普通高等教育"九五"教育部重点教材



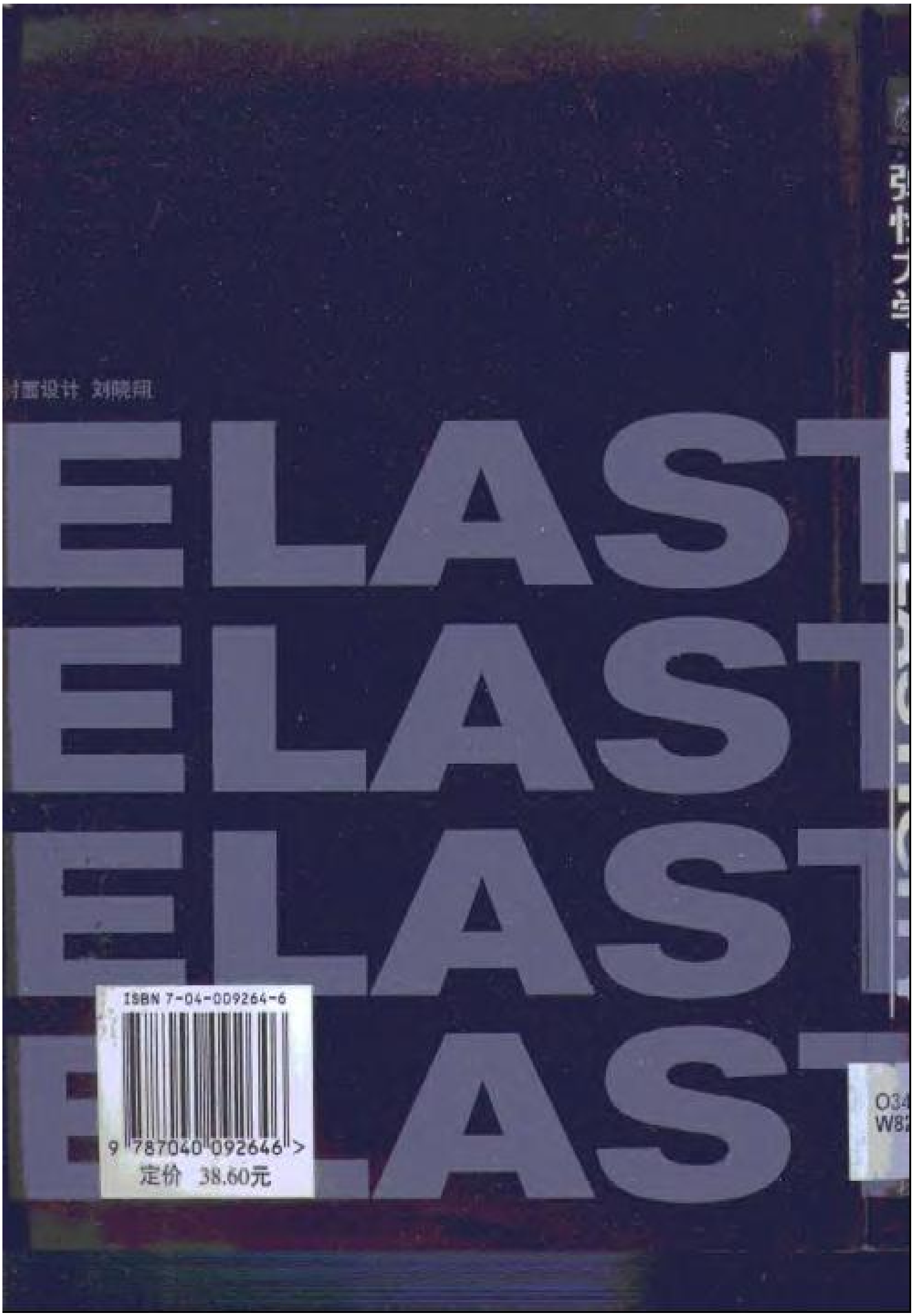
弹性力学

ELASTICITY

吴家龙 编著

高等教育出版社

ICITY
ICITY
ICITY
ICITY


封面设计 刘晓翔
ELAST
ELAST
ELAST
ELAST
ISBN 7-04-009264-6
9 787040 092646 >
定价 38.60元

普通高等教育“九五”教育部重点教材

弹性力学

Elasticity

吴家龙 编著

A0944996

高等教育出版社
·北京·

内容简介

本书为普通高等教育"九五"教育部重点教材，主要供高等学校工程力学专业作教材之用。

全书共十四章和两个补充材料，按应力、应变分析、应力应变关系、弹性力学的一般原理、平面问题的解答、空间问题的解答、热应力、弹性波的传播、弹性薄板的弯曲和弹性力学的变分解法的顺序编排。既包括了经典内容，又反映了该学科领域的若干新发展。内容选择和叙述方法方面，在充分注意理论的系统性、完整性和严密性的前提下，更注重深入浅出，重点突出，难点分散，联系工程实际，强调问题的物理本质，便于学生理解和掌握。两个附录为：简单几张量简介和弹性力学基本方程的曲线坐标形式。

本书还可作为工科研究生和相关专业本科生的教材或教学参考书，也可供研究人员和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

弹性力学/吴家龙编著. —北京：高等教育出版社，2001
普通高等教育"九五"教育部重点教材
ISBN 7-04-009264-6

Ⅰ.弹… Ⅱ.吴… Ⅲ.弹性力学-高等学校-教材
Ⅳ.0343

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 07880 号

责任编辑 黄 毅　**封面设计** 刘晓翔　**责任绘图** 朱 静
版式设计 马静如　**责任校对** 王效珍　**责任印制** 杨 明

弹性力学
吴家龙 编著

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市东城区沙滩后街 55 号　**邮政编码** 100009
电　　话 010-64054588　**传　　真** 010-64014048
网　　址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
经　　销 新华书店北京发行所
排　　版 高等教育出版社照排中心
印　　刷 北京联华印刷厂
开　　本 787×960 1/16　**版　　次** 2001 年 6 月第 1 版
印　　张 30　**印　　次** 2001 年 6 月第 1 次印刷
字　　数 560 000　**定　　价** 38.60 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

主要符号表

x、y、z	直角坐标
ρ、φ、z	柱坐标
ρ、φ	极坐标
r、θ、φ	球坐标
$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$	坐标单位矢量
$\boldsymbol{v}$	物体内微分截面或边界上外法线方向的单位矢量
l、m、n	外法线的方向余弦
I_x、I_y	横截面对x轴和y轴的惯性矩
$I_z=I$	横截面对z轴的惯性矩
I_p	极惯性矩
g	重力加速度
ρ_1、ρ	密度
q	连续分布荷载的集度
F_x、F_y、F_z	单位体积体力的直角坐标分量
F_ρ、F_φ、F_z	单位体积体力的柱坐标分量
F_r、F_θ、F_φ	单位体积体力的球坐标分量
$\boldsymbol{f}_v$	任意微分截面上的应力矢量
f_v	$\boldsymbol{f}_v$的大小
f_{vx}、f_{vy}、f_{vz}	$\boldsymbol{f}_v$的直角坐标分量
f_x、f_y、f_z	单位面积面力的直角坐标分量
M	弯矩;扭矩
σ_v、τ_v、f_v	任意微分截面上的正应力、切应力和总应力
σ_x、σ_y、σ_z	直角坐标系中的正应力分量
τ_{yz}、τ_{zx}、τ_{xy}	直角坐标系中的切应力分量
τ_{zy}、τ_{xz}、τ_{yx}	
σ_ρ、σ_φ、σ_z	柱坐标系中的正应力分量
$\tau_{\varphi z}$、$\tau_{z\rho}$、$\tau_{\rho\varphi}$	柱坐标系中的切应力分量
$\tau_{z\varphi}$、$\tau_{\rho z}$、$\tau_{\varphi\rho}$	
σ_r、σ_θ、σ_φ	球坐标系中的正应力分量
$\tau_{\theta\varphi}$、$\tau_{\varphi r}$、$\tau_{r\theta}$	球坐标系中的切应力分量

$\tau_{\rho\varphi}$、$\tau_{\varphi z}$、$\tau_{z\rho}$

σ_ρ、σ_φ、$\tau_{\rho z}$、$\tau_{\varphi\rho}$　　极坐标系中的应力分量;平面曲线坐标中的应力分量

$$\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_\rho + \sigma_\varphi + \sigma_z = \sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_\varphi$$

$\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{u}$　　位移矢量

u、v、w　　位移的直角坐标分量

u_ρ、u_φ、w　　位移的柱坐标分量

u_r、u_θ、u_φ　　位移的球坐标分量

u_ρ、u_φ　　位移的极坐标分量

ε_x、ε_y、ε_z　　直角坐标系中的正应变分量

γ_{yz}、γ_{zx}、γ_{xy}　　直角坐标系中的切应变分量

ε_ρ、ε_φ、ε_z　　柱坐标中的正应变分量

$\gamma_{\varphi z}$、γ_{zr}、$\gamma_{r\varphi}$　　柱坐标中的切应变分量

ε_r、ε_θ、ε_φ　　球坐标系中的正应变分量

$\gamma_{\theta\varphi}$、$\gamma_{r\varphi}$、$\gamma_{r\theta}$　　球坐标系中的切应变分量

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_\rho + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_\varphi$$

ε_ρ、ε_φ、$\gamma_{\rho\varphi}$　　极坐标中的应变分量

I_1、I_2、I_3　　应力张量不变量.

J_1、J_2、J_3　　应变张量不变量

E　　弹性模量(或杨氏模量)

G　　切变模量

ν　　泊松比

$\mu = G$、$\lambda = \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$　　拉梅弹性常数

$U(x, y)$　　艾里应力函数

$\varphi_1(z)$、$\psi_1(z)$　　复位势,即复应力函数

$\Phi(x, y)$　　柱体扭转和弯曲的应力函数

α　　单位长度的扭转角

$\varphi(x, y)$　　圣维南扭转函数

$\Phi(x, y, z)$　　拉梅应变势;热弹性应变势

$\boldsymbol{\varphi}(x, y, z)$　　伽辽金矢量

$\varphi_3(x, y, z)$、$\varphi_3(r, z)$　　乐甫应变函数

τ　　温度

T　　变温;绝对温度;周期

L　　波长;梁和柱的长度

c_1、c_2、c_3　　弹性波的速度

M_x、M_y　　板横截面单位宽度上的弯矩

M_{xy}、M_{yx}　　板横截面单位宽度上的扭矩

F_{Sx}，F_{Sy}	板横截面单位宽度上的横向剪力
F'_{Sx}，F'_{Sy}	板横截面单位宽度上总的分布剪力
$w(x,y)$	板弯曲时的挠度
D	板的抗弯刚度
v_ε	应变能密度
V_ε	应变能
v_c	应变余能密度
V_c	应变余能
v_I	内能密度
V_I	内能
v_F	自由能密度
E_k	动能
E_p	弹性体的总势能
E_c	弹性体的总余能
E'_p	广义总势能
E'_c	广义总余能
W	外力功;物体重量
L	拉格朗日函数
S	哈密顿作用量
$\boldsymbol{\varepsilon}$	平面问题有限元法的应变列阵
$\boldsymbol{\sigma}$	平面问题有限元法的应力列阵
$\boldsymbol{F}_R^e$	单元的结点力列阵
$\boldsymbol{F}^e$	单元的荷载列阵
$\boldsymbol{\Delta}^e$	单元的结点位移列阵
$\boldsymbol{N}$	位移形函数矩阵
$\boldsymbol{B}$	应变矩阵
$\boldsymbol{D}$	弹性矩阵
$\boldsymbol{S}$	应力矩阵
$\boldsymbol{k}$	单元刚度矩阵
$\boldsymbol{K}$	总刚度矩阵
$\boldsymbol{\Delta}$	整体结点位移列阵
$\boldsymbol{F}$	整体荷载列阵

第一章　绪　　论

§1-1　弹性力学的任务和研究方法

弹性力学又称弹性理论，是固体力学的一个分支，它的任务是研究弹性体在力和温度变化等外界因素作用下所产生的应力、应变和位移，从而解决各类工程中所提出的强度、刚度和稳定问题，使经济与安全这对矛盾得到更好的统一。它是一门理论性和实用性都很强的学科。

弹性，几乎是所有固体的一种固有的物理属性，而**完全弹性体**，则是指在引起其变形的外界因素被消除以后能完全恢复原状的物体，简称为**弹性体**。大量的实验表明，像钢一类材料的物体，如果其内各点的应力不超过弹性极限，则是一种理想的完全弹性体，而且应力和应变之间呈线性关系；但也有一些材料，例如橡皮和某些有色金属，却具有非线性的弹性性质。我们称前者为物理线性的，而后者为物理非线性的。

弹性力学与材料力学相比，在任务、研究对象和研究方法等方面，既有相同之处，也有不同之处。

如前述，弹性力学的任务是要解决构件的强度、刚度和稳定问题，而材料力学所研究的范围，还涉及到疲劳、蠕变、塑性变形以及构件破坏规律等问题。

从研究对象来看，弹性力学既研究杆状构件，也研究诸如深梁、板壳以及挡土墙、堤坝、地基等实体结构；而材料力学基本上只研究杆状构件，这种构件在拉压、剪切、扭转和弯曲情况下的应力和变形，是材料力学的主要研究内容。

从研究方法看，弹性力学根据六条基本假设，从问题的静力学、几何学和物理学三方面出发，经过严密的数学推导，得到弹性力学的基本方程和各类边界条件，从而把问题归结为线性偏微分方程组的边值问题。而材料力学在研究杆状构件的拉伸、压缩、扭转和弯曲问题时，也要用到弹性力学的六条基本假设，同时也要从问题的静力学、几何学和物理学三方面出发，但为了简化计算，大都还对构件的应力分布和变形状态作出某些附加的假设。

例如，在材料力学里研究直梁在横向荷载作用下弯曲时，引进了“平截面假设”，由此得出的结果是，横截面上的弯曲应力沿梁高按直线分布。但用弹性力学方法求解这一问题时，就无须引进这个假设，相反地，还可以利用弹性力学的

结果来校核这个假设是否正确，并说明由于引进了这个假设以后，对于具有不同的跨度和高度之比的梁来说所引起的误差，从而可以确定这个假设所带来的条件性和局限性。

又例如，在材料力学里计算带孔构件拉伸时，假定拉应力在净截面上是均匀分布的。但在弹性力学里，就不需要作出这个假定，而且它的计算结果表明，净截面上的拉应力远非均匀分布，而要在孔边附近发生高度的应力集中现象，孔边的最大拉应力会比平均应力高出若干倍。

弹性力学作为一门基础技术学科，是近代工程技术的必要基础之一。在造船工业中，船体结构的强度、刚度计算，要直接应用弹性力学的理论和方法。在航空工业中，尤其是航天工业的发展，不断地对弹性力学提出新的任务，并由此而形成了新的分支——空气弹性力学。在重型机器、精密机械和化工机械中，对于机器部件在各种工作条件下的强度和刚度的研究，也广泛地应用弹性力学的结论和公式。在水利工程和土建工程中，工程技术人员往往直接利用弹性力学方法作为设计的理论基础。在地震学中，根据弹性波在地壳中传播的研究结果，计算出震源所在的位置，并研究地震波传播的规律性。

弹性力学又可作为一门基础理论学科。物理学家在研究光波理论时引用了弹性力学。近几十年来，人们还把弹性力学的理论和方法应用于生物力学等边缘学科的研究。

解决工程中提出的弹性力学问题有理论计算和实验两大手段。由于理论计算遇到了复杂的偏微分方程和偏微分方程组的定解问题，所以人们早就寻找各种近似的计算方法，以克服这些数学上所出现的困难。随着电子计算机、尤其是微型计算机的发展和普及，弹性力学（包括固体力学的其他分支）的各种数值方法和半解析数值方法也有了迅猛的发展。其中最具代表性的有：以弹性力学基本方程为控制方程的差分法，以弹性力学的变分原理为控制方程的有限单元法和以弹性力学边界积分方程为控制方程的边界元法。差分法是弹性力学中一种比较古老的数值方法，目前在水工结构等工程问题中仍常被采用。有限单元法被用于解决弹性力学问题至今只有近 40 年的历史。由于它所具有的灵活性和通用性，因此备受工程界的欢迎。它的发展，是用弹性力学解决工程问题的重大突破。但由于它是一种纯数值的方法，因此不可避免地带来了自由度多、内存量大的不足。随后发展起来的各种半解析数值方法克服了以上这些缺点，更便于在微机上实现，这为用弹性力学方法解决工程问题开辟了更为广阔的前景。

§1-2 弹性力学的基本假设

在弹性力学中，为了能通过已知量（如物体的几何形状和尺寸、物体所受的

外力或几何约束)求出应力、应变和位移等未知量,首先要从问题的静力学、几何学和物理学三方面出发,建立这些未知量所满足的弹性力学基本方程和相应的边界条件。由于实际问题是极为复杂的,是由多方面的因素构成的,所以,如果我们不分主次地将全部因素都考虑进来,则势必会造成数学推导上的困难.而且,由于导出的方程过于复杂,实际上也不可能求解。因此,通常必须按照物体的性质以及求解的范围,忽略一些可以暂不考虑的因素,而提出一些基本假设,使我们所研究的问题限制在方便可行的范围以内。在以后的讨论中,如果不特别指出,将采用以下六条基本假设。

1. 连续性假设

弹性力学作为连续介质力学的一部分,它的基本前提是将可变形的固体看作是连续密实的物体,即组成物体的质点之间不存在任何空隙。从这条假设出发,我们可以认为应力、应变和位移等是连续的,它们可表示成坐标的连续函数,因而在作数学推导时可方便地运用连续和极限的概念。事实上,一切物体都是由微粒组成的,都不可能符合这个假定。但可以想象,当微粒尺寸以及各微粒之间的距离远比物体的几何尺寸小时,运用这个假设并不会引起显著的误差

2. 均匀性假设

假设所研究的物体是用同一类型的均匀材料组成的,因此各部分的物理性质(如弹性)都是相同的,并不会随着坐标位置的改变而发生变化。根据这个假设,我们在处理问题时可取出物体内任一部分进行分析,然后将分析的结果用于整个物体。如果物体由两种或两种以上的材料组成的,例如混凝土,那么,只要每种材料的颗粒远远小于物体的几何尺寸,而且在物体内均匀分布,从宏观意义上说,可认为是均匀的。

3. 各向同性假设

假设物体在不同的方向上具有相同的物理性质,因而物体的弹性常数不随坐标方向的改变而改变。单晶体是各向异性的,木材和竹材是各向异性的。钢材虽然由无数个各向异性的晶体组成,但由于晶体很小,而且排列是杂乱无章的,所以从宏观的意义上说它是各向同性的。

4. 完全弹性假设

完全弹性的含义已在§1-1中讲过,这里不作重复。本教程只研究应力和应变呈线性关系的情况,这时,各个弹性常数就不随应力或应变的大小而改变。这个假设又称**物理线性的假设**。

5. 小变形假设

假设物体在力和温度变化等外界因素作用下所产生的位移远小于物体原来的尺寸，因而应变分量和转角都远小于1。应用这条假设，可以使问题大为简化。例如，在研究物体的平衡时，可不考虑由于变形引起的物体尺寸和位置的变化；在建立几何方程和物理方程时，可以略去应变、转角的二次幂或二次乘积以上的项，使得到的关系式都是线性的。这个假设又称**几何线性的假设**。

6. 无初始应力假设

假设物体处于自然状态，即在力和温度变化等外界因素作用之前，物体内部是没有应力的。根据这条假设，由弹性力学求得的应力仅仅是由外力或温度变化所引起的。如果物体内有初始应力存在，只须与用弹性力学方法求得的由外界因素引起的应力相加即可。

在上述假设基础上建立起来的弹性力学称为**数学弹性力学**；由于所导得的弹性力学基本方程是线性的，故又称为**线性弹性力学**。如果在此之外还对变形或应力分布作出某种附加假设，例如梁弯曲时的平截面假设，板壳弯曲时的直法线假设等等，从而使问题在符合工程要求的精度下得到进一步的简化，使之更便于求解和应用，我们称这种弹性力学为**应用弹性力学**。本书除第十三章外，均属于数学弹性力学的范畴。

§1-3 弹性力学的发展简史

弹性力学的发展大致可以分为四个时期。

发展初期主要是通过实验探索物体的受力与变形之间的关系。1678年，胡克(Hooke, R.)在大量实验的基础上，揭示了弹性体的变形和受力之间成正比例的规律，后来被人们称为胡克定律。1687年，牛顿(Newton, I.)确立了运动三大定律，同时，数学也在飞速发展，这就为弹性力学数学物理方法的建立奠定了基础。

第二个时期是弹性力学的理论基础建立期，一般认为这一时期是从纳维(Navier, C.-L.-M.-H.)和柯西(Cauchy, A.-L.)提出弹性力学的基础问题开始，到格林(Green, G.)和汤姆逊(Thomson, W.)确立各向异性体有21个弹性系数为止(1821—1855)。17世纪末，人们已着手进行杆件性能的研究，包括梁的弯曲理论、直杆的稳定和振动等，但这些成果都归属于材料力学的范畴。直到19世纪20年代，纳维和柯西建立了弹性力学的数学理论之后，才使它成为一门独立的分支。1822—1828年之间，柯西发表了一系列论文，明确提出了应力和

应变的概念，建立了弹性力学的平衡(运动)微分方程、几何方程和各向同性的广义胡克定律；1838 年，格林用能量守恒定律证明了各向异性体有 21 个独立的弹性系数；稍后，汤姆逊又用热力学第一定律和第二定律证明了同样的结论，同时再次肯定了各向同性体有 2 个独立的弹性系数。他们的这些工作，为后来弹性力学的发展奠定了牢固的理论基础。

第三个时期是线性各向同性体弹性力学的发展时期。这个时期的主要标志是弹性力学广泛应用于工程实际问题，同时，在理论方面建立了许多定理和重要原理，并提出了许多有效的计算方法。例如 1850 年，基尔霍夫(Kirchhoff, G. R.)解决了平板的平衡和振动问题；1855—1856 年间，圣维南(Saint - Venant, A.J.C.B.de)在其“柱体的扭转和弯曲”的论文中，提出了局部性原理和半逆解法；1862 年，艾里(Airy, G. B.)解决了弹性力学的平面问题；1881 年，赫兹(Hertz, H.R.)解决了弹性体的接触问题，1898 年，基尔斯(Kirsch, G)提出了应力集中问题的求解方法。这个时期，在理论方面的主要成果是建立了各种能量原理，并提出了基于这些原理的近似计算方法。在建立了弹性力学的基本方程后不久，就建立了弹性体的虚功原理和最小势能原理。1872 年，贝蒂(Betti, E.)建立了功的互等定理。1873 年至 1879 年间，卡斯蒂利亚诺(Castigliano, A.)建立了最小余能原理。瑞利(Rayleigh, Lord)和里茨(Ritz, W.)分别于 1877 年和 1908 年，从弹性体的虚功原理和最小势能原理出发，提出了著名的瑞利 - 里茨法。1915 年，伽辽金(Галёркин, Б.Г.)提出了伽辽金近似计算方法。20 世纪 30 年代，穆斯赫利什维利(Мусхелищвили, Н.И.)发展了用复变函数理论求解弹性力学问题的方法，并建立了一套完整的理论。在这个时期，积分变换和积分方程在弹性力学中的应用也有新的发展。

第四个时期是弹性力学的分支及与之相关的边缘学科形成和发展时期，大致从 20 世纪 20 年代开始。在 1907 年卡门(Kàrmàn, T. von)提出了薄板的大挠度问题后，1939 年，他又和钱学森提出了薄壳的非线性稳定问题。在 1937—1939 年间，莫纳汉(Murnaghan, F.D.)和毕奥(Biot, M.A.)提出了大应变问题。在 1948—1957 年间，钱伟长用摄动法求解了薄板的大挠度问题。他们的这些工作，为非线性弹性力学的发展作出了重要的贡献。在这个时期，薄壁构件和薄壳的线性理论有了较大的发展，还形成了诸如厚板与厚壳理论、各向异性和非均匀体的弹性力学、热弹性力学、粘弹性理论、水弹性理论以及气动弹性力学等新的分支和边缘学科。这个时期弹性力学的近似计算方法也有很大的突破，相继提出了诸如差分法、有限单元法、边界元法、半解析数值法以及加权残值法等数值法和半解析半数值的方法。这些新领域的开拓和计算弹性力学的发展，大大丰富了弹性力学的内容，促进了有关工程技术的发展。这里，值得一提的是，胡海昌于 1954 年建立了三类变量的广义势能原理和广义余能原理；1955 年，鹫津久

一郎也独立地导出了这一原理,所以现在人们称之为胡海昌－鹫津久一郎变分原理。在1960—1978年间,钱伟长在这方面也做了大量的工作。他们的这些成就,为有限单元法和其他数值或半数值半解析方法的进一步发展奠定了坚实的理论基础。

第二章　应力状态理论

弹性力学所研究的都是超静定问题。要解决超静定问题，必须考虑静力学、几何学和物理学三方面的条件，缺一不可。本章的任务是要从静力学观点出发，分析一点的应力状态，并建立连续介质力学普遍适用的平衡微分方程和应力边界条件。在本章的推导中，我们将忽略物体的变形，显然这对小变形物体来说是不会引起明显误差的。

§2-1　体力和面力

作用在物体上的外力有两种类型，即**体力**和**面力**。所谓体力，是指分布在物体内所有质点上的力，例如重力、惯性力和电磁力等。所谓面力，是指作用在物体表面上的力，例如风力、液体压力和两个物体间的接触压力等。在直角坐标系里，用 F_x, F_y, F_z 和 $\bar{f}_x, \bar{f}_y, \bar{f}_z$ 表示单位体积的体力和单位面积的面力的3个分量。它们的量纲分别为 $MT^{-2}L^{-2}$ 和 $MT^{-2}L^{-1}$，单位分别为 N/m^3 和 N/m^2。

§2-2　应力和一点的应力状态

一个在外界因素(外力、温度变化等)作用下的物体，其内各部分之间要产生相互的作用。这种物体内的一部分与其相邻的另一部分之间相互作用的力，称为**内力**。

为了暴露内力，我们假想通过物体内任意一点 M 作法线方向为 $\boldsymbol{v}$ 的微小面 ΔS，此微小面把物体在 M 点的微小邻域分割成两部分，如图2-1所示。由割离体法可知，物体在 M 点的微小邻域被切成两部分以后，在其被切割的表面处，必须用内力 $\Delta \boldsymbol{F}$ 和 $\Delta \boldsymbol{F}'$ 代替。显然，这里的 $\Delta \boldsymbol{F}$ 和 $\Delta \boldsymbol{F}'$ 是作用力和反作用力的关系，因此，只要考虑其中之一即可。为确定起见，不妨留下图2-1a所示的那一部分。

根据物体连续性的假设，可以认为作用在微小面 ΔS 上的力是连续分布的，内力 $\Delta \boldsymbol{F}$ 则是这个分布力的合力。于是分布集度为 $\frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta S}$，称为**平均应力**。如果将 ΔS 取得很小很小，用数学的语言讲，即令 ΔS 趋向于零，则 $\frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta S}$ 的极限 $\boldsymbol{f}_v$ 就称为

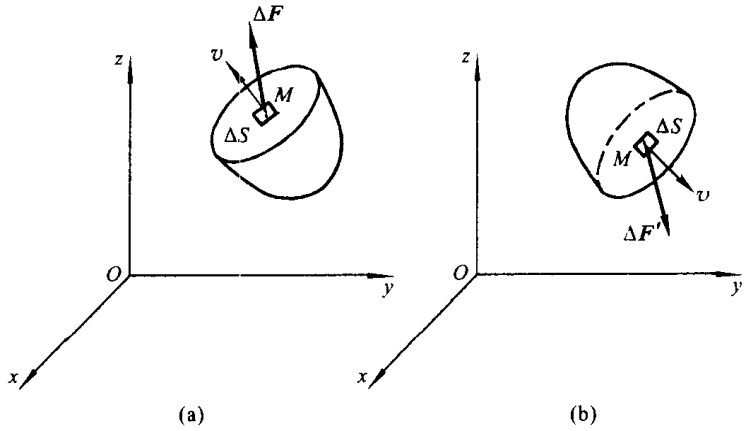


图 2－1

应力，记作

$$\boldsymbol{f}_v = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta S} \tag{2-1}$$

$\boldsymbol{f}$ 右下角的 v 表示微分面的法线方向，用以表示应力作用面的方位。

在给定的直角坐标系下，应力矢量 $\boldsymbol{f}_v$ 可沿 3 个坐标轴方向分解，如以 f_{vx}，f_{vy}，f_{vz} 表示其分量(图 2－2)，则有

$$\boldsymbol{f}_v = f_{vx}\boldsymbol{e}_1 + f_{vy}\boldsymbol{e}_2 + f_{vz}\boldsymbol{e}_3 \tag{2-2}$$

这里的 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 分别表示坐标单位矢量。另一方面，应力矢量 $\boldsymbol{f}_v$ 又可沿微分面 ΔS 的法线方向和微分面方向上分解。如分别用 σ_v 和 τ_v 表示其分量，则 σ_v 称为**正应力**，τ_v 称为**切应力**，如图 2－3 所示。

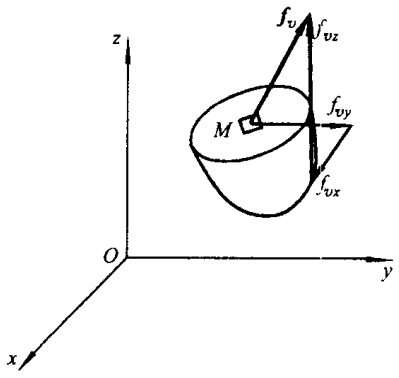


图 2－2

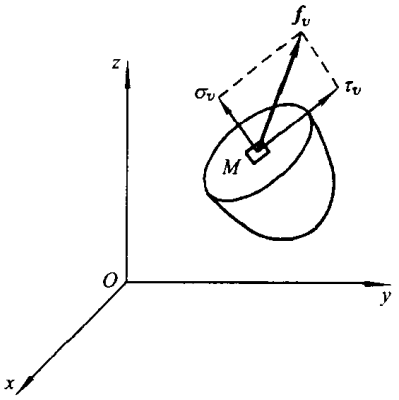


图 2－3

必须指出，凡提到应力，应同时指明它是对物体内哪一点并过该点的哪一个微分面来说的。因为，通过物体内同一点可以作无数个方位不同的微分面。显然，各微分面上的应力一般说是不同的。我们把物体内同一点各微分面上的应

力情况，称为**一点的应力状态**。分析一点的应力状态，对于研究物体的强度是十分重要的。

为了表示一点的应力状态，我们过物体内某一点 M 分别作 3 个彼此垂直的微分面，使之与坐标平面平行，则此 3 个微分面分别把物体在 M 点的微分邻域分割成前后、左右以及上下两部分（这里假定取 x 轴垂直纸面而指向读者，z 轴垂直向上）。我们只保留其表面外法线方向和坐标轴正方向一致的那一部分（图 2-4）。根据前面的规定，这 3 个微分面的应力矢量可分别表示为 $\boldsymbol{f}_x$，$\boldsymbol{f}_y$，$\boldsymbol{f}_z$，这里，右下角小写的 x，y，z 与前面的 v 一样，表示应力矢量作用面的方位。例如应力矢量 $\boldsymbol{f}_x$ 的作用面平行于 Oyz 平面而其法线方向和 x 轴一致。

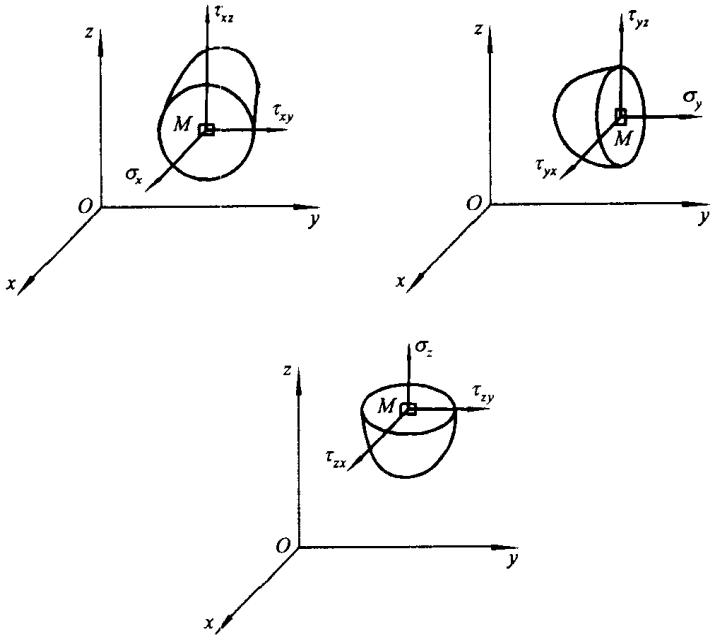


图 2-4

下面我们再分别把应力矢量 $\boldsymbol{f}_x$，$\boldsymbol{f}_y$，$\boldsymbol{f}_z$ 沿 3 个坐标轴方向分解。例如把 $\boldsymbol{f}_x$ 分解，则其在 x 轴方向的分量同它的作用面垂直，是正应力，以 σ_x 表示，这里，右下角的 x 表示作用面的方位；它在 y 轴和 z 轴方向的分量平行于作用面，是切应力，分别以 τ_{xy} 和 τ_{xz} 表示，这里，右下角第一个字母表示作用面的方位，而第二个字母则表示它们的指向。如果以同样的方法进行，可得：$\boldsymbol{f}_y$ 的 3 个分量，σ_y，τ_{yx} 和 τ_{yz}；$\boldsymbol{f}_z$ 的 3 个分量 σ_z，τ_{zx} 和 τ_{zy}，如图 2-4 所示。

这样，我们把作用在 M 点的上述 3 个微分面上的应力矢量分解以后，总共得到 9 个分量，它们作为一个整体称为**应力张量**，而其中每一个量称为**应力分**

量①。我们假设它们是坐标 x,y,z 的连续函数，而且具有连续到二阶的偏导数。现将它们写成

$$(\sigma_{ij})=\begin{pmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{pmatrix} \tag{2-3}$$

其中的三行依次表示 f_x,f_y,f_z 在三个坐标方向的分量。式(2-3)又可写成

$$(\sigma_{ij})=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{pmatrix} \tag{2-3}$$

其中，$\sigma_{11}=\sigma_x,\cdots,\sigma_{23}=\tau_{yz}$ 等等。

对于应力分量指向的画法，我们作如下的规定：当微分面外法线方向和坐标轴的正方向一致时，该微分面上的应力分量指向坐标轴的正方向，反之则指向坐标轴的负方向。例如图 2-4 所示的 3 个微分面的外法线方向与坐标轴的正方向一致，故作用在这 3 个微分面上的应力分量都指向坐标轴的正方向。

下一节我们将证明，只要知道了一点的 9 个应力分量，就可以求出通过该点的各个微分面上的应力，也就是说 9 个应力分量将完全确定一点的应力状态。

§2-3 与坐标倾斜的微分面上的应力

为了证明上一节最后指出的结论，我们假想地过 M 点作 3 个互相垂直并与坐标平面平行的微分面，设其上以式(2-3)所表示的 9 个应力分量是已知的(图 2-5)。再作一个与坐标倾斜的微分面，设其上的应力矢量为(f_{vx},f_{vy},f_{vz})。显然，当此倾斜微分面无限地接近 M 点时，则(f_{vx},f_{vy},f_{vz})就表示过 M 点的任一微分面上的应力。

现在要建立(f_{vx},f_{vy},f_{vz})和同一点的 9 个应力分量之间的关系，为此，我们研究图 2-5 所示的四面体的平衡。四面体 $Mabc$ 所受的外力，除了 4 个面上的应力以外，还受体积力的作用。如用 F_x,F_y,F_z 表示单位体积力在 3 个坐标方向的分量，$\triangle S_{abc},\triangle S_{bMc},\triangle S_{aMc},\triangle S_{aMb}$ 表示四面体 4 个面的面积，Δh 表示倾斜面 abc 到 M 点的距离，则四面体所受体积力的 3 个分量为

$$\frac{1}{3}\triangle S_{abc}\Delta hF_x,\quad \frac{1}{3}\triangle S_{abc}\Delta hF_y,\quad \frac{1}{3}\triangle S_{abc}\Delta hF_z$$

① 在§2-5中将会看到，9 个应力分量 σ_{ij} 服从张量的变换规律。按下标记法，σ_{ij} 表示 9 个应力分量，故可将(σ_{ij})记作 σ_{ij}。详见补充材料 A。

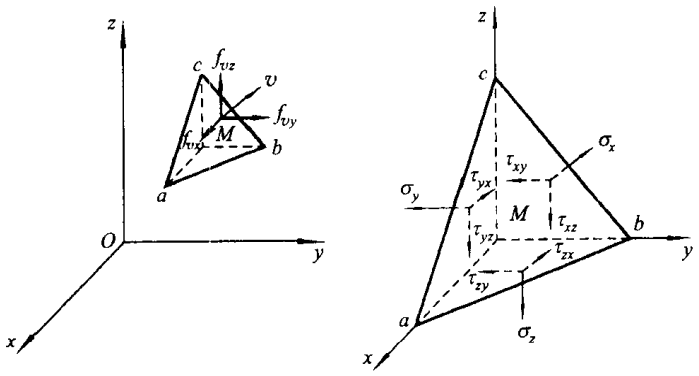


图 2-5

并由平衡条件$\sum F_x = 0$[①]，得

$$f_{vx}\triangle S_{abc} - \sigma_x \triangle S_{bMc} - \tau_{yx}\triangle S_{aMc} - \tau_{zx}\triangle S_{aMb} + \frac{1}{3}\triangle S_{abc}\Delta h F_x = 0 \tag{a}$$

为了简化式(a)，我们设倾斜面 abc 的外法线$\boldsymbol{v}$ 的 3 个方向余弦为 l，m，n，于是由几何关系

$$\left.\begin{aligned}\triangle S_{bMc} &= \triangle S_{abc} l\\ \triangle S_{aMc} &= \triangle S_{abc} m\\ \triangle S_{aMb} &= \triangle S_{abc} n\end{aligned}\right\} \tag{b}$$

略去高阶微量，并将式(b)代入式(a)，然后等号两边同除以 ΔS_{abc}，于是得到如下的公式(其中后两式是由平衡条件$\sum F_y = 0$ 和$\sum F_z = 0$ 推出的)

$$\left.\begin{aligned}f_{vx} &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n\\ f_{vy} &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n\\ f_{vz} &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n\end{aligned}\right\} \tag{2-4}$$

式(2-4)给出了物体内一点的 9 个应力分量和通过同一点的各微分面上应力之间的关系。这样，我们就把要了解各点应力状态的问题简化为去求各点的 9 个应力分量的问题。下一节，我们要建立 9 个应力分量所满足的平衡条件。

§2-4 平衡微分方程 应力边界条件

如果一物体在外力(包括体力和面力)作用下处于平衡状态，则将其分割成若干个任意形状的单元体以后，每一个单元体仍然是平衡的；反之，分割后每

① $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum F_z = 0$，表示空间一般力系平衡条件中主矢量等于零的 3 个投影式，其中的 F_x, F_y, F_z 不表示单位体积力的分量。下同。

个单元体的平衡，也保证了整个物体的平衡。基于这样的理由，我们假想穿过物体作三组分别与3个坐标平面平行的截面，在物体内部，它们把物体分割成无数个微分平行六面体；在靠近物体的表面处，只要这三组平面取得足够密，则不失一般性地被切割成微分四面体（图2-6）。如果我们分别考虑物体内部任意一个微分平行六面体和表面处任意一个微分四面体的平衡，可以导得平衡微分方程和应力边界条件。

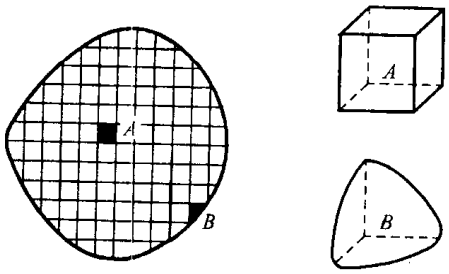


图2-6

先考虑物体内任意一个微分平行六面体的平衡。设其三条棱边分别为 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}z$，为简单起见，把3个坐标轴取得与3个棱边重合（图2-7）。我们设在 $x=0$ 的那一个微分面上的应力分量为 σ_x，τ_{xy}，τ_{xz}（由于平行六面体的每一个面是无限小的，所以作用在这些面上的应力可看作为均匀分布的），它们的指向按规定应该和坐标轴的正方向相反。在 $x=\mathrm{d}x$ 的微分面上，x 改变了 $\mathrm{d}x$，将它们按多元函数泰勒（Taylor，B.）级数展开，如精确到一阶微量，则分别为

$$\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x,\quad \tau_{xy}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}\mathrm{d}x,\quad \tau_{xz}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}\mathrm{d}x$$

它们的指向按规定应与坐标轴的正方向一致。按完全同样的理由，可标出其他4个微分面上的应力分量。我们仍用 F_x，F_y，F_z 表示单位体积的体力在3个坐标方向的分量。由于这个平行六面体是平衡的，所以它满足静力平衡方程

$$\sum F_x=0,\quad \sum F_y=0,\quad \sum F_z=0$$
$$\sum M_x=0,\quad \sum M_y=0,\quad \sum M_z=0$$

由 $\sum F_x=0$，得

$$\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\sigma_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z-\tau_{yx}\mathrm{d}x\mathrm{d}z+$$
$$\left(\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\tau_{zx}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+F_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$$

将上式同类项合并，再在等号两边同除 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，则得下列方程的第一式；同理，由 $\sum F_y=0$，$\sum F_z=0$，得下列方程的第二式和第三式：

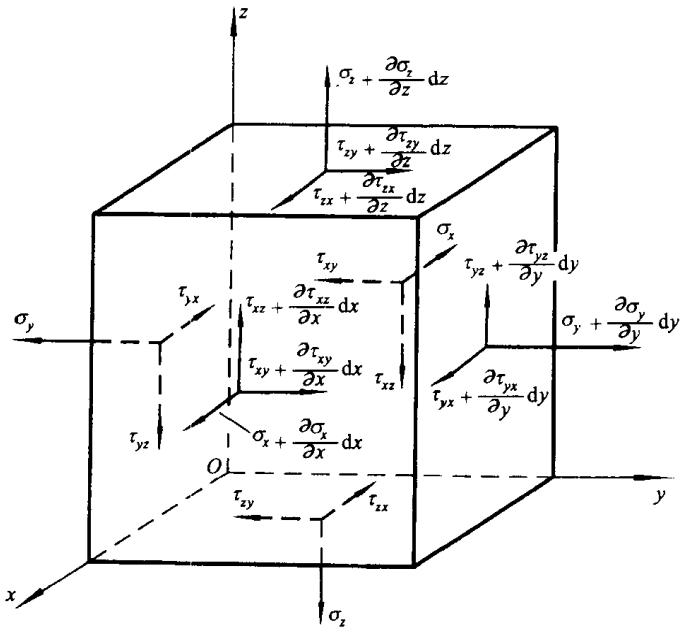


图 2－7

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+F_x=0\left(=\rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\right)\\
&\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+F_y=0\left(=\rho\frac{\partial^2v}{\partial t^2}\right)\\
&\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+F_z=0\left(=\rho\frac{\partial^2w}{\partial t^2}\right)
\end{aligned}\right\}\qquad(2-5)$$

上列 3 个方程给出了应力和体力的关系，称为**平衡微分方程**，又称**纳维方程**。

若考虑物体运动的情况，则方程(2－5)的右边不为零，按牛顿第二定律，应等于括号里边的项。这里，ρ 表示物体的密度，u，v，w 表示物体内任一点的位移矢量在 3 个坐标方向的分量，$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}$，$\frac{\partial^2v}{\partial t^2}$，$\frac{\partial^2w}{\partial t^2}$表示加速度的 3 个分量。

式(2－5)还可表示为

$$\sigma_{ij,j}+F_i=0\left(=\rho\frac{\partial^2u_i}{\partial t^2}\right)\qquad(2-5)'$$

这里，$(F_1,F_2,F_3)=(F_x,F_y,F_z)$，$(u_1,u_2,u_3)=(u,v,w)$，而 $\sigma_{ij,j}$ 表示应力分量对坐标的偏导数，例如 $\sigma_{12,1}=\sigma_{xy,x}=\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}=\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}$，等等。

再由$\sum M_x=0$,得

$$\left(\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}\mathrm{d}x-\tau_{zx}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,\frac{\mathrm{d}y}{2}-\left(\tau_{xy}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}\mathrm{d}x-\tau_{xy}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,\frac{\mathrm{d}z}{2}-$$

$$\left(\sigma_y+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\mathrm{d}y-\sigma_y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z\,\frac{\mathrm{d}z}{2}+\left(\tau_{yz}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z\mathrm{d}y+$$

$$\left(\sigma_z+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}\mathrm{d}z-\sigma_z\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\,\frac{\mathrm{d}y}{2}-\left(\tau_{zy}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}z-$$

$$F_y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,\frac{\mathrm{d}z}{2}+F_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,\frac{\mathrm{d}y}{2}=0$$

将此式简化并略去四阶微量,再在等号两边同除以$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,于是有下列关系式(后面两式按$\sum M_y=0$,$\sum M_z=0$求得):

$$\left.\begin{aligned}\tau_{zy}&=\tau_{yz}\\ \tau_{xz}&=\tau_{zx}\\ \tau_{xy}&=\tau_{yx}\end{aligned}\right\}\tag{2-6}$$

或

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ji}\tag{2-6}'$$

由此可见,切应力是成对发生的,9个应力分量中,实际只有6个是独立的。这称为**切应力互等定理**。

总之,我们从物体内部任一个微分平行六面体的平衡,得到了平衡微分方程(2-5)和切应力互等关系(2-6)。

现在要考虑物体表面处任一微分四面体(见图2-6)的平衡。由于物体的表面受到面力的作用,设单位面积上的面力的3个分量为$\bar{f}_x$,$\bar{f}_y$,$\bar{f}_z$,物体表面外法线$\boldsymbol{v}$的3个方向余弦为l,m,n,则采用与§2-3所述同样的方法,得到

$$\left.\begin{aligned}\bar{f}_x&=\sigma_x l+\tau_{yx}m+\tau_{zx}n\\ \bar{f}_y&=\tau_{xy}l+\sigma_y m+\tau_{zy}n\\ \bar{f}_z&=\tau_{xz}l+\tau_{yz}m+\sigma_z n\end{aligned}\right\}\tag{2-7}$$

或写成

$$\bar{f}_i=\sigma_{ij}n_j\tag{2-7}'$$

其中,$(\bar{f}_1,\bar{f}_2,\bar{f}_3)=(\bar{f}_x,\bar{f}_y,\bar{f}_z)$,而$(n_1,n_2,n_3)=(l,m,n)$。这一关系式给出了应力和面力之间的关系,称为**应力边界条件**。

从前面的推导可以看出,平衡微分方程和应力边界条件都表示物体的平衡条件。前者表示物体内部的平衡,而后者表示物体边界部分的平衡。很显然,如已知应力分量满足平衡微分方程和应力边界条件,则物体是平衡的;反之,如物体是平衡的,则应力分量必须满足平衡微分方程和静力边界条件。但须指出,

这里所指的平衡，仅仅是静力学上可能的平衡，未必是物体实际存在的平衡[1]。实际的平衡，还要考虑物体变形的连续条件，这将在第三章至第五章中再作讨论。

§2-5 转轴时应力分量的变换

我们研究问题，总是在一个选定的坐标系下进行的。现在就产生一个问题：当坐标系改变时，同一点的各应力分量应作如何改变。

极易证明，如坐标系作平移变换，同一点的各应力分量是不会改变的，下面我们只考虑转轴的情形。

设在坐标系 $Oxyz$ 下，某一点(譬如 M 点)的 9 个应力分量为

$$(\sigma_{ij})=\begin{pmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{pmatrix} \tag{a}$$

现在让坐标系转过某一角度，得到新的坐标系 $Ox'y'z'$(图 2-8)，设它与老坐标之间有如下的关系

	x	y	z
x'	l_1	m_1	n_1
y'	l_2	m_2	n_2
z'	l_3	m_3	n_3

其中，$l_i,m_i,n_i(i=1,2,3)$表示 3 个新坐标轴对于老坐标轴的方向余弦。

如果

$$(\sigma_{i'j'})=\begin{pmatrix}\sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'}\\ \tau_{y'x'} & \sigma_{y'} & \tau_{y'z'}\\ \tau_{z'x'} & \tau_{z'y'} & \sigma_{z'}\end{pmatrix} \tag{b}$$

表示同一点在新坐标系下的 9 个应力分量，我们要建立它们中间的每一个分量与老坐标系下 9 个应力分量(a)之间的关系。为简单起见，将坐标原点 O 移到 M 点。这里，只要求出式(b)中第一行的 3 个应力分量 $\sigma_{x'}$，$\tau_{x'y'}$，$\tau_{x'z'}$就可以了，其他应力分量可通过 x'，y'，z'三者的轮换(或按同理)求得。但应力分量 $\sigma_{x'}$，$\tau_{x'y'}$，$\tau_{x'z'}$按其定义表示作用在过M点并与Ox'轴垂直(因而当然与$Oy'z'$平面

① 从数学角度讲，平衡微分方程有 3 个，但有 6 个变量，因此解是不确定的，亦即有无穷多组解满足平衡微分方程和应力边界条件。这种平衡，称为静力可能的平衡。如果在静力可能的条件下还保证物体的变形协调，则解答是唯一的。这才是物体实际存在的平衡。

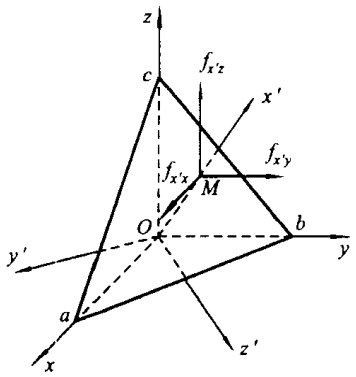


图 2-8

重合)的微分面上的应力矢量 $\boldsymbol{f}_{x'}$,在 3 个新坐标轴上的分量。因此,如用 $f_{x'x}$, $f_{x'y}$, $f_{x'z}$ 表示 $\boldsymbol{f}_{x'}$ 在三个老坐标方向的分量 $\boldsymbol{e}'_1$, $\boldsymbol{e}'_2$, $\boldsymbol{e}'_3$ 表示 3 个新坐标轴的单位矢量,则有

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{x'} &= \boldsymbol{f}_{x'}\cdot\boldsymbol{e}_1 = f_{x'x}l_1 + f_{x'y}m_1 + f_{x'z}n_1\\ \tau_{x'y'} &= \boldsymbol{f}_{x'}\cdot\boldsymbol{e}_2 = f_{x'x}l_2 + f_{x'y}m_2 + f_{x'z}n_2\\ \tau_{x'z'} &= \boldsymbol{f}_{x'}\cdot\boldsymbol{e}_3 = f_{x'x}l_3 + f_{x'y}m_3 + f_{x'z}n_3\end{aligned}\right\} \tag{c}$$

此外,如注意到过 M 点并与 Ox' 轴垂直的微分面对老坐标轴来说是倾斜的微分面,它的外法线方向即为 Ox' 轴的方向,其方向余弦为 l_1, m_1, n_1,故由关系式(2-4)得

$$\left.\begin{aligned}f_{x'x} &= \sigma_x l_1 + \tau_{yx}m_1 + \tau_{zx}n_1\\ f_{x'y} &= \tau_{xy}l_1 + \sigma_y m_1 + \tau_{zy}n_1\\ f_{x'z} &= \tau_{xz}l_1 + \tau_{yz}m_1 + \sigma_z n_1\end{aligned}\right\} \tag{d}$$

把式(d)代入式(c),整理后得到

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{x'} &= \sigma_x l_1^2 + \sigma_y m_1^2 + \sigma_z n_1^2 +\\ &\quad 2\tau_{yz}m_1 n_1 + 2\tau_{zx}l_1 n_1 + 2\tau_{xy}l_1 m_1\\ \tau_{x'y'} &= \sigma_x l_1 l_2 + \sigma_y m_1 m_2 + \sigma_z n_1 n_2 +\\ &\quad \tau_{yz}(m_1 n_2 + m_2 n_1) + \tau_{xz}(l_1 n_2 + l_2 n_1) +\\ &\quad \tau_{xy}(l_1 m_2 + l_2 m_1)\\ \tau_{x'z'} &= \sigma_x l_1 l_3 + \sigma_y m_1 m_3 + \sigma_z n_1 n_3 +\\ &\quad \tau_{yz}(m_1 n_3 + m_3 n_1) + \tau_{xz}(l_1 n_3 + l_3 n_1) +\\ &\quad \tau_{xy}(l_1 m_3 + l_3 m_1)\end{aligned}\right\} \tag{2-8a}$$

通过 x', y', z' 三者的轮换,可得到其余 6 个应力分量

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{y'} &= \sigma_x l_2^2 + \sigma_y m_2^2 + \sigma_z n_2^2 + \\
&\quad 2\tau_{yz} m_2 n_2 + 2\tau_{xz} l_2 n_2 + 2\tau_{xy} l_2 m_2 \\
\sigma_{z'} &= \sigma_x l_3^2 + \sigma_y m_3^2 + \sigma_z n_3^2 + 2\tau_{yz} m_3 n_3 + \\
&\quad 2\tau_{xz} l_3 n_3 + 2\tau_{xy} l_3 m_3 \\
\tau_{y'z'} &= \sigma_x l_2 l_3 + \sigma_y m_2 m_3 + \sigma_z n_2 n_3 + \\
&\quad \tau_{yz}(m_2 n_3 + m_3 n_2) + \tau_{xz}(l_2 n_3 + l_3 n_2) + \\
&\quad \tau_{xy}(l_2 m_3 + l_3 m_2)
\end{aligned}\right\} \tag{2-8b}$$

$$\tau_{z'y'} = \tau_{y'z'}, \tau_{z'x'} = \tau_{x'z'}, \tau_{y'x'} = \tau_{x'y'} \tag{2-8c}$$

现在用 $n_{i'i}$ 表示式(2-8)中的 $l_i, m_i, n_i (i=1,2,3)$ 等 9 个量。$n_{i'i}$ 的下标 $i'=1',2',3'$ 对应于新坐标 x', y', z'(即 x'_1, x'_2, x'_3);其下标 $i=1,2,3$ 对应于老坐标 x, y, z(即 x_1, x_2, x_3)。例如 $n_{2'3}$ 表示新坐标轴 y' 的单位矢量在老坐标轴 z 上的投影,即方向余弦 n_2。另外用 σ_{yz}, σ_{xz} 和 σ_{xy} 分别表示 τ_{yz}, τ_{xz} 和 τ_{xy}。于是式(2-8)又可表示为

$$\sigma_{i'j'} = \sigma_{ij} n_{i'i} n_{j'j} \tag{2-8'}$$

关系式(2-8)表示,当坐标作转轴变换时,应力分量遵循二阶张量的变换规律,因此,这 9 个量组成一张量(二阶的)。显然,虽然转轴后各应力分量都改变了,但 9 个分量作为一个"整体",所描绘的一点的应力状态是不会改变的。由于 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$,因此,应力张量是对称张量。

在平面的情况下,如 Oy' 轴与 Oy 轴成 φ 角(图 2-9)、则新、老坐标有如下的关系:

	x	y
x'	$\cos(-\varphi)$	$\cos[-(90°+\varphi)]$
y'	$\cos(90°-\varphi)$	$\cos(-\varphi)$

或写成

	x	y
x'	$\cos\varphi$	$-\sin\varphi$
y'	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$

(e)

由式(2-8)可以求出:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{x'} &= \sigma_x l_1^2 + \sigma_y m_1^2 + 2\tau_{xy} l_1 m_1 \\
\sigma_{y'} &= \sigma_x l_2^2 + \sigma_y m_2^2 + 2\tau_{xy} l_2 m_2 \\
\tau_{x'y'} &= \sigma_x l_1 l_2 + \sigma_y m_1 m_2 + \tau_{xy}(l_1 m_2 + l_2 m_1)
\end{aligned}\right\} \tag{f}$$

把式(e)代入式(f),得到

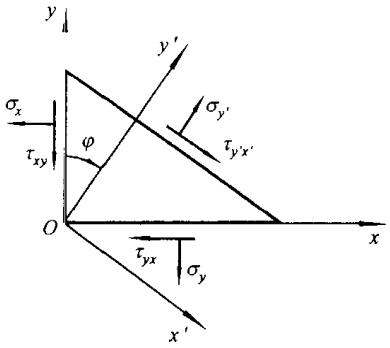


图 2-9

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{x'} &= \sigma_x\cos^2\varphi + \sigma_y\sin^2\varphi - 2\tau_{xy}\cos\varphi\sin\varphi\\ \sigma_{y'} &= \sigma_x\sin^2\varphi + \sigma_y\cos^2\varphi + 2\tau_{xy}\cos\varphi\sin\varphi\\ \tau_{x'y'} &= (\sigma_x - \sigma_y)\cos\varphi\sin\varphi + \tau_{xy}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\end{aligned}\right\} \tag{2-9}$$

这是材料力学中用来解释莫尔圆的二次应力转换式。

§2-6 主应力 应力张量不变量

既然物体内任一确定点的 9 个应力分量要随着坐标系的旋转而分别改变，于是就产生了一个问题：对于这任一确定的点，能否找到这样一个坐标系，在这个坐标系下，该点只有正应力分量，而切应力分量为零；也就是说，通过该点，能否找到这样 3 个互相垂直的微分面，其上只有正应力而无切应力。回答是肯定的。我们把这样的微分面称为**主平面**，其法线方向称为**应力主方向**，而其上的应力称为**主应力**。

我们根据主应力和应力主方向的定义去建立它们所满足的方程。设通过 M 点（设坐标原点 O 与其重合）的与坐标倾斜的微分面 abc 为主微分平面（图 2-10），其法线方向（即主方向）$\boldsymbol{v}$ 的三个方向余弦为 l, m, n，而其上的应力矢量 $\boldsymbol{f}_v$（即主应力）的三个分量为 f_{vx}, f_{vy}, f_{vz}。根据主平面的定义，其上的应力矢量应与它的法线方向平行，如以 σ 表示主应力的值，于是有

$$(f_{vx}, f_{vy}, f_{vz}) = \sigma(l, m, n)$$

或者写成

$$\left.\begin{aligned}f_{vx} &= \sigma l\\ f_{vy} &= \sigma m\\ f_{vz} &= \sigma n\end{aligned}\right\} \tag{a}$$

但另一方面，根据关系式(2-4)，有

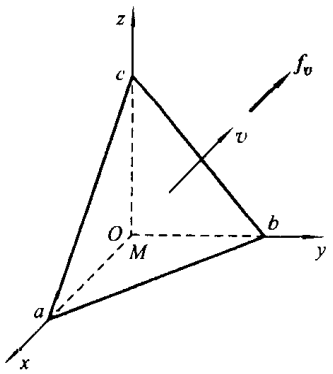


图 2-10

$$\left.\begin{aligned} f_{vx} &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ f_{vy} &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\ f_{vz} &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

式(b)与式(a)联立,并移项得

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma) l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n &= 0 \\ \tau_{xy} l + (\sigma_y - \sigma) m + \tau_{zy} n &= 0 \\ \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + (\sigma_z - \sigma) n &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2-10}$$

这就是应力主方向所满足的方程,它为线性齐次代数方程组。欲使(l, m, n)有非零解,其系数行列式必须为零,即

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

展开以后得到

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0 \tag{2-11}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 &= \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z + \sigma_x \sigma_y - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{xy}^2 \\ I_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{2-12}$$

方程(2-11)称为**应力状态特征方程**,而 I_1, I_2, I_3 称为**应力张量不变量**(依次称为第一、第二和第三不变量)。其不变的含义是:当坐标系旋转时,每个应力分量都要随之改变,但这 3 个量是不变的。它之所以不变,我们毋须从数学上严格证明,而只要说明下面这一点就可以了:方程的根代表主应力,它的大小和方

向在物体的形状和引起内力的因素确定以后是完全确定的，也就是说，它是不会随坐标的改变而改变的。由于方程(2－11)的根不变，故其系数也不变。

可以证明，方程(2－11)有3个实根。如果用 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 表示这3个根，则它们分别代表了该点的3个主应力。至于其方向，可通过把 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 分别代入方程组(2－10)，再利用关系式

$$l^2+m^2+n^2=1 \tag{2-13}$$

而求得。现在要证明如下三点：

(1) 如果 $\sigma_1\neq\sigma_2\neq\sigma_3$，即方程(2－11)无重根，则它们的方向即应力主方向必相互垂直；

(2) 如果 $\sigma_1=\sigma_2\neq\sigma_3$，即方程(2－11)有两重根，则 σ_3 的方向必同时垂直于 σ_1 和 σ_2 的方向，而 σ_1 和 σ_2 的方向可以相互垂直，也可以不相互垂直，也就是说，与 σ_3 垂直的任何方向都是主方向；

(3) 如果 $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$，即方程(2－11)有三重根，则3个主方向可以相互垂直，也可以不相互垂直，也就是说，任何方向都是主方向。

为了证明上述三种情况，我们假设 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 的方向分别为 (l_1,m_1,n_1)，(l_2,m_2,n_2)，(l_3,m_3,n_3)，它们都要满足方程(2－10)，于是有

$$\left.\begin{aligned}(\sigma_x-\sigma_1)l_1+\tau_{yx}m_1+\tau_{zx}n_1=0\\ \tau_{xy}l_1+(\sigma_y-\sigma_1)m_1+\tau_{zy}n_1=0\\ \tau_{xz}l_1+\tau_{yz}m_1+(\sigma_z-\sigma_1)n_1=0\end{aligned}\right\} \tag{c}$$

$$\left.\begin{aligned}(\sigma_x-\sigma_2)l_2+\tau_{yx}m_2+\tau_{zx}n_2=0\\ \tau_{xy}l_2+(\sigma_y-\sigma_2)m_2+\tau_{zy}n_2=0\\ \tau_{xz}l_2+\tau_{yz}m_2+(\sigma_z-\sigma_2)n_2=0\end{aligned}\right\} \tag{d}$$

$$\left.\begin{aligned}(\sigma_x-\sigma_3)l_3+\tau_{yx}m_3+\tau_{zx}n_3=0\\ \tau_{xy}l_3+(\sigma_y-\sigma_3)m_3+\tau_{zy}n_3=0\\ \tau_{xz}l_3+\tau_{yz}m_3+(\sigma_z-\sigma_3)n_3=0\end{aligned}\right\} \tag{e}$$

分别把式(c)的第一、第二、第三式乘以 l_2,m_2,n_2，而式(d)的第一、第二、第三式乘以 $(-l_1),(-m_1),(-n_1)$，然后，将六个式子相加，得

$$(\sigma_1-\sigma_2)(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2)=0 \tag{f}$$

同理

$$(\sigma_1-\sigma_3)(l_1l_3+m_1m_3+n_1n_3)=0 \tag{g}$$

$$(\sigma_2-\sigma_3)(l_2l_3+m_2m_3+n_2n_3)=0 \tag{h}$$

由关系式(*f*)，(*g*)和(*h*)可以看出，如 $\sigma_1\neq\sigma_2\neq\sigma_3$，则有

$$\left.\begin{aligned} l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 &= 0 \\ l_1 l_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3 &= 0 \\ l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{i}$$

这说明三个主方向是互相垂直的。如 $\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$，则有

$$l_1 l_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3 = 0$$

$$l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 = 0$$

而

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$$

可以等于零，也可以不等于零。这说明 σ_3 的方向同时与 σ_1 和 σ_2 的方向垂直，而 σ_1 与 σ_2 的方向之间可以垂直，也可以不垂直。也就是说，与 σ_3 垂直的方向都是主方向。如 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$，则

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2, l_1 l_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3, l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3$$

三者可以是零，也可以不是零，这说明 3 个主方向可以互相垂直，也可以不垂直，也就是说，任何方向都是主方向。这样，完全证明了上述的论断。

还可以证明，在通过同一点的所有微分面上的正应力中，最大的和最小的是主应力。

* §2-7 应力二次曲面

前面讲过，如已知物体内某一点在给定坐标系下的 9 个应力分量，则可以通过式(2-4)求出过该点的任一微分面上的应力。现在我们要用几何作图法来解决这样的问题。

为方便起见，把所要考虑的 M 点作为坐标原点。过该点作一微分面，并沿该微分面的外法线 $\boldsymbol{v}$ 作一矢量 $\boldsymbol{p}$，其长度 p 先不加确定。这矢量末端的坐标是

$$\xi = pl, \quad \eta = pm, \quad \zeta = pn \tag{a}$$

这里的 l, m, n 表示微分面外法线的方向余弦。该微分面上的正应力为

$$\sigma_v = \boldsymbol{f}_v \cdot \boldsymbol{v} = f_{vx} l + f_{vy} m + f_{vz} n$$

将式(2-4)代入，上式变为

$$\sigma_v = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{xz} ln + 2\tau_{xy} lm$$

再从式(a)求出 l, m, n 后代入上式，得

$$\sigma_x \xi^2 + \sigma_y \eta^2 + \sigma_z \zeta^2 + 2\tau_{yz} \eta\zeta + 2\tau_{xz} \xi\zeta + 2\tau_{xy} \xi\eta = p^2 \sigma_v \tag{b}$$

我们利用长度 p 的任意性选择矢量 $\boldsymbol{p}$，使 $p^2 \sigma_v = \pm c^2$，其中，c 为任意选定的不为零的常数。c^2 前的正负号按下述原则决定：如 σ_v 为拉应力，则取“+”号，如 σ_v 为压应力，则取“-”号。于是，

$$\sigma_v = \pm \frac{c^2}{p^2} \tag{2-14}$$

引进记号

$$\Phi(\xi,\eta,\zeta) = \sigma_x\xi^2 + \sigma_y\eta^2 + \sigma_z\zeta^2 + 2\tau_{yz}\eta\zeta + 2\tau_{xz}\xi\zeta + 2\tau_{xy}\xi\eta \tag{2-15}$$

就可将式(b)写成

$$\Phi(\xi,\eta,\zeta) = \pm c^2 \tag{2-16}$$

由于这里的 $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\cdots,\tau_{xy}$ 为常数，所以式(2-16)表示一个中心在坐标原点的二次曲面，称为**应力二次曲面**。这个曲面可能是椭球面，也可能是单叶双曲面和双叶双曲面，矢量 $\boldsymbol{p}$ 的末端在此曲面上。

为便于论述起见，假定对于选定的 $\pm c^2$，此曲面已经画出，而且是一个单叶双曲面，图 2-11 表示它和一主面(对称面)的截线，并假定所考虑的微分面的外法线就在这个平面内。在 M 点选定所要考虑的微分面以后，引其外法线交曲面于 R，则矢量 $\overrightarrow{MR}$ 之长度即等于 p，由式(2-14)可求得 σ_v，它在图上以矢量 $\overrightarrow{MQ}$ 表示。

现在，我们进一步求出这微分面上的总应力 f_v，为此，先求出总应力的方向。求下列偏导数，并注意利用本节的式(a)和式(2-4)，于是有

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} &= 2(\sigma_x\xi + \tau_{xy}\eta + \tau_{xz}\zeta)\\
&= 2p(\sigma_x l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n) = 2pf_{vx}\\
\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} &= 2pf_{vy}\\
\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta} &= 2pf_{vz}
\end{aligned}\right\} \tag{c}$$

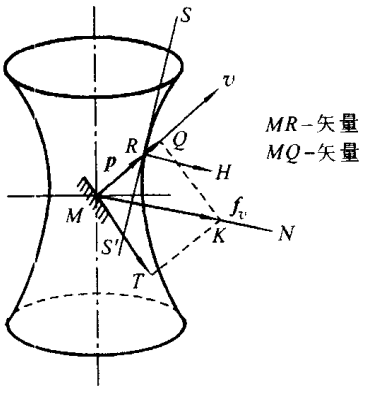


图 2-11

由微分几何知道，这些偏导数和曲面的法线 RH 的 3 个方向余弦成正比，因此，关系式(c)表示，曲面的法线的 3 个方向余弦与微分面上的总应力在三个坐标方

向的分量 f_{vx}, f_{vy}, f_{vz} 成正比。由此可见，微分面上的总应力 $\boldsymbol{f}_v$ 垂直于曲面在点 R 的切平面 SS'。

知道了总应力 $\boldsymbol{f}_v$ 的方向，就不难从图上表示出总应力。为此，从 M 点出发作 SS' 的垂直线 MN，再过 Q 点作 MQ 的垂直线，使之交 MN 于 K，则得 $\boldsymbol{f}_v = \overrightarrow{MK}$。另外，不难看出，图中的 MT 表示切应力。这样，根据应力二次曲面，可以用几何方法确定物体内任何一点的应力状态。

特别地，当微分面的法线 $\boldsymbol{v}$ 与应力二次曲面的某一主轴方向一致(即微分面与某一主轴垂直)时，由图极易看出，这微分面上只有正应力而无切应力，因此，它是主微分平面。基于这样的事实，我们可以断言：只要作出物体内某一点的应力二次曲面，那么，不论它是椭球面，还是单叶双曲面和双叶双曲面，它的主轴方向就是该点的应力主方向，而主应力的值，可通过在图上量得 $\boldsymbol{p}$ 的长度后由式(2-14)求得。

应力二次曲面的主轴，在一般情况下有 3 个，且相互垂直，只有当它为回转曲面的特殊情况时，才有无数个，其中一个与回转轴的方向一致，其余都垂直于这个轴。如果应力二次曲面为球面，则其每一个直径都是主轴。这三种情况，正好与上一节所证明的应力主方向可能发生的三种情况相对应。

最后，我们还要简单说明一下，究竟在什么情况下，应力二次曲面是椭球面，在什么情况下，它是单叶双曲面和双叶双曲面。为看起来明了起见，我们不妨转动坐标轴，使方程(2-16)中含坐标乘积的各交义项在新坐标系中全部消失，这时，坐标轴与应力二次曲面的主轴相重合，也就是与应力主方向一致。如果用 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 代表 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 在新坐标中的值，于是二次曲面的方程变为

$$\sigma_1 \xi^2 + \sigma_2 \eta^2 + \sigma_3 \zeta^2 = \pm c^2 \tag{d}$$

这个曲面的形状根据主应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 的正负号而定，考虑以下两种情况：

(1) 3 个主应力的符号相同。先设 $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, \sigma_3 > 0$，即三个主应力都是拉应力，这时，式(2-14)的右边应取正号，方程(d)改写为

$$\frac{\xi^2}{\left(\frac{c^2}{\sigma_1}\right)} + \frac{\eta^2}{\left(\frac{c^2}{\sigma_2}\right)} + \frac{\zeta^2}{\left(\frac{c^2}{\sigma_3}\right)} = 1 \tag{e}$$

这是椭球面的方程。由式(2-14)的

$$\sigma_v = +\frac{c^2}{p} > 0$$

可知，过所考察点的各微分面上受拉应力作用。如果 $\sigma_1 < 0, \sigma_2 < 0, \sigma_3 < 0$，即 3 个主应力均为压应力，方程(e)仍为椭球面，但由式

$$\sigma_v = -\frac{c^2}{p} < 0$$

可知，过所考察点的各微分面上受压应力作用。

(2) 3 个主应力符号不同。设 $\sigma_1>0,\sigma_2>0,\sigma_3<0$，则方程(d)必须写成两个形式：

$$\sigma_1\xi^2+\sigma_2\eta^2-|\sigma_3|\zeta^2=+c^2 \tag{f}$$

$$\sigma_1\xi^2+\sigma_2\eta^2-|\sigma_3|\zeta^2=-c^2 \tag{g}$$

方程(f)给出单叶双曲面，方程(g)给出双叶双曲面。两个曲面被渐近锥面

$$\sigma_1\xi^2+\sigma_2\eta^2-|\sigma_3|\zeta^2=0$$

所分开，在图 2－12 中，曲面(f)记作 $+c^2$，曲面(g)记作 $-c^2$。

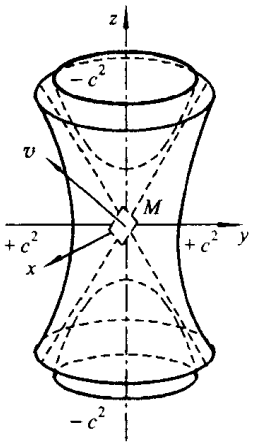


图 2－12

如果表示微分面上的正应力的矢端点是在单叶双曲面($+c^2$)上，则正应力取正值，是拉应力；如果矢端点在双叶双曲面($-c^2$)上，则正应力取负值，是压应力。

如果微分面的法线与渐近锥面的母线的方向相同，则矢量的长度变为无穷，根据式(2－14)，$\sigma_v=0$，表明对应的微分面上仅有切应力。

如果 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 中有一个等于零，则应力曲面退化为柱面，应力只和两个坐标有关。如果 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 中有两个等于零，则应力曲面退化为两个平面。

§2－8　最大切应力

现在我们要寻求过物体内某一点 M 的这样一个微分面，在这个微分面上，切应力达最大值。为简单起见，仍将坐标原点放在 M 点，且坐标轴与该点的 3 个主方向重合(图 2－13)，则过该点并与坐标倾斜的微分面上的应力为

$$f_{vx}=\sigma_1 l,\quad f_{vy}=\sigma_2 m,\quad f_{vz}=\sigma_3 n$$

其中 l,m,n 为这个微分面的外法线的方向余弦。如果以 f_v 表示此微分面上应力矢量的大小，σ_v,τ_v 分别表示此微分面上的正应力与切应力，则有

$$f_v=\sqrt{f_{vx}^2+f_{vy}^2+f_{vz}^2}=\sqrt{\sigma_1^2l^2+\sigma_2^2m^2+\sigma_3^2n^2}$$

$$\sigma_v=f_{vx}l+f_{vy}m+f_{vz}n=\sigma_1l^2+\sigma_2m^2+\sigma_3n^2$$

而

$$\begin{aligned}\tau_v^2&=f_v^2-\sigma_v^2\\&=\sigma_1^2l^2+\sigma_2^2m^2+\sigma_3^2n^2-(\sigma_1l^2+\sigma_2m^2+\sigma_3n^2)^2\end{aligned}\tag{2－17}$$

现在要问：当 l,m,n 取何值时，τ_v^2 取极值？从式(2－17)和关系式

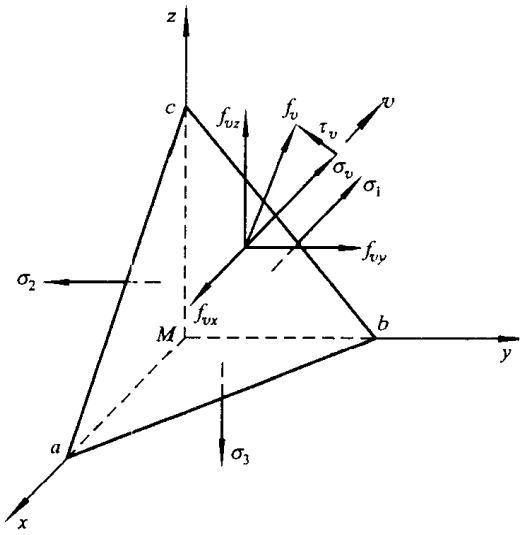


图 2-13

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \tag{2-18}$$

中消去方向余弦中的一个，譬如先消去 n，得到

$$\tau_v^2 = (\sigma_1^2 - \sigma_3^2)l^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2)m^2 + \sigma_3^2 - [(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 + \sigma_3]^2 \tag{a}$$

为了求得极值，令 $\frac{\partial}{\partial l}(\tau_v^2) = 0$，$\frac{\partial}{\partial m}(\tau_v^2) = 0$，于是有

$$\left.\begin{aligned}(\sigma_1^2 - \sigma_3^2)l - 2[(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 + \sigma_3](\sigma_1 - \sigma_3)l = 0\\(\sigma_2^2 - \sigma_3^2)m - 2[(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 + \sigma_3](\sigma_2 - \sigma_3)m = 0\end{aligned}\right\} \tag{b}$$

分三种情况来考虑：

(1) 如 $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$，将式(b)的第一式除以 $(\sigma_1 - \sigma_3)$，第二式除以 $(\sigma_2 - \sigma_3)$，并加以整理，得

$$\left.\begin{aligned}\{(\sigma_1 - \sigma_3) - 2[(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2]\}l = 0\\\{(\sigma_2 - \sigma_3) - 2[(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2]\}m = 0\end{aligned}\right\} \tag{c}$$

方程(c)有 3 组解答：第一组是 $l = 0, m = 0$；第二组是 $l = 0, m = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$；第三组是 $l = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, m = 0$。有了 l 和 m，就可以从式(2-18)求得相应的 n，再由式(2-17)求相应的 τ_v^2。

同理可从式(2-17)和(2-18)中分别消去 l 和 m，再重复以上完全同样的做法，由于其中有几个解是重复的，故总共得到 6 组解答，列表如下：

l	0	0	± 1	0	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$
m	0	± 1	0	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$
n	± 1	0	0	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
τ_{ν}	0	0	0	$\pm\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}$	$\pm\frac{\sigma_3-\sigma_1}{2}$	$\pm\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$

表中的前三组解答对应于主平面，而后三组解答对应于经过主轴之一而平分其他两主轴夹角的平面(图 2－14)，其上的切应力，称为**主切应力**，其中包括最大和最小的切应力。它们是

$$\tau_1=\pm\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}$$

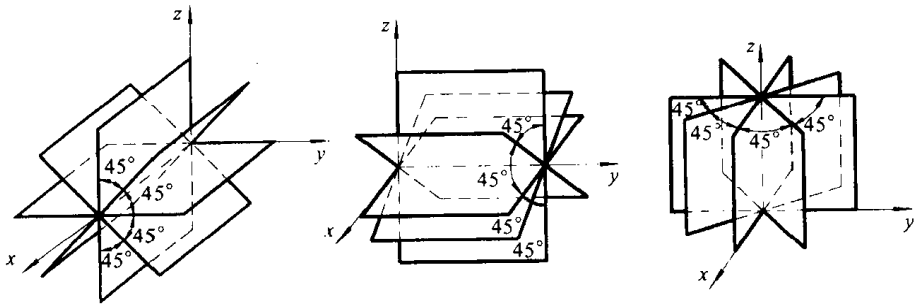
$$\tau_2=\pm\frac{\sigma_3-\sigma_1}{2}$$

$$\tau_3=\pm\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$$

如 $\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3$，则最大切应力为

$$\tau_{\max}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2} \tag{2-19}$$

它作用在过 Oy 轴而平分 Ox 轴和 Oz 轴的夹角的微分平面上(图 2－14b)。



(a) $l=0$，$m=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$，$n=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

(b) $l=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$，$m=0$，$n=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

(c) $l=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$，$m=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$，$n=0$

图 2－14

(2) 如两个主应力相等，例如 $\sigma_1=\sigma_3>\sigma_2$，则式(b)的第一式已满足，从它的第二式，有

$$\{(\sigma_2-\sigma_3)-2[(\sigma_2-\sigma_3)m^2]\}m=0$$

由此得

$$m=0 \quad 或 \quad m=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

将 $m=0$ 和 $\sigma_1=\sigma_3$ 代入式(a),得 $\tau_v=0$,这不是极值。将 $m^2=\frac{1}{2}$,$\sigma_1=\sigma_3$ 代入式(a),得

$$\tau_v=\tau_3=\pm\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2} \tag{2-20}$$

这是最大切应力,其作用面可如下求得:把 $m^2=\frac{1}{2}$代入式(2-18),得

$$l^2+n^2=\frac{1}{2}$$

其中的 l 可以由 0 变到 $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$,而 n 可以由 $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$变到 0。因此,这个最大切应力发生在与一个圆锥面相切的微分面上,如图 2-15 所示,这圆锥面与 y 轴成 45°角。

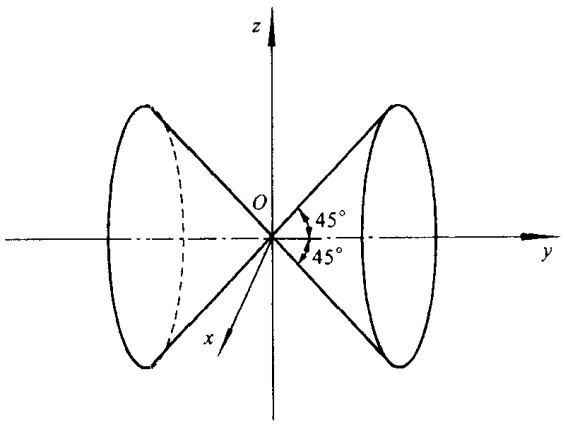


图 2-15

(3) 如 $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$,从式(a)可知,过该点的任何微分面上都没有切应力。

思考题与习题

2-1 什么叫做一点的应力状态?如何表示一点的应力状态?

2-2 试叙述平衡微分方程和应力边界条件的物理意义。满足平衡微分方程和应力边界条件的应力是否是实际存在的应力?为什么?

2-3 试论证对于弹性动力学问题,动力边界条件为

$$\bar{f}_x=\sigma_x l+\tau_{yx}m+\tau_{zx}n$$

$$\bar{f}_y=\tau_{xy}l+\sigma_y m+\tau_{zy}n$$

$$f_z = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n$$

这里的应力分量和面力与时间有关。

2-4 如何理解"转轴后同一点的各应力分量都改变了,但它们作为一个整体所描绘的一点的应力状态是不变的"?

2-5 什么叫做应力张量的不变量?其不变的含义是什么?为什么不变?

2-6 已知物体内一点的6个应力分量为

$$\sigma_x = 500\times10^5\ \text{Pa},\quad \sigma_y = 0,\quad \sigma_z = -300\times10^5\ \text{Pa},$$

$$\tau_{yz} = -750\times10^5\ \text{Pa},\quad \tau_{xz} = 800\times10^5\ \text{Pa},\quad \tau_{xy} = 500\times10^5\ \text{Pa}$$

试求法线方向余弦为 $l=\frac{1}{2}, m=\frac{1}{2}, n=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 的微分面上的应力:总应力 f_v,正应力 σ_v 和切应力 τ_v。

2-7 已知6个应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}$ 中,$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$,试求应力张量不变量并导出主应力公式。

2-8 已知一点的6个应力分量为

$$\sigma_x = 1\ 000\times10^5\ \text{Pa},\quad \sigma_y = 500\times10^5\ \text{Pa}$$

$$\sigma_z = -100\times10^5\ \text{Pa},\quad \tau_{yz} = 300\times10^5\ \text{Pa}$$

$$\tau_{xz} = -200\times10^5\ \text{Pa},\quad \tau_{xy} = 400\times10^5\ \text{Pa}$$

试求该点的主应力和应力主方向,并求出主切应力。

2-9 证明:在通过同一点的所有微分面上的正应力中,最大和最小的是主应力。

2-10 设物体内某点的主应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 及其主方向为已知,将坐标轴与应力主方向取得一致。试求

$$l = m = n = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

的微分面上的应力。

2-11 一个任意形状的物体,其表面受均匀压力 p 作用,如果不计其体力,试验证应力分量

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p,\quad \tau_{yz} = \tau_{xz} = \tau_{xy} = 0$$

是否满足平衡微分方程和该问题的应力边界条件。

2-12 基础的悬臂伸出部分(图2-16),具有三角形形状,处于强度为 q 的均匀压力作用下,已求出应力分量为

$$\sigma_x = A\left(-\arctan\frac{y}{x} - \frac{xy}{x^2+y^2} + C\right)$$

$$\sigma_y = A\left(-\arctan\frac{y}{x} + \frac{xy}{x^2+y^2} + B\right)$$

$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0,\quad \tau_{xy} = -A\frac{y^2}{x^2+y^2}$$

试根据应力边界条件定出常数 A, B 和 C。

2-13 图2-17表示一三角形水坝,已求得应力分量

$$\sigma_x = Ax + By,\quad \sigma_y = Cx + Dy,\quad \sigma_z = 0$$

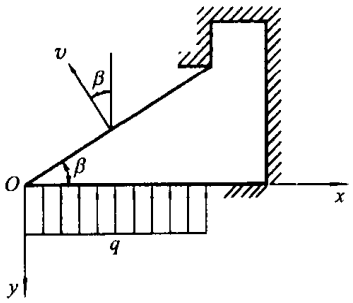


图 2－16

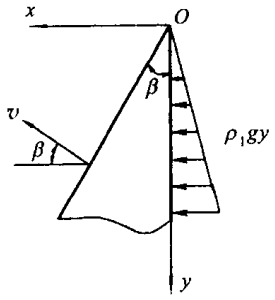


图 2－17

$$\tau_{yz}=\tau_{zx}=0,\quad \tau_{xy}=-Dx-Ay-\rho gx$$

ρ 和 ρ_1 分别表示坝身和液体的密度。试根据应力边界条件定出常数 A,B,C,D。

第三章　应变状态理论

在外力(或温度变化)作用下,物体内部各部分之间要产生相对运动。物体的这种运动形态,称为变形。"应变状态理论"是专门分析研究物体的变形的,它和"应力状态理论"一样,都是弹性力学的基本组成部分之一。它的任务有两个:(1) 分析一点的应变状态;(2) 建立几何方程和应变协调方程。由于这里我们只是从几何学观点出发分析研究物体的变形本身,而并不涉及到产生变形的原因和物体的物理性能,所以本章所得的结果对一切连续介质都是适用的。

§3-1　位移分量和应变分量　两者的关系

设原来占据空间某一位置 D 的物体,在外力或温度变化的作用下占据空间另一位置 D_1(图 3-1)。在这过程中,物体可能同时发生两种变化:一种是位置的变化(这部分相当于刚体运动),另一种是形状的变化。

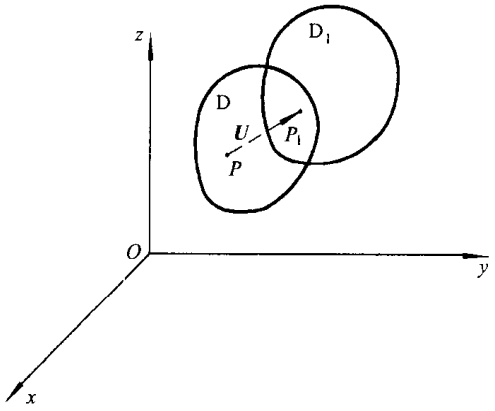


图 3-1

由物体的连续性假设,要求在变形前连续的物体变形以后仍保持为连续体.这一物理的要求,反映在数学上,则要求区域 D 内每一点,连续变化到区域 D 内的相应点,而且两者成一一对应的关系。具体地说,如果 P 点为 D 内的任意一点,在物体变形后,它经过一个位移而变到 D_1 中的一点 P_1;若分别用 (x, y, z) 和 (x_1, y_1, z_1) 表示 P 点和 P_1 点的坐标,则根据上述要求,这里的 x_1, y_1, z_1 必须是 x, y, z 的单值连续函数。现在我们把 P_1 点和 P 点的 3 个坐标对应地

相减，可得 P 点的位移矢量 $\overrightarrow{PP_1}=\boldsymbol{U}$ 在 3 个坐标轴上的分量，这 3 个分量简称为**位移分量**。如用 u,v,w 表示位移分量，则有

$$\left.\begin{aligned} u&=x_1(x,y,z)-x=u(x,y,z)\\ v&=y_1(x,y,z)-y=v(x,y,z)\\ w&=z_1(x,y,z)-z=w(x,y,z)\end{aligned}\right\}\tag{3-1}$$

显然，这里的 u,v,w 也必须是 x,y,z 的单值连续函数。为了以后运算的需要，我们还假定它们具有连续到三阶的偏导数。

为了进一步研究物体的变形情况，我们假想把物体分割成无数个微分平行六面体，使它们的 6 个面分别与 3 个坐标平面平行。显然，如果其中每一个微分平行六面体的变形为已知，则整个物体的变形情况就知道了。暂不考虑变形后每一个微分平行六面体的方位，则它的变形可归结为棱边的伸长（或缩短）与棱边间夹角的变化。以后我们分别用**正应变**（又称伸长率）与**切应变**表示棱边的伸长与棱边间夹角的变化。

现在考虑其中任意一个微分平行六面体的变形，设其变形前的三条棱边为 MA,MB,MC，变形后分别变为 $M'A',M'B',M'C'$，（图 3-2）。如果我们分别

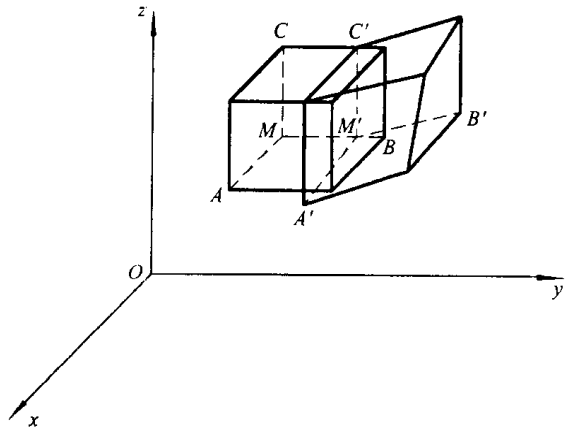


图 3-2

用 $\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z$ 表示棱边 MA，MB 和 MC 的伸长率——正应变，用 $\gamma_{yz},\gamma_{zx},\gamma_{xy}$ 表示 MC 与 MB 之间、MA 与 MC 之间和 MA 与 MB 之间夹角的变化——切应变，则有

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x&=\frac{M'A'-MA}{MA},\quad \gamma_{yz}=\frac{\pi}{2}-\angle C'M'B'\\ \varepsilon_y&=\frac{M'B'-MB}{MB},\quad \gamma_{zx}=\frac{\pi}{2}-\angle C'M'A'\\ \varepsilon_z&=\frac{M'C'-MC}{MC},\quad \gamma_{xy}=\frac{\pi}{2}-\angle A'M'B'\end{aligned}\right\}\tag{3-2}$$

这 6 个分量中的每一个都称为**应变分量**。

下面要建立应变分量和位移分量之间的关系。为便于计算，我们先将问题作些简化。容易想象，在物体变形之前与坐标轴平行的微分线段 MA，MB，MC，在物体变形时，一般都要各自旋转某一角度。但由于我们考虑的是小变形，如果我们假设在物体内各点的位移中，不包括纯属物体位置变化（即刚体运动）的那部分，也就是说，物体内各点的位移全由它自己的大小和形状的变化引起的，则物体内上述微分线段各自的转角是极其微小的。因此，在以后的推导中，可以用 $M'A'$，$M'B'$ 和 $M'C'$ 分别在 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴上的投影来代替它们的实际长度，用 $M'B'$ 和 $M'C'$，$M'C'$ 和 $M'A'$ 以及 $M'A'$ 和 $M'B'$ 分别在 Oyz 平面、Oxz 平面以及 Oxy 平面上投影间的夹角来代替它们实际的夹角。这样做，显然不会导致明显的误差，而却使问题大大简化了一步。

下面，我们将此微分平行六面体分别投影到 3 个坐标平面上（图 3－3），根

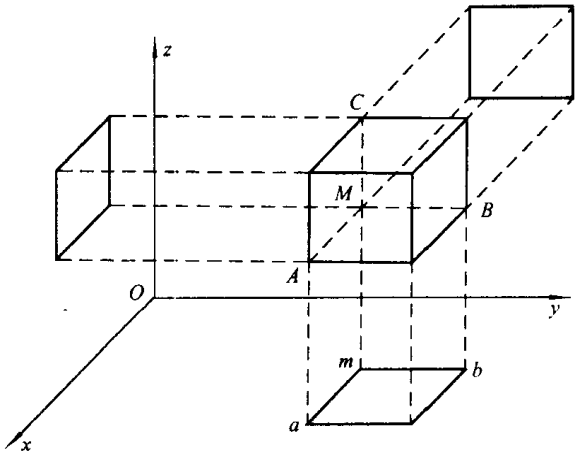


图 3－3

据上述理由，只要考虑它们的变形就可以了。譬如考虑在 Oxy 平面上投影部分的变形。我们用 ma，mb 表示 MA，MB 在 Oxy 平面上的投影，而 $m'a'$，$m'b'$ 表示变形后的 MA，MB（即 $M'A'$ 和 $M'B'$）在 Oxy 平面上的投影（图 3－4）。设微分平行六面体的三条棱边长度为 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}z$，M 点的坐标为 (x,y,z)，于是，如果用 $u(x,y,z)$，$v(x,y,z)$ 表示 M 点的位移矢量分别在 Ox 和 Oy 轴上的分量，则 A 点和 B 点的相应的位移分别为

$$u(x+\mathrm{d}x,y,z),v(x+\mathrm{d}x,y,z)$$

$$u(x,y+\mathrm{d}y,z),v(x,y+\mathrm{d}y,z)$$

按多元函数泰勒级数展开，略去二阶以上的无穷小量，则 A 点和 B 点的位移矢量在 Ox 和 Oy 轴上的分量可表示为

$$u+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x,\qquad v+\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x$$

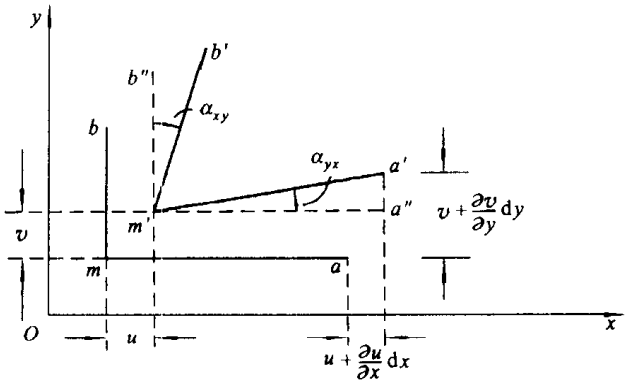


图 3-4

$$u+\frac{\partial u}{\partial y}dy, \qquad v+\frac{\partial v}{\partial y}dy$$

$m'a'$在Ox轴上的投影(等于$M'A'$在Ox轴上的投影)$m'a''$为

$$m'a''=dx+u+\frac{\partial u}{\partial x}dx-u=dx+\frac{\partial u}{\partial x}dx\approx M'A'$$

于是

$$\varepsilon_x=\frac{M'A'-MA}{MA}\approx\frac{m'a''-dx}{dx}$$

$$=\frac{dx+\frac{\partial u}{\partial x}dx-dx}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x} \tag{a}$$

同理

$$\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z} \tag{b}$$

这样,我们就得到了过物体内任意点M并分别与3个坐标轴平行的微分线段的伸长率——正应变。当ε_x,ε_y和ε_z大于零时,表示线段伸长,反之则表示缩短。

令α_{yx}表示与Ox轴平行的微分线段ma向Oy轴转过的角度,α_{xy}表示与Oy轴平行的微分线段mb向Ox轴转过的角度(图3-4),则切应变分量

$$\gamma_{xy}=\frac{\pi}{2}-\angle B'M'A'\approx\frac{\pi}{2}-\angle b'm'a'=\alpha_{xy}+\alpha_{yx} \tag{c}$$

这里

$$\alpha_{yx}\approx\tan\alpha_{yx}=\frac{a''a'}{m'a''}=\frac{v+\frac{\partial v}{\partial x}dx-v}{dx+\frac{\partial u}{\partial x}dx}=\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1+\frac{\partial u}{\partial x}}$$

因在小变形下$\frac{\partial u}{\partial x}$与1相比是一小量,可以略去不计,于是

$$\alpha_{yx}=\frac{\partial v}{\partial x} \tag{d}$$

同理

$$\alpha_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y} \tag{e}$$

α_{yx}，α_{xy}可正也可负，其正负号有如下的几何意义：例如，当α_{yx}大于零时，表示v随x而增加，即表明与Ox轴平行的微分线段ma从Ox轴的正向朝Oy轴的正向旋转；同理，α_{xy}大于零表示与Oy轴平行的微分线段mb从Oy轴的正向朝Ox轴的正向旋转；等等。将式(d)和(e)代入式(c)，得

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}$$

顺次轮换x，y，z和u，v，w，则可得其他两个切应变分量

$$\gamma_{xz}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x},\quad \gamma_{yz}=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}$$

当γ_{xz}，γ_{yz}和γ_{xy}大于零时，表示角度缩小，反之则表示角度扩大。

综上所述，我们得到了如下6个关系式：

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{\partial u}{\partial x},\ \gamma_{yz}=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\\ \varepsilon_y&=\frac{\partial v}{\partial y},\ \gamma_{xz}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\\ \varepsilon_z&=\frac{\partial w}{\partial z},\ \gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}\right\} \tag{3-3}$$

方程组(3-3)称为**几何方程**，又称**柯西方程**，它给出了6个应变分量与3个位移分量之间的关系。如果已知位移分量，则不难通过式(3-3)求偏导数得到应变分量。反之，如果给出应变分量求位移分量，则问题比较复杂，§3-7中将对这一问题进行专门的研究。

如果对式(3-3)中后一列的3个式子两边同除2，并令

$$\frac{1}{2}\gamma_{yz}=\varepsilon_{yz},\qquad \frac{1}{2}\gamma_{xz}=\varepsilon_{xz},\qquad \frac{1}{2}\gamma_{xy}=\varepsilon_{xy} \tag{3-4}$$

则它又可表示为

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \tag{3-3'}$$

§3-2 相对位移张量 转动分量

由式(3-3)可知，6个应变分量是通过位移分量的9个一阶偏导数，即

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{3-5}$$

表示的，这9个量组成的集合，称为**相对位移张量**。对于单连通物体①，若已知其相对位移张量，并假设位移分量具有二阶或二阶以上的连续偏导数，则可以通过积分求得连续单值的位移分量。这表明，相对位移张量完全确定了物体的变形情况。

引入

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{U} \tag{3-6}$$

其中 $\nabla = \boldsymbol{e}_1 \dfrac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_2 \dfrac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_3 \dfrac{\partial}{\partial z}$ 为那勃勒算子 $\boldsymbol{U}$ 是位移矢量，不难算得 $\boldsymbol{\omega}$ 的3个分量为

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \omega_y &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \omega_z &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{3-6'}$$

这里的 $\boldsymbol{\omega}$ 称为**转动矢量**，而 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 称为**转动分量**。

利用式(3-3)和式(3-6)′，可将相对位移张量分解为两个张量：

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \dfrac{1}{2}\gamma_{xy} & \dfrac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \dfrac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \dfrac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \dfrac{1}{2}\gamma_{xz} & \dfrac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{2}\omega_z & \dfrac{1}{2}\omega \\ \dfrac{1}{2}\omega_z & 0 & -\dfrac{1}{2}\omega_x \\ -\dfrac{1}{2}\omega_y & \dfrac{1}{2}\omega_x & 0 \end{pmatrix} \tag{3-7}$$

式(3-7)等号右边的第一项为对称张量，表示微元体的纯变形，称为**应变张量**，第二项为反对称张量，下面要论证，它表示微元体的刚性转动，即表示物体变形后微元体的方位变化。

试在变形前的物体内任取微分线段 AB，点 A, B 的坐标分别为 (x, y, z) 和 $(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z)$，在物体变形后，点 A 和 B 分别变为点 A' 和 B'。若用

① 单连通物体是指无孔洞的物体。

$u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$, $w(x,y,z)$表示 A 点的位移矢量$\overrightarrow{AA'}$的 3 个分量，则 B 点的位移矢量$\overrightarrow{BB'}$的 3 个分量为

$$\left.\begin{aligned} u' &= u(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z) \\ v' &= v(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z) \\ w' &= w(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z) \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

按多元函数泰勒级数展开，并略去二阶以上的项，得到

$$\left.\begin{aligned} u' &= u + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z \\ v' &= v + \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial v}{\partial z}\mathrm{d}z \\ w' &= w + \frac{\partial w}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial w}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial w}{\partial z}\mathrm{d}z \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

利用式(3－3)和式(3－6)′，可将式(b)凑成如下的形式：

$$\left.\begin{aligned} u' &= u + \varepsilon_x\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\gamma_{xz}\mathrm{d}z - \frac{1}{2}\omega_z\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\omega_y\mathrm{d}z \\ v' &= v + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\mathrm{d}x + \varepsilon_y\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\gamma_{yz}\mathrm{d}z + \frac{1}{2}\omega_z\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\omega_x\mathrm{d}z \\ w' &= w + \frac{1}{2}\gamma_{xz}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\gamma_{yz}\mathrm{d}y + \varepsilon_z\mathrm{d}z - \frac{1}{2}\omega_y\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\omega_x\mathrm{d}y \end{aligned}\right\} \tag{3-8}$$

也可表示为

$$\begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\omega_z & \frac{1}{2}\omega_y \\ \frac{1}{2}\omega_z & 0 & -\frac{1}{2}\omega_x \\ -\frac{1}{2}\omega_y & \frac{1}{2}\omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{Bmatrix} \tag{3-8}'$$

现在说明式(3－8)中各项的物理意义。为此，先假想 A 点的无限小邻域没有变形，亦即它为绝对刚性的。于是，由刚体运动学可知，与 A 点无限邻近的一点 B 的位移应由两部分组成：其一，随同基点 A 的平移位移，其二，微元体绕基点 A 转动时在 B 点所产生的位移。因此，若令式(3－8)中的应变分量为零，则 u, v, w 即表示随基点 A 的平移位移，而 $-\frac{1}{2}\omega_z\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\omega_y\mathrm{d}z$, $\frac{1}{2}\omega_z\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\omega_x\mathrm{d}z$, $-\frac{1}{2}\omega_y\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\omega_x\mathrm{d}y$ 表示微元体绕 A 点转动时在 B 点所产生的位移。由此可见，$\frac{1}{2}\omega_x$, $\frac{1}{2}\omega_y$, $\frac{1}{2}\omega_z$ 表示微元体角位移矢量的 3 个分量。一般说，由于

微元体是要变形的，所以 B 点的位移还必须包括由于变形所产生的那一部分，式(3-8)中含应变分量的项，就代表这部分位移。

总起来说，与 A 点无限邻近的一点 B 的位移由三部分组成：

(1) 随同 A 点的平移位移，如图 3-5 中的 BB'' 所示；

(2) 绕 A 点刚性转动在 B 点所产生的位移，如图 3-5 中的 $B''B'''$ 所示；

(3) 由 A 点邻近的微元体的变形在 B 点引起的位移，如图 3-5 中的 $B'''B'$ 所示。

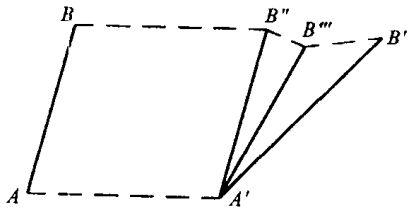


图 3-5

必须指出，ω_x，ω_y，ω_z 是坐标的函数，表示体内微元体的刚性转动，但对整个物体来说，是属于变形的一部分，这 3 个分量和 6 个应变分量合在一起，才全面地反映了物体的变形。

§3-3 转轴时应变分量的变换

设在坐标系 $Oxyz$ 下，物体内某一点的 6 个应变分量为 ε_x，ε_y，ε_z，γ_{yz}，γ_{zx}，γ_{xy}。现使坐标系旋转某一角度，得新坐标系 $Ox'y'z'$，设新坐标系下的应变分量为 $\varepsilon_{x'}$，$\varepsilon_{y'}$，$\varepsilon_{z'}$，$\gamma_{y'z'}$，$\gamma_{x'z'}$，$\gamma_{x'y'}$，建立新老坐标系下应变分量之间的变换关系。

设新老坐标之间有如下的关系：

	x	y	z
x'	l_1	m_1	n_1
y'	l_2	m_2	n_2
z'	l_3	m_3	n_3

其中 l_i，m_i，n_i $(i=1,2,3)$ 表示三个新坐标轴对老坐标轴的方向余弦。

先建立转轴时位移分量的变换关系。设位移矢量 $\boldsymbol{U}$ 在老坐标系中的 3 个分量为 u，v，w，而在新坐标系中的 3 个分量为 u'，v'，w'，于是有

$$\left.\begin{aligned} u' &= \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{e}'_1 = ul_1 + vm_1 + wn_1 \\ v' &= \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{e}'_2 = ul_2 + vm_2 + wn_2 \\ w' &= \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{e}'_3 = ul_3 + vm_3 + wn_3 \end{aligned}\right\} \tag{3-9}$$

其中 e'_1, e'_2, e'_3，为3个新坐标轴的单位矢量。

利用方向导数公式

$$\frac{\partial}{\partial s}(\quad)=\cos(s,x)\frac{\partial}{\partial x}(\quad)+\cos(s,y)\frac{\partial}{\partial y}(\quad)+\cos(s,z)\frac{\partial}{\partial z}(\quad)$$

$$=(l\frac{\partial}{\partial x}+m\frac{\partial}{\partial y}+n\frac{\partial}{\partial z})(\quad)$$

于是新坐标系中的应变分量为

$$\varepsilon_{x'}=\frac{\partial u'}{\partial x'}$$

$$=(l_1\frac{\partial}{\partial x}+m_1\frac{\partial}{\partial y}+n_1\frac{\partial}{\partial z})(ul_1+vm_1+wn_1)$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}l_1^2+\frac{\partial v}{\partial y}m_1^2+\frac{\partial w}{\partial z}n_1^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)m_1n_1+\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)l_1n_1+$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)l_1m_1$$

$$\gamma_{x'y'}=\frac{\partial v'}{\partial x'}+\frac{\partial u'}{\partial y'}$$

$$=\left(l_1\frac{\partial}{\partial x}+m_1\frac{\partial}{\partial y}+n_1\frac{\partial}{\partial z}\right)(ul_2+vm_2+wn_2)+$$

$$\left(l_2\frac{\partial}{\partial x}+m_2\frac{\partial}{\partial y}+n_2\frac{\partial}{\partial z}\right)(ul_1+vm_1+wn_1)$$

$$=2\left(\frac{\partial u}{\partial x}l_1l_2+\frac{\partial v}{\partial y}m_1m_2+\frac{\partial w}{\partial z}n_1n_2\right)+\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)(m_1n_2+m_2n_1)+$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)(l_1n_2+l_2n_1)+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)(l_1m_2+l_2m_1)$$

同理，可求得其余的应变分量。利用几何方程(3－3)，最后得如下的变换公式：

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{x'}&=\varepsilon_xl_1^2+\varepsilon_ym_1^2+\varepsilon_zn_1^2+\gamma_{yz}m_1n_1+\gamma_{zx}l_1n_1+\gamma_{xy}l_1m_1\\
\varepsilon_{y'}&=\varepsilon_xl_2^2+\varepsilon_ym_2^2+\varepsilon_zn_2^2+\gamma_{yz}m_2n_2+\gamma_{zx}l_2n_2+\gamma_{xy}l_2m_2\\
\varepsilon_{z'}&=\varepsilon_xl_3^2+\varepsilon_ym_3^2+\varepsilon_zn_3^2+\gamma_{yz}m_3n_3+\gamma_{zx}l_3n_3+\gamma_{xy}l_3m_3\\
\gamma_{y'z'}&=2(\varepsilon_xl_2l_3+\varepsilon_ym_2m_3+\varepsilon_zn_2n_3)+\gamma_{yz}(m_2n_3+m_3n_2)+\\
&\quad\gamma_{zx}(l_2n_3+l_3n_2)+\gamma_{xy}(l_2m_3+l_3m_2)\\
\gamma_{x'z'}&=2(\varepsilon_xl_1l_3+\varepsilon_ym_1m_3+\varepsilon_zn_1n_3)+\gamma_{yz}(m_1n_3+m_3n_1)+\\
&\quad\gamma_{zx}(l_1n_3+l_3n_1)+\gamma_{xy}(l_1m_3+l_3m_1)\\
\gamma_{x'y'}&=2(\varepsilon_xl_1l_2+\varepsilon_ym_1m_2+\varepsilon_zn_1n_2)+\gamma_{yz}(m_1n_2+m_2n_1)+\\
&\quad\gamma_{zx}(l_1n_2+l_2n_1)+\gamma_{xy}(l_1m_2+l_2m_1)
\end{aligned}\right\}\quad(3-10)$$

与§2－4一样，仍以 n_{ij} 表示 $l_i, m_i, n_i\ (i=1,2,3)$ 等9个量，并注意到式(3－4)，则式(3－10)又可表示为

$$\varepsilon_{i'j'} = \varepsilon_{ij} n_{i'i} n_{j'j} \tag{3-10}'$$

可见6个应变分量组成的集合

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

与应力分量组成的集合一样，也服从二阶张量的变换规律。不难理解，虽然经转轴后各应变分量都分别地改变了，但它们作为一个“整体”所描绘的一点的变形状态是不变的。

采用上面同样的方法，还不难导出过物体内某一点沿任意方向微分线段的伸长率

$$\varepsilon_r = \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{yz} mn + \gamma_{xz} ln + \gamma_{xy} lm \tag{3-11}$$

这里，l，m，n 为该微分线段的方向余弦。

§3-4 主应变 应变张量不变量

既然物体内某一确定点的6个应变分量将随着坐标系的旋转而改变，这样就产生了一个问题：对任一确定的点，能否找到这样一个坐标系，在这个坐标系下，只有正应变分量，面所有的切应变分量为零。也就是说，过该点能否找到这样3个互相垂直的方向，使沿这3个方向的微分线段在物体变形后只是各自地改变了长度，而其夹角仍保持为直角。

先举一个简单的例子来说明。图3-6表示一个均匀直杆的简单拉伸，试考察杆内图示的小单元体 A 和 B 的变形情况。设小单元体 A 的方位是完全任意的，面小单元体 B 的一对表面垂直于杆的轴线。于是，可以明显地看到，在物体变形后，对小单元体 A 来说，不仅改变了各棱边的长度，而且改变了各棱边间的夹角；但对于小单元体 B 来说只是改变了各棱边的长度，而各棱边之间仍保持垂直。

对复杂受力物体内的任一点，同样也可以找到3个互相垂直的方向，使沿这3个方向的微分线段在物体变形后仍保持垂直。今后，把具有这种性质的方向称为**应变主方向**，把这样方向的微分线段的伸长率，称为**主应变**。按定义，小单元体 B 的3条垂直棱边的方向就是应变主方向，它们的伸长率就是主应变。

需要指出，过物体内一点并沿该点应变主方向的3个互相垂直的微分线段，虽然在物体变形后仍保持垂直，但由于小单元体的刚性转动，一般说，它们已一

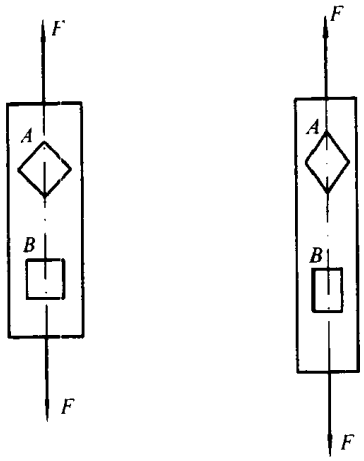


图 3-6

起转动了同一个角度(即等于小单元体刚性转动的角位移)。因此,一般说,在物体变形后,沿主方向的微分线段,已不和原来的微分线段平行(图 3-6 中小单元体 B 属特殊情况),不过,它们之间方向的偏离仅是由于小单元体的刚性转动引起的。注意到这一点以后,我们就不难导出主应变和应变主方向所满足的方程。

设方向(l,m,n)为物体内某一点 A 的应变主方向,过 A 点沿该方向作微分线段AB,令其长度为 r。若 A 点的坐标为(x,y,z),则 B 点的坐标为$(x+rl,y+rm,z+rn)$。在物体变形后,线段 AB 变为$A'B'$(图 3-7),令其长度为 r',方向为(l',m',n')。点 A'和B'的坐标分别为

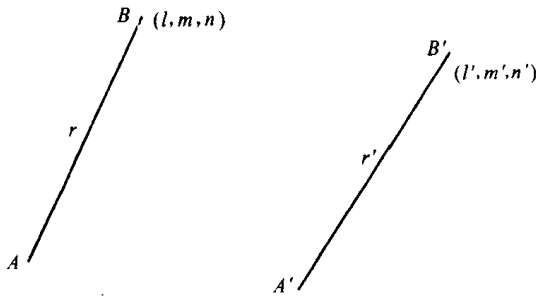


图 3-7

$$x+u,\quad y+v,\quad z+w \tag{a}$$

$$x+rl+u',\quad y+rm+v',\quad z+rn+w' \tag{b}$$

式(a)中的 u,v,w 为x,y,z 的函数,而式(b)中的 u',v',w'为

$$u'=u(x+rl,y+rm,z+rn)$$

$$v'=v(x+rl,y+rm,z+rn)$$

$$w'=w(x+rl,y+rm,z+rn)$$

注意到 rl,rm,rn 为微量,将以上三式按多元函数泰勒级数展开,略去二阶以上

的微量，于是有

$$\left.\begin{aligned} u' &= u + \frac{\partial u}{\partial x}rl + \frac{\partial u}{\partial y}rm + \frac{\partial u}{\partial z}rn \\ v' &= v + \frac{\partial v}{\partial x}rl + \frac{\partial v}{\partial y}rm + \frac{\partial v}{\partial z}rn \\ w' &= w + \frac{\partial w}{\partial x}rl + \frac{\partial w}{\partial y}rm + \frac{\partial w}{\partial z}rn \end{aligned}\right\} \tag{c}$$

为明了起见，我们引入矢量$\overrightarrow{A'B'}$，它的3个分量即为B'点的坐标分量与A'点坐标分量的差值，于是由式(a)，(b)和(c)，得到

$$\overrightarrow{A'B'} = \left[\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)rl + \frac{\partial u}{\partial y}rm + \frac{\partial u}{\partial z}rn, \frac{\partial v}{\partial x}rl + \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)rm + \frac{\partial v}{\partial z}rn, \frac{\partial w}{\partial x}rl + \frac{\partial w}{\partial y}rm + \left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)rn\right] \tag{d}$$

在式(d)等号两边同除$A'B'$线段的长度r'，则其等号左边变为单位矢量，而等号右边方括号内的3个分量，即分别为方向余弦l'，m'，n'。例如，

$$l' = \frac{1}{r'}\left[\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)rl + \frac{\partial u}{\partial y}rm + \frac{\partial u}{\partial z}rn\right]$$

设AB线段的伸长率(这里即为主应变)为ε，由定义，它应为

$$\varepsilon = \frac{r'-r}{r}$$

由此得

$$r' = (1+\varepsilon)r$$

将它代入上式，有

$$\begin{aligned} l' &= \frac{1}{1+\varepsilon}\left[\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)l + \frac{\partial u}{\partial y}m + \frac{\partial u}{\partial z}n\right] \\ &= \left[\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)l + \frac{\partial u}{\partial y}m + \frac{\partial u}{\partial z}n\right](1-\varepsilon+\varepsilon^2-\cdots) \end{aligned}$$

在小变形情况下，$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial z}$和$\varepsilon$均为小量，因此，在展开以后可略去其二次以上的项，从而得到如下的关系式(其他两式完全按同法推出)：

$$\left.\begin{aligned} l' &= \left(1-\varepsilon+\frac{\partial u}{\partial x}\right)l + \frac{\partial u}{\partial y}m + \frac{\partial u}{\partial z}n \\ m' &= \frac{\partial v}{\partial x}l + \left(1-\varepsilon+\frac{\partial v}{\partial y}\right)m + \frac{\partial v}{\partial z}n \\ n' &= \frac{\partial w}{\partial x}l + \frac{\partial w}{\partial y}m + \left(1-\varepsilon+\frac{\partial w}{\partial z}\right)n \end{aligned}\right\} \tag{e}$$

参照§3-2中从式(b)化到式(3-8)的同样方法，式(e)可改写为

$$\left.\begin{aligned} l' &= (1-\varepsilon)l + \varepsilon_x l + \frac{1}{2}\gamma_{xy}m + \frac{1}{2}\gamma_{xz}n - \frac{1}{2}\omega_z m + \frac{1}{2}\omega_y n \\ m' &= (1-\varepsilon)m + \frac{1}{2}\gamma_{xy}l + \varepsilon_y m + \frac{1}{2}\gamma_{yz}n - \frac{1}{2}\omega_x n + \frac{1}{2}\omega_z l \\ n' &= (1-\varepsilon)n + \frac{1}{2}\gamma_{xz}l + \frac{1}{2}\gamma_{yz}m + \varepsilon_z n - \frac{1}{2}\omega_y l + \frac{1}{2}\omega_x m \end{aligned}\right\} \quad (f)$$

这里，线段 AB 的方向(l, m, n)与 $A'B'$的方向(l', m', n')一般说是不一致的，但上面已经说过，它们的偏离仅是由于微元体的刚性转动引起的。因此，如令式(f)中的 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 为零，则方向(l', m', n')与(l, m, n)一致，即

$$l' = l, \qquad m' = m, \qquad n' = n$$

于是，由式(f)经移项简化，得到

$$\left.\begin{aligned} (\varepsilon_x - \varepsilon)l + \frac{1}{2}\gamma_{xy}m + \frac{1}{2}\gamma_{xz}n &= 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy}l + (\varepsilon_y - \varepsilon)m + \frac{1}{2}\gamma_{yz}n &= 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz}l + \frac{1}{2}\gamma_{yz}m + (\varepsilon_z - \varepsilon)n &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (3-12)$$

这就是应变主方向所满足的方程。欲使其有非零解，必须有

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{vmatrix} = 0$$

展开以后得

$$\varepsilon^3 - J_1\varepsilon^2 + J_2\varepsilon - J_3 = 0 \quad (3-13)$$

式中的

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \\ J_2 &= \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x + \varepsilon_x\varepsilon_y - \frac{1}{4}(\gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{xy}^2) \\ J_3 &= \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} \quad (3-14)$$

称为**应变张量不变量**(依次称为第一、第二和第三不变量)。其不变的含义以及为什么不变，与应力张量相同，在此不再赘述。

方程(3-13)有3个实根,如果分别用 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 表示,则它们就代表3个主应变,其相应的方向可通过分别把 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 代入方程(3-12),并利用

$$l^2+m^2+n^2=1$$

而求得。它与主应力一样,有下述三种情况:

(1) 如 $\varepsilon_1\neq\varepsilon_2\neq\varepsilon_3$,则3个应变主方向必相互垂直;

(2) 如 $\varepsilon_1=\varepsilon_2\neq\varepsilon_3$,则与 ε_3 对应的方向必同时垂直于与 ε_1 和 ε_2 对应的方向,而与 ε_1 和 ε_2 对应的方向可以垂直,也可以不垂直,亦即与 ε_3 对应的方向垂直的方向均为主方向;

(3) 如 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3$,则3个主方向可以垂直,也可以不垂直,亦即任何方向均为主方向。

总之,过物体内任何一点至少可以找到3个互相垂直的方向,沿这3个方向的微分线段在物体变形后仍保持垂直。

* §3-5 应变二次曲面

与用应力二次曲面表示一点的应力状态相似,我们也可用二次曲面表示一点邻近的变形状态。将坐标原点设在物体内所要考察的点 M,从 M 点出发作矢量,使其长度 r 与线段的正应变 ε_r 有如下的关系:

$$r^2\varepsilon_r=\pm k^2$$

或

$$\varepsilon_r=\pm\frac{k^2}{r^2} \tag{3-15}$$

式中的 k 为一常数。这一矢量末端的坐标为

$$\xi=rl,\qquad \eta=rm,\qquad \zeta=rn$$

式中的 l,m,n 表示该线段的方向余弦。将从上式所得的 l,m,n 代入式(3-11),得

$$\varepsilon_x\xi^2+\varepsilon_y\eta^2+\varepsilon_z\zeta^2+\gamma_{yz}\eta\zeta+\gamma_{zx}\xi\zeta+\gamma_{xy}\xi\eta=\pm k^2 \tag{3-16}$$

这是以坐标原点为中心的二次曲面方程,当上述线段改变方向而转动时,其末端总是在这二次曲面上。这曲面称为**应变二次曲面**。由于式(3-16)中6个应变分量的正负号在各个变形状态中不同,这应变二次曲面可能是一个椭球面,也可能是一个单叶双曲面和一个双叶双曲面。这个问题的讨论,与应力二次曲面完全一样,在此不作细述。

同样,我们可以通过转轴,使式(3-16)中的坐标的交叉乘积项为零。于是,式(3-16)可简化为

$$\varepsilon_1\xi^2+\varepsilon_2\eta^2+\varepsilon_3\zeta^2=\pm k^2 \tag{3-17}$$

这里的 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 就是该点的 3 个主应变。由此可知,应变二次曲面的 3 个主轴方向就是该点的 3 个应变主方向。

§3-6 体 应 变

现在,我们求物体变形后单位体积的改变,即**体应变**。考察棱边长度为 dx, dy 和 dz 的微分平行六面体,其体积为

$$V=dxdydz$$

在物体发生变形后,微元体的各棱边要伸长或缩短,棱边间的夹角也要改变。由于切应变引起的体积改变是高阶微量,可以略去不计,故其变形后的体积为

$$\begin{aligned}V^*&=dx(1+\varepsilon_x)dy(1+\varepsilon_y)dz(1+\varepsilon_z)\\&\approx dxdydz(1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)\end{aligned}$$

于是体应变为

$$\theta=\frac{V^*-V}{V}=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z \tag{3-18}$$

显然,它在数值上等于应变张量的第一不变量 J_1。它又可表示为

$$\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} \tag{3-18}'$$

θ 大于零表示微元体膨胀,θ 小于零表示微元体缩小,如物体内 θ 处处等于零,则表示变形后物体的体积不变,我们称之为等容的。

§3-7 应变协调方程

式(3-3)表明,6 个应变分量是通过 3 个位移分量表示的,因此,6 个应变分量不是互不相关的,它们之间存在着一个必然的联系。这一事实对我们很重要。因为,如果我们知道了位移分量,则前面已经讲过,极易通过式(3-3)的求导获得应变分量;但反过来,如纯粹从数学角度任意给出一组"应变分量",则柯西方程给出包含 6 个方程面只有 3 个未知函数的偏微分方程组,由于方程的个数超过了未知函数的个数,方程组可能是矛盾的。要使这方程组不矛盾,则 6 个应变分量必须满足一定的条件。下面我们建立这个条件。

为此,我们从方程(3-3)中消去位移分量。首先把方程组(3-3)的左列第一式和第二式分别对 y 和 x 求二阶偏导数,然后相加,再利用它的右列第三式,则有

$$\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y} \tag{a}$$

下面再把方程(3-3)的右列第一、第二和第三式分别对 x，y 和 z 求一阶偏导数，然后把它们的后两式相加再减去它们的前一式，则有

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}+\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}$$

将上式等号两边对 x 求一阶偏导数，并利用式(3-3)的第一式，则有

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}+\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) \tag{b}$$

轮换 x，y，z，分别可得与式(a)和式(b)相对应的其他两式。这样，总共得到了6个关系式，现综合如下：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y\partial z}\\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x\partial z}\\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x\partial y}\\
&\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}+\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)=2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y\partial z}\\
&\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}+\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)=2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x\partial z}\\
&\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)=2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x\partial y}
\end{aligned}\right\} \tag{3-19}$$

方程组(3-19)称为**应变协调方程**，又称**圣维南方程**。它表示，要使以位移分量为未知函数的6个几何方程不相矛盾，则6个应变分量必须满足应变协调方程。这个方程的意义又可从几何角度加以解释。如前所述，我们想象将物体分割成无数个平行六面体，并使每一个小单元体发生变形。这时，如果表示小单元体变形的6个应变分量不满足一定的关系，则在物体变形以后，就不能将这些小单元体重新拼合成为连续体，而中间产生了很小的裂缝。为使变形后的小单元体能重新拼合成连续体，则应变分量就要满足一定的关系，这个关系就是应变协调方程。因此说，应变分量满足应变协调方程，是保证物体连续的一个必要条件。

现在要证明，如果物体是单连通的，则应变分量满足应变协调方程也是物体连续的充分条件。因本章一开始就说过，物体在变形后保持连续的这一物理上的要求，反映在数学上则要求位移分量是单值连续的函数，所以，我们的目的是要证明：如已知应变分量满足应变协调方程，则对单连通物体说，就一定能通过几何方程的积分求得单值连续的位移分量。

事实上，要求得位移分量，可先归结为去求它们分别对 x，y，z 的一阶偏导

数。譬如，知道了$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$，就可通过积分

$$\int \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z \tag{c}$$

求得位移分量 u。由方程(3－3)的第一式得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x \tag{d}$$

$\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$不能直接由式(3－3)给出，但$\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$作为一个函数，它们对 x, y, z 的一阶偏导数，利用式(3－3)很容易通过应变分量分别表示出来。例如对$\frac{\partial u}{\partial y}$，有

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} = A \\
&\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\gamma_{xy} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} = B \\
&\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\gamma_{xy} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\gamma_{xz} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] \\
&\qquad = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) = C
\end{aligned}\right\} \tag{e}$$

同理，可用应变分量表出$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right), \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)$。关系式(e)的右边看成已知，分别用 A, B, C 表示。据上所述，如果能够通过积分

$$\int A\mathrm{d}x + B\mathrm{d}y + C\mathrm{d}z \tag{f}$$

求得单值连续函数$\frac{\partial u}{\partial y}$，并按同理求得单值连续函数$\frac{\partial u}{\partial z}$，再利用式(d)，则立刻可求得位移分量 u。但积分式(f)给出单值连续的$\frac{\partial u}{\partial y}$的充分和必要的条件为

$$\frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial y}, \qquad \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial x}, \qquad \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} \tag{g}$$

将式(e)代入，则得方程(3－19)中的第三、第四和第五式。如果对$\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$进行同样的处理，则对每一个单值连续函数，都能得到 3 个条件，共 18 个条件，但这 18 个条件中只有 6 个是不同的，而且就是方程(3－19)。

综上所述，对于单连通物体，要求得单值连续的函数$\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$，则应变分量必须满足应变协调方程；反之，如应变分量满足了应变协调方

程，则也一定能求得单值连续的$\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial z},\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y}$。求得了这些量，也就等于求得了位移分量。

这样就证明了，对于单连通物体，应变分量满足应变协调方程，又是保证物体连续的充分条件。事实上，在上述的证明中，还又一次用严密的方法证明了连续的必要条件。

对于多连通物体[①]，我们总可以作适当的截面使它变成单连通物体(图 3-8)，则上述的结论在此完全适用。具体地说，如果应变分量满足应变协调方程，则在此被割开以后的区域里，一定能求得单值连续的函数 u,v,w。但对求得

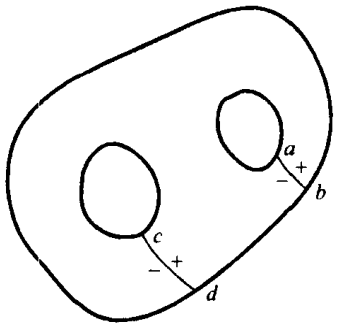


图 3-8

的 u,v,w，当点(x,y,z)分别从截面两侧趋向于截面上某一点时，一般说，它们将趋向于不同的值，分别用 u^+,v^+,w^+ 和 u^-,v^-,w^- 表示。为使所考察的多连通物体在变形以后仍保持为连续体，则必须加上下列的补充条件：

$$u^+=u^-,v^+=v^-,w^+=w^- \tag{3-20}$$

因此，对于多连通物体，应变分量满足应变协调方程，只是物体连续的必要条件，只有加上补充条件(3-20)，条件才是充分的。

方程(3-19)还可表示成

$$\varepsilon_{ij,kl}e_{ikm}e_{jln}=0 \tag{3-19}'$$

其中，e_{ijk} 为笛卡儿坐标系中的置换张量，当 i,j,k 按 1,2,3;2,3,1;3,1,2 顺序排列时为 +1；当按 3,2,1;2,1,3;1,3,2 逆序排列时为 −1；当有两个或者三个指标重复时(例如 2,2,3;2,2,2)为零。m 和 n 有 6 个不同的选择，即 $mn=11,22,33,12,23,31$。由此可得方程(3-19)。

* §3-8 有限变形的几何浅析

前面，我们只讨论了微小变形的情况，在近代弹性力学问题中(例如屈曲和

① 多连通物体是指具有两个以上孔洞的物体。如果有一个孔洞，则称为复连通物体。

稳定问题),常需要考虑**有限变形**。所谓有限变形,就是位移分量和它们的偏导数不是很小的量。

描写物体变形的方法有两种:**拉格朗日**(Lagrange,J.-L.)**法**和**欧拉**(Euler,L.)**法**。拉格朗日法用变形前的坐标(x,y,z)作自变量,而欧拉法则用变形后的坐标(ξ,η,ζ)作自变量。现在,我们要利用这两种不同的方法描绘物体的有限变形。

先采用拉格朗日方法描绘一点附近的有限变形。

设物体内变形前的一点(x,y,z),经过变形后变为(ξ,η,ζ)。过(x,y,z)点有一微分线段$\mathrm{d}s_0$,经变形后变为$\mathrm{d}s$,如图3-9所示。$\mathrm{d}s_0$和$\mathrm{d}s$可写成

$$(\mathrm{d}s_0)^2=(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2 \tag{a}$$

$$(\mathrm{d}s)^2=(\mathrm{d}\xi)^2+(\mathrm{d}\eta)^2+(\mathrm{d}\zeta)^2 \tag{b}$$

由于拉格朗日法是以变形前的坐标(x,y,z)作自变量的,注意到变形后点的位置(ξ,η,ζ)与变形前点的位置(x,y,z)之间存在一一对应的关系,于是有

$$\left.\begin{aligned}\xi&=\xi(x,y,z)\\ \eta&=\eta(x,y,z)\\ \zeta&=\zeta(x,y,z)\end{aligned}\right\} \tag{c}$$

另外,(x,y,z)点的位移分量为

$$\left.\begin{aligned}u&=u(x,y,z)\\ v&=v(x,y,z)\\ w&=w(x,y,z)\end{aligned}\right\} \tag{d}$$

利用

$$\xi=x+u,\quad \eta=y+v,\quad \zeta=z+w \tag{e}$$

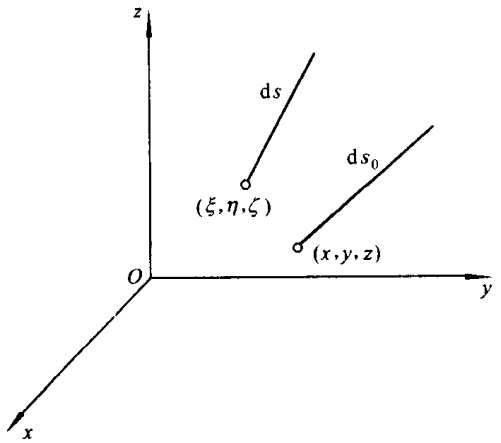


图3-9

则

$$\left.\begin{aligned} d\xi &= dx + du = dx + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz \\ d\eta &= dy + dv = dy + \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz \\ d\zeta &= dz + dw = dz + \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz \end{aligned}\right\} \tag{f}$$

考察

$$(ds)^2 - (ds_0)^2 = (d\xi)^2 + (d\eta)^2 + (d\zeta)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2$$

并将式(f)代入，有

$$(ds)^2 - (ds_0)^2 = 2\tilde{\varepsilon}_x(dx)^2 + 2\tilde{\varepsilon}_y(dy)^2 + 2\tilde{\varepsilon}_z(dz)^2 + 2\tilde{\gamma}_{yz}dydz + 2\tilde{\gamma}_{xz}dxdz + 2\tilde{\gamma}_{xy}dxdy \tag{3-21}$$

其中的 $\tilde{\varepsilon}_x, \tilde{\varepsilon}_y, \tilde{\varepsilon}_z, \tilde{\gamma}_{yz}, \tilde{\gamma}_{xz}$ 和 $\tilde{\gamma}_{xy}$ 称为**拉格朗日应变分量**，它们分别等于

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] \\ \tilde{\varepsilon}_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] \\ \tilde{\varepsilon}_z &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] \\ \tilde{\gamma}_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ \tilde{\gamma}_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ \tilde{\gamma}_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\} \tag{3-22}$$

如令 $\tilde{\varepsilon}_{yz} = \frac{1}{2}\tilde{\gamma}_{yz}, \tilde{\varepsilon}_{xz} = \frac{1}{2}\tilde{\gamma}_{xz}, \tilde{\varepsilon}_{xy} = \frac{1}{2}\tilde{\gamma}_{xy}$，则式(3-22)又可写成

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}) \tag{3-22}'$$

再采用欧拉法描绘一点附近的有限变形。

由于欧拉法是用变形后的坐标(ξ, η, ζ)作自变量的，于是有

$$x = x(\xi, \eta, \zeta), \quad y = y(\xi, \eta, \zeta), \quad z = z(\xi, \eta, \zeta)$$
$$u = u(\xi, \eta, \zeta), \quad v = v(\xi, \eta, \zeta), \quad w = w(\xi, \eta, \zeta)$$

并且

$$dx = d\xi - du = d\xi - \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial u}{\partial \eta}d\eta + \frac{\partial u}{\partial \zeta}d\zeta\right)$$
$$dy = d\eta - dv = d\eta - \left(\frac{\partial v}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial v}{\partial \eta}d\eta + \frac{\partial v}{\partial \zeta}d\zeta\right)$$

$$dz = d\xi - dw = d\xi - \left(\frac{\partial w}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial w}{\partial \eta}d\eta + \frac{\partial w}{\partial \zeta}d\zeta\right)$$

因此

$$(ds)^2 - (ds_0)^2 = 2\varepsilon_\xi^*(d\xi)^2 + 2\varepsilon_\eta^*(d\eta)^2 + 2\varepsilon_\zeta^*(d\zeta)^2 + 2\gamma_{\eta\zeta}^* d\eta d\zeta + 2\gamma_{\xi\zeta}^* d\xi d\zeta + 2\gamma_{\xi\eta}^* d\xi d\eta \tag{3-23}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_\xi^* &= \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2\right] \\
\varepsilon_\eta^* &= \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)^2\right] \\
\varepsilon_\zeta^* &= \frac{\partial w}{\partial \zeta} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \zeta}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)^2\right] \\
\gamma_{\eta\zeta}^* &= \frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \zeta} - \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial v}{\partial \zeta} + \frac{\partial w}{\partial \eta}\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right) \\
\gamma_{\xi\zeta}^* &= \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial w}{\partial \xi} - \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial v}{\partial \zeta} + \frac{\partial w}{\partial \xi}\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right) \\
\gamma_{\xi\eta}^* &= \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} - \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \xi}\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{3-24}$$

或写成

$$\varepsilon_{ij}^* = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}) \tag{3-24}'$$

这里的 ε_ξ^*，ε_η^*，ε_ζ^*，$\gamma_{\eta\zeta}^*$，$\gamma_{\xi\zeta}^*$ 和 $\gamma_{\xi\eta}^*$ 称为**欧拉应变分量**。

在研究物体变形时，由于变形前的各点位置是很容易知道的，所以，用拉格朗日法比较方便。在小变形情况下，如果略去式(3－22)和(3－24)中的二次项，则两种应变分量没有区别，并且就等于小变形情况下的应变分量。

必须指出，在小变形情况下，ε_x，ε_y，ε_z，表示与三个坐标平行的微分线段的伸长率，γ_{yz}，γ_{xz}，γ_{xy} 表示这些微分线段间夹角的变化，但在有限变形情况下，就不可能有这种几何解释了。

最后，介绍在有限变形情况下，如已知拉格朗日应变分量(或欧拉应变分量)，如何确定微分线段的伸长率和两垂直微分线段间夹角的变化。

考虑一线段 $dx = ds_0$，$dy = dz = 0$，并令这微分线段的伸长率为 E_x，ds_0 变形后变为 ds，则

$$E_x = \frac{ds - ds_0}{ds_0}$$

或

$$ds = (1 + E_x)ds_0 \tag{g}$$

又因在这情况下

$$(ds)^2-(ds_0)^2=2\tilde{\varepsilon}_x(dx)^2=2\tilde{\varepsilon}_x(ds_0)^2$$

与式(g)联立,消去 ds_0,于是有

$$E_x=\sqrt{1+2\tilde{\varepsilon}_x}-1 \tag{3-25}$$

在微小变形时,$\tilde{\varepsilon}_x$ 很小,则

$$E_x=\tilde{\varepsilon}_x$$

下面,考虑两个互相垂直的微分线段 $ds_0=dx,dy=dz=0$ 与 $ds_0'=dy,dx=dz=0$ 之间夹角的变化。设经过变形后,这两根线段变为 ds 和 ds',它们中间的夹角为 φ,ds 与 Ox 轴的夹角为 α_1,ds' 与 Oy 轴的夹角为 α_2,如图 3-10 所示。设切应变为 φ_{xy},则

$$\varphi_{xy}=\alpha_1+\alpha_2 \tag{h}$$

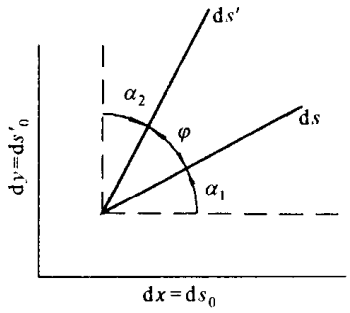


图 3-10

令

$$(ds)^2=(d\xi)^2+(d\eta)^2+(d\zeta)^2$$
$$(ds')^2=(d\xi')^2+(d\eta')^2+(d\zeta')^2$$

其中

$$d\xi=dx+du=dx+\frac{\partial u}{\partial x}dx,\quad d\eta=\frac{\partial v}{\partial x}dx,\quad d\zeta=\frac{\partial w}{\partial x}dx$$

$$d\xi'=\frac{\partial u}{\partial y}dy,\quad d\eta'=dy+\frac{\partial v}{\partial y}dy,\quad d\zeta'=\frac{\partial w}{\partial y}dy$$

于是有

$$\cos\varphi=\left(\frac{d\xi}{ds}\right)\left(\frac{d\xi'}{ds'}\right)+\left(\frac{d\eta}{ds}\right)\left(\frac{d\eta'}{ds'}\right)+\left(\frac{d\zeta}{ds}\right)\left(\frac{d\zeta'}{ds'}\right)$$

即

$$\cos\varphi ds ds'=\left[\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right]dxdy$$

注意到式(3-22)的第六式,则上式可写为

$$\cos\varphi ds ds'\approx\tilde{\gamma}_{xy}dxdy \tag{i}$$

由于

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - (\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\pi}{2} - \varphi_{xy}$$

因此

$$\cos\varphi = \sin\varphi_{xy}$$

代入式(i),并用 ds 和 ds' 除等号两边,于是有

$$\sin\varphi_{xy} = \tilde{\gamma}_{xy}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds'} \tag{j}$$

但由式(g)和(3-25)知道

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{E_x + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\tilde{\varepsilon}_x}}$$

$$\frac{dy}{ds'} = \frac{1}{E_y + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\tilde{\varepsilon}_y}}$$

代入式(j),最后得

$$\sin\varphi_{xy} = \tilde{\gamma}_{xy}\frac{1}{\sqrt{1 + 2\tilde{\varepsilon}_x}}\frac{1}{\sqrt{1 + 2\tilde{\varepsilon}_y}} \tag{3-26}$$

在小变形情况下,φ_{xy},$\tilde{\varepsilon}_x$,$\tilde{\varepsilon}_y$ 很小,则

$$\varphi_{xy} \approx \tilde{\gamma}_{xy}$$

思考题与习题

3-1 如何描绘一点邻近的变形情况?

3-2 在推导几何方程过程中作了哪些近似?为什么能作这样的近似?

3-3 设在一个确定的坐标系下某点的 6 个应变分量 ε_x,ε_y,ε_z,γ_{yz},γ_{xz},γ_{xy} 中,$\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$,现作坐标变换如图 3-11 所示,求在新坐标系下的应变分量表示式。

3-4 试叙述应变协调方程的物理意义及其用途。为什么说它对多连通物体说,仅是能求得单值连续位移的必要而非充分的条件?

3-5 在 Oxy 平面上沿 Oa,Ob 和 Oc 三个方向的伸长率 ε_a,ε_b,ε_c 为已知,而 $\varphi_a = 0$,$\varphi_b = 60°$,$\varphi_c = 120°$,如图 3-12 所示。求平面上任意方向的伸长率 ε_φ。

3-6 已知 6 个应变分量 ε_x,ε_y,ε_z,γ_{yz},γ_{xz},γ_{xy} 中,$\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$,试写出应变张量不变量并导出主应变的公式。

3-7 物体中的一点具有下列应变分量:

$$\varepsilon_x = 0.001,\quad \varepsilon_y = 0.000\,5,\quad \varepsilon_z = -0.000\,1,$$

$$\gamma_{yz} = -0.000\,3,\quad \gamma_{xz} = -0.000\,1,\quad \gamma_{xy} = 0.000\,2$$

试求主应变和应变主方向。

3-8 已知物体内某点的应变分量 ε_x,ε_y,ε_z,γ_{yz},γ_{xz},γ_{xy},试求出过该点的方向余弦为

(l,m,n)的微分线段的伸长率。

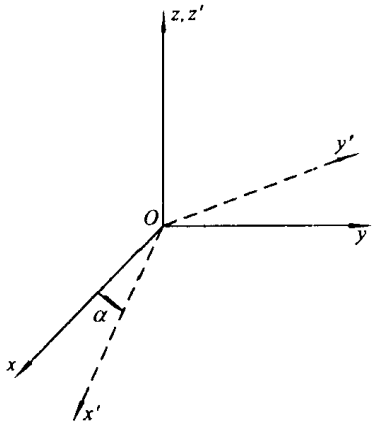


图 3－11

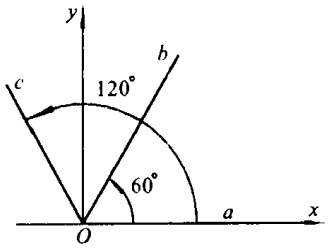


图 3－12

3－9 证明过物体内同一点的所有微分线段的伸长率中，最大和最小的是该点的主应变。

3－10 已知某物体变形后的位移分量为

$$u = u_0 + C_{11}x + C_{12}y + C_{13}z$$

$$v = v_0 + C_{21}x + C_{22}y + C_{23}z$$

$$w = w_0 + C_{31}x + C_{32}y + C_{33}z$$

试求应变分量和转动分量，并说明此物体变形的特点。

3－11 试说明下列的应变分量是否可能发生：

$$\varepsilon_x = Axy^2, \quad \varepsilon_y = Ax^2y, \quad \varepsilon_z = Axy$$

$$\gamma_{yz} = Az^2 + By, \quad \gamma_{xz} = Ax^2 + By^2, \quad \gamma_{xy} = 0$$

式中的 A 和 B 为常数。

3－12 已知某物体的应变分量为

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu\frac{\rho gz}{E}, \quad \varepsilon_z = \frac{\rho gz}{E}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = \gamma_{xy} = 0$$

这里的 E 和 ν 分别表示弹性模量和泊松比，ρ 表示物体的密度，g 为重力加速度，试求位移分量 u,v,w(任意常数不需定出)。

3－13 要使应变分量

$$\varepsilon_x = A_0 + A_1(x^2 + y^2) + (x^4 + y^4)$$

$$\varepsilon_y = B_0 + B_1(x^2 + y^2) + (x^4 + y^4)$$

$$\gamma_{xy} = C_0 + C_1xy(x^2 + y^2 + C_2)$$

$$\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$$

成为一种可能的应变状态，试确定常数 $A_0, A_1, B_0, B_1, C_0, C_1, C_2$ 之间的关系。

第四章　应力和应变的关系

在前两章中，我们分别从静力学和几何学的观点出发，得到了连续介质所共同满足的一些方程。显然，仅用这些方程还不足以解决变形固体的平衡（或运动）问题，因为在推导这些方程时，我们并没有考虑应力和应变的内在联系。而实际上它们是相辅相成的，有应力，就有应变，有应变，就有应力。对每种材料而言，在一定的温度下，它们之间有着完全确定的关系，这种关系反映了材料固有的特性。本章的任务，就是要建立在弹性阶段内应力与应变的关系，即物理方程或材料的本构关系。

§4-1　应力和应变最一般的关系　广义胡克定律

应力与应变关系最一般的形式为

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= f_1(\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z,\gamma_{yz},\gamma_{xz},\gamma_{xy})\\
\sigma_y &= f_2(\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z,\gamma_{yz},\gamma_{xz},\gamma_{xy})\\
\sigma_z &= f_3(\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z,\gamma_{yz},\gamma_{xz},\gamma_{xy})\\
&\cdots\cdots\\
\tau_{xy} &= f_6(\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z,\gamma_{yz},\gamma_{xz},\gamma_{xy})
\end{aligned}\right\} \tag{4-1}$$

这里的 $f_i(i=1,2,\cdots,6)$ 取决于材料本身的物理特性，尽管我们可以去选择它们，但所选的函数要尽可能正确地反映出材料固有的物理性质。在均匀各向同性的等截面直杆作简单拉伸（或压缩）时，应力和应变关系可直接通过实验来得到。但对于复杂受力情况，即使材料是各向同性的，也很难直接通过实验来确立它们之间的关系。这里，我们不去研究如何确立最一般情况下的应力与应变关系，我们要考虑的，仅限于弹性体小变形的情况。

在变形很小的情况下，式(4-1)可展开成泰勒级数，并可略去其二阶以上的小量。例如将式(4-1)的第一式展开，得到

$$\sigma_x=(f_1)_0+\left(\frac{\partial f_1}{\partial\varepsilon_x}\right)_0\varepsilon_x+\left(\frac{\partial f_1}{\partial\varepsilon_y}\right)_0\varepsilon_y+\left(\frac{\partial f_1}{\partial\varepsilon_z}\right)_0\varepsilon_z+\left(\frac{\partial f_1}{\partial\gamma_{yz}}\right)_0\gamma_{yz}+$$

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial\gamma_{xz}}\right)_0\gamma_{xz}+\left(\frac{\partial f_1}{\partial\gamma_{xy}}\right)_0\gamma_{xy}$$

这里的$\left(\frac{\partial f_1}{\partial \varepsilon_x}\right)_0$等等表示函数$f_1$对应变分量的一阶偏导数在应变分量为零时的值；而$(f_1)_0$则表示函数$f_1$在应变分量为零时的值，由式(4-1)看出，它实际上代表了初始应力，由无初始应力的假设，$(f_1)_0$应为零。经上面的处理以后，式(4-1)在小变形情况下就可简化为

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= C_{11}\varepsilon_x + C_{12}\varepsilon_y + C_{13}\varepsilon_z + C_{14}\gamma_{yz} + C_{15}\gamma_{xz} + C_{16}\gamma_{xy}\\
\sigma_y &= C_{21}\varepsilon_x + C_{22}\varepsilon_y + C_{23}\varepsilon_z + C_{24}\gamma_{yz} + C_{25}\gamma_{xz} + C_{26}\gamma_{xy}\\
\sigma_z &= C_{31}\varepsilon_x + C_{32}\varepsilon_y + C_{33}\varepsilon_z + C_{34}\gamma_{yz} + C_{35}\gamma_{xz} + C_{36}\gamma_{xy}\\
\tau_{yz} &= C_{41}\varepsilon_x + C_{42}\varepsilon_y + C_{43}\varepsilon_z + C_{44}\gamma_{yz} + C_{45}\gamma_{xz} + C_{46}\gamma_{xy}\\
\tau_{xz} &= C_{51}\varepsilon_x + C_{52}\varepsilon_y + C_{53}\varepsilon_z + C_{54}\gamma_{yz} + C_{55}\gamma_{xz} + C_{56}\gamma_{xy}\\
\tau_{xy} &= C_{61}\varepsilon_x + C_{62}\varepsilon_y + C_{63}\varepsilon_z + C_{64}\gamma_{yz} + C_{65}\gamma_{xz} + C_{66}\gamma_{xy}
\end{aligned}\right\} \tag{4-2}$$

式(4-2)看起来似乎是纯数学演绎的结果，但在微小变形的情况下，应力与应变之间选择这样的关系显然是合理的。实际上，我们可以把它作为胡克定律在复杂受力情况下的推广，因此称之为**广义胡克定律**。式中的系数C_{mn}($m,n=1,2,\cdots,6$)称为**弹性常数**，一共有36个。如果物体是由非均匀材料组成的，这时，各处就有不同的弹性效应。因此，一般说来，C_{mn}是坐标x,y,z的函数。但若物体是由均匀材料组成的，则对物体内各点来说，承受同样的应力，必产生相同的应变；反之，物体内各点有相同的应变，必承受同样的应力。这一点反映在式(4-2)中，就是C_{mn}为常数。下面即将证明，对于极端各向异性体，由于应变能的存在，也只有21个独立的弹性常数，而各向同性体只有2个独立的弹性常数。

§4-2 弹性体变形过程中的功和能

设一物体在外力作用下处于运动状态，现在要利用热力学的观点，分析其内任一有限部分(设其包含的区域为V，表面为S)的功能变化关系。根据热力学的观点，外力所作的功，一部分将变成动能，一部分将变成内能；另外，物体在变形过程中，温度将发生变化，它必须从外界吸收热量，或向外界发散热量。以$\frac{dW}{dt}$表示单位时间内外力对所取出部分作的功，分别以$\frac{dE_k}{dt}$，$\frac{dV_1}{dt}$表示所取出部分在单位时间内动能和内能的变化，$\frac{dQ}{dt}$表示单位时间内输入(或输出)体内所取出部分的热量的机械当量，则由**热力学第一定律**，它们之间存在如下的关系：

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dE_k}{dt} + \frac{dV_1}{dt} - \frac{dQ}{dt} \tag{4-3}$$

若我们考虑的是一个绝热过程，就是假定在变形过程中无热能损失，也不从

外界吸入热量，此时，外力所作的功将全部变成动能和内能，则式(4－3)变为

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{k}}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}V_{\mathrm{I}}}{\mathrm{d}t} \tag{4-4}$$

由于物体内各点的速度在3个坐标方向上的分量为$\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial v}{\partial t},\frac{\partial w}{\partial t}$，如果以$\rho_{\mathrm{I}}$表示物体变形前的密度，则体内所取出部分的动能为

$$E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}\iiint_V\rho_{\mathrm{I}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right]\mathrm{d}V \tag{a}$$

而

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{k}}}{\mathrm{d}t}=\iiint_V\rho_{\mathrm{I}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\frac{\partial w}{\partial t}\right)\mathrm{d}V \tag{b}$$

现在计算在$\mathrm{d}t$时间内外力对物体内所取出部分作的功。仍以(F_x,F_y,F_z)表示单位体积的体力，(f_{wx},f_{wy},f_{wz})表示作用于取出部分边界处单位面积上的内力。由于在$\mathrm{d}t$时间内各点的位移为$\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}t,\frac{\partial v}{\partial t}\mathrm{d}t,\frac{\partial w}{\partial t}\mathrm{d}t$，故体力和面力作的功分别为

$$\mathrm{d}W_1=\iiint_V\left(F_x\frac{\partial u}{\partial t}+F_y\frac{\partial v}{\partial t}+F_z\frac{\partial w}{\partial t}\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}V \tag{c}$$

$$\mathrm{d}W_2=\iint_S\left(f_{wx}\frac{\partial u}{\partial t}+f_{wy}\frac{\partial v}{\partial t}+f_{wz}\frac{\partial w}{\partial t}\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}S \tag{d}$$

将式(2－4)代入式(d)，并利用高斯(Gauss,C.F.)积分公式①，于是有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}W_2=&\iint_S\left[(\sigma_x l+\tau_{xy}m+\tau_{xz}n)\frac{\partial u}{\partial t}+(\tau_{xy}l+\sigma_y m+\tau_{yz}n)\frac{\partial v}{\partial t}+\right.\\&\left.(\tau_{xz}l+\tau_{yz}m+\sigma_z n)\frac{\partial w}{\partial t}\right]\mathrm{d}t\mathrm{d}S\\=&\iiint_V\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma_x\frac{\partial u}{\partial t}+\tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial t}+\tau_{xz}\frac{\partial w}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\tau_{xy}\frac{\partial u}{\partial t}+\sigma_y\frac{\partial v}{\partial t}+\tau_{yz}\frac{\partial w}{\partial t}\right)+\right.\\&\left.\frac{\partial}{\partial z}\left(\tau_{xz}\frac{\partial u}{\partial t}+\tau_{yz}\frac{\partial v}{\partial t}+\sigma_z\frac{\partial w}{\partial t}\right)\right]\mathrm{d}t\mathrm{d}V\\=&\iiint_V\left[\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial t}+\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}\right)\frac{\partial v}{\partial t}+\right.\\&\left.\left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}\right)\frac{\partial w}{\partial t}\right]\mathrm{d}t\mathrm{d}V+\iiint_V\left(\sigma_x\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial t}+\sigma_y\frac{\partial\varepsilon_y}{\partial t}+\sigma_z\frac{\partial\varepsilon_z}{\partial t}+\right.\\&\left.\tau_{yz}\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial t}+\tau_{xz}\frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial t}+\tau_{xy}\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial t}\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}V\end{aligned} \tag{e}$$

① 高斯积分公式为$\iint_S(Pl+Qm+Rn)\mathrm{d}S=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V$

在 dt 时间内，外力作的全部功为

$$dW = dW_1 + dW_2 \tag{f}$$

将式(c)和式(e)代入式(f)，并利用运动方程(2-5)，然后在等号两边同除以 dt，于是有

$$\frac{dW}{dt} = \iiint_V \rho_1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\frac{\partial w}{\partial t} \right) dV +$$

$$\iiint \left(\sigma_x \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} + \sigma_y \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t} + \sigma_z \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t} + \tau_{yz}\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial t} + \tau_{xz}\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial t} + \tau_{xy}\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial t} \right) dV \tag{g}$$

注意到式(b)，上式的第一项即等于 $\frac{dE_k}{dt}$。将它代入式(4-4)，两边消去同类项，得到

$$\frac{dV_1}{dt} = \iiint_V \left(\sigma_x \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} + \sigma_y \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t} + \sigma_z \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t} + \tau_{yz}\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial t} + \tau_{xz}\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial t} + \tau_{xy}\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial t} \right) dV \tag{h}$$

令单位体积的内能(即**内能密度**)为 v_1，则

$$V_I = \iiint_V v_1 dV$$

而

$$\frac{dV_1}{dt} = \iiint_V \frac{\partial v_1}{\partial t} dV$$

代入式(h)，有

$$\iiint_V \frac{\partial v_1}{\partial t} dV = \iiint_V \left(\sigma_x \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} + \sigma_y \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t} + \sigma_z \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t} + \tau_{yz}\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial t} + \tau_{xz}\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial t} + \tau_{xy}\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial t} \right) dV$$

由于区域 V 可以任意选择，故上式成立的条件为

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = \sigma_x \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} + \sigma_y \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t} + \sigma_z \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t} + \tau_{yz}\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial t} + \tau_{xz}\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial t} + \tau_{xy}\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial t}$$

若固定 x, y, z 的值，则得在 dt 时间内 v_1 的增量

$$dv_I = \sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z + \tau_{yz} d\gamma_{yz} + \tau_{xz} d\gamma_{xz} + \tau_{xy} d\gamma_{xy}$$

由于内能密度 v_1 是状态的单值函数，dv_1 必须是全微分，因此有以下的关系：

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial v_1}{\partial \varepsilon_x}, \quad \tau_{yz} = \frac{\partial v_1}{\partial \gamma_{yz}} \\ \sigma_y &= \frac{\partial v_1}{\partial \varepsilon_y}, \quad \tau_{xz} = \frac{\partial v_1}{\partial \gamma_{xz}} \\ \sigma_z &= \frac{\partial v_1}{\partial \varepsilon_z}, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial v_1}{\partial \gamma_{xy}} \end{aligned}\right\} \tag{4-5}$$

式(4-5)为弹性体在绝热情况下以能量形式表示的物理方程。

对于等温过程,同样可以推出形如式(4-5)的关系式。

我们引进熵这样一个状态函数。它与系统热量的增加和绝对温度的比值有关。在物体变形过程中,热量的增加可能来自两个方面:一是从周围环境输入和内部热源产生的热量,二是由于物体自身对变形和热流的阻力所消耗的功转换成的热量。分别以 dS_e 和 dS_i 表示过程中由这两部分热量引起的熵的增量,则总的增量为

$$dS = dS_e + dS_i \tag{i}$$

其中

$$dS_e = \frac{dQ}{T} \tag{j}$$

这里,T 为绝对温度,dS_i 称为**产熵**,dS_e 称为**供熵**。**热力学第二定律**告诉我们:自然界中发生的一切热力学过程都不会使产熵减少,即

$$dS_i \geqslant 0$$

对于塑性变形等不可逆过程,$dS_i > 0$;对于弹性变形等可逆过程,$dS_i = 0$。因此,在弹性变形的情况下,式(i)可简化为

$$dS = \frac{dQ}{T} \tag{k}$$

或

$$\frac{dQ}{dt} = T\frac{dS}{dt} \tag{l}$$

对于等温过程,有

$$\frac{dT}{dt} = 0 \tag{m}$$

将式(l)代入式(4-3),并注意到式(m),得到

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dE_k}{dt} + \frac{d}{dt}(V_I - TS) \tag{n}$$

我们引入

$$v_F = v_I - T\eta$$

这里,v_I 为内能密度,η 为单位体积的熵,v_F 称为**自由能密度**,则

$$V_I - TS = \iiint_V v_F dV = \iiint_V (v_I - T\eta) dV$$

而

$$\frac{d}{dt}(V_I - TS) = \iiint_V \frac{\partial v_F}{\partial t} dV \tag{o}$$

将式(g)、式(o)代入式(n),采用处理绝热过程同样的方法,可得到

$$dv_F = \sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z + \tau_{yz} d\gamma_{yz} + \tau_{xz} d\gamma_{xz} + \tau_{xy} d\gamma_{xy}$$

由于在等温情况下 v_F 仅与应变分量有关，也是状态的单值函数，要求 dv_F 为全微分，则必存在如下的关系：

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial v_F}{\partial \varepsilon_x}, \quad \tau_{yz} = \frac{\partial v_F}{\partial \gamma_{yz}} \\ \sigma_y &= \frac{\partial v_F}{\partial \varepsilon_y}, \quad \tau_{xz} = \frac{\partial v_F}{\partial \gamma_{xz}} \\ \sigma_z &= \frac{\partial v_F}{\partial \varepsilon_z}, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial v_F}{\partial \gamma_{xy}} \end{aligned}\right\} \tag{4-6}$$

式(4-6)为等温情况下物理方程的能量形式。

式(4-5)和式(4-6)可统一地表示为

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varepsilon_x}, \tau_{yz} = \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \gamma_{yz}} \\ \sigma_y &= \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varepsilon_y}, \tau_{xz} = \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \gamma_{xz}} \\ \sigma_z &= \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varepsilon_z}, \tau_{xy} = \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \gamma_{xy}} \end{aligned}\right\} \tag{4-7}$$

又可缩写为

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varepsilon_{ij}} \tag{4-7'}$$

这里的 v_ε 表示由于变形而储存于物体内单位体积的弹性势能，称为**应变能密度**。在绝热情况下，它为内能密度的增量，即

$$v_\varepsilon = v_I - v_{I0}$$

在等温情况下，它为自由能密度的增量，即

$$v_\varepsilon = v_F - v_{F0}$$

v_{I0} 和 v_{F0} 分别表示自然状态(即无应力状态)下的内能密度和自由能密度。在自然状态下，显然有 $v_\varepsilon = 0$。

式(4-7)称为**格林公式**，它是通过热力学第一定律和第二定律导出的，因此不受变形大小和材料性能的限制，也不需无初始应力的假设。

如果应力和应变之间呈线性关系，如式(4-2)所示，则由式(4-7)可见，应变能密度 v_ε 一定是应变分量的齐二次函数。由齐次函数的欧拉定理，并利用式(4-7)，得

$$\begin{aligned} 2v_\varepsilon &= \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varepsilon_x}\varepsilon_x + \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varepsilon_y}\varepsilon_y + \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varepsilon_z}\varepsilon_z + \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \gamma_{yz}}\gamma_{yz} + \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \gamma_{xz}}\gamma_{xz} + \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \gamma_{xy}}\gamma_{xy} \\ &= \sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{xy}\gamma_{xy} \end{aligned}$$

即

$$v_\varepsilon = \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{xy}\gamma_{xy}) \tag{4-8}$$

或写成

$$v_\varepsilon = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \tag{4-8'}$$

设物体的体积为 V,则整个物体的应变能为

$$V_\varepsilon = \iiint_V v_\varepsilon \mathrm{d}V \tag{4-9}$$

§4-3 各向异性弹性体

下面,我们要从式(4-2)出发,建立几种常见的各向异性弹性体的应力与应变的关系。

(一) 极端各向异性弹性体

我们要证明,由于应变能的存在,极端各向异性体只有 21 个弹性常数。

事实上,将式(4-7)的 σ_y 与式(4-2)的第二式联立,得

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varepsilon_y} = C_{21}\varepsilon_x + C_{22}\varepsilon_y + C_{23}\varepsilon_z + C_{24}\gamma_{yz} + C_{25}\gamma_{xz} + C_{26}\gamma_{xy}$$

上式两边对应变分量求一阶偏导数,譬如,对 γ_{xz} 求偏导数,有

$$\frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial\varepsilon_y\partial\gamma_{xz}} = C_{25} \tag{a}$$

再将式(4-7)的 τ_{xz} 与式(4-2)的第五式联立,得

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \gamma_{xz}} = C_{51}\varepsilon_x + C_{52}\varepsilon_y + C_{53}\varepsilon_z + C_{54}\gamma_{yz} + C_{55}\gamma_{xz} + C_{56}\gamma_{xy}$$

上式对 ε_y 求偏导数,有

$$\frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial\gamma_{xz}\partial\varepsilon_y} = C_{52} \tag{b}$$

比较式(a)和式(b),由于偏导数次序可交换,于是得到

$$C_{25} = C_{52}$$

对于其他的 C_{mn} 和 C_{nm},同样可以证明它们是相等的,即

$$C_{mn} = C_{nm}$$

这样,就证明了对于极端的各向异性体,只有 $6 + \frac{30}{2} = 21$ 个独立的弹性常数。

(二) 具有一个弹性对称面的各向异性弹性体

如果物体内的每一点都存在这样一个平面,和该面对称的两个方向具有相同的弹性,则该平面称为物体的**弹性对称面**,而垂直于弹性对称面的方向,称为物体的**弹性主方向**。我们设 Oyz 平面为弹性对称面,即 x 轴沿弹性主方向,于是,作图 4-1 所示的坐标变换后,应力和应变关系应保持不变。

新老坐标之间有如下关系:

	x	y	z
x'	$l_1=-1$	$m_1=0$	$n_1=0$
y'	$l_2=0$	$m_2=1$	$n_2=0$
z'	$l_3=0$	$m_3=0$	$n_3=1$

由式(2-8)和式(3-10),得到下列新坐标系下的应力分量和应变分量:

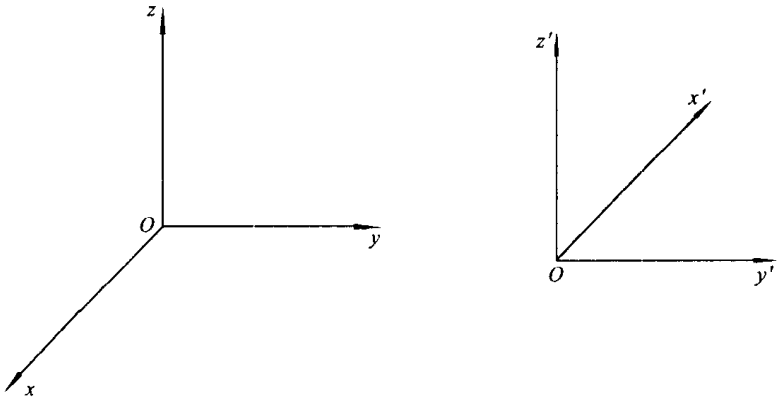


图 4-1

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{x'}=\sigma_x,\quad \sigma_{y'}=\sigma_y,\quad \sigma_{z'}=\sigma_z\\&\tau_{y'z'}=\tau_{yz},\quad \tau_{x'z'}=-\tau_{xz},\quad \tau_{x'y'}=-\tau_{xy}\end{aligned}\right\}\tag{c}$$

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_{x'}=\varepsilon_x,\quad \varepsilon_{y'}=\varepsilon_y,\quad \varepsilon_{z'}=\varepsilon_z\\&\gamma_{y'z'}=\gamma_{yz},\quad \gamma_{x'z'}=-\gamma_{xz},\quad \gamma_{x'y'}=-\gamma_{xy}\end{aligned}\right\}\tag{d}$$

将它们代入式(4-2),得到

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{x'}&=C_{11}\varepsilon_{x'}+C_{12}\varepsilon_{y'}+C_{13}\varepsilon_{z'}+C_{14}\gamma_{y'z'}-C_{15}\gamma_{x'z'}-C_{16}\gamma_{x'y'}\\\sigma_{y'}&=C_{21}\varepsilon_{x'}+C_{22}\varepsilon_{y'}+C_{23}\varepsilon_{z'}+C_{24}\gamma_{y'z'}-C_{25}\gamma_{x'z'}-C_{26}\gamma_{x'y'}\\\sigma_{z'}&=C_{31}\varepsilon_{x'}+C_{32}\varepsilon_{y'}+C_{33}\varepsilon_{z'}+C_{34}\gamma_{y'z'}-C_{35}\gamma_{x'z'}-C_{36}\gamma_{x'y'}\\\tau_{y'z'}&=C_{41}\varepsilon_{x'}+C_{42}\varepsilon_{y'}+C_{43}\varepsilon_{z'}+C_{44}\gamma_{y'z'}-C_{45}\gamma_{x'z'}-C_{46}\gamma_{x'y'}\\-\tau_{x'z'}&=C_{51}\varepsilon_{x'}+C_{52}\varepsilon_{y'}+C_{53}\varepsilon_{z'}+C_{54}\gamma_{y'z'}-C_{55}\gamma_{x'z'}-C_{56}\gamma_{x'y'}\\-\tau_{x'y'}&=C_{61}\varepsilon_{x'}+C_{62}\varepsilon_{y'}+C_{63}\varepsilon_{z'}+C_{64}\gamma_{y'z'}-C_{65}\gamma_{x'z'}-C_{66}\gamma_{x'y'}\end{aligned}\right\}\tag{e}$$

将式(e)与式(4-2)进行比较，要使经过上述变换后的应力与应变关系不变，则必须

$$C_{15}=C_{16}=C_{25}=C_{26}=C_{35}=C_{36}=C_{45}=C_{46}=0$$

这样，弹性常数从21个减少到13个。式(4-2)简化为

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= C_{11}\varepsilon_x + C_{12}\varepsilon_y + C_{13}\varepsilon_z + C_{14}\gamma_{yz}\\
\sigma_y &= C_{21}\varepsilon_x + C_{22}\varepsilon_y + C_{23}\varepsilon_z + C_{24}\gamma_{yz}\\
\sigma_z &= C_{31}\varepsilon_x + C_{32}\varepsilon_y + C_{33}\varepsilon_z + C_{34}\gamma_{yz}\\
\tau_{yz} &= C_{41}\varepsilon_x + C_{42}\varepsilon_y + C_{43}\varepsilon_z + C_{44}\gamma_{yz}\\
\tau_{xz} &= C_{55}\gamma_{xz} + C_{56}\gamma_{xy}\\
\tau_{xy} &= C_{65}\gamma_{xz} + C_{66}\gamma_{xy}
\end{aligned}\right\} \tag{f}$$

(三) 正交各向异性弹性体

我们假定 Oxz 平面也为弹性对称面，即 y 轴沿弹性主方向，于是，作图4-2所示的坐标变换后，应力与应变关系应保持不变。

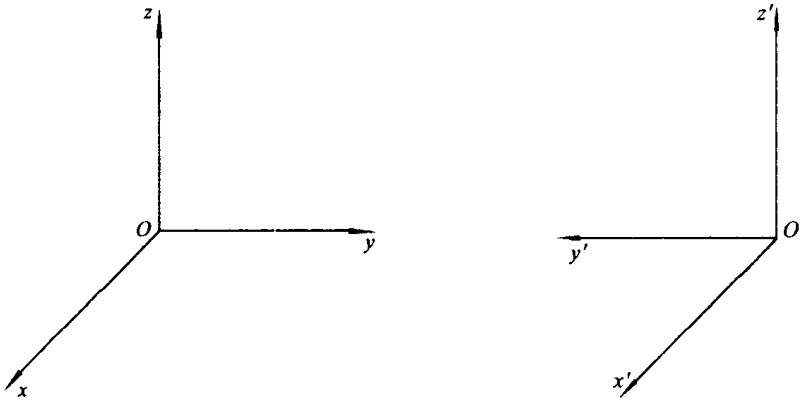


图4-2

按照得式(c)和式(d)同样的理由，可得

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_{x'}=\sigma_x,\quad \sigma_{y'}=\sigma_y,\quad \sigma_{z'}=\sigma_z\\
&\tau_{y'z'}=-\tau_{yz},\quad \tau_{x'z'}=\tau_{xz},\quad \tau_{x'y'}=-\tau_{xy}
\end{aligned}\right\} \tag{g}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_{x'}=\varepsilon_x,\quad \varepsilon_{y'}=\varepsilon_y,\quad \varepsilon_{z'}=\varepsilon_z\\
&\gamma_{y'z'}=-\gamma_{yz},\quad \gamma_{x'z'}=\gamma_{xz},\quad \gamma_{x'y'}=-\gamma_{xy}
\end{aligned}\right\} \tag{h}$$

将式(g)和式(h)代入式(f)，与上面一样，要使经过这样的变换后应力与应变关系不变，则必须

$$C_{14}=C_{24}=C_{34}=C_{56}=0$$

于是，式(f)简化为

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= C_{11}\varepsilon_x + C_{12}\varepsilon_y + C_{13}\varepsilon_z \\
\sigma_y &= C_{21}\varepsilon_x + C_{22}\varepsilon_y + C_{23}\varepsilon_z \\
\sigma_z &= C_{31}\varepsilon_x + C_{32}\varepsilon_y + C_{33}\varepsilon_z \\
\tau_{yz} &= C_{44}\gamma_{yz} \\
\tau_{xz} &= C_{55}\gamma_{xz} \\
\tau_{xy} &= C_{66}\gamma_{xy}
\end{aligned}\right\} \tag{4-10}$$

如果再设 xy 平面为弹性对称面，而 z 轴沿弹性主方向，则经过与上面相同的推演，发现不会得到新的结果。这表明，如果互相垂直的 3 个平面中有 2 个是弹性对称面，则第三个平面必然也是弹性对称面。到此，弹性常数只有 9 个。这种弹性体，称为**正交各向异性弹性体**。式(4-10)表明，当坐标轴方向与弹性主方向一致时，正应力只与正应变有关，切应力只与对应的切应变有关，因此，拉压与剪切之间，以及不同平面内的切应力与切应变之间，不存在耦合作用。各种增强纤维复合材料和木材等属于这种弹性体。

(四) 横观各向同性弹性体

在正交各向异性的基础上，如果物体内每一点都有一个弹性对称轴，也就是说，每一点都有一个各向同性平面，在这个平面内，沿各个方向具有相同的弹性。这种弹性体，称为**横观各向同性弹性体**。

我们不妨假设 Oxy 平面为各向同性平面，即 z 轴为弹性对称轴。从式(4-10)出发，先让坐标系绕 z 轴旋转 90°，如图 4-3 所示。新老坐标之间的关系如下所示：

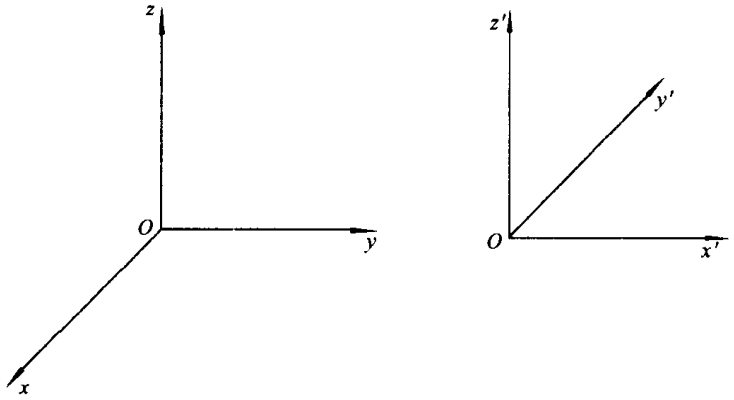


图 4-3

	x	y	z
x'	$l_1=0$	$m_1=1$	$n_1=0$
y'	$l_2=-1$	$m_2=0$	$n_2=0$
z'	$l_3=0$	$m_3=0$	$n_3=1$

由式(2－8)和式(3－10)得

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{x'}=\sigma_y,\quad \sigma_{y'}=\sigma_x,\quad \sigma_{z'}=\sigma_z\\&\tau_{y'z'}=-\tau_{xz},\quad \tau_{x'z'}=\tau_{yz},\quad \tau_{x'y'}=-\tau_{xy}\end{aligned}\right\}\tag{i}$$

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_{x'}=\varepsilon_y,\quad \varepsilon_{y'}=\varepsilon_x,\quad \varepsilon_{z'}=\varepsilon_z\\&\gamma_{y'z'}=-\gamma_{xz},\quad \gamma_{x'z'}=\gamma_{yz},\quad \gamma_{x'y'}=-\gamma_{xy}\end{aligned}\right\}\tag{j}$$

将式(i)和(j)代入式(4－10)，得到

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{y'}&=C_{11}\varepsilon_{y'}+C_{12}\varepsilon_{x'}+C_{13}\varepsilon_{z'}\\\sigma_{x'}&=C_{12}\varepsilon_{y'}+C_{22}\varepsilon_{x'}+C_{23}\varepsilon_{z'}\\\sigma_{z'}&=C_{13}\varepsilon_{y'}+C_{23}\varepsilon_{x'}+C_{33}\varepsilon_{z'}\\\tau_{x'z'}&=C_{44}\gamma_{x'z'}\\-\tau_{y'z'}&=-C_{55}\gamma_{y'z'}\\-\tau_{x'y'}&=-C_{66}\gamma_{x'y'}\end{aligned}\right\}\tag{k}$$

比较式(k)和式(4－10)可以发现，要使经过这一变换后应力与应变关系不变，必须有

$$C_{11}=C_{22},\quad C_{13}=C_{23},\quad C_{44}=C_{55}$$

可见，弹性常数现在减少到了6个，而式(4－10)简化为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=C_{11}\varepsilon_x+C_{12}\varepsilon_y+C_{13}\varepsilon_z\\\sigma_y&=C_{12}\varepsilon_x+C_{11}\varepsilon_y+C_{13}\varepsilon_z\\\sigma_z&=C_{13}\varepsilon_x+C_{13}\varepsilon_y+C_{33}\varepsilon_z\\\tau_{yz}&=C_{44}\gamma_{yz}\\\tau_{xz}&=C_{44}\gamma_{xz}\\\tau_{xy}&=C_{66}\gamma_{xy}\end{aligned}\right\}\tag{l}$$

现在，再将坐标系绕 z 轴旋转一任意角 φ，如图4－4所示。新老坐标之间的关系如下所示：

	x	y	z
x'	$l_1=\cos\varphi$	$m_1=\sin\varphi$	$n_1=0$
y'	$l_2=-\sin\varphi$	$m_2=\cos\varphi$	$n_2=0$
z'	$l_3=0$	$m_3=0$	$n_3=1$

由式(2－8)和式(3－10)得

$$\left.\begin{aligned}\tau_{x'y'}&=\frac{1}{2}(\sigma_y-\sigma_x)\sin 2\varphi+\tau_{xy}\cos 2\varphi\\\gamma_{x'y'}&=(\varepsilon_y-\varepsilon_x)\sin 2\varphi+\gamma_{xy}\cos 2\varphi\end{aligned}\right\}\tag{m}$$

经过上述变换后，式(l)的第六个关系仍应成立，即

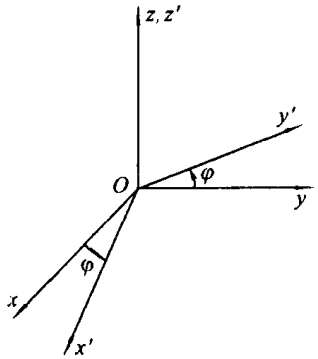


图 4-4

$$\tau_{x'y'} = C_{66}\gamma_{x'y'} \tag{n}$$

将式(m)代入,有

$$\frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x)\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi = C_{66}[(\varepsilon_y - \varepsilon_x)\sin 2\varphi + \gamma_{xy}\cos 2\varphi]$$

利用式(l)的最后一式,即

$$\tau_{xy} = C_{66}\gamma_{xy}$$

则上式简化为

$$\sigma_y - \sigma_x = 2C_{66}(\varepsilon_y - \varepsilon_x) \tag{o}$$

将式(l)的第二式减去其第一式,得

$$\sigma_y - \sigma_x = (C_{11} - C_{12})(\varepsilon_y - \varepsilon_x) \tag{p}$$

比较式(o)和式(p),可得

$$2C_{66} = C_{11} - C_{12} \tag{q}$$

可见横观各向同性弹性体有 5 个独立的弹性常数。将式(q)代入式(l),得横观各向同性的应力与应变的关系如下:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= C_{11}\varepsilon_x + C_{12}\varepsilon_y + C_{13}\varepsilon_z \\
\sigma_y &= C_{12}\varepsilon_x + C_{11}\varepsilon_y + C_{13}\varepsilon_z \\
\sigma_z &= C_{13}\varepsilon_x + C_{13}\varepsilon_y + C_{33}\varepsilon_z \\
\tau_{yz} &= C_{44}\gamma_{yz} \\
\tau_{xz} &= C_{44}\gamma_{xz} \\
\tau_{xy} &= \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})\gamma_{xy}
\end{aligned}\right\} \tag{4-11}$$

层状结构的地壳,可认为是横观各向同性的。

§4-4 各向同性弹性体

所谓各向同性弹性体,从物理意义上说,就是沿物体各个方向看,弹性性质

是完全相同的。这一物理上完全对称的特性，反映在数学上，就是应力与应变的关系在所有方位不同的坐标系中都一样。下面，我们要从式(4－11)出发，经过进一步的简化，建立各向同性弹性体的应力与应变的关系。

从以上的推导可知，式(4－11)反映的是这样一个弹性体，Oxy 平面既是它的各向同性面，又是它的弹性对称面，这样，既保证了沿 Oxy 平面内任一方向具有相同的弹性，又保证了沿 z 轴的正负两个方向也具有相同的弹性。但须注意，Oxy 平面内的弹性性质和 z 轴方向的弹性性质对非各向同性体是不同的；对各向同性体来说，它们应该相同。为此，我们以式(4－11)为基础，再作如图4－5所示的坐标变换；如果在这样的变换下应力应变关系保持不变，则就可保证是各向同性了。

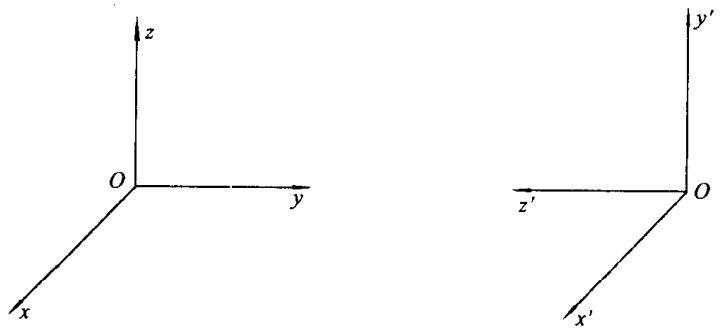


图 4－5

相应于图 4－5 的坐标变换，应力分量和应变分量的变换关系如下：

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{x'}=\sigma_x, \quad \sigma_{y'}=\sigma_z, \quad \sigma_{z'}=\sigma_y \\ &\tau_{y'z'}=-\tau_{yz}, \quad \tau_{x'z'}=-\tau_{xy}, \quad \tau_{x'y'}=\tau_{xz} \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_{x'}=\varepsilon_x, \quad \varepsilon_{y'}=\varepsilon_z, \quad \varepsilon_{z'}=\varepsilon_y \\ &\gamma_{y'z'}=-\gamma_{yz}, \quad \gamma_{x'z'}=-\gamma_{xy}, \quad \gamma_{x'y'}=\gamma_{xz} \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

将式(a)和式(b)代入式(4－11)，有

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{x'} &= C_{11}\varepsilon_{x'}+C_{12}\varepsilon_{z'}+C_{13}\varepsilon_{y'} \\ \sigma_{z'} &= C_{12}\varepsilon_{x'}+C_{11}\varepsilon_{z'}+C_{13}\varepsilon_{y'} \\ \sigma_{y'} &= C_{13}\varepsilon_{x'}+C_{13}\varepsilon_{z'}+C_{33}\varepsilon_{y'} \\ -\tau_{y'z'} &= -C_{44}\gamma_{y'z'} \\ \tau_{x'y'} &= C_{44}\gamma_{x'y'} \\ -\tau_{x'z'} &= -\frac{1}{2}(C_{11}-C_{12})\gamma_{x'z'} \end{aligned}\right\} \tag{c}$$

将式(c)与式(4－11)进行比较，要求经上述变换后应力应变关系不变，则得到

$$C_{12}=C_{13}, \quad C_{11}=C_{33}, \quad C_{44}=\frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) \tag{d}$$

因此，对于各向同性的弹性体，只有 2 个独立的弹性常数。

将式(d)代入式(4-11)，稍加整理，有

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= C_{12}\theta + (C_{11}-C_{12})\varepsilon_x \\
\sigma_y &= C_{12}\theta + (C_{11}-C_{12})\varepsilon_y \\
\sigma_z &= C_{12}\theta + (C_{11}-C_{12})\varepsilon_z \\
\tau_{yz} &= \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12})\gamma_{yz} \\
\tau_{xz} &= \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12})\gamma_{xz} \\
\tau_{xy} &= \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12})\gamma_{xy}
\end{aligned}\right\} \tag{e}$$

这里

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

为使表达式简洁起见，令

$$C_{12} = \lambda, \quad C_{11} - C_{12} = 2\mu$$

则式(e)可改写为

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x \\
\sigma_y &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y \\
\sigma_z &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z \\
\tau_{yz} &= \mu\gamma_{yz} \\
\tau_{xz} &= \mu\gamma_{xz} \\
\tau_{xy} &= \mu\gamma_{xy}
\end{aligned}\right\} \tag{4-12}$$

或

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{4-12'}$$

式(4-12)即各向同性弹性体的广义胡克定律，λ，μ 称为**拉梅**(Lamé, G.)**常数**。

从式(4-12)容易看出，在各向同性体内的各点，应力主方向和应变主方向是一致的。事实上，如果将坐标轴取得与物体内某点的应变主方向重合，此时，所有的切应变分量为零。但由式(4-12)的后三式可知，此时切应力分量也必须为零，因此，这 3 个坐标轴的方向又是应力主方向，也即两者是一致的。

将式(4-12)的前三式相加，得

$$\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = (3\lambda + 2\mu)\theta \tag{4-13}$$

称为**体应变的胡克定律**。利用上式，式(4-12) 可改写成如下的形式：

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{2\mu} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\Theta, \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{\mu}\tau_{yz}\\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{2\mu} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\Theta, \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{\mu}\tau_{xz}\\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{2\mu} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\Theta, \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{\mu}\tau_{xy}\end{aligned}\right\} \tag{4-14}$$

§4-5 弹性常数的测定 各向同性体应变能密度的表达式

上述的应力与应变关系式(4-12)或(4-14)必须包括简单拉伸和纯剪的特殊情况。因此,借助于同一材料的简单拉伸与纯剪试验来测定弹性常数 λ 和 μ

首先,在简单拉伸的情况下,如果将试样拉伸方向作为 x 轴方向,则

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = \tau_{xy} = 0$$

将它们代入式(4-14),于是有

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)}\sigma_x\\ \varepsilon_y &= \varepsilon_z = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\sigma_x\\ \gamma_{yz} &= \gamma_{xz} = \gamma_{xy} = 0\end{aligned}\right\} \tag{a}$$

另一方面,根据简单拉伸试验的结果,有如下的关系:

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E}\\ \varepsilon_y &= \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}\sigma_x\\ \gamma_{yz} &= \gamma_{xz} = \gamma_{xy} = 0\end{aligned}\right\} \tag{b}$$

这里的 E 是**杨**(Young, T.)**氏模量**,ν 是**泊松**(Poisson, S.-D.)**比**。比较式(a)和式(b),则有

$$E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \tag{4-15}$$

或

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{4-16}$$

根据试验有

$$E>0, \quad 0<\nu<\frac{1}{2}$$

所以

$$\lambda>0, \quad \mu>0$$

再考虑纯剪情况，假定切应力作用在 Oxy 平面内，于是有

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$$

代入式(4-14)，得

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0 \\ &\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{\mu} \end{aligned}\right\} \tag{c}$$

另一方面，由纯剪试验得

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0 \\ &\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \end{aligned}\right\} \tag{d}$$

G 为**切变模量**，比较式(c)和式(d)，得到

$$\mu = G \tag{4-17}$$

将式(4-16)代入式(4-14)，经整理，则各向同性体的广义胡克定律又可写成以下形式：

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \quad \gamma_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{yz} \\ &\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], \quad \gamma_{xz} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xz} \\ &\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \end{aligned}\right\} \tag{4-18}$$

或

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}[(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij}] \tag{4-18}'$$

这里的 $\sigma_{kk} = \Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$。

由式(4-18)，体应变的胡克定律又可写成

$$\theta = \frac{1-2\nu}{E}\Theta \tag{4-19}$$

最后，再讨论以应变分量或者应力分量表示应变能密度 v_ε。前面已经证明，在应力和应变呈线性关系时，应变能密度表示为

$$2v_\varepsilon = \sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{xy}\gamma_{xy}$$

利用式(4-12)或(4-18)，可得

$$\begin{aligned} 2v_\varepsilon &= \lambda\theta^2 + 2\mu(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \mu(\gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{xy}^2) \\ &= (\lambda + 2\mu)(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + 2\lambda(\varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_y) + \\ &\quad \mu(\gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{xy}^2) \end{aligned} \tag{4-20}$$

或

$$2v_\varepsilon = \frac{1}{E}[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z + \sigma_x\sigma_y) + 2(1+\nu)(\tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2)] \tag{4-21}$$

从式(4-20)可以得到一个重要的结论,就是永远有

$$v_\varepsilon \geqslant 0$$

这说明,应变能密度总是正的。

思考题与习题

4-1 橡皮立方块放在同样大小的铁盒内,在上面用铁盖封闭,铁盖上受均布压力 q 作用,如图 4-6 所示;设铁盒和铁盖可以作为刚体看待,面且橡皮与铁盒之间无摩擦力。试求铁盒内侧面所受的压力、橡皮块的体应变和橡皮中的最大切应力。

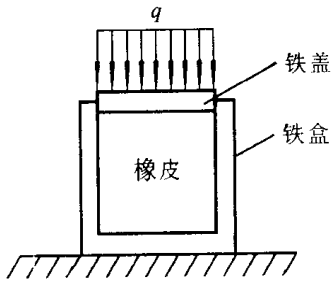


图 4-6

4-2 已知应力与应变之间满足广义胡克定律,证明

$$\varepsilon_x = \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \sigma_x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \sigma_y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \sigma_z}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \tau_{yz}}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \tau_{xz}}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \tau_{xy}}$$

这里,v_ε 为应变能密度。

4-3 证明:对各向同性的线性弹性体来说,应力主方向与应变主方向是一致的。非各向同性体是否具有这样的性质?试举例定性说明。

4-4 试写出极坐标、柱坐标和球坐标形式的各向同性体的广义胡克定律。

第五章　弹性力学问题的建立和一般原理

在前三章中，我们已经导出了弹性力学的全部基本方程和一些常用的公式，现在可以着手讨论如何求解弹性力学的问题了。本章的主要任务有四个：(1)综合弹性力学的基本方程，并按边界条件的性质将问题分类；(2)阐述解决弹性力学问题通常采用的两种方法——位移解法和应力解法，并推演其相应的方程；(3)介绍弹性力学的几个一般原理；(4)介绍弹性力学的几个简单问题。

§5－1　弹性力学的基本方程及其边值问题

弹性力学基本方程包括平衡(运动)微分方程、几何方程和物理方程。为便于一览，将它们综合如下：

平衡(运动)微分方程

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}+F_x=0\left(\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\\
&\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}+F_y=0\left(\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)\\
&\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+F_z=0\left(\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{5-1}$$

或

$$\sigma_{ij,i}+F_j=0\left(\rho\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}\right) \tag{5-1}'$$

几何方程——应变和位移的关系

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \gamma_{yz}=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\\
&\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \gamma_{xz}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\\
&\varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z},\quad \gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}
\end{aligned}\right\} \tag{5-2}$$

或

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \tag{5-2}'$$

物理方程——应力和应变的关系

(1) 用应力表示应变的关系式

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \quad \gamma_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{yz}\\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], \quad \gamma_{xz} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xz}\\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}\end{aligned}\right\} \tag{5-3}$$

或

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}[(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij}] \tag{5-3}'$$

(2) 用应变表示应力的关系式

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_x, \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}\\ \sigma_y &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_y, \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}\\ \sigma_z &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_z, \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}\end{aligned}\right\} \tag{5-4}$$

或

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij} \tag{5-4}'$$

方程(5-1),(5-2)和(5-3)(或(5-4)),共15个方程,包含6个应力分量,6个应变分量和3个位移分量,共15个变量。解这些方程,还须给出边界条件。弹性力学按工程实际问题可能出现的情况,边界条件可归结为以下三种类型:

(1) 在全部边界上已知面力 $\bar{f}_x, \bar{f}_y, \bar{f}_z$,若将边界记作 S,则边界条件为

$$\left.\begin{aligned}\bar{f}_x &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n\\ \bar{f}_y &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n\\ \bar{f}_z &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n\end{aligned}\right\} \quad (\text{在 } S \text{ 上}) \tag{5-5}$$

或写成

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{f}_i (\text{在 } S \text{ 上}) \tag{5-5}'$$

(2) 在全部边界 S 上已知边界位移 $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$,边界条件为

$$u = \bar{u}, \quad v = \bar{v}, \quad w = \bar{w} (\text{在 } S \text{ 上}) \tag{5-6}$$

或写成

$$u_i = \bar{u}_i (\text{在 } S \text{ 上}) \tag{5-6}'$$

式(5-6)称为**位移边界条件**

(3) 在部分边界 S_σ 上已知面力,在另一部分边界 S_u 上已知边界位移,边界条件为

$$\left.\begin{aligned}\bar{f}_x &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n\\ \bar{f}_y &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n\\ \bar{f}_z &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n\end{aligned}\right\} \quad (\text{在 } S_\sigma \text{ 上}) \tag{5-7a}$$

$$u = \bar{u}, \quad v = \bar{v}, \quad w = \bar{w} (\text{在 } S_u \text{ 上}) \tag{5-7b}$$

或写成

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{f}_i (\text{在 } S_\sigma \text{ 上}) \tag{5-7a}'$$

$$u_i = \bar{u}_i (\text{在 } S_u \text{ 上}) \tag{5-7b}'$$

在给定的边界条件下求解偏微分方程组的问题，称为偏微分方程组的边值问题。在上述三种边界条件下求解弹性力学的基本方程，依次分别地称为**弹性力学的第一类、第二类和第三类边值问题**，第三类边值问题又称**混合边值问题**。§5-5 中将证明，如不考虑物体的刚体运动，则三类边值问题的解是唯一的。

对于弹性动力学问题，还须给出问题的初始条件。若以 $f_1(x,y,z)$，$f_2(x,y,z)$，$f_3(x,y,z)$ 和 $\varphi_1(x,y,z)$，$\varphi_2(x,y,z)$，$\varphi_3(x,y,z)$ 分别表示初始位移和初始速度，则初始条件为

$$\left.\begin{aligned} u &= f_1(x,y,z),\\ v &= f_2(x,y,z),\\ w &= f_3(x,y,z)\\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \varphi_1(x,y,z),\\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \varphi_2(x,y,z),\\ \frac{\partial w}{\partial t} &= \varphi_3(x,y,z)\end{aligned}\right\} \quad (t=0) \tag{5-8}$$

需要指出的是，从方程(5-2)，(5-3)(或(5-4))可以看出，6 个应力分量、6 个应变分量和 3 个位移分量之间不是彼此独立的。如果给出了位移分量，则不难先由式(5-2)求应变分量，再由式(5-4)求应力分量。反之，如果给出应力分量，则也很容易由式(5-3)求应变分量，但把所求得的应变分量代入方程(5-2)后，为使这组方程不矛盾，从而通过它们的积分求出位移分量，这就要求这组应变分量满足一组补充方程，即应变协调方程：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}\\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}\\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}\\
&\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}+\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)=2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}\\
&\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}+\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)=2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}\\
&\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)=2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}
\end{aligned}\right\} \tag{5-9}$$

基于上述理由，通常可以采用下面两种方法求解弹性力学问题：一种是以位移分量作为基本变量求解，称为**位移解法**；另一种是以应力分量作为基本变量求解，称为**应力解法**。§5-2 和 §5-3 中，我们将分别讨论这两种解法。

§5-2　位移解法　以位移表示的平衡（或运动）微分方程

由于位移解法是以位移分量作为基本变量求解的，故我们必须从方程(5-1)，(5-2)和(5-4)中消去应力分量和应变分量，以得到只包含位移分量的方程，同时，边界条件也必须用位移分量表示。

首先将式(5-2)代入方程(5-4)，得

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_x=\lambda\theta+2G\frac{\partial u}{\partial x},\quad \tau_{yz}=G\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\\
&\sigma_y=\lambda\theta+2G\frac{\partial v}{\partial y},\quad \tau_{xz}=G\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\\
&\sigma_z=\lambda\theta+2G\frac{\partial w}{\partial z},\quad \tau_{xy}=G\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{a}$$

其中

$$\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} \tag{b}$$

再将式(a)代入方程(5-1)，略加整理，得到

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+G)\frac{\partial\theta}{\partial x}+G\ \nabla^2 u+F_x=0\left(\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\\(\lambda+G)\frac{\partial\theta}{\partial y}+G\ \nabla^2 v+F_y=0\left(\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)\\(\lambda+G)\frac{\partial\theta}{\partial z}+G\ \nabla^2 w+F_z=0\left(\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)\end{aligned}\right\}\qquad(5-10)$$

这里的∇^2是拉普拉斯(Laplace,P.-S.)算子

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

方程(5-10)是以**位移表示的平衡微分方程**,称为**拉梅方程**.它还可表示为

$$(\lambda+G)u_{k,ki}G\ \nabla^2 u_i+F_i=0(\rho\ddot{u}_i)\qquad(5-10)'$$

或表示成矢量形式:

$$(\lambda+G)\nabla\ \theta+G\ \nabla^2\boldsymbol{U}+\boldsymbol{F}=0\left(\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{U}}{\partial t^2}\right)\qquad(5-10)''$$

式(5-10)″中的 $\boldsymbol{U}$ 为位移矢量,$\boldsymbol{F}$ 为单位体积力矢量,而

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

至于边界条件,如物体表面处的位移给定,则直接通过位移的形式给出,如式(5-6)所示;如物体表面处面力给定,则应取式(5-5)的形式,不过,其等号右边必须用位移表示。为此,将式(a)代入式(5-5),略加整理,即得用位移分量表示的应力边界条件:

$$\left.\begin{aligned}\bar{f}_x=\lambda\theta l+G\left(\frac{\partial u}{\partial x}l+\frac{\partial u}{\partial y}m+\frac{\partial u}{\partial z}n\right)+G\left(\frac{\partial u}{\partial x}l+\frac{\partial v}{\partial x}m+\frac{\partial w}{\partial x}n\right)\\\bar{f}_y=\lambda\theta m+G\left(\frac{\partial v}{\partial x}l+\frac{\partial v}{\partial y}m+\frac{\partial v}{\partial z}n\right)+G\left(\frac{\partial u}{\partial y}l+\frac{\partial v}{\partial y}m+\frac{\partial w}{\partial y}n\right)\\\bar{f}_z=\lambda\theta n+G\left(\frac{\partial w}{\partial x}l+\frac{\partial w}{\partial y}m+\frac{\partial w}{\partial z}n\right)+G\left(\frac{\partial u}{\partial z}l+\frac{\partial v}{\partial z}m+\frac{\partial w}{\partial z}n\right)\end{aligned}\right\}\qquad(5-11)$$

或表示为

$$\bar{f}_i=\lambda u_{k,k}n_i+Gu_{i,j}n_j+Gu_{s,i}n_s\qquad(5-11)'$$

总之,以位移作为基本变量求解时,归结为在给定的边界条件下求解拉梅方程。求得了位移分量,就可通过关系式(5-2)和(5-4)求应变分量和应力分量。

§5-3 应力解法 以应力表示的应变协调方程

以应力作为基本变量求解,要求在体内满足平衡微分方程,其相应的应变分量还须满足应变协调方程。因此,应力解法归结为在给定的边界条件下求解平衡微分方程(5-1)、物理方程(5-3)和应变协调方程(5-9)。现在的工作要从

中消去应变分量，使它们变成一组以应力分量表示的方程。由于平衡微分方程本来就是用应力分量表示的，故下面只需从应变协调方程(5－9)和物理方程(5－3)中消去应变分量就可以了。

把式(5－3)改写成如下的形式：

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\Theta, \quad \gamma_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{yz}\\ \varepsilon_y &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}\Theta, \quad \gamma_{xz} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xz}\\ \varepsilon_z &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_z - \frac{\nu}{E}\Theta, \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}\end{aligned}\right\} \tag{a}$$

其中

$$\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

将式(a)代入方程(5－9)的第一式和第四式，得到

$$\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\sigma_y}{\partial z^2} - \frac{\nu}{1+\nu}\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}\right) = 2\frac{\partial^2\tau_{yz}}{\partial y\partial z} \tag{b}$$

$$\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y\partial z} - \frac{\nu}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial z}\right) \tag{c}$$

轮换 x, y, z，还可得到其余 4 个类似的关系式。问题到此可以结束了，但为了使关系式(b)和(c)等具有更简单的形式，利用方程(5－1)再将它们作些简化。

分别将方程(5－1)的第二式和第三式对 y, z 求一阶偏导数然后相加，再利用它的第一式，就得到

$$\begin{aligned}2\frac{\partial^2\tau_{yz}}{\partial y\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}\right) - \frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\sigma_z}{\partial z^2} - \frac{\partial F_y}{\partial y} - \frac{\partial F_z}{\partial z}\\ &= \frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial F_x}{\partial x} - \frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\sigma_z}{\partial z^2} - \frac{\partial F_y}{\partial y} - \frac{\partial F_z}{\partial z}\\ &= \frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\sigma_z}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) + 2\frac{\partial F_x}{\partial x}\end{aligned} \tag{d}$$

将式(d)代入式(b)的右边，并注意到

$$\sigma_y + \sigma_z = \Theta - \sigma_x$$

经简化后得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1+\nu}\nabla^2\Theta - \nabla^2\sigma_x - \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}\\ &\quad = -\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) + 2\frac{\partial F_x}{\partial x}\end{aligned} \tag{e}$$

轮换 x, y, z 以后，可得到类似的两个关系式。将式(e)与轮换后的其他两式相加，得到一个重要的公式：

$$\nabla^2\Theta=-\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}\right)\frac{1+\nu}{1-\nu} \tag{f}$$

将式(f)代入式(e),则有

$$\nabla^2\sigma_x+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}=-\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}\right)-2\frac{\partial F_x}{\partial x} \tag{g}$$

这就是要求的公式之一。经 x,y,z 的轮换以后,还可得到类似的其他两式。

现在,再对关系式(c)进行简化。为此,将方程(5-1)的第二式和第三式分别对 z 和 y 求一阶偏导数,然后相加,得到

$$\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2\tau_{yz}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\tau_{xz}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\tau_{yz}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial y\partial z}=-\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}+\frac{\partial F_y}{\partial z}\right) \tag{h}$$

将式(h)与式(c)相加,经整理后,得到

$$\nabla^2\tau_{yz}+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\partial z}=-\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}+\frac{\partial F_y}{\partial z}\right) \tag{i}$$

这也是要求的公式之一。轮换 x,y,z,可得类似的其余两式。

综上所述,我们共得到如下的6个关系式:

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla^2\sigma_x+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}=-\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}\right)-2\frac{\partial F_x}{\partial x}\\
&\nabla^2\sigma_y+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}=-\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}\right)-2\frac{\partial F_y}{\partial y}\\
&\nabla^2\sigma_z+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}=-\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}\right)-2\frac{\partial F_z}{\partial z}\\
&\nabla^2\tau_{yz}+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\partial z}=-\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}+\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\\
&\nabla^2\tau_{xz}+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial z}=-\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}+\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\\
&\nabla^2\tau_{xy}+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial y}=-\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}+\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{5-12}$$

方程(5-12)称为**贝尔特拉米**(Beltrami,E.)-**米歇尔**(Michell, J. H.)**方程**。如体力为常数,则它可简化为

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2\sigma_x+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}=0,\quad \nabla^2\tau_{yz}+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\partial z}=0\\ \nabla^2\sigma_y+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}=0,\quad \nabla^2\tau_{xz}+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial z}=0\\ \nabla^2\sigma_z+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}=0,\quad \nabla^2\tau_{xy}+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial y}=0\end{aligned}\right\}\qquad(5-12)'$$

贝尔特拉米－米歇尔方程就其本质而言，乃是与应变协调方程一致的，故又称以**应力表示的协调方程**（简称**应力协调方程**）。

方程(5－12)′还可表示为

$$\sigma_{ij,kk}+\frac{1}{1+\nu}\sigma_{kk,ij}=0\qquad(5-12)''$$

总之，以应力为基本变量求解时，归结为在给定的边界条件下求解由平衡微分方程和应力协调方程组成的偏微分方程组。

* §5－4　在体力为常量时一些物理量的特性

本节要从以位移表示的平衡方程和以应力表示的协调方程出发，导出体力为常量时应力分量、应变分量、位移分量、体应变和函数 Θ 所服从的规律。为此，将静力情况下的方程(5－10)的3个式子依次对 x,y,z 求偏导数，然后相加，得

$$(\lambda+G)\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right)+G\ \nabla^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0\qquad(a)$$

由于

$$\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

式(a)可写为

$$(\lambda+G)\nabla^2\theta+G\ \nabla^2\theta=0$$

由此得

$$\nabla^2\theta=0\qquad(5-13)$$

利用式(5－13)，又有

$$\nabla^2\Theta=0\qquad(5-14)$$

由式(5－13)和(5－14)可见，在体力为常量时，θ 和 Θ 均满足拉普拉斯方程，即 θ 和 Θ 均为调和函数。

现在，对方程(5－10)的每一式作 $\nabla^2(\quad)$ 的运算，并注意到

$$\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2u=\nabla^2\frac{\partial u}{\partial x}$$

等等,得

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+G)\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\theta+G\ \nabla^2\ \nabla^2 u=0\\(\lambda+G)\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2\theta+G\ \nabla^2\ \nabla^2 v=0\\(\lambda+G)\frac{\partial}{\partial z}\nabla^2\theta+G\ \nabla^2\ \nabla^2 w=0\end{aligned}\right\}\tag{b}$$

由式(5-13),式(b)变为

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2\ \nabla^2 u=0\\\nabla^2\ \nabla^2 v=0\\\nabla^2\ \nabla^2 w=0\end{aligned}\right\}\tag{5-15}$$

这里的

$$\nabla^2\ \nabla^2=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

如果对方程(5-12)′作∇^2(　　)的运算,并注意到

$$\nabla^2\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\nabla^2\Theta=0$$

等等,则有

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2\ \nabla^2\sigma_x=0,\quad &&\nabla^2\ \nabla^2\tau_{yz}=0\\&\nabla^2\ \nabla^2\sigma_y=0,\quad &&\nabla^2\ \nabla^2\tau_{xz}=0\\&\nabla^2\ \nabla^2\sigma_z=0,\quad &&\nabla^2\ \nabla^2\tau_{xy}=0\end{aligned}\right\}\tag{5-16}$$

再由式(5-3),极易证明

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2\ \nabla^2\varepsilon_x=0,\quad &&\nabla^2\ \nabla^2\gamma_{yz}=0\\&\nabla^2\ \nabla^2\varepsilon_y=0,\quad &&\nabla^2\ \nabla^2\gamma_{xz}=0\\&\nabla^2\ \nabla^2\varepsilon_z=0,\quad &&\nabla^2\ \nabla^2\gamma_{xy}=0\end{aligned}\right\}\tag{5-17}$$

由式(5-15),(5-16)和(5-17)可以看出,体力为常量时,应力分量、应变分量和位移分量均满足双调和方程,也就是说,应力分量、应变分量和位移分量均为双调和函数。

§5-5 弹性力学的一般原理

这一节,我们要介绍三个具有普遍意义的原理,它们分别是:叠加原理、解的唯一性定理和圣维南原理。这些原理对于解决具体问题,扩大解的应用范围是极为重要的。

（一）叠加原理

在材料力学和结构力学中，人们常用叠加原理有效地处理各种复杂受载的情况。由于本课程研究的仍为小变形线弹性情况，弹性力学的基本方程，包括位移解法中的拉梅方程，应力解法中的平衡微分方程和贝尔特拉米－米歇尔方程，以及一切边界条件都是线性的，所以极易证明叠加原理在此仍然成立（请读者自己完成）。

现将叠加原理完整地叙述如下：在小变形线弹性情况下，作用在物体上几组荷载产生的总效应（应力和变形），等于每组荷载单独作用效应的总和。

必须指出，叠加原理成立的条件除了小变形线弹性这两个假设外，还要求一种荷载的作用不会引起另一种荷载的作用发生性质的变化，否则此原理也不适用。例如，对于杆的纵横弯曲问题，横向荷载引起的弯曲变形将使轴向荷载产生附加的弯曲效应，而叠加原理却没有考虑这种效应，所以就不适用。

（二）解的唯一性定理

我们要证明，在小变形线弹性情况下，弹性力学问题的解是唯一的，拟采用反证法。假设在同一体力（F_x，F_y，F_z）作用下，并在同一边界条件下有两种不同的解答，即

$$\left.\begin{array}{l} u',v',w' \\ \varepsilon'_x,\varepsilon'_y,\varepsilon'_z,\gamma'_{yz},\gamma'_{xz},\gamma'_{xy} \\ \sigma'_x,\sigma'_y,\sigma'_z,\tau'_{yz},\tau'_{xz},\tau'_{xy} \end{array}\right\} \tag{a}$$

和

$$\left.\begin{array}{l} u'',v'',w'' \\ \varepsilon''_x,\varepsilon''_y,\varepsilon''_z,\gamma''_{yz},\gamma''_{xz},\gamma''_{xy} \\ \sigma''_x,\sigma''_y,\sigma''_z,\tau''_{yz},\tau''_{xz},\tau''_{xy} \end{array}\right\} \tag{b}$$

我们的目的，要证明这两组解答相等。为此试作这两组解答的差，而得到一组新的变量：

$$\left.\begin{array}{lll} u=u'-u'', & v=v'-v'', & w=w'-w'' \\ \varepsilon_x=\varepsilon'_x-\varepsilon''_x, & \varepsilon_y=\varepsilon'_y-\varepsilon''_y, & \varepsilon_z=\varepsilon'_z-\varepsilon''_z \\ \gamma_{yz}=\gamma'_{yz}-\gamma''_{yz}, & \gamma_{xz}=\gamma'_{xz}-\gamma''_{xz}, & \gamma_{xy}=\gamma'_{xy}-\gamma''_{xy} \\ \sigma_x=\sigma'_x-\sigma''_x, & \sigma_y=\sigma'_y-\sigma''_y, & \sigma_z=\sigma'_z-\sigma''_z \\ \tau_{yz}=\tau'_{yz}-\tau''_{yz}, & \tau_{xz}=\tau'_{xz}-\tau''_{xz}, & \tau_{xy}=\tau'_{xy}-\tau''_{xy} \end{array}\right\} \tag{c}$$

由于带“′”的量和带“″”的量满足完全相同的方程（平衡微分方程、几何方程和物理方程），例如对应力分量，有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau'_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau'_{zx}}{\partial z}+F_x=0\\&\frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma'_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau'_{zy}}{\partial z}+F_y=0\\&\frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma'_z}{\partial z}+F_z=0\end{aligned}\right\}\tag{d}$$

和

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial \sigma''_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau''_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau''_{zx}}{\partial z}+F_x=0\\&\frac{\partial \tau''_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma''_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau''_{zy}}{\partial z}+F_y=0\\&\frac{\partial \tau''_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau''_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma''_z}{\partial z}+F_z=0\end{aligned}\right\}\tag{e}$$

因此，将式(d)，(e)中各对应的方程相减，得到由式(c)表示的不带“′”的应力分量所满足的方程：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}=0\\&\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}=0\\&\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}=0\end{aligned}\right\}\tag{f}$$

又由于两组量还满足完全相同的边界条件，故按同样的方法，可得到式(c)中不带“′”的量所满足的边界条件，分下列三种情况：

(1) 对于第一类边值问题，有

$$\left.\begin{aligned}0&=\sigma_x l+\tau_{yx}m+\tau_{zx}n\\0&=\tau_{xy}l+\sigma_y m+\tau_{zy}n\\0&=\tau_{xz}l+\tau_{yz}m+\sigma_z n\\&(\text{在 } S \text{ 上})\end{aligned}\right\}\tag{g}$$

(2) 对于第二类边值问题，有

$$u=0,\quad v=0,\quad w=0\quad(\text{在 } S \text{ 上})\tag{h}$$

(3) 对于第三类边值问题，有

$$\left.\begin{aligned}0&=\sigma_x l+\tau_{yx}m+\tau_{zx}n\\0&=\tau_{xy}l+\sigma_y m+\tau_{zy}n\\0&=\tau_{xz}l+\tau_{yz}m+\sigma_z n\\&(\text{在 } S_\sigma \text{ 上})\end{aligned}\right\}\tag{i}_1$$

$$u=0,\quad v=0,\quad w=0\quad(\text{在 } S_u \text{ 上})\tag{i}_2$$

由式(f),(g),(h)和(i)可以看出,以式(c)表示的不带"′"的量,相当于弹性体不受体力作用,并在物体的边界处,或者面力是零,或者位移是零,或者一部分上面力是零而另一部分上位移是零时的解。于是外力功为

$$W=\iiint_V (F_x u+F_y v+F_z w)\mathrm{d}V+\iint_S (\bar{f}_x u+\bar{f}_y v+\bar{f}_z w)\mathrm{d}S=0$$

将平衡微分方程(5-1)和应力边界条件(5-5)代入,并利用高斯积分定理,有

$$\begin{aligned}W=&-\iiint_V\left[\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}\right)u+\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}\right)v+\right.\\&\left.\left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}\right)w\right]\mathrm{d}V+\iint_S[(\sigma_x l+\tau_{xy}m+\tau_{xz}n)u+\\&(\tau_{xy}l+\sigma_y m+\tau_{yz}n)v+(\tau_{xz}l+\tau_{yz}m+\sigma_z n)w]\mathrm{d}S\\=&-\iiint_V\left[\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}\right)u+\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}\right)v+\right.\\&\left.\left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}\right)w\right]\mathrm{d}V+\iiint_V\left[\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}\right)u+\right.\\&\left.\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}\right)v+\left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}\right)w\right]\mathrm{d}V+\iiint_V\left[\sigma_x\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial v}{\partial y}+\right.\\&\left.\sigma_z\frac{\partial w}{\partial z}+\tau_{yz}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\tau_{xz}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\tau_{xy}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}V=0\end{aligned}$$

消去同类项,并利用几何方程,上式简化为

$$\begin{aligned}W&=\iiint_V(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\sigma_z\varepsilon_z+\tau_{yz}\gamma_{yz}+\tau_{xz}\gamma_{xz}+\tau_{xy}\gamma_{xy})\mathrm{d}V\\&=2\iiint_V v_\varepsilon\mathrm{d}V=0\end{aligned}\tag{j}$$

由于

$$v_\varepsilon(\varepsilon_{ij})\geqslant 0$$

因此,式(j)成立的条件为

$$v_\varepsilon(\varepsilon_{ij})=0$$

于是得

$$\varepsilon_x=\varepsilon_y=\varepsilon_z=\gamma_{yz}=\gamma_{xz}=\gamma_{xy}=0$$

$$\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=\tau_{yz}=\tau_{xz}=\tau_{xy}=0$$

将它们代入式(c),得到

$$\varepsilon'_x=\varepsilon''_x,\quad \varepsilon'_y=\varepsilon''_y,\quad \varepsilon'_z=\varepsilon''_z$$

$$\gamma'_{yz}=\gamma''_{yz},\quad \gamma'_{xz}=\gamma''_{xz},\quad \gamma'_{xy}=\gamma''_{xy}$$

$$\sigma'_x=\sigma''_x,\quad \sigma'_y=\sigma''_y,\quad \sigma'_z=\sigma''_z$$

$$\tau'_{yz}=\tau''_{yz},\quad \tau'_{xz}=\tau''_{xz},\quad \tau'_{xy}=\tau''_{xy}$$

这样就证明了,在上述边值问题中,应力分量和应变分量是唯一的。至于位移,在第一类边值问题中,对于已完全确定的应变分量,在将柯西方程积分时,可允许相差一个形式为

$$\left.\begin{aligned}u&=qz-ry+a\\v&=rx-pz+b\\w&=py-qx+c\end{aligned}\right\}\tag{k}$$

的函数项,这里的 a,b,c,p,q,r 为常数。函数式(k)代表物体的刚体运动。但很容易理解,在第二类和第三类边值问题中,由于在物体表面的全部或一部分上的位移是给定的,此时,位移分量就不可能有这种差别,也就是说,此时位移分量也是唯一的。

现在将弹性力学解的唯一性定理完整地叙述如下:假设弹性体受已知体力作用,在物体的边界上,或者面力已知,或者位移已知,或者一部分上面力已知,而另一部分上位移已知,则在弹性体平衡时,体内各点的应力分量与应变分量是唯一的,对于后两种情况,位移分量也是唯一的。

弹性力学解的唯一性定理的重要性在于,它为以后常用的**逆解法**或**半逆解法**提供了一个理论依据。因为,在一般情况下,直接由给定的边界条件去求解弹性力学的基本方程是很困难的,因此,通常只好采用上述两种方法。

所谓逆解法,就是先按某种方法给出一组满足全部基本方程的应力分量或位移分量,然后考察,在确定的坐标系下,对于形状和几何尺寸完全确定的物体,当其表面受什么样的面力作用或具有什么样的位移时,才能得到这组解答。

所谓半逆解法,就是对于给定的问题,根据弹性体的几何形状、受力特点或材料力学已知的初等结果,假设一部分应力分量或位移分量为已知,然后由基本方程求出其他量,把这些量合在一起来凑合已知的边界条件;或者把全部的应力分量或位移分量作为已知,然后校核这些假设的量是否满足弹性力学的基本方程和边界条件。

这里必须指出,弹性力学解的唯一性定理的证明是以这样一个假设为依据的:当物体不受外力作用时,体内的应变能为零,应力分量和应变分量也全为零。当涉及初应力问题时,这一假设不再成立,因此不能简单地套用这里的唯一性定理,而需专门地加以讨论。

(三) 圣维南原理

在求解弹性力学问题时,只有知道作用于边界上的面力的详细分布情况,才能精确地写出它的边界条件。但在实际问题中往往会遇到两种情况。其一,虽然在大部分边界上面力分布是清楚的,但在其局部边界上面力分布并不清楚,而

只知道它的静力效应，即它的主矢量和主矩。在这情况下，当然无法精确地写出这局部边界上的边界条件，而只能从静力等效原则出发，让作用于这局部边界上应力的主矢量和主矩，分别地同所给面力的主矢量和主矩相等①。这种形式的边界条件，实际上是一种放松边界条件②。其二，在全部边界上的面力分布是清楚的，但我们所求的解答，虽然能精确地满足大部分边界上的边界条件，而在其局部，只能满足放松边界条件。这样，自然会产生一个问题：由于局部边界上放松边界条件的采用，究竟会给问题的解答带来多大的影响？这问题将被**圣维南原理（局部性原理）**所回答。

圣维南原理可表述为：若在物体任一小部分上作用一个平衡力系，则该平衡力系在物体内所产生的应力分布，仅局限于该力系作用的附近区域，在离该区域的相当远处，这种影响便急剧地减小。

图 5－1 表示的例子说明了局部性原理的精神。如用钳子夹住一直杆，就等于在杆上加上一组平衡力系。试验证明，无论作用的力多大，在虚线圈着的一个小区域以外几乎不会有应力产生。

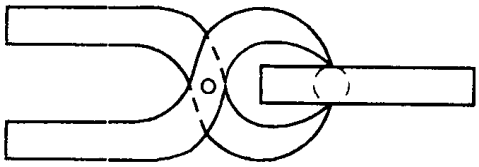


图 5－1

根据圣维南原理，不难回答上面所提出的问题。由于在局部边界上采用了放松边界条件，被忽视的，只是这部分边界上面力的具体分布方式，但在静力上仍和原来的荷载保持等效。由刚体静力学可知，两静力等效力系之间相差的只是一个平衡力系，因此，在局部边界上采用放松边条件，相当于在这局部边界上增减一个平衡力系所带来的影响。由圣维南原理可知，这种影响是局部的。

综上所述，圣维南原理又可表述为：若把作用在物体局部边界上的面力，用另一组与它静力等效（即有相同的主矢量和主矩）的力系来代替，则在力系作用区域的附近应力分布将有显著的改变，但在远处所受的影响可以不计。

大量的实验和数值计算方法的结果均表明这个原理是正确的。至于圣维南原理所指的影响区域，根据古迪尔（Goodier，J. N.）等人的研究，它大概和外力作用区域的大小相当。

---

① 面力从物体外侧作用于边界，而应力则从内侧作用于边界。所谓应力在边界上的值，是指当它的作用点趋近于边界时的极限。如果在同一边界上面力与应力分布规律一样（方向相反），则表示精确满足边界条件；如果在局部边界上，二者只有相同的主矢量和主矩（方向相反），则表示近似满足边界条件。

② 见文献[36]第 109 页 §1 的叙述。

必须引起注意的是，当我们对薄壁杆件引用圣维南原理时，要求力的作用区域必须与壁厚尺寸大致相当，否则将会导致严重的错误。例如图 5-2 所示的工字梁，在端面的两个翼缘上作用着一对大小相等、方向相反的力偶，从梁的整个横截面范围看，它是平衡力系，但实际上它构成了双力矩，将使整个杆件产生弯曲和扭转。因此，在对薄壁杆件引用圣维南原理时，应该慎重。

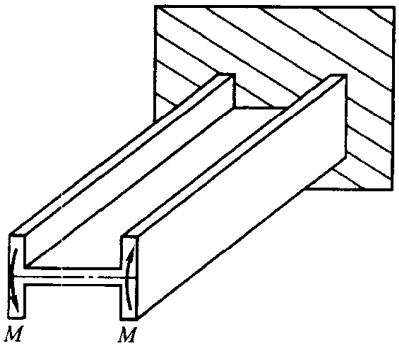


图 5-2

§5-6 弹性力学的简单问题

作为半逆解法的应用，下面我们将先介绍几个弹性力学的简单问题，这些问题的应力分量是坐标的一次函数，因贝尔特拉米-米歇尔方程总是满足的，故只需校核这些应力分量是否满足平衡微分方程和应力边界条件就可以了。

（一）圆柱体的扭转

考察在两端承受扭矩 M 且不计体力的圆柱体（图 5-3）。为了求解此问题，试采用按材料力学的方法求得的应力分量，校核它们是否满足平衡微分方程和应力边界条件。如满足的话，则根据解的唯一性定理，就是问题的解答。

按材料力学的方法，在圆柱体扭转时，截面上发生与半径垂直且与点到圆心的距离成正比例的切应力

$$\tau = \alpha G\rho \tag{a}$$

这里的 α 表示单位长度的扭转角。将 τ 向 Ox 轴和 Oy 轴方向分解，得

$$\left.\begin{aligned}\tau_{xz} &= -\tau\sin\varphi = -\alpha G\rho\sin\varphi\\ \tau_{yz} &= \tau\cos\varphi = \alpha G\rho\cos\varphi\end{aligned}\right\} \tag{b}$$

但由图 5-3 可以看出

$$\cos\varphi = \frac{x}{\rho},\quad \sin\varphi = \frac{y}{\rho}$$

将上式代入式(b)，并假设其余的应力分量全为零，于是得下列一组应力分量

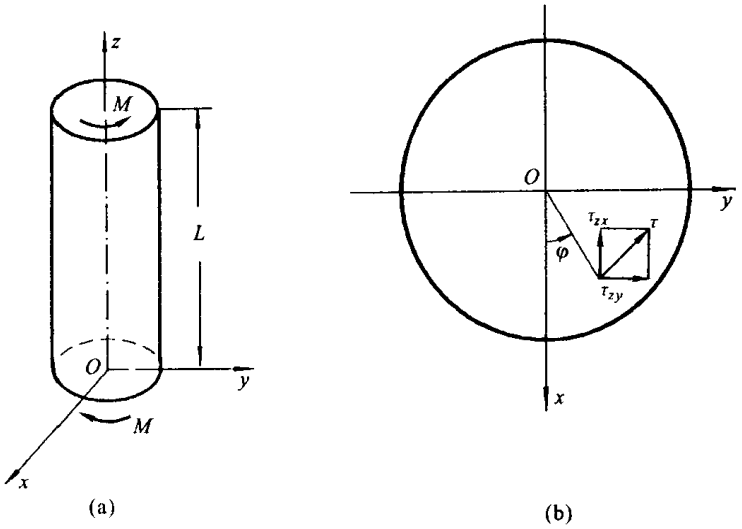


图 5－3

$$\left.\begin{aligned}&\tau_{xz}=-\alpha G y,\ \tau_{yz}=\alpha G x\\&\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=\tau_{xy}=0\end{aligned}\right\}\tag{5-18}$$

不难直接验证，在体力为零时，上面一组应力分量是满足平衡微分方程的。

现在校核它们是否满足边界条件。我们略去式(5－5)中为零的各项，于是边界条件可写为

$$\left.\begin{aligned}\bar{f}_x&=\tau_{zx}n\\\bar{f}_y&=\tau_{zy}n\\\bar{f}_z&=\tau_{xz}l+\tau_{yz}m\end{aligned}\right\}\tag{c}$$

将它应用到柱体的侧面上。因为，在侧面上有

$$\bar{f}_x=\bar{f}_y=\bar{f}_z=0$$

$$l=\cos\varphi=\frac{x}{\rho},\quad m=\sin\varphi=\frac{y}{\rho},\quad n=0$$

所以，侧面处的边界条件显然是满足的。在圆柱体的两个端面上，由于外力的具体分布情况不清楚，我们只知道它们静力上等效于扭矩 M，因此，我们只能利用圣维南原理写出它的放松边界条件，即为

$$\left.\begin{aligned}&\iint\tau_{zx}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0\\&\iint\tau_{zy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0\\&M=\iint(x\tau_{zy}-y\tau_{zx})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&(\text{在 } z=0,L \text{ 处})\end{aligned}\right\}\tag{d}$$

将式(5－18)代入，由于坐标原点位于横截面的形心，故式(d)的第一、二式自然

满足，第三式变为

$$M=\alpha G\iint(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\alpha GI_\mathrm{p}$$

于是

$$\alpha=\frac{M}{GI_\mathrm{p}} \tag{5-19}$$

其中 I_p 为极惯性矩，GI_p 称为**抗扭刚度**。于是证明了，对于圆柱体的扭转，用材料力学方法所求出的应力[式(5-18)]，也是弹性力学的解答。

下面求位移分量。将式(5-18)代入式(5-3)求得应变分量，再利用式(5-2)，得到

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial w}{\partial z}=0\\&\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}=\alpha x\\&\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=-\alpha y\\&\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0\end{aligned}\right\} \tag{e}$$

由式(e)的前三式可知

$$u=f(y,z),\quad v=\varphi(x,z),\quad w=\psi(x,y) \tag{f}$$

这里的 f,φ,ψ 均为任意函数，不过，它们还得满足方程(e)的后三式。故将式(f)代入式(e)的后三式，得到

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\alpha x\\&\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\alpha y\\&\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}=0\end{aligned}\right\} \tag{g}$$

通过阶数的升高，可将方程(g)化为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=-\alpha,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0\\&\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}=\alpha,\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0\\&\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0\end{aligned}\right\} \tag{h}$$

由此得

$$\left.\begin{aligned} f(y,z) &= -\alpha yz + ay + bz + c \\ \varphi(x,z) &= \alpha xz + dx + ez + g \\ \psi(x,y) &= hx + iy + k \end{aligned}\right\} \tag{i}$$

由式(i)表示的函数是方程组(h)的通解。但由于方程(g)变到方程(h)阶数增高了一次,故函数式(i)未必满足方程(g)。现把它们代入方程(g),于是有

$$e + i = 0, \quad b + h = 0, \quad a + d = 0$$

说明,当上述条件成立时,函数式(i)才是原方程(g)的解。故最后得到

$$\left.\begin{aligned} u &= f(y,z) = -\alpha yz - dy + bz + c \\ v &= \varphi(x,z) = \alpha xz + dx - iz + g \\ w &= \psi(x,y) = -bx + iy + k \end{aligned}\right\} \tag{j}$$

显然,式中的一次项和常数项分别表示整个柱体的刚体转动和刚体平动。为了使柱体不能随便地移动,可以假设柱体内任何一点(比如说坐标原点)的位移为零,即

$$(u)_{x=y=z=0} = (v)_{x=y=z=0} = (w)_{x=y=z=0} = 0$$

将它代入式(j),得

$$c = g = k = 0$$

为了使柱体不能随便转动,我们只要规定过坐标原点且与坐标轴平行的三条微分线段 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$ 中的任何两条保持不动就可以了。比如规定微分线段 $\mathrm{d}z$ 保持不动,则有

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{x=y=z=0} = 0, \qquad \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{x=y=z=0} = 0 \tag{k}$$

再比如规定微分线段 $\mathrm{d}y$ 在 Oxy 平面内保持不动,则有

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x=y=z=0} = 0 \tag{l}$$

将条件(k)和(l)用于函数式(j)上,则有

$$b = d = i = 0$$

故最后得

$$\left.\begin{aligned} u &= -\alpha yz \\ v &= \alpha xz \\ w &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{5-20}$$

这里的 $w=0$ 表示,圆柱体扭转时,各横截面仍保持为平面。

(二) 梁的纯弯曲

考察一根不计自重的梁,其两端承受大小相等方向相反的力偶矩 M 的作用,并假设这两个力偶矩作用在梁的对称平面内。取坐标轴如图 5-4 所示(这

里的 Oz 轴通过截面的形心，Ox 轴与 Oy 轴为截面的形心主轴)。

按材料力学的方法，这问题的结果为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_z &= -\frac{Ex}{R}\\ \sigma_x = \sigma_y &= \tau_{yz} = \tau_{xz} = \tau_{xy} = 0\end{aligned}\right\} \tag{5-21}$$

这里的 R 表示弯曲后梁轴线的半径。现在校核它们是否满足平衡微分方程和应力边界条件。

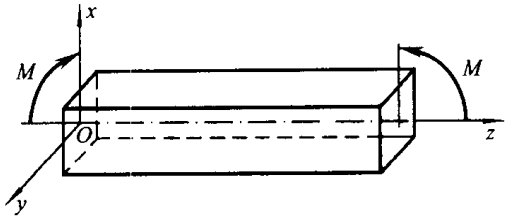


图 5-4

根据题设，体力为零，故平衡微分方程显然是满足的。

再考察边界条件。首先，在梁的侧面，由于

$$\bar{f}_x = \bar{f}_y = \bar{f}_z = 0, n = 0$$

将它们和应力表达式(5-21)一起代入边界条件(5-5)，显然，它们是满足的；在梁的两个端面，按与圆柱体扭转完全类似的理由，只要作用在梁的端面上各点的应力 σ_z 能简化为与 Oy 轴平行的力偶矩，则由式(5-21)给出的应力分量为本问题的解。事实上，由于 Oz 轴通过截面的形心，且 Ox 轴与 Oy 轴为形心主轴，故梁端面上各点应力 σ_z 的主矢量为

$$\iint \sigma_z \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{E}{R}\iint x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

主矩在 Ox 轴上的分量为

$$\iint \sigma_z y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{E}{R}\iint xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

而主矩在 Oy 轴上的分量为

$$M = -\iint \sigma_z x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{E}{R}\iint x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{E}{R}I_y$$

由此得

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI_y} \tag{5-22}$$

到此，就证明了以式(5-21)表示的应力分量确实对应于梁纯弯曲的解，而且，当式(5-22)成立时，它们还满足端面处的放松边界条件。

为了求得位移分量，我们将应力表达式(5-21)代入式(5-3)后再利用式

(5－2),就得到一组方程

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\nu x}{R}\\&\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\nu x}{R}\\&\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{x}{R}\\&\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}=0\\&\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=0\\&\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0\end{aligned}\right\}\tag{a}$$

由上述方程的前三式,得

$$\left.\begin{aligned}u&=\frac{\nu x^2}{2R}+f(y,z)\\v&=\frac{\nu xy}{R}+\varphi(x,z)\\w&=-\frac{xz}{R}+\psi(x,y)\end{aligned}\right\}\tag{b}$$

将式(b)代入方程(a)的后三式,得到 f,φ,ψ 所满足的方程

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0\\&\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{z}{R}\\&\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\nu y}{R}\end{aligned}\right\}\tag{c}$$

通过阶数增高,将方程(c)化为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\frac{\nu}{R},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{1}{R}\\&\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}=0,\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0\\&\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0\end{aligned}\right\}\tag{d}$$

由此得

$$\left.\begin{aligned}f(y,z)&=-\frac{\nu y^2}{2R}+\frac{z^2}{2R}+ay+bz+c\\\varphi(x,z)&=dx+ez+g\\\psi(x,y)&=hx+iy+k\end{aligned}\right\}\tag{e}$$

将式(e)代入式(c),得

$$i+e=0,\quad b+h=0,\quad a+d=0 \tag{f}$$

将式(e)代入式(b),并注意到式(f),于是得

$$\left.\begin{aligned} u&=\frac{z^2}{2R}+\frac{\nu(x^2-y^2)}{2R}-dy+bz+c\\ v&=\frac{\nu xy}{R}+dx-iz+g\\ w&=-\frac{xz}{R}-bx+iy+k \end{aligned}\right\} \tag{g}$$

式中的一次项与常数项分别表示梁的刚体转动和平移。为使梁不能随便地平移和转动,可按与处理圆柱体扭转完全相同的理由,假设

$$\left.\begin{aligned} &(u)_{x=y=z=0}=0,\quad (v)_{x=y=z=0}=0,\quad (w)_{x=y=z=0}=0\\ &\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{x=y=z=0}=0,\quad \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{x=y=z=0}=0,\quad \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=y=z=0}=0 \end{aligned}\right\} \tag{h}$$

将式(h)用于函数表示式(g)上,于是有

$$c=g=k=0,\quad b=d=i=0$$

故最后得

$$\left.\begin{aligned} u&=\frac{z^2+\nu(x^2-y^2)}{2R}\\ v&=\frac{\nu xy}{R}\\ w&=-\frac{xz}{R} \end{aligned}\right\} \tag{5-23}$$

对于轴线上的各点($x=y=0$),由式(5-23)得

$$v=w=0$$

$$u=\frac{z^2}{2R} \tag{5-24}$$

这就是梁轴线弯曲后的方程。

现任取一个梁的横截面 $z=z_0$,此截面上的各点在梁变形以后的新坐标为

$$z=z_0+w_0$$

这里的 w_0 表示 w 在 $z=z_0$ 处的值,由式(5-23),有

$$w_0=-\frac{xz_0}{R}$$

于是

$$z=z_0\left(1-\frac{x}{R}\right) \tag{5-25}$$

这是一个与 Oy 轴平行的平面方程,截面 $z=z_0$ 上的各点在梁变形以后都落在

这个平面上。因此，梁的横截面在梁变形后仍保持为平面。

把变形后的横截面方程(5－25)写成

$$x=-\frac{R}{z_0}z+R$$

则横截面与 Oz 轴夹角的正切，即斜率为

$$\tan\beta=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=-\frac{R}{z_0}$$

另外，变形后的轴线[见式(5－24)]在 $z=z_0$ 处的斜率为

$$\tan\alpha=\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right)_{z=z_0}=\frac{z_0}{R}$$

由于

$$\tan\alpha\tan\beta=-1$$

故弯曲后的横截面仍然和变形后梁的轴线垂直(图 5－5)。这样，就完全证实了在材料力学里对梁的纯弯曲所作的平面假设的正确性。

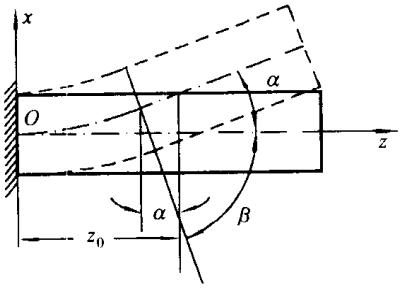


图 5－5

现在，考察矩形截面的形状改变。在梁弯曲前，矩形截面的两侧边(图 5－6)的方程为

$$z=z_0,\qquad y=\pm\frac{b}{2}$$

在梁弯曲后，其方程为

$$\left.\begin{aligned}z&=z_0+w_0=z_0-\frac{z_0x}{R}=z_0\left(1-\frac{x}{R}\right)\\y&=\pm\frac{b}{2}+v_0=\pm\frac{b}{2}\pm\frac{\nu bx}{2R}\end{aligned}\right\}\tag{5-26}$$

因此两侧边仍保持为直线。

梁弯曲前，在 $z=z_0$ 处，矩形截面上下两边的方程为

$$z=z_0,\qquad x=\pm\frac{h}{2}$$

在梁弯曲后，其方程为

$$\left.\begin{aligned} z &= z_0 + w_0 = z_0 - \frac{xz_0}{R} = z_0\left(1 - \frac{x}{R}\right) \\ x &= \pm\frac{h}{2} + u_0 = \pm\frac{h}{2} + \frac{z_0^2 + \nu\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}{2R} \end{aligned}\right\} \tag{5-27}$$

上面的第一个方程是 x 的一次式，第二个方程是 y 的二次式，因此，上下两边都变为抛物线，如图 5-6 所示。

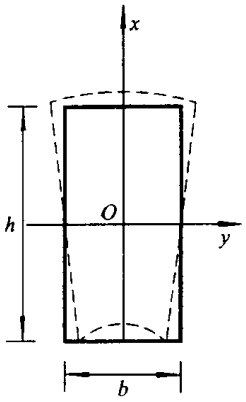


图 5-6

(三) 柱体在自重影响下的变形

现在，我们来研究一个任意横截面的柱体在自重作用下的变形情况。设柱体的长度为 L，其上端面是悬挂的，坐标的选择如图 5-7 所示。在这种情况下，体力的三个分量是

$$F_x = F_y = 0, \quad F_z = -\rho g$$

这里，ρ 是柱体的密度，g 为重力加速度。

柱体每个截面上的应力是由这截面以下部分的柱体的重量而产生的，假如其分布是均匀的，则可得

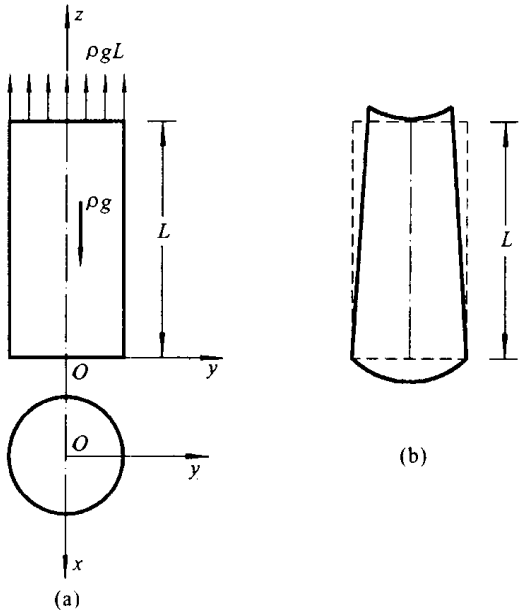


图 5-7

$$\sigma_z = \rho g z, \quad \sigma_x = \sigma_y = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0 \tag{5-28}$$

这组应力分量显然满足平衡微分方程并满足侧面处和下端面的边界条件。在上端面上，由于

$$l=0,\quad m=0,\quad n=1,\quad \sigma_z=\rho gL$$

因此由式(5-5),得

$$\bar{f}_x=0,\quad \bar{f}_y=0,\quad \bar{f}_z=\rho gL$$

这表明,柱体悬挂面的面力分布一定是要均匀的,这样,在截面上的应力分布均匀的假定才符合实际。

为了求得位移分量,将应力表达式(5-28)代入方程(5-3),并利用方程(5-2),得下列一组方程:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\nu\rho gz}{E}\\
&\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\nu\rho gz}{E}\\
&\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\rho gz}{E}\\
&\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}=0\\
&\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=0\\
&\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0
\end{aligned}\right\}\tag{a}$$

由方程(a)的前三式,得

$$\left.\begin{aligned}
u&=-\frac{\nu\rho g}{E}xz+f(y,z)\\
v&=-\frac{\nu\rho g}{E}yz+\varphi(x,z)\\
w&=\frac{\rho g}{2E}z^2+\psi(x,y)
\end{aligned}\right\}\tag{b}$$

将 u,v,w 代入方程(a)的后三式,得到 f,φ 和 ψ 所满足的方程

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{\nu\rho g}{E}y\\
&\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\nu\rho g}{E}x\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}=0
\end{aligned}\right\}\tag{c}$$

通过阶数升高,得如下的方程组:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0\\
&\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}=0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\partial z}=0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}=0\\
&\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}=\frac{\nu\rho g}{E}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x\partial y}=0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}=\frac{\nu\rho g}{E}
\end{aligned}\right\} \tag{d}$$

由此得

$$f(y,z)=ay+bz+c$$
$$\varphi(x,z)=dx+ez+g$$
$$\psi(x,y)=\frac{\nu p}{2E}(x^2+y^2)+hx+iy+k$$

将它们代回到式(c),得

$$e+i=0, \quad h+b=0, \quad a+d=0$$

于是,位移的表达式变为

$$\left.\begin{aligned}
u&=-\frac{\nu\rho g}{E}xz-dy+bz+c\\
v&=-\frac{\nu\rho g}{E}yz+dx-iz+g\\
w&=\frac{\rho g}{2E}[z^2+\nu(x^2+y^2)]-bx+iy+k
\end{aligned}\right\} \tag{e}$$

柱体固定的方式与前面两个问题相同:

$$\left.\begin{aligned}
&(u)_{x=y=0,z=L}=(v)_{x=y=0,z=L}=(w)_{x=y=0,z=L}=0\\
&\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{x=y=0,z=L}=\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{x=y=0,z=L}=\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=y=0,z=L}=0
\end{aligned}\right\} \tag{f}$$

将边界条件(f)用于位移表达式(e)上,得

$$b=c=d=g=i=0$$
$$k=-\frac{\rho g L^2}{2E}$$

代入式(e),故最后得位移分量

$$\left.\begin{aligned}
u&=-\frac{\nu\rho g}{E}xz\\
v&=-\frac{\nu\rho g}{E}yz\\
w&=\frac{\rho g}{2E}[z^2-L^2+\nu(x^2+y^2)]
\end{aligned}\right\} \tag{5-29}$$

由式(5-29)可以看出,柱体轴线($x=0,y=0$)上各点的位移为

$$u=0, \quad v=0, \quad w=-\frac{\rho g}{2E}(L^2-z^2)$$

当 $z=L$ 时，$w=0$；当 $z=0$ 时，$w=-\frac{\rho g L^2}{2E}$，位移最大。由式(5-29)还可看出，柱体截面上的线段，变形后，越到上部愈加缩短，变形后的柱体形状如图 5-7b 所示。现在我们来看一看 $z=c$ 的截面的变形情况，由式(5-29)可得

$$z'=c+w=c+\frac{\rho g(c^2-L^2)}{2E}+\frac{\nu\rho g}{2E}(x^2+y^2)$$

这个方程代表一个向下凹的抛物面，这就是变形前的平面经变形后变成一个抛物面。

思考题与习题

5-1　试扼要叙述弹性力学的三类边值问题和解决问题的两种方法及其最后结论。

5-2　为什么说同时以应力、应变和位移 15 个量作未知函数求解时，应变协调方程是自然满足的？

5-3　图 5-8 表示一矩形板，一对边均匀受拉，另一对边均匀受压，求应力和位移。

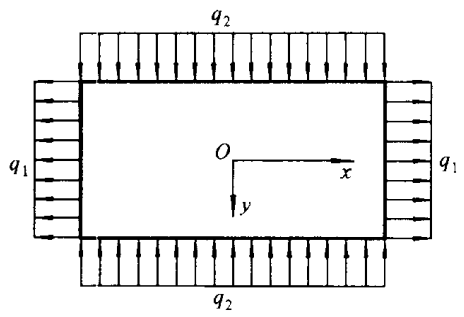


图 5-8

5-4　求半无限体在自重和表面均布压力作用下的应力和位移的分布情况，设单位面积的压力为 q，物体的密度为 ρ。

提示：设在半无限体内距表面的距离 h 处，$w=0$。

5-5　设一等截面杆受轴向拉力 F 作用，杆的横截面积为 A，求应力分量和位移分量。设 z 轴与杆的轴线重合，原点取在杆长的一半处；并设在 $x=y=z=0$ 处，$u=v=w=0$，且

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

5-6　当体力为零时，应力分量为

$$\sigma_x=A[y^2+\nu(x^2-y^2)],\quad \tau_{yz}=0$$
$$\sigma_y=A[x^2+\nu(y^2-x^2)],\quad \tau_{zx}=0$$
$$\sigma_z=A\nu(x^2+y^2),\quad \tau_{xy}=-2A\nu xy$$

式中，$A\neq 0$。试检查它们是否可能发生。

5-7　图 5-9 所示的矩形截面长杆偏心受压，压力为 F，偏心距为 e，求应力分量。设杆的横截面积为 A。

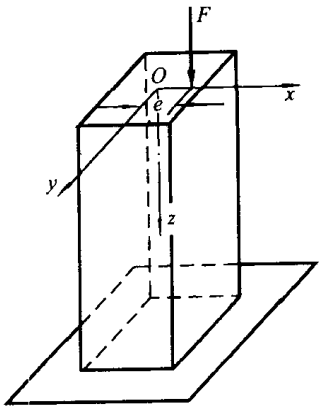


图 5－9

5－8 矩形板 $ABCD$，厚度为 h，两对边分别受均布的弯矩（单位宽度上）M_1 和 M_2 作用，如图 5－10 所示。验证应力分量

$$\sigma_x=\frac{12M_1z}{h^3},\quad \sigma_y=\frac{12M_2z}{h^3},\quad \sigma_z=\tau_{yz}=\tau_{xz}=\tau_{xy}=0$$

是否是该问题的弹性力学空间问题的解答。

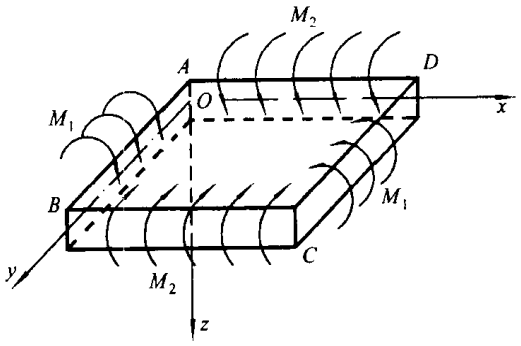


图 5－10

第六章　平面问题的直角坐标解答

在实际问题中，严格地说，任何弹性体都是空间物体，它所受的外力一般是空间力系。因此，在一般情况下，求解弹性力学的问题都将归结为复杂的偏微分方程组的边值问题。这样的求解工作，实际上存在着很大的困难。但是，当工程问题中某些结构的形状和受力情况具有一定特点时，只要经过适当的简化和力学的抽象化处理，就可归结为所谓的**弹性力学的平面问题**。这种问题的特点在于：一切现象看作是在一个平面内发生的，因而在数学上属于二维的问题。本章的任务就是要介绍弹性力学平面问题的两个组成部分：平面应变问题和平面应力问题，导出它们所适合的方程，并通过一些实例，使读者熟悉并掌握解决这类问题的方法和步骤。

§6-1　平面应变问题

考察一个母线与 Oz 轴平行且很长的柱形物体，其所承受的外力与 Oz 轴垂直，而且它们的分布规律不随坐标 z 而改变（图 6-1 所示的几种情况就是这类工程实例）。在上述条件下，我们可认为柱体是无限长的，如果从中任意取出一个横截面，则柱形物体的形状和受载情况将对此截面是对称的。因此，在柱形物体变形时，截面上的各点只能在其自身平面（Oxy 平面）内移动，而沿 Oz 轴方向的位移是零。另外，由于不同的横截面都同样处于对称面的地位，故其上只要具有相同的 x 和 y 坐标，就具有完全相同的位移，于是有

$$\left.\begin{aligned} u &= u(x,y) \\ v &= v(x,y) \\ w &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

根据几何方程(5-2)，应变分量具有如下的特点：

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = f_1(x,y) \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = f_2(x,y) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = f_3(x,y) \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

而

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0\\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0\\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0\end{aligned}\right\} \tag{c}$$

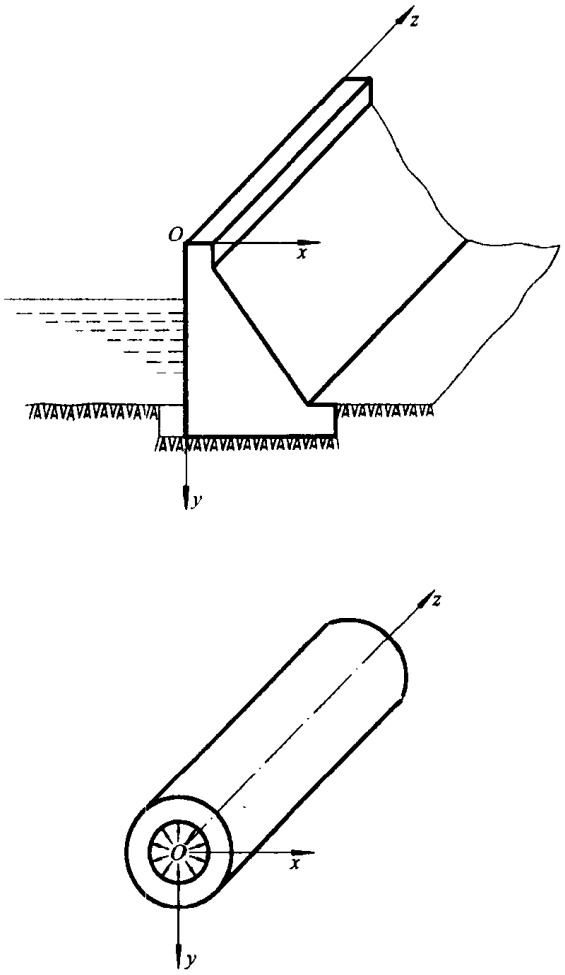


图 6-1

由于这类问题的位移和应变都是在 Oxy 平面内发生的，故称为**平面应变问题**。

转面考虑应力分量。首先，由物理方程(5-3)左列第三式得

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0$$

即

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \tag{d}$$

此式表明：如假想将物体切成无数个与 Oxy 平面平行的薄片，虽然各薄片沿 Oz

轴方向的伸长被阻止，但正由于各薄片相互挤压的结果，薄片表面上的正应力是存在的，而且，它与 σ_x 和 σ_y 联系着。将式(d)代入式(5－3)的第一、第二式，并令

$$\frac{E}{1-\nu^2}=E_1,\qquad \frac{\nu}{1-\nu}=\nu_1$$

则得

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E_1}(\sigma_x-\nu_1\sigma_y),\qquad \varepsilon_y=\frac{1}{E_1}(\sigma_y-\nu_1\sigma_x) \tag{e}$$

另外，不难直接验证：

$$\frac{1+\nu_1}{E_1}=\frac{1+\nu}{E} \tag{f}$$

因此，式(5－3)右列第三式又可写为

$$\gamma_{xy}=\frac{2(1+\nu_1)}{E_1}\tau_{xy} \tag{g}$$

由于 $\gamma_{yz}=\gamma_{zx}=0$，所以由式(5－3)右列第一、第二两式得

$$\tau_{yz}=\tau_{zx}=0 \tag{h}$$

于是，在平面应变情况下，只有应力 $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z=\nu(\sigma_x+\sigma_y),\tau_{xy}$ 存在，而且，这些应力只是 x 和 y 的函数，与 z 无关。

根据上述结果，将使弹性力学的全部基本方程大为简化。

平衡微分方程(5－1)中只剩下 2 个，它们可简化为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+F_x=0\\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+F_y=0\end{aligned}\right\} \tag{6－1}$$

几何方程(5－2)只剩下 3 个

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}\\ \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}\right\} \tag{6－2}$$

应变协调方程(5－9)简化得最多，只剩下 1 个，即

$$\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y} \tag{6－3}$$

物理方程为

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E_1}(\sigma_x - \nu_1\sigma_y)\\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E_1}(\sigma_y - \nu_1\sigma_x)\\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu_1)}{E_1}\tau_{xy}\end{aligned}\right\} \tag{6-4}$$

应力边界条件简化为

$$\left.\begin{aligned}\bar{f}_x &= \sigma_x l + \tau_{yx} m\\ \bar{f}_y &= \tau_{xy} l + \sigma_y m\end{aligned}\right\} \tag{6-5}$$

应用方程(6-1)至(6-4),再配上一定的边界条件,例如应力边界条件(6-5),就可求解平面应变问题。

将式(6-4)代入式(6-3)并注意到式(f),经整理得应力表示的协调方程

$$\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y} = \nu\,\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) \tag{6-6}$$

只考虑体力为常量的情况。现利用方程(6-1),还可使方程(6-6)具有更简单的形式。为此,将方程(6-1)的第一、第二式分别对 x 和 y 求一阶偏导数,然后相加,得

$$2\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y} = -\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}$$

将它代入方程(6-6),并稍加整理,得到

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \tag{6-7}$$

方程(6-7)和方程(6-6)具有完全相同的性质,表示物体的协调条件,这方程称为**莱维**(Lévy,M)**方程**。

§6-2 平面应力问题

现在,我们考虑几何形状和平面应变问题中完全相反的一种情况(图6-2)。设有一块薄板(厚度为 h),其所受外力(包括体力)平行于板平面(Oxy 平面),并沿厚度方向(Oz 方向)不变,在板的两表面上(即 $z = \pm\frac{h}{2}$ 处),不受外力作用,即有

$$(\sigma_z)_{z=\pm\frac{h}{2}} = 0,\quad (\tau_{yz})_{z=\pm\frac{h}{2}} = 0,\quad (\tau_{xz})_{z=\pm\frac{h}{2}} = 0 \tag{a}$$

由条件(a),并因板很薄,所以,在板的内部,应力 σ_z,τ_{yz},τ_{xz} 显然是很小的。其他应力分量虽沿厚度方向有变化,但根据同样的理由,这种变化是不明显的。

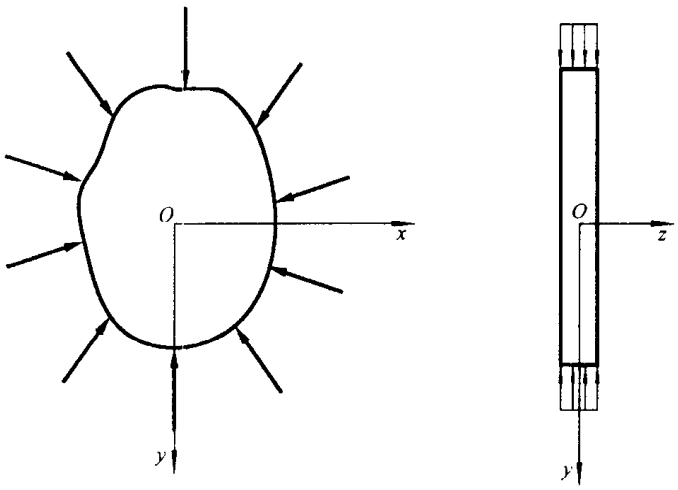


图 6－2

因此，我们可以认为在板的内部到处有①

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_z=0,\quad \tau_{yz}=0,\quad \tau_{xz}=0\\&\sigma_x=f_1(x,y),\quad \sigma_y=f_2(x,y),\quad \tau_{xy}=f_3(x,y)\end{aligned}\right\}\tag{b}$$

应力状态具有这种性质的问题，称为**平面应力问题**。

由物理方程(5－3)可知，平面应力问题的应变分量具有如下的特点：

$$\varepsilon_x=\varphi_1(x,y),\quad \varepsilon_y=\varphi_2(x,y),\quad \gamma_{xy}=\varphi_3(x,y)\tag{c}$$

而

$$\varepsilon_z=-\frac{\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y),\quad \gamma_{yz}=\gamma_{zx}=0\tag{d}$$

与平面应变比较，所不同的，这里的 $\varepsilon_z\neq0$，表示薄板变形时两底面将发生畸变，但由于板很薄，这种畸变也是很小的。

由此可知，在平面应力问题中，平衡微分方程可简化为(仍考虑体力为常量的情况)

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+F_x=0\\&\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+F_y=0\end{aligned}\right\}\tag{6－8}$$

几何方程可简化为

① 由式(b)表示的应力状态，实际上表示图 6－2 所示的薄板内的各应力分量沿其厚度方向的平均值。

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}\\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}\\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}\right\} \tag{6-9}$$

应变协调方程[①]为

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \tag{6-10}$$

物理方程为

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x-\nu\sigma_y)\\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y-\nu\sigma_x)\\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}\end{aligned}\right\} \tag{6-11}$$

可见，平面应力问题和平面应变问题的基本方程大体上是相同的，所不同的，在式(6-11)中的 E 和 ν 在平面应变情况下要改成 E_1 和 ν_1。

将式(6-11)代入式(6-10)，并利用平衡方程(6-8)简化，也得到莱维方程

$$\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)=0 \tag{6-12}$$

§6-3 应力解法 把平面问题归结为双调和方程的边值问题

我们用应力作为基本变量求解弹性力学的平面问题，在体力为常量时，归结为在给定的边界条件下，求解由平衡微分方程

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+F_x=0\\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+F_y=0\end{aligned}\right\} \tag{a}$$

---

① 由式(6-9)不难看出，平面应力情况下的应变协调方程除式(6-10)以外，还包括以下三个方程

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}=0$$

显然，要使这三个方程同时满足，应变分量 ε_z 只能是 x 和 y 的一次函数，即

$$\varepsilon_z=ax+by+c$$

这里 a,b,c 为常数。这样，将使所研究的问题受到很大的限制，因此，今后我们就忽略这三个方程，只需要考虑方程(6-10)就可以了。由此所得的结果虽然是近似的，但当板很薄时，还是足够精确的。

和莱维方程

$$\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)=0 \tag{b}$$

所组成的偏微分方程组。

方程(a)是线性非齐次的，其通解为齐次方程

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}=0\\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0\end{aligned}\right\} \tag{c}$$

的通解与方程(a)任一特解之和。显然，方程(a)特解有两组，它们分别为

$$\sigma_x=0,\quad \sigma_y=0,\quad \tau_{xy}=\tau_{yx}=-F_yx-F_xy \tag{d}$$

和

$$\sigma_x=-F_xx,\quad \sigma_y=-F_yy,\quad \tau_{xy}=\tau_{yx}=0 \tag{e}$$

为了求得方程(c)的通解，引入任意函数 $A(x,y)$，使

$$\sigma_x=\frac{\partial A}{\partial y},\quad \tau_{yx}=-\frac{\partial A}{\partial x} \tag{f}$$

则方程(c)的第一式是满足的。同理，如果引入任意函数 $B(x,y)$，使

$$\tau_{xy}=\frac{\partial B}{\partial y},\quad \sigma_y=-\frac{\partial B}{\partial x} \tag{g}$$

则方程(c)的第二式也是满足的。但由于 $\tau_{xy}=\tau_{yx}$，故由式(f)的第二式和式(g)的第一式可知，函数 A 和 B 之间应存在如下的关系：

$$\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}=0 \tag{h}$$

为了使关系式(h)也满足，我们再引入任意函数 $U(x,y)$，使

$$A=\frac{\partial U}{\partial y},\quad B=-\frac{\partial U}{\partial x} \tag{i}$$

将它们分别代入式(f)和式(g)，得

$$\sigma_x=\frac{\partial^2U}{\partial y^2},\quad \sigma_y=\frac{\partial^2U}{\partial x^2},\quad \tau_{xy}=\tau_{yx}=-\frac{\partial^2U}{\partial x\partial y} \tag{j}$$

应力表达式(j)就是方程(c)的通解，因为不论 U 是什么函数，只要四阶连续可导，它们总是满足方程(c)的。最后，将式(j)分别与式(d)和式(e)相加，得到平衡微分方程(a)的如下两种形式的通解：

$$\sigma_x=\frac{\partial^2U}{\partial y^2},\quad \sigma_y=\frac{\partial^2U}{\partial x^2},\quad \tau_{xy}=\tau_{yx}=-\frac{\partial^2U}{\partial x\partial y}-F_yx-F_xy \tag{6-13}$$

$$\sigma_x=\frac{\partial^2U}{\partial y^2}-F_xx,\quad \sigma_y=\frac{\partial^2U}{\partial x^2}-F_yy,\quad \tau_{xy}=\tau_{yx}=-\frac{\partial^2U}{\partial x\partial y} \tag{6-14}$$

为使以上两组应力表达式满足协调方程，则函数 U 还必须满足一定的条件。现将式(6-13)或式(6-14)代入方程(b)，就得到

$$\nabla^2\nabla^2 U=\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 U}{\partial y^4}=0 \tag{6-15}$$

这说明,若函数 $U(x,y)$满足双调和方程(6-15),则由式(6-13)和(6-14)所给出的应力分量,不仅满足平衡微分方程,而且满足以应力表示的协调方程,因此,就方程(6-15)的本质而言,它表示协调条件。

综上所述,对于体力为常量的平面问题,无论是平面应变问题,还是平面应力问题,最后都归结为在给定的边界条件下求解双调和方程(6-15)的问题。这里的函数 $U(x,y)$称为**艾里应力函数**。求得了函数 U,就可通过式(6-13)或式(6-14)求应力分量,然后,从方程(6-11)(如为平面应变问题,须将 E 和 ν 分别换成 E_1 和 ν_1)求应变分量,再通过几何方程的积分求位移分量。

值得一提的是,根据偏微分方程理论的基本知识,一个方程解的形态取决于未知函数定义域的形状和问题的边界条件。对于弹性力学的平面问题,应力函数 U 的定义域是平面区域,它在平面应变问题中代表无限长柱形体的任何一个横截面,而在平面应力问题中代表薄板的中面。由于两类问题具有完全相同的控制方程(6-15),因此不难理解,如果应力函数的定义域为单连通的,且为第一类边值问题,则在两类问题具有相同的应力函数定义域和相同的应力边界条件时,就会求得完全相同的应力分量,它们与弹性常数无关。对于相应的位移分量,因为在求解过程中要用到物理方程,故两类问题显然是不同的。对于第二类和第三类边值问题[①],因为在求解时要用到位移边界条件,故具有相同的定义域和相同边界条件的两类问题的应力分量是不同的。当应力函数 U 的定义域为多连通时,问题较为复杂,不过本书习题 8-1 要求回答的问题将会给我们提供明确的结论。

§6-4 用多项式解平面问题

上一节已把平面问题归结为在给定的边界条件下求解双调和方程的问题现在,我们要转向讨论如何去求应力函数 U。

我们首先用多项式逆解法来解答一些具有矩形边界[②]且不计体力的平面问题(如矩形板或梁)。

这种方法的基本思想是:对不计体力的矩形梁,在给定的坐标系下分别给出幂次不同并满足方程(6-15)的代数多项式应力函数,由此求得应力分量,然后考察这些应力对应于边界上什么样的面力,从而得知该应力函数能解决什么

① 这类问题按应力法求解是极其困难的。

② 其他直线边界,如三角形板等也能用多项式逆解法求解。

问题。

(1) 取一次多项式

$$U = a_0 + a_1 x + b_1 y \tag{6-16}$$

不论系数取何值,都能满足方程(6-15)。对应的应力分量为

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0$$

这对应于无应力状态。因此,在任何应力函数中增减一个 x, y 的一次函数,并不影响应力分量的值。

(2) 取二次多项式

$$U = a_2 x^2 + b_2 xy + c_2 y^2 \tag{6-17}$$

不论系数取何值,都能满足方程(6-15)。对应的应力分量为

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 2c_2, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2a_2, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -b_2$$

代表了均匀应力状态(图 6-3)。特别地,如果 $b_2 = 0$,则代表双向均匀拉伸;如 $a_2 = c_2 = 0$,则代表纯剪。

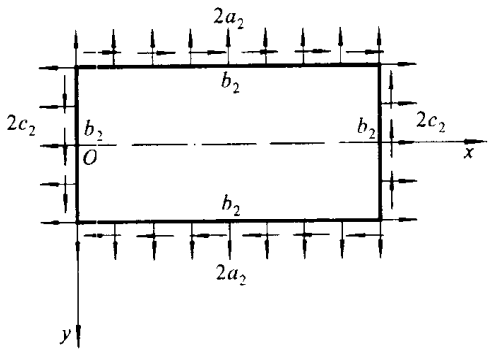


图 6-3

(3) 取三次多项式

$$U = a_3 x^3 + b_3 x^2 y + c_3 xy^2 + d_3 y^3 \tag{6-18}$$

不论系数取何值,都能满足方程(6-15)。现只考虑 $U = d_3 y^3$ 的情况($a_3 = b_3 = c_3 = 0$)作为示例。对应的应力分量为

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 6d_3 y, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0$$

这是矩形梁纯弯曲的情况(图 6-4)。如果已知作用在矩形窄梁两端的弯矩 M,则由

$$M = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y\sigma_x \mathrm{d}y = 6d_3 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \mathrm{d}y$$

可得

$$d_3=\frac{2M}{h^3}$$

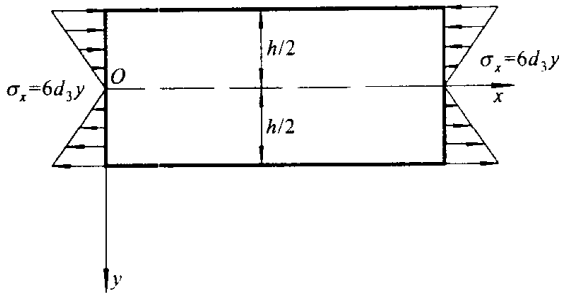


图 6-4

(4) 取四次多项式

$$U=a_4x^4+b_4x^3y+c_4x^2y^2+d_4xy^3+e_4y^4$$

要使它满足方程(6-15),各系数必须要满足一定的关系。将它代入方程(6-15),得

$$3a_4+c_4+3e_4=0$$

于是,上述四次多项式应写为

$$U=a_4x^4+b_4x^3y+c_4x^2y^2+d_4xy^3-\left(a_4+\frac{c_4}{3}\right)y^4 \tag{6-19}$$

现在,式中的4个系数不论取何值,都能满足方程(6-15)。特别地,取 $a_4=b_4=c_4=0$,即

$$U=d_4xy^3 \tag{6-19}'$$

对应的应力分量为

$$\sigma_x=\frac{\partial^2U}{\partial y^2}=6d_4xy,\qquad \sigma_y=\frac{\partial^2U}{\partial x^2}=0,\qquad \tau_{xy}=-\frac{\partial^2U}{\partial x\partial y}=-3d_4y^2$$

这个应力状态由作用于矩形梁边界上的以下三部分外力产生:(1)在 $y=\pm\frac{h}{2}$ 的边界上,受有均匀分布的切应力 $\tau_{xy}=-\frac{3}{4}d_4h^2$;(2) 在 $x=0$ 的边界上,受有按抛物线分布的切应力 $\tau_{xy}=-3d_4y^2$;(3) 在 $x=L$ 的边界上(L 为梁的长度),受有按抛物线分布的切应力 $\tau_{xy}=-3d_4y^2$ 和静力上等效于弯矩的正应力 $\sigma_x=6d_4Ly$。如图6-5所示。

(5) 取五次多项式

$$U=a_5x^5+b_5x^4y+c_5x^3y^2+d_5x^2y^3+e_5xy^4+f_5y^5$$

代入方程(6-15),得

$$(120a_5+24c_5+24e_5)x+(24b_5+24d_5+120f_5)y=0$$

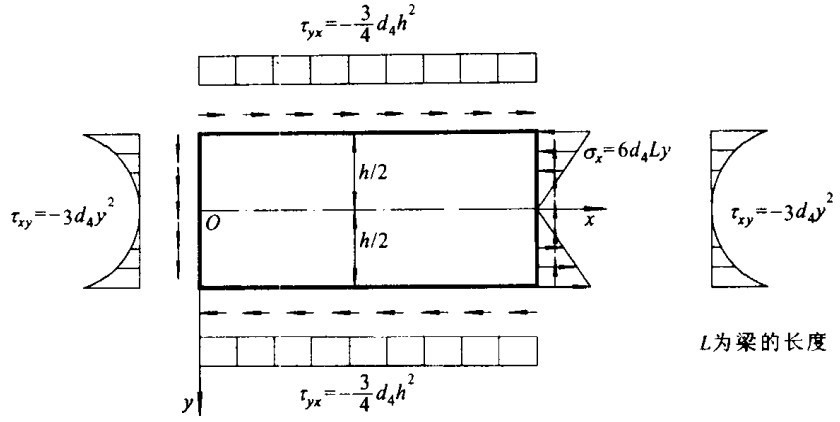


图 6－5

因为这方程对所有的 x 和 y 都成立，故必须有

$$120a_5+24c_5+24e_5=0$$

$$24b_5+24d_5+120f_5=0$$

将 e_5 和 f_5 用其他的系数表示：

$$e_5=-(5a_5+c_5),f_5=-\frac{1}{5}(b_5+d_5)$$

于是，上述五次多项式为

$$U=a_5x^5+b_5x^4y+c_5x^3y^2+d_5x^2y^3-(5a_5+c_5)xy^4-\frac{1}{5}(b_5+d_5)y^5 \tag{6-20}$$

现在，式中 4 个系数不论取何值，都能满足方程(6－15)。特别地，如果 $a_5=b_5=c_5=0$，则

$$U=d_5x^2y^3-\frac{1}{5}d_5y^5$$

对应的应力分量为

$$\sigma_x=\frac{\partial^2U}{\partial y^2}=6d_5x^2y-4d_5y^3$$

$$\sigma_y=\frac{\partial^2U}{\partial x^2}=2d_5y^3$$

$$\tau_{xy}=-\frac{\partial^2U}{\partial x\partial y}=-6d_5xy^2$$

在矩形梁的边界上，应力分布如图 6－6 所示。

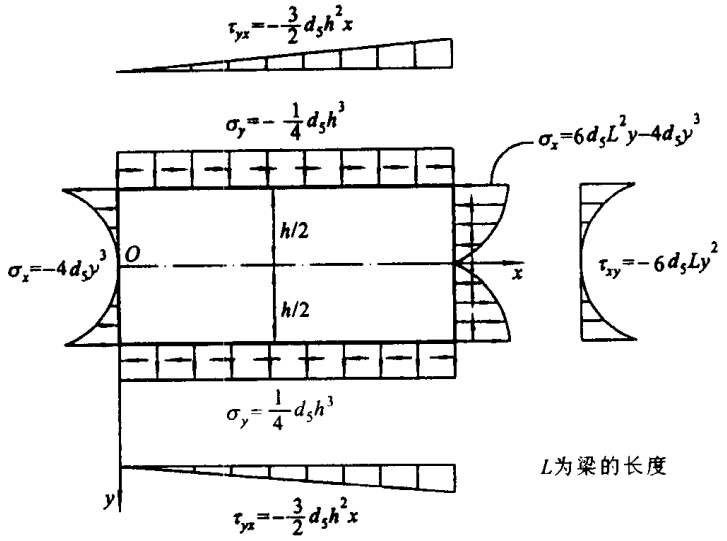


图 6-6

§6-5 悬臂梁一端受集中力作用

试考察一根长为 L、高为 h 的矩形截面悬臂梁(宽度取一单位),其左端面上受切向分布力作用,合力为 F;不计梁的自重,分析梁的应力和变形(图 6-7)。

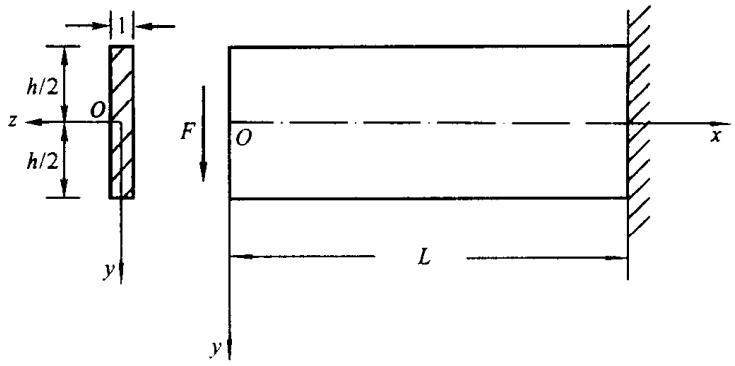


图 6-7

这是一个平面应力问题,可以采用如下的半逆解法求解:逐步地凑取幂次不同的双调和多项式函数,直到由此求得的应力分量满足问题的边界条件为止。

试考察与应力函数(6-19)′所对应的情况(图 6-5),显然,在矩形梁的两端面上,即 $x=0,L$ 处,外力分布情况大体上与本题是一致的,但在上下边界上,即 $y=\pm h/2$ 处,比本问题多出了 $-\frac{3}{4}d_4h^2$ 的切应力。为了抵消这部分切应

力，试在应力函数式(6－19)′上叠加一个与纯剪对应的应力函数

$$U = b_2 xy$$

于是有

$$U = d_4 xy^3 + b_2 xy$$

由此得应力分量

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 6d_4 xy \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -b_2 - 3d_4 y^2 \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

现在的问题是，适当地选取任意常数 b_2 和 d_4，使应力分量(a)满足本问题的边界条件。

本问题的边界条件为

$$\left.\begin{aligned} &(\sigma_y)_{y=\pm\frac{h}{2}} = 0, (\tau_{xy})_{y=\pm\frac{h}{2}} = 0 \\ &(\sigma_x)_{x=0} = 0, \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\tau_{xy})_{x=0} \mathrm{d}y = -F \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

将边界条件(b)应用到式(a)上，有

$$\left.\begin{aligned} -b_2 - \frac{3}{4} d_4 h^2 &= 0 \\ -b_2 h - \frac{d_4}{4} h^3 &= -F \end{aligned}\right\} \tag{c}$$

解之得

$$b_2 = \frac{3F}{2h}, \qquad d_4 = -\frac{2F}{h^3}$$

将它们代入式(a)，得要求的应力分量

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{12F}{h^3} xy \\ \sigma_y &= 0 \\ \tau_{xy} &= -\frac{3F}{2h} + \frac{6F}{h^3} y^2 \end{aligned}\right\} \tag{6-21}$$

注意到梁截面的惯性矩 $I = \frac{h^3}{12}$，力 F 对任一截面的矩 $M = -Fx$，静矩 $S = \left(\frac{h^2}{8} - \frac{y^2}{2}\right)$，于是，应力分量又可表示为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{My}{I}\\ \sigma_y &= 0\\ \tau_{xy} &= -\frac{FS}{I}\end{aligned}\right\} \tag{6-21}'$$

这个结果与材料力学的结果完全一致。

现在求位移分量。先由方程(6-11)求得应变分量，再利用方程(6-9)，于是有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{F}{EI}xy\\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\nu F}{EI}xy\\ \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{F}{GI}\left(\frac{h^2}{8}-\frac{y^2}{2}\right)\end{aligned}\right\} \tag{d}$$

分别将方程(d)的第一式和第二式积分，得

$$\left.\begin{aligned}u &= -\frac{F}{2EI}x^2y+f(y)\\ v &= \frac{\nu F}{2EI}xy^2+\varphi(x)\end{aligned}\right\} \tag{e}$$

这里的 $f(y)$ 和 $\varphi(x)$ 均为任意函数。将式(e)代入式(d)的第三式，并移项整理，得

$$\left[\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}-\frac{Fx^2}{2EI}\right]+\left[\frac{\mathrm{d}f(y)}{\mathrm{d}y}+\frac{\nu F}{2EI}y^2-\frac{F}{2GI}y^2\right]=-\frac{Fh^2}{8GI}$$

要使它恒等地成立，只有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}-\frac{Fx^2}{2EI} &= a\\ \frac{\mathrm{d}f(y)}{\mathrm{d}y}+\frac{\nu Fy^2}{2EI}-\frac{Fy^2}{2GI} &= b\end{aligned}\right\} \tag{f}$$

这里的 a，b 均为常数，它们满足

$$a+b=-\frac{Fh^2}{8GI} \tag{g}$$

将方程(f)积分得

$$\varphi(x)=\frac{Fx^3}{6EI}+ax+c$$

$$f(y)=\frac{Fy^3}{6GI}-\frac{\nu Fy^3}{6EI}+by+d$$

这里的 c 和 d 均为任意常数。将 $\varphi(x)$ 和 $f(y)$ 代入式(e)，得

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{F}{2EI}x^2y+\frac{Fy^3}{6GI}-\frac{\nu Fy^3}{6EI}+by+d \\ v &= \frac{\nu F}{2EI}xy^2+\frac{Fx^3}{6EI}+ax+c \end{aligned}\right\} \tag{h}$$

任意常数 a，b，c 和 d 由悬臂梁的约束条件确定。按梁的右端固定的条件，我们可以假定

$$(u)_{\substack{x=L\\y=0}}=(v)_{\substack{x=L\\y=0}}=0,\qquad \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{\substack{x=L\\y=0}}=0 \tag{i}$$

将式(i)应用于式(h)上，有

$$d=0$$

$$\frac{FL^3}{6EI}+aL+c=0$$

$$\frac{FL^2}{2EI}+a=0$$

解之得

$$a=-\frac{FL^2}{2EI},\qquad c=\frac{FL^3}{3EI},\qquad d=0$$

再由式(g)得

$$b=-\frac{Fh^2}{8GI}+\frac{FL^2}{2EI}$$

故最后得位移分量

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{Fx^2y}{2EI}-\frac{\nu Fy^3}{6EI}+\frac{Fy^3}{6GI}-\left(\frac{Fh^2}{8GI}-\frac{FL^2}{2EI}\right)y \\ v &= \frac{\nu Fxy^2}{2EI}+\frac{Fx^3}{6EI}-\frac{FL^2x}{2EI}+\frac{FL^3}{3EI} \end{aligned}\right\} \tag{6-22}$$

当 $y=0$ 时，即得梁轴线的挠度方程

$$v(x,0)=\frac{Fx^3}{6EI}-\frac{FL^2x}{2EI}+\frac{FL^3}{3EI}$$

悬臂梁自由端的挠度为

$$f=\frac{FL^3}{3EI} \tag{j}$$

这和材料力学的结果完全一致。

现在考察悬臂梁横截面的变形。设在变形前某一个横截面的方程为

$$x=x_0$$

则在变形后，它的方程变为

$$x=x_0+u(x_0,y)$$

或

$$x = x_0 + \frac{Fy^3}{6GI} - \frac{Fx_0^2 y}{2EI} - \frac{\nu F y^3}{6EI} - \left(\frac{Fh^2}{8GI} - \frac{FL^2}{2EI}\right)y$$

这是三次曲面，因此，在变形以后，横截面不再保持为平面了。

如果我们在物体变形前过$(L,0)$点作一根与Oy轴平行的微分线段，它在物体变形以后要转过一角度，其值为

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{\substack{x=L\\y=0}} = -\frac{Fh^2}{8GI} = -\frac{3F}{2Gh} < 0$$

这里的负号表明微分线段是由Oy轴的正方向朝着Ox轴的负方向转动[图6-8a]。

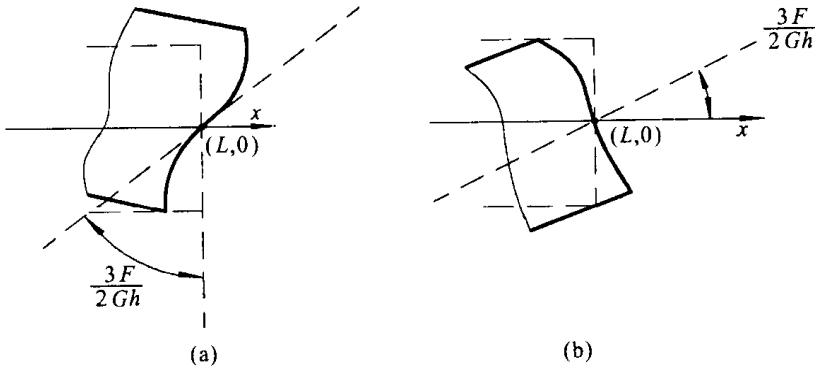


图6-8

上述对于悬臂梁变形的一些结论，是在梁的右端按条件(i)的固定方式得到的。现在假设梁的右端按另一种方式固定，即

$$(u)_{\substack{x=L\\y=0}} = 0, \qquad (v)_{\substack{x=L\\y=0}} = 0, \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{\substack{x=L\\y=0}} = 0 \tag{k}$$

前者与条件(i)相同，后者表示过$(L,0)$点并与Oy轴平行的微分线段在物体变形后仍保持与Oy轴平行[图6-8b]。将式(k)用于式(h)上，有

$$\left.\begin{aligned} &d = 0\\ &\frac{FL^3}{6EI} + aL + c = 0, \qquad -\frac{FL^2}{2EI} + b = 0 \end{aligned}\right\} \tag{l}$$

将式(l)与式(g)联立，求得

$$a = -\frac{Fh^2}{8GI} - \frac{FL^2}{2EI}, \qquad b = \frac{FL^2}{2EI}$$

$$c = \frac{Fh^2 L}{8GI} + \frac{FL^3}{3EI}, \qquad d = 0$$

代入式(h)，得

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{Fx^2y}{2EI}+\frac{Fy^3}{6GI}-\frac{\nu Fy^3}{6EI}+\frac{FL^2y}{2EI} \\ v &= \frac{\nu Fxy^2}{2EI}+\frac{Fx^3}{6EI}-\left(\frac{Fh^2}{8GI}+\frac{FL^2}{2EI}\right)x+\frac{Fh^2L}{8GI}+\frac{FL^3}{3EI} \end{aligned}\right\} \tag{6-23}$$

可见位移改变了。梁轴线弯曲后的方程为

$$v(x,0)=\frac{Fx^3}{6EI}-\left(\frac{Fh^2}{8GI}+\frac{FL^2}{2EI}\right)x+\frac{Fh^2L}{8GI}+\frac{FL^3}{3EI}$$

自由端的挠度为

$$f=\frac{FL^3}{3EI}+\frac{Fh^2L}{8GI}=\frac{FL^3}{3EI}+\frac{3FL}{2Gh}$$

与式(j)比较，可以发现，按第二种固定方式所得到的自由端挠度，较之于按第一种固定方式增加了$\frac{3FL}{2Gh}$，这一项表现出剪力对弯曲的影响。

过$(L,0)$点并与Ox轴平行的微分线段在梁变形后的转角为

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{\substack{x=L\\y=0}}=-\frac{Fh^2}{8GI}=-\frac{3F}{2Gh}<0$$

表示它在物体变形后由Ox轴的正方向朝Oy轴的负方向转动[图 6-8b]。

除上述两种固定方式以外，还可给出许多种固定方式，但在选取这种或那种固定方式时，必须与实际情况相接近。还必须指出，弹性力学中所采用的固定方式，实际上是难以实现的，在实际工程结构中，只是近似地实现这种固定方式。

§6-6　悬臂梁受均匀分布荷载作用

不计自重的悬臂梁受均匀分布的荷载作用(图 6-9)，也可以采用多项式的叠加求解，不过，为了解法的多样化，现在将采用另一种方法。

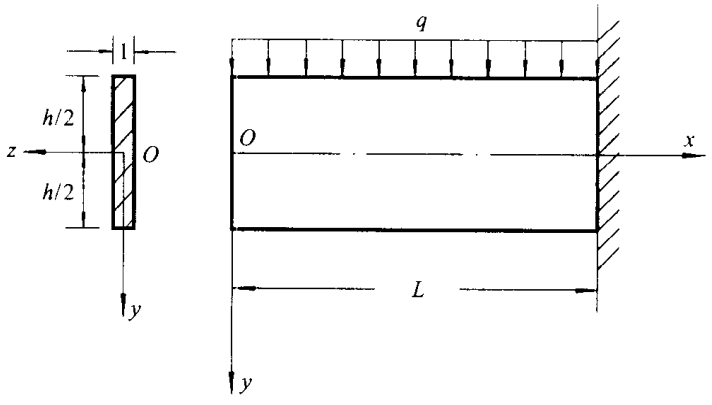


图 6-9

大家知道，弯曲应力 σ_x 主要是由弯矩产生的，切应力 τ_{xy} 主要是由剪力 F_S 产生的，而挤压应力 σ_y 主要是由荷载 q 产生的，现因 q 为常数，所以，可以假定，对于不同的 x，σ_y 的分布相同，也就是说，σ_y 仅仅是 y 的函数，即

$$\sigma_y = f(y)$$

于是有

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = f(y)$$

而

$$\frac{\partial U}{\partial x} = xf(y) + f_1(y)$$

$$U = \frac{x^2}{2}f(y) + xf_1(y) + f_2(y) \tag{a}$$

这里的 $f_1(y)$和 $f_2(y)$是 y 的任意函数。

由于应力函数 U 必须满足方程(6-15)，所以，将它代入式(6-15)后，得 $f(y)$，$f_1(y)$和 $f_2(y)$必须满足的条件：

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^4 f(y)}{\mathrm{d}y^4}x^2 + \frac{\mathrm{d}^4 f_1(y)}{\mathrm{d}y^4}x + \frac{\mathrm{d}^4 f_2(y)}{\mathrm{d}y^4} + 2\frac{\mathrm{d}^2 f(y)}{\mathrm{d}y^2} = 0$$

这是 x 的二次方程，但它有无穷多个根(梁内所有的 x 都满足它)，因此，方程的系数和自由项应等于零，即

$$\frac{\mathrm{d}^4 f(y)}{\mathrm{d}y^4} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}^4 f_1(y)}{\mathrm{d}y^4} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}^4 f_2(y)}{\mathrm{d}y^4} + 2\frac{\mathrm{d}^2 f(y)}{\mathrm{d}y^2} = 0$$

由前面两个方程，有

$$f(y) = Ay^3 + By^2 + Cy + D, \qquad f_1(y) = Ey^3 + Fy^2 + Gy \tag{b}$$

$f_1(y)$中已略去了不影响应力的常数项。由第三个方程，有

$$\frac{\mathrm{d}^4 f_2(y)}{\mathrm{d}y^4} = -2\frac{\mathrm{d}^2 f(y)}{\mathrm{d}y^2} = -12Ay - 4B$$

积分后得

$$f_2(y) = -\frac{A}{10}y^5 - \frac{B}{6}y^4 + Hy^3 + Ky^2 \tag{c}$$

这里，略去了不影响应力值的一次项和常数项。将式(b)和(c)代入式(a)，得

$$U = \frac{x^2}{2}(Ay^3 + By^2 + Cy + D) + x(Ey^3 + Fy^2 + Gy) -$$

$$\frac{A}{10}y^5 - \frac{B}{6}y^4 + Hy^3 + Ky^2$$

应力分量为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{x^2}{2}(6Ay+2B)+x(6Ey+2F)- \\ &\qquad 2Ay^3-2By^2+6Hy+2K \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = Ay^3+By^2+Cy+D \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -x(3Ay^2+2By+C)-(3Ey^2+2Fy+G)\end{aligned}\right\} \tag{d}$$

这些应力分量是满足平衡微分方程和协调方程的。因此，如果能适当选择 A，B，…，K，使全部边界条件都满足，则由式(d)给出的应力分量就是问题的解答。

本问题的边界条件为

$$(\sigma_y)_{y=-\frac{h}{2}} = -q, \quad (\tau_{xy})_{y=-\frac{h}{2}} = 0 \tag{e}$$

$$(\sigma_y)_{y=\frac{h}{2}} = 0, \quad (\tau_{xy})_{y=\frac{h}{2}} = 0 \tag{f}$$

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x)_{x=0}\,\mathrm{d}y = 0 \\ &\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y(\sigma_x)_{x=0}\,\mathrm{d}y = 0 \\ &(\tau_{xy})_{x=0} = 0\end{aligned}\right\} \tag{g}$$

由边界条件(g)的第三式可知

$$E=F=G=0$$

由边界条件(e)和(f)，有

$$-\frac{h^3}{8}A+\frac{h^2}{4}B-\frac{h}{2}C+D=-q$$

$$\frac{3}{4}h^2A-hB+C=0$$

$$\frac{h^3}{8}A+\frac{h^2}{4}B+\frac{h}{2}C+D=0$$

$$\frac{3}{4}h^2A+hB+C=0$$

解之，得

$$A=-\frac{2q}{h^3}, \qquad B=0, \qquad C=\frac{3q}{2h}, \qquad D=-\frac{q}{2}$$

将 A，B，…，G 的已知值代入式(d)，得

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{6q}{h^3}x^2y+\frac{4q}{h^3}y^3+6Hy+2K\\ \sigma_y &= -\frac{2q}{h^3}y^3+\frac{3q}{2h}y-\frac{q}{2}\\ \tau_{xy} &= \frac{6q}{h^3}xy^2-\frac{3q}{2h}x\end{aligned}\right\} \tag{h}$$

再由边界条件(g)的前两个条件得

$$K=0,\qquad H=-\frac{q}{10h}$$

代入式(h),并注意 $I=\frac{h^3}{12}$,故最后得

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{qx^2y}{2I}+\frac{q}{2I}\left(\frac{2}{3}y^3-\frac{h^2}{10}y\right)\\ \sigma_y &= -\frac{q}{2}\left(1-\frac{3y}{h}+\frac{4y^3}{h^3}\right)\\ \tau_{xy} &= \frac{q}{2I}\left(y^2-\frac{h^2}{4}\right)x\end{aligned}\right\} \tag{6-24}$$

将应力表达式(6-24)与材料力学结果相比较,可以发现切应力 τ_{xy} 与材料力学一样,正应力 σ_x 增加了一个修正项:

$$\frac{q}{2I}\left(\frac{2}{3}y^3-\frac{h^2}{10}y\right)$$

§6-7 简支梁受均匀分布荷载作用

试考察一根长为 L、高为 h 的矩形截面的窄梁(取一单位厚度),梁的上边界受有均匀分布的荷载 q 的作用;梁支承于两端,假定其支承反力是按分布于两端截面内的剪力的形式作用于梁上;不计自重,坐标选取如图 6-10 所示。

这一问题可采用上述两种方法凑取应力函数 U 而求解。现在再介绍一种方法,这种方法是以材料力学的结果作为基础,验证它是否满足弹性力学的全部方程,如果不满足,就设法加以修正,直到满足全部方程和全部边界条件为止。

这个问题如果按材料力学方法求解,得到如下的应力:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{q}{2I}\left(\frac{L^2}{4}-x^2\right)y\\ \tau_{xy} &= -\frac{qx}{2I}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)\end{aligned}\right\} \tag{a}$$

另外,在材料力学里,认为 σ_y 为零。显然,应力表达式(a)与 $\sigma_y=0$ 的假设,绝不会满足弹性力学的全部方程,因为,在梁的上表面($y=-h/2$),有

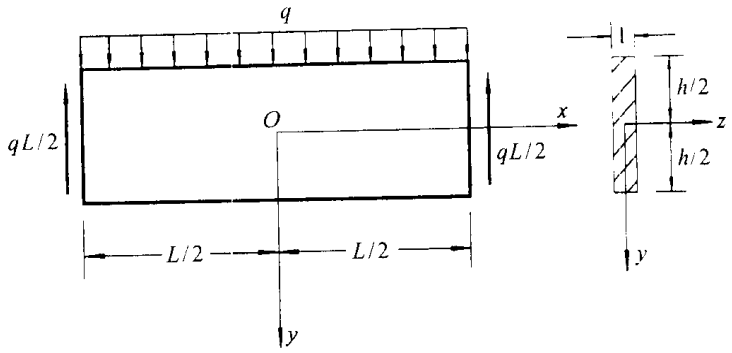


图 6-10

$$\sigma_y = -q \neq 0$$

因此，只好预先给定应力表达式(a)，而抛弃 $\sigma_y = 0$ 的假定，来作满足弹性力学方程的试探。

现在根据应力表达式(a)来选取应力函数的普遍形式。为明了起见，先将应力表达式(a)写成更普遍的形式

$$\sigma_x = Ay + Bx^2 y$$
$$\tau_{xy} = Cx + Dxy^2$$

于是有

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &= Ay + Bx^2 y \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} &= -Cx - Dxy^2 \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

由式(b)的第一式积分，得

$$U = \frac{A}{6}y^3 + \frac{B}{6}x^2 y^3 + f_1(x)y + f_2(x) \tag{c}$$

这里的 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 均为 x 的任意函数。将式(c)代入式(b)的第二式，则有

$$Bxy^2 + f_1'(x) = -Cx - Dxy^2$$

由此得

$$B = -D, \quad f_1(x) = -\frac{C}{2}x^2 + E$$

这里的 E 为积分常数。代入式(c)后，得到

$$U = \frac{A}{6}y^3 + \frac{B}{6}x^2 y^3 + \left(-\frac{C}{2}x^2 + E\right)y + f_2(x) \tag{d}$$

通过直接的演算，可以发现，上述函数 U 并不满足方程(6-15)，这表明它不能取作应力函数。现在试在这个函数上再添加一个任意函数 $\psi(x, y)$，并略去不影响应力的一次项 Ey，于是有

$$U=\frac{A}{6}y^3+\frac{B}{6}x^2y^3-\frac{C}{2}x^2y+f_2(x)+\psi(x,y) \tag{c}$$

我们以满足式(6-15)为目标来选择函数 $\psi(x,y)$。为此，将式(e)代入式(6-15)，于是得到要使函数(e)为双调和函数时 $\psi(x,y)$所必须满足的方程[这里，设 $f_2(x)$至多是 x 的三次函数]

$$\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\psi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\psi}{\partial y^4}=-4By \tag{f}$$

很容易看出，这个方程最简单的解答是

$$\psi(x,y)=\frac{F}{24}x^4y+\frac{H}{120}y^5+\frac{K}{12}x^2y^3 \tag{g}$$

将它代入式(f)，得到

$$F+2K+H=-4B \tag{h}$$

函数 $\psi(x,y)$中的$\frac{K}{12}x^2y^3$ 项可以抛掉，因为在函数(e)中已包含了相似的项。这样，由式(h)有

$$H=-4B-F$$

因此，最后得到

$$U=\frac{A}{6}y^3+\frac{B}{6}x^2y^3-\frac{C}{2}x^2y+f_2(x)+\frac{F}{24}x^4y-\frac{(4B+F)}{120}y^5$$

对应的应力分量为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\frac{\partial^2U}{\partial y^2}=Ay+Bx^2y-\frac{4B+F}{6}y^3\\ \sigma_y&=\frac{\partial^2U}{\partial x^2}=\frac{B}{3}y^3-Cy+f_2''(x)+\frac{F}{2}x^2y\\ \tau_{xy}&=-\frac{\partial^2U}{\partial x\partial y}=-Bxy^2+Cx-\frac{F}{6}x^3\end{aligned}\right\} \tag{i}$$

现在利用边界条件确定常数。先考察上下两面的条件：

$$\left.\begin{aligned}&(\sigma_y)_{y=-\frac{h}{2}}=-q,\qquad (\tau_{xy})_{y=-\frac{h}{2}}=0\\ &(\sigma_y)_{y=\frac{h}{2}}=0,\qquad (\tau_{xy})_{y=\frac{h}{2}}=0\end{aligned}\right\} \tag{j}$$

将它应用到式(i)上，有

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{B}{24}h^3+\frac{C}{2}h+f_2''(x)-\frac{F}{4}x^2h=-q\\ &\frac{B}{24}h^3-\frac{C}{2}h+f_2''(x)+\frac{F}{4}x^2h=0\\ &-\frac{B}{4}xh^2+Cx-\frac{F}{6}x^3=0\end{aligned}\right\} \tag{k}$$

由式(k)的前两式可以看出，要使它们恒等地成立，只有

$$F=0,\quad f_2''(x)=G$$

这样，式(k)可简化为

$$-\frac{B}{24}h^3+\frac{C}{2}h+G=-q$$

$$\frac{B}{24}h^3-\frac{C}{2}h+G=0$$

$$-\frac{B}{4}h^2+C=0$$

解之得

$$B=-\frac{6q}{h^3},\quad C=-\frac{3q}{2h},\quad G=-\frac{q}{2}$$

代入式(i)，得

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=Ay-\frac{6q}{h^3}x^2y+\frac{4q}{h^3}y^3\\ \sigma_y&=-\frac{6q}{h^3}\left(\frac{y^3}{3}-\frac{h^2}{4}y+\frac{h^3}{12}\right)\\ \tau_{xy}&=-\frac{6q}{h^3}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)x\end{aligned}\right\}\tag{l}$$

现在再考察两端的边界条件：

$$(\sigma_x)_{x=\pm\frac{L}{2}}=0,\quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(\tau_{xy})_{x=\pm\frac{L}{2}}\mathrm{d}y=\mp\frac{qL}{2}\tag{m}$$

很容易验证第二个条件已经满足了，但第一个条件无法满足，因此，只好利用局部性原理，将此边界条件放松，即

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(\sigma_x)_{x=\frac{L}{2}}\mathrm{d}y&=0\\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}y(\sigma_x)_{x=\frac{L}{2}}\mathrm{d}y&=0\end{aligned}\right\}\tag{n}$$

由式(l)的第一式可看出，式(n)的第一个条件已经满足了，故由第二个条件，得

$$A=\frac{12}{h^3}\left(\frac{qL^2}{8}-\frac{qh^2}{20}\right)^{①}$$

将它代入式(l)，并稍加整理，得到

① 如简支梁两端还受弯矩 M 的作用，则式(n)的第二个条件不等于零，于是可得

$$A=\frac{12}{h^3}\left(M+\frac{qL^2}{8}-\frac{qh^2}{20}\right)$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{6q}{h^3}\left(\frac{L^2}{4}-x^2\right)y+q\frac{y}{h}\left(4\frac{y^2}{h^2}-\frac{3}{5}\right)\\ \sigma_y &= -\frac{q}{2}\left(1+\frac{y}{h}\right)\left(1-\frac{2y}{h}\right)^2\\ \tau_{xy} &= -\frac{6q}{h^3}x\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)\end{aligned}\right\} \tag{6-25}$$

应力分量沿任一横截面的变化大致如图 6-11 所示。

将应力表达式(6-25)与材料力学结果式(a)相比，可以发现，切应力 τ_{xy} 与材料力学结果完全一样；σ_y 表示纵向纤维间的挤压力，而在材料力学里假设为零；σ_x 中的第一项与材料力学结果相同，第二项表示弹性力学提出的修正项。对于通常的长而低的梁，修正项很小，可以忽略不计。对于短而高的梁，则需注意修正项。以梁的中间截面为例，梁顶和梁底的弯曲应力为

$$(\sigma_x)_{\substack{x=0\\ y=\pm\frac{h}{2}}} = \pm 3q\left(\frac{L^2}{4h^2}\right)\left(1+\frac{4h^2}{15L^2}\right)$$

后一个括号内的第一项代表主要项，第二项代表修正项。当梁的长高之比 $\frac{L}{h}=4$ 时，修正项只占主要项的 $\frac{1}{60}$，即 1.7%；当梁的长高之比 $\frac{L}{h}=2$ 时，修正项将占主要项的 $\frac{1}{15}$，即 6.7%。

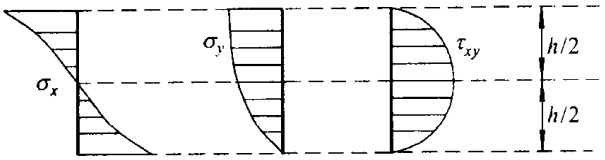


图 6-11

§6-8 三角形水坝

设有一个三角形水坝，左面铅直，右面与铅垂面成 α 角，下端可认为伸向无穷，承受坝的自重和液压力作用，水坝与液体的密度分别为 ρ 和 ρ_1，坐标选取如图 6-12 所示，分析它的应力状态。

这个问题可作为平面应变问题。对坝体内的任何一点，每个应力分量都应该是由两部分组成的：第一部分由重力产生，与 ρg 成正比；第二部分由液体压力产生，与 $\rho_1 g$ 成正比；另外，每一部分与 α, x, y 有关。总之，各应力分量中包括下列形式的两部分：

$$\rho g N_1(\alpha, x, y), \rho_1 g N_2(\alpha, x, y) \tag{a}$$

N_1 和 N_2 为由 α, x, y 按某种形式组成的数量。现在假设本问题具有多项式解，我们要用量纲分析法，确定 N_1 和 N_2 的幂次。

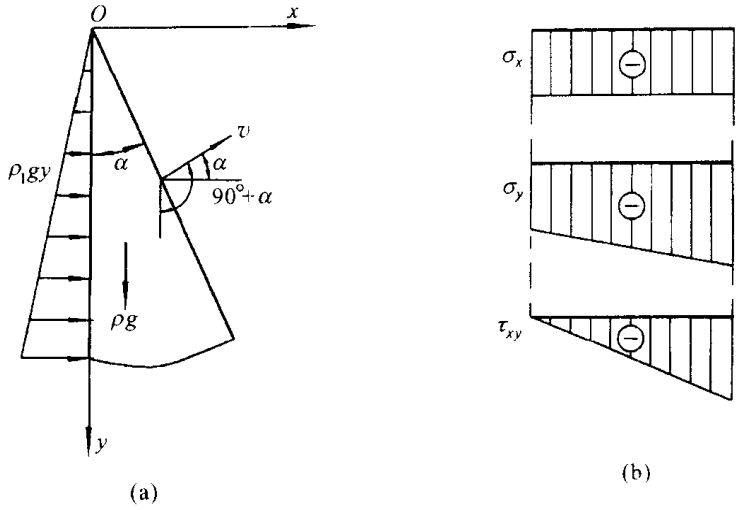


图 6-12

由于应力的量纲为 $L^{-1}MT^{-2}$，ρg 和 $\rho_1 g$ 的量纲为 $L^{-2}MT^{-2}$，表示水坝几何形状的 α 为量纲一的量，而 x 和 y 的量纲为 L，故要使 $\rho g N_1(\alpha, x, y)$ 和 $\rho_1 g N_2(\alpha, x, y)$ 的量纲与应力量纲一致，N_1 与 N_2 必须与 x, y 成一次幂的关系。由应力与应力函数之间的关系可知，应力函数为三次多项式，即

$$U = \frac{A}{6}x^3 + \frac{B}{2}x^2 y + \frac{C}{2}xy^2 + \frac{D}{6}y^3$$

它是满足方程(6-15)的。由式(6-13)(令其中 $F_x = 0, F_y = \rho g$)得应力分量

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = Cx + Dy \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = Ax + By \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \rho g x = -Bx - Cy - \rho g x \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

现在利用边界条件定常数。本问题的边界条件为

$$\left.\begin{aligned} &(\sigma_x)_{x=0} = -\rho_1 g y \\ &(\tau_{xy})_{x=0} = 0 \\ &\bar{f}_x = l(\sigma_x)_{x=y\tan\alpha} + m(\tau_{xy})_{x=y\tan\alpha} = 0 \\ &\bar{f}_y = l(\tau_{xy})_{x=y\tan\alpha} + m(\sigma_y)_{x=y\tan\alpha} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{c}$$

这里的

$$\left.\begin{aligned} l &= \cos(v,x) = \cos\alpha \\ m &= \cos(v,y) = \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha \end{aligned}\right\} \tag{d}$$

将边界条件(c)用到应力分量(b)上，并注意到式(d)，于是有

$$\left.\begin{aligned} &Dy = -\rho_1 gy \\ &-Cy = 0 \\ &(Cy\tan\alpha + Dy)\cos\alpha - [-Cy - (B+\rho g)y\tan\alpha]\sin\alpha = 0 \\ &[-Cy - (B+\rho g)y\tan\alpha]\cos\alpha - (By + Ay\tan\alpha)\sin\alpha = 0 \end{aligned}\right\} \tag{e}$$

消去 y，然后解得

$$D = -\rho_1 g, \qquad C = 0$$

$$A = \frac{\rho g}{\tan\alpha} - \frac{2\rho_1 g}{\tan^3\alpha}, \qquad B = \frac{\rho_1 g}{\tan^2\alpha} - \rho g$$

故最后得应力分量

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= -\rho_1 gy \\ \sigma_y &= (\rho g\cot\alpha - 2\rho_1 g\cot^3\alpha)x + (\rho_1 g\cot^2\alpha - \rho g)y \\ \tau_{xy} &= -\rho_1 gx\cot^2\alpha \end{aligned}\right\} \tag{6-26}$$

沿着任一水平截面上应力变化如图 6-12(b)所示。应力 σ_x 为常数，这结果不能用材料力学中的公式求得。应力 σ_y 按直线变化，在左面和右面上分别等于

$$(\sigma_y)_{x=0} = -(\rho g - \rho_1 g\cot^2\alpha)y$$

$$(\sigma_y)_{x=y\tan\alpha} = -\rho_1 gy\cot^2\alpha$$

与材料力学中偏心受压公式求得的结果相同。应力 τ_{xy} 也按直线变化，在左面和右面上分别等于

$$(\tau_{xy})_{x=0} = 0$$

$$(\tau_{xy})_{x=y\tan\alpha} = -\rho_1 gy\cot\alpha$$

在材料力学中，τ_{xy} 按抛物线变化，与正确解答不符。

§6-9 矩形梁弯曲的三角级数解法

在前面所讲的几个问题中，由于问题具有代数多项式形式的解，所以，比较容易地通过半逆解法凑取所要求的应力函数，从而求得应力分量和位移分量。显然，这种方法是有局限性的，它必须要求物体的主要边界上的荷载是连续的，而且能表示成代数多项式的形式。如果荷载并不具有这个特点，甚至是不连续的，则可采用三角级数求解。

试将应力函数写成如下的形式：

$$U = X(x)Y(y) \tag{a}$$

将它代入方程(6-15),得

$$X^{(4)}(x)Y(y) + 2X''(x)Y''(y) + X(x)Y^{(4)}(y) = 0 \tag{6-27}$$

等号两边同除以 $X(x)Y(y)$ 后有

$$\frac{X^{(4)}(x)}{X(x)} + 2\frac{X''(x)}{X(x)}\frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Y^{(4)}(y)}{Y(y)} = 0 \tag{6-27}'$$

将上式对 y 求一阶偏导数,得

$$2\frac{X''(x)}{X(x)}\left[\frac{Y''(y)}{Y(y)}\right]' + \left[\frac{Y^{(4)}(y)}{Y(y)}\right]' = 0 \tag{b}$$

若要式(b)成立,必须有

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{\left[\dfrac{Y^{(4)}(y)}{Y(y)}\right]'}{2\left[\dfrac{Y''(y)}{Y(y)}\right]'} = -\lambda^2$$

其中 λ 为常数。于是得到

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \tag{c}$$

和

$$\left[\frac{Y^{(4)}(y)}{Y(y)}\right]' - 2\lambda^2\left[\frac{Y''(y)}{Y(y)}\right]' = 0 \tag{d}$$

方程(c)的通解为

$$X(x) = K_1\cos\lambda x + K_2\sin\lambda x \tag{e}$$

这里的 K_1 和 K_2 为任意常数。

我们不打算求方程(d)的解,因为这个方程是通过方程(6-27)对 y 求一阶偏导数而得到的,它的解未必是方程(6-27)的解。下面我们将采用另一种方法简化方程(6-27)。由方程(c),有

$$X''(x) = -\lambda^2 X(x)$$

而

$$X^{(4)}(x) = -\lambda^2 X''(x) = \lambda^4 X(x)$$

将它代入方程(6-27)′,于是得 $Y(y)$ 所满足的方程

$$Y^{(4)}(y) - 2\lambda^2 Y''(y) + \lambda^4 Y(y) = 0 \tag{f}$$

这方程的通解为

$$Y(y) = A\cosh\lambda y + B\sinh\lambda y + Cy\cosh\lambda y + Dy\sinh\lambda y \tag{g}$$

将式(e)和(g)代入式(a),得方程(6-15)的一个特解

$$U = (K_1\cos\lambda x + K_2\sin\lambda x)(A\cosh\lambda y + B\sinh\lambda y + Cy\cosh\lambda y + Dy\sinh\lambda y) \tag{6-28}$$

这里的 K_1, K_2, A, B, C, D 与 λ 为任意常数,如果取不同的值,就可以得到任意

多个特解。另外，因方程(6-15)是线性的，所以，这些解答的和也是它的解答。如果在这样的和内项数取得足够多，就可以适当选择这些常数，以尽可能完全满足问题的边界条件。

现在我们考虑一根长度为 L、高度为 h 的狭长简支梁(图 6-13)，它的长边上受有任意分布的垂直荷载和切向荷载的作用。设在上表面，即 $y=0$ 处，垂直荷载 $q_2=f_2(x)$，切向荷载 $t_2=\psi_2(x)$；在下表面上，即 $y=h$ 处，垂直荷载 $q_1=f_1(x)$，切向荷载 $t_1=\psi_1(x)$。

本问题的边界条件可表示为

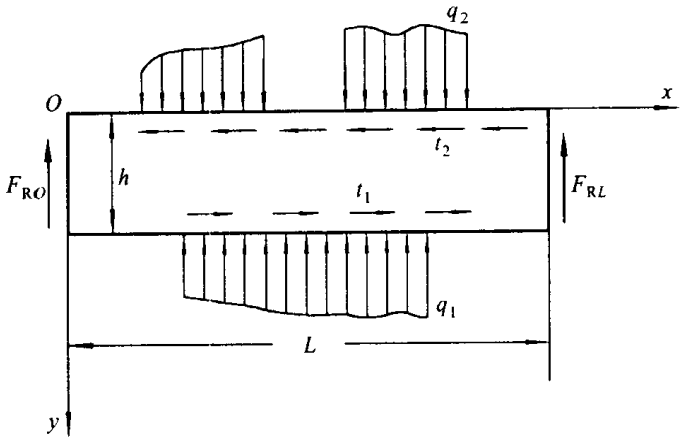


图 6-13

$$\left.\begin{aligned}
&(\sigma_y)_{y=0}=-f_2(x), \quad (\tau_{xy})_{y=0}=\psi_2(x)\\
&(\sigma_y)_{y=h}=-f_1(x), \quad (\tau_{xy})_{y=h}=\psi_1(x)\\
&(\sigma_x)_{x=0}=0, \quad (\sigma_x)_{x=L}=0\\
&\int_0^h(\tau_{xy})_{x=0}\mathrm{d}y=F_{RO}, \quad \int_0^h(\tau_{xy})_{x=L}\mathrm{d}y=-F_{RL}
\end{aligned}\right\} \tag{h}$$

现在将上述边界条件应用到函数式(6-28)上。首先，由最后两个条件，即在 $x=0,L$ 处，$\sigma_x=\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$，得到

$$K_1=0, \quad \lambda_m=\frac{m\pi}{L} \qquad (m=1,2,3,\cdots)$$

将它代入式(6-28)，不妨取 $K_2=1$，并作如下的和：

$$U=\sum_{m=1}^{\infty}\sin\frac{m\pi x}{L}\left(A_m\cosh\frac{m\pi y}{L}+B_m\sinh\frac{m\pi y}{L}+C_m y\cosh\frac{m\pi y}{L}+D_m y\sinh\frac{m\pi y}{L}\right) \tag{6-29}$$

显然，这函数是满足方程(6-15)和边界条件(h)的最后两个条件的。现在要适当选取 $A_m,B_m,C_m,D_m(m=1,2,3,\cdots)$，使它满足其他边界条件。

由式(6-29)得应力分量

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2\pi^2}{L^2}\sin\frac{m\pi x}{L}\left(A_m\cosh\frac{m\pi y}{L} + B_m\sinh\frac{m\pi y}{L} + \frac{2LC_m}{m\pi}\sinh\frac{m\pi y}{L} + \frac{2LD_m}{m\pi}\cosh\frac{m\pi y}{L} + C_m y\cosh\frac{m\pi y}{L} + D_m y\sinh\frac{m\pi y}{L}\right)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2\pi^2}{L^2}\sin\frac{m\pi x}{L}\left(A_m\cosh\frac{m\pi y}{L} + B_m\sinh\frac{m\pi y}{L} + C_m y\cosh\frac{m\pi y}{L} + D_m y\sinh\frac{m\pi y}{L}\right)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2\pi^2}{L^2}\cos\frac{m\pi x}{L}\left(A_m\sinh\frac{m\pi y}{L} + B_m\cosh\frac{m\pi y}{L} + \frac{LC_m}{m\pi}\cosh\frac{m\pi y}{L} + \frac{LD_m}{m\pi}\sinh\frac{m\pi y}{L} + C_m y\sinh\frac{m\pi y}{L} + D_m y\cosh\frac{m\pi y}{L}\right) \tag{6-30}$$

利用上下两边的边界条件，有

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2\pi^2}{L^2}A_m\sin\frac{m\pi x}{L} = f_2(x)\\
&\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2\pi^2}{L^2}\cos\frac{m\pi x}{L}\left(B_m + \frac{LC_m}{m\pi}\right) = -\psi_2(x)\\
&\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2\pi^2}{L^2}\sin\frac{m\pi x}{L}\left(A_m\cosh\frac{m\pi h}{L} + B_m\sinh\frac{m\pi h}{L} + C_m h\cosh\frac{m\pi h}{L} + D_m h\sinh\frac{m\pi h}{L}\right) = f_1(x)\\
&\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2\pi^2}{L^2}\cos\frac{m\pi x}{L}\left[\left(A_m + \frac{LD_m}{m\pi}\right)\sinh\frac{m\pi h}{L} + \left(B_m + \frac{LC_m}{m\pi}\right)\cosh\frac{m\pi h}{L} + C_m h\sinh\frac{m\pi h}{L} + D_m h\cosh\frac{m\pi h}{L}\right] = -\psi_1(x)
\end{aligned} \tag{i}$$

为了求得 A_m，B_m，C_m 和 D_m，在式(i)的第一式和第三式上乘以 $\sin\frac{n\pi x}{L}$，而在第二式和第四式上乘以 $\cos\frac{n\pi x}{L}$，然后，从 0 到 L 积分，并利用三角函数的正交性：

$$\int_0^L \cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \dfrac{L}{2} & (m = n) \end{cases}$$

$$\int_0^L \sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \dfrac{L}{2} & (m = n) \end{cases}$$

于是得 A_m, B_m, C_m 和 D_m 所满足的代数方程组

$$\left.\begin{aligned}
&A_m = \frac{2L}{m^2\pi^2}\int_0^L f_2(x)\sin\frac{m\pi x}{L}\mathrm{d}x\\
&B_m + \frac{LC_m}{m\pi} = -\frac{2L}{m^2\pi^2}\int_0^L \psi_2(x)\cos\frac{m\pi x}{L}\mathrm{d}x\\
&A_m\cosh\frac{m\pi h}{L} + B_m\sinh\frac{m\pi h}{L} + C_m h\cosh\frac{m\pi h}{L} + D_m h\sinh\frac{m\pi h}{L}\\
&\qquad = \frac{2L}{m^2\pi^2}\int_0^L f_1(x)\sin\frac{m\pi x}{L}\mathrm{d}x\\
&A_m\sinh\frac{m\pi h}{L} + B_m\cosh\frac{m\pi h}{L} + C_m\left(\frac{L}{m\pi}\cosh\frac{m\pi h}{L} + h\sinh\frac{m\pi h}{L}\right) +\\
&D_m\left(\frac{L}{m\pi}\sinh\frac{m\pi h}{L} + h\cosh\frac{m\pi h}{L}\right)\\
&\qquad = -\frac{2L}{m^2\pi^2}\int_0^L \psi_1(x)\cos\frac{m\pi x}{L}\mathrm{d}x
\end{aligned}\right\} \tag{6-31}$$

由此求出 A_m, B_m, C_m, D_m 以后，代入式(6-30)，即得要求的应力分量。

不难理解，梁的两端面上的边界条件

$$\int_0^h (\tau_{xy})_{x=0}\mathrm{d}y = F_{RO}, \qquad \int_0^h (\tau_{xy})_{x=L}\mathrm{d}y = -F_{RL}$$

将自然满足。

另外，还必须指出一点，如果我们将式(i)的第二、第四式两边对 x 从 0 到 L 积分，则可发现等号左边的积分为零。因此，要使这两个等式成立，必须有

$$\int_0^L \psi_1(x)\mathrm{d}x = 0, \quad \int_0^L \psi_2(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{6-32}$$

这表明，要使问题有上述形式的解，作用在上下边界上的切向荷载的合力必须分别为零。

要消除式(6-32)所给予的限制而扩大其应用范围，我们应在应力函数式(6-29)后面再叠加方程(6-15)的如下形式的特解①

$$U_0 = (\alpha x + \beta)(Ay^3 + By^2 + Cy) \tag{6-33}$$

其相应的应力分量为

① 这个解可以从方程(c)，(f)中令 $\lambda = 0$ 而求得。

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x^0 &= \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = (\alpha x + \beta)(6Ay + 2B)\\ \sigma_y^0 &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0\\ \tau_{xy}^0 &= -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -\alpha(3Ay^2 + 2By + C)\end{aligned}\right\} \tag{j}$$

在上下表面处，它们给出

$$\left.\begin{aligned}(\sigma_y^0)_{y=0} &= 0, \qquad (\tau_{xy}^0)_{y=0} = -\alpha C\\ (\sigma_y^0)_{y=h} &= 0, \qquad (\tau_{xy}^0)_{y=h} = -\alpha(3Ah^2 + 2Bh + C)\end{aligned}\right\} \tag{k}$$

由此可见，只要适当地选择任意常数 α, β, A, B, C，我们就能在梁的上下表面处得到一些不变的切应力 τ_{xy}^0，其值是任意的。现将式(j)和式(6－30)叠加，并利用上下两边的边界条件，就可得到与式(i)相仿的关系式，但在目前情况下，其等号左边增添了式(k)所示的相应的项。由于现在其第二、第四式左边对 x 从 0 到 L 的积分不为零，故其右边积分，即

$$\int_0^L \psi_1(x)\mathrm{d}x, \quad \int_0^L \psi_2(x)\mathrm{d}x$$

也不为零。这说明，现在就不需要由式(6－32)所给的限制了。

另外，从式(j)可以看出，在梁的两端，有

$$\left.\begin{aligned}(\sigma_x^0)_{x=0} &= \beta(6Ay + 2B)\\ (\sigma_x^0)_{x=L} &= (\alpha L + \beta)(6Ay + 2B)\end{aligned}\right\} \tag{l}$$

它们在静力上给出两端面上的拉力(或压力)和弯矩。故由此可知，我们将式(6－33)叠加到式(6－29)后，可以解决图 6－14 所示的梁弯曲问题，这问题较之于图 6－13 所示的情况更为一般了。

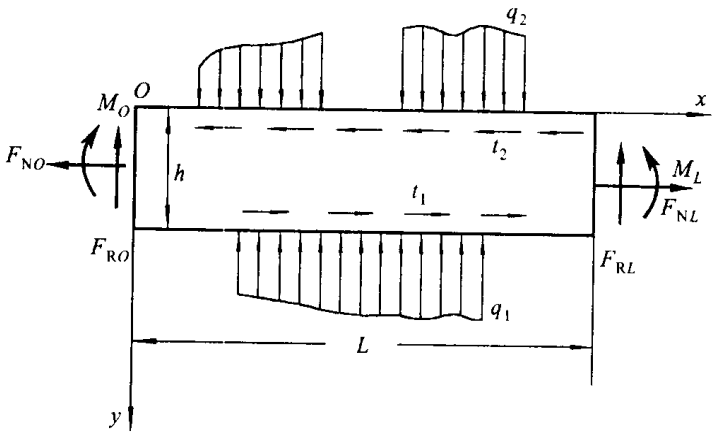


图 6－14

作为矩形梁弯曲三角级数解法的特例，我们考察图 6－15 所示的问题，这里

$t_1=0, t_2=0, F_{SO}=0, F_{SL}=0$。若仍采用图 6-13 所示的坐标系，则由代数方程组(6-31)，先求出各式等号右边的积分，再解得 A_m, B_m, C_m, D_m 后，代入式(6-30)，即得到这一问题的解答。如果我们在上述解答中，令 $2a\to 0$，而 $2aq\to F$，则得图 6-16 所示问题的解答，图中的曲线表示梁的中性层上应力 σ_y 的分布规律。由图可见，中性层上的应力 σ_y 随离集中力作用线距离的增加而迅速衰减，并很快趋向于零，这证明了圣维南原理的正确性。

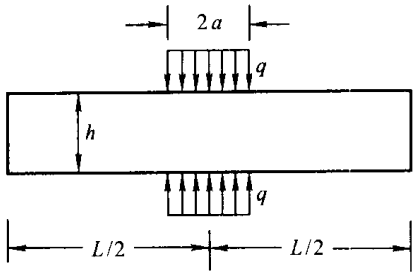


图 6-15

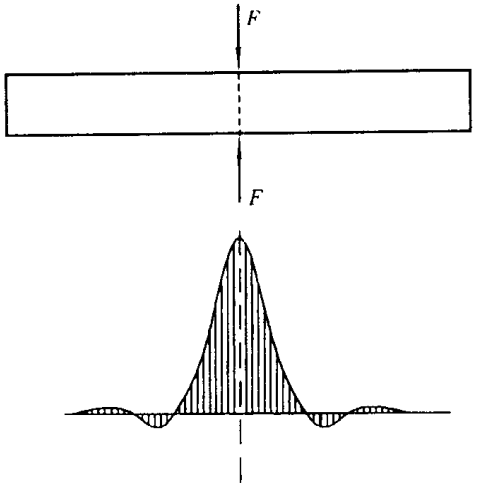


图 6-16

对于图 6-16 所示的问题，也可用下面的方法求解。我们将梁的长度改成 $2L$，而将坐标原点移置到梁的中间断面的形心上，于是荷载函数可展成

$$q(x)=\frac{qa}{L}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2q}{m\pi}\sin\frac{m\pi a}{L}\cos\frac{m\pi x}{L} \tag{m}$$

上式可看作沿整个梁长的均匀压力 qa/L 和三角级数项面力的叠加。对于均布面力 qa/L，应力分量为 $\sigma_x=0, \sigma_y=-qa/L, \tau_{xy}=0$；对应于三角级数项面力，可取应力函数为

$$U=\sum_{m=1}^{\infty}\cos\frac{m\pi x}{L}\left(A_m\cosh\frac{m\pi y}{L}+B_m\sinh\frac{m\pi y}{L}+C_m y\cosh\frac{m\pi y}{L}+D_m y\sinh\frac{m\pi y}{L}\right) \tag{6-34}$$

具体运算可参考文献[8]和[9]。

* §6-10 用傅里叶变换求解平面问题

(一) 傅里叶积分和傅里叶变换的概念

这一节,要介绍几个能用傅里叶(Fourier,J.B.J.)变换(或用傅里叶积分)求解的问题,为此,我们先简单地提一下傅里叶积分和傅里叶变换的概念。

大家知道,一个以 $2L$ 为周期的函数 $f(x)$ 可以展成傅里叶级数:

$$f(x) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m \cos \lambda_m x + b_m \sin \lambda_m x) \tag{a}$$

这里的

$$\lambda_m = \frac{m\pi}{L} \qquad (m = 1,2,3,\cdots) \tag{b}$$

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(\xi)\mathrm{d}\xi \\ a_m &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(\xi)\cos \lambda_m \xi \mathrm{d}\xi \\ b_m &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(\xi)\sin \lambda_m \xi \mathrm{d}\xi \end{aligned}\right\} \tag{c}$$

由式(b)可见,λ_m 是无限增大的不连续(即跳跃地变化)的参数,每次跳跃

$$\Delta\lambda = \frac{\pi}{L} \tag{d}$$

将式(c)代入式(a),并注意到式(d),于是有

$$f(x) = \frac{\Delta\lambda}{2\pi}\int_{-L}^{L} f(\xi)\mathrm{d}\xi + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Delta\lambda}{\pi}\int_{-L}^{L} f(\xi)\cos \lambda_m \xi \cos \lambda_m x \mathrm{d}\xi + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Delta\lambda}{\pi}\int_{-L}^{L} f(\xi)\sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m x \mathrm{d}\xi \tag{e}$$

现在令 $L\to\infty$(即 $\Delta\lambda\to 0$),此时,参数 λ 由零到无穷连续变化,式(e)右边的"$\sum$"号变成积分号,"$\sum$"号前的一项趋于零,于是

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos \lambda\xi \mathrm{d}\xi\right]\cos \lambda x \mathrm{d}\lambda + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin \lambda\xi \mathrm{d}\xi\right]\sin \lambda x \mathrm{d}\lambda \tag{6-35}$$

式(6-35)右边的积分,称为函数 $f(x)$ 的傅里叶积分①。由于它是令傅里

① 函数 $f(x)$ 能展成傅里叶积分的条件为:

(1) $f(x)$ 在每个有限区间 $(-L,L)$,满足狄里克雷(Dirichlet,P.G.L)条件;

(2) $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上绝对可积。

叶级数中的周期 $2L\to\infty$ 而得来的，所以，只有当自变量 x 每增加 ∞，函数才重复一次，而自变量无论增加什么样有限的数值，函数并不重复变化。因此，它表示非周期函数。

如果 $f(x)$ 为偶函数，则它的傅里叶积分为余弦积分：

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi\mathrm{d}\xi\right]\cos\lambda x\,\mathrm{d}\lambda \tag{6-36}$$

如果 $f(x)$ 为奇函数，则它的傅里叶积分为正弦积分

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi\mathrm{d}\xi\right]\sin\lambda x\,\mathrm{d}\lambda \tag{6-37}$$

将式(6-35)改写成

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos\lambda(\xi-x)\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}\lambda$$

并注意到

$$\cos\lambda(\xi-x)=\frac{1}{2}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(\xi-x)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(\xi-x)}]$$

则式(6-35)还可写成

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(\xi-x)}\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}\lambda$$

或

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\xi}\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda$$

令

$$\mathscr{F}[f(x)]=F(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\xi}\mathrm{d}\xi$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x \tag{6-38}$$

则

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda \tag{6-39}$$

式(6-38)和(6-39)分别称为函数 $f(x)$ 的傅里叶变换和傅里叶反变换[①]。

如果函数 $f(x)$ 是偶函数，则它的傅里叶变换和反变换为

$$\mathscr{F}[f(x)]=F_C(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x \tag{6-40}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F_C(\lambda)\cos\lambda x\,\mathrm{d}\lambda \tag{6-41}$$

如果 $f(x)$ 为奇函数，则它的傅里叶变换和反变换为

① 傅里叶变换存在的条件是 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 绝对可积。

$$\mathcal{F}[f(x)] = F_S(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin \lambda x \mathrm{d}x \tag{6-42}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F_S(\lambda)\sin \lambda x \mathrm{d}\lambda \tag{6-43}$$

为了下面的应用，我们再求 $f(x)$ 各阶导函数的傅里叶变换。假定 $f(x)$ 及其各阶导数在正负无穷的值为零，则 $f'(x)$ 的傅里叶变换为

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f'(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{\infty} f'(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}]_{\infty}^{\infty} - \frac{\mathrm{i}\lambda}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x \\ &= -\mathrm{i}\lambda\mathcal{F}[f(x)]\end{aligned} \tag{6-44}$$

同理可求得二阶以上导函数的傅里叶变换。现只将其二阶导函数和四阶导函数的傅里叶变换写在下面：

$$\mathcal{F}[f''(x)] = -\lambda^2\mathcal{F}[f(x)] \tag{6-45}$$

$$\mathcal{F}[f^{(4)}(x)] = \lambda^4\mathcal{F}[f(x)] \tag{6-46}$$

(二) 无限长板条受均布荷载作用

设有一根无限长的板条，在其上下两侧宽度为 $2c$ 的一段内受均布压力 q 作用(图 6-17)，求板内的应力。

这是平面应力问题。先用傅里叶积分求解。根据对称性，应力函数可取为

$$U = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[A\cosh \lambda y + D\lambda y\sinh \lambda y]\cos \lambda x \mathrm{d}\lambda \tag{6-47}$$

可以验证，它是满足双调和方程的。求其对应的应力分量

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2[A\cosh \lambda y + 2D\cosh \lambda y + D\lambda y\sinh \lambda y]\cos \lambda x \mathrm{d}\lambda \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2[A\cosh \lambda y + D\lambda y\sinh \lambda y]\cos \lambda x \mathrm{d}\lambda \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2[A\sinh \lambda y + D\sinh \lambda y + D\lambda y\cosh \lambda y]\sin \lambda x \mathrm{d}\lambda\end{aligned}\right| \tag{6-48}$$

下面，利用边界条件定 A 和 D，本问题的边界条件为

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \begin{cases} -q & (-c<x<c, y=\pm h) \\ 0 & (|x|>c, y=\pm h)\end{cases} \tag{f}$$

$$\tau_{xy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} = 0 \quad (y=\pm h) \tag{g}$$

将式(g)应用于式(6-48)的第三式，得到

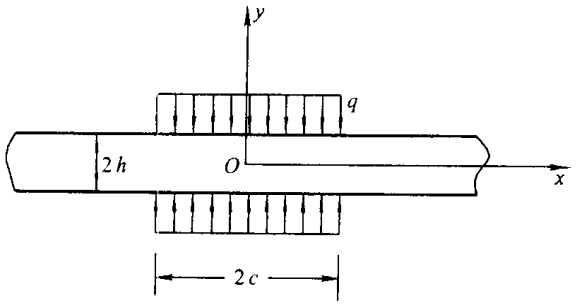


图 6-17

$$A = -D[1 + \lambda h \coth \lambda h] \tag{h}$$

再将式(f)应用于式(6-48)的第二式，并注意到式(h)，得到

$$(\sigma_y)_{y=\pm h} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} D\lambda^2 \left[\frac{\lambda h + \sinh \lambda h \cosh \lambda h}{\sinh \lambda h}\right]\cos \lambda x \, d\lambda \tag{i}$$

令

$$F_C(\lambda) = D\lambda^2 \left[\frac{\lambda h + \sinh \lambda h \cosh \lambda h}{\sinh \lambda h}\right] \tag{j}$$

可以发现，$F_C(\lambda)$实际上是 σ_y 当 $y = \pm h$ 时的傅里叶余弦变换，即

$$\begin{aligned} F_C(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_y(x, \pm h)\cos \lambda x \, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-c}^{c} (-q)\cos \lambda x \, dx \\ &= -\frac{2q}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin \lambda c}{\lambda} \end{aligned} \tag{k}$$

将式(k)，(j)联立，可解得 D，再由式(h)可求得 A。现将其结果写在下面：

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{2q}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin \lambda c}{\lambda^3}\left[\frac{\lambda h \cosh \lambda h + \sinh \lambda h}{\lambda h + \sinh \lambda h \cosh \lambda h}\right] \\ D &= -\frac{2q}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin \lambda c}{\lambda^3}\left[\frac{\sinh \lambda h}{\lambda h + \sinh \lambda h \cosh \lambda h}\right] \end{aligned}\right\} \tag{6-49}$$

最后，将式(6-49)代入式(6-47)和(6-48)，得到要求的应力函数和应力分量，它们都是以无穷积分的形式给出的，这些积分可以通过数值计算或者借助于留数理论而求得。现只将应力函数写在下面：

$$U = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{q\sin \lambda c}{\lambda^3(\lambda h + \sinh \lambda h \cosh \lambda h)}[(\lambda h \cosh \lambda h + \sinh \lambda h)\cosh \lambda y - \lambda y \sinh \lambda h \sinh \lambda y]\cos \lambda x \, d\lambda \tag{6-50}$$

再用傅里叶变换方法解决这个问题。为此，对双调和方程(6-15)施行傅里

叶变换(对 x 方向)①,利用式(6-45)和(6-46),并注意对称性,于是式(6-15)变为

$$\frac{\mathrm{d}^4\mathscr{U}}{\mathrm{d}y^4}-2\lambda^2\frac{\mathrm{d}^2\mathscr{U}}{\mathrm{d}y^2}+\lambda^4\mathscr{U}=0 \tag{6-51}$$

而边界条件(f)和(g)变为

$$\left.\begin{aligned}(\mathscr{U})_{y=\pm h}&=\frac{2q}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin\lambda c}{\lambda^3}\\ \lambda\left(\frac{\mathrm{d}\mathscr{U}}{\mathrm{d}y}\right)_{y=\pm h}&=0\end{aligned}\right\} \tag{6-52}$$

这里的

$$\mathscr{U}(\lambda,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}U(x,y)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x \tag{6-53}$$

方程(6-51)的通解为

$$\mathscr{U}=A\cosh\lambda y+B\sinh\lambda y+C\lambda y\sinh\lambda y+D\lambda y\cosh\lambda y$$

由于问题的对称性,得到

$$B=D=0$$

再利用边界条件(6-52),不难定出其中的任意常数 A 和 C。于是得

$$\mathscr{U}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2q\sin\lambda c}{\lambda^3(\lambda h+\sinh\lambda h\cosh\lambda h)}[(\lambda h\cosh\lambda h+\sinh\lambda h)\cosh\lambda y-\lambda y\sinh\lambda h\sinh\lambda y] \tag{6-54}$$

作傅里叶反变换,最后得要求的应力函数:

$$\begin{aligned}U&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{U}(\lambda,y)\cos\lambda x\,\mathrm{d}\lambda\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{q\sin\lambda c}{\lambda^3(\lambda h+\sinh\lambda h\cosh\lambda h)}[(\lambda h\cosh\lambda h+\sinh\lambda h)\cosh\lambda y-\lambda y\sinh\lambda h\sinh\lambda y]\cos\lambda x\,\mathrm{d}\lambda\end{aligned} \tag{6-55}$$

这个结果和上面用傅里叶积分求得的结果(6-50)是一样的。

用傅里叶变换的方法还可以求解半无限长板条的问题,请读者参考文献[46]的第 134～136 页。

(三) 弹性半无限平面问题

设有一个半无限的弹性平面,表面受任意分布的法向荷载作用,如图 6-18 所示。

---

① 因应力函数 $U(x,y)$ 的 x 变化范围是$(-\infty,\infty)$,假定对所有的 y,$\int_{-\infty}^{\infty}|U(x,y)|\mathrm{d}x$ 存在。

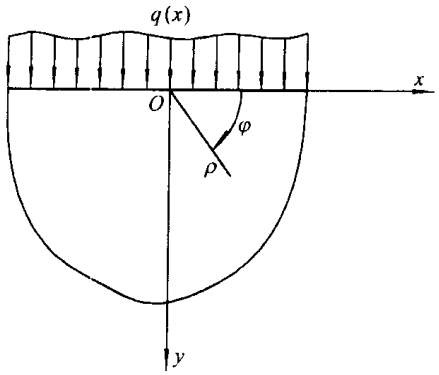


图 6-18

本问题的边界条件为

$$\left.\begin{aligned}(\sigma_y)_{y=0}&=\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_{y=0}=-q(x)\\(\tau_{xy})_{y=0}&=-\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\right)_{y=0}=0\end{aligned}\right\}\tag{l}$$

用傅里叶变换解决此问题。为此，对双调和方程(6-15)和边界条件(l)施行傅里叶变换(x 方向)，注意利用式(6-45)和(6-46)，于是式(6-15)和(l)变为

$$\frac{\mathrm{d}^4\mathcal{U}}{\mathrm{d}y^4}-2\lambda^2\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{U}}{\mathrm{d}y^2}+\lambda^4\mathcal{U}=0 \tag{6-56}$$

$$\left.\begin{aligned}-\lambda^2(\mathcal{U})_{y=0}&=-\mathcal{Q}(\lambda)\\\lambda\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{U}}{\mathrm{d}y}\right)_{y=0}&=0\end{aligned}\right\}\tag{6-57}$$

这里的

$$\mathcal{U}(\lambda,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}U(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x$$

$$\mathcal{Q}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}q(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x$$

假定 $q(x)$在$(-\infty,\infty)$绝对可积。

方程(6-56)通解的指数形式为

$$\mathcal{U}=A\mathrm{e}^{\lambda y}+B\mathrm{e}^{-\lambda y}+C\lambda y\mathrm{e}^{\lambda y}+D\lambda y\mathrm{e}^{-\lambda y} \tag{m}$$

为了保证当 $y\to\infty$时解有界，必须有

$$A=C=0$$

且式中的 λ 需取绝对值(因 λ 从 $-\infty$到∞变化)。这样，式(m)变为

$$\mathcal{U}=[B+D|\lambda|y]\mathrm{e}^{-|\lambda|y} \tag{n}$$

利用边界条件(6-57)，定出常数

$$B=D=\frac{\mathscr{Q}(\lambda)}{\lambda^2}$$

代入式(n),于是得

$$\mathscr{U}=\frac{\mathscr{Q}(\lambda)}{\lambda^2}(1+|\lambda|y)\mathrm{e}^{-|\lambda|y} \tag{6-58}$$

与式(6-58)对应的变换应力为

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{F}(\sigma_x)&=\frac{\mathrm{d}^2\mathscr{U}}{\mathrm{d}y^2}=-\mathscr{Q}(\lambda)[1-|\lambda|y]\mathrm{e}^{|\lambda|y}\\ \mathscr{F}(\sigma_y)&=-\lambda^2\mathscr{U}=-\mathscr{Q}(\lambda)[1+|\lambda|y]\mathrm{e}^{|\lambda|y}\\ \mathscr{F}(\tau_{xy})&=\mathrm{i}\lambda\frac{\mathrm{d}\mathscr{U}}{\mathrm{d}y}=-\mathscr{Q}(\lambda)[\mathrm{i}|\lambda|y]\mathrm{e}^{|\lambda|y}\end{aligned}\right\} \tag{6-59}$$

现求其反变换。注意到:

$$\mathscr{F}^{-1}[(1-|\lambda|y)\mathrm{e}^{-|\lambda|y}]=2^{3/2}\pi^{-1/2}x^2y(x^2+y^2)^{-2}$$
$$\mathscr{F}^{-1}[(1+|\lambda|y)\mathrm{e}^{-|\lambda|y}]=2^{3/2}\pi^{-1/2}y^3(x^2+y^2)^{-2}$$
$$\mathscr{F}^{-1}[(\mathrm{i}|\lambda|y)\mathrm{e}^{-|\lambda|y}]=2^{3/2}\pi^{-1/2}xy^2(x^2+y^2)^{-2}$$

并利用卷积定理①,最后得

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=-\frac{2y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-\xi)^2q(\xi)}{[(x-\xi)^2+y^2]^2}\mathrm{d}\xi\\ \sigma_y&=-\frac{2y^3}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{q(\xi)}{[(x-\xi)^2+y^2]^2}\mathrm{d}\xi\\ \tau_{xy}&=-\frac{2y^2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-\xi)q(\xi)}{[(x-\xi)^2+y^2]^2}\mathrm{d}\xi\end{aligned}\right\} \tag{6-60}$$

特别地,如弹性半无限平面表面受法向集中力 F 作用,则

$$\mathscr{Q}(\xi)=F\delta(\xi)$$

$\delta(\xi)$为狄拉克(Dirac,P.A.M.)函数,在这种情况下,可得应力分量

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=-\frac{2F}{\pi}\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2F}{\pi}\frac{\cos^2\varphi\sin\varphi}{\rho}\\ \sigma_y&=-\frac{2F}{\pi}\frac{y^3}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{2F}{\pi}\frac{\sin^3\varphi}{\rho}\\ \tau_{xy}&=-\frac{2F}{\pi}\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{2F}{\pi}\frac{\cos\varphi\sin^2\varphi}{\rho}\end{aligned}\right\} \tag{6-61}$$

关于弹性半无限平面受集中力作用的问题,下一章还要通过另外的方法求解,并对其结果进行详细的分析。

---

① 卷积定理:若 $F(\lambda)$和 $G(\lambda)$分别为 $f(x)$和 $g(x)$的傅里叶变换,则

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)G(\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)g(x-\xi)\mathrm{d}\xi$$

* §6-11 艾里应力函数的物理意义

艾里应力函数的引入，使平面问题由三个未知函数变为一个未知函数，从而把问题归结为在给定的边界条件下求解双调和方程。上面我们已经列举了借助于艾里应力函数求解问题的一些实例。在结束本章时，我们拟再补充论证一下艾里应力函数 U 及其一阶偏导数 $\frac{\partial U}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial U}{\partial y}$ 在平面物体内任意一点上的物理意义。

现在，过物体内任意一点任作一条曲线，此曲线将物体分割成左右两部分，如考虑曲线的左侧部分，则规定曲线的正方向如图 6-19 所示。

设曲线任一点的外法线单位矢量为 $\boldsymbol{v}$，该点应力矢量的两个分量为 f_{vx} 和 f_{vy}，如不计体力，则有

$$\left.\begin{aligned} f_{vx} &= \sigma_x l + \tau_{yx} m = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} l - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} m \\ f_{vy} &= \tau_{xy} l + \sigma_y m = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} l + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} m \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

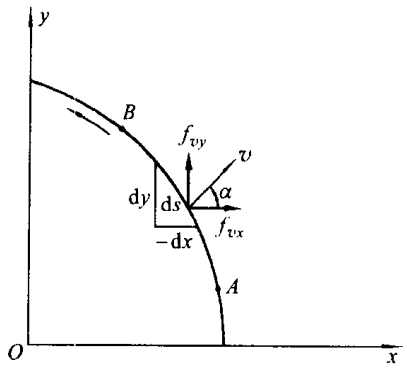


图 6-19

由图 6-19 可见

$$l = \cos\alpha = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$$

$$m = \sin\alpha = -\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$$

于是式(a)可表示为

$$\left.\begin{aligned} f_{sx} &= \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) \\ f_{sy} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

上列两式对 s 从定点 A(该点可以任意取定)到动点 B 积分,得

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_B &= \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_A + \int_A^B f_{sx}\,\mathrm{d}s \\ \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_B &= \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_A - \int_A^B f_{sy}\,\mathrm{d}s \end{aligned}\right\} \tag{c}$$

另一方面,因为

$$\mathrm{d}U = \frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}y$$

故由分部积分得

$$[U]_A^B = \left(x\frac{\partial U}{\partial x}\right)_A^B - \int_A^B x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\mathrm{d}s + \left(y\frac{\partial U}{\partial y}\right)_A^B - \int_A^B y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\mathrm{d}s$$

将式(b)代入,上式变为

$$U_B - U_A = x_B\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_B - x_A\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_A + \int_A^B x f_{sy}\,\mathrm{d}s + y_B\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_B - y_A\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_A - \int_A^B y f_{sx}\,\mathrm{d}s$$

再将式(c)代入,经整理,得到

$$U_B = U_A + (x_B - x_A)\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_A + (y_B - y_A)\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_A + \int_A^B (y_B - y) f_{sx}\,\mathrm{d}s + \int_A^B (x - x_B) f_{sy}\,\mathrm{d}s \tag{d}$$

式(d)还可以作些简化。事实上,前面已经讲过,在艾里应力函数中增加一个坐标的一次式 $ax + by + c$,对求应力是没有影响的。因此,我们总能这样地选择 a,b 和 c,使应力函数 U 及其偏导数 $\frac{\partial U}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial U}{\partial y}$ 在定点 A 的值为零。于是式(d)和式(c)简化为

$$U_B = \int_A^B (y_B - y) f_{sx}\,\mathrm{d}s + \int_A^B (x - x_B) f_{sy}\,\mathrm{d}s \tag{6-62}$$

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_B &= \int_A^B f_{sx}\,\mathrm{d}s \\ -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_B &= \int_A^B f_{sy}\,\mathrm{d}s \end{aligned}\right\} \tag{6-63}$$

显然,式(6-62)的等号右边表示物体在曲线段 AB 的右侧部分给其左侧部分的作用力(内力)对点 B 的矩,而式(6-63)的两个式子的等号右边,分别表示

曲线段 AB 右侧部分给其左侧部分的作用力的主矢量在两个坐标轴上的投影。到此，艾里应力函数及其偏导数在平面物体内任一点上值的物理意义就十分清楚了。

如果曲线 AB 为平面物体的边界，则式(6-62)和式(6-63)中的 f_x 和 f_y 应改成面力 $\bar{f}_x$ 和 $\bar{f}_y$，于是有

$$U_B = \int_A^B (y_B - y)\,\bar{f}_x\,\mathrm{d}s + \int_A^B (x - x_B)\,\bar{f}_y\,\mathrm{d}s \tag{6-64}$$

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_B &= \int_A^B \bar{f}_x\,\mathrm{d}s \\ -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_B &= \int_A^B \bar{f}_y\,\mathrm{d}s \end{aligned}\right\} \tag{6-65}$$

式(6-64)等号的右边表示作用在边界 AB 段上的外力对 B 点之矩，而式(6-65)两个式子等号右边表示同一段边界上的外力的主矢量在两个坐标轴上的投影。式(6-64)和(6-65)给出了问题的边界条件。下面举一个例子以说明式(6-64)和式(6-65)的应用。

图 6-20 表示一狭长矩形截面的悬臂梁，上表面受均布压力 q 作用，自由端受集中力 F 和力偶 M 作用，求应力分量。

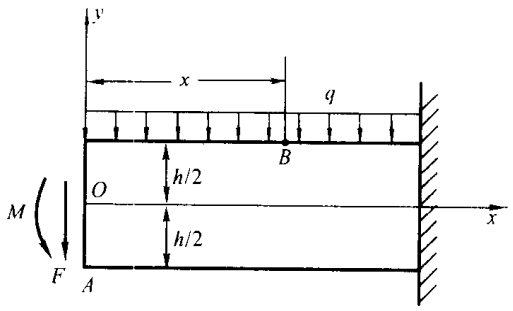


图 6-20

设在 $A\left(0, -\frac{h}{2}\right)$ 点应力函数 U 及其一阶偏导数为零。在上表面 B 点上，U 的值应等于作用在 AB 段上全部外力对 B 点的矩，但由于从 A 到 B 的走向是曲线的负方向，故须冠以负号；偏导数 $\frac{\partial U}{\partial y}$ 应等于这些外力的主矢量在 x 轴上的投影，也须冠以负号。因此，有

$$\left.\begin{aligned}
&(U)_{y=\frac{h}{2}}=-\left(M+Fx+\frac{1}{2}qx^2\right)\\
&\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{y=\frac{h}{2}}=0\\
&(U)_{y=-\frac{h}{2}}=0\\
&\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{y=-\frac{h}{2}}=0
\end{aligned}\right\}\tag{e}$$

欲使式(e)的第一个条件成立，试取下列形式的应力函数

$$U=f_0(y)+f_1(y)x+\frac{1}{2}f_2(y)x^2\tag{f}$$

由边界条件(e)，有

$$\left.\begin{aligned}
&(f_0)_{y=\frac{h}{2}}=-M,\quad (f_1)_{y=\frac{h}{2}}=-F\\
&(f_2)_{y=\frac{h}{2}}=-q,\quad \left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}y}\right)_{y=\frac{h}{2}}=0\\
&\left(\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}y}\right)_{y=\frac{h}{2}}=0,\quad \left(\frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}y}\right)_{y=\frac{h}{2}}=0\\
&(f_0)_{y=-\frac{h}{2}}=0,\quad (f_1)_{y=-\frac{h}{2}}=0\\
&(f_2)_{y=-\frac{h}{2}}=0,\quad \left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}y}\right)_{y=-\frac{h}{2}}=0\\
&\left(\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}y}\right)_{y=-\frac{h}{2}}=0,\quad \left(\frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}y}\right)_{y=-\frac{h}{2}}=0
\end{aligned}\right\}\tag{g}$$

再将式(f)代入方程(6－15)，其满足的条件为

$$\left.\begin{aligned}
&2\frac{\mathrm{d}^2f_2}{\mathrm{d}y^2}+\frac{\mathrm{d}^4f_0}{\mathrm{d}y^4}=0\\
&\frac{\mathrm{d}^4f_1}{\mathrm{d}y^4}=0\\
&\frac{\mathrm{d}^4f_2}{\mathrm{d}y^4}=0
\end{aligned}\right\}\tag{h}$$

求方程(h)的通解，再由边界条件(g)定出其待定常数，得

$$f_0=-\frac{1}{2}M\left(1+3\frac{y}{h}-4\frac{y^3}{h^3}\right)-\frac{1}{80}qhy\left(1-\frac{4y^2}{h^2}\right)^2$$

$$f_1=-\frac{1}{2}F\left(1+3\frac{y}{h}-4\frac{y^3}{h^3}\right)$$

$$f_2=-\frac{1}{2}q\left(1+3\frac{y}{h}-4\frac{y^3}{h^3}\right)$$

代入式(f),得应力函数

$$U=-\frac{1}{2}\left(M+Fx+\frac{1}{2}qx^2\right)\left(1+3\frac{y}{h}-4\frac{y^3}{h^3}\right)-\frac{1}{80}qhy\left(1-\frac{4y^2}{h^2}\right)^2$$

最后得应力分量为

$$\sigma_x=\frac{12y}{h^3}\left(M+Fx+\frac{1}{2}qx^2\right)-q\left(\frac{4y^3}{h^3}-\frac{3y}{5h}\right)$$

$$\sigma_y=-\frac{1}{2}q\left(1+3\frac{y}{h}-4\frac{y^3}{h^3}\right)$$

$$\tau_{xy}=\frac{3}{2h}(F+qx)\left(1-\frac{4y^2}{h^2}\right)$$

思考题与习题

6-1 试比较平面应变问题和平面应力问题的异同点。

6-2 为什么说平面问题中的方程 $\nabla^2\nabla^2U=0$(U 为艾里应力函数)表示协调条件?

6-3 试证明:若体力虽然不是常量,但却为有势力,即

$$F_x=-\frac{\partial V}{\partial x},F_y=-\frac{\partial V}{\partial y}$$

这里,V 为势函数,则应力分量可用应力函数表示为

$$\sigma_x=\frac{\partial^2U}{\partial y^2}+V$$

$$\sigma_y=\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+V$$

$$\tau_{xy}=-\frac{\partial^2U}{\partial x\partial y}$$

并导出应力函数 U 所满足的方程。

6-4 试直接从平面问题的平衡微分方程和莱维方程出发,分别求图 6-7 和图 6-9 所示问题的应力分量(体力不计)。

提示:利用材料力学结果,必要时进行修正。

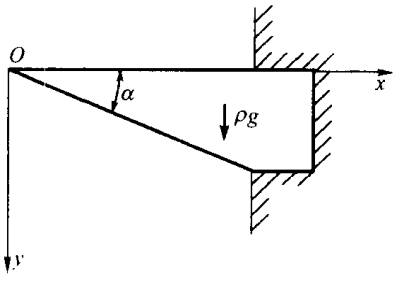


图 6-21

6-5 图 6-21 所示的三角形悬臂梁只受重力作用,梁的密度为 ρ,试求应力分量。

提示：设该问题有代数多项式解，用量纲分析法确定应力函数的幂次。

6－6　设有矩形截面的竖柱，密度为 ρ，在其一个侧面上作用有均匀分布的剪力 q（图 6－22），求应力分量。

提示：可假设 $\sigma_x=0$，或假设 $\tau_{xy}=f(x)$。

6－7　图 6－23 表示一水坝的横截面，设水的密度为 ρ_1，坝体的密度为 ρ，试求应力分量。

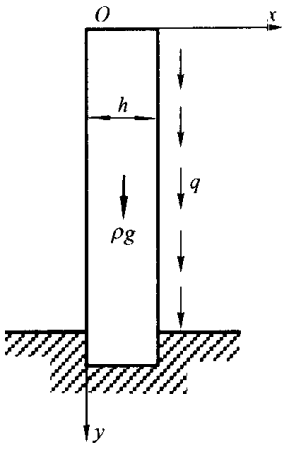


图 6－22

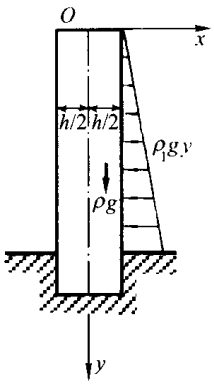


图 6－23

提示：可假设 $\sigma_x=yf(x)$，对非主要边界，可应用局部性原理。

6－8　图 6－24 所示的矩形截面的简支梁，受三角形分布的荷载作用，求应力分量。

提示：试取应力函数为

$$U=Ax^3y^3+Bxy^5+Cx^3y+Dxy^3+Ex^3+Fxy$$

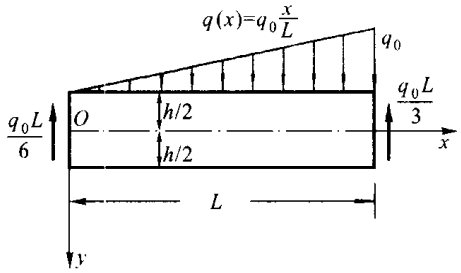


图 6－24

6－9　图 6－25 所示的矩形截面梁，左端 O 点被支座固定，并在左端作用有力偶（力偶矩为 M），求应力分量。

提示：试取应力函数

$$U=Ay^3+Bxy+Cxy^3$$

6－10　利用三角级数解法，求图 6－10 所示的矩形截面简支梁的应力分量。将坐标原点移置到左上角点处。

6－11　利用三角级数解法，求图 6－24 所示的矩形截面简支梁的应力分量，坐标原点移

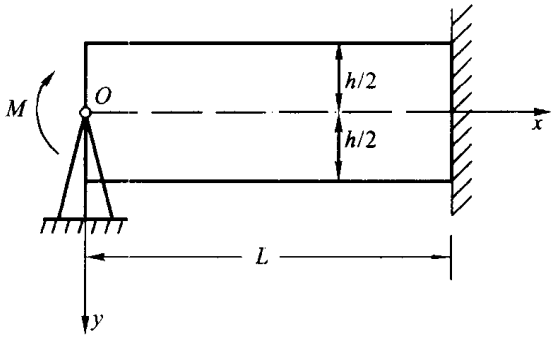


图 6－25

置到左上角点处。

6－12 试用§6－11所介绍的方法，求图6－24所示梁的应力分量。

第七章　平面问题的极坐标解答

在处理弹性力学问题时，选择什么样的坐标系，虽然不影响对问题本质的描绘，但将直接关系到解决问题的难易程度。例如，对于像矩形梁、矩形截面水坝和三角形水坝等问题，上一章中我们采用了直角坐标系，但对于像圆盘、厚壁圆筒、扇形板和半无限平面等问题采用直角坐标系就不如极坐标简便。本章的任务，就是要推导极坐标形式的基本方程，并用来解决工程上经常遇到的一些问题。

§7-1　平面问题的极坐标方程

极坐标系与直角坐标系之间的关系为

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi \tag{7-1}$$

或

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},\quad \varphi=\arctan\frac{y}{x} \tag{7-2}$$

如图 7-1 所示。

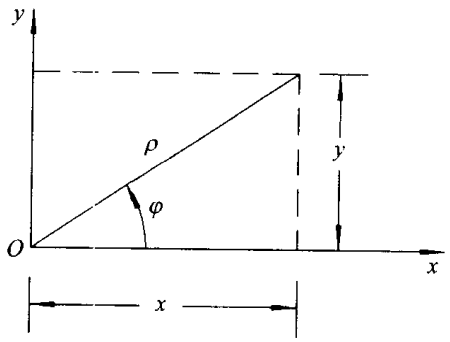


图 7-1

首先推导平衡微分方程。

试从长柱体或薄板内割出一个由相距为 $d\rho$ 的两个圆柱面和夹角为 $d\varphi$ 的两个径向平面围成的微分单元体 $ABDC$（图 7-2），并用 σ_ρ 表示径向正应力，σ_φ 表示环向正应力，$\tau_{\rho\varphi}$ 和 $\tau_{\varphi\rho}$ 分别表示圆柱面和径向平面上的切应力，根据切应力互等关系，应有 $\tau_{\rho\varphi}=\tau_{\varphi\rho}$。考虑到应力随位置的变化，如果假设 AB 面上的应力

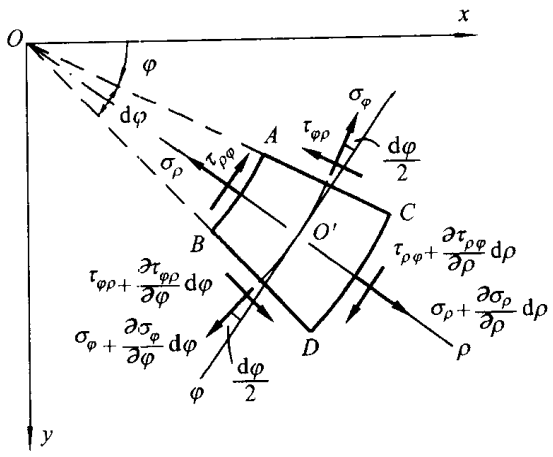


图 7-2

分量为 σ_ρ 和 $\tau_{\rho\varphi}$，则 CD 面上的应力分量为 $\sigma_\rho+\frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho}d\rho$ 和 $\tau_{\rho\varphi}+\frac{\partial\tau_{\rho\varphi}}{\partial\rho}d\rho$；如果 AC 面上的应力分量为 σ_φ 和 $\tau_{\varphi\rho}$，则 BD 面上的应力分量为 $\sigma_\varphi+\frac{\partial\sigma_\varphi}{\partial\varphi}d\varphi$ 和 $\tau_{\varphi\rho}+\frac{\partial\tau_{\varphi\rho}}{\partial\varphi}d\varphi$。用 F_ρ 和 F_φ 分别表示单位体积的体力在 ρ 方向和 φ 方向的分量，并规定它们指向正方向。

取单元体的厚度为一单位，建立它的平衡条件。先将单元体所受各力投影到中心的径向轴上，取 $\sin\frac{d\varphi}{2}\approx\frac{d\varphi}{2}$，$\cos\frac{d\varphi}{2}\approx1$，得

$$\left(\sigma_\rho+\frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho}d\rho\right)(\rho+d\rho)d\varphi-\sigma_\rho\rho d\varphi-\left(\sigma_\varphi+\frac{\partial\sigma_\varphi}{\partial\varphi}d\varphi\right)d\rho\,\frac{d\varphi}{2}-$$

$$\sigma_\varphi d\rho\,\frac{d\varphi}{2}+\left(\tau_{\varphi\rho}+\frac{\partial\tau_{\varphi\rho}}{\partial\varphi}d\varphi\right)d\rho-\tau_{\varphi\rho}d\rho+F_\rho\rho d\varphi d\rho=0$$

简化上式，略去三阶微量，并在等号两边同除以 $\rho d\varphi d\rho$，于是有

$$\frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{\varphi\rho}}{\partial\varphi}+\frac{\sigma_\rho-\sigma_\varphi}{\rho}+F_\rho=0 \tag{a}$$

再将单元体上所受各力投影到中心切向轴上，仍取 $\sin\frac{d\varphi}{2}\approx\frac{d\varphi}{2}$，$\cos\frac{d\varphi}{2}\approx1$，得

$$\left(\sigma_\varphi+\frac{\partial\sigma_\varphi}{\partial\varphi}d\varphi\right)d\rho-\sigma_\varphi d\rho+\left(\tau_{\rho\varphi}+\frac{\partial\tau_{\rho\varphi}}{\partial\rho}d\rho\right)(\rho+d\rho)d\varphi-\tau_{\rho\varphi}\rho d\varphi+$$

$$\left(\tau_{\varphi\rho}+\frac{\partial\tau_{\varphi\rho}}{\partial\varphi}d\varphi\right)d\rho\,\frac{d\varphi}{2}+\tau_{\varphi\rho}d\rho\,\frac{d\varphi}{2}+F_\varphi\rho d\varphi d\rho=0$$

简化上式，略去三阶微量，并在等号两边同除以 $\rho d\varphi d\rho$，注意到 $\tau_{\rho\varphi}=\tau_{\varphi\rho}$，得

$$\frac{\partial\tau_{\rho\varphi}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{2\tau_{\rho\varphi}}{\rho}+F_\varphi=0 \tag{b}$$

综合式(a)和式(b),得到极坐标形式的平衡微分方程如下:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{\varphi\rho}}{\partial \varphi}+\frac{\sigma_\rho-\sigma_\varphi}{\rho}+F_\rho=0\\ \frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{2\tau_{\rho\varphi}}{\rho}+F_\varphi=0\end{aligned}\right\} \tag{7-3}$$

再推导极坐标形式的几何方程。

我们分别用 u_ρ 和 u_φ 表示位移矢量的径向和环向分量,用 ε_ρ 和 ε_φ 表示径向和环向的正应变分量,$\gamma_{\rho\varphi}$ 表示切应变分量。

借助于与第三章第一节中同样的推理,可得

$$\varepsilon_\rho=\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} \tag{c}$$

至于 ε_φ,一般情况下,是由两种原因引起的:其一,如果只有沿着径向的位移 u_ρ

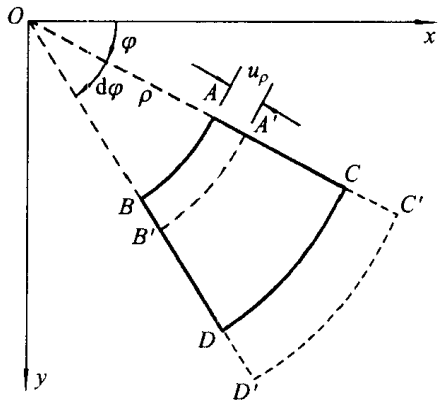


图 7-3

(图 7-3),则微分线段 $AB=\rho d\varphi$ 的伸长率为

$$\frac{(\rho+u_\rho)d\varphi-\rho d\varphi}{\rho d\varphi}=\frac{u_\rho}{\rho} \tag{d}$$

如果只有环向的位移 u_φ,也能产生一种环向的伸长率

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial s}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \tag{e}$$

将式(d)和式(e)相加,得到环向的正应变分量

$$\varepsilon_\varphi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{u_\rho}{\rho} \tag{f}$$

现在考察切应变。设单元体 $ABDC$ 在变形后变成 $A'B'D'C'$,由图 7-4 很容易看出,切应变分量 $\gamma_{\rho\varphi}$ 应为

$$\gamma_{\rho\varphi}=\gamma+(\beta-\alpha) \tag{g}$$

这里 γ 表示环向微分线段 AB 向 ρ 方向转过的角度,如果和 §3-1 中的式(e)作

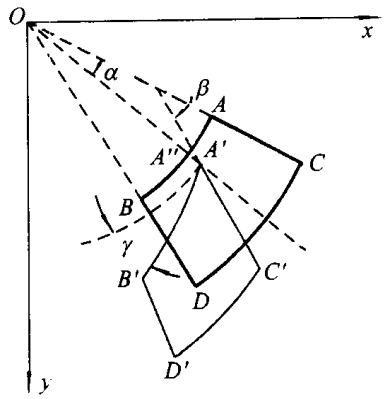


图 7-4

类比，可得

$$\gamma=\frac{\partial u_\rho}{\partial s}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi} \tag{h}$$

β 表示径向微分线段 AC 向 φ 方向转过的角度，如果和 §3-1 中的式(d)作类比，得

$$\beta=\frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} \tag{i}$$

而由图 7-4 不难看出，α 应等于 A 点的环向位移 $AA''=u_\varphi$ 除以 A 点径向坐标 ρ，即

$$\alpha=\frac{u_\varphi}{\rho} \tag{j}$$

将式(h)，(i)，(j)代入式(g)，得

$$\gamma_{\rho\varphi}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho}-\frac{u_\varphi}{\rho} \tag{k}$$

综合关系式(c)，(f)和(k)，得到极坐标形式的几何方程如下：

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_\rho&=\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}\\
\varepsilon_\varphi&=\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{u_\rho}{\rho}\\
\gamma_{\rho\varphi}&=\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho}-\frac{u_\varphi}{\rho}
\end{aligned}\right\} \tag{7-4}$$

平面应力问题极坐标形式的胡克定律与直角坐标表示的形式一样(因物体是各向同性的)，只要将其中的 x 和 y 分别换成 ρ 和 φ 即可，即

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_\rho &= \frac{1}{E}(\sigma_\rho - \nu\sigma_\varphi)\\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{E}(\sigma_\varphi - \nu\sigma_\rho)\\ \gamma_{\rho\varphi} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{\rho\varphi}\end{aligned}\right\} \tag{7-5}$$

对于平面应变问题，必须注意将式(7-5)中的 E 和 ν 分别改成 $\frac{E}{1-\nu^2}$ 和 $\frac{\nu}{1-\nu}$。

在直角坐标系下，体力为常量时，平面问题应力形式的协调方程为

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

这里的

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

现在也要把它变换成极坐标形式。

利用式(7-2)，将 ρ 和 φ 分别对 x 和 y 求偏导数，得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\rho}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\rho} = \cos\varphi\\ \frac{\partial\rho}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\rho} = \sin\varphi\\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} &= -\frac{y}{x^2}\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{1}{\rho}\sin\varphi\\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} &= \frac{1}{x}\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{\rho}\cos\varphi\end{aligned}\right\} \tag{l}$$

注意到式(l)，可导出以下的运算符号

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\varphi} = \cos\varphi\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\varphi} = \sin\varphi\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\end{aligned}\right\} \tag{m}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\\ &= \cos^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} - \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} +\\ &\quad \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\end{aligned} \tag{n}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$=\sin^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\varphi}+\frac{\cos^2\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}-$$

$$\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{\cos^2\varphi}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \tag{o}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}=\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$=\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\varphi}-\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}-$$

$$\frac{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}-\frac{\sin\varphi\cos\rho}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \tag{p}$$

将式(n)和式(o)相加,经简化,得极坐标形式的拉普拉斯运算子

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \tag{q}$$

另外,注意到 $\sigma_x+\sigma_y=\sigma_\rho+\sigma_\varphi$(是不变量),因此,在极坐标系下,体力为常量时平面问题应力形式的协调方程变换为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)(\sigma_\rho+\sigma_\varphi)=0 \tag{7-6}$$

若体力不计,并采用应力解法,请读者自己验证以下形式的应力表达式是满足平衡微分方程(7-3)的①:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\rho&=\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2U}{\partial\varphi^2}\\ \sigma_\varphi&=\frac{\partial^2U}{\partial\rho^2}\\ \tau_{\rho\varphi}&=\tau_{\varphi\rho}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2U}{\partial\rho\partial\varphi}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial U}{\partial\varphi}=-\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right)\end{aligned}\right\} \tag{7-7}$$

这里的 $U(\rho,\varphi)$为极坐标形式的艾里应力函数,假定有连续到四阶的偏导数

将式(7-7)代入式(7-6),得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\left(\frac{\partial^2U}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2U}{\partial\varphi^2}\right)=0 \tag{7-8}$$

显然,这是极坐标形式的双调和方程。

总之,用极坐标解弹性力学的平面问题,与直角坐标一样,也归结为在给定的边界条件下求解双调和方程。求得了应力函数 U,由式(7-7)求应力分量,再由式(7-5)和式(7-4)求应变分量和位移分量。

---

① 式(7-7)可利用微分算子(n),(o),(p),由 $\sigma_\rho=(\sigma_x)_{\varphi=0}=\left(\frac{\partial^2U}{\partial y^2}\right)_{\varphi=0}$,$\sigma_\varphi=(\sigma_y)_{\varphi=0}=\left(\frac{\partial^2U}{\partial x^2}\right)_{\varphi=0}$,$\tau_{\rho\varphi}=(\tau_{xy})_{\varphi=0}=-\left(\frac{\partial^2U}{\partial x\partial y}\right)_{\varphi=0}$得到。

§7-2 轴对称应力和对应的位移

现在考察应力函数 U 和 φ 无关的一种特殊情况，此时，方程(7-8)变成常微分方程

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\rho}\right)=0 \tag{a}$$

如将其等号左边展开，并在其等号两边同乘以 ρ^4，则得

$$\rho^4\frac{\mathrm{d}^4U}{\mathrm{d}\rho^4}+2\rho^3\frac{\mathrm{d}^3U}{\mathrm{d}\rho^3}-\rho^2\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}\rho^2}+\rho\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\rho}=0 \tag{b}$$

这是大家熟悉的欧拉方程，对这类方程，只要引入变换

$$\rho=\mathrm{e}^t$$

就可以将它变成如下的常系数微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^4U}{\mathrm{d}t^4}-4\frac{\mathrm{d}^3U}{\mathrm{d}t^3}+4\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}t^2}=0$$

其通解为

$$U=At+Bt\mathrm{e}^{2t}+C\mathrm{e}^{2t}+D$$

注意到 $t=\ln\rho$，即得方程(b)的通解

$$U=A\ln\rho+B\rho^2\ln\rho+C\rho^2+D \tag{c}$$

代入式(7-7)，得应力表达式

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\rho&=\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}o}=\frac{A}{\rho^2}+B(1+2\ln\rho)+2C\\ \sigma_\varphi&=\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}\rho^2}=-\frac{A}{\rho^2}+B(3+2\ln\rho)+2C\\ \tau_{\rho\varphi}&=\tau_{\varphi\rho}=0\end{aligned}\right\} \tag{7-9}$$

很容易看出，由式(7-9)给出的应力分量是对称于坐标原点而分布的，这种应力称为轴对称应力。

现在考察与轴对称应力相对应的位移。将式(7-9)代入到式(7-5)，并利用式(7-4)，于是有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u_\rho}{\partial\rho}=\frac{1}{E}\left[(1+\nu)\frac{A}{\rho^2}+(1-3\nu)B+2(1-\nu)B\ln\rho+2(1-\nu)C\right]\\ &\frac{u_\rho}{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}=\frac{1}{E}\left[-(1+\nu)\frac{A}{\rho^2}+(3-\nu)B+2(1-\nu)B\ln\rho+2(1-\nu)C\right]\\ &\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\rho}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial\rho}-\frac{u_\varphi}{\rho}=0\end{aligned}\right\} \tag{d}$$

由式(d)的第一式积分,得

$$u_\rho = \frac{1}{E}\left[-(1+\nu)\frac{A}{\rho} + (1-3\nu)B\rho + 2(1-\nu)B\rho(\ln\rho - 1) + 2(1-\nu)C\rho\right] + f(\varphi) \tag{e}$$

这里的 $f(\varphi)$ 为 φ 的任意函数。将式(e)代入式(d)的第二式,移项并以 ρ 乘等号两边,得

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{4B\rho}{E} - f(\varphi)$$

积分以后得

$$u_\varphi = \frac{4B\rho\varphi}{E} - \int f(\varphi)\mathrm{d}\varphi + g(\rho) \tag{f}$$

这里的 $g(\rho)$ 为 ρ 的任意函数。将式(e)和式(f)代入式(d)的第三式,有

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}f(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} + \frac{\mathrm{d}g(\rho)}{\mathrm{d}\rho} - \frac{g(\rho)}{\rho} + \frac{1}{\rho}\int f(\varphi)\mathrm{d}\varphi = 0$$

或者写成

$$g(\rho) - \rho\frac{\mathrm{d}g(\rho)}{\mathrm{d}\rho} = \frac{\mathrm{d}f(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} + \int f(\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

显然,要使此式对于所有的 ρ 和 φ 都成立,只有

$$g(\rho) - \rho\frac{\mathrm{d}g(\rho)}{\mathrm{d}\rho} = F \tag{g}$$

$$\frac{\mathrm{d}f(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} + \int f(\varphi)\mathrm{d}\varphi = F \tag{h}$$

这里,F 为任意常数。方程(g)的通解为

$$g(\rho) = H\rho + F \tag{i}$$

其中,H 为任意常数。为了求得 $f(\varphi)$,将式(h)求一阶导数,于是有

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^2} + f(\varphi) = 0$$

它的通解为

$$f(\varphi) = I\sin\varphi + K\cos\varphi \tag{j}$$

另外,由式(h)得

$$\int f(\varphi)\mathrm{d}\varphi = F - \frac{\mathrm{d}f(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} = F - I\cos\varphi + K\sin\varphi \tag{k}$$

将式(i),(j),(k)分别代入式(e)和式(f),最后得位移分量的表达式

$$\left.\begin{aligned} u_\rho &= \frac{1}{E}\left[-(1+\nu)\frac{A}{\rho}+(1-3\nu)B\rho+\right.\\ &\quad 2(1-\nu)B\rho(\ln\rho-1)+\\ &\quad \left.2(1-\nu)C\rho\right]+I\sin\varphi+K\cos\varphi\\ u_\varphi &= \frac{4B\rho\varphi}{E}+H\rho+I\cos\varphi-K\sin\varphi \end{aligned}\right\} \tag{7-10}$$

式中的 A,B,C,H,I,K 由边界条件和约束条件来确定。

式(7-10)表示,应力轴对称并不表示位移也是轴对称的。但在轴对称应力情况下,如果物体的几何形状和受力(或几何约束)也是轴对称的,则位移也是轴对称的。这时,物体内各点都不会有环向位移,也就是说,不论 ρ 和 φ 取什么样的值,都应该有 $u_\varphi=0$。因此,由式(7-10)的第二式,有

$$B=H=I=K=0$$

这时,式(7-9)简化为

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\rho &= \frac{A}{\rho^2}+2C\\ \sigma_\varphi &= -\frac{A}{\rho^2}+2C\\ \tau_{\rho\varphi} &= \tau_{\varphi\rho}=0 \end{aligned}\right\} \tag{7-11}$$

而式(7-10)简化为

$$\left.\begin{aligned} u_\rho &= \frac{1}{E}\left[-(1+\nu)\frac{A}{\rho}+2(1-\nu)C\rho\right]\\ u_\varphi &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{7-12}$$

式(7-10)和式(7-12)在应用于平面应变问题时,须将其中的 E 和 ν 分别换成 $\frac{E}{1-\nu^2}$ 和 $\frac{\nu}{1-\nu}$。

§7-3 厚壁圆筒受均匀分布压力作用

设有一个内半径为 a 而外半径为 b 的长的厚壁圆筒,内外壁分别受到均匀分布的压力 q_1 和 q_2 作用(图 7-5)。这问题显然是应力轴对称的,如不计刚体位移,位移也是轴对称的。

此时,应力具有式(7-11)所给的形式。现利用边界条件定常数 A 和 C。

本问题的边界条件为

$$(\sigma_\rho)_{\rho=a}=-q_1,\qquad (\sigma_\rho)_{\rho=b}=-q_2$$

将它应用于式(7-11)上,得

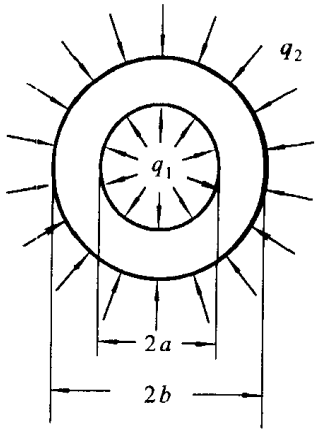


图 7-5

$$\frac{A}{a^2}+2C=-q_1,\qquad \frac{A}{b^2}+2C=-q_2$$

解之,得

$$A=\frac{a^2b^2(q_2-q_1)}{b^2-a^2},\qquad C=\frac{q_1a^2-q_2b^2}{2(b^2-a^2)}$$

将 A 和 C 的值代入式(7-11),得拉梅解答

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\rho&=\frac{a^2b^2}{b^2-a^2}\frac{q_2-q_1}{\rho^2}+\frac{a^2q_1-b^2q_2}{b^2-a^2}\\ \sigma_\varphi&=-\frac{a^2b^2}{b^2-a^2}\frac{q_2-q_1}{\rho^2}+\frac{a^2q_1-b^2q_2}{b^2-a^2}\\ \tau_{\rho\varphi}&=\tau_{\varphi\rho}=0\end{aligned}\right\}\qquad(7-13)$$

当外壁的压力 $q_2=0$ 时,即圆筒只受内壁压力的作用,此时,应力为

$$\sigma_\rho=\frac{a^2q_1}{b^2-a^2}\left(1-\frac{b^2}{\rho^2}\right),\qquad \sigma_\varphi=\frac{a^2q_1}{b^2-a^2}\left(1+\frac{b^2}{\rho^2}\right)\qquad(7-14)$$

从这里很容易看出,$\sigma_\rho<0$,而 $\sigma_\varphi>0$,即 σ_ρ 为压应力而 σ_φ 为拉应力。拉应力最大值发生在内壁,即 $\rho=a$ 处,其值为

$$(\sigma_\varphi)_{\max}=\frac{q_1(a^2+b^2)}{b^2-a^2}\qquad(7-15)$$

§7-4 曲梁的纯弯曲

设有一个内半径为 a 外半径为 b 的矩形截面的曲梁(截面的厚度为一单位),两端受弯矩 M 作用。取曲率中心 O 为坐标原点,极角从曲梁的任一端量起,如图 7-6 所示。

由于梁的所有径向截面上的弯矩相同(都等于 M),因而可以认为各截面上

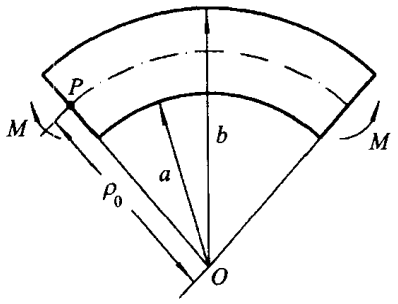


图 7－6

应力分布相同，也就是说应力是轴对称的，它们应具有式(7－9)所表示的形式：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\rho &= \frac{A}{\rho^2} + B(1+2\ln\rho) + 2C \\ \sigma_\varphi &= -\frac{A}{\rho^2} + B(3+2\ln\rho) + 2C \\ \tau_{\rho\varphi} &= \tau_{\varphi\rho} = 0\end{aligned}\right\} \tag{a}$$

根据边界条件定常数 A,B,C。

本问题的边界条件为

$$\left.\begin{aligned}&(\sigma_\rho)_{\rho=a} = 0, \quad (\tau_{\rho\varphi})_{\rho=a} = 0 \\ &(\sigma_\rho)_{\rho=b} = 0, \quad (\tau_{\rho\varphi})_{\rho=b} = 0 \\ &\int_a^b \sigma_\varphi \mathrm{d}\rho = 0, \quad \int_a^b \rho\sigma_\varphi \mathrm{d}\rho = -M\end{aligned}\right\} \tag{b}$$

将式(a)代入，得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{A}{a^2} + 2B\ln a + B + 2C = 0 \\ &\frac{A}{b^2} + 2B\ln b + B + 2C = 0 \\ &b\left(\frac{A}{b^2} + 2B\ln b + B + 2C\right) - \\ &\qquad a\left(\frac{A}{a^2} + 2B\ln a + B + 2C\right) = 0 \\ &A\ln\frac{b}{a} + B(b^2\ln b - a^2\ln a) + C(b^2 - a^2) = M\end{aligned}\right\} \tag{c}$$

不难看出，式(c)的第三式是它的第一、第二式的必然结果。将其余三个方程联立求解，得

$$\left.\begin{aligned} A &= -\frac{4M}{N}a^2b^2\ln\frac{b}{a} \\ B &= -\frac{2M}{N}(b^2-a^2) \\ C &= \frac{M}{N}[b^2-a^2+2(b^2\ln b-a^2\ln a)] \end{aligned}\right\} \tag{d}$$

其中的 N 为

$$N=(b^2-a^2)^2-4a^2b^2\left(\ln\frac{b}{a}\right)^2$$

将它们代入式(a),得本问题的解答:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\rho &= -\frac{4M}{N}\left(\frac{a^2b^2}{\rho^2}\ln\frac{b}{a}-b^2\ln\frac{b}{\rho}+a^2\ln\frac{a}{\rho}\right) \\ \sigma_\varphi &= -\frac{4M}{N}\left(-\frac{a^2b^2}{\rho^2}\ln\frac{b}{a}+b^2\ln\frac{\rho}{b}+a^2\ln\frac{a}{\rho}+b^2-a^2\right) \\ \tau_{\rho\varphi} &= \tau_{\varphi\rho}=0 \end{aligned}\right\} \tag{7-16}$$

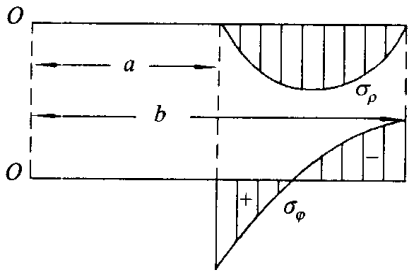


图 7-7

应力分布大致如图 7-7 所示。在内边界($\rho=a$),弯曲应力 σ_φ 最大。中性轴($\sigma_\varphi=0$ 的所在处)靠近内边界一侧,挤压应力 σ_ρ 的最大值所在处,比之于中心轴更靠近内边界一侧。

为了求得曲梁弯曲后的位移,可将 A,B,C 各值代入式(7-10),其中的常数 H,K,I 由梁的约束条件确定。例如我们可假定,极角从左端面量起,在 $\varphi=0,\rho=\rho_0=\dfrac{a+b}{2}$ 处,有

$$(u_\rho)_{\substack{\varphi=0\\ \rho=\rho_0}}=0,\quad (u_\varphi)_{\substack{\varphi=0\\ \rho=\rho_0}}=0,\quad \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\rho}\right)_{\substack{\varphi=0\\ \rho=\rho_0}}=0 \tag{e}$$

即认为图 7-6 中的 P 点的位移是零,而且,过该点的径向微分线段向 φ 方向的转角为零。将式(e)应用于式(7-10),则可求得

$$\left.\begin{aligned} &H=I=0\\ &K=\frac{1}{E}\left[(1+\nu)\frac{A}{\rho_0}-2(1-\nu)B\rho_0\ln\rho_0+\right.\\ &\left.B(1+\nu)\rho_0-2C(1-\nu)\rho_0\right] \end{aligned}\right\} \tag{f}$$

将它们代入式(7－10)，即得所要求的位移。

现在只考虑环向位移

$$u_\varphi=\frac{4B\rho\varphi}{E}-K\sin\varphi \tag{g}$$

这是 φ 的多值函数。比如说 φ 从零变到 2π(在几何平面上是同一个点)，则 u_φ 从零变到$\frac{8B\rho\pi}{E}$，表明圆环形板中同一点将具有不同的环向位移。在完整的圆环中，这当然是不合理的，因此，B 在此情况下必须是零。但在不完整的圆环中，u_φ 的多值是可能的。例如图 7－8 所示的具有一个小切口(它所张的圆心角为 α)的不完整圆环，若用外力使两端压紧后焊起来，则焊接后两端就有弯矩，这个弯矩的大小，就是为了维持环向位移

$$u_\varphi=\alpha\rho \tag{h}$$

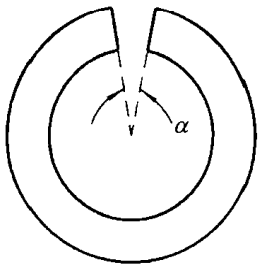


图 7－8

另一方面，由于张角 α 很小，若将与不完整圆环右端重合的径线作为 $\varphi=0$，当它顺时针旋转到与左端面重合时，φ 近似地增加了 2π，由式(g)知，环向位移增加了

$$u_\varphi=\frac{8B\rho\pi}{E} \tag{i}$$

令式(h)和式(i)相等，有

$$B=\frac{\alpha E}{8\pi} \tag{j}$$

将式(j)代入式(d)的第二式，得

$$M=-\frac{\alpha E}{8\pi}\frac{(b^2-a^2)^2-4a^2b^2\left(\ln\frac{b}{a}\right)^2}{2(b^2-a^2)} \tag{7-17}$$

再将式(7－17)代入式(7－16)，就得到图 7－8 所示的不完整圆环在其两端面被

强行拼合焊接后其内产生的预应力。

§7-5 曲梁一端受径向集中力作用

设有一内半径为 a 外半径为 b 的矩形截面曲梁，一个端面固定，另一个端面上受径向力作用，其厚度仍为一单位(图 7-9)。

根据初等理论的分析，曲梁任一截面 $m-n$ 处的弯矩与 $\sin\varphi$ 成正比。由式(7-7)的第二式，可假设应力函数 U 也和 $\sin\varphi$ 成正比。因此，试取

$$U=f(\rho)\sin\varphi \tag{a}$$

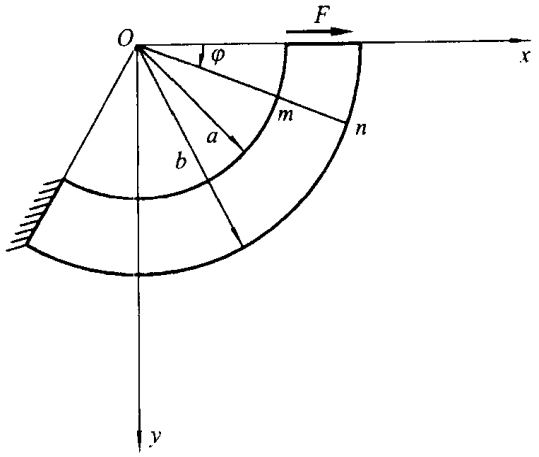


图 7-9

将式(a)代入方程(7-8)，得到 $f(\rho)$ 所必须满足的方程

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}-\frac{1}{\rho^2}\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\rho}-\frac{f}{\rho^2}\right)=0$$

这个方程可化为常系数的微分方程，它的通解为

$$f(\rho)=A\rho^3+B\frac{1}{\rho}+C\rho+D\rho\ln\rho$$

将它代入式(a)，得

$$U=\left(A\rho^3+B\frac{1}{\rho}+C\rho+D\rho\ln\rho\right)\sin\varphi \tag{b}$$

由式(7-7)得应力分量

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_\rho&=\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}=\left(2A\rho-\frac{2B}{\rho^3}+\frac{D}{\rho}\right)\sin\varphi\\
\sigma_\varphi&=\frac{\partial^2 U}{\partial\rho^2}=\left(6A\rho+\frac{2B}{\rho^3}+\frac{D}{\rho}\right)\sin\varphi\\
\tau_{\rho\varphi}&=\tau_{\varphi\rho}=-\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right)=-\left(2A\rho-\frac{2B}{\rho^3}+\frac{D}{\rho}\right)\cos\varphi
\end{aligned}\right\} \tag{c}$$

现在，利用边界条件确定常数 A，B，D。本问题的边界条件为

$$\left.\begin{aligned}&(\sigma_\rho)_{\rho=a}=0,\quad (\tau_{\rho\varphi})_{\rho=a}=0\\&(\sigma_\rho)_{\rho=b}=0,\quad (\tau_{\rho\varphi})_{\rho=b}=0\\&(\sigma_\varphi)_{\varphi=0}=0,\quad \int_a^b(\tau_{\varphi\rho})_{\varphi=0}\mathrm{d}\rho=-F\end{aligned}\right\}\tag{d}$$

将它应用于式(c)上，有

$$2Aa-\frac{2B}{a^3}+\frac{D}{a}=0$$

$$2Ab-\frac{2B}{b^3}+\frac{D}{b}=0$$

$$-A(b^2-a^2)+B\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}-D\ln\frac{b}{a}=-F$$

解之得

$$A=-\frac{F}{2N},\qquad B=\frac{Fa^2b^2}{2N},\qquad D=\frac{F}{N}(a^2+b^2)\tag{e}$$

这里

$$N=a^2-b^2+(a^2+b^2)\ln\frac{b}{a}\tag{f}$$

将式(e)代入式(c)，得本问题的应力分量

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\rho&=-\frac{F}{N}\left(\rho-\frac{a^2+b^2}{\rho}+\frac{a^2b^2}{\rho^3}\right)\sin\varphi\\\sigma_\varphi&=-\frac{F}{N}\left(3\rho-\frac{a^2+b^2}{\rho}-\frac{a^2b^2}{\rho^3}\right)\sin\varphi\\\tau_{\rho\varphi}&=\tau_{\varphi\rho}=\frac{F}{N}\left(\rho-\frac{a^2+b^2}{\rho}+\frac{a^2b^2}{\rho^3}\right)\cos\varphi\end{aligned}\right\}\tag{7-18}$$

其中，N 由式(f)表示。

下面求位移分量，为此，将式(c)代入式(7-5)，并利用式(7-4)，有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u_\rho}{\partial\rho}=\frac{\sin\varphi}{E}\left[2A\rho(1-3\nu)-\frac{2B}{\rho^3}(1+\nu)+\frac{D}{\rho}(1-\nu)\right]\\&\frac{u_\rho}{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}=\frac{\sin\varphi}{E}\left[2A\rho(3-\nu)+\frac{2B}{\rho^3}(1+\nu)+\frac{D}{\rho}(1-\nu)\right]\\&\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\rho}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial\rho}-\frac{u_\varphi}{\rho}=-\frac{2(1+\nu)}{E}\cos\varphi\left(2A\rho-\frac{2B}{\rho^3}+\frac{D}{\rho}\right)\end{aligned}\right\}\tag{g}$$

通过式(g)的第一式积分，得

$$u_\rho=\frac{\sin\varphi}{E}\left[A\rho^2(1-3\nu)+\frac{B}{\rho^2}(1+\nu)+D(1-\nu)\ln\rho\right]+f(\varphi)\tag{h}$$

其中，$f(\varphi)$为 φ 的任意函数。将式(h)代入式(g)的第二式，移项，两边同乘以 ρ 后对 φ 积分，得

$$u_\varphi = -\frac{\cos\varphi}{E}\left[A\rho^2(5+\nu)+\frac{B}{\rho^2}(1+\nu)-D(1-\nu)\ln\rho+D(1-\nu)\right] - \int f(\varphi)\mathrm{d}\varphi + g(\rho) \tag{i}$$

这里的 $g(\rho)$为 ρ 的任意函数。将式(h)和(i)代入式(g)的第三式，得

$$\int f(\varphi)\mathrm{d}\varphi + f'(\varphi) + \rho g'(\rho) - g(\rho) = -\frac{4D\cos\varphi}{E}$$

或写成

$$f'(\varphi) + \int f(\varphi)\mathrm{d}\varphi + \frac{4D\cos\varphi}{E} = -\rho g'(\rho) + g(\rho)$$

欲使此式对所有的 ρ 和 φ 都成立，有

$$f'(\varphi) + \int f(\varphi)\mathrm{d}\varphi + \frac{4D\cos\varphi}{E} = 0 \tag{j}$$

$$\rho g'(\rho) - g(\rho) = 0 \tag{k}$$

将方程(j)对 φ 求导，得

$$f''(\varphi) + f(\varphi) = \frac{4D\sin\varphi}{E}$$

其通解为

$$f(\varphi) = -\frac{2D}{E}\varphi\cos\varphi + K\sin\varphi + L\cos\varphi \tag{l}$$

方程(k)的通解为

$$g(\rho) = H\rho \tag{m}$$

这里的 H, K, L 是任意常数。将式(l)和式(m)代入到式(h)和式(i)，得位移分量

$$\left.\begin{aligned} u_\rho &= -\frac{2D}{E}\varphi\cos\varphi + \frac{\sin\varphi}{E}\left[A\rho^2(1-3\nu)+\frac{B}{\rho^2}(1+\nu)+\right.\\ &\quad \left.D(1-\nu)\ln\rho\right] + K\sin\varphi + L\cos\varphi\\ u_\varphi &= \frac{2D}{E}\varphi\sin\varphi - \frac{\cos\varphi}{E}\left[A\rho^2(5+\nu)+\frac{B}{\rho^2}(1+\nu)-\right.\\ &\quad \left.D(1-\nu)\ln\rho\right] + \frac{D(1+\nu)}{E}\cos\varphi + K\cos\varphi -\\ &\quad L\sin\varphi + H\rho \end{aligned}\right\} \tag{7-19}$$

这里的 A, B, D 如式(e)和式(f)所示，K, L, H 由约束条件来确定。

现在，我们利用式(7-19)解决两个预应力问题。

其一，设有一个内半径为 a、外半径为 b 的圆环，先在其上切开一条径向细

缝，再用外力强迫细缝的两表面错开 δ（径向位移），然后焊接起来，如图 7－10a 所示。

我们很容易求出其内的预应力。取细缝的下表面的坐标为 $\varphi=0$，则上表面的坐标为 $\varphi=2\pi$，于是有

$$\delta=(u_\rho)_{\varphi=2\pi}-(u_\rho)_{\varphi=0}$$

利用式(7－19)的第一式，上式变为

$$\delta=-\frac{4D\pi}{E} \tag{n}$$

将式(n)和式(e)的最后一式联立，得到强使细缝表面错开 δ 所需的力

$$F=-\frac{NE\delta}{4\pi(a^2+b^2)} \tag{o}$$

这里的 N 见式(f)。将式(o)代入式(7－18)，即得所要求的应力。

其二，考察一个不完整的圆环，其小切口两表面平行，距离为 δ[图 7－10b]。若用外力强使切口的两表面合拢，然后焊牢，其内的预应力是很容易求得的。

假想在这个不完整的圆环上，再切开一条如图 7－10a 所示的水平径向细缝，然后将被切出的四分之一圆环向左平移 δ，这时，切口的两表面正好合拢，而新切开的水平径向细缝的下表面相对于上表面向左错开了 δ。如将合拢后的切口表面焊牢(呈图 7－10a 所示的形状，但存在着水平径向细缝)，这时，在环内不存在应力。为了得到一个完整的圆环，必须迫使水平径向细缝的下表面向右错动 δ，再焊接起来。显然，这样得到的完整圆环内的应力，就是我们要求的应力。由于现在强使水平径向细缝的下表面向右错动了 δ，和图 7－10a 所示的错位 δ 只相差一个符号，因此，我们所要求的应力，与图 7－10a 所示的情况相比，只差一个符号。

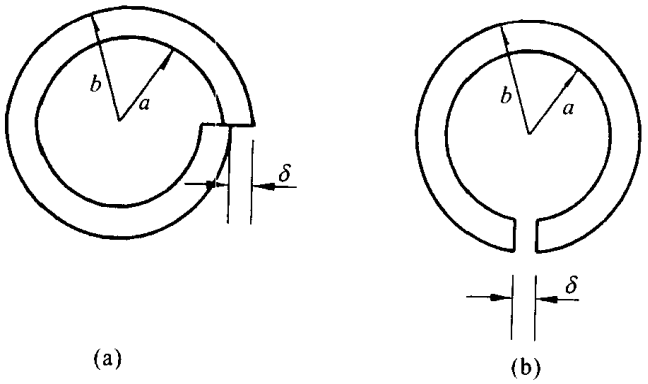


图 7－10

§7-6 具有小圆孔的平板的均匀拉伸

设有一个在 x 方向承受均匀拉力 q 的平板，板中有半径为 a 的小圆孔(图 7-11)。小圆孔的存在，必然对板内应力分布产生影响。但由圣维南原理可知，这种影响仅局限于孔的附近区域，在离孔边的较远处，这种影响也就显著地减小。

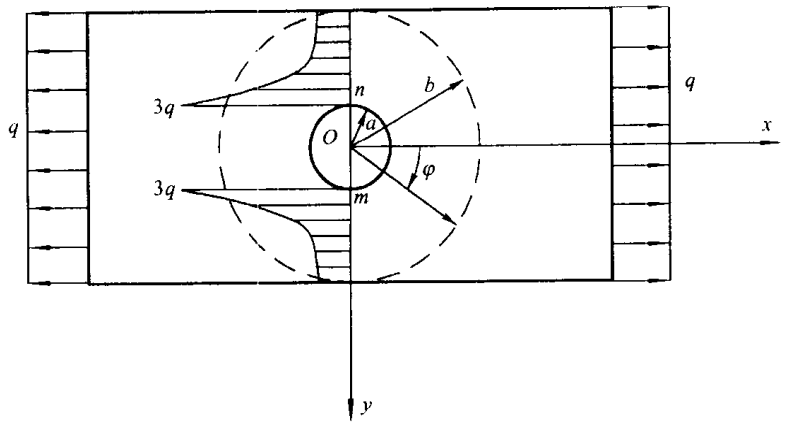


图 7-11

假设在离圆孔中心距离为 b 的地方，应力分布已经和没有圆孔的情况完全一样，于是有

$$\left.\begin{aligned}(\sigma_\rho)_{\rho=b}&=q\cos^2\varphi=\frac{q}{2}(1+\cos 2\varphi)\\(\tau_{\rho\varphi})_{\rho=b}&=-\frac{q}{2}\sin 2\varphi\end{aligned}\right\}\tag{a}$$

式(a)表示，在与小圆孔同心的、半径为 b 的圆周上，应力由两部分组成：一部分是沿着整个外圆周作用不变的拉应力 $\frac{q}{2}$，由此产生的应力可按式(7-13)，令其中的 $q_1=0$，$q_2=-\frac{q}{2}$ 而得到，即

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\rho&=\frac{b^2}{b^2-a^2}\frac{q}{2}\left(1-\frac{a^2}{\rho^2}\right)\\\sigma_\varphi&=\frac{b^2}{b^2-a^2}\frac{q}{2}\left(1+\frac{a^2}{\rho^2}\right)\\\tau_{\rho\varphi}&=\tau_{\varphi\rho}=0\end{aligned}\right\}\tag{b}$$

另一部分是随 φ 变化的法向应力 $\frac{q}{2}\cos 2\varphi$ 和切向应力 $-\frac{q}{2}\sin 2\varphi$，由式(7-7)

可以看出，由此产生的应力可由下列形式的应力函数求得

$$U = f(\rho)\cos 2\varphi \tag{c}$$

将式(c)代入式(7－8)，得式(c)中的 $f(\rho)$ 所满足的方程

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}-\frac{4}{\rho^2}\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\rho}-\frac{4f}{\rho^2}\right)=0$$

或写成

$$\rho^4\frac{\mathrm{d}^4 f(\rho)}{\mathrm{d}\rho^4}+2\rho^3\frac{\mathrm{d}^3 f(\rho)}{\mathrm{d}\rho^3}-9\rho^2\frac{\mathrm{d}^2 f(\rho)}{\mathrm{d}\rho^2}+9\rho\frac{\mathrm{d}f(\rho)}{\mathrm{d}\rho}=0 \tag{d}$$

这是欧拉方程，只要作 $\rho=\mathrm{e}^t$ 的变换，就可变成常系数线性常微分方程，求解后代回 $t=\ln\rho$，就可得到它的通解：

$$f(\rho)=A\rho^2+B\rho^4+\frac{C}{\rho^2}+D$$

于是应力函数为

$$U=\left(A\rho^2+B\rho^4+\frac{C}{\rho^2}+D\right)\cos 2\varphi$$

由此得应力分量

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_\rho &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}=-\left(2A+\frac{6C}{\rho^4}+\frac{4D}{\rho^2}\right)\cos 2\varphi\\
\sigma_\varphi &= \frac{\partial^2 U}{\partial\rho^2}=\left(2A+12B\rho^2+\frac{6C}{\rho^4}\right)\cos 2\varphi\\
\tau_{\rho\varphi}=\tau_{\varphi\rho} &= -\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right)=\left(2A+6B\rho^2-\frac{6C}{\rho^4}-\frac{2D}{\rho^2}\right)\sin 2\varphi
\end{aligned}\right\} \tag{e}$$

现在利用边界条件定常数 A,B,C,D。本问题的边界条件为

$$\left.\begin{aligned}
&(\sigma_\rho)_{\rho=a}=0,\quad (\tau_{\rho\varphi})_{\rho=a}=0\\
&(\sigma_\rho)_{\rho=b}=\frac{q}{2}\cos 2\varphi,\quad (\tau_{\rho\varphi})_{\rho=b}=-\frac{q}{2}\sin 2\varphi
\end{aligned}\right\} \tag{f}$$

将边界条件(f)用于式(e)，有

$$2A+\frac{6C}{b^4}+\frac{4D}{b^2}=-\frac{q}{2}$$

$$2A+\frac{6C}{a^4}+\frac{4D}{a^2}=0$$

$$2A+6Bb^2-\frac{6C}{b^4}-\frac{2D}{b^2}=-\frac{q}{2}$$

$$2A+6Ba^2-\frac{6C}{a^4}-\frac{2D}{a^2}=0$$

解之，并注意到 $\frac{a}{b}\approx 0$，于是有

$$A=-\frac{q}{4},\qquad B=0,\qquad C=-\frac{a^4q}{4},\qquad D=\frac{a^2q}{2}$$

代入式(e),并与式(b)相加(令式(b)中的$\frac{a}{b}\approx0$),即得本问题的解答:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\rho&=\frac{q}{2}\left(1-\frac{a^2}{\rho^2}\right)+\frac{q}{2}\left(1+\frac{3a^4}{\rho^4}-\frac{4a^2}{\rho^2}\right)\cos 2\varphi\\ \sigma_\varphi&=\frac{q}{2}\left(1+\frac{a^2}{\rho^2}\right)-\frac{q}{2}\left(1+\frac{3a^4}{\rho^4}\right)\cos 2\varphi\\ \tau_{\rho\varphi}&=\tau_{\varphi\rho}=-\frac{q}{2}\left(1-\frac{3a^4}{\rho^4}+\frac{2a^2}{\rho^2}\right)\sin 2\varphi\end{aligned}\right\}\qquad(7-20)$$

不难看出,当 ρ 相当大时,式(7-20)给出式(a)表示的应力状态;当 $\rho=a$ 时,有

$$\sigma_\rho=\tau_{\rho\varphi}=0,\qquad \sigma_\varphi=q-2q\cos 2\varphi$$

最大环向应力发生在小圆孔边界的 $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$ 处(即相当于图 7-11 中的 m 和 n 两点),其值为

$$(\sigma_\varphi)_{\max}=3q$$

这表明,如果板很大,圆孔很小,则圆孔边上的 m 和 n 点将发生应力集中的现象。通常人们将比值

$$\frac{(\sigma_\varphi)_{\max}}{q}=K$$

称为集中因子,在本问题中,$K=3$。如果上述板在 Ox 方向和 Oy 方向同时均匀受拉,则应力集中因子 $K=2$,请读者自己证明。

§7-7 尖劈顶端受集中力或集中力偶作用

设有一尖劈,其中心角为 α,下端可认为伸向无穷,在其顶端受集中力作用,并与尖劈的中心线成 β 角,如图 7-12 所示。取单位厚度进行考虑,并设单位厚度上所受的力为 F,坐标选取如图。

拟通过量纲分析确定这个问题应力函数的形式。根据直观分析,尖劈内任何一点的应力应正比例于力 F 的大小,并与量 α,β,ρ 和 φ 有关。由于 F 的量纲为 MT^{-2},ρ 的量纲为 L,α,β 和 φ 为量纲一的量,因此,各个应力分量表达式只能取 $\frac{F}{\rho}N$ 的形式,这里的 N 为 α,β 和 φ 组成的量纲一的数量。这表明,各应力分量中,ρ 只能出现负一次幂。由式(7-7)可以看出,应力函数中,ρ 的幂次要比各应力分量中的 ρ 的幂次高两次。因此,我们可以假设应力函数具有如下

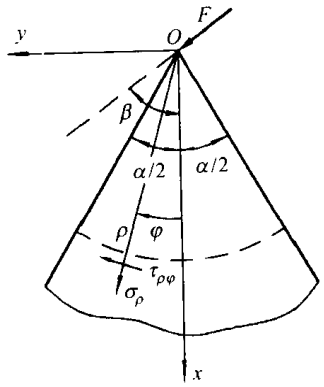


图 7－12

的形式

$$U=\rho f(\varphi) \tag{a}$$

将式(a)代入式(7－8),得到函数 $f(\varphi)$所满足的方程

$$\frac{1}{\rho^3}\left(\frac{\mathrm{d}^4 f(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^4}+2\frac{\mathrm{d}^2 f(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^2}+f(\varphi)\right)=0$$

两边乘以 ρ^3,并解之得

$$f(\varphi)=A\cos\varphi+B\sin\varphi+\varphi(C\cos\varphi+D\sin\varphi)$$

这里的 A,B,C,D 为任意常数。代入式(a),于是得

$$U=A\rho\cos\varphi+B\rho\sin\varphi+\rho\varphi(C\cos\varphi+D\sin\varphi)$$

这里的 $A\rho\cos\varphi$ 和 $B\rho\sin\varphi$ 在直角坐标系里,可改写成 Ax 和 By,它们对求应力无影响,因此可以略去。这样,应力函数可取为

$$U=\rho\varphi(C\cos\varphi+D\sin\varphi) \tag{b}$$

由此得应力分量

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\rho&=\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}=\frac{2}{\rho}(D\cos\varphi-C\sin\varphi)\\ \sigma_\varphi&=\frac{\partial^2 U}{\partial\rho^2}=0\\ \tau_{\rho\varphi}&=\tau_{\varphi\rho}=-\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right)=0\end{aligned}\right\} \tag{c}$$

本问题的边界条件为

$$(\sigma_\varphi)_{\varphi=\pm\frac{\alpha}{2}}=0,(\tau_{\varphi\rho})_{\varphi=\pm\frac{\alpha}{2}}=0$$

显然,这个条件已经满足。为了求得常数 C 和 D,我们考虑尖劈在任一圆柱面(如图 7－12 中虚线表示的)以上部分的平衡。由平衡条件 $\sum F_x=0$ 和 $\sum F_y=0$,得

$$\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}}\rho\sigma_\rho\cos\varphi\mathrm{d}\varphi+F\cos\beta=0$$

$$\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \rho\sigma_\rho \sin\varphi \mathrm{d}\varphi + F\sin\beta = 0$$

将式(c)代入,积分后得

$$D(\alpha + \sin\alpha) + F\cos\beta = 0$$
$$C(-\alpha + \sin\alpha) + F\sin\beta = 0$$

解之得

$$C = \frac{F\sin\beta}{\alpha - \sin\alpha}, \qquad D = -\frac{F\cos\beta}{\alpha + \sin\alpha}$$

代入式(c),得本问题的解答:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\rho &= -\frac{2F\cos\beta\cos\varphi}{(\alpha+\sin\alpha)\rho} - \frac{2F\sin\beta\sin\varphi}{(\alpha-\sin\alpha)\rho} \\ \sigma_\varphi &= 0 \\ \tau_{\rho\varphi} &= \tau_{\varphi\rho} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7-21}$$

如取 $\beta=0$,则得如图 7-13a 所示的受力情况,此时,由式(7-21)可以看出,应力对称于 x 轴分布。如取 $\beta=\frac{\pi}{2}$,则得如图 7-13b 所示的受力情况,这时,应力反对称于 x 轴分布。

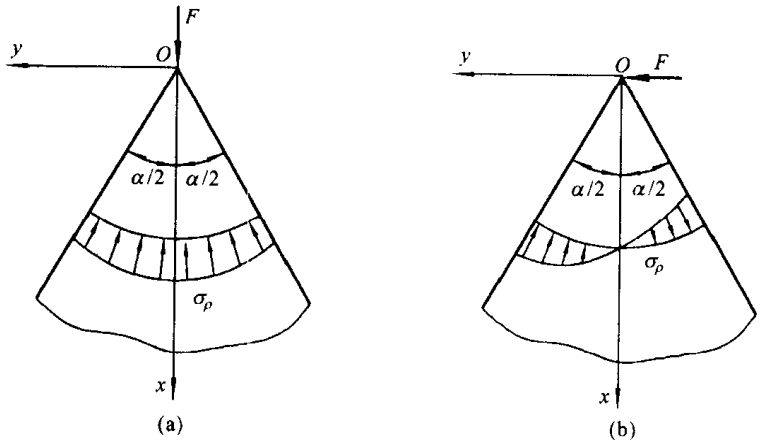


图 7-13

如果尖劈顶端受力偶作用(图 7-14),设单位厚度内的弯矩为 M,则通过量纲分析可知,各应力分量中只能出现 ρ 的负二次幂,而应力函数应该与 ρ 无关.即

$$U = f(\varphi)$$

将它代入式(7-8),得 $f(\varphi)$所满足的方程。先求出其通解,由此求应力分量,再利用边界条件和平衡条件定出其任意常数,可得本问题的解答:

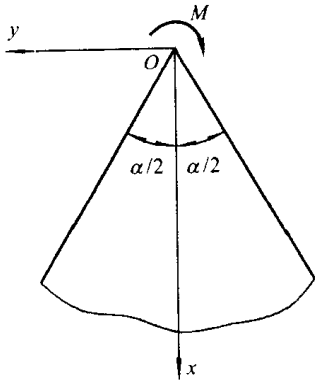


图 7－14

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\rho &= \frac{2M\sin 2\varphi}{(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)\rho^2}\\ \sigma_\varphi &= 0\\ \tau_{\rho\varphi} &= \tau_{\varphi\rho} = -\frac{M(\cos 2\varphi-\cos\alpha)}{(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)\rho^2}\end{aligned}\right\} \tag{7-22}$$

其详细计算过程，请读者自己完成。

§7－8　几个弹性半平面问题的解答

先介绍一个著名的**布西内斯克**(Boussinesq, T. V.)－**符拉芒**(Flamant, A.)**问题**。

设想有一个垂直的集中力作用在板的水平边界上，这板的下方和左右两方是无限伸长的(图 7－15)，这样的板称为弹性半平面。取板的厚度为一单位，设集中力沿板的厚度是均匀分布的，F 便是单位厚度上的荷载。

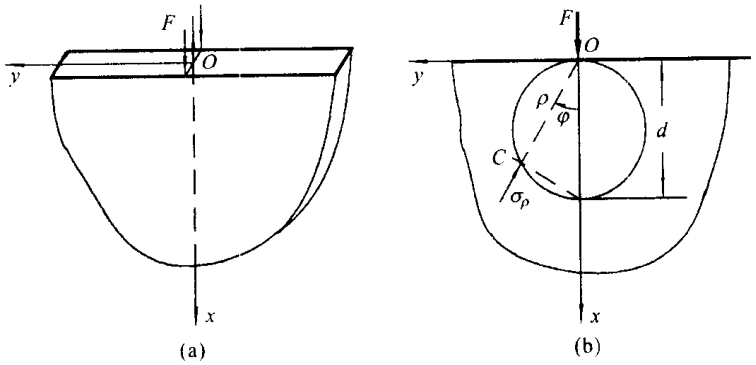


图 7－15

这个问题的解答很容易求得，只要令式(7－21)中 $\alpha=\pi, \beta=0$ 即可，于是有

$$\sigma_\rho = -\frac{2F\cos\varphi}{\pi\rho},\quad \sigma_\varphi = 0,\quad \tau_{\rho\varphi} = \tau_{\varphi\rho} = 0 \tag{7-23}$$

从式(7-23)可以看出,这个问题的应力分布规律有如下两个特点:(1)过体内任何一点 C 并与矢径垂直的微分面均为主平面,因为这微分面上的切应力为零;(2)直径与 x 轴重合且过 O 点的圆周上各点(力作用点除外)的径向应力都相等,这是因为在这个圆周上各点有

$$\rho = d\cos\varphi$$

即

$$\frac{\cos\varphi}{\rho} = \frac{1}{d}$$

将它代入式(7-23)的第一式,有

$$\sigma_\rho = -\frac{2F}{\pi d} = \text{const}.$$

如果考虑上述弹性半平面内如图 7-16 所示的两个小单元体的平衡,并注意到

$$\cos\varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \sin\varphi = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

可得该问题应力分量的直角坐标表示式

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \sigma_\rho\cos^2\varphi = -\frac{2F}{\pi}\frac{\cos^3\varphi}{\rho} = -\frac{2F}{\pi}\frac{x^3}{(x^2+y^2)^2}\\
\sigma_y &= \sigma_\rho\sin^2\varphi = -\frac{2F}{\pi}\frac{\sin^2\varphi\cos\varphi}{\rho} = -\frac{2F}{\pi}\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2}\\
\tau_{xy} &= \tau_{yx} = \sigma_\rho\sin\varphi\cos\varphi = -\frac{2F}{\pi}\frac{\cos^2\varphi\sin\varphi}{\rho}\\
&= -\frac{2F}{\pi}\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}\right\} \tag{7-24}$$

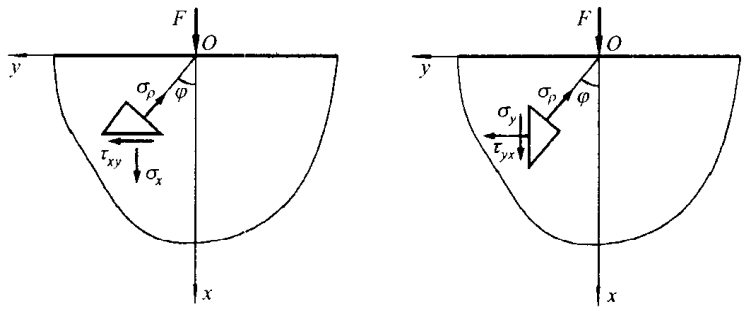


图 7-16

σ_x 和 τ_{xy} 沿某一水平面 mn 的分布情况如图 7-17 所示。σ_x 的最大值在 Oy 轴上,其值为

$$(\sigma_x)_{\max}=\frac{2F}{\pi x}$$

最大切应力发生在离 x 轴 $\frac{x}{\sqrt{3}}$ 处，其值为

$$(\tau_{yx})_{\max}=\frac{2F}{\pi x}\frac{9}{16\sqrt{3}}$$

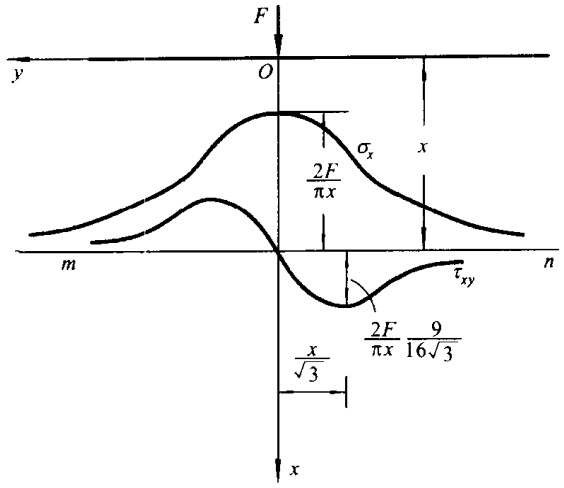


图 7－17

现在求该问题的位移。为此，将式(7－23)代入物理方程(7－5)，并利用几何方程(7－4)，得

$$\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}=-\frac{2F}{\pi E}\frac{\cos\varphi}{\rho}$$

$$\frac{u_\rho}{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}=\frac{2\nu F}{\pi E}\frac{\cos\varphi}{\rho}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho}-\frac{u_\varphi}{\rho}=0$$

经过与 §7－2 中相同的运算，得到以下的位移分量

$$\left.\begin{aligned}u_\rho&=-\frac{2F}{\pi E}\cos\varphi\ln\rho-\frac{(1-\nu)F}{\pi E}\varphi\sin\varphi+I\cos\varphi+K\sin\varphi\\u_\varphi&=\frac{2F}{\pi E}\sin\varphi\ln\rho-\frac{(1+\nu)F}{\pi E}\sin\varphi-\frac{(1-\nu)F}{\pi E}\varphi\cos\varphi+\\&\quad H\rho-I\sin\varphi+K\cos\varphi\end{aligned}\right\}\tag{a}$$

其中 H,I,K 均为任意常数。

根据本问题的对称性，有

$$(u_\varphi)_{\varphi=0}=0$$

将此代入式(a)，得

$$H=K=0$$

于是式(a)简化为

$$\left.\begin{aligned} u_\rho &= -\frac{2F}{\pi E}\cos\varphi\ln\rho-\frac{(1-\nu)F}{\pi E}\varphi\sin\varphi+I\cos\varphi \\ u_\varphi &= \frac{2F}{\pi E}\sin\varphi\ln\rho-\frac{(1-\nu)F}{\pi E}\varphi\cos\varphi+ \\ &\quad \frac{(1+\nu)F}{\pi E}\sin\varphi-I\sin\varphi \end{aligned}\right\} \tag{7-25}$$

不难看出，I 表示铅垂方向(即 x 方向)的刚性位移，如果半平面不受铅垂方向的约束，则常数 I 不能确定。

如果取式(7-25)的第二式中 $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$，则对于不同的 ρ(除了 $\rho=0$)，将给出半平面表面任一点 M 的向下的铅垂位移，即所谓**沉陷**。注意到位移 u_φ 是以沿 φ 正方向时为正，因此，M 点的沉陷为

$$-(u_\varphi)^M_{\varphi=\frac{\pi}{2}}=-\frac{2F}{\pi E}\ln\rho-\frac{(1+\nu)F}{\pi E}+I \tag{b}$$

在半平面不受铅垂约束时，I 不能确定，因此沉陷也不能确定。这时，只能求相对沉陷。试在边界上取定一基点 B(图 7-18)，它离力的作用点的距离为 s，该点的沉陷为

$$-(u_\varphi)^B_{\varphi=\frac{\pi}{2}}=-\frac{2F}{\pi E}\ln s-\frac{(1+\nu)F}{\pi E}+I \tag{c}$$

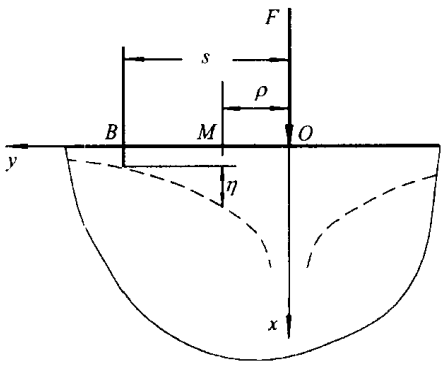


图 7-18

于是相对沉陷为

$$\begin{aligned} \eta &= -(u_\varphi)^M_{\varphi=\frac{\pi}{2}}-\left[-(u_\varphi)^B_{\varphi=\frac{\pi}{2}}\right] \\ &=\left[-\frac{2F}{\pi E}\ln\rho-\frac{(1+\nu)F}{\pi E}+I\right]- \\ &\quad \left[-\frac{2F}{\pi E}\ln s-\frac{(1+\nu)F}{\pi E}+I\right] \end{aligned}$$

简化后得

$$\eta=\frac{2F}{\pi E}\ln\frac{s}{\rho} \tag{7-26}$$

对于平面应变问题，须将 E，ν 分别换成$\frac{E}{1-\nu^2}$和$\frac{\nu}{1-\nu}$。

如果在弹性半平面边界上同时受到几个集中力作用，则只要通过叠加，就能求出体内任一点的应力和表面的沉陷。

现考虑弹性半平面 AB 一段上受法向连续分布荷载作用的情况，设荷载的强度为 $q(y)$，如图 7－19 所示。为了求得弹性半平面内坐标为(x,y)的某点 M 的应力，在 AB 上距坐标原点 η 处，取微分线段 $\mathrm{d}\eta$，其上所受的 $\mathrm{d}F=q\mathrm{d}\eta$ 显然可视为集中力，由此产生的应力可以应用式(7－24)。注意到式(7－24)中的 x 和 y 分别表示欲求应力之点与集中力作用点的铅直距离和水平距离，而由图

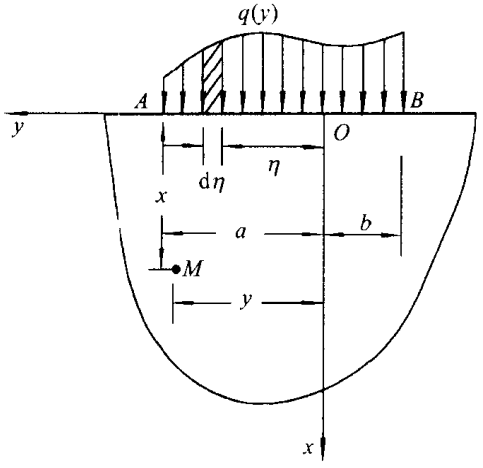


图 7－19

7－19 可见，M 点与微小集中力 $\mathrm{d}F$ 的铅直距离和水平距离分别为 x 和 $y-\eta$，于是，得 $\mathrm{d}F=q\mathrm{d}\eta$ 在 M 点引起的应力为

$$\mathrm{d}\sigma_x=-\frac{2q\mathrm{d}\eta}{\pi}\frac{x^3}{[x^2+(y-\eta)^2]^2}$$

$$\mathrm{d}\sigma_y=-\frac{2q\mathrm{d}\eta}{\pi}\frac{x(y-\eta)^2}{[x^2+(y-\eta)^2]^2}$$

$$\mathrm{d}\tau_{xy}=-\frac{2q\mathrm{d}\eta}{\pi}\frac{x^2(y-\eta)}{[x^2+(y-\eta)^2]^2}$$

将上列三式积分，即得整个分布荷载所产生的应力

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{2}{\pi}\int_{-b}^{a}\frac{qx^3\mathrm{d}\eta}{[x^2+(y-\eta)^2]^2}\\ \sigma_y &= -\frac{2}{\pi}\int_{-b}^{a}\frac{qx(y-\eta)^2\mathrm{d}\eta}{[x^2+(y-\eta)^2]^2}\\ \tau_{xy} &= -\frac{2}{\pi}\int_{-b}^{a}\frac{qx^2(y-\eta)\mathrm{d}\eta}{[x^2+(y-\eta)^2]^2}\end{aligned}\right\} \tag{7-27}$$

在应用这些公式时，须将荷载强度 q 表示成 η 的函数，然后进行积分。

另外，从图 7-12 可以看出，如果令式(7-21)中的 $\alpha=\pi$，则得弹性半平面在其表面处受任意方向集中力作用时的解答。如果同时令 $\beta=\frac{\pi}{2}$，则得弹性半平面受切向集中力作用时(图 7-20)的解答：

$$\sigma_\rho=-\frac{2F\sin\varphi}{\pi\rho},\quad \sigma_\varphi=0,\quad \tau_{\rho\varphi}=\tau_{\varphi\rho}=0 \tag{7-28}$$

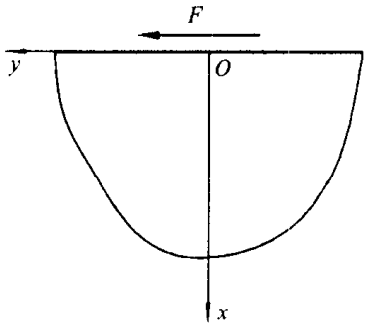


图 7-20

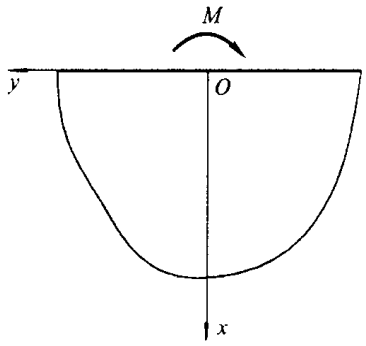


图 7-21

如果令式(7-22)中的 $\alpha=\pi$，则得弹性半平面受集中力偶作用时(图 7-21)的解答：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\rho &= \frac{2M\sin 2\varphi}{\pi\rho^2}\\ \sigma_\varphi &= 0\\ \tau_{\rho\varphi}=\tau_{\varphi\rho} &= -\frac{M(\cos 2\varphi+1)}{\pi\rho^2}\end{aligned}\right\} \tag{7-29}$$

思考题与习题

7-1 试导出极坐标形式的位移分量 u_ρ，u_φ 与直角坐标形式的位移分量 u，v 之间的关系。

7-2 试证明极坐标形式的应变协调方程为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\varepsilon_\varphi+\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\varepsilon_\rho$$
$$=\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\varphi}\right)\gamma_{\rho\varphi}$$

7－3　试求图 7－5 所示问题的内半径和外半径的变化，并求圆筒厚度的改变。

7－4　设有一刚体，具有半径为 b 的孔道，孔道内放置内半径为 a、外半径为 b 的厚壁圆筒，圆筒内壁受均布压力 q 作用，求筒壁的应力和位移。

7－5　如果上题中圆筒外的物体是无限大的弹性体，其弹性常数为 E' 和 ν'，求筒壁的应力。

7－6　利用§7－6 的结果，求图 7－22 所示问题的应力分量，孔边的最大正应力和最小正应力。

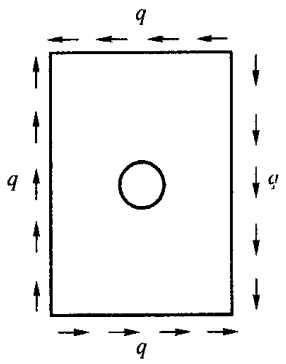


图 7－22

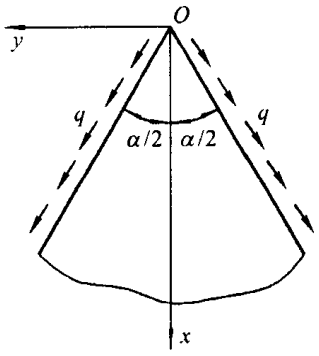


图 7－23

7－7　尖劈两侧作用有均匀分布剪力 q（图 7－23），试求其应力分量。

提示：用量纲分析，或根据边界条件，设 $\tau_{\varphi\rho}$ 只与 φ 有关。

7－8　图 7－24 表示一尖劈，其一侧面受均匀分布压力 q 作用，求应力分量 σ_ρ，σ_φ 和 $\tau_{\rho\varphi}$。

提示：其应力函数与上题相同。

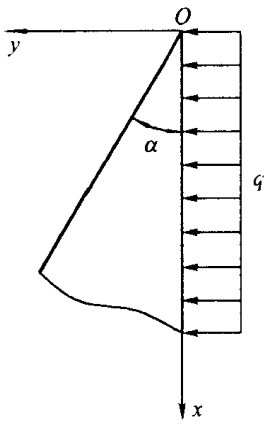


图 7－24

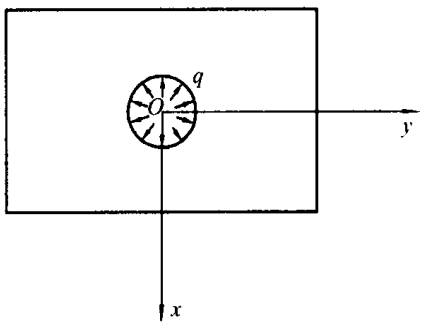


图 7－25

7－9 试利用§7－6的结果，即式(7－20)，通过叠加法，求具有半径为 a 的小圆孔的薄板，在孔壁受均布压力 q 作用时(图 7－25)板内的应力分量。

7－10 设有一个内半径为 a、外半径为 b 的薄圆环形板，内壁固定，外壁受均布剪力 q 作用，如图 7－26 所示，求应力和位移。

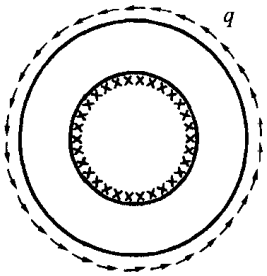


图 7－26

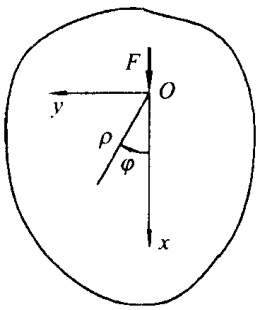


图 7－27

7－11 图 7－27 所示的无限大薄板，板内有一小孔，孔边上受集中力 F 作用，求应力分量。

提示：取应力函数

$$U = A\rho\ln\rho\cos\varphi + B\rho\varphi\sin\varphi$$

并注意利用位移单值条件。

7－12 弹性半平面表面受几个集中力 F_i 构成的力系作用，这些力到所设原点的距离分别为 y_i，如图 7－28 所示，求应力分量。

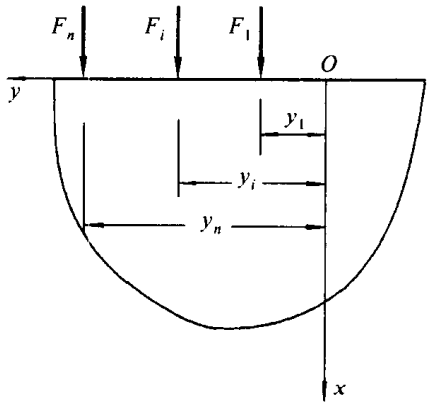


图 7－28

*第八章　平面问题的复变函数解答

在前两章中，我们通过直接求解双调和方程解决了一些弹性力学的平面问题。本章，拟借助于复变函数方法，将艾里应力函数用两个解析函数表示，并将位移、应力和边界条件也表示成复变函数的形式，从而把平面问题转化为在给定的边界条件下，去寻求两个解析函数的问题。由于对复变函数的性质一般已经有了充分的研究，所以，只要我们注意应用复变函数的性质，就不仅能使一些本来难以解决的问题得以解决，而且使计算大为简化。

这种方法最先由菲伦(Filon, L. N. G)提出，后由克洛索夫(Колосов, Г. В.)和穆斯赫利什维利发展并建立了一套完整的理论，而萨文(Савин, Г. Н.)又应用这些理论解决了一系列具体问题。下面介绍的是其中最基本而且也是最主要的部分。

§8-1　双调和函数的复变函数表示

这里要证明，任意一个二元的双调和函数 $U(x,y)$ 都能用两个解析函数表示出来。我们暂且假定物体所占的平面区域是单连通的。若令式(6-15)中的

$$\nabla^2 U = P \tag{a}$$

则 P 是调和函数。引进 P 的共轭调和函数 Q，于是由复变函数的理论可知，函数

$$F(z) = P(x,y) + \mathrm{i}Q(x,y) \tag{b}$$

为解析函数。

现再取复变函数

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{4}\int F(z)\mathrm{d}z = p + \mathrm{i}q \tag{c}$$

显然，它也是解析函数，并且有

$$\varphi'_1(z) = \frac{1}{4}F(z) = \frac{\partial p}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial q}{\partial x} \tag{d}$$

将式(d)和式(b)进行比较，并注意到柯西－黎曼(Riemann, G. F. B.)条件

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial x}$$

就得到

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial q}{\partial y}=\frac{P}{4}$$

或

$$P=4\frac{\partial p}{\partial x}=4\frac{\partial q}{\partial y} \tag{e}$$

现在,再引进一个实函数

$$p_1=U-xp-yq \tag{f}$$

极易证明,它是一个调和函数。事实上,由于

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-2\frac{\partial p}{\partial x}-x\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-x\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}-2\frac{\partial q}{\partial y}-y\frac{\partial^2 q}{\partial y^2}$$

则有

$$\nabla^2 p_1=\nabla^2 U-2\left(\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial y}\right)-x\ \nabla^2 p-y\ \nabla^2 q$$

利用式(e)和(a),并注意到 p 和 q 是解析函数 $\varphi_1(z)$ 的实部和虚部,是调和函数,于是可见 p_1 是调和函数,即

$$\nabla^2 p_1=0$$

因此,对于任一双调和函数 U,有

$$U=xp+yq+p_1 \tag{8-1}$$

这里的 p 和 q 为适当选取的共轭调和函数,p_1 为适当选取的调和函数。

最后,引进 p_1 的共轭调和函数 q_1,则

$$\chi_1(z)=p_1+\mathrm{i}q_1$$

为解析函数。容易证明

$$(x-\mathrm{i}y)(p+\mathrm{i}q)+p_1+\mathrm{i}q_1$$

的实部与式(8-1)的右边相同。因此,式(8-1)又可以表示为如下的形式:

$$U=\mathrm{Re}[\bar{z}\varphi_1(z)+\chi_1(z)] \tag{8-2}$$

或写成

$$2U=\bar{z}\varphi_1(z)+\chi_1(z)+z\overline{\varphi_1}(\bar{z})+\overline{\chi_1}(\bar{z}) \tag{8-3}$$

这样,我们就将任一双调和函数 U 表示为复变函数的形式,它通过两个解析函数 $\varphi_1(z)$ 和 $\chi_1(z)$ 表示出来。在以下的论述中,我们称复变函数 $\varphi_1(z)$ 和 $\chi_1(z)$[包括 $\chi'(z)$]为**复位势**。下一节,我们将把位移和应力也表示成复变函数的形式。

§8-2 位移和应力的复变函数表示

以下只考虑无体力的情况。

首先建立位移的复变函数表示式。将几何方程(6-9)代入物理方程(6-11),于是有

$$\left.\begin{aligned} E\frac{\partial u}{\partial x} &= \sigma_x - \nu\sigma_y \\ E\frac{\partial v}{\partial y} &= \sigma_y - \nu\sigma_x \\ G\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) &= \tau_{xy} \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

由于在无体力时,应力函数 U 和应力分量之间有如下的关系:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2},\quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \tag{b}$$

再注意到 $\nabla^2 U = P$,故式(a)的前两式变为

$$E\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \nu\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -(1+\nu)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + P$$

$$E\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \nu\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -(1+\nu)\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + P$$

上两式等号两边同除以$(1+\nu)$,并注意到 $G=\dfrac{E}{2(1+\nu)}$,$P = 4\dfrac{\partial p}{\partial x} = 4\dfrac{\partial q}{\partial y}$,则它们又可改写为

$$2G\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{4}{1+\nu}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$2G\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{4}{1+\nu}\frac{\partial q}{\partial y}$$

积分后得到

$$\left.\begin{aligned} 2Gu &= -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{4}{1+\nu}p + f_1(y) \\ 2Gv &= -\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{4}{1+\nu}q + f_2(x) \end{aligned}\right\} \tag{c}$$

其中,$f_1(y)$和 $f_2(x)$为任意函数。将式(c)代入式(a)的第三式,得

$$-\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{2}{1+\nu}\left(\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial q}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}y} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}x} = \tau_{xy}$$

但左边的第一项等于 τ_{xy},p 和 q 是满足柯西-黎曼条件的调和函数,括号内等于零。于是

$$\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}y}+\frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}x}=0$$

这表示

$$\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}y}=A,\quad \frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}x}=-A$$

其中，A 为一个常数。由此可见，式(c)中的 $f_1(y)$和 $f_2(x)$代表刚体位移，丢掉这两项，不影响应力。这样，式(c)可写为

$$\left.\begin{aligned}2Gu&=-\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{4}{1+\nu}p\\2Gv&=-\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{4}{1+\nu}q\end{aligned}\right\}\tag{8-4}$$

将式(8-4)的第二式乘以 i，并和它的第一式相加，得

$$2G(u+\mathrm{i}v)=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial U}{\partial y}\right)+\frac{4}{1+\nu}(p+\mathrm{i}q)\tag{d}$$

为了简化式(d)，将式(8-3)分别对 x 和 y 求一阶偏导数(注意到$\frac{\partial z}{\partial x}=1$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{i}$，$\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}=1$，$\frac{\partial \bar{z}}{\partial y}=-\mathrm{i}$)，得

$$2\frac{\partial U}{\partial x}=\bar{z}\varphi'_1(z)+\varphi_1(z)+\chi'_1(z)+z\bar{\varphi}'_1(\bar{z})+\bar{\varphi}_1(\bar{z})+\bar{\chi}'_1(\bar{z})$$

$$2\frac{\partial U}{\partial y}=\mathrm{i}[\bar{z}\varphi'_1(z)-\varphi_1(z)+\chi'_1(z)-z\bar{\varphi}'_1(\bar{z})+\bar{\varphi}(\bar{z})-\bar{\chi}'_1(\bar{z})]$$

将上述第二式乘以 i 并和第一式相加，于是得

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial U}{\partial y}=\varphi_1(z)+z\bar{\varphi}'_1(\bar{z})+\bar{\chi}'_1(\bar{z})\tag{8-5}$$

引进函数

$$\chi'_1(z)=\psi_1(z)\tag{8-6}$$

则式(8-5)又可表示为

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial U}{\partial y}=\varphi_1(z)+z\bar{\varphi}'_1(\bar{z})+\bar{\psi}_1(\bar{z})\tag{8-5}'$$

将式(8-5)′代入式(d)，并利用§8-1的式(c)，得到

$$2G(u+\mathrm{i}v)=\frac{3-\nu}{1+\nu}\varphi_1(z)-z\bar{\varphi}'_1(\bar{z})-\bar{\psi}_1(\bar{z})\tag{8-7}$$

式(8-7)表明，如已知复位势 $\varphi_1(z)$和 $\psi_1(z)$，就可通过它们求得平面应力状态下的位移分量 u 和 v。对于平面应变问题，须用 $\nu/(1-\nu)$代替式(8-7)右边的 ν。

再求应力的复变函数表示式。为此，将式(8-5)′对 x 求一阶偏导数，得

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\mathrm{i}\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=\varphi'_1(z)+\overline{\varphi}'_1(\overline{z})+z\overline{\varphi}''_1(\overline{z})+\overline{\psi}'_1(\overline{z})$$

将式(8-5)′对 y 求一阶偏导数，并乘以 i，得

$$\mathrm{i}\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=-\varphi'_1(z)-\overline{\varphi}'_1(\overline{z})+z\overline{\varphi}''_1(\overline{z})+\overline{\psi}'(\overline{z})$$

将这两式相减、相加，并利用式(b)，于是有

$$\sigma_x+\sigma_y=2[\varphi'_1(z)+\overline{\varphi}'_1(\overline{z})]=4\mathrm{Re}[\varphi'_1(z)] \tag{8-8}$$

$$\sigma_y-\sigma_x-2\mathrm{i}\tau_{xy}=2[z\overline{\varphi}''_1(\overline{z})+\overline{\psi}'_1(\overline{z})] \tag{8-9}$$

将式(8-9)两边共轭，得另一种形式

$$\sigma_y-\sigma_x+2\mathrm{i}\tau_{xy}=2[\overline{z}\varphi''_1(z)+\psi'_1(z)] \tag{8-10}$$

关系式(8-8)～(8-10)表明：如已知复位势 $\varphi_1(z)$ 和 $\psi_1(z)$，就可将式(8-9)[用式(8-10)也一样]的虚部和实部分开，分别求得 τ_{xy} 和 $\sigma_y-\sigma_x$，并将后者与由式(8-8)求得的 $\sigma_x+\sigma_y$ 联立，又可求得 σ_x 和 σ_y。

到此，我们就将问题归结为去寻求复位势 $\varphi_1(z)$ 和 $\psi_1(z)$ 的问题。但为使由这两个函数求得的应力和位移在平面区域的边界处满足给定的边界条件，我们要求它们在边界处也满足一定的条件。下一节，我们要建立这两个函数所服从的边界条件。

§8-3 边界条件的复变函数表示

我们首先讨论平面区域边界处外力已知的情况，这时，边界条件可表示为

$$\left.\begin{aligned}\overline{f}_x&=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}l-\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}m\\ \overline{f}_y&=-\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}l+\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}m\end{aligned}\right\} \tag{a}$$

由图 8-1 可见

$$l=\cos(v,x)=\cos\alpha=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s},\quad m=\cos(v,y)=\sin\alpha=-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$$

代入式(a)，得

$$\left.\begin{aligned}\overline{f}_x&=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}+\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\\ \overline{f}_y&=-\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\end{aligned}\right\} \tag{b}$$

将式(b)写成复数(复矢量)的形式，并利用式(8-5)′，得

$$(\overline{f}_x+\mathrm{i}\overline{f}_y)\mathrm{d}s=-\mathrm{i}\mathrm{d}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

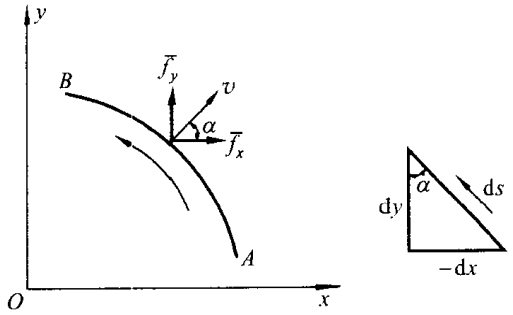


图 8-1

$$= -\mathrm{i}d[\varphi_1(z) + z\bar{\varphi}_1'(\bar{z}) + \bar{\psi}_1(\bar{z})] \tag{c}$$

式(c)的左边表示边界面力矢量在 ds 微分线段上的主矢量，将它沿边界从定点 A 到动点 B(设 B 点的坐标为 z)积分，则得边界面力矢量在边界线段 AB 上的主矢量

$$\int_{AB}(\bar{f}_x + \mathrm{i}\bar{f}_y)\mathrm{d}s = -\mathrm{i}[\varphi_1(z) + z\bar{\varphi}_1'(\bar{z}) + \bar{\psi}_1(\bar{z})]_A^B$$

$$= -\mathrm{i}[\varphi_1(z) + z\bar{\varphi}_1'(\bar{z}) + \bar{\psi}_1(\bar{z})] + \mathrm{const.}$$

将这关系式的两边同乘以 i，于是有

$$\varphi_1(z) + z\bar{\varphi}_1'(\bar{z}) + \bar{\psi}_1(\bar{z}) = \mathrm{i}\int_{AB}(\bar{f}_x + \mathrm{i}\bar{f}_y)\mathrm{d}s + \mathrm{const.} \tag{8-11}$$

显然，对于给定的边界面力 $\bar{f}_x$ 和 $\bar{f}_y$，式(8-11)右边为边界点的确定的函数。这里，积分路线的正方向是这样规定的：我们朝线段 AB 看去，使所考虑的区域保持在左边。

式(8-11)表示边界面力矢量在边界线段 AB 上的主矢量与复位势 $\varphi_1(z)$ 和 $\psi_1(z)$ 之间的关系。其左边应理解为当 z 从区域里边趋向于区域边界时的值。

但由式(8-8)和(8-9)不难看出，在复位势 $\varphi_1(z)$ 或 $\psi_1(z)$ 中增减一个复常数并不影响应力值，因此，我们总可以这样来选取 $\varphi_1(z)$，使式(8-11)的右边的常数项为零。于是，式(8-11)可简化为

$$\varphi_1(z) + z\bar{\varphi}_1'(\bar{z}) + \bar{\psi}_1(\bar{z}) = \mathrm{i}\int_{AB}(\bar{f}_x + \mathrm{i}\bar{f}_y)\mathrm{d}s \tag{8-11'}$$

再将边界线段 AB 上的边界面力对坐标原点 O 取矩并利用关系式(b)，有

$$M = \int_{AB}(x\bar{f}_y - y\bar{f}_x)\mathrm{d}s = -\int_{AB}\left[x\mathrm{d}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) + y\mathrm{d}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\right]$$

分部积分后，上式变为

$$M = [U]_A^B - \left[x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y}\right]_A^B \tag{d}$$

注意到

$$x\frac{\partial U}{\partial x}+y\frac{\partial U}{\partial y}=\mathrm{Re}\left[z\left(\frac{\partial U}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial U}{\partial y}\right)\right]$$

$$=\mathrm{Re}[z\bar{\varphi}_1(\bar{z})+z\bar{z}\varphi_1'(z)+z\psi_1(z)]$$

$$U=\mathrm{Re}[\bar{z}\varphi_1(z)+\chi_1(z)]$$

最后得

$$M=\mathrm{Re}[-z\bar{z}\varphi_1'(z)-z\psi_1(z)+\chi_1(z)]_A^B \tag{8-12}$$

式(8-12)的右边也应理解为当 z 从区域里边趋向于边界点时的值，左边的 M，在外力给定的情况下，为边界点确定的函数。

关系式(8-11)′和(8-12)，给定了在边界面力已知情况下用复变函数表示的边界条件。当讨论的区域单连通时，则 $\varphi_1(z)$ 和 $\chi_1(z)$[包括 $\psi_1(z)=\chi_1'(z)$]为单值解析函数。因此，当 B 点和 A 点重合时，也就是当积分曲线闭合时，则由式(8-11)′和(8-12)可见，主矢量 $\int_{AB}(\overline{f}_x+\mathrm{i}\overline{f}_y)\mathrm{d}s$ 和主矩 M 均为零，这表明作用在物体边界上的边界面力，必组成一个平衡力系。这个结论是我们所预料的，说明，要使问题有解，作用在边界上的边界面力必须符合这个条件。

现在我们再讨论当边界处位移给定的情况，设边界处的位移为

$$u=g_1,\qquad v=g_2$$

则由式(8-7)得到

$$\frac{3-\nu}{1+\nu}\varphi_1(z)-z\bar{\varphi}_1'(\bar{z})-\bar{\psi}_1(\bar{z})=2G(g_1+\mathrm{i}g_2) \tag{8-13}$$

等式左边理解为当 z 从区域里边趋于边界时的值。这样，式(8-13)给出了在边界位移给定时复位势 $\varphi_1(z)$ 和 $\psi_1(z)$ 所满足的边界条件。

到这里为止，我们就将求解弹性力学的平面问题，从原来的在给定的边界条件下求解双调和方程的问题，变为在给定的边界条件下去寻求解析函数 $\varphi_1(z)$ 和 $\psi_1(z)$ 的问题。求得了解析函数 $\varphi_1(z)$ 和 $\psi_1(z)$，就可通过式(8-7)求位移，通过式(8-8)和(8-9)[或式(8-10)]求应力。

§8-4 保角变换和曲线坐标

为了便于根据边界条件确定复位移势 $\varphi_1(z)$ 和 $\psi_1(z)$，我们采用保角变换

$$z=\omega(\zeta) \tag{8-14}$$

把物体在 z 平面上所占的区域变为 ζ 平面上的区域。此时，关系式(8-7)，(8-8)，(8-10)和(8-11)′也将相应地发生变化。引进记号

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_1(\zeta)=\varphi_1(z)=\varphi_1[\omega(\zeta)]\\
&\psi_1(\zeta)=\psi_1(z)=\psi_1[\omega(\zeta)]\\
&\Phi(\zeta)=\varphi_1'(z)=\varphi_1'(\zeta)\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}=\frac{\varphi_1'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\\
&\Psi(\zeta)=\psi_1'(z)=\psi_1'(\zeta)\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}=\frac{\psi_1'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\\
&\Phi'(\zeta)=\varphi_1''(z)\omega'(\zeta)
\end{aligned}\right\} \tag{8-15}$$

这样,式(8-7)变为

$$2G(u+\mathrm{i}v)=\frac{3-\nu}{1+\nu}\varphi_1(\zeta)-\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega}'(\overline{\zeta})}\overline{\varphi}_1'(\overline{\zeta})-\overline{\psi}_1(\overline{\zeta}) \tag{8-16}$$

式(8-8)和(8-10)变为

$$\sigma_x+\sigma_y=2[\Phi(\zeta)+\overline{\Phi}(\overline{\zeta})]=4\mathrm{Re}[\Phi(\zeta)] \tag{8-17}$$

$$\sigma_y-\sigma_x+2\mathrm{i}\tau_{xy}=\frac{2}{\omega'(\zeta)}[\overline{\omega}(\overline{\zeta})\Phi'(\zeta)+\omega'(\zeta)\Psi(\zeta)] \tag{8-18}$$

而边界条件(8-11)′变为

$$\varphi_1(\zeta)+\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega}'(\overline{\zeta})}\overline{\varphi}_1'(\overline{\zeta})+\overline{\psi}_1(\overline{\zeta})=\mathrm{i}\int_{AB}(\overline{f}_x+\mathrm{i}\overline{f}_y)\mathrm{d}s \tag{8-19}$$

式(8-19)的等号两边都是变换后的区域边界点的函数。

由于在一些问题中用曲线坐标形式表示位移和应力有利于物体的应变和应力分析,下面介绍一下有关曲线坐标的概念。

大家知道,ζ 平面上的任何一点可表示为

$$\zeta=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi) \tag{a}$$

ρ 和 φ 是 ζ 点的极坐标。ζ 平面上的一个圆周 $\rho=\text{const.}$ 和一根径向直线 $\varphi=\text{const.}$ 分别对应于 z 平面上的两根曲线,这两根曲线就记作 $\rho=\text{const.}$ 和 $\varphi=\text{const.}$,如图 8-2 所示。于是,ρ 和 φ 可以看作是 z 平面上一点的曲线坐标。由于变换的保角性,这个曲线坐标总是正交的,而且坐标轴 ρ 和 φ 的相对位置和坐标轴 Ox 和 Oy 的相对位置相同。

若用 u_ρ 和 u_φ 分别表示图 8-2 中 z 点的位移矢量在 ρ 轴和 φ 轴上的投影,α 表示 ρ 轴与 Ox 轴间的夹角,则由几何关系

$$u=u_\rho\cos\alpha-u_\varphi\sin\alpha,\quad v=u_\rho\sin\alpha+u_\varphi\cos\alpha$$

于是有

$$\begin{aligned}
u+\mathrm{i}v&=(u_\rho\cos\alpha-u_\varphi\sin\alpha)+\mathrm{i}(u_\rho\sin\alpha+u_\varphi\cos\alpha)\\
&=u_\rho(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)+\mathrm{i}u_\varphi(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)\\
&=(u_\rho+\mathrm{i}u_\varphi)(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)=(u_\rho+\mathrm{i}u_\varphi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}
\end{aligned}$$

或

$$u_\rho + \mathrm{i}u_\varphi = (u + \mathrm{i}v)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} \tag{b}$$

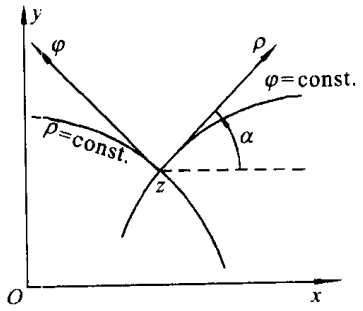


图 8-2

为了计算 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}$，假想沿 ρ 轴方向给 z 点以增量 $\mathrm{d}z$，因而对应点 ζ 沿径线方向得到增量 $\mathrm{d}\zeta$，于是有

$$\mathrm{d}z = |\mathrm{d}z|(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}|\mathrm{d}z|$$
$$\mathrm{d}\zeta = |\mathrm{d}\zeta|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}|\mathrm{d}\zeta|$$

这样

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = \frac{\mathrm{d}z}{|\mathrm{d}z|} = \frac{\omega'(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{|\omega'(\zeta)||\mathrm{d}\zeta|} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|} = \frac{\zeta}{\rho}\frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|}$$

将上式两边共轭，得

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} = \frac{\bar{\zeta}}{\rho}\frac{\bar{\omega}'(\bar{\zeta})}{|\omega'(\zeta)|} \tag{c}$$

代入式(b)，再利用式(8-16)，于是得到

$$2G(u_\rho + \mathrm{i}u_\varphi) = \frac{\bar{\zeta}}{\rho}\frac{\bar{\omega}'(\bar{\zeta})}{|\omega'(\zeta)|}\left[\frac{3-\nu}{1+\nu}\varphi_1(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\bar{\omega}'(\bar{\zeta})}\bar{\varphi}_1'(\bar{\zeta}) - \bar{\psi}_1(\bar{\zeta})\right] \tag{8-20}$$

这是曲线坐标中位移的复变函数表示式。

再建立曲线坐标中应力的复变函数表示式。我们用 σ_ρ，σ_φ，$\tau_{\rho\varphi}$ 表示物体在曲线坐标中的应力分量，由图 8-3 所示的单元体的平衡，有

$$\sigma_\rho = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

$$\sigma_\varphi = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

$$\tau_{\rho\varphi} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha$$

由此不难得到

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\rho + \sigma_\varphi &= \sigma_x + \sigma_y \\ \sigma_\varphi - \sigma_\rho + 2\mathrm{i}\tau_{\rho\varphi} &= (\sigma_y - \sigma_x + 2\mathrm{i}\tau_{xy})\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\end{aligned}\right\} \tag{d}$$

这里的

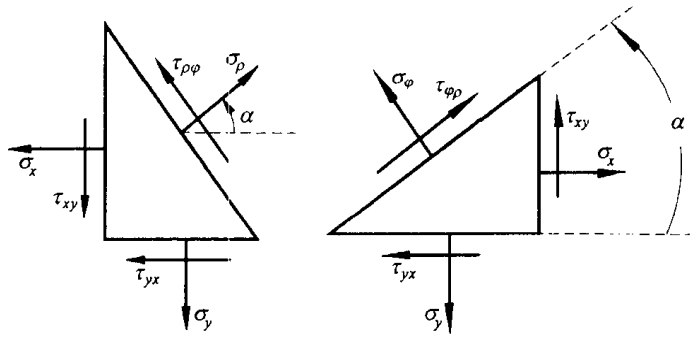


图 8-3

$$e^{2i\alpha}=\frac{\zeta^2}{\rho^2}\frac{[\omega'(\zeta)]^2}{|\omega'(\zeta)|^2}=\frac{\zeta^2}{\rho^2}\frac{[\omega'(\zeta)]^2}{\omega'(\zeta)\bar{\omega}'(\bar{\zeta})}$$

$$=\frac{\zeta^2}{\rho^2}\frac{\omega'(\zeta)}{\bar{\omega}'(\bar{\zeta})} \tag{e}$$

将式(e)代入式(d),并利用式(8-17)和(8-18),于是得到

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_\rho+\sigma_\varphi=2[\Phi(\zeta)+\bar{\Phi}(\zeta)]=4\mathrm{Re}[\Phi(\zeta)]\\&\sigma_\varphi-\sigma_\rho+2i\tau_{\rho\varphi}=\frac{2\zeta^2}{\rho^2\bar{\omega}'(\bar{\zeta})}[\bar{\omega}(\bar{\zeta})\Phi'(\zeta)+\omega'(\zeta)\Psi(\zeta)]\end{aligned}\right\} \tag{8-21}$$

§8-5 圆域上的复位势公式

设有一个半径为 R 的薄的圆盘(或很长的圆柱体),其周边处面力是已知的。为了求出这个问题的复位势,我们利用函数

$$z=\omega(\zeta)=R\zeta$$

将这个圆盘所占的区域变成单位圆的内部区域。这时,边界条件(8-19)简化为

$$\varphi_1(\zeta)+\zeta\bar{\varphi}_1'(\bar{\zeta})+\bar{\psi}_1(\bar{\zeta})=i\int(\bar{f}_x+i\bar{f}_y)ds \tag{8-22}$$

式中的 ζ 表示单位圆周上的点,为便于区分起见,改用 σ 来表示;另外,等号右边的积分,在面力已知的情况下,是 σ 的确定函数,如记作

$$f(\sigma)=i\int(\bar{f}_x+i\bar{f}_y)ds \tag{8-23}$$

于是,式(8-22)又可表示为

$$\varphi_1(\sigma)+\sigma\bar{\varphi}_1'(\bar{\sigma})+\bar{\psi}_1(\bar{\sigma})=f(\sigma) \tag{8-22}$$

或写为

$$\bar{\varphi}_1(\bar{\sigma})+\bar{\sigma}\varphi_1'(\sigma)+\psi_1(\sigma)=\bar{f}(\bar{\sigma}) \tag{8-24}$$

将式(8-22)′两边同乘以$\frac{1}{\sigma-\zeta}$(其中,ζ 为单位圆内的任意点,在下面的推

导中，看作是固定值），并沿单位圆的圆周 γ 逆时针方向作回路积分，得

$$\int_\gamma \frac{\varphi_1(\sigma)\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta}+\int_\gamma \frac{\sigma\overline{\varphi}_1'(\bar{\sigma})\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta}+\int_\gamma \frac{\overline{\psi}_1(\bar{\sigma})\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta}=\int_\gamma \frac{f(\sigma)\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta} \tag{8-25}$$

由于 $\varphi_1(\zeta)$ 为单位圆内的解析函数，所以根据柯西积分公式，式(8-25)左边的第一个积分为

$$\int_\gamma \frac{\varphi_1(\sigma)\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta}=2\pi\mathrm{i}\varphi_1(\zeta) \tag{a}$$

再计算式(8-25)左边的第三个积分，为此，将单位圆内的解析函数 $\psi_1(\zeta)$ 展成幂级数的形式，有

$$\psi_1(\zeta)=b_0+b_1\zeta+b_2\zeta^2+b_3\zeta^3+\cdots$$

为了便于论证，我们要区别单位圆外的点和单位圆内的点，并将前者记作 ζ_0，将后者记作 ζ_1。这样，上式可写成

$$\psi_1(\zeta_1)=b_0+b_1\zeta_1+b_2\zeta_1^2+b_3\zeta_1^3+\cdots$$

将等号两边共轭，得

$$\overline{\psi}_1(\bar{\zeta}_1)=\bar{b}_0+\bar{b}_1\bar{\zeta}_1+\bar{b}_2\bar{\zeta}_1^2+\bar{b}_3\bar{\zeta}_1^3+\cdots \tag{b}$$

显然，它是一个收敛级数。设

$$\zeta_1=\rho_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

则

$$\bar{\zeta}_1=\rho_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}=\frac{1}{\frac{1}{\rho_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}$$

因为 $\rho_1<1$，故当 ζ_1 在单位圆内变化时，复数 $\frac{1}{\rho_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ 在单位圆外变化。取 $\zeta_0=\frac{1}{\rho_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$，则

$$\bar{\zeta}_1=\frac{1}{\zeta_0} \tag{c}$$

将式(c)代入式(b)，得

$$\overline{\psi}_1\left(\frac{1}{\zeta_0}\right)=\bar{b}_0+\frac{\bar{b}_1}{\zeta_0}+\frac{\bar{b}_2}{\zeta_0^2}+\frac{\bar{b}_3}{\zeta_0^3}+\cdots \tag{d}$$

显然，这是单位圆外（包括无穷远点）的解析函数，且以上述第三个积分号下的 $\overline{\psi}_1(\bar{\sigma})=\overline{\psi}_1\left(\frac{1}{\sigma}\right)$（由于 $\sigma\bar{\sigma}=1$，所以 $\bar{\sigma}=\frac{1}{\sigma}$）为边界值。于是，根据柯西型积分的

性质①,式(8-25)左边的第三个积分应为

$$\int_\gamma \frac{\bar{\psi}_1(\bar{\sigma})\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta}=\int_\gamma \frac{\bar{\psi}_1\left(\frac{1}{\sigma}\right)\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta}=2\pi\mathrm{i}\bar{\psi}_1\left(\frac{1}{\infty}\right)=2\pi\mathrm{i}\bar{\psi}_1(0)=0 \tag{e}$$

这里,所以假设 $\bar{\psi}_1(0)=0$,是因为这样做不影响应力的值。

为了计算式(8-25)中的第二个积分,同样将单位圆内的解析函数 $\varphi_1(\zeta)$展成幂级数

$$\varphi_1(\zeta)=a_0+a_1\zeta+a_2\zeta^2+a_3\zeta^3+\cdots$$

由此

$$\varphi_1'(\zeta)=a_1+2a_2\zeta+3a_3\zeta^2+\cdots$$

而

$$\sigma\bar{\varphi}_1'(\bar{\sigma})=\sigma\bar{\varphi}_1'\left(\frac{1}{\sigma}\right)=\bar{a}_1\sigma+2\bar{a}_2+\frac{3\bar{a}_3}{\sigma}+\cdots$$

代入上述积分并运用柯西积分公式和注解中的柯西型积分的性质,极易直接算得

$$\int_\gamma \frac{\sigma\bar{\varphi}_1'(\bar{\sigma})\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta}=2\pi\mathrm{i}(\bar{a}_1\zeta+2\bar{a}_2) \tag{f}$$

将积分值(a),(e)和(f)代入式(8-25),得

$$\varphi_1(\zeta)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f(\sigma)\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta}-\bar{a}_1\zeta-2\bar{a}_2 \tag{8-26}$$

剩下的就是定出未知数 a_1 和 a_2 的问题。为此,只需将式(8-26)两边对 ζ 求一阶导数和二阶导数,然后用 $\zeta=0$ 代入,注意到按定义有 $a_1=\varphi'_1(0)$,$2a_2=\varphi''_1(0)$。这样就分别给出

$$\left.\begin{aligned} a_1+\bar{a}_1&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f(\sigma)\mathrm{d}\sigma}{\sigma^2}\\ a_2&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f(\sigma)\mathrm{d}\sigma}{\sigma^3}\end{aligned}\right\} \tag{8-27}$$

按同样的做法,可导得 $\psi_1(\zeta)$的公式。只要将式(8-24)等号两边同乘以 $\frac{1}{\sigma-\zeta}$,并沿单位圆的圆周逆时针方向作回路积分,再注意到

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{\bar{\varphi}_1(\bar{\sigma})\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta}=\bar{\varphi}_1(0)$$

---

① 设函数 $F(\zeta)$在包含无穷远点的某一区域内是解析的,且在该区域及其边界 σ 上是连续的,则对于区域外的任一点 ζ,有

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{F(\sigma)\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta}=F(\infty)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\bar{\sigma}\varphi_1'(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\varphi_1'(\sigma)}{\sigma}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=\frac{\varphi_1'(\zeta)}{\zeta}-\frac{a_1}{\zeta}$$

(后一积分可用留数理论计算),于是

$$\psi_1(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\bar{f}(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta}-\frac{\varphi_1'(\zeta)}{\zeta}+\frac{a_1}{\zeta}-\bar{\varphi}_1(0)\qquad(8-28)$$

到此,问题已解决。式(8-26),(8-27)和(8-28)表示,只要在边界处面力已知的情况下,先求得 $f(\sigma)$,则可通过它们求得复位势 $\varphi_1(\zeta)$ 和 $\psi_1(\zeta)$。这两个公式右边的常数可以忽略,因它们对求应力无影响。

§8-6　圆盘边缘受集中力作用

作为圆域上复位势公式(8-26)和(8-28)的应用,我们举圆盘边缘受集中力作用为例。设圆盘的半径为 R,其边缘各点

$$z_1=Re^{i\alpha_1},\quad z_2=Re^{i\alpha_2},\quad\cdots,\quad z_n=Re^{i\alpha_n},$$
$$(0\leqslant\alpha_1<\alpha_2\cdots<\alpha_n<2\pi)$$

承受集中力

$$(f_{1x},f_{1y}),(f_{2x},f_{2y}),\cdots,(f_{nx},f_{ny})$$

(f_{kx},f_{ky} 表示点 z_k 所受集中力的分量)作用,而这些集中力的主矢量和主矩为零,即

$$\sum_{k=1}^{n}f_{kx}=0,\quad\sum_{k=1}^{n}f_{ky}=0,\quad\sum_{k=1}^{n}(x_kf_{ky}-y_kf_{kx})=0\qquad(a)$$

另外,设点 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 变换到 ζ 平面上为

$$\sigma_1=e^{\alpha_1},\quad\sigma_2=e^{i\alpha_2},\cdots,\quad\sigma_n=e^{i\alpha_n}$$

在这些条件下,$f(\sigma)=i\int(\bar{f}_x+i\bar{f}_y)ds$ 在 $\sigma_1\sigma_2,\sigma_2\sigma_3,\cdots,\sigma_n\sigma_1$ 中每一弧上均为常数(因这些弧上无外力作用),但每当通过 σ_k 时,将有等于 $i(f_{kx}+if_{ky})$ 的突变量。例如,我们可取在弧 $\sigma_n\sigma_1$ 上 $f(\sigma)=0$,于是,在弧 $\sigma_1\sigma_2,\sigma_2\sigma_3,\sigma_3\sigma_4,\cdots$ 上将分别为 $f(\sigma)=i(f_{1x}+if_{1y})$,$f(\sigma)=i(f_{1x}+if_{1y})+i(f_{2x}+if_{2y})$,$f(\sigma)=i(f_{1x}+if_{1y})+i(f_{2x}+if_{2y})+i(f_{3x}+if_{3y})$,$\cdots$。为使当回到弧 $\sigma_n\sigma_1$ 上时 $f(\sigma)$ 回到原值零,我们必须要求 $f_{1x}+f_{2x}+\cdots+f_{nx}=0$,$f_{1y}+f_{2y}+\cdots+f_{ny}=0$。根据式(a),它们已经满足。于是

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta}=\frac{f_{1x}+if_{1y}}{2\pi}\ln\frac{\sigma_2-\zeta}{\sigma_1-\zeta}+$$
$$\frac{(f_{1x}+if_{1y})+(f_{2x}+if_{2y})}{2\pi}\ln\frac{\sigma_3-\zeta}{\sigma_2-\zeta}+\cdots+$$

$$\frac{(f_{1x}+\mathrm{i}f_{1y})+\cdots+(f_{nx}+\mathrm{i}f_{ny})}{2\pi}\ln\frac{\sigma_1-\zeta}{\sigma_n-\zeta}$$

最后一项为零，这里，为了看起来对称起见，才将它写出。经整理以后，变为

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{f(\sigma)\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta}=&-\frac{1}{2\pi}[(f_{1x}+\mathrm{i}f_{1y})\ln(\sigma_1-\zeta)+\\&(f_{2x}+\mathrm{i}f_{2y})\ln(\sigma_2-\zeta)+\cdots+\\&(f_{nx}+\mathrm{i}f_{ny})\ln(\sigma_n-\zeta)]\end{aligned}\tag{b}$$

完全类似地，我们可以得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{\bar{f}(\bar{\sigma})\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta}=&\frac{1}{2\pi}[(f_{1x}-\mathrm{i}f_{1y})\ln(\sigma_1-\zeta)+\\&(f_{2x}-\mathrm{i}f_{2y})\ln(\sigma_2-\zeta)+\cdots+\\&(f_{nx}-\mathrm{i}f_{ny})\ln(\sigma_n-\zeta)]\end{aligned}\tag{c}$$

剩下的只是确定 a_1 的问题了。为了求得式(8-27)第一式右边的积分，我们将式(b)对 ζ 求导，然后令 $\zeta=0$。于是得

$$a_1+\bar{a}_1=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}(f_{kx}+\mathrm{i}f_{ky})\bar{\sigma}_k\tag{d}$$

显然，式(d)的左边为实数，因此，要求其右边也必须为实数，也就是它的虚部必须为零。注意到 $z_k=x_k+\mathrm{i}y_k=R\sigma_k$，则右边的虚部为零的条件是 $\sum_{k=1}^{n}(x_kf_{ky}-y_kf_{kx})=0$，根据式(a)，这个条件也是满足的。

a_1 的虚部对求应力无影响，可假设它为零，于是

$$a_1=\frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{n}(f_{kx}+\mathrm{i}f_{ky})\bar{\sigma}_k\tag{e}$$

将式(b)，(c)，(e)代入式(8-26)和(8-28)，得到

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(\zeta)=&-\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}(f_{kx}+\mathrm{i}f_{ky})\ln(\sigma_k-\zeta)-\\&\frac{\zeta}{4\pi}\sum_{k=1}^{n}(f_{kx}+\mathrm{i}f_{ky})\bar{\sigma}_k\\\psi_1(\zeta)=&\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}(f_{kx}-\mathrm{i}f_{ky})\ln(\sigma_k-\zeta)-\\&\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{(f_{kx}+\mathrm{i}f_{ky})\bar{\sigma}_k}{\sigma_k-\zeta}\end{aligned}\right\}\tag{8-29}$$

作为一个特例，设在圆盘的边缘作用有两个大小相等而方向相反的力 $(F,0)$，$(-F,0)$，它们平行于 Ox 轴，并作用于 $z_1=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$，$z_2=-R\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}$，如图8-4所示。在此情况下，回到旧变量 $z=R\zeta$，我们从式(8-29)得到

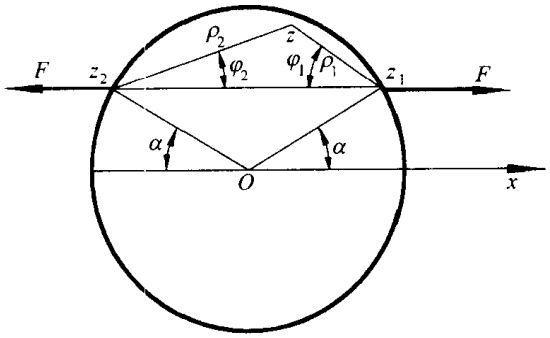


图 8-4

$$\varphi_1(z)=-\frac{F}{2\pi}\left[\ln(z_1-z)-\ln(z_2-z)+\frac{\bar{z}_1-\bar{z}_2}{2R^2}z\right]$$

$$\psi_1(z)=\frac{F}{2\pi}\left[\ln(z_1-z)-\ln(z_2-z)-\frac{\bar{z}_1}{z_1-z}+\frac{\bar{z}_2}{z_2-z}\right]$$

将它们代入到式(8-8)和(8-10),并注意到

$$z_1=Re^{i\alpha},\qquad z_2=-Re^{i\alpha}$$

$$z_1-z=\rho_1e^{i\varphi_1},\qquad z_2-z=-\rho_2e^{i\varphi_2}$$

我们就不难得到

$$\sigma_x+\sigma_y=\frac{2F}{\pi}\left(\frac{\cos\varphi_1}{\rho_1}+\frac{\cos\varphi_2}{\rho_2}-\frac{\cos\alpha}{R}\right)$$

$$\sigma_y-\sigma_x=\frac{F}{\pi}\left(\frac{\cos3\varphi_1+\cos\varphi_1}{\rho_1}+\frac{\cos3\varphi_2+\cos\varphi_2}{\rho_2}\right)$$

$$2\tau_{xy}=-\frac{F}{\pi}\left(\frac{\sin3\varphi_1+\sin\varphi_1}{\rho_1}-\frac{\sin3\varphi_2+\sin\varphi_2}{\rho_2}\right)$$

由此,经简单的变换以后,得

$$\sigma_x=\frac{2F}{\pi}\left(\frac{\cos^3\varphi_1}{\rho_1}+\frac{\cos^3\varphi_2}{\rho_2}\right)-\frac{F}{\pi R}\cos\alpha$$

$$\sigma_y=\frac{2F}{\pi}\left(\frac{\sin^2\varphi_1\cos\varphi_1}{\rho_1}+\frac{\sin^2\varphi_2\cos\varphi_2}{\rho_2}\right)-\frac{F}{\pi R}\cos\alpha$$

$$\tau_{xy}=-\frac{2F}{\pi}\left(\frac{\sin\varphi_1\cos^2\varphi_1}{\rho_1}-\frac{\sin\varphi_2\cos^2\varphi_2}{\rho_2}\right)$$

§8-7　多连通域上应力和位移的单值条件　多连通无限域情况

以上所考虑的是物体所占的平面区域为单连通的情况,这时,复位势 $\varphi_1(z)$

和 $\psi_1(z)$[包括 $\chi_1(z)$]为单值解析函数,但在多连通区域内,复位势 $\varphi_1(z)$和 $\psi_1(z)$[①]可能表现为解析而多值的。现在来考察如何选择这些复变函数,才能保证应力和位移的单值性。设多连通区域由 $m+1$ 条闭曲线 $s_1, s_2, s_3, \cdots s_{m+1}$ 围成,其中,最后一条曲线 s_{m+1} 包围其余各条曲线,如图 8-5 所示。

由关系式

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\mathrm{Re}[\varphi_1'(z)]$$

可以看出,由于应力的单值性,要求 $\varphi_1'(z)$的实部必须是单值的,而它的虚部不一定是单值的。因此,当环绕任一内边界 s_k 转过一周时,$\varphi_1'(z)$的虚部可能得到 B_ki 形式的增量,这里,B_k 为实数。我们引进实常数 A_k,并设

$$B_k = 2\pi A_k$$

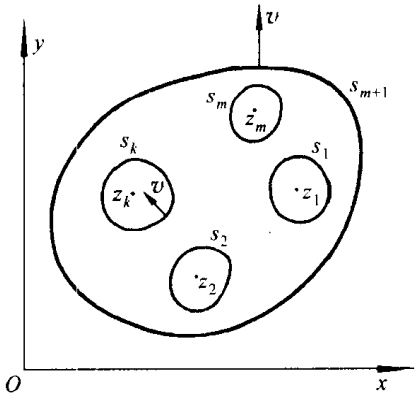


图 8-5

现在考察函数

$$\varphi_{1*}'(z) = \varphi_1'(z) - \sum_{k=1}^{m} A_k \ln(z - z_k)$$

其中,$z_1, z_2, z_3, \cdots, z_m$ 在各内边界之内(区域之外)。当环绕 s_k 转过一周时,$\ln(z-z_k)$得到增量 2πi,而 $A_k\ln(z-z_k)$恰好增加 2πiA_k;$\sum$号内其余各项将回复原值。因此,函数 $\varphi_{1*}'(z)$当沿着区域内的任意闭曲线绕行时将回复到原值于是,我们有

$$\varphi_1'(z) = \sum_{k=1}^{m} A_k \ln(z - z_k) + \varphi_{1*}'(z) \tag{a}$$

其中,$\varphi_{1*}'(z)$为多连通区域内的单值解析函数。将式(a)积分,得

$$\varphi_1(z) = \sum_{k=1}^{m} A_k [(z - z_k)\ln(z - z_k) - (z - z_k)] + \int_{z_0}^{z} \varphi_{1*}'(z)\mathrm{d}z + \text{const.} \tag{b}$$

① 从多连通区域内分出的任意一个单连通区域,复位势在其上仍为单值解析。

其中，z_0 为区域内的任意一点。积分 $\int_{z_0}^{z}\varphi_{1*}'(z)\mathrm{d}z$ 是复变量 z 的函数，当环绕曲线 s_k 转过一周时，它得到形如 $2\pi\mathrm{i}C_k$ 的增量，其中 C_k 一般为复常数(因子 $2\pi\mathrm{i}$ 只是为方便而引入的)。因此，与上面相仿，可以写出

$$\int_{z_0}^{z}\varphi_{1*}'(z)\mathrm{d}z=\sum_{k=1}^{m}C_k\ln(z-z_k)+\text{单值解析函数} \tag{c}$$

将式(c)代入式(b)，并将 $A_kz_k\ln(z-z_k)$ 与 $C_k\ln(z-z_k)$ 形式的各项合并起来，我们就得到

$$\varphi_1(z)=z\sum_{k=1}^{m}A_k\ln(z-z_k)+\sum_{k=1}^{m}\gamma_k\ln(z-z_k)+\varphi_{1*}(z) \tag{d}$$

其中，$\varphi_{1*}(z)$为多连通域中的单值解析函数，而 γ_k 为常数(一般为复数)。

再根据公式

$$\sigma_y-\sigma_x+2\mathrm{i}\tau_{xy}=2[\bar{z}\varphi_1''(z)+\psi_1'(z)]$$

可知，$\psi_1'(z)$为单值解析函数。由此得

$$\psi_1(z)=\int\psi_1'(z)\mathrm{d}z$$

与式(c)的推导一样，可得到

$$\psi_1(z)=\sum_{k=1}^{m}\gamma'\ln(z-z_k)+\psi_{1*}(z) \tag{e}$$

其中，$\psi_{1*}(z)$为多连通区域内的单值解析函数，γ_k' 为常数(一般为复数)。

在平面应力情况下的位移分量的复变函数表示，如公式(8-7)所示，即

$$2G(u+\mathrm{i}v)=\frac{3-\nu}{1+\nu}\varphi_1(z)-z\bar{\varphi}_1'(\bar{z})-\psi_1(z)$$

将式(a)，(d)，(e)代入，可以看出，在逆时针方向环绕 s_k 一周后，表达式 $2G(u-\mathrm{i}v)$得到以下的增量

$$2\pi\mathrm{i}\left[\left(\frac{3-\nu}{1+\nu}+1\right)A_kz+\frac{3-\nu}{1+\nu}\gamma_k+\bar{\gamma}_k'\right]$$

可见，位移的单值条件为

$$A_k=0,\quad \frac{3-\nu}{1-\nu}\gamma_k+\bar{\gamma}_k'=0\quad(k=1,2,\cdots,m) \tag{f}$$

现在，我们要证明，γ_k 和 $\bar{\gamma}_k'$ 可以用内边界 s_k 上的面力的主矢量来表示。为此，将公式(8-11)′应用于整个内边界(顺时针方向绕行一周后，让 B 点与 A 点重合)，于是得到

$$[\varphi_1(z)+z\bar{\varphi}_1'(\bar{z})+\bar{\psi}_1(\bar{z})]_{s_k}=\mathrm{i}(f_{kx}+\mathrm{i}f_{ky})$$

其中，$f_{kx}+\mathrm{i}f_{ky}$是作用在整个内边界 s_k 上面力的主矢量。将式(a)，(d)，(e)代入，

并顺时针方向绕 s_k 一周后，得

$$-2\pi i(\gamma_k-\bar{\gamma}'_k)=i(f_{kx}+if_{ky}) \tag{g}$$

联立式(g)和式(f)，解得

$$A_k=0$$

$$\gamma_k=-\frac{1+\nu}{8\pi}(f_{kx}+if_{ky})$$

$$\gamma'_k=\frac{3-\nu}{8\pi}(f_{kx}-if_{ky})$$

代入式(d)和(e)，最后得

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(z)&=-\frac{1+\nu}{8\pi}\sum_{k=1}^{m}(f_{kx}+if_{ky})\ln(z-z_k)+\varphi_{1*}(z)\\ \psi_1(z)&=\frac{3-\nu}{8\pi}\sum_{k=1}^{m}(f_{kx}-if_{ky})\ln(z-z_k)+\psi_{1*}(z)\end{aligned}\right\} \tag{8-30}$$

式(8-30)所表示的复位势 $\varphi_1(z)$ 和 $\psi_1(z)$，完全保证了应力和位移的单值性，这里的 $\varphi_{1*}(z)$ 和 $\psi_{1*}(z)$ 为单值解析函数。

以上讨论的是多连通有限域的情况，但从应用的观点来看，无限域[①]的研究具有很重大的意义。

现在让图 8-5 中的 s_{m+1} 趋向无穷，则得多连通的无限域。显然，上面所引入的公式对于这无限域的任一有限部分都是适用的，剩下要研究的只是在无穷远点邻域的性态。

以坐标原点为圆心，作半径为 R 的大圆周 s_R，使所有的边界 $s_k(k=1,2,\cdots,m)$ 包围在其内。于是，对于 s_R 外的任意一点 z，显然有

$$|z|>|z_k|$$

而

$$\begin{aligned}\ln(z-z_k)&=\ln z\left(1-\frac{z_k}{z}\right)=\ln z+\ln\left(1-\frac{z_k}{z}\right)\\&=\ln z-\frac{z_k}{z}-\frac{1}{2}\left(\frac{z_k}{z}\right)^2-\cdots\\&=\ln z+s_R\text{ 外的单值解析函数}\end{aligned}$$

因此，从式(8-30)得到

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(z)&=-\frac{1+\nu}{8\pi}(f_x+if_y)\ln z+\varphi_{1**}(z)\\ \psi_1(z)&=\frac{3-\nu}{8\pi}(f_x-if_y)\ln z+\psi_{1**}(z)\end{aligned}\right\} \tag{h}$$

① 例如具有小孔的板就可作无限域处理。

其中

$$f_x = \sum_{k=1}^{m} f_{kx}, \qquad f_y = \sum_{k=1}^{m} f_{ky}$$

为 m 个边界上面力的主矢量在两个坐标轴上的分量，而 $\varphi_{1*}(z)$ 和 $\psi_{1*}(z)$ 表示 s_R 外的解析函数(但无穷远点可能除外)，按罗朗(Laurent, P.M.H.)定理，它们在 s_R 之外可展成幂级数

$$\varphi_{1*}(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n, \qquad \psi_{1*}(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_n z^n \tag{i}$$

应力分量的复变函数表示如式(8-8)和(8-10)所示，即

$$\sigma_x + \sigma_y = 2[\varphi_1'(z) + \bar{\varphi}_1'(\bar{z})] \tag{j}$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2\mathrm{i}\tau_{xy} = 2[\bar{z}\varphi_1''(z) + \psi_1'(z)] \tag{k}$$

将式(h)代入式(j)，并利用式(i)，得

$$\sigma_x + \sigma_y = 2\left[-\frac{1+\nu}{8\pi}(f_x + \mathrm{i}f_y)\frac{1}{z} - \frac{1+\nu}{8\pi}(f_x - \mathrm{i}f_y)\frac{1}{\bar{z}} + \sum_{\infty}^{\infty} n(a_n z^{n-1} + \bar{a}_n \bar{z}^{n-1})\right]$$

显然，等号右边有可能随 $|z|$ 无限增大的项是级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(a_n z^{n-1} + \bar{a}_n \bar{z}^{n-1}) = \sum_{n=2}^{\infty} n\rho^{n-1}[a_n \mathrm{e}^{(n-1)\mathrm{i}\varphi} + \bar{a}_n \mathrm{e}^{-(n-1)\mathrm{i}\varphi}]$$

这里，引进了 $z = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$。由此不难看出，当 $\rho \to \infty$ 时，使应力保持为有界的条件是

$$a_n = \bar{a}_n = 0 \quad (n \geqslant 2)$$

假定这一条件已满足，根据式(k)，同样可以证明，当 $\rho \to \infty$ 时，为使应力保持有界，还必须有

$$b_n = 0 \quad (n \geqslant 2)$$

因此，在应力保持有界的条件下，复位势 $\varphi_1(z)$ 和 $\psi_1(z)$ 可以表示为

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(z) &= -\frac{1+\nu}{8\pi}(f_x + \mathrm{i}f_y)\ln z + \Gamma z + \varphi_1^0(z) \\ \psi_1(z) &= \frac{3-\nu}{8\pi}(f_x - \mathrm{i}f_y)\ln z + \Gamma' z + \psi_1^0(z) \end{aligned}\right\} \tag{8-31}$$

其中

$$\Gamma = B + \mathrm{i}C, \qquad \Gamma' = B' + \mathrm{i}C' \tag{l}$$

为复常数；$\varphi_1^0(z)$ 和 $\psi_1^0(z)$ 为 s_R 之外(包括无穷远点在内)的解析函数，它们可以展开成如下的幂级数

$$\varphi_1^0(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots$$

$$\psi_1^0(z)=b_0+\frac{b_1}{z}+\frac{b_2}{z^2}+\cdots$$

由式(j)和(k)可见,在不改变应力的情况下,可取

$$C=0,\qquad a_0=0,\qquad b_0=0$$

于是式(8-31)可改写为

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(z)&=-\frac{1+\nu}{8\pi}(f_x+\mathrm{i}f_y)\ln z+Bz+\varphi_1^0(z)\\ \psi_1(z)&=\frac{3-\nu}{8\pi}(f_x-\mathrm{i}f_y)\ln z+(B'+\mathrm{i}C')z+\psi_1^0(z)\end{aligned}\right\}\qquad(8-31)'$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1^0(z)&=\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\cdots\\ \psi_1^0(z)&=\frac{b_1}{z}+\frac{b_2}{z^2}+\cdots\end{aligned}\right\}\qquad(8-32)$$

式(8-31)′中的 B 和 $B'+\mathrm{i}C'$ 有非常简单的物理意义。事实上,将式(8-31)′代入式(j)和(k),然后令 $z\to\infty$,则有

$$[\sigma_x+\sigma_y]_\infty=4B,\qquad [\sigma_y-\sigma_x+2\mathrm{i}\tau_{xy}]_\infty=2(B'+\mathrm{i}C')\qquad(\mathrm{m})$$

这里的[ ]$_\infty$表示括号内的函数在无穷远处的值。

设 σ_1 和 σ_2 为无穷远处的主应力的值,而 α 为主应力 σ_1 与 Ox 轴的夹角(图 8-6),则由平衡条件有

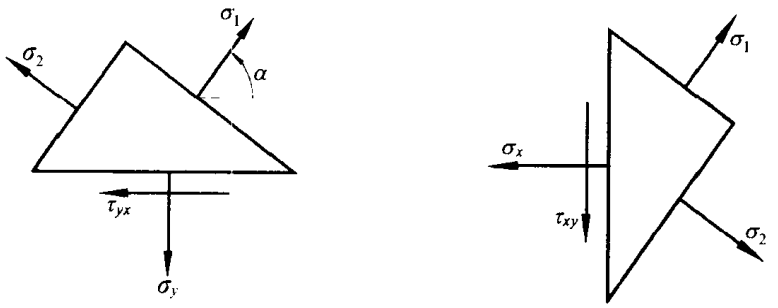


图 8-6

$$[\sigma_x]_\infty=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}+\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos 2\alpha$$

$$[\sigma_y]_\infty=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}-\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos 2\alpha$$

$$[\tau_{xy}]_\infty=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\sin 2\alpha$$

由此很容易得到

$$[\sigma_x+\sigma_y]_\infty=\sigma_1+\sigma_2$$

$$[\sigma_y-\sigma_x+2\mathrm{i}\tau_{xy}]_\infty=-(\sigma_1-\sigma_2)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\alpha}$$

代入式(m)，于是得到

$$\left.\begin{aligned}B&=\frac{1}{4}(\sigma_1+\sigma_2)\\B'+\mathrm{i}C'&=-\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\end{aligned}\right\}\tag{8-33}$$

式(8-33)表示，只要知道了无穷远处的主应力和主应力 σ_1 与 Ox 轴的夹角 α，就可求出常数 B 和 $B'+\mathrm{i}C'$。

§8-8　具有单孔的无限域上的复位势公式

在平面问题中，孔口问题最能显示出复变函数解法的优越性，下面讨论的，只限于具有单孔的无限域(例如无限平板)情况。

对于具有单孔的无限域，复位势可表示成式(8-31)′的形式，即

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(z)&=-\frac{1+\nu}{8\pi}(f_x+\mathrm{i}f_y)\ln z+Bz+\varphi_1^0(z)\\\psi_1(z)&=\frac{3-\nu}{8\pi}(f_x-\mathrm{i}f_y)\ln z+(B'+\mathrm{i}C')z+\psi_1^0(z)\end{aligned}\right\}\tag{a}$$

这里的 f_x 和 f_y 表示作用在孔边上的面力主矢量的两个分量，常数 B 和 $B'+\mathrm{i}C'$ 由无限远处的应力状态确定[见式(8-33)]。因此，对于确定的材料和确定的外力，$\varphi_1(z)$ 和 $\psi_1(z)$ 中的前两项是已知的，留下的只需求出孔外(包括无穷远点)的解析函数 $\varphi_1^0(z)$ 和 $\psi_1^0(z)$ 就算问题解决了。

为了使问题变得更简单一些，我们采用与§8-5中类似的做法，先将孔边外部物体所占的无穷区域(z 平面)变成单位圆外部的区域①，然后求解。这个变换函数的最一般形式为

$$z=\omega(\zeta)=R\left(\zeta+\sum_{k=1}^{n}a_k\zeta^{-k}\right)$$

其中，n 为有限大的正整数，R 为实数，a_k 一般为复数，而 $\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|\leqslant 1$。

经过这个变换以后，请读者自己证明，式(a)变为

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(\zeta)&=-\frac{1+\nu}{8\pi}(f_x+\mathrm{i}f_y)\ln\zeta+BR\zeta+\varphi_0(\zeta)\\\psi_1(\zeta)&=\frac{3-\nu}{8\pi}(f_x-\mathrm{i}f_y)\ln\zeta+(B'+\mathrm{i}C')R\zeta+\psi_0(\zeta)\end{aligned}\right\}\tag{8-34}$$

① 也可将孔外部所占的平面区域变成单位圆的内部。

$\varphi_0(\zeta)$和 $\psi_0(\zeta)$是单位圆外(包括无穷远点)的解析函数,它们能展成如下的幂级数

$$\left.\begin{aligned}\varphi_0(\zeta)&=\frac{a_1}{\zeta}+\frac{a_2}{\zeta^2}+\frac{a_3}{\zeta^3}+\cdots\\ \psi_0(\zeta)&=\frac{b_1}{\zeta}+\frac{b_2}{\zeta^2}+\frac{b_3}{\zeta^3}+\cdots\end{aligned}\right\}\tag{8-35}$$

式(8-19)中的 ζ,现在表示单位圆周上的点,改用 σ 表示;并将其等号右边的 $\mathrm{i}\int(\overline{f}_x+\mathrm{i}\overline{f}_y)\mathrm{d}s$ 记作 $f(\sigma)$,即

$$f(\sigma)=\mathrm{i}\int(\overline{f}_x+\mathrm{i}\overline{f}_y)\mathrm{d}s\tag{8-36}$$

则 $\varphi_1(\zeta)$和 $\psi_1(\zeta)$满足如下的边界条件:

$$\varphi_1(\sigma)+\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega}'(\bar{\sigma})}\overline{\varphi}_1'(\bar{\sigma})+\overline{\psi}_1(\bar{\sigma})=f(\sigma)\tag{8-37}$$

将式(8-34)代入式(8-37)并移项,加以整理,得 $\varphi_0(\zeta)$和 $\psi_0(\zeta)$所满足的边界条件:

$$\begin{aligned}&\varphi_0(\sigma)+\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega}'(\bar{\sigma})}\overline{\varphi}_0'(\bar{\sigma})+\overline{\psi}_0(\bar{\sigma})\\&=f(\sigma)+\frac{f_x+\mathrm{i}f_y}{2\pi}\ln\sigma+\frac{1+\nu}{8\pi}(f_x-\mathrm{i}f_y)\frac{\sigma\omega(\sigma)}{\overline{\omega}'(\bar{\sigma})}-\\&\quad BR\left[\sigma+\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega}'(\bar{\sigma})}\right]-\frac{(B'-\mathrm{i}C')R}{\sigma}\end{aligned}\tag{8-38}$$

如果将等号右边的函数记作 $f_0(\sigma)$,即

$$\begin{aligned}f_0(\sigma)=&f(\sigma)+\frac{f_x+\mathrm{i}f_y}{2\pi}\ln\sigma+\frac{1+\nu}{8\pi}(f_x-\mathrm{i}f_y)\frac{\sigma\omega(\sigma)}{\overline{\omega}'(\bar{\sigma})}-\\&BR\left[\sigma+\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega}'(\bar{\sigma})}\right]-\frac{(B'-\mathrm{i}C')R}{\sigma}\end{aligned}\tag{8-39}$$

则式(8-38)可写成

$$\varphi_0(\sigma)+\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega}'(\bar{\sigma})}\overline{\varphi}_0'(\bar{\sigma})+\overline{\psi}_0(\bar{\sigma})=f_0(\sigma)\tag{8-38}'$$

由式(8-36)和(8-39)可以看出,只要知道了孔边的面力和无穷远处的应力状态,$f_0(\sigma)$是很容易求得的。式(8-38)′又可写成

$$\overline{\varphi}_0(\bar{\sigma})+\frac{\overline{\omega}(\bar{\sigma})}{\omega'(\sigma)}\varphi_0'(\sigma)+\psi_0(\sigma)=\overline{f}_0(\bar{\sigma})\tag{8-38}''$$

为了求得 $\varphi_0(\zeta)$,将式(8-38)′等号两边同乘以 $\frac{1}{\sigma-\zeta}$(这里的 ζ 表示单位圆外的任意一点,在以下推导中视为固定的),然后环绕单位圆周 γ 逆时针方向作回路积分,即

$$\int_\gamma \frac{\varphi_0(\sigma)\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta}+\int_\gamma \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega}'(\bar{\sigma})}\frac{\overline{\varphi}_0'(\bar{\sigma})\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta}+\int_\gamma \frac{\overline{\psi}_0(\bar{\sigma})\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta}=\int_\gamma \frac{f_0(\sigma)\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta} \quad (8-40)$$

式(8-40)等号左边的第一个积分,由外部区域的柯西积分公式[①] 得

$$\int_\gamma \frac{\varphi_0(\sigma)\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta}=-2\pi\mathrm{i}\varphi_0(\zeta) \quad (b)$$

下面,我们证明式(8-40)等号左边的第三个积分等于零,即

$$\int_\gamma \frac{\overline{\psi}_0(\bar{\sigma})\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta}=\int_\gamma \frac{\overline{\psi}_0\left(\frac{1}{\sigma}\right)\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta}=0 \quad (c)$$

这里,用到了 $\sigma\bar{\sigma}=1,\bar{\sigma}=\frac{1}{\sigma}$。

事实上,因为 $\psi_0(\zeta)$在单位圆外包括无穷点处是解析的,所以,能展成如下的幂级数

$$\psi_0(\zeta)=\frac{b_1}{\zeta}+\frac{b_2}{\zeta^2}+\frac{b_3}{\zeta^3}+\cdots$$

这里,略去了对应力无关的常数项。为便于论证,仍将单位圆外的点记作 ζ_0,单位圆内的点记作 ζ_1。这样,上述级数可改写成

$$\psi_0(\zeta_0)=\frac{b_1}{\zeta_0}+\frac{b_2}{\zeta_0^2}+\frac{b_3}{\zeta_0^3}+\cdots$$

将其共轭,得

$$\overline{\psi}_0(\bar{\zeta}_0)=\frac{\overline{b}_1}{\bar{\zeta}_0}+\frac{\overline{b}_2}{\bar{\zeta}_0^2}+\frac{\overline{b}_3}{\bar{\zeta}_0^3}+\cdots \quad (d)$$

显然,对任意的 ζ_0 而言,这是一个收敛级数。设

$$\zeta_0=\rho_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

则

$$\bar{\zeta}_0=\rho_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi},\qquad \frac{1}{\bar{\zeta}_0}=\frac{1}{\rho_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

因 $\rho_0>1$,所以,当 ζ_0 在单位圆外变化时,则 $\frac{1}{\bar{\zeta}_0}=\frac{1}{\rho_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ 在单位圆内变化 $\left(\text{因}\frac{1}{\rho_0}<1\right)$。现取

$$\zeta_1=\frac{1}{\bar{\zeta}_0}\quad \text{或}\quad \bar{\zeta}_0=\frac{1}{\zeta_1}$$

① 参考文献[48]第206页。

这样，级数(d)又可写为

$$\bar{\psi}_0\left(\frac{1}{\zeta_1}\right)=\bar{b}_1\zeta_1+\bar{b}_2\zeta_1^2+\bar{b}_3\zeta_1^3+\cdots$$

显然，对任意 ζ_1 而言，这个级数是收敛的。由此可以看出，$\bar{\psi}_0\left(\frac{1}{\zeta_1}\right)$是单位圆内的解析函数，且以式(8-40)左边第三个积分号下的函数 $\bar{\psi}_0(\bar{\sigma})=\bar{\psi}_0\left(\frac{1}{\sigma}\right)$为边界值。现作函数

$$\frac{\bar{\psi}_0\left(\frac{1}{\zeta_1}\right)}{\zeta_1-\zeta_0}$$

显然，这个函数也是单位圆内的解析函数，且以式(8-40)等号左边第三个积分的被积函数$\frac{\bar{\psi}_0\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\sigma-\zeta}$为边界值。利用柯西定理，就得到式(c)给出的结论。

将式(b)和(c)代入式(8-40)，得

$$-\varphi_0(\zeta)+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\omega(\sigma)}{\bar{\omega}'(\bar{\sigma})}\frac{\bar{\varphi}_0'(\bar{\sigma})d\sigma}{\sigma-\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f_0(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta}\qquad(8-41)$$

同样，如将式(8-38)″等号两边同乘以$\frac{1}{\sigma-\zeta}$，并环绕单位圆周 γ 逆时针方向作回路积分，并按同样方法求得

$$\int_\gamma\frac{\psi_0(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta}=-2\pi i\psi_0(\zeta),\quad\int_\gamma\frac{\bar{\varphi}_0(\bar{\sigma})d\sigma}{\sigma-\zeta}=0$$

于是得

$$-\psi_0(\zeta)+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\bar{\omega}(\bar{\sigma})}{\omega'(\sigma)}\frac{\varphi_0'(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\bar{f}_0(\bar{\sigma})d\sigma}{\sigma-\zeta}\qquad(8-42)$$

式(8-41)和(8-42)等号左边的积分，在 $z=\omega(\zeta)$为有理函数时，是能求出来的，这样，它们就给出了求 $\varphi_0(\zeta)$和 $\psi_0(\zeta)$的公式。求得了 $\varphi_0(\zeta)$和 $\psi_0(\zeta)$，代入式(8-34)，就可求得 $\varphi_1(\zeta)$和 $\psi_1(\zeta)$，再由式(8-15)求 $\Phi(\zeta)$和 $\Psi(\zeta)$，最后由式(8-20)和(8-21)分别求出曲线坐标中的位移分量和应力分量。

§8-9 椭圆孔情况

为了说明式(8-34)，(8-41)和(8-42)的应用，我们介绍无限域的孔边为椭圆形的情况。在 z 平面上的椭圆孔的外部区域到 ζ 平面上单位圆外部区域的变换函数为

$$z=\omega(\zeta)=R\left(\zeta+\frac{m}{\zeta}\right)\qquad(8-43)$$

这里，R 和 m 均为实常数，$0\leqslant m\leqslant 1$。容易验证，单位圆 $|\zeta|=1$ 对应于 z 平面上中心在原点的椭圆，其半轴为(如图 8－7 所示)

$$a=R(1+m),\qquad b=R(1-m)$$

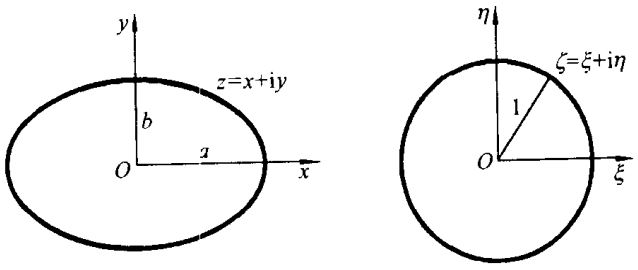


图 8－7

所以，在实际问题中，当已知椭圆的半轴 a 和 b 时，就可定出式(8－43)中的 R 和 m，即

$$R=\frac{a+b}{2},\qquad m=\frac{a-b}{a+b} \tag{a}$$

现在要分别计算式(8－41)和(8－42)等号左边的积分。为此，先根据式(8－43)求得

$$\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega}'(\bar{\sigma})}=\frac{1}{\sigma}\frac{\sigma^2+m}{1-m\sigma^2}$$

将它代入式(8－41)等号左边的积分，得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega}'(\bar{\sigma})}\frac{\overline{\varphi}_1'(\bar{\sigma})\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\sigma}\frac{\sigma^2+m}{1-m\sigma^2}\frac{\overline{\varphi}_0'(\bar{\sigma})\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta} \tag{b}$$

作函数

$$f_1(\zeta_1)=\frac{1}{\zeta_1}\frac{\zeta_1^2+m}{1-m\zeta_1^2}\overline{\varphi}_0'\left(\frac{1}{\zeta_1}\right)\frac{1}{\zeta_1-\zeta_0}$$

不难从式(8－35)得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{\zeta_1}\overline{\varphi}_0'\left(\frac{1}{\zeta_1}\right)&=\frac{1}{\zeta_1}(-\bar{a}_1\zeta_1^2-2\bar{a}_2\zeta_1^3-3\bar{a}_3\zeta_1^4-\cdots)\\&=-\bar{a}_1\zeta_1-2\bar{a}_2\zeta_1^2-3\bar{a}_3\zeta_1^3-\cdots\end{aligned}$$

显然它为单位圆内的解析函数；另外，由于 $0\leqslant m\leqslant 1$，ζ_0 为单位圆外的任意点，$\dfrac{\zeta_1^2+m}{1-m\zeta_1^2}$，$\dfrac{1}{\zeta_1-\zeta_0}$ 也为单位圆内的解析函数。由此可知，$f(\zeta_1)$ 为单位圆内的解析函数，且显然以式(b)中积分号内的被积函数为边界值。由柯西定理，这个积分应等于零，即

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega}'(\bar{\sigma})}\frac{\overline{\varphi}_0'(\bar{\sigma})\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\sigma}\frac{\sigma^2+m}{1-m\sigma^2}\frac{\overline{\varphi}_0'(\bar{\sigma})\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta}=0 \tag{c}$$

再从式(8-43)求得

$$\frac{\bar{\varphi}(\bar{\sigma})}{\omega'(\sigma)}=\sigma\frac{1+m\sigma^2}{\sigma^2-m} \tag{d}$$

将它代入式(8-42)等号左边的积分,得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\bar{\omega}(\bar{\sigma})}{\omega'(\sigma)}\frac{\varphi_0'(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\sigma\frac{1+m\sigma^2}{\sigma^2-m}\frac{\varphi_0'(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta} \tag{e}$$

现作函数

$$f(\zeta_0)=\zeta_0\frac{1+m\zeta_0^2}{\zeta_0^2-m}\varphi_0'(\zeta_0)$$

由式(8-35)知,其中的因子

$$\zeta_0\varphi_0'(\zeta_0)=-\frac{a_1}{\zeta_0}-\frac{2a_2}{\zeta_0^2}-\frac{3a_3}{\zeta_0^3}-\cdots$$

为单位圆外(包括无穷远点)的解析函数;另外,由于$0\leqslant m\leqslant 1$,因子$\frac{1+m\zeta_0^2}{\zeta_0^2-m}$也是单位圆外(包括无穷远点)的解析函数,因此,$f(\zeta_0)$为单位圆外(包括无穷远点)的解析函数,且以式(e)积分号下的

$$\sigma\frac{1+m\sigma^2}{\sigma^2-m}\varphi_0'(\sigma)$$

为边界值。由区域外部的柯西积分公式,得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\sigma\frac{1+m\sigma^2}{\sigma^2-m}\frac{\varphi_0'(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta}=-\zeta\frac{1+m\zeta^2}{\zeta^2-m}\varphi_0'(\zeta) \tag{f}$$

分别将式(c)和(f)代入式(8-41)和(8-42),就得到具有椭圆孔的无限域上的解析函数$\varphi_0(\zeta)$和$\psi_0(\zeta)$的公式

$$\left.\begin{aligned}\varphi_0(\zeta)&=-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f_0(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta}\\ \psi_0(\zeta)&=-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\bar{f}_0(\bar{\sigma})d\sigma}{\sigma-\zeta}-\zeta\frac{1+m\zeta^2}{\zeta^2-m}\varphi_0'(\zeta)\end{aligned}\right\} \tag{8-44}$$

现举三个具体的例子。

例 1 具有小椭圆孔的平板受单向均匀拉伸(拉应力为q),坐标选取如图 8-8 所示。求孔边应力。

解 由于椭圆孔很小,故此平板可看成无限大板。

根据题设条件,孔边不受外力,所以有

$$f_x=f_y=0,\quad f(\sigma)=0 \tag{g}$$

在无穷远处,主应力$\sigma_1=q,\sigma_2=0$,所以由式(8-33),有

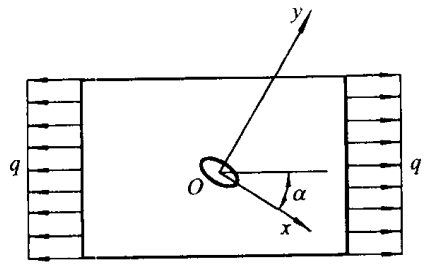


图 8-8

$$\left.\begin{aligned} B &= \frac{1}{4}(\sigma_1+\sigma_2)=\frac{q}{4} \\ B'+\mathrm{i}C' &= -\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\alpha}=-\frac{q}{2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\alpha} \\ B'-\mathrm{i}C' &= -\frac{q}{2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha} \end{aligned}\right\} \tag{h}$$

将式(g)和(h)代入式(8-39),得

$$f_0(\sigma)=-\frac{qR}{4}\left[\sigma+\frac{\sigma^2+m}{\sigma(1-m\sigma^2)}\right]+\frac{qR\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}}{2\sigma}$$

$$\overline{f}_0(\bar{\sigma})=-\frac{qR}{4}\left[\frac{1}{\sigma}+\frac{1+m\sigma^2}{\sigma^2-m}\sigma\right]+\frac{qR\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\alpha}}{2}\sigma$$

再将 $f_0(\sigma)$和$\overline{f}_0(\bar{\sigma})$代入式(8-44),先注意以下两个积分:

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{\sigma^2+m}{\sigma(1-m\sigma^2)}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta} \tag{i}$$

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \sigma\,\frac{1+m\sigma^2}{\sigma^2-m}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta} \tag{j}$$

由于其中的 ζ 是单位圆外的任意一点,所以不难看出,积分(i)的被积函数是单位圆内(除 $\zeta_1=0$ 为一阶奇点)的解析函数$\dfrac{\zeta_1^2+m}{\zeta_1(1-m\zeta_1^2)(\zeta_1-\zeta_0)}$的边界值。于是,由留数理论得

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{\sigma^2+m}{\sigma(1-m\sigma^2)}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta}=-\frac{m}{\zeta}$$

同样,积分(j)的被积函数是单位圆内(除 $\zeta_1=\pm\sqrt{m}$ 各为一阶奇点)的解析函数$\dfrac{\zeta_1(1+m\zeta_1^2)}{(\zeta_1^2-m)(\zeta_1-\zeta_0)}$的边界值,由留数理论有

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \sigma\,\frac{1+m\sigma^2}{\sigma^2-m}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta}=-\frac{(1+m^2)\zeta}{\zeta^2-m}$$

其次,显然有

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{\sigma\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta}=0,\qquad \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma(\sigma-\zeta)}=-\frac{1}{\zeta}$$

因此,得

$$\varphi_0(\zeta)=-\frac{mqR}{4\zeta}+\frac{qR\mathrm{e}^{2i\alpha}}{2\zeta}=\frac{qR(2\mathrm{e}^{2i\alpha}-m)}{4\zeta}$$

$$\psi_0(\zeta)=-\frac{qR}{4\zeta}-\frac{qR(1+m^2)\zeta}{4(\zeta^2-m)}-\zeta\frac{1+m\zeta^2}{\zeta^2-m}\varphi_0'(\zeta)$$

最后由式(8-34),得到

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(\zeta)&=\frac{qR}{4}\left(\zeta+\frac{2\mathrm{e}^{2i\alpha}-m}{\zeta}\right)\\ \psi_1(\zeta)&=-\frac{qR}{2}\left[\mathrm{e}^{-2i\alpha}\zeta+\frac{\mathrm{e}^{2i\alpha}}{m\zeta}-\right.\\ &\qquad\left.\frac{(1+m^2)(\mathrm{e}^{2i\alpha}-m)}{m}\frac{\zeta}{\zeta^2-m}\right]\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{k})$$

求位移和应力没有任何困难,可由公式(8-20)和(8-21)求得。下面我们只限于计算

$$\sigma_\rho+\sigma_\varphi=4R\mathrm{e}[\Phi(\zeta)]$$

由于

$$4\Phi(\zeta)=\frac{4\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}=q\frac{\zeta^2+m-2\mathrm{e}^{2i\alpha}}{\zeta^2-m}$$

$$=q\frac{(\rho^2\mathrm{e}^{2i\varphi}+m-2\mathrm{e}^{2i\alpha})(\rho^2\mathrm{e}^{-2i\varphi}-m)}{(\rho^2\mathrm{e}^{2i\varphi}-m)(\rho^2\mathrm{e}^{-2i\varphi}-m)}$$

将其代入上式取实部,得到

$$\sigma_\rho+\sigma_\varphi=q\frac{\rho^4-2\rho^2\cos 2(\varphi-\alpha)-m^2+2m\cos 2\alpha}{\rho^4-2m\rho^2\cos 2\varphi+m^2}$$

在孔边上($\rho=1$),$\sigma_\rho=0$,因此,沿孔边,σ_φ 将由公式

$$\sigma_\varphi=q\frac{1-m^2+2m\cos 2\alpha-2\cos 2(\varphi-\alpha)}{1-2m\cos 2\varphi+m^2}$$

给出。

当 $\alpha=0$ 时(拉应力 q 与 Ox 轴平行),孔边应力为

$$\sigma_\varphi=q\frac{1-m^2+2m-2\cos 2\varphi}{1+m^2-2m\cos 2\varphi}$$

最大正应力为

$$\sigma_{\max}=(\sigma_\varphi)_{\varphi=+\frac{\pi}{2}}=q\frac{3+2m-m^2}{1+2m+m^2}=q\frac{3-m}{1+m}$$

最小正应力为:

$$\sigma_{\min}=(\sigma_\varphi)_{\varphi=0,\pi}=q\frac{-m^2+2m-1}{1+m^2-2m}=-q$$

例 2 设一无限大板在其椭圆孔边受均匀压力作用,压强为 q,如图 8-9 所

示。求孔边应力。

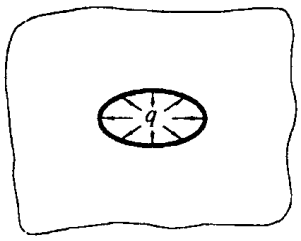


图 8-9

解　在此情况下，面力矢量的两个分量为

$$\overline{f}_x = -q\cos(v,x) = -ql$$

$$\overline{f}_y = -q\cos(v,y) = -qm$$

而在弧长 ds 上的面力主矢量为

$$(\overline{f}_x + \mathrm{i}\overline{f}_y)\mathrm{d}s = -q(l\mathrm{d}s + \mathrm{i}m\mathrm{d}s) = -q(\mathrm{d}y - \mathrm{i}\mathrm{d}x)$$

$$= \mathrm{i}q(\mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y) = \mathrm{i}q\mathrm{d}z$$

注意整个孔边的面力主矢量 $f_x = f_y = 0$(外力是平衡力系)，而且，$B=0$，$B'-\mathrm{i}C=0$(因无穷远处的 $\sigma_1=\sigma_2=0$)。因此，由式(8-39)有

$$f_0(\sigma) = f(\sigma) = \mathrm{i}\int(\overline{f}_x + \mathrm{i}\overline{f}_y)\mathrm{d}s = -q\int\mathrm{d}z$$

$$= -qz = -qR\left(\sigma + \frac{m}{\sigma}\right)$$

$$\overline{f}_0(\overline{\sigma}) = \overline{f}(\overline{\sigma}) = -qR\left(\frac{1}{\sigma} + m\sigma\right)$$

进行与上述相同的运算，可以得出

$$\varphi_0(\zeta) = \varphi_1(\zeta) = -\frac{qRm}{\zeta}$$

$$\psi_0(\zeta) = \psi_1(\zeta) = -\frac{qR}{\zeta} - \frac{qRm}{\zeta}\frac{1+m\zeta^2}{\zeta^2 - m}$$

并得出孔边应力

$$(\sigma_\varphi)_{\rho=1} = q\,\frac{1-3m^2+2m\cos 2\varphi}{1+m^2-2m\cos 2\varphi}$$

最大正应力和最小正应力分别为：

$$\sigma_{\max} = (\sigma_\varphi)_{\varphi=0,\pi} = \frac{1+3m}{1-m}q = \left(2\frac{a}{b} - 1\right)q$$

$$\sigma_{\min} = (\sigma_\varphi)_{\varphi=\pm\frac{\pi}{2}} = \frac{1-3m}{1+m}q = \left(2\frac{b}{a} - 1\right)q$$

例 3　具有小圆孔(半径为 R)的薄板，孔边一点沿 y 的负向作用一集中力 F，如图 8-10 所示。求复位势和当 R 趋向零时板内的应力分量。

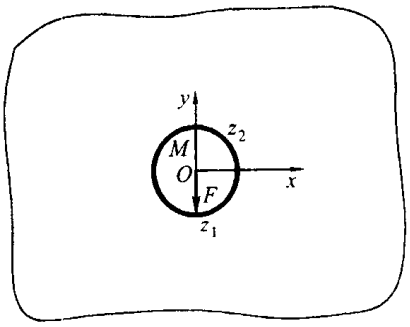


图 8-10

解 对于孔口为圆的特殊情况，若令式(8-43)中的 $m=0$，则它给出了从非单位圆外的无限区域到单位圆外的无限区域的变换。因此，只要在式(8-44)中，令 $m=0$，就可得到圆孔情况的相应公式

$$\left.\begin{aligned}\varphi_0(\zeta) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_0(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta}\\ \psi_0(\zeta) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{f}_0(\bar{\sigma})d\sigma}{\sigma-\zeta}-\frac{\varphi_0'(\zeta)}{\zeta}\end{aligned}\right\} \tag{l}$$

式中的 $f_0(\sigma)$ 可通过将 $\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega}'(\bar{\sigma})}=\sigma$ 代入式(8-39)而得到

$$f_0(\sigma)=f(\sigma)+\frac{f_x+if_y}{2\pi}\ln\sigma+\frac{1+\nu}{8\pi}(f_x-if_y)\sigma^2-2BR\sigma-\frac{(B'-iC')R}{\sigma} \tag{m}$$

由于在无穷远处应力为零，所以，式(m)中的 B 和 $B'-iC'$ 全为零，再注意到 $f_x=0$，$f_y=-F$，于是，式(m)简化为

$$f_0(\sigma)=f(\sigma)-\frac{iF}{2\pi}\ln\sigma+\frac{(1+\nu)iF}{8\pi}\sigma^2 \tag{n}$$

而

$$\overline{f}_0(\bar{\sigma})=\overline{f}(\bar{\sigma})-\frac{iF}{2\pi}\ln\sigma-\frac{(1+\nu)iF}{8\pi}\frac{1}{\sigma^2} \tag{o}$$

这里的 $f(\sigma)$ 为(设从边界点 z_2 起围绕，见图 8-10)

$$f(\sigma)=i\int(\overline{f}_x+i\overline{f}_y)ds=\begin{cases}0 & (\text{在 } z_2Mz_1 \text{ 上})\\ F & (\text{在 } z_1z_2 \text{ 上})\end{cases} \tag{p}$$

将式(n)和(p)代入式(l)的第一式，得

$$\begin{aligned}\varphi_0(\zeta) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f_0(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta}\\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_2}^{\sigma_1}\frac{f(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\frac{f(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta}+\frac{iF}{2\pi}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\ln\sigma d\sigma}{\sigma-\zeta}-\\ &\quad\frac{(1+\nu)iF}{8\pi}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\sigma^2d\sigma}{\sigma-\zeta}\end{aligned}$$

这里的 σ_1 和 σ_2 是 z_1 和 z_2 的对应点。

注意到积分

$$\int_{\sigma_2}^{\sigma_1}\frac{f(\sigma)\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta}=0$$

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\frac{f(\sigma)\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta}=F\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta}=F\ln\frac{\sigma_2-\zeta}{\sigma_1-\zeta}$$

$$\int_{\gamma}\frac{\sigma^2\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta}=0$$

剩下的是计算积分

$$I(\zeta)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{\ln\sigma\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta}$$

先求出

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\zeta}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{\ln\sigma\mathrm{d}\sigma}{(\sigma-\zeta)^2}=-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma}\ln\sigma\mathrm{d}\frac{1}{\sigma-\zeta}$$

$$=-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left[\frac{\ln\sigma}{\sigma-\zeta}\right]_{\sigma_2}^{\sigma_1}+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma(\sigma-\zeta)}$$

由留数理论，有

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma(\sigma-\zeta)}=-\frac{1}{\zeta}$$

另外

$$\left[\frac{\ln\sigma}{\sigma-\zeta}\right]_{\sigma_2}^{\sigma_1}=\frac{2\pi\mathrm{i}}{\sigma_2-\zeta}$$

（因绕行一周后，$\ln\sigma$ 增加 $2\pi\mathrm{i}$），于是

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\zeta}=-\frac{1}{\zeta}-\frac{1}{\sigma_2-\zeta}$$

而

$$I(\zeta)=\ln(\sigma_2-\zeta)-\ln\zeta+\text{const.}$$

因此得

$$\varphi_0(\zeta)=\frac{\mathrm{i}F}{2\pi}\ln\frac{\sigma_2-\zeta}{\sigma_1-\zeta}+\frac{\mathrm{i}F}{2\pi}\ln(\sigma_2-\zeta)-\frac{\mathrm{i}F}{2\pi}\ln\zeta \tag{q}$$

将式(o)和式(p)代入式(l)的第二式，先计算积分

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{\bar{f}_0(\bar{\sigma})\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma_2}^{\sigma_1}\frac{\bar{f}(\bar{\sigma})\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta}+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\frac{\bar{f}(\bar{\sigma})\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta}-$$

$$\frac{\mathrm{i}F}{2\pi}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{\ln\sigma\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta}-\frac{(1+\nu)\mathrm{i}F}{8\pi}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma^2(\sigma-\zeta)}$$

容易算出：

$$\int_{\sigma_2}^{\sigma_1}\frac{\bar{f}(\bar{\sigma})\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta}=0,\quad \int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\frac{\bar{f}(\bar{\sigma})\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta}=F\ln\frac{\sigma_2-\zeta}{\sigma_1-\zeta}$$

前面已经算得：

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{\ln\sigma\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta}=\ln(\sigma_2-\zeta)-\ln\zeta+\text{const.}$$

根据区域外部的柯西积分公式，积分

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma^2(\sigma-\zeta)}=-\frac{1}{\zeta^2}$$

于是

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{\bar{f}(\bar{\sigma})\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta}=\frac{F}{2\pi\mathrm{i}}\ln\frac{\sigma_2-\zeta}{\sigma_1-\zeta}-\frac{\mathrm{i}F}{2\pi}\ln(\sigma_2-\zeta)+\frac{\mathrm{i}F}{2\pi}\ln\zeta+\frac{(1+\nu)\mathrm{i}F}{8\pi}\frac{1}{\zeta^2}$$

将此代入式(l)的第二式，并利用式(q)，得

$$\psi_0(\zeta)=\frac{\mathrm{i}F}{2\pi}\ln\frac{\sigma_2-\zeta}{\sigma_1-\zeta}+\frac{\mathrm{i}F}{2\pi}\ln(\sigma_2-\zeta)-\frac{\mathrm{i}F}{2\pi}\ln\zeta-\frac{(1+\nu)\mathrm{i}F}{8\pi}\frac{1}{\zeta^2}-\frac{\varphi_0'(\zeta)}{\zeta}\qquad(\mathrm{r})$$

注意，上面的 σ_2（在 z 平面上的对应点为 z_2）是为了便于论述才引进的。现令 $\sigma_2\to\sigma_1$（即 $z_2\to z_1$），于是，式(q)，(r)简化为

$$\varphi_0(\zeta)=\frac{\mathrm{i}F}{2\pi}\ln(\sigma_1-\zeta)-\frac{\mathrm{i}F}{2\pi}\ln\zeta\qquad(\mathrm{s})$$

$$\begin{aligned}\psi_0(\zeta)&=\frac{\mathrm{i}F}{2\pi}\ln(\sigma_1-\zeta)-\frac{\mathrm{i}F}{2\pi}\ln\zeta-\frac{(1+\nu)\mathrm{i}F}{8\pi}\frac{1}{\zeta^2}-\frac{\varphi_0'(\zeta)}{\zeta}\\&=\frac{\mathrm{i}F}{2\pi}\ln(\sigma_1-\zeta)-\frac{\mathrm{i}F}{2\pi}\ln\zeta+\frac{(3-\nu)\mathrm{i}F}{8\pi}\frac{1}{\zeta^2}+\frac{\mathrm{i}F}{2\pi\zeta(\sigma_1-\zeta)}\end{aligned}\qquad(\mathrm{t})$$

将式(s)和式(t)代入式(8-34)，可得 $\varphi_1(\zeta)$ 和 $\psi_1(\zeta)$，由此不难求得应力。

现考虑一个特殊情况，令圆的半径 $R\to0$，则极易得到无限平面受集中力作用的解答。为此，将式(s)，(t)用原来的坐标表示，即用 $\zeta=\frac{z}{R}$ 代回，有

$$\varphi_1^0(z)=\frac{\mathrm{i}F}{2\pi}\ln(z_1-z)-\frac{\mathrm{i}F}{2\pi}\ln z$$

$$\psi_1^0(z)=\frac{\mathrm{i}F}{2\pi}\ln(z_1-z)-\frac{\mathrm{i}F}{2\pi}\ln z+\frac{(3-\nu)\mathrm{i}F}{8\pi}\frac{R^2}{z^2}+\frac{\mathrm{i}FR^2}{2\pi z(z_1-z)}$$

令 $R\to0$（此时 z_1 也趋向于零），略去与应力无关的常数项，则得

$$\varphi_1^0(z)=0,\qquad\psi_1^0(z)=0$$

因此，由式(8-31)，得到

$$\varphi_1(z)=\frac{(1+\nu)\mathrm{i}F}{8\pi}\ln z,\qquad\psi_1(z)=\frac{(3-\nu)\mathrm{i}F}{8\pi}\ln z\qquad(\mathrm{u})$$

为求应力分量，读者不难利用式(8-8)，(8-10)和§8-4中的式(d)，将 α 换成极角 φ，并将 $z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ 代入，分开实部和虚部，便可求得

$$\sigma_\rho = \frac{3+\nu}{4\pi}\frac{F\sin\varphi}{\rho}$$

$$\sigma_\varphi = -\frac{1-\nu}{4\pi}\frac{F\sin\varphi}{\rho}$$

$$\tau_{\rho\varphi} = -\frac{1-\nu}{4\pi}\frac{F\cos\varphi}{\rho}$$

§8-10　裂纹尖端附近的应力集中

对于图 8-8 所示的具有椭圆孔口的平板的单向拉伸问题，若令短半轴 b 趋向于零，则该孔口退化成 x 方向的、长度为 $2a$ 的贯穿裂纹，如图 8-11 中的 AB 所示。这时，§8-9 中的式(a)和式(8-43)分别简化为

$$R = \frac{a}{2}, \quad m = 1 \tag{a}$$

$$z = \omega(\zeta) = \frac{a}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) \tag{b}$$

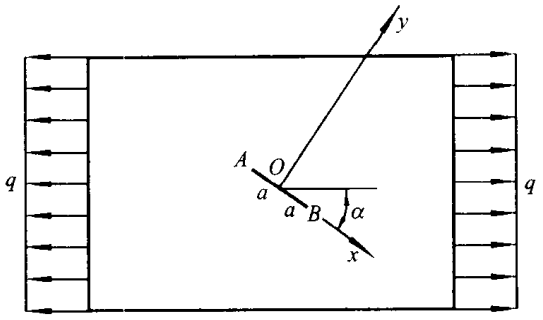


图 8-11

为了求出该问题的复位势 $\varphi_1(\zeta)$ 和 $\psi_1(\zeta)$，只需将式(a)代入 §8-9 中的式(k)，于是有

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(\zeta) &= \frac{qa}{8}\left(\zeta + \frac{2e^{2i\alpha}-1}{\zeta}\right)\\ \psi_1(\zeta) &= -\frac{qa}{4}\left[e^{-2i\alpha}\zeta + \frac{e^{2i\alpha}}{\zeta} - \frac{2(e^{2i\alpha}-1)\zeta}{\zeta^2-1}\right]\end{aligned}\right\} \tag{c}$$

当拉力 q 垂直于裂纹时(这种裂纹称为张开型裂纹，如图 8-12 所示)，令式(c)中 $\alpha = \frac{\pi}{2}$，于是有

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(\zeta) &= \frac{qa}{8}\left(\zeta - \frac{3}{\zeta}\right)\\ \psi_1(\zeta) &= \frac{qa}{4}\left(\zeta - \frac{1+3\zeta^2}{\zeta(\zeta^2-1)}\right)\end{aligned}\right\} \tag{d}$$

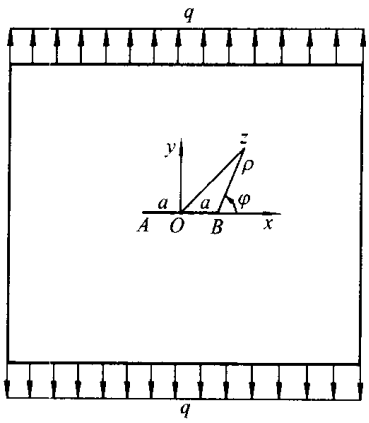


图 8-12

为便于求出直角坐标中的应力分量，将上式中的 ζ 变换为 z。由式(b)可得

$$\zeta=\frac{z\pm\sqrt{z^2-a^2}}{a} \tag{e}$$

根据 ζ 平面上的无穷远点变换到 z 平面上无穷远点的要求，式(e)取正号，即

$$\zeta=\frac{z+\sqrt{z^2-a^2}}{a} \tag{f}$$

代入式(d)，有

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(z)&=\frac{q}{4}(2\sqrt{z^2-a^2}-z)\\ \psi_1(z)&=\frac{q}{2}\left(z-\frac{a^2}{\sqrt{z^2-a^2}}\right)\end{aligned}\right\} \tag{g}$$

于是，由式(8-8)和式(8-9)，得到

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x+\sigma_y&=q\mathrm{Re}\left[\frac{2z}{\sqrt{z^2-a^2}}-1\right]\\ \sigma_y-\sigma_x+2\mathrm{i}\tau_{xy}&=q\left[\frac{2\mathrm{i}a^2y}{(z^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}+1\right]\end{aligned}\right\} \tag{h}$$

为了清楚地表示出裂纹尖端附近的应力分布情况，现采用以裂纹端点 B 为原点的极坐标 ρ,φ，如图 8-12 所示，由图可见

$$z=a+\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},\quad y=\rho\sin\varphi \tag{i}$$

我们只考虑裂纹端部附近的情况，可认为 $\rho\ll a$，于是有

$$\left.\begin{aligned}&z\approx a,\quad z^2-a^2=2a\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}+\rho^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}\approx2a\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\\ &\frac{1}{\sqrt{z^2-a^2}}\approx\frac{1}{\sqrt{2a\rho}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi/2}=\frac{1}{\sqrt{2a\rho}}\left(\cos\frac{\varphi}{2}-\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}\right)\\ &\frac{1}{(z^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}\approx\frac{1}{(2a\rho)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\varphi/2}=\frac{1}{(2a\rho)^{\frac{3}{2}}}\left(\cos\frac{3\varphi}{2}-\mathrm{i}\sin\frac{3\varphi}{2}\right)\end{aligned}\right\} \tag{j}$$

将式(i),(j)代入式(h),并注意到$\frac{a}{\rho}\gg 1$,得裂纹尖端附近的应力表达式

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= q\sqrt{\frac{a}{2\rho}}\cos\frac{\varphi}{2}\left(1-\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{3\varphi}{2}\right)\\ \sigma_y &= q\sqrt{\frac{a}{2\rho}}\cos\frac{\varphi}{2}\left(1+\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{3\varphi}{2}\right)\\ \tau_{xy} &= q\sqrt{\frac{a}{2\rho}}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{3\varphi}{2}\end{aligned}\right\} \tag{8-45}$$

当薄板在裂纹方向和垂直方向受有均布剪力 q 作用时(这种裂纹称为滑开型裂纹,如图 8-13 所示),可将这种受力状况看作是在 $\alpha=\pi/4$ 方向受均匀拉力 q 而在 $\alpha=-\pi/4$ 方向受均匀压力 q 这两种情况的叠加,由式(c)可得

$$\varphi_1(\zeta)=\frac{qa}{8}\left[\zeta+\frac{2e^{2i\alpha}-1}{\zeta}\right]_{\alpha=\frac{\pi}{4}}-\frac{qa}{8}\left[\zeta+\frac{2e^{2i\alpha}-1}{\zeta}\right]_{\alpha=-\frac{\pi}{4}}=i\frac{qa}{2\zeta} \tag{k}$$

$$\psi_1(\zeta)=\frac{iqa}{2}\left[\zeta+\frac{\zeta^2+1}{\zeta(\zeta^2-1)}\right] \tag{l}$$

将式(f)代入上两式,有

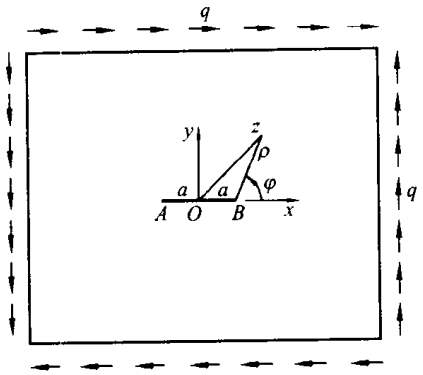


图 8-13

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(z) &= \frac{iq}{2}(z-\sqrt{z^2-a^2})\\ \psi_1(z) &= \frac{iq}{2}\left(2\sqrt{z^2-a^2}+\frac{a^2}{\sqrt{z^2-a^2}}\right)\end{aligned}\right\} \tag{m}$$

再由式(8-8)和式(8-9),得到

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x+\sigma_y &= -2q\,\mathrm{Re}\frac{iz}{\sqrt{z^2-a^2}}\\ \sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy} &= 2q\left[\frac{iz}{\sqrt{z^2-a^2}}-\frac{a^2y}{(z^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}\right]\end{aligned}\right\} \tag{n}$$

仍采用以 B 点为原点的极坐标(图 8-13),则有

$$z=a+\rho e^{i\varphi}$$

考虑到在端点附近，有 $\rho\ll a$，故

$$\frac{z}{\sqrt{z^2-a^2}}\approx\frac{a}{\sqrt{2a\rho e^{i\varphi}}}=\sqrt{\frac{a}{2\rho}}\left(\cos\frac{\varphi}{2}-i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\frac{a^2y}{(z^2-a^2)^{3/2}}\approx\sqrt{\frac{a}{2\rho}}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{3\varphi}{2}-i\sin\frac{3\varphi}{2}\right)$$

代入式(n)，经计算，得裂纹尖端附近的应力表达式

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=-q\sqrt{\frac{a}{2\rho}}\sin\frac{\varphi}{2}\left(2+\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{3\varphi}{2}\right)\\\sigma_y&=q\sqrt{\frac{a}{2\rho}}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{3\varphi}{2}\\\tau_{xy}&=q\sqrt{\frac{a}{2\rho}}\cos\frac{\varphi}{2}\left(1-\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{3\varphi}{2}\right)\end{aligned}\right\}\qquad(8-46)$$

§8－11　正方形孔情况

ζ 平面上单位圆 $|\zeta|=1$ 的外部区域到 z 平面上正方形边界的外部区域的变换函数可取为

$$z=\omega(\zeta)=R\left(\zeta-\frac{1}{6}\zeta^{-3}+\frac{1}{56}\zeta^{-7}-\frac{1}{176}\zeta^{-11}+\frac{1}{384}\zeta^{-15}-\cdots\right)\qquad(a)$$

其中的 R 为实数，它反映正方形的大小。

现将式(a)近似化，先取其中的两项，即

$$z=\omega(\zeta)=R\left(\zeta-\frac{1}{6}\zeta^{-3}\right)\qquad(b)$$

以 $\zeta=e^{i\varphi}$ 代入，有

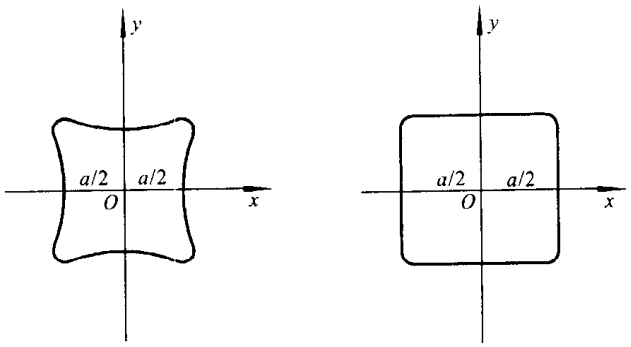
$$x+iy=R\left(e^{i\varphi}-\frac{1}{6}e^{-3i\varphi}\right)=R\left(\cos\varphi+i\sin\varphi-\frac{1}{6}\cos3\varphi+\frac{1}{6}i\sin3\varphi\right)$$

将实部和虚部分开，得到 z 平面上孔边曲线的参数方程

$$x=R\left(\cos\varphi-\frac{1}{6}\cos3\varphi\right),\quad y=R\left(\sin\varphi+\frac{1}{6}\sin3\varphi\right)$$

其形状如图 8－14a 所示。当 $\varphi=0$ 时，$x=\frac{5}{6}R$，$y=0$；当 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 时，$x=0$，$y=\frac{5}{6}R$；当 $\varphi=\frac{\pi}{4}$ 时，$x=y=\frac{7}{12}\sqrt{2}R$。可见这个“近似正方形”的中心高度和中心宽度为 $2\times\frac{5}{6}R=\frac{5}{3}R=a$，而对角线的长度为

$$d=2\sqrt{2}\frac{7}{12}\sqrt{2}R=\frac{7}{3}R=\frac{7}{5}a=1.400a$$



(a) (b)

图 8－14

四个角的曲率半径为

$$|\rho|=\left|\frac{\left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\varphi^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\varphi^2}}\right|_{\varphi=\frac{\pi}{4}}=\frac{R}{10}=\frac{3}{50}a=0.060a$$

如果在式(a)中取三项，即

$$z=\omega(\zeta)=R\left(\zeta-\frac{1}{6}\zeta^{-3}+\frac{1}{56}\zeta^{-7}\right) \tag{c}$$

则得$|\rho|=0.025a$，孔边曲线如图 8－14b 所示，这已和正方形相当接近。如果再增加项数，则将继续提高精度。可以验证，当取到四项时，孔边曲线与正方形之间几乎看不出什么差别。

现在考察具有正方形小孔的平板单向均匀拉伸问题，设拉力为 q，如图 8－15 所示。

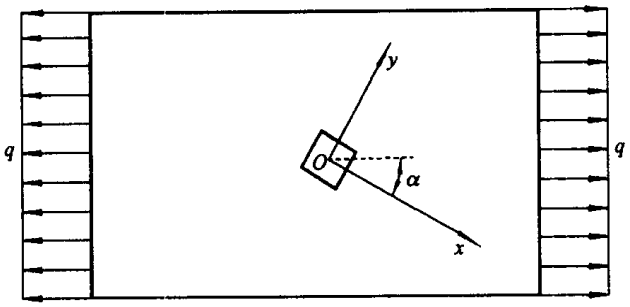


图 8－15

由于孔边不受力，所以

$$f_x=f_y=0,\quad f(\sigma)=0 \tag{d}$$

另外，由式(8-33)，有

$$B=\frac{q}{4},\qquad B'-\mathrm{i}C'=-\frac{q}{2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha} \tag{e}$$

根据式(b)，导出下列关系式

$$\left.\begin{aligned}
&\omega(\sigma)=R\left(\sigma-\frac{1}{6}\sigma^{3}\right)\\
&\bar{\omega}(\bar{\sigma})=R\left(\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{6}\sigma^{3}\right)\\
&\omega'(\sigma)=R\left(1+\frac{1}{2}\sigma^{-4}\right)\\
&\bar{\omega}'(\bar{\sigma})=R\left(1+\frac{1}{2}\sigma^{4}\right)\\
&\frac{\omega(\sigma)}{\bar{\omega}'(\bar{\sigma})}=\frac{6\sigma^{4}-1}{3\sigma^{3}(2+\sigma^{4})}=\frac{2\sigma}{2+\sigma^{4}}-\frac{1}{3\sigma^{3}(2+\sigma^{4})}\\
&\frac{\bar{\omega}(\bar{\sigma})}{\omega'(\sigma)}=\frac{\sigma^{3}(6-\sigma^{4})}{3(2\sigma^{4}+1)}=\frac{2\sigma^{3}}{2\sigma^{4}+1}-\frac{\sigma^{7}}{3(2\sigma^{4}+1)}
\end{aligned}\right\} \tag{f}$$

将式(d)，(e)，(f)代入式(8-39)，得

$$f_0(\sigma)=-\frac{qR}{4}\left[\sigma+\frac{2\sigma}{2+\sigma^{4}}-\frac{1}{3\sigma^{3}(2+\sigma^{4})}\right]+\frac{qR}{2\sigma}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha} \tag{g}$$

式(8-41)右边的积分

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{f_0(\sigma)\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta}=-\frac{qR}{4}\left[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{\sigma\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta}+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{2\sigma}{2+\sigma^{4}}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta}-\right.$$

$$\left.\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{1}{3\sigma^{3}(2+\sigma^{4})}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta}\right]+\frac{qR}{2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma(\sigma-\zeta)} \tag{h}$$

不难看出：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{\sigma\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta}=0\\
&\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{2\sigma}{2+\sigma^{4}}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta}=0\\
&\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma(\sigma-\zeta)}=-\frac{1}{\zeta}\\
&\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{1}{3\sigma^{3}(2+\sigma^{4})}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta}=-\frac{1}{6}\zeta^{-3}
\end{aligned}\right.$$

将上述结果代入式(h)，得

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{f_0(\sigma)\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\zeta}=-\frac{qR}{24}\zeta^{-3}-\frac{qR}{2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\zeta^{-1} \tag{i}$$

注意到

$$\bar{\varphi}_0'(\bar{\sigma}) = -\bar{a}_1\sigma^2 - 2\bar{a}_2\sigma^3 - 3\bar{a}_3\sigma^4 - \cdots$$

则式(8-41)左边的积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\omega(\sigma)}{\bar{\omega}'(\bar{\sigma})}\frac{\bar{\varphi}_0'(\bar{\sigma})d\sigma}{\sigma-\zeta}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{2\sigma}{2+\sigma^4}(-\bar{a}_1\sigma^2 - 2\bar{a}_2\sigma^3 - \cdots)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} -$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{3\sigma^3(2+\sigma^4)}(-\bar{a}_1\sigma^2 - 2\bar{a}_2\sigma^3 - \cdots)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}$$

第一个积分为零,因为被积函数为单位圆内解析函数的边界值;第二个积分中,只有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\bar{a}_1}{3\sigma(2+\sigma^4)}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} = -\frac{\bar{a}_1}{6}\zeta^{-1}$$

其余的全为零。于是

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\omega(\sigma)}{\bar{\omega}'(\bar{\sigma})}\frac{\bar{\varphi}_0'(\bar{\sigma})}{\sigma-\zeta}d\sigma = -\frac{\bar{a}_1}{6}\zeta^{-1} \tag{j}$$

将式(i)和(j)代入式(8-41),并利用

$$\varphi_0(\zeta) = a_1\zeta^{-1} + a_2\zeta^{-2} + a_3\zeta^{-3} + \cdots$$

则有

$$-a_1\zeta^{-1} - a_2\zeta^{-2} - a_3\zeta^{-3} - \cdots - \frac{\bar{a}_1}{6}\zeta^{-1} = -\frac{qR}{2}e^{2i\alpha}\zeta^{-1} - \frac{qR}{24}\zeta^{-3}$$

比较两边的系数,有

$$a_1 + \frac{\bar{a}_1}{6} = \frac{qR}{2}e^{2i\alpha},\quad a_2 = 0,\quad a_3 = \frac{qR}{24},\quad a_n = 0\quad (n\geqslant 4)$$

从而得出

$$a_1 = qR\left(\frac{3}{7}\cos 2\alpha + \frac{3}{5}i\sin 2\alpha\right),\quad a_2 = 0,\quad a_3 = \frac{qR}{24}$$

于是得

$$\varphi_0(\zeta) = qR\left(\frac{3}{7}\cos 2\alpha + \frac{3}{5}i\sin 2\alpha\right)\zeta^{-1} + \frac{qR}{24}\zeta^{-3} \tag{k}$$

将式(f),(g)和(k)代入式(8-42),有

$$-\psi_0(\zeta) + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left[\frac{2\sigma^3}{2\sigma^4+1} - \frac{\sigma^7}{3(2\sigma^4+1)}\right]qR\left[-\left(\frac{3}{7}\cos 2\alpha + \frac{3}{5}i\sin 2\alpha\right)\sigma^{-2} - \frac{1}{8}\sigma^{-4}\right]\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}$$

$$= -\frac{qR}{4}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left[\frac{1}{\sigma} + \frac{2\sigma^3}{2\sigma^4+1} - \frac{\sigma^7}{3(2\sigma^4+1)}\right]\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} + \frac{qR}{2}e^{-2i\alpha}\int_\gamma \frac{\sigma d\sigma}{\sigma-\zeta} \tag{l}$$

利用外部区域的柯西定理，有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sigma}{2\sigma^4+1}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=-\frac{\zeta}{2\zeta^4+1}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\sigma(2\sigma^4+1)}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=-\frac{1}{\zeta(2\zeta^4+1)}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sigma^3}{2\sigma^4+1}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=-\frac{\zeta^3}{2\zeta^4+1}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\sigma}{\sigma(\sigma-\zeta)}=-\frac{1}{\zeta}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sigma d\sigma}{\sigma-\zeta}=0$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sigma^5}{2\sigma^4+1}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left[\frac{\sigma}{2}-\frac{\sigma}{2(2\sigma^4+1)}\right]\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=\frac{\zeta}{2(2\zeta^4+1)}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sigma^7}{2\sigma^4+1}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left[\frac{\sigma^3}{2}-\frac{\sigma^3}{2(2\sigma^4+1)}\right]\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=\frac{\zeta^3}{2(2\zeta^4+1)}$$

将以上各式代入式(l)，得

$$\psi_0(\zeta)=\frac{13}{6}qR\left(\frac{3}{7}\cos 2\alpha+\frac{3}{5}i\sin 2\alpha\right)\frac{\zeta}{2\zeta^4+1}-\frac{13}{12}qR\frac{\zeta^3}{2\zeta^4+1} \qquad (m)$$

再将式(k)和(m)代入式(8－34)，最后得复位势

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(\zeta)&=qR\left[\frac{\zeta}{4}+\left(\frac{3}{7}\cos 2\alpha+\frac{3}{5}i\sin 2\alpha\right)\frac{1}{\zeta}+\frac{1}{24\zeta^3}\right]\\ \psi_1(\zeta)&=-qR\left[\frac{\zeta}{2}e^{-2i\alpha}+\frac{13\zeta^3-26\left(\frac{3}{7}\cos 2\alpha+\frac{5}{3}i\sin 2\alpha\right)\zeta}{12(2\zeta^4+1)}\right]\end{aligned}\right\} \qquad (8-47)$$

求得了复位势，可以求应力，这里从略。

思考题与习题

8－1 试根据式(8－30)，(8－8)，(8－9)和式(8－11)′，说明单连通的平面弹性体应力与弹性常数无关，并指出多连通的平面弹性体应力与弹性常数无关的条件(米歇尔条件)。

8－2 试用复变函数的方法求下列问题的应力分量：

(a) 半径为 R 的圆薄板，周边受均布压力 q 作用。

(b) 无限弹性平面内有一半径为 R 的圆孔，孔边受均布压力 q 作用。

8－3 无限平面内有一长轴为 $2a$、短轴为 $2b$ 的椭圆孔，孔边受均布剪力 q 作用。试求复位势 $\varphi_1(\zeta)$和 $\psi_1(\zeta)$，并求孔边应力及其极值。

8－4 试求图 8－16 所示问题的复位势 $\varphi_1(\zeta)$和 $\psi_1(\zeta)$，并求孔边应力及其极值。

8－5 试用复变函数方法求图 8－11 所示问题的解答。

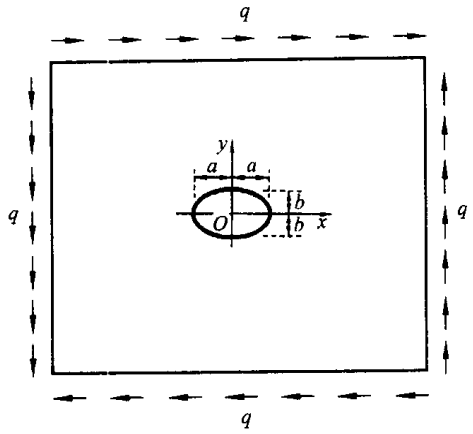


图 8－16

8－6 无限平面内有一圆孔，设半径为 R，在孔的一部分边界上受均布压力 q 作用，如图 8－17 所示。求复位势 $\varphi_1(\zeta)$和 $\psi_1(\zeta)$。

8－7 在具有正方形孔的无限平面的边界上，受图 8－18 所示的两个集中力作用，求复位势 $\varphi_1(\zeta)$和 $\psi_1(\zeta)$。

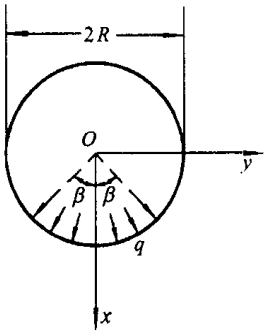


图 8－17

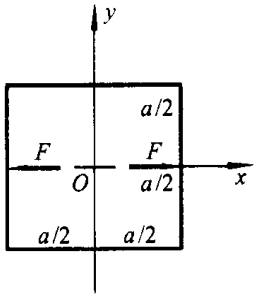


图 8－18

8－8 试归纳复变函数解法的优点。

第九章　柱形杆的扭转和弯曲

在本章中，我们将研究柱形杆的扭转和弯曲问题。需要指出的是，要完全精确地求解这类问题是十分困难的。因为，一方面，在实际问题中，柱形杆两端面上外力分布情况往往是不清楚的，而只知道它们的静力效应；另外，即使知道了外力在端面上的分布情况，也很难得到一组解答能精确地满足端面上的边界条件。但是，如果杆足够长，我们就能按局部性原理对其端面处的边界条件进行放松，而使问题得到解决。由此所得的结果，在一定的意义上仍算是精确解。下面，我们将采用半逆解法解决这两个问题。

§9－1　扭转问题的位移解法　圣维南扭转函数

设有横截面为任意形状的柱形杆，不计其体力，在两端面上受有大小相等而转向相反的扭矩 M 作用，如图 8－1 所示。取杆的一端面为 Oxy 平面，z 轴沿杆的轴向。

用位移解法。设这个问题的 x 方向和 y 方向的位移分量与圆柱体扭转时一样，即

$$\left.\begin{aligned} u &= -\alpha yz \\ v &= \alpha xz \end{aligned}\right\} \tag{9-1a}$$

至于 z 方向的位移分量，在圆柱体情况下，$w=0$，表示变形前的横截面在扭转变形后仍保持为平面；对非圆截面情况，由于扭转变形后，横截面产生了翘曲，所以，很自然地假设

$$w=\alpha\varphi(x,y) \tag{9-1b}$$

这里的 α 是杆的单位长度的扭转角，$\varphi(x,y)$ 称为**圣维南扭转函数**，反映了横截面翘曲情况。

现在要导出函数 $\varphi(x,y)$ 所应满足的条件。

先将式(9－1a)和(9－1b)代入以位移表示的平衡微分方程(5－10)，注意到

$$\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

$$\nabla^2 u=0,\qquad \nabla^2 v=0,\qquad \nabla^2 w=\alpha\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)$$

则该方程组的前两式已经满足，而最后一式变为

$$\nabla^2\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \tag{9-2}$$

这是拉普拉斯方程，表示要使由式(9-1)给出的位移分量满足拉梅方程，扭转函数 $\varphi(x,y)$ 必须是调和函数。

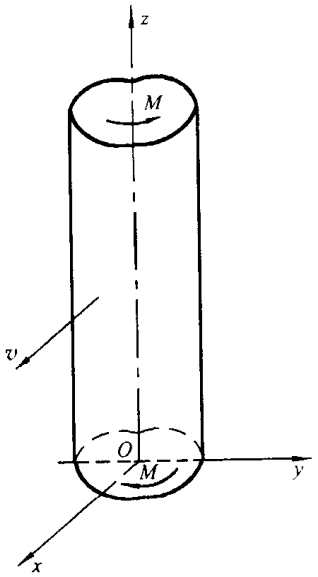


图 9-1

利用式(5-2)和式(5-4)求出与位移表达式(9-1)相对应的应力分量：

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_x=\lambda\theta+2G\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad \sigma_y=\lambda\theta+2G\frac{\partial v}{\partial y}=0\\&\sigma_z=\lambda\theta+2G\frac{\partial w}{\partial z}=0,\quad \tau_{xy}=G\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0\end{aligned}\right\} \tag{9-3a}$$

$$\left.\begin{aligned}&\tau_{zx}=\tau_{yz}=\alpha G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right)\\&\tau_{zy}=\tau_{yz}=\alpha G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\right)\end{aligned}\right\} \tag{9-3b}$$

可见在式(9-1)的假设下，横截面内只作用有切应力 τ_{zx} 和 τ_{zy}，而且它们与坐标 z 无关，即它们在所有的横截面上都相等。

考察柱形杆侧面的边界条件。由于在侧面上不受外力作用，即 $\overline{f}_x=\overline{f}_y=\overline{f}_z=0$，且侧面的外法线方向余弦中的 $n=0$，再注意到式(9-3)，于是，式(5-5)的前两式变成恒等式，第三式变为

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right)l+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\right)m=0\quad(\text{在横截面周界 }s\text{ 上}) \tag{9-4}$$

利用

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}l+\frac{\partial\varphi}{\partial y}m=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}v}$$

故上式变为

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}v}=yl-xm\quad(\text{在横截面周界 }s\text{ 上}) \tag{9-4'}$$

这就是扭转函数 φ 所要满足的边界条件(横截面周界上的条件)。

再考察端面处的条件。按题设，在端面处应有

$$\left.\begin{aligned}&\iint_R\tau_{zx}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0\\&\iint_R\tau_{zy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0\\&\iint_R(x\tau_{zy}-y\tau_{zx})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=M\end{aligned}\right\} \tag{a}$$

R 为横截面组成的区域，其周界为 s。现证明式(a)的前两式是恒满足的。事实上，利用式(9-3b)，并注意到式(9-2)，有

$$\iint_R \tau_{zx}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \alpha G\iint_R \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \alpha G\iint_R \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[x\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[x\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x\right)\right]\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

利用斯托克斯(Stokes, G. G.)公式[①]，并由式(9-4)，上式变为

$$\iint_R \tau_{zx}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \alpha G\oint_s x\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}v} - yl + xm\right)\mathrm{d}s = 0$$

同理可得

$$\iint_R \tau_{zy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

将式(9-3b)代入式(a)的最后一式，有

$$M = \alpha G\iint_R \left(x^2 + y^2 + x\frac{\partial \varphi}{\partial y} - y\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{9-5}$$

令

$$D = \iint_R \left(x^2 + y^2 + x\frac{\partial \varphi}{\partial y} - y\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{9-6}$$

则式(9-5)又可写成

$$M = \alpha G D \tag{9-5}'$$

GD 称为抗扭刚度，D 表示截面的几何特性；而式(9-5)给出了柱的单位长度的扭转角 α 与扭矩 M 之间的关系。对于给定的柱形杆，G 和 D 都是已知的，故只要知道了 M，就可求出 α，反之，知道了 α，也可求出 M。

总之，柱形杆扭转的位移解法，归结为在边界条件(9-4)下求解方程(9-2)，求得了扭转函数 φ，分别由式(9-1)和(9-3b)求位移分量和应力分量，其中的 α 由式(9-5)′确定。

在形如(9-4)′的边界条件下求解方程(9-2)，在数学上属于诺伊曼(Neumann, J. von)边值问题，由于求解比较复杂，故下一节将着重介绍扭转问题的应力解法。

§9-2 扭转问题的应力解法 普朗特应力函数

若以应力作为基本变量求解扭转问题，我们可假设

① 斯托克斯公式为 $\oint_c (Al + Bm)\mathrm{d}s = \iint_R \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$。

$$\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=\tau_{xy}=0$$

于是,平衡微分方程(5-1)和以应力表示的应变协调方程(5-12)′分别简化为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}=0\\&\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}=0\\&\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}=0\end{aligned}\right\}\tag{a}$$

$$\nabla^2\tau_{xz}=0,\quad \nabla^2\tau_{yz}=0\tag{b}$$

为使式(a)得到满足,引入函数 $\Phi(x,y)$,使

$$\tau_{xz}=\alpha G\frac{\partial\Phi}{\partial y},\quad \tau_{yz}=-\alpha G\frac{\partial\Phi}{\partial x}\tag{9-7}$$

将式(9-7)代入式(b),交换求导次序,有

$$\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\Phi=0,\quad \frac{\partial}{\partial y}\nabla^2\Phi=0$$

由此得

$$\nabla^2\Phi=C\tag{c}$$

C 为常数,可以证明它等于 -2。事实上,联立式(9-3b)和式(9-7),有

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\tag{d}$$

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\tag{e}$$

分别将式(d)和式(e)对 y 和 x 求一阶偏导数,然后将后式减去前式,得

$$\nabla^2\Phi=-2\tag{9-8}$$

这显然是泊松方程,它表示函数 $\Phi(x,y)$在柱形杆横截面所组成的区域 R 内所必须满足的方程。函数 $\Phi(x,y)$称为**普朗特**(Prandtl,L.)**应力函数**。

现在要推导 $\Phi(x,y)$在区域 R 的周界 s 上所需满足的边界条件。由于在柱形杆的侧面,$\bar{f}_x=\bar{f}_y=\bar{f}_z=0$,$n=0$,故边界条件(5-5)的前两式恒满足,注意到 $l=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$,$m=-\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$,其第三式变为

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}s}=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=0$$

积分后得

$$\Phi=k(\text{在横截面周界 }s\text{ 上})\tag{9-9}$$

这里,k 为常数。

对于单连通区域，可取 $k=0$[①]，于是边界条件(9-9)可写成

$$\Phi(x,y)=0(\text{在横截面周界 } s \text{ 上}) \tag{9-10}$$

下面，推导用应力函数 Φ 表示的扭矩 M 和 D 的计算公式。先假定横截面组成的区域 R 为单连通的。由

$$M=\iint_R (x\tau_{yz}-y\tau_{xz})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

将式(9-7)代入，并利用斯托克斯公式，有

$$\begin{aligned} M &= -\alpha G\iint_R \left(x\frac{\partial \Phi}{\partial x}+y\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= -\alpha G\iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(x\Phi)+\frac{\partial}{\partial y}(y\Phi)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\alpha G\iint_R \Phi \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= -\alpha G\oint_s \Phi(xl+ym)\mathrm{d}s+2\alpha G\iint_R \Phi\mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{f}$$

再利用式(9-10)，式(f)简化为

$$M=2\alpha G\iint_R \Phi\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{9-11}$$

由式(9-11)可见，显然有

$$D=2\iint_R \Phi\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{9-12}$$

如果横截面所组成的区域为多连通的(图 9-2)，设应力函数 Φ 在 s_0 上的值为零，而在内边界 $s_1,s_2,s_3,\cdots s_n$ 上的值分别为 $k_1,k_2,k_3,\cdots,k_n$，则参照式(f)，有

$$\begin{aligned} M &= -\alpha G\oint_{s_1,s_2,\cdots s_n} \Phi(xl+ym)\mathrm{d}s+2\alpha G\iint_R \Phi\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= -\alpha G\sum_{i=1}^{n}\oint_{s_i} k_i(xl+ym)\mathrm{d}s+2\alpha G\iint_R \Phi\mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{g}$$

由斯托克斯公式计算得

$$\begin{aligned} \oint_{s_i\cap} (xl+ym)\mathrm{d}s &= -\oint_{s_i\cup} (xl+ym)\mathrm{d}s \\ &= -2\iint_{A_i} \mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2A_i \end{aligned}$$

这里，A_i 表示内边界 s_i 所围成的区域面积。将上式代入式(g)，得到

---

① 如果函数 $\Phi(x,y)$ 在单连通区域 R 的周界 s 上不为零，我们总可以另设函数 $\Phi_1(x,y)=\Phi(x,y)-k$。显然，函数 $\Phi_1(x,y)$ 在周界 s 上等于零。但函数 Φ_1 和 Φ 只差一个常数，由这两个函数求得的应力分量是一样的。因此，作这个假定对求应力无影响。

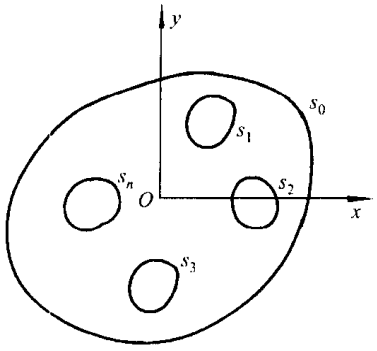


图 9－2

$$M = 2\alpha G \iint_R \Phi \mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2\alpha G \sum_{i=1}^{n} k_i A_i \tag{9-13}$$

由此得

$$D = 2\iint_R \Phi \mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2\sum_{i=1}^{n} k_i A_i \tag{9-14}$$

综上所述，如果采用应力解法求解扭转问题，则先在边界条件(9－10)或(9－9)下求解方程(9－8)，求得了应力函数 Φ，由式(9－7)求应力分量，由式(9－12)或式(9－14)求 D，从而可确定杆的单位长度的扭转角 α。

§9－3　扭转问题的薄膜比拟法

扭转问题应力解法的一个明显的优点，在于它能借助于所谓的**薄膜比拟(普朗特比拟)法**使对应的运算变得更为直观。下面我们介绍这种比拟法。

设有一块均匀的薄膜，张在一个与受扭杆横截面形状相似的水平边界上。当薄膜承受微小的均匀压力 q 作用时，薄膜上各点将产生微小的垂度。将边界所在水平面作为 Oxy 平面，z 轴垂直向下(图 9－3)。由于薄膜的柔顺性，可以假定它不承受弯矩、扭矩、剪力和压力，而只承受均匀的张力。设其内每单位宽度上的张力为 F_T。

现考虑薄膜中边长为 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 的矩形微元 $abcd$ 的平衡，薄膜的垂度以 Z 表示。由图 9－3 可见，在 ad 边上的张力为 $F_T\mathrm{d}y$，它在 z 轴上的投影为 $-F_T\mathrm{d}y \cdot \dfrac{\partial Z}{\partial x}$；在 bc 边上的张力也是 $F_T\mathrm{d}y$，它在 z 轴上的投影为 $F_T\mathrm{d}y\left(\dfrac{\partial Z}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\mathrm{d}x\right)$

同理，ab 边上的张力在 z 轴上的投影为 $-F_T\mathrm{d}x\dfrac{\partial Z}{\partial y}$，而 cd 边上的张力在 z 轴上的投影为 $F_T\mathrm{d}x\left(\dfrac{\partial Z}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\mathrm{d}y\right)$。单元 $abcd$ 受的总压力为 $q\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。于是，由平衡

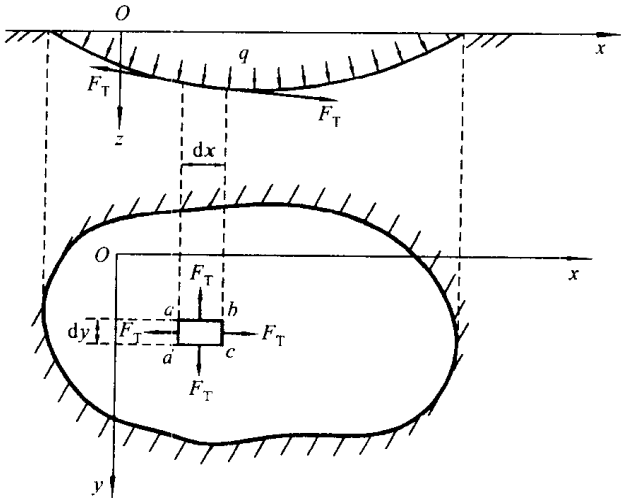


图 9-3

条件$\sum Z=0$,有

$$-F_T dy\frac{\partial Z}{\partial x}+F_T dy\left(\frac{\partial Z}{\partial x}+\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}dx\right)-F_T dx\frac{\partial Z}{\partial y}+$$

$$F_T dx\left(\frac{\partial Z}{\partial y}+\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}dy\right)+q\,dx\,dy=0$$

简化后,除以 $dx\,dy$,得

$$\nabla^2 Z=\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}=-\frac{q}{F_T} \tag{9-15}$$

这就是薄膜平衡时垂度所满足的微分方程。垂度在边界上显然等于零,即

$$Z=0 \quad (\text{在边界上}) \tag{9-16}$$

将式(9-15)和(9-16)分别与式(9-8)和(9-10)进行比较,显然,方程(9-15)的形式与方程(9-8)相同,都是泊松方程;这两个方程中的未知函数所满足的边界条件也相同。

现在计算 Oxy 平面和薄膜之间体积的 2 倍,即

$$2V=2\iint_R Z\,dx\,dy \tag{9-17}$$

将式(9-17)与式(9-11)进行比较,可以发现,只要适当地调整薄膜的高度,数量上使 $2V=M$,这时,数量上就有

$$Z=\alpha G\Phi \tag{a}$$

将它代入式(9-15),稍加整理,有

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=-\frac{q}{\alpha G F_T} \tag{b}$$

比较式(b)和式(9－8)，可得

$$F_T = \frac{q}{2\alpha G} \tag{c}$$

下面，在薄膜曲面上，形象地表示出横截面上应力的分布情况。我们想象地用一系列和 Oxy 平面平行的平面与薄膜曲面相截，得到一系列曲线，显然，这些曲线是薄膜的等高线(图 9－4)。试考察薄膜上任一点 P。由于过该点的等高线上的垂度 Z 为常数，所以，Z 对此等高线切线方向的方向导数为零，即

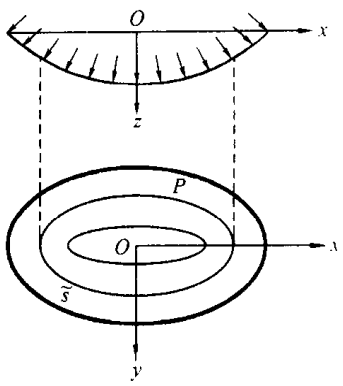


图 9－4

$$\frac{\partial Z}{\partial s} = 0 \tag{d}$$

式(d)对应于应力函数 Φ，有

$$\alpha G \frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0 \tag{e}$$

参照式(9－7)，将其中的 x 和 y 分别换成曲线坐标 v 和 s，并注意到式(e)，可以写出切应力分别沿等高线的法向和切向的分量表示式：

$$\tau_v = \alpha G \frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0, \quad \tau_s = -\alpha G \frac{\partial \Phi}{\partial v} \tag{9－18}$$

此式表示扭杆横截面上任一点的切应力总是沿着过薄膜上对应点的等高线的切线方向的，其值为 $\tau_s = -\alpha G \frac{\partial \Phi}{\partial v}$。因此，薄膜的等高线，对应于扭杆横截面上这样的曲线，其上各点的应力与曲线相切。这种曲线称为**切应力线**。这个结论对研究扭杆横截面上应力分布是很重要的。因为，我们虽然很难完全通过薄膜比拟测定柱形杆横截面上的应力分布，但通过这样的比拟，至少可以定性地勾画出横截面上应力分布的大致情况。例如，要知道横截面上哪一点切应力最大，就来看一看对应的薄膜上哪一点斜率$\frac{\partial Z}{\partial v}$最大，也就是说，薄膜上斜率最大的点，就是对应的横截面上最大切应力的作用点。由此可知，最大切应力一定发生在横截面的周界上，且横截面周界是一条切应力线。

现在来研究图 9－4 中某一条等高线 $\tilde{s}$ 所围成的薄膜的平衡，设这一部分薄膜的面积为 A，则有

$$-\oint_{\tilde{s}} F_T \frac{\partial Z}{\partial v} \mathrm{d}s = qA \tag{f}$$

将式(c)代入，并注意到

$$\frac{\partial Z}{\partial v} = \alpha G \frac{\partial \Phi}{\partial v} = -\tau_s$$

于是得

$$\oint_s \tau_s \mathrm{d}s = 2\alpha GA \tag{9-19}$$

式(9-19)左边的积分称为**应力环量**。这个公式将在§9-8中用到。

§9-4 椭圆截面杆的扭转

对于椭圆截面杆,其横截面的周界方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

这里的 a,b 为椭圆的半轴,因此,若取应力函数

$$\Phi(x,y)=B\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right) \tag{a}$$

则边界条件(9-10)显然是满足的。现将式(a)代入方程(9-8),得

$$B=-\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

将所得的 B 代入式(a),应力函数为

$$\Phi(x,y)=-\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right) \tag{b}$$

由此求得应力分量

$$\left.\begin{aligned}\tau_{xz}&=\alpha G\frac{\partial\Phi}{\partial y}=-\frac{2a^2}{a^2+b^2}\alpha Gy\\ \tau_{yz}&=-\alpha G\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{2b^2}{a^2+b^2}\alpha Gx\end{aligned}\right\} \tag{c}$$

为了求得 α,将式(b)代入式(9-12),有

$$D=-\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}\left(\frac{1}{a^2}\iint_R x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{1}{b^2}\iint_R y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_R \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right) \tag{d}$$

注意到

$$\iint_R x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I_y=\frac{\pi a^3b}{4}$$

$$\iint_R y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I_x=\frac{\pi ab^3}{4}$$

$$\iint_R \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi ab$$

代入式(d)得

$$D=\frac{\pi a^3b^3}{a^2+b^2}$$

而

$$\alpha=\frac{M}{GD}=\frac{a^2+b^2}{\pi G a^3 b^3}M$$

将 α 代入式(c),最后得应力分量

$$\tau_{xz}=-\frac{2M}{\pi ab^3}y,\quad \tau_{yz}=\frac{2M}{\pi a^3 b}x \tag{9-20}$$

横截面上任一点的合成切应力为

$$\tau=\sqrt{\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2}=\frac{2M}{\pi ab}\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}}$$

由薄膜比拟,最大切应力发生在椭圆短轴的两端($x=0,y=\pm b$)处,其值为

$$\tau_{\max}=\frac{2M}{\pi ab^2}$$

而最小切应力发生在椭圆长轴的两端($x=\pm a,y=0$)处,其值为

$$\tau_{\min}=\frac{2M}{\pi a^2 b}$$

如图 9-5 所示。

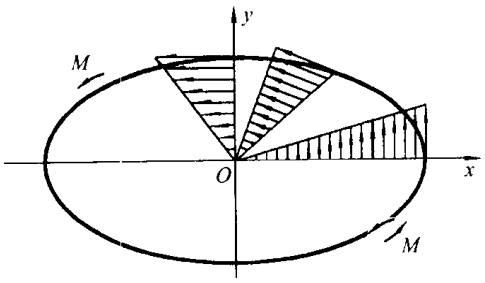


图 9-5

下面考察椭圆截面杆扭转时横截面的翘曲情况。为此,将式(c)与式(9-3b)联立,经整理,有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}y$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}x$$

分别将上两式积分,有

$$\varphi=-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}xy+f_1(y)$$

$$\varphi=-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}xy+f_2(x)$$

代入式(9-1b),可见

$$\alpha f_1(y)=\alpha f_2(x)=w_0$$

w_0 表示横截面沿 z 方向的刚体平移,对横截面的变形无影响,略去它,则得

$$w=\alpha\varphi(x,y)=-\alpha\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}xy=-\frac{a^2-b^2}{\pi Ga^3b^3}Mxy \tag{9-21}$$

式(9-21)表示横截面变形后变为双曲抛物面。图 9-6 表示翘曲面的等高线,如从 z 轴正方向看去,实线部分表示双曲抛物面上凸,而虚线部分表示下凹。

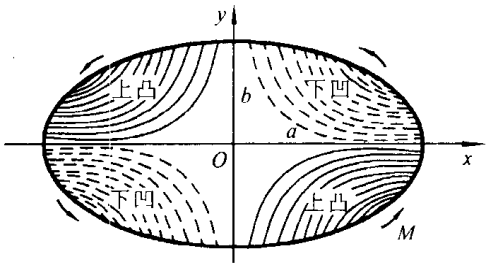


图 9-6

§9-5 带半圆形槽的圆轴的扭转

带半圆形槽的圆轴的横截面如图 9-7 所示。圆轴的半径为 a,槽的半径为 b。在以原点为极点的极坐标中,圆槽的方程为

$$f_1(\rho,\varphi)=\rho^2-b^2=0 \tag{a}$$

而圆轴的方程为

$$f_2(\rho,\varphi)=\rho-2a\cos\varphi=0 \tag{b}$$

根据边界条件,可设

$$\begin{aligned}\Phi(\rho,\varphi)&=B\frac{f_1f_2}{\rho}\\&=B\left(\rho^2-b^2-2a\rho\cos\varphi+\frac{2ab^2}{\rho}\cos\varphi\right)\end{aligned} \tag{c}$$

为求出 B,需将方程(9-8)化成极坐标形式:

$$\nabla^2\Phi=\frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}=-2 \tag{d}$$

将式(c)代入,得到

$$B=-\frac{1}{2}$$

于是有

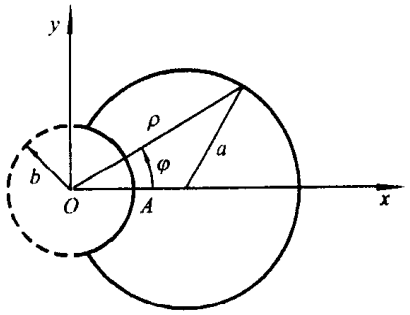


图 9－7

$$\Phi(\rho,\varphi)=\frac{1}{2}\left(b^2-\rho^2+2a\rho\cos\varphi-\frac{2ab^2}{\rho}\cos\varphi\right) \tag{e}$$

而应力分量为

$$\left.\begin{aligned}\tau_{z\rho}&=\alpha G\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}=-\alpha Ga\left(1-\frac{b^2}{\rho^2}\right)\sin\varphi\\ \tau_{z\varphi}&=-\alpha G\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}=\alpha G\left[\rho-a\left(1+\frac{b^2}{\rho^2}\right)\cos\varphi\right]\end{aligned}\right\} \tag{9-22}$$

最大切应力发生在槽底，即 $\rho=b$，$\varphi=0$ 处，其值为

$$\tau_{\max}=\left|(\tau_{z\varphi})_{\substack{\varphi=0\\ \rho=b}}\right|=\alpha G(2a-b)$$

当 b 远小于 a 时，槽底的切应力为

$$\tau_{\max}\approx 2\alpha Ga$$

即 2 倍于半径为 a 的无槽圆轴中的最大切应力。

§9－6　厚壁圆筒的扭转

作为受扭柱形体的横截面为复连通域的一个实例，我们考察厚壁圆筒的扭转。设厚壁圆筒的内半径为 a，外半径为 b，如图 9－8 所示。采用极坐标系较为方便。

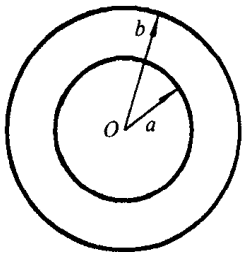


图 9－8

根据边界条件(9－10)，我们设应力函数为

$$\Phi=B(x^2+y^2-b^2)=B(\rho^2-b^2) \tag{a}$$

即让它在外边界处为零[①]，而在内边界处为

$$(\Phi)_{\rho=a}=B(a^2-b^2) \tag{b}$$

将式(a)代入 §9－5 中的式(d)，得

① 也可设它在内边界处为零，即 $\Phi=B(\rho^2-a^2)$。

$$B=-\frac{1}{2}$$

于是

$$\Phi(\rho,\varphi)=-\frac{1}{2}(\rho^2-b^2) \tag{c}$$

由此得应力分量

$$\left.\begin{aligned}\tau_{z\rho}&=\alpha G\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}=0\\ \tau_{z\varphi}&=-\alpha G\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}=\alpha G\rho\end{aligned}\right\} \tag{d}$$

为了求 α，先求 D。将式(9-14)中的积分改成极坐标形式，并注意到后项中

$$n=1$$

$$k_1=(\Phi)_{\rho=a}=B(a^2-b^2)=-\frac{1}{2}(a^2-b^2)$$

$$A_1=\pi a^2$$

因此

$$D=2\int_0^{2\pi}\left[\int_a^b\Phi\rho\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}\varphi+2k_1A_1=\frac{\pi}{2}(b^4-a^4) \tag{e}$$

而

$$\alpha=\frac{M}{GD}=\frac{2M}{\pi G(b^4-a^4)} \tag{f}$$

将式(f)代入式(d)，最后得

$$\left.\begin{aligned}\tau_{z\rho}&=0\\ \tau_{z\varphi}&=\alpha G\rho=\frac{2M\rho}{\pi(b^4-a^4)}\end{aligned}\right\} \tag{9-23}$$

其直角坐标形式的应力分量为

$$\tau_{zx}=-\frac{2My}{\pi(b^4-a^4)},\quad \tau_{zy}=\frac{2Mx}{\pi(b^4-a^4)} \tag{9-24}$$

最大切应力发生在外边界处，其值为

$$\tau_{\max}=\frac{2Mb}{\pi(b^4-a^4)}$$

§9-7 矩形截面杆的扭转

下面，讨论矩形截面杆的扭转，矩形截面的边长为 a 和 b，如图 9-9 所示。

首先，假定杆的横截面是一个很狭长的矩形，即 a/b 的值很大。在这种情况下，由薄膜比拟法知道，应力函数 Φ 在横截面的绝大部分上几乎与坐标 x 无

关，因为与这部分对应的薄膜几乎不受短边约束的影响，而接近于一个柱面。因此，可以近似地取

$$\Phi = \Phi(y)$$

这样，方程(9－8)变为常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}y^2} = -2$$

而边界条件为

$$\Phi\left(\pm\frac{b}{2}\right) = 0$$

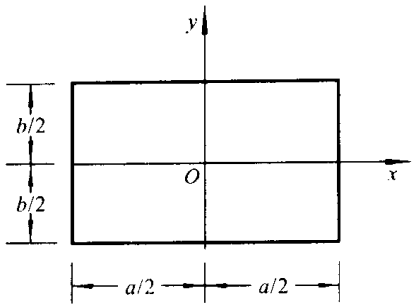


图 9－9

此时，方程的解为

$$\Phi = -\left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right) \tag{9-25}$$

代入式(9－12)，得

$$D = 2\iint_R \Phi \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -2\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left[\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \frac{ab^3}{3}$$

于是

$$\alpha = \frac{M}{GD} = \frac{3M}{Gab^3} \tag{9-26}$$

由式(9－25)求得应力分量

$$\left.\begin{aligned}\tau_{zx} &= \alpha G\frac{\partial\Phi}{\partial y} = -\frac{6M}{ab^3}y\\ \tau_{zy} &= -\alpha G\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0\end{aligned}\right\} \tag{9-27}$$

这个应力表达式除在狭长矩形截面的短边附近外，对截面的大部分区域都是正确的，最大切应力发生在长边上，即 $y = \pm\frac{b}{2}$ 处，其值为

$$\tau_{\max} = \left|(\tau_{zx})_{y=\pm\frac{b}{2}}\right| = \frac{3M}{ab^2} \tag{9-28}$$

现在再来讨论具有任意边长比的矩形截面杆的扭转，求解这个问题，应力函数 Φ 以狭长矩形截面的解(9－25)为基础，加上修正项 Φ_1，即

$$\Phi(x,y) = \frac{b^2}{4} - y^2 + \Phi_1(x,y) \tag{a}$$

函数 Φ 应满足方程(9－8)，故将式(a)代入，得修正函数 Φ_1 所满足的方程

$$\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial y^2} = 0 \tag{b}$$

另外，由于应力函数 $\Phi(x,y)$ 在矩形截面的边界处满足如下的边界条件

$$\Phi\left(\pm\frac{a}{2},y\right)=0,\ \Phi\left(x,\pm\frac{b}{2}\right)=0$$

所以,修正函数的边界条件为

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1\left(\pm\frac{a}{2},y\right)&=y^2-\frac{b^2}{4}\\ \Phi_1\left(x,\pm\frac{b}{2}\right)&=0\end{aligned}\right\}\tag{c}$$

这样,就将问题转化为在边界条件(c)下求解方程(b)。下面用分离变量法求解。设

$$\Phi_1(x,y)=X(x)Y(y)\tag{d}$$

代入式(b),移项,并在等号两边同除以 $X(x)Y(y)$,有

$$\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=\lambda^2$$

由此得方程

$$X''-\lambda^2X=0\tag{e}$$

$$Y''+\lambda^2Y=0\tag{f}$$

解之得方程(e)和(f)的通解

$$X(x)=B_1\cosh\lambda x+B_2\sinh\lambda x$$

$$Y(y)=C_1\cos\lambda y+C_2\sin\lambda y$$

代入式(d),并注意到问题的对称性(根据薄膜比拟),有

$$\Phi_1(x,y)=A\cosh\lambda x\cos\lambda y\tag{g}$$

由边界条件(c)的第二式,得

$$A\cosh\lambda x\cos\lambda\frac{b}{2}=0$$

由此得

$$\lambda_n=\frac{(2n+1)\pi}{b}\qquad(n=0,1,2,3,\cdots)$$

代入式(g),并作如下的级数

$$\Phi_1(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cosh\frac{(2n+1)\pi}{b}x\cos\frac{(2n+1)\pi}{b}y\tag{h}$$

显然,此函数式是满足方程(b)的,而且已满足了边界条件 $\Phi_1\left(x,\pm\frac{b}{2}\right)=0$。现在,利用边界条件(c)的第一式,确定其中的系数 A_n。代入后有

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cosh\frac{(2n+1)\pi a}{2b}\cos\frac{(2n+1)\pi}{b}y=y^2-\frac{b^2}{4}$$

等号两边同乘以 $\cos\frac{(2m+1)\pi}{b}y$,从 $-\frac{b}{2}$ 到 $\frac{b}{2}$ 积分,并注意三角函数的正交性,

于是有

$$A_n=\frac{(-1)^{n+1}8b^2}{\pi^3(2n+1)^3\cosh\dfrac{(2n+1)\pi a}{2b}}$$

代入式(h),得

$$\Phi_1(x,y)=\frac{8b^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cosh\dfrac{(2n+1)\pi x}{b}\cos\dfrac{(2n+1)\pi y}{b}}{(2n+1)^3\cosh\dfrac{(2n+1)\pi a}{2b}}$$

于是,由式(a)得要求的应力函数

$$\Phi(x,y)=\frac{8b^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cosh\dfrac{(2n+1)\pi x}{b}\cos\dfrac{(2n+1)\pi y}{b}}{(2n+1)^3\cosh\dfrac{(2n+1)\pi a}{2b}}+\frac{b^2}{4}-y^2 \tag{9-29}$$

由式(9-12),可求得

$$D=2\iint_R\Phi\mathrm{d}x\mathrm{d}y=ab^3\left[\frac{1}{3}-\frac{64}{\pi^5}\frac{b}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tanh\dfrac{(2n+1)\pi a}{2b}}{(2n+1)^5}\right]$$

由此得

$$\alpha=\frac{M}{GD}=\frac{M}{ab^3G\left[\dfrac{1}{3}-\dfrac{64}{\pi^5}\dfrac{b}{a}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\tanh\dfrac{(2n+1)\pi a}{2b}}{(2n+1)^5}\right]} \tag{i}$$

由薄膜比拟可以断定,最大切应力发生在矩形横截面长边的中点处,其值为

$$\tau_{\max}=\frac{M\left[1-\dfrac{8}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2\cosh\dfrac{(2n+1)\pi a}{2b}}\right]}{ab^2\left[\dfrac{1}{3}-\dfrac{64}{\pi^5}\dfrac{b}{a}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\tanh\dfrac{(2n+1)\pi a}{2b}}{(2n+1)^5}\right]} \tag{j}$$

将式(i)和式(j)分别写成

$$\alpha=\frac{M}{ab^3G\beta} \tag{9-30}$$

$$\tau_{\max}=\frac{M}{ab^2\gamma} \tag{9-31}$$

则因子 β 和 γ 只与比值 a/b 有关。两个因子的数值列表如下。

a/b	β	γ	a/b	β	γ
1.0	0.141	0.208	3.0	0.263	0.267
1.2	0.166	0.219	4.0	0.281	0.282
1.5	0.196	0.230	5.0	0.291	0.291
2.0	0.229	0.246	10.0	0.312	0.312
2.5	0.249	0.258	很大	0.333	0.333

由表可见，对于很狭长矩形截面的扭杆，a/b 很大，则 β 和 γ 都趋近于 1/3，这时，式(9-30)和(9-31)分别简化为式(9-26)和(9-28)。

* §9-8 薄壁杆的扭转

通常使用的开口薄壁杆，它们的横截面大都是由等宽度的狭长矩形组成的，如图 9-10 所示。从薄膜比拟可以想象，一个直的狭长矩形和一个曲的狭长矩形，如果具有相同的长度 a 和宽度 b，则当张在这两个狭长矩形上的薄膜受有相同的压力 q 和张力 F_T 时，两个薄膜与各自边界平面间所占的体积 V 和它们的斜率 $\frac{\partial Z}{\partial v}$ 大体是相同的。因此，一个曲的狭长矩形截面扭杆，可以用一个同一种材料制成的、同宽同长的直的矩形截面杆来代替，而不致引起多大的误差。

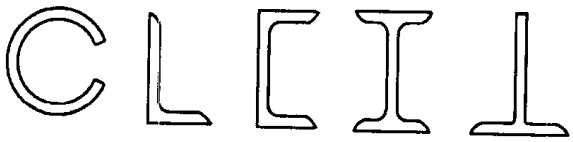


图 9-10

用 a_i 和 b_i 表示扭杆横截面的第 i 个狭长矩形的长度和宽度，M_i 表示该矩形面积上承受的扭矩，τ_i 表示该矩形长边中点附近的切应力，α 为杆的单位长度的扭转角。由式(9-26)和(9-28)，有

$$\alpha=\frac{3M_i}{Ga_ib_i^3} \tag{a}$$

$$\tau_i=\frac{3M_i}{a_ib_i^2} \tag{b}$$

由式(a)

$$M_i=\frac{G\alpha a_ib_i^3}{3} \tag{c}$$

整个横截面上的扭矩为

$$M=\sum M_i=\frac{G\alpha}{3}\sum a_ib_i^3 \tag{d}$$

由式(c)和式(d)消去 α，得 $M_i=\dfrac{a_ib_i^3}{\sum a_ib_i^3}M$，代回式(a)和式(b)，得到

$$\alpha=\frac{3M}{G\sum a_ib_i^3} \tag{9-32}$$

$$\tau_i=\frac{3Mb_i}{\sum a_ib_i^3} \tag{9-33}$$

对于狭长矩形长边中点的切应力 τ_i，式(9-33)给出相当精确的值。但须注意，在两个狭长矩形的连结处，可能发生远大于此的局部切应力。图 9-11 给出了比值 τ_{max}/τ_i 与比值 ρ/b_i 之间的大体关系[①]，这里的 τ_{max} 是内圆角处的最大切应力，τ_i 是用式(9-33)算出的切应力，ρ 是内圆角的曲率半径，b_i 是狭长矩形的宽度。

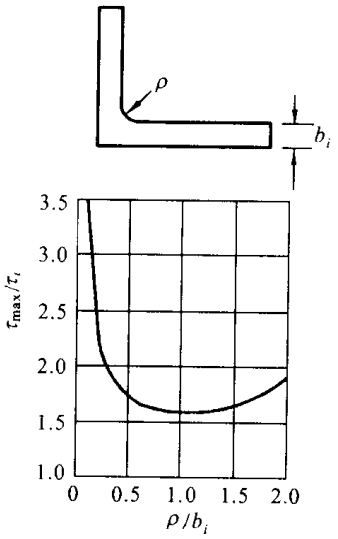


图 9-11

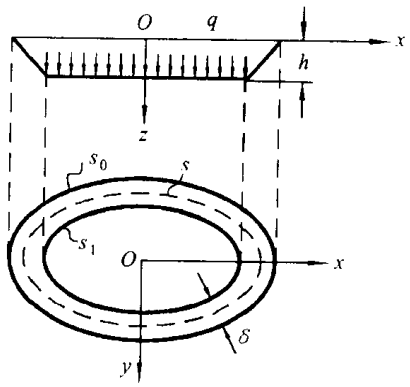


图 9-12

对于闭口薄壁杆的扭转问题，也能通过薄膜比拟求得近似解答。我们假想在薄壁杆横截面的外边界上张一个薄膜，这样，保证薄膜在外边界上的垂度为零；为使薄膜在内边界处的垂度为常量，可以假想用粘在薄膜上的无重不变形的平板把截面的孔洞部分盖起来，如图 9-12 所示。由于杆壁厚度很小，所以，沿壁的厚度方向薄膜的斜率可视为常量。于是，在杆壁厚度为 δ 之处，切应力大

① 这个结果是胡斯(Huth, J. H.)用差分法计算得到的。

小应等于薄膜的斜率，即

$$\tau = \frac{h}{\delta} \tag{e}$$

因如前述，扭矩 M 应等于 Oxy 平面与薄膜之间体积的 2 倍，设内外边界所包围面积的平均值(即薄壁杆截面中线所包围的面积)为 A，于是有

$$M = 2Ah$$

由此得

$$h = \frac{M}{2A}$$

代入式(e)，得

$$\tau = \frac{M}{2A\delta} \tag{9-34}$$

可见，切应力与杆壁的厚度成反比，最大切应力发生在杆壁最薄之处。

为了计算单位长度的扭转角 α，通过式(9-19)求杆截面中心线(图 9-12 中的虚线，它当然为等高线)上的应力环量，以 A 表示中心线所包围的面积，于是有

$$\oint_s \tau \mathrm{d}s = \frac{M}{2A} \oint_s \frac{\mathrm{d}s}{\delta} = 2G\alpha A$$

由此得

$$\alpha = \frac{M}{4A^2 G} \oint_s \frac{\mathrm{d}s}{\delta} \tag{9-35}$$

如果杆壁为等厚度的，则

$$\alpha = \frac{Ml}{4A^2 G\delta}$$

其中，l 为杆截面中心线的长度。

若闭口薄壁杆有凹角(图 9-13)，在凹角处可能发生高度的应力集中现象，比值 $\tau_{\max}/\tau$ 和 ρ/δ 之间的大体关系[①]，如图 9-14 所示。

对于薄壁杆的横截面有两个孔的多连通域的情况(图 9-15)，同样能通过薄膜比拟法求解。由于杆壁厚度 δ_1，δ_2 和 δ_3 都很小，于是有

$$\left.\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{h_1}{\delta_1} \\ \tau_2 &= \frac{h_2}{\delta_2} \\ \tau_3 &= \frac{h_1 - h_2}{\delta_3} = \frac{\tau_1\delta_1 - \tau_2\delta_2}{\delta_3} \end{aligned}\right\} \tag{f}$$

① 这条曲线由胡斯用差分法算得。

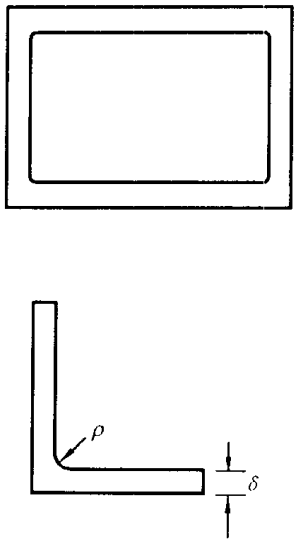


图 9－13

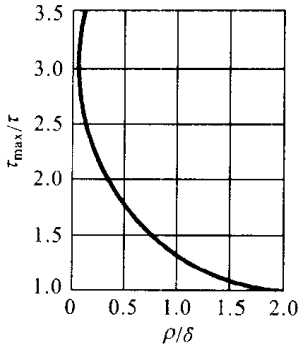


图 9－14

这里的 h_1 和 h_2 表示薄膜内边界 s_1 和 s_2 的高度。

由薄膜和外边界所在平面之间的体积求得扭矩：

$$M=2(A_1h_1+A_2h_2)$$

从式(f)的前两式求出 h_1 和 h_2，代入，则得

$$M=2A_1\delta_1\tau_1+2A_2\delta_2\tau_2 \tag{g}$$

这里的 A_1 和 A_2 表示图中虚线所包围的面积。

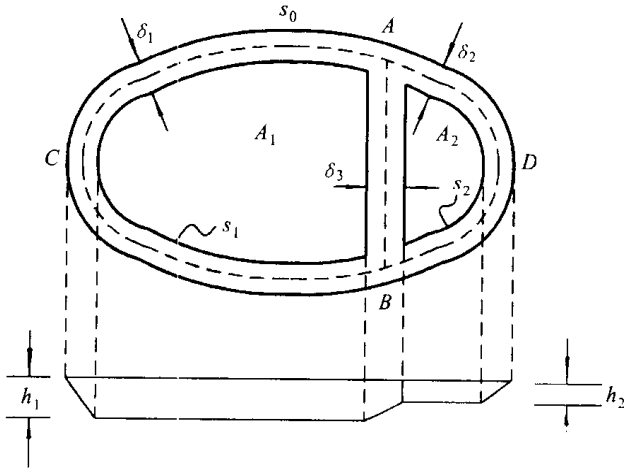


图 9－15

再由式(9－19)分别对两根中心闭合线 $ACBA$ 和 $ABDA$(图中虚线)求应力环量，有

$$\left.\begin{aligned}\int_{ACB}\tau_1 \mathrm{d}s+\int_{BA}\tau_3 \mathrm{d}s=2G\alpha A_1\\ \int_{BDA}\tau_2 \mathrm{d}s-\int_{AB}\tau_3 \mathrm{d}s=2G\alpha A_2\end{aligned}\right\} \tag{h}$$

若 δ_1,δ_2 为常量，则由式(f)知，τ_1,τ_2 和 τ_3 也为常量，于是式(h)变为

$$\left.\begin{aligned}\tau_1 l_1+\tau_3 l_3=2G\alpha A_1\\ \tau_2 l_2-\tau_3 l_3=2G\alpha A_2\end{aligned}\right\} \tag{i}$$

这里的 l_1,l_2 和 l_3 分别表示中心线 ACB，BDA 和 BA 的长度。

将式(f)的第三式与式(g)和式(i)联立，求得

$$\left.\begin{aligned}\tau_1&=\frac{M[\delta_3 l_2 A_1+\delta_2 l_3(A_1+A_2)]}{2[\delta_1\delta_3 l_2 A_1^2+\delta_2\delta_3 l_1 A_2^2+\delta_1\delta_2 l_3(A_1+A_2)^2]}\\ \tau_2&=\frac{M[\delta_3 l_1 A_2+\delta_1 l_3(A_1+A_2)]}{2[\delta_1\delta_3 l_2 A_1^2+\delta_2\delta_3 l_1 A_2^2+\delta_1\delta_2 l_3(A_1+A_2)^2]}\\ \tau_3&=\frac{M[\delta_1 l_2 A_1-\delta_2 l_1 A_2]}{2[\delta_1\delta_3 l_2 A_1^2+\delta_2\delta_3 l_1 A_2^2+\delta_1\delta_2 l_3(A_1+A_2)^2]}\end{aligned}\right\} \tag{9-36}$$

$$\alpha=\frac{M(l_1 l_2\delta_3+l_1 l_3\delta_2+l_2 l_3\delta_1)}{4G[\delta_1\delta_3 l_2 A_1^2+\delta_2\delta_3 l_1 A_2^2+\delta_1\delta_2 l_3(A_1-A_2)^2]} \tag{9-37}$$

如果薄壁杆横截面具有更多的孔，也可采用完全同样的方法求切应力和单位长度杆的扭转角。

* §9-9 柱形杆的弯曲

现在我们讨论悬臂柱形杆由于自由端面上受切向集中力作用而产生的横向弯曲问题(图 9-16)。假设横截面具有任意形状，将固定端面的形心作为坐标原点，杆的中心轴线作为 z 轴，x 和 y 轴与截面的主轴重合。设剪力 F 和 x 轴平行，其作用线的位置应根据杆没有扭转而只有弯曲的条件来决定①。

用应力解法。假设轴向正应力同材料力学的结果一样，而纵向纤维之间无挤压，于是

$$\sigma_z=\frac{M_y}{I_y}x=-\frac{F}{I_y}(L-z)x,\ \sigma_x=\sigma_y=\tau_{xy}=0 \tag{9-38}$$

至于其他应力分量，应由平衡微分方程(5-1)，以应力表示的应变协调方程(5-12)′和边界条件来确定。

将式(9-38)代入方程(5-1)和(5-12)′，并略去体力的影响，则两组方程

① 要使杆不产生扭转，剪力 F 必须通过横截面上一个特殊的点，这个点称为弯曲中心。

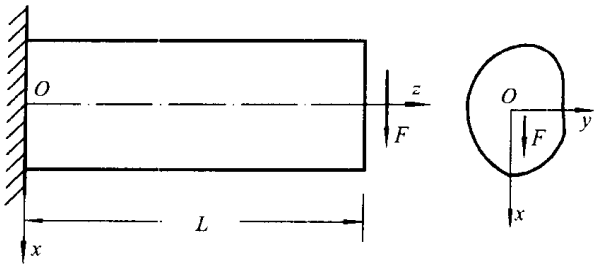


图 9－16

简化为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}=0\\&\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}=0\\&\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}=-\frac{F}{I_y}x\end{aligned}\right\}\tag{a}$$

$$\nabla^2\tau_{zy}=0,\qquad \nabla^2\tau_{zx}=-\frac{F}{(1+\nu)I_y}\tag{b}$$

从式(a)的前两式可以看出，τ_{zx}，τ_{zy}只是x和y的函数，而与z无关。现引入应力函数$\Phi(x,y)$，使

$$\left.\begin{aligned}&\tau_{zx}=\frac{\partial \Phi}{\partial y}-\frac{F}{2I_y}x^2+f(y)\\&\tau_{zy}=-\frac{\partial \Phi}{\partial x}\end{aligned}\right\}\tag{9-39}$$

容易看出，平衡方程(a)的最后一式也满足，这里的$f(y)$为任意函数，如何选择它，将以简化边界条件为目的。

将式(9－39)代入式(b)，有

$$\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\Phi=0,\quad \frac{\partial}{\partial y}\nabla^2\Phi=\frac{\nu}{1+\nu}\frac{F}{I_y}-f''(y)$$

由此得

$$\nabla^2\Phi=\frac{\nu}{1+\nu}\frac{F}{I_y}y-f'(y)+k\tag{c}$$

其中，k为积分常数，可证明它为零。事实上，试考虑悬臂梁横截面上任一单元面的转动，由式(3－6)，有

$$\omega_z=2r=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$$

r沿z方向的变化率为

$$\frac{\partial}{\partial z}(2r)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$
$$=\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}$$

利用胡克定律,上式变为

$$\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{1}{2G}\left(\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x}-\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y}\right)$$

将式(9-39)代入,并注意到方程(c),得到

$$-\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{1}{2G}\frac{\nu}{1+\nu}\frac{Fy}{I_y}+\frac{k}{2G}=\frac{\nu}{E}\frac{Fy}{I_y}+\alpha \tag{d}$$

这里,$\alpha=\frac{k}{2G}$。因按定义,r 表示微分单元体角位移矢量在 z 方向的分量,所以,如假想将杆分割成无数根纵向微条,则$\frac{\partial r}{\partial z}$代表任意一根纵向微条单位长度的轴向转角。按式(d),它由两部分组成:其中 y 的一次项表示对不同的 y 坐标的纵向微条将产生不同的单位长度的转角,因此,这部分将引起横截面的畸变;其中常数项表示对于杆中所有的纵向微条,将产生相同的单位长度的轴向转角,因此,这部分代表杆的扭转变形,实际上,α 就是单位长度的扭转角。但根据题设条件,这里不产生扭转,故 $\alpha=0$,亦即

$$k=0$$

于是,方程(c)变为

$$\nabla^2\Phi=\frac{\nu}{1+\nu}\frac{F}{I_y}y-f'(y) \tag{9-40}$$

现在考察边界条件。在杆的周侧不受外力作用,即 $\bar{f}_x=\bar{f}_y=\bar{f}_z=0$,将式(9-38)和(9-39)代入式(5-5),并注意到在杆的周侧 $n=0$,有

$$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial y}-\frac{F}{2I_y}x^2+f(y)\right]l-\frac{\partial\Phi}{\partial x}m=0$$

(在横截面周界 s 上)

因为在横截面周边上

$$l=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s},\qquad m=-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$$

代入上式,移项后得到

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}s}=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=\left[\frac{Fx^2}{2I_y}-f(y)\right]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$$

(在横截面周界 s 上)

在垂直于 y 轴的周边上，$\frac{dy}{ds}=0$，因此，$\frac{d\Phi}{ds}=0$，应力函数 Φ 为常数。在不垂直于 y 轴的周边上(设上下边界对称于 y 轴)，可以选择 $f(y)$，使

$$\frac{F}{2I_y}x^2-f(y)=0 \text{ (在周界 } s \text{ 上)} \tag{9-41}$$

于是，也有$\frac{d\Phi}{ds}=0$，而应力函数 Φ 的边界值也成为常数。但应力函数相差一个常数对求应力无影响，因此，总可以将应力函数的边界值取为零，即

$$\Phi=0 \quad \text{(在杆的横截面周界 } s \text{ 上)} \tag{9-42}$$

再考虑自由端面上的边界条件。由于在这个边界上外力分布的详细情况不清楚，只知道它静力上等效于剪力 F，故由圣维南原理，其上的边界条件可写为

$$\iint_R \tau_{zx}\,dx\,dy=F, \quad \iint_R \tau_{zy}\,dx\,dy=0 \tag{e}$$

由式(9-39)的第一式计算下面的积分：

$$\iint_R \tau_{zx}\,dx\,dy=\iint_R \frac{\partial \Phi}{\partial y}dx\,dy-\iint_R \frac{F}{2I_y}x^2\,dx\,dy+\iint_R f(y)\,dx\,dy \tag{f}$$

对于等号右边的第一个积分，根据斯托克斯公式，并利用式(9-42)，有

$$\iint_R \frac{\partial \Phi}{\partial y}dx\,dy=\oint_s \Phi m\,ds=0 \tag{g}$$

对于等号右边的第二个积分，注意到

$$\iint_R x^2\,dx\,dy=I_y$$

于是有

$$\iint_R \frac{F}{2I_y}x^2\,dx\,dy=\frac{F}{2} \tag{h}$$

对于等号右边的第三个积分，利用斯托克斯公式，有

$$\begin{aligned}\iint_R f(y)\,dx\,dy &= \iint_R \frac{\partial}{\partial x}[xf(y)]\,dx\,dy\\ &= \oint_s xf(y)l\,ds\\ &= \oint_s xf(y)\,dy\end{aligned}$$

将式(9-41)代入，于是，上式变为

$$\begin{aligned}\iint_R f(y)\,dx\,dy=\oint_s \frac{Fx^3}{2I_y}dy &= \frac{3F}{2I_y}\oint_s \frac{x^3}{3}dy\\ &= \frac{3F}{2I_y}\iint_R x^2\,dx\,dy=\frac{3F}{2}\end{aligned} \tag{i}$$

将式(g)，(h)和(i)代入式(f)，于是有

$$\iint_R \tau_{zx}\,dx\,dy = -\frac{F}{2}+\frac{3F}{2}=F$$

可见边界条件(e)的第一式是满足的。

将式(9-39)的第二式代入式(e)的第二个条件，利用斯托克斯公式，并注意到式(9-42)，有

$$\iint_R \tau_{zy}\,dx\,dy = -\iint_R \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx\,dy = -\oint_s \Phi l\,ds = 0$$

可见这个条件也是满足的。

总之，对于悬臂柱形杆，由于自由端面受切向集中力作用所产生的横向弯曲问题，只须根据(9-41)选择 $f(y)$，于是，归结为在边界条件(9-42)下求解方程(9-40)，求得了应力函数 Φ，由式(9-39)求应力分量。方程(9-40)也是泊松方程，同样可以借助于薄膜比拟法求解。

* §9-10 椭圆截面杆的弯曲

如果悬臂柱形杆的横截面是长短半轴分别为 a 和 b 的椭圆(图 9-17)，显然，椭圆的中心即为弯曲中心。椭圆的周界方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

因此，在椭圆周界上有

$$x^2 = a^2-\frac{a^2}{b^2}y^2$$

为使式(9-41)得到满足，取

$$f(y)=\left[\frac{F}{2I_y}x^2\right]_s = \frac{F}{2I_y}\left(a^2-\frac{a^2}{b^2}y^2\right) \qquad (a)$$

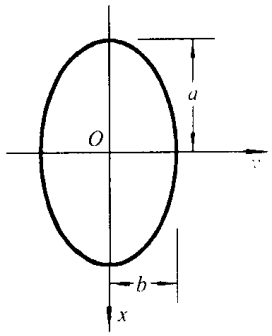


图 9-17

将式(a)代入方程(9-40)，得

$$\nabla^2\Phi = \frac{\nu}{1+\nu}\frac{F}{I_y}y+\frac{Fa^2}{I_yb^2}y=\frac{F}{I_y}\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{\nu}{1+\nu}\right)y \qquad (b)$$

试取应力函数

$$\Phi = B\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)y \qquad (c)$$

显然，它是满足边界条件(9-42)的，B 是待定常数。现将它代入方程(b)，有

$$2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{3}{b^2}\right)By=\frac{F}{I_y}\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{\nu}{1+\nu}\right)y$$

由此得

$$B=\frac{\frac{F}{2I_y}\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{\nu}{1+\nu}\right)}{\frac{1}{a^2}+\frac{3}{b^2}}$$

代入式(c),得要求的应力函数为

$$\Phi=\frac{(1+\nu)a^2+\nu b^2}{2(1+\nu)(3a^2+b^2)}\frac{F}{I_y}\left(x^2+\frac{a^2}{b^2}y^2-a^2\right)y$$

并由此求得应力分量为

$$\left.\begin{aligned}\tau_{zx}&=\frac{\partial\Phi}{\partial y}-\frac{Fx^2}{2I_y}+f(y)\\&=\frac{2(1+\nu)a^2+b^2}{2(1+\nu)(3a^2+b^2)}\frac{F}{I_y}\left[a^2-x^2-\frac{(1-2\nu)a^2}{2(1+\nu)a^2+b^2}y^2\right]\\\tau_{zy}&=-\frac{\partial\Phi}{\partial x}=-\frac{(1+\nu)a^2+\nu b^2}{(1+\nu)(3a^2+b^2)}\frac{F}{I_y}xy\end{aligned}\right\}\tag{9-43}$$

在横轴上

$$\left.\begin{aligned}(\tau_{zx})_{x=0}&=\frac{2(1+\nu)a^2+b^2}{2(1+\nu)(3a^2+b^2)}\frac{Fa^2}{I_y}\left[1-\frac{(1-2\nu)y^2}{2(1+\nu)a^2+b^2}\right]\\(\tau_{zy})_{x=0}&=0\end{aligned}\right\}\tag{9-44}$$

最大切应力发生在椭圆的中心,其值为

$$\tau_{\max}=(\tau_{zx})_{\substack{x=0\\y=0}}=\frac{(1+\nu)a^2+\frac{1}{2}b^2}{(1+\nu)(3a^2+b^2)}\frac{Fa^2}{I_y}\tag{9-45}$$

如果 $b\ll a$,则可略去$\frac{b^2}{a^2}$的项,得

$$\tau_{\max}=\frac{4}{3}\frac{F}{\pi ab}\tag{9-46}$$

这和初等理论[①] 所得的结果相同。如果 $b\gg a$,则可以略去$\frac{a^2}{b^2}$的项,得

$$\tau_{\max}=\frac{2}{1+\nu}\frac{F}{\pi ab}\tag{9-47}$$

这时,在水平轴两端的切应力为

$$(\tau_{zx})_{\substack{x=0\\y=\pm b}}=\frac{4\nu}{1+\nu}\frac{F}{\pi ab}\tag{9-48}$$

可见,在这种情况下,切应力沿水平轴的分布远非均匀,而且与泊松比 ν 的大小有关。取 $\nu=0.3$,则

① 在初等理论中,假设切应力 τ_{zx} 沿水平轴均匀分布。

$$\tau_{\max}=1.54\frac{F}{\pi ab}$$

$$(\tau_{zr})_{\substack{x=0\\y=b}}=0.92\frac{F}{\pi ab}$$

最大切应力比初等理论的结果大约大 14%。

若在式(9-44)中令 $a=b$,则可以得到圆截面的结果:

$$\left.\begin{aligned}(\tau_{zr})_{x=0}&=\frac{3+2\nu}{8(1+\nu)}\frac{Fa^2}{I_y}\left(1-\frac{1-2\nu}{3+2\nu}\frac{y^2}{a^2}\right)\\(\tau_{zy})_{x=0}&=0\end{aligned}\right\}\tag{9-49}$$

最大切应力发生在圆心处,其值为

$$\tau_{\max}=(\tau_{zr})_{x=y=0}=\frac{3+2\nu}{2(1+\nu)}\frac{F}{\pi a^2}\tag{9-50}$$

水平直径两端的切应力为

$$(\tau_{zr})_{\substack{x=0\\y=\pm a}}=\frac{1+2\nu}{1+\nu}\frac{F}{\pi a^2}\tag{9-51}$$

取 $\nu=0.3$,则式(9-50)和(9-51)成为

$$\tau_{\max}=1.38\frac{F}{\pi a^2}$$

$$(\tau_{zr})_{\substack{x=0\\y=\pm a}}=1.23\frac{F}{\pi a^2}$$

可见,在这种情况下,最大切应力比初等理论的结果大约大 4%。只有当 $\nu=1/2$ 时,解答(9-49)才与初等理论结果一致。

* §9-11 矩形截面杆的弯曲

如果悬臂柱形杆的横截面为长宽分别等于 $2a$ 和 $2b$ 的矩形(图 9-18),则在左右边界上,有

$$\frac{dy}{ds}=0$$

在上下边界上,有

$$x^2=a^2$$

因此,若根据式(9-41),取

$$f(y)=\left[\frac{F}{2I_y}x^2\right]_s=\frac{Fa^2}{2I_y}\qquad\text{(a)}$$

则边界条件(9-42)成立,在本问题中,可写成

$$(\Phi)_{x=\pm a}=0,\quad(\Phi)_{y=\pm b}=0\qquad\text{(b)}$$

将式(a)代入方程(9-40),有

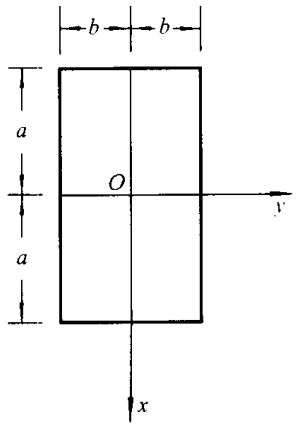


图 9-18

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\nu}{1+\nu}\frac{F}{I_x}y \tag{c}$$

方程(c)是二阶线性非齐次偏微分方程,其通解为非齐次的任意一个特解和齐次通解之和。但由本问题的对称性,切应力 τ_{zx} 应该是 x 和 y 的偶函数,再由式(a)和式(9-39)的第一式,$\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ 也应该是 x 和 y 的偶函数。由此可见,Φ 应该是 x 的偶函数,y 的奇函数。现在,从这点出发,并利用边界条件(b)的第二式,选择非齐次特解和齐次通解。非齐次特解取为

$$\Phi_1 = \frac{\nu}{1+\nu}\frac{F}{6I_x}(y^2 - b^2)y$$

显然,它是 y 的奇函数,并满足边界条件(b)的第二式;奇次通解取为

$$\Phi_2 = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cosh\frac{m\pi x}{b}\sin\frac{m\pi y}{b}$$

显然,它是 x 的偶函数,y 的奇函数,也满足边界条件(b)的第二式,由此得

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{\nu}{1+\nu}\frac{F}{6I_x}(y^2 - b^2)y + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cosh\frac{m\pi x}{b}\sin\frac{m\pi y}{b} \tag{d}$$

现在利用式(b)的第一个条件,有

$$\frac{\nu}{1+\nu}\frac{F}{6I_x}(y^2 - b^2)y + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cosh\frac{m\pi a}{b}\sin\frac{m\pi y}{b} = 0$$

即

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m \cosh\frac{m\pi a}{b}\sin\frac{m\pi y}{b} = \frac{\nu}{1+\nu}\frac{F}{6I_x}(b^2 - y^2)y$$

等号两边同乘以 $\sin\frac{n\pi y}{b}$,从 $-b$ 到 b 积分,并注意三角函数的正交性,有

$$A_m = (-1)^{m+1}\frac{2\nu F b^3}{(1+\nu)I_x\pi^3 m^3 \cosh\frac{m\pi a}{b}}$$

代入式(d)得到要求的应力函数

$$\Phi = \frac{\nu}{1+\nu}\frac{F}{6I_x}(y^2 - b^2)y + \frac{\nu}{1+\nu}\frac{2Fb^3}{\pi^3 I_x}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}\cosh\frac{m\pi x}{b}\sin\frac{m\pi y}{b}}{m^3\cosh\frac{m\pi a}{b}}$$

由此求得应力分量

$$\left.\begin{aligned}\tau_{zx}&=\frac{\partial\Phi}{\partial y}-\frac{F}{2I_y}x^2+f(y)\\&=\frac{F}{2I_y}(a^2-x^2)+\frac{\nu}{1+\nu}\frac{F}{6I_y}(3y^2-b^2)+\\&\quad\frac{\nu}{1+\nu}\frac{2Fb^2}{\pi^2 I_y}\sum_{m=1}^{\infty}{}'\frac{(-1)^{m+1}\cosh\dfrac{m\pi x}{b}\cos\dfrac{m\pi y}{b}}{m^2\cosh\dfrac{m\pi a}{b}}\\\tau_{zy}&=-\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\nu}{1+\nu}\frac{2Fb^2}{\pi^2 I_y}\sum_{m=1}^{\infty}{}'\frac{(-1)^{m}\sinh\dfrac{m\pi x}{b}\sin\dfrac{m\pi y}{b}}{m^2\cosh\dfrac{m\pi a}{b}}\end{aligned}\right\}\tag{9-52}$$

最大切应力发生在横轴的两端，如果注意到 $I_y=\dfrac{(2b)(2a)^3}{12}=\dfrac{4}{3}a^3b$，则

$$\tau_{\max}=(\tau_{zx})_{\substack{x=0\\y=\pm b}}$$

$$=\frac{3F}{8ab}\left[1+\frac{\nu}{1+\nu}\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}{}'\frac{1}{m^2\cosh\dfrac{m\pi a}{b}}\right)\right]\tag{9-53}$$

在初等理论中，假设横截面只有平行于弯曲平面的切应力 τ_{zx}，且与 y 无关。对于矩形截面，求得其应力分量为

$$\tau_{zx}=\frac{F}{I_y}\frac{a^2-x^2}{2}$$

$$\tau_{zy}=0$$

与式(9-52)比较，式(9-52)中 τ_{zx} 的前一项就是初等理论的结果，其后项表示对初等理论的修正；在初等理论中，切应力 τ_{zy} 是完全被忽略的。

思考题与习题

9-1 试指出扭转问题中，方程 $\nabla^2\varphi=0$ 和 $\nabla^2\Phi=-2$ 所表示的物理意义，并说明其理由。这里的 φ 和 Φ 分别表示扭转函数和应力函数。

9-2 试指出在柱形杆的弯曲问题中，方程 $\nabla^2\Phi=\dfrac{\nu}{1+\nu}\dfrac{F}{I_y}y-f'(y)$ 中的 $f(y)$ 能否取作零，说明其理由。这里，Φ 为应力函数。

9-3 试用应力解法求解等边三角形横截面柱形杆的扭转问题，求应力分量、最大切应力和单位长度的扭转角，横截面的尺寸和坐标选取如图 9-19 所示。

9-4 一闭口薄壁杆具有图 9-20 所示的横截面和均匀厚度 δ。试证明，杆扭转时中间腹壁上无切应力，并导出远离角点处的壁中的应力公式和单位长度的扭转角，都用扭矩 M 表示。

9-5 图 9-21 表示两个薄壁杆的横截面，具有相等的杆壁厚度和周长，如不考虑应力

集中，试计算下列两种情况下两扭杆中切应力之比：(1) 两杆的扭矩相等；(2) 两杆的单位长度扭转角相等。

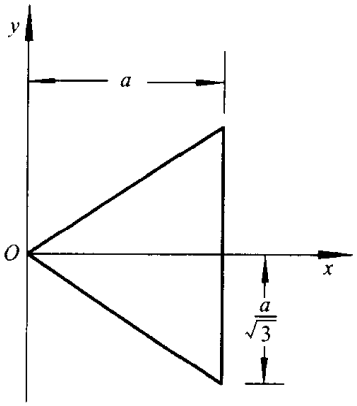


图 9－19

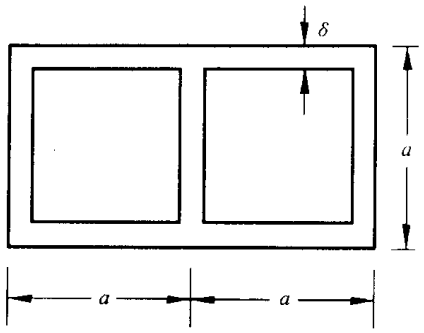


图 9－20

9－6　悬臂柱形杆在自由端面受铅直荷载 F 作用，杆的横截面如图 9－22 所示，左右两边为铅直边，上下两边为如下方程所示的双曲线

$$(1+\nu)x^2-\nu y^2=a^2$$

试求最大切应力。这里，ν 为泊松比。

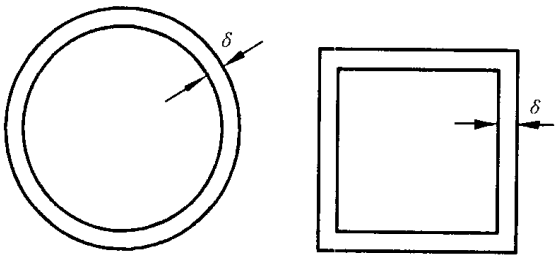


图 9－21

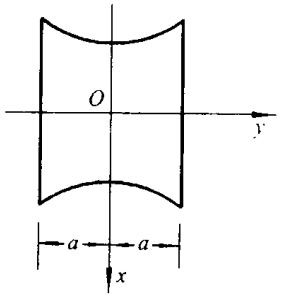


图 9－22

9－7　横截面形状如图 9－23 所示的悬臂柱形杆，自由端受切向集中力 F 作用。试证明，当 $\nu=\frac{1}{2}$ 时，取

$$f(y)=\frac{F}{6I_y}(2a+y)^2$$

$$\Phi=\frac{F}{6I_y}\left[x^2-\frac{1}{3}(2a+y)^2\right](y-a)$$

能满足一切方程和边界条件；求切应力分量和最大切应力。

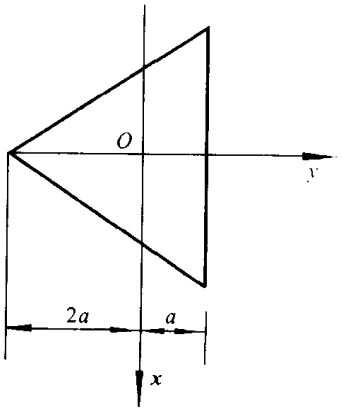


图 9－23

第十章　空间问题的解答

第九章介绍的柱形杆的扭转和弯曲是较为简单的空间问题。我们曾引进了它们各自的应力函数，从而把它们都归结为泊松方程的边值问题。这里自然要问：对于一般的空间问题，能否采取类似的步骤而给出解决问题的具体方法呢？回答是肯定的。本章的任务，就是要从不计体力的拉梅方程出发，探求位移通解的各种表示形式，并以此来解决一些实际问题。通过这部分内容的学习，对于引导大家去解决某些复杂的空间问题，将会有所帮助。为简洁起见，本章的有关推导，将运用一些场论的知识。

§10－1　基本方程的柱坐标和球坐标形式

在本书的第二章至第五章中，我们建立了弹性力学直角坐标形式的一切基本方程。由于对某些问题，例如轴对称问题和球对称问题，分别采用柱坐标和球坐标系比较方便，所以，下面我们就来列出柱坐标和球坐标形式的弹性力学基本方程，其推导详见本书的补充材料 B。

（一）基本方程的柱坐标形式

在直角坐标系下，空间一点 M 的位置是用三个坐标 (x, y, z) 表示的，而在柱坐标系下，空间一点的位置用 (ρ, φ, z) 表示。空间同一点的直角坐标与柱坐标之间的关系为

$$x = \rho\cos\varphi,\quad y = \rho\sin\varphi,\quad z = z$$

如图 10－1 所示。

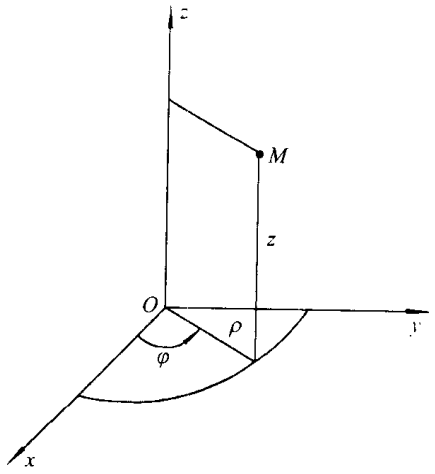


图 10－1

若分别用 $\sigma_\rho, \sigma_\varphi, \sigma_z, \tau_{\varphi z} = \tau_{z\varphi}, \tau_{\rho z} = \tau_{z\rho}, \tau_{\rho\varphi} = \tau_{\varphi\rho}$；$\varepsilon_\rho, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_z, \gamma_{\varphi z}, \gamma_{\rho z}, \gamma_{\rho\varphi}$；$u_\rho, u_\varphi, w$ 表示柱坐标系下的应力分量、应变分量和位移分量，它们应满足如下的方程：

平衡（运动）微分方程

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{\varphi\rho}}{\partial \varphi}+\frac{\partial \tau_{z\rho}}{\partial z}+\frac{\sigma_\rho-\sigma_\varphi}{\rho}+F_\rho=0\left(\rho_1\frac{\partial^2 u_\rho}{\partial t^2}\right)\\
&\frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial \tau_{z\varphi}}{\partial z}+\frac{2\tau_{\rho\varphi}}{\rho}+F_\varphi=0\left(\rho_1\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2}\right)\\
&\frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial \varphi}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{\rho z}}{\rho}+F_z=0\left(\rho_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)
\end{aligned}\right\}\qquad(10-1)$$

这里的(F_ρ,F_φ,F_z)表示单位体积的体力，等号右边括号内的ρ_1为密度。

几何方程

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_\rho=\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho},\quad \varepsilon_\varphi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{u_\rho}{\rho},\quad \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z}\\
&\gamma_{\varphi z}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \varphi}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}\\
&\gamma_{\rho z}=\frac{\partial u_\rho}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial \rho}\\
&\gamma_{\rho\varphi}=\frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi}-\frac{u_\varphi}{\rho}
\end{aligned}\right\}\qquad(10-2)$$

应力与应变关系

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_\rho=\lambda\theta+2G\varepsilon_\rho\\
&\sigma_\varphi=\lambda\theta+2G\varepsilon_\varphi\\
&\sigma_z=\lambda\theta+2G\varepsilon_z\\
&\tau_{\varphi z}=G\gamma_{\varphi z}\\
&\tau_{\rho z}=G\gamma_{\rho z}\\
&\tau_{\rho\varphi}=G\gamma_{\rho\varphi}\\
&\theta=\varepsilon_\rho+\varepsilon_\varphi+\varepsilon_z
\end{aligned}\right\}\qquad(10-3)$$

用$\lambda=\dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$和$G=\dfrac{E}{2(1+\nu)}$代入上式，则又可表示为

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_\rho &= \frac{E}{1+\nu}\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\theta+\varepsilon_\rho\right)\\
\sigma_\varphi &= \frac{E}{1+\nu}\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\theta+\varepsilon_\varphi\right)\\
\sigma_z &= \frac{\nu}{1+\nu}\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\theta+\varepsilon_z\right)\\
\tau_{\varphi z} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{\varphi z}\\
\tau_{\rho z} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{\rho z}\\
\tau_{\rho\varphi} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{\rho\varphi}
\end{aligned}\right\} \tag{10-3}$$

对于轴对称问题，即当物体的几何形状、约束情况或所受其他外界因素都对称于某一轴（设就是 z 轴）时，则由于变形的对称性，有 $u_\rho = u_\rho(\rho, z)$，$u_\varphi = 0$，$w = w(\rho, z)$。由式(10-2)和(10-3)可知，此时 $\gamma_{z\varphi} = \gamma_{\rho\varphi} = \tau_{z\varphi} = \tau_{\varphi z} = \tau_{\rho\varphi} = \tau_{\varphi\rho} = 0$，其余的应力分量、应变分量和位移分量仅是 ρ, z 的函数，而与 φ 无关。于是方程(10-1)～(10-3)简化为

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho}+\frac{\partial\tau_{z\rho}}{\partial z}+\frac{\sigma_\rho-\sigma_\varphi}{\rho}+F_\rho = 0\left(\rho_1\frac{\partial^2 u_\rho}{\partial t^2}\right)\\
&\frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial\rho}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{\rho z}}{\rho}+F_z = 0\left(\rho_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{10-4}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_\rho = \frac{\partial u_\rho}{\partial\rho},\ \varepsilon_\varphi = \frac{u_\rho}{\rho},\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}\\
&\gamma_{\rho z} = \frac{\partial u_\rho}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial\rho}
\end{aligned}\right\} \tag{10-5}$$

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_\rho &= \frac{E}{1+\nu}\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\theta+\varepsilon_\rho\right)\\
\sigma_\varphi &= \frac{E}{1+\nu}\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\theta+\varepsilon_\varphi\right)\\
\sigma_z &= \frac{E}{1+\nu}\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\theta+\varepsilon_z\right)\\
\tau_{\rho z} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{\rho z}\\
\theta &= \varepsilon_\rho+\varepsilon_\varphi+\varepsilon_z
\end{aligned}\right\} \tag{10-6}$$

(二) 基本方程的球坐标形式

在球坐标系下,空间一点 M 的位置用(r,θ,φ)表示(图 10-2),它们和直角坐标的关系为

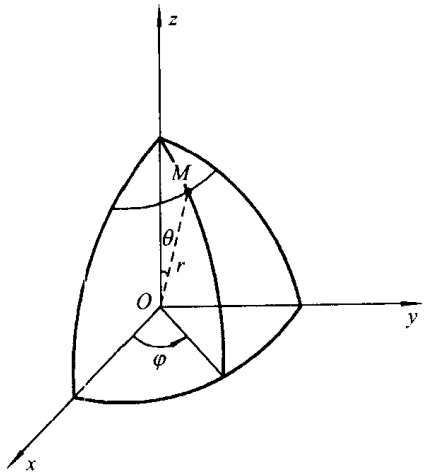


图 10-2

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta$$

若分别用 $\sigma_r,\sigma_\theta,\sigma_\varphi,\tau_{\theta\varphi}=\tau_{\varphi\theta},\tau_{r\varphi}=\tau_{\varphi r},\tau_{r\theta}=\tau_{\theta r}$;$\varepsilon_r,\varepsilon_\theta,\varepsilon_\varphi,\gamma_{\theta\varphi},\gamma_{r\varphi},\gamma_{r\theta}$;$u_r,u_\theta,u_\varphi$ 表示球坐标系下的应力分量、应变分量和位移分量,则它们应满足如下的方程:

平衡(运动)微分方程

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\theta r}}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\tau_{\varphi r}}{\partial\varphi}+\\
&\frac{1}{r}(2\sigma_r-\sigma_\theta-\sigma_\varphi+\tau_{r\theta}\cot\theta)+F_r=0\left(\rho_1\frac{\partial^2u_r}{\partial t^2}\right)\\
&\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\tau_{\varphi\theta}}{\partial\varphi}+\\
&\frac{1}{r}[(\sigma_\theta-\sigma_\varphi)\cot\theta+3\tau_{r\theta}]+F_\theta=0\left(\rho_1\frac{\partial^2u_\theta}{\partial t^2}\right)\\
&\frac{\partial\tau_{r\varphi}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\theta\varphi}}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\sigma_\varphi}{\partial\varphi}+\\
&\frac{1}{r}(3\tau_{r\varphi}+2\tau_{\theta\varphi}\cot\theta)+F_\varphi=0\left(\rho_1\frac{\partial^2u_\varphi}{\partial t^2}\right)
\end{aligned}\right\}\qquad(10-7)$$

这里的 F_r,F_θ,F_φ 为单位体积的体力。

几何方程

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_r=\frac{\partial u_r}{\partial r},\ \varepsilon_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r}\\
&\varepsilon_\varphi=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{u_\theta}{r}\cot\theta+\frac{u_r}{r}\\
&\gamma_{\theta\varphi}=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}-u_\varphi\cot\theta\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}\\
&\gamma_{r\varphi}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}-\frac{u_\varphi}{r}\\
&\gamma_{r\theta}=\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-\frac{u_\theta}{r}
\end{aligned}\right\}\tag{10-8}$$

应力和应变关系

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r&=\frac{E}{1+\nu}\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\theta+\varepsilon_r\right)\\
\sigma_\theta&=\frac{E}{1+\nu}\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\theta+\varepsilon_\theta\right)\\
\sigma_\varphi&=\frac{E}{1+\nu}\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\theta+\varepsilon_\varphi\right)\\
\tau_{\theta\varphi}&=\frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{\theta\varphi}\\
\tau_{r\varphi}&=\frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{r\varphi}\\
\tau_{r\theta}&=\frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{r\theta}\\
\theta&=\varepsilon_r+\varepsilon_\theta+\varepsilon_\varphi
\end{aligned}\right\}\tag{10-9}$$

对于球对称问题，即当物体的几何形状、约束情况或所受其他外界因素对称于某一点(设就是坐标原点)时，则由于变形的对称性，有 $u_r=u_r(r)$，$u_\theta=u_\varphi=0$。由式(10-8)和(10-9)可知，$\gamma_{\theta\varphi}=\gamma_{r\varphi}=\gamma_{r\theta}=\tau_{\theta\varphi}=\tau_{\varphi\theta}=\tau_{r\varphi}=\tau_{\varphi r}=\tau_{r\theta}=\tau_{\theta r}=0$，其余的应变分量和应力分量仅是 r 的函数而与 θ 和 φ 无关，且 $\varepsilon_\theta=\varepsilon_\varphi=\varepsilon_t$，$\sigma_\theta=\sigma_\varphi=\sigma_t$。这里的 ε_t 和 σ_t 分别表示切向的正应变和正应力。于是方程(10-7)至(10-9)简化为

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{2(\sigma_r-\sigma_t)}{r}+F_r=0\left(\rho\frac{\partial^2u_r}{\partial t^2}\right)\tag{10-10}$$

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_r&=\frac{\mathrm{d}u_r}{\mathrm{d}r}\\
\varepsilon_t&=\frac{u_r}{r}
\end{aligned}\right\}\tag{10-11}$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E}{1+\nu}\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\theta+\varepsilon_r\right)\\ \sigma_t &= \frac{\nu}{1+\nu}\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\theta+\varepsilon_t\right)\\ \theta &= \varepsilon_r+2\varepsilon_t\end{aligned}\right\} \tag{10-12}$$

式(10-12)又可表示为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\varepsilon_r+2\nu\varepsilon_t]\\ \sigma_t &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_t+\nu\varepsilon_r)\end{aligned}\right\} \tag{10-12}'$$

如果将式(10-11)代入式(10-12)′,然后将所得的结果再代入式(10-10),于是得球对称情况下以位移表示的平衡(运动)微分方程

$$\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{2u_r}{r^2}\right)+F_r=0\left(\rho_1\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}\right) \tag{10-13}$$

方程(10-13)将在第十二章中用到。

§10-2 位移场的势函数分解式

根据场论中著名的**亥姆霍兹**(Helmholtz,H.)**定理**,一个任意的位移场 $\boldsymbol{U}$ 总可以分解成两部分:一部分代表没有转动的,即**无旋的位移场**,另一部分代表没有体积变化的,即**等容的位移场**,若分别用 $\boldsymbol{U}_1$ 和 $\boldsymbol{U}_2$ 表示,则

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}_1+\boldsymbol{U}_2 \tag{a}$$

由于 $\boldsymbol{U}_1$ 表示无旋位移场,所以其旋度为零,即

$$\nabla\times\boldsymbol{U}_1=0$$

这表明,对于 $\boldsymbol{U}_1$,必存在一个标量势函数 Φ,它的梯度等于 $\boldsymbol{U}_1$,即

$$\boldsymbol{U}_1=\nabla\,\Phi \tag{b}$$

这里的 ∇ 为哈密顿运算子,它在直角坐标系中为

$$\nabla=\boldsymbol{e}_1\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_2\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_3\frac{\partial}{\partial z}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

至于 $\boldsymbol{U}_2$,由于它表示等容变形,即体应变为零,亦即其散度为零,于是

$$\theta=\nabla\cdot\boldsymbol{U}_2=0 \tag{c}$$

显然,使式(c)成立的条件为

$$\boldsymbol{U}_2=\nabla\times\boldsymbol{\Psi} \tag{d}$$

$\boldsymbol{\Psi}$ 为矢量势函数。这里,不失一般性,可令

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\Psi}=0 \tag{10-14}$$

将式(b)和式(d)代入式(a),得

$$\boldsymbol{U}=\nabla\ \Phi+\nabla\times\boldsymbol{\Psi} \tag{10-15}$$

式(10-15)称为**位移场的势函数分解式**。

分别求式(10-15)的散度和旋度,作后一运算时,注意到式(10-14),于是有

$$\left.\begin{aligned}\theta&=\nabla\cdot\boldsymbol{U}=\nabla^2\ \Phi\\ \boldsymbol{\omega}&=\nabla\ \times\boldsymbol{U}=-\nabla^2\ \boldsymbol{\Psi}\end{aligned}\right\} \tag{10-16}$$

式(10-16)表明,在将位移场按式(10-15)的形式分解后,体应变 θ 与标量势 Φ 有关,而转动矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 与矢量势 $\boldsymbol{\Psi}$ 有关。

§10-3 拉梅应变势 空心圆球内外壁受均布压力作用

式(10-15)给出了位移场既非无旋又非等容情况的一般表达式。如果位移场是**无旋的**,则式(10-15)简化为

$$\boldsymbol{U}=\nabla\ \Phi \tag{10-17}$$

将式(10-17)代入不计体力的拉梅方程

$$(\lambda+G)\nabla\ \theta+G\ \nabla^2\ \boldsymbol{U}=0 \tag{10-18}$$

并注意到

$$\theta=\nabla\cdot\boldsymbol{U}=\nabla^2\ \Phi$$

$$\nabla^2\ \boldsymbol{U}=\nabla^2\ \nabla\ \Phi=\nabla\ \nabla^2\Phi$$

于是有

$$(\lambda+2G)\nabla\ \nabla^2\ \Phi=0$$

由此得

$$\nabla^2\Phi=C \tag{10-19}$$

C 为常数。这表明,如果标量势 Φ 满足泊松方程(10-19),则由式(10-17)给出的位移满足齐次拉梅方程。这里的 Φ 称为**拉梅应变势**。

为应用方便起见,式(10-17)又可写成

$$\boldsymbol{U}=\frac{1}{2G}\nabla\ \Phi \tag{10-17}$$

如果令方程(10-19)右边的常数为零,则它变为拉普拉斯方程。可见,任意一个调和函数都可以作为拉梅应变势。由于调和函数在数学中研究得十分详尽,所以,针对某些具体问题,去寻求调和函数 Φ 是比较容易的。

可以证明[①]，对于轴对称问题，拉梅应变势可写成

$$\Phi=\Phi(\rho,z)$$

而与式(10-17)′对应的关系式为

$$u_\rho=\frac{1}{2G}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho},\qquad w=\frac{1}{2G}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\tag{10-20}$$

同样可以证明[②]，对于球对称问题，拉梅应变势为

$$\Phi=\Phi(r)$$

而和式(10-17)′对应的关系为

$$u_r=\frac{1}{2G}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}\tag{10-21}$$

需要指出，由于方程(10-19)的成立表示弹性体内各处的膨胀或收缩是均匀的，或没有膨胀和收缩，所以，能直接用拉梅应变势求解的问题是极少的。下面举一个直接用拉梅应变势求解的实例。

设有一个内半径为 a，外半径为 b 的空心厚壁圆球体，其内外壁分别受均布压力 q_1 和 q_2 作用，求应力和位移的分布情况。

这是一个球对称问题。试取拉梅应变势

$$\Phi=\frac{A}{r}+Br^2\tag{a}$$

可以验证，它是泊松方程(10-19)的解。将式(a)代入式(10-21)，有

$$u_r=\frac{1}{2G}\left(-\frac{A}{r^2}+2Br\right)\tag{b}$$

由式(10-11)求出应变分量，再由式(10-12)′求得应力分量：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=\frac{2A}{r^3}+2\frac{1+\nu}{1-2\nu}B\\ \sigma_t&=-\frac{A}{r^3}+2\frac{1+\nu}{1-2\nu}B\end{aligned}\right\}\tag{c}$$

利用边界条件定常数 A 和 B。本问题的边界条件为

$$(\sigma_r)_{r=a}=-q_1,\ (\sigma_r)_{r=b}=-q_2\tag{d}$$

将它应用于式(c)的第一式，有

$$\frac{2A}{a^3}+2\frac{1+\nu}{1-2\nu}B=-q_1$$

$$\frac{2A}{b^3}+2\frac{1+\nu}{1-2\nu}B=-q_2$$

解之，得

①、② 见习题 10-1 和 10-2。

$$\left.\begin{aligned} 2A &= \frac{a^3b^3(q_2-q_1)}{b^3-a^3} \\ B &= \frac{1-2\nu}{2(1+\nu)}\frac{a^3q_1-b^3q_2}{b^3-a^3} \end{aligned}\right\} \tag{e}$$

将式(e)代入式(b)和式(c),并注意到 $G=\dfrac{E}{2(1+\nu)}$,得位移分量和应力分量

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{(1+\nu)r}{E}\left[-\frac{a^3b^3(q_2-q_1)}{2(b^3-a^3)}\frac{1}{r^3}+\frac{1-2\nu}{1+\nu}\frac{a^3q_1-b^3q_2}{b^3-a^3}\right] \\ &= \frac{(1+\nu)r}{E}\left[q_1\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{b}{r}\right)^3+\frac{1-2\nu}{1+\nu}}{\left(\frac{b}{a}\right)^3-1}-q_2\frac{\frac{1-2\nu}{1+\nu}+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^3}{1-\left(\frac{a}{b}\right)^3}\right] \end{aligned} \tag{10-22}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{a^3b^3(q_2-q_1)}{b^3-a^3}\frac{1}{r^3}+\frac{a^3q_1-b^3q_2}{b^3-a^3} \\ &= -q_1\frac{\left(\frac{b}{r}\right)^3-1}{\left(\frac{b}{a}\right)^3-1}-q_2\frac{1-\left(\frac{a}{r}\right)^3}{1-\left(\frac{a}{b}\right)^3} \\ \sigma_t &= -\frac{a^3b^3(q_2-q_1)}{2(b^3-a^3)}\frac{1}{r^3}+\frac{a^3q_1-b^3q_2}{b^3-a^3} \\ &= q_1\frac{\left(\frac{b}{r}\right)^3+2}{2\left[\left(\frac{b}{a}\right)^3-1\right]}-q_2\frac{\left(\frac{a}{r}\right)^3+2}{2\left[1-\left(\frac{a}{b}\right)^3\right]} \end{aligned}\right\} \tag{10-23}$$

如果 $b\gg a$,则有

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= -q_1\left(\frac{a}{r}\right)^3-q_2\left[1-\left(\frac{a}{r}\right)^3\right] \\ \sigma_t &= \frac{q_1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^3-\frac{q_2}{2}\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3+2\right] \end{aligned}\right\} \tag{10-24}$$

$$u_r = \frac{(1+\nu)r}{E}\left\{\frac{q_1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^3-q_2\left[\frac{1-2\nu}{1+\nu}+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^3\right]\right\} \tag{10-25}$$

此时,在内壁($r=a$)处的应力和位移为

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= -q_1 \\ \sigma_t &= \frac{q_1}{2}-\frac{3}{2}q_2 \\ u_r &= \frac{(1+\nu)a}{E}\left[\frac{q_1}{2}-q_2\frac{3(1-\nu)}{2(1+\nu)}\right] \end{aligned}\right\} \tag{10-26}$$

当 r 很大时，由式(10－24)和式(10－25)，可得

$$\sigma_r = \sigma_1 = -q_2$$

$$u_r = -\frac{1-2\nu}{E}q_2 r$$

可见，在 $b \gg a$ 的情况下，空心圆球内离内壁较远之处的应力状态和实心圆球各向均匀受压(压力为 q_2)的情况一致。如果内壁压力 $q_1 = 0$，则由式(10－26)可知，圆球内壁处的应力为

$$\sigma_1 = -\frac{3}{2}q_2$$

这表明，洞壁的应力是无洞孔时的 1.5 倍，即应力集中因子为 1.5。

§10－4 齐次拉梅方程的通解

齐次拉梅方程的通解有多种形式，这里重点介绍两种常用的形式，它们分别是布西内斯克(Boussinesq，T. V.)－伽辽金(Галёркин，Б. Г.)通解和纽勃(Neuber，G)－巴博考维奇(Папкович，П. Ф.)通解。至于其他形式的通解，由于它们的控制方程一般比较复杂，不便于使用，故只拟作简单的介绍。

(一) 布西内斯克－伽辽金通解

我们将位移场的分解式(10－15)改写成

$$\boldsymbol{U} = A\ \nabla\ \Phi + \nabla\ \times \boldsymbol{\Psi} \tag{a}$$

其中 A 为待定常数，矢量势 $\boldsymbol{\Psi}$ 满足方程(10－14)。但要使式(10－14)满足的条件为矢量势 $\boldsymbol{\Psi}$ 是另一个矢量势 $\boldsymbol{\varphi}$ 的旋度，即

$$\boldsymbol{\Psi} = -\nabla\ \times \boldsymbol{\varphi}$$

将它代入式(a)，并注意到

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\varphi} = \nabla\ \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} - \nabla^2 \boldsymbol{\varphi}$$

于是有

$$\boldsymbol{U} = A\ \nabla\ \Phi - \nabla\ \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} + \nabla^2 \boldsymbol{\varphi} \tag{b}$$

现将式(b)代入不计体力的拉梅方程(10－18)，注意到

$$\theta = \nabla \cdot \boldsymbol{U} = A\ \nabla^2 \Phi$$

经整理，得到

$$\nabla^2 \left(A\frac{\lambda + 2G}{G}\nabla\ \Phi - \nabla\ \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} + \nabla^2 \boldsymbol{\varphi} \right) = 0 \tag{c}$$

为了要得到一个简洁明了的解答，我们令

$$A = \frac{G}{\lambda + 2G} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \tag{d}$$

而

$$\Phi = \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} \tag{e}$$

于是式(c)变为

$$\nabla^2 \ \nabla^2 \boldsymbol{\varphi} = 0 \tag{10-27}$$

另外，将式(d)代入式(b)，并注意到式(e)，于是得

$$\boldsymbol{U} = -\frac{1}{2(1-\nu)} \nabla \ \Phi + \nabla^2 \boldsymbol{\varphi} \tag{10-28}$$

或

$$\boldsymbol{U} = -\frac{1}{2(1-\nu)} \nabla \ \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} + \nabla^2 \boldsymbol{\varphi} \tag{10-28}'$$

综合上面的推导，可以得出结论：如果矢量势 $\boldsymbol{\varphi}$ 满足双调和方程(10－27)，则由式(10－28)′给出的位移是齐次拉梅方程的解，我们称之为**布西内斯克－伽辽金通解**，而矢量势 $\boldsymbol{\varphi}$ 称为**伽辽金矢量**。

伽辽金矢量的一种特殊形式为：其前两个分量，即 $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$，$\varphi_3 \neq 0$，这时式(10－28)简化为

$$\boldsymbol{U} = -\frac{1}{2(1-\nu)} \nabla \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + \boldsymbol{e}_3 \ \nabla^2 \varphi_3 \tag{10-29}$$

φ_3 称为**勒夫**(Love，A.E.H.)**应变函数**。勒夫应变函数通常用以求解空间轴对称问题。对于空间轴对称问题，采用柱坐标系比较方便，这时，

$$\varphi_3 = \varphi_3(\rho, z)$$

而式(10－29)的分量形式为

$$\left.\begin{aligned} u_\rho &= -\frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \rho \partial z} \\ w &= -\frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial z^2} + \nabla^2 \varphi_3 \end{aligned}\right\} \tag{10-30}$$

由式(10－30)，还不难求得对应的应力分量：

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\rho &= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \ \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right) \varphi_3 \\ \sigma_\varphi &= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \ \nabla^2 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \varphi_3 \\ \sigma_z &= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial z} \left[(2-\nu) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \varphi_3 \\ \tau_{\rho z} &= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[(1-\nu) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \varphi_3 \end{aligned}\right\} \tag{10-31}$$

这里的拉普拉斯运算符号为

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{10-32}$$

(二) 纽勃－巴博考维奇通解

从布西内斯克－伽辽金通解出发,还可导出另一种形式的通解。为此,令式(10－28)中的

$$\nabla^2 \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\zeta} \tag{f}$$

显然,由式(10－27),有

$$\nabla^2 \boldsymbol{\zeta} = 0 \tag{g}$$

即矢量函数 $\boldsymbol{\zeta}$ 为调和函数。进而将式(10－28)中的标量函数 Φ 用矢量函数 $\boldsymbol{\zeta}$ 来表示,为此,将式(e)两边作用拉普拉斯运算符号,注意到式(f),有

$$\nabla^2 \Phi = \nabla^2 \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} = \nabla \cdot \nabla^2 \boldsymbol{\varphi} = \nabla \cdot \boldsymbol{\zeta} \tag{h}$$

可以证明,方程(h)的解为

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{1}{2}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\zeta} \tag{i}$$

这里的 Φ_0 为调和函数,$\boldsymbol{r}$ 为位置矢量,它在直角坐标系中为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3$$

事实上,在式(i)两边作用拉普拉斯运算符号,有

$$\nabla^2 \Phi = \nabla^2 \Phi_0 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\zeta} \cdot \nabla^2 \boldsymbol{r} + \frac{1}{2}\boldsymbol{r} \cdot \nabla^2 \boldsymbol{\zeta} + \nabla \cdot \boldsymbol{\zeta} \tag{j}$$

由于

$$\nabla^2 \Phi_0 = 0, \quad \nabla^2 \boldsymbol{r} = 0, \quad \nabla^2 \boldsymbol{\zeta} = 0$$

于是,式(j)简化为

$$\nabla^2 \Phi = \nabla \cdot \boldsymbol{\zeta}$$

它就是方程(h)。这样,就证明了式(i)是方程(h)的解。

将式(f),(i)代入式(10－28),得到

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{\zeta} - \frac{1}{2(1-\nu)} \nabla \left(\Phi_0 + \frac{1}{2}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\zeta} \right) \tag{10-33}$$

这称为**纽勃－巴博考维奇通解**。其中的标量函数 Φ_0 和矢量函数 $\boldsymbol{\zeta}$ 满足

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 \Phi_0 &= 0 \\ \nabla^2 \boldsymbol{\zeta} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{10-34}$$

对于空间轴对称问题,ζ 和 Φ_0 的形式为

$$\zeta_1 = \zeta_2 = 0, \quad \zeta_3 = \zeta_3(\rho, z), \quad \Phi_0 = \Phi_0(\rho, z)$$

于是,式(9－33)可表示为

$$\boldsymbol{U} = \zeta_3 \boldsymbol{e}_3 - \frac{1}{2(1-\nu)} \nabla \left(\Phi_0 + \frac{\zeta_3 z}{2} \right) \tag{10-35}$$

这里的 $\boldsymbol{e}_3$ 为 z 轴方向的单位矢量。式(10－35)的分量形式为

$$\left.\begin{aligned} u_\rho &= -\frac{1}{2(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\Phi_0+\frac{\zeta_3 z}{z}\right)\\ w &= \zeta_3-\frac{1}{2(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi_0+\frac{\zeta_3 z}{z}\right)\end{aligned}\right\} \tag{10-35}'$$

*(三) 位移通解的其他形式

1. 贝蒂表达式

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{r}\alpha \tag{10-36}$$

这里的 $\boldsymbol{v}$ 和 α 分别是坐标的矢量函数和标量函数，$\boldsymbol{r}$ 为位置矢量。为使式(10-36)是齐次拉梅方程的解，要求满足如下的方程

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2\boldsymbol{v}=0,\qquad \nabla^2\alpha=0\\ (5-4\nu)\alpha+\boldsymbol{r}\cdot\nabla\alpha+\nabla\cdot\boldsymbol{v}=\text{常数}\end{aligned}\right\} \tag{10-37}$$

2. 开尔文(Kelvin, L.)第一表达式

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{H}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r}\,\nabla\alpha \tag{10-38}$$

这里 $\boldsymbol{b}$ 为一单位矢量，$\boldsymbol{r}$ 为位置矢量，$\boldsymbol{H}$ 和 α 分别是坐标的矢量函数和标量函数。为使式(10-38)为齐次拉梅方程的解，要求满足如下的方程

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2\boldsymbol{H}=0,\nabla^2\alpha=0\\ \nabla\cdot\boldsymbol{H}+(3-4\nu)\boldsymbol{b}\cdot\nabla\alpha=\text{常数}\end{aligned}\right\} \tag{10-39}$$

3. 布西内斯克表达式

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{b}\cdot\left[\nabla\boldsymbol{F}-\boldsymbol{r}\,\nabla\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{F}}{3-4\nu}\right] \tag{10-40}$$

这里 $\boldsymbol{b}$ 为单位矢量，$\boldsymbol{r}$ 为位置矢量，$\boldsymbol{F}$ 为坐标的矢量函数。式(10-40)是齐次拉梅方程解的条件为

$$\nabla^2\boldsymbol{F}=0 \tag{10-41}$$

4. 开尔文第二表达式

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{\zeta}+r^2\,\nabla\alpha \tag{10-42}$$

这里的 $\boldsymbol{\zeta}$ 和 α 分别是坐标的矢量函数和标量函数，$r^2=x^2+y^2+z^2$。式(10-42)是齐次拉梅方程解的条件为

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2\boldsymbol{\zeta}=0,\qquad \nabla^2\alpha=0,\\ \nabla\cdot\boldsymbol{\zeta}+2(3-4\nu)\boldsymbol{r}\cdot\nabla\alpha+2(1-2\nu)\alpha=\text{常数}\end{aligned}\right\} \tag{10-43}$$

§10-5 无限体内一点受集中力作用

设无限体内一点受集中力 F 作用，坐标选取如图 10-3a 所示，求不计重力作用时体内应力和位移的分布情况。

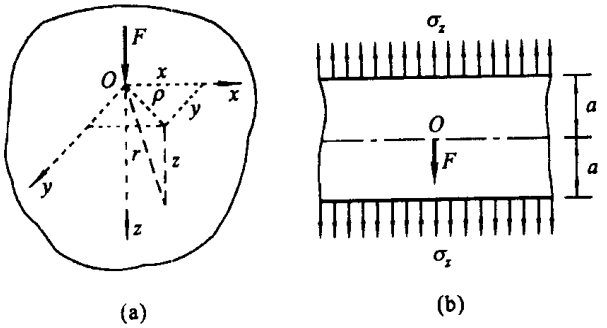


图 10－3

这个问题称为**开尔文问题**，是一个空间轴对称问题，拟借助于勒夫应变函数求解。根据量纲分析，应力分量表达式应为 r,ρ,z 等长度坐标的负二次幂函数，因此，从应力分量与乐甫应变函数之间的关系(10－31)可见，φ_3 应为一次幂的双调和函数。现试取

$$\varphi_3 = Br = B(\rho^2 + z^2)^{1/2} \tag{a}$$

B 为待定常数。将式(a)代入式(10－30)和式(10－31)，有

$$\left.\begin{aligned} u_\rho &= \frac{1}{2(1-\nu)}\frac{B\rho z}{r^3} \\ w &= \frac{1}{2(1-\nu)}B\left[\frac{2(1-2\nu)}{r}+\frac{1}{r}+\frac{z^2}{r^3}\right] \end{aligned}\right\} \tag{10-44}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\rho &= \frac{E}{2(1-\nu^2)}B\left[\frac{(1-2\nu)z}{r^3}-\frac{3\rho^2 z}{r^5}\right] \\ \sigma_\varphi &= \frac{E}{2(1-\nu^2)}B\frac{(1-2\nu)z}{r^3} \\ \sigma_z &= -\frac{E}{2(1-\nu^2)}B\left[\frac{(1-2\nu)z}{r^3}+\frac{3z^3}{r^5}\right] \\ \tau_{\rho z} &= -\frac{E}{2(1-\nu^2)}B\left[\frac{(1-2\nu)\rho}{r^3}+\frac{3\rho z^2}{r^5}\right] \end{aligned}\right\} \tag{10-45}$$

由式(10－44)和式(10－45)可见，位移分量和应力分量在坐标原点是奇异的，而在无穷远处为零。为了确定常数 B，我们计算 $z=\pm a$ 两平面(图 10－3b)上的正应力的合力，由平衡条件，得

$$F = \int_0^\infty 2\pi\rho(\sigma_z)_{z=a}\mathrm{d}\rho - \int_0^\infty 2\pi\rho(\sigma_z)_{z=-a}\mathrm{d}\rho \tag{b}$$

将式(10－45)的第三式代入，并注意到对于给定的 z，$\rho\mathrm{d}\rho = r\mathrm{d}r$，于是有

$$F = \frac{2\pi E}{1-\nu^2}B\left[(1-2\nu)a\int_a^\infty\frac{r\mathrm{d}r}{r^3}+3a^3\int_a^\infty\frac{r\mathrm{d}r}{r^5}\right] = \frac{4\pi E}{1+\nu}B$$

由此得

$$B=\frac{(1+\nu)F}{4\pi E} \tag{c}$$

将式(c)代入式(10－44)和式(10－45)即得要求的位移分量和应力分量。

令式(10－45)中的 $z=0$，可见在坐标平面 $z=0$ 上无正应力作用，这个面上的切应力为

$$\tau_{z\rho}=-\frac{F(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)\rho^2}$$

它与离力的作用点的距离的平方成反比。

本问题也可借助于纽勃－巴博考维奇通解(10－35)，取

$$\Phi_0=0,\ \zeta_3=B/r$$

来求解。式中的 B 为待定常数，$r=(\rho^2+z^2)^{1/2}$。这工作由读者完成。

§10－6　半无限体表面受法向集中力作用

设半无限体表面受法向集中力 F 作用，坐标选取如图 10－4 所示，不计自重，求体内应力和位移的分布情况。这是著名的**布西内斯克问题**。

这也是空间轴对称问题，和开尔文问题一样，可借助于勒夫应变函数求解[①]。但这里拟采用纽勃－巴博考维奇通解来求解。由量纲分析法推知应力分量应是 r,ρ,z 等长度坐标的负二次幂函数，再由应变分量与位移分量之间以及应变分量与应力分量之间的关系可知，位移分量应是这些长度坐标的负一次幂函数。于是，由式(10－35)可以看出，调和函数 ζ_3 应是这些长度坐标的负一次幂函数，而调和函数 Φ_0 则是长度坐标的零次幂函数。现试取

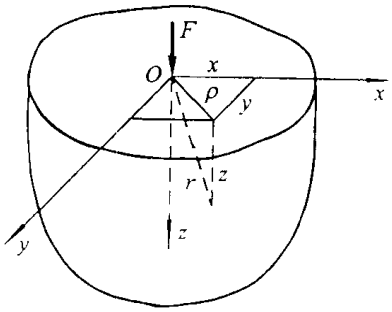


图 10－4

$$\left.\begin{aligned}\zeta_3&=4(1-\nu)\frac{K}{r}\\ \Phi_0&=2(1-\nu)C\ln(r+z)\\ r^2&=\rho^2+z^2\end{aligned}\right\} \tag{z_1}$$

这里的 C 和 K 为待定常数。将式(a)代入式(10－35)′，有

① 参考文献[2]，295 页。

$$\left.\begin{aligned} u_\rho &= -\frac{C\rho}{r(r+z)}+\frac{K\rho z}{r^3} \\ w &= \frac{(3-4\nu)K-C}{r}+\frac{Kz^2}{r^3} \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

本问题的边界条件为

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_z)_{\substack{z=0\\ \rho\neq 0}} &= 0 \\ (\tau_{z\rho})_{\substack{z=0\\ \rho\neq 0}} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{c}$$

由式(10-5)和式(10-6),得

$$\tau_{z\rho}=\frac{E\rho}{(1+\nu)r^3}\left[C-K(1-2\nu)-\frac{3Kz^2}{r^2}\right] \tag{d}$$

代入边界条件(c)的第二式,有

$$C=K(1-2\nu) \tag{e}$$

同样求得

$$\sigma_z=-\frac{3EKz^3}{(1+\nu)r^5} \tag{f}$$

显然边界条件(c)的第一式自动满足。为了确定K,我们考虑离表面距离为z的水平面上正应力的合力(图10-5),由平衡条件,它应等于F,即

$$F=-\int_0^\infty 2\pi\rho\sigma_z\,\mathrm{d}\rho=\int_0^\infty\frac{3EKz^3}{(1+\nu)r^5}2\pi\rho\,\mathrm{d}\rho=\frac{2EK\pi}{1+\nu}$$

于是

$$K=\frac{(1+\nu)F}{2\pi E} \tag{g}$$

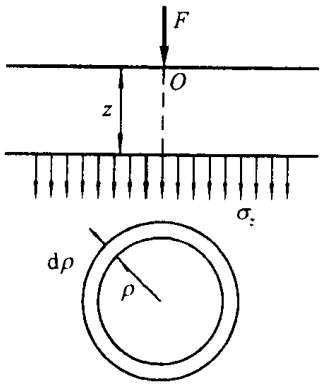


图 10-5

而

$$C=K(1-2\nu)=\frac{(1+\nu)(1-2\nu)F}{2\pi E} \tag{h}$$

将式(g)和式(h)代入式(b),得要求的位移分量为

$$\left.\begin{aligned} u_\rho &= \frac{(1+\nu)F}{2E\pi r}\left[\frac{\rho z}{r^2}-\frac{(1-2\nu)\rho}{r+z}\right] \\ w &= \frac{(1+\nu)F}{2E\pi r}\left[\frac{z^2}{r^2}+2(1-\nu)\right] \end{aligned}\right\} \tag{10-46}$$

其相应的应力分量为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\rho &= \frac{F}{2\pi r^2}\left[-\frac{3\rho^2 z}{r^3}+\frac{(1-2\nu)r}{r+z}\right]\\ \sigma_\varphi &= \frac{(1-2\nu)F}{2\pi r^2}\left(\frac{z}{r}-\frac{r}{r+z}\right)\\ \sigma_z &= -\frac{3Fz^3}{2\pi r^5}\\ \tau_{\rho z} &= \tau_{z\rho} = -\frac{3F\rho z^2}{2\pi r^5}\end{aligned}\right\} \tag{10-47}$$

在直角坐标系里，该问题的结果为

$$\left.\begin{aligned}u &= \frac{(1+\nu)F}{2E\pi}\left[-\frac{(1-2\nu)x}{r(r+z)}+\frac{xz}{r^3}\right]\\ v &= \frac{(1+\nu)F}{2E\pi}\left[-\frac{(1-2\nu)y}{r(r+z)}+\frac{yz}{r^3}\right]\\ w &= \frac{(1+\nu)F}{2E\pi r}\left[\frac{z^2}{r^2}+2(1-\nu)\right]\end{aligned}\right\} \tag{10-48}$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{F}{2\pi r^2}\left\{\frac{3x^2 z}{r^3}-(1-2\nu)\left[\frac{z}{r}-\frac{r}{r+z}+\frac{x^2(2r+z)}{r(r+z)^2}\right]\right\}\\ \sigma_y &= -\frac{F}{2\pi r^2}\left\{\frac{3y^2 z}{r^3}-(1-2\nu)\left[\frac{z}{r}-\frac{r}{r+z}+\frac{y^2(2r+z)}{r(r+z)^2}\right]\right\}\\ \sigma_z &= -\frac{3Fz^3}{2\pi r^5}\\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = -\frac{3Fyz^2}{2\pi r^5}\\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = -\frac{3Fxz^2}{2\pi r^5}\\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = -\frac{F}{2\pi r^2}\left[\frac{3xyz}{r^3}-\frac{(1-2\nu)(2r+z)xy}{r(r+z)^2}\right]\end{aligned}\right\} \tag{10-49}$$

由式(10-46)的第二式可见，半无限体表面处任一点的法向位移，即沉陷为

$$(w)_{z=0} = \frac{(1-\nu^2)F}{\pi E\rho} \tag{10-50}$$

它与离力作用点的距离 ρ 成反比。后面将多次用到这个公式。

§10-7 半无限体表面受切向集中力作用

设半无限体表面一点受切向集中力 F 作用，坐标选取如图 10-6 所示。

这个问题称为**塞路蒂**(Cerruti, V.)**问题**，可同时适当地选取拉梅应变势和伽辽金矢量而得到解决。为此，将式(10-17)′和式(10-28)′进行叠加，有

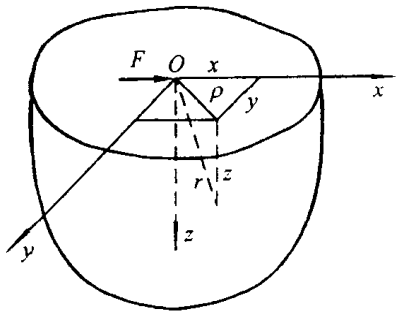


图 10－6

$$\boldsymbol{U}=\frac{1}{2G}\nabla\ \Phi-\frac{1}{2(1-\nu)}\nabla\ \nabla\cdot\boldsymbol{\varphi}+\nabla^2\ \boldsymbol{\varphi} \tag{10-51}$$

其分量形式为

$$\left.\begin{aligned}
u&=\frac{1}{2G}\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\nabla^2\ \varphi_1-\frac{1}{2(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\right)\\
v&=\frac{1}{2G}\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\nabla^2\ \varphi_2-\frac{1}{2(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\right)\\
w&=\frac{1}{2G}\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\nabla^2\ \varphi_3-\frac{1}{2(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\right)
\end{aligned}\right\}\quad(10-51)'$$

这里的 Φ 和 $\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ 分别是拉梅应变势和伽辽金矢量，前者取调和函数，后者是双调和函数。显然，式(10－51)是齐次拉梅方程(10－18)的解。现在要适当地选取调和函数 Φ 和双调和函数 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$，使由此求得的应力分量满足该问题的边界条件。

与以上两个问题一样，根据量纲分析，该问题的位移分量应是长度坐标 r、x,y,z 的负一次幂函数。因此由式(10－51)可见，Φ 应是零次幂的调和函数，$\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ 应是一次幂的双调和函数。据此，试选取如下的函数：

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_1=Ar,\quad \varphi_2=0,\quad \varphi_3=Bx\ln(r+z)\\
&\Phi=\frac{Cx}{r+z}
\end{aligned}\right\}\tag{a}$$

A,B,C 为待定常数。将式(a)代入式(10－51)，可求得位移分量，同时利用几何方程和应力应变关系，求应力分量，根据边界条件

$$\left.\begin{aligned}
&(\sigma_z)_{\substack{z=0\\ \rho\neq0}}=0\\
&(\tau_{zx})_{\substack{z=0\\ \rho\neq0}}=0\\
&(\tau_{zy})_{\substack{z=0\\ \rho\neq0}}=0
\end{aligned}\right\}\tag{b}$$

和平衡条件

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\tau_{zr})_{z=z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+F=0 \tag{c}$$

确定常数 A,B 和 C。现将结果写在下面：

$$\left.\begin{aligned}A&=\frac{(1+\nu)F}{2\pi E}\\B&=\frac{(1+\nu)(1-2\nu)F}{2\pi E}\\C&=\frac{(1-2\nu)F}{2\pi}\end{aligned}\right\} \tag{d}$$

位移分量和应力分量分别为

$$\left.\begin{aligned}u&=\frac{(1+\nu)F}{2\pi Er}\left\{1+\frac{x^2}{r^2}+(1-2\nu)\left[\frac{r}{r+z}-\frac{x^2}{(r+z)^2}\right]\right\}\\v&=\frac{(1+\nu)F}{2\pi Er}\left[\frac{xy}{r^2}-\frac{(1-2\nu)xy}{(r+z)^2}\right]\\w&=\frac{(1+\nu)F}{2\pi Er}\left[\frac{xz}{r^2}+\frac{(1-2\nu)x}{r+z}\right]\end{aligned}\right\} \tag{10-52}$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\frac{Fx}{2\pi r^3}\left[\frac{1-2\nu}{(r+z)^2}\left(r^2-y^2-\frac{2ry^2}{r+z}\right)-\frac{3x^2}{r^2}\right]\\\sigma_y&=\frac{Fx}{2\pi r^3}\left[\frac{1-2\nu}{(r+z)^2}\left(3r^2-x^2-\frac{2rx^2}{r+z}\right)-\frac{3y^2}{r^2}\right]\\\sigma_z&=-\frac{2Fxz^2}{2\pi r^5}\\\tau_{yz}&=\tau_{zy}=\frac{3Fxyz}{2\pi r^5},\qquad\tau_{xz}=\tau_{zx}=-\frac{3Fx^2z}{2\pi r^5}\\\tau_{xy}&=\tau_{yx}=\frac{Fy}{2\pi r^3}\left[\frac{1-2\nu}{(r+z)^2}\left(-r^2+x^2+\frac{2rx^2}{r+z}\right)-\frac{3x^2}{r^2}\right]\end{aligned}\right\} \tag{10-53}$$

这类问题也可以不用拉梅应变势，而只采用伽辽金矢量，但计算工作量比较大一些。

§10-8 半无限体表面圆形区域内受均匀分布压力作用

有了§10-6中半无限体表面受法向集中力作用的结果，可以通过叠加法求得由法向分布荷载所引起的位移和应力。

现只考虑半无限体表面圆形区域内受均匀分布压力作用的情况，设圆形区域的半径为 a，单位面积的压力为 q。先求荷载圆中心下面（z 轴上）任意一点和半无限体表面上任意一点的位移表达式。

对于圆形区域中心下面的任意一点 M(图 10－7),由于对称性,有

$$u_\rho = u_\varphi = 0 \tag{10-54a}$$

z 方向的位移分量应从式(10－46)的第二式出发,并注意到 $\frac{z}{r}=\cos\beta$, $\frac{\rho}{r}=\sin\beta$, $\mathrm{d}\beta=\frac{\mathrm{d}\rho\cos\beta}{r}$ 而得到,即

$$\begin{aligned} w &= \int_0^a \frac{2\pi\rho q(1+\nu)\sin\beta}{2\pi E\rho}[2(1-\nu)+\cos^2\beta]\mathrm{d}\rho \\ &= \int_0^{\beta_0} \frac{(1+\nu)qz}{E}\left[2(1-\nu)\frac{\sin\beta}{\cos^2\beta}+\sin\beta\right]\mathrm{d}\beta \\ &= \frac{(1+\nu)qa}{E}\left(\frac{\sqrt{a^2+z^2}}{a}-\frac{z}{a}\right)\left[2(1-\nu)+\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right] \end{aligned} \tag{10-54b}$$

令式(10－54b)中的 $z=0$,则得荷载圆中心一点的沉陷为

$$(w)_{z=0}=\frac{2(1-\nu^2)qa}{E} \tag{10-55}$$

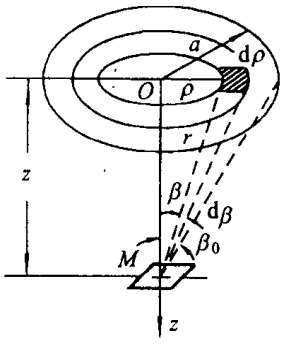


图 10－7

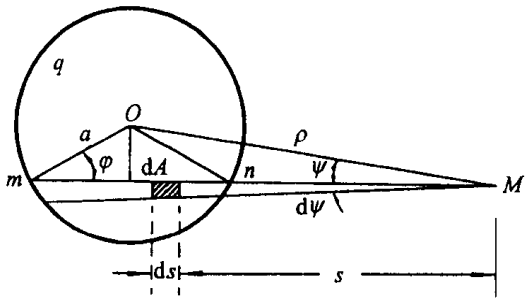


图 10－8

对于半无限体表面上的点 M,首先要区分它在荷载圆之外,还是在荷载圆之内。如果 M 点在荷载圆之外,则由图 10－8 可见,利用式(10－50),得图中阴影部分的合力在 M 点产生的沉陷为

$$\frac{(1-\nu^2)q\mathrm{d}A}{\pi Es}=\frac{(1-\nu^2)qs\mathrm{d}\psi\mathrm{d}s}{\pi Es}=\frac{(1-\nu^2)q}{\pi E}\mathrm{d}\psi\mathrm{d}s$$

因此,M 点的总沉陷为

$$(w)_{z=0}=\frac{(1-\nu^2)q}{\pi E}\iint \mathrm{d}s\mathrm{d}\psi$$

对 s 进行积分,注意弦 mn 的长度为 $2\sqrt{a^2-\rho^2\sin^2\psi}$,并在对 ψ 进行积分时考虑对称性,得到

$$(w)_{z=0}=\frac{4(1-\nu^2)q}{\pi E}\int_0^{\psi_1}\sqrt{a^2-\rho^2\sin^2\psi}\,\mathrm{d}\psi \tag{a}$$

这里的 ψ_1 是 ψ 的最大值，即圆的切线与 OM 之间的夹角，对于确定的点 M，这是确定的值。为了简化积分(a)的运算，我们引进变量 φ，由图可知，它与 ψ 之间的关系为

$$a\sin\varphi=\rho\sin\psi \tag{b}$$

由此得

$$\mathrm{d}\psi=\frac{a\cos\varphi\mathrm{d}\varphi}{\rho\cos\psi}=\frac{a\cos\varphi\mathrm{d}\varphi}{\rho\sqrt{1-\frac{a^2}{\rho^2}\sin^2\varphi}} \tag{c}$$

将式(b)和(c)代入式(a)，并注意到当 ψ 从 0 变化到 ψ_1 时，φ 由 0 变到 $\pi/2$，于是得

$$\begin{aligned}(w)_{z=0}&=\frac{4(1-\nu^2)q}{\pi E}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi}{\rho\sqrt{1-\frac{a^2}{\rho^2}\sin^2\varphi}}\\&=\frac{4(1-\nu^2)q\rho}{\pi E}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{a^2}{\rho^2}\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi-\left(1-\frac{a^2}{\rho^2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-\frac{a^2}{\rho^2}\sin^2\varphi}}\right]\end{aligned} \tag{10-56}$$

式(10－56)右边的两个积分是椭圆积分，它们的值可按 $\frac{a}{\rho}$ 的数值从函数表中查得。当 $\rho=a$ 时，式(10－56)变为

$$(w)_{z=0}=\frac{4(1-\nu^2)qa}{\pi E}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{4(1-\nu^2)qa}{\pi E} \tag{10-57}$$

如果 M 点在荷载圆之内，做法与上述相同。先考虑图 10－9 中的阴影部分(其面积 $\mathrm{d}A=s\mathrm{d}\psi\mathrm{d}s$)在 M 点引起的沉陷，然后经积分，得总的沉陷为

$$(w)_{z=0}=\frac{(1-\nu^2)q}{\pi E}\iint\mathrm{d}\psi\mathrm{d}s \tag{d}$$

由于弦 mn 的长度为 $2a\cos\varphi$，而 ψ 是由 0 变化到 $\pi/2$，故有

$$(w)_{z=0}=\frac{4(1-\nu^2)q}{\pi E}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\cos\varphi\mathrm{d}\psi \tag{e}$$

利用关系 $a\sin\varphi=\rho\sin\psi$，式(e)变为

$$(w)_{z=0}=\frac{4(1-\nu^2)qa}{\pi E}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{\rho^2}{a^2}\sin^2\psi}\,\mathrm{d}\psi \tag{10-58}$$

式(10－58)右边的积分，可根据 $\frac{\rho}{a}$ 的值，通过查表而得到。

若令式(10－58)中的 $\rho=0$，又得到式(10－55)所示的结果，它是最大的沉陷。将式(10－55)与(10－57)进行比较，可见最大沉陷是荷载圆边界沉陷的 $\frac{\pi}{2}$ 倍。由式(10－55)还可以看出，最大沉陷不仅与荷载集度 q 成正比，而且还与荷载圆的半径成正比。

应力也可以利用叠加法求得。例如，对于荷载圆中心下面(即 z 轴上)任意一点 M(图 10－10)，由式(10－47)的第三式，有

$$\sigma_z=-\frac{3z^3}{2\pi}\int_0^a\frac{2\pi\rho q\,\mathrm{d}\rho}{(\rho^2+z^2)^{5/2}}=-q\left[1-\frac{z^3}{(a^2+z^2)^{3/2}}\right] \tag{10－59a}$$

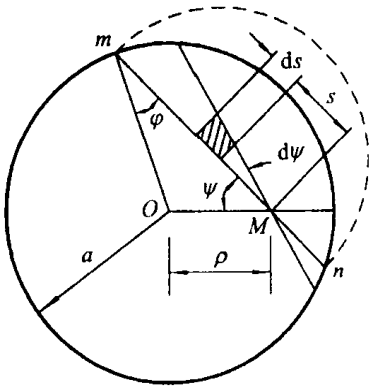


图 10－9

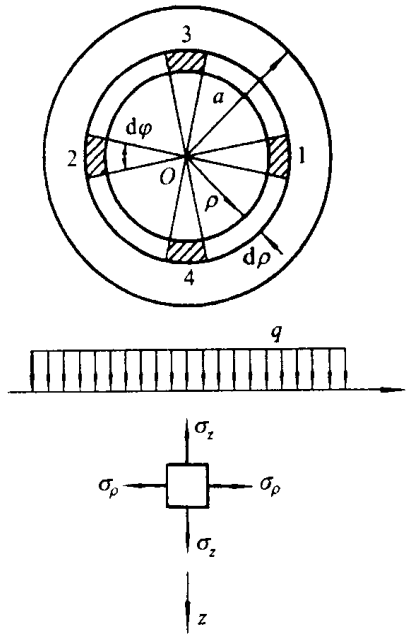


图 10－10

为了求得该点处的应力分量 σ_ρ 和 σ_φ，在荷载圆中分割出微分面积，如图 10－10 中阴影部分所示的微分面 1,2,3,4。由式(10－47)的第一、第二式可以看出，微分面 1,2 上的两个荷载在该点产生的应力分量为

$$\left.\begin{aligned}(\mathrm{d}\sigma_\rho)_{1,2}&=2\,\frac{q\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho}{2\pi r^2}\left[-\frac{3\rho^2 z}{r^3}+\frac{(1-2\nu)r}{r+z}\right]\\(\mathrm{d}\sigma_\varphi)_{1,2}&=2\,\frac{(1-2\nu)q\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho}{2\pi r^2}\left(\frac{z}{r}-\frac{r}{r+z}\right)\end{aligned}\right\} \tag{f}$$

同样，微分面 3,4 上的两个荷载在该点产生的应力分量为

$$\left.\begin{aligned}(\mathrm{d}\sigma_\rho)_{3,4}&=2\,\frac{(1-2\nu)q\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho}{2\pi r^2}\left[\frac{z}{r}-\frac{r}{r+z}\right]\\(\sigma_\varphi)_{3,4}&=2\,\frac{q\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho}{2\pi r^2}\left[-\frac{3\rho^2 z}{r^3}+\frac{(1-2\nu)r}{r+z}\right]\end{aligned}\right\} \tag{g}$$

将式(f)和式(g)对应地叠加，得微分面1,2,3,4的荷载所产生的应力为

$$d\sigma_\rho = d\sigma_\varphi = \frac{q\rho d\varphi d\rho}{\pi}\left[\frac{(1-2\nu)z}{r^3} - \frac{3\rho^2 z}{r^5}\right] \tag{h}$$

为了求得全部荷载在该点所产生的应力分量，只需将式(h)对 φ 从0到 $\pi/2$ 积分，对 ρ 从0到 a 积分，于是得

$$\begin{aligned}\sigma_\rho = \sigma_\varphi &= \frac{q}{2}\int_0^a \left[\frac{(1-2\nu)z}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3\rho^2 z}{(\rho^2+z^2)^{5/2}}\right]\rho d\rho \\ &= -\frac{q}{2}\left[(1-2\nu) + \frac{z^3}{(a^2+z^2)^{3/2}} - \frac{2(1+\nu)z}{(a^2+z^2)^{1/2}}\right] \end{aligned} \tag{10-59b}$$

在荷载圆中心(即 $z=0$)处，有

$$\left.\begin{aligned}\sigma_z &= -q \\ \sigma_\rho = \sigma_\varphi &= -\frac{q(1+2\nu)}{2}\end{aligned}\right\} \tag{i}$$

Oz 轴上任一点的最大切应力发生在与 z 轴成45°的平面上，其值为

$$\frac{1}{2}(\sigma_\varphi - \sigma_\rho) = \frac{q}{2}\left[\frac{1-2\nu}{2} + \frac{(1+\nu)z}{(a^2+z^2)^{1/2}} - \frac{3}{2}\frac{z^3}{(a^2+z^2)^{3/2}}\right] \tag{j}$$

在

$$z = a\sqrt{\frac{2(1+\nu)}{7-2\nu}} \tag{k}$$

处，最大切应力变成最大值，其值为

$$\left[\frac{1}{2}(\sigma_\varphi - \sigma_z)\right]_{\max} = \frac{q}{2}\left[\frac{1-2\nu}{2} + \frac{2}{9}(1+\nu)\sqrt{2(1+\nu)}\right] \tag{l}$$

当 $\nu=0.3$ 时，式(k)和(l)分别变成

$$z = 0.638a$$

$$\left[\frac{1}{2}(\sigma_\varphi - \sigma_z)\right]_{\max} = 0.33q$$

* §10-9 两弹性体之间的接触压力

(一) 两个球体的接触

利用上一节所得的结果，可以导出两个弹性体之间的接触压力及由此引起的应力和变形。下面先讨论两个球体的接触，设两个球体的半径分别为 R_1 和 R_2，如图10-11所示。

设开始时两个球体不受压力作用，它们仅接触于一点 O。此时，在两个球体表面上距公共法线为 ρ 的点 M 和 N(设这两点在球体变形后重合为接触面内

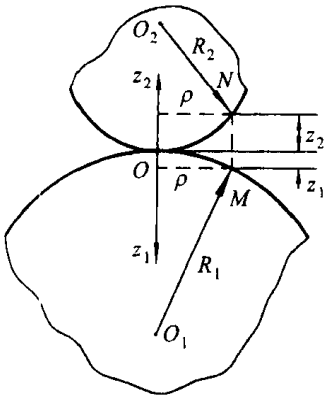


图 10－11

的任意点)，与 O 点的切平面之间的距离 z_1 和 z_2 可分别表示为

$$z_1 = \frac{\rho^2}{2R_1}$$

$$z_2 = \frac{\rho^2}{2R_2}$$

而 M 点与 N 点之间的距离为

$$z_1 + z_2 = \rho^2\left(\frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_2}\right) = \frac{R_1 + R_2}{2R_1R_2}\rho^2 \tag{a}$$

当两个球体沿接触点 O 的公共法线用力 F 相压时，在接触点的附近，将产生局部变形而形成一个圆形的接触面。由于接触面边界的半径总远小于 R_1 和 R_2，所以，可采用 § 10－6 中关于半无限体的结果来讨论这种局部变形。

我们以 α 表示位于 z_1 和 z_2 轴上而距 O 点相当远的两点[①] 因压缩而互相接近的距离。如果点 M 和 N 在两球体产生局部变形后刚巧重合成一个边界点，则应有 $\alpha = z_1 + z_2$。但我们假定点 M 和 N 在球体局部变形后重合为接触面内的任意点，也就是说，点 M 和 N 在接触后还分别在 z_1 方向和 z_2 方向产生位移 w_1 和 w_2，于是有几何关系

$$\alpha = z_1 + z_2 + w_1 + w_2$$

即

$$w_1 + w_2 = \alpha - (z_1 + z_2)$$

将式(a)代入，得

$$w_1 + w_2 = \alpha - \beta\rho^2 \tag{b}$$

其中

① 在这些点上因压缩引起的变形已经可以忽略不计。

$$\beta=\frac{R_1+R_2}{2R_1R_2} \tag{c}$$

现在以图 10-9 中的圆表示接触面，M 点表示下面球体在接触面上的一点（即变形前的 M 点），于是，参照 §10-8 中的式(d)，得该点的位移为

$$w_1=\frac{1-\nu_1^2}{\pi E_1}\iint q\mathrm{d}s\mathrm{d}\psi \tag{d}$$

其中的 E_1 和 ν_1 为下面球体的弹性模量，而积分区域包括整个接触面。对于上面的球体，也可得到类似的关系。于是有

$$w_1+w_2=(k_1+k_2)\iint q\mathrm{d}s\mathrm{d}\psi \tag{e}$$

其中的

$$\left.\begin{aligned}k_1&=\frac{1-\nu_1^2}{\pi E_1}\\ k_2&=\frac{1-\nu_2^2}{\pi E_2}\end{aligned}\right\} \tag{f}$$

将式(e)代入式(b)，得

$$(k_1+k_2)\iint q\mathrm{d}s\mathrm{d}\psi=\alpha-\beta\rho^2 \tag{10-60}$$

到此，把问题归结为去寻求未知函数 q，使积分方程(10-60)得到满足。

赫兹用半逆解法解决了这个问题。他假定接触圆（设其半径为 a）上的压力 q 与接触面上作出的半球面的纵坐标成正比，则方程(10-60)可以满足。

事实上，令 q_0 表示接触圆中心 O 的压力，则根据上述假定，应有

$$q_0=Ka$$

由此，得

$$K=\frac{q_0}{a} \tag{g}$$

常数因子 K 表示压力分布的比例尺。同样，接触圆内任一点的压力，应等于半球面在该点的高度和 $K=\frac{q_0}{a}$ 的乘积。明白了这点以后，从图 10-9 不难看出，式(10-60)左边的积分 $\int q\mathrm{d}s$ 应等于作用于弦 mn 上半圆（用虚线表示的）面积 A 和 $\frac{q_0}{a}$ 的乘积，即

$$\int q\mathrm{d}s=\frac{q_0}{a}A$$

由于

$$A=\frac{\pi}{2}(a^2-\rho^2\sin^2\psi)$$

所以

$$\int q\mathrm{d}s=\frac{q_0}{a}\cdot\frac{\pi}{2}(a^2-\rho^2\sin^2\psi) \tag{h}$$

将式(h)代入式(10-60),有

$$2(k_1+k_2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{q_0}{a}\cdot\frac{\pi}{2}(a^2-\rho^2\sin^2\psi)\mathrm{d}\psi=\alpha-\beta\rho^2$$

积分后,得

$$(k_1+k_2)\frac{\pi^2 q_0}{4a}(2a^2-\rho^2)=\alpha-\beta\rho^2$$

比较等号两边的系数,有

$$\left.\begin{aligned}(k_1+k_2)\frac{\pi^2 aq_0}{2}&=\alpha\\(k_1+k_2)\frac{\pi^2 q_0}{4a}&=\beta\end{aligned}\right\} \tag{i}$$

这说明,只要式(i)成立,赫兹所假定的接触圆上压力分布是正确的。

另外,根据平衡条件,上述半球体的体积与$\frac{q_0}{a}$的乘积应等于总压力F,即

$$\frac{q_0}{a}\frac{2}{3}\pi a^3=F$$

由此得最大压力

$$q_0=\frac{3F}{2\pi a^2} \tag{10-61}$$

将式(c)和(10-61)代入式(i),解得

$$\left.\begin{aligned}a&=\left[\frac{3\pi F(k_1+k_2)R_1R_2}{4(R_1+R_2)}\right]^{\frac{1}{3}}\\\alpha&=\left[\frac{9\pi^2F^2(k_1+k_2)^2(R_1+R_2)}{16R_1R_2}\right]^{\frac{1}{3}}\end{aligned}\right\} \tag{10-62}$$

而式(10-61)又可写为

$$q_0=\frac{3F}{2\pi}\left[\frac{4(R_1+R_2)}{3\pi F(k_1+k_2)R_1R_2}\right]^{\frac{2}{3}} \tag{10-63}$$

当$E_1=E_2=E$,$\nu_1=\nu_2=0.3$时,有

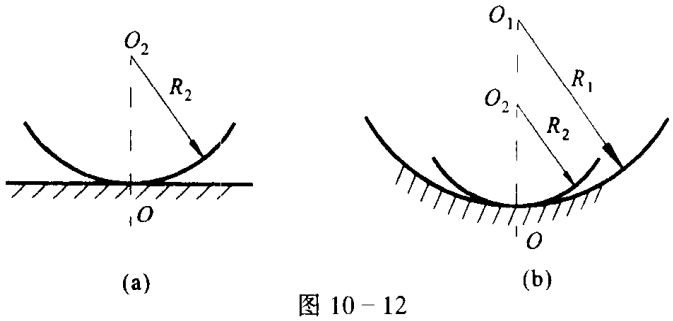
$$a = 1.11\left[\frac{FR_1R_2}{E(R_1+R_2)}\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$\alpha = 1.23\left[\frac{F^2(R_1+R_2)}{E^2R_1R_2}\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$q_0 = 0.388\left[\frac{FE^2(R_1+R_2)^2}{R_1^2R_2^2}\right]^{\frac{1}{3}}$$

求得了接触面之间的压力，利用§10-8导出的公式，可求得两个球体中的应力。最大压应力发生在接触面的中心，其值为 q_0；最大切应力发生在公共法线上距接触中心约为 $0.47a$ 处，其值为 $0.31q_0$；最大拉应力发生在接触面的边界上，其值为 $0.133q_0$。

如球体与平面相接触(图 10-12a)，只需在公式中令 $R_1 \to \infty$，即得要求的结果；如球体与球座相接触(图 10-12b)，只需在以上的公式中令 R_1 为负值即可。



(a) (b)

图 10-12

(二) 两个任意弹性体的接触

对于两个任意弹性体的接触，也可以采用同样的方法处理。把坐标原点放在变形前的接触点 O(参照图 10-11)，以公共切面为 Oxy 平面。此时，弹性体在其接触点附近的曲面可表示为如下的普遍形式：

$$z_1 = f_1(x,y)$$

$$z_2 = f_2(x,y)$$

现把 $f_1(x,y)$ 和 $f_2(x,y)$ 在接触点邻域展成泰勒级数。因为坐标原点取在接触点，且 Oxy 平面为两个物体在接触点 O 的公共切面，所以，两个级数不包括常数项和一次项，而级数的第一项为二次项；又由于我们要研究的主要是接触区域及其附近的应力和变形情况，所以，可以略去三次以上的项。于是，在接触点附近，两个曲面可近似地表示为

$$z_1 = A_1 x^2 + A_2 xy + A_3 y^2$$

$$z_2 = B_1 x^2 + B_2 xy + B_3 y^2$$

而 M 与 N 间的距离为

$$z_1 + z_2 = (A_1 + B_1) x^2 + (A_2 + B_2) xy + (A_3 + B_3) y^2 \tag{j}$$

下面，我们要证明，在 Oz 轴不变的情况下，总可以通过转轴，使式(j)中的 xy 项为零。

为此，用 $\frac{1}{R_1}$，$\frac{1}{R_1'}$ 表示下面弹性体的表面在接触点 O 的两个主曲率(不妨设 $R_1 < R_1'$)，用分别与这两个主曲率对应的主方向作为 Ox_1 轴和 Oy_1 轴的方向，于是，此曲面在接触点邻近的微小区域内，可表示为

$$z_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{R_1} + \frac{y_1^2}{R_1'}\right)$$

同样，对于上面的弹性体，如果用 $\frac{1}{R_2}$，$\frac{1}{R_2'}$ 表示其表面在接触点 O 的主曲率(设 $R_2 < R_2'$)，把与这两个主曲率对应的主方向分别作为 Ox_2 和 Oy_2 的方向，则这个曲面在接触点附近的微小区域内可表示为

$$z_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{x_2^2}{R_2} + \frac{y_2^2}{R_2'}\right)$$

于是，点 M 与 N 之间的距离为

$$z_1 + z_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{R_1} + \frac{y_1^2}{R_1'} + \frac{x_2^2}{R_2} + \frac{y_2^2}{R_2'}\right) \tag{k}$$

如果引入新坐标系 $Ox'y'$，x' 轴与 x_1 轴和 x_2 轴的夹角分别为 ψ_1 和 ψ_2，而 x_1 轴与 x_2 轴的夹角为(图 10－13)

$$\psi = \psi_1 - \psi_2 \tag{l}$$

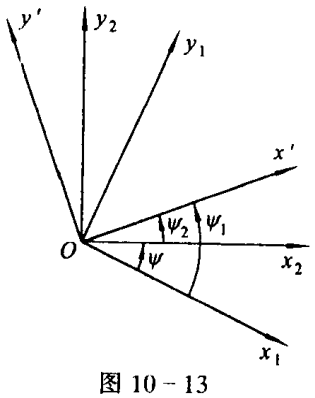


图 10－13

则存在如下的变换关系：

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x'\cos\psi_1 - y'\sin\psi_1 \\ y_1 &= x'\sin\psi_1 + y'\cos\psi_1 \end{aligned}\right\} \tag{m}$$

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= x'\cos\psi_2 - y'\sin\psi_2 \\ y_2 &= x'\sin\psi_2 + y'\cos\psi_2 \end{aligned}\right\} \tag{n}$$

将式(m)和(n)代入式(k),有

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 = \frac{1}{2}\Bigg\{ & x'^2\left[\frac{1}{R_1}\cos^2\psi_1 + \frac{1}{R_1'}\sin^2\psi_1 + \frac{1}{R_2}\cos^2\psi_2 + \right. \\ & \left.\frac{1}{R_2'}\sin^2\psi_2\right] + y'^2\left[\frac{1}{R_1}\sin^2\psi_1 + \frac{1}{R_1'}\cos^2\psi_1 + \right. \\ & \left.\frac{1}{R_2}\sin^2\psi_2 + \frac{1}{R_2'}\cos^2\psi_2\right] - x'y'\left[\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1'}\right)\sin 2\psi_1 + \right. \\ & \left.\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2'}\right)\sin 2\psi_2\right]\Bigg\} \end{aligned} \tag{o}$$

由式(o)可见,要使 $x'y'$ 项不存在,只有令其系数为零,即

$$\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1'}\right)\sin 2\psi_1 + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2'}\right)\sin 2\psi_2 = 0$$

将式(l)代入,稍加运算,得

$$\tan 2\psi_1 = \frac{\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2'}\right)\sin 2\psi}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1'} + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2'}\right)\cos 2\psi} \tag{p}$$

这就是式(j)不出现 xy 项的条件。

现在,设这个条件已经满足。为好看起见,我们把式(o)中的 x' 和 y' 改用 x 和 y 表示,也就是一开始就按不出现 xy 项的要求来选取坐标系,并令

$$\left.\begin{aligned} 2A &= \frac{1}{R_1}\cos^2\psi_1 + \frac{1}{R_1'}\sin^2\psi_1 + \frac{1}{R_2}\cos^2\psi_2 + \frac{1}{R_2'}\sin^2\psi_2 \\ 2B &= \frac{1}{R_1}\sin^2\psi_1 + \frac{1}{R_1'}\cos^2\psi_1 + \frac{1}{R_2}\sin^2\psi_2 + \frac{1}{R_2'}\cos^2\psi_2 \end{aligned}\right\} \tag{q}$$

于是该式简化为

$$z_1 + z_2 = Ax^2 + By^2 \tag{r}$$

将式(q)中的前后两式相加和相减,有

$$A + B = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2'}\right)$$

$$A - B = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1'}\right)\cos 2\psi_1 + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2'}\right)\cos 2\psi_2\right]$$

将式(l)代入,并利用式(p),得

$$\left.\begin{aligned} A+B&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R'_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R'_2}\right)\\ A-B&=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R'_1}\right)^2+\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R'_2}\right)^2+\right.\\ &\qquad\left.2\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R'_1}\right)\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R'_2}\right)\cos 2\psi\right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\right\}\tag{10-64}$$

对给定的问题，R_1，R'_1，R_2，R'_2 和 ψ 已知，故由式(10-64)可求得 A 和 B。

考察式(r)，由于 z_1+z_2 总是正的，所以，A 和 B 也都是正的。由此可知，因为接触面的边界是由两弹性体上 z_1+z_2 等值的点经局部变形叠合而形成的，故显然是椭圆。

设 α，w_1 和 w_2 具有和两个球体接触时相同的意义，于是有几何关系，可得与式(b)相似的关系：

$$\begin{aligned} w_1+w_2&=\alpha-(z_1+z_2)\\ &=\alpha-Ax^2-By^2\end{aligned}\tag{s}$$

这里的 A 和 B 由式(10-64)求得。另一方面，利用式(10-50)，可得

$$w_1+w_2=\left(\frac{1-\nu_1^2}{\pi E_1}+\frac{1-\nu_2^2}{\pi E_2}\right)\iint\frac{q(\xi,\eta)}{\rho}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\tag{t}$$

这里的 ρ 为接触面上任意一点(ξ,η)到接触面上指定点(x,y)的距离，即

$$\rho=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$$

将式(t)代入式(s)，得

$$(k_1+k_2)\iint\frac{q}{\rho}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=\alpha-Ax^2-By^2\tag{10-65}$$

这里的 k_1 和 k_2 仍如式(f)所示。这样，就把求解两个弹性体接触面上的压力问题归结为去求解积分方程(10-65)。

赫兹用下述方法解决了这个问题。他以接触面(周界为椭圆，设两个半轴为 a 和 b)为基础作半椭球面，则可以证明，接触面上的压力与该椭球面的纵坐标成正比，即

$$q(\xi,\eta)=q_0\sqrt{1-\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}}\tag{u}$$

这里的 q_0 表示中心点 O 的压力。由平衡条件可知，半椭球的体积应等于总压力 F，即

$$F=\iint q\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=\frac{2}{3}\pi abq_0$$

由此

$$q_0=\frac{3F}{2\pi ab}\tag{v}$$

代入式(u),得接触面上的压力分布为

$$q(\xi,\eta)=\frac{3F}{2\pi ab}\sqrt{1-\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}} \tag{10-66}$$

要求出其中的 a 和 b,需将式(10-66)代入方程(10-65),并经过复杂的计算。现将结果给出如下:

$$\left.\begin{aligned} a&=m\left[\frac{3\pi F(k_1+k_2)}{4(A+B)}\right]^{\frac{1}{3}}\\ b&=n\left[\frac{3\pi F(k_1+k_2)}{4(A+B)}\right]^{\frac{1}{3}} \end{aligned}\right\} \tag{10-67}$$

其中的 $A+B$ 由式(10-64)确定,而系数 m 和 n 是与比率$\frac{A-B}{A+B}$有关的数值。令

$$\frac{A-B}{A+B}=\cos\theta \tag{10-68}$$

则 θ 与 m 和 n 间的对应关系见下表:

θ/(°)	m	n	θ/(°)	m	n
18	4.156	0.394	55	1.611	0.678
20	3.850	0.410	60	1.486	0.717
25	3.152	0.456	65	1.378	0.759
30	2.731	0.493	70	1.284	0.802
35	2.937	0.530	75	1.202	0.846
40	2.136	0.567	80	1.128	0.893
45	1.926	0.604	85	1.061	0.944
50	1.754	0.641	90	1.000	1.000

综上所述,对于给定的问题,先由式(10-64)求出 $A+B$ 和 $A-B$,然后,由式(10-68)确定 θ 的值,再利用上表通过插值法求得 m 和 n;有了 m 和 n,利用式(10-67)求出 a 和 b,最后,由式(10-66)给出接触面上的压力分布。

如两个弹性体都是球体,则有 $R_1=R_1'$,$R_2=R_2'$,由式(10-64)的第二式得 $A=B$,代入式(10-68),得 $\theta=90°$,这时,表中 $m=n=1$,而式(10-67)变成

$$a=b=\left[\frac{3\pi P(k_1+k_2)R_1R_2}{4(R_1+R_2)}\right]^{\frac{1}{3}}$$

这就是式(10-62)。

思考题与习题

10-1 试证明对于不计体力的空间轴对称问题,若取

$$u_\rho = \frac{1}{2G}\frac{\partial \Phi}{\partial \rho},\quad w = \frac{1}{2G}\frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

这里 $\Phi = \Phi(\rho, z)$，且

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \text{const}.$$

则与 u_ρ 和 w 对应的应力分量满足平衡微分方程。

10-2 试证明对于不计体力的球对称问题，若取

$$u_r = \frac{1}{2G}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}$$

这里的 $\Phi = \Phi(r)$，且

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\mathrm{d}^2 \Phi}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} = \text{const}.$$

则方程(10-13)是满足的。

10-3 试从方程(10-13)出发(设体力 F_r 为零)，求空心圆球内外壁受均布压力作用时的位移和应力。设内外半径分别为 a 和 b，内外壁压力分别为 q_1 和 q_2。

10-4 一个具有小圆球孔的长方体(设球孔离六个面都较远)，在六个面上受均布压力 q 作用，求球孔壁上的应力分布情况。

10-5 内半径为 a、外半径为 b 的空心圆球，外壁固定而内壁受均布压力 q 作用。求最大径向位移和最大切向正应力。

10-6 试用拉梅应变势 $\Phi = A\ln \rho + B\rho^2$ 导出拉梅解答式(7-13)。

10-7 两个圆柱体，半径均为 R，弹性模量也相同，在互相垂直的位置以力 F 相压，试求最大压力 q_0。

10-8 圆柱体的侧面受均布压力 q_1 的作用，两端面上作用着均布压力 q_2，试用乐甫应变函数

$$\varphi_3 = A\rho^2 z + Bz^3$$

求应力分量，并求圆柱体的体积变化。

10-9 试用乐甫应变函数

$$\varphi_3 = A\rho^2 z + Bz^3 + Cz\ln \rho$$

求拉梅解答式(7-13)。

10-10 试借助于纽勃-巴博考维奇通解(10-35)′，取 $\Phi_0 = 0$，$\zeta_3 = B/r$，求开尔文问题的解答。

10-11 试运用纽勃-巴博考维奇通解求解柱形杆的扭转问题。

提示：选择适当的调和函数 Φ_0，ζ_1，ζ_2，ζ_3，使所得的位移与式(8-1)一致。

*第十一章 热 应 力

以上各章已解决了一系列由外力所引起的应力和变形问题。本章将研究由于温度变化(以下简称**变温**)在弹性体内所产生的应力,这种应力,称为**热应力**。在各类机器(例如电动机的热交换器、锅炉、化工机械中的高温高压容器)乃至像大型水利工程和土木工程的设计中,无不遇到热应力问题。尤其随着原子核动力技术的发展,高速宇宙飞行器的实现,非均匀变温所产生的高温强度问题,已成为工程学中的重大问题。对于这类问题,与材料寿命有关的热应力分析,在设计中占据着重要的位置。

需要指出的是:温度的变化将引起变形,而变形将产生热量,从而又引起温度的变化,因此,变形和温度是相互**耦合**的;对耦合问题,方程的解耦,往往成为数学上的难题。不过,对于某些工程实际问题,当它们的体应变为零,或体应变的变化速度非常缓慢时,则变形对温度的影响可以忽略不计,从而变为非耦合问题。本章只讨论非耦合问题,而且,除了我们已作过的均匀、各向同性、线弹性和小变形的假设外,这里还假设温度变化不大,于是,所得的全部方程和定解条件都是线性的。我们将研究这种问题的理论,称为**线性热弹性力学**。

在变形和温度不耦合的情况下,要求出热应力,须进行两方面的计算:(1)由热传导方程和问题的初始条件及边界条件,计算弹性体内各点在各瞬时的温度,即所谓"决定温度场",而前后两个瞬时温度场之差,就是弹性体的变温。(2)求解热弹性力学的基本方程而得到热应力,即所谓"决定热应力场"。由于前者在数学物理方程中已作过详细的论述,限于篇幅,下面拟重点介绍"决定热应力场"的问题。

§11-1 热传导方程及其定解条件

变形和温度不耦合的**热传导方程**为

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = a\ \nabla^2 \tau + \frac{W}{c\rho} \tag{11-1}$$

其中 $\tau(x,y,z,t)$为温度,$W(x,y,z,t)$为单位时间内每单位体积的热源的发热量,即热源强度,$a=k/c\rho$ 为导温系数,c 为比热容,ρ 为密度,k 为导热系数。对于均匀材料,c,ρ,k,a 均为常量。

为了能够求解热传导方程，从而求得温度场，必须给定物体在初始瞬时的温度分布，即所谓初始条件；同时还必须给定初始瞬时以后物体边界与周围介质之间进行热交换的规律，即所谓边界条件。初始条件和边界条件合称为定解条件，现分述如下。

设在初始瞬时 $t=0$ 时的温度为 $f(x,y,z)$，则初始条件可表示为

$$(\tau)_{t=0}=f(x,y,z) \tag{11-2}$$

在某些特殊情况下，初始瞬时的温度分布为均匀的，则式(11-2)变为

$$(\tau)_{t=0}=C \tag{11-3}$$

其中 C 为常量。

边界条件常见的有三种形式：

(1) 已知物体边界处的温度为 $\varphi(t)$，则边界条件可表示为

$$(\tau)_s=\varphi(t) \tag{11-4}$$

其中 $(\tau)_s$ 表示温度在物体边界任一点的值。

(2) 已知物体边界处的法向热流密度为 $\psi(t)$，则边界条件为

$$(q_v)_s=\psi(t) \tag{a}$$

其中 q_v 为法向热流密度，而 $(q_v)_s$ 表示法向热流密度在物体边界任一点的值。由于热流密度在任一方向的分量，等于导热系数乘以温度在该方向的递减率，故上式又可表示为

$$-k\left(\frac{\partial\tau}{\partial v}\right)_s=\psi(t) \tag{11-5}$$

其中 $\left(\frac{\partial\tau}{\partial v}\right)_s$ 表示温度沿物体边界法向的方向导数在物体边界任一点的值。如果边界是绝热的，则由于热流密度为零，于是式(11-5)变为

$$\left(\frac{\partial\tau}{\partial v}\right)_s=0 \tag{11-6}$$

(3) 对流换热边界条件。设弹性体边界处的温度为 τ_s，周围介质的温度为 τ_e，则按热交换定律，通过边界的法向热流密度 q_v，正比例于物体与周围介质的温差，即

$$(q_v)_s=\beta(\tau_s-\tau_e) \tag{b}$$

其中 β 为散热系数。按照从式(a)化为式(11-5)同样的理由，式(b)又可写成

$$-\left(\frac{\partial\tau}{\partial v}\right)_s=\frac{\beta}{k}(\tau_s-\tau_e) \tag{11-7}$$

散热系数 β 表示热流通过边界传入周围介质的能力，其值越小，散热条件

越差。当 $\beta\to 0$ 时，由式(11-7)可知，$\left(\frac{\partial\tau}{\partial v}\right)_s\to 0$，这就是绝热边界条件(11-6)。当 $\beta\to\infty$ 时，由式(11-7)可得 $\tau_s=\tau_e$，即物体边界处的温度和周围介质的温度相等，这就是边界条件(11-4)。

在热应力分析中，需要的是温度场 τ 相对于某一参考状态温度场 τ_0 的变化，即变温

$$T=\tau-\tau_0$$

如果参考状态温度场是均匀的，即

$$\tau_0=\text{const.}$$

则变温 T 应满足与式(11-1)相同的热传导方程

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a\ \nabla^2 T+\frac{W}{c\rho} \tag{11-8}$$

求解方程(11-8)所需的定解条件可按与上面类似的方式给出。

§11-2 热膨胀和由此产生的热应力

弹性体内温度的升降，会引起它体积的膨胀或收缩。现想象地从弹性体内取出一个棱边长度分别为 dx,dy,dz 的微分长方体，设其初始温度为 τ_0，然后让温度增至 τ，变温 $T=\tau-\tau_0$。如果此微分单元体不受同一物体其他部分的约束，则由于材料的各向同性，三条棱边将产生相同的正应变 αT，而其切应变分量为零，即

$$\varepsilon_x=\varepsilon_y=\varepsilon_z=\alpha T,\quad \gamma_{yz}=\gamma_{xz}=\gamma_{xy}=0 \tag{11-9}$$

α 称为**线膨胀系数**，由于假设温度变化不大，故可以把它看作为常量。

据上述的理由，可以想象：如果一个弹性体不受任何约束，也不受任何外力作用，设其初始温度 $\tau_0=\text{const.}$，然后让其温度均匀地增加(或减少)至 τ，则由于其内各部分具有相同的膨胀(或收缩)变形，且这种变形不受外界的任何限制，因此是不会产生热应力的。但如果弹性体内变温是不均匀的，则在体内各部分将产生不同的膨胀(或收缩)变形，为使变形后的物体仍保持为一个连续体，其各部分之间的变形一般会受到相互牵制。因此，弹性体的非均匀变温，即使不受任何约束，也会产生热应力[①]。不失一般性，下面我们只研究无外力作用、无外界约束的弹性体，由于非均匀变温而引起的热应力问题。

① 特殊的非均匀温度变化也不会产生热应力。例如在定常温度场中，对于单连通区域，若内部无源，则不会产生热应力。

§11-3 热应力的简单问题

简单的热应力问题能简化为相当于边界力已知的情况来处理。作为第一个例子，我们考察一块等厚度的矩形薄板，其变温 T 仅仅是 y 的函数，而与 x 和 z 无关(图 11-1)。

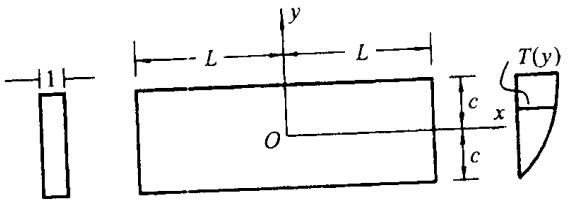


图 11-1

先作定性分析。我们假想将变温前的板分割成无数个棱边与坐标轴平行的平行六面体，并认为彼此之间是不相干的。显然，当板内的温度改变 T 时，各单元体的每条棱边将产生数值为 αT 的相对伸长度。注意到板的变温 T 仅依赖于坐标 y，而与 x 和 z 无关，故为使各自膨胀后的单元体能重新拼合成连续的整体，只有沿 y 方向的两个相邻的单元体之间在 x 方向的变形受到相互的牵制；这也等于说，板内只存在热应力 σ_x。为了求得 σ_x，我们先让每一个单元体在纵方向的热应变 αT 完全被阻止。为了实现这一点，要求在各单元体的纵向存在应力

$$\sigma'_x = -\alpha TE \tag{a}$$

显然，由于板的侧向是自由的，故应方式(a)的采用不会引起板的侧向应力。另外，为了在整个板内保持以式(a)表示的应力状态，在矩形板的两端处必须施以 $-\alpha TE$ 的面力。但因在矩形板的两端是无面力作用的，为了消除两端面上的压力 $-\alpha TE$，必须再在这两个面上施以拉力 αTE。因此，板内的热应力应等于由于两端面上的拉力 αTE 所产生的应力和式(a)表示的应力的叠加。如果 $2c \ll 2L$，则根据局部性原理，在两端面上的边界条件可以放松，我们可以用由拉力 αTE 的主矢量和主矩在板内所产生的应力来代替直接由拉力 αTE 所产生的应力。αTE 的主矢量为

$$\int_{-c}^{c} \alpha TE \mathrm{d}y$$

它在板内所引起的应力

$$\sigma''_x = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} \alpha TE \mathrm{d}y \tag{b}$$

拉力 αTE 的主矩为

$$M=\int_{c}^{c}\alpha TEy\mathrm{d}y$$

由此产生的弯曲应力为

$$\sigma_x'''=\frac{My}{I}=\frac{3y}{2c^3}\int_{-c}^{c}\alpha ET(y)y\mathrm{d}y \tag{c}$$

叠加式(a),(b)和(c),得矩形板内的热应力为

$$\sigma_x=-\alpha ET(y)+\frac{1}{2c}\int_{-c}^{c}\alpha ET(y)\mathrm{d}y+\frac{3y}{2c^3}\int_{-c}^{c}\alpha ET(y)y\mathrm{d}y \tag{11－10}$$

若变温 $T(y)$是偶函数,则式(11－10)右边的最后一项为零,于是得

$$\sigma_x=-\alpha ET(y)+\frac{1}{2c}\int_{-c}^{c}\alpha ET(y)\mathrm{d}y \tag{11－11}$$

例如,对于变温 T 为抛物线分布的情况,设

$$T=T_0(1-y^2/c^2)$$

代入式(11－11)得到

$$\sigma_x=\frac{2}{3}\alpha ET_0-\alpha ET_0\left(1-\frac{y^2}{c^2}\right) \tag{11－12}$$

作为简单热应力问题的第二个例子,我们考察一个大的球体,设位于中心部位半径为 a 的小球体内变温 T 为常数。如该小球体完全不受约束,则其径向膨胀为 αTa。但是,由于小球是大球的一部分,且远离边界,所以它的热膨胀受到外侧部分的约束。结果在小球表面上受到等压力 p 的作用,而由此引起的径向应变为 $p(1-2\nu)/E$。因此,小球体内总的径向应变为

$$\alpha T-\frac{p(1-2\nu)}{E}$$

而半径的改变

$$\Delta R=\alpha Ta-\frac{pa(1-2\nu)}{E} \tag{d}$$

我们再考察上述的压力 p 对小球外侧球体的作用。设大球半径为 b,则由式(10－23)得应力

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=\frac{pa^3(b^3-r^3)}{r^3(a^3-b^3)}\\ \sigma_t&=-\frac{pa^3(2r^3+b^3)}{2r^3(a^3-b^3)}\end{aligned}\right\} \tag{e}$$

当 $b\gg a$ 时,

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&\approx-\frac{pa^3}{r^3}\\ \sigma_t&\approx\frac{pa^3}{2r^3}\end{aligned}\right\} \tag{f}$$

在 $r=a$ 处,有

$$\sigma_r=-p,\qquad \sigma_t=\frac{p}{2}$$

如果注意到 $\varepsilon_\theta=\varepsilon_\varphi=\varepsilon_t=\dfrac{u_r}{r}$,则

$$\begin{aligned}\Delta R&=(u_r)_{r=a}=(a\varepsilon_t)_{r=a}\\&=\frac{a}{E}[\sigma_t-\nu(\sigma_r+\sigma_t)]_{r=a}\\&=\frac{pa}{2E}(1+\nu)\end{aligned}\tag{g}$$

联立式(d)和式(g),得

$$p=\frac{2}{3}\frac{\alpha ET}{1-\nu}$$

代入式(e),故最后得小球外侧球体内的应力分量

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=-\frac{2}{3}\frac{\alpha ETa^3}{(1-\nu)r^3}\\\sigma_t&=\frac{1}{3}\frac{\alpha ETa^3}{(1-\nu)r^3}\end{aligned}\right\}\tag{11-13}$$

§11-4 热弹性力学的基本方程

热弹性力学的基本方程仍包括平衡方程、几何方程和物理方程,平衡方程和几何方程同等温情况一样。设不计体力,平衡方程为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}&=0\\\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}&=0\\\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}&=0\end{aligned}\right\}\tag{11-14}$$

几何方程为

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z}\\\gamma_{yz}&=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\\\gamma_{xz}&=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\\\gamma_{xy}&=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}\right\}\tag{11-15}$$

物理方程和等温情况有所不同。因为在变温情况下，弹性体的应变分量应由两部分叠加而成：其一，是由于自由热膨胀引起的应变分量，如式(11-9)所示；其二，在热膨胀时由于弹性体内各部分之间的相互约束所引起的应变分量，它们和热应力之间应服从胡克定律。因此，变温情况下的物理方程为

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha T \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] + \alpha T \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha T \\
\gamma_{yz} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{yz} \\
\gamma_{xz} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xz} \\
\gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}
\end{aligned}\right\} \tag{11-16}$$

也可用应变分量来表示应力分量，即

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_x - \frac{\alpha E T}{1-2\nu} \\
\sigma_y &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_y - \frac{\alpha E T}{1-2\nu} \\
\sigma_z &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_z - \frac{\alpha E T}{1-2\nu} \\
\tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \\
\tau_{xz} &= G\gamma_{xz} \\
\tau_{xy} &= G\gamma_{xy}
\end{aligned}\right\} \tag{11-17}$$

如果将式(11-15)代入，则应力分量又可通过位移分量表示，有

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \lambda\theta + 2G\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\alpha E T}{1-2\nu} \\
\sigma_y &= \lambda\theta + 2G\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\alpha E T}{1-2\nu} \\
\sigma_z &= \lambda\theta + 2G\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\alpha E T}{1-2\nu} \\
\tau_{yz} &= G\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\
\tau_{xz} &= G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\
\tau_{xy} &= G\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{11-18}$$

这里

$$\theta=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

在物体的边界处，还须满足面力为零的应力边界条件

$$\left.\begin{aligned}0&=\sigma_x l+\tau_{yx}m+\tau_{zx}n\\0&=\tau_{xy}l+\sigma_y m+\tau_{zy}n\\0&=\tau_{xz}l+\tau_{yz}m+\sigma_z n\end{aligned}\right\}\tag{11-19}$$

和位移边界条件

$$u=\bar{u},\quad v=\bar{v},\quad w=\bar{w}\tag{11-20}$$

参照§10-1，还不难写出热弹性力学基本方程的柱坐标和球坐标形式。为考虑到下面举例的需要，现只分别写出它们轴对称和球对称的特殊形式[①]。

轴对称的热弹性力学基本方程：

平衡微分方程

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho}+\frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial z}+\frac{\sigma_\rho-\sigma_\varphi}{\rho}=0\\&\frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial\rho}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{\rho z}}{\rho}=0\end{aligned}\right\}\tag{11-21}$$

几何方程

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_\rho&=\frac{\partial u_\rho}{\partial\rho}\\\varepsilon_\varphi&=\frac{\partial u_\rho}{\rho}\\\varepsilon_z&=\frac{\partial w}{\partial z}\\\gamma_{\rho z}&=\frac{\partial u_\rho}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial\rho}\end{aligned}\right\}\tag{11-22}$$

物理方程

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\rho&=\frac{E}{1+\nu}\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\theta+\varepsilon_\rho\right)-\frac{\alpha ET}{1-2\nu}\\\sigma_\varphi&=\frac{E}{1+\nu}\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\theta+\varepsilon_\varphi\right)-\frac{\alpha ET}{1-2\nu}\\\sigma_z&=\frac{E}{1+\nu}\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\theta+\varepsilon_z\right)-\frac{\alpha ET}{1-2\nu}\\\tau_{\rho z}&=\frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{\rho z}\end{aligned}\right\}\tag{11-23}$$

球对称的热弹性力学基本方程：

平衡微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_r}{\mathrm{d}r}+\frac{2(\sigma_r-\sigma_T)}{r}=0\tag{11-24}$$

① 这两种形式要求物体的几何形状及温度变化分别是轴对称和球对称的。

几何方程

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\mathrm{d}u_r}{\mathrm{d}r}\\ \varepsilon_t &= \frac{u_r}{r}\end{aligned}\right\} \tag{11-25}$$

物理方程

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E}{1+\nu}\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\theta+\varepsilon_r\right)-\frac{\alpha ET}{1-2\nu}\\ \sigma_t &= \frac{E}{1+\nu}\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\theta+\varepsilon_t\right)-\frac{\alpha ET}{1-2\nu}\end{aligned}\right\} \tag{11-26}$$

解决热弹性力学问题仍可采用两种方法，即位移解法和应力解法。下面，我们将分别讨论这两种解法。

§11-5 位移解法

以位移作为基本未知函数。将式(11-18)代入方程(11-14)，得到变温情况下以位移表示的平衡微分方程：

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+G)\frac{\partial\theta}{\partial x}+G\nabla^2 u-\frac{\alpha E}{1-2\nu}\frac{\partial T}{\partial x}=0\\ (\lambda+G)\frac{\partial\theta}{\partial y}+G\nabla^2 v-\frac{\alpha E}{1-2\nu}\frac{\partial T}{\partial y}=0\\ (\lambda+G)\frac{\partial\theta}{\partial z}+G\nabla^2 w-\frac{\alpha E}{1-2\nu}\frac{\partial T}{\partial z}=0\end{aligned}\right\} \tag{11-27}$$

如果将式(11-18)代入应力边界条件(11-19)，得到变温情况下以位移表示的应力边界条件

$$\left.\begin{aligned}\frac{\alpha ET}{1-2\nu}l &= \lambda\theta l+G\left(\frac{\partial u}{\partial x}l+\frac{\partial u}{\partial y}m+\frac{\partial u}{\partial z}n\right)+\\ &\quad G\left(\frac{\partial u}{\partial x}l+\frac{\partial v}{\partial x}m+\frac{\partial w}{\partial x}n\right)\\ \frac{\alpha ET}{1-2\nu}m &= \lambda\theta m+G\left(\frac{\partial v}{\partial x}l+\frac{\partial v}{\partial y}m+\frac{\partial v}{\partial z}n\right)+\\ &\quad G\left(\frac{\partial u}{\partial y}l+\frac{\partial v}{\partial y}m+\frac{\partial w}{\partial y}n\right)\\ \frac{\alpha ET}{1-2\nu}n &= \lambda\theta n+G\left(\frac{\partial w}{\partial x}l+\frac{\partial w}{\partial y}m+\frac{\partial w}{\partial z}n\right)+\\ &\quad G\left(\frac{\partial u}{\partial z}l+\frac{\partial v}{\partial z}m+\frac{\partial w}{\partial z}n\right)\end{aligned}\right\} \tag{11-28}$$

将式(11-27)和(11-28)分别与式(5-10)和(5-11)比较可见：

$$-\frac{\alpha E}{1-2\nu}\frac{\partial T}{\partial x},\quad -\frac{\alpha E}{1-2\nu}\frac{\partial T}{\partial y},\quad -\frac{\alpha E}{1-2\nu}\frac{\partial T}{\partial z}$$

代替了体力分量 F_x, F_y, F_z，而

$$\frac{\alpha ET}{1-2\nu}l,\quad \frac{\alpha ET}{1-2\nu}m,\quad \frac{\alpha ET}{1-2\nu}n$$

代替了面力分量 $\bar{f}_x, \bar{f}_y, \bar{f}_z$。因此，在一定的位移边界条件下，弹性体内由于变温而引起的位移，等于等温情况下受假想体力

$$F_x = -\frac{\alpha E}{1-2\nu}\frac{\partial T}{\partial x}$$

$$F_y = -\frac{\alpha E}{1-2\nu}\frac{\partial T}{\partial y}$$

$$F_z = -\frac{\alpha E}{1-2\nu}\frac{\partial T}{\partial z}$$

和假想的法向面力

$$\frac{\alpha ET}{1-2\nu}$$

作用时的位移。在应力边界条件(11－28)和位移边界条件(11－20)下求得了方程(11－27)的解后，利用式(11－18)可求得应力分量。

§11－6 圆球体的球对称热应力

设圆球体内的变温 T 对球心是对称分布的，则此问题是球对称问题。采用球对称的热弹性力学基本方程(11－24)至(11－26)，并将式(11－25)代入式(11－26)，然后将所得的结果代入式(11－24)，得球对称问题以位移表示的平衡微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_r}{\mathrm{d}r^2}+\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}u_r}{\mathrm{d}r}-\frac{2u_r}{r^2}=\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} \tag{a}$$

或写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2 u_r)\right]=\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} \tag{a}'$$

其解是

$$u_r=\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha\frac{1}{r^2}\int_a^r Tr^2\mathrm{d}r+C_1 r+\frac{C_2}{r^2} \tag{b}$$

这里，C_1 和 C_2 是积分常数，以后由边界条件确定；a 是积分下限，对空心球体，a 为内半径。

将式(b)代入式(11－25)，然后将所得的结果再代入式(11－26)，得对应的热应力分量为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= -\frac{2\alpha E}{1-\nu}\frac{1}{r^3}\int_a^r Tr^2\mathrm{d}r + \frac{EC_1}{1-2\nu} - \frac{2EC_2}{1+\nu}\frac{1}{r^3}\\ \sigma_t &= \frac{\alpha E}{1-\nu}\frac{1}{r^3}\int_a^r Tr^2\mathrm{d}r + \frac{EC_1}{1-2\nu} + \frac{EC_2}{1+\nu}\frac{1}{r^3} - \frac{\alpha ET}{1-\nu}\end{aligned}\right\} \quad (c)$$

下面考虑两种特殊情况。

(一) 实心圆球体

对于半径为 b 的实心球体，取下限 a 为零。由于在 $r=0$ 处，$u_r=0$，所以，从式(b)中的

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^2}\int_0^r Tr^2\mathrm{d}r = 0$$

可知，C_2 必为零。这样，式(c)给出的应力在球心给出有限值。C_1 由边界条件

$$(\sigma_r)_{r=b} = 0$$

确定。由此得

$$C_1 = \frac{2(1-2\nu)\alpha}{1-\nu}\frac{1}{b^3}\int_0^b Tr^2\mathrm{d}r$$

代入式(c)，得实心圆球体内的热应力分量

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{2\alpha E}{1-\nu}\left(\frac{1}{b^3}\int_0^b Tr^2\mathrm{d}r - \frac{1}{r^3}\int_0^r Tr^2\mathrm{d}r\right)\\ \sigma_t &= \frac{\alpha E}{1-\nu}\left(\frac{2}{b^3}\int_0^b Tr^2\mathrm{d}r + \frac{1}{r^3}\int_0^r Tr^2\mathrm{d}r - T\right)\end{aligned}\right\} \quad (11-29)$$

(二) 空心圆球体

本问题的边界条件为

$$(\sigma_r)_{r=a} = 0,\ (\sigma_r)_{r=b} = 0$$

将它用于式(c)的第一式，有

$$\frac{EC_1}{1-2\nu} - \frac{2EC_2}{1+\nu}\frac{1}{a^3} = 0$$

$$-\frac{2\alpha E}{1-\nu}\frac{1}{b^3}\int_a^b Tr^2\mathrm{d}r + \frac{EC_1}{1-2\nu} - \frac{2EC_2}{1+\nu}\frac{1}{b^3} = 0$$

解得 C_1 和 C_2 后代入式(c)，得空心球体内的热应力分量

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{2\alpha E}{1-\nu}\left(\frac{r^3-a^3}{(b^3-a^3)r^3}\int_a^b Tr^2\mathrm{d}r - \frac{1}{r^3}\int_a^r Tr^2\mathrm{d}r\right)\\ \sigma_t &= \frac{\alpha E}{1-\nu}\left(\frac{2r^3+a^3}{2(b^3-a^3)r^3}\int_a^b Tr^2\mathrm{d}r + \frac{1}{2r^3}\int_a^r Tr^2\mathrm{d}r - \frac{T}{2}\right)\end{aligned}\right\} \quad (11-30)$$

例如，设变温 T 为[①]

$$T=\frac{T_a a}{b-a}\left(\frac{b}{r}-1\right)$$

则由式(11－30)可求得热应力分量为

$$\sigma_r=\frac{\alpha E T_a}{1-\nu}\frac{ab}{b^3-a^3}\left[a+b-\frac{1}{r}(b^2+ab+a^2)+\frac{a^2b^2}{r^3}\right]$$

$$\sigma_t=\frac{\alpha E T_a}{1-\nu}\frac{ab}{b^3-a^3}\left[a+b-\frac{1}{2r}(b^2+ab+a^2)-\frac{a^2b^2}{2r^3}\right]$$

§11－7 热弹性应变势的引用

方程(11－27)是非齐次偏微分方程组，它的求解可分两步进行：第一步先求出它的任意一组特解，这一组特解并不一定满足问题的边界条件；第二步，求出它的某一组齐次解，使这一组解与上述特解叠加以后能满足边界条件。

为了求得方程(11－27)的特解，可引进一个函数 $\Phi(x,y,z)$，使

$$u'=\frac{\partial\Phi}{\partial x},\quad v'=\frac{\partial\Phi}{\partial y},\quad w'=\frac{\partial\Phi}{\partial z} \tag{11-31}$$

函数 Φ 称为**热弹性应变势**。将式(11－31)代入式(11－27)，并注意到

$$\lambda=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},\quad G=\frac{E}{2(1+\nu)}$$

有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\Phi&=\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha\frac{\partial T}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\nabla^2\Phi&=\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha\frac{\partial T}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\nabla^2\Phi&=\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha\frac{\partial T}{\partial z}\end{aligned}\right\} \tag{a}$$

显然，如果函数 Φ 满足微分方程

$$\nabla^2\Phi=\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha T \tag{11-32}$$

则式(a)将成为恒等式。这等于说，只要 Φ 满足方程(11－32)，则由式(11－31)给出的位移分量就能满足方程(11－27)，因而能作为方程(11－27)的特解。将

---

① 这是在边界条件 $(T)_{r=a}=T_a$，$(T)_{r=b}=0$ 下，定常无内热源球对称的热传导方程 $\nabla^2 T=\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}r^2}+\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}=0$ 的解。

式(11－31)和由式(11－32)得来的 $\alpha T=\dfrac{1-\nu}{1+\nu}\nabla^2\Phi$ 代入式(11－18)，并注意到 $\lambda=\dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$，$G=\dfrac{E}{2(1+\nu)}$，得到与位移特解对应的应力分量

$$\left.\begin{aligned}
\sigma'_x &= -2G\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)\\
\sigma'_y &= -2G\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)\\
\sigma'_z &= -2G\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)\\
\tau'_{yz} &= 2G\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z}\\
\tau'_{xz} &= 2G\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z}\\
\tau'_{xy} &= 2G\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}
\end{aligned}\right\}\tag{b}$$

若方程(11－27)的齐次解用 u''，v''，w'' 表示，利用几何方程和无变温时的物理方程，可得与此对应的应力分量

$$\left.\begin{aligned}
\sigma''_x &= 2G\left[\frac{\partial u''}{\partial x}+\frac{\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u''}{\partial x}+\frac{\partial v''}{\partial y}+\frac{\partial w''}{\partial z}\right)\right]\\
\sigma''_y &= 2G\left[\frac{\partial v''}{\partial y}+\frac{\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u''}{\partial x}+\frac{\partial v''}{\partial y}+\frac{\partial w''}{\partial z}\right)\right]\\
\sigma''_z &= 2G\left[\frac{\partial w''}{\partial z}+\frac{\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u''}{\partial x}+\frac{\partial v''}{\partial y}+\frac{\partial w''}{\partial z}\right)\right]\\
\tau''_{yz} &= G\left(\frac{\partial w''}{\partial y}+\frac{\partial v''}{\partial z}\right)\\
\tau''_{xz} &= G\left(\frac{\partial u''}{\partial z}+\frac{\partial w''}{\partial x}\right)\\
\tau''_{xy} &= G\left(\frac{\partial v''}{\partial x}+\frac{\partial u''}{\partial y}\right)
\end{aligned}\right\}\tag{c}$$

这样，总的位移分量为

$$u=u'+u'',\quad v=v'+v'',\quad w=w'+w''$$

要求它们满足位移边界条件(11－20)；总应力分量为

$$\sigma_x=\sigma'_x+\sigma''_x,\quad \sigma_y=\sigma'_y+\sigma''_y,\quad \sigma_z=\sigma'_z+\sigma''_z$$

$$\tau_{yz}=\tau'_{yz}+\tau''_{yz},\quad \tau_{xz}=\tau'_{xz}+\tau''_{xz},\quad \tau_{xy}=\tau'_{xy}+\tau''_{xy}$$

要求它们满足应力边界条件(11－19)。

下一节我们将介绍引用热弹性位移势解决问题的实例。

§11-8 圆筒的轴对称热应力

设有一个内半径为 a、外半径为 b 的长圆筒，其内的变温 T 是轴对称分布的，要求筒内的热应力。

这是轴对称的平面应变问题。注意到 $w=0$，u_ρ 仅依赖于 ρ，则方程(11-21)，(11-22)和(11-23)简化为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_\rho}{\mathrm{d}\rho}+\frac{\sigma_\rho-\sigma_\varphi}{\rho}=0 \tag{a}$$

$$\varepsilon_\rho=\frac{\mathrm{d}u_\rho}{\mathrm{d}\rho},\quad \varepsilon_\varphi=\frac{u_\rho}{\rho} \tag{b}$$

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_\rho&=\frac{E}{1+\nu}\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\theta+\varepsilon_\rho\right)-\frac{\alpha ET}{1-2\nu}\\
\sigma_\varphi&=\frac{E}{1+\nu}\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\theta+\varepsilon_\varphi\right)-\frac{\alpha ET}{1-2\nu}\\
\sigma_z&=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\theta-\frac{\alpha ET}{1-2\nu}\\
\theta&=\varepsilon_\rho+\varepsilon_\varphi
\end{aligned}\right\} \tag{c}$$

将式(b)代入式(c)，然后将所得的结果代入式(a)，得

$$\frac{\mathrm{d}^2u_\rho}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}u_\rho}{\mathrm{d}\rho}-\frac{u_\rho}{\rho^2}=\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\rho} \tag{d}$$

显然，如引入热弹性应变势 $\Phi(\rho)$，使

$$u_\rho=\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\rho} \tag{e}$$

则当 Φ 满足方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\rho}=\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha T \tag{f}$$

时，由式(e)给出的位移 u_ρ 满足方程(d)。很容易看出，方程(f)即为方程(11-32)在平面轴对称情况下的特殊形式，这是我们意料到的。

现在考虑如下的变温[①]：

$$T=\frac{T_a\ln\dfrac{b}{\rho}}{\ln\dfrac{b}{a}} \tag{g}$$

---

① 这是在边界条件 $(T)_{\rho=a}=T_a$，$(T)_{\rho=b}=0$ 下，定常无内热源轴对称热传导方程 $\nabla^2T=\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}\rho^2}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\rho}=0$ 的解。

将式(g)代入式(f),并注意到

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\right)$$

于是有

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\rho}\right)=\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\alpha T_a}{\ln\frac{b}{a}}\ln\frac{b}{\rho}$$

这个方程的特解为

$$\Phi=\frac{K}{\ln\frac{b}{a}}\rho^2\left(\ln\frac{b}{\rho}+1\right) \tag{h}$$

其中

$$K=\frac{1+\nu}{4(1-\nu)}\alpha T_a \tag{i}$$

参照§11-7中的式(b),不难写出平面轴对称情况下应力分量与热弹性应变势的关系:

$$\sigma'_\rho=-2G\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\rho}\quad \sigma'_\varphi=-2G\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\rho^2} \tag{j}$$

将式(h)代入,得到与方程(d)的特解对应的应力分量

$$\left.\begin{aligned}\sigma'_\rho&=-\frac{2GK}{\ln\frac{b}{a}}\left(2\ln\frac{b}{\rho}+1\right)\\ \sigma'_\varphi&=-\frac{2GK}{\ln\frac{b}{a}}\left(2\ln\frac{b}{\rho}-1\right)\end{aligned}\right\} \tag{k}$$

这个解并不满足圆筒内外壁面力为零的边界条件,它们在内外壁处分别给出

$$\left.\begin{aligned}(\sigma'_\rho)_{\rho=a}&=-2GK\left[2+\frac{1}{\ln\frac{b}{a}}\right]\equiv-q_1\\ (\sigma'_\rho)_{\rho=b}&=-\frac{2GK}{\ln\frac{b}{a}}\equiv-q_2\end{aligned}\right\} \tag{l}$$

的面压力。现在,我们还要找一组与方程(d)的齐次解对应的应力分量,使与特解(k)叠加后,在圆筒内外壁处满足面力为零的边界条件。不难看出,这个齐次解正好是圆筒内外壁分别受均匀拉力 q_1 和 q_2 时的解,由式(7-13)得

$$\left.\begin{aligned}\sigma''_\rho&=-\frac{a^2b^2}{b^2-a^2}\frac{q_2-q_1}{\rho^2}-\frac{a^2q_1-b^2q_2}{b^2-a^2}\\ \sigma''_\varphi&=\frac{a^2b^2}{b^2-a^2}\frac{q_2-q_1}{\rho^2}-\frac{a^2q_1-b^2q_2}{b^2-a^2}\end{aligned}\right\} \tag{m}$$

将式(k)和式(m)相加，并把式(l)中的 q_1 和 q_2 的值代入，即得要求的热应力：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\rho &= -\frac{\alpha E T_a}{2(1-\nu)}\left[\frac{\ln\frac{b}{\rho}}{\ln\frac{b}{a}}-\frac{\left(\frac{b}{\rho}\right)^2-1}{\left(\frac{b}{a}\right)^2-1}\right]\\ \sigma_\varphi &= -\frac{\alpha E T_a}{2(1-\nu)}\left[\frac{\ln\frac{b}{\rho}-1}{\ln\frac{b}{a}}+\frac{\left(\frac{b}{\rho}\right)^2+1}{\left(\frac{b}{a}\right)^2-1}\right]\end{aligned}\right\} \tag{11-33}$$

§11-9 应力解法

按应力求解热弹性力学问题时，不仅要求热应力分量满足平衡微分方程(11-14)和应力边界条件(11-19)，而且还须满足变温情况下的应力协调方程。这方程通过将式(11-16)代入式(3-19)，并利用方程(11-14)简化而得到，它们是

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2\sigma_x+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} &= -\alpha E\left(\frac{1}{1-\nu}\nabla^2 T+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)\\ \nabla^2\sigma_y+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} &= -\alpha E\left(\frac{1}{1-\nu}\nabla^2 T+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)\\ \nabla^2\sigma_z+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2} &= -\alpha E\left(\frac{1}{1-\nu}\nabla^2 T+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)\\ \nabla^2\tau_{yz}+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\partial z} &= -\frac{\alpha E}{1+\nu}\frac{\partial^2 T}{\partial y\partial z}\\ \nabla^2\tau_{xz}+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial z} &= -\frac{\alpha E}{1+\nu}\frac{\partial^2 T}{\partial x\partial z}\\ \nabla^2\tau_{xy}+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial y} &= -\frac{\alpha E}{1+\nu}\frac{\partial^2 T}{\partial x\partial y}\end{aligned}\right\} \tag{11-34}$$

其中

$$\Theta=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z$$

为了简化解法，将式(11-17)改写成

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \sigma_X - \frac{\alpha E T}{1-2\nu}\\
\sigma_y &= \sigma_Y - \frac{\alpha E T}{1-2\nu}\\
\sigma_z &= \sigma_Z - \frac{\alpha E T}{1-2\nu}\\
\tau_{yz} &= \tau_{YZ}\\
\tau_{xz} &= \tau_{XZ}\\
\tau_{xy} &= \tau_{XY}
\end{aligned}\right\} \tag{11-35}$$

其中

$$\begin{aligned}
\sigma_X &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_x\\
\sigma_Y &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_y\\
\sigma_Z &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_z
\end{aligned}$$

将式(11-35)分别代入式(11-14),(11-34)和(11-19),经整理,得变量 σ_X, σ_Y, σ_Z, τ_{YZ}, τ_{XZ}, τ_{XY} 满足的微分方程和边界条件:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_X}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{YX}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{ZX}}{\partial z} - \frac{\alpha E}{1-2\nu}\frac{\partial T}{\partial x} = 0\\
&\frac{\partial \tau_{XY}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_Y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{ZY}}{\partial z} - \frac{\alpha E}{1-2\nu}\frac{\partial T}{\partial y} = 0\\
&\frac{\partial \tau_{XZ}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{YZ}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_Z}{\partial z} - \frac{\alpha E}{1-2\nu}\frac{\partial T}{\partial z} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{11-36}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla^2 \sigma_X + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \tilde{\Theta}}{\partial x^2} = \frac{\alpha E}{1-2\nu}\left(\frac{\nu}{1-\nu}\nabla^2 T + 2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)\\
&\nabla^2 \sigma_Y + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \tilde{\Theta}}{\partial y^2} = \frac{\alpha E}{1-2\nu}\left(\frac{\nu}{1-\nu}\nabla^2 T + 2\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)\\
&\nabla^2 \sigma_Z + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \tilde{\Theta}}{\partial z^2} = \frac{\alpha E}{1-2\nu}\left(\frac{\nu}{1-\nu}\nabla^2 T + 2\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)\\
&\nabla^2 \tau_{YZ} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \tilde{\Theta}}{\partial y \partial z} = \frac{2\alpha E}{1-2\nu}\frac{\partial^2 T}{\partial y \partial z}\\
&\nabla^2 \tau_{XZ} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \tilde{\Theta}}{\partial x \partial z} = \frac{2\alpha E}{1-2\nu}\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial z}\\
&\nabla^2 \tau_{XY} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \tilde{\Theta}}{\partial x \partial y} = \frac{2\alpha E}{1-2\nu}\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}
\end{aligned}\right\} \tag{11-37}$$

其中

$$\tilde{\Theta} = \sigma_X + \sigma_Y + \sigma_Z$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\alpha ET}{1-2\nu}l &= \sigma_X l + \tau_{YX} m + \tau_{ZX} n\\ \frac{\alpha ET}{1-2\nu}m &= \tau_{XY} l + \sigma_Y m + \tau_{ZY} n\\ \frac{\alpha ET}{1-2\nu}n &= \tau_{XZ} l + \tau_{YZ} m + \sigma_Z n\end{aligned}\right\} \tag{11-38}$$

我们由式(11-36)至(11-38)可见,和位移解法一样,按应力解法求热应力的问题,可归结为求在假想体力$\left(-\frac{\alpha E}{1-2\nu}\frac{\partial T}{\partial x}, -\frac{\alpha E}{1-2\nu}\frac{\partial T}{\partial y}, -\frac{\alpha E}{1-2\nu}\frac{\partial T}{\partial z}\right)$和假想面力$\left(\frac{\alpha ET}{1-2\nu}l, \frac{\alpha ET}{1-2\nu}m, \frac{\alpha ET}{1-2\nu}n\right)$作用下的等温问题的解,求得了变量$\sigma_X$,$\sigma_Y$,$\sigma_Z$,$\tau_{YZ}$,$\tau_{XZ}$,$\tau_{XY}$,代入式(11-35),即得要求的热应力分量。

§11-10 热弹性力学平面问题的应力解法 艾里热应力函数

在平面问题中,不计体力的平衡微分方程为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} &= 0\\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0\end{aligned}\right\} \tag{a}$$

应变协调方程为

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \tag{b}$$

由式(11-16),平面应力状态下的应力和应变关系为

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) + \alpha T\\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) + \alpha T\\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}\end{aligned}\right\} \tag{c}$$

若为平面应变,由

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha T = 0$$

可得

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) - \alpha ET \tag{d}$$

将式(d)代入式(11-16),得到平面应变状态下应力与应变的关系为

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_y\right) + (1+\nu)\alpha T \\ \varepsilon_y &= \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x\right) + (1+\nu)\alpha T \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}\end{aligned}\right\} \tag{e}$$

比较式(e)和式(c)可见，如果设

$$E_1 = \frac{E}{1-\nu^2},\quad \nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu},\quad \alpha_1 = (1+\nu)\alpha \tag{f}$$

则平面应变问题和平面应力问题具有相同形式的应力与应变的关系，即

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E_1}(\sigma_x - \nu_1\sigma_y) + \alpha_1 T \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E_1}(\sigma_y - \nu_1\sigma_x) + \alpha_1 T \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu_1)}{E_1}\tau_{xy}\end{aligned}\right\} \tag{g}$$

现引入艾里热应力函数 $U(x,y)$，使

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2},\quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \tag{11-39}$$

显然，方程(a)是满足的。将式(11－39)代入式(c)，再将所得的结果代入式(b)，经整理，得到艾里热应力函数所必须满足的方程为

$$\nabla^2\ \nabla^2\ U = -\alpha E\ \nabla^2\ T \tag{11-40}$$

对于平面应变问题，只要将方程(11－40)等号右边的 αE 换成 $\alpha_1 E_1 = \frac{\alpha E}{1-\nu}$ 即可。

我们考虑的是无外力作用、无边界约束的情况，故边界条件为

$$\left.\begin{aligned}\bar{f}_x &= \sigma_x l + \tau_{yx} m = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} l - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} m = 0 \\ \bar{f}_y &= \tau_{xy} l + \sigma_y m = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} l + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} m = 0\end{aligned}\right\} \tag{11-41}$$

这样，就将求解平面热弹性力学问题，归结为在边界条件(11－41)下，求解方程(11－40)的问题。对于等温问题，$\nabla^2\ T = 0$，方程(11－40)退化成方程(6－15)，这个结果是我们预料到的。

如果用极坐标表示平面热弹性力学问题，则与等温问题一样，应力分量 σ_ρ、σ_φ，$\tau_{\rho\varphi}$ 与热应力函数 $U(\rho,\varphi)$ 之间的关系为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\rho &= \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \rho}\\ \sigma_\varphi &= \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2}\\ \tau_{\rho\varphi} &= -\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right)\end{aligned}\right\} \tag{11-42}$$

这里的 U 满足方程(11-40),不过,现在

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

对于轴对称的平面应变问题,由于应力函数和变温 T 与 φ 无关,故方程(11-40)可写成

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left\{\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\rho}\right)\right]\right\}=-\frac{\alpha E}{1-\nu}\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\rho}\right)$$

上式积分四次,得到

$$U=-\frac{\alpha E}{1-\nu}\int\left(\frac{1}{\rho}\int T\rho\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\rho+A\ln\rho+B\rho^2$$

代入式(11-42),有

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\rho &= \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\rho}=-\frac{\alpha E}{(1-\nu)\rho^2}\int T\rho\mathrm{d}\rho+2B+\frac{A}{\rho^2}\\ \sigma_\varphi &= \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2}=\frac{\alpha E}{(1-\nu)\rho^2}\int T\rho\mathrm{d}\rho-\frac{\alpha E T}{1-\nu}+2B-\frac{A}{\rho^2}\end{aligned}\right\} \tag{h}$$

仍以内半径为 a、外半径为 b 的圆筒为例,其内存在变温

$$T=\frac{T_a\ln\dfrac{b}{\rho}}{\ln\dfrac{b}{a}}$$

由于

$$\int T\rho\mathrm{d}\rho=\frac{T_a\rho^2}{2\ln\dfrac{b}{a}}\left(\ln\frac{b}{\rho}+\frac{1}{2}\right)$$

故由式(h),有

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\rho &= -\frac{\alpha E T_a}{2(1-\nu)\ln\dfrac{b}{a}}\left(\ln\frac{b}{\rho}+\frac{1}{2}\right)+2B+\frac{A}{\rho^2}\\ \sigma_\varphi &= \frac{\alpha E T_a}{2(1-\nu)\ln\dfrac{b}{a}}\left(-\ln\frac{b}{\rho}+\frac{1}{2}\right)+2B-\frac{A}{\rho^2}\end{aligned}\right\} \tag{i}$$

利用边界条件$(\sigma_\rho)_{\rho=a}=0$,$(\sigma_\rho)_{\rho=b}=0$,求出常数 A 和 B,代回后经整理,可得到以式(11-33)表示的应力分量。

思考题与习题

11-1 非均匀材料具有均匀变温场时,是否产生热应力?为什么?

11-2 设在图 11-1 所示的矩形板中,$L\gg c$,变温分别为

(a) $T=T_0\left(1-\frac{y}{c}\right)$;

(b) $T=T_0\frac{y^3}{c^3}$;

(c) $T=T_0\cos\frac{\pi y}{2c}$。

求板内热应力。

11-3 证明在定常温度场中不产生热应力的必要条件为体内无热源,即变温 T 满足拉普拉斯方程。

11-4 试就平面应力问题,证明在不计体力和面力但考虑变温时,以位移表示的平衡方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-(1+\nu)\alpha\frac{\partial T}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-(1+\nu)\alpha\frac{\partial T}{\partial y}=0$$

而力的边界条件为

$$l\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial v}{\partial y}\right)+m\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=l(1+\nu)\alpha T$$

$$m\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+l\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=m(1+\nu)\alpha T$$

对于平面应变问题,则须将 E,ν 和 α 分别换成$\frac{E}{1-\nu^2}$,$\frac{\nu}{1-\nu}$和$(1+\nu)\alpha$。

11-5 试采用与§11-7同样的方法,为了求得题 11-4 所推得的用位移表示的平衡微分方程的特解,引进热弹性应变势 $\Phi(x,y)$,使 $u'=\frac{\partial\Phi}{\partial x}$,$v'=\frac{\partial\Phi}{\partial y}$,证明对于平面应力问题,$\Phi$ 满足

$$\nabla^2\Phi=(1+\nu)\alpha T$$

而对于平面应变问题,有

$$\nabla^2\Phi=\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha T$$

11-6 试就图 11-1 所示的问题,设 $T=T_0\left(1-\frac{y^2}{c^2}\right)$,求出热弹性应变势 Φ,并由此求

出相应的应力分量 σ'_x，σ'_y，τ'_{xy}，然后，再叠加一个适当的齐次解 σ''_x，σ''_y，τ''_{xy}，以满足本问题的边界条件

11－7 试证明变温在圆薄板内轴对称分布时，即 $T=T(\rho)$，则有如下公式

$$u_\rho=(1+\nu)\frac{\alpha}{\rho}\int_0^\rho T\rho\mathrm{d}\rho+C_1\rho+\frac{C_2}{\rho}$$

$$\sigma_\rho=-\frac{\alpha E}{\rho^2}\int_0^\rho T\rho\mathrm{d}\rho+\frac{E}{1-\nu^2}\left[C_1(1+\nu)-C_2(1-\nu)\frac{1}{\rho^2}\right]$$

$$\sigma_\varphi=\frac{\alpha E}{\rho^2}\int_0^\rho T\rho\mathrm{d}\rho-\alpha ET+\frac{E}{1-\nu^2}\left[C_1(1+\nu)+C_2(1-\nu)\frac{1}{\rho^2}\right]$$

* 第十二章　弹性波的传播

以上各章讨论的都是弹性静力学问题，即认为作用于物体的外力不随时间改变，或者变化得非常缓慢而可将其惯性力忽略不计。这一问题又称为准静态问题。

当物体的局部受突加荷载、冲击荷载或变化极快的荷载作用时，直接受力部分的各质点在弹性恢复力作用下立刻引起在其平衡位置附近的振动。随着时间的推移，振动区域在介质中不断地向外扩张、传播。这种因弹性机制而引起的振动在弹性介质中的传播过程，称为**弹性波**。

弹性波的传播和动力响应是弹性动力学的两个主要的研究课题，有其广泛的工程背景。本章只介绍弹性波在弹性介质中传播的一些简单问题。

§12－1　无限弹性介质中的纵波和横波

在讨论各向同性的弹性介质中的波的传播时，利用以位移表示的运动微分方程(5－10)较为方便。如果不考虑体力的影响，则它表示为

$$(\lambda+G)\nabla\theta+G\nabla^2\boldsymbol{U}=\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{U}}{\partial t^2} \tag{12-1}$$

或

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+G)\frac{\partial\theta}{\partial x}+G\nabla^2 u&=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\(\lambda+G)\frac{\partial\theta}{\partial y}+G\nabla^2 v&=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\\(\lambda+G)\frac{\partial\theta}{\partial z}+G\nabla^2 w&=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\end{aligned}\right\} \tag{12-1'}$$

显然，弹性介质中任何一点的位移 $\boldsymbol{U}=(u,v,w)$ 都应满足方程(12－1)

先考虑下列形式的位移：

$$u=(x,t),\quad v=0,\quad w=0 \tag{12-2}$$

从这组位移可以看出，如果任作一个与 Ox 轴垂直的平面，则该平面内的各点只是在 x 方向有一相同的位移 u，而在 y 和 z 轴方向却没有移动。这也等于说，该平面在弹性介质运动时只产生 x 方向的平行移动，移动后仍垂直于 Ox 轴(图12－1)。明白了这一点以后，再假想在运动前的介质中，作一组与 Ox 轴垂直的

等间隔的平面。在介质运动的每一个瞬时，由于每一个平面移动的距离（从原始位置量起）不相等，于是，这些平面就产生了疏密相间的现象（图 12－2）。称这种位移的传播为**纵波**。

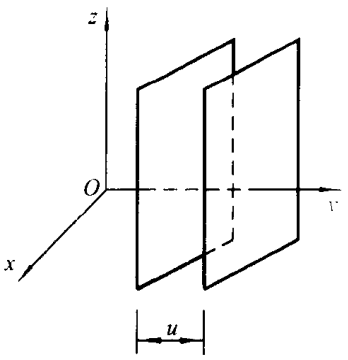


图 12－1

现在建立无限介质中纵波的方程。由式（12－2）先求出以下各量：

$$\theta=\nabla\cdot\boldsymbol{U}=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \frac{\partial\theta}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\theta}{\partial z}=0$$

$$\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \nabla^2 v=0,\quad \nabla^2 w=0$$

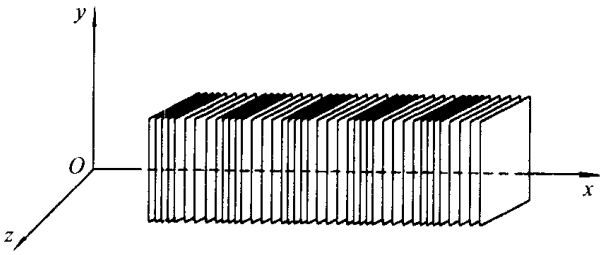


图 12－2

将它们代入方程（12－1），则其中的第二式和第三式变为恒等式，而第一式成为

$$(\lambda+2G)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\tag{12-3}$$

或写成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\tag{12-3'}$$

这里的

$$c_1^2=\frac{\lambda+2G}{\rho}=\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}\tag{12-4}$$

式（12－3）′就是纵波方程，说明了形如式（12－2）所示的位移分量一定要满足这一个偏微分方程。下面还要证明，这里的 c_1 就是纵波传播的速度。

考察方程（12－3）′下列形式的特解：

$$u=A\sin 2\pi\left(\frac{x}{L}-\frac{t}{T}\right)\tag{12-5}$$

这个解表示一个简谐运动。这里，A 是波幅，L 是波长，T 为周期。因为，对于固定的 x，当 t 每增加 T 时，根据式（12－5），位移是相同的；同样，对于同一个时间 t，当 x 每增加 L 时，根据式（12－5），位移也是相同的。现将式（12－5）代入式（12－3）′，即得

$$\frac{1}{T^2}=\frac{c_1^2}{L^2}$$

或

$$\frac{L}{T}=c_1=\pm\sqrt{\frac{\lambda+2G}{\rho}} \tag{12-6}$$

这表示当 L 和 T 适合关系式(12-6)时,式(12-5)就是方程(12-3)′的解。

为说明疏密在介质中的传播规律,我们考察

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}=A\frac{2\pi}{L}\cos 2\pi\left(\frac{x}{L}-\frac{t}{T}\right) \tag{12-7}$$

由此可以看出三点:(1)在同一时刻 t,应变分量 ε_x 随 x 的变化不断改变其大小和正负号,故本来垂直于 Ox 轴的等间隔的平面,在运动的同一瞬间,是疏($\varepsilon_x>0$)密($\varepsilon_x<0$)相间的。(2)在同一时刻 t,当 x 每增加 L,ε_x 的值相同,这说明,相隔 L 的两个垂直于 Ox 轴的平面附近疏密程度相同。因此,从最疏到最疏或最密到最密的距离都是波长 L。(3)对于同一个 x,即在同一个平面附近,疏密情况是随时间 t 变化的。因此,就整个介质而言,疏密的情况是沿 Ox 轴随时间 t 而等速移动的。

现在,我们要证明这种波传播的速度是 c_1。试任意考察一个与 Ox 轴垂直的平面,设在 t 瞬时这个平面的坐标为 x,在此平面上,各点的位移为 u,应变分量为 ε_x,它们分别由式(12-5)和(12-7)来决定。在相隔 Δt 时间后,这个具有相同位移 u 和相同应变 ε_x 的平面移动了 Δx,即在 $t+\Delta t$ 瞬时,这个平面的坐标为 $x+\Delta x$。以 ε_x 为例,我们有

$$\varepsilon_x=A\frac{2\pi}{L}\cos 2\pi\left(\frac{x+\Delta x}{L}-\frac{t+\Delta t}{T}\right)$$

这里的 ε_x 和由式(12-7)给出的 ε_x 大小和正负号都相同,于是有

$$2\pi\left(\frac{x}{L}-\frac{t}{T}\right)=2\pi\left(\frac{x+\Delta x}{L}-\frac{t+\Delta t}{T}\right)$$

即

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{L}{T}=c_1$$

这就证明了纵波的传播速度为 c_1。

波动方程(12-3)′的通解为

$$u=f_1(x-c_1t)+f_2(x+c_1t) \tag{12-8}$$

这里的 f_1 和 f_2 是任意的,表示波形,应由初始条件确定。式(12-8)的前项表示向 Ox 轴正方向传播的波,后项表示向 Ox 轴负方向传播的波,容易证明,其传播的速度都是 c_1。

总之，一切纵波，不论波长的大小，也不论波形如何，在弹性介质中都以疏密集散的形式或向前或向后传播，传播的速度为常数，仅与介质的弹性常数 λ、G 和密度 ρ 有关。

现在我们再考察另一形式的位移：

$$u=0,\quad v=v(x,t),\quad w=0 \tag{12-9}$$

由此不难看出，如果我们假想在介质中作一组与 Ox 轴垂直的平面，则每一个平面只作 Oy 方向的横向移动，而且，各平面的横向位移是不相同的，其运动情况如图 12-3 所示。我们称这种位移的传播为**横波**。

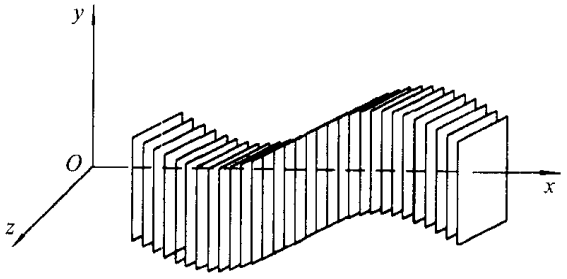


图 12-3

将式(12-9)代入方程(12-1)′，注意到

$$\theta=\nabla\cdot\boldsymbol{U}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{12-10}$$

则它的第一式和第三式是恒等式，而第二式成为

$$G\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{12-11}$$

或写成

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=c_2^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{12-11}'$$

这里的

$$c_2^2=\frac{G}{\rho}=\frac{E}{2(1+\nu)\rho} \tag{12-12}$$

式(12-11)′就是横波方程，从形式上看，它和纵波方程(12-3)′完全一样，其通解为

$$v=\varphi_1(x-c_2t)+\varphi_2(x+c_2t) \tag{12-13}$$

任意函数 φ_1 和 φ_2 同样由初始条件确定。还可以证明，向 Ox 轴正负方向传播的波速都是 c_2。另外，请注意式(12-10)，它表示横波的传播不会使介质发生体积的膨胀和收缩。由此得出结论：一切横波，不论波长和波形如何，在弹性介质中都以切应变的横向位移形式向前或向后传播，由式(12-12)可知，传播的速度

是常数，它取决于介质的弹性常数 G 和密度 ρ。

横波的传播速度 c_2 总是小于纵波的传播速度 c_1。根据式(12-4)和(12-12)，两者的比例为

$$\frac{c_2}{c_1}=\sqrt{\frac{G}{\lambda+2G}}=\sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}} \tag{12-14}$$

当 $\nu=\frac{1}{3}$ 时，$\frac{c_2}{c_1}=\frac{1}{2}$。这表明，在一般金属中，横波的传播速度大致是纵波传播速度的一半。在地震时，地震波中纵波总是比横波先到达，根据测出的纵波与横波到达时间的间隔，可以测出震源离开测定站的距离。

由以上的推导可以看出，无限弹性介质中的纵波和横波有一个共同的特点：原来位于同一平面内的各点都具有相同的位移，从而使波阵面始终是平面。我们称这类波为**平面波**。下一节我们将论证，对于传播方向余弦为 l,m,n 的一般的平面波，不是纵波就是横波，或者是两者的线性组合。

§12-2 一般的平面波

设有一个任意的平面波，以速度 c 沿某一方向传播。我们考察通过点 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ 的波阵面，其单位法向量 $\boldsymbol{v}=(l,m,n)$，见图 12-4。在任意时刻该波阵面的位置可由下列参数来确定：

$$\xi=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}-ct=lx+my+nz-ct$$

因为在平面波中，波阵面上各点位移都相同，所以可表示为

$$u=f(\xi),\quad v=g(\xi),\quad w=h(\xi) \tag{12-15}$$

其中 f,g,h 的形式由初始条件来确定。

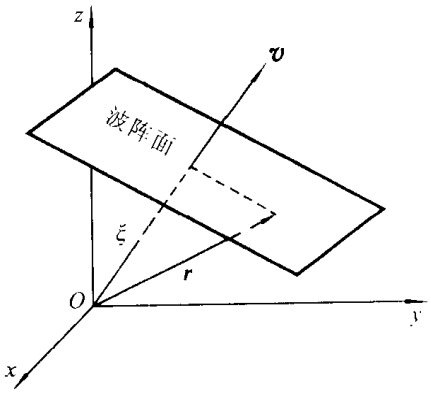


图 12-4

将式(12-15)代入方程(12-1)，并注意到

$$l^2+m^2+n^2=1$$

于是有

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+G)(l^2f''+lmg''+lnh'')&=(\rho c^2-G)f''\\(\lambda+G)(lmf''+m^2g''+mnh'')&=(\rho c^2-G)g''\\(\lambda+G)(lnf''+mng''+n^2h'')&=(\rho c^2-G)h''\end{aligned}\right\} \tag{a}$$

这里的 f'',g'',h'' 表示函数 f,g,h 对 ξ 求二阶导数，而方程(a)可看作这些导函数的线性齐次代数方程组。它肯定有非零解，否则加速度为零，就不是弹性波问

题。将式(a)按 f'',g'',h''各项合并,令其系数行列式为零,有

$$\begin{vmatrix} l^2-\dfrac{\rho c^2-G}{\lambda+G} & lm & ln \\ lm & m^2-\dfrac{\rho c^2-G}{\lambda+G} & mn \\ ln & mn & n^2-\dfrac{\rho c^2-G}{\lambda+G} \end{vmatrix}=0 \tag{b}$$

将行列式展开,简化后即得

$$(G-\rho c^2)^2(\lambda+2G-\rho c^2)=0 \tag{c}$$

由此可求得两个根

$$c_1=\sqrt{\frac{\lambda+2G}{\rho}},\quad c_2=\sqrt{\frac{G}{\rho}} \tag{12-16}$$

于是,证明了上一节最后所提出的结论。

§12-3　无限弹性介质中的膨胀波和畸变波

在上两节中,我们讨论了无限弹性介质中的纵波和横波。下面,我们要进一步讨论无限弹性介质中两种一般的波动:**膨胀波**和**畸变波**。

如果无限弹性介质的运动为无旋的,即

$$\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\boldsymbol{U}=0$$

则必然存在一个势函数 Φ,使得

$$\boldsymbol{U}=\nabla\,\Phi \tag{a}$$

于是

$$\theta=\nabla\cdot\boldsymbol{U}=\nabla^2\Phi \tag{b}$$

而

$$\nabla\,\theta=\nabla^2\,\nabla\,\Phi=\nabla^2\boldsymbol{U} \tag{c}$$

将式(b)和(c)代入方程(12-1),得

$$(\lambda+2G)\nabla^2\,\boldsymbol{U}=\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{U}}{\partial t^2} \tag{12-17}$$

或写成

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{U}}{\partial t^2}=c_1^2\,\nabla^2\boldsymbol{U} \tag{12-17}'$$

以式(a)表示的位移称为无旋位移,由式(12-17)′可见,它在无限弹性介质中以速度 $c_1=\sqrt{\dfrac{\lambda+2G}{\rho}}$传播。这种波称为**无旋波**。

如果无限弹性介质的运动为等容的,即到处有

$$\theta = \nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0$$

则运动微分方程(12-1)简化为

$$G\ \nabla^2 \boldsymbol{U} = \rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{U}}{\partial t^2} \tag{12-18}$$

或写成

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{U}}{\partial t^2} = c_2^2\ \nabla^2 \boldsymbol{U} \tag{12-18}'$$

使体应变保持为零的位移称为等容位移,由式(12-18)′可见,它在无限弹性介质中以速度 $c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ 传播。这种波称为**等容波**。

在最一般的情况下,即当无限介质的运动既非无旋又非等容时,则位移总可取为等容位移和无旋位移两者的叠加。

下面,我们考察体应变 θ 和转动矢量 $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ 在无限弹性介质中的传播规律。以运算符号 ∇ 点乘方程(12-1)的两边,得

$$(\lambda + 2G)\nabla^2 \theta = \rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \tag{12-19}$$

或写成

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = c_1^2\ \nabla^2 \theta \tag{12-19}'$$

可见,体应变 θ 在无限弹性介质中以速度 c_1 传播。

如果用运算符号 ∇ 叉乘方程(12-1)的两边,注意到 $\omega = \nabla \times \boldsymbol{U}$,得

$$G\ \nabla^2 \boldsymbol{\omega} = \rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{\omega}}{\partial t^2} \tag{12-20}$$

或写成

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\omega}}{\partial t^2} = c_2^2\ \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \tag{12-20}'$$

因此,矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 在无限弹性介质中以速度 c_2 传播。

综上所述,在无限弹性介质中有,而且只能有两种类型的弹性波,它们具有相同形式的波动方程:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2\ \nabla^2 \varphi \tag{12-21}$$

对于无旋位移或体应变 θ 而言,其中的 c 为 $c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}}$,这种波统称为**膨胀波**;对于等容位移或者转动矢量 $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ 而言,其中的 c 为 $c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$,这种波统称为**畸变波**。上一节所讲的纵波和横波,是这两种波的特殊情形,前者是

无旋的膨胀波，后者是等容的畸变波。

§12-4 表 层 波

上面，我们介绍了各向同性无限弹性介质中的两种类型的波。如果介质是具有自由表面的弹性半无限体，则在表面附近较薄的一层内，还能产生其他类型的波（犹如投石子于水中所产生的波），即所谓**表层波**。这种波随着深度的增大其作用迅速减弱，而且随着距波源距离的增大而增加其相对于其他各种波的优势。因此，下面我们所要讨论的，是表层波在距自由边界较近而距波源较远处的传播。

离波源较远之处，由这种波引起的变形可当作平面变形。为简单起见，把半无限体表面取作 Oxz 坐标平面，Oy 轴垂直向下，并假定表层波沿 Ox 轴正方向传播。

把引起上述的平面变形的位移取为无旋位移与等容位移的叠加。取无旋位移的表达式为

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= Ase^{ay}\sin(pt-sx)\\ v_1 &= -Aae^{ay}\cos(pt-sx)\\ w_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

这里的 A，a，p，s 都是常数。为确保随着深度（即 y）的增加而位移迅速减少，要求 a 必须为正的实数。将式(a)中三角函数的幅角 $pt-sx$ 改写成 $-s(x-c_3t)$，其中

$$c_3=\frac{p}{s} \tag{b}$$

可见式(a)所表示的位移以速度 c_3 沿 Ox 轴方向传播。将式(a)代入运动微分方程(12-1)，可知该方程得以满足的条件是

$$a^2=s^2-\frac{\rho p^2}{\lambda+2G}$$

由式(b)和(12-12)，上式可写成

$$a^2=s^2\left(1-\frac{G}{\lambda+2G}\frac{c_3^2}{c_2^2}\right) \tag{c}$$

现在取等容位移的表达式为

$$\left.\begin{aligned} u_2 &= Bbe^{by}\sin(pt-sx)\\ v_2 &= -Bse^{by}\cos(pt-sx)\\ w_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{d}$$

这里的 B 和 b 为常数。为确保随着深度的增加而位移迅速地减少，同样要求 b

为正实数。常数 p 和 s 与上相同，因此，这组位移传播的速度仍为 c_3。将式(d)代入运动微分方程(12-1)，可知该方程得到满足的条件是

$$b^2 = s^2 - \frac{\rho p^2}{G}$$

注意到式(b)和(12-12)，上式可表示为

$$b^2 = s^2\left(1 - \frac{c_3^2}{c_2^2}\right) \tag{e}$$

该问题的边界条件为

$$\left.\begin{aligned}(\sigma_y)_{y=0} &= \left(\lambda\theta + 2G\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{y=0} = 0\\ (\tau_{xy})_{y=0} &= G\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 0\end{aligned}\right\} \tag{f}$$

将式(a)与(d)叠加，求得

$$u = u_1 + u_2, \quad v = v_1 + v_2, \quad w = w_1 + w_2 = 0$$

然后，代入式(f)经简化，得到

$$[(\lambda + 2G)a^2 - \lambda s^2]A + 2GsbB = 0$$
$$2asA + (b^2 + s^2)B = 0$$

这是 A 和 B 的线性齐次代数方程组，为使表层波存在，A 和 B 都不能等于零，因此，其系数行列式必须为零，即

$$\begin{vmatrix}(\lambda + 2G)a^2 - \lambda s^2 & 2Gsb\\ 2as & b^2 + s^2\end{vmatrix} = 0$$

展开后，有

$$4Gs^2ab = (b^2 + s^2)[(\lambda + 2G)a^2 - \lambda s^2]$$

将

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

代入，整理后，上式变为

$$2(1-2\nu)abs^2 = (b^2 + s^2)[(1-\nu)a^2 - \nu s^2]$$

两边平方后，将式(c)和(e)代入，进行简化，得到比值

$$\alpha = \frac{c_3}{c_2}$$

的六次方程：

$$\alpha^6 - 8\alpha^4 + 8\left(\frac{2-\nu}{1-\nu}\right)\alpha^2 - \frac{8}{1-\nu} = 0 \tag{g}$$

例如，取 $\nu = 0.25$，有

$$3\alpha^6 - 24\alpha^4 + 56\alpha^2 - 32 = 0$$

分解因式后，上式变为

$$(\alpha^2-4)(3\alpha^4-12\alpha^2+8)=0$$

解之得

$$\alpha^2=4,\quad \alpha^2=2+\frac{2}{\sqrt{3}},\quad \alpha^2=2-\frac{2}{\sqrt{3}} \tag{h}$$

注意式(c)和(e)，由于它们的等号左边是大于零的，故要求等号右边也必须大于零，这个条件为

$$1-\frac{G}{\lambda+2G}\alpha^2\geqslant 0,\quad 1-\alpha^2\geqslant 0 \tag{i}$$

可以验证，解(h)中只有

$$\alpha^2=2-\frac{2\sqrt{3}}{3}=0.845$$

符合条件(i)。由此得

$$\alpha=\frac{c_3}{c_2}=\sqrt{0.845}=0.919$$

或

$$c_3=0.919c_2=0.919\sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

在 $\nu=0.5$ 的极限情况，方程(g)成为

$$\alpha^6-8\alpha^4+24\alpha^2-16=0$$

同时，考虑到条件(i)则可求得

$$c_3=\alpha c_2=0.955\sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

可见，在两种情况下，表层波的速度都略小于畸变波的速度。

表层波是由瑞利发现的，它在地震科学里起了一定的推动作用。为纪念瑞利，因此，人们又把这种波称作**瑞利波**。

§12-5 弹性介质中的球面波

如从各向同性的无限弹性介质中某一点发出一个对称的扰动，则由此引起的变形将以波的方式从扰动中心向各方向对称地传播；同样，当一个具有圆球形外表面的弹性体在其外表面受到均布动压力作用时，变形将从其外表面以波的方式向球心对称地传播。以上的波由于是球对称传播的，所以称为**球面波**。

把上述无限介质的扰动中心或圆球体的球心作为坐标原点，取球坐标系，则由于介质运动的球对称性，所以只产生径向的位移 u_r，它应满足球对称形式的运动微分方程(10-13)。如果不考虑体力的影响，则该方程为

$$\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{2u_r}{r^2}\right)=\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \tag{a}$$

利用式(12-4),上式又可改写成

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{2u_r}{r^2}-\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}=0 \tag{b}$$

注意到运动是无旋的,于是存在标量势 Φ,使

$$u_r=\frac{\partial \Phi}{\partial r} \tag{c}$$

将其代入式(b),有

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial r^3}+\frac{2}{r}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial \Phi}{\partial r}-\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)=0 \tag{d}$$

引用下列关系:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi)\right]=\frac{\partial^3 \Phi}{\partial r^3}+\frac{2}{r}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial \Phi}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\right)$$

式(d)可以改写成

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi)\right]-\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\right)=0$$

对 r 积分一次,得

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi)-\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}=F(t) \tag{e}$$

这里,$F(t)$是 t 的任意函数,一般说,它不等于零。这样方程(e)是线性非齐次的偏微分方程,其通解为齐次的通解和任一非齐次的特解之和。但由于所凑取的特解总可以仅是 t 的函数,而与变量 r 无关,于是由式(c)可见,它对求位移无影响。因此,不妨一开始就取 $F(t)$为零,使方程(e)变成

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\Phi)=c_1^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi) \tag{12-22}$$

这是一个波动方程,其通解为

$$r\Phi=f_1(r-c_1t)+f_2(r+c_1t) \tag{12-23}$$

f_1 和 f_2 是任意函数,由初始条件决定。式(12-23)中的前项表示由坐标原点往外传播的球面波,适用于无限弹性介质内某点有一个对称扰动时的情况,后项表示往球心传播的球面波,适用于实心或空心的弹性圆球体当其外表受球对称动压力作用时的情况。两个波的波速都是 c_1。

§12-6 平面波在平面边界上的反射和折射

平面波在均匀各向同性介质中传播时，其波形、速度和传播方向都不会有所改变。但当介质的密度和弹性常数改变时，则将发生**反射和折射**。

设介质1和介质2的密度和弹性常数分别为 $\rho_1,\rho_2,\lambda_1,G_1,\lambda_2,G_2$，两种介质在 Oxz 无限平面紧密地接触着(图12-5)；AO 为入射线，OB 为反射线，OC 为折射线，它们与 y 轴的夹角 α_i,α_r 和 α_f 分别为入射角、反射角和折射角，波阵面与各自的射线垂直。

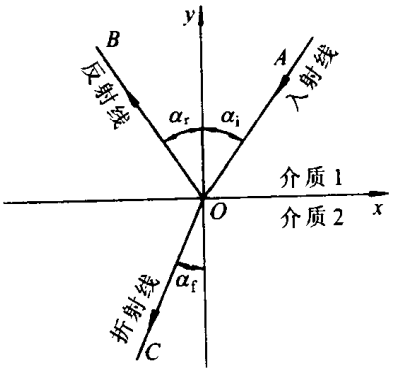


图 12-5

为简单起见，只考虑这些平面波为简谐的情况。先研究入射波 AO 为膨胀波。由于位移场是无旋的，因此存在应变势

$$\Phi = A e^{i(ax+by+\omega t)} \tag{a}$$

其中 A 为入射波的波幅，ω 为频率，a,b 为常量，与传播速度有关。由式(a)，得对应的位移分量：

$$\left.\begin{aligned} u_i &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} = iaA e^{i(ax+by+\omega t)} \\ v_i &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} = ibA e^{i(ax+by+\omega t)} \\ w_i &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{12-24}$$

波阵面方程为

$$f(x,y) = ax + by + \omega t = \text{const} \tag{b}$$

入射角为

$$\tan \alpha_i = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} = \frac{a}{b} \tag{12-25}$$

入射波到达两种介质的交界面时，将分解成反射波和折射波，两者的位移分别记作

$$u_r, v_r, w_r; u_f, v_f, w_f \tag{c}$$

由式(12-24)和式(c)表示的位移在各自的介质中都满足方程(12-1)′，在交界面上必须满足位移和面力的连续条件，它们分别为

$$u_i + u_r = u_f, \quad v_i + v_r = v_f, \quad w_r = w_f \quad (\text{当 } y=0 \text{ 时}) \tag{12-26}$$

和

$$\left.\begin{aligned}&(\sigma_y)_i+(\sigma_y)_r=(\sigma_y)_f\\&(\tau_{yx})_i+(\tau_{yx})_r=(\tau_{yx})_f\\&(\tau_{yz})_i+(\tau_{yz})_r=(\tau_{yz})_f\end{aligned}\right\}\quad(\text{当 } y=0 \text{ 时})\tag{12-27}$$

利用几何方程、物理方程和无旋条件：

$$\frac{\partial w_i}{\partial y}=\frac{\partial v_i}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial w_i}{\partial x}=\frac{\partial u_i}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial u_i}{\partial y}=\frac{\partial v_i}{\partial x}$$

式(12-27)又可表示为

$$\left.\begin{aligned}&\lambda_1\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}+\frac{\partial v_i}{\partial y}\right)+2G_1\frac{\partial v_i}{\partial y}+\lambda_1\left(\frac{\partial u_r}{\partial x}+\frac{\partial v_r}{\partial y}+\frac{\partial w_r}{\partial z}\right)+2G_1\frac{\partial v_r}{\partial y}\\&\quad=\lambda_2\left(\frac{\partial u_f}{\partial x}+\frac{\partial v_f}{\partial y}+\frac{\partial w_f}{\partial z}\right)+2G_2\frac{\partial v_f}{\partial y}\\&G_1\left(\frac{\partial v_r}{\partial x}+\frac{\partial u_r}{\partial y}\right)+2G_1\frac{\partial u_i}{\partial y}=G_2\left(\frac{\partial v_f}{\partial x}+\frac{\partial u_f}{\partial y}\right)\\&G_1\left(\frac{\partial w_r}{\partial y}+\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)=G_2\left(\frac{\partial w_f}{\partial y}+\frac{\partial v_f}{\partial z}\right)\end{aligned}\right\}\quad(\text{当 } y=0 \text{ 时})$$

(12-27)′

为了满足连续条件(12-26)和(12-27)′，我们可以认为入射波、反射波和折射波具有相同的频率，同时沿 x 轴方向传播速度也一样，因此我们可以假设

$$\left.\begin{aligned}u_r&=U_r e^{i(ax+b_r y+\omega t)}\\v_r&=V_r e^{i(ax+b_r y+\omega t)}\\w_r&=W_r e^{i(ax+b_r y+\omega t)}\end{aligned}\right\}\tag{12-28}$$

$$\left.\begin{aligned}u_f&=U_f e^{i(ax+b_f y+\omega t)}\\v_f&=V_f e^{i(ax+b_f y+\omega t)}\\w_f&=W_f e^{i(ax+b_f y+\omega t)}\end{aligned}\right\}\tag{12-29}$$

其 $U_r,\cdots,W_f;b_r,b_f$ 为常量，可由方程(12-1)′和交界面上的连续条件(12-26)和(12-27)′来确定。

将式(12-24)、式(12-28)和式(12-29)分别代入运动方程(12-1)′，有

$$(\lambda_1+2G_1)(a^2+b^2)=\rho_1\omega^2\tag{d}$$

$$\left.\begin{aligned}&G_1U_r(a^2+b_r^2)+(\lambda_1+G_1)(a^2U_r+ab_rV_r)=\rho_1\omega^2U_r\\&G_1V_r(a^2+b_r^2)+(\lambda_1+G_1)(ab_rU_r+b_r^2V_r)=\rho_1\omega^2V_r\\&G_1W_r(a^2+b_r^2)=\rho_1\omega^2W_r\end{aligned}\right\}\tag{e}$$

$$\left.\begin{aligned} &G_2 U_f(a^2+b_f^2)+(\lambda_2+G_2)(a^2 U_f+ab_f V_f)=\rho_2\omega^2 U_f \\ &G_2 V_f(a^2+b_f^2)+(\lambda_2+G_2)(ab_f U_f+b_f^2 V_f)=\rho_2\omega^2 V_f \\ &G_2 W_f(a^2+b_f^2)=\rho_2\omega^2 W_f \end{aligned}\right\} \tag{f}$$

为了确定系数 W_r 和 W_f，将式(12－28)，(12－29)代入连续条件(12－26)和(12－27)′的第三式，得

$$W_r=W_f$$

$$G_1 b_r W_r=G_2 b_f W_f$$

由此及式(e)和式(f)的第三式，可推得

$$W_r=W_f=0$$

式(e)的第一、第二式是 U_r 和 V_r 的线性齐次方程组，欲使其有非零解的条件为

$$[(\lambda_1+G_1)a^2+G_1(a^2+b_r^2)-\rho_1\omega^2][(\lambda_1+G_1)b_r^2+$$
$$G_1(a^2+b_r^2)-\rho_1\omega^2]-(\lambda_1+G_1)^2a^2b_r^2=0$$

简化后得

$$[(\lambda_1+2G_1)(a^2+b_r^2)-\rho_1\omega^2][G_1(a^2+b_r^2)-\rho_1\omega^2]=0$$

从而有

$$(\lambda_1+2G_1)(a^2+b_r^2)-\rho_1\omega^2=0 \tag{g}$$

$$G_1(a^2+b_r^2)-\rho_1\omega^2=0 \tag{h}$$

再利用式(d)，可得 b_r 的两个根：

$$b_r'=\pm b$$

和

$$b_r''=\pm\sqrt{b^2+\frac{\lambda_1+2G_1}{G_1}(a^2+b^2)}$$

由于量 b_r 与反射波的 y 向速度有关，y 方向的速度与入射波方向相反，故这里应取负号，于是有

$$b_r'=-b \tag{i}$$

和

$$b_r''=-\sqrt{b^2+\frac{\lambda_1+G_1}{G_1}(a^2+b^2)} \tag{j}$$

由式(i)可知，反射角等于入射角，即

$$\tan\alpha_i=\tan\alpha_r=\frac{a}{b}$$

而由式(j)可知，反射角 α_r 一定小于入射角，即

$$\tan\alpha_i=\frac{a}{b}>\tan\alpha_r=\frac{a}{\sqrt{b^2+\dfrac{\lambda_1+G_1}{G_1}(a^2+b^2)}}$$

很容易看出，解(i)对应于一个膨胀波，解(j)对应于一个畸变波，这只要研究垂直入射的特殊情况就能证明。在垂直入射时，$a=0$，$\alpha_i=\alpha_f=0$。此时，对应于解(i)，注意到 $a=0$ 和式(d)，有

$$c'_r=-\frac{\omega}{b'_r}=\sqrt{\frac{\lambda_1+2G_1}{\rho_1}}=\text{膨胀波速度}$$

而对应于解(j)，利用 $a=0$，并注意到上式，有

$$c''_r=-\frac{\omega}{b''_r}=-\frac{\omega}{b\sqrt{\dfrac{\lambda_1+2G_1}{G_1}}}=\sqrt{\frac{G_1}{\rho_1}}=\text{畸变波速度}$$

因此，反射时膨胀波和畸变波是同时产生的。

同理，对于折射波，波幅 U_f，V_f 必须满足式(f)的前两式，它们是 U_f，V_f 的线性齐次方程组，欲使其有非零解的条件为

$$[(\lambda_2+2G_2)(a^2+b_f^2)-\rho_2\omega^2][G_2(a^2+b_f^2)-\rho_2\omega^2]=0$$

由此得两个方程

$$(\lambda_2+2G_2)(a^2+b_f^2)-\rho_2\omega^2=0 \tag{k}$$

和

$$G_2(a^2+b_f^2)-\rho_2\omega^2=0 \tag{l}$$

解之，得

$$b'_f=\pm\sqrt{\frac{1}{\lambda_2+2G_2}\rho_2\omega^2-a^2}$$

$$b''_f=\pm\sqrt{\frac{1}{G_2}\rho_2\omega^2-a^2}$$

对于折射波应取正号，于是有

$$b'_f=\sqrt{\frac{1}{\lambda_2+2G_2}\rho_2\omega^2-a^2} \tag{m}$$

$$b''_f=\sqrt{\frac{1}{G_2}\rho_2\omega^2-a^2} \tag{n}$$

对应的折射角为

$$\tan\alpha'_f=\frac{a}{b'_f}=\frac{a}{\sqrt{\dfrac{1}{\lambda_2+2G_2}\rho_2\omega^2-a^2}} \tag{12-30}$$

$$\tan a_f'' = \frac{a}{b_f''} = \frac{a}{\sqrt{\frac{1}{G_2}\rho_2\omega^2 - a^2}} \tag{12-31}$$

为了求得折射波的波速，仍考虑垂直入射的特殊情况，利用式(m)和式(n)，并注意到 $a=0$，于是有

$$c_f' = \frac{\omega}{b_f'} = \sqrt{\frac{\lambda_2 + 2G_2}{\rho_2}} = \text{膨胀波速度}$$

$$c_f'' = \frac{\omega}{b_f''} = \sqrt{\frac{G_2}{\rho_2}} = \text{畸变波速度}$$

这表示折射时，膨胀波和畸变波也是同时产生的。

总之，对于一个入射的膨胀波

$$\Phi = Ae^{i(ax+by+\omega t)}$$

到达交界面上将产生两个反射波：一个是膨胀波

$$(u_r', v_r', w_r') = (U_r', V_r', 0)e^{i(ax-by+\omega t)} \tag{12-32}$$

另一个是畸变波

$$(u_r'', v_r'', w_r'') = (U_r'', V_r'', 0)e^{i(ax+b_r''y+\omega t)} \tag{12-33}$$

同时也引起两个折射波：一个是膨胀波

$$(u_f', v_f', w_f') = (U_f', V_f', 0)e^{i(ax+b_f'y+\omega t)} \tag{12-34}$$

另一个是畸变波

$$(u_f'', v_f'', w_f'') = (U_f'', V_f'', 0)e^{i(ax+b_f''y+\omega t)} \tag{12-35}$$

这里 8 个待定常数 $U_r', V_r', \cdots, U_f'', V_f''$ 通过将式(12-32)至(12-35)分别代入运动方程(12-1)′，利用式(g)，(h)，(k)，(l)简化得 4 个线性代数方程，再将式(12-24)和式(12-32)至式(12-35)代入边界连续条件(12-26)和(12-27)′又得到 4 个线性代数方程，然后联立求解面得到。运算和结果详见文献[1]和[8]。

如果入射的是一个畸变波，也将产生类似的反射和折射现象。因为一个任意的平面波总可以分解为一个膨胀波和一个畸变波，所以当遇到平面边界时，将产生四个反射波和四个折射波，它们的反射角和折射角都各不相同。这种情况可以用下面的表来说明：

入射波 {
- 膨胀波 → 反射和折射膨胀波
- 膨胀波 → 反射和折射畸变波
- 畸变波 → 反射和折射膨胀波
- 畸变波 → 反射和折射畸变波

这些波互相干涉而形成复合波。

思考题与习题

12－1 试分别证明纵波和横波为无旋波和等容波。

12－2 试证明纵波和横波传播时，弹性体的动能和应变能保持相等。

12－3 试就低碳钢、铸铁、铝合金、岩土、土壤和混凝土等材料，先选定一种型号，从材料手册中查出其弹性常数和密度，并算出膨胀波和畸变波在这些材料中传播的速度。

12－4 什么叫做膨胀波和畸变波？膨胀波传播时，介质运动是否一定是无旋的？畸变波传播时，介质运动是否一定是等容的？

12－5 什么叫表层波？它有什么特性？

12－6 试求泊松比 $\nu=0$ 及 $\nu=1/3$ 时的 c_1, c_2, c_3。

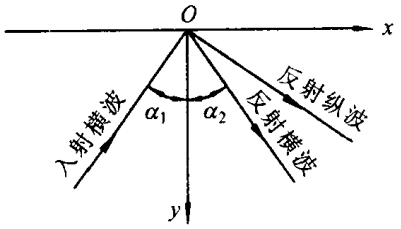


图 12－6

12－7 图 12－6 所示的为半无限弹性体，边界为自由面，有一个波幅为 A、与边界法线成 α_1 角入射的简谐横波，在边界上产生全反射，求反射角和波幅 A。

* 第十三章　弹性薄板的弯曲

板是工程中常用的构件，它在弯曲变形时应力、应变和位移的计算，属于弹性力学的空间问题。由于数学上的复杂性，要得到满足全部基本方程和边界条件的精确解非常困难，因此需要通过引用关于应变和应力分布规律的简化假设，建立近似的理论，以便根据这种理论得到广泛的实际问题的足够精确的解。本章的内容主要包括基本假设的提出、基本方程、基本关系式和各种支承情况下边界条件的建立，并讨论几种常见的几何形状和支承情况的薄板在荷载作用下如何求解的问题。通过这部分内容的学习，使读者对薄板弯曲的小挠度理论及其解决问题的方法有一个初步的了解。

§13－1　一般概念和基本假设

在弹性力学中，由两个平行平面和垂直于它们的柱面或棱柱面所围成的物体，当其高度小于底面尺寸时称为**板**，如图 13－1 所示。两平行面称为板面，柱面或棱柱面称为**板边**，两平行面之间的距离称为板厚，而平分板厚的平面称为**板的中面**。当板厚与板面内的最小特征尺寸之比大于$\frac{1}{5}$时，称为**厚板**；当板厚与板面内的最小特征尺寸之比小于$\frac{1}{80}$时，称为**膜板**；当板厚与板面内的最小特征尺寸之比在$\frac{1}{80}$和$\frac{1}{5}$之间时，则称为**薄板**。对于厚板，须作弹性力学空间问题来处理。对于膜板，其抗弯刚度很小，基本上只能承受膜平面内的张力。对于薄板，当全部外荷载作用于中面内而不发生失稳现象时，应属平面应力问题；当全部外荷载都垂直于中面时，则主要发生弯曲变形。在板发生弯曲变形时，中面上各点沿垂直方向的位移，称为板的**挠度**。如果挠度和板厚之比小于或等于$\frac{1}{5}$，可认为属于**小挠度问题**，如果超过这个限度，则可归属于**大挠度问题**。本章只限于讨论小挠度问题。

因为薄板的厚度远小于薄板的平面尺寸，所以与梁弯曲的初等理论相似，完全可以略去某些非重要的因素而引用一些能够简化理论的假设，实践证明，其造成的误差并不会有任何实际影响。这些薄板小挠度弯曲理论的基本假设是由基

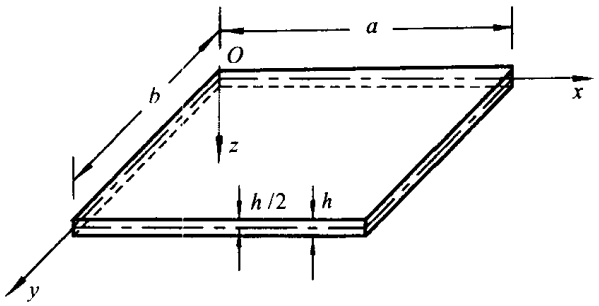


图 13-1

尔霍夫提出的,所以又称**基尔霍夫假设**。现叙述如下。

(1) 变形前垂直于薄板中面的直线段(法线),在薄板变形后仍保持为直线,且垂直于弯曲变形后的中面,其长度不变。

这是著名的直法线假设,它与材料力学中在研究梁弯曲问题时所引进的平面假设相似。根据这个假设,如果将薄板的中面作为 Oxy 坐标平面,z 轴垂直向下,则有 $\gamma_{xz}=0$,$\gamma_{yz}=0$ 和 $\varepsilon_z=0$。

(2) 与 σ_x,σ_y 和 τ_{xy} 等相比,垂直于中面方向的正应力 σ_z 很小,在计算应变时可略去不计。这个假设与梁弯曲问题中的纵向纤维间无挤压的假设相似。

(3) 薄板弯曲变形时,中面内各点只有垂直位移 w,而无 x 方向和 y 方向的位移,即

$$(u)_{z=0}=0,\quad (v)_{z=0}=0,\quad (w)_{z=0}=w(x,y)$$

根据这个假设,中面内的应变分量 ε_x,ε_y 和 γ_{xy} 均等于零,即中面内无应变发生中面内的位移函数 $w(x,y)$ 称为挠度函数。

在上述假设基础上建立起来的弹性薄板的小挠度理论,属于薄板弯曲的经典理论,它在许多工程问题的分析计算中,已得到广泛的应用。

§13-2 基本关系式和基本方程的建立

根据 §13-1 中的三个基本假设,利用弹性力学的平衡微分方程、几何方程和物理方程,可以将薄板内任一点的位移分量、应变分量、应力分量和板横截面上的内力,用挠度 w 来表示。再通过板内任一单元体的平衡,可进而建立挠度 w 所满足的微分方程。所以,薄板弯曲的小挠度问题,是以挠度 w 作为基本变量求解的,属位移解法。下面,建立这些基本关系式和挠度 w 所需满足的基本方程。

(一) 薄板中的位移分量和应变分量的表示式

根据上述第一个假设,由几何方程(5-2),有

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\
\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \\
\gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{a}$$

由式(a)的第三式,即 $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ 可知,在板内所有的点,位移分量 w 只是 x 和 y 的函数而与 z 无关,故板内各点的位移分量 w 等于板的挠度。再由式(a)的第五、第六式,有

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y} \tag{b}$$

对 z 进行积分,得到

$$u = -\frac{\partial w}{\partial x}z + f_1(x,y), \quad v = -\frac{\partial w}{\partial y}z + f_2(x,y)$$

利用第三个假设:$(u)_{z=0}=0$, $(v)_{z=0}=0$,可知 $f_1(x,y)=f_2(x,y)=0$,于是有

$$u = -\frac{\partial w}{\partial x}z, \quad v = -\frac{\partial w}{\partial y}z \tag{13-1}$$

式(13-1)表示,薄板内坐标为(x,y,z)的任一点,分别在 x 和 y 方向的位移沿板厚方向呈线性分布,中面处位移为零,在上下表面处位移最大。

利用式(a)的第一、第二和第四式,得应变分量的表示式

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}z \\
\varepsilon_y &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}z \\
\gamma_{xy} &= -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}z
\end{aligned}\right\} \tag{13-2}$$

可见应变分量 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ 也是沿板的厚度按线性分布的,在中面上为零,在上下

板面处达极值。

(二) 薄板中的应力分量表示式

根据上述的第一和第二个假设,物理方程简化为

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

将应变分量表示式(13-2)代入,得

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\end{aligned}\right\} \tag{13-3}$$

这是薄板小挠度弯曲时,主要应力 σ_x,σ_y 和 τ_{xy} 与挠度 w 的关系式。可见它们沿板的厚度也呈线性分布,其在中面上为零,在上下板面处达到极值。这与梁弯曲正应力沿梁高的变化规律相同。

按假设,σ_z,τ_{xz} 和 τ_{yz} 为零,而实际上,它们只是远小于 σ_x,σ_y 和 τ_{xy} 的次要的应力分量,对于它们所引起的变形可略去不计,但对于维持平衡,它们不能不计。为了求得它们,现考虑不计体力的平衡微分方程

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} &= 0\\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} &= 0\\ \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} &= 0\end{aligned}\right\} \tag{c}$$

和薄板上下板面上的应力边界条件

$$\left.\begin{aligned}(\tau_{xz})_{z=\pm\frac{h}{2}} &= 0\\ (\tau_{yz})_{z=\pm\frac{h}{2}} &= 0\\ (\sigma_z)_{z=\frac{h}{2}} &= 0\\ (\sigma_z)_{z=-\frac{h}{2}} &= -q\end{aligned}\right\} \tag{d}$$

式(d)中最后一式中的 q 为垂直作用于板中面的荷载集度。将式(13-3)代入方程(c),经积分后,利用边界条件(d)的前三式,不难得到以下的结果:

$$\left.\begin{aligned}\tau_{xz}&=\frac{E}{2(1-\nu^2)}\left(z^2-\frac{h^2}{4}\right)\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w\\ \tau_{yz}&=\frac{E}{2(1-\nu^2)}\left(z^2-\frac{h^2}{4}\right)\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w\end{aligned}\right\}\tag{13-4}$$

$$\sigma_z=-\frac{Eh^3}{6(1-\nu^2)}\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{h}\right)^2\left(1+\frac{z}{h}\right)\nabla^2\ \nabla^2 w\tag{13-5}$$

这里，

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\nabla^2\ \nabla^2=\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

式(13-4)就是切应力 τ_{xz} 和 τ_{yz} 与挠度 w 的关系式，它们表明，切应力 τ_{xz} 和 τ_{yz} 沿板厚方向呈抛物线分布，在中面处达最大值，这也与梁弯曲时切应力沿梁高方向的变化规律相同。至于 σ_z，可知沿板厚呈三次抛物线规律分布(图 13-2)。

(三) 薄板横截面上的内力表示式

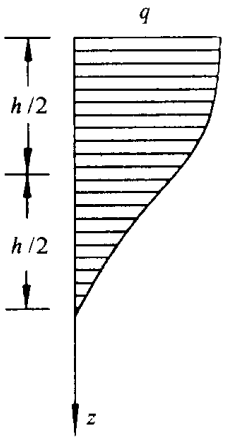


图 13-2

在一般情况下，应力分量在板边上很难精确地满足静力边界条件，只能应用局部性原理，使这些应力分量在板边单位宽度上所合成的内力沿板厚总体上满足边界条件。为此，需要建立由内力表示的静力边界条件。下面我们要建立这些合成内力与挠度之间的关系。

从板中取出底边长分别为 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$ 而高度为 h 的微小矩形单元体，中面 $Oabc$ 取为 Oxy 坐标平面，如图 13-3 所示。图中阴影微分面的高度为 $\mathrm{d}z$，而阴影微分面单位宽度上的正应力和切应力 $\tau_{xy}=\tau_{yx}$ 的主矢量分别为 $\sigma_x\mathrm{d}z$，$\sigma_y\mathrm{d}z$ 和 $\tau_{xy}\mathrm{d}z=\tau_{yx}\mathrm{d}z$。由于 σ_x，σ_y，$\tau_{xy}=\tau_{yx}$ 沿板厚按线性规律分布，即由于分布的反对称性，所以它们在板的全厚度上的主矢量显然为零，即

$$\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_x\mathrm{d}z=-\frac{E}{(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\int_{h/2}^{h/2}z\mathrm{d}z=0$$

$$\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_y\mathrm{d}z=-\frac{E}{(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\int_{h/2}^{h/2}z\mathrm{d}z=0$$

$$\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{xy}\mathrm{d}z=-\frac{E}{1+\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\int_{-h/2}^{h/2}z\mathrm{d}z=0$$

这表示，应力分量 σ_x，σ_y，τ_{xy} 和 τ_{yx} 沿板的厚度构成力偶，若分别以 M_x，M_y，M_{xy} 和 M_{yx} 表示它们在单位宽度内的力偶矩，则有

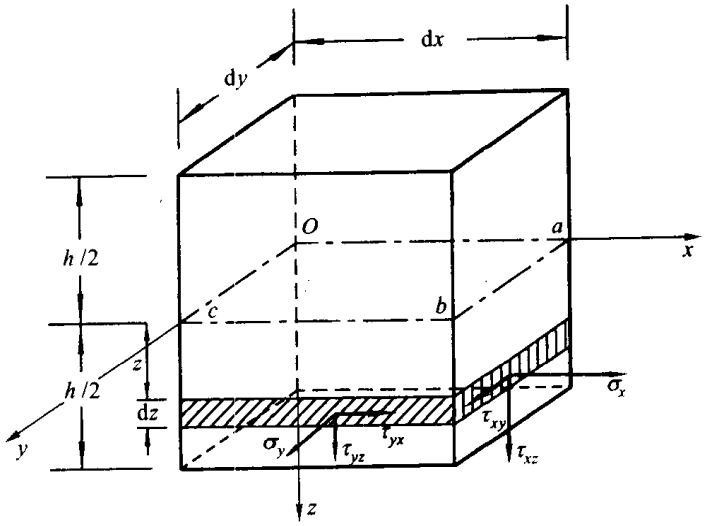


图 13－3

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_x \mathrm{d}z$$

$$M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_y \mathrm{d}z$$

$$M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\tau_{xy} \mathrm{d}z$$

$$M_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\tau_{yx} \mathrm{d}z$$

将式(13－3)代入，并注意 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$，积分后得

$$\left.\begin{aligned} M_x &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\ M_y &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\ M_{xy} &= M_{yx} = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned}\right\} \tag{13-6}$$

其中

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{13-7}$$

称为**板的抗弯刚度**，它的意义和梁的抗弯刚度相似。

下面再求 τ_{xz} 和 τ_{yz} 在板全厚度单位宽度上的合力，若分别以 F_{Sx} 和 F_{Sy} 表示，则有

$$F_{Sx}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\tau_{xz}\mathrm{d}z$$

$$F_{Sy}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\tau_{yz}\mathrm{d}z$$

将式(13-4)代入,积分后得

$$\left.\begin{aligned}F_{Sx}&=-D\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w\\F_{Sy}&=-D\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w\end{aligned}\right\}\tag{13-8}$$

显然,这里的 M_x,M_y 分别表示垂直于 x 轴和 y 轴的板的横截面单位宽度上的弯矩,M_{xy}和M_{yx}分别表示这两个横截面单位宽度上的扭矩,而 F_{Sx}和F_{Sy}则表示这两个横截面单位宽度上的横向剪力。弯矩和扭矩的量纲为 LMT^{-2},横向剪力的量纲为 MT^{-2}。

弯矩、扭矩和横向剪力共6个量,统称为**板的内力**。按弹性力学应力分量指向的规定,弯矩 M_x,M_y 使板的横截面上 $z>0$ 的一侧产生正号的正应力 σ_x,σ_y 时为正;扭矩 M_{xy}和M_{yx}使板的横截面上 $z>0$ 的一侧产生正号的切应力 τ_{xy},τ_{yx} 时为正;横向切力 F_{Sx},F_{Sy}使板的横截面产生正号的切应力 τ_{xz},τ_{yz}时为正。详见图 13-4a。有时,用双箭头的矢量来表示弯矩和扭矩。因此,板中任一微小矩形单元体边界上的内力也可表示成图 13-4b 的形式。

将式(13-3),(13-4)与式(13-6),(13-8)进行比较后可以看出,应力分量 σ_x,σ_y,τ_{xy},τ_{xz},τ_{yz}又可通过相应的内力表示为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\frac{12M_x}{h^3}z\\\sigma_y&=\frac{12M_y}{h^3}z\\\tau_{xy}=\tau_{yx}&=\frac{12M_{xy}}{h^3}z\\\tau_{xz}&=\frac{6F_{Sx}}{h^2}\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right)\\\tau_{yz}&=\frac{6F_{Sy}}{h^2}\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right)\end{aligned}\right\}\tag{13-9}$$

它们与材料力学中梁的弯曲正应力和切应力公式相似。

(四) 薄板弯曲的基本方程

先考察板中边长为 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 而高为 h 的矩形微分单元体的平衡,其四个边

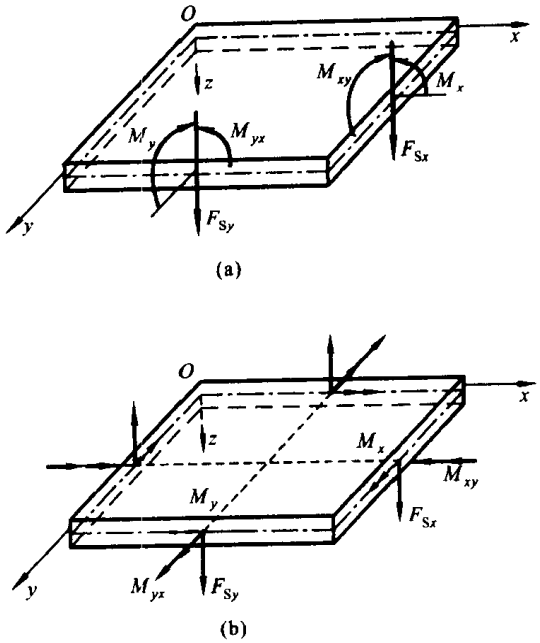


图 13－4

上的内力如图 13－5 所示，上面作用有横向分布荷载 q。

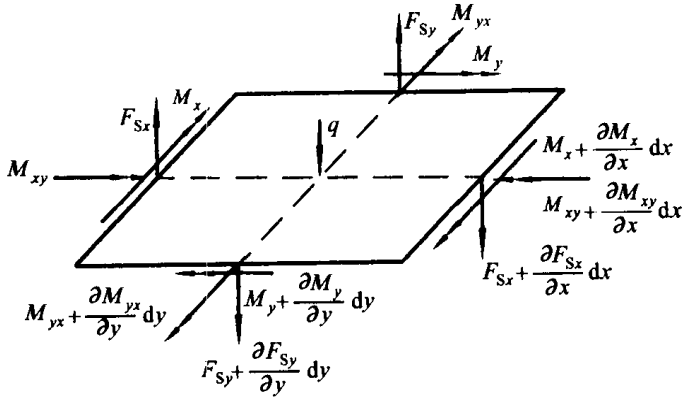


图 13－5

显然，对于图 13－5 所示的空间一般力系，6 个平衡方程中有 3 个方程 $\sum F_x=0$，$\sum F_y=0$，$\sum M_z=0$ 已经满足。现要从其余 3 个方程得到内力所必须满足的平衡微分方程。

由 $\sum F_z=0$，有

$$\left(F_{Sx}+\frac{\partial F_{Sx}}{\partial x}dx\right)dy-F_{Sx}dy+\left(F_{Sy}+\frac{\partial F_{Sy}}{\partial y}dy\right)dx-F_{Sy}dx+q\,dx\,dy=0$$

简化后约去 $dxdy$，得

$$\frac{\partial F_{Sx}}{\partial x}+\frac{\partial F_{Sy}}{\partial y}+q=0 \tag{13-10}$$

对过板单元的中心而与 y 轴平行的直线取力矩的代数和为零，有

$$\left(M_x+\frac{\partial M_x}{\partial x}dx\right)dy-M_x dy+\left(M_{yx}+\frac{\partial M_{yx}}{\partial y}dy\right)dx-M_{yx}dx-$$

$$\left(F_{Sx}+\frac{\partial F_{Sx}}{\partial x}dx\right)dy\frac{dx}{2}-F_{Sx}dy\frac{dx}{2}=0$$

简化后得

$$F_{Sx}=\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \tag{13-11}$$

同理，可得

$$F_{Sy}=\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial M_y}{\partial y} \tag{13-12}$$

式(13-10)，(13-11)，(13-12)即为内力表示的平衡微分方程。若将式(13-11)，(13-12)代入式(13-10)，又可得到用弯矩、扭矩和横向分布荷载表示的平衡微分方程：

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}+q=0 \tag{13-13}$$

最后，若将式(13-8)代入式(13-10)，或者将式(13-6)代入式(13-13)，得到**薄板弯曲的基本方程**：

$$\nabla^2\nabla^2 w=\frac{q}{D} \tag{13-14}$$

这一方程又称为**弹性曲面的微分方程**。这样，就把问题归结为在给定的边界条件下，求解方程(13-14)的问题。求得了挠度 w，就可由式(13-3)，(13-4)，(13-5)求应力分量，由式(13-6)和(13-8)求板的内力。

顺便指出，如果将式(13-6)代入式(13-11)和式(13-12)，同样可以得到式(13-8)。另外，如果将式(13-5)代入边界条件(d)的第四式，则同样可以得到薄板弯曲的基本方程(13-14)。

§13-3 薄板的边界条件

有了以挠度表示的内力表达式(13-6)和(13-8)，接下来以矩形薄板为例，讨论板边几种常见的边界条件。

如果已知作用在板边外力的静力效应，即已知这些外力所产生的弯矩、扭矩和横向剪力，则严格地说，板的3个内力，即弯矩、扭矩和横向剪力的边界值，应

一一对应地与这些外加的弯矩、扭矩和横向剪力相等。可见，在每个边界上有3个边界条件。但薄板弯曲的基本方程(13－14)是四阶的椭圆型偏微分方程，根据偏微分方程理论，在每边上，只需要两个边界条件。对此，基尔霍夫作了如下巧妙的处理：他将边界上的扭矩变换为静力等效的横向剪力，再将它与原来的横向剪力合并成总的分布剪力。这样，就将每边上的3个边界条件归并成2个边界条件。下面，具体考察扭矩的等效变换情况。

设 AB 为平行于 x 轴的板边，其上作用有连续分布的扭矩 $M_{yx}(x,y)$。若在宽度为 $\mathrm{d}x$ 的 mn 段上的扭矩为 $M_{yx}\mathrm{d}x$，则在宽度为 $\mathrm{d}x$ 的 np 段上的扭矩为 $\left(M_{yx}+\dfrac{\partial M_{yx}}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x$，如图13－6a所示。微段 mn 上的扭矩 $M_{yx}\mathrm{d}x$ 可以用两个分别作用于 m 点和 n 点的横向剪力 M_{yx} 代替，一个向下，另一个向上。对于作用在微段 np 上的扭矩 $\left(M_{yx}+\dfrac{\partial M_{yx}}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x$ 也可采取同样的变换，于是得到如图13－6b所示的受力情况。注意，在两个微段的交界点 n 处，向上的横向剪力 M_{yx} 和向下的横向剪力 $M_{yx}+\dfrac{\partial M_{yx}}{\partial x}\mathrm{d}x$ 将合成一个向下的横向剪力 $\dfrac{\partial M_{yx}}{\partial x}\mathrm{d}x$。这个力又可用分布在以 n 点为中心、宽度为 $\mathrm{d}x$ 微段上的分布剪力 $\dfrac{\partial M_{yx}}{\partial x}$ 来代替，这个分布剪力的方向向下。对板的整个边界都如此处理，该边界上的分布扭矩就变换为等效的分布剪力 $\dfrac{\partial M_{yx}}{\partial x}$。将它与原来的横向剪力 F_{Sy} 相加，得到 AB 边上的总的分布剪力

$$F_{Sy}^{t}=F_{Sy}+\frac{\partial M_{yx}}{\partial x} \tag{13-15}$$

F_{Sy}^{t} 的符号规定与 F_{Sy} 相同。必须注意，在板边的两端 A 和 B 还有两个未被抵消的集中力 $(M_{yx})_A$ 和 $(M_{yx})_B$，如图13－6b所示。

若对平行于 y 轴的板边 CB 采用同样的做法，则可将作用于 CB 上的连续分布扭矩 M_{xy} 变换为等效的分布剪力 $\dfrac{\partial M_{xy}}{\partial y}$(图13－6b)，该边上总的分布剪力为

$$F_{Sx}^{t}=F_{Sx}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \tag{13-16}$$

F_{Sx}^{t} 的符号规定与 F_{Sx} 相同。在边界两端 C 和 B 也有两个集中力 $(M_{xy})_C$ 和 $(M_{xy})_B$。

当对矩形薄板的每条边界上的扭矩都进行上述变换后，在两边相交的角点，例如 AB 和 CB 边的交点 B，将合成一个集中力 F_{RB}，即

$$F_{RB}=(M_{yx})_B+(M_{xy})_B=2(M_{xy})_B \tag{13-17}$$

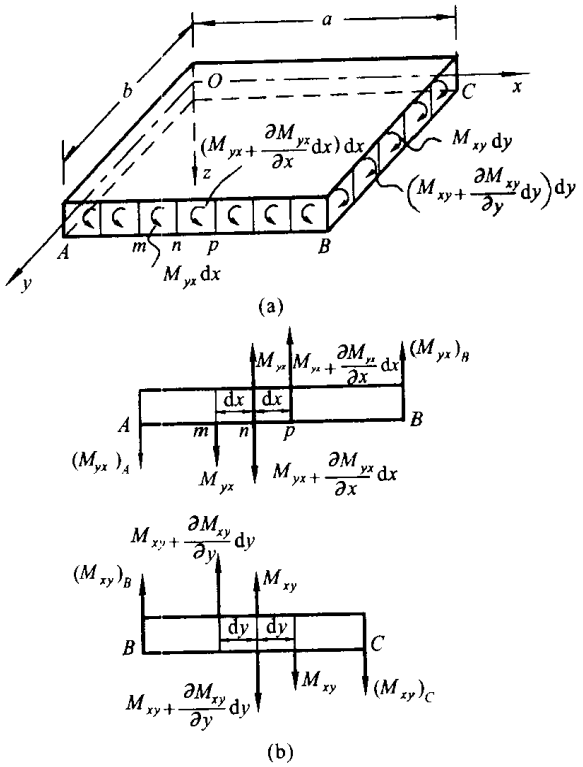


图 13－6

这个集中力的指向，应由扭矩$(M_{xy})_B$的符号来判断。同理，可以得到O，A，C三个角点上的集中力。图 13－7 表示当四个角点上的扭矩都为正时的指向。

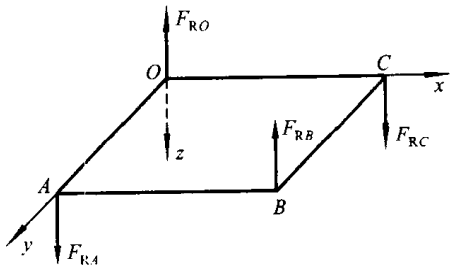


图 13－7

将式(13－6)的第三式和式(13－8)代入式(13－15)至(13－17)，则F'_{Sx}，F'_{Sy}和F_{RB}都可用挠度w来表示，即

$$F'_{Sx}=-D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right] \tag{13-18}$$

$$F_{Sy}^{\prime}=-D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right] \tag{13-19}$$

$$F_{RB}=-2D(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)_B \tag{13-20}$$

板的边界一般有简支边、固定边和自由边三种情况。图 13－8 所示的 OC 边为简支边界，OA 为固定边界，AB 和 BC 边为自由边界。现分别建立它们的边界条件。

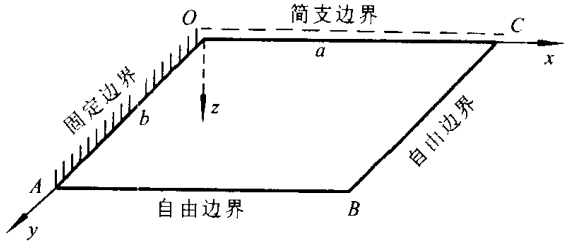


图 13－8

(1) 简支边界

简支边上的挠度和弯矩为零，即

$$(w)_{y=0}=0,$$

$$(M_y)_{y=0}=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{y=0}=0$$

但由于$(w)_{y=0}=0$，必然有$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{y=0}=0$，$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{y=0}=0$，所以简支边的边界条件可写为

$$\left.\begin{aligned}(w)_{y=0}&=0\\\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{y=0}&=0\end{aligned}\right\} \tag{13-21}$$

(2) 固定边界

固定边界上的挠度和转角为零，故有边界条件

$$\left.\begin{aligned}(w)_{x=0}&=0\\\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=0}&=0\end{aligned}\right\} \tag{13-22}$$

(3) 自由边界

自由边界上的弯矩和总的分布剪力为零。例如，对于图 13－8 中的 AB 边，应有$(M_y)_{y=b}=0$，$(F_{Sy}^{\prime})_{y=b}=0$；对 CB 边，应有$(M_x)_{x=a}=0$，$(F_{Sx}^{\prime})_{x=a}=0$。注意到式(13－6)的前两式和式(13－18)，(13－19)，有

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=a}=0\\
&\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right]_{x=a}=0\\
&\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{y=b}=0\\
&\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right]_{y=b}=0
\end{aligned}\right\} \tag{13-23}$$

(4) 角点条件

如上所述，当沿板边的扭矩变换为等效的分布剪力后，在板的角点将产生一个集中力。如果角点受到支承，如图 13-8 中的 O 点，这个集中力就是支座对板的角点 O 的集中反力。在求得了挠度 w 后，这个集中反力可由式(13-20)求得。对于悬空的角点，例如图 13-8 中的两自由边界的交点 B，则应有

$$F'_{RB}=2(M_{xy})_B=0$$

由式(13-20)可得

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)_B=\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)_{x=a,y=b}=0 \tag{13-24}$$

如果在 B 点有支座，而其挠度被阻止发生，则应有

$$(w)_B=(w)_{x=a,y=b}=0$$

此时，支座反力可由式(13-20)求得。

§13-4 简单例子

下面，举两个简单的例子，以说明如何求解问题。

例 1 边界固定的椭圆形薄板，受均匀分布的荷载 q_0 作用，设椭圆的半轴为 a 和 b(图 13-9)。试求板的挠度和内力。

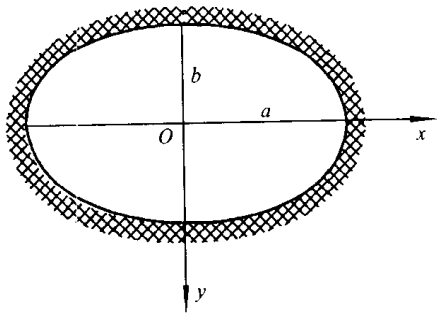


图 13-9

解 由椭圆的周界方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

试取挠度的表达式为

$$w=A\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)^2 \tag{a}$$

这里，A 为任意常数。

显然，由式(a)所表示的挠度满足在板的边界处为零的条件。下面要证明，它还能满足在板边上转角为零的条件。

事实上，因为在板边上有

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{4Ax}{a^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)=0$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{4Ay}{b^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)=0$$

所以，w 对椭圆板边界法线方向的导数在板边上的值为

$$\frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}=0$$

总之，以式(a)表示的挠度能满足问题的全部边界条件。

现将式(a)代入方程(13-14)，有

$$D\left(\frac{24A}{a^4}+\frac{16A}{a^2b^2}+\frac{24A}{b^4}\right)=q_0$$

这是式(a)满足式(13-14)的条件。由此得

$$A=\frac{q_0}{8D\left(\frac{3}{a^4}+\frac{2}{a^2b^2}+\frac{3}{b^4}\right)} \tag{b}$$

代入式(a)，于是有

$$w=\frac{q_0\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)^2}{8D\left(\frac{3}{a^4}+\frac{2}{a^2b^2}+\frac{3}{b^4}\right)} \tag{13-25}$$

最大挠度发生在椭圆的中心，其值为

$$w_{\max}=(w)_{x=y=0}=\frac{q_0}{8D\left(\frac{3}{a^4}+\frac{2}{a^2b^2}+\frac{3}{b^4}\right)} \tag{c}$$

如果 $a=b$，则为圆板，其最大挠度为

$$w_{\max}=\frac{q_0a^4}{64D} \tag{d}$$

如将式(13-25)代入式(13-6)和(13-8)，可求得内力。现只求出其弯矩

如下：

$$M_x=-\frac{q_0}{2\left(\frac{3}{a^4}+\frac{2}{a^2b^2}+\frac{3}{b^4}\right)}\left[\left(\frac{3x^2}{a^4}+\frac{y^2}{a^2b^2}-\frac{1}{a^2}\right)+\nu\left(\frac{3y^2}{b^4}+\frac{x^2}{a^2b^2}-\frac{1}{b^2}\right)\right]$$

$$M_y=-\frac{q_0}{2\left(\frac{3}{a^4}+\frac{2}{a^2b^2}+\frac{3}{b^4}\right)}\left[\left(\frac{3y^2}{b^4}+\frac{x^2}{a^2b^2}-\frac{1}{b^2}\right)+\nu\left(\frac{3x^2}{a^4}+\frac{y^2}{a^2b^2}-\frac{1}{a^2}\right)\right] \tag{13-26}$$

在板的中心，它们的值分别为

$$(M_x)_{x=y=0}=\frac{q_0a^2\left(1+\nu\frac{a^2}{b^2}\right)}{2\left(3+2\frac{a^2}{b^2}+3\frac{a^4}{b^4}\right)} \tag{e}$$

$$(M_y)_{x=y=0}=\frac{q_0b^2\left(1+\nu\frac{b^2}{a^2}\right)}{2\left(3+2\frac{b^2}{a^2}+3\frac{b^4}{a^4}\right)} \tag{f}$$

在椭圆长轴的端点

$$(M_x)_{x=\pm a,y=0}=-\frac{q_0a^2}{\left(3+2\frac{a^2}{b^2}+3\frac{a^4}{b^4}\right)} \tag{g}$$

在短轴的端点

$$(M_y)_{x=0,y=\pm b}=-\frac{q_0b^2}{\left(3+2\frac{b^2}{a^2}+3\frac{b^4}{a^4}\right)} \tag{h}$$

若 $a>b$，则式(f)和式(h)表示板中最大弯矩和最小弯矩。

当 a 趋向无穷时，则椭圆板变成跨度为 $2b$ 的平面应变情况下的两端固定的梁。此时，式(13-26)的第二式简化为

$$M_y=-\frac{q_0b^2}{6}\left(\frac{3y^2}{b^2}-1\right)$$

在梁的跨中和两端，弯矩值分别为

$$(M_y)_{y=0}=\frac{q_0b^2}{6}=\frac{q_0(2b)^2}{24}$$

$$(M_y)_{y=\pm b}=-\frac{q_0b^2}{3}=-\frac{q_0(2b)^2}{12}$$

这一结果与材料力学的结果相同。

例 2 四边简支的板，边长为 a 和 b，受有分布荷载 $q(x,y)=q_0\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$，

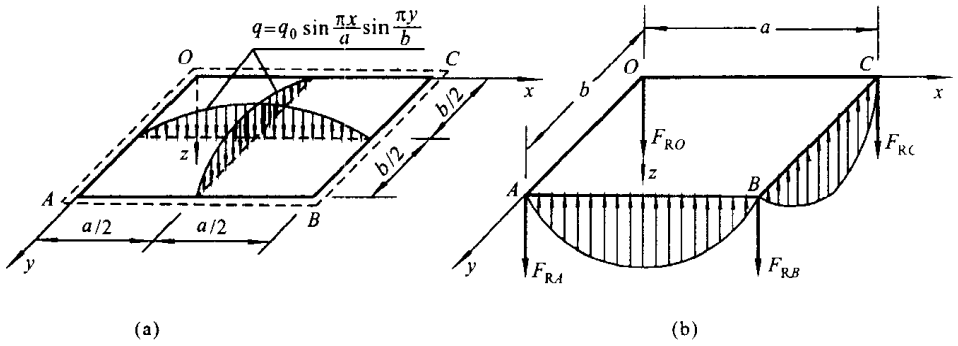
q_0 为板中心的荷载集度(图 13-10),求挠度、内力和支反力。

解 在本问题中,方程(13-14)变为

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{q_0}{D}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} \tag{i}$$

而本问题的边界条件为

$$\left.\begin{aligned}(w)_{x=0,a}&=0\\(w)_{y=0,b}&=0\\\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{x=0,a}&=0\\\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{y=0,b}&=0\end{aligned}\right\} \tag{j}$$



(a) (b)

图 13-10

显然,若取

$$w=A\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} \tag{k}$$

则能满足全部边界条件。另外,由方程(i)可以看出,只要适当选择 A,则该方程也能满足。现将式(k)代入式(i),得

$$A=\frac{q_0}{\pi^4 D\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2}$$

于是,本问题的挠度为

$$w=\frac{q_0\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}}{\pi^4 D\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2} \tag{13-27}$$

利用式(13-6)和(13-8),可求得如下的内力:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \frac{q_0}{\pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{\nu}{b^2}\right)\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} \\ M_y &= \frac{q_0}{\pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2}\left(\frac{\nu}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} \\ M_{xy} &= -\frac{q_0(1-\nu)}{\pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2 ab}\cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b} \end{aligned}\right\} \tag{13-28}$$

$$\left.\begin{aligned} F_{Sx} &= -\frac{q_0}{\pi a\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} \\ F_{Sy} &= -\frac{q_0}{\pi b\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b} \end{aligned}\right\} \tag{13-29}$$

显然,最大挠度和最大弯矩发生在板的中心,它们为

$$w_{\max} = \frac{q_0}{\pi^4 D\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2} \tag{l}$$

$$(M_x)_{\max} = \frac{q_0}{\pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{\nu}{b^2}\right) \tag{m}$$

$$(M_y)_{\max} = \frac{q_0}{\pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2}\left(\frac{\nu}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right) \tag{n}$$

板边的反力由式(13-16)和(13-15)求得,在 $x=a$ 和 $y=b$ 的边界上,它们分别为

$$\begin{aligned} (F_{Sx}^{t})_{x=a} &= \left(F_{Sx}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\right)_{x=a} \\ &= -\frac{q_0}{\pi a\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{2-\nu}{b^2}\right)\sin\frac{\pi y}{b} \end{aligned} \tag{o}$$

$$\begin{aligned} (F_{Sy}^{t})_{y=b} &= \left(F_{Sy}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}\right)_{y=b} \\ &= -\frac{q_0}{\pi b\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{2-\nu}{a^2}\right)\sin\frac{\pi x}{a} \end{aligned} \tag{p}$$

这里,负号表示反力方向向上。如改变上述两式的符号,则得 $(F_{Sx}^{t})_{x=0}$ 和

$(F_{Sy}^{1})_{y=0}$。四个板边的反力作用情况，如图 13-10b 所示。

最后，由式(13-17)求四个角点的集中反力，它们为

$$(F_R)_{x=0,y=0}=2(M_{xy})_{x=0,y=0}=-\frac{2q_0(1-\nu)}{\pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2 ab}=(F_R)_{x=a,y=b}$$

$$(F_R)_{x=0,y=b}=2(M_{xy})_{x=0,y=b}=\frac{2q_0(1-\nu)}{\pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2 ab}=(F_R)_{x=a,y=0}$$

由扭矩的符号可知，这四个集中反力都向下，如图 13-10b 所示。这个结果表明，简支板在横向荷载作用下，四个角点有向上翘的趋势。由于支座对四个角点产生向下的集中反力，从而阻止了角点的上翘。

§13-5 简支边矩形薄板的纳维解

图 13-11 所示为一四边简支的矩形薄板，边长分别为 a 和 b，受任意分布的荷载 $q(x,y)$作用。这一问题的边界条件为

$$\left.\begin{aligned}(w)_{x=0,a}&=0\\(w)_{y=0,b}&=0\\\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{x=0,a}&=0\\\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{y=0,b}&=0\end{aligned}\right\}\qquad(a)$$

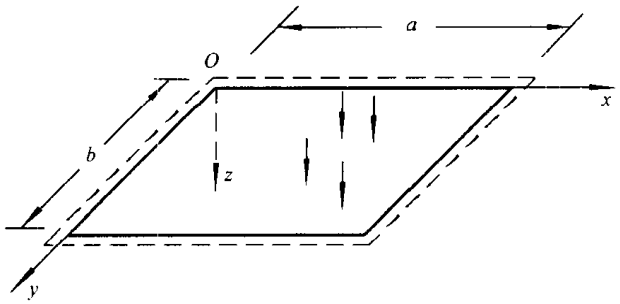


图 13-11

因为任意的荷载函数 $q(x,y)$总能展开成双重的三角级数，所以，纳维用双重的三角级数求解了这一问题。他设

$$w=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\qquad(b)$$

其中的 m 和 n 为正整数。显然，它已满足了由式(a)表示的全部边界条件。

现在的问题是还要使式(b)满足薄板弯曲的基本方程(13－14)，为此，将式(b)代入式(13－14)，得

$$\pi^4 D\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2 A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}=q(x,y) \tag{c}$$

到此，可用两种方法确定系数 A_{mn}：一种方法是将 $q(x,y)$展成双重三角级数，其中的系数是可以求得的，然后代入式(c)，比较两边的系数，可求得 A_{mn}；另一种方法是把式(c)等号左边的级数看成是 $q(x,y)$的展开式，从而去求系数 A_{mn}。这里，拟采用后一方法。为此，将式(c)等号两边同乘 $\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}$，然后分别对 x 和 y 从 0 到 a 和从 0 到 b 积分，并利用三角函数的正交性：

$$\int_0^a \sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{m\pi x}{a}\,\mathrm{d}x=\begin{cases}0 & (m\neq i)\\ \dfrac{a}{2} & (m=i)\end{cases}$$

$$\int_0^b \sin\frac{j\pi y}{b}\sin\frac{n\pi y}{b}\,\mathrm{d}y=\begin{cases}0 & (j\neq n)\\ \dfrac{b}{2} & (j=n)\end{cases}$$

于是

$$A_{mn}=\frac{4}{\pi^4 abD\left(\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}\right)^2}\int_0^a\int_0^b q\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{d}$$

代入式(b)，得挠度表达式为

$$w=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\int_0^a\int_0^b q\sin\dfrac{m\pi x}{a}\sin\dfrac{n\pi y}{b}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\pi^4 abD\left(\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}\right)^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{13-30}$$

式(13－30)称为**纳维解**，由此，还可以求出内力和支反力。下面，举两个具体的算例。

例 1 边长分别为 a 和 b 的四边简支的矩形薄板，如在全板上受均布荷载 q_0 作用。试求板的挠度、弯矩和扭矩。

解 由式(d)，算得

$$A_{mn}=\frac{16q_0}{\pi^6 Dmn\left(\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}\right)^2}\quad(m=1,3,5,\cdots;n=1,3,5,\cdots)$$

因此得

$$w=\frac{16q_0}{\pi^6 D}\sum_{m=1,3,5\cdots}^{\infty}\sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{m\pi x}{a}\sin\dfrac{n\pi y}{b}}{mn\left(\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}\right)^2} \tag{e}$$

最大挠度发生在板的中心，即 $x=\frac{a}{2}$，$y=\frac{b}{2}$ 处，为

$$w_{\max}=\frac{16q_0}{\pi^6 D}\sum_{m=1,3,5\cdots}^{\infty}\sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{mn\left(\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}\right)^2} \tag{f}$$

这个级数收敛很快，例如，对于正方形板，只取级数的第一项，即 $m=n=1$，有

$$w_{\max}=0.004\ 16q_0\frac{a^4}{D}$$

如果取级数的前四项，即 $m=1,n=1,3;m=3,n=1,3$，如精确到三位有效数，则

$$w_{\max}=0.004\ 06q_0\frac{a^4}{D}$$

将式(e)代入式(12-6)可求得弯矩和扭矩分别为

$$\left.\begin{aligned}
M_x&=\frac{16q_0}{\pi^4}\sum_{m=1,3,5\cdots}^{\infty}\sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{\dfrac{m^2}{a^2}+\nu\dfrac{n^2}{b^2}}{mn\left(\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}\right)^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\\
M_y&=\frac{16q_0}{\pi^4}\sum_{m=1,3,5\cdots}^{\infty}\sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{\nu\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}}{mn\left(\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}\right)^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\\
M_{xy}&=-\frac{16(1-\nu)q_0}{\pi^4 ab}\sum_{m=1,3,5\cdots}^{\infty}\sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{\cos\dfrac{m\pi x}{a}\cos\dfrac{n\pi y}{b}}{\left(\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}\right)^2}
\end{aligned}\right\} \tag{g}$$

可见，在板的中心，弯矩 M_x 和 M_y 最大，而 M_{xy} 为零；在板边，M_x 和 M_y 为零，而 M_{xy} 为最大。

例 2 现有一边长分别为 a 和 b 的四边简支的矩形薄板，如果在板上的一点 $M(\xi,\eta)$ 受集中力 F 作用(图 13-12)。试求板的挠度。

对于集中力，可以看成作用在边长为 $\Delta x=\Delta\xi$，$\Delta y=\Delta\eta$ 的微小矩形面上的分布荷载 $q=\frac{F}{\Delta\xi\Delta\eta}$，在微小面 $\Delta\xi\Delta\eta$ 外，$q=0$。于是由式(d)，并利用积分中值定理，得

$$A_{mn}=\frac{4}{\pi^4 abD\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\int_{\xi-\frac{\Delta\xi}{2}}^{\xi+\frac{\Delta\xi}{2}}\int_{\eta-\frac{\Delta\eta}{2}}^{\eta+\frac{\Delta\eta}{2}}\frac{F}{\Delta\xi\Delta\eta}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{4F}{\pi^4 abD\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2\Delta\xi\Delta\eta}\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\Delta\xi\Delta\eta$$

$$=\frac{4F}{\pi^4 abD\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}$$

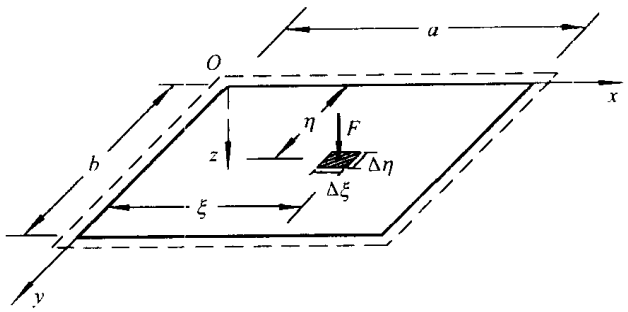


图 13-12

于是得板的挠度为

$$w=\frac{4F}{\pi^4 abD}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\tag{h}$$

当荷载 F 作用在板中心(即 $\xi=\frac{a}{2},\eta=\frac{b}{2}$)时,上式简化为

$$w=\frac{4F}{\pi^4 abD}\sum_{m=1,3,5\cdots}^{\infty}\sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}\frac{\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\tag{i}$$

最大挠度发生在板的中心,即 $x=\frac{a}{2},y=\frac{b}{2}$ 处,为

$$w_{\max}=\frac{4F}{\pi^4 abD}\sum_{m=1,3,5\cdots}^{\infty}\sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\tag{j}$$

如果为正方形板,则最大挠度为

$$w_{\max}=\frac{4Fa^2}{\pi^4 D}\sum_{m=1,3,5\cdots}^{\infty}\sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{1}{(m^2+n^2)^2}\tag{k}$$

取级数的前四项,得

$$w_{\max}=\frac{0.011\,21Fa^2}{D}$$

它比精确值约小 3.5%。

本节所介绍的纳维解法的优点是：不论荷载分布如何，求解都比较简单易行。它的缺点是只适用于四边简支的矩形薄板，而且级数收敛较慢，特别是在计算内力时，往往要取很多项。

§13－6　矩形薄板的莱维解

对矩形薄板有一对边简支而另一对边为任意支承的情况，莱维提出了单重三角级数的方法。这种方法不仅适用范围比纳维解法广泛，而且收敛性也比纳维解法好。

仍设矩形薄板的边长分别为 a 和 b，坐标选取如图 13－13 所示。现在取挠度为如下单重三角级数形式：

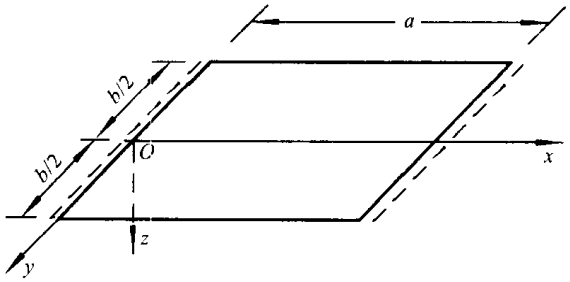


图 13－13

$$w=\sum_{m=1}^{\infty}Y_m(y)\sin\frac{m\pi x}{a} \tag{a}$$

这里的 $Y_m(y)$ 是待定函数，m 为任意的正整数。显然，级数(a)已经满足了 $x=0,x=a$ 处的 $(w)_{x=0,a}=0$ 和 $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{x=0,a}=0$ 的边界条件。下面根据式(a)满足薄板弯曲基本方程的要求，去寻求 $Y_m(y)$。为此，将式(a)代入方程(13－14)，从而得

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{d}^4Y_m}{\mathrm{d}y^4}-2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\frac{\mathrm{d}^2Y_m}{\mathrm{d}y^2}+\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4Y_m\right]\sin\frac{m\pi x}{a}=\frac{q(x,y)}{D} \tag{b}$$

在式(b)等号两边同乘 $\sin\frac{n\pi x}{a}$，然后对 x 从 0 到 a 积分，并利用三角函数的正交性(如前述)，于是有

$$\frac{\mathrm{d}^4 Y_m}{\mathrm{d}y^4} - 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \frac{\mathrm{d}^2 Y_m}{\mathrm{d}y^2} + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 Y_m = \frac{2}{aD}\int_0^a q\sin\frac{m\pi x}{a}\,\mathrm{d}x \tag{c}$$

这是四阶线性常系数非齐次常微分方程，对于给定的 $q(x,y)$，非齐次项是已知的。方程(c)的齐次通解为

$$Y_m^0 = A_m\cosh\frac{m\pi y}{a} + B_m\frac{m\pi y}{a}\sinh\frac{m\pi y}{a} + C_m\sinh\frac{m\pi y}{a} + D_m\frac{m\pi y}{a}\cosh\frac{m\pi y}{a}$$

若以 $Y_m^*(y)$ 表示非齐次方程的任一特解，则方程(c)的通解为

$$Y_m = A_m\cosh\frac{m\pi y}{a} + B_m\frac{m\pi y}{a}\sinh\frac{m\pi y}{a} + C_m\sinh\frac{m\pi y}{a} + D_m\frac{m\pi y}{a}\cosh\frac{m\pi y}{a} + Y_m^*(y) \tag{d}$$

将式(d)代入式(a)，即得挠度表达式：

$$w = \sum_{m=1}^{\infty}\left[A_m\cosh\frac{m\pi y}{a} + B_m\frac{m\pi y}{a}\sinh\frac{m\pi y}{a} + C_m\sinh\frac{m\pi y}{a} + D_m\frac{m\pi y}{a}\cosh\frac{m\pi y}{a} + Y_m^*(y)\right]\sin\frac{m\pi x}{a} \tag{13-31}$$

式(13-31)称为**莱维解**，其中，A_m，B_m，C_m 和 D_m 应由 $y=\pm\frac{b}{2}$ 的边界条件确定。

下面举两个例子，以说明莱维解的应用。

例 1 设四边简支的矩形薄板，受均布荷载 q_0 作用，试求挠度。坐标选取如图 13-13 所示。

解 式(c)等号右边的积分为

$$\frac{2q_0}{aD}\int_0^a \sin\frac{m\pi x}{a}\mathrm{d}x = \frac{2q_0}{\pi Dm}(1-\cos m\pi) = \frac{4q_0}{\pi Dm} \qquad (m=1,3,5,\cdots)$$

于是，方程(c)的特解可取为

$$Y_m^* = \frac{4q_0 a^4}{\pi^5 Dm^5} \qquad (m=1,3,5,\cdots)$$

代入式(13-31)，并利用变形的对称性，即 $Y_m(y)$ 应是 y 的偶函数，于是有

$$w = \sum_{m=1}^{\infty}\left(A_m\cosh\frac{m\pi y}{a} + B_m\frac{m\pi y}{a}\sinh\frac{m\pi y}{a}\right)\sin\frac{m\pi x}{a} +$$

$$\frac{4q_0a^4}{\pi^5 D}\sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{m^5}\sin\frac{m\pi x}{a} \tag{e}$$

利用边界条件

$$(w)_{y=\pm\frac{b}{2}}=0,\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{y=\pm\frac{b}{2}}=0$$

得下列联立方程

$$\cosh\alpha_m A_m+\alpha_m\sinh\alpha_m B_m+\frac{4q_0a^4}{\pi^5 Dm^5}=0$$

$$\cosh\alpha_m(A_m+2B_m)+\alpha_m\sinh\alpha_m B_m=0$$

$$(m=1,3,5,\cdots)$$

及

$$\cosh\alpha_m A_m+\alpha_m\sinh\alpha_m B_m=0$$

$$\cosh\alpha_m(A_m+2B_m)+\alpha_m\sinh\alpha_m B_m=0$$

$$(m=2,4,6,\cdots)$$

其中，$\alpha_m=\frac{m\pi b}{2a}$。分别求解上述两组方程，得

$$A_m=-\frac{2(2+\alpha_m\tanh\alpha_m)q_0a^4}{\pi^5 Dm^5\cosh\alpha_m},\qquad B_m=\frac{2q_0a^4}{\pi^5 Dm^5\cosh\alpha_m}$$

$$(m=1,3,5,\cdots)$$

和

$$A_m=B_m=0\qquad(m=2,4,6,\cdots)$$

将 A_m，B_m 代入式(e)，得挠度的最后表达式为

$$w=\frac{4q_0a^4}{\pi^5 D}\sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{m^5}\left(1-\frac{2+\alpha_m\tanh\alpha_m}{2\cosh\alpha_m}\cosh\frac{2\alpha_m y}{b}+\frac{\alpha_m}{2\cosh\alpha_m}\frac{2y}{b}\sinh\frac{2\alpha_m y}{b}\right)\sin\frac{m\pi x}{a} \tag{f}$$

最大挠度发生在板的中心，为

$$w_{\max}=\frac{4q_0a^4}{\pi^5 D}\sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5}\left(1-\frac{2+\alpha_m\tanh\alpha_m}{2\cosh\alpha_m}\right)$$

这个表达式中的级数收敛很快。例如，对于正方形板，$a=b$，$\alpha_m=\frac{m\pi}{2}$，即得

$$w_{\max}=\frac{4q_0a^4}{\pi^5 D}(0.314-0.004+\cdots)=0.004\,06\frac{q_0a^4}{D}$$

可见，在级数中仅取两项，就能得到很精确的结果。但对其他各点的挠度，级数收敛则要慢一些。

例 2　现有一边长为 a 和 b、四边简支的矩形薄板，在 $y=\pm\frac{b}{2}$ 的边界上受分布弯矩作用(图 13－14)，设分布弯矩为对称分布，即其集度为同一个已知函数 $f(x)$，求挠度表达式。

解　因板面无分布荷载作用，所以，基本方程(13－14)简化为

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=0 \tag{g}$$

本问题的边界条件为

$$\left.\begin{aligned}(w)_{x=0,a}&=0\\\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{x=0,a}&=0\end{aligned}\right\} \tag{h}$$

$$\left.\begin{aligned}(w)_{y=\pm\frac{b}{2}}&=0\\(M_y)_{y=\pm\frac{b}{2}}&=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{y=\pm\frac{b}{2}}=f(x)\end{aligned}\right\} \tag{i}$$

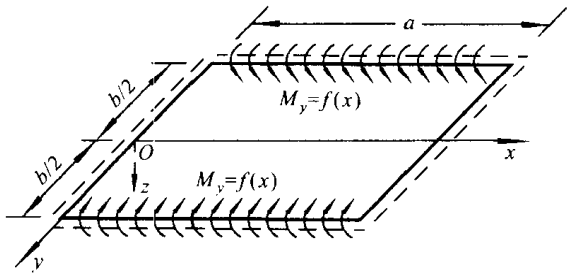


图 13－14

采用莱维解，取式(13－31)中的 $Y_m^*=0$，并由于变形的对称性，有 $C_m=D_m=0$，于是，式(13－31)变为

$$w=\sum_{m=1}^{\infty}\left(A_m\cosh\frac{m\pi y}{a}+B_m\frac{m\pi y}{a}\sinh\frac{m\pi y}{a}\right)\sin\frac{m\pi x}{a} \tag{j}$$

由式(i)的第一式，有

$$A_m\cosh\alpha_m+B_m\alpha_m\sinh\alpha_m=0$$

式中 $\alpha_m=\frac{m\pi b}{2a}$。由此得

$$A_m=-B_m\alpha_m\tanh\alpha_m$$

代入式(j)，得

$$w=\sum_{m=1}^{\infty}B_m\left(\frac{m\pi y}{a}\sinh\frac{m\pi y}{a}-\alpha_m\tanh\alpha_m\cosh\frac{m\pi y}{a}\right)\sin\frac{m\pi x}{a} \tag{k}$$

利用边界条件(i)的第二式，有

$$-2D\sum_{m=1}^{\infty}B_m\frac{m^2\pi^2}{a^2}\cosh\alpha_m\sin\frac{m\pi x}{a}=f(x)$$

等号两边同乘 $\sin\frac{n\pi x}{a}$，然后，对 x 从 0 到 a 积分，注意三角函数的正交性，得

$$B_m=-\frac{a^2E_m}{2Dm^2\pi^2\cosh\alpha_m} \tag{l}$$

这里

$$E_m=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{m\pi x}{a}\mathrm{d}x \tag{m}$$

代回式(k)，得挠度的表达式为

$$w=\frac{a^2}{2D\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{E_m}{m^2\cosh\alpha_m}\left(\alpha_m\tanh\alpha_m\cosh\frac{m\pi y}{a}-\frac{m\pi y}{a}\sinh\frac{m\pi y}{a}\right)\sin\frac{m\pi x}{a} \tag{n}$$

如果 $f(x)=M_0=\text{const.}$，则

$$E_m=\frac{4M_0}{m\pi}\qquad(m=1,3,5,\cdots)$$

于是，式(n)变为

$$w=\frac{2M_0a^2}{D\pi^3}\sum_{m=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{1}{m^3\cosh\alpha_m}\left(\alpha_m\tanh\alpha_m\cosh\frac{m\pi y}{a}-\frac{m\pi y}{a}\sinh\frac{m\pi y}{a}\right)\sin\frac{m\pi x}{a}$$

利用此式，可求得正方形板中心的挠度和弯矩分别为

$$w=0.0368\frac{M_0a^2}{D}$$

$$M_x=0.394M_0$$

$$M_y=0.256M_0$$

这里，顺便提一下，如果作用在 $y=\pm\frac{b}{2}$ 边界上的分布弯矩是反对称分布的，则边界条件(i)的后一式改为

$$(M_y)_{y=\frac{b}{2}}=-(M_y)_{y=-\frac{b}{2}}=f(x)$$

而式(13-31)中的 A_m 和 B_m 取为零，然后，采用同样的做法，可求得 C_m 和 D_m，从而再求得挠度 w。现将结果写在下面：

$$w=\frac{a^2}{2\pi^2D}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{E_m}{m^2\sinh\alpha_m}\left(\alpha_m\cosh\alpha_m\sinh\frac{m\pi y}{a}-\frac{m\pi y}{a}\cosh\frac{m\pi y}{a}\right)\sin\frac{m\pi x}{a} \tag{o}$$

这里，再顺便提一下，如果在 $y=\pm\frac{b}{2}$ 的板边上的分布弯矩既不对称又不反对称，设分布弯矩分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$，则可以利用叠加原理，先将这些弯矩分解成对称弯矩：

$$(M'_y)_{y=\frac{b}{2}}=(M'_y)_{y=-\frac{b}{2}}=\frac{1}{2}[f_1(x)+f_2(x)]$$

和反对称弯矩

$$(M''_y)_{y=\frac{b}{2}}=-(M''_y)_{y=-\frac{b}{2}}=\frac{1}{2}[f_1(x)-f_2(x)]$$

对于对称弯矩，可以利用式(n)，而对于反对称弯矩，则可以利用式(o)，其中的 E_m 分别将 $\frac{1}{2}[f_1(x)+f_2(x)]$ 和 $\frac{1}{2}[f_1(x)-f_2(x)]$ 代替式(m)中的 $f(x)$ 并积分而求得，分别以 E'_m 和 E''_m 表示。将上述两个结果叠加后即得要求的挠度表示式

$$w=\frac{a^2}{2\pi^2 D}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\left[\frac{E'_m}{\cosh\alpha_m}\left(\alpha_m\tanh\alpha_m\cosh\frac{m\pi y}{a}-\frac{m\pi y}{a}\sinh\frac{m\pi y}{a}\right)+\frac{E''_m}{\sinh\alpha_m}\left(\alpha_m\coth\alpha_m\sinh\frac{m\pi y}{a}-\frac{m\pi y}{a}\cosh\frac{m\pi y}{a}\right)\right]\sin\frac{m\pi x}{a} \tag{p}$$

式(p)适用于分布弯矩 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 完全任意的情况。特别地，如 $f_2(x)=0$，则 $E'_m=E''_m=\frac{1}{2}E_m$，这时，式(p)变为

$$w=\frac{a^2}{4\pi^2 D}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{E_m}{m^2}\left[\frac{1}{\cosh\alpha_m}\left(\alpha_m\tanh\alpha_m\cosh\frac{m\pi y}{a}-\frac{m\pi y}{a}\sinh\frac{m\pi y}{a}\right)+\frac{1}{\sinh\alpha_m}\left(\alpha_m\coth\alpha_m\sinh\frac{m\pi y}{a}-\frac{m\pi y}{a}\cosh\frac{m\pi y}{a}\right)\right]\sin\frac{m\pi x}{a} \tag{q}$$

§13-7 薄板弯曲的叠加法

图 13-15 表示两对边简支而另外两对边固定的矩形薄板，边长分别为 a 和 b，受均匀分布荷载 q_0 作用，求挠度 w。

我们拟采用铁木辛柯(Timoshenko, S. P.)提出的方法求解，此法与求解超静定结构相同。

为此，选取四边简支的板作为基本体系，即把图 13-13(此时 $y=\pm\frac{b}{2}$ 也为简支边且受均匀分布荷载 q_0 作用)与图 13-14 两者进行叠加，而得到板面受均匀分布荷载 q_0 作用，且在 $y=\pm\frac{b}{2}$ 的边界上受弯矩 M_y，作用的四边简支的薄板

弯曲问题。因为固定边的挠度斜率为零，故可将图 13－14 中的 M_y 作为未知量，通过边界条件

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=\pm\frac{b}{2}}=\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)_{y=\pm\frac{b}{2}}+\left(\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)_{y=\pm\frac{b}{2}}=0 \tag{a}$$

而求得。式(a)中的 w_1 和 w_2 分别为对应于图 13－13($y=\pm\frac{b}{2}$为简支边)和图 13－14 中的挠度。将§13－6 中的式(f)和式(n)代入式(a)，即可求得与作用在 $y=\pm\frac{b}{2}$边上的未知弯矩 M_y 对应的系数

$$E_m=\frac{4qa^2}{\pi^3 m^3}\frac{\alpha_m-\tanh\alpha_m(1+\alpha_m\tanh\alpha_m)}{\alpha_m-\tanh\alpha_m(\alpha_m\tanh\alpha_m-1)} \tag{b}$$

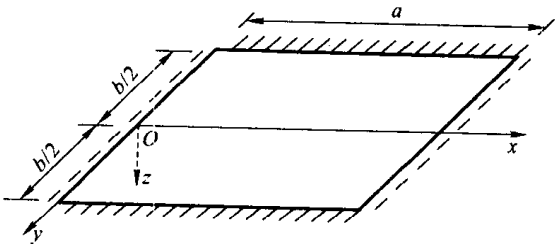


图 13－15

将式(b)代入§13－6 中的式(n)后再与§13－6 中的式(f)叠加，即得图 13－15 所示问题的挠度。最大挠度发生在板的中心，即 $x=\frac{a}{2}$，$y=0$ 处。此时，级数收敛很快，对正方形板，如果取一项，可得最大挠度值为

$$w_{\max}=0.00192\frac{qa^4}{D} \tag{c}$$

同时，可以求得 $y=\pm\frac{b}{2}$上的弯矩为

$$[M_y(x)]_{y=\pm\frac{b}{2}}=\frac{4qa^2}{\pi^3}\sum_{m=1,3,5\cdots}\frac{\sin\frac{m\pi x}{a}}{m^3}\cdot\frac{\alpha_m-\tanh\alpha_m(1+\alpha_m\tanh\alpha_m)}{\alpha_m-\tanh\alpha_m(\alpha_m\tanh\alpha_m-1)} \tag{d}$$

它的最大值发生在 $y=\pm\frac{b}{2}$边上的 $x=a/2$ 处。此时，级数收敛很快。对正方形板，如果取三项，得到最大弯矩值为 $-0.070qa^2$。

对于四边固定的矩形弹性薄板，在均布荷载或非均布荷载作用下的弯曲问题，也可采用上述叠加方法求解，但由于计算极为复杂，这里就不作详述了。

§13-8 基本关系式和基本方程的极坐标形式

对于圆形、扇形、圆环形等形状的薄板，采用极坐标求解要比用直角坐标求解方便得多。

在极坐标中，板的挠度和横向荷载都看作为极坐标 ρ 和 φ 的函数，即 $w=w(\rho,\varphi)$，$q=q(\rho,\varphi)$。现在，要通过坐标变换，建立极坐标系下的内力与挠度 $w(\rho,\varphi)$ 之间的关系。

在第七章中，曾导出了直角坐标系下的一些微分运算符号与极坐标系下的对应的微分运算符号之间的变换关系（详见§7-1中的式(m)至式(p)）。利用这些关系式，可得到下面的表示式：

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial w}{\partial x}=\cos\varphi\frac{\partial w}{\partial\rho}-\frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\\
&\frac{\partial w}{\partial y}=\sin\varphi\frac{\partial w}{\partial\rho}+\frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\\
&\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\cos^2\varphi\frac{\partial^2 w}{\partial\rho^2}-\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial\rho\partial\varphi}+\\
&\qquad\frac{\sin^2\varphi}{\rho}\frac{\partial w}{\partial\rho}+\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2}\frac{\partial w}{\partial\varphi}+\frac{\sin^2\varphi}{\rho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\\
&\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\sin^2\varphi\frac{\partial^2 w}{\partial\rho^2}+\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial\rho\partial\varphi}+\\
&\qquad\frac{\cos^2\varphi}{\rho}\frac{\partial w}{\partial\rho}-\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2}\frac{\partial w}{\partial\varphi}+\frac{\cos^2\varphi}{\rho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\\
&\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial^2 w}{\partial\rho^2}+\frac{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial\rho\partial\varphi}-\\
&\qquad\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial w}{\partial\rho}-\frac{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}{\rho^2}\frac{\partial w}{\partial\varphi}-\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}
\end{aligned}\right\}\qquad(a)
$$

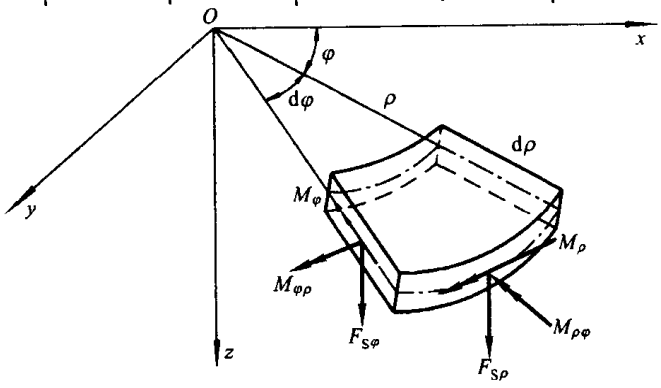


图 13-16

为了导出用挠度表示的内力公式，从薄板中取出微小的单元体，如图 13-16 所示。我们用 M_ρ，$M_{\rho\varphi}$ 和 $F_{S\rho}$ 分别表示 ρ 为常量的横截面上的弯矩、扭矩和横向剪力，而用 M_φ，$M_{\varphi\rho}$ 和 $F_{S\varphi}$ 分别表示 φ 为常量的横截面的弯矩、扭矩和横向剪力。可以证明，$M_{\rho\varphi}=M_{\varphi\rho}$。不难理解，当 x 轴与 ρ 轴重合时，即 $\varphi=0$ 时，则 M_ρ，M_φ，$M_{\rho\varphi}=M_{\varphi\rho}$，$F_{S\rho}$ 和 $F_{S\varphi}$ 分别成为 M_x，M_y，$M_{xy}=M_{yx}$，F_{Sx} 和 F_{Sy}。注意到这一点以后，并利用式(a)，就得到极坐标系下内力的挠度表示式：

$$\left.\begin{aligned}
M_\rho &= (M_x)_{\varphi=0} = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{\varphi=0}\\
&= -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2}+\nu\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right)\right]\\
M_\varphi &= (M_y)_{\varphi=0} = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{\varphi=0}\\
&= -D\left[\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right)+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2}\right]\\
M_{\rho\varphi} &= M_{\varphi\rho} = (M_{xy})_{\varphi=0} = -D(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)_{\varphi=0}\\
&= -D(1-\nu)\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)\\
F_{S\rho} &= (F_{Sx})_{\varphi=0} = -D\left(\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w\right)_{\varphi=0} = -D\frac{\partial}{\partial \rho}\nabla^2 w\\
F_{S\varphi} &= (F_{Sy})_{\varphi=0} = -D\left(\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w\right)_{\varphi=0} = -D\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}\nabla^2 w
\end{aligned}\right\}\quad(13-32)$$

这里，从式(a)可知：

$$\nabla^2 w=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}$$

并由此可以直接写出薄板弯曲的基本方程为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right)=\frac{q(\rho,\varphi)}{D}\quad(13-33)$$

与式(13-9)对应的，有

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_\rho &= \frac{12M_\rho}{h^3}z \\
\sigma_\varphi &= \frac{12M_\varphi}{h^3}z \\
\tau_{\rho\varphi} &= \tau_{\varphi\rho} = \frac{12M_{\rho\varphi}}{h^3}z \\
\tau_{\rho z} &= \frac{6F_{S\rho}}{h^3}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right) \\
\tau_{\varphi z} &= \frac{6F_{S\varphi}}{h^3}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)
\end{aligned}\right\} \tag{13-34}$$

与直角坐标中的情况相仿，同样可分别求得 ρ 为常量和 φ 为常量的横截面上的总分布剪力为

$$\left.\begin{aligned}
F'_{S\rho} &= F_{S\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial M_{\rho\varphi}}{\partial\varphi} \\
&= -D\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\nabla^2 w + \frac{1-\nu}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right)\right] \\
F'_{S\varphi} &= F_{S\varphi} + \frac{\partial M_{\varphi\rho}}{\partial\rho} \\
&= -D\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\nabla^2 w + (1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right)\right]
\end{aligned}\right\} \tag{13-35}$$

利用上面的结果，就可写出极坐标形式中常见的几种边界条件。例如，对于圆形板，取坐标原点在圆心，并设 $\rho = a$ 为边界，有

自由边

$$\left.\begin{aligned}
(M_\rho)_{\rho=a} &= 0 \\
(F'_{S\rho})_{\rho=a} &= \left(F_{S\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial M_{\rho\varphi}}{\partial\varphi}\right)_{\rho=a} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{13-36}$$

简支边

$$\left.\begin{aligned}
(w)_{\rho=a} &= 0 \\
(M_\rho)_{\rho=a} &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{13-37}$$

固定边

$$\left.\begin{aligned}
(w)_{\rho=a} &= 0 \\
\left(\frac{\partial w}{\partial\rho}\right)_{\rho=a} &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{13-38}$$

§13-9 圆形薄板的轴对称弯曲

如果圆形薄板所受的横向荷载 q 对称于 z 轴，则 q 和 w，仅是 ρ 的函数而与 φ 无关，此时，方程(13-33)简化为

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\rho}\right) = \frac{q}{D}$$

或写成

$$\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}\rho^4}+\frac{2}{\rho}\frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}\rho^3}-\frac{1}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho^3}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\rho}=\frac{q}{D} \tag{a}$$

这一方程的通解为齐次通解与非齐次任意特解之和。式(a)齐次时为欧拉方程，其通解已在第七章中求得。在均布荷载 $q=q_0$ 时，其特解可取为 $\frac{q_0\rho^4}{64D}$。于是得方程(a)的通解为

$$w=A_0+B_0\rho^2+C_0\ln\rho+D_0\rho^2\ln\rho+\frac{q_0\rho^4}{64D} \tag{13-39}$$

代入式(13-32)和式(13-35)，得

$$\left.\begin{aligned}
M_\rho &= -D\left[2(1+\nu)B_0-(1-\nu)\frac{C_0}{\rho^2}+(3+\nu)D_0+\right.\\
&\quad \left.2(1+\nu)D_0\ln\rho\right]-\frac{3+\nu}{16}q_0\rho^2\\
M_\varphi &= -D\left[2(1+\nu)B_0+(1-\nu)\frac{C_0}{\rho^2}+(1+3\nu)D_0+\right.\\
&\quad \left.2(1+\nu)D_0\ln\rho\right]-\frac{1+3\nu}{16}q_0\rho^2\\
F'_{S\rho} &= F_{S\rho}=-\frac{4DD_0}{\rho}-\frac{q_0\rho}{2}\\
M_{\rho\varphi} &= M_{\varphi\rho}=0\\
F_{S\varphi} &= 0\\
F'_{S\varphi} &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{13-40}$$

下面，通过例子说明这些公式的应用。

例 1 受均布荷载作用的圆形薄板，设半径为 a，边界固定，求挠度和内力。

解 因为在 $\rho=0$ 处，挠度和内力为有限值，所以，此时式(13-39)中的 $C_0=D_0=0$。于是，式(13-39)和式(13-40)分别简化为

$$w=A_0+B_0\rho^2+\frac{q_0\rho^4}{64D} \tag{b}$$

和

$$\left.\begin{aligned} M_\rho &= -2(1+\nu)DB_0 - \frac{3+\nu}{16}q_0\rho^2 \\ M_\varphi &= -2(1+\nu)DB_0 - \frac{1+3\nu}{16}q_0\rho^2 \\ M_{\rho\varphi} &= M_{\varphi\rho} = 0 \\ F_{S\rho} &= -\frac{q_0\rho}{2} \end{aligned}\right\} \tag{c}$$

由边界条件(13－38),有

$$A_0 + B_0 a^2 + \frac{q_0 a^4}{64D} = 0, \quad 2B_0 a + \frac{q_0 a^3}{16D} = 0$$

解得

$$A_0 = \frac{q_0 a^4}{64D}, \quad B_0 = -\frac{q_0 a^2}{32D}$$

代入式(b)和(c),得本问题的解答为

$$\left.\begin{aligned} w &= \frac{q_0 a^4}{64D}\left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right)^2 \\ M_\rho &= \frac{q_0 a^2}{16}\left[(1+\nu) - (3+\nu)\frac{\rho^2}{a^2}\right] \\ M_\varphi &= \frac{q_0 a^2}{16}\left[(1+\nu) - (1+3\nu)\frac{\rho^2}{a^2}\right] \\ M_{\rho\varphi} &= M_{\varphi\rho} = 0 \\ F_{S\rho} &= -\frac{q_0\rho}{2} \end{aligned}\right\} \tag{d}$$

最大挠度发生在圆板的中心,其值为

$$w_{\max} = (w)_{\rho=0} = \frac{q_0 a^4}{64D}$$

最大弯矩和最大弯曲应力发生在板边处,其值分别为

$$(M_\rho)_{\max} = |(M_\rho)_{\rho=a}| = \frac{q_0 a^2}{8}$$

$$(\sigma_\rho)_{\max} = \left|-\frac{6M_\rho}{h^2}\right| = \frac{3q_0 a^2}{4h^2}$$

例 2 半径为 a 的圆薄板,边界简支,受均布荷载 q_0 作用。试求挠度和内力。

解 简支圆板的边界条件如式(13－37)所示。将式(b)和(c)的第一式代入,有

$$A_0 + B_0 a^2 + \frac{q_0 a^4}{64D} = 0, \quad -2(1+\nu)DB_0 - \frac{3+\nu}{16}q_0 a^2 = 0$$

解得

$$A_0=\frac{q_0a^4(5+\nu)}{64D(1+\nu)},\qquad B_0=-\frac{q_0a^2}{32D}\frac{3+\nu}{1+\nu}$$

代入式(b)和(c),得本问题的解答为

$$\left.\begin{aligned}
w&=\frac{q_0a^4}{64D}\left(1-\frac{\rho^2}{a^2}\right)\left(\frac{5+\nu}{1+\nu}-\frac{\rho^2}{a^2}\right)\\
\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\rho}&=-\frac{q_0a^3}{16D}\left(\frac{3+\nu}{1+\nu}-\frac{\rho^2}{a^2}\right)\frac{\rho}{a}\\
M_\rho&=\frac{(3+\nu)q_0a^2}{16}\left(1-\frac{\rho^2}{a^2}\right)\\
M_\varphi&=\frac{q_0a^2}{16}\left[(3+\nu)-(1+3\nu)\frac{\rho^2}{a^2}\right]\\
F_{S\rho}&=-\frac{q_0\rho}{2}
\end{aligned}\right\}\tag{e}$$

最大挠度和最大弯矩都发生在板的中心,其值分别为

$$w_{\max}=(w)_{\rho=0}=\frac{(5+\nu)q_0a^4}{64(1+\nu)D}\tag{f}$$

$$M_{\max}=(M_\rho)_{\rho=0}=(M_\varphi)_{\rho=0}=\frac{(3+\nu)q_0a^2}{16}\tag{g}$$

相应的最大弯曲应力为

$$(\sigma_\rho)_{\max}=(\sigma_\varphi)_{\max}=\frac{6M_\rho}{h^2}=\frac{3(3+\nu)q_0a^2}{8h^2}\tag{h}$$

边界处的转角和横向剪力为

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\rho}\right)_{\rho=a}&=-\frac{q_0a^3}{8(1+\nu)D}\\
(F_{S\rho})_{\rho=a}&=-\frac{q_0a}{2}
\end{aligned}\right\}\tag{i}$$

例 3 半径为 a 的圆薄板,边界简支,无横向荷载作用,但在其边界上受均布弯矩 M_0 作用。试求挠度和弯矩。

解 因无横向外荷载作用,故方程(a)的特解取为零。此时,式(b)简化为

$$w=A_0+B_0\rho^2\tag{j}$$

而边界条件为

$$(w)_{\rho=a}=0,\quad -D\left(\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{\nu}{\rho}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\rho}\right)_{\rho=a}=M_0$$

将式(j)代入,求得

$$A_0=\frac{M_0a^2}{2(1+\nu)D},\qquad B_0=-\frac{M_0}{2(1+\nu)D}$$

代入式(j),得本问题的解答为

$$\left.\begin{aligned} w &= \frac{M_0 a^2}{2(1+\nu)D}\left(1-\frac{\rho^2}{a^2}\right) \\ M_\rho &= M_\varphi = M_0 \end{aligned}\right\} \tag{k}$$

例 4 半径为 a 的圆薄板,边界固定,中心受集中荷载 F 作用。试求挠度和内力。

解 本问题的 $q(\rho)=0$,因此,方程(a)的通解为

$$w = A_0 + B_0\rho^2 + C_0\ln\rho + D_0\rho^2\ln\rho$$

当 ρ 趋向零时,要求位移有界,故 $C_0=0$。于是,上式简化为

$$w = A_0 + B_0\rho^2 + D_0\rho^2\ln\rho \tag{l}$$

将式(l)代入式(13-32)的第四式,可得

$$F_{S\rho} = -\frac{4DD_0}{\rho} \tag{m}$$

另一方面,如果从圆板中央部分取出半径为 ρ、高度为 h 的圆柱体,由平衡条件

$$2\pi F_{S\rho} + F = 0$$

得

$$F_{S\rho} = -\frac{F}{2\pi\rho} \tag{n}$$

联立式(m)和(n),得

$$D_0 = \frac{F}{8\pi D}$$

代入式(l),有

$$w = A_0 + B_0\rho^2 + \frac{F}{8\pi D}\rho^2\ln\rho \tag{o}$$

利用边界条件(13-38),得

$$A_0 + B_0 a^2 + \frac{F}{8\pi D}a^2\ln a = 0$$

$$2B_0 a + \frac{Fa}{8\pi D}(1+2\ln a) = 0$$

解得

$$A_0 = \frac{Fa^2}{16\pi D},\quad B_0 = -\frac{F}{16\pi D}(1+2\ln a)$$

代回式(l),并利用式(13-32),得本问题的解答为

$$\left.\begin{aligned} w &= \frac{F}{16\pi D}\left(2\rho^2 \ln\frac{\rho}{a} + a^2 - \rho^2\right) \\ M_\rho &= \frac{F}{4\pi}\left[(1+\nu)\ln\frac{a}{\rho} - 1\right] \\ M_\varphi &= \frac{F}{4\pi}\left[(1+\nu)\ln\frac{a}{\rho} - \nu\right] \\ F_{S\rho} &= -\frac{F}{2\pi\rho} \end{aligned}\right\} \tag{p}$$

最大挠度在圆板中心，其值为

$$w_{\max} = (w)_{\rho=0} = \frac{Fa^2}{16\pi D}$$

但必须注意，当 ρ 趋向于零时，内力为无穷，所以，这些公式在集中力作用点附近不适用。

例 5 图 13-17 所示为一外半径为 a、内半径为 b 的圆环形薄板，外边界简支，内边界自由，但受均布弯矩 M_0 作用。试求挠度表达式。

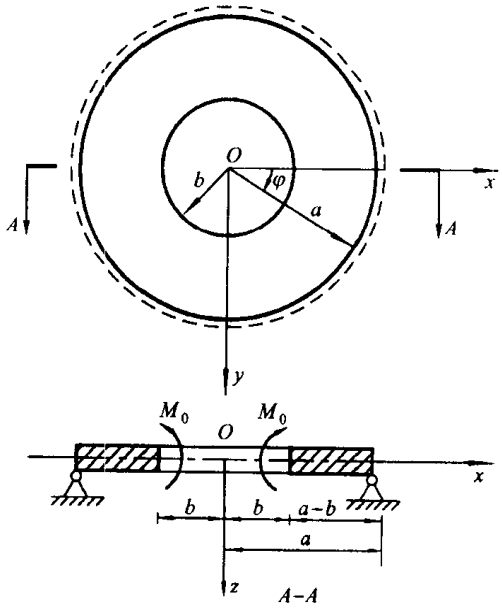


图 13-17

解 由题设 $q(\rho)=0$，方程(a)的通解为

$$w = A_0 + B_0\rho^2 + C_0\ln\rho + D_0\rho^2\ln\rho \tag{q}$$

本问题的边界条件为

$$(w)_{\rho=a} = 0$$

$$(M_\rho)_{\rho=a} = -D\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\rho^2} + \nu\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\rho}\right)_{\rho=a} = 0$$

$$(F_{S\rho})_{\rho=b}=-D\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\nabla^2 w\right)_{\rho=b}=0$$

$$(M_\rho)_{\rho=b}=-D\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\rho^2}+\nu\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\rho}\right)_{\rho=b}=M_0$$

将式(q)代入全部边界条件,得

$$D_0=0$$

$$2B_0(1+\nu)+\frac{C_0}{b^2}(1+\nu)=M_0$$

$$2B_0(1+\nu)-\frac{C_0}{a^2}(1-\nu)=0$$

$$A_0+B_0a^2+C_0\ln a=0$$

解之,得

$$A_0=-\frac{M_0a^2b^2}{D(1-\nu^2)(a^2-b^2)}[(1-\nu)+(1+\nu)\ln a]$$

$$B_0=-\frac{2M_0b^2}{2D(1+\nu)(a^2-b^2)}$$

$$C_0=-\frac{M_0a^2b^2}{D(1-\nu)(a^2-b^2)}$$

本问题的最后解答为

$$w=-\frac{M_0a^2b^2}{D(1-\nu^2)(a^2-b^2)}\left[\frac{1-\nu}{2}\left(1-\frac{\rho^2}{a^2}\right)+(1+\nu)\ln\frac{\rho}{a}\right]$$

§13-10 圆形薄板受线性变化荷载作用

当圆形薄板的板面上受图13-18所示的线性分布荷载作用时,这种荷载可以分解成两部分:其一是集度为$\frac{q_1+q_2}{2}$的均布荷载(图中的$ABFE$),其二则是在直径AB上按反对称线性分布的荷载,在AB的两端,其集度分别为q_0和$-q_0$,而$q_0=\frac{1}{2}(q_2-q_1)$(图中的$EFDC$)。均布荷载的情况在§13-9中已经讨论过,这里将着重讨论由线性反对称荷载所产生的挠度和内力。

现将分布荷载

$$q=q_0\frac{x}{a}=q_0\frac{\rho\cos\varphi}{a}$$

代入基本方程(13-33),有

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\right)=q_0\frac{\rho\cos\varphi}{Da}\qquad(a)$$

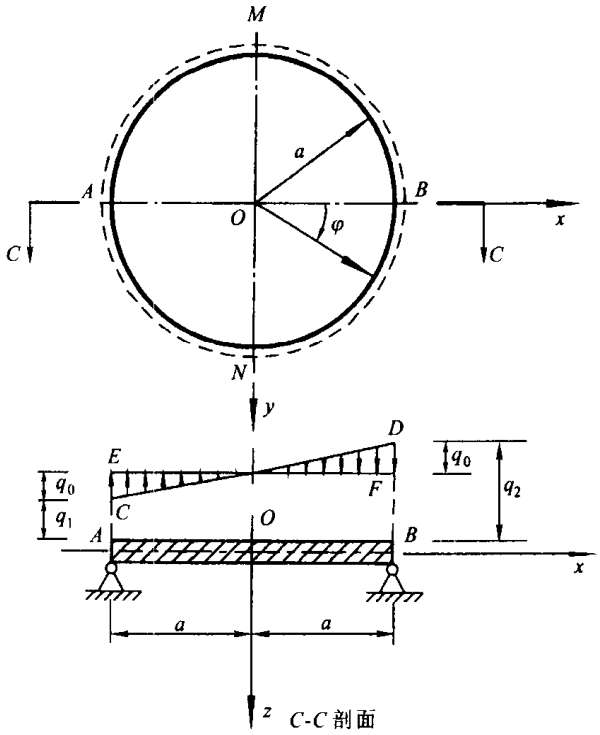


图 13－18

显然，方程(a)的特解可取为 $w_1 = A\rho^5 \cos\varphi$ 的形式，代入式(a)后，可得 $A = \frac{q_0}{192aD}$，于是

$$w_1 = \frac{q_0 \rho^5 \cos\varphi}{192aD} \tag{b}$$

再求方程(a)为齐次时的通解。根据挠度对称于 Oxz 坐标平面而反对称于 Oyz 坐标平面的特性，并结合特解(b)的形式，假设

$$w_2 = f(\rho)\cos\varphi \tag{c}$$

将式(c)代入方程

$$\nabla^2 \nabla^2 w = 0$$

可得

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} - \frac{1}{\rho^2}\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\rho} - \frac{f}{\rho^2}\right) = 0$$

这一方程的通解在第七章中已经求得，为

$$f(\rho) = A_0\rho + B_0\rho^3 + \frac{C_0}{\rho} + D_0\rho\ln\rho$$

代入式(c)，然后与式(b)相加，得

$$w = w_1 + w_2$$

$$= \frac{q_0 \rho^5 \cos \varphi}{192Da} + \left(A_0 \rho + B_0 \rho^3 + \frac{C_0}{\rho} + D_0 \rho \ln \rho \right) \cos \varphi \tag{13-41}$$

因为是实心板，要求在板的中心挠度有界，则应有 $C_0 = D_0 = 0$，于是，式(13-41)简化为

$$w = \frac{q_0 \rho^5 \cos \varphi}{192Da} + (A_0 \rho + B_0 \rho^3) \cos \varphi \tag{13-42}$$

对于简支板，利用边界条件(13-37)，即

$$(w)_{\rho = a} = 0, \quad \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \nu \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right]_{\rho = a} = 0$$

求出常数 A_0 和 B_0，最后得

$$w = \frac{q_0 a^4}{192D} \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right) \left(\frac{7 + \nu}{3 + \nu} - \frac{\rho^2}{a^2} \right) \frac{\rho}{a} \cos \varphi$$

相应的弯矩为

$$M_\rho = \frac{q_0 a^2}{48} (5 + \nu) \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right) \frac{\rho}{a} \cos \varphi$$

$$M_\varphi = \frac{q_0 a^2}{48} \left[\frac{(5 + \nu)(1 + 3\nu)}{3 + \nu} - (1 + 5\nu) \frac{\rho^2}{a^2} \right] \frac{\rho}{a} \cos \varphi$$

弯矩 M_ρ 和 M_φ 都是正的。M_ρ 的最大值发生在 $\varphi = 0, \rho = \frac{a}{\sqrt{3}}$ 处，其值为

$$(M_\rho)_{\max} = \frac{\sqrt{3}(5 + \nu) q_0 a^2}{216}$$

M_φ 的最大值，发生在 $\varphi = 0$，而

$$\rho = a \sqrt{\frac{(5 + \nu)(1 + 3\nu)}{3(1 + 5\nu)(3 + \nu)}}$$

处，其值为

$$(M_\varphi)_{\max} = \sqrt{\frac{3(5 + \nu)^3 (1 + 3\nu)^3}{(1 + 5\nu)(3 + \nu)^3}} \frac{q_0 a^2}{216}$$

对于固定边，利用边界条件(13-38)，即

$$(w)_{\rho = a} = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial \rho} \right)_{\rho = a} = 0$$

求得 A_0 和 B_0 后，代入式(13-42)，得

$$w = \frac{q_0 a^4}{192D} \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right)^2 \frac{\rho}{a} \cos \varphi$$

相应的弯矩为

$$M_\rho = -\frac{q_0 a^2}{48}\left[\left(5\frac{\rho^2}{a^2}-3\right)+\nu\left(\frac{\rho^2}{a^2}-1\right)\right]\frac{\rho}{a}\cos\varphi$$

$$M_\varphi = -\frac{q_0 a^2}{48}\left[\left(\frac{\rho^2}{a^2}-1\right)+\nu\left(5\frac{\rho^2}{a^2}-3\right)\right]\frac{\rho}{a}\cos\varphi$$

弯矩的最大值发生在 $\rho=a$ 而 $\varphi=0,\pi$ 处，其值为

$$(M_\rho)_{\max} = \frac{q_0 a^4}{24}$$

将上述结果与§13－9中只受均布荷载作用时相应的结果叠加，即得圆薄板受线性分布荷载作用的解答。

思考题与习题

13－1 矩形薄板 $OABC$ 的两对边 AB 与 OC 为简支，受有均匀分布的弯矩 M_y 作用，OA 和 AB 为自由边，受弯矩 νM_y 作用，板面无横向荷载作用(图 13－19)。试证明 $w=w(y)$ 可以作为此问题的解，并求挠度、弯矩和反力。

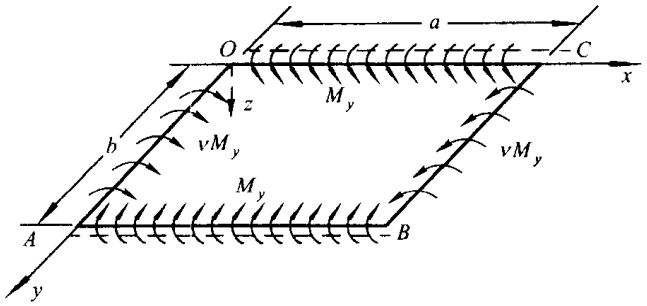


图 13－19

13－2 矩形薄板 OA 边和 OC 边为简支边，AB 边和 BC 边为自由边，在点 B 处受向下的横向集中力 F 作用(图 13－20)。试证明 $w=mxy$ 可作为问题的解答，并求出常数 m、内力和反力。

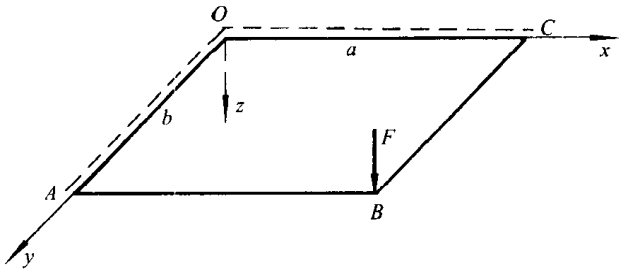


图 13－20

13－3　半椭圆形薄板，在直线边界 AOB 上为简支，曲线边界 ACB 为固定边，承受横向荷载 $q=q_0\frac{x}{a}$（图 13－21）。试证明 $w=mx\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)^2$ 可作为解答，并求出最大挠度和 C 点的弯矩。

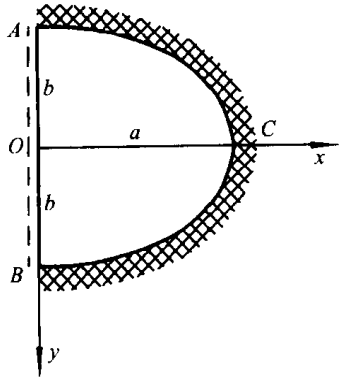


图 13－21

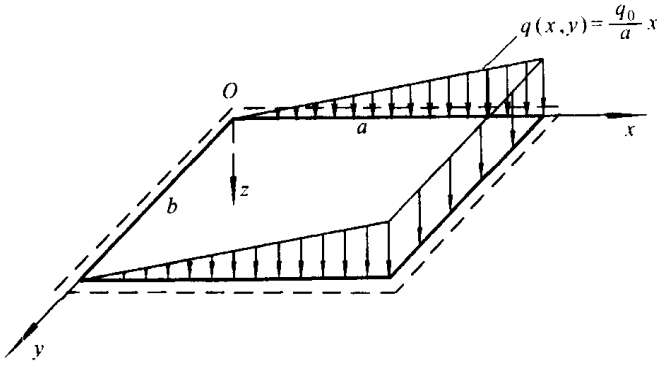


图 13－22

13－4　四边简支的矩形薄板受静水压力作用（图 13－22），荷载分布规律为

$$q(x,y)=\frac{q_0}{a}x$$

试求板的挠度。

13－5　圆形薄板，半径为 a，边界固定，中心有连杆支座（图 13－23）。设连杆支座发生沉陷 η，试求薄板的挠度和内力。

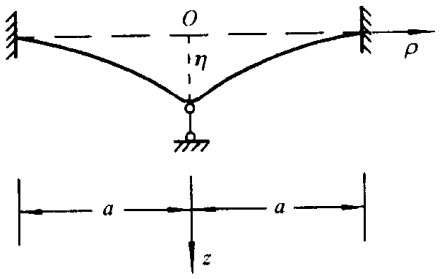


图 13－23

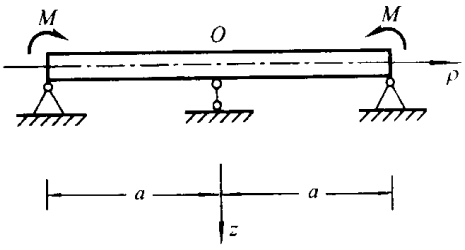


图 13－24

13－6　设有一半径为 a 的圆形薄板，边界简支，中心有连杆支座，板边受均布弯矩作用（图 13－24）。试求挠度和内力。

13－7　设有一内半径为 a、外半径为 b 的圆环形薄板，外边界简支，内边界自由，但受均布横向剪力 F_{S0} 作用（图 13－25）。试求挠度。

13－8　设有一内半径为 a、外半径为 b 的圆环形板，内边界简支，外边界自由，内边界受均布弯矩 M 作用（图 13－26）。试求挠度、弯矩和横向剪力。

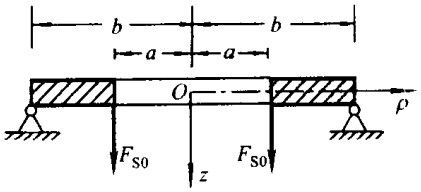


图 13－25

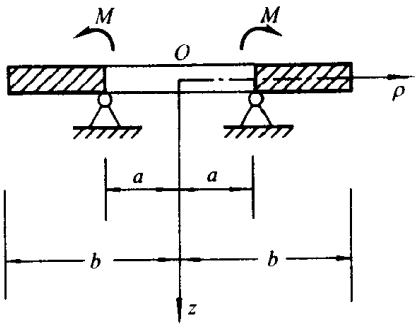


图 13－26

第十四章　弹性力学的变分解法

从以上各章可以发现，在弹性力学中，即使对于像平面问题、柱形杆的扭转和弯曲等特殊问题，当边界条件比较复杂时，要求得精确解答是十分困难的，甚至是不可能的。因此，对于弹性力学的大量实际问题，近似解法就具有极为重要的意义。本章要介绍的变分方法，是近似解法中最有成效的方法之一，而且，它构成了有限元法等数值计算方法和半解析法的理论基础。这种方法，就其本质而言，是要把弹性力学基本方程的定解问题，变为求泛函的极值（或驻值）问题。而在求问题的近似解时，泛函的极值（或驻值）问题又进而变成函数的极值（或驻值）问题。因此，最后把问题归结为求解线性代数方程组。下面，我们除了介绍最小势能原理、最小余能原理以及它们的应用之外，还将介绍一些有关广义变分原理的概念。同时，为考虑到内容的完整性，还拟介绍一下用于弹性动力学的哈密顿变分原理。

为简洁起见，本章的有关推导将采用笛卡儿张量的下标记法和求和约定。

§14－1　弹性体的虚功原理

设有一组应力分量 σ_{ij}，它们在体内满足平衡微分方程

$$\sigma_{ij,j}+F_i=0 \tag{a}$$

在面力已知的边界 S_σ 上，满足应力边界条件

$$\bar{f}_i=\sigma_{ij}n_j \tag{b}$$

这组应力分量，称为**静力可能的应力**。静力可能的应力未必是真实的应力，因为真实的应力在体内还须满足以应力表示的应变协调方程，而对应的位移还须满足 S_u 上的位移边界条件。但反之，真实的应力必然是静力可能的。为了区别于真实的应力，我们用 $\overset{\sim}{\sigma}_{ij}$ 表示静力可能的应力。

类似地，设有一组位移分量 u_i 和一组应变分量 ε_{ij}，它们在体内满足几何方程

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \tag{c}$$

在位移已知的边界 S_u 上，满足位移边界条件

$$u_i = \bar{u}_i \tag{d}$$

这组位移称为**几何可能的位移**。几何可能的位移未必是真实的，因为真实的位移，还须在体内满足以位移表示的平衡微分方程，在面力已知的边界 S_σ 上，须满足以位移表示的应力边界条件。但反之，真实的位移必然是几何可能的。为了区别于真实的位移，我们用 u_i^k 表示几何可能的位移，相应的应变记作 ε_{ij}^k。

对于上述的静力可能的应力 σ_{ij}^s 和几何可能的位移 u_i^k 及其对应的应变 ε_{ij}^k，不难证明，有以下的恒等式：

$$\int_V F_i u_i^k \mathrm{d}V + \int_S \bar{f}_i^s u_i^k \mathrm{d}S = \int_V \sigma_{ij}^s \varepsilon_{ij}^k \mathrm{d}V \tag{14－1}$$

其中 $\bar{f}_i^s = \sigma_{ij}^s n_j$（在 S_σ 上 $\bar{f}_i^s = \bar{f}_i$，在 S_u 上 $u_i^k = \bar{u}_i$）。

事实上，由于 u_i^k 和 ε_{ij}^k 满足几何方程(c)，并考虑到应力张量 σ_{ij}^k 的对称性，于是有

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^s \varepsilon_{ij}^k &= \frac{1}{2}\sigma_{ij}^s (u_{i,j}^k + u_{j,i}^k) = \sigma_{ij}^s u_{i,j}^k \\ &= (\sigma_{ij}^s u_i^k)_{,j} - u_i^k \sigma_{ij,j}\end{aligned}$$

代入方程(14－1)右边的积分，并利用高斯积分公式，有

$$\begin{aligned}\int_V \sigma_{ij}^s \varepsilon_{ij}^k \mathrm{d}V &= \int_V (\sigma_{ij}^s u_i^k)_{,j} \mathrm{d}V - \int_V u_i^k \sigma_{ij,j}^s \mathrm{d}V \\ &= \int_S u_i^k \sigma_{ij}^s n_j \mathrm{d}S - \int_V u_i^k \sigma_{ij,j}^s \mathrm{d}V\end{aligned} \tag{e}$$

据边界的平衡条件，式(e)等号右边的第一个积分为

$$\int_S u_i^k \sigma_{ij}^s n_j \mathrm{d}S = \int_S \bar{f}_i^s u_i^k \mathrm{d}S$$

显然，它是式(14－1)等号左边的第二个积分。由 σ_{ij}^s 满足平衡微分方程，式(e)等号右边的第二个积分为

$$-\int_V u_i^k \sigma_{ij,j}^s \mathrm{d}V = \int_V F_i u_i^k \mathrm{d}V$$

显然，它是式(14－1)等号左边的第一个积分。这样，就证明了式(14－1)为恒等式。

式(14－1)所揭示的功能关系，称为**弹性体的虚功原理**。它可表述为：在弹性体上，外力在任意一组几何可能位移上作的功，等于任意一组静力可能的应力在与上述几何可能位移所对应的应变上所作的功。

这里需要强调指出几点：

第一，在证明弹性体的虚功原理时，只用到小变形假设，而未涉及到材料的性质，因此，在小变形的前提下，这个原理适用于任何性质的材料。

第二，上面我们从平衡微分方程、应力边界条件、几何方程和位移边界条件

出发，证明了虚功原理的成立，反之，我们也可利用虚功原理推导平衡微分方程、应力边界条件、几何方程和位移边界条件。其步骤与上述的相反。事实上，如果把几何方程、位移边界条件和虚功方程作为前提，则可以导得平衡微分方程和应力边界条件；如果把平衡微分方程、应力边界条件和虚功方程作为前提，则可导得几何方程和位移边界条件。这些工作请读者自己完成。

第三，式(14－1)中的静力可能的应力 σ_{ij}^{s} 和几何可能的位移 u_i^k 及其对应的应变 ε_{ij}^{k}，可以是同一弹性体的两种不同的受力状态和变形状态，二者彼此独立而无任何的关系。但当静力可能的应力 σ_{ij}^{s} 和几何可能的应变 ε_{ij}^{k} 服从物理方程时，则 $\sigma_{ij}^{s}=\sigma_{ij}$，$\varepsilon_{ij}^{k}=\varepsilon_{ij}$，$u_i^k=u_i$，即为真实的应力、应变和位移。此时，式(14－1)变为

$$\int_V F_i u_i \mathrm{d}V+\int_{S_\sigma}\bar{f}_i u_i \mathrm{d}S+\int_{S_u}\sigma_{ij}n_j\bar{u}_i \mathrm{d}S=\int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\mathrm{d}V \tag{f}$$

虚功原理是弹性力学中的一个普遍的能量原理，在§14－3和§14－6中，我们将由此导出弹性力学的两个重要的变分原理。

§14－2 贝蒂互换定理

将虚功方程(14－1)用于同一弹性体在两种不同受力和变形状态下的两种解答，便可得到贝蒂(Betti，E)互换定理。设第一状态的体力为 $F_i^{(1)}$，S_σ 上的面力为 $\bar{f}_i^{(1)}$，S_u 上的位移为 $\bar{u}_i^{(1)}$，它们所产生的应力、应变和位移分别为 $\sigma_{ij}^{(1)}$，$\varepsilon_{ij}^{(1)}$ 和 $u_i^{(1)}$；相应于第二个状态分别为 $F_i^{(2)}$，$\bar{f}_i^{(2)}$，$\bar{u}_i^{(2)}$ 和 $\sigma_{ij}^{(2)}$，$\varepsilon_{ij}^{(2)}$，$u_i^{(2)}$。因为两种状态的应力、应变和位移都是真实解，因此，它们当然分别为静力可能的和几何可能的。

现在把第一状态的应力取为静力可能的应力，而把第二状态的位移和应变取为几何可能的位移和应变。于是，由式(14－1)，有

$$\int_V F_i^{(1)}u_i^{(2)}\mathrm{d}V+\int_S \bar{f}_i^{(1)}u_i^{(2)}\mathrm{d}S=\int_V \sigma_{ij}^{(1)}\varepsilon_{ij}^{(2)}\mathrm{d}V \tag{a}$$

同理，再把第二状态的应力取为静力可能的应力，而把第一状态的位移和应变取为几何可能的位移和应变，于是，由式(14－1)，有

$$\int_V F_i^{(2)}u_i^{(1)}\mathrm{d}V+\int_S \bar{f}_i^{(2)}u_i^{(1)}\mathrm{d}S=\int_V \sigma_{ij}^{(2)}\varepsilon_{ij}^{(1)}\mathrm{d}V \tag{b}$$

利用物理方程，可以证明式(a)和式(b)等号的右端相等，即

$$\begin{aligned}\int_V \sigma_{ij}^{(1)}\varepsilon_{ij}^{(2)}\mathrm{d}V&=\int_V \sigma_{ij}^{(2)}\varepsilon_{ij}^{(1)}\mathrm{d}V\\&=\int_V(\lambda\varepsilon_{kk}^{(1)}\varepsilon_{ss}^{(2)}+2G\varepsilon_{ij}^{(1)}\varepsilon_{ij}^{(2)})\mathrm{d}V\end{aligned}$$

因此，式(a)和(b)等号的左边也必须相等，由此得

$$\int_V F_i^{(1)} u_i^{(2)} \mathrm{d}V + \int_S \bar{f}_i^{(1)} u_i^{(2)} \mathrm{d}S = \int_V F_i^{(2)} u_i^{(1)} \mathrm{d}V + \int_S \bar{f}_i^{(2)} u_i^{(1)} \mathrm{d}S \qquad (14-2)$$

这就是**贝蒂互换定理**，它可表述为：作用在弹性体上第一状态的外力在第二状态位移上所作的功，等于第二状态的外力在第一状态位移上所作的功。

例 图 14-1a 所示为一等截面杆承受一对大小相等方向相反的压力 F_1，试求出杆的总伸长 δ。

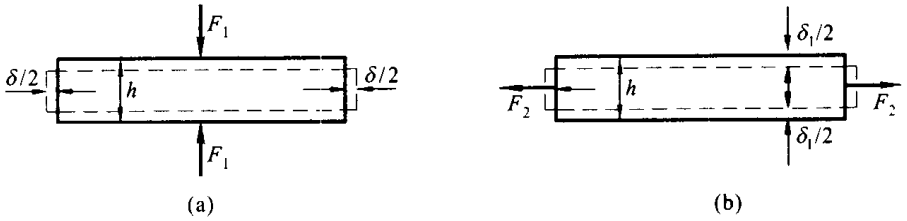


图 14-1

解 这一问题可以用贝蒂互换定理来解决。为此，假设第二状态为：同一杆件受大小相等、方向相反共线的两力 F_2 作用，使杆呈简单中心拉伸状态，如图 14-1b 所示。这时，杆的横向收缩为

$$\delta_1 = \nu \frac{F_2 h}{AE}$$

其中，ν 为泊松比，A 为横截面面积。根据功的互等定理，有

$$F_1 \cdot \delta_1 = F_2 \cdot \delta$$

或

$$F_1 \cdot \nu \frac{F_2 h}{AE} = F_2 \cdot \delta$$

由此得

$$\delta = \frac{\nu h F_1}{AE}$$

可见 δ 与横截面的形状无关。

§14-3 位移变分方程 最小势能原理

在§14-1中已经指出，虚功方程(14-1)中静力可能的应力 σ_{ij}^{S} 和几何可能的位移 u_i^k 及其对应的应变 ε_{ij}^k，可以是彼此独立而无任何关系的受力状态和变形状态。但如果取真实的应力为静力可能的应力，则可导出弹性体的虚位移原理。

设几何可能的位移为

$$u_i^k = u_i + \delta u_i \tag{a}$$

这里的 u_i 为真实位移，而 δu_i 表示真实位移邻近的位移的微小改变量，我们称之为**虚位移**。因为真实位移 u_i 满足位移边界条件，所以，要求 u_i^k 满足位移边界条件，必须有

$$\delta u_i = 0 \quad (\text{在 } S_u \text{ 上}) \tag{b}$$

将式(a)代入几何方程，有

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij}^k &= \frac{1}{2}(u_{i,j}^k + u_{j,i}^k)\\ &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{1}{2}(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i})\end{aligned}$$

显然，等号右边的第一项即为真实的应变 ε_{ij}，而第二项表示由虚位移所产生的**虚应变**，记作 $\delta\varepsilon_{ij}$。于是，该式可写为

$$\varepsilon_{ij}^k = \varepsilon_{ij} + \delta\varepsilon_{ij} \tag{c}$$

将式(a)和式(c)代入式(14－1)，并取真实应力作为静力可能的应力，即 $\sigma_{ij}^{'} = \sigma_{ij}$，于是有

$$\int_V F_i(u_i + \delta u_i)\mathrm{d}V + \int_{S_\sigma} \bar{f}_i(u_i + \delta u_i)\mathrm{d}S + \int_{S_u} \sigma_{ij} n_j \bar{u}_i \mathrm{d}S = \int_V \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij} + \delta\varepsilon_{ij})\mathrm{d}V$$

将上式与 §14－1 中的式(f)相减，得

$$\int_V F_i \delta u_i \mathrm{d}V + \int_{S_\sigma} \bar{f}_i \delta u_i \mathrm{d}S = \int_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\mathrm{d}V \tag{14－3}$$

式(14－3)称为**位移变分方程**，又称**虚位移方程**。它表示外力在虚位移上作的虚功，等于弹性体的真实内力在相应虚位移上作的虚功。从 §14－1 中的论述和本节的推导可知，它等价于平衡微分方程和应力边界条件。

从位移变分方程出发，可以推出弹性力学中一个重要的原理，即所谓的**最小势能原理**。先对式(14－3)等号右边积分号下的被积函数利用格林公式(4－7)

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij}$$

这里 v_ε 为应变能密度，于是

$$\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} = \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varepsilon_{ij}}\delta\varepsilon_{ij} = \delta v_\varepsilon \tag{d}$$

而式(14－3)可改写为

$$\int_V F_i \delta u_i \mathrm{d}V + \int_{S_\sigma} \bar{f}_i \delta u_i \mathrm{d}S = \int_V \delta v_\varepsilon \mathrm{d}V \tag{14－3}'$$

因为几何可能的位移与真实的应力无关，因此，可认为在产生虚位移过程中外力

保持不变，并注意到变分和积分两种运算可以交换次序，于是，式(14-3)′又可写为

$$\delta\left(\int_V v_\varepsilon \mathrm{d}V - \int_V F_i u_i \mathrm{d}V - \int_{S_\sigma} \bar{f}_i u_i \mathrm{d}S\right) = 0$$

若令

$$E_\mathrm{p} = \int_V v_\varepsilon \mathrm{d}V - \int_V F_i u_i \mathrm{d}V - \int_{S_1} \bar{f}_i u_i \mathrm{d}S \tag{14-4}$$

则有

$$\delta E_\mathrm{p} = 0 \tag{14-5}$$

E_p 称为**总势能**，它是应变分量和位移分量的泛函。因为应变分量又能通过几何方程用位移分量表示，所以，它又是位移分量的泛函。

式(14-5)表明，当位移从真实的位移 u_i 变化到几何可能的位移 $u_i+\delta u_i$ 时，总势能的一阶变分为零，可见真实位移使总势能取驻值。以下要进一步证明，对于稳定平衡状态，它实际上取最小值。

事实上，将式(a)和(c)代入式(14-4)，得到几何可能位移场的总势能

$$E_\mathrm{p}(\varepsilon_{ij}^\mathrm{k}) = \int_V v_\varepsilon(\varepsilon_{ij}+\delta\varepsilon_{ij})\mathrm{d}V - \int_V F_i(u_i+\delta u_i)\mathrm{d}V - \int_{S_\sigma} \bar{f}_i(u_i+\delta u_i)\mathrm{d}S$$

上式与式(14-4)相减，得

$$E_\mathrm{p}(\varepsilon_{ij}^\mathrm{k}) - E_\mathrm{p}(\varepsilon_{ij}) = \int_V [v_\varepsilon(\varepsilon_{ij}+\delta\varepsilon_{ij}) - v_\varepsilon(\varepsilon_{ij})]\mathrm{d}V - \int_V F_i \delta u_i \mathrm{d}V - \int_{S_\sigma} \bar{f}_i \delta u_i \mathrm{d}S \tag{e}$$

将 $v_\varepsilon(\varepsilon_{ij}+\delta\varepsilon_{ij})$ 按泰勒级数展开，略去其二阶以上的高阶微量，有

$$v_\varepsilon(\varepsilon_{ij}+\delta\varepsilon_{ij}) = v_\varepsilon(\varepsilon_{ij}) + \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varepsilon_{ij}}\delta\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}\delta\varepsilon_{ij}\delta\varepsilon_{kl}$$

这里

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varepsilon_{ij}}\delta\varepsilon_{ij} = \delta v_\varepsilon$$

$$\frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}\delta\varepsilon_{ij}\delta\varepsilon_{kl} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon_{kl}}\left(\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial\varepsilon_{ij}}\delta\varepsilon_{ij}\right)\delta\varepsilon_{kl} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon_{kl}}(\delta v_\varepsilon)\delta\varepsilon_{kl} = \delta^2 v_\varepsilon$$

于是有

$$v_\varepsilon(\varepsilon_{ij}+\delta\varepsilon_{ij}) - v_\varepsilon(\varepsilon_{ij}) = \delta v_\varepsilon + \frac{1}{2}\delta^2 v_\varepsilon$$

代入式(e),并利用式(14－3)′,得到

$$E_p(\varepsilon_{ij}^k)-E_p(\varepsilon_{ij})=\frac{1}{2}\int_V \delta^2 v_\varepsilon \mathrm{d}V \tag{f}$$

另一方面,由式(d)和(4－8)可知

$$\delta^2 v_\varepsilon=\frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}\delta\varepsilon_{ij}\delta\varepsilon_{kl}=\left(\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\varepsilon_{kl}}\delta\varepsilon_{kl}\right)\delta\varepsilon_{ij}$$

$$=\delta\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}=2v_\varepsilon(\delta\varepsilon_{ij})$$

对于稳定平衡状态,v_ε 为正定函数,故式(f)右边的积分恒大于零,从而有

$$E_p(\varepsilon_{ij}^k)>E_p(\varepsilon_{ij})$$

这表明真实的位移使总势能取最小值。

现将最小势能原理完整地叙述如下:在所有几何可能的位移中,真实的位移使总势能取最小值。

综上所述,以位移作为基本未知函数求解弹性力学问题时,按过去的方法是要求解以位移表示的平衡微分方程,使所求的位移分量,在 S_u 上满足位移边界条件,在 S_σ 上满足以位移表示的应力边界条件。而现在可归结为求解位移变分方程(14－3)′,或者去求总势能 E_p 的极值。在利用方程(14－3)′和(14－5)时,所设的位移毋须事先满足应力边界条件,而只要满足位移边界条件就可以了,因应力边界条件是会自动满足的。

§14－4　最小势能原理推导以位移表示的平衡微分方程及边界条件的实例

在本节和下一节中,我们要介绍最小势能原理的应用。

由于最小势能原理等价于以位移表示的平衡微分方程和以位移表示的应力边界条件,所以,对于一些按实际情况简化了的弹性力学问题,可以通过最小势能原理或位移变分方程导出其必须适合的微分方程和边界条件。下面举几个例子来说明。

例1　图14－2所示为一直梁,其横截面有一铅直的对称轴,分布荷载 $q(x)$ 就作用在包含该轴的铅直平面内。在梁的端面上,施加适当的约束,使梁不能产生整体的刚性位移,或者作用适当的剪力和弯矩,使梁保持平衡。现在,要用最小势能原理推导用梁的挠度表示的平衡微分方程和应力边界条件。

解　采用材料力学的简化模型。根据平截面假设,梁的任一横截面 x 上与中性层相距为 z 的点的位移为

$$w=w(x),\qquad u=-z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$$

其中 $w(x)$ 为梁轴线的挠度。由几何方程，有

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}$$

再由梁的纵向纤维之间无挤压的假设，可认为梁处于单向应力状态，于是应变能密度为

$$v_\varepsilon = \frac{1}{2}\sigma_x\varepsilon_x = \frac{1}{2}E\varepsilon_x^2 = \frac{1}{2}Ez^2\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 \tag{a}$$

将此对全梁作体积分，得到梁的总应变能为

$$V_\varepsilon = \iiint v_\varepsilon \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int_0^L \left[\iint_R Ez^2\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L EI_y\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 \mathrm{d}x \tag{b}$$

这里 R 为梁横截面组成的区域，I_y 为横截面对中性轴 y 的惯性矩，即

$$I_y = \iint_R z^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

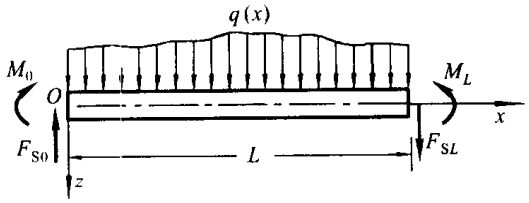


图 14－2

本问题的边界 S_σ 为梁的上下表面和两端部，若作用在其上的荷载方向如图所示，则这些荷载作的功为

$$W = \int_0^L qw\mathrm{d}x - F_{S0}w_0 + M_0\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)_0 + F_{SL}w_L - M_L\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)_L$$

梁的总势能为

$$E_p = \frac{1}{2}\int_0^L EI_y\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 \mathrm{d}x - \int_0^L qw\mathrm{d}x + F_{S0}w_0 -$$

$$M_0\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)_0 - F_{SL}w_L + M_L\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)_L$$

对上式进行一次变分，并令它为零：

$$\delta E_p = \frac{1}{2}\int_0^L EI_y\delta\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 \mathrm{d}x - \int_0^L q\delta w\mathrm{d}x + F_{S0}\delta w_0 -$$

$$M_0\delta\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)_0 - F_{SL}\delta w_L + M_L\delta\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)_L$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^L EI_y\delta\left(\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\right)^2\mathrm{d}x-\int_0^L q\delta w\mathrm{d}x+$$

$$\left[M\delta\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)\right]_0^L-[F_S\delta w]_0^L=0 \tag{c}$$

计算式(c)的第一个计算：

$$\frac{1}{2}\int_0^L EI_y\delta\left(\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\right)^2\mathrm{d}x=\int_0^L EI_y\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\delta\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^L EI_y\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}\left(\delta\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)$$

$$=\left[EI_y\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\delta\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right]_0^L-\int_0^L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(EI_y\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\right)\mathrm{d}(\delta w)$$

$$=\left[EI_y\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\delta\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right]_0^L-\left[\delta w\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(EI_y\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\right)\right]_0^L+$$

$$\int_0^L\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(EI_y\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\right)\right]\delta w\mathrm{d}x$$

代入式(c)，经整理，得

$$\int_0^L\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(EI_y\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\right)-q\right]\delta w\mathrm{d}x+\left[\left(EI_y\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}+M\right)\delta\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)\right]_0^L-$$

$$\left\{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(EI_y\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\right)+F_S\right]\delta w\right\}_0^L=0$$

由于 δw 是完全任意的，故上式成立的条件为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(EI_y\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\right)=q\qquad(0\leqslant x\leqslant L) \tag{d}$$

$$\left.\begin{aligned}&\left(EI_y\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}+M\right)\delta\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)=0\\&\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(EI_y\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\right)+F_S\right]\delta w=0\end{aligned}\right\}\quad(x=0,L) \tag{e}$$

显然，式(d)为梁的挠曲线的微分方程，而式(e)为位移形式的边界条件。下面，我们要从式(e)导出以挠度表示的梁的各种支承的力的边界条件。

首先，对于固定端，由于在此情况下，$w=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}=0$，显然，式(e)自动满足。

其次，对于简支端，此时，$w=0$(因此 $\delta w=0$)，而 $\delta\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)\neq0$，于是，式(e)的第二式恒满足，由其第一式得到

$$EI_y\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}=-M$$

此式表示在梁的简支端受弯矩作用的力的边界条件。如果无弯矩作用，则简化

为

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}=0$$

第三，对于自由端，由于此时 $\delta w\neq 0$，$\delta\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)\neq 0$，所以，由式(e)得到

$$EI_y\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}=-M$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(EI_y\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right)=-F_S$$

这两个式子表示在梁的自由端同时受弯矩和剪力作用时的力的边界条件。如果弯矩和剪力中一个为零，或全部为零，则上述边界条件可作相应的简化。

例 2 柱形杆的扭转。这个问题在第九章中已作了专门的讨论。大家还记得，若用位移解法，则位移分量应呈如下的形式：

$$\left.\begin{aligned}u&=-\alpha yz\\ v&=\alpha xz\\ w&=\alpha\varphi(x,y)\end{aligned}\right\}\tag{f}$$

这里，α 为单位长度的扭转角，函数 φ 表示横截面的翘曲。现在要运用位移变分方程导出 φ 所满足的微分方程和边界条件。

解 与式(f)表示的位移相对应的应力分量为

$$\left.\begin{aligned}\tau_{zx}&=\alpha G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right)\\ \tau_{zy}&=\alpha G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\right)\end{aligned}\right\}\tag{g}$$

其余的应力分量为零。于是，由式(4-21)，柱形杆的应变能为

$$\begin{aligned}V_\varepsilon&=\iiint v_\varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{2G}\int\mathrm{d}z\iint(\tau_{zx}^2+\tau_{zy}^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}LG\alpha^2\iint_R\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

这里的 L 为柱形杆的长度。若令

$$I_0=\iint_R\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\tag{14-6}$$

则得

$$V_\varepsilon=\iiint v_\varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{2}LG\alpha^2 I_0\tag{h}$$

因为在杆的侧面不受外力作用，在杆的两端，可认为只有产生扭矩 M 的 $\bar{f}_x$ 和 $\bar{f}_y$，而 $\bar{f}_z=0$，又因为由式(f)可得本问题的虚位移为

$$\left.\begin{aligned}\delta u &= 0\\ \delta v &= 0\\ \delta w &= \alpha\delta\varphi\end{aligned}\right\} \tag{i}$$

故所有面上面力的虚功为零。因此，如果不计体力，方程(14－3)′变为

$$\delta V_\varepsilon = \frac{1}{2}LG\alpha^2\delta I_0 = 0$$

或

$$\delta I_0 = 0 \tag{14-7}$$

将式(14－6)代入，式(14－7)变为

$$\begin{aligned}\delta I_0 &= 2\iint_R\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right)\delta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\right)\delta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= 2\iint_R\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right)\delta\varphi\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\right)\delta\varphi\right]\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\\ &\quad 2\iint_R\nabla^2\varphi\delta\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0\end{aligned}$$

利用高斯积分公式，上式变为

$$\oint_s\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}l+\frac{\partial\varphi}{\partial y}m-yl+xm\right)\delta\varphi\mathrm{d}s-\iint_R\nabla^2\varphi\delta\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

由于 $\delta\varphi$ 完全任意，故上式成立的条件为

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2\varphi=0 && (\text{在 } R \text{ 内})\\ &\frac{\partial\varphi}{\partial v}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}l+\frac{\partial\varphi}{\partial y}m=yl-xm && (\text{在 } s \text{ 上})\end{aligned}\right. \tag{j}$$

显然，这就是第九章中的式(9－2)和(9－4)，表示扭转函数 φ 需要满足的平衡微分方程和应力边界条件。

为了下面近似计算的需要，利用式(j)简化 I_0。先将式(14－6)改写成

$$I_0=\iint_R\left(x^2+y^2+x\frac{\partial\varphi}{\partial y}-y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+U_0$$

其中

$$\begin{aligned}U_0 &= \iint_R\left[x\frac{\partial\varphi}{\partial y}-y\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \iint_R\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right)\varphi\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\right)\varphi\right]\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\\ &\quad \iint_R(\nabla^2\varphi)\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \oint_s\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}l+\frac{\partial\varphi}{\partial y}m-yl+xm\right)\varphi\mathrm{d}s-\\ &\quad \iint_R(\nabla^2\varphi)\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

利用式(j),得

$$U_0 = 0$$

于是

$$I_0 = \iint \left(x^2 + y^2 + x\frac{\partial \varphi}{\partial y} - y\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{14-8}$$

由此不难算得扭矩

$$\begin{aligned} M &= \iint_R (x\tau_{yz} - y\tau_{xz})\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \alpha G \iint_R \left(x^2 + y^2 + x\frac{\partial \varphi}{\partial y} - y\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \alpha G I_0 \end{aligned} \tag{14-9}$$

§14-5 基于最小势能原理的近似计算方法

以上给出了两个通过最小势能原理导出问题所需满足的微分方程和边界条件的示例。但最小势能原理的主要作用并不在于此,而在于要应用它求问题的近似解答。下面,介绍基于最小势能原理的两种近似解法——瑞利-里茨法和伽辽金法。

根据最小势能原理,只要能列出所有几何可能的位移,则其中使总势能 E_p 取最小值的那组位移分量,就是我们要求的真实的位移。由此不难同时求得应变分量和应力分量。但问题在于要列出所有几何可能的位移是非常困难的,甚至于是不可能的。因此,在计算实际问题时,只好凭经验和直觉来缩小寻找的范围,在缩小范围后的一族位移中,也能挑到一组位移分量使总势能 E_p 取最小值,虽然,一般地说,这组位移分量不是真实的,但可以肯定,它是缩小范围后的一族位移中与真实位移最接近的一组,因此,可以作为问题的近似解。

从上述的思想出发,在最一般的情况下,可将位移分量选择为如下的形式:

$$\left.\begin{aligned} u &= u_0(x,y,z) + \sum_m A_m u_m(x,y,z) \\ v &= v_0(x,y,z) + \sum_m B_m v_m(x,y,z) \\ w &= w_0(x,y,z) + \sum_m C_m w_m(x,y,z) \end{aligned}\right\} \tag{14-10}$$

其中,u_0, v_0, w_0 和 u_m, v_m, w_m 都是坐标 x, y, z 的已知函数,A_m, B_m 和 C_m 为任意的常数,并在边界 S_u 上,有

$$u_0 = \bar{u}, \quad v_0 = \bar{v}, \quad w_0 = \bar{w}$$

而

$$u_m = 0, \quad v_m = 0, \quad w_m = 0 \qquad (m = 1,2,\cdots)$$

这样，由式(14－10)给出的位移，不论 A_m，B_m 和 C_m 取何值，它们总是满足位移边界条件的。现在的问题是要适当地选择 A_m、B_m 和 C_m，使总势能 E_p 在以式(14－10)所表示的这族位移中取最小值。为此，先将式(14－10)代入几何方程求应变分量，再代入总势能 E_p 的表示式(14－4)中，注意右边的第一个积分中 v_ε 是应变分量的齐二次函数，因此，代入后，这个积分变成 A_m，B_m 和 C_m 的齐二次函数，右边的第二个积分和第三个积分是 A_m，B_m 和 C_m 的一次函数。于是，总势能 E_p 本来是自变函数 u，v，w 的泛函，而现在变成待定系数 A_m，B_m 和 C_m 的二次函数。这样，就把求泛函的极值问题，变成求函数的极值问题。总势能 E_p 取极值的条件为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial E_p}{\partial A_m}&=0\\ \frac{\partial E_p}{\partial B_m}&=0\\ \frac{\partial E_p}{\partial C_m}&=0\end{aligned}\right\}\qquad(14-11)$$

$$(m=1,2,3,\cdots)$$

它又可以写成

$$\left.\begin{aligned}-\frac{\partial}{\partial A_m}\iiint_V v_\varepsilon \mathrm{d}V+\iiint_V F_x u_m \mathrm{d}V+\iint_{S_\sigma}\bar{f}_x u_m \mathrm{d}S&=0\\ -\frac{\partial}{\partial B_m}\iiint_V v_\varepsilon \mathrm{d}V+\iiint_V F_y v_m \mathrm{d}V+\iint_{S_\sigma}\bar{f}_y v_m \mathrm{d}S&=0\\ -\frac{\partial}{\partial C_m}\iiint_V v_\varepsilon \mathrm{d}V+\iiint_V F_z w_m \mathrm{d}V+\iint_{S_\sigma}\bar{f}_z w_m \mathrm{d}S&=0\end{aligned}\right\}\qquad(14-11)'$$

$$(m=1,2,3,\cdots)$$

这是一组以 A_m，B_m，C_m $(m=1,2,3,\cdots)$ 为未知数的线性非齐次代数方程组，解出了系数 A_m，B_m 和 C_m，代入式(14－10)，就得到位移的近似解答。这种方法称为**瑞利－里茨法**。

我们再回到式(14－3)，计算其右边的积分：

$$\begin{aligned}\int_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\mathrm{d}V&=\int_V \sigma_{ij}\frac{1}{2}(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i})\mathrm{d}V\\ &=\int_V \sigma_{ij}\delta u_{i,j}\mathrm{d}V\\ &=\int_V (\sigma_{ij}\delta u_i)_{,j}\mathrm{d}V-\int_V \sigma_{ij,j}\delta u_i \mathrm{d}V\\ &=\int_{S_\sigma}\sigma_{ij}n_j\delta u_i \mathrm{d}S-\int_V \sigma_{ij,j}\delta u_i \mathrm{d}V\end{aligned}$$

代入式(14－3)并与左边的项合并，得

$$\int_V (\sigma_{ij,j} + F_i)\delta u_i \mathrm{d}V + \int_{S_\sigma} (\bar{f}_i - \sigma_{ij} n_j)\delta u_i \mathrm{d}S = 0 \tag{a}$$

现在，如果选择的位移试函数(14－10)不仅满足 S_u 上的位移边界条件，而且还能满足 S_σ 上的应力边界条件，则式(a)变为

$$\int_V (\sigma_{ij,j} + F_i)\delta u_i \mathrm{d}V = 0 \tag{b}$$

或写成

$$\begin{aligned} \iiint_V \Big[&\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x\right)\delta u + \\ &\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y\right)\delta v + \\ &\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z\right)\delta w \Big] \mathrm{d}V = 0 \end{aligned} \tag{b}'$$

将式(14－10)代入几何方程求应变分量，再通过物理方程求应力分量，然后，代入式(b)，并注意到

$$\begin{aligned} \delta u &= \sum_m u_m \delta A_m \\ \delta v &= \sum_m v_m \delta B_m \\ \delta w &= \sum_m w_m \delta C_m \end{aligned}$$

于是，式(b)变为

$$\begin{aligned} \sum_m \iiint_V \Big[&\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x\right)u_m \delta A_m + \\ &\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y\right)v_m \delta B_m + \\ &\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z\right)w_m \delta C_m \Big] \mathrm{d}V = 0 \end{aligned}$$

由于 δA_m，δB_m，δC_m 彼此独立且完全任意，故上式成立的条件为

$$\left.\begin{aligned} &\iiint_V \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x\right)u_m \mathrm{d}V = 0 \\ &\iiint_V \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y\right)v_m \mathrm{d}V = 0 \\ &\iiint_V \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z\right)w_m \mathrm{d}V = 0 \end{aligned}\right\} \tag{14－12}$$

$$(m = 1,2,3,\cdots)$$

由于由式(14－10)求得的应力分量为 A_m，B_m 和 C_m 的线性函数，所以，方程(14

－12)是线性非齐次代数方程组，解得了 A_m，B_m 和 C_m，代入式(14－10)，即得位移的近似解答。为看起来明了起见，方程(14－12)括号内的量可用位移表示(请参照以位移表示的平衡微分方程)，于是有

$$\left.\begin{aligned}
&\iiint_V \left[(\lambda+G)\frac{\partial\theta}{\partial x}+G\ \nabla^2 u+F_x\right]u_m \mathrm{d}V=0\\
&\iiint_V \left[(\lambda+G)\frac{\partial\theta}{\partial y}+G\ \nabla^2 v+F_y\right]v_m \mathrm{d}V=0\\
&\iiint_V \left[(\lambda+G)\frac{\partial\theta}{\partial z}+G\ \nabla^2 w+F_z\right]w_m \mathrm{d}V=0
\end{aligned}\right\} \qquad (14-12)'$$

$$(m=1,2,3,\cdots)$$

这种方法称为**伽辽金法**。

下面举例说明瑞利－里茨法和伽辽金法的应用。

例 1　两端简支的等截面梁，受均布荷载 q 作用(图 14－3)，试求挠度 $w(x)$。

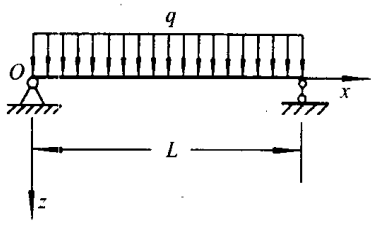


图 14－3

解　先用瑞利－里茨法求解。这问题的总势能为

$$E_p=\frac{EI_y}{2}\int_0^L\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right)^2\mathrm{d}x-\int_0^L qw\mathrm{d}x \qquad (c)$$

为使两端的约束条件得到满足，即要求 $x=0$，L 处，$w=0$，所以，取挠度

$$w=\sum_m C_m\sin\frac{m\pi x}{L} \qquad (d)$$

代入式(c)，得

$$E_p=\frac{EI_y\pi^4}{4L^3}\sum_m m^4C_m^2-\frac{2qL}{\pi}\sum_{m=1,3,\cdots}\frac{C_m}{m}$$

由 $\dfrac{\partial E_p}{\partial C_m}=0$，有

$$\frac{EI_y\pi^4}{2L^3}m^4C_m-\frac{2qL}{\pi}\frac{1}{m}=0 \qquad (m\text{ 为奇数})$$

$$\frac{EI_y\pi^4}{2L^3}m^4C_m=0 \qquad (m\text{ 为偶数})$$

由此得到

$$C_m = \frac{4qL^4}{EI_y\pi^5}\frac{1}{m^5} \quad (m \text{ 为奇数})$$

$$C_m = 0 \quad (m \text{ 为偶数})$$

代入式(d),得

$$w = \frac{4qL^4}{EI_y\pi^5}\sum_{m=1,3,5,\cdots}\frac{1}{m^5}\sin\frac{m\pi x}{L} \tag{e}$$

如果挠度表达式(e)取无穷多项,即为无穷级数,则它恰好给出问题的精确解。这个级数收敛很快,取少数几项就可达到足够的精度。最大挠度发生在梁的中间,即 $x=\frac{L}{2}$ 处,于是有

$$w_{\max} = \frac{4qL^4}{EI_y\pi^5}\left(1-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}-\cdots\right)$$

现只取一项,得

$$w_{\max} = \frac{qL^4}{76.6EI_y}$$

与精确值十分接近。

由于式(d)表示的挠度求二阶导数后仍为正弦级数,故二阶导数在 $x=0,L$ 处的值为零。这表示,它不仅满足位移边界条件,而且还满足力的边界条件(在本问题中,力的边界条件是两端的弯矩为零)。因此,这样的挠度试函数还可以用伽辽金法求解。注意到本问题相当于式(14-12)′所示的公式为

$$\int_0^L\left(EI_y\frac{\mathrm{d}^4w}{\mathrm{d}x^4}-q\right)\sin\frac{m\pi x}{L}\mathrm{d}x=0$$

将式(d)代入上式并进行积分,得 C_m 所满足的方程,解之得

$$C_m = \frac{4qL^4}{EI_y\pi^5}\frac{1}{m^5} \quad (m \text{ 为奇数})$$

$$C_m = 0 \quad (m \text{ 为偶数})$$

可见所得的结果与上面相同。

例 2 用瑞利-里茨法分别求椭圆截面柱形杆和矩形截面柱形杆的扭转函数 $\varphi(x,y)$。设椭圆的长轴和短轴分别为 $2a$ 和 $2b$,x 轴与长轴重合,矩形的短边和长边分别为 $2a$ 和 $2b$,x 轴平行于矩形的短边。

解 在§14-4中,已经把扭转问题归结为求变分方程(14-7),其中,I_0 为式(14-6)所示。

首先,对于椭圆截面的柱形杆,考虑到在其扭转时横截面翘曲的情况,试取扭转函数为

$$\varphi = Axy \tag{f}$$

其中，A 为任意常数。将式(f)代入式(14－6)，积分后得

$$I_0=\frac{\pi ab}{4}[(A+1)^2a^2+(A-1)^2b^2] \tag{g}$$

I_0 本来是泛函，它取极值的必要条件是一阶变分为零，即式(14－7)。而现在，I_0 是 A 的函数，其取极值的必要条件为

$$\frac{\partial I_0}{\partial A}=\frac{\pi ab}{2}[(A+1)a^2+(A-1)b^2]=0$$

解之得

$$A=-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

于是

$$\varphi=-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}xy$$

这一结果与精确解一致。

对于矩形截面的柱形杆，同样根据横截面挠曲的情况，试取扭转函数为

$$\varphi=Axy+Cxy^3-Dx^3y \tag{h}$$

将式(h)代入式(14－6)，积分后得

$$\begin{aligned}I_0=&\frac{4}{3}ab^3(A-1)^2+4ab^5\left(\frac{b^2}{7}+\frac{3a^2}{5}\right)C^2+\\&4a^5b\left(\frac{a^2}{7}+\frac{3b^2}{5}\right)D^2+\frac{4}{3}a^3b(A+1)^2+\\&\frac{8}{5}ab^5(A-1)C+\frac{8}{3}a^3b^3(A+1)C+\\&\frac{8}{5}a^5b(A+1)D+\frac{8}{3}a^3b^3(A-1)D+\\&\frac{8}{5}a^3b^3(a^2+b^2)DC\end{aligned} \tag{i}$$

由

$$\frac{\partial I_0}{\partial A}=0,\quad \frac{\partial I_0}{\partial C}=0,\quad \frac{\partial I_0}{\partial D}=0$$

解得

$$A=-\frac{7(a^6-b^6)+135a^2b^2(a^2-b^2)}{7(a^6+b^6)+107a^2b^2(a^2+b^2)}$$

$$C=-\frac{7a^2(3a^2+35b^2)}{21(a^6+b^6)+321a^2b^2(a^2+b^2)}$$

$$D=\frac{7b^2(35a^2+3b^2)}{21(a^6+b^6)+321a^2b^2(a^2+b^2)}$$

将式(i)代入式(14－9)，并将 A，C，D 的值代入，得扭矩

$$M=\alpha GI_0=\frac{16\alpha Ga^3b^3[105(a^4+b^4)+1\,234a^2b^2]}{45(a^2+b^2)[7(a^4+b^4)+100a^2b^2]}$$

最大切应力发生在长边的中点，因此，将式(h)代入§14-4中的式(g)的第二式，令其中的 $x=\pm a$，$y=0$，得最大切应力为

$$\tau_{\max}=(\tau_{yz})_{x=\pm a,y=0}=\alpha Ga(1+A+Da^2)$$

$$=\alpha Gab^2\frac{161a^4+747a^2b^2+42b^4}{3[7(a^6+b^6)+107a^2b^2(a^2+b^2)]}$$

上述结果与精确解很接近。

例3 设有一宽度为 $2a$ 而高度为 b 的矩形薄板(图14-4)，它的左、右边和底边均被固定，而上边(自由边)具有如下给定的位移：

$$u=0$$

$$v=-\eta\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

不计体力，试求板的位移。

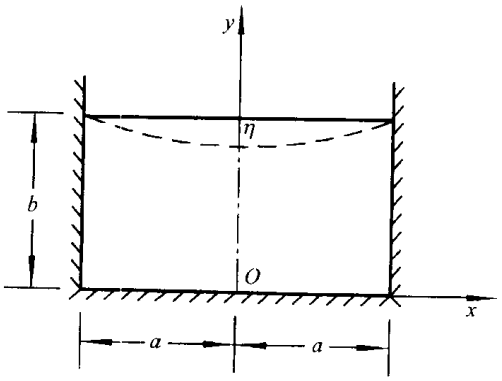


图14-4

解 先写出平面问题应变能的表达式。

对于平面应变问题，由于 $\varepsilon_z=\gamma_{yz}=\gamma_{zx}=0$，所以，由式(4-20)，将其中的 λ 和 μ 分别以 $\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$，$\frac{E}{2(1+\nu)}$ 代入，并利用几何方程，有

$$v_\varepsilon=\frac{E}{2(1+\nu)}\left[\frac{\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]$$

对于平面应力问题，须将上式中的 E 和 ν 分别换成 $\frac{E(1+2\nu)}{(1+\nu)^2}$ 和 $\frac{\nu}{1+\nu}$，这样，得到

$$v_\varepsilon=\frac{E}{2(1-\nu^2)}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2\nu\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\right.$$

$$\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\Bigg]$$

于是，分别对于平面应变问题和平面应力问题，物体总的应变能为

$$V_\varepsilon=\frac{E}{2(1+\nu)}\iint\left[\frac{\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{j}$$

$$V_\varepsilon=\frac{E}{2(1-\nu^2)}\iint\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2\nu\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{k}$$

本问题无已知面力的边界 S_σ，并由于是平面应力问题，所以

$$E_p=V_\varepsilon=\frac{E}{2(1-\nu^2)}\iint\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2\nu\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{l}$$

参照式(14－10)，对于平面问题，位移分量试函数取成如下的形式：

$$\left.\begin{aligned}u&=u_0+\sum_m A_m u_m\\ v&=v_0+\sum_m B_m v_m\end{aligned}\right\} \tag{m}$$

这里的 u_0，v_0，u_m，v_m 是坐标 x 和 y 的已知函数，在位移已知的 S_u 上，有 $u_0=\bar{u}$，$v_0=\bar{v}$，而 $u_m=v_m=0$，A_m 和 B_m 为任意常数。

因为在本问题中，在 $x=\pm a$ 和 $y=0$ 的边界上，$u=v=0$，而在 $y=b$ 的边界上，$u=0$，$v=-\eta\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)$，所以取

$$u_0=0,\quad v_0=-\eta\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\frac{y}{b}$$

级数取一项，试取

$$u_1=\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\frac{x}{a}\cdot\frac{y}{b}\left(1-\frac{y}{b}\right)$$

$$v_1=\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\frac{y}{b}\left(1-\frac{y}{b}\right)$$

显然，u_1，v_1 满足在全部边界上为零的条件，而且，符合位移对称性的要求。于是，利用式(m)，有

$$u=A_1\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\frac{x}{a}\frac{y}{b}\left(1-\frac{y}{b}\right)$$

$$v=-\eta\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\frac{y}{b}+B_1\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\frac{y}{b}\left(1-\frac{y}{b}\right)$$

代入式(l)积分，并由

$$\frac{\partial E_p}{\partial A_1}=0,\qquad \frac{\partial E_p}{\partial B_1}=0$$

求得 A_1 和 B_1，最后得位移的近似表达式为

$$u=\frac{35(1+\nu)\eta}{42\dfrac{b}{a}+20(1-\nu)\dfrac{a}{b}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\frac{x}{a}\frac{y}{b}\left(1-\frac{y}{b}\right)$$

$$v=-\eta\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\frac{y}{b}+\frac{5(1-\nu)\eta}{16\dfrac{a^2}{b^2}+2(1-\nu)}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\frac{y}{b}\left(1-\frac{y}{b}\right)$$

因为本问题无已知面力的 S_σ，上述所设函数已满足了全部边界条件，故也能用伽辽金法计算。对于平面应力问题，相当于式(14－12)′的公式为

$$\left.\begin{aligned}&\iint\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)u_m\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0\\&\iint\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)v_m\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{n})$$

将式(m)代入积分，求得 A_1 和 B_1 后回代到式(m)，可以得到用瑞利－里茨法求得的完全相同的结果。

例 4　图 14－5 所示为四边固定的矩形板，边长分别为 $2a$ 和 $2b$，受均布荷载 q 作用，坐标选取如图。用瑞利－里茨法求挠度。

解　先求出薄板弯曲时的应变能。

根据上一章薄板弯曲的直法线假设，是不计应变分量 ε_z，γ_{yz}，γ_{xz} 的，于是薄板弯曲时应变能为

$$V_\varepsilon=\frac{1}{2}\iiint(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\tau_{xy}\gamma_{xy})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

将式(14－2)和(14－3)代入，经整理以后，得

$$V_\varepsilon=\frac{E}{2(1-\nu^2)}\iiint z^2\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2-2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

注意到上式括号内的各项都不随 z 而变，将上式等号右边对 z，从 $-\dfrac{h}{2}$ 到 $\dfrac{h}{2}$ 积分，并应用式(14－7)，即得

$$V_\varepsilon=\frac{D}{2}\iint\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2-2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\qquad(\mathrm{o})$$

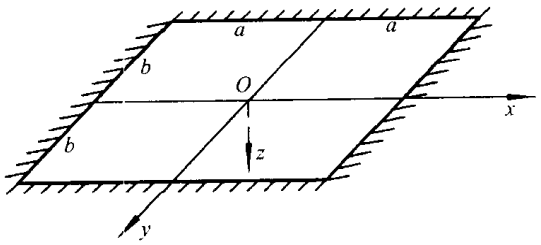


图 14－5

对于周边上 $w=0$ 的矩形板，上式还可以简化。利用斯托克斯公式，有

$$\begin{aligned}\iint\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\oint_s\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}m\,\mathrm{d}s-\iint\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\\ &\quad\iint\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\oint_s\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}m\,\mathrm{d}s-\oint_s\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}l\,\mathrm{d}s+\\ &\quad\iint\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

对于周边 $w=0$ 的矩形板，沿 $y=\text{const.}$ 的边，$\frac{\partial w}{\partial x}=0$，沿 $x=\text{const.}$ 的边，$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$，$m\,\mathrm{d}s=-\mathrm{d}x=0$，因此，上式中等号右边的两个回路积分项全为零。于是，式(o)简化为

$$V_\varepsilon=\frac{D}{2}\iint\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{p}$$

于是，本问题的总势能为

$$E_p=\frac{D}{2}\iint\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint qw\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{q}$$

本问题的边界条件为

$$(w)_{x=\pm a}=0,\quad\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=\pm a}=0$$

$$(w)_{y=\pm b}=0,\quad\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=\pm b}=0$$

据此，选择挠度为

$$w=(x^2-a^2)^2(y^2-b^2)^2(A_1+A_2x^2+A_3y^2+\cdots)$$

显然，它能满足全部边界条件。

先取一项，即

$$w = A_1 (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2$$

代入式(q)，得

$$E_p = \frac{256 \times 64}{25 \times 63} D a^5 b^5 \left(a^4 + b^4 + \frac{4}{7} a^2 b^2 \right) A_1^2 - \frac{256}{225} q a^5 b^5 A_1$$

由 $\frac{\partial E_p}{\partial A_1} = 0$，得

$$A_1 = \frac{7q}{128D\left(a^4 + b^4 + \frac{4}{7} a^2 b^2 \right)}$$

于是，得近似解

$$w = \frac{7q}{128D\left(a^4 - b^4 + \frac{4}{7} a^2 b^2 \right)} (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2$$

中心点处的挠度为

$$w(0,0) = \frac{7qa^4 b^4}{128D\left(a^4 + b^4 + \frac{4}{7} a^2 b^2 \right)}$$

对正方形板，$a = b$，则中心挠度

$$w(0,0) = 0.021\ 27 \frac{qa^4}{D}$$

精确值为

$$w(0,0) = 0.020\ 16 \frac{qa^4}{D}$$

误差为 5.5%。

如果取三项，并取 $a = b$，按同样的做法，可得

$$A_1 = 0.020\ 202 \frac{q}{Da^4}, \quad A_2 a^2 = A_3 a^2 = 0.005\ 885 \frac{q}{Da^4}$$

中心挠度为

$$w(0,0) = 0.020\ 202 \frac{qa^4}{D}$$

其误差只有 0.2%。

因为本问题无已知面力的边界 S_σ，故所设的挠度函数也能用伽辽金法计算。现只取一项，即

$$w = A_1 (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2$$

则相当于式(14-12)′的公式为

$$\int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} (D \nabla^2 \nabla^2 w - q)(x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 \mathrm{d}x \mathrm{d}y = 0$$

将 w 代入上式并进行积分，可求得与上相同的 A_1。

如果一块矩形薄板没有自由边，而只有固定边和简支边，则在 x 为常量的边界上有 $\mathrm{d}x=0$ 和 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$，在 y 为常量的边界上有 $\dfrac{\partial w}{\partial x}=0$。因此，式(o)仍可简化为式(p)。

例 5　图 14－6 为一边长分别为 a 和 b 的矩形薄板，前后两对边为简支，左边固定，右边自由，受均布荷载 q，坐标选取如图示，求挠度 w。

解　本问题的位移边界条件为

$$(w)_{x=0}=0,\quad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=0}=0$$

$$(w)_{y=0}=0,\quad (w)_{y=b}=0$$

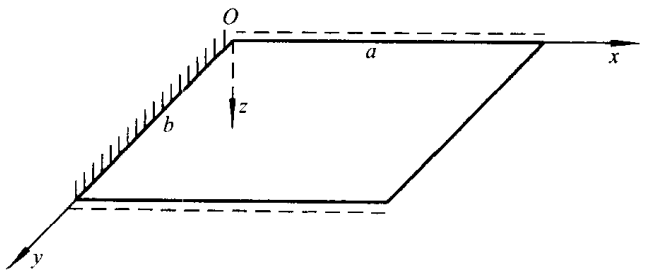


图 14－6

据此，将挠度表达式取为

$$w=A_1\left(\frac{x}{a}\right)^2\sin\frac{\pi y}{b}$$

显然，它能满足全部位移边界条件，现将它代入式(o)，得

$$\begin{aligned}V_\varepsilon=&\frac{D}{2}\int_0^a\int_0^b\left[\left(\frac{2}{a^2}A_1\sin\frac{\pi y}{b}-\frac{\pi^2}{a^2b^2}A_1x^2\sin\frac{\pi y}{b}\right)^2-\right.\\&2(1-\nu)\left(-\frac{2\pi^2}{a^4b^2}A_1^2x^2\sin^2\frac{\pi y}{b}-\right.\\&\left.\left.\frac{4\pi^2}{a^4b^2}A_1^2x^2\cos^2\frac{\pi y}{b}\right)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\=&\frac{DA_1^2}{2}\left[2+\left(\frac{4}{3}-2\nu\right)\left(\frac{\pi a}{b}\right)^2+\frac{1}{10}\left(\frac{\pi a}{b}\right)^4\right]\frac{b}{a^3}\end{aligned}$$

另外

$$\begin{aligned}\iint qw\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\int_0^a\int_0^b qA_1\left(\frac{x}{a}\right)^2\sin\frac{\pi y}{b}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\frac{2qab}{3\pi}A_1\end{aligned}$$

所以

$$E_p=\frac{DA_1^2}{2}\left[2+\left(\frac{4}{3}-2\nu\right)\left(\frac{\pi a}{b}\right)^2+\frac{1}{10}\left(\frac{\pi a}{b}\right)^4\right]\frac{b}{a^3}-\frac{2qab}{3\pi}A_1$$

由$\frac{\partial E_p}{\partial A_1}=0$,求得 A_1 后,最后得挠度的近似表达式为

$$w=\frac{2qa^2x^2\sin\frac{\pi y}{b}}{3\pi D\left[2+\left(\frac{4}{3}-2\nu\right)\left(\frac{\pi a}{b}\right)^2+\frac{1}{10}\left(\frac{\pi a}{b}\right)^4\right]}$$

当 $a=b$ 而 $\nu=0.3$ 时,自由边中点$\left(x=a,y=\frac{b}{2}\right)$处的挠度为

$$w=0.011\,2\frac{qa^4}{D}$$

与精确解答相比,只有 1% 的误差。

§14-6 应力变分方程 最小余能原理

在§14-3中,我们将弹性体的稳定平衡状态与它经过虚位移而到达的邻近状态进行比较,得到了真实的位移使总势能取最小值这一重要的结论。如果我们不是对位移,而是对稳定平衡状态的应力采用类似的做法,将会得到另一个重要的结论。

以下的讨论不局限于弹性关系为线性的情况,但自然地包括线性的情况。

先介绍有关余能的概念。以单向拉伸为例来说明。设单向拉伸应力为 σ_x,应变为 ε_x,应力应变曲线如图 14-7 所示。在线性弹性体中,它是直线;但对一般弹性体而言,这是曲线。当弹性体拉伸到应变为 ε_x 时,弹性体的应变能密度相当于 OSP 的面积,即

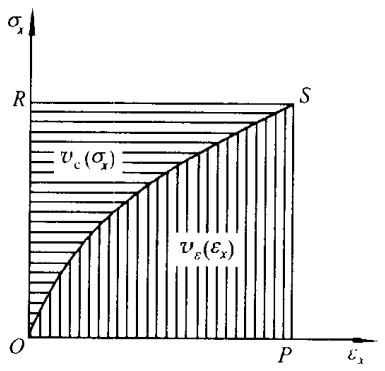


图 14-7

$$v_\varepsilon(\varepsilon_x)=\int_0^{\varepsilon_x}\sigma_x\mathrm{d}\varepsilon_x$$

而单位体积的余能,即**应变余能密度**定义为面积 OSR,有

$$v_c(\sigma_x)=\int_0^{\sigma_x}\varepsilon_x\mathrm{d}\sigma_x$$

它们之间存在如下的关系

$$v_\varepsilon+v_c=\sigma_x\varepsilon_x$$

对于复杂应力状态来说,它们定义为

$$\left.\begin{aligned} v_\varepsilon(\varepsilon_{ij}) &= \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{kl}\,\mathrm{d}\varepsilon_{kl} \\ v_c(\sigma_{ij}) &= \int_0^{\sigma_{ij}} \varepsilon_{kl}\,\mathrm{d}\sigma_{kl} \end{aligned}\right\} \tag{14-13}$$

而且

$$v_\varepsilon(\varepsilon_{ij}) + v_c(\sigma_{ij}) = \sigma_{kl}\varepsilon_{kl} \tag{14-14}$$

第四章已证明了关系式

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij}$$

同样可以证明

$$\frac{\partial v_c}{\partial \sigma_{ij}} = \varepsilon_{ij} \tag{14-15}$$

事实上，将式(14－14)进行变分，有

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varepsilon_{ij}}\delta\varepsilon_{ij} + \frac{\partial v_c}{\partial \sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij} = \varepsilon_{kl}\delta\sigma_{kl} + \sigma_{kl}\delta\varepsilon_{kl}$$

移项，改变哑指标

$$\left(\frac{\partial v_c}{\partial \sigma_{ij}} - \varepsilon_{ij}\right)\delta\sigma_{ij} = -\left(\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varepsilon_{ij}} - \sigma_{ij}\right)\delta\varepsilon_{ij}$$

由于等号右边为零，左边的 $\delta\sigma_{ij}$ 完全任意，故其系数必须为零，于是得到式(14－15)。式(14－15)称为**卡斯蒂利亚诺**(Castigliano, A)**公式**。

下面，我们要通过虚功方程(14－1)，取其中的几何可能的位移为真实位移，以导出所谓的应力变分方程。为此，设静力可能的应力为

$$\sigma_{ij}^{s} = \sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij} \tag{a}$$

其中，σ_{ij} 为真实的应力，而 $\delta\sigma_{ij}$ 为真实应力邻近的应力的微小改变量，我们称之为**虚应力**。将式(a)代入平衡微分方程和 S_σ 上的应力边界条件，有

$$\begin{aligned} &(\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij})_{,j} + F_i = 0 \quad (V\text{ 内}) \\ &(\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij})n_j = \bar{f}_i \qquad (S_\sigma\text{ 上}) \end{aligned}$$

由于 σ_{ij} 为真实应力，必满足平衡微分方程和应力边界条件，故上述两式简化为

$$\left.\begin{aligned} &\delta\sigma_{ij,j} = 0 \quad (V\text{ 内}) \\ &\delta\sigma_{ij}n_j = 0 \quad (S_\sigma\text{ 上}) \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

式(b)表示，要使由式(a)表示的应力静力可能，虚应力 $\delta\sigma_{ij}$ 必须满足无体力的平衡微分方程和无面力的应力边界条件。

现在将式(a)代入虚功方程(14－1)，取其中的几何可能位移为真实位移，即取 $u_i^k = u_i$，于是有

$$\int_V F_i u_i \,\mathrm{d}V + \int_{S_\sigma} \bar{f}_i u_i \,\mathrm{d}S + \int_{S_u} (\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij}) n_j \bar{u}_i \,\mathrm{d}S$$

$$= \int_V (\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij}) \varepsilon_{ij} \,\mathrm{d}V \tag{c}$$

注意到§14-1中的式(f),式(c)变为

$$\int_{S_u} \bar{u}_i \delta\sigma_{ij} n_j \,\mathrm{d}S = \int_V \varepsilon_{ij} \delta\sigma_{ij} \,\mathrm{d}V \tag{14-16}$$

式(14-16)称为**应力变分方程**,又称**虚应力方程**。它表示在已知位移的边界上,虚面力在真实位移上作的功,等于整个弹性体的虚应力在真实变形中所作的功。

应力变分方程还可以表成另一种形式。将式(14-15)代入式(14-16)等号右边,有

$$\int_V \varepsilon_{ij} \delta\sigma_{ij} \,\mathrm{d}V = \int_V \frac{\partial v_c}{\partial \sigma_{ij}} \delta\sigma_{ij} \,\mathrm{d}V = \int_V \delta v_c \,\mathrm{d}V$$

并注意到 S_u 上的位移是给定的,因此,方程(14-16)左边的变分号可以提到积分号的外边,于是,式(14-16)可以写成

$$\delta\left(\int_V v_c \,\mathrm{d}V - \int_{S_u} \sigma_{ij} n_j \bar{u}_i \,\mathrm{d}S\right) = 0$$

令

$$E_c = \int_V v_c \,\mathrm{d}V - \int_{S_u} \sigma_{ij} n_j \bar{u}_i \,\mathrm{d}S \tag{14-17}$$

则有

$$\delta E_c = 0 \tag{14-18}$$

这里,$E_c(\sigma_{ij})$称为**总余能**,它是应力分量的泛函。式(14-18)表示,当应力从真实的应力 σ_{ij} 变化到静力可能应力 $\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij}$ 时,总余能的一阶变分为零,可见真实的应力使总余能取驻值。采取与§14-3中同样的方法,可以证明,对于稳定的平衡状态,它实际上是最小值。这称为**最小余能原理**,它可叙述为:在所有静力可能的应力中,真实的应力使总余能取最小值。

如果弹性体全部边界上面力已知,则式(14-18)简化为

$$\delta \int_V v_c \,\mathrm{d}V = 0 \tag{14-19}$$

这称为**最小功原理**,它是最小余能原理的特殊情况。

从前面的方法看,真实的应力除了满足平衡微分方程和应力边界条件以外,还须满足以应力表示的应变协调方程,其相应的位移在 S_u 上还满足位移边界条件。而从现在的方法看,真实应力除了满足平衡微分方程和应力边界条件以外,还须满足应力变分方程或总余能的极值条件。因此,应力变分方程或总余能

取极值的条件应等价于以应力表示的应变协调方程和位移边界条件。

注意，以上的结论只适用于单连通物体，在应力变分方程中考虑多连体的位移单值条件是十分复杂的。

§14－7　基于最小余能原理的近似计算方法

以下，只考虑弹性关系为线性的情况，此时，$v_\varepsilon = v_c$。

根据最小余能原理，如果将所有静力可能的应力都列出来，则其中使总余能取最小值的那组应力分量即是真实的应力。在实际计算时，我们虽然很难列出所有静力可能的应力，但我们可凭经验和直觉缩小选择的范围。这样，在所选择的一族静力可能的应力中，也能找到一组应力使总余能取最小值，虽然，一般说，这组应力不是真实的，但肯定是在所选择的一族应力中与真实的应力靠得最近的，因此，可以作为问题的近似解答。

巴博考维奇(Папкович，П. Ф.)建议应力分量取成如下的形式：

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \sigma_x^0 + \sum_m A_m \sigma_x^{(m)} \\
\sigma_y &= \sigma_y^0 + \sum_m A_m \sigma_y^{(m)} \\
\sigma_z &= \sigma_z^0 + \sum_m A_m \sigma_z^{(m)} \\
\tau_{yz} &= \tau_{yz}^0 + \sum_m A_m \tau_{yz}^{(m)} \\
\tau_{xz} &= \tau_{xz}^0 + \sum_m A_m \tau_{xz}^{(m)} \\
\tau_{xy} &= \tau_{xy}^0 + \sum_m A_m \tau_{xy}^{(m)}
\end{aligned}\right\} \tag{14-20}$$

其中，σ_{ij}^0 是平衡微分方程的特解，并适合应力边界条件，如果它们同时满足以应力表示的应变协调方程及 S_u 上的位移边界条件，则它们就是问题的解，但我们假定它们不满足这些条件；$\sigma_{ij}^{(m)}$ 满足无体力的平衡微分方程和无面力的应力边界条件，也不满足协调方程和 S_u 上的位移边界条件；A_m $(m = 1,2,3,\cdots)$ 为任意常数。由此可知，式(14－20)给出的应力分量是静力可能的。现把它们代入总余能的表达式(14－17)，于是，总余能 E_c 变成 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 的二次函数，其取极值的条件为

$$\frac{\partial E_c}{\partial A_m} = 0 \qquad (m = 1,2,3,\cdots) \tag{14-21}$$

代数方程组(14－21)为线性非齐次的，求出 A_m 后，代回式(14－20)，即得问题

的近似解。

§14-8 最小余能原理在平面问题和扭转问题中的应用

在利用最小余能原理求近似解时，要选择应力分量同时满足平衡微分方程和静力边界条件是十分困难的。但对于像平面问题和扭转问题等，由于存在着应力函数，由此求得的应力分量已满足了平衡微分方程，因此，对这类问题，只需设定应力函数表达式，使由此求得的应力分量满足应力边界条件，困难就大为减少了。下面分别介绍最小余能原理在平面问题和扭转问题中的应用。

在平面应力问题中，$\sigma_z=\tau_{yz}=\tau_{zx}=0$，且 $\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$ 仅是 x 和 y 的函数 取单位厚度来考虑，于是，由式(14-21)得弹性体的余能为

$$V_c=\iint v_c\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2E}\iint[\sigma_x^2+\sigma_y^2-2\nu\sigma_x\sigma_y+2(1+\nu)\tau_{xy}^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{a}$$

对于平面应变问题，须将上式中的 E 和 ν 分别换成 $\frac{E}{1-\nu^2}$ 和 $\frac{\nu}{1-\nu}$，得

$$V_c=\iint v_c\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1+\nu}{2E}\iint[(1-\nu)(\sigma_x^2+\sigma_y^2)-2\nu\sigma_x\sigma_y+2\tau_{xy}^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{b}$$

如果我们研究的平面物体是单连通的，应力分量与弹性常数无关，因此，可取 $\nu=0$。这时，式(a)和(b)简化为

$$V_c=\iint v_c\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2E}\iint(\sigma_x^2+\sigma_y^2+2\tau_{xy}^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{c}$$

将式(6-13)(不计体力)

$$\sigma_x=\frac{\partial^2U}{\partial y^2},\quad \sigma_y=\frac{\partial^2U}{\partial x^2},\quad \tau_{xy}=-\frac{\partial^2U}{\partial x\partial y}$$

代入式(c)，有

$$V_c=\frac{1}{2E}\iint\left[\left(\frac{\partial^2U}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2U}{\partial y^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2U}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{14-22}$$

这里，U 为艾里应力函数。

设平面物体全部周界上面力都是已知的，则可用最小功原理。由式(14-19)，有

$$\delta V_c=\frac{1}{2E}\delta\iint\left[\left(\frac{\partial^2U}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2U}{\partial y^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2U}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0 \tag{14-23}$$

不难证明，变分方程(14-23)等价于 $\nabla^2\nabla^2U=0$。

在求近似解时，可取应力函数

$$U=U_0+\sum_m A_mU_m \tag{14-24}$$

为使应力边界条件得到满足，设由 U_0 给出的应力分量满足实际的应力边界条件，而由 U_m 给出的应力分量满足面力为零的应力边界条件，A_m 为任意常数；将式(14－24)代入式(14－22)，于是，余能 V_c 成为 A_m（$m=1,2,3,\cdots$）的二次函数，其取极值的条件为

$$\frac{\partial V_c}{\partial A_m}=\frac{\partial}{\partial A_m}\iint \tau_c \mathrm{d}x\mathrm{d}y=0 \qquad (m=1,2,3,\cdots) \tag{14-25}$$

求出 A_m 后，代入式(14－24)，即得问题的近似解。

例 1　图 14－8 所示为一矩形薄板，在其两端受按抛物线分布的拉力作用，求应力。

解　本问题的边界条件为

$$\left.\begin{aligned}&(\tau_{xy})_{x=\pm a}=0,\quad (\sigma_x)_{x=\pm a}=q_0\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\\&(\tau_{yx})_{y=\pm b}=0,\quad (\sigma_y)_{y=\pm b}=0\end{aligned}\right\} \tag{d}$$

取

$$U_0=\frac{1}{2}q_0y^2\left(1-\frac{1}{6}\frac{y^2}{b^2}\right)$$

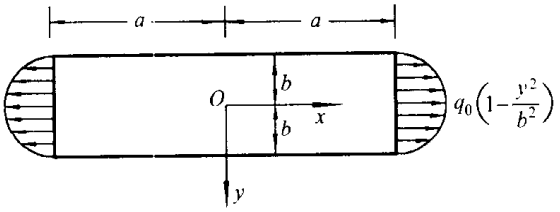


图 14－8

显然，它满足边界条件(d)，因为

$$\sigma_x=\frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2}=q_0\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)$$

$$\sigma_y=\frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2}=0$$

$$\tau_{xy}=-\frac{\partial^2 U_0}{\partial x\partial y}=0$$

现在，适当地选择 $U_1,U_2,\cdots$，使与之对应的应力在边界处为零。为保证这一点，取 $U_1,U_2,\cdots$ 各个函数中都包含 $(x^2-a^2)^2(y^2-b^2)^2$ 这个因子，则这些函数对 x 的二阶偏导数在 $y=\pm b$ 处等于零，对 y 的二阶偏导数在 $x=\pm a$ 处为零，二阶偏导数 $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}$ 在 $x=\pm a$，$y=\pm b$ 处为零。因此取

$$U=\frac{1}{2}q_0y^2\left(1-\frac{1}{6}\frac{y^2}{b^2}\right)+$$
$$(x^2-a^2)^2(y^2-b^2)^2(A_1+A_2x^2+A_3y^2+\cdots)\quad\text{(e)}$$

由于对称性，所以，级数中只取 x 和 y 的偶次幂。如果在式(e)中只取一项，则有

$$U=\frac{1}{2}q_0y^2\left(1-\frac{1}{6}\frac{y^2}{b^2}\right)+A_1(x^2-a^2)^2(y^2-b^2)^2$$

将它代入式(14－22)，由

$$\frac{\partial V_c}{\partial A_1}=\frac{\partial}{\partial A_1}\iint v_c\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

有

$$A_1\left(\frac{64}{7}+\frac{256}{49}\frac{b^2}{a^2}+\frac{64}{7}\frac{b^4}{a^4}\right)=\frac{q_0}{a^4b^2}$$

对于正方形板($a=b$)，得

$$A_1=0.042\,53\,\frac{q_0}{a^6}$$

应力分量为

$$\sigma_x=q_0\left(1-\frac{y^2}{a^2}\right)\quad0.170\,2q_0\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^2\left(1-3\frac{y^2}{a^2}\right)$$

$$\sigma_y=-0.170\,2q_0\left(1-3\frac{x^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{a^2}\right)^2$$

$$\tau_{xy}=-0.680\,5q_0\frac{xy}{a^2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{a^2}\right)$$

在板的中心处($x=y=0$)，应力分量为

$$\sigma_x=0.829\,8q_0,\quad\sigma_y=0.170\,2q_0,\quad\tau_{xy}=0$$

如果在式(e)中取三项，将其代入式(14－22)，由

$$\frac{\partial V_c}{\partial A_1}=\frac{\partial}{\partial A_1}\iint v_c\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

$$\frac{\partial V_c}{\partial A_2}=\frac{\partial}{\partial A_2}\iint v_c\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

$$\frac{\partial V_c}{\partial A_3}=\frac{\partial}{\partial A_3}\iint v_c\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

得

$$\left.\begin{aligned}
&A_1\left(\frac{64}{7}+\frac{256}{49}\frac{b^2}{a^2}+\frac{64}{7}\frac{b^4}{a^4}\right)+A_2a^2\left(\frac{64}{77}+\frac{64}{49}\frac{b^4}{a^4}\right)+\\
&A_3a^2\left(\frac{64}{49}\frac{b^2}{a^2}+\frac{64}{77}\frac{b^6}{a^6}\right)=\frac{q_0}{a^4b^2}\\
&A_1\left(\frac{64}{11}+\frac{64}{7}\frac{b^4}{a^4}\right)+A_2a^2\left(\frac{192}{143}+\frac{256}{77}\frac{b^2}{a^2}+\frac{192}{7}\frac{b^4}{a^4}\right)+\\
&A_3a^2\left(\frac{64}{77}\frac{b^2}{a^2}+\frac{64}{77}\frac{b^6}{a^6}\right)=\frac{q_0}{a^4b^2}\\
&A_1\left(\frac{64}{7}+\frac{64}{11}\frac{b^4}{a^4}\right)+A_2a^2\left(\frac{64}{77}+\frac{64}{77}\frac{b^4}{a^4}\right)+\\
&A_3a^2\left(\frac{192}{7}\frac{b^2}{a^2}+\frac{256}{77}\frac{b^4}{a^4}+\frac{192}{143}\frac{b^6}{a^6}\right)=\frac{q_0}{a^4b^2}
\end{aligned}\right\}\tag{f}$$

解出 A_1,A_2,A_3 后代入式(e)，即得应力函数 U，再由此求应力分量。对于正方形板，有

$$A_1=0.040\,4\frac{q_0}{a^6}$$

$$A_2=A_3=0.011\,74\frac{q_0}{a^6}$$

在 $x=0$ 的截面上，应力

$$\sigma_x=q_0\left(1-\frac{y^2}{a^2}\right)-0.161\,6q_0\left(1-3\frac{y^2}{a^2}\right)+$$
$$0.023\,5q_0\left(1-12\frac{y^2}{a^2}+15\frac{y^4}{a^2}\right)$$

在板的中心处

$$\sigma_x=0.861\,9q_0$$

现在介绍最小余能原理在扭转问题上的应用。在§14－4中已经写出柱形杆扭转时的应变能(因考虑的是线性弹性体，故即为余能)为

$$V_c=\int_V v_c\mathrm{d}V=\frac{L}{2G}\iint_R(\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

L 为杆的长度。因为按应力解法，杆的横截面上的切应力 τ_{xz},τ_{yz} 可表示为

$$\tau_{xz}=\alpha G\frac{\partial\Phi}{\partial y},\qquad\tau_{yz}=-\alpha G\frac{\partial\Phi}{\partial x}$$

Φ 为应力函数，所以，余能又可写成

$$V_c=\frac{\alpha^2GL}{2}\iint_R\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\tag{g}$$

我们将柱形杆的两端面作为 S_u，设已知单位长度的扭转角 α，则外力功为

$$M\alpha L = 2\alpha^2 GL \iint_R \Phi \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

于是

$$E_c = \frac{\alpha^2 GL}{2} \iint_R \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 - 4\Phi \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{14－26}$$

可以证明，这里，变分方程

$$\delta E_c = 0$$

等价于 $\nabla^2 \Phi = -2$。

在求近似解时，取应力函数为下列形式：

$$\Phi = \sum_m A_m \Phi_m \tag{14－27}$$

这里的 $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \cdots$ 在柱形杆横截面周界上为零，从而保证了 Φ 在周界处为零。将式(14－27)代入式(14－26)，使总余能成为 A_m 的二次函数，其取极值的条件为

$$\frac{\partial E_c}{\partial A_m} = 0 \qquad (m = 1, 2, 3, \cdots) \tag{14－28}$$

由线性非齐次代数方程组(14－28)求出 A_m 后代入式(14－27)，得到要求的应力函数的近似解。由此可求出应力分量。

例 2　设有一边长分别为 $2a$ 和 $2b$ 的矩形截面扭杆，求最大切应力。

解　取应力函数为

$$\Phi = (x^2 - a^2)(y^2 - b^2) \sum A_{mn} x^m y^n \tag{h}$$

显然，这个函数在矩形的边界上为零。由薄膜比拟可知，这里的 m 和 n 必须是偶数。先取一项，即 $m = n = 0$，于是

$$\Phi = A_0 (x^2 - a^2)(y^2 - b^2) \tag{i}$$

将式(i)代入式(14－26)，积分后有

$$E_c = \frac{\alpha^2 GL}{2} \frac{64}{45} [2A_0^2 a^3 b^3 (a^2 + b^2) - 5A_0 a^3 b^3]$$

由 $\dfrac{\partial E_c}{\partial A_0} = 0$，解得

$$A_0 = \frac{5}{4(a^2 + b^2)}$$

于是

$$\Phi = \frac{5}{4(a^2 + b^2)} (x^2 - a^2)(y^2 - b^2)$$

代入式(9－12)，得

$$D=2\iint_R \Phi \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{40}{9}\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^3}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}a^4$$

最大切应力发生在长边中点处，注意到 $\alpha=\frac{M}{GD}$，其值为

$$\tau_{\max}=-\left(\alpha G\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{x=a,y=0}=\frac{9}{16}\left(\frac{a}{b}\right)\frac{M}{a^3}$$

对于正方形截面杆（$a=b$），上面给出 D 的近似值为 $2.222a^4$，与精确值$2.250a^4$比较，误差为 -1.2%；最大切应力的近似值为 $0.563\frac{M}{a^3}$，与精确值$0.600\frac{M}{a^3}$比较，误差为 -6.2%。如果$\frac{b}{a}=10$，则 D 的近似值为$44.0a^4$，与精确值$49.92a^4$比较，误差为 -11.9%，而最大切应力的近似值为$0.056\,2\frac{M}{a^3}$，与精确值$0.040\,1\frac{M}{a^3}$比较，误差为 $+40.1\%$。

如果取三项，即

$$\Phi=(x^2-a^2)(y^2-b^2)(A_1+A_2x^2+A_3y^2) \tag{j}$$

代入式(14－26)，积分后有

$$\begin{aligned}E_c=\frac{\alpha^2GL}{2}\cdot\frac{64}{4\,725}a^3b^3[&210(a^2+b^2)A_1^2+\\&a^4(66b^2+10a^2)A_2^2+b^4(66a^2+10b^2)A_3^2+\\&a^2(84b^2+60a^2)A_1A_2+b^2(84a^2+60b^2)A_1A_3+\\&12a^2b^2(a^2+b^2)A_2A_3-525A_1-105a^2A_2-105b^2A_3]\end{aligned}$$

由$\frac{\partial E_c}{\partial A_1}=0,\frac{\partial F_c}{\partial A_2}=0,\frac{\partial F_c}{\partial A_3}=0$，给出

$$\begin{aligned}&140(a^2+b^2)A_1+a^2(20a^2+28b^2)A_2+\\&\quad b^2(28a^2+20b^2)A_3=175\\&(60a^2+84b^2)A_1+a^2(20a^2+132b^2)A_2+\\&\quad 12b^2(a^2+b^2)A_3=105\\&(84a^2+60b^2)A_1+12a^2(a^2+b^2)A_2+\\&\quad b^2(132a^2+20b^2)A_3=105\end{aligned}$$

由此解得 A_1，A_2 和 A_3 代入式(j)，即得所要求的应力函数。

现分别算得 D 和最大切应力如下：

$$D=2\iint_R \Phi \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{32}{9}a^3b^3\left(A_1+\frac{a^2}{5}A_2+\frac{b^2}{5}A_3\right)$$

$$\tau_{max} = -aG\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{x=a,y=0} = \frac{M}{D}2ab^2(A_1 + a^2 A_2)$$

对于正方形板，$\frac{b}{a}=1$，有

$$A_1 = \frac{1\ 295}{2\ 216a^2}, \qquad A_2 = A_3 = \frac{525}{4\ 432a^4}$$

它们分别给出 D 和 τ_{max} 的近似值为 $2.246a^4$ 和 $0.626M/a^3$，D 和 τ_{max} 的误差分别为 -0.18% 和 $+4.3\%$。对于 $\frac{b}{a}=10$，有

$$A_1 = \frac{0.008\ 988}{a^2}, \qquad A_2 = \frac{0.000\ 028\ 53}{a^4}, \qquad A_3 = \frac{0.000\ 235\ 9}{a^4}$$

它们分别给出 D 和 τ_{max} 的近似值为 $48.75a^4$ 和 $0.036\ 99M/a^3$，D 和 τ_{max} 的误差分别为 -2.3% 和 -7.8%。

* §14-9 弹性力学的广义变分原理

上面讲的最小势能原理和最小余能原理，是分别以位移和应力作为独立的自变函数的，前者等价于以位移表示的平衡微分方程和以位移表示的应力边界条件，而后者等价于以应力表示的应变协调方程和位移边界条件。由于这两种变分原理都是以一类变量（位移或者是应力）作为独立的自变函数，所以，又可称它们为一类变量的变分原理。下面，我们要介绍的广**义变分原理**，它们或者以位移、应变和应力等三类变量，或者以位移和应力等两类变量作独立的自变函数，我们称前者为三类变量的广义变分原理，称后者为两类变量的广义变分原理。

建立广义变分原理的工作 1941 年由赫林格（Hellinger，E）开始，1950 年赖斯纳（Reissner，E）做得较为完善，他把位移和应力都作为独立的自变函数，建立了一个等价于平衡微分方程、物理方程和全部边界条件的变分原理。1957 年，符勃克（de Veubeke，B. M. F.）又改进了赖斯纳得到的结果。现在，人们通常称之为**赫林格－赖斯纳变分原理**。1954 年，胡海昌建立了等价于弹性力学全部基本方程和全部边界条件的广义势能原理和广义余能原理，而且提出了赖斯纳的变分原理是这两个变分原理的特殊形式。1955 年，日本东京帝大航空工程教授鹫津久一郎（Washizu，K.）发表了与胡海昌得到的相类似的结论，故现在又称广义势能原理和广义余能原理为**胡海昌－鹫津久一郎变分原理**。

（一）胡海昌－鹫津久一郎变分原理

这个变分原理归结为某一泛函的一阶变分为零，而这个泛函将从总势能 E_p 或总余能 E_c 出发，用拉格朗日乘子法而得到。

由于变分方程(14-5)所表示的是一个条件驻值问题,其中 ε_{ij} 和 u_i 满足几何方程和位移边界条件,前者给出6个条件约束,后者给出3个条件约束,共有9个条件约束,故只需引入9个拉格朗日乘子 λ_{ij} 和 μ_i(它们都是坐标的函数,且 $\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$),就可将这个条件驻值的泛函写成

$$E_p^*=\int_V(v_\varepsilon-F_iu_i)\mathrm{d}V-\int_{S_\sigma}\bar{f}_iu_i\mathrm{d}S+\int_V\lambda_{ij}\left[\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})-\varepsilon_{ij}\right]\mathrm{d}V+\int_{S_u}\mu_i(u_i-\bar{u}_i)\mathrm{d}S \tag{a}$$

这里,第一、第二项表示总势能 E_p,后两项表示泛函取驻值的9个约束条件。于是,原来泛函 E_p 取驻值是有条件的,现在变成 u_i,ε_{ij},λ_{ij} 和 μ_i 都可以任意变分的无条件驻值的泛函了。

从 $\delta E_p^*=0$,并利用高斯积分定理,有

$$\delta E_p^*=\int_V\left(\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial\varepsilon_{ij}}-\lambda_{ij}\right)\delta\varepsilon_{ij}\mathrm{d}V-\int_V(\lambda_{ij,j}+F_i)\delta u_i\mathrm{d}V+\int_V\left[\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})-\varepsilon_{ij}\right]\delta\lambda_{ij}\mathrm{d}V+\int_{S_\sigma}(\lambda_{ij}n_j-\bar{f}_i)\delta u_i\mathrm{d}S+\int_{S_u}(u_i-\bar{u}_i)\delta\mu_i\mathrm{d}S+\int_{S_u}(\lambda_{ij}n_j+\mu_i)\delta u_i\mathrm{d}S=0$$

由于 δu_i,$\delta\varepsilon_{ij}$,$\delta\lambda_{ij}$,$\delta\mu_i$ 彼此独立且完全任意,故上式成立的条件为

在 V 内,分别有

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial\varepsilon_{ij}}=\lambda_{ij} \tag{b}$$

$$\lambda_{ij,j}+F_i=0 \tag{c}$$

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \tag{d}$$

在 S_σ 上,有

$$\lambda_{ij}n_j=\bar{f}_i \tag{e}$$

在 S_u 上,有

$$u_i=\bar{u}_i \tag{f}$$

$$\mu_i = -\lambda_{ij} n_j \tag{g}$$

从式(b),(c)和(e)可以看出,若取

$$\lambda_{ij} = \sigma_{ij} \tag{h}$$

则它们分别表示物理方程、平衡微分方程和应力边界条件。式(d)式(f)的意义是清楚的,分别表示几何方程和位移边界条件。现将式(h)和式(g)代入式(a),稍加整理,得到所谓广义势能原理的泛函(广义总势能):

$$E_p^* = \int_V \left[v_\varepsilon - F_i u_i + \sigma_{ij} \left(\frac{1}{2} u_{i,j} + \frac{1}{2} u_{j,i} - \varepsilon_{ij} \right) \right] \mathrm{d}V - \int_{S_\sigma} \bar{f}_i u_i \mathrm{d}S - \int_{S_u} \sigma_{ij} n_j (u_i - \bar{u}_i) \mathrm{d}S \tag{14-29}$$

这个泛函包含 u_i,ε_{ij} 和 σ_{ij} 15 个独立的自变函数,如果取

$$\delta E_p^* = 0 \tag{14-30}$$

重复上面的步骤,则可得到弹性力学的全部基本方程和全部边界条件。

再提一下广义余能原理,它归结为某一泛函的一阶变分为零,而这个泛函从总余能 E_c 出发,引进拉格朗日乘子而得到。

将总余能写成

$$E_c = \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - v_\varepsilon) \mathrm{d}V - \int_{S_u} \bar{u}_i \sigma_{ij} n_j \mathrm{d}S$$

由于 $\delta E_c = 0$ 也是一个条件驻值问题,要求应力分量满足平衡微分方程和应力边界条件,共 6 个条件约束,所以只要引进 6 个拉格朗日乘子 α_i 和 β_i,就可把这个条件驻值的泛函(广义总余能)写成

$$E_c^* = \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - v_\varepsilon) \mathrm{d}V + \int_V \alpha_i (\sigma_{ij,j} + F_i) \mathrm{d}V + \int_{S_\sigma} \beta_i (\sigma_{ij} n_j - \bar{f}_i) \mathrm{d}S - \int_{S_u} \bar{u}_i \sigma_{ij} n_j \mathrm{d}S \tag{i}$$

式(i)中的 ε_{ij},σ_{ij},α_i 和 β_i 都是独立变量,因此,E_c^* 的驻值问题是无条件的. 由 $\delta E_c^* = 0$,并利用高斯积分定理,有

$$\delta E_c^* = \int_V \left(\sigma_{ij} - \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) \delta \varepsilon_{ij} \mathrm{d}V + \int_V \left[\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} (\alpha_{i,j} + \alpha_{j,i}) \right] \delta \sigma_{ij} \mathrm{d}V + \int_V (\sigma_{ij,j} + F_i) \delta \alpha_i \mathrm{d}V + \int_{S_\sigma} (\sigma_{ij} n_j - \bar{f}_i) \delta \beta_i \mathrm{d}S + \int_{S_u} \delta \sigma_{ij} n_j (\alpha_i - \bar{u}_i) \mathrm{d}S + \int_{S_\sigma} \delta \sigma_{ij} n_j (\alpha_i + \beta_i) \mathrm{d}S = 0$$

由于 $\delta \varepsilon_{ij}$,$\delta \sigma_{ij}$,$\delta \alpha_i$ 和 $\delta \beta_i$ 彼此独立且完全任意,故此式成立的条件为

在 V 内,有

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \tag{j}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\alpha_{i,j} + \alpha_{j,i}) \tag{k}$$

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \tag{l}$$

在 S_σ 上，有

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{f}_i \tag{m}$$

$$\alpha_i + \beta_i = 0 \tag{n}$$

在 S_u 上，有

$$\alpha_i = \bar{u}_i \tag{o}$$

显然，式(j)，(l)和(m)分别为物理方程、平衡微分方程和应力边界条件。由式(k)和(o)可见，若取

$$\alpha_i = u_i(\text{在 } V \text{ 内}) \tag{p}$$

则它们分别为几何方程和位移边界条件。

现将式(p)代入式(i)，并注意到式(n)，稍加整理，得

$$E_c^* = \int_V [\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - v_\varepsilon + u_i(\sigma_{ij,j} + F_i)]\mathrm{d}V - \int_{S_\sigma} u_i(\sigma_{ij} n_j - \bar{f}_i)\mathrm{d}S - \int_{S_u} \bar{u}_i \sigma_{ij} n_j \mathrm{d}S \tag{14-31}$$

如果取

$$\delta E_c^* = 0 \tag{14-32}$$

重复以上的步骤，可以得到弹性力学的全部基本方程和全部边界条件。

广义势能原理和广义余能原理虽然建立在不同的基础上，但两者都等价于弹性力学的全部基本方程和全部边界条件，可见两个原理的泛函 E_p^* 和 E_c^* 是互等的。

事实上，将式(14-29)与式(14-31)相加，消去同类项，得

$$E_p^* + E_c^* = \int_V (\sigma_{ij,j} u_i + \sigma_{ij} u_{i,j})\mathrm{d}V - \int_{S_\sigma} \sigma_{ij} n_j u_i \mathrm{d}S - \int_{S_u} \sigma_{ij} n_j \bar{u}_i \mathrm{d}S \tag{q}$$

改写第一个积分，并利用高斯积分定理，有

$$\int_V (\sigma_{ij,j} u_i + \sigma_{ij} u_{i,j})\mathrm{d}V = \int_V (\sigma_{ij} u_i)_{,j}\mathrm{d}V = \int_{S_\sigma} \sigma_{ij} n_j u_i \mathrm{d}S + \int_{S_u} \sigma_{ij} n_j \bar{u}_i \mathrm{d}S$$

可见，它就是式(q)的后两项，于是得

$$E_p^* + E_c^* = 0 \tag{14-33}$$

这表明两者之间只差一个正负号。

广义势能原理和广义余能原理统称为胡海昌－鹫津久一郎变分原理。

不难理解，对于求问题的精确解来说，有条件的最小势能原理和最小余能原理与无条件的胡海昌－鹫津久一郎变分原理无任何区别，但对于求近似解来说，它们是有区别的。具体表现在：利用最小势能原理求近似解时，是从位移出发的，要求满足位移边界条件，协调方程自动满足，而拉梅方程和以位移表示的应力边界条件只是近似满足；利用最小余能原理求近似解时，是从应力出发的，要求满足平衡微分方程和应力边界条件，而应力协调方程和位移边界条件只是近似地满足；利用胡海昌－鹫津久一郎变分原理求近似解时，由于位移、应变和应力都不受任何限制，所以，由此求得的解对弹性力学的全部基本方程和全部边界条件都近似地满足。

(二) 赫林格－赖斯纳变分原理

这个变分原理的推导与胡海昌的三类变量的广义余能原理推导一样，其泛函也是利用拉格朗日乘子法推广最小余能原理而得到。不过，这里要将式(i)中的余能密度 $\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - v_\varepsilon$ 改写成 $v_c(\sigma_{ij})$，于是得

$$E_c^{**} = \int_V v_c \mathrm{d}V + \int_V \alpha_i(\sigma_{ij,j} + F_i)\mathrm{d}V + \int_{S_\sigma} \beta_i(\sigma_{ij}n_j - \bar{f}_i)\mathrm{d}S - \int_{S_u} \bar{u}\sigma_{ij}n_j \mathrm{d}S \tag{r}$$

注意，经这样一改，式(i)中的独立变量为 ε_{ij}，σ_{ij}，α_i 和 β_i，共 18 个，而式(r)中的独立变量为 σ_{ij}，α_i 和 β_i，共 12 个。由 $\delta E_c^{**} = 0$，并利用高斯积分定理，有

$$\int_V \left[\frac{\partial v_c}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{1}{2}(\alpha_{i,j} + \alpha_{j,i})\right]\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}V + \int_V (\sigma_{ij,j} + F_i)\delta\alpha_i \mathrm{d}V + \int_{S_\sigma} (\beta_i + \alpha_i)\delta\sigma_{ij}n_j \mathrm{d}S + \int_{S_\sigma} (\sigma_{ij}n_j - \bar{f}_i)\delta\beta_i \mathrm{d}S + \int_{S_u} (\alpha_i - \bar{u}_i)\delta\sigma_{ij}n_j \mathrm{d}S = 0$$

由于 $\delta\sigma_{ij}$，$\delta\alpha_i$ 和 $\delta\beta_i$ 彼此独立且完全任意，得：

在 V 内，有

$$\frac{\partial v_c}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{1}{2}(\alpha_{i,j} + \alpha_{j,i}) \tag{s}$$

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \tag{t}$$

在 S_σ 上，有

$$\beta_i + \alpha_i = 0 \tag{u}$$

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{f}_i \tag{v}$$

在 S_u 上，有

$$\alpha_i = \bar{u}_i \tag{w}$$

式(t)和式(v)分别为平衡微分方程和应力边界条件。但由式(s)和(w)可见，若取

$$\alpha_i = u_i (\text{在 } V \text{ 内}) \tag{x}$$

则式(s)和(w)即分别为物理方程和位移边界条件。

将式(x)和式(u)代入式(r)，得赫林格－赖斯纳广义变分原理的泛函：

$$E_c^{**} = \int_V [v_c + u_i(\sigma_{ij,j} + F_i)]\mathrm{d}V - \int_{S_\sigma} u_i(\sigma_{ij} n_j - \bar{f}_i)\mathrm{d}S - \int_{S_u} \bar{u}\sigma_{ij} n_j \mathrm{d}S \tag{14-34}$$

这个泛函的独立的自变函数为 u_i 和 σ_{ij}，因此赫林格－赖斯纳变分原理为两类变量的广义变分原理。如果取

$$\delta E_c^{**} = 0 \tag{14-35}$$

重复以上的步骤，可得平衡微分方程、物理方程和全部边界条件。这表明，变分方程(14－35)等价于平衡微分方程、物理方程和全部边界条件。

必须指出，将 $\alpha_i = u_i$ 代入式(s)后，若对其等号左边利用物理方程(14－15)，则式(s)可写成

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

这是几何方程。因此，也可以说，变分方程(14－35)等价于平衡微分方程、几何方程和全部边界条件。

最后，我们再回到式(14－29)，将其中的应变能密度 $v_\varepsilon(\varepsilon_{ij})$ 代之以

$$v_\varepsilon(\varepsilon_{ij}) = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - v_c(\sigma_{ij})$$

可以得到两类变量的广义变分原理的另一种泛函：

$$E_p^{**} = \int_V \left[\frac{1}{2}\sigma_{ij}(u_{i,j} + u_{j,i}) - v_c - F_i u_i\right]\mathrm{d}V - \int_{S_\sigma} \bar{f}_i u_i \mathrm{d}S - \int_{S_u} \sigma_{ij} n_j (u_i - \bar{u}_i)\mathrm{d}S \tag{14-36}$$

可以证明

$$E_p^{**} + E_c^{**} = 0$$

即变分方程

$$\delta E_p^{**}=0 \tag{14-37}$$

与变分方程(14-35)完全等价。

综上所述,我们可以把 E_p^* 和 E_p^{**} 看作是弹性体总势能的一种推广,前者称为三类变量的广义势能,后者称为两类变量的广义势能;E_c^* 和 E_c^{**} 则看作是弹性体总余能的一种推广,前者称为三类变量的广义余能,后者称为两类变量的广义余能。

值得注意的是,广义变分原理虽然是分别推广最小势能原理和最小余能原理得来的,但与最小势能原理和最小余能原理不同,对于真实状态的应力、应变和位移,它们的泛函都取非极值的驻值。

* §14-10 哈密顿变分原理

如果弹性体处于运动状态,则根据达朗贝尔(d'Alembert,J. le R.)原理,在各质点上加上惯性力后,就可将运动问题当作平衡问题来处理。因此,只要将方程(14-3)'中的体力 F_i 代之以 $(F_i-\rho\ddot{u}_i)$ $\left(\rho$ 是弹性体的密度,$\ddot{u}_i=\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\right)$,就可得到适用于研究弹性体运动的变分方程

$$\int_V (F_i-\rho\ddot{u}_i)\delta u_i \mathrm{d}V+\int_{S_\sigma}\bar{f}_i\delta u_i \mathrm{d}S=\int_V \delta v_\varepsilon \mathrm{d}V \tag{14-38}$$

可以证明,这个变分方程等价于运动微分方程

$$\sigma_{ij,j}+F_i=\rho\ddot{u}_i$$

和动力边界条件

$$\sigma_{ij}n_j=\bar{f}_i$$

现在,我们要从方程(14-38)导出哈密顿(Hamilton,W. R.)变分原理。将式(14-38)从时间 t_1 到 t_2 积分,有

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_V (F_i-\rho\ddot{u}_i)\delta u_i \mathrm{d}V\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\int_{S_\sigma}\bar{f}_i\delta u_i \mathrm{d}S\mathrm{d}t-$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_V \delta v_\varepsilon \mathrm{d}V\mathrm{d}t=0 \tag{a}$$

令

$$J=\int_{t_1}^{t_2}\int_V \rho\ddot{u}_i\delta u_i \mathrm{d}V\mathrm{d}t \tag{b}$$

现计算这个积分,规定在 t_1 和 t_2 时,$\delta u_i=0$,于是有

$$J=\int_V \rho[\dot{u}_i\delta u_i]_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}V-$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_V \rho \dot{u}_i \delta \dot{u}_i \mathrm{d}V\mathrm{d}t$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2}\int_V \rho \dot{u}_i \delta \dot{u}_i \mathrm{d}V\mathrm{d}t$$

注意到弹性体的动能为

$$E_k = \frac{1}{2}\int_V \rho \dot{u}_i^2 \mathrm{d}V$$

于是有

$$J = -\int_{t_1}^{t_2} \delta E_k \mathrm{d}t \tag{c}$$

再将式(a)中的外力功表示为

$$W = \int_V F_i u_i \mathrm{d}V + \int_{S_\sigma} \bar{f}_i u_i \mathrm{d}S$$

则得

$$\delta W = \int_V F_i \delta u_i \mathrm{d}V + \int_{S_\sigma} \bar{f}_i \delta u_i \mathrm{d}S \tag{d}$$

将式(c)和式(d)代入式(a),以 V_ε 代替 $\int_V v_\varepsilon \mathrm{d}V$,移项后得

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(V_\varepsilon - E_k - W)\mathrm{d}t = 0 \tag{e}$$

令

$$L = V_\varepsilon - E_k - W \tag{14-39}$$

则式(e)可写成

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L \mathrm{d}t = \delta \int_{t_1}^{t_2} L \mathrm{d}t = 0 \tag{14-40}$$

这里的 L 称为**拉格朗日函数**,而积分

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L \mathrm{d}t \tag{14-41}$$

称为**哈密顿作用量**。式(14-40)又可表示为

$$\delta S = 0 \tag{14-40}$$

变分方程(14-40)说明:在所有几何可能的运动中,真实的运动使哈密顿作用量取驻值。这里所谓的几何可能的运动是指位移分量满足几何方程和位移边界条件,并且在 $t = t_1$ 和 $t = t_2$ 两个时刻具有指定的运动。这称为**哈密顿变分原理**。

例　图 14-9 所示的为一直梁,其横截面有一铅直的对称轴,动力分布荷载 $q(x,t)$ 就作用在包含该轴的铅直平面内。在梁的端面上,作用有随时间变化的

弯矩和剪力作用，不计体力。试用哈密顿变分原理导出它的运动微分方程和动力边界条件。

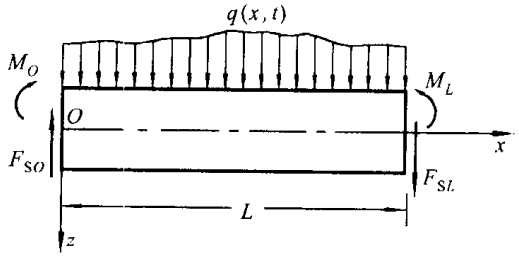


图 14－9

解　以 $w(x,t)$ 表示梁轴线的挠度，则梁的应变能和动能分别为

$$V_\varepsilon=\frac{1}{2}\int_0^L EI_y\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2\mathrm{d}x \tag{f}$$

$$E_k=\frac{1}{2}\int_0^L \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}x \tag{g}$$

外力功为

$$W=\int_0^L q(x,t)w\mathrm{d}x-F_{SO}w_0+M_O\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0+F_{SL}w_L-M_L\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_L \tag{h}$$

将式(f)、(g)和(h)代入式(14－40)，有

$$\begin{aligned}\delta S=&\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L EI_y\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \rho\frac{\partial w}{\partial t}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\\&\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_0^L q\delta w\mathrm{d}x-F_{SO}(\delta w)_0+F_{SL}(\delta w)_L+\right.\\&\left.M_O\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0-M_L\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_L\right]\mathrm{d}t=0\end{aligned} \tag{i}$$

计算式(i)中的前两个积分：

$$\begin{aligned}&\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L EI_y\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L EI_y\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial x}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=\int_{t_1}^{t_2}\left[EI_y\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]_0^L\mathrm{d}t-\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L\frac{\partial}{\partial x}\left(EI_y\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=\int_{t_1}^{t_2}\left[EI_y\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]_0^L\mathrm{d}t-\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(EI_y\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\delta w\right]_0^L\mathrm{d}t+\\&\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI_y\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\delta w\mathrm{d}x\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{j}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \rho\frac{\partial w}{\partial t}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^L\int_{t_1}^{t_2}\rho\frac{\partial w}{\partial t}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^L\int_{t_1}^{t_2}\rho\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}(\delta w)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^L\left[\rho\frac{\partial w}{\partial t}\delta w\right]_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}x-\int_0^L\int_{t_1}^{t_2}\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta w\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$$

$$=-\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta w\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \tag{k}$$

将式(j)、(k)代入式(i),得

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI_y\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-q\right]\delta w\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\left[F_{SO}+\frac{\partial}{\partial x}\left(EI_y\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_0\right](\delta w)_0-\right.$$

$$\left[F_{SL}+\frac{\partial}{\partial x}\left(EI_y\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_L\right](\delta w)_L-$$

$$\left[M_O+\left(EI_y\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_0\right]\left(\delta\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0+$$

$$\left.\left[M_L+\left(EI_y\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_L\right]\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_L\right\}\mathrm{d}t=0$$

由于 δw 完全任意,故上式成立的条件为

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI_y\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-q=0\quad(0\leqslant x\leqslant L) \tag{l}$$

$$\left.\begin{aligned}&\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(EI_y\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+F_S\right]\delta w=0\\&\left[EI_y\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+M\right]\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)=0\end{aligned}\right\}\quad(x=0,L) \tag{m}$$

式(l)为梁的运动微分方程,式(m)为梁的动力边界条件,对于不同的支承条件,可以有各种不同的组合。如果梁在 $x=0$ 处固定,而在 $x=L$ 处为自由端,则

$$(\delta w)_0=\left(\delta\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0=0$$

$$(\delta w)_L\neq 0,\qquad\left(\delta\frac{\partial w}{\partial x}\right)_L\neq 0$$

于是动力边界条件为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(EI_y\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_L=-F_{SL}$$

$$\left(EI_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_L = -M_L$$

哈密顿变分原理还可用于弹性动力学的近似计算。

* §14-11 作为古典变分法革新和发展的有限单元法

前面我们所介绍的瑞利-里茨法、伽辽金法以及基于最小余能原理的近似计算方法，都属于古典变分法的范畴。下面，通过平面问题线性位移模式的有限单元法，简要地阐述有限单元法的主要步骤及其与古典变分法之间的本质联系。

先将平面问题的位移、应变、应力和应力-应变关系表示成矩阵的形式。

位移

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = (u \quad v)^{\mathrm{T}} \tag{a}$$

应变

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = (\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy})^{\mathrm{T}} \tag{b}$$

应力

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = (\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy})^{\mathrm{T}} \tag{c}$$

应力-应变关系

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{d}$$

$\boldsymbol{D}$ 为**弹性矩阵**，对于平面应力问题，它为

$$\boldsymbol{D} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{pmatrix} 1 & \text{对} & \\ \nu & 1 & \text{称} \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \tag{14-42}$$

而对于平面应变问题，则为

$$\boldsymbol{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{pmatrix} 1 & \text{对} & \\ \dfrac{\nu}{1-\nu} & 1 & \text{称} \\ 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{pmatrix} \tag{14-43}$$

由平面问题的几何方程，式(b)又可表示成

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\end{Bmatrix} \tag{c}$$

弹性力学的有限元法包括下列三个重要步骤：

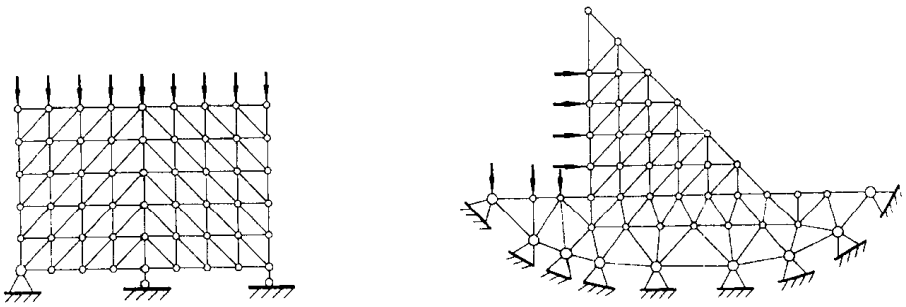
离　散　化 ⟶ 单 元 分 析 ⟶ 整 体 分 析

现分述如下。

1．离散化

所谓离散化，就是将连续的弹性体分割成有限个有限大小的块状构件，它们之间通过有限个点相互连结。这些有限大小的构件称为**有限单元**，简称为**有限元**，而连结它们的点称为**结点**。由于单元之间只通过结点传递内力和变形，所以各单元所受的体力和面力，都应按虚功等效[①] 的原则移置到结点上而成为**结点荷载**。这样，就把一个连续的弹性体变换成一个离散的结构物，进而可以借用结构矩阵分析的方法来求解。

对于平面问题，可采用三结点的三角形单元，并且在结点处都取为铰结；在结点位移或它的某一分量可以不计之处，就在结点上设置一个铰支或相应的连杆支座。图 14－10a，b 所示的，为深梁和水坝的离散化模型。



(a)　　(b)

图 14－10

为了作单元分析和整体分析的需要，在完成单元划分后，就可对所有的结点和单元按顺序进行编号。以计算简图 14－11 为例，其中 1，2，3，4，5，6 称为总体

① 虚功等效是指原荷载与结点荷载在任何虚位移上的虚功相等。在一定的位移模式之下，这样移置的结果是唯一的。

编码，①，②，③，④为单元编码，每个单元的 i,j,m 称为**局部编码**，规定 $i\to j\to m$ 依逆时针方向编排。

2. 单元分析

不失一般性，我们取任一个单元 e 进行分析。

单元所受的荷载按虚功等效的原则向三个结点移置后的荷载，用荷载列阵表示为

$$\boldsymbol{F}^e=(F_{ix}\quad F_{iy}\quad F_{jx}\quad F_{jy}\quad F_{mx}\quad F_{my})^{\mathrm{T}}\qquad(\mathrm{f})$$

根据脱离体法，在所取出单元的三个结点上，必须标上约束反力(这里称为**结点力**)，设在选定的坐标系下它们分别为 $(F_{\mathrm{R}ix},F_{\mathrm{R}iy})$，$(F_{\mathrm{R}jx},F_{\mathrm{R}jy})$，$(F_{\mathrm{R}mx},F_{\mathrm{R}my})$，如图 14-12a 所示。现在将它写成列阵形式

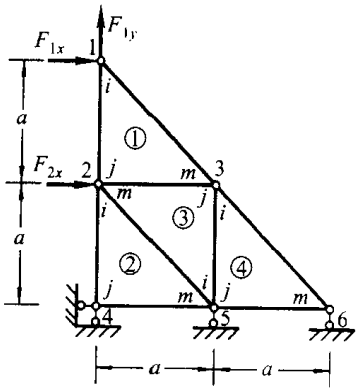


图 14-11

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}^e=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}i}\\ \boldsymbol{F}_{\mathrm{R}j}\\ \boldsymbol{F}_{\mathrm{R}m}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}F_{\mathrm{R}ix}\\ F_{\mathrm{R}iy}\\ \cdots\cdots\\ F_{\mathrm{R}jx}\\ F_{\mathrm{R}jy}\\ \cdots\cdots\\ F_{\mathrm{R}mx}\\ F_{\mathrm{R}my}\end{Bmatrix}\qquad(\mathrm{g})$$

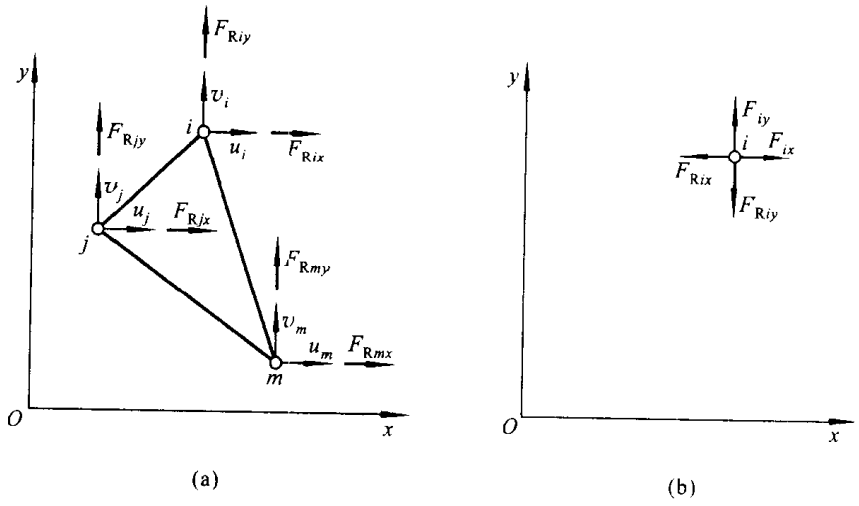


图 14-12

另外，用(u_i, v_i)，(u_j, v_j)，(u_m, v_m)表示这三个结点上的位移（称**结点位移**，见图 14－12a），也将它表示成列阵形式

$$\boldsymbol{\Delta}^e = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Delta}_i \\ \boldsymbol{\Delta}_j \\ \boldsymbol{\Delta}_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \cdots \\ u_j \\ v_j \\ \cdots \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \tag{h}$$

式(g)，(h)中的 $\boldsymbol{F}_{Ri}$，$\boldsymbol{F}_{Rj}$，$\boldsymbol{F}_{Rm}$和$\boldsymbol{\Delta}_i$，$\boldsymbol{\Delta}_j$，$\boldsymbol{\Delta}_m$，分别表示 $\boldsymbol{F}_R^e$ 和 $\boldsymbol{\Delta}^e$ 的分块矩阵。

单元分析的主要任务是要建立结点力 $\boldsymbol{F}_R^e$ 和结点位移 $\boldsymbol{\Delta}^e$ 之间的关系。具体步骤如下。

第一，选择符合收敛准则的位移模式（即分片插值函数），以建立单元内的位移与该单元结点位移之间的关系。由于三结点的三角形单元有 6 个自由度，内部任一点的位移是由它的 3 个结点的位移完全确定的，因此位移模式中应包含 6 个任意参数。现假定单元内的位移分量为如下的坐标的线性函数：

$$\left.\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned}\right\} \tag{i}$$

在 i, j, m 结点上，应有

$$\begin{aligned} u_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i, \qquad & v_i &= \alpha_4 + \alpha_5 x_i + \alpha_6 y_i \\ u_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j, \qquad & v_j &= \alpha_4 + \alpha_5 x_j + \alpha_6 y_j \\ u_m &= \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m, \qquad & v_m &= \alpha_4 + \alpha_5 x_m + \alpha_6 y_m \end{aligned}$$

从左边 3 个方程求出 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$，从右边 3 个方程求出 $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$，代回式(i)，经整理后得

$$\left.\begin{aligned} u &= N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m \\ v &= N_i v_i + N_j v_j + N_m v_m \end{aligned}\right\} \tag{14-44}$$

这里的

$$\left.\begin{aligned} N_i &= \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2A} \\ N_j &= \frac{a_j + b_j x + c_j y}{2A} \\ N_m &= \frac{a_m + b_m x + c_m y}{2A} \end{aligned}\right\} \tag{14-45}$$

$$\left.\begin{aligned} a_i &= x_j y_m - x_m y_j, \quad b_i = y_j - y_m, \quad c_i = -x_j + x_m \\ a_j &= x_m y_i - x_i y_m, \quad b_j = y_m - y_i, \quad c_j = -x_m + x_i \\ a_m &= x_i y_j - x_j y_i, \quad b_m = y_i - y_j, \quad c_m = -x_i + x_j \end{aligned}\right\} \tag{14-46}$$

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}$$

为三角形单元 ijm 的面积(因 ijm 按逆时针排列，A 总为正值)。

式(14-44)又可表示成矩阵的形式：

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{\Delta}^e = (\boldsymbol{I}N_i \quad \boldsymbol{I}N_j \quad \boldsymbol{I}N_m)\boldsymbol{\Delta}^e \tag{14-44}'$$

这里的 $\boldsymbol{I}$ 为二阶单位矩阵；N_i, N_j, N_m 称为**位移的形函数**，它们反映了位移的形态；而矩阵 $\boldsymbol{N}$ 称为**形函数矩阵**。将式(14-44)代入式(e)，得到单元内的应变与该单元结点位移之间的关系

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{\Delta}^e \tag{14-47}$$

$\boldsymbol{B}$ 为三行三列的矩阵，称为**应变矩阵**。它的分块形式为

$$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{B}_i \quad \boldsymbol{B}_j \quad \boldsymbol{B}_m) \tag{14-48}$$

子矩阵由如下的公式求得：

$$\boldsymbol{B}_i = \frac{1}{2\boldsymbol{A}}\begin{pmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{pmatrix} \quad (i, j, m) \tag{14-49}$$

再将式(14-47)代入式(d)，得单元内的应力与该单元结点位移之间的关系：

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Delta}^e \tag{14-50}$$

这里的

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{B}$$

也为三行六列的矩阵，称为**应力矩阵**，它的分块形式为

$$\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{S}_i, \boldsymbol{S}_j, \boldsymbol{S}_m)$$

对于平面应力问题，子矩阵

$$\boldsymbol{S}_i = \frac{E}{2(1-\nu^2)A}\begin{pmatrix} b_i & \nu c_i \\ \nu b_i & c_i \\ \dfrac{1-\nu}{2}c_i & \dfrac{1-\nu}{2}b_i \end{pmatrix} \quad (i, j, m) \tag{14-51}$$

对于平面应变问题，子矩阵

$$\boldsymbol{S}_i=\frac{E(1-\nu)}{2(1+\nu)(1-2\nu)A}\begin{bmatrix} b_i & \dfrac{\nu}{1-\nu}c_i \\ \dfrac{\nu}{1-\nu}b_i & c_i \\ \dfrac{1-2\nu}{2(1-\nu)}c_i & \dfrac{1-2\nu}{2(1-\nu)}b_i \end{bmatrix} \quad (i,j,m) \tag{14-52}$$

由于矩阵 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 中的诸元素 b,c,E,ν 以及单元面积 A 均为常量，故在同一个单元中，应力和应变均为常量。可见相邻单元一般将具有不同的应变和应力，因而在它们的共同边界上应变和应力将产生突变。但随着单元的逐渐取小，这种突变将很快地减小，也就是说，解答将收敛于精确解。

以上是单元分析的第一步。

第二，由题设条件，每一个单元都必须是平衡的。现对任一单元利用虚位移原理，以建立结点力和结点位移的关系。为此，假设单元 ijm 中发生了虚位移，相应的结点虚位移为

$$\delta\boldsymbol{\Delta}^e=(\delta u_i \quad \delta v_i \quad \delta u_j \quad \delta v_j \quad \delta u_m \quad \delta v_m)^{\mathrm{T}}$$

而相应的虚应变为

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}=(\delta\varepsilon_x \quad \delta\varepsilon_y \quad \delta\gamma_{xy})^{\mathrm{T}}$$

于是该单元的虚功方程为

$$(\delta\boldsymbol{\Delta}^e)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}^e=\iint(\delta\boldsymbol{\varepsilon})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y t \tag{j}$$

这里的 t 表示单元的厚度。参照式(14-47)，有

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{B}\delta\boldsymbol{\Delta}^e \tag{k}$$

将式(k)和式(14-50)代入式(j)，并利用矩阵乘法的逆序法则，可得

$$\begin{aligned}(\delta\boldsymbol{\Delta}^e)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}^e&=\iint(\boldsymbol{B}\delta\boldsymbol{\Delta}^e)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Delta}^e\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y t\\&=\iint(\delta\boldsymbol{\Delta}^e)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Delta}^e\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y t\end{aligned}$$

由于 $\delta\boldsymbol{\Delta}^e$ 和 $\boldsymbol{\Delta}^e$ 中的元素为常量，上式右边的$(\delta\boldsymbol{\Delta}^e)$是完全任意的，故上式成立的条件为

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}^e=\iint\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y t\boldsymbol{\Delta}^e \tag{l}$$

令

$$\boldsymbol{k}=\iint\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y t \tag{14-53}$$

则式(l)可表示成

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}^e=\boldsymbol{k}\boldsymbol{\Delta}^e \tag{14-54}$$

这样，就导出了结点力和结点位移的关系。$\boldsymbol{k}$ 为六行六列的矩阵，称为**单元刚度矩阵**。由于矩阵 $\boldsymbol{D}$ 中的元素为常量，在线性位移模式的情况下，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的元素也为常量，再注意到 $\iint \mathrm{d}x\mathrm{d}y = A$，故由式(14-53)，单元刚度矩阵 $\boldsymbol{k}$ 可简化为

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}tA \tag{14-55}$$

将它写成分块的形式

$$\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{k}_{ii} & \boldsymbol{k}_{ij} & \boldsymbol{k}_{im} \\ \boldsymbol{k}_{ji} & \boldsymbol{k}_{jj} & \boldsymbol{k}_{jm} \\ \boldsymbol{k}_{mi} & \boldsymbol{k}_{mj} & \boldsymbol{k}_{mm} \end{pmatrix} \tag{14-55}'$$

其中每一个子矩阵可由下列公式求得

平面应力问题

$$\boldsymbol{k}_{rs} = \frac{Et}{4(1-\nu^2)A} \begin{pmatrix} b_r b_s + \dfrac{1-\nu}{2}c_r c_s & \nu b_r c_s + \dfrac{1-\nu}{2}c_r b_s \\ \nu c_r b_s + \dfrac{1-\nu}{2}b_r c_s & c_r c_s + \dfrac{1-\nu}{2}b_r b_s \end{pmatrix} \tag{14-56}$$

$$(r = i, j, m; s = i, j, m)$$

平面应变问题

$$\boldsymbol{k}_{rs} = \frac{Et(1-\nu)}{4(1+\nu)(1-2\nu)A} \cdot \begin{pmatrix} b_r b_s + \dfrac{1-2\nu}{2(1-\nu)}c_r c_s & \dfrac{\nu}{1-\nu}b_r c_s + \dfrac{1-2\nu}{2(1-\nu)}c_r b_s \\ \dfrac{\nu}{1-\nu}c_r b_s + \dfrac{1-2\nu}{2(1-\nu)}b_r c_s & c_r c_s + \dfrac{1-2\nu}{2(1-\nu)}b_r b_s \end{pmatrix} \tag{14-57}$$

$$(r = i, j, m; \quad s = i, j, m)$$

单元刚度矩阵有对称性和奇异性等特点，限于篇幅，这里就不作详细讨论了。

3. 整体分析

关系式(14-54)的成立，保证了任一单元的平衡。但由于单元之间的相互作用是通过结点传递的，所以离散化后结构物的平衡，还要求每一个结点所受的力组成平衡力系。不失一般性，以图 14-12b 中的结点 i 为例，它所受的力有两部分。一部分是其周围各单元所受的外荷载分别按虚功等效原则移置到结点上的结点荷载，其合力为 $\sum_e F_{ix}$ 和 $\sum_e F_{iy}$；另一部分是周围各单元施加给它的作用力，这些力和周围各单元在结点 i 处的结点力之间是作用和反作用的关系，其合力为 $\sum_e F_{\mathrm{R}ix}$ 和 $\sum_e F_{\mathrm{R}iy}$。这里用 $\sum_e$ 表示绕结点 i 的所有单元求和。由平面汇交力系的平衡条件，有

$$\sum_e F_{Rix} = \sum_e F_{ix},\ \sum_e F_{Riy} = \sum_e F_{iy} \tag{m}$$

令

$$\boldsymbol{F}_{Ri} = (F_{Rix} \quad F_{Riy})^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{F}_i = (F_{ix} \quad F_{iy})^{\mathrm{T}} \tag{n}$$

则式(m)可写成

$$\sum_e \boldsymbol{F}_{Ri} = \sum_e \boldsymbol{F}_i \tag{o}$$

由于结点力是可以通过结点位移表示的[式(14－54)],故方程(o)实际上是以结点位移为未知数的线性代数方程。如果离散化后有 n 个结点,我们可以建立以 $2n$ 个结点位移 $u_1, v_1, u_2, v_2, \cdots, u_n, v_n$ 为未知数的 $2n$ 个线性非齐次代数方程。将这些方程按整体编码集合在一起,就得到结构的整体平衡方程组

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{t}} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{t}} \tag{14－58}$$

这里的

$$\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{t}} = (u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \cdots u_m \quad v_m)^{\mathrm{T}} \tag{14－59}$$

和

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{t}} = (F_{1x} \quad F_{1y} \quad F_{2x} \quad F_{2y} \cdots F_{nx} \quad F_{ny})^{\mathrm{T}} \tag{14－60}$$

分别称为**整体结点位移列阵**和**整体等效结点荷载列阵**,它们的元素都是按整体结点编码排列的。$\boldsymbol{K}$ 是 $2n \times 2n$ 阶的方阵,称为**总刚度矩阵**。

总刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 有奇异性、对称性、稀疏性(绝大部分元素为零)和非零元素呈斜带形区域分布等特性。$\boldsymbol{K}$ 的奇异性表明其逆矩阵不存在,因此在求解方程(14－58)时,必须先引入支承条件,修改总刚度矩阵和总体荷载列阵 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{t}}$。这一点可从力学意义上给以解释。因为我们采用的是位移解法,如果不给结构物以必要的约束,以消除结构的刚性平动和转动,当然就无法确定位移。总刚度矩阵的上述特性,使我们可以采用所谓"**半带存贮**"的方法,从而大大减少了计算机的存贮量。

由整体平衡方程组(14－58)的推导可知,总刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 应由单元刚度矩阵 $\boldsymbol{k}$ 集合而成。但两者的阶数不同,排列方式也不同。$\boldsymbol{K}$ 是按结点整体编码自然顺序排列的,而 $\boldsymbol{k}$ 是按各单元结点的局部编码 i, j, m 的顺序排列的,因此不能直接将 $\boldsymbol{k}$ 送入 $\boldsymbol{K}$ 中。如何建立总刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 有多种方法,比较简单而实用的是通过所谓"**子块搬家,对号入座**"的方法以形成总刚度矩阵。这种方法先将 $\boldsymbol{K}$ 中的所有元素置零,然后计算各单元刚度矩阵,并根据各单元结点的局部编码和结点整体编码之间的对应关系,将 $\boldsymbol{k}$ 中的子块一一叠加到 $\boldsymbol{K}$ 的相应位置上.这样就形成总刚度矩阵。限于篇幅,具体做法和算例请参考本书最后所列出的有关参考文献。

由修改后的方程(14－58)求出结点位移后,就可由式(14－44),(14－47),(14－50)分别求得各单元的位移分量、应变分量和应力分量。

最后，论证有限元法和古典变分法之间的本质联系，这是在本章要增写有限元法这部分内容的主要目的。

前面，在建立单元的结点力和结点位移关系时，曾使用了虚位移原理，它实际上是位移变分方程在单元上的应用。现在，我们要将虚位移原理应用于离散化的整个结构。

我们改用

$$\boldsymbol{f}=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\tilde{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{\Delta}^{t} \tag{p}$$

和

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\tilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{\Delta}^{t} \tag{q}$$

表示位移、应变和结点位移之间的关系，这里的 $\boldsymbol{\Delta}^{t}$ 是整体结点位移列阵，而矩阵 $\tilde{\boldsymbol{N}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{B}}$ 按下法定义。例如对于矩阵 $\tilde{\boldsymbol{B}}$，设有一点 $\boldsymbol{P}$ 在某一单元 e 内，则 $\tilde{\boldsymbol{B}}$ 中只有这样几个非零元素，它们就是单元 e 的应变矩阵的诸元素在 P 点的值，而其余的元素全为零。矩阵 $\tilde{\boldsymbol{N}}$ 也按同样的方法定义。可见 $\tilde{\boldsymbol{N}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{B}}$ 实际上分别是单元 e 的形函数矩阵 $\boldsymbol{N}$ 和应变矩阵 $\boldsymbol{B}$ 在总体编码下的扩大矩阵。

现给整个结构以虚位移，设各点相应的虚位移为 $\delta\boldsymbol{\Delta}^{t}$，而体内各点相应的虚应变为 $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$。于是所有结点荷载在对应点的虚位移上作的虚功，以及整个结构的虚内功(即应变能的变分冠以负号)分别为

$$(\delta\boldsymbol{\Delta}^{t})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{t}$$

和

$$-\iint(\delta\boldsymbol{\varepsilon})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}yt$$

由虚位移原理，有

$$(\delta\boldsymbol{\Delta}^{t})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{t}-\iint(\delta\boldsymbol{\varepsilon})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}yt=0 \tag{r}$$

或写成

$$(\delta\boldsymbol{\Delta}^{t})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{t}=\iint(\delta\boldsymbol{\varepsilon})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}yt \tag{r}$$

由式(d)，并注意到式(q)和

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}=\tilde{\boldsymbol{B}}\delta\boldsymbol{\Delta}^{t}$$

式(r)成为

$$(\delta\boldsymbol{\Delta}^{t})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{t}=\iint(\delta\boldsymbol{\Delta}^{t})^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\tilde{\boldsymbol{B}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}yt\boldsymbol{\Delta}^{t}$$

由于 $\delta\boldsymbol{\Delta}^{t}$ 的诸元素与坐标无关，且又完全任意，故上式成立的条件为

$$\boldsymbol{F}^{t}=\iint\tilde{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\tilde{\boldsymbol{B}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}yt\boldsymbol{\Delta}^{t} \tag{s}$$

注意这里的积分是在所有单元构成的区域$\sum A_i$上进行的，因此，式(s)又可写成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}^t &= \iint_{\sum A_i} \tilde{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D}\tilde{\boldsymbol{B}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y t\boldsymbol{\Delta}^t \\ &= \left(\sum \iint_{A_i} \tilde{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D}\tilde{\boldsymbol{B}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y t\right)\boldsymbol{\Delta}^t \end{aligned} \tag{t}$$

不难看出，这里的

$$\iint_{A_i} \tilde{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D}\tilde{\boldsymbol{B}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y t$$

为单元刚度矩阵$\boldsymbol{k}$，而

$$\sum \iint_{A_i} \tilde{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D}\tilde{\boldsymbol{B}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y t = \sum \boldsymbol{k} \tag{u}$$

即为总刚度矩阵$\boldsymbol{K}$。于是式(s)最后可写成

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Delta}^t = \boldsymbol{F}^t$$

这就是方程组(14－58)。

结构的整体平衡方程组(14－58)也可通过对离散化的结构采用瑞利－里茨法而得到。考察式(r)中的第二项，实际上它是应变能的变分，又可表示为

$$\delta\left(\frac{1}{2}\iint \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y t\right)$$

于是根据式(d)，式(r)可改写成如下的形式：

$$\delta\left[\frac{1}{2}\iint \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y t - (\boldsymbol{\Delta}^t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^t\right] = 0 \tag{v}$$

式(v)方程括号内的量显然是总势能，仍以E_{p}表示，有

$$E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\iint \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y t - (\boldsymbol{\Delta}^t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^t$$

将式(q)代入，并注意到式(u)，上式变为

$$\begin{aligned}E_{\mathrm{p}} &= \frac{1}{2}\iint_{\sum A_i} (\boldsymbol{\Delta}^t)^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\tilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{\Delta}^t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y t - (\boldsymbol{\Delta}^t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^t \\ &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Delta}^t)^{\mathrm{T}}\left[\iint_{\sum A_i} \tilde{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\tilde{\boldsymbol{B}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y t\right]\boldsymbol{\Delta}^t - (\boldsymbol{\Delta}^t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^t \\ &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Delta}^t)^{\mathrm{T}}\left[\sum \iint_{A_i} \tilde{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\tilde{\boldsymbol{B}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y t\right]\boldsymbol{\Delta}^t - (\boldsymbol{\Delta}^t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^t \\ &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Delta}^t)^{\mathrm{T}}(\sum \boldsymbol{k})\boldsymbol{\Delta}^t - (\boldsymbol{\Delta}^t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^t \\ &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Delta}^t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Delta}^t - (\boldsymbol{\Delta}^t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^t \end{aligned} \tag{w}$$

可见总势能 E_p 的第一项是结点位移的二次项，而第二项是结点位移的一次项由于我们考虑的是稳定平衡状态，故式(v)表示，当我们把连续弹性体按指定的方式分割成离散结构并选定位移模式后，在所有几何约束所容许的结点位移中，最接近于真实位移的使总势能 E_p 取最小值。这也可归结为 E_p 对所有的结点位移的一阶偏导数为零，即

$$\frac{\partial E_p}{\partial u_i}=0, \qquad \frac{\partial E_p}{\partial v_i}=0$$

$$(i=1,2,\cdots,n)$$

由此同样可以得到方程组(14－58)。

综上所述，可见有限元法仍属于弹性力学的变分法范畴，但它具有古典变分法和某些数值方法不能与之相比的优点，主要表现在以下几方面：

(1) 概念浅显，容易掌握，可以在不同的水平上建立对该法的理解。

(2) 该法有很强的通用性，它不仅能成功地处理如应力分析中的非均匀材料、各向异性材料、非线性应力－应变关系以及复杂边界条件等问题，而且随着其理论基础和方法的逐步改进和完善，还能成功地用以求解几乎所有的连续介质和场问题。

(3) 该法采用矩阵形式表达，便于编制计算机程序，可以充分利用高速电子计算机提供的方便，使庞大繁复的计算工作都能在电子计算机上实现。

正因为有限单元法既属于弹性力学的变分法范畴，但又具有古典变分法不能与之相比的上述优点，所以，它实际上是古典变分法的革新和发展，已被公认为应力分析的有效工具而受到学术界和工程界的普遍重视。

思考题与习题

14－1 试从位移变分方程导出平衡微分方程和应力边界条件。

14－2 瑞利－里茨法和伽辽金法的近似性各表现在什么地方？

14－3 参照最小势能原理的证法，证明真实的应力使总余能取最小值。

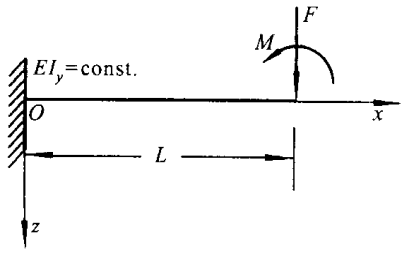


图 14－13

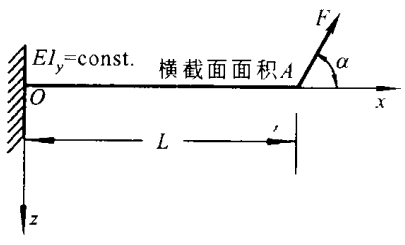


图 14－14

14－4　用最小余能原理求得应力的近似解后，能否由此求位移分量？为什么？

14－5　试用最小势能原理，分别导出图 14－14 和图 14－15 所示悬臂梁用挠度表示的平衡微分方程和力的边界条件。

14－6　有一一端固定、一端弹性支承的梁，跨度为 L，抗弯刚度 EI_y 为常量，弹簧系数为 k，承受分布荷载 $q(x)$作用(图 14－15)，试用最小势能原理导出梁的挠度形式的平衡微分方程和力的边界条件。

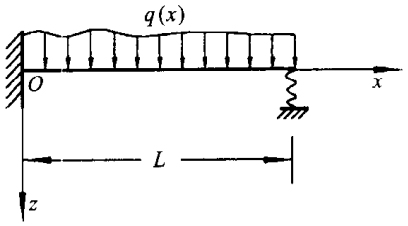


图 14－15

14－7　已知柱形杆扭转时总余能的表达式为

$$E_c=\frac{\alpha^2 GL}{2}\iint_R\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2-4\Phi\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

试从 $\delta E_c=0$ 导出方程 $\nabla^2\Phi=-2$。

14－8　图 14－16 所示的简支梁受集中力 F 作用，用瑞利－里茨法和伽辽金法求其近似解。

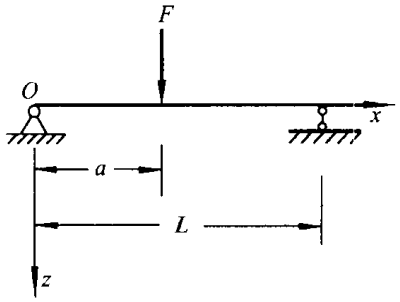


图 14－16

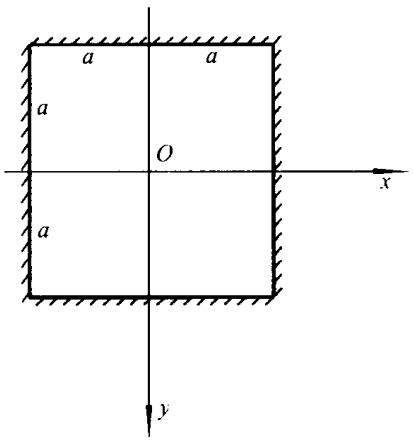


图 14－17

14－9　有一个铅直平面内的正方形薄板，边长为 $2a$，四边固定，如图 14－17 所示，只受重力 ρg 作用，取 $\nu=0$，试取位移分量的表达式为

$$u=\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{a^2}\right)\frac{x}{a}\frac{y}{a}\left(A_1+A_2\frac{x^2}{a^2}+A_3\frac{y^2}{a^2}+\cdots\right)$$

$$v=\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{a^2}\right)\left(B_1+B_2\frac{x^2}{a^2}+B_3\frac{y^2}{a^2}+\cdots\right)$$

用瑞利－里茨法求其近似解。

14－10 图 14－18 为一四边固定的矩形薄板，板中点处受法向集中力 F 作用，试用瑞利－里茨法求挠度的近似解。挠度的试函数为

$$w=\left(x^2-\frac{a^2}{4}\right)^2\left(y^2-\frac{b^2}{4}\right)^2(A_1+A_2x^2+A_3y^2+\cdots)$$

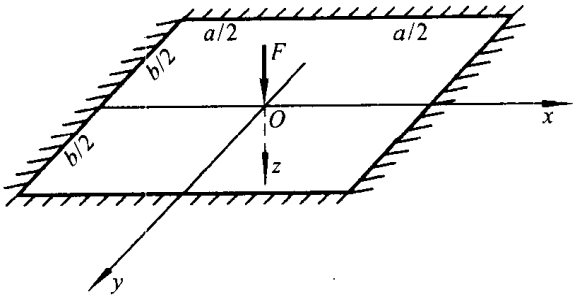


图 14－18

14－11 试用瑞利－里茨法和伽辽金法求解均布荷载作用下的四边简支的矩形板（图 13－11）的挠度。挠度取为重三角级数。

14－12 有一矩形薄板，三边固定，一边受均布压力 q 作用（图 14－19），试用最小余能原理，按如下的应力函数求近似解：

$$U=-\frac{qx^2}{2}+\frac{qa^2}{2}\left(A_1\frac{x^2y^2}{a^2b^2}+A_2\frac{y^3}{b^3}\right)$$

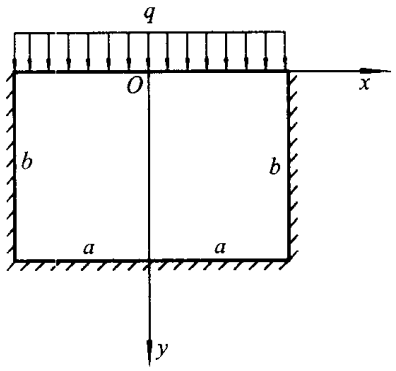


图 14－19

14－13 有一边长为 $2a$ 的正方形板，在左右两侧受以抛物线分布的拉力作用，即

$$(\sigma_x)_{x=\pm a}=q_0\left(\frac{y}{a}\right)^2$$

如图 14－20 所示，试用最小余能原理，按如下的应力函数求近似解：

$$U=\frac{q_0y^4}{12a^2}+q_0a^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^2\left(1-\frac{y^2}{a^2}\right)^2\left(A_1+A_2\frac{x^2}{a^2}+A_3\frac{y^2}{a^2}\right)$$

14－14 设一扭杆的横截面为矩形的，边长分别为 $2a$ 和 $2b$，试用最小余能原理按下列

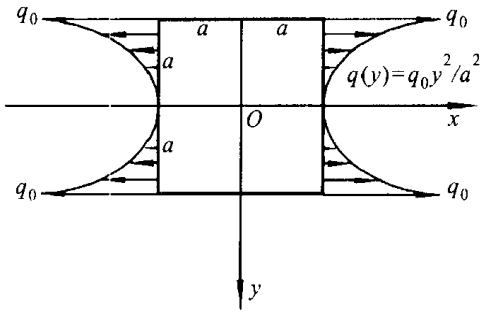


图 14－20

应力函数求解：

$$\Phi=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}A_{mn}\cos\frac{(2m+1)n\pi x}{2a}\cos\frac{(2n+1)n\pi y}{2b}$$

14－15　试分别从 $\delta E_p^*=0$ 和 $\delta E_c^*=0$ 出发，导出弹性力学的全部基本方程和全部边界条件。

14－16　证明

$$E_p^{**}+E_c^{**}=E_p^*+E_c^{**}=E_p^{**}+E_c^*=0$$

补充材料 A　笛卡儿张量简介

§A-1　张量的定义和变换规律

(一) 下标记法

本章所讨论的问题仅限于参考系为笛卡儿(Descartes, R.)坐标的情况。

在三维的笛卡儿坐标系中，一个含有 3 个独立变量的集合，通常用一个下标表示。例如，对于位移分量 u, v, w，可表示为 u_1, u_2, u_3，缩写后为 u_i。$i=1, 2, 3$ 对应于坐标 x_1, x_2, x_3(即 x, y, z)。类似地，对于一个含 9 个独立变量的集合，可用 2 个下标。例如，9 个应力分量和 9 个应变分量(由于对称，实际上只有 6 个)，可分别表示为 σ_{ij} 和 ε_{ij}；$\sigma_{11}, \sigma_{12}, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}$ 分别表示 σ_x, σ_{xy}(即 τ_{xy})和 $\varepsilon_x, \varepsilon_{xy}$(即 $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$)等等。完全同样的，一个含有 27 个独立变量的集合用 3 个下标，一个含有 81 个独立变量的集合用 4 个下标，依此类推。

(二) 克罗内克 δ 符号

这里，引进符号

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases} \tag{A-1}$$

我们称这个符号为**克罗内克**(kronek, L.)**δ 符号**。如果把它排成矩阵，则为

$$\delta_{ij}=\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13}\\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23}\\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

(三) 张量的定义和变换规律

为了给张量下一个确切的定义，我们先重提一下矢量。

设在某一个坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 中有一个矢量 $\boldsymbol{P}$，它的 3 个分量为 ξ_1, ξ_2, ξ_3 或缩写成 ξ_i。现作从 $Ox_1x_2x_3$ 到 $Ox'_1x'_2x'_3$ 的坐标变换，此时，矢量 $\boldsymbol{P}$ 的 3 个

分量为 $\xi_{1'},\xi_{2'},\xi_{3'}$，或缩写成 $\xi_{i'}$。设新老坐标之间有表 A－1 所示的关系。其中三行分别表示新坐标轴 x'_1,x'_2,x'_3 的单位矢量在老坐标轴 x_1,x_2,x_3 上的 3 个方向余弦，β 的第一个下标对应于新坐标，第二个下标对应于老坐标。同样，三列分别表示老坐标轴 x_1,x_2,x_3 的单位矢量在新坐标 x'_1,x'_2,x'_3 上的三个方向余弦。于是有

$$\sum_{i=1}^{3}\beta_{i'i}\beta_{j'i}=\delta_{i'j'}$$

$$\sum_{i'=1}^{3'}\beta_{i'i}\beta_{i'j}=\delta_{ij}$$

表　A－1

	x_1	x_2	x_3
x'_1	$\beta_{1'1}$	$\beta_{1'2}$	$\beta_{1'3}$
x'_2	$\beta_{2'1}$	$\beta_{2'2}$	$\beta_{2'3}$
x'_3	$\beta_{3'1}$	$\beta_{3'2}$	$\beta_{3'3}$

另外，矢量 $\boldsymbol{P}$ 在新老坐标中的分量之间有如下的关系：

$$\left.\begin{aligned}\xi_1&=\beta_{1'1}\xi_{1'}+\beta_{2'1}\xi_{2'}+\beta_{3'1}\xi_{3'}\\ \xi_2&=\beta_{1'2}\xi_{1'}+\beta_{2'2}\xi_{2'}+\beta_{3'2}\xi_{3'}\\ \xi_3&=\beta_{1'3}\xi_{1'}+\beta_{2'3}\xi_{2'}+\beta_{3'3}\xi_{3'}\end{aligned}\right\}\quad(a)$$

$$\left.\begin{aligned}\xi_{1'}&=\beta_{1'1}\xi_1+\beta_{1'2}\xi_2+\beta_{1'3}\xi_3\\ \xi_{2'}&=\beta_{2'1}\xi_1+\beta_{2'2}\xi_2+\beta_{2'3}\xi_3\\ \xi_{3'}&=\beta_{3'1}\xi_1+\beta_{3'2}\xi_2+\beta_{3'3}\xi_3\end{aligned}\right\}\quad(b)$$

式(a)和(b)又可缩写成

$$\xi_k=\sum_{i'=1'}^{3'}\beta_{i'k}\xi_{i'}\qquad(A-2)$$

$$\xi_{i'}=\sum_{k=1}^{3}\beta_{i'k}\xi_k\qquad(A-3)$$

式(A－2)，(A－3)将在下面的推导中用到。

现在我们考察两个矢量

$$\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,a_3),\quad \boldsymbol{P}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$$

并作它们的标量积，有

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{P}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{P}|\cos(\boldsymbol{A},\boldsymbol{P})=\sum_{k=1}^{3}a_k\xi_k$$

显然，它与坐标的选择无关，即若作前面所讲的坐标变换时，应有

$$\sum_{i'=1'}^{3'} a_{i'}\xi_{i'} = \sum_{k=1}^{3} a_k\xi_k \tag{c}$$

反之，如已知(ξ_1,ξ_2,ξ_3)是矢量，而(a_1,a_2,a_3)是与坐标有关的这样三个标量，它们使一次形式

$$F = \sum_{k=1}^{3} a_k\xi_k$$

在坐标变换时保持不变，则(a_1,a_2,a_3)是矢量。

事实上，根据题设条件，应有

$$\sum_{i'=1'}^{3'} a_{i'}\xi_{i'} = \sum_{k=1}^{3} a_k\xi_k \tag{d}$$

将式(A－3)代入式(d)等号的左边，得

$$\sum_{i'=1'}^{3'} a_{i'} \sum_{k=1}^{3} \beta_{i'k}\xi_k = \sum_{k=1}^{3} \left(\sum_{i'=1'}^{3'} a_{i'}\beta_{i'k} \right) \xi_k$$

把它和式(d)等号右边进行比较，得到

$$a_k = \sum_{i'=1'}^{3'} a_{i'}\beta_{i'k} \tag{e}$$

同样，如将式(A－2)代入式(d)等号的右边，经整理与同一式等号的左边进行比较，可得

$$a_{i'} = \sum_{k=1}^{3} a_k\beta_{i'k} \tag{f}$$

从式(e)和式(f)可见，(a_1,a_2,a_3)不仅依赖于坐标的选择(这是题设的)，而且遵循矢量的变换规律，因此，它们组成一个矢量。

推广上述的命题，就可以给出张量的一个解析定义。

设(ξ_1,ξ_2,ξ_3)，(η_1,η_2,η_3)是矢量，a_{ij}是与坐标选择有关的9个量。若当坐标变换时，双一次形式

$$F = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\xi_i\eta_j$$

保持不变，则称取决于两个下标i,j的9个量a_{ij}的集合为**二阶张量**。a_{ij}中的每一个被称为此张量(对指定坐标系)的分量。

根据上述定义，不难导出坐标变换时张量分量a_{ij}的变换规律。

事实上，根据题设条件，当坐标变换时，应有

$$\sum_{i',j'=1'}^{3'} a_{i'j'}\xi_{i'}\eta_{j'} = \sum_{k,m=1}^{3} a_{km}\xi_k\eta_m \tag{g}$$

在式(g)等号的左边，利用变换关系式(A－3)，有

$$\sum_{i',j'=1'}^{3'} a_{i'j'} \sum_{k,m=1}^{3} \beta_{i'k}\xi_k\beta_{j'm}\eta_m$$

$$= \sum_{k,m=1}^{3} \left(\sum_{i',j'=1'}^{3'} a_{i'j'} \beta_{i'k} \beta_{j'm} \right) \xi_k \eta_m$$

与式(g)等号右边比较,得到

$$a_{km} = \sum_{i',j'=1'}^{3'} a_{i'j'} \beta_{i'k} \beta_{j'm} \tag{A-4}$$

若在式(g)等号的右边利用式(A-2),经整理后与同一式的等号左边比较,可得

$$a_{i'j'} = \sum_{k,m=1}^{3} a_{km} \beta_{i'k} \beta_{j'm} \tag{A-5}$$

式(A-4)和(A-5)给出了二阶张量的变换关系。可以此作为判别一个具有两个下标的9个量 a_{ij} 的集合是否是张量的依据。由于应力分量 σ_{ij} 和应变分量 ε_{ij} 是服从式(A-4)和(A-5)这样的变换规律的,故它们分别组成二阶张量。

完全类似地可以定义三阶乃至 n 阶张量。例如,对于三阶张量,可以这样来定义:

设 (ξ_1, ξ_2, ξ_3),(η_1, η_2, η_3),$(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ 是矢量,a_{ijk} 是与坐标的选择有关的27个量,若当坐标变换时,三一次形式

$$F = \sum_{i,j,k=1}^{3} a_{ijk} \xi_i \eta_j \zeta_k$$

保持不变,则称具有三个下标的27个量 a_{ijk} 的集合为**三阶张量**。三阶张量 a_{ijk} 的变换规律为

$$a_{ijk} = \sum_{l',m',n'=1'}^{3'} a_{l'm'n'} \beta_{l'i} \beta_{m'j} \beta_{n'k} \tag{A-6}$$

或

$$a_{l'm'n'} = \sum_{i,j,k=1}^{3} a_{ijk} \beta_{l'i} \beta_{m'j} \beta_{n'k} \tag{A-7}$$

对于两个二阶张量 a_{ij} 和 b_{ij},如果它们对应的分量相等,例如 $a_{11} = b_{11}$,$a_{12} = b_{12}$ 等等,则称这两个张量是相等的。

容易证明,两个二阶张量之和仍为二阶张量。设这两个张量为 a_{ij} 和 b_{ij},和张量为 c_{ij},则

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

可以完全同样地定义 n 阶张量的相等和求和。

对于二阶张量 a_{ij},如果 $a_{ij} = a_{ji}$,则称此张量为**对称张量**。如果把它排成3×3的矩阵,则对角线元素两侧的元素是对称的,即

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

由此可知，应力张量和应变张量都是对称张量。δ_{ij}是最简单的对称张量。事实上，如果设(ξ_1,ξ_2,ξ_3)，(η_1,η_2,η_3)是矢量，则双一次形式

$$\sum_{i,j=1}^{3}\delta_{ij}\xi_i\eta_j=\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\xi_3\eta_3$$

在坐标变换时是不变量(因等号右边表示两矢量的标积)，因此，根据上述张量的定义，δ_{ij}是张量，称为**单位张量**。

如果二阶张量a_{ij}的分量$a_{ij}=-a_{ji}$，则称此张量为**反对称张量**。如果把它排成3×3的矩阵，则它呈下列的形式：

$$a_{ij}=\begin{pmatrix}0 & a_{12} & a_{13}\\ -a_{12} & 0 & a_{23}\\ -a_{13} & -a_{23} & 0\end{pmatrix}$$

对于一个既非对称又非反对称的一般的二阶张量a_{ij}，总可以唯一地表示为一个对称张量e_{ij}与一个反对称张量p_{ij}之和。事实上，我们设

$$a_{ij}=e_{ij}+p_{ij} \tag{h}$$

并注意到$e_{ij}=e_{ji}$，$p_{ij}=-p_{ji}$，于是有

$$a_{ji}=e_{ij}-p_{ij} \tag{i}$$

联立求解方程(h)和(i)，得到

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(a_{ij}+a_{ji})$$

$$p_{ij}=\frac{1}{2}(a_{ij}-a_{ji})$$

不难看出，张量e_{ij}和p_{ij}是符合对称和反对称的条件的。

§A-2 偏导数的下标记法

在弹性力学中，处处遇到诸如位移分量、应变分量和应力分量对坐标的偏导数$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$，$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k}$，$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k}$等等。现在也采用下标记法，将它们分别记作

$$\left.\begin{aligned}u_{i,j}&=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, & u_{i,jk}&=\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_k}\\ \varepsilon_{ij,k}&=\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k}, & \varepsilon_{ij,kl}&=\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k\partial x_l}\\ \sigma_{ij,k}&=\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k}, & \sigma_{ij,kl}&=\frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial x_k\partial x_l}\end{aligned}\right\} \tag{a}$$

等等。

可以证明,它们中的每一个组成的集合都是张量。

例如,对于 $u_{i,j}$ 9 个量的集合,要证明它是二阶张量。事实上,如果作从坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 到 $Ox'_1x'_2x'_3$ 的转轴变换,则由式(A-3),得

$$u_{i',j'} = \left(\sum_{k=1}^{3}\beta_{i'k}u_k\right)_{,j'} = \sum_{l=1}^{3}\left(\sum_{k=1}^{3}\beta_{i'k}u_k\right)_{,l}\frac{\mathrm{d}x_l}{\mathrm{d}x'_j}$$

$$= \sum_{l=1}^{3}\left(\sum_{k=1}^{3}\beta_{i'k}u_{k,l}\right)\frac{\mathrm{d}x_l}{\mathrm{d}x'_j} \tag{b}$$

在转轴变换时,由式(A-2)得新老坐标间的关系为

$$x_l = \sum_{j'=1}^{3'}\beta_{j'l}x'_j$$

由此得

$$\frac{\partial x_l}{\partial x'_j} = \beta_{j'l}$$

代入式(b),得到

$$u_{i',j'} = \sum_{k,l=1}^{3}u_{k,l}\beta_{i'k}\beta_{j'l}$$

这样就证明了 $u_{i,j}$ 是服从二阶张量的变换规律的,因此,它是二阶张量。请读者自己证明,式(a)中的其他每一个集合,分别是三阶张量和四阶张量。

§A-3 求和约定

从式(A-2)至(A-7)可见,其中都有一个求和符号 $\sum$,例如式(A-7),它分别对 i,j,k 从 1 到 3 求和,但在求和记号内的 $a_{ijk}\beta_{l'i}\beta_{m'j}\beta_{n'k}$,指标 i,j,k 都出现了两次。因此,如作出如下的约定,则上述各式的写法都可以简化。

凡在同一项内,有一个下标出现两次时,则对此下标从 1 到 3 求和(对二维空间从 1 到 2 求和)。这被称为**求和约定**。这种出现两次的下标在求和以后不再出现,称为**哑指标**。

根据求和约定,式(A-2)至(A-7)的求和记号都可以省略掉。例如式(A-7),可以改写成

$$a_{l'm'n'} = a_{ijk}\beta_{l'i}\beta_{m'j}\beta_{n'k}$$

又例如

$$a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{33}\varepsilon_{33} +$$

$$\sigma_{23}\varepsilon_{23}+\sigma_{32}\varepsilon_{32}+\sigma_{13}\varepsilon_{13}+$$
$$\sigma_{31}\varepsilon_{31}+\sigma_{12}\varepsilon_{12}+\sigma_{21}\varepsilon_{21}$$
$$\delta_{ii}=\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33}=3$$
$$c_i=a_{ij}b_j=a_{i1}b_1+a_{i2}b_2+a_{i3}b_3$$

上列最后一式中的 i 称为**自由指标**。这个式子代表了 3 个式子，即当 $i=1,2,3$ 时，有

$$c_1=a_{11}b_1+a_{12}b_2+a_{13}b_3$$
$$c_2=a_{21}b_1+a_{22}b_2+a_{23}b_3$$
$$c_3=a_{31}b_1+a_{32}b_2+a_{33}b_3$$

由于哑指标在求和以后的结果中不再出现，所以，哑指标所采用的字母是可以随便改变的，例如

$$a_{ij}b_j=a_{ik}b_k=a_{il}b_l=\cdots$$

有了偏导数的下标记法和求和约定，我们就可以把弹性力学的平衡微分方程、几何方程、物理方程和边界条件写成如下的形式：

平衡(运动)微分方程

$$\sigma_{ij,i}+F_j=0(\rho\ddot{u}_j) \tag{A-8}$$

这里，(F_1,F_2,F_3)表示单位体积力的分量，$\ddot{u}_j$ 表示加速度分量。

几何方程

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \tag{A-9}$$

物理方程

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}-\frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} \tag{A-10}$$

或

$$\sigma_{ij}=\lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij} \tag{A-10}$$

这里的

$$\sigma_{kk}=\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z=\Theta$$

而

$$\varepsilon_{kk}=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=\theta$$

边界条件

$$\left.\begin{aligned}\bar{f}_i&=\sigma_{ij}n_j\quad(\text{在 }S_\sigma\text{ 上})\\ u_i&=\bar{u}_i\quad(\text{在 }S_u\text{ 上})\end{aligned}\right\} \tag{A-11}$$

这里，$(\bar{f}_1,\bar{f}_2,\bar{f}_3)$表示单位面积上面力矢量的分量，$n_j$ 表示物体表面单位法线

向量的三个方向余弦。

这里，再顺便提一下，已经证明 $u_{i,j}$ 是一个既非对称又非反对称的二阶张量，因此，它可以唯一地表示为一个对称张量与一个反对称张量之和。显然，这个对称张量就是(A－9)所表示的应变张量 ε_{ij}，而这个反对称张量为

$$\frac{1}{2}(u_{i,j}-u_{j,i})$$

很明显，它与3个转动分量 $\omega_1,\omega_2,\omega_3$（即 $\omega_x,\omega_y,\omega_z$）相联系。若表成矩阵形式，为

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\omega_z & \frac{1}{2}\omega_y \\ \frac{1}{2}\omega_z & 0 & -\frac{1}{2}\omega_x \\ -\frac{1}{2}\omega_y & \frac{1}{2}\omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

§A－4 置换张量

在笛卡儿坐标中引进记号 e_{ijk}，它的定义如下：

$$e_{ijk}=\begin{cases} +1 & \text{当 } i,j,k=1,2,3;2,3,1;3,1,2 \text{ 顺序排列时；} \\ -1 & \text{当 } i,j,k=3,2,1;2,1,3;1,3,2 \text{ 逆序排列时；} \\ 0 & \text{当任何两个或三个下标相等时(例如 } 1,1,3;2,2,2 \text{ 等等)。} \end{cases}$$

这里的 e_{ijk} 称为**置换张量**。

接下来举例说明一下置换张量的应用。

先考察一个三阶的行列式，设其中的元素为 a_{ij}，这个行列式的值为 a，即

$$a=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{a}$$

这个行列式展开以后有六项，三项为正，三项为负。若利用置换张量，不难验证，式(a)可表示为

$$a=a_{1i}a_{2j}a_{3k}e_{ijk}=a_{il}a_{m2}a_{n3}e_{lmn}$$

现在，应用置换张量推导应变协调方程，将式(A－9)对 x_k 和 x_l 求偏导数

$$2\varepsilon_{ij,kl}=u_{i,jkl}+u_{j,ikl} \tag{b}$$

这里，假定位移分量 u_i 具有三阶连续偏导数，因此，式(b)等号右边的两项三阶偏导数的次序可以两两对换。现将式(b)的两边同乘置换张量 e_{jln}，由于张量 $u_{i,jkl}$ 对下标 j,l 是对称的，而置换张量 e_{jln} 对下标 j,l 是反对称的，因此，不难验

证,乘积

$$u_{i,jkl}e_{jln}=0$$

这样,式(b)简化为

$$2\varepsilon_{ij,kl}e_{jln}=u_{j,ikl}e_{jln} \tag{c}$$

按同样的理由,在式(c)两边同乘置换张量 e_{ikm},则其等号的右边变为零.因此,最后得到应变协调方程

$$\varepsilon_{ij,kl}e_{ikm}e_{jln}=0 \tag{A-12}$$

其中,自由指标 m,n 有 6 个不同的选择,即 $mn=11,22,33,23,13,12$,由此可得 6 个应变协调方程。

如果取 $m=n=3$,则有

$$\varepsilon_{11,22}e_{123}e_{123}+\varepsilon_{12,21}e_{123}e_{213}+\varepsilon_{21,12}e_{213}e_{123}+\varepsilon_{22,11}e_{213}e_{213}=0$$

经整理,得

$$\varepsilon_{22,11}+\varepsilon_{11,22}-2\varepsilon_{12,12}=0$$

或写成

$$\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}$$

如果取 $m=2,n=3$,则有

$$\varepsilon_{11,32}e_{132}e_{123}+\varepsilon_{12,31}e_{132}e_{213}+\varepsilon_{31,12}e_{312}e_{123}+\varepsilon_{32,11}e_{312}e_{213}=0$$

经整理,可得

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)=2\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\partial z}$$

补充材料B　弹性力学基本方程的曲线坐标形式

§B-1　曲线坐标　度量张量

如果在空间区域内选定一个直角坐标系 $Ox_1x_2x_3$，则区域内一点的坐标可表示为(x_1,x_2,x_3)[①]。现作如下的坐标变换：

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1&=f_1(x_1,x_2,x_3)\\ \alpha_2&=f_2(x_1,x_2,x_3)\\ \alpha_3&=f_3(x_1,x_2,x_3)\end{aligned}\right\}\tag{B-1}$$

假设 $f_i(x_1,x_2,x_3)$为区域内的单值连续函数，并且具有连续的偏导数，当雅可比(Jacobi,C.G.J.)行列式不为零时，即

$$\left|\frac{\partial(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}{\partial(x_1,x_2,x_3)}\right|\neq 0$$

则式(B-1)的逆变换存在，有

$$\left.\begin{aligned}x_1&=\varphi_1(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\\ x_2&=\varphi_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\\ x_3&=\varphi_3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\end{aligned}\right\}\tag{B-2}$$

反之亦然。这样，区域内同一点 P 的坐标，既可用(x_1,x_2,x_3)表示，又可用$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$表示。后者称为**曲线坐标**。

如果令式(B-1)中的

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1=f_1(x_1,x_2,x_3)=c_1\\ \alpha_2=f_2(x_1,x_2,x_3)=c_2\\ \alpha_3=f_3(x_1,x_2,x_3)=c_3\end{aligned}\right\}\tag{a}$$

这里 c_i 为常数，则此三式分别代表图 B-1 中的曲面 S_1，S_2 和 S_3。显然，当 c_i 取不同值时，可得到三族曲面，这三族曲面称为**坐标曲面**，其两两的交线，称为**坐**

---

① 这里的 x_1,x_2,x_3 即分别为 x,y,z。

标曲线，在图 B-1 中，以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 表之。

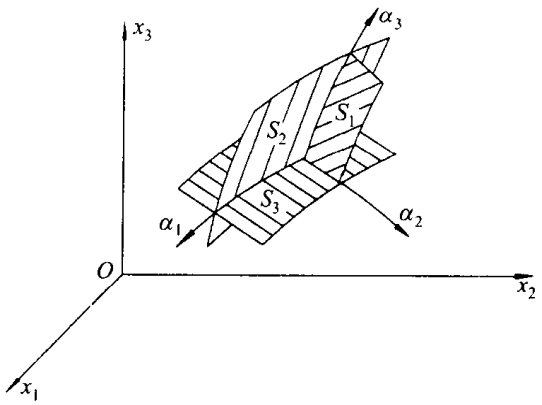


图 B-1

例如，对于圆柱坐标，有

$$\alpha_1 = \rho, \quad \alpha_2 = \varphi, \quad \alpha_3 = z, \tag{b}$$

方程(B-2)在此可写成

$$x_1 = \rho\cos\varphi, \quad x_2 = \rho\sin\varphi, \quad x_3 = z \tag{c}$$

而其逆为

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \varphi = \arctan\frac{x_2}{x_1}, \quad z = x_3 \tag{d}$$

由式(d)可知，$\rho = c_1$ 是以 x_3 为轴的圆柱面，$\varphi = c_2$ 表示过 x_3 轴的平面，而 $z = c_3$ 表示与 x_3 轴垂直的平面，如图 B-2 所示。

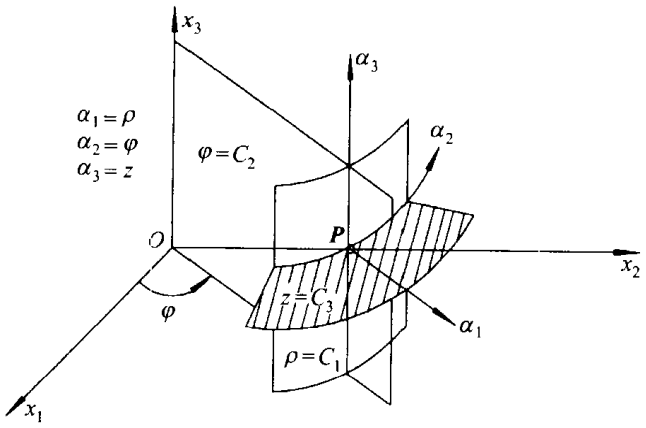


图 B-2

又例如，对于球坐标，有

$$\alpha_1=\theta,\quad \alpha_2=\varphi,\quad \alpha_3=r \tag{e}$$

在此，式(B-2)可表示为

$$x_1=r\sin\theta\cos\varphi,\quad x_2=r\sin\theta\sin\varphi,\quad x_3=r\cos\theta \tag{f}$$

其逆为

$$r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2},\quad \theta=\arctan\frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{x_3},\quad \varphi=\arctan\frac{x_2}{x_1} \tag{g}$$

由式(g)可见，$r=c_1$ 表示圆球面，$\theta=c_2$ 表示以 x_3 为轴的圆锥面，而 $\varphi=c_3$ 表示过 x_3 轴的平面。因此，对应的坐标曲线分别为经线、纬线和径向线，如图 B-3 所示。

在曲线坐标系中，最重要的是要知道如何度量长度，这将由度量张量给出。设 P_1 是空间任意一点，它在直角坐标系里的坐标为 (x_1,x_2,x_3)，于是，它的矢径为

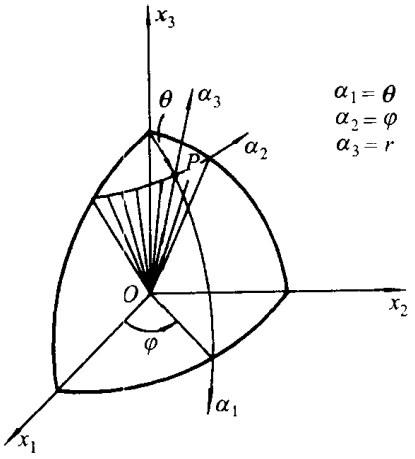


图 B-3

$$\boldsymbol{r}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3 \tag{h}$$

这里，$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 为坐标单位矢量。再考察与点 P_1 邻近的一点 P_2，其坐标为 $(x_1+\mathrm{d}x_1,x_2+\mathrm{d}x_2,x_3+\mathrm{d}x_3)$，如图 B-4 所示。

显然，从点 P_1 到点 P_2 矢径的改变为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}x_1\boldsymbol{e}_1+\mathrm{d}x_2\boldsymbol{e}_2+\mathrm{d}x_3\boldsymbol{e}_3$$

而连结点 P_1 和 P_2 的曲线弧长的平方为

$$(\mathrm{d}s)^2=\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=(\mathrm{d}x_1)^2+(\mathrm{d}x_2)^2+(\mathrm{d}x_3)^2=\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_i \tag{i}$$

注意，标积 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的值与所采用的坐标系无关。现在，采用曲线坐标 α_1，α_2,α_3，则 P_1 点的矢径 $\boldsymbol{r}$ 可作为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的函数，故

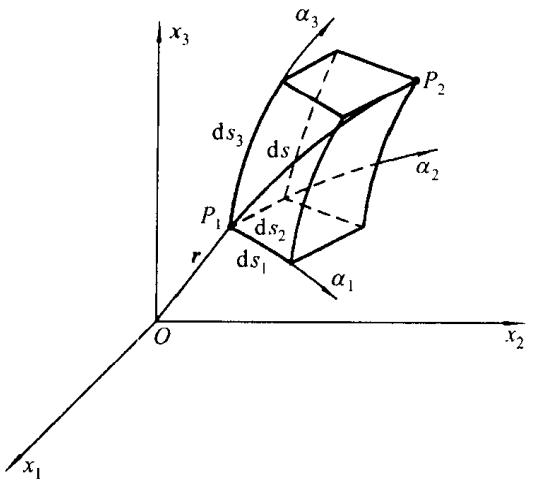


图 B－4

$$d\boldsymbol{r}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha_1}d\alpha_1+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha_2}d\alpha_2+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha_3}d\alpha_3 \tag{j}$$

令

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{a}_1&=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha_1}\\ \boldsymbol{a}_2&=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha_2}\\ \boldsymbol{a}_3&=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha_3}\end{aligned}\right\} \tag{B－3}$$

显然，矢量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 分别与坐标曲线 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 在 P_1 点相切。如引入

$$g_{ij}=\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{a}_j=\boldsymbol{a}_j\cdot\boldsymbol{a}_i \tag{B－4}$$

则点 P_1 与 P_2 间曲线弧长的平方又可表示为

$$\begin{aligned}(ds)^2&=d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r}=g_{ij}d\alpha_i d\alpha_j\\&=g_{11}(d\alpha_1)^2+g_{22}(d\alpha_2)^2+g_{33}(d\alpha_3)^2+\\&\quad 2g_{23}d\alpha_2 d\alpha_3+2g_{13}d\alpha_1 d\alpha_3+2g_{12}d\alpha_1 d\alpha_2\end{aligned} \tag{B－5}$$

这里的 $\boldsymbol{a}_i$ 和 g_{ij} 分别称为曲线坐标系 α_i 的**基矢量**和**度量张量**。

由式(B－4)可知

$$\left.\begin{aligned}|\boldsymbol{a}_1|&=\sqrt{g_{11}}\\ |\boldsymbol{a}_2|&=\sqrt{g_{22}}\\ |\boldsymbol{a}_3|&=\sqrt{g_{33}}\end{aligned}\right\} \tag{k}$$

若所取的曲线坐标是正交的，则还有

$$g_{ij}=\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{a}_j=0\qquad(i\neq j) \tag{l}$$

此时，式(B－5)可简化为

$$(\mathrm{d}s)^2 = g_{11}(\mathrm{d}\alpha_1)^2 + g_{22}(\mathrm{d}\alpha_2)^2 + g_{33}(\mathrm{d}\alpha_3)^2 \tag{m}$$

特别地，沿着过 P_1 点的三根坐标曲线的微弧长度的平方分别为

$$(\mathrm{d}s_1)^2 = g_{11}(\mathrm{d}\alpha_1)^2$$
$$(\mathrm{d}s_2)^2 = g_{22}(\mathrm{d}\alpha_2)^2$$
$$(\mathrm{d}s_3)^2 = g_{33}(\mathrm{d}\alpha_3)^2$$

即

$$\mathrm{d}s_1 = \sqrt{g_{11}}\,\mathrm{d}\alpha_1, \qquad \mathrm{d}s_2 = \sqrt{g_{22}}\,\mathrm{d}\alpha_2, \qquad \mathrm{d}s_3 = \sqrt{g_{33}}\,\mathrm{d}\alpha_3 \tag{B－6}$$

为表示简单起见，在正交曲线坐标系中，有时，将度量张量写成

$$g_{ii} = h_i^2 \tag{B－7}$$

这里的 h_i 称为**拉梅系数**。

当直角坐标与曲线坐标之间的关系(B－2)被确定以后，度量张量 g_{ij} 是很容易算得的。由式(B－2)，有

$$\mathrm{d}x_i = \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j}\mathrm{d}\alpha_j$$

代入式(i)，得

$$(\mathrm{d}s)^2 = \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j}\mathrm{d}\alpha_j \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_k}\mathrm{d}\alpha_k = \left(\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j}\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_k}\right)\mathrm{d}\alpha_j\,\mathrm{d}\alpha_k$$

与式(B－5)比较，可见度量张量的计算公式为

$$g_{jk} = \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j}\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_k} \tag{B－8}$$

例如，对于圆柱坐标，由式(b)，(c)和(B－8)，得

$$\left.\begin{aligned}
g_{11} &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \alpha_1}\right)^2 \\
&= \cos^2\varphi + \sin^2\varphi + 0 = 1 \\
g_{22} &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \alpha_2}\right)^2 \\
&= \rho^2\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\varphi + 0 = \rho^2 \\
g_{33} &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \alpha_3}\right)^2 \\
&= 0 + 0 + 1 = 1 \\
g_{23} &= g_{13} = g_{12} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{B－9}$$

因此

$$(\mathrm{d}s)^2 = g_{ij}\,\mathrm{d}\alpha_i\,\mathrm{d}\alpha_j = (\mathrm{d}\rho)^2 + \rho^2(\mathrm{d}\varphi)^2 + (\mathrm{d}z)^2$$

又例如对于球坐标系，由式(e)，(f)和(B-8)，得

$$\left.\begin{aligned} g_{11} &= r^2 \\ g_{22} &= r^2\sin^2\theta \\ g_{33} &= 1 \\ g_{23} &= g_{13} = g_{12} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{B-10}$$

而

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}r)^2 + r^2(\mathrm{d}\theta)^2 + r^2\sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)^2$$

为以后推演的需要，根据式(k)，再引入矢量

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= \frac{\boldsymbol{a}_1}{\sqrt{g_{11}}} \\ \boldsymbol{e}_2 &= \frac{\boldsymbol{a}_2}{\sqrt{g_{22}}} \\ \boldsymbol{e}_3 &= \frac{\boldsymbol{a}_3}{\sqrt{g_{33}}} \end{aligned}\right\} \tag{B-11}$$

显然，矢量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 分别为沿坐标曲线 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的单位矢量。

§B-2 基矢量 $\boldsymbol{a}_i$ 和单位矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 在正交曲线坐标系中的变化率

在正交曲线坐标系中，坐标单位矢量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_3$(指向 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的增加方向)满足如下的关系：

$$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 = 1 \tag{a}$$

$$\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 0 \tag{b}$$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 &= \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 &= \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 &= \boldsymbol{e}_3 \end{aligned}\right\} \tag{c}$$

$$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_3 = 0 \tag{d}$$

在图 B-1 中，矢量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 分别垂直于曲面 S_1, S_2, S_3。对于矢量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$，同样有

$$\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 = 0 \tag{e}$$

将式(e)依次分别对 α_1, α_2 和 α_3 求偏导数，得

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \boldsymbol{a}_2}{\partial \alpha_1}\cdot\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_2\cdot\frac{\partial \boldsymbol{a}_3}{\partial \alpha_1}=0\\
&\frac{\partial \boldsymbol{a}_1}{\partial \alpha_2}\cdot\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_1\cdot\frac{\partial \boldsymbol{a}_3}{\partial \alpha_2}=0\\
&\frac{\partial \boldsymbol{a}_1}{\partial \alpha_3}\cdot\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_1\cdot\frac{\partial \boldsymbol{a}_2}{\partial \alpha_3}=0
\end{aligned}\right\} \tag{f}$$

将式(f)中的第一式减去其第二式，得

$$\boldsymbol{a}_3\cdot\left(\frac{\partial \boldsymbol{a}_2}{\partial \alpha_1}-\frac{\partial \boldsymbol{a}_1}{\partial \alpha_2}\right)+\boldsymbol{a}_2\cdot\frac{\partial \boldsymbol{a}_3}{\partial \alpha_1}-\boldsymbol{a}_1\cdot\frac{\partial \boldsymbol{a}_3}{\partial \alpha_2}=0 \tag{g}$$

但由式(B－3)，有

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}_i}{\partial \alpha_j}=\frac{\partial}{\partial \alpha_j}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha_i}\right)=\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha_j}\right)=\frac{\partial \boldsymbol{a}_j}{\partial \alpha_i} \tag{h}$$

于是，式(g)简化为

$$\boldsymbol{a}_2\cdot\frac{\partial \boldsymbol{a}_3}{\partial \alpha_1}-\boldsymbol{a}_1\cdot\frac{\partial \boldsymbol{a}_3}{\partial \alpha_2}=0 \tag{i}$$

比较式(i)和式(f)的第三式，并注意到式(h)，有

$$\boldsymbol{a}_1\cdot\frac{\partial \boldsymbol{a}_2}{\partial \alpha_3}=\boldsymbol{a}_2\cdot\frac{\partial \boldsymbol{a}_3}{\partial \alpha_1}=\boldsymbol{a}_3\cdot\frac{\partial \boldsymbol{a}_1}{\partial \alpha_2}=0 \tag{j}$$

现将式

$$\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_1=h_1^2$$

分别对 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 求导，并利用式(h)，有

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{a}_1\cdot\frac{\partial \boldsymbol{a}_1}{\partial \alpha_1}=h_1\frac{\partial h_1}{\partial \alpha_1}\\
&\boldsymbol{a}_1\cdot\frac{\partial \boldsymbol{a}_1}{\partial \alpha_2}=\boldsymbol{a}_1\cdot\frac{\partial \boldsymbol{a}_2}{\partial \alpha_1}=h_1\frac{\partial h_1}{\partial \alpha_2}\\
&\boldsymbol{a}_1\cdot\frac{\partial \boldsymbol{a}_1}{\partial \alpha_3}=\boldsymbol{a}_1\cdot\frac{\partial \boldsymbol{a}_3}{\partial \alpha_1}=h_1\frac{\partial h_1}{\partial \alpha_3}
\end{aligned}\right\} \tag{k}$$

再将式(e)的后两式对 α_1 求偏导数，并利用式(k)的后两个关系，有

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{a}_2\cdot\frac{\partial \boldsymbol{a}_1}{\partial \alpha_1}=-\boldsymbol{a}_1\cdot\frac{\partial \boldsymbol{a}_2}{\partial \alpha_1}=-h_1\frac{\partial h_1}{\partial \alpha_2}\\
&\boldsymbol{a}_3\cdot\frac{\partial \boldsymbol{a}_1}{\partial \alpha_1}=-\boldsymbol{a}_1\cdot\frac{\partial \boldsymbol{a}_3}{\partial \alpha_1}=-h_1\frac{\partial h_1}{\partial \alpha_3}
\end{aligned}\right\} \tag{l}$$

按上面同样的步骤，可得与式(l)类似的另外两组关系，即

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{a}_3\cdot\frac{\partial \boldsymbol{a}_2}{\partial \alpha_2}=-\boldsymbol{a}_2\cdot\frac{\partial \boldsymbol{a}_3}{\partial \alpha_2}=-h_2\frac{\partial h_2}{\partial \alpha_3}\\
&\boldsymbol{a}_1\cdot\frac{\partial \boldsymbol{a}_2}{\partial \alpha_2}=-\boldsymbol{a}_2\cdot\frac{\partial \boldsymbol{a}_1}{\partial \alpha_2}=-h_2\frac{\partial h_2}{\partial \alpha_1}
\end{aligned}\right\} \tag{m}$$

和

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{a}_1\cdot\frac{\partial \boldsymbol{a}_3}{\partial \alpha_3}=-\boldsymbol{a}_3\cdot\frac{\partial \boldsymbol{a}_1}{\partial \alpha_3}=-h_3\frac{\partial h_3}{\partial \alpha_1}\\ \boldsymbol{a}_2\cdot\frac{\partial \boldsymbol{a}_3}{\partial \alpha_3}=-\boldsymbol{a}_3\cdot\frac{\partial \boldsymbol{a}_2}{\partial \alpha_3}=-h_3\frac{\partial h_3}{\partial \alpha_2}\end{aligned}\right\}\tag{n}$$

有了前面的关系，就能求得 $\boldsymbol{a}_i$ 的偏导数。

先求 $\dfrac{\partial \boldsymbol{a}_1}{\partial \alpha_1}$。它在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 方向的 3 个分量为

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}_1}{\partial \alpha_1}\cdot\boldsymbol{e}_1,\quad \frac{\partial \boldsymbol{a}_1}{\partial \alpha_1}\cdot\boldsymbol{e}_2,\quad \frac{\partial \boldsymbol{a}_1}{\partial \alpha_1}\cdot\boldsymbol{e}_3\tag{o}$$

或写成

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}_1}{\partial \alpha_1}\cdot\frac{\boldsymbol{a}_1}{h_1},\quad \frac{\partial \boldsymbol{a}_1}{\partial \alpha_1}\cdot\frac{\boldsymbol{a}_2}{h_2},\quad \frac{\partial \boldsymbol{a}_1}{\partial \alpha_1}\cdot\frac{\boldsymbol{a}_3}{h_3}\tag{p}$$

由式(k)的第一式和式(l)，式(p)变为

$$\frac{\partial h_1}{\partial \alpha_1},\quad -\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial \alpha_1},\quad -\frac{h_1}{h_3}\frac{\partial h_1}{\partial \alpha_3}\tag{q}$$

因此，得到

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}_1}{\partial \alpha_1}=\frac{\partial h_1}{\partial \alpha_1}\frac{\boldsymbol{a}_1}{h_1}-\frac{h_1}{h_2^2}\frac{\partial h_1}{\partial \alpha_1}\boldsymbol{a}_2-\frac{h_1}{h_3^2}\frac{\partial h_1}{\partial \alpha_3}\boldsymbol{a}_3\tag{B-12}$$

重复同样的步骤，可得 $\dfrac{\partial \boldsymbol{a}_2}{\partial \alpha_2}$ 和 $\dfrac{\partial \boldsymbol{a}_3}{\partial \alpha_3}$，它们是

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}_2}{\partial \alpha_2}=-\frac{h_2}{h_1^2}\frac{\partial h_2}{\partial \alpha_1}\boldsymbol{a}_1+\frac{\partial h_2}{\partial \alpha_2}\frac{\boldsymbol{a}_2}{h_2}-\frac{h_2}{h_3^2}\frac{\partial h_2}{\partial \alpha_3}\boldsymbol{a}_3\tag{B-13}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}_3}{\partial \alpha_3}=-\frac{h_3}{h_1^2}\frac{\partial h_3}{\partial \alpha_1}\boldsymbol{a}_1-\frac{h_3}{h_2^2}\frac{\partial h_3}{\partial \alpha_2}\boldsymbol{a}_2+\frac{\partial h_3}{\partial \alpha_3}\frac{\boldsymbol{a}_3}{h_3}\tag{B-14}$$

同样，$\dfrac{\partial \boldsymbol{a}_2}{\partial \alpha_3}$ 的 3 个分量为

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}_2}{\partial \alpha_3}\cdot\boldsymbol{e}_1,\quad \frac{\partial \boldsymbol{a}_2}{\partial \alpha_3}\cdot\boldsymbol{e}_2,\quad \frac{\partial \boldsymbol{a}_2}{\partial \alpha_3}\cdot\boldsymbol{e}_3\tag{r}$$

由式(j)、式(m)的第一式和式(n)的第二式，并注意到式(h)，式(r)变为

$$0,\quad \frac{\partial h_2}{\partial \alpha_3},\quad \frac{\partial h_3}{\partial \alpha_2}\tag{s}$$

因此，注意到式(h)，有

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}_2}{\partial \alpha_3}=\frac{\partial \boldsymbol{a}_3}{\partial \alpha_2}=\frac{\partial h_2}{\partial \alpha_3}\frac{\boldsymbol{a}_2}{h_2}+\frac{\partial h_3}{\partial \alpha_2}\frac{\boldsymbol{a}_3}{h_3}\tag{B-15}$$

同理可得

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}_3}{\partial \alpha_1}=\frac{\partial \boldsymbol{a}_1}{\partial \alpha_3}=\frac{\partial h_1}{\partial \alpha_3}\frac{\boldsymbol{a}_1}{h_1}+\frac{\partial h_3}{\partial \alpha_1}\frac{\boldsymbol{a}_3}{h_3} \tag{B-16}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}_1}{\partial \alpha_2}=\frac{\partial \boldsymbol{a}_2}{\partial \alpha_1}=\frac{\partial h_1}{\partial \alpha_2}\frac{\boldsymbol{a}_1}{h_1}+\frac{\partial h_2}{\partial \alpha_1}\frac{\boldsymbol{a}_2}{h_2} \tag{B-17}$$

利用式(B-12)至(B-17),不难求得 $\boldsymbol{e}_i$ 的导数:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{e}_1}{\partial \alpha_1}&=\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{\boldsymbol{a}_1}{h_1}\right)=\frac{1}{h_1^2}\left[h_1\frac{\partial \boldsymbol{a}_1}{\partial \alpha_1}-\boldsymbol{a}_1\frac{\partial h_1}{\partial \alpha_1}\right]\\&=-\frac{\partial h_1}{\partial \alpha_2}\frac{\boldsymbol{e}_2}{h_2}-\frac{\partial h_1}{\partial \alpha_3}\frac{\boldsymbol{e}_3}{h_3}\\\frac{\partial \boldsymbol{e}_1}{\partial \alpha_2}&=\frac{\partial h_2}{\partial \alpha_1}\frac{\boldsymbol{e}_2}{h_1}\\\frac{\partial \boldsymbol{e}_1}{\partial \alpha_3}&=\frac{\partial h_3}{\partial \alpha_1}\frac{\boldsymbol{e}_3}{h_1}\end{aligned}\right\} \tag{B-18}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{e}_2}{\partial \alpha_1}&=\frac{\partial h_1}{\partial \alpha_2}\frac{\boldsymbol{e}_1}{h_2}\\\frac{\partial \boldsymbol{e}_2}{\partial \alpha_2}&=-\frac{\partial h_2}{\partial \alpha_1}\frac{\boldsymbol{e}_1}{h_1}-\frac{\partial h_2}{\partial \alpha_3}\frac{\boldsymbol{e}_3}{h_3}\\\frac{\partial \boldsymbol{e}_2}{\partial \alpha_3}&=\frac{\partial h_3}{\partial \alpha_2}\frac{\boldsymbol{e}_3}{h_2}\end{aligned}\right\} \tag{B-19}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{e}_3}{\partial \alpha_1}&=\frac{\partial h_1}{\partial \alpha_3}\frac{\boldsymbol{e}_1}{h_3}\\\frac{\partial \boldsymbol{e}_3}{\partial \alpha_2}&=\frac{\partial h_2}{\partial \alpha_3}\frac{\boldsymbol{e}_2}{h_3}\\\frac{\partial \boldsymbol{e}_3}{\partial \alpha_3}&=-\frac{\partial h_3}{\partial \alpha_1}\frac{\boldsymbol{e}_1}{h_1}-\frac{\partial h_3}{\partial \alpha_2}\frac{\boldsymbol{e}_2}{h_2}\end{aligned}\right\} \tag{B-20}$$

式(B-18)至(B-20)将在下节的推导中用到。

§B-3　正交曲线坐标系中的应变张量

设点 M 和 N 表示变形前物体中无限邻近的两点,其直角坐标分别为(x_1, x_2, x_3)和($x_1+\mathrm{d}x_1$, $x_2+\mathrm{d}x_2$, $x_3+\mathrm{d}x_3$),而其曲线坐标则分别为(α_1, α_2, α_3)和($\alpha_1+\mathrm{d}\alpha_1$, $\alpha_2+\mathrm{d}\alpha_2$, $\alpha_3+\mathrm{d}\alpha_3$)。在物体变形后,$M$ 点和 N 点分别变为 M^* 和 N^*,其直角坐标分别为(ξ_1, ξ_2, ξ_3)和($\xi_1+\mathrm{d}\xi_1$, $\xi_2+\mathrm{d}\xi_2$, $\xi_3+\mathrm{d}\xi_3$),而其曲线坐标则分别为(β_1, β_2, β_3)和($\beta_1+\mathrm{d}\beta_1$, $\beta_2+\mathrm{d}\beta_2$, $\beta_3+\mathrm{d}\beta_3$),如图 B-5 所示。

设变形前后,直角坐标与曲线坐标之间,即 x_i 与 α_i 之间和 ξ_i 与 β_i 之间都存在形如式(B-1)和(B-2)所示的变换关系,而两个曲线坐标之间的关系为

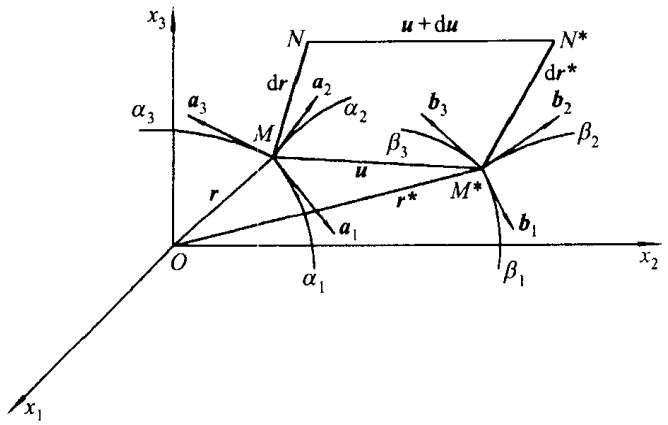


图 B-5

$$\left.\begin{aligned}\alpha_i &= f_i(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\\ \beta_i &= \varphi_i(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\end{aligned}\right\} \tag{a}$$

以 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 和 g_{ij} 表示曲线坐标系 α_i 中的基矢量和度量张量，以 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ 和 G_{ij} 表示曲线坐标系 β_i 中的基矢量和度量张量，于是，微分线段 MN 长度的平方为

$$(\mathrm{d}s)^2 = g_{ij}\mathrm{d}\alpha_i\mathrm{d}\alpha_j \tag{b}$$

而微分线段 M^*N^* 长度的平方为

$$(\mathrm{d}s^*) = G_{ij}\mathrm{d}\beta_i\mathrm{d}\beta_j \tag{c}$$

这里的 g_{ij} 在 α_i 坐标系中对 M 点计算值，而 G_{ij} 在 β_i 坐标系中对 M^* 点计算值。由式(a)可知

$$\mathrm{d}\beta_i = \frac{\partial\beta_i}{\partial\alpha_1}\mathrm{d}\alpha_1 + \frac{\partial\beta_i}{\partial\alpha_2}\mathrm{d}\alpha_2 + \frac{\partial\beta_i}{\partial\alpha_3}\mathrm{d}\alpha_3 \tag{d}$$

将式(d)代入式(c)，有

$$(\mathrm{d}s^*)^2 = G_{ij}\frac{\partial\beta_i}{\partial\alpha_k}\mathrm{d}\alpha_k\,\frac{\partial\beta_j}{\partial\alpha_m}\mathrm{d}\alpha_m \tag{e}$$

微分线段 MN 长度的变化可表示为

$$(\mathrm{d}s^*)^2 - (\mathrm{d}s)^2 = \left(G_{rs}\frac{\partial\beta_r}{\partial\alpha_i}\frac{\partial\beta_s}{\partial\alpha_j} - g_{ij}\right)\mathrm{d}\alpha_i\mathrm{d}\alpha_j \tag{f}$$

若令

$$2e_{ij} = G_{rs}\frac{\partial\beta_r}{\partial\alpha_i}\frac{\partial\beta_s}{\partial\alpha_j} - g_{ij} \tag{g}$$

则

$$(\mathrm{d}s^*)^2 - (\mathrm{d}s)^2 = 2e_{ij}\mathrm{d}\alpha_i\mathrm{d}\alpha_j \tag{B-21}$$

$(\mathrm{d}s^*)^2-(\mathrm{d}s)^2$ 为不变量，而 $e_{ij}=e_{ji}$ 是二阶对称张量，我们称之为应变张量[①]。

到现在为止，我们采用了两个曲线坐标系，一个在点 M，另一个在点 M^*，两者存在如式(a)所示的关系。现在改变建立在变形后物体中的曲线坐标 β_i 的形状，使其内一点的坐标 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ 与在原物体内对应点的坐标 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 具有相同的数值。例如，对于点 M^*，有 $\beta_1=\alpha_1=c_1$，$\beta_2=\alpha_2=c_2$，$\beta_3=\alpha_3=c_3$。这样，$\dfrac{\partial\beta_i}{\partial\alpha_j}=\delta_{ij}$，即当 $i=j$ 时，$\delta_{ij}=1$，而当 $i\neq j$ 时，$\delta_{ij}=0$。于是，式(e)变为

$$(\mathrm{d}s^*)^2=G_{ij}\,\mathrm{d}\alpha_i\,\mathrm{d}\alpha_j \tag{h}$$

而式(g)变为

$$2e_{ij}=G_{ij}-g_{ij} \tag{B-22}$$

以下，我们考虑在原物体中的坐标系为正交的情况。

由于 $G_{ij}=\boldsymbol{b}_i\cdot\boldsymbol{b}_j$，而 $g_{ij}=\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{a}_j$，我们有

$$2e_{ij}=|\boldsymbol{b}_i||\boldsymbol{b}_j|\cos(\theta_{ij})_b-|\boldsymbol{a}_i||\boldsymbol{a}_j|\cos(\theta_{ij})_a \qquad (\text{非和}) \tag{i}$$

这里的 $(\theta_{ij})_b$ 和 $(\theta_{ij})_a$ 分别表示曲线坐标 β_i 与 α_i 中的基矢量的夹角。微分线段 MN 的相对伸长度为

$$E_{MN}=\frac{\mathrm{d}s^*-\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s} \tag{j}$$

于是

$$\mathrm{d}s^*=(1+E_{MN})\mathrm{d}s \tag{k}$$

如果线段 MN 沿着基矢量 $\boldsymbol{a}_1$ 方向，则其变形后的长度应由式(b)和(h)，令其中的 $i=j=1$ 而得到，即

$$\mathrm{d}s=\sqrt{g_{11}}\,\mathrm{d}\alpha_1,\qquad \mathrm{d}s^*=\sqrt{G_{11}}\,\mathrm{d}\alpha_1$$

于是，该微分线段的相对伸长度为

$$E_{\alpha_1}=\frac{(\sqrt{G_{11}}-\sqrt{g_{11}})\mathrm{d}\alpha_1}{\sqrt{g_{11}}\,\mathrm{d}\alpha_1}=\frac{\sqrt{G_{11}}-\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{11}}}$$

由此

$$\sqrt{G_{11}}=(1+E_{\alpha_1})\sqrt{g_{11}} \tag{l}$$

或

$$|\boldsymbol{b}_1|=(1+E_{\alpha_1})|\boldsymbol{a}_1| \tag{m}$$

同样可得

---

① 这里所指的应变张量和第三章所讲的应变张量有区别，因其每一个分量仅是张量意义下的分量，而不直接代表物理应变分量。但下面将会看到，通过这些量，能求得通常意义下的应变分量(包括有限变形的情况)。

$$|\boldsymbol{b}_2| = (1 + E_{a_2})|\boldsymbol{a}_2| \tag{n}$$

$$|\boldsymbol{b}_3| = (1 + E_{a_3})|\boldsymbol{a}_3| \tag{o}$$

利用式(m),(n),(o),式(i)可写成

$$2e_{ij} = (1 + E_{a_i})(1 + E_{a_j})|\boldsymbol{a}_i||\boldsymbol{a}_j|\cos(\theta_{ij})_b - |\boldsymbol{a}_i||\boldsymbol{a}_j|\cos(\theta_{ij})_a \qquad (\text{非和})$$

或写成

$$\frac{2e_{ij}}{\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{jj}}} = (1 + E_{a_i})(1 + E_{a_j})\cos(\theta_{ij})_b - \cos(\theta_{ij})_a \qquad (\text{非和}) \tag{B-23}$$

式(B-23)是十分重要的。令其中 $i = j$,我们得到

$$\frac{2e_{ii}}{g_{ii}} = (1 + E_{a_i})^2 - 1 \qquad (\text{非和}) \tag{p}$$

或

$$E_{a_i} = \sqrt{1 + \frac{2e_{ii}}{g_{ii}}} - 1 \qquad (\text{非和}) \tag{B-24}$$

式(B-24)说明,e_{11}, e_{22}, e_{33} 描绘了过 M 点并沿 3 个基矢量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 方向微分线段相对伸长的特征。

现在,令

$$(\theta_{ij})_b = \frac{\pi}{2} - \varphi_{ij} \tag{q}$$

这里的 φ_{ij} 表示基矢量 $\boldsymbol{a}_i$ 与 $\boldsymbol{a}_j$ 之间的夹角(是直角)在物体变形后的改变量. 将式(q)代入式(B-23),利用式(l),并注意到 $\cos(\theta_{ij})_a = 0$,于是得

$$\sin\varphi_{ij} = \frac{2e_{ij}}{(1 + E_{a_i})\sqrt{g_{ii}}(1 + E_{a_j})\sqrt{g_{jj}}}$$

$$= \frac{2e_{ij}}{\sqrt{G_{ii}}\sqrt{G_{jj}}} \qquad (\text{非和}, i \neq j) \tag{r}$$

利用式(p),式(r)又可表示为

$$\sin\varphi_{ij} = \frac{2e_{ij}}{\sqrt{g_{ii} + 2e_{ii}}\sqrt{g_{jj} + 2e_{jj}}} \tag{B-25}$$

式(B-25)表示,e_{23}, e_{13}, e_{12} 描绘了 3 个基矢量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 间夹角(是直角)的变化。因此,称 e_{11}, e_{22}, e_{33} 为应变张量的法向分量,而 e_{23}, e_{13}, e_{12} 为应变张量的切向分量。

现在,要建立通常意义下的应变分量与张量应变分量 e_{ij} 之间的关系。由式(k),有

$$\mathrm{d}s^* = (1 + E_{MN})\mathrm{d}s$$

或

$$(\mathrm{d}s^*)^2 = (1+E_{MN})^2(\mathrm{d}s)^2$$
$$\approx (1+2E_{MN})(\mathrm{d}s)^2$$

由此得

$$E_{MN} \approx \frac{1}{2}\frac{(\mathrm{d}s^*)^2-(\mathrm{d}s)^2}{(\mathrm{d}s)^2} \tag{s}$$

将式(B-21)代入,得

$$E_{MN} = e_{ij}\frac{\mathrm{d}\alpha_i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\alpha_j}{\mathrm{d}s} \tag{t}$$

导数$\frac{\mathrm{d}\alpha_1}{\mathrm{d}s}$,$\frac{\mathrm{d}\alpha_2}{\mathrm{d}s}$,$\frac{\mathrm{d}\alpha_3}{\mathrm{d}s}$能用线段$MN$对单位矢量$\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{e}_3$的方向余弦$l_1$,$l_2$,$l_3$表示出来。实际上,从

$$l_1 = h_1\frac{\mathrm{d}\alpha_1}{\mathrm{d}s},\qquad l_2 = h_3\frac{\mathrm{d}\alpha_2}{\mathrm{d}s},\qquad l_3 = h_3\frac{\mathrm{d}\alpha_3}{\mathrm{d}s}$$

式(t)变为

$$E_{MN} = e_{11}\left(\frac{l_1}{h_1}\right)^2 + e_{22}\left(\frac{l_2}{h_2}\right)^2 + e_{33}\left(\frac{l_3}{h_3}\right)^2 + 2e_{23}\left(\frac{l_2 l_3}{h_2 h_3}\right) + 2e_{13}\left(\frac{l_1 l_3}{h_1 h_3}\right) + 2e_{12}\left(\frac{l_1 l_2}{h_1 h_2}\right) \tag{B-26}$$

令

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{\varepsilon}_{11} &= \frac{e_{11}}{h_1^2}\\
\tilde{\varepsilon}_{22} &= \frac{e_{22}}{h_2^2}\\
\tilde{\varepsilon}_{33} &= \frac{e_{33}}{h_3^2}\\
2\tilde{\varepsilon}_{23} &= \frac{2e_{23}}{h_2 h_3}\\
2\tilde{\varepsilon}_{13} &= \frac{2e_{13}}{h_1 h_3}\\
2\tilde{\varepsilon}_{12} &= \frac{2e_{12}}{h_1 h_2}
\end{aligned}\right\} \tag{B-27}$$

于是,式(B-26)可写成

$$E_{MN} = \tilde{\varepsilon}_{11}l_1^2 + \tilde{\varepsilon}_{22}l_2^2 + \tilde{\varepsilon}_{33}l_3^2 + 2\tilde{\varepsilon}_{23}l_2 l_3 + 2\tilde{\varepsilon}_{13}l_1 l_3 + 2\tilde{\varepsilon}_{12}l_1 l_2 \tag{B-28}$$

这里的 $\tilde{\varepsilon}_{11},\tilde{\varepsilon}_{22},\tilde{\varepsilon}_{33},\tilde{\varepsilon}_{23},\tilde{\varepsilon}_{13},\tilde{\varepsilon}_{12}$ 即为正交曲线坐标系下的通常意义下的应变分量，前三者为正应变分量，后三者为切应变分量。式(B-27)给出了 $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ 与 e_{ij} 之间的关系，它既适用于小变形情况，又适用于有限变形情况。

§B-4 正交曲线坐标系中应变与位移的关系

在图 B-5 中，M 点的位移可表示为

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{r}^{*}-\boldsymbol{r} \tag{a}$$

$\boldsymbol{u}$ 为位移矢量，其在曲线坐标系中的分量为 u_1,u_2,u_3；$\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}^{*}$ 分别为 M 点和 M^{*} 点的矢径，其在直角坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 上的分量分别为 x_1,x_2,x_3 和 ξ_1,ξ_2,ξ_3。式(a)对 α_i 求导，有

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \alpha_i}=\frac{\partial \boldsymbol{r}^{*}}{\partial \alpha_i}-\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha_i}=\boldsymbol{b}_i-\boldsymbol{a}_i \tag{b}$$

由此得变形后的度量张量

$$\begin{aligned}G_{ij}&=\boldsymbol{b}_i\cdot\boldsymbol{b}_j=\left(\boldsymbol{a}_i+\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \alpha_i}\right)\cdot\left(\boldsymbol{a}_j+\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \alpha_j}\right)\\&=g_{ij}+\boldsymbol{a}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \alpha_j}+\boldsymbol{a}_j\cdot\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \alpha_i}+\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \alpha_i}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \alpha_j}\end{aligned}$$

而

$$2e_{ij}=G_{ij}-g_{ij}=\boldsymbol{a}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \alpha_j}+\boldsymbol{a}_j\cdot\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \alpha_i}+\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \alpha_i}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \alpha_j} \tag{c}$$

在正交曲线坐标系中，M 点的位移矢量 $\boldsymbol{u}$ 可写为

$$\boldsymbol{u}=u_1\boldsymbol{e}_1+u_2\boldsymbol{e}_2+u_3\boldsymbol{e}_3=u_k\boldsymbol{e}_k \tag{d}$$

这里，$\boldsymbol{e}_i$ 表示沿 $\boldsymbol{a}_i$ 的单位矢量。将式(d)代入式(c)，有

$$\begin{aligned}2e_{ij}=&\boldsymbol{a}_i\cdot\frac{\partial}{\partial \alpha_j}(u_k\boldsymbol{e}_k)+\boldsymbol{a}_j\cdot\frac{\partial}{\partial \alpha_i}(u_s\boldsymbol{e}_s)+\\&\frac{\partial}{\partial \alpha_i}(u_r\boldsymbol{e}_r)\cdot\frac{\partial}{\partial \alpha_j}(u_l\boldsymbol{e}_l)\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}2e_{ij}=&\boldsymbol{a}_i\cdot\frac{\partial}{\partial \alpha_j}(u_1\boldsymbol{e}_1+u_2\boldsymbol{e}_2+u_3\boldsymbol{e}_3)+\boldsymbol{a}_j\cdot\frac{\partial}{\partial \alpha_i}(u_1\boldsymbol{e}_1+u_2\boldsymbol{e}_2+u_3\boldsymbol{e}_3)+\\&\frac{\partial}{\partial \alpha_i}(u_1\boldsymbol{e}_1+u_2\boldsymbol{e}_2+u_3\boldsymbol{e}_3)\cdot\frac{\partial}{\partial \alpha_j}(u_1\boldsymbol{e}_1+u_2\boldsymbol{e}_2+u_3\boldsymbol{e}_3)\end{aligned} \tag{e}$$

利用式(B-18)至(B-20)，由式(e)得

$$e_{11}=h_1\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1}+\frac{h_1u_2}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial \alpha_2}+\frac{h_1u_3}{h_3}\frac{\partial h_1}{\partial \alpha_3}+$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1}+\frac{u_2}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial \alpha_2}+\frac{u_3}{h_3}\frac{\partial h_1}{\partial \alpha_3}\right)^2+$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}-\frac{u_1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial \alpha_2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1}-\frac{u_1}{h_3}\frac{\partial h_1}{\partial \alpha_3}\right)^2 \tag{B-29a}$$

$$e_{22}=h_2\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2}+\frac{h_2u_3}{h_3}\frac{\partial h_2}{\partial \alpha_3}+\frac{h_2u_1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial \alpha_1}+$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2}+\frac{u_3}{h_3}\frac{\partial h_2}{\partial \alpha_3}+\frac{u_1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial \alpha_1}\right)^2+$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2}-\frac{u_2}{h_3}\frac{\partial h_2}{\partial \alpha_3}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2}-\frac{u_2}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial \alpha_1}\right)^2 \tag{B-29b}$$

$$e_{33}=h_3\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_3}+\frac{h_3u_1}{h_1}\frac{\partial h_3}{\partial \alpha_1}+\frac{h_3u_2}{h_2}\frac{\partial h_3}{\partial \alpha_2}+$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_3}+\frac{u_1}{h_1}\frac{\partial h_3}{\partial \alpha_1}+\frac{u_2}{h_2}\frac{\partial h_3}{\partial \alpha_2}\right)^2+$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_3}-\frac{u_3}{h_1}\frac{\partial h_3}{\partial \alpha_1}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_3}-\frac{u_3}{h_2}\frac{\partial h_3}{\partial \alpha_2}\right)^2 \tag{B-29c}$$

$$e_{23}=\frac{1}{2}\left(h_3\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2}+h_2\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_3}-u_2\frac{\partial h_2}{\partial \alpha_3}-u_3\frac{\partial h_3}{\partial \alpha_2}\right)+$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_3}-\frac{u_3}{h_2}\frac{\partial h_3}{\partial \alpha_2}\right)\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2}+\frac{u_3}{h_3}\frac{\partial h_2}{\partial \alpha_3}+\frac{u_1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial \alpha_1}\right)+$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2}-\frac{u_2}{h_3}\frac{\partial h_2}{\partial \alpha_3}\right)\left(\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_3}+\frac{u_2}{h_2}\frac{\partial h_3}{\partial \alpha_2}+\frac{u_1}{h_1}\frac{\partial h_3}{\partial \alpha_1}\right)+$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2}-\frac{u_2}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial \alpha_1}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_3}-\frac{u_3}{h_1}\frac{\partial h_3}{\partial \alpha_1}\right) \tag{B-29d}$$

$$e_{13}=\frac{1}{2}\left(h_1\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_3}+h_3\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1}-u_3\frac{\partial h_3}{\partial \alpha_1}-u_1\frac{\partial h_1}{\partial \alpha_3}\right)+$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1}-\frac{u_1}{h_3}\frac{\partial h_1}{\partial \alpha_3}\right)\left(\frac{\partial u_3}{\partial h_3}+\frac{u_1}{h_1}\frac{\partial h_3}{\partial \alpha_1}+\frac{u_2}{h_2}\frac{\partial h_3}{\partial \alpha_2}\right)+$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_3}-\frac{u_3}{h_1}\frac{\partial h_3}{\partial \alpha_1}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1}+\frac{u_3}{h_3}\frac{\partial h_1}{\partial \alpha_3}+\frac{u_2}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial \alpha_2}\right)+$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_3}-\frac{u_3}{h_2}\frac{\partial h_3}{\partial \alpha_2}\right)\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}-\frac{u_1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial \alpha_2}\right) \tag{B-29e}$$

$$e_{12}=\frac{1}{2}\left(h_2\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}+h_1\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2}-u_1\frac{\partial h_1}{\partial \alpha_2}-u_2\frac{\partial h_2}{\partial \alpha_1}\right)+$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2}-\frac{u_2}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial \alpha_1}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1}+\frac{u_2}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial \alpha_2}+\frac{u_3}{h_3}\frac{\partial h_1}{\partial \alpha_3}\right)+$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}-\frac{u_1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial \alpha_2}\right)\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2}+\frac{u_1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial \alpha_1}+\frac{u_3}{h_3}\frac{\partial h_2}{\partial \alpha_3}\right)+$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1}-\frac{u_1}{h_3}\frac{\partial h_1}{\partial \alpha_3}\right)\left(\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2}-\frac{u_2}{h_3}\frac{\partial h_2}{\partial \alpha_3}\right) \tag{B-29f}$$

将式(B-29)代入式(B-26),可求得 E_{MN} 的值。知道了 e_{ij},还可通过式(B-27)求得应变分量 ε_{ij}。

例如,对于直角坐标系,有 $h_1=h_2=h_3=1$。由式(B-29)和式(B-27),并将其中的 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 换成 x_1,x_2,x_3,得

$$\tilde{\varepsilon}_{11}=e_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2\right]$$
$$\tilde{\varepsilon}_{22}=e_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)^2\right]$$
$$\tilde{\varepsilon}_{33}=e_{33}=\frac{\partial u_3}{\partial x_3}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2\right]$$
$$2\tilde{\varepsilon}_{23}=2e_{23}=\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)$$
$$2\tilde{\varepsilon}_{13}=2e_{13}=\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)$$
$$2\tilde{\varepsilon}_{12}=2e_{12}=\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)$$

这就是式(3-22)。

对于圆柱坐标,$h_1=1,h_2=\rho,h_3=1$。由式(B-29)和式(B-27),并将 1、2、3 和 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 分别用 ρ,φ,z 代替,得

$$\tilde{\varepsilon}_{\rho\rho}=\frac{e_{\rho\rho}}{(1)(1)}=\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}\right)^2+\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho}\right)^2+\left(\frac{\partial u_z}{\partial \rho}\right)^2\right]$$
$$\tilde{\varepsilon}_{\varphi\varphi}=\frac{e_{\varphi\varphi}}{(\rho)(\rho)}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{u_\rho}{\rho}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{u_\rho}{\rho}\right)^2+\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi}-\frac{u_\varphi}{\rho}\right)^2+\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi}\right)^2\right]$$
$$\tilde{\varepsilon}_{zz}=\frac{e_{zz}}{(1)(1)}=\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_\rho}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2\right]$$
$$2\tilde{\varepsilon}_{\varphi z}=\frac{2e_{\varphi z}}{(\rho)(1)}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}+\frac{\partial u_\rho}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi}-\frac{u_\rho}{\rho}\right)+\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{u_\rho}{\rho}\right)+\frac{\partial u_z}{\partial z}\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi}$$

$$2\tilde{\varepsilon}_{\rho z}=\frac{2e_{\rho z}}{(1)(1)}=\frac{\partial u_\rho}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial \rho}+\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}\frac{\partial u_\rho}{\partial z}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho}\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial \rho}\frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$2\tilde{\varepsilon}_{\rho\varphi}=\frac{2e_{\rho\varphi}}{(1)(\rho)}=\frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi}-\frac{u_\varphi}{\rho}+\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi}-\frac{u_\varphi}{\rho}\right)+$$

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{u_\rho}{\rho}\right)+\frac{\partial u_z}{\partial \rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi}$$

忽略二阶微量,得到用于线性理论的应变与位移的关系如下:

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{\rho\rho}&=\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}\\
\varepsilon_{\varphi\varphi}&=\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{u_\rho}{\rho}\\
\varepsilon_{zz}&=\frac{\partial u_z}{\partial z}\\
2\varepsilon_{\varphi z}&=\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}\\
2\varepsilon_{\rho z}&=\frac{\partial u_\rho}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial \rho}\\
2\varepsilon_{\rho\varphi}&=\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho}-\frac{u_\varphi}{\rho}
\end{aligned}\right\}\qquad (B-30)$$

对于球坐标,有 $h_1=r,h_2=r\sin\theta,h_3=1$。用 θ,φ,r 代替式(B-29)和(B-27)中的 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和 1,2,3,得

$$\tilde{\varepsilon}_{\theta\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{u_\theta}{r}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}-\frac{u_\theta}{r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{u_r}{r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta}\right)^2\right]$$

$$\tilde{\varepsilon}_{\varphi\varphi}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{u_r}{r}+\frac{u_\theta}{r}\cot\theta+\frac{1}{\sin^2\theta}\left[\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}-\frac{u_\varphi}{r}\sin\theta\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi}-\frac{u_\varphi}{r}\cos\theta\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{u_r}{r}\sin\theta+\frac{u_\theta}{r}\cos\theta\right)^2\right]$$

$$\tilde{\varepsilon}_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}\right)^2\right]$$

$$2\tilde{\varepsilon}_{\varphi r}=\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}-\frac{u_\varphi}{r}+\frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{\partial u_r}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}-\frac{u_\varphi}{r}\sin\theta\right)+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi}-\frac{u_\varphi}{r}\cos\theta\right)+\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{u_r}{r}\sin\theta+\frac{u_\theta}{r}\cos\theta\right)\right]$$

$$2\tilde{\varepsilon}_{\theta r}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}-\frac{u_\theta}{r}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\left[\frac{\partial u_r}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}-\frac{u_\theta}{r}\right)+\right.$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{u_r}{r}\right)+\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta}\Big]$$

$$2\varepsilon_{\theta\varphi}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi}-\frac{u_\varphi}{r}\cot\theta+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta}+$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\Big[\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}-\frac{u_\theta}{r}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}-\frac{u_\varphi}{r}\sin\theta\right)+$$

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{u_r}{r}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi}-\frac{u_\varphi}{r}\cot\theta\right)+$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{u_r}{r}\sin\theta+\frac{u_\theta}{r}\cos\theta\right)\Big]$$

略去二阶微量，得到应用于线性理论的应变与位移的关系如下：

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{\theta\theta}&=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{u_r}{r}\\
\varepsilon_{\varphi\varphi}&=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{u_r}{r}+\frac{u_\theta}{r}\cot\theta\\
\varepsilon_{rr}&=\frac{\partial u_r}{\partial r}\\
2\varepsilon_{\varphi r}&=\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}-\frac{u_\varphi}{r}\\
2\varepsilon_{\theta r}&=\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}-\frac{u_\varphi}{r}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\\
2\varepsilon_{\theta\varphi}&=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi}-\frac{u_\varphi}{r}\cot\theta+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta}
\end{aligned}\right\}\qquad(B-31)$$

§B-5 正交曲线坐标系中的平衡微分方程

考察图 B-6 所示的曲边六面体并写出作用于其上的力的平衡条件，可得平衡微分方程。令作用在微分面 $OGFE$，$OADE$ 和 $OABG$ 上的应力矢量分别为 $\boldsymbol{f}_{\alpha_1}$，$\boldsymbol{f}_{\alpha_2}$ 和 $\boldsymbol{f}_{\alpha_3}$。作用在面 $OGFE$ 上的力矢量为 $\boldsymbol{f}_{\alpha_1}h_1h_2\mathrm{d}\alpha_2\mathrm{d}\alpha_3$，而作用在 $ABCD$ 面上的力矢量等于

$$\left(\boldsymbol{f}_{\alpha_1}+\frac{\partial \boldsymbol{f}_{\alpha_1}}{\partial \alpha_1}\mathrm{d}\alpha_1\right)\left[h_2h_3\mathrm{d}\alpha_2\mathrm{d}\alpha_3+\frac{\partial}{\partial \alpha_1}(h_2h_3)\mathrm{d}\alpha_2\mathrm{d}\alpha_3\mathrm{d}\alpha_1\right]$$

$$=\boldsymbol{f}_{\alpha_1}h_2h_3\mathrm{d}\alpha_2\mathrm{d}\alpha_3+\boldsymbol{f}_{\alpha_1}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}(h_2h_3)\mathrm{d}\alpha_1\mathrm{d}\alpha_2\mathrm{d}\alpha_3+$$

$$h_2h_3\frac{\partial \boldsymbol{f}_{\alpha_1}}{\partial \alpha_1}\mathrm{d}\alpha_1\mathrm{d}\alpha_2\mathrm{d}\alpha_3+\frac{\partial \boldsymbol{f}_{\alpha_1}}{\partial \alpha_1}\frac{\partial (h_2h_3)}{\partial \alpha_1}(\mathrm{d}\alpha_1)^2\mathrm{d}\alpha_2\mathrm{d}\alpha_3$$

最后一项是四阶无穷小，可以忽略，因此，作用在 $ABCD$ 面上的力矢量为

$$\boldsymbol{f}_{\alpha_1} h_2 h_3 \mathrm{d}\alpha_2 \mathrm{d}\alpha_3 + \frac{\partial}{\partial \alpha_1}(\boldsymbol{f}_{\alpha_1} h_2 h_3)\mathrm{d}\alpha_1 \mathrm{d}\alpha_2 \mathrm{d}\alpha_3$$

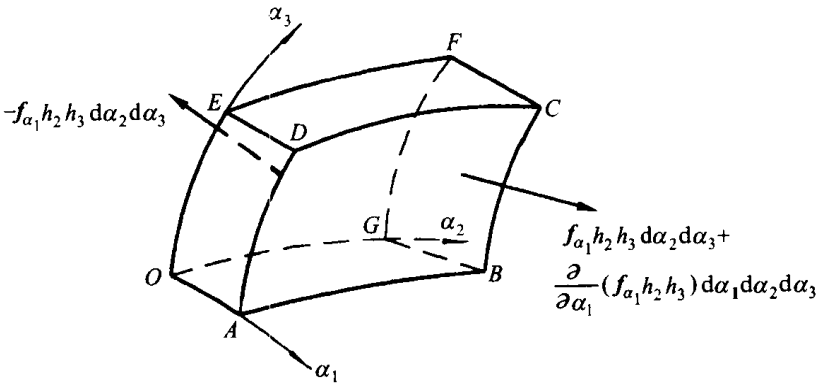


图 B-6

对曲边六面体的其他四个面，重复同样的步骤，用 $\boldsymbol{F}$ 表示单位体积的体力矢量，而微元体的体力矢量为

$$\boldsymbol{F} h_1 h_2 h_3 \mathrm{d}\alpha_1 \mathrm{d}\alpha_2 \mathrm{d}\alpha_3$$

于是，此六面体平衡条件的矢量形式为

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1}(\boldsymbol{f}_{\alpha_1} h_2 h_3)\mathrm{d}\alpha_1 \mathrm{d}\alpha_2 \mathrm{d}\alpha_3 + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}(\boldsymbol{f}_{\alpha_2} h_1 h_3)\mathrm{d}\alpha_1 \mathrm{d}\alpha_2 \mathrm{d}\alpha_3 +$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_3}(\boldsymbol{f}_{\alpha_3} h_1 h_2)\mathrm{d}\alpha_1 \mathrm{d}\alpha_2 \mathrm{d}\alpha_3 + \boldsymbol{F} h_1 h_2 h_3 \mathrm{d}\alpha_1 \mathrm{d}\alpha_2 \mathrm{d}\alpha_3 = 0$$

或

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1}(\boldsymbol{f}_{\alpha_1} h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}(\boldsymbol{f}_{\alpha_2} h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3}(\boldsymbol{f}_{\alpha_3} h_1 h_2) + \boldsymbol{F} h_1 h_2 h_3 = 0 \tag{a}$$

由于

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{f}_{\alpha_1} &= \sigma_{11}\boldsymbol{e}_1 + \sigma_{12}\boldsymbol{e}_2 + \sigma_{13}\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{f}_{\alpha_2} &= \sigma_{21}\boldsymbol{e}_1 + \sigma_{22}\boldsymbol{e}_2 + \sigma_{23}\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{f}_{\alpha_3} &= \sigma_{31}\boldsymbol{e}_1 + \sigma_{32}\boldsymbol{e}_2 + \sigma_{33}\boldsymbol{e}_3 \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

其中，σ_{ij} 为应力分量。于是，将式(b)代入式(a)后，得平衡微分方程为

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1}[h_2 h_3(\sigma_{11}\boldsymbol{e}_1 + \sigma_{12}\boldsymbol{e}_2 + \sigma_{13}\boldsymbol{e}_3)] +$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2}[h_1 h_3(\sigma_{21}\boldsymbol{e}_1 + \sigma_{22}\boldsymbol{e}_2 + \sigma_{23}\boldsymbol{e}_3)] +$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_3}[h_1 h_2(\sigma_{31}\boldsymbol{e}_1+\sigma_{32}\boldsymbol{e}_2+\sigma_{33}\boldsymbol{e}_3)]+$$

$$\boldsymbol{F}h_1 h_2 h_3=0 \tag{B-32}$$

为了将方程(B-32)写成在曲线坐标切线方向 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 上的3个投影式，我们先利用式(B-18)至(B-20)导出以下的恒等式：

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \alpha_1}[h_2 h_3(\sigma_{11}\boldsymbol{e}_1+\sigma_{12}\boldsymbol{e}_2+\sigma_{13}\boldsymbol{e}_3)]\\
&\quad=\boldsymbol{e}_1\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1}(\sigma_{11}h_2h_3)+h_3\sigma_{12}\frac{\partial h_1}{\partial \alpha_2}+h_2\sigma_{13}\frac{\partial h_1}{\partial \alpha_3}\right]+\\
&\qquad\boldsymbol{e}_2\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1}(\sigma_{12}h_2h_3)-h_3\sigma_{11}\frac{\partial h_1}{\partial \alpha_2}\right]+\\
&\qquad\boldsymbol{e}_3\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1}(\sigma_{13}h_2h_3)-h_2\sigma_{11}\frac{\partial h_1}{\partial \alpha_3}\right]
\end{aligned}\tag{c}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \alpha_2}[h_1 h_3(\sigma_{21}\boldsymbol{e}_1+\sigma_{22}\boldsymbol{e}_2+\sigma_{23}\boldsymbol{e}_3)]\\
&\quad=\boldsymbol{e}_1\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_2}(\sigma_{21}h_1h_3)-h_3\sigma_{22}\frac{\partial h_2}{\partial \alpha_1}\right]+\\
&\qquad\boldsymbol{e}_2\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_2}(\sigma_{22}h_1h_3)+h_3\sigma_{21}\frac{\partial h_2}{\partial \alpha_1}+h_1\sigma_{23}\frac{\partial h_2}{\partial \alpha_3}\right]+\\
&\qquad\boldsymbol{e}_3\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_2}(\sigma_{23}h_1h_3)-h_1\sigma_{22}\frac{\partial h_2}{\partial \alpha_3}\right]
\end{aligned}\tag{d}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \alpha_3}[h_1 h_2(\sigma_{31}\boldsymbol{e}_1+\sigma_{32}\boldsymbol{e}_2+\sigma_{33}\boldsymbol{e}_3)]\\
&\quad=\boldsymbol{e}_1\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_3}(\sigma_{31}h_1h_2)-h_2\sigma_{33}\frac{\partial h_3}{\partial \alpha_1}\right]+\\
&\qquad\boldsymbol{e}_2\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_3}(\sigma_{32}h_1h_2)-h_1\sigma_{33}\frac{\partial h_3}{\partial \alpha_2}\right]+\\
&\qquad\boldsymbol{e}_3\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_3}(\sigma_{33}h_1h_2)+h_2\sigma_{31}\frac{\partial h_3}{\partial \alpha_1}+h_1\sigma_{32}\frac{\partial h_3}{\partial \alpha_3}\right]
\end{aligned}\tag{e}$$

将式(c),(d),(e)代入方程(B-32)，按矢量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 归并系数，并令单位体积体力 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 上的投影为 F_1,F_2,F_3，于是，可得正交曲线坐标系中的平衡微分方程的标量形式：

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(\sigma_{11}h_2h_3)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(\sigma_{21}h_1h_3)+\frac{\partial}{\partial\alpha_3}(\sigma_{31}h_1h_2)+\\
&\quad\sigma_{12}h_3\frac{\partial h_1}{\partial\alpha_2}+\sigma_{13}h_2\frac{\partial h_1}{\partial\alpha_3}-\sigma_{22}h_3\frac{\partial h_2}{\partial\alpha_1}-\sigma_{33}h_2\frac{\partial h_3}{\partial\alpha_1}+\\
&\quad h_1h_2h_3F_1=0\\
&\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(\sigma_{12}h_2h_3)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(\sigma_{22}h_1h_3)+\frac{\partial}{\partial\alpha_3}(\sigma_{32}h_1h_2)+\\
&\quad\sigma_{23}h_1\frac{\partial h_2}{\partial\alpha_3}+\sigma_{21}h_3\frac{\partial h_2}{\partial\alpha_1}-\sigma_{33}h_1\frac{\partial h_3}{\partial\alpha_2}-\sigma_{11}h_3\frac{\partial h_1}{\partial\alpha_2}+\\
&\quad h_1h_2h_3F_2=0\\
&\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(\sigma_{13}h_2h_3)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(\sigma_{23}h_1h_3)+\frac{\partial}{\partial\alpha_3}(\sigma_{33}h_1h_2)+\\
&\quad\sigma_{31}h_2\frac{\partial h_3}{\partial\alpha_1}+\sigma_{32}h_1\frac{\partial h_3}{\partial\alpha_2}-\sigma_{11}h_2\frac{\partial h_1}{\partial\alpha_3}-\sigma_{22}h_1\frac{\partial h_2}{\partial\alpha_3}+\\
&\quad h_1h_2h_3F_3=0
\end{aligned}\right\}\qquad(B-33)
$$

例如：对于圆柱坐标(图 B－7)，$h_1=1$，$h_2=\rho$，$h_3=1$。

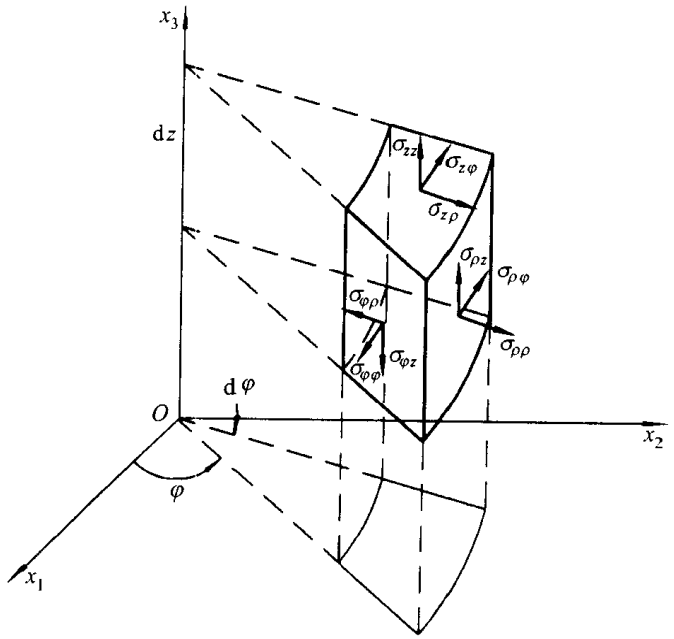


图 B－7

在式(B－33)中，以 ρ,φ,z 代替 1,2,3 和 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，得

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_{\rho\rho}}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{\varphi\rho}}{\partial \varphi}+\frac{\partial \sigma_{z\rho}}{\partial z}+\frac{1}{\rho}(\sigma_{\rho\rho}-\sigma_{\varphi\varphi})+F_{\rho}=0\\
&\frac{\partial \sigma_{\rho\varphi}}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi}+\frac{\partial \sigma_{z\varphi}}{\partial z}+\frac{2}{\rho}\sigma_{\rho\varphi}+F_{\varphi}=0\\
&\frac{\partial \sigma_{\rho z}}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi}+\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\sigma_{\rho z}+F_{z}=0
\end{aligned}\right\} \tag{B-34}$$

又如:对于球坐标(图 B-8),$h_1=r$,$h_2=R\sin\theta$,$h_3=1$。

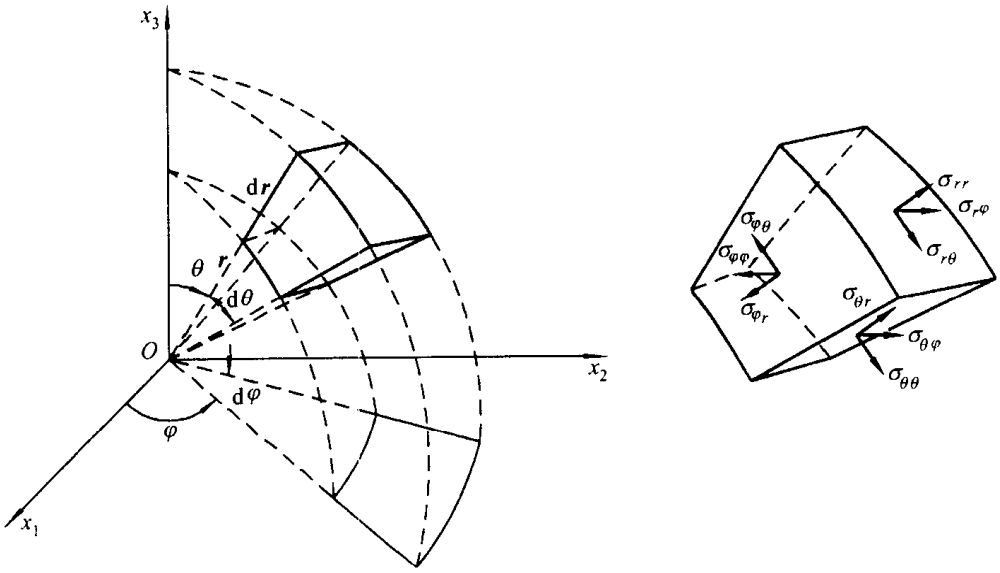


图 B-8

式(B-33)中的 1,2,3 和 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 分别用 θ,φ,r 代替,于是得

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \sigma_{\varphi r}}{\partial \varphi}+\\
&\quad\frac{1}{r}(2\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{\varphi\varphi}+\sigma_{r\theta}\cot\theta)+F_{r}=0\\
&\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \sigma_{\varphi\theta}}{\partial \varphi}+\\
&\quad\frac{1}{r}(\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{\varphi\varphi})\cot\theta+3\sigma_{r\theta}+F_{\theta}=0\\
&\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi}+\\
&\quad\frac{1}{r}(3\sigma_{r\varphi}+2\sigma_{\theta\varphi}\cot\theta)+F_{\varphi}=0
\end{aligned}\right\} \tag{B-35}$$

参考文献

1 钱伟长,叶开源．弹性力学．北京:科学出版社,1956
2 徐芝纶．弹性力学:上册．第3版．北京:高等教育出版社,1990
3 杜庆华,余寿文,姚振汉．弹性理论．北京:科学出版社,1986
4 王光远．弹性及塑性理论．北京:中国建筑工业出版社,1959
5 王龙甫．弹性理论．第2版．北京:科学出版社,1984
6 杨桂通．弹性力学．北京:高等教育出版社,1998
7 陆明万,罗学富．弹性理论基础．北京:清华大学出版社,1990
8 谢贻权,林钟祥,丁皓江．弹性力学．杭州:浙江大学出版社,1988
9 杨绪灿,金建三．弹性力学．北京:高等教育出版社,1987
10 武际可,王敏中．弹性力学引论．北京:北京大学出版社,1981
11 程昌钧．弹性力学．兰州:兰州大学出版社,1995
12 钟伟芳,皮道华．高等弹性力学．武汉:华中理工大学出版社,1993
13 张行主编．高等弹性理论．北京:北京航空航天大学出版社,1994
14 黄怡筠,程兆雄．弹性理论基础．北京:北京理工大学出版社,1988
15 蒋咏秋主编．弹性力学基础．西安:陕西科技出版社,1984
16 俞嘉声主编．弹性力学教程．北京:高等教育出版社,1991
17 费洛宁科－鲍罗第契 M M. 弹性理论．新一版．朱广才,马士修译．北京:高等教育出版社,1958
18 别茹霍夫 Н И. 弹性与塑性理论．杜庆华等译．北京:高等教育出版社,1956
19 卡兹 A M. 弹性理论．王知民译．北京:机械工业出版社,1959
20 樊大钧．数学弹性力学．北京:新时代出版社,1983
21 萨文 Г Н. 孔附近的应力集中．北京:科学出版社,1958
22 许耀中．弹性力学中的复变函数方法．北京:高等教育出版社,1989
23 竹内洋一郎．热应力．北京:科学出版社,1977
24 梅兰 E,帕尔库斯 H. 由于定常温度场而产生的热应力．何善堉译．北京:科学出版社,1955
25 严宗达,王洪礼．热应力．北京:高等教育出版社,1993
26 杨桂通,张善元．弹性动力学．北京:中国铁道出版社,1988
27 熊祝华,郭平．弹性动力学．长沙:湖南大学出版社,1989
28 考尔斯基 H. 固体中的应力波．王仁等译．北京:科学出版社,1966
29 徐芝纶．弹性力学:下册．第3版．北京:高等教育出版社,1982
30 寿楠椿．弹性薄板的弯曲．北京:高等教育出版社,1986

31 何福保,沈亚鹏．板壳理论．西安:西安交通大学出版社,1993
32 钱伟长．变分法及有限元．北京:科学出版社,1980
33 胡海昌．弹性力学的变分原理及应用．北京:科学出版社,1981
34 熊祝华,刘子廷．弹性力学变分原理．长沙:湖南大学出版社,1986
35 丁学成．弹性力学中的变分方法．北京:高等教育出版社,1986
36 列宾逊 Л.С. 弹性力学问题的变分解法．叶开源,卢文达译．北京:科学出版社,1958
37 鹫津久一郎．弹性和塑性力学的变分方法．北京:科学出版社,1984
38 龙驭球．有限单元法概论．北京:人民教育出版社,1978
39 谢贻权,何福保．弹性和塑性力学中的有限元法．北京:机械工业出版社,1981
40 卓家寿．弹性力学中的有限元法．北京:高等教育出版社,1988
41 张允真,曹富新．弹性力学及其有限元法．北京:中国铁道出版社,1983
42 徐秉业等．弹性力学与塑性力学解题指导及习题集．北京:高等教育出版社,1985
43 Love A E H. A Treatise on the mathematical theory of elasticity. New York: Dover Publications Inc, 1944
44 Sokolnikoff I S. Mathematical theory of elasticity. 2nd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1956
45 Saada A S. Elasticity, theory and applications. New York: Pergamon Press Inc. 1974
46 Little R W. Elasticity. New Jersey: Prentice－Hall Inc, 1973
47 Amenzade Yu A. Theory of elasticity. Translated from Russian by Konyaeva M. Moscow: Mir Publishers, 1979
48 Timoshenko S P, Goodier J N. Theory of elasticity. 3rd ed. New York: McGraw－Hill Book Co, 1970(中译本:铁摩辛柯,古地尔．弹性理论．徐芝纶译．北京:高等教育出版社,1990)
49 Timoshenko S P, Woinowsky－Krieger S. Theory of plates and Shells. 2nd ed. New York: McGraw-Hill Book Co. Inc, 1959 (中译本:铁摩辛柯,沃诺斯基．板壳理论．《板壳理论》翻译组译．北京:科学出版社,1977)
50 Muskhelishivili N I. Some basic problems of mathematical theory of elasticity. 4th ed. Translated from Russian by Radok J R M. Leyden (The Netherlands): Noordhoff International Publishing, 1977(中译本:穆斯赫利什维利 Н И. 数学弹性力学的几个基本问题．赵惠元译．北京:科学出版社,1958)
51 Rekach V G. Manual of the theory of elasticity. Translated from Russian by Kanyaeva M. Moscow: Mir Publishers, 1979(中译本:列卡奇 В Г. 弹性力学概要与经典题解．姜弘道等译．北京:高等教育出版社,1988)

索　引

（按汉语拼音字母顺序）

A

艾里应力函数 （Airy stress funtion） 105

B

板 （plate） 316
板边 （boundary of plate） 316
板的抗弯刚度 （flexural rigidity of plate） 321
板的内力 （internal force of plate） 322
板的中面 （middle plane of plate） 316
半带存贮 （semiband width storage） 408
半逆解法 （semi－inverse method） 83
贝尔特拉米－米歇尔方程 （Beltrami－Michell equation） 77
贝蒂互换定理 （Betti reciprocal theorem） 361
变温 （temperature change） 277
表层波 （surface wave） 306
薄板 （thin plate） 316
薄板弯曲的基本方程 （basic equation for the bending of thin plate） 324
薄膜比拟 （membrane analogy） 220
布西内斯克－符拉芒问题 （Boussinesq－Flamant problem） 166
布西内斯克问题 （Boussinesq problem） 259
布西内斯克－伽辽金通解 （Boussinesq－Galerkin general solution） 255

C

产熵 （entropy production） 58
沉陷 （settlement） 169，261

D

大挠度问题 （large deflection problem） 316
单位张量 （unit tensor） 419
单元分析 （element analysis） 403
单元刚度矩阵 （element stiffness matrix） 407
等容波 （equivoluminal wave） 305
等容的位移场 （equivoluminal displacement field） 250
叠加原理 （superposition principle） 80
度量张量 （metric tensor） 427
对称张量 （symmetric tensor） 418

E

二阶张量 （second order tensor） 417

F

反对称张量 （anti－symmetric tensor） 419
反射 （reflection） 310
傅里叶变换 （Fourier transform） 130
傅里叶积分 （Fourier integral） 130
复位势 （complex potential） 175

G

格林公式 (Green formula) 59
各向同性假设 (isotropic hypothesis) 3
供熵 (entropy supply) 58
广义变分原理 (generalized variational principle) 391
广义胡克定律 (generalized Hooke law) 55

H

哈密顿变分原理 (Hamilton variational principle) 398
哈密顿作用量 (Hamilton action) 398
赫林格－赖斯纳变分原理 (Hellinger－Reissner variational principle) 395
亥姆霍兹定理 (Helmholtz theorem) 250
横观各向同性弹性体 (transverse isotropic elastic body) 63
横波 (transverse wave) 302
厚板 (thick plate) 316
胡海昌－鹫津久一郎变分原理 (Hu Haichang－Washizu variational principle) 391
混合边值问题 (mixed boundary－value problem) 73

J

畸变波 (distortion wave) 305
基尔霍夫假设 (Kirchhoff hypothesis) 317
基矢量 (base vector) 427
几何方程 (geometrical equation) 34
几何可能的位移 (geometrically possible displacement) 359
几何可能的应变 (geometrically possible strain) 359
几何线性的假设 (geometrically linear hypothesis) 4
伽辽金法 (Galerkin method) 372
伽辽金矢量 (Galerkin vector) 255
结点 (node) 402
结点荷载 (nodal load) 402
结点力 (nodal force) 403
结点位移 (nodal displacement) 404
解的唯一性定理 (theorem of uniqueness solution) 80
静力可能的应力 (statically possible stress) 358
均匀性假设 (homogeneous hypothesis) 3
局部编码 (local coding) 403

K

卡斯蒂利亚诺公式 (Castigliano formula) 382
开尔文问题 (Kelvin problem) 258
抗扭刚度 (torsional rigidity) 87
柯西方程 (Cauchy equation) 34
克罗内克 δ 符号 (Kroneckerdelta symbol) 415

L

拉格朗日法 (Lagrange method) 48
拉格朗日函数 (Lagrange function) 398
拉格朗日应变分量 (Lagrange strain components) 49
拉梅常数 (Lamé constants) 67
拉梅方程 (Lamé equation) 75
拉梅系数 (Lamé coefficient) 427
拉梅应变势 (Lamé strain potential) 251
莱维方程 (Lévy equation) 101
莱维解 (Lévy solution) 338
勒夫应变函数 (Love strain function) 255
离散化 (discretization) 402
连续性假设 (continuous hypothesis) 3
梁的纯弯曲 (pure bending of beam) 88

M

面力 (surface force) 7
膜板 (membrane plate) 316

N

纳维解 (Navier solution) 334
内力 (internal force) 7
内能密度 (density of internal energy) 57
逆解法 (inverse method) 83
纽勃－巴博考维奇通解 (Neuber－Papkovich general solution) 256

O

欧拉法 (Euler method) 48
欧拉应变分量 (Euler strain components) 50
耦合 (coupling) 277

P

膨胀波 (dilatation wave) 305
平衡微分方程 (differential equatior of equilibrium) 13
平面波 (plane wave) 303
平面应变问题 (plane strain problem) 99
平面应力问题 (plane stress problem) 102
泊松比 (Poisson ratio) 68
普朗特比拟 (Prandtl analogy) 220
普朗特应力函数 (Prandtl stress function) 218

Q

切变模量 (shear modulus) 69
切应变 (shear strain) 31
切应力 (shear stress) 8
切应力互等定理 (reciprocal theorem of shear stress) 14
切应力线 (shear stress lines) 222
求和约定 (summation convention) 420
球面波 (spherical wave) 308
曲线坐标 (curvilinear coordinates) 424

R

热力学第一定律 (first law of thermodynamics) 55
热力学第二定律 (second law of thermodynamics) 58
热弹性应变势 (thermal elastic strain potential) 288
热应力 (thermal stress) 277
热传导方程 (heat－conduction equation) 277
瑞利波 (Rayleigh wave) 308
瑞利－里茨法 (Rayleigh－Ritz method) 370

S

三阶张量 (third order tensor) 418
塞路蒂问题 (Cerruti problem) 261
圣维南扭转函数 (Saint－Venant torsion function) 215
圣维南方程 (Saint－Venant equation) 45
圣维南原理 (Saint－Venant principle) 83
数学弹性力学 (mathematical elasticity) 4

T

弹性 (elasticity) 1
弹性波 (elastic wave) 299
弹性常数 (elastic constants) 55
弹性对称面 (elastic symmetric plane) 61
弹性力学的平面问题 (plane problem of elasticity) 98
弹性力学的第一(第二、第三)类边值问题 (first (second, third) kind boundary－value problem of elasticity) 73

弹性曲面的微分方程 (differential equation of elastic surface) 324
弹性体 (elastic body) 1
弹性体的虚功原理 (principle of virtual work for elastic solid) 359
弹性主方向 (elastic principal direction) 61
弹性矩阵 (elastic matrix) 401
体力 (body force) 7
体应变胡克定律 (Hooke's law of volume strain) 67

W

完全弹性的假设 (perfectly elastic hypothesis) 3
完全弹性体 (perfectly elastic body) 1
位移边界条件 (displacement boundary condition) 72
位移变分方程 (displacement variational equation) 362
位移场的势函数分解式 (potential functions decomposition of displacement field) 251
位移分量 (displacement components) 31
位移解法 (displacement method) 74
位移的形函数 (displacement shape function) 405
无初始应力的假设 (no initial stress hypothesis) 4
无旋波 (irrotational wave) 304
无旋的位移场 (irrotational displacement field) 250
物理线性的假设 (physically linear hypothesis) 3

X

线膨胀系数 (linear expansion coefficient) 279
线性弹性力学 (linear elasticity) 4
线性热弹性力学 (linear thermal elasticity) 277
相对位移张量 (relative displacement tensor) 35
小变形假设 (infinitesimal deformation hypothesis) 4
小挠度问题 (small deflection problem) 316
形函数矩阵 (shape function matrix) 405
虚位移 (virtual displacement) 362
虚位移方程 (virtual displacement equation) 362
虚应变 (virtual strain) 362
虚应力 (virtual stress) 382
虚应力方程 (virtual stress equation) 383

Y

哑指标 (dummy index) 420
杨氏模量 (Young modulus) 68
一点的应变状态 (state of strain at a point) 30
一点的应力状态 (state of stress at a point) 9
以位移表示的平衡微分方程 (differential equation of equilibrium in terms of displacement) 75
应变二次曲面 (quadratic surface of strain) 43
应变分量 (strain components) 32
应变能密度 (strain energy density) 59
应变矩阵 (strain matrix) 405
应变协调方程 (strain compatibility equation) 45
应变余能密度 (density of comlementary strain energy) 381
应变张量 (strain tensor) 35
应变张量不变量 (strain tensor invariant)

42
应变主方向 (principal direction of strain) 39
应力变分方程 (stress variational equation) 383
应力边界条件 (stress boundary condition) 14
应力二次曲面 (quadratic surface of stress) 22
应力分量 (stress components) 9
应力环量 (stress circulation) 223
应力解法 (stress method) 74
应力矩阵 (stress matrix) 405
应力协调方程 (equation of stress compatibility) 78
应力张量 (stress tensor) 9
应力张量不变量 (stress tensor invariant) 19
应力主方向 (principal direction of stress) 18
应力状态特征方程 (characteristic equation of stress state) 19
应用弹性力学 (applied elasticity) 4
有限元 (finite element) 402
圆柱体扭转 (torsion of circular bar) 85

Z

折射 (refraction) 310
整体等效结点荷载列阵 (global equivalent nodal load vector) 408
整体结点位移列阵 (global nodal displacement vector) 408
整体分析 (global analysis) 407
正应变 (normal strain) 31
正应力 (normal stress) 8
正交各向异性弹性体 (orthotropic elastic body) 63
置换张量 (permutation tensor) 422
主应变 (principal strain) 39
主应力 (principal stress) 18
主平面 (principal plane) 18
主切应力 (principal shear stress) 26
转动矢量 (rotation vector) 35
转动分量 (rotation components) 35
自由能密度 (free energy density) 58
自由指标 (free index) 421
纵波 (longitudinal wave) 300
总刚度矩阵 (global stiffness matrix) 408
总势能 (total potential energy) 363
总余能 (total complementary energy) 383
总体编码 (global coding) 402
最小功原理 (principle of least work) 383
最小势能原理 (principle of minimum potential energy) 362
最小余能原理 (principle of minimum complementary energy) 383
坐标曲面 (coordinate surface) 424
坐标曲线 (coordinate curves) 424

外国人名译名对照表

Airy, G. R. 艾里
Beltrami, E. 贝尔特拉米
Betti, E. 贝蒂
Biot, M. A. 毕奥
Boussinesq, T. V. 布西内斯克
Castigliano, A. 卡斯蒂利亚诺
Cauchy, A. -L. 柯西
Cerruti, V. 塞路蒂
d'Alembert, J. Le R. 达朗贝尔
Descartes, R. 笛卡儿
Dirac, P. A. M. 狄拉克
Dirichlet, P.G.L. 狄利克雷
Euler, L. 欧拉
Filon, L.N.G. 菲伦
Flamant, A. 符拉芒
Fourier, J.B.J. 傅里叶
Gauss, C.F. 高斯
Goodier, J.N. 古迪尔
Green, G. 格林
Hamilton, W.R. 哈密顿
Hellinger, E. 赫林格
Helmholtz, H. Von 亥姆霍兹
Hertz, H. R. 赫兹
Hooke, R 胡克
Huth, J. H. 胡斯
Jacobi, C.G.J. 雅可比
Karmán, T. Von 卡门
Kelvin, Lord 开尔文
Kirchhoff, G. R. 基尔霍夫
Kirsch, G. 基尔斯
Kronek, L. 克罗内克
Lagrange, J.-L. 拉格朗日
Lamé, G 拉梅
Laplace, P.-S. 拉普拉斯
Laurent, P.M.H. 罗朗
Lévy, M. 莱维
Love, A.E.H. 乐甫
Michell, J.H. 米歇尔
Murnaghan, F.D. 莫纳汉
Navier, C.-L.-M.-H. 纳维
Neuber, G. 纽勃
Neumann, J.Von 诺伊曼
Newton, I. 牛顿
Poisson, S.-D. 泊松
Prandtl, L. 普朗特
Rayleigh, Lord 瑞利
Reissner, E. 赖斯纳
Riemann, G.F.B. 黎曼
Ritz, W. 里茨
Saint-Venant, A.J.C.B. de 圣维南
Stokes, G. G. 斯托克斯
Taylor, B. 泰勒
Timoshenko, S. P. 铁木辛柯
de Veubeke, B.M.F. 符勃克
Young, T. 杨

Галёркин, Б. Г. 伽辽金
Колосов, Г.В. 克洛索夫
Мусхелищвили Н.И. 穆斯赫利什维利
Папкович П.Ф. 巴博考维奇
Савин, Г.Н. 萨文

部分习题答案

第二章

2-6 $f_v = 1\ 120 \times 10^5$ Pa，$\sigma_v = 265 \times 10^5$ Pa，$\tau_v = 1\ 090 \times 10^5$ Pa

2-7 $I_1 = \sigma_x + \sigma_y$，$I_2 = \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2$，$I_3 = 0$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

2-8 $\sigma_1 = 1\ 222 \times 10^5$ Pa，$\sigma_2 = 494 \times 10^5$ Pa，$\sigma_3 = -317 \times 10^5$ Pa

$\tau_1 = 405.5 \times 10^5$ Pa，$\tau_2 = 769.5 \times 10^5$ Pa，$\tau_3 = 364 \times 10^5$ Pa

$l_1 = 0.88$，$m_1 = 0.48$，$n_1 = 0.002\ 5$

2-10 $f_v = \sqrt{\frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)}$，$\sigma_v = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$

$$\tau_v = \sqrt{\frac{2}{9}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_1\sigma_2)}$$

2-12 $A = -\frac{q}{\tan\beta - \beta}$，$B = \tan\beta - \beta$，$C = -\beta$

2-13 $A = 0$，$B = -\rho_1 g$，$C = \cot\beta(\rho g - 2\rho_1 g\cot^2\beta)$

$D = \rho_1 g\cot^2\beta - \rho g$

第三章

3-3 $\varepsilon_{x'} = \varepsilon_x\cos^2\alpha + \varepsilon_y\sin^2\alpha + \gamma_{xy}\sin\alpha\cos\alpha$

$\varepsilon_{y'} = \varepsilon_x\sin^2\alpha + \varepsilon_y\cos^2\alpha - \gamma_{xy}\sin\alpha\cos\alpha$

$\gamma_{x'y'} = (\varepsilon_y - \varepsilon_x)\sin 2\alpha + \gamma_{xy}\cos 2\alpha$

$\varepsilon_{z'} = \gamma_{y'z'} = \gamma_{x'z'} = 0$

3-5 $\varepsilon_v = \varepsilon_a\cos^2\alpha + \frac{2}{3}\left(\varepsilon_b + \varepsilon_c - \frac{\varepsilon_a}{2}\right)\sin^2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{3}(\varepsilon_b - \varepsilon_c)\sin 2\alpha$

3-6 $J_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y$，$J_2 = \varepsilon_x\varepsilon_y - \frac{1}{4}\gamma_{xy}^2$，$J_3 = 0$

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}$$

3-11 不可能发生

3-12 $u = -\frac{\nu\rho g}{E}xz - dy + bz + c$，$v = -\frac{\nu\rho g}{E}yz + dx - iz + g$

$$w=\frac{\rho g}{2E}[z^2+\nu(x^2+y^2)]-bx+iy+k$$

3-13 $A_1+B_1=2C_2$，$C_1=4$，A_0,B_0,C_0 任意

第四章

4-1 $\sigma_x=\sigma_y=-\dfrac{\nu}{1-\nu}q$，$\sigma_z=-q$

$$\theta=-\frac{1}{E}\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}q$$

$$\tau_{\max}=\pm\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}q$$

第五章

5-3 $\sigma_x=q_1$，$\sigma_y=-q_2$，$\sigma_z=0$

$$u=\frac{q_1+\nu q_2}{E}x,\quad v=-\frac{q_2+\nu q_1}{E}y,\quad w=-\frac{\nu(q_1-q_2)}{E}z$$

5-4 $\sigma_x=\sigma_y=-\dfrac{\nu}{1-\nu}(q+\rho gz)$，$\sigma_z=-(q+\rho gz)$，$\tau_{yz}=\tau_{xz}=\tau_{xy}=0$

$$u=v=0,\quad w-\frac{1-2\nu}{4G(1-\nu)}[\rho g(h^2-z^2)+2q(h\quad z)]$$

5-5 $\sigma_z=\dfrac{F}{A}$，$\sigma_x=\sigma_y=\tau_{yz}=\tau_{xz}=\tau_{xy}=0$

$$u=-\frac{\nu F}{EA}x,\quad v=-\frac{\nu F}{EA}y,\quad w=\frac{F}{EA}z$$

5-6 不是

5-7 $\sigma_z=-\dfrac{F}{A}-\dfrac{Fe}{I_y}x$，$\sigma_x=\sigma_y=\tau_{yz}=\tau_{xz}=\tau_{xy}=0$

5-8 是

第六章

6-3 对于平面应力问题，有

$$\nabla^2\ \nabla^2 U=-(1-\nu)\nabla^2\ V$$

对于平面应变问题，有

$$\nabla^2\ \nabla^2\ U=-\frac{1-2\nu}{1-\nu}\nabla^2\ V$$

6-5 $\sigma_x=\rho gx\cot\alpha-2\rho gy\cot^2\alpha$，$\sigma_y=-\rho gy$，$\tau_{xy}=-\rho gy\cot\alpha$

6-6 $\sigma_x=0$，$\sigma_y=\dfrac{2q}{h}y\left(1-\dfrac{3x}{h}\right)-\rho gy$，$\tau_{xy}=q\dfrac{x}{h}\left(3\dfrac{x}{h}-2\right)$

6-7 $\sigma_x=\rho_1 gy\left(\dfrac{2x^3}{h^3}-\dfrac{3x}{2h}-\dfrac{1}{2}\right)$，$\sigma_y=\dfrac{2\rho_1 g}{h^3}xy^3-\dfrac{4\rho_1 g}{h^3}x^3y-\dfrac{3\rho_1 g}{5h}xy-\rho gy$

$$\tau_{xy}=\rho_1 gx\left(\frac{x^3}{h^3}-\frac{3x}{10h}\right)-\frac{3\rho_1 g}{h}y^2\left(\frac{x^2}{h^2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{\rho_1 gh}{80}$$

6-8 $\sigma_x = \dfrac{2q_0}{h^3 l}xy\left(2y^2 - x^2 + l^2 - \dfrac{3h^2}{10}\right)$

$\sigma_y = \dfrac{q_0}{2h^3 l}x(3h^2 y - 4y^3 - h^3)$

$\tau_{xy} = \dfrac{q_0}{4h^3 l}(4y^2 - h^2)\left(3x^2 - y^2 - l^2 + \dfrac{h^2}{20}\right)$

6-9 $\sigma_x = \dfrac{12M}{h^3}\left(y - \dfrac{3xy}{2l}\right)$，$\sigma_y = 0$

$\tau_{xy} = -\dfrac{9M}{4hl}\left(1 - \dfrac{4y^2}{h^2}\right)$

第七章

7-1 $u_\rho = u\cos\varphi + v\sin\varphi$，$u_\varphi = -u\sin\varphi + v\cos\varphi$

或 $u = u_\rho\cos\varphi - u_\varphi\sin\varphi$，$v = u_\rho\sin\varphi + u_\varphi\cos\varphi$

7-3 $(u_\rho)_{\rho=a} = \dfrac{a(1-\nu^2)}{E}\left[q_1\left(\dfrac{b^2+a^2}{b^2-a^2} + \dfrac{\nu}{1-\nu}\right) - q_2\dfrac{2b^2}{b^2-a^2}\right]$

$(u_\rho)_{\rho=b} = \dfrac{b(1-\nu^2)}{E}\left[q_1\dfrac{2a^2}{b^2-a^2} - q_2\left(\dfrac{b^2+a^2}{b^2-a^2} - \dfrac{\nu}{1-\nu}\right)\right]$

7-4 $\sigma_\rho = -\dfrac{\dfrac{1-2\nu}{\rho^2} + \dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1-2\nu}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}}q$，$\sigma_\varphi = \dfrac{\dfrac{1-2\nu}{\rho^2} - \dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1-2\nu}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}}q$

$u_\rho = \dfrac{1+\nu}{E}\dfrac{\dfrac{1-2\nu}{\rho} - \dfrac{1-2\nu}{b^2}\rho}{\dfrac{1-2\nu}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}}q$，$u_\varphi = 0$

7-5 $\sigma_\rho = -\dfrac{[1+(1-2\nu)n]\dfrac{b^2}{\rho^2} - (1-n)}{[1+(1-2\nu)n]\dfrac{b^2}{a^2} - (1-n)}q$

$\sigma_\varphi = \dfrac{[1+(1-2\nu)n]\dfrac{b^2}{\rho^2} + (1-n)}{[1+(1-2\nu)n]\dfrac{b^2}{a^2} - (1-n)}q$

其中 $n = \dfrac{E'(1+\nu)}{E(1+\nu')}$

7-6 $(\sigma_\varphi)_{\max} = 4q$，$(\sigma_\varphi)_{\min} = -4q$

7-7 $\sigma_\rho = -q\left(\dfrac{\cos 2\varphi}{\sin\alpha} + \cot\alpha\right)$，$\sigma_\varphi = q\left(\dfrac{\cos 2\varphi}{\sin\alpha} - \cot\alpha\right)$

$\tau_{\rho\varphi} = q\dfrac{\sin 2\varphi}{\sin\alpha}$

7-8 $\sigma_\rho = -q + \dfrac{\tan\alpha(1+\cos 2\varphi) - (2\varphi + \sin 2\varphi)}{2(\tan\alpha - \alpha)}q$

$$\sigma_\varphi = -q + \frac{\tan\alpha(1-\cos 2\varphi)-(2\varphi-\sin 2\varphi)}{2(\tan\alpha-\alpha)}q$$

$$\tau_{\rho\varphi} = \frac{(1-\cos 2\varphi)-\tan\alpha\sin 2\varphi}{2(\tan\alpha-\alpha)}q$$

7-9 $\sigma_\rho = -q\frac{a^2}{\rho^2}$, $\sigma_\varphi = q\frac{a^2}{\rho^2}$, $\tau_{\rho\varphi}=0$

7-10 $\sigma_\rho=\sigma_\varphi=0$, $\tau_{\rho\varphi} = -\frac{b^2}{\rho^2}q$

$$u_\rho = 0,\ u_\varphi = \frac{(1+\nu)}{E}b^2 q\left(\frac{1}{\rho}-\frac{\rho}{a^2}\right)$$

7-11 $\sigma_\rho = -\frac{(3+\nu)F}{4\pi}\frac{\cos\varphi}{\rho}$, $\sigma_\varphi = \frac{(1-\nu)F}{4\pi}\frac{\cos\varphi}{\rho}$

$$\tau_{\rho\varphi} = \frac{(1-\nu)F}{4\pi}\frac{\sin\varphi}{\rho}$$

第八章

8-2 (a) $\sigma_\rho=\sigma_\varphi=-q$, $\tau_{\rho\varphi}=0$

(b) $\sigma_\varphi = \frac{R^2 q}{\rho^2}$, $\sigma_\rho = -\frac{R^2 q}{\rho^2}$, $\tau_{\rho\varphi}=0$

8-3 $\sigma_\varphi = -\frac{4qm\sin 2\varphi}{1+m^2-2m\cos 2\varphi}$, $\pm\frac{4m}{1-m^2}q$

8-4 $\sigma_\varphi = -\frac{4q\sin 2\varphi}{1+m^2-2m\cos 2\varphi}$, $\pm\frac{4q}{1-m^2}$

8-6 $$\varphi(\zeta) = -\frac{iqR}{2\pi}\left[(\sigma_1-\sigma_2)+\zeta\ln\frac{\sigma_1-\zeta}{\sigma_2-\zeta}\right]-\frac{qR\sin\beta}{\pi}\ln(\sigma_1-\zeta)+\frac{(3-\nu)qR\sin\beta}{4\pi}\ln\zeta$$

$$\psi(\zeta) = -\frac{iqR}{2\pi}\frac{1}{\zeta}\ln\frac{\sigma_2}{\sigma_1}+\frac{qR\sin\beta}{\pi}\ln(\sigma_1-\zeta)+\frac{iqR}{2\pi}\frac{\sigma_1-\sigma_2}{(\sigma_1-\zeta)(\sigma_2-\zeta)}-\frac{qR\sin\beta}{\pi}\frac{1}{\zeta(\sigma_1-\zeta)}-\frac{(3-\nu)qR\sin\beta}{4\pi}\frac{1}{\zeta^2}-\frac{(1+\nu)qR\sin\beta}{4\pi}\ln\zeta$$

8-7 $$\varphi(\zeta) = -\frac{F}{2\pi}\ln\frac{\zeta+1}{\zeta-1}-\frac{1}{7}\frac{F}{\pi}\frac{1}{\zeta}$$

$$\psi(\zeta) = \frac{F}{2\pi}\ln\frac{\zeta+1}{\zeta-1}-\frac{13F}{42\pi}\frac{(6\zeta^2+1)\zeta}{(2\zeta^4+1)(\zeta^2-1)}+\frac{F}{6\pi}\frac{\zeta}{\zeta^2-1}$$

第九章

9-3 $\tau_{zx} = \frac{45\sqrt{3}M}{a^5}y(x-a)$, $\tau_{zy} = \frac{15\sqrt{3}M}{2a^5}(3x^2-2ax-3y^2)$

$$\alpha = \frac{15\sqrt{3}M}{Ga^4},\ \tau_{\max} = \frac{15\sqrt{3}M}{2a^3}$$

9-4 $\tau_1=\tau_2=\dfrac{M}{2a^2\delta},\tau_3=0,\alpha=\dfrac{3M}{8Ga^3\delta}$

9-6 $\tau_{\max}=\dfrac{Fa^2}{2I}$

9-7 $\tau_{zx}=\dfrac{2\sqrt{3}F}{27a^4}[-x^2+a(2a+y)],\ \tau_{zy}=\dfrac{2\sqrt{3}F}{27a^4}x(a-y)$

$\tau_{\max}=\dfrac{2\sqrt{3}F}{9a^2}$（在 $x=0,y=a$ 处）

第十章

10-4 $\sigma_r=0,\ \sigma_t=-1.5q$

10-5 $(u_r)_{\max}=\dfrac{(1-2\nu)(1+\nu)qa\left(\dfrac{b^2}{a^2}-1\right)}{E\left[2(1-2\nu)\dfrac{b^3}{a^3}+(1+\nu)\right]}$

$(\sigma_t)_{\max}=\dfrac{(1-2\nu)\dfrac{b^3}{a^3}-(1+\nu)}{2(1-2\nu)\dfrac{b^3}{a^3}+(1+\nu)}q$

10-7 $q_0=\dfrac{3F}{2\pi}\left[\dfrac{2E}{3(1-\nu^2)FR}\right]^{\frac{2}{3}}$

10-8 $\sigma_\rho=\sigma_\varphi=-q_1,\ \sigma_z=-q_2,\ \tau_{\rho z}=0$

$\theta=\dfrac{1-2\nu}{E}(2q_1+q_2)$

第十一章

11-2 (a) 不产生热应力；

(b) $\sigma_x=-\alpha ET_0\left(\dfrac{y^2}{c^2}-\dfrac{3}{5}\right)\dfrac{y}{c}$；

(c) $\sigma_x=\alpha ET_0\left(\dfrac{2}{\pi}-\cos\dfrac{\pi y}{2c}\right)$。

第十二章

12-6 当 $\nu=0$ 时，$c_1=\sqrt{\dfrac{E}{\rho}},\ c_2=0.707\sqrt{\dfrac{E}{\rho}},\ c_3=0.618\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$

当 $\nu=\dfrac{1}{3}$ 时，$c_1=1.225\sqrt{\dfrac{E}{\rho}},c_2=0.612\sqrt{\dfrac{E}{\rho}},\ c_3=0.570\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$

第十三章

13-1 $w=\dfrac{M_y}{2D}y(b-y),\ M_x=\nu M_y,\ M_{xy}=M_{yx}=0$

$$F_{Sx}^{t}=F_{Sy}^{t}=0,\ F_{R}=0$$

13-2 $w=\dfrac{Fxy}{2(1-\nu)D},\ M_x=M_y=0,\ M_{xy}=-\dfrac{F}{2}$

$$F_{Sx}=F_{Sy}=F_{Sx}^{t}=F_{Sy}^{t}=0,\ F_{RA}=F_{RC}=F(\text{向上}),F_{RO}=F(\text{向下})$$

13-3 $w_{max}=\dfrac{2\sqrt{5}q_0a^4}{375\left(5+2\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{a^4}{b^4}\right)D}$

$$(M)_{x=a,y=0}=-\frac{q_0a^2}{3\left(5+2\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{a^4}{b^4}\right)}$$

13-4 $w=\dfrac{8q_0}{\pi^6D}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{m+1}}{\left(\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}\right)^2mn}\sin\dfrac{m\pi x}{a}\sin\dfrac{n\pi y}{b}$

13-5 $w=\eta\left(1-\dfrac{\rho^2}{a^2}+2\dfrac{\rho^2}{a^2}\ln\dfrac{\rho}{a}\right),\ M_\rho=-\dfrac{4D\eta}{a^2}\left[1+(1+\nu)\ln\dfrac{\rho}{a}\right]$

$$M_\varphi=-\frac{4D\eta}{a^2}\left[\nu+(1+\nu)\ln\frac{\rho}{a}\right],\ F_{S\rho}=-\frac{8D\eta}{a^2\rho}$$

13-6 $w=\dfrac{M\rho^2}{(3+\nu)D}\ln\dfrac{a}{\rho},\ M_\rho=M\left[1+\dfrac{2(1+\nu)}{3+\nu}\ln\dfrac{\rho}{a}\right]$

$$M_\varphi=\frac{M}{3+\nu}\left[(1+3\nu)+2(1+\nu)\ln\frac{\rho}{a}\right],\ F_{S\rho}=\frac{4M}{(3+\nu)\rho}$$

13-7 $w=\dfrac{F_{S0}a}{4D}\left[\left(\dfrac{3+\nu}{2(1+\nu)}-\dfrac{a^2}{b^2-a^2}\ln\dfrac{a}{b}\right)(b^2-\rho^2)+\rho^2\ln\dfrac{\rho}{b}+\dfrac{2a^2b^2}{b^2-a^2}\dfrac{1+\nu}{1-\nu}\ln\dfrac{a}{b}\ln\dfrac{\rho}{b}\right]$

13-8 $w=\dfrac{Ma^2}{2(1+\nu)D\left(\dfrac{b^2}{a^2}-1\right)}\left(\dfrac{\rho^2}{a^2}-1+2\dfrac{1+\nu}{1-\nu}\dfrac{b^2}{a^2}\ln\dfrac{\rho}{a}\right)$

$$M_\rho=M\frac{\dfrac{b^2}{\rho^2}-1}{\dfrac{b^2}{a^2}-1},\ M_\varphi=-M\frac{\dfrac{b^2}{\rho^2}+1}{\dfrac{b^2}{a^2}-1}$$

$$F_{S\rho}=0$$

第十四章

14-5 $EI\dfrac{d^4w}{dx^4}=0,\ \left(EI\dfrac{d^2w}{dx^2}\right)_{x=L}=-M,\ \left(EI\dfrac{d^3w}{dx^3}\right)_{x=L}=-F$

$$EI\frac{d^4w}{dx^4}=0,\ EA\frac{d^2u}{dx^2}=0$$

$$\left(EI\frac{d^2w}{dx^2}\right)_{x=L}=0,\ \left(EI\frac{d^3w}{dx^3}\right)_{x=L}=F\sin\alpha$$

$$\left(EA\frac{du}{dx}\right)_{x=L}=F\cos\alpha$$

14－6 $EI\dfrac{d^4w}{dx^4}-q(x)=0$

$$\left(EI\frac{d^3w}{dx^3}\right)_{x=L}=k(w)_{x=L},\quad \left(EI\frac{d^2w}{dx^2}\right)_{x=L}=0$$

14－8 $w=\dfrac{2FL^3}{EI\pi^4}\sum\limits_m\dfrac{1}{m^4}\sin\dfrac{m\pi a}{L}\sin\dfrac{m\pi x}{L}$

14－9 当只取 A_1,B_1 项时，得到

$$\sigma_x=\frac{175}{533}\frac{Fy}{2}\left(1-\frac{3x^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{a^2}\right),\quad \sigma_y=-\frac{450}{533}Fy\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$\tau_{xy}=\frac{175}{533}\frac{Fy}{4}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{3y^2}{a^2}\right)-\frac{225}{533}Fx\left(1-\frac{y^2}{a^2}\right)$$

14－10 取一项时

$$A_1=\frac{11\ 025F}{512Dab(7a^4+4a^2b^2+7b^4)}$$

14－12 $A_1=-6A_2=\dfrac{60}{36+160\dfrac{a^2}{b^2}+21\dfrac{a^4}{b^4}}$

14－13 取一项时，$A_1=-\dfrac{49}{1\ 152}=-0.042\ 53$

14－14 只取一项时，则

$$A_{00}=\frac{128}{\pi^4}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2},\quad D=\frac{4\ 096\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}{\pi^6\left(1+\dfrac{b^2}{a^2}\right)}a^2b$$

$$\tau_{max}=\frac{64}{\pi^3}\frac{\dfrac{b^2}{a^2}}{1+\dfrac{b^2}{a^2}}\frac{Ma}{D}$$

Synopsis

This is a teaching material for undergraduates of Engineering Mechanics, and it has been pointed as a key textbook of 9th-five-year programme of Ministry of Education.

With total fourteen chapters and two appendixes, the contents are arranged in order as stress and strain analysis, relations between stress and strain, general principles of elasticity, solutions of plane problems, solutions of spatial problems, thermal stress, propagation of elastic waves, bending of thin plates, and variational methods for elasticity. The topics cover not only classical theories, but also some new developments in the area. On the arrangement of the system, the choice and the narration way of contents, attention is fully paid to the theoretical systematicness, completeness as well as preciseness. And more stress is laid on the following aspects, i.e., to explain the profound in simple terms, to stand out the key points, to disperse difficulties, to integrate theory with engineering practice, to emphasize the physical essence of problems, and to be easy to be understood and grasped by students.

This book can also be a reference for graduate students of engineering, researchers, engineers and undergraduates studying in this field.

Contents

Main Symbol List

Chapter 1 Introduction

§ 1 – 1 Tasks and Research Methods of Elasticity

§ 1 – 2 Basic Assumptions of Elasticity

§ 1 – 3 Brief History of the Development of Elasticity

Chapter 2 Theory of Stress

§ 2 – 1 Body forces and surface forces

§ 2 – 2 Stress and State of Stress at a Point

§ 2 – 3 Stresses on the Infinitesimal Surface Inclined to the Coordinates

§ 2 – 4 Differential Equations of Equilibrium. Stress Boundary Conditions

§ 2 – 5 Transformation of Stress Components for the Rotation of Coordinates

§ 2 – 6 Principal Stresses. Stress Tensor Invariants

§ 2 – 7 Quadratic Surface of Stresses

§ 2 – 8 Maximum Shear Stress

Problems

Chapter 3 Theory of Strain

§ 3 – 1 Displacement Components and Strain Components. Their Relationships

§ 3 – 2 Relative Displacement Tensor. Rotation Components

§ 3 – 3 Transformation of Strain Components for the Rotation of Coordinates. Strain Tensor

§ 3 – 4 Principal Strains. Strain Tensor Invariants

§ 3 – 5 Quadratic Surface of Strains

§ 3 – 6 Volume Strain

§ 3 – 7 Strain Compatibility Equations

§ 3 – 8 Geometric Briefly Analysis of the Finite Deformation

Problems

Chapter 4 Relations between Stress and Strain

§ 4 – 1 General Relations between Stress and Strain. Generalized Hooke Law

§ 4 – 2 Work and Energy for an Elastic Body Undergoing a Deformation

§ 4 – 3 Anisotropic Elastic Body

§ 4 – 4 Isotropic Elastic Body

§ 4 - 5 Determination of Elastic Constants. Expression of Strain Energy Density of an Isotropic Body

Problems

Chapter 5 Establishment of the Problems of Elasticity General Principles

§ 5 - 1 Basic Equations and Boundary-value Problems for Elasticity

§ 5 - 2 Displacement Method. Differential Equations of Equilibrium (or Motion) in Terms of Displacements

§ 5 - 3 Stress Method. Strain Compatibility Equations in Terms of Stresses

§ 5 - 4 Properties of Some Physical Variables for Constant Body Forces

§ 5 - 5 General Principles of Elasticity

§ 5 - 6 Simple Problems

Problems

Chapter 6 Solutions of Plane Problems in Rectangular Coordinates

§ 6 - 1 Plane-strain Problems

§ 6 - 2 Plane-stress Problems

§ 6 - 3 Stress Method. Reduction of the Plane Problems to the Boundary Value Problems of Biharmonic Equation

§ 6 - 4 Solution for Plane Problems by Polynomials

§ 6 - 5 Bending of a Cantilever Loaded at the End

§ 6 - 6 Bending of a Cantilever by Uniform Load

§ 6 - 7 Bending of a Simply Supported Beam by Uniform Load

§ 6 - 8 Triangular Water Wall

§ 6 - 9 Trigonometric Series Solution for Bending of a Beam of Rectangular Cross Section

§ 6 - 10 Solutions for Plane Problems by Fourier Transformation

§ 6 - 11 Physical Meaning of Airy Stress Function

Problems

Chapter 7 Solutions of Plane Problems in Polar Coordinates

§ 7 - 1 General Equations in Polar Coordinates

§ 7 - 2 Axisymmetrical Stress and Corresponding Displacement

§ 7 - 3 Hollow Cylinder Subjected to Uniform Pressures

§ 7 - 4 Pure Bending of Curved Beams

§ 7 - 5 Curved Beams Loaded at the End

§ 7 - 6 Plates with Small Holes by Uniform Tension

§ 7 - 7 Concentrated Force or Couple Acting on the End of a Wedge

§ 7 - 8 Some Solutions for Half-Planes

Problems

Chapter 8 Solutions of Plane Problems by Complex Variables

§ 8 - 1 Biharmonic Function in terms of Complex Functions

§ 8 - 2 Displacement and Stress in terms of Complex Functions
§ 8 - 3 Boundary Conditions in terms of Complex Functions
§ 8 - 4 Conformal Mapping and Curvilinear Coordinates
§ 8 - 5 Formulas of Complex Potentials on a Circular Region
§ 8 - 6 Disk under Concentrated Forces on the Edges
§ 8 - 7 Condition of Single-value of Stresses and Displacements on Multiply Connected Region
§ 8 - 8 Formulas of Complex Potentials on Infinite Plane with a Hole
§ 8 - 9 Case of Elliptic Hole
§ 8 - 10 Stress Concentration near the Crack Tip
§ 8 - 11 Case of Square Hole
Problems

Chapter 9 Torsion and Bending of Prismatic Bars

§ 9 - 1 Displacement Method for Torsion. Saint-Venant Torsion Function
§ 9 - 2 Stress Method for Torsion. Prandtl Stress Function
§ 9 - 3 Membrane Analogy for Torsion Problems
§ 9 - 4 Torsion of Elliptic Bars
§ 9 - 5 Torsion of Cylinder with a Semicircular Longitudinal Groove
§ 9 - 6 Torsion of Hollow Cylinders
§ 9 - 7 Torsion of Rectangular Bars
§ 9 - 8 Torsion of Thin-walled Members
§ 9 - 9 Bending of Prismatic Bars
§ 9 - 10 Bending of Elliptical Bars
§ 9 - 11 Bending of Rectangular Bars
Problems

Chapter 10 Solutions of Spatial Problems

§ 10 - 1 Basic Equations Refered to Cylindrical and Spherical Coordinates
§ 10 - 2 Potential Functions Decomposition of Displacement Field
§ 10 - 3 Lamé Strain Potential. Hollow Sphere Subjected to Internal and External Uniform Pressures
§ 10 - 4 General Solutions of Homogeneous Lamès Equations
§ 10 - 5 Concentrated Force Acting at a Point of an Infinite Solid
§ 10 - 6 Vertical Concentrated Force Acting on the Surface of a Semi-infinite Solid
§ 10 - 7 Horizontal Concentrated Force Acting on the Surface of a Semi-infinite Solid
§ 10 - 8 Uniform Pressures Distributed over a Circular Region on the Surface of a Semi-infinite solid
§ 10 - 9 Pressure Between Two Elastic Bodies in Contact
Problems

Chapter 11 Thermal Stresses

§ 11 - 1 Heat-conduction Equation. Initial and Boundary Conditions

§ 11 - 2 Thermal Expansion and Corresponding Thermal Stresses

§ 11 - 3 Simple Problems of the Thermal Stresses

§ 11 - 4 Basic Equations of Thermal Elasticity

§ 11 - 5 Displacement Method

§ 11 - 6 Spherically Symmetric Thermal Stresses in a Spherical Body

§ 11 - 7 Introduction of Thermal Elastic Strain Potential

§ 11 - 8 Symmetrical Thermal Stresses in Hollow Cylinders

§ 11 - 9 Stress Method

§ 11 - 10 Stress Method for Plane Problems of Thermal Elasticity. Airy Thermal Stress Function

Problems

Chapter 12 Propagation of Elastic Waves

§ 12 - 1 Longitudinal Waves and Transverse Waves in Infinite Elastic Medium

§ 12 - 2 General Plane Waves

§ 12 - 3 Dilatational Waves and Distortional Waves in Infinite Elastic Medium

§ 12 - 4 Surface Waves

§ 12 - 5 Spherical Waves in Elastic Medium

§ 12 - 6 Reflection and Refraction of Plane Waves on Plane Boundary

Problems

Chapter 13 Bending of Thin Plates

§ 13 - 1 General Concept and Basic Assumptions

§ 13 - 2 Establishment of Basic Formulations and Equations

§ 13 - 3 Boundary Conditions of Thin Plates

§ 13 - 4 Simple Examples

§ 13 - 5 Navier Solution for Simply supported Rectangular Plates

§ 13 - 6 Lévy Solution for Rectangular Plates

§ 13 - 7 Superposition Method for the Bending of Thin Plates

§ 13 - 8 Basic Expressions and Basic Equations Refered to Polar Coordinates

§ 13 - 9 Symmetrical Bending of a Circular Plate

§ 13 - 10 Circular Plates under Linearly Distributed Loading

Problems

Chapter 14 Variational Methods for Elasticity

§ 14 - 1 Principle of Virtual Work for Elastic Solid

§ 14 - 2 Betti's Reciprocal Theorem

§ 14 - 3 Displacement Variational Equations. Principle of Minimum Potential Energy

§ 14 - 4 Examples of Derivation of Equilibrium Equations and Boundary Conditions in

Terms of displacements for Specific Problems by the Principle of Minimum Potential Energy

§ 14 - 5 Approximate Solutions Based on the Principle of Minimum Potential Energy

§ 14 - 6 Stress Variational Equations. Principle of Minimum Complementary Energy

§ 14 - 7 Approximate Solutions Based on the Principle of Minimum Complementary Energy

§ 14 - 8 The Applications of the Principle of Minimum Complementary Energy in Plane Problems and Torsion

§ 14 - 9 Generalized Variational Principle for Elasticity

§ 14 - 10 Hamilton Variational Principle

§ 14 - 11 Finite Element Method, Innovation and Development of Classical Variational Method

Problems

Appendex A Brief Introduction of Descartes Tensors

§ A - 1 Definition and Transformation Law of Tensors

§ A - 2 Subscript Notation of Partial Derivative

§ A - 3 Summation Convention

§ A - 4 Permutation Tensors

Appendex B Basic Equations of Elasticity Refered to Curvilinear Coordinates

§ B - 1 Curvilinear Coordinates. Metric Tensors

§ B - 2 Rates of Change of Basic Vectors $\boldsymbol{a}_i$ and Unit Vectors $\boldsymbol{e}_i$ in an Orthogonal Curvilinear Coordinates

§ B - 3 Strain Tensor in Orthogonal Curvilinear Coordinates

§ B - 4 Strain-displacement Relations in Orthogonal Curvilinear Coordinates

§ B - 5 Differential Equations of Equilibrium in Orthogonal Curvilinear Coordinates

References

Index

Foreign-Chinese Bilingual Name-List

Key to Problems

Synopsis

Contents

A Brief Introduction to the Author