}_1 = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x}, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ 2, & \dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{x - 0.5}, & 1 \leqslant x. \end{cases}$$

最大偏应力：

$$\bar{p}_1 = \begin{cases} \dfrac{4}{3-2x}, & 0 \leqslant x \leqslant 0.75, \\ \dfrac{2}{x}, & 0.75 \leqslant x \leqslant 1.5, \\ \dfrac{1}{x - 0.75}, & 1.5 \leqslant x. \end{cases}$$

3.4 Mises,

$$\sigma_z^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_z \sigma_\theta + 3\sigma_{\theta z}^2 = \sigma_s^2.$$

对另两种屈服条件采用如下处理办法，记

$$A = (\sigma_\theta + \sigma_z)/2,$$

$$B = \sqrt{\left(\frac{\sigma_\theta - \sigma_z}{2}\right)^2 + \sigma_{\theta z}^2} \geqslant 0,$$

$$\sigma^+ = A + B, \qquad \sigma^- = A - B,$$

则有

$$\begin{cases}\sigma_1=\sigma^+,\ \sigma_2=\sigma^-,\ \sigma_3=0, & \text{当}A\geqslant B,\\ \sigma_1=\sigma^+,\ \sigma_2=0,\ \sigma_3=\sigma^-, & \text{当}|A|\leqslant B,\\ \sigma_1=0,\ \sigma_2=\sigma^+,\ \sigma_3=\sigma^-, & \text{当}A+B\leqslant 0,\end{cases}$$

代入 Tresca 及最大偏应力屈服条件公式，经整理后可得 如 下 结果：

Tresca：

$$\begin{cases}(\sigma_z-\sigma_s)(\sigma_\theta-\sigma_s)=\sigma_{\theta z}^2, & \text{当}0\leqslant\sigma_\theta+\sigma_z\leqslant 2\sigma_s,\ \sigma_\theta\sigma_z\geqslant\sigma_{\theta z}^2,\\ (\sigma_z-\sigma_\theta)^2+4\sigma_{\theta z}^2=\sigma_s^2, & \text{当}\sigma_\theta\sigma_z\leqslant\sigma_{\theta z}^2,\\ (\sigma_z+\sigma_s)(\sigma_\theta+\sigma_s)=\sigma_{\theta z}^2, & \text{当}-2\sigma_s\leqslant\sigma_\theta+\sigma_z\leqslant 0,\sigma_\theta\sigma_z\geqslant\sigma_{\theta z}^2.\end{cases}$$

最大偏应力：

$$\begin{cases}|A|=\sigma_s, & \text{当}|A|\geqslant 3B,\\ 3B+|A|=2\sigma_s, & \text{当}|A|\leqslant 3B,\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}|\sigma_\theta+\sigma_z|=2\sigma_s, & \text{当}(2\sigma_\theta-\sigma_z)(\sigma_\theta-2\sigma_z)+9\sigma_{\theta z}^2\leqslant 0,\\ (2\sigma_\theta-\sigma_z-2c\sigma_s)(\sigma_\theta-2\sigma_z+2c\sigma_s)+9\sigma_{\theta z}^2=0,\\ \text{当}(2\sigma_\theta-\sigma_z)(\sigma_\theta-2\sigma_z)+9\sigma_{\theta z}^2\geqslant 0,\end{cases}$$

$c=\operatorname{sign}(\sigma_\theta+\sigma_z)$。

3.5

1) $\left(\sigma_z-\frac{3}{2}c\varepsilon_z^p\right)^2+3(\sigma_{\theta z}-c\varepsilon_{\theta z}^p)^2=\sigma_s^2$。

2) $\varepsilon_z^p=\frac{\sigma_s}{3c},\ \varepsilon_{\theta z}^p=0$。

3) $\sigma_{\theta z}=0.5\sigma_s$。

# 第 四 章

4.1 由体应变总满足弹性规律，得

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=\frac{1-2\nu}{E}\sigma=[1-2\nu(\varepsilon)]\varepsilon,$$

可求得

$$\nu(\varepsilon)=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-\nu\right)f_1(\varepsilon)/E\varepsilon,$$

最后得

$$\nu(\varepsilon)=\begin{cases}\nu, & 0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_s,\\ \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{\varepsilon_s}{\varepsilon}\right)+\dfrac{\nu\varepsilon_s}{\varepsilon}, & \varepsilon_s\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_t,\\ \dfrac{1}{2}-\left(\dfrac{1}{2}-\nu\right)\left(\dfrac{E'}{E}+\dfrac{\sigma_s-E'\varepsilon_t}{E\varepsilon}\right), & \varepsilon_t\leqslant\varepsilon.\end{cases}$$

4.2 简单拉伸时有 $\bar{\sigma}=\sigma$，$\bar{\varepsilon}=\frac{2}{3}[1+\nu(\varepsilon)]\varepsilon$，利用上题所得 $\nu(\varepsilon)$ 结果，代入 $\sigma=f_1(\varepsilon)$ 关系，反解之可得

$$\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})=\begin{cases}3G\bar{\varepsilon}, & 0\leqslant\bar{\varepsilon}\leqslant e_s,\\ \sigma_s, & e_s\leqslant\bar{\varepsilon}\leqslant e_t,\\ \sigma_s+H_1(\bar{\varepsilon}-e_t), & e_t\leqslant\bar{\varepsilon},\end{cases}$$

式中

$$e_s=\sigma_s/3G,\quad e_t=\varepsilon_t-(1-2\nu)\sigma_s/3E,$$

$$H_1=\frac{3EE'}{3E-(1-2\nu)E'}.$$

4.3 在 $\varepsilon\geqslant\varepsilon_t$ 时有 $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_t}=\left(\frac{\sigma}{\sigma_s}\right)^2$。利用关系

$$(1-2\nu)\sigma=[1-2\nu(\varepsilon)]E\varepsilon,$$

$$\bar{\varepsilon}=\frac{2}{3}[1+\nu(\varepsilon)]\varepsilon$$

可得　$\varepsilon = \bar{\varepsilon} + \dfrac{(1-2\nu)\bar{\sigma}}{3E}$。代入上式得

$$\left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_s}\right)^2 - \frac{(1-2\nu)}{3E}\frac{\sigma_s}{\varepsilon_t}\left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_s}\right) - \sigma_s^2\left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_t}\right) = 0。$$

可解得

$$\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}) = \begin{cases} 3G\bar{\varepsilon}, & 0 \leqslant \bar{\varepsilon} \leqslant e_s, \\ \sigma_s, & e_s \leqslant \bar{\varepsilon} \leqslant e_t, \\ \sigma_s[D + \sqrt{D^2 + \bar{\varepsilon}/\varepsilon_t}], & e_t \leqslant \bar{\varepsilon}。 \end{cases}$$

$e_s, e_t$ 的含意同题 4.2。

$$D = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{e_t}{\varepsilon_t}\right) = \frac{(1-2\nu)\sigma_s}{6E\varepsilon_t}。$$

在纯扭时，　$\bar{\sigma} = \sqrt{3}\,\tau$，　$\bar{\varepsilon} = \dfrac{\gamma}{\sqrt{3}}$。故可得

$$\tau(\gamma) = \begin{cases} G\gamma, & 0 \leqslant \gamma \leqslant \sqrt{3}e_s, \\ \dfrac{\sigma_s}{\sqrt{3}}, & \sqrt{3}e_s \leqslant \gamma \leqslant \sqrt{3}e_t, \\ \dfrac{\sigma_s}{\sqrt{3}}[D + \sqrt{D^2 + \gamma/\sqrt{3}\varepsilon_t}], & \sqrt{3}e_t \leqslant \gamma。 \end{cases}$$

4.4　在关系 $\mathrm{d}\varepsilon^p_{ij} = \dfrac{3}{2\psi'}\dfrac{\mathrm{d}\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}}s_{ij}$ 中，$\psi' = \dfrac{EE'}{E-E'}$，在纯扭时 $\dfrac{\mathrm{d}\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} = \dfrac{\mathrm{d}\tau}{\tau}$，可得 $\mathrm{d}\gamma^p = \dfrac{3(E-E')}{EE'}\mathrm{d}\tau$，加上弹性部分而得证。

4.5　对第 4,5 式证明提示如下：

强化条件可表示为

$$\frac{1}{2}\{\sigma\}^T[P]\{\sigma\} = \frac{1}{3}\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{3}\psi^2\left(\int \mathrm{d}\overline{\varepsilon^p}\right)。$$

微分之得

$$\{\sigma\}^T[P]\{\dot{\sigma}\} = \frac{2}{3}\psi'\psi\,\overline{\dot{\varepsilon}^P} = \frac{2}{3}\psi'\bar{\sigma}\,\overline{\dot{\varepsilon}^P} = \frac{2}{3}\psi'\lambda\{\sigma\}^T[P]\{\sigma\}.$$

再将$\{\dot{\sigma}\} = [D](\{\dot{\varepsilon}\} - \lambda[P]\{\sigma\})$代入，即得第 4 式，将 $\lambda$ 再代回$\{\dot{\sigma}\}$式即得第 5 式。

4.6 记

$$f = \frac{1}{2}(s_{ij} - c\varepsilon^P_{ij})(s_{ij} - c\varepsilon^P_{ij})$$

则有

$$\mathrm{d}\varepsilon^P_{ij} = \mathrm{d}\lambda\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \mathrm{d}\lambda\frac{\partial f}{\partial s_{ij}} = \mathrm{d}\lambda(s_{ij} - c\varepsilon^P_{ij}).$$

再利用加载面大小不变，有

$$\frac{\partial f}{\partial s_{mn}}\mathrm{d}(s_{mn} - c\varepsilon^P_{mn}) = 0.$$

将两式合在一起，可解出

$$\mathrm{d}\lambda = \frac{3}{2c\sigma_s^2}(s_{mn} - c\varepsilon^P_{mn})\mathrm{d}s_{mn}.$$

这里利用了

$$\frac{\partial f}{\partial s_{ij}}\frac{\partial f}{\partial s_{ij}} = \frac{2}{3}\sigma_s^2.$$

4.7 由 $\dot{\alpha}'_{ij} = c\dot{\varepsilon}^P_{ij}$ 可表示为

$$[P]\{\dot{\alpha}\} = c\{\dot{\varepsilon}^P\} = c\lambda[P]\{\eta\}$$

故$\{\dot{\alpha}\} = c\lambda\{\eta\}$。

加载面不扩大得$\{\eta\}^T[P]\{\eta\} = 0$，注意到

$$\{\eta\} = \{\dot{\sigma}\} - \{\dot{\alpha}\} = [D]\{\dot{\varepsilon}\} - \lambda[[D][P]\{\eta\} + c\{\eta\}]$$

代入即得 $\lambda$ 表达式。

4.8 1) 平面应变时，

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{3},$$

$$\sigma_x = s_x + \sigma = \frac{2}{3}\frac{\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})}{\bar{\varepsilon}}(\varepsilon_x - \varepsilon) + \frac{E}{1-2\nu}\varepsilon,$$

如引进 $\beta = \dfrac{2(1-2\nu)}{3E}\dfrac{\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})}{\bar{\varepsilon}}$ 及 $\bar{\varepsilon} = \dfrac{2}{3}\sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 - \varepsilon_x\varepsilon_y + 3\varepsilon_{xy}^2}$，则有

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{E}{3(1-2\nu)}[(1+2\beta)\varepsilon_x + (1-\beta)\varepsilon_y], \\ \sigma_y = \dfrac{E}{3(1-2\nu)}[(1-\beta)\varepsilon_x + (1+2\beta)\varepsilon_y], \\ \sigma_z = \dfrac{E}{3(1-2\nu)}[(1-\beta)(\varepsilon_x + \varepsilon_y)], \\ \sigma_{xy} = \dfrac{E}{1-2\nu}\beta\varepsilon_{xy}. \end{cases}$$

2）平面应力，由 $\sigma_z = 0$ 可求得 $\varepsilon_z = \dfrac{-(1-\beta)}{(1+2\beta)}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$，

则有

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{\beta E}{(1-2\nu)(1+2\beta)}[(2+\beta)\varepsilon_x + (1-\beta)\varepsilon_y], \\ \sigma_y = \dfrac{\beta E}{(1-2\nu)(1+2\beta)}[(1-\beta)\varepsilon_x + (2+\beta)\varepsilon_y], \\ \sigma_{xy} = \dfrac{\beta E}{1-2\nu}\varepsilon_{xy}. \end{cases}$$

# 第 五 章

5.1 $\sigma_0 = \dfrac{\sigma_s}{\sqrt{1-\nu+\nu^2}}$，

$$d\sigma_z = \frac{2-\nu}{1-2\nu}d\sigma,$$

$$d\varepsilon_x^p = \frac{2(1-\nu+\nu^2)(2-\nu)}{E(1-2\nu)^2}d\sigma.$$

5.2 $\nu_B = 0.986$, $\sigma_B = 0.834$, $\tau_B = 0.552$.

5.3
$$\begin{cases} d\varepsilon = d\sigma + \dfrac{2(1+\nu)}{3}d\lambda'\sigma, \\ d\gamma = d\tau + d\lambda'\tau, \end{cases}$$

$$\sigma_B = 0.661, \quad \tau_B = 0.750.$$

5.4 由 $e_z = \dfrac{2(1+\nu(\varepsilon))}{3}\varepsilon_z$ 可求得

$$\frac{\sigma_z}{\sigma_{\theta z}} = \frac{3e_z}{\gamma_{\theta z}} = 2(1+\nu(\varepsilon))\frac{\varepsilon_z}{\gamma_{\theta z}}.$$

无量纲化后得 $\dfrac{\sigma}{\tau} = \dfrac{1+\nu(\varepsilon)}{1+\nu}\dfrac{\varepsilon}{\gamma}$，再利用 $\sigma_z = \dfrac{1-2\nu(\varepsilon)}{1-2\nu}E\varepsilon_z$ 可求得

$$\begin{cases} \sigma = \dfrac{1-2\nu(\varepsilon)}{1-2\nu}\varepsilon, \\ \tau = \dfrac{1+\nu}{1-2\nu}\dfrac{1-2\nu(\varepsilon)}{1+\nu(\varepsilon)}\gamma. \end{cases}$$

$\nu(\varepsilon)$可由 $\sigma^2+\tau^2=1$ 条件解出。用 $\nu=1/3$, $\varepsilon=\gamma=1$ 代入上式可解得

$$\nu(1) = 0.380, \quad \sigma = 0.720, \quad \tau = 0.696.$$

5.5 屈服条件可写成 $f = \sigma_z^2 + 2\sigma_{\theta z}^2 + 2\sigma_{z\theta}^2 = \sigma_s^2$ 则有

$$d\varepsilon_z^p = 2\sigma_z d\lambda, \quad d\varepsilon_{\theta z}^p = 4\sigma_{\theta z}d\lambda.$$

无量纲化后的本构关系为

$$\begin{cases}\sigma^2+\tau^2=1,\\ \mathrm{d}\varepsilon=\mathrm{d}\sigma+\mathrm{d}\lambda'\sigma,\\ \mathrm{d}\gamma=\mathrm{d}\tau+\dfrac{4}{3}\mathrm{d}\lambda'\tau.\end{cases}$$

在 $B$ 点有 $\sigma_B=0.681$， $\tau_B=0.732$。

5.6
$$\begin{cases}\mathrm{d}\varepsilon=\mathrm{d}\sigma+\mathrm{d}\lambda'\sigma,\\ \mathrm{d}\gamma=\mathrm{d}\tau+1.5\mathrm{d}\lambda\tau,\end{cases}$$

$\sigma_B=0.695$， $\tau_B=0.719$。

5.7 全量本构关系为

$$\varepsilon_z=\frac{\sigma_z}{E}+2\lambda\sigma_z,$$

$$\gamma_{\theta z}=\frac{\sigma_{\theta z}}{\mu}+8\lambda\sigma_{\theta z}.$$

无量纲化后得

$$\begin{cases}\sigma^2+\tau^2=1,\\ \varepsilon=(1+\lambda')\sigma,\\ \gamma=\left(1+\dfrac{2}{1+\nu}\lambda'\right)\tau.\end{cases}$$

对$\nu=0.5$， $\varepsilon=1$， $\gamma=1$，解出$\lambda'=0.358$， $\sigma=0.736$， $\tau=0.677$。

对$\nu=1/3$， $\varepsilon=1$， $\gamma=1$，解出$\lambda'=0.337$， $\sigma=0.748$， $\tau=0.664$。

5.8 屈服条件为

$$\sigma_z^2+\sigma_s\sigma_z+4.5\sigma_{\theta z}^2=2\sigma_s^2.$$

本构关系为

$$\begin{cases}\mathrm{d}\varepsilon_z=\dfrac{\mathrm{d}\sigma_z}{E}+\mathrm{d}\lambda(2\sigma_z+\sigma_s),\\ \mathrm{d}\gamma_{\theta z}=\dfrac{\mathrm{d}\sigma_{\theta z}}{\mu}+\mathrm{d}\lambda(9\sigma_{\theta z}).\end{cases}$$

加载终点时的应力值为 $\sigma_z=0.856\sigma_s$， $\sigma_{\theta z}=0.302\sigma_s$。

5.9　无量纲本构关系为

$$\begin{cases} \sigma_1^2+\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_2=1, \\ \mathrm{d}\varepsilon_1=\mathrm{d}\sigma_1-\dfrac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_2+\mathrm{d}\lambda'\left(\sigma_1-\dfrac{1}{2}\sigma_2\right), \\ \mathrm{d}\varepsilon_2=\mathrm{d}\sigma_2-\dfrac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_1+\mathrm{d}\lambda'\left(\sigma_2-\dfrac{1}{2}\sigma_1\right), \\ \mathrm{d}\lambda'=\sigma_1\mathrm{d}\varepsilon_1+\sigma_2\mathrm{d}\varepsilon_2. \end{cases}$$

点 $A$，$\varepsilon_1=\varepsilon_2=0.5$。由弹性解可得 $\sigma_1=\sigma_2=1$ 刚好进入屈服。在 $AB$ 段 $\mathrm{d}\varepsilon_2=0$，并设法消去 $\sigma_2$，$\mathrm{d}\sigma_2$ 可得关系

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_1}{\mathrm{d}\varepsilon_1}=\frac{4}{3}-\sigma_1^2.$$

最后积分求得在 $B$ 点 $\sigma_1\approx\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，$\sigma_2\approx\dfrac{1}{\sqrt{3}}$。

5.10　1）无量纲增量本构关系为

$$\begin{cases} \mathrm{d}\varepsilon=\mathrm{d}\sigma+10\dfrac{\sigma\mathrm{d}\sigma+\tau\mathrm{d}\tau}{\sigma^2+\tau^2}\sigma, \\ \mathrm{d}\gamma=\mathrm{d}\tau+10\dfrac{\sigma\mathrm{d}\sigma+\tau\mathrm{d}\tau}{\sigma^2+\tau^2}\tau. \end{cases}$$

到达 $B$ 点时有

$$\begin{cases} \varepsilon_B=1+5\ln 2=4.466, \\ \gamma_B=11-10\times\dfrac{\pi}{4}=3.146. \end{cases}$$

2）全量理论

当 $\psi'=\dfrac{1}{10}E$ 时，$E'=\dfrac{1}{11}E$，无量纲本构方程为

$$\begin{cases}\dfrac{\sigma}{\tau}=\dfrac{\varepsilon}{\gamma},\\[2ex]\sqrt{\sigma^2+\tau^2}-1=\dfrac{1}{11}(\sqrt{\varepsilon^2+\gamma^2}-1).\end{cases}$$

在 $B$ 点：$\varepsilon=\gamma=11-10/\sqrt{2}=3.929$。

5.11 1) Tresca 线性强化材料的增量理论为

$$\mathrm{d}\varepsilon_z^p=2\mathrm{d}\lambda\sigma_z,\quad \mathrm{d}\gamma_{\theta z}^p=8\mathrm{d}\lambda\sigma_{\theta z},$$

$$\mathrm{d}(\sigma_{max}-\sigma_{min})=\psi'|\mathrm{d}\varepsilon_{max}^p|,$$

$$\mathrm{d}(\sqrt{\sigma_z^2+4\sigma_{\theta z}^2})=\psi'\sqrt{(\mathrm{d}\varepsilon_z^p)^2+\frac{1}{4}(\mathrm{d}\gamma_{\theta z}^p)^2}=\psi'2\mathrm{d}\lambda\sqrt{\sigma_z^2+4\sigma_{\theta z}^2}.$$

由此得

$$2\mathrm{d}\lambda=\frac{1}{\psi'}\frac{\sigma_z\mathrm{d}\sigma_z+4\sigma_{\theta z}\mathrm{d}\sigma_{\theta z}}{\sigma_z^2+4\sigma_{\theta z}^2}.$$

无量纲化后得

$$\begin{cases}\mathrm{d}\varepsilon=\mathrm{d}\sigma+10\dfrac{\sigma\mathrm{d}\sigma+\tau\mathrm{d}\tau}{\sigma^2+\tau^2}\sigma,\\[2ex]\mathrm{d}\gamma=\mathrm{d}\tau+10\dfrac{\sigma\mathrm{d}\sigma+\tau\mathrm{d}\tau}{\sigma^2+\tau^2}\tau.\end{cases}$$

在 $B$ 点：$\varepsilon_B=1+5\ln 2=4.466$，$\gamma_B=(1+40/3)-40\pi/12=3.861$。

2. 全量理论

$$\varepsilon_z^p=2\lambda\sigma_z,\quad \gamma_{\theta z}^p=8\lambda\sigma_{\theta z},$$

$$\sqrt{\sigma_z^2+4\sigma_{\theta z}^2}=\sigma_s+\psi'\sqrt{(\varepsilon_z^p)^2+\frac{1}{4}(\gamma_{\theta z}^p)^2}$$

$$=\sigma_s+2\lambda\psi'\sqrt{\sigma_z^2+4\sigma_{\theta z}^2}.$$

无量纲化并令 $\lambda'=2\lambda E$ 得

$$\begin{cases} \varepsilon = (1+\lambda')\sigma, \\ \gamma = \left(1+\frac{4}{3}\lambda'\right)\tau, \\ \lambda' = \frac{E}{\psi'}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}\right). \end{cases}$$

以 $E/\psi' = 10$，$\sigma = \tau = 1$ 代入得

$$\lambda' = 2.929,\quad \varepsilon_B = 3.929,\quad \gamma_B = 4.905.$$

5.12　在 $A$ 点，$\alpha_A = 1$，$\beta_A = 0$。在 $AB$ 段。令 $\tau - \beta = \sin\theta$，$(\sigma - \alpha) = \cos\theta$，并有 $d\sigma = 0$，可以积分求得

$$\theta_B = 0.4144\pi,\quad \alpha_B = 1.734,\quad \beta_B = 1.036.$$

5.13　1）由于采用刚塑性模型，体积不可压缩，$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} + \varepsilon_0 = 0$ 解出 $u = \frac{A}{r} - \frac{1}{2}\varepsilon_0 r$ 在全筒成立。如采用 $\sigma_z - \sigma_r = \sigma_s$ 屈服条件，在该区域 $u = 0$（按流动法则 $d\varepsilon_\theta = 0$），必然得出 $A = \varepsilon_0 = 0$。整个筒不能流动。

2）塑性流动时有

$$\varepsilon_z = \varepsilon_0,\quad \varepsilon_\theta = \frac{A}{r^2} - \frac{1}{2}\varepsilon_0,\quad \varepsilon_r = \frac{-A}{r^2} - \frac{1}{2}\varepsilon_0.$$

在 $a \leqslant r \leqslant c$ 区流动法则要求

$$\varepsilon_z : \varepsilon_\theta : \varepsilon_r = \lambda : 1-\lambda : -1,\quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

可以求得 $\lambda = \frac{2}{\left(1+\frac{c^2}{r^2}\right)}$，在 $a \leqslant r \leqslant c$ 时满足 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$。

在 $c \leqslant r \leqslant b$ 区流动法则要求

$$\varepsilon_z : \varepsilon_\theta : \varepsilon_r = 1 : -\mu : -1+\mu,\quad 0 \leqslant \mu \leqslant 1.$$

可以求得 $\mu = \frac{1}{2}\left(1+\frac{c^2}{r^2}\right)$ 在 $c \leqslant r \leqslant b$ 时满足 $0 \leqslant \mu \leqslant 1$。

$$\begin{cases} p = \sigma_s \ln \dfrac{c}{a}, \\ T = 2\pi\sigma_s \left( \dfrac{a^2}{2} \ln \dfrac{c}{a} + \dfrac{2b^2 - a^2 - c^2}{4} \right). \end{cases}$$

$c = b$ 时，$P = \sigma_s \ln \dfrac{b}{a}$，$T = 2\pi\sigma_s \left( \dfrac{a^2}{2} \ln \dfrac{b}{a} + \dfrac{b^2 - a^2}{4} \right) > 2\pi a^2 p$。

$c = a$ 时，$P = 0$，$T = \sigma_s \pi (b^2 - a^2)$。

5.14 $k = 4.81$。

5.15 由全量关系得

$$s_z = \lambda, \quad s_\theta = \frac{\lambda}{2}(\mu - 1), \quad s_r = -\frac{\lambda}{2}(\mu + 1).$$

代入屈服条件得 $\lambda = \dfrac{2\sigma_s}{\sqrt{3\mu^2 + 9}} \operatorname{sign} \mu$。而 $\sigma_\theta - \sigma_r = \lambda\mu$，$\sigma_z - \sigma_r = \dfrac{\lambda}{2}(3 + \mu)$。

由平衡方程 $\dfrac{d\sigma_r}{dr} = \dfrac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r}$ 得

$$d\sigma_r = -\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{sign} \mu}{\sqrt{\mu^2 + 3}} d\mu.$$

积分之得 $-p_s = \int_a^b d\sigma_r = \int_{\mu(a)}^{\mu(b)} -\dfrac{\sigma_s}{\sqrt{3}} \dfrac{\operatorname{sign}\mu}{\sqrt{\mu^2 + 3}} d\mu$，$\mu(a) = ak$。

5.16 1) $\dfrac{a^2\sigma_{s1}}{b^2\sigma_{s2}} > 1$。

2) $P_s = \sigma_{s1} \ln \dfrac{b}{a} + \sigma_{s2} \ln \dfrac{c}{b}$。

5.17

$d\varepsilon_z = \frac{dl}{l}$，$dr_{\theta z} = \frac{r d\theta}{l}$由本构关系可得$\frac{\sigma_z}{\sigma_{\theta z}} = \frac{\alpha}{r}$，代入屈服条件

可求出 $\sigma_z, \sigma_{\theta z}$，如引进 $t = \frac{3R^2}{a^2}$可将 $M, N$ 用 $t$ 表示如下：

$$\frac{M}{M_s} = \frac{(t-2)\sqrt{t+1}+2}{t^{3/2}}.$$

$$\frac{N}{N_s} = \left[\frac{2\sqrt{t+1}}{t} - 1\right] \operatorname{sign} \alpha.$$

消去 $t$ 可得$M$与$N$之间的关系。

5.18

区域 1：$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = -x$，$\varphi_1|_{y=0} = 0$ 得，$\varphi_1 = -xy$。

区域 2：$\varphi_2 = -xy + f_2(x)$。

沿 $AB$ 线：$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy = ydx - xdy$。

沿 $AB$ 线从 $A$ 点积分

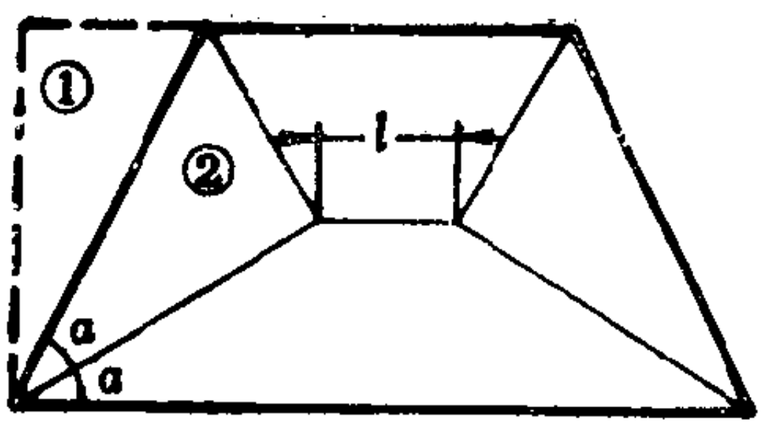
$$\varphi_{AB} = \int ydx - xdy = \int_0^y ydy - (y + b - a)dy = (a-b)y$$

$$= (b-a)^2 - (b-a)x.$$

在 $AB$ 上 $\varphi_2$ 与 $\varphi_{AB}$ 相等可得 $\varphi_2 = -xy + (x - b + a)^2$。

区域 3：$\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} = y$ 及在 $AB$ 上的连续条件可得

$$\varphi_3 = y(x - y - 2b + 2a).$$




题 5.19

5.19 沙堆比拟图形如图所示，$M_s$ 与斜率为 1 的沙堆体积 $V$ 之间有关系 $M_s = 2\tau_s V$，求体积 $V$ 时可先求 $2b \times h$ 矩形区的体积 $V_0$，再减去区域①，②对应的体积 $V_1$ 和 $V_2$，即

$$V = V_0 - V_1 - V_2.$$

5.20 设沙堆的斜率为 1，在内圆孔边上 $\Phi = c$。如设棱线上的点到外边界的距离为 $d$，则与内孔的距离为 $d-c$，用方程表示为

$$x^2 + y^2 = (b-d)^2,$$

$$(x + b - a - c)^2 + y^2 = (a + d - c)^2.$$

消去 $d$，得棱线满足方程

$$(b + a - c)^2(x^2 + y^2) = [2a(b-c) - (b - a - c)x]^2.$$

5.21

$$P_s = \frac{6\pi M_s}{\left(3 - 2\frac{c}{a}\right)}.$$

$$M_r(r) = \begin{cases} M_s\left(1 - \dfrac{1}{3 - 2\dfrac{c}{a}}\dfrac{r^2}{c^2}\right), & 0 \leqslant r \leqslant c, \\ \dfrac{2M_s}{\left(3 - 2\dfrac{c}{a}\right)}\dfrac{c}{r}\left(1 - \dfrac{r}{a}\right), & c \leqslant r \leqslant a. \end{cases}$$

5.22 记 $M_r = 0$ 的点为 $r = d$，当 $c/a = 0.1$ 时，设 $c < d$ 可求得 $d = 0.18a$。满足假定。

求得 $P_s = 3.17\pi M_s$。

$$M_r(r)=\begin{cases} M_s-\dfrac{1}{6}pr^2, & 0\leqslant r\leqslant c,\\ \dfrac{pc^3}{3r}+M_s-\dfrac{pc^2}{2}, & c\leqslant r\leqslant d,\\ M_s\left(1-\dfrac{3}{3-2\dfrac{c}{d}}\right)\ln\dfrac{r}{d}, & d\leqslant r\leqslant a. \end{cases}$$

当 $c/a=0.9$ 时，设 $d<c$，得 $d=0.72a$，满足假定。

求得 $P_s=9.375\pi M_s$。

$$M_r(r)=\begin{cases} M_s-\dfrac{1}{6}pr^2, & 0\leqslant r\leqslant d,\\ M_s\ln\left(\dfrac{r}{d}\right)+\dfrac{p}{4}(d^2-r^2), & d\leqslant r\leqslant c,\\ M_s\left[-1+\left(1-\dfrac{3c^2}{d^2}\right)\ln\dfrac{r}{d}\right], & c\leqslant r\leqslant a. \end{cases}$$

5.23

$$p_s=6.74\frac{M_s}{a^2}.$$

$$M_r(r)=\begin{cases} M_s-\dfrac{1}{6}pr^2, & 0\leqslant r\leqslant c,\\ M_s\left[\ln\dfrac{r}{c}+\dfrac{3}{2}\left(1-\dfrac{r^2}{c^2}\right)\right], & c\leqslant r\leqslant a,\\ M_s\left[\left(1+\dfrac{3b^2}{c^2}\right)\ln\left(\dfrac{r}{b}\right)+\dfrac{3}{2c^2}(b^2-r^2)\right], & a\leqslant r\leqslant b. \end{cases}$$

$c=0.943a$。

# 第 六 章

## 6.1

Mises, $(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\sigma_{xy}^2=\frac{4}{3}\sigma_s^2$, $\sigma_z=\frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y)$。

最大偏应力：$(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\sigma_{xy}^2=\left(\frac{4}{3}\sigma_s\right)^2$。

$$\sigma_z=\frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y)。$$

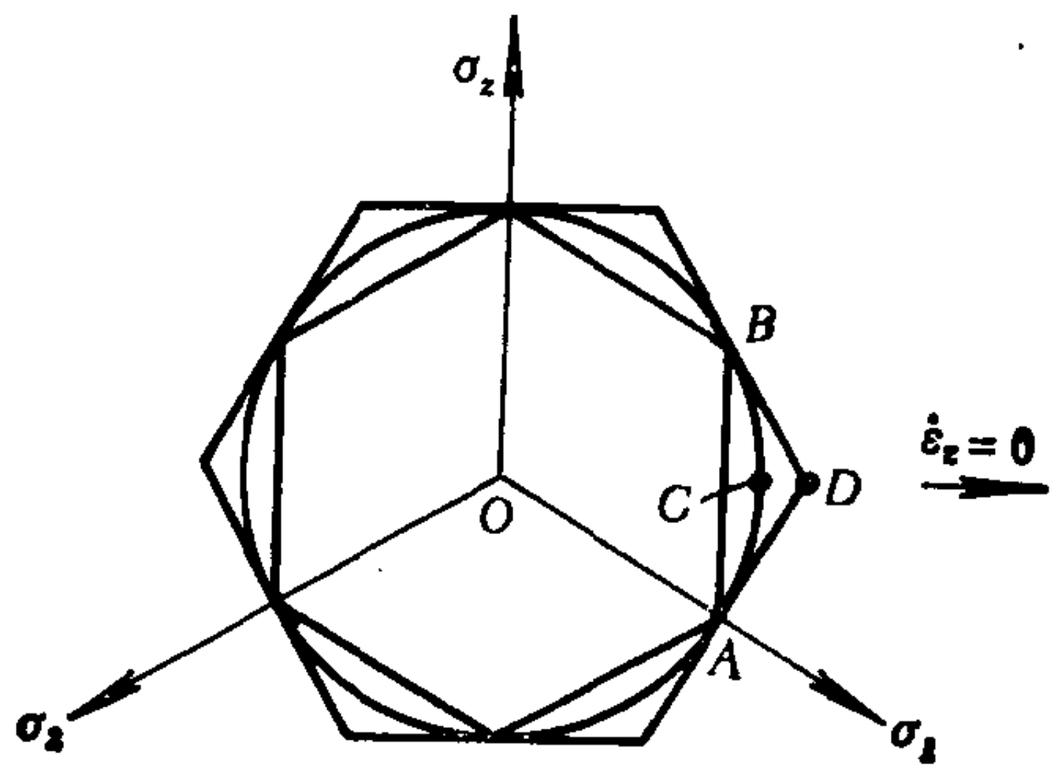
Tresca, $(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\sigma_{xy}^2=\sigma_s^2$, $\frac{\sigma_x+\sigma_y-\sigma_s}{2}\leqslant\sigma_z$

$$\leqslant\frac{\sigma_x+\sigma_y+\sigma_s}{2}。$$

主要论点如下：记

$$A=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2},\quad B=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\sigma_{xy}^2},$$

则 $\sigma_1=A+B,\sigma_z,\sigma_2=A-B$，是三个主应力。考虑这个主应力空间的 $\pi$ 平面，三个屈服条件如图所示，在 $\sigma_1\geqslant\sigma_z\geqslant\sigma_2$，及 $\dot{\varepsilon}_z=0$




题 6.1

条件下，应力点位置可确定如下：Mises 条件只能在图中的$C$点，最大偏应力条件只能在图中的$D$点，而 Tresca 条件允许应力点处在$AB$边上，由此可求出上述结果。

6.2

| | | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $x$ | 1 | 1.075 | 1.144 |
| | $y$ | 0 | 0.0815 | 0.169 |
| | $\theta$ | -0.785 | -0.707 | -0.628 |
| | $\sigma/k$ | -1 | -1.157 | -1.313 |
| 1 | | | 1.163 | 1.245 |
| | | | 0 | 0.089 |
| | | | -0.785 | -0.706 |
| | | | -1.313 | -1.470 |
| 2 | | | | 1.341 |
| | | | | 0 |
| | | | | -0.785 |
| | | | | -1.628 |

| | | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $v_\alpha$ | 1 | 1 | 1 |
| | $v_\beta$ | 1 | 0.922 | 0.843 |
| 1 | | | 0.928 | 0.934 |
| | | | 0.928 | 0.854 |
| 2 | | | | 0.866 |
| | | | | 0.866 |

6.3 记 $t=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\nu\right)$,

$$\begin{cases}u_1=0,\\ v_1=\sqrt{2}V.\end{cases}\quad\begin{cases}u_2=-\sqrt{2}tV,\\ v_2=\sqrt{2}V.\end{cases}\quad\begin{cases}u_3=-\sqrt{2}tV,\\ v_3=(1-t)\sqrt{2}V.\end{cases}$$

$$\begin{cases} u'_1 = 0, \\ v'_1 = \sqrt{2}V. \end{cases} \quad \begin{cases} u'_2 = \sqrt{2}tV, \\ v'_2 = \sqrt{2}V. \end{cases} \quad \begin{cases} u'_3 = \sqrt{2}tV, \\ v'_3 = (1-t)\sqrt{2}V. \end{cases}$$

$$u_0 = \frac{-t}{1+t}\sqrt{2}V, \quad v_0 = \frac{\sqrt{2}V}{1+t}.$$

**6.4**

1) $AD$ 边长为 $d = \dfrac{h}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \omega\right)}$，作用有正应力 $\sigma = k(1+2\omega)$

及剪应力 $\tau = k$。将其与外力 $P/2$ 平衡即得(1)式。

将上半单元沿 $AD$ 边分离出，并对 $D$ 点求矩可得

$$2k(1+2\omega)\frac{d^2}{2} = P\left[l - d\sin\left(\frac{\pi}{4} - \omega\right)\right].$$

化简后得(2)式。

2) $2\omega = 0.338$，$\dfrac{P}{2kh} = 0.0521$。

3) $P_0 = \dfrac{M_s}{l} = \dfrac{\sigma_s h^2}{l}$。取 $k = \dfrac{\sigma_s}{2}$，得 $\dfrac{P_0}{2kh} = 0.05$。

**6.5**

1) 在 $AD$ 边上，上半部分有正应力 $\sigma_1 = k(1+2\omega) - q$，下半部分有正应力 $\sigma_2 = -k(1+2\omega)$，与外载 $q$ 的平衡条件为

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \omega\right) - \left(1 + 2\omega - \frac{q}{2k}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \omega\right) = \frac{ql}{2kd}.$$

对 $D$ 点取矩可得

$$[2k(1+2\omega) - q]\frac{d^2}{2} = ql\left[\frac{l}{2} - d\sin\left(\frac{\pi}{4} - \omega\right)\right].$$

可导出 $q, \omega$ 之间关系。

2) $\omega = 0.3547$, $\frac{q}{2k} = 0.02249$.

3) $\frac{q_0}{2k} = 0.02$.

6.6

在塑性区一侧

$$\theta = -\frac{3}{4}\pi + \varphi, \quad \sigma = -k(1 + 2\varphi).$$

$$\begin{cases} \sigma_n = \sigma - k \sin 2(\theta - \psi), \\ \sigma_{nt} = k \cos 2(\theta - \psi). \end{cases}$$

在刚性区一侧

$$\begin{cases} \sigma_n = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\psi, \\ \sigma_{nt} = \dfrac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\sin 2\psi. \end{cases}$$

且 $\sigma_y - \sigma_x = 2k$。由 $\sigma_n, \sigma_{nt}$ 相等，可求得 $\psi, \sigma_x, \sigma_y$。

2) 由 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}(\varphi - \sin\varphi) = 1 - \cos\varphi \geqslant 0$ 得

$$(\varphi_F - \sin\varphi_F) - (\varphi_E - \sin\varphi_E) \geqslant 0.$$

可证 $$\sigma_y(M) - \sigma_x(M) \leqslant 2k.$$

6.7

平衡方程可变为

$$(\sqrt{3} + \mathrm{ctg}\omega)\mathrm{d}\omega + 2\frac{\mathrm{d}r}{r} = 0.$$

积分求得

$$\begin{cases} \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sin\omega_a}e^{-\sqrt{3}\left(\omega_a-\frac{\pi}{3}\right)}, \\ P_s = -\frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}}\cos\left(\omega_a+\frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

$b/a=2$ 时， $\omega_a=3.118$， $P_s=1.013\sigma_s$。

平面应变时， $P_s=\frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}}\ln 2=0.80\sigma_s$。

6.8

1) $v_a=V\left[\sqrt{2}-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)\right]$， $v_\beta=V\cos\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)$。

2) $r(\varphi)=\frac{h}{2\left(\sqrt{2}-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)\right)}$。

3) $\frac{ds}{dt}=V\sqrt{3-2\sqrt{2}\sin\theta}\quad\left(\theta=\frac{\pi}{4}-\varphi\right)$。

$$ds=\frac{h\sqrt{3-2\sqrt{2}\sin\theta}}{2(\sqrt{2}-\sin\theta)^2}。$$

$$t=\frac{h}{2V}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{(\sqrt{2}-\sin\theta)^2}$$

$$=\frac{h}{2V}\left[\frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}-\cos\alpha}+2\sqrt{2}\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{2}-1}\right)\right]\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$=0.53\frac{h}{V}。$$

# 第 七 章

**7.1** 各杆的伸长率 $\delta_i$ 与 $u,v$ 有以下关系

$$\begin{cases} \delta_1 = \dfrac{u+v}{\sqrt{2}}, \\ \delta_2 = v, \\ \delta_3 = \dfrac{v-u}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

单位杆长的

$$\frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}^{*}\dot{e}_{ij}^{*}\mathrm{d}v = \frac{1}{2}A\sigma\dot{e} = \frac{1}{2}A\begin{cases} E\dot{e}^2, & \text{弹性时,} \\ E(\dot{e}-\dot{e}^p)^2 + H'(\dot{e}^p)^2, & \text{强化时.} \end{cases}$$

整个桁架的 $\pi(\dot{e}_{ij}^{*})$ 为

$$\pi = \frac{1}{2}\frac{A}{\sqrt{2}l}\left[E\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}} - \dot{\delta}_1^p\right)^2 + H'(\dot{\delta}_1^p)^2\right] + \frac{1}{2}\frac{AE}{l}v^2$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{AE}{\sqrt{2}l}\left(\frac{v-u}{\sqrt{2}}\right)^2 - \dot{F}_x u - \dot{F}_y v,$$

式中 $\dot{F}_x = \dot{F}_y = \dfrac{\dot{F}}{\sqrt{2}}$，$\pi$ 中可变化的参数为 $u,v,\dot{\delta}_1^p$，由 $\pi$ 取极值，

即 $\dfrac{\partial\pi}{\partial u}=0, \dfrac{\partial\pi}{\partial v}=0, \dfrac{\partial\pi}{\partial\dot{\delta}_1^p}=0$，可求得

$$\begin{cases} u = \dfrac{\sqrt{2}l}{AE}\dfrac{\dot{F}}{\sqrt{2} - \dfrac{E}{E+H'}}, \\ v = \dfrac{u}{1+\sqrt{2}}. \end{cases}$$

**7.2** 单位杆长的

$$\frac{1}{2}\int_V \sigma^0_{ij}\,\varepsilon^0_{ij}\,\mathrm{d}v=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\dfrac{\dot N^2}{E}, & \text{弹性},\\[2ex] \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\dot N^2}{E}+\dfrac{\dot N^2}{H'}\right), & \text{强化}.\end{cases}$$

整个桁架的增量型余能为

$$\pi^0=\frac{\sqrt{2}\,l}{2A}\left(\frac{\dot N_1^2}{E}+\frac{\dot N_1^2}{H'}\right)+\frac{l}{2A}\,\frac{\dot N_2^2}{E}+\frac{\sqrt{2}\,l}{2A}\,\frac{\dot N_3^2}{E}.$$

利用平衡方程将 $\dot N_1,\dot N_3$ 都用 $\dot N_2$ 表示，使 $\pi^0$ 只含 $\dot N_2$，由 $\dfrac{\partial\pi^0}{\partial\dot N_2}=0$，可求得

$$\begin{cases}\dot N_2=\dfrac{\sqrt{2}\,(E+H')}{(2+\sqrt{2})H'+E}\dot F,\\[2ex] \dot N_1=\dot F-\dfrac{\dot N_2}{\sqrt{2}},\\[2ex] \dot N_3=-\dfrac{\dot N_2}{\sqrt{2}}.\end{cases}$$

7.3

$$\begin{cases}\delta_x=\dfrac{L}{3AE}\,(9Q+\sqrt{3}\,P-5\sqrt{3}\,A\sigma_s),\\[2ex] \delta_y=\dfrac{L}{3AE}(\sqrt{3}\,Q+3P-3A\sigma_s).\end{cases}$$

7.4　单位杆长的余应变能为 $\dfrac{N_i^3}{3B^2A^2}\operatorname{sign}N_i$，由平衡关系，将 $N_1,N_3$ 用 $N_2$ 表示，由 $\dfrac{\partial\Pi_c}{\partial N_2}=0$，可得 $N_2^2=2(N_1^2-N_3^2)$，即可解出 $N_i$。由 $N_1\geqslant0,N_2\geqslant0,N_3\leqslant0$ 条件可定出 $k_1$ 的范围。

7.5　梁的左边弯矩分布为

$$M(x) = -M_0 + \frac{P}{2}x.$$

在 $0 \leqslant x \leqslant x_1 = \frac{2M_0}{P}$ 段，$M(x) \leqslant 0$，在 $x_1 \leqslant x \leqslant \frac{l}{2}$ 段，$M(x) \geqslant 0$.

$\mathrm{d}x$ 段梁的余应变能为 $\frac{\mathrm{d}x}{c^{\frac{1}{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)}|M|^{\frac{1}{n}+1}$，整个梁的余能为

$$\Pi_c = \frac{2}{c^{\frac{1}{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)}\left[\int_0^{x_1}\left(M_0 - \frac{P}{2}x\right)^{1+\frac{1}{n}}\mathrm{d}x\right.$$

$$\left.+\int_{x_1}^{\frac{l}{2}}\left(\frac{P}{2}x - M_0\right)^{1+\frac{1}{n}}\mathrm{d}x\right].$$

由 $\frac{\partial \Pi_c}{\partial M_0} = 0$，可求得 $M_0 = Pl/8$.

7.6 方案(a)

间断线上速度间断值为 $[\![v_t]\!] = \frac{V}{\sin\theta}$. 最好的 $\theta$ 值为 $\frac{\pi}{4}$. 可求得 $\frac{P_1^*}{\tau_s l} = 1 + \frac{b}{l}$.

方案(b)

由不可压条件得 $u = V\mathrm{tg}\theta$，$BC$ 线速度间断值为 $[\![v_t]\!] = \frac{V}{\cos\theta}$，而 $CE$ 线上 $[\![v_t]\!] = V\mathrm{tg}\theta$. 最佳的 $\theta$ 角满足 $\mathrm{tg}\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{b}{l}}}$，可求得

$$\frac{P_2^*}{\tau_s l} = 2\sqrt{1+\frac{b}{l}}.$$

最后结果为

$$\frac{P^*}{\tau_s l}=\begin{cases}1+\dfrac{b}{l}, & \dfrac{b}{l}\leqslant 3,\\[2ex] \sqrt{1+\dfrac{b}{l}}, & \dfrac{b}{l}\geqslant 3.\end{cases}$$

**7.7**

沿 $OB$ 边的连续条件可得出

$$\begin{cases}\sigma'_1=s\dfrac{\sin(\beta+\alpha_1)\cos\beta}{\sin\alpha_1}, & (1)\\[2ex] \sigma'_2=s\dfrac{\sin(\beta+\alpha_1)\sin\beta}{\cos\alpha_1}. & (2)\end{cases}$$

沿 $OD$ 边的连续条件可得出

$$\begin{cases}\sigma''_1=s\dfrac{\sin(\alpha_2-\beta)\cos\beta}{\sin\alpha_2}, & (3)\\[2ex] \sigma''_2=-s\dfrac{\sin(\alpha_2-\beta)\sin\beta}{\cos\alpha_2}. & (4)\end{cases}$$

(1) 平面应力情况：

要求应力不违反屈服条件为

$$(\sigma'_1)^2-\sigma'_1\sigma'_2+(\sigma'_2)^2\leqslant\sigma_s^2, \qquad (5)$$

$$s\leqslant\sigma_s, \qquad (6)$$

$$(\sigma''_1)^2-\sigma''_1\sigma''_2+(\sigma''_2)^2\leqslant\sigma_s^2, \qquad (7)$$

$$P^0=4a\sigma''_1=2l\sigma'_1. \qquad (8)$$

要求在满足(1)—(7)条件使 $P^0$ 最大，可求得

$$\sigma'_1=\frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}},\quad \sigma'_2=\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}},\quad s=\sigma_s,\quad \beta=0.404,$$

$$\alpha_1=0.863,\quad \alpha_2=1.069,\quad \sigma''_1=0.647\sigma_s,$$

$$\frac{P^0}{4a\sigma_s}=0.647.$$

(2) 平面应变情况：

不违反屈服条件的要求改为

$$\begin{cases} \sigma'_1 - \sigma'_2 \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s, \\ s \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s, \\ \sigma''_1 - \sigma''_2 \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s. \end{cases}$$

最大的 $P^0$ 值对应于

$$s = \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}},\quad \alpha_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2},\quad \alpha_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2},$$

而 $\beta$ 满足以下方程

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) = \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)\sin\beta}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) - 2\sin\beta + \operatorname{tg}\beta}.$$

其解为 $\beta = 0.376$.

$$P^0 = \sigma'_1 2l = \frac{s\sin(\beta + \alpha_1)\cos\beta}{\sin\alpha_1}\left(2 - \frac{1}{\cos\beta}\right)a$$

$$= \frac{4a\sigma_s}{\sqrt{3}}(2\cos\beta - 1)\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)}.$$

可得

$$\frac{P^0}{4a\sigma_s} = 0.730.$$

7.8 只对最大偏应力屈服条件在角点处时导出 $D$ 的表达式。这时板的屈服条件可表示为

$$\begin{cases} M_r - \frac{1}{2}M_\theta = \pm M_s, \\ M_\theta - \frac{1}{2}M_r = \pm M_s, \\ (M_r + M_\theta)/2 = \pm M_s. \end{cases}$$

任取一角点，例如 $M_r - \frac{1}{2}M_\theta = M_s$ 与 $\frac{M_r + M_\theta}{2} = M_s$ 两个面的交点。这时有 $M_r = \frac{4}{3}M_s$，$M_\theta = \frac{2}{3}M_s$，由角点处的流动法则，将有

$$\varkappa_r : \varkappa_\theta : \varkappa_z = \left(\lambda + \frac{\mu}{2}\right) : \left(\frac{\mu - \lambda}{2}\right) : -\left(\frac{\lambda}{2} + \mu\right), \lambda \geqslant 0, \mu \geqslant 0.$$

这时 $\varkappa_{\max} = \varkappa_r$，$\varkappa_{\min} = \varkappa_z = -(\varkappa_r + \varkappa_\theta)$，

$$\varkappa_{\max} - \varkappa_{\min} = 2\varkappa_r + \varkappa_\theta,$$

$$D = M_r\varkappa_r + M_\theta\varkappa_\theta = \frac{2}{3}M_s(2\varkappa_r + \varkappa_\theta) = \frac{2}{3}M_s(\varkappa_{\max} - \varkappa_{\min}).$$

2)

Mises，$P^* = \frac{12}{\sqrt{3}}\frac{M_s}{a^2} = 6.93\frac{M_s}{a^2}$.

Tresca，$P^* = 6\frac{M_s}{a^2}$.

最大偏应力，$P^* = \frac{8M_s}{a^2}$.

7.9

由 $\int_0^R \sigma_{\theta z}(r)r^2dr = 0$ 得 $k = -\frac{4}{3}$. 引进无量纲量，

$$\sigma = \frac{\sigma_z}{\sigma_s}, \quad \tau = \frac{\sigma_{\theta z}}{\tau_s}, \quad \bar{\sigma} = \frac{\bar{\sigma}_z}{\sigma_s}, \quad \bar{\tau} = \frac{\bar{\sigma}_{\theta z}}{\tau_s}, \quad \rho = \frac{r}{R}.$$

$p,q$ 分别作用时的弹性解为，

$$p=0.5,\ q=0,\ \sigma=0.5,\ \tau=0$$

$$p=0,\ q=q_1,\ \sigma=0,\ \tau=\frac{4}{3}q_1\rho$$

能产生的最大和最小应力为

$$\sigma^+=0.5,\ \sigma^-=0,\ \tau^+=\frac{4}{3}q_1\rho,\ \tau^-=0.$$

无量纲残余应力为 $\bar{\sigma}=0,\ \bar{\tau}=\lambda'\left(1-\frac{4}{3}\rho\right),\lambda'=\lambda\tau$。

不违反屈服条件以保证安定的条件为

$$(\sigma^++\bar{\sigma})^2+(\tau^++\bar{\tau})^2\leqslant 1,$$

$$(\sigma^++\bar{\sigma})^2+(\tau^-+\bar{\tau})^2\leqslant 1\ (\text{当}\ \bar{\tau}\leqslant 0\ \text{时}).$$

可求得 $q_1=\lambda'=\frac{\sqrt{3}}{2}=0.866$。

对极限载荷 $p=0.5$，对应的 $q_1=0.884$。

# 主要参考书目


[1] 王仁，熊祝华，黄文彬，《塑性力学基础》，科学出版社，1982。

[2] R. Hill, Mathematical theory of plasticity, Oxford, 1950(中译本：R. 希尔，《塑性数学理论》，王仁等译，科学出版社，1966)。

[3] W.Prager, P.G.Hodge, Theory of perfectly plastic solids, John Wiley, 1951 (中译本：W.普拉格，P.G.霍奇，《理想塑性固体理论》，陈森译，科学出版社，1964)。

[4] P.G. Hodge, Plastic analysis of structures, McGraw Hill, 1959 (中译本：P.G.霍奇，《结构的塑性分析》，蒋詠秋，熊祝华译，科学出版社，1966)。

[5] А.А.Ильюшин, Пластичность (中译本：伊留辛，《塑性》，王振常译，建筑工业出版社，1958)。

[6] T.Y.Thomas, Plastic flow and fracture in solids, New York, Academic Press, 1961。

[7] L.M.Kachnov, Foundations of the theory of plasticity, North-Holland, 1971 (中译本：L.M.卡恰诺夫，《塑性理论基础》，周承倜译，人民教育出版社，1982)。

[8] J.B. Martin, Plasticity: Fundamentals and General Results, MIT Press, 1975。

[9] 北川 浩，《塑性力学基础》(中译本：刘文斌，张宏译，高等教育出版社，1986)。

[10] W.什彻平斯基，《金属塑性成型力学导论》，徐秉业，刘信声，孙学伟译，机械工业出版社，1987。

[11] W.F.Chen, D.J.Han, Plasticity for structural engineering, Springer-Verlag, 1988。

[12] 黄文彬，曾国平，《塑性力学难题分析》，高等教育出版社，1992。

[13] 王仁，黄克智，朱兆祥主编，《塑性力学进展》，中国铁道出版社，1988。

[14] 杨桂通，《弹塑性力学》，人民教育出版社，1980。

[15] 蒋詠秋，穆霞英，《塑性力学基础》，机械工业出版社，1981。

[16] 徐秉业，陈森灿，《塑性理论简明教程》，清华大学出版社，1981。
[17] 庄懋年，马晓士，蒋潞，《工程塑性力学》，高等教育出版社，1983。
[18] 熊祝华，洪善桃，《塑性力学》，上海科学技术出版社，1984。
[19] 徐秉业，黄炎，刘信声，孙学伟，《弹塑性力学及其应用》，机械工业出版社，1984。
[20] 杨桂通，熊祝华，《塑性动力学》，清华大学出版社，1984。
[21] 徐秉业，刘信声，《结构塑性极限分析》，中国建筑工业出版社，1985。
[22] 熊祝华，《结构塑性分析》，人民交通出版社，1987。
[23] 赵志业，王国栋，《现代塑性加工力学》，东北工学院出版社，1986。
[24] 汪凌云，《金属塑性变形力学》，重庆出版社，1986。
[25] 赵祖武，《塑性力学导论》，高等教育出版社，1989。
[26] 徐秉业，《塑性力学》，高等教育出版社，1989。
[27] 余同希，《塑性力学》，高等教育出版社，1989。
[28] 欧阳鬯，马文华，《弹性，塑性，有限元》，湖南科学技术出版社，1983。
[29] 严宗达，《塑性力学》，天津大学出版社，1988。

[General Information]
书名=塑性力学引论（修订版）
作者=王仁　　黄文彬　　黄筑平
页数=３４３
ＳＳ号=１００７０９１２
出版日期=１９９２年０５月第１版

前言

目录

第一章　简单应力状态下的弹塑性力学问题
§１．１　引言
§１．２　材料在简单拉压时的实验结果
§１．３　应力－应变关系的简化模型
§１．４　轴向拉伸时的塑性失稳
§１．５　简单桁架的弹塑性分析
§１．６　强化效应的影响
§１．７　几何非线性的影响
§１．８　弹性极限曲线
§１．９　加载路径的影响
§１．１０　极限载荷曲线（面）
§１．１１　安定问题
习题
第二章　梁的弹塑性弯曲及梁和刚架的塑性极限分析
§２．１　矩形截面梁的弹塑性纯弯曲
§２．２　横向载荷作用下梁的弹塑性分析
§２．３　强化材料矩形截面梁的弹塑性纯弯曲
§２．４　超静定梁的塑性极限载荷
§２．５　用静力法和机动法求刚架的塑性极限载荷
§２．６　极限分析中的上下限定理
§２．７　最轻结构的极限设计
§２．８　弯矩和轴向力同时作用的情形
习题
第三章　应变分析、应力分析和屈服条件
§３．１　应变张量和应力张量
§３．２　应变张量或应力张量的不变量
§３．３　偏应变张量和偏应力张量
§３．４　屈服条件
§３．５　几个常用的屈服条件
§３．６　屈服条件的实验验证
§３．７　岩土力学中的库伦屈服条件
§３．８　加载条件
习题
第四章　本构关系
§４．１　塑性应力率和塑性应变率
§４．２　应变空间中的加载曲面和加、卸载准则
§４．３　有关材料性质的几个假设
§４．４　加载面的外凸性和正交流动法则
§４．５　增量（率型）本构关系的一般形式
§４．６　本构关系的一些常用表达式
§４．７　简单加载时的全量理论
§４．８　关于极值路径的一些基本概念
习题
第五章　弹塑性力学边值问题的简单实例
§５．１　弹塑性力学边值问题的提法
§５．２　薄圆管的拉扭联合变形

§５．３　厚壁圆柱筒的弹塑性分析
§５．４　理想弹塑性柱体的自由扭转
§５．５　刚塑性薄圆板的轴对称弯曲
习题
第六章　理想刚塑性材料的平面应变问题
§６．１　基本方程
§６．２　滑移线
§６．３　边界条件
§６．４　滑移线和间断线的主要性质
§６．５　基本边值问题及其数值积分
§６．６　楔的单边受压
§６．７　半平面上刚性冲模的压入和切口板条的拉伸
§６．８　定常塑性流动的板条抽拉问题
§６．９　塑性力学中平面应变问题与平面应力问题的区别
习题
第七章　塑性力学中的能量原理和极限载荷的限界定理
§７．１　存在间断场时的虚功率原理
§７．２　弹塑性增量理论中的最小势能原理和最小余能原理
§７．３　弹塑性全量理论中的最小势能原理和最小余能原理
§７．４　全量理论中关于最小势能原理和最小余能原理的应用
§７．５　极限分析中的下限定理和上限定理
§７．６　关于极限载荷限界定理的应用实例
§７．７　安定定理
习题
习题解答
主要参考书目