国外名校最新教材精选

WILEY

有限元分析的概念与应用

Concepts and Applications of Finite Element Analysis

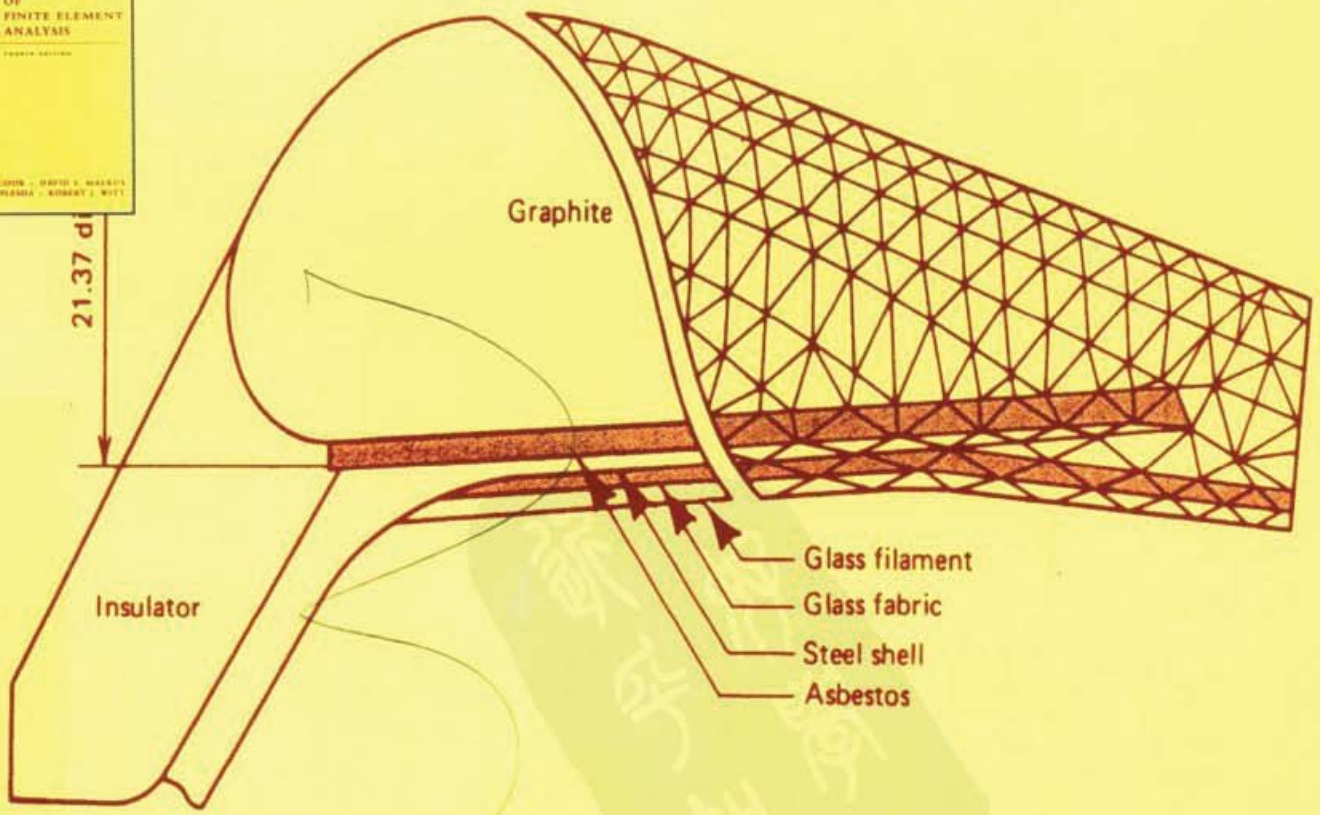
〔美〕 罗伯特·D·库克 戴维·S·马尔库斯 迈克尔·E·普利沙 罗伯特·J·威特 著

关正西 强洪夫 译

王铁军 李录贤 校

(第4版)





Robert D. Cook · David S. Malkus · Michael E. Plesha · Robert J. Witt

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

国外名校最新教材精选



学习有限元和如何应用它

本科高年级学生及研究生用书

《有限元分析的概念与应用》是美国著名学者R. D. 库克教授的经典之作。从1974年至今已第4版，一直被美国多所大学相关专业作为教材使用，也深受国内读者的欢迎。作者在新版中荟萃了1989年第3版以来十几年中有限元发展的最新成果，对原版重新组织，进行了全面修订，增加了许多新的内容和章节。本书注重从物理概念上阐述有限元的基本理论，深入浅出，既专业又通俗，易于理解。全书强调提高应用能力，用相当多的篇幅介绍了建模规划分析和软件应用技巧以及许多实例。本书基础理论和工程应用并重的特色鲜明，是一本有限元课程的优秀教材。

本书特点：

★ 透彻地阐述了基本理论；
★ 包括了500多个分析和计算习题；
★ 突出了结构力学；
★ 论述了动力学、非线性、热传导、板和壳等问题；
★ 含有许多应用实例和解答评论。

采用本书作教材的教师，可填写书末的“教学信息反馈表”，索取教学课件资料。

本书封底贴有Wiley公司防伪标签，无标签者不得销售。

策划编辑／赵丽平　文字编辑／宗立文
封面设计／阎　亮　版式设计／程文卫



WILEY
Publishers Since 1807
www.wiley.com

ISBN 978-7-5605-2529-7

9 787560 525297 >

定价：72.00元

0241.82/51
2007

国外名校最新教材精选

Concepts and Applications of Finite Element Analysis

有限元分析的概念与应用

（第4版）

〔美〕 罗伯特·D·库克 戴维·S·马尔库斯 迈克尔·E·普利沙 罗伯特·J·威特 著

Robert D. Cook David S. Malkus
Michael E. Plesha Robert J. Witt
The University of Wisconsin - Madison

关正西 强洪夫 译
王铁军 李录贤 校

西安交通大学出版社
Xi'an Jiaotong University Press

内容简介

本书是有限元方面的经典教材。作者荟萃了近十几年来有限元领域研究的最新成果，对 1989 年的第 3 版重新组织并作了全面修订。新版共有 18 章，分为三大部分：1～6 章讲述了有限元的概念和基本理论；7～10 章侧重介绍有限元通用的分析方法和应用技能，其中有专门章节论述了误差估计和收敛问题；11～18 章详述了有限元在结构动力学、热传导和流体、回转体、非线性、板和壳等方面的工程应用。全书既注重从物理概念上阐述有限元的基本理论，又强调提高应用能力，含有许多应用实例。

本书适合机械、力学、土木、动力、材料、水利和航空航天等专业高年级本科生和研究生作为有限元课程的教材及教学参考书，对相关专业的工程技术人员和科研工作者也有很好的参考价值。

Robert D. Cook, David S. Malkus, Michael E. Plesha, Robert J. Witt
Concepts and Applications of Finite Element Analysis, 4E
Copyright ©2000 by John Wiley & Sons. Inc.

AUTHORIZED TRANSLATION OF THE EDITION PUBLISHED BY JOHN WILEY & SONS, New York, Chichester, Brisbane, Singapore AND Toronto.
No part of this book may be reproduced in any form without the written permission of John Wiley & Sons Inc.
All rights reserved.
本书中文简体字翻译版由 John Wiley & Sons 公司授权西安交通大学出版社独家出版发行。未经出版者预先书面许可，不得以任何方式复制本书的任何部分。

陕西省版权局著作权合同登记号：25－2007－052

图书在版编目(CIP)数据

有限元分析的概念与应用(第 4 版)/(美)库克(Cook, R. D.)等著；关正西，强洪夫译. —西安：西安交通大学出版社，2007.9
书名原文：Concepts and Applications of Finite Element Analysis
ISBN 978－7－5605－2529－7

Ⅰ.有… Ⅱ.①库…②关…③强… Ⅲ.有限元分析 Ⅳ.0241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 121145 号

书　　名：有限元分析的概念与应用(第 4 版)
著　　者：罗伯特·D·库克，戴维·S·马尔库斯
迈克尔·E·普利沙，罗伯特·J·威特
译　　者：关正西　强洪夫
校 译 者：王铁军　李录贤
出版发行：西安交通大学出版社
地　　址：西安市兴庆南路 10 号　交大出版大厦(邮编：710049)
电　　话：(029)82668357 82667874(发行部)
(029)82668315 82669096(总编办)
电子邮件：xjtupress@163.com
印　　刷：陕西向阳印务有限公司
字　　数：975 千字
开　　本：787mm×1092mm 1/16
印　　张：40.375
印　　次：2007 年 9 月第 1 版　2007 年 9 月第 1 次印刷
印　　数：0001～3000
书　　号：ISBN 978－7－5605－2529－7/O·263
定　　价：72.00 元

版权所有　侵权必究

译者序

R·D·库克教授编写的《有限元分析的概念与应用》一书曾有中译本，受到国内广大读者的欢迎，至今还是国内高校和工程技术领域相关专业的许多教师、技术人员和学生的重要参考书。本书是第4版，作者荟萃了十余年间有限元领域大量新的文献资料精华，依据各方面的研究成果和自己的教学经验，对1989年第3版进行了全面的修订，增加了误差估计和收敛等新章节，突出了结构力学、非线性和传热问题，整书内容涉及到当今有限元应用方面许多难点和热点。新版本的特点之一是注重从物理概念上阐述有限元的基本理论，深入浅出，既专业又通俗，易于理解；特点之二是强调提高应用能力，用相当的篇幅介绍了建模规划分析和软件应用技巧，列举了许多算例，并对计算结果逐一作了评论。在每章后附有分析题和计算题。因此本书非常适合作为机械、力学、土木、动力、材料、水利和航空航天等专业高年级本科生和研究生的教材和参考书，对相关专业的工程技术人员和科研工作者也有很好的参考价值。

本书共18章，强洪夫教授翻译了第4、7、8章，关正西教授翻译了其余15章，并对全书进行了统稿和校订。由于本书篇幅长，内容多，翻译工作历时一年多，确实付出了很多艰辛。在西安交通大学出版社的支持下，译稿即将出版。能向国内同行提供国外名校最新教材，译者也感到欣慰。

本书作者特意为第4版的中译本撰写了前言附注。西安交通大学王铁军教授、李录贤教授对全书作了校阅，他们和出版社

的赵丽萍、宗立文两位编审对译稿提出了宝贵意见。姜才胜教授，研究生范兵、徐志高、黄拳章、李明、李述清、胥尚博、李贺杰、何全明在翻译过程中提供了帮助。在此一并表示感谢。

这里还需要说明的是原书有少数例题使用了英制单位，译者考虑例题图表中的对应关系，因此未换算成国际单位而保留了原样，这可能会给读者带来不便。如果需要可按以下关系换算：

in(英寸)$=2.54\times10^{-2}$(m)；

lb(磅)$=4.5359\times10^{-1}$ kg；

lbf(磅力)$=4.4482$ N；

lbf/in^2或 psi (磅力/每平方英寸)$=6.8948\times10^{3}$ Pa。

由于译者水平有限，在对原著的理解上难免有不当之处，敬请读者谅解，并能不吝指正。

译　者

2007 年 7 月

作者简介

Robert D. Cook 于 1963 年在伊利诺伊大学获得理论与应用力学博士学位。毕业后，一直在威斯康星-麦迪逊大学工作，现今是工程物理系教授。他的研究兴趣包括应力分析和有限单元法。除本书外，他还是《应力分析有限元建模》(Wiley，1995)以及《高等材料力学》(第二版，Prentice-Hall，1999，与 Warren C. Young 合著)等书的作者。

David S. Malkus 于 1976 年在波士顿大学获得博士学位。他在(美国)国家标准化局工作两年，在伊利诺伊科技学院数学系供职七年。现在是威斯康星-麦迪逊大学工程力学系教授。他的研究兴趣集中于有限元法在结构力学和连续介质力学问题中的应用，特别是在非牛顿流体中的应用。他是流变学研究中心(威斯康星-麦迪逊大学)以及流变学会会员。

Michael E. Plesha 在芝加哥伊利诺伊大学获得理学学士学位，在西北大学获得硕士、博士学位；自 1983 年获得博士学位以来，一直任教于威斯康星-麦迪逊大学工程物理系，是工程力学教授。他的研究领域包括本构模型和接触-摩擦问题的有限元分析、瞬态有限元分析以及离散单元法。

Robert J. Witt 于 1987 年在麻省理工学院获得核工程博士学位，现在是威斯康星-麦迪逊大学工程物理系的副教授。他的研究兴趣是流体和固体力学的计算方法及在核系统中的特殊应用。

前 言

对于这个新版，我们照例对前面的版本重新组织并进行了全面的修订。最显著的变化是增加了误差估计和收敛的新章节；更新了弹塑性问题一章的内容；包含了规划和实施有限元分析的应用题，并对结果作了评论检查。这部分材料绝大部分来自《应力分析有限元建模》(Wiley，1995；使用经出版者许可)。

本书难度适中，既注重基础和应用，也有系统的理论阐述和分析。我们相信本书适合于作这门课程的入门教材，但它也包含深入学习理解的足够丰富的材料。前期知识通常是大学中的微积分、静力学、动力学和材料力学。假设已具有像在附录 A 中概述的矩阵符号和初等矩阵代数知识。课程所需的其它概念在需要时引入。这些预备性的知识并不是必须要有，但确能为后续学习扫除障碍。纵观全书，我们更注重基础、简明和实用的概念。高级技能留在参考书目中。可找到数以万计的参考文献，我们仅引用最适用和最易于接受的。在绝大多数情况下，引文不分先后次序。

趋向于实际应用的课程可以把重点放在 1，2，3，9 和 10 章。而侧重于理论的课程可放在其他章节。分析题解答可在 CD－ROM 中得到，出版发行者将根据采用该书作为教材的教师的需要提供 CD－ROM。同样的 CD 包含了线性的与时间无关、屈曲和振动问题的简单 Fortran 程序，用户可把单元列式和诸如应力计算的后处理测试代码嵌入到程序中。

我们的体会是有限元理论学习不足以提高应用能力。因此希望要求学生利用已编写的软件求解问题。对于规划分析、预估和正确地检查结果给予适当的关注。计算题在各章的最后。这些问题具有简单的几何形状，以至于数据输入工作不需要花很多时间。当然，也可以选择更复杂的问题，但即使简单的问题也会暴露出部分研究生像本科生一样对建模的许多错误理解。

本书不针对任何特定软件包的应用。然而，结合本书，出版商提供了由 J. Y. Lee 编写的可视化的有限元分析软件。这个软件给出了线性结构、渗流和稳态热传导问题。软件包含了强大的前、后处理和图形显示，其教育特色在商业软件中是找不到的。

我们对结构动力学的陈述有一部分基于 Ted. Belytschko 的教程原稿。T. J. R. Hughes 给予了指导。Jeff Crowell 关于塑性力学提供了很有帮助的笔记。在此对他们表示诚挚的感谢。

前言附注

我欢迎本书的中文版。译者的工作很细致，他们发现和修正英文版中的错误就是例证。这些错误虽小，但有可能使读者产生混乱。我希望这本书能对有限元行业的学生和实践者有所帮助。

Robert D. Cook

2007 年 3 月 22 日

符 号

这里列出了本书所使用的绝大部分符号。使用频度低的符号，或在不同情况下有不同含义的符号，在使用之处再做定义。矩阵和矢量都用黑体表示。

数学符号

$[\ ]$,$\lceil\ \rfloor$	矩形阵或方阵，对角阵
$\{\ \}$，$\lfloor\ \rfloor$	列矢量，行矢量
$[\ ]^{\mathrm{T}}$	转置矩阵（因此$\{\ \}=\lfloor\ \rfloor^{\mathrm{T}}$）
$[\ ]^{-1}$,$[\ ]^{-\mathrm{T}}$	矩阵求逆，逆矩阵的转置矩阵（恒等于转置矩阵的逆阵）
$\|\ \|$	矩阵或矢量的范数
$\cdot$	时间的微分；例如，$\dot{u}=\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$，$\ddot{u}=\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}t^2$
,	如果其后的下标是字母，它表示偏微分； 例如 $w_{,x}=\partial w/\partial x$，$w_{,xy}=\partial^2 w/\partial x\partial y$
$\left\{\dfrac{\partial \Pi}{\partial a}\right\}$	表示 $\lfloor\dfrac{\partial \Pi}{\partial a_1}\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial a_2}\ \cdots\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial a_n}\ \rfloor^{\mathrm{T}}$，其中$\Pi=\Pi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

拉丁符号

A	面积或横截面积
$\{\boldsymbol{a}\}$	广义自由度（也称广义坐标）
B	体积模量，$B=E/(3-6\nu)$
$[\boldsymbol{B}]$	场变量的空间导数是$[\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{d}\}$
C^m	场的 m 阶连续性（3.2 节）
$[\boldsymbol{C}]$	阻尼矩阵；约束矩阵
D	位移；板或壳的弯曲刚度
$\{\boldsymbol{D}\}$，$\{\boldsymbol{d}\}$	分别表示结构和单元的节点自由度
$\{\overline{\boldsymbol{D}}\}$	节点自由度的幅值（如在振动和屈曲中）
d. o. f.	自由度

E	弹性模量
$[\boldsymbol{E}]$	弹性刚度矩阵；在一维情况下$[\boldsymbol{E}]=E$
$\{\boldsymbol{F}\}$	单位体积的体力
f	振动(循环)频率，$f=\omega/2\pi$；磁通量
G	剪切模量
h	特征长度；对流换热系数
I	横截面积的惯性矩
$\lceil\ \boldsymbol{I}\ \rfloor$	单位矩阵
J	$[\boldsymbol{J}]$的行列式
$[\boldsymbol{J}]$	雅可比矩阵(6.2 节)
k	弹簧刚度，或者杆的刚度 AE/L，或者导热率
$[\boldsymbol{K}]$，$[\boldsymbol{k}]$	结构和单元的常规刚度矩阵
$[\boldsymbol{K}_\sigma]$，$[\boldsymbol{k}_\sigma]$	结构和单元的应力刚度矩阵
L，L_T	单元长度，结构长度
l，m，n	方向余弦
$[\boldsymbol{M}]$，$[\boldsymbol{m}]$	结构和单元的质量矩阵
N_{els}	单元个数
$[N]$	形状(或基，或插值)函数
O	阶次；例如：$O(h^2)$表示阶次为 h^2 的项
$[\boldsymbol{0}]$，$\{\boldsymbol{0}\}$	零矩阵，零矢量
$\{\boldsymbol{P}\}$	作用到结构节点上的集中外载荷
p	压力；完全多项式的次数
q	单位长度或单位面积上的分布载荷
$\{\boldsymbol{R}\}$	结构节点上的总载荷；$\{\boldsymbol{R}\}=\{\boldsymbol{P}\}+\sum\{\boldsymbol{r}_e\}$
$\{\boldsymbol{r}_e\}$	单元施加于节点上的载荷(2.5 节)
S	表面或表面积
T	温度
t	厚度；时间
$[\boldsymbol{T}]$	转换矩阵
U，U_0	应变能，单位体积的应变能
u，v，w	坐标轴方向的位移分量

$\{\boldsymbol{u}\}$	位移矢量，$\{\boldsymbol{u}\}=\lfloor u \quad v \quad w \rfloor^{\mathrm{T}}$
V	体积
x，y，z	笛卡儿坐标

希腊符号

α	热膨胀系数；罚数
$[\boldsymbol{\Gamma}]$	雅可比矩阵的逆矩阵，$[\boldsymbol{\Gamma}]=[\boldsymbol{J}]^{-1}$
$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$，$\{\boldsymbol{\varepsilon}_0\}$	应变矢量，初应变矢量
η	由梯度场计算出的总误差度量
θ_x，θ_y，θ_z	绕各坐标轴的旋转分量
$[\boldsymbol{\kappa}]$，$\{\boldsymbol{\kappa}\}$	导热率矩阵，曲率矢量
λ	特征值；拉格朗日乘子
ν	泊松比
ξ	阻尼比（实际阻尼与临界阻尼的比值）
ξ,η,ζ	等参数单元的参考坐标
Π	泛函，例如 Π_p = 势能泛函
ρ	质量密度
$\{\boldsymbol{\sigma}\}$，$\{\boldsymbol{\sigma}_0\}$	应力矢量，初应力矢量
σ_e	冯·米赛斯应力，式 3.12－2（也称有效应力）
$[\boldsymbol{\Phi}]$	模态矩阵
$\{\boldsymbol{\Phi}\}$	表面力
ω，$\lfloor \boldsymbol{\omega}^2 \rfloor$	圆频率（rad/s），频谱矩阵

分析题

17.2-1 (a) 在图 17.2-1(a)中，令 $k=0.2-u$ 和 $P=0.006$。从 $u=0$ 开始，运用直接替换算法的循环三次。

(b) 用图 17.2-2 所示的方式，在 $P-u$ 图上定性地画出算法过程。

(c) 用 u 表示的切向刚度 k_t 的表达式是什么？

17.2-2 图示给出非线性关系 $P=P(D)$。在这个问题的下面部分，我们自认为 P 和 dP/dD 在知道 D 的情况下是可以确定的，但是用 P 表示的关于 D 的显式表达式现在得不到。在下面每一部分中，用所提示的方法和给出的数据求 D 的数值解。在 P-D 图上画出每次求解的过程。

(a) 令 $P=8$。从 $D=0$ 开始，通过 N-R 迭代的五次循环以后 D 的结果是什么？

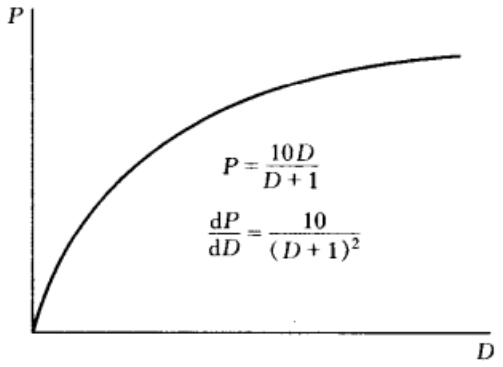
(b) 令 $P=8$。从 $D=3$ 开始，通过改进 N-R 迭代的五次循环以后 D 的结果是什么？

(c) 重复(b)的工作，但是进行三次循环，仅在第一次循环以后更新切向刚度矩阵。

(d) 从 $P=1$ 开始(这里 $D=0.111\ 1$)到 $P=9$，仅用 $\Delta P=2$ 的四个增量步(欧拉方法)预示 D 的结果是什么？

(e) 重复(d)的工作，但是每一步包含力不平衡校正。

(f) 令 $P=8$。从 $D=0$ 开始，使用直接替换算法经过五次循环以后 D 的值是什么？



题 17.2-2

17.2-3 应用问题 17.2-2 的文字说明，现在参考所示的硬化曲线。

(a) 令 $P=0.8$。从 $D=0$ 开始，使用 N-R 迭代方法经过五次循环以后 D 的值是什么？

(b) 令 $P=3$。从 $D=6$ 开始，使用改进的 N-R 迭代方法经过五次循环以后 D 的值是什么？

(c) 重复(b)的工作，现在根据方程 17.2-8 更新位移，其中 $\mu=0.6$。

(d) 重复(b)的工作，但进行四次循环并且只在第一次循环以后更新切向刚度矩阵。

(e) 从 $P=1.5$(这里 $D=6$)到 $P=4.5$，仅用 $\Delta P=1$ 的三个增量步(欧拉方法)D 的结果是什么？

(f) 重复(e)的工作，但是每一步包含力不平衡校正。

目 录

译者序

作者简介

前言

符号

第 1 章　绪论 …… (1)

1.1　有限元分析 …… (1)

1.2　问题分类,建模和离散化 …… (3)

1.3　插值·单元,节点和自由度 …… (4)

1.4　实例·有限元分析发展史 …… (7)

1.5　用有限元分析求解问题 …… (9)

1.6　学习和运用有限元分析 …… (13)

分析题 …… (14)

第 2 章　一维单元和计算过程 …… (17)

2.1　引言 …… (17)

2.2　杆单元 …… (18)

2.3　梁单元 …… (22)

2.4　任意方向的杆和梁单元 …… (26)

2.5　单元的组集 …… (29)

2.6　刚度矩阵的特性 …… (33)

2.7　边界条件 …… (36)

2.8　利用稀疏性·求解方程组 …… (38)

2.9　机械载荷·应力 …… (41)

2.10　热载荷·应力 …… (46)

2.11　结构对称性 …… (48)

2.12　回顾·建模说明 …… (51)

2.13　应用 …… (53)

分析题 …… (56)

计算题 …… (67)

第 3 章　基本单元 …… (70)

3.1　预备知识 …… (70)

3.2 插值法和形状函数 …… (75)
3.3 单元矩阵公式 …… (78)
3.4 线性三角形(CST) …… (81)
3.5 二次三角形(LST) …… (84)
3.6 双线性矩形(Q4) …… (86)
3.7 二次矩形(Q8,Q9) …… (89)
3.8 矩形实体单元 …… (91)
3.9 插值函数的选择 …… (92)
3.10 改进三角形和四边形 …… (94)
3.11 节点载荷 …… (99)
3.12 应力计算 …… (102)
3.13 有限元解的性质 …… (105)
3.14 例题:一个简单的应力集中问题 …… (106)
3.15 高应力梯度的应用 …… (108)
分析题 …… (110)
计算题 …… (117)

第4章 列式技术:变分法 …… (120)
4.1 引言 …… (120)
4.2 最小势能原理 …… (121)
4.3 多自由度问题 …… (124)
4.4 弹性体势能 …… (125)
4.5 瑞雷-里兹法 …… (129)
4.6 关于瑞雷-里兹法的说明 …… (131)
4.7 强形式和弱形式 …… (133)
4.8 瑞雷-里兹法的有限元形式 …… (137)
4.9 有限元解的收敛性 …… (141)
4.10 补充列式·杂交单元 …… (144)
分析题 …… (149)

第5章 列式技术:伽辽金法和其它加权残数法 …… (155)
5.1 伽辽金法 …… (155)
5.2 加权残数法(MWR) …… (158)
5.3 一维伽辽金有限元法 …… (161)
5.4 分部积分 …… (165)
5.5 二维伽辽金有限元法 …… (166)
5.6 混合列式 …… (168)
分析题 …… (170)

第 6 章　等参数单元 …… (174)
6.1　引言 …… (174)
6.2　双线性四边形单元(Q4) …… (176)
6.3　求积分:用数值积分计算[k] …… (180)
6.4　二次四边形单元(Q8,Q9) …… (184)
6.5　六面体等参数单元 …… (187)
6.6　非协调模式·非节点自由度 …… (189)
6.7　静态凝聚 …… (190)
6.8　数值积分的选择 …… (192)
6.9　载荷考虑 …… (196)
6.10　应力计算 …… (198)
6.11　单元几何形状的影响 …… (201)
6.12　等参数单元的有效性 …… (204)
6.13　分片试验 …… (205)
6.14　二维(2D)应用 …… (207)
6.15　三维(3D)应用 …… (210)
分析题 …… (212)
计算题 …… (219)

第 7 章　等参数三角形和四面体 …… (223)
7.1　参考坐标·形状函数 …… (223)
7.2　单元特征矩阵 …… (225)
7.3　解析积分·面积坐标和体积坐标 …… (227)
7.4　数值积分 …… (229)
分析题 …… (232)

第 8 章　坐标变换与分析选择 …… (234)
8.1　变换:引言和矢量形式 …… (234)
8.2　应变、应力和材料性能变换 …… (236)
8.3　特征矩阵变换 …… (238)
8.4　改变约束方向 …… (238)
8.5　连接不同单元·刚体单元 …… (240)
8.6　高阶导数作为节点自由度 …… (244)
8.7　断裂力学·奇异单元 …… (245)
8.8　弹性基础·无限介质 …… (248)
8.9　修改结构·重新分析 …… (252)
8.10　单元品质测试 …… (253)
分析题 …… (255)
计算题 …… (259)

第 9 章　误差,误差估计及收敛 …… (260)
9.1　误差源 …… (260)
9.2　病态 …… (262)
9.3　条件数 …… (265)
9.4　对角衰减测试 …… (267)
9.5　残数 …… (268)
9.6　离散误差·收敛速率 …… (269)
9.7　多网格外推法 …… (273)
9.8　网格修正法 …… (276)
9.9　梯度(应力)修复和平滑 …… (278)
9.10　事后误差估计 …… (283)
9.11　自适应网格划分 …… (285)
分析题 …… (287)
计算题 …… (290)

第 10 章　建模考虑和软件应用 …… (291)
10.1　引言 …… (291)
10.2　物理特性与单元特性 …… (292)
10.3　单元形状与相互联系 …… (295)
10.4　测试算例和探索研究 …… (297)
10.5　材料属性 …… (298)
10.6　载荷与支反力 …… (300)
10.7　结构的连接 …… (301)
10.8　边界条件 …… (305)
10.9　重复对称性 …… (307)
10.10　应力集中·子模型 …… (308)
10.11　子结构 …… (310)
10.12　规划分析 …… (312)
10.13　常见错误 …… (314)
10.14　检查模型 …… (316)
10.15　计算结果评价 …… (317)
10.16　优化设计 …… (320)
10.17　软件 …… (320)
10.18　结论 …… (321)
分析题 …… (321)
计算题 …… (322)

第 11 章　结构动力学和振动中的有限元 …… (323)
11.1　引言 …… (323)
11.2　动力学方程·质量和阻尼矩阵 …… (324)
11.3　质量矩阵:协调性,对角和其它 …… (326)
11.4　固有频率和振型 …… (332)
11.5　阻尼 …… (336)
11.6　减少自由度数 …… (337)
11.7　响应历程:模态法 …… (341)
11.8　响应历程:里兹向量 …… (344)
11.9　组件振型综合法(CMS) …… (345)
11.10　谐波响应 …… (349)
11.11　响应历程:直接积分法 …… (351)
11.12　显式直接积分法 …… (353)
11.13　隐式直接积分法 …… (359)
11.14　直接积分:稳定性和精确性分析 …… (362)
11.15　响应谱分析 …… (367)
11.16　备注·建模考虑 …… (369)
11.17　应用:振动和谐波响应 …… (375)
11.18　应用:响应历程 …… (377)
分析题 …… (381)
计算题 …… (381)

第 12 章　传热和流体问题 …… (390)
12.1　传热:引言 …… (390)
12.2　有限元列式 …… (394)
12.3　辐射·非线性传热问题 …… (397)
12.4　瞬态热分析 …… (399)
12.5　建模考虑·备注 …… (401)
12.6　应用 …… (404)
12.7　声频和模式 …… (408)
12.8　流体-结构相互作用 …… (411)
12.9　平面不可压缩无旋转流动 …… (413)
分析题 …… (414)
计算题 …… (418)

第 13 章　约束:惩罚形式,锁定和约束计算 …… (421)
13.1　显式约束·变换方程 …… (421)
13.2　施加约束的拉格朗日乘数 …… (423)
13.3　施加约束的罚函数 …… (424)

13.4 隐式罚约束和锁定 …… (426)
13.5 约束计算 …… (429)
13.6 关于分析不可压缩介质方法的备注 …… (432)
分析题 …… (434)

第 14 章 回转体 …… (437)
14.1 引言·轴对称的弹性关系式 …… (437)
14.2 轴对称实体单元 …… (439)
14.3 应用 …… (441)
14.4 非轴对称载荷:引言 …… (444)
14.5 非轴对称载荷:有限元分析中的一些细节 …… (448)
分析题 …… (451)
计算题 …… (454)

第 15 章 板的弯曲 …… (457)
15.1 引言·板的性能 …… (457)
15.2 C^1(Kirchhoff)板单元 …… (463)
15.3 C^0(Mindlin)板单元 …… (467)
15.4 Mindlin 梁·C^0 板单元的更多方法 …… (472)
15.5 边界条件·试验问题 …… (475)
15.6 应用 …… (477)
分析题 …… (480)
计算题 …… (483)

第 16 章 壳 …… (485)
16.1 引言 …… (485)
16.2 圆形拱和拱单元 …… (487)
16.3 回转壳 …… (493)
16.4 一般壳体:3 节点和 4 节点单元 …… (496)
16.5 一般壳体:曲面等参单元 …… (500)
16.6 算例·备注 …… (505)
16.7 轴对称壳的应用 …… (507)
分析题 …… (509)
计算题 …… (512)

第 17 章 非线性:引言 …… (515)
17.1 非线性问题 …… (515)
17.2 几种求解方法 …… (516)
17.3 塑性:简介 …… (522)

17.4 塑性:小应变下的一般列式 …… (525)
17.5 塑性:冯·米赛斯理论列式 …… (527)
17.6 塑性:几种计算方法 …… (530)
17.7 非线性动力学问题 …… (534)
17.8 间隙和接触问题 …… (537)
17.9 几何非线性 …… (539)
17.10 建模考虑·备注 …… (544)
分析题 …… (547)
计算题 …… (552)

第 18 章 应力刚度和屈曲 …… (555)
18.1 引言·能量考虑 …… (555)
18.2 杆和梁单元 …… (558)
18.3 板单元 …… (560)
18.4 一般列式 …… (561)
18.5 屈曲载荷的计算 …… (563)
18.6 关于应力刚度及其用法的备注 …… (565)
18.7 备注和实例 …… (567)
分析题 …… (570)
计算题 …… (575)

附录 A 矩阵:定义和运算 …… (577)

附录 B 联立代数方程组 …… (582)
B.1 概述 …… (582)
B.2 直接求解方法 …… (583)
B.3 迭代求解方法 …… (585)

附录 C 特征值和特征向量 …… (589)
C.1 概述 …… (589)
C.2 标准特征问题 …… (590)
C.3 一般特征问题 …… (591)
C.4 求解算法 …… (593)

参考文献 …… (596)

第1章

绪 论

这一章概述了有限单元法——有限元法是什么，它将应用于什么问题，以及如何运用。本书的后续章节将详述这些问题以及相应的理论。

1.1 有限元分析

有限单元分析(FEA)，也称为有限单元法(FEM)，它是求解场问题数值解的一种方法。场问题需要我们确定一个或多个相关变量的空间分布。于是，我们就有可能寻求一台发动机活塞内的温度分布或者混凝土路面的位移和应力分布。在数学上，一个场问题由微分方程或者积分表达式描述。每种描述都可用于有限元列式。在通用的有限元分析程序中包含了现成形式的有限元(FE)列式。当人们对有限元知识或者对将其用于求解问题知之甚少时，运用有限元程序，有可能招致小到令人烦恼、大到灾难性的后果。

单个的有限单元可形象化地视为结构的一小片。“有限”这个词区分了这些小片和微积分学中的无穷小微元。在每个有限单元中，允许一个场量仅有简单的空间变化，也许由多项式项 x^2，xy 和 y^2 来描述。单元所跨区域内的实际变化几乎可以肯定比较复杂，因此有限元法提供的仅是近似解。单元的连接点叫做“节点”(图 1.1-1)。单元的集合称为有限元结构，通常用的“结构”一词意味着已定义的物体或区域。特定的单元排列称为网格。在数值分析中，有限元网格用待求节点未知量的代数方程组来表示。节点上的未知量是场量的值，它依赖于单元的形状，或许也依赖于它的一阶导数。节点值的解，当它和给定单元上的场量结合起来时，完全决定了单元上场的空间变化。这样，整个结构上的场量，以分段的形式一个单元一个单元地近似。尽管有限元解不是精确解(除非问题如此简单以致于有限元分析可能不适合)，但是可以通过对结构划分更多的单元来提高解的精度。

比之其它数值方法，有限元法具有许多优点，包括通用性强和物理概念明确。

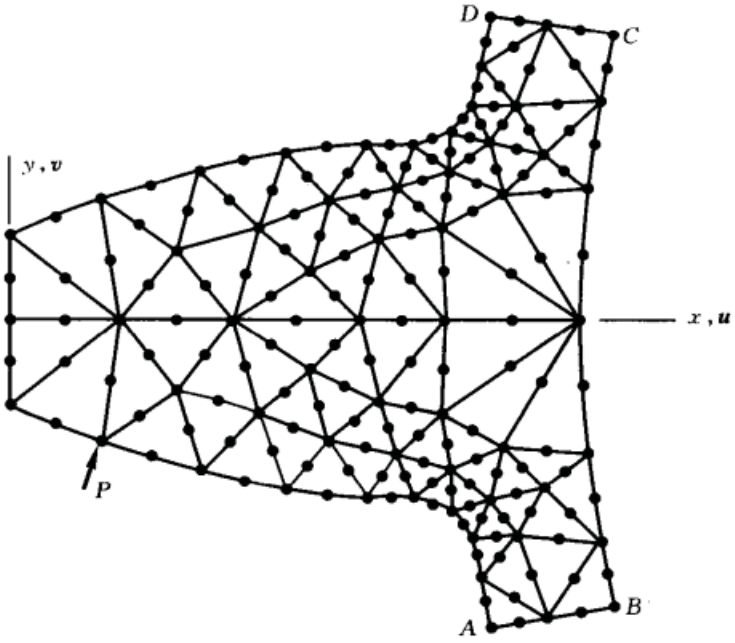


图 1.1-1　齿轮齿形的二维模型。所有的节点和单元都在图形平面内，支撑未显示

- FEA(有限元分析)可以运用于任何场问题：热传导、应力分析、磁场问题等等。
- 没有几何形状的限制。所分析的物体或区域可以具有任何形状。
- 边界条件和载荷没有限制。例如：在应力分析中，物体的任意部分都可以被支撑起来，然而分布力或集中力却可以施加在其它任何部位。
- 材料性质并不限于各向同性，可以从一个单元到另一个单元变化甚至在单元内也可以不同。
- 具有不同行为和不同数学描述的分量可以结合起来。因此，单个有限元模型可以包含杆、梁、板、缆索和摩擦单元。
- 有限元结构和被分析的物体或区域很类似。
- 通过网格细分可以很容易地改善解的逼近度，这样在场梯度大的地方就会出现更多的单元，需要求解更多的方程。

自从有限元分析出现以来已经有许多其他数值方法，但目前仅有有限元法可自信地断言具备所有上述优点和特性。

本书概述　本章的其余部分以导言的方式详细地说明了前面的评述。最易于理解的有限单元是那些组成结构的杆单元和梁单元。这些单元连同对所有单元运用的有限元分析方法将在第 2 章讨论。第 3 章讨论平面问题中简单的三角形单元和矩形单元。第 4,5 章介绍有限元的一般列式方法。第 6,7 章讨论任意形状的四边形单元和曲边单元。第 8～10 章讨论建模过程、误差来源，分析网格连续细化到何种程度就被认为足够收敛。第 11～13 章介绍有限元法在具体问题中的应用，如动力学和振动问题，热问题以及一些涉及到流体和不可压缩介质的问题、第 14～18 章都集中在结构力学问题上，包括材料非线性。附录讨论了矩阵运算、方程求解和特征值提取等问题。

多年来,对有限元列式和分析方法作了改进和扩充,提高了性能。我们在本书中强调更基本的概念、单元以及实施过程。网格细化通常超出本书的范围,但是它将包含在商业软件中,参考文献中也给予了描述。

1.2 问题分类,建模和离散化

分类 求解问题的第一步就是先对它进行识别,它包含的更重要的物理现象是什么?问题依赖于时间还是与时间无关?(在应力分析术语中,我们要弄清楚是静力学问题还是动力学问题。)是否包含非线性问题,以至于迭代解法是否必要?要从分析中得到什么结果?需要多高的精度?对这些问题的回答将影响到需要收集多少信息来进行分析,如何对问题建模以及采用哪种解法等问题。

一个复杂的问题并非局限于某一类。一个例子就是流体和结构的相互作用问题,例如:地震对液体贮罐的激励。流体的运动使薄壁容器挠曲,这种挠曲又影响了流体的运动。因此,结构位移和流场不能分开来考虑,计算必须考虑到它们的相互作用。这个例子包含了可能被称做*直接或相互的耦合*,其中的每个物理场影响到了其它物理场。另外也有*间接或连续耦合*,只有一个场影响到另一个,其中一个例子就是普通的热应力分析,温度影响了应力,但应力对温度的影响可以忽略。

建模 解析的方法应用于模型问题而非实际的物理问题。甚至实验室的实验也用模型,除非对实际物理结构进行试验。当问题的物理性质弄清楚之后,就可以设计用于分析的模型。在建模过程中,分析者需要排除过多的细节,但必须包括问题的所有本质特征,这样,模型的分析不会复杂化,但是它提供了能够用足够的精度来描述实际问题的解答。当它的行为被选定的微分方程组和边界条件描述或逼近时,几何模型就变成了*数学模型*。这些依赖于特定形式的方程,可能会含有一些限制条件,诸如:均匀性、各向同性、材料性能恒定以及小应变和小转角等。

有限元分析是*仿真*而非真实,认识到这一点很重要。有限元分析应用于数学模型。如果数学模型不合适或者不充分,即便很准确的有限元分析也会和物理现实不一致。

数学模型是一个理想化的模型。在这个模型中,几何形状、材料性质、载荷和/或边界条件都根据分析者对它们在问题解答中的重要性的理解作了简化。例如,在应力分析中,材料可能被看作是均匀的、各向同性和线弹性(尽管通常的材料并非如此);小片面积上的分布载荷可看作是作用于某一点上的集中载荷(这在物理上是不可能的);支撑可被指定为固定的(尽管没有完全刚性的支撑);能够引入凹角,但应力集中可以忽略(如果我们求解的是其它地方的应力);对于几乎扁平的结构,可以建立二维模型(如果应力在厚度方向不变化,或者在弯曲时经常看作是线性变化的)。轴对称压力容器的行为,可以用弹性轴对称方程或者壳体的轴对称方程来描述,这取决于容器是厚壁还是薄壁容器。类似这样的建模决策应该在有限元分析之前进行。

离散化 数学模型是通过把结构划分成众多的有限单元而离散化建立起来的。这样用有限节点数和每个单元内的简单插值确定的分片连续场来代表一个完整连续的物理场。很明

显，离散化引进了新的近似。相比于实际情况，有两个误差来源：建模误差和离散化误差。建模误差可以通过改进模型来减少，离散化误差可以通过运用更多的单元来减小。即使离散化误差可以减少为零，但因为建模误差的存在，实际情况也不能很完美地表现出来。另外，由于计算机表示的数据和处理过程结果精度有限，在计算中会引入数值误差。数值误差很小，但某些物理因素和不良的离散化会使误差变大。

作为一个简单的建模和离散化的示例，考虑如图 1.2－1 所示的锥形柱体。它的横截面积从底部的 A_b 变为顶部的 A_t。在建模时，我们选择地基作为刚性支撑。一旦我们忽略来自模型的地基变形，顶端的位移完全是由于柱体的缩短所致，底部应力的大小和分布则与柱体实际的应力状态有所不同。我们可以假定每个横截面上都是单轴应力状态，如果锥度是轻微的，这个近似就是可以接受的。在单轴应力的数学模型中，只有轴向坐标是一个独立变量。这种表述和底部均匀应力的情形相一致。同样地，在这个模型中，顶部载荷的分布方式影响不大，但它的大小是非常重要的。柱体本身的重力分布通常可以忽略不计。我们也可以假定材料是均匀的和线弹性的。这样，如果材料是混凝土，我们就忽略它的粘接粒子结构和由此引起的局部应力变化，以及它的应力、应变关系中的非线性。

对于单轴应力和线弹性，我们能够用弹性模量 E 相同但横截面积不同的分段单元堆栈来表示逐渐变细的柱体，如图 1.2－1 所示。用增加分段的数目来减小离散误差。这种离散锥形结构的方式并不新颖，但它如下一节论述的那样，能够看作是有限元分析的一个简单实例。

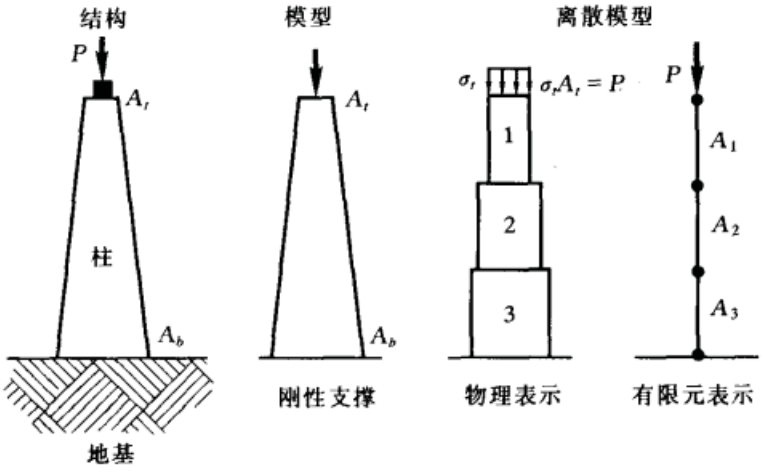


图 1.2－1　锥形柱体的建模步骤和有限元分析

完成分析之后，检查结果非常重要。图 1.2－1 中，离散化之前，很明显可以看到整个模型中的轴向应力大小介于 P/A_b 和 P/A_t 之间。即使这样简单的检查也可以发现大错误，或许是由于数据输入的疏忽所致的错误。

1.3　插值·单元，节点和自由度

有限元分析的实质是用场量的分片插值来近似。通常采用多项式插值。我们在图 1.3－1 中建立了一个单轴应力模型来说明有限元法在锥度杆中的应用。我们将简单地描述杆单元和所得结果的特征。不管物理问题多么复杂，所得到的结果和其它大多数有限元分析结果的

特征是一样的。

杆单元 图 1.3-1 表示的锥度杆被离散化为三个均匀的线弹性 2 节点单元,长度各为 L。场量为轴向位移 u。沿着一个典型单元,比如说中间的一个,u 用节点位移 u_2 和 u_3 表示成如下形式:

$$u = \left(1 - \frac{s}{L}\right)u_2 + \frac{s}{L}u_3 \tag{1.3-1}$$

其中 s 是沿单元的轴向坐标。很明显,式 1.3-1 表示了 u 随 s 的线性变化,在 $s=0$ 处 $u=u_2$,在 $s=L$ 处 $u=u_3$。右边的单元将采用同样的形式,但运用的节点位移是 u_3 和 u_4。同理,最左边的单元也采用同样的形式,但是 $u_1=0$,因为左端是固定的。线性位移 $u=u(s)$ 规定了轴向应变 ε 在整个单元内是常量。根据应力-应变关系式 $\sigma=E\varepsilon$、应变基本定义(长度变化量除以原始长度)和 $u_1=0$,我们得到图 1.3-1 中各个单元内的应力表达式:

$$\sigma_{1\text{-}2} = E\frac{u_2}{L} \quad \sigma_{2\text{-}3} = E\frac{u_3 - u_2}{L} \quad \sigma_{3\text{-}4} = E\frac{u_4 - u_3}{L} \tag{1.3-2}$$

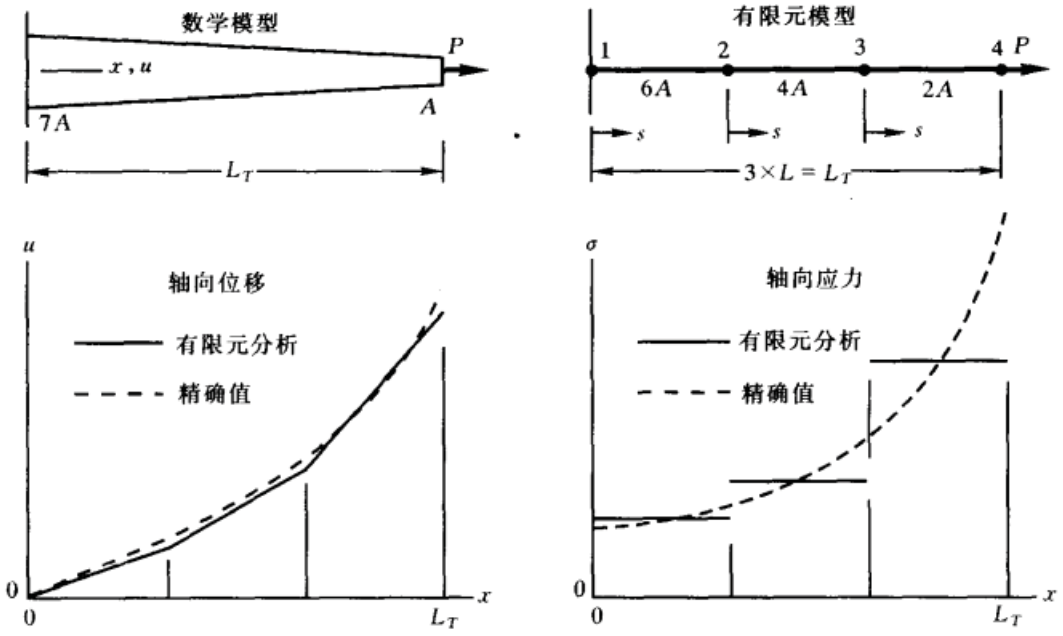


图 1.3-1 离散为三个均匀 2 节点单元的锥度杆

图 1.3-1 所示的问题简单到有限元求解时不需要矩阵运算,用如下所述的初等材料力学亦可求解节点位移。

三个杆单元各自的横截面积不变,分别是 $6A$,$4A$ 和 $2A$。它们是锥度杆单元中点处的横截面积。节点位移可由杆在轴向载荷作用下的伸长表达式来求得。因此

$$u_1 = 0 \quad u_2 = \frac{PL}{6AE} \quad u_3 = u_2 + \frac{PL}{4AE} \quad u_4 = u_3 + \frac{PL}{2AE} \tag{1.3-3}$$

这些位移可以用替代 $L=L_T/3$ 由总长度 L_T 来表示。单元应力由公式 1.3-2 求得。检查结果时,可以方便地用 P 除以横截面积得到应力,因为这个简单问题是静定的。

图 1.3－1 中绘出了结果图。位移图是在连续曲线上的不同点之间，由采用插值法得到的直线段组成的。换句话说，节点上的场量值并非真实值，原因是结构离散化时产生的误差。仅对一些简单的问题，节点上的场量值是真实值。“真实”的意思是完全和数学模型的行为相吻合，并不是必然和物理现实情况相一致。阶梯状的应力图表明，本例中单元中心处的应力值是准确的。在别处，应力没有位移表示得准确，这和有限元法分析中预料的一样，因为有限元法中的基本量是位移场，而应力通常是由位移梯度计算出来的。

公式 1.3－1 的一个替换形式如下：

$$u = a_1 + a_2 s \tag{1.3-4}$$

其中，a_1 和 a_2 是常量，它们可由位移 u_2 和 u_3 表示，只需要求在 $s=0$ 处 $u=u_2$，在 $s=L$ 处 $u=u_3$。a_i 称做广义坐标或广义自由度。术语“自由度”简写为“d. o. f.”，在本节的最后将给予解释。

其它单元　从图 1.1－1 和 1.3－1，人们可能猜测（不正确地）有限元离散化就是概念性地将一个实际结构分成小片，然后在方便的点处重新连接起来得到的。如果运用于图 1.1－1 的齿轮，这个过程就会导致三角形小片在角点或中点处相连的结果。这样的拼凑物比实际结构要差，节点附近将产生应变集中，小片之间将会产生滑动，相互之间产生裂缝。这些缺点在有限元中不会出现，因为单元是基于简单的场划分的，它不包括可能表示应变集中的项，并提供了单元间的协调性①。以下是对于一些简单二维单元的场的运用。在后续章节中我们将解释在有限元分析中如何使用这些场。

图 1.3－2(a)显示了 3 节点三角形单元，它可以表示一个二维场 $\phi=\phi(x,y)$。作为例子，ϕ 可能表示温度、电压、渗流问题中的水头以及充气薄膜的横向挠度。依照式 1.3－4 的形式，单元场是

$$\phi = a_1 + a_2 x + a_3 y \tag{1.3-5}$$

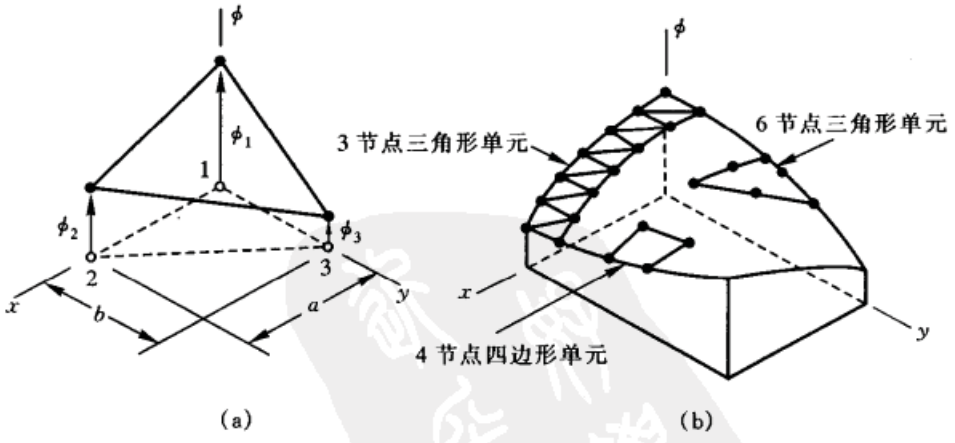


图 1.3－2　(a)3 节点三角形单元；(b)光滑函数 $\phi=\phi(x,y)$ 可以用不同类型的单元来近似

① 后面讨论的一些单元是不协调的，沿单元边界，而不是节点，在相邻单元间可能出现裂缝或重叠。对此类单元列式采用提高粗网格精度的方法，当网格细化时，使单元间的不协调性趋于零。

三个 a_i 用三个单元节点处的 ϕ 值来表示，这将在第 3 章中说明。图 1.3-2(b)表示，这些单元的网格由若干三角形小平面组成的表面近似为光滑函数 ϕ。图 1.3-2(b)中显示的 4 节点矩形单元具有如下的场

$$\phi = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy \tag{1.3-6}$$

而具有中节点的 6 节点三角形单元场为

$$\phi = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 \tag{1.3-7}$$

4 节点矩形单元表示单元上的场 $\phi=\phi(x,y)$ 可以是平面或曲面。6 节点三角形单元可以表示抛物线面 ϕ。在所有这些单元中，ϕ 沿单元边界的变化完全由该边节点的 ϕ 值决定。因此，在共有边界上共享节点的邻接单元自动地在共有边界上表示同一个函数 ϕ，在单元间不会出现如裂缝之类的不协调现象。

概括起来，可以说有限元分析是一种分析方法，其中它的场变量定义在每一个小片区域上，通过把简单的插值函数联系起来进行逼近。这个小片区域叫做有限单元。插值函数(如方程 1.3-5)与单元类型中的节点数相适应，而 a_i 的幅值由被称为节点的特定点上的场量值来决定。单元在节点处相连，并在节点上共享场量值(根据不同的单元类型，它们也可能共享节点处场量的一个或多个导数值)。节点也是作用载荷和施加边界条件的位置。

自由度(d.o.f.) 自由度是控制场空间变化的独立量。例如：式 1.3-7 定义了一个具有 6 个自由度的场 $\phi=\phi(x,y)$，也就是 6 个 a_i，6 个节点上的 ϕ_i 值可以定义同样的场。图 1.1-1 中每个单元具有 12 个自由度，也就是 6 个节点位移 u_i 控制了 x 方向的位移场 $u=u(x,y)$，6 个节点位移 v_i 控制了 y 方向的位移场 $v=v(x,y)$。u_i 和 v_i 是特定节点的位移，但一般来说 a_i 不是。

1.4 实例·有限元分析发展史

应用 图 1.4-1 展示了 1965 年有限元分析火箭喷管的应用实例[1.1]。该结构是轴对称的，它的回转轴位于所示横截面的上方。每个有限单元都是具有三角形横截面的圆环，单元在每个顶点都有节点(在这种情况下是节点圆)。每个节点上的场量是用于热传导分析的温度和用于应力分析的轴向及径向位移。两者的分析用相同的离散方法。计算的节点温度转换为应力分析模型，用于确定热应力。

在图 1.4-2 中，有限元分析应用于感应电动机中。图中仅显示了电动机的一部分，由于运用了对称性，只对重复的部分进行了建模。三角形单元网格跨越了两磁极间的缝隙。对于静磁分析，节点上的未知量是磁势值。

可以从许多其它应用领域给出有限元分析的例子。分片插值的概念对它们来说非常普通。但是，对有限元概念的熟悉不等于就完全掌握了分析方法。例如：图 1.4-1 对现在的应力分析者没有造成多大的挑战，但是如果以图 1.4-2 所示的磁学问题呈现给应力分析者，则可能会不知道要计算什么结果以及需要输入什么数据。所以，理解问题的物理实质非常重要。

由于前面两个应用实例提到的原因，有限元在它产生之后没多久就被工业部门所接受。

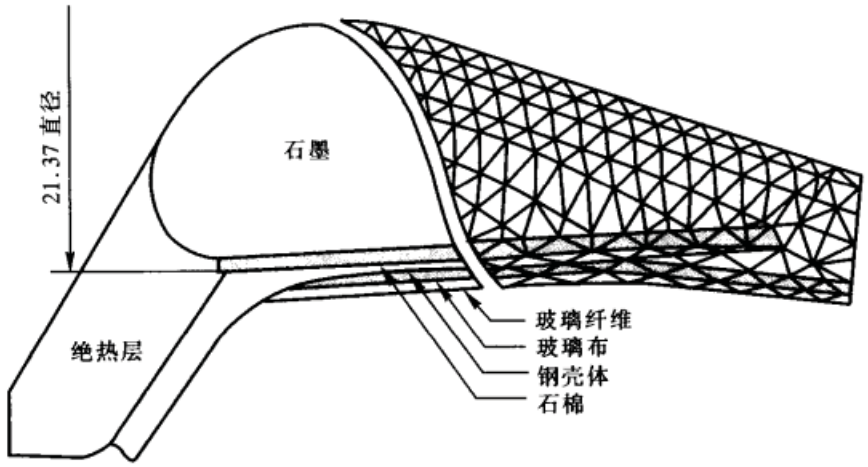


图 1.4-1　多种材料火箭喷管的横截面，结构（左边部分）和可能的有限元网格（右边部分）[1.1]

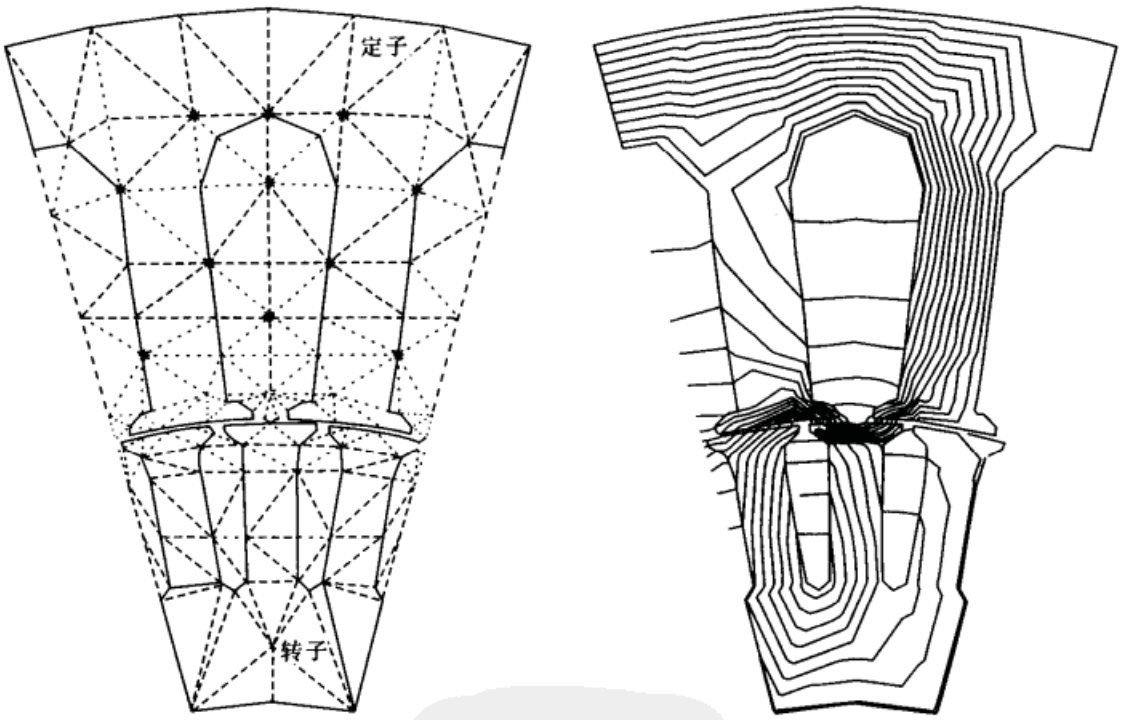


图 1.4-2　感应电动机部件。右边的图展示了转子在零转速下计算的磁通量等值线

有限单元可以表示任意复杂的几何形状。一个离散化的模型和实际物体或者区域很相似。每个单元可视为实际结构的一小片（但是具有理想的性能）。有限元的系统程序使计算过程几乎可以完全自动地进行。不幸的是，自动化使仅仅了解一点儿有限元知识就可以进行有限元分析，难怪一些评论者说，绝大多数有限元分析结果是无价值的。因此，理解有限元分析如何运行和检查差错就显得非常重要。

发展史　在 1851 年，为了得到空间内一给定闭合曲面围成的微小面积的微分方程，Schellbach 把表面离散化成正三角形，并写出了整个离散化面积上的有限差分表达式[1.2]。他

既没有提出其它应用，也没有把这种思想普遍化。今天，有限元分析被认为是为了避免求解微分方程而用一组代数方程来代替的近似方法。

从1906年开始，研究者注意到杆系结构具有许多类似于各向同性弹性体的性质[1.3,1.4]。1941年，有了应用于平面弹性问题和板弯曲问题的报道[1.5]。这些工作很好地发展了结构力学分析方法，但并未应用于任意形状的形体中。当然，它也不是将连续体离散化为许多小片，而是以不同类型的子结构来代替。这种结构分析方法与其说是有限元分析的早期形式不如说是它的先驱。

现在我们熟知的有限元法起源于1943年Courant发表的论文，这篇论文是Courant 1941年在美国数学界讲演时所用的文稿[1.6]。Courant把空心轴的横截面划分成许多三角形，并在三角形内部，对应力函数ϕ用其在三角形网点（现在称之为节点）上的ϕ值进行线性插值，从而得到该轴的扭转刚度。他并没有提到Schellbach的工作。Courant注意到，这个方法意味着"更宽泛的一般性，它将提供更大的灵活性，具有相当的实用价值"。它的实际应用直到航空工程师完善了这个方法才得以实现，显然Courant的工作就鲜为人知了。

20世纪50年代中叶，航空工业取得了长足的进步，但由于公司策略，这方面的著作很晚才得以发表。这段时间的初期，在可利用的小型计算机上，求解用传统分析方法得到的方程。在美国，对于低展弦比的机翼，传统方法已不能提供足够的精度，因此Turner想出了用3节点三角形对机翼表面进行建模，Taig在英国做了同样的工作[1.8]。德国的Argyris在许多有矩阵运算的有影响的论文中都包含了有限元分析的概念[1.9]。详细论述可在参考引文中找到，也可查阅文献[1.10~1.13]。

"有限单元"的名字是Clough在1960年创造的。其后不久，许多用来作应力分析的新型单元都开发出来，大部分是由直觉或者物理上的证明得到的。1963年，当有限元法被认为是经典近似技术——瑞雷-里兹法的一种形式时，它在学术界获得了良好的声誉。这样，有限元法不仅仅被视为应力分析中的一个特殊技巧，而是一个具有深厚数学基础的有广泛用途的方法。1965年，出现了利用有限元方法分析热传导和渗流的论文。20世纪60年代末、70年代初，出现了用途广泛的有限元分析计算机程序。自20世纪70年代末以来，不断增强功能的计算机图形学被用于有限元程序中，使有限元分析在实际设计工作中更具吸引力。此前，有限元分析是如此令人生厌，以至于主要用于设计后的验证和研究已失效的结构。

实际有限元分析的计算量是如此之大，以至于必须由计算机来实施。涉及超过10万个自由度的有限元分析并非罕见。计算机和程序语言与早期有限元分析的同步发展不是偶然的。

最早关于有限元分析的教材于1967年出版[1.14]。到1995年，Mackerle[1.15]估计每年大约有3 800篇关于有限元分析的论文发表，有限元分析的出版物总数多达380种，并有400份会议报告和56 000多篇文章（不包括流体力学方面的文章）。Mackerle还列举了310个多用途的有限元程序。

1.5 用有限元分析求解问题

用有限元分析求解问题包括以下几个步骤：查明问题；准备数学模型并把它离散化；用计算机进行计算；检查结果。通常需要对上面的步骤进行多次循环。计算机的计算时间仅是分

析者所用时间的一小部分，但分析者必须理解计算机正在进行的工作。本节提到的内容将在第 10 章详细讨论。

问题分类　就像 1.2 节总结的一样，分析者必须理解问题的性质。没有这一步就不可能设计一个合理的模型，有限元分析软件也不能告诉要做什么。当前，软件还不能自动决定：如果有应力高到足以使材料产生屈服，需要进行非线性分析；如果薄截面承受压载荷，要考虑屈曲分析。尽管软件有被赋予更多决策能力的趋势，但分析者也不能放弃自己对软件的控制权。软件具有局限性而且几乎肯定含有错误，但对计算结果负有法律责任的是工程师而不是软件提供商。

数学模型　在进行有限元离散化和数值求解之前，我们为分析问题设计模型。这一步包括决定哪种特征对所要探讨的问题是重要的，以便忽略不必要的细节，并决定采用哪种理论或数学公式来描述结构的行为。因此，我们可以忽略几何不规则性，把一些载荷看作是集中载荷，并把某些支撑看作是固定的。材料可以理想化地认为是线弹性和各向同性的。根据问题的维数、载荷以及理想化的边界条件，我们能够决定采用梁理论、板弯曲理论、平面弹性方程或者一些其它分析理论描述结构性能。在求解中运用分析理论简化问题，建立起数学模型。

因为随后的有限元分析是近似的且仅与数学模型有关，是从现实中凝炼出来的。建模决策受收集到什么样的信息、需要什么样的精度、有限元分析的预期费用和它的计算能力以及局限性的影响。最初的建模决策也是暂时的。最初的有限元分析结果很可能建议在几何（也许恢复先前忽略掉的几何不规则性）、应用理论（也许把平面拓展项添加到板弯曲理论）等方面进行改进。

作为一个建模的例子，考虑图 1.5－1(a)所描述的一个非常简单的问题。圆环的厚度（沿垂直于纸面的方向测量）均匀并且和圆环的直径相比非常小。材料是线弹性的、均匀的和各向

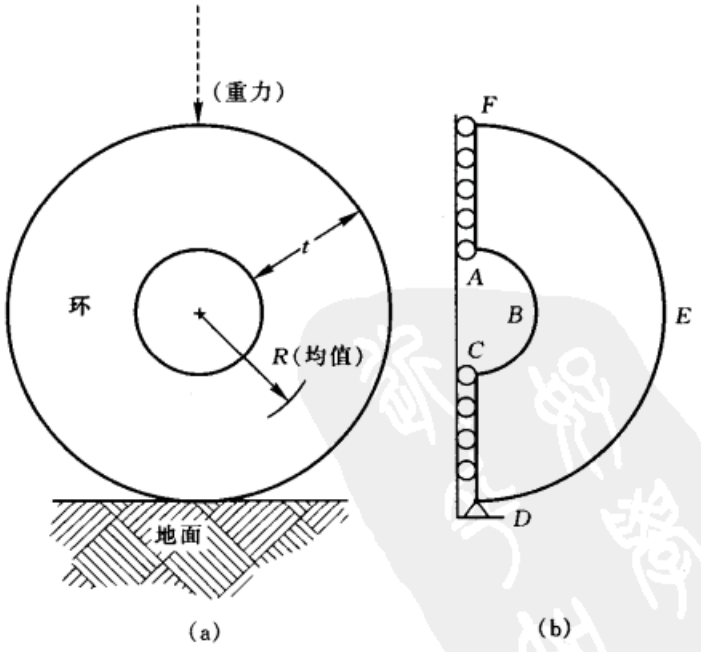


图 1.5－1　(a) 垂直放置于地面受自重作用的圆环；(b)数学模型

同性的。当圆环放置于地面时，求由于圆环自重产生的应力和挠度。很容易得到图 1.5－1(b)的平面模型，这里，利用了结构关于中垂线的对称性。不计地面所施加的支反力的细节，用一个点支撑来代替。如果平均半径大约为 $5t$ 或更大，则实际问题中的最大应力是周向弯曲应力。这样在 D 处与点支撑相关的理论上无限大的应力将不再重要(可能仅用常规有限元作为高应力计算)，二维模型就足够了。如果物理结构不是圆环，而是一个很长的薄壁管，是否可以认为模型是三维的？答案很可能不是。应力分析者认为，在管的长度方向上，应力和挠度基本上是常量，仅在端点处有所变化，而且这个变化仅对应力和挠度的最大值有影响。但是，在长管情况下更接近于平面应变而不是平面应力。这样模型就改变了，就必须给软件提供合理的数据并选择合理的分析方法。

当我们对选取合理的分析理论作出决定后，前面概念上的模型就变成完整的数学模型。对比较细的圆环，能够用梁理论。对不是那么细的圆环，用平面弹性理论将更为合理。对于一个需表示端部效应的薄壁管，薄壳理论将是合理的。基于不同理论的单元用不同的数学模型进行有限元分析。

为什么不用三维模型？毕竟，真实结构都是三维的，并且对于三维有限元分析也有相应的单元，原因就是计算代价。从二维拓展到三维，所需的计算时间和计算机资源将增至 10 倍或更多。

一个齿轮的齿提出了比圆环更复杂的问题。在图 1.1－1 中，支撑并未显示出来。沿 AB-CD 的弹性支撑由轮齿的其它部位提供，在此处施加完全固定的约束是否合适？一个实际的齿轮厚度并不均匀，把它看作二维模型是否令人满意？在轮齿的横截面上载荷 P 沿 z 方向分布是否均匀呢？如果不是这样，应力将相当大，就不能看作二维问题。

初步分析 在从数学模型进入有限元分析之前，不管是运用哪种传统的方法——简单的分析计算；手册公式；可信的初步解或者实验结果，至少应得到问题的一个初步解。这种努力中的某些工作可能会导致更精确的数学模型。随后它将用于计算结果的检验中。如果我们在有限元分析之前而不是之后做这项工作，就降低凡已经获得的有限元分析结果，尤其是如果要花费很大努力之后才能得到这样的结果，都想寻求答案予以支持的依赖程度。在给软件提供数据时很容易出错，甚至一个粗略的初步求解就能发现是由于数据输入差错而引起的严重错误。

如果圆环的半径 R 比厚度 t 大很多，就能很容易得到图 1.5－1 所示的环问题的初步解。细环中的应力和挠度的公式在手册中可以查到[1.16]。如果 R 和 t 相当，这些公式就是近似的，但依旧可以用来检验结果。

有限元分析(FEA) 通用有限元分析软件的使用包括以下步骤：

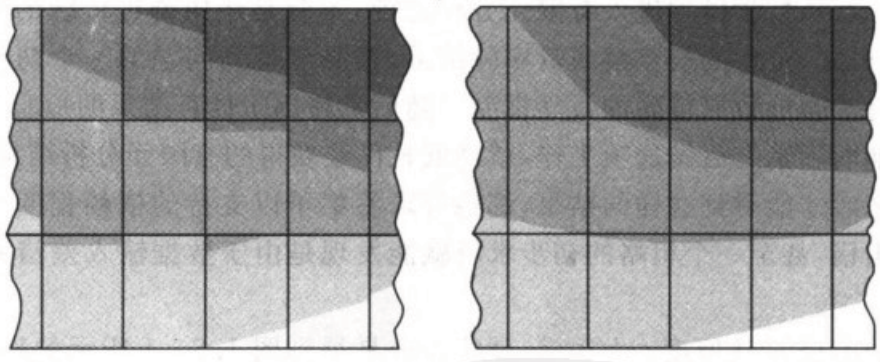
- 前处理：输入描述几何、材料属性，载荷和边界条件的数据。软件能自动地划分大部分有限元网格，但必须提供相应的指导，如：单元类型和单元疏密度。也就是说，分析者必须选择一个或多个单元列式以适应数学模型，并说明有限元模型所选区域的单元应有的大小。在进行下一步操作前，必须检查输入数据的正确性。
- 数值分析：软件自动生成描述单元性能的矩阵，并把这些矩阵组合成表示有限元结构的大型矩阵方程，然后求解，并得到每个节点上的场量值。如果性能依赖于时间或者是非线性问题，要另外进行具体的计算。

- 后处理：有限元解和由它得到的数值被列出来或者用图显示出来。除了分析者需要告诉软件列出或显示哪些变量外，这一步操作也是自动的。在应力分析中，典型的显示包括具有变形被放大的形状，或许还有动画，以及在不同平面上不同类型的应力。

检查结果　首先，定性地检查结果，查询他们是否“看起来正确”，也就是说是否有明显的错误？是否解决了我们想要解决的问题，或者是其它问题？边界条件经常被曲解；变形的有限元结构是否显示不应有的位移？期望的对称性在结果中是否出现？如果对这个问题的答案是满意的，则把有限元分析的结果和来自初步分析的解答进行比较，和能够得到的任何其它有用信息进行比较。

例如，让我们定性地分析图 1.5－1 所示的问题。沿 CD 和 AF 的点应该上下移动而不是左右移动。沿 BE 的点应该向下和向右移动。在 B 和 D 点附近的垂直应力应该是压应力。在 A 和 C 点附近的水平应力应该是张力，在 D 和 F 处应该是压力。垂直于面 ABC 和 DEF 的正应力应该为零，但是它将不会真的等于零，因为结果是近似的。同样地，由于对称性，沿 CD 和 AF 的剪切应力应该为零，弯曲应力的等值线应该和 CD 以及 AF 正交，但实际上将并非完全如此。

判断结构离散化程度是否充分的一个方法就是看应力图（或在热分析中的热流图）。软件能用彩色画出应力等值面图，也能画出应力带状图。不同的颜色用来表示不同水平的应力值。应力和场量的梯度有关，而给定单元的梯度仅取决于依附该单元节点上的场量。因此，像随后显示的那样，跨单元间的边界应力带不连续。严重不连续表明结构的离散化太粗糙，然而实际上连续带又暗示着更精细的离散化并不必要[1.17]。在图 1.5－2(a)中，应力带不连续但并非太严重，对预期的目的来说这样的离散化程度已经足够了。



(a)　　(b)

图 1.5－2　矩形单元部分网格中的应力带

(a)没有进行节点平均，单元间的不连续性表明了结果的好坏程度；

(b)进行了节点平均，克服了不连续性，但丢失了重要信息

可以指示软件来显示用节点应力平均值计算的应力（或热流）带。这样单元间的不连续性就被去除。形成的图在视觉上更令人满意，但是判断计算结果质量的有用信息却丢失了。由节点平均值绘制的应力带图 1.5－2(b)，可能认为结果比实际情况有更高的品质。

期望修正　初步的有限元分析结果很少能令人满意。明显的错误必须得到纠正。令人不安的期望值和计算值之间的大差异需要解释。或是物理上的理解或是有限元模型或是两者都可能出错。必须通过修正数学模型和／或有限元模型来满意地解决不协调性。经过另一个分

析循环，可能判断离散化不充分，或许在某些地方太粗糙。然后需要修改网格，再进行新一轮分析。

在一个新问题的分析中，通常都从一个简单的有限元模型开始，当分析者对问题了解更深时再添加细节描述。每一次修正都是在通向正确解答的道路上迈出可喜的一步，并不是对前面尝试中失败的惩罚。

有限元法分析流程示于图 1.5－3。

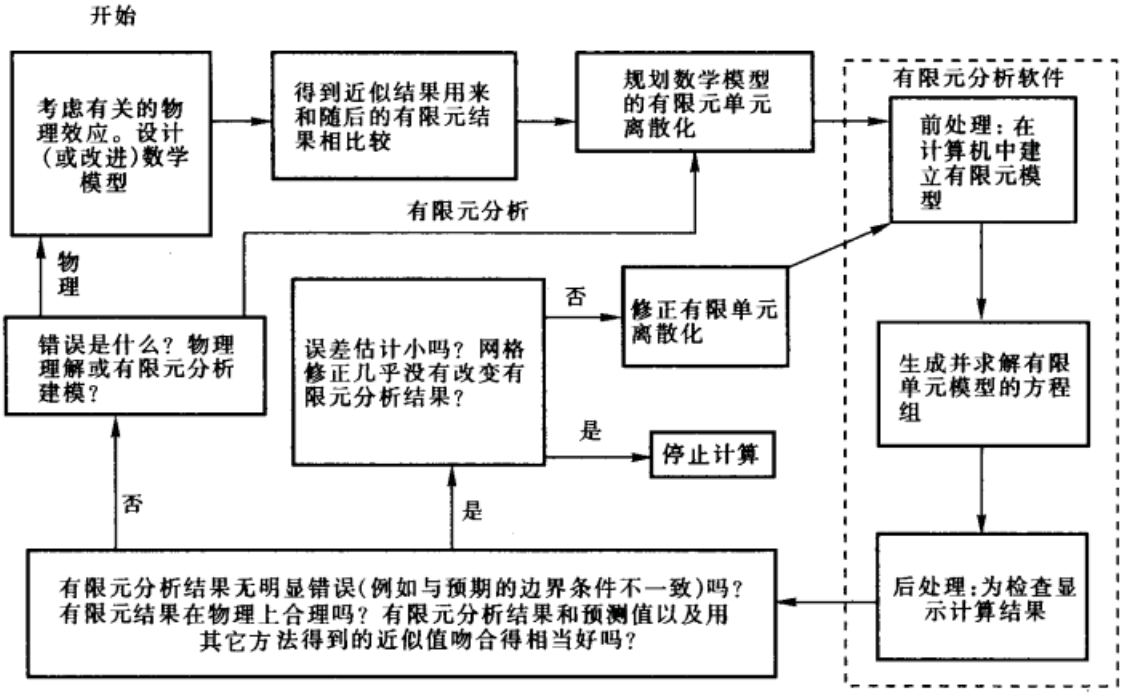


图 1.5－3 有限元分析流程图

1.6 学习和运用有限元分析

令人满意的单元和多功能的分析程序在广泛应用的软件中都能得到，软件的适应性如此强大，以至于笨拙的使用者都能够得到结果。那为什么还要学习有限元分析的理论？经验丰富的专业人员强调，只有当分析者理解了问题，知道如何对它建模，了解有限单元的性能、软件内的假设和局限性、数据的输入格式以及在所有阶段分析者都检查错误，才能得到可靠的结果。要求分析者理解所有单元和程序的细节并不现实，但只有那些理解了有限元基本原理的人才能避免有限元分析的滥用。例如，认识到每个单独单元在表示场量的空间变化时能力非常有限，以及单元间这个能力的不同是很重要的。

年龄大一点的工程师有时抱怨年轻工程师们对计算机程序存在天真的想法，过分重视计算机的能力而忽视分析技巧，并且缺乏产生“近似”解的能力。这些缺点在学习有限元分析中可以克服。学生能够利用有限元方法分析那些早有可利用的结果并知其可信的问题，发现并修改 在建模、数据输入和软件选项中不可避免的错误，直到与既定的结果相吻合为止。对于那些没有有效结果的问题，可以通过分析解答，如果必要，对它进行粗糙的解析求解，然后运用

有限元法求解，重复这个过程直到符合结果为止。这个练习将会提高分析技巧和使用有限元法的技能。获得结果一致性的初次失败可能会使人气馁，但它比成功更为有教益。

对工程中滥用计算机的研究报告考察了错误结果引起损失的案例，有计算延时付出的昂贵代价，需要重新设计，低劣的性能，甚至发生事故等。引用的 52 种案例中，7 个是硬件错误，13 个是由软件引起的错误，30 个是由用户造成的错误，2 个是由其它原因引起的错误。用户错误通常与差的模型有关，有时和用户对软件的局限性以及数据输入格式的理解不当有关。只要用户早点细心检查结果，绝大多数错误都能够被发现。但经常是损失造成之后，由顾主通过手算检查计算机的输出来找出引起故障的原因。

图 1.6－1 描述了一个令人警戒的例子。这里，一个铰支的直梁，承受能引起材料屈服和梁振动的压力脉冲作用。设法研究跟踪记录梁中点处作为时间函数的横向位移。由被视为专家的用户操作，运用 10 种著名的分析代码，得到图示的结果[1.19]。而若曲线中有一个是正确的，我们并不能认定是哪一个。无可否认，这个问题很难：结果表明“物理和计算特性两者的高灵敏度”[1.19]。这个例子提醒我们，分析软件是以理论和近似为基础的，用户可能会超出有效性范围使用软件[1.20]。

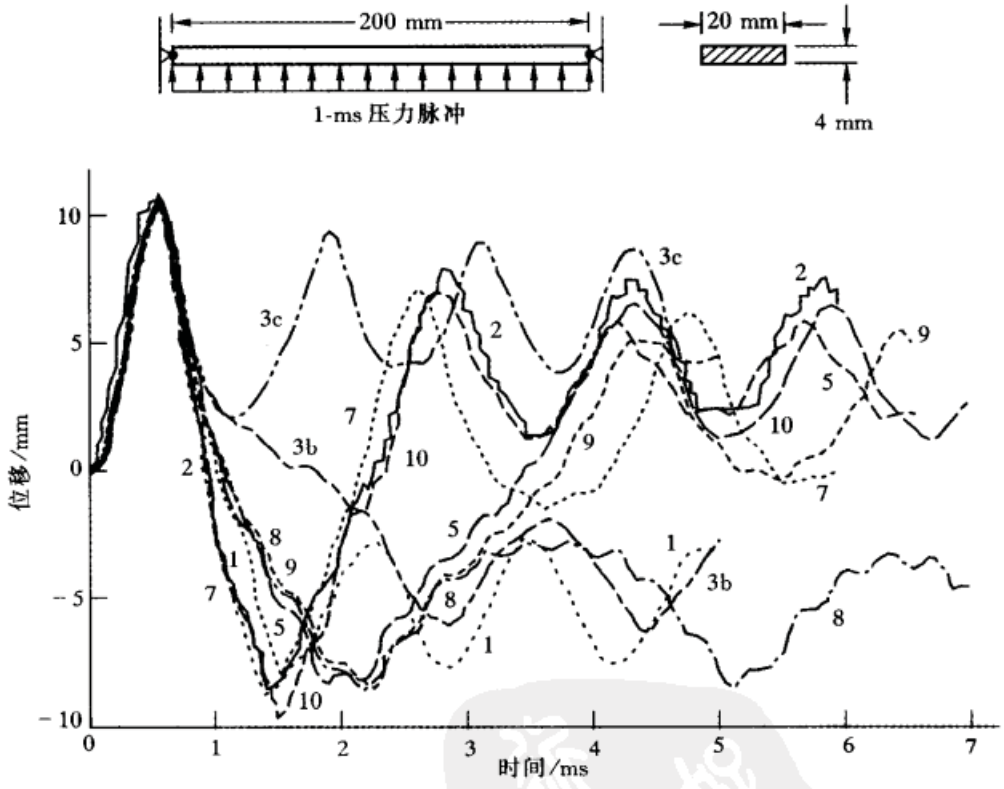


图 1.6－1　在脉冲压力作用下直梁中点处横向位移与时间的关系曲线[1.19]。复制经美国机械工程师协会(ASME)许可。材料是弹性-理想塑性。图线由不同的分析者运用不同的软件包生成

分析题

1.3－1　(a)对于图 1.3－1 所示的问题，确定 $x=L_T/3$，$x=2L_T/3$ 和 $x=L_T$ 处轴向位移的精

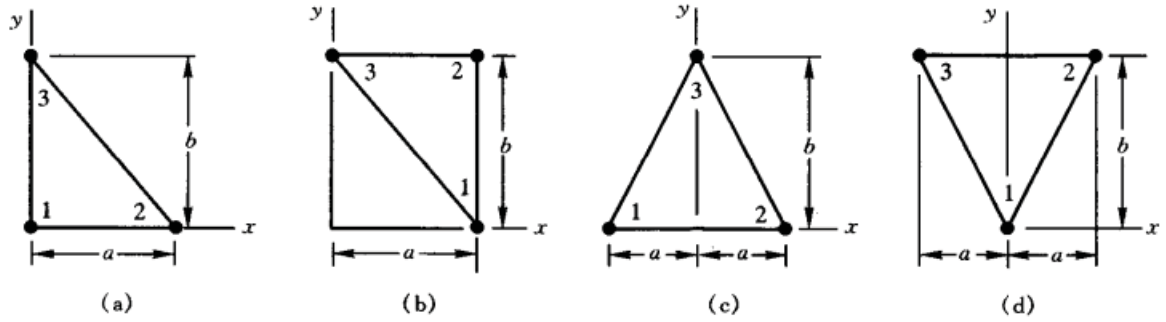
确解和有限元解。以此来验证 $u-x$ 曲线。

(b)以同样的方式验证图 1.3-1 中的 $\sigma-x$ 曲线。

1.3-2 应变 ε_x 由公式 $\varepsilon_x=\partial u/\partial x$ 给出。当在平面 4 节点单元中位移 u 以式 1.3-6 等号右边的形式给出时，应变 ε_x 的表达式是什么？你就这样的单元网格对单元间 ε_x 的连续性作何评论？

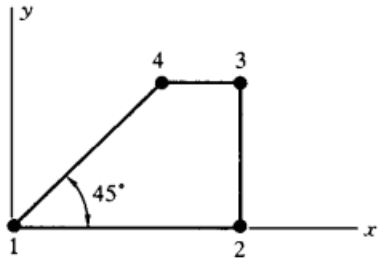
1.3-3 (a)在 3 节点三角形单元中，场量 ϕ 的表达式可写成 $\phi=a_1+a_2x+a_3y$，这里 a_i 是广义自由度。对图示的特殊形状三角形，将 ϕ 表示成 $\phi=f_1\phi_1+f_2\phi_2+f_3\phi_3$ 的形式，这里 f_i 是 x，y，a 和 b 的函数。建议：由条件 $x=y=0$ 处的 $\phi=\phi_1$、在 $x=a$ 且 $y=0$ 处的 $\phi=\phi_2$ 和 $x=0$ 且 $y=b$ 处的 $\phi=\phi_3$，得到关于 a_i 的三个方程。

(b，c，d)以类似的方式求下图所示三角形的表达式 $\phi=f_1\phi_1+f_2\phi_2+f_3\phi_3$。

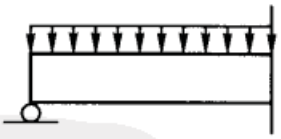


题 1.3-3

1.3-4 对图示的平面四边形单元，设想场量 ϕ 的形式为 $\phi=a_1+a_2x+a_3y+a_4xy$，其中，a_i 是广义自由度。在每条边上 ϕ 如何随 x 和 y 变化？你认为这个单元和它连接的相邻单元能保持协调吗？



题 1.3-4



题 1.4-1

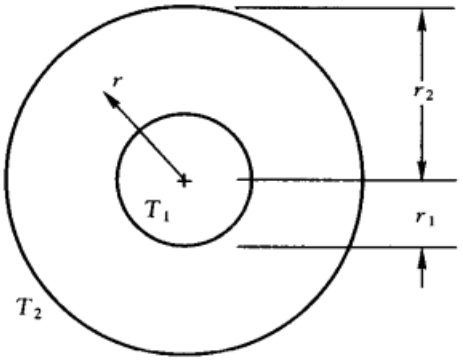
1.4-1 图示一个在均布载荷作用下的有支承悬臂梁，它就像在材料力学教材中所画的略图一样。在形成这个模型时对现实情况做了什么样的理想化处理？

1.4-2 圆柱管横截面如图示，管筒内外壁具有名义温度 T_1 和 T_2。管壁内任意半径处温度的标准解析解是

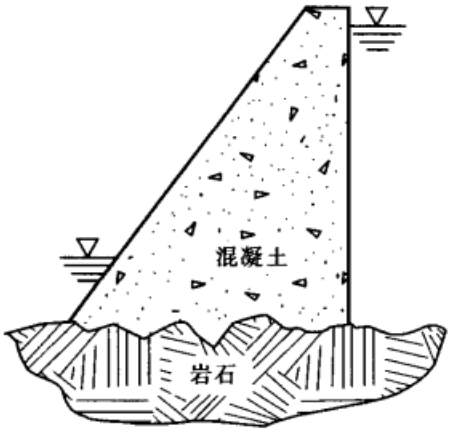
$$T=T_1+(T_2-T_1)\frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}$$

然而，实际的情形可能和理想情况差别很大，以致这个方程变得不够准确，温度分布

必须由有限元分析解来确定。举例说明。



题 1.4－2

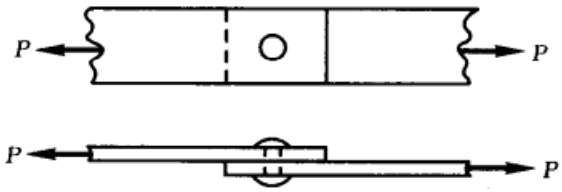


题 1.4－3

1.4－3　图示为一混凝土重力坝的横截面。符号▽表示水平面。想象需要作静水压力载荷下的应力分析。图中什么重要东西被忽略了？什么样的考虑会影响已设计的数学模型？在进行数值分析前，还需要补充什么信息？

1.4－4　在题 1.4－3 的重力坝中，假定岩石有轻微渗漏，需要作坝下的渗流分析。回答 1.4－3 提出的问题。

1.4－5　两块钢板用单个铆钉连接形成一个如图所示的搭接结构。有轴向载荷作用。如果需要进行精确且详细的应力分析，在设计分析中必须要考虑材料性质、几何学和载荷的哪些方面？



题 1.4－5

第2章

一维单元和计算过程

我们考虑一个在每个端点具有一个节点的直线单元，通过物理论证，得到反映单元行为的矩阵。然后，不论是哪种单元类型，我们利用这些相对简单的单元和矩阵来解释有限元分析中通用的计算过程。这样，在这一章，我们研究线弹性静态有限元分析的整个计算过程：单元矩阵的建立、结构方程的组集、载荷和边界条件的应用、结构方程的解法、梯度的提取（本章指的是单元应变和单元应力）。

2.1 引言

一维单元包括承受轴向载荷的直杆、承受横向载荷的梁以及传导热和电的杆等等。在结构力学术语中，杆仅能承受轴向载荷，而梁从更一般意义上讲，能够承受轴向、横向和扭转载荷。在与时间无关的分析中，有 n 个杆件的桁架可用 n 个杆单元来建模，而对于由 n 个直杆组成的刚架结构，一般需要 n 个梁单元。在两个或更多支点上的连续梁，在两个支撑跨度间用一个梁单元来建模。这样，一维单元用于静力学分析时，建模阶段的离散化就变得很简单了，而且就应力分析而言，名为“结构力学的矩阵方法”就优越于有限元法分析了。然而，有限元软件中提供的杆单元和梁单元，已被广泛采用，两者既可单独使用也可以和其它类型单元结合起来运用。例如，梁单元可以附加到板单元中对刚性板进行建模。

在这一章中，我们把注意力集中在线性问题中，即材料特性基本上不随载荷（力或力矩、温度、电压等等）而改变。在力学问题中，线性要求变形足够小，这样，平衡方程就能够用最初的几何尺寸而不是变形后的几何尺寸写出。也就是说我们排除下述的非线性行为，例如：钢的屈服、混凝土的破碎、裂缝的开启和闭合以及横向挠度大到足以产生薄膜拉伸作用。还有，我们仅考虑静态问题，在结构力学中，它叫做静态或（更合适一点）准静态。如果作用于结构的循环载荷的频率小于结构的最小固有振动频率的 1/4 时，作为近似，我们可以认为加载就是一个准

静态问题，本章描述的这种类型的分析是可以接受的。

一个有限单元具有一个特征矩阵，即用于载荷-变形分析的刚度矩阵，对传热分析来说是传导矩阵，等等。一维单元非常简单，以至于它的特征矩阵通常可由“直接法”求出；也就是由物理推理列出。在后面章节中讨论的单元列式符号表示法也适用于一维单元，但为此目的通常并不必要。

一维单元经常能体现场量的精确变化。例如，承受集中横向载荷的均匀梁的数学模型，能显示载荷点之间横向位移的三次变化。标准梁单元也是基于三次位移场，因此，由梁单元建立并含有载荷点作为单元节点的有限元模型提供的解答和解析解能精确地吻合。一个平面或空间连续体的有限元模型，在单元位移场仅是近似的地方，通常不能达到精确的吻合。

不管单元的数量和类型有多少，与时间无关的有限元分析的计算过程都如下述：

1. 生成描述单元行为的矩阵。
2. 把单元连到一起，即把单元矩阵组集得到结构矩阵。
3. 提供一些带载荷的节点。
4. 提供其它具有边界条件的节点，这些条件在结构力学中被称为支撑条件。
5. 结构矩阵和载荷数组作为代数方程组的一部分，求解这些方程以确定节点上的场量值。
6. 计算梯度值：结构力学中的应变或热分析中的热流量等等。

在这一章中，我们以一维单元为载体来解释这些过程。在本章以及随后的章节中，按照通常的惯例，为使位移看得清楚，在图示中高倍放大。

2.2 杆单元

考虑一个均匀棱柱杆单元，长度为 L，弹性模量为 E。通常，杆单元表示成直线段，如图 2.2-1所示，单元的横截面积为 A。节点位于两端。现在，我们仅允许节点在杆的轴向有位移。节点处的位移分别为 u_1 和 u_2。轴向内应力 σ 可以和分离体图中的 F_1 与 F_2 联系起来，如图 2.2-1(a)所示。σ 也与弹性模量 E 和轴向应变 $\varepsilon=(u_2-u_1)/L$ 有关，如图 2.2-1(b)所示。需注意到，我们采用符号约定，节点力和节点位移在同一方向上取正号。由图 2.2-1 我们得到：

$$\begin{aligned}\frac{AE}{L}(u_1-u_2)&=F_1\\ \frac{AE}{L}(u_2-u_1)&=F_2\end{aligned}\quad \text{或者}\begin{bmatrix}k&-k\\-k&k\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}F_1\\F_2\end{Bmatrix}\quad \text{其中 } k=\frac{AE}{L}\qquad (2.2-1)$$

很明显，对于这个单元，平衡条件要求 $F_1=-F_2$。方程 2.2-1 的矩阵公式缩写如下：

$$[\boldsymbol{k}]\{\boldsymbol{d}\}=-\{\boldsymbol{r}\}\qquad (2.2-2)$$

其中[$\boldsymbol{k}$]称为单元刚度矩阵。对于当前的杆单元，节点仅在轴向有位移，在方程 2.2-1 中，[$\boldsymbol{k}$]是 2×2 的矩阵。矢量{$\boldsymbol{r}$}在公式中具有负号，因为我们将用{$\boldsymbol{k}$}表示和单元位移有关的载荷，这个载荷是由单元施加到与其相连的结构节点上的，因此，力$-\{\boldsymbol{r}\}=\lfloor F_1 \quad F_2 \rfloor^{\mathrm{T}}$被施加到单

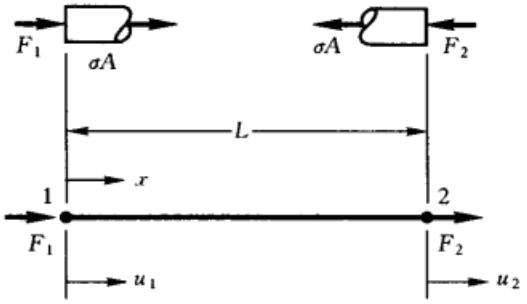


图 2.2-1 (a)显示内应力 σ 和节点自由度 u_1 和 u_2 的二节点杆单元；(b)平衡方程，应力-应变关系，应变-位移关系和节点力 F_1 与 F_2

元上。

注意到 AE/L 可被认为是 k，即线性弹簧的刚度。在轴向载荷作用下杆和弹簧具有相同的行为，并且用相同的刚度矩阵表示。

在方程 2.2-1 的刚度矩阵中，我们可以看到下述的通用准则的实例。

[k]矩阵的一列元素必须是施加于单元节点上的载荷矢量，来维持一种变形状态，其相应节点上的自由度有单位值，而所有其余节点自由度为 0 的情形。

例如，令方程 2.2-1 中 $u_1=0$ 和 $u_2=1$，这样，乘法运算[k]{d}产生了[k]的第二列元素。这样

$$-\{r\}=\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}=k\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}=\frac{AE}{L}\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{2.2-3}$$

当 $\varepsilon=u_2/L$ 时，它对应于图 2.2-1(a)。

热传导 令均匀杆的横截面积为 A，导热率为 k，侧表面是阻止热传输的绝热层(图 2.2-2)。根据傅里叶热传导方程，轴向的热流率 q 为：

$$q=-Ak\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} \tag{2.2-4}$$

式中，T 是相对于任意选取的参考温度(有可能是 0℃)的温度值。q 的国际单位是 W(瓦特)。负号表示热流的方向和温度梯度 $\mathrm{d}T/\mathrm{d}x$ 的方向相反。这里，$\mathrm{d}T/\mathrm{d}x$ 与 x 无关，因为杆是均匀的并且杆的侧面是绝热的。特殊地，$\mathrm{d}T/\mathrm{d}x=(T_2-T_1)/L$。

在构建有限元公式时，我们采用传统规则，即当热流流出单元时，杆端点处的热流 q 为正。这样，热流流入与它相连的单元的节点时为正。这个符号约定类似于方程 2.2-2 中的{r}。图 2.2-2 中方程的矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} Ak/L & -Ak/L \\ -Ak/L & Ak/L \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}=-\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \tag{2.2-5}$$

式中的方阵是单元热传导矩阵，它类似于结构力学中的刚度矩阵。类似于公式 2.2-3 的论述，矩阵的一列可被看作是相应节点具有单位温度值而其它节点温度(相对于参考温度)为零时与此节点相对应的节点热流矢量。

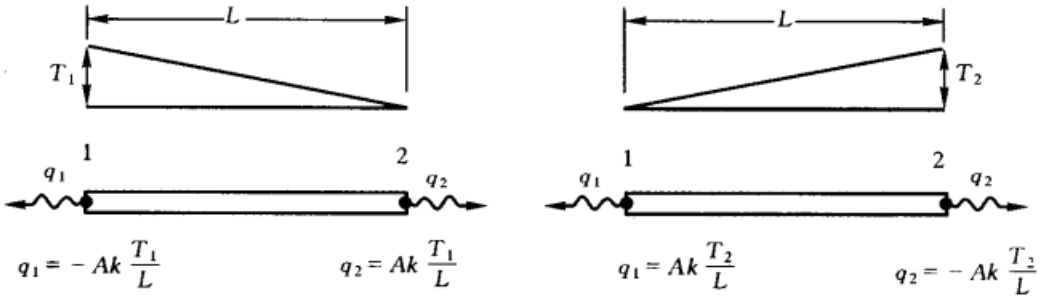


图 2.2－2　横截面积为 A 且侧面理想绝热的均匀杆中的节点热流。图中显示 $T_1>0$ 且 $T_2=0$ 和 $T_2>0$ 且 $T_1=0$ 的热流量情况

方程 2.2－5 也适用于背面温度不同但分布均匀的平板材料。L 表示平板厚度。如果方程 2.2－4 中的 $A=1$，q 可被解释为每单位面积上的热流(见方程 2.2－9)

结构方程　考虑一个由两个弹性杆在端点相连的结构，如图 2.2－3 所示。仅允许有轴向位移。单元各自的刚度分别为 k_1 和 k_2，结构刚度方程如下：

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad \text{或者} \quad [\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\} = \{\boldsymbol{R}\} \qquad (2.2-6)$$

[**K**]称为结构刚度矩阵或者是总体刚度矩阵。这个特殊的[**K**]，运用方程 2.2－3 上面所陈述的一般性准则很容易就能得到。于是如图 2.2－3(b)，(c)，(d)所示，依次激活每个自由度，赋予被激活的自由度一个单位值，其它自由度赋零值，并计算静力平衡所需要的节点力。对于每个激活的自由度，把节点力排成一列，以自由度编号排序，如果和节点位移方向相反则取负号。每一个这样的数组就是[K]的一列。

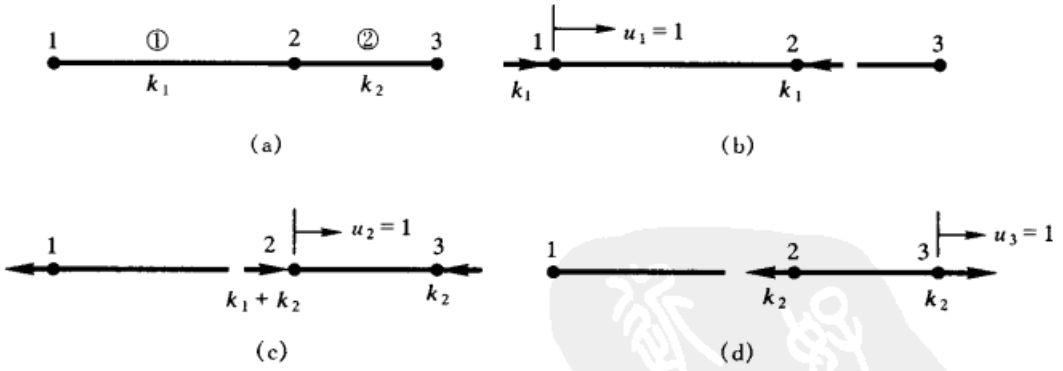


图 2.2－3　(a) 两个杆单元组成的结构；(b,c,d)依次表示与每个自由度单位位移相关的节点力

下面列举了一个可供选择的计算[**K**]的方法。设想图 2.2－3(a)中的两个单元还未相连，但是提供了端点的编号：单元 1 的端点编号为 1 和 2，单元 2 的端点编号为 2 和 3。扩展到"结构尺寸"时，单元 1 和单元 2 的刚度矩阵可分别写成：

$$\begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{matrix}$$
$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \tag{2.2-7}$$

单元 1　　单元 2

其中，矩阵上端附加的标字 u_1，u_2 和 u_3，表示激活的自由度，以便生成矩阵的列。矩阵中附加的零对单元 1 来说可做如下解释：整行零表明因为单元 1 没有和节点 3 相连，任意节点的位移都不能使单元 1 在节点 3 处产生力。整列零表明位移 u_3 并没有使单元 1 产生应变，单元 1 对其它节点不施加力。很明显，式 2.2-7 中的两个矩阵叠加后得到式 2.2-6 中的矩阵[**K**]。总的来说，人们可以想象一个物理空间，除了在它们合适位置上有编了号的节点外，其余地方最初是空的，当单元叠加之后就变成了一个结构。类似地，结构刚度矩阵[**K**]也是由单元刚度矩阵叠加而成的。这个由子单元矩阵[k]构建结构矩阵[**K**]的过程叫做组集。

支撑条件，更一般地称为边界条件，将在 2.7 节予以讨论。目前，我们仅注意，例如，如果图 2.2-3 中的左端点连接一个刚性支撑，那么 $u_1=0$，而且与剩余的“活性”自由度 u_2 和 u_3 相关联的结构刚度矩阵如下：

$$\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \tag{2.2-8}$$

当结构节点 2 和 3 处的 F_2 和 F_3 预先给定后，就可由上式确定 u_2 和 u_3。像对其它刚度矩阵一样，式 2.2-8 中[**K**]的每一列，都可通过依次激活自由度并计算维持平衡所需要的节点载荷来获得。

其它类型问题的结构矩阵以相似的方式进行组集。对于图 2.2-4 所示的传热问题，热传导的结构方程如下：

$$\begin{bmatrix} k_1/t_1 & -k_1/t_1 & 0 \\ -k_1/t_1 & (k_1/t_1)+(k_2/t_2) & -k_2/t_2 \\ 0 & -k_2/t_2 & k_2/t_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \tag{2.2-9}$$

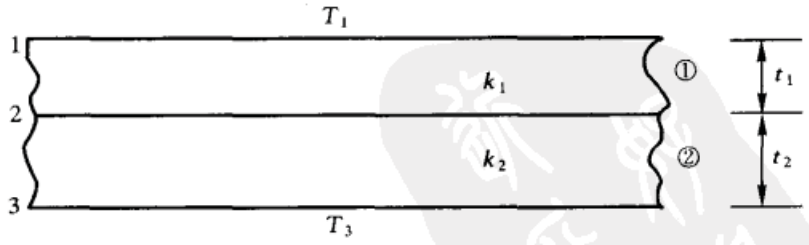


图 2.2-4　两种材料组成的层状结构，外表面的温度分别为 T_1 和 T_3

式中 k_1 和 k_2 分别是材料层 1 和 2 的热导率，f_1，f_2 和 f_3 分别是每单位面积上的净热流率，当分别直接进入上、中、下三个表面的假想结构节点时取正号。沿层间界面没有热源或热沉的情况，连续性要求 $f_2=0$。如果给定 T_1 和 T_3，那么，未知量就是 T_2，f_1 和 f_3。另外，如果 $T_1>T_3$，则会发现 f_1 是正的，且 $f_3=-f_1$，因为问题是稳态的。

当组集有限元结构的[**K**]时，不管复杂程度如何，计算机软件都运用刚才描述的方法，但没有在形式上把单元矩阵扩展到“结构尺寸”。[**K**]的生成从一个空矩阵开始，然后依次把单元刚度系数填充到[**K**]相应的位置上，这个位置由赋予和该单元相连的结构节点的数值标号来指明。在 2.5 节中，我们将考虑组集的这些细节，并依次讨论载荷、边界条件，求解方程得到节点值，并从中提取单元应变（或梯度）。

2.3　梁单元

2D 梁单元　将一个均匀梁放于 x 轴上。2D 梁单元在每个端点具有一个节点。每个节点有两个自由度，即横向位移和旋转（图 2.3－1(a)）。节点旋转包含一个下标 z，表示该旋转矢量垂直于 xy 平面，沿 z 轴方向。节点载荷，如果它和相应的自由度方向相同就取正号，如图 2.3－1(b)所示。开始，我们把横向位移限制于 xy 面内，仅考虑弯曲变形，假设横向剪切变形可以忽略。也就是说，我们采用基本的梁理论，它的正式名称叫欧拉-伯努利（Euler-Bernoulli）梁理论。铁木辛柯（Timoshenko）梁理论考虑了横向剪切变形[2.1]，当研究梁的振动时通常采用这个名称。我们也将把这个名称运用到受静力载荷的梁中。

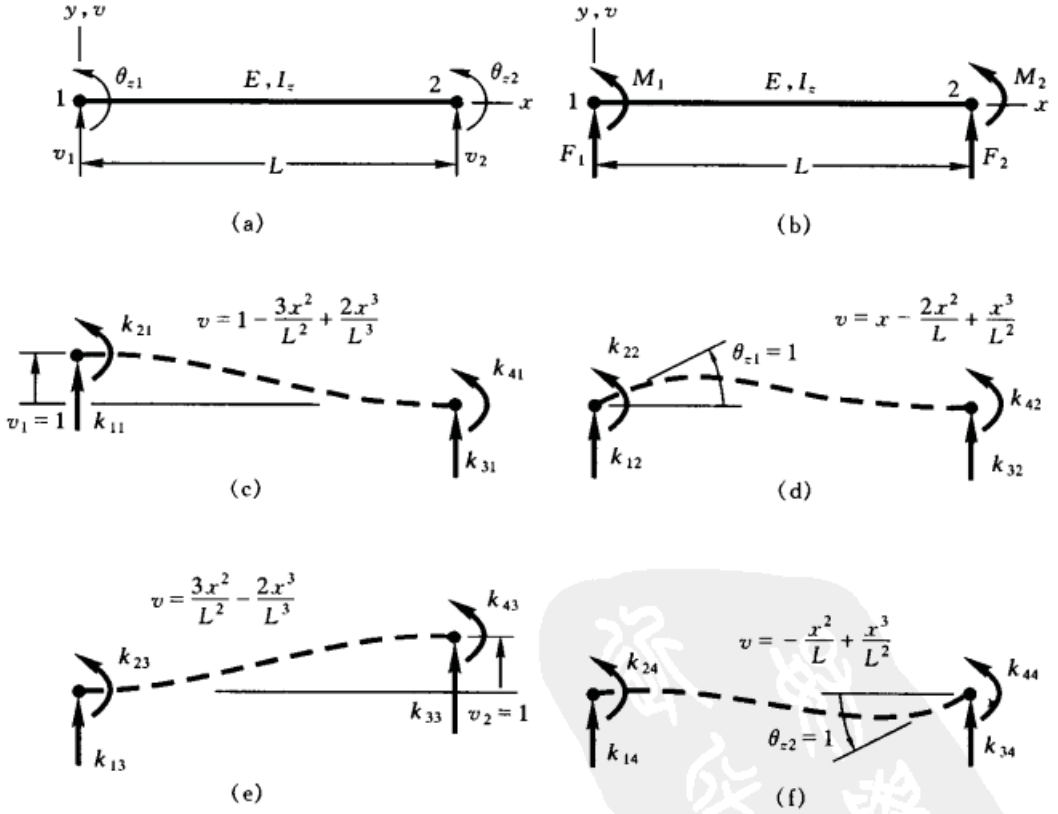


图 2.3－1　(a)在 xy 平面上的梁单元和它的节点自由度；
(b)与节点自由度相关联的节点载荷；
(c～f)虚线依次表示由于与每个节点自由度激活相关的弯曲引起的横向位移。显示 $v=v(x)$ 的公式由基本梁理论得到

本节讨论的梁单元刚度矩阵的使用受到公式 2.3-8 后面所述告诫条款的限制。

若忽略轴向变形自由度，2D 梁单元的刚度矩阵就是 4×4 的矩阵。它可以一列一列地构建。第 j 列元素就是第 j 个自由度取单位 1，而所有其它自由度取值为 0 时，与其相关的节点载荷矢量。载荷矢量包括力矩，也包括力。为了得到和 v_1 相关联的列元素，我们计算图 2.3-1(c)所示的节点载荷。这些载荷命名为 k_{11}，k_{21}，k_{31} 和 k_{41}，表明它们将分别出现在单元刚度矩阵[$\boldsymbol{k}$]的第 1 列的第 1,2,3 和 4 行中。图中显示的载荷是正的，就是说它和与之相关联的自由度的方向相同。为了得到 k_{11} 和 k_{21}，我们可以利用基本梁理论中的公式手册，把图 2.3-1(c)中所示的梁看作是在端点 2 固定，并在端点 1 作用有力 k_{11} 和力矩 k_{21} 的悬臂梁，于是有 $v_1=1$ 和 $\theta_{z1}=0$。这样：

$$v_1=1:\quad \frac{k_{11}L^3}{3EI_z}-\frac{k_{21}L^2}{2EI_z}=1 \qquad \theta_{z1}=0:\quad -\frac{k_{11}L^2}{2EI_z}+\frac{k_{21}L}{EI_z}=0 \tag{2.3-1}$$

式中，E 是弹性模量，I_z 是梁的横截面积相对于平行于 z 轴的形心轴的惯性矩。由公式 2.3-1 得到：

$$k_{11}=\frac{12EI_z}{L^3} \qquad k_{21}=\frac{6EI_z}{L^2} \tag{2.3-2}$$

现在 k_{11} 和 k_{21} 已知，考虑静态平衡方程，便能确定 k_{31} 和 k_{41}。我们选择对 y 方向的力以及对绕节点 2 的力矩求和，得到下列方程：

$$k_{11}+k_{31}=0 \quad k_{21}+k_{41}-k_{11}L=0 \tag{2.3-3}$$

由方程 2.3-2 和 2.3-3 我们得到：

$$k_{31}=-\frac{12EI_z}{L^3} \quad k_{41}=\frac{6EI_z}{L^2} \tag{2.3-4}$$

对图 2.3-1 后面三部分进行类似的分析，就可得到[$\boldsymbol{k}$]中后三列的元素项。完整的 2D 梁单元的刚度矩阵如下：

$$[\boldsymbol{k}]=\begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{-12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & \frac{-6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ \frac{-12EI_z}{L^3} & \frac{-6EI_z}{L^2} & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{-6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & \frac{-6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{matrix} \tag{2.3-5}$$

矩阵右面附加的一列符号仅仅是为了表明[$\boldsymbol{k}$]对单元自由度列矢量$\{\boldsymbol{d}\}=\lfloor v_1 \quad \theta_{z1} \quad v_2 \quad \theta_{z2} \rfloor^{\mathrm{T}}$起作用。$\{\boldsymbol{d}\}$中自由度的不同排序将改变[$\boldsymbol{k}$]中系数的序号，但不改变其数值。

如果梁单元的左端固定，那么 $v_1=0$ 和 $\theta_{z1}=0$，我们得到一个“活性”自由度为 v_2 和 θ_{z2} 的结构。这个有一个单元的悬臂梁的刚度矩阵是公式 2.3-5 中右下角 2×2 的子矩阵。

推广 允许梁单元伸长也允许它发生弯曲，我们在节点自由度列阵中增加轴向位移 u_1 和 u_2，并包含方程 2.2-1 中的轴向刚度系数 AE/L，把[$\boldsymbol{k}$]扩展成 6×6 的矩阵。我们也可用修

改弯曲刚度项计入横向剪切变形的方法，这样就产生了铁木辛柯梁单元。关于它的推导这里并未给出，可以在包括文献[2.2～2.5]在内的一些参考文献中查到。也可以参考 4.10 节。对于 xy 平面内的变形：

$$[\boldsymbol{k}]=\begin{bmatrix} X & 0 & 0 & -X & 0 & 0 \\ 0 & Y_1 & Y_2 & 0 & -Y_1 & Y_2 \\ 0 & Y_2 & Y_3 & 0 & -Y_2 & Y_4 \\ -X & 0 & 0 & X & 0 & 0 \\ 0 & -Y_1 & -Y_2 & 0 & Y_1 & -Y_2 \\ 0 & Y_2 & Y_4 & 0 & -Y_2 & Y_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_{z1} \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{matrix} \tag{2.3-6}$$

式中：

$$X=\frac{AE}{L} \qquad Y_1=\frac{12EI_z}{(1+\phi_y)L^3} \qquad Y_2=\frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2}$$
$$Y_3=\frac{(4+\phi_y)EI_z}{(1+\phi_y)L} \qquad Y_4=\frac{(2-\phi_y)EI_z}{(1+\phi_y)L} \qquad \phi_y=\frac{12EI_zk_y}{AGL^2} \tag{2.3-7}$$

A/k_y 是 y 方向横向剪切变形的有效剪切面积。通常采用的因子 k_y，对于实心的矩形横截面，$k_y=1.2$，对于薄壁管的环形截面，$k_y=2.0$，等等。更加接近真实情况的因子在文献[2.1]中列出。注意到，随着单元变得越来越细，ϕ_y 接近为 0，因此柔度系数 Y_i 减小到公式 2.3－5 中看到的系数，其中横向剪切变形可以忽略掉了。

在方程 2.3－5 中，旋转自由度不仅定义了梁的斜率 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$，也定义了梁的横截面的转角。如果横向剪切变形存在，则梁的斜率和横截面的转角就不同。那么 θ_{z1} 和 θ_{z2} 就必须看作梁横截面在节点处的转角。

3D 梁单元　允许每个节点有 6 个自由度，如图 2.3－2 所示的三个平移，三个旋转。自由度 w 和 θ_y 看作是在 zx 平面内的位移和转角。自由度 θ_x 认为是绕 x 轴的转角，其扭转刚度系数是 GK/L，其中 K 表示横截面的形状和大小的特性。（仅对于圆截面，不论是实心还是管状，K 等于横截面相对于它形心的极惯性矩 J。对于薄壁开口的截面，如标准的 I 型梁和槽形截面梁。K 只是 J 的一小部分。）为了清楚起见，用点线把[$\boldsymbol{k}$]分割成如下形式：

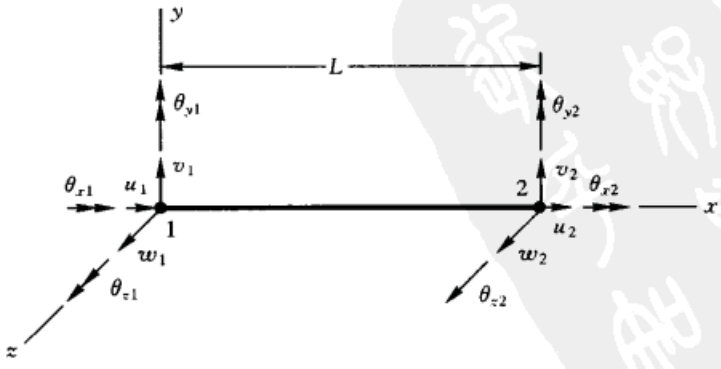


图 2.3－2　直角坐标系中位于 x 轴的梁单元，带有定义轴向位移、扭转以及在 y，z 方向侧向位移的自由度。

$$
[k]=\left[\begin{array}{cccccc|cccccc|c}
X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_1 \\
 & Y_1 & 0 & 0 & 0 & Y_2 & 0 & -Y_1 & 0 & 0 & 0 & Y_2 & v_1 \\
 & & Z_1 & 0 & -Z_2 & 0 & 0 & 0 & -Z_1 & 0 & -Z_2 & 0 & w_1 \\
 & & & S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S & 0 & 0 & \theta_{x1} \\
 & & & & Z_3 & 0 & 0 & 0 & Z_2 & 0 & Z_4 & 0 & \theta_{y1} \\
 & & & & & Y_3 & 0 & -Y_2 & 0 & 0 & 0 & Y_4 & \theta_{z1} \\
\hline
 & & & & & & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_2 \\
 & & & & & & & Y_1 & 0 & 0 & 0 & -Y_2 & v_2 \\
 & & & & & & & & Z_1 & 0 & Z_2 & 0 & w_2 \\
 & & & \text{对} & \text{称} & & & & & S & 0 & 0 & \theta_{x2} \\
 & & & & & & & & & & Z_3 & 0 & \theta_{y2} \\
 & & & & & & & & & & & Y_3 & \theta_{z2}
\end{array}\right] \tag{2.3-8}
$$

式中，$S=GK/L$，X 和 Y_i 项已在公式 2.3-7 中定义，Z_i 项和式 2.3-7 中定义的一样，但需要交换下标。例如，$Z_1=12EI_y/(1+\phi_z)L^3$ 和 $\phi_z=2EI_yk_z/AGL^2$。式 2.3-8 中 Y_i 和 Z_i 项中符号的不同，是由于给图 2.3-2 中的节点转角指定了正方向。例如，θ_{y1} 产生了 z 轴负方向的侧向位移，然而 θ_{z1} 却产生了 y 轴正方向的侧向位移。在所有情况下，图 2.3-2 中节点力和力矩的正向和与它相关联的自由度的方向相同。

如图 2.3-3(a)所示，当单元集合在一起时，共有节点的单元自由度被合并成单一的“总体”自由度。这个过程要求每个单元的“局部”自由度(如图 2.3-2 所示)要与连接单元的当地自由度相匹配。例如，在图 2.3-3(a)的节点 B，单元 AB 的轴向平移自由度就是单元 BC 的侧向平移自由度。在图 2.3-2 自由度的项中，单元 AB 的 u_2 必须被看作是与单元 BC 的 v_1 相同的自由度，等等，这很容易在单元组集之前对单元 AB 的自由度进行坐标变换来完成(见 2.4 节)。

告诫 在前面的分析中，假定 y 和 z 是横截面的形心主轴。这个假设在形心处 $y=z=0$ 和横截面至少具有一个对称轴与 y 轴或 z 轴重合的简单情况下是正确的。如果横截面不是对称的，那么主轴必须通过计算建立[2.6]。如果 y 和 z 不是主轴，在方程 2.3-8 中将出现不同的项，并且将会出现更少的零系数，因为自由度的激活将会引起更多的节点力和力矩。

当非圆形横截面的构件被扭转时，横截面“翘曲”，也就是说横截面不再保持为平面。槽形截面梁，I 形截面梁以及其它薄壁开口部件具有较低的扭转刚度，它们的横截面在构件被扭转时，有明显的翘曲倾向，限制翘曲可能会有大的影响。例如，设图 2.3-3(b)中的构件 AB 是一个 I 形梁，长度是其深度的 5 倍，扭矩 T 作用在端部 B 处。I 形梁在 A 端完全限制翘曲，会减小 B 处的扭转角约一半，而引起的轴向正应力比扭转剪应力大得多。在图 2.3-3(a)中，翘曲至少部分地在有字母标明的节点处被抑制，这样的约束会影响对垂直于刚架平面的载荷作用的响应程度。

为了说明全部或者部分的翘曲约束，必须在每个节点附加一个自由度，这样 3D 梁单元的

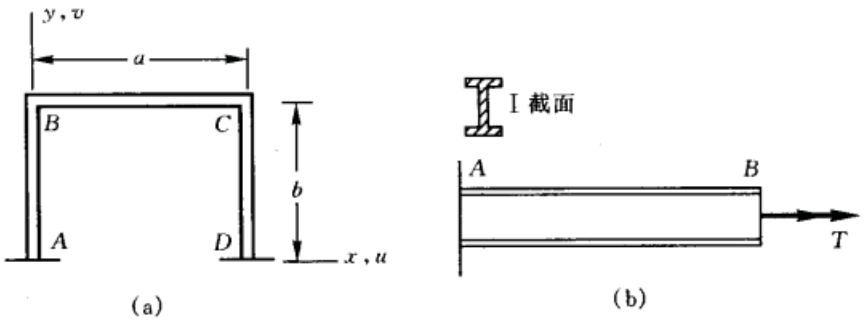


图 2.3－3　(a)由梁单元 AB,BC 和 CD 组成的平面刚架结构；
(b)A 端固定 B 端受扭矩作用的梁

刚度矩阵[k]就变成 14×14 的方阵。附加的自由度就是每个节点的扭曲率 $\mathrm{d}\theta_x/\mathrm{d}x$,每个都与称为双力矩的载荷项有关。遗憾的是,典型的商业软件只允许每个节点有 6 个自由度,因此在梁单元中对翘曲的抑制就被忽略掉了。

软件可能会接受在 x 轴上不穿过横截面形心的节点。软件也可能接受一般形状的薄壁结构的横截面,所以,如果给软件提供横截面的几何信息,软件就会计算出横截面的特性,诸如惯性矩、惯性积、扇形特征以及形心和剪心的位置。(剪心是横截面上一点,如果要棱柱形梁无扭转地弯曲,横向剪力作用线必须通过这个点。)如果形心和剪心不重合,或者它们不在 x 轴上,在构建单元的刚度矩阵时必须进行坐标变换,它将比公式 2.3－8 所示的更复杂。类似的考虑,也影响动力学分析中的质量矩阵。如果横截面剪心与形心不重合,用这样的部件构成的结构即使在同一平面内,且载荷也在该平面内,通常也需要公式 2.3－8 中的自由度;只有公式 2.3－6 中的自由度是不足的。

公式 2.3－8 对于圆形横截面的构件是正确的,因为这样的横截面没有翘曲的趋势。它对于横截面具有两个对称轴的构件来说也是正确的(这样它的剪心和形心重合),它的形心位于 x 轴上,当单元绕它的轴扭转时,它的横截面不会翘曲。关于薄壁开口构件的有限元理论在许多参考书中都有所论述,我们从中引用了文献[2.7～2.12]。

2.4　任意方向的杆和梁单元

2.2 节和 2.3 节讨论的单元都是位于 x 轴上的。对于更一般的应用,单元应能假定在空间任意方向。这可以通过对已得到的单元矩阵的简单转动来得到。为了这一目的,我们可以把公式 2.2－1 和 2.3－8 中的刚度矩阵看作是"局部"坐标系 $x'y'z'$ 的 x' 轴上的刚度矩阵[k],$x'y'z'$ 在总体坐标 xyz 中有任意方向。为了得到能够适用于总体坐标系 xyz 的自由度运算的单元刚度矩阵[k],我们对[k']实施旋转坐标变换。

下述的旋转变换并不改变单元的内在特性。更确切地讲,它仅改变了单元特性的表达形式,以便它们适合于运用箭头方向平行于总体坐标方向而非局部坐标方向的自由度。

杆单元　首先考虑二维变换。从在 xy 平面内沿着局部的 x' 轴的杆单元开始,我们寻求 xy 平面内任意方向的杆单元的刚度矩阵,以便它依据图 2.4－1(b)所示的 4 个节点自由度运

算。在节点处把总体自由度分解成局部分量，就很容易写出局部自由度和总体自由度的关系式，然后把同一直线上的分量相加；例如，$u'_1 = u_1\cos\beta + v_1\sin\beta$（图 2.4－2(a)）。在矩阵格式中，图 2.4－1 的位移数组具有下列关系式：

$$\{\boldsymbol{d}'\} = [\boldsymbol{T}]\{\boldsymbol{d}\} \tag{2.4-1}$$

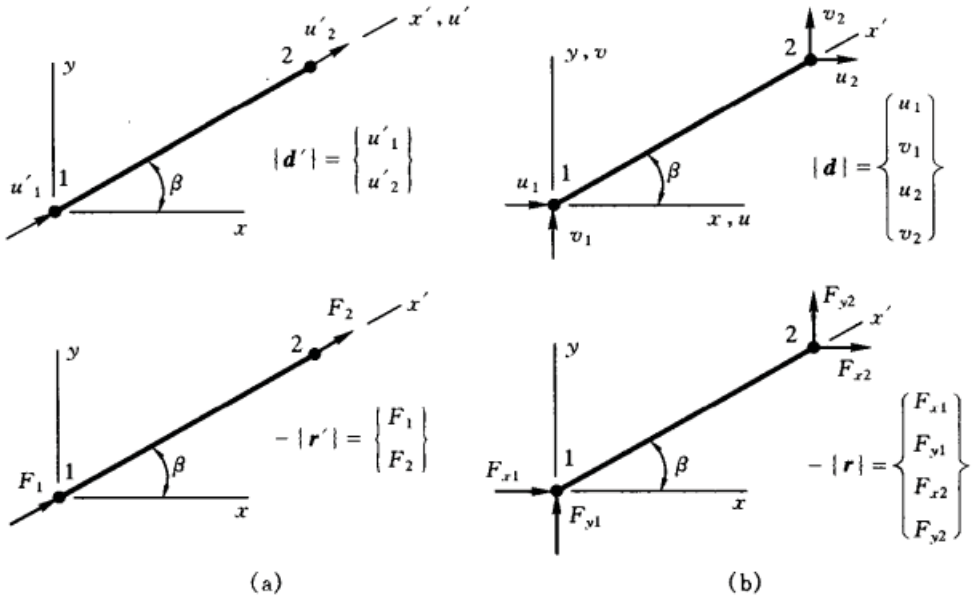


图 2.4－1 (a)局部节点自由度以及位于局部坐标轴 x' 上的杆单元载荷；
(b)总体节点自由度以及位于总体坐标 xy 轴平面内的杆单元载荷

式中变换矩阵$[\boldsymbol{T}]$为：

$$[\boldsymbol{T}] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix} \quad \text{其中 } c = \cos\beta \quad s = \sin\beta \tag{2.4-2}$$

局部和总体节点载荷的关系式可通过把节点处的 F_1 和 F_2 分解成平行于 x 和 y 轴的分量建立起来(图 2.4－2(b))。这样，图 2.4－1 中的力列阵具有下列关系式：

$$\{\boldsymbol{r}\} = [\boldsymbol{T}]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{r}'\} \tag{2.4-3}$$

(逆运算关系式$\{\boldsymbol{r}'\}=[\boldsymbol{T}]\{\boldsymbol{r}\}$和式 2.4－1 具有相同的形式；参考 8.1 节关于虚功原理的论述。)局部坐标下的单元刚度矩阵关系如下：

$$\text{局部：}\quad [\boldsymbol{k}']\{\boldsymbol{d}'\} = -\{\boldsymbol{r}'\} \tag{2.4-4}$$

关于负号的解释已在公式 2.2－2 中给出。在公式 2.4－4 中，我们代入来自公式 2.4－1 的$\{\boldsymbol{d}'\}=[\boldsymbol{T}]\{\boldsymbol{d}\}$，用$[\boldsymbol{T}]^{\mathrm{T}}$ 左乘两边，然后把式 2.4－3 中的$\{\boldsymbol{r}\}=[\boldsymbol{T}]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{r}'\}$代入，则公式 2.4－4 就转换成下列形式：

$$\text{总体：}\quad [\boldsymbol{k}]\{\boldsymbol{d}\} = -\{\boldsymbol{r}\} \quad \text{其中} \quad [\boldsymbol{k}] = [\boldsymbol{T}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{k}'][\boldsymbol{T}] \tag{2.4-5}$$

(这个$[\boldsymbol{k}]$的三乘积形式并不局限于旋转变换。对于像第 8 章描述的自由度的其它变换，$[\boldsymbol{T}]$

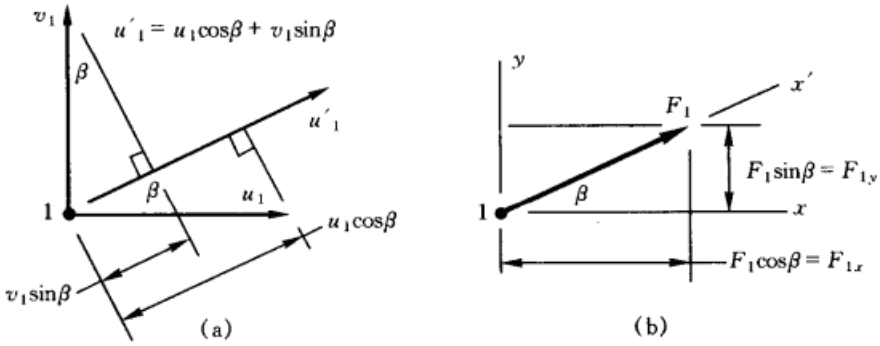


图 2.4－2　(a) u_1 和 v_1 对 u'_1 的贡献；(b)F_1 分解成 F_{x1} 和 F_{y1}

仍然是乘“新”的自由度$\{\boldsymbol{d}\}$产生“旧”的自由度$\{\boldsymbol{d}'\}$的矩阵，如式 2.4－1 中那样。)

对于杆问题，$[\boldsymbol{k}']$是式 2.2－1 中的 2×2 的方阵。在总体坐标 xy 中的相同单元，用自由度$\{\boldsymbol{d}\}=\lfloor\, u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \,\rfloor$来运算，对此$[\boldsymbol{k}]$是 4×4 的方阵。

$$[\boldsymbol{k}] = k\begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \quad \text{其中 } c=\cos\beta \quad s=\sin\beta \qquad (2.4-6)$$

而杆的轴向刚度 $k=AE/L$。注意到，如果节点编号相互交换后，$\cos\beta$ 和 $\sin\beta$ 都改变符号，但产生相同的$[\boldsymbol{k}]$。

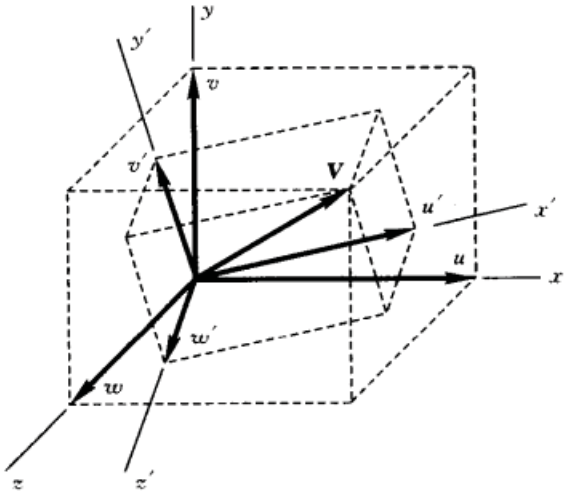
方程 2.4－6 也可以通过公式 2.2－2 所述的准则直接得到：激活相应的自由度，并计算出维持变形状态所需要的节点力以求得$[\boldsymbol{k}]$中的列元素。于是，位移 $u_1=1$ 便产生了轴向缩短量 $\delta=-\cos\beta$ 和大小为 $k\cos\beta$ 的轴向压力。平衡这个力的端点载荷在 x 以及 y 方向的分量就出现在矩阵$[\boldsymbol{k}]$的第一列中。

在总体坐标系 xyz 下的任意方向的杆单元的刚度矩阵是 6×6 的方阵，它用节点自由度$\{\boldsymbol{d}\}=\lfloor\, u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \,\rfloor^{\mathrm{T}}$ 来运算，其中 u，v 和 w 分别是 x，y 和 z 方向的位移分量。即使在每个节点存在一个附加自由度，推导公式 2.4－5 的方法依然有用。公式 2.4－5 又一次叙述了坐标变换方法，$[\boldsymbol{k}']$仍然像公式 2.2－1 中陈述的一样，但现在的变换矩阵呈如下形式：

$$[\boldsymbol{T}] = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_1 & m_1 & n_1 \end{bmatrix} \qquad (2.4-7)$$

式中，l_1，m_1 和 n_1 分别是局部坐标轴 x' 相对于总体坐标轴 x，y 和 z 的方向余弦(图 2.4－3)。如果单元恰巧在 xy 平面内，则 $l_1=\cos\beta$，$m_1=\sin\beta$ 以及 $n_1=0$，而且 6×6 的矩阵$[\boldsymbol{k}]$中的非零项将和方程 2.4－6 相符。无论是二维还是三维问题，矩阵$[\boldsymbol{k}]$都完全由 A，E 以及两个端部节点的总体坐标来定义。

梁单元　现在必须把方程 2.3－8 看作是沿局部坐标轴 x' 的单元的刚度矩阵$[\boldsymbol{k}']$，它的节点自由度用该节点局部坐标轴 x'，y' 和 z' 方向的箭头表示。平移和旋转分量从总体坐标到局部坐标的变换以同样的方式进行；例如：



对坐标轴的方向余弦：

	x	y	z
x'	l_1	m_1	n_1
y'	l_2	m_2	n_2
z'	l_3	m_3	n_3

图 2.4-3 矢量 $\mathbf{V}$ 在总体坐标系 xyz 中用分量 uvw 来表示，在局部坐标系 $x'y'z'$ 中用分量 $u'v'w'$ 表示

$$u'_1 = l_1 u_1 + m_1 v_1 + n_1 w_1 \quad \theta'_{x1} = l_1 \theta_{x1} + m_1 \theta_{y1} + n_1 \theta_{z1} \tag{2.4-8}$$

刚度矩阵从局部自由度到总体自由度的变换如公式 2.4-5 所叙述的那样，变换矩阵如下：

$$[\boldsymbol{T}]_{12\times 12} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Lambda} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\Lambda} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\Lambda} \end{bmatrix} \quad \text{其中} \quad [\boldsymbol{\Lambda}] = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \tag{2.4-9}$$

局部坐标的方向应该和单元的几何形状相适应，这样描述单元横截面的特性就不会产生混乱。例如，人们可能会定义平面 $x'y'$ 和 I 形梁的腹板平面相重合。局部坐标轴 x' 的方向由梁的两个端部节点的总体坐标来定义，它可能会被放在横截面的形心处。如果提供了与端部节点不共线的第三个点的坐标，那么将会有足够的信息用来在总体坐标 xyz 中确立平面 $x'y'$ 的方向，并由此确定坐标轴 z' 的方向。y' 轴的方向余弦由 z' 和 x' 轴方向单位矢量的叉积来提供。

2.5 单元的组集

在这一节，我们将详细说明单元组集的基本原理和过程，以得到描述结构的方程组。所讨论的概念并非局限于由杆和梁组成的结构。不论问题类型、单元类型以及每个单元的节点数，都可以运用同样的过程。当刚度矩阵和载荷项被组集起来后，边界条件也得到了处理。关于边界条件和载荷的处理细节将在后面的章节中论述。

平衡方程 我们把结构的每个节点看作结构单元间的相互连接器，并且我们证明单元和载荷项的组集产生了一组说明每个节点都处在平衡状态的方程组。作用在节点上的载荷来源于单元变形、单元的初应力、单元上的分布外载，以及直接施加在节点上的载荷。方程 2.2-2 中的 $-\{\boldsymbol{r}\}$ 表示的是为了维持单元的变形状态而从单元节点上施加到单元的力。大小相等方

向相反的力$\{\boldsymbol{r}\}$由单元施加到与其相连的结构节点上。也就是说施加到结构节点上的力包括：

由于单元变形而作用在结构节点上的力：

$$\{\boldsymbol{r}\} = -[\boldsymbol{k}]\{\boldsymbol{d}\} \tag{2.5-1}$$

由单元作用在结构节点上的附加载荷(不是来源于单元变形)，包括热载荷和重力作用的载荷。例如，加热一个刚架构件对节点产生外推力；单元的重力对节点产生下推力。结构支撑直接把支反力作用在节点上。对如此作用在结构节点上的附加载荷，我们采用下列符号：

当单元的自由度是零时由单元施加的载荷：$\{\boldsymbol{r}_e\}$　　(2.5-2)

直接施加到结构节点上的外载荷：$\{\boldsymbol{P}\}$

这些载荷可能在每个坐标轴上都有分量，一般来说包括力矩和力。

使结构节点处于平衡状态的矩阵方程如下：

$$\sum_{i=1}^{N_{\text{els}}}\{\boldsymbol{r}\}_i + \sum_{i=1}^{N_{\text{els}}}\{\boldsymbol{r}_e\}_i + \{\boldsymbol{P}\} = \{\boldsymbol{0}\} \tag{2.5-3}$$

其中N_{els}是结构中的单元个数。重述一下，我们把每个结构节点看作一个小连接器，而它们在施加其上的所有载荷作用下必须处在静力平衡状态。把方程 2.5-1 代入得到：

$$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\} = \{\boldsymbol{R}\} \quad \text{其中} \quad [\boldsymbol{K}] = \sum_{i=1}^{\text{Nels}}[\boldsymbol{k}]_i \quad \{\boldsymbol{R}\} = \{\boldsymbol{P}\} + \sum_{i=1}^{\text{Nels}}\{\boldsymbol{r}_e\}_i \tag{2.5-4}$$

求和意味着把单元矩阵扩展到“结构尺寸”，如式 2.2-7 那样，以便使每个单元 i 的$\{\boldsymbol{d}\}_i$变成和整个结构的自由度矢量$\{\boldsymbol{D}\}$一样。施加于结构诸节点(不是由结构节点施加)的载荷$\{\boldsymbol{R}\}$，包括除因结构构件的弹性变形施加于节点上的载荷$-[\boldsymbol{K}][\boldsymbol{D}]$之外的所有载荷。前面的分析表明$[\boldsymbol{K}][\boldsymbol{D}]=\{\boldsymbol{R}\}$是一组平衡方程。

类似的论证可以运用于非结构问题。例如，在稳态传热分析中，节点的平衡意味着流入(或流出)结构节点的净热量是零。根据惯例，流入结构节点的热流符号为正，方程 2.2-5 是类似于方程 2.5-1 的传热问题。例如，矢量$\{\boldsymbol{r}_e\}$可以认为是由于电流产生的热，矢量$\{\boldsymbol{P}\}$可以看作固体表面节点上的对流热传输量。

组集和结构节点编号　下面的例子说明在结构矩阵$[\boldsymbol{K}]$中给单元矩阵$[\boldsymbol{k}]_i$中的元素指定的位置取决于结构节点的编号。因此，每一单元节点的编号无关紧要，我们也不需要知道任一的$[\boldsymbol{k}]_i$是如何推导的。我们考虑 3 节点三角形单元。仅为了用图表解释，我们允许矩阵不对称，并且给每个$[\boldsymbol{k}]_i$中的单个系数命名，以便更清楚地表明当组集时它们变成什么样。我们指出，并不要求$[\boldsymbol{k}]_i$要从形式上扩展到“结构尺寸”。

在图 2.5-1 中，令每个节点具有一个自由度。在单元编号系统中对于各自的单元：

对三角形单元 1：　　对三角形单元 2：

$$[\boldsymbol{k}]_1\{\boldsymbol{d}\}_1 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} \qquad [\boldsymbol{k}]_2\{\boldsymbol{d}\}_2 = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} \tag{2.5-5}$$

其中a_i和b_i是单元矩阵$[\boldsymbol{k}]_1$和$[\boldsymbol{k}]_2$中的系数的符号名。由结构节点施加于单元的载荷是

$-\{\boldsymbol{r}\}$，此处$-\{\boldsymbol{r}\}=[\boldsymbol{k}]\{\boldsymbol{d}\}$。当结构节点编号代替单元节点编号时，为了识别相同的载荷，我们增加了上标 s，这样对于单元 1，

单元节点编号：

$$\begin{aligned}-r_1 &= a_1d_1+a_2d_2+a_3d_3\\ -r_2 &= a_4d_1+a_5d_2+a_6d_3\\ -r_3 &= a_7d_1+a_8d_2+a_9d_3\end{aligned}$$

和

结构节点编号：

$$\begin{aligned}-r_1^s &= a_1D_1+a_2D_4+a_3D_2\\ -r_4^s &= a_4D_1+a_5D_4+a_6D_2\\ -r_2^s &= a_7D_1+a_8D_4+a_9D_2\end{aligned}\qquad(2.5-6)$$

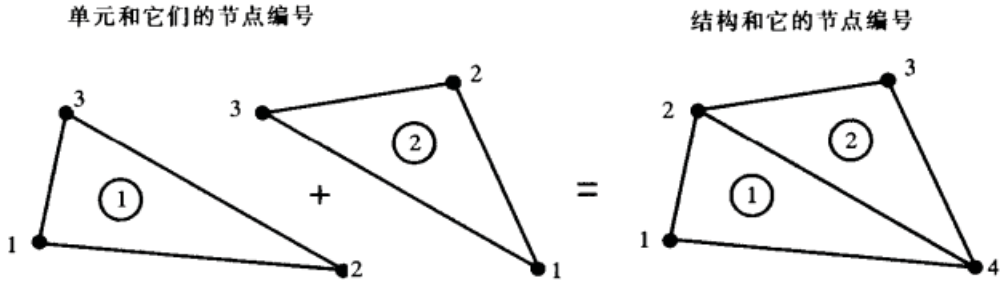


图 2.5-1 由两个三角形 3 节点单元组成的假想的 4 节点结构，每个节点有一个自由度

对于后面的方程组，我们可以增加方程 $r_3^s=0$，因为结构节点 3 并没有和单元 1 相连。由于同样的原因，D_3 也没有对单元 1 的任何节点产生力。把这些叠加，为了按编号顺序放置 D_i，重新排列，对于单元 1，我们得到：

$$\begin{Bmatrix}-r_1^s\\ -r_2^s\\ -r_3^s\\ -r_4^s\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1 & a_3 & 0 & a_2\\ a_7 & a_9 & 0 & a_8\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ a_4 & a_6 & 0 & a_5\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}D_1\\ D_2\\ D_3\\ D_4\end{Bmatrix}\qquad(2.5-7)$$

式中，$[\boldsymbol{k}]_1$ 是 4×4 的方阵。单元 2 可以做类似的处理。

和每个节点相关联的净载荷可以用 a_i，b_i 以及 D_i 的形式写出。例如，由结构节点 4 施加于两个弹性变形单元的净载荷如下：

$$-r_4^s=(a_4D_1+a_6D_2+0+a_5D_4)+(0+b_3D_2+b_2D_3+b_1D_4)\qquad(2.5-8)$$

通过按结构节点编号顺序写出净节点载荷，并集合每个 D_i 的系数，我们得出结论：因为$[\boldsymbol{k}]_1$和$[\boldsymbol{k}]_2$具有相同的大小，并且按同一矢量$\{\boldsymbol{D}\}$运算，所以可以写成 $[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=(\sum[\boldsymbol{k}])\{\boldsymbol{D}\}$，其中

$$[\boldsymbol{K}]=[\boldsymbol{k}]_1+[\boldsymbol{k}]_2=\begin{bmatrix}a_1 & a_3 & 0 & a_2\\ a_7 & a_9 & 0 & a_8\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ a_4 & a_6 & 0 & a_5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & b_9 & b_8 & b_7\\ 0 & b_6 & b_5 & b_4\\ 0 & b_3 & b_2 & b_1\end{bmatrix}\qquad(2.5-9)$$

我们看到，单元矩阵$[\boldsymbol{k}]$中最初在对角线下的系数可能被指派到$[\boldsymbol{K}]$对角线上面的位置。不论

这种情况是否发生，是单元节点的结构编号决定了单元系数在结构矩阵[**K**]中的位置。这个事实可由循环改变单元节点编号来证明；例如，循环变更图 2.5－1 中单元 1 的节点编号，左下角的节点就变为单元节点 2。然后方程 2.5－6 中的第一式就变为 $-r_2=a_1d_2+a_2d_3+a_3d_1$，但是，如果结构节点编号不改变，仍然会得到方程 2.5－7。

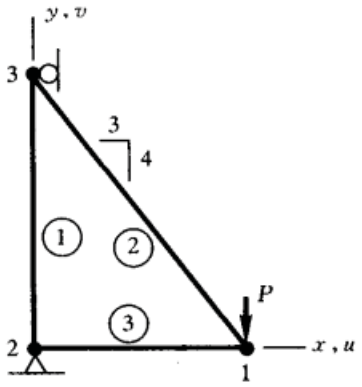


图 2.5－2　受载荷 P 作用的平面三杆桁架

如果每个节点有 n 个自由度而不是单个自由度将会如何呢？那么，公式 2.5－7 中，每个 $-r_i'$ 和 D_i 变成具有 n 项的列阵，并且每个 a_i 变成 $n\times n$ 的子阵。作为一个例子，考虑图 2.5－2 所示的三杆平面桁架结构，此问题的 $n=2$。设想，支撑被暂时移走了。位移被限制在 xy 平面内，公式 2.4－6 提供了每个单元的刚度矩阵，单元 i 的轴向刚度系数 k 为 A_iE_i/L_i。单元节点编号可以按任意顺序选取。例如，如果单元 2 的编号为 1～3，角度 β 在第二象限，因此，$\sin\beta=0.8$，$\cos\beta=-0.6$。如果编号为 3～1，那么角度 β 在第四象限，因此，$\sin\beta=-0.8$，$\cos\beta=0.6$。但不论是哪种编号方式，对于单元 2 都会得到同样的刚度矩阵[**k**]。在单元组集之后，结构方程[**K**]{**D**}={**R**}就是：

$$\begin{bmatrix} k_3+0.36k_2 & -0.48k_2 & -k_3 & 0 & -0.36k_2 & -0.48k_2 \\ -0.48k_2 & 0.64k_2 & 0 & 0 & 0.48k_2 & -0.64k_2 \\ -k_3 & 0 & k_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_1 & 0 & -k_1 \\ -0.36k_2 & 0.48k_2 & 0 & 0 & 0.36k_2 & -0.48k_2 \\ 0.48k_2 & -0.64k_2 & 0 & -k_1 & -0.48k_2 & k_1+0.64k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \\ p_2 \\ q_2 \\ p_3 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.5-10}$$

式中，载荷 P 是负的，因为它指向自由度 v_1 的反方向。载荷项 p_2，q_2 和 p_3 分别是支撑施加于节点 2 和 3 的水平力和垂直力。（公式 2.9－7 说明梁单元的类似组集过程。）图 2.5－2 所示的边界条件规定：$u_2=v_2=u_3=0$。边界条件的处理将在 2.7 节讨论。

单元系数在结构矩阵[**K**]和{**R**}中被叠加的位置由结构节点编号来规定，上述的这种方法叫作*直接刚度法*。另一个可供选择的方法叫作全等变换，与前者相比更正式一些，但不太适合于计算机实施。它将应用于后面 4.8 节的方程中。

组集的讨论直接引到了执行计算机软件程序，相关细节可以参考本书的第三版；也可以参考文献[2.13～2.15]。在软件中，组集过程很可能被扩大，它允许每个节点具有不同数目自由

度的单元连接起来，并且允许施加一些边界条件作为组集过程的一部分。

至此，我们的讨论中，记入的自由度还没有超过所必须的数目。其次，我们必须注意到，具有代表性的软件允许每个节点具有三个平移自由度和三个旋转自由度。这些自由度中的一些可能与给定的问题没有联系，而且必须被抑制住，以便对结构提供足够的支撑，这样才能得到问题的解答。

2.6 刚度矩阵的特性

已经看到的单元和结构刚度矩阵，例如式 2.2-1，2.2-6，2.3-5 和 2.5-10 中的，都具有诸如对称、对角元素非零且为正等性质。我们现在讨论这些特点以及其它一些特性，届时，能够期望一般的刚度矩阵也具有这些特点。非结构问题的特征矩阵具有类似的特点。

非负的 K_{ii} 假设除了一个自由度 D_i 外，$\{\boldsymbol{D}\}$ 中的其它所有自由度都为零。那么乘积 $[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}$ 得到 $R_i=K_{ii}D_i$，作为和 D_i 相对应的外载荷。在给定方向上的单一载荷将在相反的方向上产生一个位移，这在物理上是不合理的。因此对角线上的系数 K_{ii} 不能为负的；也就是说 $K_{ii}\geqslant 0$。如果 $K_{ii}=0$，我们推断，或者对单元没有附加自由度 i，或者有一个包含自由度 i 的机构（见后面解说）。

对称性 如果载荷和位移是线性关系，那么无论是单元还是结构的刚度矩阵都是对称的。这个特性可以通过贝蒂-麦克斯韦（Betti - Maxwell）互等定理来证明，定理讲的是，如果两组载荷作用于一个线弹性结构上，那么第一组载荷在第二组载荷引起的位移上做的功等于第二组载荷在第一组载荷引起的位移上做的功。也就是说，载荷 $\{\boldsymbol{R}\}_1$ 和 $\{\boldsymbol{R}\}_2$ 产生了各自的位移 $\{\boldsymbol{D}\}_1$ 和 $\{\boldsymbol{D}\}_2$，那么

$$\{\boldsymbol{R}\}_1^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{D}\}_2=\{\boldsymbol{R}\}_2^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{D}\}_1 \tag{2.6-1}$$

替代 $\{\boldsymbol{R}\}_1$ 和 $\{\boldsymbol{R}\}_2$ 得到：

$$([\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}_1)^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{D}\}_2=([\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}_2)^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{D}\}_1 \quad \text{或者} \quad \{\boldsymbol{D}\}_1^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{K}]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{D}\}_2=\{\boldsymbol{D}\}_2^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{K}]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{D}\}_1 \tag{2.6-2}$$

后面方程的等号两边都是标量，所以两边都可以进行转置运算，并且不改变任何东西。对等号右边进行转置运算，然后移项合并得到：

$$\{\boldsymbol{D}\}_1^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{K}]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{D}\}_2=\{\boldsymbol{D}\}_1^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{K}\}\{\boldsymbol{D}\}_2 \quad \text{或者} \quad \{\boldsymbol{D}\}_1^{\mathrm{T}}([\boldsymbol{K}]^{\mathrm{T}}-[\boldsymbol{K}])\{\boldsymbol{D}\}_2=0 \tag{2.6-3}$$

因为 $\{\boldsymbol{D}\}_1$ 和 $\{\boldsymbol{D}\}_2$ 都不能为零，括号中的表达式就必须为零。因此 $[\boldsymbol{K}]^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{K}]$，这就意味着 $\boldsymbol{K}$ 是对称的。

稀疏性 除非至少有一个单元与节点 i 和 j 都相连接，否则总刚矩阵中的 K_{ij} 必为零。例如，在公式 2.2-6 中 $K_{13}=0$，因为图 2.2-3 中的自由度 u_1 只和单元 1 相连接。（甚至在单元中存在 2 个自由度时，偶尔也会有 K_{ij} 为零的情况，这可能与单元的方位有关。这样的例子出现在公式 2.5-10 中，其中第一行的第四列元素为零。水平构件既和 u_1 相关也和 v_2 相关，但

是 $K_{14}=0$，这表明位移 v_2 并没引起出现在节点 1 处的水平力。）

如果一个矩阵包含有许多零，那么它称为稀疏阵。我们所考虑的示例结构的刚度矩阵远不是稀疏的，这仅是因为结构包含的单元太少。一个实际的有限元结构可能含有数以千计的单元，刚度矩阵中多于 99%的元素可能为零。为了避免存贮和处理[**K**]中巨大数量的零元素，通用软件采用了特殊的存贮格式和算法以适应这种情况。

奇异性：无支撑　在施加边界条件之前，结构会在空间自由"漂移"，也就是说，该结构是无约束的，并且可以有刚体运动。刚体运动包括平移和转动。当我们考虑一个结构（或其任一部分）转动时，在通常的线性分析中认为变形和转角都是小量，这一点很重要。这样，矩阵[**K**]就可利用未变形时初始几何尺寸来构建。图 2.6－1 所示的是一个杆绕左端发生刚体转动的情形。仅对于小的 θ，近似式 $u_2\approx -L\theta^2/2$，和 $v_2\approx L\theta$ 是有效的，这些算式是从级数取代 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 得来的，且每个结果表达式只截取了级数中的一项。当 θ 角很小时，u_2 相对 v_2 可以忽略，且 $\theta=v_2/L$。因此，如果 v_2 是仅有的一个非零自由度，并且 $v_2\ll L$，那么这个位移状态可以看作是绕节点 1 作刚体转动而形成的。我们又注意到，当 $\theta=\pi/2$ 时，$\{\boldsymbol{d}\}$ 中的实际位移是 $u_2=-L$ 和 $v_2=L$，而此时[**k**]{**d**}≠**0**，因为[**k**]不适用大转角的情形。

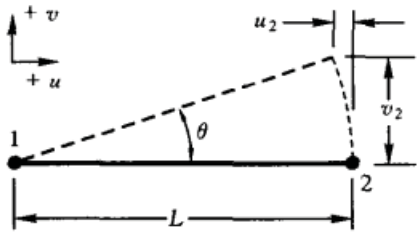


图 2.6－1　刚体转动 θ 角。所示位移近似公式仅在 θ 角很小时是有效的

如果{**D**}表示一个小的刚体位移，那么[**K**]{**D**}={**0**}；这时也就无需载荷作用了。假设暂时撤去图 2.5－2 中平面桁架的支撑，这样就允许在 xy 平面上的所有节点有位移。于是，这个结构就有如下四种刚体位移情况：

$$\begin{aligned}\{\boldsymbol{D}\}_1&=\lfloor c\quad 0\quad c\quad 0\quad c\quad 0\rfloor^{\mathrm{T}}\qquad \{\boldsymbol{D}\}_2=\lfloor 0\quad c\quad 0\quad c\quad 0\quad c\rfloor^{\mathrm{T}}\\ \{\boldsymbol{D}\}_3&=\lfloor c\quad c\quad c\quad c\quad c\quad c\rfloor^{\mathrm{T}}\qquad \{\boldsymbol{D}\}_4=\lfloor 4\theta\quad 3\theta\quad 4\theta\quad 0\quad 0\quad 0\rfloor^{\mathrm{T}}\end{aligned}\tag{2.6-4}$$

其中 c 和 θ 分别表示一个很小的位移和转角。这 4 种位移向量分别表示沿 x 轴方向的平移，沿 y 轴方向的平移，沿 $x=y$ 方向的平移，和绕节点 3 的小转角。

对于任一结构，可以写出无限多个刚体位移向量，但对于平面运动情况只有 3 种是线性无关的。而对于三维空间运动，则有 6 种是线性无关的。在公式 2.6－4 中，前面 3 个节点位移向量是线性相关的，因为有$\{\boldsymbol{D}\}_1+\{\boldsymbol{D}\}_2=\{\boldsymbol{D}\}_3$。不过，$\{\boldsymbol{D}\}_4$ 和前面 3 个矢量中的任意 2 个可以构成一个线性无关的位移向量组。

对于图 2.5－2 中撤去支撑的平面桁架，方程[**K**]$\{\boldsymbol{D}\}_3=\{\boldsymbol{0}\}$在$\{\boldsymbol{D}\}_3$ 中 $c=1$ 中时表明矩阵[**K**]中一行元素之和为 0。对于梁单元，其刚度矩阵[**k**]在方程 2.3－5 中做了说明，由乘积[**k**]$\lfloor 1\quad 1\quad 1\quad 1\rfloor^{\mathrm{T}}$提供的行和数不为 0，因为$\{\boldsymbol{D}\}=\lfloor 1\quad 1\quad 1\quad 1\rfloor^{\mathrm{T}}$ 已不是刚体运动；它是一个节点位移向量，它使单元横向位移并弯曲成"S"形状。

无支撑结构的刚度矩阵是个奇异矩阵，因此结构方程没有唯一的解矢量$\{\boldsymbol{D}\}$。若$[\boldsymbol{K}]$为奇异时，仍要求$\{\boldsymbol{D}\}$，软件会告诫有除数为0或者发出其它出错信息，并终止计算而不提供解。有的软件可能会自动插入一个“调整”，不对故障做出解释，而继续运算。

奇异性：支撑不足；机构 支撑不足的结构的$[\boldsymbol{K}]$矩阵具有奇异性。例如，图2.5－2中桁架问题，若将其节点3上的约束去掉，那么该结构的支撑将不充分，因为桁架能绕节点2作刚体转动。

一个线弹性结构中，其应变能U的二次型表达式是$U=\{\boldsymbol{D}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}/2$。一般来讲，当结构无约束或者仅有部分约束，或者含有一个机构时，会存在一个$\{\boldsymbol{D}\}$使$U=0$。这里的机构，也被称做不稳定性，是指一种位移模式，它不是刚体运动，但又能使$U=0$。

图2.6－2(a)中描述的结构就含有一个机构，轴向载荷作用在首尾相连的两根杆上。在图示的支撑和载荷情况下，从物理上讲，这个结构是稳定的。然而，若在节点2上作用一横向力，它将不受阻碍。只有当该点的横向位移较大时，才会对之产生阻力。但这种影响，基于初始几何尺寸(未变形)的线性理论是不予考虑的。其实，没有横向力作用于节点2时，也无所谓：$[\boldsymbol{K}]$是奇异的，并且$\{\boldsymbol{D}\}$不能得到唯一解。

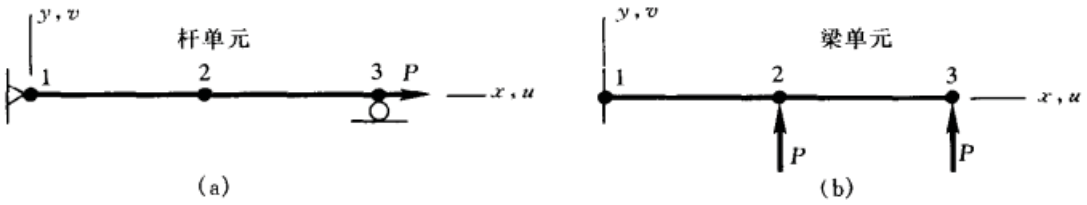


图2.6－2 由(a)杆单元和(b)梁单元构建的二单元结构

如图2.6－2(b)中所示的悬臂梁问题，利用梁单元可以很容易求解。然而，一个已习惯于二维问题的分析员可能仅对节点1的自由度u，v和θ_z加以约束。但仅有这些约束是不够的，因为此时该结构仍能自由地在垂直xy平面方向平移和绕x轴和y轴转动。所以，分析员必须记住，一般通用软件允许每节点有6个位移自由度，因此必须消除6个刚体运动，以使结构得到充分的支撑。

如果数据输入能确认为平面问题，那所用软件可以自动帮助我们消除节点的自由度w，θ_x和θ_y。若是一个平面桁架问题，假设其杆件在节点处是由光滑销栓连接的，那么其节点自由度项θ_z该如何呢？在其刚度矩阵(方程2.4－6)中并没有对θ_z自由度的约束项，因此其结构刚度矩阵将是奇异的，因为矩阵中与自由度θ_z对应的行和列的元素都是零。作为一个细心的分析员，应该明确软件实际能做什么，而不能想当然地认为软件能自动地将桁架在xy平面内的θ_z自由度项消去。如果文件不清楚，可以用几个简单的算例来加以判断。

我们注意到，对于平面桁架问题，抑制节点处的θ_z自由度，既不能消除桁架在xy平面内的刚体转动，也不能消除单元间的相对转动。因此，人们可以把节点看作能连接单元的光滑销栓，能够在连接点自由转动(除非θ_z被消除)。对于一个平面刚架，其各部件在节点处刚性连接，单元承受θ_z，并在它们相连的节点处具有相同的θ_z，因此，抑制所有节点的θ_z能防止所有连接点或许是不希望有的转动。

2.7　边界条件

正规解释　假设一结构已组集完毕，通过分区，并在必要时重新排列矩阵系数，我们能够把无支撑结构的方程$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\}$写成如下形式

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{11} & \boldsymbol{K}_{12}\\ \boldsymbol{K}_{21} & \boldsymbol{K}_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{D}_x\\ \boldsymbol{D}_c\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{R}_c\\ \boldsymbol{R}_x\end{Bmatrix} \tag{2.7-1}$$

其中，角标 c 表示该变量已知，角标 x 则表示该变量未知。于是，载荷$\{\boldsymbol{R}_c\}$是已知的，相应的$\{\boldsymbol{D}_x\}$是未知的；而自由度$\{\boldsymbol{D}\}_c$是已知的，与之对应的载荷向量$\{\boldsymbol{R}_x\}$是未知的。典型情况是$\{\boldsymbol{R}_x\}$表示支反力，相应的自由度向量$\{\boldsymbol{D}_c\}$为 0，因为它们表示的运动被支撑限定了。不过，非零自由度也是可以接受的。将方程 2.7－1 展成如下形式

$$[\boldsymbol{K}_{11}]\{\boldsymbol{D}_x\}+[\boldsymbol{K}_{12}]\{\boldsymbol{D}_c\}=\{\boldsymbol{R}_c\} \tag{2.7-2a}$$

$$[\boldsymbol{K}_{21}]\{\boldsymbol{D}_x\}+[\boldsymbol{K}_{22}]\{\boldsymbol{D}_c\}=\{\boldsymbol{R}_x\} \tag{2.7-2b}$$

若已知的自由度向量$\{\boldsymbol{D}_c\}$在数目和分布上足以阻止刚体运动，则子矩阵$[\boldsymbol{K}_{11}]$是非奇异的。这样，未知的自由度向量$\{\boldsymbol{D}_x\}$即可由方程 2.7－2a 求得：

$$\{\boldsymbol{D}_x\}=[\boldsymbol{K}_{11}]^{-1}(\{\boldsymbol{R}_c\}-[\boldsymbol{K}_{12}]\{\boldsymbol{D}_c\}) \tag{2.7-3}$$

最后，从由方程 2.7－2b 中能够确定载荷向量$\{\boldsymbol{R}_x\}$，但需代入前面确定的节点自由度向量$\{\boldsymbol{D}_x\}$。载荷向量$\{\boldsymbol{R}_x\}$，可根据弹性变形来计算，但不包含直接移置到支点上的外载荷。例如，考虑图 2.5－2 桁架中各杆重量分别为 W_1，W_2 和 W_3，杆重的一半移置到它的两个端点，并包含在$\{\boldsymbol{R}_c\}$中。不过，在$\{\boldsymbol{R}_x\}$中表示节点 2 垂直支反力的那一项，并不包含移置到节点 2 上的 $W_1/2$ 和 $W_3/2$。

另一种方法　假设结构方程$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\}$已经组集完，但还没有对之施加边界条件。在软件中，要获得方程 2.7－1 的分区形式，需要重新排列运算，既棘手又耗时。我们当然希望能够在施加边界条件的同时又不破坏矩阵$[\boldsymbol{K}]$的对称性，不改变其维数大小，也不改变其各项的排列顺序。下面介绍的这种方法适合于任何类型的问题——结构的问题、热的问题等等。

我们用任意一个 3×3 示例系统足以说明该方法。假定总体方程为

$$\begin{bmatrix}K_{11} & K_{12} & K_{13}\\ K_{21} & K_{22} & K_{23}\\ K_{31} & K_{32} & K_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}D_1\\ D_2\\ D_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}R_1\\ R_2\\ R_3\end{Bmatrix} \tag{2.7-4}$$

其中，$K_{ij}=K_{ji}$，因为$[\boldsymbol{K}]$是个对称阵。对于任一自由度 i，我们可以或者用 D_i 或者用 R_i（但不能同时）表示。作为例子，假设 R_1 和 R_3 已知，把边界条件 $D_2=\Delta_2$ 施加于结构，这里的 Δ_2 是已知量（不是未知量）。因此，相应的载荷项 R_2 则是未知的。首先，我们将已知的乘积项 $K_{i2}\Delta_2$ 移到方程右边，即得

$$\begin{bmatrix} K_{11} & 0 & K_{13} \\ K_{21} & 0 & K_{23} \\ K_{31} & 0 & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 - K_{12}\Delta_2 \\ R_2 - K_{22}\Delta_2 \\ R_3 - K_{32}\Delta_2 \end{Bmatrix} \tag{2.7-5}$$

此时，尽管矩阵不再对称，并且 $R_2 - K_{22}\Delta_2$ 项中既含有已知量又含有未知量，但是我们可以用 $D_2 = \Delta_2$ 代替上面的第二个方程，来补救这些不足。于是原方程 2.7-5 变为

$$\begin{bmatrix} K_{11} & 0 & K_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ K_{31} & 0 & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 - K_{12}\Delta_2 \\ \Delta_2 \\ R_3 - K_{32}\Delta_2 \end{Bmatrix} \tag{2.7-6}$$

（另一种办法就是，让[**K**]中第二行和第二列中的 K_{22} 不变，其余项置零，再将 R_2 用 $K_{22}\Delta_2$ 代替。）若 D_1 或 D_3 也已知，方程 2.7-6 能用类似的方式再次修改。当自由度 Δ_i 被取消，即 $\Delta_i = 0$ 时，方程 2.7-6 的构造过程就特别简单了。

作为应用示例，如图 2.5-2 所示，对方程 2.5-10 施加边界条件 $u_2 = v_2 = u_3 = 0$。方程 2.7-6的方法导致下列结果

$$\begin{bmatrix} k_3 + 0.36k_2 & -0.48k_2 & 0 & 0 & 0 & 0.48k_2 \\ -0.48k_2 & 0.64k_2 & 0 & 0 & 0 & -0.64k_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.48k_2 & -0.64k_2 & 0 & 0 & 0 & k_1 + 0.64k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.7-7}$$

由这组方程可以解出待求量 u_1，v_1 和 v_3（当然已知量有 $u_2 = v_2 = u_3 = 0$）。

如果有大量的节点自由度项需置零时，方程 2.7-6 的方法就有点浪费存储空间了。在本书第三版及文献[2.13～2.15]中，描述了从组集过程中省略被消除的自由度的编程方法。对于一个平面刚架问题，自由度 w_i，θ_{zi} 和 θ_{zj} 能够用在组集中省略它们的方法消除掉。于是，组集成的矩阵[**K**]就用平面内的自由度 u_i，v_i 及 θ_{zi} 来运算。而对于一个平面桁架问题，θ_{zi} 也能够消除掉，这样就保留下 u_i 和 v_i 了。最终，保留下的自由度必须都是设定的，以防止结构的刚体运动。在图 2.5-2 中，这些保留下的边界条件是 $u_2 = v_2 = u_3 = 0$，如果这些节点自由度在组集过程中也用删掉它们的方法消去，最终的方程组如下：

$$\begin{bmatrix} k_3 + 0.36k_2 & -0.48k_2 & 0.48k_2 \\ -0.48k_2 & 0.64k_2 & -0.64k_2 \\ 0.48k_2 & -0.64k_2 & k_1 + 0.64k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.7-8}$$

未知自由度 u_1，v_1 和 v_3 现在可以计算。当然，由方程 2.7-7 和 2.7-8 计算所得结果是一样的。支反力 p_2，q_2 和 p_3 可由方程 2.5-10 分别用解矢量{**D**}乘以[**K**]中的第 3，4，5 行而得到。当边界条件施加之后，如方程 2.7-7 和 2.7-8 中那样，这些行中的信息都被删除掉了。不过，软件将有办法保存或重建矩阵[**K**]中相应受影响的行和列，这样支反力就能计算出来（可见方程 2.7-3 的说明）。

边界条件也可用拉格朗日乘子和罚函数方法处理。这些方法将在 13.2 节和 13.3 节中讨论。

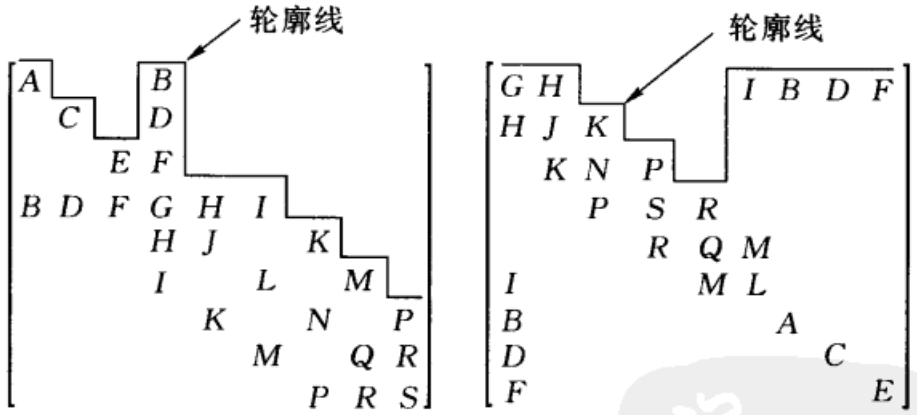
2.8　利用稀疏性·求解方程组

结构节点的编号顺序可以是任意的。不同的编号顺序会得到结构矩阵不同的拓扑形式，也就是说，矩阵中各系数会排列在不同的位置。我们寻找一种有助于压缩存储空间并加快结构方程求解的拓扑结构形式[2.15]。我们可以选用任何一种求解方法，但都会受到矩阵的拓扑结构、方程组个数以及方程组是否病态等因素的影响。应要求程序员选择出可行的方法，并能在出现求解困难时采取积极的应对措施。有关这方面的讨论，放到了附录 B 中。

编号与稀疏性　考虑如图 2.8－1 所示的结构，它由若干两节点单元组成。它们可以表示梁单元、电阻器、配水系统管路，等等。具体的物理背景，并不影响我们后面对问题的讨论。不过，为了便于说明，我们假设各个节点仅有一个自由度。根据图 2.8－1(a)和 2.8－1(b)中节点编号方案，我们可以分别得到如下两种结构矩阵：

其中，大写字母表示非零系数，而零系数用空格表示。图中的轮廓线包围了各列最顶端的非零项。虽然两个矩阵的系数是相同的，但矩阵的拓扑结构是不同的。

又根据对称性，只要将矩阵的上三角中各项存储就可以保留矩阵的全部信息。同样，在求解方程时，我们只需要对轮廓线下方到包括对角线的各项进行处理。这样，我们能够以一维数组的形式按列序号存储所需的全部系数，并且包含了从轮廓线到对角线的各项的信息。在轮



(2.8－1)

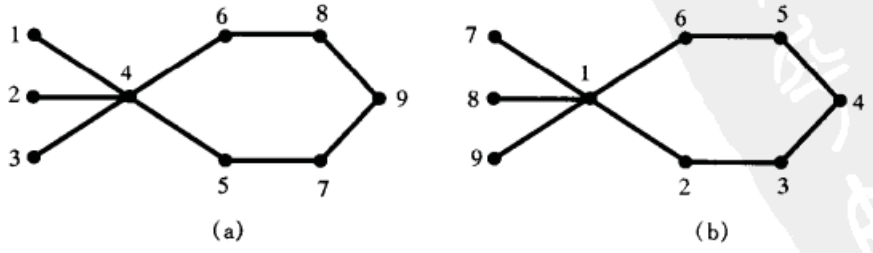


图 2.8－1　二节点单元组集中节点的不同编号

廓线和对角线之间的零项也被保存下来，因为直接(非迭代)方程求解器会生成填充项，也就是说，它将使轮廓线下方的大多数零系数项转换为非零系数项。零项系数在数值计算过程中是可以跳过的，而填充项仍需要处理，并且必须为它们保留存储空间。照图 2.8-1(a)中的编号方案，我们将其存储为一维数组形式：

$$\lfloor A\ C\ E\ B\ D\ F\ G\ H\ J\ I\ 0\ L\ K\ 0\ N\ M\ 0\ Q\ P\ R\ S \rfloor \qquad (2.8-2)$$

以这种形式存储的项的数目有时叫做矩阵的*存贮特征数*。在方程求解中，这种存储形式与*活动列存储法*联系起来。软件必须说明一维数组中哪些项是 $n\times n$ 结构矩阵中的对角线项。这些信息由 n 个记录每一列高度的辅助数组来提供。就图 2.8-1(a)中的编号方案，该数组为 $\lfloor 1\ \ 1\ \ 1\ \ 4\ \ 2\ \ 3\ \ 3\ \ 3\ \ 3 \rfloor$。这些数的和为 21，即该矩阵的*存储特征数*。而方程 2.8-1 中第二个矩阵的对应存储特征数则为 39，这就反映了如图 2.8-1(b)所示编号方案比较差。

一般的通用软件，都具有自动编号功能，可对输入的节点编号进行检查，形成比较合理的编号方案，以提高存储和求解效率，然后又转换成便于显示计算结果的输入编号形式。具体可参考文献[2.16]。

方程组求解 从形式上，结构方程$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\}$的求解可以写成$\{\boldsymbol{D}\}=[\boldsymbol{K}]^{-1}\{\boldsymbol{R}\}$。后面的公式应称为"求$\{\boldsymbol{D}\}$"，而不是要求对$[\boldsymbol{K}]$求逆。求解$\{\boldsymbol{D}\}$其实不必求逆矩阵。即使$[\boldsymbol{K}]$是个稀疏矩阵，$[\boldsymbol{K}]^{-1}$也是满秩的，其求逆过程既耗时又占用很多内存空间。

在结构力学中，$\{\boldsymbol{D}\}$表示节点位移，因此我们要求结构在运动学上是确定的，即结构不能有刚体模式或机构。因为未知量是位移而不是力，静不定不会使问题更复杂。确实，如果由于多个支撑出现了高度静不定，问题反而变得简单了，因为其中举足轻重的方程少了。

方程组解法可分为*直接解法*和*迭代解法*。在直接解法中，例如高斯消元法，其运算次数取决于矩阵的拓扑结构和方程组数目，并且可以事先预测。对于迭代求解方法，其运算次数是不确定的。迭代会不断循环，直到达到收敛要求。

当矩阵存贮特征数较小时，直接解法的效果还是很好的，如图 2.8-2(a)中悬臂梁问题的求解。此外，结构矩阵非零项沿对角线聚集，这就使消元过程只生成较少的填充项(在这个特殊例子中就没有)。比较而言，图 2.8-2(b)所示结构产生了一个稀疏矩阵，但存贮特征数很大，若其节点数较多，它就需要较大的存储空间，并且计算难度也较大。一个存贮特征数大的矩阵也具有较大的*半带宽* b。对于第 i 行，其半带宽记为 b_i，它等于从对角线数到最右端非零项的列数。在方程 2.8-1 中的第一个矩阵中，各行的 b_i 分别为 4,3,2,3,3,3,3,2,1。用 b_i 的均方根 b 来表示整个矩阵的半带宽：本例中有 $b=2.79$。如果矩阵阶数 n 较大，而 b 相对 n 要小得多，则用直接解法的计算量近似正比于 nb^2。

若使用直接解法，我们无须在求解前就组集起整个结构矩阵。组集步骤可以和求解过程交替进行。当组集好足够的单元以完成结构矩阵初始分块时，就开始求解了，然后，随着更多单元被组集进来，求解会有暂时的中断。这种方法可叫作*前沿法*，或者叫*波前法*。因为在求解和组集交替进行时，自由度的激活可形象化地看作越过结构的"波面"或"前沿"。处理方程的次序取决于单元编号而不是节点编号，用减小波前单元编号来提高计算效率。波前求解所需存储空间要比在开始求解前建立整个结构矩阵所需的空间小，但其计算程序要复杂些。

随着结构矩阵条件数的增加，迭代求解收敛会变慢[2.13,2.15,2.17]。对正在讨论的情况，条件

数可以认为是结构振动频率的最高值与最低值的比值的平方(也可参见 9.3 节)。图 2.8-2(a)所示的梁具有较大的条件数:在最高频模态时,每个单元都呈现"S"变形;在最低频模态时,整个梁将作"跳水板"式的上下运动。另一方面,如图 2.8-2(b)所示,结构的条件数就比较小了。条件数会受所选单元类型的影响;结构纵横比(即伸长度)较大,单个单元纵横比较大,都会使结构条件数变大。实际的迭代求解使用"预处理器"来加快收敛。

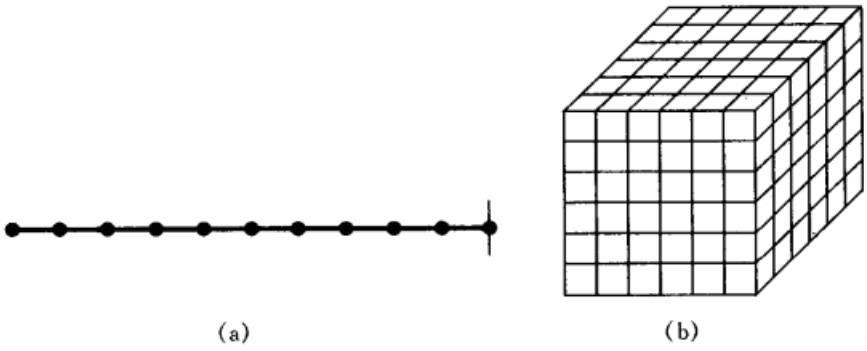


图 2.8-2 (a)由多个梁单元构建的悬臂梁;(b)由多个体单元构建的立方体

迭代解法的优点在于它不要求将轮廓线下方的零项转换为非零项。这样,也就不需要为这些填充项预留存储空间或者处理它们。事实上,矩阵[**K**]甚至不需组集。迭代计算所需的信息由与变形有关的力组成。需要的话,这些力可以通过对单元逐个计算得到,通常,所需计算量比每个单元生成[**k**]和乘积[**k**]{**d**}少。迭代求解器特别适合于矢量和并行计算,当使用特殊的数据存储方法时,会达到很高的效率。如果自由度数多,方程约束条件好,即使优化节点编号,[**K**]仍有大的存贮特征数,此时迭代解法可能比直接解法快得多。

如果对许多不同的载荷矢量{**R**}作用于同一结构的情况进行求解,直接解法有其优势,因为[**K**]一旦在求解器中生成,那么只要少量的额外工作就能处理每个附加载荷向量。而迭代解法对每个附加载荷向量,可能需要进行全新的求解,尽管对消除这些缺点方面,已取得一些进步[2.18]。

高斯消元法 常用的直接解法有 Gauss 消元法、Cholesky 分解法,或许多其它相类似的方法。用 Gauss 消元法解方程组[**K**]{**D**}={**R**}中的{**D**},要将[**K**]化简为一个上三角阵,再通过回代由后向前依次计算各未知量。图 2.8-3(a)中,就列出由该方法计算一个简单算例的步骤。

图 2.8-3(a)中[**K**]的第一行乘以因子 $K_{21}/K_{11}=-6/18$,并从第二行中将其减去;第一行乘以因子 $K_{31}/K_{11}=-6/18$ 后从第三行减去。类似地,从 R_2 中减去$(K_{21}/K_{11})R_1$,从 R_3 中减去$(K_{31}/K_{11})R_1$。这样,就从后续方程中消去了未知量 D_1,就像我们为 D_1 解第一个方程并把它代入后续方程而作了正式的代数计算,其结果示于图 2.8-3(b)中。其中第 4 行在消去 D_1 中并没有变化;因为 $K_{41}=0$,软件会跳过这个循环计算。下一步,用同样的方法,从图 2.8-3(b)中的第 3 个和第 4 个方程中消去 D_2,其中所用乘积因子为 $K_{32}/K_{22}=-2/10$ 和 $K_{42}/K_{22}=-6/10$,结果在图 2.8-3(c)中。最终,利用乘以因子 $k_{43}/k_{33}=-7.2/9.6$,从图 2.8-3(c)内的方程 4 中消去 D_3,结果示于中图 2.8-3(d)中。现在,[**K**]已被三角化,再通过图 2.8-3(e)所示的逆序回代,可计算出所有未知量。

初始方程：

$$\begin{bmatrix} 18 & -6 & -6 & 0 \\ -6 & 12 & 0 & -6 \\ -6 & 0 & 12 & -6 \\ 0 & -6 & -6 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 60 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(a)

一次消元后：

$$\begin{bmatrix} 18 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & 10 & -2 & -6 \\ 0 & -2 & 10 & -6 \\ 0 & -6 & -6 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 60 \\ 20 \\ 40 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(b)

二次消元后：

$$\begin{bmatrix} 18 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & 10 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 9.6 & -7.2 \\ 0 & 0 & -7.2 & 8.4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 60 \\ 20 \\ 44 \\ 12 \end{Bmatrix}$$

(c)

三次消元后：

$$\begin{bmatrix} 18 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & 10 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 9.6 & -7.2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 60 \\ 20 \\ 44 \\ 45 \end{Bmatrix}$$

(d)

回代解未知数：

$D_4 = 45/3 = 15$

$D_3 = (44 + 7.2D_4)/9.6 = (44 + 108)/9.6 = 15.83$

$D_2 = (20 + 2D_3 + 6D_4)/10 = (20 + 31.67 + 90)/10 = 14.17$

$D_1 = (60 + 6D_2 + 6D_3)/18 = (60 + 85 + 95)/18 = 13.33$

(e)

图 2.8-3 用 Gauss 消元法求解联立线性代数方程组实例

系数 K_{23} 是一个填充项，因为它会变换为非零值，而轮廓线上方的那个零项 K_{14} 将保持为零值。轮廓线的拓扑结构并不会因为前面的简化处理而改变，并且被消元方程的矩阵下半部分是对称的。因此，乘积因子，例如 K_{21}/K_{11}，也可以写成 K_{12}/K_{11}。换句话说，储存和处理的信息完全包括在从轮廓线向下到对角线的[$\boldsymbol{K}$]矩阵的上三角中。还注意到，右边需要处理的信息项保留在三角化的矩阵中，这意味着右边附加项能够快速处理。

上述例子使用了“对角主元”法，即用第 i 个方程消去第 i 个未知量。这种方法便于编程计算。但当对第 i 个未知量消元时，它要求刚度系数 K_{ii} 是非零值。这种情况只适用于结构是充分约束又没有机构的情况，或者用位移作为自由度。对于一些替代的有限元公式和一些施加约束方法，在开始求解方程时，会出现部分对角系数为零的情况(5.6 节和 13.2 节)。

2.9 机械载荷·应力

直接作用于结构节点的载荷被直接加到结构载荷向量上(方程 2.5-4 中的载荷{$\boldsymbol{P}$})。在这一节中，我们考虑由外部作用力和/或力矩产生的单元载荷{$\boldsymbol{r}_e$}，它们作用在单元内而不是在结构节点上。我们也考虑如何能够计算杆单元或梁单元中的应力。在下一节中，我们还将讨论由于温度变化而引起的载荷与应力。

引言 在图 2.5-2 中，假想略去载荷 P，而该结构仅受各部件自身重力作用。令各部件自重分别为 W_1，W_2 和 W_3。那么，从物理角度看，下述节点载荷的组成是合理的，节点 1 上受力 $(W_2+W_3)/2$，节点 2 受力 $(W_1+W_3)/2$，节点 3 受力 $(W_2+W_1)/2$，并且它们的作用方向都

是向下的。这样，我们就把重力载荷“集结”在几个节点上了。即使各部件在节点处以销栓相连接，该结构也不能算是一个严格意义上的桁架，因为各部件并不是单纯受轴向载荷作用；所有非垂直的部件也承受重力载荷，由此引起弯曲并产生弯曲应力。如果各部件在节点处是刚性连接的，那该结构就成为一个刚架，前面所讲的集结或“简化”载荷将忽略部件在节点上对结构施加的弯矩作用。这些力矩是下文中讨论的“协调”加载的一部分。简化后的载荷像是对含有多个部件结构的很好近似；在这种情况下，桁架部件中的弯曲应力通常被忽略掉，由刚架部件自重而产生的节点弯矩也将被忽略掉。如果需要考虑，可以把桁架看作简支梁，来计算由自重引起的弯曲应力。再把弯曲应力叠加到由节点位移引起的轴向应力上。

“丢失”载荷 对于 $P=0$ 和简化为上一段中描述的载荷，方程 2.7－8 右端的载荷向量变为：

$$\lfloor 0 \quad -\frac{1}{2}(W_2+W_3) \quad -\frac{1}{2}(W_1+W_2) \rfloor^{\mathrm{T}}$$

这样，节点 2 上所受向下的载荷 $(W_3+W_1)/2$ 从方程组中丢失掉了，并且又不影响计算的位移和部件的受力。该载荷的丢失，是因为有支反力直接与之作用。当求解出节点自由度后，要确定节点 2 上竖直方向的反作用力，我们可以将 $(W_1+W_3)/2$ 加到由方程 2.5－1 确定的 q_2 上。如果支撑能抑制因温度变化而产生的位移，那么，温度变化也会对支反力有所贡献。

协调的节点载荷 对于均匀杆和梁单元，单元载荷可以按初等材料力学方法处理，以得到一组作用于结构节点的协调载荷。这组载荷与由 3.3 节所讲的正式的 FEA 方法得到的结果是一样的，其中对术语“协调性”也有说明。对于某些结构包括那些由均匀的杆或均匀梁单元组成的，由协调性节点载荷计算得到的节点位移数值与数学模型精确解是吻合的[2.5]。即使在单元矩阵$[\boldsymbol{k}]$以及协调性节点载荷矢量中包含单元横向剪切变形作用，这一特性对于均匀的梁单元也是有效的[2.5]。在后面的讨论中，我们将忽略梁中的横向剪切变形。

杆单元的载荷 设一轴向均布力 q 作用于一个两端固定的均匀杆上(图 2.9－1(a))。在材料力学中，这是一个简单的静不定问题，其解表明杆两端支反力为 $qL/2$。把这根杆看作单独一个杆单元，它的两个端节点固定，我们在每个端点处得到节点载荷为 $qL/2$。类似地，如果施加一轴向集中力 P，比如作用在单元的 $x=L/3$ 处(图 2.9－1(b))，这时左节点载荷为 $2P/3$，而右节点载荷为 $P/3$，且两者的作用方向与 P 一样。图 2.9－1(a)和图 2.9－1(b)中的载荷 $qL/2$，$2P/3$ 以及 $P/3$ 都是由单元作用于节点的“协调性”单元载荷$\{\boldsymbol{r}_e\}$。它们的方向与静不定杆端点支反力方向相反。

杆单元中的应力 在杆单元中，由节点位移引起的轴向应力可通过确定伸长 e，轴向应变 $\varepsilon=e/L$，轴向应力 $\sigma=E\varepsilon$ 来计算。特别是，对于一个在 xyz 坐标系中取任意方向的杆单元有：

$$\sigma=\frac{E}{L}[(u_2-u_1)l+(v_2-v_1)m+(w_2-w_1)n] \tag{2.9-1}$$

其中，l，m 和 n 是杆单元轴线的方向余弦，像在 2.4 节中用到的那样。在总体方程组求解后，所有结构中节点自由度的数值解都出现在$\{\boldsymbol{D}\}$中。与单元相关的节点自由度可从$\{\boldsymbol{D}\}$中提取出来。

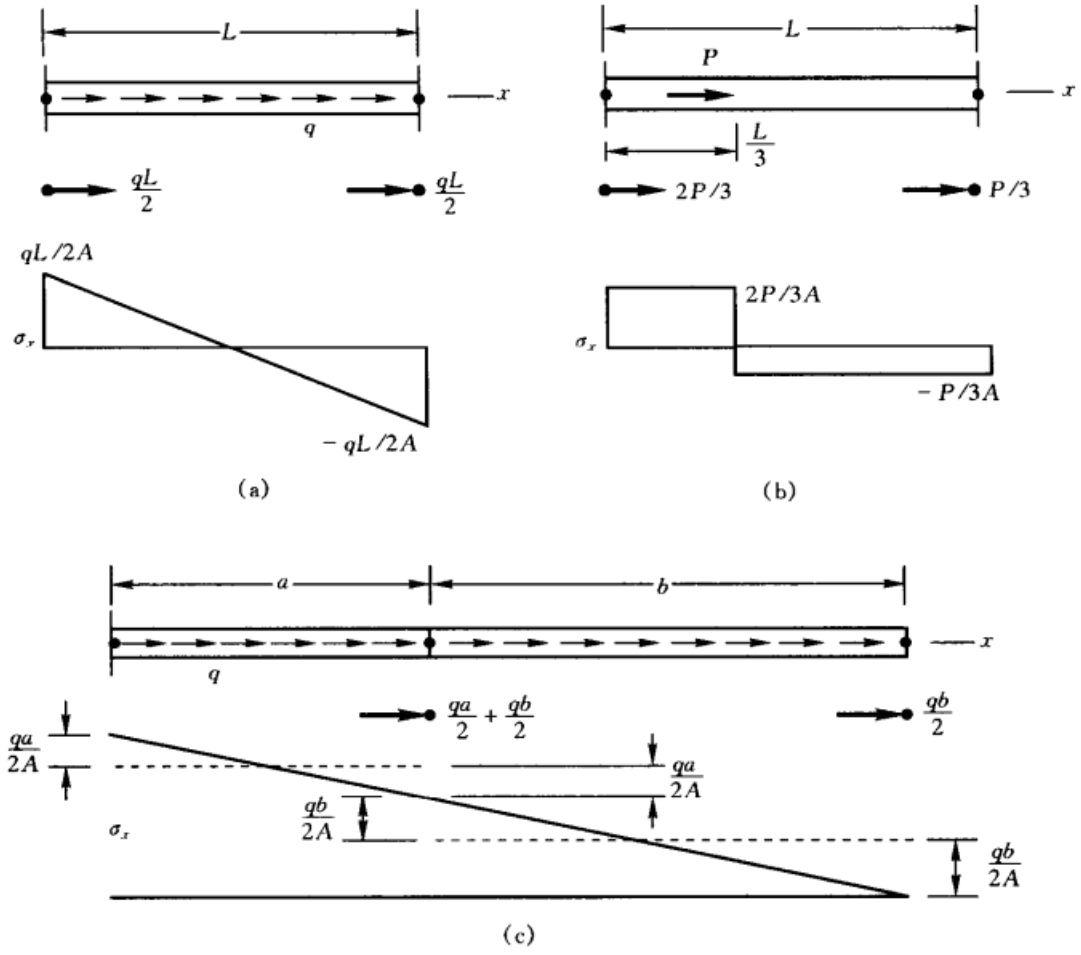


图 2.9-1 作用于节点间杆单元的轴向载荷引起的节点载荷和应力场

当机械载荷产生非零单元载荷$\{r_e\}$时，我们可以(选择性地)添加刚才描述的“固定端点”的单元应力。假定图 2.9-1(a)中的杆可以视为一个单元的结构。那么，根据方程 2.9-1，单元轴向应力为零，因为两节点被固定。然而，如果我们添加如图所示的应力σ_x，它是由解析方法得到的两端固定的杆中的应力分布，我们就可以得到正确的解。更一般地讲，用叠加由 FEA 计算所得应力(由节点位移产生的应力)和在它的所有自由度被固结时单独计算的与单元机械加载有关的应力，就能得到更高精度的应力。在有热载荷情况下，必须包含单元应力，这可参见 2.10 节。

当单元组集时，由相邻单元贡献的载荷在公共节点上合成，对于均布载荷如图 2.9-1(c)所示。最左端节点上没有载荷显示，因为该节点被固定了。若有力作用于该节点上，该力也将是在施加边界条件时描述的“丢失”载荷。虚线所示的应力σ_x是由节点位移形成的。叠加固定自由度单元应力值得到实线，它是精确值。

备注 上述的应力计算叠加方法也能够应用于梁单元。对于除了杆、梁之外的其它单元，当单元所有自由度固定时，分开来计算由机械载荷引起的单元应力就不那么容易了。所以，这种单元应力场很可能仅仅在梁单元中才有。随着单元尺寸变小，其对总体应力的贡献会趋于零。在一个粗网格中，包含这些单元应力通常能提高精度，但当网格细化时，忽略它也并不妨碍向正确应力收敛。

梁单元上的载荷　一个两端固定的等截面梁受均布力作用，支反力可以用初等梁理论来计算。如果方向相反，这些支反力构成图 2.9－2(a)所示的节点载荷，即

$$\{\boldsymbol{r}_e\} = \begin{Bmatrix} -qL/2 \\ -qL^2/12 \\ -qL/2 \\ qL^2/12 \end{Bmatrix} \tag{2.9-2}$$

其中，负号表示载荷方向与各自由度的正向相反。当单元组集时，单元内部节点上的弯矩载荷趋于消失(图 2.9－2(b))。

作用在固支梁上的其它形式的载荷向量$\{\boldsymbol{r}_e\}$，比如，作用在任意 x 位置的集中力或集中力矩，或线性变化的分布载荷，可以容易地被写出来。典型的通用软件能够计算出梁上这种载荷的载荷向量。在应力计算中，以前面描述杆单元应力场的方式利用相应的端点固定的单元力矩场也是可以的。因此，对于均布载荷，图 2.9－2(a)所示的单元力矩场 M，可加到由节点位移产生的弯矩上去。

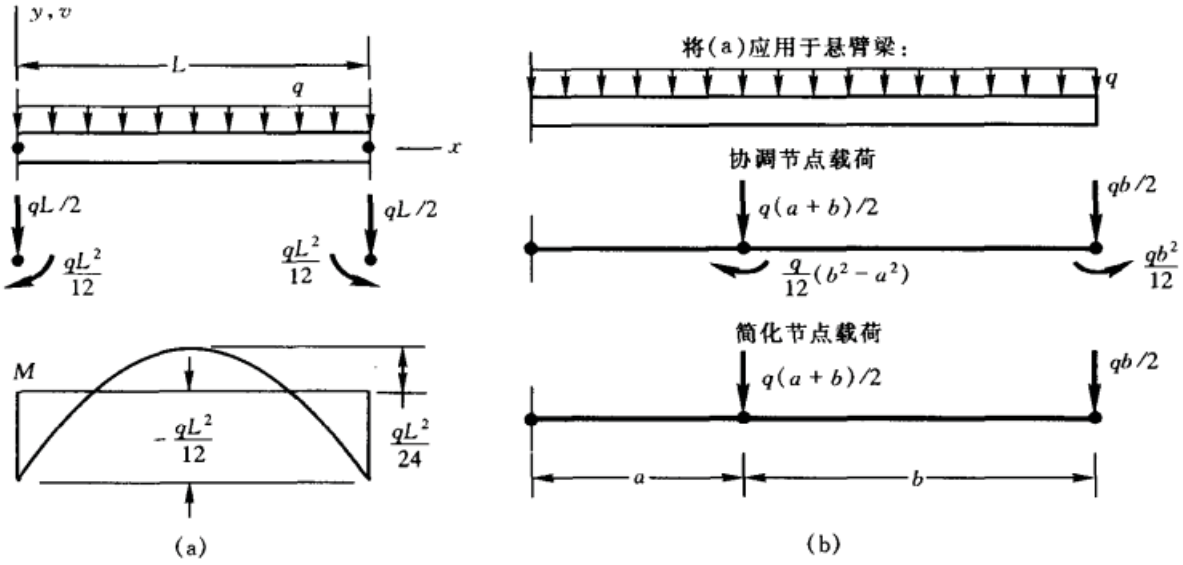


图 2.9－2　节点间梁单元受横向载荷作用时的节点载荷和弯矩场

梁单元中的应力　我们在图 2.3－2 所示的局部坐标系中考虑应力计算。因此，首先由变换$[\boldsymbol{T}]\{\boldsymbol{d}\}$计算出局部自由度，其中$[\boldsymbol{T}]$由公式 2.4－9 给出。对于所探讨的单元，参照总体坐标系，其自由度$\{\boldsymbol{d}\}$的数值，可在总体方程求解后从$\{\boldsymbol{D}\}$中提取。

在二维单元中，节点位移将产生一个三次横向位移场 $v=v(x)$，如图 2.3－1 所示。由节点位移产生的弯矩可由该位移场曲率来计算。如在初等梁理论中表示的，弯矩场 $M_z=M_z(x)$ 和横向剪切力 V_y 为

$$M_z = EI_z \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} \quad \text{和} \quad V_y = \frac{\mathrm{d}M_z}{\mathrm{d}x} = EI_z \frac{\mathrm{d}^3 v}{\mathrm{d}x^3} \tag{2.9-3}$$

图 2.3－1 提供了各个自由度分别取单位值时的横向位移 $v=v(x)$。用微分方法，可得由节点自由度表示的曲率 $\mathrm{d}^2v/\mathrm{d}x^2$，继而得到由自由度表示的弯矩 $M_z=M_z(x)$

$$M_z = EI_z\left[\left(-\frac{6}{L^2}+\frac{12x}{L^3}\right)v_1+\left(-\frac{4}{L}+\frac{6x}{L^2}\right)\theta_{z1}+\left(\frac{6}{L^2}-\frac{12x}{L^3}\right)v_2+\left(-\frac{2}{L}+\frac{6x}{L^2}\right)\theta_{z2}\right] \tag{2.9-4}$$

于是，dM_z/dx 就是由节点自由度表示的 V_y 的表达式。

方程 2.3-8 及图 2.3-2 描述的 3D 梁单元也能反映轴向力 N、绕轴线扭矩 T、绕 y 轴的弯矩 M_y 和横向剪切力 V_z，其中

$$N = AE\frac{u_2-u_1}{L} \quad T = GK\frac{\theta_{x2}-\theta_{x1}}{L} \quad M_y = EI_y\frac{d^2w}{dx^2} \quad V_z = EI_y\frac{d^3w}{dx^3} \tag{2.9-5}$$

横向位移场 $w=w(x)$ 是一个由节点自由度 w_1，θ_{y1}，w_2 和 θ_{y2} 控制的三次函数。弯矩 $M_y=M_y(x)$ 由类似于方程 2.9-4 的公式确定，但节点转角的正负号相反。与方程 2.9-3 和 2.9-5 的力和弯矩有关的正应力和剪应力是

$$\sigma_x = \frac{N}{A}-\frac{M_z y}{I_z}-\frac{M_y z}{I_y} \qquad \tau_T = \frac{Tc_T}{K}$$
$$\tau_y = c_y\frac{V_y}{A} \qquad \tau_z = c_z\frac{V_z}{A} \tag{2.9-6}$$

3 个剪应力最大值的位置，取决于横截面的形状。如果横截面为一半径为 R 的实心圆，这时有 $A=\pi R^2$，$I_y=I_z=\pi R^4/4$，$K=\pi R^4/2$，$c_T=R$，$c_y=c_z=4/3$。其弯曲应力的最大值由 M_z 引起的部分在 $y=\pm R$ 处，由 M_y 引起的部分出现在 $z=\pm R$ 处。τ_T 的最大值出现在表面上。τ_y 和 τ_z 的最大值出现在弯曲中性面上。若截面为实心正方形截面，且其平行于 y 轴和 z 轴的边长为 a，那么有 $A=a^2$，$I_y=I_z=a^4/12$，$K=0.140\ 6a^4$，$c_T=0.675a$，和 $c_y=c_z=1.500$。τ_T 的最大值出现在外表面距截面中心最近的 4 个点上。如果要正确计算梁单元中的应力，必须向软件提供有限元模型中存在的与每个单元横截面相适应的数据。软件会报告横截面上 4 个点处的 σ_x 值。通常这些点是 I 形梁凸缘的顶端。有些软件可能会(误导)使用横截面极矩 J 而不是方程 2.9-6 中的 K，并相应地调整 c_T。

协调载荷与集中载荷 忽略力矩项的节点载荷向量称为“简化”了或者“集中”了。于是，方程 2.9-2 中 $\{\boldsymbol{r}_e\}$ 简化后的形式为 $\lfloor -qL/2 \quad 0 \quad -qL/2 \quad 0 \rfloor^T$，这导致了如图 2.9-2 所示简化的节点加载形式。对于该 2 单元结构，当施加位移边界条件后，对于简化了节点载荷的 $[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\}$ 为

$$EI_z\begin{bmatrix} 12/a^3+12/b^3 & -6/a^2+6/b^2 & -12/b^3 & 6/b^2 \\ -6/a^2+6/b^2 & 4/a+4/b & -6/b^2 & 2/b \\ -12/b^3 & -6/b^2 & 12/b^3 & -6/b^2 \\ 6/b^2 & 2/b & -6/b^2 & 4/6 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_{z2} \\ v_3 \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -q(a+b)/2 \\ 0 \\ -qb/2 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.9-7}$$

因方程 2.9-2 中 L 变小，力矩要比力项更快地逼近于零。随着网格的细化，忽略力矩项并不妨碍计算向准确值收敛。实际上，如果忽略力矩项，给定网格中的精度有时会更高。图 2.9-3 中，用直边单元的网格组建了一个弧形拱。由于图示网格中的单元有不等的长度，单元组集

后，保留着最上面节点上的弯矩。这些弯矩稍有不利。但在最下两个节点上的弯矩显然就有害了，因为实际结构在铰链支撑上不可能有弯矩。而且，在弯矩计算时，图 2.9－3(c)的单元弯矩场将不包括在内。实际拱中没有弯矩，如果使用简化载荷，在有限元模型中也将不再有任何弯矩，单元弯矩场从弯矩计算中被忽略了。

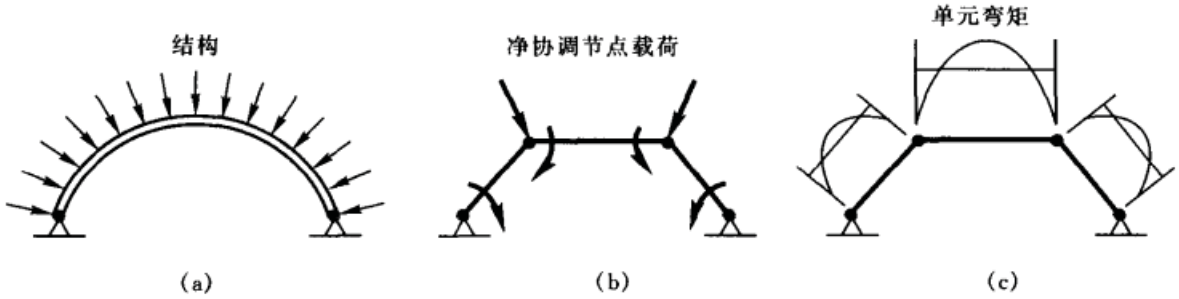


图 2.9－3　(a)两端铰支圆弧拱受均布载荷作用；
(b)在单元长度不等的粗网格有限元模型上加载荷；
(c)如图 2.9－2(a)计算所得单元弯矩场

一般情况下，对任意类型单元，我们把简化的载荷定义为计算节点载荷，就像单元没有转动自由度一样。例如，像在梁两端点处是简支而不是固支的情况，作用在梁单元 $x=L/3$ 处的横向载荷 P，在节点 1 和节点 2 处产生简化节点载荷，分别为 $2P/3$ 和 $P/3$。这与略去节点力矩后再计算它们而得到的计算结果不同，因为在载荷偏心时，端点旋转约束改变了节点力。

梁、板和壳单元都有在简化节点载荷计算中被忽略的转动自由度。与协调加载比较，简化加载是导致好的结果还是坏的结果，取决于问题的性质、寻找什么样的计算结果和选择什么样的计算方案。例如，在图 2.9－2(b)的问题中，假定我们从最终弯矩计算中忽略图 2.9－2(a)的弯矩场，那么，协调性加载导致精确的节点位移和近似的节点弯矩，相反，简化载荷导致近似的节点位移和精确的节点弯矩。当网格细化时，两种加载系统都向正确结果收敛。

2.10　热载荷·应力

热应力问题　由温度场在弹性有限元模型中产生的应力，按下列步骤计算。这种方法不限于梁和杆单元。它对所有基于位移场并把节点位移作为自由度的有限单元都是适用的。下面所列步骤可以用软件程序自动实现。

1. 在各个单元中，计算其“初始”应力，这类应力是当所有位移被禁止时，仅由温度场产生的。还要计算由初始应力施加在节点上的载荷。(见 3.1 节和 3.3 节对初始应力 $\{\sigma_0\}$ 的一般化处理。)
2. 组集步骤 1 中计算的单元和载荷。其结果是这样一种结构，它的节点迄今仍没有位移，但受由温度变化而引起的初始应力载荷的作用。
3. 求解由步骤 2 中载荷产生的节点自由度，并计算由此产生的单元应变和应力。把步骤 1 中计算的初始应力叠加到这些应力上。

若还受机械载荷作用，将之叠加到步骤 2 中的热载荷上即可。后面将举一个例子。

备注 温度场可以相对于任一参考温度来定义。热应力分析并不需要绝对温度(但有辐射传热时,温度值仍是需要计算的)。如果参考温度接近0℃,那么用摄氏温标叙述比较方便。计算过程提供与温度场相关的应力变化。在参考温度中可能存在的残余应力,在计算中不起作用,必须叠加到计算所得的热应力上。

温度梯度不是产生应力的必然条件。考虑一个均匀、各向同性和线弹性的物体,其支撑不妨碍由温度变化引起的变形。那么,如果温度场在直角坐标系中是线性的,并且热胀系数与温度无关,则没有热应力。例如,若使均匀的简支梁从上表面到下表面有个线性温度变化,则梁变形成圆弧状,但仍然是无应力状态。

由于温度变化 T,杆单元中的初始应力是 $\sigma_0=-E\varepsilon_0$,其中初始应变 ε_0 是 αT。然而,如果热胀系数 α 是温度相关量,ε_0 必须作为 $\alpha \mathrm{d}T$ 的积分,从初始温度到最终温度进行计算。而如果 T 沿杆的长度不是常数,则在第3步的最终应力计算中最好利用平均温度[2.19]

例:有一均匀的杆,长 $2L$,两端固定,用2个单元为之建模,如图2.10-1所示。横向挠度自由度都设为零;这样我们避免在节点2处出现铰链的可能性。起初在 $T=0$ 时,杆是等温的。然后,仅在右边单元用轴向力 P 和从 T_2 到 T_3 的线性温度变化对杆加载。只在右单元中存在初始应力。从节点2到节点3,基于平均温度 $\dfrac{T_2+T_3}{2}$,初始应力 σ_0 为

$$\sigma_0=-E\alpha\frac{T_2+T_3}{2}\quad(\text{仅在右边单元}) \tag{2.10-1}$$

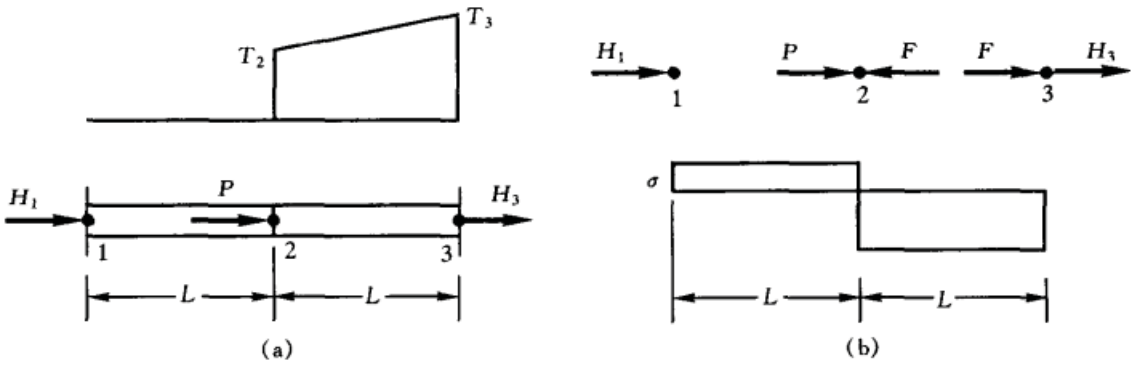


图 2.10-1 (a)杆两端固定,受力 P 和温度场作用;
(b)节点载荷和最终的轴向应力分布

其中 α 为热膨胀系数。受热单元对节点2和3作用有大小为 F 的力,即

$$F=|A\sigma_0|=AE\alpha\frac{T_2+T_3}{2} \tag{2.10-2}$$

在施加固定端边界条件之前,考虑支反力 H_1 和 H_3,方程 $[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\}$ 为

$$\frac{AE}{L}\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}H_1\\P-AE\alpha(T_2+T_3)/2\\H_3+AE\alpha(T_2+T_3)/2\end{Bmatrix} \tag{2.10-3}$$

按照方程 2.7－6 的方法可施加边界条件 $u_1=0$ 和 $u_3=0$。于是，方程 2.10－3 变为

$$\frac{AE}{L}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ P-AE\alpha(T_2+T_3)/2\\ 0\end{bmatrix} \tag{2.10-4}$$

解方程可得

$$u_1=0 \quad u_2=\frac{PL}{2AE}-\frac{\alpha L(T_2+T_3)}{4} \quad u_3=0 \tag{2.10-5}$$

如果需要，支反力 H_1 和 H_3 可以计算得到，只要将已知的 u_1，u_2 和 u_3 回代到 2.10－3 的第一个和第三个方程中即可。其结果为

$$H_1=-\frac{P}{2}+\frac{AE\alpha(T_2+T_3)}{4} \qquad H_3=-\frac{P}{2}-\frac{AE\alpha(T_2+T_3)}{4} \tag{2.10-6}$$

两个单元中的最终应力为

$$\begin{aligned}\sigma_{1\ 2}&=E\frac{u_2-u_1}{L}+(0)=\frac{P}{2A}-\frac{E\alpha(T_2+T_3)}{4}\\ \sigma_{2-3}&=E\frac{u_3-u_2}{L}+\sigma_0=-\frac{P}{2A}-\frac{E\alpha(T_2+T_3)}{4}\end{aligned} \tag{2.10-7}$$

对于右边单元中的均匀温度 $(T_2+T_3)/2$，这些结果的正确性能够容易地由初等材料力学方法来验证。

如果采用如图 2.10－1 所示的线性变化温度，而不是平均温度 $(T_2+T_3)/2$，结果会怎样呢？那么，因抑制整个结构的位移，右边单元在节点 2 处初始应力为 $\sigma_0=-E\alpha T_2$，节点 3 处为 $\sigma_0=-E\alpha T_3$，而不是由式 2.10－1 所给的 σ_0。作用力 F 仍与式 2.10－2 所述的相同，因为它依赖于初应力在整个单元长度上的积分（见方程 3.3－8）。因此，式 2.10－2 到 2.10－6 将保持不变。σ_{1-2} 仍保持式 2.10－7 中的形式，$\sigma_{2\ 3}$ 则变为：

$$\begin{aligned}&\text{节点 2 处：}\sigma_{2-3}=E\frac{u_3-u_2}{L}-E\alpha T_2=-\frac{P}{2A}-\frac{E\alpha(3T_2-T_3)}{4}\\ &\text{节点 3 处：}\sigma_{2-3}=E\frac{u_3-u_2}{L}-E\alpha T_3=-\frac{P}{2A}-\frac{E\alpha(3T_3-T_2)}{4}\end{aligned} \tag{2.10-8}$$

很明显，这些结果是不准确的，因为在这个问题中轴向应力在每个单元内应是恒定的。至少在这个例子中，用单元平均温度计算最终应力是比较合适的。对于热应力问题的进一步讨论可见 3.12 节。

2.11　结构对称性

如果辨认出结构具有对称性，则可利用它来减小 FE 模型的规模。从而减小了计算量，更重要的是，分析员需要准备和检查的输入数据少了。本节我们讨论反射对称和斜对称。在后

面章节中再讨论轴对称和重复对称。相关参考文献见[2.20～2.22]。

若结构相对某平面，在几何形状、约束条件，及弹性属性上具有对称性，则称结构具有反射对称或者镜像对称性。结构和载荷反射对称示于图 2.11－1(a)中。如果用 $x=0$ 的平面反射，则从左面可以得到右面，反之亦然。对平面 $y=0$ 亦有反射对称特性。可以说，反射对称性使结构及其载荷具有“自身重合”特性。对结构的任一半进行分析，都能得到整个结构的解，因为对称结构受对称载荷作用时，求得的解也将是对称的。

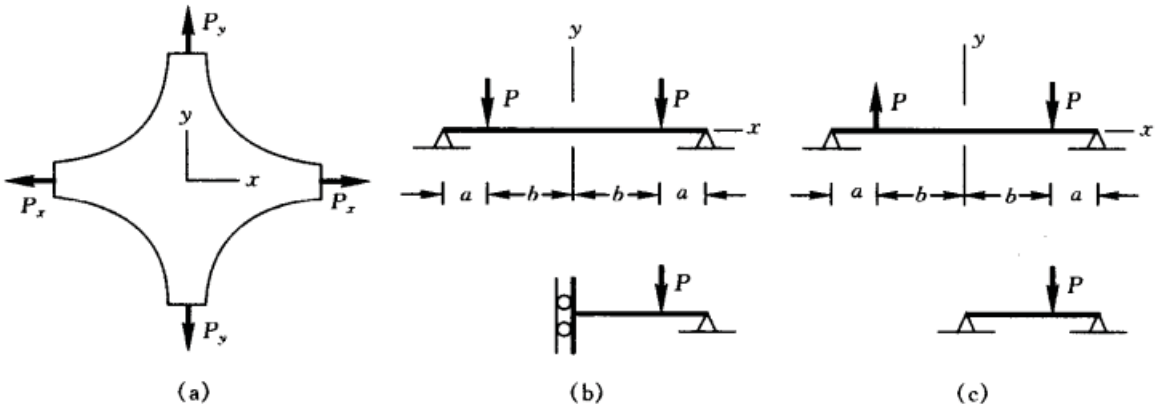


图 2.11－1 (a) 对于 $x=0$ 和 $y=0$ 平面反射对称的平面结构；
(b)受对称载荷作用的梁；
(c)受反对称载荷作用的梁

图 2.11－1(a)中，如果 $P_x=P_y$，那么平面 $x=0$，$y=0$，$x=y$ 及 $x=-y$ 都是反射对称面，我们仅需分析结构的 1/8，比如，利用 $y=0$ 和 $x=y$ 两线之间的第一个 1/8 圆弧段部分，两线上的边界条件仅允许有离开原点 $x=y=0$ 的径向运动。作用在 1/8 部分的载荷是 $P_x/2$，因为初始载荷 P_x 被对称面 $y=0$ 平分。(在一个相关的例子中，如果地板下的刚性梁沿纵向被对称面平分时，则在所分析的部分只保留整个梁一半的刚度。)

图 2.11－1(b)中的对称梁问题，在 $x=0$ 处，阻止产生转角 θ_z，可取任何一半分析求解。图 2.11－1(c)所示的梁就其载荷形式看，则是个反对称问题。对于 $x=0$ 面映射，再把所有载荷反向就会形成自身重合。这几个例子比较简单，但仍不难看出，当结构比较大而又复杂时，若不利用结构的对称性，在对整个结构建模并分析时将耗费很大的精力和存储空间。

下面有些规则，可以帮助我们正确处理反射对称问题的位移边界条件。所述条件仅运用于 FE 模型中位于整个结构反射对称面上的边界节点。如果结构是对称的，则

S1. 垂直于对称面方向无平移运动分量；

S2. 对称面内无转动矢量分量。

如果结构是反对称的，也就是说，只要把载荷倒过来，就是对称的，能获得自身重合，则

A1. 反对称面内无平移运动分量；

A2. 垂直于反对称面的法线方向无旋转矢量分量。

图 2.11－2 用允许的而不是被约束的自由度来描述这些规则。在输入数据定义了问题的对称面并说明是对称还是反对称之后，软件就能在对称面的节点上自动引入相应的边界条件。

图 2.11－3(a)描述了一个应用对称概念的实例，虽然从其外表看对称性不很明显[2.21]。

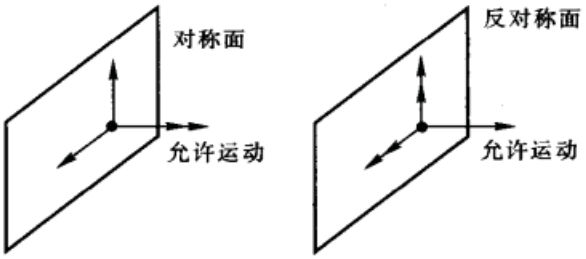


图 2.11－2　平面对称或反对称条件下节点上允许的自由度(即无约束)。双箭头表示转动自由度

我们将原载荷表示成对称载荷和反对称载荷的叠加，于是得到如图 2.11－3(b)和 2.11－3(c)两种工况。将后两种情形分别求解，得到结果叠加起来，就可得到原问题的解。这样，在图 2.11－3(a)中所示的弯矩有，$M_1=M_4$，$M_2=M_5+M_7$ 和 $M_3=M_4$。我们把整个结构的一次性分析，转换成了带有不同载荷和支撑条件的半个结构的两次性分析。

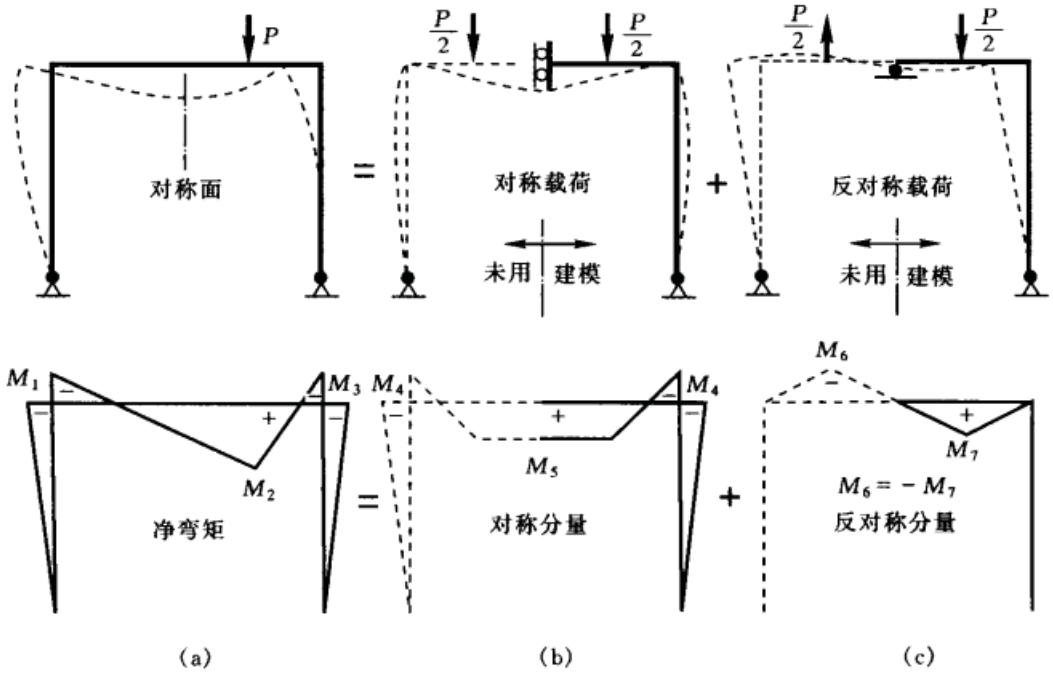


图 2.11－3　用对称和反对称叠加起来模拟一个平面刚架问题
(经出版者同意，引自 C. 迈耶《有限元理想化》，美国土木工程学会，纽约，1987)

图 2.11－4 所示是一个斜对称或反转对称。在图 2.11－4(a)中，其绕 z 轴(垂直图面方向)转半周可以得到自身重合特性。同样的结果可两次相对于平面 $x=0$ 和 $y=0$ 连续反射得到。在图 2.11－4(b)中，回转半周后再将载荷反向，也能得到自身重合特性。在每种情况中，仅需对其一半结构加以分析即可。斜对称边界条件的详细讨论见文献[2.22]。

如果推测某一结构具有对称性，但特征又不明显，我们可以先作结构的粗网格有限元分析，看计算结果是证实还是否定所猜测对称性的存在。

注意　对于振动和屈曲问题，使用对称性要谨慎仔细。例如，一均匀简支梁，相对于其中心具有对称性，并且有反对称振动模式和对称振动模式，若就其一半梁分析，图 2.11－1(b)中

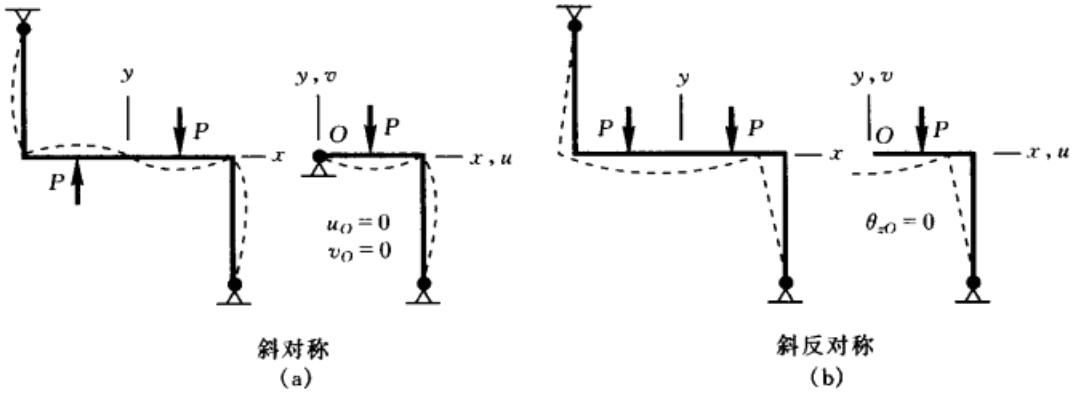


图 2.11-4 斜对称的平面刚架，其载荷为：(a)斜对称；(b)斜反对称

支撑条件将只允许发生对称模式；而在图 2.11-1(c)所示支撑条件下，将只允许发生反对称模式。类似地，在回转壳的振动和屈曲分析中，非对称模式会很明显。那些非线性静态问题也需要慎重考虑，因为存在的对称性当加载开始时可能随之消失。

2.12 回顾·建模说明

让我们用手算求解图 2.5-2 中的桁架问题。施加所有边界条件后，结构方程为 2.7-8 式。利用高斯消元法将方程组三角化。对于每个构件 $k=AE/L$ 都相同的特殊情况，我们可得

$$k\begin{bmatrix} 1.360\,0 & -0.480\,0 & 0.480\,0 \\ 0 & 0.4706 & -0.4706 \\ 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ v_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ -P \\ -P \end{Bmatrix} \tag{2.12-1}$$

因此，经回代，求得节点位移为

$$u_1 = -0.750\,0\frac{P}{k} \qquad v_1 = -3.125\frac{P}{k} \qquad v_3 = -\frac{P}{k} \tag{2.12-2}$$

这些位移结果与用经典解法，例如 Castigliano 第二定理所获得的结果是一致的。在这个问题中，离散误差为 0，因此，FEA 方法所得结果与经典解法所得结果的误差将是 $1/10^6$ 甚至更小，差别来源于生成矩阵[**K**]和求解方程组过程中的截断误差或舍入误差。回想所有这些结果都基于假设：刚度 $k=AE/L$ 足够大以致位移相比整个桁架尺寸要小得多。因此，线性小挠度理论是适用的。

前面那个例子中的问题可以很容易用标准的解析方法求解，但对于桁架或刚架结构即便是一个适度复杂的情况(尤其是静不定情况)，手算也将变得十分繁琐，很可能出现符号和计算错误。正是因为这个，对除最简单的桁架和刚架结构之外的各种问题而言，FEA 软件可能是理想的分析工具了。手算所得近似值可用以检验 FEA 的计算结果。

利用通用软件的网格生成功能，用户可以容易地将某个区域划分单元。对于初用者，当其

不能正常使用软件甚至出错时，这或许更能激发他提高使用能力。在前面我们所举的桁架例子中，如果各个杆件都划分为 2 个或多个端点相连的杆单元，FEA 计算可能因为碰到例如“小枢轴”或“除数为零”等错误引起的数值计算困难而得不到解，或者得到的解没有意义。这种计算失败的出现是因为所生成单元之间的连接部位就如铰链作用，而形成一个机构。从多共线桁架单元中得不到补充信息，因为每个桁架杆件会受到均匀应变，它可以由单个杆单元来精确模拟。

类似地，通用有限元软件包会含有一个大型的单元库，允许用户在多种单元中选择。初次使用者可能会选择属性与所处理问题不大合适的复杂单元。例如，会有兴趣用梁单元建立桁架模型，特别是因为每个桁架构件都能够用诸多端点连接不产生机构的梁单元来进行网格划分。如果桁架接头的确是连接桁架构件的无摩擦销栓，那么，用梁单元建模是不合适的，因为它们妨碍桁架构件间在节点处的相对转动，因而把桁架变成了刚架。杆单元虽然简单，确是桁架分析的合适选择。

图 2.12－1 所示的是一个等截面梁，连续在 A，C，E 和 G 处简支约束。跨度 AB，BC，CD，DE 及 EF 可分别用单独一个梁单元建模。对这些跨度段用多个单元来建模也是可以的，但这于事无补，因为单个梁单元的三次横向位移场提供了精确的数学模型表达式。在跨度段 FG 和 GH 上不是这种情况，在应力计算时，如果未包括图 2.9－2(a)中描述的单元弯矩场，那么即使在 FG 和 GH 段中利用再多的单元，也仅能接近于弯矩和弯曲应力的精确结果。

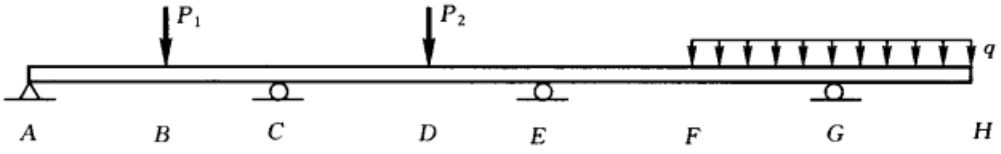


图 2.12－1 简支等截面连续梁

下面来考虑如图 2.12－2 所示的锥形梁。只有在一些特殊情况下(比如 $h_1=h_2$，并且 $s=L_1=L_2$)，才能利用对称性。该问题难以有一个简单的解析解。不过更重要的是，在求得与 FEA 结果相比较的解时，显然解析近似解法的选择并不是唯一的。而且，许多不同类型的单元(不只是梁单元)也可以用来建立 FE 模型。梁单元只是在结构比较细长时才比较合适。这个例子是专业实践的典型代表，因为构建有限元模型和检查有限元分析结果必须运用工程评价标准。

要想得到近似解用来与 FEA 解相对比，我们可以根据连续变化深度的几个平均值，用一个均匀深度 h_{ave} 来代替实际锥度。对于有固支端和单一偏心载荷的等截面梁，其结果在手册中可以得到[1.16]。另一方面，我们可以假设(不正确)载荷 P 右侧的结构部分阻止结构在载荷 P 处转动，对于一端固支而另一端防止转动的简单锥形梁可用手册的结果[1.16]。在 FEA 分析中，若单元库中含有锥形梁单元，我们就可以用图 2.12－2(b)中的模型。否则，我们可用若干等截面梁单元来模拟每个简单锥形件(如图 2.12－2(c)所示)。

下面的例子用图解进一步说明利用梁单元建模的问题。

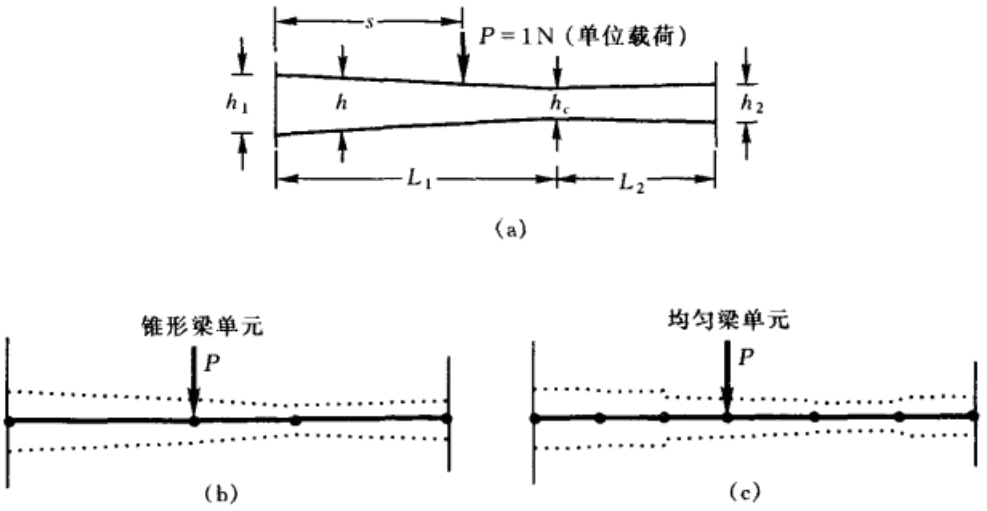
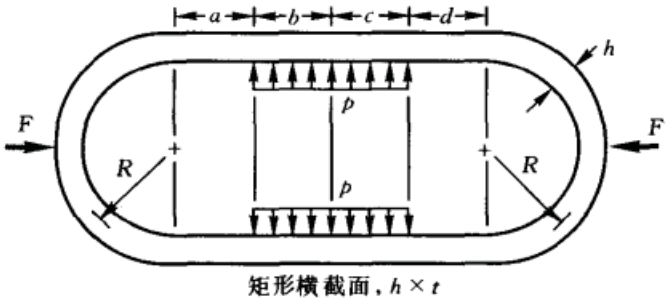


图 2.12-2 (a)等厚度锥形平面梁；
(b,c)分别用锥形单元和等截面单元建立的 FE 模型。单元深度由图中点划线表示

2.13 应用

我们以一个问题为例，重点分析 FE 建模和结果检验，而不是 FE 理论本身。物理结构为一个平面椭圆形环，只受环面内载荷作用(图 2.13-1)。求挠度和应力的最大值。下面使用 1.5 节建议的方法求解。



$a=b=c=d=30$ mm
$R=40$ mm
$h=9.0$ mm
$t=5.0$ mm
$E=200$ GPa
$\nu=0.28$
$p=1.0$ N/mm^2
$F=300$ N
(b)

图 2.13-1 (a)受机械载荷作用的平面结构；(b)计算所需相关数据

初步分析 该结构近似环形，因此，粗糙模型就是一个圆环，有像椭圆一样的周长，受如图 2.13-2 所示的集中力作用。数据是替代圆环半径 $r=87.2$ mm，压力载荷产生的力 $F=pt(b+c)=300$ N。手册公式[1.16]说明了因两个径向相反力加载在圆环中引起的弯矩和由弯曲产生的挠度。把这两种情况叠加，一种是向内的力 F，另一个是偏转 90°位置指向外的力 F，将这两种情况叠加，我们得到

$$\delta = 0.143\frac{Fr^3}{EI} = 0.338 \text{ mm}$$
$$M = 0.5Fr = 11\,730 \text{ N}\cdot\text{mm} \qquad (2.13-1)$$

作为替代圆环受力点处的径向挠度和弯矩值。在这些位置处，直接的周向应力和弯曲应力值为

$$\sigma_a = \frac{F/2}{ht} = 3.33 \text{ MPa} \quad \sigma_b = \frac{M(h/2)}{I} = 174 \text{ MPa} \tag{2.13-2}$$

这些结果是某种精度的估计值。若与后面计算的 FEA 结果相差太大，我们就得质疑这个计算结果，或者估算所依据的物理理解，或者两者都是。

我们还应该预估结构怎样变形。关于这一点将在后面 FEA 结果评价中讨论。

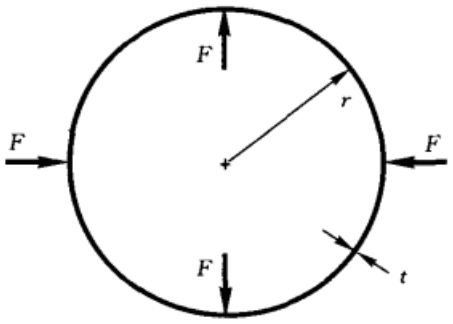


图 2.13-2　近似分析的简化数学模型，其中 $r=R+(a+b+c+d)/\pi$

有限元分析　因为结构关于水平和竖直中心线对称，故仅需取其 1/4 分析(图 2.13-3)。图示的支撑与下述情况是协调的：A 端处允许有水平位移，D 端处只允许有竖直位移，并且 A，D 端点上都不允许有绕 z 轴(垂直于 xy 平面)的转动。

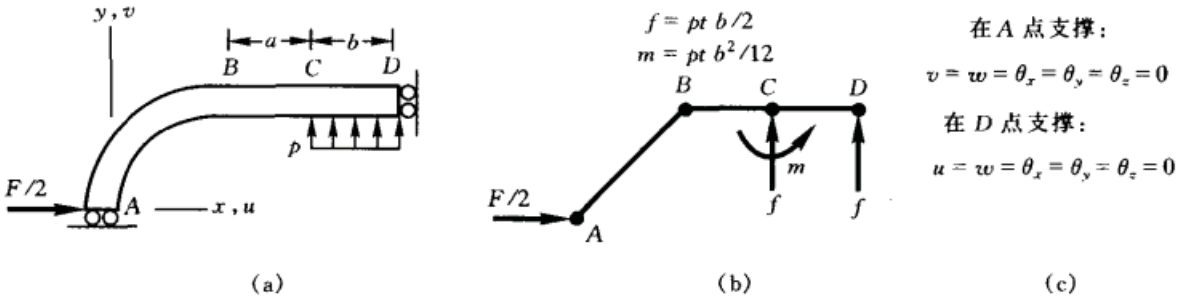


图 2.13-3　(a)1/4 模型；(b)带协调节点载荷的粗网格 FE 模型；(c)边界条件

我们的数学模型是一个平面椭圆形状，如图 2.13-1 所示，并假设用挠曲理论描述其行为。于是，用梁单元作有限元分析，图 2.13-3(b)为一个粗网格的 FE 模型。BD 部分用 2 个单元 BC 和 CD 来建模，以便能够计算图 2.9-2(a)中描述的节点载荷，作用形式如图 2.13-3(b)所示。在 D 点不需要弯矩载荷，因为支撑反抗它而不引起结构变形。模型的刚体运动 w，θ_x 及 θ_y 必须约束，即使在任一节点上没有使这些自由度为非零的载荷。图 2.13-3(c)中所示支撑条件仅允许 A 点处有 u 平移，D 点有 v 平移，这个结果使 FE 模型的所有位移都被约束在 xy 平面内。如果我们忽略或在 A 或在 D 点对 w，θ_x 及 θ_y 的约束，则可得到同样的结果。因为载荷没有产生 z 方向位移的倾向，其它端点保留的刚性将提供足够的约束。

结果评价　在检验计算所得结果前，我们先草画一个位移形状直观近似图，如图 2.13-4(a)中虚线所示。软件可画出计算位移形状图，并可以放大便于观察，也可以作出动画以便于看到模型在原始形状与变形后形状之间往复变化的过程。我们可以看到，预计变形与计算所得变形很好地吻合。特别是，点 A 向右移动，点 D 仅有向上移动，并且它们都不发生转动。(在检查位移形状时，我们必须承认，多数软件除了作两点间的直线，画其它任何东西都无能为力，实际的三阶曲线展示不出来。)这样，我们可以直观地检查出，确实施加上了期望的边界条件。根据检查节点自由度计算值的列表，我们可以看到，w，θ_x 及 θ_y 在各节点处都为 0。我们

还把位移 u_A 和 u_D 与式 2.13-1 的近似值作了比较。

如果前面的检查显示位移无明显偏差，我们进一步检查应力。可以发现，直接的轴向应力分量 $\sigma_a = N/A$，在 A 点处是拉应力，在 D 点处为压应力。而弯曲应力分量 $\sigma_b = M_z/I$，在 A 点内侧为拉应力，在 D 点外侧也为拉应力。由图 2.13-3(b)中粗网格形成 FE 模型计算所得结果为：

$$\begin{aligned} u_A &= 0.135\ \text{mm} \quad (\sigma_a)_A = 0 \qquad\quad (\sigma_b)_A = \pm 166\ \text{MPa} \\ v_D &= 0.316\ \text{mm} \quad (\sigma_a)_D = -3.33\ \text{MPa} \quad (\sigma_b)_D = \pm 117\ \text{MPa} \end{aligned} \tag{2.13-3}$$

软件会报告 σ_a，σ_b 各自的值，报告它们在梁表面处的代数和，或者两者都有。A 点处的 σ_a 值初看起来是错的，它为什么是零呢？把初等静力学运用于图 2.13-4(b)，表明构件 AB 承受侧向剪切力，但其轴向力为零，因为它有 45°的方位角。因此，对于这个特定的 FE 模型，$(\sigma_a)_A = 0$ 是正确的。

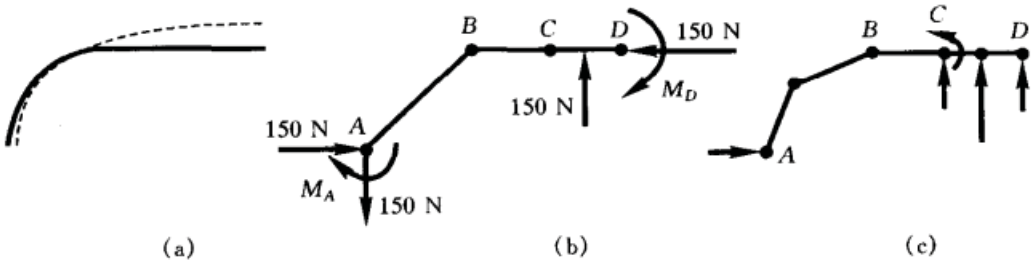


图 2.13-4 (a)1/4 模型的初始中心线(实线)与变形后的中心线形状(虚线)；
(b)显示作用在 1/4 模型上载荷的隔离体图；
(c)带协调节点载荷的细化有限元模型

对于同一个问题，改进后的网格如图 2.13-4(c)所示。现在弧 AB 由两个而不是一个弦建模，这一点是最明显的改进。BC 部分未再加以细化，因为那样做不会有多大区别。这部分本来就是直的，并且 B 和 C 之间不受任何外载荷作用，因此它具有三次横向挠度，并且单个梁单元已经能够精确表示它。网格改进后计算所得结果为

$$\begin{aligned} u_A &= 0.121\ \text{mm} \quad (\sigma_a)_A = 1.80\ \text{MPa} \qquad (\sigma_b)_A = \pm 163\ \text{MPa} \\ v_D &= 0.349\ \text{mm} \quad (\sigma_a)_D = -3.33\ \text{MPa} \quad (\sigma_b)_D = \pm 116\ \text{MPa} \end{aligned} \tag{2.13-4}$$

这些结果值与方程 2.13-1 和 2.13-2 吻合得比较好，并且，除 A 点的 σ_a 外，与式 2.13-3 也吻合得很好，$(\sigma_a)_A$ 是个小应力，对它的偏差已有满意的解释。我们得出结论，虽然进一步细化网格和分析能够提供附加置信度，优化网格后所得计算结果已是可信的。

用简化节点载荷(图 2.13-3(b)中，$m=0$)重复前面的分析计算，会得到有益的启示。下面将提出其它一些与建模有关的问题。真正意义上的集中载荷是不可能的；因此，图 2.13-1 中水平力 F 是理想化了的，而其实际分布情况是可以更准确地表征的。比值 h/R 足够小时，其横向剪切变形是可以忽略的，但这并不影响使用含有横向剪切应力的单元来分析本问题。我们一开始就假定所取材料是线弹性的。应力不是很大，并且有相当于钢材的弹性模量，因此，线弹性理论是适用的。我们的线性分析也假设变形是足够小，使基于初始几何形状建立的平衡方程$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\} = \{\boldsymbol{R}\}$在结构受载荷作用发生变形后仍是足够准确的。这样的假设对本问

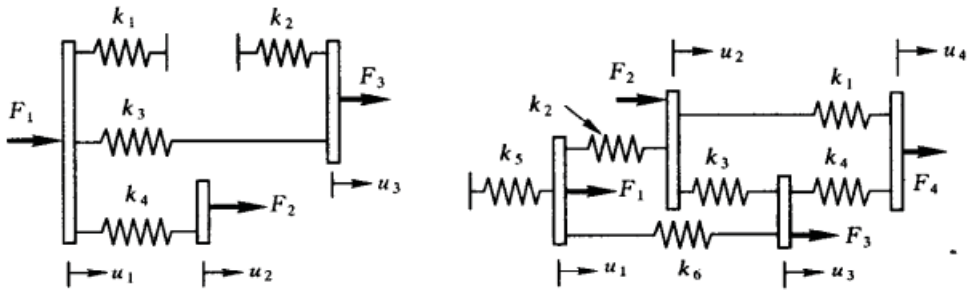
题是合理的，因为 u_A 和 v_D 相对结构总体尺寸要小得多。对于非线性问题，由于材料屈服或大变形，求解要难得多，因为在求解中需要的信息——各个位置的材料属性，变形后的几何形状，或者两者都有，事先是不知道的。

分析题

2.2-1　(a)设有一个 2 节点杆单元，如图 2.2-1 中所示，其横截面面积 A 从 $x=0$ 处的 A_0 沿 x 轴线性变化到 $x=L$ 处的 cA_0，其中 c 为一常数。试写出此单元的刚度矩阵，先按方程 2.2-1 中那样用平均面积 A 表示，再利用轴向载荷沿杆件长度变化的准确关系计算。计算这两个矩阵在 $c=2$ 时的数值。

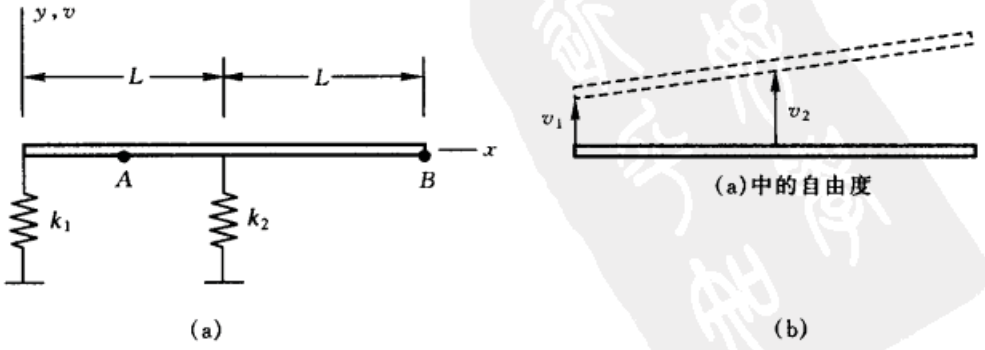
(b)一个长度为 L_T 的杆，其横截面积线性变化，从左端面积为 A_0 变到右端面积为 $3A_0$。杆在每个端点都受轴向拉伸力 P 作用，此杆用(a)中“平均截面积为 A”的单元来建模。计算杆的伸长量，分别用等长度的 1,2,3,4 个单元计算杆的伸长量，每种情形下的百分比误差是多少？

2.2-2　题图(a,b)中所示的两个平面结构中，刚性块体由线性弹簧连接。假设这里只允许水平方向位移。在每种情况下，用弹簧弹性系数 k_i、位移自由度 u_i 及作用载荷 F_i 写出它们各自的结构平衡方程$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\}$。



题 2.2-2

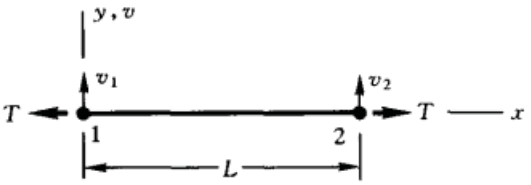
2.2-3　图中所示的平面结构由一个不计自重的刚性杆和两个弹性系数分别为 k_1 和 k_2 的线性弹簧组成。仅允许小的竖直位移。该结构刚度矩阵$[\boldsymbol{K}]$是 2×2 的，但可以有不同



题 2.2-3

形式，取决于所选取的自由度。对于下列横向平移自由度的每种选择，确定其[**K**]。(a)$x=0$ 处为 v_1，$x=L$ 处为 v_2，如图中所示；(b)$x=0$ 处为 v_1，$x=L/2$ 处为 v_A；(c)$x=L$ 处为 v_2，$x=2L$ 处为 v_B。

2.2－4 考虑一长 L 受恒定张力 T 作用的缆绳单元，如图所示。假设横向挠度 v 在 x 方向线性变化，并且 $v \ll L$。根据自由度 v_1 和 v_2 计算的 2×2 刚度矩阵是什么？（矩阵将含有 T。横向力 F_1 和 F_2 与自由度共线。）



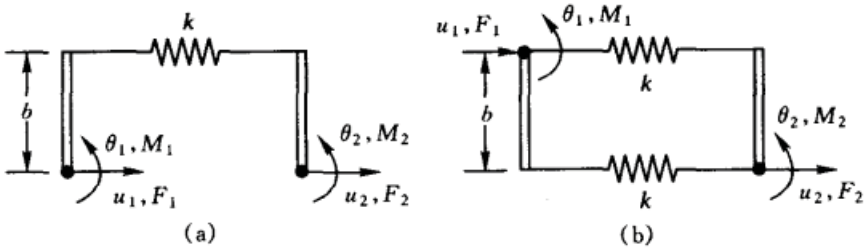
题 2.2－4

2.2－5 在图 2.2－4 中，设 $k_1=k_2=k$，$t_1=t_2=t$。(a)设 $T_1=0℃$，$T_3=200℃$。试根据 k 和 t 求 T_2 和热流率。

(b)设 $T_1=400℃$，令 f_3 有设定值 $\overline{f}$。未知量有哪些？试用 k，t 和 $\overline{f}$ 求出它们。

2.3－1 对问题 2.3－3 中所述结构，分别就下面不同自由度选择时，确定其[**K**]。(a)$x=0$ 处横向位移为 v_1，并有绕点 $x=0$ 的小转角 θ。(b)$x=2L$ 处有横向位移 v_B 及绕点 $x=2L$ 的小转角 θ。

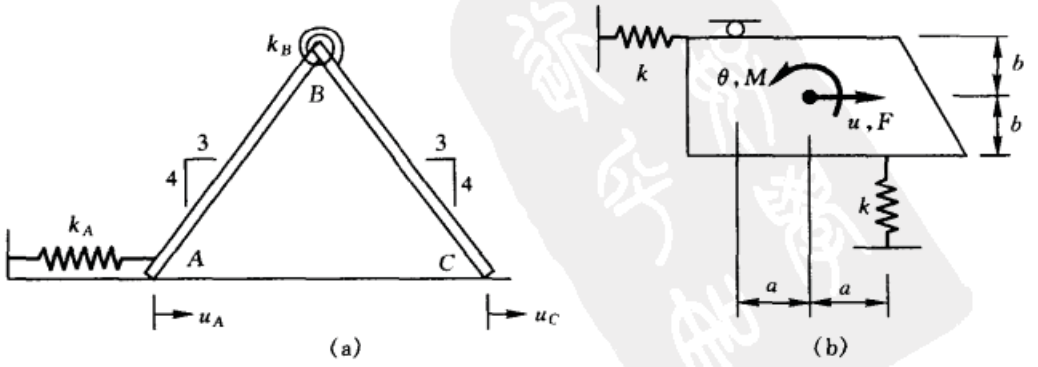
2.3－2 题图(a,b)中所示平面结构，都由线性弹簧连接的刚性无重杆组成，每个弹簧的刚度系数为 k。自由度有水平位移 u_i 和小转角 θ_i，其中 $i=1,2$，如图所示。不允许有垂直运动和偏离平面的位移。用 k 和 b 确定每种情况下的 4×4 刚度矩阵。



题 2.3－2

2.3－3 图中所示平面结构，由无重刚性构件和弹簧组成，在下面情况中，分别按图示两个自由度计算刚度矩阵。

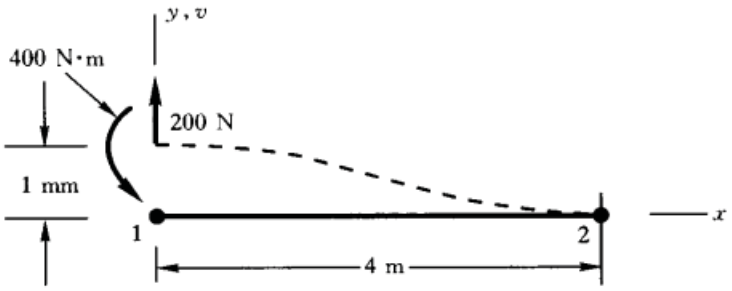
(a)弹簧 k_A 抵抗平移；弹簧 k_B 抵抗 AB 杆与 BC 杆间的相对转动。每个杆长都为 5



题 2.3－3

L，并可无摩擦地在水平面滑动。

(b)转角 θ 很小。假设滚轴可以对不规则四边形块施加向上或向下的力。

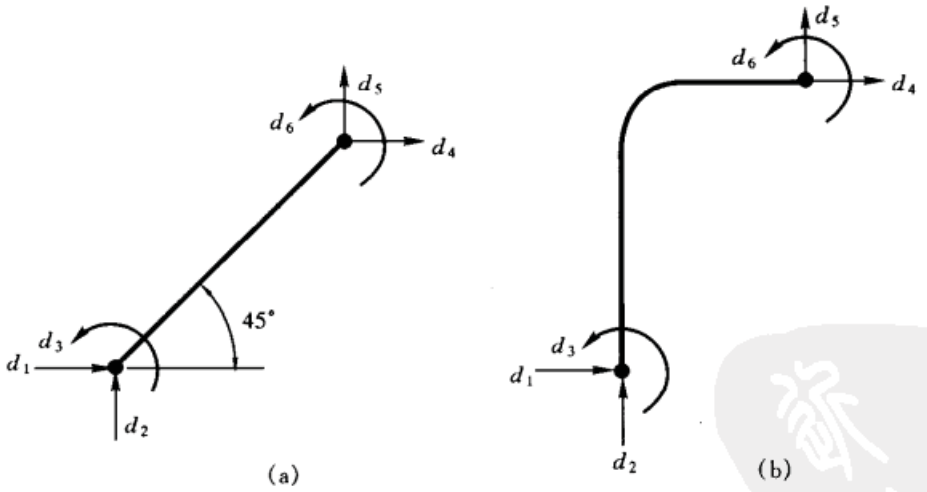


题 2.3-4

2.3-4　如图所示，为了无转动地抬起悬臂梁端，需要一定的力和弯矩。根据图示信息，尽可能地在用节点自由度$\{\boldsymbol{d}\}=\lfloor v_1 \quad \theta_{z1} \quad v_2 \quad \theta_{z2} \rfloor^{\mathrm{T}}$计算的单元刚度矩阵中填入数值，其中 v_1 和 v_2 的单位是毫米。依据已给数据、问题说明、静力学条件，以及$[\boldsymbol{k}]$阵对称性来完成。忽略横向剪切变形。

2.3-5　利用方程 2.3-1～2.3-4，根据初等梁理论，推导方程 2.3-5 中$[\boldsymbol{k}]$的列阵。(a)第 2 列；(b)第 3 列；(c)第 4 列。

2.3-6　题图(a,b)中所示的细长平面梁既有轴向刚度又有弯曲刚度。不用计算，确定单元刚度矩阵$[\boldsymbol{k}]$中与图中所示节点自由度相关的每个系数的代数符号(如果该项为空时，输入零)。假设位移与转动量都很小，且节点力和弯矩与它们对应的节点自由度取相同的正方向。



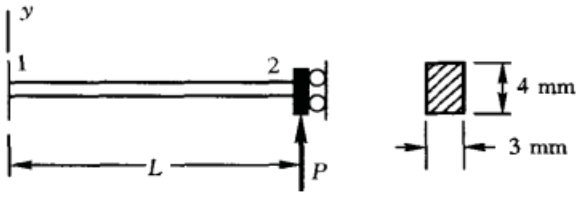
题 2.3-6

2.3-7　(a)设有一个等截面梁单元，两端点简支。施加的端点载荷使弯矩沿整个梁为常数。利用方程 2.3-6 来证明，在这种情况下不会有横向剪切变形。

(b)设有一个等截面悬臂梁，在受载端处受约束使该端不能转动，如图所示。对于图中所示横截面形状，$E=2G$，利用方程 2.3-6，计算节点 2 处的横向挠度，并用 E，P 表示。若分别取 $L=8$ mm，$L=16$ mm，$L=32$ mm，试计算各种情况下由于横向剪切

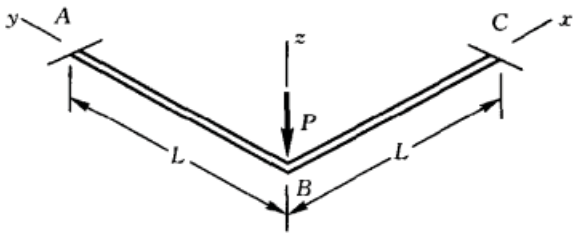
变形所引起的挠度占总挠度的比例。

(c)对于(b)中的梁,试证明:在两种极限情况 $L\to 0$ 和 $L\to\infty$ 下,由方程 2.3-6 计算的横向挠度与材料力学理论是一致的。



题 2.3-7(b)

2.3-8 两个相同的悬臂梁位于 xy 平面内,并成直角焊接为一体,如图所示。用 B 点处的横向挠度和转动自由度建立 2×2 矩阵。注意 B 点处绕 x 轴和 y 轴转角大小相等。试求载荷作用点的横向挠度。忽略横向剪切变形,但要考虑扭转刚度。如果这两个梁具有 I 形截面,当与实际挠度比较时,对计算挠度作何评价,为什么?

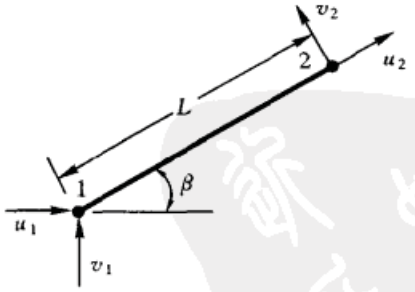


题 2.3-8

2.4-1 有一个杆单元,在 xy 平面内取任意方位,如图 2.4-1(b)所示,试通过依次激活节点自由度的方法来确定[k]矩阵,而不是利用方程 2.4-5 变换得到。

2.4-2 (a)利用图示节点自由度,推导等截面杆单元的 4×4 刚度矩阵。

(b)利用方程 2.2-1 中 2×2 矩阵的坐标变换求得同样结果。



题 2.4-2

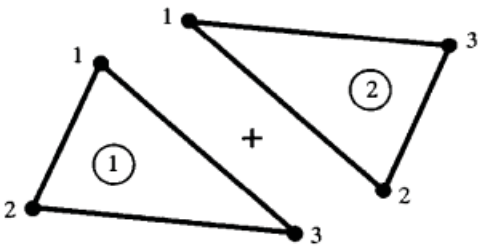
2.4-3 (a)设有一个 2 节点杆单元,其在空间中取向是任意的。试用依次激活节点各个自由度的方法,而不是利用方程 2.4-5 变换,确定其 6×6 矩阵[k]。

(b)用坐标变换方法来验证(a)所得结果。

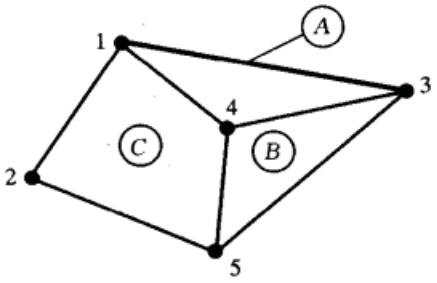
2.4-4 对题 2.2-3(a)中所确定的刚度矩阵,通过坐标变换获得下面问题所需的刚度矩阵。

(a)习题 2.2－3(b)；(b)习题 2.2－3(c)；(c)习题 2.3－1(a)；(d)习题 2.3－1(b)。

2.5－1　在图 2.5－1 中，变换单元节点编号，使其单元节点号与现在习题 2.5－1 的图中所示的一样。保持图 2.5－1 中的结构节点编号，证明再次得到方程 2.5－9 中的矩阵[**K**]。



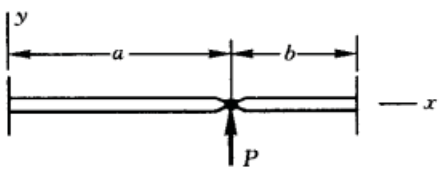
题 2.5－1



题 2.5－2

2.5－2　图示结构由一个 2 节点单元 A，一个 3 节点单元 B 和一个 4 节点单元 C 组成。每个节点只有一个节点自由度。在数组[**K**]和{**R**}中适当位置标出字母 A、B 和 C，指出单元矩阵做出贡献的位置。

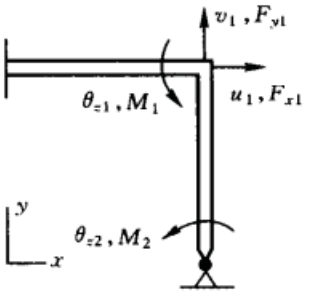
2.5－3　如图中所示，两个共线悬臂梁由无摩擦铰接件连接。两梁挠曲刚度 EI_z 相同，载荷 P 与变形都限于 xy 平面内。写出用“激活”节点自由度计算的刚度矩阵。忽略横向剪切变形。



题 2.5－3

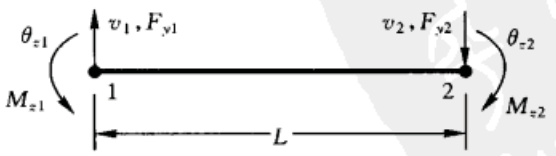
2.5－4　对于图示的刚架结构，用自由度$\{\boldsymbol{D}\}=\lfloor u_1 \quad v_1 \quad \theta_{z1} \quad \theta_{z2} \rfloor^{\mathrm{T}}$ 写出其平衡方程[**K**]{**D**}={**R**}。其中两构件都是细长的，并有相同的 E，I，A 和 L。利用 L，$a=AE/L$ 和 $b=EI/L^3$ 来表示该矩阵系数。

2.5－5　如图 2.3－3(a)中所示平面刚架，假设其各段都是细长的，并有相同的 EI_z，而且相对于弯曲变形而言，其轴向变形可以忽略。设载荷与变形都限于刚架平面内。写出依据“激活”自由度$\{\boldsymbol{D}\}=\lfloor u_B \quad \theta_{zB} \quad \theta_{zC} \rfloor^{\mathrm{T}}$ 运算的结构刚度矩阵。



题 2.5－4

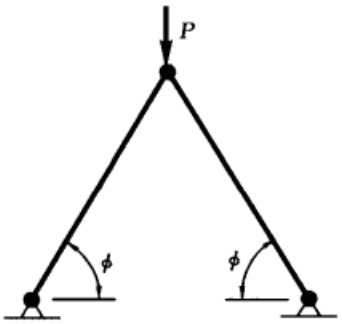
2.5－6　假定一梁单元有如图示的正向的节点载荷与自由度。那么，方程 2.3－5 中的[**k**]矩阵排列如何变化？这种排列有什么不便之处？



题 2.5－6

2.5－7　图示两个构件的桁架位移仅限于图平面内。两构件的 E，L 和 A 都相同。试求依据

顶节点水平方向和竖直方向位移运算的 2×2 刚度矩阵。当有向下的力 P 作用时，求这些位移及各构件的轴向应力。



题 2.5－7

2.6－1 设下面的梁单元都在沿 x 轴方向上。写出描述单元微小刚体运动最一般的节点位移向量。

(a)二维单元(见方程 2.3－6)；(b)三维单元(见方程 2.3－8)。

2.6－2 对于习题 2.6－1(a)中所列的二维单元，写出描述刚体绕节点 1 转动 180°的节点位移向量$\{\boldsymbol{d}\}$。此时，向量$[\boldsymbol{k}]\{\boldsymbol{d}\}$值不为零，为什么？

2.6－3 去掉图 2.5－2 中桁架的支撑。取杆 2 的长度为 $L=5a$，其中 a 为有长度单位的常数。试分别写出如下在桁架平面内微小运动(a)，(b)和(c)时的刚体位移向量。证明每个向量将产生零力矩向量$\{\boldsymbol{R}\}$。

(a)沿杆 2 方向平移；

(b)绕节点 3 转动；

(c)绕点 $x=3a, y=4a$ 转动；

(d)前面所述三种位移向量是线性无关的吗？

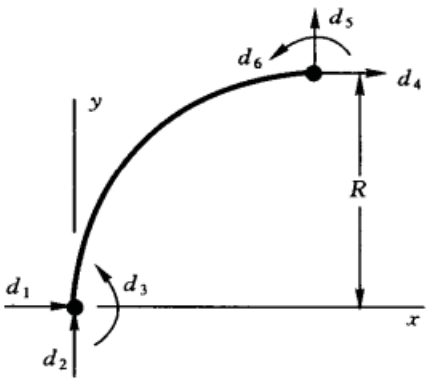
(e)设节点位移向量为$\{\boldsymbol{D}\}=\lfloor -7 \quad -3 \quad -4 \quad 0 \quad 0 \quad -4 \rfloor^{\mathrm{T}}$。乘积$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}$值为零吗？这个$\{\boldsymbol{D}\}$表示刚体运动吗？

2.6－4 对图示的 1/4 圆弧曲边梁单元，使用标识的节点自由度，且位移只限于 xy 平面内。

(a)矩阵$[\boldsymbol{k}]$中单个列(或行)之和是否为零？为什么？(不用建立$[\boldsymbol{k}]$阵。)

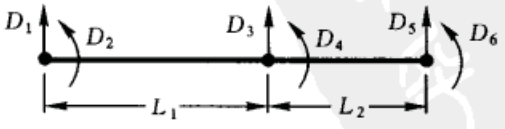
(b)试写出最一般的节点位移矢量以描述其刚体运动。

(c)试写出矢量$\{\boldsymbol{d}\}$(所有 6 项)使方程$[\boldsymbol{k}]\{\boldsymbol{d}\}=\{\boldsymbol{0}\}$。这样的$\{\boldsymbol{d}\}$有无限多可能性；请写出其中 3 个线性无关的。



题 2.6－4

2.6－5 (a,b)参照图中所示的等截面二单元梁结构，再次回答习题 2.6－4 中的问题(a,b)。



题 2.6－5

(c)画出与$\{\boldsymbol{D}\}$相对应的变形模型图，$\{\boldsymbol{D}\}$应使$\{\boldsymbol{R}\}$中每个节点载荷 R_i 等于 i 行中 K_{ij} 元素之和。在结构上画出适当的方向箭头表示 R_i。

2.6－6　对下列几种桁架单元，写出表示 xy 平面内刚体运动的最一般的节点位移矢量$\{\boldsymbol{d}\}$：

(a)图 2.4－1(b)所示杆单元中取 $\beta=0$。

(b)图 2.4－1(b)所示杆单元中取 $\beta>0$。

(c)习题 2.4－2 中的杆单元。

2.6－7　(a)为防止刚体运动，必须要有 n_R 个约束。对平面运动，$n_R=3$，对空间运动 $n_R=6$。然而，被约束的自由度不能任意选择。说明为什么。举出二维和三维问题 n_R 约束不足的例子。

(b)足以防止刚体运动的约束选择，不是唯一的。对于图 2.6－2(b)中的二单元悬臂梁结构，以无支承开始，写出 6 组边界条件，每一组都足以约束其空间刚体运动，并且足以对平面问题建模。要避免不必要的约束。

2.6－8　对于给定的$\{\boldsymbol{D}\}$，为何$\{\boldsymbol{D}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}/2$ 形式能表示结构的应变能？提示：由载荷做功来考虑。

2.7－1　下列梁问题中的每一种位移都限制在 xy 平面内，用单个单元，忽略横向剪切变形。取$\{\boldsymbol{D}\}=\lfloor v_2 \quad \theta_{z2}\rfloor^{\mathrm{T}}$，写出方程$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\}$。利用方程 2.7－6 的方法在节点 2 处施加节点自由度，用矩阵运算求解；再由初等梁理论来验证结果。

(a)一悬臂梁左端固定，右端点施加横向位移$\overline{v_2}$。求相应的力和 θ_{z2}；

(b)一简支梁受力作用而其左端转动$\overline{\theta_{z1}}$角度，求相应的弯矩和 θ_{z2}。

2.7－2　(a) 设图 2.5－2 所示平面桁架中各个杆件有相同的 AE/L。除去载荷 P。利用方程 2.7－6 的方法，在节点 1 上施加下面的位移：$u_1=c$(其中 c 很小)，并且 $v_1=0$。试求 v_3 及作用在节点 1 上载荷的 x 方向分量和 y 方向分量。

(b)在方程 2.5－10 中利用(a)中的结果，确定节点 2 和 3 处的支反力。

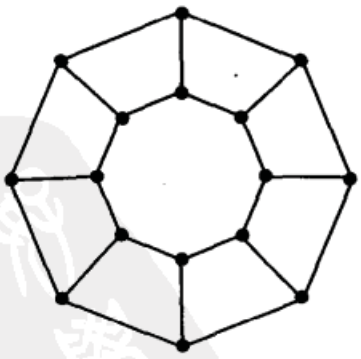
(c)证明(a)和(b)中的力使桁架处于静平衡状态。

2.8－1　将图 2.8－1(a)中的节点编号做如下改变：7 变为 6，9 变为 7，6 变为 9。而其它节点编号不变。此时，矩阵$[\boldsymbol{K}]$的最大半带宽和存储特征数为多少？高斯消元法中会产生多少个“填充项”？

2.8－2　(a，b) 将图 2.8－1(a)中的节点编号顺序倒过来，于是，9 变为 1，8 变为 2，依此类推。图 2.8－1(b)中也同样如此重新编号。在每种情况下，分别回答习题 2.8－1 中提出的问题。

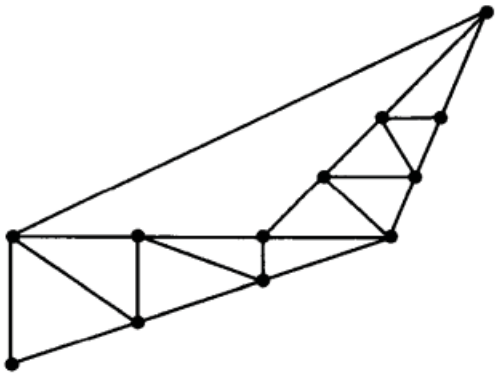
2.8－3　(a) 假设图中所示结构各个节点有一个自由度，并且两节点间直线为一个 2 节点单元。试对节点编号，使其最大半带宽 $b_{\max}$最小，确定其 $b_{\max}$、存储特征数 p，以及高斯消元产生的填充项个数。

(b) 采用另一种编号方案，使其 $b_{\max}$达到最大，再重新回答(a) 中的问题。



题 2.8－3

2.8－4　(a，b) 参照图中所示结构，重新回答习题 2.8－3 中的问题。



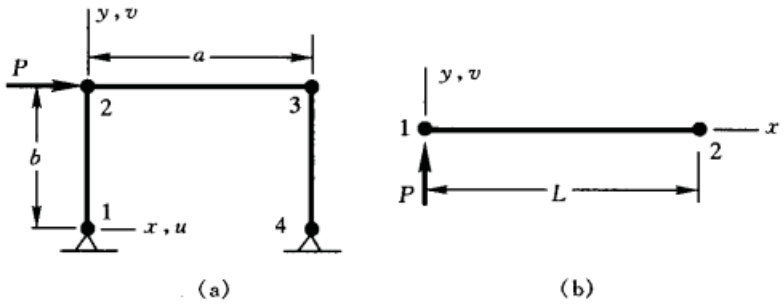
题 2.8-4

2.8-5 图 2.8-3(a)中所列刚度矩阵可用一个实际结构来构建。试用线性弹簧和刚性板，像习题 2.2-2 中的那样，构建出这样一个结构来。

2.8-6 用高斯消元法求解图中所示的支承不充分的平面结构的刚度方程组。麻烦出现在哪个方程中，是因为有零对角项吗？其求解步骤数能否事先预测？

(a) 这三个杆单元有同样的 A 和 E。每个节点作用如铰连接。有 4 个激活自由度。

(b) 用方程 2.3-5 表示这个无支撑梁。



题 2.8-6

2.8-7 题图显示了一个受轴向力作用的结构和对其施加边界条件后的结构方程。

(a) 利用高斯消元法求解 u_2，u_3 和 u_4。

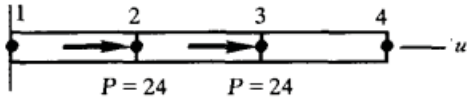
(b) 第一次消元后，所得 K_{22} 的物理解释是什么？第二次消元后，又该如何对 K_{33} 以物理解释？

(c)结构方程可以写成如下形式：

$$u_2=\frac{1}{12}(24+6u_3)$$

$$u_3=\frac{1}{12}(24+6u_2+6u_4) \quad u_4=u_3$$

在高斯-赛德尔迭代中，要利用每个方程中最新计算的 u_i 值，依次求解各方程。因此，在第一次迭代中，从 $u_2=u_3=u_4=0$ 开始，由第一个方程得 $u_2=2$，由第二个方程得 $u_3=3$，由第三个方程得 $u_4=3$。完成这个过程的另 3 次循环(注意：已有方法可大大加快收敛速率)。



$$\begin{bmatrix} 12 & -6 & 0 \\ -6 & 12 & -6 \\ 0 & -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 24 \\ 24 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

题 2.8－7

2.8－8　(a) 对题 2.2－2(a) 中的结构，设所有弹簧具有相同的刚度系数 k。并假设除 F_2 外所有载荷都取为零。利用高斯消元法依据 k 和 F_2 求解其位移自由度。

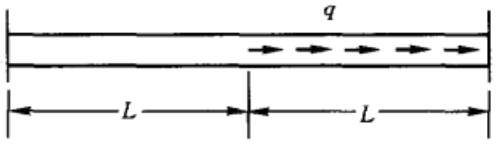
(b) 仍就此结构，改成载荷除 F_1 外都取为零。用 k 和 F_1 表示其位移自由度。然而，不要从头开始，而是利用(a)中矩阵三角化以简化载荷矢量，然后回代。

2.8－9　(a，b) 就习题 2.2－2(b)中结构，再完成习题 2.8－8 中的问题。

2.8－10　(a) 在图 2.5－2 中，设桁架各构件的 $k=AE/L$ 相同。依据刚度 k 和载荷 P，利用高斯消元法求解其位移自由度 u_1，v_1 和 v_3。

(b) 由方程 2.5－10 和(a)中所得结果来确定支反力。验证这些支反力和载荷 P 使桁架处于静平衡状态。

2.9－1　图示等截面杆在其右半部分受均布的轴向载荷 q 作用。当所有节点自由度都为零时，分别以单元应力场存在和不存在两种方式确定杆中的轴向应力分布。(a)用一个长 $2L$ 的单元。(b)用两个长 L 的单元。

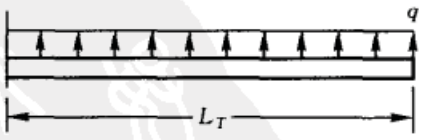


题 2.9－1

2.9－2　(a，b) 重作习题 2.9－1，但把杆右端支撑除去。

2.9－3　在跨度 L 上用两个等长的单元来求解图 2.9－2(a)中的问题。在梁上画出弯矩 M，其中(a)M 仅由节点自由度引起；(b)当所有节点自由度都取零时，M 由节点自由度和存在的单元 M 场共同作用产生。

2.9－4　细长等截面悬臂梁和均布横向力 q，如图所示。利用由 q 生成的协调载荷来确定端点的挠度及根部的弯矩。忽略所有节点自由度都为零时存在的单元弯矩场。然后，利用简化节点载荷再计算。(a)只用一个单元；(b)用两个等长度的单元。



题 2.9－4

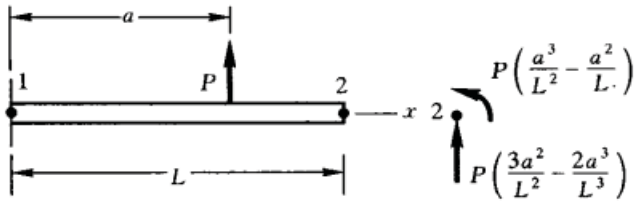
2.9－5　图示细长等截面悬臂梁受一横向集中力 P 作用。用一个单元对该梁建模。

(a) 利用协调性载荷(如图中所示)计算节点自由度 v_2，用 P，L，E，I 和 a 表示；

(b) 利用简化节点载荷(仅在 $x=L$ 处有力 Pa/L)再次计算 v_2；

(c) 计算(a)，(b)中所得 v_2 值与根据初等梁理论计算的精确值 v_2 的比值。画出该比值与 $a/L(0<a<L)$ 的关系曲线图。

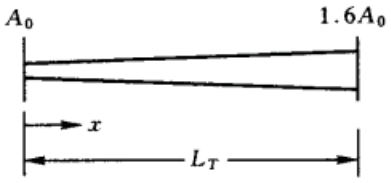
(d) 根据(a)中的节点自由度计算左端处的弯矩 $M=EIv_{,xx}$，不考虑所有节点自由度都为零时仍存在的弯矩。再重复(b)中的计算。在每种情况下，计算端点弯矩值与精确值的比值，并作出该比值与 $a/L(0<a<L)$ 的关系曲线图。



题 2.9-5

2.10-1 重作 2.10 节中例题，只是另设支撑条件让杆左端固定而右端自由。

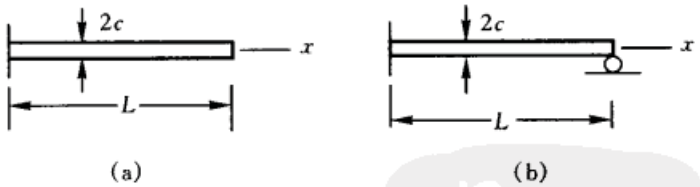
2.10-2 图中所示杆被限于两个刚性墙之间。横截面面积由 A_0 线性变化到 $1.6A_0$。杆被均匀加热，相对其无应力状态温度升高 ΔT。用三个均匀单元来建模，每个单元长为 $L_T/3$，横截面面积分别为 $1.1A_0$，$1.4A_0$，$1.5A_0$。计算其中的应力。并以 x(横坐标)和 $\alpha L\Delta T$(纵坐标)为轴，画出精确解与有限元解。



题 2.10-2

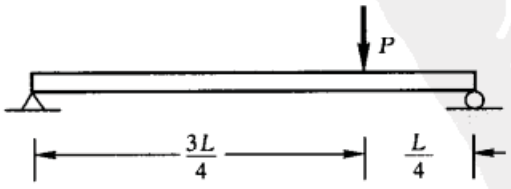
2.10-3 移去图 2.5-2 中的力 P。仅对杆 2 加热，使之升温 T 度。由 2.10 节中描述的 3 步法确定节点位移和单元应力。设杆 2 长 $5a$，其中 a 为一常数。

2.10-4 (a,b)图中所示的两个细长梁都有 $2c\times t$ 的实心矩形横截面。都受温度载荷作用，温度沿梁长度方向不变，但由上表面的 $+T$ 变化到下表面的 $-T$。在每种情况下，用单个单元和 2.10 节中描述的的 3 步法确定梁上表面应力 σ_x 与 x，E，α，T 以及几何参数的函数关系。



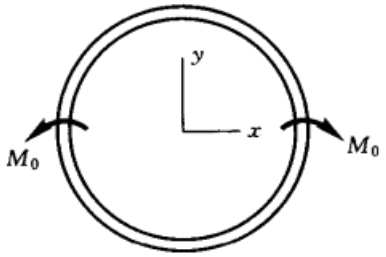
题 2.10-4

2.11-1 对图示的细长梁，分解为正对称与反对称情况之和。然后利用梁理论根据 P，L，E 和 I 确定作用力 P 的挠度表达式。并用梁理论手册提供的公式加以验证。

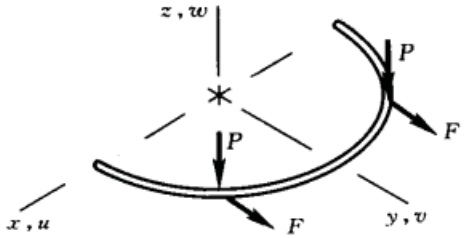


题 2.11-1

2.11－2　图中所示环在其平面内直径两端处作用有两个方向相反的弯矩 M_0。可以仅需对 1/4 环建模分析，即可得到完整的解。应施加怎样的边界条件和载荷才合理？



题 2.11－2



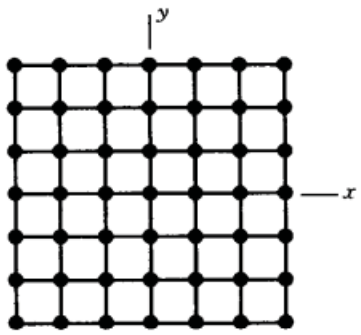
题 2.11－3

2.11－3　如图所示 xy 平面上半圆环关于 yz 平面对称。载荷 P 和 F 作用在圆环上离 yz 平面等距的两点上，并且平行于 yz 平面。利用对称性，仅需分析 I 象限中的圆环部分。在 xz 平面上为固支。

(a) 在 yz 平面上，所分析的 1/4 部分必须施加怎样的位移边界条件？已知哪些节点载荷为零？

(b) 仅在 I 象限内掉转载荷 P 和 F 的方向，回答(a)中的问题。

2.11－4　图示模型是由位于 xy 平面内的均匀空间梁单元组成的正方形格栅，其节点焊在一起。假设所有单元都相同，且节点自由度有侧向(z 方向)位移 w_i、转角 θ_{xi} 和 θ_{yi}。在位于格栅正方形边界上的所有节点 i 施加支撑使 $w_i=0$。内部节点不受约束。如果，侧向(z 方向)力大小为 P 作用在下面所述的内部节点上，请说明该格栅的哪部分能构成最小且合理的分析模型，它必须有什么样的边界条件。



题 2.11－4

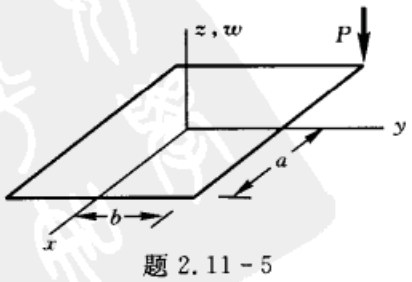
(a) 每个节点都受载荷 P，并且作用力方向都相同。

(b) 在 $y>0$ 区域，载荷 P 方向朝上，而在 $y<0$ 区域的载荷 P 朝下，$y=0$ 上节点载荷可忽略。

(c) 载荷 P 在象限间变换方向。即，在 I，III 象限，方向朝上，在 II，IV 象限方向朝下，而在 x，y 轴上的忽略。

(d) 载荷 P 在八分区变换方向。

2.11－5　图示等厚度矩形平板在一角点上有一横向力 P 作用。设想，其 FE 网格(图中未画出)是均匀的，并且有均匀弹性基支撑。各节点的自由度有横向位移 w_i 和转角 θ_{xi} 及 θ_{yi}。如何用板的 1/4 分 4 次来分析整个板在给定载荷作用下的横向挠度 $w=w(x,y)$。每次使用不同的载荷和/或支撑条件，然后再将分析所得结果叠加。



题 2.11－5

计算题

在下面的习题中，请计算位移和应力或弯矩的峰值。尽可能利用对称性来分析。当网格细化时，估计由最佳 FE 网格计算得到结果的最大误差百分比。在题中未设定几何尺寸或载荷的地方，请自己选择合适的值代入计算。如果所需材料属性参数在题中未说明，则当作钢材处理。请使用 1.5 节中建议的分析方法。

C2.1 (a) 你所使用的软件包含梁单元的横向剪切变形吗？不要参考其程序文件，用设计和运行简单的悬臂梁试验工况来找出答案。

(b) 类似地，设一梁上作用有均布载荷。先用协调性节点载荷分析之，再用简化载荷(见 2.9 节)。然后再分析，这次的载荷是利用 FE 软件中重力载荷选择自动获得。在软件中采用哪个节点载荷列式？

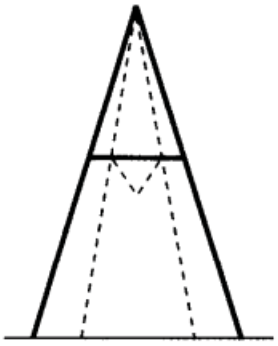
C2.2 利用 FEA 软件确定习题 2.5－7 中载荷 P 引起的位移，并将所得结果与在该习题中手算所得结果相比较。计算包括 ϕ 角很小的情况。

C2.3 图示活梯含有一个联接机构使其能折叠起来。作理想简化处理，该活梯可以当作平面结构来分析。

(a) 利用简单易行的有限元模型，分析载荷 P 向下作用于梯子顶端的情况。可能需要使用杆或梁单元。

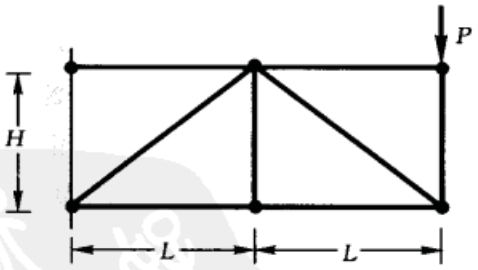
(b) 分析载荷 P 作用在活梯的一个阶梯部位的情况。仅在必要时可修改(a)中的有限元模型。

(c) 改进模型，使活梯成为一个三维结构，重新进行分析。所需几何尺寸由测量实际结构得到。



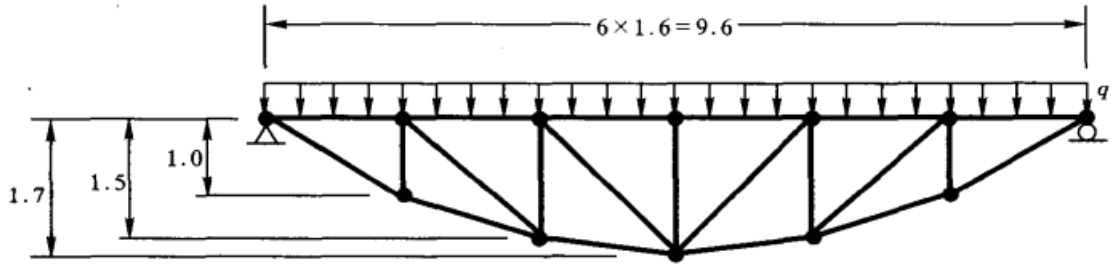
题 C2.3

C2.4 图示平面结构的构件可以是杆由销栓连接而成的桁架结构，也可以是梁在节点处刚性连接形成刚架。对于刚架模型，在墙面上的节点转动既可以允许，也可以禁止。研究桁架结构和刚架结构的位移和应力的区别。假设各构件横截面都是边长为 b 的正方形。建议的工况包括 $b=5$ mm，$b=15$ mm，$b=30$ mm；另外，$H=120$ mm，$L=160$ mm。载荷取单位力 $P=1.0$ N 来计算比较方便。



题 C2.4

C2.5 图示的平面结构构件是杆由销栓连接形成的桁架，也可以是梁在节点处刚性连接形成的刚架。研究桁架模型和刚架模型间位移和应力的区别。假设所有部件有正方形横截面。图示几何尺寸单位为米。载荷可以是均布力 q 或者是结构自重。节点载荷用 2.9 节中描述的简化载荷方法得到(为便于分析，可以从刚架模型中忽略对角构件，这样上下弦材仅用垂直构件连接。)



题 C2.5

C2.6　试分析图 2.13－2 中的圆环，不过载荷 F 垂直于圆环面，并依次掉转改变方向。设 $r=80$ mm，横截面为直径 6 mm 的圆。

C2.7　考虑图 2.12－2 中的锥形梁。设该梁在垂直图面方向有单位厚度，深度 h 沿轴线方向线性变化。位移仅限于图面内。对以下情况进行分析：

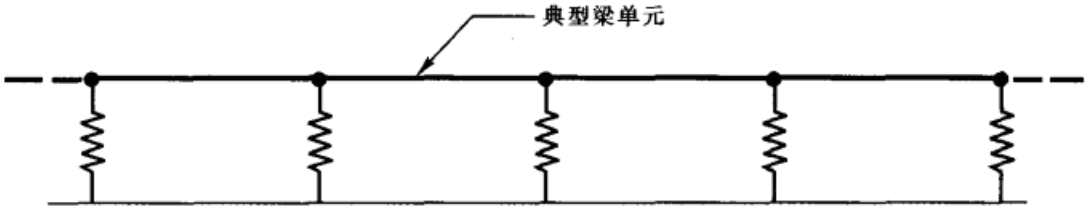
(a) $L_1=L_2=s=200$ mm，$h_1=h_2=40$ mm，$h_c=20$ mm

(b) $L_1=L_2=s=200$ mm，$h_1=h_2=20$ mm，$h_c=40$ mm

(c) $L_1=200$ mm，$L_2=0$，$s=80$ mm，$h_1=40$ mm，$h_2=h_c=20$ mm

C2.8　(a,b,c)设梁一端简支，再来分析习题 C2.7 中的问题。

C2.9　设有一平面梁放在连续的“文克勒”弹性基上[2.6]。该基可以用连接 FE 梁模型节点和



题 C2.9

刚性支撑的离散弹簧来表示(如图所示)。这不是该问题最好的 FE 表征模型，但它有益于发现在 FE 梁模型中位移和弯矩在网格细化时是如何收敛于精确解的。载荷和支撑布局不同的直梁解析解是可以得到的[1.16]。由直边单元构成的圆环结构受垂直于圆环面的载荷作用时也可以如此分析。

C2.10　可将自行车轮理想化为一有 36 个径向轮辐的平面结构。相关参数如下[2.23]。轮辐：直径＝2.1 mm，$E=210$ GPa，车轮中心到轮缘截面形心轴线的长度＝309.4 mm。轮缘：$A=138.4$ mm^2，$E=70$ GPa，$\nu=0.33$，A 的惯性矩 $I=1\,469$ mm^4，$I/c=176$ mm^3(用于应力计算)。假设轮辐中的初始张力足以在受载荷作用时使每个轮辐保持受拉状态。就下面的载荷情况加以分析

(a) 路面对车轮有竖直方向 490 N 的力。

(b) 车闸在轮的顶端处产生 100 N 的切向力。

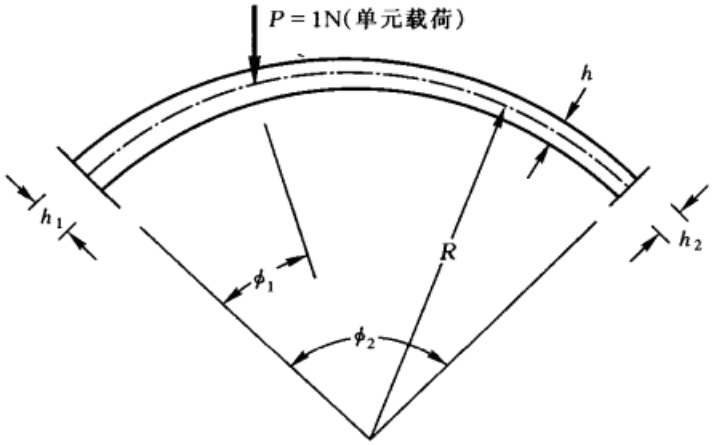
C2.11　图中所示结构在垂直图面方向有单位厚度。其横截面的深度 h 沿圆周方向线性变化。位移限制在图面内。下面是一些可供参考的几何尺寸：

(a) $\phi_1=45°$，$\phi_2=90°$，$R=500$ mm，$h_1=h_2=30$ mm

(b) $\phi_1=20°$, $\phi_2=40°$, $R=500$ mm, $h_1=h_2=30$ mm

(c) $\phi_1=20°$, $\phi_2=90°$, $R=500$ mm, $h_1=h_2=30$ mm

(d) $\phi_1=20°$, $\phi_2=90°$, $R=500$ mm, $h_1=30$ mm, $h_2=10$ mm



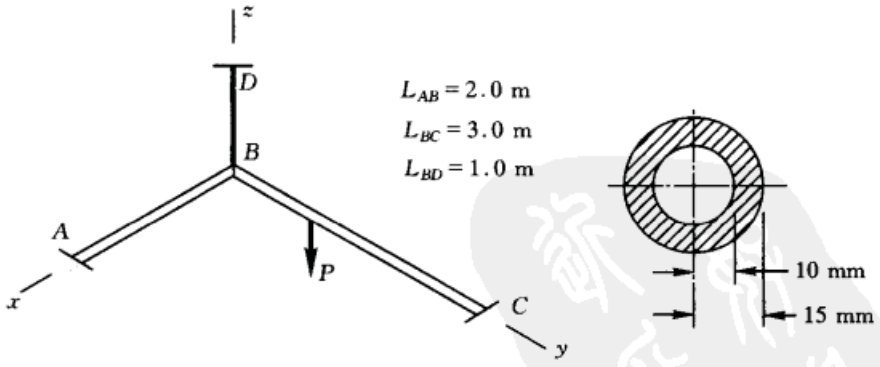
题 C2.11

C2.12 设习题 C2.11 中的结构一端或两端简支时，重新分析该问题。还可以施加均匀或不均匀变化的温度载荷。其它的加载形式包括规定一端的平移和/或转动自由度的零或非零值。

C2.13 两根等截面圆管各自的一端被固定，另一端焊接在一起并相交成直角，它们都在 xy 平面内(如图所示)。一个横截面积为 100 mm^2 的钢棒 DB 将 B 点与固支点 D 连接。该圆管的空心圆截面如图所示。各部件都是钢材料。试确定各个部件中的最大挠度量和最大应力。

(a) 去掉管 AB，这样就只有管 BC 部分了，并由吊杆 BD 悬挂着。

(b) 两根圆管和吊杆 BD 都考虑进来。



题 C2.13

C2.14 在习题 C2.4 分析的结构上，作用有垂直结构平面的载荷。这个(些)力可以作用于连接点上或它们之间的构件上。假设各构件横截面都为圆形。

C2.15 利用习题 C2-11 中所述的结构几何尺寸，但载荷 P 垂直于图面作用。设 h 表示实心圆截面直径。可换用习题 C2.12 中提到的载荷和支撑条件。端点载荷包括扭矩或规定的扭转角。

第 3 章

基本单元

有限元方法中通用的大部分单元都是基于位移模式的。这一章我们讨论基于位移场模式的插值法和简单单元，并说明它们的刚度矩阵是如何推导出来的。其它公式的推导过程以及更为一般形状的类似单元将在后面的章节里讨论。

为了构造一个合适的有限元模型，并且能正确检查计算结果，我们需要了解单元位移场，特别是由于该位移场可能使单元产生的缺点。

3.1 预备知识

在第 2 章中用于分析杆和梁问题的直接法只能用公式表述比较少的单元。结构力学中单元的表述通常依赖于长期以来建立的应力分析工具，包括应力-应变关系，应变-位移关系，以及能量原理[3.1]。在这章里，我们把公式定义在笛卡儿直角坐标系中。极坐标系和柱坐标系中的类似公式会在需要的地方加以说明。结构力学以外的问题将在后面的章节中讨论。

应力-应变关系 令$\{\boldsymbol{\sigma}\}$为应力列阵，$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$为应变列阵。下标 0 表示初值。本构矩阵$[\boldsymbol{E}]$包含弹性常数。在线性弹性条件下，应力-应变关系可用矩阵形式表示为

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\boldsymbol{E}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} + \{\boldsymbol{\sigma}_0\} \quad \text{或} \quad \{\boldsymbol{\sigma}\} = [\boldsymbol{E}](\{\boldsymbol{\varepsilon}\} - \{\boldsymbol{\varepsilon}_0\}) \tag{3.1-1}$$

这里，

$$\{\boldsymbol{\sigma}_0\} = -[\boldsymbol{E}]\{\boldsymbol{\varepsilon}_0\}$$

这个关系式对一维、二维、三维情况都适用。在单轴应力状态下，当没有初始应力，上式简化为$\sigma = E\varepsilon$，这里 E 是弹性模量。二维情况时，x 和 y 为平面内的坐标，公式 3.1-1 变为：

$$\text{应力} = \text{本构矩阵} \times \text{应变} + \text{初始应力}$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}E_{11} & E_{12} & E_{13}\\ E_{21} & E_{22} & E_{23}\\ E_{31} & E_{32} & E_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\sigma_{x0}\\ \sigma_{y0}\\ \tau_{xy0}\end{Bmatrix} \tag{3.1-2}$$

本构矩阵$[\boldsymbol{E}]$是对称矩阵；$E_{ij}=E_{ji}$。$[\boldsymbol{E}]$能表示各向同性或非各向同性和材料特性。在各向同性材料和平面应力条件下($\sigma_z=\tau_{yz}=\tau_{zx}=0$)，$\{\boldsymbol{E}\}$和它的逆阵为：

$$[\boldsymbol{E}]=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & (1-\nu)/2\end{bmatrix}\qquad [\boldsymbol{E}]^{-1}=\begin{bmatrix}1/E & -\nu/E & 0\\ -\nu/E & 1/E & 0\\ 0 & 0 & 1/G\end{bmatrix} \tag{3.1-3}$$

这里ν是泊松比，$G=0.5E/(1+\nu)$是剪切模量。(在平面应变情况下，也就是$\varepsilon_z=\gamma_{yz}=\gamma_{zx}=0$，见公式3.4-11。)对公式3.1-1进行转换，我们可以得到：

一般形式：

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}=[\boldsymbol{E}]^{-1}\{\boldsymbol{\sigma}\}+\{\boldsymbol{\varepsilon}_0\}$$

各向同性和平面应力条件：

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \sigma_x/E-\nu\sigma_y/E+\varepsilon_{x0}\\ \varepsilon_y &= -\nu\sigma_x/E+\sigma_y/E+\varepsilon_{y0}\\ \gamma_{xy} &= \tau_{xy}/G+\gamma_{xy0}\end{aligned} \tag{3.1-4}$$

初始应变$\{\boldsymbol{\varepsilon}_0\}$可能有不同的起因，包括由于潮湿或受热引起的温度变化和体积膨胀。如果方便的话，为了解释两个或两个以上的起因同时作用造成的初始影响，$\{\boldsymbol{\varepsilon}_0\}$和$\{\boldsymbol{\sigma}_0\}$能同时出现在应力-应变关系式中。如果材料是各向同性的，而且初始应变是由温度变化T产生的，那么$\varepsilon_{x0}=\varepsilon_{y0}=\alpha T$，$\gamma_{xy0}=0$，这里$\alpha$是热膨胀系数，并假设它与温度无关。温度$T$是相对于参考温度的测量值，参考温度可能是室温，这时可以认为物体没有应力。

在三维的情况下，$[\boldsymbol{E}]$是一个对称的6×6矩阵，它把应力$\{\boldsymbol{\sigma}\}=\lfloor\sigma_x\quad\sigma_y\quad\sigma_z\quad\tau_{xy}\quad\tau_{yz}\quad\tau_{zx}\rfloor^{\mathrm{T}}$和应变$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}=\lfloor\varepsilon_x\quad\varepsilon_y\quad\varepsilon_z\quad\gamma_{xy}\quad\gamma_{yz}\quad\gamma_{zx}\rfloor^{\mathrm{T}}$联系起来。对各向同性以及温度变化$T$引起的初始应变，$\{\boldsymbol{E}\}$和$\{\boldsymbol{\varepsilon}_0\}$中的非零项为：

$$\begin{aligned}&E_{11}=E_{22}=E_{33}=(1-\nu)c && \varepsilon_{x0}=\alpha T\\ &E_{44}=E_{55}=E_{66}=G && \varepsilon_{y0}=\alpha T\\ &E_{12}=E_{21}=E_{13}=E_{31}=E_{23}=E_{32}=\nu c && \varepsilon_{z0}=\alpha T\end{aligned} \tag{3.1-5a}$$

其中，

$$c=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\quad\text{和}\quad G=\frac{E}{2(1+\nu)} \tag{3.1-5b}$$

对于各向异性材料，类似的系数将在公式10.5-1中给出。

一个物体某部分的温度可能与另一部分的温度不同，材料的性质也可能是随温度的变化而变化的。这样，在使用$[\boldsymbol{E}]$的地方，$\{\boldsymbol{E}\}$必须包含与温度相适合的项。而且，如果α是一个温度函数的话，αT必须用$\alpha_{\text{ave}}T$代替，这样$\alpha_{\text{ave}}T$就等于在所施加温度范围内的积分$\alpha\mathrm{d}T$。如果材料性质是随应力而变化的，问题就成了非线性的(见第17章)。

应变-位移关系 位移场描述了一个物体怎样变形以及怎样发生位移。应变-位移关系反

映了包含在位移场中的应变场，并在常用单元的公式推导中起着重要作用。

为了得到公式，我们使用应变的工程定义。正应变是每单位原长度的变化量，剪应变是一个直角的变化量。图 3.1－1 中所示的变形用公式表示了 xy 平面上的应变 ε_x，ε_y 和 γ_{xy}。一般来说，x 方向的位移 u 与 y 方向的位移 v 是坐标的函数：$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$。因此，我们必须用偏导数。求导并令 Δx 和 Δy 趋近于零，我们就得到二维应变-位移关系：

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{3.1-6}$$

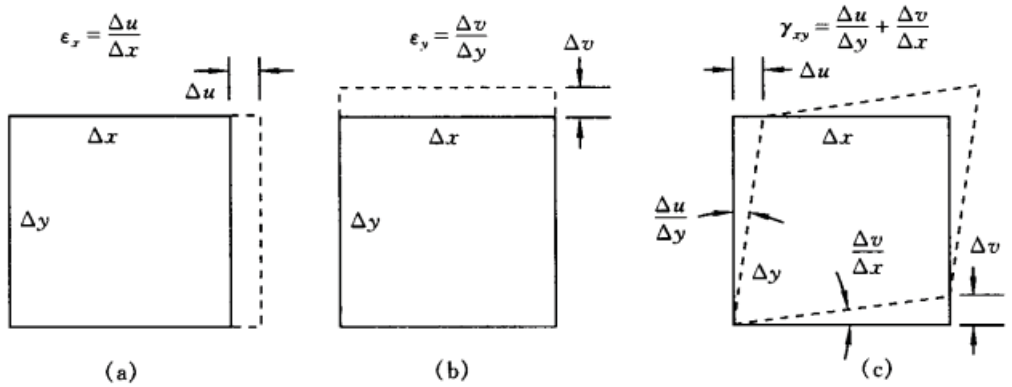


图 3.1－1　微小矩形承受
(a)x 方向的正应变；(b)y 方向正应变；(c)剪应变

后面，用逗号表示对其后角标的偏微分，这将是很方便的。用这种符号，公式 3.1－6 就成为：

$$\varepsilon_x = u_{,x} \quad \varepsilon_y = v_{,y} \quad \gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} \tag{3.1-7}$$

在三维情况下，坐标 x，y 和 z 方向的位移为 $u=u(x,y,z)$，$v=v(x,y,z)$，$w=w(x,y,z)$，公式 3.1－7 就要补充下列关系式：

$$\varepsilon_z = w_{,z} \quad \gamma_{yz} = v_{,z} + w_{,y} \quad \gamma_{zx} = w_{,x} + u_{,z} \tag{3.1-8}$$

用矩阵算子的形式，2D 和 3D 情况下的应变-位移关系分别为：

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} \varepsilon_y \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \tag{3.1-9}$$

我们把公式 3.1-9 中的两个式和一般的应变-位移关系式象征性地写成：

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\partial]\{\boldsymbol{u}\} \tag{3.1-10}$$

协调性 当一个物体发生变形而没有破碎时，拉伸时不会出现裂纹，弯曲时不会出现扭折，物质微粒不会互相渗透。说得更明白一点，就是协调性条件要求位移是连续的，并且是位置的单值函数。

在平面问题中，协调方程是 $\epsilon_{x,yy}+\epsilon_{y,xx}=\gamma_{xy,xy}$[3.1,3.2]。这个方程表述了如果协调性条件被满足时，应变之间必须存在的关系。对三维问题还有一个附加的方程。任意假设，ϵ_x，ϵ_y 和 γ_{xy} 的表达式可能不满足协调方程，但任意假定位移场一定满足它，只要他们是单值的并且连续的，可以把公式 3.1-6 代入协调方程检验他们。基于位移的有限元用假定的多项式作为位移场，它得到广泛应用的一个原因是，采用这个办法易于满足协调性。

平衡方程 图 3.1-2(a)显示了二维问题中作用在微分单元体上的应力。在笛卡儿直角坐标系中，我们现在建立方程表示微元在力的作用下处于平衡状态，这些力来自于面上的应力和来自于体力。

x 和 y 方向的体力 F_x 和 F_y 定义为作用在单位体积上的力，以沿坐标轴正方向为正。体力是由重力、加速度、磁场等产生的。在体积的每个微分单元体上（$\mathrm{d}V=t\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，这里 t=厚度），F_x 和 F_y 产生微小的力 $F_x\mathrm{d}V$ 和 $F_y\mathrm{d}V$。一般地，体力和应力是坐标的函数。例如，$\sigma_{x,x}$ 是变化率，$\sigma_{x,x}\mathrm{d}x$ 是在距离 $\mathrm{d}x$ 上的 σ_x 的变化量。对均匀厚度 t，在 x 方向的静力平衡要求是：

$$-\sigma_x t\,\mathrm{d}y-\tau_{xy}t\,\mathrm{d}x+(\sigma_x+\sigma_{x,x}\mathrm{d}x)t\mathrm{d}y+(\tau_{xy}+\tau_{xy,y}\mathrm{d}y)t\mathrm{d}x+F_x t\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0 \tag{3.1-11}$$

在 y 方向，也有一个相应的平衡方程。经简化以后，平面（二维）问题的平衡微分方程如下所示。作为参考，三维问题的类似方程也在此列出。

	二维：	三维：
x 方向：	$\sigma_{x,x}+\tau_{xy,y}+F_x=0$	$\sigma_{x,x}+\tau_{xy,y}+\tau_{zx,z}+F_x=0$
y 方向：	$\tau_{xy,x}+\sigma_{y,y}+F_y=0$	$\tau_{xy,x}+\sigma_{y,y}+\tau_{yz,z}+F_y=0$
z 方向：	（未用到）	$\tau_{zx,x}+\tau_{yz,y}+\sigma_{z,z}+F_z=0$

(3.1-12)

尽管是从静力学条件下导出的，但只要 F_x，F_y 和 F_z 是包括达朗贝尔或“有效”的单位体力，公式 3.1-12 也能用于存在加速度的情况下。例如，如果有 x 方向加速度 a_x，那么 F_x 必须包括惯性力项 $-\rho a_x$，这里 ρ 是质量密度。不管是二维或三维，平衡方程可以用符号写为：

$$[\partial]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\sigma}\}+\{\boldsymbol{F}\}=\{\boldsymbol{0}\} \tag{3.1-13}$$

这里，$[\partial]$在公式 3.1-9 中给出，在二维和三维笛卡儿直角坐标系中，$\{\boldsymbol{F}\}$分别为$\lfloor F_x \quad F_y \rfloor^{\mathrm{T}}$和$\lfloor F_x \quad F_y \quad F_z \rfloor^{\mathrm{T}}$。

边界条件 边界条件包括一个物体的边或面上设定的位移或应力。例如，在图 3.1-2(b)中的平面问题中，刚性支撑意味着沿着左边，$u=v=0$。剩下的边满足应力边界条件：沿着

顶边，$\tau_{xy}=0$，$\sigma_y=-p$；沿着右边，$\sigma_x=0$，$\tau_{xy}=0$；沿着底边，$\sigma_n=0$，$\tau_{ns}=0$。

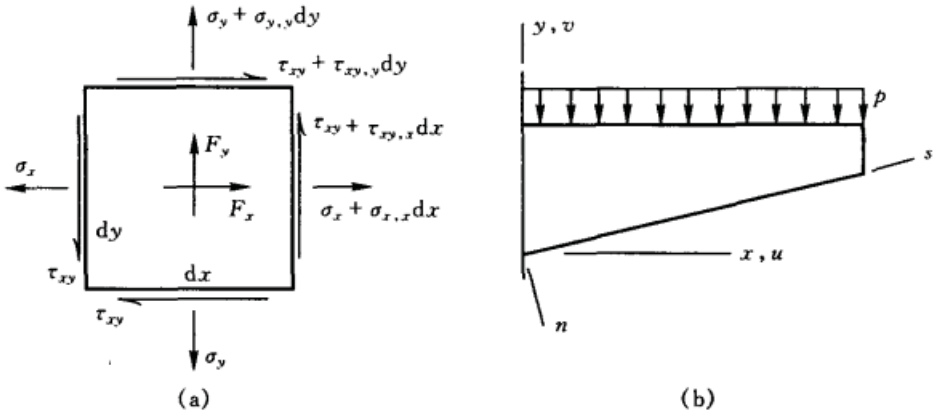


图 3.1－2　(a)作用在等厚度平面微元上的应力和体力；
(b)在顶面上受有压力 p 的锥形悬臂梁

一般来说，分布载荷能作用于边界的切线方向和法线方向。在任意边界上，包括与坐标轴不垂直的边界，法向和切向载荷可以表示为物体表面上每单位面积上的作用力，它平行于坐标轴。在笛卡儿直角坐标系 xyz 中，面力$\{\boldsymbol{\Phi}\}$为：

$$\{\boldsymbol{\Phi}\}=\begin{Bmatrix}\Phi_x\\ \Phi_y\\ \Phi_z\end{Bmatrix}\qquad \text{其中}\qquad \begin{aligned}\Phi_x&=l\sigma_x+m\tau_{xy}+n\tau_{zx}\\ \Phi_y&=l\tau_{xy}+m\sigma_y+n\tau_{yz}\\ \Phi_z&=l\tau_{zx}+m\tau_{yz}+n\sigma_z\end{aligned}\qquad (3.1-14)$$

这里的 l，m 和 n 是表面上法线的方向余弦。当公式 3.1－14 满足时，表面上每一个微分单元体在面力和内部应力(在表面上的计算值)的作用下处于平衡状态。在边界的一部分情况确实如此，在那里设定位移而不是力，支撑作用的力事先并不知道，在求解的过程中对此通常不作计算。

精确解和近似解　精确解必须满足协调性、平衡方程和边界条件。例如，如果我们从一个协调性位移场入手，我们就可以从公式 3.1－10 中得到应变，然后从公式 3.1－1 中得到应力。如果这些应力在整个物体体积上的每一点都满足公式 3.1－13，并且所有的边界条件都满足，我们就可以得到这个数学模型的精确解(这个数学模型要以基本假设为前提条件，即应力-应变的线性关系和非常小的位移)。这个说来容易但做起来难。只有在几何体、载荷和支撑条件的简单组合情况下才能求出精确解。

基于位移场的有限元在每一个实体点上不满足平衡方程的条件。而从积分或平均意义上来说，基于位移的单元满足公式 3.1－13 和 3.1－14。这个问题会在第 4 和第 5 章中有更详细的解释。那两章将讨论计算近似解的常用方法。

其他问题　前面结构力学的公式在其他领域也有相似的公式。后面的章节中在需要的地方会加以详述。这里我们简单比较一下结构力学和热传导的基本方程。首先我们要注意热传导是一个标量问题，因为它的场量——温度 T 本身没有方向性。相反，结构力学的位移场是一个矢量场，在坐标方向上有分量。下面是静态(稳定状态)下的列表：

参 量	结构力学	热传导
自变量	坐标 x,y,z	坐标 x,y,z
因变量	位移 u,v,w	温度 T
场梯度	应变 $\epsilon_x,\epsilon_y,\gamma_{xy}$ 等	$\{\nabla T\}=\lfloor T_{,x} \quad T_{,y} \quad T_{,z}\rfloor^{\mathrm{T}}$
本构矩阵	弹性模量$[\boldsymbol{E}]$	热传导率$[\boldsymbol{\kappa}]$
感应场	应力$\{\boldsymbol{\sigma}\}=[\boldsymbol{E}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$	热通量$\{\boldsymbol{f}\}=-[\boldsymbol{\kappa}]\{\nabla T\}$
表面载荷	边界上的外力$\{\boldsymbol{\Phi}\}$	边界上的法向通量 f_n
内部载荷	体力 F_x,F_y,F_z	内部发热量 Q
平衡方程	$[\partial]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\sigma}\}+\{\boldsymbol{F}\}=\{\boldsymbol{0}\}$	$f_{x,x}+f_{y,y}+F_{z,z}-Q=0$

3.2 插值法和形状函数

插值就是构造一个在有限点能满足规定条件的连续函数。在有限元分析中，这些点是一个单元的节点，规定条件是一个场量的节点值(也可能是它的导数)。节点值很少是精确的，并且即使它们是精确的，插值法在其他位置给出的通常也会是近似值。在有限元分析中，插值函数几乎总是一个能自动提供单值连续场的多项式。

依据广义自由度 a_i，一个含有因变量 ϕ 和自变量 x 的插值多项式可以写成下列形式：

$$\phi=\sum_{i=0}^{n}a_i x^i \quad 或 \quad \phi=\lfloor \boldsymbol{X}\rfloor\{\boldsymbol{a}\} \tag{3.2-1a}$$

其中

$$\lfloor \boldsymbol{X}\rfloor=\lfloor 1 \quad x \quad x^2 \quad \cdots \quad x^n\rfloor \quad 和 \quad \{\boldsymbol{a}\}=\lfloor a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n\rfloor^{\mathrm{T}} \tag{3.2-1b}$$

线性插值时 $n=1$，二次插值时 $n=2$，等等。a_i 可以根据在已知的 x 值处 ϕ 的节点值来表示。节点值$\{\boldsymbol{\phi}_e\}$和 a_i 之间的关系可以用符号表示为：

$$\{\boldsymbol{\phi}_e\}=[\boldsymbol{A}]\{\boldsymbol{a}\} \tag{3.2-2}$$

这里，$[\boldsymbol{A}]$的每一行都是$\lfloor \boldsymbol{X}\rfloor$在相应的节点位置的计算值(例子如下)。从公式 3.2-1 和 3.2-2，我们可以得到

$$\phi=\lfloor \boldsymbol{N}\rfloor\{\boldsymbol{\phi}_e\} \quad 其中 \quad \lfloor \boldsymbol{N}\rfloor=\lfloor \boldsymbol{X}\rfloor[\boldsymbol{A}]^{-1}=\lfloor N_1 \quad N_2 \quad \cdots\rfloor \tag{3.2-3}$$

矩阵$[\boldsymbol{N}]$中的每一个 N_i 被称做形状函数，有时也叫基本函数。当对应的 ϕ_i 为 1，而其他 ϕ_i 为 0 时，每个 N_i 就规定了插值函数 $\phi=\phi(x)$。在有限元分析中，单元的组集使单元节点值$\{\boldsymbol{\phi}_e\}$出现在自由度的整体向量$\{\boldsymbol{D}\}$中。这样，在有限元分析中，每个单元的$\{\boldsymbol{\phi}_e\}$通过解总体方程$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\}$来确定。

连续性的阶次 场量 ϕ 在有限元网格中是分段插值的。也就是说，每一个“插值段”只限制在它的单元内部。所以当 ϕ 能够保证在每个单元里平滑变化时，单元之间的变化却可能是不平滑的。符号 C^m 用来描述一个分段场的连续性。如果场量的导数达到且包括 m 阶，并在

单元间连续，那么这个场就是 C^m 连续的。因此，在一维中，如果 ϕ 是连续的，而 $\phi_{,x}$ 不连续，则 $\phi=\phi(x)$ 是 C^0 连续的。如果 ϕ 和 $\phi_{,x}$ 都连续，而 $\phi_{,xx}$ 不连续，$\phi=\phi(x)$ 就是 C^1 连续的。这两个例子如图 3.2－1 所示，其中 $x=a$ 表示单元间的边界。一般地，如果场量 ϕ 是 C^m 连续的话，ϕ 的 m 阶导数必须作为节点自由度被包括进去。

C^m 这个术语也可以用在单元类型上。在第 2 章里，我们学过了杆单元和梁单元，它们分别属于“C^0 单元”和“C^1 单元”类型。通常，C^0 单元用来做平面和立体的模型，C^1 单元用来做梁、平面和壳的模型，这样能提供单元间斜率的连续性。

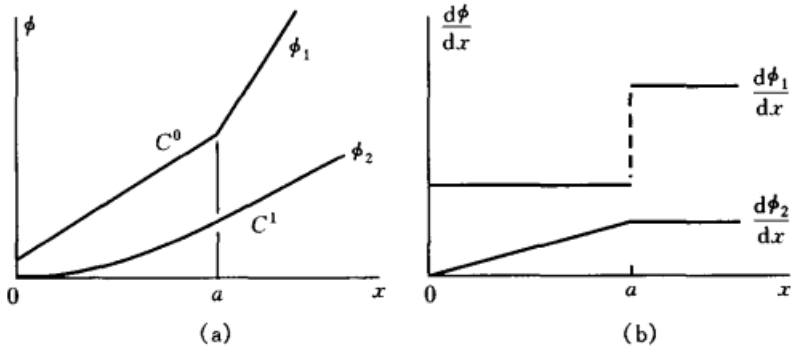


图 3.2－1　函数 ϕ_1 是 C^0 连续的。函数 ϕ_2 是 C^1 连续的

C^0 插值　我们从位于 $(x_1,\ \phi_1)$ 和 $(x_2,\ \phi_2)$ 两点之间的线性插值开始，对于它，公式 3.2－1 中的 $\lfloor \boldsymbol{X} \rfloor=\lfloor 1 \quad x \rfloor$。在点 1 和点 2 计算 $\lfloor \boldsymbol{X} \rfloor$ 的值，我们得到：

$$\begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{Bmatrix}=[\boldsymbol{A}]\begin{Bmatrix}a_0\\ a_1\end{Bmatrix}\qquad \text{其中}\qquad [\boldsymbol{A}]=\begin{bmatrix}1 & x_1\\ 1 & x_2\end{bmatrix}\tag{3.2-4}$$

对 $[\boldsymbol{A}]$ 求逆并利用公式 3.2－3，我们得到：

$$[\boldsymbol{A}]^{-1}=\frac{1}{x_2-x_1}\begin{bmatrix}x_2 & -x_1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\qquad \text{及}\qquad \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor=\left\lfloor \frac{x_2-x}{x_2-x_1} \quad \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \right\rfloor\tag{3.2-5}$$

这两个线性形状函数 N_1 和 N_2 如图 3.2－2(a)所示。这个例子显示了在有限元分析中使用的最简单的插值法。在阐明长度为 L 的 2 节点单元的性质时，我们将利用 $x_1=0$，$x_2=L$ 以及节点的自由度 ϕ_1 和 ϕ_2。

通过三个点 (x_1,ϕ_1)，(x_2,ϕ_2) 和 (x_3,ϕ_3) 的二次插值函数是一条抛物线。这些点不需要等距离。现在 $\lfloor \boldsymbol{X} \rfloor=\lfloor 1 \quad x \quad x^2 \rfloor$，公式(3.2－2)成为：

$$\begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{Bmatrix}=[\boldsymbol{A}]\begin{Bmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\end{Bmatrix}\qquad \text{其中}\qquad [A]=\begin{bmatrix}1 & x_1 & x_1^2\\ 1 & x_2 & x_2^2\\ 1 & x_3 & x_3^2\end{bmatrix}\tag{3.2-6}$$

公式 3.2－3 得到 $\lfloor \boldsymbol{N} \rfloor$，它的单个形状函数如图 3.2－2(b)所示。

图 3.2－2 所示的结果可以看作是拉格朗日插值公式的特例，它为一条与 n 点纵坐标拟合的曲线提供了下列形状函数：

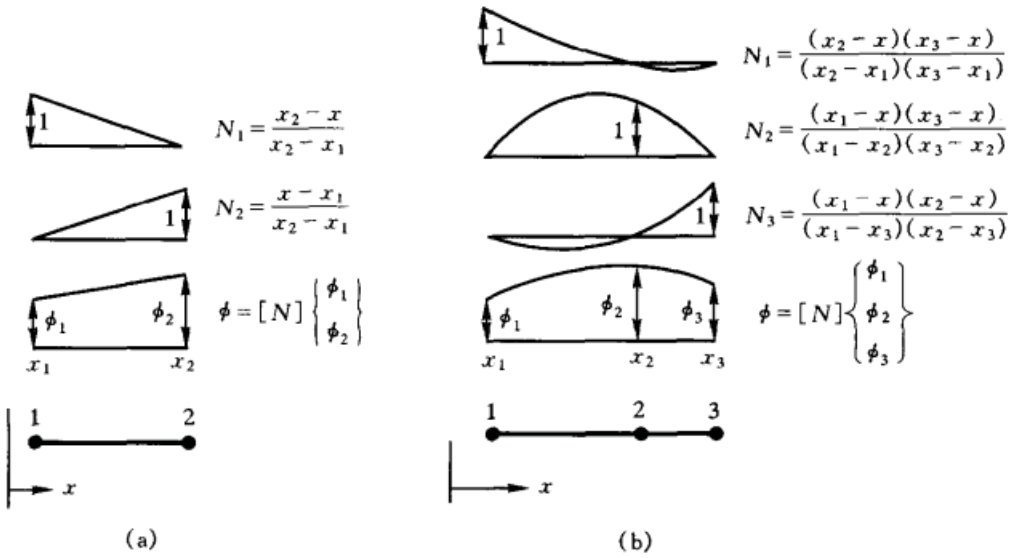


图 3.2-2 (a)线性插值和形状函数;(b)二次插值和形状函数

$$N_1=\frac{(x_2-x)(x_3-x)\cdots(x_n-x)}{(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)},\quad N_2=\frac{(x_1-x)(x_3-x)\cdots(x_n-x)}{(x_1-x_2)(x_3-x_2)\cdots(x_n-x_2)},\text{等等。}\tag{3.2-7a}$$

或更一般的形式:

$$N_k=\frac{(x_1-x)(x_2-x)\cdots[x_k-x]\cdots(x_n-x)}{(x_1-x_k)(x_2-x_k)\cdots[x_k-x_k]\cdots(x_n-x_k)}\tag{3.2-7b}$$

上式方括号里面的项是要删去的,这样就得到第 K 个形状函数。对线性插值,N 和 x 里面不会出现大于 2 的下标;对二次插值,N 和 x 里面不会出现大于 3 的下标;以此类推。前面所说的形状函数有下面的特征:

- 所有的形状函数 N_i 与函数 ϕ 本身一样是同阶次的多项式。
- 对任意形状函数 N_i,当 $x=x_i$ 时 $N_i=1$;对任意整数 $j\neq i$,当 $x=x_j$ 时,$N_i=0$。也就是说,N_i 只在它自己的节点上为 1,而在其他节点上为 0。
- C^0 形状函数的和为 1,也就是说,$\sum N_i=1$。这个结论可由公式 3.2-3 说明,因为当 $\{\boldsymbol{\phi}_e\}$ 是全为 1 的列矩阵时,一定可得到 $\phi=1$。

拉格朗日插值公式只使用了拟合曲线中的纵坐标 ϕ_i,斜率信息没有用上,所以拉格朗日插值在节点处可以显示斜率,在其他期望的地方却不行(见图 3.2-3(a))。下面要讲的是在拟合曲线中,既使用纵坐标信息,又使用斜率信息的方法,这种方法有时叫作埃尔米特(Hermitian)插值。

C^1 插值 假定有一个三次曲线 $\phi=\phi(x)$,它的形状由四个数据项决定。我们取的这些项是纵坐标 ϕ_i 和长度为 L 的线段两端的微小斜率 $(\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}x)_i$,如图 3.2-3(b)所示。现在 $\lfloor \boldsymbol{X} \rfloor=\lfloor 1 \quad x \quad x^2 \quad x^3 \rfloor$,当在 $x=0$ 和 $x=L$ 处计算 ϕ 和 $\phi_{,x}$ 时,公式 3.2-2 成为:

$$\begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_{,x1}\\ \phi_2\\ \phi_{,x2}\end{Bmatrix}=[\boldsymbol{A}]\begin{Bmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\\ a_3\end{Bmatrix},\quad \text{其中}\quad [\boldsymbol{A}]=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&L&L^2&L^3\\0&1&2L&3L^2\end{bmatrix}\tag{3.2-8}$$

公式 3.2－3 产生的四个形状函数证明是图 2.3－1 所示的梁的四个横向位移节点。在图 3.2－4中这些形状函数又出现了，他们在端点的特性也被列出。在 3.3 节，我们将举例说明怎样利用这些形状函数得到梁单元刚度矩阵。

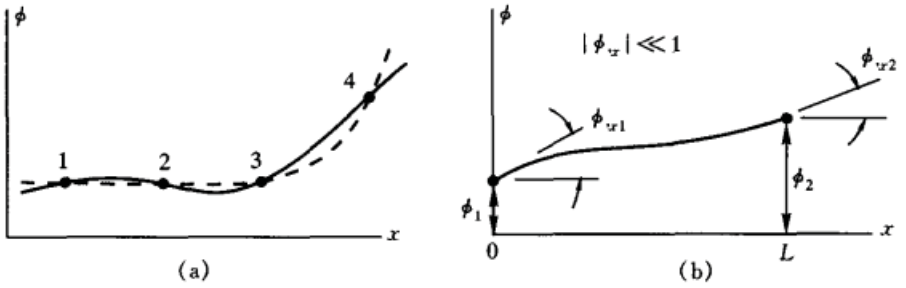
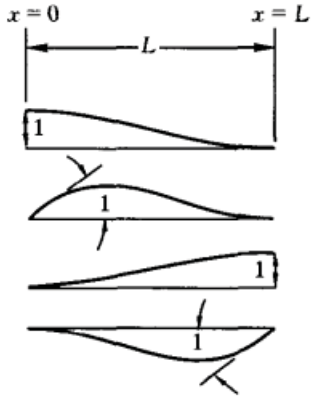


图 3.2－3　(a)实线是一个与虚线上四点纵坐标拟合的 C^0 三次插值函数；(b)基于纵坐标和端点斜率信息的三次插值曲线



		在 $x=0$ 处		在 $x=L$ 处	
		N_i	$N_{i,x}$	N_i	$N_{i,x}$
$N_1 = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}$		1	0	0	0
$N_2 = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$		0	1	0	0
$N_3 = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}$		0	0	1	0
$N_4 = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$		0	0	0	1

图 3.2－4　在 $x=0$ 和 $x=L$ 处与纵坐标和斜率相拟合的三次曲线形状函数

2D 和 3D 插值　到现在为止，描述的插值仅使用一个自变量。在二维或三维问题中，需要两个或三个自变量。这些插值是一维插值的扩展，在用到它们的时候再加以说明。当有两个或三个因变量时，例如二维或三维问题中的位移分量，通常所有的分量用相同的形状函数插值，这我们很快就会看到。

3.3　单元矩阵公式

在这一节里，我们用虚功原理来得到单元刚度矩阵的公式以及与初始应变、体力、面力有关的载荷向量。这些结果适用于一般使用的单元，这些单元是基于节点自由度的位移插值的。通过将在第 4 和第 5 章中讨论的另外一种方法可以得出同样的结果。那种方法可以使我们更深入地认识有限元分析的本质，并把它扩展到结构力学以外的问题中去。虚功原理使我们不必知道太多力学知识就可以得到基本公式。

*虚位移*是在系统位形中假想的非常小的变化。出于分析的目的，我们想象相对于平衡位形(所有载荷都起作用时)有了一个虚位移，并假设这个位移是可容许的。可容许的位移不违

反协调性或是位移边界条件。载荷或应力都不会随虚位移发生变化。*虚功原理*，也是*虚位移原理*，可以用下面的形式来描述[3.2]

$$\int\{\delta\boldsymbol{\varepsilon}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\sigma}\}\mathrm{d}V=\int\{\delta\boldsymbol{u}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{F}\}\mathrm{d}V+\int\{\delta\boldsymbol{u}\}^{\mathrm{T}}+\{\boldsymbol{\Phi}\}\mathrm{d}S \tag{3.3-1}$$

这里，$\{\delta\boldsymbol{\varepsilon}\}$是由公式 3.1-9 和虚位移$\{\delta\boldsymbol{u}\}$确定的应变向量，其中$\{\delta\boldsymbol{u}\}=\lfloor\delta u\quad \delta v\quad \delta w\rfloor^{\mathrm{T}}$。符号$\delta$与微分符号 d 有相同的意思，但是按照惯例，当位移是虚位移时使用δ。公式 3.3-1 说明对任何平衡状态下的准静态的和可容许的离开平衡位置的虚位移$\{\delta\boldsymbol{u}\}$，积聚的应变能的增量等于体力$\{\boldsymbol{F}\}$在体积 V 上所做的功以及面力$\{\boldsymbol{\Phi}\}$在表面 S 上所做的功的增量。

公式 3.3-1 也可以通过$\{\delta\boldsymbol{u}\}$乘以平衡方程 3.1-13 的左边，对体积求积分，并通过分部积分来改变形式而得到。这种方法在第 4.7 节后面部分讲述，它使得位移法有限元在平均意义或积分意义上满足平衡微分方程的说法好像有道理。

对位移$\{\boldsymbol{u}\}$在一个单元内进行插值，就像ϕ在公式 3.2-3 中那样，即：

$$\{\boldsymbol{u}\}=[\boldsymbol{N}]\{\boldsymbol{d}\}\qquad \text{其中}\qquad \{\boldsymbol{u}\}=\lfloor u\quad v\quad w\rfloor^{\mathrm{T}} \tag{3.3-2}$$

$\{\boldsymbol{d}\}$列出了一个单元的节点位移自由度。后面的章节中将会举例说明。根据公式 3.1-10，有了位移就可确定应变；即$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}=[\partial]\{\boldsymbol{u}\}$。因此，

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}=[\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{d}\}\qquad \text{其中}\qquad [\boldsymbol{B}]=[\partial][\boldsymbol{N}] \tag{3.3-3}$$

矩阵$[\boldsymbol{B}]$叫做*应变-位移矩阵*。从公式 3.3-2 和 3.3-3 可以得到

$$\{\delta\boldsymbol{u}\}^{\mathrm{T}}=\{\delta\boldsymbol{d}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{N}]^{\mathrm{T}}\quad \text{和}\quad \{\delta\boldsymbol{\varepsilon}\}^{\mathrm{T}}=\{\delta\boldsymbol{d}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}} \tag{3.3-4}$$

从公式 3.1-1(应力-应变关系，现在考虑到一般性，既包括初始应变又包括初始应力)和公式 3.3-1，3.3-3 及 3.3-4，可得：

$$\begin{aligned}&\{\delta\boldsymbol{d}\}^{\mathrm{T}}\Big(\int[\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{E}]\,[\boldsymbol{B}]\mathrm{d}V\{\boldsymbol{d}\}-\int[\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{E}]\{\boldsymbol{\varepsilon}_0\}\mathrm{d}V+\int[\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\sigma}_0\}\mathrm{d}V\\&-\int[\boldsymbol{N}]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{F}\}\mathrm{d}V-\int[\boldsymbol{N}]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\Phi}\}\mathrm{d}S\Big)=0\end{aligned} \tag{3.3-5}$$

向量$\{\delta\boldsymbol{d}\}$和$\{\boldsymbol{d}\}$不在积分里面出现，因为他们不是坐标的函数。公式 3.3-5 对平衡状态下任何可容许的虚位移$\{\delta\boldsymbol{d}\}$来说必须成立。因此可由公式 3.3-5 导出：

$$[\boldsymbol{k}]\{\boldsymbol{d}\}=\{\boldsymbol{r}_e\} \tag{3.3-6}$$

其中单元刚度矩阵为

$$[\boldsymbol{k}]=\int[\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{E}]\,[\boldsymbol{B}]\,\mathrm{d}V \tag{3.3-7}$$

而除了单元变形以外，由于单元上的所有载荷源作用在结构节点上的载荷向量为

$$\{\boldsymbol{r}_e\}=\int[\boldsymbol{N}]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{F}\}\mathrm{d}V+\int[\boldsymbol{N}]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\Phi}\}\mathrm{d}S+\int[\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{E}]\,\{\boldsymbol{\varepsilon}_0\}\mathrm{d}V-\int[\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\sigma}_0\}\mathrm{d}V \tag{3.3-8}$$

这个公式定义了“协调的”节点载荷，它意味着使用同样的形状函数就可以确定$\{\boldsymbol{r}_e\}$，就像使用同样的形状函数确定单元刚度矩阵一样。杆和梁单元的协调性载荷$\{\boldsymbol{r}_e\}$的例子出现在第 2.9

节。

单元组集形成一个有限元结构可以通过在公式 3.3－5 整个左侧的前面加上一个求和符号来表示。这样就又回到第 2.5 节中描述的组集过程。即：单元矩阵从概念上扩大到“整体结构”，它们里面的项在必要时，重新排列后叠加。在这一步中，我们也可以加上直接作用在节点上的集中载荷$\{\boldsymbol{P}\}$。结果就是结构方程式$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\}$，如公式 2.5－4 所示。

在具体问题中，公式 3.3－8 右边的一些积分可能为零。即使是现在，对大部分单元来说，积分都可能为零。例如，$\{\boldsymbol{\sigma}_0\}$只对结构中的部分单元可能为非零，$\{\boldsymbol{\Phi}\}$只对位于结构的边界并受表面力的作用的单元表面不为零。

杆单元　一个简单的例子可以证明公式 3.3－7、和 3.3－8 得出的结果与第 2 章中得到的结果是一样的。对图 3.3－1(a)中的杆单元，我们设 $x_1=0$，图 3.2－2(a)中，令 $x_2=L$。轴向位移由节点自由度 u_1 和 u_2 线性插值。这样，形状函数和应变-位移矩阵为

$$[\boldsymbol{N}]=\lfloor\frac{L-x}{L}\quad\frac{x}{L}\rfloor\qquad\lfloor\boldsymbol{B}\rfloor=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\boldsymbol{N}]=\lfloor\frac{-1}{L}\quad\frac{1}{L}\rfloor\tag{3.3-9}$$

E 和 A 都是常数，公式 3.3－7 导出单元刚度矩阵

$$[\boldsymbol{k}]=\int_0^L\lfloor\boldsymbol{B}\rfloor^{\mathrm{T}}E[\boldsymbol{B}]A\mathrm{d}x=\frac{AE}{L}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\tag{3.3-10}$$

它与公式 2.2－1 中的$[\boldsymbol{k}]$是一致的。在公式 3.3－8 中，$\{\boldsymbol{\Phi}\}\mathrm{d}S$ 变为力 P 而$\lfloor\boldsymbol{N}\rfloor$在 $x=L/3$ 处求值。如果存在由于均匀的温度变化 T 引起的初始应力 σ_0，公式 3.3－8 变为

$$\{\boldsymbol{r}_e\}=\lfloor\boldsymbol{N}_{L/3}\rfloor^{\mathrm{T}}P-\int_0^L\lfloor\boldsymbol{B}\rfloor^{\mathrm{T}}(-E\alpha T)A\mathrm{d}x=\begin{bmatrix}2P/3\\P/3\end{bmatrix}+EA\alpha T\begin{Bmatrix}-1\\1\end{Bmatrix}\tag{3.3-11}$$

这与图 2.9－1(a)和 2.10－1(b)中的结果是一样的。

装配的初始缺陷，比如杆的初始 ΔL 过大，会伴随有初始应力 $\sigma_0=-E\varepsilon_0=-E(\Delta L/L)$。这个初始应力可以被叠加在由于温度变化引起的初始应力上面。

梁单元　作为另一个简单的例子，我们可以证实在第 2 章中对于没有横向剪切变形的均匀梁单元得到的结果。

在阐述梁单元时，我们涉及到弯矩 M 和曲率 κ，而不是应力和应变。在公式 3.3－1 的第一个积分里，被积函数变为$(\delta\kappa)^{\mathrm{T}}M\mathrm{d}x$。对于如图 3.3－1(b)所示的均匀梁单元，

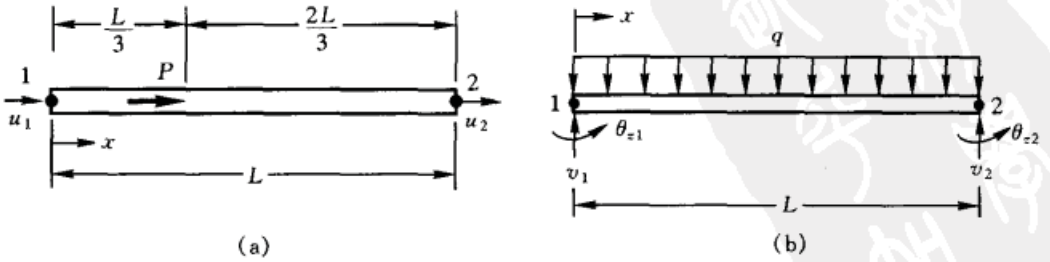


图 3.3－1　(a)在长度 1/3 处作用有集中力 P 的均匀杆单元；
(b)受强度为 q 的向下均布载荷作用的均匀梁单元

$$M = EI_z\kappa \quad \kappa = \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} \quad v = \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor \{\boldsymbol{d}\} \quad \kappa = \lfloor \boldsymbol{B} \rfloor \{\boldsymbol{d}\} \tag{3.3-12}$$

这里 $v=v(x)$为横向位移。节点的自由度为$\{\boldsymbol{d}\}=\lfloor v_1 \quad \theta_{z1} \quad v_2 \quad \theta_{z2} \rfloor^{\mathrm{T}}$。使用图 3.2-4 中所列的形状函数,我们得到

$$\lfloor \boldsymbol{B} \rfloor = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}[\boldsymbol{N}] = \lfloor -\frac{6}{L^2}+\frac{12x}{L^3} \quad -\frac{4}{L}+\frac{6x}{L^2} \quad \frac{6}{L^2}-\frac{12x}{L^3} \quad -\frac{2}{L}+\frac{6x}{L^2} \rfloor \tag{3.3-13}$$

E 和 I_z 都是常量时,单元刚度矩阵为

$$[\boldsymbol{k}] = \int_0^L \lfloor \boldsymbol{B} \rfloor^{\mathrm{T}} EI_z \lfloor \boldsymbol{B} \rfloor \mathrm{d}x = \frac{EI_z}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \tag{3.3-14}$$

这与公式 2.3-5 中的$[\boldsymbol{k}]$是一致的。

为了得到图 3.3-1(b)中均匀向下的载荷 q 产生的节点载荷,我们使用公式 3.3-8 中的第二个积分,令$\{\boldsymbol{\Phi}\}=-q$,$\mathrm{d}S=\mathrm{d}x$。结果与公式 2.9-2 和图 2.9-2(a)所示的是一样的。同样,处理热载荷时,我们使用公式 3.3-8 中的第三个积分,用 m_0 取代$\{\sigma_0\}$,用 $\mathrm{d}x$ 取代 $\mathrm{d}V$。例如,如果梁的横截面有两个对称轴,深度为 $2c$,温度从上表面的$-T$线性变化到下表面的$+T$,则

$$m_0 = -EI_z\kappa_0 \qquad \kappa_0 = \frac{\alpha T}{c} \qquad \{\boldsymbol{r}_e\} = \frac{EI_z\alpha T}{c}\lfloor 0 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \rfloor^{\mathrm{T}} \tag{3.3-15}$$

这个载荷向量由作用在单元端部节点上的大小相等方向相反的两个力矩组成。

3.4 线性三角形(CST)

线性三角形就是一个场函数随笛卡儿直角坐标 x 和 y 线性变化的平面三角形。在应力分析中,一个线性位移场产生一个常应变场,所以这个单元也可以叫做常应变三角形(CST)。

只是为了解释的方便,我们把节点 1 放在 $x=y=0$ 处,边 1-2 沿着局部 x 轴(图 3.4-1)。这么选择,在标量场单元中不会失去一般性,但需要一个最终的坐标变换来得到应力分析的一般应用单元。适合球坐标中任意位置单元的公式推导出现在第 7 章中。

标量场单元 根据广义自由度 a_i,场量 ϕ 在单元中由多项式插值

$$\phi = \lfloor 1 \quad x \quad y \rfloor \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \tag{3.4-1}$$

在图 3.4-1 的节点处计算表达式的值,并注意到 $x_1=y_1=y_2=0$,可得

$$\begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{Bmatrix}=[\boldsymbol{A}]\begin{Bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{Bmatrix}\quad 其中\quad [\boldsymbol{A}]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & x_2 & 0\\ 1 & x_3 & y_3\end{bmatrix} \tag{3.4-2}$$

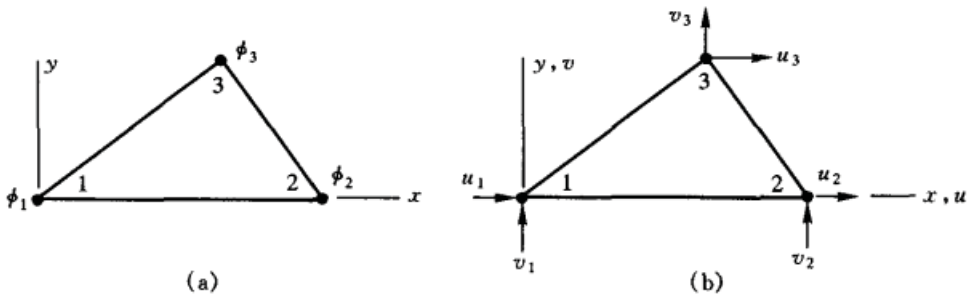


图 3.4-1　线性三角形
(a)标量场单元;(b)二维应力分析的 CST 单元

矩阵[**A**]已经三角化,通过向前代入,根据 ϕ_i 得到 a_i 的解,与高斯消元法(第 2.8 节)的向后代入相似。这样我们得到

$$a_1=\phi_1\qquad a_2=\frac{\phi_2-\phi_1}{x_2}\qquad a_3=\frac{(x_3-x_2)\phi_1}{x_2y_3}-\frac{x_3\phi_2}{x_2y_3}+\frac{\phi_3}{y_3} \tag{3.4-3}$$

因此,对图 3.4-1(a)中的单元,插值场 $\phi=\lfloor \boldsymbol{N}\rfloor\{\boldsymbol{d}\}$ 为

$$\phi=\underbrace{\lfloor 1\quad x\quad y\rfloor[\boldsymbol{A}]^{-1}}_{\lfloor N\rfloor}\begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{Bmatrix}\qquad 其中\qquad [\boldsymbol{A}]^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \dfrac{-1}{x_2} & \dfrac{1}{x_2} & 0\\ \dfrac{x_3-x_2}{x_2y_3} & \dfrac{-x_3}{x_2y_3} & \dfrac{1}{y_3}\end{bmatrix} \tag{3.4-4}$$

场的梯度为

$$\begin{bmatrix}\phi_{,x}\\ \phi_{,y}\end{bmatrix}=[\boldsymbol{B}]\begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{Bmatrix}\qquad 其中\qquad [\boldsymbol{B}]=\begin{bmatrix}\partial/\partial x\\ \partial/\partial y\end{bmatrix}\lfloor \boldsymbol{N}\rfloor \tag{3.4-5}$$

特别对图 3.4-1(a)中的单元,

$$[\boldsymbol{B}]=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}[\boldsymbol{A}]^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{-1}{x_2} & \dfrac{1}{x^2} & 0\\ \dfrac{x_3-x_2}{x_2y_3} & \dfrac{-x_3}{x_2y_3} & \dfrac{1}{y_3}\end{bmatrix} \tag{3.4-6}$$

对于 xy 平面的的热传导分析,ϕ 表示温度,单元的热传导矩阵为

$$[\boldsymbol{k}]=\int[\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\kappa}][\boldsymbol{B}]t\mathrm{d}A \tag{3.4-7}$$

其中[$\boldsymbol{\kappa}$]是材料传导率矩阵,t 是单元厚度,A 是三角形面积。如果[$\boldsymbol{\kappa}$]和 t 独立于 x 和 y,那么[$\boldsymbol{\kappa}$]就是简单的 3×3 矩阵$[\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\kappa}]\,[\boldsymbol{B}]\,tA$。

应力分析单元(CST) 公式 3.4-1 的插值可应用于位移的两个分量 u 和 v。现在需要 6 个广义自由度 a_i。

$$u = \lfloor 1 \quad x \quad y \rfloor \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \qquad v = \lfloor 1 \quad x \quad y \rfloor \begin{Bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \tag{3.4-8}$$

因为位移函数在 x 和 y 方向是线性的，包括边在内的单元中所有的线段在单元变形时仍是直的。从公式 3.1-6 中，得到单元应变为常量：

$$\varepsilon_x = a_2 \qquad \varepsilon_y = a_6 \qquad \gamma_{xy} = a_3 + a_5 \tag{3.4-9}$$

因此，这个单元可以被称做 CST，即“常应变三角形”。它的应变-位移矩阵[$\boldsymbol{B}$]能从标量场单元的公式 3.4-1 到 3.4-6 中获得的信息计算得到。对图 3.4-1(b)中选择的坐标，

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{-1}{x_2} & 0 & \dfrac{1}{x_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{x_3 - x_2}{x_2 y_3} & 0 & \dfrac{-x_3}{x_2 y_3} & 0 & \dfrac{1}{y_3} \\ \dfrac{x_3 - x_2}{x_2 y_3} & \dfrac{-1}{x_2} & \dfrac{-x_3}{x_2 y_3} & \dfrac{1}{x_2} & \dfrac{1}{y_3} & 0 \end{bmatrix}}_{[\boldsymbol{B}]} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \tag{3.4-10}$$

对任意选择坐标轴的应变-位移矩阵在第 7.2 节中讨论。如果单元厚度 t 和本构矩阵[$\boldsymbol{E}$]为常量，公式 3.3-7 导出 6×6 单元刚度矩阵[$\boldsymbol{k}$]=[$\boldsymbol{B}$]^{T}[$\boldsymbol{E}$] [$\boldsymbol{B}$]tA。在随后的章节中，会将常应变三角形的性能与其它三角形单元的性能进行比较。

单元缺点 线性三角形是进行平面应力分析中最初应用的单元[1.7]。它用得并不是很好。在弯曲中，这些单元的网格会过刚。当改进网格时能接近正确结果，但收敛比较慢。在平面应变条件下，网格可能“锁定”，使得它根本不能变形。

考虑图 3.4-2(a)中受纯弯矩作用的梁。这个模型中的每个 CST 显示了常量 σ_x，而不是精确解所需要的随 y 线性变化的 σ_x。所以沿 x 轴 σ_x 并不像梁理论期望的那样为零。相反地，

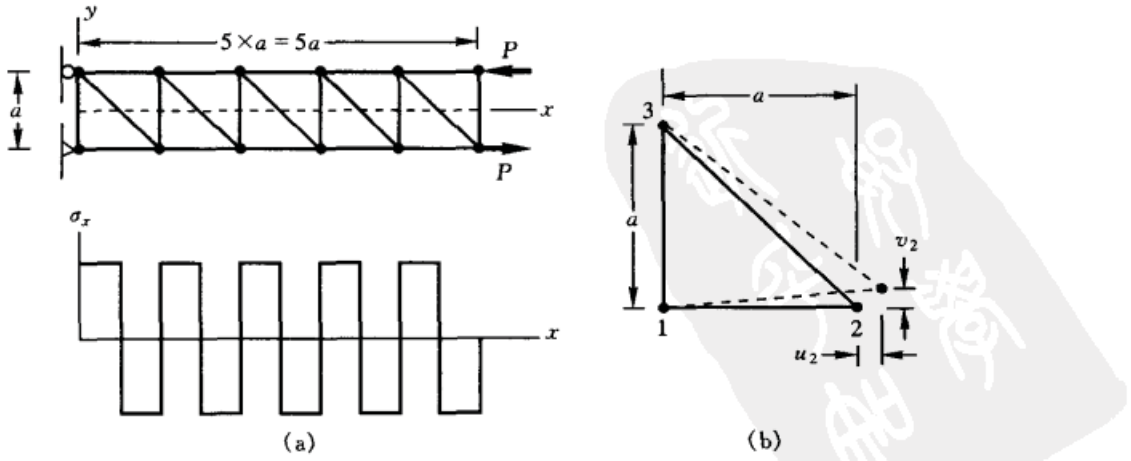


图 3.4-2 (a)受纯弯矩作用以常应变三角形建模的梁中沿 x 轴的应力 σ_x；
(b)模型中左下常应变三角形的变形

σ_x 表现为所示的矩形波模式。这个常应变三角形模型预示了 y 方向的偏差以及 σ_x 应力只是正确结果的 1/4。是常应变三角形不能表示应力和应变的线性变化，部分地造成了这种不正确的结果。但是常应变三角形也显示了一个虚的剪应力。考虑图 3.4－2(b)所示的模型中左下角的单元，有非零的自由度 u_2 和 v_2，就像它应有的位移一样。把公式 3.4－10 应用到这个单元，其中 $x_2=a, x_3=0$，我们得到 $\varepsilon_x=u_2/a, \varepsilon_y=0, \gamma_{xy}=v_2/a$。这个单元出现了不应该出现的横向剪应变。虚的剪应变吸收能量，这样如果指定一个假设的变形，需要产生这种变形的载荷就大于正确值。这就是在常应变三角形的弯曲中刚度增大的一个原因。

在平面应变条件下，当常应变三角形被用来作橡胶状物质的模型时，就会出现网格的锁定。当垂直于分析平面的应变被约束为零时就是平面应变。当 $\varepsilon_z=0$ 时，公式 3.1－3 的矩阵 $[\boldsymbol{E}]$必须被下式代替

$$[\boldsymbol{E}]=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2\end{bmatrix} \tag{3.4-11}$$

$\varepsilon_z=0$ 时，认为体积应变 $\Delta V/V=\varepsilon_x+\varepsilon_y$。当 ν 接近 0.5 时，就像橡胶状物质那样，产生体积应变所需的压力接近无穷大。因此，刚度矩阵对产生体积应变的节点位移几乎有无穷的阻力。例如在图 3.4－3 中，节点 5 任意的平面位移都将在单元 1－4－5 和/或者单元 1－5－2 中产生体积应变。所以，当 ν 接近 0.5 时，节点 5 几乎不动。同样的分析能扩展到节点 6，8，等等，最后的结论就是整个网格实际上是刚性的或“锁定”的。相应的标量场单元，从公式 3.4－1 到 3.4－7，则不会出现与体积应变相似的样式，也不会锁定。

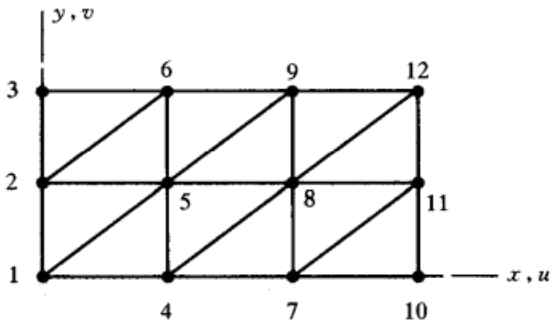


图 3.4－3　在平面应变条件下可能被锁定的常应变三角形网格

3.5　二次三角形(LST)

像有限元分析里常用的那样，在单向或多向变形模式里，术语“锁定”是指额外刚度。对形状可能为非矩形的单元，大的纵横比可能因非矩形产生不利的相互影响而加剧锁定。通常，锁定并不意味着完全刚性。这样，锁定可能不影响随网格改进的收敛性，但是可能影响中间网格密度合理的取舍。处理锁定的方法包括补充带附加模式的单元位移场，以及用简化的数值积分来求公式 3.3－7 的值。这些方法没有一个能适用于常应变三角形。

二次三角形如图 3.5－1(a)所示。它除了顶点的节点外还有边上的节点。对应力分析，

节点的自由度在每个节点处是 u_i 和 v_i，$i=1,2,\cdots,6$，每个单元总共 12 个自由度。对广义自由度 a_i，单元位移场是完全二次式

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 \\ v &= a_7 + a_8 x + a_9 y + a_{10} x^2 + a_{11} xy + a_{12} y^2 \end{aligned} \tag{3.5-1}$$

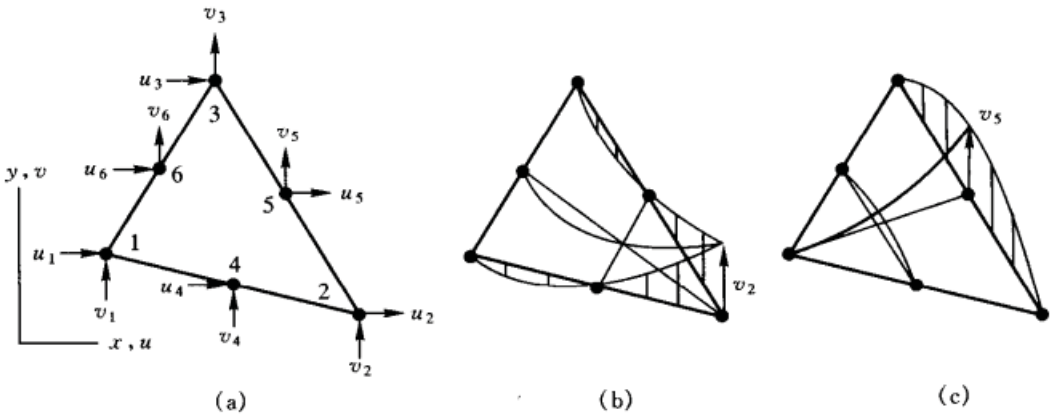


图 3.5-1 (a)二次三角形(LST)和它的 12 个自由度；(b,c)与顶点和边上的自由度有关的位移模式(仅为了形象化，设想位移发生在单元平面的法线方向。)

根据公式 3.1-6 和 3.5-1，单元应变为

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_2 + 2a_4 x + a_5 y \\ \varepsilon_y &= a_9 + a_{11} x + 2a_{12} y \\ \gamma_{xy} &= (a_3 + a_8) + (a_5 + 2a_{10}) x + (2a_6 + a_{11}) y \end{aligned} \tag{3.5-2}$$

如果所建模型问题要求，单元应变可在单元内部线性变化。因此，这个单元可称做一个 LST，即“线性应变三角形”。因为位移函数在 x 和 y 上是二次的，单元内所有的线，包括它的边，能够变形为二次曲线(图 3.5-1(b),(c))。用与公式 3.7-3 和 3.7-4 有关的推证，可以证明这个单元能够作为纯弯曲问题精确解的模型。

在图 3.5-2 中，CST 和 LST 单元被用来解决悬臂梁问题。右端横向载荷在梁的深度 h

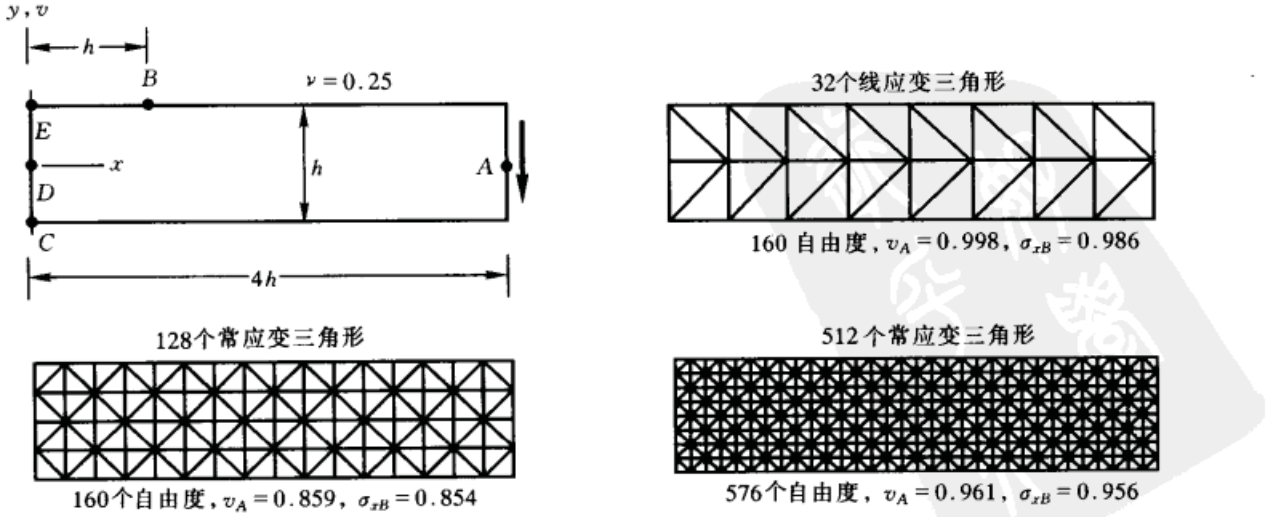


图 3.5-2 等厚度各向同性悬臂梁顶端挠度 v_A 和在点 B 的弯曲应力 σ_x[3.4]

上呈抛物线分布。图 3.5－2 中的每个值是数值计算结果与弹性理论精确计算结果之比[3.1]。尽管有更多的自由度，但即使更好的 CST 网格也没有 LST 网格精确。在建立特定问题的模型时，LST 唯一的缺点是 γ_{xy} 在 y 方向表现为线性而不是二次式。

在第 7 章中会继续讨论 LST 单元，那里会完成单元公式推导并把它推广到允许边有初始曲率（即加载之前）的情况。

3.6　双线性矩形（Q4）

双线性矩形是一个有 8 个自由度的 4 节点平面单元（图 3.6－1）。名字“Q4”表示单元是有四个节点的四边形。对广义自由度 a_i，它的位移场和相应的应变场为

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy \\ v &= a_5 + a_6 x + a_7 y + a_8 xy \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \varepsilon_x &= a_2 + a_4 y \\ \varepsilon_y &= a_7 + a_8 x \\ \gamma_{xy} &= (a_3 + a_6) + a_4 x + a_8 y \end{aligned} \tag{3.6-1}$$

形状函数能够用公式 3.2－1 到 3.2－3 中使用的同样理论来确定，但如下应用拉格朗日插值公式 3.2－7 更有指导性。考虑 x 方向位移 u。首先，我们沿着顶边和底边进行线性插值得到边位移 u_{12} 和 u_{43}。这样，在公式 3.2－7 中，$x_1 = -a$，$x_2 = a$，所以

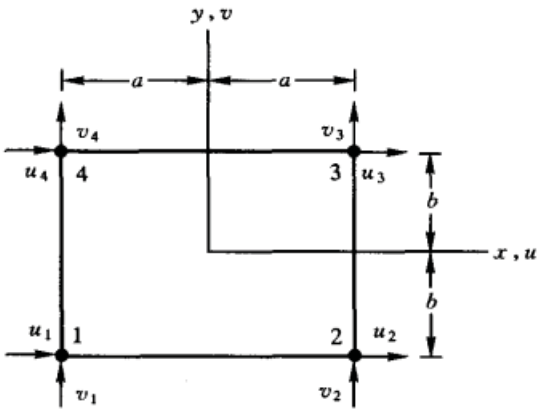


图 3.6－1　双线性矩形单元和它的 8 个节点自由度

$$\begin{aligned} u_{12} &= \frac{a-x}{2a}u_1 + \frac{a+x}{2a}u_2 \\ u_{43} &= \frac{a-x}{2a}u_4 + \frac{a+x}{2a}u_3 \end{aligned} \tag{3.6-2}$$

然后，我们在 y 方向于 u_{12} 和 u_{43} 之间进行线性插值。

$$u = \frac{b-y}{2b}u_{12} + \frac{b+y}{b}u_{43} \tag{3.6-3}$$

把公式 3.6－2 代入公式 3.6－3 导出 $u = \sum N_i u_i$，其中 N_i 是 4 节点矩形单元的一个形状函数。在 N_i 中能够作为线性形状函数乘积而产生的这个结果也可从公式 3.2－7 中得到。实际上，拉格朗日乘式能被用作拉格朗日单元的形状函数。二阶和高阶拉格朗日单元，如果是二维的，有边和内节点，如果是三维的，有边、面和内节点。4 节点矩形单元，形状函数 N_i 为

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(a-x)(b-y)}{4ab} & N_2 &= \frac{(a+x)(b-y)}{4ab} \\ N_3 &= \frac{(a+x)(b+y)}{4ab} & N_4 &= \frac{(a-x)(b+y)}{4ab} \end{aligned} \tag{3.6-4}$$

这个单元被称做"双线性"是因为它的形状函数是一维线性多项式的乘积。N_i 只包含一个二次项 xy。形状函数表示了公式 3.2-7 所述的三个性质。完整的单元位移场 $\{\boldsymbol{u}\}=[\boldsymbol{N}]\{\boldsymbol{d}\}$ 为

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ v_4 \end{Bmatrix} \tag{3.6-5}$$

根据节点自由度,单元应变是 $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}=[\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{d}\}$。从公式 3.1-9,3.6-4 和 3.6-5,得到

$$[\boldsymbol{B}] = \frac{1}{4ab} \begin{bmatrix} -(b-y) & 0 & (b-y) & 0 & (b+y) & 0 & -(b+y) & 0 \\ 0 & -(a-x) & 0 & -(a+x) & 0 & (a+x) & 0 & (a-x) \\ -(a-x) & -(b-y) & -(a+x) & (b-y) & (a+x) & (b+y) & (a-x) & -(b+y) \end{bmatrix} \tag{3.6-6}$$

单元刚度矩阵为

$$\underset{8\times8}{[\boldsymbol{k}]} = \int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a} \underset{8\times3}{[\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}} \underset{3\times3}{[\boldsymbol{E}]} \underset{3\times8}{[\boldsymbol{B}]}\, t\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3.6-7}$$

这里 t 是单元厚度。被积函数包括 x 和 y 的一次和二次项,它是容易计算的。

前面的 Q4 单元被限定为矩形,这是一个很严格的限制。第 6.2 节要讨论的等参单元公式消除了这种形状限制。一般的四边形单元有与矩形单元相似的特性。

单元缺陷 像 CST 一样,Q4 单元不能表示纯弯曲。当弯曲时,它显示剪应变和期望的弯曲应变。这个寄生的剪力吸收应变能,使得对于给定的弯曲变形,产生变形的弯矩将大于正确值,换句话说,Q4 单元显示剪切锁定性能。这个问题定量讨论如下。

如 4.4 节所示,在一个体积为 V 的没有初始应力或应变的线性弹性体中,应变能 U 从下面的表达式计算出

$$U = \frac{1}{2}\int \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{E}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\}\mathrm{d}V \qquad \text{其中对二维情况} \qquad \{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \lfloor \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy} \rfloor^{\mathrm{T}} \tag{3.6-8}$$

并且,对各向同性和平面应力情况,$[\boldsymbol{E}]$ 由公式 3.1-3 给出。对厚度为 t 的平面单元,体积增量为 $\mathrm{d}V=t\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。在纯弯曲中,如图 3.6-2(a)所示,块状材料的应变为

$$\varepsilon_x = -\frac{\theta_b y}{2a} \qquad \varepsilon_y = \nu\frac{\theta_b y}{2a} \qquad \gamma_{xy} = 0 \tag{3.6-9}$$

当一个 Q4 单元被弯曲时,如图 3.6-2(b)所示,它的顶边和底边仍旧是直的,每个顶点只有大小为 $\theta_{e1}b/2$ 的水平位移。因此,根据应变-位移关系 $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}=[\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{d}\}$,单元应变为

$$\varepsilon_x = -\frac{\theta_{e1} y}{2a} \qquad \varepsilon_y = 0 \qquad \gamma_{xy} = -\frac{\theta_{e1} x}{2a} \tag{3.6-10}$$

我们看到这个单元中的 ε_x 是精确的,ε_y 是近似的(但如果 $\nu=0$ 则是精确的)。最重要的是非零的剪应变 γ_{xy},它在弯曲时应该为零。一个 Q4 单元的弯曲变形自动产生这个虚的剪应变,这个剪应变因此被看作寄生剪应变。公式 3.6-8 和 3.6-9 导出在实际材料块中的应变能

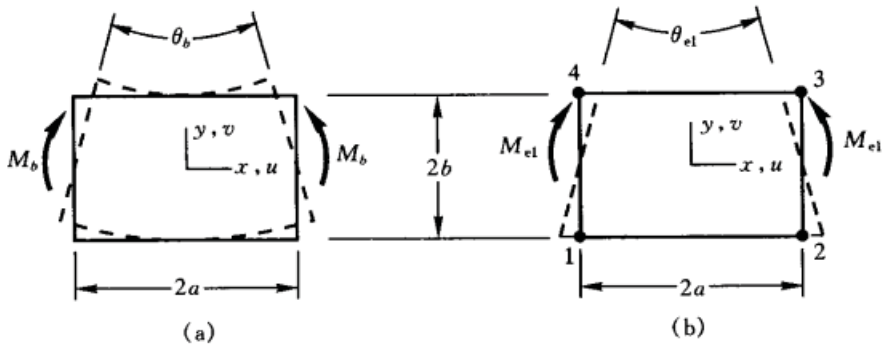


图 3.6－2　(a)纯弯曲下矩形块材料的变形模式；
(b)在弯曲载荷下 Q4 单元的变形模式

U_b，公式 3.6－8 和 3.6－10 导出单元中的应变能 U_{el}。力矩载荷所作的功等于积聚的应变能，所以 $M_b\theta_b/2=U_b$，$M_{el}\theta_{el}/2=U_{el}$。如果 $\theta_{el}=\theta_b$，那么 $M_{el}>M_b$，$U_{el}>U_b$。或者，如果 $M_b=M_{el}$，那么产生的转角比为

$$\frac{\theta_{el}}{\theta_b}=\frac{1-\nu^2}{1+\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^2} \tag{3.6-11}$$

$(a/b)^2$ 项只是由于寄生剪切才出现的。当纵横比 a/b 无限增长时，比值 θ_{el}/θ_b 接近零。这种情况被称做剪切锁定。剪切锁定不妨碍弯曲，但弯曲倾向从单元特性中被排除掉，因为它受到不希望有的剪切模式中的高应变能的惩罚。

图 3.6－3 描述了一种检验单元弯曲能力的有限元模式。每个单元中的应力 σ_x 独立于 x，这可能是公式 3.6－1 或 3.6－6 的验证所期望的。除了在单元的中心，x 轴上的剪应力 τ_{xy} 被寄生剪切作用所支配，这种作用在有更大弯曲变形的单元中更为显著。如果单元是正方形并

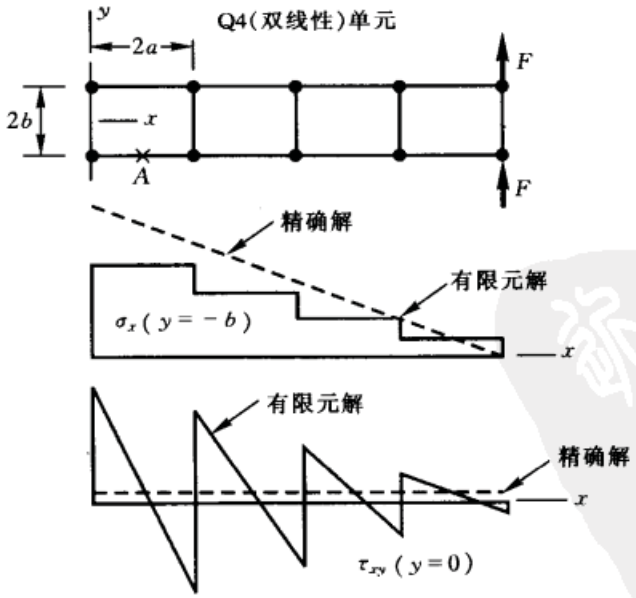


图 3.6－3　用 Q4 单元建模的悬臂梁，显示了下表面轴向应力 σ_x 和 x 轴上剪应力 τ_{xy} 的变化特点

且泊松比为 0.3,顶端横向挠度和在点 A 的 σ_x(这里 $x=a$)都只相当于它们的正确值的 2/3。(对于 $a/b=1$ 并且 $0<\nu<0.5$,公式 3.6-11 导出 $0.600<\theta_{e1}/\theta_b<0.686$,$\nu=0.300$ 时,$\theta_{e1}/\theta_b=0.674$。)另外的例题出现在图 3.7-2 中。

四节点四边形中寄生剪切作用的补救方法将在 3.10 节中讨论。

3.7 二次矩形(Q8, Q9)

二次矩形可通过增加线性矩形边上的节点来得到,就像给 CST 增加边上的节点得到 LST 三角形单元一样。这里我们描述位移场和应变场。形状函数和单元方程式推导过程在 6.4 节中讨论,那里单元允许是任意形状的四边形,并且允许有曲边。

用广义自由度表示,图 3.7-1 中的单元位移场是

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 + a_7 x^2 y + a_8 xy^2 \\ v &= a_9 + a_{10} x + a_{11} y + a_{12} x^2 + a_{13} xy + a_{14} y^2 + a_{15} x^2 y + a_{16} xy^2 \end{aligned} \tag{3.7-1}$$

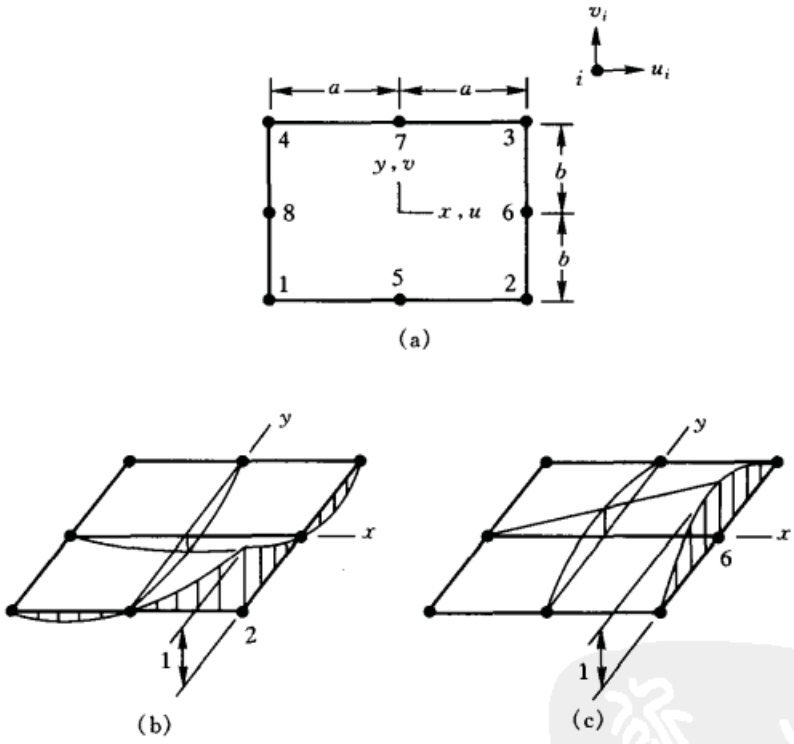


图 3.7-1 (a)二次四边形;(b,c)与顶点和边上的自由度有关的位移模式(仅为了形象化,认为位移发生在单元平面的法线方向)

我们使用"Q8"来命名这个 8 节点的四边形。也使用"奇运"(serendipity)这个名字;建议读者去阅读词典的解释。令 x 或 y 为常量,我们从公式 3.7-1 中可看到单元中的线,包括单元的边,在变形单元中能成为二次曲线。从公式 3.1-6 和 3.7-1 中求得单元应变为

$$\varepsilon_x = a_2 + 2a_4 x + a_5 y + 2a_7 xy + a_8 y^2$$
$$\varepsilon_y = a_{11} + a_{13} x + 2a_{14} y + a_{15} x^2 + 2a_{16} xy$$
$$\gamma_{xy} = (a_3 + a_{10}) + (a_5 + 2a_{12}) x + (2a_6 + a_{13}) y + a_7 x^2 + 2(a_8 + a_{15}) xy + a_{16} y^2 \tag{3.7-2}$$

作为一个选择，第九个节点可以放在 $x=y=0$ 处，产生我们称之为 Q9 的一个单元。这个节点对单元来说是内部的；它不连接到任何其它一个单元。对第九个节点，公式 3.7－1 中的 u 和 v 要加上 $u=a_{17}x^2y^2$ 和 $v=a_{18}x^2y^2$，应变表达式要增加包含 a_{17} 和 a_{18} 的项。单元 Q9 是一个“拉格朗日”单元，它的形状函数可以像公式 3.6－3 后面对单元 Q4 附注的那样，作为拉格朗日乘式来得到。单元 Q9 是四次式，它的形状函数是一维二次函数的乘积。在单元刚度矩阵公式 3.3－7 中，$[\boldsymbol{E}]$的大小是 3×3，Q8 单元中$[\boldsymbol{B}]$的大小是 3×16，Q9 单元中$[\boldsymbol{B}]$的大小是 3×18。这样各自的刚度矩阵是 16×16 和 18×18。

二次矩形没有显示双线性单元被弯曲时寄生剪切效应的影响。要证明确实是这样，设图 3.6－3 中的悬臂梁由 Q8 单元组成，并承受逆时针的顶端力矩来代替顶端横向力。精确的位移场和应变是[3.1]

$$u = -Cxy \qquad v = \frac{C}{2}(x^2 + \nu y^2) \qquad \text{和} \qquad \varepsilon_x = -Cy \quad \varepsilon_y = \nu Cy \quad \gamma_{xy} = 0 \tag{3.7-3}$$

这里，C 是一个常量。在公式 3.7－1 中，a_i 可以采用公式 3.7－3 中得到的值。一个特殊情况，除了让

$$a_5 = -C \qquad a_{12} = \frac{C}{2} \qquad a_{14} = \nu\frac{C}{2} \tag{3.7-4}$$

其余所有的 a_i 为零，因此，由公式 3.7－2 得到 $\varepsilon_x=-Cy$，$\varepsilon_y=\nu Cy$，$\gamma_{xy}=0$，它们是正确的应变。a_{12}项允许 a_5 项在单元中没有产生非零的 γ_{xy} 时存在。所以，在弯曲起主导的地方，人们期望 Q8 和 Q9 单元能很好地发挥作用。

数值计算的例子出现在图 3.7－2 中。悬臂梁是等厚度的，并且长是深度的 10 倍。给出

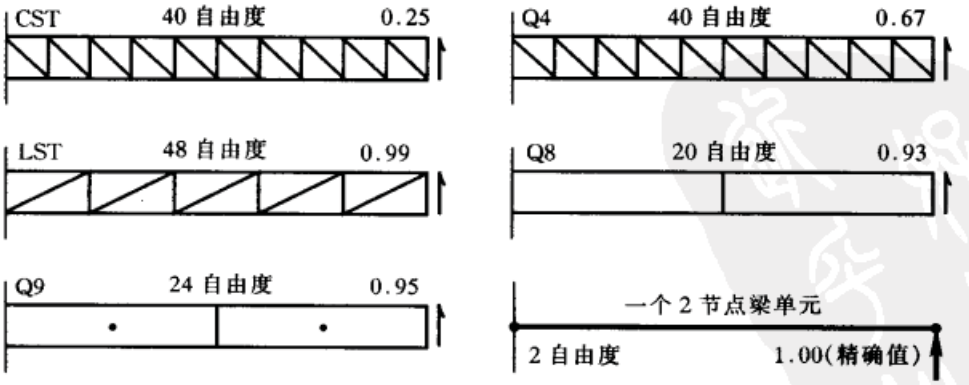


图 3.7－2　纵横比为 10 和泊松比 $\nu=0.30$ 的受有顶端载荷的悬臂梁。作为计算值与精确值之比记录顶端横向位移

的横向顶端位移是计算值与精确值之比。像期望的那样，Q9 单元比 Q8 单元能更好地解决问题。在第 6 章里将进一步讨论这两个单元和非矩形的情况，并通过数值积分来建立刚度矩阵。在第 6 章的术语中，图 3.7－2 中的数据通过“完全积分”单元得到。图 3.7－2 中基本的 2 节点梁单元提供了一个精确的结果，尽管只有两个非零的自由度。这个模型告诉我们基本梁单元对这个特殊的问题是最适当的。图 3.7－2 中其余部分显示了使用其它一些单元的情况，但这些有限元模型不推荐用在悬臂梁问题中。

3.8 矩形实体单元

矩形立方体单元有时称做“块”单元，是矩形平面单元的直接扩展。图 3.8－1 中显示了两个块单元。在第一个 8 节点立方体单元中，x 方向位移 u 由多项式位移场来描述

$$u = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z + a_5 xy + a_6 yz + a_7 zx + a_8 xyz \tag{3.8-1}$$

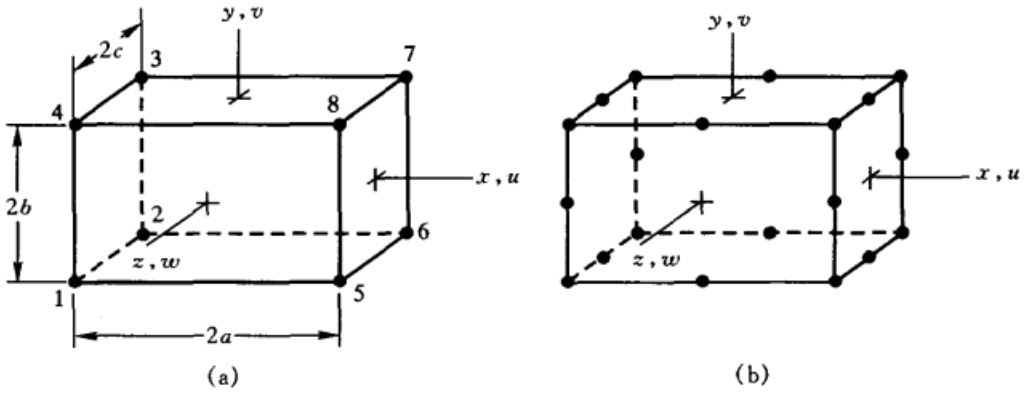


图 3.8－1 矩形实体单元

(a)有 24 个自由度的 8 节点三线单元；(b)有 60 个自由度的 20 节点实体单元

对有 24 个自由度的单元，位移 v 和 w 有相似的表达式。根据形状函数，单元位移场 $\{\boldsymbol{u}\} = [\boldsymbol{N}]\{\boldsymbol{d}\}$ 为

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & \cdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ w_8 \end{Bmatrix} \tag{3.8-2}$$

其中每个形状函数 N_i 的形式为

$$\frac{(a \pm x)(b \pm y)(c \pm z)}{8abc} \tag{3.8-3}$$

代数符号对 N_2 全是负的，对 N_8 全是正的，等等（选择符号时，记着当设想 x，y 和 z 为节点 i

的坐标时 $N_i=1$)。这个单元可以称做"三线的",因为它的每个形状函数包括三个线性函数的乘积。在任何一个单元的表面,例如表面 $z=c$,公式 3.8-1 和 3.8-3 导出 4 节点矩形单元所用的形式,即公式 3.6-1 和 3.6-4。应变-位移矩阵是$[\boldsymbol{B}]=[\partial][\boldsymbol{N}]$,其中$[\partial]$由公式 3.1-9 中后面的矩形矩阵给出。单元刚度矩阵为

$$\underset{24\times24}{[\boldsymbol{k}]}=\int_{-c}^{c}\int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a}\underset{24\times6}{[\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}}\underset{6\times6}{[\boldsymbol{E}]}\underset{6\times24}{[\boldsymbol{B}]}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{3.8-4}$$

图 3.8-1(b)所示的 20 节点的立方体有角节点和中边节点。它的 x 方向位移 u 由多项式位移场来描述

$$\begin{aligned}u=a_1+a_2x+a_3y+a_4z+a_5x^2+a_6y^2+a_7z^2+a_8xy+a_9yz+a_{10}zx+a_{11}x^2y+\\a_{12}xy^2+a_{13}y^2z+a_{14}yz^2+a_{15}z^2x+a_{16}zx^2+a_{17}xyz+a_{18}x^2yz+a_{19}xy^2z+\\a_{20}xyz^2\end{aligned} \tag{3.8-5}$$

为了保证单元间的协调性,三个立方项 x^3,y^3 和 z^3 不出现。相反使用三个四次方项 x^2yz,xy^2z 和 xyz^2。对总共有 60 个自由度的单元,位移 v 和 w 有相似的表达式。单元刚度矩阵公式类似于公式 3.8-4,除了$[\boldsymbol{B}]$是一个 6×60 的矩阵,$[\boldsymbol{k}]$是一个 60×60 的矩阵。

前面的立方体单元的性能类似于相应的平面单元 Q4 和 Q8 的性能。立方体单元能显示弯曲模式,例如图 3.6-2 中那样,但是有 z 方向的变化,也能显示相对于每个坐标轴的扭转模式。像在本章里描述的那样,这些立方体单元被限制为矩形(像砖块似的)形状。允许非矩形的表述将在第 6.5 节中讨论。

3.9 插值函数的选择

在这一节里,我们回顾一下前章中讨论的单元,并注意到它们所做的选择及其原因。

插值域的选择可能显得有些任意。对一个 3 节点的三角形,代替公式 3.4-8 中的线性位移场,为什么不用 $u=a_1x^2+a_2xy+a_3y^2$ 那样一个二次式,以及类似的式子用于 v? 选择线性场是因为如果网格变密向正确结果收敛的话,一个单元就必须能显示刚体位移和常应变状态。因此多项式场的最低次幂的项一定不能被忽略。对一个有公式 3.4-8 的位移场的 3 节点三角形,公式 3.4-9 给出常应变状态,刚体位移为 a_1(x 方向平移),a_4(y 方向平移)和 a_5-a_3(刚体旋转,在弹性理论[3.1]中为$(v_{,x}-u_{,y})/2$)。多项式 $a_1x^2+a_2xy+a_3y^2$ 不提供必要的常应变和刚体运动能力。讨论过的所有基于位移的单元的插值域都包含常数项和线性项。对必须弯曲的单元,例如梁单元、板单元和壳单元,收敛条件要求常数曲率也是可能的。例如,像前面公式 3.2-8 中梁单元用的$\lfloor \boldsymbol{X} \rfloor$。(收敛将在第 4.9,6.13 和 9.6 节中进一步讨论。)

令人满意的多项式位移场另一个特性是平衡:即场与 x 和 y 无关。平面单元使用的多项式的项如图 3.9-1。例如在单元 Q4 中,在三个可能的二次项 x^2,y^2 和 xy 中间,平衡要求我们选择后者。若我们使用了 x^2 或 y^2,而不使用 xy,则在一个受相对面的力偶作用的正方形单元中,产生的曲率的大小将取决于这个力偶是作用在与 x 方向平行的边还是与 y 方向平行的边。类似的考虑影响到平面单元 Q8 和 Q9 及立方体单元中更高次幂的选择。一般情况下,单元列式中所做的选择应该给单元提供几何各向同性或构架不变性,以便有限元结构的性质与

它单元的局部 xy 坐标相对于整体坐标系的定位无关。对坐标系方位敏感的有限元模式会出现人为的偏见或导致各向异性[3.3]。

项目	CST	LST	Q4	Q8(Q9)
常量	1	1	1	1
线性	x y	x y	x y	x y
二次	------- x^2	xy y^2	xy	x^2 xy y^2
三次	----------	----------	----------	x^2y xy^2
四次	----------	----------	----------	(x^2y^2)

图 3.9-1 不同平面单元中插值函数使用的项

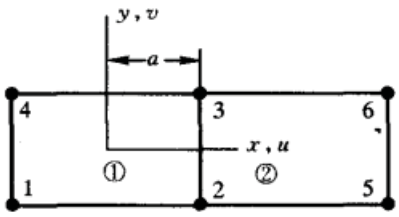


图 3.9-2 相邻单元

你也许会建议把一些项结合起来，例如在 Q4 单元中用 x^2+y^2 代替 xy。这个选择提供了平衡但使得单元不协调。证明如下。对于通常的位移场，公式 3.6-1 考虑一个单元的边，例如图 3.9-2 中单元 1 $x=a$ 的边。在这个边上，位移 u 在 y 方向是线性的，并且由节点的自由度 u_2 和 u_3 完全确定(见公式 3.6-4)。在右边的相邻 Q4 单元，即图 3.9-2 中的单元 2，u 在 y 方向沿着左边是线性的，并且由两个相同节点的自由度 u_2 和 u_3 完全确定。这样，两个单元沿着公共边有相同的位移 $u=u(y)$，因此在两个相邻的 Q4 单元之间没有缺口或重叠。但是如果在位移场中用 x^2+y^2 代替 xy，单元 1 的边 $x=a$ 上的 u 在 y 方向将是二次的，并且不能单独由自由度 u_2 和 u_3 完全确定，它意味着这个边上的 u 也将取决于节点 1 和 4 处的自由度。这样如果图 3.9-2 中节点 2,3,5 和 6 的所有自由度为零，但是节点 1 和 4 的自由度为非零，则在单元 1 和 2 中沿着连接节点 2 和 3 的边的位移就不是相同的。类似的证明也能用于 Q8 单元，说明在位移表达式中 x^3 和 y^3 不能代替 x^2y 和 xy^2。

在 Q4 单元中，用 x^2+y^2 代替 xy 还有其它缺点。法向应变将是 $\epsilon_x=a_2+2a_4x$ 和 $\epsilon_y=a_7+2a_8y$。与公式 3.6-1 中的应变相比较，我们看出表现弯曲变形的能力消失了。而且，如果试图用公式 3.2-1 到 3.2-3 的步骤确定形状函数，我们会发现矩阵[A]是奇异的因而没有逆阵。

在二维中，如果一个多项式包含 x^ly^m 这种形式的项，其中 l 和 m 是非负整数并且 $l+m=n$，则多项式是 n 次的。如果多项式包括所有 l 和 m 的组合，而且满足 $l+m\leqslant n$，则它是完全的。例如，一个完全二次式，$n=2$，它的形式为 $u=a_1+a_2x+a_3y+a_4x^2+a_5xy+a_6y^2$。二维中次数为 n 的完全多项式包含 $(n+1)(n+2)/2$ 个项(见图 3.9-3)。三维中也相类似，一个完全二次式包括 10 项，即一个常数项，线性项 x，y 和 z，二次项 x^2，y^2，z^2，xy，yz 和 zx。三维中次数为 n 的完全多项式包含 $(n+1)(n+2)(n+3)/6$ 个项(见图 3.9-4)。

位移表达式是一个完全多项式的单元自动具有平衡场。CST 单元使用完全线性多项式；LST 单元使用完全二次多项式。8 节点立方体单元的公式 3.8-1 是一个不完全三次式。因为它除了常数项和线性项外，只包含三个二次项和一个三次项。然而它是平衡的，因为它与坐标方向无关。

一个单元能显示的独立位移模式的数量等于它的自由度的数量。CST 单元中，它所有的

帕斯卡三角形	阶次和项数
1	0 （常量） 1 项
$x \quad y$	1 （线性） 3 项
$x^2 \quad xy \quad y^2$	2 （二次） 6 项
$x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3$	3 （三次） 10 项
$x^4 \quad x^3y \quad x^2y^2 \quad xy^3 \quad y^4$	4 （四次） 15 项
$x^5 \quad x^4y \quad x^3y^2 \quad x^2y^3 \quad xy^4 \quad y^5$	5 （五次） 21 项

图 3.9－3　帕斯卡三角形，表明两个独立变量 x 和 y 的完全多项式中项的数量

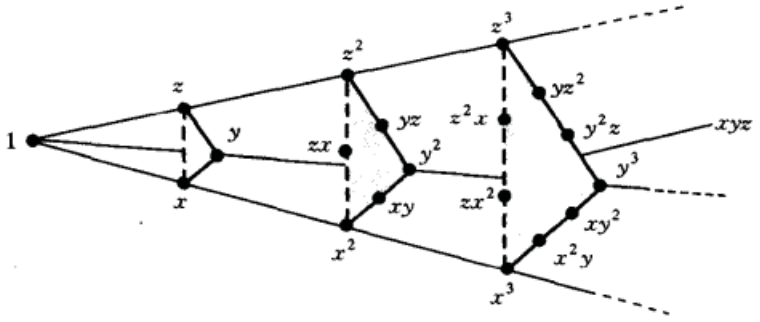


图 3.9－4　金字塔显示三个独立变量 x，y 和 z 的完全多项式中项的数量

6 个自由度要给出刚体运动和常应变的基本模型。8 节点立方体单元有 24 个自由度，其中 6 个用来描述刚体运动(3 个平移，3 个旋转)，另外 6 个描述常应变状态。剩下的 12 个独立变形模式与弯曲、扭转和其它非常应变状态有关。

3.10　改进三角形和四边形

提高 3 节点三角形和 4 节点四边形的性能的方法包括增加旋转自由度。4 节点四边形也能通过增加不协调模式和单元刚度矩阵的“不完全积分”来改进性能。依据单元种类，这些方法减少甚至消除寄生剪应变。但这些方法仅适用于应力分析单元而不适用于标量场单元，因为类似于剪应变的梯度项不出现在标量场问题中。

旋转自由度　一个平面单元中的旋转自由度是个矢量，它垂直于分析平面。旋转自由度的一个好处是能给予只有角节点的单元令人满意的性能，比既有角节点又有边中间节点的单元使用更少的自由度。例如，有旋转自由度并仅有顶部节点的三角形单元，比有 6 个自由度的 CST 的性能好得多，尽管还不如 12 个自由度的 LST 完善。它的其它好处出现在壳分析中。一个壳单元能容易地由一个平面单元和一个平板弯曲单元的组合来形成。如果平面单元中不存在旋转自由度，这个组合就失去了垂直于该单元且无用的旋转自由度，它们位于平面(膜)内的优点也得不到开发。在每个节点使用全部 6 个自由度的壳单元可能最适合于分析折叠的平板，那里许多单元是共面的。在建立连续弯曲的壳的模型时，旋转自由度可能与弯曲变形产生不利的相互作用[3.3]。

在它们最简单的计算过程中，平面单元中的旋转自由度在每个角增加一个旋转自由度 的

同时，在每个边的中间移走两个自由度。这样，平面单元 LST 和 Q8 能被转换为只有角节点的单元，每个节点有 3 个自由度。在一个大型的 LST 平面网格中，这种转换使自由度的总数减小为原先的 5/8。Q8 单元减少为原先的 1/2。图 3.8－1(b)中的 20 节点立方体单元的转换方法为移走 12 个边中间节点的平移自由度，在每个角的节点上增加 3 个旋转自由度。这样，在一个大型 3 维网格中自由度的数量被减小 1/2。

考虑平面单元的一个典型边，如图 3.10－1(a)，其中 δ 是由于在节点 i 和 j 处的旋转自由度 ω_i 和 ω_j 引起的边的法向位移的分量。我们把 δ 看作在边切向坐标 s 处的二次式。这样，δ 和它在边的中间的值 δ_m 为

$$\delta = \frac{s(L-s)}{2L}(\omega_j - \omega_i) \qquad \delta_m = \frac{L}{8}(\omega_j - \omega_i) \tag{3.10-1}$$

如果 $\omega_i = \omega_j$，边就仍旧是直的。如果 $\omega_i = -\omega_j$，那么 δ_m 能被看作是长度为 L 的简支梁的中跨挠度，此梁受有大小相等、方向相反的末端力矩的作用。公式 3.10－1 的形式可以通过代入 δ_m 和 L 的 x，y 分量来修改，特别地，$\delta_m\cos\beta = u_m$，$\delta_m\sin\beta = v_m$，$L\cos\beta = y_j - y_i$，$L\sin\beta = x_i - x_j$。边的中点处的切向位移被看作是边的两个端点的角节点上的切向位移的平均值。这样，把来自节点 i 和 j 处的贡献加入位移以后，就得到边的中点处的位移分量

$$\begin{Bmatrix} u_m \\ v_m \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \end{Bmatrix} + \frac{\omega_j - \omega_i}{8}\begin{Bmatrix} y_j - y_i \\ x_i - x_j \end{Bmatrix} \tag{3.10-2}$$

图 3.10－1 中的单元 LST 和 TR 中自由度之间的全部关系可写为

$$\lfloor u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_6 \quad v_6 \rfloor^{\mathrm{T}} = \underset{12\times 9}{[\boldsymbol{T}]} \lfloor u_1 \quad v_1 \quad \omega_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \omega_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad \omega_3 \rfloor^{\mathrm{T}} \tag{3.10-3}$$

转换矩阵[$\boldsymbol{T}$]包含 6 个 1 表明当 $i=1,2,3$ 时，有 $u_i = u_i$，$v_i = v_i$，并包含公式 3.10－2 中的信息，表示中间节点的 6 个平移自由度和顶点节点的平移及旋转自由度的关系。因为公式 3.10－3 有与公式 2.4－1 同样的形式，通过公式 2.4－5 的转换，我们能得到图 3.10－1 中 TR 单元 9×9的刚度矩阵[$\boldsymbol{k}$]，显然[$\boldsymbol{k}$]=[$\boldsymbol{T}$]^{T}[$\boldsymbol{k}'$] [$\boldsymbol{T}$]，其中，[$\boldsymbol{k}'$]是单元 LST 的 12×12 的刚度矩阵。就计算而言，应用带[$\boldsymbol{B}$]=[$\boldsymbol{B}'$] [$\boldsymbol{T}$]的公式 3.3－7 效率更高，在当前例子中，应变-位移矩阵对单元 TR 表示为[$\boldsymbol{B}$]，对单元 LST 表示为[$\boldsymbol{B}'$]。

很明显，同类型的转换能应用于 Q8 单元来得到 12 个自由度的平面单元，在它的 4 个角上，每个角有 2 个平移和 1 个旋转自由度。如果图 3.7－2 中的悬臂梁划分为 10 个这种类型的正方形单元，在支点上的所有自由度为零，那么这种模型包括 60 个自由度，顶端横向位移大约为正确值的 90%。

在前面的推导中，旋转自由度使用的符号是 ω 而不是 θ，因为它们不是弹性理论中定义为 $(v_{,x} - u_{,y})/2$ 的真实旋转。关于它的讨论见文献[3.5]。

在前面对旋转自由度的阐述中，公式 3.3－8 中的载荷向量包括节点力矩和节点力。这样，长度为 L 的单元边的法线方向均匀分布载荷 q 产生节点力 $qL/2$ 和节点力矩 $qL^2/12$，如图 2.9－2(a)所示。

“零能量模式”在带有旋转自由度的单元中是可能的。公式 3.10－2 显示，如果在角节点处的平移自由度为零并且 $\omega_i = \omega_j$，那么 $u_m = v_m = 0$。如果网格中所有的旋转自由度都相等的

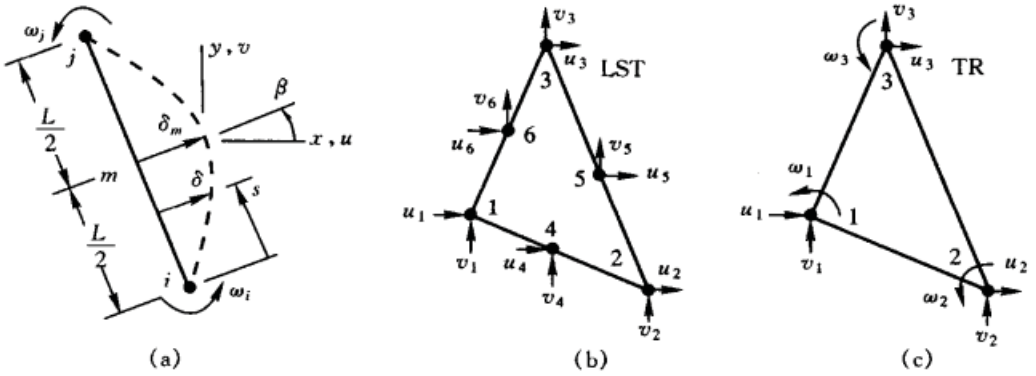
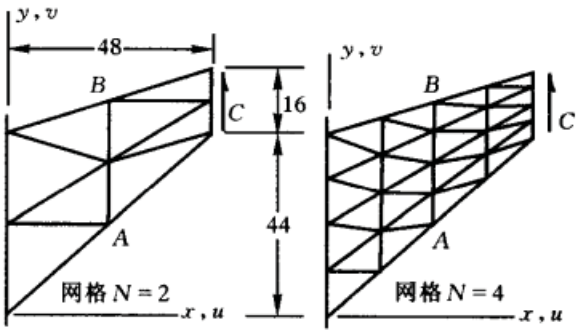


图 3.10－1　(a)与旋转自由度 ω_i 和 ω_j 有关的边位移；
(b)一个线性应变三角形单元(LST)；(c)有旋转自由度的三角形单元(TR)

话，结果就是用这种方式描述的单元网格不显示应变能。因此结构刚度矩阵是奇异的。在网格中设置一个旋转自由度为零可以避免奇异性。对 4 节点四边形单元的另一个替换方法是通过把应变能与函数 $\omega_1-\omega_2+\omega_3-\omega_4$ 联系起来引入一个处罚约束(13.3 节)[3,3]。这个函数对刚体运动和常应变模式不起作用，它不会影响单元或结构刚度矩阵的性能。

因为零能量模式，图 3.10－1(c)的单元 TR 只有 8 个对模型变形起作用的自由度，尽管它总共有 9 个节点自由度。对类似的 4 节点四边形，节点上总共 12 个自由度中有 11 个起作用。因此这两种单元都使用不完全的二次场，因为一个完全的二维二次式，如公式 3.5－1 有 12 个自由度。

从公式 3.10－1 到 3.10－3 描述初始列式以来，有旋转自由度的单元性能有了很大的改进。在许多论文中，我们主要引用了文献[3.6～3.9]中的资料。图 3.10－2 中显示的数字结果来自于文献[3.9]，它的单元比前面的 TR 单元更优越。



网格	CST[a]	参考 3.9[b]
$N=2$	0.502	0.852
$N=4$	0.765	0.954
$N=8$	0.921	0.989

a)无旋转自由度；每个单元有 6 个自由度
b)有旋转自由度；每个有 9 个自由度

图 3.10－2　沿右边有均布载荷的后掠翼，泊松比 $\nu=0.333$；数值结果显示了在 C 点计算的 y 方向挠度(精确值＝1.000)；带旋转自由度的单元是文献[3.9]中使用的

不协调模式(Q6 单元)　单元 Q4 的剪切锁定缺陷可用图 3.6－2 来解释。这个缺陷同不含有 x 和 y 的二次项的单元位移场有关，通过增加期望的模式就能简单地改正过来[3.11]。这样单元 Q6 的位移场就成为

$$u=\sum_{i=1}^{4}N_iu_i+(1-\xi^2)a_1+(1-\eta^2)a_2 \qquad \text{其中} \quad \xi=\frac{x}{a}$$
$$v=\sum_{i=1}^{4}N_iv_i+(1-\xi^2)a_3+(1-\eta^2)a_4 \qquad \eta=\frac{y}{b} \tag{3.10-4}$$

4 个 N_i 是 Q4 单元(公式 3.6-4)的形状函数,4 个 a_i 是广义自由度。a_i 与任何节点无关,并且与任何其它单元的自由度没有关联。这样它们就类似于单元 Q9 内部节点的自由度(第 3.7 节)。a_i 被附加到单元节点自由度列阵$\{\boldsymbol{d}\}$上。实际上,与 a_i 有关的位移模式就是相对于公式 3.10-4 中求和决定的位移场的位移。公式 3.10-4 所描述的单元被命名为 Q6 单元,它表示是一个四边形,并有 6 个形状函数。在第 6.6 节中有单元列式的详细情况,那里将允许有更一般的四边形,在数值例子中用到图 3.10-2 中的后掠翼。

因为图 3.10-3(b)所示的性能,单元 Q6 被称为"不协调"单元。在图示的载荷作用下,单元之间出现了一个间隙。如果作用力反过来,单元将重叠。(在同样的载荷作用下,Q4 单元仍保持协调性,但它们的性能会过度刚化。)对图 3.10-3(b)中上面单元的纯弯曲,角节点没有垂直位移,在公式 3.10-4 中 $a_1=a_2=0$。令 c 为常数,这个位移场中的非零自由度为

$$u_1=c \quad u_2=-c \quad u_3=c \quad u_4=-c \quad a_3=\frac{a}{2b}c \quad a_4=\nu\frac{b}{2a}c \tag{3.10-5}$$

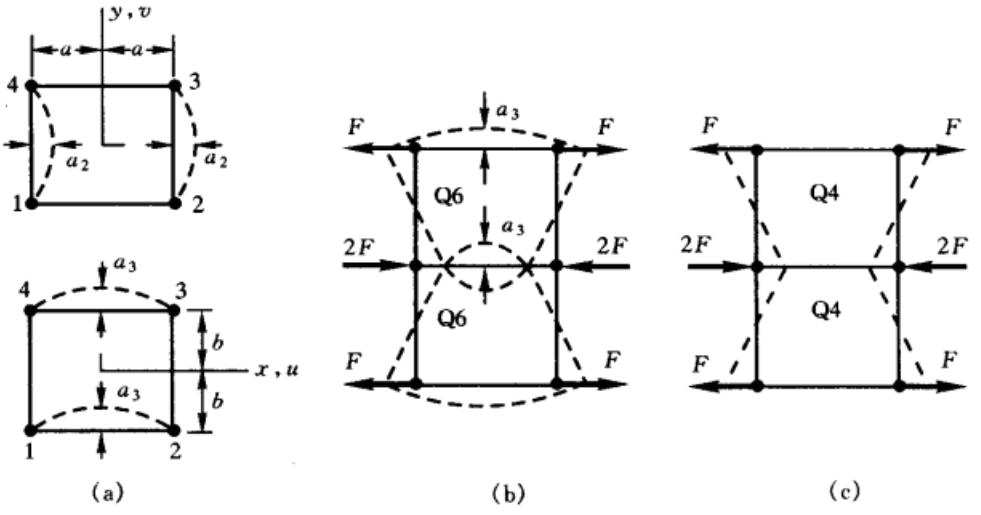


图 3.10-3 (a)Q6 单元中的位移模式 $u=(1-\eta^2)a_2$ 和 $v=(1-\xi^2)a_3$;(b)相邻的 Q6 单元之间的不协调性;(c)相邻的 Q4 单元之间没有不协调性

一般情况下,矩形 Q6 单元中的应变为

$$\varepsilon_x=u_{,x}=\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial N_i}{\partial x}u_i-\frac{2x}{a^2}a_1 \qquad \varepsilon_y=v_{,y}=\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial N_i}{\partial y}v_i-\frac{2y}{b^2}a_4$$
$$\gamma_{xy}=u_{,y}+v_{,x}=\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{\partial N_i}{\partial y}u_i+\frac{\partial N_i}{\partial x}v_i\right)-\frac{2y}{b^2}a_2-\frac{2x}{a^2}a_3 \tag{3.10-6}$$

从公式 3.10-5 和 3.10-6 可以得到图 3.10-3(b)中上面单元的纯弯曲模式的正确应变场:

$$\varepsilon_x=\frac{cy}{ab} \qquad \varepsilon_y=-\nu\frac{cy}{ab} \qquad \gamma_{xy}=0 \tag{3.10-7}$$

在这种弯曲模式中，a_3 使得 γ_{xy} 为零成为可能，a_4 使得关系式 $\varepsilon_y=-\nu\varepsilon_x$ 的存在成为可能。自由度 a_2 和 a_1 分别在旋转 90°到图 3.10－3(b)所示的弯曲场中起类似的作用。但是要注意，只有当单元边相对于弯矩场的取向如图 3.6－2 所示时，才能精确表示纯弯曲。

在一个物理连续体中没有缝隙或重叠。那为什么不协调单元能提供令人满意的模型？这是因为反复优化网格使得单元接近常应变状态。最初的直线，例如没有变形的单元边，当变形产生常应变状态时仍保持直线。这样，一个由 Q6 单元组成的有限元模型当网格被优化时可以接近精确的结果。Q6 单元因粗糙的网格可能过分柔软，使其“从上面”收敛。相反，Q4 单元因总是过分刚化而使其“从下面”收敛(或者准确地说，在一个常应变场中)。

如果再用 Q6 单元求解图 3.6－3 中的梁问题，结果如图 3.10－4 所示。顶端横向挠度只小大约 1%。轴向应力 σ_x 沿着每个单元的垂直(平行于 y 轴)中心线是准确的。横向剪应力是各处的平均值，即为 $\tau_{xy}=2F/A=F/bt$，在图 3.6－3 中所见的 x 方向的虚线没有变化。在实际的梁中，τ_{xy} 随 y 二次变化，但它的 Q6 单元的表达式不包含二次项。就像检查单元位移场所预期的那样，Q4 和 Q6 单元都不显示 σ_x 随 x 正确的线性变化。对 Q6 单元的进一步讨论出现在第 6.6 节中。

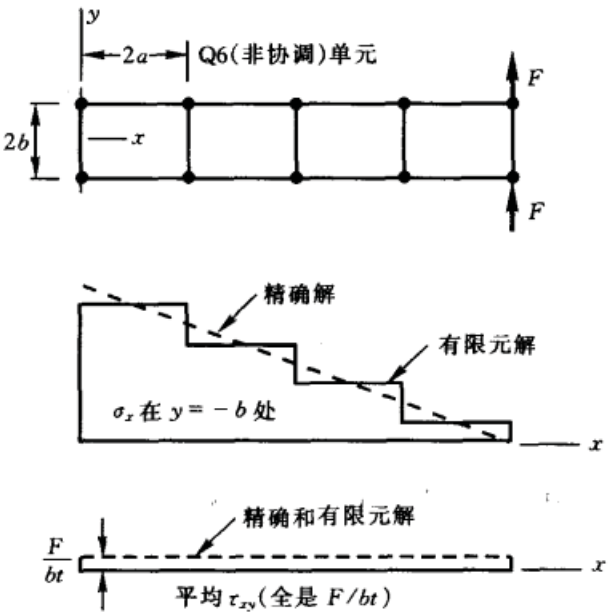


图 3.10－4　用 Q6 单元建模的悬臂梁，图中显示梁下表面的轴向应力 σ_x 的定性变化和 x 轴上的平均剪应力 τ_{xy}(与图 3.6－3 相比较)

不完全积分　在计算四边形单元的刚度矩阵[k]时，公式 3.3－7 中的积分只能数值计算而不能用解析方法求得(6.3 节)。数值积分最简单而经济的形式是一点求积法，它产生一个只抵抗常应变状态的单元。这种单元有与变形的弯曲模式相对应的零能量模式。如果单元要可用的话，这些模型就必须被抑制，所以要提出稳定性方案。这些将在第 6.8 节讨论，那里要引用一些相关的参考资料。

3.11 节点载荷

公式 3.3-8 叙述了怎样把体力和面力转换为协调节点载荷。在这一节里，我们考虑机械载荷并证明协调节点载荷是功等效的，并给出本章讨论的单元加载选择结果。热载荷由公式 3.3-8 中的$\{\boldsymbol{\sigma}_0\}$或$\{\boldsymbol{\varepsilon}_0\}$表示；一维的例子见第 2.10 节，第 6.10 节将作进一步讨论。

协调(功等效)载荷 我们能够证明，节点载荷$\{\boldsymbol{r}_e\}$在节点位移$\{\boldsymbol{d}\}$上所做的功 W 等于分布载荷$\{\boldsymbol{F}\}$和$\{\boldsymbol{\Phi}\}$在$\{\boldsymbol{d}\}$和单元形状函数确定的位移场所做的功。节点载荷所做的功为$W=\{\boldsymbol{d}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{r}_e\}$。把公式 3.3-8 代入$\{\boldsymbol{r}_e\}$，并且在积分中注意$\{\boldsymbol{d}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{N}]^{\mathrm{T}}=\{\boldsymbol{u}\}^{\mathrm{T}}$。因此，

$$W=\{\boldsymbol{d}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{r}_e\}=\int\{\boldsymbol{u}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{F}\}\mathrm{d}V+\int\{\boldsymbol{u}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\Phi}\}\mathrm{d}S \tag{3.11-1}$$

将载荷增量$\{\boldsymbol{F}\}\mathrm{d}V$和$\{\boldsymbol{\Phi}\}\mathrm{d}S$在由节点自由度产生的位移$\{\boldsymbol{u}\}$上所作功积分求和。方程 3.11-1 证明由公式 3.3-8 定义的载荷$\{\boldsymbol{r}_e\}$能和分布载荷等价作功。

协调节点载荷对初始分布载荷也是静力等效的，也就是两个载荷系统对任意设置的一个点有相同的合力和合力矩。在刚体平移和对任意一点微小旋转的时候，考虑载荷系统的功等效就能知道。

第 3.10 节讨论的单元 Q6 的边和内部的位移受广义自由度 a_1 到 a_4 的影响，所以人们可能希望这些自由度能影响与体力和面力有关的节点载荷，并能包括在节点载荷向量$\{\boldsymbol{r}_e\}$中。在实践中，Q6 单元的不协调模式在节点载荷计算中被忽略，以便使 Q4 和 Q6 单元的节点载荷相同。用这种简化，Q6 单元通过了在第 6.13 节讨论的“分片试验”，它被认为是单元可靠性的主要检验方法。

例题 公式 3.3-8 能够用来计算集中载荷及分布载荷。作用在面 S 一点上的力 F 可认为是无限小面积上的高强压力的有限情况，所以$\{\boldsymbol{\Phi}\}\mathrm{d}S$接近 F。这样，对面力，

$$\begin{array}{ll}\text{分布力}\{\boldsymbol{\Phi}\}: & \text{集中力 } F: \\ \{\boldsymbol{r}_e\}=\int[\boldsymbol{N}]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\Phi}\}\mathrm{d}S & \{\boldsymbol{r}_e\}=[\boldsymbol{N}_*]^{\mathrm{T}}F\end{array} \tag{3.11-2}$$

其中$[\boldsymbol{N}_*]$可通过计算力 F 作用点坐标处的$[\boldsymbol{N}]$得到。如果力 F 作用在单元内部，可使用类似的算法，现在把 F 认作是体力项$\{\boldsymbol{F}\}\mathrm{d}V$的极限情况。

作为公式 3.11-2 的应用实例，考虑如图 3.11-1 所示的受载情况。载荷$q=q(x)$是每单位长度上的力，所以边上的压力是q/t，其中 t 是单元厚度。对平面单元，公式 3.11-2 中只有边位移，所以不管图 3.11-1(a)中的单元是 Q4，Q6 或 CST 单元，都得到相同的节点载荷(回想如果存在不协调模式，就不能负载)。受载边上的形状函数通过公式 3.6-4 在 $y=b$ 时计算得到。这里我们重新排列每个形状函数仅是为了从左到右沿着受有载荷的边读取节点载荷的方便。这样，对于图 3.11-1(a)中上面的边，有

$$[\boldsymbol{N}]=\frac{1}{2a}\begin{bmatrix}a-x & a+x\end{bmatrix}\qquad\{\boldsymbol{\Phi}\}=\frac{1}{t}[\boldsymbol{N}]^{\mathrm{T}}\begin{Bmatrix}q_4\\ q_3\end{Bmatrix} \tag{3.11-3}$$

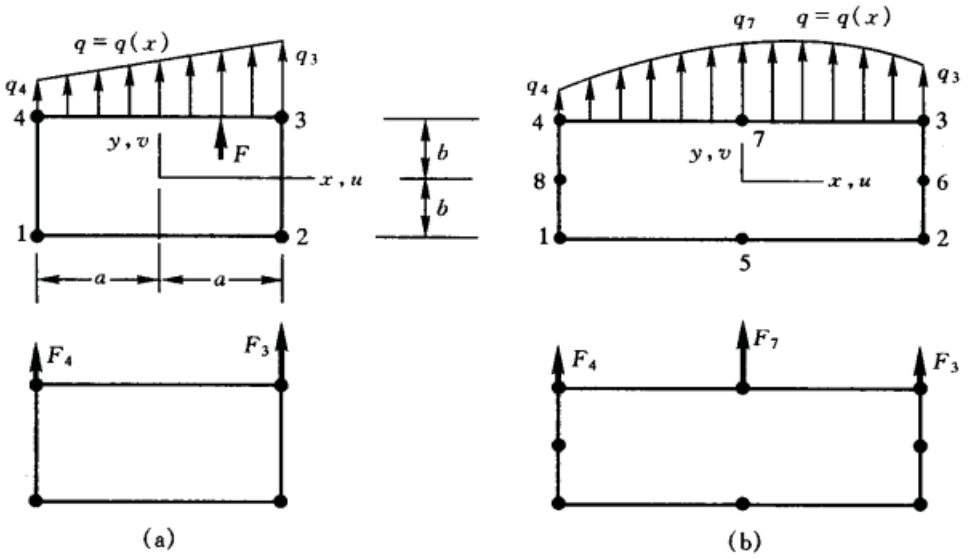


图 3.11－1　Q4 和 Q8 单元边上的分布载荷 q 以及它们的等效节点力

以及 $\mathrm{d}S=t\mathrm{d}x$。要计算图 3.11－1(a)中在 $x=a/2$ 处的集中力，我们先计算公式(3.11－2)中 $[\boldsymbol{N}_{,}]$在 $x=a/2$ 处的值。这样，与图 3.11－1(a)中的直线边相关的节点力为

$$\begin{Bmatrix}F_4\\F_3\end{Bmatrix}=\int_{-a}^{a}[\boldsymbol{N}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{N}]\mathrm{d}x\begin{Bmatrix}q_4\\q_3\end{Bmatrix}+[\boldsymbol{N}_{a/2}]^{\mathrm{T}}F=\frac{a}{3}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a_4\\q_3\end{Bmatrix}+\frac{F}{4}\begin{Bmatrix}1\\3\end{Bmatrix}\tag{3.11-4}$$

这些载荷与长度为 $2a$ 的边 4－3 上受有载荷的简支梁的支反力有相同的大小。

图 3.11－1(b)中边上的载荷 $q=a(x)$也做同样处理。这个边上的形状函数可以从拉格朗日公式 3.2－7 中，令 $x_1=-a, x_2=0, x_3=a$ 来求得。排列每个 N_i 使得适合节点顺序 4－7－3，可得

$$[\boldsymbol{N}]=\frac{1}{2a^2}\begin{bmatrix}x(x-a) & 2(a^2-x^2) & x(x+a)\end{bmatrix}\qquad\{\boldsymbol{\Phi}\}=\frac{1}{t}[\boldsymbol{N}]\begin{Bmatrix}q_4\\q_7\\q_3\end{Bmatrix}\tag{3.11-5}$$

因此，与二次曲线边上的二次变化相关的节点载荷为

$$\begin{Bmatrix}F_4\\F_7\\F_3\end{Bmatrix}=\int_{-a}^{a}[\boldsymbol{N}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{N}]\mathrm{d}x\begin{Bmatrix}q_4\\q_7\\q_3\end{Bmatrix}=\frac{a}{15}\begin{bmatrix}4&2&-1\\2&16&2\\-1&2&4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}q_4\\q_7\\q_3\end{Bmatrix}\tag{3.11-6}$$

如果载荷是均匀的，那么 $q_4=q_7=q_3$，并且公式 3.11－6 表明，边上总的力当中，1/6 被分配到每个终端节点上，2/3 分配到边中间的节点上。

前面的结果不要求边上的力沿边的法向作用于边上。例如，如果沿边的切线方向的均匀力 q 作用在同一直线边上，它有相同的长度，有边中间节点，就能得到如图 3.11－2 所示的节点载荷。

体力由公式 3.3－8 中的第一个积分处理。考虑单元的重量 W。体力列阵$\{\boldsymbol{F}\}$的内容可

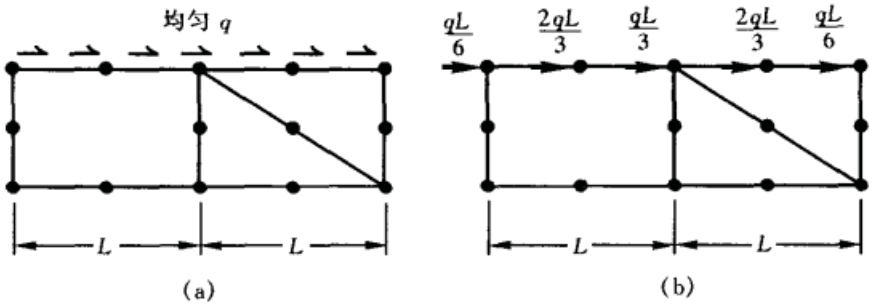


图 3.11-2 沿边的切线方向均匀分布的载荷分配到等距离的节点上

通过 W 除以单元体积得到，如果 W 不平行于坐标轴，就把 W 分解为平行于坐标轴的分量。例题的结果出现在图 3.11-3 中。总重量分配到每个节点的份额与单元方位无关，但是只有当单元是均匀材料和均匀厚度、四边形是矩形、边上的节点在边的中间时，图示的节点载荷才是正确的。在图 3.11-3(c)和 3.11-3(d)中我们看到一些令人惊奇的东西。LST 单元顶点的节点没有载荷。Q8 单元的角节点受有向上的载荷，但是所有 8 个节点载荷的总量是 W，作用方向必须向下。一个立方体单元表面上的均匀力产生图 3.11-3 那样的节点载荷。例如，如果均匀压力 p 作用在图 3.8-1(b)中的立方体单元的矩形表面，在表面上产生总力 F，那么 $F/3$ 被分配到 4 个边中间节点上，$F/12$ 沿相反方向分配到每个角节点上。

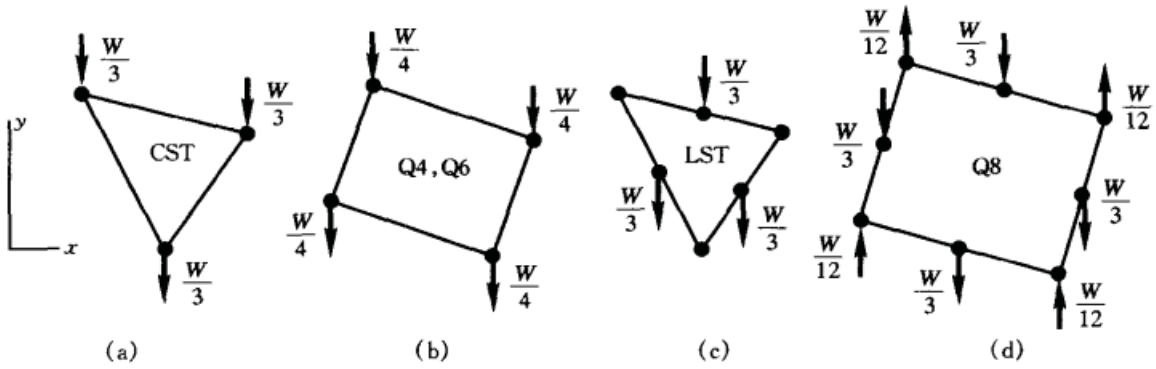


图 3.11-3 对均匀厚度的三角形和矩形二次单元，在 $-y$ 方向与单元重量 W 有关的协调节点载荷

备注 给定的节点载荷可以代表任何一个分布载荷。图 3.11-4 表示了许多载荷分布中的两种，它们有 P 作为协调的静力等效节点载荷。所有的这些载荷在有限元模型中产生相同的变形。在物理连续体中，不同的载荷将产生不同的结果，但根据圣维南原理，只是在加载区域时是这样。这个例子提醒我们好的细节不能由粗网格建模。

节点力矩能被应用于梁单元，它的节点有旋转自由度。排除那些有旋转自由度的单元，本章讨论的单元只有平移自由度，所以不能承受节点力矩载荷。力矩载荷仅能够运用在适应于力偶的单元。例如在图 3.11-4 中，如果一个向左的力 P 加在节点 A 上，就将产生一个顺时针的力偶 PL。尽管力矩能被用于有旋转自由度的节点，但不能期望在受力节点的附近有精确的结果。

大部分有限元软件能够计算有适当大小和方向的节点载荷。用户只需要描述面力和体力的方向、空间变化以及分布强度，还有初始应力或初始应变的空间变化和强度。软件不要求受

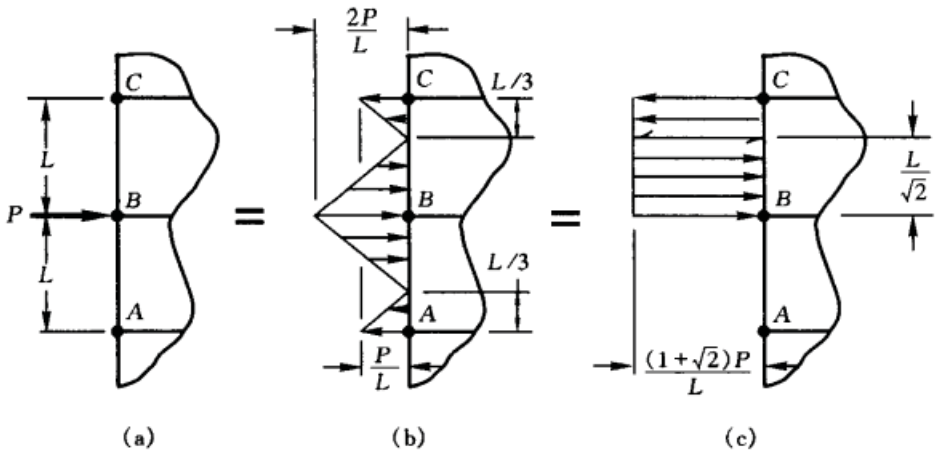


图 3.11－4　(a)力 P 垂直于只有角节点单元形成的一条边；
(b,c)与 P 静力等效的两种载荷分布

力边是共线的或有同样的长度。

3.12　应力计算

结构自由度$\{\boldsymbol{D}\}$通过解结构方程$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\}$可计算出。向量$\{\boldsymbol{D}\}$包含每个单元的节点自由度$\{\boldsymbol{d}\}$。像 Q6 和 Q9 这一类单元无节点的或内部的自由度可能出现在$\{\boldsymbol{D}\}$里，或在组集前可能被消掉，然后通过分离的单元逐个计算来恢复(见 6.7 节)。每个单元的应力根据公式 3.1－1 来求得，其中$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}=[\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{d}\}$。因此，对于各向同性的平面应力状态以及热膨胀系数 α(与温度无关)，由于温度变化 T 产生的初始应变，在分析平面内的单元应力为

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & (1-\nu)/2\end{bmatrix}\left([\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{d}\}-\begin{Bmatrix}\alpha T\\ \alpha T\\ 0\end{Bmatrix}\right) \tag{3.12-1}$$

矩阵$[\boldsymbol{B}]$是坐标的函数，必须在单元中要求知道应力的区域求值。2.10 节中步骤 3 就使用公式 3.12－1。

一个典型情况，温度是坐标的函数。2.10 节的一个例题告诉我们如果单元温度场 T 比单元应变场更高次的话，公式 3.12－1 中 T 的阶次应该被减少到单元应变场的阶次，以便提高应力计算的精度。然而，下面给出了一个相反的例子。假设在图 3.6－3 中 $\nu=0$，$F=0$，令温度场 $T=(b^2-3y^2)T_0$，其中 T_0 是一个常量。节点力和位移为零，用公式 3.12－1 中的温度变化可得到正确的 σ_x，但得不到正确的 σ_y。如果我们把温度场简化为像应变场那样，使得它不包含二次项，那么最合适的温度场就是 $T=0$，这使得物体处于无应力状态。很明显，在所有例子中，没有一种处理温度的方法是最好的。两种方法都能通过不断的网格优化从而向准确值收敛。参考资料包含在文献[2.19，3.12，3.13]中。对热应力的进一步讨论在第 6.10 节中。

应变场(以及由此得出的应力场)很可能出现比位移场更大的错误。这个特点在图 3.10－4 的问题中很明显，此处的节点自由度几乎是准确的，但 σ_x 按阶梯状变化。原因是应变-位移矩

阵[$\boldsymbol{B}$]是由位移场的微分得到的，微分显露出差别。作为例子，设想一个简支梁单元有二次的横向位移，而准确的横向位移是半个正弦波。如果绘图的话，这两个 $v=v(x)$ 函数几乎是一样的。由 $M_z=EI_z(\mathrm{d}^2v/\mathrm{d}x^2)$ 计算出的弯矩则不一样；它在整个梁单元内是常数，而精确的弯矩场是半个正弦波。

计算出的应力通常在单元内部是最精确的，而不是在单元边界上。这是令人遗憾的，因为我们对边界上的应力最感兴趣。因此，应力可以在单元内部的一些点上计算，然后外推到单元边界上（第 6.10 节），或是用跨越单元的一个“分片”进行平滑处理来得到应力（第 9.9 节）。

本章讨论的单元是 C^0 单元，它意味着单元场的梯度穿过单元间的边界一般是不连续的。因此，计算出的应力一般在单元间也不连续。这个性质紧接着出现在图 3.12－1 中所示的两个 CST 单元中。因为 u_4 是唯一的非零节点位移，当应力 σ_{x2} 贯穿整个右边的单元时，左边的单元没有应力。图 3.6－3 和 3.10－4 也出现了不连续的应力场。

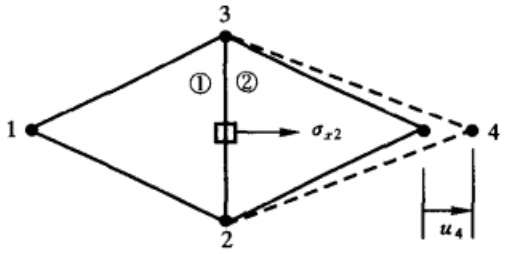


图 3.12－1 单元 2 中有应力但单元 1 中没有。微分单元（带阴影的区域）横跨单元间的边界

一般地，相邻单元在它们共有的节点处有不同的应力状态。由于不知道这些应力状态中哪个是最准确的，故任意单元节点的平均应力比隶属于此节点处的应力更值得相信。有代表性的软件计算的都是节点的平均应力，并用它们来绘制应力带（或应力等值线）。这些带是单元间连续的，比不连续的一个单元接一个单元的应力带更好看一些。但是，由于明显的应力不连续告诫我们，网格太粗糙得不到可靠的结果，一个接一个的单元应力带对分析者是有用的。应力带的例子在图 1.5－2 中。读者也许希望回顾一下第 1 章那一节的内容。通过平滑处理得到的应力在第 9.9 节中讨论。

还有应力不能在节点处取平均值的其它情况。经过紧缩配合结合在一起的部件，例如一个轴上的圆盘，在交界面的两边有不同的周向应力。平均周向应力在两部分都不正确。厚度或模量的不连续也引起应力的不连续。例如，在图 3.12－2(a)中，σ_x 在 $x=0$ 处不连续，因为 x 方向的力必须是连续的，但厚度却不一样。在图 3.12－2(b)中的 $x=0$ 处，σ_y（垂直于 xz 平面）是不连续的，因为两部分必须有同样的应变 ε_y，但 $E_1\varepsilon_y\neq E_2\varepsilon_y$。在图 3.12－2(c)中，在相邻的单元中建立了不同的局部坐标系，$(\sigma_t+\sigma_n)/2$ 这样的平均值没有物理意义。如果不同类型的单元以某种方式连接起来，例如一个梁单元和一个平面单元，两个单元共有的节点处的平均应力不可能有意义。

一些应力量是不变的；也就是说，不管在哪个坐标系中计算，它们都有相同的数值。一个这样的量是冯·米赛斯（Von Mises）或“有效”应力 σ_e，当材料性能处在塑性状态时，用来预测屈服点。分别根据一般的应力分量和主应力，σ_e 为

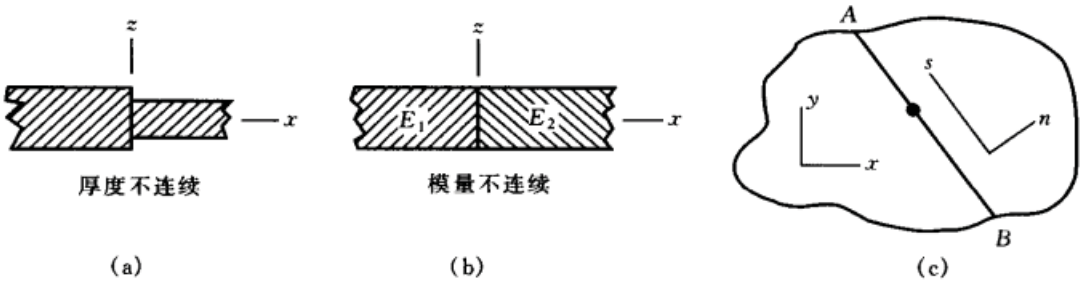


图 3.12－2　应力不能在节点处取平均值的一些情形
(a,b)笛卡儿坐标系 xyz 中平面单元的横截面；
(c)从平面视图看到的带有单元间边界线 AB 的平面单元

$$\sigma_v = \frac{1}{\sqrt{2}}[(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)]^{1/2} \quad (3.12-2a)$$

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]^{1/2} \quad (3.12-2b)$$

其中的 σ_1，σ_2 和 σ_3 是所述点处的主应力，(习惯上)符号 σ_1 指定为代数上最大的应力，σ_3 指定为代数上最小的应力。主应力能通过标准方法从 $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ 中的 6 个应力来确定[2.6]。如果 σ_1 是单轴的，即如果 $\sigma_2=\sigma_3=0$，公式 3.12－2 就减化为 $\sigma_3=\sigma_1$。注意 σ_v 可能超过 σ_1 的大小，例如当 $\sigma_1=-\sigma_3$ 时。而且，σ_v 总是正的，并与贡献它的应力的代数符号不一致。另一个应力不变量是*应力强度* S_I，此处

$$S_I = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (3.12-3)$$

因此，根据定义，S_I 是最大剪应力的两倍。像 σ_v 一样，它作为一个屈服准则来用。要注意 S_I 不是断裂力学中使用的应力强度因子。σ_v 与方向无关。能够确定承受最大剪应力 $S_I/2$ 的平面方位，但通常对它不感兴趣。

经常要计算冯·米赛斯(Von Mises)应力 σ_v，并要绘制出它的逐个单元的应力等值线，因为它是整个应力状态强度的标量度量。其它一些应力等值线，例如 σ_x，在模型的一部分能够提供类似的信息，但是在另一部分提供的信息就少，因为另一部分是 σ_x 之外的应力起主要作用。有限元模型的对称性使得 σ_v 或 S_I 的等值线中也有对称性。

如果一个物体处于均匀应力状态下，它的有限元模型应该显示完全均匀的应力场，因而计算结果显示不出应力等值线。如果模型包含一片不正确连接的单元，如图 3.12－3 中所示的一些平面单元，上述情况就不会出现。例如沿 CD 边，LST 单元和 Q4 单元应当相互施加与均匀作用力相调协的节点载荷，但从 3.11 节的讨论中我们意识到，沿 CD 边相遇的单元边上的节点载荷必须成不同的比例，因此所期望的节点载荷不可能存在。这将产生一种扰动的不正确的应力模式。如果粗劣的连接定位在一个模型中，根据圣维南原理，不正确的应力区域也将定位于此。人们也能够注意到，位移沿 CD 和 EF 不协调，在 LST 单元和 Q8 单元中是二次型的，但在 Q4 单元中是线性的，在 Q6 单元中是不同的二次位移。沿着 GH，所有的三个边都能置换成为抛物线状的线段，但由于线段偏移，边就不再是协调的。在节点 A 根本没有连接，因为 CST 单元没有边节点。这些不完全的连接中，有一些可以加上约束使它工作正常，这会在第 13 章中讨论。

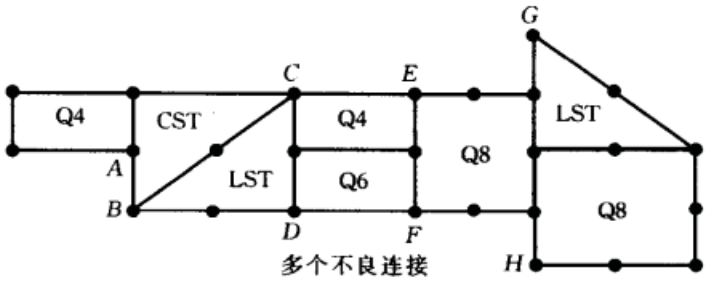


图 3.12-3 平面单元不良连接示例

软件也许会提出关于整体坐标的应力或关于局部坐标的应力，例如图 2.3-2 中的梁单元所用的。在梁中，弯曲应力要参考局部坐标，因为它是梁的轴向上的法向应力。板和壳的单元可以在整体坐标中是任意方向，但它们的薄膜应力和弯曲应力分量要在与单元表面相切的局部坐标中计算。软件用户必须参考文档来了解局部坐标轴怎样在整体坐标系中确定方向。

至今讨论的单元，的确也是常用的大部分单元，都是基于位移场的。还有其它表述方法，其中一些是基于同时使用单个的位移场和应力场。尽管那样的单元有位移自由度，但单元应力不能由基于位移的单元中使用的同样公式来计算。一个临时的软件用户可能不知道单元公式推导的原理。在任何情况下，分析者在实际应用前为了评价单元的性能如何，都应该学习文档并运行一些简单的测试程序。

3.13 有限元解的性质

在精确解中，材料的每个微分单元处于平衡状态，到处都满足协调性，所有的应力和位移边界条件都满足。有限元分析的解则是近似的，不会在每个方面都满足这些要求。下面我们来说明，在静力学有限元分析中，当单元基于位移场时这些要求需要满足到什么程度。

- 节点处都满足协调性。在连接点(节点)处，单元有一致的位移分量。部分连接意味着这种要求的削弱。例如，让两个相邻的单元在每个节点处有 3 个平移自由度和 3 个旋转自由度。如果在单元相会的节点上，连接的仅是平移自由度，那么节点作用就像球-窝铰接那样。
- 沿单元间的边界，协调性可能满足也可能不满足。当沿着一个单元边的位移完全由那条边上的节点自由度确定，并且相邻单元共享这些节点和它们所有的自由度时，才满足协调性。对单元 Q6 以及板和壳中经常使用的一些单元来说不是这种情况。当单元类型混杂而且单元连接比较差时，就像图 3.12-3 中那样，也不是这种情况。对正确连接的单元，从分片试验的意义上来说是有效的(包括单元 Q6)，当网格不断细化时，不协调性趋向于零。
- 单元内满足协调性。内部协调性只要求单元位移场是连续的和单值的。对多项式位移场这些条件自动满足。
- 节点力和节点力矩的平衡是满足的。向量解$\{\boldsymbol{D}\}$满足结构方程$\{\boldsymbol{R}\}-[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{0}\}$，这个方程表明在施加的载荷$\{\boldsymbol{R}\}$和由弹性变形产生的内部载荷$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}$的作用下，每个节

点都处于静力学平衡状态。

- 单元边界上或横跨单元边界区通常不满足平衡性。计算出的应力通常不满足公式 3.1-14。例如，在图 3.1-2(b)结构中的一个有限元模型里，沿着下面的边，计算出的结果不显示 $\sigma_n=0$ 和 $\tau_{ns}=0$。跨单元边界间缺乏平衡，如图 3.12-1 中的微分单元所示，那里所有的应力为零，除了它的右边 $\sigma_{x2}>0$。图 3.10-4 也有相似的情况。当反复改进网格时，这些与边界和单元间平衡的不一致趋向于零。
- 单元内部的平衡通常不满足。计算出的应力通常不满足平衡微分方程 3.1-13，除了从单元体积的平均意义或积分意义上来说，像公式 3.3-2 前面所述的那样。CST 单元是一个例外，对它来说，公式 3.1-13 总是满足的。但是 CST 单元建立的单元边界间的平衡模型是很差的，图 3.7-2 显示 CST 单元可能运行得很差。显然，好的单元性能不只是要求满足公式 3.1-13。但是，对任何可接受的单元，当不断改进网格时，就更易于满足公式 3.1-13。

3.14 例题：一个简单的应力集中问题

我们来举例说明 LST 单元的性质，把它们应用到解已经知道结果的平面问题中。设想上面有一个圆孔的各向同性的无限大平板，在很远处受有均匀的单轴应力 σ_∞。除非想使用第 8.8节要讨论的特殊“无限大”单元，目前我们必须在有限域建立一个模型。因为通过孔中心的垂直轴和水平轴是对称轴，故只有问题的 1/4 需要建模(图 3.14-1(a))。由圣维南原理可知，孔产生的应力波动只扩展到孔周围几倍直径处。这样用一个 $10R\times10R$ 的区域来代表一个象限也许是合理的。那么对这个几何体，列出的应力集中因子是 2.722[1.16]；因此 $\sigma_{y\,max}=2.722(\sigma_\infty/0.9)=3.025\sigma_\infty$。根据弹性理论[3.1]，对于平面应力状态下的无限大平板中的圆孔，在图 3.14-1(a)中圆孔与 x 轴相交的地方，最大正应力为 $\sigma_y=3\sigma_\infty$；在圆孔与 y 轴相交的地方，最小正应力为 $\sigma_x=-\sigma_\infty$。

我们的数学模型由 $20R\times20R$ 的正方形平板中央的一个半径为 R 的圆孔组成，它处于平面应力状态，这意味着物理结构中孔的直径应该大于板的厚度，以使带下标 z 的应力分量确实能被忽略掉。在图 3.14-1(a)中所示的象限上，我们应用应力边界条件：在确定孔的圆弧上和 $x=10R$ 的边上，作用力为 0；在 $y=10R$ 的边的 y 方向上，作用力为 σ_∞。这样我们假设有限数学模型上的这些条件与无限区域里沿着这些线上的应力非常接近。像滚珠表示的，位移边界条件是在 $x=0$ 处 $u=0$，在 $y=0$ 处 $v=0$。这些位移条件是精确的，这意味着在利用对称性和分析一个象限时不会有额外的近似因素。

对这个数学模型的有限元分析，我们使用平面应力条件下的 LST 单元。可以预料，离孔近的地方的应力梯度远大于离孔远的地方的应力梯度，所以单元在尺寸上也分等级，如图 3.14-1(a)所示。网格由软件产生。形成圆孔的圆弧被平分成 8 等份，外部的边界被平分成 3 等份。软件生成 LST 单元的 122 个网格，共有 279 个节点(558 个自由度)，没有计算由于加上边界条件而减少的节点数。材料是各向同性的，$E=200$ GPa，$\nu=0.3$。

有限元分析给出整个模型的应力。孔附近 σ_y 非平均的等值线如图 3.14-1(b)所示。软件标出最大应力 σ_y 是 $3.128\sigma_\infty$，最小应力 σ_x 是 $-1.091\sigma_\infty$。这些应力中的每个都出现在预期

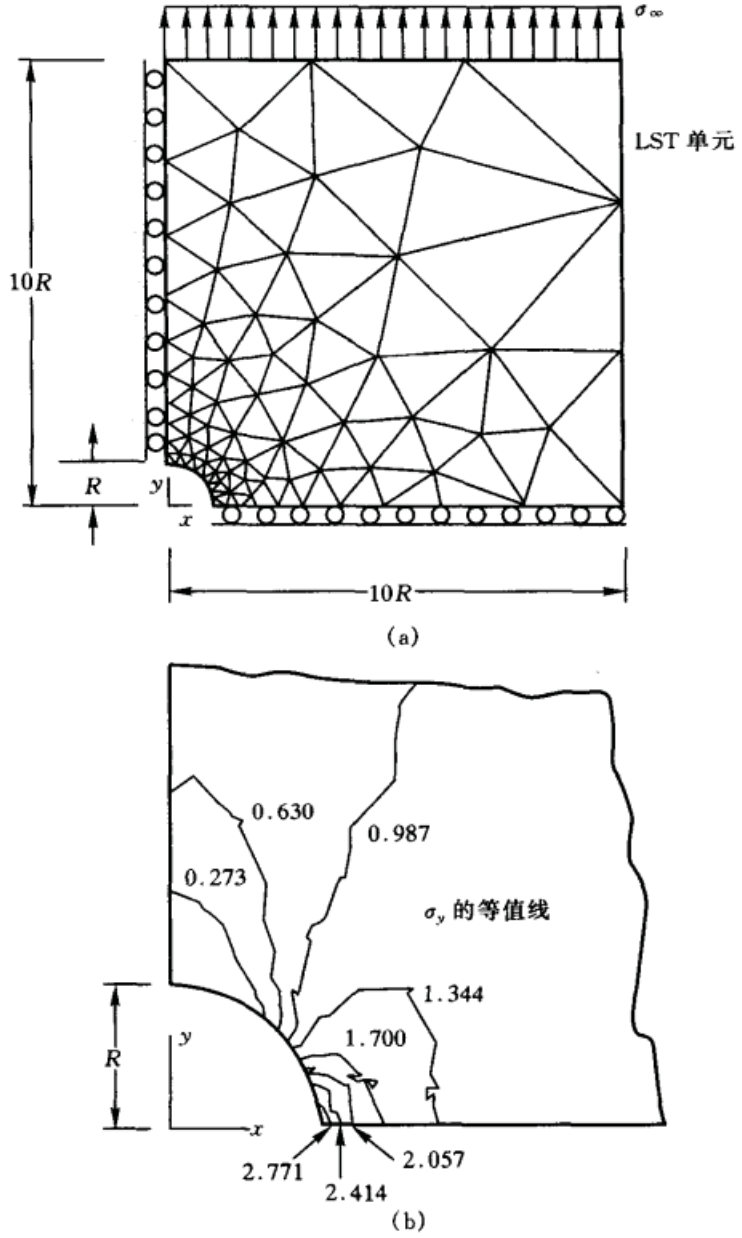


图 3.14－1 (a)为在无限大平板中构建孔模型，选用的有限元区域、网格和边界条件；(b)由(a)中网格区域内的 σ_y 绘制的非平均应力等值线

的位置上。尽管这些值接近于期望值，图 3.14－1(b)显示了围绕着孔的不均匀的 σ_y 等值线上有明显的单元间的不连续。远离这个孔(图 3.14－1(b)没有显示出来)，σ_y 分布看起来是均匀的，这表明远处的边界位置和远处网格的粗糙度都是可以接受的。为了改进结果，我们可以把孔附近的单元细分，但接近外边界处则不必再细分单元了。

所用的软件提供了度量平均应力场和非平均应力场好坏的数值方法。这个方法在第9.10节来描述，其量值用符号 η 表示，如果两个场一致的话，这个量就为零。如果 $\eta<0.05$，有限单元的离散化程度就被认为是可以接受的。对图 3.14－1(a)中的 LST 网格，我们得到 $\eta=0.012$。

理论上，应力独立于 E 和 ν。有限元分析中的应力确实独立于 E，但在这里使用的网格中，ν 从 0.3 变到了 0，$\sigma_{y\,\max}$ 从 $3.128\sigma_\infty$ 变到了 $3.122\sigma_\infty$。网格细分将会减少这种不一致。

3.15　高应力梯度的应用

前面的例子暗示，在应变梯度高的地方，如果网格足够密集，可用这一章讨论的单元满意地求解任何平面问题。图 3.15－1 叙述了一个浅显简单的问题使我们从这种观念中醒悟过来。这个问题提示我们，不管有限元分析功能多么强大，我们都必须认真思考每一个问题。

图 3.15－1 描绘了一个双金属体，由两种不同但各向同性的材料在室温下无应力地黏结在一起。它们的材料模量、泊松比和热膨胀系数不同，$E_s > E_a$，$\nu_s < \nu_a$，$\alpha_s < \alpha_a$，其中下标 s 和 a 分别表示钢和铝。我们要求的是从无约束和均匀加热到大于无应力温度 100℃时，双金属体内的应力。我们选择的数学模型是垂直于 xy 平面、均匀厚度为 20 mm 的物体，在 xy 平面上处于平面应力状态(尽管比较厚)。

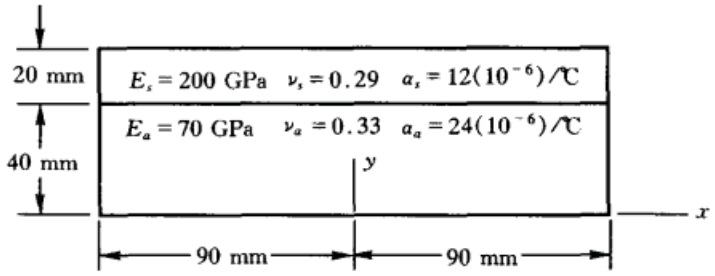


图 3.15－1　双金属体问题的几何及材料性质

初步分析　因为 $\alpha_s < \alpha_a$，我们预料到结构在 xy 平面上会弯曲，顶层的上表面受压，底层的下表面受拉。为了进行初步分析，我们假设应力沿长度不变化，应用初等材料力学，概括如下。如果轴向伸展受阻，在钢层和铝层分别出现初始轴向应力－240 MPa 和－168 MPa，约束在各层产生的相应轴向压力分别为 $F_s = 96\,000$ N 和 $F_a = 134\,400$ N(图 13.5－2)。下一步我们从相反的意义上应用这些力来移走轴向约束，并将截面变换法用于应力分析。变换钢部分，我们得到铝的 T 截面梁，它的上面部分有垂直于 xy 平面的面积 $20(200/70) = 57.14$ mm^2，它的形心轴在离底部 37.647 mm 处。载荷是形心轴向拉力 $P = F_a + F_s = 230\,400$ N 以及使梁上凹的弯矩 $M = 1\,186$ N·m。截面惯性矩 $I = 568\,300$ mm^4，由此产生的 T 截面顶部的轴向应力为 $P/A - Mc/I = 71.9$ MPa。再变换到最初的钢件，并把这个初始应力叠加上，得到 $71.9 \times (200/70) - 240 = -34$ MPa，作为实际的双金属梁在远离端点影响的中心部段顶层的最终轴向应力估算值。在双金属梁的底部，相似的分析得到估算值 29 MPa。

有限元分析　图 3.15－3(a)描述了初始的有限元模型和在热载荷作用下的挠度轮廓线。沿着 y 轴的滚珠支撑提供了结构沿垂直中心线的对称性。右下角单个的滚珠支撑允许结构无约束地伸展，同时在 y 方向上阻止刚体位移。使用了 Q8 单元的粗网格。计算出在 x 方向的最大位移量近似为 0.25 mm，如图所示(没有按比例)。

结果评价　图 3.15－3(a)中的位移形状是有原因的：物体在 x 方向和 y 方向都要伸展，并向上凹起，就像预计的那样。但是在 y 轴上，左上角的垂直位移为零。是边界条件产生了一个错误使得这个节点处的垂直位移被阻止吗？一个简单的计算表明零位移的结果只是偶然

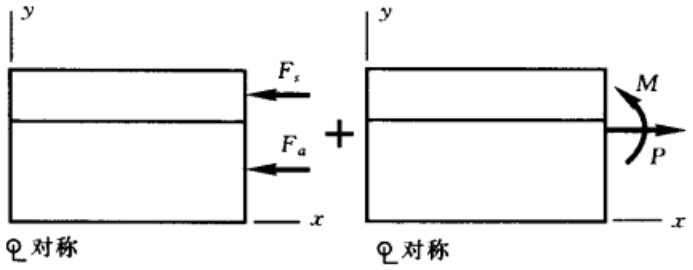


图 3.15-2 采用叠加法的双金属体问题的初步分析。y 轴是对称轴

的。回到初步分析中的 T 截面梁，我们计算出力矩 $M=1\ 186$ N·m 在一个长度为 $L=180$ mm的简支梁的中间产生向下的位移 $ML^2/8EI=0.121$ mm，同时热膨胀产生向上的位移 $(40\alpha_a+20\alpha_s)100=0.120$ mm。因此两个位移几乎抵消。

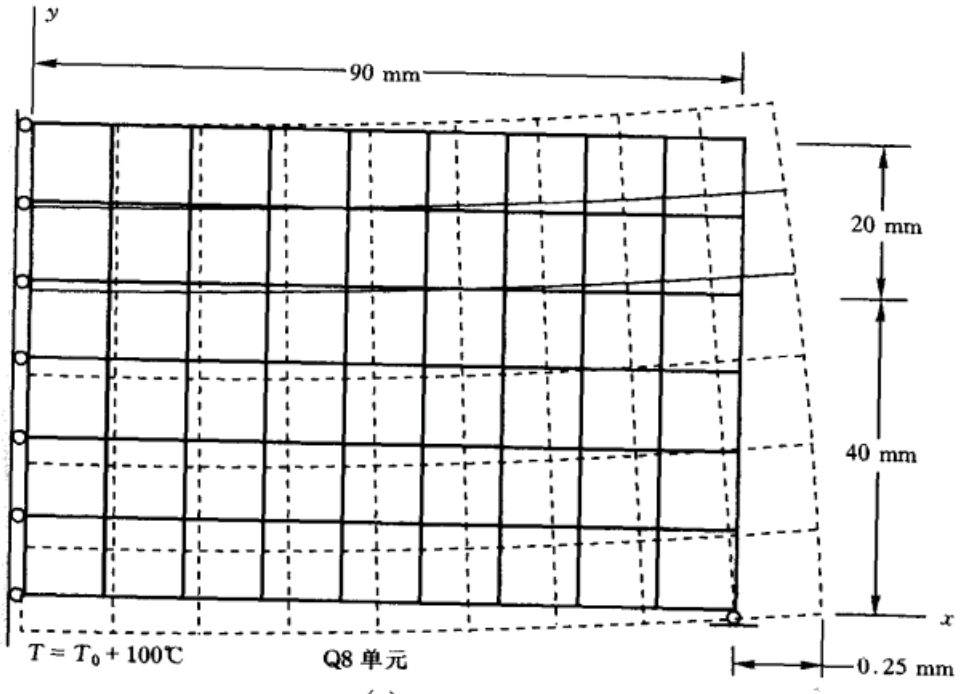
图 3.15-3(b)显示了 σ_x 的非均匀等值线。在 y 轴上，有限元软件产生的 σ_x 列表值表明，在 $y=0$ 处，$\sigma_x=29.4$ MPa，在 $y=60$ mm 处，$\sigma_x=-34.0$ MPa，与初步分析中得到的应力几乎精确地相符。像预计的那样，当我们从顶部到底部穿过材料的界面时，在张力 σ_x 和压力 σ_x 之间有一个不连续的过渡。特别是在这种情况下，绘制出的 σ_x 平均值将丢掉重要的信息。因为右边界是一个自由表面，我们期望 σ_x 在那里近似为零，σ_x 的等值线表明，在右边界上，除了材料界面周围一小部分区域，σ_x 确实到处都接近于零。

根据这些结果，看起来有限元模型是好的。但是，在材料交界面与右边界相交点附近，我们看到在 σ_x 的等值线中有较大的不连续。σ_y 和 τ_{xy} 的等值线图(没有给出)显示有极大的应变梯度贯穿右边界与材料交界面相邻的个别单元。而且，我们发现不断地改进网格也不能缓解这个问题。哪里错了？碰巧，这个看起来简单的问题在材料交界面的边界上有应力奇异性[3.14,3.15]。对大多数不同材料性能的结合体，奇异应力场与 $1/r^{\rho}$ 成比例，这里 r 是从材料交界面的右边界原点测量的径向距离，ρ 是一个与材料的相对性质有关的系数。因为所用单元的插值函数不能模拟这种性质，不断的网格细分决不会在 $r=0$ 处得到无穷大的应力。

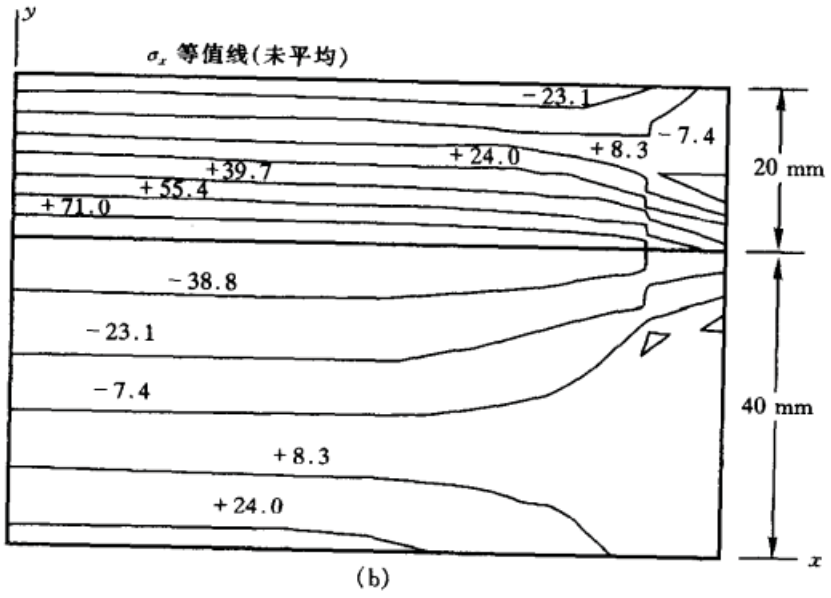
要注意模型的选择可以显著地影响结果远离奇异。例如，设想图 3.15-3(a)中的滚珠支撑被销子代替，使得右下角 $u=v=0$。在这种情况下，向外伸展的趋势被支撑提供的水平力所阻止，明显地改变了变形和结构中央部分的应力，在销子处产生了应力奇异，对此，网格再细分都不会引起应力的收敛。当然，销子支撑与我们分析双金属杆无约束热载荷的意图是矛盾的。

因为实际的物体在垂直于 xy 平面上是相当厚的，我们的平面应力数学模型与实际不同，因而提供不了这种差异大小的信息。三维分析将能显示非零应力 σ_z，τ_{yz} 和 τ_{zx}，以及 σ_x，σ_y，τ_{xy} 的值与平面分析中计算出的值稍有不同。在三维模型中，与平面模型中一点处观察到的情况相似，预料应力奇异会沿着材料交界面与外表面会合处的矩形边界线分布。

我们要提醒自己，确保在开始数值分析前就弄明白问题的性质，这样可以避免受到大的挫折。



(a)



(b)

图 3.15－3　(a)温度均匀升高 100℃后双金属体中的有限元区域、网格、边界条件和位移轮廓线；(b)从(a)中的网格得到 σ_x 的非均匀应力等值线

分析题

3.1－1　(a)通过写出类似 3.1－11 的公式，推导三维情况下的平衡微分方程；
(b)用分离体图推导出应力边界条件(公式 3.1－14)的二维形式。

3.1－2　假设 xy 平面上的应力为 $\sigma_x=-6a_1x^2$，$\sigma_y=12a_1x^2$，$\tau_{xy}=12a_1y^2$，其中 a_1 是常数。
(a)考虑正方形区域 $0\leqslant x\leqslant b$，$0\leqslant y\leqslant b$。用 x，y，b 和 a_1 写出这个正方形每个边上力 ϕ_x 和 ϕ_y 的表达式。

(b)如果体力为零,应力的这种状态实际上可能吗?请解释。

3.1-3 确定下面的应力场是否是弹性力学平面问题的有效解答:$\sigma_x=3a_1x^2y$,$\sigma_y=a_1y^3$,$\tau_{xy}=-3a_1xy^2$,其中 a_1 是常数。物体是各向同性和线弹性的,体力为零。

3.1-4 (a)考虑微分单元的体积 V 和它在应力作用下的变化 ΔV。证明如果应变很小,则 $\Delta V/V=\epsilon_x+\epsilon_y+\epsilon_z$。

(b)施加静水压力 p,求出 $(\Delta V/V)/p$ 的表达式。

(c)从而证明橡胶状的材料几乎是不可压缩的。

3.1-5 平面应力状态下,令一个各向同性物体中的位移如公式 3.5-1 所描述的那样。如果要满足平衡微分方程,常数 a_i 之间要满足什么关系?

3.2-1 在图 3.2-2(b)中,令 $x_1=0$,$x_2=2$,$x_3=3$。下面使用这些数据。

(a)用数值方法证明形状函数之和等于 1。

(b)形状函数对 x 的导数的和是多少?用数值方法证明这个性质。

3.2-2 C^0 单元的形状函数满足关系式 $\sum N_i=1$,但平面梁那样的 C^1 单元的形状函数却不是这种情况,为什么?

3.2-3 图 3.2-3(a)中,设各数值点的 x_i 分别为 1,3,5 和 8,ϕ_i 分别为 2,2,2 和 5。

(a)用拉格朗日公式求插值多项式。

(b)在 $x=0$,$x=2$,$x=4$,$x=7$ 时公式预测的 ϕ 是什么值?

3.2-4 对公式 3.2-8 中的矩阵$[\boldsymbol{A}]$求逆。然后证明图 3.2-4 中所示的形状函数的正确性。提示:把公式 3.2-8 看作是求解 a_i 的四个方程。用矩阵形式排列结果,把 4×4 矩阵等同为$[\boldsymbol{A}]^{-1}$,然后用公式 3.2-3 得出$[\boldsymbol{N}]$。

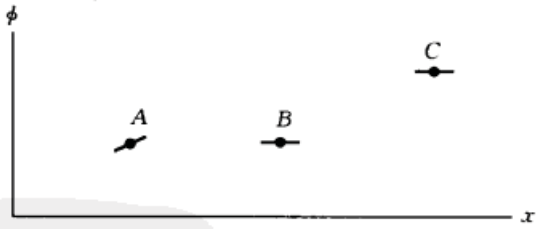
3.2-5 假设曲线 $\phi=\phi(x)$ 由三个数据值,即在 $x=0$ 处的 ϕ_1 和 $\phi_{,x1}$ 及 $x=L$ 处的 ϕ_2 来拟合(与图 3.2-3(b)相似,但 $\phi_{,x2}$ 未指明)。确定形状函数。还要画出它们的简图并检查在 $x=0$ 和 $x=L$ 处的性能(用图 3.2-4 的方式)。

3.2-6 假设图中的点 A,B 和 C 处,纵坐标和斜率的数据已知。斜率的数据由通过数据点的短线表示。不用计算描绘出下列图形:

(a)通过三个点的拉格朗日插值曲线。

(b)C^0 连续的分段插值。

(c)C^1 连续的分段插值。



题 3.2-6

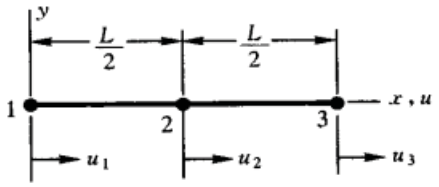
3.3-1 (a)长度为 L 的杆单元的形状函数矩阵为$[\boldsymbol{N}]=\lfloor 1 \quad x \rfloor[\boldsymbol{A}]^{-1}$,其中$[\boldsymbol{A}]^{-1}$由公式 3.2-4 在 $x_1=0$,$x_2=L$ 时给出。因此$[\boldsymbol{B}]=\lfloor 0 \quad 1 \rfloor[\boldsymbol{A}]^{-1}$,而且单元刚度矩阵为 $[\boldsymbol{k}]=[\boldsymbol{A}]^{-\mathrm{T}}\int_0^L\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}AW\lfloor 0 \quad 1\rfloor \mathrm{d}x[\boldsymbol{A}]^{-1}$。用这种形式生成均匀杆单元的$[\boldsymbol{k}]$,即公式 3.3-10。

(b)对于场匀梁单元,用类似的形式验证公式 3.3-14 的$[\boldsymbol{k}]$。

3.3-2 (a)设想在每个末端节点,均匀杆单元不仅有轴向位移自由度,还有轴向应变自由度,因此$\{\boldsymbol{d}\}=\lfloor u_1 \quad \epsilon_{x1} \quad u_2 \quad \epsilon_{x2}\rfloor^{\mathrm{T}}$。推导由此得到的 4×4 单元刚度矩阵。

(b)如何用这种单元来对受有集中轴向载荷，或弹性模量或横截面面积有突然变化的杆建立模型？

3.3－3　长度为 L 的均匀杆单元在每端有一个节点，在中间也有一个节点，如图所示。确定根据节点自由度 u_1，u_2 和 u_3 计算的单元刚度矩阵。

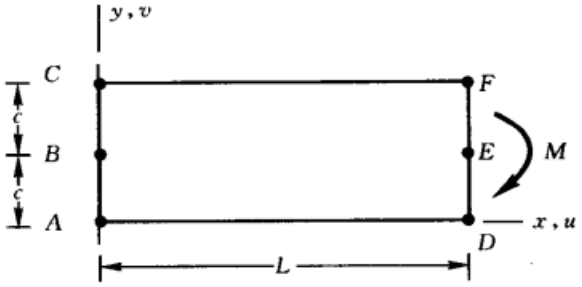


题 3.3－3

3.4－1　如图所示的悬臂梁端部受力矩 M 作用。用梁理论计算点 D，E 和 F 的位移分量。把这些结果看作节点位移，用它们计算按下述方法定义的单元中的应力 $\{\boldsymbol{\sigma}\}=[\boldsymbol{E}][\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{d}\}$。假定 $\nu=0$。当 L/c 变大时，τ_{xy}/σ_x 变成什么？

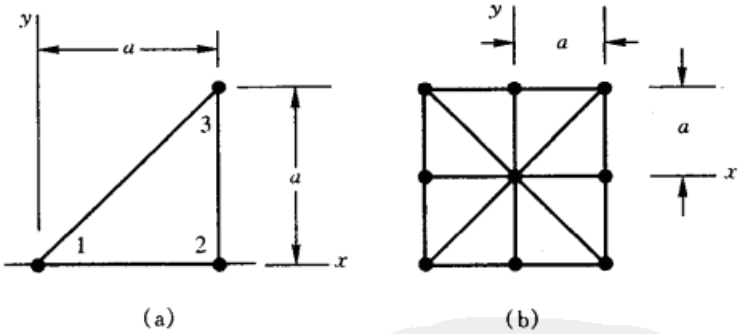
(a)节点是 A，D，F 的 CST 单元。

(b)节点是 A，D，C 的 CST 单元。



题 3.4－1

3.4－2　重复题 3.4－1，但用 y 方向的横向端点力 P 代替力矩 M。计算带字母节点的位移时，忽略横向剪切变形。



题 3.4－3

3.4－3　(a)一个二等边的 CST 单元的两个节点是固定的，如图所示。令 $\nu=0$，确定与无约束节点处自由度有关的 2×2 刚度矩阵。

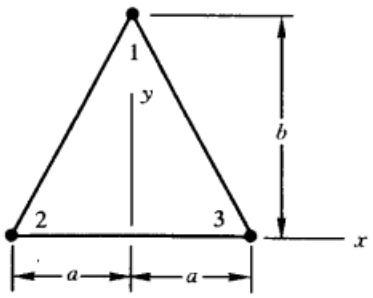
(b)一个均匀厚度的平面正方形区域被分成 8 个相等的 CST 单元，如图所示。y 方向的载荷 P 施加在节点 $x=y=0$ 处。如果 $\nu=0$，载荷 P 的位移是什么？

3.4－4　图中所示 CST 单元 x 方向的位移场为

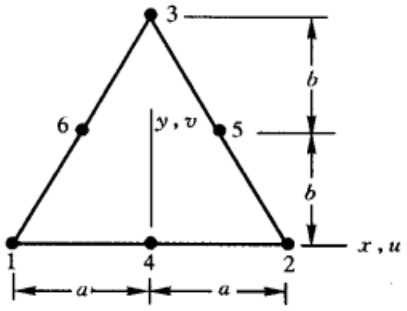
$$u=\frac{y}{b}u_1+\frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)u_2+\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)u_3$$

y 方向的位移 v 也同上面相似。对于等厚度和 $\nu=0$，确定节点 1 处按自由度运算 $[\boldsymbol{k}]$

的 2×2 子矩阵。



题 3.4-4



题 3.5-1

3.5-1 (a)对图示的 LST 单元，根据 y 和 b 确定形状函数 N_3（见图 3.5-1 的提示）。

(b)这个单元的形状函数 $N_4=1-(y/b)-(x/a)^2+(y/2b)^2$。证明 N_4 在节点 4 处为 1，在单元所有其它节点处为 0。

(c)令 u_3, v_3, u_4 和 v_4 是仅有的非零自由度，根据这些自由度以及 x, y, a, b，单元应变场是什么？

3.6-1 设一平面单元是各向同性的，体力 F_x 和 F_y 是常量。根据 F_x, F_y, E 和 ν，要满足平衡微分方程的话，公式3.6-1中 a_4 和 a_8 的值必须是多少？

3.6-2 对图 3.6-1 的 Q4 单元，令线性位移场设定为 $u=a_1+a_2x+a_3y, v=a_4+a_5x+a_6y$。节点自由度$\{\boldsymbol{d}\}$与这个场是一致的，即 $u_1=a_1-a_2a-a_3b$，等等。

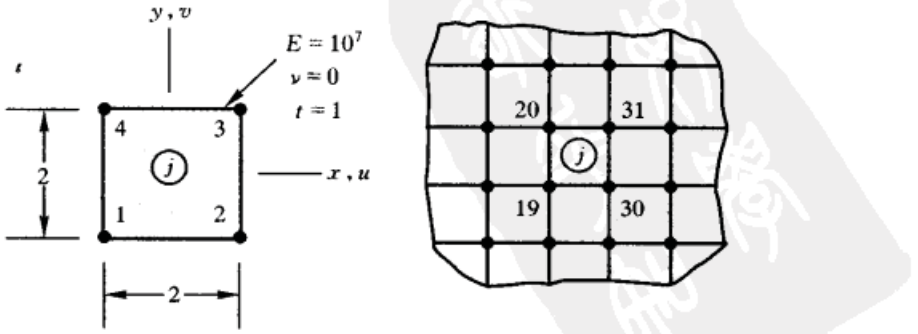
(a)证明用这些节点自由度，公式 3.6-5 可导出设定的 u 和 v 场。

(b)同上相似，证明$[\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{d}\}$可得到常应变状态 $\epsilon_x=a_2, \epsilon_y=a_6, \gamma_{xy}=a_3+a_5$。

3.6-3 (a)在题 3.4-1 中，考虑 Q4 单元，它的节点与标上字母的点 A, D, F, C 相一致。用题 3.4-1 中描述的方法计算单元应力。为了方便，用图 3.6-1 的坐标系。

(b)重复(a)部分，但用 y 方向的横向端部力代替力矩 M。在计算带字母的节点位移时忽略横向剪切变形。

3.6-4 单元 j 是一个 Q4 单元，它被连在结构节点 19, 20, 30 和 31 上，如图所示。假设结构刚度矩阵作为一个满阵被存储起来，没有使用稀疏矩阵存储形式。在每个节点处自由度是 u 和 v。单元 j 对$[\boldsymbol{K}]$矩阵下列交叉点上的单个系数的数值贡献是什么？



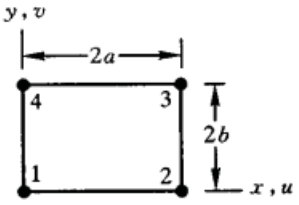
题 3.6-4

(a)48 行和 39 列。

(b)37 行和 37 列。

(c)59 行和 61 列。

3.6－5　令 x 轴和 y 轴的原点在 Q4 单元的节点 1 上，如图所示。写出适合这种坐标选择的形状函数。



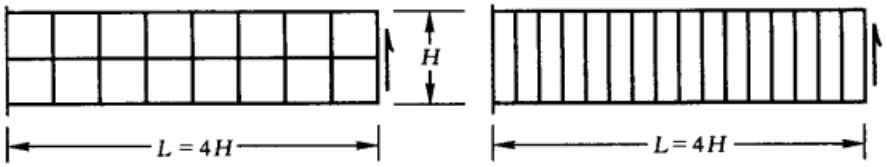
题 3.6－5

3.6－6　重新思考题 3.4－3(b)。现在把这个正方形结构分成 4 个面积相等的正方形 Q4 单元，根据作用在中间节点处的载荷求解该节点位移。

3.6－7　一个悬臂梁受横向端点力的作用。考虑图示的 16 个 Q4 单元的两种不同排列。计算端点挠度。

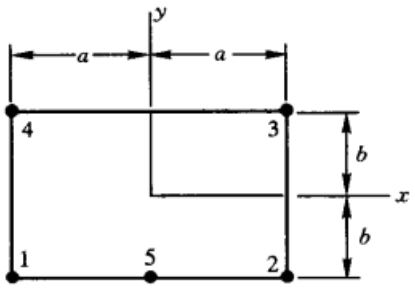
(a)哪一种网格能得到更精确的结果，为什么？

(b)不用实际的有限元分析，估计每种网格预计的百分比误差。为了简化，令 $\nu=0$。

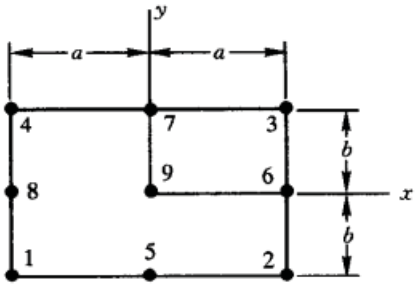


题 3.6－7

3.7－1　图示的单元有 3 个线性边和 1 个二次型边。确定 5 个形状函数 N_i。提示：用导出公式 3.6－4 的方法。



题 3.7－1

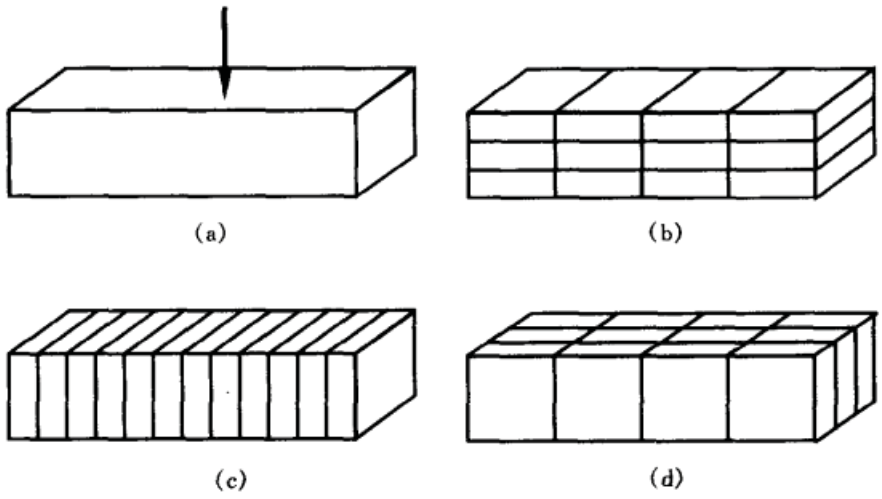


题 3.7－2

3.7－2　(a)确定图示的 Q9 单元的形状函数。

(b)画一个如图 3.7－1(b)中那样的简图，说明 N_1 在单元中如何变化。对形状函数 N_8 和 N_9 画出类似的简图。

3.8－1　一个悬臂梁在跨度中间处受到横向力的作用，如简图中(a)所示。(b)，(c)和(d)部分显示了三个不同的有限元模型，每个包含 12 个 8 节点立方体单元。根据它们预测横向顶端位移的精度，从最好到最坏排列这三个模型。另外画出一个网格图，它包含与图示类型和数目相同的单元，但在解这个特别的问题时优于所有这些图示的模型。



题 3.8-1

3.9-1 对由公式 3.3-13 和 3.3-14 给出的标准梁单元，证明当$\{\boldsymbol{d}\}$表示下列情况的刚体运动时，$[\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{d}\}$和$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{d}\}$都为零：

(a)横向平移。

(b)绕左端旋转。

3.9-2 对如图 3.3-1(b)所示每一端都有一个节点的梁单元，考虑横向位移场

$$v=\frac{L-x}{L}v_1+\frac{x}{2}\left(\frac{L-x}{L}\right)\theta_{z1}+\frac{x}{L}v_2-\frac{x}{2}\left(\frac{L-x}{L}\right)\theta_{z2}$$

(a)证明这个场包括所要求的刚体运动能力。

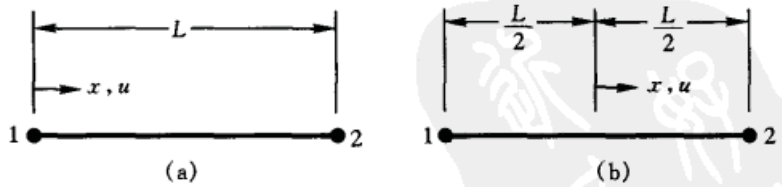
(b)如果施加与常曲率状态一致的节点自由度，实际上能得到正确的 $v_{,xx}$ 吗？

(c)根据给定的场确定$[\boldsymbol{k}]$。这个$[\boldsymbol{k}]$有什么缺点？

3.9-3 图示的杆单元是均匀的，有节点 1 和节点 2。令轴向位移场有如下定义的形式。在每种情况下，用节点自由度 u_1 和 u_2 来表示 u。然后用 A,E,L 确定应变-位移矩阵和单元刚度矩阵。在这些结果中你能看出有什么缺点吗？它们的根源是什么？

(a) $u=a_1+a_2x^2$。

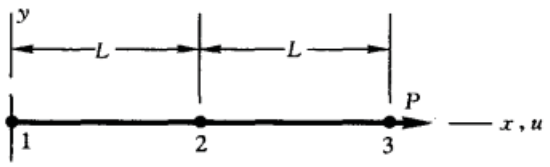
(b) $u=a_1x+a_2x^2$。



题 3.9-3

3.9-4 (a)对图示的两单元杆模型，计算 $x=2L$ 处的轴向位移和 $x=0$ 处的轴向应力。用题 3.9-3(a)中得到的单元刚度矩阵。用 $\sigma_x=E\lfloor\boldsymbol{B}\rfloor\{\boldsymbol{d}\}$ 计算单元中的轴向应力。这些结果正确吗？

(b)现在用题 3.9-3(b)中得到的单元刚度矩阵重复(a)部分。



题 3.9－4

3.9－5　图 3.8－1(a)中的 8 节点立方体单元，在总共 24 个独立模式中有 6 个刚体模式，6 个常应变模式，12 个非均匀应变模式。用简图来描述只涉及 x 方向节点位移的 4 个非均匀应变模式。

3.10－1　根据图 3.10－1 中三角形顶点节点的坐标，建立公式 3.10－3 中矩阵[**T**]的内容。

3.10－2　令一个平面单元有三个或更多个边，边长为 L_i，边的中间的法向位移 δ_{mi} 和所有角上的平移自由度都为 0(见图 3.10－1)。说明在每个角上使用一个旋转自由度意味着约束等式 $\sum(\delta_{mi}/L_i)=0$ 成立，这里求和包括所有的边。

3.11－1　证明根据公式 3.11－6 计算出的节点力静力等效于下面加载到等厚度矩形平面体的一个边上的载荷。

(a) $q_4=\sigma$，$q_7=0$，$q_3=-\sigma$(相当于中性轴上的节点 7 的弯曲应力分布)。

(b) $q_4=0$，$q_7=\sigma/2$，$q_3=\sigma$(相当于中性轴上的节点 4 的弯曲应力分布)。

(c) $q_4=q_3=0$，$q_7=\tau$(相当于矩形截面梁上的横向剪应力分布)。

3.11－2　如果载荷 q 是常量，公式 3.11－6 中的积分成为$[\mathbf{N}]^{\mathrm{T}}q\mathrm{d}x$。用这个积分，证明有中间节点的直边上的合力 F 分配到各个节点上的力分别为 $F/6$，$2F/3$ 和 $F/6$。

3.11－3　用虚功原理确定与梁单元上均匀分布的横向载荷 q 有关的节点力矩 $qL^2/12$(如公式 2.9－2 和图 2.9－2(a)所示)。也就是计算由 q 通过由于虚的节点转角 $\delta\theta_{z1}$ 和梁的形状函数 N_2 产生的位移所做的功，等于节点力矩旋转 $\delta\theta_{z1}$ 时所做的功。

3.11－4　根据梁单元的下述载荷，确定协调的节点载荷向量。并证明这个载荷向量静力等效于所给的载荷。

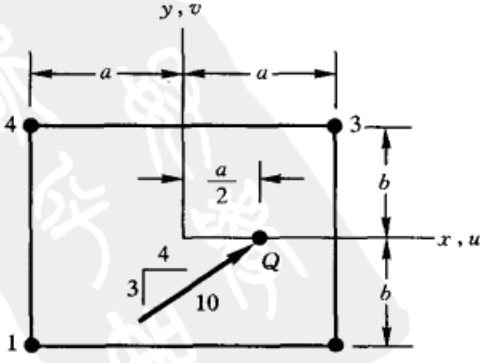
(a)均匀分布的横向载荷 q 只作用在单元左半边。

(b)集中力矩 M_c 作用在梁单元的中间。

3.11－5　在图 3.11－1(a)中，令力 F 作用在图示的 $x=a/2$ 处，但令该边有 3 个节点，如图 3.11－1(b)。这个边上由此产生的 3 个节点载荷是什么？证明这些载荷静力等效于 F。

3.11－6　在图 3.11－4(c)中，用公式 3.11－2 证明，距离 $L/\sqrt{2}$ 和载荷集度 $(1+\sqrt{2})P/L$ 构成一个载荷静力等效于点 B 处的力 P。

3.11－7　图示的 Q4 单元中有 10 个单位的力作用在点 Q。确定载荷向量$\{\boldsymbol{r}_e\}$。



题 3.11－7

3.11－8　一个均匀的杆单元在每端有一个节点，在中间有一个节点，如图所示。每个节点有一个轴向位移自由度。施加的温度从零线性变化

到 T_3。确定载荷向量$\{\boldsymbol{r}_e\}$。

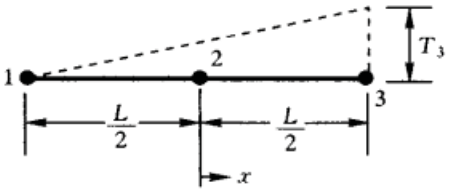
3.11－9 证明 C^0 单元上的初始应力导致自平衡的节点载荷$\{\boldsymbol{r}_e\}$。即证明$\{\boldsymbol{r}_e\}$中的节点力有零合力。

3.11－10 令图 3.6－1 中 Q4 单元上的温度变化形式为 $T=T_0x$，其中 T_0 是常数。材料性质和厚度在整个单元中是常量。确定载荷向量$\{\boldsymbol{r}_e\}$。

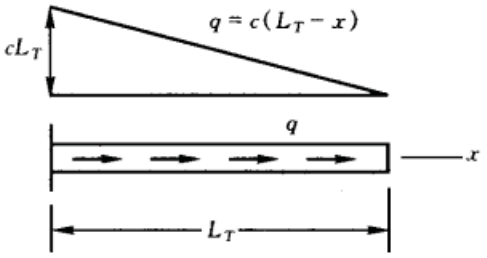
3.11－11 一个长度为 L_T 的杆受有线性变化的轴向载荷，如图所示，其中 c 是常数。考虑有一个，两个，最终是三个单元的有限元模型（每种情况下长度相等），用轴向位移作为节点自由度。

(a)确定每个模型相应的节点载荷向量$\{\boldsymbol{r}_e\}$。

(b)对每个模型，求 $x=L_T$ 处的轴向位移。同时在 $x=0$ 处，从应力计算公式 $\sigma_x=E\lfloor\boldsymbol{B}\rfloor\{\boldsymbol{d}\}$ 中确定轴向应力。



题 3.11－8



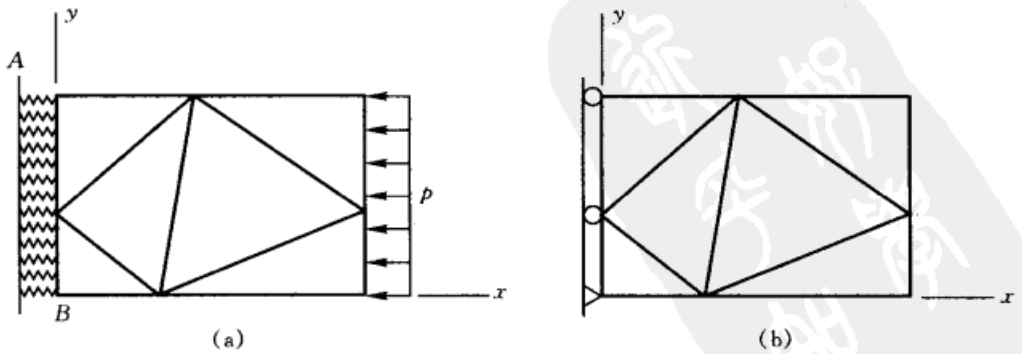
题 3.11－11

计算题

在下面的问题中，适当地计算位移和/或应力的重要值。必要时利用对称性。用网格细分时，要估计最细的有限元网格得出的结果的最大百分比误差。在尺寸或载荷没有指明的地方，选择看起来合理或方便的值。需要材料属性但没说明的地方，用钢的属性。用 1.5 节建议的解析法。

C3.1 (a)图示的矩形平面结构能用 CST 或 LST 三角形单元建立模型。如图所示的均匀分布压力 p 作用于右边。设想区域 AB 是软的线弹性介质。用从刚性支撑延伸到结构节点的离散线弹簧来表示这种介质。选择弹簧刚度以使每个单元有均匀的单轴应力 $\sigma_x=-p$。

(b)改变(a)部分，移走载荷 p，用图示的支撑代替介质 AB。应用温度变化 $T=T_0x$，其中 T_0 是一个常数。然后用 $T=T_0y$ 重复这个计算。结果合理吗？如果两个热载荷的结果不一样，解释为什么。



题 C3.1

C3.2 手册[1.16]提供了用解析和经验方法确定应力集中因子，用来改进有限元建模技巧。分

析下面的情况，它们都出现在文献[1.16]的表 37 中。在预计有应力集中的地方用密集网格，在远离应力集中的区域用粗网格。

(a)在一部分矩形截面上有两个 U 形凹槽。

(b)在一部分矩形截面上有带圆角的方形凸肩。

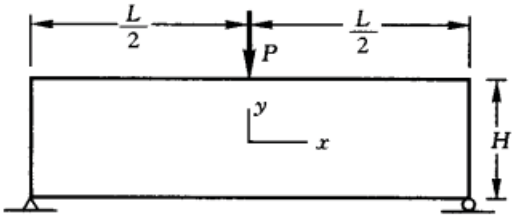
(c)在一个无限大板上有椭圆孔。

(d)在一个无限大板上有一排无穷多的圆孔。

C3.3　在 3.14 节中，尽管有限元模型和理论之间的一致性是可以接受的，但在预计的峰值应力和有限元分析计算出来的应力之间仍有误差(大约 3%)。为改善一致性程度，修改有限元模型。把区域向无限扩展有什么效果？在孔的附近生成更密集或较少变形的网格，效果如何？

C3.4　长 3.0 m，高 1.0 m 的矩形体作为一个悬臂梁建模。$E=200$ GPa，$\nu=0.3$，厚度$=1.0$ mm。梁的顶部作用有 10^4 N 的横向载荷，均布在 1.0 m 的尺寸上。用少量规则形状的单元生成这个梁的有限元模型。比较由 LST，Q4，Q6，Q8 单元生成的 σ_y 和 τ_{xy} 的分布。这些分布怎样以及为什么与 3.5，3.6，3.7，3.10 节讨论的那些单元的性质一致？

C3.5　一个中间受载的梁在两端支撑，如图所示。计算在 $x=0$ 处上下面的应力 σ_x。将这些结果与弯曲公式得出的应力 $\sigma_x=Mc/I$ 相比较。



题 C3.5

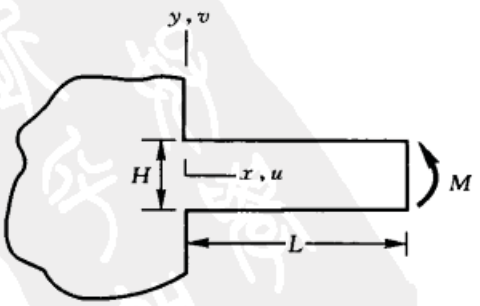
(a)选择 $P=1$，$L=12$ 这样的数字值，和在范围 $4<H<36H$ 内的不同值[1.16]。建立平面单元的有限元模型。

(b)用最小数量的梁单元建立结构的模型(见公式 2.3-6)。与(a)中得出的结果相比较。

(c)重复(a)部分，但把右边的支撑变成像左边那样，使得两边的下角都有约束 $u=v=0$。

C3.6　(a)实际中，不能够得到“固定支撑”。假设图示的悬臂梁被连接到一个非常大的平面体上，这个平面体与梁有相同的厚度和弹性性质。由于支撑变形增加的顶端转角 $\theta_z=ML/EI$ 是多少[1.16,3.16]？

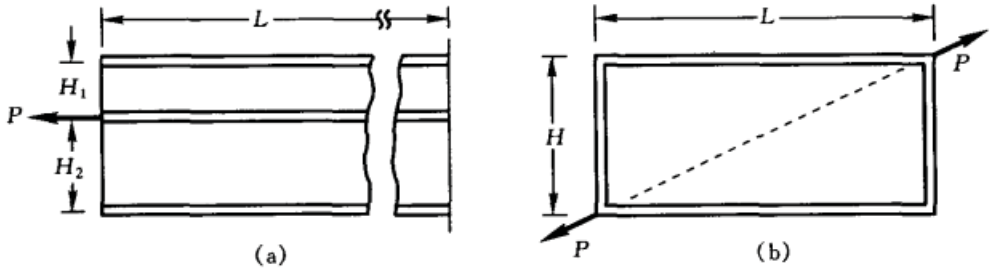
(b)用图 8.5-2(b)中所示的方式建立(a)中梁和平面连接的模型。研究这个模型的可行性。



题 C3.6

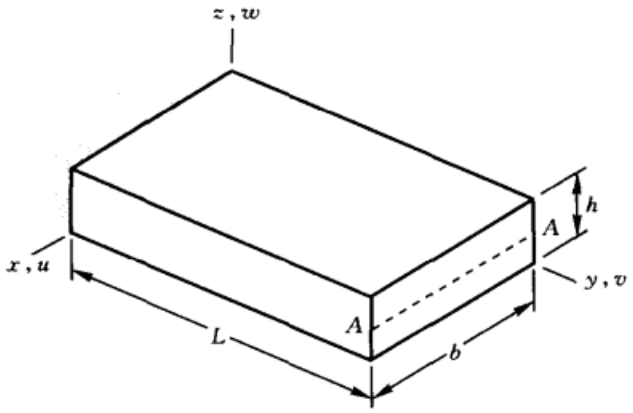
C3.7　图示的结构由横截面为正方形的杆组成(由双线表示)，它牢固地连接到同样材料的面板上。杆的中心线和板的中面位于同一平面上。有限元模型由厚度为 t 的平面单元和横截面面积为 A 的杆单元组成。在图(a)中，假定 $H_1+H_2\approx$

$3L$，$L\approx 500\ t$，$A\approx(H_1+H_2)t$。忽略杆的弯曲刚度合理吗？考虑弯曲刚度后重新分析。



题 C3.7

C3.8 图示材料的悬臂块沿直线 AA 受有均匀分布的 z 方向载荷 q。建立三维单元的有限元模型。在平面 $y=0$ 上作为支撑条件，沿直线 $z=h/2$ 在 z 的负方向施加 q，设在 $x=y=z=0$ 处，$u=v=w=0$；x 轴上 $x=b$ 处 $w=0$；在 $y=0$ 平面所有节点上有 $v=0$，把 $b\gg h$ 作为一种分析情况。检查 $x=0$ 或 $x=b$ 附近的结果。



题 C3.8

C3.9 考虑给题 C3.8 中所画的矩形块加上一个扭矩。令这个块沿与 y 平行的轴被扭曲。在平面 $y=0$ 上作为支撑条件，设在每个棱的中点上 $v=0$，且在 $y=0$ 平面所有节点上 $u=w=0$。提出一个简单(近似的)方法把这个扭曲载荷施加到末端 $y=L$ 处。

C3.10 前面的任何一个计算题都可以修改，把材料改为各向异性的。对带 n 和 s 材料主轴的平面问题作为可能的选择，令 $E_n=8E_s$，$G=2E_s$，泊松比为 0。这样[$\boldsymbol{E}$]成为一个对角矩阵。相对于总体轴，n 和 s 轴可以被任意规定方向。

第 4 章

列式技术：变分法

本章介绍名为泛函的积分表达式。我们寻找自由度的值使这些泛函稳定或最小。泛函为得到有限元的近似值提供了有效的方法。在结构力学中，最常用的泛函是势能。本章还介绍了其它泛函，包括用同一形式的微分方程描述的热传导和其它现象的泛函。

4.1 引言

在前面的章节中，单元的刚度矩阵[$\boldsymbol{K}$]通过直接的物理论证或虚功原理来得到。直接的物理论证仅限于解决简单的问题和简单单元。虚功原理功能强大，有物理感，但不能提供产生更通用的有限元近似法的总体构思。本章介绍了利用瑞雷-里兹(Rayleigh-Ritz)法产生有限元近似的通用和系统的方法。这个方法只要求得到一个泛函。在专业术语中，泛函是一个隐含特殊问题控制微分方程的积分表达式。本章前一部分集中在结构力学上，后一部分则研究了其它的物理问题。

瑞雷-里兹法分为经典形式和有限元形式。在经典形式中，近似场将涵盖问题的整个定义域。在有限元形式中，近似场以分段形式定义在子域内，其中每个子域就是一个有限元。这两种情况下近似场都是根据独立的自由度来定义的，这样整个系统的构形始终满足协调性而又不违背强制性边界条件(如结构力学中的支撑条件)①。在经典形式中，自由度没有简明的物理解释，此时我们称之为广义自由度。在有限元形式中，自由度是近似场的节点值，也可能是一个或多个空间导数的节点值，例如板单元的节点转角。

控制微分方程加边界条件以强形式论述问题。像隐含有微分方程的泛函类的积分表达式

① 在前面 3.10 节中介绍的并且将在后面 6.6 节进一步研究的非协调单元会放宽对连续性的要求。

称为弱形式。强形式说明了每个质点必须满足的条件，而弱形式则指出仅以平均或积分意义上必须满足的条件。尽管弱形式和强形式这两个术语可能暗示着弱形式稍差一些，但两者对问题的论述都是有效的。实际上，我们在 4.7 节将证明当存在无穷多个自由度时，弱形式包含了强形式，前面伴随有限元分析的离散化就是这种情况。弱形式为产生有限元近似法提供了便捷的切入点。

一个泛函如势能 Π_p 包含了覆盖问题全域的积分。在用假设的模型和它相关的自由度表示场量并进行积分后，Π_p 的表达式就变成有限个自由度的代数函数。对于如桁架那样的初始离散结构，Π_p 的表达式就不需要写成积分形式。在这一章中，我们将首先考虑这些初始离散形式，然后介绍更一般的积分形式。

物理理解是早期有限元方法得以迅速发展并引起应力分析人员关注的主要原因。把有限元分析置于坚实的理论基础上，使更多的数学算法增加了物理理解，因而，也允许对边界和收敛性做出论述，提出的求解策略也不显得仅是来自肤浅的物理推理。

4.2 最小势能原理

在本节中我们考虑结构力学中与时间无关的问题。我们定义一个系统，包含物理结构、它的支撑及作用于其上的载荷。系统的位形就是结构中所有节点位置的集合。设系统有参考位形 C_R 和移动后位形 C_D。如果内力所做的功和外界载荷所做的功都与 C_R 和 C_D 之间所取的路径无关，则称该系统为保守系统。在弹性结构中，内力所做的功在数值上等于应变能的改变量。

图 4.2-1 所示的线性弹簧就是一个简单的例子。设 C_R 和 C_D 分别表示拉伸前和拉伸后的位形。如果弹簧耗散能为零，那么内力所做的功（即弹簧应变能）只取决于拉伸位移 D，而与从 C_R 到 C_D 的过程中是沿 A 路径还是沿 B 路径无关。同样的，如果外力 P 的大小和方向保持不变，那么无论 C_R 到 C_D 的路径如何，P 所做的功始终等于 PD。因为内力和外力都是保守的，所以我们断定系统也是保守的。如果 $C_R=C_D$，也就是说，位移之后复原到初始位形，那么 $PD=0$，无论沿哪条路径，所有的力做的净功为零。

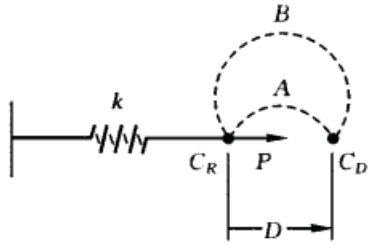


图 4.2-1 恒定水平力 P 作用在刚度为 k 的线性弹簧上。虚线 A 和 B 是受载点可能的位移路径

边界条件分两类：本质（或主要的）边界条件和非本质边界条件（常称自然边界条件）。在有限元分析中，本质边界条件规定为节点自由度值，自然边界条件规定为比通常用作节点自由度的阶次更高的场量导数值（更详细严密的论述见 4.7 节）。例如，如果我们使用标准欧拉-伯努利梁单元（忽略横向剪切变形），节点自由度是横向挠度 v 和它的一阶导数 $v_{,x}$。当使用这些单元来分析图 4.2-2(a)所示的梁时，本质边界条件（在这个问题中也可称为几何的、运动学的或位移的边界条件）是在 $x=0$ 时，$v=0$，$v_{,x}=0$。因为弯矩 $M=EIv_{,xx}$ 和横向剪切力 $V=VIv_{,xxx}$ 均为零，自然边界条件是在 $x=L$ 时，$v_{,xx}=0$，$v_{,xxx}=0$。因为 $v_{,xx}$ 和 $v_{,xxx}$ 都不作为节点自由度，所以使用标准梁单元的有限元解通常都不能精确满

足自然边界条件。

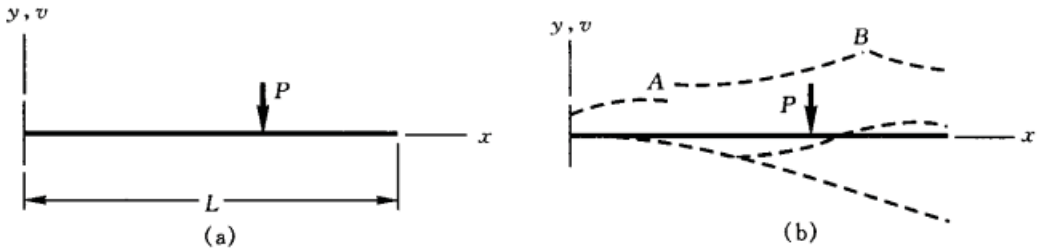


图 4.2-2　(a)悬臂梁；(b)一条不允许的位移曲线(上面的虚线)和两条允许的位移曲线(下面的曲线)

允许位形是满足内部协调性(3.1 节描述的)和本质边界条件的任一位形。图 4.2-2(b)给出了容许和不容许位形的例子。最上面的曲线是不允许的位形，它有四个缺点：在 $x=0$ 处违背了两个本质边界条件 $v=0$ 和 $v_{,x}=0$；违背了内部协调性，因为在 A 点处不连续；在 B 处有歧点(拐点)。下面两条曲线所表示的情况都是允许的，但仅最下面的曲线似乎在物理上是合理的。允许位形并不需要满足自然边界条件。因此，在 $x=L$ 时，下面两条曲线都不必满足条件 $v_{,xx}=0$ 或 $v_{,xxx}=0$。

一个保守机械系统有能够用它的初始和最终位形表示的势能，无需考虑什么变形史或系统从初始到终止位形经历的路径[4.1]。势能，也称做总势能，包括(a)弹性变形的应变能，(b)作用载荷如果移动一个距离因有做功能力而具有的势能。最小势能原理表述如下：

一个保守系统所有容许位形中，满足平衡方程的位形使势能相对于小的允许位移变分具有极(小)值。

不论载荷对位移的关系是否是线性的，这个原理都适用。如果极值条件是相对最小值，则平衡状态是稳定的。在小的位移变分中，假定载荷和内应力保持不变。

例：受轴向载荷作用的线性弹簧。图 4.2-3 所示的是一个非常简单的系统，其势能有两部分：

$$\Pi_p = U + \Omega \tag{4.2-1}$$

其中 U 为系统应变能，Ω 为作用载荷的势能。在图 4.2-3 所示的例子中，

$$U = \frac{1}{2}kD^2 \qquad \Omega = -PD \tag{4.2-2}$$

作用在弹簧上的载荷 P 看做恒定不变。在移动了距离 D 后它做功量为 PD，这样就损失了等量的势能，因此在表达式中加入负号使 $\Omega=-PD$。总势能

$$\Pi_p = \frac{1}{2}kD^2 - PD \tag{4.2-3}$$

可以看做是位形由参考状态 $D=0$ 变化到位移后状态 $D\neq 0$ 的过程中内力和外力所做的总功。注意如果 P 方向向左，而 D 指向右，仍为正，那么 Ω 将变为 $+PD$。这在本质上是一样的，就像提升重物，使势能增加一样。

如果仅允许位移沿轴方向，那么单个的自由度 D 可定义所有的容许位形。由 Π_p 的稳定

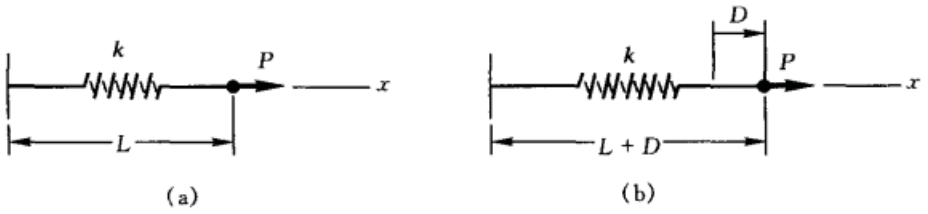


图 4.2-3 (a)刚度为 k 的线性弹簧未拉伸(参考)的位形；
(b)由于作用力 P 使弹簧伸长 D 后的位形。

值可得平衡位形 D_{eq}：

$$d\Pi_p = (kD_{eq} - P)dD = 0 \qquad 因此 \qquad D_{eq} = P/k \tag{4.2-4}$$

式 $(kD_{eq}-P)dD=0$ 是虚功原理的一个例子：从平衡位形移动了小的容许位移 dD 的过程中，所有内力和外力做的净功为零。从图 4.2-4 中可一目了然地看到这一点，Π_p 是相对最小值，它意味着平衡状态是稳定的。

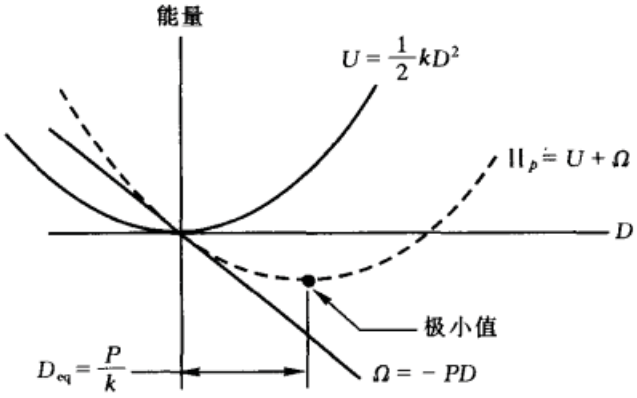


图 4.2-4 图解表示图 4.2-3 中问题的能量关系

Ω 的参考基准可以由一个常数任意改变而不影响平衡位形。例如，如果说在平衡位形中 Ω 为零，那么 $\Omega=P(D_{eq}-D)$。在求 $d\Pi_p=0$ 过程中，附加常数 PD_{eq} 消失，又可得到同样的 D_{eq} 值。

能量守恒 我们暂且不提最小势能原理，假设 D 是由逐渐增大的并最终达到 P 的载荷产生，因此外力所做的功与线性弹簧的应变能相等，我们有

$$\frac{1}{2}PD_{eq} = \frac{1}{2}kD_{eq}^2 \qquad 从而 \qquad D_{eq} = \frac{P}{k} \tag{4.2-5}$$

这个能量平衡的论证是有效的但却难有用处。即使有许多自由度需要确定，但它只得出一个方程。

公式 4.2-5 只出现了一半的因子，因为力是与线性弹簧的伸长成正比的。在公式 4.2-2 中，我们写 $\Omega=-PD$ 而不是 $\Omega=-PD/2$，因为在最小势能原理中，外力 P 被视为一直以全量做功。势能 Ω 与弹簧的性质无关。

4.3　多自由度问题

典型的有限元离散化使用了成百上千个自由度。它们可能是节点的 x 和 y 向位移(如在平面应力问题中)，或者是节点的横向挠度 v 及其一阶导数 $v_{,x}$ 等等。设 n 是必须确定的自由度数，并设它们是结构位移矢量的集合 $\{D\}=\lfloor D_1 \quad D_2 \quad \cdots \quad D_n \rfloor^{\mathrm{T}}$。在下文中我们假设已经施加支撑条件，那么 D_i 取任意值总能给出容许的位形。

势能 Π_p 是 D_i 的函数，用符号表示为 $\Pi_p=\Pi_p(D_1,D_2,\cdots,D_n)$。应用最小势能原理得

$$\mathrm{d}\Pi_p=0 \quad \text{这里} \quad \mathrm{d}\Pi_p=\frac{\partial \Pi_p}{\partial D_1}\mathrm{d}D_1+\frac{\partial \Pi_p}{\partial D_2}\mathrm{d}D_2+\cdots+\frac{\partial \Pi_p}{\partial D_n}\mathrm{d}D_n \tag{4.3-1}$$

最小势能原理说明对于任何小的允许位形变分，当 $\mathrm{d}\Pi_p=0$ 时，就会出现平衡状态。我们可以假设只有 $\mathrm{d}D_1$ 非零，或只有 $\mathrm{d}D_2$ 和 $\mathrm{d}D_3$ 非零，等等。对任何一个非零和所有这样的选择，$\mathrm{d}\Pi_p$ 必为零。这只有 $\mathrm{d}D_i$ 的所有系数分别为零才有可能。因此，对于 $i=1,2,\cdots,n$，

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial D_i}=0 \quad \text{或者用另外的符号} \quad \left\{\frac{\partial \Pi_p}{\partial \boldsymbol{D}}\right\}=\{\boldsymbol{0}\} \tag{4.3-2}$$

这是 n 个待求方程，用于求解确定静态平衡位形的 D_i 自由度的 n 个值。

例：连续弹簧　图 4.3-1 所示结构的势能为

$$\Pi_p=\frac{1}{2}k_1D_1^2+\frac{1}{2}k_2(D_2-D_1)^2+\frac{1}{2}k_3(D_3-D_2)^2-P_1D_1-P_2D_2-P_3D_3 \tag{4.3-3}$$

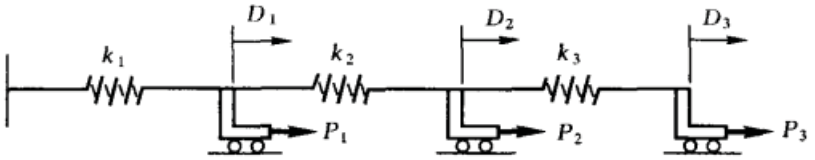


图 4.3-1　由三个线性弹簧和三个轴向载荷 P_1，P_2 和 P_3 组成的三自由度系统
当 $D_1=D_2=D_3=0$ 时，弹簧未伸长

其中自由度 D_i 是相对空间固定点的轴向位移，例如左边的支撑。对 $i=1,2,3$，由公式 4.3-2 和 4.3-3 得：

$$\begin{aligned} &k_1D_1-k_2(D_2-D_1)-P_1=0\\ &k_2(D_2-D_1)-k_3(D_3-D_2)-P_2=0\\ &k_3(D_3-D_2)-P_3=0 \end{aligned} \tag{4.3-4}$$

公式 4.3-4 写成 $\{\boldsymbol{K}\}\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\}$ 的矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} \tag{4.3-5}$$

正如 2.2 节和 2.3 节所描述的那样，公式 4.3－5 中刚度矩阵[$\boldsymbol{K}$]的正确性可以通过一次激活一个自由度的方法来验证。

结论 从前面的例子中可以得到下列具有普遍性的结论：

1. 载荷对位移具有线性特性的系统有一个对称的刚度矩阵①；也就是说，$K_{ij}=K_{ji}$。这种情况的发生是因为非对角线系数对称位置的每对都来自 Π_p 中的单一项，它的形式是固定乘积 D_iD_j。因此 $K_{ij}=\partial^2\Pi_p/\partial D_i\partial D_j=\partial^2\Pi_p/\partial D_j\partial D_i=K_{ji}$，其中 K_{ij} 是在方程$\{\boldsymbol{K}\}\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\}$第 i 行中乘 D_j 的，K_{ji} 是在第 j 行中乘 D_i。
2. 如果 D_i 是一个节点位移(或旋角)，那么方程式$\partial\Pi_p/\partial D_i=0$ 是一个节点平衡方程，它说明了在 D_i 方向上作用在该节点上的力(或力矩)之和为零。包括在这个和数中的项是(a)来自外部的载荷和(b)来自内部的由于结构部件变形产生的载荷(也许是由于热载荷、体力等)。
3. 静不定并不改变求解过程或增加问题难度。例如，图 4.3－1 中我们可以在左边的支点和节点 3 之间连接第 4 个弹簧，这样 Π_p 增加了项 $k_4D_3^2/2$，公式 4.3－5 中最后的刚度系数将从 k_3 变为 k_3+k_4，但不必增加自由度。
4. 一个线弹性结构的势能可写成下列形式：

$$\Pi_p=U+Q \qquad \text{其中} \qquad U=\frac{1}{2}\{\boldsymbol{D}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\},\quad \Omega=-\{\boldsymbol{D}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{R}\} \tag{4.3-6}$$

如果 $U=0$，那么$\{\boldsymbol{D}\}$中任何一项都为零，$\{\boldsymbol{D}\}$表示一个机构或一个刚体运动。如果结构是稳定的并有支撑，那么机构或刚体运动是不可能的(如在式 4.3－3 和 4.3－5 中)，对任何非零的$\{\boldsymbol{D}\}$，$\{\boldsymbol{D}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}/2>0$，我们说[$\boldsymbol{K}$]是正定的。

4.4 弹性体势能

弹性体的势能包括弹性变形中的应变能和作用载荷的势能。总势能表达式我们称之为 Π_p，可以用来表示单元刚度矩阵和单元载荷向量。本章后面介绍基于 Π_p 的简单有限元列式，随后的章节介绍其它的列式。

本节给出公式，讨论它们的有效性，证明特殊情况能得到精确结果，并列举了例子。详细推导及讨论见文献[4.1～4.3]。

单位体积材料变形必须提供的能量为

$$U_0=\int\{\boldsymbol{\sigma}\}^{\mathrm{T}}\{\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}\}=\int\sigma_x\mathrm{d}\varepsilon_x+\int\sigma_y\mathrm{d}\varepsilon_y+\int\sigma_z\mathrm{d}\varepsilon_z+\int\tau_{xy}\mathrm{d}\gamma_{xy}+\int\tau_{yz}\mathrm{d}\gamma_{yz}+\int\tau_{zx}\mathrm{d}\gamma_{zx} \tag{4.4-1}$$

① 关于对称性的这些结论也可应用到被称为超弹性的特种非线性材料上，为此可以定义一个应变能密度函数 U_0。

U_0 称为单位体积的应变能或应变能密度。如果材料是弹性的，U_0 就是储存在材料中并在载荷撤去后就能恢复做功的能量。在这种情况下 U_0 也称为弹性应变能密度。

没有初始应力和初始应变的线性弹性材料，其应力-应变关系为$\{\boldsymbol{\sigma}\}=[\boldsymbol{E}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$，其中$[\boldsymbol{E}]$为对称矩阵。材料的性能可能是各向同性的，此时可由公式 3.1－3 或 3.1－5 得到$[\boldsymbol{E}]$中各元素；或者是各向异性，这种情况下$[\boldsymbol{E}]$就变得更复杂一些。把公式$\{\boldsymbol{\sigma}\}=[\boldsymbol{E}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$和公式 4.4－1 结合，并积分得应变能密度

$$U_0 = \frac{1}{2}\{\boldsymbol{\sigma}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \frac{1}{2}\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{E}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} \tag{4.4-2}$$

对于有初始应力$\{\boldsymbol{\sigma}_0\}$和初始应变$\{\boldsymbol{\varepsilon}_0\}$的线性弹性材料，其应力-应变关系为

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\boldsymbol{E}](\{\boldsymbol{\varepsilon}\} - \{\boldsymbol{\varepsilon}_0\}) + \{\boldsymbol{\sigma}_0\} \tag{4.4-3}$$

联立公式 4.4－1 和公式 4.4－3 并积分，得到一个广义的应变能密度表达式：

$$U_0 = \frac{1}{2}\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{E}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} - \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{E}]\{\boldsymbol{\varepsilon}_0\} + \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\sigma}_0\} \tag{4.4-4}$$

在写公式 4.4－2 和公式 4.4－4 时，一个不是应变函数的积分常数项被忽略。这一项是多余的，因为在使 Π_p 稳定的微分过程中它会消失。运用附录 A 中的微分规则可证明这些积分是正确的。

现在考察一个线弹性材料的物体。如果没有初始应力或初始应变，那么由公式 4.4－2 得到该物体中所含的总应变能如下：

$$U = \int U_0 \mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int \{\boldsymbol{\sigma}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\varepsilon}\}\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{E}]\ \{\boldsymbol{\varepsilon}\}\ \mathrm{d}V \tag{4.4-5}$$

当物体的某处存在初始应力或初始应变，对公式 4.4－4 积分可得

$$U = \int U_0 \mathrm{d}V = \int \left(\frac{1}{2}\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{E}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} - \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{E}]\{\boldsymbol{\varepsilon}_0\} + \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\sigma}_0\}\right)\mathrm{d}V \tag{4.4-6}$$

现在考虑承受保守载荷作用的线性弹性体。利用第 3.3 节采用的符号，它的势能表达式为

$$\Pi = \int \left(\frac{1}{2}\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{E}]\ \{\boldsymbol{\varepsilon}\} - \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{E}]\{\boldsymbol{\varepsilon}_0\} + \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\sigma}_0\}\right)\mathrm{d}V - \int \{\boldsymbol{u}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{F}\}\ \mathrm{d}V$$
$$- \int \{\boldsymbol{u}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\Phi}\}\mathrm{d}S - \{\boldsymbol{D}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{P}\} \tag{4.4-7}$$

第一项积分的被积函数是 U_0——单位体积的应变能。包括体积力$\{\boldsymbol{F}\}$和表面力$\{\boldsymbol{\Phi}\}$的积分，表示当物体变形时$\{\boldsymbol{F}\}$和$\{\boldsymbol{\Phi}\}$所做的功（在这里是势能损失）。在最后的积分项中，$\{\boldsymbol{u}\}$是在$\{\boldsymbol{\Phi}\}$作用的表面 S 上计算的。对于分别在 x,y,z 方向的位移 u,v 和 w，每单位体积和单位面积上与$\{\boldsymbol{F}\}$和$\{\boldsymbol{\Phi}\}$有关的势能变化量分别是

$$-\{\boldsymbol{u}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{F}\} = -F_x u - F_y v - F_z w \quad \text{和} \quad -\{\boldsymbol{u}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\Phi}\} = -\Phi_x u - \Phi_y v - \Phi_z w \tag{4.4-8}$$

在写公式 4.4－8 时，假设$\{\boldsymbol{F}\}$和$\{\boldsymbol{\Phi}\}$的正向与位移正向相一致（也就是与坐标轴正向一致）。

例如，当沿着 $+x$ 方向作用时，F_x，Φ_x 和 u 都为正。

公式 4.4-7 中最后一项 $-\{\boldsymbol{D}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{P}\}=-D_1P_1-D_2P_2-\cdots-D_nP_n$，是由作用在物体上的集中力或/和力矩(已知量)所做的功，也就是势能损失量。照例，力和力矩与它们相应的位移和转角取相同的正方向。在写这一项时，我们假设在每个力或力矩 P_i 的作用位置有自由度 D_i，因此所做的功简化为 D_iP_i(3.11 节介绍了不在节点处的集中力和/或力矩的处理)。我们从这个列式中除去由指定自由度作用的未知载荷，如将自由度设置成零作为支撑条件。在有限元分析中，指定的非零自由度产生的应变在公式 4.4-7 第一个积分的第一项中已做了考虑。

在一个典型的问题中，载荷 $\{\boldsymbol{\varepsilon}_0\}$，$\{\boldsymbol{\sigma}_0\}$，$\{\boldsymbol{F}\}$，$\{\boldsymbol{\Phi}\}$ 和 $\{\boldsymbol{P}\}$ 中的许多项为零。例如，当由于局部加热产生初始应力时，物体绝大部分的 $\{\boldsymbol{\sigma}_0\}$ 为零。如果认为重力或加速度载荷不重要，则 $\{\boldsymbol{F}\}=\{0\}$。表面力 $\{\boldsymbol{\Phi}\}$ 只作用在表面 S 的一部分或可能完全不存在。当然，如果指定一个或多个自由度为非零值，所有这些载荷项可能都为零。

公式 4.4-7 并不只限于直角坐标，它只要求在每个物质点 x,y,z 指向三个相互垂直的方向。

特殊情况 在最一般的形式中，公式 4.4-7 包含 $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ 的六个应变分量，材料性能矩阵 $[\boldsymbol{E}]$ 是 6×6 的。公式 3.1-5 给出了各向同性情况下的系数。如果问题是平面应力或平面应变中的一种，那么用于分析的是 $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}=\lfloor\varepsilon_x\quad\varepsilon_y\quad\gamma_{xy}\rfloor^{\mathrm{T}}$，且 $[\boldsymbol{E}]$ 是 3×3 矩阵。对于各向同性材料，$[\boldsymbol{E}]$ 中的项，平面应力由公式 3.1-3 给出，求平面应变由公式 3.4-11 给出。

最简单的特殊情况是单轴应力。对于这种特殊情况，或许还有其它情况，重新推导如下的应变能表达式比从公式 4.4-7 中提取可能要容易。公式 4.4-3 变成 $\sigma_x=E\varepsilon_x-E\varepsilon_{x0}+\sigma_{x0}$，$U_0$ 变成 $U_0=\sigma_x\varepsilon_x/2=E\varepsilon_x^2/2-\varepsilon_xE\varepsilon_{x0}+\varepsilon_x\sigma_{x0}$。积分并包括载荷项后，得到方程 4.4-7 的替代式

$$\Pi_p=\int_0^L\left(\frac{1}{2}E\varepsilon_x^2-\varepsilon_xE\varepsilon_{x0}+\varepsilon_x\sigma_{x0}\right)A\mathrm{d}x-\int_0^LuF_xA\,\mathrm{d}x-\{\boldsymbol{D}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{P}\}\qquad(4.4-9)$$

其中 E 为弹性模量，$\mathrm{d}V=A\mathrm{d}x$，A 为横截面积，L 是长度。在第二个积分中，被积函数可以看做 $uF_x\mathrm{d}V$ 或 $uq\mathrm{d}x$，其中 $q=F_xA$。当物体在数学上是一维时，轴向体力 F_x 和轴向线载荷 q 等效。

在欧拉-伯努利梁理论中，图 4.4-1(b)中的横向剪切变形可忽略，法向应力 σ_x 可视为仅有的非零应力。因此欧拉-伯努利梁的应变能表达式可由公式 4.4-9 推导得到。设 b 代表梁的横截面宽度，因为 $\varepsilon_x=u_{,x}$，$u=-yv_{,x}$，公式 4.4-9 的第一项变为

$$\int\frac{1}{2}E\varepsilon_x^2\mathrm{d}E=\iint\frac{1}{2}E(-yv_{,xx})^2b\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2}EI_zv_{,xx}^2\mathrm{d}x\qquad(4.4-10)$$

这里，如果横截面是长方形，$I_z=bt^3/12$ 是横截面积 A 绕形心 z 轴的惯性矩。如果类似 ε_{x0} 和 σ_{x0} 的项被忽略(读者也可以在练习中加上这些项)，欧拉-伯努利直梁的势能表达式为

$$\Pi_p=\int_0^L\frac{1}{2}EI_zv_{,xx}^2\mathrm{d}x-\int_0^Lvq\mathrm{d}x-\{\boldsymbol{v}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{F}\}-\{\boldsymbol{\theta}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{M}\}\qquad(4.4-11)$$

其中 $\{v^{\mathrm{T}}=\lfloor v_1\quad v_2\quad\cdots\rfloor$ 和 $\{\boldsymbol{\theta}\}^{\mathrm{T}}=\lfloor\theta_{z1}\quad\theta_{z2}\quad\cdots\rfloor$ 是横向力 $\{\boldsymbol{F}\}$ 和 $\{\boldsymbol{M}\}$ 力矩作用处的横向挠度和转角($\theta_z=v_{,x}$)。公式 4.4-11 中第二个积分项表示横向移动 v 的过程中横向力增量 $q\mathrm{d}x$ 所

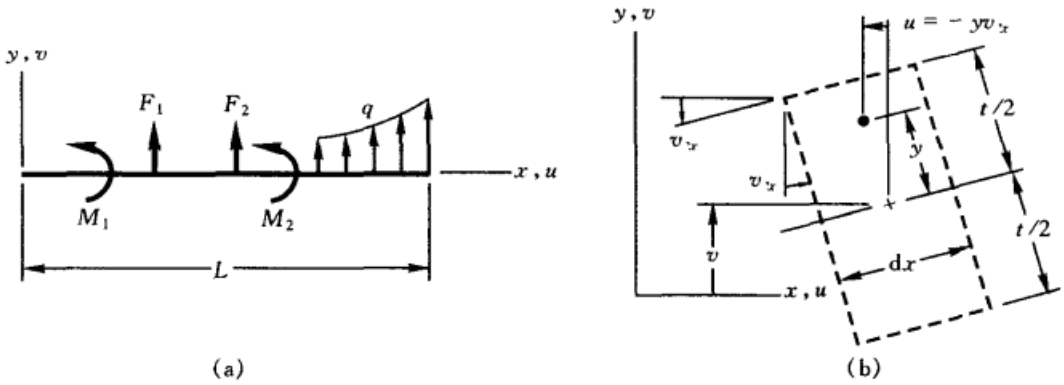


图 4.4－1　(a)受横向力 F_i，力矩 M_i 以及横向分布载荷 q(单位长度力)作用的梁；(b)显示梁承受挠度 v 和小转角 $v_{,x}$ 后的切片，忽略横向剪切变形

做的功。梁的轴向应力为 $\sigma_x = E\varepsilon_x = Eu_{,x} = -Eyv_{,xx}$。

板的弯曲问题与用曲率而不是应变方便表示应变能的梁问题相类似。尤其是在有横向挠度 $w = w(x, y)$ 的薄板中，应变能可用 $w_{,xx}$，$w_{,yy}$ 和 $w_{,xy}$ 而不是 ε_x，ε_y 和 γ_{xy} 来表达。

例：受轴向载荷的杆　设图 4.4－2 所示等截面杆末端作用一载荷 P，并被均匀加热 T 度。令 D 表示在 P 和 T 作用下杆末端产生的位移。已知 $\varepsilon_{x0} = 0$，$\sigma_{x0} = -E\alpha T$，$\varepsilon_x = D/L$，则公式 4.4－9 变为

$$\Pi_p = \int_0^L \left[\frac{1}{2}E\left(\frac{D}{L}\right)^2 + \frac{D}{L}(-E\alpha T)\right]A\mathrm{d}x - DP = \frac{EAD^2}{2L} - DEA\alpha T - DP \tag{4.4-12}$$

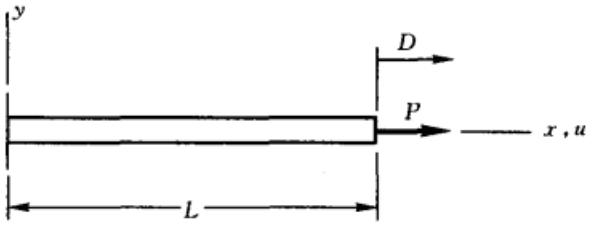


图 4.4－2　轴向载荷 P 作用下的等截面杆

由方程 $\mathrm{d}\Pi_p/\mathrm{d}D = 0$ 可得末端位移 D：

$$D = \frac{PL}{AE} + \alpha TL \tag{4.4-13}$$

最后，当 $\varepsilon_x = D/L$ 时，轴向应力 σ_x 为

$$\sigma_x = E\varepsilon_x + \sigma_{x0} = E\left(\frac{P}{AE} + \alpha T\right) + (-E\alpha T) = \frac{P}{A} \tag{4.4-14}$$

这正是希望的结果。

4.5 瑞雷-里兹法

由离散构件组成的结构，如刚架或桁架，其变形可用有限个自由度准确地描述。这些自由度就是节点位移。一个连续介质如弹性体，有无限个自由度，也就是每个质点的位移。连续体的运动可用偏微分方程来表述。除了较简单的情况，几乎对所有的连续体很少有希望能找到一个可解微分方程并满足边界条件的应力场或位移场。把瑞雷-里兹法用到像描述数学模型的泛函 Π_p 中，就不必求解微分方程了。所得结果是一个替代模型，具有有限个自由度，可用代数方程而不是微分方程来描述。瑞雷-里兹解法不是很精确，但随着使用自由度的增多，会变得更准确。

瑞雷-里兹法分为经典形式和有限元形式。它是由瑞雷于 1870 年在研究振动问题时最先提出来的。他使用了一个含单个自由度的近似场。1909 年，里兹归纳了从几个函数建立一个近似场的方法，其中每个函数都满足强制性(运动学)边界条件，都与一个独立的自由度相关联。里兹把这个方法应用到平衡问题和特征值问题。总之，瑞雷-里兹法是在近似场中确定参数以使场的函数 F 达到极值的过程。F 的例子包括 Π_p 和结构动力学中的瑞雷系数。这里将介绍平衡(与时间无关)问题的求解过程。

考虑一个弹性体，求其由于外加载荷产生的位移和应力。一般情况下，某一点存在位移分量 u，v 和 w。瑞雷-里兹法求解是从这些分量的近似场开始的，每个场是一个级数，它的典型项是坐标的函数 $f_i=f_i(x,y,z)$，乘以待定幅值 a_i，a_i 也称为广义坐标或广义自由度。具体可写成

$$u=\sum_{i=1}^{l}a_i f_i \qquad v=\sum_{i=l+1}^{m}a_i f_i \qquad w=\sum_{i=m+1}^{n}a_i f_i \tag{4.5-1}$$

每个函数 $f_i=f_i(x,y,z)$ 必须是可允许的，也就是说，必须满足协调条件和强制性边界条件。并不要求任何一个 f_i 都满足自然边界条件，但如果都满足，那么给定的自由度数近似值将更精确。通常并不必要，f_i 是多项式，它自动满足协调条件。为了达到精度要求，分析人员必须估算出每个级数需要多少项。因此公式 4.5-1 中的级数就被截断，而不是无限的，这些级数分别有 l，$m-l$ 和 $n-m$ 项，总和为 n 项。

问题的自由度是 n 个，其幅值为 a_i，它们是这样确定的。将公式 4.5-1 代入应变-位移关系式(公式 3.1-9)中确定应变 $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$，然后使用公式 4.4-7 计算 Π_p。因此 Π_p 变成了自由度 a_i 的函数，就像公式 4.3-1 中 Π_p 是自由度 D_i 的函数一样。根据最小势能原理，由 n 个代数方程可确定平衡位形

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial a_i}=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{4.5-2}$$

由公式 4.5-2 解出 a_i 的数值后，即可完全确定公式 4.5-1 中的位移场。由位移场的微分得到应变，然后将应变代入应力-应变关系式即可得到应力。

前面的过程有两个主要的步骤。第一步是建立允许解的试函数族；第二步是用一个判别准则从这个族中选出最佳形式。这里的准则就是 Π_p 是有极值的。也可以使用其它准则，如

加权残数法(第 5 章)。

公式 4.5－1 引出了一个替代问题，因为初始数学模型中的无限多自由度被替换成瑞雷-里兹模型中的有限个自由度。瑞雷-里兹法一般是近似的，因为设定函数 f_i 的组合式不能精确地表达初始数学模型中的位移。计算过程中选择幅值 a_i 使函数 f_i 组合达到最优化。当 Π_p 是泛函时，意味着要确定自由度 a_i 的组合式以使 Π_p 尽可能地小，也暗示着下面的微分平衡方程式和应力边界条件都是近似的，但随级数项 $a_i f_i$ 的增加精确度会提高。

求得的公式 4.5－2 是刚度方程，也可写成一般形式 $[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\}$，其中 $\{\boldsymbol{D}\}=\lfloor a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n \rfloor^T$。并不是所有的 D_i 都有位移单位，也不是所有的 R_i 都有力的单位，但它们的乘积有功或能量的单位。

例：轴向载荷作用下的杆　考虑图 4.5－1(a)所示的均匀杆，轴向载荷 q 沿杆长度以 $q=cx$ 的规律线性分布，其中 c 是常数，其单位等于力除以长度的平方。用瑞雷-里兹法求数学模型中的轴向位移 u 和轴向应力 σ_x。

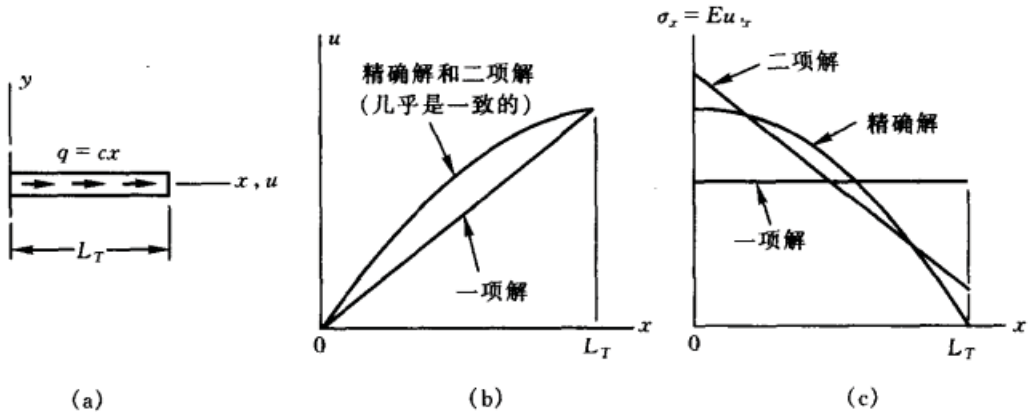


图 4.5－1　(a)均匀杆作用有密度为 $q=cx$ 的线性变化轴向分布载荷，这里 c 是常数。(b)精确轴向位移和近似轴向位移；(c)精确轴向应力和近似轴向应力。

轴向应变为 $\epsilon_x=u_{,x}$，则公式 4.4－9 变为：

$$\Pi_p=\int_0^{L_T}\frac{1}{2}Eu_{,x}^2A\,\mathrm{d}x-\int_0^{L_T}ucx\,\mathrm{d}x \tag{4.5-3}$$

在这种情况下对于 $f_i=x^i$，公式 4.5－1 变成

$$u=\sum_{i=1}^{n}a_if_i=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n \tag{4.5-4}$$

注意这里没有初始项 a_0：位移模式 $u=a_0$ 是不容许的，因为它违反了强制边界条件，即 $x=0$ 时 $u=0$。

仅利用级数的第一项可得到最简单的近似解，$u=a_1x$。由公式 4.5－2 和 4.5－3 得：

$$\Pi_p=\frac{AEL_T}{2}a_1^2-\frac{cL_T^3}{3}a_1 \tag{4.5-5a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Pi_p}{\mathrm{d}a_1}\quad 得\quad a_1=\frac{cL_T^2}{3AE} \tag{4.5-5b}$$

所以

$$u = \frac{cL_T^2}{3AE}x \qquad \sigma_x = Eu_{,x} = \frac{cL_T^2}{3A} \tag{4.5-5c}$$

在评论这个结果之前我们考虑使用两项 $u=a_1x+a_2x^2$ 的结果。代入公式 4.5-3，由 $\partial\Pi_p/\partial a_1=0$ 和 $\partial\Pi_p/\partial a_2=0$ 得：

$$AEL_T\begin{bmatrix}1 & L_T\\ L_T & 4L_T^2/3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a_1\\ a_2\end{Bmatrix} = \frac{cL_T^3}{12}\begin{Bmatrix}4\\ 3L_T\end{Bmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{Bmatrix}a_1\\ a_2\end{Bmatrix} = \frac{cL_T}{12AE}\begin{bmatrix}7L_T\\ -3\end{bmatrix} \tag{4.5-6a}$$

因此

$$u = \frac{cL_T}{12AE}(7L_Tx - 3x^2) \qquad \sigma_x = Eu_{,x} = \frac{cL_T}{12A}(7L_T - 6x) \tag{4.5-6b}$$

图 4.5-1(b)和图 4.5-1(c)给出了精确的和近似的结果。正如所料，两项的结果(公式 4.5-6)要比一项的结果(公式 4.5-5)好。当体力项为 $F=cx/A$ 时，平衡微分方程(公式 3.1-12)变为

$$\sigma_{x,x} + \frac{cx}{A} = 0 \qquad \text{或} \qquad AEu_{,xx} + cx = 0 \tag{4.5-7}$$

其中后一个方程是从替换式 $\sigma_x=Eu_{,x}$ 得到的。前面所述的两个近似结果既不满足公式 4.5-7，也不满足当 $x=L_T$ 时 $\sigma_x=0$ 的自然边界条件。

我们可以看到位移近似值比应力近似值更精确，这是预料之中的，因为应力是由近似场的导数计算而得。(应看到微分增大了误差，考虑函数 $f_1=4x(1-x)$ 和 $f_2=\sin\pi x$，在 $0<x<1$ 范围内，函数 f_1 和 f_2 看起来差不多，但 f_1 和 f_2 的逐次导数相似性则越来越差。)

对于边界条件，$x=0$ 时 $u=0$，$x=L$ 时 $\sigma_x=0$，解公式 4.5-7，可得到图 4.5-1(a)所示问题数学上的精确解。因此

$$u = \frac{c}{6AE}(3L_T^2x - x^3) \tag{4.5-8}$$

在瑞雷-里兹法中使用级数 $u=a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ 得：

$$a_1 = \frac{cL_T^2}{2AE} \qquad a_2 = 0 \qquad a_3 = -\frac{c}{6AE} \tag{4.5-9}$$

这是精确解。使用更多项仍可得出精确解：a_1，a_2 和 a_3 的结果与公式 4.5-9 相同，而 $a_4=a_5=a_6=\cdots=a_n=0$。如果通过适当选择自由度 a_i，使近似场能够代表精确场，那么瑞雷-里兹法就能够得到精确的结果。实际上这种情况很少见。

4.6 关于瑞雷-里兹法的说明

近似域必须是可容许的并且应易于使用。只有多项式，以及有时使用的 sin 和 cos 函数才是简单的可用形式，除此之外许多重要问题都不易回答，诸如对场域哪种假设形式效果最佳？

应该使用多少项？计算结果精度如何？经典的瑞雷-里兹法和它的有限元形式都会存在这些困难和不确定性，对于多维的情况则问题更多。

在寻找数学模型的精确解时，先假设得到一些数值解，然后每次在假设域中再加上另一项（如公式 4.5-5 和公式 4.5-6 所示的例子）。这样我们可以得到一族试探解，我们期望这个族收敛到精确的 Π_p，精确的位移和精确的应力值。要达到收敛的一个必要条件是这个试探域是完全的。

如果精确位移以及在 Π_p 中出现的它们的导数，在试探域有足够的项能任意密切地匹配，就可获得完备性。在这个意义上，“完备性”这个词比用于描述多项式的完整性有不同的更丰富的含义。

完备性要求须包含最低阶次的允许项。例如，考虑图 4.4-2 所示的端部受载杆。如果我们忽略了公式 4.5-4 中的 a_1x 项，那就等于忽略了包含精确解的最重要的项，即 $u=(P/AE)x$。因此完备性被破坏，即使项数趋于无限，近似解族也不能得到精确答案。这一点很容易理解：如果公式 4.5-4 由 a_2x^2 开始，那么当 $x=0$ 时 $\sigma_x=Eu_{,x}=0$，这是错误的。a_1x 项提供了基本的常应变能力（在有限元中，这个要求意味着每个单元必须能够表示常应变状态）。完备性还要求不能省略序列项。再参照公式 4.5-4，两项近似值应该是 $a_1x+a_2x^2$，而不能是 $a_1x+a_3x^3$ 或 $a_1x+a_4x^4$ 等。

我们要注意到不能仅为包括给定阶数的所有项这个单一目的来选择单元域内多项式的项。尽管像 4.9 节要求 1 所表述的那样，包含某些低阶项是强制性要求，但多项式所含高阶项的选择，如 3.9 节所述，也要基于单元间协调性和刚架不变性考虑。例如，式 3.7-2 后面注解的 9 节点平面元的每个场域都含有四个立方项中的两个，和五个二次项中的一个，因此仅由于二次项，这个多项式才是完全的。

在和数学模型比较中，协调的瑞雷-里兹解或者精确或者过于刚化。发生这种情况是因为允许所建的数值模型结构仅仅取代能够用叠加保留在假定位移场内的有限个函数 f_i 描述的形状。因此正确的形状被排除，除非问题是如此简单，以至于假定的场域碰巧包含了它。实际上，对于大多数应用问题，假定的域施加约束防止结构变形到它想要的状态。约束强化了结构。这种解法建立了一个比初始数学模型刚化的替代数学模型。因此，在加入自由度时，有限元解是从“下限”接近数学上的精确解。

在实际问题中，瑞雷-里兹法是近似的。因为刚度一般都超过预想值，当载荷设定，而自由度或者设定为自由的或者设定为零，在平均意义上瑞雷-里兹法预测的位移值偏低。特别是，当结构受单个集中力（或力矩）载荷作用时，那么，在载荷作用点的位移（或转角）肯定是低于预测值的，在很简单的问题中充其量是精确值，但不会超过预测值。如果问题中有多个载荷（和/或体力及表面力），自由度或是自由的或是设定为零，那么，这个解的位移将在一些区域是欠预测的，而在另一些区域可能是过预测的。然而，瑞雷-里兹法预测的位移所做的功小于精确值（充其量是等于，而绝不会超过），在这个意义上，位移是欠预测的。因此，结构中的计算应变能是精确值的下限。

相反，如果仅载荷是那些隐含与支撑和某些自由度设定的非零值相关，我们通常发现，这些载荷在平均意义上是过预测的。对于涉及设定的载荷和设定的非零位移的问题，我们仅能够说，总体刚度估算过高了。

应力是由位移计算而得的，当加载由设定的力和/或力矩组成时，我们期望过于刚化的结

构将低估应力幅值。然而，正像在图 4.5－1(c)中看到的，即使当应力从每处都很低的近似位移场中得到时，其值也可能在一个区域过低而在另一个区域过高。因此，对于小值而言应力值的规则或者粗略或者含糊不清。

4.7 强形式和弱形式

最小势能原理只是多个数学物理极值原理之一。每个原理都可归结为一个泛函数，Π_p 就是其中一个。本节我们不做推导，而是先介绍能够提供包含在特定泛函中的控制微分方程的规则。然后以受轴向载荷的杆为例，我们用变分计算来证明泛函包含微分方程和自然边界条件。

考虑公式 4.4－7 给出的泛函 Π_p，它依赖于位移$\{\boldsymbol{u}\}$和位移$\{\boldsymbol{u}\}$的导数，应变$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$。“泛函”项也表明 Π_p 不依赖于特定点的位移$\{\boldsymbol{u}\}$和它的导数，但取决于在感兴趣的区域上的积分效应。稳态(极值)条件 $\mathrm{d}\Pi_p=0$ 可以直接运用于方程 4.4－7，不必先用自由度的有限数来表示 Π_p。这可用变分法来实现，详细内容超出了本书的范围[4.1~4.3]。利用方程 4.4－7 并设 $\mathrm{d}\Pi_p=0$ 的最终结果是平衡微分方程(一般为公式 3.1－12)和自然边界条件(一般为应力边界条件，公式 3.1－14)。因此，如果场量$\{\boldsymbol{u}\}$是可容许的，$\mathrm{d}\Pi_p=0$ 就包含着有效解的所有分量。在使用有限个自由度的近似解中，只在平均或积分意义上，而不是在每一点，满足平衡条件和应力边界条件。

其它物理问题也存在另外一些泛函 Π。不是位移$\{\boldsymbol{u}\}$，基本场量也可能是温度、压力、电压或其它场变量。在每种情况下可以用变分计算来检验泛函 Π 的正确性，看由条件 $\mathrm{d}\Pi=0$ 是否能够得出合适的控制微分方程和自然边界条件。

边界条件 边界条件分为两类：本质边界条件和非本质边界条件。不管这两个术语的含义如何，两者同等重要。区别在于如何处理边界条件并利用变分法进行近似。对于有一个相关场变量的问题，规则如下。设控制微分方程中相关场变量的导数最高阶为 $2m$。那么，在泛函中出现了 m 阶导数。本质边界条件包括从 0 到 $m-1$ 阶导数，第 0 阶导数就是相关变量本身。自然边界条件包括 m 以及更高阶直到 $2m-1$ 阶导数。下面是一些例子。

问题	杆(图 4.5－1(a))	梁弯曲	二维导热
微分方程	$AEu_{,xx}+q=0$	$EIv_{,xxxx}-q=0$	$k\nabla^2 T+Q-c\rho\dot{T}=0$
$2m,m-1,2m-1$	2,0,1	4,1,3	2,0,1
强制边界条件	仅取决于 u	取决于 v 和 $v_{,x}$	仅取决于 T
自然边界条件	取决于 $\sigma_x=Eu_{,x}$	取决于 $M=EIv_{,xx}$ 和 $V=EIv_{,xxx}$	取决于热流 $f_B=k(T_{,x}l+T_{,y}m)$

在这些例子中，相关场变量是轴向位移 u，横向位移 v 和温度 T。自然边界条件应用于轴向应力 σ_x，弯矩 M，横向剪力 V 和输入热流量 f_B。在热传导的例子中，k 是导热率，$\dot{T}$是 T 的时间导数，l 和 m 是边界法线的方向余弦。

如果不止一个域，前面所述的标注有微小的改变。例如，设想在控制微分方程中有相关场变量 u 和 v 及其二阶导数 $u_{,xx}$，$u_{,xy}$，$u_{,yy}$，$v_{,xx}$，$v_{,xy}$ 和 $v_{,yy}$，在泛函中有一阶导数 $u_{,x}$，$u_{,y}$，$v_{,x}$ 和 $v_{,y}$。那么对 u 和 v 都有 $2m=2$ 和 $m=1$。强制边界条件是在特定位置设定 u 和 v，自然边界条件包括 u 和 v 的一阶导数，或者是独立的，或者是组合的。

泛函和广义微分方程。 设泛函 Π 取决于两个相关场变量，$u=u(x,y)$ 和 $v=v(x,y)$，其中独立变量 x 和 y 是笛卡儿坐标，可表达为

$$\Pi=\iint F(x,y,u,v,u_{,x}u_{,y},v_{,x},v_{,y},\cdots,v_{,yy})\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4.7-1}$$

我们假设积分定义在整个域内。例如，在梁的弯曲问题中，我们必须排除显示间断点的域，像图 4.2-2(b)中 A 处和 B 处。同样在最终有限元应用时，插值多项式必须满足光滑性要求。欧拉方程的数目和相关场变量的数目一样多。每个欧拉方程就是物理问题的一个控制微分方程。如果没有包括高于二阶的导数，变分计算可从公式 4.7-1 中分离出欧拉方程

$$\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_{,x}}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u_{,y}}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial u_{,xx}}+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\frac{\partial F}{\partial u_{,xy}}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\partial F}{\partial u_{,yy}}=0 \tag{4.7-2a}$$

$$\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial v_{,x}}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial v_{,y}}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial v_{,xx}}+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\frac{\partial F}{\partial v_{,xy}}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\partial F}{\partial v_{,yy}}=0 \tag{4.7-2b}$$

公式 4.7-1 和公式 4.7-2 两者表述的是同样的问题，公式 4.7-1 叫做“弱形式”，公式 4.7-2则是“强形式”。

作为公式 4.7-2 的特例，我们考虑图 4.5-1(a)所示的作用有轴向载荷的均匀杆。这里有一个独立变量 x，一个相关变量 u，没有二阶导数。公式 4.7-1 可简化成公式 4.5-3 中的 Π_p。但有一个欧拉方程式 4.7-2a，它简化成

$$\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial u_{,x}}=0 \qquad \text{其中} \qquad F=\frac{1}{2}AEu_{,x}^2-ucx \tag{4.7-3}$$

欧拉方程中的导数为

$$\frac{\partial F}{\partial u}=-cx \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial u_{,x}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(AEu_{,x})=AEu_{,xx} \tag{4.7-4}$$

由此我们得到预想的平衡微分方程式 4.5-7。

作为另一个例子，考虑各向同性平面介质中与时间相关的热传导问题。相应的泛函为

$$\Pi=\iint\left(\frac{1}{2}kT_{,x}^2+\frac{1}{2}kT_{,y}^2-QT+c\rho T\dot{T}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{或} \quad \Pi=\iint F\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4.7-5}$$

其中 T=温度，k=导热率，Q=单位体积内热生成率，ρ=质量密度，c=比热容，$\dot{T}$是时间导数 $\partial T/\partial t$。假定了单位厚度。(公式 4.7-5 省略了实际感兴趣的某些边界项。详细处理方法见第 12.2 节。)这里有一个相关场变量 T 和一个欧拉方程：

$$\frac{\partial F}{\partial T}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial T_{,x}}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial D}{\partial T_{,y}}=0 \tag{4.7-6}$$

其中 F 是公式 4.7-5 的被积项。如果 k 是常数，由公式 4.7-5 和公式 4.7-6 得

$$k(T_{,xx}+T_{,yy})+Q-c\rho\dot{T}=0 \tag{4.7-7}$$

作为在感兴趣的内描述与时间相关的温度分布的微分方程。

尽管总有域微分方程与泛函相关，但反之则不一定成立。例如，含有奇数阶导数的微分方程没有公式 4.7－1 形式的相关泛函。对这类问题，第 5 章的加权残数法是有效的。一个泛函总是可以产生瑞雷-里兹解$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\}$，其中$[\boldsymbol{K}]$是对称矩阵。加权残数法能否产生对称矩阵$[\boldsymbol{K}]$取决于特定方法的选择。如果微分方程中存在奇数阶导数，$[\boldsymbol{K}]$就不是对称矩阵。

变分计算也能够产生自然边界条件。在下面的例子中我们可以看到推导过程，更多的详细解释见文献[4.1～4.3]。

变分法：一个简例 图 4.7－1 显示了一根均匀杆上作用有轴向分布载荷 $q=q(x)$和 $x=L$ 处的指定应力 σ_L。我们利用这个问题，用变分法计算证明势能泛函 Π_p 包含控制微分方程和自然边界条件。这个讨论将提供公式 4.7－3 和 4.7－4 中各项的来源。推演过程中也将产生虚功方程，还将提出一个功能强的的替换列式，即第 5 章讨论的加权残数法。

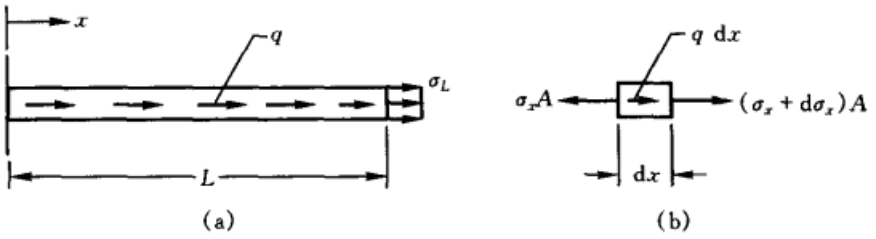


图 4.7－1 (a)受轴向分布载荷 q 和末端应力 σ_L 作用的均匀弹性杆；
(b)作用在杆微元上的力

在公式 4.4－9 中，设 $\varepsilon_x=u_{,x}$，$F_x=q/A$，$D=u_L$，$P=A\sigma_L$。因此图 4.7－1(a) 中均匀杆的势能泛函是

$$\Pi_p=\frac{AE}{2}\int_0^L u_{,x}^2\,\mathrm{d}x-\int_0^L qu\,\mathrm{d}x-(A\sigma_L)u_L \tag{4.7-8}$$

我们设 $u=u(x)$是该问题的可容许位移场。也就是说，u 是连续的且满足强制边界条件，在 $x=0$时，$u=0$。设 u 的摄动量为 δu，我们把它写成 $\delta u=e\eta$，其中 e 是一个小数，$\eta=\eta(x)$是一个可容许函数。这样摄动域 $u+e\eta$ 也像 u 一样是可容许的且满足同样的强制边界条件。利用公式 4.7－8 的摄动域，$u_{,x}$ 变成 $u_{,x}+e\eta_{,x}$，u_L 变成 $u_L+\varepsilon\eta_L$（当 $x=L$ 时，$\eta_L=\eta$），Π_p 变成 $\Pi_p+\delta\Pi_p$。势能改变量为$(\Pi_p+\delta\Pi_p)-\Pi_p$，其中

$$\delta\Pi_p=e\left[AE\int_0^L u_{,x}\eta_{,x}\,\mathrm{d}x-\int_0^L q\eta\,\mathrm{d}x-(A\sigma_L)\eta_L\right]+e^2\frac{AE}{2}\int_0^L\eta_{,x}^2\,\mathrm{d}x \tag{4.7-9}$$

变分表达式在形式上好比是 $f(x+h)$的泰勒级数形式，从中减掉了展开点（平衡）值 $f(x)$，结果裁掉了二次方项（含 h^2）。在这个比拟中，Π_p 对应于 $f(x)$，$\Pi_p+\delta\Pi_p$ 对应于 $f(x+h)$。$e\eta$ 对应于 h。这个过程叫做泛函的“线性化”或“变分差分法”。

根据势能原理，当 Π_p 达到相对最小值时出现稳定的平衡状态。这就意味着对任何可容许 η 有 $\delta\Pi_p>0$。在公式 4.7－9 中后面的项恒为正，因为存在平方项 e^2 和 $\eta_{,x}^2$，当 e 变号时前面的项也变号。我们得出这样的结论，如果 $\delta\Pi_p$ 对所有小的 e 值都为正，公式 4.7－9 中括号

里的表达式必然消失。设该表达式为零并根据标准形式 $\int u\mathrm{d}v=-\int v\mathrm{d}u+uv$，用 $\mathrm{d}v=\eta_{,x}\mathrm{d}x$ 对它的第一项进行分部积分，我们得到

$$0=-AE\int_0^L u_{,xx}\eta\mathrm{d}x+[AEu_{,x}\eta]_0^L-\int_0^L q\eta\mathrm{d}x-(A\sigma_L)\eta_L \tag{4.7-10}$$

因为 η 是可容许函数，$x=0$ 时 $\eta=0$，所以公式 4.7-10 变成

$$0=-\int_0^L(AEu_{,xx}+q)\eta\mathrm{d}x+A[E(u_{,x})_L-\sigma_L]\eta_L \tag{4.7-11}$$

因为 η 是可容许的但在其它方面却是任意的，当在 $0<x<L$ 范围内可能存在无限多函数 $\eta=\eta(x)$ 时，η_L 的任意值可能被赋值。因此，只有 η 和 η_L 的系数分别消失时才能满足公式 4.7-11。于是我们有

$$AEu_{,xx}+q=0 \qquad 0<x<L \tag{4.7-12a}$$

$$Eu_{,x}-\sigma_L=0 \qquad (\text{在 } x=L \text{ 时}) \tag{4.7-12b}$$

公式 4.7-12(a)是平衡状态的控制微分方程，它也可写成 $A\sigma_{x,x}+q=0$ 的形式，可通过考察图 4.7-1(b)中轴向力平衡推导得到。公式 4.7-12(b)是自然边界条件，它说明在 $x=L$ 时 $\varepsilon_x=\sigma_L/E$。同样的处理方法可以用于二维和三维的问题，在分部积分的地方应用散度定理得到应力边界条件，公式 3.1-14。

强制边界条件和自然边界条件的定义可以更明确。强制边界条件是强加在试函数上使其变成可容许函数的条件，自然边界条件是用使泛函取极值的方法加在解上。自然边界条件并没有明确地出现在泛函中，尽管如此它还是包含在泛函中。例如在 Π_p 的表达式 4.7-8 中，自然边界条件 $x=L$ 时 $Eu_{,x}=\sigma_L$ 并没有出现。使 Π_p 取极值并进行分部积分得到公式 4.7-11，在那里公式 4.7-12b 显示了自然边界条件。

公式 4.7-9 中括号内表达式变为零可以看作是虚功原理的表达式，它说明对于偏离平衡位形中的任何可容许无穷小的位移，内力和外力所做的总功必须趋于零。公式 4.7-9 中，当产生应变 $\eta_{,x}$ 时，内力 $AEu_{,x}\mathrm{d}x=A\sigma_x\mathrm{d}x$ 做功(存储应变能)，当出现正的位移 η 和 η_L 时，外力 $q\mathrm{d}x$ 和 $A\sigma_L$ 做功(失去势能)。

公式 4.7-9 中括号里表达式等于零也可以用如下的方法反向得到。设想我们找到一个近似解 $\tilde{u}=\tilde{u}(x)$。例如，可容许的多项式 $\tilde{u}=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$，其中 a_i 是广义自由度。因为 $\tilde{u}$ 对所有 x 不满足公式 4.7-12a，留下残数 $R=R(x)=AE\tilde{u}_{,xx}+q\neq0$。不过我们可以选择 a_i 在平均或积分意义上满足公式 4.7-12a，写成

$$\int_0^L(AE\tilde{u}_{,xx}+q)\eta\mathrm{d}x=0 \tag{4.7-13}$$

这里 $\eta=\eta(x)$ 现在可以叫做“权函数”，对公式 4.7-13 应用分部积分，利用在公式 4.7-10 前刚提供的公式，但现在用 $\mathrm{d}v=\tilde{u}_{,xx}\mathrm{d}x$，我们得到

$$-AE\int_0^L\tilde{u}_{,x}\eta_{,x}\mathrm{d}x+[AE\tilde{u}_{,x}\eta]_0^L+\int_0^L q\eta\mathrm{d}x=0 \tag{4.7-14}$$

但 $x=0$ 时 $\eta=0$。另外，当 $x=L$ 时我们可以用 σ_L 替代 $E\tilde{u}_{,x}$，从而引出自然边界条件。公式

4.7-14变成：

$$-AE\int_0^L \tilde{u}_{,x}\eta_{,x}\mathrm{d}x+\int_0^L q\eta\mathrm{d}x+(A\sigma_L)\eta_L=0 \tag{4.7-15}$$

它与公式 4.7-9 中括号内的表达式等于零完全一致。公式 4.7-15 可以看作是加权残数法的应用，当人们知道微分方程而不知泛函或变分原理的情况下，这是列出近似解公式的一种方法。如果 $\eta_i=\partial\tilde{u}/\partial a_i$，那么这种方法称为伽辽金(Galerkin)法，对于该方法公式 4.7-15 产生的方程个数和待定系数 a_i 的个数一样多。详细的讨论见第 5 章。

从公式 4.7-13 到公式 4.7-15 的渐进过程是从强形式开始并由此得到弱形式的例子。公式 4.7-15 可以看作是虚功原理的例子，其中 η 是平衡位形的虚位移。分别用虚位移 δu，δv 和 δw 乘以平衡方程(公式 3.1-12)左边的各项，相加结果，在整个体积内进行积分，并把格林定理用于分部积分，这样能够得到虚功原理的广义表达公式[2.2.4.4]。

4.8 瑞雷-里兹法的有限元形式

本节我们将利用瑞雷-里兹法研究平面热传导和多维弹性体的有限元方法。正如本章的前面部分所述，我们建立一个泛函 Π，使 Π 相对于节点自由度取极值，然后解得到的方程 $[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\}$，求出自由度 $\{\boldsymbol{D}\}$。在实际的计算程序中，方程 $[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\}$ 能直接求解，全然不用考虑 Π。

分段插值 经典的瑞雷-里兹法将整个结构作为一个定义域，并用单个试验函数覆盖它，与此相反，有限元法将定义域分成若干子域，在每个子域上分别定义独立的插值函数。有限元法多出的一个步骤是将广义自由度替换成节点自由度，这并没有改变基本原理却因便于计算机执行而使有限元分析方法更加实用。

考虑图 4.8-1(a)所示的杆，将它分成若干子域，每个长度为 L。图 4.8-1(b)为所示的两个子域给出了用广义自由度 a_i 表示的线性插值函数。用轴向应变 $\epsilon_x=u_{,x}$，势能表达式 4.4-9(初始应力和应变为零)被分成子域贡献，对 N_{els} 子域或者我们现在称之为单元，表达式变成

$$\Pi_p=\sum_{i=1}^{N_{\mathrm{els}}}\int_{L_i}\frac{1}{2}Eu_{,x}^2A\mathrm{d}x-\sum_{i=1}^{N_{\mathrm{els}}}\int_{L_i}uF_xA\mathrm{d}x-\{\boldsymbol{D}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{P}\} \tag{4.8-1}$$

正如 4.5 节那样，Π_p 是广义自由度 a_i 的函数。然而，广义自由度也有缺点。首先，它没有直接的物理意义，如图 4.8-1(a)中的 a_1 和 a_3 每个都有长度单位，a_2 和 a_4 是无量纲数。更严重的是，使用自由度 a_i 难以保证单元间的协调性，难以施加强制边界条件。对图 4.8-1(a)所示的杆，在点 x_i 处的位移连续性要求 $a_1+a_2x_i=a_3+a_4x_i$，每个增加的单元间连接带来一个类似的约束。绝大多数问题也都有强制边界条件，它们的满足又产生了许多约束方程。在软件上处理这些约束有困难。在实际应用中，用节点自由度代替广义自由度。

对图 4.8-1(b)所示的杆，用图 3.2-2(a)来为共用节点 x_i 的两个单元写出线性插值函数。与图 4.8-1(a)不同，图 4.8-1(b)中的自由度是离散点即节点的位移。在每个插值中利用相同的节点位移 u_i 来自动实现单元间位移的连续性。并且直接施加强制边界条件。只要

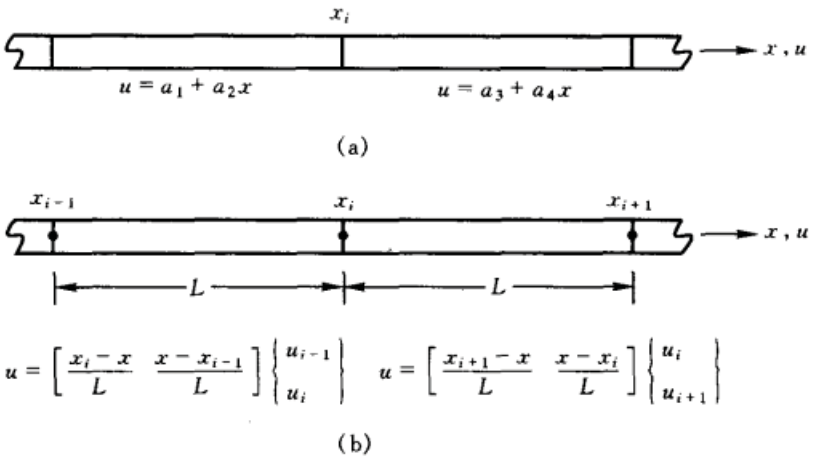


图 4.8－1　(a)弹性杆离散成子域，称为有限单元；
(b)有限元离散化利用节点间线性插值

Π_p 是节点自由度 u_i 的函数，用写出方程 $\partial \Pi_p / \partial u_i = 0$ 使 Π_p 相对于这些自由度取极值，方程 4.8－1 仍然可以使用。

在本节的剩余部分，我们使用瑞雷-里兹法将有限元法扩展到热传导和结构力学中去。

热传导中的 FEA　式 4.7－5 给出了单位厚度的各向同性材料平面热传导的泛函。当 $T = T^{\mathrm{T}}$，$T_{,x}^2 = T_{,x}^{\mathrm{T}} T_{,x}$，$T_{,y}^2 = T_{,y}^{\mathrm{T}} T_{,y}$，时，式 4.7－5 可写成

$$\Pi = \iint \frac{1}{2} (T_{,x}^{\mathrm{T}} T_{,x} + T_{,y}^{\mathrm{T}} T_{,y}) k \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint T^{\mathrm{T}} Q \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint T^{\mathrm{T}} \dot{T} c\rho \mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (4.8-2)$$

转置符号放在标量场 T，$T_{,x}$ 和 $T_{,y}$ 上，以便使 Π 取极值时微分后面的矩阵表达式更容易。在这个讨论中我们把公式 4.8－2 视作是为单个有限单元而写的。

考虑有 n 个节点的平面元。例如，如果单元仅有角节点，那么对于三角形 $n=3$，对于矩形 $n=4$。设单元内温度 T 由 n 个节点温度 $\{\boldsymbol{T}_e\}$ 插值而成。

$$T = \underset{1\times n}{\lfloor \boldsymbol{N} \rfloor} \underset{n\times 1}{\{\boldsymbol{T}_e\}} \qquad (4.8-3)$$

其中 $\lfloor \boldsymbol{N} \rfloor$ 内的 n 个形状函数都是 x 和 y 的函数。公式 4.8－3 的微分有

$$T_{,x} = \lfloor \boldsymbol{N}_{,x} \rfloor \{\boldsymbol{T}_e\} \qquad T_{,y} = \lfloor \boldsymbol{N}_{,y} \rfloor \{\boldsymbol{T}_e\} \qquad \dot{T} = \lfloor \boldsymbol{N}_{,x} \rfloor \{\dot{\boldsymbol{T}}_e\} \qquad (4.8-4)$$

其中，例如，

$$\lfloor \boldsymbol{N}_{,x} \rfloor = \lfloor N_{1,x} \quad N_{2,x} \quad \cdots \quad N_{n,x} \rfloor \qquad (4.8-5)$$

在对式 4.8－3 进行微分得到式 4.8－4 时，形状函数 $\lfloor \boldsymbol{N} \rfloor$ 只是空间的函数，节点温度 $\{\boldsymbol{T}_e\}$ 只是时间的函数。因此温度 T 和温度随时间的变化率 $\dot{T}$ 是由节点温度 $\{\boldsymbol{T}_e\}$ 和 $\{\dot{\boldsymbol{T}}_e\}$ 用相同的形状函数插值而成。

对于单个单元，将公式 4.8－3 和 4.8－4 代入公式 4.8－2 得

$$\Pi = \frac{1}{2} \{\boldsymbol{T}_e\}^{\mathrm{T}} [\boldsymbol{k}] \{\boldsymbol{T}_e\} + \{\boldsymbol{T}_e\}^{\mathrm{T}} [\boldsymbol{c}] \{\dot{\boldsymbol{T}}_e\} - \{\boldsymbol{T}_e\}^{\mathrm{T}} \{\boldsymbol{r}_Q\} \qquad (4.8-6)$$

其中我们定义

$$[\boldsymbol{k}] = \iint (\lfloor \boldsymbol{N}_{,x} \rfloor^{\mathrm{T}} \lfloor \boldsymbol{N}_{,x} \rfloor + \lfloor \boldsymbol{N}_{,y} \rfloor^{\mathrm{T}} \lfloor \boldsymbol{N}_{,y} \rfloor) k \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4.8-7a}$$

$$[\boldsymbol{c}] = \iint \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor^{\mathrm{T}} \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor c\rho \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4.8-7b}$$

$$\{\boldsymbol{r}_Q\} = \iint \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor^{\mathrm{T}} Q \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4.8-7c}$$

使Π相对于节点温度的变分取极值得到有限元方程。用附录 A 中的微分法则

$$\left\{\frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{T}_e}\right\} = \{\boldsymbol{0}\} \qquad \text{得到} \qquad [\boldsymbol{k}]\{\boldsymbol{T}_e\} + \{\boldsymbol{c}\}\{\dot{\boldsymbol{T}}_e\} = \{\boldsymbol{r}_Q\} \tag{4.8-8}$$

为了得到总体方程，我们对每个单元按定义把公式 4.8-8 中的数组扩展到结构尺寸，然后组集单元，得

$$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{T}\} + [\boldsymbol{C}]\{\dot{\boldsymbol{T}}\} = \{\boldsymbol{R}_Q\} \tag{4.8-9}$$

其中$[\boldsymbol{T}]$包含结构的所有节点温度。换句话说，公式 4.8-9 也能用先把所有单元对Π的贡献组集起来，然后再相对于节点温度$\{\boldsymbol{T}\}$的总体向量对Π取极值的方法来得到。下面用结构力学的例子说明这个过程。

为了与结构力学中的表示法相一致，我们将式 4.8-7a 中的$[\boldsymbol{k}]$写成如下形式：

$$[\boldsymbol{k}] = \iint [\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}} k [\boldsymbol{B}] t \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad \text{其中} \qquad [\boldsymbol{B}] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{N}_{,x} \\ \boldsymbol{N}_{,y} \end{bmatrix} \tag{4.8-10}$$

厚度 t 可以取前面研究中使用的单位值。

结构力学中的有限元法 公式 4.4-7 给出了结构力学中准静态线性弹性问题的泛函，对N_{els}个单元的组集，泛函可写成如下形式。积分横跨单个单元，然后将结果相加。

$$\begin{aligned} \Pi_p = & \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{els}}} \int \left(\frac{1}{2} \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^{\mathrm{T}} [\boldsymbol{E}] \{\boldsymbol{\varepsilon}\} - \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^{\mathrm{T}} [\boldsymbol{E}] \{\boldsymbol{\varepsilon}_0\} + \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^{\mathrm{T}} \{\boldsymbol{\sigma}_0\} \right) \mathrm{d}V \\ & - \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{els}}} \int \{\boldsymbol{u}\}^{\mathrm{T}} \{\boldsymbol{F}\} \mathrm{d}V - \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{els}}} \int \{\boldsymbol{u}\}^{\mathrm{T}} \{\boldsymbol{\Phi}\} \mathrm{d}S - \{\boldsymbol{D}\}^{\mathrm{T}} \{\boldsymbol{P}\} \end{aligned} \tag{4.8-11}$$

单元 i 内的位移$\{\boldsymbol{u}\}$通过单元节点自由度$\{\boldsymbol{d}\}_i$进行插值：

$$\{\boldsymbol{u}\} = [\boldsymbol{N}]\{\boldsymbol{d}\}_i \tag{4.8-12}$$

其中$[\boldsymbol{N}]$是形状函数矩阵。对于一维、二维和三维的弹性问题，$\{\boldsymbol{u}\}$分别是一个标量、一个 2×1 向量和一个 3×1 向量，$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$和$\{\boldsymbol{\sigma}\}$分别是一个标量、3×1 向量、6×1 向量，$[\boldsymbol{N}]$的大小和特殊形式取决于问题的维数、单元的形状以及每个单元的节点数。这些细节最终必须说到，但也无需详细说明。按式 3.1-10 和 3.3-3 进行微分，可从位移得到应变，在此重复如下：

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\partial]\{\boldsymbol{u}\} \qquad \text{得到} \qquad \{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{d}\} \qquad \text{其中} [\boldsymbol{B}] = [\partial]\{\boldsymbol{N}\} \tag{4.8-13}$$

3.1 节给出了弹性力学中$[\boldsymbol{E}]$和$[\partial]$的特定形式，结构力学的其它问题诸如梁和板的弯曲也可以用这些方程表示，只要使用$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$和$\{\boldsymbol{\sigma}\}$的相应定义(示例见公式 3.3-12)。将公式 4.8-12 和

4.8－13 代入公式 4.8－11 得

$$\Pi_p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N_{els}}\{\boldsymbol{d}\}_i^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{k}]_i\{\boldsymbol{d}\}_i - \sum_{i=1}^{N_{els}}\{\boldsymbol{d}\}_i^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{r}_e\}_i - \{\boldsymbol{D}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{P}\} \tag{4.8-14}$$

其中$[\boldsymbol{k}]_i$和$[\boldsymbol{r}_e]_i$分别是单元 i 的刚度矩阵和载荷向量：

$$[\boldsymbol{k}]_i = \int[\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{E}][\boldsymbol{B}]\mathrm{d}V \tag{4.8-15a}$$

$$\{\boldsymbol{r}_e\}_i = \int[\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{E}]\{\boldsymbol{\varepsilon}_0\}\mathrm{d}V - \int[\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\sigma}_0\}\mathrm{d}V + \int[\boldsymbol{N}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{F}]\mathrm{d}V + \int[\boldsymbol{N}]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\Phi}\}\mathrm{d}S \tag{4.8-15b}$$

这些结果与公式 3.3－7 和 3.3－8 相一致。

公式 4.8－11 到 4.8－15 表明了由节点位移$\{\boldsymbol{d}\}$产生的单个单元的应变能为

$$U = \frac{1}{2}\{\boldsymbol{d}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{k}][\boldsymbol{d}] \tag{4.8-16}$$

公式 4.8－14 给出的Π_p相对于总体自由度$\{\boldsymbol{D}\}$取极值，但公式 4.8－14 的前两项是单元自由度$\{\boldsymbol{d}\}_i$的函数，它是总体自由度的一个子集。单元自由度$\{\boldsymbol{d}\}_i$和总体自由度$\{\boldsymbol{D}\}$由坐标变换联系起来

$$\{\boldsymbol{d}\}_i = [\boldsymbol{L}]_i\{\boldsymbol{D}\} \tag{4.8-17}$$

矩阵$[\boldsymbol{L}]_i$是 $m_i \times m$ 的，这里 m_i 是单元 i 的自由度数，m 是总体自由度的数目，$[\boldsymbol{L}]_i$只含 0 和 1。例如，图 1.3－1 中，$\{\boldsymbol{D}\}=\lfloor\ u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4\ \rfloor^{\mathrm{T}}$，对单元 2，它有节点 2 和 3，$\{\boldsymbol{d}\}_2=\lfloor\ u_2 \quad u_3\ \rfloor^{\mathrm{T}}$，并且除了 $L_{12}=L_{23}=1$，2×4 的矩阵$[\boldsymbol{L}]_2$的所有系数都为零。如果结构包括许多单元，每个$[\boldsymbol{L}]_i$都很稀疏。将式 4.8－17 代入式 4.8－14 得

$$\Pi_p = \frac{1}{2}\{\boldsymbol{D}\}^{\mathrm{T}}\Big(\sum_{i=1}^{N_{els}}[\boldsymbol{L}]_i^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{k}]_i[\boldsymbol{L}]_i\Big)\{\boldsymbol{D}\} - \{\boldsymbol{D}\}^{\mathrm{T}}\sum_{i=1}^{N_{els}}[\boldsymbol{L}]_i^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{r}_e\}_i - \{\boldsymbol{D}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{P}\} \tag{4.8-18}$$

对Π_p相对于总体自由度$\{\boldsymbol{D}\}$取极值得到结构方程

$$\Big(\sum_{i=1}^{N_{els}}[\boldsymbol{L}]_i^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{k}]_i[\boldsymbol{L}]_i\Big)\{\boldsymbol{D}\} = \{\boldsymbol{P}\} + \sum_{i=1}^{N_{els}}[\boldsymbol{L}]_i^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{r}_e\}_i \tag{4.8-19}$$

乘积$[\boldsymbol{L}]_i^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{k}]_i[\boldsymbol{L}]_i$是 $m\times m$ 的，乘积$[\boldsymbol{L}]_i^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{r}_e\}$是 $m\times1$ 的，这里 m 是总体自由度数。通过将单元系数放置到总体数组中合适的位置，式 4.8－17 可完成与单元矩阵扩展成结构尺寸相同的功能。计算机不能执行矩阵$[\boldsymbol{L}]_i^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{k}]_i[\boldsymbol{L}]_i$和$[\boldsymbol{L}]_i^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{r}\}_i$相乘的任务，只是将$[\boldsymbol{k}]_i$和$\{\boldsymbol{r}_e\}_i$中的每一项直接相加放到总体矩阵$[\boldsymbol{K}]$和向量$[\boldsymbol{R}]$的合适位置。换句话说，实际的组集是用直接刚度法实现的（2.5 节），而不是利用$[\boldsymbol{L}]_i$矩阵在计算上低效率地作“全等转换”。最终，公式 4.8－18也可以写成下面的形式：

$$\Pi_p = \frac{1}{2}\{\boldsymbol{D}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\} - \{\boldsymbol{D}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{R}\} \tag{4.8-20}$$

其中$[\boldsymbol{R}]$包括$\{\boldsymbol{P}\}$和单元载荷矢量$\{\boldsymbol{r}_e\}$的贡献。

备注 前面的推导表明有限元列式仅从两个基本要素中得到，即描述物理问题的泛函和基于描述单元的形状函数矩阵[$\boldsymbol{N}$]的节点插值。由此我们得到如公式 4.8－7 和 4.8－15 的单元矩阵的定义。要得到单元矩阵的显式，我们必须通过选择单元形状、自由度数、单元上的自由度分布和形状函数矩阵[$\boldsymbol{N}$]，来更加注重细节。这些选择对计算的有效性和结果的精度影响很大。

将定义域分成有限单元产生了空间离散化但不是时间离散化。例如，平面瞬态热传导势能Π的表达式——公式 4.8－2 隐含了单个控制偏微分方程，其中温度 T 是坐标 x 和 y 及时间 t 的函数。利用公式 4.8－3，我们得到公式 4.8－8，这是一个一阶常微分联立方程组，其中节点温度$\{\boldsymbol{T}_e\}$在空间上离散但仍是时间的连续函数。因此，我们取单个偏微分方程，利用有限元方法，用一个常微分方程组来替代它。因为节点温度仍是时间的连续函数，公式 4.8－8 可称为半离散化。第 11 章我们将介绍用时间增量逐步求解公式 4.8－8 的方法。

4.9 有限元解的收敛性

当网格无限细化时，可接受的有限元列式应该收敛到数学模型的精确解（忽略由于有限精度计算机的算法误差）。令人满意的收敛率也是十分重要的，而可接受的精确度并不要求有很多自由度。一些单元比另一些单元收敛得快。本节我们首先讨论广义多维有势场问题的收敛性，然后专门讨论结构力学问题。

有势场问题 设场变量 $\phi=\phi(x,y,z)$，以及泛函 $\Pi=\Pi(\phi)$，它可由极值条件 $\delta\Pi=0$ 获得物理问题的控制微分方程。这类问题包括稳态热传导、薄板的弯曲、流体的有势流、静电学、非圆横截面轴的扭转等问题。设 m 是Π中 ϕ 的最高阶导数。m 的值可通过检验广义微分方程或它的相关泛函Π来确定。如果微分方程中出现 $2m$ 阶导数，那么Π中将出现 m 阶导数。（如果微分方程中出现奇次阶导数，那么不存在变分原理，但用伽辽金法或相关方法仍然能够得到有限元列式，见第 5 章。）

在下面的讨论中，假设计算在精确算法中进行且网格能够细化到足以表示数学模型的几何形状。设用多项式由 ϕ 的节点值来插值单元内的 ϕ。当有限单元网格多次细化时，ϕ 和它的空间导数趋近数学精确值，那么：

1. 在每个单元内对 ϕ 假设的场必须包括 m 阶或更高阶的完整多项式。
2. 单元间横跨边界处 ϕ 和 ϕ 直到 $m-1$ 阶的导数必须连续。
3. 每个单元必须能够准确地表示
   (a) ϕ 的常数值，和
   (b) ϕ 的任意导数直到 m 阶的常数值。

举个例子，如果 $\phi=\phi(x,y)$和Π含 ϕ 的一阶导数，则 $m=1$，可接受的最低阶的多项式场域是完整的线性形式 $\phi=a_0+a_1x+a_2y$。仅要求 ϕ 本身在穿过单元间边界时是连续的。每个单元必须能够精确表示 ϕ 的常数值、$\phi_{,x}$的常数值和 $\phi_{,y}$的常数值。

满足要求 1 的插值函数给出了位置的单值函数 ϕ，因此保证了单元内 ϕ 的连续性。要求 2 和 3 是在网格细化极限情况下必须满足的条件。不协调单元，如在 3.10 和 6.6 节中讨论的 Q6 平面单元，可能在一般网格中当单元具有通用形状时就违反了要求 2 和 3。如果网格的细

化使单元变成平行四边形，不相容性就会消失，Q6 单元的网格将满足这些要求并正常收敛。（改进的 Q6 单元在 6.6 节中叫 QM6，当有一般四边形形状时满足要求 3。）对不相容单元，满足要求 1 不能保证满足要求 2 和 3。单元满足所有三个要求的能力可用 6.13 节中描述的分片试验进行检验。

不满足上述三个条件的单元也可能收敛，但在所有应用中都不会收敛到正确的结果。当网格细化时单元满足要求 1～3，就能保证收敛的正确性（假设计算机算法和几何表示不引起误差）。要求 1～3 没有说到粗网格的收敛率或精度特性。然而，如果在细化网格的所有阶段，或者再细分现有的单元，或者像对现有的单元增加多项式项，这些需要都能满足，那么，结构应变能或者在非结构问题中类似的全量将是单调收敛的[4,5]。单元的再细分和项的添加都是保证前面的插值域或试验空间是新的子集的一种手段。网格细化的进一步讨论见 9.6，9.7，9.8 和 9.11 节。

结构力学 微分的阶数 m 可以从 Π_p 中的应变能项确定。对于杆的拉伸，由式 4.7－8 看到 $m=1$。一个 2 节点的杆单元基于线性插值场，且相邻单元的轴向位移在单元连接点处有相同的值，因此很显然满足要求 1 和 2。对于单个问题微分的阶数 m 可能有两个值。例如，一块必须受拉伸和弯曲的薄板，对平面位移 u 和 v 有 $m=1$，而对与弯曲相关的横向位移 w 有 $m=2$。因此，条件 2 要求至少在网格细化的限度内 $u,v,w,w_{,x}$ 和 $w_{,y}$ 在单元间是连续的。

在结构力学中，条件 3a 说明单元必须能有不产生应变的刚体运动，条件 3b 说明单元必须能够表示均匀的应变状态。条件 3 能从物理上作如下解释。各个单元带着叠加的应变经受刚体运动。用再分细化网格使每个单元占有结构的更小部分。如果没有奇异点且材料特性平稳变化，那么单元逼近均匀应变状态。也就是说，如果存在应变梯度，那么与单元显示的平均应变相比，单元上的应变变化越来越小。实际上，单元可能缺乏显示应变梯度的能力，但却能为正确收敛提供保证。这个特性可在图 1.3－1 中看到，那里 2 节点的杆单元的轴向应力（或应变）产生了阶梯的近似值，当使用更多单元时，它收敛于正确的应力分布。注意基于不完全轴向位移场 $u=a_0+a_2x^2$ 的假想杆单元，轴向应变是 $\varepsilon_x=2a_2x$ 时，其中常应变能力遗失，在杆的左端点 $x=0$ 处单元将始终显示 $\varepsilon_x=0$。这些缺陷用细化网格也是不能纠正的。

在二维或三维问题中，刚体运动由平移和转动组成。对刚体平移，如式 3.1－9 和 3.3－12 的应变度量提供零应变，即使对于大的平移也是如此。对刚体转动，本书中用的应变度量提供零应变仅是在转动很小的情况下微小的旋转应变为零。作为一个例子，考察 3.4 节介绍的常应变三角形承受的运动

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & \cos\theta-1 & -\sin\theta \\ a_4 & \sin\theta & \cos\theta-1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} \tag{4.9-1}$$

其中，x 和 y 是单元上某点的初始坐标，u 和 v 是它们的位移分量。用公式 4.9－1 依次计算节点 1，2 和 3 的位移，提供在图 4.9－1 中显示的移动后的位置，其中可以看到 a_1 和 a_4 分别是刚体在 x 和 y 方向上的平移，θ 是刚体逆时针绕原点的旋转角度。按照公式 3.1－6，这个位移场产生应变 $\varepsilon_x=\varepsilon_y=\cos\theta-1$ 和 $\gamma_{xy}=0$。因为位移是刚体移动，我们希望所有的应变分量为零，但这只有在 θ 很小的情况下才发生。应变度量中对于大的刚体转动设定零应变是合乎需要的，但它们是复杂且非线性的。对于预想是大转动的问题，通常对它们的使用要谨慎。

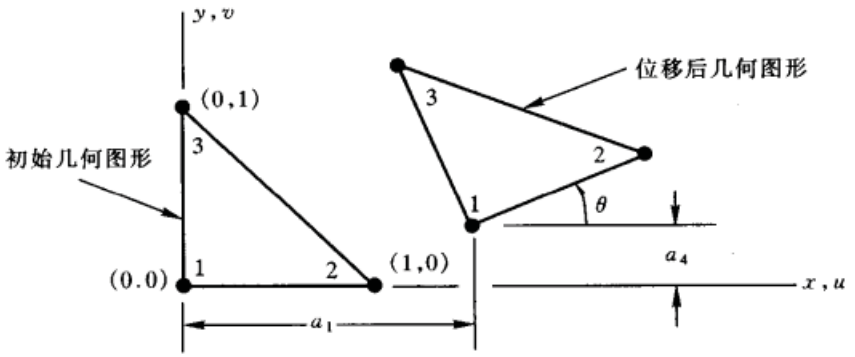


图 4.9-1 经历刚体运动的常应变三角形单元，刚体运动由 x 和 y 方向的平移 a_1 和 a_4 以及绕节点 1 转动 θ 组成

收敛率 特殊形状单元的收敛率可通过如 9.6 节中的分析得到，也可通过如 9.7 节中研究一系列连续细化网格提供的结果中得到。下述简单的几何论证也可提供获得收敛率的思路。

用足够细化的有限元网格来考察分段线性插值，可以认为节点自由度是精确的，并且确定的位移函数 $u=u(x)$ 能够看作在图 4.9-2(a)所示单元 1-2 跨度 h 上有二次变量。二次曲线 ABC 形式为 $u=a+bx+cx^2$，其中 a，b 和 c 为常数。近似虚线的形式为 $\bar{u}=a+(b+ch)x$。有限元近似线性误差 e 的最大值在中间点 D 处，在那里

$$e_D = u_D - u_B = \frac{u_A + u_C}{2} - u_B = \frac{ch^2}{4} = \frac{h^2}{8}u'' \tag{4.9-2}$$

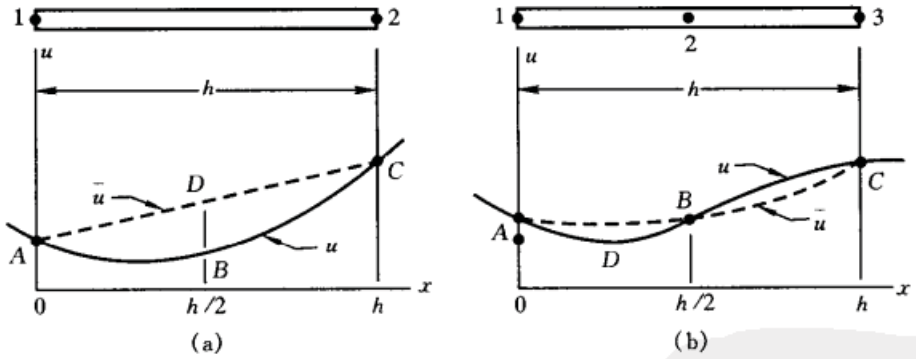


图 4.9-2 实曲线表示函数，虚线表示由有限元插值得到它们的近似值。

其中 u'' 是曲率 $d^2u/dx^2=2c$。表示梯度 $u'=du/dx$ 线性近似值的误差在 A 点和 C 点处最大，这两处 u' 大小相同符号相反。在 A 点，$du/dx=b$，梯度误差为

$$e'_A = \frac{u_C - u_A}{h} - b = hc = \frac{h}{2}u'' \tag{4.9-3}$$

公式 4.9-2 和 4.9-3 表明线性函数和它的一阶导数与精确函数的 u'' 有个成比例的误差，它取决于不含在线性有限元近似解中的第一个较高次项。我们也看到如果单元长度 h 被平分，u 的误差被四等分，du/dx 的误差被平分。用符号 O 来表示“阶次”，则函数本身的误差为

$O(h^2)$,它的一阶导数的误差为 $O(h)$,函数本身的收敛率是 2(二次的),它的一阶导数的收敛率是 1(线性的)。

以类似的形式,可用在节点 1,2 和 3 处有精确值的二次曲线来近似一个三次函数 $u=u(x)$(图 4.9-2(b))。对图中的实线和虚线分别有

$$u = a + bx + cx^2 + dx^3 \tag{4.9-4a}$$

$$\tilde{u} = a + \left(b - \frac{1}{2}\mathrm{d}h^2\right)x + \left(c + \frac{3}{2}\mathrm{d}h\right)x^2 \tag{4.9-4b}$$

D 点误差 $e=\tilde{u}-u$,这里 $x=h/4$,A 点梯度误差 $e'=\tilde{u}'-u'$,它们分别为

$$e_D = -\frac{3dh^3}{64} = -\frac{h^3}{128}u''' \qquad e'_A = -\frac{dh^2}{2} = -\frac{h^2}{12}u''' \tag{4.9-5}$$

其中 $u'''=6d$ 是三次曲线的 $\mathrm{d}^3u/\mathrm{d}x^3$。此处,像在图 4.9-2(a)中一样,我们看到误差与不含在 FE 近似解中的第一个较高次项有关。

这些结果总结如下。设 p 是含在有限元插值场中完全多项式最高阶的次数,h 是单元大小的线性度量。那么,场量的误差为 $O(h^{p+1})$,场量第 r 阶导数的误差为 $O(h^{p+1-r})$,场量的收敛率是 $p+1$,场量第 r 阶导数的收敛率是 $p+1-r$。

4.10 补充列式·杂交单元

列式法 我们至今讨论的单元称为"位移单元",意味着它们是基于假设位移场的。位移单元是结构力学中应用最广泛的单元类型。它们的矩阵如刚度矩阵可由式 4.4-7 的势能表达式得到。一些其它的泛函也很有用。每个泛函都能产生有限元,其中一些运行很好,已被引入通用软件中。软件使用者也许没有意识到所用单元是以泛函为基础的。

结构力学中经典泛函是应变能泛函和应变余能泛函。应变能泛函是基于优先满足相容性条件的,并能在应变改变时得到满足平衡方程的应变场。应变余能泛函则是基于优先满足平衡条件的应力场,并能在应力改变时得到相容方程。新近,设计出许多另外形式的泛函,其中一些在积分意义上而不是在每一点上用拉格朗日乘数施加平衡和相容性约束。这样的列式不利于平衡的因素超过相容性,反之亦然,在有限元求解中允许同时使用假设应力场和假设位移场,相应单元叫做混合单元[2.20]。一个混合单元可能只有位移自由度,但典型情况下它有不同类型的自由度。包括流体单元的例子既有速度自由度也有压力自由度,平板弯曲单元既有横向位移又有弯矩自由度。5.6 节用伽辽金法推导出 2 节点的杆单元的混合列式。

杂交单元是单元内和它的边界的场被单独假设的混合单元。因此我们可能在单元内使用假想应力而在边界上使用假想位移(如在初始杂交单元内[4.6]),或者在单元内和它的边界上分别使用独立的位移场。单元列式可以基于一个混合泛函,或对于最简单类型的杂交单元,可基于应变余能泛函[4.6]。在结构力学中通常的结果是一个单元刚度矩阵,因此通用软件中的杂交单元很可能只含有通常的位移自由度。许多关于杂交单元采样的出版物可见文献[2.20,4.6~4.10]。下面我们将更详细地讨论最简单类型的杂交单元。

Trefftz 单元是利用满足问题已有的控制微分方程的单元内的一个场来表述的。在结构

力学中这个场就是位移场。例如，在板弯曲问题中横向位移场 w 满足微分方程 $\nabla^4 w = q/D$，其中 q 是横向载荷。可选择地，内场能够包括说明诸如孔的几何不规则性或与裂纹有关的奇异性或集中载荷的项。在积分或逐点意义上近似满足单元间的连续性和边界条件。单元矩阵可以由泛函推导得到，它是在节点间使用假设边界位移的杂交形式。能够把构建杂交 Trefftz 单元与常规有限元联系起来。Trefftz 杂交单元对几何变形相对较迟钝。它们也可以被称为"大"单元，因为几乎没有特殊要求。每个单元覆盖分析区域的具体部分，如果需要可能有复杂的形状，在它的边界上可能有许多节点。与常规元的模型相比，Trefftz 杂交单元的模型对于同等的精度要求的节点更少，因此减少了数据的准备工作和计算机时间。Trefftz 杂交单元法可以看作是一种边界元法(BEM)，见 8.8 节，但它不要求在 BEM 中使用"基本解"，数学复杂度更小，能够产生对称系数矩阵，在对域内估计结果不要求积分。BEM 的缺点包括它的矩阵不是稀疏的，且列式必须基于控制微分方程。工程上关于 Trefftz 法的资料大约有 200 多篇，包括时间相关性、非线性和非结构问题等，我们的引文来自文献[4.11～4.14]。

杂交单元列式 这里选择性描述假想应力杂交单元的初始形式[4.6]，因此我们使用余能原理和优先满足平衡微分方程的内应力场(平衡要求可能因使用替代泛函被削弱，替代泛函仅允许单元内的平衡在平均意义上而不是在每点上被满足[4.8, 4.9])。

对线性弹性材料，单位体积的应变余能为

$$U_0^* = \frac{1}{2}\{\boldsymbol{\sigma}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{E}]^{-1}\{\boldsymbol{\sigma}\} \tag{4.10-1}$$

在单元内，假想应力场为

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\boldsymbol{P}]\{\boldsymbol{\beta}\} \tag{4.10-2}$$

这里$\{\boldsymbol{\beta}\}$包括已确定的参数 β_i，$[\boldsymbol{P}]$是坐标的函数，其形式像已得到满足的平衡微分方程(见下例)。我们忽略体力项，根据公式 4.10－1 和 4.10－2，体积为 V 的单元应变余能为

$$u^* = \int U_0^* \,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\{\boldsymbol{\beta}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{H}]\{\boldsymbol{\beta}\} \qquad \text{其中} \qquad [\boldsymbol{H}] = \int [\boldsymbol{P}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{E}]^{-1}[\boldsymbol{P}]\mathrm{d}V \tag{4.10-3}$$

设$\{\boldsymbol{\Phi}\}$表示单元边界 S 上的力，可在边界上计算式 4.10－2 来得到。设边界位移$\{\boldsymbol{u}_b\}$由单元节点自由度$\{\boldsymbol{d}\}$插值得到。这些关系式用符号表示

$$\{\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{R}]\{\boldsymbol{\beta}\} \quad \text{和} \quad \{\boldsymbol{u}_b\} = [\boldsymbol{L}]\{\boldsymbol{d}\} \tag{4.10-4}$$

单元中的总余能是 U^* 减去应力$\{\boldsymbol{\Phi}\}$在位移$\{\boldsymbol{u}_b\}$上所做的功，即

$$\Pi_c = U^* - \int \{\boldsymbol{\Phi}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{u}_b\}\mathrm{d}S \quad \text{或} \quad \Pi_c = \frac{1}{2}\{\boldsymbol{\beta}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{H}]\{\boldsymbol{\beta}\} - \{\boldsymbol{\beta}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{G}]\{\boldsymbol{d}\} \tag{4.10-5}$$

其中

$$[\boldsymbol{G}] = \int [\boldsymbol{R}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{L}]\mathrm{d}S \tag{4.10-6}$$

使 Π_c 相对应力的微小变化取极值，我们有

$$\frac{\partial \Pi_c}{\partial \beta_i}=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n) \quad 或 \quad \left\{\frac{\partial \Pi_c}{\partial \boldsymbol{\beta}}\right\}=\{\boldsymbol{0}\} \tag{4.10-7}$$

从而

$$[\boldsymbol{H}]\{\boldsymbol{\beta}\}=[\boldsymbol{G}]\{\boldsymbol{d}\} \quad 或 \quad \{\boldsymbol{\beta}\}=[\boldsymbol{H}]^{-1}[\boldsymbol{G}]\{\boldsymbol{d}\} \tag{4.10-8}$$

在这一点可以说，当边界位移$\{\boldsymbol{u}_b\}$用所选的由节点位移自由度$\{\boldsymbol{d}\}$插值而成的$\{\boldsymbol{u}_b\}=[\boldsymbol{L}]\{\boldsymbol{d}\}$定义时，我们需要求的是单元内的应力场，并用确定定义包含的在近似值$\{\boldsymbol{\sigma}\}=[\boldsymbol{P}]\{\boldsymbol{\beta}\}$中的最合适应力场参数$\beta_i$来回答。将公式 4.10－8 中的$\{\boldsymbol{\beta}\}$代入公式 4.10－3 得：

$$U^*=\frac{1}{2}\{\boldsymbol{d}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{k}]\{\boldsymbol{d}\} \qquad 其中 \qquad [\boldsymbol{k}]=[\boldsymbol{G}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{H}]^{-1}[\boldsymbol{G}] \tag{4.10-9}$$

这里我们把$[\boldsymbol{K}]$看做刚度矩阵，因为U^*的形式与公式 4.8－16 中单元应变能U的形式相符。注意因为这里我们处理的是一个线性弹性材料，所以应变能和应变余能相等，$U=U^*$。用一般的方法将单元刚度矩阵$[\boldsymbol{k}]$组集成总体刚度矩阵$[\boldsymbol{K}]$，并从总体方程$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{P}\}$中解出$\{\boldsymbol{D}\}$，每个单元的节点位移自由度$\{\boldsymbol{d}\}$已知。由公式 4.10－2 和 4.10－8 得到单元应力

$$\{\boldsymbol{\sigma}\}=[\boldsymbol{P}][\boldsymbol{H}]^{-1}[\boldsymbol{G}]\{\boldsymbol{d}\} \tag{4.10-10}$$

当β_i数增加时杂交单元变得刚化，而当单元边界允许有多种复杂位移形式时，杂交单元柔性增加。然而，不可能设限；一般情况我们不能说杂交单元构成的模型比数学精确解的刚性更强或柔性更大。

4 **节点平面杂交单元** 对于平面单元的应力场$\{\boldsymbol{\sigma}\}=\lfloor \sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy} \rfloor^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{P}]\{\boldsymbol{\beta}\}$，$[\boldsymbol{P}]$可接受的选择包括

$$\begin{array}{cc} 5-\beta 单元 & 7-\beta 单元 \\ [\boldsymbol{P}]=\begin{bmatrix}1 & y & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & x & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} & [\boldsymbol{P}]=\begin{bmatrix}1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0\\ 0 & -y & 0 & 0 & 0 & -x & 1\end{bmatrix} \end{array} \tag{4.10-11}$$

当体力为零时，两个假设都满足平衡微分方程 3.1－12。一般情况，单元的抗变形模式数等于$[\boldsymbol{k}]$的秩，不会超出β_i数。一个 4 节点 3－β的平面单元的秩为 3 且只抵抗常应力状态。它不能抵抗图 6.8－1 中序号为 7 和 8 的两个弯曲模式。下面我们考察 5－β单元。

在计算$[\boldsymbol{H}]$的公式 4.10－3 中，$\mathrm{d}V=t\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$t$＝单元厚度。积分能够如 6.3 节所述那样用数值方法进行，$[\boldsymbol{G}]$的列式 4.10－6 按如下方式处理。由公式 3.1－14，可得图 4.10－1(a)中所示的面力为

$$\begin{aligned} \Phi_x &= l\sigma_x + m\tau_{xy} \\ \Phi_y &= l\tau_{xy} + m\sigma_y \end{aligned} \qquad 其中对边\ ij\ 有 \qquad \begin{aligned} l &= l_{ij} = \cos\alpha_{ij} = (y_j - y_i)/L_{ij} \\ m &= m_{ij} = \sin\alpha_{ij} = (x_i - x_j)/L_{ij} \end{aligned} \tag{4.10-12}$$

由公式 4.10－11 和 4.10－12 知，5－β单元的矩阵$[\boldsymbol{R}]$为

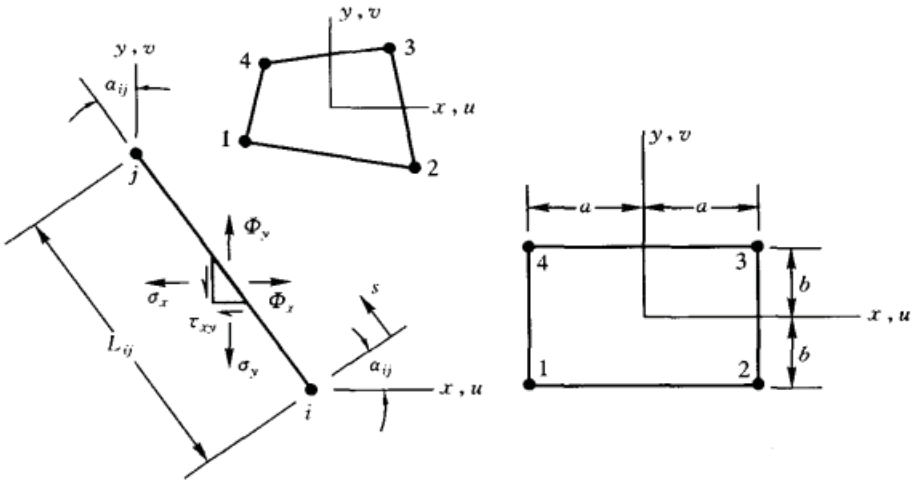


图 4.10-1 (a)有边界力 Φ_x 和 Φ_y 及典型边 ij 符号的 4 节点平面单元。(b)矩形单元的特殊情况

$$[\underset{8\times5}{\boldsymbol{R}}]=\begin{bmatrix} l_{12} & l_{12}y_{12} & 0 & 0 & m_{12} \\ 0 & 0 & m_{12} & m_{12}x_{12} & l_{12} \\ l_{23} & l_{23}y_{23} & 0 & 0 & m_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad \text{其中} \quad \begin{aligned} x_{ij} &= x_i - s\sin\alpha_{ij} \\ y_{ij} &= y_i + s\cos\alpha_{ij} \end{aligned} \tag{4.10-13}$$

式中 s 是边的切线坐标，如图 4.10-1(a)所示。由于 u_{ij} 和 v_{ij} 是沿边 ij 上平行于 x 和 y 方向上的位移，方程组 4.10-4 的第二个等式变成

$$\begin{Bmatrix} u_{12} \\ v_{12} \\ u_{23} \\ v_{23} \\ u_{34} \\ v_{34} \\ u_{41} \\ v_{11} \end{Bmatrix} = [\boldsymbol{L}] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

其中

$$[\underset{8\times8}{\boldsymbol{L}}]=\begin{bmatrix} 1-\frac{s}{L_{12}} & 0 & \frac{s}{L_{12}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\frac{s}{L_{12}} & 0 & \frac{s}{L_{12}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{s}{L_{23}} & 0 & \frac{s}{L_{23}} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \tag{4.10-14}$$

公式 4.10-6 给出[$\boldsymbol{G}$]的积分中，$\mathrm{d}S$ 变成 $t\,\mathrm{d}s$，其中 t=单元厚度。对于边 12 积分限从 0 到 L_{12}，对于边 23 积分限从 0 到 L_{23}，等等。计算简单但冗长，结果在矩阵[$\boldsymbol{G}$]中，其中各项是节点

坐标的简单函数。对当前均匀厚度为 t 的 $5-\beta$ 单元：

$$[\underset{5\times 8}{\boldsymbol{G}}]=\frac{t}{6}\begin{bmatrix} Y_1 & 0 & Y_2 & 0 & Y_3 & 0 & Y_4 & 0 \\ Z_1 & 0 & Z_2 & 0 & Z_3 & 0 & Z_4 & 0 \\ 0 & X_1 & 0 & X_2 & 0 & X_3 & 0 & X_4 \\ 0 & W_1 & 0 & W_2 & 0 & W_3 & 0 & W_4 \\ X_1 & Y_1 & X_2 & Y_2 & X_3 & Y_3 & X_4 & Y_4 \end{bmatrix} \tag{4.10-15a}$$

其中

$$\begin{aligned} Y_j &= 3(y_k-y_i) \quad Z_j = y_k(y_j+y_k)-y_i(y_i+y_j) \\ X_j &= 3(x_i-x_k) \quad W_j = x_i(x_i+x_j)-x_k(x_j+x_k) \end{aligned} \tag{4.10-15b}$$

下标 i,j,k 按 1,2,3,4 的次序循环改变，以 $i=j-1$ 和 $k=j+1$，于是，例如 $Y_1=3(y_2-y_4)$。对图 4.10-1(b)的矩形，现有单元等同于 3.10 和 6.6 节中讨论的 Q6 单元[4.15]。

剪切柔性梁单元　假想应力杂交列式的一个好处在于它易于考虑梁、板和壳单元中的横向剪切变形的影响。这里研究图 4.10-2 中一个均匀平面梁单元。为简化问题，忽略轴向变形项。

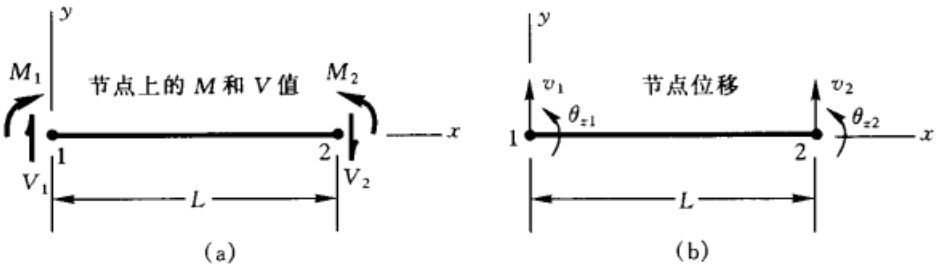


图 4.10-2　平面梁单元

(a)节点处弯矩 M 和横向剪力 V 的值；(b)节点位移自由度

均匀梁单元的应变余能为

$$U^*=\frac{1}{2EI_z}\int_0^L M^2\,\mathrm{d}x+\frac{k_y}{2AG}\int_0^L V^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^L\begin{Bmatrix}M\\V\end{Bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}1/EI_z & 0\\ 0 & k_y/(AG)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}M\\V\end{Bmatrix}\mathrm{d}x \tag{4.10-16}$$

其中 E=弹性模量，G=剪切模量，I_z=横截面积 A 对形心 z 轴的惯性矩，k_y=剪切因子，是因 y 方向 τ_{xy} 变化引起的(例如对实心长方形横截面，$k_y=1.2$)。在单元中，假设弯矩 M 和横向剪力 V 的场量为

$$\begin{Bmatrix}M\\V\end{Bmatrix}=[\boldsymbol{P}]\begin{Bmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{Bmatrix}\quad\text{其中}\quad[\boldsymbol{P}]=\begin{bmatrix}1 & x\\0 & 1\end{bmatrix} \tag{4.10-17}$$

这个假设满足梁理论的平衡方程 $\mathrm{d}M/\mathrm{d}x=V$。公式 4.10-16 中的方阵与公式 4.10-3 中的 $[\boldsymbol{E}]^{-1}$ 起着同样的作用。因此

$$\left.\begin{aligned}[\boldsymbol{H}]&=\int_0^L[\boldsymbol{P}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{E}]^{-1}[\boldsymbol{P}]\mathrm{d}x\\ \text{定义}\quad \phi_y&=\frac{12EI_zk_y}{AGL^2}\end{aligned}\right\}\quad \text{所以}\quad [\boldsymbol{H}]^{-1}=\frac{12EI_z}{(1+\phi_y)L^2}\begin{bmatrix}\dfrac{L}{3}+\dfrac{EI_zk_y}{AGL} & -\dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{L}\end{bmatrix}\tag{4.10-18}$$

M 和 V 的节点值，选择的正负号与节点自由度方向一致，其大小为

$$\begin{Bmatrix}V_1\\-M_1\\-V_2\\M_2\end{Bmatrix}=[\boldsymbol{R}]\begin{Bmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{Bmatrix}\quad \text{其中}\quad [\boldsymbol{R}]=\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\\0 & -1\\1 & L\end{bmatrix}\tag{4.10-19}$$

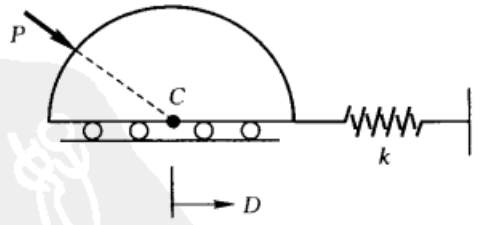
在方程 4.10-4 的第二式中，单元自由度是$\{\boldsymbol{d}\}=\lfloor v_1 \quad \theta_{z1} \quad v_2 \quad \theta_{z2}\rfloor^{\mathrm{T}}$，$[\boldsymbol{L}]$是单位矩阵，因为$\{\boldsymbol{u}_b\}=\{\boldsymbol{d}\}$。因此公式 4.10-6 得$[\boldsymbol{G}]=[\boldsymbol{R}]^{\mathrm{T}}$，公式 4.10-9 和 4.10-18 得铁木辛柯梁单元的刚度矩阵：

$$[\boldsymbol{k}]=\frac{12EI_z}{(1+\phi_y)L^2}\begin{bmatrix}1/L & 1/2 & -1/L & 1/2\\ 1/2 & (4+\phi_y)L/12 & -1/2 & (2-\phi_y)L/12\\ -1/L & -1/2 & 1/L & -1/2\\ 1/2 & (2-\phi_y)L/12 & -1/2 & (4+\phi_y)L/12\end{bmatrix}\tag{4.10-20}$$

这个结果与公式 2.3-6 和 2.3-7 一致。如果杆单元越来越细，ϕ_y 将趋近于零，$[\boldsymbol{k}]$简化为常见的仅有弯曲变形梁的刚度矩阵，没有展现$[\boldsymbol{k}]$的剪切锁定或病态。

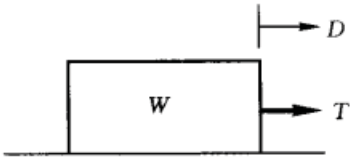
分析题

4.2-1 图示系统包括一个刚性半圆柱体，它能无摩擦地在水平表面滚动，一个刚度为 k 的线性弹簧，和一个大小不变的力 P，它可绕圆柱面移动但总是指向柱体上的 C 点。证明当 C 点经历一个水平位移 D 时，P 做的功与路径有关，因此系统是不守恒的。



题 4.2-1

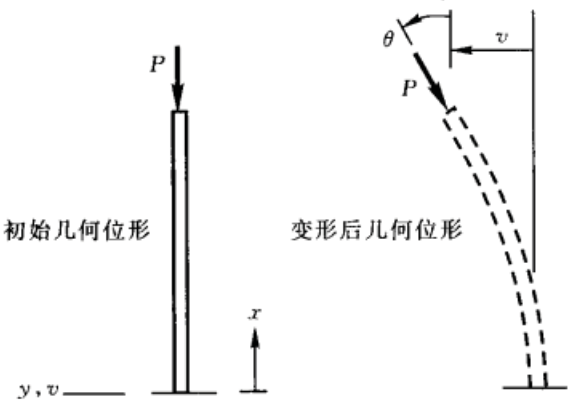
4.2-2 图示重量为 W 的块体静置在摩擦系数为 μ 的粗糙水平面上。在水平力 T 作用下块体滑动位移 D，证明这个系统是不守恒的。



题 4.2-2

4.2-3 作用在柱顶端的载荷叫从动载荷，它始终与柱顶有同样的偏角 θ。考察当从初始位置到最终位置，力 P 经历了微小的位移 v 和 θ 时所做的功，证明这个系统是不守恒的，

忽略在方向上产生位移所做的功。



题 4.2-3

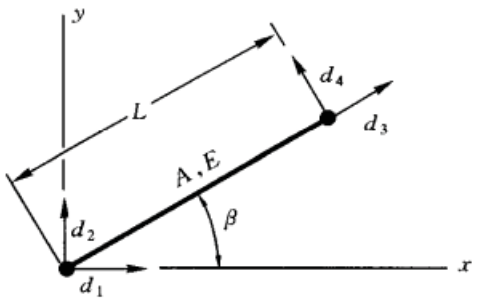
4.2-4　按 4.2 节邻近结尾处的建议把 Ω 重新定义为 $\Omega = P(D_{eq} - D)$，并按要求修改图 4.2-4。

4.2-5　令图 4.2-3 中载荷 P 的方向倒转，利用 Π_p 求解 D 的平衡值。按要求修改图 4.2-4。

4.2-6　假设图 4.2-3 中弹簧是非线性的，但施加一个与拉伸量平方成比例的力，写出 Π_p 的表达式，并从中确定 D 的平衡值。

4.3-1　重新定义图 4.3-1 中的 D_2 和 D_3，使 D_2 为相对于 D_1 的轴向位移，D_3 为相对于 D_2 的轴向位移。写出类似公式 4.3-3 的 Π_p 的表达式。在特殊情况 $k_1 = k_2 = k_3 = k$ 和 $P_1 = P_2 = P_3 = P$，求解 D_i，并证明它们与公式 4.3-3 有同样的绝对轴向位移。

4.3-2　等截面杆单元末端的位移自由度 d_i 如图示方向，用这些自由度写出 Π_p 的表达式，由极值条件 $d\Pi_p = 0$，求出按这 4 个自由度运算的单元刚度矩阵。



题 4.3-2

4.3-3　用最小势能原理推导下列结构的刚度矩阵：(a) 问题 2.2-2；(b) 问题 2.2-3；(c) 问题 2.3-2；(d) 问题 2.3-3。

4.3-4　验证公式 4.3-5 和 4.3-6 可得公式 4.3-3。

4.4-1　在平面 xy 中写出用于平面应力条件下各向同性材料的公式 4.4-2（它的 $[\boldsymbol{E}]$ 为 3×3 矩阵）。研究非轴向应力情况下的表达式，对照公式 4.4-9 的相应项检验你的结论。

4.4-2　在用公式表示图 4.4-1(b) 描述的梁时，设分别给定初始应力 $\sigma_0 = -m_0 y/I_z$ 和初始应变 $\varepsilon_0 = -y\kappa_0$。这里 κ_0 是初始曲率，m_0 是初始弯矩，当梁的凹面向上两者都为正。从公式 4.4-9 开始，确定 κ_0 和 m_0 对公式 4.4-11 的贡献。

4.4-3　重复公式 4.4-12 到 4.4-14 的例子，但用 ε_0 而不是 σ_0 来解释加热问题。

4.5-1　证明方程 4.5-6a 的第一式的确是由条件 $\partial\Pi_p/\partial a_1 = 0$ 和 $\partial\Pi_p/\partial a_2 = 0$ 给出。

4.5-2　证明在瑞雷-里兹解法中使用多项式 $u = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ 可得到公式 4.5-9 中的 a_i。

4.5-3 考察4.5节中的两个近似解和一个精确解(公式4.5-5c,4.5-6b和4.5-8),在杆的哪个或哪些点处每个解都满足平衡微分方程?

4.5-4 考察长度为 L 的等截面悬臂梁,在端点 $x=0$ 处固支,在 $x=L$ 处作用横向力 F。

(a) 设横向位移场为 $v=a_1x^3$,其中 a_1 是广义自由度项,这个位移场容许吗?解释原因。

(b) 为写出比(a)更好的多项式场形式。设这个场包括三项,每项形式为 a_ix^j,这里 $i=1,2,3$,j 是这些项可以取的整数值。

(c) 不用计算,你能预示(b)中的场得到的答案特性和 a_i 中任意一项的数值吗?

(d) 利用(a)中的位移场计算力 F 产生的挠度。

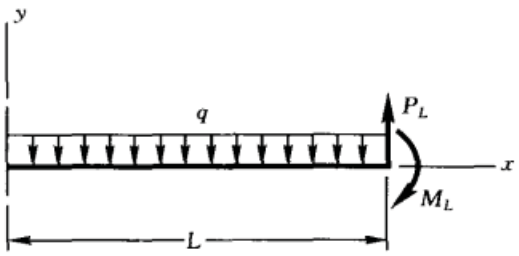
4.5-5 有均匀弯曲刚度 EI 且受均匀载荷的梁在两端 $x=0$ 和 $x=L$ 处简支。在(a)和(b)两种情况下,确定在 $x=L/2$ 处用有单个自由度的瑞雷-里兹解法预测挠度和弯矩。比较其精确解和近似解。

(a) 使用单个自由度的代数表达式 $v=a_1x(L-x)$。

(b) 使用正弦级数的一项。

(c) 你为什么能预见到(b)的结果比(a)的更精确?

4.5-6 图示的均匀悬臂梁上承受集度为 q 的均布载荷,顶端作用着力 P_L 和弯矩 M_L。在(a)和(b)中,计算顶端位移和转角的瑞雷-里兹近似值。将这些结果与梁理论公式作比较,解释瑞雷-里兹解结果是精确或不精确的原因。



题 4.5-6

(a) 用多项式级数的一项。

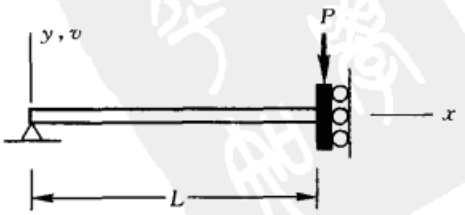
(b) 用多项式级数的两项。

(c) 在(a)中,对于给定载荷的哪一个,位移场 $v(x)$ 在整个梁中是精确的?解释原因。

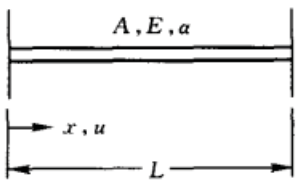
4.5-7 如果习题4.5-6中的 P_L 和 M_L 作用在 $x=L/2$ 处而不是作用在顶端,要得到 $x=L$ 处的精确位移,多项式需要多少项?解释原因。

4.5-8 有均匀 EI 的梁,长 L,在 $x=0$ 处有一个铰支点,在 $x=L/2$ 处有滚轴支撑,在 $x=L$ 处有顶端横向力 P 作用。用完备的二次多项式为试函数,用瑞雷-里兹解法确定端部的位移,这个结果的误差百分比是多少,在 $x=L/2$ 处相关弯矩的误差百分比是多少?

4.5-9 图示的梁有均匀的 EI。以横向位移的试验函数 $v=a_0+a_1x+a_2x^2$ 开始,使该函数成为可容许的,然后用瑞雷-里兹解法确定 $x=L$ 处的 v 和最大弯矩。这些结果的误差百分比是多少?



题 4.5-9



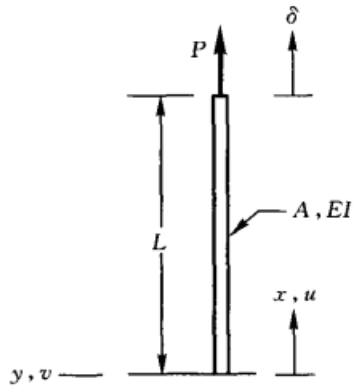
题 4.5-10

4.5-10　图示均匀杆模量为 E，横截面积为 A，热膨胀系数为 α。在参考温度为零时，杆内无内应力，杆两端面刚好位于两个刚性壁之间，然后杆受到线性变化的温度场作用，在 $x=0$ 处温度为零，$x=L$ 处温度为 T_0，这里 $T_0>0$。用完备的二次多项式为试函数，由瑞雷-里兹解法计算轴向位移场 $u(x)$ 和轴向应力场。

4.5-11　考虑有均匀 A 和 EI 的直柱体，承受轴向载荷 P（受拉为正），如图所示。其小挠度势能为

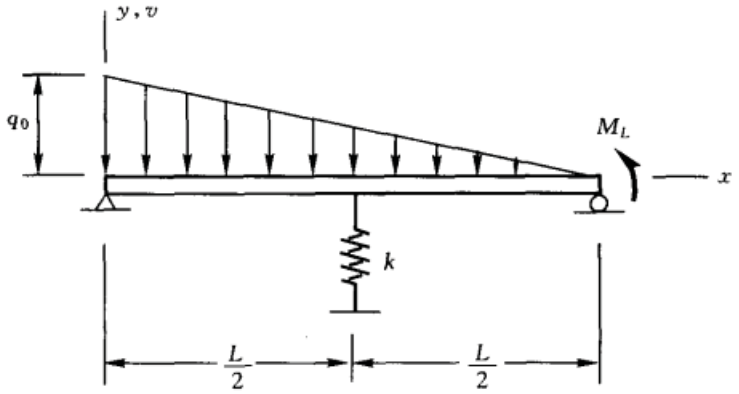
$$\Pi_p=\int_0^L \frac{AE}{2}u_{,x}^2\,\mathrm{d}x+\int_0^L \frac{P}{2}v_{,x}^2\,\mathrm{d}x+\int_0^L \frac{EI}{2}v_{,xx}^2\,\mathrm{d}x-P\delta$$

使用瑞雷-里兹解法，用对 u 和 v 不同的试函数计算该柱体的屈曲载荷。用 u 和 v 的尽可能最简单且运动学允许的多项式为试函数。用 A，EI，L 等常数表示结果。所得方程中的一个将允许广义自由度中的一个为零。如果不是这种情况（物理上意味着该柱体仍然是直的并没有屈曲），而是设该自由度为非零，由此得到屈曲载荷方程。



题 4.5-11

4.5-12　图示为一等 EI 的简支梁，承受线性变化的分布载荷，在



题 4.5-12

左端点处集度为 q_0，右端点作用弯矩 M_L。在跨度中点有刚度为 k 的弹簧支撑，使用瑞雷-里兹解法，用最简单的试函数确定近似挠度场 $v(x)$。

4.5-13　简支均匀梁中点作用有力 P。利用有无限级数的瑞雷-里兹解法

$$v=\sum a_i\sin(i\pi x/L)\quad(i=1,3,5,\cdots)$$

计算中点的挠度和弯矩。比较精确解与分别保留 1，2，3 和 4 项而计算得到的解。

4.5-14　将力 P 改成向下的均布载荷 q 作用，重复解答问题 4.5-13。

4.6-1　(a) 计算作用载荷 $q=cx$ 经过公式 4.5-8 中精确位移 u 所做的功。

(b) 类似地，计算在两种近似解（公式 4.5-5 和 4.5-6）下载荷 q 所做的功，能够得出怎样的结论？

4.6-2　(a) 计算与公式 4.5-8 给出的精确解相关的应变能。这个应变能与习题 4.6-1a 得到的功有什么联系，为什么？

(b) 类似地，计算与两种近似解（公式 4.5-5 和 4.5-6）相关的应变能，并将结果与习

题 4.6-1b 得到的功值相比较。

4.7-1 考察泛函 $\Pi=\int F\mathrm{d}x$，其中 $F=c_1\phi_{,xx}^2+c_2\phi_{,x}^2+c_3\phi^2+c_4\phi+c_5$，五个 c_i 是常数。用(a)公式 4.7-2a 和(b)公式 4.7-8 所示的变分计算确定欧拉方程。

4.7-2 某个物理问题的泛函为：

$$\Pi_p=\int_0^L(\phi_{,x}^2/2-50\phi)\mathrm{d}x$$

确定泛函的欧拉方程。然后由强制边界条件 $x=0$ 时 $\phi=0$ 和 $x=L$ 时 $\phi=20$ 来确定作为 x 和 L 的函数 ϕ。

4.7-3 不考虑公式 4.4-11 中含 $\{\boldsymbol{F}\}$ 和 $\{\boldsymbol{M}\}$ 的项，用公式 4.7-2a 得到等截面梁在横向载荷 q 作用下的欧拉方程，如果 EI_z 是常数，欧拉方程变成什么样？

4.7-4 用变分计算重做习题 4.7-3(如公式 4.7-8 所示)。

4.7-5 承受横向压力 q 的各向同性等厚度平板的势能为

$$\Pi_p=\frac{D}{2}\iint\left\{w_{,xx}+w_{,yy})^2-2(1-\nu)[w_{,xx}w_{,yy}-w_{,xy}^2]-\frac{2qw}{D}\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

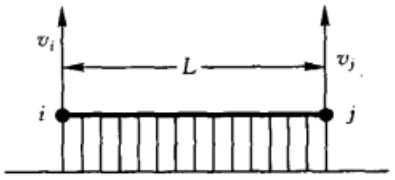
这里 w 是横向挠度，D 是常数，称抗弯刚度，ν 是泊松比。用公式 4.7-2a 证明欧拉方程是 $\nabla^4 w=q/D$，其中 ∇^4 是双调和算子。

4.7-6 对于承受横向均布载荷 q 的等截面梁，考察泛函

$$\Pi=\int(M^2/2EI+M_{,x}v_{,x}+qv)\mathrm{d}x,$$

弯矩 M 和横向位移 v 是独立场量，用公式 4.7-2 推导出这两个欧拉方程。这些欧拉方程有梁理论所期望的形式吗？

4.7-7 图示刚性杆静置在弹性基座上。当横向移动量为 v 时，基座对杆长度 $\mathrm{d}x$ 上作用力为 $kv\mathrm{d}x$，其中 k 是常数，确定用 v_i 和 v_j 计算的 2×2 刚度矩阵。提示：用 k，L，v_i 和 v_j 表示应变能 U，然后把 U 写成形式 $\{\boldsymbol{d}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{k}]\{\boldsymbol{d}\}/2$，确定 $[\boldsymbol{k}]$。



题 4.7-7

4.8-1 对下面每个问题求得类似于方程 4.8-7 和 4.8-8 形式的有限元列式，不必详细说明这些特殊单元的形状函数。

(a) 平面梁(用公式 4.4-11 中的积分)。

(b) 平面梁(见习题 4.7-6)。使用两个插值域，一个是 M 取决于节点弯矩 $\{\boldsymbol{M}_e\}$，另一个是 v 取决于节点横向挠度 $\{v_e\}$。

(c) 带有刚性壁的空腔内气体或流体的声学模型，其泛函为

$$\Pi=\int\left(p_{,x}^2+p_{,y}^2+p_{,z}^2-\frac{\omega^2}{c^2}p^2\right)\mathrm{d}V$$

其中 $p=p(x,y,z)$ 是随时间变化的气体或流体压力幅值，ω 是圆频率，c 是声速。设 $p=[\boldsymbol{N}]\{\boldsymbol{P}_e\}$，其中 $\{\boldsymbol{P}_e\}$ 代表节点压力。

4.9-1 用数值方法证明公式 4.9-1 可产生图 4.9-1 所示的位移。采用 $\theta=30°$，通过比较产生位移前后单元的边界长度，证明位移是刚体运动。

4.9－2　建议梁单元基于三次多项式但自由度是横向位移 v_i，其中 $i = 1,2,3,4$。节点在两端和三分点（也就是说 $x = 0, L/3, 2L/3, L$）。这个杆元违反了什么收敛准则？

4.9－3　在三维问题中，如果没有方向性偏见，你将对完整的二次场域（10 项）添加三次项中的哪些？这个场域的总项数是(a)11，(b)13，(c)14，(d)16，(e)17，(f)19？

4.9－4　考虑长度为 L 的等截面直杆，被支撑以防止其刚体运动，受平稳变化的轴向分布力 q 作用。杆用两种网格来建模，第一种使用 n 个线性位移杆单元，这里 n 是偶数，第二种网格使用 $n/2$ 个二次位移杆单元。每个网格的节点数和位置都相同。

(a) 哪种网格有可能得到的位移和应力值更精确？解释原因。

(b) 如果通过把每一个网格再分成两个的方式来细化网格，对于细化网格的每一种，用什么因子将有可能减小位移和应力中的误差？

4.10－1　计算图 4.10－1(b) 中矩形单元的矩阵 $[\boldsymbol{H}]$，其中厚度是常数，泊松比为零。

4.10－2　使用杂交列式求一个细长梁单元的 4×4 刚度矩阵（类似于公式 4.10－20）。但从开始只能包含弯曲能。

第 5 章

列式技术：伽辽金法和其它加权残数法

包括有限单元法在内的近似解法都能从控制微分方程中构建。这一章讨论通常被用于这一目的的伽辽金法，并总结了相关方法。所举的例子中包含了混合列式和其它非结构问题。

5.1 伽辽金法

引言 至今我们已用下列方法构建了有限元方程：直接物理原理（第 2 章），虚功原理（第 3 章），应用势能作为泛函的变分原理（第 4 章）。虚功原理和变分原理是典型的分析方法，对于结构力学中大多数问题的有限元分析，仍然是适用的。在其它问题领域，类似于势能的泛函不好辨认，而且可能没有一个清晰的物理含义。对于某些应用，不能够写出变分所需要的泛函来。流体力学就是这种情况，对某些类型的流体，可利用的都是微分方程和边界条件。对这类问题，利用*加权残数法*仍然能够获得有限元列式，其中*伽辽金法*是使用最广泛的一种。如同一个问题的变分叙述，在它们的弱形式中，像第 4 章描述的那样，伽辽金叙述和微分方程结合起来了，它们在域内是以积分或平均的形式来满足，而不是在每个节点。伽辽金法和虚功原理之间的关系在 4.7 节的后面作了诠释。

在这一节及以后，我们采用下列符号：

x	自变量，例如，质点的坐标
$u=u(x)$	因变量，例如，质点的位移
$\tilde{u}=\tilde{u}(x)$	近似解；如果是精确解，则 $\tilde{u}=u$
f	x 的函数（它可以是常量或零）
D	微分算子

一个物理问题的数学描述如下：

$$\text{在域 } V \text{ 内：} \quad Du - f = 0 \tag{5.1-1}$$

作为一个例子，对于在无内热源的各向同性材料中的稳态传热问题，D 是调和算子 ∇^2，u 是温度 T，$f=0$。这个问题由方程 5.1－1 和相应的边界条件以强形式作了描述，它意味着微分方程必须在每个内点上满足，而且在每个边界点上也必须满足边界条件。总的来说，近似函数 $\tilde{u}$ 不能在每点都满足方程 5.1－1。这样保留了一个残数 $R=R(x)$：

$$\text{域 } V \text{ 内的残数：} \quad R = D\tilde{u} - f \tag{5.1-2}$$

令 $\tilde{u}$ 为基本函数的线性组合。典型的 $\tilde{u}$ 是有 n 项的多项式，它的第 i 项被乘以一个广义自由度 a_i。选择 a_i 的 n 个值使 R 成为小数（在某种意义上）。根据加权残数法，最好的 a_i 的值（在某种意义上）是以它们的弱形式满足下面的控制方程表达式

$$\int W_i R \, dV = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{5.1-3}$$

式中 $W_i = W_i(x)$ 是权函数。在伽辽金加权残数法中，每个 W_i 是 $\tilde{u}$ 中与 a_i 相对应的乘子，其它的加权残数法在 5.2 节中讨论。

一维问题举例　图 5.1－1 描述了一个受轴向载荷的均匀杆，并给出了它的控制微分方程的导数。轴向位移的精确解 $u=u(x)$ 可以很容易地通过对微分方程的积分获得。因此

$$u = \frac{P}{AE}x + \frac{cL_T^2}{2AE}x - \frac{c}{6AE}x^3 \tag{5.1-4}$$

现在我们假装不知道这个结果，而寻找一个近似解。由图 5.1－1 和方程 5.1－3 可知，问题的伽辽金陈述是

$$\int_0^{L_T} W_i \left(\frac{d^2\tilde{u}}{dx^2} + \frac{cx}{AE} \right) dx = 0 \tag{5.1-5}$$

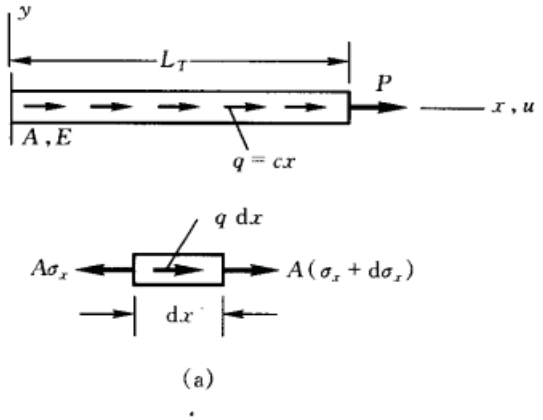


图 5.1－1　(a)均匀弹性杆右端受轴向力 P，并受线性变化的轴向力 $q=cx$，其中 c 是常数，A＝横截面积，E＝弹性模量；(b)控制微分方程的导数

接下来就是通过分部积分改变它的形式。这一步用来引入自然边界条件。积分过程中的微分阶次也被降低了。因此我们假定的近似解 $\tilde{u}$ 可以比方程 5.1-1 中所要求的可微分次数低。这种特征在该方法的有限元形式中变得尤为重要，在后续的章节中将要讨论到，在那里我们更希望有限元模型有单元间的连续性要求，且只包含低阶导数。因此，我们应用这个公式在一维空间进行分部积分

$$\mathrm{d}(uv) = u\mathrm{d}v + v\mathrm{d}u \quad \text{由此得} \quad \int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u \tag{5.1-6}$$

在式 5.1-6 中用 $u=w_i$，方程组 5.1-5 和 5.1-6 得到

$$\int_0^{L_T}\left(-\frac{\mathrm{d}W_i}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}x}+W_i\frac{cx}{AE}\right)\mathrm{d}x+\left[W_i\frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}x}\right]_0^{L_T}=0 \tag{5.1-7}$$

对于近似的轴向位移，我们选择使用 2 个自由度的试函数 $\tilde{u}$。这个函数以及从中提取的权函数 W_i 是

$$\tilde{u}=a_1x+a_2x^2 \qquad \begin{matrix}W_1=x\\W_2=x^2\end{matrix} \quad \text{因此} \quad \begin{matrix}\mathrm{d}W_1/\mathrm{d}x=1\\\mathrm{d}W_2/\mathrm{d}x=2x\end{matrix} \tag{5.1-8}$$

其中 a_i 是广义自由度。注意到试函数 $\tilde{u}$ 是可以接受的，因为 W_1 和 W_2 都满足强制边界条件：$x=0$ 处，轴向位移为零。在 $x=L_T$ 处，我们应用自然边界条件：轴向应变 $\mathrm{d}\tilde{u}/\mathrm{d}x=P/AE$。对方程 5.1-7 和 5.1-8，令 $i=1$ 然后 $i=2$ 得到

$$\begin{aligned}&\int_0^{L_T}\left[(-1)(a_1+2a_2x)+x\frac{cx}{AE}\right]\mathrm{d}x+L_T\frac{P}{AE}=0\\&\int_0^{L_T}\left[(-2x)(a_1+2a_2x)+x^2\frac{cx}{AE}\right]\mathrm{d}x+L_T^2\frac{P}{AE}=0\end{aligned} \tag{5.1-9}$$

由此得

$$\begin{matrix}a_1=\dfrac{P}{AE}+\dfrac{7cL_T^2}{12AE}\\a_2=-\dfrac{cL_T}{4AE}\end{matrix} \quad \text{因此} \quad \begin{matrix}\tilde{u}=\dfrac{P}{AE}x+\dfrac{7cL_T^2}{12AE}x-\dfrac{cL_T}{4AE}x^2\\\tilde{\sigma}=E\tilde{u}_{,x}=\dfrac{P}{A}+\dfrac{7cL_T^2}{12A}-\dfrac{cL_T}{2A}x\end{matrix} \tag{5.1-10}$$

这些结果和其它近似结果的数值比较在后面的表 5.2-1 中列出。对于同一问题，方程 5.1-10 与由瑞雷-里兹法（方程 4.5-6）得到的结果相吻合。

备注 前面所述的伽辽金法，权函数 W_i 也被当做数值系数 a_i 的乘数，特别称为巴波洛夫-伽辽金（Bubnov-Galerkin）方法而广为人知。我们按照通用习惯简称它为伽辽金法。伽辽金法还有一个不同的称谓——比佐夫-伽辽金（Petrov-Galerkin）法，其中 W_i 的选择部分或完全不同于 a_i 中的乘数，由此而得到的结果也异于由泛函得到的结果（如果必需的泛函存在的话）。比佐夫-伽辽金法用于流体力学。

像第 4 章中讲的一样，如果可以构建一个能得到问题控制微分方程的泛函，那么，伽辽金法和瑞雷-里兹法利用相同的近似函数 $\tilde{u}$ 可得到同样的结果。易于证明，上例就是这样。图 5.1-1 中杆问题的势能表达式为

$$\Pi_p=\int_0^{L_T}\left(\frac{1}{2}AE\tilde{u}_{,x}^2-cx\tilde{u}\right)\mathrm{d}x-P\tilde{u}_{L_T} \tag{5.1-11}$$

对于一个二参数的近似函数 $\tilde{u}$，可从方程 $\partial\Pi_p/\partial a_1=0$ 和 $\partial\Pi_p/\partial a_2=0$ 中得到这些参数的瑞雷-里兹法解。这样

$$\begin{aligned}\int_0^{L_T}\left(AE\tilde{u}_{,x}\frac{\partial\tilde{u}_{,x}}{\partial a_1}-cx\frac{\partial\tilde{u}}{\partial a_1}\right)\mathrm{d}x-P\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial a_1}\right)_{L_T}&=0\\ \int_0^{L_T}\left(AE\tilde{u}_{,x}\frac{\partial\tilde{u}_{,x}}{\partial a_2}-cx\frac{\partial\tilde{u}}{\partial a_2}\right)\mathrm{d}x-P\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial a_2}\right)_{L_T}&=0\end{aligned} \tag{5.1-12}$$

令 $\tilde{u}=a_1x+a_2x^2$，即可看出这两个方程和方程 5.1-9 一样。

5.2 加权残数法(MWR)

伽辽金法仅是众多加权残数法(MWR)中的一种，所有这些方法都是要在近似试函数中选择参数，以便得到最好的近似解(在某种意义上)。为了简要地解释 MWR，我们扩展对残数的定义，让它包含边界残数(在伽辽金法中，边界残数不需明确说明，因为分部积分法援引了自然边界条件，见方程 5.1-7)。假定近似解 $\tilde{u}$ 是坐标 x 以及 n 个广义自由度 $\{\boldsymbol{a}\}=\lfloor a_1\ a_2\ \cdots\ a_n\rfloor^{\mathrm{T}}$ 的函数，它们的数值待定，我们写出

$$R=R(\{\boldsymbol{a}\},x)=\mathrm{D}\tilde{u}-f(\text{残数在区域 }V\text{ 内}) \tag{5.2-1(a)}$$

$$R_S=R_S(\{\boldsymbol{a}\},x)=\mathrm{D}_S\tilde{u}-g(\text{残数在区域 }V\text{ 的边界 }S\text{ 上}) \tag{5.2-1b}$$

其中 Ds 是一个微分算子，根据某些定义，我们寻找最小残数，以提供足够的方程求解 a_i 的 n 个数值。在 MWR 中，伽辽金法以及下面的方法大家可能最为熟悉。

在配置法，也叫配点法中，在 n 个不同的点 x_i 处，令残数为零。

$$R(\{\boldsymbol{a}\},x_i)=0\quad(i=1,2,\cdots,j-1) \tag{5.2-2(a)}$$

$$R_S(\{\boldsymbol{a}\},x_i)=0\quad(i=j,j+1,\cdots,n) \tag{5.2-2b}$$

其中 $j<n$，边界 S 上别的条件未出现。配点的分布几乎是均匀的，但也可能在我们感兴趣的区域分布更密一些。

子域法也叫作子域配置法，在 V 和边界 S 上的 n 个不同部分，使其残数的积分为零。

$$\int R(\{\boldsymbol{a}\},x)\mathrm{d}V_i=0\quad(i=1,2,\cdots,j-1) \tag{5.2-3(a)}$$

$$\int R_S(\{\boldsymbol{a}\},x)\mathrm{d}S_i=0\quad(i=j,j+1,\cdots,n) \tag{5.2-3b}$$

在最小二乘法也叫连续最小二乘法中，选择 a_i 使函数 I 最小。

$$\frac{\partial I}{\partial a_i}=0\quad(i=1,2,\cdots,n) \tag{5.2-4}$$

其中的函数 I 由残数的平方在域内以及边界上的积分得到。

$$I=\int[R(\{\boldsymbol{a}\},x)]^2\mathrm{d}V+\alpha\int[R_S(\{\boldsymbol{a}\},x)]^2\mathrm{d}S \tag{5.2-5}$$

这里 α 是任意乘子,它用来得到空间的均匀性,也可作为罚数。较大的 α 值增加了 R_S 相对于 R 的重要性。

在最小二乘配置法(也称点最小二乘法和超定配置法)中,方程 5.2-4 仍然有用,但是 I 定义为 m 个点处残数平方的总和,其中 $m\geqslant n$

$$I=\sum_{i=1}^{j-1}[R(\{\boldsymbol{a}\},x_i)]^2+\alpha\sum_{i=j}^{n}[R_S(\{\boldsymbol{a}\},x_i)]^2 \tag{5.2-6}$$

即是在 $m>n$ 时,方程 5.2-6 得到关于 n 个系数 a_i 的 n 个方程。如果 $m=n$,该方法简化为简单的配置法。

备注 伽辽金法和其它 MWR 通常都可用下列符号表示

$$\int W_i R_\Gamma\mathrm{d}\Gamma=0 \tag{5.2-7}$$

这里 R_Γ 代表 R(也可能是 R_S),Γ 代表 V(也可能是 S)。对于 W_i 的定义,各种 MWR 互不相同[5.1~5.4]。在伽辽金法中,$W_i=\partial\tilde{u}/\partial a_i$。在配置法或子域法中,$W_i$ 是单位德耳塔(delta)函数或阶梯函数,它们在某个点或某个子域内取非零值。在最小二乘法中,$W_i=\partial R/\partial a_i$[5.5]。

总之,方程 5.2-7 表明:由因子 W_i 加权的残数 R_Γ 在区域 Γ 上的平均值为零。在可采用泛函 Π 的问题中,从方程 5.2-7 得到的解答类似于从变分原理 $\delta\Pi=0$ 得到的解答。

所有的 MWR 都得出一组形如 $[\boldsymbol{A}]\{\boldsymbol{a}\}=\{\boldsymbol{c}\}$ 的代数方程组,从近似函数 $\tilde{u}$ 中求出待求量 a_i。如果 D 是线性算子,则方程组就是线性的[2.14,2.15],在巴波洛夫-伽辽金法和所有的最小二乘法中,系数矩阵 $[\boldsymbol{A}]$ 是对称的。而由配置法、子域法和比佐夫-伽辽金法得到的系数矩阵则可能是非对称矩阵 $[\boldsymbol{A}]$。除非 $\tilde{u}$ 包含了精确解,否则对于已给定的 $\tilde{u}$,当方程 5.2-5 和 5.2-6 中选择不同的配点、子域或 α 时,一般来说,会得到不同的解答。

最小二乘法易于产生病态矩阵 $[\boldsymbol{A}]$,尽管允许用系数 α 来调整,但次要的残数还可能对解答产生非常强的影响。因为权重是 $W_i=\partial R/\partial a_i$,$R$ 和 W_i 都包含同阶次场量的导数。因此,在连续最小二乘法中,分部积分法不能降低被积函数项的微分阶次。这样,如果 $2m$ 阶次的导数出现在残数 R 中,有限元公式将要求单元间 $2m-1$ 次导数连续。用一组一阶微分方程重构该问题时,能够降低所要求的单元间的连续性阶次。

例题解答 我们再考虑图 5.1-1 中描述的问题,应用方程 5.1-8 中允许的试函数,这样

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+\frac{cx}{AE}=0\\&\tilde{u}=a_1x+a_2x^2\end{aligned}\right\}\quad\begin{aligned}&\text{内部残数:}\ R-2a_2+\frac{cx}{AE}\\&\text{边界残数:}\ R_S=a_1+2a_2L_T-\frac{P}{AE}\end{aligned} \tag{5.2-8}$$

强制边界条件是 $\tilde{u}$ 在 $x=0$ 处满足 $u=0$,因而在 R_S 中并未出现。这里 $R_S=0$ 意味着在 $x=L_T$ 处 $\tilde{\varepsilon}=P/AE$。

对于配置法解,我们人为地选择在 $x=L_T/3$ 处计算 R,因此由方程 $R=0$ 和 $R_S=0$ 得到

$$a_1=\frac{P}{AE}+\frac{cL_T^2}{3AE}\qquad a_2=-\frac{cL_T}{6AE}\tag{5.2-9}$$

对于子域法解，我们选择从 $x=0$ 到 $x=L_T$ 的整个长度上积分 R，因此，由方程 5.2-3(a)和 $R_S=0$得到

$$a_1=\frac{P}{AE}+\frac{cL_T^2}{2AE}\qquad a_2=-\frac{cL_T}{4AE}\tag{5.2-10}$$

在最小二乘法解中，如果我们取 $\alpha=1/L_T$，则方程 5.2-5 中的两项有相同的因次，于是

$$I=\int_0^{L_T}\left(2a_2+\frac{cx}{AE}\right)^2\mathrm{d}x+\frac{1}{L_T}\left(a_1+2a_2L_T-\frac{P}{AE}\right)^2\tag{5.2-11}$$

上式中，最后一项已在 $x=L_T$ 处的面积上完成了积分，求解方程 $\partial I/\partial a_1$ 和 $\partial I/\partial a_2=0$ 可得到式 5.2-10 中的结果 。

为了用最小二乘配置法求解，我们选择在 $x=L_T/3$ 和 $x=L_T$ 处计算 R 的值，残数 R_S 列于式 5.2-8 中。为了均衡维数，我们取 $\alpha=1/L_T^2$，三个残数可写成下列形式：

$$\begin{Bmatrix}R_1\\R_2\\R_S/L_T\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2\\0&2\\1/L_T&2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a_1\\a_2\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}-cL_T/3AE\\-cL_T/AE\\P/AEL_T\end{Bmatrix}\tag{5.2-12}$$

如果所有三个残数都设为零，则方程组将是超定的(方程数比未知数多)。最小二乘法解要求我们建立 $I=R_1^2+R_2^2+R_S^2/L_T^2$，然后分别取 $i=1$ 和 $i=2$ 应用式 5.2-4。我们引进符号$[\boldsymbol{Q}]$，$\{\boldsymbol{a}\}$和$\{\boldsymbol{b}\}$分别表示方程 5.2-12 右边的数组。得到关于$\{\boldsymbol{a}\}=\lfloor a_1\quad a_2\rfloor^{\mathrm{T}}$的最小二乘法解，矩阵格式如下

$$I=\{\boldsymbol{R}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{R}\}\quad\text{其中}\quad\{\boldsymbol{R}\}=[\boldsymbol{Q}]\{\boldsymbol{a}\}-\{\boldsymbol{b}\}\tag{5.2-13(a)}$$

$$I=\{\boldsymbol{a}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{Q}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{Q}]\{\boldsymbol{a}\}-2\{\boldsymbol{a}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{Q}]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{b}\}+\{\boldsymbol{b}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{b}\}\tag{5.2-13b}$$

$$\left\{\frac{\partial I}{\partial \boldsymbol{a}}\right\}=\{\boldsymbol{0}\}\quad\text{得到}\quad[\boldsymbol{A}]\{\boldsymbol{a}\}=\{\boldsymbol{c}\}\quad\text{其中}\quad\begin{matrix}[\boldsymbol{A}]=[\boldsymbol{Q}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{Q}]\\\{\boldsymbol{c}\}=[\boldsymbol{Q}]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{b}\}\end{matrix}\tag{5.2-13(c)}$$

在写 5.2-13b 时，用到了关系式$\{\boldsymbol{b}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{Q}]\{\boldsymbol{a}\}=\{\boldsymbol{a}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{Q}]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{b}\}$。矩阵转置是有效的，因为两个矩阵三重积中的每一个都是一个标量。在求解$\{\boldsymbol{a}\}=[\boldsymbol{A}]^{-1}\{\boldsymbol{c}\}$时，系数矩阵$[\boldsymbol{A}]$是对称的，而且和$\{\boldsymbol{a}\}$具有相同的阶。把方程 5.2-13(c)应用到方程 5.2-12 中，我们得到

$$a_1=\frac{P}{AE}+\frac{2cL_T^2}{3AE}\quad a_2=-\frac{cL_T}{3AE}\tag{5.2-14}$$

用伽辽金法，由方程 5.1-10 得

$$a_1=\frac{P}{AE}+\frac{7cL_T^2}{12AE}\quad a_2=-\frac{cL_T}{4AE}\tag{5.2-15}$$

上述解法得到的示例答案列于表 5.2-1 中，仅对于特殊情形，$P=0$，A，E，c 和 L_T 取单位值。这使我们想到，对于配置点和子域的不同选择，给定的 $\bar{u}$ 会提供不同的结果。

表 5.2-1 图 5.1-1 问题的结果，$\bar{u}=a_1x+a_2x^2$ 且对于特殊情形 $P=0, A=E=c=L_T=1$

参量和位置	精确解	配置法	子域法和最小二乘法	最小二乘配置法	伽辽金法
u 在 $x=L_T/2$	0.229 2	0.125 0	0.187 5	.0.250 0	0.229 2
u 在 $x=L_T$	0.333 3	0.166 7	0.250 0	0.333 3	0.333 3
$u_{,x}$ 在 $x=0$	0.500 0	0.333 3	0.500 0	0.666 7	0.583 3
$u_{,x}$ 在 $x=L_T/2$	0.375 0	0.166 7	0.250 0	0.333 3	0.333 3
$u_{,x}$ 在 $x=L_T$	0	0	0	0	0.083 3

5.3 一维伽辽金有限元法

在这一节，用一维示例说明伽辽金法的有限元形式。对由分部积分得到的各项的解释和单元组集形成的结构，在第一个例子中作了说明。

均匀杆，轴向载荷 对于任意分布的轴向载荷 $q=q(x)$，曾在图 5.1-1 中推导的以轴向位移 u 表示的控制微分方程为

$$AEu_{,xx}+q=0 \tag{5.3-1}$$

在任意 x 处，杆中的轴向力为

$$F=AEu_{,x} \tag{5.3-2}$$

在自由端，自然边界条件是 $F=0$。在固定端，强制边界条件是 $u=0$。

把杆分为长为 L 的 N_{els} 个单元，典型的单元示于图 5.3-1，令每个单元具有一个线性轴向位移场。因此，在一个典型的具有两个端点 1 和 2 的二自由度单元中，近似函数为[①]

$$\tilde{u}=\lfloor \boldsymbol{N} \rfloor \{\boldsymbol{d}\} \quad \text{其中} \quad \begin{matrix} \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor = \lfloor \dfrac{L-x}{L} & \dfrac{x}{L} \rfloor \\ \{\boldsymbol{d}\} = \lfloor u_1 & u_2 \rfloor^{\mathrm{T}} \end{matrix} \tag{5.3-3}$$

其中在单元的左端点处 $x=0$。因此，在每个单元中，x 与图 5.3-1(a)中总体 x 相差一个常数。自由度 u_1, u_2 是近似函数中位移模式的系数，起着和 5.1 节及 5.2 节中 a_i 相同的作用。因此，在伽辽金法中使用的权函数 W_i 是

$$W_i=\frac{\partial \tilde{u}}{\partial d_i}=N_i \quad \text{其中} \quad N_1=\frac{L-x}{L} \quad \text{和} \quad N_2=\frac{x}{L} \tag{5.3-4}$$

伽辽金残数方程 5.1-3 变为在结构 N_{els} 个单元上求和：

---

① 在前述章节中，精确解和近似解的区别并不在解题方法的基本概念上，没有在整个杆上写出形如 $u=\lfloor \boldsymbol{N} \rfloor \{\boldsymbol{d}\}$ 的近似场。

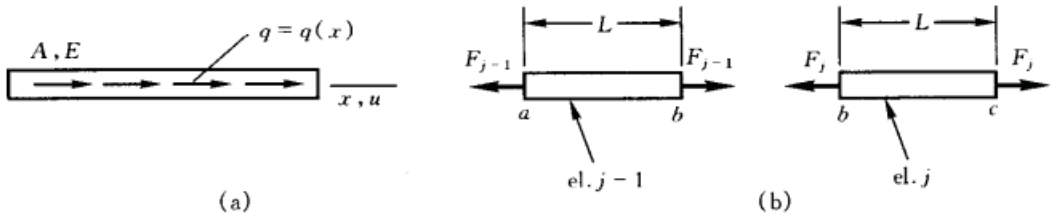


图 5.3－1　(a)受分布轴向载荷 $q=q(x)$ 作用的等截面弹性杆。A＝横截面积，E＝弹性模量；
(b)相邻单元 $j-1$ 和 j，节点 b 在单元组集后成为共有节点

$$\sum_{j=1}^{N_{els}}\int_0^L N_i(AE\bar{u}_{,xx}+q)\,\mathrm{d}x=0 \tag{5.3-5}$$

式中，角标 i 涉及所有单元形状函数；对于杆单元，$i=1,2$。当单元组集后，单个自由度的活化，激活了共用这个自由度的单元中与这个自由度相关的形状函数。因此，在当前的杆件例子中，单个自由度的活化建立了线性斜坡函数或“帽形状函数”(图 5.3－2)。我们看到，在结构层面上，形状函数的个数和自由度一样多，因此伽辽金残数方程也同自由度一样多。对于常量 AE，方程 5.3－5 的第一项部积分得到

$$\int_0^L N_iAE\bar{u}_{,xx}\,\mathrm{d}x=[N_iAE\bar{u}_{,x}]_0^L-\int_0^L N_{i,x}AE\bar{u}_{,x}\,\mathrm{d}x \tag{5.3-6}$$

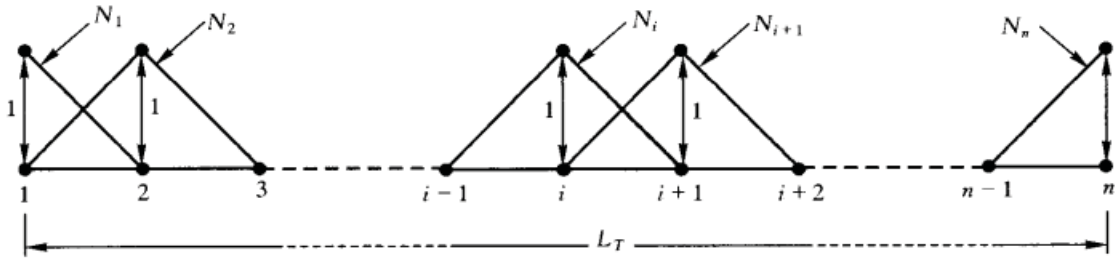


图 5.3－2　单元组集后形状函数在结构层面上活化，这些形状函数的个数和自由度的个数是 $N_{els}+1$

(如果 AE 不是常量，则微分方程为 $\mathrm{d}(AEu_{,x})/\mathrm{d}x+q=0$。将在后面处理这种形式的方程，见方程 5.3－21)。根据方程 5.3－2，单元端点的自然边界条件是 $F=AE\bar{u}_{,x}$ 把它和方程 5.3－6 代入方程 5.3－5，我们得到像伽辽金残数方程一样的形式

$$\sum_{j=1}^{N_{els}}\int_0^L(-N_{i,x}AE\bar{u}_{,x}+N_iq)\,\mathrm{d}x+\sum_{j=1}^{N_{els}}[N_iF]_0^L=0 \tag{5.3-7}$$

分部积分的一个好处就是现在只有第一阶导数出现，因此，近似函数的空间导数不必要求单元间连续[5.6](连续性要求的讨论见 4.9 节)。因此，确实像我们已经用写出方程 5.3－3 假设的那样，可以采用 C^0 单元。对于典型的杆单元我们采用以下符号：

$$\lfloor \boldsymbol{B}\rfloor=\lfloor \boldsymbol{N}_{,x}\rfloor\quad\text{因此}\quad \bar{u}_{,x}=\lfloor \boldsymbol{B}\rfloor\{\boldsymbol{d}\}=\lfloor -1/L\quad 1/L\rfloor\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\end{Bmatrix} \tag{5.3-8}$$

于是，方程 5.3－7 经重新排列后变为

$$\sum_{j=1}^{N_{els}} \underbrace{\int_0^L \lfloor \boldsymbol{B} \rfloor^{\mathrm{T}} AE \lfloor \boldsymbol{B} \rfloor \mathrm{d}x \{\boldsymbol{d}\}_j}_{[\boldsymbol{k}]_j} = \sum_{j=1}^{N_{els}} \underbrace{\int_0^L \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor^{\mathrm{T}} q \mathrm{d}x}_{\{\boldsymbol{r}_e\}_j} + \sum_{j=1}^{N_{els}} [\lfloor \boldsymbol{N} \rfloor^{\mathrm{T}} F]_0^L \qquad (5.3-9)$$

除了最后面的求和项随后讨论外，方程 5.3－9 很显然是标准的结构刚度方程$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\}$，也就是

$$\left(\sum_{j=1}^{N_{els}} [\boldsymbol{k}]_j\right)\{\boldsymbol{D}\} = \sum_{j=1}^{N_{els}} \{\boldsymbol{r}_e\}_j + \{\boldsymbol{P}\} \qquad (5.3-10)$$

这里，$\{\boldsymbol{D}\}$代替了$\{\boldsymbol{d}\}$，因为从普通单元矩阵扩充到了整个结构尺寸。

我们必须解释方程 5.3－9 中最后的求和为什么可被看作是外部作用的轴向集中载荷矢量$\{\boldsymbol{P}\}$[5.6]。在典型单元的端点 $x=0$ 和 $x=L$ 处，分别有

$$\lfloor \boldsymbol{N} \rfloor_0 = \lfloor 1 \quad 0 \rfloor \quad \text{和} \quad \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor_L = \lfloor 0 \quad 1 \rfloor \qquad (5.3-11)$$

对于图 5.3－1(b)中相邻的两个单元 $j-1$ 和 j，方程 5.3－9 中最后的求和项产生了下面的项

$$\begin{array}{l} \text{节点 } a \cdots\cdots \\ \text{节点 } b \cdots\cdots \\ \text{节点 } c \end{array} \quad -\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix} F_{j-1} + \left(\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix} F_{j-1} - \begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix} F_j \right) + \begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix} F_j \qquad (5.3-12)$$

在典型节点 b，单元组集产生合成轴向力 $F_{j-1}-F_j$。这个合力出现在式 5.3－12 的括号里，并被视为表示外加轴向力 P。当然 P 可以为零，在这种情况下，$F_{j-1}=F_j$。对于图 5.1－1 所示的问题，载荷矢量$\{\boldsymbol{P}\}$除了最右边的节点力 P 外可能为空。(在实际计算中没有使用表达式 5.3－12；它仅用来解释从方程 5.3－9 到 5.3－10 的变换。)

梁动力学 这个例子中，我们省略了大多数表示单元组集的求和符号，也省略了关于节点载荷的详细说明(如式 5.3－12)。因此我们重点介绍用伽辽金法构建单元刚度矩阵。

考虑一个均匀的直弹性梁，弯曲刚度为 EI，长为 L，单位长度质量为 ρ_L，忽略横向剪切变形。下述的著名关系式提供控制微分方程。对于横向位移 $v=v(x)$，力矩和曲率的关系式为 $M=EIv_{,xx}$。并且 $M_{,x}=V$，和 $V_{,x}=q$，其中 V 是横向剪切力，$q=q(x)$是单位长度上的横向分布力。因此有效惯性载荷是 $q=-\rho_L\ddot{v}$，式中 $\ddot{v}=\mathrm{d}^2v/\mathrm{d}t^2$，$t$ 代表时间。把这些组合到一起，便得到

$$EIv_{,xxxx} + \rho_L\ddot{v} = 0 \qquad (5.3-13)$$

自然边界条件是

$$EIv_{,xx} - M_B = 0 \quad \text{和} \quad EIv_{,xxx} - V_B = 0 \qquad (5.3-14)$$

上式中 M_B 和 V_B 分别是梁端点处设定的弯矩和横向剪力。强制边界条件是设定的 v 和 $v_{,x}$。在一个单元中，近似的横向位移场 $\bar{v}=\bar{v}(x)$和权函数 $W_i=W_i(x)$是

$$\bar{v} = \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor\{\boldsymbol{d}\} \quad \text{和} \quad W_i = N_i \qquad (5.3-15)$$

式中，$\{\boldsymbol{d}\}=\lfloor v_1 \quad \theta_{z1} \quad v_2 \quad \theta_{z2} \rfloor^{\mathrm{T}}$，$N_i$ 是通常的三次形状函数(对此见图 2.3－1 或图 3.2－4)。

对于单个长为 L 的单元，伽辽金残数方程为：

$$\int_0^L \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor^{\mathrm{T}} (EI\bar{v}_{,xxxx} + \rho_L \ddot{\bar{v}})\mathrm{d}x = 0 \tag{5.3-16}$$

由于 EI 为常数，方程 5.3－16 中四阶导数项的两次分部积分得到

$$\int_0^L \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor^{\mathrm{T}} \bar{v}_{,xxxx}\,\mathrm{d}x = \int_0^L \lfloor \boldsymbol{N}_{,xx} \rfloor^{\mathrm{T}} \bar{v}_{,xx}\,\mathrm{d}x + [\lfloor \boldsymbol{N} \rfloor^{\mathrm{T}} \bar{v}_{,xxx} - \lfloor \boldsymbol{N}_{,x} \rfloor^{\mathrm{T}} \bar{v}_{,xx}]_0^L \tag{5.3-17}$$

把方程 5.3－14 和 5.3－17 代入方程 5.3－16 中得到

$$\int_0^L (\lfloor \boldsymbol{N}_{,xx} \rfloor^{\mathrm{T}} EI\bar{v}_{,xx} + \rho_L \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor^{\mathrm{T}} \ddot{\bar{v}})\mathrm{d}x = -[\lfloor \boldsymbol{N} \rfloor^{\mathrm{T}} V_B - \lfloor \boldsymbol{N}_{,x} \rfloor^{\mathrm{T}} M_B]_0^L \tag{5.3-18}$$

M_B 和 V_B 项变为载荷矢量$\{\boldsymbol{R}\}$的一部分。理由类似于方程 5.3－11 和 5.3－12 中所运用的。由方程 5.3－15 得到

$$\ddot{\bar{v}} = \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor \{\ddot{\boldsymbol{d}}\} \quad 和 \quad \bar{v}_{,xx} = \lfloor \boldsymbol{B} \rfloor \{\boldsymbol{d}\} \quad 其中 \quad \lfloor \boldsymbol{B} \rfloor = \lfloor \boldsymbol{N}_{,xx} \rfloor \tag{5.3-19}$$

把方程 5.3－19 代入 5.3－18 并组集单元得到

$$\sum_{j=1}^{N_{\mathrm{els}}} \underbrace{\int_0^L \lfloor \boldsymbol{B} \rfloor^{\mathrm{T}} EI \lfloor \boldsymbol{B} \rfloor \mathrm{d}x}_{[\boldsymbol{k}]_j} \{\boldsymbol{d}\}_j + \sum_{j=1}^{N_{\mathrm{els}}} \underbrace{\int_0^L \rho_L \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor^{\mathrm{T}} \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor \mathrm{d}x}_{[\boldsymbol{m}]_j} \{\ddot{\boldsymbol{d}}\}_j = \{\boldsymbol{R}\} \tag{5.3-20}$$

把单元矩阵扩展到整个结构上，方程 5.3－20 被视为标准的运动方程$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}+[\boldsymbol{M}]\{\ddot{\boldsymbol{D}}\}=\{\boldsymbol{R}\}$，其中$[\boldsymbol{K}]$和$[\boldsymbol{M}]$分别是结构刚度矩阵和质量矩阵，$[\boldsymbol{R}]$代表随时间变化的载荷。

杆中的热流 考虑在一个逐渐变细且侧面绝缘的杆中的热流，如图 5.3－3(a)所示。轴向热流 f 遵循傅里叶热传导方程 $f=-kT_{,x}$，其中 k 是材料的导热率，负号表明热流传播方向和温度增加的方向相反。f 和 k 的单位分别是 $\mathrm{W/m^2}$（瓦/米^2）和 W/(m·℃)（瓦/(米·摄氏度)）。在一个没有内热源或热潭的稳态条件下，微元中热流传出的净速率为零。由此，从图 5.3－3(b)得到 $\mathrm{d}(Af)/\mathrm{d}x=0$。联立这个方程与傅里叶方程得到控制微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(Ak\tilde{T}_{,x}) = 0 \tag{5.3-21}$$

上式中 A，k 和 T 可能是 x 的函数。单元内的近似温度场是 $\tilde{\boldsymbol{T}}=[\boldsymbol{N}]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{T}_e\}$，这里，对于具有两个节点及两个自由度的单元，节点自由度是$\{\boldsymbol{T}_e\}=\lfloor \boldsymbol{T}_1 \quad \boldsymbol{T}_2 \rfloor^{\mathrm{T}}$，形状函数 N_i 列于式 5.3－4 中。我们写出伽辽金残数方程，分部积分，并代入单元端点的自然边界条件 $f=-k\tilde{T}_{,x}$。于是我们得到单元上的两个伽辽金残数方程，对于两个形状函数 N_i 中的每一个，残数方程为

$$\int_0^L \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor^{\mathrm{T}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(Ak\tilde{T}_{,x})\mathrm{d}x = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad 或 \quad -\int_0^L \lfloor \boldsymbol{N}_{,x} \rfloor^{\mathrm{T}} (Ak\tilde{T}_{,x})\mathrm{d}x - [\lfloor \boldsymbol{N} \rfloor^{\mathrm{T}} Af]_0^L = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.3-22}$$

对于 $\tilde{T}_{,x}=\lfloor \boldsymbol{N}_{,x} \rfloor\{\boldsymbol{T}_e\}$，单元方程变为

$$\int_0^L \lfloor \boldsymbol{N}_{,x} \rfloor^{\mathrm{T}} Ak \lfloor \boldsymbol{N}_{,x} \rfloor \mathrm{d}x \{\boldsymbol{T}_e\} = -\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} A_2 f_2 + \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} A_1 f_1 = \begin{Bmatrix} A_1 f_1 \\ -A_2 f_2 \end{Bmatrix} \tag{5.3-23}$$

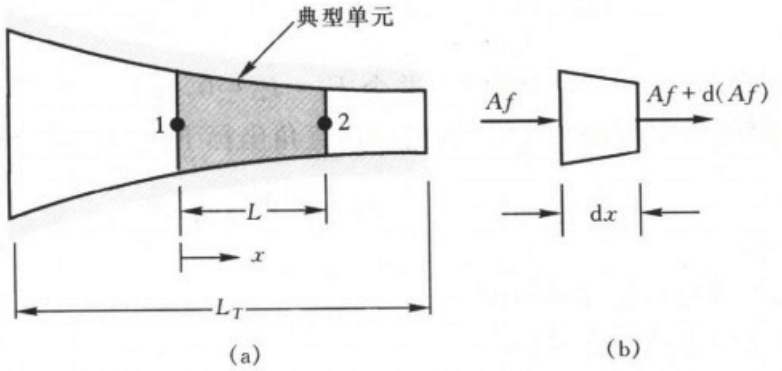


图 5.3-3 (a)侧表面绝热的渐缩杆中的轴向热流,阴影部分显示一个典型单元;(b)通过微元的热流

当热流向 x 正方向传播时,单元端点处的热流 f_1 和 f_2 为正。我们采用习惯做法,当热流流入结构节点时取正号。因此热流量,其大小为 $q=|Af|$,单元端点处流出时为正。对于 A 和 k 为常数的单个单元,我们由方程 5.3-23 得到

$$\begin{bmatrix} Ak/L & -Ak/L \\ -Ak/L & Ak/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \tag{5.3-24}$$

它和方程 2.2-5 相一致。

5.4 分部积分

伽辽金列式经常用到分部积分。现在回顾一些有用公式。

令 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为坐标方向的单位矢量。令 F_1,F_2,F_3 为独立于坐标的函数,并且

$$\boldsymbol{F} = F_1\boldsymbol{i} + F_2\boldsymbol{j} + F_3\boldsymbol{k} \quad 和 \quad \boldsymbol{v} = l\boldsymbol{i} + m\boldsymbol{j} + n\boldsymbol{k} \tag{5.4-1}$$

其中函数 $\boldsymbol{F}$ 定义在体积 V 内,ν 是 V 的表面 S 上外法线。l,m 和 n 是 ν 的方向余弦,散度定理如下:

$$\int \nabla \cdot \boldsymbol{F} \mathrm{d}V = \int \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} \mathrm{d}S \tag{5.4-2}$$

其中 $\nabla \cdot \boldsymbol{F}$ 是 $\boldsymbol{F}$ 的散度,例如

直角坐标:
$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \tag{5.4-3(a)}$$

柱形坐标:
$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF_1) + \frac{1}{r}\frac{\partial F_2}{\partial \theta} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \tag{5.4-3b}$$

在方程 5.4-2 中,$\boldsymbol{F}$ 和它的一阶偏导数必须在 V 中和 S 上连续,积分也必须在所有边界上进行,既包括内边界也包括外边界。

令 P 和 Q 为坐标的函数,例如 $(PQ)_{,x} = P_{,x}Q + PQ_{,x}$。因此

$$\int PQ_{,x}\,dV = -\int P_{,x}Q\,dV + \int (PQ)_{,x}\,dV \tag{5.4-4}$$

如果我们把 PQ 看做式 5.4-3(a)中的 F_1，并令 $F_2=F_3=0$，方程 5.4-2 允许我们把式 5.4-4 中最后的积分用面积分来代替。这样，我们通过直角坐标下的分部积分就可得到下面公式

$$\int PQ_{,x}\,dV = -\int P_{,x}Q\,dV + \int PQl\,dS \tag{5.4-5}$$

对于 y 和 z 导数的类似公式也容易得出。

相同的过程可应用于柱坐标，例如

$$\int \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rPQ)\,dV = \int\left[\frac{\partial P}{\partial r}Q + P\,\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rQ)\right]dV \tag{5.4-6}$$

在方程 5.4-3b 中，我们令 $F_1=PQ$，$F_2=F_3=0$，求解方程 5.4-6 中的最后一项，并应用方程 5.4-2。因此

$$\int P\,\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rQ)\,dV = -\int \frac{\partial P}{\partial r}Q\,dV + \int PQl\,dS \tag{5.4-7}$$

用类似的方法，

$$\int \frac{1}{r}P\,\frac{\partial Q}{\partial \theta}\,dV = -\int \frac{1}{r}\,\frac{\partial P}{\partial \theta}Q\,dV + \int PQm\,dS \tag{5.4-8}$$

在方程 5.4-3 中，设 $F_3=0$，并假设对 z 的积分已在单位厚度上完成，二维的分部积分公式可直接从前面的公式中得到。

5.5 二维伽辽金有限元法

准协调方程 准协调方程描述了许多标量场问题，诸如热传导、流体薄膜润滑、电场以及多孔介质的渗流问题。在这一节中我们不考虑物理问题的细节，运用伽辽金法构建单元矩阵。

令一个平面区域具有体积 V，在 xy 平面上具有边界 S，z 方向具有单位厚度。在稳态条件下，控制微分方程和自然边界条件分别如下：

在体积 V 中：
$$\frac{\partial}{\partial x}(k_x\phi_{,x}) + \frac{\partial}{\partial y}(k_y\phi_{,y}) + Q = 0 \tag{5.5-1}$$

在边界 S 上：
$$lk_x\phi_{,x} + mk_y\phi_{,y} - f_B = 0 \tag{5.5-2}$$

其中 $\phi=\phi(x,y)$ 是相关变量，l 和 m 是边界 S 外法线矢量的方向余弦。已知量 k_x，k_y 和 Q 既可能是常量也可能是 x,y 的函数。在自然边界条件中，f_B 是设定的边界流，我们认为它流入 V 中时为正。强制边界条件仅在边界 S 上的一段上有效，由设定的 ϕ 值组成。如果 $k_x=k_y=k$ 是常量，公式 5.5-1 变成泊松方程 $k\nabla^2\phi+Q=0$。如果 Q 也为零，则方程 5.5-1 变成拉普拉斯方程 $\nabla^2\phi=0$。满足 $\nabla^2\phi=0$ 的函数 ϕ 称之为*调和函数*。

在标量场变量 $\tilde{\phi}$ 中，离散近似通常被认为是 C^0 连续的。这样每个节点具有一个自由度，在 n 自由度单元中的近似场为

$$\tilde{\phi} = \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor \{\boldsymbol{\phi}_e\} = \lfloor N_1 \quad N_2 \quad \cdots \quad N_n \rfloor \{\boldsymbol{\phi}_e\} \tag{5.5-3}$$

式中$\{\boldsymbol{\phi}_e\}$是单元节点自由度矢量。在单元层面上有 n 个伽辽金残数方程

$$\iint \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor^{\mathrm{T}} \left[\frac{\partial}{\partial x}(k_x \tilde{\phi}_{,x}) + \frac{\partial}{\partial y}(k_y \tilde{\phi}_{,y}) + Q \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.5-4}$$

按照方程 5.4-5 的示例，分部积分得到

$$\iint \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor^{\mathrm{T}} \frac{\partial}{\partial x}(k_x \tilde{\phi}_{,x}) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint \lfloor N_{,x} \rfloor^{\mathrm{T}} k_x \tilde{\phi}_{,x} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor^{\mathrm{T}} k_x \tilde{\phi}_{,x} l \mathrm{d}S \tag{5.5-5(a)}$$

$$\iint \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor^{\mathrm{T}} \frac{\partial}{\partial y}(k_y \tilde{\phi}_{,y}) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint \lfloor N_{,y} \rfloor^{\mathrm{T}} k_y \tilde{\phi}_{,y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor^{\mathrm{T}} k_y \tilde{\phi}_{,y} m \mathrm{d}S \tag{5.5-5b}$$

这里，在每个方程的最后一项积分中，$\lfloor \boldsymbol{N} \rfloor^{\mathrm{T}}$在 S 上计算。把方程 5.5-5 和 5.5-2 代入方程 5.5-4 中得到

$$\iint (-\lfloor \boldsymbol{N}_{,x} \rfloor^{\mathrm{T}} k_x \tilde{\phi}_{,x} - \lfloor \boldsymbol{N}_{,y} \rfloor^{\mathrm{T}} k_y \tilde{\phi}_{,y} + \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor^{\mathrm{T}} Q) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor^{\mathrm{T}} f_B \mathrm{d}S \tag{5.5-6}$$

最后，将 $\tilde{\phi}_{,x} = \lfloor \boldsymbol{N}_{,x} \rfloor \{\boldsymbol{\phi}_e\}$和 $\tilde{\phi}_{,y} = \lfloor \boldsymbol{N}_{,y} \rfloor \{\boldsymbol{\phi}_e\}$代入方程 5.5-6 得到

$$\left[\iint (\lfloor \boldsymbol{N}_{,x} \rfloor^{\mathrm{T}} k_x \lfloor \boldsymbol{N}_{,x} \rfloor + \lfloor \boldsymbol{N}_{,y} \rfloor^{\mathrm{T}} k_y \lfloor \boldsymbol{N}_{,y} \rfloor) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right] \{\boldsymbol{\phi}_e\} = \iint \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor^{\mathrm{T}} Q \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor^{\mathrm{T}} f_B \mathrm{d}S \tag{5.5-7}$$

或者用我们习惯的符号$[\boldsymbol{k}]\{\boldsymbol{\phi}_e\} = \{\boldsymbol{r}_e\}$。

平面弹性问题 在平面应力或平面应变问题的应用中，前述的操作稍有变化。我们总结如下：控制微分方程是平衡方程，自然边界条件包含表面力。也就是说，从方程 3.1-12 和 3.1-14得到

$$\begin{aligned} \sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + F_x &= 0 \\ \tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + F_y &= 0 \end{aligned} \quad \text{和} \quad \begin{aligned} \phi_x &= l\sigma_x + m\tau_{xy} \\ \phi_y &= l\tau_{xy} + m\sigma_y \end{aligned} \tag{5.5-8}$$

这里，F_x 和 F_y 是单位体积的体力，l 和 m 是 xy 平面内的边界 S 的外法线矢量的方向余弦。强制边界条件由位移分量 u 和 v 设定值组成。一个单元中，近似位移场可写为

$$\{\tilde{\boldsymbol{u}}\} = \begin{Bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor & \lfloor \boldsymbol{0} \rfloor \\ \lfloor \boldsymbol{0} \rfloor & \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor \end{bmatrix} \{d\} \tag{5.5-9}$$

这里，对于 n 节点的单元$\{\boldsymbol{d}\} = \lfloor u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n \quad v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n \rfloor^{\mathrm{T}}$，$\lfloor \boldsymbol{N} \rfloor = \lfloor N_1 \quad N_2 \quad \cdots \quad N_n \rfloor$。对于有两个微分方程和 n 个节点的单元，在单元层面上，有 $2n$ 个伽辽金残数方程，即

$$\iint \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor^{\mathrm{T}} (\tilde{\sigma}_{x,x} + \tilde{\tau}_{xy,y} + F_x) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.5-10(a)}$$

$$\iint \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor^{\mathrm{T}} (\tilde{\tau}_{xy,x} + \tilde{\sigma}_{y,y} + F_y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.5-10b}$$

上式中 $\tilde{\sigma}_x$，$\tilde{\sigma}_y$ 和 $\tilde{\tau}_{xy}$ 是由近似位移场产生的应力场。在方程 5.5－10 中有四项要进行分部积分，例如第一项这样的积分是

$$\iint \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor^{\mathrm{T}} \tilde{\sigma}_{x,x} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint \lfloor \boldsymbol{N}_{,x} \rfloor^{\mathrm{T}} \tilde{\sigma}_x \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor^{\mathrm{T}} \tilde{\sigma}_x l \mathrm{d}S \tag{5.5-11}$$

这个过程引入了自然边界条件。接下来我们把方程 5.5－9 以及应变-位移关系和应力-应变关系代入方程 5.5－8 的第一个方程，用 $\tilde{u}$ 和 $\tilde{v}$ 来表示 $\tilde{\sigma}_x$，$\tilde{\sigma}_y$ 和 $\tilde{\tau}_{xy}$。于是有

$$\{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\} = [\partial]\{\tilde{\boldsymbol{u}}\} \quad 或 \quad \{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\} = [\boldsymbol{B}][\boldsymbol{d}] \tag{5.5-12}$$

$$\{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\} = [\boldsymbol{E}](\{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\} - \{\boldsymbol{\varepsilon}_0\}) + \{\boldsymbol{\sigma}_0\} \tag{5.5-13}$$

这里[∂]是公式 3.1－9 中定义的 3×2 微分算子。最后的结果和方程 4.8－15 相一致。

5.6　混合列式

在结构力学中，通常采用基本有限元的位移近似。为了得到它，我们可以把伽辽金法运用于一个或多个以位移形式表示的控制微分方程中。通过合并辅助关系式得到如下方程：平衡微分方程、应力-应变关系和应变-位移关系。混合列式能够通过直接把伽辽金法运用到辅助关系式来得到，或是部分地合并它们，或根本不用合并。在形成有限元列式的过程中，节点自由度列表包含位移和其它场量，否则，这些其它场量仅能作为自然边界条件来列入。为了用例子说明混合列式，在这一节中，我们为以每个节点的轴向位移和轴向应力作为自由度的均匀杆单元构建系数矩阵。

让我们把应力-应变关系式 $\sigma_x = E\varepsilon_x$ 和应变-位移关系式 $\varepsilon_x = \mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ 合并起来，对于图 5.6－1(a)中的杆，平衡方程和应力-位移关系式如下

轴向平衡：
$$\frac{\mathrm{d}\sigma_x}{\mathrm{d}x} + \frac{q}{A} = 0 \tag{5.6-1}$$

应力-位移：
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \frac{\sigma_x}{E} = 0 \tag{5.6-2}$$

轴向应力和轴向位移的近似场是独立的。对于一个 2 节点单元，我们采用插值法

$$\tilde{\sigma}_x = \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor^{\mathrm{T}} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} \quad \tilde{u} = \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor^{\mathrm{T}} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad 其中 \quad \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor = \lfloor \frac{L-x}{x} \quad \frac{x}{L} \rfloor \tag{5.6-3}$$

在当前的例子中，应力和位移场采用相同的插值多项式和相同的节点位置。一般来说，对于列式中所用的场，插值和节点设置可以不同。

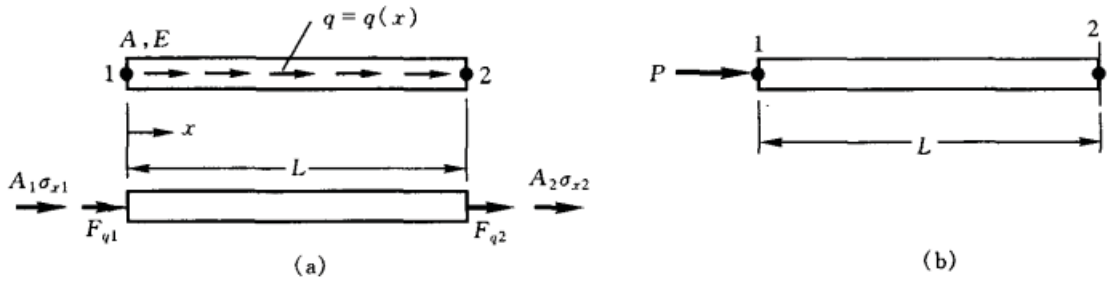


图 5.6-1 (a)受轴向载荷的杆，显示了与轴向应力及轴向载荷相关的端点力；(b)只有一个单元的均匀杆模型

单元级的伽辽金残数方程是

$$\int_0^L \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor^{\mathrm{T}} \left(\frac{\mathrm{d}\tilde{\sigma}_x}{\mathrm{d}x} + \frac{q}{A}\right) A\,\mathrm{d}x = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \int_0^L \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor^{\mathrm{T}} \left(\frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}x} - \frac{\tilde{\sigma}_x}{E}\right) A\,\mathrm{d}x = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.6-4}$$

在上述两个方程的第一式中，我们通过分部积分改变其第一项的形式，因此方程变为

$$\int_0^L \lfloor \boldsymbol{N}_{,x} \rfloor^{\mathrm{T}} \tilde{\sigma}_x A\,\mathrm{d}x = \left[\lfloor \boldsymbol{N} \rfloor^{\mathrm{T}} A\tilde{\sigma}_x\right]_0^L + \int_0^L \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor^{\mathrm{T}} q\,\mathrm{d}x \tag{5.6-5}$$

把方程 5.6-3 中的 $\tilde{\sigma}_x$ 代入方程 5.6-5 中，我们得到

$$\underbrace{\int_0^L \lfloor \boldsymbol{N}_{,x} \rfloor^{\mathrm{T}} \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor A\,\mathrm{d}x}_{[\boldsymbol{k}_{u\sigma}]} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -A_1\sigma_{x1} \\ A_2\sigma_{x2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_{q1} \\ F_{q2} \end{Bmatrix} \tag{5.6-6}$$

这里，F_{q1} 和 F_{q2} 是节点力，它们由分布轴向载荷 q(图 5.6-1(a))得到。把方程 5.6-3 中的 $\tilde{\sigma}_x$ 和 $\tilde{u}$ 代入方程 5.6-4 中的第二式，我们得到：

$$\underbrace{\int_0^L \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor^{\mathrm{T}} \lfloor \boldsymbol{N}_{,x} \rfloor A\,\mathrm{d}x}_{[\boldsymbol{k}_{\sigma u}]} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} - \underbrace{\int_0^L \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor^{\mathrm{T}} \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor \frac{A}{E}\,\mathrm{d}x}_{[\boldsymbol{k}_{\sigma\sigma}]} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.6-7}$$

根据在方程 5.6-6 和 5.6-7 中定义的矩阵，单个单元的有限元方程为

$$\begin{bmatrix} -[\boldsymbol{k}_{\sigma\sigma}] & [\boldsymbol{k}_{\sigma u}] \\ [\boldsymbol{k}_{u\sigma}] & [\boldsymbol{0}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -A_1\sigma_{x1} + F_{q1} \\ A_2\sigma_{x2} + F_{q2} \end{Bmatrix} \quad \text{其中} \quad [\boldsymbol{k}_{u\sigma}] = [\boldsymbol{k}_{\sigma u}]^{\mathrm{T}} \tag{5.6-8}$$

当两个单元连接到一起时，在没有外力作用的节点处从一个单元的 $A_2\sigma_{x2}$ 中要消去下一个单元的 $A_1\sigma_{x1}$。

作为一个简单的应用实例，考虑如图 5.6-1(b)只有一个单元的均匀杆模型，强制边界条件是在节点处设定的 σ 和 u。在图 5.6-1(b)中设定的节点自由度是 $\sigma_1 = -P/A$ 和 $u_2 = 0$。载荷 F_{q1} 和 F_{q2} 为 0，方程 5.6-8 变为

$$\begin{bmatrix} -AL/3E & -AL/6E & -A/2 & A/2 \\ -AL/6E & -AL/3E & -A/2 & A/2 \\ -A/2 & -A/2 & 0 & 0 \\ A/2 & A/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -P/A \\ \sigma_2 \\ u_1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \\ A\sigma_{x2} \end{Bmatrix} \tag{5.6-9}$$

未知量 σ_2 和 u_1 由第二个和第三个方程得到

$$\begin{bmatrix} -AL/3E & -A/2 \\ -A/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_2 \\ u_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -PL/6E \\ P-P/2 \end{Bmatrix} \quad \text{因此} \quad \begin{Bmatrix} \sigma_2 \\ u_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P/A \\ PL/AE \end{Bmatrix} \tag{5.6-10}$$

这些结果是精确解。方程组 5.6-9 中的第一式完全满足，由最后一个得到 $\sigma_{x2}=-p/A$。

备注 上述列式的优点在于给出了 σ_x 和 u 有相同的状态，而不是像在更普通的基于位移的列式中，σ_x 要用 $\sigma_x=Eu_{,x}$ 来得到。因此在一个单元中，σ_x 场可以是线性的而不是常量，就像它在位移列式中一样。提供 σ_x 在单元间的连续性，这是均匀杆中所希望的，但如果在节点处横截面积有台阶形变化，就会有错误结果。因此，每个单元需要有比常用的位移列式中多一倍的节点自由度。

混合列式也可从泛函中得到。确实存在一些可用的泛函，从它们中可得到不同的混合列式[2.13,2.14,5.7]。已经证明，位移法和混合法是有联系的[5.8]。如果两者使用相同的运动学描述，那么，对于在位移法中使用的每一种数值积分方案（即对于每种离散求积规则），其中存在着混合法中的内力分布，因此，两种方法得到相同的结果。

对于图 5.6-1 中受轴向载荷的杆，上面描述的混合列式能够从泛函中得到

$$\Pi=\int FA\,\mathrm{d}x \quad \text{其中} \quad F=\sigma_x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-\frac{\sigma_x^2}{2E}-\frac{q}{A}u \tag{5.6-11}$$

方程 4.7-2 的直接应用表明，F 提供了平衡方程和应力-位移方程

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial \sigma_{x,x}}=0 \quad \text{得到} \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-\frac{\sigma_x}{E}=0 \tag{5.6-12(a)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial u_{,x}}=0 \quad \text{得到} \quad -\frac{q}{A}-\frac{\mathrm{d}\sigma_x}{\mathrm{d}x}=0 \tag{5.6-12b}$$

这些方程和式 5.6-1 及 5.6-2 相吻合。

分析题

5.1-1 证明方程 5.1-10 中的近似结果也可由方程 5.1-8 中的 $\tilde{u}$ 场和方程 5.1-11 中的势能表达式得到。

5.1-2 考虑一个均匀的长为 L 的简支梁。对于下述的每一种载荷，运用伽辽金法确定横向近似位移场 $\tilde{v}=ax(L-x)$ 中的广义自由度 a。在跨度中央，确定挠度 $\tilde{v}$ 和弯矩 $\widetilde{M}=EI\tilde{v}_{,xx}$ 的误差百分比。

(a)正弦曲线分布的横向载荷 $q=q_0\sin(\pi x/L)(0<x<L)$

(b)均匀分布的横向载荷 $q=q_0(0<x<L)$

5.2-1 证明尽管在 $x=L_T/3$ 处配点，方程 5.2-8 中的位移场 $\tilde{u}$ 和方程 5.2-9 中的 a_i 都在

$x=L_T/3$ 处得不到 $\bar{u}=u$。这是否表明出什么错了？给予解释。

5.2-2 改变分布载荷，令 $q=c$，c 是一个常数，解答图 5.1-1 中描述的问题。再假定 $\tilde{u}=a_1x+a_2x^2$，用下列五种方法求解广义自由度 a_1 和 a_2。(a)配点法，(b)子域法，(c)最小二乘法，(d)最小二乘配点法，(e)伽辽金法。在配点法求解中，采用 5.2 节例题解答中所选用的相同配点。

5.2-3 考虑微分方程 $u_{,xx}+4u=12$，$(0<x<1)$，强制边界条件是：$x=0$ 处 $u=3$；$x=1$ 处 $u=1$。没有自然边界条件。精确解是 $u=3-2.1995\sin 2x$。一个可接受的单参数近似多项式是 $\tilde{u}=3-2x+a(x^2-x)$。用下列五种方法确定 a 的值，(a)配点法，(b)子域法，(c)最小二乘法，(d)最小二乘配点法，(e)伽辽金法。在(a)方法中选点 $x=0.5$，在方法(d)中选择点 $x=1/3$ 和 $x=2/3$。在每种方法中都计算 $\tilde{u}$ 在 $x=0.5$ 和 $x=0.7$ 处的误差百分比。

5.2-4 考虑微分方程 $u_{,x}+2u-16x=0$，$(0<x<1)$，强制边界条件是，在 $x=0$ 处 $u=0$，精确解是 $u=4(e^{-2x}-1)+8x$。一个可接受的二参数近似多项式是 $\tilde{u}=a_1x+a_2x^2$。确定 a_1 和 a_2，以及 $x=0.5$ 和 $x=0.7$ 时 $\tilde{u}$ 的误差百分比。(a) 运用最小二乘配点法，配点选择 $x=0.25$，$x=0.50$ 和 $x=0.75$。(b) 运用伽辽金法。

5.2-5 用下述方法中的每一种，解答图 5.1-1 中所述的问题。再利用近似多项式 $\tilde{u}=a_1x+a_2x^2$。把计算结果与表 5.2-1 中的结果相比较。

(a)配点法，配点选在 $x=L_T/2$。

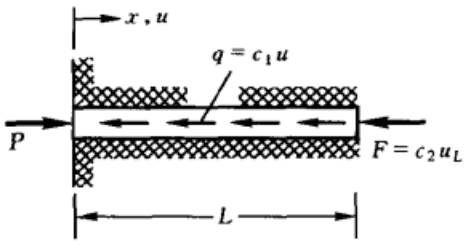
(b)子域法，积分区间为 $0<x<L_T/2$。

(c)最小二乘配点法，在 $x=0$，$x=L_T/2$ 和 $x=L_T$ 处求 R。

(d)忽略方程 5.2-12 中的残数 R_2。

(e)为什么在特殊问题中，最小二乘配点法提供的解与 α 无关？

5.3-1 如图所示，一个左端点受轴向集中载荷 P 的均匀杆，嵌入弹性介质中，在(右)端点处受集中力 F 以及轴向分布载荷 q 作用，两者都直接与杆的轴向位移 u 成比例，运用伽辽金法构建基于线性轴向位移场的单个单元有限元(列式)矩阵。

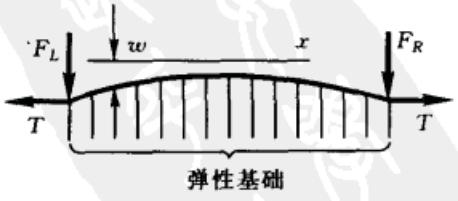


题 5.3-1

5.3-2 一根可忽略弯曲刚度的缆绳承受轴向张力并与模量为 B(单位长度单位横向挠度 w 上的力)的弹性基体接触，草图显示了缆绳处在挠曲状态，缆绳的左右端分别受有横向力 F_L 和 F_R。在图示整个跨度上的缆绳张力可视为常数，并等于水平张力 T，因为 $|w_{,x}|\ll 1$。

(a) 证明它的控制微分方程是 $Tw_{,xx}-Bw=0$。

(b) 以形状函数和常数的形式运用伽辽金法构建单元矩阵公式。清楚地表示出刚度矩阵和载荷矢量(用 F_L 和 F_R 表达)。



题 5.3-2

5.3-3 弦线的运动方程是 $Tw_{,xx}-\rho_L\ddot{w}=0$，其中 T 是轴向张力，为常数，w 是很小的横向位移，x 是轴向坐标，ρ_L 是单位长度质量，$\ddot{w}=d^2w/dt^2$。

(a) 运用伽辽金法构建二自由度单元矩阵。

(b)考虑一根简支的长 $2L$ 的均质弦线，用两个单元来建立它的模型，每个单元长为 L 并且具有 (a)中所建的形式，求振动的基本频率。(精确解是：$\omega^2=\pi^2T/4\rho_lL^2$。)

5.3－4　令 F＝常数轴向力，受拉为正，q＝横向分布载荷，B＝弹性基体的模量(单位长度单位横向挠度 v 上的力)。均质梁的微分方程变为 $Elv_{,xxxx}-q-Fv_{,xx}+Bv=0$。运用伽辽金法，以类似于方程 5.3－20 的形式，构建与 F 及 B 相关联的单元矩阵表达式。

5.3－5　对于式 5.3－13 到 5.3－20 的梁问题，以方程 5.3－12 的方式说明单元间弯矩和横向剪力的处理方法。

5.3－6　令图 5.3－3 单元 1－2 的两端横截面积为 A_1 和 A_2。如果单元两端之间的横截面积是 x 的线性函数，那么可用什么样的方程来代替方程 5.3－24，假定 k 是常数。

5.3－7　从方程 5.3－23 开始说明单元热“载荷”矢量的组集过程，以方程 5.3－12 为向导。

5.5－1　证明方程 5.5－7 也可以由方程 5.5－3 和泛函的稳定性条件

$$\Pi=\frac{1}{2}\iint(k_x\phi_{,x}^2+k_y\phi_{,y}^2-2Q\phi)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int f_B\phi\mathrm{d}S$$

得到。

5.5－2　亥姆霍兹(Helmholz)方程 $p_{,xx}+p_{,yy}+p_{,zz}+(\omega/c)^2p=0$，决定着具有刚性墙壁的空穴中振动的声学模型。这里，$p=(x,y,z)$是按正弦规律变化的压力幅值，ω 是圆频率，c 是介质中的声速。边界条件是 $p_{,n}=0$，n 是垂直于墙的法线，令假定的压力幅值场为 $p=\lfloor\boldsymbol{N}\rfloor\{\boldsymbol{p}_e\}$。运用伽辽金法，推导用形状函数和常数表示的单元矩阵公式。

5.5－3　在柱坐标下和 $k_r=k_y=R$＝常数时，方程 5.5－1 变为下列形式：

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+\frac{Q}{k}=0$$

对于回转体，自然边界条件是 $k(l\phi_{,r}+n\phi_{,z})-f_B=0$，这里，$l$ 和 n 是回转体表面外法线的方向余弦。运用伽辽金法建立类似于式 5.5－7 的方程。

5.5－4　浅水湖泊中由风驱动的环流微分方程是

$$\Psi_{,xx}+\Psi_{,yy}+A\Psi_{,x}+B\Psi_{,y}+C=0$$

其中 Ψ 是流函数，A，B 和 C 是 x 和 y 的函数，坐标 x 和 y 是水平的，和湖面相切。令 h＝深度，深度方向的平均速度是 $u=\Psi_{,y}/h$ 和 $v=-\Psi_{,x}/h$。边界条件是 $\Psi_{,n}=0$，其中 n 是垂直于海岸线的法线方向。运用伽辽金方法推导出以形状函数和常数方式表示的单元矩阵公式[5.9]。

5.5－5　完成方程 5.5－8 到 5.5－13 的推导过程，即证明方程 4.8－15 确实可以得到。

5.5－6　一个各向同性的扁平圆盘用作飞轮，圆盘具有单位厚度并且以常角速度 ω 绕垂直于其平面的中心轴旋转。其微分方程是：

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r\sigma_r)-\frac{\sigma_\theta}{r}+\rho\omega^2r=0$$

其中，σ_r＝轴向应力，σ_θ＝周向应力，ρ＝质量密度。有限元列式能够基于内径为 r_i 外径为 r_o 的环形单元，节点自由度是径向位移，一个在 $r=r_i$ 处，另一个在 $r=r_o$ 处。运

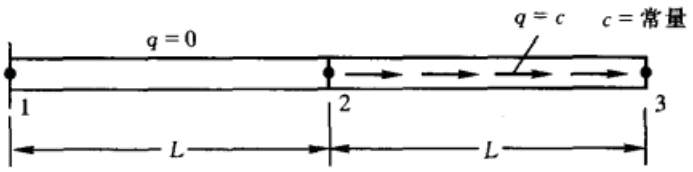
用伽辽金方法推导出以形状函数和常数方式表示的单元矩阵公式。

5.5－7 对于无体力且具有轴对称载荷的弹性轴对称体，平衡微分方程是

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(r\sigma_r)}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}-\frac{\sigma_\theta}{r}=0 \quad 和 \quad \frac{1}{r}\frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=0$$

对于基于位移的列式，运用类似于方程 5.5－8 到 5.5－13 的论证，用形状函数和材料常数方式表示单元矩阵。

5.6－1 运用方程 5.6－8 的有限元列式求解图示的二单元均匀杆的节点应力和节点位移。（施加边界条件后保留四个未知量。）



题 5.6－1

5.6－2 对于问题 4.7－6 中描述的“混合”梁列式，运用伽辽金法，推导用形状函数和常数表示的单元矩阵表达式。控制方程是 $v_{,xx}-M/EI=0$ 和 $M_{,xx}-q=0$。考虑一个长为 L 的四自由度梁单元，假定 M 和 v 场用单元端点节点自由度的线性插值得来。把这个列式用于承受均布横向载荷 q 和横向端点力 P 的一个单元的悬臂梁。

5.6－3 证明方程 5.6－11 的泛函可产生像方程 5.6－6 和 5.6－7 中叙述的相同的有限元列式。

第 6 章

等参数单元

等参数单元的列式允许四边形单元和六面体单元可以有非矩形的形状。它是一个通用的列式，提供有平面、空间、板和壳单元。这一章我们讨论基于位移场假设的等参数单元，重点是平面单元和结构力学。描述在单元列式中用到的数值积分，讨论其可能的缺陷，并介绍对任意类型单元有效性评判的分片试验方法。

6.1 引言

这一章总结了第 3 章所介绍的单元类型，除三角形单元外，第 3 章所介绍的单元形状都局限于矩形。矩形单元容易列式，但它实用性差，因为对于复杂的几何形状，仅用矩形单元划分网格存在弊病，特别是为了获得临界区域的细节信息而需要由粗到细划分网格。这一章讨论的等参数单元，可以是非矩形单元甚至是曲边单元。它运用了辅助坐标或者叫做参考坐标，在二维空间里称做 $\xi\eta$，三维空间里称做 $\xi\eta\zeta$。参考坐标把物理单元映射为正方形或立方体的参数单元。为了适用于一般的物理单元形状，就必须进行坐标变换。因为这种坐标变换产生的代数形式，有不便精确积分的缺点，这就需要代价更高的数值积分。

对于这一章所描述的单元，形状函数被用于对位移场（或其它场变量）和单元几何形状的插值。也就是单元内任一点的位移可用节点自由度和形状函数$[\boldsymbol{N}]$来表示，它是参数坐标的函数。相类似地，单元内一点的总体位置（坐标）也可用总体节点位置和形状函数$[\widetilde{\boldsymbol{N}}]$表示，$[\widetilde{\boldsymbol{N}}]$也是参数坐标的函数。符号定义：

- 节点自由度$\{\boldsymbol{d}\}$定义了单元内一点的位移$\lfloor u \quad v \quad w \rfloor$，即$\lfloor u \quad v \quad w \rfloor^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{N}]\{\boldsymbol{d}\}$。
- 节点$\{\boldsymbol{c}\}$坐标定义了单元内一点的坐标值$\lfloor x \quad y \quad z \rfloor$，即$\lfloor x \quad y \quad z \rfloor^{\mathrm{T}}=[\widetilde{\boldsymbol{N}}]\{\boldsymbol{c}\}$。

形状函数矩阵$[\boldsymbol{N}]$和$[\widetilde{\boldsymbol{N}}]$是 ξ,η 和 ζ 的函数。如果一个单元$\lfloor \boldsymbol{N} \rfloor$和$\lfloor \widetilde{\boldsymbol{N}} \rfloor$是相同的函数，则称为等参数单元，等参数的含义是“相同的参数”，如果$[\widetilde{\boldsymbol{N}}]$比$[\boldsymbol{N}]$的阶次低，则称为亚参数单元，反

之如果$[\tilde{N}]$比$[N]$的阶次高，则称为超参数单元。

等参数列式始于4节点平面单元，是由塔戈(Taig)[1.8]于1958年创建的。1966年艾恩斯(Irons)首次公开发表商用报告[6.1]。艾恩斯开发了曲边单元并把它命名为"等参数单元"。

实例：杆单元 直杆单元不能表示等参数列式的实际值，但却能简要地用于说明它的变换。图6.1-1(a)所描述的单元具有一个内节点，它可能在单元的物理中心，也可能不在。参考坐标ξ是一个自然的或内在的坐标，它依附于杆，不论杆可能在总体坐标的什么方向，自然坐标都保持轴向。节点1和3总是位于$\xi=1$和$\xi=-1$处，不论杆的物理长度L是多少，节点2总是位于$\xi=0$处，即映射单元的中心。

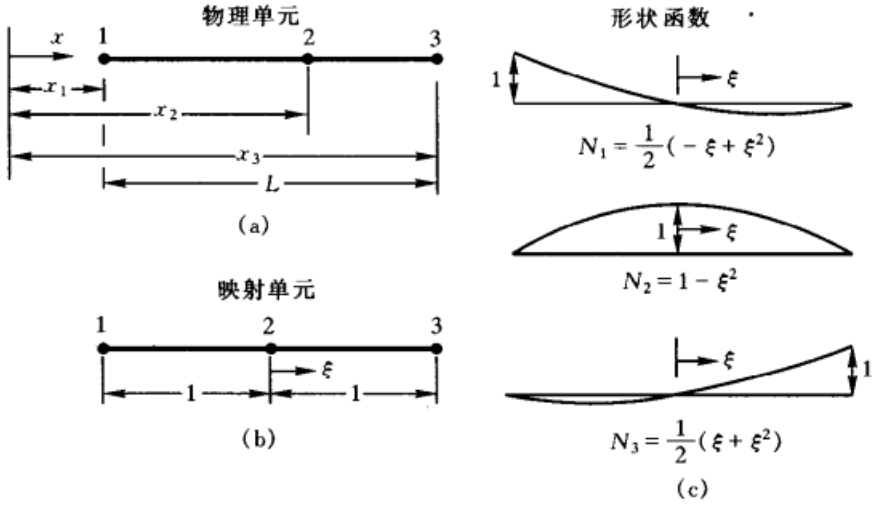


图6.1-1 3节点(二次)杆单元

有三个节点坐标x_i和三个轴向节点自由度u_i。因此单元是等参数的，而非亚参数或超参数的。三个x_i(或三个u_i)定义了一个二次插值公式。杆上任一点都具有物理坐标x和位移u(或在非结构形式中为场量ϕ)。用广义自由度a_i表示

$$x = \lfloor 1 \quad \xi \quad \xi^2 \rfloor \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad \text{和} \quad u = \lfloor 1 \quad \xi \quad \xi^2 \rfloor \begin{Bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \tag{6.1-1}$$

获得形状函数矩阵的一个方法就是按照与公式3.2-3和3.2-6相关的步骤，现在用自然坐标ξ而不是x。因此

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad \text{于是} \quad x = \underbrace{\lfloor 1 \quad \xi \quad \xi^2 \rfloor \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}}_{\lfloor N \rfloor} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \tag{6.1-2}$$

另一个获得形状函数的办法就是如下面所讲的，依靠直觉、观察和试探综合得到。我们注意到在图3.2-2(a)中看到的线性斜坡是由形式为$(1-\xi)/2$和$(1+\xi)/2$的函数描述的。这些形式在$\xi=0$的值为1/2。我们要求每个形状函数N_i在节点i有单位值，而在其它节点处值为

零。因此，如果我们已经猜到 $N_2=1-\xi^2$，则得到 $N_1=(1-\xi)/2-N_2/2$ 和 $N_3=(1+\xi)/2-N_2/2$。或者用这个方法或者用式 6.1-2 的方法，我们得到

$$x=\lfloor \boldsymbol{N} \rfloor \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \quad 和 \quad u=\lfloor \boldsymbol{N} \rfloor \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{6.1-3}$$

其中，形状函数矩阵是

$$\lfloor \boldsymbol{N} \rfloor = \lfloor \frac{1}{2}(-\xi+\xi^2) \quad 1-\xi^2 \quad \frac{1}{2}(\xi+\xi^2) \rfloor \tag{6.1-4}$$

同样的形状函数也可由拉格朗日插值函数用 ξ 而不是 x 得到(见图 3.2-2(b)和方程3.2-7)。对一个给定的 ξ，方程 6.1-3 和 6.1-4 提供用节点值表示的物理坐标 x 和轴向位移 u 的表达式。

单元中的轴向应变是：

$$\varepsilon_x=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lfloor \boldsymbol{N} \rfloor\right)\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad 其中 \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} \tag{6.1-5}$$

求 $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ 必须引用链式法则，因为 $\lfloor \boldsymbol{N} \rfloor$ 是用 ξ 而不是 x 的形式表示的。由于 $\mathrm{d}\xi/\mathrm{d}x$ 不能直接求得，我们必须根据方程 6.1-3 中第一式从它的倒数 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\xi$ 着手。令 J 表示这个倒数。因此

$$J=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\lfloor \boldsymbol{N} \rfloor \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}=\lfloor \frac{1}{2}(-1+2\xi) \quad -2\xi \quad \frac{1}{2}(1+2\xi) \rfloor \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \tag{6.1-6}$$

J 可以称为雅可比，它能够看做描述物理长度 $\mathrm{d}x$ 与相关参考长度 $\mathrm{d}\xi$ 的比例因子，单元的轴向应变是 $\varepsilon_x=(\mathrm{d}u/\mathrm{d}\xi)/J=\lfloor \boldsymbol{B} \rfloor \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，其中

$$\lfloor \boldsymbol{B} \rfloor = \frac{1}{J}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\lfloor \boldsymbol{N} \rfloor = \frac{1}{J}\lfloor \frac{1}{2}(-1+2\xi) \quad -2\xi \quad \frac{1}{2}(1+2\xi) \rfloor \tag{6.1-7}$$

由方程 3.3-7 或 4.8-15a 得到单元刚度矩阵如下：

$$\lfloor \boldsymbol{k} \rfloor = \int_0^L \lfloor \boldsymbol{B} \rfloor^{\mathrm{T}} E \lfloor \boldsymbol{B} \rfloor A\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \lfloor \boldsymbol{B} \rfloor^{\mathrm{T}} AE \lfloor \boldsymbol{B} \rfloor J\,\mathrm{d}\xi \tag{6.1-8}$$

只要节点 2 在单元的物理中点，J 就可简化为常量 $J=L/2$。那么 ξ 就仅仅是无量纲量的轴向坐标 $\xi=2x/L$。J 的特殊形式依赖于 x_1，x_2 和 x_3 的特定数值。总的来说，J 是 ξ 的函数，因此 $\lfloor \boldsymbol{B} \rfloor$ 在每项的分子和分母中都包含 ξ。方程 6.1-8 在闭合形式下可能不便积分。实际上，常用高斯积分法，这种数值积分方法将在 6.3 节中给予介绍。

6.2 双线性四边形单元(Q4)

这里讨论的平面单元是 3.6 节中讨论的矩形单元 Q4 的一般化，它除去了矩形的形状限制。在 3.6 节中看到的剪切锁定缺陷也在当前的单元中出现。在 3.10 节中称为 Q6 的改进公式将在 6.6 节中讨论。这一节中首先考虑结构单元，作为一个特例，从中提取出了一个标量

场单元。

图 6.2-1(a)显示了一个真实的物理单元。在物理空间中,参考坐标 ξ 和 η 不需要正交,也不必与笛卡儿坐标 x 和 y 平行,单元的边被 ξ 轴和 η 轴一分为二。不管单元的形状或物理尺寸,也不管它在笛卡儿坐标中的方位,每条边都具有坐标 $\xi=\pm1$ 和 $\eta=\pm1$,点 $\xi=\eta=0$ 是单元名义上的中心,但一般来说,它不是物理单元的质心。如图 6.2-1(b)所示,映射到 $\xi\eta$ 空间后,单元总是一个边长为两个单位的正方形。位移 u 和 v 的方向平行于 x 和 y 轴而不是 ξ 和 η 轴。用 ξ 和 η 替换 x 和 y 后,用广义自由度表示的位移具有在方程 3.6-1 中看到的形式。因此,例如,$u=a_1+a_2\xi+a_3\eta+a_4\xi\eta$,式中 a_i 是广义自由度。

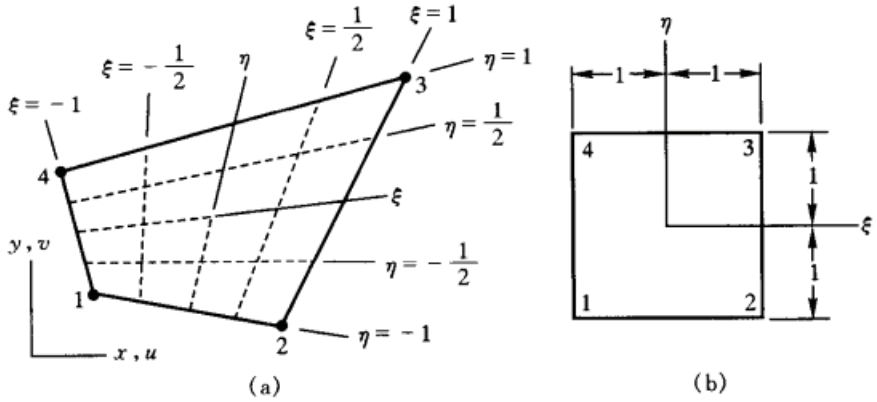


图 6.2-1 (a)物理空间的 4 节点平面单元;(b)映射到 $\xi\eta$ 空间的同一单元

因为单元是等参数的,由节点的坐标和位移插值单元内一点的坐标和位移使用相同的形状函数,因此

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum N_i x_i \\ \sum N_i y_i \end{Bmatrix} = [\boldsymbol{N}]\{\boldsymbol{c}\} \quad \text{和} \quad \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum N_i u_i \\ \sum N_i v_i \end{Bmatrix} = [\boldsymbol{N}]\{\boldsymbol{d}\} \tag{6.2-1}$$

其中求和号内的下标 i 从 1 变化到 4,有

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{c}\} &= \lfloor\, x_1 \quad y_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad x_3 \quad y_3 \quad x_4 \quad y_4 \,\rfloor^{\mathrm{T}} \\ \{\boldsymbol{d}\} &= \lfloor\, u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4 \,\rfloor^{\mathrm{T}} \\ \lfloor\, \boldsymbol{N} \,\rfloor &= \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6.2-2}$$

通过在方程 3.6-4 中设定 $a=1, b=1, x=\xi, y=\eta$,能够得到单个的形状函数。于是

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \quad N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \quad N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \tag{6.2-3}$$

作为检查,我们能够注意到,当假定 ξ 和 η 是节点 i 的坐标时,每个 N_i 都等于单位 1。而当 ξ 和 η 假定是任何其它节点的坐标时,每个 N_i 都等于零。

对于一个给定的物理单元,形状函数和节点编号决定了 $\xi\eta$ 轴相对于 x 和 y 的方位。如果变更图 6.2-1 中的节点编号,从左下角的节点开始,逆时针的排序变为 4-1-2-3,轴 ξ 将出

现在 η 轴的位置，而轴 η 将指向现在的 $-\xi$ 方向，图 6.2－1(b)将保持不变。

变换　应变-位移矩阵[**B**]不可能像前述方程那样容易写出来，因为它包含有梯度，而诸如$\partial/\partial x$ 的算子，不仅仅是$\partial/\partial\xi$ 的常数倍。下文中，我们考虑一个函数 $\phi=\phi(\xi,\eta)$，并考察它关于 x 和 y 的导数。这里 ϕ 可能代表 u 或 v。除方程 6.2－6 之外，下面的变换公式将被用于有很多节点的平面单元。

相对于 x 和 y 的导数不能直接得到。因而，我们要从求对 ξ 和 η 的导数入手。

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial\xi}&=\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\xi}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\xi}\\ \frac{\partial\phi}{\partial\eta}&=\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\eta}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\eta}\end{aligned}\quad\text{或}\quad\begin{Bmatrix}\phi_{,\xi}\\ \phi_{,\eta}\end{Bmatrix}=[\boldsymbol{J}]\begin{Bmatrix}\phi_{,x}\\ \phi_{,y}\end{Bmatrix}\tag{6.2-4}$$

其中，[**J**]称为雅可比矩阵，

$$[\boldsymbol{J}]=\begin{bmatrix}x_{,\xi}&y_{,\xi}\\ x_{,\eta}&y_{,\eta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum N_{i,\xi}x_i&\sum N_{i,\xi}y_i\\ \sum N_{i,\eta}x_i&\sum N_{i,\eta}y_i\end{bmatrix}\tag{6.2-5}$$

根据方程 6.2－1 和 6.2－2，对于 4 节点平面单元的特殊情况有

$$[\boldsymbol{J}]=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-(1-\eta)&(1-\eta)&(1+\eta)&-(1+\eta)\\ -(1-\xi)&-(1+\xi)&(1+\xi)&(1-\xi)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1&y_1\\ x_2&y_2\\ x_3&y_3\\ x_4&y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}J_{11}&J_{12}\\ J_{21}&J_{22}\end{bmatrix}\tag{6.2-6}$$

从方程 6.2－4 中期望得到对于 x 和 y 的导数为

$$\begin{Bmatrix}\phi_{,x}\\ \phi_{,y}\end{Bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}\Gamma_{11}&\Gamma_{12}\\ \Gamma_{21}&\Gamma_{22}\end{bmatrix}}_{[\Gamma]}\begin{Bmatrix}\phi_{,\xi}\\ \phi_{,\eta}\end{Bmatrix}\quad\text{这里}\quad[\boldsymbol{\Gamma}]=[\boldsymbol{J}]^{-1}=\frac{1}{J}\begin{bmatrix}J_{22}&-J_{12}\\ -J_{21}&J_{11}\end{bmatrix}\tag{6.2-7}$$

而 J 是雅可比矩阵的行列式

$$J=\det[\boldsymbol{J}]=J_{11}J_{22}-J_{21}J_{12}\tag{6.2-8}$$

J 经常被简称为雅可比，可认为它是一个比例因子，$\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$ 乘以它就得到物理面积增量 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，(作为 J 的一个平常例子，使我们想起笛卡儿坐标和极坐标之间的关系，$\mathrm{d}x\mathrm{d}y=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$，这里 $J=r$)，一般来说，J 是 ξ 和 η 的函数，但对于矩形和平行四边形，J 是常量 $J=A/4$，A 是物理单元的面积。

[B]矩阵和刚度矩阵　在单元应变-位移关系式$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}=[\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{d}\}$中，[**B**]矩阵等于下面三个方程中三个矩形矩阵的乘积。方程 6.2－9 说明了平面应变-位移关系(方程组 3.1－7)。方程 6.2－10 由方程 6.2－7 扩展而来，方程 6.2－11 由 6.2－1 的第二式求微分得到，最终结果是类似于在式 3.6－6 中看到的[**B**]矩阵。

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&1&0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_{,x}\\ u_{,y}\\ v_{,x}\\ v_{,y}\end{Bmatrix} \tag{6.2-9}$$

$$\begin{Bmatrix}u_{,x}\\ u_{,y}\\ v_{,x}\\ v_{,y}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\Gamma_{11}&\Gamma_{12}&0&0\\ \Gamma_{21}&\Gamma_{22}&0&0\\ 0&0&\Gamma_{11}&\Gamma_{12}\\ 0&0&\Gamma_{21}&\Gamma_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_{,\xi}\\ u_{,\eta}\\ v_{,\xi}\\ v_{,\eta}\end{Bmatrix} \tag{6.2-10}$$

$$\begin{Bmatrix}u_{,\xi}\\ u_{,\eta}\\ v_{,\xi}\\ v_{,\eta}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}N_{1,\xi}&0&N_{2,\xi}&0&N_{3,\xi}&0&N_{4,\xi}&0\\ N_{1,\eta}&0&N_{2,\eta}&0&N_{3,\eta}&0&N_{4,\eta}&0\\ 0&N_{1,\xi}&0&N_{2,\xi}&0&N_{3,\xi}&0&N_{4,\xi}\\ 0&N_{1,\eta}&0&N_{2,\eta}&0&N_{3,\eta}&0&N_{4,\eta}\end{bmatrix}\underset{8\times1}{\{\boldsymbol{d}\}} \tag{6.2-11}$$

其中，$N_{1,\xi}=-(1-\eta)/4$，等等。对于厚度为 t 的单元的刚度矩阵由方程 3.3-7 和 4.8-15(a)得到

$$\underset{8\times8}{[\boldsymbol{k}]} = \iint \underset{8\times3}{[\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}}\ \underset{3\times3}{[\boldsymbol{E}]}\ \underset{3\times8}{[\boldsymbol{B}]}t\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \underset{8\times3}{[\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}}\ \underset{3\times3}{[\boldsymbol{E}]}\ \underset{3\times8}{[\boldsymbol{B}]}tJ\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{6.2-12}$$

如果单元厚度 t 为变量，在各节点处定义为 t_i，则单元内任意位置的厚度可由形状函数的插值得到：$t=\sum N_i t_i$。

备注 从图 6.2-1(a)左下角的节点开始，节点可如下编号，1-2-3-4，2-3-4-1，3-4-1-2 和 4-1-2-3。然而在使用公式 6.2-3 中的 N_i 时，如果要使 J 在单元的部分或全部域内不变成负值，必须维持其循环次序且必须按逆时针进行。服从这些约束条件，改变单元内的节点编号仅影响到 k_{ij} 在[$\boldsymbol{k}$]中的位置。节点编号的改变，不会影响 k_{ij} 的数值或被指定在总刚度矩阵[$\boldsymbol{K}$]中的位置(只要总体节点编号不变)。

方程 6.2-12 的第一个积分表明[$\boldsymbol{B}$]是 x 和 y 的函数，在第二个积分中[$\boldsymbol{B}$]和 J 通常是 ξ 和 η 两者的函数，方程 6.2-7 和 6.2-10 表明 B_{ij} 在它们的分子和分母中包含 ξ 和 η 的函数。由于这个原因，如 6.3 节中描述的那样，用数值方法计算积分比解析方法方便得多。

标量场单元 令 ϕ 为一个场量，诸如传热问题中的温度。在节点 i，现在只有单个自由度 ϕ_i。标量单元能够用给 u 一个新名称 ϕ，放弃 v 并压缩数组后从结构单元提取。因此，由方程 6.2-7 和方程 6.2-11 的压缩形式得到

$$\begin{Bmatrix}\phi_{,x}\\ \phi_{,y}\end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}\Gamma_{11}&\Gamma_{12}\\ \Gamma_{21}&\Gamma_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N_{1,\xi}&N_{2,\xi}&N_{3,\xi}&N_{4,\xi}\\ N_{1,\eta}&N_{2,\eta}&N_{3,\eta}&N_{4,\eta}\end{bmatrix}}_{[\boldsymbol{B}]}\begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\\ \phi_4\end{Bmatrix} \tag{6.2-13}$$

单元的特征矩阵，对于热传导问题就是传导矩阵，由式 3.4-7 给出。对于当前的 4 节点平面单元

$$\underset{4\times4}{[\boldsymbol{k}]}=\int \underset{4\times2}{[\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}}\ \underset{2\times2}{[\boldsymbol{k}]}\ \underset{2\times4}{[\boldsymbol{B}]}t\mathrm{d}A=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \underset{4\times2}{[\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}}\ \underset{2\times2}{[\boldsymbol{k}]}\ \underset{2\times4}{[\boldsymbol{B}]}tJ\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{6.2-14}$$

其中[k]包含材料的传导率。

6.3　求积分:用数值积分计算[k]

求积分(Quadrature)指的是数值积分。有许多求积分法则。每个法则的运算都是计算特定点的函数(或抽取样本函数),用相应的权重因子乘所得到的数,并相加结果。当用于刚度矩阵积分时,[k]中每个不同刚度系数 k_{ij} 作为一个函数计算,必须在单元长度,面积或体积上进行积分。在下面的讨论中,我们把这个函数称为 ϕ,对于一维问题 $\phi=\phi(\xi)$,对于平面问题 $\phi=\phi(\xi,\eta)$,对于三维问题 $\phi=\phi(\xi,\eta,\zeta)$。在这一章中,我们把求积分运用到四边形和六面体。三角形和四面体将在第 7 章中考虑。

这里我们只讨论高斯积分法,因为它是生成单元矩阵时最常用的积分方法。当被积函数是普通多项式时,这种方法定位采样点并赋以权重,以便使积分误差最小。因此,对于给定的精度标准,高斯积分法要比其它积分法用到的取样点少。

一维问题　上下限为 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 的积分,通过如 $x=(1-\xi)x_1/2+(1+\xi)x_2/2$ 的代换,可转化为积分上下限为 $\xi=1$ 和 $\xi=-1$ 的积分,这对于 2 节点单元来说是合适的,这样

$$I=\int_{x_1}^{x_2} f\mathrm{d}x \quad \text{变成} \quad I=\int_{-1}^{1}\phi\mathrm{d}\xi \tag{6.3-1}$$

被积函数的形式由 $f=f(x)$ 变为 $\phi=\phi(\xi)$,其中 ϕ 包含了变换雅可比,$J=\mathrm{d}x/\mathrm{d}\xi$,对于 2 节点单元,它变为 $J=(x_2-x_1)/2$。方程 6.3-1 后面的形式使写出方便的积分公式成为可能。等参数列式体现了积分限的变化。

对一个最简单的数值积分,我们在区间的中点对 ϕ 取样(或取值),然后乘以区间的长度(图 6.3-1(b)),这样我们用一个长度为 2 高度为 ϕ_1 的矩形来近似曲线下的面积,因此 $I\approx 2\phi_1$。当正好用 $\phi=\phi(\xi)$ 来描述一条有限斜度的直线时,这个结果是精确的。这个过程的普遍化提供了求积分公式

$$I=\int_{-1}^{1}\phi\mathrm{d}\xi\approx W_1\phi_1+W_2\phi_2+\cdots+W_n\phi_n \tag{6.3-2}$$

图 6.3-1 给出了用 $n=1$,$n=2$ 和 $n=3$ 的例子。表 6.3-1 列出了直到三阶的高斯积分数据,其中的"精确等级"是指在 ξ 中对于给定的 n 用式 6.3-2 精确积分含 ξ 的最高次多项式的阶次。用途更广泛的表格可以在文献[6.2]中找到,但高阶的高斯积分法并不常用于有限单元中。应注意到样本点("高斯点")相对于区间中心对称设置,并且这些对称分布的成对样本点具有相同的权重 W。这些数据有时也称为高斯-勒让德(Gauss-Legendre)系数,因为样本点的位置是勒让德多项式的根。

例　考虑一个三次多项式 $\phi=a_0+a_1\xi+a_2\xi^2+a_3\xi^3$,其中 a_i 是常数,从 $\xi=-1$ 到 $\xi=1$ 的精确积分是

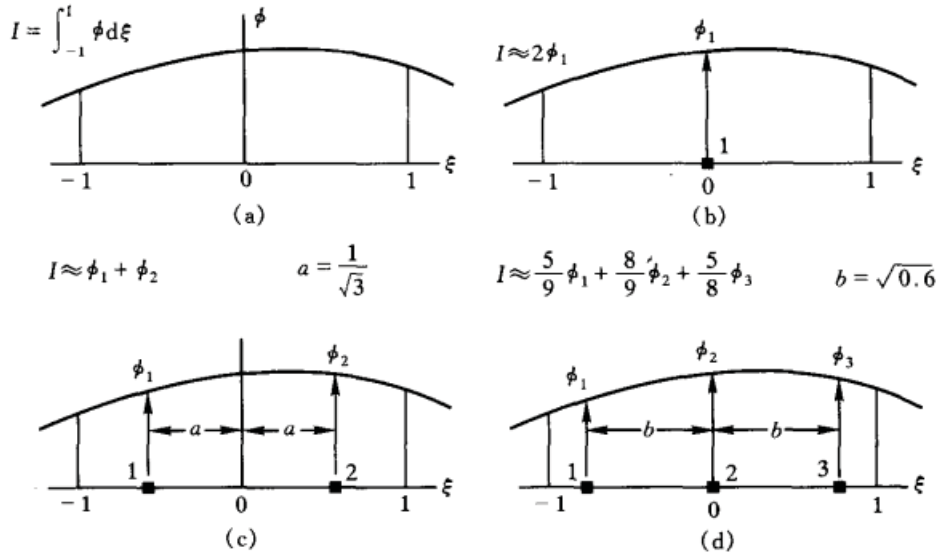


图 6.3-1 在一维中用一、二、三阶高斯积分法对函数 $\phi=\phi(\xi)$ 积分。高斯点被编了号

$$I=\int_{-1}^{1}\phi d\xi=2a_0+\frac{2}{3}a_2 \tag{6.3-3}$$

一点积分法提供了近似值 $I_1\approx 2a_0$，由二点积分法，对于 $\xi_1=-p,\xi_2=p$，其中 $p=1/\sqrt{3}$，我们得到

$$I_2=1.0(a_0-a_1p+a_2p^2-a_3p^3)+1.0(a_0+a_1p+a_2p^2+a_3p^3)=2a_0+\frac{2}{3}a_2 \tag{6.3-4}$$

表 6.3-1 在区间 $\xi=-1$ 到 $\xi=1$ 的高斯积分法样本点位置和权重

阶数 n	精确等级	样本点的位置 ξ_i	权重因子 W_i
1	1	0.	2.
2	3	$\pm 0.57735\ 02691\ 89626=\pm 1/\sqrt{3}$	1.
3	5	$\pm 0.77459\ 66692\ 41483=\pm\sqrt{0.6}$	$0.55555\ 55555\ 55555=5/9$
		0	$0.88888\ 88888\ 88888=8/9$

在这个例子中我们看到通用法则的一个实例：$2n-1$ 次的多项式用 n 点高斯法进行精确积分。比 n 更多点数的积分仍然能得到精确解。

二维和三维情况 多维高斯积分法，也叫做高斯乘积法则，它可由连续运用一维高斯积分法来得到。在二维情况，考虑 $\phi=\phi(\xi,\eta)$ 函数，我们选择先对 ξ 积分，再对 η 积分。这样

$$\begin{aligned}I&=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\phi(\xi,\eta)d\xi d\eta\approx\int_{-1}^{1}\Big[\sum_i W_i\phi(\xi_i,\eta)\Big]d\eta\\&\approx\sum_j W_j\Big[\sum_i W_i\phi(\xi_i,\eta_j)\Big]\approx\sum_i\sum_j W_iW_j\phi(\xi_i,\eta_j)\end{aligned} \tag{6.3-5}$$

图 6.3-2 给出了用方程 6.3-5 对含有 ξ 和 η 的二维多项式进行精确积分的情况。图呈现了

被积函数 ϕ 中的多项式而不是位移场中的多项式。一个完整的多项式具有 $l+m$ 次。我们看到，例如，除了 ξ^4 和 η^4，所有四次项都用 2 乘 2 的高斯法进行精确积分。

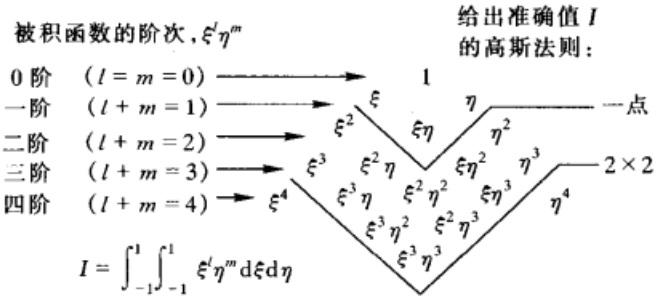


图 6.3-2　二维高斯积分法的精确度。分别用一阶和二阶高斯积分法对帕斯卡三角形到下面 V 形线的多项式项进行精确积分

对于一点积分法，$\phi=\phi_1$ 在 $\xi=\eta=0$ 求值，二维情况，$I\approx 4\phi_1$。对于图 6.3-3(a)中描述的 4 点积分法，在每个高斯点 $W_iW_j=1$，因此由式 6.3-5 得到

$$I\approx\phi_1+\phi_2+\phi_3+\phi_4 \tag{6.3-6}$$

其中 ϕ_i 是 ϕ 在第 i 个高斯点的数值。对于在图 6.3-3(b)中描述的 9 点积分法，由方程 6.3-5 得到

$$I\approx\frac{25}{81}(\phi_1+\phi_3+\phi_7+\phi_9)+\frac{40}{81}(\phi_2+\phi_4+\phi_6+\phi_8)+\frac{64}{81}\phi_5 \tag{6.3-7}$$

三维情况下高斯积分法有如下形式

$$I=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\phi(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi d\eta d\zeta\approx\sum_i\sum_j\sum_k W_iW_jW_k\phi(\xi_i,\eta_j,\zeta_k) \tag{6.3-8}$$

图 6.3-3 用二阶(4 点)和三阶(9 点)高斯积分法则对函数 $\phi=\phi\{\xi,\eta\}$ 积分时取样点的位置。

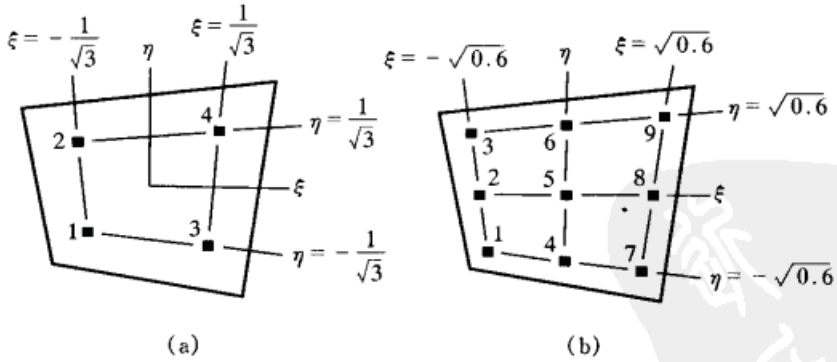


图 6.3-3　二维高斯积分法的精确度。分别用一阶和二阶高斯积分法对帕斯卡三角形到下面 V 形线的多项式项进行精确积分

如果图 6.3-2 中的 $\phi=1$，那么 $I=2$，而对于任意阶的高斯积分我们看到 $\sum W_i=2$。类似地，方程 6.3-5 中乘积 W_iW_j 是 4，方程 6.3-8 中乘积 $W_iW_jW_k$ 为 8。如果 $\phi=J$，即变换的雅可比，那么积分提供了物理单元(不是映射单元)的长度、面积或体积。

刚度矩阵积分　我们考虑运用数值积分生成平面单元的刚度矩阵[k]。表 6.3-2 总结了

数值积分过程的步骤。如果单元具有的节点多于四个,积分过程是一样的。然而,数组[$\boldsymbol{B}$]和[$\boldsymbol{k}$]变得比较大,但不管矩阵的阶次如何,每个系数 k_{ij} 都和方程 6.3-5 中的 ϕ 一样进行处理。对于任意平面单元,雅可比矩阵[$\boldsymbol{J}$]是 2×2 的矩阵。在本书的第二和第三版和文献[2.13~2.15]中可找到 Fortran 代码。

表 6.3-2 用数值积分法生成平面等参数单元刚度矩阵的计算过程

(a) 数值积分过程

清除存贮[$\boldsymbol{k}$]的数组空间;在后面称之为数组 KE

在 ξ 方向对积分点进行循环($i=1$ 到 n_i)

设定样本点的位置 $\xi=\xi_i$ 和相应的权重因子 W_i

在 η 方向对积分进行循环($j=1$ 到 n_j)

设定样本点的位置 $\eta=\eta_j$ 和相应的权重因子 W_j

调用形状函数子程序计算单元矩阵[$\boldsymbol{B}$],点(ξ_i,η_j)上的厚度 t 和雅可比 J 的所有值

计算乘积$[\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{E}][\boldsymbol{B}]tJW_iW_j$ 并把它加到数组 KE 上

结束 j 的循环

结束 i 的循环

(b) 形状函数子程序在给定点生成[$\boldsymbol{B}$],t 和 J

调用提供坐标 ξ 和 η 的程序,在该处计算[$\boldsymbol{B}$],t 和 J。在这一点:

计算形状函数 N_i 和它们相对于 ξ 和 η 的导数

计算由节点厚度 t_i 得到的总厚度 $t=\sum N_it_i$

计算雅可比矩阵[$\boldsymbol{J}$],它的行列式 J 以及它的逆阵[$\boldsymbol{\Gamma}$]

计算应变-位移矩阵[$\boldsymbol{B}$](对 4 节点平面单元,见方程 6.2-9 到 6.2-11)

备注 因为积分法则中有多个取样点,表 6.3-2(a)中总结的运算包含了许多对表 6.3-2(b)的调用程序和许多矩阵乘积$[\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{E}][\boldsymbol{B}]$。[$\boldsymbol{k}$]的对称性能够节省一些矩阵乘法运算。对 4 节点四边形来说,只有 36 个系数 k_{ij} 在 8×8 矩阵[$\boldsymbol{k}$]的上三角或下三角阵中出现。尽管有这些节省,但计算花费不可小视。同样,对所有除矩形和平行四边形之外的单元,被积项不是多项式而是有理函数(多项式的比值),它们不能用任何有限阶的求积法精确积分。随着积分点的增多,积分精度会增加。我们是采用低阶的积分法则来节省计算费用,还是采用高阶法则来提高精度?答案并不能很容易地给出。太低的阶次会使[$\boldsymbol{k}$]矩阵的秩不足,以致于使一个或多个变形模式会遇到无弹性阻力的情况。太高的阶次可能会使高阶的位移模式刚化到损失有限元分析精度的程度。*积分精度并非和单元行为准确度一样*。这些问题将在 6.8 节中讨论。

高斯积分法得到了广泛的应用,但它并不是唯一有效的积分法则。对二次实体单元,可用 14 点积分法[6.3]。它的计算代价介于 2×2×2 和 3×3×3 的高斯积分法则之间。对于三角形和棱锥体有特殊的公式[6.4]。对于塑性变形的板和壳单元的分析,样本点应该位于在弯曲中开始屈曲的每个面上。厚度方向的积分可用辛普森(Simpson)法则或者其空间取样点更接近表面的特殊法则来进行。

通常材料属性矩阵[$\boldsymbol{E}$]并不局限于各向同性。其内容可看作 ξ 和 η 的函数,以适应材料属性在单元上变化。也能够适应带主方向平行于常量 ξ 或 η 线的各向异性情况[6.5]。实体单元的材料属性可用类似的方法处理。

6.4　二次四边形单元(Q8,Q9)

8 节点单元(Q8)　通过对四边形 4 节点单元的每个边增加一个节点，我们得到 8 节点平面单元，可设想其形状如图 6.4－1 所示。单元的曲边提供了一个很好的几何形状以适应弯曲的结构边界。在 $\xi\eta$ 坐标中的映射单元保持为一个边长为 2 的正方形，其边分别在 $\xi=\pm1$ 和 $\eta=\pm1$处，中点在 ξ 和 η 轴上。初始直边位移后的形状可以是直线也可以是二次曲线。最初是曲边的不需要有二次位移曲线。在一个常应变场，它的位移可以是 x 和 y 的线性函数。

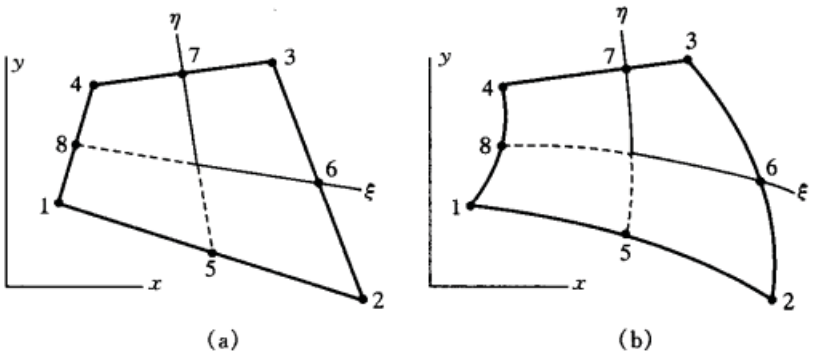


图 6.4－1　笛卡儿坐标 xy 中的 8 节点平面单元
(a)单元具有直边和边中间节点；(b)一些曲边及偏离中心的节点

这个单元的矩形形式已在 3.7 节中作了介绍。形状函数能够用 3.2 节内已运用到式 3.7－1 中的“[**A**]矩阵”法得到，其中 x 和 y 用 ξ 和 η 替换。下面的选择论证更直观也许更容易一点。在图 6.4－2(a)中，节点 5 的形状函数 N_5 是通过对 ξ 二次和对 η 的一次插值得到的，注意在节点 5 处 $N_5=1$，而在其它所有节点处 $N_5=0$。在图 6.4－2(b)中，N_8 用类似的方式得到。然后，我们观察到 $N_{(c)}$，它相当于 4 节点单元的 N_1，在节点 5 和 8 处纵坐标都为 0.5。因此形状函数 $N_{(c)}-N_5/2-N_8/2$ 在除了节点 1 处为单位值 1 外，在其它所有点处都为零。所以它就是 Q8 单元的形状函数 N_1。对剩余的节点进行类似的处理，就可得到 Q8 单元完整的形状函数集合，这就是

$$
\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)-\frac{1}{2}(N_8+N_5) & N_5 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)\\
N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)-\frac{1}{2}(N_5+N_6) & N_6 &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)\\
N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)-\frac{1}{2}(N_6+N_7) & N_7 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)\\
N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)-\frac{1}{2}(N_7+N_8) & N_8 &= \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)
\end{aligned}
\qquad (6.4-1)
$$

上述的单元被称做“奇运”单元家族的成员，用广义自由度 a_i 表示位移场为

$$
\begin{aligned}
u &= a_1+a_2\xi+a_3\eta+a_4\xi^2+a_5\xi\eta+a_6\eta^2+a_7\xi^2\eta+a_8\xi\eta^2\\
v &= a_9+a_{10}\xi+a_{11}\eta+a_{12}\xi^2+a_{13}\xi\eta+a_{14}\eta^2+a_{15}\xi^2\eta+a_{16}\xi\eta^2
\end{aligned}
\qquad (6.4-2)
$$

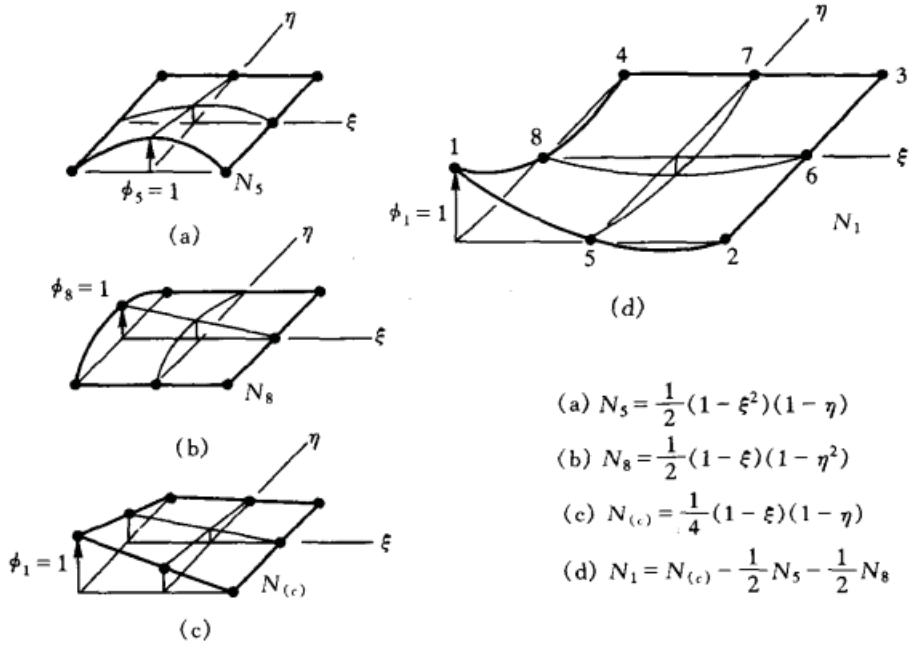


图 6.4-2 8 节点平面四边形单元选用的形状函数(仅为了形象,想象位移发生在垂直于单元所在平面的法线方向。)

这个位移场包含 ξ 和 η 中二次多项式的所有系数,三次项 $\xi^2\eta$ 和 $\xi\eta^2$ 出现其中,但三次项 ξ^3 和 η^3 缺省。

9 节点单元(Q9) 在 $\xi=\eta=0$ 处增加一个内节点(节点 9),就可使该单元成为拉格朗日单元(图 6.4-3(a))。用式 6.4-1 中的形状函数,单元几何形状完全由 8 个边界点确定。软件用户不需要对内点的坐标 x_9 和 y_9 作特别的说明。

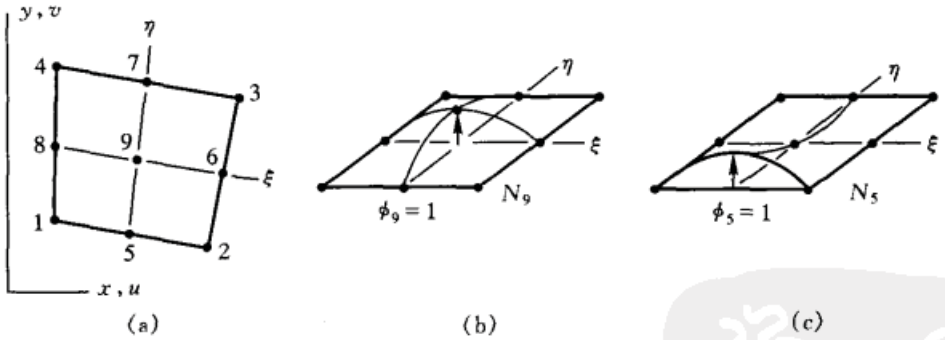


图 6.4-3 (a)笛卡儿坐标 xy 面 9 节点拉格朗日单元;(b)形状函数 N_9;(c)形状函数 N_5(仅为了形象,想象位移发生在垂直于单元所在的平面法线方向。)

以方程组 3.6-2 和 3.6-3 的格式,通过构造一维拉格朗日插值项的乘积(方程组 3.2-7)就可得到 9 节点单元的形状函数,更直观的步骤如下。与节点 9 相关的形状函数是

$$N_9 = (1-\xi^2)(1-\eta^2) \tag{6.4-3}$$

上式可称为"气泡函数",因为它就像一个平板中矩形开口上冒出一个气泡,如图 6.4-3(b)所示。气泡函数模式类似于图 6.1-1 杆单元中与节点 2 相关的模式($1-\xi^2$)。通过修改方程组 6.4-1 中的 N_i,可得到 Q9 四边形单元的前 8 个形状函数,使每个形状函数在 $\xi=\eta=0$ 处都等

于零。例如，因为方程组 6.4－1 中的 N_5 到 N_8 在 $\xi=\eta=0$ 处都等于 1/2，为了得到 Q9 单元中的 N_5 到 N_8，仅需从每一个中减去 $N_9/2$ 即可。类似地，方程组 6.4－1 中的 N_1 到 N_4 在 $\xi=\eta=0$ 处等于 $-1/4$，所以我们必须加上 $N_9/4$。Q9 单元完整的形状函数集合列于表 6.4－1 中。在这些形状函数中，记住 N_1 到 N_8 包含 N_9。因此，例如在写出时，N_1 的形式就是

$$N_1=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)-\frac{1}{2}N_9\right]$$
$$-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)-\frac{1}{2}N_9\right]-\frac{1}{4}N_9 \qquad (6.4-4)$$

表 6.4－1　具有 4 到 9 节点的平面四边形单元的形状函数，节点 9 如果存在，则位于 $\xi=\eta=0$ 处

	只包括在单元中出现的节点				
	$i=5$	$i=6$	$i=7$	$i=8$	$i=9$
$N_1=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$	$-\frac{1}{2}N_5$			$-\frac{1}{2}N_8$	$-\frac{1}{4}N_9$
$N_2=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$	$-\frac{1}{2}N_5$	$-\frac{1}{2}N_6$			$-\frac{1}{4}N_9$
$N_3=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$		$-\frac{1}{2}N_6$	$-\frac{1}{2}N_7$		$-\frac{1}{4}N_9$
$N_4=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$			$-\frac{1}{2}N_7$	$-\frac{1}{2}N_8$	$-\frac{1}{4}N_9$
$N_5=\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$					$-\frac{1}{2}N_9$
$N_6=\frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$					$-\frac{1}{2}N_9$
$N_7=\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$					$-\frac{1}{2}N_9$
$N_8=\frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$					$-\frac{1}{2}N_9$
$N_9=(1-\xi^2)(1-\eta^2)$					

对表 6.4－1 的解释如下。单元可能含有 4 到 9 个节点。当包含所有 9 个节点时，表 6.4－1 中的 9 个 N_i 全都要算进去。去掉节点 9 及其形状函数 N_9 就得到方程组 6.4－1 的 Q8 单元，去掉节点 5 到 9 其形状函数就得到 6.2 节的 4 节点 Q4 单元。含有 5，6 或 7 个节点的单元可作为连接 Q4 到 Q8 或 Q9 单元之间的过渡单元，这些单元仅需包含一个、两个或三个边节点及其形状函数就可得到。（商用软件希望用下述方法建立这样的过渡单元，即从 Q8 单元开始，然后运用约束使一个或多个边保持为直线，很可能不包括 Q9 单元。）

备注　除了一些较大尺寸的矩阵外，方程 6.2－12（或者用于标量单元的方程 6.2－14）也应用于 Q8 和 Q9 单元。对于 Q8 单元，$[\boldsymbol{k}]$ 是 16×16 矩阵，$[\boldsymbol{B}]$ 是 3×16 矩阵，$[\boldsymbol{E}]$ 仍保持 3×3，为了得到 $[\boldsymbol{J}]$ 可连续使用方程 6.2－5，但下标 i 运行要从 1 到 16（对于 Q9 单元也是如此，在定义单元形状时并没用到 $\xi=\eta=0$ 处的那个节点）。对于 Q8 单元，方程 6.2－11 有 16 列，因为 $\{\boldsymbol{d}\}$ 的大小是 16×1。表 6.3－2 仍可应用。

只要是矩形，Q8 单元就能精确地表示其纯弯曲状态。只要假设单元的边是直的，且边上的节点如图 6.4－1(a)所示位于边中点，则 Q9 单元即使不是矩形单元，也可真实表现纯弯曲状态[6.6]。一般来说，计算结果的精度随着单元偏离矩形和约定形状而降低。对于非矩形程度、边的曲率以及边节点偏离边中点位置的敏感性，Q9 单元要比 Q8 单元低得多。这些优点可能要归功于四次项 $\xi^2\eta^2$，它出现在 Q9 单元的位移场但却不在方程组 6.4－2 中，Q8 和 Q9 单元都没有三次项 ξ^3 和 η^3。

Q8 和 Q9 单元被称为二次单元，是因为它们的形状函数中具有完整的二次项，而没有高阶项。运用一个 Q8 或 Q9(二次)单元是否就比使用四个 4 节点(线性)单元好呢？让我们假定 4 节点单元是不会容许寄生剪力的“修改的 Q6 形式”(QM6)(见 6.6 节)。那么，并不能说明哪一种方法就一定更好。柯尼尔(MacNeal)[3.3]考虑了计算费用和计算结果的精度，并注意到那些情况，实际上，从使用角度看，线性和二次单元似乎都差不多。

6.5 六面体等参数单元

实体等参单元的列式过程直接从平面单元延伸过来。图 6.5－1(a)所示的 8 节点实体单元类似于 6.2 节中的平面 Q4 单元，它也具有剪切锁定的缺陷。在 3.8 节中讨论的单元仅限于矩形形状。本节中避免了形状的限制。如果单元增加了棱边中心节点，如图 6.5－1(b)所示，我们得到类似于 6.4 节中 Q8 节点平面单元的 20 节点实体单元。不论节点的个数以及可能的棱边和表面的曲率如何，六面体的表面都位于 $\xi=\pm1$，$\eta=\pm1$ 和 $\zeta=\pm1$ 处。

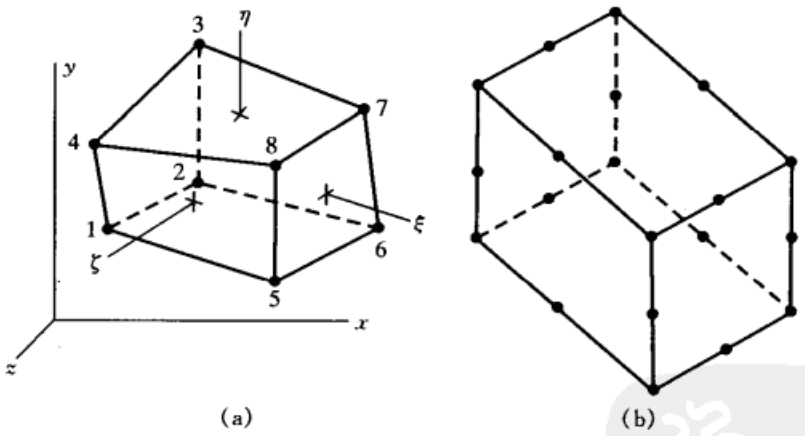


图 6.5－1 (a) 8 节点六面体单元，也称为线性六面体和三线性实体单元；(b)矩形 20 节点六面体单元

对于任何个数节点的实体等参数单元，几何坐标和位移都由如下公式给出：

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_i N_i \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ x_i \end{Bmatrix} \quad 和 \quad \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_i N_i \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \tag{6.5-1}$$

类似于式 6.2－5，雅可比矩阵为

$$[\boldsymbol{J}]=\begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} & z_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} & z_{,\eta} \\ x_{,\zeta} & y_{,\zeta} & z_{,\zeta} \end{bmatrix}=\sum_i \begin{bmatrix} N_{i,\xi}x_i & N_{i,\xi}y_i & N_{i,\xi}z_i \\ N_{i,\eta}x_i & N_{i,\eta}y_i & N_{i,\eta}z_i \\ N_{i,\zeta}x_i & N_{i,\zeta}y_i & N_{i,\zeta}z_i \end{bmatrix} \tag{6.5-2}$$

其中下标中 i 的范围覆盖单元节点的所有编号。类似于方程 6.2－9，应变-位移关系式 3.1－7 和 3.1－8 可写成下列形式

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ u_{,z} \\ v_{,x} \\ \vdots \\ w_{,z} \end{Bmatrix} \tag{6.5-3}$$

对于图 6.5－1(a)中的 8 节点实体单元，式 6.5－1 和 6.5－2 中 i 的取值范围从 1 到 8。以广义自由度 a_i 表示的位移 u 形式如下：

$$u=a_1+a_2\xi+a_3\eta+a_4\zeta+a_5\xi\eta+a_6\eta\zeta+a_7\zeta\xi+a_8\xi\eta\zeta \tag{6.5-4}$$

相同的形式应用于 v 和 w。方程 6.5－4 包含了所有的线性项以及 6 个二次项中的三个(ξ^2，η^2 和 ζ^2 三项不存在)，以及 10 个三次项中仅有的一项 $\xi\eta\zeta$。由方程 3.8－3 得到 8 节点六面体单元的形状函数是

$$\begin{aligned} N_1&=\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \\ N_2&=\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \\ N_3&=\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \end{aligned} \tag{6.5-5}$$

等等。方程 6.2－10 扩展后得到 9×9 方阵，方程 6.2－11 扩展后得到矩形阵大小是 9×24。8 节点单元的刚度矩阵由下式给出：

$$\underset{24\times24}{[\boldsymbol{k}]}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\underset{24\times6}{[\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}}\underset{6\times6}{[\boldsymbol{E}]}\underset{6\times24}{[\boldsymbol{B}]}J\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta \tag{6.5-6}$$

其中 J 是式 6.5－2 中$[\boldsymbol{J}]$的行列式。

对于图 6.5－1(b)中的 20 节点实体单元，在方程组 6.5－1 和 6.5－2 中 i 的范围从 1 到 20。位移 u，v 和 w 的每一个在它们的位移表达式中都含有下面 20 种模式的项：1 个常数项，所有 3 个线性项(ξ，η，ζ)，所有 6 个二次项(ξ^2，η^2，ζ^2，$\xi\eta$，$\eta\zeta$，$\zeta\xi$)，10 个三次项中的 7 个($\xi^2\eta$，$\xi\eta^2$，$\eta^2\zeta$，$\eta\zeta^2$，$\zeta^2\xi$，$\zeta\xi^2$，$\xi\eta\zeta$)，3 个四次项($\xi^2\eta\zeta$，$\xi\eta^2\zeta$，$\xi\eta\zeta^2$)。形状函数出现在诸如文献[2.14，3.3，4.4]书目中。刚度矩阵的积分如方程 6.5－6 叙述的那样，但把“24”变为“60”。

20 节点实体单元是一个奇运单元。如果在每个面的中心增加一个节点，并在 $\xi=\eta=\zeta=0$ 处增加一个内节点，我们得到 27 节点拉格朗日单元，它的刚度矩阵大小是 81×81。

6.6 非协调模式·非节点自由度

4 节点平面单元和 8 节点实体单元都呈现出剪切锁定现象。也就是，由于寄生剪切应变，当被要求展示在结构力学中如此重要的梁弯曲模型时，他们显得过分刚化了。对这个问题补救的办法就是在单元位移场中添加弯曲模式。这样我们就得到了 Q6 单元，它的矩形形状在 3.10 节已经讨论过。不幸的是，当直接扩展到非矩形形状时，这种单元有一个缺陷使它不适于一般用途。这一节中我们描述这个缺陷，并说明如何克服它。

图 3.10－3 显示了一个添加到 4 节点平面单元的非协调模式。类似的模式可以添加到 8 节点实体单元。于是这些单元的位移场变为

8 节点实体单元 →

4 节点平面单元 →

$$
\begin{aligned}
u &= \sum_i N_i u_i + (1-\xi^2)a_1 + (1-\eta^2)a_2 \qquad + (1-\zeta^2)a_7 \\
v &= \sum_i N_i v_i + (1-\xi^2)a_3 + (1-\eta^2)a_4 \qquad + (1-\zeta^2)a_8 \\
w &= \sum_i N_i w_i + (1-\xi^2)a_5 + (1-\eta^2)a_6 \qquad + (1-\zeta^2)a_9
\end{aligned}
\tag{6.6-1}
$$

对平面单元来说，下标 i 从 1 到 4，形状函数 N_i 由式 6.2－3 给出。对于实体单元，下标 i 从 1 到 8，形状函数 N_i 由式 6.5－5 给出。a_i 是广义自由度。它们也可以叫做非节点自由度。和 a_i 相关联的位移模式通常称为“非协调”或“非一致”的，因为，在非节点位置，它们允许相邻单元间重叠或裂缝。单元刚度矩阵由通常方式的数值积分生成，$[\boldsymbol{B}]$矩阵扩展成

$$
[\boldsymbol{B}] = [\boldsymbol{B}_d \quad \boldsymbol{B}_a] \tag{6.6-2}
$$

式中，$[\boldsymbol{B}_d]$依据节点自由度运算，$[\boldsymbol{B}_a]$依据非节点自由度运算。于是$[\boldsymbol{B}_d]$与没有非节点自由度的单元的完全矩阵$[\boldsymbol{B}]$相同。雅可比的计算仅依赖于节点坐标，且没有改变(如方程 6.2－4 到 6.2－8)。对于 4 节点单元，在生成$[\boldsymbol{B}_d \quad \boldsymbol{B}_a]$时，方程 6.2－9 和 6.2－10 并未改变。在方程 6.2－11 中，给矩形矩阵增添了四列；这些列乘以 a_i 并包含 0，-2ξ 和 -2η。例如，$u_{,\xi}$表达式现在包含项 $-2\xi a_1$，等等。

然而，以这种方法描述 Q6 单元不能表示常应力(或常应变)状态，除非它们是矩形单元。特别是让非矩形单元的网格以这种方式受载时，常应力状态将是主要的。如果在单元列式中，非协调模式不存在，与设 a_i 等于零时一样，单元正确响应并表现为常量状态。如果非协调模式存在，则单元不能正确响应。非节点自由度 a_i 本应该为零，但它们都并非如此。

对这个缺陷的补救办法如下[6.7]。令常应力矢量$\{\boldsymbol{\sigma}_0\}$表示任一均匀应力状态，并考虑方程 3.3－8 中的载荷矢量$\{\boldsymbol{r}_e\}$。我们希望当一典型单元显示任一常应力状态$\{\boldsymbol{\sigma}_0\}$时，$a_i$ 保持为零。这就要求与 a_i 相关的载荷项为零；即，我们要求

$$\int [\boldsymbol{B}_a]^{\mathrm{T}} \{\boldsymbol{\sigma}_0\} \mathrm{d}V = \{\boldsymbol{0}\} \quad \text{因此} \quad \int [\boldsymbol{B}_a]^{\mathrm{T}} \mathrm{d}V = [\boldsymbol{0}] \tag{6.6-3}$$

或者，对于平面和实体等参单元分别为：

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [\boldsymbol{B}_a]^{\mathrm{T}} tJ \,\mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta = [\boldsymbol{0}] \qquad \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [\boldsymbol{B}_a]^{\mathrm{T}} J \,\mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\zeta = [\boldsymbol{0}] \tag{6.6-4}$$

对于均匀厚度的平行四边形或平行六面体，厚度 t 和雅可比 J 为常数，$[\boldsymbol{B}_a]$包含 ξ, η（对于实体单元还有 ζ）的一次幂，所以方程 6.6－4 自动得到满足。对于形状更一般的单元，被积函数的表达式更复杂。但即使对于形状一般的单元，我们也能够设法以下列方式修改$[\boldsymbol{B}_a]$（而不是$[\boldsymbol{B}_d]$）的计算，使方程 6.6－4 得到满足。在所有积分点，使用单元中心（$\xi=\eta=\zeta=0$）的雅可比矩阵$[\boldsymbol{J}]$以及它的行列式 J 的值（平面单元的厚度为 t）。这样方程 6.6－4 仍然包含等参数坐标的一次幂，因此积分得零。这样修改后，平面 Q6 单元经常被称为 QM6 单元。对于 QM6 单元的另一种解释见文献[6.8]。如果 Q6 或 QM6 单元是矩形，那么它具有和 4.10 节讨论的 5－β 混合单元相同的单元刚度矩阵。

备注　自由度 a_i 能够置入到排列结构自由度的数组$\{\boldsymbol{D}\}$中，但通常在单元组集之前 a_i 被“凝聚”。这个问题在 6.7 节讨论，方程 6.6－1 的 a_i 将构成数组$\{\boldsymbol{d}_e\}$的内容。

任意形状 QM6 单元通过了分片试验（6.13 节有所描述），这样运用细化网格可保证收敛于精确结果。简短地说，分片试验要求，当网格边界上的节点条件被合理指定，也许用施加与均匀 ϵ_x 相协调的节点位移，所有单元可显示所期望的常应力或常应变状态。如果不是设定分布载荷和使用方程 3.3－8 来计算节点载荷，则要通过分片试验，在单元列式和下面的应力计算中，与不协调自由度相关的载荷项必须忽略掉。这样，对于载荷项，就好像 Q4 单元那样来处理 QM6 单元。

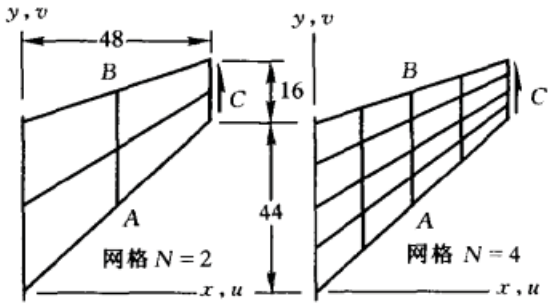
把 Q6 单元转化为 QM6 单元的补偿办法是一种“选择性积分”，它的意思是，运用不同的积分法则来处理刚度矩阵被积函数的不同部分。选择性积分经常被用于板单元、壳单元以及几乎不可压缩材料的单元。

不协调单元的网格可能不是刚性太强就是柔性太大。也就是说，我们不能够保证计算位移具有下限值，虽然我们能够对常应变三角形作到这一点。对于工程师来讲，位移界限的缺省通常不如计算结果的精度重要。不协调单元通常比它们仅有节点自由度的母单元更准确。

运用所有单元自由度包括 a_i 来计算不协调单元的应力。此外，因 a_i 没有被加载，所以它们假定数值由节点自由度和$[\boldsymbol{k}]$中的系数来决定。图 6.6－1 比较了由 Q4 单元和 QM6 单元计算的应力和位移结果。这和图 3.10－2 中所使用的是同一个问题。

6.7　静态凝聚

当单元组集形成总体方程$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\}$时，所有单元自由度置入矢量$\{\boldsymbol{D}\}$中，它们相应的载荷项置入$\{\boldsymbol{R}\}$。这些自由度包括图 6.7－1 所示的内部自由度以及非节点自由度。实际上，这些自由度在单元组集前已经被“凝聚”。在本文中，凝聚具有改变次序的效果，而在求解总体方程时，是按这个次序对自由度进行处理的。仅有乘以单元边界自由度的系数被组集到总体



网格		$N=2$	$N=4$
QM6	v_C	0.884	0.967
	σ_A	0.840	0.978
	σ_B	0.788	0.926
Q4	v_C	0.498	0.769
	σ_A	0.558	0.830
	σ_B	0.457	0.753

图 6.6-1 沿右边有均布载荷的后掠翼，泊松比 $\nu=0.333$。数值结果[6.7]是右边 y 方向挠度，A 点的最大正应力，B 点的最小正应力(精确解=1.000)

矩阵[$\boldsymbol{K}$]中，这样将需要较少的存储空间。静态凝聚操作引入有限元分析中不附加近似。它叫做"静态"凝聚是为了区别类似的动态处理，在那里[$\boldsymbol{K}$]和质量矩阵[$\boldsymbol{M}$]的大小都被缩减。然而，在动力学中，凝聚引入了附加近似，它出现在质量矩阵[$\boldsymbol{M}$]中。静态凝聚可被看成是子结构法的特殊情况(10.11 节)。

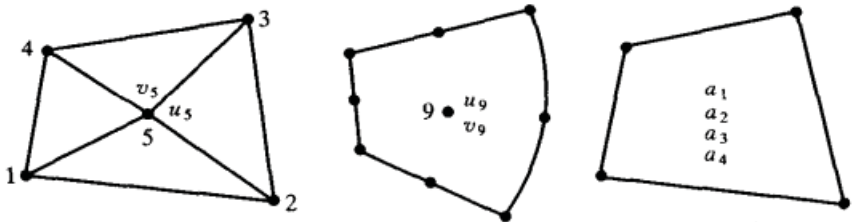


图 6.7-1 具有内点自由度和非节点自由度的单元示例。识别的自由度通常用静态凝聚来处理

在静态凝聚的另外一个应用中，设想方程 2.3-8 中三维梁单元节点 2 的最后三个自由度(旋转自由度)被凝聚。那么，当这个单元被组集进整体结构中时，仅有节点 2 的平移自由度被连接在结构的节点上。在节点 2 处，单元可绕结构节点旋转，生成一个球窝接头。

静态凝聚正式表述如下。设方程[k]{d}={r}代表整个结构的一部分。这一部分可以是一个大单元，它由子单元(图 6.7-1(a))或包含内点或非节点自由度(图 6.7-1(b),(c))的单个单元组成。令自由度{d}被分割成{d}=$\lfloor \boldsymbol{d}_r \quad \boldsymbol{d}_c \rfloor^{\mathrm{T}}$，其中{$d_r$}是被保留的边界自由度，{$d_c$}是被凝聚的内点或非节点自由度。通常为零的载荷{$r$}以相似的方式被分块。这样方程[$k$]{$d$}={$r$}变为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_{rr} & \boldsymbol{k}_{rc} \\ \boldsymbol{k}_{cr} & \boldsymbol{k}_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{d}_r \\ \boldsymbol{d}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{r}_r \\ \boldsymbol{r}_c \end{Bmatrix} \tag{6.7-1}$$

下面的分块被用来求解{d_c}，然后代入上面的分块，这样，

$$\{\boldsymbol{d}_c\} = -[\boldsymbol{k}_{cc}]^{-1}([\boldsymbol{k}_{cr}]\{\boldsymbol{d}_r\} - \{\boldsymbol{r}_c\}) \tag{6.7-2}$$

$$\underbrace{([\boldsymbol{k}_{rr}] - [\boldsymbol{k}_{rc}][\boldsymbol{k}_{cc}]^{-1}[\boldsymbol{k}_{cr}])}_{\text{凝聚为}[k]}\{\boldsymbol{d}_r\} = \underbrace{\{\boldsymbol{r}_r\} - [\boldsymbol{k}_{rc}][\boldsymbol{k}_{cc}]^{-1}\{\boldsymbol{r}_c\}}_{\text{凝聚为}\{r\}} \tag{6.7-3}$$

下一步就是标准的组集和求解过程。把凝聚的数组[k]和{r}组集起来就得到总体方程

$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\}$，其中$\{\boldsymbol{D}\}$包含所有单元的自由度$\{\boldsymbol{d}_r\}$。解总体方程得到$\{\boldsymbol{D}\}$，自由度$\{\boldsymbol{d}_r\}$已知，而自由度$\{\boldsymbol{d}_c\}$可以通过解方程 6.7－2 重新获得。随后的应力计算将用到$\{\boldsymbol{d}_c\}$和$\{\boldsymbol{d}_r\}$。

方程 6.7－2 和 6.7－3 中用到的分块只是为概念上的方便而不是计算的必须。被凝聚的自由度可以出现在单元自由度数组的任意地方，且可以任意次序来处理。当这些自由度出现在数组的最后，就像方程 6.7－1 表示的那样，凝聚可以通过高斯消去法来完成，从最后一个自由度开始，依次向上，当所有自由度$\{\boldsymbol{d}_c\}$被消去后停止。剩下的部分是被凝聚的$[\boldsymbol{k}]$，位于单元刚度数组左上部分，被凝聚的$[\boldsymbol{r}]$在单元载荷数组的上方。关于静态凝聚更详细的论述见于文献[2.20,6.9,6.10]。

6.8 数值积分的选择

除了诸如矩形和平行四边形单元等具有特殊几何形状的单元外，对于均匀间隔的边节点（如果存在），单元刚度系数的数值积分不能提供精确解。积分的精度可以通过增加积分点的个数来提高。更多的积分点能提高有限元计算结果精度吗？并不是必然。如果积分的阶数降低了，有限元结果可能会变得更准确。但是运用低阶的积分法则将允许单元具有一个或更多的寄生模式，其后果可能严重，也可能不严重，依赖于物理问题和寄生模式的性质。在单元列式中可以运用一些技巧来避免寄生模式，但是每个技巧有可能引进一些其它麻烦。在这一节中将对这些情况进行概述。

完全积分 我们定义“完全积分”为这样一个积分准则，在一个未畸变的单元中，它能够以足够的精度对所有的刚度系数 k_{ij} 进行积分。四边形和六面体单元，如果它们是矩形且边节点（如果存在）沿直边或直棱边均匀设置，则是无畸变的。非畸变单元的雅可比矩阵行列式值 J 在单元内是常数。因此刚度矩阵被积函数中所有的项是多项式而不是多项式的比值。当 $x_2=(x_1+x_3)/2$ 时，这种特性的最简单的例子出现在方程 6.1－6 到 6.1－8。6.2 节中的方程表明 4 节点平面矩形单元的$[\boldsymbol{B}]$矩阵是 ξ 和 η 的线性函数。其次，如果厚度均匀，且$[\boldsymbol{E}]$为常数，刚度矩阵被积函数$[\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}[E][\boldsymbol{B}]tJ$ 含有 ξ 和 η 的平方项。因此二次高斯积分（4 点）能准确地对$[\boldsymbol{k}]$进行积分。类似地，8 节点矩形实体单元的$[\boldsymbol{k}]$也可以用二次高斯积分（8 点）准确求积。非畸变的 8 节点或 9 节点平面单元的$[\boldsymbol{B}]$矩阵包含 ξ 和 η 的平方项，因此被积函数中将出现四次幂，3×3 的高斯积分法将提供准确的积分。

如果单元的几何形状有畸变，要采用“完全积分”，这意味着当单元没有畸变时这个积分法则是准确的。因此，对于任意形状的 8 节点实体单元，认为二阶高斯积分是完全积分。

不完全积分和寄生模式 运用比满阶次低的积分法则叫做“不完全积分”或“降阶”积分。不完全积分减少了计算时间，这在一些非线性和/或动态分析中可能是一个重要的考虑。还有，不完全积分可以通过抵消与假设位移场的协调单元相关的过度刚性来改善有限元计算结果的精度。不完全积分还具有一个软化效果，因为一些多项式在低阶积分准则的高斯点处将会消失，它对应变能就没有贡献了。但是不完全积分引进不同称谓的缺陷，诸如寄生模式、奇异模式、零-能变形模式、沙漏模式、动力学模式、不稳定性和机构。刚度矩阵含有寄生模式的单元不能抵抗倾向于激活这种模式的载荷。数学上，不完全积分$[\boldsymbol{k}]$叫做缺秩，这就意味着，它

的阶次减去可能的刚体运动数还比它的秩大。

考虑 4 节点平面单元的独立位移模式，如图 6.8－1 所示。模式 1 到 3 是刚体运动。它们显示没有应变能。模式 4 到 6 是常应变模式，7 到 8 是弯曲模式。这个单元的完全积分是 2×2 的高斯积分法，它提供了能够抵抗变形模式 4 到 8 的单元刚度矩阵。这个单元的不完全积分是单元中心的单个高斯点，在那里模式 7 和 8 不产生应变。不完全积分的[k]仅包含能在积分准则样本点检测到的信息。因此，4 节点单元的不完全积分提供了一个[k]，对此，模式 7 和 8 并未显示出抵抗作用载荷的能力；也就是说，它们是寄生模式。非矩形单元在单点积分准则下，也显示了这种寄生模式。寄生模式可能出现在与其他模式的组合中，也可能叠加在刚体模式和抵抗变形的模式上。

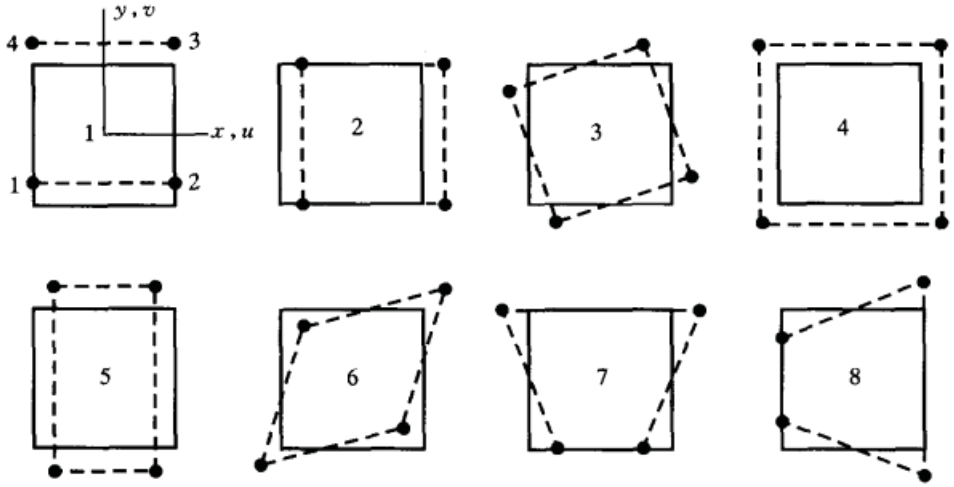


图 6.8－1 4 节点平面单元的独立位移模式

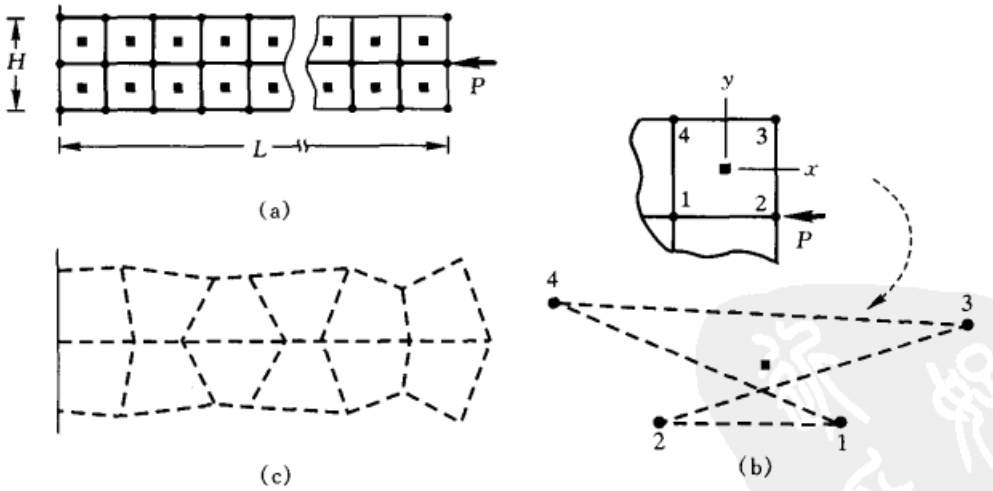


图 6.8－2 简化积分的 4 节点正方形单元

(a)静态轴向载荷；(b)虚线表示在 2×14 网格中右上单元的变形模式；(c)计算的振动模式态

当连接具有寄生模式的单元产生一个网格时，这个组集可能产生也可能不产生差的结果，它依赖于模式的自然特性以及搜寻到的信息。例如，用平面 4 节点单元对一个杆进行建模，每个积分都运用一个高斯积分点(图 6.8－2(a))。支撑处的所有节点都被固定，这样抑制机构，并使结构更稳定。但是，存在一个“临近机构”问题：随着距离的增加，支撑提供的约束越来越

小。图 6.2－8(b)显示了 2×14 的正方形网格右上方单元变形的计算结果。如果 L/H 足够大，计算的载荷点的轴向位移可能比杆的长度还大！不管大的节点位移多么不切实际，在每个单元的中心高斯点，计算位移和应力可能是合理的，因为寄生位移以及相应的应变在这些位置并不敏感(图 6.8－2(b))。当所示的网格应用于振动问题时[6.11]，计算的振动模式中如图 6.8－2(c)所示的一个模式在物理上是不合理的。它的频率比一些物理上合理的悬臂梁的横向位移振动模式的频率要小。在这个单元中的寄生模式是令人生厌的，因为它们是可传递的。可传递寄生模式是一种连接在一起的单元可共享的模式，而不是因为连接而对它提供弹性阻抗。下面描述一个不可传递模式的例子。

当运用四个高斯点对 8 节点和 9 节点平面单元进行不完全积分时，该单元有如图 6.8－3 所示的寄生模式。仅出现在 9 节点单元中的寄生模式是可传递的。图 6.8－3(d)中的“沙漏模式”是不可传递的：没有一个办法使相邻单元既能显示这种模式，又能保持连接(考虑这个陈述时，注意到在不改变模式的情况下所有节点位移的符号能够颠倒；在 2×2 法则的高斯积分点处应变保持为零)。如果对图 6.8－2 中的问题运用带 2×2 积分的 8 节点单元，计算结果将比用单点积分法的 4 节点单元或 4 点积分法的 9 节点单元得到的结果精确得多[6.11]。这些结果暗示，如果不完全积分仅引入不可传递寄生模式，它还是可以接受的。

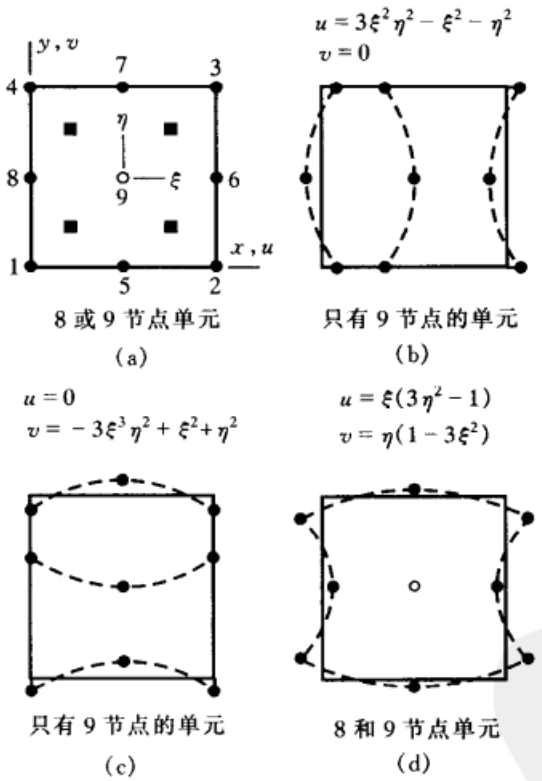


图 6.8－3　当 2×2 积分法用于刚度矩阵积分时在平面二次单元中的寄生模式。图示单元最初是正方形，u 和 v 的方程显示的是形状而不是幅值

在一个不完全积分单元中寄生模式的个数通常用以下的方法来计算。在一个高斯点上取样的应变个数在平面单元上是 3 个，在实体单元上是 6 个。在简化但正规的法则中，每个方向取的高斯点数相同，n 点积分提供 $3n$(平面单元；PE)或 $6n$(实体单元；SE)条独立信息。像通常一样，如果材料性能矩阵$[\boldsymbol{E}]$的秩等于它的阶次，那么矩阵$[\boldsymbol{k}]$的秩分别为 $3n$(PE)或 $6n$(SE)。有 3 个或 6 个可能的刚体运动。寄生模式的个数等于矩阵$[\boldsymbol{k}]$的阶次减去 $3n+3$(PE)

或减去 $6n+6$(SE)。如果矩阵[k]被完全积分,那么就没有寄生模式了,其中有些数据就是多余的,且[k]的秩等于它的阶次减去刚体的模式数。如果在不同的方向取的高斯点数不同或用别的积分方法,前述的计算方法可能会过高地估算矩阵[k]的秩。

表 6.8-1 提供了可供选择的结果,这些结果和用简化的高斯积分法求得的刚度矩阵的寄生模式有关。出现这些模式的单元不一定是矩形。一个用 2×2×2 高斯积分法的未支撑的 20 节点实体单元的寄生模式之一如图 6.8-4(b)。这是个像图 6.8-3(d)所示的"沙漏"形模式,在某些网格中是可传递的。在图 6.8-4(a)中这种模式趋向于出现在受载端,在那里是不会强烈地感受到固定支撑提供的约束。

表 6.8-1 高斯积分法则和与所形成的刚度矩阵相关联的寄生模式

单元类型	高斯积分法		来自简化积分的寄生模式	
	完全	简化	数量	类型
4 节点平面单元	2×2	1 点	2	用 $\xi\eta$ 表示 u,v
8 节点平面单元	3×3	2×2	1	图 6.8-3(d)
9 节点平面单元	3×3	2×2	3	图 6.8-3(b),(c),(d)
8 节点实体单元	2×2×2	1 点	12	用 $\xi\eta,\eta\zeta,\zeta\xi,\xi\eta\zeta$ 表示 u,v,w
20 节点实体单元	3×3×3	2×2×2	6	见文献[3.3,6.12]

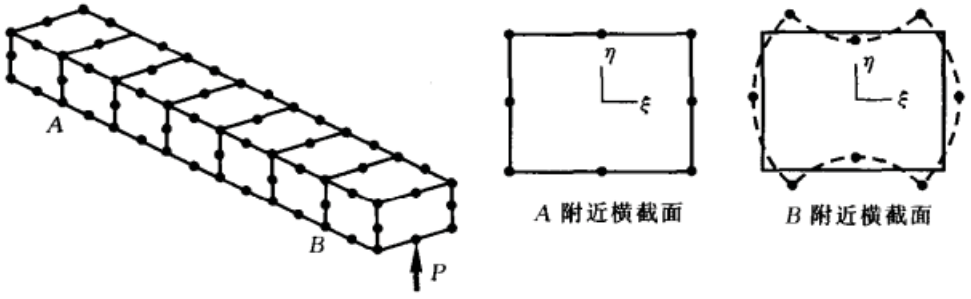


图 6.8-4 (a)用 20 节点实体单元建模的悬臂梁;(b)当采用 2×2×2 高斯积分时远离固定端的部位有可能接近不稳定状态

应要求软件供应商使他们的产品尽可能有效地防止操作失误。因此,对于平面和实体单元的刚度矩阵不常使用不完全积分,除非多半是 8 节点的平面单元,它的 2×2 高斯积分法的寄生模式是不可传递的。不完全积分的危险性在动力学中出现的概率最高,其中"幻影"模型可能会混淆物理模型并可能引发严重错误。

选择性积分和替换 对 4 节点平面单元,一点积分显而易见的优点是寄生剪应变不会使生成的矩阵[k]刚化。因为图 6.8-1 中弯曲模型 7 和 8 在单元的中心产生零剪切应变。为了避免寄生模式的伴随缺陷,可以采用选择性积分,这种情况下,包括在 $\xi=\eta=0$ 处使用一个高斯点计算剪应变对[k]的贡献,同时利用通常的 4 个高斯点计算正应变对[k]的贡献。另一种称为选择替换法。对所有项利用通常的 4 个高斯点,但在 $\xi=\eta=0$ 处,要替换实际的剪应变。两种方法,选择积分法和选择替换法,都通过了分片试验,但它们对各向异性材料有所不同,这

类材料的[E]是满阵，且所有应力对所有应变都是成对的[3.3]。两种方法的缺点是它们产生的单元不是构架不变的(3.9 节讨论过)。剪应变的构架不变性由对所有位移分量相同的形状函数的协调使用来保证[3.3]。选择积分法和选择替换法是不一致的。为了恢复构架不变性，可以对提供局部的 xy 坐标系的软件增加编码，这种坐标系的方位不变化，或者当单元节点重新编码时，变化 90°的倍数。

相似的技巧可以应用到多于 4 节点的平面单元或实体单元，但处理过程变得更为复杂[3.3]。

稳定性 非线性解法和显式积分的动力学解法在计算上是繁琐的，它们需要一系列的求解过程，并且每一步需要计算单元的刚度系数。减少每个单元的高斯点数可以显著降低计算费用。因此，使用每个单元的最少高斯点数和用廉价计算的稳定性方法限制寄生模式促进了数值分析。稳定性经常被用于 4 节点平面单元、4 节点壳体单元和 8 节点立体单元，在每种情况中都用一点高斯积分法。

一个好的稳定性方案计算量不大，完整保留着刚体和常应变模式，以便单元能够通过分片试验，不需要由软件使用者来决定。这方面有很多相关的论文。最常用的是变分原理而不是最小势能原理。参考文献见[3.3，6.13～6.15]。

6.9 载荷考虑

在 3.11 节讨论的由于力和压力引起的节点载荷局限于直边、边中节点和矩形单元。在本节中我们考虑由曲边和曲面上的作用力引起的节点载荷，并要说明怎样能够把体力和初应力引起的节点载荷计算可以合并到提供单元刚度矩阵的数值积分过程中去。重新写出基本方程(式 3.3－8)，由于单位体积的体力{F}，面力{Φ}，初应变量{ε_0}以及初始应力{σ_0}引起的节点载荷{r_e}为

$$\{r_e\} = \int [N]^{\mathrm{T}}\{F\}\mathrm{d}V + \int [N]^{\mathrm{T}}\{\Phi\}\mathrm{d}S + \int [B]^{\mathrm{T}}[E]\{\varepsilon_0\}\mathrm{d}V - \int [B]^{\mathrm{T}}\{\sigma_0\}\mathrm{d}V \tag{6.9-1}$$

如果一个单元有不协调模式，没有载荷项应该与它们的节点自由度相关。因此在 6.6 节中 QM6 单元的载荷项与 6.2 节中 Q4 单元的载荷项相同。载荷从不协调模式中被忽略，所以单元将通过在 6.13 节中讨论的分片试验。

边作用力 考虑一个例子，如图 6.9－1(a)所示的二次单元边 $\eta=1$。作用载荷由边切向应力 τ 和边法向应力 σ 组成。在这个边上，形状函数 N_i 的值在 $i=1, 2, 5, 6, 8$ 处为 0。因此在式 6.9－1 中的第二项积分中非零贡献仅与第 4，7 和第 3 个节点有关，其值为

$$\underset{6\times 1}{\{r\}_e} = \int_{\text{边}4\text{-}7\text{-}3} \begin{bmatrix} N_4 & 0 & N_7 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_4 & 0 & N_7 & 0 & N_3 \end{bmatrix}_{\eta=1}^{\mathrm{T}} \begin{Bmatrix} \Phi_x \\ \Phi_y \end{Bmatrix} t\,\mathrm{d}s \tag{6.9-2}$$

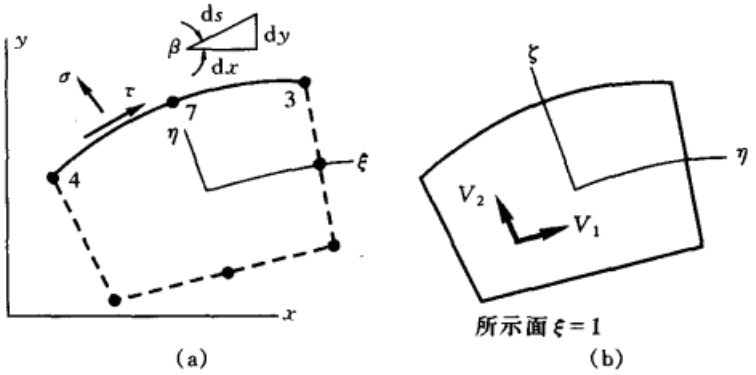


图 6.9-1 (a) 设定平面单元一个边上的法向和切向作用力；(b)实体单元的一个面，该面上任意点有相切的向量 $\boldsymbol{V}_1$ 和 $\boldsymbol{V}_2$

其中 t 表示单元的厚度，$\mathrm{d}s$ 表示边长增量。平行 x 和 y 的力分量的增量为

$$\begin{Bmatrix}\Phi_x\\ \Phi_y\end{Bmatrix} t\,\mathrm{d}s = \begin{Bmatrix}\tau t\,\mathrm{d}s\cos\beta - \sigma t\,\mathrm{d}s\sin\beta\\ \sigma t\,\mathrm{d}s\cos\beta + \tau t\,\mathrm{d}s\sin\beta\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\tau\mathrm{d}x - \sigma\mathrm{d}y\\ \sigma\mathrm{d}x - \tau\mathrm{d}y\end{Bmatrix} t \tag{6.9-3}$$

沿边 $\eta=1$，用式 6.2-4 中的雅可比项替换

$$\mathrm{d}x = x_{,\xi}\mathrm{d}\xi = J_{11}\mathrm{d}\xi \quad \text{和} \quad \mathrm{d}y = y_{,\xi}\mathrm{d}\xi = J_{12}\mathrm{d}\xi \tag{6.9-4}$$

从而式 6.9-2 得到节点 i 处的 x 和 y 方向的节点载荷分量为

$$\begin{aligned} r_{xi} &= \int_{-1}^{1} N_i(\tau J_{11} - \sigma J_{12})t\mathrm{d}\xi \\ r_{yi} &= \int_{-1}^{1} N_i(\sigma J_{11} + \tau J_{12})t\mathrm{d}\xi \end{aligned} \tag{6.9-5}$$

其中 i 为 4，7 或 3，N_i，t 和雅可比项是在 $\eta=1$ 边上计算的。按式 6.3-2 的方式进行这些积分的数值计算。

面作用力 为了说明这个方法，我们仅考虑垂直于六面体单元 $\xi=1$ 面的法向力 σ。这个面不必是平面，这个面上的节点数不需要都来讨论。主要的任务就是计算式 6.9-1 中的 $\{\boldsymbol{\Phi}\}\mathrm{d}S$ 项，其中 $\mathrm{d}S$ 是面上的面积单元。为了这个计算，我们需要该面上的法线方向余弦。设 $\boldsymbol{V}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 是 $\xi=1$ 的面上的任意矢量，其中 i，j 和 k 通常是 x，y 和 z 方向的单位矢量。在图 6.9-1(b)中，通过面上任意一点的切向矢量 $\boldsymbol{V}_1$ 和 $\boldsymbol{V}_2$ 分别为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V}_1 &= \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \eta}\mathrm{d}\eta = (x_{,\eta}\boldsymbol{i} + y_{,\eta}\boldsymbol{j} + z_{,\eta}\boldsymbol{k})\mathrm{d}\eta = (J_{21}\boldsymbol{i} + J_{22}\boldsymbol{j} + J_{23}\boldsymbol{k})\mathrm{d}\eta \\ \boldsymbol{V}_2 &= \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \zeta}\mathrm{d}\zeta = (x_{,\zeta}\boldsymbol{i} + y_{,\zeta}\boldsymbol{j} + z_{,\zeta}\boldsymbol{k})\mathrm{d}\zeta = (J_{31}\boldsymbol{i} + J_{32}\boldsymbol{j} + J_{33}\boldsymbol{k})\mathrm{d}\zeta \end{aligned} \tag{6.9-6}$$

该面法线的方向余弦 l,m,n 可以通过叉乘计算。

$$l\boldsymbol{i} + m\boldsymbol{j} + n\boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{V}_1 \times \boldsymbol{V}_2}{|\boldsymbol{V}_1 \times \boldsymbol{V}_2|} = \frac{\boldsymbol{V}_1 \times \boldsymbol{V}_2}{\mathrm{d}S} \tag{6.9-7}$$

因此 $l\mathrm{d}S=(J_{22}J_{33}-J_{23}J_{32})\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta$，等等。现在 $\{\boldsymbol{\Phi}\}\mathrm{d}S=\lfloor l \quad m \quad n \rfloor^{\mathrm{T}}\sigma\mathrm{d}S$，其中 $l\sigma\mathrm{d}S$，$m\sigma\mathrm{d}S$ 和

$n\sigma \mathrm{d}S$ 分别是法向力的增量 $\sigma \mathrm{d}S$ 沿 x，y 和 z 轴的分量。节点 i 的载荷在 x，y，z 轴的分量为

$$\begin{Bmatrix} r_{xi} \\ r_{yi} \\ r_{zi} \end{Bmatrix} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} N_i \sigma \begin{Bmatrix} J_{22}J_{33} - J_{23}J_{32} \\ J_{23}J_{31} - J_{21}J_{33} \\ J_{21}J_{32} - J_{22}J_{31} \end{Bmatrix} \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\zeta \tag{6.9-8}$$

其中所有形状函数和雅可比项都是在 $\xi=1$ 面算得，i 取值范围包括面 $\xi=1$ 上的所有节点（对于图 6.5-1(a)中的单元，$i=5$，6，7，8）。按式 6.3-5 的方式进行式 6.9-8 的数值计算。

体力和初始应力　对于平面问题，以适合数值积分的格式，式 6.3-5 和 6.9-1 得到

$$\{\boldsymbol{r}_e\} = \sum_i \sum_j ([\boldsymbol{N}]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{F}\} - [\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\sigma}_0\}) t J W_i W_j \tag{6.9-9}$$

表 6.3-2 适用于式 6.9-9 的计算：

- 在表 6.3-2(a)的开始，清理将存贮 $\{\boldsymbol{r}_e\}$ 的数组；称之为 RE。在最内层循环（由标记当前高斯点的指针 i 和 j 来覆盖），调用形状函数子程序后计算 $([\boldsymbol{N}]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{F}\} - [\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\sigma}_0\}) t J W_i W_j$，并把这些结果添加在数组 RE 中。
- 如果 $\{\boldsymbol{F}\}$ 和 $\{\boldsymbol{\sigma}_0\}$ 在整个单元是均匀的，它可以直接把它们提供给前述的计算。如果不是这样，提供节点上的 $\{\boldsymbol{F}\}$ 和 $\{\boldsymbol{\sigma}_0\}$ 值，添加到表 6.3-2(b)给出的形状函数的子程序中，按照对厚度 t 已经表示的方式，用形状函数插值的方法计算它们当前位置的值。

6.10　应力计算

应力计算在 3.12 节中也讨论过。在这节中我们继续讨论，重点是用于数值积分单元的方法。单元应力，由于是从单元位移场计算，由下式给出

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\boldsymbol{E}]([\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{d}\} - \{\boldsymbol{\varepsilon}_0\}) + \{\boldsymbol{\sigma}_0\} \tag{6.10-1}$$

与单元自由度 $\{\boldsymbol{d}\}$ 有关的机械应变由项 $[\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{d}\}$ 给出，其中 $\{\boldsymbol{d}\}$ 包括可能存在的任何非节点自由度，诸如在 6.6 节中讨论过的单元自由度。有代表性的初始条件包含温度场以及初始应变 $\{\boldsymbol{\varepsilon}_0\}$，或者初始应力 $\{\boldsymbol{\sigma}_0\}$，但不会是两者都有。如果两种初始条件同时存在，两者可能都会用到。矩阵 $[\boldsymbol{B}]$ 是坐标的函数，因此要选择适当的位置进行应力计算。就像表格 6.3-2(b)中总结的那样，矩阵 $[\boldsymbol{B}]$ 可以由形状函数子程序计算。

高斯点的应力　Q4 单元在产生如图 3.6-3 所示的弯曲时，会显示出寄生剪应力这样的缺点。在图 3.6-3 中，我们看到一条通过单元中心的垂线显示了正确的剪切应力。如果一个单元受到施加在另外两对边上的力矩弯曲时，正确的剪应力只会出现在水平的中心线上。这些观察结果表明在通常的使用当中，Q4 单元的剪切应力应该在中心 $\xi=\eta=0$ 的位置计算，此处碰巧就是最低阶次积分法则中高斯点的位置。类似的意见可应用到 8 节点六面体单元。

寄生剪应力在 4 节点四边形中以及 8 节点六面体中可以通过增加不调协模式的方法来避免(6.6 节)。但对大多数单元，根据式 6.10-1，计算的应力（尤其是剪应力）在高斯点比在单元内其它任何位置要精确得多。的确，在 Q4 单元中 $\xi=\eta=0$ 处和在 Q8 单元中 4 点法则高斯点处的应力在下述意义上是“超级收敛的”，即它们的精度能够与在这些位置上计算位移的精

度相比较，而不像通常在其它位置有较低的精度。图 6.8－2(b)举了这种情况的一个例子。这种结果并不表明刚度矩阵积分和应力计算必须用同阶法则，在高斯点计算应力可以比通常积分用的阶次低。

简言之，设置最佳应力点的解析论证如下[3.3,6.16,6.17]。给单元施加一个完全多项式位移场$\{\boldsymbol{f}_h\}$，它的阶数比真实单元场中完全多项式的最高次数大一阶。例如，给 Q8 单元加一个完全三次场。节点自由度$\{\boldsymbol{d}_h\}$可以通过计算节点位置处的$\{\boldsymbol{f}_h\}$来得到 。现在寻找单元上的位置使得其$\{\boldsymbol{f}_h\}$场的应变和$[\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{d}_h\}$应变相同，其中$[\boldsymbol{B}]$由低阶单元位移场计算。找到的这些位置就是低阶单元中的高斯点位置，但在较高阶单元中位置稍有不同(很少使用)。作为一个例子，考虑式 4.9－4。$\mathrm{d}u/\mathrm{d}x=\mathrm{d}\bar{u}/\mathrm{d}x$ 的位置在距单元中心$(h/2)/\sqrt{3}$处。这些是二阶法则的高斯点位置。

在分别用 4 点和 9 点法则进行普通积分的 Q8 和 Q9 单元里，在 4 点法则位置运用式 6.10－1计算的应力可能仅有用相同公式在其它位置计算应力误差的 1/10[6.17]。图 6.10－1 显示了在用 Q8 单元建模的梁中计算的横向剪应变。这个应变随 x 的平方变化并且除在 A 和 B 点外其他位置可能都很不准确，A 和 B 点的 x 坐标是 4 点高斯积分法则高斯点的位置。这个例子表明应变(或应力)需要在标准的四个高斯点上进行计算，然后插值或外推到单元的其他点。类似地，计算 20 或 21 节点的六面体的应力，在 8 点高斯积分法则的位置处往往是最精确的，能够由这些点外推到单元的其他位置。

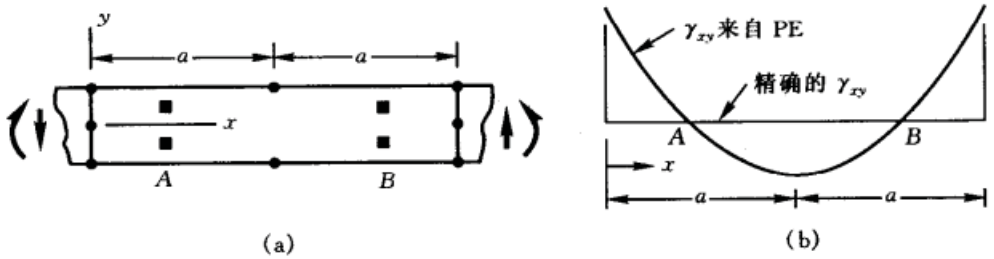


图 6.10－1 (a) 用 8 节点平面单元建模的梁的一部分，小方块代表高斯点；(b)横向剪应变沿 x 轴的分布

在图 6.10－1(b)中，我们看到 γ_{xy} 在 $x=0$ 和 $x=2a$ 点处太大。在相邻单元的任何一条边的这些位置也太大，因而在公用节点处的平均值对精度无益。在这个例子中，ε_x 不像 γ_{xy} 那样差，因此通过外推影响不会太大。

外推计算 假设在一个平面单元的四个高斯点处的应力已经被计算出来了(图 6.10－2 中的 1,2,3,4 点)。无量纲坐标 r 和 s 分别与 ξ 和 η 成比例。在 3 点处 $r=s=1$ 和 $\xi=\eta=1\sqrt{3}$。因此比例因子为$\sqrt{3}$，所以

$$r=\sqrt{3}\xi \quad 和 \quad s=\sqrt{3}\eta \tag{6.10-2}$$

单元中任意点 P 的应力可以由常用形状函数公式得到，对于在 P 点坐标下计算的形状函数 N_i

$$\sigma_P=\sum N_i\sigma_i \quad (i=1,2,3,4) \tag{6.10-3}$$

其中 σ 为 σ_x，σ_y 或 τ_{xy}。N_i 是式 6.2－3 中给出的双线性形状函数，但用 r 和 s 替换 ξ 和 η 得

$$N_1=\frac{1}{4}(1-r)(1-s),\quad N_2=\frac{1}{4}(1+r)(1-s),\cdots \tag{6.10-4}$$

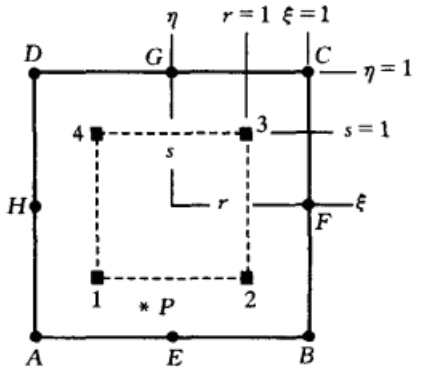


图 6.10－2　参考坐标系 rs 和 $\xi\eta$ 用于高斯点应力的外推。小方块表示了 2 × 2 法则的高斯点。

例如，让我们由高斯点 1,2,3,4 的应力值 σ_x 计算角点 A 的应力 σ_x。替换 $r=s=-\sqrt{3}$，从式 6.10－3中得到

$$\sigma_{xA} = 1.866\sigma_{x1} - 0.500\sigma_{x2} + 0.134\sigma_{x3} - 0.500\sigma_{x4} \tag{6.10-5}$$

在一个实体单元中，类似于式 6.10－3 的公式包含如同式 6.5－5 中那样的三线性 N_i，但使用坐标 $r=\sqrt{3}\xi, s=\sqrt{3}\eta$ 及 $t=\sqrt{3}\zeta$。物理单元不是正方形或立方体，这些公式也可以应用。

备注　在节点处的应力通常比高斯点处的应力更受到关注，主要有两个原因。第一，节点在表面上，应力通常比内部的应力要大。第二，共享一个节点的单元通常不会在共享节点处预报出相同的应力值，因此这个差异可以用于误差测量。在一个 4 节点矩形（和一个 8 节点的矩形六面体）中，直接在一节点处计算的应力与 4（或 8）个高斯点处外推到节点的应力是一致的。对一般形状单元它们不一致，几何形状越不规则，差异越大。

基于二阶高斯法则取样点的应力场是平滑场。在二次单元中，它具有比基于二次单元节点上应力场要低的阶次。平滑场在高斯点之外的位置没有保证显示更高的精度。在应力集中位置并利用 8 节点四边形单元，检验冯·米赛斯应力 σ_e（式 3.12－2），特柯夫（Tenchev）[6.18] 发现直接在一个节点处计算的冯·米赛斯应力 σ_e 与 4 个高斯点用外推法在该节点计算的 σ_e 有约 1/3 的误差。他提出如下经验公式。如果 σ_{eN} 和 σ_{eG} 分别是直接在节点处计算的冯·米赛斯应力和从 4 个高斯点外推到该节点计算的应力，于是修正的节点应力，此处称为 σ_{eN}^*，如下式

$$\sigma_{eN}^* = \begin{cases} \dfrac{\sigma_{eN}+\sigma_{eG}}{3-\dfrac{\sigma_{eN}}{\sigma_{eG}}} & \text{当 } \sigma_{eG} < \sigma_{eN} < 2\sigma_{eG} \text{ 时利用该式计算} \\ \sigma_{eN} & \text{否则利用节点处的 } \sigma_{eN} \end{cases} \tag{6.10-6}$$

在用 8 节点平面单元试验时，σ_{eN}^*，σ_{eN}，σ_{eG} 平均误差分别大约为 7%，15%，40%。σ_{eN}^* 和 σ_{eN} 的差异可以用作误差测量。

一个可选用的方法　避免用式 6.10－1 计算应力的方法已经提出来了[6.8]。它首先计算单元节点力 $\{\boldsymbol{r}\}=[\boldsymbol{k}]\{\boldsymbol{d}\}$，其中单元自由度 $\{\boldsymbol{d}\}$ 可利用总体方程求解后的值。然后我们找到与 $\{\boldsymbol{r}\}$ 对应的应力场 $\{\boldsymbol{\sigma}\}$，此处

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\boldsymbol{P}]\{\boldsymbol{B}\} \tag{6.10-7}$$

例如，有一个 4 节点的平面四边形单元，我们采用如下形式

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=[\boldsymbol{P}]\begin{Bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_7\end{Bmatrix}\quad 其中\quad [\boldsymbol{P}]=\begin{bmatrix}1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0\\ 0 & -y & 0 & 0 & 0 & -x & 1\end{bmatrix}\tag{6.10-8}$$

β_i 是待确定的量。注意写出的这些等式都满足平衡微分方程 3.1－12 或 3.1－13。体力被忽略了。虽然体力能够对结构产生重要的载荷，通常它们在单元的应力计算中可以忽略。从式 6.9－1 和 6.10－7 我们得到

$$\{\boldsymbol{r}_e\}=-[\boldsymbol{Q}]\{\boldsymbol{\beta}\}\quad 其中\quad [\boldsymbol{Q}]=\int[\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{P}]\mathrm{d}V\tag{6.10-9}$$

对 4 节点四边形，$[\boldsymbol{B}]$是 3×8，所以，$[\boldsymbol{Q}]$是 8×7 的。节点平衡方程是$\{\boldsymbol{r}\}+\{\boldsymbol{r}_e\}=\{\boldsymbol{0}\}$，从中我们可以解得$\{\boldsymbol{\beta}\}$。如果这个方程是对 4 节点的平面单元，且$[\boldsymbol{P}]$由式 6.10－8 给出，这个方程组就是超静定的(方程数多于未知数)。找出适合 β_i 的最小方阵，我们对$[\boldsymbol{\beta}]$从下面的方程中求出

$$[\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}]\{\boldsymbol{\beta}\}=[\boldsymbol{Q}]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{r}\}\quad 其中\quad \{\boldsymbol{r}\}=[\boldsymbol{k}]\{\boldsymbol{d}\}\tag{6.10-10}$$

最后我们返回到式 6.10－7 中解出单元应力。读者可以从 4.10 节中讨论过的假设应力混合列式辨认出式 6.10－7 和 6.10－8。因为节点的力与作用于单元上的载荷平衡，应力$\{\boldsymbol{\sigma}\}=[\boldsymbol{P}]\{\boldsymbol{\beta}\}$可能比从式 6.10－1 中确定的应力更为精确，并可能有很小的误差，即使单元形状很差，使式 6.10－1 不精确，或者由于过分刚化单元列式，引起计算位移估计不足(如图 3.6－3)。从后者的可能性我们推断，如果用设定的位移而不是以力给过分刚化结构加载，应力$\{\boldsymbol{\sigma}\}=[\boldsymbol{P}]\{\boldsymbol{\beta}\}$可能会估计过高。

为了在计算$\{\boldsymbol{\sigma}\}=[\boldsymbol{P}]\{\boldsymbol{\beta}\}$中提供热应力，建议一个特定的方法[6.8]。例如在一平面问题中令温度 T 的变化有如下的形式

$$T=a_1+a_2x+a_3y\tag{6.10-11}$$

其中 a_i 是常量。设材料是各向同性的。假定空间变化不受限制且没有剪应变产生。因此，位移可以在 $\gamma_{xy}=\gamma_{yz}=\gamma_{zx}=0$ 的条件下对式 3.1－7 和 3.1－8 积分求得。因此利用式 6.10－11，当热膨胀系数为 α 时，有

$$\begin{aligned}u&=\alpha\left(a_1x+\frac{1}{2}a_2x^2+a_3xy-\frac{1}{2}a_2y^2\right)\\ v&=\alpha\left(a_1y+a_2xy+\frac{1}{2}a_3y^2-\frac{1}{2}a_3x^2\right)\end{aligned}\tag{6.10-12}$$

在单元节点处计算这些位移，产生一个节点位移矢量$\{\boldsymbol{d}_T\}$。然后按$\{\boldsymbol{r}\}=[\boldsymbol{k}](\{\boldsymbol{d}\}-\{\boldsymbol{d}_T\})$而不是简单地按$\{\boldsymbol{r}\}=[\boldsymbol{k}]\{\boldsymbol{d}\}$计算式 6.10－10 中的单元节点力。试验情况的结果见文献[6.8]。

6.11 单元几何形状的影响

当单元稀疏和形状偏离直边而畸变时，计算结果的精度会减小。这里“畸变”是指在加载

产生位移之前初始单元的形状。只有在大位移非线性问题时位移才会大到使单元形状由好变坏。最常见的线性分析是基于初始几何形状。测试情况可以显示由于单元畸变引起的精度减少的程度。这里的测试重点是单元的弯曲能力，可能不能很好地表现单元其他方面的能力。

图 6.11－1 显示了畸变对用 4 点高斯积分的 4 节点单元的影响。单位被忽略，因为它们对我们的分析不是必要的。在角点 B 处，精确的轴向应力为 $\sigma_{xB}=300$。在最左侧单元的底边中点，$x=1$，精确的轴向应力 $\sigma_x=270$，这里 QM6 单元是精确的。考虑到包括的横向剪切变形，梁理论得到端部横向挠度为 $v_C=1.031$。我们看到 QM6 单元受到的畸变比 Q4 单元少，并且畸变的影响使单元刚化。

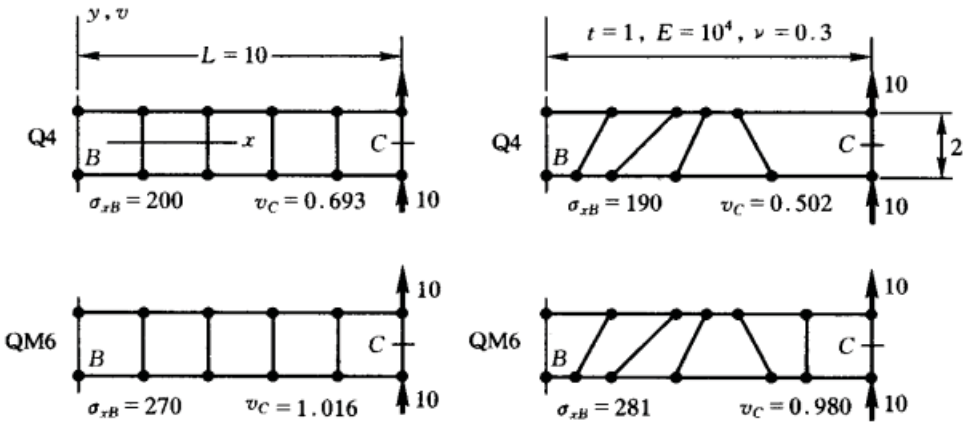


图 6.11－1　悬臂梁在 FE 模型中的应力和挠度。使用 4 节点单元和 4 点高斯积分。精确的 $\sigma_{xB}=300$，精确的 $v_C=1.031$

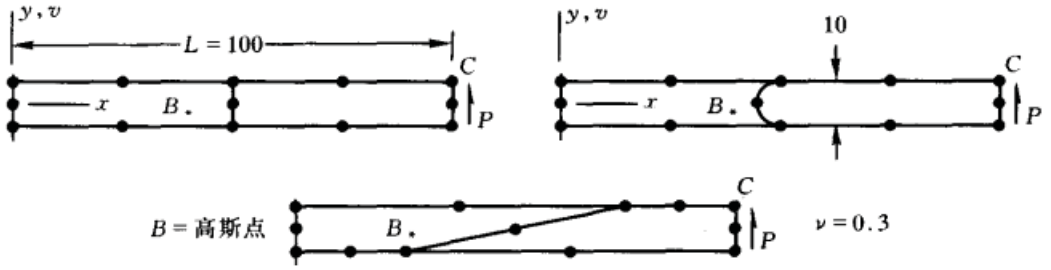
表 6.11－1 报告了类似的测试情形，其中用了 8 节点和 9 节点单元。B 点是一个 2×2 积分法则的高斯点。载荷 P 按比例 1∶8∶1 分配到位于右端的节点上，与横向剪力的抛物线分布相协调。在梯形单元情形，两角上的节点被移动，在顶部移到 $3L/4$，底部移到 $L/4$。在曲边情形，一边节点移到距左边 $L/20$ 的距离。边节点都在边的中点。计算结果是作为正确值的分数给出，而正确值是按梁理论在忽略横向剪应变下算得的。我们看到畸变和高斯积分阶次的增加使单元刚化。

如果单元是矩形的，边节点(如包括)在边中间，而且坐标系 $\xi\eta\zeta$ 和 xyz 是平行的，那么位移场如式 6.4－2 在两坐标系有相同的形式。因为式 6.4－2 包含所有的二次项，我们希望单元有精确模拟纯弯曲的能力，如果单元是矩形，则的确是这种情况。如果角的度数不是 90°，边是曲边，和/或边节点不在边中点，则 8 节点单元就失去这种能力，边节点位置对 9 节点平面单元有类似的影响，但仅角度畸变没有影响。

分析[6.19,6.20]表明形状畸变可能导致单元只能精确显现线性场。因此，仅能精确表示常应变场。但这不意味着畸变使等参单元降低到常应变三角形的水平。高阶位移模式继续存在，但只能近似地表示所希望的场量。当增加高阶模式时，性能改进了，如在表 6.11－1 中看到的那样。

表 6.11－1 表明对于 8 和 9 节点单元，2×2 积分优于 3×3 积分，但这并不是必然的情况，见 6.8 节。

表 6.11-1 在横向端点载荷 P 作用下两单元悬臂梁的应力和挠度。用梁理论得到的精确值是单位 1（忽略横向剪切变形）



单元类型，积分法则	矩形单元 σ_{xB}	矩形单元 v_C	梯形单元 σ_{xB}	梯形单元 v_C	曲边单元 σ_{xB}	曲边单元 v_C
8 节点，2×2	1.000	0.968	0.051	0.362	−0.048	0.430
8 节点，3×3	1.129	0.930	0.048	0.161	0.050	0.221
9 节点，2×2	1.000	1.006	1.125	1.109	0.958	0.955
8 节点，3×3	1.141	0.954	0.687	0.791	0.705	0.737

图 6.11-2 中显示了形状极端畸变的情况。在这两个例子中的每例，高斯点都位于单元的外面，并且雅可比 J 是负的。一个可以接受的变形单元在任何一个高斯点的雅可比均不为负。事实上，一个好的变形单元各个高斯点的雅可比式基本不变。如果一个差的变形单元被合理形状的单元包围，人们期待的计算结果将在局部地方较差，而在不远处是可以接受的，这符合圣维南原理。

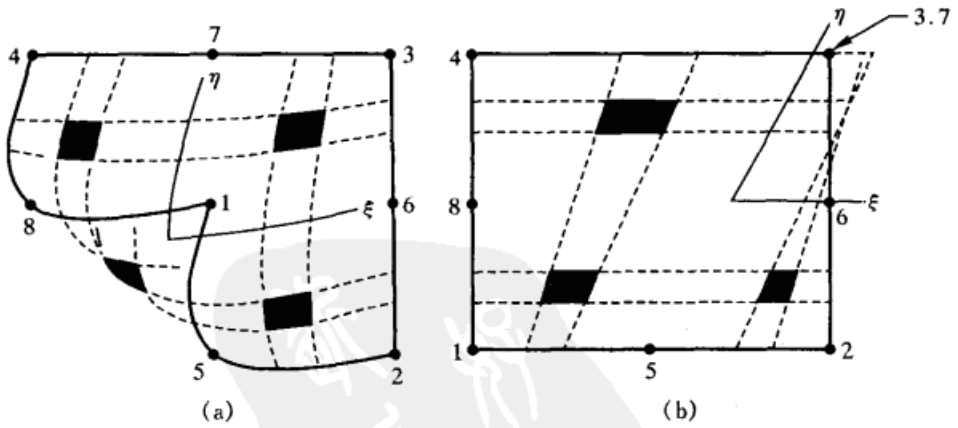


图 6.11-2 严重变形的 8 节点单元。2×2 规则的高斯点由 η 和 ξ 为常量的虚线界定。(a)节点 1 被移到初始矩形的中心；(b)节点 7 从顶边中点移到角点 3

实际含意 当单元密集且是直边，计算结果是最为精确的。增大伸长，非矩形，边弯曲，节点不在边的中心点处都可能增加误差。很少取不在边中间的点作为边节点。虽然单元的一个边可能弯曲以适应弯曲边界，但单元的其他边（网格的内部）应该保持直边。

商业软件通常检查各单元的几何形状[6.21]。在分析之前，伸长和其它几何畸变可以被检

查到并分别赋值。在经验设计的数值范围之内，一个单元无需用软件解说就可以被接受，或告诫使用者有差的形状，或者软件拒绝继续分析直到它认为不可接受的形状得到修正。“差的形状”的门槛可能比较高，以至于软件能够接受畸变大到足以引起显著误差的单元。

与单元几何形状相关的附加评论出现在 10.3 节和 10.14 节中。

6.12 等参数单元的有效性

在充分小的连续区域内，应变变化量与应变的平均值相比可以忽略。因此，当网格细化到无限小时，如果计算的有限元结果收敛于精确解，各单元必须能显示常应变状态。我们希望证明等参数单元有这个性能[6.22]。在更为一般的条件下，我们希望证明等参数单元能呈现等梯度的场量性能。

设 $\phi=\phi(x,y,z)$ 在笛卡儿坐标系中是线性场

$$\phi=a_1+a_2x+a_3y+a_4z \tag{6.12-1}$$

其中 a_i 是常量。这个形式是常应变场中位移 u,v 或 w 的表达式。因此 a_1 与刚体的平移有关，其他 a_i 与常应变和/或刚体转动有关。设在特定点 i 计算这个场量来得到特定的场量值 $\phi_i=\phi(x_i,y_i,z_i)$，如果点 i 是单元的节点，ϕ_i 是节点自由度，在单元内

$$\phi=\sum N_i\phi_i \tag{6.12-2}$$

我们将证明式 6.12-1 和 6.12-2 提供相同的场。因此我们证明当施加与常梯度相协调的节点自由度时，一个等参数单元可表现这种状态。作为论证的第一步，我们在节点 i 计算式 6.12-1 并代入式 6.12-2 中。因此

$$\phi=a_1\sum N_i+a_2\sum N_ix_i+a_3\sum N_iy_i+a_4\sum N_iz_i \tag{6.12-3}$$

但是，如果单元是等参数的，坐标用与 ϕ 相同的形式插值，即为

$$x=\sum N_ix_i \quad y=\sum N_iy_i \quad z=\sum N_iz_i \tag{6.12-4}$$

因此，如果 $\sum N_i=1$，像所要求的，式 6.12-2 简化到式 6.12-1。为了说明 $\sum N_i=1$，我们注意到不管单元位于笛卡儿坐标系 xyz 中的哪个位置，式 6.12-4 都能应用。假设有第二个笛卡儿坐标系 XYZ，沿 x 轴移动距离 h，因此 $x=X+h$，

$$x=\sum N_ix_i=\sum N_iX_i+h\sum N_i=X+h\sum N_i=(x-h)+h\sum N_i \tag{6.12-5}$$

从上面我们得到 $h=h\sum N_i$，因此结论是 $\sum N_i=1$。

前述的论证没有谈到粗糙网格的精确度，以及网格细化的收敛率，或单元畸变使近似场中高阶项的功效减小的程度。它只证明等参数单元的近似场包含一个完整的线性多项式，当网格细化时，这对收敛于精确值是必要的。当网格细化时，单元或者是协调的或者变得协调，这也是必然的。所有这些要求都通过在 6.13 节中讨论的分片试验来检验。

超参数和亚参数单元 这些单元在 6.1 节中已经定义过了。在图 6.12－1 中给出了实例。前述的论证不适用超参数单元。对图 6.12－1(a)中的单元，式 6.12－3 中的每个求和横跨 4 项，而式 6.12－4 中每个求和横跨 8 项。不能化简到式 6.12－1。在应力分析中这意味着超参数单元不能表示常应变状态。而且，因为位移梯度也定义了旋转，当被要求承受刚体转动时，超参数单元将显示出应变。不能展现刚体运动可能是灾难性的。

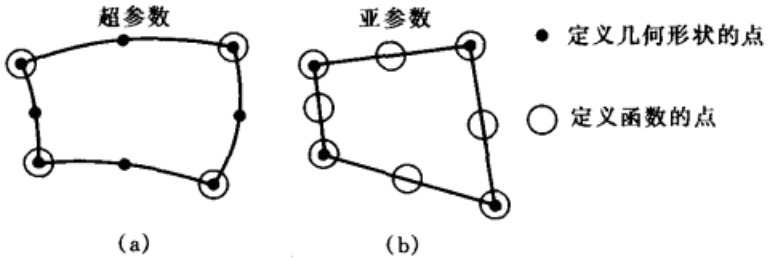


图 6.12－1 超参数和亚参数平面单元的实例

对图 6.12－1(b)中的亚参数单元，式 6.12－3 中的每个求和横跨 8 项，而式 6.12－4 中每个求和横跨 4 项。初看好像不能化简到式 6.12－1。但是我们的确能得到 6.12－1 式：用直边和边中节点，4 节点和 8 节点插值定义了相同的几何形状，可以用带 $x_5=(x_1+x_2)/2$ 和 $y_5=(y_1+y_2)/2$ 的式 6.4－1 来检验，等等。对于以这个方式限制的几何形状，8 节点单元变成图 6.12－1(b)中的亚参数单元。亚参数映射允许精确表示一些仅能用等参映射近似的状态。因此，对于在 $\xi=\eta=0$ 处增加的第 9 个节点，几何映射没有变化，图 6.4－1(a)中的单元可以精确表示应变的线性变化状态；图 6.4－1(b)中的单元则不能。

6.13 分片试验

假设一个问题重复求解，每次使用更细的 FE 网格。一系列的解答会向精确位移、应变和应力收敛吗？倘若所用单元通过了分片试验，答案就是肯定的，分片试验询查单元组集能否显示常应变状态。

分片试验是由埃诺斯(Irons)首创的，此后进行了分析、讨论和最后的重新解释[3.3,6.6]。这里我们描述分片试验的一个“数值实验”形式。在单元已被编码的数值试验中，易于使用软件来实现。因为软件规范地报告应力而不是应变，我们可以检查计算的应力，如果材料是各向同性的，泊松比为 0，应力按$\{\boldsymbol{\sigma}\}=[\boldsymbol{E}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$计算，则应力直接与应变成比例。虽然分片试验利用特定(但任意)单元几何形状，但通过测试能够充分保证当单元用于其它形状和其它问题时，计算结果将随网格细化而收敛于精确值(只要单元是稳定的；见随后的讨论)。

步骤 为了实施分片试验，先建立一个简单的 FE 模型，即“分片”单元，至少有一个节点在分片内(不在边界上)。为分片提供恰好能阻止刚体运动的支撑。单元形状应是不规则的，因为一些单元类型如果是矩形的就能通过测试而其他的都不行。分片的边界可以是矩形，如果希望的话，可以有等距离的节点。对分片的一条或多条边界，我们应用与常应力状态相协调的功-等效节点载荷(见 3.11 节)。如果存在不相容的模式，在确定这些载荷时将其忽略。如

果存在，单元内的节点既不加载也不抑制。图 6.13－1(a)是一个 4 节点平面单元加载分片的例子。左边缘的滚动支撑允许泊松效应应变 ϵ_y。如果 ν 不为 0，禁止图示的两个支撑在 y 方向的运动是错误的。沿左右边缘均匀分布的节点能更容易地确定图示的节点载荷 $F=(\sigma_x Ht)/2$，这个载荷与均匀厚度为 t 的平面物体中的单轴应力 σ_x 相协调。分片模型的计算结果同其他任何 FE 模型是相似的。精确结果是用于确定载荷 F 的 σ_x 值，对其余所有应力则为 0。如果计算结果在所有点都是正确的，比方说在每个单元的角点处，分片试验就通过了。用“正确”二字，我们的意思是达到计算机的精度极限。

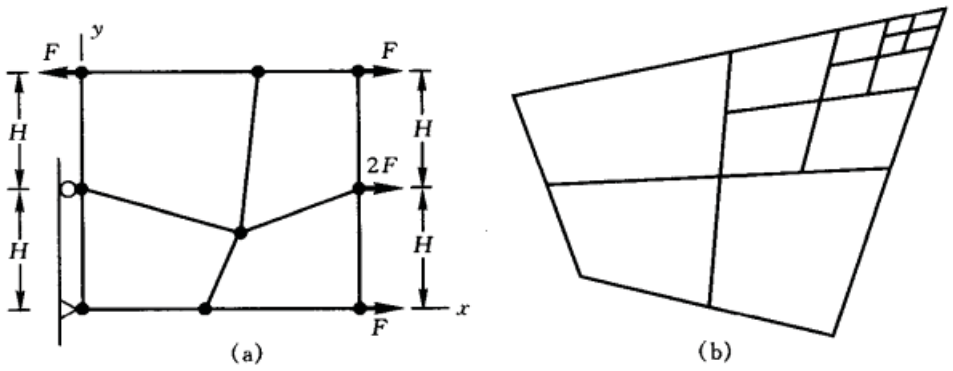


图 6.13－1　(a)平面 4 节点单元 σ_x 的分片试验；(b)反复细分不规则四边形产生平行四边形

为了正确计算常应力 σ_y 和 τ_{xy}，也可以测试平面分片。实体单元的分片应能正确地显示六个常应力的每一个。用于板弯曲分析的单元应能显示常量弯曲力矩 M_x 和 M_y 以及常量扭矩 M_{xy}。

人们也能够检查已计算的节点位移。如果位移正确但应力不对，就可以怀疑是应力算法出错。

稳定性　即使单元是不稳定的，也有可能通过分片试验，因为它包含一个寄生模式。典型地，引起单元不稳定的原因是对矩阵[k]积分使用的高斯点太少。如果单元的分片包含不稳定性，软件就会抱怨在试图解方程组[K]{D}={R}过程中遇到了 0 支点。你也可以通过扰动分片试验中施加的载荷发现其不稳定性。如果载荷值的细小变化使得计算的节点位移产生较大的变化，就会存在不稳定性。作为另外一个可选择的方法，可以提取分片[K]的特征值。如果分片在防止刚体运动中刚好有适当的支撑，则所有值应该是正的。零特征值说明存在寄生模式(参见 6.8 节和 8.10 节)。

“弱”分片试验　可以想象，连续的网格细化将会使结果向精确值收敛，即使所用单元没有通过分片测试。如果单元是一般形状，没有通过分片试验，但如果单元是平行四边形或平行六面体时却通过测试了，这种情况是有可能的。正确收敛之所以可能是因为对任意形状的单元重复细分，最后将会成为平行四边形或平行六面体(图 6.13－1(b))。通过分片试验的单元，当它的形状来自网格反复细化之后，且雅可比 J 在整个单元内基本上是常数时，则被看作是通过了“弱”分片试验。必须清楚弱分片试验的处理有很多的实际困难[6.23]。

备注　如上描述的，分片试验只检查常应力或常应变的情况。正确表示更为复杂的如线性变化的应力或应变的测试就叫“高阶”分片试验。受载于纯弯曲的(棱)柱状梁的 FE 模型构成“高阶”分片试验。

通过分片试验的稳定单元要能够显示(a)无应变的刚体运动,(b)常应变状态,(c)当各相邻单元内常应变状态占优势时,分片试验则显示相邻单元间的相容性。满足这些要求,足以保证这些单元的网格在除了分片试验以外的问题中,随网格无限细化而收敛于精确的结果[6.6]。

通过常应变分片试验表明单元随网格细化能正确收敛,但未言及单元的其它应用。一个通过分片试验的单元在粗糙的网格中可能表现出低精度或随网格细化收敛很慢。

对于新单元的开发者,分片试验是必不可少的。他们已经证明怀疑诸如一些不协调或欠积分单元列式事实上是有根据的。有限元分析的学生和学习使用新软件的专业人员可能也发现分片试验很有用,因为它们简单,输入数据易于准备,而且可以知道精确结果。

6.14 二维(2D)应用

等厚度正方形板中间有一个圆形的孔。几何和弹性性能如图 6.14-1(a)所示。均匀的压力 p 作用于孔的边界上,并且处于平面应力状态。确定主应力的大小及作用的位置。

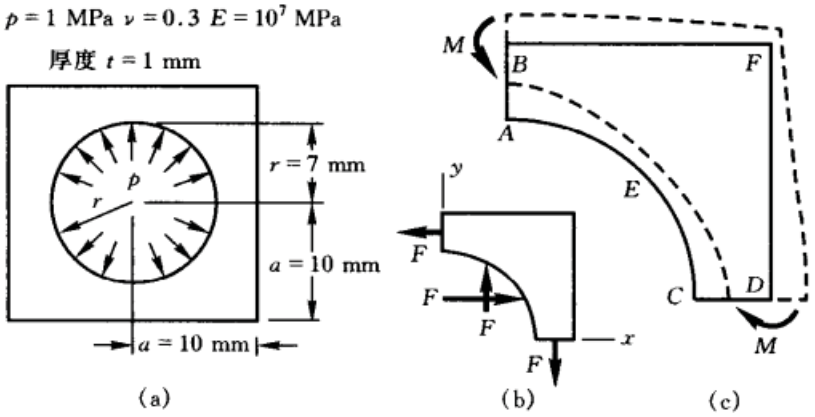


图 6.14-1 (a)带中心孔的平板受均匀压力;(b)作用于 1/4 部分的力;(c)虚线夸张地表示预期的位移形状

初步分析 在进行 FE 分析之前先用物理方法研究该问题并进行简单的计算,以便预先知道哪里的应力最大,准备一个好的 FE 模型,并获取近似结果用于与随后的 FE 结果进行比较。

几何、弹性性能和载荷都相对于垂直和水平中线对称。位移和应力有同样的对称性。因此可以仅对 1/4 圆部分进行分析。作用在有代表性的 1/4 部分的力 F 如图 6.14-1(b)所示。利用静力学,我们可以容易地计算出 F 的精确值。水平和垂直截面的平均正应力如下

$$F = prt = 7\ \text{N}$$

$$\sigma_{\text{ave}} = \frac{F}{(a-r)t} = 2.3\ \text{MPa} \tag{6.14-1}$$

变形将会关于水平和垂直中线对称,我们料想压力会将薄弱的地方比厚实的角区往外推得更多。因此我们预期位移后的形状如图 6.14-1(c)。我们看到薄弱部分向内弯曲,它一定与图示方向的弯矩 M 有关。所产生的弯曲应力在外面拉伸,在内面压缩,并将它们代数相加到式

6.14－1的 σ_{ave} 上。因此主应力可能出现在 B 和 D 点而不是 A 和 C 点。但也有另一种可能。因为弧线 AEC 往外弯曲，在 E 点可能有拉伸弯应力。因此点 B，E 和 D 都有可能成为正应力最大位置的候选点。

有限元分析　我们的数学模型就是如图 6.14－1(a)所示的几何形状，有内压力作用，并有平面弹性理论描述的行为。我们可能仅选择 1/8 圆建模，因为对角线也是对称轴。我们选择替代对 1/4 圆建模，因为对预想的关于对角线的对称性，支撑条件更直观，能够检查计算结果。为了图示说明，我们故意选了一个 4 节点 QM6 单元的非常粗的网格来作初始 FE 分析，十分期待在第二次分析中能用到它提供的信息。这个模型和它的边界情况如图 6.14－2(a)所示。网格关于对角线 EF 对称，在期望应力梯度低的角点 F 附近最为粗大。已经向所用的软件指明这是一个平面问题并且使用 QM6 单元，节点平移 w_i 及所有旋转自由度都被自动抑制。仅需要使用者明确施加边界条件的是在沿 AB 的节点 i 处 $u_i=0$ 和在沿 CD 的节点处 $v_i=0$。沿 AEC 由于压力 p 产生的节点载荷会自动计算。

结果评价　首先检验计算的位移，按比例排列以便于观看，并在监视器上以动画显示。我们看到沿 AB 的节点仅有 y 方向的位移，沿 CD 的节点只有 x 方向的位移，所有位移均关于对角线 FE 对称，体现了预期的位移形状(如图 6.14－1(c)中虚线所示)。这些结果与我们向软件描述的模型相适应，因此没有明显的错误。检查节点位移列表可以得到更为精确的检查结果。对使用的对称网格，会出现许多诸如 $v_A=u_C$ 的精确对称数字。

在得到精细的网格之后才能讨论正应力的最大值。现在，我们用粗网格检查了冯-米赛斯应力 σ_e(式 3.12－2)的等值线。节点平均应力等值线如图 6.14－2(b)所示，一个单元接一个单元的应力(不是平均)等值线如图 6.14－2(c)所示。和想象的一样，σ_e 的等值线关于对角线 EF 对称。除了反映网格的粗糙度外，平均等值线很少指明结果的不可靠性。不平均的等值线显示单元间严重的不连续。单元间的应力变化可与应力本身相比拟！很明显粗网格的结果不可信。

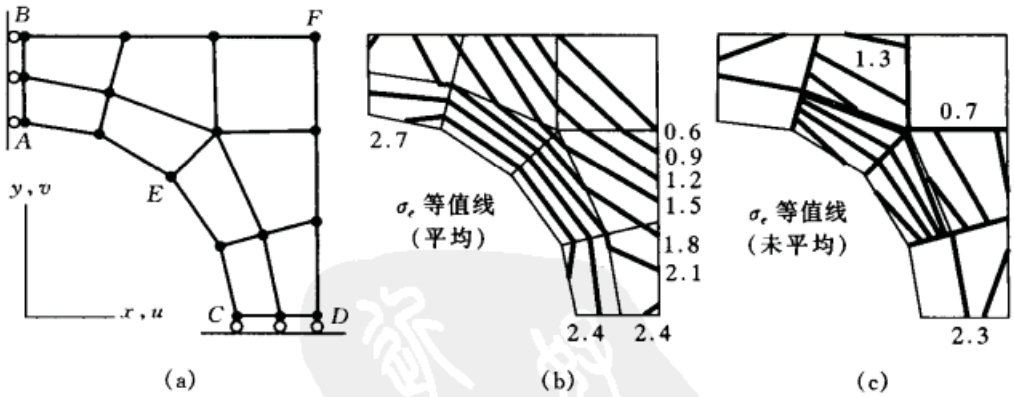


图 6.14－2　(a)显示边界条件的粗网格 FE 模型；(b)节点平均的冯·米赛斯应力 σ_e 等值线，单位为 MPa；(c)没有节点平均，来自各个单元的 σ_e 等值线

现在对 1/4 圆用精细网格来建模，再次使用 4 节点 QM6 单元。这次，正像所看到的，使网格关于对角线不对称(我们注意到软件中的自动生成网格工具，该例题中没用到，通常不识别或不利用结构对称性)。靠近 A，B，C，D 和 E 点单元最小，这些点的应力及应力梯度被认为比较大。E 点附近沿径向的单元更细小，因为图 6.14－2 表明应力梯度在直径方向比圆周方向大得多。位移的形状同样满足。节点位移列表说明变形关于对角线不是很对称，主要是由

于网格不对称。平均的和不平均的冯·米赛斯应力曲线如图 6.14－3 所示。结果比粗网格有了很大的改进，但不平均的等值线仍然存在严重的单元间的不连续。甚至平均的等值线在它们穿越一些单元边界的地方，方向上也表现出了明显的变化。σ_e 等值线没有与对称线 AB，CD 和 EF 正交。所有这些表明需要更加精细的网格。

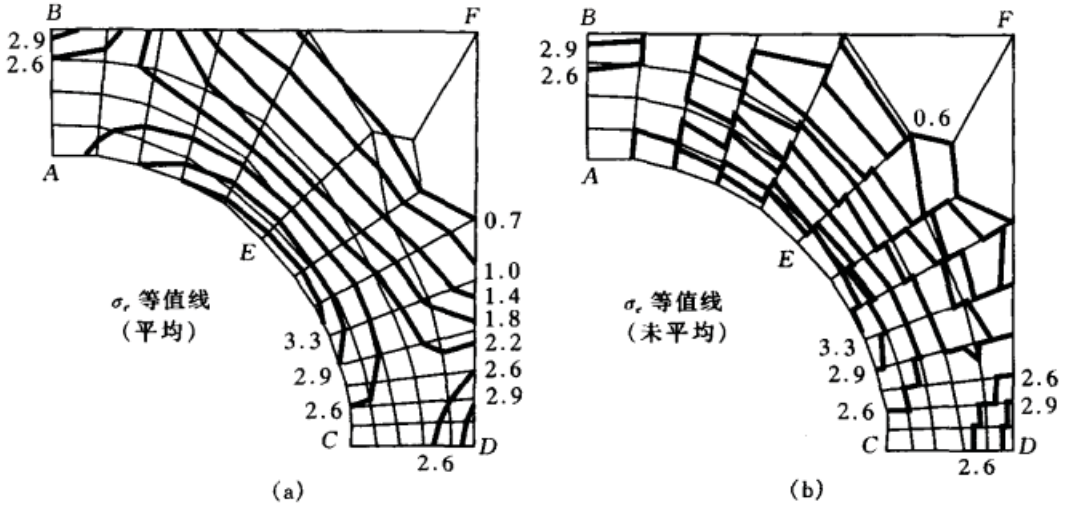


图 6.14－3 细网格的冯·米赛斯应力 σ_e 等值线，单位为 MPa
(a)来自节点平均应力；(b)未作节点平均，来自各个单元

两种网格的数值结果列在表 6.14－1 中。这些数据直接从输出文件得到，不必用直观检查位移图或应力图。位移结果是合理的。它们表明 AB 和 CD 尺寸被缩短，正如所料，是半径方向的压缩加载和圆周张力的泊松效应相结合的结果。计算位移表明精细网格更容易变形。通常如此，但不能保证，因为 QM6 单元是不协调的。在角 F 处，理论上应力为 0，如料想的一样，在角 F 处，理论上应力为零，计算值很小，网格越细，应力越小，像期望的那样。在 A 点，σ_x (表 6.14－1 中没有显示)几乎与 A 点的最大主应力 σ_1 相等。理论上在 A 点 $\sigma_x=\sigma_1$。它们之间的偏差在于 τ_{xy}，τ_{xy} 虽然小，但不完全为零，如理论所说，它应该在对称轴上。A 和 B 或 C 和 D 点的平均正应力与式 6.14－1 非常吻合。结构中最大主应力 σ_1 在 B 和 D 或 E 点，其数值在 3.1 MPa 左右。在网格没有进一步细化之前，我们不能确定它的具体位置或应力。

表 6.14－1 在图 6.14－2(粗网格)和图 6.14－3(细网格)中所选点的位移和最大主应力

单位：位移(mm)，应力(MPa)

节点	粗网格			细网格		
i	$10^6 u_i$	$10^6 v_i$	σ_1	$10^6 u_i$	$10^6 v_i$	σ_1
A	0	2.08	2.11	0	2.28	1.92
B	0	1.78	2.28	0	1.96	3.01
C	2.08	0	2.11	2.34	0	1.84
D	1.78	0	2.28	2.01	0	3.12
E	1.22	1.22	2.68	1.27	1.24	3.16
F	0.97	0.97	0.38	0.98	1.00	0.21

在 9.10 节讨论的应力场的误差度量，对粗网格 $\eta=0.373$，细网格 $\eta=0.183$。因为希望 $\eta<0.05$，这些量也表明网格需要进一步细化。进一步细化网格要根据图 6.14－3 中的信息，使应力及应力梯度最大的区域的网格最小。用绘制特定应力或特定位移与单元尺寸的关系曲线，像从 2 个或更多网格得到的，人们能够外推到零单元尺寸，因此能得到无限细化网格所预想的结果(9.7 节)。从而，能够从给定网格中估计结果的百分比误差。

我们现在可以承认对于这个问题可能不需要 FEA。参考文献[6.24]提供了实验确定的因子，从中我们得到在 B 点和 D 点 $\sigma_1=2.9$ MPa，在 E 点 $\sigma_1=2.7$ MPa。在一开始就询问计算求解是否真的必要是明智的，因为它并非无关紧要的工作。

6.15　三维(3D)应用

横截面为等边梯形的曲梁受到力矩 M 作用，在它所在平面内弯曲(图 6.15－1)。虽然结构几何体由横截面绕回转轴旋转生成，但这个问题不是轴对称的，因为位移有周向、径向和轴向分量。因此，分析使用三维实体单元而不是旋转实体单元。不过，结构几何体还是可以在柱坐标系中描述。

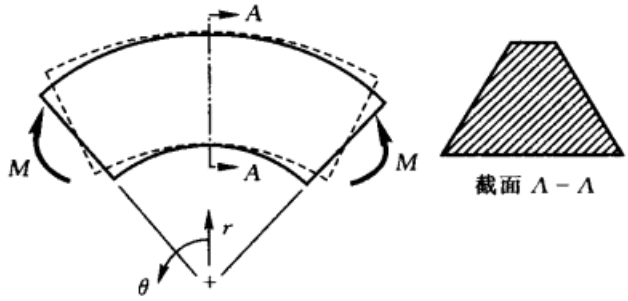


图 6.15－1　梯形截面曲梁，在自身平面内受弯矩 M 作用而弯曲。挠曲形状如虚线所示

我们寻求图 6.15－2(a)所示的梯形横截面的最大值应力。曲梁的应力不随 θ 改变，因此仅需要分析空间相邻径向平面间的典型薄片即可(图 6.15－2(b))。必须间接施加弯曲力矩 M，因为我们预先不知道它产生了什么样的周向应力，因而不能作用合适的节点载荷。我们将改为设定位移，这样径向面仍然保持为平面并且施加力矩载荷不伴随净力。根据计算应力我们将确定 M。这样，与设定的力矩 M_p 相关的应力可以由计算应力与比值 M_p/M 相乘得到。

初步分析　最简单的近似解答由直梁弯曲公式 $\sigma=Mc/I$ 得到，在内边界得到 $\sigma=8.94(10^{-6})M$，当 M 单位是 N·mm 时 σ 单位为 MPa。在曲梁中周向应力公式用起来是容易的[1.16,2.6]。在内边缘，由曲梁弯曲理论得到沿 $r=44$ mm 处的应力

$$\sigma_\theta = 13.46(10^{-6})M \tag{6.15-1}$$

如果 M 单位是N·mm，σ_θ 单位是 MPa。求得 M 后，再回到这个结果同 FE 的结果进行比较。式 6.15－1 能够满足要求吗？也许是，但有限元分析可能显示另外的情况。弯曲梁公式的假设是横截面在它所在平面内无畸变，因此平行于旋转轴，在 Z 方向应力不变。FEA 不包含这

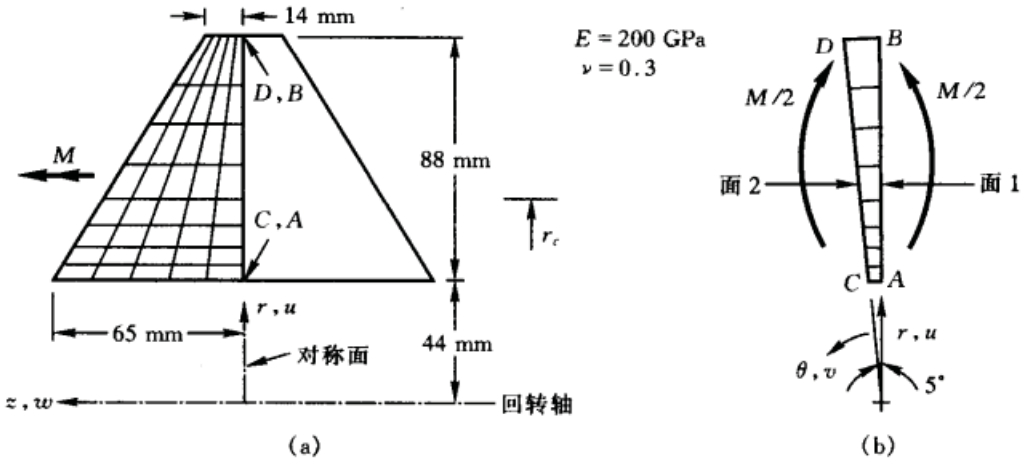


图 6.15-2 (a)曲梁横截面。仅在左半部需要划分有限元网格;(b)平行于回转轴看到的有限元模型

种限制,因此可能产生不同的结果。

有限元分析 我们的数学模型是面 1 和面 2 之间的楔(如图 6.15-2(b)),这些面上的位移要设定,并具有三维弹性理论所描述的行为。有关于 Z 为常数的平面的对称性,该平面包含点 $ABCD$,如图 6.15-2 所示,因此只需要一半截面进行网格化。曲梁理论预示应力梯度在靠近弧线中点的边缘最大。据此,网格也梯度化,离内边缘近的单元径向距离跨度小。在图 6.15-2(b)中,面 1 及其上的节点仅旋转 5°就产生面 2。面 1 和面 2 之间的薄片包含单层直边 8 节点实体单元,每个单元包含 9 个内部自由度 a_i(式 6.6-1)。作为边界条件,径向、周向和轴向的节点自由度设定如下:

面 1		面 2
在节点 A	$u=0$	
在所有节点处	$v=0$	在所有节点处 $v=0.0001(r_c-r)$
在沿 AB 的节点处	$w=0$	在沿 CD 的节点处 $w=0$

剩余的节点都是无约束的,令 A 点上 $u=0$ 以防止刚体 r 方向的运动,令面 1 上所有节点上 $v=0$ 以防止面 1 圆周方向的运动。设 $ABCD$ 处节点上 $w=0$,使其关于中间 $r\theta$ 面有对称性。式 $v=0.0001(r_c-r)$ 中的 0.0001 是一个任选的因子,它使面 2 绕在 $r=r_c$ 处的平行于 Z 的轴旋转时仍保持为平面。一开始合理的 r_c 值是不知道的,因此要分别地利用任意选定的 $r_c=60$ mm 和 $r_c=70$ mm 进行两次初步的有限元分析。这两个 r_c 值都不是正确的,因此两次初步的 FE 分析的每一次在 A 节点处引起并不存在的径向反作用力 R_A,这是因为所希望的加载是纯弯曲。用软件计算的 R_A 分别为 2 001N 和 357N。利用线性外推法,$r_c=72.2$ mm 处 $R_A=0$。$r_c=72.2$ mm 用于第三次也是最后一次的 FE 分析,得到期望的结果 $R_A\approx 0$。在面 1 上的周向支反力产生一个绕平行于 Z 轴的力矩,这可以用软件自动计算出来,这个力矩被翻倍,提供作用于整个截面的力矩 M。

结果评价 图 6.15-3(a)示出了变形的截面形状。计算机显示器上显示的画面表明,的确施加了想要的边界条件。从物理角度看,我们认为变形后的形状是合理的。如期望的那样,

径向应力是拉力，因此尺寸 88 mm 变大了。像所期望的，周向应力 σ_θ 在截面靠内和靠外分别是拉应力和压应力，但平行于旋转轴 z 的 σ_z 很小。因此泊松效应分别导致靠内和靠外在 z 方向的紧缩和扩张，的确像观察到的那样。位于靠内的周向拉力把材料拉向曲率中心。外部角点比中心部分更为挠曲。因此相对于中心点 A，角 E 向内移动是合适的。像期望的那样，在 r 值较小的地方 σ_θ 等值线间距更小。

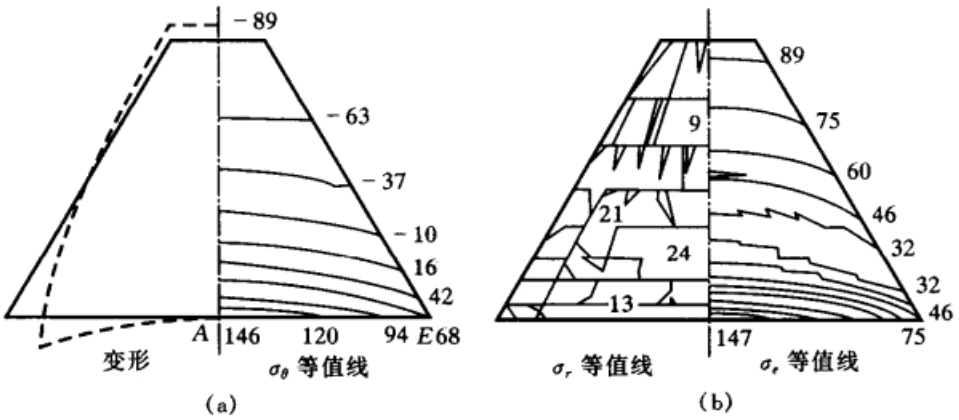


图 6.15－3　有限元分析的结果：变形的横截面和未平均的应力等值线。应力单位是 MPa（右半部显示的应力是由左半部有限元分析实际计算结果映射而来）

径向向内移动且由图 6.15－2(b)中面 1 和面 2 界定的材料必然在周向缩短。因此，压应变叠加到弯曲引起的拉应变上。径向挠曲对偏离最远的材料提供最大的“应力松弛”。因为这个原因，图 6.15－3(a)中的周向应力在 E 点比在 A 点要小。FEA 算得在 A 点 $\sigma_\theta=146$ MPa 和在点 E 点 $\sigma_\theta=65$ MPa。软件利用 σ_θ 来计算图 6.15－2 中 FE 模型面 1 上的矩为 $M/2$。因此得到 $M=8.804(10^6)$ N·mm，用这个 M，由曲梁公式（式 6.15－1），得 $\sigma_\theta=119$ MPa，这个值差不多是 A 和 E 处 FE 应力的均值 $(146+65)/2=106$ MPa。中性轴在 $\sigma_\theta=0$ 的点位置处。我们从 FEA 看到中性轴是弯曲的，这和材料力学理论的假定是相违背的。

图 6.15－3(a)中看不到单元间 σ_θ 等值线的不连续性。原因是 σ_θ 是由周向应变 $\epsilon_\theta=(u/r)+(\partial v/\partial\theta)/r$ 决定的[3.1]，但在 FE 方法中 $\partial v/\partial\theta=0$，因此在面 2 上 ϵ_θ 与位移成比例变化，理所当然单元间是连续的。图 6.15－3(b)所示径向应力 σ_r 等值线具有非常差的连续性。但是最大的 σ_r 大约是 25 MPa，与最大的 σ_θ 相比是非常小的。因此图 6.15－3(b)中冯·米赛斯应力 σ_e 曲线适度表示中等不连续性。9.10 节中讨论的误差度量给出 $\eta=0.05$，是一个小的可以接受的数值。我们推断出结果至少对应力 σ_θ 来说是可靠的。

分析题

6.1－1　(a) 从式 6.1－2 开始，求形状函数 N_i。
(b) 证明用拉格朗日插值可得到相同结果。

6.1－2　(a) 验证如果图 6.1－1(a)中的节点是等间隔的，则 $J=L/2$。
(b) 假设节点 1 上 ϵ_x 保持为有限值，节点 2 可以离中心移动多远？

6.1－3　如果图 6.1－1(a)中单元的节点是均匀排列的，计算它的 3×3 刚度矩阵。假设 A 和 E 是常数，进行显式积分。

6.1-4 除去图 6.1-1(a)中的内部节点，这样单元就变成了一个只有端节点的杆。利用自然坐标 ξ，推导均匀单元的 2×2 刚度矩阵。

6.1-5 在图 6.1-1(a)中设 $x_3-x_2=L/4$ 和 $x_2-x_1=3L/4$。如果仅节点 3 具有轴向位移（$u_1=u_2=0$，$u_3\neq 0$），求各个节点的应变 ε_x。

6.2-1 对于图 6.2-1(a)中的单元，设 $x=\lfloor 1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta \rfloor \lfloor a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \rfloor^{\mathrm{T}}$。

(a) 写出 $\lfloor x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \rfloor^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{A}]\lfloor a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \rfloor^{\mathrm{T}}$ 关系中的矩阵 $[\boldsymbol{A}]$。

(b) 通过观察式 6.2-3，写出关系式 $x=\lfloor 1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta \rfloor[\boldsymbol{A}]^{-1}\lfloor x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \rfloor^{\mathrm{T}}$ 中的 $[\boldsymbol{A}]^{-1}$。

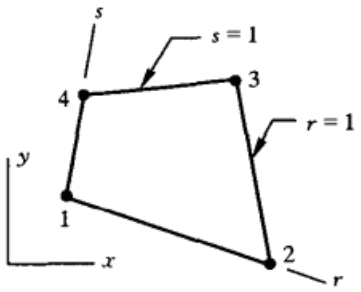
(c) 如果 $[\boldsymbol{A}][\boldsymbol{A}]^{-1}=[\boldsymbol{I}]$，通过观察检验(a)、(b)中的答案。

6.2-2 画出一个四边形简图，适当地用字母标出角点，并合理地定出 $\xi\eta$ 轴的方位，使其形状函数可写成如下形式：

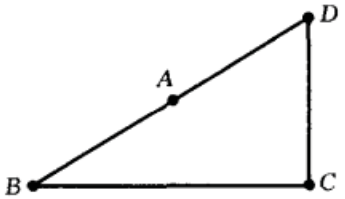
$N_A=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$，$N_B=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$，$N_C=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$，$N_D=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$。

6.2-3 可以选择自然坐标而不是图 6.2-1 中的 $\xi\eta$ 坐标系。另一种选择就是图示的 rs 坐标系。写出用 r 和 s 形式表示的双线性单元形状函数。

6.2-4 对于图示单元，设在(a)点 A，(b)点 B，(c)点 C 和(d)点 D 有 $\xi=\eta=-1$。在每一种情况下，分别画出三条线 $\xi=-0.5$，0.0，0.5 和 $\eta=-0.5$，0.0，0.5。形状函数如式 6.2-3 描述的那样。



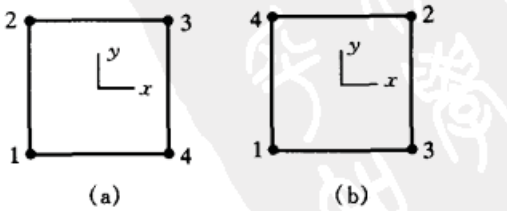
题 6.2-3



题 6.2-4

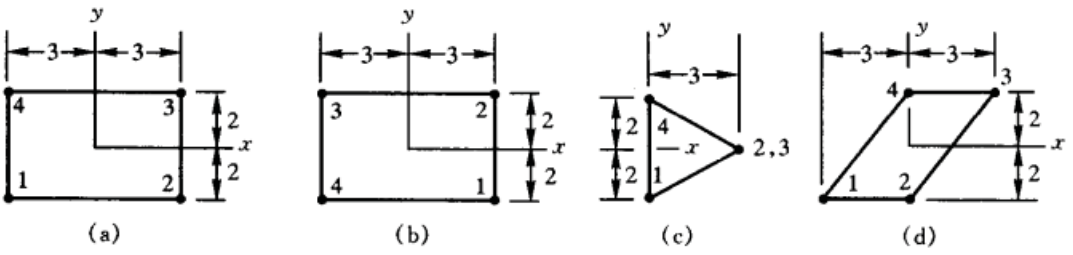
6.2-5 画出一个 4 节点平面单元使它的 J 只是 ξ 的函数，而与 η 无关。

6.2-6 考虑边长为 2 个单位长度的正方形单元。对于这样的单元，图示的节点编号都会产生困难。利用式 6.2-3 中的形状函数，确定每一个单元的 $[\boldsymbol{J}]$ 和 J。对于第一个单元的 $\xi\eta$ 轴和第二个单元的形状，图示节点编号意味着什么？



题 6.2-6

6.2－7　计算图示四个单元中每一个的[J]和 J，确定单元面积与边长为 2 个单位长度的正方形面积的比值，这个比值与 J 有怎样的关系，为什么？



题 6.2－7

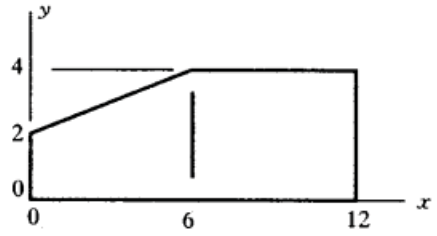
6.3－1　在区间 $-1\leqslant\xi\leqslant1$ 内，用二阶高斯规则精确地积分多项式 $\phi=a_1+a_2\xi+a_3\xi^2+a_4\xi^3$，来推导该规则的位置和权重。假设样本点和权重关于区间的中点对称。

6.3－2　在题 6.2－3 中，二阶规则高斯点的 r 和 s 坐标是什么？与之有关的权重 W_i 是什么？(对 r 和 s 的积分限都是从 0 到 1)。

6.3－3　对于 2×3 的高斯规则，写出一个类似于式 6.3－7 积分 I 的表达式。

6.3－4　假设 3×3×3 的高斯积分应用于一个六面体单元。权重乘积 $W_iW_jW_k$ 出现什么样的数值？有多少点与这些数值的每一个相关联？检查你的答案是否给 $J=1$ 的单元提供了正确的体积。

6.3－5　图中面积由梯形和矩形组合而成。使用一、二和三阶高斯规则计算这个面积，并求出每一个结果的百分比误差。



题 6.3－5

6.3－6　使用一点，二点和三点高斯积分积出下列函数。求出每一个结果的百分比误差。

(a)$\phi=\xi^2+\xi^3$，积分限是区间 $\xi=-1$ 到 $\xi=+1$。

(b)$\phi=\cos1.5\xi$，积分限是区间 $\xi=-1$ 到 $\xi=+1$。

(c)$\phi=(1-\xi)/(2+\xi)$，积分限是区间 $\xi=-1$ 到 $\xi=+1$。

(d)$\phi=1/x$，积分限是区间 $x=1$ 到 $x=7$。

6.3－7　使用高斯积分法求积分

$$I=\int_{-1}^{1}\int_{1}^{1}\frac{3+\xi^2}{2+\eta^2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

使用(a)一点，(b)四点，(c)九点高斯积分，求出每一个结果的百分比误差。

6.3－8　(a)使用两点高斯积分，求出一个长度为 L 的均匀的 2 节点杆单元的刚度矩阵。结果应当与公式 2.2－1 一致。

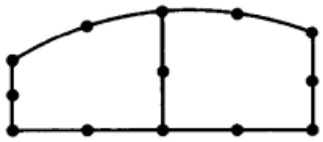
(b)重复(a),但设横截面积从节点 1 处的 A_1 线性地变到节点 2 处的 A_2。

(c)重复(b),但使用一点高斯积分。

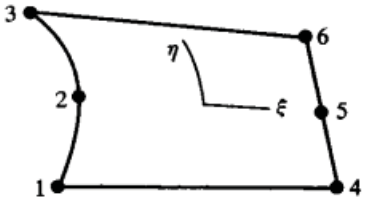
6.3-9 重复题 6.1-3,但使用两点高斯积分而不是显式积分。

6.3-10 使用两点高斯积分而不是显式积分,求出均匀梁单元的刚度系数 k_{ij}。忽略横向剪切变形。应变-位移矩阵如式 3.3-13 所述。注意到样本点到中心的距离取 $L/2$ 的 $1/\sqrt{3}$倍和 $x=(1+\xi)L/2$ 是有助于计算的。

6.4-1 考虑两个相邻的平面二次单元,如图所示。证明表 6.4-1 中的形状函数提供了沿公用边界单元间场量的连续性。



题 6.4-1



题 6.4-2

6.4-2 图示单元的形状函数在单元 ξ 方向跨度上用"呈弯曲状"的 η 二次型来生成。用这种方法处理,使用图示的节点编号,写出 6 个形状函数。

6.4-3 对于平面二次型拉格朗日单元(9 节点),以图 6.4-2(d)的方式描绘出形状函数 N_1。通过计算在 $\xi=\pm1/2$ 和 $\eta=\pm1/2$ 上的 N_1 来决定每一象限中的 N_1 是正的还是负的。

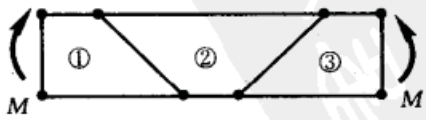
6.4-4 如果(a)单元是矩形的,(b)单元有两个曲边,描绘一个 8 节点的平面单元,它的雅可比 J 是 η 的函数而不是 ξ 的函数。

6.4-5 考虑一个 9 节点的平面单元,它的形状函数由表 6.4-1 给出。从 5 到 9 的任何一个节点都可被忽略。以相似的方式,为了产生一个有效的直边单元,角点 1 也能被省略吗?提示:在角点 1,考虑平行于一个边的位移。

6.4-6 考虑标准的 C^1 梁单元,它在两个端节点上都有平移和旋转自由度。设想增加一个横向的位移模式,类似于式 6.4-3 中的气泡函数模式,这样模式的激活不至于破坏与可能在任意一端相连的梁单元的连续性。提供一个合适的形状函数。

6.6-1 如果 QM6 单元一个网格内的节点自由度计算之后,从应力计算中忽略式 6.6-1 中的无节点自由度 a_i,期望会得到什么结果?例如,考虑图 6.11-1 中的正方形单元的情况。

6.6-2 图示梁中的三个单元都是平面 QM6 单元。检查在所示的弯矩作用下单元 2 沿边的位移,说明纯弯曲不能由梯形的 QM6 单元来精确建模。



题 6.6-2

6.7－1　把凝聚应用于题 2.8－7 中所示的三个方程组。设$\{\boldsymbol{d}_r\}$有单一自由度 u_4。求解 u_4，然后使用式 6.7－2 恢复$\{\boldsymbol{d}_c\}$中剩余的 2 个自由度。验证结果满足初始方程。

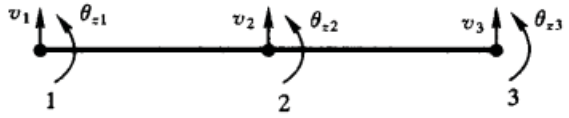
6.7－2　图 6.1－1(a)的 3 节点杆单元是均匀的，节点 2 是其中点。它的刚度矩阵$[\boldsymbol{k}]$的第一行是$(AE/3L)\lfloor 7 \quad -8 \quad 1 \rfloor$。依据自由度$\lfloor u_1 \quad u_2 \quad u_3 \rfloor^{\mathrm{T}}$运算矩阵$[\boldsymbol{k}]$。

(a)不作计算，填满$[\boldsymbol{k}]$的剩余项。提示：考虑单元性能的对称性、$[\boldsymbol{k}]$的对称性和刚体的平移。

(b)求用凝聚 u_2 产生的 2×2 的单元刚度矩阵。

(c)设杆承受一均布的集度为 q 的轴向载荷。从 3×1 的协调载荷矢量$\{\boldsymbol{r}_r\}=(qL/6)\lfloor 1 \quad 4 \quad 1 \rfloor^{\mathrm{T}}$开始，得到与自由度 u_1 和 u_3 有关的被凝聚的载荷矢量。如果 $u_1=0$，解出 u_3，然后恢复被凝聚的自由度 u_2，最后检查按$[\boldsymbol{k}][\boldsymbol{d}]$计算的节点载荷。

6.7－3　简图示出了两个均匀梁单元，在节点 2 处相连。在连接以前，单元 1－2 中的自由度 θ_{z2}被凝聚，因此，节点 2 是铰连接。从式 2.3－5(同式 3.3－14)的刚度矩阵开始，得到左边单元的 3×3 凝聚刚度矩阵。



题 6.7－3

6.7－4　考虑一个均匀梁单元，它在 xy 面内变形并可以抵抗弯曲和轴向变形。如图所示，设单元在两端分别连接一个旋转弹簧，弹簧刚度分别是 k_1 和 k_2(单位：弯矩/弧变)。β_{z1}和 β_{z2}是结构节点转角。单元旋转自由度 θ_{z1}和 θ_{z2}通过旋转弹簧和结构自由度 β_{z1}和 β_{z2}连接起来，因此，$\beta_{z1}\neq\theta_{z1}$，$\beta_{z2}\neq\theta_{z2}$。像通常一样，平移自由度直接相连。描述写出 8×8 单元刚度矩阵的步骤，该矩阵依据自由度$\lfloor u_1 \quad v_1 \quad \theta_{z1} \quad u_2 \quad v_2 \quad \theta_{z2} \quad \beta_{z1} \quad \beta_{z2} \rfloor^{\mathrm{T}}$运算，从中得到的 6×6 矩阵依据自由度$\lfloor u_1 \quad v_1 \quad \beta_{z1} \quad u_2 \quad v_2 \quad \beta_{z2} \rfloor^{\mathrm{T}}$来运算，并且是 A，E，I，L，k_1 和 k_2 的函数。



题 6.7－4

6.8－1　在图 6.1－1(a)中，设 $x_3-x_2=L/3$ 和 $x_2-x_1=2L/3$。使用一点高斯积分求有均匀 A 和 E 的单元刚度矩阵。

6.8－2　如果单元厚度可变，并按 $t=\sum N_i t_i$ 由节点值 t_i 来计算。对于(a)一个 4 节点的平面单元和(b)一个 8 节点的平面单元，为了计算精确体积，需要哪一阶的高斯积分？

6.8－3　证明：可由二阶高斯规则精确地算出 8 节点实体单元的体积。

6.8－4　设下面的平面单元是矩形，边节点(如果存在)等间距分布，单元厚度按 $t=\sum N_i t_i$ 由节点值 t_i 算出。对于(a)4 节点单元和(b)8 节点单元，确定为精确计算刚度系数 k_{ij}所需要的高斯积分阶次。

6.8－5　在图 6.11－1 中，假设高斯积分的阶次由 2 变到 3。对于四种测试的每一种情况，计算挠度时质量上的变化是什么？

6.8－6　验证：图 6.8－3(d)中关于 u 和 v 的表达式在正方形单元的四个高斯点产生了零应变。

6.8－7　对于下列单元的每一种，在单点高斯积分法下，写出(如果可能)代表寄生模式的节点自由度矢量$\{\boldsymbol{d}\}$。

(a)图 6.1－1 中的 3 节点杆单元。

(b)一个标准的 4 自由度梁单元(见式 2.3－5 或 3.3－14)。

6.8－8　对下面的单元和不均匀的高斯求积规则，$[\boldsymbol{k}]$的秩是多少？使用这个规则的缺点是什么？

(a)Q4 平面单元中用 2×1 的规则。

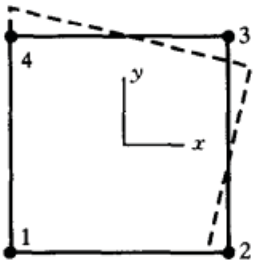
(b)QM6 平面单元中用 2×1 规则。

(c)Q8 平面单元中的 2×3 规则。

6.8－9　图示的 4 节点单元初始状态是边长为单位 2 的正方形。节点位移分量在 x 和 y 方向上的大小都是 c，产生了虚线表示的位移后的形状。

(a)求出应变$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}=[\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{d}\}$，并且证明在单元中心是零。

(b)证明：通过图 6.8－1 中的模式 7 和 8 的组合及刚体转动可以得到节点位移向量$\{\boldsymbol{d}\}$。



题 6.8－9

6.8－10　设一 8 节点的实体单元是矩形的，边长是两个单位，因此，$\xi=x$，$\eta=y$，$\zeta=z$。

(a)只考虑 x 方向的位移 u。设$\{\boldsymbol{d}_x\}$代表节点自由度 u_i。对于每一个在单点高斯积分下只包含 u_i 的寄生模式，画出变形后的单元并求出相应的$\{\boldsymbol{d}_x\}$(具有任意大小)。

(b)类似地，只考虑 u_i，对于每一个独立的刚体模式和常应变模式，写出$\{\boldsymbol{d}_x\}$。

(c)证明：(a)中的向量$\{\boldsymbol{d}_x\}$正交于(b)中的那些向量。

6.8－11　对于六面体有 6 点积分规则，所用的样本点位于每个面的中间[6.25]。权重因子 W_i 是多少？对于一个矩形 8 节点单元，用这个规则积分它的$[\boldsymbol{k}]$，可能的寄生模式是什么？这些单元的网格也能够展示这些机理吗？

6.9－1　设均匀的力垂直作用在二次拉格朗日实体单元的一个面上，这个面是矩形的并有均匀间距的节点。在协调的单元载荷向量$\{\boldsymbol{r}_e\}$中，该面 9 节点的每一个点上，出现总作用力的份额是多少？

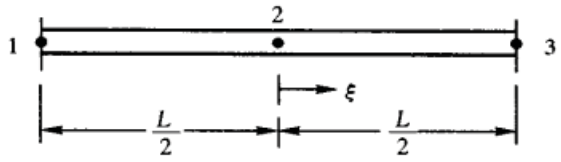
6.9－2　(a)计算在题 6.10－1(b)中杆单元的所有 3 节点的节点载荷。

(b)计算与题 6.10－2 中自由度 a_1 有关的节点载荷。

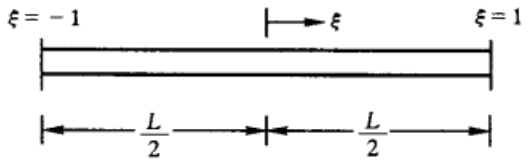
6.10－1　图 6.1－1(a)中的 3 节点杆单元是均匀的并有相同的节点间距。关于单元刚度矩阵的信息见题 6.7－2。在下列载荷的每一种情况下，计算并绘出沿着图示固支端单元的轴向应力分布，并把计算结果和精确结果作一比较。

(a)轴向载荷作用于节点 2 上。

(b)集度为 q 的轴向均布载荷沿整个杆作用。



题 6.10－1



题 6.10－2

6.10－2　一个有均匀弯曲刚度 EI 的梁两端固定，如图所示。用一个单元建模，对其施加横向位移模式 $a_1(1+\cos\pi\xi)$，其中 a_1 是非节点自由度。集度为 q 的均布横向载荷作用在整个梁上。

(a)确定与 a_1 有关的刚度系数。

(b)求出跨度中点处预估的横向挠度和它与精确值相比的百分比误差。

(c) 求出跨度中点处和端面处预估的弯矩和各自的百分比误差。

6.10－3　重做上题，但载荷 q_1 由作用在中点处的集中载荷 P 取代。

6.10－4　利用式 6.2－3 中的形状函数，证明：图 3.6－2(b)中在 $\eta=0$ 的线上 $\gamma_{xy}=-c\xi$，其中 c 是一个常数。为了简便，假设单元是正方形的。

6.10－5　(a)验证式 6.10－5 中的数值系数。

(b)将式 6.10－3 应用于图 6.10－2 中的节点 B，C 和 D，求出式 6.10－5 中的数值系数。

(c)类似地，将式 6.10－3 应用于图 6.10－2 中的节点 E，F，G 和 H。

6.10－6　用六面体中二阶规则的 8 高斯点上的应力 σ_i 写出类似于式 6.10－3 的公式。利用它写出图 6.5－1(a)的 8 节点单元中在下列位置类似式 6.10－5 的应力 σ_x 表达式：(a)节点 8 和(b)$\xi=1$ 面的中间。

6.10－7　在一个有平行四边形形状的 4 节点平面单元中，直接在节点上计算的应力与从 4 高斯点外推到节点上的应力完全一致。如果单元形状是任意四边形就得不到这种一致性。为什么？

6.10－8　假设一个平面双线性单元不是等厚度。根据式 6.10－1，厚度改变在计算应力中起到什么作用？提示：对能够改进应力计算精度的厚度变化，作特定调整。

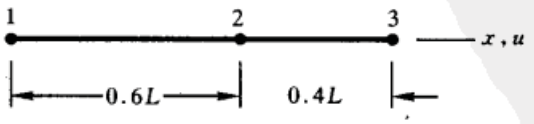
6.10－9　图示均匀的杆单元有 3 个节点，其轴向位移是 $u_1=0$，$u_2=0$，$u_3=0.001L$

(a)在节点上直接计算轴向应变 ε_x。

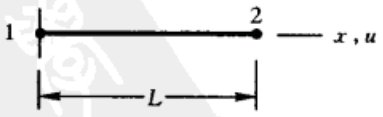
(b)计算二阶规则高斯点上的轴向应变 ε_x。

(c)在 2 个高斯点用 ε_x 值外推计算每个节点上的 ε_x。

(d)写出应变 ε_x 而不是应力 σ_x 的式 6.10－6，然后重算节点 3 的 ε_x。



题 6.10－9



题 6.10－10

6.10－10　(a)图示均匀杆单元的节点 2 有轴向位移 u_2。证明：与式 6.10－7 和 6.10－10 有关的应力计算可得到预期的 $\sigma_x=Eu_2/L$。

(b)对于图 6.1－1 的 3 节点杆单元，如果 $x_2=(x_1+x_3)/2$，则 ε_x 是关于 ξ 线性的。因此，在公式 6.10－7 中使用 $\sigma_x=\beta_1+\beta_2 x$ 初看起来是恰当的。为什么在实际中是不可接受的？

6.11－1 在图 6.11－2(a)中，确定由(a)$\xi=-1$ 和 $\xi=-1/\sqrt{3}$及(b)$\eta=0$ 和 $\eta=-1$ 描述的点位。

6.11－2 从矩形 4 节点平面单元开始，一起移动节点 3 和 4 让它们在 η 轴上重合。

(a) 以图 6.11－2 的方式绘出所形成的单元和二阶规则的 4 个高斯点。

(b)单元中最小的雅可比 J 是什么？在这 4 个高斯点中，J_{max}/J_{min}的比是多少？

6.11－3 起始于边长为两个单位的正方形 4 节点单元，通过移动节点 3 生成一个三角形，使节点 2,3,4 共线并有等间距。

(a) 以图 6.11－2 的方式绘出所形成的单元和二阶规则的 4 个高斯点。

(b)在每一个节点上的雅可比 J 的数值是多少？

6.12－1 (a)对于式 6.2－3 和 6.4－1 中的 N_i，验证 $\sum N_i=1$。

(b)从 $\sum N_i=1$ 我们得到 $\sum N_{i,\xi}=0$ 和 $\sum N_{i,\eta}=0$。验证式 6.2－3 中的 N_i 满足后一个求和公式。

6.12－2 设一个 3 节点杆单元的几何形状由三个 x_i 来定义，如图 6.1－1(a)。在单元上从端点位移 u_1 和 u_3 用 ξ 线性插值轴向位移。因此该单元是超参数的。求出轴向应变的表达式。然后，证明除非节点 2 在杆的中点，否则这个单元是无效的。

6.13－1 假设图 6.13－1(a)中的网格通过了分片试验。如果所有的 9 个节点指定的位移与常应变场相协调，从$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}$的计算中，将在内节点上引起什么样的载荷，为什么？

6.13－2 绘出一个六面体单元的组集图，它可以方便地应用于分片测试。设单元只有角节点。指出支撑和节点载荷适合于测试均匀应力 σ_z 的正确表达式。

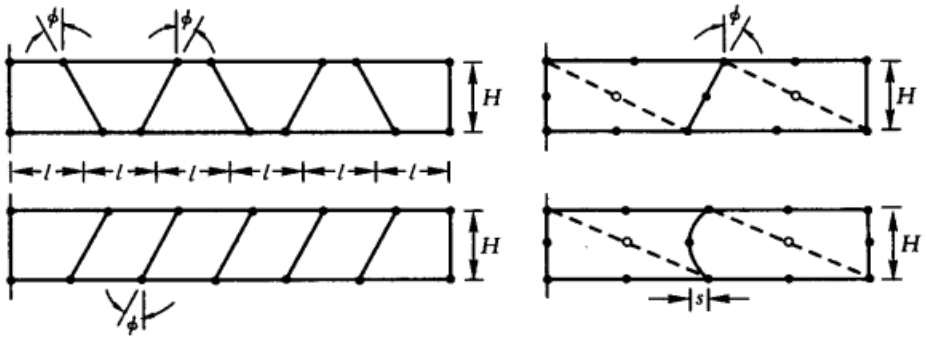
计算题

在下面的问题中，计算位移和/或应力的值。尽量利用对称性。当使用网格细化时，求出最好网格的百分比误差。当尺寸和载荷未指定时，选择合理且便利的值。当材料属性需要知道但未给出时，按钢处理。应用 1.5 节中的分析方法。

C6.1 (a) 构建一个含有几个单元的网格，适合于分片测试，含有如图 3.12－3 中的一个“劣质连接”。检查一下分片测试是否通过。如果没有，劣质连接处影响范围有多大？

(b)在一个矩形 20 节点的块形体的一面上，施加一个均匀的压力(见图 6.5－1(b))。固定相对面上所有节点的所有自由度。对于 $\nu>0$，或者 $\nu=0$，可计算均匀应力吗？对于 $\nu>0$，固定与均匀应力相协调的的自由度的最小数目，然后重新计算。(多少自由度被固定?)如果被固定的自由度少于六个，软件将会怎样？

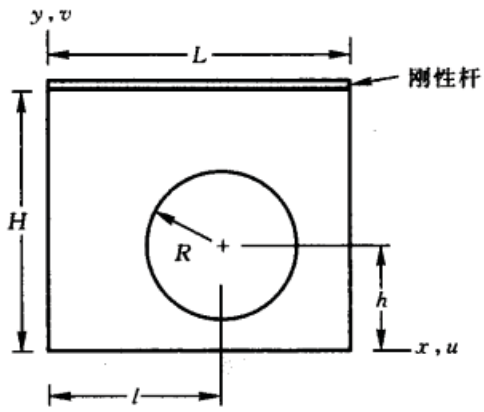
C6.2 人们可以系统地研究网格畸变的效应[6.26]。例如，如果图示的平面梁由 Q4 和 QM6 单元建模，人们可以在改变 ϕ(或 l/H)的同时保持 l/H(或 ϕ)为常数。使用边上有节点的三角形或四边形单元，可以改变 ϕ 或 s/H。可能的加载包括端部力矩和端部横向力。



题 C6.2

C6.3　当题 C6.2 的变量用于平面应变状态，保持所选择网格的几何形状，在泊松比接近 0.5 时会出现什么情况？

C6.4　图示的矩形板中间有一个孔，下面被固定在一个刚性基座上，上面连有一刚性杆。寻找冯·米赛斯应力 σ_e 的峰值。由设定的刚性杆运动给模型加载（x 或 y 方向的平移或绕一端的旋转等等）。

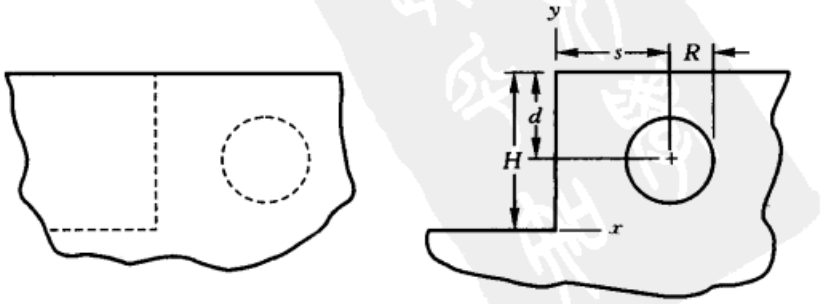


题 C6.4

C6.5　(a)在题 C6.4 中，用增加 z 向材料厚度直到半径 $1.3R$ 左右来加强圆孔。

(b)在题 C6.4 中，忽略刚性杆，由提高孔周围材料的温度给结构加载，升温范围达半径 $1.3R$ 的左右。

C6.6　单层的土壤或岩石可看做是连续的弹性介质，由其自身重量加载。挖掘一个高度为 H 的垂直切面和/或半径为 R 的隧道，如图所示。应力状态会发生什么变化，最终的应力状态是什么？假设 z 在方向上是平面应变条件。

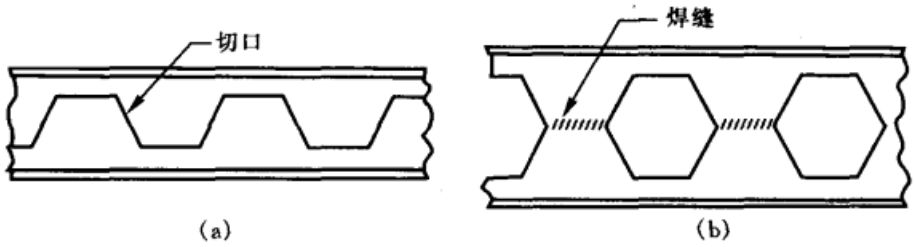


题 C6.6

C6.7 利用直角坐标中的平面单元去求解一个带中心圆孔的圆盘，由内或外压加载，或者由只在半径方向上变化的温度加载。使用类似于图 6.15－2(b)的楔形网格(但是是平面的)，节点只允许有径向位移。

C6.8 由实验确定的多种几何形状平面应力状态的应力集中因子已在表格[1.16.6.24]中列出。一些具体的建议在 C3.2 中给出。因子可由有限元分析来验证，使用本章中描述的单元或逐步细化网格，直到误差小于 5%。

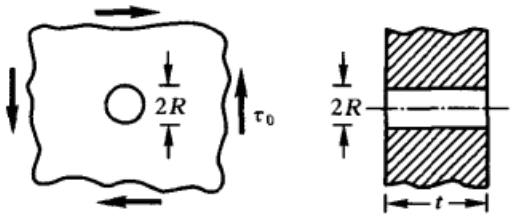
C6.9 城堡式的梁是出于减重设计而在腹板中留有孔的梁。它的制造过程是，先在腹板中沿 Z 字形路径切割标准梁，然后把两片移位并焊接在一起，如图示。利用典型的支撑和加载情况，分析城堡形梁的应力。



题 C6.9

C6.10 如果软件允许改变高斯积分的阶数，研究它在不同问题中的效果，包括在图 3.7－2，6.6－1，6.8－2，6.8－4，6.11－1 和表 6.11－1 中的试验情况。

C6.11 如图所示，一个厚板带有一个小半径的孔。在离孔很远处板处于纯剪切状态。研究孔边缘的应力状态。同时也观察泊松比的效应。

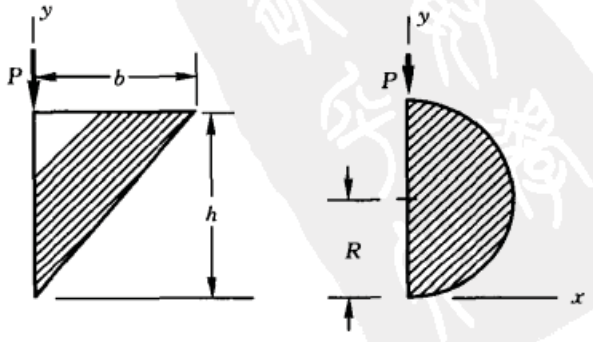


题 C6.11

C6.12 一个棱柱悬臂梁，它的横截面是一个直角三角形或一个半圆形，如图所示。

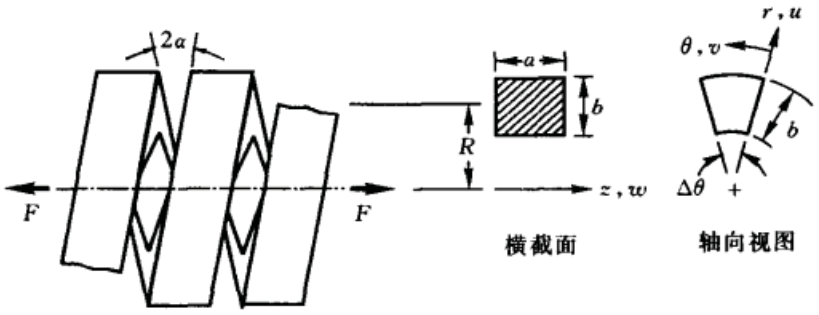
(a)作用于图示部位的横向端部载荷 P 产生的挠度和应力是多少？

(b)如果梁是没有扭转的弯曲，载荷 P 必须通过 x 轴方向上的哪一位置？



题 C6.12

C6.13　下图中是一个有质量的螺旋弹簧，它是由矩形截面杆挠曲成螺旋状形成的。轴向载荷 F 作用在端点（未画出）上，研究螺旋的一个楔形部分，跨度角为 $\Delta\theta$，如图示。如果角度 α 很小，就可以假设形成楔面的横截面上 $u=0$[3.1]。并且，当 $\theta=0$ 时 $w=0$ 和当 $\theta=\Delta\theta$ 时 $w=c\theta$，其中 c 是常数。周向位移 $v=v(r,z)$，施加 u 和 w 的位移边界条件，求解应力，并从受约束节点上计算的反作用力中求 F。



题 C6.13

第 7 章

等参数三角形和四面体

如果采用类似于第 6 章讨论过的坐标和方法列式，三角形单元就可以有曲边，四面体单元可以含有曲边和曲面。对于这些一般的形状，单元矩阵通过数值积分来列出。具有直边和等距离棱边节点的单元（如果存在）可看作是特殊的情况，能够采用特殊公式精确积分。

7.1 参考坐标·形状函数

在 3.4 和 3.5 节中，介绍了常应变三角形（CST）和线性应变三角形（LST），在那里给出了多项式的位移场和应变场，但没有提供单元列式的细节。现在考虑这些细节，在格式上，允许单元曲边有边节点。对类似的四面体单元也加以考虑。与第 6 章中的 $\xi\eta$ 和 $\xi\eta\zeta$ 坐标系类似，本章采用的参考坐标系 rs 和 rst 也是自然或固有的坐标系（图 7.1-1）。它们依附于单元并保持它们的位置，不考虑单元在总体坐标的方位。而且单元的物理形状和大小不影响节点所在的参考坐标的数值。因此各种形状和大小的物理单元在参考坐标系下都会映射成具有相同的形状和尺寸。本章讨论的单元都是等参数的，也就是单元形状和单元场量用同样的插值函数来定义。

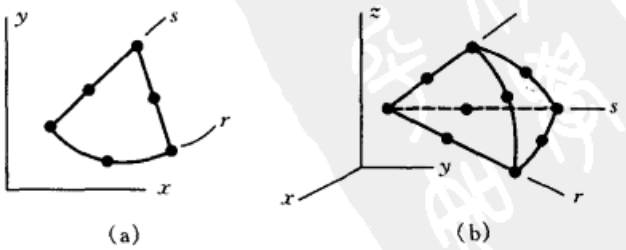


图 7.1-1 在笛卡儿坐标中表示参考坐标系 rs 和 rst 的二次单元
(a) 6 节点三角形单元；(b) 10 节点四面体单元

在常见的应力分析问题中，3 节点三角形单元和 4 节点四面体单元对剪切锁定比较敏感。高阶单元如 6 节点三角形和 10 节点四面体在应力分析中更为可取。3 节点三角形单元适合于标量场问题，在那里类似剪应变的梯度项不出现。

三角形　如果边界和内部的节点具有规则的模式，就能够产生一族直边三角形，其中每一个在笛卡儿坐标系下都含有完整多项式(图 7.1－2)。下面我们仅对线性和二次三角形进行研究。

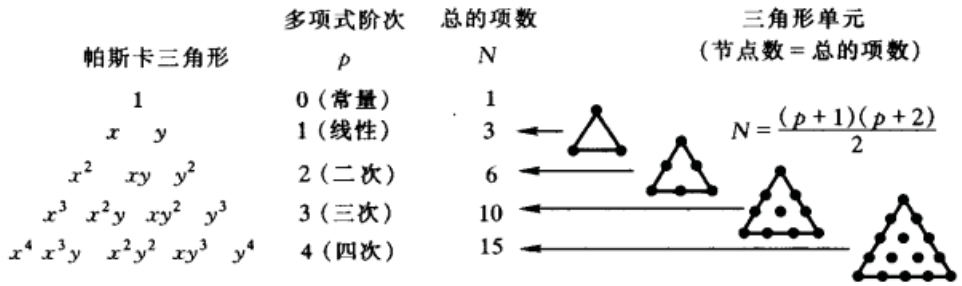


图 7.1－2　平面三角形单元类型和用于插值的多项式系数之间的关系

当映射到参考坐标系 rs 中时，不管单元的物理形状和大小如何，3 节点和 6 节点三角形有图 7.1－3 所示的节点位置。图 7.1－3(a)所示的 3 节点三角形单元的形状函数为

$$N_1 = 1-r-s \quad N_2 = r \quad N_3 = s \tag{7.1-1}$$

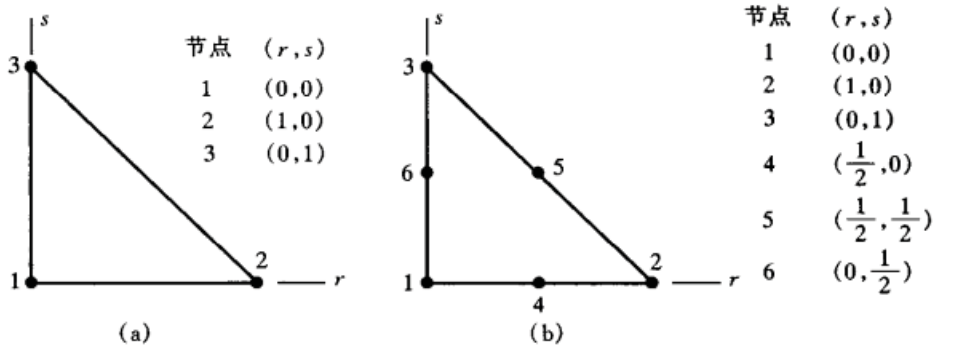


图 7.1－3　映射到参考坐标系 rs 上的线性和二次三角形单元。图示出单元节点的 r 和 s 坐标

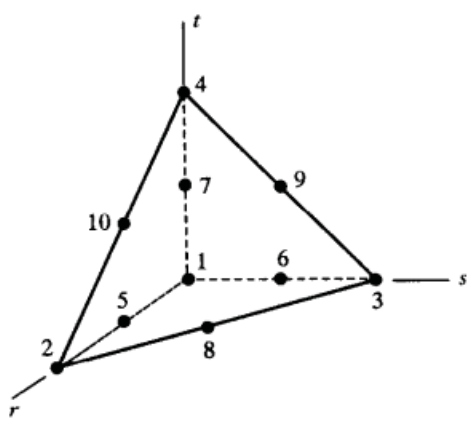
我们看到，在节点 i 处 $N_i=1$，而在其他节点处 $N_i=0$，正如形状函数所要求的那样。方程 $N_1=0$，$N_2=0$ 和 $N_3=0$ 分别是三角形一个边的方程。事实上，方程 $N_i=0$ 中的每一个都是一条通过节点的直线方程，其中第 i 个形状函数必为零。对于族内的较高阶数，每一个形状函数都是可以称为“线性函数”的乘积。当每个线性函数等于零时，它成为通过节点的直线的方程，其中第 i 个形状函数必为零[3.3]。把这个概念应用于图 7.1－3(b)中 6 节点三角形，当有必要在节点 i 处产生 $N_i=1$ 时，用数值常数相乘，我们得到

$$\begin{aligned} N_1 &= (1-r-s)(1-2r-2s) \quad & N_2 &= r(2r-1) \quad & N_3 &= s(2s-1) \\ N_4 &= 4r(1-r-s) & N_5 &= 4rs & N_6 &= 4s(1-r-s) \end{aligned} \tag{7.1-2}$$

这个方法可以扩展到图 7.1－2 所示的族的另外的单元上。

四面体 仅仅保留图 7.1-4 中的顶节点，就得到了一个 4 节点四面体，它的形状函数为

$$N_1 = 1-r-s-t \quad N_2 = r \quad N_3 = s \quad N_4 = t \tag{7.1-3}$$



4 节点四面体	给 10 节点四面体增加节点
1 (0,0,0)	5 $(\frac{1}{2},0,0)$
2 (1,0,0)	6 $(0,\frac{1}{2},0)$
3 (0,1,0)	7 $(0,0,\frac{1}{2})$
4 (0,0,1)	8 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$
	9 $(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$
	10 $(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$

图 7.1-4 四面体单元，图中示出了 4 节点形式和 10 节点形式的单元节点 r，s 和 t 参数坐标

等于零的每个形状函数都是四面体的平面方程，该平面不通过问题中的节点[3.3]。为了得到 10 节点四面体上每个形状函数 N_i，我们可以取两个函数的乘积，这两个函数的每一个描述了一个面或者是通过除 i 节点外的其它节点的面。例如：面 $1-r-s-t=0$ 和面 $r=0$ 是不通过节点 5 的两个面；它们左边的乘积产生 N_5（乘 4 后以使在节点 5 坐标处 $N_5=1$）。10 节点四面体完整的一组形状函数为

$$\begin{aligned}
N_1 &= (1-r-s-t)(1-2r-2s-2t) \\
N_2 &= r(2r-1) \quad N_5 = 4r(1-r-s-t) \quad N_8 = 4rs \\
N_3 &= s(2s-1) \quad N_6 = 4s(1-r-s-t) \quad N_9 = 4st \\
N_4 &= t(2t-1) \quad N_7 = 4t(1-r-s-t) \quad N_{10} = 4tr
\end{aligned} \tag{7.1-4}$$

更高阶四面体可以含有内部节点。类似于图 7.1-2 中的三角形族，我们也可以生成一族四面体，它们都包含完整的 p 阶多项式。N 既是四面体包含的节点数，也是完整多项式的总项数，p 和 N 之间的关系式是 $N=(p+1)(p+2)(p+3)/6$。

等参数单元 如果一个单元的几何形状和它的场量 ϕ 使用同一组由节点值插值的形状函数，则该单元就是等参数单元。于是

$$x = \sum_i N_i x_i \qquad y = \sum_i N_i y_i \qquad z = \sum_i N_i z_i \qquad \phi = \sum_i N_i \phi_i \tag{7.1-5}$$

其中 i 的范围是单元所有节点数，对于平面单元，略去 z 方程。

7.2 单元特征矩阵

单元特征矩阵在结构力学问题中指的是单元的刚度矩阵。对于标量场的热传导问题，它

就是单元的传导矩阵。不论是结构力学还是标量场问题，对于三角形和四面体问题的处理与第 6 章中处理四边形和六面体的方法很类似。因此，在这里就不做全面的解释了。下面重点是标量场问题。结构问题可以按 6.2 节中研究过的方法用扩展数组来解决。

当 ϕ 用参考坐标系来表示时，大多数处理方法是表示成场量 ϕ 对于笛卡儿坐标的导数。这个过程最容易用下面最简单的单元来解释。

线性三角形　主要的任务是根据各节点自由度 ϕ_1，ϕ_2 和 ϕ_3 建立提供梯度的矩阵[**B**]。

$$\begin{Bmatrix}\phi_{,x}\\ \phi_{,y}\end{Bmatrix}=[\boldsymbol{B}]\begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{Bmatrix} \tag{7.2-1}$$

其中 $\phi_{,x}=\partial\phi/\partial x$ 和 $\phi_{,y}=\partial\phi/\partial y$。形状函数 N_i 是用 r 和 s 来表述，而不是用 x 和 y，因此，我们先利用式 7.1-5 得出

$$\begin{Bmatrix}\phi_{,r}\\ \phi_{,s}\end{Bmatrix}=[\boldsymbol{J}]\begin{Bmatrix}\phi_{,x}\\ \phi_{,y}\end{Bmatrix}\quad\text{其中}\quad[\boldsymbol{J}]=\begin{bmatrix}x_{,r} & y_{,r}\\ x_{,s} & y_{,s}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum N_{i,r}x_i & \sum N_{i,r}y_i\\ \sum N_{i,s}x_i & \sum N_{i,s}y_i\end{bmatrix} \tag{7.2-2}$$

这些关系类似于四边形关系式 6.2-4 和 6.2-5。模拟式 6.2-6，从式 7.1-1 和 7.2-2 我们得到 3 节点三角形的雅可比矩阵[**J**]。

$$[\boldsymbol{J}]=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_{21} & y_{21}\\ x_{31} & y_{31}\end{bmatrix}\quad\text{其中}\quad\begin{aligned}x_{ij}&=x_i-x_j\\ y_{ij}&=y_i-y_j\end{aligned} \tag{7.2-3}$$

雅可比矩阵[**J**]的逆矩阵为

$$[\boldsymbol{J}]^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{J}|}\begin{bmatrix}y_{31} & -y_{21}\\ -x_{31} & x_{21}\end{bmatrix}\quad\text{其中}\quad|\boldsymbol{J}|=x_{21}y_{31}-x_{31}y_{21} \tag{7.2-4}$$

可以证明 $|\boldsymbol{J}|=2A$，A 是三角形的面积。如果三角形的节点编号是逆时针的，用这种方法计算出来的面积是正值。由式 7.2-2 和 7.2-3 得到的场量在笛卡儿坐标系下的梯度为

$$\begin{Bmatrix}\phi_{,x}\\ \phi_{,y}\end{Bmatrix}=[\boldsymbol{J}]^{-1}\begin{Bmatrix}\phi_{,r}\\ \phi_{,s}\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}\phi_{,r}\\ \phi_{,s}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{Bmatrix}\quad\text{因此}\quad\begin{Bmatrix}\phi_{,x}\\ \phi_{,y}\end{Bmatrix}=\underbrace{[\boldsymbol{J}]^{-1}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{[\boldsymbol{B}]}\begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{Bmatrix} \tag{7.2-5}$$

在标量场问题中，3 节点三角形的矩阵[**B**]为

$$[\boldsymbol{B}]=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix}-y_{31}+y_{21} & y_{31} & -y_{21}\\ x_{31}-x_{21} & -x_{31} & x_{21}\end{bmatrix}=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix}y_{23} & y_{31} & y_{12}\\ x_{32} & x_{13} & x_{21}\end{bmatrix} \tag{7.2-6}$$

其中 $2A=x_{21}y_{31}-x_{31}y_{21}$。由于[$\kappa$]是材料常数的 2×2 数组，$t$ 是单元的厚度，标量单元的特征矩阵为

$$[k]=\int[B]^{\mathrm{T}}[\kappa][B]t\mathrm{d}A \tag{7.2-7}$$

如果$[\kappa]$和t在单元上是常数，积分就很容易，我们得到$[k]=[B]^{\mathrm{T}}[\kappa][B]tA$。对于高阶单元，积分是$r$和$s$的函数，这将在7.3和7.4节中讲到。

对于结构问题需要单元刚度矩阵。3节点三角形的单元刚度矩阵为

$$[k]=\int[B]^{\mathrm{T}}[E][B]t\mathrm{d}A \quad \text{其中} \quad [B]=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \tag{7.2-8}$$

二次三角形 对图7.1-3(b)中的6节点三角形，形状函数已在式7.1-2中给出。式7.2-2依然成立，但现在每个求和均含有六项而不是三项。例如雅可比2×2矩阵$[J]$中的$J_{11}=x_{,r}$为

$$\frac{\partial x}{\partial r}=(4r+4s-3)x_1+(4r-1)x_2-4(2r+s-1)x_4+4sx_5-4sx_6 \tag{7.2-9}$$

(x_3的乘数为0。)$\partial\phi/\partial r$的表达式和式7.2-9相同，用节点自由度ϕ_i代替x_i。对直边和边中间节点，$[J]$由式7.2-3给出。

四面体 直接对前面的公式进行扩展，在坐标r和s上补充t，场量ϕ是r，s和t的函数。式6.5-1中的形状和位移插值依然适用，其中的N_i取自式7.1-3或7.1-4，等等。如果ξ，η和ζ分别用r，s和t来代替，雅可比矩阵$[J]$的式6.5-2仍适用。单元特征矩阵为

$$[k]=\int[B]^{\mathrm{T}}[\kappa][B]\mathrm{d}V \tag{7.2-10}$$

备注 有人也许会问，三角形单元是否可以通过“衰变”或“退化”四边形单元来得到，例如，用合并4节点四边形单元的两个节点来得到三角形单元。诚然，当对重合节点设定相同的坐标，并集合项后，就得到线性三角形的形状函数[2,14]。但是6节点三角形就不能简单地通过合并8节点四边形中一个边上所有3个节点来得到[7.1,7.2]。为了避免麻烦，软件应用者不能通过提供重合节点的数据来获得三角形，最好利用列式法形成的三角形和四面体。

7.3 解析积分·面积坐标和体积坐标

假如对一个单元的几何形状做适当的限制，如式7.2-7的单元特征矩阵就可以通过解析而不是数值积分来求得。特别是我们要求单元是直边的，并且边节点(如果存在)是等距离间隔，这样雅可比矩阵行列式J在单元上是不变的。因此所有被积项都是参考坐标的乘积，我们能够得到闭合形式的$[k]$表达式。三角形解析积分公式通过下面讨论的面积坐标来表示。四面体类似的坐标和公式，将在本节最后概述。

研究带直边和边中节点的6节点三角形是为了有效地生成闭合形式的特征(或刚度)矩阵[3.4,7.3,7.4]。参考文献[7.5]论述了相关的四面体，并声称以闭合形式生成10节点四面体刚

度矩阵比用 4 点积分生成它快 133 倍。

用面积坐标而不是图 7.1－1 中的 rs 坐标开发了许多三角形单元。面积坐标也叫区域坐标、三角形坐标或三线性坐标。虽然面积坐标在数学上已知有很多年[7.6]，但似乎是在有限元理论为它们找到需求后才重新受到重视。

面积坐标　图 7.3－1(a)中任意设置的一点 P 把三角形 1－2－3 划分为三个分区 A_1，A_2 和 A_3，面积坐标定义为面积的比率：

$$\xi_1 = \frac{A_1}{A} \quad \xi_2 = \frac{A_2}{A} \quad \xi_3 = \frac{A_3}{A} \tag{7.3-1}$$

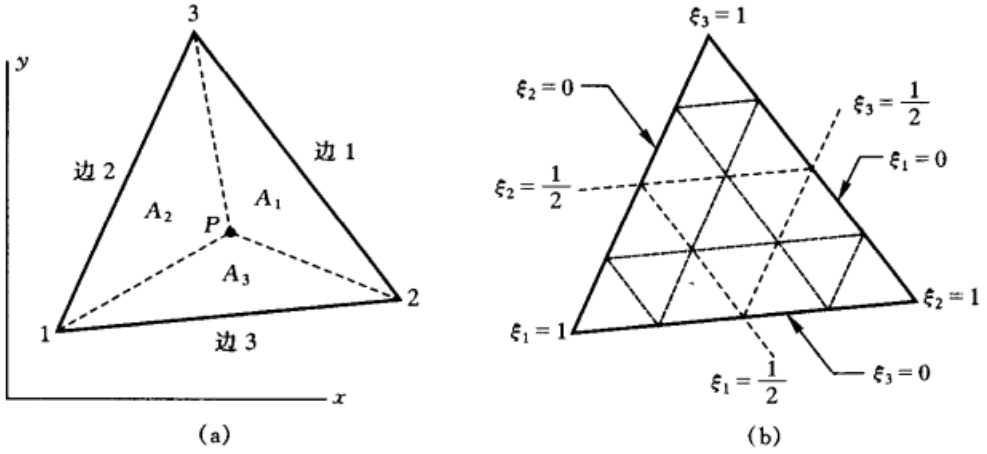


图 7.3－1　三角形中的面积坐标 $\xi_1\xi_2\xi_3$

其中 A 是三角形 1－2－3 的面积。因为 $A=A_1+A_2+A_3$，故 ξ_i 不是独立的，它们满足下面的约束关系

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1 \tag{7.3-2}$$

直边三角形的形心位于 $\xi_1=\xi_2=\xi_3=1/3$。根据节点坐标，平面几何证明形心的笛卡儿坐标为 $(x_1+x_2+x_3)/3$ 和 $(y_1+y_2+y_3)/3$。

面积坐标也可以表示成长度的比率。例如在图 7.3－1 中，设 L_{23} 表示边 2－3 的长度，s 表示 P 点到边 2－3 的距离，h 表示顶点 1 到边 2－3 的距离。那么 $A_1=L_{23}s/2$，$A=L_{23}h/2$，$\xi_1=A_1/A=s/h$。

把面积坐标看作长度的比率，很容易建立面积坐标 $\xi_1\xi_2\xi_3$ 和图 7.1－3 中 rs 坐标之间的关系。在图 7.1－3 中，边 1－2 和边 1－3 都是一个单位长。因此 $\xi_2=r/1=r$，$\xi_3=s/1=s$。最终 $\xi_1=1-\xi_2-\xi_3$。总之

$$\xi_1 = 1-r-s \qquad \xi_2 = r \qquad \xi_3 = s \tag{7.3-3}$$

因此图 7.1－3(a)和式 7.1－1 中给出的线性单元的形状函数是 $N_1=\xi_1$，$N_2=\xi_2$ 和 $N_3=\xi_3$。图 7.1－3(b)和式 7.1－2 中二次三角形状的形状函数为

$$\begin{aligned} N_1 &= \xi_1(2\xi_1-1) \quad & N_2 &= \xi_2(2\xi_2-1) \quad & N_3 &= \xi_3(2\xi_3-1) \\ N_4 &= 4\xi_1\xi_2 & N_5 &= 4\xi_2\xi_3 & N_6 &= 4\xi_3\xi_1 \end{aligned} \tag{7.3-4}$$

利用式 7.3-3,单元特征矩阵的被积函数中所有项均能用面积坐标而不用 r 和 s 坐标来表示。

式 7.3-1 到 7.3-4 不要求三角形是直边或节点均匀间隔。但是当这些条件满足时,雅可比 J 在整个单元上是常数,被积的所有项都是面积坐标下的多项式,而且下面的积分公式随之可用。

积分公式 让我们先考虑沿三角形某个边上的积分,这对于受力作用边协调节点载荷计算很有用处。例如考虑图 7.3-1 中三角形的边 3,此处 $\xi_3=0$,因此沿这条边上变化的量就只有函数 ξ_1 和 ξ_2。积分包括 ξ_1 和 ξ_2 的不同乘积,它的所有项能够用下面的公式来计算

$$\int_L \xi_1^k \xi_2^l \mathrm{d}L = L\frac{k!l!}{(1+k+l)!} \tag{7.3-5}$$

其中 k 和 l 是非负的整数,L 是边长。如果 k 和 l 均为零,公式得到长度 L 本身。作为进一步考虑的例子

$$\int_L \xi_2^2 \mathrm{d}L = L\frac{2!}{3!} = \frac{L}{3} \quad \text{和} \quad \int_L \xi_1 \xi_2^2 \mathrm{d}L = L\frac{2!}{4!} = \frac{L}{12} \tag{7.3-6}$$

类似地,在整个三角形面积 A 上的积分公式为

$$\int_A \xi_1^k \xi_2^l \xi_3^m \mathrm{d}A = 2A\frac{k!l!m!}{(2+k+l+m)!} \tag{7.3-7}$$

当 $k=l=m=0$ 时得到面积 A。在二维和三维情况下,这个公式的另一种形式允许被积项用笛卡儿坐标,而不是用面积坐标或体积坐标来表示[4.4,7.7]。

四面体 四面体的体积坐标与三角形面积坐标相类似。四面体中的一点把其划分成子体积 V_1,V_2,V_3 和 V_4,取子体积与整体体积的比率,就得到体积坐标 $\xi_i=V_i/V(i=1,2,3,4)$。这些体积坐标满足约束关系 $\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4=1$。体积坐标 $\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4$ 与图 7.1-4 中坐标 rst 的关系用式 7.3-3 提供的同类理由来获得,于是

$$\xi_1 = 1-r-s-t \qquad \xi_2 = r \qquad \xi_3 = s \qquad \xi_4 = t \tag{7.3-8}$$

因此,4 节点四面体的形状函数为 $N_1=\xi_1$,$N_2=\xi_2$,$N_3=\xi_3$ 和 $N_4=\xi_4$。当四面体的边为直边且边节点均匀间隔,在体积坐标中很有用的积分公式为

$$\int_V \xi_1^k \xi_2^l \xi_3^m \xi_4^n \mathrm{d}V = 6V\frac{k!l!m!n!}{(3+k+l+m+n)!} \tag{7.3-9}$$

7.4 数值积分

当单元边是曲边且边节点不是均匀间隔时,就称三角形是"畸变的",此时的雅可比矩阵的行列式 $\boldsymbol{J}$ 在整个单元上就不是常值,被积函数的各项也变成了多项式的比值。在这种情况下数值积分是合适的。数值积分包括用适当的权重因子乘指定位置的被积函数值并把结果相加。被积函数中每一个矩阵系数都用这种方法来处理。同样的概念已在 6.3 节的四边形中应用。但是对于三角形和四面体单元,权重因子是个别定义的而不是一维权重的乘积,另外有许

多的积分法则都是可用的，但法则创立者们对于哪个法则最好还有争论。

对于四边形和四面体的应力计算，在高斯积分点计算应力并把这些值外推到单元的其它位置常常是有利的(6.10 节)。在有直边和边中节点的 6 节点三角形中，位移场在总体笛卡儿坐标中是完全二次型的，因此应变场就是完全线性场，所以单元中三个不共线点的所有组的线性外推提供相同的结果。类似情况在高阶三角形和四面体中也很普遍。在应力计算“分片矫正”法中，数值试验指出，一般应力状态最佳应力位置在 3 节点三角形的中心和 6 节点三角形的边节点位置处(见 9.9 节)。

三角形　令 $\phi=\phi(r,s)$ 代表式 7.2－7 中特征单元矩阵被积函数 $[\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\kappa}][\boldsymbol{B}]t$ 的单个系数，那么，对 n 个样本点，

$$\int_A \phi \mathrm{d}A \approx \sum_{i=1}^{n} \phi_i J_i W_i \quad \text{其中} \quad J_i = \frac{1}{2}|\boldsymbol{J}|_i \tag{7.4-1}$$

因子 1/2 的出现是因为在参考坐标 rs 中映射三角形的面积为 1/2。无论三角形的边是直的还是曲的，$[\boldsymbol{J}]$ 都由式 7.2－2 给出。对于笛卡儿坐标中面积为 A 的无畸变的三角形，在整个三角形中 $|\boldsymbol{J}|=2A$(图 7.1－3(a)中边 1－2 和边 1－3 有单位物理长度，所以 $A=1/2$，并应用式 7.2－4)。所以，由于 $\sum W_i=1$(如表 7.4－1)，当 $\phi=1$ 时由式 7.4－1 正确地得到 $\int \mathrm{d}A=A$。

表 7.4－1　三角形面积上数值积分选用的公式，式 7.4－1[6.4]

积分点数	图	精度等级	坐标(r_i, s_i)	权重 W_i
1	7.4－1(a)	1	$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$	1.0
3	7.4－1(b)	2	$\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right), \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right), \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$
3	7.4－1(c)	2	$\left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{3}$
4	7.4－1(d)	3	$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ $\left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right), \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right), \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$	$-\frac{27}{48}$ $\frac{25}{48}$

表 7.4－1 列出了平面三角形[6.4]在式 7.4－1 中使用的一些低阶数值积分公式中的数据。在映射三角形中样本点的位置如图 7.4－1 所示。在面积坐标中有对称位置的意义上，样本点在整个三角形中是均匀分布的。*精确度阶次*就是在 r 和 s 中由公式精确积分的最高阶多项式项的阶次。特别是当 $l+m\leqslant k$(包括 $l=0$ 或 $m=0$)时，有精确度为 k 的法则能精确积分形式为 $r^l s^m$ 的所有项，但当 $l+m>k$ 时，至少对于一项 $r^l s^m$ 是不精确的。在许多参考文献中有对这种积分的讨论和附加规则，包括文献[2.13,2.14,3.3,4.4,7.9,7.10]。在热传导分析中，有时候更高阶的法则对具体的比热容矩阵是有益的。在竞争规则中与较好的选择相关的考虑在文献[7.11]中做了概述。

三点规则中的每一个都有它的优点[7.10,7.12]。在一些老的参考书中，对四节点规则的数值

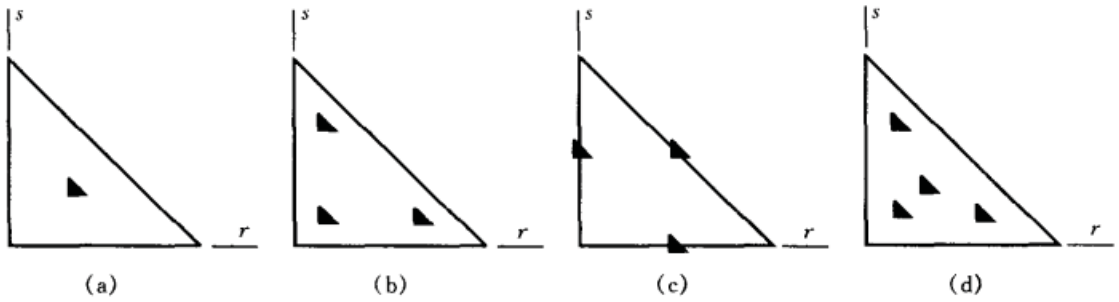


图 7.4-1 表 7.4-1 中数值积分法则样本点的位置

系数做了不正确的说明，因此，这个规则可能受到使用者不公正的批评。使用三点内部规则的计算机子程序出现在文献[7.13]中。

四面体 令 $\phi=\phi(r,s,t)$ 代表式 7.2-7 中单元特征矩阵被积函数 $[\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\kappa}][\boldsymbol{B}]$ 的单个的系数。那么对 n 个样本点

$$\int_V \phi \mathrm{d}V \approx \sum_{i=1}^{n} \phi_i J_i W_i \quad \text{其中} \quad J_i = \frac{1}{6} |\boldsymbol{J}|_i \tag{7.4-2}$$

因子 1/6 的出现是因为在参考坐标系 rst 中映射四面体的体积为 1/6。对于笛卡儿坐标系中单位体积为 V 的非畸变四面体，整个四面体 $|\boldsymbol{J}|=6V$。又因为 $\sum W_i = 1$（如表 7.4-2），当 $\phi=1$ 时由式 7.4-2 正确得到 $\int \mathrm{d}V = V$。

表 7.4-2 四面体数值积分所选用的公式，式 7.4-2[7.11]

积分点数	精度等级	坐标(r_i, s_i, t_i)	权重 W_i
1	1	$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$	1.0
4	2	$(a,b,b),(b,b,b),(b,b,a),(b,a,b)$ 其中 $a=\frac{5+3\sqrt{5}}{20}$，$b=\frac{5-\sqrt{5}}{20}$	$\frac{1}{4}$
5	3	$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$	$-\frac{4}{5}$
		$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right), \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right), \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$	$\frac{9}{20}$

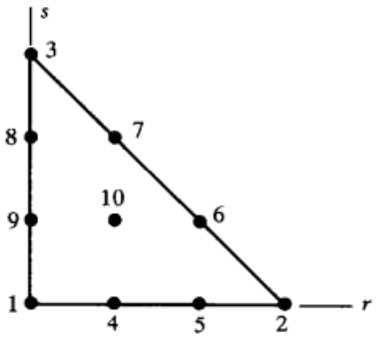
表 7.4-2 列出了在式 7.4-2 中用于四面体的一些低阶数值积分公式中的数据[7.11]。精确度的定义与表 7.4-1 的方法相同。所以，当 $l+m+n \leqslant k$ 时，精度 k 的规则可精确积分形式为 $r^l s^m t^n$ 的所有项。附加规则出现在许多参考文献中，如文献[3.3,4.4,6.4,7.9,7.11,7.14]。

分析题

7.1－1　以 $\phi=a_1+a_2r+a_3s$ 开始，利用“[**A**]矩阵方法”(参考 3.2 节)推导式 7.1－1 的形状函数。

7.1－2　证明如果二次三角形(图 7.1－1(a))具有直边和边中点节点，那么它的几何变换是线性的。换句话说，证明当运用于几何变换时式 7.1－2 简化为 7.1－1。

7.1－3　对于图示的 10 节点三角形，求出节点 1,2,4,5,6 和 10 的形状函数 $N_i(r,s)$。



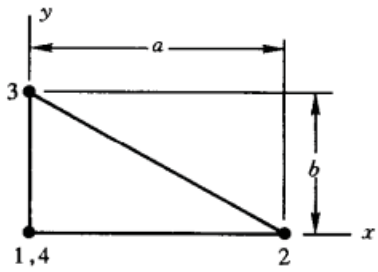
题 7.1－3

7.1－4　假如一个三角形单元允许含有 3,4,5 或 6 个节点。设定一个适合这种情况且类似于表 6.4－1 的表格，验证当边节点 4,5 和 6 都存在时，该表可正确提供顶节点的形状函数。

7.2－1　证明对于任意形状的三角形都有 $|\boldsymbol{J}|=2A$，其中 $|\boldsymbol{J}|$ 由式 7.2－4 给出。提示：把三角形放在第一象限中，从最高点向 x 轴引垂线，用这样产生的梯形的面积来证明。

7.2－2　证明对于图 3.4－1 的单元，式 7.2－6 可提供如方程 3.4－6 表述的[**B**]。

7.2－3　对图示的三角形，利用双线性形状函数(式 6.2－3)确定标量单元的[**B**]矩阵，证明式 7.2－6 也可给出相同的[**B**]矩阵。



题 7.2－3

7.3－1　完全利用面积坐标，证明式 7.3－4 中六个形状函数的 $\sum N_i=1$。

7.3－2　一个 10 节点的三角形单元含有一个形心节点，在面积坐标下，它的形状函数是 $N_{10}=27\xi_1\xi_2\xi_3$。令 ϕ 表示场变量。假设在单元所有的边界节点上 $\phi=0$，非零 ϕ_{10} 在节点 10 和三角形顶点的连线的中间点上产生纵坐标 $\phi=\phi_a$。用 ϕ_a 和三角形面积 A 表示 ϕ 面以下的体积。

7.3－3　一个直边三角形的形心在笛卡儿坐标 xy 的原点上，利用面积坐标推导以下公式

$$\int_A x^2\,\mathrm{d}A=\frac{A}{12}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$$

(三角形的相关公式参考[7.7])

7.3－4　根据面积坐标 ξ_i 和广义自由度 a_i，6 节点三角形单元多项式场有如下形式：

$$\phi=a_1\xi_1^2+a_2\xi_2^2+a_3\xi_3^2+a_4\xi_1\xi_2+a_5\xi_2\xi_3+a_6\xi_3\xi_1$$

利用 3.2 节中[**A**]矩阵方法，推导出单元形状函数(式 7.3－4)。

7.3－5　设边 1－4－2 是二次三角形的一个直边，长度为 L，节点 4 位于中点，并且此边在 x 轴上。利用依据边 1－4－2 计算的面积，确定由作用在该边的下列分布载荷产生的协

调节点载荷。

(a)垂直于此边的均匀作用力；

(b)相切于此边的作用力，以抛物线的方式变化，在节点 1 和 2 处为零，在节点 4 处最大；

(c)垂直于此边的作用力，线性变化，在节点 2 处是 $+\bar{\sigma}$，在节点 1 处是 $-\bar{\sigma}$。

7.3－6 均匀压力 p 垂直作用在一个二次四面体的其中一个面上，此四面体边是直的且在边中间有节点。那么此面的节点处的协调载荷是多少？

7.4－1 考虑一个面积 $A=0.5$ 的直边三角形，函数为

$$\phi = a_1 r + a_2 r^2 + a_3 rs + a_4 r^3 + a_5 rs^2$$

其中 a_i 是常数。

(a)利用公式 7.3－7，求面积 A 上的精确积分 $I = \int \phi \mathrm{d}A$。

(b～e)利用表 7.4－1 中的第一、二、三和四数值公式求近似积分 I。

7.4－2 通过使用表 7.4－1 中的每一个数值公式，求出四个关于函数 $\phi=(1+rs)^{-1}$ 积分的近似值。令 $A=1$。

7.4－3 设一个二次三角形单元有曲边和变厚度 t，其中厚度 t 是由 6 个节点上厚度 t_i 插值而成，$t = \sum N_i t_i$。如果通过数值积分得到精确的单元体积，那么数值积分公式必须有哪一阶精度？

7.4－4 考虑一个各面为平面的四面体，体积为 $V=1/6$，函数是

$$\phi = a_1 r + a_2 r^2 + a_3 rs + a_4 r^3 + a_5 rs^2 + a_6 rst$$

其中 a_i 是常数。

(a)利用公式 7.3－9，求在体积 V 上的精确积分 $I = \int \phi \mathrm{d}V$。

(b)利用表 7.4－2 中第一、二和第三数值公式求近似积分 I。

第8章

坐标变换与分析选择

本章首先考虑如何变换描述矢量、应力、材料属性和刚度矩阵的坐标系，然后讨论特殊的单元类型和实际应用时要注意的环节，包括刚性连接、不同单元或偏心单元的结合、弹性基础、无限远的边界、重新分析和单元品质测试。

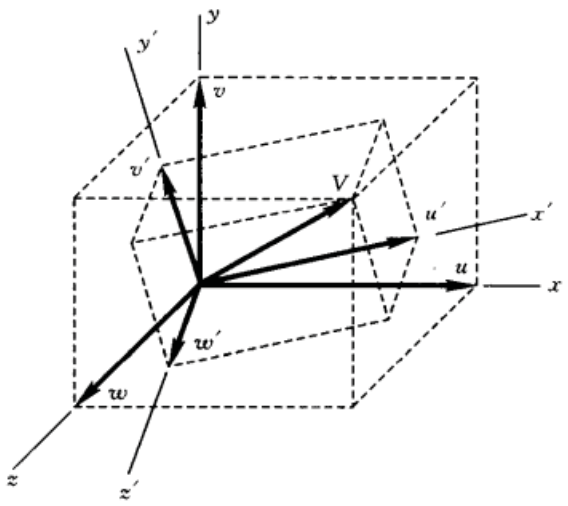
8.1 变换：引言和矢量形式

使用坐标变换是为了适应在总体坐标系中任意取向的各向异性材料并迫使不同类型的相邻单元共享相同的自由度。在变换中$[Q]=[T]^{\mathrm{T}}[Q']$$[T]$的形式常常出现。此处，$[Q']$是被变换的矩阵，$[T]$是变换矩阵。如果$[Q']$是对称的，则变换的结果矩阵$[Q]$也是对称的。根据需要，$[T]$可以为长方形矩阵或方阵。$[T]$为方阵时可以不是正交的。如果$[T]$是大矩阵，它很可能是稀疏矩阵。正规的矩阵乘法$[T]^{\mathrm{T}}[Q']$$[T]$浪费时间和贮存空间，可以用适应$[T]$和$[Q']$形式的程序代码来替代此常规的矩阵乘法。

矩阵$[Q]$和$[Q']$通常为刚度矩阵，或者是在非结构问题中与之相类似的特征矩阵。有时，$[Q']$可作为单元矩阵或相应的结构矩阵。在单元组集之前进行变换，计算机编程是最容易的，这样，变换的是若干个小矩阵，而不是一个大矩阵。

由于单元不能够表示恒定状态，包括无应变的刚体运动状态，在矩阵$[T]$中的微小误差和不一致性会降低精度。为了在最大程度上减少误差来源，变换矩阵（和约束方程）的书写和处理应该与单元特征矩阵中系数K_{ij}的数值精度一样。

2D和3D矢量 设$\boldsymbol{V}$为一矢量（图8.1-1）。它可能表示位置，或者位移，或者热通量等等。$\boldsymbol{V}$在平行于标有撇号的坐标轴的分量为u',v',w'。我们希望用方向余弦和u,v,w来表示u',v',w'。u，v和w是$\boldsymbol{V}$在平行于没有标撇号的坐标轴上的分量。



坐标轴间的方向余弦

	x	y	z
x'	l_1	m_1	n_1
y'	l_2	m_2	n_2
z'	l_3	m_3	n_3

图 8.1－1 矢量 $\boldsymbol{V}$ 在 xyz 坐标系中用分量 u，v 和 w 来表示，或者在 $x'y'z'$ 坐标系中用分量 u'，v' 和 w' 来表示。方向余弦就是坐标轴间夹角的余弦

分量 u' 可以看做 u，v，w 投影到 x' 坐标轴上的分量之和。也就是，$u'=l_1u+m_1v+n_1w$。分量 v'，w' 可以相类似地表示。用矩阵形式来表示这些关系式为

$$\begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{Bmatrix} = [\boldsymbol{A}] \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad \text{其中} \quad [\boldsymbol{A}] = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \tag{8.1-1}$$

矩阵 $[\boldsymbol{A}]$ 通常称为旋转矩阵。它是一个正交矩阵，即 $[\boldsymbol{A}]^{-1}=[\boldsymbol{A}]^{\mathrm{T}}$。因此，式 8.1－1 变换的可逆形式是：

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [\boldsymbol{A}]^{\mathrm{T}} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{Bmatrix} \tag{8.1-2}$$

令 $\boldsymbol{V}$ 表示节点位移矢量 $\{\boldsymbol{d}\}$ 或 $\{\boldsymbol{d}'\}$。矢量 $\{\boldsymbol{d}\}=\lfloor u \quad v \quad w \rfloor^{\mathrm{T}}$ 和 $\{\boldsymbol{d}'\}=\lfloor u' \quad v' \quad w' \rfloor^{\mathrm{T}}$ 是相同的，只不过是在不同的坐标系中表示（假设旋转量很小，“位移”则可以包含旋转。大旋转不能矢量组合）。能够以与位移相同的方式用分量来表示节点力矢量 $\{\boldsymbol{r}\}$ 和 $\{\boldsymbol{r}'\}$。根据式 8.1－1 和 8.1－2，这些矢量服从变换规则

$$\{\boldsymbol{d}'\} = [\boldsymbol{A}]\{\boldsymbol{d}\} \quad \text{和} \quad \{\boldsymbol{d}\} = [\boldsymbol{A}]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{d}'\} \tag{8.1-3}$$

$$\{\boldsymbol{r}'\} = [\boldsymbol{A}]\{\boldsymbol{r}\} \quad \text{和} \quad \{\boldsymbol{r}\} = [\boldsymbol{A}]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{r}'\} \tag{8.1-4}$$

式 8.1－3 和 8.1－4 仅要求 xyz 和 $x'y'z'$ 为正交坐标系。如果一个系统是笛卡儿坐标，而另一个是柱坐标，这种矢量变换在一些应用中会比较简便。

更一般的表达式 如果节点位移和它们相应的节点力分别有如下关系

$$\{\boldsymbol{d}'\} = [\boldsymbol{T}]\{\boldsymbol{d}\} \quad \text{和} \quad \{\boldsymbol{r}'\} = [\boldsymbol{T}]\{\boldsymbol{r}\} \tag{8.1-5}$$

式中 $[\boldsymbol{T}]$ 可以不是正交的，甚至不是方阵，这个形式似乎在式 8.1－4 的第二式中可继续使用，即 $\{\boldsymbol{r}\}=[\boldsymbol{T}]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{r}'\}$。讨论如下。因为 $\{\boldsymbol{r}\}$ 和 $\{\boldsymbol{r}'\}$ 描述的是相同的合力，所以在虚位移上做的功必

须与计算做功的坐标系无关。设$\{\delta d\}$和$\{\delta d'\}$分别为在无撇号和有撇号坐标系中对相同虚位移的描述，写出虚功等式并运用关系式$\{\delta d'\}^{\mathrm{T}}=\{\delta d\}^{\mathrm{T}}[T]^{\mathrm{T}}$，我们得到

$$\{\delta d\}^{\mathrm{T}}\{r\}=\{\delta d'\}^{\mathrm{T}}\{r'\}\quad 或\quad \{\delta d\}^{\mathrm{T}}\{r\}=\{\delta d\}^{\mathrm{T}}[T]^{\mathrm{T}}\{r'\}\tag{8.1-6}$$

从上式中可得

$$\{\delta d\}^{\mathrm{T}}(\{r\}-[T]^{\mathrm{T}}\{r'\})=0\quad 因此\quad \{r\}=[T]^{\mathrm{T}}\{r'\}\tag{8.1-7}$$

后一个等式是考虑到前一个等式对任意虚位移$\{\delta d\}$都必须成立的条件下推导出来的。前面的讨论也可以应用于普遍情况，因此我们也可以写出$\{D'\}=[T]\{D\}$和$\{R\}=[T]^{\mathrm{T}}\{R'\}$。

8.2 应变、应力和材料性能变换

我们寻求的是不同坐标系表达同一量之间的关系。在二维中，应变$\{\varepsilon\}$和应力$\{\sigma\}$的变换导致了可用莫尔圆图形化表示的方程。在本节中，我们的重点是三维变换，对于这种变换不存在图形表示法。采用弹性常数矩阵$[E]$来表示材料属性。数组$\{\varepsilon\}$，$\{\sigma\}$和$[E]$在除了结构力学以外的问题中都是有对应关系的。

应变　应变变换是位移导数的变换。因此，为了将坐标系$x'y'z'$中的ε'和坐标系xyz中的ε联系起来，我们必须将$\partial u'/\partial x'$同$\partial u/\partial x$以及其他的u，v和w的导数联系起来。由式8.1-1有

$$\frac{\partial u'}{\partial x'}=l_1\frac{\partial u}{\partial x'}+m_1\frac{\partial v}{\partial x'}+n_1\frac{\partial w}{\partial x'}\tag{8.2-1}$$

对于$\partial u/\partial x'$项，用连锁法微分和$\partial x/\partial x'=l_1$，$\partial y/\partial x'=m_1$和$\partial z/\partial x'=n_1$，我们得到

$$\frac{\partial u}{\partial x'}=l_1\frac{\partial u}{\partial x}+m_1\frac{\partial u}{\partial y}+n_1\frac{\partial u}{\partial z}\tag{8.2-2}$$

将这一过程也应用到其他的位移导数中

$$\underbrace{\left[\frac{\partial u'}{\partial x'}\quad\frac{\partial u'}{\partial y'}\quad\frac{\partial u'}{\partial z'}\quad\cdots\quad\frac{\partial w'}{\partial z'}\right]^{\mathrm{T}}}_{9\times1}=\begin{bmatrix}L_1\boldsymbol{\Lambda} & m_1\boldsymbol{\Lambda} & n_1\boldsymbol{\Lambda}\\ l_2\boldsymbol{\Lambda} & m_2\boldsymbol{\Lambda} & n_2\boldsymbol{\Lambda}\\ l_3\boldsymbol{\Lambda} & m_3\boldsymbol{\Lambda} & n_3\boldsymbol{\Lambda}\end{bmatrix}\underbrace{\left[u_{,x}\quad u_{,y}\quad u_{,z}\quad\cdots\quad w_{,z}\right]^{\mathrm{T}}}_{9\times1}\tag{8.2-3}$$

其中$[\boldsymbol{\Lambda}]$由式8.1-1给出。式8.2-3的9×9方阵是正交的。

应变状态可以用坐标系$x'y'z'$中的$\{\varepsilon'\}$或者坐标系xyz中的$\{\varepsilon\}$来表示。下面我们把位移-应变关系(式3.1-6到3.1-8)引入到式8.2-3中。经过简单而又冗长的展开和合并同类项之后，我们得到

$$\{\varepsilon'\}=[T_\varepsilon]\{\varepsilon\}\tag{8.2-4}$$

式中$\{\varepsilon\}=[\varepsilon_x\quad\varepsilon_y\quad\varepsilon_z\quad\gamma_{xy}\quad\gamma_{yz}\quad\gamma_{zx}]^{\mathrm{T}}$，$\{\varepsilon'\}$与此类似。应变变换矩阵为

$$[\boldsymbol{T}_\epsilon]=\left[\begin{array}{ccc:ccc} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1m_1 & m_1n_1 & n_1l_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2m_2 & m_2n_2 & n_2l_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & l_3m_3 & m_3n_3 & n_3l_3 \\ \hdashline 2l_1l_2 & 2m_1m_2 & 2n_1n_2 & l_1m_2+l_2m_1 & m_1n_2+m_2n_1 & n_1l_2+n_2l_1 \\ 2l_2l_3 & 2m_2m_3 & 2n_2n_3 & l_2m_3+l_3m_2 & m_2n_3+m_3n_2 & n_2l_3+n_3l_2 \\ 2l_3l_1 & 2m_3m_1 & 2n_3n_1 & l_3m_1+l_1m_3 & m_3n_1+m_1n_3 & n_3l_1+n_1l_3 \end{array}\right] \tag{8.2-5}$$

此处采用了剪切应变的工程定义，例如，$\gamma_{xy}=u_{,y}+v_{,x}$。在以后的内容中对式 8.2－5 的矩阵进行了分块。

应力 考虑在设定虚位移过程中由应力所做的单位体积的内力功。无论是在坐标系 $x'y'z'$ 中还是在坐标系 xyz 中进行计算，这部分功必须是相同的。利用式 8.2－4 写出虚功方程，我们得到

$$\{\delta\boldsymbol{\varepsilon}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\sigma}\}=\{\delta\boldsymbol{\varepsilon}'\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\sigma}'\} \quad 或 \quad \{\delta\boldsymbol{\varepsilon}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\sigma}\}=\{\delta\boldsymbol{\varepsilon}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{T}_\epsilon]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\sigma}'\} \tag{8.2-6}$$

后一个等式必须对任意虚应变矢量$\{\delta\boldsymbol{\varepsilon}\}$都成立。因此，如同我们从式 8.1－6 获得式 8.1－7 一样，我们获得应力变换关系为

$$\{\boldsymbol{\sigma}\}=[\boldsymbol{T}_\epsilon]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\sigma}'\} \quad 和 \quad \{\boldsymbol{\sigma}'\}=[\boldsymbol{T}_\epsilon]^{-\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\sigma}\} \tag{8.2.7}$$

式中$\{\boldsymbol{\sigma}\}=\lfloor\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}\rfloor^{\mathrm{T}}$，$\{\boldsymbol{\sigma}'\}$与此类似。矩阵$[\boldsymbol{T}_\epsilon]^{-\mathrm{T}}$是很容易确定的。将式 8.2－5 中的 3×3 子矩阵分别命名为 $\boldsymbol{T}_{11}$，$\boldsymbol{T}_{12}$，$\boldsymbol{T}_{21}$ 和 $\boldsymbol{T}_{22}$ 后，可以发现

$$\text{如果} \quad [\boldsymbol{T}_\epsilon]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}_{11} & \boldsymbol{T}_{12}\\ \boldsymbol{T}_{21} & \boldsymbol{T}_{22}\end{bmatrix} \quad \text{那么} \quad [\boldsymbol{T}_\epsilon]^{-\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}_{11} & 2\boldsymbol{T}_{12}\\ \dfrac{1}{2}\boldsymbol{T}_{21} & \boldsymbol{T}_{22}\end{bmatrix} \tag{8.2-8}$$

因此，用把 2 的因子移动到它们相对于对角线对称设置的位置，可由式 8.2－5 中的$[\boldsymbol{T}_\epsilon]$得到$[\boldsymbol{T}_\epsilon]^{-\mathrm{T}}$。

材料属性 对于给定的一组材料属性，应力-应变关系在 xyz 坐标系中可以写为$\{\boldsymbol{\sigma}\}=[\boldsymbol{E}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$，或者在 $x'y'z'$ 坐标系中写为$\{\boldsymbol{\sigma}'\}=[\boldsymbol{E}']\{\boldsymbol{\varepsilon}'\}$。设想$[\boldsymbol{E}']$是已知的，而$[\boldsymbol{E}]$是需要求的。用式 8.2－4，8.2－7 以及关系式$\{\boldsymbol{\sigma}'\}=[\boldsymbol{E}']\{\boldsymbol{\varepsilon}'\}$的变换，

$$\{\boldsymbol{\sigma}\}=[\boldsymbol{T}_\epsilon]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\sigma}'\}=[\boldsymbol{T}_\epsilon]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{E}']\{\boldsymbol{\varepsilon}'\}=[\boldsymbol{T}_\epsilon]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{E}'][\boldsymbol{T}_\epsilon]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} \tag{8.2-9}$$

最后，因为$\{\boldsymbol{\sigma}\}=[\boldsymbol{E}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$，我们得到

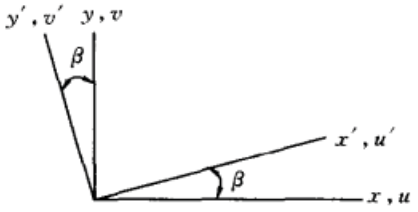
$$[\boldsymbol{E}]=[\boldsymbol{T}_\epsilon]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{E}'][\boldsymbol{T}_\epsilon] \tag{8.2-10}$$

像在式 8.1－3 和 8.1－4 中的一样，xyz 和 $x'y'z'$ 仅需要是一组相互正交的坐标系。

平面问题 二维问题是一种特殊情况，此时 $n_3=1$ 和 $l_3=m_3=n_1=n_2=0$(图 8.2－1)。并且，$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}=\lfloor\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\rfloor^{\mathrm{T}}$，$\{\boldsymbol{\sigma}\}=\lfloor\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\rfloor^{\mathrm{T}}$，$[\boldsymbol{E}]$是 3×3 矩阵，因此变换矩阵为

$$[\boldsymbol{T}_\epsilon]=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & cs\\ s^2 & c^2 & -cs\\ -2cs & 2cs & c^2-s^2\end{bmatrix} \quad 和 \quad [\boldsymbol{T}_\epsilon]^{-\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix} \tag{8.2-11}$$

式中 $c=\cos\beta$ 和 $s=\sin\beta$。



	x	y	z
x'	$l_1=\cos\beta$	$m_1=\sin\beta$	$n_1=0$
y'	$l_2=-\sin\beta$	$m_2=\cos\beta$	$n_2=0$
z'	$l_3=0$	$m_3=0$	$n_3=1$

图 8.2-1　在二维即图 8.1-1 的一种特殊情况下，坐标轴的转动

8.3　特征矩阵变换

单元特征矩阵[k]是结构力学中的刚度矩阵。对其他问题领域，可以写出与下面形式相同的关系式。用单元矩阵表示的表达式也可以用结构矩阵来表达。在标量场问题中，矩阵[k]不需要变换。

在诸如 xyz 和 $x'y'z'$ 的两个坐标系中，单元刚度关系可以表示如下

$$[k]\{d\}=-\{r\}\quad \text{或者像}\quad [k']\{d'\}=-\{r'\} \tag{8.3-1}$$

在式 8.3-1 中，$\{r\}$ 和 $\{r'\}$ 是与单元变形相关的载荷。正如对式 2.2-2 的解释一样，采用负号是因为 $\{r\}$ 和 $\{r'\}$ 定义为单元对结构节点作用之载荷。矩阵[k]和[k']表示了同样的意义，但是参照了两个不同的节点自由度矢量，也就是 $\{d\}$ 和 $\{d'\}$。假定[k']是已知的，而[k]是需要求得的。通过将式 8.1-5 和式 8.1-7 代入到刚度关系式中推导出必要的变换式。

$$[k]\{d\}=-\{r\}=-[T]^{\mathrm{T}}\{r'\}=[T]^{\mathrm{T}}[k']\{d'\}=[T]^{\mathrm{T}}[k'][T]\{d\} \tag{8.3-2}$$

当关系式 $[k]\{d\}=[T]^{\mathrm{T}}[k'][T]\{d\}$ 对任意 $\{d\}$ 都成立时，我们才能得到

$$[k]=[T]^{\mathrm{T}}[k'][T] \tag{8.3-3}$$

或者，如果将上面的理论应用于总体层面，我们可得到 $[K]=[T]^{\mathrm{T}}[K'][T]$。

式 8.3-3 的变换既不能看作是改变单元的属性，也不能看作是改变在总体坐标中单元的方位，倒可以看作是改变了单元属性的外在表达式，使其与自由度从 $\{d\}$ 到 $\{d'\}$ 的变化相协调。在式 $\{d'\}=[T]\{d\}$ 中，变换矩阵[T]必须是已知的，但不必具有特殊的形式。式 8.3-3 的应用在 2.4 节和随后的两节中出现。

8.4　改变约束方向

如果一个支撑允许一个节点只在一个方向上运动，而且这个方向平行于已经定义了的一个平移自由度，那么边界条件是简单的：我们只需约束该节点上所有其它的平移自由度。如果在其它某方向上可允许移动，那么下面这种变换是有用的。（一种特定的方式处理这种支撑条

件可能导致问题；见图 9－2－3(c)。)

我们考虑图 8.4－1(a)所示的平面结构的例子，它可以是一个桁架或者刚架。在边界条件施加以前，将要被变换的结构方程$[\boldsymbol{K}']\{\boldsymbol{D}'\}=\{\boldsymbol{R}'\}$为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{11} & \boldsymbol{K}_{12} & \boldsymbol{K}_{13} & K_{14} \\ \boldsymbol{K}_{21} & \boldsymbol{K}_{22} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}_{24} \\ \boldsymbol{K}_{31} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}_{33} & \boldsymbol{K}_{34} \\ \boldsymbol{K}_{41} & \boldsymbol{K}_{42} & \boldsymbol{K}_{43} & \boldsymbol{K}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{D}_1 \\ \boldsymbol{D}_2 \\ \boldsymbol{D}_3 \\ \boldsymbol{D}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{R}_1 \\ \boldsymbol{R}_2 \\ \boldsymbol{R}_3 \\ \boldsymbol{R}_4 \end{Bmatrix} \tag{8.4-1}$$

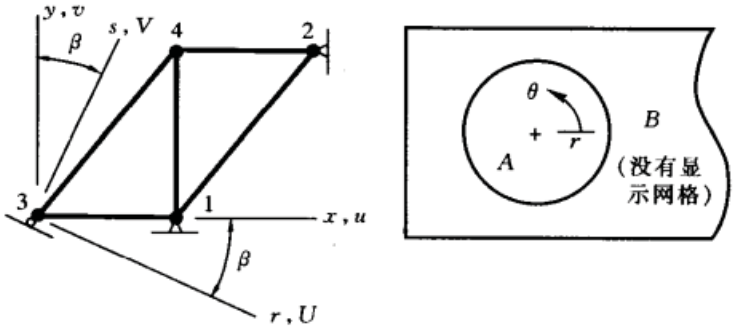


图 8.4－1 (a)一个平面桁架或平面刚架，其中节点 3 仅允许在 r 方向运动；(b)销钉 A 位于平面杆 B 中一个大的圆孔内

我们没有用撇号标示每个子矩阵，仅仅是为了避免混乱。如果用通常方式在总体坐标系 xy 中写出表达式，那么每个$\{\boldsymbol{D}_i\}$就包含了节点上 x 和 y 方向的平移自由度 u_i 和 v_i。如果结构是刚架，则存在旋转自由度 θ_{zi}。在节点 1 和 2 处，支撑条件表明 u 和 v 为零。在节点 3 处，滚珠支撑要求难于处理的条件 $v_3=-u_3\tan\beta$。如果我们在节点 3 处用平行于坐标系 rs 主轴的移动自由度 U_3 和 V_3 取代 u_3 和 v_3，则边界条件变成了简单的 $V_3=0$。我们现在将与节点 3 有关的子矩阵作为需要变换的标有撇号的数组。节点 3 上的自由度变换$\{\boldsymbol{D}'_3\}=[\boldsymbol{T}_3]\{\boldsymbol{D}_3\}$对于平面桁架和平面刚架问题分别为

$$\begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}}_{[\boldsymbol{T}_3]} \begin{Bmatrix} U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix} \quad \text{或者} \quad \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{[\boldsymbol{T}_3]} \begin{Bmatrix} U_3 \\ V_3 \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix} \tag{8.4-2}$$

式中 $c=\cos\beta$ 和 $s=\sin\beta$。除了$[\boldsymbol{T}_3]$在对角线上之外，对整个结构的变换矩阵$[\boldsymbol{T}]$是一个单位阵。$[\boldsymbol{I}]$为 2×2 或 3×3 的单位阵(分别对应平面桁架和平面刚架)，$[\boldsymbol{T}]$为

$$[\boldsymbol{T}]=\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{T}_3 & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \tag{8.4-3}$$

在式 8.3－3 中运用式 8.4－1 和 8.4－3 中的$[\boldsymbol{K}']$和$[\boldsymbol{T}]$，我们得到了变换结构刚度矩阵

$$[\boldsymbol{T}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{K}'][\boldsymbol{T}]=\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{11} & \boldsymbol{K}_{12} & \boldsymbol{K}_{13}\boldsymbol{T}_3 & \boldsymbol{K}_{14} \\ \boldsymbol{K}_{21} & \boldsymbol{K}_{22} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}_{24} \\ \boldsymbol{T}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{31} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{T}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{33}\boldsymbol{T}_3 & \boldsymbol{T}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{34} \\ \boldsymbol{K}_{41} & \boldsymbol{K}_{42} & \boldsymbol{K}_{43}\boldsymbol{T}_3 & \boldsymbol{K}_{44} \end{bmatrix} \tag{8.4-4}$$

该矩阵依据位移矢量$\{\boldsymbol{D}\}$运算，它在节点 3 的平移自由度为U_3和V_3。从 8.1－7 可知，节点 3 上变换后的载荷为$\{\boldsymbol{R}_3\}=[\boldsymbol{T}_3]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{R}'_3\}$。如果存在另外的斜面支撑，变换了的刚度矩阵和载荷矢量可以用相同的方式再变换一次。

在前面的解释中，变换是在结构层次上进行的。在编程中，这种方法由于矩阵$[\boldsymbol{K}]$是以压缩的格式贮存的而变得困难。可行的办法是在采用变换矩阵$[\boldsymbol{T}]=\lceil \boldsymbol{T}_3 \quad \boldsymbol{I} \rfloor$组集之前对单个的单元矩阵进行变换。因此，在前面的例子中，我们利用变换矩阵$[\boldsymbol{T}]=\lceil \boldsymbol{T}_3 \quad \boldsymbol{I} \rfloor$，根据式 8.3－3对单元 3－1 和 3－4 的单元矩阵$[\boldsymbol{k}']$进行变换。如果节点 3 的自由度在$\{\boldsymbol{d}\}$的第二位置出现而不是在第一位置，那么我们将采用$[\boldsymbol{T}]=\lceil \boldsymbol{I} \quad \boldsymbol{T}_3 \rfloor$。

另一个可能的应用如图 8.4－1(b)。设想平面杆 B 绕销钉 A 可以无摩擦地自由旋转，此时销钉可视为刚体。销钉 A 不必划分网格。在圆形边界上，杆 B 的节点自由度可以变换到如图所示的极坐标系下。然后，在这些节点上仅把径向位移设置为零即可。

8.5　连接不同单元·刚体单元

“不同单元”是指那些自由度的类型不同或者位置不同的单元。比如，我们也许希望将梁单元(具有旋转自由度)和平面单元(只具有平移自由度)连接起来，或者我们也许希望将两个节点不能重合在一起的有限元网格连接起来。后一种情形也在子模型和子结构中出现(10.10 节和 10.11 节，那里引用了参考文献)。

处理这些情况的一种方法就是施加约束，使得相连单元或网格的自由度相互具有指定的关系。这种约束可以通过变换$[\boldsymbol{k}]=[\boldsymbol{T}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{k}'][\boldsymbol{T}]$施加在刚度矩阵上。在建立变换矩阵$[\boldsymbol{T}]$的时候，考虑使用刚体连接或含有相关自由度的刚体单元是很方便的。(在 13 章中将用更通用的方法讨论约束)

简单例子　在图 8.5－1(a)中，同时具有弯曲和轴向刚度的平面梁单元，它的一端与没有旋转自由度的 4 节点平面四边形单元一边的任意位置相连接。梁单元的刚度关系式为$[\boldsymbol{k}']\{\boldsymbol{d}'\}=\{\boldsymbol{r}'\}$，式中

$$\{\boldsymbol{d}'\}=\lfloor u_5 \quad v_5 \quad \theta_{z5} \quad u_6 \quad v_6 \quad \theta_{z6} \rfloor^{\mathrm{T}} \tag{8.5-1}$$

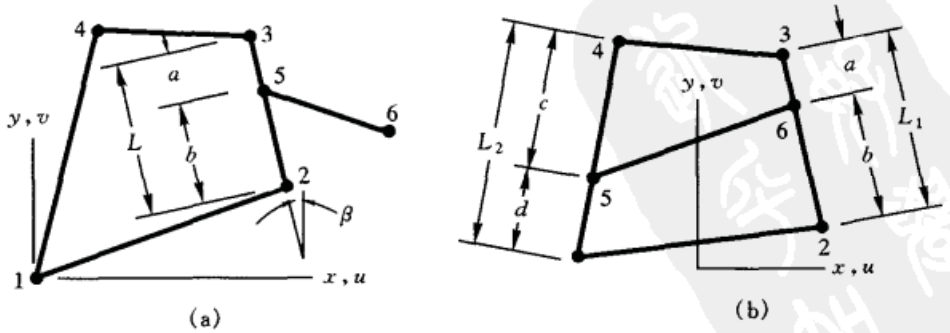


图 8.5－1　(a)平面梁单元 5－6 与 4 节点平面单元 1－2－3－4 连接；
(b)2 节点杆单元 5－6 与 4 节点平面单元 1－2－3－4 连接

梁单元新的自由度为

$$\{\boldsymbol{d}\}=\lfloor u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_6 \quad v_6 \quad \theta_{z6} \rfloor^{\mathrm{T}} \tag{8.5-2}$$

我们现在要求节点5的平移是由节点2和3的平移自由度沿边2-3线性插值。节点5的转角定义为节点2和3的边法向位移之差除以两节点间边长L。因此，在关系式$\{\boldsymbol{d}'\}=[\boldsymbol{T}]\{\boldsymbol{d}\}$中，变换矩阵$[\boldsymbol{T}]$为

$$\underset{6\times7}{[\boldsymbol{T}]}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}_5 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix} \quad \text{式中} \quad [\boldsymbol{T}_5]=\frac{1}{L}\begin{bmatrix}a & 0 & b & 0\\ 0 & a & 0 & b\\ \cos\beta & \sin\beta & -\cos\beta & -\sin\beta\end{bmatrix} \tag{8.5-3}$$

而$[\boldsymbol{I}]$是单位矩阵$\lceil 1 \quad 1 \quad 1 \rfloor$。变换了的梁单元矩阵是7×7矩阵，根据节点2,3和6的自由度来运算。求得了节点自由度之后，可以经式$\{\boldsymbol{d}'\}=[\boldsymbol{T}]\{\boldsymbol{d}\}$运算重新求得梁单元的初始自由度，用于应力计算。

第二个简单的例子如图8.5-1(b)所示。一个二力构件，比如混凝土中加强杆的一部分，被连接到位于4节点平面单元两对边上的任意点。作为初始列式，杆单元的2×2矩阵$[\boldsymbol{k}']$依据自由度u_5,v_5,u_6和v_6来运算。通过变换，我们求得杆单元8×8的矩阵$[\boldsymbol{k}]=[\boldsymbol{T}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{k}'][\boldsymbol{T}]$，它依据4节点单元的自由度$u_i$和$v_i$来运算，$i=1,2,3,4$。矩阵$[\boldsymbol{T}]$是4×8的，包含了类似于在式8.5-3中$[\boldsymbol{T}_5]$前两行看到的那些项。在文献[8.1]中包含了处理三维情况和混凝土与加强件间完全连接的参考文献。

图8.5-1的例子引出了作为一种连接节点不一致单元方法的约束变换。如果节点一致，即使要连接的单元存在不同的节点自由度，也没有必要作变换。考虑图8.5-2(a)，点A的连接是铰链，因为梁有转动自由度，而平面单元则没有(除非平面单元碰巧有旋转自由度，但这种连接是不推荐的)。在图8.5-2(b)中，通过特定的安排避免了铰链，此处梁单元通过增加两个梁单元AB和BC延伸到了平面体中。仅增加一个梁单元AB似乎也可以[8.2]。在节点A,B,C处，平面单元和梁单元共享平移自由度。在这些节点上的旋转自由度只与梁单元有关。不可能盼望在节点A附近精确地计算出应力。

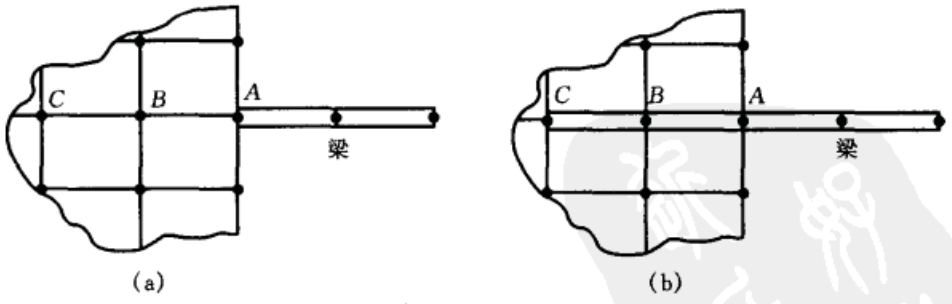
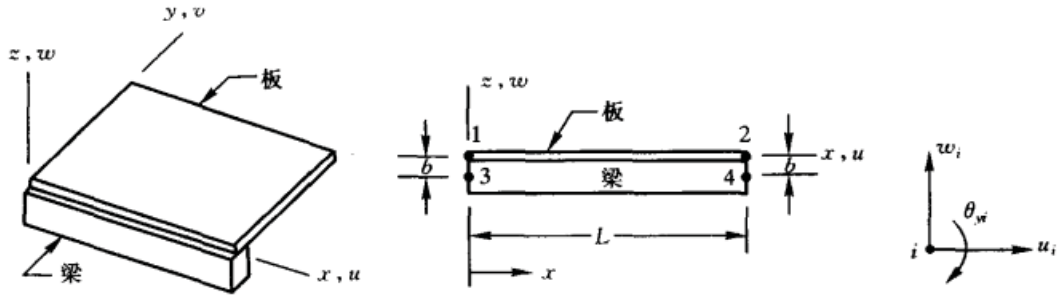


图8.5-2 二维梁单元与4节点平面单元网格的连接
(a)铰链机构。在A点无弯矩传输；
(b)在梁和平面网格间传输弯矩

前面段落描述的方法也可以应用到相类似的轴对称问题当中。那时，图8.5-2表示一个含有旋转轴的横截面，这个横截面图展示的是环形平板与轴对称实体的连接。

偏心加强板　平板经常通过在其一边附着梁来进行增强(图 8.5－3)。梁的节点与平板的节点没有重合在一起,但是它们相距的距离远小于其它尺度(在图 8.5－3 中,$b \ll L$)。于是,像 1 和 3 这样的邻近节点可以看作刚性连接,其位移分量完全决定了在刚性连接端平板和梁的节点位移。刚性连接的位移可以用位于连接处任意位置的节点自由度来表示。在下面的内容中,我们把这个节点与平板节点重合起来。因此,平板的中面变成了组合结构的参考面。变换梁单元的刚度矩阵。梁的自由度从属于平板的自由度,梁的自由度不再显式地出现在总体自由度的数组当中。



(a)　　(b)　　(c)

图 8.5－3　(a)沿一个边与板单元连接的梁单元;
(b)侧视图;
(c)典型节点显示在变换中使用的自由度

设图 8.5－3(b)中平板是节点在四个角上的一个平面单元,梁为节点在末端的单元。两个单元都具有弯曲刚度和薄膜(或轴向)刚度。设想无重的刚性连杆连接节点 1 和 3,相类似的连杆连接节点 2 和 4。在下面的公式中,我们假设转动很小,仅包括了需要用来描述 xz 平面内变形的自由度。在左端,变换为

$$\begin{Bmatrix} u_3 \\ w_3 \\ \theta_{y3} \end{Bmatrix} = [\boldsymbol{T}_b] \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_{y1} \end{Bmatrix} \quad \text{其中} \quad [\boldsymbol{T}_b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8.5-4}$$

类似的变换可应用到右端,只要用下标 2 和 4 代替 1 和 3。令有撇号的数组用于初始梁单元,此时它与节点 3 和 4 的自由度相关。当与节点 1 和 2 的自由度相关时,梁单元的数组$[\boldsymbol{k}]$和$\{\boldsymbol{r}\}$为

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{k}] &= [\boldsymbol{T}]^{\mathrm{T}} [\boldsymbol{k}'] [\boldsymbol{T}] \\ \{\boldsymbol{r}\} &= [\boldsymbol{T}]^{\mathrm{T}} \{\boldsymbol{r}'\} \end{aligned} \quad \text{其中} \quad [\boldsymbol{T}] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{T}_b & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{T}_b \end{bmatrix} \tag{8.5-5}$$

很明显,这个方法可以扩展到说明加劲件的扭转问题和处理空间任意方位的加劲件或不垂直任何一个单元的刚性连接件。如果不是在自由度的平行方向上连接单元的话,就必须采用8.1节中所讨论的旋转变换。

当式 8.5－4 和 8.5－5 的变换应用到标准梁单元时,会使其自由度从属于平板单元的自由度,梁板的组合显示出了在纯拉伸和纯弯曲状态下正确的刚度。但是如果曲率是随 x 变化的,则这个组合过于柔性化。考虑变形状态 $u_1 = u_2 = w_1 = w_2 = 0, \theta_{y1} = \theta_{y2}$,也就是将梁和平板

都弯曲成S形状，在两个单元内都没有轴向应变。因此，梁和平板不是共享一个中性轴，它们的横截面都围绕位于各自形心处的中心轴旋转。因而，刚度被估计过低。在实际应用中，反复的网格细分使得每个单元都逼近常曲率的状态，对此，邻近的梁和平板单元就共享了它们应该有的中性轴。偏心加强板的讨论和对上述变换缺点的补救在文献[2.17，8.3～8.5]中给出。

刚性单元 在前面的讨论中，我们介绍了虚构的，使一个单元的自由度从属于另一个单元的自由度的刚性连接。一般地，我们可以设想一个任意形状和尺寸的刚性单元，作为一种手段来增强两个或多个自由度的联系。这样的关系有时候被称为多点约束。

刚性单元的另一种应用是当一个单元或单元分片碰巧远比嵌入它的网格刚硬时。这种情况会引起将在9.2节中讨论的那一类数值误差。这些误差可以通过将刚性区域表示为理想刚体而消除。变换关系又再一次为施加刚性约束提供了一种方法。

作为一个例子，设想图8.5-4(a)的三角形1-2-3理想化为一个完全的刚体。因此，它仅有xy平面内的刚体运动，只由三个自由度u_1，v_1和u_2来定义。这些自由度通过如下变换与初始的6个自由度的联系起来，

$$\{\boldsymbol{d}'\}=[\boldsymbol{T}]\{\boldsymbol{d}\} \quad 或 \quad \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a/b & 1 & a/b \\ 1 & 0 & 0 \\ -a/b & 1 & a/b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \tag{8.5-6}$$

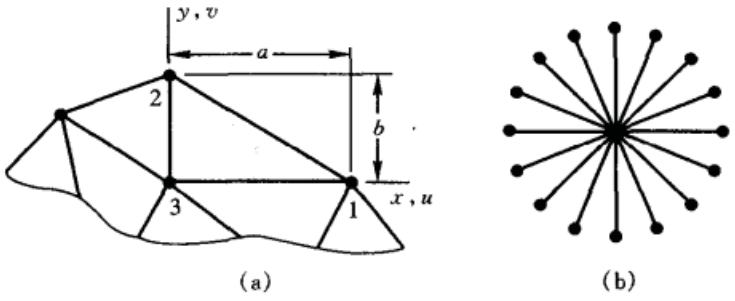


图8.5-4 (a)平面弹性单元网格中的刚体单元；
(b)扇辐式刚体连接组件

其中$u_3=u_1$，$v_2=v_3=v_1-\theta_z a$，此处$\theta_z=(u_1-u_2)/b$是一个小的刚体转动。这个变换从结构自由度数组中除去了自由度v_2，u_3和v_3。单元1-2-3的弹性性质无关紧要，它们已被刚体约束取而代之。方程8.5-6可以用来构建应用于整个结构的变换矩阵，虽然在组集前对每个含有被除去一个自由度的单元来说，应用这些关系式也许会更好一些。

选择$\{\boldsymbol{d}\}=\lfloor u_1 \quad v_1 \quad u_2 \rfloor^{\mathrm{T}}$不是唯一的。如果刚性三角形的节点编号由1-2-3改变为2-3-1，以至于$y_2-y_1=0$，这将是不可接受的。那样，式8.5-6会出现被零除的情况，用做独立自由度的u_1和u_2将与三角形为刚性的陈述相矛盾。很明显，必须谨慎选择将要保留的自由度。

刚性单元可能的缺点就是它们不能够随温度的变化膨胀或收缩。另一个可能的缺点，在

动力学问题中会遇到，变换会使对角线的单元质量矩阵$[m']$转换成了非对角的单元质量矩阵$[m]$。

讨论与图 8.4－1(b)相关的平面问题能够用扇辐式刚性连接组件来处理(图 8.5－4(b))。一个这样的连接件把杆 B 圆形边界上的节点与位于销钉 A 中心上的节点联系起来了。在这个节点上，允许转动，但限制平移。

能够设想刚性连接的其它不同应用。连接搭接平板的点焊效果可以用连接两相邻节点来近似，在每个板中有一个节点，并位于板的中面上，所用刚性连接件其方向垂直于板中面。这样的模型把弯矩传递集中到位于各自中面的单个节点上。这个力矩能够由在每个板上加入的扇辐式刚性连接件分散开(图 8.5－4(b))。每个扇辐都集中在中面节点上，有与焊点相同的直径，并代替直径范围内的板材。中心中面节点之间的连接可以是一个梁单元而不是刚性连接件。

8.6 高阶导数作为节点自由度

通常情况下，基于位移的单元采用平移和转动作为节点的自由度。相对 xyz 于坐标轴，这些运动就是沿轴向的 u,v,w 位移和绕轴的 $\theta_x,\theta_y,\theta_z$ 转动。因此，在 xy 平面内，典型的平面单元的自由度就是 u 和 v 的节点值；典型的平板弯曲单元的自由度就是 w,θ_x 和 θ_y 的节点值。对于这些单元，高阶导数的自由度对于平面单元将包括应变分量 $u_{,x}u_{,y},v_{,x}$ 和 $v_{,y}$，对平板弯曲单元将包括曲率 $w_{,xx},w_{,yy}$ 和 $w_{,xy}$。好几年以前，具有诸如以上节点自由度的单元就在许多研究文章中提出了。

每个节点有好几个自由度的单元必须基于高阶场域。因此，在单元数目给定的情况下，它们比常规单元给出了更好的精度。用于计算应力(或弯矩)的应变(或曲率)项出现在了节点自由度矢量中。因此，应变$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}=[\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{d}\}$的计算可以比常规单元更精确。而且，用在应变计算的位移导数可以直接在节点上取得，在这些节点所在位置上常规的应变计算$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}=[\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{d}\}$不是特别精确。

然而，具有高阶自由度的单元可能难于使用。在厚度和材料属性存在突变的地方，就不能强迫单元之间高阶导数的连续性。例如，若一个平板在厚度上有一个阶跃的变化，弯矩通过阶跃时是连续的，但是曲率则不是。为了避免强迫曲率的连续性，在共用阶跃处作为单元边界的一对单元的一个中，在阶跃位置节点处的曲率自由度能在单元组集前凝聚掉。除了凝聚的麻烦外，我们也减小了高阶导数自由度在很多地方的优点，其中有最值得重视的高应力梯度区。

边界条件变得难以处理是因为高阶导数自由度和它们关联的载荷的物理意义常常是模糊不清的。例如，如果一个平面单元包含了作为节点自由度的 $u_{,x}u_{,y},v_{,x}$ 和 $v_{,y}$，则无应力边界在这些自由度中间规定了一个约束关系，但是没有规定其中任何一个自由度的具体数值。

软件通常以这种方式来编码，限制每个节点上自由度矢量的规模，也许是三个平移，三个转动，温度和压力。因此，一个在每个节点上具有相当大的自由度列表的单元不容易被加入到软件中去。

总之，高阶导数自由度趋向于使 FEA 应用于它最适合解决的问题时难度增大。这些问题单元类型混合，在几何上有突变，或有组件锐角相交而不是用平滑曲线过渡。

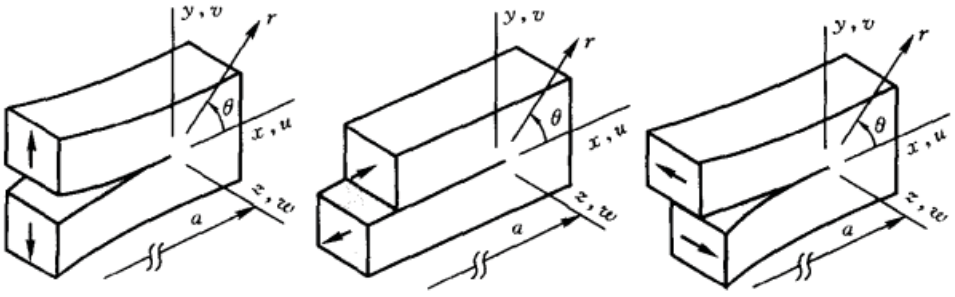
8.7 断裂力学·奇异单元

一个物体可能失效是由于存在的肉眼可见的裂纹突然扩展，在不存在裂纹时，甚至易变形的性能也会导致失效。断裂力学研究的是裂纹可能突然扩展的条件[8.6]。在分析中，人们可能要求产生失效的载荷，或必须承受已知的载荷时所允许的裂纹尺寸。

断裂力学是一门独立的力学学科，其文献丰富。而且，有许多的文章写的是关于有限元在断裂力学中的应用。在本节，我们只进行介绍性的讨论。

图 8.7-1 显示了裂纹的三种不同的扩展模式。裂纹的扩展可能出现这些不同模式的组合。模式 I 是最普通的裂纹张开模式。应力随着到裂纹尖端的距离的减小而急剧增大，并可用应力强度因子 K 量化表示

$$K_{\mathrm{I}} = \beta\sigma\sqrt{\pi a} \tag{8.7-1}$$



(a)模式 I (张开)　(b)模式 II (滑移)　(c)模式 III (剪切)

图 8.7-1 裂尖邻近区域的扩展模式

此处的下标 I 表示该因子用于模式 I。如图 8.7-2 所示，式 8.7-1 中的 σ 是距裂纹足够远到不受其影响的应力，而 a 是表示裂纹长度的常用符号(中心裂纹的长度为 $2a$，边缘裂纹的长度为 a)。无量纲因子 β 取决于几何形状。在图 8.7-2 中，β 取决于比值 a/w，并且对于图中所示的两个裂纹取值是不相同的。应力强度因子不是应力集中因子；它们的定义从根本上不同。应力强度因子 K_{I} 的单位是 MPa $\sqrt{m}$，而应力集中因子是无量纲的。虽然裂纹尖端附近的应力非常大，但式 8.7-1 中的 σ 是远场应力，因此式 8.7-1 中没有引入应力集中因子。

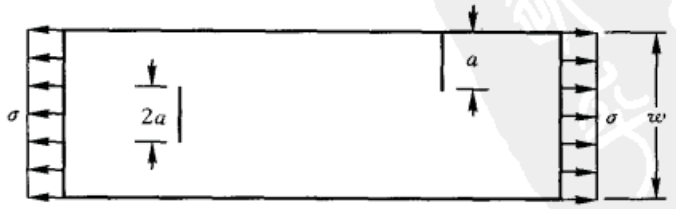


图 8.7-2 一个厚度为 w 的平板有一中心裂纹和一边裂纹，远离于裂纹的平板应力 σ 是均匀分布的

断裂的发生就在应力强度因子 K_1 达到临界值 K_{IC} 之时，临界值 K_{IC} 被称为断裂韧性，它的单位与 K_1 一样是 MPa $\sqrt{m}$。如果某些条件满足，K_{IC} 可被看作是材料属性，其数值以表格形式列出。这里的某些条件指的是裂纹长度 a 和试件厚度 t 的值都至少必须是 $2.5(K_{IC}/\sigma_Y)^2$，此处的 σ_Y 是拉伸试验中的屈服强度。对于比较小的 a 和 t 值，断裂韧性是 a 和 t 的函数。用式 8.7－1 中的 $K_1=K_{IC}$，人们可对产生断裂之时的应力 σ 或裂纹长度 a 进行求解。或者是在 σ 和 a 已知时，人们可求得所要求的 K_{IC}。

对于简单的几何形状和加载形式，人们用表格的形式列出了它们的应力强度因子，尤其是 I 型裂纹。对于任意的几何形状和加载形式，有限元分析提供了计算应力强度因子的方法。为了计算引起物体失效的载荷，人们可运用一个任意的参考载荷，确定出应力强度因子，然后用断裂韧性与计算的应力强度因子的比率乘以参考载荷。有限元分析也能够提供一个裂纹附近的应力场或任意几何形状物体中的裂纹形式。

理论证明，在线弹性条件下，裂纹尖端附近的应力与$\sqrt{r}$成反比，此处的 r 为到裂纹尖端的距离。虽然常规单元表示不出 $1/\sqrt{r}$的应力场，但是它们可以用来求取应力强度因子，这是因为计算取决于裂纹尖端附近的条件，而不是裂纹尖端的条件。然而，能够表示出 $1/\sqrt{r}$应力场的单元，对给定的单元数，可提供更高的精度，或者单元数量较小时，也能提供类似的精度。碰巧，当边节点设置适当，有边节点的常规单元也能够表示 $1/\sqrt{r}$的应力场。

1/4 点单元　仅用移动边节点使它们出现在 1/4 而不是边中点处，就能使有边节点的等参单元包含所希望的应力场。为了以最简单的方式说明这个特性，我们考虑在 6.1 节中讨论过的 3 节点杆单元。图 8.7－3 再次显示了这个单元，但现在单元的节点在 $x_1=0$，$x_2=L/4$和 $x_3=L$ 处。由式 6.1－3 和 6.1－4 可得

$$x=\frac{L}{4}(1+\xi)^2 \quad 或 \quad \xi=2\sqrt{\frac{x}{L}}-1 \tag{8.7-2}$$

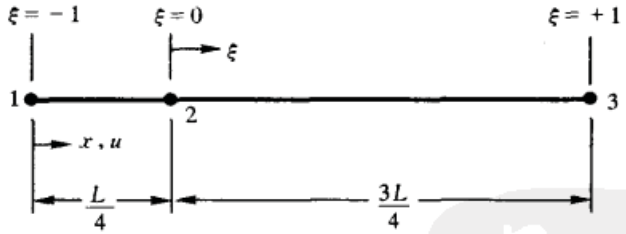


图 8.7－3　在 1/4 点处有节点 2 的 3 节点杆单元

由式 6.1－6 和 6.1－7 可求得 J 和$[\boldsymbol{B}]$，从其中可通过式 8.7－2 消去 ξ。由此得到轴向应变的表达式为

$$\varepsilon_x=\left[\left(\frac{2}{L}-\frac{3}{2\sqrt{Lx}}\right)\left(-\frac{4}{L}+\frac{2}{\sqrt{Lx}}\right)\left(\frac{2}{L}-\frac{1}{2\sqrt{Lx}}\right)\right]\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{Bmatrix} \tag{8.7-3}$$

式 8.7－3 表明，如果 $x\ll L$，则 ε_x（和随后的 σ_x）与$\sqrt{x}$成反比。这样就显示出所希望的奇异性。

该单元仍然能够表示无应变(当 $u_1=u_2=u_3$ 时,$\varepsilon_r=0$)的刚体运动和常应变(当 $u_i=cx_i$ 时,$\varepsilon_r=c$)的状态。

6 节点平面三角形单元有同样的性能。因此,很适合用圆盘形区域把裂尖围起来,其中从裂尖辐射出单元边,并在 1/4 处有它们的节点,如图 8.7-4(b)所示。为了有最好的精度,建议每个单元为直边的等腰三角形,在与裂纹尖端相对的边中点设置节点,$l<a/8$,$30°<\alpha<40°$[8.7]。应力变量 $1/\sqrt{r}$ 出现在从裂尖引出的所有射线上。通过折叠一个 8 节点四边形来生成一个三角形同样是可行的,这样图 6.4-1 中的 1,4 和 8 节点重合,它们有相同的坐标和位移分量。在四个边中的两个边上有 1/4 位置节点的 8 节点四边形不能完全看作是成功的。在三维问题中,曲线裂纹的前沿会带来一些困难。见参考文献[8.8]。

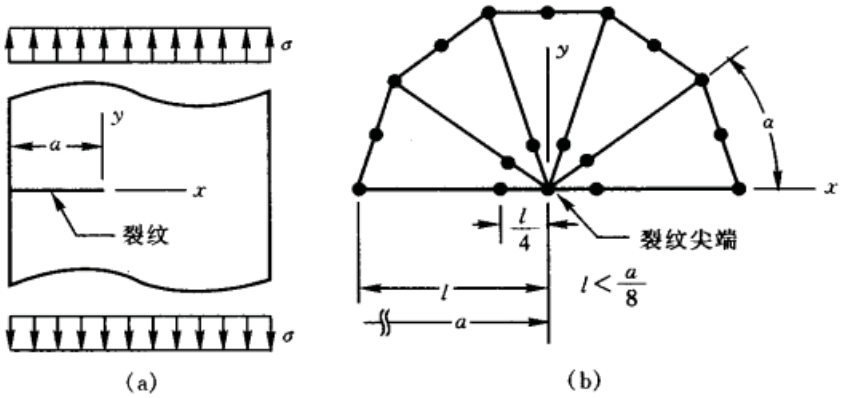


图 8.7-4 (a)受拉伸载荷的扁平杆,棱边有长度为 a 的裂纹;(b)围绕裂纹尖端的 1/4 位置点三角形单元网格。利用对称性,仅建立杆 $y>0$ 部分的模型

1/4 点单元的好处是它们用输入数据即可生成,这些数据指定已经包含在标准软件中的单元节点位置。由于 1/4 点单元通过了分片试验,因此随网格细化就可以保证正常收敛。当然,也存在另外的单元。混合型单元已经被构造出来了,它具有位移自由度和能体现所希望的奇异性的内部应力场。在下一节要讨论的边界元也是适用的。

k_I 的计算 计算应力强度因子有三种途径。每种方法都要对裂纹体进行分析。然后用裂纹张开位移法、刚度系数法或 J 积分法计算因子。裂纹张开位移法最为简单,但是精度最差。其它两种方法的精度相差无几[8.8]。经常使用的是 J 积分法,但是刚度系数法的意义最容易解释。当应用到平面物体计算应力强度因子时,它的运算过程如下。

由式 4.8-20 可知,物体的势能为

$$\Pi_p=\frac{1}{2}\{\boldsymbol{D}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}-\{\boldsymbol{D}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{R}\} \tag{8.7-4}$$

现在,设裂纹张开了一个小量 Δa,但物体的结构、支撑和载荷都不发生改变。Δa 的一个可能选择就是一个典型单元尺度的 10^{-6} 倍[8.8]。由于存在增量 Δa,所以刚度矩阵变成 $[\boldsymbol{K}+\Delta\boldsymbol{K}]$,位移变成 $\{\boldsymbol{D}+\Delta\boldsymbol{D}\}$。因此

$$\Pi_p+\Delta\Pi_p=\frac{1}{2}\{\boldsymbol{D}+\Delta\boldsymbol{D}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{K}+\Delta\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}+\Delta\boldsymbol{D}\}-\{\boldsymbol{D}+\Delta\boldsymbol{D}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{R}\} \tag{8.7-5}$$

$$\Delta\Pi_p=(\Pi_p+\Delta\Pi_p)-\Pi_p=\frac{1}{2}\{\boldsymbol{D}\}^{\mathrm{T}}[\Delta\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\} \tag{8.7-6}$$

此处，后一个方程是由前一式在忽略了高阶项，运用关系式$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\}$之后得到的。为了用数值方法计算$\Delta\Pi_p$，我们可以求解方程$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\}$，得出$\{\boldsymbol{D}\}$，然后用式 8.7－6 计算$\Delta\Pi_p$的数值。矩阵$[\Delta\boldsymbol{K}]$很有可能为稀疏矩阵，因为裂纹的小量扩展只需要改变裂纹尖端附近的网格。因此，$\Delta\Pi_p$的计算采用单元改变以后的矩阵$[\Delta\boldsymbol{k}]$，而不是$[\Delta\boldsymbol{K}]$。用t＝结构的厚度和ν＝泊松比，提供应力强度因子K_1的断裂力学理论公式为

$$\text{平面应变：}K_1^2=-\frac{E}{(1-\nu^2)t}\frac{\Delta\Pi_p}{\Delta a}\qquad\text{平面应力：}K_1^2=-\frac{E}{t}\frac{\Delta\Pi_p}{\Delta a}\tag{8.7-7}$$

出现负号是因为当Δa为正时$\Delta\Pi_p$为负。

8.8　弹性基础·无限介质

有时候，一个结构由另一个结构弹性地支撑着。由地基支撑的混凝土路面就是一个例子，地基的性能可以被理想化为一个简单的弹性基础。或者，我们所关心的区域由范围如此广大的介质包围着，以至可以认为是无限的。这样的物理问题已不是一个结构力学的问题了。在任何情况下，必须用一种方法描述支撑或环绕介质，这种方法不需要大量的自由度，在无限介质和问题是动力学的条件下不反射波，并且还要有足够的精度。建模的目的是描述介质作用于我们所关心区域的效果，而不是分析介质本身。

弹性基础　一种简单类型的弹性支撑可以借助于离散的线性弹簧，连接结构面的节点与邻近的固定面的节点来建模，但这是一个既难于实施又容易出错的模型。为了模拟具有均匀刚度的弹性层，离散弹簧必须要有刚度，这个刚度取决于结构面节点的间距。而且，如果结构单元为实体单元，并且具有边沿节点，根据均匀位移为均匀压力建模，一些弹簧的刚度必须为负值。比如，由于均匀压力，在 8 节点矩形面上总的作用力以图3.11－3(d)中对总的作用力W同样的比例分配到节点上。

文克勒(Winkler)基础模型运用 4.8 节的能量概念很容易用公式来描述。文克勒模型假定基础只限制它的表面法向位移，抵抗压力为$p=\beta w$，β为基础模量，w为基础表面的横向挠度。这个模型的挠度只发生在载荷施加的地方，而对周围的基础无任何影响(图 8.8－1(a))。面积为 dA 的基础表面的作用如同刚度为$k=p\mathrm{d}A/w=\beta w\mathrm{d}A/w=\beta\mathrm{d}A$的线性弹簧。线性弹簧的应变能为$1/2kw^2$。现在考虑一个结构单元，也许是平板弯曲单元或者 3D 实体单元的一个面，它与基础接触的面积为A。面积A垂直于基础的横向挠度为$w=\lfloor\boldsymbol{N}_f\rfloor\{\boldsymbol{d}_f\}$，其中$\{\boldsymbol{d}_f\}$含有与基础接触的单元节点自由度。面积为$A$的基础的应变能为

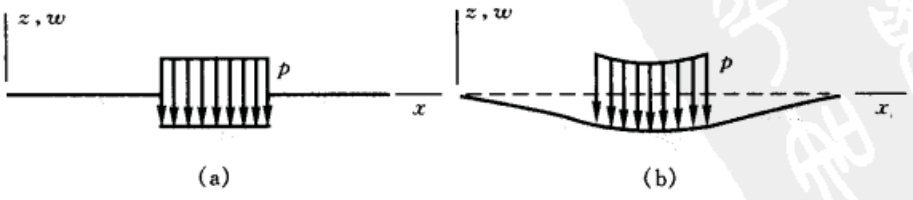


图 8.8－1　受均匀压力p作用的弹性基挠度
(a)文克勒基础；(b)弹性实体基础

$$U=\frac{1}{2}\int \beta w^2 \mathrm{d}A=\frac{1}{2}\int w^{\mathrm{T}}\beta w \mathrm{d}A=\frac{1}{2}\{\boldsymbol{d}_f\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{k}_f]\{\boldsymbol{d}_f\} \tag{8.8-1}$$

上式中，文克勒基础的单元刚度矩阵为

$$[\boldsymbol{k}_f]=\int \beta \lfloor \boldsymbol{N}_f \rfloor^{\mathrm{T}} \lfloor \boldsymbol{N}_f \rfloor \mathrm{d}A \tag{8.8-2}$$

例如，如果问题是文克勒基础上的一根梁，$\lfloor \boldsymbol{N}_f \rfloor$与梁的形状函数矩阵$\lfloor \boldsymbol{N} \rfloor$相同，$\lfloor \boldsymbol{N} \rfloor$的各个分量$N_i$出现在图 3.2-4 中，$\mathrm{d}A=b\mathrm{d}x$，其中$b$是梁与基础接触面的宽度。矩阵$[\boldsymbol{k}_f]$与动力学中使用的质量矩阵$[\boldsymbol{m}]$有相同的形式。（注意：如果的确是动力学问题，则基础对质量以及刚度都有影响。）

因为矩阵$\lfloor \boldsymbol{N}_f \rfloor$精度有限，所以矩阵$[\boldsymbol{k}_f]$就不精确。对于一个梁，$\lfloor \boldsymbol{N}_f \rfloor$含有三次多项式，但是位于文克勒基础上的梁的精确挠度是用指数和三角函数表示的。对基于三次形状函数的$[\boldsymbol{k}_f]$，会随着网格的细分而收敛，但是要精确地计算弯矩则需要相当好的网格才行。对于弹性基础上的梁，基于理论上精确的横向位移函数计算的刚度矩阵比在粗网格中要精确得多。对于相关的双参数基础模型，这些列式也是很有用的。在众多参考文献中，[8.9～8.11]最为典型。

文克勒基础模型能够适用于许多问题。另外一个可能的基础模型是弹性实体模型（图 8.8-1(b)），它比文克勒模型复杂。在那里，整个基础表面在对任意点载荷响应中都有变形。因此，基础和基础表面的所有自由度耦连在一起，并且基础的刚度矩阵是满阵，不是稀疏矩阵。在引入一些近似之后可以恢复它的稀疏性[8.12]。对于文克勒模型和弹性实体基础模型，都假定结构与基础不存在任何的分离。分离将使问题非线性化，因为它们接触的范围和压力在初始时刻都是不确定的。

无限元 我们所要解决的问题可能会涉及到几乎无限大而又不能用弹性基础恰当描述的介质。地下结构、在空气中运动的翼和受到水波作用的船舶结构都是其中的例子。结构周围介质的数值模型必须在某处终止，而不是无限制地延伸。在常规有限元模型中，如图 8.8-2(b)，刚性支撑边界应该放置在何处不清楚。如果离载荷太近，计算精度则会降低。如果离载荷太远，就有许多单元被用去描述我们并不关心的区域。为了减少自由度数目，我们可以先用较小的常规单元对我们所关心的区域建模，然后把这些网格与“无限”单元层连接（图 8.8-2(c)）。

列式表示无限元的一种方法是利用使场量接近无限远处远场值的形状函数，并且使单元保持有限的尺寸。另外一种方法就是采用常规形状函数去描述场变量的变化，而采用其他的形状函数去描述单元的几何形状，这种形状函数将单元的一条边设置于无限远处。后一种方法比较简单。它产生了所谓的“映射”无限元。下面的一维映射无限元虽然不实用，但是为映射无限元提供了一个简单的介绍[8.13]。

在图 8.8-3 中，单元 1-2-3 是一个一维单元。节点 1，2 之间的距离a可被认为是单元的特征长度。若M_i表示第i个几何形状函数，则单元 1-2-3 的几何形状为

$$x=M_1x_1+M_2x_2 \quad \text{其中} \quad \begin{aligned} M_1&=-\frac{2\xi}{1-\xi} \\ M_2&=\frac{1+\xi}{1-\xi} \end{aligned} \tag{8.8-3}$$

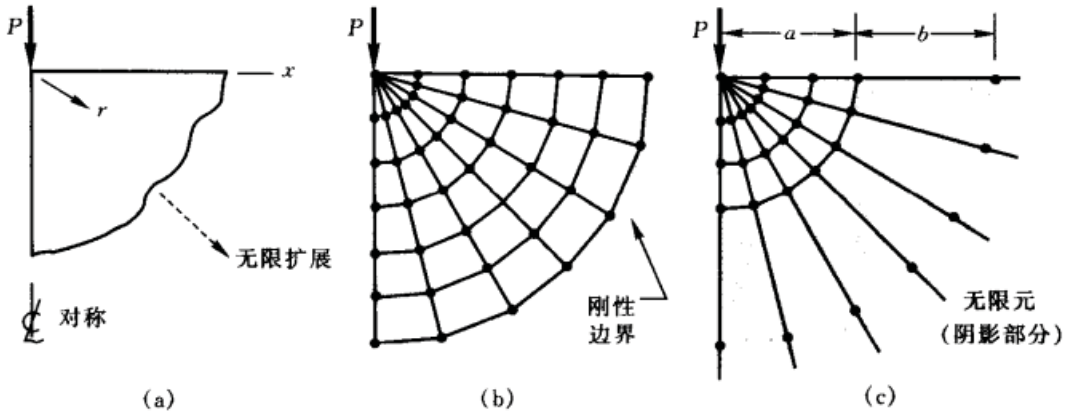


图 8.8－2　(a)作用在 x 轴下无限域平面或轴对称物体上的载荷 p；
(b)常规单元大网格；
(c)由无限元限定的较小网格

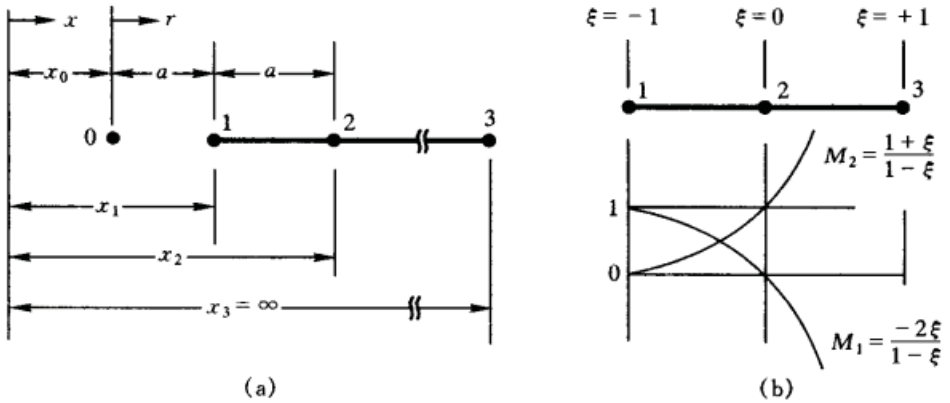


图 8.8－3　(a)物理空间的一维单元；(b)如同用参数坐标 ξ 映射的单元

从上式中知，$\xi=-1$ 时，$x=x_1$；$\xi=0$ 时，$x=x_2$。当 ξ 趋近于 $+1$ 时，x 趋近于无穷。因此，节点 3 不需要在式 8.8－3 中明确地表示出来。场变量 ϕ 可以用标准形状函数进行插值。对于现在的这个 3 节点单元，由式 6.1－4 得

$$\phi = \underbrace{\lfloor \frac{1}{2}(-\xi+\xi^2) \quad 1-\xi^2 \quad \frac{1}{2}(\xi+\xi^2) \rfloor}_{\lfloor N \rfloor} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \tag{8.8-4}$$

自由度 ϕ_3 作为边界条件可设为零。除了式 8.8－3 中的映射函数 M_1 和 M_2 被用来构建雅可比行列式 J 之外，结构单元的单元矩阵列式 6.1－6 到 6.1－8，都用通常的方式处理。例如，矩阵 $\lfloor \boldsymbol{B} \rfloor$ 为

$$\lfloor \boldsymbol{B} \rfloor = \frac{1}{J}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\lfloor \boldsymbol{N} \rfloor \quad \text{其中} \quad J = \frac{\mathrm{d}M_1}{\mathrm{d}\xi}x_1 + \frac{\mathrm{d}M_2}{\mathrm{d}\xi}x_2 \tag{8.8-5}$$

为了获得如何表示场变量 ϕ 的表达式，我们首先求解式 8.8－3，获得以 x 表示的 ξ，然后代入图 8.8－3 中的 $x=x_0+r$，$x_1=x_0+a$ 和 $x_2=x_0+2a$。因此

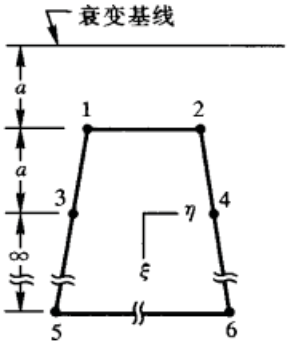
$$\xi = \frac{x - x_2}{x - 2x_1 + x_2} = 1 - \frac{2a}{r} \tag{8.8-6}$$

将式 8.8-6 代入到式 8.8-4，得

$$\phi = \phi_3 + (-\phi_1 + 4\phi_2 - 3\phi_3)\frac{a}{r} + (2\phi_1 - 4\phi_2 + 2\phi_3)\frac{a^2}{r^2} \tag{8.8-7}$$

当 r 趋近于无穷时，ϕ 趋近于 ϕ_3（ϕ_3 作为边界条件多半设置为零）。如果 $\phi_1=\phi_2=\phi_3=c$，则 ϕ 取常值 $\phi=c$。ϕ 随 r 的线性变化不能用式 8.8-7 来表示。一般地，式 8.8-7 中的两个括号内的表达式不会为零，所以 ϕ 在 0 点处是无穷大，此处 $r=0$。因此，0 点处就成为了一个极点或奇异点，相对于该点场变量 ϕ 消失。这就意味着，在诸如图 8.8-2(c)的问题中，确实在 $r=0$ 处有奇异性，我们应该利用 $a=b$。

如图 8.8-4 所示的单元既可以用于平面问题，也可以用于轴对称问题。该单元在 ξ 方向上延伸到无穷，可以认为是图 8.8-3 中单元的扩展。如果场变量 ϕ 在单元节点 5 和 6 处设置为零，则 N_5 和 N_6 不需要在单元列式中出现，自由度 ϕ_5 和 ϕ_6 也不需要带入到$\{\boldsymbol{D}\}$中。无限元之间的边界应从最高应力梯度区域近似地向外辐射，随着距离的增加应“扇状散开”而不是相交。



映射函数

$$M_1 = \frac{-2\xi}{1-\xi}\frac{1-\eta}{2}$$

$$M_2 = \frac{-2\xi}{1-\xi}\frac{1+\eta}{2}$$

$$M_3 = \frac{1+\xi}{1-\xi}\frac{1-\eta}{2}$$

$$M_4 = \frac{1+\xi}{1-\xi}\frac{1+\eta}{2}$$

形状函数

$$N_1 = \frac{1}{4}(-\xi+\xi^2)(1-\eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(-\xi+\xi^2)(1+\eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$$

$$N_4 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$$

$$N_5 = \frac{1}{4}(\xi+\xi^2)(1-\eta)$$

$$N_6 = \frac{1}{4}(\xi+\xi^2)(1+\eta)$$

图 8.8-4 二维无限单元

补充的信息出现在许多参考资料中，包括文献[8.13,8.14]。3D 无限元的修正函数出现在文献[8.15]中。文献[8.16～8.18]包括了波动问题的相关资料，对波动问题，希望在无限远处有无反射边界。

边界元 用边界元方法(BEM)分析物体时，只需要在边界上进行离散，而不是像有限元分析那样对边界和内部区域都离散。因此，当对图 8.8-2 的问题进行边界元方法求解时，将会看到节点只分布在 x 轴上，而在 x 轴的下面没有节点。当对实体进行分析时，边界元方法把节点放在表面上，而不是在内部区域。

有限元方法导致的总体刚度矩阵是稀疏和对称的，而边界元方法的总体矩阵则是满阵和非对称的，但是它的规模小于有限元方法分析的总体矩阵。矩阵规模的缩小源于边界元只在边界上进行网格划分，与此同时将 3D 问题化为了 2D 问题或者 2D 问题化为了 1D 问题。对于 3D 问题，当用有限元方法分析时，计算机资源非常紧张，因此矩阵规模的缩小就显得非常重要。然而，对于绝大多数问题，在减少数据准备工作量上，边界元方法的优势也许不如有限元方法：无论是何种求解方法，问题的几何形状都必须描述，而有限元方法软件能够自动用单

元填充定义的区域。

边界元法列式始于一个基本解，它是对于被称为点载荷的解。在弹性问题中，这种载荷为单位值点力；在热传导中，点载荷为一点的单位热流量；在静电学中，点载荷为单位电荷。基本解满足问题的控制微分方程，因此可被认为是精确的。基本解可用到无限介质中，并在载荷点引入奇异性，然而所得到的边界元方法应用于求解的问题还未展示这两个方面。在实践中，当建模问题在无限远处有边界时，边界元方法相对于有限元方法的优势最为突出。当边界元方法应用于有界问题时，在表面积与体积的比值小的情况下效果最好。因此，边界元方法不太适合板和壳的求解，因为它们的表面积与体积之比很高，工程人员不会用边界元方法去分析桁架或刚架的。边界元法的参考文献包含在[8.19～8.23]中。

相对于有限元方法，边界元方法的优点包括：

- 奇异性，比如凹角处和裂纹尖端的应力，可包含在基本解中而不需要特别的单元或特别的修正（比如断裂力学中用的 1/4 点有限元）。
- 类似地，可自动地包含无限远处的边界，而不需要对无限元之类的特别列式。
- 处理不可压缩材料不会遇到与病态有关的数值困难。
- 可更精确地计算人们通常最感兴趣的边界应力。

相对于有限元方法，边界元方法的缺点包括：

- 边界元方法不能用于不知道基本解的问题。因此，边界元方法不能对每个涉及各向异性、不均匀性或非线性的问题进行求解。
- 边界元法数学求解比较困难。有限元方法的物理吸引力，包括它的离散区和插值域能够可视化，这是边界元方法所没有的。
- 当前，边界元法的技术和软件不如有限元法完善，应用得不如有限元法广泛。

完全采用有限元方法或完全采用边界元方法进行分析都是不必要的。在单独的分析中，已有耦合两种方法的途径，以便使每一种方法描述最适合它自己的那部分模型[8.24～8.27]。

相关选项 最近，一种处理无限介质的新方法结合了有限元方法和边界元方法的特点[8.28～8.31]。它与两种方法有关，即“比例边界有限元方法”和“协调无限小有限元晶格法”。根据文献[8.28]，这种方法离散只在结构介质的界面上进行，因此产生的分析模型的空间维数少于实际的物理结构。据说，这种方法在径向上是精确的，在周向上从有限元的意义来看也是精确的。与边界元法相反，这种方法不需要基本解。它可适应各向异性的材料，能够在不增加计算量的情况下引入可扩展到无限远处的边界。推导过程基于有限元列式法和相似性。

特弗兹（Trefftz）单元与边界元相似，它们都是利用精确满足问题的微分方程的函数来列式。在 4.10 节中已有概述。

8.9 修改结构·重新分析

设想已经进行了一次分析，然后结构作了修改：改变了一些维数，改变了材料或者重新划分了有限元网格。人们想要知道修改后的答案。显而易见的方法就是用修改后生成的矩阵方程解出其值，这样完整地重新求解一次。*重分析法*意味着以比完全重新求解较小的计算量，根据前面求解的可用信息进行运算，提供或逼近新解。当一个大的结构仅一小部分修改，用这种

方法节省工作量可能最大。重分析用于反复修改以满足许用应力或挠度极限值可能是很合适的，在优化设计，变更有限元模型以适应试验数据和参数研究中（其中分析者寻找一个对量的有序变化的反应）中更是如此。

与时间无关的重分析问题论述如下。结构修改之前和之后的总体方程是

$$\text{之前：}[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\}\qquad\text{之后：}[\boldsymbol{K}^*]\{\boldsymbol{D}^*\}=\{\boldsymbol{R}^*\}\tag{8.9-1}$$

此处$[\boldsymbol{K}^*]$体现结构的修正，$\{\boldsymbol{D}^*\}$是我们寻求的修正响应。我们认为$\{\boldsymbol{R}\}$不变。当然，这就要求结构改变前后载荷不发生改变。而且还要求在$\{\boldsymbol{R}\}$中作为节点量表示载荷的方式保持不变。如果不是这样的话，要修改$\{\boldsymbol{R}\}$，但相对于它的初始形式要保持静力等效。

在特征问题中，结构修改前后的总体方程为

$$\text{之前：}([\boldsymbol{K}]-\lambda[\boldsymbol{M}])\{\overline{\boldsymbol{D}}\}=\{\boldsymbol{0}\}\qquad\text{之后：}([\boldsymbol{K}^*]-\lambda^*[\boldsymbol{M}^*])\{\overline{\boldsymbol{D}}^*\}=\{\boldsymbol{0}\}\tag{8.9-2}$$

其中，特征值λ和特征向量$\{\overline{\boldsymbol{D}}\}$两者会由于结构矩阵$[\boldsymbol{K}]$和$[\boldsymbol{M}]$的修正而发生改变。重分析的目的就是要比完全重新求解特征问题有可能更有效地获得λ^*和$\{\overline{\boldsymbol{D}}^*\}$。

重分析有许多方法[8.32~8.37]。所有的方法大致可以归为两大类。

- 得出精确结果的*直接法*。它们包括有限的、可预测的步骤数。在结构小部分被修改的情况下求解的效果最好。
- 得出近似结果的*迭代法*。它们的收敛速度与具体情况有关。$[\boldsymbol{K}]$和$[\boldsymbol{K}^*]$之间的巨大差异将使迭代收敛速度减慢甚至发散。

一个非常简单的迭代法如下。我们写出$[\boldsymbol{K}^*]=[\boldsymbol{K}]+[\Delta\boldsymbol{K}]$，此处$[\Delta\boldsymbol{K}]$体现了结构的修改（它可能是个非常稀疏的矩阵）。于是，由式8.9-1，我们可导出如下形式

$$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}^*\}_{i+1}=\{\boldsymbol{R}^*\}_i\quad\text{其中}\quad\{\boldsymbol{R}^*\}_i=\{\boldsymbol{R}\}-[\Delta\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}^*\}_i\tag{8.9-3}$$

在第一次迭代中，$i=1$和$\{\boldsymbol{D}^*\}_1=\{\boldsymbol{D}\}$，$\{\boldsymbol{D}\}$为结构未修改时解的矢量。在$\{\boldsymbol{R}^*\}_i$建立之后，求$\{\boldsymbol{D}^*\}_{i+1}$在计算上就与求解原系统在新载荷下的情况一样，这样的求解效率非常高。

子结构（10.11节）在重分析中可能是个非常有效的工具。如果结构的修改限制在一个独立子结构上，而且只在子结构上考察结构修改的结果，则分析者只需计算该子结构的内部自由度和附加自由度。其它子结构的内部自由度不需要计算。

8.10 单元品质测试

直到现在，已经推荐了许多单元列式。甚至对于每个节点上有两个自由度的4节点平面单元，都有好几种单元可以利用。我们如何来选择最合适的单元呢？如果我们求解的是一组处在试验状态的问题[6.26]，每次利用候选单元，我们将收集到零散的证据，从中可能得到的是在一种情况下一个单元最好而在另一种情况下却不好的含糊不清的结论。

在下面，我们考虑单元品质更系统性的测试。这些测试不能识别最好的单元，但是可以提供一些指导，可能有助于认识单元的不足之处。这些测试是6.13节中描述的分片试验的补充。

特征值测试 我们首先描述计算，然后解释计算的结果[8.38]。设一{**r**}载荷施加于单元节点，而且通过因子 λ 与节点位移{**d**}成比例。因此

$$[\boldsymbol{k}]\{\boldsymbol{d}\} = -\{\boldsymbol{r}\} = \lambda\{\boldsymbol{d}\} \quad 或 \quad ([\boldsymbol{k}] - \lambda\lceil \boldsymbol{I} \rfloor)\{\boldsymbol{d}\} = \{\boldsymbol{0}\} \tag{8.10-1}$$

这是一个特征问题。λ_i 是[**k**]的特征值。λ_i 的个数与{**d**}中自由度数相同。对于每个 λ_i，都存在一个特征矢量$\{\boldsymbol{d}\}_i$ 与其对应。如果每个$\{\boldsymbol{d}\}_i$ 按比例处理以致$\{\boldsymbol{d}\}_i^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{d}\}_i = 1$，则在式 8.10－1 左乘$\{\boldsymbol{d}\}_i^{\mathrm{T}}$ 可得

$$\{\boldsymbol{d}\}_i^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{k}]\{\boldsymbol{d}\}_i = \lambda_i \quad 或 \quad 2U_i = \lambda_i \tag{8.10-2}$$

其中 U_i 是单元的应变能，此时单元的节点自由度是成比例的位移$\{\boldsymbol{d}\}_i$(见式 4.8－16)。为了能用标准有限元软件求解式 8.10－2，人们可以舍去所有未被约束的自由度，把单位矢量与每个自由度联系起来，然后计算单元的固有频率 ω_i，其中 $\omega_i^2 = \lambda_i$。注意，如果$\{\boldsymbol{d}\}_i$ 中所有自由度的代数正负号相反，则 λ_i 不变。

式 8.10－2 表明，当$\{\boldsymbol{d}\}_i$ 表示任何刚体运动时，λ_i 应该为零。在平面内，有可能存在三个线性独立的刚体运动。因此，对于平面单元，λ_i 中应该有三个为零；对于实体单元或者壳单元，应该有六个为零，但是对于旋转实体单元或旋转壳单元(如果仅允许在轴对称状态下)，则只有一个为零。寄生模式(机构)也产生零特征值。计算不能自动地把零能量模式表现为 x 方向的平移，绕 z 轴的转动，等等。相反，这些运动可以组合形式出现，尽管这种组合保持了模式的线性独立性。

在单元测试中，我们会问，零特征值的数目是否与应该有的一样多。极少指出单元缺少所希望的无应变刚体运动的能力。太多指出存在一个或多个寄生模态。如果[**k**]为半正定矩阵，则非零特征值一定是正实数。如果由于在总体坐标中单元的方位发生改变而导致了特征值的改变，则单元不是构架不变的。也就是说，单元具有人为的各向异性。类似的模式，如图 8.10－1 中正方形各向同性单元的弯曲模式，应具有相等的特征值。

[**k**]的特征值有时可以用来比较给定单元类型的不同列式，比如 4 节点平面单元的等参数与它的混合列式的比较。具有相同的形状、尺寸和材料属性且列式正确的单元，在它们的常应变模式下就应该具有相等的刚度。因此，它们的刚度矩阵应该具有相同的特征值。但是刚度和特征值在高阶模式下有可能不相等。对于基于假定位移场的协调单元，λ_i 或者准确地给出应变能 $2U_i$，或者是上限值。因此，当比较具有相同形状、尺寸、[**E**]、节点位置、自由度数目和类型时，应变能最低的单元是最好的。这个单元的刚度矩阵有最小的迹线([**k**]的迹线是 λ_i 的总和)。如果任意一个 λ_i 都不是上限值，则迹线就不是一个好的指标，比如，如果单元包含有寄生模式，就会发生这种情况。

一些单元的特征值和特征矢量已经公布；参见文献[8.40]和引用的文献。

备注 在另一个基于能量的测试中[8.41,8.42]，假定一个多项式位移场施加在一个连续介质上。在被有限元覆盖的连续介质区域中，应变能的计算采用经典公式 4.4－5。进而，计算出单元节点处的位移。然后，作为节点自由度施加这些位移，再计算出单元的应变能。把连续介质的应变能与单元的应变能作比较。一致性越好，单元的功能越强。利用其他不同的位移场反复地进行比较。

在单个单元测试中，长为 L，深为 D 受纯弯曲的悬臂梁的一个单元模型，采用标准软件进

行分析。这个问题的精确解是已知的。精度随纵横比 L/D 的增加而下降的速率是单元对几何畸变敏感性的度量。这样的测试也可以用来比较不同的单元，诸如平面 4 节点单元的不同列式。它不是一个通用的测试，而是把有限元分析用于已知其解的特定问题中。

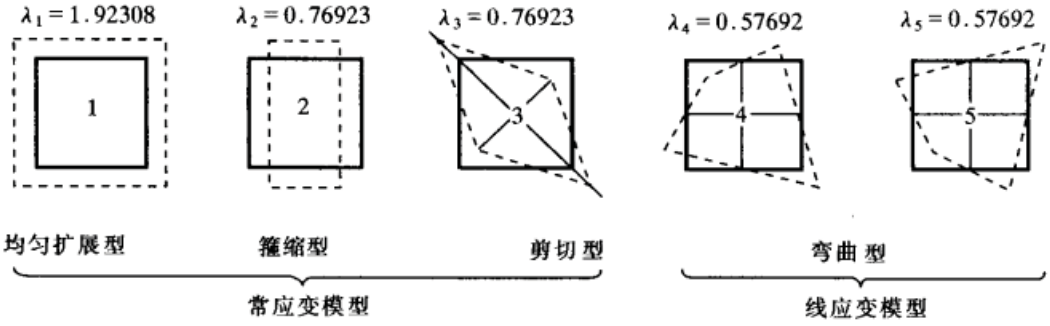


图 8.10－1　平面应变状态正方形双线性单元的非零特征值和它们相应的特征矢量（变形模式）[8.39]。$E=1.0$，$\nu=0.3$，边长 $=1.0$

在单元测试中，单个测试是不可能决定单元的好坏的，除非发现单元有致命的缺陷。单元品质的测试对于单元开发者比对有限元分析软件的使用者可能更具有价值。不过，有限元软件的使用者可能想去试着进行分片试验和单个单元的测试，他们把这些试验和测试作为一个途径去学习如何使用一个新的软件包，因为这些试验和测试非常容易操作，而且它们的精确解又是预先知道的。

分析题

8.1－1　如果矢量 $\boldsymbol{V}$ 的长度为 L，而且无论 $\boldsymbol{V}$ 是在哪一坐标系中描述的，都存在 $\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}=L^2$。因此，运用式 8.1－1 证明：$\sum l_i^2=1$，$\sum l_i m_i=0$，等等（共有六个这样的关系式）。

8.1－2　(a)假定 $x'=-x$，$y'=-y$。求式 8.1－1 中的$[\boldsymbol{\Lambda}]$，两个坐标系都符合右手法则。
(b)类似地，如果 $x'=y$，$z'=z$，求$[\boldsymbol{\Lambda}]$。

8.2－1　对于一个平面应力问题，设$[\boldsymbol{E}']$为 3×3 的矩阵。证明：若材料是各向同性的，由式 8.2－10 可得$[\boldsymbol{E}']=[\boldsymbol{E}]$。

8.2－2　考虑一个平面问题，矩阵$[\boldsymbol{E}']$是 3×3 的对角矩阵，且 $E'_{11}=E_a$，$E'_{22}=E_b$，$E'_{33}=G$。在图 8.2－1 中，对于任意的角度 β，$[\boldsymbol{E}]$中的各项是什么？当 $\beta=\pi/2$ 时，检验你的答案。

8.2－3　式 8.2－11 中的$[\boldsymbol{T}_\epsilon]$是否是正交矩阵？为什么是或为什么不是？

8.3－1　假设一个均匀杆单元的位移只允许沿着 x 方向（沿它的轴向）。该单元的轴向刚度为 $k=AE/L$。刚度矩阵$[\boldsymbol{k}]$按照节点位移 u_1 和 u_2 来运算。变换刚度矩阵$[\boldsymbol{k}]$，使它可以按节点自由度 u_1，u_r 来运算，其中 u_r 是节点 2 相对于节点 1 的位移。

8.3－2　图 6.1－1 示出了一个 3 节点杆单元和它的形状函数 N_i。设自由度 u_2 被 u_r 替代，u_r 为中心节点 2 相对于 $\frac{1}{2}(u_1+u_3)$ 的位移，如果仅存在两个端节点，则 $\frac{1}{2}(u_1+u_3)$ 是中心处的位移。写出变换矩阵，并用它确定新的形状函数。

8.3－3　假定图 8.4－1(a)表示的是一个平面桁架，该桁架的每个节点 i 的自由度为 u_i 和 v_i。设桁架暂不存在支撑，因此$[\boldsymbol{K}]$是一个 8×8 的矩阵。假定$[\boldsymbol{k}']$是杆 4－2 的 4×4 刚度矩阵。写出变换矩阵$[\boldsymbol{T}]$，使$[\boldsymbol{T}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{k}'][\boldsymbol{T}]$成为一个 8×8 的矩阵，这样可以直接叠加到为结构刚度矩阵保留的 8×8 数组上，结构刚度矩阵依据自由度$\lfloor u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad v_4 \rfloor^{\mathrm{T}}$来运算。(对于附加的变换问题，参见第 2 章题 2.4－2 和 2.4－4。)

8.4－1　假定图 8.4－1(a)表示的是一个平面桁架，其中每一根构件的轴向刚度 $k=AE/L$ 都相同。同时，假定构件形成的每个三角形的内角分别为 45°，45°和 90°。在节点 4 上，施加一个向下的载荷 P，且令 $u_4=0$。如果 $\beta=\arctan 0.75$，求构件 3－1 中的力，用 P 来表示。

8.4－2　设在 3D 桁架的一个连接点上，禁止沿方向余弦为 l_1，l_2 和 l_3 的直线方向运动，沿该直线的垂直方向允许运动。初始自由度是沿 x，y 和 z 方向上的平移。

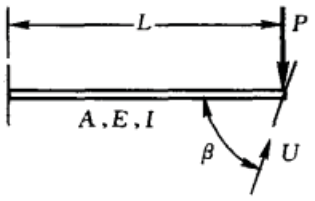
(a)准确解释在桁架的连接点上如何为自由度定义一个合适的新方向，且写出该连接点的变换矩阵。

(b)对于特定情况 $l_2=1$，检验结果。

8.4－3　如图所示，悬臂梁的右端可在刚性墙壁上无摩擦地滑动。作为单个平面梁单元，用右端节点的轴向、横向和旋转自由度来描述这个悬臂梁。忽略横向剪切变形。

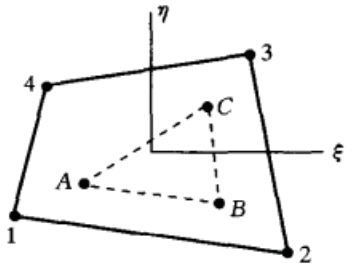
(a)变换和施加边界条件，依据右端的切向位移 U 和转角 θ 进行运算，求 2×2 矩阵$[\boldsymbol{K}]$。

(b)假定施加的条件为 $\theta=0$，求解 U。



题 8.4－3

8.5－1　如图所示的单元为任意四边形，按双线性单元来列式(6.2 节)。在其上附加一个常应变三角形单元(6 个自由度，用字母标出节点)，并使字母标注的节点处在四边形中 $\xi=\pm 0.5$ 和 $\eta=\pm 0.5$ 的位置。使用字母标注的节点自由度$\{\boldsymbol{d}'\}$从属于用数字标注的节点自由度$\{\boldsymbol{d}\}$。写出关系式$\{\boldsymbol{d}'\}=[\boldsymbol{T}]\{\boldsymbol{d}\}$中的矩阵$[\boldsymbol{T}]$。

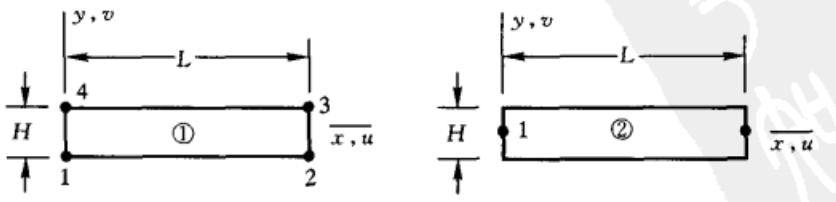


题 8.5－1

8.5－2　在图 8.5－1(a)中，假定有力 F_x，F_y 和力矩 M_5(逆时针方向)施加在平面梁单元的节点 5 上。问，运用式 8.5－3 的变换如何将这些载荷分配到节点 2 和 3 上？证明分配后的载荷能很好地等效初始载荷。

8.5－3　写出图 8.5－1(b)所描述问题的变换矩阵。

8.5－4　图中的平面单元 1 为双线性单元(6.2 节)。每个节点 i 的自由度为 u_i 和 v_i。平面单元 2 每个节点的自由度为 u_i，v_i 和逆时针转角 θ_i。分别考虑两个单元的刚度矩阵



题 8.5－4

$[\boldsymbol{k}_1]$和$[\boldsymbol{k}_2]$。

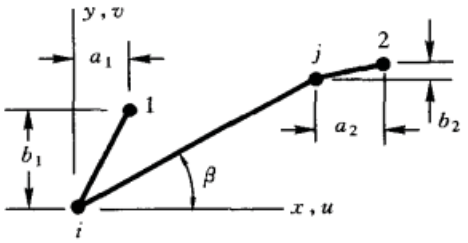
(a)写出用于转换$[\boldsymbol{k}_1]$的变换矩阵$[\boldsymbol{T}_1]$,以使它能依据单元 2 的自由度进行运算。

(b)写出用于转换$[\boldsymbol{k}_2]$的变换矩阵$[\boldsymbol{T}_2]$,以使它能依据单元 1 的自由度进行运算。

(c)$[\boldsymbol{T}_1][\boldsymbol{T}_2]$和$[\boldsymbol{T}_2][\boldsymbol{T}_1]$是否是单位阵? 想出你如此说的理由。

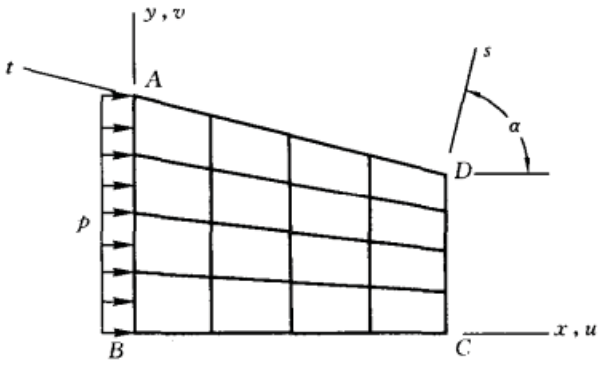
(d)求乘积$[\boldsymbol{T}_1][\boldsymbol{T}_2]$和$[\boldsymbol{T}_2][\boldsymbol{T}_1]$,并对结果进行解释。

8.5-5 如图所示,单元 ij 为一个 2D 梁单元,它具有轴向和弯曲刚度。节点 i,j,1 和 2 的自由度为 u,v 和逆时针转角 θ。假设通过刚性连接件 $i1$ 和 $j2$ 使节点 i 和 j 的自由度从属于节点 1 和 2 的自由度。写出 6×6 的变换矩阵$[\boldsymbol{T}]$。



题 8.5-5

8.5-6 考虑在空间任意方向的梁单元 ij,节点 i 的自由度为$\lfloor u_i \quad v_i \quad w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \theta_{zi} \rfloor^{\mathrm{T}}$,其中 θ 自由度矢量的方向指向坐标轴的正向。节点 j 的自由度与节点 i 的相类似。通过刚性连接件 $i1$ 和 $j2$ 使该单元从属于其它节点(比方说节点 1 和 2)的自由度。刚性连接件的方向为任意。用节点的 x,y 和 z 坐标写出 12×12 的转换矩阵。



题 8.6-1

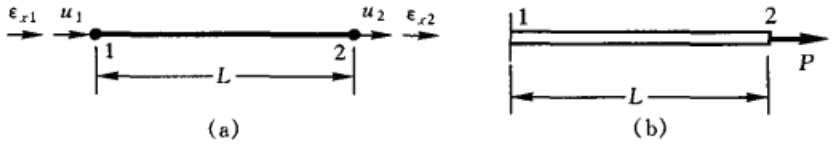
8.5-7 (a)如果保留的自由度由 u_1,v_1 和 u_2 变为 u_2,u_3 和 v_3,重新写出式 8.5-6。

(b)如果三角形具有任意形状,且节点的坐标为 x_i 和 y_i(i=1,2,3),重新写出式 8.5-6。

8.6-1 如图所示的结构由平面 4 节点单元构成。假设节点的自由度由 u,v,$u_{,x}$,$v_{,x}$,$u_{,y}$和 $v_{,y}$ 组成。在边 AB 上施加了压力 p。边 BC 固定。在 AB,BC,CD 和 DA 边上应该施加什么样的边界条件? 假定材料是各向同性的。如果材料是各向异性的,将有什么不同?

8.6-2 (a)如图所示,一个均匀杆单元有四个自由度,即两个轴向位移和两个轴向应变。请导出 4×4 的单元刚度矩阵$[\boldsymbol{k}]$。采用第 3 章的位移法,不能采用 5.6 节的混合列式。

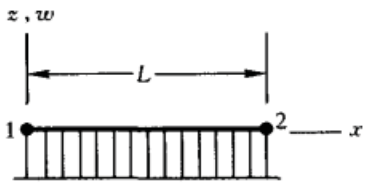
(b)用(a)中的$[\boldsymbol{k}]$求解图示一单元问题中的 ε_{x1} 和 u_2。已知的 u_1 和 ε_{x2} 是作为边界条件来施加的。



题 8.6－2

8.7－1　考虑图 8.7－3 中的均匀杆单元，但是节点 2 放置在 1/3 点处，而不是 1/4 点处。在 x/L 取什么值时应力表示出奇异性？

8.8－1　如图所示，平面梁单元的自由度为 $\{\boldsymbol{d}\}=\lfloor w_1 \quad \theta_1 \quad w_2 \quad \theta_2 \rfloor^{\mathrm{T}}$，其中 θ 为逆时针转角。该单元与一个模量为 β 的文克勒基础接触处的宽度为 b。对于横向位移 w，确定由下面每一种假设产生的基础矩阵 $[\boldsymbol{k}_f]$。它们都合理吗？



题 8.8－1

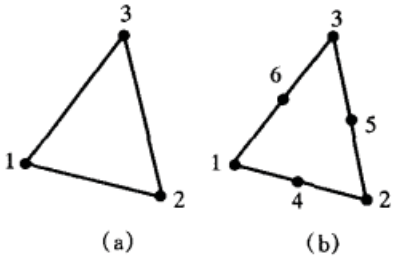
(a) 设 w 为 x 的三次函数，如同标准梁单元。

(b) 设 w 为 x 的二次函数，使 $Lw=(L-x)w_1+xw_2+\frac{1}{2}x(L-x)(\theta_1-\theta_2)$。

(c) 设 w 为 x 的线性函数(与 θ_1 和 θ_2 无关)。

(d) 设 w 与 x 无关。

8.8－2　简图表示放置在模量为 β 的文克勒基础上的三角形单元平面图。在这个问题中，单元类型并不重要。假设垂直于基础的挠度 w 仅与 w 的节点值有关。对于下列两种情况，确定基础矩阵 $[\boldsymbol{k}_f]$。



题 8.8－2

(a)3 节点单元。

(b)6 节点单元，其边是直的，边节点位于边中点。

8.8－3　假设，平移模量为 β 的文克勒弹性基础以某种方式被具有旋转模量 α(单位为：力/长度)的夹层强化了。$[\boldsymbol{k}_f]$的什么公式可替代式 8.8－2？(只需要每项都有定义的符号形式结果，而不是指特定单元的具体形式)

8.8－4　对于图 8.8－3(a)中的单元，设单元的几何形状用式 8.8－3 定义，同时场量 ϕ 用线性插值 $\phi=\frac{1}{2}(1-\xi)\phi_1+\frac{1}{2}(1+\xi)\phi_3$ 来定义。试确定：

(a)场变量 ϕ 作为 r 的函数(类似式 8.8－7)。

(b)雅可比行列式 J 作为 ξ 和 a 的函数。

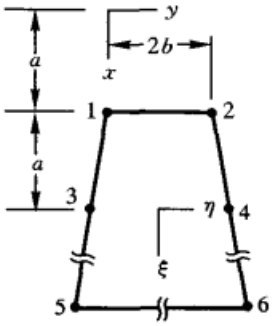
(c)单元刚度矩阵 $[\boldsymbol{k}]$(认为单元为杆单元)。

8.8－5　(a)对于图示的平面无限元，设场变量 ϕ 与节点值 ϕ_1，ϕ_2，ϕ_5 和 ϕ_6 有关(没有 ϕ_3 和 ϕ_4)。六个节点都用来定义几何形状。写出该单元的映射函数和这个单元的形状函数。

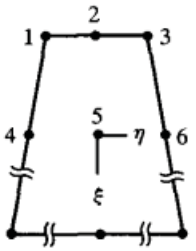
(b)设边 1－3－5 与 2－4－6 平行，求 $[\boldsymbol{J}]$和 J。

(c)如果 $\phi_5=\phi_6=0$，依据 ϕ_1，ϕ_2 运算的 2×2 单元特征矩阵 $[\boldsymbol{k}]$是什么样？再设边 1－3－5与 2－4－6 平行。此外还设 t＝单元的厚度，k＝材料属性，这两个量在单元

中都是均匀的。



题 8.8-5



题 8.8-6

8.8-6 写出图示的平面无限元的映射函数。

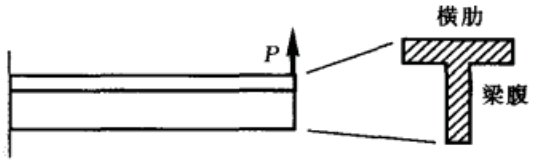
8.9-1 考虑将式 8.9-1 应用到如下的只有一个自由度的问题。

(a)设 $K=0.5$，$K^*=0.8$ 和 $R=2$。从初始问题的解 $D=4$ 开始(修正之前)，进行 5 次迭代循环。其结果能正确收敛吗?

(b)对于 $\Delta K/K$ 什么样的取值范围，迭代方法是收敛的?

计算题

C8.1 利用单独的梁单元组对 T 截面的悬臂梁(如图所示)进行建模，一组为 T 形截面的横肋，另一组为梁腹。沿每一组的长度方向，依次利用 1 个、2 个、4 个单元。使梁腹的节点从属于横肋的节点。设泊松比为零，将顶端位移和转角计算值与梁理论预计值作比较。



题 C8.1

C8.2 再次考虑 C8.1 中的悬臂梁，不过采用常规梁建模，弹性介质支撑它的下表面。用常规平面单元对介质建模，而且介质在有限距离处还有固定的支撑，其方式如同图 8.8-2(b)。同样，介质的建模也可采用无限元，或者选择诸如此类的软件来提供。从两种模型中试图得到类似的精度，并比较它们的规模和方便程度。

第 9 章

误差，误差估计及收敛

本章的第一部分讨论数值误差以及如何检测和减小误差。然后讨论离散误差以及收敛率。最后将讨论可以包含在软件中的离散误差的事后估计，以及误差估计在构建一个改进的 FE 模型中的应用。本章的重点是与时间无关的线性问题。

9.1 误差源

除非数学模型简单到没有必要进行有限元分析，凡用 FEA 计算的结果都包含误差。这里的“误差”是指 FEA 结果与数学模型精确解之间的不一致。误差来源将在这一节后面的部分指出。本章后面部分我们将假设几种可能的误差源不存在。特别地，我们将假设软件适合于所处理的任务而不存在缺陷；指定的几何体、边界条件、载荷以及 FE 模型的材质属性适合手边的问题；用户在把数据输入到软件中时没有犯任何的错误；选择了适用的一般类型的单元（比如空间比平面可能更恰当）。因此，在描述建模误差、用户误差、软件缺陷之后，本章的剩余部分我们略去这些项目的讨论（第 10 章中将再作考虑）。

余下来的就是单元类型、单元大小和形状的具体选择，以及某些边界条件和约束如何施加。除了它们对离散化误差的影响，这些选择能够增加或者减少数值误差，这个误差与必须存贮和处理的低于无限精度的数值有关。

误差分类 可能的误差源可以按如下的方法归类。相关的注释参见第 1 章，读者可能希望复习一下。这儿用到的术语没有被普遍采用。

*建模误差*指的是物理系统和它的数学模型的差别。要分析的不是实际问题，而是它的数学模型，它经过了简化，实际问题中的好多细节被略去，保留下来的用可以接受的数学公式来描述（比如弹性力学的平面理论，薄板理论，热传导方程，等等）。紧固件的细节、小孔、其它的

几何不规则性，以及材料属性的微小不均匀性都可能被忽略，至少在初始的分析中是这样的。载荷被简化。边界条件被理想化，比如认为支撑是刚性的。经常把问题表示为平面的而不是三维的，或线性的而不是非线性的，或静态的而不是动态的，等等。总体来说，建模误差指的是有意的合理的和经过考虑的近似，而不是错误，常常还有载荷及边界条件实际性能方面的不确定误差。

*用户误差*指的是在理解了物理问题，决定了要分析回答的问题，以及创建了合适的数学模型之后软件用户所犯的错误。用户误差包括选错一般的单元类型（可能需要壳体单元的地方选择成了平板单元），选择不合适的单元尺寸和形状，以及数据输入中的直接错误以至于使所描述的模型并不是想要的模型。不能解释计算结果，可能也包括在这类误差中，以致于疏忽了早期错误的影响。

*缺陷*存在于软件中。缺陷可能中断执行，也许在预处理阶段就发生了。一个更危险的缺陷是允许继续执行但产生了严重偏差又没有大到立即被发现的程度。

*离散化误差*是用 FE 模型表现数学模型而引入的误差。数学模型中自由度的数量是无限的而在 FE 模型中却是有限的。FEA 解法受到所用单元的数量、每个单元的节点数、单元形状函数的性质、等参单元所用的积分规则以及特殊单元其它公式化细节的影响。

*截断误差*或*舍入误差*指的是由于截断或舍入小数位以符合计算机有限字长而丢失的信息。这类误差在应用求解算法之前就存在于单元和结构矩阵中。比如说，设 $x = 1.23456$ 和 $y = 1.23455$ 是超过六位有效数字的数的六位数表达式。其结果 $x-y=1\times10^{-5}$ 即使在它的一位数中也是不可靠的。这里在减法运算后就出现了问题，但问题的根源在于 x 和 y 的截断误差，尽管它们每个都是用 5 位可靠的位数来表示。

*操作误差*是在方程处理中引入的；比如，乘法的结果被截断或是舍入。像在与时间无关的分析中，如果总体方程 $[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\}$ 一次被解算出来，操作误差可能就是较小的。而在一些动态和非线性的问题中，其中每一步都要依据上一步来构建，计算工序必须被重复地执行，操作误差就可能会累积。

数值误差，作为本章中应用的术语，是指截断（或舍入）误差和操作误差结果的组合。

尽管在 FE 计算中误差不可避免，但不能饶恕不该有的误差。数值常量比如 π 和高斯点位置及权重应该用与计算机允许的字节一样多的精确位数来表示。为了避免可能的操作尤其是截断引起的严重误差，FEA 一般要求每个字节长 12～14 位。因此，绝大多数计算机中，必须以双精度算法进行存储和操作。一些计算机有扩展精度寄存器但截断结果成为单字节长度（或在双精度算法中的双字节长度），所以截断误差在数值误差中占支配地位。

误差测试 本章剩下的部分强调了数值误差（9.2 节到9.5节）、离散化误差（9.6 节到9.11节），和对这些误差的测试。一旦显著的误差被检测出来，FE 模型就应当修正，并重新分析。显著的离散化误差经常在后处理中被检测出来，因此网格必须修正并重新分析。后处理的循环、网格的修正、重新分析可以通过软件自动重复执行，直至达到用户定义的误差容限。建模误差、用户误差以及软件的缺陷将在第 10 章讨论。

术语“病态”经常在讨论数值误差时用到。当应用到一个矩阵的时候，这个术语意味着矩阵系数小的数值变化会在计算结果中产生大的变化。然而，在用一个矩阵进行运算之前我们不能说这个矩阵是病态的。一个矩阵对于方程解算是好的，但对于特征值提取却可能是病态的，反之亦然。

除了用其它方法知道正确结果外，解的精度没有单独的安全测试方法。在一种情形下检测到问题的误差可能在另一种情形下检测不出来，或者可能预告问题没有发展。一个似是而非的误差检测可能是无用的。比如，考虑希尔伯特(Hilbert)矩阵$[\boldsymbol{H}]$，其一般项是 $H_{ij}=1/(i+j-1)$。$[\boldsymbol{H}]$对于方程求解来说是出了名的病状态，而且因为这个原因有时候被用做一个检测案例。一篇研究文献[9.1]中，以单精度算法表示了一个第 10 阶的希尔伯特矩阵，计算了它的逆矩阵$[\boldsymbol{H}]^{-1}$，最后以$([\boldsymbol{H}]^{-1})^{-1}$复原了初始矩阵。我们发现$[\boldsymbol{H}]=([\boldsymbol{H}]^{-1})^{-1}$达到七位数的精度，$[\boldsymbol{H}]^{-1}$也有七阶大小的误差系数。

9.2　病态

在系数矩阵或者常矢量中如果解矢量对小的变化很敏感，那么这个方程组就是病态的。在 FEA 中系数矩阵$[\boldsymbol{K}]$有可能比常矢量$\{\boldsymbol{R}\}$更棘手。一个用于解算方程组的病态系数矩阵几乎是奇异的。

考虑图 9.2-1 中二自由度的结构，其总体方程$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\}$为

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1+k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ 或 } \begin{aligned} k_1u_1-k_1u_2&=P \quad (9.2-1(a)) \\ -k_1u_1+(k_1+k_2)u_2&=0 \quad (9.2-1(b)) \end{aligned}$$

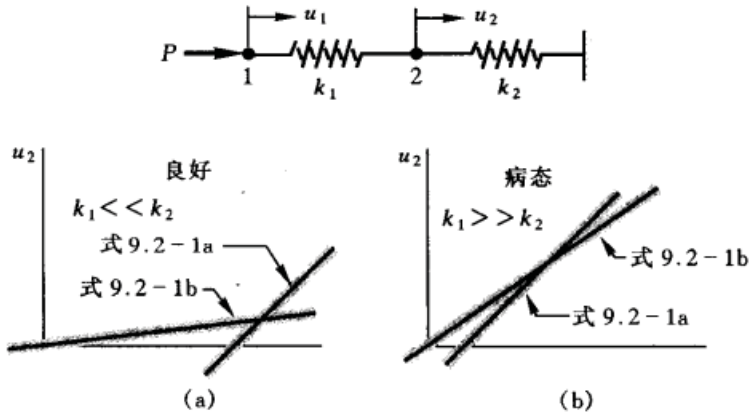


图 9.2-1　用线性弹簧建立的 2 自由度结构

(a)用刚性部件支撑的柔性部件；(b)用柔性部件支撑的刚性部件

在 u_1u_2 坐标系中两个方程中的每一个都以直线图示出来。见图 9.2-1 中的实线。实线两侧的阴影区域暗示着与用来表示计算机内存中数值系数的有限位数(或比特)相关的不精确程度。精确解由实线交叉的点表示。计算解由阴影边重叠区域内某个位置的点来表示。我们看到如果 $k_1 \ll k_2$ 这个区域会很小；但如果 $k_1 \gg k_2$ 这个区域会很大。如果 $k_1 \gg k_2$，矩阵$[\boldsymbol{K}]$中的每行几乎都是线性相关的；即其中一行几乎是其它行的数倍。于是 k_2 或 P 的小的变化将会引起 u_1 和 u_2 大的变化。

对式 9.2-1 应用消元法，将第一式加到第二式，第二式将变为

$$[(k_1+k_2)-k_1)]u_2=P \qquad (9.2-2)$$

如果 k_1 和 k_2 表示到无限精确，上式将会是精确的正确结果，$k_2u_2=P$。但如果，比如，$k_1=1.000\,000$和 $k_2=4.444\,444\times10^{-6}$以及计算数字以七位等效数存储，则式 9.2－2 将会产生 $1.000\,004-1.000\,000=4\times10^{-6}$；即，只有一个有效位数被保留。若只按六位数字来存储，结果将会是 $1.000\,00-1.000\,00=0$。物理上，这个结果表明了这个刚性弹簧没有任何支撑而像刚体一样可自由移动。软件将会对这个结果作出反应，抱怨系数矩阵是奇异的。注意如果 $k_1\ll k_2$ 将不会引起这种问题。

根据 9.1 节的误差分类，我们这里涉及*截断误差*。尽管方程求解使困难明朗化，但它的源头是初始刚度系数中信息的不足。精确求解所需要的信息可能仅占用计算机字长的最后几位。后续的操作，无论有多么细心或是周到考虑，都不可能恢复开头由于截断丢失的信息。

病态的最大危险不是方程解算可能失败，而是它可能没有任何警告信息或是有警告信息但没有被软件用户注意而解算成功，从而产生了误差严重的解，虽不是误差极值，但有些错误已变得很明显。

易受病态影响的情况 在结构力学中，物理情况最有可能引起麻烦，图 9.2－1(b)中的结构就是一个简单的例子，一个刚性部位被非常柔韧的部位支撑着。于是这个刚性部位有一个刚体变形分量是如此之大以至于超过了为精确计算应变所需要的其它变形分量。类似的情形可能出现在其它问题区域中。比如，类似于图 9.2－1(b)的热传导情形是高传导性区域连接于已经被设定温度边界的低传导性区域。在结构力学的平面应变和空间问题中，一旦泊松比达到 0.5，单元在抵抗体积变化中就会变得极度的刚化，但其它模式中仍会保持变形能力。在柔韧区域支撑刚化区域的所有问题中，主要的信息被归入计算机字符的后几位。这些位数在数量上可能会如此之少以致至少一些计算解答会产生严重的误差。

如果载荷是自平衡的话，预期的问题可能不会跟着发生。比如，如果左侧的载荷 P 被添加到图 9.2－1(b)的节点 2 上，即使 u_1 和 u_2 的刚体位移分量包含着很大的误差，节点 1 和节点 2 相对的位移也将会被精确计算出来。更一般地，自平衡载荷有时候允许梯度(或应力)的精确计算。

图 9.2－2 出现的是另一个易出故障结构的例子。图 9.2－2(a)的平面刚架看起来问题并不大。但典型的是，梁 BC 的轴向刚度要比柱 AB 和 CD 横向刚度大得多。尤其是如果我们想利用它们的差，按照公式 $\sigma_a=E(u_C-u_B)/L$ 来精确计算梁的轴向应力分量，横向位移自由度 u_B 和 u_C 的计算值可能缺乏足够的精度。作为一个实际问题，σ_a 与弯曲的应力比起来很有可能被忽略。如果我们欣然说它为零，提供的梁可能有无限大的轴向刚度(参见 8.5 节)。因此我们从该问题中把 u_B 或者 u_C 消去也就消除了这个病态的根源。类似的关系出现在管道网

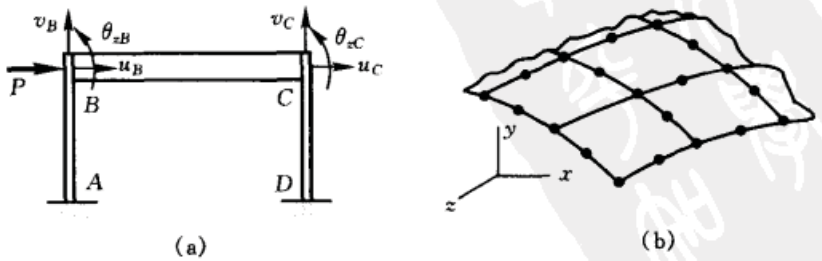


图 9.2－2 潜在的病态系统

(a)平面刚架；(b)用 8 节点壳单元建模的薄壳的一部分

络的分析中，它们的单个部件的轴向刚度远远大于它们的弯曲刚度。

在壳体分析中，单元显示了薄膜刚度和弯曲刚度。壳体的薄膜刚度类似于梁的轴向刚度。薄壳中薄膜刚度与弯曲刚度的比值非常大。因此，在图 9.2－2(b)中，我们又一次看到了高刚度区域嵌入到低刚度区域的情形。更进一步的网格细化，意欲减少离散化误差，但可能会使数值误差增加，以至于计算结果的精度下降而不是提高(9.3 节和 9.4 节)。

特殊情况　图 9.2－3(a)所示的平面三构件结构有刚度为 k 和 αk 的线性弹簧。如果 α 很大，就是刚性部分(刚度为 αk 的弹簧)由柔性部分(刚度为 k 的弹簧)支撑的情况。这个问题的刚度方程$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\}$是

$$\begin{bmatrix} k(1+\alpha c^2) & k\alpha cs \\ k\alpha cs & k(1+\alpha s^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{其中} \quad \begin{matrix} c = \cos\beta \\ s = \sin\beta \end{matrix} \tag{9.2-3}$$

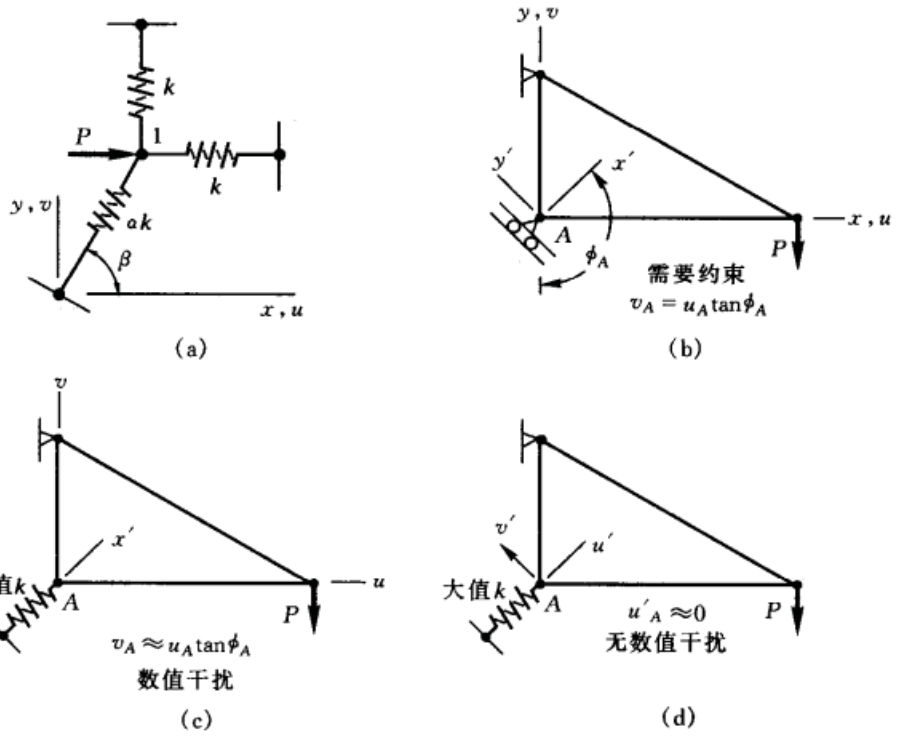


图 9.2－3　(a)平面三弹簧结构，在节点 1 处有自由度 u_1 和 v_1；
(b)平面三杆桁架，在节点 A 有滚轴支撑；
(c,d)近似施加边界条件的方法

在 u_1v_1 空间中，代表着这两个方程的直线有着各自的斜率

$$\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}u_1} = -\frac{1+\alpha c^2}{\alpha cs} \quad \text{和} \quad \frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}u_1} = -\frac{\alpha cs}{1+\alpha s^2} \tag{9.2-4}$$

如果 α 很大，这两条直线有着差不多相等的斜率，则方程$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\}$是病态的。然而，这里有两个例外：当 $\beta=0$ 时和 $\beta=\pi/2$ 时，这两条直线以直角相交，即使 α 很大。对于这两个角度，无论 α 取什么值方程组都保持良好状态。注意对于这两个角度，矩阵$[\boldsymbol{K}]$非对角线的项 $k\alpha cs$ 变为零，所以式 9.2－2 所描述的补偿误差并没有出现。

前面的考虑可以应用到图 9.2－3(b)所示的问题中，这里节点 A 在 x' 方向的位移被禁止

但允许在 y' 方向有位移。不会导致病态出现的一个方案是，分别在 x' 方向和 y' 方向用 8.4 节所描述的转换引入自由度 u'_A 和 v'_A，然后施加 $u'_A=0$。避免转换也许是个好办法，如图 9.2-3(c)所示，在 x' 方向用简单的手段安装一个刚度很大的弹簧，来强行近似地引入支撑条件。但另一方面，如果自由度 u'_A 和 v'_A 保留作为节点 A 的自由度，在结构刚度矩阵中会出现大的非对角项，并会引入病态，如在相关的方程 9.2.3 中描述的那样。如果在节点 A 采用自由度 u'_A 和 v'_A，可以在节点 A 的 x' 方向无病态地使用刚性很大的弹簧。用这个方案，仅在对角线上出现大的刚度项，式 9.2-3 中 $\beta=0$ 或 $\beta=\pi/2$ 就是这种情况。

"相对"和"层次"自由度 对于图 9.2-1 所示的问题，我们引入相对自由度 $u_r=u_1-u_2$ 来代替自由度 u_1。因此式 9.2-1 被替换为

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ P \end{Bmatrix} \tag{9.2-5}$$

对于所有的 k_1 和 k_2 值，式 9.2-5 都处在良好状态。在单元列式中，式 9.2-5 必须用引入 u_r 作为一个自由度来获得，或许在组集之前要经过标准单元矩阵的变换。通过组集后的结构矩阵式9.2-1的变换来引入 u_r 已毫无意义，因为系数 k_1+k_2 已经包含了我们试图避免的误差。

在 9.8 节讨论的 p 细化的范围内，添加的相对自由度被称为"层次"自由度。"层次"自由度没有取代已经存在的自由度，但添加在单元上增加了它的多项式域的阶次(如在式 9.8-1 中)。

9.3 条件数

矩阵[**K**]的条件数，这儿用 $C(\boldsymbol{K})$表示，提供了在求解方程组[**K**]{**D**}={**R**}时可能会丢失的精确度位数的估计。通常实际的丢失比估计的要小，所以没有必要精确计算 $C(\boldsymbol{K})$。

定义和计算 [**K**]的条件数，也称为它的谱条件数，定义为

$$C(\boldsymbol{K}) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \tag{9.3-1}$$

这里 $\lambda_{\max}$ 和 $\lambda_{\min}$ 分别为[**K**]的最大和最小特征值。在有些情形中，预示的精度丢失比实际了解到的大得多，在这个意义上，$C(\boldsymbol{K})$被"人为地"抬高了。比如说，在图 9.2-1 中，当 $k_1 \ll k_2$ 时 $C(\boldsymbol{K})$是大数；仅当 $k_1 \gg k_2$ 的情形，才会导致在求解方程时出现数值误差。仅当方程真的是病态时，人们能够对条件数很大的情况用缩比[**K**]做出安排，以便使它的对角系数为单位 1，然后从正则化矩阵[$\boldsymbol{K}_s$]计算 $\lambda_{\max}$ 和 $\lambda_{\min}$。缩比矩阵[**S**]是对角矩阵，它由矩阵[**K**]的对角线系数构建而成。因此特征值问题变为

$$([\boldsymbol{K}_s]-\lambda\lceil \boldsymbol{I} \rfloor)\{\boldsymbol{D}\} = \{0\} \quad \text{其中} \quad [\boldsymbol{K}_s]=\lceil \boldsymbol{S} \rfloor[\boldsymbol{K}]\lceil \boldsymbol{S} \rfloor \quad \text{和} \quad S_{ii} = \frac{1}{\sqrt{K_{ii}}} \tag{9.3-2}$$

这里$\lceil \boldsymbol{I} \rfloor$为单位阵。通过替换{**D**}=[**S**]$^{-1}${$\boldsymbol{D}_s$}并左乘[**S**]$^{-1}$，式 9.3-2 的形式可以变化，其特

征值不变，得到

$$([\boldsymbol{K}]-\lambda\lceil K_{11}\quad K_{22}\quad\cdots\quad K_{nn}\rfloor)\{\boldsymbol{D}_s\}=\{\boldsymbol{0}\}\tag{9.3-3}$$

在振动术语里，式 9.3－3 说明了正则化矩阵$[\boldsymbol{K}_s]$的特征值$\lambda_i=\omega_i^2$可以由结构的固有频率ω_i来确定，该结构有初始刚度矩阵$[\boldsymbol{K}]$和仅仅是矩阵$[\boldsymbol{K}]$对角线的对角“集中”矩阵。这个观点证明了为什么在一个孤立的刚性区域提高了条件数：一个孤立的大的“集中”K_{ii}降低了最低频率但对最高频率影响很小。

求解一个特征问题的计算花费远远高于求解方程组$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\}$的费用。幸运的是，$\lambda_{\max}$和$\lambda_{\min}$并不需要精确地知道。一种满意的$\lambda_{\max}$的先验估计值可以从 Gerschgorin 界限，即式 11.12－17 中获得。然而，对$\lambda_{\min}$的先验估计近乎不可靠。正则化矩阵$[\boldsymbol{K}_s]$条件数的近似值是$C(\boldsymbol{K}_s)=(r_i)_{\max}$，这里$r_i$是式 9.4－1 中定义的对角线衰减系数[9.2]。这个估计当然是事后的而不是先验的。

注释　当求解方程组$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\}$过程中处理系数矩阵$[\boldsymbol{K}]$时，初始刚度系数的截断误差导致了系数改变时精确度的丢失。如果用d位数来表示每个数字，修改的系数精确到d_{acc}位，则

$$d_{\text{acc}}=d-d_{\text{loss}}\quad\text{其中}\quad d_{\text{loss}}\leqslant\log_{10}C(\boldsymbol{K}_s)\tag{9.3-4}$$

因此，如果$d=14$和$C(\boldsymbol{K}_s)=10^8$，那么$d_{\text{acc}}\geqslant 6$。式 9.3－4 中的符号“$\leqslant$”是表明了$\log_{10}C(\boldsymbol{K}_s)$可能会过高估计丢失的位数。有代表性的$\log_{10}C(\boldsymbol{K}_s)$是百万数量级的，但是式 9.3－4 叙述的潜在精度丢失没有成为事实。其中一个原因是式 9.3－4 没有考虑到载荷$\{\boldsymbol{R}\}$。当$\{\boldsymbol{R}\}$的形式类似于下面式 9.3－5 最后的特征向量$\{\boldsymbol{V}\}_i$中的一个时，或是它们近似地线性组合但包含着误差或者类似于第一个特征向量小的载荷分量时，最有可能发生精度丢失[9.3]。在实际中，$\{\boldsymbol{R}\}$的形式常常更类似于最低特征向量的线性组合。

式 9.3－4 后面的理论概括如下[9.4]。设$[\boldsymbol{K}]$有特征值λ_i和相关的特征向量$\{\boldsymbol{V}\}_i$，其正则化以致使$\{\boldsymbol{V}\}_i^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{V}\}_i=1$。于是对于$n\times n$阶对称正定矩阵$[\boldsymbol{K}]$

$$[\boldsymbol{K}]=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\{\boldsymbol{V}\}_i\{\boldsymbol{V}\}_i^{\mathrm{T}}\quad\text{和}\quad[\boldsymbol{K}]^{-1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\{\boldsymbol{V}\}_i\{\boldsymbol{V}\}_i^{\mathrm{T}}\tag{9.3-5}$$

$[\boldsymbol{K}]$由$\lambda_{\max}$决定，而$[\boldsymbol{K}]^{-1}$由$\lambda_{\min}$决定。计算$\lambda_{\min}$需要的信息包含在系数K_{ij}的最右面的位数中。对于比值$\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$中 10 的每个次幂，当信息掉落到计算机字长的末尾时，$[\boldsymbol{K}]^{-1}$中占主导地位的最低模式大约用一个更小的数位来表示。

影响 $C(\boldsymbol{K})$ 的参数　病态的严重程度与问题的类型和 FE 模型的特征有关。根据 Fried[9.5]

$$C(\boldsymbol{K})=b\left(\frac{h_{\max}}{h_{\min}}\right)^{2m-1}N_{\text{els}}^{2m/n}\tag{9.3-6}$$

其中

$b=$ 一个正数

$h_{\max}$，$h_{\min}=$ 网格中最大和最小的节点间距

$N_{\text{els}}=$ FE 模型中单元的数量

$2m=$ 微分方程的阶次

n= FE 网格的维数

为了详细描述，对于一个用位移作为相关变量和节点自由度的问题，[**K**]是一个刚度矩阵。在描述这个问题的微分方程中，$2m$ 是位移导数的最高阶次。FE 网格每个边的单元数目的度量为 $N_{es}=N_{els}^{1/n}$。因此 $C(\boldsymbol{K})$与 N_{es}的 $2m$ 次幂成比例。作为式 9.3-6 中指数 $2m/n$ 的例子，对于一个受轴向载荷的杆，$2m/n=2/1$；对于一个梁，$2m/n=4/1$；在平面应力或平面应变问题中，$2m/n=2/2$；在三维立体问题中，$2m/n=2/3$；在薄板弯曲问题中，$2m/n=4/2$。对于平面应变的条件，以及旋转体和三维问题中，式 9.3-6 中的 b 与 $1/(1-2\nu)$成比例。当泊松比 ν 接近 0.5时，被施加了一个几乎不可压缩的约束，$C(\boldsymbol{K})$变得非常大[9.6]。

FE 模型中式 9.3-6 在预测变化的 $C(\boldsymbol{K})$的影响时可能很有用。比如，对于一个梁问题，如果单元的长度比 h_{max}/h_{min}从 1/1 变成 10/1，$C(\boldsymbol{K})$增长 1 000 倍。如果单元的数量增加一倍，$C(\boldsymbol{K})$以 16 的倍数增长。如果同时变化这两者，$C(\boldsymbol{K})$增长 16 000 倍。

提供 $C(\boldsymbol{K})$上限和下限的公式是可以得到的[9.5]，但它在有限元分析中的使用不被看好，因为计算花费太大。

9.4 对角衰减测试

这里我们描述把对角衰减测试作为用高斯消元法求解方程组[**K**]{**D**}={**R**}过程中检测数值误差的一种方法。像其他数值误差的测试一样，这种测试并不是确实可靠的，但它简单，而且不太消耗计算资源。

令[**K**]为对称正定矩阵。当处理方程时——即当未知量被消去时，对应于自由度 i 也要被消去的对角系数 K_{ii}通过减法运算在数值上减小了，但仍保持为正数。这种性能的例子出现在图 2.8-3 中。另一个事例出现在式 9.2-1 和 9.2-2 中，这里的消去使第二个对角系数从 k_1+k_2 减少为 k_2。

在消去另一个未知量的过程中，对角衰减测试应用于每个对角系数，就在它作为主元之前[9.7]。令 P_{ii}在这个瞬间中是第 i 个对角系数的值。对于这个系数的初始值 K_{ii}，对角衰减比为

$$r_i=\frac{K_{ii}}{P_{ii}} \tag{9.4-1}$$

对于 r_i 中 10 的每个次幂，达到准确位数可能会从初始对角系数中消失。比如，如果 $r_i=10^8$，那么在准确位数多到 8 位时 K_{ii}可能消失，到时候它变成 P_{ii}，并用于消去第 i 个未知量。得到 $r_i=\infty$是可能的，这时表明边界条件不充分；在结构力学术语中，刚体运动是可能的(甚至 r_i 一个很小的负值也是可能的，这归结于数值误差)。如果出现了 $r_i=\infty$的结果，直到消去的最后一步可能也做不到这样，因为在有些问题中最后一个自由度的约束足够防止奇异性。当检测出 $r_i=\infty$时可编制一些软件来插入一个边界条件，从而施加了编程者对软件用户想要求解的物理问题的推测。

表 9.4-1 显示了对角衰减测试的应用。在此例中不允许梁单元有横向剪切挠度。在{**D**}中，节点自由度 v 和 $\theta=\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$ 的顺序为$\{\boldsymbol{D}\}=\lfloor v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad \theta_{2n-2} \quad v_{2n} \quad \theta_{2n}\rfloor^{\mathrm{T}}$。在每个计算机字长大约为 11 位的机器上进行了分析。在这个例子中对角衰减测试很成功；只有在

计算的端部挠度 v 中有实际误差时 r_i 会变大。像在式 9.3－2 换算之后，对 $N_{els}=1000$，$[\boldsymbol{K}]$的条件数大概为 10^{12}，不论节点编号方式是从尖端到根部还是根部到尖端。然而用这个大的条件数预测精度的严重丢失没有出现在从尖端到根部编号方式中。

表 9.4－1 的例子用的是等长的单元。现在，对于 $N_{els}=1000$ 的情况，设单元长度有从 $L=0.999\,99$ 到 $L=1.000\,01$ 的变化。于是从尖端到根部的编号给出尖端挠度。同时，对角衰减率基本上没有偏离在表 9.4－1 中看到的 8.0 和 2.0 的值。因此我们注意到可能有实际的精度丢失没有被对角衰减测试检测到。

重要的是对角系数的衰减，而不是它们的大小。小的对角线系数本身不会引起大的误差。类似地，大的对角线系数本身也不是有害的（如在式 9.2－1 和式 9.2－2 中 $k_1 \ll k_2$ 的情况，即使节点编号相反）。然而，当一个大的对角系数伴随着大的非对角系数时，它的消去在其它也包含着大的非对角系数的方程中会引起相当大的对角衰减（如像在式 9.2－1 和 9.2－2 中对 $k_1 \gg k_2$ 的情况）。

表 9.4－1　N_{els} 个等长度单元的悬臂梁，表示在所处理的最后三个方程中计算的端部横向挠度 v 和对角衰减率 r_i $(i=2n-2, i=2n-1, i=2n)$

总长度＝1000 $EI=8\times10^6$	尖到根编号 $2n$ 个非零自由度			根到尖编号 $2n$ 个非零自由度			
$v_{exact}=1.0000$							
单元数目	v	r_{2n-2}	r_{2n-1}	r_{2n}	v	r_{2n-2}	r_{2n-1}	r_{2n}
$N_{els}=n=10$	1.000 0	8.0	2.0	8.0	1.000 0	5.3	1×10^3	4×10^1
$N_{els}=n=100$	1.000 0	8.0	2.0	8.0	0.999 2	7.7	1×10^6	4×10^2
$N_{els}=n=1\,000$	1.000 0	8.0	2.0	8.0	0.119 7	8.0	2×10^8	2×10^3

9.5　残数

想象方程$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\}$中的$\{\boldsymbol{D}\}$已经被求解出来。然后可以求残数矢量$\{\Delta\boldsymbol{R}\}$：

$$\{\Delta\boldsymbol{R}\}=\{\boldsymbol{R}\}-[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\} \tag{9.5-1}$$

如果解向量$\{\boldsymbol{D}\}$没有受数值误差影响，那么就会得到$\{\Delta\boldsymbol{R}\}=0$。更有可能的是存在数值误差，那末$\{\Delta\boldsymbol{R}\}$是误差的一种度量。这种误差度量的标量形式是

$$e=\frac{\{\boldsymbol{D}\}^{\mathrm{T}}\{\Delta\boldsymbol{R}\}}{\{\boldsymbol{D}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{R}\}} \tag{9.5-2}$$

物理上，e 是残余载荷$\{\Delta\boldsymbol{R}\}$和实际载荷$\{\boldsymbol{R}\}$两者通过位移$\{\boldsymbol{D}\}$所做功的比值。

不幸的是，当用高斯消元法求解病态方程组时，无论解向量$\{\boldsymbol{D}\}$精确与否，残数都趋于小量[9.8]。两个低精度的解矢量有较小残数是可能的。尽管一个小的$\{\Delta\boldsymbol{R}\}$不能保证精度，但一

个大的$\{\Delta \boldsymbol{R}\}$却是事物错误程度的真实标志。

在结构力学中，一个小的$\{\Delta \boldsymbol{R}\}$所表示的物理含义是，作用载荷$\{\boldsymbol{R}\}$在静态平衡时非常接近阻抗力$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}$。由于过度刚性离散化(比如在图 3.4－2 中的例子)即使$\{\boldsymbol{D}\}$比它在物理问题中的应有值小得多，也可能满足平衡。

用如下所述的迭代改进算法可以减小在求解方程组$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\}$时的数值误差。用$\{\boldsymbol{D}\}_1$来表示初始解，我们连续地计算残数向量、解向量中的增量以及修正后的解向量。反复这个计算程序直至收敛($i=1,2,\cdots,n$)。

$$\{\Delta \boldsymbol{R}\}_i=\{\boldsymbol{R}\}-[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}_i \quad [\boldsymbol{K}]\{\Delta \boldsymbol{D}\}_i=\{\Delta \boldsymbol{R}\}_i \quad \{\boldsymbol{D}\}_{i+1}=\{\boldsymbol{D}\}_i+\{\Delta \boldsymbol{D}\}_i \tag{9.5-3}$$

对于这个为了提供改良精度的过程，方程 9.5－3 第一个式中的$[\boldsymbol{K}]$必须比确定初始解向量$\{\boldsymbol{D}\}_1$所用的精度高。在方程 9.5－3 的第二个式中我们可以使用初始的(低精度的)$[\boldsymbol{K}]$，它的因式分解形式已经从解算$\{\boldsymbol{D}\}_1$的过程中得到。这样，以$[\boldsymbol{K}]$更精确的表达式向方程组$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\}$的解收敛。

如果一个方程组是严重病态的，最好重新建模来改进它的条件，这比执意改进不良的解要好。“如果一件事情不值得做，它也不值得做好”[9.8]。

9.6 离散误差·收敛速率

*离散化误差*指的是数学模型和它的离散化(FE)模型之间的差别。在本节中我们将讨论网格细化与 FE 结果的收敛性之间的关系。收敛本身并不说明数学模型代表真实性的好坏。

接下来是与图 4.9－2 相关的论证细节。这个论证为 FE 误差分析构建了基本原则：*对于一个划分足够细的网格，FE 算法的误差可以由在节点处精确的形状函数插值误差来界定*[9.9]。这个原则不需要 FE 算法在节点处精确；它仅仅对特殊情形有要求[2.5]。它需要有*足够细化的网格*，而足够细就是确定“真实的”收敛率(也见图 9.6－1)。因此我们排除了 FE 模型大的离散化误差(如图 9.6－1 中的例子)。我们也要求节点载荷协调作用，如 3.11 节所描述的那样。

误差分析 离散化误差有时候可能取决于误差分析的次序。考虑图 9.6－1(a)所示的受轴向均匀载荷的杆。从微分单元分析，轴向平衡方程是$A\sigma_{x,x}+q=0$。或者，代入应力-应变关系式$\sigma_x=Eu_{,x}$，平衡方程为

$$u_{,xx}+\frac{q}{AE}=0 \tag{9.6-1}$$

设 FE 模型由标准的 2 节点杆单元组成。如果协调计算载荷积分(如 3.3－8 式和 4.8－15(b)式所示)而且 A 和 E 是常量，则 FE 模型的节点位移 u_i 是精确的[2.5]。因为精确解法通常并不是分段线性的，所以 FE 解法在节点之间存在着误差。杆问题中误差特性具有更复杂和更实际的 FE 问题中的本质特征。后面的讨论最直接地应用于有着平滑(但可能是变化的)弹性系数、均布(不是点)载荷、体内无强异常(无裂纹)的线弹性问题。

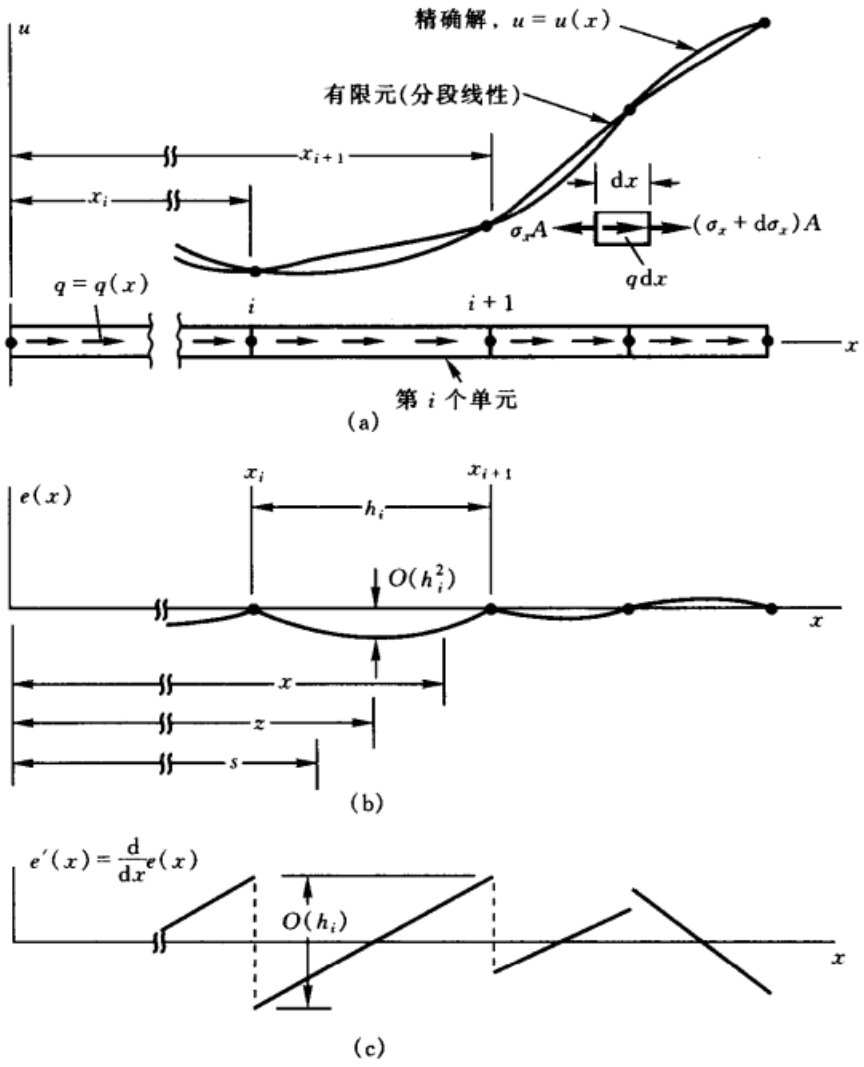


图 9.6－1　受均布轴向载荷 q 作用的均匀杆有限元模型中的误差特性。精确的轴向位移是 $u=u(x)$，它的误差是 $e=e(x)$

在杆问题中我们分析了第 i 单元中节点 x_i 和 x_{i+1} 之间的线性差值误差。位移误差为 $e=e(x)$

$$e(x)=u(x)-\left[u_i\left(1-\frac{x-x_i}{h_i}\right)+u_{i+1}\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)\right] \tag{9.6-2}$$

这里 $u(x)$是精确解，$h_i=x_{i+1}-x_i$ 是单元的长度。同时，$u_i=u(x_i)$，$u_{i+1}=u(x_{i+1})$。在节点上，$e(x)=0$。单元长度不需要相等。在单元内，$e(x)$是光滑的函数。在节点上，一阶导数$e'(x)$有不连续点，如图 9.6－1(c)所示。(在本节余下的部分我们用符号 $e_{,x}=e'$，$e_{,xx}=e''$，等等。)

$e(x)$的上限由下述论证给出[9.9]。设 z 是范围 $x_i\leqslant z\leqslant x_{i+1}$ 内的轴向坐标，以至于使 $e'(z)=0$。从图 9.6－1(b)中看显然存在这样一个点并且是严格地从初等基本微积分学的罗尔(Rolle)定理中得出的。下面我们假设 $u''(x)$在节点之间是连续的。e'中的变化可以通过积分 e''来得到。因此从式 9.6－2 中，用虚构变量 s 和 $e'(z)=0$，

$$e(x)-e'(z)=e'(x)=\int_z^x e''(s)\,ds=\int_z^x u''(s)\,ds \tag{9.6-3}$$

因为在式 9.6-2 中的线性项对 $e''(x)$ 不产生贡献。并且，

$$\left|\int_z^x u''(s)\mathrm{d}s\right| \leqslant \int_z^x \left|u''(s)\right|\mathrm{d}s \leqslant \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left|u''(s)\right|\mathrm{d}s \leqslant h_i\left(\max_{x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}} \left|u''(x)\right|\right) \quad (9.6-4)$$

因此，在第 i 个单元上，应变误差 $e'(x)$ 由下式界定

$$|e'(x)| \leqslant h_i\left(\max_{x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}} |u''(x)|\right) \quad (9.6-5)$$

我们也可以通过观察它必须在 $x=z$ 时有最大值来界定位移误差 $e(x)$，这里 $e'(z)=0$。如果 z 不在单元的中点它必须接近于 x_i 或 x_{i+1}。假设 z 接近于 x_i，在 $x=z$ 处展开三项泰勒级数，带精确余数项来计算 $e(x_i)$，

$$e(x_i) = e(z) + (x_i - z)e'(z) + \frac{1}{2}(x_i - z)^2 e''(s) \quad (9.6-6)$$

这里 s 是单元 i 上的余数计算点。但是 $e(x_i)=0$，$e'(z)=0$，并且从式 9.6-2 中 $e''(s)=u''(s)$，所以，

$$e(z) = -\frac{1}{2}(x_i - z)^2 u''(s) \quad (9.6-7)$$

依照假设，z 相对于 x_{i+1} 更接近 x_i，我们得出结论 $|z-x_i|\leqslant h_i/2$。因此，在第 i 个单元上，位移的误差 $e(x)$ 由下式界定

$$e(x) \leqslant \frac{1}{8}h_i^2\left(\max_{x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}} |u''(x)|\right) \quad (9.6-8)$$

可以验证当假设 z 相对 x_i 更接近于 x_{i+1} 时可以得出相同的结果。

我们注意到应变误差为零的 z 的存在是应力计算最优点存在的基础(见 6.10 节)。

前面所讨论的要点是：

- 线性单元的应变误差与单元的大小成比例，位移误差与单元尺寸的平方成比例。
- 误差估算值与比形状函数高一阶的导数成比例(对于杆是二阶导数，而它的形状函数是线性的)。
- 在节点或者其附近处位移最精确。在单元内部应变最精确。

用符号“O”来表示“阶次”，我们说式 9.6-5 显示了应变的离散化误差 $O(h)$，式 9.6-8 显示了位移的离散化误差 $O(h^2)$。因此如果 $h=\max(h_i)$ 平分，从一个单元构建出两个单元，则应变误差近似减半而位移误差近似为原来的 1/4。

更一般的陈述 我们如下定义符号：

h = 单元近似的“特征长度”：一个线性单元的长度；在一个平面或实体单元中最长线段的长度(其它不同的定义也是可能的)

p = 单元场量中完全多项式最高阶次

$2m$ = 控制微分方程中场量导数最高幂次

在 p 的定义中“完全”是非常重要的。比如说，对于基本的 4 节点平面单元 $p=1$(图 3.6-1 和式 3.6-1)。在这个单元中所有的常数项和线性项都存在，但在三个二次项 x^2，y^2 和 xy 中仅有 xy 项。

其场量含有 p 阶完全多项式的单元在表示 $p+1$ 或更高阶的多项式项时会产生误差。如果不存在奇异性，假设大多数误差是由于忽略最低阶项即阶次为 $p+1$ 的项而引起的，这是合理的。从这个论点中我们得出结论，在无奇异性时，离散化误差（和收敛率）如下：

- 场量的误差为 $O(h^{p+1})$
- 场量第 r 阶导数的误差为 $O(h^{p+1-r})$
- 应变能（在结构力学中）的误差为 $O(h^{2(p+1-m)})$

指数 $2(p+1-m)$ 出现在后面的表达式中是因为在应变（或曲率）公式中出现 m 阶导数，而在应变能表达式中它是平方项。在误差阶次的表达式中，h 可以被 $N_{\text{els}}^{-1/n}$ 所替代，这里 N_{els} 和 n 分别表示 FE 模型中单元的数量和模型的维数。注意到 h 与每个边单元数 N_{es} 成反比关系，它近似为 $N_{\text{els}}^{1/n}$，就可证明这种替换。

在图 9.6－1 所示的一维例子中，用于应变计算的 $p=1$，$r=1$，以及 $2m=2$。在用 3 节点三角形建模的平面体中，以及用 4 节点四面体建模的立方体中，场量为一个完全线性多项式，所以 $p=1$。同样，对于梯度（应力或应变）计算 $r=1$，对于热传导和应力分析问题 $2m=2$。相同的数量应用于常规的 4 节点四边形和没有内部“无节点”自由度的 8 节点的立方体。这些单元有比三角形和四面体更多的多项式项，但还不足以形成完全二次多项式（图 3.9－1）。对于高阶单元，离散化误差小，因此收敛率较高：如果在平面问题中我们变 4 节点的单元为 8 节点的单元，场量误差的阶数就从 $O(h^2)$ 变为 $O(h^3)$。如果网格剖分使 h 减半，则对于 4 节点单元网格误差减到原来的 1/4，对于 8 节点单元网格误差减到原来的 1/8。在梁问题中，对于标准的 2 节点梁单元 $p=3$，对于曲率计算，$r=2$ 和 $2m=4$。位移误差为 $O(h^4)$，从曲率计算弯矩的误差为 $O(h^2)$。回忆这些估计值时假定了节点载荷按协调方式来计算。因此，对于受均匀载荷的悬臂梁，在一个有着均匀节点间距的 FE 模型中，顶端节点承受着力和力矩载荷。

对于场量导数的误差估计可能是悲观的。比如，在图 9.6－1 所示的杆中，对于应用在节点上 u，x 的的误差估计，此处 u，x 的误差最大。而在计算单元中点的 u，x，则误差将会较小；是 $O(h^2)$ 而不是 $O(h)$。换句话说，在杆单元中点上梯度将以同场量相同的速率收敛。一般来说，如果在有限元网格中有这样的点，它的应力与位移有同阶的误差，可以说这些点上的应力显示出“超级收敛”。

最后我们留意到，如果结构体积被正确表示出来，一些潜在的离散化误差会被降低。因此如果一个平面体的边界是圆形，并且用直边单元的网格建模，那么 FE 模型的多边形外边界既不应该完全在圆内也不应该完全在圆外。

奇异性 我们已经知道误差范围与精确场量偏导数的（$p+1$）次成比例（例如，式 9.6－5 和式 9.6－8）。如果待解决的问题显示了这个导数的无限值，严格讲，误差边界不能应用。比如，在有裂缝的物体中，在裂缝尖端处的位移导数直到二阶都是无穷大。因此，甚至对于线性单元，$p=1$，在裂缝尖端的临近区域，我们的估算值也不适用。如果我们不知道最低奇异导数的阶次，我们就不能估算出通过细化网格来减小的那个误差的大小。

尽管奇异性可能会降低收敛速度，不过高于二阶的导数中的奇异性不会妨碍收敛。一个完全的 p 阶多项式必然包含着一个阶次为 $p-\mu$ 的完全多项式，这里 μ 是一个在范围是 $0<\mu\leqslant p$ 之内的数。如果在精确解中（$p+1-\mu$）阶导数是非奇异的最高阶导数，我们就可以用 $p-\mu$ 来代替 p 重复我们前面的估算，推断场量的误差为 $O(h^{p+1-\mu})$，它的一阶导数误差为

$O(h^{p-\mu})$，等等。这就意味着对于在精确解中是奇异的每个 $p+1$ 或较低阶导数，有限元解可能在精度上丢失 h 的一个次幂。这种估计通常是悲观的。但当这么做时，次数为 $p-\mu$ 的单元将会有着与次数为 p 的单元相同阶数的误差，并且低阶单元就有着越少的计算费用。

作为上一段概念的应用，再一次考虑受轴向载荷的杆，现在，用在单元内加载一个步长的变化。特别地，对于节点序号为 i 和 $i+1$ 的单元，设 $x_i<x_q<x_{i+1}$，并且令分布的轴向载荷为

$$q=0 \quad (x \leqslant x_q) \quad \text{和} \quad q=1 \quad (x>x_q) \tag{9.6-9}$$

那么从式 9.6-1 中对所有的 x 定义了 $u_{,xx}$，$\max|u''(x)|=1/AE$，并且式 9.6-5 和式 9.6-8 是可应用的。然而，$u'''(x)$ 在 $x=x_q$ 处是个 δ 函数，所以 $\max|u'''(x)|$ 没有被定义。因此，误差估计仍如式 9.6-5 和式 9.6-8 所示，无论单元是线性的，二次的，或是更高次的。通常从二次单元期望的 $O(h^3)$ 位移精度并不是可用的。完全的精度可以通过在载荷逐步变化中设置单元间的边界来恢复。概括地说，我们预料到精度在单元内载荷、材质属性或是厚度突变的邻域内会显著地下降。

9.7 多网格外推法

设 ϕ 表示在 FE 网格中一些区域内计算的我们感兴趣的量。这里 ϕ 可能是场量自身、它的导数中的一个，或是诸如与导数组合成比例的应力。设 $O(h^q)$ 表示 ϕ 的误差的阶数，这里 h 是 9.6 节所定义的单元大小的度量。假设收敛是单调的并且 q 是已知的。ϕ 对 h^q 的关系图是一条直线(图 9.7-1(a))。设 ϕ_1 和 ϕ_2 表示从尺寸度量分别为 h_1 和 h_2 的两个网格中计算出来的值。对 ϕ 轴用线性外推法，我们得到

$$\phi_\infty=\frac{\phi_1 h_2^q-\phi_2 h_1^q}{h_2^q-h_1^q} \quad \text{或} \quad \phi_\infty=\frac{\phi_1-\phi_2(h_1/h_2)^q}{1-(h_1/h_2)^q} \tag{9.7-1}$$

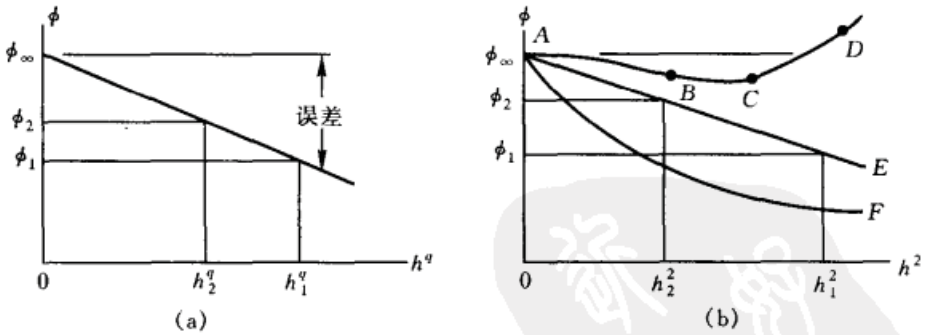


图 9.7-1 (a)ϕ 中的误差与 h^q 成比例；
(b)在曲线 $ABCD$ 中误差是非单调的，在曲线 AE 中误差与 h^2 成比例。
如果横坐标是 h，曲线 AF 画出来就是一条直线

这里 ϕ_∞ 对应于尺寸为 $h=0$ 的单元；换句话说，ϕ_∞ 对应于无限细化的网格。式 9.7-1 被称为理查森(Richardson)外推法公式[5.1]。应用到的约束，如下所述。

式 9.7-1 有什么样的精度取决于完全规则的网格细化。也就是说，在每次细化中，粗网

格的节点和单元边界被保留，同时添加新的节点、单元，和单元边界。角节点和边节点原位不动(图 9.7－2)。单元的类型没有变化。在所有细化网格中，感兴趣的值必须出现在数学模型的固定区域内和相对于单元的固定位置(总是位于角节点处)。没有这些限制，收敛不会是单调的，此时式 9.7－1 不能用。

非单调的收敛可能由不协调单元的网格产生，比如在 6.6 节讨论的 QM6 单元。还有，矩形 QM6 单元包含着完全二次的位移表达式而且行为确实像二次单元。但随着形状畸变的增加，它们趋于丢失二次的能力而且表现得更像 Q4(线性)单元，这正如 6.11 节所论述的那样。由于这些原因 q 很难被预测。

如果 q 预先不知道，可以通过寻求指数 q 用作图方法确定它，以至于使 ϕ 和 h^q 呈直线关系。严格地说，前面部分所讲的约束必须遵守。至少需要三个不同的网格，这样我们才可以从一条直线中来区分曲线(如图 9.7－1(b)中所示的 AF 对 AE)。如果初始的网格太粗糙，对于任何的 q 值由该网格中得到的 ϕ 可能不会位于一条直线上。如果只有少量的数据点被计算出来或是用到了 q 的错误值，外推的结果可能比任何一个数据点的精度都低(比如，像从图 9.7－1 所示的直线通过 C 和 D 点计算所得到的结果)。鉴于许多不确定因素，宁可不把 ϕ_∞ 看作是精确的，似乎把

$$e = \frac{\phi_2 - \phi_\infty}{\phi_\infty} \times 100\% \tag{9.7-2}$$

作为 ϕ_2 百分比误差的估计值更好一些。

实例——规则的细化　图 9.7－2 所示的悬臂梁顶端的横向挠度是通过 8，32，和 128 个 4 节点平面单元计算出来的。每次的细化网格都是前一次网格的一个规则的再划分。每个网格都是通过三个不同种类的基于式 6.2－3 所示的双线性形状函数的 4 节点平面单元来分析：完全积分(四个高斯点)，简化积分(一个高斯点)，和在 6.8 节中引入的控制方法中的一个稳定的寄生“沙漏”模式进行的简化积分。梁左端的边界条件能足以防止因简化积分有可能另外出现的网格机构。

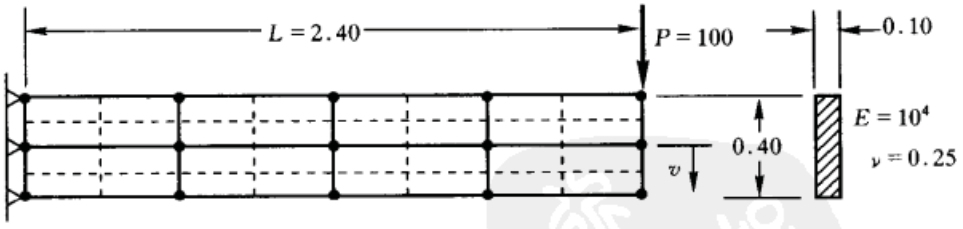


图 9.7－2　端部受载的悬臂梁规则的网格细化。实线表示网格数 $N_{els}=8$。实线加虚线表示网格数 $N_{els}=32$。在两种情况下都用 4 节点平面单元

图 9.7－3 所示的计算结果表明对于完全积分情况误差大概为 $O(h)$，对于简化积分情况误差大概为 $O(h^2)$。如果我们假设 $O(h^2)$ 应用于所有的情况并因此对 $q=2$ 应用式 9.7－1，我们就获得了表 9.7－1 所示的结果。梁理论，包括横向剪切形变，预示端部横向挠度为 $(PL^3/3EI)+(6PL/5AG)=8.640+0.180=8.820$。

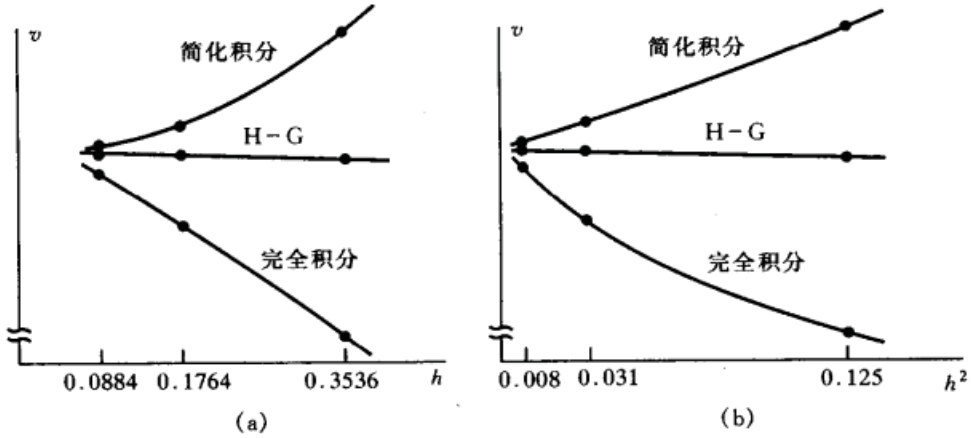


图 9.7-3 对于图 9.7-2 中的问题，根据表 9.7-1 中的数据所画的曲线
(a)端点挠度 v 与 h 的关系；(b)端点挠度 v 与 h^2 的关系

表 9.7-1 图 9.7-2 中梁的端部挠度 v，使用式 9.7-1，$q=2$。
单元尺寸 h 取 $h=1/\sqrt{N_{els}}$

网格数据		计算挠度			外推挠度		
N_{els}	$h=N_{els}^{-1/2}$	完全积分	简化积分	H-G	完全积分	简化积分	H-G
8	0.353 6	4.56 2	11.440	8.572	7.978	8.617	8.768
32	0.176 8	7.124	9.323	8.719	8.695	8.788	8.788
128	0.088 4	8.302	8.922	8.771			

实例——不规则的细化 我们在图 9.7-4 的悬臂梁中寻找最大的主应力。左端被完全地固定了。载荷 P 均匀地分布在其右端。对上面的半个部分进行建模，对于 x 轴上所有的节点仅

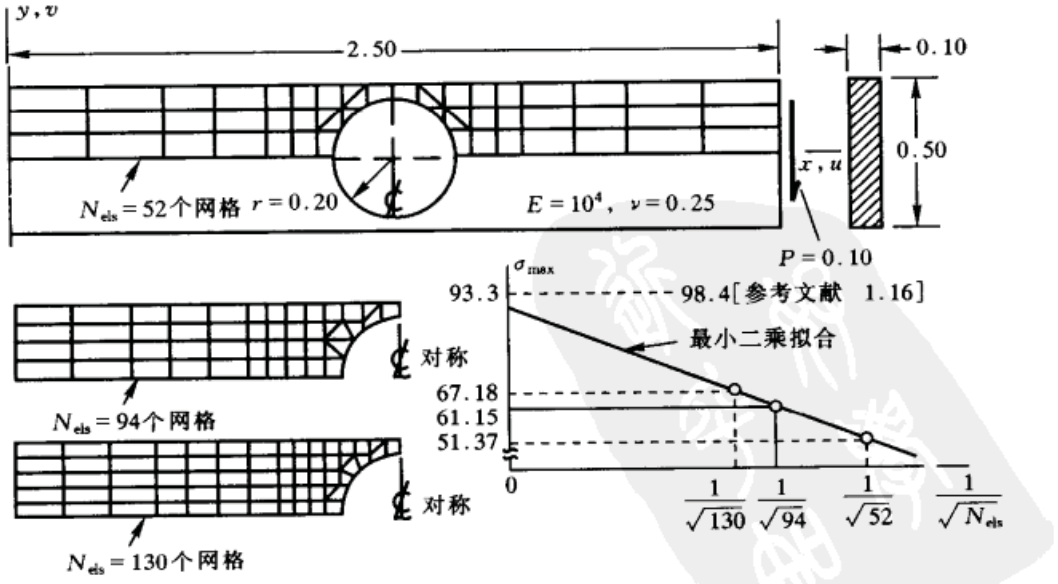


图 9.7-4 带有一个大中心孔的悬臂梁不规则网格细化。每个网格相对于两中心线对称(作者感谢 S.-C. Liang 和 D. Rusche 所作的计算)

允许有竖直方向上的位移。单元是基于式 6.2－3 的双线性形状函数的完全积分 4 节点平面单元。所示网格违反了网格规则细化原则。并且，在远离孔处网格不必要地细化，而在距孔近处又是不希望的粗略。图 9.7－4 中所示的 σ_{max} 是单元中心处最大的正应力，未考虑它所在的单元。

对于不规则的细化，应该如何定义连续网格的尺寸度量 h_1，h_2 和 h_3 是不明确的。对于网格中单元的数量 N_{els}，图 9.7－4 中用到的横坐标 $1/\sqrt{N_{els}}$ 近似等于网格每个边的单元数量的倒数。因此横坐标度量对应于 h^1。直线对于三个数据点的最小二乘法拟合得到的估计值 $\sigma_{max}=93.3$。光弹数据给出孔的顶端[1,16]值为 $\sigma_{max}=98.4$。外推法的结果非常好，尽管这么好的结果可能有点偶然。至少，图中标示的结果表明三个网格中没有一个能提供满意的结果。

9.8 网格修正法

在本章的这一节和下一节我们考虑如何修正 FE 网格以便在下一个分析循环中提供改进的结果。目标就是仅使用必要多的自由度来达到必需的精度。现有网格分析既提供了误差估计也提供了网格修正的指导。我们从网格细化的分类方法开始。我们说“细化”是因为网格的修正一般涉及粗略网格的细化，但是修正在一定区域中包含粗网格也是可能的。

h 细化 这里 h 指的是表征单元大小的线性尺寸，比如它最大的跨度，或者可能是平面单元面积的平方根，或者是一个空间单元体积的立方根。h 细化由添加相同类型的单元组成（图 9.8－1(b)）。图 9.7－2 显示了均匀的 h 细化；图 9.7－4 和 9.8－1(b)显示了不均匀的 h 细化。图6.13－1(b)显示了用重复划分一些存在的单元来实现 h 细化。这种类型的细化有时候称做“浓缩”。

p 细化 这里的 p 指的是在单元场量中最高完全多项式的阶次。p 细化没有改变单元数量而增加了单元内部的 p。这里可能通过添加自由度到已有的节点，添加节点到已有的单元边界，和/或是添加内部的自由度来完成。图 9.8－1(c)中的 p 细化是非均匀的，因为单元并不是按相同方法细化的。

r 细化 这里 r 意思为“再排列”。因此 r 的细化由节点的重新部署组成，没有改变单元的数量或者是它们场量多项式的阶次（图 9.8－1(d)）。

备注 如果手动计算，h 细化不要求改变现有的 FEA 软件。如果自动计算，h 细化仅仅要求重构算法调整网格之后再利用现有的 FEA 软件。在重新划分网格中，一个有良好形状的单元不应该被两个或者更多形状差的单元替代。如果细化被限制于 FE 模型的小部分中，借助灵巧的编程，一些用于先前网格分析的中间结果，比如未受影响单元的刚度矩阵，可以再用而不必重新计算。用 h 方法细化网格可以无限重复使用，它仅仅受计算机费用、存储能力，以及由于数值误差引起的最后精度损失这些因素的限制。

p 的自动细化在常规软件中的要求有了本质的改变。细化可以继续，用连续高阶的单元形状函数，直到软件中用到最高阶次数代码。对于计算的经济性，如果增加的形状函数以“层次”形式存在，细化的网格可以重新使用一些先前网格中用到的计算，以至存在的单元形状函数保持它们初始的形式[4,4]。比如，式 6.1－3 和式 6.1－4 可以被替换成

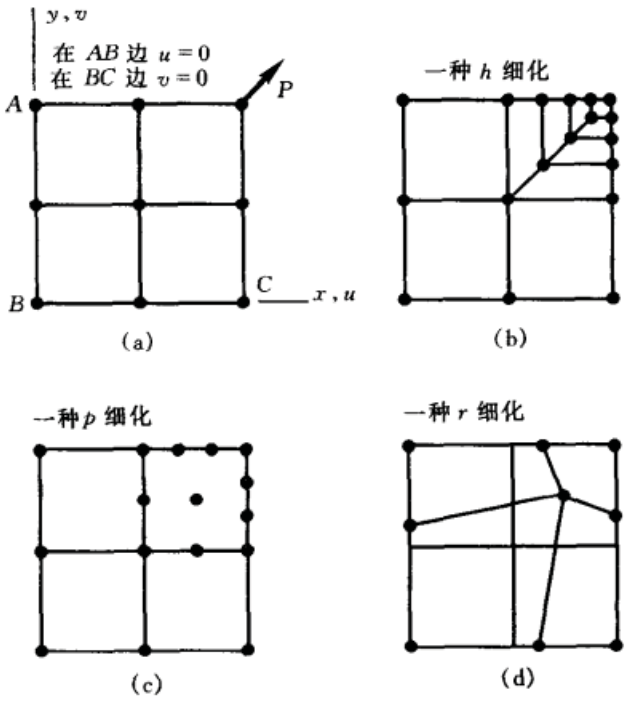


图 9.8-1 (a)受平面角载荷作用的正方形板的初始网格；(b)一种可能的 h 细化；(c) 一种可能 p 的细化；(d) 一种可能 r 的细化

$$u = \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor \{\boldsymbol{d}\} = \lfloor \frac{1}{2}(1-\xi) \quad (1-\xi^2) \quad \frac{1}{2}(1+\xi) \rfloor \begin{Bmatrix} u_1 \\ a_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \tag{9.8-1}$$

这里 a_2 是层次自由度，其物理意义是相对于用 u_1 和 u_3 指示的线性变化的位移。因此，增加层次形状函数 $1-\xi^2$ 没有改变 2 节点单元的线性形状函数。如果对 $\{\boldsymbol{d}\}$ 中的自由度排序，以便使每个附加的层次自由度附在列表的末端，那么，用每个附加的层次自由度，在不变更已有的行和列的情况下，可对单元刚度矩阵添加行和列。

随着自由度的增加，p 细化有一个比 h 细化高的收敛率，尤其是如果存在奇异性[4.4]。并且，在层次形式中 p 细化产生比有相同自由度数的 h 细化条件数更低的[$\mathbf{K}$]。另一方面，h 细化更适合于大型并行计算机，这种计算机可以同时生成数以千计的相同类型的单元[9.10]。用选择性增加自由度的 p 细化的方法，有助于产生许多类型的单元。

r 细化的方法仅仅允许有限的改进，因为自由度的数量没有发生变化。因此，尽管节点设置的最优化是可能的，但因它的花费巨大而不值得这样做。在结构力学中，r 优化网格有趣的特征是单元间边界趋于跟随主应力轨迹，参考文献见[9.10～9.12]。

当然，前述的网格细化的方法可以联合使用，而且一般都是这样的。代表性的 h 细化伴随着节点的重新定位，以使它真正成为 hr 细化(比如从图 6.14-2 到图 6.14-3，或者在图 9.7-4 的网格中)。另一个有效的联合是 hp 细化，这种细化的收敛率在自由度增加时优于单独的 h 细化或是 p 细化。

其它方法 初始分析后，可以选择隔离最初 FE 结构的一部分，然后仅仅细化那个部分。在隔离部分的边界上，强加通过初始分析计算的位移。这种方法称为子模型法，它将在 10.10

节中讨论。一种概念上相似的方法是用增强判定好的细节能力的辅助网格覆盖有限元模型的一部分[9.13~9.15]。

多极法表面上类似于覆盖法,但通常看做是迭代求解方程的方法而不是网格细化的方法。附录 B 中的 B.3 节里对此作了概述。

9.9 梯度(应力)修复和平滑

决定梯度场的基本方法就是用一个单元一个单元的方式来计算。一个常见的例子就是通过单元节点的自由度$\{d\}$,即如式 3.3-3 所示的$\{\varepsilon\}=[B]\{d\}$,来计算应变值。一般用到的单元是 C^0 类型(或对于一些板和壳单元是 C^1 类型),因此没有显示单元间应变(或是曲率)场的连续性。另一种可选的梯度计算的方法可以更精确,而且它们中许多提供了单元间的连续性。它们可以共同称为平滑运算,而且已经深入细致地研究过了。在接下来的讨论中我们不想引用所有的参考资料或是决定哪种平滑方案计算得最好。一个重要的概念是单元接着单元的场和平滑场间的差异可以作为离散化误差的度量。为了这个目的,也为其后决定如何能够改进离散化,平滑场被认为是当前网格可以提供的最精确结果。

接下来的说明针对一维或两维的应力分析问题。随后提到的是其它的应用。下面是用到的符号。

$\{\varepsilon\},\{\sigma\}$ 按基本方式一个单元一个单元地计算应变和应力场;即

$$\{\varepsilon\}=[B]\{d\} \quad 和 \quad \{\sigma\}=[E]\{\varepsilon\}$$

$\{\varepsilon^*\},\{\sigma^*\}$ 用平滑运算产生的应力和应变场

σ,σ^* $\{\sigma\}$ 或 $\{\sigma^*\}$中的一个应力

用比较平滑和非平滑场构建的数值误差度量在 9.10 节考虑。

单元平滑 单元中的应力和应变在低阶法则的高斯点处可能是最精确的,比如在 8 节点四边形单元中二阶法则的四个高斯点。式 6.10-3 和 6.10-4 描述了基于四个高斯点应力的单元场,现在我们称做"单元-平滑"场[9.16]。单元平滑没有消除单元间应力的不连续。通常,单元场$\{\sigma\}=[E][B]\{d\}$和单元-平滑应力场是不同的(图 9.9-1)。对于平面单元和从四高斯点的外推法,单元-平滑场是双线性的多项式。如果多于 4 个节点,单元应力场$\{\sigma\}=[E][B]\{d\}$是较高阶的,而且如果单元有 4 节点但不是平行四边形,那么通常是不同的双线性的多项式。单元和单元-平滑场之间的不同能够一个单元一个单元地提供有用的图形显示。如果用彩色轮廓线或者彩色区域标绘这个差别,那么色彩变化最大的网格单元最需要细化或者可能最需要改进形状[9.17]。

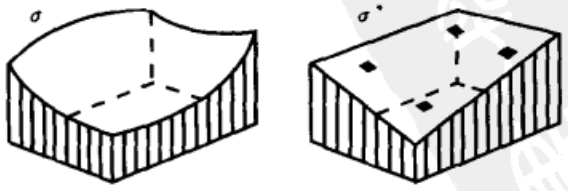


图 9.9-1 在四边形单元中描述垂直于单元平面的正应力的单元应力场 σ 和单元平滑应力场 σ^*

尽管任何应力(或应变)分量可以用于绘制显示,但冯·米赛斯应力 σ_e 是一个合理的选择,因为它体现了所有的应力分量。其它的应力分量提供不同的显示图。

节点平均法 假设在每个单元的每个节点上计算如冯·米塞斯之类的应力 σ_e(式 3.12-2),或者直接在节点上或者从高斯点来外推到节点上。在被 n 个单元共用的一个节点处通常有 n 个不同的 σ_e 值。其节点的平均值是

$$(\sigma_e)_{ave} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\sigma_e)_i \tag{9.9-1}$$

在构建节点的平均值中,必须避免跨越物理上真正不连续的平均值,比如材料性质或厚度上的突变,这样的平均值没有通用的物理含义。这样的平均值也未必是好的实际应力估算值。比如,如果所有的单元显示了如图 6.10-1(b)所示的应力变化,那么所有对平均值的贡献都被过高地估计了。公式 9.9-1 的变式包括按照问题中单元形心接近节点程度的加权单元的贡献。

单元间连续的平滑场可以从节点平均应力来构建。从节点自由度插值场量而使用的相同形状函数可以应用于节点平均应力。因此,在单个单元上平滑应力场的部分是

$$\sigma^* = \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor \{\boldsymbol{\sigma}_n^*\} \tag{9.9-2}$$

其中 σ^* 是任意应力(σ_x 或 σ_y,等等),$\{\boldsymbol{\sigma}_n^*\}$ 是所探讨单元该应力的节点平均值的向量。一维例子出现在图 9.9-2(a)中。

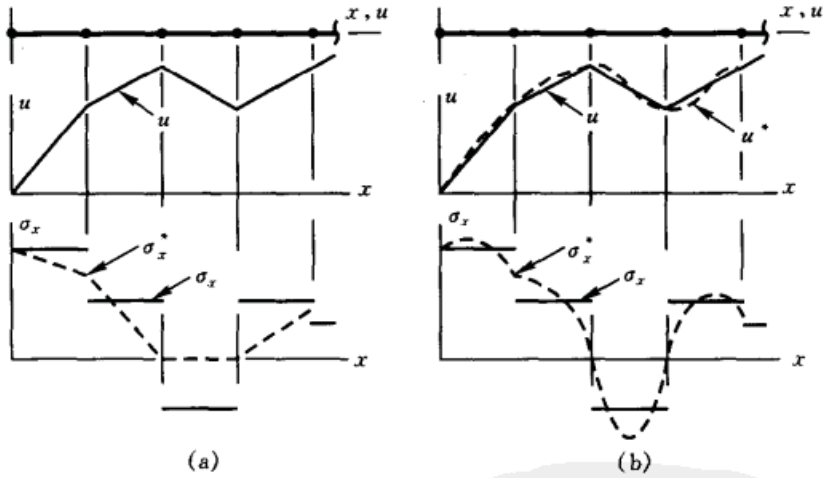


图 9.9-2 用线性单元建模的均匀杆,图示了可能的位移场,一个单元一个单元形成的应力场和分别用(a)式 9.9-2 和(b)式 9.9-3 得到的平滑应力场

自有限元分析出现以来,为了提供节点应力就用到了式 9.9-1 的方法,式 9.9-2 是为了平滑应力场的图形显示,如在图 1.5-2(b)中看到的那样。用于工程目的,图 1.5-2(a)的非平滑场是一种比较好的显示方式,因为它提供了需要细化网格位置处的整体场域描绘,特别是应力带显示单元间最大不连续的区域。

另一种平滑选择是由改进位移场开始的,然后微分它得到平滑应变场[9.18]。比如,考虑几个末端相连的 2 节点杆单元。在一个典型单元的节点 1 处,$x=0$,轴向位移是 u_1,轴向应变可以看做是节点的平均值 ϵ_{x1}^*。类似地,在节点 2,节点值是 u_2 和 ϵ_{x2}^*。这些节点值定义了一个平

滑函数 $u^* = u^*(x)$。特别地，利用图 3.2－4 中的三次形状函数，

$$u^* = N_1 u_1 + N_2 \varepsilon_{x1}^* + N_3 u_2 + N_4 \varepsilon_{x2}^* \quad 和 \quad \sigma_x^* = E\varepsilon_x^* = E\frac{\mathrm{d}u^*}{\mathrm{d}x} \tag{9.9-3}$$

这个算例出现在图 9.9－2 中。这种方法可以扩展到 C^1 问题，比如薄板，在那里二阶导数值必须是平滑的[9.19]。

Loubignac 提出了一个简单的获得更高精度应力的方法，这种方法基于节点平均应力和反复调整节点自由度直到平均应力场和式 3.3－8 中最后积分产生的节点载荷与作用在每个节点上的外载荷相均衡[9.20]。Crisfield 认为在一些情况下这种方法不收敛[2.17]。

总体平滑　一个初期的建议是确定平滑应力场的节点值用最小二乘法近似，使平滑场应力和一个单元一个单元得到的场应力之间差值的平方最小化[9.16]。为了这么做，我们写出函数

$$F_G = \sum\int (\sigma^* - \sigma)^2 \mathrm{d}V \tag{9.9-4}$$

其中 σ 和 σ^* 都从属于单个的应力，比如 σ_x。像在式 9.9－2 中那样，σ^* 可以一个单元一个单元地从节点应力按 $\sigma^* = \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor \{\sigma_n^*\}$ 插值，但是在现有的公式中，节点应力 $\{\sigma_n^*\}$ 还是未知的。应力 σ 是 $\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\boldsymbol{E}][\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{d}\}$ 中的一个应力。式 9.9－4 中的积分是在一个单元上进行的。求和跨越结构所有的单元，于是可以在总体向量 $\{\boldsymbol{\sigma}_n^*\}_G$ 中列出节点应力。此后，依照式 5.2－13 的方式，

$$\frac{\partial F_G}{\partial \{\boldsymbol{\sigma}_n^*\}_G} = \{\boldsymbol{0}\} \quad 得出 \quad \left(\sum\int \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor^{\mathrm{T}} \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor \mathrm{d}V\right)\{\boldsymbol{\sigma}_n^*\}_G = \sum\int \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor^{\mathrm{T}} \sigma \mathrm{d}V \tag{9.9-5}$$

上式用来求解 $\{\boldsymbol{\sigma}_n^*\}_G$。在圆括号内的总体系数矩阵有着质量矩阵的形式。相同的系数矩阵用于每个应力分量。这种方法有时候被称做“球面 L_2 投影”(参见附录 A 中式 A.23)。尽管它形式上有吸引力，但它并不受欢迎，因为它计算费用高，并且常常没有下面讨论的方法精度高。

分片修复　选择被称做“分片”的少数邻接单元。分片单元的应力用于构建一个应用于分片的平滑场。应力或者应变都能够平滑。选择应力，我们让分片上的平滑应力场表示成

$$\sigma^* = \lfloor \boldsymbol{P} \rfloor \{\boldsymbol{a}\} \tag{9.9-6}$$

这里的 σ^* 是任意一个应力分量(σ_x 或 σ_y，等等)。$\lfloor \boldsymbol{P} \rfloor$ 包含了一个多项式的项，而 $\{\boldsymbol{a}\}$ 包含了待确定的广义坐标。对于不同的应力分量得到 $\{\boldsymbol{a}\}$ 中 a_i 的不同值。在平面问题中，多项式矩阵的可能选择有

$$\begin{aligned} &双线性：\lfloor \boldsymbol{P} \rfloor = \lfloor 1 \quad x \quad y \quad xy \rfloor \qquad (\{\boldsymbol{a}\} 包含着 a_1 到 a_4) \\ &二次式：\lfloor \boldsymbol{P} \rfloor = \lfloor 1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \rfloor \quad (\{\boldsymbol{a}\} 包含着 a_1 到 a_6) \end{aligned} \tag{9.9-7}$$

一个双线性不完全多项式 $\lfloor \boldsymbol{P} \rfloor$，提供了取决于 xy 轴方向的结果，而 xy 轴与分片有关，在一些方向上，结果可能是很差的。

为了决定 $\{\boldsymbol{a}\}$ 并由此定义平滑应力场，我们选择一个分片，如图 9.9－3 中所示其中的一个，并且指定一个坐标系 xy。坐标系的原点可以任意设置，但应该靠近分片以避免可能与远离原点的小分片相关的数值困难，对此，分片内点的坐标会有小百分比的差别。单元的应力场 σ 可能在最精确的地方取样。这些位置一般是不同积分准则的高斯点(如图 9.9－3 中所示空

心正方形和三角形)。然后,在每个样本点(x_i, y_i)上我们把单元应力σ与迄今还未知的来自式 9.9-6 的平滑应力σ^*之差平方,并对平方求和。因此我们获得函数[9.21]

$$F_P = \sum_{i=1}^{nsp} (\sigma^* - \sigma)_i^2 \tag{9.9-8}$$

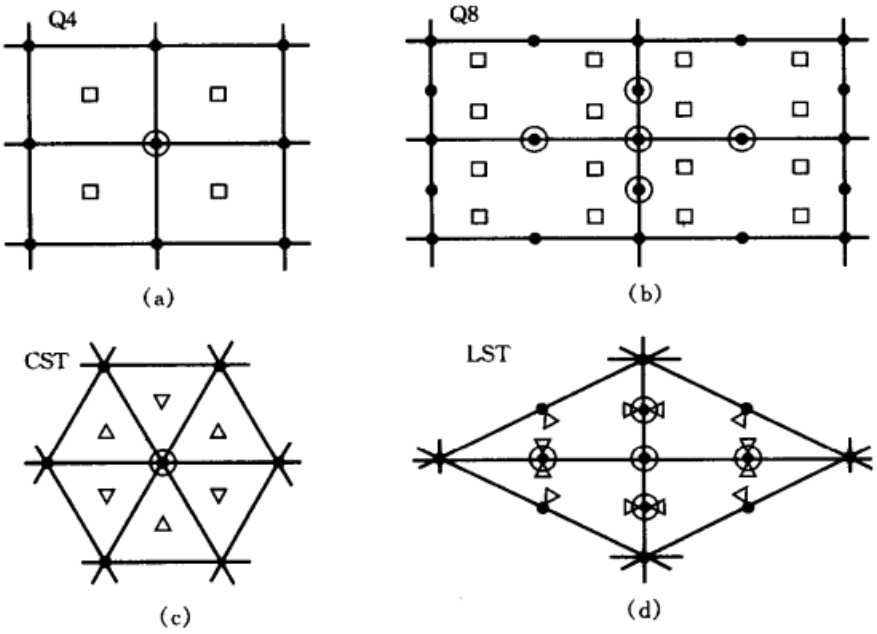


图 9.9-3 用平面单元分片修复。△,□=应力(或其它梯度)取样位置。
•=节点。⊙=由补片提供最精确应力σ^*的节点。单元名曾在第 3 章说明过

这儿 nsp 是分片中样本点的数量(在图 9.9-3 中的不同部分,nsp 分别为 4,16,6 和 12)。根据式 9.9-6 进行替代,然后按式 9.9-5 使 F_P 相对于 a_i 最小化,得到

$$[\boldsymbol{A}]\{\boldsymbol{a}\} = \{\boldsymbol{b}\} \quad \text{其中} \quad [\boldsymbol{A}] = \sum_{i=1}^{nsp} \lfloor \boldsymbol{P} \rfloor_i^{\mathrm{T}} \lfloor \boldsymbol{P} \rfloor_i \qquad \{\boldsymbol{b}\} = \sum_{i=1}^{nsp} \lfloor \boldsymbol{P} \rfloor_i^{\mathrm{T}} \sigma_i \tag{9.9-9}$$

从这里可以确定$\{\boldsymbol{a}\}$。我们要求 nsp 等于或者大于$\{\boldsymbol{a}\}$中项的数量。如果大于,这个方程组是超定的,而且得到的 a_i 提供了最小二乘近似。相同的矩阵$[\boldsymbol{A}]$用于应力场中的每个应力分量,比如平面应力问题中 σ_x, σ_y, τ_{xy}。不像式 9.9-5 那样,这里没有涉及到积分,而且合适的场被限定在单元的分片上而不是整个结构。分片修复也应用于场量自身的计算[9.22]。

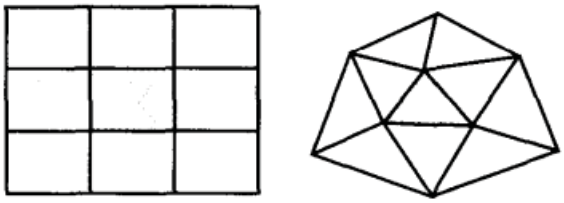
当$\{\boldsymbol{a}\}$已经计算出来,分片中任意点的平滑应力σ^*可以通过把该点的 x 和 y 的坐标代入到式 9.9-6 中来估算。图 9.9-3 中空心圆所圈的节点被认为是这种估算的好选择。整个结构能够被许多部分交错的"修复分片"来覆盖(注意没有分片跨越一个已知应力不连续的情况,比如不同材料之间的分界面)。当这个方法应用于二次或更高次单元的时候,网格内部的节点和网格边界的绝大部分节点接收到的应力σ^*来自几个分片。在一个节点的若干值可以平均[9.21]。边界节点的应力σ^*不可能与内部节点的应力一样精确。如果已经计算出来所有节点的σ^*应力,那么有要求的话每个单元内部的应力可以通过式 9.9-2 获得。

按照 9.6 节的讨论,平面问题中单元的应力$\{\boldsymbol{\sigma}\}=[\boldsymbol{E}][\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{d}\}$有着 $O(h^p)$的收敛率,这里的 p 是单元位移场中最高完全多项式的阶次。碰巧分片修复提供的应力 σ^* 是超收敛的;也就是说,它们的收敛率至少是 $O(h^{p+1})$[9.21]。对于图 9.9-3 中的线性单元 Q4 和 CST,收敛率是 $O(h^2)$;对于二次单元 Q8 和 LST,边界点的收敛率是 $O(h^3)$,网格内部点的收敛率是 $O(h^4)$。有 $O(h^4)$收敛率的被称做"极端收敛"[9.21]。在这种情况下,单元的尺寸缩减一半,则应力误差就会减到原来的 1/16。

分片修复提供的应力精度有时候可以通过考虑平衡方程来提高,尤其是在网格边界上的节点[9.23,9.24]。这个可以通过把式 3.1-13 左边的表达式应用到平滑应力场,在分片上积分,并把结果项加到式 9.9-8 右边的表达式来完成。因此应力场的所有分量同时用分片修复方法来处理。这种方法可以视为对 F_P(即式 9.9-8)的扩充,通过一个约束函数来惩罚对平衡条件的背离(见 13.3 节)。包含平衡方程产生了一个类似于式 9.9-9 中的$[\boldsymbol{A}]$系数矩阵,并不大可能是病态的。1997 年一个误差估计者的研究[9.25]发现了如在文献[9.23]中包括平衡条件产生了一个对单元形状畸变很敏感的平滑方法,得出最可靠的方法是文献[9.21]的初始分片修复方法的结论(式 9.9-6 到 9.9-9)。

分片修复的变式[9.24,9.25]以一种不同于简单平均的方法,在共享应力修复点上包含了来自交错分片的相关应力,而且避免了随后以一个单元一个单元的形式表示应力(式 9.9-2),这种表示法提供了一种与分片应力不同的插值。另外的方法在文献[9.27,9.28]中有介绍。

如上面的叙述,分片放在节点的中心,如图 9.9-3 所示。也可以由居中单元内的分片来替换,如图 9.9-4 所示,以便直接得到中心单元上的应力场,而不用先确定单元节点处的平滑应力[9.26]。对于位移场包含着一个 p 阶完全多项式的单元,$p+1$ 阶可能适用于拟合的多项式(式 9.9-6)。用几个居中单元分片确定的平滑场不是单元间连续的。如果需要单元间边界的应力,建议使用平滑场的简单平均[9.26]。



(a) (b)

图 9.9-4 (a)四边形单元;(b)三角形单元

更好的改进和另外的方案可能在将来提出。任何不同于单元应力$\{\boldsymbol{\sigma}\}=[\boldsymbol{E}][\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{d}\}$并提供改进结果的应力计算方法都是研究的候选者,可以作为离散误差估算的基础。

其它应用 在热传导分析中,热流是与结构力学中应力相对应的一阶导数值。在平面各向同性材料稳态问题中,热流平滑可能体现在平衡方程 $f_{x,x}+f_{y,y}=0$ 上,这里的 f_x 和 f_y 分别为 x 方向和 y 方向的热流分量[9.23]。在有弯曲出现的应力分析问题中,横向位移的一阶导数可能已经是单元间连续的,取决于单元的类型。其后的平滑应用于二阶也许还有三阶导数值上;也就是说,应用于弯矩和横向剪力上[9.29,9.30]。特征值问题,比如振动固有频率和屈曲载荷的计算,已经由图 9.9-2(b)所描述类型的平滑和位移场分片平滑作了说明[9.18,9.19,9.22,9.31]。在声振动问题中,C^0 单元在每个节点有一个单独的压力自由度,所以使用平滑可获得改进的压力场。

9.10 事后误差估计

一个有限元解包含着足够的信息来估计其自身的误差。也就是说，事后误差估计是可能的。这个估计基于一个单元一个单元的场和替换场两者之间的差值，应该更准确并通过用平滑运算来获得。在确定估计值中所获得的信息可以用来改进 FE 网格，如 9.11 节所描述的那样。

误差的度量可以基于应力场的任意分量而且能够用多种方法定义。定量表示共享节点的 n 个单元与该节点平均应力(式 9.9-1)偏差的一种简单方法是 $\frac{1}{n}\sum|(\sigma_e)_{ave}-(\sigma_e)_i|$。当应力本身不是大到足以引起关注时，为了避免把重要信息归于大的应力差，这个结果可被网格中的最大值 σ_e 来除。不是用这样一个节点一个节点的误差度量，更一般的方法是从每个单元确定一个误差量度并且把单元量度组合到一个总体误差量度上。随后的解说用到了独立于时间的术语和等温应力分析。其它的应用随后介绍。

ZZ **误差估计** 下列误差估计的形式根据创始者 Zienkiewicz 和 Zhu 的名字常被后人称做 *ZZ*(或 Z^2)误差估计[9.32,9.33]。用一个单元一个单元的应变$\{\varepsilon\}=[\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{d}\}$，我们从式 4.4-5 获得每个单元的应变能。单元应变能的总和乘以 2，定义为*总体应变能范数*$\|U\|$的平方。

$$\|U\|^2=\sum_{i=1}^{m}\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_i^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{E}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_i\mathrm{d}V \tag{9.10-1}$$

这里 m 是被估计误差的结构区域中单元的数量。这个区域不需要包括结构中的所有单元。用平滑应变场$\{\boldsymbol{\varepsilon}^*\}$和一个单元一个单元的应变$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}=[\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{d}\}$之间的差值，我们来定义*总体能量误差范数*$\|e\|$，并称其为误差估计量。它的平方是

$$\|e\|^2=\sum_{i=1}^{m}\int(\{\boldsymbol{\varepsilon}^*\}_i-\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_i)^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{E}](\{\boldsymbol{\varepsilon}^*\}_i-\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_i)\mathrm{d}V \tag{9.10-2}$$

因为$\{\boldsymbol{\sigma}\}=[\boldsymbol{E}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$和$\{\boldsymbol{\varepsilon}^*\}=[\boldsymbol{E}]\{\boldsymbol{\varepsilon}^*\}$，式 9.10-1 和 9.10-2 也可以用应力形式来表示：

$$\|U\|^2=\sum_{i=1}^{m}\int(\boldsymbol{\sigma})_i^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{E}]^{-1}\{\boldsymbol{\sigma}\}_i\mathrm{d}V \tag{9.10-3}$$

$$\|e\|^2=\sum_{i=1}^{m}\int(\{\boldsymbol{\sigma}^*\}_i-\{\boldsymbol{\sigma}\}_i)^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{E}]^{-1}(\{\boldsymbol{\sigma}^*\}_i-\{\boldsymbol{\sigma}\}_i)\mathrm{d}V \tag{9.10-4}$$

因为$\|U\|^2$和$\|e\|^2$取决于应力的平方和乘积，在某种意义上，$\|U^2\|$和$\|e\|^2$是应力自身的一种表达方式(或者，更一般地，是场量梯度的表示)。

作为其后对于$\|U\|$和$\|e\|$的替代选择可以用 L_2 范数(在附录 A 中定义)来计算。它们通过忽略前述表达式中的加权矩阵$[\boldsymbol{E}]$获得。具体为

$$\|U\|_{L_2}^2=\sum_{i=1}^{m}\int\{\boldsymbol{\sigma}\}_i^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\sigma}\}_i\mathrm{d}V \tag{9.10-5}$$

$$\|e\|_{L_2}^2=\sum_{i=1}^{m}\int(\{\boldsymbol{\sigma}^*\}_i-\{\boldsymbol{\sigma}\}_i)^{\mathrm{T}}(\{\boldsymbol{\sigma}^*\}_i-\{\boldsymbol{\sigma}\}_i)\mathrm{d}V \tag{9.10-6}$$

相对误差定义为:

$$\eta = \left[\frac{\|e\|^2}{\|U\|^2 + \|e\|^2}\right]^{1/2} \tag{9.10-7}$$

这里能够用 η 在单元分片上或可能在整个网格上来量化离散化误差。式 9.10-7 的分母是精确误差能的估算值,是未知量。作为其可替换的分母,能够使用 $\|U^*\|^2$,它可以用式 9.10-1 中的 $\{\boldsymbol{\varepsilon}^*\}$ 替换 $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ 来计算。因为从一个很粗略的网格中,有 $\|U^*\|^2 \approx \|U\|^2 + \|e\|^2$,除非误差很大,注意 η 是应用于*初始*的一个单元一个单元的场相对误差估计,而不是由平滑运算改进的场。η 可能的范围是 $0<\eta<1$。η 可接受的值常取 $\eta \leqslant 0.05$。

备注 前面的误差估计从属于场量的梯度,而不是场量自身,而且是对单元的组集,而不是对单个的单元或是特殊点的应力。如果前述的方程应用到单个的单元上以便获得每个单元 i 的 $\|U\|_i$ 和 $\|e\|_i$,人们通常会遇到有着几乎相等的单元范数 $\|e\|_i$ 的高受力单元和低受力单元,所以 η_i 在低受力单元中可能会比较高。这样的信息将没有多大用处。

因为总体 $\|e\|$ 是平滑之前的单元间梯度不连续的量度,应力平滑和误差估计不应该基于这样的网格或分片,它在物理上跨越了与厚度突变、材料变化、紧缩配合连接等相关的实际应力不连续。然而,在存在奇异性的情况下误差估算值的应用已有人做过研究[9.34,9.35]。

对于薄板弯曲的应用,在 m 个单元的一个分片上的 $\|e\|$ 可以定义为:

$$\|e\|^2 = \sum_{i=1}^{m}\int (\{\boldsymbol{M}^*\} - \{\boldsymbol{M}\})^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{D}]^{-1}(\{\boldsymbol{M}^*\} - \{\boldsymbol{M}\})\mathrm{d}A \tag{9.10-8}$$

这里 $[\boldsymbol{M}^*]$ 是平滑的弯矩场,$[\boldsymbol{D}]$ 是抗弯刚度矩阵,A 是单元面积。$\|U^2\|$ 的表达式类似于式 9.10-3,而且是从式 9.10-8 中忽略 $\{\boldsymbol{M}^*\}$ 项得到的。应用于厚板,要考虑到横向剪切变形,横向剪力的贡献也包括在能量范数中[9.36]。应用于壳体,因用到从薄膜力产生的应力,式 9.10-4 使式 9.10-8 的值有所增大[9.37]。$\|U\|^2$ 的表达式也有类似地增大。

由于在计算中的简化,平滑和误差估计可以基于式 9.10-5 和式 9.10-6 的 $\|U\|_{L_2}^2$ 和 $\|e\|_{L_2}^2$,仅使用冯·米赛斯应力 σ_e。因此[9.38]

$$\|U\|_{L_2}^2 = \sum_{i=1}^{m}\int \sigma_e^2 \mathrm{d}V \quad \text{和} \quad \|e\|_{L_2}^2 = \sum_{i=1}^{m}\int (\sigma_e^* - \sigma_e)^2 \mathrm{d}V \tag{9.10-9}$$

其它应用 在热传导问题中,如果符号重新定义,式 9.10-3 到 9.10-7 都可以使用。应力向量 $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ 和 $\{\boldsymbol{\sigma}^*\}$ 分别由与一个单元一个单元和平滑计算相关的热流向量替换,而 $[\boldsymbol{E}]$ 被导热率矩阵替换。如果全部的问题是热应力分析的两阶段问题,则误差分析和网格修正应该在温度分析阶段和随后的应力分析阶段分别进行,因为一个适合一个阶段的网格可能不适合另一个阶段。仅应用于一个阶段的误差分析和网格修正不能矫正另一个阶段得到的差的结果。

对于振动问题的每个振型,在瑞雷(Rayleigh)商的分子和分母计算中可应用平滑方法,由此可得到更精确的振型固有频率值。于是我们在初始的计算中获得了总体的误差估计和一个寻求结果的改进值。这种方法也可以应用于屈曲问题。参考文献包括在[9.18,9.19,9.22,9.31,9.39]中。

在结构力学的振型叠加法中,*ZZ* 估计量和相关的网格改进已经应用于在分析中保留的每个振型[9.40]。

在流体动力学的应用已在文献[9.41]中做了综述。

9.11 自适应网格划分

自适应网格划分的目的是在需要和特别需要的地方用修正网格来获得所希望的精度。通常需要几个循环的分析和网格修正。过程的自动化要求数值显示在哪里和如何修正离散化、需要自动划分网格的软件和终止的判断标准。后面经常用到 Zienkiewicz 和 Zhu 推荐的方案[4.4,9.32,9.33,9.36]。它不限于应力分析问题。

一种可能的终止标准是 η 的最终值(式 9.10-7)或者在最终的网格或者在其中计算 η 的一部分网格中必须不超过允许的值 η_{all}。每个单元 $\|U\|^2|+\|e\|^2$ 的平均值,与 η_{all} 结合,提供了一个单元中 $\|e\|$ 的允许值。因此从式 9.10-7,对于在误差估计区域中 m 个单元,

$$\text{在一个单独的单元中:}\qquad \|e\|_{all}=\eta_{all}\left[\frac{\|U\|^2+\|e\|^2}{m}\right]^{1/2} \tag{9.11-1}$$

在一个典型的单元 i 中 $\|e\|$ 的实际值与允许值的比值为

$$\xi_i=\frac{\|e\|_i}{\|e\|_{all}}\quad \text{其中}\quad \|e\|_i^2=\int(\{\boldsymbol{\sigma}^*\}_i-\{\boldsymbol{\sigma}\}_i)^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{E}]^{-1}(\{\sigma^*\}_i-\{\sigma\}_i)\mathrm{d}V \tag{9.11-2}$$

用网格修正的 h 细化法,结果 $\xi_i<1$ 表明单元比需要的大。结果 $\xi_i>1$ 表明在这个区域中需要更多的单元。因为通常的试验开始于粗网格,在第一次分析循环之后如果任意单元将有 $\xi_i<1$,那么数量也很少。这些单元即使有,由于为 $\xi_i>1$ 而注视着单元细化,也可能被忽略。用 h 来表示单元的特征尺寸,就像早在 9.8 节定义的,单元 i 所希望的新尺寸取为

$$(h_i)_{new}=\frac{(h_i)_{old}}{\xi_i^{\alpha}},\quad \text{其中}\quad \begin{cases}\alpha=1/p & \text{未邻近奇异点}\\ \alpha=1/\lambda & \text{邻近奇异点}\end{cases} \tag{9.11-3}$$

这里 p 是单元场量中完全多项式的最高次数(对于 4 节点双线性四边形 $p=1$,对于 8 节点四边形 $p=2$,等等),λ 是奇异点的强度(如果存在)。对于尖锐的裂纹,$\lambda=0.5$,而且对于自适应的网格划分,$\lambda=0.5$ 确实可以作为对任何一个奇异点足够的近似值[4.4]。

随着分析,误差估计和网格修正的连续循环,上述方法促使网格达到在所有单元中 $\|e\|_i$ 有着相同值的条件,它是一个最优网格的可能定义。一个很有用的图示方法值得一提:对 $\|e\|_i$ 的不同数值范围设定不同的颜色。然后,在满意的网格中,所有的单元都显示相同的颜色。

网格修正后,重复进行 FEA 和误差估计,如果必要接着另一次网格修正和重分析。当用式 9.10-7 定义的 η 降到用户确定的 η_{all} 典型值 0.05(5%)之下时,重复即可停止,而且结果被认为是满意的。这个标准是基于能量范数但不保证单个应力都有着相同的精度。人们也可以要求满足终止的其它标准,而且采取不同于式 9.11-3 的其它方程来修正单元尺寸。这些工作包括定义在单元水平上可允许的误差,利用在所有方向不相同的应力梯度和其他技术来修正单元的形状和它们的大小[9.32,9.42~9.44]。

图 9.11-1 是一个自适应网格细化的例子。它很快地达到了减少 η 到 0.05 之下的目标。然而,有两个凹角是奇异点,那儿的应力理论上是无穷大。继续重复误差估计和自适应网格划

分循环直到在这些区域网格细化。尽管总体 η 是足够的低，但我们还是希望从用自适应网格划分处理的区域除去这些奇异点。另一个奇异点的普通例子是集中载荷作用的位置。

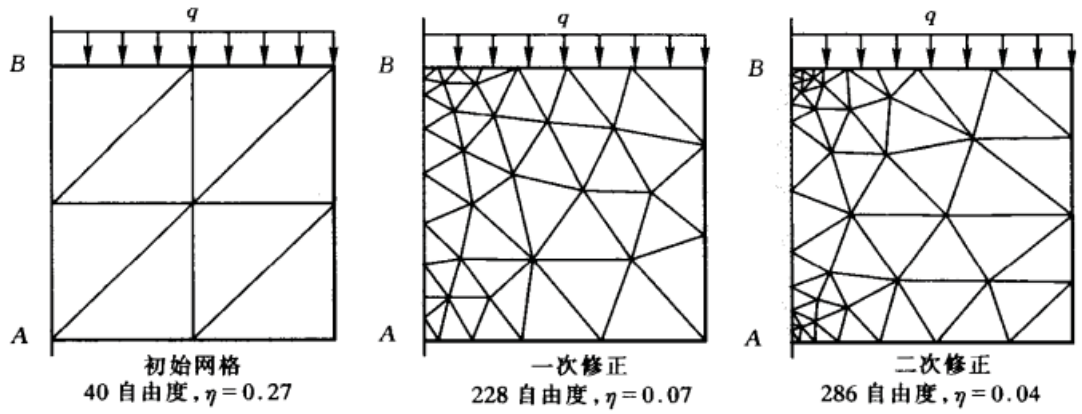


图 9.11－1　用线应变三角形在平面区域内自适应求解的结果。泊松比是 0.3。沿 AB 的所有自由度设置为零。每个网格修正的目标是 $\eta=0.05$。[来自 J. Z. Zhu 和 O. C. Zienkiewicz，"有限元方法中的自适应技术"，应用数值方法通讯，Vol. 4，No. 2，1988，pp. 197～204。©John Wiley & Sons Ltd. 经许可复制]

用添加自由度到已经存在的单元的 p 细化方法，误差估计和网格修正的程序没有 h 细化方法简单。能量误差范数的计算可能依赖添加一个或多个自由度的估计效果。参考文献包括在[4.4，9.34，9.45]中。

备注　如果要分析的结构有大于一组的载荷，那么什么样的网格是合适的呢？前述的网格修正策略对每个不同载荷情况产生了不同的网格。如果单个的网格修正对于所有的载荷情况都能有所改进，那么它将对于分析者和计算机都能节约不少时间。一种可能的策略是对于每个载荷情况分别估计适当的单元大小，比如，利用式 9.11－3，然后产生一个新的网格，每个位置网格中单元大小是几个估计值中最小的。

网格的细化不仅仅是在一个定义的区域填充更多的单元。当沿着一个弯曲的边界增加单元和节点时，数学模型的曲线应该相匹配，而不是用一个直边单元的粗糙网格来表示其粗略的近似值。而且，在 FE 模型的任意部分，修正的网格的单元形状和等级必须满意，以免尽管新的网格比旧的有更多的自由度但它还不如旧的网格好。如果初始的网格是基于简化的几何体，比如忽略了圆角曲线，则自适应网格划分也可能收敛于错误的结果。

我们还没有讨论如何生成一个改进的网格。网格的生成已经变成一门技术专长，有许多技巧和大量的参考资料，文献[9.46，9.47]中只是很少的实例。现有的软件能够接收有限元模型各部分中有关要求单元大小的输入信息，产生满足式 9.11－3 需求的分级网格。然而，计算机生成的网格可能不是一个好的网格。它可能会包含许多形状不好的单元。这种网格可以在分析前手动改进，除非自动进行自适应网格划分，在那种情况下，人们相信计算机生成的网格是满足要求的。

有着自动适应能力的软件能做许多事情，减少准备网格和修改它们的劳动，使其后的分析更精确。然而，适应能力形式上保证精确结果，但可能引发粗心错误，比如应用了错误的载荷或者设定了错误的边界条件。对于一个错误的问题反复改进其解是没有意义的。误差的估计

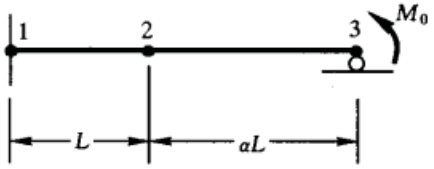
无疑增加了分析者正确定义问题，严格检查计算结果的责任。

分析题

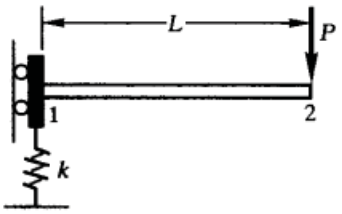
9.2－1 考虑方程 $x+y=2$ 和 $x+1.01y=2.01$。求这些方程的解。然后改变第二个方程，首先变成(a)$x+1.02y=2.01$，然后变成(b)$x+1.01y=2.02$。求得各个情况的解，由此解释方程组对(a)系数矩阵小的变化和(b)常矢量小的变化的灵敏度。

9.2－2 在式 9.2－3 中，确定应用高斯消元法的一步来消去 u_1 产生的简化系数 K_{22}。证明如果 α 是个大数，则可能有数值误差。

9.2－3 图上显示了一个均匀平面梁的两单元模型。梁的左端固支，右端简支。证明如果标量因子 α 变小，则总体方程会变成病态的。



题 9.2－3



题 9.2－4

9.2－4 图示均匀平面梁的左端搁置于弹性系数为 k 的弹簧上。左端不允许旋转。采用一个单元建模，利用横向挠度 w_1 和 w_2 以及旋转角 θ_2 作为自由度(左端的 θ_1 被抑制了)。

(a)求解由于载荷 P 引起的节点自由度。证明如果 $k \ll EI/L^3$，方程组将变成病态的。

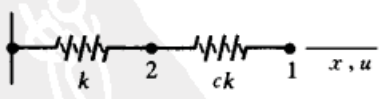
(b)对于施加条件 $\theta_1=0$ 之前的四自由度的梁单元，采用自由度 w_1，θ_1，w_{21} 和 θ_{21}，其中 w_{21} 和 θ_{21} 是“相对”自由度。$w_{21}=w_2-(w_1+L\theta_1)$ 和 $\theta_{21}=\theta_2-\theta_1$。然后施加条件 $\theta_1=0$，以及软弹簧和载荷 P，求解节点自由度。如果 $k \ll EI/L^3$，这些方程组是病态的吗？

9.3－1 (a)图 9.2－1 中令 $k_1=10k_2$。确定未正则化矩阵[$\boldsymbol{K}$]和正则化矩阵[$\boldsymbol{K}_s$]的条件数。

(b)令 $k_2=10k_1$，重作(a)。

9.3－2 (a)图示的系统节点自由度为 u_1 和 u_2，弹簧的刚度系数分别为 k 和 ck。标量 c 取什么值时未正则化的刚度矩阵条件数最小，最小值是多少？

(b)使用正则化刚度矩阵，重复(a)。



题 9.3－2

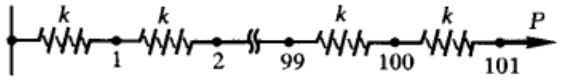
9.3－3 图 9.2－3(a)中令 $\beta=45°$。分别用(a)未正则化矩阵[$\boldsymbol{K}$]和(b)正则化矩阵[$\boldsymbol{K}_s$]根据 α 来确定 $C(\boldsymbol{K})$。

9.3－4 用单独的梁单元对均匀平面梁建模。如果横梁是(a)简支的，(b)悬臂的，那么正则化刚度矩阵的条件数是多少？(每种情况下有两个非零的自由度。)

9.4－1 (a)写出图示结构的[$\boldsymbol{K}$]，其中每个弹簧的刚度系数都是 $k=100$。节点自由度是轴向位

移 u_1。借检查高斯消元法求解 u_{101} 的前面几个步骤，推导出用 k 和 i 表示的式 9.4－1 的简化对角线系数 P_{ii} 的表达式。第 99 次和第 100 次消元后对角衰减系数是多少？

(b)重复(a)，但现在节点编号从右到左，此时节点 1 承受载荷 P。



题 9.4－1

9.4－2　在这个问题的每一部分中，假设分析者忘记了指定任何位移边界条件以致结构是无支撑的。在系统$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\}$的哪个方程(第一个，第二个……，最后一个)中对角衰减测试将会检测出问题来？

(a)一系列弹簧，如问题 9.4－1。

(b)表 9.4－1 的平面梁。

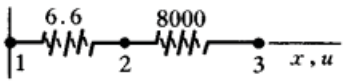
(c)每个节点有着通常三自由度的平面刚架。

(d)回转体(每个节点有两个自由度；径向和轴向平移)。

(e)一个平面结构(每个节点有两个自由度；x 方向和 y 方向的平移)。

9.4－3　对于图 9.2－3(a)描述的问题，根据 α 和 β 的正弦及余弦来确定对角衰减比。证明如果 $\beta=0$ 或 $\beta=\pi/2$，这个比值不是很大。

9.4－4　对于图示结构中节点 2 和节点 3 单位轴向载荷，精确的结构方程组是 $8\,006.6u_2-8\,000.0u_3=1$ 和 $-8\,000.0u_2+8\,000.0u_3=1$。确定 u_2 和 u_3 到 8 个小数位。然后计算这些自由度的近似值，假设在每次高斯消元法运算之后假想的计算机四舍五入到四位。精度损失符合由(a)对角衰减比还是(b)(正则化)刚度矩阵条件数预测的值？



题 9.4－4

9.5－1　考虑两个方程 $1.78u_1+1.06u_2=2.88$ 和 $0.94u_1+0.56u_2=1.52$。其精确解是什么？这个方程组是病态的吗？由近似解 $u_1=1.88$，$u_2=-0.44$ 给出的残数矢量$\{\Delta\boldsymbol{R}\}$是什么？式 9.5－2 的 e 是什么？这个例子中的残数测试有用吗？

9.5－2　考虑病态方程组 $u_1+u_2=2$，$u_1+1.000\,1u_2=2.000\,1$。由近似解 $u_1=2$，$u_2=0$ 和近似解 $u_1=u_2=1.1$ 给出的残数矢量$\{\Delta\boldsymbol{R}\}$和 e 分别是什么？这两组近似解哪一组更精确？

9.5－3　假设刚度系数为 $k=28$ N/m 的单个线性弹簧承受 0.5 N 的力。使用 $k^{-1}\approx0.040$ m/N 的近似值，我们得出位移的近似值 $u\approx0.020$ m。按式 9.5－3 的迭代法，用正确的 k 和近似的 k^{-1} 来改进这个结果。

9.5－4　考虑两个方程$(u_1/3)-(u_2/3)=1$，$-(u_1/3)+(7u_2/12)=0$。令系数矩阵和它的逆矩阵近似为

$$[\boldsymbol{K}]\approx\begin{bmatrix}0.3 & -0.3\\ -0.3 & 0.5\end{bmatrix}\quad\text{和}\quad[\boldsymbol{K}]^{-1}\approx\begin{bmatrix}8.0 & 5.0\\ 5.0 & 5.0\end{bmatrix}$$

(a)使用近似矩阵，按照式 9.5－3 应用 3 步迭代循环。u_1 和 u_2 的计算值看起来是收敛于正确结果吗？

(b)再次应用 3 步迭代循环，现在使用近似值$[\mathbf{K}]^{-1}$，而不是式 9.5－3 中用正确值$[\mathbf{K}]$。评定结果。

9.6－1 考虑长度为 h 的一维单元，其节点的自由度在节点 $i=1$ 和 $i=2$ 处分别为 u_i 和 $u_i=(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)_i$。在 $x=h/2$ 处，使用图 3.2－4 中的形状函数，我们得到 $u=\frac{1}{2}(u_1+u_2)+\frac{h}{8}(u'_1+u'_2)$。把 u_1，u_2，u'_1 和 u'_2 展成级数，证明 $u+e=u+O(h^4)$，并确定误差项 $e=O(h^4)$的精确形式。

9.7－1 这一次利用式 9.7－1 中的 $q=1$，重新计算表 9.7－1 中六个“外推结果”。

9.7－2 用线性回归验证 $\sigma_{\max}=93.3$ 是图 9.7－4 中在 $N_{\mathrm{els}}=\infty$时的预测值(直线向数据点的最小二乘近似)。

9.7－3 图 9.7－4 中用线性外推预测的 $\sigma_{\max}$的值是多少？用具有 $q=1$ 和三个数据点所有三种可能组合的式 9.7－1(对于每种外推用它们中的两个)。所有三个 $\sigma_{\max}$的平均值是多少？

9.7－4 假设平面网格有 $N_{\mathrm{els}}=100$，200 和 400 个单元，在一个确定点计算的位移值分别为 4.16，4.64 和 4.76 个单位。用外推法预测零单元尺寸有什么样的位移值？

9.7－5 用式 9.7－1，以 q 适于外推的量值来预测下列例题中报告的位移和/或应力收敛值。

(a)图 3.5－2 中常应变三角形结果。

(b)图 3.10－2 中“CST”结果。

(c)图 3.10－2 中“参考 3.9”结果。

(d)图 6.6－1 中“QM6”结果。

(e)图 6.6－1 中“Q4”结果。

9.7－6 假设图 9.7－4 中的问题被求解了两遍，每次用 9 节点的平面单元。网格 2 由网格 1 正规细化构建，四倍于单元数。对于各自的网格，计算的横向顶端位移和最大应力值是

网格 1　$v=0.003\,5$　　$\sigma_{\max}=74.23$

网格 2　$v=0.004\,1$　　$\sigma_{\max}=89.03$

用这些数据来估计网格 2 中 v 和$\sigma_{\max}$的百分比误差。

9.7－7 在表 6.14－1 中，用多网格外推法来估计精细网格中最大正应力的百分比误差。所用网格能构建正规细化单元吗？如果不能，设计一种合适的 h 度量。

9.7－8 假设仅有节点平移自由度的 8 节点块体单元用于分析一个三维弹性体问题。用到了三个网格，在某点，位移有如下结果：

网格 1　201 4 自由度 1.10 mm

网格 2　334 2 自由度 1.17 mm

网格 3　456 0 自由度 1.20 mm

(a)这些网格看起来是不是构建规则的网格细化单元？为什么？

(b)用数据图示估计收敛率。这个收敛率与所用到的单元类型相符吗？

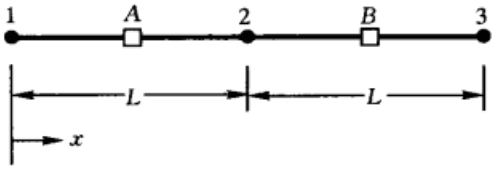
(c)用多网格外推法来估计最好网格中的百分比误差。

9.9－1 (a)证明式 9.9－4 中 F_G 的最小化导致了式 9.9－5 的第二式。

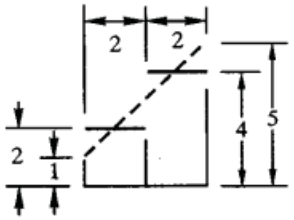
(b)证明式 9.9－8 中 F_P 的最小化导致了式 9.9－9。

9.9－2　(a)图中显示了两个线性单元 1－2 和 2－3。在每个单元中一阶规则的高斯点用字母标出。平滑应力场 $\sigma_x^* = a_0 + a_1 x$ 用式 9.9－9 获得。建立矩阵[**A**]和常向量{**b**}。令 $\sigma_{xA} = 1$ 和 $\sigma_{xB} = 3$。

(b)在 $x = L$ 处由(a)的计算预测 σ_x^* 是什么值？



题 9.9－2



题 9.10－1

9.10－1　假设图中表示沿着两个杆单元的应力，每个单元长度 $L = 2$，单位横截面积，并且有相同的弹性模量。这些单元位于若干个杆单元的一个 FE 模型中。在各个单元中水平实线代表着轴向应力 $\sigma_i = E(u_{i+1} - u_i)/L_i$。虚斜线代表着从节点平均应力计算出来的轴向应力。对于这两个单元，用式 9.10－1，9.10－2 和 9.10－7 来计算 $\|U\|^2$，$\|e\|^2$ 和 η。$\|U\|^2 + \|e\|^2$ 等于平均应力场的 $\|U^*\|^2$ 吗？

9.10－2　一个均匀直杆从 $x = 0$ 延伸到 $x = 4$。对于下列每个 FE 网格，使用线性(两节点)杆单元。节点处的轴向位移 u_i 位于曲线 $u = 2x - 0.1x^3$ 上。确定精确能量范数，然后从 FE 模型中确定 $\|U\|$，$\|e\|$，$\|U\|^2 + \|e\|^2$ 和 η。为了简化，假设 A 和 E 都是单位 1，从节点平均值来决定平滑梯度场(如图 9.9－2(a))。

(a)用两个单元，每个长度为 2。

(b)用四个单元，每个长度为 1。

(c)$\|e\|$ 中从(a)到(b)的变化给出了什么样的轴向应力收敛率？

9.10－3　在问题 9.10－2 的(a)和(b)中，确定用节点平均应力构建的平滑应力场能量范数 $\|U^*\|$。$\|U^*\|^2$ 和 $\|U\|^2 + \|e\|^2$ 之间有差异是什么原因？

计算题

用具有自适应网格划分能力的软件来对一些问题寻求相当精确的结果。前述章节中候选的应用问题包括在图 3.10－2，3.14－1，3.15－1，6.14－1 和 6.15－1 中。如果允许网格的所有单元对误差估计有贡献，那么，能观察到计算过程中奇异性的影响是什么？

第 10 章

建模考虑和软件应用

10.1 引言

概述 本章我们讨论用 FE 模型表示物理问题，选择合适的单元和分析方法，发现和修正误差，以及解析计算结果。我们强调，令人满意的分析要求对所求解的问题有好的物理理解，仔细规划和实施，乐于检查不足并在必要时进行修正。

与本章相关的一些材料已在第 1 章的 1.2 节和 1.5 节做了概述，读者可回顾和复习。前面章节中相关材料将适当引用。在后面的几章我们将讨论有关振动、动态响应、非线性和屈曲问题的建模。

本章建议的分类并不是很清楚，所以各节的安排有些随意。各节及其内容不应看作每个问题机械的罗列。如果准备了建模规则的目录，那么每条规则都可能有例外，一个熟练的分析员可以在特殊情况下发掘它的优势。建模建议应看作胜于规则的构思。理想的情况，读者能有机会接近 FEA 软件，并做一些数值试验来验证这些参考建议并提高在其它不同情况下也能应用这些方法的能力。

备注 对于解析或者数值解法，早期的步骤就是用数学模型来模拟物理实际，如 1.2 节解释的那样。于是，我们要进行抽象来表示物理问题的本质特征。这样实际存在的好多细节就可能被忽略掉。典型被忽略的如连接的细节和小的几何不规则性。不过，如果连接本身是待研究的对象，一些小的不规则性对如板和壳这样的薄壁结构的性能有较大的影响时，这些细节就是比较重要的了。由此可见，建模规则列表不能适应于所有情况，而物理理解才是关键。数学模型的设计，不需要指出求解的特殊方法，但熟悉可用的工具（如有限元分析）却可能影响包含细节的数量和所寻求答案的类型。

适当的模型准备要求把握问题的领域，如应力分析，热传导，磁场问题，等等。无论是建立

模型并将之转换为 FE 的表达形式，还是检查计算的结果，一个领域的技巧不能照搬到另一个领域。在任何训练中，必要的基础知识包括基本理论和经典分析方法的核心思想，因为它们的假设和限制已编入 FEA 软件中了。举个简单的例子，在经典横梁理论中，其应力的计算要求材料各向同性，挠度的计算要求小变形条件。同样的限制也运用到标准梁单元。了解理论和分析方法的局限性，可减小软件超出其使用范围的可能性。一个对软件不太了解的用户，误解问题，构建错误的数学模型，不适当地离散化，没有检查计算结果，甚至接受出现在虚假图形显示中无意义的结果都是完全可能的。

简单地说，我们忠告，对问题和它的理论本质的物理理解，与规划、细致工作和在所有阶段对误差耐心搜索的结合是个技能，至少对于良好的结果，它与熟悉有限元理论一样重要。FEA 消除了许多经典求解方法的局限性，但它没有超越基本理论或是对设计满意模型的需要，此外还要求对单元性能和局限性以及由计算机进行数值分析可能易于出现的错误有所了解。提出错误的问题并对不是预想的问题建模，都是不能用细分 FE 网格的方法来补救的缺陷。

我们建议，首先做好计划，这样效果会更好些。该计划可随着项目进行过程中更多的了解而不断完善，不应企图免去做计划的麻烦而轻率从事。计划的核心部分包括明确所需要的结果以及如何检查计算结果。不过接受计算结果是必然的趋势，因为为了获得它们需要相当大的努力。与这个趋势相反，在作 FEA 之前，应用手算近似结果。为得到近似结果所需要的思考，将会改进分析技能，也将会产生更好的模型。

再重申一下我们的建议，读者要重温一下 1.2 节和 1.5 节。

10.2 物理特性与单元特性

应当使用什么样的单元类型——是梁，平面的，壳，还是空间的？如果是平面的，应该用三角形单元还是四边形单元？带不带边节点？要用到多少个单元，又如何划分网格？诸如此类问题在我们开始离散化数学模型时就会出现。要想回答这类问题，我们必须理解结构（或它的数学模型）可能有怎样的特性，以及单元能够有怎样的特性。我们必须回顾一下，FE 方法的核心思想是分段多项式插值。一个单元能够表示的场量变化其复杂性不能超过包含在它列式中的插值项。因此，在结构力学中，我们很少用基本的 3 节点三角形单元和 4 节点四面体单元，因为它们不能反映应变的线性变化，而这在应力分析中是经常遇到的，还因为这些单元有剪切锁定的缺点（3.6 节有介绍）。不过这些单元类型的缺陷在如热传导标量场的问题中不是那么受关注，因为此时，更多关注的是场的自身而不是它的梯度，当然也就不存在类似于剪切锁定的难题了。

薄壁结构 应力分析中典型的起步过程就是处理直构件在承受拉伸、弯曲和扭转作用时的变形和应力，对于圆横截面还要做扭转分析。一个仅具备这个背景知识的分析员可能没有察觉到薄壁结构常常有另外的变形模式，它可能产生最大应力。这另外的模式是不能由标准梁单元表示的。

图 10.2-1 所示的悬臂梁，处在一端点处受载的情况。典型的横截面会有一个剪切中心，位于 xz 平面内并有正 z 坐标，如果梁弯曲而无扭转，则梁的横向载荷必须通过剪心[1,16,2,6]。对于图示位置的载荷 P，梁会扭转并弯曲，横截面的翘曲如圣-维南（Saint-Venant）扭转理论预

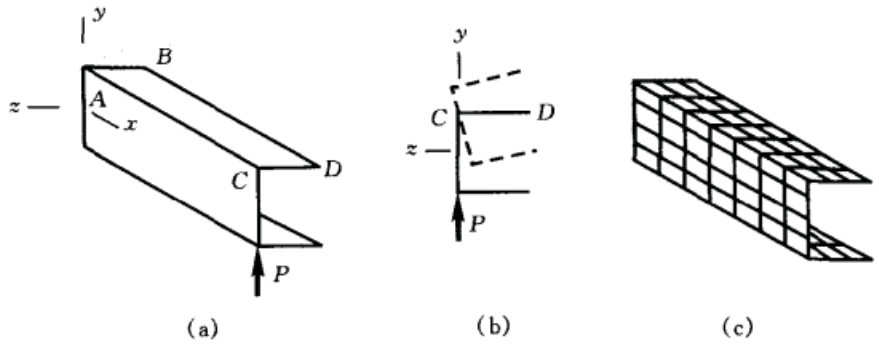


图 10.2-1 (a)薄壁槽钢受位于腹板平面内端点横向力 P 的作用；(b)虚线表示端部横截面的偏转；(c)壳单元构建梁的有限元模型

示的那样。在 $x=0$ 处，固定支撑防止发生翘曲。翘曲的约束简化为扭转量并引起初等梁理论或初等扭转理论未能预示的正应力。对于纯扭矩载荷，这些正应力会比扭转剪应力大。对于图 10.2-1(a)问题中的标准梁单元，式 2.3-8 不能提供正确的扭转刚度或正确的应力。这个梁必须以图 10.2-1(c)所示的方式建模才行，其中各个单元同时表现出薄膜刚度和弯曲刚度。

即使作用力 P 指向剪切中心以致梁不发生扭曲，一个有宽边凸缘的薄壁开口横截面也会显示出剪切滞后效应[1,16]。也就是说，在图 10.2-1 中，宽边凸缘上的剪应力 τ_{zx} 产生 x 方向的变形，以致梁在横向力作用下发生弯曲时，其平面横截面不能保持平面状态了。标准梁单元也不能反映这一效应，而如图 10.2-1(c)所示的 FE 模型则是合适的。

图 10.2-2 是几个薄壁曲梁的例子。用图示方向的力矩 M 作用，梁的周向应力 σ_θ 在靠近曲率中心那一边是拉应力，而在远离中心的那边是压应力。在跨度为 $d\theta$ 的薄片上，如图 10.2-2(a)所示，由 σ_θ 产生的作用力有径向分量，对于图示的 M 方向在外缘上的力指向外，在内缘上的力指向内。这些径向分量会使凸缘发生图中虚线所示的“拍动”变形，会由于力矩载荷 M 降低看到的刚度，并且产生 z 方向应力 σ_z，其值还可能大于周向应力 σ_θ[1,16,2,6]。变形方向和应力符号将随力矩 M 的方向反转而变化。普通的梁单元，即使作为初始弯曲在公式中列出，也不能说明这些作用。类似于图 10.2-1(c)的 FE 模型是合适的。

图 10.2-2(b)的物理作用类似于图 10.2-2(a)的情况。在 $r\phi$ 平面内的变形叫做“椭圆化”[10,1]。这里同样可采用类似于图 10.2-1(c)的 FE 模型，但由于这个问题经常在分析管网时会碰到，所以商用软件可能会包括一个特殊的说明椭圆化的管路-弯曲单元。

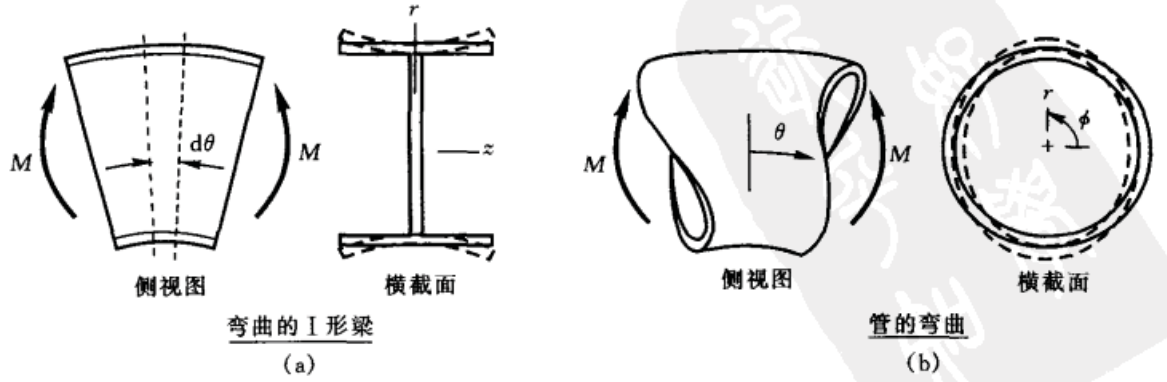


图 10.2-2 受弯矩 M 作用的薄壁曲梁在其曲轴平面内的弯曲。虚线表示在横截面平面内的变形

壳是由其弯曲效应和薄膜效应组合来承受载荷的。图 10.2－3 所示是一个轴对称的薄壁壳问题。支反力 M_O 和 V_O 沿底部周向均匀分布。在底部附近，轴向弯曲应力 σ_x 比较大，但其分布区域是高度集中的，因此有陡峭的梯度。标准圆柱壳单元很适合用于这个问题的建模，但未经培训的软件使用者，可能不了解弯曲应力是怎样集中的，从而可能会使用如此粗的网格以至于把弯曲应力的出现忽略了。在薄壁壳中预期的高局部弯曲应力位于或非常靠近载荷作用线、支撑、加强或曲率突变的部位（如柱形壳与椭球封头间的连接处）。分析者必须熟悉壳体性能，能够预见弯曲应力大和集中的部位[1.16,2.6,10.2]。

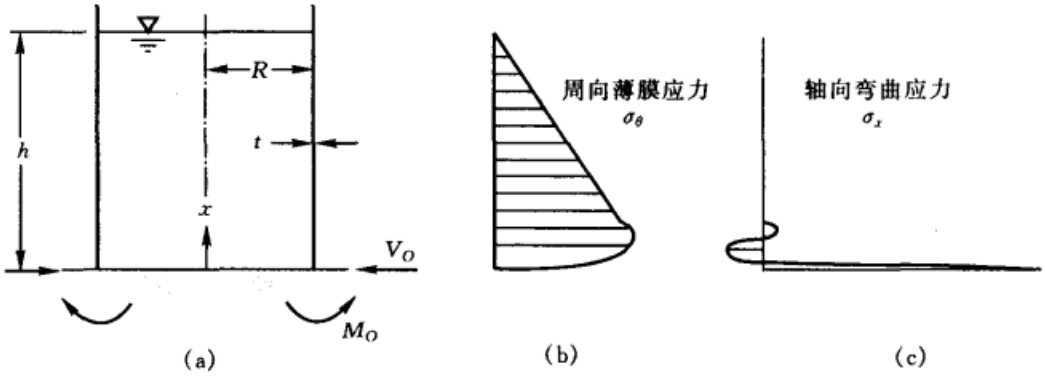


图 10.2－3　(a)薄壁圆柱形箱体装有深度为 h 的液体；
(b)周向薄膜应力；(c)轴向弯曲应力

薄壳结构的行为可能会受几何不完整性和连接偏差的严重影响。这些缺点常在制造和装配中引入，又可能因为它们小而在分析中被忽略，充其量仅在构造前对它们的类型、大小和位置进行估算。然而它们实际存在又可能极大地降低承载能力。不幸的是，它们通常又是非线性响应的，这就使分析变得更加困难。

非线性项　“非线性项”意味着响应与产生它的作用力不是成直接的比例关系。现实情况中，非线性总是存在的。只是幸运的是，非线性效应小到足以在许多普通的问题中被忽略掉。当非线性很重要时，软件并不能自动检查应当考虑的非线性并作适当的分析。目前，分析者必须承认非线性可能是重要的，激活非线性分析，提供完成分析可能需要的附加数据，通常还要在求解的各个阶段提供指导，因为可能要引用不同的非线性程序，需要智能化的选择。在非线性分析中，常用方程$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\}$的单步求解是不够的，因为$[\boldsymbol{K}]$和$\{\boldsymbol{R}\}$都是$\{\boldsymbol{D}\}$的函数。需要连续分析，其中$[\boldsymbol{K}]$和$\{\boldsymbol{R}\}$每次分析后都要进行修改。

在结构力学中，非线性通常分为材料非线性和几何非线性。这两种类型可能会组合出现，材料非线性包括屈服性。当存在弯曲时，屈服性在表面开始，再向弯曲中性轴方向扩展，并且应力沿厚度方向的分布不是线性的。因此，单元提供的正确抗弯曲列式必须体现合理的沿厚度方向的积分方案。一个几何非线性的例子，就是薄板圆盘，沿周边夹支，并受横向压力的作用。如果中心处的横向挠度超过厚度的一半，盘中会产生能承受相当一部分载荷的薄膜拉力[1.16,2.6,10.2]。为了使挠度加倍，载荷必须大于加倍值。由仅能承受弯曲变形的板单元建模的有限元模型，只能提供线性解，它将过高估计实际的挠度。接触非线性是几何非线性的一种，其中变形体被压在一起或一个缝隙可能张开或闭合。

在热传导问题中，诸如导热率等的材质属性可能完全与温度相关，需要做非线性分析。在

电磁场问题中，磁通量与磁场间或者电流与电场间可能是非线性的关系。在流体力学中，对流项与速度间也是非线性关系。在 FEA 中可能的非线性变化是如此之大，这使得单步求解过程无法计算所有的问题。在大多数非线性问题中，求解过程都是需要分析员参与指导的。

10.3 单元形状与相互联系

单元形状 那些能够很好描述几何形状的单元可能在 FEA 中的使用效果不好，因为它们不能很好地适用于分析的目的。当单元密集，又没有大的伸长、歪斜和翘曲时，由 FE 计算得到的结果就趋于准确。如图 10.3-1 中所示的那些畸变通常会降低精度。单元畸变降低精度的量值还由单元类型、网格划分和物理问题来决定。这些畸变的联合作用可能特别有害。畸变通常对于应力梯度场的降低远大于对位移、固有频率、模式形状或温度的影响，畸变更会降低例如应力场的梯度特性。畸变的平面和空间单元可能显示出恒定场或线性变化场，但不大可能表示出更复杂场的变化情况。如果那些单元除了角节点外还有边节点，那么它们对形状畸变的敏感性通常就比较弱。有一个或更多内部节点自由度的单元也不太敏感。6.11 节列出一些例子来在数值上说明这些影响。对于板问题的数值例子出现在参考文献[10.3]中。

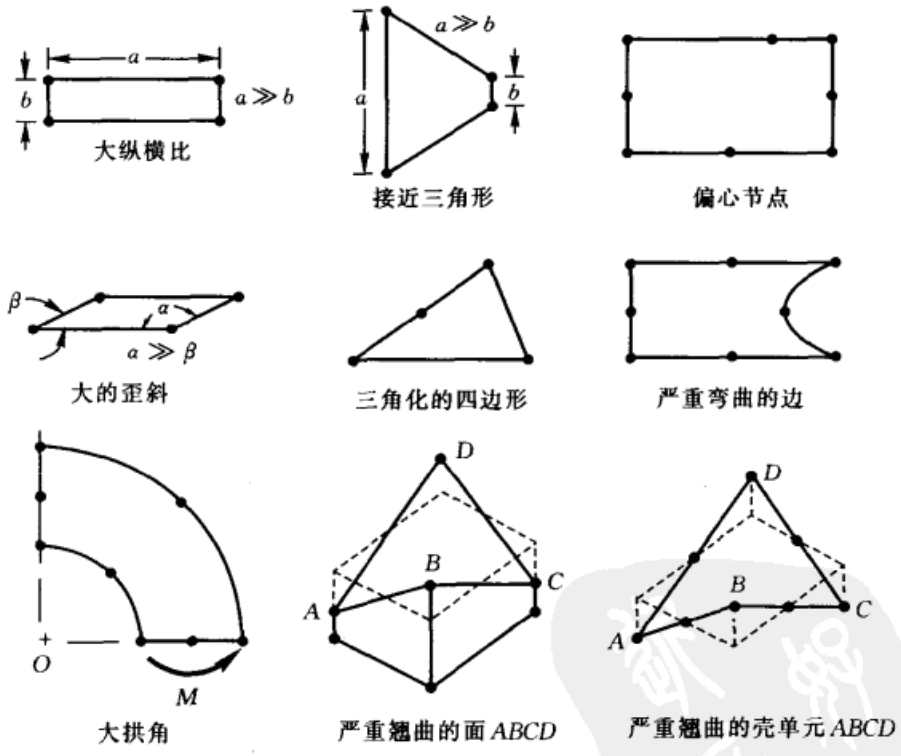


图 10.3-1 单元形状畸变通常降低精度

仔细考虑几何畸变有利于加深理解和谨慎从事。边界 1/4 处节点单元适用于断裂力学（见 8.7 节）。那些有边节点的单元比只有角节点的单元能更好地适应弯曲边界。在图 10.3-1 中，常用单个的二次单元来为承受弯矩 M 的 1/4 圆曲梁建模。通常使用跨度为 90°曲边的单元是不合适的，但对这一特定问题，计算所得的结果却是出乎意料的准确[10.3]。原因就在于等参变换引起了曲率中心 O 的奇异性。这正是由理论分析所预言的有无穷大应力的位置。然

而也要看到这个单元的曲边应是呈抛物线形状的，而不是所期望的圆弧形状。

在三维问题中，使表面或单元翘曲而不是变平可能会降低精度。翘曲对壳几何形状建模可能是必要的，但在壳较薄时可能会严重降低精度。另外，对回转壳建模时，壳体单元所跨的经线弧度对应的角一般不应超过 12°。对于普通的壳单元也有类似的建议。更特殊的数值建议不适合于所有单元的列式或是建模情况。

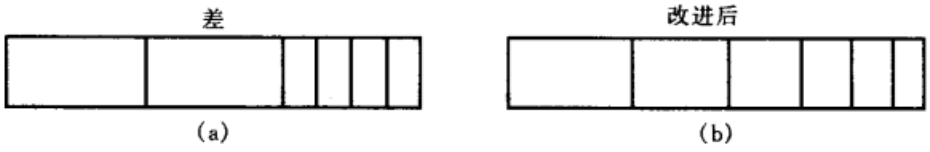


图 10.3－2　单元尺寸的变化

(a)太突然；(b)有很大改进

单元尺寸的突变应加以避免(图 10.3－2)。即使单元纵横比在“差”的排列中是满意的，单元尺寸突变的区域附近，梯度场也会出现扰动。单元类型的变化(比如由三角形单元到四边形单元)，单元尺寸的突变，单元形状的不协调以及单元连接的不合理(如图 10.3－3 所示)，这些都会对梯度场造成人为的干扰，并有可能作为物理现实被错误地接受。图 10.3－3 中所示的是二维情况的例子，在三维也有对应的情况。因此在梯度变化较大和精度要求较高的区域，应特别注意避免这种缺陷。用某种方法识别“看起来”很差的网格，并不需要很多经验，如果网格看起来很差，也许就有不足。

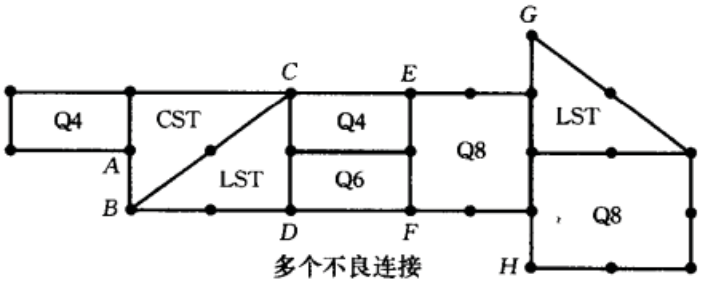


图 10.3－3　单元不良连接的示例

商用软件能对单元的形状和单元连接情况进行校验，并告诫用户需考虑的疑问和不可接受的情况(见 10.14 节)。当然，用户不能假设这些检测肯定就是对的。

图 10.3－4(a)描述了一个角的平面结构图。梁单元模型不能反映拐角处应力分布的细节情况。若这些情况比较重要，一种方法就是利用子结构来分析(见 10.10 节)。

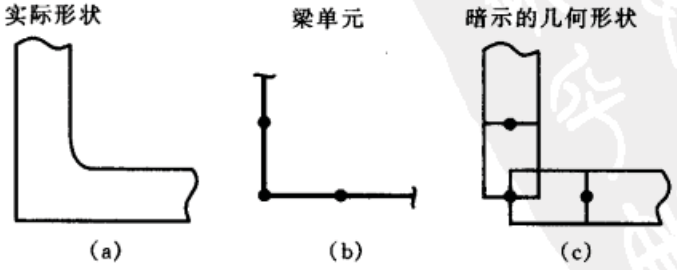


图 10.3－4　平面结构中一个拐角的建模

10.4 测试算例和探索研究

所有合适的单元都能通过分片试验(见 6.13 节)。此外,我们还想知道一些特殊单元在解决现实问题中的良好作用。我们想弄清楚,不管单元运用于什么样的问题,潜在的缺陷,比如锁定、对畸变的高敏感性、寄生模式或者甚至是不收敛性都不会存在。作用良好的单元我们称之为强健单元,意思是它们不仅能避开一些致命缺陷,还对与物理问题无关的小的变化也相对不敏感,比如单元的几何形状、载荷的作用方式(比如省去协调节点载荷的节点力矩分量)和泊松比 ν(在应当与泊松比 ν 无关的问题中)的变化。

FE 研究论文经常使用测试算例。在提出新的公式时,作者会引用其他作者用过的算例。这样就自然地出现了一系列的测试算例。但这些算例也会因没报道出不良结果而受到批评,也许是因为作者只修正了他们碰巧发现的问题,还没有测试那么多的不同条件[6.26]。

一个好的测试算例能考验单元用于建模的所有性能。1985 年提出了一组测试算例[6.26]。用不同的单元列式求解每个测试算例,每一个都适合于手头的问题(平面应力,或板的弯曲等)。就一个典型算例来说,FE 分析结果从坏到好取决于单元列式。从不同软件包提供的算例结果的比较中,我们发现表面相同的单元,比如 4 节点的平面四边形单元,由于基本列式的不同或者为了改善性能附加特性的选择不同,单元的行为也就不同了。

NAFEMS(FE 算法与标准国家办事处)着力建立一套合理的测试算例。该组织的目标包括制定 FE 标准和测试程序,协调 FE 软件的评定。NAFEMS 的大量算例叫做基准,并有如下的特点:每个使用单个单元类型;数据准备直截了当;几何、加载和边界条件明确;每个算例都有一个明确定义的结果值(如单个节点的偏移量,或一组振动频率),它们是用经典分析法或是从确实证明有道理的计算中得到的[10.4]。各种商用软件包可将其用于一个标准检查程序进行比较。这类的比较分析偶尔也会出现在 NAFEMS 的刊物中。

商用软件销售商保持着大量的测试算例。它们被用来鉴定新版软件的性能,确信它能够求解所有测试算例,至少能像先前版本一样地求解。筛选和确定用户报告的缺陷作为成果的一部分可以添加到新的算例中。用户可能希望考查销售商的测试算例手册,既是为理解单元的性能,也是为从中学习如何使用该软件。分片试验和各个单元测试,对学习使用软件也是很有用的。

作为一种回答有关单元性能问题的直接方法,分析员可以设计并运算一些较简单的测试算例,并探索诸如随着网格细分时的收敛率,单元形状畸变的影响,以及网格排列等问题。例如,考虑图 10.4-1 中所示的正方形区域。至于其具体的物理背景在此我们无需关注。前两种是网格细分系列中的一部分,从中可以确定收敛率。网格(c)显示网格(a)畸变的一些影响。网格(a),(d)和(e)每一种都有 8 个单元,并且每个单元都是等腰直角三角形,只是网格的排列不同。由网格(d)所得结果并不能反映出关于水平中心线和竖直中心线的对称性,即使物理问题需要。如果在该正方形边界上所有节点自由度都被约束,网格(e)中角上的四个单元就完全不能活动了,实际上把 FE 模型简化为比较小且方位不同的 4 单元正方形。

网格布局的相互作用和如何计算载荷矢量可能影响计算结果。可以想象图 10.4-1 中正方形受均布载荷作用,三角形上总作用力的 1/3 分配到它的每个节点上。那么,单元组集后,

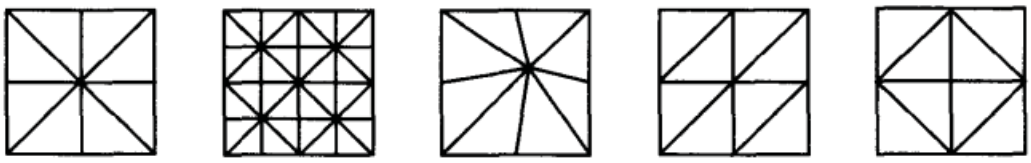


图 10.4-1 正方形区域内的粗网格。这些网格可用于研究收敛率、网格畸变和网格排列

图 10.4-1 中心节点上作用的净载荷为:(a)图中是 $8F/3$,(b)图中是 $6F/3$,(c)图中是 $4F/3$。

探索研究 探索研究是对某一较复杂问题的简要分析。用简化的模型或许还用有限的分析目标来完成。在全程分析中可能要测试软件所要求的能力。人们可以故意输入一些错误看软件是否能检测出它们[2.21]。探索研究的好处在于减小准备输入数据量,又能提供一个预见结构行为的方法,测试模型对连接处和边界条件的理想化,检测如输入数据单位不正确的疏忽,并洞察什么样的计算选择可能是合理的。输出检查较少,因此分析员能够很好规划全面分析要求什么样的输出,并能够回答富有意义的问题(比如,应力是在总体坐标系下还是在局部坐标系下,如果是后者,又是在怎样的局部坐标系下?)。探索研究特别适合于动态分析和非线性问题,在那里可能较难预知响应并且有许多计算选择。

强烈推荐把探索研究和简单测试算例作为回答关于建模问题的一种方法,或用来测试软件看它是否能按预想的那样运行。有时候软件会把人们引向它的研发者不期望的道路上,其满意的输出值得怀疑。探索研究能够测试软件的计算效率、精度和使用的难易程度。人们很可能看到一些与期望不一致,也许与文档描述不一致的性能。

10.5 材料属性

各向同性材料的数据比较容易获取而且也易于输入到软件中,而各向异性材料的数据获得和输入就比较困难了。例如,对于正交各向异性材料,在 x,y,z 三个主方向,考虑应力-应变-温度关系式

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= +\frac{1}{E_x}\sigma_x - \frac{\nu_{yx}}{E_y}\sigma_y - \frac{\nu_{zx}}{E_z}\sigma_z + \alpha_x T \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}} \\
\varepsilon_y &= -\frac{\nu_{xy}}{E_x}\sigma_x + \frac{1}{E_y}\sigma_y - \frac{\nu_{zy}}{E_z}\sigma_z + \alpha_y T \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G_{yz}} \\
\varepsilon_z &= -\frac{\nu_{xz}}{E_x}\sigma_x - \frac{\nu_{yz}}{E_y}\sigma_y + \frac{1}{E_z}\sigma_z + \alpha_z T \qquad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G_{zx}}
\end{aligned} \tag{10.5-1}$$

方程 10.5-1 中所有的材料常数并非都是相互独立的。由麦克斯韦(Maxwell)互逆定理可知该常数矩阵必定是个对称矩阵,因此,

$$E_x\nu_{yx} = E_y\nu_{xy} \qquad E_y\nu_{zy} = E_z\nu_{yz} \qquad E_z\nu_{xz} = E_x\nu_{zx} \tag{10.5-2}$$

因此,方程 10.5-1 中就包含九个独立的弹性常数和三个独立的热膨胀系数(假设热膨胀系数与温度无关)。一般情况各向异性材料有 21 个独立的弹性常数。要想获得所有需要的材料常

数，或者把它们表述为适当的输入数据，不发生混淆，并注意到在结构的不同部分会有不同方位的正交各向异性材料的主方向，可能是件不容易的事情。名义上的各向同性材料可能稍有非线性，而制成表时列出的参数是典型的平均值。由于成分的变化、制造方法和热处理的不同，材料属性可能都有明显的差异。

替代属性 起皱、凹底或穿孔等在结构中经常存在，这对刚度可能有大的影响。如果这样的几何干扰因素较多并有固定形式，那么可以"模糊"它们来提供一个没有这种几何干扰因素但是有着改进的弹性常数的替代结构。一个常见的例子就是在一块平板上钻有排列规律的圆孔。替代的弹性常数取决于孔的大小和孔间距，而不管孔的排列方式是正方形还是三角形以及实际材料的弹性系数[10.5]。当所需的材料属性没有在表中列出时，可以按现在用平面应力例子中描述的方法来计算[10.6,10.7]。

考虑开孔板的平面特性，如图 10.5－1 所示。从中分离出典型的可重复使用的一部分，如 $ABCDE$ 这一块，并用 FE 网格为其建模(图 10.5－1 中没有画出)。令 FE 模型有三种不同的位移状态，每种状态 $i(i=1,2,3)$ 在替代平板(它没有孔)中由与特定的常应变状态相关的自由度 $\{\boldsymbol{D}_i\}$ 来描述。下面，我们选用单位常应变状态。因此，在带孔的实际平板 FE 模型边界 $ABCDE$ 上，在 $\{\boldsymbol{D}_i\}$ 中所选自由度设定如下(对于对称和反对称的情况，可以参见 2.11 节)。

状态	应变	自由变	AB 边	BC 边	CD 边	DE 边
$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_1$	$\varepsilon_x=1$	$\{\boldsymbol{D}\}_1$	$v=0$	$u=0$	$v=0$	$u=a$
$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_2$	$\varepsilon_y=1$	$\{\boldsymbol{D}\}_2$	$v=0$	$u=0$	$v=b$	$u=0$
$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_3$	$\gamma_{xy}=1$	$\{\boldsymbol{D}\}_3$	$u=0$	$v=0$	$u=b$	$v=0$

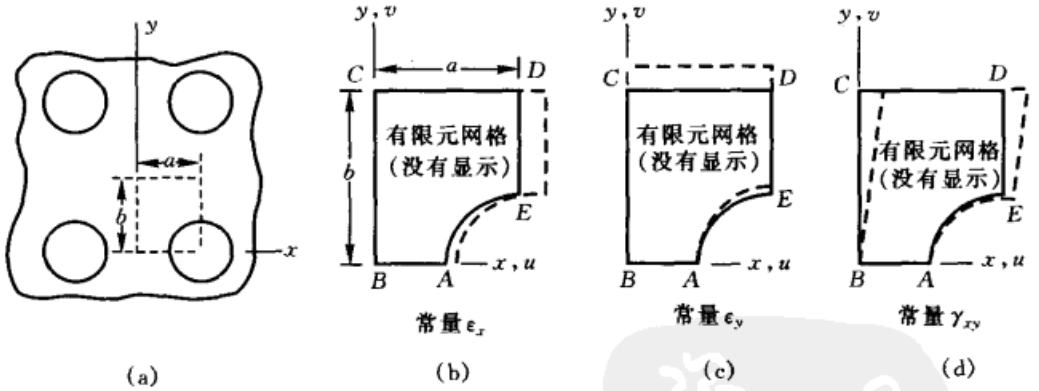


图 10.5－1 (a)板的一部分，其上的孔规则排列；
(b,c,d)典型的重复性几何图形，
显示在计算有效弹性性能时所使用的变形

对应于内部所有没有设定的自由度，不管是有限元网格内部的，还是在它的边界上，都没有被约束。我们求解三个有限元问题 $[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}_i=\{\boldsymbol{R}\}_i, i=1,2,3$，对于每个 $\{\boldsymbol{D}\}_i$ 中的自由度都不设定，而每个 $\{\boldsymbol{R}\}_i$ 中的节点力，都与设定的自由度有关。对于内部自由度和边界自由度没有设定，$\{\boldsymbol{R}\}_i$ 的节点力为零。因此，进入 $\{\boldsymbol{R}\}_i$ 的非零项是与设定自由度有关的外部作用边界力。对于 $i=1$，

$$\{\boldsymbol{R}\}_1 = [\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}_1 \tag{10.5-3}$$

当承受与实际板相同的边界位移时，在替代板（没有钻孔）中的节点力是

$$\{\boldsymbol{R}^*\}_1 = [\boldsymbol{K}^*]\{\boldsymbol{D}\}_1 \quad 或 \quad \{\boldsymbol{R}^*\}_1 = [\sum\int[\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{E}][\boldsymbol{B}]\mathrm{d}V]\{\boldsymbol{D}\}_1 \tag{10.5-4}$$

其中，$[\boldsymbol{K}^*]$是替代板的刚度矩阵，并在后面那个式子里是用单元刚度矩阵的和的形式来表示的。实际上，$[\boldsymbol{K}^*]$没有构建；这里$[\boldsymbol{K}^*]$和替代板离散化的引入，只是出于概念上的理解方便。而且在$[\boldsymbol{K}^*]\{\boldsymbol{D}\}_1$中，我们想象，$\{\boldsymbol{D}\}_1$中包括了一个 $a\times b$ 矩形替换板各边上的节点自由度。为了使实际板的刚度，作为多孔上的平均值，能与替代板的刚度一样，我们要求由$\{\boldsymbol{D}\}_1$所做的功在实际的和替代的板上相同。因此就有$\frac{1}{2}\{\boldsymbol{D}\}_1^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{R}\}_1 = \frac{1}{2}\{\boldsymbol{D}\}_1^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{R}^*\}_1$，又因为$[\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{D}\}_1 = \lfloor 1 \quad 0 \quad 0 \rfloor^{\mathrm{T}} \equiv \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_1$，由方程 10.5－4 可得

$$\{\boldsymbol{D}\}_1^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{R}\}_1 = \sum\int\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_1^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{E}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_1\mathrm{d}V = E_{11}V \tag{10.5-5}$$

由此可得 $E_{11} = \{\boldsymbol{D}\}_1^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{R}\}_1/V$，其中 V 是替代板的体积，在这个例子中就是 ab 乘以厚变 t。这样，我们得到替代板的 3×3 矩阵$[\boldsymbol{E}]$中的第一项。用类似方式，我们写出$\frac{1}{2}\{\boldsymbol{D}\}_2^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{R}\}_1 = \frac{1}{2}\{\boldsymbol{D}\}_2^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{R}^*\}_1$，并因为$\{\boldsymbol{D}\}_2^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}} = \lfloor 0 \quad 1 \quad 0 \rfloor^{\mathrm{T}} \equiv \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_2^{\mathrm{T}}$，由方程 10.5－4 可得：

$$\{\boldsymbol{D}\}_2^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{R}\}_1 = \sum\int\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_2^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{E}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_1\mathrm{d}V = E_{21}V \tag{10.5-6}$$

从中有 $E_{21} = \{\boldsymbol{D}\}_2^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{R}\}_1/V$。对剩余项做类似的处理，我们得到

$$[\boldsymbol{E}] = \frac{1}{V}\begin{Bmatrix}\{\boldsymbol{D}\}_1^{\mathrm{T}}\\ \{\boldsymbol{D}\}_2^{\mathrm{T}}\\ \{\boldsymbol{D}\}_3^{\mathrm{T}}\end{Bmatrix}[\{\boldsymbol{R}\}_1 \quad \{\boldsymbol{R}\}_2 \quad \{\boldsymbol{R}\}_3] \tag{10.5-7}$$

作为替代板的材料属性矩阵，它不受几何干扰。因为$[\boldsymbol{E}]$是对称的，在其它的三角阵按上述方法计算后，它的上或下三角阵就可依次填入了。

如果这些属性是相对极坐标或柱坐标而言的，也可作类似的论证[10.6]。弯曲刚度系数能用类似的方法，运用单位曲率状态和计算相关节点力矩来确定。

无效性能　在有些分析中，我们可能希望在满足一定条件的情况下除去结构中的一些单元；例如，结构的一部分消失了。真正要除去却是很棘手的，但用一个小的因子如 10^{-6} 乘以它们的模可有效地使单元失去活力。当然用这种办法失效的单元，再将其模乘以 10^6，又可以使这些单元恢复过来。或许这样可用来对固化过程建模，或者对一个附加层建模。当检测到用户设定的条件时，软件能够自动运用这些乘数。

10.6　载荷与支反力

根据梁、板以及实体结构的经典线性理论，在法向集中力 P 作用点处有：

- 载荷 P 横向作用于梁时，存在有限位移和有限应力。
- 载荷 P 横向作用于平板时，存在有限位移和无有限应力。
- 载荷 P 作用在 $2D$ 或 $3D$ 实体结构时，存在无限位移和无限应力。

这些表面上的矛盾结论源于数学模型方面的差别，它们在每一类问题中就应力场的性质加入了不同的前提条件。这些前提条件也加入到每一类问题的有限元中。因此，如果对作用力 P 附近区域网格无限细化，那么在板内的弯矩将连续增加，在实体内的位移和应力也将不断增加。当然，集中力载荷是为了方便而虚构的。任何实际的作用力都是分布于大于 0 的面积上的。在 FEA 中，可以构建与 P 等效的各种分布载荷(图 3.11－4)。

将一个集中载荷施加到一个设定位置上最简单的办法，就是调整 FE 网格分布，使该位置处有一个节点。集中力矩载荷不能施加到一个节点上，除非该节点含有适当的转动自由度。如果节点只有平移自由度，那么力矩就只能以力偶形式施加到一对节点上。在如热传导和流体流动等场问题中，类似于集中力的是源或者潭，类似于力矩的是偶极子。

如果轴对称条件占主导，看来似乎作用于实体或回转壳横截面内的集中载荷，有限元分析解释为节点圆上的线载荷。这种载荷，用单位力来表示，可能分布在一个径向切片上或者在整个周线上，这就要看软件所采用的形式了。在后面情况中，沿半径 r 的圆周上作用密度为 q 的均匀线载荷，表示成一大小为 $2\pi rq$ 的力。如果该载荷是径向作用，则它的合力静力等效为 0。

外载荷并不会增加 FE 模型的刚度。因此，如果连接部分由假想作用的载荷或载荷组替代，那么与连接部分相关的刚度也会丢失。

软件会将分布载荷转换为静力等效的节点载荷。如果单元有转动自由度——壳或板单元就是这种情况，等效节点载荷可能有也可能没有包括节点力矩(见 2.9 节)。我们可以运行合适的测试算例，也许利用单个的单元和把计算结果与理论值相比较，就能容易地发现该软件是否包含了节点力矩。

尽管支反力是计算量而不是输入量，但它们是可以视为载荷的。支反力出现在自由度受到约束的部位，即在一个固定支撑上。图 3.11－3(d)提醒了一个支反力有可能被误解的情况。如果实体单元边上有中间节点，那么在其 FE 模型某一表面上的均布载荷将与不同方向的节点力有关。因此，在一个角处的拉力并不一定能说明作用在该角上的均布面力也是拉力(见图 10.8－2 的相关讨论)。

线性问题中载荷在空间中始终保持其最初的作用方向，无论计算所得位移和转角的大小如何。当结构变形时相对于它仍能保持自身方位的载荷称为伴随作用力。比如作用于气球薄膜上的压力就是一个例子。静水压力总是沿薄膜表面的法线方向作用的。如果变形较大或者薄膜最初是平的并且实际上没有弯曲刚度时，这就需要进行非线性分析了。

在描述热应力分析中的温度时，必须知道软件是否用到节点温度或单元温度。当横跨单元间交界处的温度有梯度变化时，这种区分很重要，在紧缩配合模拟中就可能发生这种情况。用共用节点温度插值的相邻单元上的温度不能描述梯度变化。

10.7 结构的连接

大多数介绍应力分析的书籍和教材对结构连接的介绍比较少。然而连接又总是一个结构

的薄弱环节，并且它们的弹性或是非弹性性能可能对结构其它部分的性能有着重要影响。连接可能涉及复杂的几何形状、不同轴性、不同材料、预应力、接触的形成与中断、摩擦与滑动、塑性作用，以及由于弯曲、焊接和打孔对材料的损伤。一般情况下这些复杂因素都被忽略掉了或是做了很大的简化处理，除非以连接本身作为研究对象。简化主要是为了近似处理连接对结构其它部位的影响，这样可能只需研究用降低弹性模量的标准单元来表征连接构件。

当在设定的承受静载荷方向加载时，连接部位的刚度通常是最大的。动态位移可能在更易变形的方向上对连接部位加载。如果对这些较小刚度方向的情况了解不多，那么对它们建模就要仔细，否则就不可能很好地对结构动态特性建模[10.6]。

与连接有关的参考书包括在文献[10.8,10.9]中，与它们的数值分析相关的论文包含在文献[10.10～10.12]中。下面我们来讨论几个有关连接的简单例题。

错配 几乎没有例外，一个平面 FE 模型和一个轴对称 FE 模型之间的连接，在物理上是没有意义的，即使软件无抱怨地接受这种用户定义的连接。图 10.7－1(a)描述了这种连接，其中的平面网格想表征在一根管子处的一个散热片。如图所示的横截面，轴对称网格是二维的。而它的单元是环形的，出现的节点应是节圆。如果要求对输入数据特征进行轴对称分析，则预期的平面网格将用软件作为轴对称来处理。为了避免在轴对称分析中坐标轴的错配，我们必须知道哪个坐标方向是软件认为的对称轴方向。

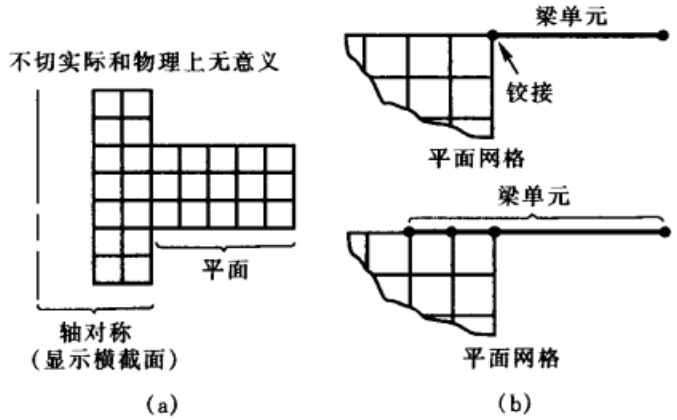


图 10.7－1 (a)平面和有限元轴对称模型不能连接；
(b)利用把梁伸展到平面网格内(下图)来避免铰链机构(上图)

几何轴对称结构对非轴对称载荷的响应，可以用载荷的傅里叶级数分量的叠加法来分析。推广这种方法，能够适应图 10.7－1(a)中描述的平面到空间的连接，但这种方法不简单，也不是标准 FE 软件的一部分。

如果含有转动自由度的单元连接到不含转动自由度的单元上，这些连接节点的作用就像一个铰链，它可能不是想要的铰链。图 10.7－1(b)描述的就是一个点的情况。这种铰链连接可以用下述方法来避免。可将梁向平面网格内延伸，如图示，或者可以如第 8.5 节中讨论的在自由度中施加一个约束关系。在这种连接处的邻近区域，其应力将是不真实的。这种方法同样可以用到轴对称问题中，因此在图 10.7－1(b)中，梁单元成为环形板的横截面，而平面网格成为像图 10.7－1(a)所示那样的轴对称实体的横截面了。

管道螺栓连接 如图 10.7－2 所示，管道的螺栓连接件除了螺栓外在几何上是轴对称的。

作为一种近似，可以“模糊”管接头圆盘上的螺栓。窍门就是用一个半径为 r_b，长为 L 的轴对称实体来代替螺栓，只是这个替代实体在轴向的刚度与螺栓一样，但在周向的刚度为 0（因为螺栓不具有周向连续性）。考虑轴向载荷作用于管道上。设在管接头圆盘上有 n 个螺栓，每个螺栓的弹性模量都为 E_b。所有螺栓一起的净轴向刚度为 $k_b=A_bE_b/L$，其中 $A_b=n(\pi d^2/4)$。替代实体的轴向刚度为 $k_s=A_sE_s/L$。由条件 $k_b=k_s$，可得 $A_sE_s=n(\pi d^2/4)E_b$。这个替代实体只与凸缘表面上的节点连接着，也就是说，连接到图 10.7-2(c)中节圆 AA 和 BB 上。这个替代实体可以是单个单元，实际中，输入数据可以将它描述为节点 A，B 间两节点杆单元。这种方法并没有违背无论有无对称性的实体间是不可连接的规则，因为我们只是应用数据与非轴对称单元的输入描述来得到所需的轴对称单元。

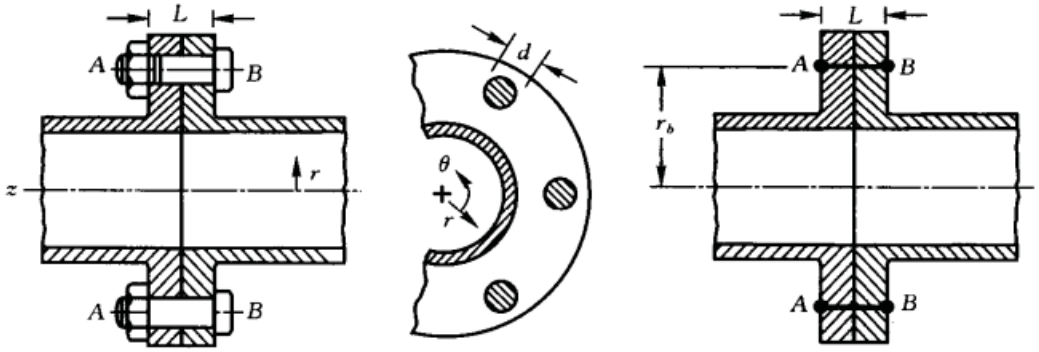


图 10.7-2 (a)管路螺栓连接，侧视图；(b)轴视图；
(c)作为一种近似，用轴对称连接线 AB 代替螺栓

由螺栓计算得到的轴向应变乘以实际的弹性模量 E_b，可得到螺栓的轴向应力。为了说明螺栓的弯曲，例如，由轴向载荷作用于管子上引起的，我们可以类似地模糊单个螺栓的弯曲刚度，而包含替代实体中的弯曲刚度，并且由单个螺栓的计算位移和横截面性质来复原其弯曲应力。

预应力 由多种已知的干扰因素产生的预应力可以由温度变化来模拟。举个简单的例子，可以想象一个圆环热胀套装在一个圆截面杆上。起初，当杆与环没有连接，并且在温度相同时，环的内径小，而且知道比杆的直径小的量。在物理上，紧缩配合能够用加热圆环，套于杆上，滑动到适当位置使它冷却来完成。为了分析，杆与环一起组成一个轴对称模型，起初是无应力的，并且温度是均匀的。然后使环部分独自冷却产生当环未套在杆上而自由收缩时所需的直径差值。要注意到对杆和环作为一个轴对称实体建模，禁止它们之间轴向滑动。

用温度变化 ΔT 的方法来模拟弹性结构中预应力值不是易于实现的。图 10.7-2 中，设 P 是来自所有螺栓组合所要求的已知预应力，那么单个螺栓中的预应力为 P/n。我们寻求螺栓中产生所需力的温度降 ΔT。当作用 ΔT 时，螺栓和凸缘必须有相同的收缩量。也就是说，设收缩为正，而 A_b 是螺栓横截面积的总和，

$$\alpha L\,\Delta T-\frac{PL}{A_bE_b}=\frac{PL}{A_fE_f} \tag{10.7-1}$$

其中 A_fE_f/L 是两个凸缘由螺栓连接在一起的刚度。要计算这个刚度，我们可以除去螺栓，而在两个凸缘边上施加轴对称夹紧力 F，计算两个凸缘表面的相对位移 δ_{AB}。因此

$$\text{从}\quad \frac{A_f E_f}{L} = \frac{F}{\delta_{AB}} \qquad \text{得到}\quad \delta_{AB} = \frac{FL}{A_f E_f} \tag{10.7-2}$$

既然 $A_f E_f / L$ 是已知的，由公式 10.7－1 即可得到所需的 ΔT。计算过程的细节可参见文献[10.13]。

因为管道凸缘比连接螺栓厚实，连接处的弹性刚度主要来自于凸缘。若在凸缘间加一个垫圈，螺栓的拉力有使凸缘彼此相对卷曲的趋势，螺栓弯曲，也许在加预应力时与垫圈局部脱离接触，并在受内压作用时会有进一步脱离。与载荷相关的接触面积使问题变为非线性[10.9,10.14]。如果凸缘连接没有用垫圈，由于几乎不可能获得理想的配合和防止滑动，即使大的螺栓拉力也不会产生与连续性材料提供的同样大的连接刚度。

胶合搭接　图 10.7－3 是一个胶合搭接结构。很简略的分析，如在初等课程中所作的应力分析，假设在粘结层的剪应力是均匀分布的。实际的剪应力分布有很大不同，参见文献[10.8]。特别注意到，在粘结层的末端有很大的“剥离应力”σ_y，这可能引发裂纹，并向连接中心部位扩展。与其它连接方式比较，粘结的优点就是几何形状比较简单，不过其行为并不简单。

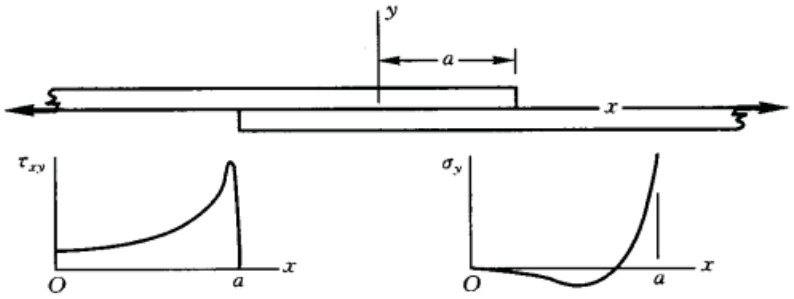


图 10.7－3　受拉的搭接结构。曲线定性表示胶合层右半部分的剪应力和正应力

错误组合　连接的过分简化有可能排除了增大连接部位和连接件应力的连接载荷。于是，如图 10.7－4 所示，其中的“较差模式”武断地将原本相邻的连接重叠起来，没有反映实际出现的弯矩。

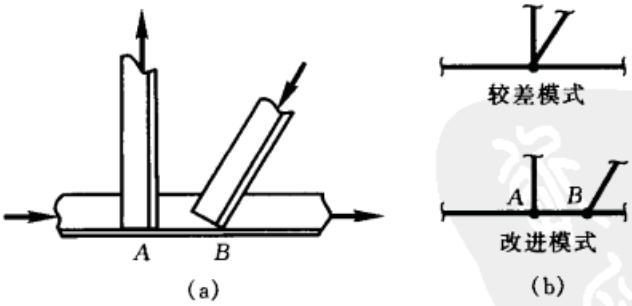


图 10.7－4　(a)用角型截面材料构建的平面刚架的一部分。构件在单个点上没有重合；(b)可能的二维连接模型。

分离　分离是指通常在单元相遇节点上共享的自由度被分开了。举个例子，设想图 10.7－4(b)中，结构的构件由梁单元来表示，但我们希望将节点 A 处的连接设置为铰链式连接。因此，我们可认为在 A 点处连接的单元有相同的平移自由度，但有独立的转动自由度。这可以

在单元组集前用凝聚单元矩阵中受影响的转动自由度来完成(见 6.7 节)。将单元矩阵中要凝聚的行和列都用零代替,这样,不需要的刚度系数就不会引入结构刚度矩阵了。然而,当有 n 个构件在一个铰链处汇合时,仅在 $n-1$ 个构件中必须凝聚转动自由度,以免结构节点的转动自由度完全没有归属而可能导致结构刚度矩阵出现奇异性[2.21,10.15]。

10.8 边界条件

边界条件,在结构力学中也叫做支撑条件,它们常在数学模型中被错误表示或作为数据输入到 FE 软件时出错。因为支撑条件的微小变化对计算结果可能有较大影响,所以要格外留心。例如,如果挠度较小并且如图 10.8-1(a)和 10.8-1(b)所示的梁都不是太短,其计算结果仅在端部截面不同位置出现的与支撑相关的局部应力上有所不同,但图 10.8-1(c)的支撑阻止梁沿底面伸长,在那附近作用的水平力影响整个梁的响应。如果这个 FE 模型是由标准的 2 节点梁单元沿梁的中心水平线排列组成,图 10.8-1(c)所示的物理行为能够用支撑点延伸到中心线上梁节点的刚性连接件来近似(见 8.5 节)。

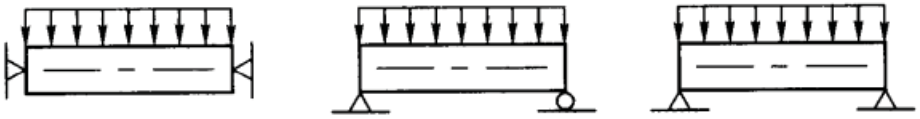


图 10.8-1 (a,b)简支梁的可能模型;(c)铰支梁

在现实问题中,边界条件不是很明显。可以看到,即使是一个简单问题,也能有许多的选择,存在许多的不确定性。考虑一个受均匀向下载荷作用的工作台顶面的应力分析。设该顶面是一块长方形板,在四个角下由垂直方向的棱柱形腿支撑。如果仅需对顶面进行分析,将四角处设为简支条件,将使模型过于柔韧,而将四角固支,又使结构过于刚化了。如果将四个腿也考虑进来一起建模,腿可以固定在地板上,可以被钉住,或者自由滑移。腿与台面间的连接可能是不严格的。有一条腿可能太短,或者地面高低不平。

如果物理问题不存在合理边界条件的明确选择,用两种分析来限定正确结果可能是可行的。比如,设想一根受均匀载荷的简支梁,其两端的转动角被弹性地限制为一个不确定的角度。有两种分析方法,一个是在简支情况下的,另一个是固支情况下的。这两种方法分别高估和低估中间点处弯矩的实际值。类似地,如果存在不确定量摩擦的滑移,可以把正确结果分析限制在无滑动和自由滑动之间。当然在一些问题中,对固定和摩擦情况放松条件,则会使模型不稳定。

有些支撑条件是由 FE 技术决定的,而不是由物理因素决定。一个约束,比如设定零位移或转角,应是出现在一个节点上,而不能在节点之间。(否则,必然涉及到 FE 模型边界上相邻节点相对自由度的约束条件。)另外,在 FE 模型中未激活的总体自由度必须要抵制住,无论它们是否在边界上。因此,对于一个建模在 xy 面内的平面结构,其自由度 w,θ_x 和 θ_y 就必须设为零,以防止结构刚度矩阵出现奇异性。当指明该问题是平面问题时,软件能够自动完成这些工作,但软件使用者还是应该确认之(不能仅凭猜测)。这个问题的一些细节在 2.6 节和 2.7

节已讨论过。对除 xy 方向之外其它方向自由度的约束可以由变换运算和刚性连接件来说明,(见图 8.4－1 和 8.5－4)。

用离散分布的弹簧来模拟均布的弹性基体是很不合适的(如图 10.8－2(a),(b))。若 AB 边有竖直向下的位移,应该形成与均匀压力相协调的节点力。若是这样,平面模型中均匀间距离散弹簧的刚度必须有图示的相对大小。如果用三维模型代替,平行基体的单元面既有角节点也有中间节点,那所需弹簧的刚度是出人意料的。就是说,如图 3.11－3(d)所示的,每个连在单元角点处的弹簧必须有负的刚度!可以想象,一个 FE 模型的[**K**]中将出现负的对角线系数。很明显,在这种基体模型中,出现混淆和错误几率很大。用协调列式是比较可靠的,如方程 8.8－2 所描述的。如果软件仅提供了与梁或板单元相关的协调列式,向平面或实体模型添加梁或板单元也是允许的。但对这些添加单元要用很小的模量(而它们会随之对基体带来合适的模量)。

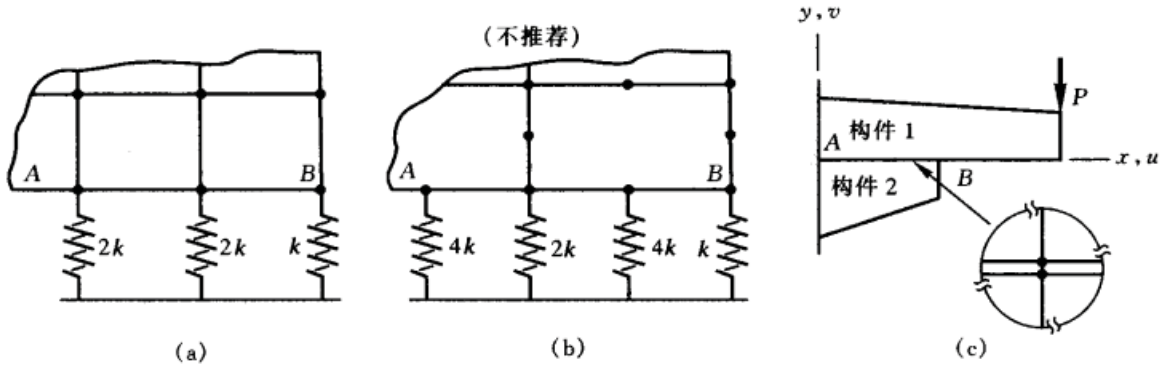


图 10.8－2　(a,b)试图模拟均匀弹性基的弹簧支撑;(c)沿 AB 带滑动接触的两个平面区域。插图显示 1 和 2 构件有限元模型中典型的相邻节点

在图 10.8－2(c)中,当施加作用力 P 时,沿 AB 的缝隙张开可能不明显。一项允许沿整个 AB 面滑移接触的试验研究可以解决这类问题。构件 1 和构件 2 之间 FE 网格的滑移接触,要求 AB 两边的相邻节点有相同的垂直方向位移,而不对其水平方向位移加以约束。这种约束方式在 8.5 节中有所介绍。对于图中的几何模型和载荷情况,计算结果将显示沿 AB 边的张应力 σ_y,由此表明接触仅出现在 B 点。另一种方法就是只在 B 点处施加滑移接触,而将 AB 两边相邻节点用很软的线性弹簧连接起来。通过计算,可以看到这些弹簧的拉力,这正表明有缝隙裂开。如果这些弹簧是足够软的话,那么它们对构件 1 和构件 2 的应力影响是可以忽略的。

或者在 FE 模型内部或者作为边界条件处理的一部分,添加一个很硬的弹簧,会引起数值误差。这个问题在 9.2 节有所讨论。特别地,看图 9.2－3(c),(d),那里添加了一个硬的弹簧以模拟斜滚支撑。这个硬弹簧也能用做一个特殊程序的一部分以施加指定的非零位移。例如,假设替换图 9.2－3(b)中的滚柱支撑,在 x' 方向施加设定的位移 D'_A。在图 9.2－3(c),(d)中,能够作用一个平行于有大刚度 k 的弹簧的力 kD'_A。由这个力看到的刚度是 k 加上一个来自比较脆弱的结构的小贡献。x' 方向的计算位移只稍比 D'_A 小一些。这种方法的危险性如同 9.2 节所说明的那样。

被软件理解的输入数据能很容易被检测。图形处理器可以通过表示约束方向和类型(位移或转动)的符号来描述出各个节点处的边界条件。应仔细检查这些显示的物理合理性和输入数据的差错。

10.9 重复对称性

当许多相同的区域以相同的方式连接在一起时，就存在重复对称性，以致形成一种可多次重复出现的模型。为了展显重复模型，在各个区域上的边界条件和作用载荷也必须相同。当各重复区域连成完整的一圈时，重复对称性也叫做循环对称性，或称为扇形对称、旋转周期性。可以举个例子，一个离心泵转子叶片就显示了循环对称性。这种循环的或重复的对称性的存在，允许整个装配的响应从单个重复区域的分析中得到[10.6]（问题规模的缩减也因用映射和斜对称性而变得可能，这在 2.11 节已有讨论）。

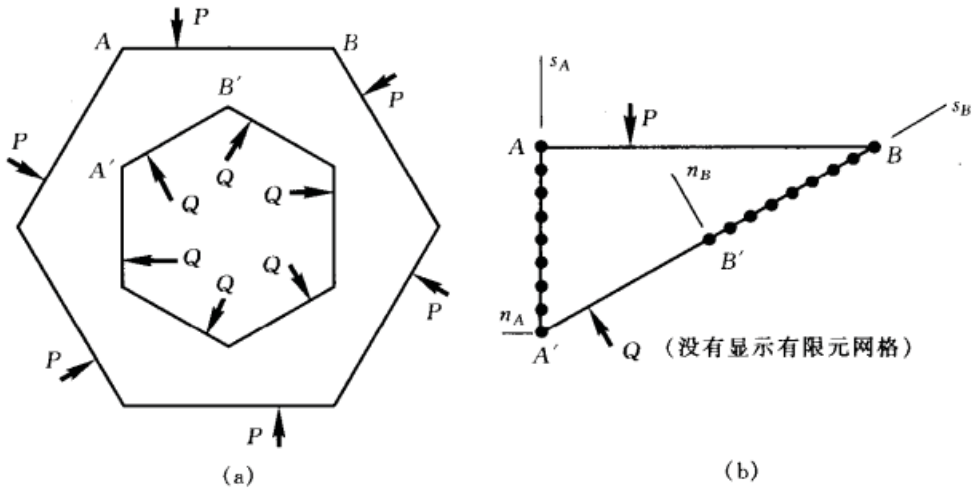


图 10.9-1 (a)显示循环对称的平面结构。载荷是 P 和 Q。未显示的支撑没有施加力；(b)典型的重复部分。网格没有显示，但在 AA' 和 BB' 处有显示的“连接”节点

图 10.9-1(a)中是一个循环对称性的例子。如图 10.9-1(b)所示，一个完整的解可用一个重复部分的分析来获得（可供分析部分的另一些选择也是可能的）。尽管用于分析的只是其中的一部分，但借助于沿 AA' 和 BB' 的“连接”自由度还是方便的。位于连接自由度这些线上的节点必须精确对应——包括数目、位置、类型和取向——因为沿 AA' 和 BB' 上节点的自由度为了有相同的位移必须受到约束。因此，在它们各自的 ns 坐标系，$n_A s_A$ 和 $n_B s_B$ 中，节点 A 和 B 有相同的位移 n 分量和位移 s 分量。类似地，其他相应的节点对也是如此。对于更一般的循环对称性情况可以应用类似的方法，在那儿，一般情况下，与连接自由度相关的节点在协调曲面上构成相应的节点对。

为了系统表述这类问题，我们要考虑一个重复结构部分，如图 10.9-1(b)中那样，我们称之为子结构。设 $[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\}$ 表示一子结构的 FE 模型，其中 $\{\boldsymbol{D}\}$ 包含了子结构的所有节点自由度。用分块形式，方程 $[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\}$ 可写成

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{II} & \boldsymbol{K}_{IA} & \boldsymbol{K}_{IB} \\ \boldsymbol{K}_{IA}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{K}_{AA} & \boldsymbol{K}_{AB} \\ \boldsymbol{K}_{IB}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{K}_{AB}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{K}_{BB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{D}_I \\ \boldsymbol{D}_A \\ \boldsymbol{D}_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{R}_I \\ \boldsymbol{R}_A \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{F}_A \\ \boldsymbol{F}_B \end{Bmatrix} \tag{10.9-1}$$

其中$\{\boldsymbol{D}_A\}$和$\{\boldsymbol{D}_B\}$分别包含边界交界面AA'和BB'上的节点自由度，而$\{\boldsymbol{D}_I\}$含有子结构中所有其余节点的自由度。交界面上载荷$\{\boldsymbol{F}_A\}$和$\{\boldsymbol{F}_B\}$是由于弹性变形产生的，并且是由邻接的其它子结构作用的。载荷$\{\boldsymbol{R}_I\}$和$\{\boldsymbol{R}_A\}$是所施加的载荷，它们可能由于旋转或外部作用力或不均匀(只对圆柱对称性而言)受热而引起。载荷$\{\boldsymbol{R}_B\}$是空项，因为施加载荷只能在一个交界面上出现。如果错误地置于两个交界面上，子结构将接受二倍于预期的载荷。对于图 10.9－1 所示的特殊例子，外力 P 和 Q 出现在$\{\boldsymbol{R}_I\}$中，而载荷向量$\{\boldsymbol{R}_A\}$为零。因为所有重复的子结构都是一样的，

$$\{\boldsymbol{D}_B\} = \{\boldsymbol{D}_A\} \qquad \text{和} \qquad \{\boldsymbol{F}_B\} = -\{\boldsymbol{F}_A\} \tag{10.9-2}$$

这里，假设沿 AA'和BB'的节点自由度和载荷向量都是在各自坐标系下的表达式，而不是在总体坐标系下的。应用第 8 章介绍的变换公式，可写成如下形式：

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{D}_I \\ \boldsymbol{D}_A \\ \boldsymbol{D}_B \end{Bmatrix} = [\boldsymbol{T}] \begin{Bmatrix} \boldsymbol{D}_I \\ \boldsymbol{D}_A \end{Bmatrix} \qquad \text{其中} \qquad [\boldsymbol{T}] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \tag{10.9-3}$$

这儿每个「$\boldsymbol{I}$」是单位阵，每个[$\boldsymbol{0}$]是零矩阵。运算$[\boldsymbol{T}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{K}][\boldsymbol{T}]$和$[\boldsymbol{T}]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{R}\}$，并运用于方程 10.9－1 的$[\boldsymbol{K}]$和$\{\boldsymbol{R}\}$，可得

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{II} & \boldsymbol{K}_{IA} + \boldsymbol{K}_{IB} \\ \boldsymbol{K}_{IA}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{K}_{IB}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{K}_{AA} + \boldsymbol{K}_{AB} + K_{AB}^{\mathrm{T}} + K_{BB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{D}_I \\ \boldsymbol{D}_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{R}_I \\ \boldsymbol{R}_A \end{Bmatrix} \tag{10.9-4}$$

其中$\{\boldsymbol{F}_A\}$和$\{\boldsymbol{F}_B\}$没有出现是因为式 10.9－2。对于节点自由度和应力的求解现在是按一般的方法进行的。

方程 10.9－4 在单元组集过程中会自动产生，这样就避免了方程 10.9－3 的变换。技巧是沿 AA'和BB'对相应节点的每一对指定相同的节点编号；比如，节点 A 和 B 两者都将给定相同的节点号(比如说)125。因此，方程 10.9－4 中看到的附加项会在子结构单元组集时自动生成。当然必须在单元矩阵列式中使用实际的节点坐标。

10.10 应力集中·子模型

应力集中 结构失效的一个常见原因是应力集中，它们源自以单个或组合形式出现的孔洞、内角、凹槽、裂纹，或者其它不规则几何形状中。FEA 不能很好地适应这些小细节的经济性建模，除非使用特殊单元。如果要将每个应力集中源用大量的小单元包围起来，那网格划分的过程将变得令人生厌，而且会使计算量大大增加。一个有吸引力的可选办法就是使用已制成表格的应力集中因子(SCF)，只需在不含应力集中源的 FE 模型的应力场中简单地应用 SCF 表格即可。因此，在图 10.3－4(a)中，根据已知内角半径找到对应的 SCF，再将法向弯曲应力 Mc/I 乘以 SCF，我们就能够确定角点处的弯矩 M。或者，在平面应力状态下的一个孤立圆孔的邻近区域，如果不存在孔时的平面主应力为 σ_1 和 σ_2。那么，SCF 表格数据显示，与孔边相切的最大及最小应力值为 $3\sigma_1 - \sigma_2$ 和 $3\sigma_2 - \sigma_1$。

如果得不到所需的 SCF 值，对于高度细化网格，有时候下面的方案可作为一种经济可行

的办法[10.17]。用粗的"局部"网格对几何不连续体建模，并计算其峰值应力。为了补偿网格粗略的影响，必须将峰值应力乘以一个比例因子 SF。要确定 SF，我们用同样的"局部"网格来求解一个结果已知的问题。SF 由峰值应力的精确值与在次级问题中的计算应力峰值的比值得出。这种方法能否成功，依赖于次级问题接近初级问题的程度以及分析者辨识它的能力。

作为一个例子，考虑图 10.10－1(a)中 E 点的应力。4 节点平面单元的网格很粗略。对于这种网格和所用载荷 P，E 点处的最大应力为－221(单位在这里没有关系)。在拉伸样条中嵌入了相同的局部网格，如图 10.10－1(b)，作为一个合适的次级模型，其 CSF 是已知的。对于所作用的载荷，由次级模型提供的 E 点处应力峰值为 130，这是由法向应力 $\sigma_{nom}=P/A_{net}$ 乘以已知的 CSF 因子得到的，而按照 FEA 模型 E 点的峰值应力为 92.8。所以，比例因子 SF＝130/92.8＝1.40。于是，在图 10.10－1(a)中 E 点的最终应力估算值应为－221(1.40)＝－310。若不用 SF，为了得到最终的估计值－310，图 10.10－1(a)中的 2×2 网格就必须细分为 8×8 网格才行。图 10.10－1(a)中由高度细密的网格提供的 E 点峰值应力是－337。

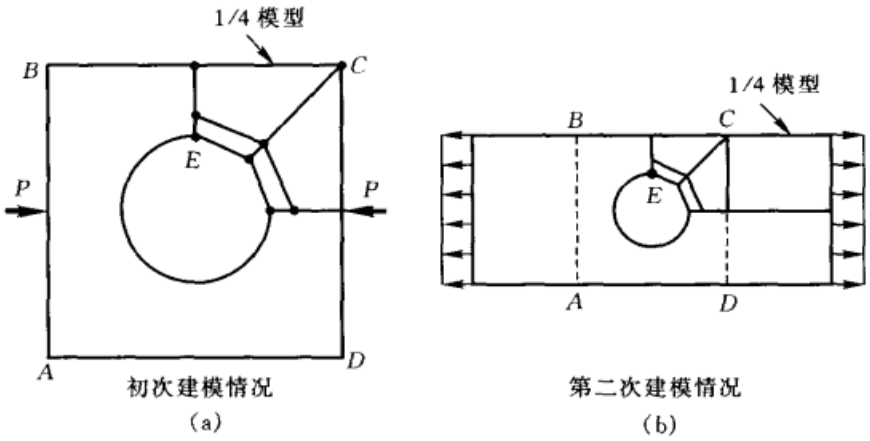


图 10.10－1 (a)带中心孔的平面正方形区域，受一对挤压力 P 的作用；(b)次级模型有局部类似的几何形状，其结果已知

子模型 当几何结构、材料属性、载荷或边界条件等因素使 SCF 无法应用，或者还需要求得除峰值应力以外的数值结果时，那就必须使用更多的单元或者使用改进的单元。然而，没有必要修正或重新分析整个 FE 模型。网格细化可严格限于局部。这种方法叫做*子模型建模法*或者是*整体-局部逼近法*。子模型建模法与子结构有共同之处(见 10.11 节)。这里，我们将介绍子模型的传统方法，并注意到它的缺陷。

作为例子，考虑一个带孔的板，如图 10.10－2(a)所示，其中只画出整个 FE 模型网格的一部分。我们假设，这样的网格太粗而无法在孔的边缘处提供精确应力，而要细化到足以合理提供出孔附近区域的精确应力值。图 10.10－2(b)所示是一种可能的子模型。子模型沿"分割边界"上的所有节点承受设定的位移。就现在这个例子，分割边界由线 BC，DA 和弧 CD 组成。强加给子模型的位移由粗网格得到。对于粗网格中不存在的分割边界上的子模型节点，位移必须由粗网格节点自由度插值获得。子模型可以反复细化，而又不会改变粗网格模型。

商用软件通常包括从粗网格模型自由度中获得子模型分割边界上自由度的程序。用算法程序获得这些自由度似乎比设计过渡网格使子模型与粗网格耦合的费时的替代方法更可取。对于邻接的独立的或不相似的网格，包括一些在分割边界上不要求有任何重合的节点，甚至沿

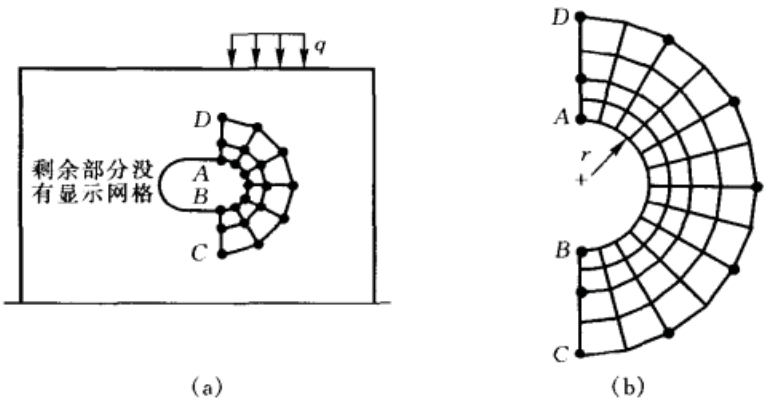


图 10.10－2　(a)带孔的平板，显示了粗网格平面有限元离散化的一部分；
(b)一个子模型。圆点表示分割边界上的节点，它们也出现在粗网格中

着它有好的几何匹配，建议用不同的算法。参考文献见[10.18～10.22]。

子模型法可以应用于图 10.3－4 所示的平面相交部位，并按图 10.10－3 中所示的方法来实现。平面单元与梁单元必须在 A 和 B 节点处连接。这可以用施加约束(见第 8.5 节)或将梁单元向平面单元网格内延伸(见图 10.7－1(b))的方法来实现。也可以为此设计一些特殊的过渡单元[10.23]。

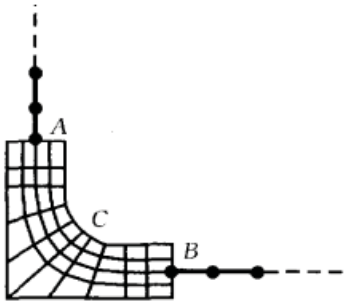


图 10.10－3　用于图 10.3－4(a)中角连接的子模型，使用平面单元和梁单元

在前面有关传统的子模型的讨论中，我们假设不管子模型提供的改进如何，粗网格模型不受影响；因此，它总能向子模型的分割边界提供相同的自由度。要使这个假设合理，粗网格就不能太粗，而且其分割边界必须与更仔细建模的局部干扰区有足够远。在图 10.10－2 中，“足够远”意味着沿分割边界上的自由度几乎与整个板的网格细化后所计算的自由度相一致。作为局部检查，沿分割边界的应力，用粗网格和子模型都能计算出来；如果作为局部检查应力差不多一样，我们就可以认为这种分割边界的取法是合理的。有时即使做了细致处理，子模型也会低估了峰值应力，因为该粗网格模型可能由于过于刚化而有误差，这就意味着对子模型施加的自由度估计不足。

10.11　子结构

一直以来，将不同网格耦合到一起的方法越来越可行[10.18～10.22]，子结构与子模型方法的

区别也越发不明显了。在下面的讨论中，我们将介绍一下，子模型是将一个改进的网格适时适地嵌入到一个已有的 FE 结构中，而子结构法则是把初始结构分割成一开始就计划好的若干部分，并作为处理大型有限元分析工程或者使分析适应有限的计算机资源的一种方法。对于 10.10 节描述的传统子模型建模方法，子模型行为并不影响粗网格模型。就子结构方法而言，各个分开的子结构相互作用。下面是一个用子结构方法进行的与时间无关的分析[10.24]。

1. 将 FE 模型分成 2 个或多个部分(子结构)。分割部分应选择互相联系较少的部段。因此，像我们将要看到的，缩减的子结构矩阵将不会很大。例如，在图 10.11－1(a)中，分割沿着阴影线，而不是沿机身或机翼纵向进行。

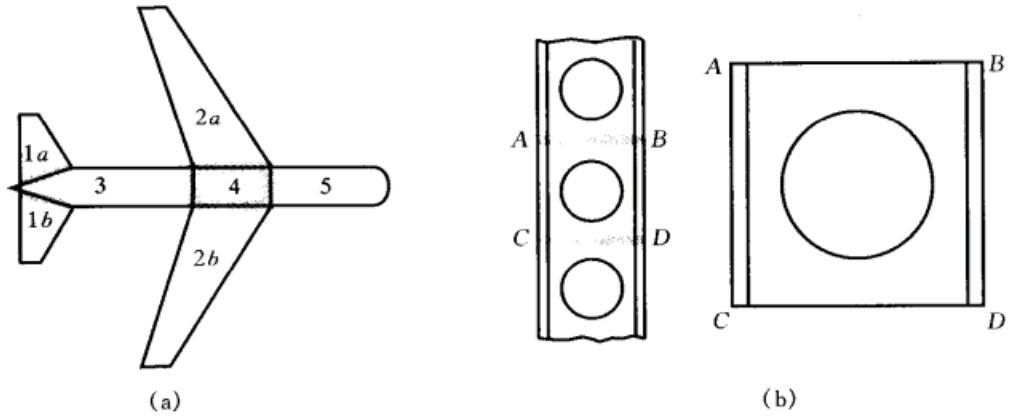


图 10.11－1 (a)假想飞机可能的子结构 1a，1b，…，5。(b)构造如城堡式的梁，带有典型的重复子结构 $ABCD$。子结构中的单元没有显示

2. 对于每个子结构，分别建立 FE 模型，并生成各自的总体方程$[\boldsymbol{K}_s]\{\boldsymbol{D}_s\}=\{\boldsymbol{R}_s\}$。求解各组方程，用高斯消元法表示，直到仅留下相互联系的节点的“连接”自由度$\{\boldsymbol{D}_a\}$。$\{\boldsymbol{D}_a\}$是$\{\boldsymbol{D}_s\}$的一个小子集。我们将各个子结构简化后的方程组记为$[\boldsymbol{K}_a]\{\boldsymbol{D}_a\}=\{\boldsymbol{R}_a\}$。
3. 将各个子结构的简化方程组组集到一起，得到总体方程组$[\boldsymbol{K}_A]\{\boldsymbol{D}_A\}=\{\boldsymbol{R}_A\}$，其中$\{\boldsymbol{D}_A\}$包含所有子结构的全部连接自由度$\{\boldsymbol{D}_a\}$。(这个方程组也可以由包含组集后总体结构所有节点自由度的总体方程$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\}$，运用消元法直到仅保留连接自由度$\{\boldsymbol{D}_A\}$来得到。)
4. 求解方程组$[\boldsymbol{K}_A]\{\boldsymbol{D}_A\}=\{\boldsymbol{R}_A\}$得到$\{\boldsymbol{D}_A\}$，这样，各子结构的连接自由度$\{\boldsymbol{D}_a\}$也就得到了。返回到在第二步中创建并且部分求解的子结构方程$[\boldsymbol{K}_s]\{\boldsymbol{D}_s\}=\{\boldsymbol{R}_s\}$：现在用回代法来求得$\{\boldsymbol{D}_s\}$中的其余自由度。最后，由后处理得到单元内的梯度量(比如应力)。

上面描述的过程是在组集前的静态凝聚过程，这在 6.7 节中已有所论述。因此，子结构可被视为碰巧具有大量内部自由度的单个单元。有时也用“超级单元”的名称来描述子结构。还有其它一些术语，如把连接自由度也称为“主”自由度，内部自由度也叫做“从”自由度。

前面的描述也意味着，要想让子结构间能相互连接起来，那么，在相邻子结构紧密配合的边界上的附加自由度必须在数目、位置、类型以及取向上都必须是匹配的。通过运用近年来发展的方法也可以将节点模式和单元类型沿着分界面都不匹配的子结构(或者连接情况未事先预料的整个结构)连接起来[10.18～10.22]。因此，子结构可以用来代替子模型，如果要细化的区域已事先计划，则最为方便。

如果 FE 模型含有许多几何形状相同的重复部件时(图 10.11－1(b))，子结构方法有独特

的优点。这时，相同的简化后的子结构刚度矩阵$[\boldsymbol{K}_a]$可运用到每个子结构。带有合理的总体节点数，相同数组$[\boldsymbol{K}_a]$的重复组集，可提供组集后子结构的刚度矩阵$[\boldsymbol{K}_A]$。

在与时间无关的分析中，子结构并不会给 FE 模型引入其它的近似处理。在动态分析中，有类似于子结构的方法称为分模型合成法，这种方法则会引入一些附加的近似处理。另外，在与时间无关的分析中，如果不能利用重复子结构优点，则子结构方法不能降低整个结构单次分析的计算量。事实上，由于涉及一些额外的记录事项，子结构法的工作量会更大一些。在实际应用中，一次分析就能满足要求是不大可能的，因为肯定还会有错误去改正，还要做一些改进。子结构方法对大型问题的优点表现在下面几个方面。

如果连接自由度$\{\boldsymbol{D}_A\}$受设计变化的影响不大，那么各个子结构的设计与分析就可以分开独立进行，并只需临时组集来更新$\{\boldsymbol{D}_A\}$。可以向不同的设计小组，实际上的分包者分派不同的子结构任务。因为不需对组集后的整个结构进行分析计算，各小组可以更迅速更容易地修改错误，必要时对子结构离散化进行改进，探讨可能发生的问题，修改子结构的设计。

非线性分析中需要迭代求解，若对整体结构分析计算，那就太费力了。如果只限于对单个的子结构作非线性分析，而将结构的其余部分简化为连接的子结构，那么每次迭代循环计算量将大大减少。

子结构方法提供了系统而有序的管理大型结构分析和设计的方法，这会生成大量的计算文件，特别是子结构本身嵌套子结构时更是如此。软件编码方式必须有助于用户簿记和数据管理。即使如此，用户仍应细心组织计划并注意保存好资料。

10.12 规划分析

为了规划 FE 分析，分析者必须很好地掌握问题的物理背景，了解单元的行为和局限性，并知道选择软件及其呈现的局限性。否则，问题就无法很好地定义，FE 模型可能难以抓住问题的重要特征，载荷与支撑条件可能施加不合理，以至所得结果可能出现较大的误差。预处理器可以生成表示几何形状的网格，但不适合分析要求，而后处理显示的结果很有吸引力，却隐藏了修改网格的需求。许多用户高估了自己的 FEA 技能，却不够严谨细致，作出的有限元分析缺点如此之多，还不如基于静力学和初等材料力学等工具所做的分析可靠。

胜任该问题领域的分析者应该规划其工作，范围可能从评估试验设计到分析现有设计失败的原因。无论如何，分析者可能都需要知道分析的目的，搜集什么样的信息和要求什么样的精度。这些知识会影响到假设的数目和类型，以及数学模型和 FE 模型中相关的简化。最好在开始就要意识到，考虑和规划肯定会随着方向的明确和对问题的深入了解而修改完善。规划一个 FE 工程，需要考虑下面几个问题。

理解问题 任何分析工作的主要的目标就是要在时间和人力合理消耗的情况下获得满足要求的答案。在初期工作中，分析者要研究哪些是已知的，哪些是想要弄清楚的，考虑简化假设，拟订大纲，并收集信息。熟悉计算机而对 FEA 还是新手的用户可能会匆匆对定义不当的问题寻求答案。“急于求成”所得到的结果往往是错的。FEA 分析的准备工作是枯燥的，但这可以为后面节省较多的时间，尤其是当所处理的问题比较复杂时更是如此。

关于物理属性的问题包括以下几个方面。与时间无关的分析是否合适？该问题是否涉及振

动或冲击载荷？如果与时间相关，阻尼能够忽略吗？如果不能，应该如何表示？当一个嵌入结构的位移与流体运动有相互作用时，涉及耦合场吗？如果材料属性与温度是有关的，或者是各向异性的，那材料属性数据是否容易获得？由于材料性能、间隙开合，或者由于有大的位移而使载荷的作用或传输方式发生变化，是否要考虑非线性？对这些问题的回答决定分析对象的性质。

在设计数学模型时，要力图去预测问题的物理行为。对所施加载荷的响应可能是三维的或许主要是平面的，而如果是平面的，可以分为平面应力或平面应变问题。一个轴对称的容器，可能是厚壁的也可能是薄壁的。这种区别是很重要的，因为这将影响到用来描述物理行为所采用的数学理论，以及实施该理论所选取的单元类型：平面单元不能描述三维行为；薄壳单元不能描述厚度方向上的应力。

还有更多的细节问题也会影响到数学模型以及离散化的性质。载荷情况涉及到集中的还是分布的载荷，或者是由于自重或绕轴旋转而产生的体载荷？载荷作用方向是固定不变还是随载荷增加而发生变化？是否能利用轴对称性？是否含有弹性支撑或者刚度不定的连接？是否含有断裂作为应力集中源，也许在尺度上小于网格尺寸？有关几何尺寸、载荷、边界条件以及材料属性数据的可靠性如何？

初步分析 在进入 FEA 分析计算之前，应定性或定量或最好从两个方面对一些计算结果都进行一下预测。初步分析可基于初等理论、手册中的公式、分析计算或者实验证明。在几乎所有的情况中，总能有一些办法得到近似答案来与由 FE 模型计算得到的结果相对比。即使是粗略的初步分析也能够发现在错误方向上计算的位移、在应力场或者温度场上的异常形式，或者计算结果在数量级上的误差。通常，异常的 FEA 输出结果主要来源于数据输入的差错而不是一系列的误解。

总有一种很自然的倾向去保护花费相当的努力才得到的结果，对于 FEA 所得的结果也是这样。出于这个原因，我们建议在 FEA 之前可用相对较小的工作量获得近似的结果。初步分析除了用于检验 FEA 所得结果外，还能够为改进 FE 模型提供有益参考，并且还能提高分析技巧。

从简单的 FE 模型开始然后改进 一个适用的 FE 模型可能是从一个系列的模型改进发展而来，每个模型都包含前一个模型结果提供的改进建议，直到最后一个模型包括足够的细节，并在合适的网格中包含了合适的单元。“模型序列”这个字眼可能使人联想大量的工作。然而序列可能不会很长而且一些模型可能会与其他的模型差别很小。连续的逼近树立了对最终结果的自信。总的来说，它比试图一开始就构建一个很详细的模型花的时间要少，由于对一些情况不能预见，因此在建模上一蹴而就是不充分或是不合适的。因为 FE 软件的应用越来越广泛，前处理和后处理有了改进，计算费用也在下降，在 FE 模型中使用越来越多的单元已是一种发展趋势。如果以此来替代理解是不明智的。

有限元建模的任何一组规则都可能有例外。这就是说，下列规则经常是有用的。包括 FE 模型中所有的结构；不要忽略在假设中受小应力或者对结构剩余部分不产生影响的那一部分。用来获得应力（或者振动的模态）的网格要比获得位移（或者振动的固有频率）更细密。用来进行热应力分析的网格比对同一个对象进行温度分析时更细密。如果问题涉及到非线性或者各向异性，应首先分析一个线性的或者各向同性版本的问题。如果存在动态效应，应首先用模拟主要动态载荷的载荷做一个静态分析。线性的和静态的分析比较容易实施和解释，并且有可能揭示有限元模型中影响非线性和动态分析的缺陷。线性分析也可能揭露局部屈曲，或者应

力是如此之大以至于塑性行为将会发展。目前，软件还不能自动决定一个屈曲或者弹性-塑性分析是否需要进行并继续处理它。它只能分析必须做出决定和激活需要分析的类型。

前述的建议自然涉及到 FE 模型和分析程序。小的细节比如圆角和油孔对总体的性能影响很小，有时候用应力集中因子来考虑，而不用细化的有限元分析。当网格细化或在感兴趣的区域和影响全局性能的局部按另一种方式修正时，很可能将细节添加到其后的模型中。有时候从"杆状模型"开始一个序列是可能的，杆状模型是由几个杆或者梁单元构建而成的模型。我们不想说初始的模型是粗糙的，仅仅想说它是比较简单的。序列中的一些模型，或许是后面的模型，可能会由自适应的网格划分产生，像 9.11 节描述的那样。分析者不应该确信自适应网格划分将总会正常地工作。如果是由于用户错误，在一个表示不同问题的模型上运算，很可能不能向问题预期的正确结果收敛。不能把一个杆状模型转化为一个平面模型或是把一个平面模型转化为一个立体模型，或者恢复最初丢弃的几何细节。为了能充分地对几何体建模，必须使用足够的单元。如果形状复杂，使用多单元但每个单元有较少节点比用高阶单元更为有利。对每单位计算费用，较简单的单元也可能提供比较好的精度。也有可能发生足够的几何表示产生了大量的自由度，尤其当模型是 3D 实体的时候。那些可能的区域，3D 实体模型应该是序列中的最终模型，因为它们的准备最繁琐而且对计算机资源的要求也最高。

检查模型和结果 妨碍执行的建模缺陷经常被软件的错误通报鉴别出来。产生不可靠结果的缺陷通常必须由分析者检测。必须仔细地检查计算结果。这些重要的问题将在 10.13 到 10.15 节讨论。

设计中的数值试验： 在改进设计中，人们很可能想知道一些设计变量的变化怎么影响感兴趣的量。比如，我们可能有一个降低高应力或者高温度的目标，而且有理由相信这个目标可以用一定厚度、一定材料属性和一定孔径的变化来实现。在确信有限元模型是令人满意的之后，可利用设计变量的不同数值进行分析(提供设计变量的变化不应大到模型不再合理)。通过对每个设计变量的改变进行分析，我们希望知道感兴趣的量对每个设计变量的变化和组合中产生变化的敏感度，以选择最好的值。计划这些数值实验和解释结果的工序是被叫做实验设计研究的一部分，这种方法已用于物理实验许多年了，目的在于从少量的试验中获得尽可能多的信息。许多参考资料可以利用；可查看文献[10.25]的介绍。也可以参见 10.16 节，它概述了设计过程的自动化。

10.13 常见错误

在本节中我们引用有限元建模中共性的错误和数据准备中的疏忽。10.14 节概括了对错误的更系统的研究。错误的修正要么很明显要么在其他地方讨论。

概括地说，建模中的错误多是由于对物理问题、单元性能、分析软件不熟悉和分析的局限性产生的。修正错误的失败是由与上面相同原因，以及忽视软件发出的警告信息和对计算结果检查不严格产生的。

如果一个一般的乘数比如单元厚度是零，那么一个单元矩阵[k]也是零阵。如果未指明，单元厚度可能缺省为单位 1，这由软件决定。当单元刚度矩阵生成时，如果在平面应变、轴对

称或者是3D实体问题中泊松比是0.5,那么将会发生除数为零的情况。下面的任何项都会引起总刚矩阵[**K**]出现奇异性或接近奇异性,其中许多可能是由数据输入错误产生的。

- 在共享一个节点的所有单元中材料属性如弹性模量为零。
- 一个或更多的结构节点没有连接到任何单元。
- 结构的一个或多个部分没有和其余部分连接。
- 边界条件未设定或不够充分。
- 不适当的连接可能产生寄生模式(机构)(如图10.7-1(b)中所示的铰链连接)。
- 在一个连接点设定了太多的分离。
- 有很大的刚度差异,如9.2节描述的。
- 部分结构发生屈服。(如果包括"应力刚化"和负的刚化使净刚度系数减到零或者更小,这种情况是可能的。)
- 在非线性分析中,支撑或者连接已经达到零刚度,以至于部分或所有结构不能被充分支撑。

这些错误的一些实例如下。一个结构独立网格化部分可能有重合的节点,但未通知软件重合节点被认为是相同的。而留下的这些节点没有连接。对于3D模型,很容易忘记六个刚体运动是可能的,因此忘记了提供合适的支撑条件。如果作为杆的一个结构件用几个首尾相连的杆单元建模(也许这完全没有意义),单元仅用平移自由度连接。像链条一样,那么,杆组集就是一个多次重复的过程。

如果软件报告[**K**]是奇异的,但原因却不明确,这可能有助于对它的最低振动模式进行模型分析(对于一个3D问题来说可能有六种模式)。振动分析不要求[**K**]是非奇异的。对于静态分析,由于约束不足有可能使任何模式具有零频率。这样一个模式的动画曲线可能会很快表明需要什么样的附加约束。

一个奇异的[**K**]通常会触发警告通报并挂起操作。如果执行停止,或者继续但是产生了奇异的结果,则很明显出现了错误而且有必要寻找产生的原因。偶然观察时是合理的,但实际上有严重缺陷,如果有导致这种结果的错误,情况更危险。这类错误包括如下几个方面:

- 单元有错误的类型;比如,本来应当用3D实体单元的地方却用了壳单元。
- 网格太粗糙了,或者单元的功能太局限了。
- 边界条件在位置、类型或方向上是错误的。(支撑可能太多或太少。它们可能施加完全的固支而不是铰链,或者可能是过度约束而不只是施加对称约束。)
- 载荷在位置、类型、方向或量值上是错误的。如果使用对称性,一个对称平面内的载荷可能没有被2除,或者一个跨越对称面的梁的刚度可能没有被2除。
- 小数点可能错误设置或者单位可能是混淆的。很容易提供一个带10的错误次幂数据项。角速度可能被提供为每秒弧度而不是每秒转数(或反之亦然),或者没有把英尺转换成英寸。
- 一个单元可能被定义了两次。重复可能被忽略因为它在网格显示中没有被看见。这个结果在FE模型中是一个"刚性斑点"。
- 单元连接可能太差(图10.3-3)或者毫无物理意义(图10.7-1(a))。
- 为轴对称分析提供的数据用 z 作为回转轴,而软件用的是 y 轴。

保存状态和工程进展的记录非常重要。文件应该用工程的名称、创建日期、修改日期、修

正的性质、分析员的姓名和所用软件的名称及版本来标识。信息资源、所做的假设、所进行的预先研究，处理的载荷状态和执行的检查情况的记录均应保存。小的但重要的容易被忘记的事项应该被记录。如果工作在中断之后必须重新开始，或者在完成之后的一段时间由某人检查，那么记录就变得非常重要了。没有记录就会造成混乱。用来准备模型的数据来自何处？记住 X、Y 和 Z 所作的变化没有？哪一个数据文件与哪个模型相对应？分析的标题行指的是当前的模型还是前一个模型？

10.14　检查模型

一个模型在计算之前应该经过检查，一可以确保成功率，二可以避免由于任务延缓带来的烦恼。一些检查在模型准备阶段用预处理的图形特征就可以做。一出现错误就定位和修正要比稍后做这些工作容易。错误可能出现在任何地方，甚至是很简单的数据。未探测出来的错误可能中止运行，或者导致奇异的结果，或者导致似是而非的但是错误的结果。

分析员检查　网格可根据描述所用单元的类型、划分网格的区域和区域所选部分要求的网格密度等输入数据自动生成。应该检查划分的网格，观察它是否“看上去是对的”；亦即，总体几何外形看上去是否正确，网格的密度是否合适以及单元形状有没有大的畸变。过度扭曲的单元有可能被软件标记出来，但软件检查的是个别的细节，而分析者则可研究总体情况。如果需要的话这个区域可以重新划分网格，或者改正其令人不满意的地方。好的细节如某些节点位置是重要的，应该检查数据的数值列表和图形显示。必须审查数值列表是为了核对梁的材料属性及横截面性能。

图形显示可以用画在其上的一个网格来提供多个结构几何图。一个部件分解图，或者一个单元个体尺寸被减少了约 20%的“缩比图”(图 10.14－1(b))，在单元丢失时，就会立即显示出来。对于 3D 模型来说网格的检测就变得很困难，但是附加图形的方法，包括通过 FE 模型的剖面、不同方向的视图、透视图和选择部分的放大，可以提供帮助。选择缩放比例是可能的，以至于仅仅一个小尺寸的细长模型就可以被放大。支撑条件通常用在每个支撑点表示方向和类型(位移或者旋转)的特殊符号来标识。载荷可以用类似的方式来显示。一个平面模型的边界能够图示。如果其中的一部分看起来像模型中的一个裂缝，那么一些节点是毗邻的或重合的但是没有连接，或许是有意的，或许不是。为了易于辨识，有可能用不同的颜色表示不同模量的区域，或者独立生成网格，这些网格为组集以某种方式连接。

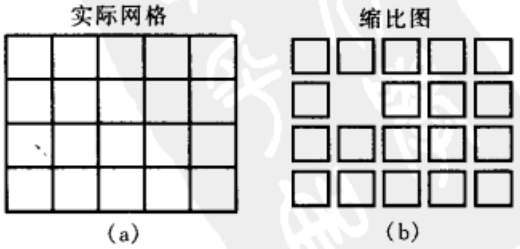


图 10.14－1　缩比图显示没有被定义的单元

用软件检查 商业软件可以自动做一些检查。特别地，把单元几何体与内部存储限定接受的数值极限作比较。图 10.3-1 标出了所示类型严重畸变的情况，典型地对每个单元分级为“通过”、“警告通过”或者“失败”。除了“通过”以外都发出了一个警告或是错误通报；“失败”也可能阻止执行。数值极限稍微有点任意。在一种情形下不能接受的在另一种情况下可能是可以接受的。然而所有的警告和错误通报都应该严肃地对待，当需要时要做相应的变化。软件能够检查的情况包括如下几个方面：

- 节点没有与任何单元连接。
- 节点靠得很近甚至是重合的但没有连在一起。这种情况不一定表示一个错误。对于大型的 3D 模型这种检查可能最为有用。一些预处理器可以自动地连接已发现紧靠在一起的节点。
- 单元共享一个节点但在该节点上没有使用同一组自由度。
- 角节点和边节点相连；也就是说，有一个“差的连接”如图 10.3-3 所示。
- 单元形状严重偏离理想情况，如图 10.3-1 所示。建议作单元几何形状的补充测试，有些可使用等参单元的雅可比[6.21,10.26-10.28]。也可参见 6.11 节。
- 没有提供载荷，或者没有提供边界条件，或没有提供材料属性。
- 执行之前，软件可以估计执行的时间和所需的存储空间。

自动检查不能揭露预期的问题是否已真的解释清楚、材料属性数据是否正确、单位是否一致、载荷和支撑是否定位适当，等等。分析者必须警惕这些情况。

一些单元几何形状的补充测试值得注意。单元应力平滑的方法提供的图形显示表明形状畸变的影响(9.9 节，文献[9.17])。已经建议做类似的测试将单元梯度与分片恢复(9.9 节)得到的结果相比较[10.29]。这个测试要求计算单元应力或者其它的梯度信息，因此不是一个先验测试。然而，它能够对基于实际执行的严重形状扭曲发出警告，在预处理器中的先验测试编码仅仅提供了基于单元形状的预测结果。

软件通常包括重启能力，以便执行可以在各个阶段被挂起，然后重新执行。在检测到错误的地方执行可以由软件挂起。分析员能够中止执行来研究出现的警告通报，来检查一个迭代解法的中间结果，或者备份文件。如果一个不曾预料到的载荷情况必须稍后研究，备份文件可能会节约时间，因为全部计算工作的绝大部分都在载荷矢量处理之前来进行。

10.15 计算结果评价

工程错误可能是代价昂贵的甚至是灾难性的，所以应该用尽可能多的合理方法来检查解答。单一的解法不应该相信。作为检查 FEA 结果的第一步，我们要问它们是否“看上去很陌生”。比如，我们问位移是否在未想到的位置、未预料到的方向上，或者出奇的小或大；支撑反力是否有未预料到的方向；应力扰动是否出现在未预料到的区域；是否热量好像从冷向热的方向流动，等等。预分析计划至少应该对这样一些检查提供定性预测。如果没有什么明显的错误，我们可着手进行更详细的定量检查，下面提出一些建议。如果怀疑有问题，我们必须寻求它的根源，一般是在有限元求解中，但也可能在初步分析或者问题的物理理解中。无论如何问题必须被识别出来并改正，工作要反复进行(参见图 1.5-3)。当认为目前的分析是满意的，

必须决定是否需要更进一步的分析，如果需要，应该考虑如何用当前的分析对它施加影响。

在把有限元结果与其它方法——包括近似求解、手册公式、替代软件、存在的相似结构，或者试验获得的结果比较中，必须确信产生不同结果的物理环境本质上是相同的。在 FE 和试验分析之间，例如，发现载荷、边界条件，甚至结构几何形状的差异是很平常的，尤其是如果分析员和试验员没有很好地沟通时更是如此。

在结构力学中，应该首先检查位移，曲线按比例画出以便于观看，最好是绘制动画，显示结构变形前后位形的振荡（典型的是，软件在节点之间仅画出直线，因此由梁单元假设的曲线形状显示不出来），人们应该看到位移与期望的边界条件一致；比如，位移与滚动支承相切，或者在一个固定边界上为零。间隙不应该“过近”；相邻的部分不能互相贯通。也可以画出所选择的位移或旋转的等值线。

在画出由温度产生的变形时，软件可能假设未变形的位移存在于零温度。分析员可能认为未变形的位移存在于指定的参考温度，而不需要是零温。如果遇到，可以选择零作为参考温度来避免这个障碍。

软件能够自动计算沿着每个坐标轴的支撑反力的总和，以及关于每个坐标轴的净力矩。如果发现支撑反力和力矩不平衡预想的载荷，载荷被错误施加的可能性比支反力被错误计算的可能性大。注意在求和中每个反力必须参照相同的坐标系，并且约束关系（如果用到的话）可能会引入假想的力。

回想线性解是基于平衡方程得到的，而平衡方程是相对于初始未变形的几何体列出的。图 10.15－1(b)中，一种物理可能的块体旋转要求弹簧中有张力。标准的线性分析在弹簧上提供了压缩力 $F=Ph/b$，忽略了最终的位形。对于小的旋转，$F=Ph/b$ 是一个满意的解。然而，如果夸大实际的位移结果，以便于在作图时看得见，则图 10.15－1(b)中的位移可能会使人误解。如果位移实际上是这么大，那么就需要非线性分析。

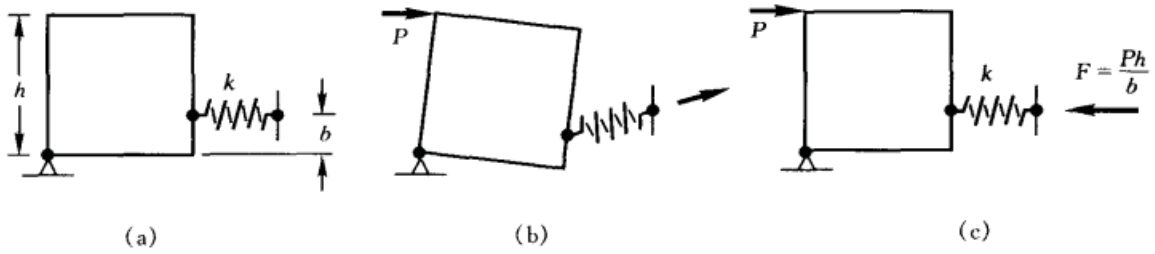


图 10.15－1　(a)由一个铰链和一个软弹簧支撑的块体；
(b)载荷 P 产生的可能几何位移；
(c)由线性分析计算的支反力 F

图 10.15－2(b)显示了一个类似的可能误导的图。一种完全可以接受的小挠度解，被按比例增加了一个很大的量。如图示，出现梁变长并且深度 h 朝着右端增加。近距离观察表明 A 点和 B 点维持它们的垂直距离而且梁中心线的水平跨度没有发生变化。分析员必须认识到图 10.15－2(b)不代表仅用非线性才能获得的大挠度解，而非线性中的方程求解必须基于变形后的位形。一个非线性迭代解法构建了变形后的位形和描述它的矩阵方程。

在传统的软件中，应力是从位移梯度计算出来的，这就意味着它们一般比计算位移的精度要低（参见 9.9 节的论述）。在任何情况下如果位移令人怀疑，则应力也不可信。在振动分析

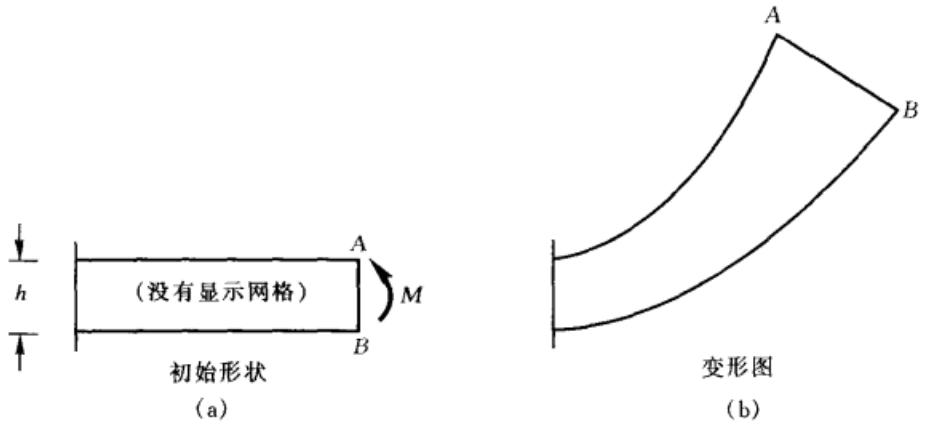


图 10.15-2 (a)受端部弯矩作用的悬臂梁；
(b)线性分析的变形，像用 FE 软件画出的一样，但作了很大夸张

中，如果怀疑振动频率，模态也不应该相信。在热传导分析中，如果怀疑温度，热流量也不应该被相信。

在检测应力或其它梯度之前，分析员必须明白它们是如何被软件表现出来的。它们是参照总体坐标还是局部坐标？如果是局部的，这些坐标轴是怎样指向的？应力合力(比如弯矩)被表现出来了吗？如果是这样，它们一定不能被误认成应力。应力在节点平均了吗？如果坐标系不匹配或者单元厚度或材料属性不连续(图 3.12-2)这就是错误的。在梁、板和壳单元中，可得到单元上、中、下表面的应力。在这些单元中，什么面是软件理解的上表面？壳体结构板元的给定表面，就结构面应力而言，很可能包含极易混淆的单元上、下表面(参见 15.1 节)。

关于计算和应力(或其它梯度)解释的备注出现在第 1.5，3.12，6.10 和 9.9 节。除了介绍非平均而不是待检查的平均等值线或区域外，这些备注在此不重复了。也要注意如果模型包含着一个对称的平面(FE 网格以及载荷、边界条件和材料属性)，即使网格非常粗糙，等值线在穿过对称平面时也是连续的。应力等值线是有相同应力值的点的轨迹，它不包含应力方向的信息。方向的信息包含在应力迹线(相切于主应力方向)上，它可用箭头画出，每个箭头的长度与箭头尾端处主应力的大小成正比。在热传导问题中，类似的箭头表示热流量。应力和其它梯度可以在用户自定义的 3D 模型的横截面上观察到。软件能够报告超过用户定义的允许应力是多少和在什么位置。更专业的软件可以报告模型和计算结果是否满足特殊产业代码需求。

精确应力场的一些特征如下所述。在仅有正压力 p 作用的边界上，其中一个主应力应该为负 p(或者对于无载荷作用的边界一般情形为零)。主应力的轨线应该垂直或相切于这样的边界。在轴对称问题中，径向和周向的应力应该在回转轴上相等。这些条件中没有一个有可能完全满足。不完全的量值象征着 FE 模型中离散化误差的量值。

当错误最有可能出现而某些假设在问题中仍然可能适用时，对于程序中最初的模型用所描述的方式检查结果可能是最有用的。检查也提供了关于如何改进模型的切入点。梯度等值线单元间的不连续性是一个向导。等值线的闭合性是另一个向导。当一个单元跨越几个等值线时细分通常是合理的。可能的分析范围将不得不修正。如果像无屈曲、无间隙闭合，或无塑性作用的初始假设与位移和应力的计算值不一致，就可能发生上述的情况。

10.16　优化设计

最优化设计可以定义为重量或者成本最小的设计。最优化的其它定义也是允许的。为了实现最优化设计，设计变量，比如它的部件尺寸可以是变化的，但带有约束条件，即不能超过允许的位移和允许的应力。一个最优化值要通过分析一个试设计，做有益的改进，再分析，重复这个循环直到收敛才能得到。这个反复过程可自动进行，相关的条款出现在一些软件中。

更详细的论述，优化设计的目标是用选择设计变量的合适值来使目标函数最小化。目标函数可能是重量，某个频率，或者其它任何可以用软件计算的量。为了成本最小，设计者必须根据设计变量为优化提供一个公式。如果希望的话，可以使一个量最大化；在这种情况下我们可以使它的负值最小化。设计变量能够包括横截面积、薄板的厚度和主曲率半径。为了减少计算机的费用和避免收敛于一个局部最小值而不是总体最小值，设计变量的总数大体上应小于 15。比如，厚度可能用一个单独的设计变量而不是用允许厚度连续变化的几个参数来表示。寻求的最小值是在采取的设计变量中变化所允许的最小值。目标函数通常服从于约束条件，比如几个区域上位移或应力的限制，和设计变量上的限制（比如最小的允许厚度）。许多优化算法已经被设计出来，对此有兴趣的读者可以找到许多相关的书籍和论文。

相关的最优化设计是满应力设计，它定义为每个构件至少在一种载荷作用条件下达到其允许应力值。一个满应力设计没有必要是一个最小的重量设计；实际上，没有目标函数被调用。然而，一个满应力设计能够比一个最优化设计计算得更快，而且对于结构优化来说是一个好的开端。满应力设计的过程是反复的，而且可以自动进行。

10.17　软件

一些商业软件包为输入准备和输出检查提供了灵活、方便的手段，应当在使用中细心选择。学会并灵巧使用大型软件包需要时间，但不要投入精力和财力去改变它，除非发现软件有不可接受的缺点。这里我们不打算鉴定和比较其功能不断改进的通用程序[2,20,10,30]，而是提出一些大家在软件使用中一直关注的问题。

开发和文件编制　程序由研究员、学生和软件商编写（因不同原因）。分析者一般不编写程序。编程成本包括计划、编码、测试和文件生成。包括花费在所有这些任务上的时间，研究表明程序员平均每个月仅能写出 200 行的代码[10,31]。在另外一项涉及若干程序员的研究中，编写代码的速度最快与最慢的比例为 25 ∶ 1，而且在生产力和经验之间没有对应关系[10,32]。这类轶事令室内编程人员感到气馁。

大型的商用分析软件包可能包含超过 150 000 行的代码而且可能代表着对研发、维护和支持的数千万美元的投资。新的分析软件包很少出现。不仅是因为成本高，而且因为工程软件与其它类型软件相比买家更少。一个软件商要进入用户对其软件信任的市场需要工作好几年时间。抵制变化可能是有理由的。如果有一点把握软件商都会保持它的业务，提供几年的维护和支持，获得新软件并学会正确使用它的花费可能难于被批准。

大多数 FE 软件的语言是 Fortran。不仅因为 Fortran 编码已经有很大的投资，而且它保持强大的功能，便于携带，并在继续改进[10.33]。

文件通常以书面和交互式的下拉式菜单来提供。它能够由熟悉代码的研发人员来编写，但需要它的是在这方面有较少专业知识的用户，他们经常会迷惑并提出文件编写者预想不到的问题。文件的编写可能被看作是一项令人厌烦的劳动，这项工作可能要延续直至软件测试好或者完成。最好把文件和软件的组合看作系统试验[10.34]。决定哪个软件系统需要购买的过程应该包括在文件的研究中。

软件的选择 选择一个软件商的过程中，公司可能会从工程科学的月刊广告中编辑候选列表并与其它公司的同事交谈。通过放弃那些不符合特殊需求的产品来缩短列表。测试保留在列表上的软件来检查它是否满足所提的要求和是否能解决公司日常的问题。与目前使用的 CAD 系统的兼容性可能会很重要。首个测试的软件包可能给人印象最深：如果它很复杂，其它的似乎就不那么深奥；如果它比较容易使用，其它的好像就太困难了。

当在软件中检测出来错误，而且继续改正、升级和扩充时，主要的软件商要通报用户。为用户提供支持，以至于在单元练习、选择、组合程序中遇到开发者没有预想到的困难时，做电话回答。主要的软件商也要定期发送业务通讯，提供培训课程，召开用户会议。软件选择的咨询是丰富的；参考文献包括在[2.20，10.34～10.37]中。参考文献[10.37]也包含了广泛讨论建模、前处理和后处理、CAD 集成等方面的内容。

10.18 结论

甚至到现在，FEA 开始在工业中使用许多年后，它的最一般性的使用可能就是证明一个已经完成的设计或者研究一个失败的设计[10.25，10.38]。这至少部分地是由于有限元分析工程需要花费时间。用户说即使用自动网格划分，准备输入数据花费的时间也太长。在一项研究中，FEA 工程需要的时间平均为 15 人工作日，对中等工程是 5 人工作日，以致于 FEA 可能延迟工程而不是加速它们，并且可能在设计的初始阶段就不使用，而此处也许它的能力是最有帮助的。尽管增加 FEA 的使用，样机失败的比例好像未受影响[10.38]。

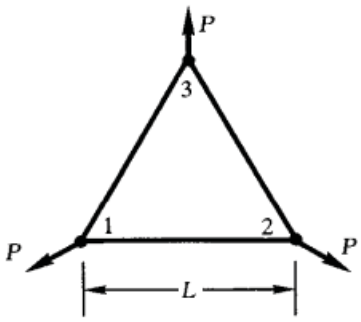
易于使用和用于自适应网格划分的软件可能会得到更多的 FEA 生产性应用。功能更强的软件也可使能力较弱的用户获得计算结果容易些，无论建模是不是描述预期的问题，当然，无论预期的课题是否提出了应该提的问题。软件的提供者对于使用中做出的决策没有责任，即使软件包含有严重的错误。工程师和分析员建立数学模型，选择软件和算法，检查结果并解释它们，而记录的工程师对所有的工作承担责任[10.39]。不管有限元分析的功能多么强大和获得结果中作了多大的努力，保持警惕和客观仍然是必要的。我们再一次劝告分析员理解物理问题，提前计划，仔细检查，按照需要修改，并弄清楚有限元是如何运作的。

分析题

10.9－1 图示一个 3 节点的刚架承受径向载荷 P。它所有的杆是一样的而且每个都有着 $k=AE/L$ 的轴向刚度。用循环对称法来确定典型节点的径向位移。用初等方法检

查结果。

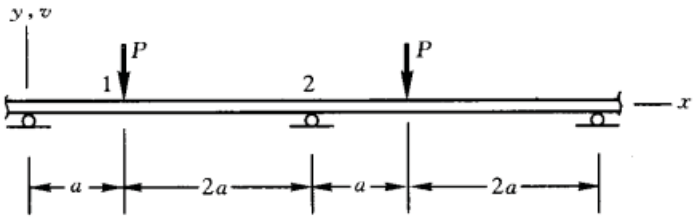
提示：在节点 1 和 2 写出按径向位移运算的刚度矩阵，然后使它们相等。



题 10.9－1

10.9－2　一长的均匀梁以重复模式支撑和受载，如图示。用循环对称法确定横向位移 v_1 和用 P,a,E 和 I 表示的节点 1 和 2 处的平面转角 θ_1 和 θ_2。用初等方法检查结果。

提示：在支点间一个典型跨度内写出按节点自由度运算的结构刚度矩阵，然后使跨度端点处的转角相等。

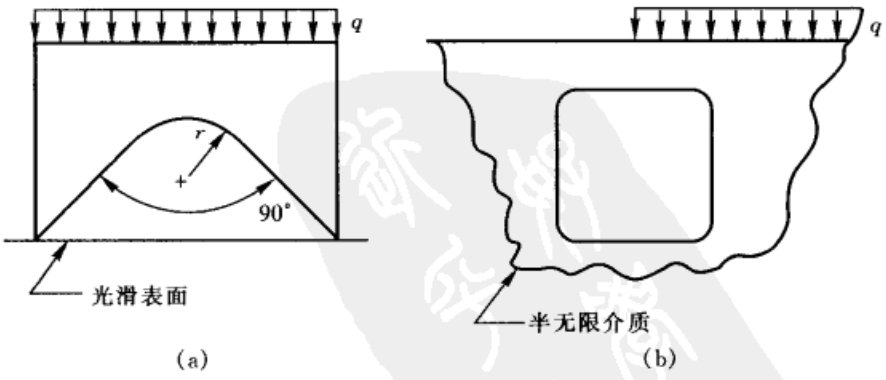


题 10.9－2

计算题

C10.1　均匀压力作用在 20 节点正六面块体的一个面上，在与其相对的面上有离散弹簧支撑在节点上。支撑方式如图 10.8－2 所示，以便模拟均匀的地基压力(也见图 3.11－3(d))。可否计算单元中的均匀应力？如果(a)使单元的刚性远大于地基和(b)使地基的刚性远大于单元，在这种情况下，会发生什么？解释所得到的结果。

C10.2　对于图示两个平面结构的每一个，用粗网格和关于图 10.10－1 建议的方法确定值最大的主应力。选择近似保持图示比例的尺寸，然后按需要细化网格。评估结果满足要求的程度。



题 C10.2

第 11 章

结构动力学和振动中的有限元

在有限元范围内讨论与时间相关的结构问题的列式和解法。描述表示质量和阻尼的可供选择的方法。对结构动力学问题进行了归类。考虑了实际的求解方法，并提出建模的建议。

11.1 引言

如果载荷是随时间变化的，结构的响应就是与时间相关的。然而，如果载荷是循环的，而且其频率大致小于结构最低的固有频率的 1/4，动力学响应就比静态响应稍大一点（对于单自由度弹簧质量系统仅仅只大 7%）。于是这个问题就可以归为准静态过程，而且可以用前面讨论的方法来分析。如果载荷是高频率的或是突然加载，则需要进行动力学分析。动力学分析用和静态分析一样的刚度矩阵，但还需要质量和阻尼矩阵。对于一个给定大小的载荷，动力学响应可能比静态响应大或小。如果是循环载荷，而且频率和结构的固有频率较为接近，它就会比静态响应大得多。在动力学分析中经常提到如下一些问题。

- 振动的固有频率和它们的振型是什么？为了使用动力学响应分析的某些方法，必须知道频率和振型。在应用中，可能寻找一个固有频率能与载荷频率良好隔离的设计。为了计算频率和振型，我们需要解决一个特征值问题，即一个在屈曲分析中出现过的代数形式。在这章中，简要讨论了振动特征值问题。在附录 C 中将进行更全面的讨论。
- 对谐波载荷的响应是什么？谐波载荷随时间呈正弦或余弦函数变化，回转机械会施加给结构这种载荷。在谐波分析中，忽略对加载初期的瞬变响应。相反我们寻找稳定状态响应（这里，稳定状态是指响应在相同的时间间隔内重复出现）。谐波响应的计算方法用到振动频率和振型。
- 对于非周期或突然加载的载荷的时变响应是什么？这里我们寻找瞬变响应，它被称之为“响应历程”（也有个奇妙的称谓“时间史”）。求解需要对运动的微分方程在时域上积

分。如果加载仅激励少数几个最低频率，响应计算的时间跨度必须等于最长振动周期的好几倍，就像在地震加载的情形，或者振型叠加法或隐式直接积分法可能是合适的。如果加载激励许多频率，则必须在与最长周期差不多的时间跨度内计算响应，就像冲击加载一样，显式直接积分法可能是适宜的。

- 什么是对非周期或突然加载的最大响应？这个问题可以通过*响应谱分析*来回答。它利用结构的振动频率和振型，以及承受给定时变载荷谱的单自由度弹簧质量系统的响应历程。这个方法是近似的，但是可以用作计算自由度结构响应历程的经济替代方法。

回答前面的这些问题需要知道载荷是时间的函数。当加载具有随机性时，需要另外的分析工具，这超出了本书的范围。

结构动力学有多方面的文献和许多教科书，例如文献[11.1～11.3]。计算方法很大程度上独立于 FEA，因为这些方法假定刚度、质量和阻尼矩阵是可用的，但是不需要求它们产生于有限元的离散。实际上，在有限元分析之前，当有限差分离散成为一类可选择的数值方法的时候，就已经创建了目前仍在使用的许多方法。现在的分析方法经改进后更适合于有限元模型。除了计算频率和响应历程的方法，为了减少计算量，也出现了减少自由度的算法。在这章中讨论的分析方法在有限元软件中是很普通的。

11.2　动力学方程·质量和阻尼矩阵

单自由度系统　图 11.2-1 中的每个系统只有一个质量 m，一个刚度为 k 的线性弹簧，和一个黏性阻尼器。用传统的阻尼符号表示的黏性阻尼器提供了与变形率成比例的阻力。运动由单自由度 $u=u(t)$ 来描述，而且遵循一维运动的牛顿第二定律 $f=ma$。用传统符号，速度是 $\dot{u}=\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$，加速度 $a=\ddot{u}=\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}t^2$。于是，在图 11.2-1(a)中，

$$f=ma \quad \text{变成} \quad r-ku-c\dot{u}=m\ddot{u} \quad \text{或} \quad m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=r \qquad (11.2-1)$$

式中 $r=r(t)$ 是已知随时间以某种形式变化的外部载荷。动态载荷 r 也被称做*强迫函数*、*激励*，或*外载荷*。弹簧力 ku 称之为*内力*。

在图 11.2-1(b)中，力 r 被除去，而且图 11.2-1(a)中的固定支承现在是给出指定的运

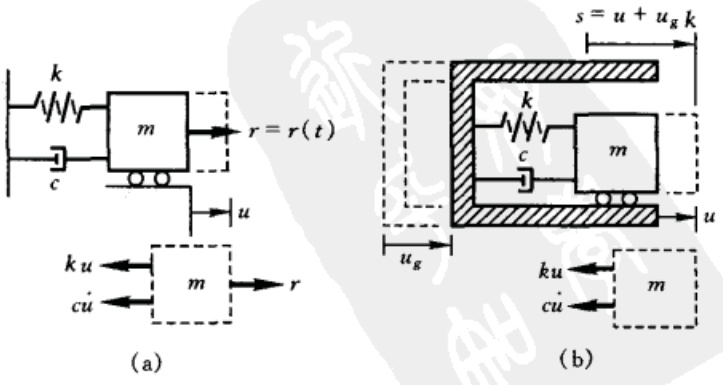


图 11.2-1　带虚线图示位形的单自由度系统
(a)由时变力 r 加载；(b)由支撑激励加载

动$u_g=u_g(t)$。质量m相对于支承的位移是u，但相对于固定参考框架则是$s=u+u_g$。弹性力和阻尼力的大小决定于相对运动，内力决定于绝对加速度$a=\mathrm{d}^2s/\mathrm{d}t^2$。因此$f=ma$产生

$$-ku-c\dot{u}=m(\ddot{u}+\ddot{u}_g) \quad 或 \quad m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=-m\ddot{u}_g \tag{11.2-2}$$

如果$r=-m\ddot{u}_g$，则和式11.2-1是一样的。当$\ddot{u}_g=\ddot{u}_g(t)$是地震的已知加速度，位移u是相对于振动的地球来度量的情形时，式11.2-2是很适用的。

一般情况 下面导出的结构动力学控制方程为结构质量和阻尼提供了通用表达式。对于质量和阻尼的有效计算公式将在11.3和11.5节做更详细的研究。

我们选择按下列要求推导运动方程，对于任何虚位移(即对任何想象的满足协调性和强制边界条件的小的运动)，由外部载荷所作的功等于惯性、耗散和内力所吸收的功的总和。对于有体积V和表面积S的单个单元，这个功平衡变为

$$\int\{\delta\boldsymbol{u}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{F}\}\mathrm{d}V+\int\{\delta\boldsymbol{u}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\Phi}\}\mathrm{d}S+\sum_{i=1}^{n}\{\delta\boldsymbol{u}\}_i^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{p}\}_i$$

$$=\int(\{\delta\boldsymbol{u}\}^{\mathrm{T}}\rho\{\ddot{\boldsymbol{u}}\}+\{\delta\boldsymbol{u}\}^{\mathrm{T}}c\{\dot{\boldsymbol{u}}\}+\{\delta\boldsymbol{\varepsilon}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\sigma}\})\mathrm{d}V \tag{11.2-3}$$

式中$\{\boldsymbol{F}\}$和$\{\boldsymbol{\Phi}\}$表示指定的体力和表面力，$\{\boldsymbol{p}\}_i$和$\{\delta\boldsymbol{u}\}_i$表示指定集中载荷和它们在总共$n$个点上相应的虚位移，$\rho$表示密度，$c$是类似于黏性的阻尼参数。$\{\delta\boldsymbol{u}\}$和$\{\delta\boldsymbol{\varepsilon}\}$表示虚位移和它们相应的应变，像在3.3节中解释的那样。用通常的符号，有限元离散化得到

$$\{\boldsymbol{u}\}=[\boldsymbol{N}]\{\boldsymbol{d}\} \quad \{\dot{\boldsymbol{u}}\}=[\boldsymbol{N}]\{\dot{\boldsymbol{d}}\} \quad \{\ddot{\boldsymbol{u}}\}=[\boldsymbol{N}]\{\ddot{\boldsymbol{d}}\} \quad \{\boldsymbol{\varepsilon}\}=[\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{d}\} \tag{11.2-4}$$

形状函数$[\boldsymbol{N}]$是空间的函数，而节点自由度$\{\boldsymbol{d}\}$是时间的函数。因此，式11.2-4表示变量的局部分离。组合式11.2-3和11.2-4，得

$$\{\delta\boldsymbol{d}\}^{\mathrm{T}}\Big[\int\rho[\boldsymbol{N}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{N}]\mathrm{d}V\{\ddot{\boldsymbol{d}}\}+\int c[\boldsymbol{N}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{N}]\mathrm{d}V\{\dot{\boldsymbol{d}}\}+\int[\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\sigma}\}\mathrm{d}V$$

$$-\int[\boldsymbol{N}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{F}]\mathrm{d}V-\int[\boldsymbol{N}]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\Phi}\}\mathrm{d}S-\sum_{i=1}^{n}\{\boldsymbol{p}\}_i\Big]=0 \tag{11.2-5}$$

式中假定集中载荷$\{\boldsymbol{p}\}_i$位于节点位置。式11.2-5中的前两个积分为“协调性”单元的质量和阻尼矩阵：

$$[\boldsymbol{m}]=\int\rho[\boldsymbol{N}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{N}]\mathrm{d}V \quad [\boldsymbol{c}]=\int c[\boldsymbol{N}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{N}]\mathrm{d}V \tag{11.2-6}$$

“协调性”强调这些形式直接从有限元离散得出，并用和单元刚度矩阵一样的形状函数。我们把单元内力向量$\{\boldsymbol{r}^{\mathrm{int}}\}$定义为力——也有力矩，如果单元有旋转自由度——由节点作用到单元上来抵抗单元内的应力。

$$\{\boldsymbol{r}^{\mathrm{int}}\}=\int[\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\sigma}\}\mathrm{d}V \tag{11.2-7}$$

这是式3.3-8中的一项的负值。类似的符号用于识别作用于节点上的力(也许还有力矩)，作为作用到单元上的外部载荷的结果。

$$\{\boldsymbol{r}^{\text{ext}}\}=\int[\boldsymbol{N}]^{\text{T}}\{\boldsymbol{F}\}\mathrm{d}V+\int[\boldsymbol{N}]^{\text{T}}\{\boldsymbol{\Phi}\}\mathrm{d}S+\sum_{i=1}^{n}\{\boldsymbol{p}\}_i \tag{11.2-8}$$

如果式 11.2－5 对任意$\{\delta\boldsymbol{d}\}$都成立，则括号内的表达式必须为零。因此，按式 11.2－6 至式 11.2－8 的符号，式 11.2－5 变为

$$[\boldsymbol{m}]\{\ddot{\boldsymbol{d}}\}+[\boldsymbol{c}]\{\dot{\boldsymbol{d}}\}+\{\boldsymbol{r}^{\text{int}}\}=\{\boldsymbol{r}^{\text{ext}}\} \tag{11.2-9}$$

式 11.2－7 和式 11.2－9 对线性和非线性材料属性都成立。如果材料为线弹性，则与单元应力相关的载荷为$\{\boldsymbol{r}^{\text{int}}\}=[\boldsymbol{k}]\{\boldsymbol{d}\}$，其中$[\boldsymbol{k}]$为常规单元刚度矩阵，式 11.2－9 变为

$$[\boldsymbol{m}]\{\ddot{\boldsymbol{d}}\}+[\boldsymbol{c}]\{\dot{\boldsymbol{d}}\}+[\boldsymbol{k}]\{\boldsymbol{d}\}=\{\boldsymbol{r}^{\text{ext}}\} \tag{11.2-10}$$

如果将$[\boldsymbol{m}]\{\ddot{\boldsymbol{d}}\}$单独移至等式的一边，式 11.2－9 和式 11.2－10 可以认为是牛顿第二定律的多维形式，$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$。对多单元结构，式 11.2－9 和式 11.2－10 的总体形式分别为

$$[\boldsymbol{M}]\{\ddot{\boldsymbol{D}}\}+[\boldsymbol{C}]\{\dot{\boldsymbol{D}}\}+\{\boldsymbol{R}^{\text{int}}\}=\{\boldsymbol{R}^{\text{ext}}\} \tag{11.2-11}$$

$$[\boldsymbol{M}]\{\ddot{\boldsymbol{D}}\}+[\boldsymbol{C}]\{\dot{\boldsymbol{D}}\}+[\boldsymbol{K}][\boldsymbol{D}]=\{\boldsymbol{R}^{\text{ext}}\} \tag{11.2-12}$$

这两个式子说明外部载荷被抵抗，或者是与惯性力、阻尼力和内应力的组合处于动态平衡。第一种形式，即式 11.2－11，对非线性材料属性是方便的，而且，不论什么时候，当适于用组集单元应力贡献而不是利用总体刚度矩阵来计算内力时，都可以使用。

备注 式 11.2－11 和 11.2－12 自成系统，都是二阶常微分方程。每一个组成一个半离散系统：节点自由度$\{\boldsymbol{D}\}$是空间的离散函数，但对时间连续。在用直接积分法求解中，方程也要在时域上离散。

协调性质量和阻尼矩阵式 11.2－6 都是对称、完备和正定的。也用了不兼容的形式；随后将叙述它们。总体矩阵$[\boldsymbol{M}]$和$[\boldsymbol{C}]$与$[\boldsymbol{K}]$类似都是稀疏布局。它们可以通过单元矩阵$[\boldsymbol{m}]$和$[\boldsymbol{c}]$概念性扩展到结构尺寸和交错项叠加来构成，与由单元矩阵$[\boldsymbol{k}]$构成矩阵$[\boldsymbol{K}]$的方式相同，如 2.5 节解释的那样。

尽管结构阻尼不是黏性的，但它通常都很小以至于描述为黏性的也可以接受，而且选择$[\boldsymbol{c}]$的特定形式主要是为了计算方便(11.5 节)。

11.3 质量矩阵：协调性，对角和其它

质量矩阵是一个连续质量分布的离散表达式。离散表达式的协调性通过式 11.2－6 来定义。特定的“集中”质量矩阵是一种较为简单和历史上较早的列式。集中质量矩阵是对角矩阵，而协调性矩阵则不是。这两类表达式有不同的优点，所以用于特定的分析过程或是这个或是另一个最佳，或者是两者的结合。集中质量矩阵最明显的优点就是便于计算，需要的存贮空间和处理时间都少。

质点质量集中 考虑 2 节点杆单元，其长度为 L，截面积为 A，密度为 ρ。整个单元质量为 $m=\rho AL$。在每个节点处放置一个质量为 $m/2$ 的质点。如图 11.3－1a 所示，这种集中意味着

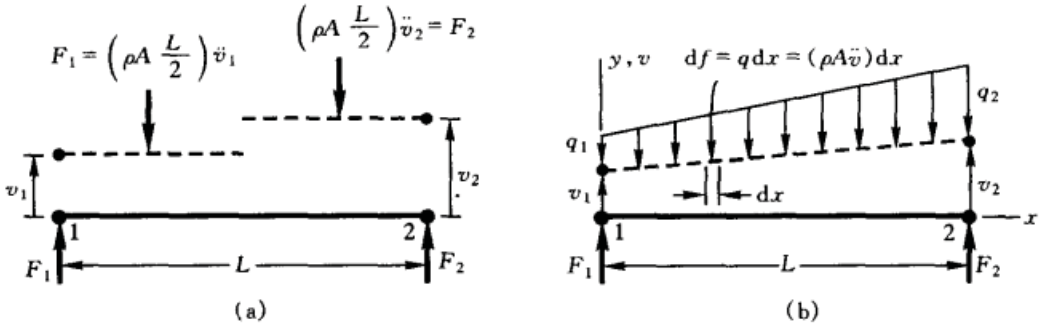


图 11.3-1 虚线表示 2 节点杆单元横向位移

(a)由特定的集中质量矩阵表示的 F_1 和 F_2，是惯性力；

(b)线性位移场提供的杆单元协调性质量[m]

单元的两半是在不连续的位移场单独移动。对于一个质量为 m 的单元，集中单元质量矩阵，和与节点加速度 $\ddot{v}_1$ 和 $\ddot{v}_2$ 有关的惯性力为

$$[\boldsymbol{m}]=\frac{m}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\qquad \text{因此}\qquad [\boldsymbol{m}]\begin{Bmatrix}\ddot{v}_1\\ \ddot{v}_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}F_1\\ F_2\end{Bmatrix}\tag{11.3-1}$$

图 11.3-1(a)中的惯性力与节点力 F_1 和 F_2 平衡。不管位移是轴向还是横向，式 11.3-1 中[m]的形式都是如此。如果 2 节点杆单元允许在三维空间运动，则它的(对角)集中质量矩阵和节点位移向量为

$$[\boldsymbol{m}]=\frac{m}{2}\lceil 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\rfloor\qquad \{\boldsymbol{d}\}=\lceil u_1\quad v_1\quad w_1\quad u_2\quad v_2\quad w_2\rfloor^{\mathrm{T}}\tag{11.3-2}$$

因此，对于任意坐标方向的平移加速度 a，与单元相关的总的惯性力是 ma。

对于面积为 A，均匀厚度为 t 的任意形状的 3 节点三角形单元，质点集中是在每个顶点放置质量为 $\rho At/3$ 的质点。体积为 V 的 8 节点矩形六面体单元在每个节点有一个质量为 $\rho V/8$ 的质点。

仅有质量质点的存在不能在有上述质量质点分布的单元中提供具有转动惯量的旋转自由度。转动惯量必须单独增加。例如，考虑一个均匀 2 节点梁单元 y 方向的横向位移，如图 2.3-1，节点自由度为$\{\boldsymbol{d}\}=\lceil v_1\quad \theta_{z1}\quad v_2\quad \theta_{z2}\rfloor^{\mathrm{T}}$。带有可选择的 α 数，总质量为 m 的单元集中质量矩阵为

没有转动惯量的梁	有转动惯量的梁
$[\boldsymbol{m}]=m\lceil 1/2\quad 0\quad 1/2\quad 0\rfloor$	$[\boldsymbol{m}]=m\lceil 1/2\quad \alpha L^2\quad 1/2\quad \alpha L^2\rfloor$

(11.3-3)

设定 α 的特定方法是设想长度为 $L/2$ 质量为 $m/2$ 的均匀细长杆与每个节点相连，并一起旋转。相关质量的惯性矩为 $I=(m/2)(L/2)^2/3$，对应的 $\alpha=1/24$。

协调质量矩阵 在轴向坐标中，图 11.3-1(b)中的 2 节点杆单元的位移是线性的。如果 y 方向横向位移 v 是仅有的位移，对于质量为 $m=\rho AL$ 的均匀杆单元，从式 11.2-6 有

$$\text{杆：}[\boldsymbol{N}]=\begin{bmatrix}\dfrac{L-x}{L} & \dfrac{x}{L}\end{bmatrix}\qquad [\boldsymbol{m}]=\int_0^L[\boldsymbol{N}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{N}]\rho A\,\mathrm{d}x=\frac{m}{6}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\tag{11.3-4}$$

它依据节点加速度向量$\{\ddot{\boldsymbol{d}}\}=\begin{bmatrix}\ddot{v}_1 & \ddot{v}_2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$运算。

对于均匀 2 节点梁单元，其自由度为$\{\boldsymbol{d}\}=\begin{bmatrix}v_1 & \theta_{z1} & v_2 & \theta_{z2}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，如图 2.3-1 所示，形状函数在图 2.3-1 和图 3.2-4 中有所描述，协调性质量矩阵为

$$\text{梁：}[\boldsymbol{m}]=\int_0^L[\boldsymbol{N}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{N}]\rho A\,\mathrm{d}x=\frac{m}{420}\begin{bmatrix}156 & 22L & 54 & -13L\\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2\\ 54 & 13L & 156 & -22L\\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2\end{bmatrix}\tag{11.3-5}$$

其中 $m=\rho AL$ 是单元总质量。如果梁单元刚度矩阵用于计算横向剪切变形，就像在式 2.3-6 中，它暗示形状函数与用于得到式 11.3-5 的那些不一样。因此在质量矩阵中出现了附加的项，其表达式能在文献[11.4,11.5]中找到。

作为最后一个例子，考虑任意形状 3 节点三角形和 4 节点矩形，也就是 CST 单元(3.4 和 7.1 节，式 7.3-7)和 Q4 单元(3.6 节)。对于单坐标方向的运动，每个单元的总质量为 m，均匀密度和厚度的单元协调性质量矩阵为

$$\text{CST：}[\boldsymbol{m}]=\frac{m}{12}\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}\qquad \text{Q4：}[\boldsymbol{m}]=\frac{m}{36}\begin{bmatrix}4 & 2 & 1 & 2\\ 2 & 4 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 4 & 2\\ 2 & 1 & 2 & 4\end{bmatrix}\tag{11.3-6}$$

如果允许在三个坐标方向运动，质量矩阵将会更大，其中有已经存在的重复项，这种扩大方式如同式 11.3-1 中的$[\boldsymbol{m}]$扩大到式 11.3-2 中的$[\boldsymbol{m}]$。

组合矩阵　在有限元模型中，对于给定数目的单元，如果把集中矩阵和协调矩阵进行组合，常会发现计算的振动频率会更精确。以杆单元为例，β 的取值范围为 $0\leqslant\beta\leqslant1$，我们从式 11.3-1 和 11.3-4 可得

$$\begin{array}{ll}(1-\beta)*\text{集中}+\beta*\text{协调}： & \text{平均},\beta=0.5：\\ [\boldsymbol{m}]=\dfrac{m}{6}\begin{bmatrix}3-\beta & \beta\\ \beta & 3-\beta\end{bmatrix} & [\boldsymbol{m}]=\dfrac{m}{12}\begin{bmatrix}5 & 1\\ 1 & 5\end{bmatrix}\end{array}\tag{11.3-7}$$

梁单元的组合$[\boldsymbol{m}]$同样可以用式 11.3-3 和式 11.3-5 来构造。不同单元类型的不同组合在文献[11.6,11.7]中已做了详细研究。以计算振动频率的方式，选择一些结果列于表 11.3-1。对这些杆和梁的例子——但不是在所有问题中——用质点集中矩阵$[\boldsymbol{m}]$会低估固有频率，而用协调矩阵会高估固有频率，对杆其量值几乎相等，但对梁却不是如此。杆和梁结构分别有 8 和 10 个自由度，因此振型 8 和 10 是这些模型能提供的最高振型。对于质点质量，梁只有 4 个激活的自由度，因此高于 4 的振型有无数个频率。注意到有足够精度的振型数量基本上是激活自由度的一半，至少在这些例子中是这样。

表 11.3-1 用不同质量矩阵计算的固有频率百分比误差[11.7]

对于质点质量集中的梁单元，式 11.3-3 中 $\alpha=0$。结构是均匀的，用等长度单元建模

振型数	所用质量矩阵类型		
	质点质量集中(%)	平均$[m]$(%)	协调$[m]$(%)
	8 单元杆轴向振动，一端固定，另一端自由		
1	−0.16	0.00	+0.16
2	−1.44	−0.03	+1.45
3	−3.97	−0.20	+4.05
4	−7.69	−0.79	+7.92
8	−32.42	−17.43	+15.94
	5 单元悬臂梁弯曲振动		
1	−1.80	−0.91	0.00
2	−5.90	−3.07	+0.05
3	−9.31	−5.03	+0.36
4	−13.62	−7.69	+1.17
10	无法利用	+91.77	+67.83

对于单元长度度量为 h 的杆单元，已经发现集中和协调列式产生的固有频率误差数量级为 h^2（相反方向），平均列式误差的数量级为 h^4[2.13]。因此，当使用平均列式时，网格精细的收敛速度快得多。类似的改进对于梁单元也是可行的[2.13]。

HRZ 集中 “HRZ”的命名是源于这个方法的作者[11.8]。这是一个特定的方法，但看来是相当成功的。主要思想是只计算协调单元质量矩阵的对角项，然后对它们按比例处理以保持总的单元质量。结果就是对角质量矩阵。要考虑到可能有平移和旋转自由度，来描述一个一维、二维或三维坐标方向的运动。整个质量为 m 的单元可以按以下步骤计算。

1. 只计算协调单元质量矩阵的对角系数 m_{ii}。
2. 对每个用单元自由度描述运动的坐标方向：
   a. 用增加与平移自由度（但不是旋转自由度）相关的 m_{ii} 来确定数 s。
   b. 将所有与这些方向有关的对角系数 m_{ii} 乘以比值 m/s。

将这些步骤应用于杆单元的$[m]$，式 11.3-4，我们得到式 11.3-1 的$[m]$。从梁单元的$[m]$，式 11.3-5，我们得到 HRZ 集中

$$[m] = m\lceil 1/2 \quad L^2/78 \quad 1/2 \quad L^2/78 \rfloor \tag{11.3-8}$$

没有转动自由度的平面单元的 HRZ 集中的例子如图 11.3-2。

板的振动频率计算结果如表 11.3-2[11.8]。单元有 8 个节点，每个节点有一个横向位移自由度和两个转动自由度。所用的特定集中由每个单元节点等质量质点组成。用正方形单元 4×2的网格来为板的一半建模。在“振型”栏内，l_w 和 n_w 是整个板每个方向上的半波数量。

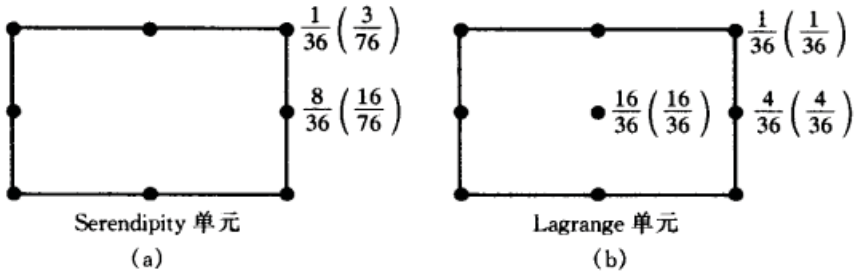


图 11.3-2　矩形平面单元，显示在 HRZ 集中方法中与对角项 m_{ii} 相关的总单元质量分数。
第一个数：基于 2×2 高斯积分法。第二个数（括号内）：基于 3×3 高斯积分法

表 11.3-2　利用不同的质量矩阵[11.8]，计算简支厚方形板横向振动固有频率的百分比误差。为了得到单元刚度矩阵，使用简化积分

振型		使用的质量矩阵类型		
l_w	n_w	特定集中(%)	HRZ 集中(%)	协调[m](%)
1	1	+0.32	+0.32	−0.11
2	1	−0.45	+0.45	−0.40
2	2	−4.12	−2.75	−0.35
3	1	−5.75	+0.05	+5.18
3	2	−10.15	−2.96	+4.68
3	3	−19.42	−5.18	+13.78
4	2	+31.70	+1.53	+16.88

最佳集中　质量集中可以认为是使用合适的的积分规则来计算 $\int\rho[\boldsymbol{N}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{N}]\mathrm{d}V$ 的结果。如果积分点与只有平移自由度单元的节点重合，就不会产生非对角的项，则生成的质量矩阵就是对角线的。如果还出现转动自由度，在对角线就会出现块状项。以下我们考虑只有平移自由度的单元。

假设 p 是包含在[$\boldsymbol{N}$]中的最高阶完备多项式的次数，m_d 是在应变能量表达式中导数的最高阶次（弹性，$m_d=1$；弯曲，$m_d=2$）。已经证明，精度至少为 $2(p-m_d)$ 的求积分规则将提供与使用协调质量矩阵相当的精确度，而且不降低收敛率[11.9,11.10]。可以说以这种方法积分的对角质量矩阵就是最佳集中。

作为最佳集中的例子，考虑图 6.1-1 的 3 节点杆单元，其中 $p=2$，$m_d=1$。假设单元是均匀的，而且节点间距也是均匀的。最佳集中的最小积分阶次是 $n=2(2-1)=2$。辛普生（Simpson）积分规则是合适的，它有三次方精度，比要求的精度高，其采样点也与单元节点一致。在数值积分中，当 $i\neq j$ 时，也就是，当 i 和 j 表示不同的节点时，形状函数乘积 N_iN_j 是 0。因此，质量矩阵是对角线的，总质量为 m 的单元在端节点处有 $m/6$ 的对角项，在中心节点有 $2m/3$（图 11.3-3(a)）。

拉格朗日单元的节点与洛巴托（Lobatto）积分法的采样点是一致的。平面二次拉格朗日

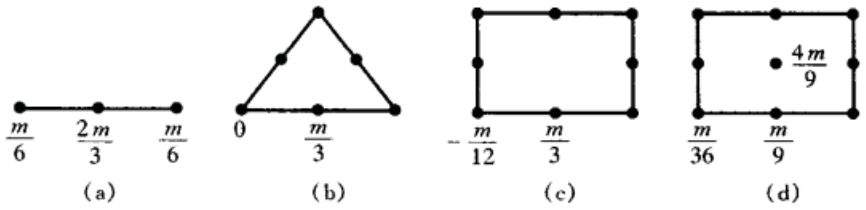


图 11.3－3 均匀杆单元，三角形单元和两个矩形单元的最佳质量集中[11.11]。每个单元的总单元质量是 m。平面单元有均匀的密度和厚度

单元的结果如图 11.3－3(d)。另外的结果出现在文献[11.11]中。在更高阶的拉格朗日单元中，节点质量是正的，但节点必须位于单元的特定位置。对于其它类型的单元，最佳集中可能产生 0 或负的节点质量。有时，HRZ 和最佳集中是相同的；这是二次拉格朗日单元的情形，如在图 11.3－2(b)和 11.3－3(d)中看到的那样。对于更高阶的单元，HRZ 和最佳集中是不同的，但这些单元很少用于结构动力学中。对图 11.3－3 中的所有单元，对于均匀分布的轴向载荷或均匀表面压力，质量分数配置和载荷分数配置是相同的[3.11-3]。

备注 对任意质量矩阵，根据牛顿第二定律 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$，当$\{\ddot{\boldsymbol{d}}\}$表示刚体的平移加速度时，乘积$[\boldsymbol{m}]\{\ddot{\boldsymbol{d}}\}$在单元上必须提供正确的总体力。如果网格无限期地细化，这就是一个单元经历的唯一运动。

协调质量矩阵是正定的。如果零或负质量分别出现在它的对角线上，集中质量矩阵是半正定的或不定的。对角线上的零值可能造成分析困难，但也可能不会，这决定于算法，负质量通常需要特定的算法。

如果有限元网格正确反映了结构体积和几何形状，单元是协调的，而且它们的刚度不被低阶积分法则所软化，质量矩阵也是协调阵，那么算得的固有频率是数学模型精确频率的上限值。如果违背这些限定性条件中的任何一个，则界限不能保证[5.1]。表 11.3－2 中，利用简化积分计算刚度矩阵，我们看到甚至协调质量矩阵也不总能产生上限值。

具有协调质量矩阵，固有频率的误差阶次为 $O(h^{2(p+1-m)})$，其中，如第 9.6 节所述，h 是单元尺寸的线性度量，p 是近似位移场中完备多项式的最高阶次，$2m$ 是控制微分方程中位移导数的最高阶次[2.13]。对于 2 节点杆单元，$p+1-m=1+1-1=1$；对标准的三次方梁单元，$p+1-m=3+1-2=2$。因此，协调$[\boldsymbol{m}]$和不太粗糙的网格，通过网格均匀细化可以将单元的数量加倍，对于杆单元频率误差降到原来的 1/4，对梁单元降到 1/16。

就如在 6.8 节中总结的，单点积分的单元需要稳定性。这类单元的组集可能包含比实际振型频率更低的非物理振型，这取决于稳定性是怎样实现的和用什么样的质量矩阵。在振动分析和响应历程分析中，这个缺点可能产生使人误解的结果。解决这个问题的办法是设计一个质量矩阵，以至于使动能与非物理振型不相关，从而把非物理振型移向固有频谱的高端[11.12]。

集中和协调列式对所有问题都不是最佳的。协调质量矩阵对弯曲问题更精确，如前面提到的梁和板，能限制频率上限，如前面注释的那样。集中质量矩阵常常但不总是低估固有频率。在波传播问题中，因为寄生振荡较少，集中质量的精度更高些。集中质量矩阵更易生成，而且需要内存空间也少。除非$[\boldsymbol{M}]$是集中的，否则某些算法的代价会很高，然而，其它算法用很少的代价就能适应协调阵$[\boldsymbol{M}]$。在响应历程分析中，对经济性的要求比振动分析中的要高。

本章自始至终我们只考虑了单元本身的质量。通常也有超过结构质量的非结构质量。非结构质量可以以附加机械、雪等形式出现。附加机械可以当做一个刚性质量甚至质量质点来建模，而雪构成一个分布质量。周围的流体，如水，提供如第 12.8 节所述的附加质量，也提供阻尼。

11.4　固有频率和振型

我们首先回顾有阻尼和无阻尼的简单弹簧质量系统的振动。然后，讨论多自由度有限元结构的无阻尼振动。第 11.5 节中将更深入地考虑了阻尼，在对响应历程和谐波响应分析的模态法中也包含阻尼的内容，这些将在第 11.7 和 11.10 节中讨论。

单自由度自由振动　“自由”振动意味着图 11.2-1 中的载荷 r 是零。如果没有阻尼，运动可以描述为 $u=\bar{u}\sin\omega t$，其中 $\bar{u}$ 是振动的幅值，ω 是圆频率（弧度/秒）。（循环）频率是 $f=\omega/2\pi$（赫兹，周/秒），周期是 $T=1/f$（秒）。将 $c=0, r=0, u=\bar{u}\sin\omega t$ 代入式 11.2-1 中，得到

$$k\bar{u}\sin\omega t - m\bar{u}\omega^2\sin\omega t = 0 \qquad \text{其中} \qquad \omega = \sqrt{k/m} \tag{11.4-1}$$

通常，如果保持为线弹性状态，间隙没有张开或闭合，并且振幅与结构尺寸相比是小的，则固有频率和幅值是相互独立的，则不会出现几何非线性。

如果有阻尼（在式 11.2-1 中，$c\neq 0$），基本振动理论证明，有一个临界值 $c_c=2m\sqrt{k/m}$，如果 $c>c_c$，运动衰减没有振荡；如果 $c<c_c$，则运动就是振荡的，其随时间的衰减如图 11.4-1(b) 所示。对于 $c<c_c$，阻尼振动频率 ω_d 比固有频率 $\omega=\sqrt{k/m}$ 要小；具体为

$$\omega_d = \omega\sqrt{1-\xi^2} \qquad \text{其中 } \xi = \frac{c}{c_c} \qquad \text{和} \qquad c_c = 2m\sqrt{k/m} = 2m\omega \tag{11.4-2}$$

其中 ξ，临界阻尼系数，称之为阻尼比。结构阻尼常常很小，一般地 $\xi<0.15$，因此 $\omega_d\approx\omega$。对于小阻尼，图 11.4-1(b) 中任意两个连续位移峰值之比 u_2/u_1，由式 $\delta=\ln(u_2/u_1)\approx -2\pi\xi$ 与 ξ 联系起来，其中 δ 称之为对数衰减率。如果 $\xi=0.1$，在一个有阻尼的自由振动周期内，运动的振幅约减为一半，如果 $\xi=0.02$，振幅一个周期内要减 10%。在第 11.5 节中详细讨论阻尼问题。

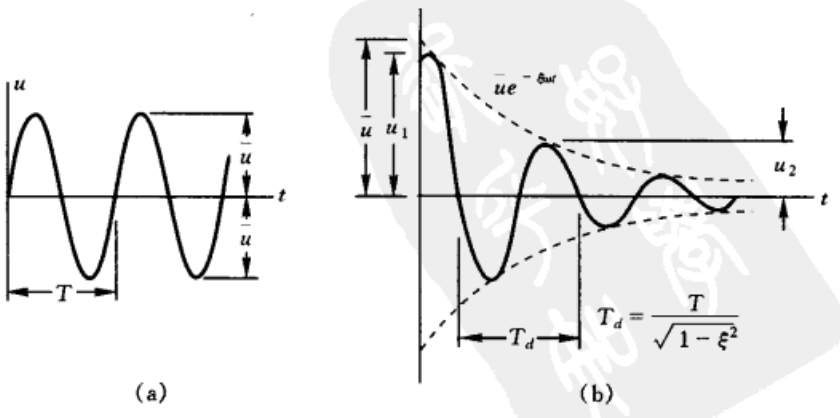


图 11.4-1　(a)无阻尼自由运动；(b)$c<c_c$ 的阻尼自由振动

为了后面的应用(第 11.7 节),将式 11.2-1 除以质量,并利用式 11.4-2,则有

$$\ddot{u}+\frac{c}{m}\dot{u}+\frac{k}{m}u=\frac{r}{m} \quad \text{变成} \quad \ddot{u}+2\xi\omega\dot{u}+\omega^2 u=\frac{r}{m} \tag{11.4-3}$$

无阻尼多自由度自由振动 我们需要振动的固有频率和它们相关的振型,不考虑它们中谁在应用中更重要或运动是怎么开始的。没有阻尼,所有自由度以相同相位和同一频率 ω 运动。振动运动由节点振幅$\{\bar{\boldsymbol{D}}\}$组成,它相对于由与时间无关的载荷产生的静态平衡位移$\{\boldsymbol{D}_{st}\}$随时间正弦形变化。如果这些载荷为 0,则$\{\boldsymbol{D}_{st}\}=0$,$\{\bar{\boldsymbol{D}}\}$表示偏离无应力位形的幅度。振动产生位移和应力,它们要叠加在与静态载荷相关的位移和应力上。线性问题的固有频率与$\{\boldsymbol{D}_{st}\}$是独立的。然而,可能与静态载荷有关的非结构质量必须在$[\boldsymbol{M}]$中有所体出现。与振动有关的节点位移和加速度为:

$$\{\boldsymbol{D}\}=\{\bar{\boldsymbol{D}}\}\sin\omega t \qquad \{\ddot{\boldsymbol{D}}\}=-\omega^2\{\bar{\boldsymbol{D}}\}\sin\omega t \tag{11.4-4}$$

因忽略阻尼矩阵$[\boldsymbol{C}]$,式 11.2-12 和 11.4-4 给出特征问题

$$\text{无阻尼自由振动:}([\boldsymbol{K}]-\omega^2[\boldsymbol{M}])\{\bar{\boldsymbol{D}}\}=\{\boldsymbol{0}\} \tag{11.4-5}$$

其中 ω^2 是特征值,ω 是固有频率。矩阵$[\boldsymbol{K}]-\omega^2[\boldsymbol{M}]$称为动态刚度矩阵。振动的物理解释来源于以形式$[\boldsymbol{K}]\{\bar{\boldsymbol{D}}\}=\omega^2[\boldsymbol{M}]\{\bar{\boldsymbol{D}}\}$书写的式 11.4-5。它是说,振型就是一个弹性阻力与惯性载荷平衡的位形。

设$\{\bar{\boldsymbol{D}}\}$只包含在所有刚体模式和机构(即使有也很小)被抑制后能够假定为非零值的自由度。因此,$[\boldsymbol{K}]$是正定的。如果单元质量矩阵是协调的,或者以严格的正对角线系数来集中,$[\boldsymbol{M}]$也是正定的。则非零 ω_i 的个数与$\{\bar{\boldsymbol{D}}\}$中自由度数是相等的。偶尔有两个或更多的 ω_i 在数值上相等。那么,它们相关的振动振型$\{\bar{\boldsymbol{D}}\}_i$ 就不是唯一的,但是可以为重复的 ω_i 建立相互正交的振型[2,14]。部分或完全无约束的结构,或包含机构的结构,有半正定$[\boldsymbol{K}]$和与每个可能的刚体运动或机构有关的零特征值。相关振型形状描述了刚体运动或机构运动。如果$[\boldsymbol{M}]$用某些零对角线系数来集中,则无限特征值与每个零 M_{ii} 有关。与零 M_{ii} 有关的自由度在提取特征值之前能通过静态凝聚除去,而不会影响到剩余的特征值和振型形状。

特征问题和解法在附录 C 中叙述。下面的例子说明在结构力学中计算固有频率和振型的方法(声学振型在 12.7 节中讨论)。在这些例子中使用的特征值提取方法仅为了用于手算而具有很少的自由度。

例 1 均匀细长的悬臂梁用一个单元来建模(图 11.4-2)。只考虑图平面上的弯曲运动。节点 1 的自由度被约束,只有节点 2 有自由度。选择使用协调质量矩阵,式 11.3-5。单元刚度矩阵由式 2.3-5(和由式 3.3-14)给出。因此我们得到

$$\left(\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix}12 & -6L\\ -6L & 4L^2\end{bmatrix}-\omega^2\frac{m}{420}\begin{bmatrix}156 & -22L\\ -22L & 4L^2\end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}\bar{v}_2\\ \bar{\theta}_{z2}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix} \tag{11.4-6}$$

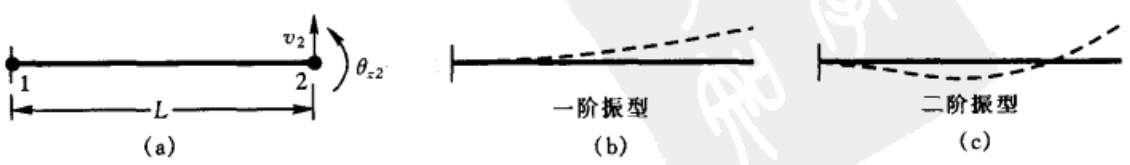


图 11.4-2 (a)一个单元的悬臂梁模型;(b,c)低频两种振型的形状

其中 m 是整个单元质量。如果除了 $\bar{v}_2=\bar{\theta}_{z2}=0$ 还有解，则乘这些自由度的完备矩阵的行列式必须为零。也就是

$$\begin{vmatrix} 12-156a & -6L+22La \\ -6L+22La & 4L^2-4L^2a \end{vmatrix}=0 \qquad \text{其中} \quad a=\frac{\omega^2 mL^3}{420EI} \tag{11.4-7}$$

求出 a，然后用后面的方程求出 ω^2，得到数学模型中振型 1 和振型 2 的频率。

$$\omega_1=3.533\left(\frac{EI}{mL^3}\right)^{1/2} \qquad \omega_2=34.81\left(\frac{EI}{mL^3}\right)^{1/2} \tag{11.4-8}$$

连续系统的振动理论证明，对振型 1，$(EI/mL^3)^{1/2}$ 的精确值是 3.516，对振型 2，精确值是 22.03。像期望的那样，近似 ω_1 比近似 ω_2 准确得多，使用协调质量矩阵产生上界。

为了用手算获得与频率 ω_i 相对应的特征向量，必须首先将 ω_i 代入式 11.4-6 中。因为 ω_i 使得系数矩阵的行列式为零，一行是另一行的常数倍，$\lfloor \bar{v}_2 \quad \bar{\theta}_{z2} \rfloor$ 不可能有唯一解。简单的策略就是对两个自由度中的一个代入单位 1（如果应用于任意多自由度系统，设置为单位 1 的自由度实际是零，这是可能的。于是就得不到解，别的自由度必须设为单位 1）。在这个例子中，对第一个振型 $\omega=\omega_1$，我们可以设置 $\bar{v}_2=1$。这样，我们得到

$$\left(\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix}-\frac{EI}{33.65L^3}\begin{bmatrix} 156 & -22L \\ -22L & 4L^2 \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} 1 \\ \bar{\theta}_{z2} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{\theta}_{z2} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 1.38/L \end{Bmatrix} \tag{11.4-9}$$

对于第二个振型相似的算法得到 $\bar{v}_2=1, \bar{\theta}_{z2}=7.62/L$。注意，如果 $\{\bar{\boldsymbol{D}}\}_i$ 是特征向量，那么 $c\{\bar{\boldsymbol{D}}\}_i$ 也是，其中 c 是正的或负的常数。因此，任意 $\{\bar{\boldsymbol{D}}\}_i$ 可以正则化（缩比后），也许满足附录 C 中的式 C.3-13。在图 11.4-2 中，振型形状用虚线表示。这些线仅显示了一个极限位置；其它可以通过改变所有自由度的代数符号来获得。软件图形仅仅能显示节点间的直线，因此对两个振型能画一条直线。

如果使用质点质量，质量 $m/2$ 只与自由度 $\bar{v}_2$ 有关，因此 $[\boldsymbol{m}]=\lceil m/2 \quad 0 \rfloor$。对于这样的位形，$\omega_2=\infty$，方程 11.4-6 的第二式得到 $\bar{\theta}_{z2}=3\bar{v}_2/2L$，第一式得 $\omega_1=2.45\sqrt{EI/mL^3}$。在这个例子中，对 ω_1 使用 HRZ 集中的式 11.3-8，效果不佳，得 $\omega_1=2.38\sqrt{EI/mL^3}$ 和 $\omega_2=18.2\sqrt{EI/mL^3}$。

例 2 图 11.4-3 中，考虑质量为 m 的无支撑一个单元杆的轴向振动。选择协调质量矩阵，式 11.3-4。特征值问题和括号内表达式的行列式必须为零的陈述是

$$\left(\frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}-\omega^2\frac{m}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{和} \quad \omega^2(m\omega^2-12AE/L)=0 \tag{11.4-10}$$

两个特征值和两个特征向量可以用和例 1 相同的方法计算。因此

振型 1： 振型 2

$$\omega_1=0, \quad \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \omega_2=3.464\sqrt{AE/mL}, \quad \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \tag{11.4-11}$$

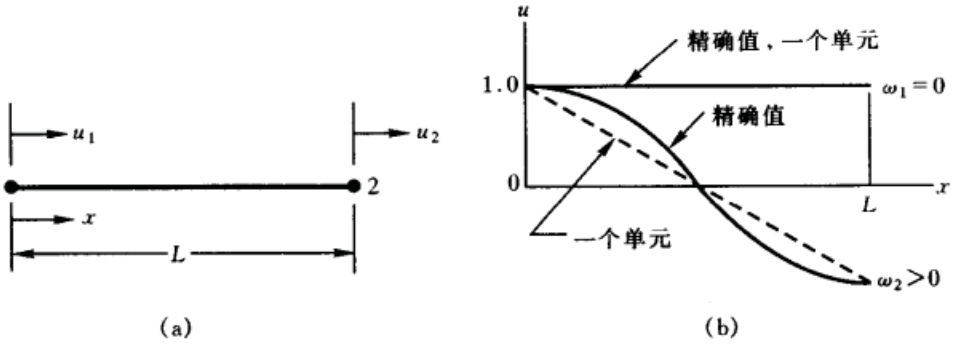


图 11.4-3 (a)无支撑 2 自由度均匀杆；(b)$\omega=0$(刚体平移)和 $\omega_2>0$ 振型(轴向变形模式)

振型 1 是刚体平移，而且计算正确。振型 2 的准确频率是 $\omega_2=\pi\sqrt{AE/mL}$。如果用集中质量代替，式 11.4-10 中的$[\boldsymbol{m}]$变为对角质量矩阵 $m[1/2 \quad 1/2]$，我们得到 $\omega_1=0$ 和 $\omega_2=2\sqrt{AE/mL}$。频率 ω_2 不是上界。

瑞雷(Rayleigh)商 设式 11.4-5 左乘$\{\bar{\boldsymbol{D}}\}^{\mathrm{T}}$。因此对任一振型 i

$$\{\bar{\boldsymbol{D}}\}_i^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{K}]\{\bar{\boldsymbol{D}}\}_i=\omega_i^2\{\bar{\boldsymbol{D}}\}_i^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{M}]\{\bar{\boldsymbol{D}}\}_i \tag{11.4-12}$$

这个式可做如下陈述，在任意振型 i，两倍最大应变能(当位移达到最大，速度为零)等于两倍最大动能(速度达到最大，而位移为零)。解式 11.4-12 中的 ω_i^2，得

$$\text{瑞雷商：}\qquad \omega_i^2=\frac{\{\bar{\boldsymbol{D}}\}_i^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{K}]\{\bar{\boldsymbol{D}}\}_i}{\{\bar{\boldsymbol{D}}\}_i^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{M}]\{\bar{\boldsymbol{D}}\}_i} \tag{11.4-13}$$

能够证明[2.14]，当使用$\{\bar{\boldsymbol{D}}\}_i$ 的近似值时，由瑞雷商提供的最大和最小 ω_i 值分别比数学模型精确最大值 ω 小，而比精确最小值大。还有，如果$\{\bar{\boldsymbol{D}}\}_i$ 以一阶误差来近似精确特征向量，瑞雷商提供一个只有二阶误差的 ω_i。最后，当$\{\bar{\boldsymbol{D}}\}_i$ 在精确特征向量附近变化时，瑞雷商是稳定的(典型地相对最大值或最小值)[5.1]。

备注 对应于不同频率的特征向量与刚度和质量矩阵都是正交的；也就是说

$$\{\bar{\boldsymbol{D}}\}_i^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{K}]\{\bar{\boldsymbol{D}}\}_j=0 \quad \text{和} \quad \{\bar{\boldsymbol{D}}\}_i^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{M}]\{\bar{\boldsymbol{D}}\}_j=0,\quad i\neq j \tag{11.4-14}$$

得出这个结论的理由见附录 C。它要求 $\omega_i\neq\omega_j$。沿 x 轴的圆形横截面直悬臂梁能提供不同振型 $\omega_i\neq\omega_j(i\neq j)$的三维实例。横向振动可以在 xy 或 xz 平面发生。一个平面内的振型形状可在另一个平面内重现，而且频率相同，但是振型不同，因为它们出现在不同的平面，可以写出满足式 11.4-14 的特征向量。

在静态分析中，利用对称性的一种方法是只分析半个结构。然而，结构和支撑的镜面对称不意味着所有振动振型是以对称平面为对称的。通过施加镜面对称，我们把所有反对称的振型也排除了。正因为如此，在振动问题中，我们应当有节制地使用对称性条件，或者完全不用。

旋转结构需要特别注意。旋转生成的拉伸应力产生“应力刚化”，并提高固有频率。这个影响通过增大常规刚度矩阵的一个矩阵来考虑(见第 18 章)。在某些情形下，“旋转柔化”可能降低固有频率(第 18.6 节)。有时产生科里奥(Coriolis)力。它们增大速度，生成斜对称回转矩

阵($G_{ij}=-G_{ji}$),将能量从一个振型转换到另一个振型。参考文献包括在[11.13～11.19]中。

11.5 阻尼

阻尼耗散能量,使自由振动的振幅随时间衰减,限制其频率与固有频率一致的加载引起振动的幅值。阻尼可以是固有的或故意添加的,也许是为了限制峰值响应。影响结构动力的阻尼可以做如下归类。

- 黏性阻尼施加的力与速度成比例,如在式 11.2-1 中由 $c\dot{u}$ 项所表示的那样。这类阻尼的公式是由瑞雷提出的[11.20]。每个周期耗散能量与频率和振幅的平方成比例。黏性阻尼可以由周围的空气或液体提供,或者由加在结构上的黏性阻尼器提供。
- 滞后阻尼,或固体阻尼,是物质所固有的,可以在一个非常小的规模内由塑性作用引起,在弹性范围内带有正应力。每个周期的能量耗散与频率无关。
- 库仑阻尼和滞后阻尼类似,但其与干磨擦——像连接处的滑动有关。
- 辐射阻尼指的是能量损失到事实上无限的介质中去,如支撑一个结构的地面[8.18]。注意周围介质也提供质量。(有些无限介质的分析选项在第 8.8 节中没有提到,第 12.7 节将讨论声学中的辐射阻尼)

深入讨论结构阻尼的参考文献有[2.21,11.1～11.3,11.21,11.22]。对于响应分析的直接时间积分法,还有可能存在算法阻尼或数值耗散,这是在解法中引入的人工阻尼(第 11.13 节)。

在前述的各种物理阻尼中,只有黏性阻尼在动力学方程中容易表达。幸运地,结构问题中的阻尼通常都是足够小的,不考虑其实际来源,将其看作黏性的,足以很好地模拟它对结构响应的影响。"足够小"意味着阻尼力$[\boldsymbol{C}]\{\dot{\boldsymbol{D}}\}$大约小于式 11.2-11 或 11.2-12 中其它力的 10%。对大多数弹性范围内加载的结构都是这样。

描述黏性阻尼的两种方法通常称为比例阻尼和模态阻尼。如果在结构的不同部分没有阻尼特性的不同,任何一个都是便于计算的选择[11.1,11.3]。

比例阻尼 这种方法,也称为瑞雷阻尼,定义总体阻尼矩阵$[\boldsymbol{C}]$是总体质量和刚度矩阵的线性组合。

$$[\boldsymbol{C}]=\alpha[\boldsymbol{M}]+\beta[\boldsymbol{K}] \tag{11.5-1}$$

这个方程使阻尼和频率相关,就如图 11.5-1 所示的那样。对单自由度系统,式 11.4-3,比例阻尼变成 $c=\alpha m+\beta k$,由此可得到临界阻尼系数。

$$\frac{1}{m}(\alpha m+\beta k)=2\xi\omega \quad \text{因此} \quad \xi=\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\omega}+\beta\omega\right) \tag{11.5-2}$$

通过选择设计谱,在图 11.5-1 中识别感兴趣的频率范围,在点 1 和点 2 选择期望的 ξ 值,我们从式 11.5-2 中得到

$$\begin{aligned}\alpha &= 2\omega_1\omega_2(\xi_1\omega_2-\xi_2\omega_1)/(\omega_2^2-\omega_1^2)\\ \beta &= 2(\xi_2\omega_2-\xi_1\omega_1)/(\omega_2^2-\omega_1^2)\end{aligned} \tag{11.5-3}$$

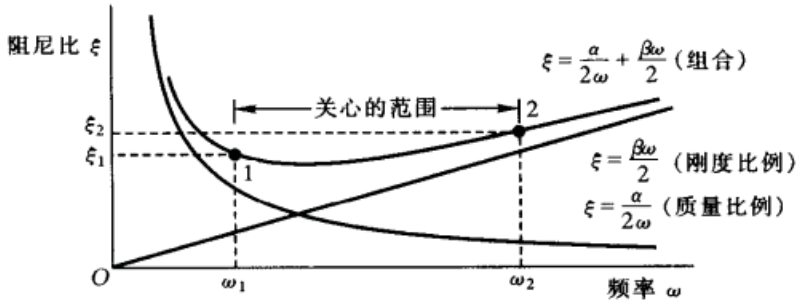


图 11.5-1 比例阻尼中的临界阻尼系数

比例阻尼一个重要的性质是振动振型与[*C*]是正交的(这类正交在附录 C 中叙述)。因此一组耦合方程,式 11.2-12,能转换成一组去耦方程,正如第 11.7 节所讲的那样。

$\alpha[M]$作用对最低振型的阻尼最严重,而 $\beta[M]$作用对最高振型的阻尼最严重。比例阻尼可以想象为将结构浸入一个非物理的液体中,对结构的刚体运动其黏性是无限的($\omega=0$)。对更高频率的振型,黏性阻尼自由度相对运动的作用,随 ω 的增加其影响在增大。因此 $\beta[M]$项可以用于阻尼来自响应模拟中的非物理高频振动(噪声)。噪声也可以通过模态阻尼和算法阻尼来减少(第 11.13 节)。

模态阻尼 当动力学方程通过模态方法解耦时,对于结构的每个单独固有频率,式 11.4-3 中第二种形式的方程会出现。可以为每个频率设定其自己的阻尼 ξ 的值。详细叙述见第11.7节。

11.6 减少自由度数

概述 动力学分析经常需要反复运算,每次都涉及单个载荷向量进行单个静态求解的计算工作。为了减少计算量,有时减少所运算的矩阵的大小是非常有用的。在有限元模型中可以用更小规模的一组自由度表示所有自由度来实现缩减。两组自由度通过转换相互联系起来。转换形式主要取决于怎样构建缩减数组。缩减数组中的自由度不必是有限元模型中的自由度。它们可以是广义的自由度,像在经典瑞雷-里兹法中使用的那些。理想地,通过牺牲一点精度,缩减可以经济地完成,不需要有限元使用者的决策,在随后的动力学分析中,其形式容易实现[11.23,11.24]。

各种不同类型的缩减能够辨识。它们可以看做或者施加弹性约束或是提供"缩减基数"的方法。基数是一组可以用不同比例组合来描述或近似其它向量的线性独立向量。在结构振动的范围内,"其它向量"是指一组有限元模型的完整特征向量。如果一个基数包含的比一组完整向量要少,则就称其为"缩减"。

缩减可以通过从直观到半精确的方法来实现。在下面要讨论的 Guayn 缩减中,与某些自由度有关的质量被忽略,由于受其他自由度(被称做"主导自由度")的弹性性质和位移的支配,要约束这些自由度位移。缩减问题仅仅包含主导自由度,其振动振型构成缩减基数。在求解特征问题中(附录 C),Lanczos 和子空间迭代方法中使用的一组试探矢量可以认为是整个特征

向量组的缩减基数。响应历程分析的模态方法中(第 11.7 节),人们使用几个最低振型而不是全部。组件振型综合法(第 11.9 节)通过组集选自组件子结构的信息形成缩减基数。

很难说在缩减数组中出现多少个自由度。类似的事情也会在模态分析中出现;见第 11.7 节。应该有足够多的自由度来描述最低振动振型,因为它们通常必然是重要的。空间分布载荷如果很简单,只有低频率范围,只需要位移响应,需要的自由度就少。如果载荷空间分布很复杂,或是突然加载,就需要比较多的自由度。需要比较多的自由度来计算速度响应,加速度响应就需要更多了。除了缩减数组可能会含有太少自由度的危险外,缩减数组在充分表示低频和高频振型的同时可能不能描述感兴趣范围内的振型[11.21]。

为什么要先建立有许多自由度的有限元模型,然后做附加的工作来从中得到缩减基数模型?粗糙网格的有限元模型可能在其刚度和质量描述中不够详细。应力计算通常比动力学分析要求更详细。而详细的有限元模型可能已经从前面的静态应力分析中得到了。

Guyan 缩减 在这个方法中,有限元模型的自由度被设定为或是从属的或是主导的。要求从属自由度移动要受主导运动和$[\boldsymbol{K}]$的内容支配,不考虑惯性,就像在静态(或准静态)分析中一样。只有主导自由度出现在缩减的方程组中,其阶次与主导自由度的数目一致。

为了描述此种方法,我们从无阻尼自由振动的方程式 11.4-5 开始,根据主导自由度$\{\bar{\boldsymbol{D}}_m\}$和从属自由度$\{\bar{\boldsymbol{D}}_s\}$来分块。

$$\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{mm} & \boldsymbol{K}_{ms}\\ \boldsymbol{K}_{ms}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{K}_{ss}\end{bmatrix}-\omega^2\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_{mm} & \boldsymbol{M}_{ms}\\ \boldsymbol{M}_{ms}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{M}_{ss}\end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}\bar{\boldsymbol{D}}_m\\ \bar{\boldsymbol{D}}_s\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}\end{Bmatrix} \tag{11.6-1}$$

我们可以从下面的分块中解出$\{\bar{\boldsymbol{D}}_s\}$,代入上分块,由此得到一个较小的只有$\{\bar{\boldsymbol{D}}_m\}$作为自由度的系统,但是这样一个缩减系统的矩阵将是频率相关的。为得到与频率无关的变换,Guyan[11.25]和 Irons[11.26]建议主从之间的关系完全用刚度系数支配,因此我们忽略式 11.6-1 下分块的所有质量系数,从中得到

$$\{\boldsymbol{D}_s\}=-[\boldsymbol{K}_{ss}]^{-1}[\boldsymbol{K}_{ms}]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{D}_m\} \tag{11.6-2}$$

在式 11.6-2 中,上划线已经省略了,因为主从转换一般可以通用;这种应用不限于特征值问题。依据主导自由度,整个自由度数组可以用下述方程表示。

$$\{\boldsymbol{D}\}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{D}_m\\ \boldsymbol{D}_s\end{Bmatrix}=[\boldsymbol{T}]\{\boldsymbol{D}_m\}\quad\text{其中}\quad[\boldsymbol{T}]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}\\ -\boldsymbol{K}_{ss}^{-1}\boldsymbol{K}_{ms}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix} \tag{11.6-3}$$

其中$\lceil\boldsymbol{I}\rfloor$是(对角线)单元矩阵。物理上,当第 j 个主自由度有单位位移而其它主自由度有零位移时,$[\boldsymbol{T}]$的第 j 列代表结构的静态位移。这种位移状态有时称之为约束振型。

将式 11.6-3 代入式 11.4-5 中,接下来左乘$[\boldsymbol{T}]^{\mathrm{T}}$,就产生了缩减特征问题。

$$([\boldsymbol{K}_r]-\omega^2[\boldsymbol{M}_r])\{\bar{\boldsymbol{D}}_m\}=\{\boldsymbol{0}\}\quad\text{其中}\quad\begin{aligned}[\boldsymbol{K}_r]&=[\boldsymbol{T}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{K}][\boldsymbol{T}]\\ [\boldsymbol{M}_r]&=[\boldsymbol{T}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{M}][\boldsymbol{T}]\end{aligned} \tag{11.6-4}$$

类似于结构动力学基本方程式 11.2-12 的变换,得

$$[\boldsymbol{M}_r]\{\ddot{\boldsymbol{D}}_m\}+[\boldsymbol{C}_r]\{\dot{\boldsymbol{D}}_m\}+[\boldsymbol{K}_r]\{\boldsymbol{D}_m\}=\{\boldsymbol{R}_r^{\mathrm{ext}}\}\quad\text{其中}\quad\begin{aligned}[\boldsymbol{C}_r]&=[\boldsymbol{T}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{C}][\boldsymbol{T}]\\ [\boldsymbol{R}_r^{\mathrm{ext}}]&=[\boldsymbol{T}]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{R}^{\mathrm{ext}}\}\end{aligned} \tag{11.6-5}$$

式 11.6-4 和 11.6-5 表明缩减质量和阻尼矩阵是满的，即使初始的[C]和[M]矩阵是稀疏的或对角的。因此，如果 Guyan 缩减是减少而不是增加总体成本，从自由度必须在数量上明显超过主自由度。也因为没有把质量归于从属自由度，Guyan 缩减生成的[K_r]与静态缩减生成的一样，见第 6.7 节。这种意见可能认为 Guyan 缩减有另一种替代方法：用静态凝聚选择主导自由度，仅把质量集中到这些自由度上，并减小[K]。然而，这种替换通常精度较低，并且需要分析者的经验。

如果从自由度在求解主自由度后要恢复，可以用式 11.6-2。在特征值问题中为了有更高的精度，可以用保留的所有质量系数从式 11.6-1 的下分块中恢复第 i 个振型的从属自由度[11.27]。因此

$$\{\bar{\boldsymbol{D}}_s\}_i = -[\boldsymbol{K}_{ss} - \omega_i^2 \boldsymbol{M}_{ss}]^{-1}[\boldsymbol{K}_{ms}^{\mathrm{T}} - \omega_i^2 \boldsymbol{M}_{ms}^{\mathrm{T}}]\{\bar{\boldsymbol{D}}_m\}_i \tag{11.6-6}$$

图 11.6-1 的应用例子说明，大的阶次降低是可能的。因为施加在整个系统上的位移约束使缩减提高了最低振型的频率。通常，只有从缩减系统中得到的不到一半的频率才有足够的精度。精度可以利用较多也许较少的主导自由度通过反复分析来估算。

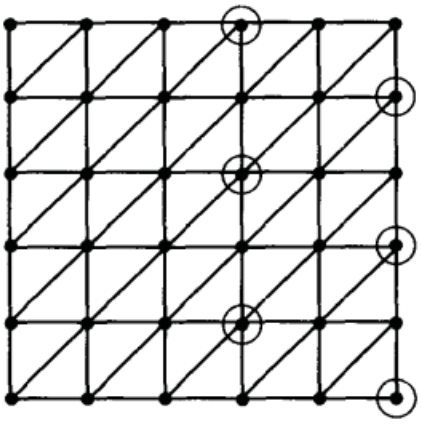


图 11.6-1 边长为 a，厚度为 t 的方形薄悬臂板一阶四个振动频率[11.28]，报告的数目是 $\sqrt{D/\rho t a^4}$ 的倍数

主自由度的选择 在实际中，用于 Guyan 缩减的主自由度个数的范围是总自由度的十分之一到一半。选择主导自由度的一些准则如下：

- 主导自由度应该在感兴趣的振型中有大的质量，大的挠度，或者两个都有。大的挠度意味着大的质量-刚度比。因此主导自由度通常是垂直于板或壳表面而不是与之相切的自由度，旋转自由度通常不是主导自由度。
- 主导自由度不应聚集在结构的一部分。由于群集，一些振型可能表述很差，而另一些甚至根本就不能表述。
- 指定随时间变化的力或位移的自由度应当保留为主自由度。

像下面描述的自动选择主自由度是可能的。如果软件的一些选择不合适或不充分，分析者可以根据良好的判断和对手头问题的熟悉程度来补偿或添加它们。

自动选择主自由度是基于启发式理由。如果有大质量-刚度比的自由度应该是主导自由度，则小质量-刚度比的就应为从属自由度。算法能够扫描[K]和[M]中的对角线记录，搜索

具有最小 M_{ii}/K_{ii} 比的自由度 i。通过凝聚消去此自由度，得到比[$\boldsymbol{K}$]和[$\boldsymbol{M}$]小一阶的缩减矩阵[$\boldsymbol{K}_r$]和[$\boldsymbol{M}_r$]。扫描缩减矩阵，寻找具有最小 M_{ii}/K_{ii} 的自由度，重复此缩减过程，则缩减矩阵又减小一个阶次。继续此过程直到留下用户设定保留的自由度数，这些就是主导自由度。另一方面，如果仅频率支配所需要的主导自由度数，当要消去的下一个自由度有质量-刚度比 m/k，以致于 $\sqrt{k/m}$ 表示的频率约认为是重要的最大频率的 3 倍时，这个过程可以停止。象征性地，前面一个一次性的缩减相当于式 11.6－4 中转换的重复应用，虽然从计算上，这不是一条最有效的途径。在文献[11.29～11.31]中给出了讨论和数值例子。

例题　考虑图 11.6－2 中一个单元的均匀梁。节点的振幅值为 $\bar{v}_1$ 和 $\bar{\theta}_{z2}$。使用传统的梁单元刚度矩阵和协调质量矩阵，我们得到特征问题

$$\left(\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix}12 & 6L\\ 6L & 4L^2\end{bmatrix}-\omega^2\frac{m}{420}\begin{bmatrix}156 & -13L\\ -13L & 4L^2\end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}\bar{v}_1\\ \bar{\theta}_{z2}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \tag{11.6-7}$$

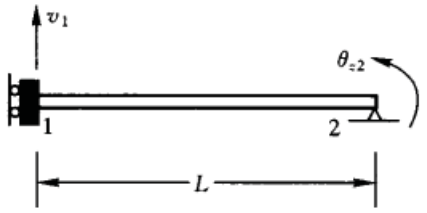


图 11.6－2　一均匀梁。左端允许位移但不能转动。右端简支

其中 m 是单元的总质量。对振型 1，梁理论所提供的精确值和式 11.6－7 所提供的近似值分别为

梁理论的精确值：	有限元分析的近似值：
$\omega_1^2=6.088\ 1EI/mL^3$	$\omega_1^2=6.136\ 2EI/mL^3$
$\bar{v}_1=1,\ \bar{\theta}_{z2}=-1.570\ 8/L$	$\bar{v}_1=1,\ \bar{\theta}_{z2}=-1.570\ 4/L$

(11.6－8)

对 Guyan 缩减，根据准则，选择 $\bar{v}_1$ 为主自由度，$\bar{\theta}_{z2}$ 为从自由度。使用式 11.6－3 和 11.6－4，在 $K_{ss}=4EI/L$ 和 $K_{ms}=6EI/L^2$ 情况下，得到

$$[\boldsymbol{T}]=\begin{bmatrix}1\\ -3/2L\end{bmatrix}\quad 和\quad \left(\frac{3EI}{L^3}-\omega_1^2\frac{204m}{420}\right)\bar{v}_1=0 \tag{11.6-9}$$

解得基本频率 $\omega_1^2=6.176\ 5EI/mL^3$。像期望的那样，这个结果比式 11.6－8 中的近似频率要高。设 $\bar{v}_1$ 为单位 1，从式 11.6－2 和 11.6－8 复原 $\bar{\theta}_{z2}$，分别得到振型形状

$$\bar{v}_1=1,\ \bar{\theta}_{z2}=-1.500\ 0/L\quad 和\quad \bar{v}_1=1,\ \bar{\theta}_{z2}=-1.570\ 9/L \tag{11.6-10}$$

比式 11.6－8 的近似值更精确的频率可以将$\{\bar{\boldsymbol{D}}\}=\lfloor\ 1\quad -1.570\ 9/L\ \rfloor^{\mathrm{T}}$ 代入瑞雷商，即式 11.4－13，用取自式 11.6－7 的[$\boldsymbol{K}$]和[$\boldsymbol{M}$]来得到。结果是 $\omega_1^2=6.136\ 2EI/mL^3$，像没有缩减从式 11.6－7 中获得的一样。注意，如果利用方程 11.6－10 的第一式，瑞雷商提供的将不是改进的，因而$\{\bar{\boldsymbol{D}}\}=\lfloor\ 1\quad -1.500\ 0/L\ \rfloor^{\mathrm{T}}$。

从这个问题，我们可以得到基于质点集中[$\boldsymbol{m}$]的基本频率，而不需要正式使用有限元分析。我们将质点质量 $m_1=m/2$ 置于节点 1。与节点 1 相关的横向刚度系数可以通过在节点 1

作用横向力 F_1 来获得,使用梁理论获得所产生的横向位移 $v_1=F_1L^3/3EI$,从中解得节点 1 的横向刚度系数 $K_1=F_1/v_1=3EI/L^3$。因此集中质量基本频率是 $\omega_1^2=K_1/m_1=6EI/mL^3$。注意,这些结果并不是上限。

11.7 响应历程:模态法

响应历程 提出的问题是,给定已知空间分布和随时间变化的载荷,将产生什么样的运动?也就是说,自由度的加速度,速度和位移是时间的什么函数?模态法和相关的里兹向量法,可以用可选择的(和缩减的)一组自由度来回答这个问题,解出作为时间函数的这些自由度,然后转换到原先的物理自由度。直接积分法可以解决这个问题,它保留初始自由度,并用时间增量 Δt 来积分运动方程。在实际中,各种方法可以组合使用,如利用直接法来积分模态法的缩减方程组。计算响应历程方法将在这一节和接下来的 11.8 节,以及 11.11 节和 11.14 节中讨论。

模态方程 设式 11.4-5 的每个特征向量 $\{\bar{\boldsymbol{D}}\}_i$ 相对于质量矩阵而言是正则化的,也就是,正则化以便使瑞雷商式 11.4-13 的分母为单位阵。因此

$$\text{如果}\quad \{\bar{\boldsymbol{D}}\}_i^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{M}]\{\bar{\boldsymbol{D}}\}_i=1 \qquad \text{则}\quad \{\bar{\boldsymbol{D}}\}_i^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{K}]\{\bar{\boldsymbol{D}}\}_i=\omega_i^2 \tag{11.7-1}$$

我们定义一个模态矩阵 $[\boldsymbol{\Phi}]$,其各列为相对于质量矩阵正则化的特征向量,一个对角频谱矩阵 $[\boldsymbol{\omega}^2]$,其列值是振动固有频率的平方。

$$[\boldsymbol{\Phi}]=[\bar{\boldsymbol{D}}_1 \quad \bar{\boldsymbol{D}}_2 \quad \cdots \quad \bar{\boldsymbol{D}}_n] \qquad \lceil \boldsymbol{\omega}^2 \rfloor=\lceil \omega_1^2 \quad \omega_2^2 \quad \cdots \quad \omega_n^2 \rfloor \tag{11.7-2}$$

其中 n 是没有被边界条件和约束消除的自由度总数。在附录 C 的 C.3 节中已经证明,当 $i\neq j$ 时,也就是当 $\{\bar{\boldsymbol{D}}\}_j$ 和 $\{\bar{\boldsymbol{D}}\}_i$ 是不同振型的特征向量时,$\{\bar{\boldsymbol{D}}\}_i^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{M}]\{\bar{\boldsymbol{D}}\}_j=0$ 和 $\{\bar{\boldsymbol{D}}\}_i^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{K}]\{\bar{\boldsymbol{D}}\}_j=0$。因此,从式 11.7-1 和 11.7-2 有

$$[\boldsymbol{\Phi}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{M}][\boldsymbol{\Phi}]=\lceil \boldsymbol{I} \rfloor \quad \text{和} \quad [\boldsymbol{\Phi}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{K}][\boldsymbol{\Phi}]=\lceil \boldsymbol{\omega}^2 \rfloor \tag{11.7-3}$$

其中,$\lceil \boldsymbol{I} \rfloor$ 是单位矩阵。任意位移向量 $\{\boldsymbol{D}\}$ 可以用特征向量的线性组合来表示;也就是说,$\{\boldsymbol{D}\}=\{\bar{\boldsymbol{D}}\}_1Z_1+\{\bar{\boldsymbol{D}}\}_2Z_2+\cdots+\{\bar{\boldsymbol{D}}\}_nZ_n$。因此

$$\{\boldsymbol{D}\}=[\boldsymbol{\Phi}]\{\boldsymbol{Z}\} \qquad \{\dot{\boldsymbol{D}}\}=[\boldsymbol{\Phi}]\{\dot{\boldsymbol{Z}}\} \qquad \{\ddot{\boldsymbol{D}}\}=[\boldsymbol{\Phi}]\{\ddot{\boldsymbol{Z}}\} \tag{11.7-4}$$

Z_i 为广义的自由度,常称为模态坐标或模态位移。它们定义了每个向 $\{\boldsymbol{D}\}$ 做贡献的特征向量的系数。我们建议把 Z_i 作为时间的函数来计算,然后利用式 11.7-4 得到作为时间函数的 $\{\boldsymbol{D}\}$。因为模态组合用式 11.7-4 表示,模态法也常称为振型叠加法。

目前,我们在方程中保留所有 n 个自由度。将式 11.7-4 代入式 11.2-12 中,左乘以 $[\Phi]^{\mathrm{T}}$,并注意到式 11.7-3,得到

$$\{\ddot{\boldsymbol{Z}}\}+[\boldsymbol{C}_\Phi]\{\dot{\boldsymbol{Z}}\}+\lceil \boldsymbol{\omega}^2 \rfloor\{\boldsymbol{Z}\}=\{\boldsymbol{R}_\Phi\} \quad \text{其中} \quad \{\boldsymbol{R}_\Phi\}=[\boldsymbol{\Phi}]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{R}^{\mathrm{ext}}\} \tag{11.7-5}$$

如果使用式 11.5-1 的比例阻尼,$[\boldsymbol{C}_\Phi]$ 为对角矩阵 $[\boldsymbol{C}_\Phi]=\alpha\lceil \boldsymbol{I} \rfloor+\beta\lceil \boldsymbol{\omega}^2 \rfloor$。模态法经常使用模态阻尼,这是黏性阻尼的另一种表示法,就其物理合理性或多或少与比例阻尼差不多。为得到

模态阻尼，任意在式 11.7－5 中定义$[\boldsymbol{C}_\Phi]$为对角矩阵，它的第 i 个对角线系数为 $2\xi_i\omega_i$，其中 ξ_i 为分析者指定的振型 i 的阻尼比。因此为每个振型使用合适或经验确定的 ξ_i 或选择阻尼更高的振型成为可能。

因为阻尼矩阵和$[\boldsymbol{\omega}^2]$都是对角阵，可对式 11.7－5 解耦。对模态阻尼，任意振型 i 的一般方程为

$$\ddot{Z}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{Z}_i + \omega_i^2 Z_i = P_i \qquad \text{其中} \qquad P_i = \{\boldsymbol{\Phi}\}_i^{\mathrm{T}}\{R^{\mathrm{ext}}\} \tag{11.7-6}$$

这里$[\boldsymbol{\Phi}_i]$为$[\boldsymbol{\Phi}]$的第 i 列。因此，$[\boldsymbol{\Phi}_i]$是第 i 个特征向量$\{\bar{\boldsymbol{D}}\}_i$，正则化以致能满足式 11.7－1 的第一式。模态载荷 P_i 因此也是已知时间的函数。方程 11.7－6 与式 11.4－3 有相同的形式，是为单自由度系统推导的。对每个 i，式 11.7－6 必须在时域积分。对某种类型的载荷精确积分是可能的[11.1~11.3]。对一般载荷，可以使用在第 11.13 节中讲述的直接积分法。开始积分需要初始条件。它们可以用倒置式 11.7－4 来获得。如果用$[\boldsymbol{\Phi}]^{-1}$右乘式 11.7－3 的第一式$[\Phi]^{-1}$，我们看到$[\boldsymbol{\Phi}]^{-1}=[\boldsymbol{\Phi}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{M}]$。因此

$$\{\boldsymbol{Z}\} = [\boldsymbol{\Phi}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{M}]\{\boldsymbol{D}\} \qquad \{\dot{\boldsymbol{Z}}\} = [\boldsymbol{\Phi}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{M}]\{\dot{\boldsymbol{D}}\} \tag{11.7-7}$$

从中可在 $t=0$ 时刻由已知的$\{\boldsymbol{D}\}$和$\{\dot{\boldsymbol{D}}\}$的值来确定 $t=0$ 时刻的$\{\boldsymbol{Z}\}$和$\{\dot{\boldsymbol{Z}}\}$。

如果结构是部分或完全无约束的，直到矩阵$[\boldsymbol{\Phi}]$的前 6 列是刚体振型，它们在物理结构中激活的不是弹性力。如果这些振型没有阻尼，它们就是通常情况，式 11.7－6 简化为刚体运动的 $\ddot{Z}_i=P_i$。如果希望的话，这个对整个响应的贡献可以单独从变形响应来计算[11.1]。

降阶 对于所有保留的 n 个振型，式 11.7－6 是式 11.2－12 数学上的精确表达式。只是形式发生了变化。对许多实际问题，振型分析的好处在于只需要保留特征谱的最低部分。因此代替式 11.7－4，我们写出

$$\{\boldsymbol{D}\} \approx \sum_{i=1}^{m}\{\boldsymbol{\Phi}\}_i Z_i \quad \text{其中}\{\boldsymbol{D}\}\text{和}\{\boldsymbol{\Phi}\}_i\text{是}n\times 1\text{的，一般情况}\ m \ll n \tag{11.7-8}$$

实际上，$[\boldsymbol{\Phi}]$通常是 $n\times m$ 的矩阵而不是 $n\times n$ 方阵，以至于它前面很少的几列构成了缩减基数。在许多问题中，$m\ll n$ 提供了需要的精度。对地震加载的结构，m 可能小于 20，而 n 却超过 1000。因而特征解仅仅需要从式 11.4－5 中提取少量频率和振型，方程组 11.7－6 在数量上也很少。根据式 11.7－8 从算出的 Z_i 来计算$\{\boldsymbol{D}\}$可以称之为扩展。

在具有 $m<n$ 的模态分析中涉及到的误差度量可以从式 11.2－12 中得到[2.14]：

$$e(t) = \frac{\|\{\boldsymbol{R}^{\mathrm{ext}}\} - [\boldsymbol{M}]\{\ddot{\boldsymbol{D}}\} - [\boldsymbol{C}]\{\dot{\boldsymbol{D}}\} - [\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}\|}{\|\{\boldsymbol{R}^{\mathrm{ext}}\}\|} \tag{11.7-9}$$

其中$\{\boldsymbol{D}\}$和它的时间导数从式 11.7－8 中获得，$\|\cdot\|$表示任何向量范数。分子是实际载荷和由截断振型组生成的载荷之差的度量。假定在 $e(t)$时刻计算$\{\boldsymbol{R}^{\mathrm{ext}}\}\neq\{\boldsymbol{0}\}$。其它时间，分子应该趋近于零。在整个分析期间，$e(t)$应该很小(像推测的那样，小于 1%)。

缩减振型组应该包括所有较低阶振型，没有疏漏，直到带有所选频率的振型。但是什么样的频率？也许是加载中包含的最高重要频率的 2 倍。但这个答案太简单了，因为所需的振型数量不仅与载荷的频率含量有关，而且还和它的空间的复杂程度有关，除了位移外，是否还需要其他结果，以及什么样的精确度。保留的振型必须包含载荷时域变化的频率。自由振动的

振型与载荷的复杂程度无关,所以必须保留足够的振型来近似与载荷空间变化有关的位移和位移导数,这些可能是获得应力时所需要的(很显然,有限元网格细化到足以提供这些近似程度很好的振型和频率)。因此,当必须计算弯矩和横向剪力,必须用式 11.7-4 计算速度和加速度时,加载在时间上变得越突然,在空间上变得越没有规则,就越需要更多的振型。将在第 11.16 节做更深入的探讨。参考文献有[2.14,2.21,10.6,11.3,11.21]。

静态修正 对于截断振型组,式 11.7-5 中的$\{\boldsymbol{R}_\Phi\}$是近似的载荷向量,与较低振型有关,并产生由这些振型代表的响应。在任意时间瞬间,精确载荷向量减去近似载荷向量是一个差值向量,它包含有空间分布的载荷模式,比能够用保留振型表示的更复杂。如果保留振型覆盖足够的频率范围,即使保留更多的振型,差值向量也会产生小的速度或加速度。因此,对差值向量的响应能通过静态分析来计算,并作为修正叠加到前面振型法计算的动力响应上。包括这个修正,载荷空间分布可以更好地描述,对于给定数量的振型,精度会有所增加。或者,使用更少的振型而得到同等的精度。

这种修正可以用几种方法中的任何一个来完成。一类方法叫做振型加速度法[11.1,11.3,11.32~11.34]。这个名字与前面模态法区别开来,也可以叫做振型位移法。基本思想是通过模态转换只转换式 11.2-12 中的加速度和速度项,留下对$\{\boldsymbol{D}\}$的贡献,而$\{\boldsymbol{D}\}$是按$[\boldsymbol{K}]^{-1}\{\boldsymbol{R}^{\text{ext}}\}$来计算的。

用静态修正能够获得与由振型加速度法提供的相类似或甚至等同的结果。这种方法在处理一种加载时很有用,这种加载的空域复杂性要求许多振型但其时域复杂性能够用较少量的振型来表示[11.3]。这些方法不止一种形式[2.14,11.3,11.33~11.35]。对于一种简单形式,考虑保留了所有振型的式 11.7-5 的载荷项,利用式 11.7-3 的第一式。于是

$$\{\boldsymbol{R}_\Phi\} = [\boldsymbol{\Phi}]^{\text{T}}\{\boldsymbol{R}^{\text{ext}}\} = [\boldsymbol{\Phi}]^{\text{T}}[\boldsymbol{M}][\boldsymbol{\Phi}]\{\boldsymbol{R}_\Phi\} \quad \text{因此} \quad \{\boldsymbol{R}^{\text{ext}}\} = [\boldsymbol{M}][\boldsymbol{\Phi}]\{\boldsymbol{R}_\Phi\} \tag{11.7-10}$$

如果使用截断振型组,后面的方程是由保留振型描述的近似载荷向量$\{\boldsymbol{R}^{\text{ext}}\}_{\text{approx}}$。静态修正$\{\Delta D\}$,加到通过振型叠加计算的$\{\boldsymbol{D}\}$上,

$$[\boldsymbol{K}]\{\Delta\boldsymbol{D}\} = \{\boldsymbol{R}^{\text{ext}}\} - \{\boldsymbol{R}^{\text{ext}}\}_{\text{approx}} \qquad \text{其中} \qquad \underset{n\times 1}{\{\boldsymbol{R}^{\text{ext}}\}_{\text{approx}}} = \underset{n\times n}{[\boldsymbol{M}]}\ \underset{n\times m}{[\boldsymbol{\Phi}]}\ \underset{m\times n}{[\boldsymbol{\Phi}]^{\text{T}}}\ \underset{n\times 1}{\{\boldsymbol{R}^{\text{ext}}\}} \tag{11.7-11}$$

结构必须有支撑,以便式 11.7-11 中的$[\boldsymbol{K}]$是非奇异的。矩阵$[\boldsymbol{K}]$需要缩减是为了方程仅作一次性求解,尽管$\{\Delta\boldsymbol{D}\}$在每个瞬间必须计算,并希望为此进行修正。如果$\{\boldsymbol{R}^{\text{ext}}\}$表示一个固定空间分布而强度随时间变化的载荷,$\{\Delta\boldsymbol{D}\}$只需要从一个时刻到另一个时刻变化时进行正则化处理。

非线性问题 材料非线性使得$[\boldsymbol{K}]$(也可能是$[\boldsymbol{C}]$)与时间有关。根据式11.7-1到11.7-8的模态分析变得不适用,因为固有频率和振型不再与时间无关,也因为叠加原则不再有效。然而,可以通过在右手边加入非线性项,并将其与载荷向量$\{\boldsymbol{R}^{\text{ext}}\}$合并来适应非线性问题。在每个时间步,必须应用式 11.7-4(因为需要用物理自由度来修正非线性项),振型载荷$\{\boldsymbol{R}_\Phi\}$必须重新计算。因而,这个过程可能类似于重复坐标变换,而不像传统的振型叠加。当非线性既不严重也不普遍时,这个方法是比较合适的。否则,直接积分法可能更合适。参考文

献见[11.36～11.38]。

11.8 响应历程:里兹向量

在 11.7 节中介绍的模态方法有弊端。解决特征问题需要的计算花费较大。特征向量与施加载荷的空间分布无关,这使得很难预见需要多少特征向量。如果其频率包含在载荷内的特征向量与载荷正交,则它将对响应没有贡献。

人们可以用由载荷构建的里兹向量,而不用特征向量作为缩减的基数。静态修正,一种对模态法的有益补充,自动地包括于里兹向量中。里兹向量法在某种意义上是与模态法相反的:模态法含盖载荷的频率数容量,而不是近似其空间分布,而里兹向量法含盖载荷的空间分布,而不是近似其频率数容量[11.34]。在一项研究中,里兹向量生成只需要决定特征向量的 1/10 时间,整个里兹向量法需要的时间也只有模态分析时间的 1/3[11.39]。然而,为更好地理解结构行为,用于谐波响应和响应谱分析,或许无论如何也要计算固有频率和振型。

下面,我们以其原始形式总结里兹向量[11.40]。它的改进,如预先确定需要多少和误差分析,可参考文献[11.3,11.24,11.40,11.41]。

里兹向量的生成 考虑一个与时间有关的外部载荷,它能够表示成

$$\{\boldsymbol{R}^{\text{ext}}\} = s\{\boldsymbol{S}\} \tag{11.8-1}$$

其中$\{\boldsymbol{S}\}$描述$\{\boldsymbol{R}^{\text{ext}}\}$的空间分布,$s=s(t)$是描述振幅的时间标量函数。设结构对载荷的响应描述为

$$\{\boldsymbol{D}\} = [\boldsymbol{W}]\{\boldsymbol{a}\} \qquad \{\dot{\boldsymbol{D}}\} = [\boldsymbol{W}]\{\dot{\boldsymbol{a}}\} \qquad \{\ddot{\boldsymbol{D}}\} = [\boldsymbol{W}]\{\ddot{\boldsymbol{a}}\} \tag{11.8-2}$$

其中,$[\boldsymbol{W}]$是其列为里兹向量的矩阵,$\{\boldsymbol{a}\}$是广义自由度向量,它的单个项 a_i 是相应里兹向量的幅值。像式 11.7-8 中截断振型组,$[\boldsymbol{W}]$组成了缩减基数。$[\boldsymbol{W}]$的大小为 $n\times m$,其中 n 为整个系统的阶次,m 为里兹向量的个数,在实际中,$m\ll n$。

更复杂的外部载荷可能必须通过叠加两种或更多 $s\{\boldsymbol{S}\}$类型的载荷来描述。对线性条件,能够用对另一个分量的响应来与结构对每个这样的载荷分量的响应叠加。如果需用 l 个分量来表示这个载荷,式 11.8-1 和式 11.8-2 的第一个可由下式替代

$$\{\boldsymbol{R}^{\text{ext}}\} = \sum_{j=1}^{l} s_j\{\boldsymbol{S}\}_j \qquad \text{和} \qquad \{\boldsymbol{D}\} = \sum_{j=1}^{l}\{\boldsymbol{D}\}_j = \sum_{j=1}^{l}[\boldsymbol{W}]_j\{\boldsymbol{a}\}_j \tag{11.8-3}$$

通常 l 很小;实际上对于地震载荷,通常用 $l=1$。下面我们忽略下标 j,认为$\{\boldsymbol{S}\}$可以代表任何$\{\boldsymbol{S}\}_j$。

对于$[\boldsymbol{K}]$为 $n\times n$ 的总体刚度矩阵,我们应用$\{\boldsymbol{S}\}$作为静态载荷,解出所产生的位移向量$\{\boldsymbol{W}^*\}_1$。当相对于质量矩阵正则化时,$\{\boldsymbol{W}^*\}_1$ 变成了第一批里兹向量$\{\boldsymbol{W}\}_1$,并作为$[\boldsymbol{W}]$的第一列被输入。因此

$$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{W}^*\}_1 = \{\boldsymbol{S}\} \qquad b^2 = \{\boldsymbol{W}^*\}_1^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{M}]\{\boldsymbol{W}^*\}_1 \qquad \{\boldsymbol{W}\}_1 = \frac{1}{b}\{\boldsymbol{W}^*\}_1 \tag{11.8-4}$$

对于任意振动频率 ω,$\omega^2[M]\{W\}_1$ 表示式 11.8-4 没有考虑的惯性力载荷向量。这些载荷可以认为是误差向量,用作静态载荷以产生新的里兹向量$\{W\}_2$。以类似的形式,$\omega^2[M]\{W\}_2$ 也能认为是误差向量,用来产生$\{W\}_3$,等等。通过这一过程,所有生成的里兹向量都有用特定作用载荷激励的形式[11.40]。为了在第一个之后产生里兹向量,执行下面的计算。对于 $i=2,3,\cdots,m$,

$$[K]\{W^*\}_i = [M]\{W\}_{i-1} \quad \text{解出} \quad \{W^*\}_i \tag{11.8-5a}$$

$$\{W^{**}\}_i = \{W^*\}_i - \sum_{k=1}^{i-1} c_k \{W\}_k \quad \text{其中} \quad c_k = \{W\}_k^T[M]\{W^*\}_i \tag{11.8-5b}$$

$$\{W\}_i = \frac{1}{b}\{W^{**}\}_i \quad \text{其中} \quad b^2 = \{W^{**}\}_i^T[M]\{W^{**}\}_i \tag{11.8-5c}$$

在式 11.8-5a 中,注意到为了求解方程[K]只需变化一次,但它必须是非奇异的,因此结构不能有刚体振型或机构。式 11.8-5 使每个里兹向量与前述那些正交。正交化解释和对可能的缺点备注见文献[11.3,11.41]。

将式 11.8-1 和式 11.8-2 代入式 11.2-12 中,然后左乘$[W]^T$,得到缩减系统

$$\{\ddot{a}\} + [C_a]\{\dot{a}\} + [K_a]\{a\} = s[W]^T\{S\} \quad \text{其中} \quad \begin{aligned}[C_a] &= [W]^T[C][W] \\ [K_a] &= [W]^T[K][W]\end{aligned} \tag{11.8-6}$$

其中$\{\ddot{a}\}$的系数为隐含的单位矩阵,因为已使里兹向量与质量矩阵正交。矩阵$[C_a]$和$[K_a]$为满阵,阶次为 m,但 m 很小,因此用直接积分的动态响应分析可能是经济的。换句话说,也许能更好地从缩减系统提取特征向量,把模态分析应用于缩减系统。初始系统的特征向量大约是简化系统特征向量的$[W]$倍。

如果载荷$\{S\}$为零,就一个初始速度$\{\dot{D}\}_0$设定后自由运动的结构而论,式 11.8-4 不能提供$\{W\}_1$。在这种情况下,可简单设置$\{W^*\}_1$等于$\{\dot{D}\}_0$,然后执行式 11.8-5。

11.9 组件振型综合法(CMS)

组件振型综合法(CMS)的别名又叫模态综合、子结构综合和动态子结构法。此方法与第 10.11 节静态子结构相类似,但动态子结构不保留全系统的所有信息。就像在静态分析中,使用组件振型综合法的动机部分是经济原因,部分是管理上的原因。减少阶次对于经济计算是必需的。当结构形式重复出现几次时,子结构就变得更具吸引力。不同设计群体和组织在不同子结构上开展工作是很方便的。重新设计子结构不影响其他的组件振型。在部件组集以后,缩减系统通常可以用于结构动力学:计算完整结构的频率和振型、响应历程分析等。

有多种组件振型综合法可供利用;文献[2.20,11.1,11.21,11.42~11.46]就是许多参考文献中的少数几个。这里我们仅仅概述 Craig-Bampton 法,此方法应用最广[11.1]。术语如下。

*连接自由度*是子结构连接在一起的线和面上节点的自由度。*组件振型*是具有它们固定连接自由度的单个子机构的振动振型。*约束振型*是单个子结构的静态位移形式,它是依次施加给每个连接自由度一个单位位移,与此同时保持所有其它连接自由度固定的情况下产生的。(在这些计算中,任何承受集中外载荷的附加自由度应该像连接自由度来对待。)

简而言之，组件振型综合法通过少得多的约束振型和组件振型来表述子结构的许多自由度。减小子结构矩阵的过程可以认为是里兹向量变换，类似于式 11.8－6 的转换。缩减形式的完整结构，由沿共享连接节点组集子结构"综合"在一起，其方式与在共享节点上用连接它们把单个有限元组集在一起一样。综合结构的自由度就是它的连接自由度和子结构的组件振型，而子结构的组件振型起内部无节点自由度的作用。此方法有点类似于 11.6 节的 Guyan 缩减，但带有组件振型作为附加广义自由度。像 11.6 节中描述的 Guyan 缩减不太合适，因为其主自由度会沿连接自由度的线或面出现，Guyan 缩减可能不适宜地把它们聚集在一起。就如在静态子结构中一样，为组件振型综合法划分子结构应沿较短的结构尺寸方向进行，以便减少连接自由度的数目(图10.11－1(a))。如第 6.7 节描述的一样，不像静态分析，内部自由度不能静态凝聚，因为他们的运动是由内力以及弹性力决定的。

为得到完整结构的固有频率，需要求解下述形式的特征值问题

$$([\boldsymbol{K}]_{\mathrm{CMS}} - \omega_i^2[\boldsymbol{M}]_{\mathrm{CMS}})\{\bar{\boldsymbol{Z}}\}_i = \{\boldsymbol{0}\} \tag{11.9-1}$$

其中 i 是振型数，方阵是综合结构的刚度和质量矩阵，$\{\bar{\boldsymbol{Z}}\}$ 是组件振型的和连接自由度的振幅向量。我们期望 $\{\bar{\boldsymbol{Z}}\}$ 的阶次远小于原始结构的自由度数。因为施加约束条件是为了得到式 11.9－1，它得到特征值高于初始有限元结构的相应特征值，为其保留了所有自由度。可以想象，在得到式 11.9－1 的矩阵中使用的所有里兹向量正交于实际结构的特征向量，而在实际结构情况中的振型将不能用式 11.9－1 来表示。重要的低阶振型丢失的可能性会变得更小，因为在分析中保留的组件振型数增加了。

列式　典型子结构 j 的组件振型可以通过固定所有子结构连接自由度，并解通常的无阻尼振动问题来得到。

$$([\boldsymbol{K}_{nn}]_j - \omega_l^2[\boldsymbol{M}_{nn}]_j)\{\bar{\boldsymbol{D}}_l\}_j = \{\boldsymbol{0}\} \qquad [\boldsymbol{\Phi}]_j = [\bar{\boldsymbol{D}}_1 \quad \bar{\boldsymbol{D}}_2 \quad \cdots \quad \bar{\boldsymbol{D}}_k]_j \tag{11.9-2}$$

其中下标 n 用来表示不是连接自由度的那些子结构自由度。下标 l 标识组件(子结构)振型，k 是保留在模态矩阵 $[\boldsymbol{\Phi}]_j$ 中的振型数量。保留的振型数量由分析者酌情处理，但一般比子结构的自由度的数小得多。对于 n 个非连接自由度，$[\boldsymbol{\Phi}]_j$ 是个 $n \times k$ 数组。

子结构 j 的约束振型利用带包括连接自由度的子结构刚度矩阵通过静态分析获得。下标 a 表示连接自由度，下标 n 表示所有其它子结构的自由度，它们被看做内部自由度。

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{nn} & \boldsymbol{K}_{na} \\ \boldsymbol{K}_{na}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{K}_{aa} \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi} \\ \boldsymbol{I} \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{R} \end{bmatrix}_j \tag{11.9-3}$$

其中$\lceil \boldsymbol{I} \rfloor$是单位矩阵，如果子结构有 a 个连接自由度，则大小为 $a \times a$。矩阵$\lceil \boldsymbol{I} \rfloor$依次表示每个连接自由度的单位位移而同时其它的保持固定。对于第 m 个连接自由度的单位位移，$[\boldsymbol{\Psi}]$的第 m 列是产生的内部自由度向量，而$[\boldsymbol{R}]$的第 m 列是在连接自由度上产生的反作用力向量。由式 11.9－3 的上面部分得到

$$[\boldsymbol{\Psi}]_j = -[\boldsymbol{K}_{nn}]_j^{-1}[\boldsymbol{K}_{na}]_j \tag{11.9-4}$$

在子结构 j 的初始自由度 $\{\boldsymbol{D}\}_j$ 和用于综合的替代自由度间的变换为

$$\{\boldsymbol{D}\}_j = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{D}_n \\ \boldsymbol{D}_a \end{Bmatrix}_j = [\boldsymbol{W}]_j \begin{Bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{D}_a \end{Bmatrix}_j \qquad \text{其中} \qquad [\boldsymbol{W}]_j = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi} & \boldsymbol{\Psi} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}_j \tag{11.9-5}$$

其中$\{\boldsymbol{a}\}_j$是类似于式11.7-4中$\{\boldsymbol{Z}\}$的模态坐标向量，$\{\boldsymbol{D}_n\}$包含除连接自由度之外的子结构自由度，$\{\boldsymbol{D}_a\}$包含连接自由度。式11.9-5类似于Guyan缩减的式11.6-3，但带有加入的内部振动振型。保留的振型数由分析者酌定。对第j个子结构，缩减的刚度矩阵和质量矩阵为$[\boldsymbol{W}]_j^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{K}][\boldsymbol{W}]_j$和$[\boldsymbol{W}]_j^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{M}][\boldsymbol{W}]_j$，它们依据模态振幅$\{\boldsymbol{a}\}_j$和连接自由度$\{\boldsymbol{D}_a\}_j$运算。缩减矩阵组集得到式11.9-1。其过程将在下面的数值例子中说明。

用包括在$[\boldsymbol{\Phi}]$中的最低振型，CMS在描述组集后结构的较低振型时是有效的。用包含类似于式11.6-6的修正能够提高表示所选ω_i附近较高振型的成功率[11.46]。

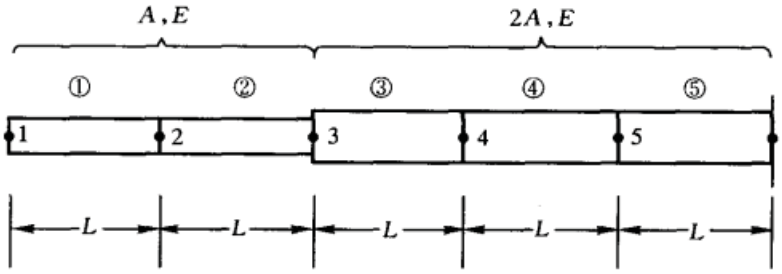


图11.9-1 阶梯形横截面杆用5个单元建模，每个都是均匀的，长度为L

示例 考虑图11.9-1中不均匀杆的轴向振动。整个结构的刚度和集中质量矩阵为

$$[\boldsymbol{K}]=\frac{AE}{L}\begin{bmatrix}1&-1&0&0&0\\-1&2&-1&0&0\\0&-1&3&-2&0\\0&0&-2&4&-2\\0&0&0&-2&4\end{bmatrix}\qquad[\boldsymbol{M}]=\frac{\rho AL}{2}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&2&0&0&0\\0&0&3&0&0\\0&0&0&4&0\\0&0&0&0&4\end{bmatrix}\tag{11.9-6}$$

选择两个子结构。第一个由单元1和单元2组成；第二个由单元3，4和5组成。节点3提供仅有的连接自由度。对于固定的节点3，子结构1的矩阵为

$$[\boldsymbol{K}_{mm}]_1=\frac{AE}{L}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&2\end{bmatrix}\qquad[\boldsymbol{M}_{mm}]_1=\frac{\rho AL}{2}\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\tag{11.9-7}$$

对于节点3和固定的右端，子结构2的矩阵为

$$[\boldsymbol{K}_{mm}]_2=\frac{AE}{L}\begin{bmatrix}4&-2\\-2&4\end{bmatrix}\qquad[\boldsymbol{M}_{mm}]_2=\frac{\rho AL}{2}\begin{bmatrix}4&0\\0&4\end{bmatrix}\tag{11.9-8}$$

接下来，为简单起见，我们假设$AE/L=1$和$\rho AL/2=1$。对子结构1，式11.9-2的特征问题用式11.9-7的矩阵来求解。结果为

$$\omega_1^2=0.293\qquad\omega_2^2=1.707\qquad\{\bar{\boldsymbol{D}}_1\}_1=\begin{Bmatrix}1\\\sqrt{2}/2\end{Bmatrix}\qquad\{\bar{\boldsymbol{D}}_2\}_1=\begin{Bmatrix}1\\-\sqrt{2}/2\end{Bmatrix}\tag{11.9-9}$$

这里使特征向量正则化，因此第一个系数有单位振幅。同样的解法，现在对子结构 2，用式 11.9－8的矩阵，得到

$$\omega_1^2 = 0.500 \qquad \omega_2^2 = 1.500 \qquad \{\bar{\boldsymbol{D}}_1\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \{\bar{\boldsymbol{D}}_2\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \tag{11.9-10}$$

下面，我们写出第一个子结构的刚度矩阵，像式 11.9－3 一样分块，并用式 11.9－4 来获得式 11.9－5。标记 u_1，u_2 和 u_3 仅为为了表示涉及到的自由度。选择仅仅保留第一个组件的振型。

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ \hdashline 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ \\ u_3 \end{matrix} \qquad [\boldsymbol{\Psi}]_1 = -\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad [\boldsymbol{W}]_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2}/2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11.9-11}$$

第一个子结构没有固定边界。因此出现在$[\boldsymbol{W}]_1$ 的第二列中的$[\boldsymbol{\Psi}]_1$ 描述了刚体平移。

第二个子结构也可以类似对待。连接自由度 u_3 现在优先于内部自由度 u_4 和 u_5，因此为了构建$[W]_2$，通过交换两行和两列来重新排列在式 11.9－5 中的$[\boldsymbol{W}]_j$ 子矩阵。再次选择仅仅保留第一个组件振型。

$$\left[\begin{array}{ccc} 2 & -2 & 0 \\ \hdashline -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{array}\right] \begin{matrix} u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{matrix}$$

$$[\boldsymbol{\Psi}]_2 = -\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{Bmatrix} \qquad [\boldsymbol{W}]_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2/3 & 1 \\ 1/3 & 1 \end{bmatrix} \tag{11.9-12}$$

对于无固定节点，子结构 1 的缩减刚度和质量矩阵分别为

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{W}]_1^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} [\boldsymbol{W}]_1 &= \begin{bmatrix} 0.585\,8 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ [\boldsymbol{W}]_1^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [\boldsymbol{W}]_1 &= \begin{bmatrix} 2.000 & 2.414 \\ 2.414 & 4.000 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{11.9-13}$$

只固定最右边的节点，子结构 2 的缩减刚度矩阵和质量矩阵分别为

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{W}]_2^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} [\boldsymbol{W}]_2 &= \begin{bmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \\ [\boldsymbol{W}]_2^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} [\boldsymbol{W}]_2 &= \begin{bmatrix} 4.222 & 4.000 \\ 4.000 & 8.000 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{11.9-14}$$

节点 3 为两个子结构共用，其矩阵是通过在普通自由度 u_3 上重叠它们来组集的。综合结构的

振动，式 11.9－1，通过下面的方程来描述，其中第一个矩阵是对角线的，因为在这个例子中只有一个连接自由度。

$$\left(\begin{bmatrix}0.585\,8 & 0 & 0\\ 0 & 0.666\,7 & 0\\ 0 & 0 & 4.000\end{bmatrix}-\omega_i^2\begin{bmatrix}2.000 & 2.414 & 0\\ 2.414 & 8.222 & 4.000\\ 0 & 4.000 & 8.000\end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}a_1\\ u_3\\ a_2\end{Bmatrix}_i=\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix} \tag{11.9-15}$$

得到的结果如表 11.9－1 所示。与预期的一样，缩减模型得到的频率比初始模型的要高。

如果保留两个子结构的两个组件振型，转换矩阵将不是式 11.9－11 和式 11.9－12，而变为

$$[\boldsymbol{W}]_1=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad[\boldsymbol{W}]_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2/3 & 1 & 1\\ 1/3 & 1 & -1\end{bmatrix} \tag{11.9-16}$$

当然，没有实际的原因来保留所有振型，因为那时缩减问题就和初始的大小一样了，但是可以保证的是，在这种情形下，CMS 不会引起精度的损失（表 11.9－1）。

表 11.9－1 图 11.9－1 所示结构的固有频率，初始结构和用组件振型综合的计算结果

方法	ω_1	ω_2	ω_3
初始结构（5 自由度）	0.265 1	0.615 6	1.000
CMS（2 组件振型，3 自由度）	0.265 3	0.616 1	1.051
CMS（4 组件振型，5 自由度）	0.265 1	0.615 6	1.000

11.10 谐波响应

谐波响应分析寻求对已知幅值载荷的响应振幅，该载荷随时间以已知频率呈正弦形式变化。另外的名称包括*频率响应分析*和*强迫振动*，可理解为强迫函数谐波性变化。谐波载荷可以通过连接其上以恒定速度运转的机械作用于结构上。谐波响应指的是在初始瞬态因阻尼而消失之后仍以恒定的振幅和强迫函数的频率持续的振动（图 11.10－1）。下面就略述谐波响应分析的模态方法。从应用中得到的结果见第 11.17 节。

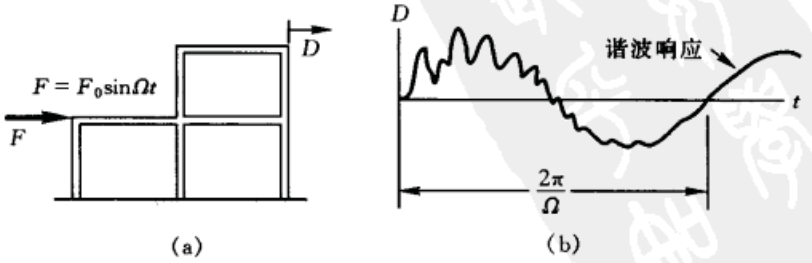


图 11.10－1 （a）受谐波型加载的建筑刚架；
（b）一个特定自由度的可能响应，显示瞬态分量的衰减

首先，考虑图 11.2－1(a)的单自由度系统，载荷 $r=F_0\sin\Omega t$，其中力 F_0 和频率 Ω 都是常数。由基本振动理论[11.1~11.3]，谐波响应为

$$\bar{u}=\frac{1}{[(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2]^{1/2}}\left(\frac{F_0}{k}\right)\qquad \text{其中}\quad \alpha=\arctan\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}$$
$$u=\bar{u}\sin(\Omega t-\alpha)\qquad\qquad \beta=\Omega/\omega \qquad (11.10-1)$$
$$\omega=\sqrt{k/m}$$

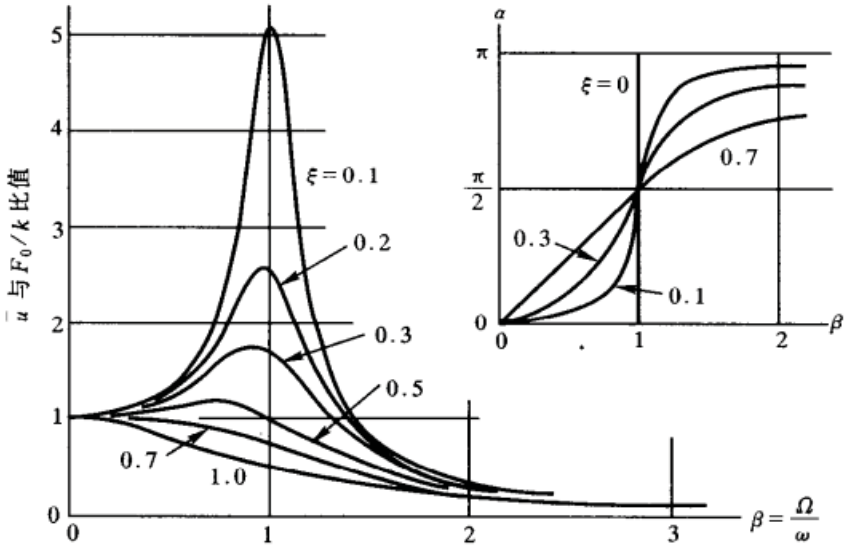


图 11.10－2　对于图 11.2－1(a)中有 $r=F_c\sin\Omega t$ 的单自由度系统，其动态位移幅值 $\bar{u}$ 和静态位移 F_0/k 之比值及相位角 α

ξ 为阻尼比(式 11.4－2)。谐波响应振幅 $\bar{u}$ 与静态位移 F_0/k 成比例，可以通过与 β 和 ξ 相关的动态放大因子来修改。对于几个 ξ 值，振幅 $\bar{u}$ 对 β 的关系曲线如图 11.10－2。响应 u 滞后强迫函数 r 一个 α 相位角。当 $\Omega\approx\omega$ 时，静态位移 F_0/k 被最大程度地放大。放大倍数最大时的 Ω 称为共振频率[11.3]。我们看到当 $\xi<0.1$ 时，最大振幅是可能的，在大多数结构中通常就是这样。在一个共振频率，阻尼是阻止振动振幅无限增大的全部力，尽管在大振幅响应时可能为产生的非线性所限制。另一方面，当 $\beta^2>2$ 时，不管 ξ 如何，$\bar{u}<F_0/k$。当 β 很大时，载荷如此迅速地改变方向，以至于质量几乎没有响应。

多自由度结构定性地以刚才描述的这种方式运行。能画出所选择的任何自由度的强迫振动振幅与强迫函数频率 Ω 的关系图。此结构的固有频率与无约束自由度一样多，因此与图 11.10－2 类似的曲线图显示出有很多峰值，而不是只有一个。随着 Ω 的增加，峰值趋于减少。每个峰值受到其频率接近于 Ω 的结构振型的影响最大。其他振型的影响要小得多，但不是必须要忽略的。通过如下的模态分析，可很方便地提供这个细节。

模态分析　像在任何模态分析中一样，第一步就是用解无阻尼特征问题获得结构的较低频率和振型。在解耦的模态方程式 11.7－6 中，$\{\boldsymbol{R}^{\text{ext}}\}$ 中所有项是 $\sin\Omega t$ 倍数的形式。当然，一般模态方程的解法与式 11.10－1 有相同的形式。

$$\bar{Z}_i = \frac{1}{[(1-\beta_i^2)^2 + (2\xi_i\beta_i)^2]^{1/2}}\left(\frac{\bar{P}_i}{\omega_i^2}\right) \quad \text{其中} \quad \alpha = \arctan\frac{2\xi_i\beta_i}{1-\beta_i^2} \qquad (11.10-2)$$
$$Z_i = \bar{Z}_i \sin(\Omega t - \alpha_i) \qquad \beta = \Omega/\omega_i$$

其中 $\bar{P}_i$ 是正弦变化模态载荷的幅值,从式 11.7-6 的第二个式子得到。式 11.7-4 从模态位移 Z_i 中提供物理位移$\{\boldsymbol{D}\}$。相位角 α_i 从一个振型到另一个振型各不相同,因此提供峰值振幅的 Ω 事先并不知道。为了找到它,软件可能需要在结构的固有频率 ω_i 的两边试找几次 Ω。在构建响应与 Ω 的关系图中(例如图 11.17-3(b)),对于每个 Ω,利用所有结构振型计算谐波响应,至少包括一个频率超过 Ω 的振型。

对载荷而言,是周期的但不是正弦的是有可能的。这样的载荷可以用其傅里叶级数的分量之和来表示,将前面的分析应用于每个分量,然后组合结果(第 11.15 节)。

11.11 响应历程:直接积分法

直接积分指的是按时间用逐步积分来计算响应历程,先不改变动力学方程的形式,这在模态法中是必需的。响应按时间增量 Δt 的间隔来计算,所以我们可以在 $\Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \cdots, n\Delta t$ 等时刻计算结构位移。在第 n 个时间步,运动方程式 11.2-11 或式 11.2-12 为

$$[\boldsymbol{M}]\{\ddot{\boldsymbol{D}}\}_n + [\boldsymbol{C}]\{\dot{D}\}_n + \{\boldsymbol{R}^{\text{int}}\}_n = \{\boldsymbol{R}^{\text{ext}}\}_n$$
$$\text{或} \quad [\boldsymbol{M}]\{\ddot{\boldsymbol{D}}\}_n + [\boldsymbol{C}]\{\dot{\boldsymbol{D}}\}_n + [\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}_n = \{\boldsymbol{R}^{\text{ext}}\}_n \qquad (11.11-1)$$

第一种形式更适合于非线性问题,其中[$\boldsymbol{K}$]可以从一个时间步变到另一个时间步值。

在时间上的离散化是通过时间导数的有限差分近似来完成的。解这个问题有很多种方法。在这一节中,我们用定性方法来介绍这个问题。一些常用方法将在后面三节详细讨论。在这里,我们假设[$\boldsymbol{M}$]是正定的,但是(除非另有说明)[$\boldsymbol{K}$]只需要是半正定的。因此,允许结构有刚体运动作为其响应的一部分。类似地,可以存在一个机构,只要它不是没有质量的。然而,如果有与单元不稳定性有关的机构,它可能产生如此大的非物理位移而使得结果不能令人满意。

直接积分法在 $n+1$ 时间步从运动方程、差分表达式和在一个或多个先前时间步已知条件中计算其状态。算法可归结为显式或隐式。显式算法使用一般形式的差分表达式

$$\{\boldsymbol{D}\}_{n+1} = f(\{\boldsymbol{D}\}_n, \{\dot{\boldsymbol{D}}\}_n, \{\ddot{\boldsymbol{D}}\}_n, \{\boldsymbol{D}\}_{n-1}, \cdots) \qquad (11.11-2)$$

其中在等式右边只包含历史信息。差分表达式与运动方程式 11.11-1 在 n 时间步合并。隐式算法用一般形式的差分表达式

$$\{\boldsymbol{D}\}_{n+1} = f(\{\dot{\boldsymbol{D}}\}_{n+1}, \{\ddot{\boldsymbol{D}}\}_{n+1}, \{\boldsymbol{D}\}_n, \{\dot{\boldsymbol{D}}\}_n, \{\ddot{\boldsymbol{D}}\}_n, \cdots) \qquad (11.11-3)$$

它在时间 $n+1$ 步与运动方程合并。

如果右边包含的信息回溯至第 n 时间步,则起源于式 11.11-2 或 11.11-3 的方法称之为单步法,如果信息回溯至第 $n-1$ 时间步,称为两步法等等。我们将讨论中心差分法——两步显式法和纽马克(Newmark)法——单步隐式法。

在实际应用中,显式和隐式法之间的重要差别与稳定性和经济性有关。显式法是有条件

稳定的，它意味着如果数值过程不因变得不稳定而“崩溃”，就一定不能超过临界时间步 Δt_{cr}。因为 Δt_{cr} 非常小，需要很多时间步，但每步都执行得非常迅速。常用的隐式法是无条件稳定的，这就意味着不管 Δt 有多大，计算仍然是稳定的（虽然精度受损失）。显式法中，$\{\boldsymbol{D}\}_{n+1}$ 的系数矩阵可以化为对角的，因此 $\{\boldsymbol{D}\}_{n+1}$ 在每一时间步计算很经济。在隐式法中，$\{\boldsymbol{D}\}_{n+1}$ 的系数矩阵不能化为对角的，每步的花费也就大了，当有限元网格的维数增大时，愈加如此。例如，应用于非线性试验问题，每个时间步需要乘法的次数被当作计算量的近似指示器[11.47,11.48]。显式/隐式法每时间步需要乘法的比率，对于轴对称壳的一维计算问题大致是 1.8，对二维问题大致是 15 到 150，对三维问题是4 000。比率随着维数的增加而增加，因为在隐式法中使用的矩阵变成很窄的带状。在矩阵拓扑上的不同导致的另一个结果就是隐式法需要的计算内存空间比显式法多。

在直接积分法中，必须在显式法和隐式法中选择，一个是每时间步花费少，但需要很多步，另一个每时间步花费高，而需要的步数少。为了做出合适的选择，将问题分为波传播类型或结构动力学（或惯性）类型。

波传播问题由爆炸或冲击加载引起，如交通工具碰撞分析。在分析中必须表现高频率振型。重要振型的数量可能很大；可能是自由度数量的 2/3，如果希望计算加速度作为时间的函数，可能还需要更多[2.14]。响应分析通常只需要跨越很小的时间间隔。

结构动力学问题由变化较慢的载荷引起，例如由地震引起的载荷。响应由低振型支配；在某些应用中超过 1/10 的振型可能不是很重要，不管结构中自由度的数量是多少。响应分析可能需要跨越最低频率的几个周期。如果载荷的上升时间和持续时间超过声波穿过结构所需时间的几倍，则此问题可能就是结构动力学类型[11.48]。

下面这些特征可以帮助大家做出合适的选择。

· 第 11.7 节的模态法，适合于结构动力学问题。此方法主要用于解特征问题，当需要的振型非常少时，效率是最高的。如果载荷与时间的关系可以理想化为一系列直线段，模态方程在时间上的积分就可以用解析方法精确进行。每时间步的花费很少。附加载荷函数可以很方便地分析，因为只需要解一次特征问题，而不管载荷的数量。在模态法中，解决非线性问题相对比较麻烦。

· 隐式直接积分适合于结构动力学问题。与模态法相比，当在模态法中需要很多振型的地方和分析需要的时间跨度不大时，可能更廉价些。在二维和三维问题中每时间步的花费是大的，但是，与显式直接积分相比，Δt 的大小是受精度而不是数值稳定性的限制。与模态法相比，隐式直接积分的优点是不需要计算振动频率和振型；然而，它们通常由于其它原因而计算出来。附加载荷函数构成了一个新问题，除了方程求解的向前简化的形式中重用了过去计算的 $[\boldsymbol{K}^{\text{eff}}]$ 外，没有从前面问题中把节约成本继承下来。该方法应用于非线性问题不会遇到很大困难。

· 显式直接积分最适宜于波传播问题。需要的计算机内存少。每时间步的花费也小，除临界时间步也是如此外，该方法不能很好适用于结构动力学问题。对于隐式直接积分就是这样，不需计算频率和振型，而附加载荷函数会构成一个新问题。相对容易适应非线性问题。

11.12 显式直接积分法

这一节我们考虑中心差分法的两种形式，讨论合理时间步的选择，提供一些计算实例。

经典中心差分 对于时间步 Δt，在时间步 n 的速度和加速度可用传统中心差分方程来近似。

$$\{\dot{\boldsymbol{D}}\}_n = \frac{1}{2\Delta t}(\{\boldsymbol{D}\}_{n+1} - \{\boldsymbol{D}\}_{n-1}) \quad \text{或} \quad \{\boldsymbol{D}\}_{n+1} = \{\boldsymbol{D}\}_{n-1} + 2\Delta t\{\dot{\boldsymbol{D}}\}_n \tag{11.12-1a}$$

$$\{\ddot{\boldsymbol{D}}\}_n = \frac{1}{\Delta t^2}(\{\boldsymbol{D}\}_{n+1} - 2\{\boldsymbol{D}\}_n + \{\boldsymbol{D}\}_{n-1}) \tag{11.12-1b}$$

(加速度可以与速度联系起来，如式 11.12-4 表示的那样。)式 11.12-1 可以从 $\{\boldsymbol{D}\}_{n+1}$ 和 $\{\boldsymbol{D}\}_{n-1}$ 关于时间 $n\Delta t$ 的泰勒展开式中获得：

$$\{\boldsymbol{D}\}_{n+1} = \{\boldsymbol{D}\}_n + \Delta t\{\dot{\boldsymbol{D}}\}_n + \frac{\Delta t^2}{2}\{\ddot{\boldsymbol{D}}\}_n + \frac{\Delta t^3}{6}\{\dddot{\boldsymbol{D}}\}_n + \cdots \tag{11.12-2a}$$

$$\{\boldsymbol{D}\}_{n-1} = \{\boldsymbol{D}\}_n - \Delta t\{\dot{\boldsymbol{D}}\}_n + \frac{\Delta t^2}{2}\{\ddot{\boldsymbol{D}}\}_n - \frac{\Delta t^3}{6}\{\dddot{\boldsymbol{D}}\}_n + \cdots \tag{11.12-2b}$$

从前一个式减去后一个式得到式 11.12-1a，而两式相加则得到式 11.12-1b。在这两种情形下，丢掉了包含 Δt 直到幂次高于 2 的项。原始误差项因此与 Δt^2 成比例。这表明 $\{\boldsymbol{D}\}$ 有二阶精度，时间步减半可以大约将误差减到 1/4。实际上，除了不重要的最高振型外，用计算稳定性所需的小 Δt 有可能提供足够的精度。

将式 11.12-1 代入式 11.11-1 的第一个式子中得到

$$\left[\frac{1}{\Delta t^2}\boldsymbol{M} + \frac{1}{2\Delta t}\boldsymbol{C}\right]\{\boldsymbol{D}\}_{n+1} = \{\boldsymbol{R}^{\text{ext}}\}_n - \{\boldsymbol{R}^{\text{int}}\}_n + \frac{2}{\Delta t^2}[\boldsymbol{M}]\{\boldsymbol{D}\}_n - \left[\frac{1}{\Delta t^2}\boldsymbol{M} - \frac{1}{2\Delta t}\boldsymbol{C}\right]\{\boldsymbol{D}\}_{n-1} \tag{11.12-3}$$

其中，如果线性条件占优，$\{\boldsymbol{R}^{\text{int}}\}_n = [\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}_n$。

半步长中心差分 代替式 11.12-1，我们写出[11.48,11.49]

$$\{\dot{\boldsymbol{D}}\}_{n-1/2} = \frac{1}{\Delta t}(\{\boldsymbol{D}\}_n - \{\boldsymbol{D}\}_{n-1}) \quad \text{和} \quad \{\dot{D}\}_{n+1/2} = \frac{1}{\Delta t}(\{\boldsymbol{D}\}_{n+1} - \{\boldsymbol{D}\}_n) \tag{11.12-4a}$$

$$\{\ddot{\boldsymbol{D}}\}_n = \frac{1}{\Delta t}(\{\dot{\boldsymbol{D}}\}_{n+1/2} - \{\dot{\boldsymbol{D}}\}_{n-1/2}) = \frac{1}{\Delta t^2}(\{\boldsymbol{D}\}_{n+1} - 2\{\boldsymbol{D}\}_n + \{\boldsymbol{D}\}_{n-1}) \tag{11.12-4b}$$

我们也可以用速度落后半个时间步重新写出运动方程，式 11.11-1。因此，对半步长法，我们使用方程

$$\{\boldsymbol{D}\}_{n+1} = \{\boldsymbol{D}\}_n + \Delta t\{\dot{\boldsymbol{D}}\}_{n+1/2} \tag{11.12-5a}$$

$$\{\dot{\boldsymbol{D}}\}_{n+1/2} = \{\dot{\boldsymbol{D}}\}_{n-1/2} + \Delta t\{\ddot{\boldsymbol{D}}\}_n \tag{11.12-5b}$$

$$[\boldsymbol{M}]\{\ddot{\boldsymbol{D}}\}_n + [\boldsymbol{C}]\{\dot{\boldsymbol{D}}\}_{n-1/2} + \{\boldsymbol{R}^{\text{int}}\}_n = \{\boldsymbol{R}^{\text{ext}}\}_n \tag{11.12-5c}$$

式 11.12－5a 和式 11.12－5b 与式 11.12－2 类似，但是用半步长速度。合并式 11.12－5 得

$$\frac{1}{\Delta t^2}[\boldsymbol{M}]\{\boldsymbol{D}\}_{n+1} = \{\boldsymbol{R}^{\text{ext}}\}_n - \{\boldsymbol{R}^{\text{int}}\}_n + \frac{1}{\Delta t^2}[\boldsymbol{M}](\{\boldsymbol{D}\}_n + \Delta t\{\dot{\boldsymbol{D}}\}_{n-1/2}) - [\boldsymbol{C}]\{\dot{\boldsymbol{D}}\}_{n-1/2} \tag{11.12-6}$$

对式 11.12－6 的另一种推导是，将式 11.12－3 中的阻尼项集中并如下近似：

$$\frac{1}{2\Delta t}[\boldsymbol{C}](\{\boldsymbol{D}\}_{n-1} - \{\boldsymbol{D}\}_{n+1}) \approx \frac{1}{\Delta t}[\boldsymbol{C}](\{\boldsymbol{D}\}_{n-1} - \{\boldsymbol{D}\}_n) \tag{11.12-7}$$

用这个置换，式 11.12－3 生成下面方程。它与式 1.12－6 相吻合，但是形式不同（提前一个时间步写出式 11.12－5a，将半步长量代入式 11.12－6 中）。

$$\frac{1}{\Delta t^2}[\boldsymbol{M}]\{\boldsymbol{D}\}_{n+1} = \{\boldsymbol{R}^{\text{ext}}\}_n - \{\boldsymbol{R}^{\text{int}}\}_n + \left[\frac{2}{\Delta t^2}\boldsymbol{M} - \frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{C}\right]\{\boldsymbol{D}\}_n - \left[\frac{2}{\Delta t^2}\boldsymbol{M} - \frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{C}\right]\{\boldsymbol{D}\}_{n-1} \tag{11.12-8}$$

与式 11.12－3 相比，因为黏性力滞后，式 11.12－6 和式 11.12－8 只能保证有一阶精度。对于有轻微阻尼和需要非常小时间步长的实际结构，经典和半步长中心差分法的精度几乎相同。

备注

1. 如果式 11.12－6 或式 11.12－8 中的$[\boldsymbol{M}]$是对角的，就如来自阻尼矢量一样，因为不需要解联立方程组，每个时间步长执行非常迅速，如果$[\boldsymbol{C}]$为零或对角的，式 11.12－3 也是如此。然而从式 11.5－1 可以看出，对角矩阵$[\boldsymbol{C}]$与带有对角阵$[\boldsymbol{M}]$的质量比例阻尼 $\alpha[\boldsymbol{M}]$相对应，它对低振型阻尼最大。如果包括阻尼，为了阻尼高频数值噪声，很可能也希望有刚度比例阻尼$\beta[\boldsymbol{K}]$，但式 11.12－3 要求解联立方程组，这会大大增加每个时间步长的费用。因此，对于一般应用，式 11.12－6 和式 11.12－8 是中心差分法的首选形式。
2. 式 11.12－3 是条件稳定的，也就是说，计算会发散，除非

$$\Delta t \leqslant \frac{2}{\omega_{\max}} = \Delta t_{\text{cr}} \quad \text{或者，因为 } \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}\text{，则 } \Delta t \leqslant \frac{T_{\min}}{\pi} \tag{11.12-9}$$

其中频率 $\omega_{\max}$ 和其周期 $T_{\min}$ 对应于$([\boldsymbol{K}] - \omega^2[\boldsymbol{M}])\{\boldsymbol{D}\} = \{\boldsymbol{0}\}$的最高固有频率。式 11.12－3的临界时间步长 $\Delta t = 2/\omega_{\max}$ 与阻尼无关。太大时间步长引起的不稳定由无界解来识别，而无界解可能随每时间步值的阶次而增长，这明显是错误的（尽管非线性问题的不稳定性可能是明显的），会由于溢出而导致计算程序停止运行。

$\Delta t = 2/\omega_{\max}$的情形可称之为“有限稳定性”。在 $\Delta t = 2/\omega_{\max}$ 时，解可能在某些情况下发散，但仅仅是在运算形式上。如果 $\Delta t > 2/\omega_{\max}$，发散是指数形式的。这个问题将在第 11.14 节中做更深入的讨论。

式 11.12－6 和式 11.12－8 的临界 Δt 取决于阻尼比 ξ。对于 i 振型数和这个振型下的 ξ_i 阻尼比，数值稳定性要求[11.48]

$$\Delta t \leqslant \min\left[\frac{2}{\omega_i}(\sqrt{1-\xi_i^2} - \xi_i)\right] \quad \text{但通常} \quad \Delta t \leqslant \frac{2}{\omega_{\max}}(\sqrt{1-\xi^2} - \xi) \tag{11.12-10}$$

其中，在后面的式子中，ξ 是 $\omega_{\max}$ 振型中的阻尼比。经常用后面的式子是因为对所有振型，

ξ可能较小，因此ω_{max}和其ξ占支配地位。当阻尼不为零，式 11.12－10 比式 11.12－9 受到更多的限制。

3. 对小的有限元模型，整个结构的$[\boldsymbol{K}]$可以在高速计算机内存中形成和存贮，任意时间步 n 的内力由乘法运算$\{\boldsymbol{R}^{\text{int}}\}_n=[\boldsymbol{K}][\boldsymbol{D}]_n$获得。尤其对于非线性问题，一个更好的选择就是以一个单元一个单元的形式，用单元贡献求和生成$\{\boldsymbol{R}^{\text{int}}\}_n$：

$$\{\boldsymbol{R}^{\text{int}}\}_n=\sum_{i=1}^{N_{\text{els}}}(\{\boldsymbol{r}^{\text{int}}\}_n)_i \quad \text{其中} \quad \{r^{\text{int}}\}_n=\int[\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\sigma}\}_n\mathrm{d}V \tag{11.12-11}$$

对于与速率无关的塑性，单元应力$\{\boldsymbol{\sigma}\}$与单元应变不是线性相关的，但可以用包含在$\{\boldsymbol{D}\}_n$中的单元位移来计算。对于刚度比例阻尼，如果存在，可以作出类似的备注。因为单元$[\boldsymbol{K}]$和$[\boldsymbol{c}]$矩阵既不需要形成也不需要存贮，显式法甚至可以用比较适中的计算机存贮需求来处理很大的三维有限元模型。

式 11.12－11 中的积分计算需要与单元刚度矩阵相同的积分阶次。$\{R^{\text{int}}\}$的计算占显式积分每时间步费用的大部分，所以，人们在寻找使每个单元积分点数最小化。例如，如果可能，使用单点而不是 4 点积分法，其费用仅为 1/4。使用一点积分法需要注意与单元不稳定性有关的应力场；见 6.8 节和文献中的概述，贝利兹柯科(Belytschko)的许多论文在第 6 章、15 章和 16 章中引用过。

4. 在 $n=0$ 的情况下，$\{\boldsymbol{D}\}_1$ 出现在式 11.12－6 的左边，为了计算它，在右边需要$\{\dot{\boldsymbol{D}}\}_{-1/2}$。向后差分近似得到

$$\{\ddot{\boldsymbol{D}}\}_0=\frac{1}{\Delta t/2}(\{\dot{\boldsymbol{D}}\}_0-\{\dot{D}\}_{-1/2}) \quad \text{因此} \quad \{\dot{\boldsymbol{D}}\}_{-1/2}=\{\dot{\boldsymbol{D}}\}_0-\frac{\Delta t}{2}\{\ddot{\boldsymbol{D}}\}_0 \tag{11.12-12}$$

其中$\{\ddot{\boldsymbol{D}}\}_0$通过在 $n=0$ 求解式 11.11－1 获得。它提供

$$\{\ddot{\boldsymbol{D}}\}_0=[\boldsymbol{M}]^{-1}(\{\boldsymbol{R}^{\text{ext}}\}_0-[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}_0-[\boldsymbol{C}]\{\dot{\boldsymbol{D}}\}_0) \tag{11.12-13}$$

因此$\{\dot{\boldsymbol{D}}\}_{1/2}$可以由$\{\boldsymbol{R}^{\text{ext}}\}$，$\{\boldsymbol{D}\}$和$\{\dot{\boldsymbol{D}}\}$已知的初始值决定。

利用式 11.12－8 作为式 11.12－6 的另一种形式，或用式 11.12－3，在右边需要$\{\boldsymbol{D}\}_{-1}$来启动此过程。它从式 11.12－2b 中获得，忽略 Δt 高于 2 次幂的项。

$$\{\boldsymbol{D}\}_{-1}=\{\boldsymbol{D}\}_0-\Delta t\{\dot{\boldsymbol{D}}\}_0+\frac{\Delta t^2}{2}\{\ddot{\boldsymbol{D}}\}_0 \tag{11.12-14}$$

其中$\{\ddot{\boldsymbol{D}}\}_0$来自式 11.12－13。

5. 可以想象，人们也许知道现在的条件和在过去需要的条件。中心差分法可以反向运行，使用负时间步。然后把稳定性标准应用于 Δt 的量值。

稳定性：估算 Δt_{cr} 如果 Δt 太大，显式积分会失败；如果 Δt 不必要地小，计算代价又太大。因此为了在式 11.12－9 或式 11.12－10 中使用，决定ω_{max}或精确限定它是非常必要的。因为必须组集$[\boldsymbol{K}]$和解特征值问题，分析者可能希望避免计算精确的ω_{max}。

界定有限元网格的ω_{max}的一种方法是要注意到它必须小于任何未组集和无支撑网格单元的最大ω_{max}[11.48,11.50]。后者的频率有时能用手算来得到。考虑图 11.4－3(a)中无支撑 2 节点杆单元。带有阻尼矢量，11.4 节中例 2 计算的最高频率为

$$\omega_{\max}=2\sqrt{\frac{AE}{mL}} \quad 但 \quad m=\rho AL \quad 因此 \quad \omega_{\max}=\frac{2}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}=\frac{2c}{L} \tag{11.12-15}$$

其中 $c=\sqrt{E/\rho}$是材料中声波的速度。用这个判断，无阻尼材料的临界时间步 $2/\omega_{\max}$为

$$\Delta t_{cr}\leqslant\frac{L}{c} \tag{11.12-16}$$

这是以 Courant，Friedrichs 和 Lewy 命名的 CFL 条件[11.51,11.52]。物理解释是 Δt 必须足够小，以至于在单个时间步期间，信息传播不会超过相邻的两个节点间的距离。不幸的是，这个估算不是对所有单元类型都适用，而且对所有相邻的节点对计算 L 也不方便的[11.50]。除此之外，如果单元有旋转自由度，Δt_{cr}可能为弯曲振型所支配，其固有频率唯独不依赖于节点间隔[2.14]。可以得到适合于特定单元的公式；见文献[11.53]及其引用的参考文献。如果有塑性效应，在保持弹性的单元中，$\omega_{\max}$不发生变化，在屈服的单元中也不增加，因此如果有屈服，$\omega_{\max}$的总体估计不需要修正。

利用最高单元频率近似 $\omega_{\max}$提出了一个重要的方法。11.4 节中的例 2 证明，根据单元频率 $\omega_{\max}$的估计，从集中质量变成协调质量列式用 1.732 因子提高了无支撑杆单元的固有频率，随之用因子 0.577 减小了 Δt_{cr}。因此，与协调质量列式相比，集中质量不仅减少每时间步的花费，也增加了可允许的时间步。在第 11.14 节中，我们证明集中质量也有可能提供更好的精度。

Gerschgorin 界限提供了 $\omega_{\max}$的另一种估计[11.52]，在下面集中(对角的)质量矩阵的形式中对此作了陈述。

$$\omega_{\max}^2\leqslant\max_i\left(\frac{1}{M_{ii}}\sum_{j=1}^{n}|K_{ij}|\right) \quad 其中 \quad i=1,2,\cdots,n \tag{11.12-17}$$

这里的 n 是矩阵的阶数；即自由度数。因此对每一行，我们加上刚度系数值，除以相应的集中质量，将这个最大的结果作为正确 $\omega_{\max}$的上限。

实际使用的时间步方便的度量是 Courant 数，它定义为

$$C_n=\frac{\Delta t_{\text{actual}}}{\Delta t_{cr}} \tag{11.12-18}$$

其中 Δt_{cr}是与数值稳定性协调一致的最大时间步。使用更小的 Δt 实际上也许会降低精度[2.13,2.14]。

高阶单元比低阶单元的频率更高，当应力波穿过有限元网格时有产生噪声的倾向。由于这些原因，当使用显式积分时，最好避免高阶单元。类似地，应该避免惩罚性约束，以及非常小的集中质量，两种情况都会使 $\omega_{\max}$变得非常大。注意，单个小单元(大刚度)或单个小质量都可能严重减小整个有限元网格的 Δt_{cr}，即使小单元或小质量的物理意义重要也可能被忽略。

例题：波的传播 考虑均匀钢杆，没有阻尼，开始是静止的，突然施加轴向端点力(图 11.12-1)。有限元模型由等长的 40 个 2 节点杆单元组成，因此每个均匀应变单元的长度 $L=L_T/40=0.5$ 英寸(1 英寸＝2.54cm)。用带集中质量矩阵的式 11.12-6 的算法，计算在 $x=9.75$英寸处随时间变化的轴向应力，这里是第 20 个单元的中间(节点和单元从左到右排序)。假设条件为线弹性的。

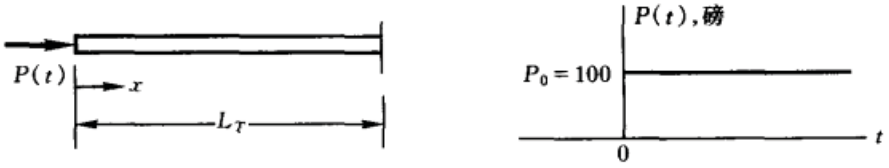


图 11.12-1 轴端瞬时加载的一维均匀杆

$A=1.0$ 英寸^2，$E=30\times10^6$ 磅/英寸^2(1 磅力$=4.448$ 牛顿)，$\rho=7.4\times10^{-4}$ 磅-秒^2/英寸^2，$L_T=20$ 英寸，载荷 $P_0=100$ 磅作用在 $t=0$ 时刻

在这个例子中，$\{\boldsymbol{R}^{\text{int}}\}$按下述方式组集。设 u 代表轴向位移，下标表示节点和单元的序号。第 i 个单元的轴向力 F_i，拉为正，对所有单元计算。$\{\boldsymbol{R}^{\text{int}}\}$在节点 1 只接受来自第一单元的贡献，而在中间节点处来自两个单元。因此

$$F_i = A\sigma_i = AE\frac{u_{i+1}-u_i}{L} \quad \boldsymbol{R}_1^{\text{int}} = -F_1 \quad R_i^{\text{int}} = F_{i-1}-F_i \quad (i=2,3,\cdots,20) \tag{11.12-19}$$

最高单元频率由式 11.12-15 给出

$$(\omega_{\max})_e = \frac{2}{0.50}\sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{2}{0.50}\sqrt{\frac{30\times10^6}{7.4\times10^{-4}}} = 8.053\ 9\times10^5\ \text{rad/s} \tag{11.12-20}$$

可从式 11.12-17 中得到相同的值(然而，单元和 Gerschgorin 边界一样的情况极少出现)。这个值非常接近于有限元模型计算的最大频率，其值 $\omega_{\max}=8.052\ 3\times10^5$ rad/s。对于 $\xi=0$，在式 11.12-10 中利用这个 $\omega_{\max}$，得到 $\Delta t=2/8.052\ 3\times10^5=2.484\times10^{-6}$ s 作为临界时间步。计算从静止初始条件开始。使用式 11.12-6，用从式 11.12-12 得到的$\{\dot{D}\}_{-1/2}$。

对于 $C_n=0.966$，用 $\Delta t=2.400\times10^{-6}$ s 计算的结果如图 11.12-2 所示。在 83 个时间步中的分析允许应力波在杆长度传播并返回。在 $x=9.75$ 英寸处的应力，在应力波从左端传到

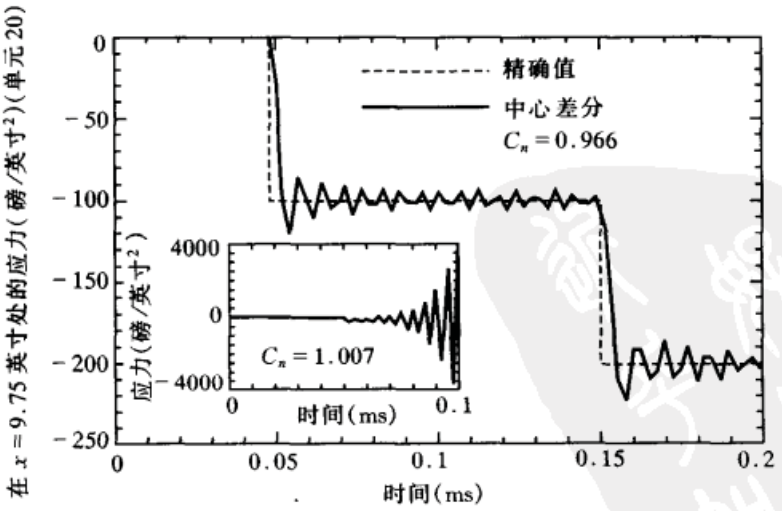


图 11.12-2 图 11.12-1 中杆的 40 单元模型轴向应力随时间的变化。中心差分解用$\Delta t=2.400\times10^{-6}$ s，($C_n=0.966$)。插图表示因过大的 Δt($\Delta t=2.500\times10^{-6}$ s，对应 $C_n=1.007$)形成的不稳定性

此位置的时间(0.048ms)之前是零。在 0.15ms,平均应力从－100 磅/平方英寸变化到－200 磅/平方英寸是由于从固定端波的反射。图 11.12－2 中的插图表明仅仅稍大于稳定性限度的 Δt 产生的一个解,其值立刻随每个时间步猛增,直到计算机由于溢出而中止执行。

图 11.12－3(a)表示仅在稳定性限度之下利用 Δt 得到的结果。数值噪声几乎看不到。与图 11.12－2 比较表明使用小的 Δt 会使精度降低(用隐式法,当 Δt 减小时精度增加)。图 11.12－3(b)说明如果因将 $\{\dot{\boldsymbol{D}}\}_{-1/2}$ 取为零而忽略式 11.12－12,会出现大的振荡。图 11.12－4 说明如果端点载荷在第五时间步而不是一开始就加载所发生的情况。因此 $\{\dot{\boldsymbol{D}}_{-1/2}\}$ 取为零。从所收集到的结果,如从图 11.12－3 和图 11.12－4 中的那些,我们可以得出结论,对一般应用而言,C_n 值介于 0.95～0.98 之间可能为最佳。

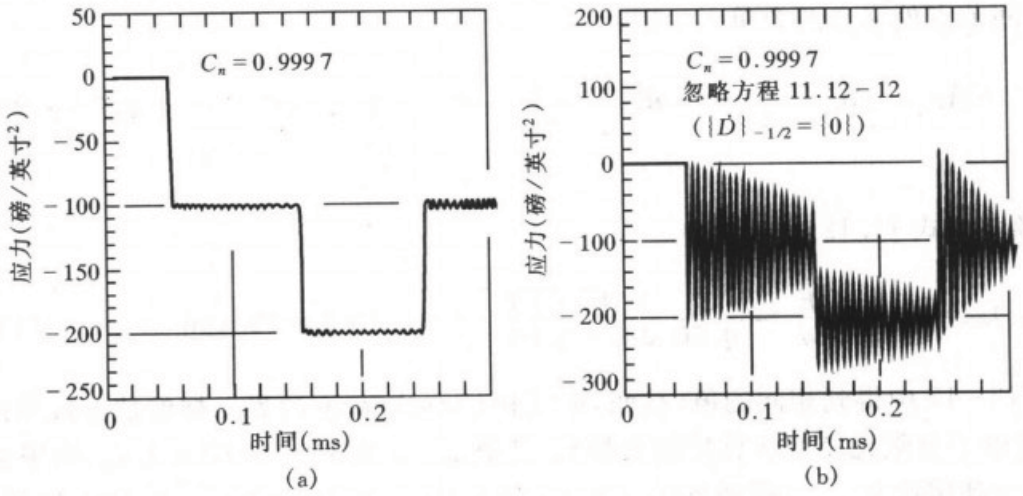


图 11.12－3　图 11.2－1 中杆的 40 单元模型轴向应力随时间变化的中心差分解
$\Delta t=2.483\times10^{-6}$s($C_n=0.999\ 7$),适当和不适当的初始条件

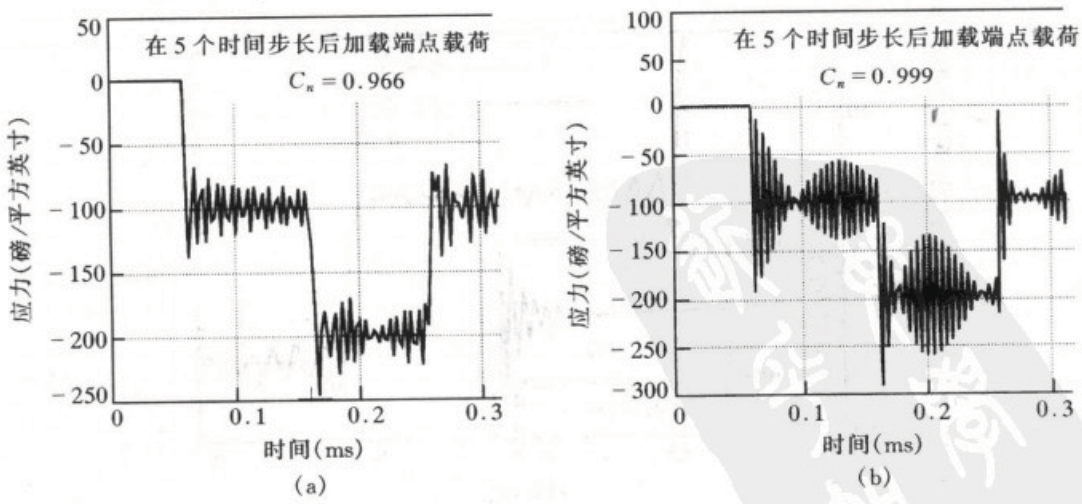


图 11.12－4　图 11.2－1 中杆的 40 单元模型轴向应力随时间变化的中心差分解
初始速度为零,开始后再加载

结束语 当使用显式法来求解单个常微分方程时，精度主要依赖于时间步长。对有限元方程组，也许大于 20 的任何数，特别能观察到，Δt 稍小于 Δt_{cr} 即可得到极好的精度。其原因就是稳定性标准是基于最高频率的，或者是有限元网格描述的最小时间尺度现象，网格包含了主要的频率谱。与最小时间尺度有关的运动不能很精确地求解，图 11.12-2 至图 11.12-4 中的振荡可以说明这一点。幸运的是，这些振荡对结构响应的贡献很小，通常由可精确求解的低频长时间尺度所支配。换句话说，我们不需要精确地求解最高频率现象，我们所需的只是稳定地积分。因此能保证稳定性的 Δt 多半能保证精度。即使如此，最大允许的 Δt 是这么小，以至于需要很多时间步来跨越分析所需的时段。

11.13 隐式直接积分法

一些隐式法是条件稳定的，但通常使用的是非条件稳定的：即使非常大的 Δt 值也不会使计算发散(但可能影响精度)。因为对 Δt 的严格限制和在二维和三维问题中隐式法每步的大量花费，条件稳定隐式法在实际当中很少使用。

在下面，我们着重于纽马克类方法。它包括匀加速或平均加速度法，它在线性问题中是无条件稳定的，大概在隐式法中使用最广泛。此方法得到的数值结果见第 11.18 节。

一些单自由度公式 设 τ 是在典型时间步 Δt 内的时间 t 的值，因此 $0\leqslant\tau\leqslant\Delta t$ 和 $\Delta t=t_{n+1}-t_n$。再设 $u=u(t)$ 为相关变量，如杆的轴向位移。让我们假定在一个时间步内加速度是常量，并且等于终值和初值的平均值。因此

$$\ddot{u}(\tau)=\frac{1}{2}(\ddot{u}_{n+1}+\ddot{u}_n) \tag{11.13-1a}$$

积分并在初始条件 $\tau=0$ 时 $\dot{u}(\tau)=\dot{u}_n$，得到

$$\dot{u}(\tau)=\dot{u}_n+\frac{\tau}{2}(\ddot{u}_{n+1}+\ddot{u}_n) \tag{11.13-1b}$$

积分并在初始条件 $\tau=0$ 时，$u(\tau)=u_n$，得到

$$u(\tau)=u_n+\tau\dot{u}_n+\frac{\tau^2}{4}(\ddot{u}_{n+1}+\ddot{u}_n) \tag{11.13-1c}$$

另外，我们可以假设在一个时间步内加速度是线性的。于是式 11.13-1 可由下式代替

$$\ddot{u}(\tau)=\ddot{u}_n+\frac{\tau}{\Delta t}(\ddot{u}_{n+1}-\ddot{u}_n) \tag{11.13-2a}$$

$$\dot{u}(\tau)=\dot{u}_n+\tau\ddot{u}_n+\frac{\tau^2}{2\Delta t}(\ddot{u}_{n+1}-\ddot{u}_n) \tag{11.13-2b}$$

$$u(\tau)=u_n+\tau\dot{u}_n+\frac{\tau^2}{2}\ddot{u}_n+\frac{\tau^3}{6\Delta t}(\ddot{u}_{n+1}-\ddot{u}_n) \tag{11.13-2c}$$

如果上述速度和位移式在时间步 $n+1$ 进行计算，其中 $\tau=\Delta t$，我们得到如下结果：

平均加速度(式 11.13-1)：

$$\dot{u}_{n+1} = \dot{u}_n + \frac{1}{2}\Delta t(\ddot{u}_{n+1} + \ddot{u}_n)$$

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t\dot{u}_n + \frac{1}{4}\Delta t^2(\ddot{u}_{n+1} + \ddot{u}_n)$$

线性加速度(式 11.13-2)：

$$\dot{u}_{n+1} = \dot{u}_n + \frac{1}{2}\Delta t(\ddot{u}_{n+1} + \ddot{u}_n)$$

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t\dot{u}_n + \Delta t^2(\frac{1}{6}\ddot{u}_{n+1} + \frac{1}{3}\ddot{u}_n)$$

这些差分方程是隐式的，因为计算 u_{n+1} 和 $\dot{u}_{n+1}$ 需要知道 $\ddot{u}_{n+1}$。也就是说，u_{n+1} 和 $\dot{u}_{n+1}$ 更多的是依赖于历史信息。通过合并平均加速度方程的算法以至于消除二次导数项，我们得到 $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}\Delta t(\dot{u}_{n+1} + \dot{u}_n)$，其中后一项表示在 $\dot{u}$ 与 t 关系图上的梯形面积。为此，平均加速度法通常称为梯形规则。

普遍化 前述的关系可看作纽马克方法的特殊情况[11.54]，它包括控制算法特性的数值因子 γ 和 β，如准确度、数值稳定性和算法阻尼量。对于自由度向量 $\{\boldsymbol{D}\}$，纽马克关系式为

$$\{\dot{\boldsymbol{D}}\}_{n+1} = \{\dot{\boldsymbol{D}}\}_n + \Delta t[\gamma\{\ddot{\boldsymbol{D}}\}_{n+1} + (1-\gamma)\{\ddot{\boldsymbol{D}}\}_n] \tag{11.13-3a}$$

$$\{\boldsymbol{D}\}_{n+1} = \{\boldsymbol{D}\}_n + \Delta t\{\dot{\boldsymbol{D}}\}_n + \frac{1}{2}\Delta t^2[2\beta\{\ddot{\boldsymbol{D}}\}_{n+1} + (1-2\beta)\{\ddot{\boldsymbol{D}}\}_n] \tag{11.13-3b}$$

分别用 $\gamma=\frac{1}{2}$，$\beta=\frac{1}{4}$ 和 $\gamma=\frac{1}{2}$，$\beta=\frac{1}{6}$ 给出平均加速度和线加速度方法。通过计算式 11.13-3b 的 $\{\ddot{\boldsymbol{D}}\}_{n+1}$，然后将这一表达式代入式 11.13-3a，得到

$$\{\ddot{\boldsymbol{D}}\}_{n+1} = \frac{1}{\beta\Delta t^2}(\{\boldsymbol{D}\}_{n+1} - \{\boldsymbol{D}\}_n - \Delta t\{\dot{\boldsymbol{D}}\}_n) - \left(\frac{1}{2\beta}-1\right)\{\ddot{\boldsymbol{D}}\}_n \tag{11.13-4a}$$

$$\{\dot{\boldsymbol{D}}\}_{n+1} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}(\{\boldsymbol{D}\}_{n+1} - \{\boldsymbol{D}\}_n) - \left(\frac{\gamma}{\beta}-1\right)\{\dot{\boldsymbol{D}}\}_n - \Delta t\left(\frac{\gamma}{2\beta}-1\right)\{\ddot{\boldsymbol{D}}\}_n \tag{11.13-4b}$$

把这些式子代入运动方程 11.2-12，写出 $n+1$ 步的公式，然后计算 $\{\boldsymbol{D}\}_{n+1}$，结果为

$$[\boldsymbol{K}^{\text{eff}}]\{\boldsymbol{D}\}_{n+1} = \{\boldsymbol{R}^{\text{ext}}\}_{n+1} + [\boldsymbol{M}]\left\{\frac{1}{\beta\Delta t^2}\{\boldsymbol{D}\}_{n+1} + \frac{1}{\beta\Delta t}\{\dot{\boldsymbol{D}}\}_n + \left(\frac{1}{2\beta}-1\right)\{\ddot{\boldsymbol{D}}\}_n\right\}$$
$$+ [\boldsymbol{C}]\left\{\frac{r}{\beta\Delta t}\{\boldsymbol{D}\}_n + \left(\frac{\gamma}{\beta}-1\right)\{\dot{\boldsymbol{D}}\}_n + \Delta t\left(\frac{\gamma}{2\beta}-1\right)\{\ddot{\boldsymbol{D}}\}_n\right\} \tag{11.13-5a}$$

其中 $$[\boldsymbol{K}^{\text{eff}}] = \frac{1}{\beta\Delta t^2}[\boldsymbol{M}] + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}[\boldsymbol{C}] + [\boldsymbol{K}] \tag{11.13-5b}$$

注意，$[\boldsymbol{K}^{\text{eff}}]$ 不可能是对角矩阵，因为它包含 $[\boldsymbol{K}]$。而一个对角质量矩阵可提供一点计算经济性。当然，如第 11.14 节中讨论的，当 $[\boldsymbol{M}]$ 是协调质量矩阵时，隐式法通常更精确。如果 $[\boldsymbol{M}]$ 是正定的，则 $[\boldsymbol{K}^{\text{eff}}]$ 不是奇异的，即使结构无支撑或包含机构。

如果在分析中没有非线性，而且时间步 Δt 不变化，那么就可以计算 $[\boldsymbol{K}^{\text{eff}}]$，并在开头为解方程进行因式分解，之后不需要修正或再因式分解。为了开始计算，我们需要 $\{\ddot{\boldsymbol{D}}\}_0$，它可从式 11.12-13 中得到。然后解 11.13-5a 求得 $\{\boldsymbol{D}\}_1$，这像是求解一组已知载荷矢量和刚度矩阵的静态方程，式 11.13-4 用于得到 $\{\ddot{\boldsymbol{D}}\}_1$ 和 $\{\dot{\boldsymbol{D}}\}_1$。下一步，由式 11.13-5a 解得 $\{\boldsymbol{D}\}_2$，等等。

由 Hilber, Hughes 和 Taylor[2.13,11.55] 提出的 α 方法可视为纽马克方法的普遍化。它是基于纽马克差分关系式 11.13-2 和修正的运动方程。

$$[\boldsymbol{M}]\{\ddot{\boldsymbol{D}}\}_{n+1}+(1+\alpha)[\boldsymbol{C}]\{\dot{\boldsymbol{D}}\}_{n+1}-\alpha[\boldsymbol{C}]\{\dot{\boldsymbol{D}}\}_{n}+(1+\alpha)[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}_{n-1}-\alpha[\boldsymbol{K}][\boldsymbol{D}]_{n}=\{\boldsymbol{R}_{\alpha}^{\mathrm{ext}}\} \tag{11.13-6}$$

其中$\{\boldsymbol{R}_{\alpha}^{\mathrm{ext}}\}$是$\{\boldsymbol{R}^{\mathrm{ext}}\}$在$(1+\alpha)t_{n+1}-\alpha t_n=t_{n+1}+\alpha\Delta t$时刻算得的值。如果载荷在时间步内线性变化，这与$\{\boldsymbol{R}_{\alpha}^{\mathrm{ext}}\}=(1+\alpha)\{\boldsymbol{R}^{\mathrm{ext}}\}_{n+1}-\alpha\{\boldsymbol{R}^{\mathrm{ext}}\}_{n}$相同。如果$\alpha=0$，式11.13-6就简化为纽马克法中的方程。利用$\alpha<0$引入算法阻尼。在纽马克法中引入算法阻尼，仅能够保证一阶精度，也就是说，计算位移中的误差阶次是从$O(\Delta t^2)$下降到$O(\Delta t)$。α方法允许算法阻尼保持二阶精度。

不必如式11.13-5那样计算总的位移，可以重述隐式积分公式以便计算位移增量[2.14.11.3]。增量形式对非线性问题也有效，其中$[\boldsymbol{K}^{\mathrm{eff}}]$从一个时间步变到下一个时间步(17.7节)。

精度，稳定性，阻尼 为获得直接积分的起始条件，我们必须解出式11.12-13中的$\{\ddot{\boldsymbol{D}}\}_0$。这个计算要求为方程求解组集并简化$[\boldsymbol{M}]$。用隐式法，这个计算并不简单，因为所用的$[\boldsymbol{M}]$通常不是对角矩阵。跳过这些计算，并设$\{\ddot{\boldsymbol{D}}\}_0=\{\boldsymbol{0}\}$是人们感兴趣的方法。不巧的是，这样做可能使精度从二价降至一阶[11.56]。在Δt比振动周期小10倍的两自由度例子中[2.14]，设置初始加速度为零会导致计算位移几乎超不过使用正确初加速度时计算值的一半。

能够证明[2.13,11.57]纽马克方法在下述条件下具有无条件稳定性：

$$2\beta\geqslant\gamma\geqslant\frac{1}{2} \tag{11.13-7}$$

在下述条件下具有条件稳定性：

$$\gamma\geqslant\frac{1}{2}\qquad\beta<\frac{1}{2}\gamma\qquad\Delta t\leqslant\frac{\Omega_{\mathrm{crit}}}{\omega_{\max}}=\frac{\Omega_{\mathrm{crit}}T_{\min}}{2\pi} \tag{11.13-8}$$

其中$\omega_{\max}$和$T_{\min}$有像在式11.12-9中相同的含义，Ω_{crit}定义为

$$\Omega_{\mathrm{crit}}=\frac{\xi\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\gamma/2-\beta+\xi^2\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)^2}}{\gamma/2-\beta} \tag{11.13-9}$$

其中ξ为阻尼比(式11.4-2)。我们看到，在$\gamma=1/2$时，阻尼对稳定性没有影响，而当$\gamma>1/2$时，阻尼而增加了可允许的时间步长。(相反，阻尼减小了显式算法的允许值Δt，如式11.12-6或式11.12-8。)在式11.13-9中，小阻尼影响小，所以当阻尼不确定时，由$\xi=0$获得保守的Ω_{crit}，其值为$\Omega_{\mathrm{crit}}=(\gamma/2-\beta)^{-1/2}$。

稳定性和精度分析的一些结果列于表11.13-1中。当$\xi>0$时，精确度可能在下降，在Fox-Goodwin型式情况下，最多从$O(\Delta t^2)$降到$O(\Delta t)$，或从$O(\Delta t^4)$降到$O(\Delta t^2)$。稳定性将在第11.14节中深入讨论。

人们对高频振型兴趣不大或者它仅构成与不希望有的离散有关的非物理振荡，为了阻尼它，很自然会考虑借增加ξ来任意附加黏性阻尼。Hughes[2.13]证明，使用平均加速度法主要能阻尼中间振型，对最高和最低振型几乎没有影响。最好使用算法阻尼。

当$\gamma>1/2$时，纽马克方法体现算法阻尼，是以降低已保证的精确度从二阶降到一阶为代价。为获得最大可能的高频耗散，在保持无条件稳定性的同时，β的下列选取是合理的[2.13]。

$$\text{对于}\ \gamma\geqslant\frac{1}{2}\qquad\text{使用}\qquad\beta=\frac{1}{4}\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)^2 \tag{11.13-10}$$

在式 11.13－6 的 α 方法中，为了引入算法阻尼和保持无条件稳定，对于像在表 11.13－1 中所列的 γ 和 β 选用值，建议 $-1/3 \leqslant \alpha < 0$。虽然纽马克方法和 α 法都能有效阻尼较高振型，但 α 方法在较低振型中引入较小的阻尼，因而有助于保持其精确度(图 11.13－1)。

表 11.13－1 选用隐式直接积分法的稳定性和精确度

型式(或基准)	γ	β	稳定性条件	$\{\boldsymbol{D}\}$中的误差 对于 $\xi=0$
		纽马克法		
平均加速度	1/2	1/4	无条件	$O(\Delta t^2)$
线加速度	1/2	1/6	如果 $\xi=0, \Omega_{crit}=3.464$	$O(\Delta t^2)$
Fox-Goodwin	1/2	1/12	如果 $\xi=0, \Omega_{crit}=2.449$	$O(\Delta t^4)$
算法阻尼	$\geqslant 1/2$	$\geqslant(\gamma+1/2)^2/4$	无条件	$O(\Delta t)$
		Hilber-Hughes-Taylor(α 法)，$-1/3 \leqslant \alpha \leqslant 0$		
文献[2.13,11.15]	$(1-2\alpha)/2$	$(1-\alpha)^2/4$	无条件	$O(\Delta t^2)$

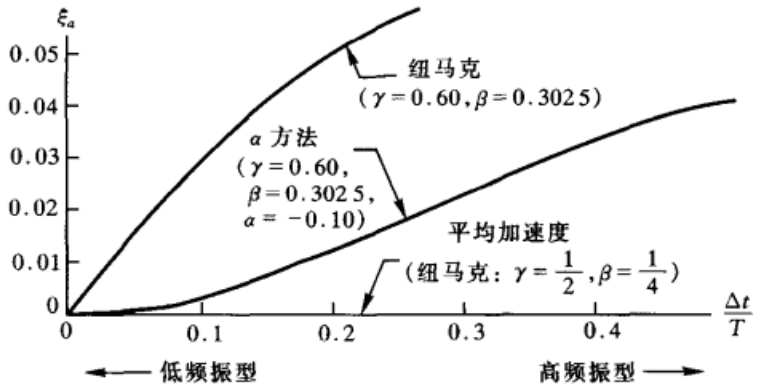


图11.13－1 由隐式积分法提供的算法阻尼比 ξ_a，其中 T 是为其描述 ξ_a 的振型周期[11.57]

算子分解 很可能出现质量、刚度特性在数学模型的不同部分完全不一样的情况。这多半发生在流体-结构相互作用的问题中，其中，响应可能被视为流体中波的传播和结构中的振动[2.14]。此外，如间隙闭合的非线性可能局限于结构的一部分，建议单独对那部分使用显式方法，而对其他部分使用隐式法。在一个单独的问题中混合使用显式和隐式时间积分法，以便于更好地利用各自的特长，这种方法称为算子分解或混合时间积分法。参考文献见[2.13,2.14,11.48,11.57～11.61]。

11.14 直接积分：稳定性和精确性分析

为检验稳定性，在运动方程中令$\{\boldsymbol{R}^{ext}\}=\{\boldsymbol{0}\}$就足够了，在此前提下，如果算法对$\{\boldsymbol{R}^{ext}\}=\{\boldsymbol{0}\}$稳定，那么当$\{\boldsymbol{R}^{ext}\}$非零但有限时，它是稳定的。概括地说，分析稳定性有两种方法。一种

是频谱或傅里叶稳定性分析,检验单个自由度的运动方程。证实单个方程是一个典型模态方程的代表,并且如果保留所有振型,一个多自由度结构的模态分解能准确表示这个结构。第二种方法是能量稳定性分析,它用于检测初始系统的方程式,并建立解的范数随时间增加的有界条件。频谱稳定性通常提供更直观和有时更精确的结果,而能量稳定性可应用于更复杂的问题。参考文献见[2.13,11.57]。

下面,我们考虑(显式)中心差分法和(隐式)平均加速度法,两者均无阻尼。

中心差分法:频谱稳定性 让我们将中心差分法应用于无阻尼的单自由度运动。对于零外部载荷,为简化省略下标 i,我们从通用模态方程(式 11.7-6)得到

$$\ddot{Z}+\omega^2 Z=0 \tag{11.14-1}$$

这个方程描述振荡运动(式 11.14-14b)。将方程 11.12-1b 代入在时间步 n 写出的式 11.14-1,得到中心差分的近似解。因此

$$Z_{n+1}+(\omega^2\Delta t^2-2)Z_n+Z_{n-1}=0 \tag{11.14-2}$$

我们寻找 $Z=\lambda^n$ 形式的解。于是 $Z_{n+1}=\lambda^{n+1}$ 和 $Z_{n-1}=\lambda^{n-1}$。进行这些替换并用 λ^{n-1} 除,我们得到

$$\lambda^2+(\omega^2\Delta t^2-2)\lambda+1=0 \tag{11.14-3}$$

该式称为特征方程。解这个二次方程的根 λ_1 和 λ_2,得

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}(2-\omega^2\Delta t^2\pm\omega\Delta t\sqrt{\omega^2\Delta t^2-4}) \tag{11.14-4}$$

根可以为实数或复数。目前,我们假设两个根不同,$\lambda_1\neq\lambda_2$。那么式 11.4-2 的解为

$$Z_n=C_1\lambda_1^n+C_2\lambda_2^n \quad \text{当 } \lambda_1\neq\lambda_2 \text{ 时} \tag{11.14-5}$$

如果 $|\lambda_1|\leqslant 1$,$|\lambda_2|\leqslant 1$,那么 Z_n 随时间衰减或保持稳定,提供了稳定的计算。但如果 $|\lambda_1|\geqslant 1$ 或 $|\lambda_2|\geqslant 1$,那么 Z_n 变为无限;这是不稳定的。为了探究这些可能性,我们注意到二次方程 $a\lambda^2+b\lambda+c=0$ 的根满足关系 $\lambda_1\lambda_2=c/a$,在式 11.14-3 中 $c/a=1$。如果式 11.14-4 中的被开方数为正,那么 λ_1 和 λ_2 是实根,而对于我们的假设 λ_1 和 λ_2 不同,$\lambda_1\lambda_2=1$ 表明一个根大于 1,而另一个根小于 1。因而导致不稳定。但如果式 11.14-4 的被开方数为负,则 λ_1 和 λ_2 为单位模数的共轭复根,并且 $\lambda_1\lambda_2=1$。因此如果式 11.14-4 的被开方数为负,总会产生稳定性计算。因此

$$\omega^2\Delta t^2-4<0 \qquad \text{得到} \qquad \Delta t<\frac{2}{\omega} \tag{11.4-6}$$

其次考虑有重根的情况。如果式 11.14-4 中的被开方数为零,那么 $\omega\Delta t=2$,$\lambda_1=\lambda_2=-1$,式 11.4-2 的解是[11.63]

$$\text{当 } \lambda_1=\lambda_2 \text{ 时} \qquad Z_n=C_1\lambda_1^n+n\Delta t C_2\lambda_1^n \tag{11.4-7}$$

由于 n 在此方程的第二项中线性出现,则 Z_n 以算术形式发散。

再说方程 11.14-1 只不过是众多表示完整的结构解耦模态方程组的一个。我们的目的

是使用直接积分来解表示完整结构的耦合方程组。允许的 Δt 由最受限制的模态方程来支配。因此，我们必须考虑数值模型的所有固有频率，并在式 11.14－6 中使用最大的频率。因而得到稳定性条件

$$\Delta t < \frac{2}{\omega_{\max}} \tag{11.4-8}$$

式 11.14－8 通常在文献中表示为 $\Delta t \leqslant 2/\omega_{\max}$。这一式子忽略了由于式 11.14－7 中重根的算术发散可能性。在实际中这种情况不可能遇到，特别是当 $\omega_{\max}$ 由近似值如式 11.12－17 的 Gerschgorih 界限从上面限制时更是如此。

平均加速度：频谱稳定性 我们从写无阻尼单自由度运动方程式 11.14－1 开始，在时间步 n，$n+1$ 和 $n+2$ 时，将所形成的三个方程相加，得到

$$\ddot{Z}_{n+2} + 2\ddot{Z}_{n+1} + \ddot{Z}_n + \omega^2 (Z_{n+2} + 2Z_{n+1} + Z_n) = 0 \tag{11.14-9}$$

在式 11.13－3 中，用 $\gamma = 1/2$ 和 $\beta = 1/4$ 给出平均加速度法。对于目前的讨论，我们用单个相关变量 Z 替换 $\{\boldsymbol{D}\}$。因此式 11.13－3b 表示 Z_{n+1}。我们也用前向时间步表示 Z_{n+2}，然后写出 $Z_{n+2} - Z_{n+1}$。该结果包括 $\dot{Z}_{n+1} - \dot{Z}_n$，而来自式 11.13－3a 的结果是 $\Delta t(\ddot{Z}_{n+1} + \ddot{Z}_n)/2$。因而式 11.13－3得出

$$Z_{n+2} - 2Z_{n+1} + Z_n = \frac{\Delta t^2}{4}(\ddot{Z}_{n+2} + 2\ddot{Z}_{n+1} + \ddot{Z}_n) \tag{11.14-10}$$

用式 11.14－9 消去式 11.14－10 中的加速度项得

$$(1+h)Z_{n+2} + (2h-2)Z_{n+1} + (1+h)Z_n = 0 \quad \text{其中} \quad h = \frac{\omega^2 \Delta t^2}{4} \tag{11.14-11}$$

我们寻求形式为 $Z = \lambda^n$ 的解。因此 $Z_{n+2} = \lambda^{n+2}$ 和 $Z_{n+1} = \lambda^{n+1}$。把这些代入并用 λ^n 除，得到

$$(1+h)\lambda^2 + (2h-2)\lambda + (1+h) = 0 \tag{11.14-12}$$

为得到它的根 λ_1 和 λ_2，求解这个二次方程，我们得到

$$\lambda_{1,2} = \frac{1-h \pm 2\sqrt{-h}}{1+h} \quad \text{其中} \quad h = \frac{\omega^2 \Delta t^2}{4} \tag{11.14-13}$$

Z_n 的方程为式 11.14－5。仿效式 11.14－5 的讨论，对于平均加速度法我们得到 $\lambda_1 \lambda_2 = 1$。另外，式 11.14－13 中的被开方数总为负。由此得出 λ_1 和 λ_2 是共轭复根，所以相异，每个均为单位模量。因此无论 h 为何值，$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$，并且 Z_n 并不随 n 的增加而增大。相应地，不管 h（在此还有 Δt）为何值，计算方法是稳定的。当包括阻尼在内时，同样是正确的，尽管我们在此还未证明。

振幅和周期误差 由直接积分得到的近似解能够显示振幅误差和/或周期误差。如图 11.14－1 所示。振幅误差既可能是振幅的增大，如同不稳定性，或振幅衰变，也称为算法阻尼。周期误差既可以是周期延长，也可以是周期缩短。

为研究在中心差分和平均加速度法中的这些误差，我们重新考虑单自由度运动的无阻尼

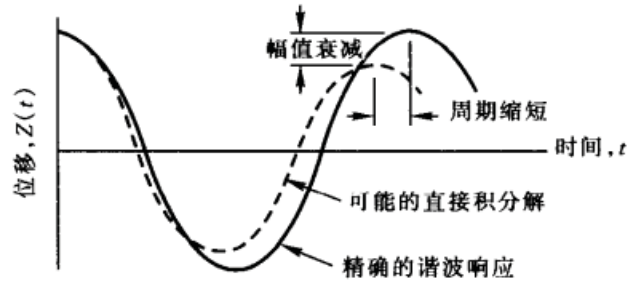


图 11.14-1 直接积分中可能的振幅和周期误差

方程式 11.14-1。解是谐波的,可以写成极坐标形式或三角函数形式。

$$Z^{\text{exat}} = \tilde{C}_1 e^{i\omega t} + \tilde{C}_2 e^{-i\omega t} \quad \text{其中} \quad i = \sqrt{-1} \tag{11.14-14a}$$

$$Z^{\text{exat}} = \tilde{C}_1(\cos\omega t + i\sin\omega t) + \tilde{C}_2(\cos\omega t - i\sin\omega t) \tag{11.14-14b}$$

其中 $\tilde{C}_1$ 和 $\tilde{C}_2$ 由初始条件决定。对于 $\omega\Delta t<2$,中心差分法的式 11.14-4 可写成

$$\lambda_{1,2} = x \pm iy \quad \text{其中} \quad x = \frac{1}{2}(2-\omega^2\Delta t^2), \quad y = \frac{1}{2}\omega\Delta t\sqrt{4-\omega^2\Delta t^2} \tag{11.14-15}$$

适当选择实常数 a 和 b,可将 λ_1 和 λ_2 写成

$$\lambda_1 = e^{(a+ib)\Delta t} = e^{a\Delta t}e^{ib\Delta t} = e^{a\Delta t}(\cos b\Delta t + i\sin b\Delta t) \tag{11.14-16a}$$

$$\lambda_2 = e^{(a-ib)\Delta t} = e^{a\Delta t}e^{-ib\Delta t} = e^{a\Delta t}(\cos b\Delta t - i\sin b\Delta t) \tag{11.14-16b}$$

因此,式 11.14-5 变成

$$Z_n = C_1 e^{an\Delta t}(\cos bn\Delta t + i\sin bn\Delta t) + C_2 e^{an\Delta t}(\cos bn\Delta t - i\sin bn\Delta t) \tag{11.14-17}$$

对式 11.14-17 中 $n\Delta t=t$,式 11.14-14b 和式 11.14-17 的比较说明,除非 $a=0$,否则会产生振幅误差,除非 $b=\omega$,否则会产生周期误差。首先介绍周期误差。

周期误差 定义周期误差 P 为

$$P = \frac{P_{\text{approx}}}{P_{\text{exact}}} = \frac{2\pi/b}{2\pi/\omega} = \frac{\omega}{b} \quad \text{其中} \quad \begin{cases} P>1 & \text{周期延长} \\ P=1 & \text{无周期误差} \\ P<1 & \text{周期缩短} \end{cases} \tag{11.14-18}$$

从式 11.14-5,式 11.14-16 和式 11.14-17,对于 $n=1$ 有

$$\tan b\Delta t = \frac{\sin b\Delta t}{\cos b\Delta t} = \frac{y}{x} \quad \text{因此} \quad b = \frac{1}{\Delta t}\arctan\frac{\omega\Delta t\sqrt{4-\omega^2\Delta t^2}}{2-\omega^2\Delta t^2} \tag{11.14-19}$$

$$P = \frac{\omega}{b} = \omega\Delta t\left[\arctan\frac{\omega\Delta t\sqrt{4-\omega^2\Delta t^2}}{2-\omega^2\Delta t^2}\right]^{-1} \tag{11.14-20}$$

其中,从反正切函数得到的角要求为正。式 11.14-20 表示周期缩短;其在图 11.14-2 中画出。

对平均加速度法，除了在式 11.14－15 中的 x 和 y 必须重新定义与式 11.14－13 一致外，周期误差的推导是相同的。具体地，我们现在有

$$x=\frac{1-h}{1+h}\qquad y=\frac{2\sqrt{h}}{1+h}\qquad \tan b\Delta t=\frac{2\sqrt{h}}{1-h}\qquad P=\omega\Delta t\left[\arctan\frac{4\omega\Delta t}{4-\omega^2\Delta t^2}\right]^{-1}\tag{11.14-21}$$

其中从正切函数得到的角要求为正。式 11.14－21 表示周期延长；其在图 11.14－2 中画出。

我们强调图 11.14－2 与频率为 ω 的振型有关。多自由度结构有多个振型。对于数值分析，人们应该选择一个 Δt 以便使 $\omega\Delta t$ 对所有实际感兴趣的振型是小的。

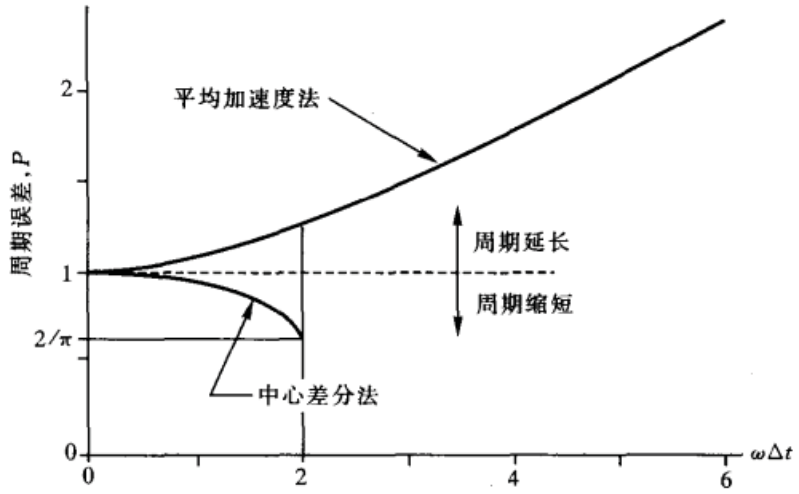


图 11.14－2　中心差分和平均加速度法的周期误差

图 11.14－2 提供了关于直接积分时选择质量矩阵的指导。使用集中质量矩阵经常会低估固有频率，这意味着集中质量矩阵常常延长周期。这种离散化误差在中心差分法中部分地补偿了周期缩短的算法误差。对于平均加速度法，情况正好相反：协调质量矩阵过高估计频率，因此缩短了周期，这部分补偿了平均加速度法中周期延长的算法误差。一般情况下，这些观察结果分别对显式法和隐式法都是正确的。幸运的是，质量矩阵的这些选择，即用于显式法的集中质量矩阵和用于隐式法的协调质量矩阵不仅对精度有益，而且对计算的经济性也有益。拙劣选择是协调[$\boldsymbol{M}$]用于显式法和集中[$\boldsymbol{M}$]用于隐式法。

振幅误差　中心差分和平均加速度法都无振幅误差，就如在回顾关于稳定性的讨论中能够看到的。对两种方法，Z_n 由式 11.14－5 给出。像式 11.14－5 和式 11.14－13 后面讨论的，λ_1 和 λ_2 是单位模量的共轭复数。因此式 11.14－5 证明当 n 增加时，Z_n 既不增加也不减少。

为了用另一种方法来证明中心差分法没有振幅误差，考虑 $\lambda_1+\lambda_2$，其可写成两种形式，第一种用式 11.14－4，然后用式 11.14－16，它带有 $e^{ib\Delta t}$ 和 $e^{-ib\Delta t}$ 的极坐标形式。因此

$$2-\omega^2\Delta t^2=2e^{a\Delta t}\cos b\Delta t\tag{11.14-22}$$

代替式 11.14－19 中的 $b\Delta t$。得到一个关于 $a\Delta t$ 的方程，对于所有 $\omega\Delta t$ 的值（为稳定，$\omega\Delta t<2$）$a\Delta t$ 缩减到 $a\Delta t=0$。对平均加速度法，使用与式 11.14－22 类似的方程，该式由式 11.14－13

和式 11.14－16 合并而得，然后替代式 11.14－21 中的 $b\Delta t$，经处理之后得到类似的结论：对所有 $\omega\Delta t$ 的值 $a\Delta t=0$。这些论证的完成留作练习。

说到中心差分法没有振幅误差并不意味着计算振幅是准确的。我们做如下讨论。当 λ_1 和 λ_2 有明显不同时，式 11.14－17 中的 C_1 和 C_2 大致与式 11.14－14b 中的 $\tilde{C}_1$ 和 $\tilde{C}_2$ 相同。但当 Δt 非常接近于稳定性极限时，λ_1 和 λ_2 几乎相等，式 11.14－17 中的两个括号内的表达式几乎相等。在这种情形下，C_1 和 C_2 可能与 $\tilde{C}_1$ 和 $\tilde{C}_2$ 差别很大。中心差分法没有振幅误差的论断意味着数字解的包络线没有增大或缩小。

11.15 响应谱分析

设想为了一个试验方案对已知形式的预期动态载荷响应进行分析（不是谐波载荷，对谐波载荷进行谐波响应分析是合适的）。然后分析寻找结构中一个或多个位置的最大位移、应力或加速度，不管响应历程中最大值出现的时刻。可能的方法是使用模态法或直接积分来计算整个响应历程，然后舍弃除单个最大值以外的所有结果。最大值可用响应谱来进行更直接的计算，特别是如果它们已经很通用，标准的地震激励就是这种情况。如果必须用响应谱的计算来进行响应分析，则全部努力和计算花费是否低于模态分析或直接积分还不是很清楚。

简而言之，响应谱用来计算每个结构振型对于给定激励的最大响应，而模态最大值通过估算结构本身最大响应的方式组合而得。在下面的概括中，假定条件是线弹性。参考书包括文献[11.2，11.3，11.64～11.66]。广泛使用的有限元软件支持响应谱在计算中的使用。

响应谱 对设定的动态载荷和单自由度系统，响应谱是响应最大值相对于系统固有频率或其周期的函数关系图。“响应”可以是任何计算的量。典型地，可以画出位移和加速度图。如果动态载荷是单脉冲载荷，响应谱可称为冲击响应谱或简单地称为冲击谱。

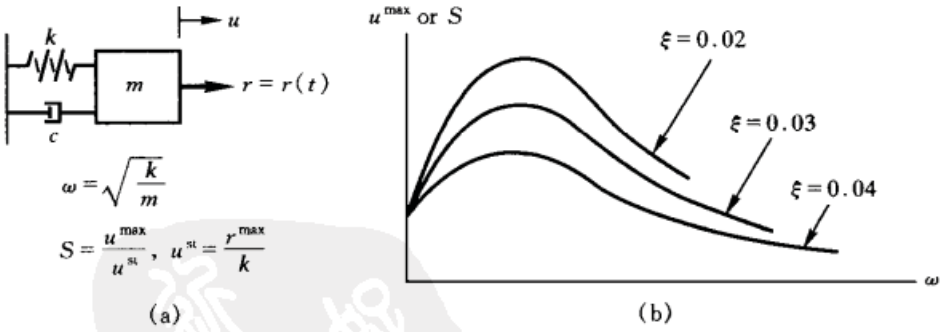


图 11.15－1 (a)受力函数 $r=r(t)$ 作用的单自由度系统；
(b)对一已知(但此处不是指定)力函数假设的位移响应谱

考虑图 11.5－1(a)的单自由度系统和它的运动方程(式 11.2－1 或式 11.4－3)，假设需要位移的响应谱。系统的固有频率为 $\omega=\sqrt{k/m}$。选择一个 ω 值，由已知作用力函数 $r=r(t)$ 引起的位移响应历程可以用任意合适的方法计算(或许用直接积分)。仔细研究位移的最大值结果，不管在什么时间出现。因此我们在 u^{max} 对 ω 的关系图中得到一个点。选择 ω 的另一个值，重复计算得到第二个点。第二个点表示的 u^{max} 也许在与第一个点不同的时刻出现。最大

值出现的时间在响应谱构造中不起任何作用(但可以分别列表)。在计算了大量点以后,可以连接这些点得到一个响应谱,如图 11.15 - 1 中 $u^{\max}$ 对 ω 曲线中的一个。整个过程可以用不同阻尼比 ξ 值来重复而得到不同的响应谱的曲线。纵坐标可不用 $u^{\max}$ 而用放大因子 $S=S(\omega)$ 来表示,它是 $u^{\max}=u^{\max}(\omega)$ 与静态位移 $u_{st}=r^{\max}/k$ 的比值,其中 $r^{\max}$ 是 $r=r(t)$ 的最大幅值。因此,S 与作用力函数 r 的量值是相互独立的;只是它随时间的变化是重要的。

注意到所画频谱图的横坐标不是时间,而是频率或周期。回想 ω 是单自由度系统的固有频率,它与在作用力函数中出现的频率没有关系。图 11.10 - 2 为正弦载荷的响应谱。谐波响应图,如在图 11.17 - 3(b)中的例子,不是响应谱。它描述在多自由度系统中特定自由度的位移而不是单自由度系统的位移,横坐标是作用的正弦载荷的频率而不是系统的频率。

对于地震激励,地面加速度 $\ddot{u}_g$ 可从记载的地震数据中得到。因此式 11.2 - 2 中的作用力函数 $-m\ddot{u}_g$ 是已知的,对此作用力函数的响应谱和设定阻尼比 ξ 可以构造。不同的地震产生不同的频谱,但当画在相同的轴上时,它们之间有相似性。"标准"谱可以从几次地震谱中用画出光滑包络线或统计平滑方法来得到。对于其它的 ξ 可以重复运用。形成的频谱可以用于任何承受相同地震载荷的结构的设计。很显然,尽管是单自由度系统,响应谱的构造仍需要相当多的计算。对每一个 ξ,必须对数百个单自由度方程进行积分(每个基于不同的 ω),如果使用直接积分法,每个方程需要上百时间步。然而,一旦计算了,对于给定的作用力函数的频谱就不需要再重新计算,可以应用到相同作用力函数激励的任何线性多自由度结构,而不管结构的形式和它有多少个自由度。

作为单自由度应用的一个例子,设想棱柱形管道顶上有一水箱。由已知响应谱的地震引起管道中的最大弯曲应力近似为多少?将结构理想化为一长度为 L 的无质量悬臂梁,其末端有质点质量 m。固有频率为 $\omega=\sqrt{k/m}=\sqrt{3EI/mL^3}$。响应谱为此 ω 提供 $u^{\max}$,其中 $u^{\max}$ 表示在这种情况下顶端相对于地面的横向位移。能产生 $u^{\max}$ 的静态横向顶端载荷为 $P=3EIu^{\max}/L^3$;在根部的弯矩是 $M=PL$;弯曲应力是 Mc/I。管道直径的增加可能会增加或减小弯曲应力,这取决于频率谱的形状。

模态组合规则 在结构的每个单独振型响应类似于单自由度系统的假设下,为单自由度系统导出的响应谱能够应用于受相同激励加载的多自由度结构。我们也假设在 $\{\boldsymbol{R}^{ext}\}$ 中的单独节点载荷都以相同的方式随时间变化,因此 $r=r(t)$ 可以描述这些载荷。对频率 ω_i 和阻尼比 ξ_i 的任何振型,响应谱提供位移放大因子 S_i。从式 11.4 - 3 知位移的最大值为

$$u_i^{\max}=S_iu_i^{st}=S_i\frac{r_i^{\max}}{k}=S_i\frac{r_i^{\max}/m}{k/m}=S_i\frac{r_i^{\max}/m}{\omega_i^2} \tag{11.15-1}$$

对多自由度结构,我们使用模态量而不是物理量。因此,我们以类似式 11.15 - 1 的方式,把 S_i 应用于式 11.7 - 6。用模态载荷最大值 $P_i^{\max}$,得到模态最大值

$$Z_i^{\max}=S_iZ_i^{st}=S_i\frac{P_i^{\max}}{\omega_i^2} \tag{11.15-2}$$

用质量正则化模态矩阵$\lfloor\boldsymbol{\Phi}\rfloor$的第 j 行,式 11.7 - 4 得出

$$D_j=\lfloor\boldsymbol{\Phi}\rfloor_j\{Z\}\quad 或\quad D_j=\sum_i\Delta_{ji}\quad 其中\quad \Delta_{ji}=\Phi_{ji}Z_i \tag{11.15-3}$$

这里的 Z_i 和随后的 Δ_{ji} 是时间的函数。现在，在特定的时刻，特别是出现 $Z_i^{\max}$ 的时刻考虑 Δ_{ji}。用上划线表示相关的 Δ_{ji}

$$\bar{\Delta}_{ji} = \Phi_{ji} Z_i^{\max} \tag{11.15-4}$$

例如，$\bar{\Delta}_{32}$ 是由第二个振型的 $Z_2^{\max}$ 产生的自由度 D_3 的值。因为 Φ_{ji} 可能为正或负，$\bar{\Delta}_{32}$ 就也可能是这样。为了得到任一瞬时 D_3 的最大估计值，必须包括所有 $\bar{\Delta}_{3i}$ 的贡献。不能如式 11.15-3 指出的那样简单地将其相加，因为对不同振型 i，与不同的 $Z_i^{\max}$ 值相关的 $\bar{\Delta}_{3i}$ 值通常出现在不同的时刻。然而，这样做我们可得到关于位移自由度最大值的上限。

$$\text{上限：} D_j^{\max} = \sum_i |\bar{\Delta}_{ji}| \qquad \text{通常：} D_j^{\max} \leqslant \sum_i |\bar{\Delta}_{ji}| \tag{11.15-5}$$

数学上没有严密方法由组合模态最大值来生成物理最大值。如果贡献振型的频率能很好地分离，利用平方和的均方根(SRSS)常常能得到很好的结果：

$$\text{SRSS 法：} \quad D_j^{\max} = \sqrt{\sum_i (\bar{\Delta}_{ji})^2} \tag{11.15-6}$$

NRL 求和法[11.67]使用最大值的振型，我们称之为 $|\bar{\Delta}_{jm}|$，将 SRSS 应用于所有其他振型：

$$\text{NRL 求和法：} \quad D_j^{\max} = |\bar{\Delta}_{jm}| + \sqrt{\sum_{i \neq m} (\bar{\Delta}_{ji})^2} \tag{11.15-7}$$

另外的组合法在其他的参考文献中讨论。

Chopra[11.3]告诫人们注意在计算取决于与节点位移有关的量值时易出现的错误，诸如用于计算弯曲应力的梁单元的曲率。正确的方法是把模态贡献组合到相同响应的量值上，在这种情况下对于曲率，计算其最大值。从对曲率有贡献的自由度单个最大值计算曲率是不正确的。

上述讨论实际假设作用力函数有单个空间分量。也就是说，它可能是地震运动的南北分量。也可能存在东西分量和垂直分量，甚至旋转分量。这类复杂问题的讨论见文献[11.65]。

详细计算见第 11.18 节的后面部分。

11.16 备注·建模考虑

动态分析比静态分析更为复杂。载荷有附加的时间维，分析的目的也不相同，达到每一个目的也有更多的计算方法。动态分析比静态分析的费用高，体现在对分析者的时间和在计算机资源的需求上。预见结构响应更为困难，所以做初步分析、规划数值工作和判断计算结果的质量更加困难。

尽管如此，像在第 10 章给出的一般建议仍是适用的。要理解物理问题、结构动力学概念和分析程序。学习软件参考文件的利用和留意软件发出的警告信息。从简单的小规模试验性研究和粗网格建模开始。期望修改和完善模型。细致地检查计算结果。保留对数据源、所做假设、所进行的小规模试验性研究、所考虑的加载情形和使用方法的记录。读者可能希望复习第 10 章以便更好地理解能够用于动力学以及静力学的附加建议。

在给定结构中，静态和动态载荷可能产生完全不同的响应。在图 11.16－1(a)中，由于载荷 P，梁的右半部分对静态响应没有贡献。动态情况，梁的右半部分的贡献相当显著。对于 P 的给定值，动态应力可能大大超过静态时的相应部分，它们的空间分布也许将不是很明显。在图 11.16－1(b)中，动态分析受门框刚度的影响，这种刚度水平方向比垂直方向小，使用特殊连接建模还会减小[11.68]。静态分析可能强调垂直方向载荷产生的应力，但地震激励更可能产生水平载荷。类似地，一个结构可能有平板充当承受静态载荷的薄膜，但在动态载荷作用下横向振动伴有弯曲变形。

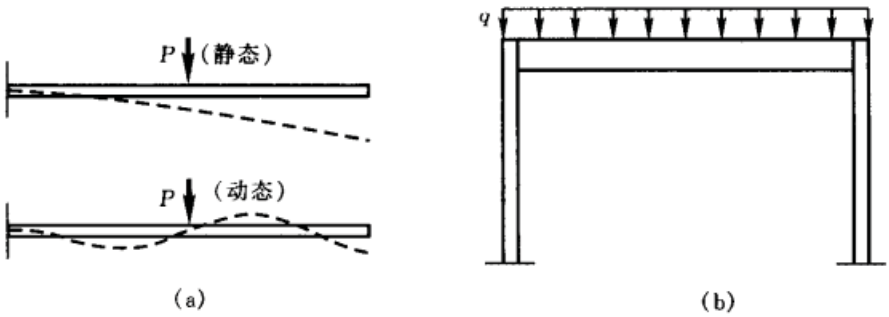


图 11.16－1 (a)承受静态和动态载荷的悬臂梁；
(b)承受静载荷 q 的门框

如果必须进行动态分析，一定要回答几个基本问题[2.21]。分析的目的是什么？需要的精度有多高？简化的可能性有多少？阻尼是否重要？如果是，应该怎样表示？是否有材料非线性或几何非线性？什么频率明显地包含于载荷中，在结构中哪种频率是重要的？哪种计算程序是合适的，它们在所用的软件中可以得到吗？什么输出是合适的？大量的输出怎样分类、保存、显示和检查？

下面根据前面讨论的实际问题分段评述并补充建模建议。

质量表示 有限元的质量矩阵可以写成不同的形式，例如质点集中(对角的)，算法对角化，或协调的(满阵)。哪种方法最好？影响选择的一些考虑如下。

如果单元变形场在单元间是协调的，刚度矩阵不会由于低阶求积规则软化，质量矩阵也是协调的，则有限元模型将提供振动的固有频率，它靠近数学模型精确频率的上限。质点集中质量矩阵常常(但不总是)产生低于精确值的固有频率。如果[$\boldsymbol{M}$]是质点集中质量矩阵，而且有旋转自由度，除非对旋转自由度可任意指定转动惯量，否则在[$\boldsymbol{M}$]中要求非零对角项的解法将会失效。因为转动惯量对有限元模型中重要的低阶振型的影响很小，故通常指定的值不需要很精确。然而，对用条件稳定法的直接积分，转动惯量将不会小到使允许的时间步小于质点质量支配的时间步。对于显式直接积分，为了精度，最好选用集中的[$\boldsymbol{M}$]，也需要考虑经济性。对于隐式直接积分，为了精度，最好选择协调的[$\boldsymbol{M}$]，仅对经济性稍有不利。

图 11.16－2 中的刚架支撑一个质量为 m 的重机器，这是个“非结构”质量，因为实际上，与刚架比较，可认为它是刚性的。把机器作为用刚性连接件附加到刚架上的质点质量来建模，这是可接受的。为了避免人为引入高频振型，连接应该不仅仅是大刚度，而是刚性的(第 8.5 节和 9.2 节)。m 的运动由节点 i 处的平移和旋转自由度支配，所以在[$\boldsymbol{M}$]中有非对角的项出现。一个特别的对角化方案不应导致在节点 i 处简单放置 m，如图 11.16－2(c)，因为那样在

节点 i 处旋转和平移自由度之间的实际相互作用将会丢失。然而，更一般的情况，为了同样的原因，刚性连接带质量自由度的多点约束应当在刚性组集质量中心保留自由度作为主导自由度[11.21]。

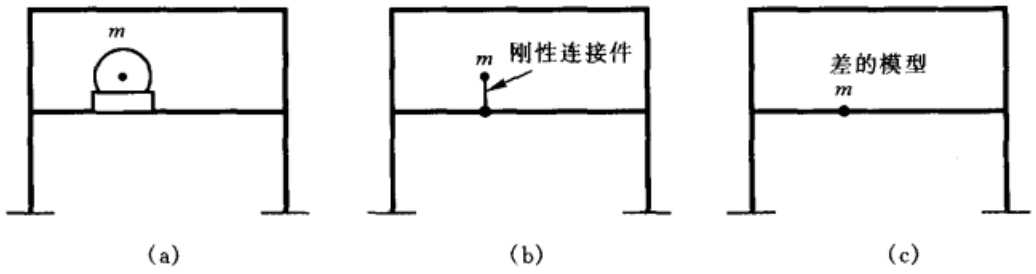


图 11.16－2 (a)质量为 m 的刚性机器连接在建筑刚架上；(b)可接受的模型；(c)差的模型

振动计算 式 11.4－5 的特征值问题，可以用不同的算法求解(附录 C)。它们根据矩阵稀疏、矩阵拓扑、计算频率的数量和其它因素在应用和效率方面有些不同。软件一般会提供算法选择。通常只计算几个最低频率，也许最低到 10%左右，对许多分析不需要更多。

如果一个结构不是完全支撑的或有机构(不稳定性)，$[\boldsymbol{K}]$将是奇异的，每个可能的刚体振型或机构振型都将显示零频率。这种情况可能表明建模错误。当$[\boldsymbol{K}]$是有意为奇异时，用户可能必须祈求“特征值转换”来完成计算。如果通过引入低刚度稳定法来避免奇异性，非物理低频率振型将会把重要的低特征频谱搞乱。在另一个极端，如果$[\boldsymbol{M}]$是奇异的，因为它是对角的，而且有一些零系数 M_{ii}，则每个这样的情况意味着无限频率，特征解算器可能会停止工作。

不同的振型可能有相同的频率。最普通的例子是有圆截面的三维悬臂梁，在一个横向平面内每个振型在正交的横向平面内有同形状和同频率的波形。这个简单的问题可用作试验工况来看特征问题解算器是否能检测到重复的频率并分离相关的振型。Sturm 序列检验(附录 C)能够发现解算器是否丢失了任何固有频率。如果是，可重复求解，这一次，用一个所需的较大频率数。丢失的频率现在有可能出现[11.21]。

初步频率估计 作为有限元分析之前初步分析的一部分，将系统简化为由刚度为 k 的等效弹簧支持的等效质量 m，使用简单的计算近似基本频率有时是可能的。k 和 m 都是近似值。此方法应用的例子见第 11.6 节和 11.17 节的后面部分。瑞雷商式 11.4－13 也可用于假设振型形状。

如果等效的刚度 k 不能轻易地用手算得，可以通过加载静态载荷 P，从有限元模型自身获得。载荷 P 必须定位和定向以致生成一种挠曲形状，它类似于预想的振型形状。如果 Δ 是 P 的计算静态位移，则所希望的刚度就为 $k=P/\Delta$。软件能计算整个结构质量和质量中心位置。

瑞雷商(式 11.4－13)有时能用来排列可能振型的频率。$\{\bar{\boldsymbol{D}}\}_i$ 的大小无关紧要，所以设想每个振型有相同的最大位移是很方便的。因此，如果我们比较图 11.16－3 中的振型 1 和振型 2，可以看到振型 2 的曲率要大，这表明振型 2 在瑞雷商中生成更大的分子。振型 2 还有零位移点而振型 1 没有，而且生成更小的分母。因此，我们得出结论 $\omega_1<\omega_2$。也可以涉及振型 3 做类似比较[11.7]。

应力集中是局部效应，对整体位移模式影响很小。因此，由瑞雷商看来，它们对振动频率的影响很小，并且，依赖于分析目的，可以粗略地建模，至少是在初始分析中是这样。

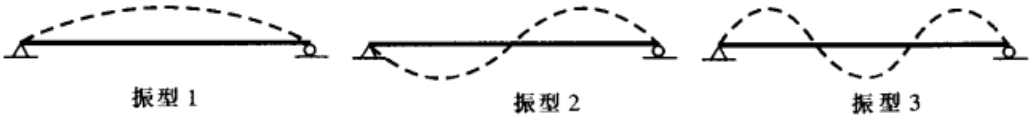


图 11.16－3 简支梁前三个振型。夸大了位移

响应历程：模态分析 为了必需的振型和频率信息，最大的计算花费可能是解特征问题。这些信息可以从研究的前一阶段得到。解耦的模态方程可以很容易地积分。通过调节模态阻尼比，能够为更高振型提供算法阻尼而不影响低振型。如果要研究几个不同的时间相关载荷的影响，模态法是非常有吸引力的，因为可以对每一个应用相同的振型和频率。相反，直接积分需要为每个不同的载荷完全重复解方程。

模态法最适宜于结构动力学问题，例如地震载荷，其中只有最低的几种振型需要计算响应。模态分析不适宜于波传播问题，例如爆炸和冲击载荷，因为所需的大量振型使得此法不经济。

需要多少振型？回答这个问题并不容易。影响决定的几个考虑见第 11.7 节。只考虑作用载荷的频率范围，一些建议如下[2.14,2.21,10.6,11.3,11.21]。设 Ω_u 为载荷中最重要的分量的圆频率，像从载荷的傅里叶级数表达式中决定的那样。响应谱适合于感兴趣的量，位移、速度或加速度可能在识别 Ω_u 上很有用。如在正弦加载下的单自由度系统所示，频率高于约 $4\Omega_u$ 的结构振型对几乎处在静态形式下的载荷有响应，而频率低于 $4\Omega_u$ 的振型有动态响应。“截止”频率 Ω_{co} 鉴别出在大多数分析中要用的最高模态频率，其中 $\Omega_{co}=1.5\Omega_u$（至少）或 $\Omega_{co}=4\Omega_u$（最多）。如果除了位移之外还必须计算速度或加速度，则使用较大的 Ω_{co} 值。

有限元网格必须能够表示的最高频率可能也取 Ω_{co}。然而，如果载荷的空间分布很复杂，或如果应力和位移必须计算，则为了允许更复杂的变形状态，可能需要更细的网格，并且必须保留足够多的振型来描述这个状态。很明显，如果载荷分布较复杂，过度粗糙的网格就不能满足要求，即使载荷随时间以简单的正弦形式变化，非常少的振型也是不够的，除非使用静态修正。

响应历程：直接积分 用直接积分法，不需要计算频率和振型（尽管由于其他原因可能总需要计算它们）。如果有几个不同的与时间有关的载荷，就必须对每个载荷分别使用直接积分解法。

再者，直接积分可能是显式或隐式的。两种方法的不同之处，以及每种方法最适合什么问题已在第 11.11 节中做过总结。显式法是条件稳定的。实践中使用的隐式法是非条件稳定的。

在条件稳定法中使用的时间步长 Δt 由稳定性标准来限制。最大稳定 Δt 提供充分的时间离散化；实际上，在中心差分法（CDM）中，使用较小的 Δt 可能会降低精度而不是增加它[2.14]。如果 $[\boldsymbol{M}]$ 是对角的，CDM（式 11.12－6 或式 11.12－8）需要的计算内存很小，每个时间步的计算量也很小，尤其是当 $[\boldsymbol{C}]$ 也是对角的。然而，允许的 Δt 是如此之小以至于 CDM 的大多数实际应用是短过程现象，例如爆炸和冲击问题。这些问题通常涉及到非线性，其用 CDM 比用隐

式法更容易适应，效率也更高，因为没有必要重复形成和分解一个变化的刚度矩阵，与刚度相关的项能够代之以对基于历史信息的单元贡献求和来考虑。

对于 CDM，均匀的网格允许波在所有方向均匀地传播。突变的单元尺寸会引起数字噪声和人工波反射[11.69]。在给冲击的波阵面建模时低阶单元比高阶单元要好。集中[$\boldsymbol{M}$]比协调[$\boldsymbol{M}$]产生更少的寄生振荡，同时也允许较大的 Δt。使用一刚性非常大的单元作为支撑的策略(9.2 节)有提高 ω_{max} 的效果，因此也减小了可允许的 Δt，故应该避免。缩减(第 11.6 和 11.8 节)也应该避免，因为它丢掉了波传播问题所需的较高频率信息。

用非条件稳定显式法(USIM)，Δt 仅仅受精度考虑的限制。USIM 可能与模态法不相上下，但是当必须考虑的与时间有关的载荷不止一个时，情况就有所不同。在 USIM 中每时间步的花费高，因为系数矩阵(式 11.13－5 中的[$\boldsymbol{K}^{\text{eff}}$])不是对角的，在非线性问题中从这一个时间步到下一个都发生变化，因此需要重复因数分解。协调的[$\boldsymbol{M}$]对精度是很有帮助的，只是稍微损失一点经济性。对于 USIM，人们用最大的 Δt 与所要求的精度协调。建议截止频率 Ω_ω 的每个周期的时间步从 10 到 30，其中 Ω_ω 在前述对模态分析的备注中已经定义。因此，应该在 $2\pi/30\Omega_\omega < \Delta t < 2\pi/10\Omega_\omega$ 的范围内使用 Δt。作为对精度的局部检查，可以用小的时间步来重复分析。如果计算结果大致相同，则初始时间步可能是足够小的。

对称性 在静态分析中，几何体、物理属性、边界条件和载荷的对称性使得只分析结构的一部分来代表整个结构成为可能。对称性也可以在振动分析中使用，但是很容易忽略振型。例如，假设对简支梁的左半部分建模。如果模型的右端是简支的，只表示初始梁的反对称振型。为获得对称振型，左半部分的模型必须重新分析，这次允许其右端有横向位移，但不允许有旋转。旋转壳在静态分析中，可以当成轴对称来建模，但是其大多数振动振型将沿周边显示波动。建议对称条件不要用在振动问题或其他动态分析中。

应力计算 如果以近似振型形状提供，瑞雷商式 11.4－13 生成比振型形状误差小的频率。因为应力是从振型形状中计算得来的，我们得出结论：精确的应力需要比精确的频率更细的网格。计算的振动振型定义了它所包含自由度的相对振幅，但是没有说明实际位移大小。除非振型缩放比例与实际位移幅值一致，从振型计算的应力大小无物理含义。

应力可以从节点自由度计算得到，这和在静态分析中一样。对梁单元，精度能够由应力叠加来提高，这些应力是由于与运动相关的惯性载荷给单元加载产生的。对于静态载荷，在相关的图 2.9－1 和图 2.9－2 中描述了这个过程。

检查误差 静态分析的误差和错误，多半对动态分析也是可能的。像在静态分析中那样，可以检查节点的放置是否适当，支撑的类型设置是否合理，等等。在动态分析中数据差错更有可能，因为需要更多数据。质量必须给定，单位与其他数据协调，ρ 表示质量密度或重量密度，取决于软件。必须提供阻尼比，按软件要求作为分数或百分数。如果计算出的 ω 表示为固有频率，就不能解释为圆频率。

首先应该静态分析一个有限元模型，使用一个好像要产生一个最低振动振型近似值的载荷。静态分析相对容易和便宜，也可以揭示影响动态响应的建模误差。人们可以指示软件计算整个结构质量和质心位置。结果应该与预期的相一致。振动频率和振型也能够计算，即使预期的分析不要求它们，是否需要进一步核查和深入了解，由谐波响应、响应历程和响应谱的分析来做决定。零频率表示缺少支撑(这可能是有意的)或存在一个机构。不合理的高或低的

频率暗示数据中的错误。如果振型不是平面的，还应该直观逼真地用图画出，从不同方向观察。这些振型是否与预想的支撑条件一致，在物理上是否是合理的？

在动力学中，甚至对于经验丰富的分析者，预示响应的特性可能也是非常困难的。因此建模也困难，预见所要研究的是哪种类型的响应更费力。因此建议不熟悉的分析题目从小规模探索性研究开始。也可能在软件中重新选项。例如，动态响应分析的结果可以在短时间之后检查，如果运算看起来正常则可继续计算。

与实验比较 试验者和分析者必须一起工作来确保这两个群体研究相同的问题。他们在几何、弹性属性、阻尼、结构质量、非结构质量（大小、位置和附属方法）、支撑（铰接、弹性或其他，位置）、激励（类型，大小，位置和方向）、所研究的响应（类型、位置和方向）也许还有其他考虑的问题都必须一致[11.21]。结构无疑比有限元模型复杂，因此模型不能代表结构的某些振动振型。有限元模型节点应该出现的位置要取自结构的计量点上。也许有限元模型是线性的，但结构不是。为了搞清楚，结构可能在给定频率要承受两个或更多能级的激励，画出结果来看响应是否与激励能级成比例。

其他 动态载荷可能是在结构上移动的，而不是作用在某个固定位置。例如，如果一个重型车辆沿着桥梁移动，其对梁的加载方式取决于车辆的速度、质量、悬挂刚度和阻尼，以及行驶道路的状态（即梁的挠度）。旋转的轮胎由局部压力加载，这个压力绕圆周相对于轮胎移动。这类问题的参考文献包括在[11.70～11.74]中。

为避免完全重解修正模型，或作为设计过程的一部分为获得所希望的动力学性能，预示特征值和特征向量相对于系统参数变化的变化率是有帮助的。这个研究就是所谓的敏感性分析。相关的问题就是基于试验数据改进有限元模型，以便 FEA 预示能更好地与观察性能一致。这项研究有好几个名字，也许初期为系统辨识，但也可能是结构辨识，模型修正，参数修正，参数估计和动力学逆向问题。许多可用参考资料中的少数几个见文献[11.75～11.79]。

对某些静态问题，诸如集中载荷下的均匀梁，FEA 能精确地求解数学模型。在动态中则不是这样的，因为基于多项式场的单元不能精确地描述一个振型形状（振动梁的横向位移模式是正弦曲线的，而不像在标准的梁单元中是三次的）。因此，在刚度描述中有离散误差。质量描述也有离散误差。经常产生太低频率的集中质量，趋向于补偿基于位移的协调单元的过刚特性。对于给定的有限元网格，如果使用集中[M]然后协调[M]两次求解特征问题，两个特征解很好的一致，说明离散误差很小。网格离散误差在动态中不像在静态中那样研究充分。参考文献包括文献[11.80～11.83]。

与在隐式直接积分中使用的时间步长有关的误差估计是可利用的，能用于求解中自动调节时间步长[11.83～11.85]。

谨慎注意 在文献[11.86]中关于碰撞现象的数值建模意见通常情况下稍作修正也可应用于 FEA。该文建议对问题的物理本质、动力学和数值建模要透彻理解。另外，数值问题与物理问题有显著的不同。“现今用于波传播和碰撞的计算机程序绝不能当作‘黑匣子’来对待。至少需要 6 个月到 2 年的经验才能成功应用这些程序。这一过程没有捷径，没有坦途。”这个参考文献告诫人们利用网格不能只考虑计算方便而忽视问题的物理属性，把物理原因归结为数值结果或不稳定性，这样认识是不妥当的。

11.17 应用:振动和谐波响应

我们考虑的结构是图 11.17-1(a)所示的直角刚架 ABC。刚架是均匀的,A 点铰支,在 C 点为滚动支撑。由 50 个梁单元来建模,每个长度为 0.1m。对所选离散节点(图 11.17-1 中未显示)编号。位移限制在纸平面内。结构简单允许我们把重点放在动力学上而不是几何建模,并很容易地显示结果。我们将计算振动的固有频率,然后用 $\xi=0.2$ 作为所有振型的阻尼比计算谐波响应。具有转动惯量的集中质量通过使用的软件生成,但它的文件没有提供关于列式的细节。

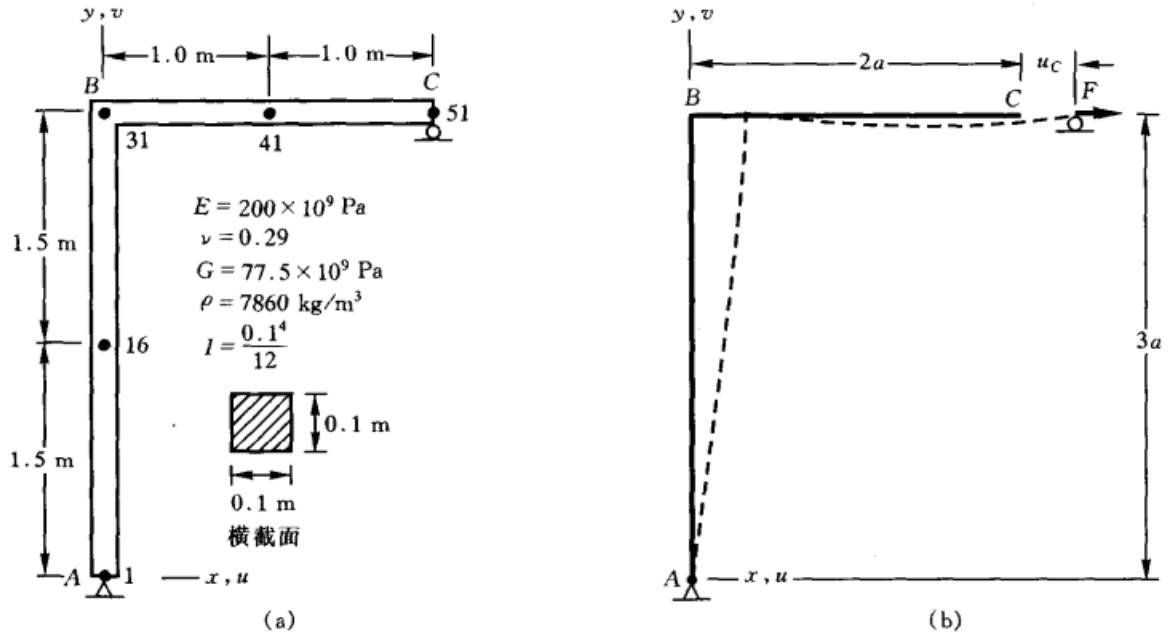


图 11.17-1 (a)平面刚架结构及其属性。数字 1,16,31,41 和 51 是有限元模型中使用的节点编号;(b)在初步分析中使用的静态载荷。此处 $a=1.0$ m

初步分析 基本振动频率很容易估计,只要通过简化问题至单自由度,然后计算 $\omega_1 \approx \sqrt{k/m}$。假设基本振动型态与在 C 点作用水平载荷 F 形成的静态变形类似(图 11.17-1)。静态位移 u_C 可以使用简单能量法或梁理论得到,其结果是

$$u_C = \frac{15Fa^3}{EI} \qquad \text{因此} \qquad k = \frac{F}{u_C} = \frac{EI}{15a^3} = 111\ 100\ \text{N/m} \tag{11.17-1}$$

BC 的所有质量都有水平位移 u_C,但 AB 的质量只有一部分是如此。能够做基于挠曲形态的精确计算,但不值得这样繁琐。我们将任意假设 AB 质量的一半有水平位移 u_C。因此,用体积乘质量密度,我们得到 $7\ 680(2.0+1.5)(0.1)(0.1)=275$ kg 作为有效质量 m。此处

$$\omega_1 \approx \sqrt{k/m} = 20.1/\text{s} \qquad \text{和} \qquad f_1 = \omega_1/2\pi \approx 3.20\ \text{Hz} \tag{11.17-2}$$

高阶振型的频率和形状变得更加难于估计。至于谐波响应,我们期望作用力函数有与固有频

率几乎相等的频率时，出现峰值响应。

振动结果评价 由 FEA 计算的前五个频率和振型如图 11.17－2 所示。在 FEA 计算的 f_1 和初始估计(式 11.17－2)之间有很好的一致性。为绘图而夸大的位移幅值，不是很显著。回忆与图 11.16－3 有关的讨论，我们看到图 11.17－2 所示的振型意味着与计算值一致的频率的排序。这些振型的每个波横跨几个单元，因此有限元网格对这些振型而言显得很充分，好像至少到振型 25 是足够的，因为每个位移的完整正弦波应该横跨四个单元。另外计算的频率为 $f_6=269.4$ Hz，$f_7=396.6$ Hz，$f_8=420.8$ Hz，$f_9=552.3$ Hz 和 $f_{10}=649.6$ Hz。有限元模型总共有 150 个频率。在前五个振型中所选自由度的振幅，依据式 11.7－1 的正则化的$[\boldsymbol{M}]$，如表 11.17－1 所示。表中的代数符号与图 11.17－2 所示一致。

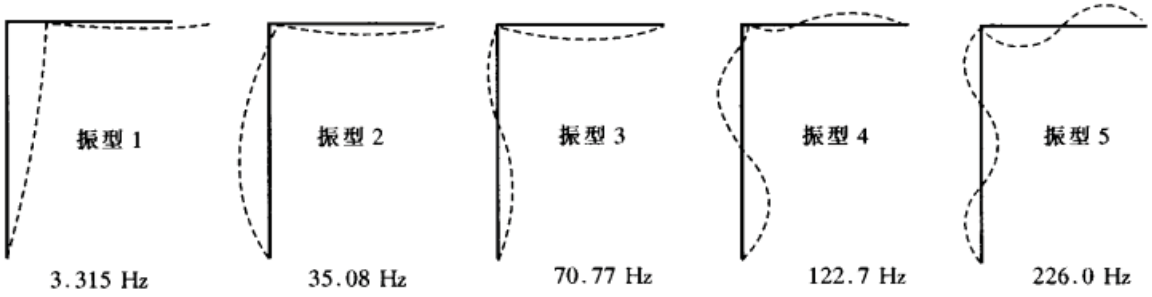


图 11.17－2 计算振型和固有频率

表 11.17－1 图 11.17－1 中刚架的振动：对于所选择的节点，质量-正则化特征矢量$\{\bar{\boldsymbol{D}}\}_i$ 所选的项(即在振型 i 的节点振幅，满足式 11.7－1)。每个乘以 1000

自由度	节点	振型 1	振型 2	振型 3	振型 4	振型 5
$\bar{u}$	16	38.6	−81.5	23.8	−27.7	62.7
$\bar{\theta}_z$	41	1.0	7.0	−19.4	52.6	248.9
$\bar{u}$	51	62.3	33.1	−3.4	21.6	9.2

谐波响应分析 设力 $F=3000\sin\Omega t$，单位为 N，作用在节点 51 的水平方向。对几个载荷频率 Ω 的每一个计算谐波响应。对所有振型，阻尼比均为 $\xi=0.02$。图 11.17－3(a)表示 $\Omega=122$ Hz 的强迫振动振型，它不完全等于振型 4 的固有频率。为几个 Ω 的每一个值解式 11.10－2，并从模态振幅转换到物理振幅，显示物理振幅对 Ω 的关系图可以为选择的任何自由度构建。图 11.17－3(b)表示节点 16 水平运动的振幅图，遍及 Ω 任意选择的范围。与预期的一样，在 $\Omega=\omega_3$ 附近和 $\Omega=\omega_4$ 附近观察到峰值。在模态分析中只使用了五种振型，所以 $\Omega>\omega_4$ 的结果是可疑的。然而，只用四种振型重新分析，产生了几乎与图示范围内相同的结果。

使用从表 11.17－1 中得到的模态数据，可以检查图 11.17－3(b)中的峰值振幅。考虑振型 4 对 122.7 Hz 附近峰值的贡献。在载荷振幅向量$\{\boldsymbol{R}^{ext}\}$中仅有的非零输入是在节点 51 处向右的 3000N。因此，从表 11.17－1 和式 11.7－6，振型 4 中的模态载荷的振幅为 $\bar{P}_4=0.0216(3000)=64.8$。用 $\omega_4=2\pi(122.7)=770.9/\mathrm{s}$，$\xi_4=0.02$ 和 $\beta_4=1.0$，式 11.10－2 得到

$$\bar{Z}_4=\frac{\bar{P}_4/\omega_4^2}{2\xi_4}=\frac{64.8/770.9^2}{2(0.02)}=0.002\ 73 \qquad (11.17-3)$$

最后,计算节点 16 处由于振型 4 的水平振幅,我们看表 11.17-1 的上面一行,得到 $0.0277\bar{Z}_4 = 75.5\times10^{-6}$ m。这个值与图 11.17-3(b)中的峰值吻合相当好,它说明其它振型对此峰值的贡献很小。由于 3000N 载荷引起的静态偏移可能要大到超过 300 倍。然而,节点 1 处的水平作用力的幅值在 $\Omega=\omega_4$ 时大约是 4800N;也就是说,大概是作用力函数幅值的 1.6 倍。

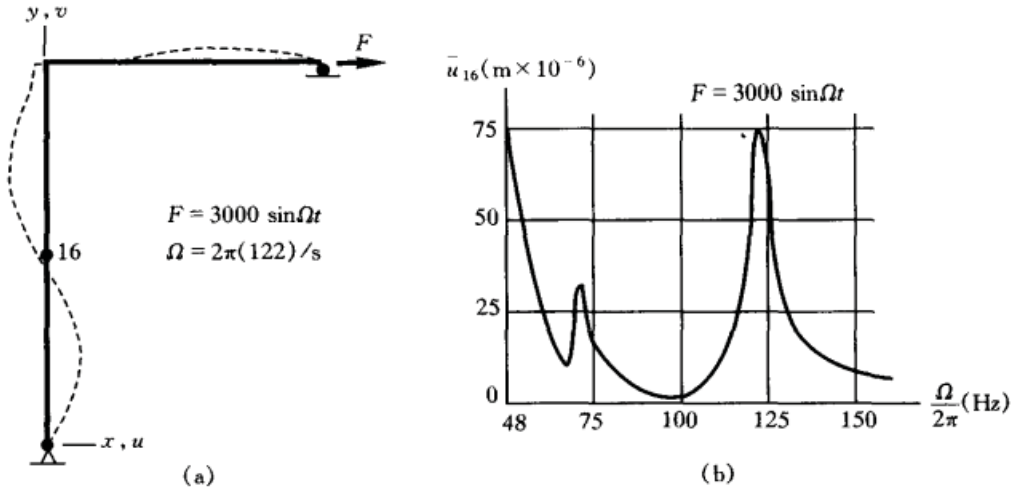


图 11.17-3 谐波响应

(a)对作用力函数频率 $f=122$ Hz 的振动形态;(b)在节点 16 处水平位移振幅与作用力函数频率 Ω 在任意选择的 Ω 范围内的关系

注意:因为在可用的程序当中谁都不能提供所有想要的结果,故本节和下节中的数据来自三个不同的计算机程序。所有三个提供的振型和频率,结果并不是非常吻合。因为这个原因,在报告的数值结果中稍有不一致。

11.18 应用:响应历程

在这一节中,我们考虑刚架的脉动载荷,它的数据出现在图 11.17-1 中,如图 11.18-1 所示,在节点 51 处作用有 100 000 N 的水平力,加载时间 0.01s。结构初始没有变形,而且为静止状态。我们考虑位移和速度的响应历程,使用模态法和平均加速度(隐式)直接积分法。因为载荷是突然作用,它是冲击加载,因此模态法对它不是很适合。我们使用它是为了证明当应用到这样一个问题时的情况如何。这些分析的目的是侧重于说明方法特点,而不是求解问题。

初步分析 我们继续已从式 11.17-1 开始的分析,现在估计节点 51 的最大水平加速度、速度和位移。在整个 0.01s 加载的时间间隔,位移是如此之小,以至于弹性力对 BC 部分的水平加速度没有影响。因此我们使用简单的质点动力学方程。牛顿第二定律 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$ 提供 $t=0$ 时刻的加速度为

$$\ddot{u}_{51} = F/m \approx 100\ 000/275 = 364\ \text{m/s}^2 \qquad (11.18-1)$$

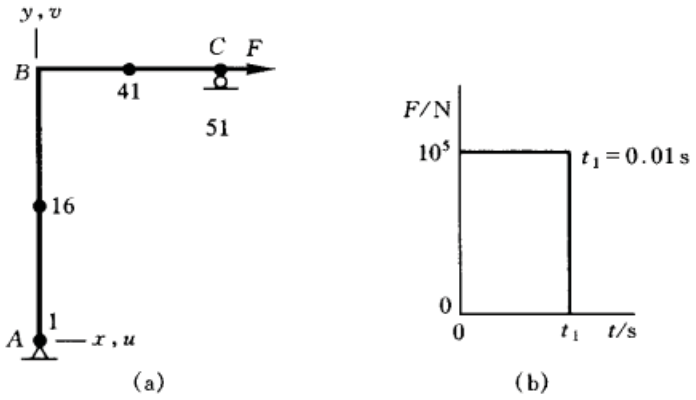


图 11.18－1　(a)在 C 点承受水平力 F 的刚架；
(b)设定的力 F 随时间的变化

脉冲 Ft_1 等于线性动量的变化，我们取为是 $m\dot{u}_{51}$。因此在 $t=t_1$ 时刻

$$\dot{u}_{51} = Ft_1/m \approx 100\ 000(0.01)/275 = 3.64\ \text{m/s} \qquad (11.18-2)$$

为估计最大位移，我们使最大动能和最大应变能在振型 1 时相等，其近似刚度 k 可从式 11.17－1 中得出。于是

$$\frac{1}{2}m\dot{u}_{51}^2 = \frac{1}{2}ku_{51}^2 \quad \text{因此} \quad u_{51} = \left[\frac{m\dot{u}_{51}^2}{k}\right]^{1/2} \approx \left[\frac{274(3.64)^2}{111\ 100}\right]^{1/2} = 0.181\ \text{m} \qquad (11.18-3)$$

有限元分析　有限元离散化与第 11.17 节中使用的相同。对于模态分析，我们使用在第 11.17 节中计算的频率和振型，阻尼比为 $\xi=0.02$。为研究保留不同数目振型在分析中的影响，用模态法计算了几次响应历程，每次增加另一振型到模态矩阵中，直到所保留的全部 15 个振型。振型 15 的频率为 $f_{15}=1268$ Hz。在每个分析中，式 11.7－6 的直接积分所用的时间步长为 $\Delta t=0.0001$ s，振型 15 的周期大约为 7.9 个时间步长。

可以用直接积分法来解同样的问题，用式 11.13－5，取 $\gamma=0.50$ 和 $\beta=0.25$。在模态分析中所用的阻尼形式，对每个振型 $\xi=0.02$，在直接积分法中不适用。如果使用式 11.5－3，对 $\xi_1=\xi_2=0.02$和振型 1 及 15 的频率 ω_1 和 ω_2，得到的 α 和 β，从式 11.5－2 在 $\omega=407$/s($f=64.8$ Hz)时算得 ξ 的最小值 0.002。我们选择忽略阻尼。在应用直接积分的短时间间隔上它的影响可以忽略。将显示使用不同时间步长产生的结果，使用的最短时间步长为 $\Delta t=20\times10^{-6}$ s。

显式直接积分是否快一点？为了回答，我们必须估计显式积分的 Δt_{cr}。考虑刚架的典型单元。该单元限制轴向变形，式 11.12－15 给出 $\omega=2c/L=0.10\times10^6$/s。但是弯曲产生更高的频率。忽略剪切变形和两端简支的单个梁单元的振动分析，对它的两个振型中的较高者，得到最大频率 $\omega=0.73\times10^6$/s，对此，式 11.12－9 得到 $\Delta t_{cr}=2/\omega_{max}=2.7\times10^{-6}$ s，作为中心差分法中所允许的最大时间步。如果 $\Delta t=20\times10^{-6}$ s 为实际期望的最小时间步长，则对一维问题，在 11.11 节中提到的每个时间步的成本比是可以接受的，隐式法较快(在隐式法中没有说明把[$\boldsymbol{K}$]化为因子的一次花费)。如果是二维或三维问题，隐式法是不经济的。

结果评价 节点 51 处，从保留的 15 个振型的模态分析中计算的最大水平加速度、速度和位移，分别为 173 m/s²，4.27 m/s 和 0.181 m。速度和位移与式 11.8－2 和式 11.8－3 的一致性非常好。加速度与式 11.18－1 一致性比较差，这反映出模态分析不适合冲击载荷。

我们任意选定节点 41 处旋转自由度的位移、速度和加速度的计算结果。图 11.18－2(a)，在模态分析中只保留两个振型，表明高振型衰减更快。这从跟着式 11.4－2 的讨论来看，是有道理的，据那里讨论，阻尼 $\xi=0.02$ 每周期减少振幅大约 10%。振型 2 在给定时间内比振型 1 完成的循环更多，因此其衰减更快。

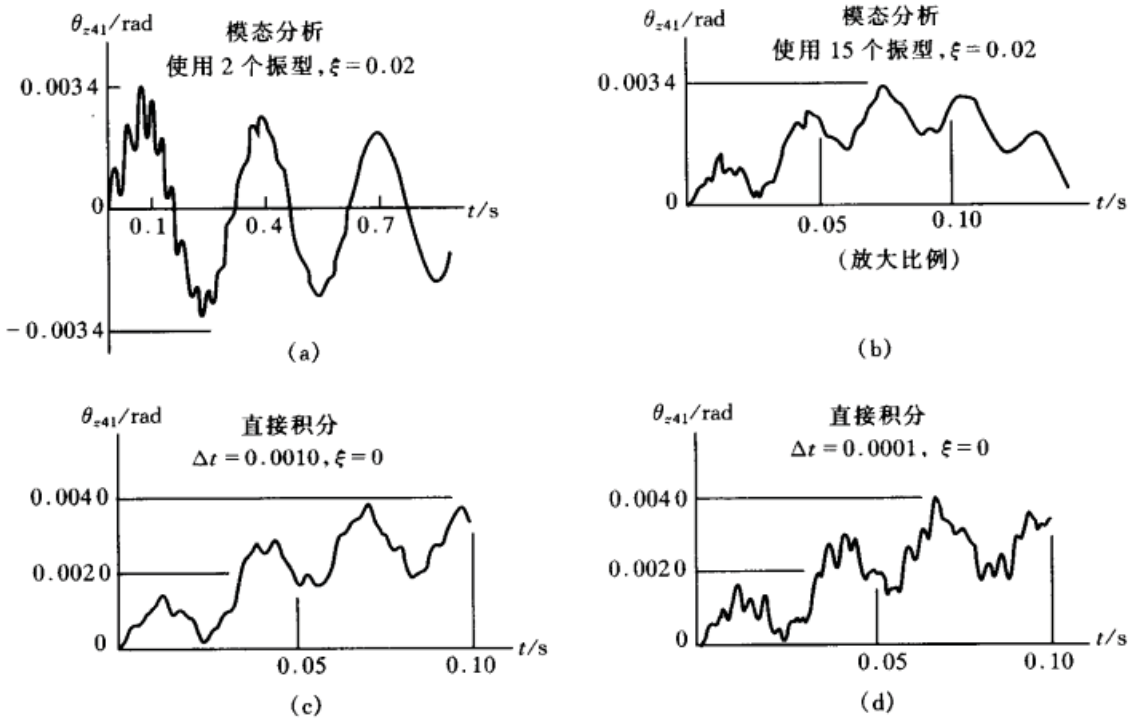


图 11.18－2 对图 11.18－1(b)的加载，节点 41 处的转动 θ_z/rad 与时间 t/s 的关系
(a,b)用模态分析计算；(c,d)用平均加速度法直接积分计算

图 11.18－2(a)的初始部分见图 11.18－2(b)，但只使用了 15 个振型。高于第二个振型的贡献是明显的，但出现的最大位移的大部分是前两个振型表示的。由直接积分法算得的类似结果见图 11.18－2(c)和图 11.18－2(d)。后面的结果说明更多的振型在模态分析中是可行的，阻尼可能会有显著的效果，即使是在显示的小时间间隔中。

对于节点 41 处旋转速度的类似曲线见图 11.18－3。显然，两振型对计算 $\dot{\theta}_{z41}$ 是绝对不够的。实际上，直接积分结果说明 15 振型也是不充分的，建议在直接积分分析中还应该用更小的时间步长。加速度 $\ddot{\theta}_{z41}$ 的结果，没有用图表示，它甚至显示出更大的差异，如表 11.18－1 的数据所示。再次得到结论：模态分析不适合于冲击加载，并且在直接积分法中需要更小的时间步长，至少计算速度和加速度是这样。

表 11.18－1　图 11.18－1 中节点 41 的旋转 θ_z：θ_{z41} 的最大值(弧度)和它的时间导数 $d\theta_{z41}/dt$ 及 $d^2\theta_{z41}/dt^2$，在所示的时间范围内，通过模态分析和隐式直接积分计算

参量	t 的范围	模态分析		平均加速度法		
		2 振型	15 振型	$\Delta t=10^{-3}$ s	$\Delta t=10^{-4}$ s	$\Delta t=2\times10^{-5}$ s
θ_{z41}	0～0.1s	0.00337	0.00347	0.00386	0.00413	0.00410
$\dot{\theta}_{z41}$	0～0.02s	0.15	0.60	0.24	0.84	1.44
$\ddot{\theta}_{z41}$	0～0.02s	40	1524	171	3402	21.790

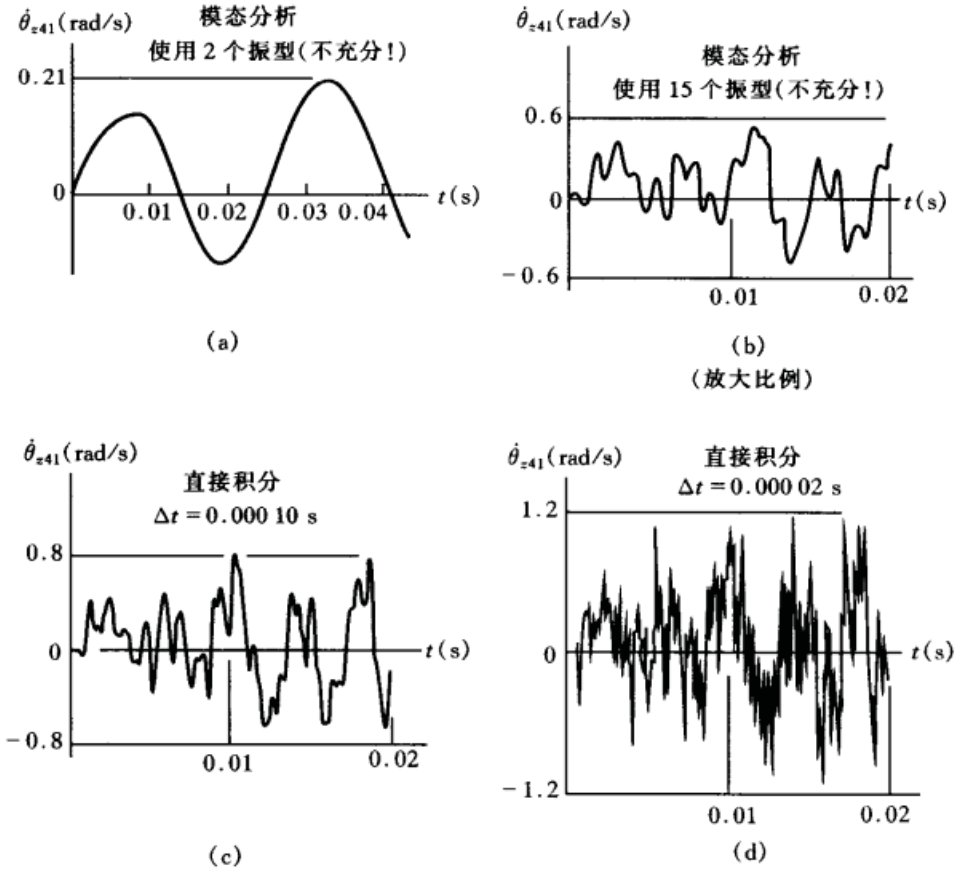


图 11.18－3　对于图 11.18－1(b)的加载，节点 41 处角速度 $\dot{\theta}_z$(rad/s)与时间 t(s)的关系
(a,b)用模态分析计算；(c,d)用平均加速度法直接积分计算

响应谱分析　如果只需要响应的最大值，不管它什么时候出现，我们能从响应谱分析中得到估算值(第 11.15 节)。这些计算有有限元软件的支持，但为了具体说明，我们将用手算。初始模态分析已经做过；结果如表 11.17－1 所示。这些信息接下来应用于节点 41 的旋转 θ_{z41}。

对于图 11.18－1(b)中的矩形脉冲载荷，式 11.15－2 的放大因子由解析公式给出[11.2,11.3,11.66]：

$$S_i = 2\sin\pi t_1 f_i \quad (t_1 f_i < 0.5) \qquad S_i = 2 \quad (t_1 f_i > 0.5) \tag{11.18-4}$$

因此，对于图 11.17－2 中报告的频率 f_i，

$$S_1 = 2\sin\pi(0.01)(3.315) = 0.208 \quad S_2 = 2\sin\pi(0.01)(35.08) = 1.784 \tag{11.18-5}$$

和 $S_3 = S_4 = \cdots = 2.000$。用式 11.7-6 和表 11.17-1 中的数据，我们得到模态载荷

$$\begin{aligned} P_1 &= \{\boldsymbol{\Phi}\}_1^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{R}^{\mathrm{ext}}\} = 0.062\,3(100\,000) = 6\,230, \\ P_2 &= \{\boldsymbol{\Phi}\}_2^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{R}^{\mathrm{ext}}\} = 0.033\,1(100\,000) = 3\,310, \end{aligned} \tag{11.18-6}$$

等等。从式 11.15-2 中得模态最大值为

$$Z_1^{\max} = 0.208 \times \frac{6\,230}{(2\pi 3.315)^2} = 2.99, \quad Z_2^{\max} = 1.784 \times \frac{3\,310}{(2\pi 35.08)^2} = 0.122, \tag{11.18-7}$$

等等。把这些结果应用到节点 41 的 θ_z，我们使用表 11.17-1 的中间一行和式 11.15-4。令 $(\bar{\Delta}_{41})_i$ 表示在节点 41 处由于 $Z_1^{\max}$ 的旋转。因此

$$(\bar{\Delta}_{41})_1 = 0.001\,0(2.99) = 299 \times 10^{-5}, \quad (\bar{\Delta}_{41})_2 = 0.007\,0(0.122) = 85 \times 10^{-5}, \tag{11.18-8}$$

等等(对于振型 3～15，$\bar{\Delta}_{41}$ 的值都乘以 10^{-5}，分别为 7,38,22,22,0,3,0,3,4,1,1,0 和 1)。最后，我们根据式 11.15-5 到式 11.15-7 的算法组合振型。于是，先利用前 5 个振型，然后利用前 15 个振型，得到节点 41 处的旋转 θ_Z 的最大估算值是

上限：	$\theta_{z41}^{\max}=0.004\,51$ (5 个振型)，	$\theta_{z41}^{\max}=0.004\,86$ (15 个振型)
SRSS：	$\theta_{z41}^{\max}=0.003\,14$ (5 个振型)，	$\theta_{z41}^{\max}=0.003\,15$(15 个振型)
NRL：	$\theta_{z41}^{\max}=0.003\,95$ (5 个振型)，	$\theta_{z41}^{\max}=0.003\,98$ (15 个振型)

(11.18-9)

注意表 11.17-1 中 θ_{z41} 的模态振幅随 ω 猛烈地增加，而 u 的模态振幅不是这样。这表明，位移的结果比旋转的结果情形要好。

分析题

11.2-1 质量为 $\mathrm{d}m$ 和速度为 v 的微分单元的动能为 $v^2\mathrm{d}m/2$。证明有限单元的动能因此为 $\{\dot{\boldsymbol{d}}\}[\boldsymbol{m}]\{\dot{\boldsymbol{d}}\}/2$，其中 $[\boldsymbol{m}]$ 是协调单元质量矩阵，$[\boldsymbol{d}]$ 为单元节点自由度矢量。

11.2-2 证明对于节点加速度 $[\ddot{\boldsymbol{d}}]$，单元节点惯性载荷 $[\boldsymbol{m}]\{\ddot{\boldsymbol{d}}\}$ 与由式 3.3-8(和由式 4.8-15b)给出的体力载荷一样。

11.3-1 (a)在协调质量矩阵中是否有可能出现负的对角系数？作出解释。

(b)假设均匀直梁以这样方式振动，其振动振型的拐点与有限元网格节点一致。利用式 11.3-3 的第二个 $[\boldsymbol{m}]$，以 $\alpha = 1/24$ 得到什么样的 ω？精确结果为 $\omega = \pi^2\sqrt{EI/mL^3}$，其中 L 和 m 分别为节点间的距离和质量。

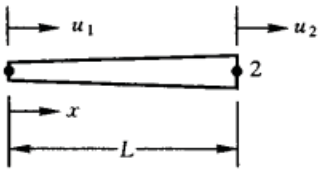
11.3-2 考虑下面三个刚体平面运动中 2 节点单元的动能：横向平移，围绕质心的旋转和围绕左端的旋转。下列质量矩阵是否能提供正确的动能？

(a)杆单元，集中质量矩阵(式 11.3-1)。

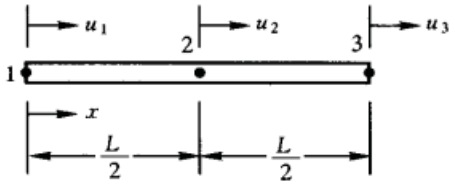
(b)杆单元，协调质量矩阵(式 11.3-4)。

(c)梁单元,协调质量矩阵(式 11.3-5)。

11.3-3　图示杆的横截面积从左端的 A_0 至右端的 γA_0 线性变化,其中 γ 为常数。决定依据轴向自由度 u_1 和 u_2 运算的协调质量矩阵。



题 11.3-3



题 11.3-4

11.3-4　对于图示的均匀二次位移杆,推导作用在轴向自由度 u_1,u_2 和 u_3 上的协调质量矩阵。

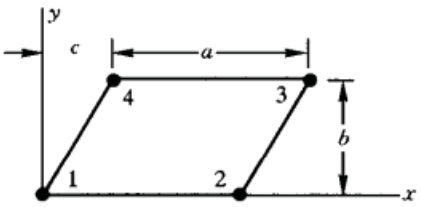
11.3-5　设均匀梁单元围绕其质心转动。在与 HRZ 集中(式 11.3-8)和质点质量集中(式 11.3-3 中 $\alpha=0$)相关的动能中的百分比误差是多少?

11.3-6　决定式 11.3-3 中的 α,以使均匀梁单元有围绕其质量中心旋转的正确动能。然后考虑使用形成的$\lfloor \boldsymbol{m} \rfloor$,用一个单元对简支梁建模,并决定其固有振动频率。能从这个例子中得出什么结论?

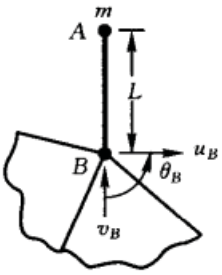
11.3-7　(a)用推导的方法求证式 11.3-6 中所述的 CST 质量矩阵。单元密度和厚度是均匀的。

(b)扩展这个质量矩阵可得到适用于 xy 平面内运动的形式,节点自由度按顺序$\{\boldsymbol{d}\}=\lfloor u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \rfloor^{\mathrm{T}}$。

11.3-8　图示的 4 节点平行 4 边形单元有均匀密度和厚度。形状函数由式 6.2-3 给出。通过积分,确定协调质量矩阵。



题 11.3-8



题 11.3-9

11.3-9　简图中刚性和无质量连杆 AB 把位于 A 点的质点 m 连接到节点 B 上。根据图所示节点 B 中的自由度,与 m 有关的 3×3 质量矩阵是什么?提示:回想第 8.3 节。物理地和定性地说明,哪种类型的误差与这个矩阵的对角化形式有关?

11.3-10　证明下列图中括号内所示的节点质量(a)图 11.3-2(a),(b)图 11.3-2(b)。

11.3-11　对在二维平面内有常见自由度$\{\boldsymbol{d}\}=\lfloor v_1 \quad \theta_{z1} \quad v_2 \quad \theta_{z2} \rfloor^{\mathrm{T}}$ 的均匀梁单元,考虑下面横向位移函数,其中 $\xi=x/L$。

$v=\lfloor (1-\xi) \quad (\xi-\xi^2)L/2 \quad \xi \quad (-\xi+\xi^2)L/2 \rfloor\{\boldsymbol{d}\}$

(a)证明如果 $\theta_{z1}=\theta_{z2}$,则 v 在 x 中是线性的。同时证明当节点自由度与纯弯曲一致时,这个场得到横向位移 v 和曲率 $v_{,xx}$ 的正确形式。

(b)使用此函数和式 11.2-6 来计算质量矩阵。

(c)由此,通过 HRZ 法得到对角质量矩阵。

11.4-1 设想重新设计在[M]和[K]中产生了小的变化。因此,每个振型的固有频率 ω_i 有少许变化,变化量为 $\Delta\lambda_i$,其中 $\lambda_i=\omega_i^2$。使用瑞雷商,并忽略高阶项,根据 λ_i,$\{\bar{\boldsymbol{D}}\}_i$,[$\boldsymbol{M}$],[$\Delta\boldsymbol{K}$]和[$\Delta\boldsymbol{M}$]推导 $\Delta\lambda_i$ 表达式。

11.4-2 (a)设下列矩阵应用于两自由度轴向振动的某个问题:

$$[\boldsymbol{K}]=\begin{bmatrix}2 & -2\\ -2 & 5\end{bmatrix}\qquad [\boldsymbol{M}]=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

精确特征值和特征向量为:对振型 1,$\lambda_1=1$ 和$\{\bar{\boldsymbol{D}}\}_1=\lfloor 2\quad 1\rfloor^{\mathrm{T}}$,对振型 2,$\lambda_2=6$ 和$\{\bar{\boldsymbol{D}}\}_2=\lfloor 1\quad -2\rfloor^{\mathrm{T}}$。考虑近似特征向量$\lfloor 1.7\quad 1.0\rfloor^{\mathrm{T}}$ 和$\lfloor 1.2\quad -2.0\rfloor^{\mathrm{T}}$,证明瑞雷商可提供 λ_1 和 λ_2 的良好估算值(在式 11.4-13 中,$\lambda_i=\omega_i^2$)。

(b)在第 11.4 节的例 1 中,使用瑞雷商和对振动振型的合理猜测来估算基本频率。

11.4-3 考虑长度为 L,质量为 $m=\rho AL$ 的均匀杆的轴向振动,其一端固定,而另一端自由。使用两节点单元,首先用一个单元给杆建模,然后用等长度 $L/2$ 的两个单元建模。对每个网格,使用下列质量矩阵公式计算最低固有频率。(精确结果为 $\omega_1=(\pi/2)\sqrt{AE/mL}$)

(a)协调质量[$\boldsymbol{m}$],式 11.3-4。

(b)集中质量[$\boldsymbol{m}$],式 11.3-1。

(c)平均质量[$\boldsymbol{m}$],式 11.3-7。

(d)对式 11.3-7 中的什么 β 值,一单元振型可产生精确的 ω_1?

11.4-4 在问题 11.4-3 中,当网格细化后,考虑 ω_1 的收敛率。你同意式 11.3-7 之后的讨论所预报的收敛率吗?

11.4-5 问题 11.3-4 描述的 3 节点杆单元的刚度、协调和 HRZ 集中质量矩阵分别为:

$$\frac{AE}{3L}\begin{bmatrix}7 & -8 & 1\\ -8 & 16 & -8\\ 1 & -8 & 7\end{bmatrix}\qquad \frac{m}{30}\begin{bmatrix}4 & 2 & -1\\ 2 & 16 & 2\\ -1 & 2 & 4\end{bmatrix}\qquad \frac{m}{6}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

其中 m 是整个单元质量。长度为 L 的无支撑均匀杆的轴向振动的精确固有频率为 $\omega_1=0$,$\omega_2=\pi\sqrt{AE/mL}$ 和 $\omega_3=2\omega_2$。

(a)确定由协调质量矩阵提供的振型形状和计算频率的误差百分比。

(b)使用 HRZ 集中质量矩阵,重复(a)的运算。

11.4-6 在问题 11.4-5 中,固定 3 节点杆单元的左端。决定轴向振动的两固有频率和它们的振型形状。

(a)使用协调质量矩阵。

(b)使用 HRZ 集中质量矩阵。

(c)使用特定的集中质量:在三个节点的每一处放置一质量为 $m/3$ 的质点。

(d)对(a),(b),(c)的每一个,通过瑞雷商和假定位移模式 $u_1=0$,$u_2=1$,$u_3=2$ 来估计最低频率。

11.4-7 用单个单元对长度为 $2L$ 的简支均匀梁建模。计算振动的固有频率,若可能,使用

引入的质量矩阵。单元[$\boldsymbol{k}$]由式 2.3－5(和式 3.3－14)给出。长度为 $2L$ 的梁单元的精确基本频率为 $\omega_1=(\pi/2L)^2\sqrt{EI/\rho A}$。

(a)协调矩阵[$\boldsymbol{m}$],式 11.3－5。

(b)式 11.3－3 的集中矩阵[$\boldsymbol{m}$],$\alpha=0$。

(c)式 11.3－3 的集中矩阵[$\boldsymbol{m}$],$\alpha=1/24$。

(d)式 11.3－8 的 HRZ 集中矩阵[$\boldsymbol{m}$]。

(e)在问题 11.3－11(b)中计算的[$\boldsymbol{m}$]。

11.4－8 用单个单元对质量为 m 和长度为 L 的均匀悬臂梁建模。重复问题 11.4－7 中的(c)和(e)。精确基本频率为 $\omega_1=3.516\sqrt{EI/mL^3}$。

11.4－9 附录 C 中的第 C.3 节给出的论证说明不同振型是质量矩阵正交的,但是论证假设不同振型有不同的频率。考虑一个单元的圆横截面的悬臂梁模型,两振型有相同频率,并且在形状上是一样的,但出现在不同的平面。证明两振型是质量矩阵正交的。

11.4－10 考虑质量为 m 的均匀杆的轴向振动,它一端固定,另一端自由。基本频率的平方为 $\omega_1^2=cAE/mL$,其中对准确结果 $c=\pi^2/4$。对网格 $N=1$ 和 $N=2$,分别计算出问题11.4－3中 c 的值(使用协调、集中和平均质量矩阵)为(a)3.000 和 2.597,(b)2.000和 2.343,(c)2.400 和 2.463。使用式 9.7－1 对两个值三个数列中的每一个外推至 $N=\infty$。

11.5－1 (a)对于 $\xi=0.03$ 在 5Hz 时,和 $\xi=0.20$ 在 15Hz 时,确定比例阻尼参数 α 和 β。

(b)对 α 和 β 的这些值,作出像图 11.5－1 那样的图形。评论在频率小于 5Hz 和大于 15Hz 时的 ξ。要指出注意事项吗?

11.6－1 (a)证明式 11.6－4 可得出$[\boldsymbol{K}_r]=[\boldsymbol{K}_{mm}]-[K_{ms}][K_{ss}]^{-1}[K_{ms}]^{\mathrm{T}}$。这种关系以前在哪里见到过?

(b)推导式 11.6－4 中[$\boldsymbol{M}_r$]的类似表达式。

11.6－2 如果把式 11.4－5 中的 $\omega^2[\boldsymbol{M}]\{\bar{\boldsymbol{D}}\}$ 当做惯性载荷$\{\boldsymbol{R}\}$的一个向量,把[$\boldsymbol{K}$]求逆得柔度矩阵[$\boldsymbol{F}$],我们得到[$\boldsymbol{F}$]$\{\boldsymbol{R}\}=\{\bar{\boldsymbol{D}}\}$。

(a)把这个方程分割为 m 个主导和 s 个从属自由度,如式 11.6－1 那样,并令$\{\boldsymbol{R}_s\}=\{\boldsymbol{0}\}$。然后推导变换

$$\begin{Bmatrix}\bar{\boldsymbol{D}}_m\\ \bar{\boldsymbol{D}}_s\end{Bmatrix}=[\boldsymbol{T}]\{\bar{\boldsymbol{D}}_m\}\quad\text{其中}\quad[\boldsymbol{T}]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{F}_{ms}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_{mm}^{-1}\end{bmatrix}$$

(b)证明此变换在数学上与式 11.6－3 中的转换是相同的。

(c)怎样能从[$\boldsymbol{K}$]中算得[$\boldsymbol{F}_{mm}$],其物理意义是什么?

(d)为什么(a)的转换有可能比式 11.6－3 中使用的形式有更高的计算效率?

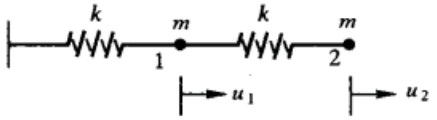
11.6－3 考虑图 11.4－3 中的两自由度无支撑杆。从把 u_2 作为从属自由度中得到的简化刚度矩阵是什么形式? 此结果是否合理?

11.6－4 (a)与图 11.6－2 有关的例子中,选择 $\bar{v}_1$ 作为主导自由度,$\bar{\theta}_{z2}$ 为从属自由度。这个选择符合主导自由度有大的质量-刚度比规则吗?

(b)另一种选择,即 $\bar{\theta}_{z2}$ 为主自由度而 $\bar{v}$ 为从自由度,计算频率和振型形状(类似于式 11.6－9 和式 11.6－10)。

(c)利用(b)中的振型形状和来自式 11.6－7 中的[K]和[M]设法改进瑞雷商中 ω_1 的估算值。为恢复从属自由度,试验式 11.6－7,然后试验式 11.6－6。

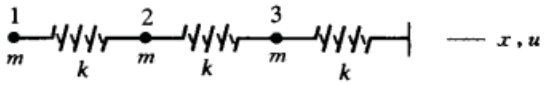
11.6－5 在图示的系统中只允许有轴向运动。设 $k=1$, $m=2$。确定给定系统的基本振动频率 ω_1。然后再把该系统凝聚至单个自由度后计算 ω_1。计算基本振型,为恢复从属自由度首先使用式 11.6－3,然后用式 11.6－6。最后在瑞雷商中使用这些振型来看是否每个都生成改进的 ω_1 值。



题 11.6－5

11.7－1 根据矩阵的乘积,确定式 11.2－12 中阻尼矩阵[C]的表达式,对此式 11.7－6 已做了提示。(形成的[C]是满阵,取决于[Φ]和包含 $2\xi_i\omega_i$ 项的对角矩阵。)

11.7－2 考虑由问题 11.4－2(a)给出的 2×2 的刚度和集中质量矩阵。推导用于模态分析的两个解耦微分方程组。



题 11.7－3

11.7－3 图示三个相同质量质点由三个弹簧连接在一起,每个刚度为 k。只允许轴向运动。振动振型的比例如此确定以使每个的最大自由度为单位 1,其值为$\{\bar{D}\}_1=\lfloor 1.000 \quad 0.802 \quad 0.445 \rfloor^T$,$\{\bar{D}\}_2=\lfloor -0.802 \quad 0.445 \quad 1.000 \rfloor^T$ 和$\{\bar{D}\}_3=\lfloor -0.445 \quad 1.000 \quad -0.802 \rfloor^T$。

(a)画出这些振型,用乘法证明它们是质量矩阵正交的。它们也是刚度矩阵正交吗?

(b)令两振型$\{\bar{D}\}_1$ 和$\{\bar{D}\}_2$ 用于形成模态矩阵[Φ]。对每个质点质量也令 $m=1$。如果 $Z_1=1$,Z_2 必须是什么?节点 1 的物理位移为 0 吗?画出因此得到的结构位移形状。

(c)为了比较,在 Guyan 缩减(第 11.6 节)中使用 u_1 和 u_2 作为主自由度。对 $u_1=0$ 和 $u_2=1$,画出由缩减系统预示的结构位移形状。

11.7－4 (a)在问题 11.6－5 的图中,设 $k=m=1$。并设系统处于轴向运动状态,初始条件 $u_1=u_2=\dot{u}_1=0$,$\dot{u}_2=1$。通过模态方法计算在 $t=1,2,3,4$ 和 5 时刻的 u_1 和 u_2。在[Φ]中包括物理系统的两个振型。注意模态方程能精确积分。

(b)使用(a)的结果来证明误差表达式 11.7－9 的分子为零。

(c)假设现在只保留最低振型,以便使[Φ]变成列向量。估算在 u_1 和 u_2 中的最大百分比误差。

11.7－5 再次考虑问题 11.7－4 中处理的两弹簧两质量系统。令系统在 $t=0$ 时刻无变形且处在静止状态。在 $t=0$ 时刻对节点 2 施加稳定轴向力 $F_2=1$。利用模态法计算在 $t=2,4,6,8$ 和 10 时刻的 $u_1=u_1(t)$ 和 $u_2=u_2(t)$。

(a)在转换中只保留最低振型。

(b)从第二个振型中得到类似的结果,将它们加至(a)的结果上得到精确的结果。(部分答案:在 $t=2$ 时,$u_2=1.483$。)

(c)对于(a),计算式 11.7－9 的误差估算值。表明什么样的结论?如果两个振型都

使用，$e(t)$是什么？

(d)应用静态修正式 11.7－11 来调整(a)中得到的结果。如果包括静态修正，得到什么样的 $e(t)$？

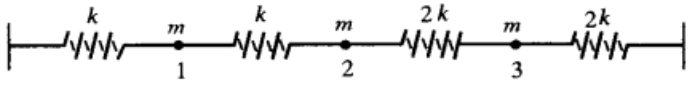
11.8－1 在问题 11.6－5 的图中，设 $k=m=1$。考虑运用里兹向量分析这个系统如下。

(a)外加载荷为零，于是可任意赋值$\{\boldsymbol{W}^*\}_1=\lfloor 1 \quad 0 \rfloor^{\mathrm{T}}$。在此，建立 2×2 的里兹向量数组$[\boldsymbol{W}]$和式 11.8－6 的转换系统。

(b)重复(a)，现在使用$\{\boldsymbol{W}^*\}_1=\lfloor 0 \quad 1 \rfloor^{\mathrm{T}}$。

(c)如果任意假定$\{\boldsymbol{W}^*\}_1=\lfloor 1 \quad 2 \rfloor^{\mathrm{T}}$，并且不使用另外的向量，得到的式 11.8－6 的形式是什么？此方程得到的基本频率是什么？标记这种计算方法的其它名称是什么？

11.9－1 考虑图示弹簧和质量系统的轴向振动，有 $k=1$ 和 $m=1$。固有频率为 $\omega_1=0.924\,6$，$\omega_2=1.574$ 和 $\omega_3=2.381$。建立两个子结构，一个由节点 2 左边的弹簧构成，另一个由节点 2 右边的弹簧构成。证明，在此情况下，组件振型综合产生精确频率。



题 11.9－1

11.10－1 无阻尼单自由度弹簧-质量系统有固有频率 $\omega=\sqrt{k/m}$。受力 $P_0\sin\Omega t$ 激励，其中 P_0 为一常量。频率比 Ω/ω 在什么范围，运动振幅比静态位移大 10%？

11.12－1 向前和向后欧拉直接积分法定义为

向前：$\{\boldsymbol{D}\}_{n+1}=\{\boldsymbol{D}\}_n+\Delta t\{\dot{\boldsymbol{D}}\}_n$

向后：$\{\boldsymbol{D}\}_{n+1}=\{\boldsymbol{D}\}_n+\Delta t\{\dot{\boldsymbol{D}}\}_{n+1}$

使用泰勒(Taylor)级数展开式确定这些方法的精度等级。

11.12－2 证明如果阻尼为零，式 11.12－6 简化为式 11.12－3。

11.12－3 考虑集中质量和一端固定的单个均匀 2 节点杆单元。对此模型，设 Gerschgorin 界限式 11.12－17，和单元界限式 11.12－15，能与精确频率很好吻合吗？

11.12－4 (a)考虑均匀无支撑杆的轴向振动，用等长度 2 节点单元建模。整个模型的最大频率与单个无约束单元的最大频率一致。为什么？

(b)在第 11.12 节中的数值例子中，单元界限几乎与最大网格频率精确一致。随着有限元模型单元数的增加，预期这种一致性是提高还是降低？为什么？

11.12－5 单位质量质点通过单位刚度的弹簧支撑，因此 $\omega=1$。没有阻尼或外部载荷。在 $t=0$时刻，质点位移为零，加速度为零，但有单位速度。使用中心差分法式 11.12－3，在 5 个时间步上计算位移随时间的变化。使用(a) $\Delta t=1$，(b) $\Delta t=\sqrt{2}$，(c) $\Delta t=2$和(d) $\Delta t=3$。

11.12－6 单位质量质点由单位刚度弹簧支撑，因此 $\omega=1$。没有阻尼。在 $t=0$ 时刻，质点的位移为零，速度为零，作用并维持单位力。用中心差分法式 11.12－3，在下面的连续时间步计算位移与时间的关系。

(a)用 $\Delta t=0.5$，直到 $t=7.0$。

(b)用 $\Delta t=1.0$，直到 $t=7.0$。

(c)用 $\Delta t=2.0$，直到 $t=10.0$。

(d)用 $\Delta t=3.0$，直到 $t=15.0$。

(e)得到精确解并与(a)的结果进行比较。

11.12-7 在有比例阻尼的半步中心差分算法中，黏性阻尼力能够近似为 $\alpha[\boldsymbol{M}]\{\dot{\boldsymbol{D}}\}_n+\beta[\boldsymbol{K}]\{\dot{\boldsymbol{D}}\}_{n-1/2}$。对质量-比例部分，用式 11.12-1a 来近似 $\{\dot{\boldsymbol{D}}\}_n$。刚度-比例部分能通过单元贡献 $\beta\int[\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}\{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\}_{n-1/2}\mathrm{d}V$ 求和得到(证明是如此)。因此得到式 11.12-6 的修正形式。

11.13-1 使用泰勒级数推导式 $\dot{u}_{n+1}=\dot{u}_n+\Delta t(\ddot{u}_{n+1}+\ddot{u}_n)/2$，证明 $\dot{u}_{n+1}$ 以 $O(\Delta t^2)$ 的误差近似。提示：对 $\dot{u}_{n+1}$ 写出关于时间 $n\Delta t$ 的泰勒级数，对 $\dot{u}_n$ 写出关于时间 $(n+1)\Delta t$ 的级数，组合结果就得到想要的关系式加高阶项。

11.13-2 重复问题 11.12-5，但用四时间步的平均加速度法，大小为

(a) $\Delta t=2.0$，(b) $\Delta t=1.0$。

11.14-1 考虑有阻尼但没有惯性的单自由度运动方程：$2\xi\omega\dot{Z}+\omega^2 Z=0$。研究稳定性标准，如果方程通过下面方法积分：

(a)中心差分法式 11.12-1a。

(b)平均加速度法。提示：在时间步 n 和时间步 $n+1$ 写出运动方程，将结果相加，用方程 $Z_{n+1}=Z_n+\Delta t(\dot{Z}_{n+1}+\dot{Z}_n)/2$ 来消去速度。

(c)向前欧拉法，$Z_{n+1}=Z_n+\Delta t\dot{Z}_n$。

(d)向后欧拉法，$Z_{n+1}=Z_n+\Delta t\dot{Z}_{n+1}$。

11.14-2 考虑在问题 11.12-5 的(a)，(b)和(c)中得到的中心差分解。每个中的周期误差是什么？检查这些结果是否与式 11.14-20 一致。

11.14-3 考虑在问题 11.13-2 中(a)和(b)得到的平均加速度解。必要时可近似，决定每个的周期和周期误差。检查这些结果是否与式 11.14-21 一致。

11.14-4 (a)对 $\omega\Delta t=0,1,\sqrt{2}$ 和 2，数值计算式 11.14-20 得到中心差分法的周期误差。

(b)对 $\omega\Delta t=0,1,2$ 和 4，数值计算式 11.14-21 得到平均加速度法的周期误差。

11.14-5 推导在(a)和(b)中需要的方程，并证明对所有 $\omega\Delta t$ 的值它们简化的形式可得到 $\alpha\Delta t=0$。

(a)以式 11.14-22 之后描述的方式，利用该方程产生用于中心差分法的方程。

(b)类似的方程用于平均加速度法。

11.14-6 再次考虑问题 11.12-5，其中把中心差分法(式 11.12-3)应用于 $k=m=\omega=1$ 的弹簧-质量系统。现在用 $\Delta t=\sqrt{3.96}$，以 $u_0=0$ 和 $u_{-1}=-1$ 来启动算法。接着至少运行 30 时间步，观察计算的振幅显示“跳动”，但没有净增长。

11.17-1 确定图 11.17-2 中的振型 3 对图 11.17-3(b)中的首个峰值的贡献。使用关于式 11.17-3 的描述方法。

计算题

其中尺寸、载荷或材料属性没有设定，选择合理或方便的值。当需要附加的假设时，清楚

地叙述它们是什么。当使用细化网格时，估计最好有限元网格提供的结果的最大百分比误差。运用在第 1.5 节中建议的分析方法。

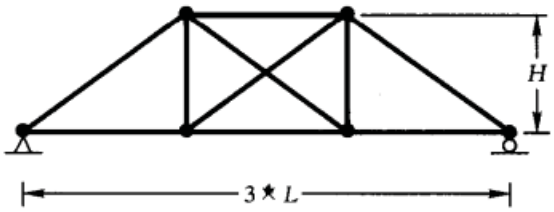
C11.1　设图示结构的位移限制在图形平面内。结构可认为是桁架(杆单元和铰连接)或刚架(梁单元和刚性件连接)。为简单，假定构件横截面是方形，每边长为 h 单位。一种可能，例如使用钢材，$H=L=6.0\text{m}$ 和 $h=50\text{mm}$。使用单个单元来表示十个构件中的每一个，研究下列条件下的固有频率和振型。

(a)桁架模型，协调单元质量矩阵。

(b)桁架模型，质点集中单元质量矩阵。

(c)刚架模型，协调单元质量矩阵。

(d)刚架模型，质点集中单元质量矩阵。



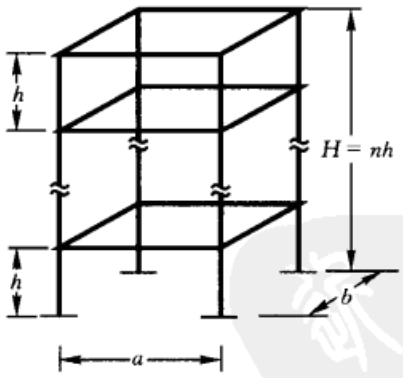
题 C11-1

C11.2　(a)重复问题 C11.1，但移去左边的支撑。

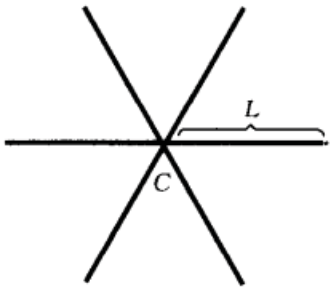
(b)重复问题 C11.1，此次用两个或更多等长单元来为十个结构构件的每一个建模。

C11.3　图示建筑刚架有 n 层，每层有 h 单位高。研究固有频率和振型。

C11.4　图示结构由 6 个均匀圆形横截面的相同细长杆组成。6 个杆相互间以等角度焊接在一起，形成焊接在质量中心 C 的平面结构。研究前八个非零固有频率和振型。位移限制在纸平面内，认为中心 C 是(a)无支撑的，(b)允许移动但不能旋转。



题 C11-3



题 C11-4

C11.5　(a)重复问题 C11.4，允许有三维运动。

(b)重复问题 C11.4，其中一根杆质量加倍。

C11.6　重复问题 C11.4，但支撑条件不同：现在在每个杆的外端简支，而中心 C 无支撑。设位移(a)限制在纸平面内，(b)允许在任意方向上。

C11.7　通过设定尺寸，设计图示音叉使听到的声音频率为 440Hz。



题 C11-7

C11.8 研究在 xy 平面有均匀厚度材料的平面正方形板的固有频率和振型，位移限制在 xy 平面。设定边界条件(a)边都是自由的，(b)只有一边有限制，其余为自由，(c)对边自由，另一对固定。

C11.9 研究平板横向振动的固有频率和振型。为与计算结果比较，可从矩形和圆形板许多工况中得到解析确定的结果[11.66]。

C11.10 研究在弹性基础上板的基本频率和振型(第 15.6 节)。

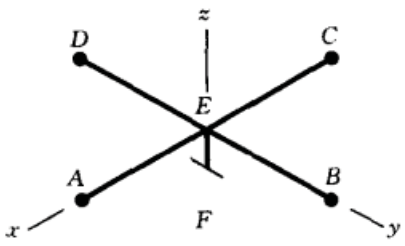
(a)忽略基础的质量。

(b)包括基础的质量。例如，假设在板和平行的刚性平面间有一弹性层。近似认为是合理的。

C11.11 看其他章节的图，尤其是 16 章(壳)。许多在静态载荷下作为例子或实验情形的问题，也可用于检查动态情况的振型和频率，或对时间变化载荷的响应。可以选择的作用力函数在瞬态多样性和空间分布上大的变化是可能的。

C11.12 缩减可以应用于大多数动态问题。当逐渐少用振型或里兹向量，或者 Guyan 缩减中主导自由度的个数减少时，可以检查结果的变化。也有可能故意选择一组较差的主导自由度，将结果与好的一组自由度和全系统生成的结果进行比较。

C11.13 图示结构由等长轻质梁 AE，BE，CE 和 DE 构成，其在 A，B，C，D 点支撑质量稍微不同的重质点。在 E 点，四根梁共同焊接在固定于 F 点的垂直梁 EF 上。研究在给质点 A 施加一个初速度后的响应历程。速度为(a)y 方向，(b)z 方向。



题 C11-13

C11.14 重复第 11.12 节的例题(图 11.12-1)。试着用非等长单元(可能一半长一半短)，或协调质量矩阵，或在中心差分解法中相当大地减少时间步长。用隐式直接解法进行类似的数值计算。计算用模态法得出精确解所需的振型个数。

C11.15 将响应谱分析应用于已经计算过响应历程的问题。看是否能用好的精度预示最大响应。

第 12 章

传热和流体问题

本章的绝大部分是研究固体中的温度分布和热流计算。考虑了稳态和瞬态两种情况，以及与辐射边界条件相关联的非线性问题。注意到基于相同微分方程形式的其他应用。讨论了孔洞中的声学模型、流体-结构的相互作用、平面不可压缩无旋流动等问题。

12.1 传热：引言

概述 一般来说，传热分析处理的对象是固体、液体和气体。其应用包括热量交换、发动机、电子组分和化学过程。当以应力分析为目的时，为了确定温度场，需要对固体进行传热计算，以便能确定相关的热应力。在 FEA 中，把单个的有限元网格用于温度计算和应力分析是方便的，通常也是可行的，其方法就是指令软件把计算的节点温度传输到其后的应力分析方法中去。这种两步法一般适用于耦合作用顺序进行的情况，也就是说，温度影响应力，但应力并不影响温度。

热在固体中的流动是以传导方式进行的。热传出或传入固体由相邻流体对流和辐射完成（图 12.1-1）。当然，热也可以由这样一些原因由内部生成，如对电流的电阻、吸收微波辐射、放射性衰减。在传热的数学模型中，通过边界的热流和内部热源分别类似于面力和体力的应力分析载荷。

导热系数和其他热性能参数都可能是温度的函数，就像弹性模量也与温度有关一样。与温度有关不会使应力分析非线性化，而会使热传导问题非线性化。如果有辐射边界条件，一个热传导问题一定是非线性的，因为相关热流取决于绝对温度四次幂的差值而不是简单地与温度差值有关。（辐射将在 12.3 节讨论）

我们所考虑的热问题是在物理性能已知和边界条件设定的情况下确定固体内温度场的问题。温度场可以是稳态的或瞬态的，在瞬态情况下我们确定温度场必须作为时间的函数来考

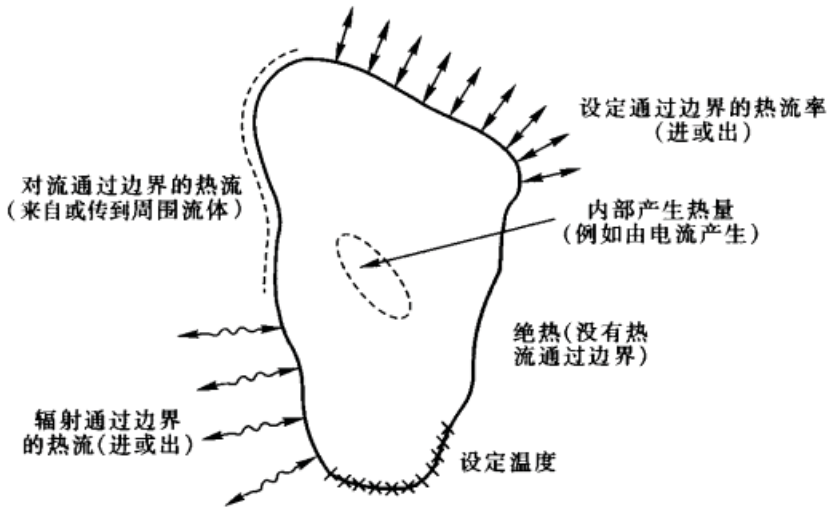


图 12.1-1 一个带有多种热载荷和边界条件的任意形状的固体

虑。在 FEA 中,主要矩阵是一个导热系数矩阵[$\boldsymbol{K}$],它类似于刚度矩阵,和一个热容量矩阵[$\boldsymbol{C}$],它类似于质量矩阵。初始未知量是节点温度。如果需要,热流可以从温度梯度中算得。

术语和单位 在接下来的传热讨论中,经常使用的参量如下。在国际标准单位制中,热量的单位和能量的单位相同,即焦耳;1J=1N·m。功率的单位是瓦特;1W=1J/s=1N·m/s。温度的单位是开尔文(Kelvins);除了辐射的情况,也可以用摄氏温标(℃=K−273)。

c = 比热容[J/(kg·K)]

f = 热流(W/m^2)

h = 对流换热系数[W/(m^2·K)]

k = 导热系数[W/(m·K)]

Q = 每单位体积内部产热率(W/m^3)

T = 温度(K;若不涉及辐射也可选择℃)

T_{fl} = 边界层外的相邻流体温度 (K)

$\dot{T}=\partial T/\partial t$(K/s)

t = 时间 (s)

ρ = 质量密度 (kg/m^3)

σ = 斯蒂芬-波尔兹曼(Stefan-Boltzman)常数[$\sigma=5.670\times10^{-8}$ W/(m^2·K^4)]

在上述的单位中,实际的流体和固体都有近似的数值范围,$10^2<c<10^4$,$5<h<10^5$ 和 $0.01<k<300$[12.1]。h 的大值与沸腾或凝固有关。

热流以对流方式通过边界 S 时可由下面称为牛顿冷却定律的公式给出:

$$f=h(T_{fl}-T_S) \tag{12.1-1}$$

在这里热流 f 垂直于边界,以流入为正。流体中的温度从 T_{fl} 通过与固体相邻的边界层厚度变化到表面温度 T_S。典型的 h 值是由实验得到,因为它的计算是流体力学中的一个复杂问题,涉及到表面的几何形状和粗糙度、速度、粘度、密度和流体的比热容,其中一些可能还与温度有关[12.2]。表格数据可能仅列出了所选条件的典型数值范围。

控制方程　热传导分析基于傅里叶方程 $f_s=-k(\partial T/\partial s)$，它表明，在 s 方向上的热流正比于温度梯度，并反向流动。下面，我们评述这种关系，首先是二维情况。

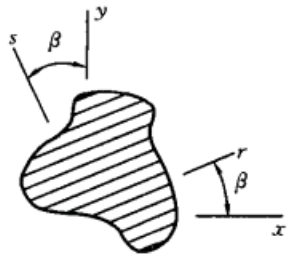


图 12.1－2　带有主方向 r 和 s 的层状材料

考虑图 12.1－2 热正交各项异性的材料。热流是

$$\begin{aligned} f_r &= -k_r T_{,r} \\ f_s &= -k_s T_{,s} \end{aligned} \quad \text{或} \quad \begin{Bmatrix} f_r \\ f_s \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} k_r & 0 \\ 0 & k_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{,r} \\ T_{,s} \end{Bmatrix} \tag{12.1-2}$$

这里 k_r 和 k_s 是材料主方向 r 和 s 上的导热系数。在 x 和 y 方向上的温度梯度 $T_{,x}$ 和 $T_{,y}$ 通过链式微分规则与 $T_{,r}$ 和 $T_{,s}$ 联系起来：

$$\begin{Bmatrix} T_{,r} \\ T_{,s} \end{Bmatrix} = [\boldsymbol{\Lambda}] \begin{Bmatrix} T_{,x} \\ T_{,y} \end{Bmatrix} \quad \text{其中} \quad [\boldsymbol{\Lambda}] = \begin{bmatrix} x_{,r} & y_{,r} \\ x_{,s} & y_{,s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \tag{12.1-3}$$

热流是个矢量，并和位移以同一种方式进行转换，也就是说 $\lfloor f_x \quad f_y \rfloor^{\mathrm{T}} = [\boldsymbol{\Lambda}]^{\mathrm{T}} \lfloor f_r \quad f_s \rfloor^{\mathrm{T}}$。把这个结果与式 12.1－2 和 12.1－3 结合起来，我们得到

$$\begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = -[\boldsymbol{\kappa}] \begin{Bmatrix} T_{,x} \\ T_{,y} \end{Bmatrix} \quad \text{其中} \quad [\boldsymbol{\kappa}] = \begin{bmatrix} k_x & k_{xy} \\ k_{xy} & k_y \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\Lambda}]^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} k_r & 0 \\ 0 & k_s \end{bmatrix} [\boldsymbol{\Lambda}] \tag{12.1-4}$$

因为温度是标量，不是矢量，它不需要进行坐标转换。

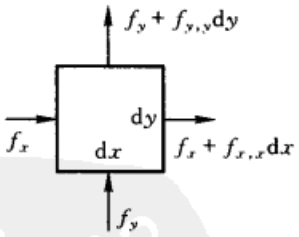


图 12.1－3　通过平面微元边的热流

对于单位厚度的物体而言，热量产生率在一个微元 dxdy 上是 $Q\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。如图 12.1－3 所示，假设平行于 xy 面的面是绝热的。那么，单位厚度的净热流量是

$$Q\mathrm{d}x\mathrm{d}y - (f_{x,x}\mathrm{d}x)\mathrm{d}y - (f_{y,y}\mathrm{d}y)\mathrm{d}x \quad \text{或} \quad (Q - f_{x,x} - f_{y,y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{12.1-5}$$

向内的热流使储存能增加，具体地说就是 $c\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\dot{T}$。所以

$$Q - f_{x,x} - f_{y,y} = c\rho\dot{T} \tag{12.1-6}$$

合并 12.1－4 和 12.1－6，对于单位厚度的物体得

$$\frac{\partial}{\partial x}(k_x T_{,x} + k_{xy} T_{,y}) + \frac{\partial}{\partial y}(k_{xy} T_{,x} + k_y T_{,y}) + Q - c\rho\dot{T} = 0 \qquad (12.1-7)$$

如果介质是各向同性且均匀的，那么 $k_{xy}=0$ 和 $k_x=k_y=k$，式 12.1－7 简化为

$$k(T_{,xx} + T_{,yy}) + Q - c\rho\dot{T} = 0 \qquad (12.1-8)$$

另外，如果 $Q=0$ 并且是稳态条件占主导地位（$\dot{T}=0$），我们可得拉普拉斯方程 $T_{,xx}+T_{,yy}=0$。

现在，设物体的厚度为 τ，τ 可以是 x 和 y 的函数，但是它远小于 xy 平面上的尺寸。也令侧面不是绝热的，并和周围的流体有对流换热。经过每个侧面进入物体的热流密度是 $h(T_{fl}-T)$。如果在两个侧面上都有对流，并且在两个面上 h 和 T_{fl} 也相同，以及温度沿厚度方向上的变化可以忽略，那么，式 12.1－7 可由下式代替

$$\frac{\partial}{\partial x}(k_x\tau T_{,x} + k_{xy}\tau T_{,y}) + \frac{\partial}{\partial y}(k_{xy}\tau T_{,x} + k_y\tau T_{,y}) + \tau Q + 2h(T_{fl} - T) - c\rho\tau\dot{T} = 0 \qquad (12.1-9)$$

这个公式能够用于分析冷却片，包括变截面的。能适用于截面积 A 和周长 p 都随轴向坐标 x 变化的杆中一维热流计算的类似方程是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(AkT_{,x}) + AQ + hp(T_{fl} - T) - Ac\rho\dot{T} = 0 \qquad (12.1-10)$$

这个公式可用与获得式 12.1－9 相同的论证方法得到，能用于分析“针状叶片”。

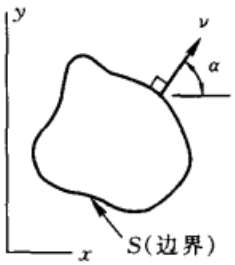


图 12.1－4 在其边界 S 上有外法线方向 ν 的平面区域

在一个平面区域的边界 S 上，如图 12.1－4 所示，热流密度与温度梯度的关系如下。如果物体是热各向同性的，在 ν 方向上的热流是 $f_\nu = -kT_{,\nu}$。根据链式法则：

$$T_{,\nu} = T_{,x}x_{,\nu} + T_{,y}y_{,\nu} \quad 或 \quad T_{,\nu} = T_{,x}l + T_{,y}m \qquad (12.1-11)$$

这里 l 和 m 是 ν 的方向余弦。令 f_B 是边界热流密度，指向物体为正，因此 $f_B = -f_\nu$。对于各向同性和正交各项异性材料，边界 S 法线方向的热流分别是

各向同性：
$$f_B = k(T_{,x}l + T_{,y}m) \qquad (12.1-12a)$$

正交各向异性：
$$f_B = (k_x T_{,x} + k_{xy} T_{,y})l + (k_{xy} T_{,x} + k_y T_{,y})m \qquad (12.1-13b)$$

后一个方程由式 12.1－4 和式 $f_B = -\lfloor l \quad m \rfloor \lfloor f_x \quad f_y \rfloor^{\mathrm{T}}$ 得到。热流密度 f_B 可以设定，或者

与对流或辐射有关。边界温度也可以设定，但在 f_B 已设定的边界相同部位上则不得随意改变。

在前面的列式中，边界 S 在二维情况中是平面区域的边缘，在一维问题中是杆的端面。更一般的情况，侧面上的对流要比边界和端面上重要得多。对于平板、壳和实体，表面 S 成为重要的对流表面。

固体　应用于实体的方程可由前面的论证直接推广得到。我们选择以矩阵形式写出，利用下列符号约定：

$$\{\partial\}=\begin{Bmatrix}\partial/\partial x\\ \partial/\partial y\\ \partial/\partial z\end{Bmatrix}\qquad \{\boldsymbol{T}_\partial\}=\begin{Bmatrix}T_{,x}\\ T_{,y}\\ T_{,z}\end{Bmatrix}\qquad \{\boldsymbol{\mu}\}=\begin{Bmatrix}l\\ m\\ n\end{Bmatrix}\tag{12.1-14}$$

这里，l，m 和 n 是边界法线上的方向余弦。仍然令$[\boldsymbol{\kappa}]$是 3×3 的导热系数矩阵。如果材料是各向同性的，则$[\boldsymbol{\kappa}]=k\lceil\boldsymbol{I}\rfloor$，其中$\lceil\boldsymbol{I}\rfloor$是一个 3×3 单位矩阵。如果材料不是正交各向异性的，且主方向为 r，s 和 t，那么，$[\boldsymbol{\kappa}]=[\boldsymbol{\Lambda}]^{\mathrm{T}}\lceil k_r\quad k_s\quad k_t\rfloor[\boldsymbol{\Lambda}]$，这里$[\boldsymbol{\Lambda}]$是在式 8.1-1 中介绍过的转换矩阵。因此，对直角坐标系中三维实体来说，

控制方程：　$\{\partial\}^{\mathrm{T}}([\boldsymbol{\kappa}]\{\boldsymbol{T}_\partial\}+Q-c\rho\dot{T}=0$　　(12.1-15a)

边界条件：　$f_B=\{\boldsymbol{\mu}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\kappa}]\{\boldsymbol{T}_\partial\}$　　(12.1-15b)

这里，例如对于边界 S 上温度为 T 的对流条件，则 $f_B=h(T_\infty-T)$。式 12.1-15 类似于12.1-7 和 12.1-12，如果对 z 的导数为零的话，就可以得到这些公式。

对于回转体我们采用圆柱坐标系。如果我们在式 12.1-14 处使用如下定义，式 12.1-15 仍然可以用：

$$\{\partial\}=\begin{Bmatrix}(1/r)+\partial/\partial r\\ (1/r)\partial/\partial\theta\\ \partial/\partial z\end{Bmatrix}\qquad \{\boldsymbol{T}_\partial\}=\begin{Bmatrix}T_{,r}\\ T_{,\theta}/r\\ T_{,z}\end{Bmatrix}\qquad \{\boldsymbol{\mu}\}=\begin{Bmatrix}l\\ 0\\ n\end{Bmatrix}\tag{12.1-16}$$

这里，r 取代 x，z 是回转轴。如果有轴对称条件，对 θ 的导数将为零，问题在数学上是二维的，坐标 r 和 z 的作用就相当于平面问题中的 x 和 y。如果 θ 是材料的主方向，一个非轴对称的温度场则可以通过傅里叶级数来分析，如同 14.4 和 14.5 节中应力分析。因此，温度场可以表示成 $T=\sum\overline{T}_n\cos n\theta$，这里 n 是谐波数。温度场 $\overline{T}_n$ 是 n，r 和 z 的函数，但与 θ 无关。$n=0$，$n=1$，$n=2$ 等的解可以独立得到，叠加即可得到最终结果。

12.2　有限元列式

在前面的章节中，已经看到了实用的有限元列式。在 4.8 节中，从一个函数中得到了没有对流边界条件的平面各向同性体有限元列式。在 5.5 节中，由伽辽金法得到了平面准调和问题（包括平面传热问题）的有限元列式。下面我们选用由一个函数以及在式 12.1-14 中用到

的符号提供的更简洁的叙述。这个函数是

$$\Pi=\int\left(\frac{1}{2}\{\boldsymbol{T}_g\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\kappa}]\{\boldsymbol{T}_g\}-\boldsymbol{Q}T+c\rho T\dot{T}\right)\mathrm{d}V-\int\left(f_B T+hT_{\mathrm{fl}}T-\frac{1}{2}hT^2\right)\mathrm{d}S \tag{12.2-1}$$

其中，后面的积分式中 T 在边界 S 上计算。4.7 节的讨论表明，当对 T 变分时，便可由 $\delta\Pi=0$ 得到式 12.1-15。对于有限元列式，我们使用形状函数插值法根据单元节点温度 $\{\boldsymbol{T}_e\}$ 来表示单元的温度 T。因此，

$$T=\lfloor\boldsymbol{N}\rfloor\{\boldsymbol{T}_e\}\quad\text{和}\quad\{\boldsymbol{T}_g\}=[\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{T}_e\}\quad\text{其中}\quad[\boldsymbol{B}]=\{\boldsymbol{\partial}\}[\boldsymbol{N}] \tag{12.2-2}$$

这里，在直角坐标系中 $\{\boldsymbol{\partial}\}$ 由式 12.1-14 给出，但不同于柱坐标中的式 12.1-16，在式 12.2-2 中是 $\{\boldsymbol{\partial}\}=\lfloor\partial/\partial r\quad(1/r)\partial/\partial\theta\quad\partial/\partial z\rfloor^{\mathrm{T}}$。因为 $T=T^{\mathrm{T}}$，$T^2=T^{\mathrm{T}}T$ 和 $\dot{T}=\lfloor\boldsymbol{N}\rfloor\{\dot{\boldsymbol{T}}_e\}$，对于一个单元，式 12.2-1 变为

$$\Pi_e=\frac{1}{2}\{\boldsymbol{T}_e\}^{\mathrm{T}}([\boldsymbol{k}]+[\boldsymbol{h}])\{\boldsymbol{T}_e\}+\{\boldsymbol{T}_e\}^{\mathrm{T}}([\boldsymbol{c}]\{\dot{\boldsymbol{T}}_e\}-\{\boldsymbol{r}_B\}-\{\boldsymbol{r}_h\}-\{\boldsymbol{r}_Q\}) \tag{12.2-3}$$

其中单元矩阵是：

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{k}]&=\int_V[\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\kappa}][\boldsymbol{B}]\mathrm{d}V & \{\boldsymbol{r}_B\}&=\int_S\lfloor\boldsymbol{N}\rfloor^{\mathrm{T}}f_B\mathrm{d}S\\
[\boldsymbol{h}]&=\int_S\lfloor\boldsymbol{N}\rfloor^{\mathrm{T}}\lfloor\boldsymbol{N}\rfloor h\,\mathrm{d}S & \{\boldsymbol{r}_h\}&=\int_S\lfloor\boldsymbol{N}\rfloor^{\mathrm{T}}hT_{\mathrm{fl}}\mathrm{d}S\\
[\boldsymbol{c}]&=\int_V\lfloor\boldsymbol{N}\rfloor^{\mathrm{T}}\lfloor\boldsymbol{N}\rfloor c\rho\mathrm{d}V & \{\boldsymbol{r}_Q\}&=\int_V\lfloor\boldsymbol{N}\rfloor^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\mathrm{d}V
\end{aligned} \tag{12.2-4}$$

这里 V 是单元体积，S 是组成物体边界部分的单元表面积。内部单元的表面积分为零。由单元贡献 Π_e 的叠加得到组集后结构的 Π。组集意味着通常的单元数组扩展到“结构尺寸”，因此可用总体温度数组 $\{\boldsymbol{T}\}$ 代替单元温度数组 $\{\boldsymbol{T}_e\}$。对 Π 取极值的方程是 $\{\partial\boldsymbol{\Pi}/\partial\boldsymbol{T}\}=\{\boldsymbol{0}\}$。因此我们得到以下有限元方程，其中大写字母表示组集后的数组。

$$[\boldsymbol{C}]\{\dot{\boldsymbol{T}}\}+[\boldsymbol{K}_{\mathrm{T}}]\{\boldsymbol{T}\}=\{\boldsymbol{R}_{\mathrm{T}}\}\qquad\text{其中}\qquad\begin{aligned}[\boldsymbol{K}_T]&=[\boldsymbol{K}]+[\boldsymbol{H}]\\\{\boldsymbol{R}_{\mathrm{T}}\}&=\{\boldsymbol{R}_B\}+\{\boldsymbol{R}_h\}+\{\boldsymbol{R}_Q\}\end{aligned} \tag{12.2-5}$$

对于一个在侧面有对流换热的平面问题，出现附加项，如在相关式 12.1-9 中描述的那样。对于通过平行于 xy 面的单个侧表面的对流换热，我们定义单元数组为

$$[h_{\mathrm{ls}}]=\iint\lfloor\boldsymbol{N}\rfloor^{\mathrm{T}}\lfloor\boldsymbol{N}\rfloor h\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\qquad\{\boldsymbol{r}_{\mathrm{ls}}\}=\iint\lfloor\boldsymbol{N}\rfloor^{\mathrm{T}}hT_{\mathrm{fl}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{12.2-6}$$

在单元组集时，总体数组 $[\boldsymbol{H}_{\mathrm{ls}}]\{\boldsymbol{T}\}$ 和 $\{\boldsymbol{R}_{\mathrm{ls}}\}$ 分别加到式 12.2-5 的左边和右边。

备注 我们对式 12.2-4 中定义的下列矩阵和向量命名，并把它们与结构力学中使用的矩阵类比。

矩阵	描述性名称	结构类比
$[\boldsymbol{k}]$	导热系数矩阵	常规刚度矩阵
$[\boldsymbol{h}]$	边界对流矩阵	弹性基刚度矩阵
$[\boldsymbol{c}]$	比热(热容)矩阵	质量矩阵
$\{\boldsymbol{r}_B\}$	热流向量	面力产生的节点载荷
$\{\boldsymbol{r}_h\}$	边界对流向量	(无直接类比项)
$\{\boldsymbol{r}_Q\}$	热源向量	体力产生的节点载荷

然而要注意,$[\boldsymbol{c}]$乘以温度的一次导数,而$[\boldsymbol{m}]$在结构动力学中要乘以位移的二次导数。就像质量矩阵一样,如果按式 12.2-4 生成,那么$[\boldsymbol{c}]$就是一个满阵。但是,$[\boldsymbol{c}]$也可以按对角或"集中"矩阵生成,或者从它的协调形式对角化,像 11.3 节描述的质量矩阵那样。对于一个体积是 V 和有 n 个节点的单元来说,最粗略的对角化是把对角项定义为 $c_{ii}=c\rho V/n$。类似地,$[\boldsymbol{h}]$也可以对角化。对角阵$[\boldsymbol{h}]$类似于弹性基刚度矩阵,它们都是由节点的离散弹簧而不是连续的支撑产生的。也可以把$[\boldsymbol{h}]$看作与零厚度"表面单元"相关,它在需要时附着到常规单元上,其作用仅是提供与$[\boldsymbol{h}]$有关的项。

数组$[\boldsymbol{h}]$,$[\boldsymbol{r}_B]$和$[\boldsymbol{r}_h]$为零,除非在边界 S 上有棱或面,并且 S 的区段或者与对流或者与设定的热流 f_B 相关(或者与辐射有关,像在 12.3 节中注解的那样)。边界 S 上施加$[\boldsymbol{r}_B]$或$[\boldsymbol{r}_h]$的区段也不可能有设定的温度。换句话说,在一个给定的节点上,人们能够设定热流或温度,但不能两者都有,就像在结构力学中,人们在单个自由度上可设定位移或载荷,但不能两者都有一样。

设定的节点温度,能够像结构力学中设定的节点位移一样来处理。可用的处理方法包括像在 2.7 节描述的变换系数矩阵的形式,以及像在 12.3 节中描述的惩罚法。在图 9.2-3d 中应用的惩罚法热等效是在$[\boldsymbol{K}]$中相应的对角系数上增加一个大的导热系数 K_D,并且用 $K_D\overline{T}$ 增大热载荷矢量中相应的系数,其中 $\overline{T}$ 是所希望的节点温度。对于每节点上的一个自由度,不会把大的非对角系数加到$[\boldsymbol{K}]$中,因此它不会变成病态。但是,这种处理会使$[\boldsymbol{K}]$的最大特征值变大,所以当显式直接积分用于瞬态热分析时,可能就需要很小的时间步长[12.3]。

实例:平面单元　考虑一个如图 12.2-1 所示的等参单元。单元的温度场是 $T=\lfloor \boldsymbol{N} \rfloor\{\boldsymbol{T}_e\}=N_1T_1+N_2T_2+N_3T_3+N_4T_4$,这里的形状函数 N_i 如式 6.2-3 所示。温度梯度是

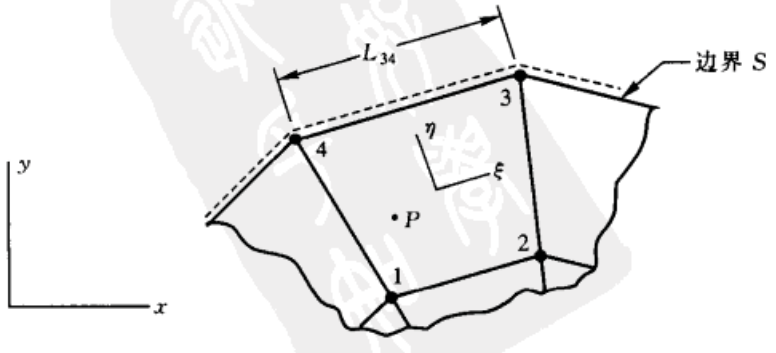


图 12.2-1　与平面结构边界 S 相邻的双线性等参单元,该边界上有对流传热发生

$$\{\boldsymbol{T}_{,}\}=\begin{Bmatrix}T_{,x}\\T_{,y}\end{Bmatrix}=[\boldsymbol{J}]^{-1}\begin{Bmatrix}T_{,\xi}\\T_{,\eta}\end{Bmatrix}=\underbrace{[\boldsymbol{J}]^{-1}\begin{bmatrix}N_{1,\xi}&N_{2,\xi}&N_{3,\xi}&N_{4,\xi}\\N_{1,\eta}&N_{2,\eta}&N_{3,\eta}&N_{4,\eta}\end{bmatrix}}_{[\boldsymbol{B}]}\begin{Bmatrix}T_1\\T_2\\T_3\\T_4\end{Bmatrix}\tag{12.2-7}$$

其中的雅可比矩阵$[\boldsymbol{J}]$已在式 6.2-6 中介绍过。对于一个厚度是 τ 的单元，导热系数矩阵变为

$$[\boldsymbol{k}]=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\kappa}][\boldsymbol{B}]\tau J\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\tag{12.2-8}$$

其中 τ 可能是 ξ 和 η 的函数，J 是$[\boldsymbol{J}]$的行列式。

只有单元边 3-4 对单元边界对流矩阵$[\boldsymbol{h}]$有贡献。沿边界 3-4，$N_1=N_2=0$，$N_3=(1+\xi)/2$，$N_4=(1-\xi)/2$ 和 $J=L_{34}/2$。因此，如果沿边 3-4 τ 和 h 与 ξ 无关，

$$[\boldsymbol{h}]=\int_{-1}^{1}\lfloor\boldsymbol{N}\rfloor^{\mathrm{T}}\lfloor\boldsymbol{N}\rfloor h\tau J\,\mathrm{d}\xi=\frac{h\tau L_{34}}{6}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&2&1\\0&0&1&2\end{bmatrix}\tag{12.2-9}$$

$[\boldsymbol{h}]$的集中(对角)形式是$[\boldsymbol{h}]=(h\tau L_{34}/2)\lceil\,0\quad 0\quad 1\quad 1\,\rfloor$。以类似于式 12.2-9 中$[\boldsymbol{h}]$的方式得到的边界对流向量$[\boldsymbol{r}_h]$是：

$$\{\boldsymbol{r}_h\}=\int_{-1}^{1}\lfloor\boldsymbol{N}\rfloor^{\mathrm{T}}hT_{\text{fl}}\tau J\,\mathrm{d}\xi=T_{\text{fl}}\frac{h\tau L_{34}}{2}\begin{Bmatrix}0\\0\\1\\1\end{Bmatrix}\tag{12.2-10}$$

因为$[\boldsymbol{h}]$和$[\boldsymbol{r}_h]$中的非零项只与表面节点有关，对$[\boldsymbol{H}]$和$[\boldsymbol{R}_h]$有贡献的项由一个面单元而不是由二维或三维单元的一个表面提供。在图 12.2-1 中，相应的表面单元是连接节点 3 和 4 的 2 节点单元。

如果在单元内任意一点 P 的热输入量设定为 Q_P(单位：W)，那么就可以用假定除在 P 点外 $Q=0$，由式 12.2-4 求出热生成向量$\{\boldsymbol{r}_Q\}$。对于在 P 点$[\boldsymbol{N}]$的值$[\boldsymbol{N}_P]$，

$$\{\boldsymbol{r}_Q\}=\int\lfloor\boldsymbol{N}\rfloor^{\mathrm{T}}Q\mathrm{d}V=\lfloor\boldsymbol{N}_P\rfloor^{\mathrm{T}}\int Q\mathrm{d}V=\lfloor\boldsymbol{N}_P\rfloor^{\mathrm{T}}Q_P\tag{12.2-11}$$

12.3 辐射·非线性传热问题

辐射 为了介绍辐射的起因，考虑两个平行平面，都是无限大的，因此边界效应都不用考虑。令每一个平面都有均匀的温度。平面 1 的温度是 T_1，平面 2 的温度是 T_2。假设平面都是理想的黑体，因此每个都是理想的吸收体和辐射体，温度为 T_1 的平面吸收的热流密度为 σT_2^4，辐射的热流密度为 σT_1^4，其中 σ 为斯蒂芬-波尔兹曼常数，T 为绝对温度[12.1,12.4]。所以绝对

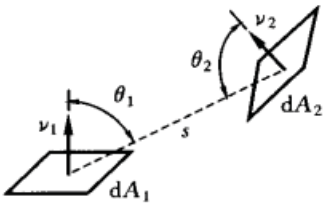
温度为 T_1 和 T_2 的平面表面吸收的净热流密度分别为

$$f_1 = \sigma(T_2^4 - T_1^4) \qquad 和 \qquad f_2 = \sigma(T_1^4 - T_2^4) \tag{12.3-1}$$

如果辐射和吸收表面都不是黑体，它们用辐射系数 ε_1 和 ε_2 来表征。辐射系数的定义是在相同的温度下，实际辐射功率与黑体辐射功率之比。因此，$0<\varepsilon<1$。ε 的值取决于表面粗糙度、氧化程度(对于金属)、温度、辐射能的波长，可能还会随辐射相对于表面法线的方向而改变。例如在室温下，铝箔 $\varepsilon\approx0.05$，纸 $\varepsilon\approx0.95$[12.4]。表面吸收率 α 描述吸收辐射能的分数，它与辐射率的定义相似，取决的因素也相同。有时传热计算可以通过假设 $\varepsilon=\alpha$ 而简化。对于无限大平行平面 1 和 2，能够证明式 12.3-1 中的 f_1 可由下式替换[12.1,12.4]

$$f_1 = \frac{\sigma}{(1/\varepsilon_1)+(1/\varepsilon_2)-1}(T_2^4 - T_1^4) \tag{12.3-2}$$

如果 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=1$，上式简化为式 12.3-1。接下来麻烦的事情是：实际的表面可能是不平行的，



$$dF_{1-2} = \frac{\cos\theta_1\cos\theta_2}{\pi s^2}dA_2$$

$$dF_{2-1} = \frac{\cos\theta_1\cos\theta_2}{\pi s^2}dA_1$$

$$dF_{1-2}dA_1 = dF_{2-1}dA_2$$

图 12.3-1 视图因子：与中心距 s 的微分关系

也经常不是平面，肯定不是无限大。这些几何上的复杂性用视图因子 F 来说明(也可叫做形状、角度、位形、或交叉因子)。视图因子是一个纯粹的几何量，对于两个平行的无限大平面是单位 1，对于两个互相“看不见”的平面是 0，如两个共面的表面，和被一块居中的面遮掩的两个表面。考虑两个相距 s 的微面 dA_1 和 dA_2，其法向分别是 ν_1 和 ν_2，见图 12.3-1。视图因子增量 dF_{1-2} 是 dA_1 发出并被 dA_2 截取的热流分数。在传热计算中，大的表面能被分成许多小块。如果它们的距离足够大，在两个有限子面积 A_1 和 A_2 上的视图因子可被认为是一常数。在有限元分析中，每一个单元面都可看成一个子面，视图因子可以在每一对交换辐射能的子面中算出。

我们把面积 A_1 和温度为 T_1 的表面所接受的热流密度表示为

$$f_1 = \psi\sigma(T_2^4 - T_1^4) \tag{12.3-3}$$

其中 ψ 包含了与问题中表面相应的视图因子和辐射率。和 A_1 交换辐射能的表面有多少个，这个式子就能够被计多少次。如果 A_1 不是很大，可把 f_1 在 A_1 上看作一个常数。因式分解式 12.3-3 中的 $T_2^4-T_1^4$，我们能够写成如下形式：

$$f_1 = h_{rad}(T_2 - T_1) \qquad 其中 \qquad h_{rad} = \psi\sigma(T_2^2 + T_1^2)(T_2 + T_1) \tag{12.3-4}$$

比较这个公式和对流式 12.1-1，我们发现热流有相同的表达式。因此，若能把具有与式 12.2-6中的对流矩阵$[\boldsymbol{h}]$和$\{\boldsymbol{r}_h\}$相同形式的矩阵引入到公式中，但要将 h 换为 h_{rad}，就可用有限元分析来解决辐射问题了。注意，h_{rad}是与温度有关的，因此传热问题是高度非线性的。

前面是对一个大的学科领域的简要概括。我们暗中假设两辐射面之间的介质是“不参与的”，也就是说，它不辐射、不吸收、不反射。对空气就是这种情况，但对火焰肯定不是，对于被

某种气体(如水蒸气、二氧化硫、二氧化碳)污染的空气也不是。

非线性解 如果一物体内有显著的温差,那么导热系数可能必须视为温度 T 的函数。对流换热系数 h 也与温度有关。由于这些原因,问题可能就成了非线性的。如果考虑了辐射,不管材料的性质是否与温度有关,问题肯定是非线性的。对于稳态非线性问题,式 12.2-5 可表征为

$$[\boldsymbol{K}_T]\{\boldsymbol{T}\} = \{\boldsymbol{R}_T\} \qquad \text{其中} \qquad [\boldsymbol{K}_T] = [\boldsymbol{K}_T(T)] \qquad \text{和} \{\boldsymbol{R}_T\} = \{\boldsymbol{R}_T(T)\} \tag{12.3-5}$$

为了解出$\{\boldsymbol{T}\}$,可采用 17.2 节中描述的方法。最简单的方法就是直接代入,其中开始的$[\boldsymbol{K}_T]$和$\{\boldsymbol{R}_T\}$是基于$\{\boldsymbol{T}\}$的初始估计值生成的,由式 12.3-5 算出新的$\{\boldsymbol{T}\}$,然后用式 12.3-5 修正$[\boldsymbol{K}_T]$和$\{\boldsymbol{R}_T\}$,等等。因此我们得到顺序的解

$$\{\boldsymbol{T}_1\} = [\boldsymbol{K}_T(T_0)]^{-1}\{\boldsymbol{R}_T(T_0)\}, \quad \{\boldsymbol{T}_2\} = [\boldsymbol{K}_T(T_1)]^{-1}\{\boldsymbol{R}_T(T_1)\}, \text{等等。} \tag{12.3-6}$$

另一种类似的方法是初始刚度法,它用把$[\boldsymbol{K}_T]$分成线性项和非线性项来修改式 12.3-5,以便把所有非线性项移到公式的右边。由辐射形成强的线性度可能需要用低松弛来防止发散(见式 17.2-8,可能取 $\mu=0.5$)。为了审验收敛性,可以检查温度、热流或两者。当相邻两次迭代中,每个节点温度变化量小于某一设定值时(如 1 度),可以认为迭代收敛。或者,如果测试热流,可以用总热流比较不平衡热流(见式 17.2-10,把$\{\boldsymbol{R}\}$当成热流)。与时间无关的非线性热问题的进一步讨论见文献[12.5]。

12.4 瞬态热分析

需要求解的问题是式 12.2-5 中的问题,这里重写一遍:

$$[\boldsymbol{C}]\{\dot{\boldsymbol{T}}\} + [\boldsymbol{K}_T]\{\boldsymbol{T}\} = \{\boldsymbol{R}_T\} \tag{12.4-1}$$

其中$\{\boldsymbol{R}_T\}$是一个可能与时间相关的热载荷数组。如果有辐射存在或材料属性与温度有关,那么$[\boldsymbol{C}]$和$[\boldsymbol{K}_T]$也与时间有关,问题是非线性的。在本节中,除非有明确的说明,否则都认为$[\boldsymbol{C}]$和$[\boldsymbol{K}_T]$是与时间无关的。

一个随时间变化的解可由模态法或直接时间积分得到。用在结构力学中同样的考虑来指导选择。如果问题是线性的,并且其解以低阶特征模式为主并有相当大的时间跨度要求,那么用模态法比较好。如果问题是非线性的或者结果中有明显的瞬态效应,可用直接积分法。接下来的方法和公式与 11 章中的相类似。

模态法 步骤与 11.7 节中描述的类似。概述如下。首先解特征问题

$$([\boldsymbol{K}_T] - \lambda[\boldsymbol{C}])\{\bar{\boldsymbol{T}}\} = \{\boldsymbol{0}\} \tag{12.4-2}$$

每个特征向量$\{\bar{\boldsymbol{T}}\}_i$相对于$[\boldsymbol{C}]$正则化;换句话说,按比例调整它们以便使$\{\bar{\boldsymbol{T}}\}_i^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{C}]\{\bar{\boldsymbol{T}}\}_i = 1$。令$[\boldsymbol{\phi}]$是模态矩阵,也就是说,它是一个方阵,它的第 i 列是正则化的特征矢量$\{\bar{\boldsymbol{T}}\}_i$。于是

$$[\boldsymbol{\phi}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{C}][\boldsymbol{\phi}] = \lceil \boldsymbol{I} \rfloor \quad \text{和} \quad [\boldsymbol{\phi}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{K}_T][\boldsymbol{\phi}] = \lceil \boldsymbol{\lambda} \rfloor \tag{12.4-3}$$

其中，$[\boldsymbol{I}]$是单位阵，$[\boldsymbol{\lambda}]$是(对角)频谱阵，$[\boldsymbol{\lambda}]=[\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_n]$。节点温度$\{\boldsymbol{T}\}$与广义温度$\{\boldsymbol{Z}\}$的关系是

$$\{\boldsymbol{T}\} = [\boldsymbol{\phi}]\{\boldsymbol{Z}\} \tag{12.4-4}$$

其中$\{\boldsymbol{Z}\}$中的各项Z_i表示每个正则特征矢量对$\{\boldsymbol{T}\}$做出贡献的分数。把式 12.4－4 代入式 12.4－1，再左乘以$[\boldsymbol{\phi}]^{\mathrm{T}}$，并注意到式 12.4－3，因此，对 $n\times n$ 系统，我们得到 n 个解耦的方程，每个都有如下的形式

$$\dot{Z}_i + \lambda_i Z_i = P_i \qquad \text{其中} \qquad p_i = [\boldsymbol{\phi}]_i^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{R}_T\} \tag{12.4-5}$$

这里$[\boldsymbol{\phi}]_i$是$[\boldsymbol{\phi}]$的第 i 列，i 从 1 到 m，一般情况下 m 远小于总自由度数。因此，在实际计算时，只有$[\boldsymbol{\phi}]$的最初几列才用得到。对于所用的每个 i，把式 12.4－5 相对于时间积分后可知道$\{\boldsymbol{Z}\}=\{\boldsymbol{Z}(t)\}$，由式 12.4－4 得到$\{\boldsymbol{T}\}=\{\boldsymbol{T}(t)\}$。

如同在 11.6 节中描述的用于结构问题的“缩减基法”(reduced-basis method)也能够用于热问题[12.6]。

直接积分法 考虑由时间 Δt 分开的两个温度状态，表示为$\{\boldsymbol{T}\}_n$和$\{\boldsymbol{T}\}_{n+1}$。利用下列公式能够完成瞬时积分：

$$\{\boldsymbol{T}\}_{n+1} = \{\boldsymbol{T}\}_n + \Delta t\{(1-\beta)\dot{\boldsymbol{T}}_n + \beta\dot{\boldsymbol{T}}_{n+1}\} \tag{12.4-6}$$

如同结构动力学方程中的纽马克法，式 12.4－6 包含一个可由分析者选择的因子 β。如果选择 $\beta=0.5$，上式可称为梯形规则。我们在时间步 n 写出式 12.4－1，再在时间步 $n+1$ 写出该式，用 $1-\beta$ 乘以第一式，用 β 乘以第二式，得到

$$\begin{aligned}(1-\beta)([\boldsymbol{C}]\{\dot{\boldsymbol{T}}\}_n + [\boldsymbol{K}_T]\{\boldsymbol{T}\}_n) &= (1-\beta)\{\boldsymbol{R}_T\}_n \\ \beta([\boldsymbol{C}]\{\dot{\boldsymbol{T}}\}_{n+1} + [\boldsymbol{K}_T]\{\boldsymbol{T}\}_{n+1}) &= \beta\{\boldsymbol{R}_T\}_{n+1}\end{aligned} \tag{12.4-7}$$

如果$[\boldsymbol{K}_T]$和$[\boldsymbol{C}]$不随时间而改变，我们可把这两个方程相加，然后用式 12.4－6 消去温度的时间导数，其结果为

$$\left(\frac{1}{\Delta t}[\boldsymbol{C}] + \beta[\boldsymbol{K}_T]\right)\{\boldsymbol{T}\}_{n+1} = \left(\frac{1}{\Delta t}[\boldsymbol{C}] - (1-\beta)[\boldsymbol{K}_T]\right)\{\boldsymbol{T}\}_n + (1-\beta)\{\boldsymbol{R}_T\}_n + \beta\{\boldsymbol{R}_T\}_{n+1} \tag{12.4-8}$$

在 $t=0$ 时，从已知的$\{\boldsymbol{T}\}_0$开始，式 12.4－8 在 $t=\Delta t$ 时得到$\{\boldsymbol{T}\}_1$，然后在 $t=2\Delta t$ 时得到$\{\boldsymbol{T}\}_2$，等等。如果不改变 Δt，为方程求解仅需要一次生成和处理乘$\{\boldsymbol{T}\}_{n\times 1}$的矩阵；然后为一系列右边的值重复求解所建立的这个方程。

如果 $\beta<0.5$，这个算法是条件稳定的。数值稳定的最大时间步是[12.7]

$$\Delta t_{\mathrm{cr}} = \frac{2}{(1-2\beta)\lambda_{\max}} \tag{12.4-9}$$

其中 $\lambda_{\max}$是式 12.4－2 的最大特征值。如果 $\beta\geqslant 0.5$，这个算法对于线性问题是无条件稳定的；也就是说，当 Δt 变得无限大时，数值计算的稳定性也能被保证(但不一定精确!)。当 β 取不同的值时相关的名称如下：

$\beta=0$	前差法或欧拉法	（条件稳定）
$\beta=\frac{1}{2}$	Crank-Nicolson 或梯形法	（无条件稳定）
$\beta=\frac{1}{2}$	伽辽金法	（无条件稳定）
$\beta=1$	后差法	（无条件稳定）

如果 $\beta=0$ 且$[C]$是对角阵，每一时间步的计算量会很小，而且 Δt_{cr}也是如此。在无条件稳定的方法当中，Crank-Nicolson 方法被普遍采用。它也具有二阶精度。对于 $\beta\neq\frac{1}{2}$ 时，只能保证一阶精度。非线性问题中的无条件稳定性要求式 12.4-8 中 $\beta=1$[12.7]。

由与适用于结构力学的式 17.7-5 相同的方式可以得到适合于非线性热问题的增量算法。我们假定$[C]$是一个常数阵，但$[\boldsymbol{K}_T]$可能是温度的函数。在时间步 n，而不是$[\boldsymbol{K}_T]_n\{\boldsymbol{T}\}_n$，我们引入单元内的热流$\{\boldsymbol{f}\}$，和单元边界上的 T 和 h，写成

$$\{\boldsymbol{R}_T^{\text{int}}\}_n=\sum\left\{-\int[\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{f}\}_n\mathrm{d}V+\int\lfloor\boldsymbol{N}\rfloor^{\mathrm{T}}T_nh_n\mathrm{d}S\right\}\tag{12.4-10}$$

上式对单元贡献求和并且在$[\boldsymbol{\kappa}]$和 h 可能与温度相关时也是适用的。在时间步 $n+1$，式 12.4-1变成

$$[C]\{\dot{\boldsymbol{T}}\}_{n+1}+\{\boldsymbol{R}_T^{\text{int}}\}_{n+1}=\{\boldsymbol{R}_T\}_{n+1}\tag{12.4-11}$$

由于$\{\Delta\boldsymbol{T}\}=\{\boldsymbol{T}\}_{n+1}-\{\boldsymbol{T}\}_n$，我们可定义

$$\{\boldsymbol{R}_T^{\text{int}}\}_{n+1}=\{\boldsymbol{R}_T^{\text{int}}\}_n+[\boldsymbol{K}_T]_n\{\Delta\boldsymbol{T}\}\qquad\text{和}\qquad\{\dot{\boldsymbol{T}}\}_{n+1}+\{\dot{\boldsymbol{T}}\}_n=\frac{2}{\Delta t}\{\Delta\boldsymbol{T}\}\tag{12.4-12}$$

合并式 12.4-11 和 12.4-12，可得

$$\left(\frac{2}{\Delta t}[C]+[\boldsymbol{K}_T]_n\right)\{\Delta\boldsymbol{T}\}=\{\boldsymbol{R}_T\}_{n+1}-\{\boldsymbol{R}_T^{\text{int}}\}_n+[C]\{\dot{\boldsymbol{T}}\}_n\tag{12.4-13}$$

当$[\boldsymbol{M}]=[\boldsymbol{0}]$，$\gamma=1/2$ 并且 $\beta=1/4$ 时，上式与式 17.7-5 是一致的。强非线性问题可能要求用时间步迭代，像在 17.7 节后半部分描述的那样。

最后，再来看线性问题。我门注意到，Crank-Nicolson 方法在对突然施加的温度变化响应中显示出令人烦恼的振荡。改进的算法是基于式 12.4-6 和下式的组合[12.8]

$$[C]\{\dot{\boldsymbol{T}}\}_{n+1}+[\boldsymbol{K}_T]\{(1+\alpha)\boldsymbol{T}_{n+1}-\alpha\boldsymbol{T}_n\}=(1+\alpha)\{\boldsymbol{R}_T\}_{n+1}-\alpha\{\boldsymbol{R}_T\}_n\tag{12.4-14}$$

这是为结构动力分析方程 11.13-6 研究的 α 方法的一种格式。当 $\alpha+\beta=\frac{1}{2}$时，有二阶精度。无条件稳定要求 $\alpha\geqslant-\frac{1}{2}$和 $\beta\geqslant\frac{1}{2}$。建议 $\alpha=-0.25$，$\beta=0.75$[12.8]。

12.5 建模考虑·备注

热能研究对热有限元模型中单元类型、大小和形状的要求不如其后的基于相同网格和它

的相关节点温度的应力分析那样多。应力分析通常对网格有更严格的要求。一个粗网格足以表示有小梯度的温度场，但是相应的热应力值可能很大并且有很大的梯度，特别是在应力集中源如孔和沟槽附近，因此应力分析需要有更细的网格。所以，如果热分析和应力分析使用相同的网格，则应避免使用 3 节点的三角形单元和那种在温度变化很小的方向上明显细长的单元。热问题的网格划分，应该在基于应力预分析的基础上规划。

直角坐标系中的线性温度场会使一个各向同性或正交各向异性的无约束物体产生变形，但不产生应力。因此，当一个平板被加热时，如果温度从一个侧面到另一面线性变化，会产生明显的弯曲，但并没有产生应力。在圆柱坐标系中，温度沿径向线性变化则产生应力。在一个独特尺寸的管道中，内外有温度不同的流体，沿管壁厚度方向温度和应力近似呈线性变化。

对于任一有限元分析，若不仔细处理细节，计算结果可能使人误入歧途。尺寸、常数和热载荷都必须按一致的单位制表述。正交各向异性材料的属性必须设定在模型的正确方向上，如果材料的主轴与总体坐标轴不一致，那就要使用局部坐标轴。按照软件的使用习惯，回转体上一些载荷和边界条件必须以整个圆周或每弧度基数来输入。若有辐射传热时要用绝对温标。软件可允许用户按非绝对温标表示温度，只要提供“偏移”温度，用把偏移量加到所表示的温度上的方法在软件内部完成温度转换。计算所得的热流密度可在一些单元的局部坐标系中表示出来。表面热流可定义为向内或向外为正，这取决于软件的习惯。

对所有保留的自由度，导热系数矩阵[**K**]是奇异的。在结构力学中类似的情况是刚度矩阵[**K**]，它的奇异性是因为没有自由度设定为边界条件（亦即没有支撑）。热分析中必要的“支撑条件”可来自于一个或多个设定的节点温度，来自对流或辐射边界条件，或它们的一些组合。在瞬态热分析中，奇异矩阵[$\boldsymbol{K}_T$]是能被接受的，但所有的节点温度必须作为初始条件来设定。通常，这些节点的温度不会都为零（相反在结构动力分析中，初始位移和速度经常为零）。

如果结构相对于一个（或几个）平面在几何形状、材料属性、边界条件，以及热载荷上存在对称性，则仅需对其一半（或更少）部分建模。热量不会通过对称面，因此，对称面上的节点就变成了建模结构部分绝热边界上的节点。

如果有辐射，或对流导热系数与温度有关，那么边界条件也与温度有关。所以，在一个瞬态问题中，边界条件可能同时与时间和温度有关。边界条件有时是不明确的[12.9]。例如，考虑一个矩形板，在一组对边上的温度是 0℃，在另一组对边上是 500℃。不同温度边在板角相遇。角点温度应该留着不设定，或指定为 0℃，250℃，500℃或另外的其他温度。这个问题呈显病态样子，也许是把实际情况过度理想化造成的。如果沿一条边设定温度，沿相邻的边设定热流，会出现类似的不确定性。在两边相遇的节点上，应该施加什么样的条件？在单个节点上，人们能够设定温度或热流，但二者不能同时设定。

像对结构 FEA 一样，计算结果的评价标准应该从比较计算结果与预先获得的近似值开始。应该检查边界上温度和热流密度的计算值，来验证与预想的边界条件有无不符之处。温度等值线（等温线）应平行于常数温度的边界，并垂直于绝热面。热流密度可标绘成矢量场，箭头表明局部热流方向，箭头长度代表热流密度的大小。计算热流应平行于绝热边界。这些都备注在图 12.5－1 中（注意，虽然水平中心线是几何对称线，但热问题并不以这条线为对称，因为水平边界的设定温度并不相等）。得到的结果和预期结果显著不同，则表明在理解题意或建模时存在错误。有限元应力分析和有限元热问题相似，因此在第 10 章的大部分备注在本章中仍然可用。像对于任何领域的问题一样，一个不熟悉热分析的人运用有限元作热分析也是

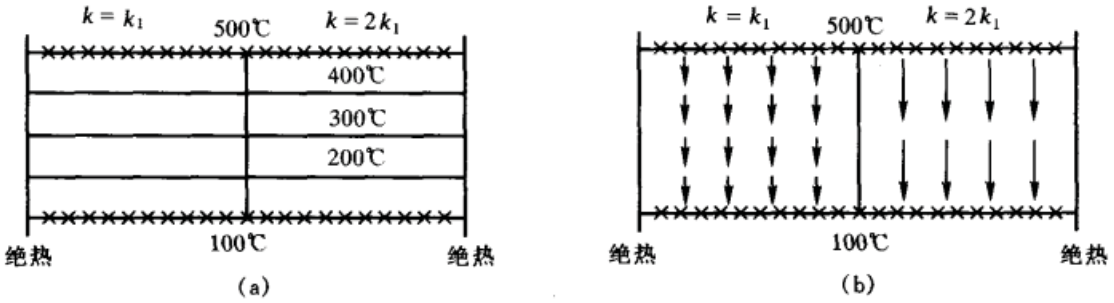


图 12.5-1 (a)温度等值线和(b)具有 2 个等温边界 2 个绝热边界的二维双材料体中的热流。每种材料都是各向同性的

难以成功的。

通过有限元分析计算的温度在单元之间是连续的,但热流密度可能不是(除非温度的空间导数也包含在节点的自由度中)。在这种方法中,温度类似于位移,热流密度类似于应力,第 9 章中关于应力分析中离散化误差的概念也可用于热分析。因此,应该一个单元一个单元地描绘热流等值线,也就是,没有节点平均。单元间不连续性太大时,告示需要细化网格。一个单元一个单元的热流场和平滑处理后的热流场之间的差别可被认为是误差度量,并用来按 9.11 节描述的方式驱动自适应网格。每个单元大致上应该跨越相同数目的热流等值线。

注意,由节点温度定义的温度场,不能显示穿过单元间边界上的阶跃变化,这个单元间边界具有在边界任何一边单元共享的节点。通过设定温度改变来模拟紧缩配合的应力分析必须或者使用单元温度,或者使用位于温度区域之间边界上的单个节点。

相关问题 用描述热传导微分方程的相同形式来说明几种物理现象。为了简化解释,我们把条件限定在与时间无关、各向同性材料、材料性质为常数。相关变量为 $\phi=\phi(x,y,z)$。考虑控制微分方程

$$k\nabla^2\phi+Q=0 \tag{12.5-1}$$

上式与二维情况 $\phi=T$ 和 $\dot{T}=0$ 的式 12.1-8 有相同的形式。可由上式描述的其他一些现象有:

地面水流(ϕ=水压头)

受压薄膜(ϕ=横向挠度)

弹性扭转(ϕ=扭曲函数或叫做 Prandtl 应力函数)

静电场(ϕ=标量势)

静磁场(ϕ=矢量势)

有势流动(ϕ=速度势或流动函数)

对于列举的前三个现象,k 分别代表流体导热系数,表面张力和单位 1(对于翘曲函数);Q 对于简单的地面水流是零,对于薄膜是横向压力,对于扭转翘曲函数则是零。在静电学分析中,标量势 ϕ 代表电压,Q 代表电荷密度,k 代表介质的绝缘性能。在静磁学分析中,ϕ 代表磁矢量势,Q 代表磁流(电流)密度,k 代表介质对磁场的响应。

如果对所用到的量恰当地定义,由式 12.5-1 说明的问题可以由预想的热分析软件来表述。显然,操作必须十分仔细,因为在不同的学科中怎样使用方程可能有微小但很重要的差

别。软件的帮助文件也不可能提供太多的指导。

12.6　应用

图 12.6－1 显示用法兰盘连接管道的剖面。把每个法兰滑动到管道端口，用两个周向焊缝和管道焊接起来。螺栓把两个法兰锁定，中间夹有密封垫圈。管中流体温度为 0℃，管外蒸汽温度为 100℃。对流传热系数 h 是 5 000 W/(m² · ℃)(管内)和 20 000W/(m² · ℃)(管外)。忽略辐射传热。管道和法兰材料的导热系数为 $k=20$W/(m · ℃)。假设基本上具有轴对称条件。要求稳态的温度场分布，用于接下来的应力分析。

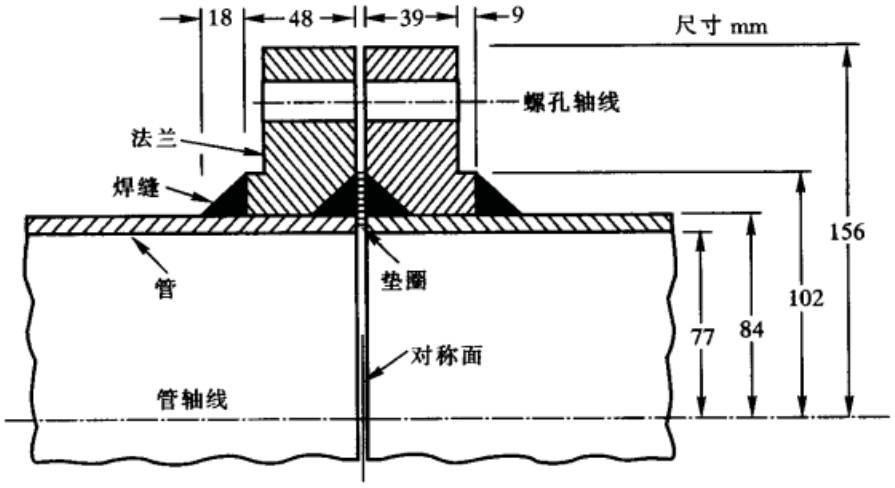


图 12.6－1　显示剖面的管道法兰连接。法兰焊在管道上，焊缝部位用黑色表示

初步分析　我们估算的计算结果如下：管内表面的温度必须高于 0℃，管外表面的温度一定低于 100℃。在图 12.6－2 中，最接近这些极限的部位分别靠近 B 和 D 点。靠近 HA 处管壁最薄，热流密度应该最大。通过把管壁当成平面，并且按有限的表面温度在径向 r 上使用傅里叶方程 $f_r=-k(\partial T/\partial r)$，可很容易地把通过管壁的热流上限近似出来。

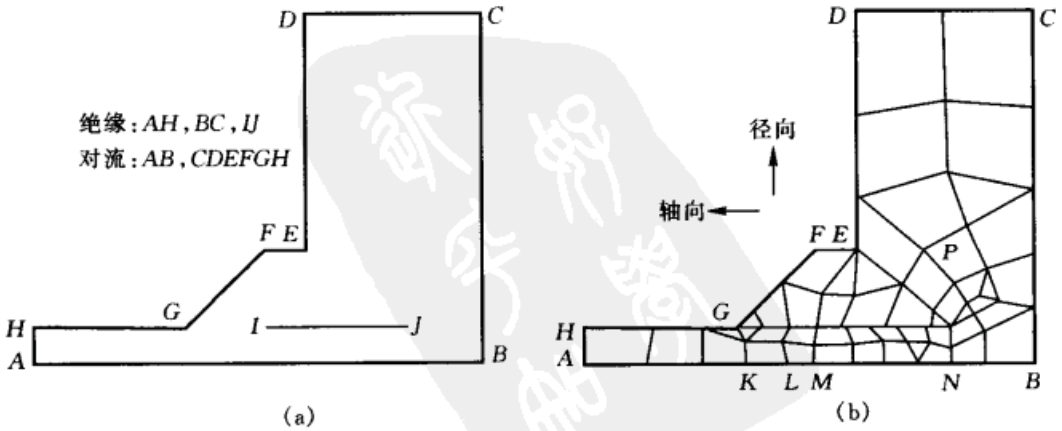


图 12.6－2　(a)表示结构左半部分表面状态。IJ 是没有焊接的管和法兰的交界面；(b)FE 网格

$$f_{r\lim} = -k\frac{\Delta T}{\Delta r} = -20\times\frac{100-0}{0.084-0.077} = -286\ 000\text{W/m}^2 \qquad (12.6-1)$$

其中负号表明热流向内。在法兰内温度梯度应该较小，并且温度应随着距 B 点径向和轴向距离的增大而增加。因此，热流主要方向向内，但也有指向 BC 方向的分量。

在图 12.6-2(a)中两个焊缝之间的 IJ 圆柱面处，管和法兰仅在几个孤立的点接触，即使完全接触，与连续金属中导热比较，通过这个表面的传热量也是很少的。我们将假设没有热量通过 IJ 面，因此将 IJ 面当成绝热层来建模。对于其后的应力分析，这是一种不利的假设，因为它增加了附近的温度梯度，而大的温度梯度通常与大的应力有关 。

有限元分析 有限元模型是个回转体，图 12.6-2(b)示出了它的横截面。图示网格根据位于字母所标的边界线上的数据由软件自动生成，并表示标有字母的点附近所希望的单元尺寸。预计温度梯度较大的地方，单元尺寸要设得相对小一些。图示网格是相当粗糙的，特别是如果用作其后的应力分析，就像我们将要看到的那样。单元或者是 6 节点三角形或者是 8 节点四边形。每一个单元都是一个回转体，而不是平面图形(详见第 14 章)。沿着 IJ 的表观不连续性是故意设定的；为了给一个不传热的界面建模，对 IJ 的两侧的节点设置为不连接。为了简便，螺栓和螺孔处用连续性材料代替，并预想螺孔处的温度梯度很小。也可忽略两法兰之间缝隙的流体，因为预想此处的对流很低。因此 BC 可认为是结构的对称面，没有热流通过它。任何节点的温度都不设定。沿着 AB(内侧)和 $CDEFGH$(外侧)的对流边界条件是设定的。

结果评价 计算出的温度等值线如图 12.6-3 所示。尽管 6 节点和 8 节点单元组成二次型温度场，但所使用的软件以直线段画出温度等值线图。沿内边界 AB 边界的右半部分，最低的温度为 3.59℃；在沿着外表面 $CDEFG$ 处，最高温度是 99.99℃。除了沿着 IJ 边，温度等值线都是单元间连续的，而沿 IJ 边材料不连续。在模型的左边部分，温度等值线平行于管轴，这就表明，如果边界 AH 向 G 处靠近，计算温度变化很小。所有的这些结果与预期的相符。但是，在靠近 I 和 J 点等值线方向有突变，并且等值线不完全垂直于对称平面 BC。因此，还需要使用更精细的网格进行重新分析。

计算的热流矢量图如图 12.6-4(a)所示，因为材料是各向同性的，热流箭头垂直于温度

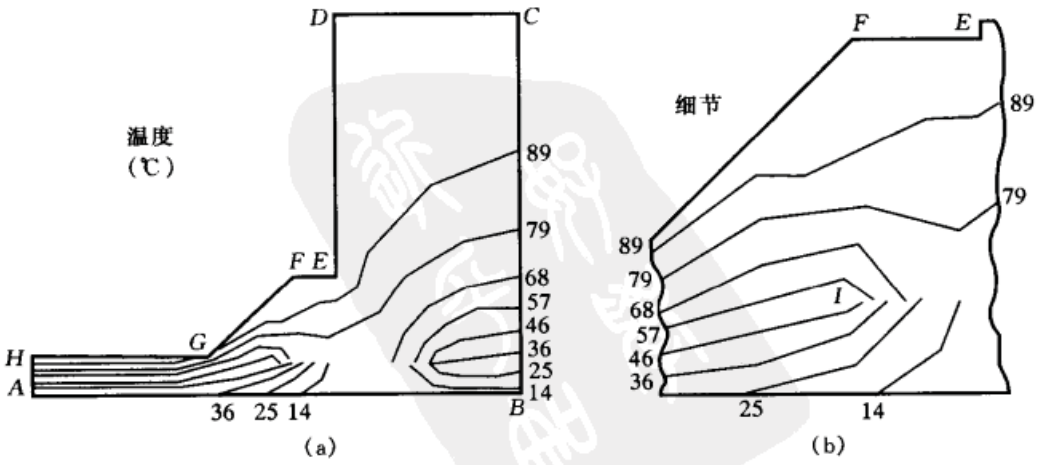


图 12.6-3 计算的温度等值线

(a)整个 FE 模型中的等值线图；(b)I 点附近的等值线细节

等值线。箭头指向热流方向，箭头长度正比于热流大小。每一个箭头源自单元中心。在法兰外侧的部分，热流如此之小，以至于箭头像圆点一样。接近 AH 处的径向计算热流是 170 000W/m²，像预期的那样，小于极限值 286 000W/m²（式 12.6－1）。热流方向也与预期相符。图 12.6－4(b)中，接近 I 处的热流等值线表现出了很强的单元间的不连续性，再次表明需要细化网格，至少是在局部（在所画等值线与单元边界重合的一些地方）。类似的不连续性出现在 J 点附近和临近 G 处的一个更小的范围内。9.10 节所述的相对误差计算，当它基于网格的所有单元时，得到 $\eta=0.03$。这个值是整体误差度量，并不表示局部结果的精确性。

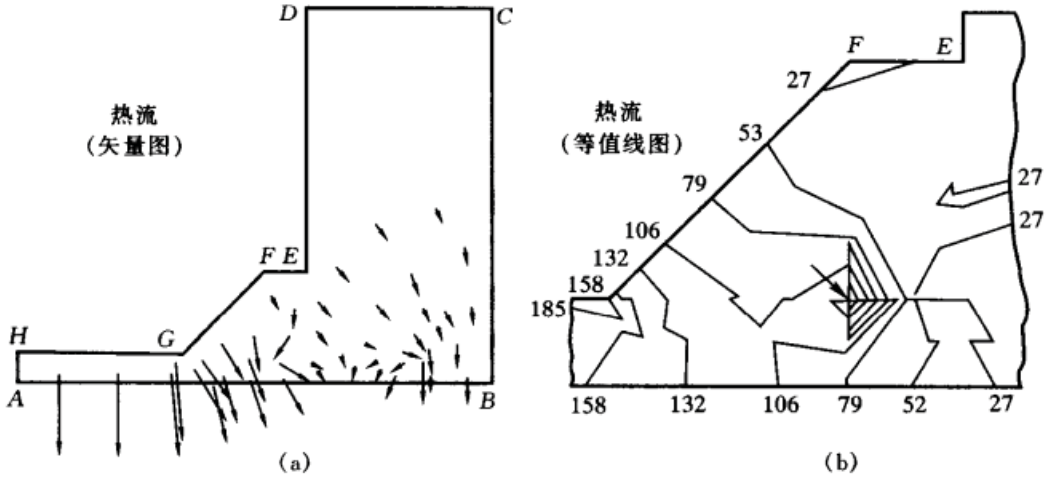


图 12.6－4　(a)计算的流场矢量图；(b)I 点附近计算的流场等值线细节图，热流单位是千瓦每平方米(kW/m²)

总的说来，计算的结果是足够精确的，但在 G，I，J 点附近需要细化。确切地说，在这些局部位置上永远达不到足够的精细，因为在这些凹拐角处的热流理论上是无限大的。为了表示上述网格用于应力分析时的性能，我们将忽略这些缺点。

后续应力分析　现在，我们用求出的温度去计算热应力。假设（不恰当，像我们将要看到的）图 12.6－2(b)所示的有限元网格满足应力分析。外载荷可以由螺栓的拉力提供，如 10.7 节中描述的，但在这里我们将不这样做。关于边界条件，要着重考虑两点：第一，沿着 IJ 的节点应该允许独立运动吗？如果界面的两个对边有分离的趋势，答案是对的，但如果两对边趋于重叠，应该允许沿 IJ 的节点有相对轴向运动但无相对径向运动。其次，沿着 BC 的所有节点应该被固定阻止轴向运动吗？允许运动是不相信垫圈和螺栓提供的阻力，而完全固定则是过度相信。我们选择计算应力两次，第一次允许沿 BC 的轴向运动，而第二次则阻止运动。这样，不考虑离散化误差，我们将期望得出正确的结果。材料数据为 $E=200$ GPa，$\nu=0.3$，和 $\alpha=12\times10^{-6}/℃$。

在有限元分析之前我们应用两组边界条件进行如下预测。较冷的内表面相对于温度较高的环绕材料而收缩，把材料向内推，使沿 IJ 的缝隙张开。如图 12.6－3(a)所示，在 IJ 与 AB 中间有相对大的包围材料，这暗示它的收缩受到相当大的限制，既在径向上也在轴向上。材料被完全的限制，单轴受力，以及相对于它的支撑降低了 100℃，因此有拉应力 $\sigma=\alpha E\Delta T=12\times10^{-6}\times200\times10^{9}\times100=240$MPa。我们期望在 IJ 和内表面之间的材料能够显示接近于这个值的应力。相似的，A 点和 H 点的温度分别约为 30℃和 90℃，那就是每一点的温度都与管中

面平均温度(60℃)有 30℃的差距。所以我们期望周向和轴向应力约为 $\sigma=\alpha E\Delta T=12\times10^{-6}\times200\times10^{9}\times30=72\text{MPa}$，内为拉，外为压。

在初次分析中，为了抑制刚体的平移，只在 B 点阻止轴向运动。计算的变形由图 12.6－5(a)的虚线夸张地示出，叠加在未变形的几何图形上面。所用软件假定，在本题所选的参考温度 0℃上，结构基本未变形。发现 C 点向右移动不到 0.1 mm，也许它不足以碰到另一个法兰上的相邻点而产生间隙闭合问题。在初次的分析中(而在第二次的分析中沿着 BC 的轴向运动都被禁止)，和预期的一样，沿 IJ 的缝隙张开，这进一步证实了在热分析中所作的穿过 IJ 没有传热的的假设。在变形后的有限元模型的左边部分，靠近 AH 处，是不平行于管轴的，那就意味着这部分对于精确的应力分析来说是太短了。在 A 和 H 的环向和轴向应力约为 ±72MPa，像预期的那样。其他的计算结果列在表 12.6－1 中，也都有预想的近似值。可惜的是，应力等值线在单元间有显著的不连续性(见图 12.6－5(b))。类似的结果(未画出)在第二次分析中产生，其中 BC 上的所有节点都是固定的。在每次分析中，算得的应力场有一个相对的能量误差为 $\eta=0.28$，远大于热分析中的 $\eta=0.03$。显然，需要做大量的网格细化工作。归纳起来，我们的结论是适合于热分析的网格可能完全不适用于应力分析。

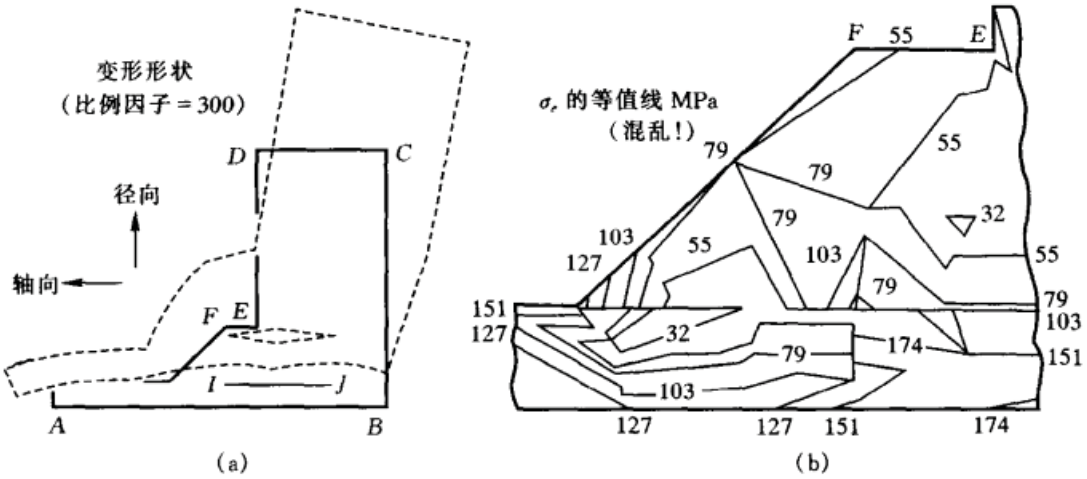


图 12.6－5 (a)仅在 B 点的轴向位移被阻止的变位形状。放大倍数是 300。
(b)I 点附近冯·米赛斯 σ_e 应力的计算等值线细节(网格相当粗糙)。

表 12.6－1 对于沿 BC 轴向约束的不同情况，最大和最小的应力(MPa)。应力 σ_r(径向)，σ_θ(周向)，σ_z(轴向)，σ_e(冯·米赛斯)。位置由图 12.6－2 中的字母表示。应力来自粗糙网格(图 12.6－2b)

	只有节点 B 受轴向约束				BC 上的所有节点受轴向约束			
	σ_r	σ_θ	σ_z	σ_e	σ_r	σ_θ	σ_z	σ_e
最大应力	113	216	244	222	105	229	257	242
最大应力的位置	I,J	$L-N$	I,J	J	I,J	$M-B$	I,J,K	G,J
最小应力	−68	−142	−199	8	−107	−225	−279	18
最小应力的位置	G	G	G	P	G	G	G	C

12.7　声频和模式

我们考虑一种无粘性和无纯流动的可压缩流体，除了由于声波而产生的微小变化，它的密度是均匀的。这种理想化假设满足腔中声振动计算。应用领域包括建筑上的围墙和乘客车厢。

波动方程　流体的微小运动与相对于静水压力的微小压力变化 p 有关。在 x，y 和 z 方向上的压力梯度与这些方向上的加速度 u，v，w 有关，x 方向在图 12.7－1 中示出。三个方向的方程为

$$p_{,x} = -\rho\ddot{u} \quad p_{,y} = -\rho\ddot{v} \quad p_{,z} = -\rho\ddot{w} \tag{12.7-1}$$

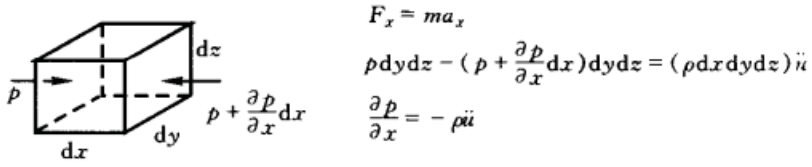


图 12.7－1　质量密度为 ρ 的微元在 x 方向上的加速度分量

这里 ρ 是流体的质量密度。我们把上式的每一个分别相对自己的空间坐标微分，并将结果相加，于是

$$p_{,xx} + p_{,yy} + p_{,zz} = -\rho(\ddot{u}_{,x} + \ddot{v}_{,y} + \ddot{w}_{,z}) \quad 或 \quad \nabla^2 p = -\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \tag{12.7-2}$$

这里 $\varepsilon_x = u_{,x}$，等等。体积模量 B 定义为压力与由它产生的相对体积变化的比值：

$$B = -\frac{p}{\mathrm{d}V/V} = -\frac{p}{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z} \tag{12.7-3}$$

出现负号是因为正压力与体积减小相关。由式 12.7－2 和 12.7－3 得到了无耗散波动方程

$$\nabla^2 p = \frac{\rho}{B}\ddot{p} \quad 或 \quad \nabla^2 p = \frac{1}{c^2}\ddot{p} \tag{12.7-4}$$

其中 c 为介质中的声速，$c = \sqrt{B/\rho}$。

式 12.7－4 在体积 V 中求解，在其表面 S 上施加边界条件。本质边界条件是 $p = 0$，这种情况在忽略表面波动的自由液面上占主导。在腔的固体表面上占主导的非本质边界条件是

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho\ddot{u}_n \tag{12.7-5}$$

其中 n 是外法线方向，$\ddot{u}_n$ 是边界 n 方向上的加速度。对于刚体边界，$\ddot{u}_n = 0$，因此，$\partial p/\partial n = 0$。$p = 0$ 和 $\partial p/\partial n = 0$ 这两个边界条件都反映了不吸收能量的波动。

对于一个有着均匀质量密度问题的泛函是

$$\Pi=\int\left(\frac{p_{,x}^2+p_{,y}^2+p_{,z}^2}{2}+\frac{1}{c^2}p\ddot{p}\right)\mathrm{d}V+\rho\int\ddot{u}_n p\,\mathrm{d}S \tag{12.7-6}$$

如同在式 12.7-4 中，$1/c^2$ 可被 ρ/B 代换。由稳定型条件 $\delta\Pi=0$ 得到控制微分方程和自然边界条件，即式 12.7-4 和 12.7-5(见 4.7 节)。

有限元列式仿照熟悉的形式。单元内压力 p 由单元的自由度向量$\{\boldsymbol{P}_e\}$通过插值表示，它包含节点压力，以及选定的节点压力空间导数。因此，

$$P=\lfloor\boldsymbol{N}_F\rfloor\{\boldsymbol{P}_e\}\quad\text{和}\quad\ddot{p}=\lfloor\boldsymbol{N}_F\rfloor\{\ddot{\boldsymbol{P}}_e\} \tag{12.7-7}$$

我们定义下面的总体矩阵，其中的求和符号表示对单元矩阵的组集。

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{K}_F]&=\sum\int(\lfloor\boldsymbol{N}_{F,x}\rfloor^{\mathrm{T}}\lfloor\boldsymbol{N}_{F,x}\rfloor+\lfloor\boldsymbol{N}_{F,y}\rfloor^{\mathrm{T}}\lfloor\boldsymbol{N}_{F,y}\rfloor+\lfloor\boldsymbol{N}_{F,z}\rfloor^{\mathrm{T}}\lfloor\boldsymbol{N}_{F,z}\rfloor)\mathrm{d}V\\ [\boldsymbol{M}_F]&=\frac{1}{c^2}\sum\int\lfloor\boldsymbol{N}_F\rfloor^{\mathrm{T}}\lfloor\boldsymbol{N}_F\rfloor\mathrm{d}V\qquad\{\boldsymbol{R}_F\}=\rho\sum\int\lfloor\boldsymbol{N}_F\rfloor^{\mathrm{T}}\ddot{u}_n\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{12.7-8}$$

在后一个积分中，$[\boldsymbol{N}]$在感受加速度的表面计算。经过有限元离散化以后，式 12.7-6 变为

$$\Pi=\{\boldsymbol{P}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{M}_F]\{\ddot{\boldsymbol{P}}\}+\frac{1}{2}\{\boldsymbol{P}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{K}_F]\{\boldsymbol{P}\}+\{\boldsymbol{P}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{R}_F\} \tag{12.7-9}$$

其中$\{\boldsymbol{P}\}$是节点压力自由度的整体数组。由极值条件$\{\partial\Pi/\partial\boldsymbol{P}\}=\{\boldsymbol{0}\}$得到有限元列式

$$[\boldsymbol{M}_F]\{\ddot{\boldsymbol{P}}\}+[\boldsymbol{K}_F]\{\boldsymbol{P}\}=-\{\boldsymbol{R}_F\} \tag{12.7-10}$$

声学模型 设腔壁是刚性的和静态的，以致 $\ddot{u}_n=0$。因此施力函数变为零，介质以它的固有频率之一振动。压力变为 $p=\bar{p}\sin\omega t$，其中 ω 是振型的圆频率，它的振幅 $\bar{p}$ 是空间坐标的函数，但与时间无关。式 12.7-4 变为

$$\nabla^2\bar{p}+\omega^2\frac{\rho}{B}\bar{p}=0\qquad\text{或}\qquad\nabla^2\bar{p}+\omega^2\frac{1}{c^2}\bar{p}=0 \tag{12.7-11}$$

这个式子被称为 Helmholtz 方程。为了得到相应的有限元列式，我们把$\{\boldsymbol{R}_F\}=\{\boldsymbol{0}\}$和$\{\boldsymbol{P}\}=\{\bar{\boldsymbol{P}}\}\sin\omega t$ 代入式 12.7-10，得到

$$([\boldsymbol{K}_F]-\omega^2[\boldsymbol{M}_F])\{\bar{\boldsymbol{P}}\}=\{\boldsymbol{0}\} \tag{12.7-12}$$

解特征值问题得到固有频率 ω_i 和相应的压力振型$\{\bar{\boldsymbol{P}}\}_i$。如果此腔没有开口，边界条件 $p=0$ 不能加在任何节点上，因为$\{\bar{\boldsymbol{P}}\}$中的所有自由度都被保留了，因此$[\boldsymbol{K}_F]$是奇异的。再者，由式 12.7-12 所产生的最低振型是无价值的解 $\omega=0$，对于它所有的节点压力都相等。在接下来的振型中，都是物理上有意义的，节点压力代表了与平均压力之间的差值。

一维情况 一个管道系统可能会有弯曲和分支，如果与波长相比，管的横向尺寸是小的，前面的列式可以应用在一维单元[12.10]。让 x 为纵向坐标，A 为横截面积，其中 $A=A(x)$。如果去掉对 y 和 z 方向上的导数项，对于单个单元，我们从式 12.7-8 可得到

$$[\boldsymbol{k}_F]=\int\lfloor\boldsymbol{N}_{F,x}\rfloor^{\mathrm{T}}\lfloor\boldsymbol{N}_{F,x}\rfloor A\,\mathrm{d}x\qquad[\boldsymbol{m}_F]=\frac{1}{c^2}\int\lfloor\boldsymbol{N}_F\rfloor^{\mathrm{T}}\lfloor\boldsymbol{N}_F\rfloor A\,\mathrm{d}x \tag{12.7-13}$$

可能的单元包括 2 节点和 3 节点单元，如图 12.7－2(a)，(b)所示，它们的形状函数分别出现在式 3.3－9 和式 6.1－4。对于 $A=A(x)$情况的单元矩阵出现在文献[12.10]中。对于一个有着不变横截面积的 3 节点单元，带有距两端为 $L/2$ 的内部节点，

$$[\boldsymbol{k}_F]=\frac{A}{3L}\begin{bmatrix}7&-8&1\\-8&16&-8\\1&-8&7\end{bmatrix}\qquad[\boldsymbol{m}_F]=\frac{AL}{30c^2}\begin{bmatrix}4&2&-1\\2&16&2\\-1&2&4\end{bmatrix}\tag{12.7-14}$$

图 12.7－2(c)给出了一个等截面管路的二单元模型。在一个封闭端，压力幅度是未知的。如果图 12.7－2(c)中的两端面都是封闭的，相应于式 12.7－12 的有限元模式有 5 个自由度和 5 个特征值，包括无价值解 $\omega=0$，它对应于所有节点上相同的压力幅值。在一个开口端，$p=0$。如果图 12.7－2(c)中两端都开口，有限元模型有三个自由度，最低振型(对于它 $p_2=p_4$)是 $\omega_1=1.576\,7c/L$。数学上的精确解是 $\omega_1=1.570\,8c/L$。因为单元是相容的并且使用矩阵$[\boldsymbol{m}_F]$的协调形式，由这个有限元模型得出的结果是上限值。

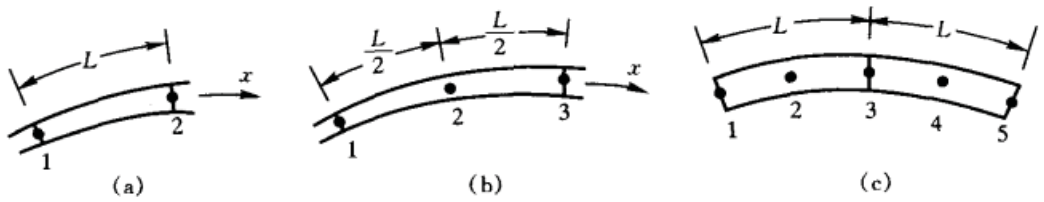


图 12.7－2 一维声单元

(a)2 个节点；(b)3 个节点；(c)两个 3 节点单元

边界吸收 在应用中管壁可能衬有吸音材料，会减少由于强迫振动而产生的噪声量级。在一个无界的介质中，由结构振动产生的波向外传播且不再返回。对于这种情况，一个实际的无界介质有限元模型必须在距扰动源有限的距离有吸波边界。下面介绍对吸波边界建模的一个简单方法。式 12.7－4 的一维形式是

$$\frac{\partial^2 p}{\partial n^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\tag{12.7-15}$$

其中 n 是传播方向，在当前讨论中指的是边界的法线方向。这个波动方程的解是

$$p=f_o(n-ct)+f_r(n+ct)\tag{12.7-16}$$

这里函数 f_o 和 f_r 分别代表传出和返回扰动源的任意扰动。为了消除回波，我们设 $f_r=0$，因此 $p=f_o(\psi)$，其中 $\psi=n-ct$。所以

$$\frac{\partial p}{\partial n}=\frac{\partial f_o}{\partial \psi}\qquad 和\qquad \frac{\partial p}{\partial t}=-c\frac{\partial f_o}{\partial \psi}\qquad 因此\qquad \frac{\partial p}{\partial n}=-\frac{1}{c}\frac{\partial p}{\partial t}\tag{12.7-17}$$

后一个方程有时被称为 Sommerfeld 辐射条件。作为边界条件被调用，它无反射地吸收外来波。为了在有限元列式中包含这个条件，以允许垂直于边界的波有可变吸收量的方式，我们用一个耗散项把式 12.7－6 中的 Π 增大。人为地包含一个用实验方法确定的数值因子 β，如 $\beta=0$ 表明没有吸收。因此式 12.7－6 变为

$$\Pi=\int\left(\frac{p_{,x}^2+p_{,y}^2+p_{,z}^2}{2}+\frac{1}{c^2}p\ddot{p}\right)\mathrm{d}V+\rho\int\ddot{u}_n p\,\mathrm{d}S+\frac{\beta}{c}\int p\dot{p}\,\mathrm{d}S \qquad (12.7-18)$$

由极值条件 $\delta\Pi=0$ 得到式 12.7-4,12.7-5 以及耗散表面 S 上的 $\partial p/\partial n=-(\beta/c)\dot{p}$。为了表示式 12.7-18，用 $\{\boldsymbol{P}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{C}_F]\{\dot{\boldsymbol{P}}\}$ 项来扩充式 12.7-9,其中

$$[\boldsymbol{C}_F]=\frac{\beta}{c}\sum\int\lfloor\boldsymbol{N}_F\rfloor^{\mathrm{T}}\lfloor\boldsymbol{N}_F\rfloor\,\mathrm{d}S \qquad (12.7-19)$$

这里的求和符号表示单元组集，$\lfloor\boldsymbol{N}_F\rfloor$ 在问题的表面上计算。式 12.7-10 变为

$$[\boldsymbol{M}_F]\{\ddot{\boldsymbol{P}}\}+[\boldsymbol{C}_F]\{\dot{\boldsymbol{P}}\}+[\boldsymbol{K}_F]\{\boldsymbol{P}\}=-\{\boldsymbol{R}_F\} \qquad (12.7-20)$$

阻尼矩阵也能由无限单元来实现(8.8 节)。关于边界上阻尼和列式的讨论出现在文献[12.11～12.15]中。

12.8 流体-结构相互作用

在本节中我们详细说明应用于像漂浮结构的振动和整体或部分埋入结构的地震加载这样一类问题的方程。与在热应力分析中发现的连续耦合相比，这儿(典型地)温度影响应力，但反之不然，结构与流体的运动直接耦合并必须同时考虑。下面列式的副产物是附加的“流体动力”质量表达式，事实上它是由于结构运动时要拖动流体一起运动而附加到结构上的。可应用 12.7 节中推导的公式，因此，在接下来的研究包含了上节的假设和约束条件。

作用在流体上的时变节点载荷，式 12.7-20 中的 $\{\boldsymbol{R}_F\}$，被认为是由结构的运动而产生的，它与一些声有限元网格的表面接触，并给予这些表面位移 u_n 和加速度 $\ddot{u}_n$。令结构的单元有节点自由度 $\{\boldsymbol{d}\}$，通常在坐标方向的位移分量是 u,v 和 w，也令 $\lfloor l\quad m\quad n\rfloor$ 是单元表面法线方向余弦数组(仅在这个数组中，n 不表示声表面的外法线)。因此

$$u_n=\lfloor l\quad m\quad n\rfloor\begin{Bmatrix}u\\v\\w\end{Bmatrix}=\underbrace{\lfloor l\quad m\quad n\rfloor[\boldsymbol{N}]}_{[\bar{\boldsymbol{N}}]}\{\boldsymbol{d}\} \qquad (12.8-1)$$

其中形状函数矩阵 $[\boldsymbol{N}]$ 在与流体接触的结构表面上计算。于是，从式 12.7-8 和 12.8-1 得

$$\{\boldsymbol{R}_F\}=\rho\sum\left\{\underbrace{\int\lfloor\boldsymbol{N}_F\rfloor^{\mathrm{T}}\lfloor\bar{\boldsymbol{N}}\rfloor\mathrm{d}S}_{[\boldsymbol{s}]}\{\ddot{\boldsymbol{d}}\}\right\}=\rho\sum([\boldsymbol{s}]\{\ddot{\boldsymbol{d}}\})=\rho[\boldsymbol{S}]\{\ddot{\boldsymbol{D}}\} \qquad (12.8-2)$$

其中求和符号表示对单元的组集。式 12.7-20 变为

$$[\boldsymbol{M}_F]\{\ddot{\boldsymbol{P}}\}+[\boldsymbol{C}_F]\{\dot{\boldsymbol{P}}\}+[\boldsymbol{K}_F]\{\boldsymbol{P}\}=-\rho[\boldsymbol{S}]\{\ddot{\boldsymbol{D}}\} \qquad (12.8-3)$$

由式 12.7-7 中的流体压力 p 施加在结构表面上的载荷为

$$\{\boldsymbol{R}\}=\sum\int\lfloor\bar{\boldsymbol{N}}\rfloor^{\mathrm{T}}p\mathrm{d}S=\sum\underbrace{\int\lfloor\bar{\boldsymbol{N}}\rfloor^{\mathrm{T}}\lfloor\boldsymbol{N}_F\rfloor\mathrm{d}S}_{[\boldsymbol{s}]^{\mathrm{T}}}\{\boldsymbol{P}_e\}=[\boldsymbol{S}]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{P}\} \qquad (12.8-4)$$

结构的动力学方程 11.2－12 变为

$$[\boldsymbol{M}]\{\ddot{\boldsymbol{D}}\}+[\boldsymbol{C}]\{\dot{\boldsymbol{D}}\}+[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}^{\text{ext}}\}+[\boldsymbol{S}]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{P}\} \tag{12.8-5}$$

式 12.8－3 和 12.8－5 的耦合问题是

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{M} & \boldsymbol{0}\\ \rho\boldsymbol{S} & \boldsymbol{M}_F\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\boldsymbol{D}}\\ \ddot{\boldsymbol{P}}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_F\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{\boldsymbol{D}}\\ \dot{\boldsymbol{P}}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{K} & -\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}_F\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{D}\\ \boldsymbol{P}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{R}^{\text{ext}}\\ \boldsymbol{0}\end{Bmatrix} \tag{12.8-6}$$

表面波　有一小振幅的波动，相对于平均表面水平有一个升高 w_s。小波与压力 $p=\rho g w$ 有关，其中 g 是重力加速度。把这个压力与式 12.7－5 中的 $p_{,z}=-\rho\ddot{w}_s$ 合并，其中 z 是竖直坐标，当有小振幅波动时，我们得到 $p_{,z}=-\ddot{p}/g$ 作为表面边界条件。为了说明这一项，把表面积分 $\int(p\ddot{p}/g)\mathrm{d}S$ 加入式 12.7－18 中的 Π 上。结果是在式 12.7－20 中乘 $\{\ddot{\boldsymbol{P}}\}$ 的矩阵包含了另外一项贡献；它变成

$$[\boldsymbol{M}_F]+[\boldsymbol{W}_F]\qquad\text{其中}\qquad[\boldsymbol{W}_F]=\frac{1}{g}\sum\int\lfloor\boldsymbol{N}_F\rfloor^{\mathrm{T}}\lfloor\boldsymbol{N}_F\rfloor\mathrm{d}S \tag{12.8-7}$$

只有与流体表面重合的单元表面才对 $[\boldsymbol{W}_F]$ 有贡献。

附加质量　当结构运动时可带动的流体质量简单而近似的表达式能够用下述假设得到，认为流体是不可压缩的，既没有表面波动也无边界阻尼，并且没有与结构（成穴）分离。因此，$[\boldsymbol{M}_F]=[\boldsymbol{W}_F]=[\boldsymbol{C}_F]=[\boldsymbol{0}]$，式 12.8－6 的下半部分变成

$$\rho[\boldsymbol{S}]\{\ddot{\boldsymbol{D}}\}+[\boldsymbol{K}_F]\{\boldsymbol{P}\}=\{\boldsymbol{0}\}\qquad\text{因此}\qquad\{\boldsymbol{P}\}=-\rho[\boldsymbol{K}_F]^{-1}[\boldsymbol{S}]\{\ddot{\boldsymbol{D}}\} \tag{12.8-8}$$

把 $\{\boldsymbol{P}\}$ 代入式 12.8－6 的上半部分，如果 $[\boldsymbol{C}]=[\boldsymbol{0}]$，得

$$([\boldsymbol{M}]+\underbrace{\rho[\boldsymbol{S}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{K}_F]^{-1}[\boldsymbol{S}]}_{\text{附加质量}})\{\ddot{\boldsymbol{D}}\}+[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}^{\text{ext}}\} \tag{12.8-9}$$

乘以 $\{\ddot{\boldsymbol{D}}\}$ 的整个系数矩阵有时被称为“虚拟质量”。如果有简单的谐波运动，以致 $\{\boldsymbol{D}\}=\{\bar{\boldsymbol{D}}\}\sin\omega t$，式 12.8－9 产生类似于式 12.7－12 的特征值问题。

条件 $p=0$ 被强加到无波动的流体表面。因此，矩阵 $[\boldsymbol{K}_F]$ 是非奇异的，且逆阵存在。矩阵 $[\boldsymbol{S}]$ 是稀疏的，因此计算过程很可能将利用稀疏矩阵技巧和方程求解策略，而不是上式的求逆和式 12.8－9 中所示的连续三层乘法运算。如果物理行为主要取决于结构的而不是流体属性，那么对于流体可采用相对粗糙的网格，因此单个流体单元可接触两个或更多的结构单元。

式 12.8－9 可用于分析船体的振动。然而，众所周知，表面效应使附加质量与频率有关，特别是对于其频率接近于表面波动主频率的运动，因此，低频振动比高频有更大的附加质量[12.17]。事实上，如果式 12.8－7 的表面波动矩阵 $[\boldsymbol{W}_F]$ 保留，并且 $\{\boldsymbol{D}\}$ 和 $\{\boldsymbol{P}\}$ 两者假设都随着时间按 $\sin\omega t$ 变化，那么，式 12.8－8 和式 12.8－9 的计算产生一个取决于 ω 的附加质量式。可以看出频率依赖性随着频率的升高而减小，因此式 12.8－9 可用于由机械激励产生的船体振动分析，激励的频率远高于波动频率。随着结构频率的升高，随动的流体质量减少，直到仅有一个与结构相贴的边界层被涉及。

在获得式 12.8－9 中使用的不可压缩性的假设，并不总是可行的。大坝-水库系统的分析表明，当水库中水的固有频率小于未蓄水的坝体的固有频率时，可压缩性能够大大地增加固有

振动周期[12.18]。当坝的振动周期与声音在流体中通过两倍于坝体高度所需的时间相当时，施加于坝体的压力载荷也显示出很大的增加[12.19]。

尽管如此，在表面波动并不重要的地方仍有许多应用，并且式 12.8－9 也是满足的。

可替换列式 式 12.8－6 一个明显的缺点是矩阵不对称。对于流体来说，使用位移自由度而不是压力自由度才可产生对称矩阵。下面加以概述。

结构单元中的节点自由度和形状函数也可以用于流体单元。流体单元和它的结构中的对应物有相同的质量矩阵。在表示流体单元的刚度矩阵时，材料性质矩阵[$\boldsymbol{E}$]用体积模量 B 取代，因此，流体单元能抵抗体积变化却没有剪切变形。这些流体单元的网格可能有几个零频率的“循环模式”，特别是如果单元是弱积分形式的。为了抑制它们，可将一个罚矩阵加入到每一个单元矩阵中。描述流体-结构耦合的结构矩阵是对称的，不是给定的节点数在量值上大于式 12.8－6 中的矩阵；在一个三维问题中，每一流体节点有三个自由度。参见文献[12.20－12.22]。

对于流体静力学，刚性腔体中的声学模式、柔性容器中的流体动力学问题，基于位移的流体模型都运行得很好。遗憾的是，它在预测由流体包围的弹性结构体的振动频率时，效果却很差[12.22]。

12.9 平面不可压缩无旋转流动

我们简要介绍一下不可压缩流体的稳态、无旋转流动。设 u 和 v 分别代表在 x 和 y 方向上的流动速度。无旋转和连续性条件由下式表示

$$\text{无旋转性：}\quad u_{,y}-v_{,x}=0 \qquad \text{连续性：}\quad u_{,x}+v_{,y}=0 \tag{12.9-1}$$

如果 u 和 v 是位移分量而不是流动速度，则在弹性理论中，旋转定义为 $\omega=(v_{,x}-u_{,y})/2$。因此无旋转条件可表示为 $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t=0$。连续性条件在概念上等同于 Q 和 T 两者为零的热量流动方程 12.1－6。

为了分析，我们可以使用势函数 $\phi=\phi(x,y)$，或流函数 $\psi=\psi(x,y)$。流速由导数给出，形式如下

$$\text{势函数：}\quad u=\phi_{,x} \quad \text{和} \quad v=\phi_{,y} \tag{12.9-2a}$$

$$\text{流函数：}\quad u=\psi_{,y} \quad \text{和} \quad v=-\psi_{,x} \tag{12.9-2b}$$

（一些作者更喜欢写成 $u=-\psi_{,y}$ 和 $v=\psi_{,x}$）如果用正交坐标 ns 取代式 12.9－2 中的 xy 坐标，$\phi_{,n}$ 将表示 n 方向上的流速而 $\psi_{,n}$ 表示负 s 方向上的流速。把式 12.9－2a 或式 12.9－2b 代入式 12.9－1，其一个方程可得 $0=0$，而另一个则是拉普拉斯方程。所以这个问题可以描述为

$$\nabla^2\phi=0 \quad \text{或用} \quad \nabla^2\psi=0 \quad \text{其中} \quad \nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{12.9-3}$$

因此，不可压缩无旋转流动的控制方程与描述各向同性介质无内热源的稳态热流的热力方程 $\nabla^2T=0$ 有相同的形式。一个有限单元在流体流经的空间占据固定的区域，使用 ϕ 或 ψ 的节点

值作为自由度。有限元列式总体方程是

$$(\sum[\boldsymbol{k}])\{\boldsymbol{\phi}\} = \sum\{\boldsymbol{r}\} \quad 或 \quad (\sum[\boldsymbol{k}])\{\boldsymbol{\psi}\} = \sum\{\boldsymbol{r}\} \tag{12.9-4}$$

其中求和符号表示单元组集。单元特征矩阵$[\boldsymbol{k}]$由式 12.2-4 的第一项给出，其内的$[\boldsymbol{\kappa}]$是单位矩阵。载荷项$\{\boldsymbol{r}\}$来自式 12.2-4 中的$\{\boldsymbol{r}_B\}$，其内的 f_B 现在表示边界法线方向的流入率。

图 12.9-1 描述了一个应用实例，均匀的 x 方向流动以速度 u_0 进入左端，求在圆柱形障碍物周围的流速。由于相对于水平和垂直中心线对称，只需考虑对 1/4 部分建模。采用四边形单元粗网格，如图所示。流动也是对称的。当与式 12.9-2 联系起来时，要求的边界条件如图示。例如，沿 AB，CD 和 DE，$v=0$，因为沿这些边界上 $\phi_{,y}=0$。圆柱面法线方向的流速为零，因此沿 BC $\phi_{,n}=0$。为了使系数矩阵不奇异，必须在某些节点上设定 ϕ，赋予的数值要加在解向量$\{\boldsymbol{\phi}\}$中所有其他自由度上，但是数值是任意的，因为只有 ϕ 的导数才是有意义的。如果在 C 点设定 $\phi=0$，就要规定沿 CD 的所有节点上 $\phi=0$，因为沿 CD 的条件是 $\phi_{,y}=0$。这些是仅有的设定自由度。载荷$\{\boldsymbol{r}\}$沿 AE 设定。相似的讨论应用于 ψ。ψ 在除 CD 外的所有边界上设定，并且$\{\boldsymbol{r}\}=\{\boldsymbol{0}\}$。

当所有的自由度已知时，梯度就可算得(见式 12.2-2，节点温度由 ϕ 或 ψ 的节点值取代)，流速可由式 12.9-2 得出。

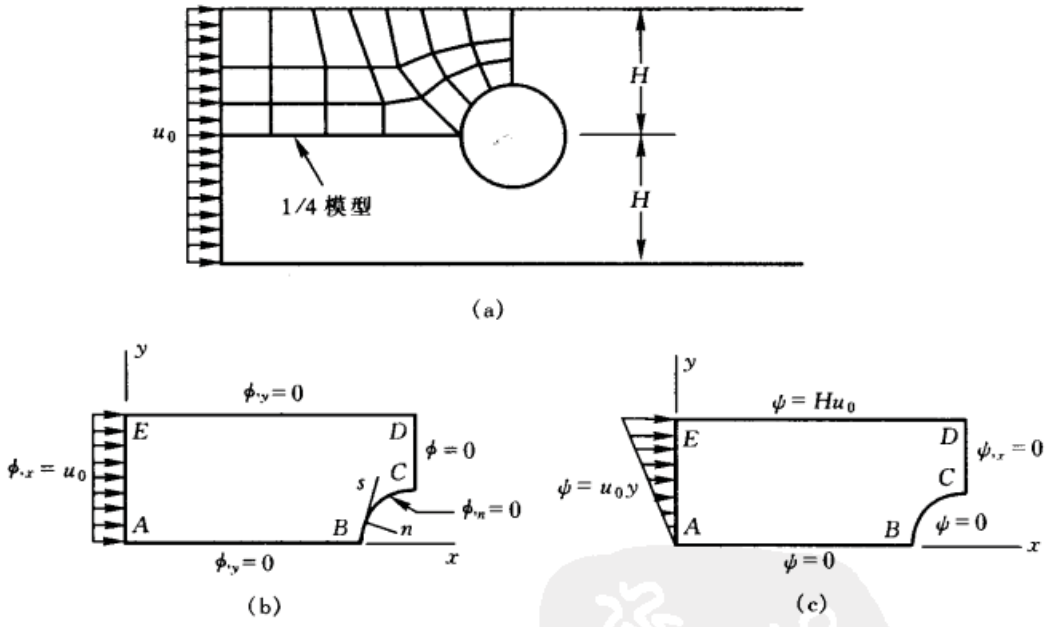


图 12.9-1　(a)绕一圆柱障碍物的流动；(b,c)在 1/4 模型中与使用 ϕ 和 ψ 有关的边界条件

分析题

12.1-1　利用类似于产生式 12.1-6 的论证方法推导式 12.1-10。

12.1-2　证明平面热流变换如式 12.1-3 后面的语句所述。

12.1-3　设计一个例子来证明为什么当回转体中温度相对于 $\theta=0$ 平面为对称时，θ 必须是材料的一个主方向。

12.1－4 使用传统的标量符号(如式 12.1－9 中用到的),对下面特殊情况写出式 12.1－14。

(a) 有轴对称温度 T 和各向同性材料的回转体。

(b) 极坐标系中的平面问题。不假设材料是各向同性的。

12.1－5 从基本原理推导出题 12.1－4(b)的控制方程;也就是说,利用提供式 12.1－7 的这类论证方法。

12.2－1 使用式 4.7－6 证明式 12.2－1 中的体积分可提供用于平面问题的式 12.1－14(a)。

12.2－2 对于 xy 坐标系内的一个平面问题,证明:从变分式 $\delta\Pi=0$ 可得出正确的控制方程和边界条件。

12.2－3 对于式 12.1－10 中的一维问题,使用伽辽金法得到有限元矩阵公式。结果应当与专门用于杆问题的式 12.2－4 相一致。

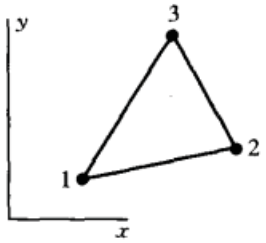
12.2－4 假设图示的 3 节点平面单元是均质、各向同性的,具有单位厚度。

(a)计算用导热系数 k 和节点坐标表示的$[\boldsymbol{k}]$。

(b)如果只在 1－3 边上有对流传热,计算用对流传热系数 h 和节点坐标表示的$[\boldsymbol{h}]$。

(c)写出"集中"形式的$[\boldsymbol{c}]$和$[\boldsymbol{h}]$。

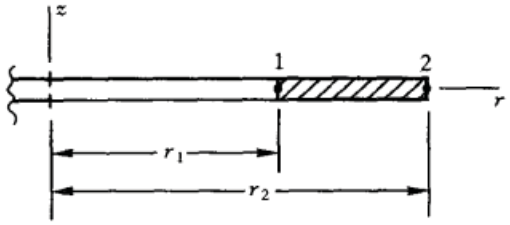
(d)如果 Q 在单元上是常数,写出$\{\boldsymbol{r}_Q\}$表达式。



题 12.2－4

12.2－5 重做 12.2－4 题,但是把单元看做回转体,因此用 r 代替 x,回转轴 z 代替 y。

12.2－6 图示横截面的单元是轴对称、均质、各向同性的,在 z 方向上有单位厚度。假设 $z=$常数的侧面是绝热的,那么此单元中的温度是 r 的线性函数,在整个单元内 Q 是均质的。计算式 12.2－4 中的矩阵,用单元尺寸和物理常数表示出来。



题 12.2－6

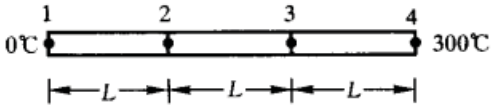
12.2－7 图示均匀杆的侧面是绝热的。此杆用两个单元建模,每一个的横截面积是 A,长度为 L。节点 3 的温度维持在 T_3,恒定热流 $q_1=Af_1$ 施加在节点 1。用 q_1,尺寸和常数表示,T_1 和 T_2 与 T_3 的关系是什么?这些节点温度在节点 3 提供了预期的 q 值吗?在解答中利用导热矩阵。



题 12.2－7

12.2－8 重做题 12.2－7,但使用的是一个梯形杆而不是均匀杆。令单元 1－2 和 2－3 分别有横截面积 A 和 $2A$。

12.2－9　图中均匀杆的侧面是绝热的，用 3 个相同的单元为杆建模。节点 1 和 4 的温度分别维持在 0℃和 300℃。节点 2 和 3 的温度是多少？在解答中使用导热系数矩阵。



题 12.2－9

12.2－10　重做题 12.2－9，但使用的是一个阶梯杆而不是均匀杆。设单元 1－2，2－3 和 3－4 的截面积分别是 A_0，$2A_0$ 和 $3A_0$。



题 12.2－11

12.2－11　一个均匀杆由两个相同的 2 节点单元建模，如图所示。节点 1 的温度维持在 $T_1=0$℃，杆被温度为 $T_\infty=200$℃的流体包围着，从它的面积为 S 的圆柱面传热。按 12.1 节中所列的单位，数据为 $A=300\times10^{-6}$，$h=600$，$k=200$，整个杆的表面积是 $S=0.020$。

(a)列出单元矩阵。

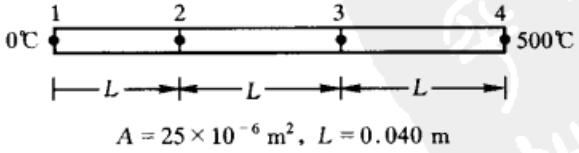
(b)组集单元矩阵，施加 $T_1=0$℃，解出 T_2 和 T_3。

(c)重复(b)，但是改变有限元模型，使左边单元的长度为右边单元的一半，总长保持为 0.300m。

(d)比较(b)和(c)的结果，能够得出什么样的结论？

12.2－12　设想节点自由度包含温度 T 及它的一阶导数。因此在平面问题中节点自由度是 T，$T_{,x}$ 和 $T_{,y}$，设材料是各向同性的。对于结构垂直于 x 轴方向的直边界，如果边界是下述情况，说明三个节点自由度中哪些是已知的(必要时，借助于式 12.1－4 的帮助)，哪些是未知的。(a)是绝热的；(b)有设定的温度；(c)有设定的法向热流；(d)有对流传热。

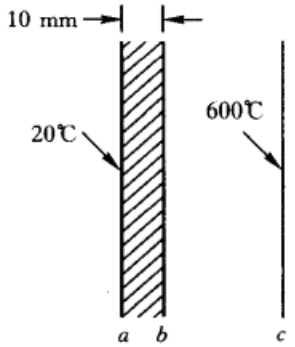
12.3－1　温度在 0℃＜ T ＜500℃范围内，某金属的导热系数可以取作 $k=73-0.06T$，单位是 W/(m·℃)。假定图示均匀杆的侧表面是绝热的，两端温度分别保持为 0℃和 500℃。计算节点温度 T_2 和 T_3 以及轴向热流密度 f。在计算中，设整个单元的 k 是常数，并根据单元两节点温度的平均值来确定。执行三步迭代：假定初始值都是 $T=T_0=0$℃，使用式 12.3－6 依次解出节点温度向量$\{\boldsymbol{T}_1\}$，$\{\boldsymbol{T}_2\}$和$\{\boldsymbol{T}_3\}$。



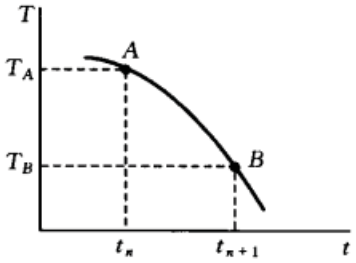
题 12.3－1

12.3－2　图示 10mm 厚的平板 ab 横截面。此板平行于一个有辐射的墙面 C。假设平板的 k

为 0.70W/(m·℃)，$\varepsilon_b=\varepsilon_c=0.6$，它们都与温度无关。如果表面 a 和 c 分别维持在 20℃和 600℃，表面 b 的温度是多少？使用式 12.3-6 和式 12.3-4 中的 h_{rad} 迭代求解。假定启动过程的 $T_b=100$℃。



题 12.3-2



题 12.4-2

12.4-1 证明式 12.4-3。

12.4-2 假设图中是某一节点温度随时间的实际变化图。想象我们在 A 点开始，用式 12.4-6 去预测在 t_{n+1} 时间的 T。分别考虑 $\beta=0$，$\beta=0.5$ 和 $\beta=1.0$ 的情况。在图上表示预测的温度和 T_B 比较怎样。

12.4-3 设某点的温度由方程 $2\dot{T}+6T=3$ 控制。开始时 $T=0$。根据下面的说明，T 作为时间的函数计算其值。

(a)当 t 变大时，$T(t)$应该收敛到什么温度？

(b)$T=T(t)$的精确解是多少？

(c)欧拉法的 Δt_{cr}是多少？

下面，使用给定 β 和 Δt 值的式 12.4-8。在每种情况中取 5 个时间步，比较计算温度与精确值。

(d～g) 对于 $\Delta t=0.1$，β 取为 (d)0，(e)1/2，(f)2/3，(g) 1.0。

(h～k) 对于 $\Delta t=1.0$，β 取为(h)0，(i)1/2，(j)2/3，(k)1.0。

12.4-4 设某点的温度由方程 $6\dot{T}+2T=8$ 来确定。开始时，$T=0$。根据以下说明，计算作为时间函数的 T。

(a) $T=T(t)$的精确解是多少？

(b) 使用式 12.4-8，对于 $\beta=0.5$ 按 $\Delta t=1.0$ 取 8 个时间步。

(c) 使用式 12.4-8，对于 $\beta=0.5$ 按 $\Delta t=10.0$ 取 8 个时间步。

12.7-1 (a) 证明 $dV/V=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z$，如式 12.7-3 要求的那样。

(b) 证明对于式 12.7-6 定义的 Π，$\delta\Pi=0$ 可得到式 12.7-4 和 12.7-5。

(c) 证明从求极值条件 $\delta\Pi=0$，泛函 $\Pi=\int[\bar{p}_{,x}^2+\bar{p}_{,y}^2+\bar{p}_{,z}^2-(\omega\bar{p}/c)^2]dV$ 可得到公式 12.7-11。

12.7-2 设一个长为 L 的均匀管两端封闭。用单个单元对此建立模型，使用以下的有限元列式，求出最低的非零声频率。数学精确解是 $\omega=\pi c/L$。

(a)使用图 12.7-2a 中的线性单元。

(b)使用一个四自由度单元，它在每端的自由度是 p 和 $p_{,x}$，对于类似于所要求的

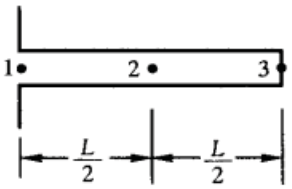
$[k_F]$矩阵见式 18.2－6 。

12.7－3　验证结果 $\omega_1=1.576\ 7c/L$ 是按着式 12.7－14 得到的。

12.7－4　简图表示一个均匀管内空气 3 节点的有限元模型，左端是敞开的。使用下面的有限元列式，算出最低频的声学振型。数学的精确值为 $\omega=\pi c/2L$。

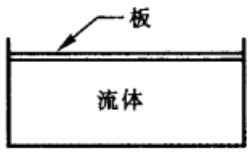
(a)使用两线性单元(图 12.7－2(a))。

(b)使用单个的二次型单元(图 12.7－2(b))。



题 12.7－4

12.8－1　简图表示流体刚性矩形容器的横截面。流体的表面与一个薄弹性板接触，板的四边与容器的壁相连。不用计算，画出两个板的最低频振动模式。假定所有的运动都平行于图示平面。当没有流体时重画此图。



题 12.8－1

12.8－2　保留说明表面波动的矩阵$[\boldsymbol{W}_F]$。然后假设$\{\boldsymbol{P}\}=\{\bar{\boldsymbol{P}}\}\sin\omega t$，$\{\boldsymbol{D}\}=\{\bar{\boldsymbol{D}}\}\sin\omega t$，推导新形式的附加质量表达式(见公式12.8－9) 。

计算题

在下面的热问题中，计算温度和热流(声学和相互作用问题自有说明)。尽可能地利用对称性。检查温度等值线、热流等值线和流场的矢量图。当用到网格细化时，估算由最好的有限元网格所得结果的最大百分比误差。应用 1.5 节中建议的分析方法。

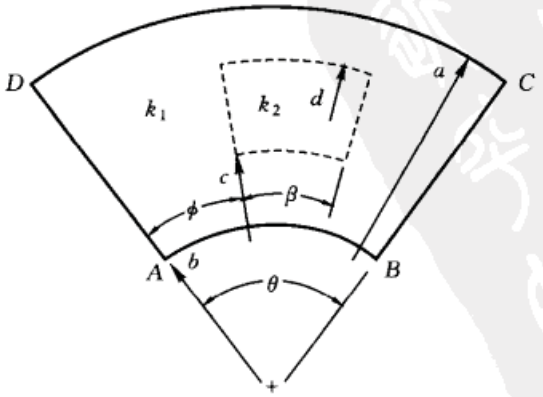
除非另有说明，否则都认为平面模型是均质、各向同性的，有单位厚度，稳态条件占主导。作为选择，瞬态问题能够用假设温度初始均匀并随时间向稳态条件变化来产生。如果需要的话，每个热分析之后都可作相应的应力分析。

在尺寸和载荷未指定的地方，就选择合适或方便的值。材料属性和对温度相关性数据可查手册得到。

C12.1　设图示的平面环状扇形物是均质的($k_1=k_2$)。因此，此题中的 k_2，ϕ，β，c，和 d 都无意义。

(a)设边界 AB 和 CD 是绝热的。沿 AD 施加温度 T_1，BC 温度为 T_2。

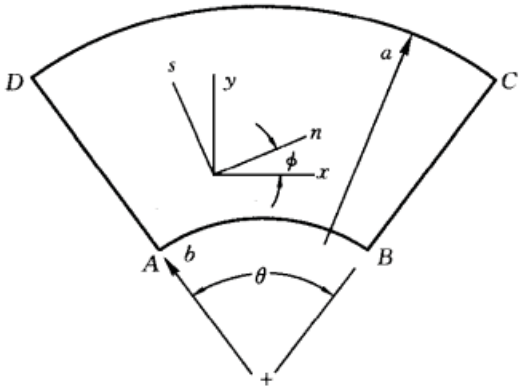
(b)设边界 AD 和 AB 是绝热的，沿 BC 施加热流密度 f，除 C 点外沿 CD 施加温度 T_1。



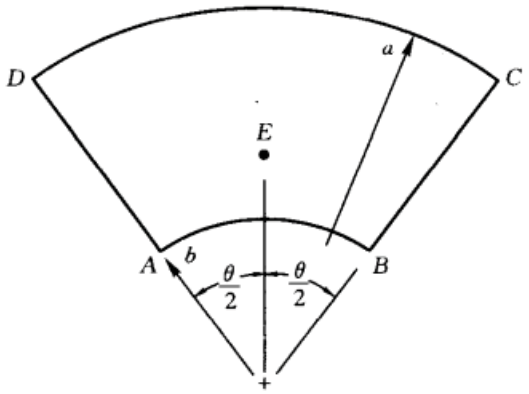
题 C12.1 和 C12.2

C12.2 重复上题，但设扇形区域是非均质的（$k_1 \neq k_2$）。

C12.3 图示平面环状扇形物是各向异性的，材料主轴 ns 和相对于总的笛卡儿坐标 xy 有不变的方向 ϕ。主导热系数是 k_n 和 $k_x = ck_n$，其中 c 是大于零的数。按题 C12.1(a)和(b)的说明 。



题 C12.3

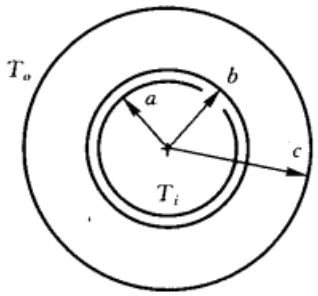


题 C12.4

C12.4 图示平面环状扇形物沿 BC，CD 和 DA 有设定的温度 T_1，沿 AB 有设定的温度 T_2（这些条件产生了 12.5 节中提到的未定义角点的难题）。计算温度场，特别是 E 点温度，它的径向坐标是 $(2b+a)/3$。使用粗和细两种网格。在角 A 和 B 处，温度 T_A 和 T_B 如下。(a) $T_A = T_B = T_1$。(b) $T_A = T_B = T_2$。(c) $T_A = T_B = (T_1 + T_2)/2$。(d)令 T_B，T_A 是未定义的（它们的计算值是什么?）。

C12.5 重复上题，但沿 AB，BC 和 CD 设定温度为 T_1，DA 为 T_2。题中(a)到(d)现在指的是角 A 和 D。

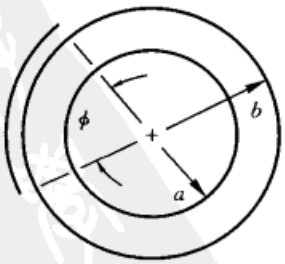
C12.6 一个长管，图示为横截面，有内外半径 a 和 b。管内流体温度为 T_i。外有半径为 c 的绝热覆盖物，并被温度为 T_0 的流体所包围。忽略辐射。研究通过管壁的热流与 c/a 和 c/b 有怎样的关系。



题 C12.6

C12.7 在上题中，设管的外表面辐射率为 0.1。外绝热表面的辐射率为 0.9。假设 $T_i = 100℃$ 和 $T_a = 0℃$，外围物质不反射辐射热，热量由对流和辐射两种方式传递。研究是否需要增加一个薄的绝热层来减少管的热量损失。通过数值实验，选择一个合适的厚度 c/b，使辐射和对流产生相同的热量损失。

C12.8 一个球形容器有一个圆柱形出口（见题 C14.5 的简图），温度为 T_1 的水充满容器和出口，容器由温度为 T_2 的空气包围。研究容器内的温度场。

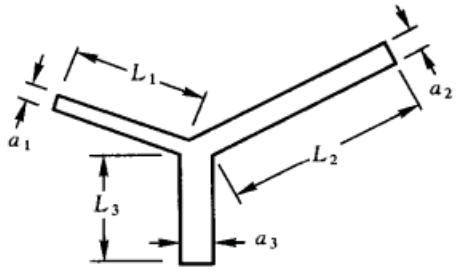


题 C12.9

C12.9 简图表示一个管的横截面。开始时管和其中流体的温度是 T_1。在时间 $t = 0$ 时，假设有间距很近、圆心角为 ϕ 的柱面，并保持温度为 T_2，与管的外表面有辐射热交换。假设上述条件沿轴向不改变，计算(a)瞬态解和(b)稳态解。

C12.10　利用在热传导和扭转之间的比拟，来研究非圆截面棱柱轴中的扭转刚度和剪应力。

C12.11　对于声分析，假设图示的 Y 形区域有垂直于图形平面的单位厚度。三个臂足够细长到可以用一维有限元分析。图示末端都是封闭的，如果需要的话，一端或多端可以打开。确定声频率和振型。



题 C12.11

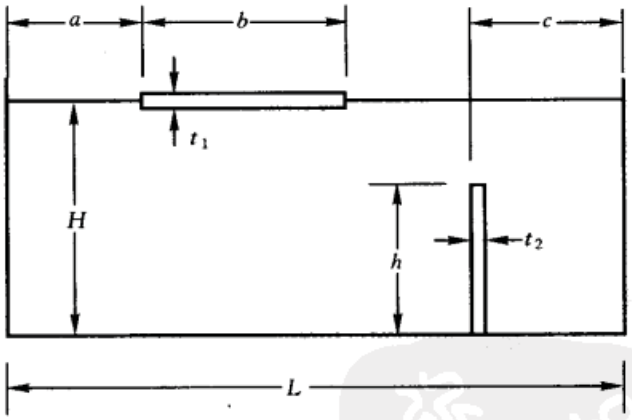
C12.12　重复上题，使用二维声单元，因此可以使用非细长的臂，或者可以研究由于使用一维单元而引起的误差。

C12.13　简图表示跨度为 L 的矩形容器中深度为 H 的水。两个梁如图所示，一个水平漂浮，另一个垂直并于底部悬臂。研究流体-结构耦合问题的振动频率。假定这个问题能够看作二维。

(a)忽略漂浮的梁；

(b)忽略悬臂的梁；

(c)两者都不忽略。



题 C12.13

第 13 章

约束：惩罚形式，锁定和约束计算

约束条件规定了自由度的值或利用了自由度之间的关系。显式约束可以通过变换方程、拉格朗日乘数法或罚函数来施加。隐式约束、约束计算，以及几乎不可压缩材料的处理也在本章进行讨论。

13.1 显式约束·变换方程

显式约束用于规定自由度的值，为了在已经由总体方程$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\}$建立起关系的自由度中强加附加的关系，或者使单个的单元或子结构耦合在一起（在 13.4 节中，我们会遇到隐式约束，它被定义为包含在已经存在的总体方程中的约束）。单点约束给单个自由度设定已知值（经常是零），而多点约束在两个或更多自由度之间指定一种关系。对于图 2.5－2 中所描述的三杆桁架，设定 $u_2=v_2=u_3=0$ 作为支撑条件构成三个单点约束。在图 9.2－2(a)中，自由度 u_B 和 u_C 已经通过结构方程$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\}$联系起来，但为了避免可能的数值误差，我们施加增补的关系 $u_B=u_C$ 作为多点约束。在子模型和子结构中，多点约束用于沿共享边界的配对自由度。

一些约束问题能够作为坐标变换直接列式，像在 8.5 节那样。因此，对于显式约束的每个方程，能够从未知矢量中消去一个自由度，但是这样做在软件中可能需要大量的簿记和系数的重新安排，特别是对于多点约束更是这样。在本节中，约束用一种更普遍的方式列出，这也导致变换运算。其它的约束处理方法——拉格朗日乘数法和惩罚法，在下面几节会介绍。拉格朗日乘数法增加方程的数目，但需要的运算少。惩罚法保留未知数的数目不变，但可能会产生病态方程组。

强加约束的变换方程 将$\{\boldsymbol{D}\}$中自由度联系起来的约束方程，可写成如下形式：

$$[\boldsymbol{C}]\{\boldsymbol{D}\}-\{\boldsymbol{Q}\}=\{\boldsymbol{0}\} \tag{13.1-1}$$

其中$[\boldsymbol{C}]$和$\{\boldsymbol{Q}\}$包含常数。$\{\boldsymbol{D}\}$中的自由度多于约束方程数，因此$[\boldsymbol{C}]$的列比行多。为了便于讨论，我们设想$\{\boldsymbol{D}\}$是分块的，因此式 13.1－1 变为

$$[\boldsymbol{C}_r \quad \boldsymbol{C}_c]\{\boldsymbol{D}\}-\{\boldsymbol{Q}\}=\{\boldsymbol{0}\} \qquad \text{其中} \qquad \{\boldsymbol{D}\}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{D}_r\\ \boldsymbol{D}_c\end{Bmatrix} \tag{13.1-2}$$

上式中$\{\boldsymbol{D}_r\}$和$\{\boldsymbol{D}_c\}$分别是保留的自由度和被消去或“凝聚掉”的自由度。

因为$\{\boldsymbol{D}_c\}$中自由度数目和独立约束方程数一样多，所以矩阵$[\boldsymbol{C}_c]$是方阵且是非奇异的。从式 13.1－2 解出$\{\boldsymbol{D}_c\}$之后，完整的自由度数组可写成如下形式

$$\begin{Bmatrix}\boldsymbol{D}_r\\ \boldsymbol{D}_c\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}\\ -\boldsymbol{C}_c^{-1}\boldsymbol{C}_r\end{bmatrix}\{\boldsymbol{D}_r\}+\begin{Bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{C}_c^{-1}\boldsymbol{Q}\end{Bmatrix} \qquad \text{或} \qquad \{\boldsymbol{D}\}=[\boldsymbol{T}]\{\boldsymbol{D}_r\}+\{\boldsymbol{Q}_0\} \tag{13.1-3}$$

其中$\lceil\ \boldsymbol{I}\ \rfloor$是单位阵。作为方程 13.1－3 的一个特例，见式 8.5－6，那里的$[\boldsymbol{T}]$直接由几何论证而得。

原始的总体方程是$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\}$。令$\{\boldsymbol{D}\}$按式 13.1－2 那样分块。用$[\boldsymbol{T}]^{\mathrm{T}}$左乘总体方程并替代式 13.1－3 中的$\{\boldsymbol{D}\}$，可得缩减后的方程组

$$[\boldsymbol{K}_r]\{\boldsymbol{D}_r\}=\{\boldsymbol{R}_r\} \qquad \text{其中} \qquad \begin{aligned}[\boldsymbol{K}_r]&=[\boldsymbol{T}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{K}][T]\\ \{\boldsymbol{R}_r\}&=[\boldsymbol{T}]^{\mathrm{T}}(\{\boldsymbol{R}\}-[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{Q}_0\})\end{aligned} \tag{13.1-4}$$

当由式 13.1－4 的第一式算出$\{\boldsymbol{D}_r\}$后，便可由式 13.1－3 求出$[\boldsymbol{D}_c]$。

尽管$[\boldsymbol{D}_c]$被叫做“被凝聚自由度”，但式 13.1－4 不同于 6.7 节中的静态凝聚。式 13.1－4 在自由度中强加了额外的关系，而静态凝聚只使用已经包含在总体方程$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\}$中的关系。

对于单点约束，$[\boldsymbol{C}_r]$是零矩阵，$[\boldsymbol{C}_c]$是单位阵，所以自由度$[\boldsymbol{D}_c]$有设定值$\{\boldsymbol{Q}\}$。因此实际上式 13.1－4 简化方程组对右边取了与$[\boldsymbol{D}_c]$有关的已知常数，然后抛掉了$[\boldsymbol{K}]$中与$[\boldsymbol{D}_c]$有关的行和列，就像在式 2.7－1 到 2.7－3 中所描述的那样。对于多点约束，放入$[\boldsymbol{D}_c]$中的自由度的选择不是惟一的，但不同的选择将导致相同的最终结果。

式 13.1－4 要求矩阵分块和重新安排系数。当矩阵较小和更易于处理时，在软件中这些操作能够用适当的编码[13.1]，或在组集总体方程之前在单元级运用约束来避免[13.2]。

实例　考虑图 13.1－1 中的三单元结构。只允许有轴向变形，并且在 $x=0$ 处强加边界条件 $u=0$ 之后，结构方程$[\boldsymbol{K}][\boldsymbol{D}]=\{\boldsymbol{R}\}$为

$$\begin{bmatrix}2k & -k & 0\\ -k & 2k & -k\\ 0 & -k & k\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}P\\ P\\ P\end{Bmatrix} \tag{13.1-5}$$

设想强加了多点约束 $u_2=u_3$。对于选择 $D_c=u_3$，式 13.1－1 和式 13.1－2 变为

$$[0 \quad 1 \vdots -1]\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\\ \cdots\\ u_3\end{Bmatrix}=0 \qquad \text{其中} \qquad [\boldsymbol{C}_r]=[0 \quad 1],\ [\boldsymbol{C}_c]=-1 \text{ 和 } \{\boldsymbol{Q}\}=0 \tag{13.1-6}$$

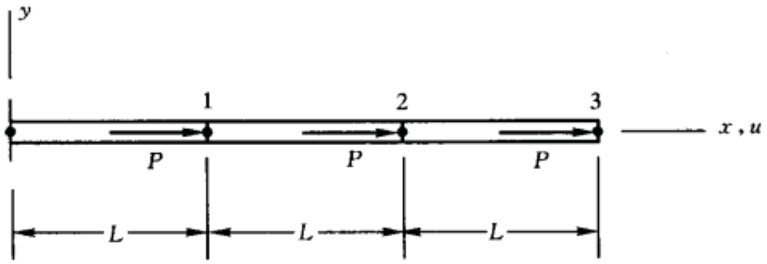


图 13.1-1 三个相同的杆单元，每个轴向刚度都是 $k=AE/L$

式 13.1-3 和 13.1-4 中的变换矩阵和缩减后的方程组为

$$[\boldsymbol{T}]=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{bmatrix}2k & -k\\ -k & k\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}P\\ 2P\end{Bmatrix} \tag{13.1-7}$$

解此式的 u_1 和 u_2，然后由式 13.1-6 得出 u_3，可得：

$$\lfloor u_1 \quad u_2 \quad u_3 \rfloor=\lfloor \frac{3P}{k} \quad \frac{5P}{k} \quad \frac{5P}{k} \rfloor \tag{13.1-8}$$

注意 当用多点约束对平衡方程$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\}$进行修正时，得到的结果可能有违反平衡条件的情况。在图 13.1-2 中描述的就是此种情况。其中只允许 y 方向的位移，初始的方程组和应用约束 $u_1=u_2$ 得到的方程为

$$\text{初始方程：}\ \begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}v_1\\ v_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}P\\ 0\end{Bmatrix} \qquad \text{约束方程：}\ (2k)v_1=P \tag{13.1-9}$$

因此，$v_1=v_2=P/2k$，由弹簧支承的力是 $kv_1=kv_2=P/2$。作用在图 13.1-2(b)刚性杆上的净力，满足 y 方向力的平衡，但不满足力矩平衡。当然，凝聚结构不是图 13.1-2(a)所示的初始结构；它是一个刚度为 $2k$ 的单弹簧，承受载荷 P 的作用。

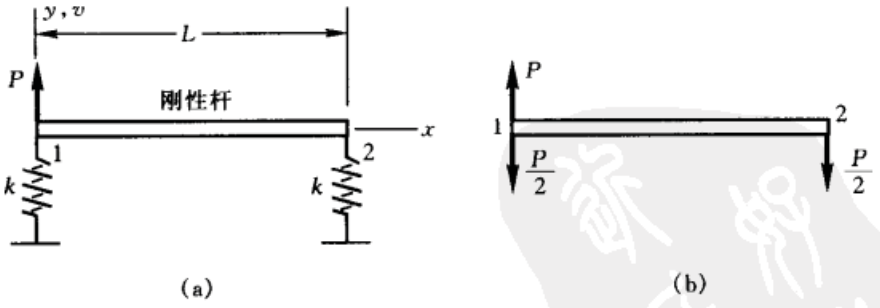


图 13.1-2 (a)由两个弹簧支撑的刚性杆；(b)施加约束 $v_1=v_2$ 以后作用的外力和弹簧力。约束力没有表示出来

13.2 施加约束的拉格朗日乘数

拉格朗日不定乘数法能够用于确定含有两个或更多变量的函数的最大值或最小值，这些

变量并不独立而是必须满足设定的关系。在结构力学中，这个函数是势能 Π_p，变量是 $\{\boldsymbol{D}\}$ 中的自由度，而设定的关系是多点约束。系统中的未知量变为 $\{\boldsymbol{D}\}$ 和拉格朗日乘数。

为了用拉格朗日乘数施加约束，我们用行向量 $\{\boldsymbol{\lambda}\}^{\mathrm{T}}$ 左乘约束方程 13.1－1，该向量包含的拉格朗日乘数 λ_i 与约束方程数一样多，角把这个乘后的表达式加到势能表达式 4.8－20 中。因此，

$$\Pi_p = \frac{1}{2}\{\boldsymbol{D}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\} - \{\boldsymbol{D}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{R}\} + \{\boldsymbol{\lambda}\}^{\mathrm{T}}([\boldsymbol{C}]\{\boldsymbol{D}\} - \{\boldsymbol{Q}\}) \tag{13.2-1}$$

圆括号中的表达式是零，因此我们“没有加”东西到中 Π_p 中。接下来求极值 $\{\partial\Pi_p/\partial\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{0}\}$ 和 $\{\partial\Pi_p/\partial\boldsymbol{\lambda}\}=\{\boldsymbol{0}\}$，使用附录 A 中的微分规则，得到一组代数方程

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{K} & \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{D}\\ \boldsymbol{\lambda}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{Q}\end{Bmatrix} \tag{13.2-2}$$

此式的下半部分就是约束方程式 13.1－1。求解式 13.2－2 得到解 $\{\boldsymbol{D}\}$ 和 $\{\boldsymbol{\lambda}\}$。λ_i 可解释为约束力（见下面的例子）。

在高斯消元法解未知量的过程中，式 13.2－2 中的零子矩阵变为非零矩阵，并且如果 $[\boldsymbol{K}]$ 独自是正定的，求解过程就正常进行。相比于约束方程方法，使用拉格朗日乘数法增加了未知量，这就表明这个方法比较适用于多点约束较少的问题。式 13.2－2 的一个优点是当约束施加时，初始矩阵 $[\boldsymbol{K}]$ 并未改变。因此可在不必分解 $[\boldsymbol{K}]$ 的情况下改变约束。这种性质在诸如不同载荷情况涉及不同约束，或者在接触问题中约束数随载荷量级增加而增加时是很有用的[10.6]。

实例 我们在图 13.1－1 中的结构上再施加多点约束 $u_2=u_3$。约束方程是 13.1－6 中的第一个。需要单个的拉格朗日乘数。式 13.2－2 变为

$$\begin{bmatrix} 2k & -k & 0 & 0\\ -k & 2k & -k & 1\\ 0 & -k & k & -1\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\\ \lambda\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}P\\ P\\ P\\ 0\end{Bmatrix} \tag{13.2-3}$$

它的解为

$$\lfloor u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad \lambda \rfloor = \lfloor \frac{3P}{k} \quad \frac{5P}{k} \quad \frac{5P}{k} \quad -P \rfloor \tag{13.2-4}$$

结果 $\lambda=-P$ 可看成通过单元 2－3 上施加的约束力，它现在的作用像一个刚性连接。λ 的代数符号并不重要：如果我们在式 13.1－6 中使用 $[\boldsymbol{C}]=[0 \quad -1 \quad 1]$，我们将会得到 $\lambda=+P$，但 u_1, u_2, u_3 的值没有变化。

13.3 施加约束的罚函数

从式 13.1－1 中的约束关系，我们定义

$$\{t\} = [C]\{D\} - \{Q\} \tag{13.3-1}$$

因此$\{t\}=\{0\}$定义满足约束。通常的势能函数Π_p可借一个罚函数$\{t\}^T\lceil\boldsymbol{\alpha}\rfloor\{t\}/2$增大，其中$\lceil\boldsymbol{\alpha}\rfloor$是由“罚数”$\alpha_i$构成的对角阵。因此

$$\Pi_p = \frac{1}{2}\{D\}^T[K]\{D\} - \{D\}^T\{R\} + \frac{1}{2}\{t\}^T\lceil\boldsymbol{\alpha}\rfloor\{t\} \tag{13.3-2}$$

对违反约束的惩罚随着$\lceil\boldsymbol{\alpha}\rfloor$的增大而增大。从式 13.3-1，13.3-2 和最小值条件$\{\partial\Pi_p/\partial\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{0}\}$可得到

$$([K]+[C]^T\lceil\boldsymbol{\alpha}\rfloor[C])\{D\} = \{R\} + [C]^T\lceil\boldsymbol{\alpha}\rfloor\{Q\} \tag{13.3-3}$$

其中$[C]^T\lceil\boldsymbol{\alpha}\rfloor[C]$叫做罚矩阵。如果$\lceil\boldsymbol{\alpha}\rfloor$是零矩阵，约束可被忽略。随着$\lceil\boldsymbol{\alpha}\rfloor$增加，$\{D\}$以约束更近于满足的方式改变着。分析者的责任就是选出恰当的α_i值。对于正定的$[K]$，使用正的罚数。如果所有的罚数是相同的，则$\lceil\boldsymbol{\alpha}\rfloor=\alpha\lceil\boldsymbol{I}\rfloor$，其中$\lceil\boldsymbol{I}\rfloor$是单位阵，式 13.3-3 也稍有简化。

惩罚法不会增加未知量的数目。但是它可能会改表系数矩阵的拓扑结构，并且因此影响软件中簿记程序。像在下面备注中讨论的，它也可能会由于病态条件而导致错误。

示例 使用惩罚法把多点约束$u_1=u_2$施加到图 13.3-1 所示的二杆结构中。

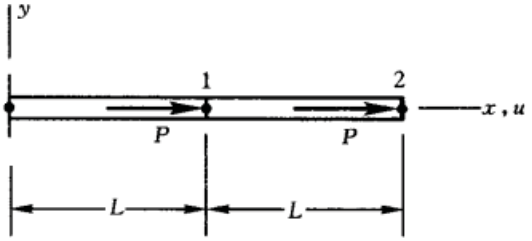


图 13.3-1 两单元结构。每个单元有轴向刚度$k=AE/L$

写出约束关系的方法不是唯一的。我们通过罚数为无量纲的方式写出$[C]$。于是，

$$[C] = \lfloor\sqrt{k} \quad -\sqrt{k}\rfloor \qquad \{D\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \qquad \{Q\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{13.3-4}$$

其中$k=AE/L$。这里只有一个约束方程，所以$\lceil\boldsymbol{\alpha}\rfloor=\alpha$是一个标量。式 13.3-3 变为

$$\left(\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} + \alpha\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ P \end{Bmatrix} \tag{13.3-5}$$

它的解是

$$u_1 = \frac{2P}{k} \qquad \text{和} \qquad u_2 = \frac{3+2\alpha}{1+\alpha}\left(\frac{P}{k}\right) \tag{13.3-6}$$

如果$\alpha=0$，那么$u_2=3P/k$，与没有约束时一样。当α变大时，u_2接近$2P/k$，对于约束系统来说这是正确的。矢量$\{t\}$是$\{t\}=t=\sqrt{k}(u_1-u_2)$，式 13.3-6 得到$u_1-u_2=-(P/k)/(1+\alpha)$。因此我们看到，在罚函数中$\alpha$的系数，即在当前的例子中$t^2/2=k(u_1-u_2)^2/2$，当$\alpha$趋于无穷

大时近似为零。

备注 式 13.3-6 是由符号运算得到的,它是精确的。如果以数值的方法计算,可能会由病态条件而产生实质性的错误。式 13.3-5 中的第二个方阵可看作连接节点 1 和 2 那个单元的刚度矩阵。也就是说,罚方法实际上给结构增加了一个轴向刚度为 αk 的杆。随着 α 的增加,这个扩张结构使得由柔性区域支撑的刚性区域容易出现错误。这种情况的危险性在 9.2 节中已经讨论过了。事实上,现在我们把图 9.2-3(c)中所示的边界条件当成一个单点罚约束来处理。施加约束的惩罚法要求罚数 α_i 足够大才能有效,但又不能大到产生数值上的错误。如果数值困难增加,迭代方法可以改善精度[13.3]。

如果多点约束没有耦合$\{\boldsymbol{D}\}$中的所有自由度,则$[\boldsymbol{C}]$中的列就比行多,并且$[\boldsymbol{C}]^{\mathrm{T}}\lceil\boldsymbol{\alpha}\rfloor[\boldsymbol{C}]$将肯定是奇异矩阵。我们需要使这个矩阵有奇异性,如下面的讨论说明。为了简化,使$\lceil\boldsymbol{\alpha}\rfloor$中所有的 α_i 的值都为 α。也令$\{\boldsymbol{Q}\}=\{\boldsymbol{0}\}$。那么,当 α 变大时,式 13.3-3 变为

$$([\boldsymbol{C}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{C}])\{\boldsymbol{D}\}\approx\frac{1}{\alpha}\{\boldsymbol{R}\} \tag{13.3-7}$$

此式表明如果$[\boldsymbol{C}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{C}]$是非奇异的,那么随着 α 的增加,解向量$\{\boldsymbol{D}\}$趋向于零。换句话说,就是网格锁定了。当$[\boldsymbol{C}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{C}]$是奇异时,$\{\boldsymbol{D}\}$可以是非零的,并且满足于式 13.3-7 的独立的$\{\boldsymbol{D}\}$数等于$[\boldsymbol{C}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{C}]$的阶次减去它的秩。当处理下一节要讨论的隐式罚约束时,这个结论的意义就显得特别重要。

13.4 隐式罚约束和锁定

在上节中,多点约束施加通过罚矩阵显式加到现有的系数矩阵$[\boldsymbol{K}]$上来实现。$[\boldsymbol{K}]$已经包含可被当作罚矩阵的贡献是可能的。隐式约束是列式中固有的,这或者是因为数值模式的特点,或者是由于物理问题的属性。在本节中,我们讨论两种这样的列式:梁中的横向剪力(也能引伸到板和壳中)和不可压缩介质。对于一些单元类型和积分准则的选择,两者都能产生网格锁定。对于罚约束物理上的解释促使了对锁定产生原因的理解和避免它的方法研究。在本节中,我们描述这类约束,而在下一节中,介绍计算它的方法。

Mindlin 梁单元 Mindlin 梁单元对于横向挠度和截面转角使用独立的插值场,因此也考虑了横向剪切变形。这种单元是类似板、壳单元列式的特殊情况,并且也没有打算把它当作式 2.3-6 梁单元的一种替代。在对 Mindlin 梁单元列式时,假设初始垂直于梁轴的横截面仍然保持平面但未必垂直变形后的轴线。期望应用于平板,我们称横向挠度为 w 而不是 v。图 13.4-1(b)表明轴向位移 u 和轴向应变 ϵ_x 只依赖于 ψ 横截面的转角 ψ,同时剪应变 γ_{xz} 依赖于 ψ 和 w。具体地,

$$\epsilon_x=u_{,x}=-z\psi_{,x}\qquad\text{和}\qquad\gamma_{xz}=w_{,x}-\psi \tag{13.4-1}$$

于是,轴向应变和相关的弯曲力矩仅由横向剪应变与横向挠度联系起来。对图 13.4-1(a)中的 2 节点单元,$w=w(x)$是 w_1 和 w_2 之间的线性插值,$\psi=\psi(x)$是 ψ_1 和 ψ_2 之间的线性插值。单元弯曲应变能 U_b 和横向剪切应变能 U_s,以及对单元刚度矩阵$[\boldsymbol{k}]=[\boldsymbol{k}_b]+[\boldsymbol{k}_s]$的连带作用

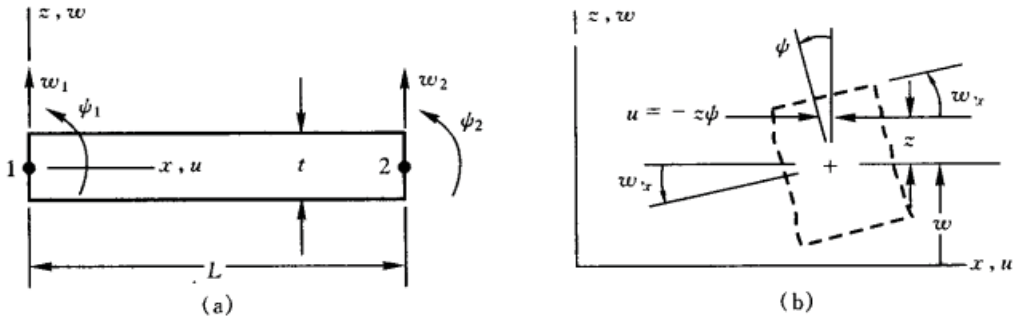


图 13.4－1 (a)Mindlin 梁单元;(b)位移和转角

是

$$U_b = \iint_0^L \frac{1}{2} E\varepsilon_x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}A = \int_0^L \frac{1}{2} EI\psi_{,x}^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\{\boldsymbol{d}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{k}_b]\{\boldsymbol{d}\} \tag{13.4-2a}$$

$$U_s = \iint_0^L \frac{1}{2} G\gamma_{zx}^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}A = \int_0^L \frac{1}{2} GA_s(w_{,x} - \psi)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\{\boldsymbol{d}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{k}_s]\{\boldsymbol{d}\} \tag{13.4-2b}$$

其中 A 是横截面面积,A_S 是梁抵抗横向剪切变形的"有效"横截面积。对于一个矩形截面来说,γ_{zx} 在如图 13.4－1 中尺度 t 范围内按抛物线变化,$A_S = 5A/6$。如果$[\boldsymbol{k}_b]$与$[\boldsymbol{k}_s]$之间的区别在单元组集时维持不变,则结构方程有如下形式

$$([\boldsymbol{k}_b] + [\boldsymbol{k}_s])\{\boldsymbol{D}\} = \{\boldsymbol{R}\} \tag{13.4-3}$$

与板弯曲单元相关的列式细节在 15.4 节中讨论。此处发现,在一个单元的 Mindlin 悬臂梁中,因子(t/L^2)减小了弯曲对总挠度的贡献。因此,随着单元变得越来越细长,$[\boldsymbol{K}_S]$作为一个罚矩阵使式 13.4－3 得到$[\boldsymbol{D}] \approx \{\boldsymbol{0}\}$——除非$[\boldsymbol{K}_S]$是奇异的,使用选择的或缩减的积分可得到这种状态。对于一个 2 节点的 Mindlin 梁单元,这意味着使用一个而不是两个高斯点去积分$[\boldsymbol{k}_s]$(进一步的细节见 13.5 和 15.4 节)。

前面的论述把剪切锁定解释为一种罚约束的例子。另一种用"寄生剪切"的解释出现在 3.6 节中。包含横向剪切变形不能使梁单元自动对剪切锁定敏感;它取决于列式。随着梁变得无限细长,式 2.3－6 中梁单元既无锁定趋势,也不会使$[\boldsymbol{k}]$出现病态。

不可压缩材料 用 E 和 ν 表示剪切模量 G 和体积模量 B

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad B = \frac{E}{3(1-2\nu)} \tag{13.4-4}$$

模量 B 表明了静水压力与由此产生的相对体积变化 $\Delta V/V$ 之比,如果应变是小量的话,则 $\Delta V/V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$。也就是说,$B = -p/(\Delta V/V)$,对于正压力 $p\Delta V < 0$。对于不可压缩材料,$\Delta V = 0$,$B = \infty$。因此,不可压缩各向同性材料的特征是 $\nu = 0.50$。尽管没有实际的材料是完全不可压缩的,但橡胶类材料 B 要比 G 大得多,以至于对大多数实际问题不可压缩性的假设都是适用的。

根据 G 和 B 把材料性质矩阵$[\boldsymbol{E}]$写成如下形式:

$$[\boldsymbol{E}]=G\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}+B\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{13.4-5}$$

传统格式中$[\boldsymbol{E}]$的项表示在式 3.1－5 中。用更为简洁的标记，我们把式 13.4－5 写成$[\boldsymbol{E}]=G[\boldsymbol{E}_G]+B[\boldsymbol{E}_B]$。因此单元刚度矩阵式 3.3－7 或 4.8－15a 变为

$$[\boldsymbol{k}]=G\int[\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{E}_G][\boldsymbol{B}]\mathrm{d}V+B\int[\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{E}_B][\boldsymbol{B}]\mathrm{d}V \quad \text{或} \quad [\boldsymbol{k}]=G[\boldsymbol{k}_G]+B[\boldsymbol{k}_B] \tag{13.4-6}$$

并且结构方程为

$$(G[\boldsymbol{K}_G]+B[\boldsymbol{K}_B])\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\} \tag{13.4-7}$$

随着 ν 接近 0.5，矩阵 $B[\boldsymbol{K}_B]$在方程中起主导作用，因此充当罚约束，除非$[\boldsymbol{K}_B]$是奇异的，锁定网格。这种行为被称为“体积”或“膨胀”锁定，由与图 3.4－3 有关的物理论证作了解释。有趣的是对任选的 ν 值略小于 0.50 的类橡胶材料建模，不必担心$[\boldsymbol{K}_B]$是否会出现奇异现象，但是当 ν 接近 0.5 时应力对 ν 的微小改变都很敏感。

备注　式 13.4－3 和 13.4－7 对应于齐次约束，即式 13.1－1 中的$\{\boldsymbol{Q}\}=\{\boldsymbol{0}\}$。这些约束自然出自如下形式的势能 Π_p 最小极值

$$\Pi_p=\beta\int(F+\alpha H)\mathrm{d}V+P \tag{13.4-8}$$

这里 F 和 H 与应变能密度成正比，H 与隐式约束有关，β 是 F 和 H 通用的因子，α 是与网格无关的罚数，P 代表所有类型载荷做的功。典型的问题呈现出式 13.4－8 的书写形式不是唯一的，但如果可能的话，β 能以一种使 α 无量纲的方式来定义。无量纲 α 使得为它设定适合的数值变得容易。如果要很接近 Π_p 的真值，大的 α 值必然与接近于零值的 H 有关。

对于 Mindlin 梁，式 13.4－2 和 13.4－8 之间的对应关系表述如下。设横截面是矩形的，宽度是 b，深度是 t。用 $\mathrm{d}x$ 取代式 13.4－8 中的 $\mathrm{d}V$。令

$$\begin{aligned} F&=\frac{E}{2}\psi_{,x}^2 \qquad H=\frac{E}{2L_T^2}(w_{,x}-\psi)^2 \\ \beta&=\frac{bt^3}{12} \qquad \alpha=\frac{10GL_T^2}{Et^2}=\frac{5}{1+\nu}\left(\frac{L_T}{t}\right)^2 \end{aligned} \tag{13.4-9}$$

我们使用 L_T 而不是单元长度 L，因为还没有离散化。我们看到 α 正比于$(L_T/t)^2$。施加的罚约束为 $w_{,x}=\psi$，对于它 $H=0$。

从式 13.4－8 可得到不可压缩情况的式 13.4－7，条件是

$$F=\frac{E}{4(1+\nu)}\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{E}_G]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} \qquad H=\frac{E}{2}\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{E}_B]\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$$
$$\beta=1 \qquad \alpha=\frac{1}{3(1-2\nu)} \tag{13.4-10}$$

随着 ν 接近不可压缩的 $\nu=0.5$，罚值 α 变大。体积应变 $\varepsilon_V=\Delta V/V=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z$，因此 $H=E\varepsilon_V^2/2$，所以，施加的不可压缩约束使得 $H=0$。

锁定 由于这样一些特殊情况，诸如所用的位移插值，选择的求积规则，均可能令锁定发生，物理上的实际位移模型也有使单元响应“锁定”的趋势，因为模型激活的附加应变要求的能量输入比产生实际模型的应变所需大得多。Mindlin 梁单元当弯曲时会产生大的剪应力，图 3.6-2(b)中的平面 $Q4$ 单元也是这样，因此，剪切锁定出现在这些单元中。如果分析平面应变状态($\varepsilon_z=0$)下类似于橡胶的材料，$Q4$ 单元的弯曲也能产生体积应变 $\Delta V/V=\varepsilon_x+\varepsilon_y$，但当 ν 接近 0.5 时，这种应变会受到强烈的抵制。因此出现膨胀锁定。然而在所有的这些例子中，单元中都有多余的应变是零的地方：在 Mindlin 梁单元的中点，图 3.6-2(b)中 $Q4$ 单元的中心。因此，锁定可以通过减小或选择积分来避免，像在下一节描述的那样。

照一般的说法，“锁定”未必意味着完全的刚化。这个术语可以指多余的高刚度的行为，它会影响解答，但不会淹没解答，因此随着网格细化收敛减慢但不会被阻止。这样，如果采用足够多的单元，即使当$[\boldsymbol{k}_s]$完全积分时，由 Mindlin 单元建模的细长梁也能提供精确的结果。换句话说，式 13.4-9 中一个大数值 α 不会妨碍收敛。为了用全积分$[\boldsymbol{k}_s]$得到满意的结果，单个梁单元的 L/t 比值可能必须小于单位 1。当用单个高斯点积分$[\boldsymbol{k}_s]$时，大数值的 α 施加条件 $w_{,x}-\psi\approx 0$，对于一个 L_T/t 值是大数的梁，这样做也是合适的，不会产生锁定网格的趋势。

锁定行为可能与总体方程的病态条件有关。在计算机解答中，由于病态情况而产生的麻烦与要求唯一解的信息丢失有关，因为刚度系数中的主要信息在大的罚数加到这些系数上时才会丢失。尽管这种描述可以很好地应用于各种各样的隐式约束中，但通常说来，锁定和病态并不是等同的。一个网格即使它的总体方程不是病态的，也可能会锁定。另一方面，为了避免锁定使一个罚矩阵奇异时，也施加罚约束，病态条件有可能产生。

选择 α 的原则 如果罚矩阵是奇异的，计算机代码近似表示 d 为十进制数，经验证明，要避免与病态相关的数值问题，α 不应超过 $10^{d/2}$。如果遵循了这种原则，式 13.3-3 中$[\boldsymbol{K}]$的系数影响存储完整矩阵$[\boldsymbol{K}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{C}]$的计算机代码中后面的 $d/2$ 数字。典型的 $10^{d/2}$ 值在单精度中是 10^3 或 10^4，在双精度中是 10^6 或 10^7。如果数值数据提供了一个大值的 α，任意缩减它都是合理的。在前面的例子中，这相当于式 13.4-9 中 L_T/t 的或式 13.4-10 中 ν 的随机缩减量。

13.5 约束计算

在罚约束是列式中固有的问题中，我们寻求选择适合数值积分公式的准则。特别是，如果约束数与积分罚矩阵所用的采样点数成比例，每单元应该用多少点？

在下面的叙述中，我们假设所有的权重因子在积分规则中都是正的。否则，求和中的项可

能会相互抵消。这将会混淆计算规则。

约束和积分点　式 13.4－2 和 13.4－6 中矩阵的数值积分对应于用数值积分计算势能 Π_p。因此，式 13.4－8 能够写成

$$\Pi_p \approx \beta \sum_{i=1}^{N_{els}} \Big[\sum_{i=1}^{n} (F_I J_I)_i W_i + \alpha \sum_{j=1}^{m} (H_I J_I)_j T_j \Big] + P \qquad (13.5-1)$$

其中 $(F_I J_I)_i$ 和 $(H_I J_I)_j$ 是函数 F 和 H 乘以雅可比行列式 J 的值，每一个在第 i 或第 j 取样点计算，W_i 和 T_j 是适合于积分规则正的权重（或者权重乘积）。如果 $n=m$ 并且采样点 i 和 j 是相同的，积分方法就是不变的；否则它就是选择性的。如果当单元形状恰好没有畸变时样本点的数目足以提供所有刚度系数的精确积分——例如具有直边和边中节点的矩形——积分方案被称为完全的（即使在实际单元形状畸变时）。如果采用了较少的样本点，也就是说，如果减小 n 或 m，积分方案就称为缩减的，而 Π_p 也称为欠积分的。使用多于完全积分所要求的样本点的情况不需要讨论。这种情况只不过提供多余的约束关系。下面的叙述，我们假设寄生的模式（机构）要么是不可能的，要么是被边界条件所抑制。（缩减积分和寄生模式在 6.8 节中讨论过）

考虑式 13.4－8 中令 α 变大的结果。为使 αH 项产生一个有限的结果，例如在近似不可压缩介质中的有限界膨胀应变能，那么一个大值的 α 必须是与式 13.5－1 中第二个求和项的近零值有关。因为 $(J_I)_j$ 和 T_j 都是正的，隐含的条件就是 $H=0$。式 13.4－9 和 13.4－10 表明 $H=0$ 暗指满足约束。

对于由式 13.4－9 和 13.4－10 所描述的问题，*每个用于积分罚矩阵的样本点都在该点施加约束*。因此，结构中约束的总数等于单元数乘以每个单元中罚积分点数。可用于为结构行为建模的“自由”的自由度数等于自由度总数减去为满足边界条件而施加的自由度数，再减去罚约束之后的数目。在选用所选择的积分规则时，我们寻求运用足够的罚矩阵积分点数，以便充分施加约束，但约束数不能多到锁定网格或留下的自由的自由度太少而不能很好表示结构的行为。

在其他问题中，每一个样本点都可能施加多于一个的罚约束。例如在一个 Mindlin 板单元中（15 章），类似于式 13.4－2b 中 $[\boldsymbol{k}_s]$ 的矩阵与两个横向剪应变有关，每一个样本点在它们两者上都施加了罚约束。在本章剩下的内容中，除非有明确说明，我们就假定每个样本点都施加了一个罚约束。

约束计算和约束比　图 13.5－1(a) 中的悬臂梁由 13.4 节中描述的 Mindlin 单元构成，边界条件抑制了最左边节点的 w 和 ψ，留下的 $2N_{els}$ 激活 $\{\boldsymbol{D}\}$ 中的自由度。如果式 13.4－3 中的 $[\boldsymbol{K}_s]$ 被精确地积分，运用每单元上的两个取样点，在结构中就会有 $2N_{els}$ 个罚约束。因此，如果 L_T/t 较大，在满足约束 $w_{,x}-\psi=0$ 中会占用所有自由度，并且载荷 P 的计算挠度几乎为零（除非采用特别大的单元数）。

如果梁是由单层 4 节点平面 $Q4$ 单元组成，如图 3.6－3 所示，单元用 2×2 的高斯规则完全积分，则类似的情况占主导地位。当单元有大的纵横比时，有 $4N_{els}$ 个激活的自由度，但也有 $4N_{els}$ 个锁定网格的“寄生剪切”约束。

令图 13.5－1(b) 中平面应变状态占主导，因此 $\epsilon_z=0$。那么体积应变是 $\Delta V/V=u_{,x}+v_{,y}$。结构方程是式 13.4－7。对于双线性单元，节点没有旋转自由度，使用完全积分，当 v 接近于

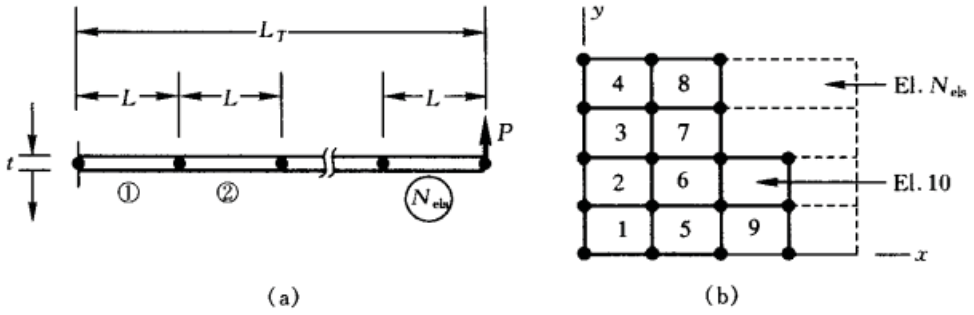


图 13.5-1 网格包括 N_{els} 个单元

(a)悬臂梁;(b)4 节点平面单元网格。一个典型的单元(单元 10;阴影表示)添加到已经在位的单元 1 到 9 上

0.5 时有 $4N_{els}$ 个罚约束,仅有 $2N_{els}$ 个激活自由度,因此网格被锁定。在类似的形式中,约束计算表明,对于平面应变情况,图 3.4-3 中 3 节点的三角形网格被锁定。

通过使用选择积分,前面例子中的锁定能被避免,所以罚矩阵是欠积分的。因此为了建立式 13.4-3 中 Mindlin 梁单元的$[\boldsymbol{K}_s]$和式 13.4-7 中双线性单元的$[\boldsymbol{K}_B]$,采用了单点积分。对于图 13.5-1(a)中的 Mindlin 梁,现在有 $2N_{els}$ 个激活自由度和 N_{els} 个罚约束。这里的约束比,即激活自由度数除以罚约束数是 $r=2/1$。对于图 13.5-1(b)中平面应变的例子,运用相同的数目:$2N_{els}$ 个激活自由度和 N_{els} 个罚约束,再次得到 $r=2/1$。对于完全积分各自的约束比是 1/1 和 1/2。

当叠加单个单元时,考虑引到网格的自由度和罚约束数,可能更容易得到相同的数目。例如在图 13.5-1(b)中,当单元 10 与已排列好的单元 1 至 9 相加时,增加的单元带来它的两个激活的自由度和一个或四个罚约束,这取决于罚矩阵的积分规则是缩减的还是完全的。因此我们像以前一样可得 $r=2/1$ 或 $r=1/2$。如果边界改变了,只要 N_{els} 很大,这些数目依然近似正确。今后我们将假定,情况基本如此,用检查增加的自由度和罚约束数目来作约束计算,而这些自由度和罚约束由单个单元,或者也许由用两个或更多子单元组成的"超级单元"引到网格上。

希望的约束比·实例 如果约束比 r 仅仅稍微大于单位 1,那么网格就几乎被锁定了。如果 r 远大于单位 1,就不能充分地施加约束。对于不可压缩介质,Hughes[2,13] 推测最好的 r 值等于 n_{de},也就是平衡微分方程的数目除以施加于这些方程上的约束数。对于二维实体,$n_{de}=2$;对于三维实体,$n_{de}=3$,并且在每一种情况中只有一个约束($\Delta V=0$)。因此,对于接近不可压缩的物体来说,建议的最佳 r 值等于问题的空间维数。

一些与几乎不可压缩介质相关的事例如下。令 n_{dof} 和 n_{pc} 分别代表由单个单元引至网格上的自由度数和罚约束数。因此,$r=n_{dof}/n_{pc}$。让我们考虑没有旋转自由度的二维和三维单元,对于图 13.5-1(b)中的双线性单元,$n_{dof}=2$,$n_{pc}=1$,如果用一点积分计算$[\boldsymbol{K}_B]$,那么约束比是 $r=2/1$,也就是推测的最佳值。使用 2×2 积分,在 6.6 节中描述过的 QM6 单元也有很好的作用[13.4]:计算值 $n_{dof}=6$,$n_{pc}=4$。对于没有内部自由度的三线性实体单元,如图13.5-2(a)所示,$[\boldsymbol{K}_B]$的一点积分得到 $r=3/1$ 的推测最佳值。图 13.5-2(b)中$[\boldsymbol{K}_B]$的四点积分得到 $n_{pc}=4$。对于 8 节点或 9 节点型式的单元,n_{dof} 分别为 6 和 8,相应的约束比是 $r=3/2$ 和 $r=2/1$。对

于图13.5－2(c)中，由两个三角形组成的超级单元的每个子三角形中$[\boldsymbol{K}_B]$的单点积分，$n_{pc}=2$。根据是否忽略或包括内部节点，r 为 1/1(因而网格被锁定)或 2/1。对于在图 13.5－2(d)中超级单元的每个子三角形中$[\boldsymbol{K}_B]$的三点积分，$n_{pc}=6$。对于 $n_{dof}=12$ 的超级单元，$r=2$。

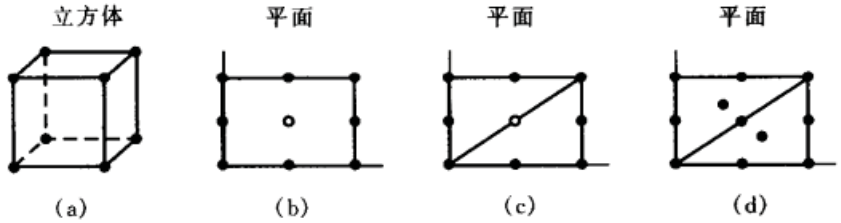


图 13.5－2　实体单元和平面应变状态的平面单元。为了计算约束，图示的单元被看作是加到一个网格上。带空心圆的节点是可选择的

回想前述二维例子都是平面应变状态。对于平面应力问题，即使当 $\nu=0.50$ 时也没有锁定或病态情况出现。

如果关于最佳 r 值的推测被引伸到 Mindlin 梁中，我们要计算两个平衡微分方程(一个是关于弯曲的，一个是关于横向剪力的)和一个约束条件(当梁细长时 $w_{,x}-\psi=0$)。所以 $r=2$ 可能是最佳值，而且在图 13.5－1(a)中，这个值是利用每个单元的单个取样点计算式 13.4－3 中的$[\boldsymbol{K}_s]$得到的。在类似的 Mindlin 板单元中，有三个平衡方程，两个是关于力矩的，一个是关于横向剪力的。用于计算$[\boldsymbol{K}_s]$的每一个样本点上有两个约束，因为当单元变薄时，迫使两个横向剪应变 γ_{xz} 和 γ_{yz} 趋向于零。对于一个 Mindlin 板，我们推测 $r=3/2$ 是最佳值[2.13]。

如果网格中的单元有扭曲的形状，缩减积分规则不可能精确表示单元体积。这种缺点会随着因单元再分割使网格细化而趋于消失，因为单元趋于平行四边形(二维)和平行六面体(三维)，如图 6.13－1(b)所示。为了避免寄生模式，缩减积分可能必须伴随有单元稳定性措施。

13.6　关于分析不可压缩介质方法的备注

在式 13.4－5 之后引入的符号中，应力状态$\{\boldsymbol{\sigma}\}$能够写成

$$\{\boldsymbol{\sigma}\}=\{\boldsymbol{\sigma}_D\}+\{\boldsymbol{\sigma}_V\}\qquad \text{其中}\qquad \{\boldsymbol{\sigma}_D\}=G[\boldsymbol{E}_G]\{\boldsymbol{\varepsilon}\}\quad \text{和}\quad \{\boldsymbol{\sigma}_V\}=B[\boldsymbol{E}_B]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} \tag{13.6-1}$$

其中$\{\boldsymbol{\sigma}_D\}$是偏状态量(它不产生体积的改变)，$\{\boldsymbol{\sigma}_V\}$是膨胀状态量(它不产生形状的改变)。式 13.4－5 和 13.6－1 表明，不管应变的状态如何，$\{\boldsymbol{\sigma}_V\}$包含三个相等的正应力而没有剪应力。公式 13.6－1 的第一式为

$$\{\boldsymbol{\sigma}\}=\{\boldsymbol{\sigma}_D\}+\lambda\lfloor 1\quad 1\quad 1\quad 0\quad 0\quad 0\rfloor^{\mathrm{T}} \tag{13.6-2}$$

其中 λ 是静水应力(任何方向上都相同)，当 B 趋于无穷大时它阻止体积应变。从公式 13.4－5，13.4－10 和 13.6－2 我们可得 $H=\frac{1}{2}\lambda\varepsilon_V$。因为 λ 和 ε_V 有相同的符号，不管静水状态是压还

是拉，H 都是正的。

人们可能会争论，不可压缩压力场是在每个材料点上从式 13.6－2 计算的轻微压缩压力 λ 的极限。罚方法提供了一种可以轻微“扰动”精确的不可压缩解的方法，从而得到很好的近似解。

罚方法中的压力计算 人们可以从位移场中计算 ε_V，然后使用式 13.6－1 得到压力 λ。如果 α 被选为 $10^{d/2}$，像在 13.4 节结尾建议的那样[13.5]，与使用罚约束而不是精确约束相关的 λ 中的误差阶为 $10^{-d/2}$。但是这个误差估计仅在施加约束的部位计算 λ 时，即在用于积分单元矩阵 $[\boldsymbol{k}_B]$ 的取样点上才是有效的。因此在罚方法中，式 13.5－1 中（缩减）体积积分点所起的作用不止一点，它同时是积分点、约束点和“压力点”。

许多类型单元允许网格中的压力振荡。例如，对 $[\boldsymbol{k}_B]$ 的一点积分，图 13.5－1(b) 中的双线性单元可能显示出“纵横交错分布”，它是叠加到预想压力上的寄生压力的式样（图 13.6－1(a)）。这种扰动类似于某些条件下在常规应力分析中可能出现的“沙漏”现象（图 6.8－2）。压力振荡能够使用类似于 9.9 节中描述的方法来平滑。

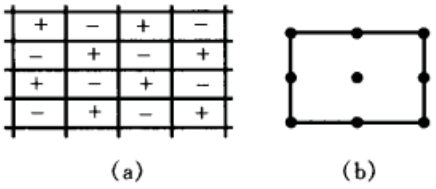


图 13.6－1 (a)平面网格内的“纵横交错”压力振荡；
(b)9 节点平面单元和在协调罚方法中使用的三个压力点

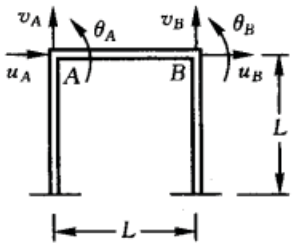
协调性罚方法 在这个方法中，不需要选择性积分。从位移场中推导不出静水压力。相反，它变成了一个附加的变量，作为不可压缩约束上的拉格朗日乘数起作用。这个方法也叫做“混合罚方法”，并被认为是“B－杆方法”的一个特例[13.8,13.9]。位移和压力独立地插值；位移在通常方法中来自节点自由度，压力来自于可能完全存在于单元内的“压力点”。因为在用于该方法的泛函中不对压力微分，压力在两个单元之间不需要是连续的；它可能是一个 C^{-1} 场[13.10]。

如同与式 13.4－10 相关的方法，协调性罚方法依赖于罚参数和所选择的插值，显示锁定、方程的病态情况和寄生压力模式[2.20]。形成的方程组类似于式 13.2－2，只是 $\{\boldsymbol{Q}\}=\{\boldsymbol{0}\}$ 和 $[\boldsymbol{0}]$ 子矩阵要用一个表示轻微可压缩性的非奇异方阵来替代。然而，本方法一个突出的优点是相邻单元不共享单元压力点，即使它们出现在单元边界上。因此压力自由度可在单元组集前凝聚而在总体方程求解后恢复，如 6.7 节所描述的那样。结果是类似于式 13.4－7 的一组方程。

或许最好的平面压力点单元是图 13.6－1(b) 中所描述的[2.13.2.20]。位移用圆点所示的 9 节点上的 u,v 来插值，而压力用 3 个内压力点插值。约束计算现在表示的是激活位移自由度与压力自由度的比值，得数为 8/3，而不再是推测的最佳值 2/1。然而，这种单元性能很好，不表现出寄生压力模式，并且通过了分片试验[13.11]。对于单元来说，有严格的误差界限，它表明了应力与可压缩弹性体中的应变是同一精度的[13.12]。不幸的是，对于三维问题，类似特性的单元似乎还未得到利用。

分析题

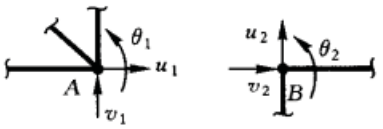
13.1－1　假定一个平面 8 节点单元有直边和边中节点，见图 6.4－1(a)。考虑这样的约束，每个边中节点的位移分量 u 和 v 是两个相邻角节点上 u 和 v 的平均值。写出公式 13.1－3 中[$\boldsymbol{T}$]的适当形式。为了简便起见，只考虑位移 u。然后用 8 节点单元形状函数[$\boldsymbol{N}$]列表，写出[$\boldsymbol{N}$][$\boldsymbol{T}$]获得新的形状函数组。产生什么样单元？



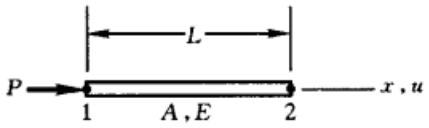
题 13.1－2

13.1－2　在图示的平面刚架中，设三个构件都是相同的。假设在基点固定并已施加条件 $v_A=v_B=0$，因此[$\boldsymbol{K}$]依据 u_A,θ_A,u_B 和 θ_B 运算。用 A,E,I 和 L 表示[$\boldsymbol{K}$]，然后施加约束 $u_B=u_A$ 来变换[$\boldsymbol{K}$]，以致使新的自由度为 u_A,θ_A,θ_B。

13.1－3　图示为两个分离的平面刚架的一小部分。这两个刚架用一个铰链使节点 A 和 B 重叠连接。为简便起见，只考虑图示的自由度。写出式 13.1－2 的适当形式。识别出这个结果中的矩阵[$\boldsymbol{C}_r$]和[$\boldsymbol{C}_c$]。



题 13.1－3

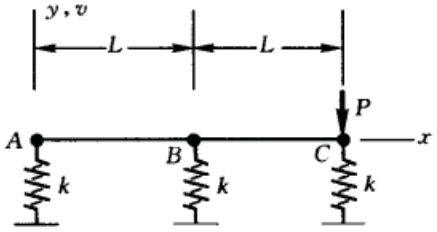


题 13.1－5

13.1－4　以公式 13.1－2 的形式写出式 8.5－6。其中有多少约束方程？

13.1－5　图示的 2 节点杆的轴向刚度为 AE/L，开始时无支撑，写出 2×2 的[$\boldsymbol{k}$]。然后得出公式 13.1－4 的形式。如果施加的约束是(a)$u_2=0$ 和(b)$u_2=\bar{u}$(常数)，求解出 u_1。

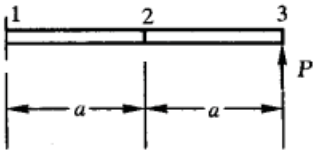
13.1－6　两个刚性杆 AB 和 BC 在 B 点由铰链连接，在 A,B,C 三点由相同的弹簧支撑，如图所示。以 A,B,C 三点的竖直位移作为自由度，写出结构方程。然后施加约束，使铰链锁定，因此两杆之间无相对转动。最后解出三个自由度 v_A,v_B 和 v_C。



题 13.1－6

13.1－7　设想有 3 个节点位于 x 轴上的 x_1,x_2 和 x_3 处。以式 13.1－1 的形式写出一个关系式来约束它们 x 方向的位移使之与 x 成正比。

13.1－8　写出图示两单元均匀悬臂梁弯曲的 4×4[$\boldsymbol{K}$]矩阵。使用传统的梁单元并忽略横向剪切变形。然后施加使单元 2－3变为刚性的约束。因此消除了节点 3 自由度。求解节点 2 自由度，与由初等梁理论得出的结果进行比较。



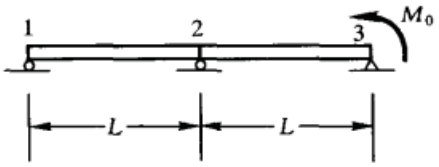
题 13.1－8

13.1－9　图示均匀梁由两个传统的梁单元组成。在节点 1，2 和 3 处简支。忽略横向剪切变形。写出按节点转角运算的

3×3[**K**]矩阵。

(a)施加使节点 2 和 3 处转角相等的约束。然后求解用 M_0，E，I 和 L 表示的所有三个节点的转角。

(b)画出作用在梁上的所有外力和力矩的示意图。



题 13.1-9

13.2-1 下面的问题严格讲是数学问题，可当作对拉格朗日乘数法的复习。用 a 和 b 表示的椭圆 $(x/a)^2+(y/b)^2-1=0$ 内接矩形的最大面积是多少？

13.2-2 求解图 13.1-2 中的问题，即用拉格朗日乘子 λ 施加约束 $v_1=v_2$，求出 v_1，v_2 和 λ。

13.2-3 一个 2 节点的杆有轴向刚度 $k=AE/L$，u_1 和 u_2 分别为左右两端的轴向节点自由度。在节点 2 上施加向右的力 $P=3$。使用拉格朗日乘数法施加位移 $u_1=2$，求解出 u_2。

13.2-4 使用单个的传统梁单元对一个均匀的悬臂梁建模，左端固定。忽略横向剪切变形。对于下述的约束条件，使用拉格朗日乘数法，确定右端作用横向载荷 P 的挠度。

(a)右端保持与两端点连线相切。(当梁变形时这条线转动)

(b)右端面转角是梁中点的一半，但方向相反。

13.2-5 考虑方程 $8u_1-4u_2=-20$，$-4u_1+8u_2=4$。

(a)这个方程对应于相同弹簧的什么样的简单排列？

(b)使用拉格朗日乘数法施加约束 $u_1=0$，解出 u_2 和 λ 并解释 λ 的意义。

(c)使用拉格朗日乘数法施加约束 $u_1=-1$，解出 u_2 和 λ 并解释 λ 的意义。

13.3-1 (a)证明式 13.3-3 是从公式 13.3-1 和 13.3-2 中得出的。

(b)修正与式 13.3-7 相关的论据：不假设所有的罚数相等或 $\{\boldsymbol{Q}\}=\{\boldsymbol{0}\}$。能得到关于锁定的相同结论吗？

13.3-2 求解图 13.1-2 中的问题，即用罚数施加约束 $v_1=v_2$，解出 v_1 和 v_2。检查 $\alpha=0$ 和 $\alpha=\infty$ 的极限情况。

13.3-3 求解 13.2-3 题，但使用罚数而不是拉格朗日乘数法。对于 $k=1$，用表格表示出乘数值 $\alpha=1,4,10$ 和 100 时的计算值 u_1 和 u_2。

13.3-4 使用罚方法求解(a)题 13.2-4(a)和(b)题 13.2-4(b)。

13.4-1 (a)设单个的 Mindlin 梁单元在节点 1 和 2 处简支，并受纯弯曲载荷。使用式 13.4-2 证明精确积分给出的单元应变能 U 与有效惯性矩 $I_e=I(1+GL^2/1.2Et^2)$ 相一致。其中 $I=bt^3/12$ 对于矩形截面而言。

(b)当 U_s 用一点积分时有效惯性矩是什么？

13.4-2 在悬臂梁末端施加一力矩，使用一个 Mindlin 梁单元为承受端点力矩载荷的悬臂梁建模，见图 15.4-1(b)，把 P 用 M_2 代替。刚度矩阵出现在式 15.4-5 中，其中对于精确积分 $l=L/3$，矩形横截面积是 $A_s=5bt/6$。如果 $v=0$，当 L/t 取何值时，精确积

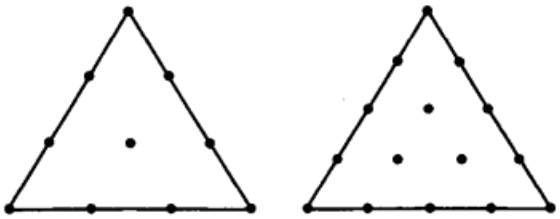
分单元能使节点 2 处的横向挠度是正确值的 90%？

13.4－3　平面应变情况下，平面单元没有净体积改变的约束是 $\iint(\varepsilon_x+\varepsilon_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$。对于一个矩形双线性单元(3.6 节)，证明在一点积分规则中，设置 $\varepsilon_x+\varepsilon_y=0$ 可得相同的结果。

13.5－1　图示的平面三角形(a)和(b)有均质材料、均匀厚度、直边和等间距的边节点。它们的刚度矩阵能够精确积分，三角形(a)是用六点规则，(b)是用十点规则。在细化网格中，对于一个不可压缩材料，各个单元提供什么样的约束比？

13.5－2　(a)证明式 13.6－2 中的 $\lambda=(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)/3$。

(b)证明式 13.4－8 中的 $\beta\alpha H$ 能够表示为 $B\varepsilon_V^2/2$。



题 13.5－1

第 14 章

回转体

本章主要讨论对轴对称实体的分析方法。先介绍轴对称载荷列式，然后介绍非轴对称载荷列式。应力分析是重点。其他的轴对称场问题见 12 章。

14.1 引言·轴对称的弹性关系式

回转体是由一平面面积绕与其在同一平面内的轴旋转而成。常见的例子有管嘴和电灯泡，尽管电灯泡有薄的壁，但在分析时习惯地划为回转壳范畴。轴对称几何体方便的坐标是 r(径向)，θ(周向)，z(轴向)。当几何形状、弹性性质、载荷和边界条件都是轴对称时，在 θ 方向无任何变化，物质点仅分别有径向和轴向位移分量 u 和 w。因此在数学上成了二维问题。确实，轴对称问题的有限元网格类似于平面网格，软件中做较小的改变就允许最初选用于平面问题的子程序应用于轴对称问题。由于平面和轴对称有限元分析之间的紧密关系，软件可能要求用 x 和 y 轴而不是 r 和 z 轴来构建对称网格，这在经典理论中很常见，本章也是如此。

图 14.1－1 所示是有矩形横截面的单个轴对称单元。单元几何体是具有节点圆而不是节点的环形体。由三角形截面单元划分的轴对称网格的横截面描绘在图 1.4－1 中。由于避免了在周向划分单元，也就不需要使用三维网格，因此计算量就大大减少了。

如果问题包含振动或屈曲，即使几何形状、弹性性质和边界条件都是轴对称的，都有可能出现对称或非对称的位移模式。非对称模式常常是最重要的，并且总是被轴对称分析排除在外。

弹性关系式 通常线弹性材料的本构关系可写成如下形式

$$\{\boldsymbol{\sigma}\}=[\boldsymbol{E}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\}+\{\boldsymbol{\sigma}_0\} \quad 或 \quad \{\boldsymbol{\sigma}\}=[\boldsymbol{E}](\{\boldsymbol{\varepsilon}\}-\{\boldsymbol{\varepsilon}_0\}) \quad 其中 \quad \{\boldsymbol{\sigma}_0\}=-[\boldsymbol{E}]\{\boldsymbol{\varepsilon}_0\} \tag{14.1-1}$$

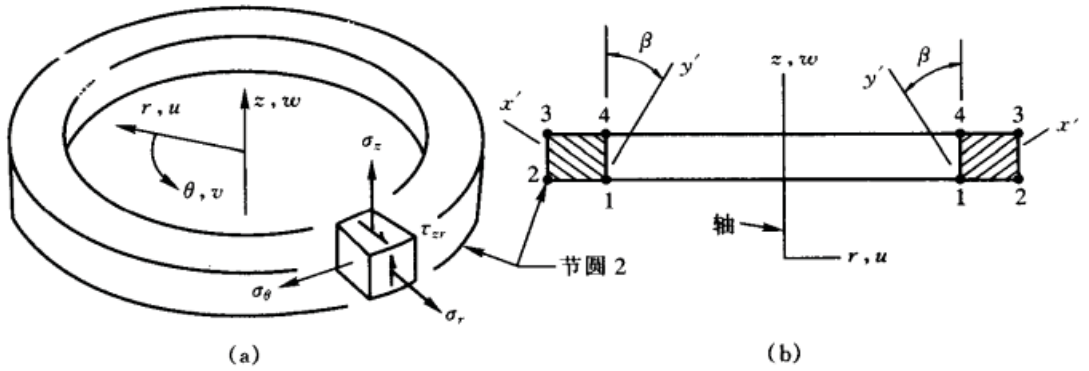


图 14.1－1　(a) 一个轴对称的有限单元，显示与轴对称载荷相关的应力；
(b) 在单元横截面上的阴影线表明正交各向异性材料的主方向是 x'，y' 和 θ

如果无关紧要的 $\tau_{r\theta}=0$ 和 $\tau_{\theta z}=0$ 被忽略，上式最一般的轴对称形式为

$$\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\\ \sigma_z\\ \tau_{zr}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14}\\ & E_{22} & E_{23} & E_{24}\\ & & E_{33} & E_{34}\\ \text{对称} & & & E_{44}\end{bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{zr}\end{Bmatrix}-\{\boldsymbol{\varepsilon}_0\}\right) \tag{14.1-2}$$

如果材料是正交各向异性的，如图 14.1－1(b)，材料主轴 x' 和 y' 一定不随着 θ 的变化而改变方向，材料第三个主轴一定不会形成围绕回转轴的螺旋线。若图 14.1－1(b)中的 $\beta=0$，则 $E_{14}=E_{24}=E_{34}=0$。最终对于各向同性和热载荷的情况，公式 14.1－2 变为

$$\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\\ \sigma_z\\ \tau_{zr}\end{Bmatrix}=\frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1 & f & f & 0\\ & 1 & f & 0\\ & & 1 & 0\\ \text{对称} & & & g\end{bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{zr}\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\alpha T\\ \alpha T\\ \alpha T\\ 0\end{Bmatrix}\right) \tag{14.1-3a}$$

其中

$$f=\frac{\nu}{1-\nu}\qquad\text{和}\qquad g=\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \tag{14.1-3b}$$

式中的 T 是温度的改变量，它通常的相对参考值是物体处于无应力状态时的温度，α 是与温度无关的热膨胀系数。与温度有关的热膨胀系数 α 的备注出现在 3.1 节。对于各向同性，公式 14.1－2 中的 E_{44} 变为 G(剪切模量)。

在任意半径 r 处，周向应变等于周长变化量除以初始周长

$$\varepsilon_\theta=\frac{2\pi(r+u)-2\pi r}{2\pi r}=\frac{u}{r} \tag{14.1-4}$$

轴对称状态的完全应变-位移的关系是

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{zr}\end{Bmatrix}=[\partial]\begin{Bmatrix}u\\ v\end{Bmatrix}\quad \text{其中}\quad [\partial]=\begin{bmatrix}\partial/\partial r & 0\\ 1/r & 0\\ 0 & \partial/\partial z\\ \partial/\partial z & \partial/\partial r\end{bmatrix} \tag{14.1-5}$$

除了坐标轴标记变化和增加了周向应变 ε_θ 外，这些关系与公式 3.1－9 中的第一式是相同的。

14.2 轴对称实体单元

在有限元矩阵列式中，轴对称实体单元和平面单元只在细节上有所差别。4 节点八自由度的双线性单元位移场是

$$\begin{Bmatrix}u\\ w\end{Bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0\\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4\end{bmatrix}}_{[N]}\begin{Bmatrix}u_1\\ w_1\\ u_2\\ \vdots\\ w_4\end{Bmatrix} \tag{14.2-1}$$

对于图 14.2－1 中的矩形截面，单个形状函数 N_i 如式 3.6－4 所述。应变-位移矩阵是$[\boldsymbol{B}]=[\partial][\boldsymbol{N}]$。算子矩阵$[\partial]$由式 14.1－5 给出，其中对于图 14.2－1 中采用的标记 x 和 y 的局部轴，$r=r_m+x$，$\partial/\partial x$ 取代$\partial/\partial r$，$\partial/\partial y$ 取代$\partial/\partial z$。因此，利用公式 3.3－7，单元刚度矩阵是

$$\underset{8\times8}{[\boldsymbol{k}]}=\int_{-b}^{b}\int_{a}^{a}\int_{-\pi}^{\pi}\underset{8\times4}{[\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}}\underset{4\times4}{[\boldsymbol{E}]}\underset{4\times8}{[\boldsymbol{B}]}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x\mathrm{d}y\quad \text{其中}\quad r=r_m+x \tag{14.2-2}$$

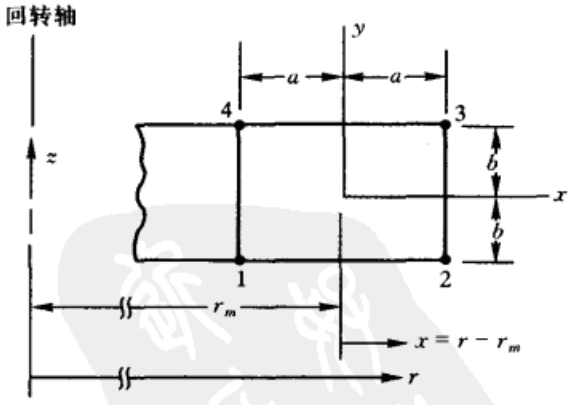


图 14.2－1 矩形横截面的单元几何形状

这个公式几乎和平面单元公式 3.6－7 中的$[\boldsymbol{k}]$一样。对于轴对称问题，积分与 θ 无关，因此如果希望的话，只要载荷项也是对一弧度段列式，式 14.2－2 中的周向积分限能够从 $-\pi,\pi$ 变到 0,1。如果轴对称单元是等参的，它的$[\boldsymbol{k}]$方程组集式 6.2－12 的方法与式 14.2－2 组集式 3.6－7的方法一样。因此在从平面几何形状变成轴对称几何形状时，积分数组扩大了，增加了

周向积分，并且 $rd\theta$ 代替了厚度 t，但每个单元的自由度数不变。一般说来，由于周向应变 ε_θ，任何轴对称单元都不同于它的平面单元关系，ε_θ 可用形状函数 N_i 和单元中有 n 个节点的径向位移 u_i 表示成

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r}(N_1 u_1 + N_2 u_2 + \cdots + N_n u_n) \tag{14.2-3}$$

备注 如果图 14.2-2(a)中的 4 节点单元是平面的而不是轴对称的，它将会有一个刚体模式并且不能承受力矩载荷 M。对于一个轴对称单元，M 是一个“环向分布”力矩，或者说是每单位周长上的力矩，它的量纲是力·长度/长度，或简化为力。环向分布力矩由周向应变所抵抗，对于图示 M 方向的周向应变对上半部分是压，对下半部分是拉，沿着 z 方向线性变化[1.16.2.6]。

如果图 14.2-2(a)中 $r_m \gg 2a$，则单元周向刚度远小于 rz 面内单元抵抗它的横截面变形的刚度。也就是说，我们遇到小刚度支撑大刚度的情况，而小刚度倾向于使方程产生病态，如 9.2节所述。因此使单元变得细长的网格细化方法可能会降低精度，而不再是提高精度[14.1]。

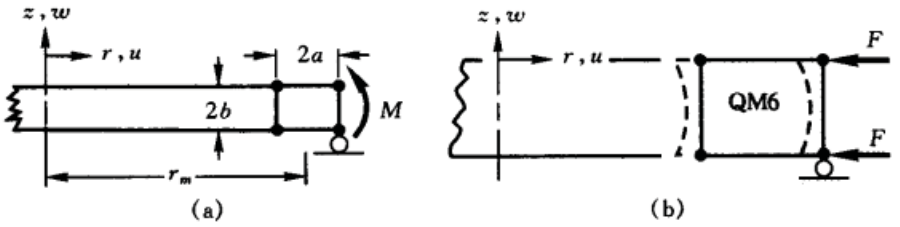


图 14.2-2 (a) 承受力矩载荷 M 的单个轴对称单元；
(b) 作用在轴对称单元上有不相容模式的径向载荷 F。虚线表示位移后的形状

一些基于位移的单元包含有不相容的模式。令 6.6 节中描述的 QM6 单元是按照轴对称列式。当如图 14.2-2(b)所示径向加载时，内部自由度被激活了，产生图示的寄生凸起[14.2]。这个凸起与单元内除它的水平中心线之外所有各点的寄生剪应变 γ_{rz} 有关。这表明在后处理时应只在 QM6 单元的中心计算 γ_{rz}。当 $r_m \gg 2a$ 时，这种凸起接近于零。

刚度矩阵被积函数的一些项在分母中含有半径 r。当使用高斯积分时，这些项不会变为无穷大。因为在 $r=0$ 处没有高斯点。但是对于距 z 轴较近的单元，要想提高精度，就必须在径向上使用更多的高斯点(将多于类似的平面单元)。如果$[k]$被显式积分，单元在 z 轴上有节点，可以通过使用一个在 $r=0$ 处 $u=0$ 的位移场和利用罗比塔法则计算不定式 0/0，来说明特别的“核心”单元。

围绕半径为 r 的圆集度为 q 的均匀线载荷可描述为大小为 $2\pi rq$ 的力，即使载荷是径向作用以至于它的静力等效为零。如果积分跨度是一弧度，而不是整个圆，那么力就是 rq 而不是 $2\pi rq$。对于以角速度 ω 绕 z 轴的旋转，单元的节点载荷由式 3.3-8 而得

$$\{\boldsymbol{r}_r\} = \iint_{-\pi}^{\pi} [\boldsymbol{N}]^{\mathrm{T}} \begin{Bmatrix} \rho r\omega^2 \\ 0 \end{Bmatrix} r\,d\theta\,dA \tag{14.2-4}$$

这里 ρ 是质量密度，A 是单元横截面积。对于动力学分析，需要单元质量矩阵。从式 11.2-6，

$$[\boldsymbol{m}] = \int\int_{\pi}^{\pi} [\boldsymbol{N}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{N}]\rho r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}A \tag{14.2-5}$$

但是要注意，振动和动力学问题几乎肯定需要考虑非对称模式。

至于边界条件，轴向位移 w 在单个节圆上的约束足以阻止刚体移动，就像图 14.2-2 中对单个单元假设的那样。应当抑制位于回转轴上的所有节点的径向位移 u。否则，在这些节点上 $u\neq 0$ 意味着存在一个针孔，这使 $r=0$ 处周向应力倍增。可对通用软件编程以便对 $r=0$ 的节点自动设置条件 $u=0$。

在计算靠近回转轴的单元应力和应变时，如果在 $r=0$ 处计算应变，而不是从高斯点应力外推到 $r=0$ 处，我们就会遇到计算 $\varepsilon_\theta=0/0$。这种情况可由替换计算 $r=0$ 处的 $\varepsilon_r=\partial u/\partial r$ 来避免，然后使 ε_θ 等于 ε_r。这个技巧利用了位于 $r=0$ 处所有节点 $\varepsilon_\theta=\varepsilon_r$ 的理论上的要求。在软件中，对用户隐藏了这些考虑，这可能对于简单的各向同性材料的测试是有利的，可发现在 $r=0$处计算的结果是否确实是 $\sigma_r=\sigma_\theta$。

在曲梁或受纯弯距载荷的管道中(图 6.15-1 和图 10.2-2)，结构形状是轴对称的，但是分析时不能当成轴对称的，因为有周向位移分量以及径向和轴向分量。不要求周向离散化的有限元分析是可行的[14.3,14.4]，但它要求用单个的与所有单元相关的“总体”自由度来扩大通用的节点自由度数组，所以在标准软件中不包括这个方法，可能需要类似于 6.15 节中描述的三维分析。

14.3 应用

图 14.3-1 描述的是一个轴对称结构的横截面，已经用 8 节点四边形单元划分网格。这个结构由同一厚度的外圆盘 $BEFC$ 和相同材料带有锥度的内圆盘 $DABE$ 组成，通过冷缩配合连接。在物理上，冷缩配合就是用加热外盘，套在内盘上来完成，然后允许整个结构返回到均匀的初始温度。当外盘比内盘高 100℃ 时，外盘的内径和内盘的外径两者都精确地为 400 mm。我们要问

1. 沿着 BE 冷缩配合产生什么样的接触应力？
2. 如果使装配体绕 z 轴旋转，在多大的角速度下冷缩配合松动？

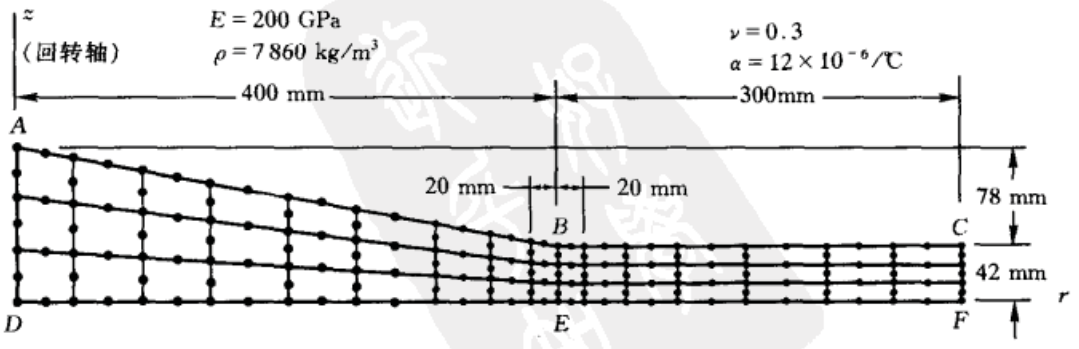


图 14.3-1 回转体横截面上的 8 节点单元网格

在寻找答案的过程中我们将发现，问题 1 像是预先有所考虑，问题 2 提出的不是很好，需要一些分析思考。

初步分析　首先考虑冷缩配合产生的压力 p。作为简单近似，我们选择一个数学模型，其中认为内外盘有相同的均匀厚度(图 14.3-2)。分析中，我们假设尺寸 h 是足够小的，以至于外层盘可用适用于薄圆环的简单公式来处理。因此，对外盘的平均半径 R，$\sigma_\theta = pR/h$，$\sigma_r = 0$，$\varepsilon_\theta = (\sigma_\theta - \nu\sigma_r)/E = pR/Eh$，而 $u_i = r_i\varepsilon_\theta = pRr_i/Eh$ 是由 p 产生的外盘内边缘的径向位移。此外，在同一位置处，本题的温度改变是 $T = -100℃$。在内盘中，$\sigma_\theta = \sigma_r = -p$，在 $r = r_i$ 处的径向位移是 $u_i = r_i\varepsilon_\theta = r_i(\sigma_\theta - \nu\sigma_r)/E = -pr_i(1-\nu)/E$。使 u_i 表达式相等，我们得到

$$\frac{pRr_i}{Eh} + \alpha r_i T = -\frac{pr_i}{E}(1-\nu) \quad \text{因此} \quad p = -\frac{E\alpha T}{(1-\nu) + \dfrac{R}{h}} \tag{14.3-1}$$

对于图 14.3-1 和 14.3-2 中的数据，由上式得 $p = 95$ MPa。因此，在外盘中，$\sigma_\theta \approx pR/h = 174$ MPa。

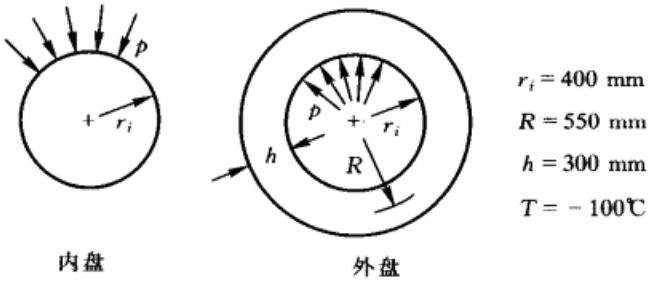


图 14.3-2　冷缩配合压力 p 的近似分析模型

对于由旋转产生的应力近似分析，我们使用与分析一个无中心孔，外径为 a，质量密度为 ρ，以角速度 ω 旋转的薄板圆盘时一样的数学模型和手册中的径向应力公式[1.16,2.6]。

$$\sigma_r = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2(a^2 - r^2) \tag{14.3-2}$$

利用 $a = 0.700$ m，在 $r = 0.400$ m 处设置 $\sigma_r = 95$ MPa，可得 $\omega = 298$ rad/s 时冷缩配合将会松动。

当然，内盘比较厚，因而刚度比前面近似的要大一些，这就意味着期望实际的冷缩配合 p 要大于 95 MPa。结构也并不以 z = 常数的平面为对称。由图 14.3-1 中形状导致我们期望外层部分由于冷缩配合而向下弯曲，而由于旋转向上弯曲。靠近 E 点的径向弯曲应力将会提高冷缩配合接触(压)应力值，并由于旋转而产生径向(拉伸)应力值。

有限元分析　图 14.3-1 中的有限元网格对于一个初始模型来说或许是过度细化了，但是它容易生成。每个节点有两个自由度，即径向和轴向位移。节点 D 处两者都设置为零。在沿着 AD 的其他节点上，只有径向位移设置为零。不在 z 轴上的所有节点都是无约束的。冷缩配合载荷由 $BEFC$ 部分均匀地降低了 100℃而产生。在这个过程中隐含的假设是在接触面上无轴向滑动。旋转被当成独立的载荷来处理。旋转产生了惯性(体力)载荷，对此，软件自动

计算作用在各个节点上相应的径向力。下面讨论旋转分析的详细内容。

结果评价 通过检查，发现挠曲形状(未显示)与预期的相符。更特别的是，挠度动画显示沿 AD 的节点仅有轴向运动，这也与预期的一致。图 14.3-1 中横截面的挠曲像从 AD 处悬臂的梁，由于冷缩配合而向下和由于旋转而向上。此外，末端 CF 径向运动一个小量，由于冷缩配合而向内和由于旋转而向外。

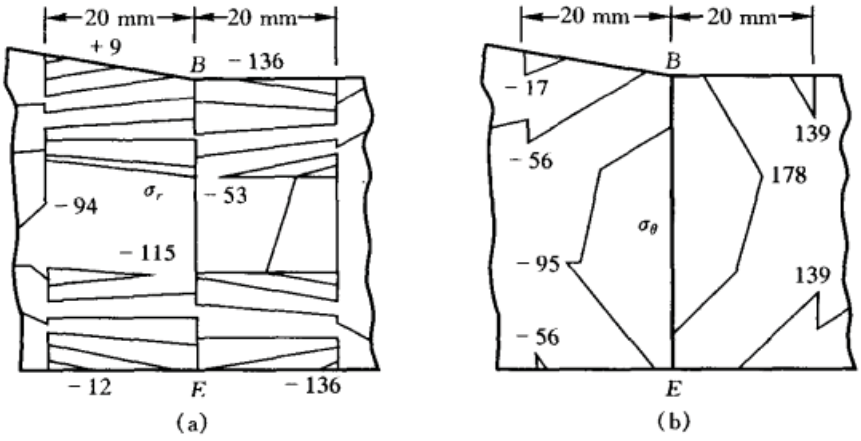


图 14.3-3 由冷缩配合产生的应力：来自 FEA 未平均的应力等值线，单位是 MPa
(a) 径向应力 σ_r；(b) 周向应力 σ_θ

由冷缩配合而产生的径向应力 σ_r 的等值线如图 14.3-3(a)所示。沿着 BE 的 σ_r 的平均值约等于预期的 −95 MPa，但是等值线显示出单元间严重的不连续性。是有错误吗？我们的有限元模型表明，一旦内外盘接触时，就形成了一种联结，此后这种联结也未被破坏。因此圆盘在跨 BE 交界面处有相互作用径向(r 向)力和轴向(z 向)力。在简化问题以得到式 14.3-1 时，我们忽略了 z 向力。它们的产生是由于外盘温度降低引起它在轴向和径向收缩所致。此外，在内外层圆盘上的周向应力分别为压力和拉力。相关的泊松效应轴向应变分别是拉伸和压缩，并且因此增加了轴向热应变。与前面的有限元模型要求一样，为了维持沿 BE 有相同的 z 向长度，内外盘沿 BE 要相互施加 z 向力。这些力在局部扰动了应力场，因此对这些区域为了提供更多的细节需要网格细化。对于双金属问题的计算结果，如图 3.15-3(b)，导致我们怀疑 B 点和 E 点应力唯一性的存在。

由冷缩配合形成的周向应力 σ_θ 看来是可靠的(图 14.3-3(b))。分开观察内外圆盘，我们看到在靠近 BE 处的 σ_θ 应力等值线单元间的连续性是很好的，但在穿过 BE 的 σ_θ 连续性既看不见也不是所期望的。由式 9.10-7 定义的相对误差是 $\eta=0.28$，这是相当高的，但这是对于整个有限元模型而言的，它表示对误差估计的错误应用，它不应包括诸如已知的跨越 BE 时 σ_θ 的不连续性。误差估计可以被合理地应用到内外盘的网格中，为此，其值分别是 $\eta=0.17$ 和 $\eta=0.09$。如果我们从每一个网格中都排除掉三个最靠近 BE 的单元(一共是六个)。分别得到的值是 $\eta=0.04$ 和 $\eta=0.02$。显然，在靠近 BE 处需要网格细化。对接下来讨论的旋转情况，在穿过 BE 处没有出现应力不连续，对于整个网格 $\eta=0.004$。

接下来考虑 $\omega=298$ rad/s 的旋转情况，这是依照式 14.3-2 计算的近似松动速度。仅由于此种加载而产生的应力等值线示于图 14.3-4。单元间的连续性是很好的，由图也找不出

可以怀疑结果的原因。靠近 BE 处的径向应力约为 100 MPa，抵消由于冷缩配合而产生的压缩径向应力所需的大约就是这个值。这是否就意味着当 $\omega=298$ rad/s 时，确实会令冷缩配合松动？因为沿着 BE 的 σ_r 是不均匀的，我们现在认识到“松动”意味着什么我们并不清楚。是当沿着 BE 的接触被完全破坏时，或是冷缩配合和旋转的叠加结果在沿 BE 的某点给出 $\sigma_r=0$ 的时候？沿 BE 完全分离的速度能够用写出类似于式 14.3-1 的方程并求解得到。

$$\omega^2\delta_1 = \omega^2\delta_2 + \alpha r_i T \tag{14.3-3}$$

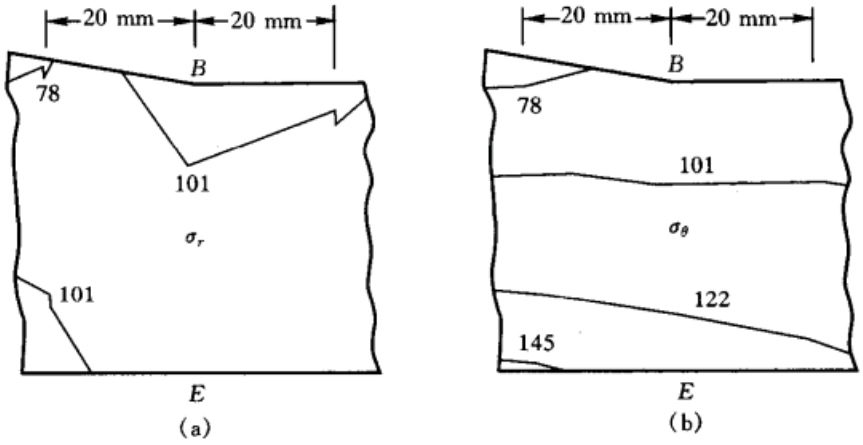


图 14.3-4　由于绕 z 轴以角速度 $\omega=298$ rad/s 旋转所产生的应力：来自 FEA 的不平均应力等值线，单位是 MPa。(a) 径向应力 σ_r；(b) 周向应力 σ_θ

这里的 δ_1 是沿 BE 处内盘的最大径向位移，它由内盘单独以 $\omega=1$rad/s 旋转时用有限元分析计算得到，δ_2 是外盘单独以 $\omega=1$rad/s 旋转时沿 BE 的径向位移，用现有的带中心孔的薄圆盘旋转公式计算得到[1,16]。在式 14.3-3 中，我们使用 ω^2 而不是 ω，因为应力和位移与角速度的平方成正比。如同在式 14.3-1 中，$T=-100$℃。

另一个问题，关于沿 BE 的某点净 σ_r 降为零的最低速度，需要由冷缩配合载荷引起的沿 BE 的 σ_r 精确值。在沿 BE 的节点 j 上，让我们用 $[(\sigma_r)_T]_j$ 表示冷缩配合的径向应力值。用 $[(\sigma_r)_\omega]_j$ 代表节点 j 处由于以角速度 $\omega=1$rad/s 旋转(整个圆盘的)引起的径向应力。后面的应力易于用前面得到的节点 σ_r 除以用于计算它的 ω^2 来确定。在节点 j 出现松动的 ω 由下式得到

$$\omega^2[(\sigma_r)_\omega]_j + [(\sigma_r)_T]_j = 0 \tag{14.3-4}$$

这个计算必须在沿 BE 的所有节点 j 上都做。ω 的几个计算值中的最小者作为所期望的结果。注意，当松动开始时，式 14.3-4 就不能用了，随之有限元模型所假设的连续性也就失效了。

14.4　非轴对称载荷：引言

如果几何形状和材料性质是轴对称的，但载荷和/或边界条件不是，在每个场量都是所有

三个坐标的函数这个意义上问题就变成三维的了。因此每个位移分量 u(径向)，v(周向)和 w(轴向)都是 r，θ 和 z 的函数。相似地，所有可能的六个应力分量(图 14.4－1)通常是非零的，也是 r，θ 和 z 的函数。

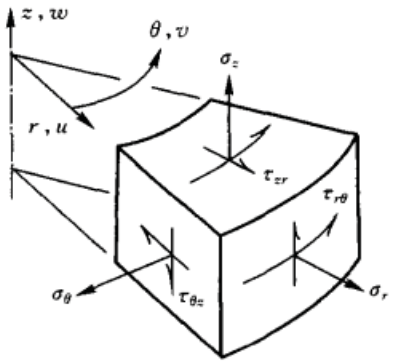


图 14.4－1 轴对称物体在非轴对称载荷下的位移和应力

接下来我们考虑一个载荷如何由它的分量以三角级数的方式表示出来，每个分量都单独分析，合并所得结果产生初始载荷的解。商业软件提供了这种分析，它的优点是不需要在 θ 方向上划分单元，因此不用去解一个大的三维问题，我们只需解一个二维问题然后合并结果就行了。因此数据准备简化了，分析占用的计算机资源少得多。

在本节中我们讨论分析方法的基本关系，与有限元分析相关的细节出现在 14.5 节。

载荷 作用于回转体或回转壳上的载荷能够描述为它的一系列分量的和。令 q 表示通常的载荷，如正压力、线载荷，或热应力分析中的温度。q 的傅里叶级数是

$$q = \sum_{n=0}^{\infty} q_n^c \cos n\theta + \sum_{n=0}^{\infty} q_n^s \sin n\theta \qquad (14.4-1)$$

其中 q_n^c 和 q_n^s 是依赖于 n(而不是 θ)的载荷幅值。这里 n 是一个代表谐波数的整数。q 所描述的载荷可以是径向的、轴向的或周向的。对于以 $\theta=0$ 平面为对称的载荷状态，径向和轴向载荷用余弦级数描述，周向载荷用正弦级数描述。若把 $\theta=0$ 平面取在恰当的位置上，经常会只需一个或两个级数。仅使用载荷级数的前 n 项就可足够精确地求解典型的问题。

图 14.4－2(a)是一个关于载荷级数的例子，这里径向载荷 q，部分向内，部分向外，但都是均匀的，由正弦级数表示。式 14.4－1 的余弦项不需要(如果 $\theta=0$ 的平面放在图示 90°的位置，尽管载荷能够用余弦项单独描述)。与正弦级数前一阶的两个非零项有关的载荷分量示于图 14.4－2(b)，(c)。图 14.4－2(b)中的初始项，仅可用于电场冷却塔简单的风载近似。

另一个例子出现在图 14.4－3 中。图 14.4－3(a)中的径向载荷由余弦级数的初始项($n=0$)来描述。这里的载荷是轴对称的，结构对它的响应也是如此。图 14.4－3(b)的载荷也用余弦级数的初始项描述，但因为载荷是扭转的，结构响应不是关于 $\theta=0$ 平面或任何其他径向面为对称。在图 14.4－3(c)中，在 $\theta=\pm\pi/2$ 处的集中载荷 P 都是沿径向指向外，用下面的级数表示

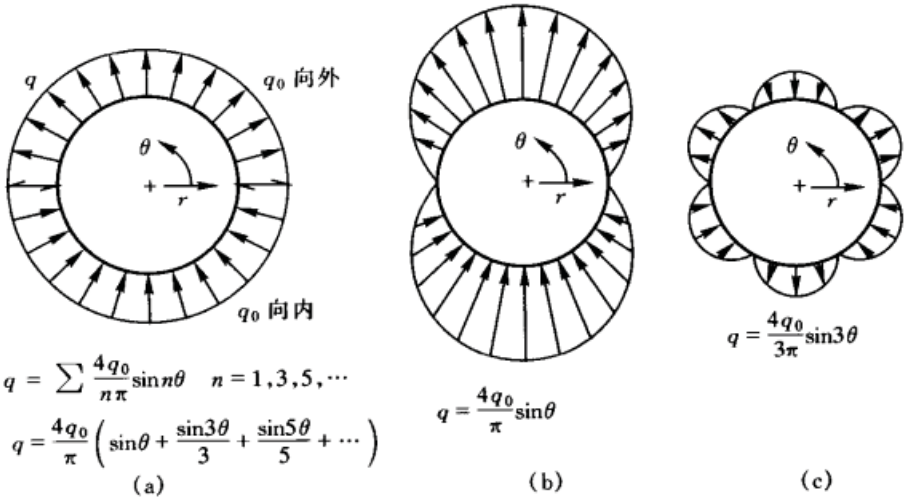


图 14.4－2　(a) 均布载荷，交替向内和向外，用傅里叶级数表示；(b)，(c)与前两个非零级数项有关的载荷

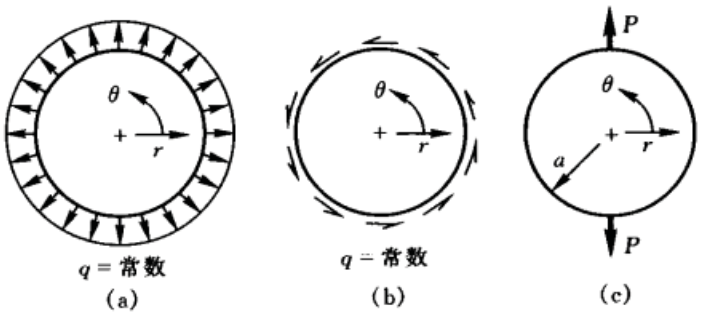


图 14.4－3　载荷示例。第二个是扭转载荷

$$q = \frac{2P}{\pi at}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=2,4,6,\cdots} \cos\frac{n\pi}{2}\cos n\theta\right) \tag{14.4-2}$$

在推导这个公式中，我们设想在每个载荷位置径向应力 σ 作用在轴向跨度为 t 单位，周向为 $2a\theta_0$ 单位的区域内，然后令 θ_0 趋近于零时，$2\sigma a\theta_0 t$ 趋近于 P。当 t 趋于零时，载荷变为集中载荷，而不是在 rz 面内沿长度为 t 的带状分布。公式 14.4－2 中的级数是不收敛的，但是它能导致有限元分析中的位移和应力收敛。当载荷集中时，为了足够的精度可需要更多的级数项。载荷在 θ 方向上变化越缓慢就需要越少的级数项。

由式 14.4－1 所描述的载荷可以随 r 或 z 变化，或可以施加在单个的节点圆上。在这种情况下，它代表一个周向线载荷或一个或多个集中载荷(如在式 14.4－2 中)。设定的坐标轴方向上的非零位移能用类似的级数来描述。设定的载荷或位移函数的级数表达式可用傅里叶级数分析的标准方法来计算。用于普通载荷的结果可在标准的数学表格中找到。软件的使用者可以计算级数项，并把它们作为输入数据，也可以要求软件从载荷的描述中计算它们。

应力，应变和位移　当 θ 是材料的主方向时，最一般的应力-应变关系 $\{\boldsymbol{\sigma}\}=[\boldsymbol{E}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ 是

$$\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\\ \sigma_z\\ \tau_{rz}\\ \tau_{r\theta}\\ \tau_{\theta z}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & 0 & 0\\ & E_{22} & E_{23} & E_{24} & 0 & 0\\ & & E_{33} & E_{34} & 0 & 0\\ & & & E_{44} & 0 & 0\\ & \text{对称} & & & E_{55} & E_{56}\\ & & & & & E_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{rz}\\ \gamma_{r\theta}\\ \gamma_{\theta z}\end{Bmatrix} \tag{14.4-3}$$

如果 r 和 z 也是材料主方向，或者如果材料是各向同性的，那么 $E_{14}=E_{24}=E_{34}=E_{56}=0$。如果材料是各向同性的，则 $E_{55}=E_{66}=G$，其中 G 是剪切模量。

柱面坐标系中的应变-位移关系是[3.1]

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{rz}\\ \gamma_{r\theta}\\ \gamma_{\theta z}\end{Bmatrix}=[\partial]\begin{Bmatrix}u\\ v\\ w\end{Bmatrix}\quad \text{其中 } [\partial]=\begin{bmatrix}\partial/\partial r & 0 & 0\\ 1/r & (\partial/\partial\theta)/r & 0\\ 0 & 0 & \partial/\partial z\\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial r\\ (\partial/\partial\theta)/r & (\partial/\partial r-1/r) & 0\\ 0 & \partial/\partial r & (\partial/\partial\theta)/r\end{bmatrix} \tag{14.4-4}$$

这些关系独立于材料性质，位移分量 u,v,w 可以或不可以由级数来描述。

令位移分量用正弦和余弦级数来描述：

$$\text{径向位移：}\quad u=\sum_{n=0}^{\infty}\bar{u}_n\cos n\theta+\sum_{n=0}^{\infty}\underline{\bar{u}}_n\sin n\theta \tag{14.4-5a}$$

$$\text{周向位移：}\quad v=\sum_{n=0}^{\infty}\bar{v}_n\sin n\theta-\sum_{n=0}^{\infty}\underline{\bar{v}}_n\cos n\theta \tag{14.4-5b}$$

$$\text{轴向位移：}\quad w=\sum_{n=0}^{\infty}\bar{w}_n\cos n\theta+\sum_{n=0}^{\infty}\underline{\bar{w}}_n\sin n\theta \tag{14.4-5c}$$

这里 $\bar{u}_n,\underline{\bar{u}}_n,\cdots,\underline{\bar{w}}_n$ 是位移的幅值，它们通常取决于 r,z 和 n，但与 θ 无关。单划线级数描绘的是关于 $\theta=0$ 对称的位移状态；双划线级数描绘的是关于 $\theta=0$ 反对称的位移状态。式 14.4-5b中人为地选择负号的动因在式 14.5-9 后面的备注中作了说明。

假设一个典型的位移谐波是第 n 个。如果我们把式 14.4-5 代入式 14.4-4，并把算出的应变代入式 14.4-3，我们发现用单划线级数的第 n 个谐波应力有下列形式

$$\lfloor\sigma_{rn}\ \ \sigma_{\theta n}\ \ \sigma_{zn}\ \ \tau_{rzn}\rfloor=\lfloor\bar{\sigma}_{rn}\ \ \bar{\sigma}_{\theta n}\ \ \bar{\sigma}_{zn}\ \ \bar{\tau}_{rzn}\rfloor\cos n\theta \tag{14.4-6a}$$

$$\lfloor\tau_{r\theta n}\ \ \tau_{\theta zn}\rfloor=\lfloor\underline{\bar{\tau}}_{r\theta n}\ \ \underline{\bar{\tau}}_{\theta zn}\rfloor\sin n\theta \tag{14.4-6b}$$

其中划线项是 r,z 和 n 但不是 θ 的函数。从双划线级数可得到类似的表达式。当把式 14.4-6代入柱面坐标系下的三个平衡微分方程时[3.1]，我们得到下列表达式

$$\bar{Q}_1\cos n\theta=0\qquad \bar{Q}_2\cos n\theta=0\qquad \bar{Q}_3\sin n\theta=0 \tag{14.4-7}$$

这里 $\bar{Q}_i$ 是 r,z 和 n 但不是 θ 的函数。对于所有的 θ，式 14.4-7 都必须成立，因此 $\bar{Q}_1=\bar{Q}_2=$

$\bar{Q}_3=0$。在有限元范围中，类似于方程 $\bar{Q}_1=\bar{Q}_2=\bar{Q}_3=0$ 的式是

$$[\boldsymbol{K}_n]\{\bar{\boldsymbol{D}}_n\}-\{\bar{\boldsymbol{R}}_n\}=\{\boldsymbol{0}\} \tag{14.4-8}$$

其中$[\boldsymbol{K}_n]$与 θ 无关，$\{\bar{\boldsymbol{D}}_n\}$和$\{\bar{\boldsymbol{R}}_n\}$分别包含节点自由度和节点载荷在第 n 个谐波中的幅值。对于有 N 个节点和只有平移自由度的有限元模型，$[\boldsymbol{K}_n]$是 $3N\times 3N$ 的矩阵。如果采用了双划线级数也同样正确。如果两种级数同时使用，$[\boldsymbol{K}_n]$的规模就要扩大一倍。但是在所有这样的情况中，式 14.4-8 与单个谐波相配。载荷的谐波 n 仅产生位移的谐波 n；即不同的傅里叶谐波是不耦合的。单个的有限元网格用于每一个谐波的分析。对于 $n=1$ 生成并求解式 14.4-8，对于 $n=2$ 也是如此。需要的谐波数取决于所要求的精度和载荷的性质。由独立的分析得出的节点幅值必须根据式 14.4-5 叠加在一起，但在周向不需要划分单元。

相关问题 傅里叶级数法用于经典板理论已经 100 多年了。当在有限元范围内用于平板时，傅里叶级数法被称为有限条法[14.5]。为了简洁的解释，考虑 xy 平面内有两条简支边平行于 x 轴的矩形板的有限条分析。平行于 y 轴切割，板被分成窄条。在 y 方向上，横向挠度的正弦级数满足简支边界条件。y 方向上的载荷模式也可由正弦级数表示。在 x 方向上，使用有限元形状函数，以致每一个条单元就有四个自由度。叠加少数几个最低阶载荷谐波的解即是求解一个典型问题。在它的更一般的形式中，有限条法不要求板的对边简支。这个方法也很好地适用于折板和直的或曲的盒形梁。

棱柱体也能用傅里叶级数法分析，这种方法可叫做有限棱柱法[14.5,14.6]。从概念上来说，一个棱柱几何体可由轴对称体展直得到。这种观点表明，一个棱柱体如果被描述成一个有很大半径的圆环，它可被理想化为轴对称体。但是，形成的有限元结构方程可能是病态的，如在式 14.2-3 后面备注中表明的那样。

14.5 非轴对称载荷：有限元分析中的一些细节

在下面的讨论中，我们最关注的是式 14.4-5 中的单划线位移级数。在一个单元中，傅里叶的幅值 $\bar{u}_n,\bar{v}_n,\bar{w}_n$ 可由节点的傅里叶幅值 $\bar{u}_{in},\bar{v}_{in},\bar{w}_{in}$ 插值得到，这里 n 是谐波数，i 是单元节点号。我们把这种关系表示成$\{\bar{\boldsymbol{u}}_n\}=[\bar{\boldsymbol{N}}]\{\bar{\boldsymbol{d}}_n\}$，其中$[\bar{\boldsymbol{N}}]$包含了与用于平面问题中相同的形状函数。例如，对于谐波数 n 和图 14.2-1 的 4 节点单元，类似于式 14.2-1 的关系式是

$$\begin{Bmatrix}\bar{u}_n\\ \bar{v}_n\\ \bar{w}_n\end{Bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}N_1&0&0\\0&N_1&0\\0&0&N_1\end{bmatrix}}_{1}\underbrace{\begin{bmatrix}N_2&0&0\\0&N_2&0\\0&0&N_2\end{bmatrix}}_{2}\underbrace{\begin{bmatrix}\cdots\\ \cdots\\ \cdots\end{bmatrix}}_{3}\underbrace{\begin{bmatrix}\cdots\\ \cdots\\ \cdots\end{bmatrix}}_{4}\{\bar{\boldsymbol{d}}_n\} \tag{14.5-1a}$$

这里

$$\{\bar{\boldsymbol{d}}_n\}=\lfloor\,\bar{u}_{1n}\ \bar{v}_{1n}\ \bar{w}_{1n}\ \bar{u}_{2n}\ \bar{v}_{2n}\ \bar{w}_{2n}\ \cdots\ \bar{w}_{4n}\,\rfloor^{\mathrm{T}} \tag{14.5-1b}$$

一个多于 4 个节点的单元将在式 14.5-1a 中有更多的分块和$\{\bar{\boldsymbol{d}}_n\}$中有更多的自由度，当然使用不同的形状函数。对于一个给定的单元，不管它有多少节点，不同的位移分量和谐波都可以

使用相同的形状函数 N_i。

不同的傅里叶谐波求和提供了如式 14.4－5 所述的位移。这些位移能够以下述矩阵格式来表示，在式 14.5－1a 中把 $\cos n\theta$ 附在第一行和第三行，把 $\sin n\theta$ 附在第二行，然后求和。那么，对于一个典型的单元

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} \bar{u}_n \cos n\theta \\ \bar{v}_n \sin n\theta \\ \bar{w}_n \cos n\theta \end{Bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 \cos n\theta & 0 & 0 & N_2 \cos n\theta & \cdots \\ 0 & N_1 \sin n\theta & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & N_1 \cos n\theta & 0 & \cdots \end{bmatrix}}_{[\boldsymbol{N}_n]} \{\bar{\boldsymbol{d}}_n\} \tag{14.5-2}$$

其中 n 是谐波数，斜体 N 的数值下标是单元节点数。以和的方式写出，式 14.5－2 是

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [\boldsymbol{N}_0 \ \boldsymbol{N}_1 \ \boldsymbol{N}_2 \ \cdots] \begin{Bmatrix} \bar{\boldsymbol{d}}_0 \\ \bar{\boldsymbol{d}}_1 \\ \bar{\boldsymbol{d}}_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [\boldsymbol{N}]\{\bar{\boldsymbol{d}}\} = \sum_n [\boldsymbol{N}_n]\{\bar{\boldsymbol{d}}_n\} \tag{14.5-3}$$

其中粗体 $\boldsymbol{N}$ 和 $\bar{\boldsymbol{d}}$ 的下标代表谐波数。列向量$\{\bar{\boldsymbol{d}}\}$列出了所有单元节点和所有谐波的节点傅里叶幅值。第一个谐波函数 $n=0$，代表轴对称情况。从式 14.4－4 和 14.5－3

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\boldsymbol{\partial}] \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \underbrace{[\boldsymbol{\partial}][\boldsymbol{N}_0 \ \boldsymbol{N}_1 \ \boldsymbol{N}_2 \ \cdots]}_{[\boldsymbol{B}]=[\boldsymbol{B}_0 \boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{B}_2 \cdots]} \{\bar{\boldsymbol{d}}\} = \sum_n [\boldsymbol{B}_n]\{\bar{\boldsymbol{d}}_n\} \tag{14.5-4}$$

这里的$[\boldsymbol{B}]$是应变-位移矩阵，$[\boldsymbol{B}_n]$为谐波 n 的子矩阵。按照单元节点运用分块，从式14.4－4 和 14.5－4 得到第 n 个谐波中单元的应变是

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{rn} \\ \varepsilon_{\theta n} \\ \varepsilon_{zn} \\ \gamma_{zrn} \\ \gamma_{r\theta n} \\ \gamma_{\theta zn} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_{1,r}\cos n\theta & 0 & 0 \\ \dfrac{N_1}{r}\cos n\theta & \dfrac{nN_1}{r}\cos n\theta & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,z}\cos n\theta \\ N_{1,z}\cos n\theta & 0 & N_{1,r}\cos n\theta \\ -\dfrac{nN_1}{r}\sin n\theta & \left(N_{1,r}-\dfrac{N_1}{r}\right)\sin n\theta & 0 \\ 0 & N_{1,z}\sin n\theta & -\dfrac{nN_1}{r}\sin n\theta \end{bmatrix}}_{1} \underbrace{\begin{bmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{bmatrix}}_{2,3,4\cdots} \begin{Bmatrix} \bar{u}_{1n} \\ \bar{v}_{1n} \\ \bar{w}_{1n} \\ \bar{u}_{2n} \\ \bar{v}_{2n} \\ \vdots \end{Bmatrix} \tag{14.5-5}$$

这里数字下标代表节点号，逗号代表对其后下标字母的微分。单元形状函数 N_i 依赖于 r 和 z。因此$[\boldsymbol{B}]$是 r,z,n 和 θ 的函数。

单元刚度矩阵由式 14.2－2 给出，但会有规模较大的数组。令每个单元有 J 个节点和包

含 M 个谐波数，则积分矩阵$[\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{E}][\boldsymbol{B}]$是满阵，规模是 $3JM\times 3JM$。它由子矩阵为 $3J\times 3J$ 的 $M\times M$ 个数组组成。非对角线上的子矩阵每项中含有 $\sin m\theta\sin n\theta$ 或 $\cos m\theta\cos n\theta$，这 m 和 n 是代表谐波函数的不同整数。当积分限是 $-\pi$ 到 π 时，这些项的积分为零，只在对角线上留下了 M 个子矩阵。这就意味着不同的傅里叶谐波是不相耦合的。每个对角线上的子矩阵是 $3J\times 3J$，在每一项中都包含 $\sin^2 n\theta$ 或 $\cos^2 n\theta$。当由 $-\pi$ 到 π 积分时，$\sin^2 n\theta$ 和 $\cos^2 n\theta$ 每个积分都是 π（或当 $n=0$ 时，$\cos^2 n\theta$ 积分是 2π）。对 r 和 z 的积分按对轴对称问题的相同方式进行。以类似的方式，从式 14.2－5 和 14.5－2 中得到谐波 n 的单元质量矩阵是

$$[\boldsymbol{m}]=\iint_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\begin{bmatrix} N_1^2\cos^2 n\theta & 0 & 0 & N_1N_2\cos^2 n\theta & \cdots \\ 0 & N_1^2\sin^2 n\theta & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & N_1^2\cos^2 n\theta & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}}_{3J\times 3J}\rho r\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}A \tag{14.5-6}$$

单元以通常的方式组集后，与时间无关问题的结构方程形式为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_0 & & & \\ & \boldsymbol{K}_1 & & \\ & & \boldsymbol{K}_2 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \bar{\boldsymbol{D}}_0 \\ \bar{\boldsymbol{D}}_1 \\ \bar{\boldsymbol{D}}_2 \\ \vdots \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \bar{\boldsymbol{R}}_0 \\ \bar{\boldsymbol{R}}_1 \\ \bar{\boldsymbol{R}}_2 \\ \vdots \end{Bmatrix}\quad \text{或}\quad [\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\} \tag{14.5-7}$$

其中下标代表谐波数，而划线的量是傅里叶幅值。在一个刚度子矩阵$[\boldsymbol{K}_n]$中的几项或与 n 无关或包含 n 或 n^2 作为乘数。因此，当 n 增加时，一些刚度系数也增加。载荷不收敛的级数，如式 14.4－2 中的载荷级数，它产生的节点载荷仅是正负号从一个谐波到下一个谐波交替变化，却能得到位移和应力的收敛结果。实际中，我们不构建一个包括所有谐波的刚度矩阵，如在式 14.5－7 中；而是构建独立子问题的$[\boldsymbol{K}_n]\{\bar{\boldsymbol{D}}_n\}=\{\bar{\boldsymbol{R}}_n\}$并连续求解。最后的位移由式 14.5－3 给出，应变由式 14.5－4 给出，应力由式 14.4－3 给出。

对于 M 个谐波，单元节点载荷式 3.3－8 包含如下的贡献

$$\iint_{-\pi}^{\pi}\underset{3JM\times 3}{[\boldsymbol{N}]^{\mathrm{T}}}\ \underset{3\times 1}{\{\boldsymbol{F}\}}r\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}A\qquad \text{和}\qquad \iint_{\pi}^{\pi}\underset{3JM\times 6}{[\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}}\ \underset{6\times 1}{\{\boldsymbol{\sigma}_0\}}r\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}A \tag{14.5-8}$$

其中$[\boldsymbol{N}]$和$[\boldsymbol{B}]$由式 14.5－3 和 14.5－4 给出。例如，与对称变形有关的体力有如下形式

$$\{\boldsymbol{F}\}=\begin{Bmatrix} \bar{F}_{r0}+\bar{F}_{r1}\cos\theta+\bar{F}_{r2}\cos 2\theta+\cdots \\ 0+\bar{F}_{\theta 1}\sin\theta+\bar{F}_{\theta 2}\sin 2\theta+\cdots \\ \bar{F}_{z0}+\bar{F}_{z1}\cos\theta+\bar{F}_{z2}\cos 2\theta+\cdots \end{Bmatrix} \tag{14.5-9}$$

式 14.5－8 的积分，按式 14.5－6 描述的方式完成。因此我们得到式 14.5－7 中的$\{\boldsymbol{R}\}$，其中$\{\bar{\boldsymbol{R}}_0\}$只包含零谐波（轴对称）载荷项，$\{\bar{\boldsymbol{R}}_1\}$只包含第一个谐波载荷项，等等。

备注　如果使用双划线级数而不是单划线级数，人们发现，在式 14.5－2，14.5－5，14.5－6和 14.5－9 中，$\sin n\theta$ 和 $\cos n\theta$ 可以互相交换。同时，式 14.5－5 中的矩形矩阵的最后

两行代数符号颠倒了。然而，对于 $n>0$，式 14.5－7 中的子矩阵$[\boldsymbol{K}_n]$被证明与由单划线级数产生的相同。这种方便性是在式 14.4－5b 中人为选择负号的原因。如果符号取为正，子矩阵在单划线和双划线级数之间会是不一致的。

对于 $n=0$，自由度 $\bar{v}_m$，$\bar{u}_m$ 和 $\bar{\bar{w}}_m$ 没有与它们相关的刚度。这些自由度必须在每个节点 i 被抑制以避免奇异的刚度矩阵。而对于 $n=0$，为了防止轴向平移，至少必须抑制一个节点圆的轴向平移。对于 $n=1$，平行于 $r\theta$ 平面的刚体平移是可能的，亦有可能绕此平面内轴的旋转。作为一个例子，绕 $\theta=\pi/2$ 轴的小转角 ϕ 产生位移分量 $u=\phi z\cos\theta$，$v=-\phi z\sin\theta$ 和 $w=-\phi r\cos\theta$。为了避免$[\boldsymbol{K}_1]$的奇异性，这些运动都必须被限制。对于 z 轴上有节点的物体，傅里叶位移幅值上的附加条件能够从 $r=0$ 处应变保持有限值的要求中推导出来[14.7]。如果这些条件被忽略了，一些刚度系数可能远大于其他值。在用显式积分进行动力学分析时，这种情况可能要求使用非常小的时间步。

如果 θ 不是材料的主方向，式 14.4－3 中的$[\boldsymbol{E}]$就成为一个满阵。式 14.4－5 的单划线和双划线项在每一个谐波中变成耦合的了，但是不同的谐波仍然不产生耦合[14.8]。如果弹性模量沿周向变化，就像例子中模量与温度有关，而温度随 θ 变化，仍可用傅里叶级数，但是所有的谐波都是耦合的[14.9,14.10]。

分析题

14.1－1 如果回转体的分析在数学上是二维的，那么周向位移 v 一定为零。设计一个例子，当 θ 不是材料主方向时 $v\neq0$，尽管是轴对称载荷。

14.2－1 在图 6.8－1 中，虚线表示一个有 4 节点双线性单元位移后的位置。如果单元是轴对称而不是面对称，x 代表径向，y 平行于旋转轴(没有画出)。8 个位移模式中哪些与单元的零应变能有关，哪些无关？回答下列情况的每一个。

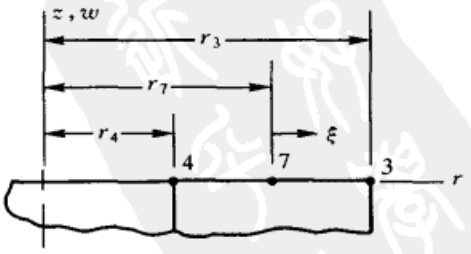
(a) 单元是平面的，$[\boldsymbol{k}]$用一个高斯点积分。

(b) 单元是平面的，$[\boldsymbol{k}]$用四个高斯点积分。

(c) 单元是轴对称的，$[\boldsymbol{k}]$用一个高斯点积分。

(d) 单元是轴对称的，$[\boldsymbol{k}]$用四个高斯点积分。

14.2－2 简图表示一个轴对称二次单元 $z=$常数面上的三个节点，图示节点都是等间距的。如果 z 方向上的作用力 Φ_z 以如下方式作用到这个表面，确定协调节点载荷矢量。



题 14.2－2

(a) Φ_z 在整个面上有常值 p。

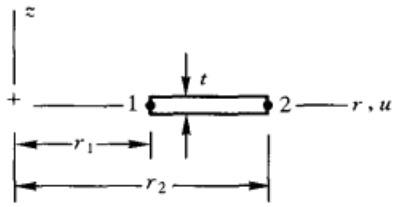
(b) $\Phi_3=\frac{1}{2}(\xi^2-\xi)p_4+(1-\xi^2)p_7+\frac{1}{2}(\xi^2+\xi)p_3$，它是一个基于节点值 p_4，p_7 和 p_3 的抛物线变量。

14.2-3　在题 14.2-2 的图中，设 $r_4=0$，假设 $w_4>0$，$w_7=w_3=0$。这样一种变形模式合理吗？考虑在 $r=0$ 处的剪应变 γ_{rz}。

14.2-4　设计论据，证明在轴对称问题中当 $r=0$ 时 $\varepsilon_r=\varepsilon_\theta$。提示：考虑径向位移级数 $u=c_1r+c_2z+c_3r^2+c_4rz+\cdots$。

14.2-5　设计论点或例子证明一个非常细长的单元中存在大的刚度差异，如式 14.2-3 后面说明的那样。

14.2-6　简图显示一个等厚度为 t 的单元横截面，形状像一个金属垫圈。自由度是在节点圆 1 和 2 上的径向位移 u_1 和 u_2。材料是各向同性的，只有在平面内的应变 ε_r，ε_θ 需要考虑。



题 14.2-6

(a) 列出矩阵[**N**]和[**B**]。

(b) 设 $\nu=0$，在一弧段上用显式积分生成[**k**]。

(c) 设 $L=r_2-r_1$，$r_m=(r_1+r_2)/2$。通过假设 $r=r_m$ 简化积分。由此，确定非零泊松比的[**k**]。这个[**k**]对哪种几何形状是一个很好的近似？

(d) 证明当 $\nu=0$，$r_m\gg L$ 时，(b)和(c)中的[**k**]是一致的。

(e) 从(b)得到对于特殊情况 $\nu=r_1=u_1=0$ 的[**k**]。

(f) 从(c)得到对于特殊情况 $\nu=r_1=u_1=0$ 的[**k**]。

14.2-7　对于图 14.2-1 所示的 4 节点、八自由度单元，计算以角速度 ω 绕 z 轴旋转所产生的节点载荷{$\boldsymbol{r}_\omega$}。计算应详尽，到出现 $\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的三重积分后停止。

14.4-1　(a) 在图 14.4-2(a)中，把 r 轴逆时针转动 90°，以使 $\theta=0$ 的平面在图中是垂直的。不重置载荷。对作用到这种布局上的载荷写出其傅里叶级数。

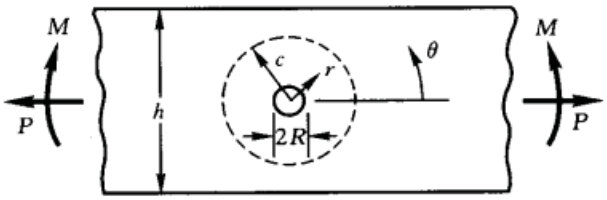
(b) 写出应用到下列径向载荷的载荷级数：在 $0<\theta<\pi/2$ 范围内 $q=q_0$ 指向外，在 $\pi<\theta<3\pi/2$ 范围内 $q=q_0$ 指向内，在剩下的两个 1/4 圆周上 $q=0$，这里 q_0 是一个常数。

(c) 对于(b)所描述的载荷，怎样放置 $\theta=0$ 平面才能只需要余弦级数？

14.4-2　平板含有一个半径为 R 的圆孔，载荷是轴向力 P 和平面内的力矩 M，如图所示。由半径为 c 的虚线包围的区域是隔离区，当作回转体来分析。如果 t 是平板的厚度，而且 $c\gg R$，在分析中应该用式 14.4-1 中的哪种载荷项？以 P，M，h，t，r，n 和 θ 来表示答案。

(a) 只考虑 P(令 $M=0$)。

(b) 只考虑 M(令 $P=0$)。



题 14.4-2

14.4-3 写出式 14.4-5 的特殊格式。以便描述下述每种刚体运动。

(a) 沿 z 轴平移。

(b) 在径向并平行于 $\theta=0$ 的平面平移。

(c) 在径向并平行于 $\theta=\pi/2$ 的平面平移。

(d) 绕 $\theta=0$ 处的 r 轴作微小的旋转。

14.4-4 如果$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}=\{\mathbf{0}\}$,式 14.4-4 有解

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cos\theta & z\cos\theta & 0 & \sin\theta & z\sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & -z\sin\theta & r & \cos\theta & z\cos\theta \\ 1 & 0 & -r\cos\theta & 0 & 0 & -r\sin\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_6 \end{Bmatrix}$$

其中,a_i 是常数。包含所有这些项的位移场能够表示所有可能的刚体运动。

(a) 证明这个场确实会产生$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}=\{\mathbf{0}\}$。

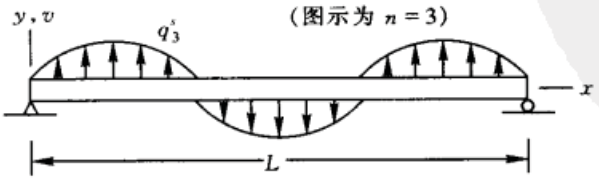
(b) 与式 14.4-5 比较这个场域:把矩形阵中的列当作 n 的值,就像当作属于单划线或双划线级数的一样。

(c) 解释与每一个 a_i 相关位移模式的物理意义。

14.4-5 可以证明作用在图示均匀简支梁上的正弦载荷 $q_n=q_n^s\sin(n\pi x/L)$ 产生也是正弦状的横向挠度 v,以形式 $v_n=\dfrac{q_n^s L^4}{EIn^4\pi^4}\sin\dfrac{n\pi x}{L}$ 表示。载荷的傅里叶级数是 $q=\sum q_n^s$,相应的横向挠度是 $v=\sum v_n$。在跨度中点,对于每一个下面所列的载荷,计算横向挠度和弯矩及它们的百分比误差。使用一个、两个、三个级数项。

(a) 均布载荷 q_0,对于它,$q_n^s=4q_0/n\pi$ 和 $n=1,3,5,\cdots$。

(b) 跨度中间的集中载荷 P,对此,$q_n^s=(2P/L)\sin(n\pi/2)$和 $n=1,2,3,\cdots$。



题 14.4-5

14.5－1 重做题 14.2－5，但现在考虑非轴对称变形。更具体地说，考虑径向压力 $q=q_2^c\cos 2\theta$ 和相关的径向位移 $u=\bar{u}_2\cos 2\theta$。提示：令弯曲应变能等于载荷做的功，因此得到 $\bar{u}_2$，使用 $\bar{u}_2$ 定义一个弯曲刚度，把它与周向刚度作比较。假定曲率是 $\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}s^2$，其中 $s=r\theta$。

14.5－2 (a) 写出式 14.5－5 中适合于反对称位移的矩形矩阵（是式 14.4－5 中双划线级数）。

(b) 证明：对于 $n>0$，式 14.5－7 中的子矩阵 $[\boldsymbol{K}_n]$ 等同于使用单划线级数而得的矩阵。

(c) 证明：如果式 14.4－5b 中的负号变为正号，(b)中的结论就是错误的。

14.5－3 假设某个轴对称压力容器可用只有平移自由度的 4 节点单元建模就足够了（如图 14.2－1(b)）。设网格是 20×1，沿壁厚用一个单元而轴向尺寸使用 20 个单元。假定载荷可以用式 14.4－1 中正弦级数 1 到 6 个谐波来描述。另外，也可以考虑一个完全三维的分析，用一个 8 节点体单元的 $20\times1\times m$ 的网格，其中 m 是沿着周向的单元数。

(a) 估算 m，以便使这个三维模型和级数解有类似的精确度。假设位移的每半波长有三个单元是可接受的。

(b) 估算三维解和级数解的成本比。确定成本的方法是估算由二阶高斯规则生成刚度矩阵所需的乘数。

(c) 重做(b)，但现在确定成本的方法是估算按有带状求解器的高斯消元法求解方程所需的乘法运算次数。

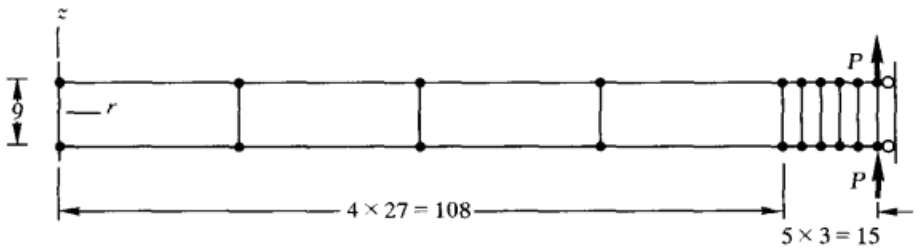
14.5－4 考虑题 14.2－6 中的平面单元。但是，现在允许周向位移以及径向位移，因此可以处理非轴对称载荷了。单元的节点自由度变为 u_1，v_1，u_2 和 v_2。令 $\theta=0$ 是位移的对称面。列出这个单元的应变-位移矩阵（对于谐波数 n，就像在式 14.5－5 中的矩形矩阵一样，但包含两个节点）。

计算题

在下面的问题中，计算应力和位移的峰值。尽可能地利用对称性。当用到网格细化时，估算由最好的有限元网格算出结果的百分误差。这里载荷和尺度未指定的地方，选择合理或便利的值。需要材料性能但未能说明的地方，使用钢的性能（如果必要，用铝的）。使用 1.5 节中建议的分析方法。

C14.1 (a) 简图示出各向同性圆盘横截面的轴对称有限元模型。防止外缘在 rz 面内转动，用沿圆周均布的，总轴向力为 $2P$ 的力加载。把计算结果与理论值比较[1.16,2.6]，并与有相同单元数的改进网格得出的结果进行比较（见图 10.3－2）。在 $r=0$ 处 σ_r 和 σ_θ 相等，这是期望的吗？

(b) 在圆盘上有可能作用许多其他载荷，有对称的和非对称的，他们的解法可由手册公式得到[1.16]。（可以使用回转体单元，但轴对称板单元更适合薄板）



题 C14.1

C14.2 考虑一个长且厚壁的圆柱形压力容器，让一端固定，另一端无支撑。分析如下的载荷。

(a) 内压。

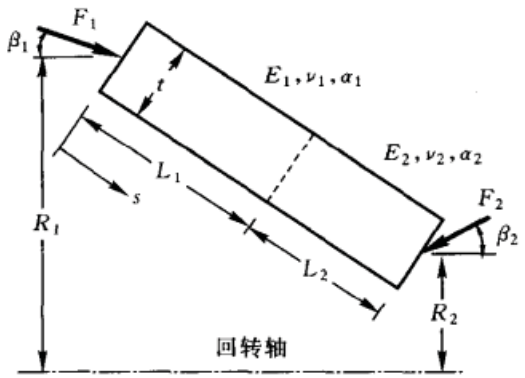
(b) 以固定速度绕轴旋转(在这个情况下，令两端都不受支撑)。

(c) 绕轴纯扭转。

(d) 在未支撑端受垂直于轴的力。

C14.3 分析一个厚壁球形压力容器，载荷是(a)内压和(b)以固定速度绕轴旋转。

C14.4 图示是一个锥形横截面由两种不同材料组成。若 $R_1=R_2$，圆锥变成了圆柱。若 $R_1-R_2=L_1+L_2$，它就变成了圆盘。加载方式是温度 T 的变化和/或均布圆周线载荷 F_1 和 F_2。



题 C14.4

(a) 令 T 是均匀的，$F_1=F_2=0$。

(b) 令 T 随 s 线性变化，$F_1=F_2=0$。

(c) 令 T 在厚度 t 方向线性变化，$F_1=F_2=0$。

(d) 令两个材料是相同的，$T=0$，$F_1=0$，F_2 沿径向。

(e) 令 $T=0$，F_1 和 F_2 沿轴向，且 $F_1R_1=F_2R_2$。

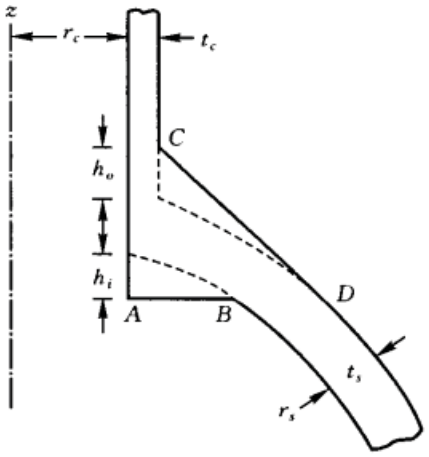
C14.5 球形容器有一个径向的圆柱形出口，图示为横截面。内面和/或外面由图示的轴对称增补部分加强：其内边 AB 垂直于圆柱的轴；其外表面 CD 与球外表面相切。令 $t_C=2t_Sr_C/r_S$，考虑如下载荷。

(a) 内压。

(b) 内部流体温度为 T_i 外部为 T_o(见 12 章温度场分析)。

(c) 扭矩作用于管嘴(绕 z 轴)。

(d) 弯矩作用于管嘴。



题 C14.5

C14.6　(a,b)解题 14.4－2 的(a)和(b),应用 14.4 节和 14.5 节中的理论。

C14.7　(a) 两力 P 沿直径方向把细长平面圆环夹紧(两力反向,如图 14.4－3(c)所示)。应用 14.4 节和 14.5 节中的理论。

(b) 相类似,一个空心球由两径向力 P 夹紧。

(c) 管路沿长度方向置于水平面,由自重加载。

(d) 空心球放在水平面上,自重加载。

第 15 章

板的弯曲

在本章我们将回顾板的基本弯曲理论，介绍用于各种板单元列式的概念，考虑所选列式的缺点以及克服这些缺点的方法。讨论板的边界条件和试验情况并介绍应用实例。

15.1 引言·板的性能

我们这里所说的板是指一种平直物，其厚度比它的其它尺寸要小得多。由于这种几何特点，板的弯曲分析不用三维有限元。如果使三维单元在厚度方向变薄，将会出现剪切锁定和病态问题，但如果用大量密集三维单元来避免这些问题，又会使结构的自由度数过于庞大。基于板理论的单元能避免自由度过多的问题，根据所采用的板理论的类型，避免剪切锁定需要特殊的列式方法。

平板，类似于直梁，承受弯曲产生的横向载荷。一般情况下，板在两个方向上产生弯矩，也有扭矩。因为列式表示满意的梁单元比较容易，人们可能会推测板单元是相同的。事实并非如此。早期的板单元被下述这类问题困扰：锁定、需要高阶自由度和许多边节点、单个单元不同节点上的不同自由度、分片试验失败、寄生模式的不稳定性、形状限制或简言之，极差的性能。

本章我们讨论两种板理论。第一种不考虑横向剪切变形；第二种考虑横向剪切变形。在这两种情况下，厚度方向的法向应力取作零。第一种叫做*薄板理论或克希霍夫理论*，在 1850 年，克希霍夫(Kirchhoff)关于板理论的研究成果得到认可。第二种约从 1950 年开始，通常称做 Mindlin 理论，不过也有使用 Mindln-Reissner 或 Reissner-Mindlin 名称的[15.1,15.2]。两种理论中的任何一个都提供了数学模型，能够利用适当的板单元列式通过有限元分析来求解。使用每一种理论都开发了许多有限元单元。列式方法包括基于位移的模型、杂交和混合模型、为避免异议而引入的方法，更多的是为了克服与先前的方法有关的新麻烦而引入的方法。1984 年一篇综述论文引用了约 150 个板的有限元列式[15.3]。自那时以来，研究步伐似乎加快了。

本章不做全面的评述。我们考虑的是在板有限元理论中广泛使用的更基本的概念和方法，引用了进一步论述细节、扩展和改进方面的有用参考文献。参考目录没有分先后顺序。

绝大多数希望改善精度和计算结果可靠性的有限元用户从仔细使用现有的列式和软件得到的实惠将比研究优选单元能得到的更多。

符号　我们把板放在 xy 平面内。在前面的章节中，按右手法则表示转角 θ_x 和 θ_y 的箭头分别指向 x 和 y 的正向时认为是正的(图 15.1－1)。用右手法则表示板面斜率 $w_{,x}$ 和 $w_{,y}$ 的箭头分别指向 y 的负向和 x 的正向。要研究讨论板单元，我们需要转角和表面斜率。为了减少混乱，在本章我们使用 ψ_y 替换 θ_x，用 $-\psi_x$ 替换 θ_y，使转角和斜率的正负号与下标一致起来，如图 15.1－1(b)所示。

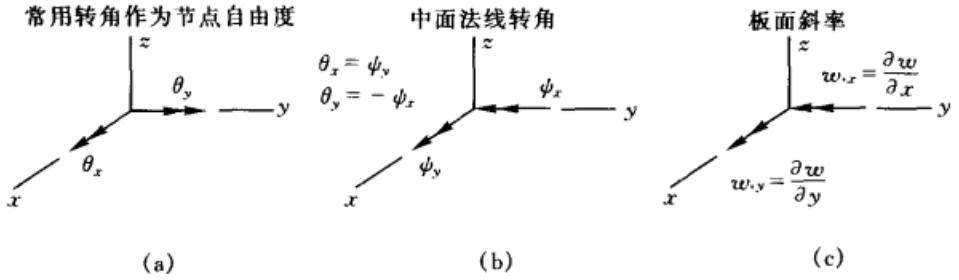


图 15.1－1　板中面法线转动分量和板面斜率的符号

板理论　下面我们对板理论和板的性能作简要概述[3.2,10.2]。设厚度为 t 的板有一个中面与其两表面距离均为 $t/2$。为了便于分析，我们将 xy 平面置于板的中面(如图 15.1－2(a)所示)，这样 $z=0$ 就认为是中面。在初等板弯曲理论中，假设均匀板的弯曲使中面成为一个中性面，也就是说，在 $z=0$ 处，$\varepsilon_x=\varepsilon_y=\gamma_{xy}=0$。如果存在面内载荷，也许与大的横向挠度有关，中面应变不为零。

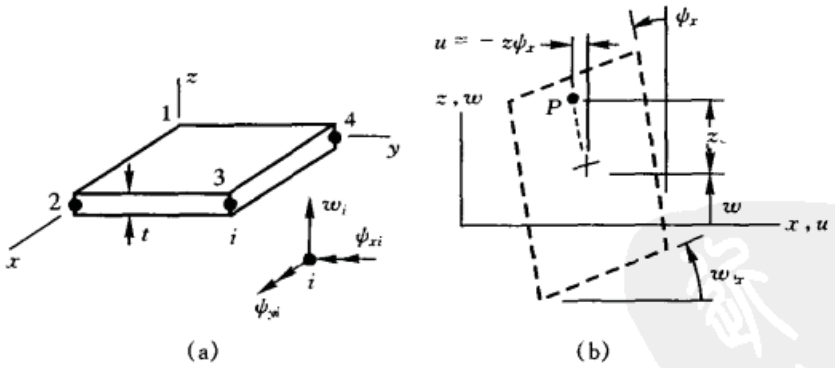


图 15.1－2　(a) 具有角节点的板单元，图示典型的节点自由度；
(b) 在 y 正向观察，变形后的板横截面。假设厚度方向的线保持为直线

理想化的性能认为受载前垂直于中面的直线仍为直线，但不是必然垂直于变形后的中面。该直线的转角分量为 ψ_x 和 ψ_y。因此，不在中面上的一点有 x 方向位移 u，如图 15.1－2(b)所示。一个类似的横截面，在负 x 方向看，产生一个 y 方向的位移 v。因此，对于小的位移和转

角，由方程组 3.1－9 得到其应变：

$$\begin{aligned} u &= -z\psi_x & \varepsilon_x &= -z\psi_{x,x} & \gamma_{xy} &= -z(\psi_{x,y}+\psi_{y,x}) \\ v &= -z\psi_y & \varepsilon_y &= -z\psi_{y,y} & \gamma_{yz} &= w_{,y}-\psi_y \\ & & & & \gamma_{zx} &= w_{,x}-\psi_x \end{aligned} \qquad (15.1-1)$$

其中逗号表示对其后角标求导，w 表示中面的横（z 方向）向挠度。不需要厚度方向应变 ε_z 的表达式。方程组 15.1－1 是 Mindlin 板理论的基础，它允许横向剪切变形；亦即需要 γ_{yz} 和 γ_{zx} 不为零。在克希霍夫板理论中，假设变形前垂直于中面的直线保持为直线并仍垂直于变形后的中面。这样就有 $w_{,y}=\psi_y$，$w_{,x}=\psi_x$，并且在克希霍夫板内，各处横向剪切变形为零（虽然横向剪力仍然存在）。许多实际情况的板能够看作克希霍夫板，因为板薄到可以忽略其横向剪切变形。

图 15.1－3(a)描述了横截面上的应力。习惯上，总会把这些应力与 xy 平面内每单位长度上的力和力矩联系起来。例如，弯矩 M_x 的增量记为 $\mathrm{d}M_x=z(\sigma_x\mathrm{d}A)$，这里 $\mathrm{d}A=(1)\mathrm{d}z$ 是距变形后中面距离为 z 的横截面的面积增量。于是有

$$M_x=\int_{-t/2}^{t/2}\sigma_x z\,\mathrm{d}z \qquad M_y=\int_{t/2}^{t/2}\sigma_y z\,\mathrm{d}z \qquad M_{xy}=\int_{t/2}^{t/2}\tau_{xy}z\,\mathrm{d}z \qquad (15.1-2a)$$

$$Q_x=\int_{-t/2}^{t/2}\tau_{zx}\,\mathrm{d}z \qquad Q_y=\int_{-t/2}^{t/2}\tau_{yz}\,\mathrm{d}z \qquad (15.1-2b)$$

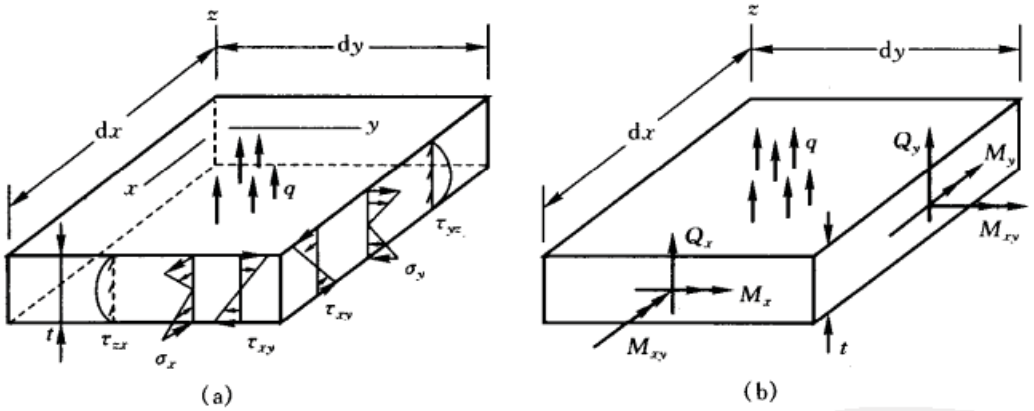


图 15.1－3 (a) 板微元上的应力和横向分布力 q；
(b) 与(a)中应力相关的力矩和横向剪力

这些量描绘在图 15.1－3(b)中，并且它们的方向与图 15.1－3(a)中应力的方向是协调的。M_x 和 M_y 是弯矩，而 M_{xy} 是扭矩。像图 3.1－2(a)中所示的应力一样，图 15.1－3(a)中的量有相对于坐标的变化率，只是为了简化，没有在这里的图中显示出来。在图 15.1－2(b)中描述的变形假定了原来垂直于中面的线仍为直线，产生随 z 线性变化的应力 σ_x，σ_y 和 τ_{xy}，如图 15.1－3(a)所示。因此，对于均质材料，方程 15.1－2(a)可推导得到板表面 $z=\pm t/2$ 处的各应力分量为 $\pm 6M_x/t^2$，$\pm 6M_y/t^2$ 和 $\pm 6M_{xy}/t^2$，就像把弯曲公式 $\sigma=Mc/I$ 运用到深度为 t 和单位宽度的矩形截面上。横向剪应力 τ_{yz} 和 τ_{zx} 与 σ_x，σ_y 及 τ_{xy} 相比通常很小。对于均匀材料，它

们沿厚度呈抛物线变化，在 $z=0$ 处达最大值，其中 $\tau_{yz}=1.5Q_y/t$ 和 $\tau_{zx}=1.5Q_x/t$。

通常，认为法向应力 σ_z 与 σ_x，σ_y 和 τ_{xy} 相比是可以忽略的。那么，对于线弹性的各向同性材料，在平行于 z 轴的每个层面上的应力-应变关系就是常见的平面应力表达式

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\varepsilon_{x0}\\ \varepsilon_{y0}\\ 0\end{Bmatrix}\right) \tag{15.1-3}$$

其中，ε_{x0}，ε_{y0} 是初始应变。如果材料性质不是各向同性的，式 15.1-3 中的方阵一般是满阵。如果需要的话，材料属性的转换，能够按第 8.2 节描述的方法来完成。

克希霍夫板理论 阻止横向剪切变形发生，于是在方程 15.1-1 中 $w_{,x}=\psi_x$ 和 $w_{,y}=\psi_y$；因此 $\varepsilon_x=-zw_{,xx}$，$\varepsilon_y=-zw_{,yy}$ 和 $\gamma_{xy}=-2zw_{,xy}$。可把这些应变-曲率关系式代入式 15.1-3，把所得应力表达式代入式 15.1-2，因此对于均质和各向同性的克希霍夫板的力矩-曲率关系式为

$$\{\boldsymbol{M}\}=-[\boldsymbol{D}](\{\boldsymbol{\kappa}\}-\{\boldsymbol{\kappa}_0\}) \tag{15.1-4a}$$

也可写成：

$$\begin{Bmatrix}M_x\\ M_y\\ M_{xy}\end{Bmatrix}=-\begin{bmatrix}D & \nu D & 0\\ \nu D & D & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{(1-\nu)D}{2}\end{bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}w_{,xx}\\ w_{,yy}\\ 2w_{,xy}\end{Bmatrix}-\{\boldsymbol{\kappa}_0\}\right) \tag{15.1-4b}$$

$$\text{其中}\quad D=\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}\quad(D\text{ 称为弯曲刚度}) \tag{15.1-4c}$$

D 与梁的弯曲刚度 EI 相似。对于单位宽度和 $\nu=0$，$D=EI=Et^3/12$。作为初始曲率 $\{\boldsymbol{\kappa}_0\}$ 的一个例子，设板内温度随 z 线性变化，从 $z=-t/2$ 处的 T_0 变到 $z=t/2$ 处的 $-T_0$。那么，对于热膨胀系数 α，$\{\boldsymbol{\kappa}_0\}=\lfloor\ 2\alpha T_0/t \quad 2\alpha T_0/t \quad 0\ \rfloor^{\mathrm{T}}$。整个克希霍夫板的变形与应力状态完全由单个场量，即中面的横向挠度 $w=w(x,y)$ 来描述。

设一个板在力矩 M_y 作用下弯曲变成一个圆柱面，如图 15.1-4(a)所示。其中 $w_{,yy}$ 为常量和 $w_{,xx}=w_{,xy}=0$。式 15.1-4b 表明，M_x 像 M_y 一样出现，但有 $M_x=\nu M_y$。相关的弯曲应力是 $\sigma_x=\nu\sigma_y$。如果 a 与厚度 t 在尺度上相当，则结构行为如同沿 y 轴放置的梁，以至于 $\sigma_x\approx 0$ 并且梁平行于 z 轴的边将有相对转动。类似地，若板的边 $x=\pm a$ 是自由边，则在 $x=\pm a$ 的边上 σ_x，M_x 两者都为零，这些边如图 15.1-4(b)所示稍有卷曲，因此位移形状在边 $x=\pm a$ 附近不是圆柱状。引起应力 $\sigma_x=\nu\sigma_y$ 的板的绝大部分始终约束板显示应有的曲率 $w_{,xx}$，因此与梁相比，使板刚化了。在式 15.1-4 中，这个刚化效应作为除数 $1-\nu^2$ 出现。

在图 15.1-4(c)中，横向力以交错的方向作用在角点上，以致板呈现纯扭状态，也就是说 $w\propto xy$，因此 $w_{,xy}>0$，而 $w_{,xx}=w_{,yy}=0$。在扭曲板内，由方程 15.1-4b 知，M_{xy} 是一个负常数，而 M_x，M_y 则都为零。在图 15.1-4(c)内，方向与坐标 xy 成 45°的 ns 坐标中，板扭曲呈马鞍

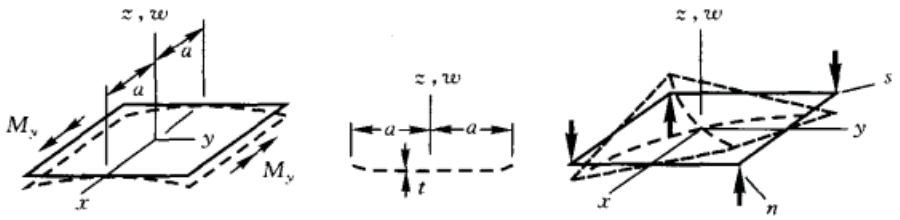


图 15.1-4 (a) 弯曲成一个圆柱面 $w \propto y^2$；
(b) xz 面内的横截面，所示的变形是在边缘 $x=\pm a$ 处 $M_x=0$ 时的状态；
(c) 纯扭曲状态，$w \propto xy$

形状，有相等而反方的曲率 $w_{,xx}$，$w_{,yy}$，但没有扭率 $w_{,xy}$，而弯矩 $M_n=-M_s$，并有 $M_{ns}=0$。

Mindlin 板理论 在整个 Mindlin 板内，为了描述变形和应力状态，必须用 x 和 y 表示三个场量 w，ψ_x 和 ψ_y 中的每一个。对于在式 15.1-1 中作为独立量而保留的 w，ψ_x 和 ψ_y，可以重复获得式 15.1-4 的过程。因此，对于均匀、各向同性的线弹性材料，类似于式 15.1-4 但对于 Mindlin 板的关系式是

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = -\underbrace{\begin{bmatrix} & [\boldsymbol{D}]_{3\times3} & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & kGt & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & kGt \end{bmatrix}}_{[D_M]} \underbrace{\left\{ \begin{Bmatrix} \psi_{x,x} \\ \psi_{y,y} \\ \psi_{x,y}+\psi_{y,x} \\ \psi_x - w_{,x} \\ \psi_y - w_{,y} \end{Bmatrix} - \{\boldsymbol{\kappa}_0\} \right\}}_{\{\kappa_M\}} \tag{15.1-5}$$

其中，$[\boldsymbol{D}]$是式 15.1-4 中见到的那个方阵。系数 k 解释了 z 方向横向剪应力抛物线形变化，kt 能够看作横向剪切变形的等效厚度。对于均质的板，k 可以接受的值是 $k=5/6$。在 Mindlin 理论中，不仅涉及到三个场量，还有仅由横向剪切变形引起的与横向挠度场量相配合的旋转场量。这个理论好像比克希霍夫板理论更复杂，但实际上它使获得各种易于处理的有限元变得更容易，尽管还有一些难题诸如剪切锁定需要克服。

备注 一般而言，材质不一定是各向同性的。如果材料的主方向不是 x 和 y 方向，我们可以用与获得转换$[\boldsymbol{E}]$矩阵的相同方法来得到转换的矩阵$[\boldsymbol{D}]$(见 8.2 节)。式 15.1-5 中转换的右下方 2×2 子矩阵能够按下述方法建立。假设正交各向异性材料在 xy 平面内有主方向 n 和 s，因此矩阵$[\boldsymbol{G}']$使 Q_n 和 Q_s 与 $w_{,n}-\psi_n$ 和 $w_{,s}-\psi_s$ 相关联。图 15.1-3(b)中 z 方向力的平衡使$\{\boldsymbol{Q}'\}=\lfloor Q_n\ Q_s \rfloor^{\mathrm{T}}$ 与$\{\boldsymbol{Q}\}=\lfloor Q_x\ Q_y \rfloor^{\mathrm{T}}$ 相关联，因此关系式$\{\boldsymbol{Q}\}=[\boldsymbol{T}]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{Q}'\}$能够用坐标轴之间的方向余弦写出来。如果在 xy 坐标内所需的 2×2 子矩阵叫做$[\boldsymbol{G}]$，则它有形式$[\boldsymbol{G}]=[\boldsymbol{T}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{G}'][\boldsymbol{T}]$。

因为材料不一定是均质的或各向同性的，可能会提供夹芯板和其它层状或纤维加强结构。如果材料性能相对于中面对称，则当板弯曲时中面保持为中性面。但一般情况下，不同层可能有不同的性质，也可能是各向异性的，因此应变为零的位置取决于所作用的载荷。也就是说，弯曲和薄膜状态相耦合。然而，必须把面内位移 u 和 v 加到相关变量目录中。在双层的层压

板中肯定有耦合效应[15.4]。在商用软件中已出现用于层状板的特殊单元。这类单元在厚度方向线上用一个或几个节点，这取决于单元列式所用的理论。夹芯和层状板的计算模型在文献[15.5]中作了综述。对于这种板，横向剪切变形常常是重要的。

圆柱体和锥体有单一的曲面并是可展开的，这意味着它们能够展开变为平面。双曲面如球是不可展的。反过来说，一张平纸很容易卷成圆柱面或锥面，但不能包住一个球（无皱纹的纸）。就初始平板的横向挠度而言，柱形或锥形可以忽略薄膜应力，但球形必然产生薄膜应力，也许大到足以使平板褶皱。在绝大多数的情况下，有挠度的板的中面是不能展开的，因此，即使横向挠度很小，也出现薄膜应力，甚至当支撑允许在面内位移时也是如此。薄膜应力承受部分横向载荷，使横向挠度小于仅由弯矩和横向剪力承受载荷时应有的挠度值。如果薄膜应力有相当大的影响，这种情况就叫做“大挠度”板问题，而且由于薄膜应力的强度和分布在开始是未知的，因而是非线性问题。在不利情况下，如果横向挠度小到与板厚的一半相当，那它可就是个“大”值，精确值取决于载荷的特点、支撑和解的精度要求。类似的备注应用于初始不是平面的板：取决于初始曲率和作用载荷的性能，薄膜应力可以是拉力或压力，屈曲可能是人们关切的事情。总之，一个分析者必须知道，不管是在加载前或加载后，板的线性分析允许有小的平直度偏差。

在板中当其跨度比它的厚度大得多时，横向剪切变形变得可以忽略。板单元应该反映这种特性，这样如果使有限元板模型变得非常薄也不出问题。然而在 Mindlin 板单元中由于剪切锁定，即厚度趋于零时计算挠度也趋于零引起的问题必须克服。如果仅当厚度是单元跨度的 $1/10^6$ 时碰巧发生，则问题可能看起来也是纯理论的，因为实际的板没有这样薄。尽管如此，这类单元显然并不简单，软件开发者要避免使用。

在有限元软件单元库内，人们发现板单元本身不易辨识，因为壳单元也起板单元的作用。壳单元能够模拟薄膜作用和弯曲作用，或者是单独的或者是组合的。如果壳单元是平的，而且模拟中面内变形的自由度设为零，则它能起板弯曲单元的作用。中面内的自由度是位移 u 和 v 以及旋转自由度 θ_z（如果存在）。

当作用载荷并检查计算结果时，分析者必须理解软件关于“上表面”的定义和它的节点转角和弯矩的符号约定。有限元模型的壳单元在总体坐标中有不同的方向，并希望应力切于单元表面，因此，“上表面”用每个单元的局部信息来定义。当单元节点号按号数顺序编排时，软件能够用右手法则来定义上表面。因此在图 15.1－2(a)中(局部)＋z 面将叫做上表面。图示选择能够用箭头表示每个单元局部＋z 的方向。如果模型是板，人们希望相邻单元的箭头都指向相同的方向，如果模型是壳，则箭头都指向外（也许都指向内）。自动网格生成器能够产生板或壳的网格，以致单元的上表面（无论如何是定义过的）不全在板或壳的同一面。因此在板或壳的一个面上，用上表面单元应力构建的等值线图将显示出单元间严重的不连续性。软件能够提供一种方法来改变网格生成的定义，以便使所有单元的上表面出现在板或壳的同一面。上下表面定义的颠倒也逆转了分布载荷的方向，对于壳体，这可能把内压载荷变为外压载荷。在任何情况下，分析者必须对板和壳的建模特别小心，直到他们熟悉软件的性能。

15.2 C^1(Kirchhoff)板单元

克希霍夫板理论禁止横向剪切变形。因此，当中面的横向挠度 $w=w(x,y)$ 确定时，也就是解答了板问题。由节点位移在板中引起的应变能 U 能够用曲率 $\{\boldsymbol{\kappa}\}=\lfloor w_{,xx}\ w_{,yy}\ 2w_{,xy}\rfloor^{\mathrm{T}}$ 表示，但要在式 15.1-1 中设 $\gamma_{yz}=\gamma_{zx}=0$，再将应变代入 U 的通用表达式(式 4.4-5)，并沿板厚度积分。这样，对被忽略的初始曲率项，

$$U=\int\frac{1}{2}\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{E}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\}\mathrm{d}V \qquad \text{变为} \qquad U=\int\frac{1}{2}\{\boldsymbol{\kappa}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{D}]\{\boldsymbol{\kappa}\}\mathrm{d}A \tag{15.2-1}$$

其中 A 是中面面积，对于均质、各向同性板，$[\boldsymbol{D}]$ 由方程 15.1-4 给出。按照通常基于位移的单元列式方法，我们用来自节点自由度 $\{\boldsymbol{d}\}$ 的形状函数插值在单元上定义位移，

$$w=\lfloor\boldsymbol{N}\rfloor\{\boldsymbol{d}\} \quad \text{因此} \quad \{\boldsymbol{\kappa}\}=[\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{d}\}, \quad \text{其中} \quad [\boldsymbol{B}]=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\\ \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\\ 2\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}\end{Bmatrix}\lfloor\boldsymbol{N}\rfloor \tag{15.2-2}$$

此后，用对单个单元定义的积分，式 15.2-1 提供单元的应变能和单元的刚度矩阵 $[\boldsymbol{k}]$，

$$U=\frac{1}{2}\{\boldsymbol{d}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{k}]\{\boldsymbol{d}\} \quad \text{其中} \quad [\boldsymbol{k}]=\int[\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{D}][\boldsymbol{B}]\mathrm{d}A \tag{15.2-3}$$

典型地，但不是必然，$\{\boldsymbol{d}\}$ 包含每个节点的 3 个自由度，如图 15.1-2(a)所示，对于克希霍夫单元有 $\psi_{xi}=w_{,xi}$ 和 $\psi_{yi}=w_{,yi}$。用广义自由度 a_i 表示的位移场可按 3.2 节中描述的方法，用自由度 $\{\boldsymbol{d}\}$ 表示。因为 U 涉及到 w 的二阶导数，连续性要求 w 的一阶导数至少在网格细化限度内是单元间连续的，于是，克希霍夫单元是一个 C^1 单元。

如果克希霍夫单元的每个节点仅使用图 15.1-2(a)所示的 3 个自由度，已证明，这种单元或者能满足斜率 $w_{,x}$ 和 $w_{,y}$ 在单元间的连续或者能使角点处的扭转角 $w_{,xy}$ 唯一确定，而这两者不能同时满足，无论单元形状如何[15.6]。在自由度分量中增加 $w_{,xy}$ 可以克服这个难题。这个方法并未被广泛采用，因为这样会使边界条件难以处理，并过分强化单元间的连续性，如 8.6 节描述的那样。

克希霍夫板单元的发展 早期的板单元是有 12 个自由度的矩形，每个角点上有一个节点，每个节点有 3 个自由度。一种对 $w=w(x,y)$ 的建议是"十字形梁"函数，它扩展成沿 x 轴的梁使用的二维三次形状函数 $N_i(x)$。获得了单元间位移和斜率的相容性。然而，检查形状函数发现遗漏了 $w=xy$ 项，以致常扭转状态变得不可能[2.2]。因此，这种单元未通过分片测试，亦不可使用。

早期对 12 自由度矩形单元的处理的另一种建议，就是用下面所列的非完备的三次型 12

项多项式

$$w = \lfloor 1 \;\; x \;\; y \;\; x^2 \;\; xy \;\; y^2 \;\; x^3 \;\; x^2y \;\; xy^2 \;\; y^3 \;\; x^3y \;\; xy^3 \rfloor \{\mathbf{a}\} \qquad (15.2-4)$$

其中，$\{\mathbf{a}\}$中的 12 个分量 a_i 是广义自由度。这种单元的法向斜率不具备相容性，例如，沿 $x=$常数的公共边，相邻两个单元一般有不同的 $w_{,x}$ 值。随着网格细化，这种不相容性会趋于 0，同时单元的性能也令人满意，但是这种单元不能推广到非矩形形状[3.3,15.7]。

三角形单元存在不同的困难[3.3,15.7,15.8]。对于每个节点有 3 个自由度和仅有顶节点，需要 9 个自由度。而完备的三次多项式有 10 项，包括三次项 x^3，x^2y，xy^2 和 y^3。如果其中的任何一项漏掉，都会使多项式不平衡；沿单元边的侧向位移表达式决定于该边在 xy 坐标系里的取向，形成的单元缺乏几何各向同性。如果将中间的两个三次项合并为一项 x^2y+xy^2，3.2 节中描述的转换矩阵$\{\boldsymbol{d}\}=[\boldsymbol{A}]\{\mathbf{a}\}$对某些单元形状会产生奇异矩阵$[\boldsymbol{A}]$。如果在这 9 个顶点自由度中，再添加形心的横向位移，以至于用上所有的 10 项，则单元不收敛。可以把 $w=w(x,y)$表示成完全的四次多项式(共 15 项)来避免上述麻烦，但这要求一个不利的结点自由度安排，例如，把顶点自由度 $w_{,xy}$ 和边中节点的法向转角添加到常用的 9 节点自由度上。如果边中节点自由度是可接受的，则简单的方案是 6 自由度的常曲率单元，基于完全的二次型多项式但有难处理的自由度安排：顶点的横向位移和边中节点的法向转角[15.9]。这种单元有“混合”形式，也带有 6 个自由度，其中用弯矩自由度项替换了转角自由度项，但这种安排甚至更难处理了[15.10]。这些困难的补救措施包括：利用面积坐标(7.3 节)保证几何各向同性(3.9 节)；用复杂的四次项扩展面坐标的三次项，以及把三角形分割成 10 自由度的子三角形，同时在子三角形间强加连续性关系。

像这样的努力会得到许多通过分片试验并随网格细化正常收敛的单元。这类单元是“精确”克希霍夫单元，其中横向剪切变形在整个单元内认为为 0。在工程实际中，这类单元似乎逐渐被“离散”克希霍夫单元取代，其中仅只在所选位置强加横向剪切应变为 0 的约束。

离散克希霍夫(DK)单元 常用于这些单元的名字是 DKT -三角形单元和 DKQ -矩形单元。列式以对于横向位移和中面法线转角的独立的场量开始。在这一点上，DK 单元与 Mindlin 单元是相似的。不过，在 Mindlin 单元中，材料的横向剪切刚度使场量隐式耦合，而在 DK 单元中，则是通过在选定位置处强制剪切应变为 0 使场量显式耦合。DK 单元的列式概述如下[15.11]。

启动点是有顶点和边中节点的直边三角形(图 15.2-1(a))。其厚度方向线的转动分量用节点的转角 ψ_{xi}，ψ_{yi} 插值，并用完备的二次多项式表示。

$$\psi_x = \sum_{i=1}^{6} N_i \psi_{xi} \qquad \psi_y = \sum_{i=1}^{6} N_i \psi_{yi} \qquad (15.2-5)$$

形状函数 N_i 由式 7.1-2 或 7.3-4 给出。仅在单元边上用顶点自由度定义横向挠度 w。在每个单元边上，w 是边切向坐标 s 的三次式。边中点斜率 $w_{,s}$ 可从图 2.3-1(或图 3.2-4)由梁的形状函数用一次微分在跨度中点计算得到。因此，在如边 2-3 的中点处，

$$w_{,s5} = \frac{3}{2L_{23}}(w_3 - w_2) - \frac{1}{4}(w_{,s2} + w_{,s3}) \qquad (15.2-6)$$

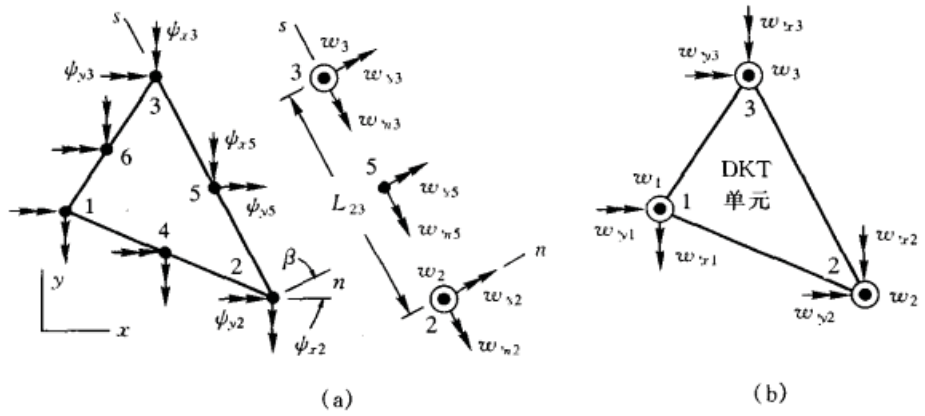


图 15.2-1 (a) 在 DKT 单元列式中所用的自由度；
(b) 有图示 9 自由度的最终 DKT 单元

在其它两个边上可导出类似的关系式。斜率 $w_{,s}$ 与 $w_{,x}$ 和 $w_{,y}$ 的关系是 $w_{,s}=-w_{,x}\sin\beta+w_{,y}\cos\beta$。因此，式 15.2-6 把 $w_{,s5}$ 与节点 2,3 处的 $w,w_{,x},w_{,y}$ 联系起来。边中点斜率 $w_{,s}$ 并不是作为自由度而引入，但在下面第 2 步中要用到。

至此，我们引入了 21 个自由度：6 个节点上的 ψ_{xi},ψ_{yi} 以及三个顶端节点上的 $w_i,w_{,xi}$ 和 $w_{,yi}$。为得到一个 9 自由度单元，即三个顶节点上的自由度 $w_i,w_{,xi}$ 和 $w_{,yi}$，这就需要施加 12 个约束。下面列出这些约束。

1. 横向剪切应变 γ_{xz} 和 γ_{yz} 在顶点节点上成为 0。于是，由式 15.1-1，我们得到 6 个约束：

$$\psi_{xi}=w_{,xi},\quad \psi_{yi}=w_{,yi}\quad (i=1,2,3) \tag{15.2-7}$$

2. 在边中节点上的横向剪切应变 γ_{sz} 为零，由此可得 3 个约束方程

$$\psi_{si}=w_{,si}\quad (i=4,5,6)\qquad 其中\quad \psi_s=-\psi_x\sin\beta+\psi_y\cos\beta \tag{15.2-8}$$

3. 各条边上的法向斜率呈线性变化，于是有

$$\psi_{n4}=\frac{1}{2}(w_{,n1}+w_{,n2})\quad \psi_{n5}=\frac{1}{2}(w_{,n2}+w_{,n3})\quad \psi_{n6}=\frac{1}{2}(w_{,n3}+w_{,n1}) \tag{15.2-9}$$

其中 $\psi_n=\psi_x\cos\beta+\psi_y\sin\beta\quad w_{,n}=w_{,x}\cos\beta+w_{,y}\sin\beta$

应用前面的 12 个约束之后，12 个节点转角 ψ_{xi} 和 ψ_{yi} $(i=1,2,\cdots,6)$ 就都可以用顶点节点的 9 个自由度 $w_i,w_{,xi}$ 和 $w_{,yi}$ 来表示了。使用如第 8 章中转换矩阵的符号，这个关系式为

$$\lfloor\ \psi_{x1}\ \ \psi_{y1}\ \ \psi_{x2}\ \ \cdots\ \ \psi_{y6}\ \rfloor^{\mathrm{T}}=\underset{12\times 9}{[\boldsymbol{T}]}\lfloor\ w_1\ \ w_{,x1}\ w_{,y1}\ \ w_2\ \ \cdots\ \ w_{,y3}\ \rfloor^{\mathrm{T}} \tag{15.2-10}$$

由式 15.1-1 得单元应变

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=-z[\partial]\begin{Bmatrix}\psi_x\\ \psi_y\end{Bmatrix}\quad 其中\quad [\partial]=\begin{bmatrix}\partial/\partial x & 0\\ 0 & \partial/\partial y\\ \partial/\partial y & \partial/\partial x\end{bmatrix} \tag{15.2-11}$$

方程 15.2－5，15.2－10，和 15.2－11 得到应变$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}=\lfloor \varepsilon_x\ \varepsilon_y\ \gamma_{xy}\rfloor^{\mathrm{T}}$。

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}=\underbrace{-z[\partial]\begin{bmatrix}N_1 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & N_6 & 0\\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & N_6\end{bmatrix}}_{[B]}[\boldsymbol{T}]\underbrace{\lfloor w_1\ w_{,x1}\ w_{,y1}\ w_2\ \cdots\ w_{,y3}\rfloor^{\mathrm{T}}}_{\{d\}} \tag{15.2-12}$$

运用式 7.2－9 这样的表达式产生 N_i 的导数。单元的应变能可由方程组 15.2－1 的第一式给出。沿厚度积分后，式 15.2－3 给出 9×9 的单元刚度矩阵$[\boldsymbol{k}]$，其中对于各向同性材料，矩阵$[\boldsymbol{D}]$由方程 15.1－4 求得。图 15.2－1(b)示出了式 15.2－12 中的自由度$\{\boldsymbol{d}\}$。软件中所用的自由度可能是用 θ_x 代替 $w_{,y}$ 和用 $-\theta_y$ 代替 $w_{,x}$。一旦求解 FE 模型来计算出自由度$\{\boldsymbol{d}\}$后，就可以由式 15.2－12 计算出应变，再由式 15.1－3 计算出应力，继而由式 15.1－2 得到弯矩。

对于厚度均匀的单元，$[\boldsymbol{k}]$可用三点积分法则精确积分。能得到显性列式[15.12]，并在文献[15.13]中列出了$[\boldsymbol{k}]$的 Fortran 代码。已发现最初的 DKT 列式[15.14]在它引入后经过十年仍然是最好的 3 节点板单元之一[15.11]。把前面的列式法扩展到四个边，就产生了四边形 DKQ 单元[2.17]。在文献[2.17，15.15～15.17]中，介绍了对于 DKT 和 DKQ 单元的一些改进方法，其中文献[15.15]还提供了 Fortran 代码。

因为 w 只沿单元各边定义，所以得不到单元载荷向量和基本弹性刚度矩阵的协调性列式。以特别的方式定义 $w=w(x,y)$能够获得适用的形式。还有，在单元内定义 w 的 DKT 单元的其它列式[2.17]。

从文献[15.14，15.17]摘录了用 DKT 单元获得的数值结果，列于表 15.2－1。如图 15.2－2(a)所示，网格是均匀的，板象限每边有 N_{es} 个单元。在每种试验情况下，完整板所有四个棱边有相同的边界条件，或者是固支的或者是简支的(软形式；见 15.5 节)。单元受分布载荷作用时，可把单元总载荷的 1/3 分配到它的每个顶点节点上，使分布载荷相对集中。表 15.2－1中的结果是对 $\nu=0.3$ 而言的，并作为计算挠度与精确挠度的比值，如文献[10.2]所述。在文献[15.11，15.12]中报道的补充结果表明，DKT 单元在大纵横比时性能很好，并且在求解“扭带”算例中能得到满意结果。

表 15.2－1 正方形板中心的挠度 w_c 与弯矩 M_c，用 DKT 单元计算[15.14,15.17]。精确值＝1.000。说明见正文

网格	均匀加载				中心集中载荷	
图 15.2－2(a)	简支		固支		简支	固支
	w_c	M_c	w_c	M_c	w_c	w_c
$N_{es}=1$	1.025	1.355	1.500	2.258	1.076	1.012
$N_{es}=2$	0.999	1.078	1.228	1.330	1.008	1.046
$N_{es}=4$	1.001	1.017	1.069	1.089	1.003	1.019
$N_{es}=8$	1.001	——	1.021	——	1.001	1.007

在软件中，用作四边形的单元实际上能够用两个或四个三角形来构成。当用两个三角形构建时，如图 15.2－2(a)所示，如果四边形不是矩形则沿短对角线划分。当用四个三角形构建时，用两条对角线产生两组重叠的三角形，如图 15.2－2(b)所示。重叠两次来表示四边形，

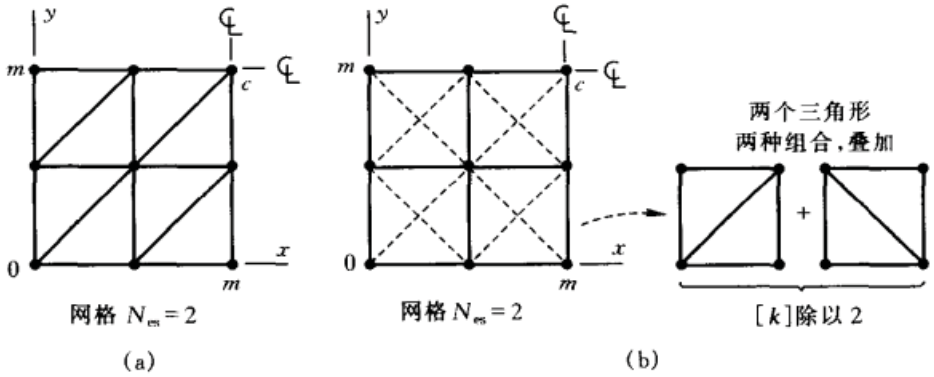


图 15.2-2 正方形板在一个象限中的网格图。边 $x=0$ 和 $y=0$ 上有支撑，并相对于两条中心线对称
(a) 多个或两个三角形组成四边形；(b) 每个四边形由四个重叠的三角形构成

所以由此得到的刚度矩阵必须除以 2。另一方面，四个不重叠的三角形可以共享一个内节点，该节点的自由度在将四边形单元组集成有限元结构前，已被缩减掉。四个三角形排列避免了两个三角形排列时会出现的方向偏差。表 15.2-2 列出了由重叠的 4 个 DKT 三角形构建的四边形均匀网格提供的结果，如图 15.2-2(b)所示。我们可以看到，这种排列没有图 15.2-2(a)那样易于弯曲。这个性能至少可以部分地由下面的注释来说明，即在 $x=y=0$ 处有 90°角的三角形比四边形单元中其它三角形受到支撑提供的更完全的约束；事实上对于夹固边情况，这种三角形就完全没有变形。图 15.2-2(b)中的中心板节点因下述原因也得到较小的载荷。设均匀的分布载荷在图 15.2-2(a)中每个三角形上产生一个力 F，因此 $F/3$ 的力作用在每个三角形顶点上。考虑图 15.2-2 中右上节点，在图 15.2-2(a)中它得到的力是 $2(F/3)$，而在图 15.2-2(b)中它得到的力是 $3(F/3)/2=1.5(F/3)$。

表 15.2-2 受均布载荷的正方形板。单元是由四个三角形组成的四边形(图 15.2-2(b))。w_c=中心挠度，M_c=中心弯矩，M_{xy0}是点 $x=y=0$ 处的扭矩，M_m 是棱边中点处的弯矩。精确值=1.000

网格	简支边			固支边		
图 15.2-2(b)	w_c	M_c	M_{xyc}	w_c	M_c	M_m
$N_{es}=1$	0.803	1.367	0.488	1.177	1.878	0.689
$N_{es}=2$	0.945	1.095	0.849	1.084	1.277	0.935
$N_{es}=4$	0.986	1.024	0.955	1.025	1.064	0.942
$N_{es}=8$	0.997	1.006	0.987	1.010	1.010	0.961
$N_{es}=16$	1.000	1.001	0.996	1.006	0.996	0.979

15.3 C^0(Mindlin)板单元

受经典板理论的影响，早期的板单元都是克希霍夫类板单元。作为三维实体等参单元的特殊形式，Mindlin 板单元是后来才出现的。图 15.1-2(a)所示的板单元的三维“母体”单元是个有 8×3=24 个自由度的 8 节点实体单元。含有 n 个节点的 Mindlin 板单元的横向挠度

和转角可以表示为

$$\begin{Bmatrix} w \\ \psi_x \\ \psi_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \psi_{xi} \\ \psi_{yi} \end{Bmatrix} \quad \text{或} \quad \{\boldsymbol{u}\} = [\boldsymbol{N}]\{\boldsymbol{d}\} \tag{15.3-1}$$

这里用于各个位移分量的形状函数是相同的。这是最简单明了的排列，但这不是唯一的，也不是最好的。在母体三维单元中，存在应变 ε_z，但式 15.1－1 和 15.3－1 舍去了在板单元中未定义的应变 ε_z，而 ε_z 能避免由于小厚度引起的病态。基于方程 15.3－1 的板单元列式在很大程度上是按二维等参单元的方式进行的。

Mindlin 板单元和它的三维母体单元都有着同样的缺陷，例如，因单元太薄出现的剪切锁定，和因欠积分而出现的寄生模式。尽管概念简单，要产生足够健全的包含在面向用户软件中的 Mindlin 板单元并非易事。在本节，我们介绍单元的列式和一些已发现的混乱，以及引入 Mindlin 板单元后立刻修正的建议。补充修正在 15.4 节中加以概述。

列式　曲率和横向剪切应变两项出现在式 15.1－5 中的 $\{\boldsymbol{\kappa}_M\}$ 数组中。对于 $\{\boldsymbol{u}\} = \lfloor w \ \ \psi_x \ \ \psi_y \rfloor^{\mathrm{T}}$，我们从式 15.1－1 和 15.1－5 得到

$$\{\boldsymbol{\kappa}_M\} = \begin{Bmatrix} \psi_{x,x} \\ \psi_{y,y} \\ \psi_{x,y} + \psi_{y,x} \\ \psi_x - w_{,x} \\ \psi_y - w_{,y} \end{Bmatrix} = [\partial][\boldsymbol{u}] \quad \text{其中} \quad [\partial] = \begin{bmatrix} 0 & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \\ -\partial/\partial x & 1 & 0 \\ -\partial/\partial y & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{15.3-2}$$

根据式 15.3－1 和 15.3－2，对于有 n 个节点的单元

$$\{\boldsymbol{\kappa}_M\} = \underset{5\times 3n}{[\boldsymbol{B}_M]}\{\boldsymbol{d}\} \quad \text{其中} \quad [\boldsymbol{B}_M] = [\partial][\boldsymbol{N}] = \begin{bmatrix} 0 & N_{1,x} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,y} & \cdots & N_{n,y} \\ 0 & N_{1,y} & N_{1,x} & \cdots & N_{n,x} \\ -N_{1,x} & N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -N_{1,y} & 0 & N_1 & \cdots & N_n \end{bmatrix} \tag{15.3-3}$$

由于节点位移引起的单元应变能 U 和单元刚度矩阵是

$$U = \frac{1}{2}\{\boldsymbol{d}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{k}]\{\boldsymbol{d}\} \quad \text{和} \quad [\boldsymbol{k}] = \int [\boldsymbol{B}_M]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{D}_M][\boldsymbol{B}_M]\mathrm{d}A \tag{15.3-4}$$

其中 $[\boldsymbol{D}_M]$ 已在式 15.1－5 中作了说明。一般来说，在中面内使用等参坐标 ξ 和 η，因此，$\mathrm{d}A = J\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$，其中 J 是雅可比行列式。对于 4 节点和 8 节点板单元，形状函数 $N_i = N_i(\xi,\eta)$ 分别由式 6.2－3 和 6.4－1 给出。式 15.3－3 中所需要的形状函数的导数形式，通常由转换（式 6.2－7）给出

$$N_{i,x} = \Gamma_{11} N_{i,\xi} + \Gamma_{12} N_{i,\eta} \qquad N_{i,y} = \Gamma_{21} N_{i,\xi} + \Gamma_{22} N_{i,\eta} \tag{15.3-5}$$

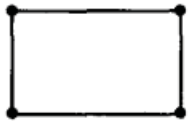
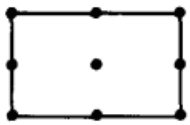
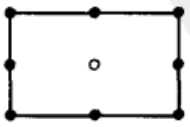
单元刚度矩阵能够用弯曲刚度$[\boldsymbol{k}_b]$和横向剪切刚度$[\boldsymbol{k}_s]$的和来表示。为了将$[\boldsymbol{B}_M]$表示为弯曲项和横向剪切项之和，我们把$[\boldsymbol{B}_b]$定义为$[\boldsymbol{B}_M]$但最后两行取0，定义$[\boldsymbol{B}_S]$为$[\boldsymbol{B}_M]$但前三行取0，因此，$[\boldsymbol{B}_M]=[\boldsymbol{B}_b]+[\boldsymbol{B}_S]$。再由式15.3-4得

$$[\boldsymbol{k}] = \underbrace{\int [\boldsymbol{B}_b]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{D}_M][\boldsymbol{B}_b]\mathrm{d}A}_{[\boldsymbol{k}_b]} + \underbrace{\int [\boldsymbol{B}_S]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{D}_M][\boldsymbol{B}_S]\mathrm{d}A}_{[\boldsymbol{k}_S]} \tag{15.3-6}$$

耦合项$[\boldsymbol{B}_b]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{D}_M][\boldsymbol{B}_S]$和$[\boldsymbol{B}_S]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{D}_M][\boldsymbol{B}_b]$变为零是由于$[\boldsymbol{D}_M]$中零的贡献。下面的讨论描述了怎样单独考虑$[\boldsymbol{k}_b]$和$[\boldsymbol{k}_s]$使一些(但不是所有)单元克服缺陷。与式15.3-6有关的一些细节出现在15.4节。

单元性能 沿边观察图15.3-1第一列中所示的平行于它们中面的单元，它们或者是双线性单元(4节点)，或者是二次单元(8个或9个节点)。给它们的对边用设定的转动加载，因此位移不随y变化。表15.3-1中列出一种双线性单元和三种二次单元的平面视图，以及求

表15.3-1 精选Mindlin板单元的数据。积分法：R=缩减积分，S=选择积分，F=全积分；n_{sc}=每个单元的剪切约束数；n_{dof}=一个单元加到大网格上的自由度数；n_{mech}=每个不受支撑单元的机构数

单元类型		积分规则				
	类型	$[\boldsymbol{k}_b]$	$[\boldsymbol{k}_s]$	n_{sc}	n_{dof}	n_{mech}
 双线性单元：	R	1×1	1×1	2	3	4
4节点	S	2×2	1×1	2	3	2
12自由度	F	2×2	2×2	8	3	0
 Lagrange单元：	R	2×2	2×2	8	12	4
9节点	S	3×3	2×2	8	12	1
27自由度	F	3×3	3×3	18	12	0
 Serendipity单元：	R	2×2	2×2	8	9	1
8节点	S	3×3	2×2	8	9	0
24自由度	F	3×3	3×3	18	9	0
 Heterosis单元：	S	3×3	2×2	8	11	0
9节点	(参考文献[2.13]。忽略中心节点的自由度w；仅有ϕ_x和ϕ_y自由度)					
26自由度						

积专用术语。对于纯弯曲和纯扭转状态，$[\boldsymbol{k}_b]$的贡献可以用所有积分规则精确计算。问题出在式15.3-6中的$[\boldsymbol{k}_s]$。图15.3-1建议了避免剪切锁定所需的高斯积分阶次。在第一个例子中，双线性单元受纯弯曲作用，仅在$x=L/2$处横向剪切应变γ_{xz}是正确的。这个观察结果启示我们，对$[\boldsymbol{k}_s]$的积分应该在单元中心利用单个的高斯点。如果$[\boldsymbol{k}_s]$采用2×2高斯积分，

单元就会出现剪切锁定，这是由于单元为了表示弯曲而显示横向剪切引起的。这种特性恰好就像 3.6 节中对平面单元描述的那样。因此，式 3.6－11 表明，随着双线性板单元逐渐变薄，用 2×2 高斯积分会过高估计单元的弯曲刚度约 $(L/t)^2$ 倍。如果要求双线性单元显示它的线性变化弯矩，如图 15.3－1 中第二个例子，则没有避免过高估计单元 γ_{zr} 的积分规则。

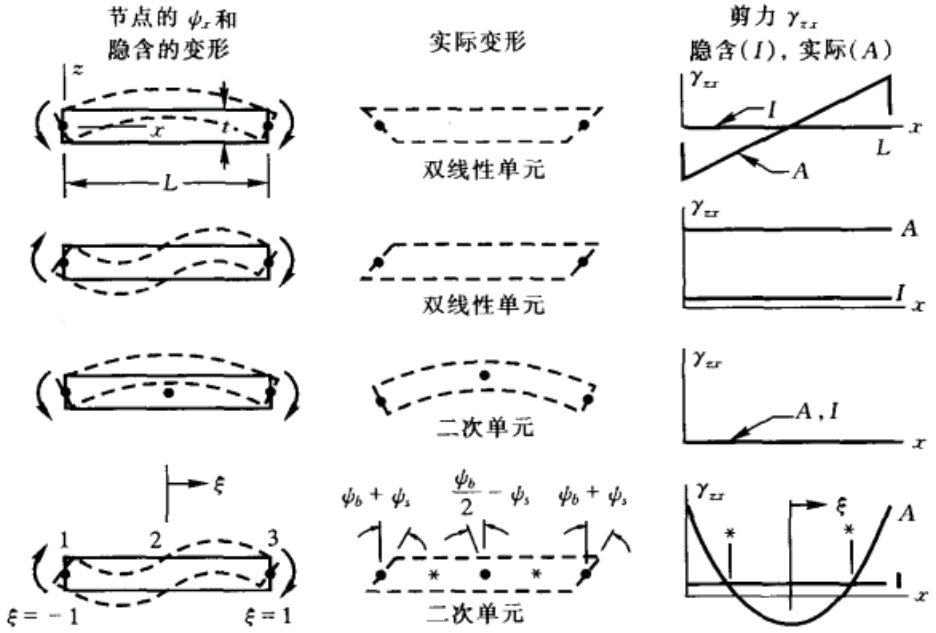


图 15.3－1　Mindlin 板单元边视图，平行于 y 轴的边产生图示的转动。平行于 y 轴观察单元

在 Mindlin 板单元中使用的每个高斯点都引入了剪切约束，这些约束在跨度-厚度比变得很大时迫使高斯点的横向剪切应变 γ_{yz} 和 γ_{zx} 趋于 0。换句话说，$[\boldsymbol{k}_s]$ 起到一个罚矩阵的作用，如 13 章中描述的那样。

图 15.3－1 中的后两个例子说明二次单元均匀弯曲和线性变化弯曲的情况。我们看到，不管积分规则如何，均能正确表示均匀弯曲。在二次单元中仅能用二阶高斯积分规则才能正确表示线性变化弯曲。为了明白确是如此，要注意到，线性变化弯曲伴随有恒定的横向剪切力，而这又与恒定的横向剪切转角 ψ_s 相关，像图 15.3－1 的最后一行所示那样。梁有同样的特性，初等梁理论证明，如果弯曲在末端产生转角 ψ_b，则在梁中点产生的转角为 $-\psi_b/2$。因此，利用式 6.1－4 的形状函数，作为无量纲坐标 ξ 函数的转角 ψ 为

$$\psi=\frac{1}{2}(-\xi+\xi^2)(\psi_b+\psi_s)+(1-\xi^2)\left(-\frac{1}{2}\psi_b+\psi_s\right)+\frac{1}{2}(\xi+\xi^2)(\psi_b+\psi_s) \tag{15.3-7}$$

其中在梁端点处 $\xi=\pm1$，ψ 在这个练习中取顺时针方向为正。曲率 $\psi_{,x}=(2/L)\psi_{,\xi}$，而弯矩 M 在梁的中间跨度位置为 0，像梁理论要求的那样。但是整个单元内 $w=0$，因为各节点处 $w=0$，这样横向剪切应变 γ_{zx} 就完全由 ψ 确定了。为了确定能正确表示 γ_{zx} 的 ξ 值，我们设 $\psi=\psi_s$，并从式 15.3－7 求得 $\xi=\pm1/\sqrt{3}$，这正是二阶积分法则高斯点的位置。

前面的讨论建议生成 Mindlin 板单元的刚度矩阵应该用缩减积分。$[\boldsymbol{k}_b]$ 和 $[\boldsymbol{k}_s]$ 两者的缩

减积分会由于寄生模式(机构)导致$[k]$的不满秩。4 节点双线性单元的单点积分仅引入二个剪切约束,在γ_{yz}和γ_{zx}上各一个,并允许保留 4 个机构。对于中心在$x=y=0$处和有常数c_i的单元,这些机构是:(1) $w=\phi_y=0,\phi_y=c_1xy$,这类似于图 15.3-1 中的第一个例子,但随 y 变化;(2) 类似模式,$w=\phi_x=0,\phi_y=c_2xy$;(3) $w=0,\phi_x=-c_3y,\phi_y=c_3x$,其中上下单元表面绕 z 轴以相反方向转动;(4) w-砂漏模式,$w=c_4xy,\phi_x=\phi_y=0$,这除了中面法线不转动外类似于图 15.1-4(c)的纯扭转模式。在带有用"稳定"矩阵抑制寄生模式的动力学和非线性应用中,单点积分的经济性可能是重要的,像在文献[15.18,15.19]中对板描述的那样,对其他问题的论述在文献[3.3,6.13~6.15]中。

二次型板单元的缩减积分(2×2)并不能抑制同样出现在平面单元中的机构(对于板单元,在图 6.8-3 中以 $u=-z\phi_x$ 和 $v=-z\phi_y$ 替代)。这些模式在 Serendipity 单元中包括可能的单个机构,在 Lagrange 单元中包括可能的三个机构。在 Lagrange 板单元中包括第四个可能的机构,对于单元中心处 $x=y=0$,边长为两个单位的正方形单元最简单的表述是 $\phi_x=\phi_y=0$,$w=c(3x^2y^2-x^2-y^2)$,其中 c 是个常数。在比较厚的 Lagrange 单元中,这种机构会产生位移振荡[2,13]。但在表 15.3-1 中的"Heteriosis"单元中是不可能的,因为 x^2y^2 项在其 w 场中并不存在。

一些麻烦的机构可以用选择积分的方法加以避免,在那里,使用一种比用于$[k_b]$的规则更低阶的规则来积分$[k_s]$。从表 15.3-1 中可以看出选择积分法的效果。保留在双线性单元中的两个机构是在前面第二段中可看作与(3)和(4)相同的机构。机构(3)在单元间不传递,因此在多于一个单元的网格中不引起麻烦。机构(4)是可传递的。Lagrange 单元中的保留机构,就是前面提到的机构 $\phi_x=\phi_y=0,w=c(3x^2y^2-x^2-y^2)$,它也是可传递的。可传递机构可能比较麻烦,因为届时一种载荷模式会激励单元中的机构远离可能由支撑提供的约束。

在表 15.3-1 中引用的单元性能显示在图 15.3-2 中,它在固支正方形板上用了 8×8 网格。剪切锁定很明显。由于板变薄了,完全积分双线性单元和任意积分的 Serendipity 单元因过低估计中心挠度全都失败了。这能够从表 15.3-1 中用应用到图 13.5-1(b)的相同的"约束-计数"理论得到解释。以图 13.5-1(b)中增加单元 10 的方式考虑单个单元附加到大网格上的情况。每个增加的板单元,对网格产生 n_{dof}个自由度和 n_{sc}个剪切约束。如果 $n_{dof}-n_{sc}$是 0 或是负数,满足剪切约束需要所有附加的自由度,无滞后地对结构响应建模。然而在图 15.3-2中一些单元是失败的,即使"单元计数"为 $n_{dof}-n_{sc}=+1$。这种情况发生是因为边界条件施加了足够的附加约束使相应的"结构计数"为 0 或为负数,因此锁定了网格。对于带选择积分的 Serendipity 单元,在整个板上有 $N\times N$ 网格和固支边,除非 $N\geqslant 12$,否则结构计数是负的[15.22]。仅有 Heterosis 单元无麻烦机构,并在图 15.3-2 中是满足的。但 Heterosis 单元因单元形状不是矩形或平行四边形,因而不能通过分片测试[2.17,3.3]。此外,Lagrange 单元和 Heterosis 单元有边节点,因而要求的列式计算比双线性单元要多。在动力学和非线性应用中高的计算费用可能是很不利的因素。

图 15.3-2 右边部分无限上升的曲线表明在一个没有遭受剪切锁定的网格中发散到数值病态。当罚矩阵$[k_s]$在数值上变得很大时,它可能淹没$[k_b]$中有用的信息。在 13.3 节中也看到这类潜在的难题。虽然与矩阵$[k_s]$相关,但这个性能并没有锁定,因为这不是由于锁定一个所希望的变形模式引起的。

我们的结论是,尽管选择积分,但本节所讨论的 C^0 单元中无论哪一个都不是完全充分的。

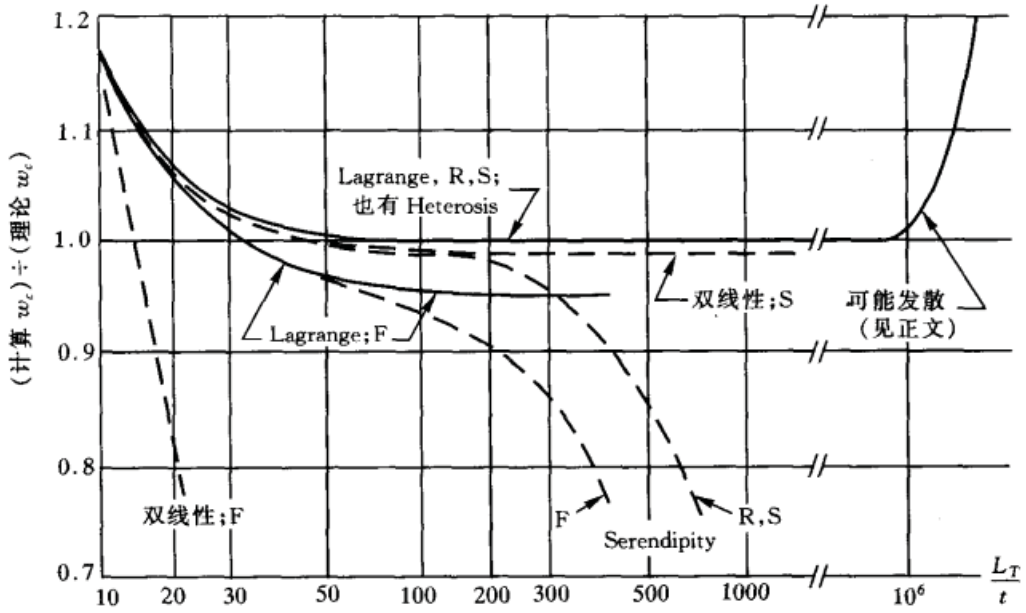


图 15.3-2　边长为 L_T，各边固支，用 8×8 网格建模的正方形板受均布载荷的中心挠度[15.20,15.21]。积分规则的符号见表 15.3-1

对于好的 C^0 板单元研究所用的更多的方法在下一节概述。

15.4　Mindlin 梁·C^0板单元的更多方法

尽管 Mindlin 板单元有缺陷，但开发人员仍喜欢用 Mindlin 板单元而不是 Kirchhoff 板单元，因为 Mindlin 板单元提供了更多的改进空间，而且更容易扩展为壳单元。单元选择的目标是无剪切锁定和寄生模式，以通过分片试验，不用大量地细化网格仍能达到精度要求，并在单元形状畸变时精度损失小。正如所料，已经研究了许多方法，单个的和组合的。下面介绍其中一些，所引论文列出了许多参考文献。在文献[15.23]中有所概述。

我们首先分析均质、各向同性材料的 Mindlin 梁单元。通过梁单元，可以简洁地说明一些列式细节和在 Mindlin 板单元中使用的改进方法。

Mindlin 梁　如图 15.4-1 所示的 2 节点平面梁单元，其横向挠度和转动场量是

$$\begin{aligned} w &= \lfloor N_1 \;\; 0 \;\; N_2 \;\; 0 \rfloor \{\boldsymbol{d}\} \\ \psi &= \lfloor 0 \;\; N_1 \;\; 0 \;\; N_2 \rfloor \{\boldsymbol{d}\} \end{aligned} \quad \text{其中} \quad N_1 = \frac{L-x}{L} \qquad N_2 = \frac{x}{L} \qquad \{\boldsymbol{d}\} = \lfloor w_1 \;\; \psi_1 \;\; w_2 \;\; \psi_2 \rfloor^{\mathrm{T}} \tag{15.4-1}$$

应变是 $\varepsilon_x = -z\psi_{,x}$，$\gamma_{xz} = w_{,x} - \psi$。弯曲时单元的应变能 U_b 和受横向剪切时的应变能 U_S 分别为

$$U_b = \int\!\!\int\!\!\int_0^L \frac{1}{2} E\varepsilon_x^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}A = \int_0^L \frac{1}{2} EI\psi_{,x}^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\{\boldsymbol{d}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{k}_b]\{\boldsymbol{d}\} \tag{15.4-2a}$$

$$U_s = \iint_0^L \frac{1}{2}G\gamma_{zr}^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}A = \int_0^L \frac{1}{2}GA_s(w_{,x}-\psi)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\{\boldsymbol{d}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{k}_s]\{\boldsymbol{d}\} \quad (15.4-2\mathrm{b})$$

其中 A 是截面面积，A_s 是梁在抵抗横向剪切变形时的“有效”截面面积。对于矩形横截面，γ_{zr} 在如图 15.4-1 所示的 t 尺寸上呈抛物线变化，并且 $A_s=5A/6$。对于均匀梁和精确积分，式 15.4-1 和 15.4-2 得到

$$[\boldsymbol{k}_b] = EI\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1/L & 0 & -1/L\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1/L & 0 & 1/L\end{bmatrix}, \quad [\boldsymbol{k}_s] = GA_s\begin{bmatrix}1/L & 1/2 & -1/L & 1/2\\ 1/2 & L/3 & -1/2 & L/6\\ -1/L & -1/2 & 1/L & -1/2\\ 1/2 & L/6 & -1/2 & L/3\end{bmatrix} \quad (15.4-3)$$

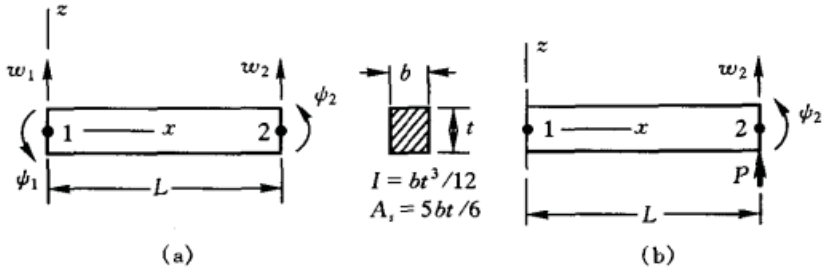


图 15.4-1 (a) 矩形截面的 Mindlin 梁单元；
(b) 端部受力的悬臂梁

采用两点高斯积分时，得到同样的结果。对于单点高斯积分，式 15.4-1 和 15.4-2 得

$$[\boldsymbol{k}_b] = EI\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1/L & 0 & -1/L\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1/L & 0 & 1/L\end{bmatrix}, \quad [\boldsymbol{k}_s] = GA_s\begin{bmatrix}1/L & 1/2 & -1/L & 1/2\\ 1/2 & L/4 & -1/2 & L/4\\ -1/L & -1/2 & 1/L & -1/2\\ 1/2 & L/4 & -1/2 & L/4\end{bmatrix} \quad (15.4-4)$$

单点积分得到梁单元精确的$[\boldsymbol{k}_b]$，但对于板单元就不是了，因为板单元是二维的。

锁定 考虑图 15.4-1(b)中一个单元的悬臂梁问题，对于它，

$$\left(EI\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1/L\end{bmatrix}+GA_s\begin{bmatrix}1/L & -1/2\\ -1/2 & l\end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}w_2\\ \psi_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}P\\ 0\end{Bmatrix} \quad (15.4-5)$$

其中，对精确积分，$l=L/3$，而采用单点积分时，$l=L/4$。对于精确积分，$l=L/3$，式 15.4-5 得到

$$w_2 = \frac{12EI+4GA_sL^2}{12EI+GA_sL^2}\left(\frac{PL}{GA_s}\right) \quad \psi_2 = \frac{6PL^2}{12EI+GA_sL^2} \quad (15.4-6)$$

式 15.4-6 的意义是易于看出的，如果我们设 $\nu=0$，则 $E=2G$，考虑一矩形截面，对其大的分数

项，代入 $I=bt^3/12, A_s=5bt/6$。因此

$$w_2=\frac{12(t/L)^2+20}{12(t/L)^2+5}\left(\frac{PL}{GA_s}\right)\quad \psi_2=\frac{30}{12(t/L)^2+5}\left(\frac{P}{GA_s}\right) \tag{15.4-7}$$

对于很深的梁，t/L 项将起主导作用，并且 w_2 是趋近于横向剪切变形时的准确值 PL/GA_s 的。但对于细长梁，t/L 很小，此时 w_2 趋近于 $4PL/GA_s$，没有来自弯曲的贡献。这个结果显然表示剪切锁定。相反，采用缩减积分，当式 15.4-5 中 $l=L/4$，我们可得

$$w_2=\left(1+\frac{4EI}{GA_sL^2}\right)\left(\frac{PL^3}{4EI}\right)\quad \psi_2=\frac{PL^2}{2EI} \tag{15.4-8}$$

这里，ψ_2 是准确值，并与 A_s 无关。随着梁变得细长，I 比 A_s 更快地趋近于 0，尽管其极限挠度 $PL^3/4EI$ 不是准确值(其准确值应为 $PL^3/3EI$)，但不会发生锁定行为。这也正是选用缩减积分求 Mindlin 板单元和梁单元的$[\boldsymbol{k}_s]$的原因。正如式 13.4-3 后面的论述，$[\boldsymbol{k}_s]$是一个罚矩阵，我们希望它是奇异的，并能够由单点积分法求得。

改进性能 若用修正后的剪切刚度 GA^* 替换 GA_s，式 15.4-8 碰巧对于深梁和细长梁都能产生正确的结果。当用 GA^* 替换 GA_s 时，我们用求式 15.4-8 产生精确挠度的方法可以获得 GA^* 的表达式。因此

$$w_2=\left(1+\frac{3EI}{GA_sL^2}\right)\left(\frac{PL^3}{3EI}\right)=\left(1+\frac{4EI}{GA^*L^2}\right)\frac{PL^3}{4EI}\quad \text{于是}\quad GA^*=\left(\frac{L^2}{12EI}+\frac{1}{GA_s}\right)^{-1} \tag{15.4-9}$$

MacNeal 称这一修正为“剩余弯曲柔度”[3.3]，这个思想不晚于 1953 年。这样改进，使单点积分求$[\boldsymbol{k}_s]$的 Mindlin 梁的性能特点与式 2.3-6 描述的铁木辛柯梁相似，不仅适用于端点受载的悬臂梁情况，而且对于任意支撑和载荷情况的 2 节点单元也适用。这种修正方法在包括文献[15.24～15.28]提到的好几种板单元中起着重要作用。利用 GA^* 还可以防止在梁变细长时$[\boldsymbol{k}_s]$中的项变得比$[\boldsymbol{k}_b]$中的项大得多。

使用这种调整因子还是有些不方便，对于非均质、各向异性或者非线性材料，如何恰当地选择，可能也不大明确。

替换位移场 在 Mindlin 梁中，横向剪切变形为 $\gamma_{xz}=w_{,x}-\psi$。在式 15.4-1 中，w 和 ψ 都由线性形状函数定义，因此，$w_{,x}$是个常数，而 ψ 是 x 的线性函数。有人会认为剪切锁定是由于这种不协调造成的。采用式 3.10-1 中使用的相同二次型，我们可以把横向挠度表示为二次函数形式，而 ψ 仍保留为一次函数形式。因此

$$w=\frac{L-x}{L}w_1+\frac{x}{L}w_2+\frac{x(L-x)}{2L}(\psi_1-\psi_2)\qquad \psi=\frac{L-x}{L}\psi_1+\frac{x}{L}\psi_2 \tag{15.4-10}$$

于是

$$\gamma_{xz}=w_{,x}-\psi=\frac{w_2-w_1}{L}-\frac{\psi_1+\psi_2}{2} \tag{15.4-11}$$

对 w 和 ψ 都采用线性插值，并计算平均值 γ_{xz}，即 $w_{,x}-\psi$ 在长度 L 上的积分乘以 $1/L$，由此可

以得到同样的结果。由式 15.4－1 和使用单个高斯积分点提供的 γ_{zr} 也可在整个 Mindlin 梁内由式 15.4－11 得到。现在选择积分已无益处，人们可以更直接的方式对[k_b]和[k_s]进行完全积分。对于板建议用更精细的替换场量，参考文献见[15.27,15.29,15.30]。四边形板单元可利用替换场量，这些场量取决于边中点位置或位于等参坐标 ξ 和 η 轴上内点的横向剪应变[2.13,2.14,3.3,15.29,15.31]。其它一些不协调位移模式在文献[15.32]中也做了研究。

"离散剪切"单元 像在离散克希霍夫单元中，不是在选定点处施加零横向剪切变形，而是在这些点处施加准确的剪切变形。这种方法的一个例子就是"离散剪切三角形"，或者是 DST 板单元[15.33]。为了用梁来说明这个思想，我们必须想象图 15.4－1(a)的梁单元跨度中间有个节点，在该处定义转角 ϕ_m，使其成为用节点自由度 ϕ_1，ϕ_m 和 ϕ_2 表示的 x 的二次函数。初始横向挠度取作 x 的三次函数，用端点 1 和 2 处的 w 及 $w_{,x}$ 表示。设弯矩 M 和横向剪力 Q 的正负号取法以图 15.1－3 中所示方向为正。横向受力平衡方程和弯矩-曲率关系为

$$\left.\begin{aligned} Q &= \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} \\ M &= -EI\,\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} \end{aligned}\right\} \quad \text{于是} \quad Q = -EI\,\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} \text{ 和 } \gamma_{xz} = \frac{Q}{GA_s} = -\frac{EI}{GA_s}\,\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} \tag{15.4-12}$$

但像在式 15.4－2b 中一样，也有 $\gamma_{xz}=w_{,x}-\psi$。用三个梁节点中每一处两个 γ_{xz} 表达式相等的方法，我们可以消掉 $w_{,x1}$，$w_{,x2}$ 和中点转角 ϕ_m，于是保留的梁单元自由度为 ϕ_1，ϕ_2，w_1 和 w_2。当梁变得无限细长时，在两端和中点处施加克希霍夫约束 $w_{,x}=\psi$，没有出现类似于式 15.4－4 的矩阵[k_s]中的大罚约束系数的情况。对于一个三角形板单元[15.33]，当厚度变小时，列式提供了一个 9 自由度单元，它简化成 15.2 节描述的 DKT 单元。

其它变分原理 有位移自由度的单元不必要基于稳态势能原理。好的板单元从混合和杂交原理中，以它们不同的形式产生。它们允许内应力，或内应变，或位移，或它们组合的独立假设；它们允许单元内的平衡方程由所用的形式显式满足或由 Lagrange 因子隐式满足；它们允许在假定边界场域形式中是自由的。对于混合和杂交单元以及基于位移单元，可以运用本节前面综述的方法。剪切挠性梁单元用 4.10 节后面部分的杂交原理列式。从其发展中，我们看到杂交法易于提供的优点：当梁变细时，或板变薄时，没有剪切锁定，在刚度矩阵中也没有大的惩罚项出现。讨论混合和杂交板单元的论文包含在文献[15.23,15.27,15.29,15.30,15.34]中。

15.5 边界条件·试验问题

边界条件 板边的支撑条件可以是自由、固支或简支。沿板的整个边界并不是只能有一种支撑条件。如果一个板含有一条对称或反对称线，那么这条线可以作为 FE 模型的一条附加适当边界条件的边。在图 15.5－1 的符号中，板的边界条件如下

自由边：	$M_n=0$	$M_{ns}=0$	$Q_n=0$	(15.5－1a)
固支边：	$w=0$	$\psi_s=0$	$\psi_n=0$	(15.5－1b)
简支边：	$w=0$	$M_{ns}=0$	$M_n=0$	(15.5－1c)

关于 s 轴对称：　$\psi_n=0$　$M_{ns}=0$　$Q_n=0$　(15.5-1d)

关于 s 轴反对称：　$w=0$　$\psi_s=0$　$M_n=0$　(15.5-1e)

在典型的有限元列式中，仅位移自由度出现在$\{\boldsymbol{D}\}$中，因此，M 和 Q 构成载荷项。

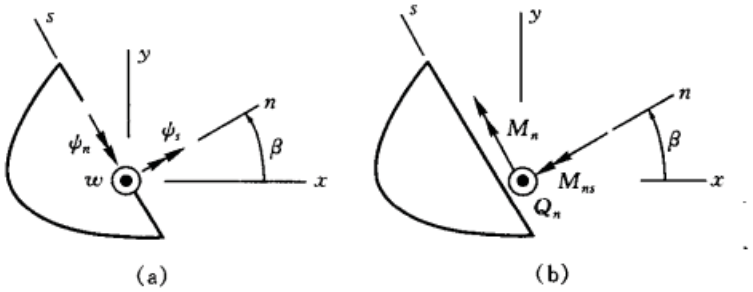


图 15.5-1　板任意方位的边，有边切向坐标 S。图示位移自由度及相关的力和弯矩

以上条件的实际描述可能允许一些非零值。例如，沿着一条板边，设定的位移可能使 $w\neq 0$，但留着 $M_{ns}=M_n=0$ 或者此边上承受外部力矩 M_n 作用，而 w 由于支撑的作用则仍为 0。从物理上讲，此边可看作是条简支边，因为这种支撑无力矩作用。类似地，沿着板的自由边可能作用着线载荷 Q，就像横向力可以作用在悬臂梁无约束端一样。

式 15.5-1c 中所列出的简支条件叫做“软”简支。经典薄板理论用 $\psi_s=0$ 代替 $M_{ns}=0$，产生“硬”简支条件 $w=\psi_s=0$。除非简支边为直线，并且相互正交，硬简支过度约束 FE 模型，以至于平行四边形板的性能好像其角点被固定了，而连续曲边分段线性模型的性能好像整条边是固支的[2.13]。尽管“硬”和“软”简支对于矩形板提供了类似的结论，但一般而言，推荐简支按“软”条件建模，因此，$w=0$ 是仅有的边界设定的自由度。

使用软条件而不是硬条件来描述简支边还有另一个原因。在 Mindlin 理论中，有一个“边界层”，它向板内的延伸长度约与厚度相等，在这一区域，Q_n 和 M_{ns} 有较大的梯度。这种梯度只是由软支撑引起，硬支撑时则没有[15.35~15.37]。克希霍夫板理论中用它严格的零横向剪切变形的假设除去边界层。然而，克希霍夫板边承受净剪切力为 $V_n=Q_n+\partial M_{ns}/\partial s$，这引起集中角点反力，大小是角点处 M_{ns} 的两倍[10.2]。在一个受软支撑的 Mindlin 板有限元分析中，在角点附近，Q_n 值有明显的增加，这比集中角点反力要更符合实际情况些。但在硬支撑的有限元分析中，就不出现这种显著增加的情况了[15.35,15.36]。

分片试验应力计算　Kirchhoff 单元的分片必须能够显示 M_x，M_y 和 M_{xy} 的常量状态。Mindlin 单元的分片则必须能够显示 M_x，M_y，M_{xy}，Q_x 以及 Q_y 的常量状态。在应当提供常数 M_x 和 $M_y=\nu M_x$ 的常量曲率 $w_{,xx}$（或者在 Mindlin 板中是 $\psi_{x',x}$=常数）的试验中，分片平行于 x 的边界上的节点必须设置 $\psi_y=0$。在 Q_x，Q_y 为常量状态的试验中，必须抑制所有节点的转角，以防止由此产生弯矩。

在板中，“应力计算”包括 M_x，M_y，M_{xy} 以及可能有的 Q_x 和 Q_y。可以应用式 15.1-4 或 15.1-5，或者 6.10 节后面描述的其它方法。当使用 Mindlin 板单元和式 15.1-5 时，我们可能发现，在$[\boldsymbol{k}_b]$积分所用的高斯点上可最精确地计算力矩。类似地，如图 15.3-1 中说明的，我们还可能发现在$[\boldsymbol{k}_s]$的缩减积分或者选择积分中所用的高斯点上能最精确地计算横向剪力。Jirousek 指出，式 15.1-5 得到的剪力 Q 值可能不精确，特别是当板厚 t 较小时；他建议

从在支撑边界上提供 $w\approx 0$ 的刚弹性边支撑挠度中获得更精确的值[15.35,15.38]。当然，Q 值常常是不大受关注的。

有人期望研发者能对商用软件中的单元做过分片试验，并知道是满足的。用户更希望无论如何要做分片试验增强对软件的信心。分片试验，如下面要讲到的试验示例，可能也有助于学习使用不熟悉的软件。

试验算例 如图 15.5-2(a)和 15.5-2(b)所示的矩形板和圆形板，是板单元常用的试验算例。用于和计算结果加以比较，解析确定的在不同加载和边界条件下横向挠度和弯矩计算公式是容易得到的[1.16,10.2]。

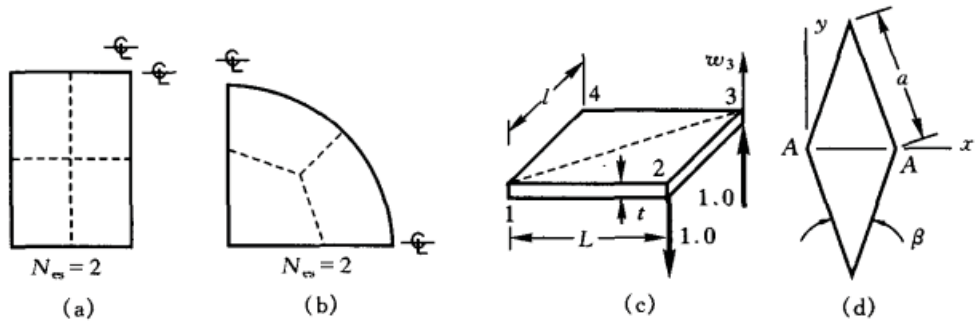


图 15.5-2 板单元试验算例。虚线表示建议的粗网格划分

(a)，(b) 矩形板和圆形板的 1/4 模型。N_m = 每边的单元数；(c) 受扭矩的板；(d) 简支菱形板

图 15.5-2(c)受扭矩形板的算例通常是用一个矩形单元或两个三角形单元建模，用来试验随着长度 L 增加单元纵横比的影响。有一静力等效载荷，其中用 1/2 单位力偶替代每个单位力，力偶矩的指向平行于尺寸 L。当取 $E=10^7$，$\nu=0.25$，$t=0.05$，对于任何一个加载，在角点处挠度 w_3 的准确值十分接近 $w_3=(3.0L-0.6)10^{-3}$[15.12]。其挠度并不是简单为 $w_3=3.0L10^{-3}$，这是因为在固定支撑处节点转角被抑制了，但这种约束只在十分接近支撑点处才能感受到。在这个算例中，一些推荐单元得到的结果比较糟，显示的 w_3 几乎与 L 无关。

图 15.5-2(d)所示的简支菱形板，有时用作试验斜边单元的几何特性。对于 $\beta=30°$，$\nu=0.3$，当受均布载荷时，在板中心处解析法求得结果是 $w=4.08\times10^{-4}qa^4/D$，$M_x=0.019\ 1qa^2$，和 $M_y=0.010\ 8qa^2$[15.39]。在钝角顶点 A 处，M_x 是负无穷大，而 M_y 是正无穷大。若在这个算例中改用“硬”简支，即使采用细密的网格，其计算结果也是很差的。对于歪斜单元来说，这个问题不是一个好的算例，因为角点 A 处的奇异性对求解有很大的影响。无固定奇异点的有限元单元在靠近梯度迅速变化的奇异点处不是很精确的。

15.6 应用

一个大跨度均匀厚度平板受一横向载荷作用，作用点远离板的边缘。仅有的支撑是弹性层，它对板边施加横向压力是每毫米横向挠度为 k_0 MPa(图 15.6-1(a))。相关参数如下：

$E=200$ GPa	$L=1\ 650$ mm	$k_0=0.20$ MPa/mm
$\nu=0.3$	$t=30$ mm	$P=1.0$ N

现在要分析平板内的变形和应变状态。使用单位载荷 P 来处理比较方便些，因为不同载荷的结果可由该载荷乘以单位载荷的计算结果来提供。选取 $L=1\ 650$ mm 有点随意，后面给予解释。

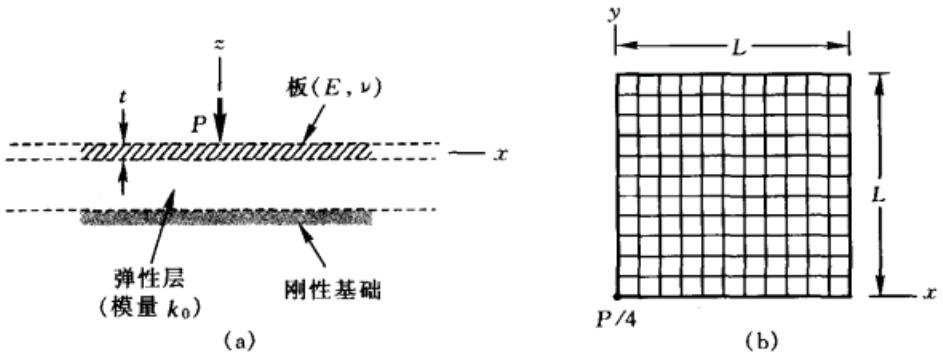


图 15.6－1　(a) 在弹性基上板的横截面图；
(b) 1/4 板的 FE 网格图，z 方向集中力 $P/4$ 作用在 $x=y=0$ 处

初步分析　我们已知板的跨度是较大的，这就意味着，在远离载荷的区域，基本上是无挠度无应力的。对于有限元分析，应在多大的跨度内建模？教材和手册只提供弹性支撑梁的公式，没有弹性支撑板的。要设计初始 FE 模型，我们大胆假设有载荷 P 作用的横截面的向下挠度的范围跟一个弹性支撑、受横向集中力载荷作用的无限长梁一样。一个横截面深 30 mm，宽为 b 的梁，其惯性矩为 $I=2\ 250b$ mm^4，而弹性基模量为 $k=bk_0$。从一些有关梁分析的专门文献[1.16，2.6]中，我们可以得到 $\beta=0.003\ 25$/mm，以及在距载荷作用点 $x=3\pi/4\beta=726$ mm处梁的挠度由向下变为向上了。因此，对于一个初始 FE 模型，我们估计网格跨度不超过 2 倍于这个长度。

要想得到最大挠度的估计值，并与后面将得到的有限元结果相比较，我们将近似板的挠曲形状，写出一个方程，表示载荷 P 等价于弹性基对板提供的压力。一种用距载荷 P 的径向距离 r 表示的挠度形状的简单假设出现在图 15.6－2(a)中。我们还假设，当 $r>R$ 时，$|w|$ 可忽略。弹性基压力为 $p=-k_0w$。需要负号以便使负(向下)的挠度 w 将在板上产生正(向上)的压力作用。对于垂直方向的平衡

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R pr\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta - P = 0 \quad \text{因此} \quad w_0 = \frac{2\pi P}{(\pi^2-4)k_0R^2} \tag{15.6-1}$$

由前面的计算结果，取 $R=726$ mm，可得到载荷 P 的挠度估计值为 $w_0=10.2\times10^{-6}$ mm。而用余弦形式来估算弯矩似乎没有意义，因为需要用到 $\mathrm{d}^2w/\mathrm{d}r^2$。在图 15.6－2(a)中，在 $r=R$ 处的 $\mathrm{d}^2w/\mathrm{d}r^2$ 值与 $r=0$ 处的是一样的，并且很明显，实际的 $\mathrm{d}^2w/\mathrm{d}r^2$ 要比 $r=0$ 处的值要大得多。

有限元分析　这个问题是关于 z 轴对称的，因此，模型可能是窄的楔形中单元的单行，但有在所有节点上受约束的绕径向线的转角。为了举例说明，我们选用笛卡儿坐标系，以及矩形单元。图 15.6－1(b)所示为 1/4 板，用 11×11 个网格的 4 节点板单元建模，每个单元都是边长 150 mm 的正方形，由 4 个叠加的 DKT 单元构成，如图 15.2－2(b)所示。因此在图15.6－1(b)中取 $L=1\ 650$ mm。所用软件允许弹性基包含单元列式。我们采用均匀网格，因为它易于准备，

况且在这个阶段，我们对改进网格的细节还不清楚。在 1/4 板模型上，于 $x=y=0$ 处施加载荷 $P/4$。用防止位于 x 轴上的所有节点绕 x 轴旋转和防止位于 y 轴上的所有节点绕 y 轴旋转来施加对称性。所有节点上的挠度 w 未受到约束。

结果评价 图 15.6－2(b)是由软件作图得到的挠度线形状，节点之间是直线而不是曲线。在 $x=y=0$ 处的挠度计算值为 12.7×10^{-6}mm，方向向下，这与前面初步分析得到的估计值 $w_0=10.2\times10^{-6}$mm 吻合较好。计算的挠度曲线，在 $x=825$ mm 处与 x 轴相交，也与初步分析所得到的估计值 726 mm 吻合得很好。向上最大挠度为 0.2×10^{-6}mm，出现在远离 $x=y=0$ 处，但在 1/4 板模型内，而不是在其边界上。

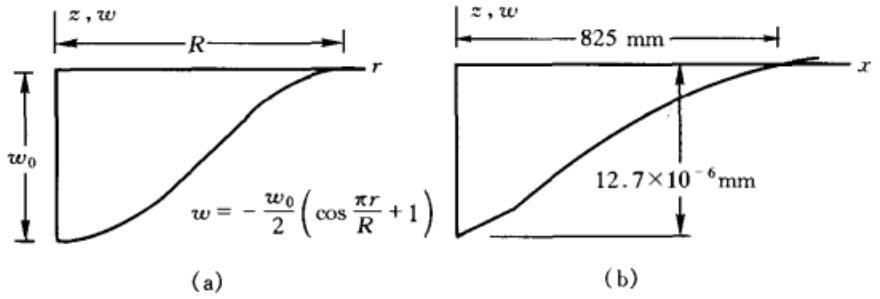


图 15.6－2 (a) 在初步分析中所假设的挠度形状；
(b) 从具有图 15.6－1(b)网格的有限元分析中得到的沿 $y=0$ 处的挠度形状

图 15.6－3 示出了计算应力等值线图。正如所期望的，冯·米赛斯应力 σ_e 等值线是关于直线 $x=y$ 对称的，它仅意味着我们对载荷和边界条件处理没有出错。σ_e 等值线应是同心圆。等值线单元间连续相当好。我们能用对称于 x 轴和 y 轴的网格对整个板建模，并会看到等值线穿过 x 轴和 y 轴的理想连续性，但这个连续性与结果是否精确将毫不相干。关于应力 σ_x 等值线如图 15.6－3(b)所示，也可作出类似的评价，尽管这些等值线不是所期望的同心圆。如果我们利用单个的楔形单元阵来开发对称性，将看不到图 15.6－3 中这类等值线不连续性。

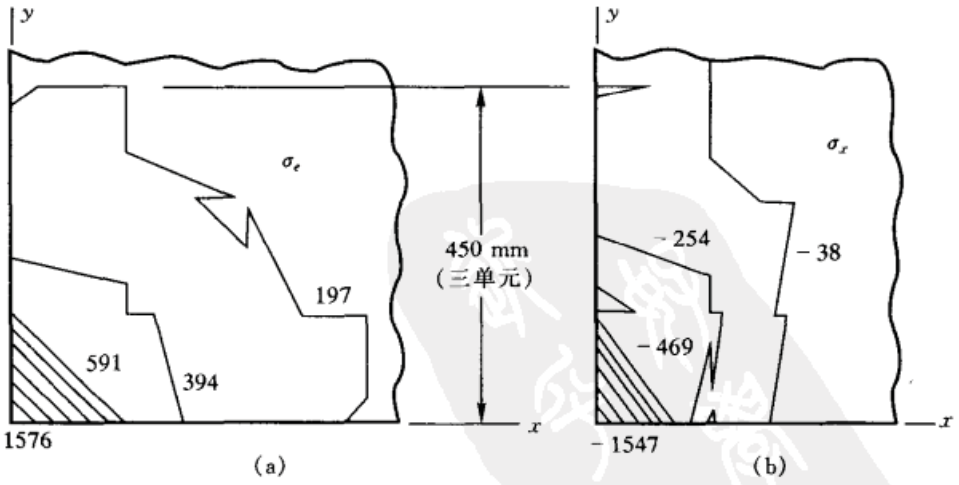


图 15.6－3 由图 15.6－1(b)中接近 $x=y=0$ 处板上表面应力 σ_e 和 σ_x 的等值线图。应力单位是 Pa

我们得出结论，对于初始粗网格分析，结果是合理的。对于整个网格，式 9.10－7 的误差度量是 $\eta=0.20$，这太大了。然而板理论认为，集中载荷处的弯矩和应力应是无穷大的。最靠

近载荷的单元上对 η 的贡献最大。无论网格细化程度如何，标准板单元将不表示出奇异性，所以从 η 的计算中略去这些单元是比较好的。但真正的集中载荷在现实中是不存在的。把载荷看作小范围的分布载荷可能更实际些。改进的分析肯定在接近 $x=y=0$ 处使用更细的网格，如果在更远的位置使用粗网格也许不会有损失。

注意，假设弹性基与板保持接触，凡是板向上翘的地方都受到向下拉力。如果仅有向上的基础压力是可能的，因为板可能会离开它的基础，这就需要迭代(非线性)分析，因为事实上我们不知道铺设弹性基的地方，直到计算循环告诉我们(近似地) w 向上的地方和向下的地方。在本问题中，脱开可能使结果稍有差别，要用相对小的向上挠度量来判断。

分析题

15.1－1　(a) 利用式 15.1－2 证明，如果 σ_x 在 z 方向呈线性变化，那么，σ_x 在板表面处的大小为 $6M_x/t^2$。

(b) 利用式 15.1－2 证明，如果 τ_{yz} 在 z 方向呈抛物线变化，那么，τ_{yz} 在板中面处的大小为 $1.5Q_y/t$。

15.1－2　平面问题中，用于在 xy 平面内 xy 轴和 n 轴之间的应力变换公式为 $\sigma_n=\frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y)+\frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)\cos 2\theta+\tau_{xy}\sin 2\theta$。弯矩 M_n 与弯矩 M_x，M_y 和扭矩 M_{xy} 之间的类似表达式是什么？

15.1－3　(a) 在图 15.1－3(b)中，假设所有 M's 和 Q's 是 x 和 y 的函数，那么 $M_x\mathrm{d}y$ 是沿边 $x=0$ 作用的，而 $(M_x+M_{x,x}\mathrm{d}x)\mathrm{d}y$ 是沿平行边作用的，等等。试证明下面的平衡方程 $Q_{x,x}+Q_{y,y}=-q$，$M_{x,x}+M_{xy,y}=Q_x$，$M_{xy,x}+M_{y,y}=Q_y$。

(b) 由(a)证明 $M_{x,xx}+2M_{xy,xy}+M_{y,yy}+q=0$。

(c) 利用(b)中的结果以及式 15.1－4b，证明 $\nabla^4 w=q/D$，其中 ∇^4 是双调和算子。

15.1－4　各向同性的矩形薄板，平行于 x 轴边长为 a，平行 y 轴边长为 b。平行于 x 轴边为简支边；平行于 y 轴边为自由边。上表面受向下的均布压力 p 作用。板下表面中间的主应力和板中心的横向挠度是多少？

15.1－5　用 T_0 表示的 $\{\boldsymbol{\kappa}_0\}$ 表达式陈述于式 15.1－4 之后。证明这个表达式的正确性。

15.1－6　考虑各向同性的正方形薄板，其各边平行于 x 轴或 y 轴，并且只在其边上有载荷作用。若横向挠度为：(a) $w=c_1(x^2+y^2)$，(b) $w=c_2(y^2-x^2)$，其中 c_1，c_2 都是常数，描述作用在板边的载荷。

15.1－7　人们有时很想知道多宽的梁可以认为是板。你将如何决定？或者，当不能决定时，你又会如何去做以确定之？

15.1－8　相对于 xy 坐标系旋转 β 角度，建立 ns 坐标系(例如，像图 15.5－1 中那样)，设 n 和 s 是正交各向异性材质的主轴方向。用 β 和主剪切模量 G_n 和 G_s 表示式 15.1－5 中的横向剪切系数。求解过程在教材中有提示。

15.1－9　假设一个长 L，横截面为矩形(宽 b 深 t)的细长梁承受均布横向载荷 q。支撑在任一端允许旋转但梁的两端不允许有横向和轴向位移。

(a) 假设横向挠度 w 呈抛物线分布 $w=4w_c x(L-x)/L^2$，其中 w_c 是跨度中点的挠度。证明由轴向(薄膜)应力承受 q 的份额是 $q_m=(64/3)(Ebt^4/L^4)(w_c/t)^3$。提示：假设梁内张力与 x 无关，对于 $w_c \ll L$，梁中线长度的变化是 $0.5(\mathrm{d}w/\mathrm{d}x)^2$ 沿长度 L 的积分。

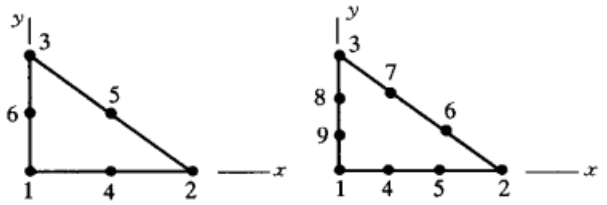
(b) 把净载荷 q 近似为 $q=q_m+q_b$，其中 q_b 作为由简支梁弯曲承受的载荷。证明，当 $w_c/t=0.5$ 时，薄膜和弯曲作用大约各承受总载荷的一半。

15.2-1 (a) 假设如图 15.1-2(a)中所示单元为矩形克希霍夫单元，具有式 15.2-4 的横向位移场。不用节点自由度表示 w，找出理由证明法向斜率单元间的相容性是不满足的。例如，证明沿边 3-4 的 $w_{,y}$，不仅仅取决于节点 3,4 上的 $w_{,y}$ 值。

(b) 沿边 3-4 的 w 和 $w_{,x}$ 在单元间的连续性如何？

(c) 式 15.2-4 中，$a_{11}x^3y$ 和 $a_{12}xy^3$ 两项可以分别用 $a_{11}x^4$ 和 $a_{12}y^4$ 来代替，但这样处理并不高明，为什么？

15.2-2 设想三角形克希霍夫单元的横向挠度 w 取作 x,y 的完全五次多项式(共 21 项)。对于图示两个单元中的每一个，不必计算，以一种看起来可以接受的方法向节点分配自由度。必要时使用高阶自由度。试问，能得到单元间的相容性吗？不必用节点自由度表示 w，用考虑边 $x=0$ 上的相容性条件来回答。



题 15.2-2

15.2-3 在图 15.2-1 中，设单元的边 2-3 平行于 y 轴。消去中间节点的 $w_{,y}$，用 L_{23}，w_2，$w_{,y2}$，w_3，$w_{,y3}$ 和 ξ 来表示沿这个边的二次变量 ψ_y，其中 ξ 是无量纲坐标，以致使节点 2 上 $\xi=-1$，节点 3 上 $\xi=+1$。

15.2-4 设想对于 DKT 单元，如果为指定的节点载荷设计出似乎合理但不精确的公式(类似于式 3.3-8 或 4.8-15b)。当作用分布横向载荷时设想的公式能够提供节点力矩以及节点力。

(a) 运用这一公式，表 15.2-1 中哪些结果值肯定不会改变？

(b) 哪些结果也许不会变，或者变化很小？

(c) 哪些结果可能会显著变化，怎么变？

15.2-5 假设在题 15.2-4 中涉及到的公式是基于横向位移 w 在三角形上来自每个顶点节点的三个自由度的插值。利用沿长度为 L 的边的 w 二次函数开始构建这个位移场(例如，式 15.4-10)。由此，用节点的 $w,w_{,x},w_{,y}$ 值，节点的 x 和 y 坐标，以及三角形面积坐标表示场量 w(见式 7.3-1)。

15.2-6 在构建 DKT 单元的[k]矩阵时，为什么三个取样点的数值积分就足以得到精确解？

15.2-7 (a) 在表 15.2-1 中，列出的所有挠度和力矩值不是单调收敛的，这一性能说明什么？

(b) 在表 15.2－1 中，似乎有地方表示了平稳的单调收敛率。误差的表观阶次是什么？也就是说，在 $O(h^m)$ 项中，m 值是什么？其中 h 是单元边的长度。

(c) 对表 15.2－2 中“简支边”的结果，重作(b)。

15.3－1 设想图 15.1－2(a)所示的 4 节点板单元由图 6.5－1(a)及式 6.5－4 的 8 节点实体单元特殊处理得到。描述所需的置换。为简化，只需考虑式 15.3－1 中 $i=1$ 时的相应项。

15.3－2 试证明，当$[\boldsymbol{B}_b]$和$[\boldsymbol{B}_s]$如文中所述时，式 15.3－6 可由式 15.3－4 推得。

15.3－3 边长为 $2a$ 和 $2b$ 的 C^0 阶矩形板单元上，作用向上的横向均布载荷 q。在协调的节点载荷向量中，有节点力矩项吗？为什么？对于表 15.3－1 中列出的 4 种单元中的每一个，节点上的协调载荷是什么？

15.3－4 分析各边固支的矩形板(在固支边上所有自由度都被抑制)。载荷相对于板的两条中心线对称。因此有限元分析只对板的 1/4 部分建模：考虑使用表 15.3－1 中每种单元类型，用选择积分法，对其 1/4 建模。那么，在位移边界条件施加后，在$\{\boldsymbol{D}\}$中有多少个未知自由度项？减去为满足横向剪切约束而占去的自由度后，还留下多少个？对 1/4 板建模，(a)用 1 个单元；(b)用 2×2 的网格；(c)用 4×4 的网格。

15.3－5 考虑表 15.3－1 中所列的后面三种单元。对于什么样的位移或变形形状可准确计算单元中各点的 γ_{zx} 和 γ_{yz} 值？

15.3－6 (a) 设一边长为 $2a$ 和 $2b$ 的矩形 Lagrange 单元。如果用 $\phi_x=\phi_y=0$，$w=c(3\xi^2\eta^2-\xi^2-\eta^2)$来描述其位移场，其中 c 是一个常数，$\xi=x/a$，$\eta=y/b$，在单元中心处 $\xi=\eta=0$，画出处于变形状态的单元示意图。

(b) 证明，在 2×2 积分规则的高斯点上，这种变形模式会得到零应变。

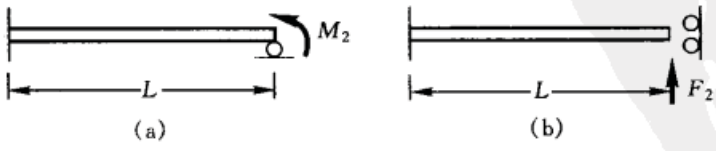
15.3－7 画出一个不受支撑的双线性矩形单元 2×3 网格的简图，视图形式与图 15.1－2(a)中的单元相同。把显示带有变形成 w-砂漏模式的单元网格叠加到这个简图上。

15.3－8 用式 15.3－2 计算双线性单元四种寄生模式中每一个的$\{\boldsymbol{\kappa}_M\}$，其中所有项都用缩减(单点)积分。由此解释当使用选择积分法时，为何其中两种模式就不再是机构(寄生模式)了。

15.3－9 想象在 2×2 规则的高斯积分点上用显式强加零横向剪切应变来给表 15.3－1 中的 Serendipity 单元以“离散克希霍夫”处理，消去一些节点自由度作为结果。那么，可以消去多少个自由度呢？你认为保留$\{\boldsymbol{d}\}$中的哪些自由度式是合适的？为什么？

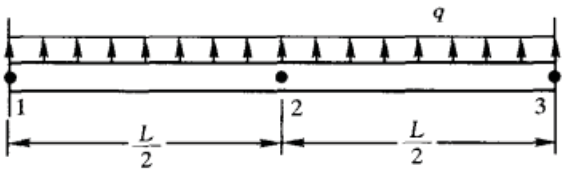
15.4－1 试证明由式 15.4－1 和 15.4－2 用单点积分法可得到式 15.4－4。

15.4－2 用单个均匀 2 节点的 Mindlin 梁单元，求解图示两个梁问题中每个的节点位移或转角。请用单点积分法以及由式 15.4－9 定义的修正剪切系数 GA^*。可能的话，将解与初等梁理论的结果作一比较。



题 15.4－2

15.4-3 如图所示，一等截面梁，受均布载荷 q 作用，两端点固支，用单个二次(3 节点)Mindlin 梁单元对其建模。当梁变得越来越细长时，若要能求得精确的跨度中点挠度，需要什么样的 GA^* 值？该值类似于式 15.4-9 中的 GA^*。用二点高斯积分计算刚度系数(仅有一个非零自由度)。



题 15.4-3

15.6-1 假设一块平板不与支撑它的弹性基粘结，那么在受载荷作用时，部分板面会脱离弹性基。说明一个能收敛于正确解的简单算法。

计算题

在后面的问题中，计算位移、力矩，或应力等有重要意义的值。尽可能利用对称性。当利用网格优化时，要计算出最优有限元网格所得结果的百分比误差。若题中没有指定尺寸和载荷的大小，可以选用合理或方便的值。在需要材料性能但未说明的地方，则用钢材性能。运用 1.5 节中建议的分析研究方法。

C15.1 对你所用软件中提供的板单元作分片试验。出现的这些单元中的任何一个都考虑了横向剪切变形吗？

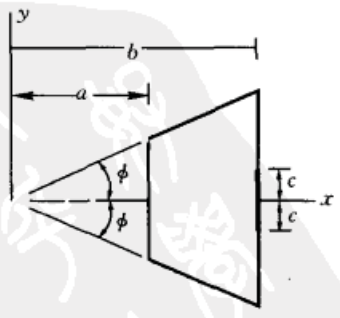
C15.2 (a,b) 试求解图 15.5-2 中(a)、(b)两部分中作为试验实例描述的问题。使用均匀网格，$N_{es}=1$，$N_{es}=2$，$N_{es}=4$。如果可以，确定计算挠度的收敛率和弯矩与 N_{es} 的关系。

(c) 有集中力作用于板中心位置时，试细化作用点附近的网格，会出现位移和/或弯矩随着网格细化而收敛的情况吗？

(d) 在图 15.2-2(d)中，试用“软”和“硬”简支条件，也对网格细化，角点 A 处的弯矩能像预期的那样发散吗？

C15.3 如果 C^0 单元可以利用，试求受均布载荷的矩形板，各边固支，整个板用 6×6 网格。如果软件允许选择积分规则，试利用不同的高斯积分点数。改变板的厚度，或许从短边长度的 1/8 到很小，影响如何？有锁定迹象吗？

C15.4 图示的板有两个固支边，其夹角为 2ϕ，另两边为自由边。较长的自由边上跨度为 $2c$ 处沿 z 方向作用有均布线载荷。



题 C15.4

C15.5 求解弹性支撑板问题。板是有限的，或者半无限的或无限的。载荷有如下形式：

(a) 半径为 R 的圆域内作用有均布压力。

(b) 半径为 R 的圆周线上作用均布压力。

(c) 沿有限或半无限板边部分作用均布线载荷。

C15.6　问题 C15.5 允许作许多修改，如：

(a) 沿板的一条或几条边上，或在其它位置加上增强梁。

(b) 利用正交各向异性材料特性。

(c) 用形式为 $T=zf$ 的温度场给板加热，其中 f 或者是常数，或者是 x 和/或 y 的函数。

第 16 章

壳

本章主要概述壳的性能特点。作为引言，先讨论拱的有限元列式，其难度和处理方法与壳单元相类似。接着我们考虑回转壳单元，然后研究用于一般形状壳的板和曲面单元。也介绍一些有限元列式和轴对称应用的算例。

16.1 引言

蛋壳和水箱是比较熟悉的壳体实例。壳有内外曲面，由厚度 t 分隔开，这个厚度与壳的轮廓尺寸相比是很小的。中面距壳的内外表面都是 $t/2$。厚度 t 可以是常数，也可以有渐变或突变。

壳内的应力会产生薄膜力 N，它是切于壳面单位长度上的力：

$$N_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x \mathrm{d}z \qquad N_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y \mathrm{d}z \qquad N_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} \mathrm{d}z \tag{16.1-1}$$

其中 z 是中面法线方向，x, y 是与中面相切的轴。用式 15.1-2a 描述板的弯矩和扭矩也可引入壳中。x, y 方向的应力状态可以表示为薄膜应力和挠曲应力(或者叫弯曲应力)的叠加。如果壳较薄，并且其材质是均匀、线弹性的，那么(实际上)薄膜应力与 z 无关，而弯曲应力与 z 呈线性关系。于是，在任意 z 位置处的净切面应力为

$$\sigma_x = \frac{N_x}{t} + \frac{M_x z}{t^3/12} \qquad \sigma_y = \frac{N_y}{t} + \frac{M_y z}{t^3/12} \qquad \tau_{xy} = \frac{N_{xy}}{t} + \frac{M_{xy} z}{t^3/12} \tag{16.1-2}$$

在壳表面的弯曲应力为 $\sigma_x = \pm 6M_x/t^2$，等等。弯曲应力通常较大，但仅限于引起它们的载荷或扰动区域附近。例如，考虑图 16.1-1(a)中柱壳端部的轴对称载荷。这些载荷中，V_0 的量纲是力/长度，M_0 的量纲是力·长度/长度。柱壳理论[1.16,2.6,10.2]表明内外表面上 x 方向的弯

曲应力表达式中应含有 $e^{-\lambda x}\sin\lambda x$ 和 $e^{-\lambda x}\cos\lambda x$ 项，其中 $\lambda=[3(1-\nu^2)/R^2t^2]^{1/4}$。当取 $R/t=250$ 时，指数项 $e^{-\lambda x}$ 在 $x=0.15R$ 处的值仅是在 $x=0$ 处值的 5%，这就意味着，大的弯曲应力仅局限于壳中很小的范围内。粗心的有限元用户可能在这种小扰动区域内没有使用足够细化的网格为它们正确地建模。

非轴对称载荷引起的干扰将沿薄壁圆柱壳扩散较长距离。这个性能并不与圣文南(Saint-Venant)原理相矛盾，因为圣文南原理是适用于相对紧凑、各向同性的 2D 或 3D 实体的，而对于薄壁或高度各向异性物体的一般载荷情况就不大适用了。

壳体上每一点有两个主曲率半径。每一个都精确地垂直于壳体，每一个都是壳中面上所画小弧的半径。两个小弧是正交的。在中面内弧相交处所有可能的弧半径中，一个最大，另一个最小。在锥壳中，一个主曲率半径是无限大，另一个随距锥顶距离的增加而增大(图 16.1-1(b))。在圆筒壳中，一个主曲率半径为无穷大，另一个是常数。在球壳中，两个主曲率半径相等，且为常数。像上面的，当只有一个有限主曲率半径时，这样的壳叫做单曲面；而两个都是有限值的叫做双曲面。如果一个壳 R_{min}/t 值大于 20 时，就可以把它看作薄壳。对于蛋壳 R_{min}/t 约为 50。对于工程用壳体，其 R_{min}/t 可以达到 1000。

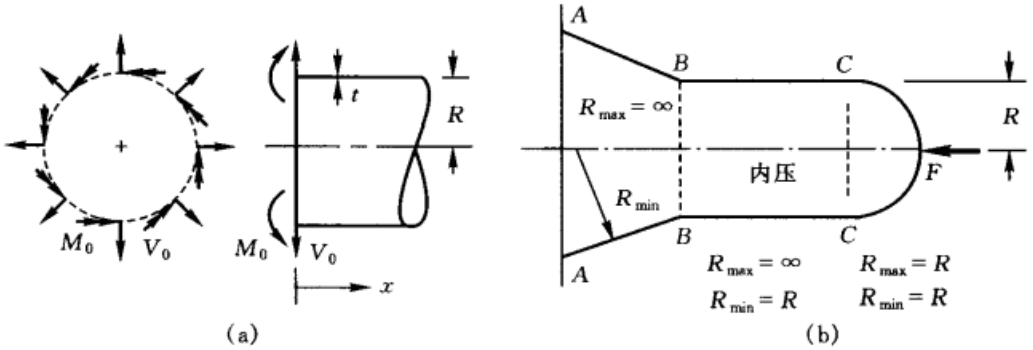


图 16.1-1　(a) 圆筒壳受轴对称端部载荷作用；
(b) 有圆锥段、圆筒段和球面段的回转壳

在薄膜应力占主导情况下，壳体能承受大的载荷，就像一根细金属丝能承受较大的轴向载荷，而对弯曲载荷的承载能力就小多了。因此，壳比一块有同样体积和材质的平板有强得多的承载能力。类似于一根细金属丝，当壳内全部或部分区域的薄膜应力是压应力时，壳是容易皱缩的。细金属丝或缆索，当横向载荷变化时，它们的弯曲形状必然变化，而一个给定形状的双曲面壳，几乎能够承受任何模式的横向分布载荷，同时显示很小的弯曲，除非在支撑部位附近。

曲率半径突变会引起局部弯曲应力，厚度突变也会这样。因此，在图 16.1-1(b)中，我们期望在靠近周向线 BB 和 CC 处找到弯曲应力。载荷 F 将会产生弯曲，在圆周线 AA 处的支撑条件也是这样，此处由支撑对壳体作用的载荷包括分布轴向载荷以及分布剪力和弯矩，如图 16.1-1(a)所示。这些陈述可运用到一般壳体上，不仅仅是回转壳。在式 16.1-2 后面的讨论中，由 $\lambda x=\pi$ 得到 $\sin\lambda x$ 或 $\cos\lambda x$ 的半波，其中 $x\approx 2.4\sqrt{Rt}$。这个结果为任何壳体有限元建模提供一个原则性指导：在距集中载荷、线载荷或几何不连续处 $\sqrt{Rt}$ 的距离内，即便是初始的粗网格模型也至少要用 2 个单元，其中 R 是较小主曲率半径。

前面的讨论运用轴对称壳作为简单例子，但壳体分析，特别是有限元分析的目的是研究任

意形状的壳体。在一般壳体中，薄膜和弯曲作用两者都存在，因此，一种好的壳单元必须克服平面单元(见第 3 和第 6 章)和板单元(见第 15 章)的缺陷，以及由于壳曲面几何形状引起薄膜和弯曲相互作用而可能产生的新难题。薄壳的薄膜刚度比它的弯曲刚度大得多，这意味着有限元方程可能出现病态，像在 9.2 节中所描述的那样。

对于壳体有限元采用三种方法：

1. 由平面薄膜单元与平板弯曲单元组合形成的平展单元。

2. 由三维单元经特殊处理而形成的“退化”实体单元。其处理方法类似于 15.3 节对 Mindlin 板单元所用的方法。

3. 基于经典壳理论的曲面单元。

第一种方法的优点包括简单、可接受的性能，以及标准梁单元作为肋和凸缘加强件时易于调节。第二种方法能够使壳体曲面几何形状较好的吻合，尽管一些单元可能有异常，尤其是锁定，也能良好运行。第三种方法的效率比前两种低得多，在此不作讨论。

文献中有很大一部分专门用于壳体分析，经典方法和有限元方法都有。综述刊于文献[16.1～16.6]；说明单元发展的文献[16.2]非常值得一读。如同 15 章中讲的板单元，我们不打算全面论述。我们只考虑在壳单元列式中常用的一些概念和方法。进一步的详述、拓展和改进在引用的参考文献中。参考目录不分先后顺序。

16.2 圆形拱和拱单元

在壳之前我们先来讨论一下拱，因为拱能显示出壳分析中会碰到的许多难题，但在内容上又比较简单。用于改进拱的方法也可用于改进壳单元。在本节中，我们假设，拱半径为常数 R，并且外载荷和变形只发生在拱面内。我们还假设，拱足够细长，以至于横向剪切变形可以不予考虑。

拱理论 拱中线上一点在 s 方向(切线)位移为 u，在 z 方向(径向)位移为 w(图16.2－1)。

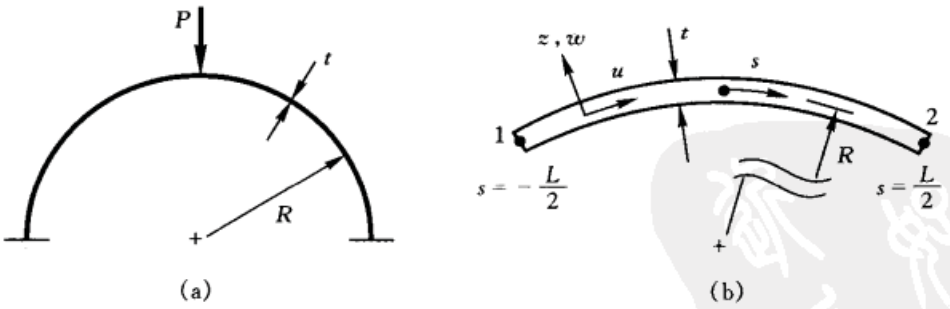


图 16.2－1 (a) 两端固支的半圆形拱，中点处受集中载荷；
(b) 弧长为 L 的拱单元

设 ε_s 表示距中线为 z 的任意点处的切向应变。借助于图 16.2－2，我们得到

$$\varepsilon_s = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\delta_a + \delta_c) + \frac{w}{R} \quad \text{于是} \quad \varepsilon_s = u_{,s} + \frac{w}{R} + z\left(\frac{u_{,s}}{R} - w_{,ss}\right) \tag{16.2-1}$$

其中 s 是切向坐标。并非所有的作者都赞同这些方程。有人在图 16.2-2(a)中可能简记为 $\delta_a = u$，或者不采用图 16.2-2(b)所示的那种近似表示[16.7]。式 16.2-1 另一种符号表示是

$$\varepsilon_s = \varepsilon_m + z\kappa \quad \text{其中} \quad \varepsilon_m = u_{,s} + \frac{w}{R} \tag{16.2-2a}$$

$$\kappa = \frac{u_{,s}}{R} - w_{,ss} \tag{16.2-2b}$$

薄膜应变 ε_m 沿拱中线出现，并与 s 方向的薄膜力有关。曲率变化 κ 则与弯矩有关，并在此规定当曲率半径减小时 κ 为正。

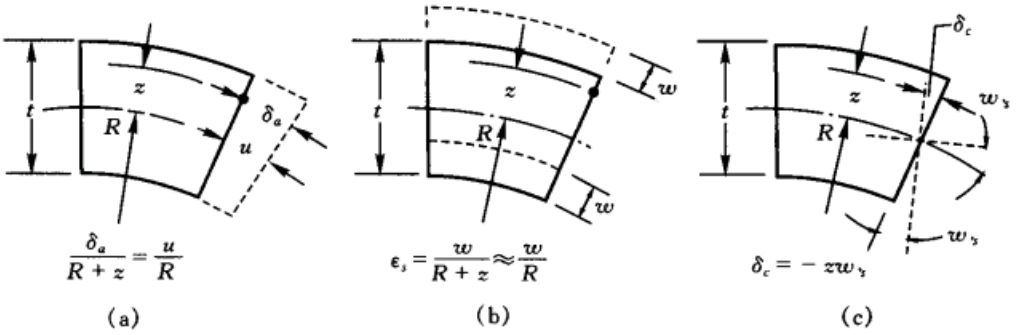


图 16.2-2　薄拱($R \gg t$)的轴向、径向和旋转变形图。转角 $w_{,s}$ 假设很小，并忽略横向剪切变形

应变能 U 来自 ε_m 和 κ 的贡献，对于一个长为 L 的线弹性均质拱单元

$$U = U_m + U_b = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{2} EA\varepsilon_m^2 \,\mathrm{d}s + \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{2} EI\kappa^2 \,\mathrm{d}s \tag{16.2-3}$$

其中 E 是弹性模量，A 是横截面面积，I 是截面 A 相对弯曲中性轴的惯性矩。U 的表达式可由应变能密度 $E\varepsilon_s^2/2$ 沿拱的厚度 t 积分而得到。z 的线性项消失，而式16.2-3中显示的那些项保留下来了。用通常的方法可从 U 中得到刚度矩阵(例如，像 4.8 节那样)。

对于刚体运动，$\varepsilon_m = 0$ 和 $\kappa = 0$。把式 16.2-2 合并后并积分，我们得到圆弧段刚体运动的位移场：

$$u = b_1 \cos\phi + b_2 \sin\phi + b_3 \tag{16.2-4a}$$

$$w = b_1 \sin\phi - b_2 \cos\phi \tag{16.2-4b}$$

其中 $\phi = s/R$，而 b_i 都是常数，b_1 和 b_2 分别表示相对于径线 $\phi = 0$ 的法向和切向的平移量；b_3 表示绕曲率中心的转角。

在大多数载荷情况下，细长拱会发生弯曲，但只产生很小的薄膜应变。极限长细比情况下，从式 16.2-2a，

$$\varepsilon_m = 0 \quad \text{即} \quad u_s + \frac{w}{R} = 0 \tag{16.2-5}$$

这称做*无伸长条件*。

直边单元 直边拱单元与含有轴向刚度的梁单元相同。它组合了直杆和直梁单元的刚度矩阵，如式 2.3-6 所示。在图 16.2-3(a)的符号中，这个结果是 6 节点自由度的单元

$$[\boldsymbol{k}]\{\boldsymbol{d}\} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_m & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{k}_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{d}_m \\ \boldsymbol{d}_b \end{Bmatrix} \quad \text{其中} \quad \{\boldsymbol{d}_m\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \text{和} \quad \{\boldsymbol{d}_b\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \psi_1 \\ w_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} \tag{16.2-6}$$

其中下标 m 和 b 分别指薄膜(杆)和弯曲(梁)的贡献。在壳中旋转自由度预处理中，转动自由度记为 ψ，这与板单元中的处理方法一样(见图 15.1-1)。

为了组集不同方向的直单元，各节点上需要共同的自由度组，如图 16.2-3(b)。平移自由度 D 方向选择并不唯一。无论怎样的选择，8.3 节中描述的方法都可用 D_s 和 D_r 自由度替换 u，w 自由度。因为这个问题是平面的，不变换自由度 ψ。

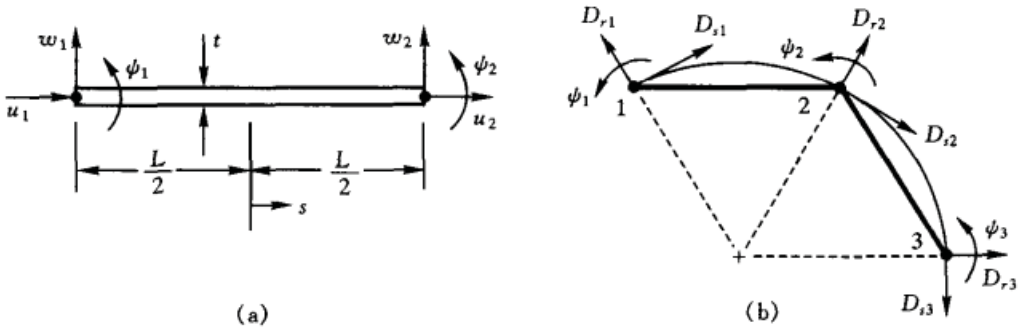


图 16.2-3 (a) 直边单元，示出局部坐标系下的节点自由度；
(b) 总体自由度 D 方向的可能选择

可以严格证明，曲拱直边单元模型收敛于精确解。事实上，对于给定的单元数，直边单元模型比曲边单元的多个列式提供的模型更精确[16.7~16.9]。在直边单元内缺少薄膜-弯曲耦合作用，已由式 16.2-6 中的非零对角子矩阵所证明，这并不妨碍单元正常运行。薄膜和弯曲作用的耦合发生在组集后的结构中，因为相邻单元不共线。例如，图 16.2-3(b)中单元 2-3 内的轴向力对节点 2 施加力，单元 1-2 看起来像是有使其弯曲的横向力分量。

在图 16.2-3(b)中，节点位于实际拱的圆弧上，这就意味着其中有限元模型的单元长度是弧线的弦长。这个几何误差使模型有些刚化。在$[\boldsymbol{k}]$的列式中，把单元的长度取作实际的弧长好些。例如，对图 16.2-1(a)的拱，设 $R/t=40$，整个拱由 4 个直边单元建模，每段弦长 $L=2R\sin 22.5°$。载荷 P 的计算位移约低 10%。若用弧长 $L=\pi R/4$，误差仅约 2%。

建议把薄膜-弯曲耦合引入直边单元的一种方法，是利用浅壳的薄膜应变方程。考虑图 16.2-4(a)所示的浅抛物线拱，根据 Marguerre 浅壳理论[16.10]，薄膜应变 ε_m 及其在长度 L 上的平均值是

$$\varepsilon_m = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} \qquad \varepsilon_{m(\mathrm{ave})} = \frac{1}{L}\int_0^L \varepsilon_m \mathrm{d}x \tag{16.2-7}$$

图 16.2-4 中给出了拱标高 z 的表达式。设轴向位移采用常用的线性方式插值，$u=(1-x/L)u_1+(x/L)u_2$，而其横向位移 w 则采用通常的三次函数插值(图 2.3-1 或图 3.2-4)。由此，我们得到轴向应变表达式

$$\varepsilon_{m(\mathrm{ave})} = \frac{1}{L}(u_2-u_1)+\frac{2h}{3L}(\psi_1-\psi_2) \tag{16.2-8}$$

式 16.2-8 中后面的项也能够用下述方法得到，用节点弯矩 M 以纯弯曲方式给拱加载，用在长度 L 上 $z(M\mathrm{d}x/EI)$ 的积分计算引起节点在 x 方向的移动距离，用 L 除这个结果，再用相对节点转角 $\psi_2-\psi_1$ 表示它的等效值来代替 M。式 16.2-8 的物理解释是，单元保持为直边，但它的节点刚性偏离单元轴线的长度为 $2h/3$(图 16.2-4(b))。式 16.2-8 中的 ε_m 用于式 16.2-3的第一项积分，通常 κ 的三次式用于第二项积分。与许多在它们的列式中使用的曲边单元相比，式 16.2-8 的单元没有显示出下面描述的薄膜锁定。

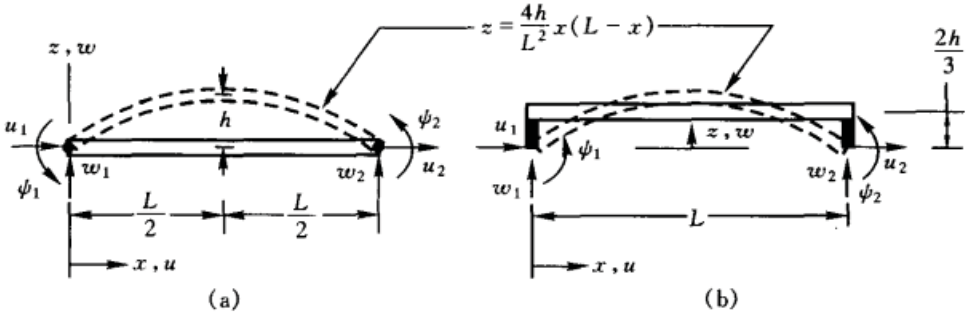


图 16.2-4　(a) 用于对虚线所表示的拱段建模的直边单元；
(b) 式 16.2-8 所用单元的几何特性

在执行过程中用不同的细节，浅壳概念也可用于对锥形轴对称壳单元[16.11]以及平展的普通壳单元“增加曲率”[16.12~16.15]。在文献[16.12]中，z 取作 x 的三次式，并用任意一端的斜率 $\mathrm{d}z/\mathrm{d}x$ 来定义。对于增加曲率所付出的代价是，对所有的拱单元或壳单元的所有边，必须提供定义 $z=z(x)$ 的额外输入数据。

薄膜锁定　术语“薄膜锁定”是指弯曲中的过大刚度。并非所有曲边单元都会遇到这种问题。在这样一些单元中才是如此，即单元内应变场不适当地相互作用，以至于仅由弯曲抵抗的节点位移却由薄膜变形来承受。因为在细长的拱中(和在薄壳中)薄膜刚度远比弯曲刚度大得多，所期望的弯曲模型有被从对载荷响应的单元中排除的倾向。直边拱单元避开薄膜锁定。式 16.2-8 中的单元两者都不是：当 $\psi_1\neq\psi_2$ 时，公式右边的两项能够大小相等但正负号相反，因此 $\varepsilon_{m(\mathrm{ave})}=0$。

图 16.2-1(b) 2 节点单元提供了薄膜锁定的例子，它可能产生在基于低阶位移场的曲边单元中。用类似于在直梁中使用的位移场，人们能够应用径向和轴向位移场

$$u = a_1 + a_2 s \tag{16.2-9a}$$

$$w = a_3 + a_4 s + a_5 s^2 + a_6 s^3 \tag{16.2-9b}$$

其中的 a_i 是广义自由度。从式 16.2-2 和 16.2-9，薄膜应变 ε_m 和曲率变化 κ 分别为

$$\varepsilon_m = \left(a_2 + \frac{a_3}{R}\right) + \frac{a_4}{R}s + \frac{a_5}{R}s^2 + \frac{a_6}{R}s^3 \qquad \kappa = \frac{a_2}{R} - 2a_5 - 6a_6 s \tag{16.2-10}$$

当拱变得无限细长时，施加不伸长条件(式 16.2-5)。对所有 s，条件 $\varepsilon_m = 0$ 要求

$$\left(a_2 + \frac{a_3}{R}\right) = 0 \qquad a_4 = 0 \qquad a_5 = 0 \qquad a_6 = 0 \tag{16.2-11}$$

如果施加条件 $a_2 + a_3/R = a_5 = a_6 = 0$，那么就只有来自薄膜项的 a_2 对 κ 有贡献了。换种方式讲，如果迫使单元弯曲，那么式 16.2-10 中 a_i 的非零值产生非零的 ε_m，而对于一个细长单元，与 ε_m 相对应的应变能和刚度将是很大的。因此，在受弯曲载荷作用时，弯曲变形的单元响应趋向于“被锁定”。对于直边单元，$R = \infty$，锁定不会发生。

薄膜锁定也可由约束计数表示(13.5 节)。当与式 16.2-9 相关类型的曲拱单元被加到结构上时，它会带来 3 个自由度。但式 16.2-11 包含 4 个约束。在满足约束中占完了所有自由度，所以没有剩余的自由度为结构性能建模。对于 $R/t = 40$，用 4 个完全积分 2 节点曲边单元对图 16.2-1(a)的拱建模，载荷 P 的计算位移比它的精确值要小 5%[16.16]。

式 16.2-10 建议用选择积分法。如果式 16.2-3 中的 U_m 项用单点积分法积分(在中心，$s=0$)，那么，a_4，a_5 和 a_6 在 ε_m 中不会出现，不伸长条件仅强迫执行式 16.2-11 第一式，因此使曲边单元性能更像直边单元。现在的约束计数表明每个附加单元的 2 个自由度可用于为结构性能建模。这个曲边单元不会遭受薄膜锁定，差不多与直边单元有相同的自由度[16.16]。

其它曲边单元 如果适当设计单元场量，精确积分的曲边单元能够有很好的性能。例如，考虑下列形式的轴向和径向位移场[16.17]

$$u = a_1 + a_2\phi + a_3\phi^2 + a_4\phi^3 + a_5\phi^4 + a_6\phi^5 \tag{16.2-12a}$$

$$w = -a_2 - 2a_3\phi - 3a_4\phi^2 - 4a_5\phi^3 - 5a_6\phi^4 \tag{16.2-12b}$$

其中，$\phi = s/R$。这两个公式对任意的 s 值都满足不伸长条件 $\varepsilon_m = 0$。正因为 $\varepsilon_m = 0$，单元的刚度矩阵完全来自于弯曲刚度部分。方程组 16.2-12 表明，要使位移场对 6 自由度的曲边单元有足够的自由度，并且对所有 ϕ 都满足 $\varepsilon_m = 0$ 的条件，那么其轴向位移场至少是五次函数，而径向位移场则低一阶次。对式 16.2-12b 增加一个内部自由度 a_7，那么，单元的 ε_m 可能不为 0。任何一种方法，对于图 16.2-1(a)中 2 个单元的解，其中每个单元跨 90°的弧，载荷 P 的位移计算结果误差小于 1%[16.17]。然而，这种高阶多项式的出现可能引起非线性分析的困难[16.13]。

式 16.2-9 曲边单元和式 16.2-12 的曲边单元都没有显示包含带应变的刚体运动能力。在刚体运动方程组 16.2-4 中的正弦和余弦项的级数展开式中，也看到在式 16.2-9 和 16.2-12中出现的项。因此，可以证明式 16.2-9 和 16.2-12 包含所要求的初始级数项，实际上随网格细化，恢复了刚体运动能力。在用于拱和壳的曲边单元的发展初期，都以为由于不能对少许或无应变的刚体运动建模，性能很差。但是，基于式 16.2-12 的单元的良好性能以

及其他的研究成果[16.16,16.18,16.19]证明，薄膜锁定是很有害的。

Mindlin 拱单元　用于表述 Mindlin 拱单元的位移有拱中线的切向位移 u 和径向位移 w 以及变形前是径向横截面的转角 ψ。应变能为 $U=U_m+U_b+U_s$，其中，薄膜应变 ε_m，曲率变化 κ 和横向剪切应变 γ_{zs} 分别对 U 做出贡献。对于中线长度为 L，半径为常数 R，横截面转角方向如图 16.2－3 所示的拱[16.20]，

$$U_m=\int_{-L/2}^{L/2}\frac{1}{2}EA\varepsilon_m^2\,\mathrm{d}s \qquad \text{其中} \qquad \varepsilon_m=u_{,s}+\frac{w}{R} \tag{16.2-13a}$$

$$U_b=\int_{-L/2}^{L/2}\frac{1}{2}EI\kappa^2\,\mathrm{d}s \qquad \text{其中} \qquad \kappa=\frac{u_{,s}}{R}-\psi_{,s} \tag{16.2-13b}$$

$$U_s=\int_{-L/2}^{L/2}\frac{1}{2}GA_s\gamma_{zs}^2\,\mathrm{d}s \qquad \text{其中} \qquad \gamma_{zs}=w_{,s}-\psi \tag{16.2-13c}$$

其中，A_s 是承受横向剪切变形的“有效”截面面积（对于均质材料的矩形截面，$A_s=5A/6$）。

线性单元，无论是直边的（图 16.2－3(a)）还是曲边的（图 16.2－1(b)），都可以基于线性形状函数 $N_1=0.5-s/L$ 和 $N_2=0.5+s/L$。因此，用广义自由度 a_i，线性插值是

$$u=a_1+a_2s \qquad \text{或者} \qquad u=N_1u_1+N_2u_2 \tag{16.2-14a}$$

$$w=a_3+a_4s \qquad \text{或者} \qquad w=N_1w_1+N_2w_2 \tag{16.2-14b}$$

$$\psi=a_5+a_6s \qquad \text{或者} \qquad \psi=N_1\psi_1+N_2\psi_2 \tag{16.2-14c}$$

有关这种单元锁定的讨论与对公式 16.2－9 和 16.2－11 的相关讨论是相似的，作如下概述。当拱单元厚度趋近于 0 时，所有应变应包含在弯曲中，以至于 ε_m 和 γ_{zs} 对于所有 s 值也都应为零。对于曲边单元

$$a_2+\frac{a_3}{R}=0 \qquad a_4=0 \qquad a_5=0 \qquad a_6=0 \tag{16.2-15}$$

或者对于直边单元（$R=\infty$）

$$a_2=0 \qquad a_4-a_5=0 \qquad a_6=0 \tag{16.2-16}$$

在这两种情况中，向薄拱每增加一个单元，会带来 3 个自由度，但在满足约束中占去了所有自由度，而且网格被锁定了。然而，如果 U_m，U_s 用单个取样点在 $s=0$ 处积分，那么每个单元就只受 2 个约束的作用，分别是对 ε_m 和 γ_{zs} 的，这样也就避开了锁定。2 节点拱单元的细节类似于 15.4 节讨论的 Mindlin 梁单元，在那里讨论的列式选择也可以应用于拱单元。

二次 Mindlin 拱单元有 3 个节点，分别在两个端点（$s=\pm L/2$）和单元中点（$s=0$）上。它基于位移场

$$\begin{Bmatrix}u\\w\\\psi\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}a_1\\a_4\\a_7\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}a_2\\a_5\\a_8\end{Bmatrix}\xi+\begin{Bmatrix}a_3\\a_6\\a_9\end{Bmatrix}\xi^2 \qquad \text{其中} \qquad \xi=\frac{s}{L/2} \tag{16.2-17}$$

由式 16.2－13a 和 16.2－17，得薄膜应变为

$$\varepsilon_m = \left(\frac{2a_2}{L} + \frac{a_4}{R}\right) + \left(\frac{4a_3}{L} + \frac{a_5}{R}\right)\xi + \frac{a_6}{R}\xi^2 \qquad (16.2-18)$$

为了所有的 ξ 都能满足不伸展条件，两个括号内的表达式必须为 0，a_6 也必须是。约束项 $a_6=0$ 意味着薄膜锁定，就像它意味着 $w_{,ss}$ 为 0 一样（注意，当拱较细长时，$w_{,ss}\approx\psi_s$）。缩减积分提供了补救办法[16.20,16.21]。式 16.2－18 可重新写成如下形式

$$\varepsilon_m = \left(\frac{2a_2}{L} + \frac{a_4}{R} + \frac{a_6}{3R}\right) + \left(\frac{4a_3}{L} + \frac{a_5}{R}\right)\xi + \frac{a_6}{R}\left[\xi^2 - \frac{1}{3}\right] \qquad (16.2-19)$$

如果薄膜能 U_m 积分由两点高斯积分法完成，取样点在 $\xi=\pm 1/\sqrt{3}$ 处，方括号内表达式为 0。因此，约束 $a_6=0$ 没有被施加。

类似的论证能够应用于剪切应变。条件 $\gamma_{ss}=0$ 意味着二次单元中 $\psi_{,ss}=0$。这虽然不是锁定条件，但会降低单元的性能。补救办法仍然是缩减积分法；按 γ_{ss} 对刚度的贡献推荐两点高斯法则。

二次单元没有显性包含式 16.2－4 所描述的刚体运动能力。然而这些方程适于圆形结构，而 3 节点拱单元形状是抛物线的。没有明显弯曲的单元近似满足这些方程。所有的数值积分法不提供无应变的刚体运动能力，见后面的式 16.5－15。

备注 当在生成[k]的过程中使用缩减积分计算应变，和在后处理阶段计算应力过程中需要计算这些应变时一样，两者应该使用相同的取样点。在其他位置可能出现大的寄生应变，像在图 6.8－2，6.10－1 和 15.3－1 的例子所示的那样。

我们仍然注意到直边单元包含刚体运动能力和没有机构锁定。与式 16.2－8 相关的拱单元和初始为平面而接受类似改进的壳单元也是如此。在可能有大位移的非线性问题中，如果单元具有可能锁定的类型，则初始直边单元可能变成曲边，并因此有锁定倾向。

即使当避免锁定时，细长拱（或薄壳）也有高的薄膜刚度与弯曲刚度的比值。因此结构刚度方程趋于病态，像在 9.2 节中描述的那样。

尽管大量的曲边拱单元和曲边梁单元可利用，新的曲边单元还是在不断发展。许多是基于杂交和混合变分原理。更新的贡献包含在文献[16.22～16.24]中。在 15.4 节中引用的反锁定方法能够应用到拱单元，当然也可以用于壳单元。

16.3 回转壳

回转壳的中面是由一平面线段绕位于同一平面的轴线旋转生成。如果该线段是直的，这个壳就是锥形壳或圆柱壳。经线是中面与轴平面的交线。纬线或平行圆，是中面与垂直于轴线的平面的交线。如果几何形状、载荷、支撑以及材质属性都是轴对称的，响应就也是。这个问题在数学上是二维的。非轴对称的载荷用下述方法处理，把载荷表示成傅里叶级数分量。分析每个载荷分量的响应，再叠加起来，像 14.4 节和 14.5 节中对回转体的讨论那样。

轴对称壳单元的列式选择类似于 16.2 节中讨论的拱单元。实施细节类似于 14.2 节中讨论的回转壳中所用的细节。相应地，我们简述并仅考虑轴对称情况，和仅有直经线的单元。因此，每个单元都是锥形截头体，已经证明它用于连续曲面壳问题工作得很好，就像已证明的直梁单元用于拱工作得很好一样。曲面回转壳单元的进一步细节见文献[15.7]。

回转壳的数值分析不必用有限元分析来进行。基于有限差分法的通用计算程序有能力处理应力、振动、失效(屈曲)、非轴对称响应、蠕变、塑性作用和大挠度问题。

薄壳列式　如果我们用 s 代替 x，用 θ 代替 y，这里的 s,θ 分别指经向和周向，则式16.1－1和 16.1－2 描述图 16.3－1 中回转壳的应力。对于轴对称条件，剪力 $N_{s\theta}$ 和扭矩 $M_{s\theta}$ 为零。单位长度上的力和力矩与薄膜应变 ϵ_m 和 s 及 θ 方向的曲率变化 κ 有关，其关系式为

$$\begin{Bmatrix} N_s \\ N_\theta \end{Bmatrix} = [\boldsymbol{E}_m] \begin{Bmatrix} \epsilon_{ms} \\ \epsilon_{m\theta} \end{Bmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{Bmatrix} M_s \\ M_\theta \end{Bmatrix} = -[\boldsymbol{D}_b] \begin{Bmatrix} \kappa_s \\ \kappa_\theta \end{Bmatrix} \tag{16.3-1}$$

其中，对于弹性模量为 E，泊松比为 ν 的各向同性材料

$$[\boldsymbol{E}_m] = \frac{Et}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \qquad [\boldsymbol{D}_b] = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}\begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \tag{16.3-2}$$

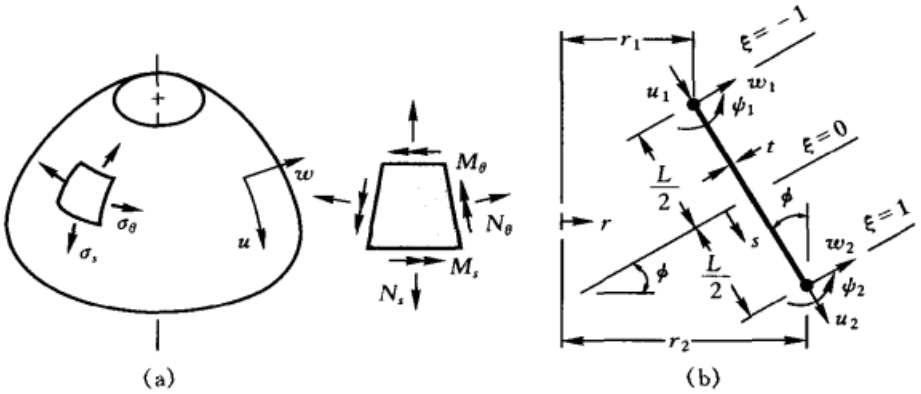


图 16.3－1　(a) 回转壳及其在轴对称载荷作用下的正应力和相关的薄膜力和力矩；(b) 截锥单元的经线。$\xi=2s/L$

设 u 和 w 分别为经线的切线方向和法线方向的位移，如图 16.3－1(a)所示。对于轴对称条件和如图 16.3－1(b)所示的锥形单元，其应变-位移关系[10.2]

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} = [\partial]\{\boldsymbol{u}\} \quad \text{或} \quad \begin{Bmatrix} \epsilon_{ms} \\ \epsilon_{m\theta} \\ \kappa_s \\ \kappa_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} & 0 \\ \dfrac{\sin\phi}{r} & \dfrac{\cos\phi}{r} \\ 0 & \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} \\ 0 & \dfrac{\sin\phi}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} \tag{16.3-3}$$

对于图 16.3-1(b)所示的 2 节点锥形单元，$\xi=2s/L$，适宜的位移场是

$$u=\frac{1}{2}(1-\xi)u_1+\frac{1}{2}(1+\xi)u_2+(1-\xi^2)a_1 \tag{16.3-4a}$$

$$w=\frac{1}{4}[(2-3\xi+\xi^3)w_1+(2+3\xi-\xi^3)w_2]+\frac{L}{8}[(1-\xi-\xi^2+\xi^3)\psi_1-(1+\xi-\xi^2-\xi^3)\psi_2] \tag{16.3-4b}$$

其中 a_1 是一个可选择的非节点自由度，其相关模型在 $\phi\neq 0$ 和 $u_1\neq u_2$ 时，用于改进单元性能，并在单元组集前使其凝聚[16.19]。(为应用于非轴对称情况，需要在 u 和周向位移 v 中增加些模型，见文献[16.26])式 16.3-4b 中的三次多项式是图 2.3-1 和图 3.2-4 的标准三次表达式，这里用替换 $x=(1+\xi)L/2$ 写出。单元应变能是

$$U=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}\\ \boldsymbol{\kappa}\end{Bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}_b\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}\\ \boldsymbol{\kappa}\end{Bmatrix}2\pi r\,\frac{L}{2}\,\mathrm{d}\xi \tag{16.3-5}$$

其中 $r=(1-\xi)r_1/2+(1+\xi)r_2/2$。关系式$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}=[\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{d}\}$，其中的$\{\boldsymbol{d}\}$含有单元自由度，能够用式 16.3-3 和 16.3-4 来构建。产生如 3.3 节和 4.8 节描述的单元刚度矩阵$[\boldsymbol{k}]$的所有要素现在都在手边。半径 r 出现在应变表达式 16.3-3 的分母中，因此，一端比另一端更靠近回转轴的锥形单元和柱形单元相比较，前者比后者得益于有更多的积分点。否则两点高斯积分法更有效。带有所包含的选择性内部自由度 a_1，$[\boldsymbol{k}]$是 7×7 矩阵，可凝聚成依据图 16.3-1(b)所示节点自由度计算的 6×6 矩阵。为了与其它单元组集，需要通用的平移自由度数组，典型的径向和轴向需要形式为$[\boldsymbol{T}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{k}][\boldsymbol{T}]$的转换，如 8.3 节描述的那样。对于最终中面切向应力的计算，用相应的总体自由度的坐标转换来获得局部单元坐标系的单元自由度。

作为特殊情况，前面的列式如果 $\phi=0$ 可应用到柱壳的所有单元，如果 $\phi=\pi/2$ 可应用到圆板的所有单元。如果横向剪切变形必须考虑，可能要按前面推导的上下关系来处理[16.27]。或者，可以利用 Mindlin 型列式，这很像 15.4 节对梁的描述和 16.2 节对拱的描述。

Mindlin 壳列式 下面的列式考虑到横向剪切变形。对于 2 节点锥壳单元，可再次使用图 16.3-1(b)。现在，壳法向位移 w 独立于截面转角 ψ 来插值。所以，曲率变化 κ_s 和 κ_θ 现在取决于 ψ 和它的一阶导数而不是取决于 w 的一阶和二阶导数，横向剪切应变是 $\gamma=(\mathrm{d}w/\mathrm{d}s)-\psi$。式 16.3-3 的应变-位移矩阵变为

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{ms}\\ \varepsilon_{m\theta}\\ \kappa_s\\ \kappa_\theta\\ \gamma\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} & 0 & 0\\ \dfrac{\sin\phi}{r} & \dfrac{\cos\phi}{r} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\\ 0 & 0 & \dfrac{\sin\phi}{r}\\ 0 & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u\\ w\\ \psi\end{Bmatrix} \tag{16.3-6}$$

单元位移场可以取作

$$\begin{aligned} u &= N_1 u_1 + N_2 u_2 \\ w &= N_1 w_1 + N_2 w_2 + \frac{L}{8}(1-\xi^2)(\psi_1 - \psi_2) \\ \psi &= N_1 \psi_1 + N_2 \psi_2 \end{aligned} \qquad N_1 = \frac{1}{2}(1-\xi) \quad N_2 = \frac{1}{2}(1+\xi) \tag{16.3-7}$$

其中 $\xi = 2s/L$。w 的表达式来自式 15.4-10(用坐标 x 而不是 ξ),这里对于 Mindlin 梁单元列式,它是作为选择项而出现的。可以用式 16.2-14b 中的线性 w 来代替,但为了避免剪切锁定需要选择积分。用符号表示,式 16.3-5 仍可以用,只是其方阵变成 5×5 的矩阵

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{0} & 0 \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}_b & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{5Gt}{6} \end{bmatrix} \tag{16.3-8}$$

其中,G 是剪切模量,$5t/6$ 是均质材料横向剪切变形计算中的有效厚度。计算依据图 16.3-1(b)所示 6 个节点自由度运算的 6×6 单元刚度矩阵$[\boldsymbol{k}]$的所有要素现在已经齐备。单元的试验[16.28]表明有好的精度(如图 16.3-2 所示)。对于图 16.3-2 中的壳,$\sqrt{Rt}=1.0$ 英寸,因为跨越这个距离不到两个单元,可认为在端部附近是粗网格。

16.4　一般壳体:3 节点和 4 节点单元

在本节中我们考虑 3 节点三角形单元和 4 节点四边形单元,它们的薄膜刚度和弯曲刚度来自相应的平面单元和板弯曲单元。尽管像式 16.2-8 的选择匹配能够耦合单元内的薄膜和弯曲刚度,这些单元仍可作为平面来列式。当四边形单元的节点不共面时,更有必要引入匹配

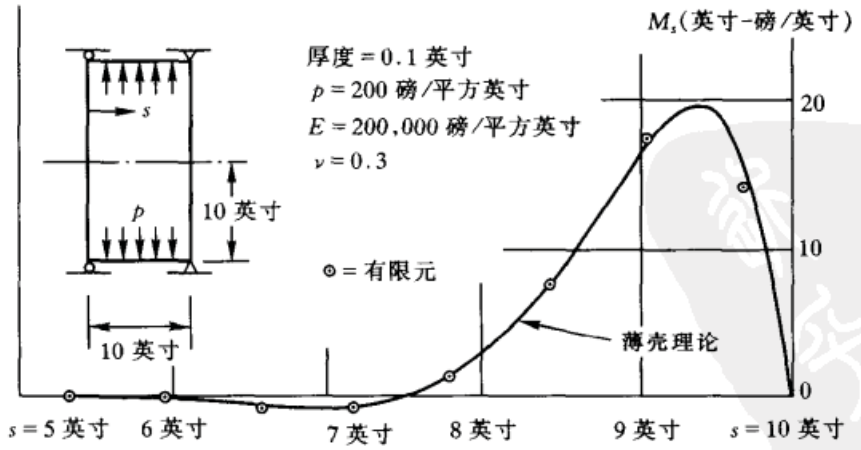


图 16.3-2　端部简支,承受均布内压的圆柱壳内单元中心处的径向弯矩 M_s[16.28]。每个单元轴向跨度为 0.625 英寸

调节。在局部坐标系中对名义上的平面单元列式,然后为单元组集基于总体坐标系自由度进行转换。壳单元作为"退化"的等参实体列式,通常是具有8或9节点的曲面单元,这将在16.5节中讨论。

三角形单元 在物理意义上,用在它们顶点上连接的三角形为壳建模是成倍地把曲面壳转变为三角形平面。仅每个顶点有3个平移和3个旋转自由度,每个单元有18个自由度。把单元置入如图16.4-1所示的局部坐标系,可以最方便地生成单元矩阵,为此,单元刚度矩阵可以写成如下形式

$$[\boldsymbol{k}]\{\boldsymbol{d}\} = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{k}_m]_{9\times9} & [\boldsymbol{0}]_{9\times9} \\ [\boldsymbol{0}]_{9\times9} & [\boldsymbol{k}_b]_{9\times9} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{d}_m \\ \boldsymbol{d}_b \end{Bmatrix} \quad \text{其中} \quad \{\boldsymbol{d}_m\} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{u}_i \\ \boldsymbol{v}_i \\ \boldsymbol{\theta}_{zi} \end{Bmatrix} \quad \text{和} \quad \{\boldsymbol{d}_b\} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{w}_i \\ \boldsymbol{\psi}_{xi} \\ \boldsymbol{\psi}_{yi} \end{Bmatrix} \tag{16.4-1}$$

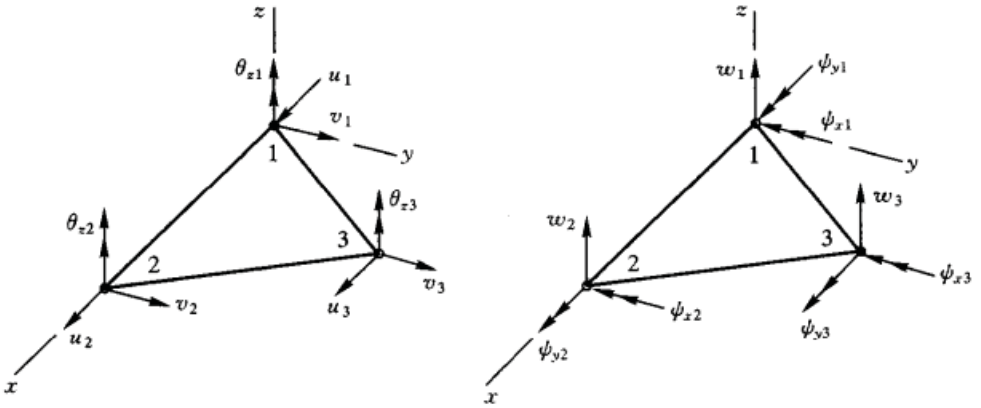


图16.4-1 局部坐标系中的平面三角形单元。
(a) 与薄膜变形相关的自由度;(b) 与弯曲变形相关的自由度

在上式中,仅为符号方便,把自由度按图示分组:$\{\boldsymbol{u}_i\} = \lfloor\, u_1 \;\; u_2 \;\; u_3 \,\rfloor^{\mathrm{T}}$,等等。自由度$\{\boldsymbol{d}_m\}$和$\{\boldsymbol{d}_b\}$分别是与薄膜变形和弯曲变形相关的节点自由度。用于节点转角的ψ对应于图15.2-1(a)中对板所用的节点转角。矩阵$[\boldsymbol{k}_b]$表示任何的板弯曲单元,如在15.2节中描述的DKT单元,或是在15.4节中所说的剪切-弯曲DST单元。矩阵$[\boldsymbol{k}_m]$表示平面单元,3.4节中描述的是最简单的CST单元(常应变)单元,虽然比较好的选择是好的有"转动"自由度的单元;见3.10节和文献[16.29,16.30]。如果$[\boldsymbol{k}_m]$表示CST单元,旋转自由度$\{\boldsymbol{\theta}_z\}$与单元的刚度不相关,且$[\boldsymbol{k}_m]$含有一个3×3的零子矩阵。因此,若任何结构节点碰巧由共面单元包围,则该结构刚度矩阵是奇异的,因为不能抵抗围绕过该节点壳体法线的旋转。当单元不共面时,存在着阻力,因为一个单元节点上的法向旋转有一个分量由相邻单元的弯曲刚度来承受。

缺少抵抗旋转自由度的壳体单元有点麻烦。一种补救办法是以特定的方式提供所需的抵抗力。Zienkiewicz建议的关系式[15.7]

$$\begin{Bmatrix} M_{z1} \\ M_{z2} \\ M_{z3} \end{Bmatrix} = \alpha EAt \begin{bmatrix} 1.0 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.0 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{z1} \\ \theta_{z2} \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix} \tag{16.4-2}$$

其中，E 是弹性模量，A 是单元面积，t 是单元厚度，α 是一个任选数，可能为 0.3 或更小些。式 16.4－2 中的矩阵及其因子 αEAt 替换所要替代的，否则在$[\boldsymbol{k}_m]$中是零子矩阵。这个特定的附加刚度对模式 $\theta_{z1}=\theta_{z2}=\theta_{z3}$ 或者其它任何刚体运动并不提供阻力。因此，有旋转自由度的单元决不允许 $\theta_{z1}=\theta_{z2}=\theta_{z3}$ 在$[\boldsymbol{k}_m]$中是寄生模式。

当壳单元无力抵抗它们自己的旋转自由度时，另一种选择是从结构自由度列表中略去绕壳体法线的转角。然而，如果单元（无论是平面或曲面）在它们共享节点上没有公共的切面，即使对单元没有特定的附加项，如式 16.4－2 中的那些项，总的壳体法向旋转自由度也有刚度。壳体法向旋转的抑制构成约束，而约束意味着结构刚化。在板的锐角相交的地方，就像沿着褶皱板的边沿线，约束过度了[16.31]。事实上，沿着此类边沿线，或在单元不共享共同切面的节点上，怎样定义壳体法线方向？一种选择是把壳体法线方向定义为共享节点上单元法线的平均值。当单元按照某个定义“几乎”共面时，壳体在这个节点上的法线转角能够被约束[3.3,16.31]，这里的“约束”可能意味着嵌入任意小的刚度，或设置自由度为零，这或许是可接受的，因为当自由度几乎没有与它相关的刚度时，固化这个自由度对结构影响很小。

可以把薄膜-弯曲耦合叠加到三角形单元上。这种修正类似于式 16.2－7 和 16.2－8 中直边拱单元所用的方法[16.12,16.14]。几个试验实例的结果表明，初始和修正的三角形单元，在绝大数情况下有着共同的精度[16.14]。图 16.4－2 所示的试验情况是一种例外，在这里初始列式就不能很好地工作[16.12]。然而，图 16.4－2(a)中差的结果可这样解释，在这个例子中，所有节点都位于实际壳面上，以至于直边单元的每四个单元分片形成浅棱锥形面，其刚度比理想值大得多。图 16.4－2(b)的修正列式毫无困难地处理了这个节点布局。如果将图 16.4－2(a)中心节点向内移，以至于四个单元分片的所有三角形共面，初始列式性能就很好。在实际应用中，修正列式减少了误差机会，因为把所有节点设置在实际壳体的中面上，这是最常用的做法。

将矩阵$[\boldsymbol{k}]$由图 16.4－1 的局部坐标系向总体坐标系的转换如 8.3 节所述。像运用到2.4 节梁单元那样。式 2.4－9 和 8.1－1 中看到的矩阵$[\boldsymbol{\Lambda}]$的各行能够看作是局部向量 $\boldsymbol{V}_x$，$\boldsymbol{V}_y$，$\boldsymbol{V}_z$ 与总体坐标系轴之间的方向余弦。这些向量还是容易建立的。在图 16.4－1 中，我们用节点 1，2 和 3 的总体坐标由向量叉乘来确定

$$\boldsymbol{V}_x = \boldsymbol{V}_{1\text{-}2} \qquad \boldsymbol{V}_z = \boldsymbol{V}_x \times \boldsymbol{V}_{1\text{-}3} \qquad \boldsymbol{V}_y = \boldsymbol{V}_z \times \boldsymbol{V}_x \tag{16.4-3}$$

其中，例如，在总体坐标中 $\boldsymbol{V}_{1\text{-}2}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$，此处的 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是总体坐标系 x,y,z 方向的单位矢量。每个矢量 $\boldsymbol{V}$ 除以自身的模，就得到所需的方向余弦。为最后计算中面切线方向的应力，用相应的总体自由度的坐标变换来恢复单元局部坐标系中的单元自由度。

四边形单元 像对于三角形单元一样，平面四边形壳单元是薄膜刚度和弯曲刚度三维组合。通常它不像把式 16.4－1 中“9×9”标记改为“12×12”所表示的那么简单，因为要得到好的性能，通常要求特定的匹配。文献[15.29,15.34,15.32]中那些单元都在看来是工作很好的 4 节点单元之中。不同的列式使用假定的位移场、假定的应力场，以及混合和杂交变分原理。

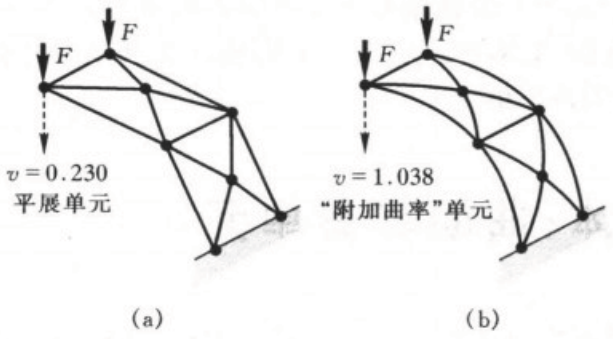


图 16.4-2 用三角形单元建模的圆柱壳 1/4 圆部分。精确挠度为 $v=1.000$。所有节点都在壳面上

也有使用单点积分的单元,主要想用在动力学和非线性问题中,在这些地方单元列式的经济性是很重要的[16.33,16.34]。

一般来说,四边形壳单元的4个节点不在同一平面上;即单元是翘曲的(图 16.4-3(a))。当对单元刚度矩阵列式时,如把单元看成是平的,并且处在图 16.4-3(a)中的阴影所示的参

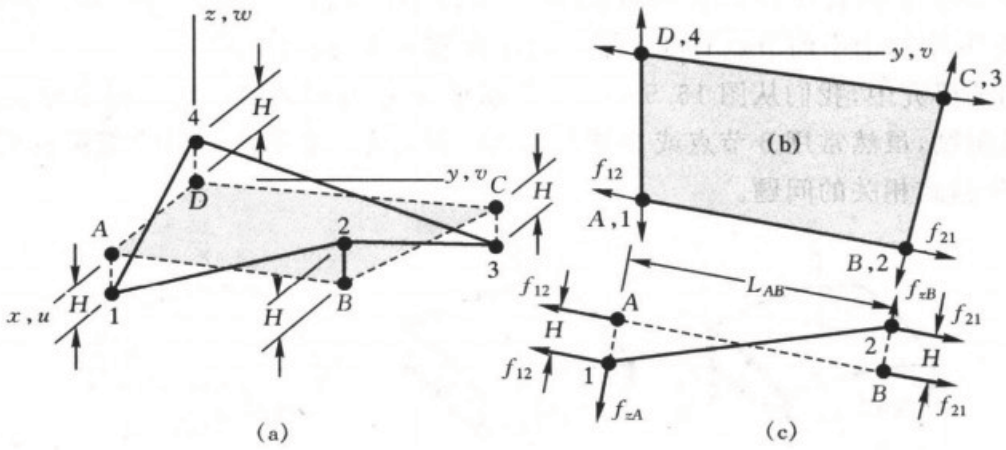


图 16.4-3 (a) 局部坐标系 xyz 中的翘曲四边形 1234;
(b) 单元在 xy 平面投影得到平面单元 $ABCD$;
(c) 平行 xy 面的视图和边 AB 的法线

考平面内,就需要附加调节。没有它,计算结果数量级可能是错误的。需要的是转换,在图 16.4-3中以字母节点的刚度特性变到数字节点上。问题不像 8.5 节中的梁单元那样将每个字母节点与它相邻的数字节点用刚性件连接起来那么简单。对于翘曲的四边形这样做在物理上会产生不适当的弯矩。而引入 z 方向力是为了抵抗由薄膜力所产生的力偶。例如,在图 16.4-3(c)的 AB 边上,平行于边的力 f_{12} 和 f_{21} 分别是相应节点上平行于 x 轴的节点力分量和平行于 y 轴的节点力分量之合力。与这些力相关的力偶和与 z 向力相关的力偶必须相等,也就是说

$$f_{zA} = f_{zB} = \frac{H}{L_{AB}}(f_{12} + f_{21}) \tag{16.4-4}$$

相邻翘曲单元沿它们共享边有可能显示不同的弯矩,这将产生物理上虚构的垂直于单元参考

面的力偶。运用到每个单元边上的补救办法是添加平行于单元参考面的成对力来平衡力偶。这种方法的细节出现在文献[3.3,16.35]中。不同的修正可以包含在一个或更多的转换矩阵中,它们可应用到组集前的各个单元上。

16.5 一般壳体:曲面等参单元

概述 用三维实体单元有可能为一般形状壳体建模,这种单元的特征是厚度尺寸显著比其他尺寸小,如图 16.5-1(a)所示。然而,除非壳体是如此之厚以至于它应该被看作是实体而不是壳,在每个角上 3 个厚度方向的节点提供多于所需的自由度。消去中面节点得到图 16.5-1(b)中的单元。这里,厚度方向线保持直线,但能相对于壳中面转动,这是在生成梁、拱、板和壳中的 Mindlin 单元时所要求的特性。在图 16.5-1(a)和 16.5-1(b)中,当单元变薄时,厚度方向的刚度系数变得比刚度矩阵中的其它系数要大得多,这会产生病态(见 9.2 节)。如果在图 16.5-1(b)中,我们约束厚度方向线上每对节点,在厚度方向有相同的位移,这样每对节点留下 5 个平移自由度。最终我们通过中面节点代替表面节点将节点数减半,如图 16.5-1(c),其中每个中面节点有 3 个平移自由度和 2 个转动自由度。

在下面的研究中,我们从图 16.5-1(c)所示的单元类型开始。至于每个单元节点数,我们不作严格限制,虽然常用 8 节点或 9 节点单元。列式方法和数值积分方案都有可能引发(或避免)与寄生模式相关的问题。

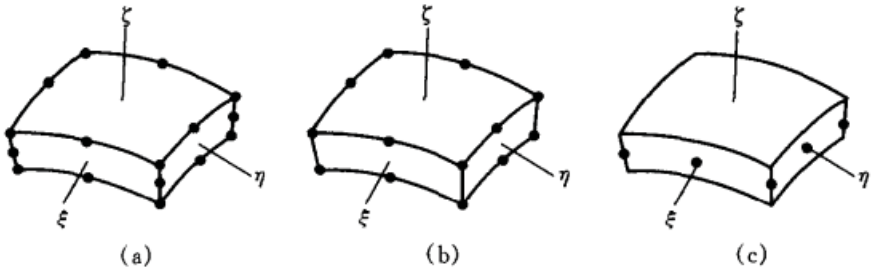


图 16.5-1 (a) 20 节点实体单元;
(b) 消去 4 个中边节点后形成的的 16 节点单元;
(c) 进一步约束得到的 8 节点单元

单元几何形状 在图 16.5-2(a)中,以节点 i 处为例,厚度方向矢量 $\mathbf{V}_{3i}$ 为

$$\mathbf{V}_{3i} = t_i \begin{Bmatrix} l_{3i} \\ m_{3i} \\ n_{3i} \end{Bmatrix} \quad \text{其中} \quad \begin{Bmatrix} l_{3i} \\ m_{3i} \\ n_{3i} \end{Bmatrix} = \frac{1}{t_i} \begin{Bmatrix} x_j - x_k \\ y_j - y_k \\ z_j - z_k \end{Bmatrix} \tag{16.5-1}$$

这里的 l_{3i}, m_{3i}, n_{3i} 是中面法线 kij 的方向余弦,xyz 是总体坐标系。单元内任一点的总体坐标为

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum N_i \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} + \sum N_i \zeta \frac{t_i}{2} \begin{Bmatrix} l_{3i} \\ m_{3i} \\ n_{3i} \end{Bmatrix} \tag{16.5-2}$$

这里求和包括单元的所有节点，而 $\xi\eta\zeta$ 是等参单元常用的坐标系（第 6 章）。中面坐标是 $x_i = (x_j + x_k)/2$，等等。形状函数 N_i 取决于 ξ, η，但与 ζ 无关。例如，式 6.4-1 的 N_i 对图 16.5-1(c)所示的 8 节点单元是适用的。为了定义单元几何形状，我们可以提供所有节点 i 和 k 的总体坐标，或者提供 x_i, y_i, z_i, t_i 以及对所有节点 i 的方向余弦 $\boldsymbol{V}_{3i}$。

图 16.5-2 中矢量 $\boldsymbol{V}_{1i}, \boldsymbol{V}_{2i}$ 相互垂直，也垂直于 $\boldsymbol{V}_{3i}$。因此 $\boldsymbol{V}_{1i}$ 和 $\boldsymbol{V}_{2i}$ 都与中面相切于节点 i，但不要求它们相对于总体坐标方向有特定方位。$\boldsymbol{V}_{1i}, \boldsymbol{V}_{2i}$ 是用来定义节点转动自由度 α_i, β_i 的方向。α_i, β_i 的方向在单个单元中从一个节点到另一个节点可能是不同的，在单元共享节点上，单元间可能也是不同的。在单元组集以前，各个单元的[$\boldsymbol{k}$]必须变换，以适应结构节点上的总体自由度数组。

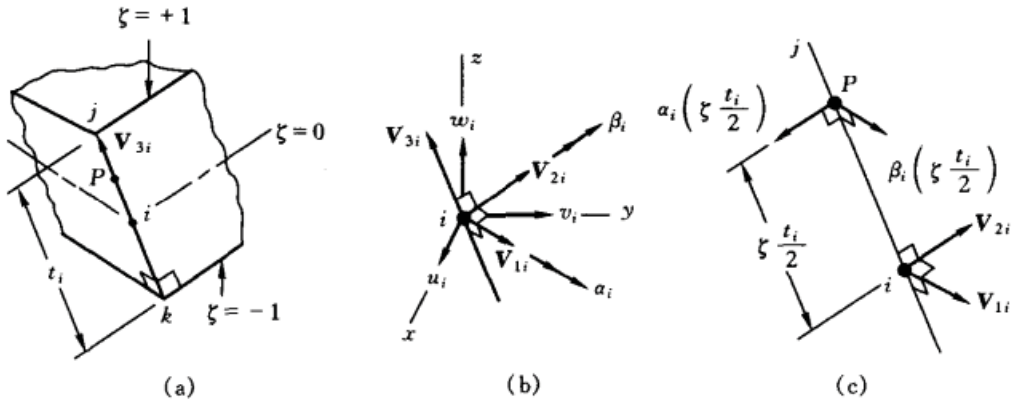


图 16.5-2 (a) 典型节点 i 和厚度方向矢量 $\boldsymbol{V}_{3i}$；
(b) 节点 i 处的正交矢量和节点自由度；
(c) $\boldsymbol{V}_{3i}$ 方向上任一点 P 因小的节点转角 α_i 和 β_i 引起的位移

定义 $\boldsymbol{V}_{1i}$ 和 $\boldsymbol{V}_{2i}$ 的一个方法就是用叉乘 $\boldsymbol{V}_{1i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{V}_{3i}$ 来建立垂直于 $\boldsymbol{V}_{3i}$ 和总体 y 方向的 $\boldsymbol{V}_{1i}$。其中 $\boldsymbol{j}$ 是 y 方向单位矢量。其次有 $\boldsymbol{V}_{2i} = \boldsymbol{V}_{3i} \times \boldsymbol{V}_{1i}$。（若 $\boldsymbol{j}$ 与 $\boldsymbol{V}_{3i}$ 平行，计算 $\boldsymbol{V}_{1i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{V}_{3i}$ 将失败。为此，在程序设计中，可以先作一些试验，如果遇到这种情况，就用计算 $\boldsymbol{V}_{2i} = \boldsymbol{V}_{3i} \times \boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{V}_{1i} = \boldsymbol{V}_{2i} \times \boldsymbol{V}_{3i}$ 来替换）为便于后面的应用，我们定义下面的方向余弦矩阵

$$[\boldsymbol{\mu}_i] = \begin{bmatrix} -\dfrac{\boldsymbol{V}_{2i}}{V_{2i}} & \dfrac{\boldsymbol{V}_{1i}}{V_{1i}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{2i} & l_{1i} \\ -m_{2i} & m_{1i} \\ -n_{2i} & n_{1i} \end{bmatrix} \tag{16.5-3}$$

其中，V_{1i}, V_{2i} 分别是 $\boldsymbol{V}_{1i}, \boldsymbol{V}_{2i}$ 的量值。

由式 16.5-2 可以看出，式 6.5-2 的雅可比矩阵[$\boldsymbol{J}$]的第一列包含

$$
\begin{aligned}
x_{,\xi} &= \sum N_{i,\xi}\left(x_i + \frac{1}{2}\zeta t_i l_{3i}\right) \\
x_{,\eta} &= \sum N_{i,\eta}\left(x_i + \frac{1}{2}\zeta t_i l_{3i}\right) \\
x_{,\zeta} &= \sum N_i\left(\frac{1}{2} t_i l_{3i}\right)
\end{aligned}
\tag{16.5-4}
$$

[**J**]的第二、第三列表达式相类似。

应变-位移关系 如图 16.5-2(c)所示，在矢量 $\boldsymbol{V}_{3i}$ 上 P 点的位移，由节点 i 的位移加上点 P 相对节点 i 的位移组成。这个相对位移是由于矢量 $\boldsymbol{V}_{3i}$ 转动小角度 α_i，β_i 引起的。它被加到节点 i 的各位移分量上之前，还必须分解为 x，y，z 方向的分量。例如，点 P 的 x 方向位移

$$
u_P = u_i - \alpha_i\left(\zeta\frac{t_i}{2}\right)l_{2i} + \beta_i\left(\zeta\frac{t_i}{2}\right)l_{1i} \tag{16.5-5}
$$

因此，通过形状函数插值，单元内任一点处的位移

$$
\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum N_i \left\{ \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} + \zeta\frac{t_i}{2}[\boldsymbol{\mu}_i]\begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \right\} \tag{16.5-6}
$$

按照第 6 章讲的标准过程，我们将应变写成位移的导数形式：

$$
\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = [\boldsymbol{H}] \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ u_{,z} \\ v_{,x} \\ \vdots \\ w_{,z} \end{Bmatrix} \tag{16.5-7}
$$

$$
\begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ u_{,z} \\ v_{,x} \\ \vdots \\ w_{,z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}^{-1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}^{-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ u_{,\zeta} \\ v_{,\xi} \\ \vdots \\ w_{,\zeta} \end{Bmatrix} \tag{16.5-8}
$$

其中[$\boldsymbol{H}$]是式 6.5-3 中的矩形矩阵，$[\boldsymbol{J}]^{-1}$ 是 3×3 的雅可比矩阵[$\boldsymbol{J}$]的逆矩阵。式 16.5-7 中的应变是对总体坐标方向 xyz 而言的。包括所有 6 个应变项，因为壳中面可能相对总体坐标的方位是任意的。下面将通过应力-应变关系，来引入在中面平行层中平面应力条件占主导的条件。由式 16.5-6，可得

$$\begin{Bmatrix} u_\xi \\ u_\eta \\ u_\zeta \\ v_\xi \\ \vdots \\ w_\zeta \end{Bmatrix} = \sum \begin{bmatrix} N_{i,\xi} & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\zeta t_i N_{i,\xi} l_{2i} & \frac{1}{2}\zeta t_i N_{i,\xi} l_{1i} \\ N_{i,\eta} & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\zeta t_i N_{i,\eta} l_{2i} & \frac{1}{2}\zeta t_i N_{i,\eta} l_{1i} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} t_i N_i l_{2i} & \frac{1}{2} t_i N_i l_{1i} \\ 0 & N_{i,\xi} & 0 & -\frac{1}{2}\zeta t_i N_{1,\xi} m_{2i} & \frac{1}{2}\zeta t_i N_{i,\xi} m_{1i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} t_i N_i n_{2i} & \frac{1}{2} t_i N_i n_{1i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \tag{16.5-9}$$

联立方程 16.5－7，16.5－8 和 16.5－9，可得：

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \sum [\boldsymbol{B}_i] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \tag{16.5-10}$$

应变-位移矩阵[$\boldsymbol{B}$]的完整形式是由多个 6×5 的子矩阵[$\boldsymbol{B}_i$]构成，单元有多少个节点，就有多少个这样的子矩阵。

应力-应变关系 应力-应变关系可表示为

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\boldsymbol{E}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} \quad \text{或者写成} \quad \{\boldsymbol{\sigma}'\} = [\boldsymbol{E}']\{\boldsymbol{\varepsilon}'\} \tag{16.5-11}$$

其中{$\boldsymbol{\sigma}$}包含总体坐标系 xyz 中的应力，而{$\boldsymbol{\sigma}'$}包含我们称做 123 的局部坐标系中的应力，这里的方向 1 和 2 是中面的切线方向，方向 3 是它的法线方向。对于各向同性材料，关系式{$\boldsymbol{\sigma}'$}=[$\boldsymbol{E}'$]{$\boldsymbol{\varepsilon}'$}是

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E' & \nu E' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu E' & E' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix} \tag{16.5-12}$$

其中，$E' = E/(1-\nu^2)$，$G = 0.5E/(1+\nu)$，在均质材料中 $G^* = 5G/6$，式中因子 5/6 考虑了横向剪切变形在厚度方向的变化情况，它比与 Mindlin 理论相关的常值更接近抛物线。注意到，对式 16.5－12 设法使 $\sigma_3 = 0$，和在每个厚度方向层提供平面应力条件。矩阵[$\boldsymbol{E}$]由[$\boldsymbol{E}'$]用坐标变换[$\boldsymbol{E}$]=[$\boldsymbol{T}_\varepsilon$]^{T}[$\boldsymbol{E}'$][$\boldsymbol{T}_\varepsilon$]得到（见式 8.2－10）。进行数值积分时，在每个取样点上都必须作这样的变换，因为各点 ξ 和 η 是不同的（如果材料是均匀的，在同一个厚度方向线上多重取样

点有相同的[$\boldsymbol{E}$])。[$\boldsymbol{T}_\epsilon$]中所需的方向余弦，是矢量 $\boldsymbol{V}_1$，$\boldsymbol{V}_2$，$\boldsymbol{V}_3$ 在同一取样点上的方向余弦。这些矢量能够由节点值用形状函数插值来建立

$$\boldsymbol{V}_1 = \sum N_i \boldsymbol{V}_{1i} \qquad \boldsymbol{V}_2 = \sum N_i \boldsymbol{V}_{2i} \qquad \boldsymbol{V}_3 = \sum N_i \boldsymbol{V}_{3i} \tag{16.5-13}$$

其中，N_i 是在问题的取样点上计算。

刚度矩阵[$\boldsymbol{k}$] N 节点单元的单元刚度矩阵可表示为

$$\underset{5N\times 5N}{[\boldsymbol{k}]} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \underset{5N\times 6}{[\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}} \underset{6\times 6}{[\boldsymbol{E}]} \underset{6\times 5N}{[\boldsymbol{B}]} \det[\boldsymbol{J}]\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{16.5-14}$$

乘积[$\boldsymbol{B}$]^{T}[$\boldsymbol{E}$][$\boldsymbol{B}$]的另一种形式是[$\boldsymbol{B}'$]^{T}[$\boldsymbol{E}'$][$\boldsymbol{B}'$]，其中[$\boldsymbol{B}'$]=[$\boldsymbol{T}_\epsilon$][$\boldsymbol{B}$]。在这种形式中，可以省去与中面法向应变 ε_3 有关的 0 项，把[$\boldsymbol{E}'$]写成 5×5 的矩阵，[$\boldsymbol{B}'$]写成 5×5N 矩阵，这样有利于提高计算效率。

假设单元厚度与单元跨度的比值足够小以至于[$\boldsymbol{J}$]对 ζ 的依赖性可以忽略，这使式 16.5－14的积分最为经济。因此，[$\boldsymbol{J}$]在中面上计算，而[$\boldsymbol{B}$]可写成[$\boldsymbol{B}$]=[$\boldsymbol{B}_0$]+ζ[$\boldsymbol{B}_1$]，其中[$\boldsymbol{B}_0$]，[$\boldsymbol{B}_1$]均与 ζ 无关。另外，设[$\boldsymbol{E}$]为常矩阵，那么，沿厚度方向显式积分后，式 16.5－14 变为

$$[\boldsymbol{k}] = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left(2[\boldsymbol{B}_0]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{E}][\boldsymbol{B}_0] + \frac{2}{3}[\boldsymbol{B}_1]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{E}][\boldsymbol{B}_1]\right)\det[\boldsymbol{J}]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{16.5-15}$$

然而，即使很薄，单元也不显示无应变的刚体运动，除非它们的曲率为 0 或者沿厚度方向的积分是精确的。当然，式 16.5－15 也包含了[$\boldsymbol{E}$]与 ζ 无关的假设，为的是不考虑材料的不均匀性或层状结构。有关厚度方向积分的细节在文献[3.3，16.36～16.39]中做了论述。

单元节点载荷来自通常的原因。因为{$\boldsymbol{\varepsilon}'_0$}=[$\boldsymbol{T}_\epsilon$]{$\boldsymbol{\varepsilon}_0$}和[$\boldsymbol{E}$]=[$\boldsymbol{T}_\epsilon$]^{T}[$\boldsymbol{E}'$][$\boldsymbol{T}_\epsilon$]，与初始应变相关的那些项是

$$\int[\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{E}]\{\boldsymbol{\varepsilon}_0\}\mathrm{d}V = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{T}_\epsilon]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{E}']\{\boldsymbol{\varepsilon}'_0\}\det[\boldsymbol{J}]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta \tag{16.5-16}$$

涉及局部方向 123 的计算应力是

$$\{\boldsymbol{\sigma}'\} = [\boldsymbol{E}']([\boldsymbol{T}_\epsilon][\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{d}\} - \{\boldsymbol{\varepsilon}'_0\}) \tag{16.5-17}$$

备注 在上述的壳体单元中，当它是曲面时，薄膜和弯曲作用会发生耦合。因此，可能会遇到像 16.2 节中描述的薄膜锁定以及在 3.6 节对平面单元描述的和在 15.3 节对板单元描述的剪切锁定。对于锁定的补救办法包括对平面和板单元所用的方法。如缩减积分，它可能引入寄生模式，和带稳定方法的缩减积分[16.39，16.40]。缩减积分减少薄膜-弯曲耦合，因此，使曲面单元性能更像直边单元[16.41]。

在前面方程描述的列式中，单元每个节点有 5 个自由度。如果旋转自由度(节点绕中面法线的转角)被引入作为总体自由度，在一个节点上若周围单元恰好共面，则会产生 0 刚度，除非在基本单元列式中包含旋转自由度或附加稳定性矩阵。如果单元以一个角度相交，像在褶皱板中相关的困难是(见式 16.4－2 后面的的论述)，决定什么样的自由度是适合的。在这里，我

们注意到构建柱面或球面模型的单元实际上不共用跨单元间边界的公共切线，因为 3 节点单元的边缘是抛物线而不是圆弧形。同样原因，单元内任意位置上计算矢量 V_3 可能不精确地垂直已指定的实际中面。当单元所对的弧趋于零时几何偏差将消失。

基于假设应变(而不是位移)的 9 节点曲面壳单元已经设计出来[16.42]。其性能良好，但没有通过常曲率分片试验[3.3]。式 16.5－1 到 16.5－17 的列式适应任何节点数。是否 9 节点就比 8 节点单元好的问题，还没有结论[3.3,16.43]。

16.6 算例·备注

算例 一般形状壳是最困难的单元之一。在实际应用中。壳体性能常常难以预测，在有限元软件中找到的各种单元类型的性能也有相当大的差异。因此，人们希望测试软件中的单元，确信它们对形状变化的有效性、敏感性，以及已经知道正确结果的那些问题中的单元特性。如果几何形状是平面，壳单元应能够求解平面应力或者板的弯曲问题，应该都能通过分片试验。拱问题，如在图 16.2－1(a)和 16.4－2 中的那些以及其它用表列出的[1.16]，都能够用柱状壳单元求解。

一般壳单元的一些其它算例示于图 16.6－1[16.14,16.39]。壳屋顶受单位面积 $q=90$ 自重载荷作用(我们协调地给出数据但未给出单位)。直边是自由的，而曲边上是“膜盒”式支撑，这就意味着曲面内的平移自由度被禁止，而该面法线方向的平移自由度和所有转动自由度未受约束。作用在夹紧柱壳上的载荷是 $F=1.0$，圆端面有膜盒支撑。有时使用带自由端的夹紧柱壳，但它不是一个挑战性的算例。半球形有自由边仅对刚体运动有约束，在赤道有径向载荷 $F=2.0$。扭带是悬臂的，有两种载荷情况，$F_1=10^{-6}$ 和 $F_2=10^{-6}$。通用的数据和点 A 载荷方向的允许位移 Δ_A 如下表：

问题	R 或 b	L	t	E	ν	Δ_A
壳屋顶	25	50	0.25	432×10^6	0.00	0.302 4
夹紧圆柱	300	600	3.00	3×10^6	0.30	$0.182\ 5\times10^{-4}$
半球壳	10	—	0.04	68.25×10^6	0.30	0.092 4
扭带(F_1)	1.1	12	0.003 2	29×10^6	0.22	$5\ 256\times10^{-6}$
扭带(F_2)	1.1	12	0.003 2	29×10^6	0.22	$1\ 294\times10^{-6}$

利用对称性，只需对屋顶的 1/4 和夹紧柱壳的 1/8 建模即可。同时利用对称性和反对称性，可以分析半球壳的 1/8，但 1/4 更易于选择。类似的算例把半球壳顶部切去 18°的圆盖，这样壳体从赤道延伸到纬度 72°，对于这个问题，$\Delta_A=0.094$[16.12]。有时也用厚度为 $t=0.32$ 的扭带，只是对于这个算例的要求没有对 $t=0.003\ 2$ 的多。

前面的算例试验了单元性能的不同方面。在壳体屋顶中，薄膜效应占主导地位，而在半球壳中，弯曲效应占主导。而夹紧柱壳中，这两种作用都存在。如果用四边形单元对扭带建模，会试验对翘曲的敏感性。经验表明特定单元在两种或三种试验情况下工作很好，但在另外的

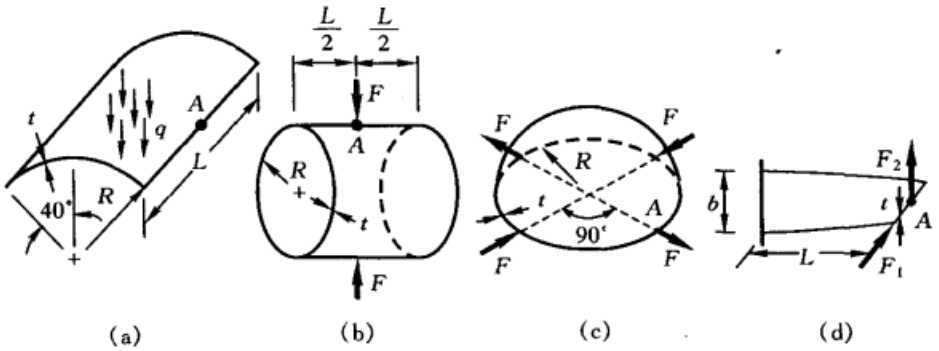


图 16.6－1　(a) 承受自重的圆筒壳屋顶；
(b) 夹紧圆柱壳；
(c) 赤道面内有四个均匀间隔的径向力作用的半球壳；
(d) 在 L 长度上有 90°扭转的条带

一种或两种情况下相当差。

图 16.6－2 中描述的算例是弯曲的金属带，一端固定，另一端受平行于截面长尺寸方向的力作用。I. Raasch 用带和不带横向剪切变形能力的各种平面单元列式在刚度矩阵的板弯曲部分做了试验后，把它称做“Raasch 挑战性问题”。他发现，随着网格细化，答案变坏，除非从单元列式中忽略横向剪切变形能力[16.44]。当固支端 t 方向厚度变化不受约束时，用 8 节点杂交实体单元的 20×136×2 个网格计算的端部挠度是 4.936 6。而 20×136×1 个网格的剪切-弯曲壳单元预示 2～5 倍这个值，取决于所用单元的类型[16.44]。MacNeal 故障分析[16.31]结论是，一个单元的扭矩传递方式产生寄生的横向剪切变形，它的应变能与 $(1+t^2/w^2)$ 成正比。因此，t 的减小改善了精度，像数值试验所示的，而减小 w（像用细化网格）反而降低了精度。建议的补救办法包括检查每个共用节点上单元法线间的关系，在约束相应的转动自由度之前，确保绕定义的壳体法线的矩为零。Raasch 算例提醒我们：一些未通过测试的单元使用了好长时间，并被认为工作很好。

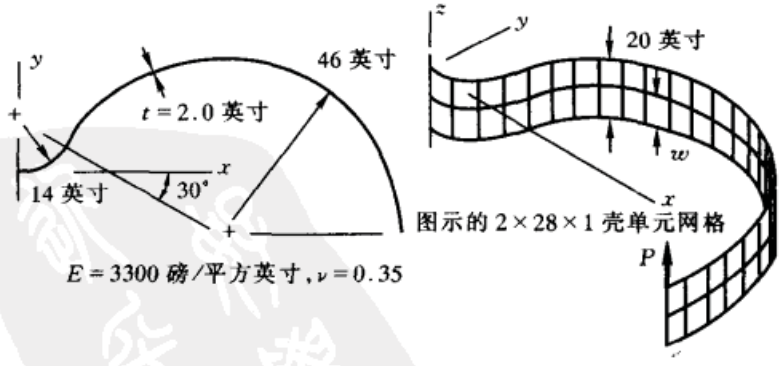


图 16.6－2　弯成钩形的带材，从边缘看到的视图和空间立体图

备注　当载荷是分布的，像来自作用的压强，节点载荷向量不应包括力矩项，其原因在2.9 节的后面已讨论过。为了合理解释计算的应力，我们得关注一下在 15.1 节末尾讨论的“上表面”问题。

要达到可接受的精度，壳单元对应的角度不应过大。其允许角度的大小取决于单元种类、所讨论的问题以及精度要求。大致范围，三角形和四边形单元对应弧角不应大于 15°，锥形单元则不宜超过 12°，如果靠近回转轴，或许不超过 5°。

在壳体交线附近，如 T 形管道或压力容器的出口，性能可能相当复杂以至于应当使用三维实体单元而不是壳单元，特别是如果壳相当厚时。壳单元可能在距交线较远处还是适用的。如类似于图 10.10－3 中描述的梁-平面转换的方式来建立壳-实体单元转换模型。用于壳体交线的特定目的的单元是可得到的[16.45]。相类似，有特殊的的弯管接头单元，说明了这样一些影响，如横截面由于弯矩作用成椭圆形，和内压的刚化影响[16.46]。弯管接头单元出现在能够分析管路系统的软件中。

材料不需要是均质的、各向同性的或线弹性的。然而，厚度方向的积分要求更多的取样点或者其它特别注意的问题[14.38]。说明厚度方向材料性能变化的单元，在整个厚度上可能用或可能不用几个节点，取决于所采用的理论[15.5]。

一个壳体薄到弯曲刚度可忽略时，能够作为薄膜用仅包括中面位移和节点平移作为自由度来分析。于是，例如我们放弃了 16.2 节的 $\boldsymbol{\kappa}$ 和 $[\boldsymbol{k}_b]$，16.3 节中的 $[\boldsymbol{D}_b]$，16.4 节中的 $[\boldsymbol{k}_b]$ 和 16.5 节的 $[\boldsymbol{B}_1]$。通常包括 18 章中讨论的应力刚化。没有它，平面薄膜将没有抵抗横向载荷的能力。适应薄膜可能的褶皱，最简单（也许很粗糙）的方法是利用在压缩主应力方向不提供刚度的材料的性能矩阵 $[\boldsymbol{E}]$。当然，首先必须检查压应力的发作，并确定它的方向；因此必须用分析迭代循环和修正材料性能来得到解。为了说明应力刚化也需要迭代，因为它取决于通常事先并不知道的薄膜应力。参考文献包含在[15.5，16.47～16.50]中。

16.7 轴对称壳的应用

我们考虑的结构是薄壁球壳的一段，如图 16.7－1(a)所示。它在赤道处固定于刚性支撑上，绕无约束的 30°平行圆有均布向下的力作用。下面来分析其应力状态。

初步分析 这基本上是一个轴对称问题。预期整个经线方向都是薄膜压力。也预想到经向弯矩，在 30°平行圆附近由于载荷 q 壳体法向有分量，而在赤道线附近由固定支撑抑制任何的位移和转动倾向。在赤道处的经向薄膜力易于用静力学计算。垂直力平衡要求

$$2\pi R N_B = 2\pi(R\cos 30^\circ)q \quad \text{于是} \quad N_B = 0.866q = 4.33\ \text{N/mm} \qquad (16.7-1)$$

在壳中面的 B 点处，存在经向薄膜应力 $N_B/t = 4.33$ MPa(压力)。如果 B 点处径向位移没有约束，为了提供壳法线方向力的平衡，将会出现等值的周向拉应力[2.6]。因此，壳体要沿赤道扩展，但受到支撑的约束，它绕赤道沿径向施加向内的线载荷 V_B。载荷 V_B 试图向内转动壳体；支撑绕赤道作用径向分布力矩 M_B 阻止转动。围绕壳的顶端，没有支撑反抗载荷 q 在壳体法线方向的分量。

总的来说，我们期望计算结果在 A 点附近显示大的向内挠度，此处无支撑反抗作用载荷向内的分量。我们期望在 A 点没有经向弯矩，因为这个边是自由的。从 A 点稍向下，因为向内的弯曲，经向弯曲应力在外表面应该是拉力。在赤道，预示经向薄膜应力值应该是

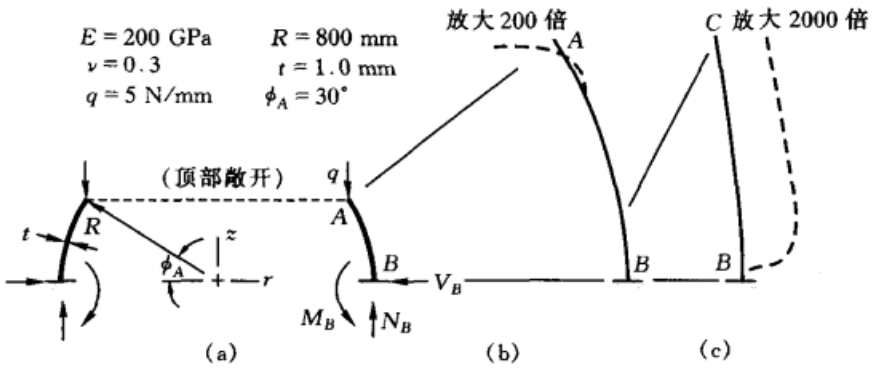


图 16.7－1　(a) 回转壳的几何形状、载荷和材料属性；
(b) 沿 AB 边的计算位移图，放大 200 倍；
(c) 沿 AB 下方 1/4 部分的计算位移图，放大 2000 倍

4.33 MPa的压力。我们期望 N_B，V_B 和 M_B 在图示方向，B 点的经向弯曲应力在内表面是拉力。

有限元分析　适用的壳单元是轴对称的。我们选用 2 节点锥形单元，由图 16.3－1(b)和式 16.3－3 及 16.3－4 来描述。在距离 A 和 B 点经向距离 $\sqrt{Rt}=\sqrt{800\times1}=28$ mm 范围内，即使是粗网格，至少也应包含两个单元。对于当前的分析，会自动指令软件在 A 和 B 点处利用长度为 4 mm 的单元，在 AB 弧中间处利用长为 20 mm 的单元把从 A 到 B 的弧段衔接起来。结果，沿弧段有 65 个节点和带有分级长度的 64 个单元。在 B 点的所有 3 个自由度设为零；网格的所有其它自由度不受约束。

结果评价　已发现计算结果有预期的品质特性(图 16.7－1(b)，(c))，反作用力 N_B，V_B 和 M_B 有期望的方向。在 B 点的经向薄膜应力为－4.33 MPa，与预期的一样。在顶点和根部附近的经向弯矩 M 显示在图 16.7－2 中。符号约定是所用软件的，即在壳体内面增加拉伸弯曲应力时 M 为正(与图 16.3－1(a)中所示的 M_x 方向相反)。像所期望的，在 A 点处 $M=0$。最大经向弯曲应力为 $\pm6M/t^2=\pm6\times17.7/1^2=\pm106$ MPa，约距顶点 17 mm 处。在这个位置，经向薄膜应力只有约－6 MPa，在壳的内表面上净经向应力约－112 MPa。在赤道上净经向应力相当小，在内表面上约为 6 MPa，而在外表面约为－15 MPa。应力最大值在顶点处，此处最大的向内位移产生周向薄膜应力为－175 MPa。因此，薄壳内大的压应力暗示有可能产生屈曲，为此需要作单独分析。

对于这类单元，所用软件并不提供基于单元交界处应力不连续性的相对能量误差。即使计算值是可以得到的，如果我们使用的单元所跨弧度是如此之大，以至于壳体边缘 A 和 B 附近的性能特征不能抓住，软件也不能告诫我们要提防的问题。

众所周知，轴对称壳问题中的边缘效应用衰减正弦和余弦函数以式 16.1－2 描述柱壳的方式表示。它实际上就是在图 16.7－1 和 16.7－2 中看到的特性。图 16.7－2 中所绘曲线的平滑说明网格细化对结果影响很小。

碰巧有可用于这一问题的列表公式，不过用手算会令人生厌[1.16.2.6]。这些公式给出的 V_B，M_B 和最大经向弯矩比有限元法分析所得值小 1%。

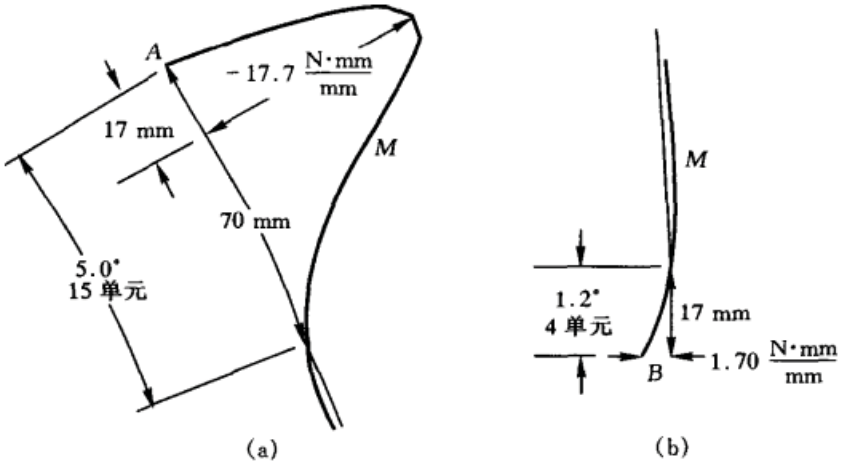


图 16.7-2 图 16.7-1 中壳体内用 FEA 所得经向弯矩
(a) 在顶端附近；(b) 在根部附近

分析题

16.1-1 (a) 设 x, y 是回转柱壳的经向和周向，有半球形端帽。内有压力作用。根据式 16.1-1与初等压力容器公式，圆筒壳及其端帽的 N_x, N_y, N_{xy} 是什么？

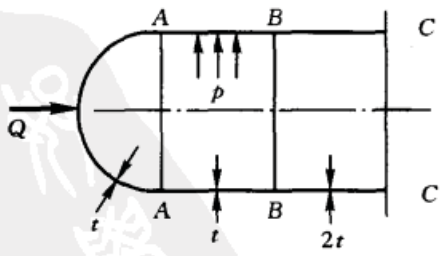
(b) 假设园艺用的软管有椭圆形横截面，为什么增加内压可以使其横截面趋于圆形？沿外周线，近似画出由于内压力引起的周向弯曲应力的变化。

16.1-2 图示的圆筒贮箱，其厚度阶梯变化，有一个半球壳封头。受轴向力 Q 和内压 p 作用。

(a) 解释为什么载荷 Q 不能仅由薄膜作用支承。

(b) 除去 $C-C$ 处的固定约束，沿平行圆 AA 和 BB 周向切开，把容器分为 3 部分。如果仅保持由内压力 p 引起的薄膜应力，画出每一部分将会有的变形。

(c) 由简图说明恢复位移和转角连续性所需要的载荷(由一部分对另一部分的作用)。



题 16.1-2

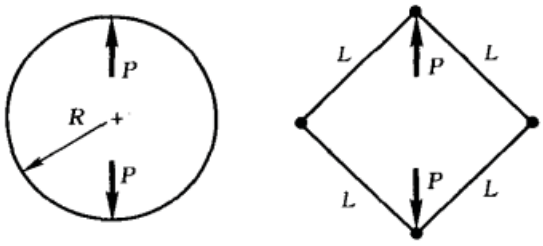
16.2-1 假设拱的半径 R 是 s 的函数，写出类似于式 16.2-2 的应变 ϵ_s 表达式。

16.2-2 (a) 推导方程 16.2-4。

(b) 考虑 1/4 圆形拱位于直角坐标系的 I 象限。用三个单独的图，画出与式 16.2－4中 b_1，b_2 和 b_3 相关的位移场。

16.2－3　对于图 16.2－3(b)中单元 1－2，写出从(a)到(b)的节点自由度坐标变换。也就是用 L 和 R 来表示所有必要的系数。假设局部自由度的序列如式 16.2－6 所示，图 16.2－3(b)中总体自由度序列为 $\lfloor D_{x1}\ D_{r1}\ \psi_1\ D_{x2}\ D_{r2}\ \psi_2 \rfloor^{\mathrm{T}}$。

16.2－4　用 4 个直边单元对一个完整的圆环建模，由此得到的有限元模型是一个正方形，如图所示。计算仅因弯曲引起的变形使载荷 P 相对间距的变化。并取单元长度为(a)弦长 $L=\sqrt{2}R$，(b)弧长 $L=\pi R/2$。精确解为 $0.148\ 8PR^3/EI$。提示：应用初等梁理论。



题 16.2－4

16.2－5　对于一个半径恒定的拱，用式 16.2－9 中的位移场积分式 16.2－3 中的 U_m。由此证明条件 $U_m=0$ 暗含了式 16.2－11。

16.2－6　对于半径为常数的拱，利用下面(a)和(b)中列举的位移场，建立节点自由度与广义自由度 a_i 之间的关系。也就是确定下面关系式中的[**A**]

$$\lfloor u_1\ \ w_1\ \ \psi_1\ \ u_2\ \ w_2\ \ \psi_2 \rfloor^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{A}]\lfloor a_1\ \ a_2\ \ a_3\ \ a_4\ \ a_5\ \ a_6 \rfloor^{\mathrm{T}}$$

对于薄壁拱有 $\psi=\mathrm{d}w/\mathrm{d}s$。(a)利用式 16.2－9。(b)利用式 16.2－12。

16.2－7　在与式 16.2－12 相关的单元的[**k**]矩阵中，与节点径向挠度相关的对角线和非对角线上系数是

$$k_{22}=k_{55}=\frac{24}{\beta^3}-\frac{192}{35\beta}+\frac{16\beta}{35}\quad 和\quad k_{25}=k_{52}=\frac{21}{\beta^3}-\frac{108}{35\beta}-\frac{\beta}{35}$$

其中，对于弧长为 L 的单元有 $\beta=L/(2R)$[16.17]。利用这个信息分析习题 16.2－4 中的圆环，利用 1/4 圆周作为单个单元。

16.2－8　在用式 16.2－12 对单元刚度矩阵[**k**]列式时，应变能 U_m 对[**k**]无贡献。为何 U_m 不能在其它拱单元列式中，如与式 16.2－9 相关的列式中简单除去？

16.2－9　(a) 验证方程 16.2－15 和 16.2－16 的正确性。

(b) 确定类似的约束方程，该方程与对数值积分 U_m 和 U_s 适用的单个取样点有关。

16.2－10　分析 $\gamma_{ss}=0$ 条件和缩减积分对 3 节点 Mindlin 拱单元的影响(得到类似于式 16.2－17和 16.2－18 的方程)。

16.3－1 假定有半径为 R 的薄壁圆筒壳。中面经向应变 ϵ_{ms} 不受约束。通过考虑与薄膜应变 ϵ_{ms} 和 $\epsilon_{m\theta}$ 相关的应变能，证明径向位移 w 实际上由弹性模量为 Et/R^2 的弹性基体来抵抗(像由弯曲刚度来抵抗一样)。

16.3－2 假设一个薄壁圆筒壳，受对称载荷作用，但无轴向载荷。因此 $N_s=0$，薄膜应变有关系式 $\epsilon_{ms}=-\nu\epsilon_{m\theta}$，经向位移 u 不需考虑。用一个三次函数来表示 w 场，确定依据节点自由度 w_i 和 ψ_i 计算的 4×4 单元刚度矩阵。

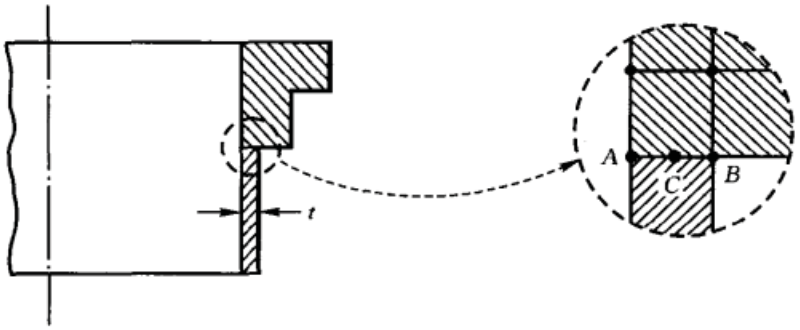
16.3－3 假设有均布压强 p 作用于式 16.3－7 描述的单元内表面。计算协调的单元载荷向量。

16.3－4 圆柱形管端接在厚重的法兰上。导管部分用回转壳单元建模，法兰用 4 节点回转体单元建模。在图示截面连接处，节点 A 与 B 在法兰上但节点 C 在导管上。这时，变换矩阵[$\boldsymbol{T}$]应写成怎样形式，才能使节点 C 处的自由度由节点 A 和 B 的自由度来代替？

(a) 假设问题是轴对称。

(b) 假设问题不是轴对称。

(c) 重复(b)，但是用约束矩阵[$\boldsymbol{C}$]而不是变换矩阵[$\boldsymbol{T}$]来表示这一关系。



题 16.3－4

16.4－1 假设用平面三角形单元为曲面壳建模，每个单元带顶点节点，但没有旋转自由度。单元间位移不协调是什么方式？并就网格细化能否加快收敛到正确解给出合理解释。

16.4－2 设想一个矩形的盒子用平面壳单元网格对它建模。内有压力作用。沿侧面相交的棱边上，哪些自由度项可以设置为 0，为什么？

16.5－1 写出类似于式 16.5－2 的方程，但应用于图 16.5－1(b)的单元(各个形状函数应与 ξ,η 相关，并由含 ζ 的线性函数作乘积因子)。

16.5－2 (a) 试用 $\zeta,N_i,N_{i,\xi},N_{i,\eta}$，节点坐标以及 $\boldsymbol{V}_{3i}$ 分量来表示雅可比矩阵[$\boldsymbol{J}$]中各项。

(b) 对(a)中所得结果再作特殊处理，以适应单元是平面的，厚度均匀，并且其中面与 xy 平面重合。

16.5－3 (a) 设想替代绕局部方向的旋转自由度 α_i 和 β_i(图 16.5－2)，我们选用转动自由度 β_{xi}，β_{yi} 和 β_{zi}，它们是绕总体坐标轴 x，y 和 z 的小转角。写出式 16.5－6 的合适形式，并定义这个表达式的方向余弦矩阵中的项。

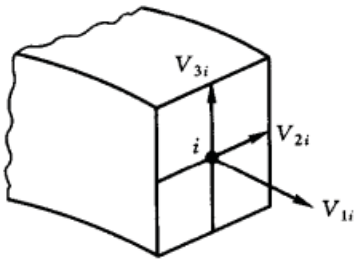
(b) 检验(a)中结果与式 16.5－6 在下面三种特殊情况下的一致性：所有矢量 V_{3i} 平行于 x 轴；然后 V_{3i} 都平行于 y 轴；最后 $\boldsymbol{V}_{3i}$ 都平行于 z 轴。

16.5－4　设式 16.5－10 中典型的$[\boldsymbol{B}_i]$有形式$[\boldsymbol{B}_i]=[\boldsymbol{H}][\bar{\boldsymbol{B}}_i]$，其中$[\boldsymbol{H}]$是由式 6.5－3 定义的 6×9 矩阵，而$[\bar{\boldsymbol{B}}_i]$是 9×5 矩阵。试用 $\zeta, t_i, N_i, N_{i,\xi}, N_{i,\eta}$，方向余弦和$[\boldsymbol{\Gamma}]=[\boldsymbol{J}]^{-1}$中的 Γ_{ij} 来表示$[\bar{\boldsymbol{B}}_i]$。

16.5－5　简图表示等参梁单元的一端，它的几何特性由沿其中心线的节点位置和横跨其矩形横截面的向量 $\boldsymbol{V}_{2i}, \boldsymbol{V}_{3i}$ 来表示。

(a) 写出类似于式 16.5－2 的几何方程。

(b) 写出类似于式 16.5－6 的位移方程。

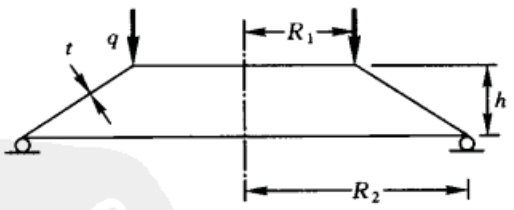


题 16.5－5

计算题

在下面的问题中，当合适时，计算有特定意义的位移、力矩和应力值。尽可能利用对称性。对网格进行细化时，估计在最佳的网格划分时最大的误差百分比。未给出相关尺寸或载荷大小的地方，可以自己选取合理或方便的值。若问题中未给出所需材料的属性，一律用钢材代替。请用 1.5 节中所建议的分析方法。

C16.1　如图示，一个薄壁截锥形的回转壳，底端简支，顶端平行圆上有均布的线载荷 q 作用。(如果锥相当扁平，也称做“Belleville 弹簧”，并且有非线性载荷和位移响应)



题 C16.1

C16.2　对问题 C16.1 作如下修改：

(a) 在顶端和/或底端增加加强环(如题 16.3－4 中的法兰盘)。

(b) 对上半部分或下半部分均匀加热。

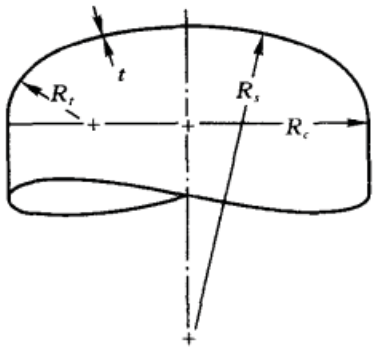
(c) 在顶端平行圆的一半作用载荷 q。

(d) 重新对载荷 q 定向，使其指向圆周方向，对壳产生扭转作用。

(e) 对壳的一半侧面均匀加热。

C16.3 (a) 图示半径为 R_c 的圆筒形压力容器封头。封头由一个半径为 R_t 的环形连接段和半径为 R_s 的球面顶盖组成。研究由内压或由沿壁厚线性变化的温度引起的应力。

(b) 现在不用常量半径 R_t 的环形连接段，而是变半径的过渡壳来连接圆筒段与球面顶盖。寻找在某种意义上的“最佳”过渡壳。(参考压力容器设计方面的资料。)



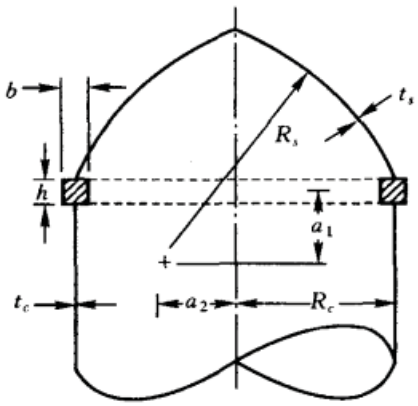
题 C16.3

C16.4 如图所示，一个薄壁回转壳由半径为 R_c 的圆筒段和封头组成。这个封头的经线半径为 R_s 的弧。作为一种选择，用横截面为矩形的环对壳连接处进行加强。假设圆筒段和端帽相交于加强环宽度中间处，距两边都为 $b/2$。圆筒底端(图中未画出)可以认为是固支的。所受载荷可能有(1)内压，(2)自重，沿轴线垂直方向；(3)自重，沿轴线水平方向。可能一些感兴趣的几何尺寸有

(a) $a_1=a_2=0, R_s=R_c$(半球端帽)。

(b) $a_1=\sqrt{3}R_c, a_2=0, R_s=2R_c$(对应 60°的浅端帽)。

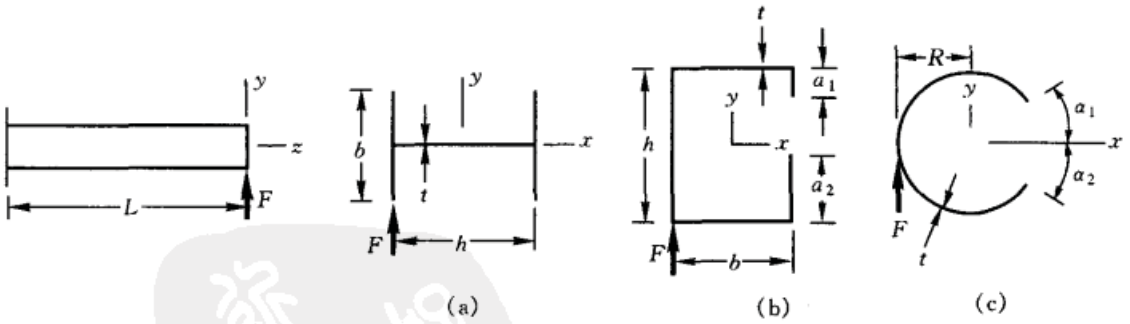
(c) $a_1=-\sqrt{3}R_c, a_2=0, R_s=2R_c$(与(b)相似，但是“凹入”的端帽)。



题 C16.4

C16.5 用一个回转壳单元来求解图 2.13-2 中的圆环问题。用傅里叶级数来表示载荷。

C16.6 假设一个又细又薄的悬臂梁，其横截面形状可能有多种。如图(a)，(b)，(c)所示。梁受横向端点力 F 作用。作为选择，F 可以作用在沿长度 L 上的其它某个横截面上，或在某个截面的其它位置。



题 C16.6

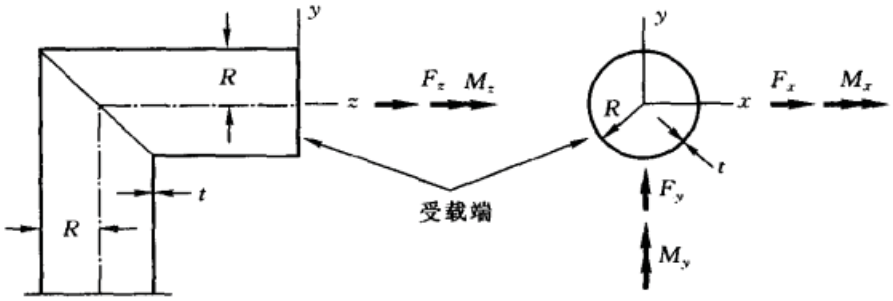
C16.7 在问题 C16.6 中，试确定平行 y 轴作用力 F 的 x 坐标，以致梁产生无扭弯曲(也就是确定剪切中心的 x 坐标)。

C16.8 在问题 C16.6 中的横截面(b)和(c)，用自身平衡的轴向力取代横向力 F。例如，在横截面(a)上，凸缘的左下和右上端分别作用 z 方向力 $+P$，同时在凸缘左上端和右下端施加 z 方向力 $-P$。替换的支撑条件是防止刚体运动又不约束变形。

C16.9 在问题 16.6 中，假设梁的 z 轴变弯曲而不是直的了。横截面可以按图示定义，或旋

转 90°。可能的加载包括横向端点力，或者在曲率平面作用内，或垂直于它。

C16.10　图示正交的圆截面的薄壁管。作为一种选择，用刚性结构件在管壳外面加强由相交形成的椭圆。对于图示 6 种加载的每一种单独求解。为方便，力和力矩可作用在端面圆盘中心。

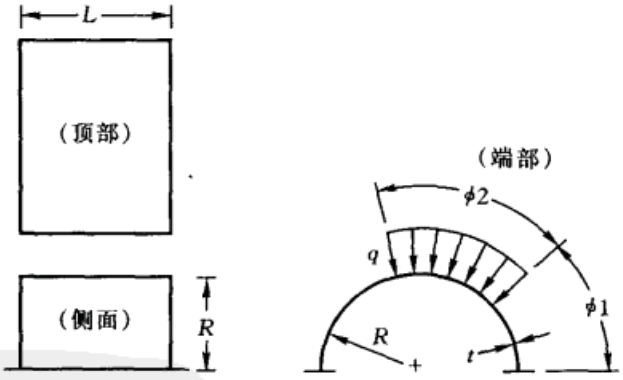


题 C16.10

C16.11　分析图 16.6－1 中所示的算例确定随着网格细化的收敛率（以及软件得到正确结果的能力）。因此，可利用结构每 1/4 部分（或每 1/8 部分）的 1，4，16 等四边形单元。对于夹紧柱壳和半球壳算例，也可利用轴对称单元和载荷的傅里叶级数表达式求解，评估随所用谐波数的收敛率。

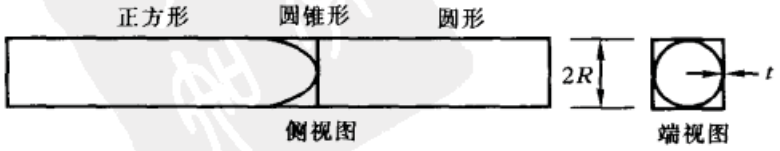
C16.12　图 16.6－1(a)中壳屋顶每个直边上附加一个加强梁。作为另一种选择，使屋顶伸出悬臂，留下一端自由。

C16.13　圆柱壳一段沿两直边固支，如图所示。均匀的线载荷 q 作用在一个曲边上且沿径向。



题 C16.13

C16.14　方形管和圆形管用锥形过渡段连接起来，如图示。可能的载荷包括内压、温度梯度、弯矩、轴向力和绕纵轴的扭矩。



题 C16.14

第 17 章

非线性：引言

本章有选择性地描述了一些非线性问题，并给出了有限元列式。对非线性方程的求解过程也进行了讨论。在对几何和材料非线性的讨论中，把重点放在了弹塑性问题和大挠度弹性力学问题上。同时包含了在非线性分析中对建立模型的建议。

17.1 非线性问题

如果我们知道什么不是非线性行为，那么我们就可以识别什么是非线性行为。可是非线性行为包括非常广泛的现象，并且有可能是相互作用的，也许每一个都是很难用公式进行描述。幸运的是线性模型对许多实际感兴趣的问题提供了令人满意的近似。然而非线性问题与线性问题的实质性差别还是显而易见的。在热传导分析当中，材料的属性通常是与温度有关的；状态变化吸热或放热并且改变材料的属性；因为辐射取决于绝对温度的四次方，所以它使得分析具有高度的非线性。在结构力学中，材料可能会屈服或者蠕变；局部的屈曲可能出现；裂纹可能张开和闭合。非线性问题在用现实的数学和数值模型描述物理现象以及解非线性方程方面给我们带来了相当大的困难。对分析者来说，当一个问题成为非线性的时候实质上必须付出更多的努力才能够解决问题。尽管计算机的计算能力已经显著提高，数值计算的代价还是值得考虑的因素。不过，因为分析软件的能力越来越强大，使用的范围越来越广，数值计算的成本在下降，对结构也提出了更多的要求，这就需要求对制造过程有更深入的理解，所以做非线性分析也越来越多。

在结构力学中，非线性类型包含以下几个方面：

- 材料非线性，在这种情况下，材料的属性是应力或应变状态的函数，这类例子包括非线性弹性问题、非线性塑性问题和非线性蠕变问题。
- 接触非线性，在这种情况下，两个相邻部分之间的间隙可能张开或闭合，两部分之间的接触面积随着接触力的变化而变化，或者在两个相互滑动的接触面上存在着摩擦力。

· 几何非线性,在这种情况下,结构的变形足够大,以至于平衡方程必须相对于结构变形的几何形态写出来。载荷也可能在变形增大的情况下改变方向,就像压力使薄膜膨胀一样。

这些类型的问题之所以成为非线性问题在于材料的刚度,也许还有载荷都是位移或变形的函数。因此,在结构方程$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\}$中,系数矩阵$[\boldsymbol{K}]$也许还有载荷向量$\{\boldsymbol{R}\}$成为$\{\boldsymbol{D}\}$的函数。因为构建$[\boldsymbol{K}]$和$\{\boldsymbol{R}\}$的信息无法预先知道,我们不能立即求解出$\{\boldsymbol{D}\}$。为了求解$\{\boldsymbol{D}\}$和与之相关的$[\boldsymbol{K}]$和$\{\boldsymbol{R}\}$,要求使用迭代方法,使$[\boldsymbol{K}]$和$\{\boldsymbol{D}\}$的乘积与$\{\boldsymbol{R}\}$保持平衡。

当方程$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\}$是非线性的时候,叠加的规则不再适用。也就是说,我们不能按照载荷或不同载荷情况叠加结果的比例来调整计算结果。每一种不同的载荷情况需要单独分析。而且对于给定的一组载荷,解$\{\boldsymbol{D}\}$可能不止一个。如果一种载荷情况由顺序作用的两部分组成,则逆序作用可能会产生不同的结果。

有许多文献都是关于非线性问题有限元分析方面的。在结构力学中,与本问题相关的内容大约在文献[11.49]中有 670 页,在文献[17.1]中有 370 页,在文献[17.2]中有 340 页,在文献[17.3]中有 490 页。现在的这一章当然十分有限。下一节将讲述一些与时间无关的非线性方程的求解技术。随后的部分包括一些对塑性问题、接触问题和几何非线性问题的介绍性讨论。学好非线性有限元方法通常不但要求掌握物理本质,而且比起求解线性问题,要求更加深刻地理解方程的求解方法。这是因为单一的对策不能解决所有的问题。只有多次努力并改变求解策略以后,才可能出现令人满意的结果。

17.2 几种求解方法

在这一节里面,我们将概述几种常见的求解与时间无关的方程$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\}$中自由度$\{\boldsymbol{D}\}$的方法,在这里$[\boldsymbol{K}]$是$\{\boldsymbol{D}\}$的函数。在现在的讨论当中,产生非线性的原因并不重要。为了通过二维载荷响应图来描述过程,我们针对一种特殊的情况——对$u=u(x)$的单个非线性方程$f(u,x)=0$,此处u是仅有的相关变量,来应用这些解法。一个可以得到这种方程的物理问题就是当单个的力加载到一个非线性弹簧上,如图 17.2-1(a)所示。载荷P和位移u之间的关系是

$$ku = P \quad 或 \quad (k_0 + k_N)u = P \quad 其中 \quad k_N = K_N(u) \tag{17.2-1}$$

为了让这个单一自由度问题与实际多重自由度问题$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\}$相对应,我们想象对于给定的$u$值能够计算$k$和弹簧力$ku$,但是在设定$P$的情况下不可能显式地解出$u$。$u$要采取一系列线性步骤得到,其中每一步都与载荷的变化相对应。计算过程可以使用切线刚度,它被定义为$k_t=\mathrm{d}P/\mathrm{d}u$,表示$P-u$图的斜率。

在一维非线性弹簧问题比拟中,刚度是u的函数,但是设定的载荷仅仅是P值,它与u无关。在多维问题中,$[\boldsymbol{K}]$和$\{\boldsymbol{R}\}$可以是$\{\boldsymbol{D}\}$的函数。举例来说,在几何非线性问题中,当结构变形时,设定的压力产生方向变化的节点载荷,在热传导问题中,由设定温度的热源辐射产生与节点温度有关的节点热流量。

下面是其中的一些求解方法。使用组合方法常常很有效,尽管一些组合可能弊大于利。

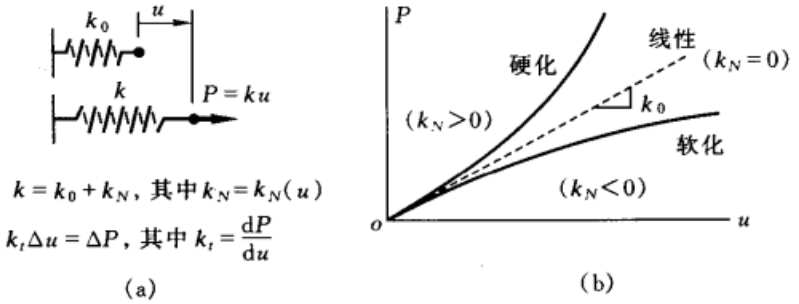


图 17.2-1 (a) 非线性弹簧的单自由度问题；(b) 硬化和软化性能

牛顿-拉斐逊(N-R)方法 在微积分学的教材中，这种方法被叫做牛顿法，同时也被解释成求解多项式方程根的方法。这里我们把它描述成为一种生成 $P-u$ 曲线的方法，这种曲线的形状在开始的时候是不知道的。

在式 17.2-1 中，想象在初始条件下 $u=0$。然后加载大小为 P_1 的载荷，并求解相应的位移 u_1。在图 17.2-2(a)中初始切线刚度被记作 k_{t0}，初始的载荷增量就是载荷自身；因为我们从零载荷开始，所以 $\Delta P_1=P_1$。我们计算当前的位移增量并且更新结果：

$$k_{t0}\Delta u=\Delta P_1 \quad \Delta u=k_{t0}^{-1}\Delta P_1 \quad u_A=0+\Delta u \tag{17.2-2}$$

这里 u_A 是预期结果 u_1 的当前估计值。因为变形的弹簧还没有施加一个平衡 P_1 的力，所以这个估计是不精确的。当前的力误差(或是载荷不平衡)e_{PA} 是

$$e_{PA}=P_1-ku_A \quad \text{这里 } k=k(u) \text{ 是通过位移 } u_A \text{ 来估算的} \tag{17.2-3}$$

这里 ku_A 是结构在当前变形状态下所提供的一个阻力(在特殊的问题当中，比如塑性分析，阻力可以通过单元应力直接计算出来，而不会在这个过程中产生刚度矩阵)。

为了最终可以把不平衡减小到零，我们现在开始着手学习“平衡迭代”。当保持 P_1 恒定时，我们采用另一个步骤，从图 17.2-2(a)的 a 点开始，沿着曲线 a 点的切线移动，这样我们获得一个更精确的位移 u_B。

$$k_{ta}\Delta u=e_{PA} \quad \Delta u=k_{ta}^{-1}e_{PA} \quad u_B=u_A+\Delta u \tag{17.2-4}$$

弹簧力仍然不与施加的载荷 P_1 平衡。现在力的误差为：

$$e_{PB}=P_1-ku_B \quad \text{这里 } k=k(u) \text{ 是通过位移 } u_B \text{ 来估算的} \tag{17.2-5}$$

接下来的步骤是沿着曲线的切线到 b 点并且提供另外一个位移增量 Δu 和更新位移 $u_B+\Delta u$。虽然这种方法不能保证对所有的非线性问题都收敛，但不断的迭代通常使力的误差减小，连续的位移增量 Δu 接近零值，而更新后的结果更加接近真实的值 u_1。

现在可以加载另外一个载荷增量 ΔP_2 了。迭代重新开始以求解位移 u_2，它与整个施加的载荷 P_2 相对应。与方程 17.2-2 和 17.2-3 相对应的方程是：

$$k_{t1}\Delta u=\Delta P_2 \quad \Delta u=k_{t1}^{-1}\Delta P_2 \quad u_C=u_1+\Delta u \tag{17.2-6}$$

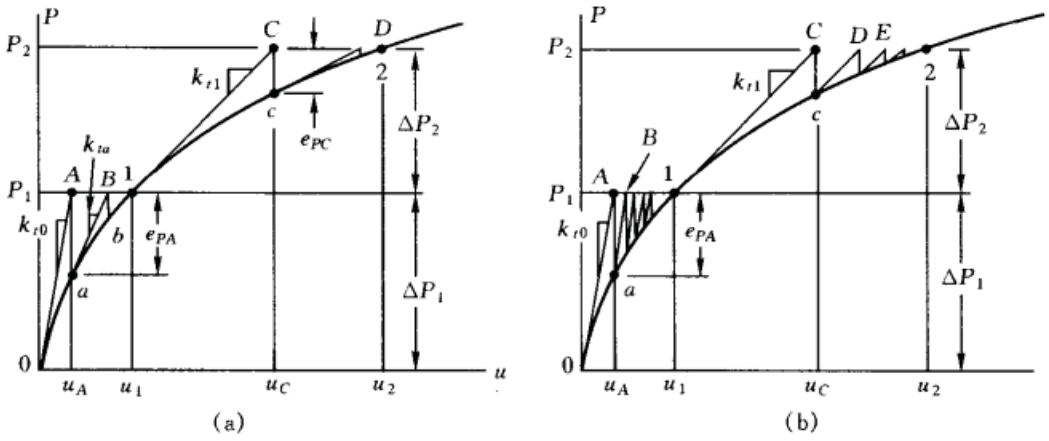


图 17.2－2　在 P_1 和 P_2 每个载荷级上的迭代收敛
(a) 牛顿-拉斐逊迭代法；(b) 修正的牛顿-拉斐逊迭代法

$$e_{PC} = P_2 - ku_C \quad \text{其中 } k = k(u) \text{ 是用位移 } u_C \text{ 估算的} \tag{17.2-7}$$

显然，应用连续增加载荷量级，并为了每次迭代收敛，我们能够设置为构建足以描画 $P-u$ 曲线所需的许多点 1,2,3,…。通过采用小的载荷步长来增加在每个载荷量级收敛于正确解的可能性。

改进的牛顿-拉斐逊法　在每一次计算位移增量 Δu 之前不更新切线刚度 k_t，相同的切线刚度可用在许多迭代循环中。这个过程描述在图 17.2－2(b)中，这里初始切线刚度 k_{t0} 被使用直到在载荷水平 P_1 上收敛，然后将切线刚度更新为 k_{t1}，并且保持 k_{t1} 直到在载荷水平 P_2 上收敛。这种对切线刚度的交替选择是在方程 17.2－2 到 17.2－7 中唯一需要改变的地方。

计算量减少是采用改进 N-R 方法的主要动因。在多维问题中，原始的 N-R 方法要求在计算每个自由度增量$\{\Delta \boldsymbol{D}\}$之前产生新的切线刚度矩阵$[\boldsymbol{K}_t]$，并且为了求解联立代数方程在实际计算$\{\Delta \boldsymbol{D}\}$的时候需要对$[\boldsymbol{K}_t]$进行因式分解。改进的 N-R 方法避免了重复计算$[\boldsymbol{K}_t]$，并且在第一次计算$[\boldsymbol{K}_t]$之后每次对$\{\Delta \boldsymbol{D}\}$的计算只需要处理新的右边项。因此，虽然改进的N-R方法比原来的 N-R 方法需要更多的迭代次数，但是完成每一次迭代所需的时间更少，节约成本可能是非常可观的。如图 17.2－2(b)所示，在增加载荷增量时，往往要更新$[\boldsymbol{K}_t]$，但总的全部的计算费用通常最低。

其它方法　最基本解法就是直接代换方法。这种方法不需要使用切线刚度矩阵。取而代之的是系数矩阵被重复更新并且全部结果也不断重复更新。因此，对于$\{\boldsymbol{R}\}$是常量的情况，我们要从自由度的初始假设$\{\boldsymbol{D}\}_0$开始(或许所有的 D_i 设为 0)，建立相应$[\boldsymbol{K}]_0$，并且求解$[\boldsymbol{K}]_0\{\boldsymbol{D}\}_1=\{\boldsymbol{R}\}$中的$\{\boldsymbol{D}\}_1$，这个值大概比$\{\boldsymbol{D}\}_0$更精确。然后我们在$\{\boldsymbol{D}\}_1$的基础上建立$[\boldsymbol{K}]_1$并且求解出$\{\boldsymbol{D}\}_2$，如此重复下去。这种方法的效率通常不高，并且比切线刚度方法更可能遇到收敛困难的问题。

*初始刚度法*在计算的整个过程中都使用刚度矩阵$[\boldsymbol{K}_0]$，而不管载荷量级如何。非线性项在方程的右边考虑并且不断重复更新直到收敛。在类似于方程 17.2－1 的符号中，这种方法是$[\boldsymbol{K}_0]\{\boldsymbol{D}\}_i=\{\boldsymbol{R}\}-[\boldsymbol{K}_N]\{\boldsymbol{D}\}_{i-1}$，这里$[\boldsymbol{K}]=[\boldsymbol{K}_0+\boldsymbol{K}_N]$，$[\boldsymbol{K}_0]$和$[\boldsymbol{K}_N]$分别是常数矩阵和与位

移相关的矩阵。因为当位移是零的时候$[\boldsymbol{K}_0]$和$[\boldsymbol{K}_t]$一样，初始刚度矩阵是从不更新切线刚度矩阵的改进的 N-R 方法。和直接替换法相似，初始刚度法可能收敛缓慢或者根本就不收敛，这取决于所解决问题的具体情况。

在图 17.2－3(a)中描述的载荷-挠度关系对于一种或者两种 N-R 解法来说都是困难的。在图 17.2－3(a)中的每一条曲线都显示出标有 L 的“极限点”，它在载荷-位移图中是一个相对最大值，在这个点上切线刚度是零。物理上，对于非线性弹簧问题，每一条曲线可以通过位移控制方法产生，也就是逐次地增加 u 并且施加载荷 P 而不管所需要的是多大。(从计算的角度讲，对于多自由度非线性问题，这种方法并不简单，因为对于给定的载荷向量，$\{\boldsymbol{D}\}$中自由度之间的关系无法预先得知)。在图 17.2－3(a)中的两条曲线具有突然完全屈曲的特征：当在逐渐增加载荷并且不控制位移的情况下达到一个极限点，位移突然在曲线的上升部分跳跃到一个很大的值。曲线 OB 也表现出一些断裂问题的特征。在计算中，如果作用比曲线 OA 极限点稍大一点的载荷 P_c，当接近点 L 的时候 N-R 迭代给出一个非常大的 Δu 增量，而一旦越过 L 点以后就会给 Δu 一个很大的负增量。这个过程可能就不会收敛到点 c。变更 N-R 迭代是成功的，但是速度慢。曲线的 L-1 部分和 L-2 部分无法用图 17.2－2 中所描述的任何一种方法计算(事实上，静态分析忽略了突然完全失稳的动力学现实，而它可能在实际的结构分析中非常重要)。一种通常对于这两种曲线都非常成功的算法叫做弧长法[15.7,17.1~17.6]。像对于在图 17.2－3(b)中所描述的一维问题，弧长法是 N-R 迭代的一种形式。在这种迭代中，在每一个新的外部载荷量级，都通过下面的方法来调整载荷和位移的迭代增量：迭代步 $1A$，aB，bC 等产生图 17.2－3(b)中的点 A，B，C 等等，这些点位于以初始点 1 为圆心，Δl 为半径的圆弧曲线上。当曲线具有负斜率的时候，这种方法防止了自身的双折返。因为这种方法所特有的调整能力，计算出的位移与由计算调节的载荷量级相对应并稍低于常用于过程开始的载荷量级。

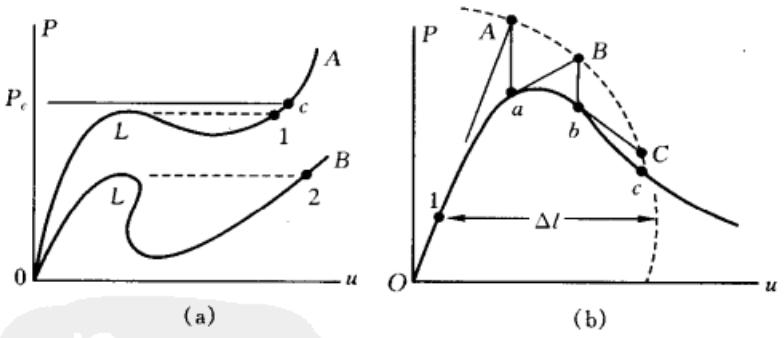


图 17.2－3 (a) 更复杂的载荷位移曲线，两者在物理上是可能的，每个峰值 L 都是一个极限点；(b) 弧长法中的连续迭代

在以上的描述中我们已经强调了软化曲线。图 17.2－4 描述了 N-R 迭代和改进 N-R 迭代对硬化曲线的应用。我们看到，对于所描述的特定曲线，N-R 方法在初期高估了位移但是在随后的迭代中收敛。改进的 N-R 方法第二次迭代使用了这样一种错误的切线刚度，它导致迭代发散或者陷入无穷循环当中。改进 N-R 方法描述硬化行为可能比描述软化行为更差，特别是在载荷步长很大的时候。有时计算稳定性能通过低松弛方法得到恢复。因此，不必用当前完整的增量 Δu 更新以前的计算结果，我们只使用其中的一小部分进行更新：

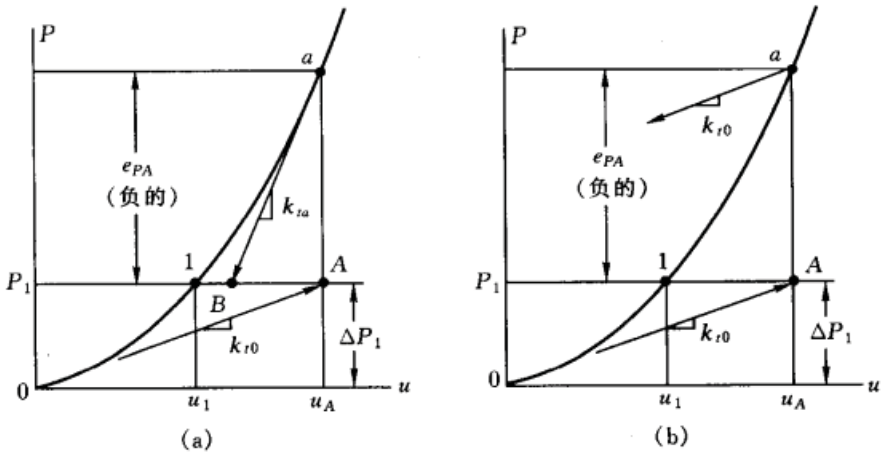


图 17.2－4　硬化曲线，显示了前两个计算步，从零载荷开始
(a) N-R 方法；(b) 改进的 N-R 方法

$$u_{\text{new}} = u_{\text{old}} + \mu\Delta u \quad \text{或者} \quad \{\boldsymbol{D}\}_{\text{new}} = \{\boldsymbol{D}\}_{\text{old}} + \mu\{\Delta\boldsymbol{D}\} \quad \text{这里} \quad 0 < \mu < 1 \tag{17.2-8}$$

确定一个合适 μ 的过程称做线性搜索算法[17.1~17.3]。

命名为准牛顿和割线刚度的方法正越来越多地被运用。考虑图 17.2－5(a)，想象经过改进 N-R 方法的两次循环后产生了位移 u_A 和 u_B。通过沿着 a 到 b 的割线来进行下一步的计算可能获得对解的大幅度改进。这种方法是健全的，对多自由度问题的重点考虑是割线刚度矩阵的逆阵能通过更新以前切线刚度矩阵的逆阵$[\boldsymbol{K}_t]^{-1}$来获得(对应于在图 17.2－5(a)中零载荷情况下 $1/k_t$)。这样割线步方程求解的成本就大幅度减小了，而原先的主要费用是产生割线刚度逆矩阵。参考文献包括[2.14，17.2，17.7，17.8]。

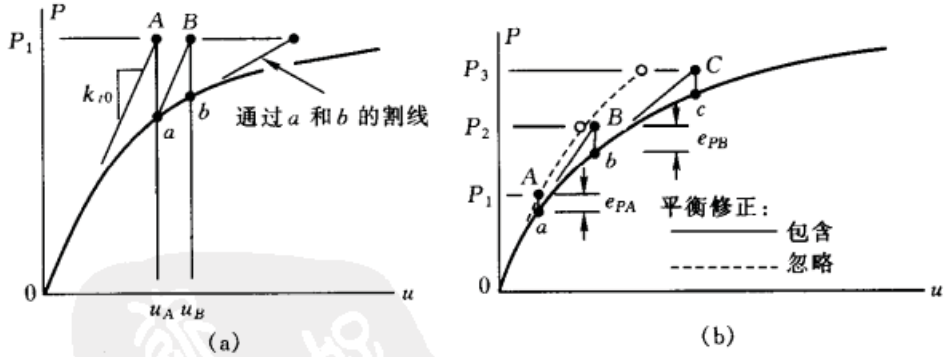


图 17.2－5　(a) 跟随两次改进的 N-R 迭代割线步；
(b) 带和不带平衡修正的增量解

图 17.2－5(b)中的开环，用每一步外载荷的增加和每个载荷量级无平衡迭代来描述纯增量步的结果。初始迭代把我们带到 A 点，那里的力不平衡量是 e_{PA}。如果在接下来的迭代中包含这样的不平衡量，我们得到一系列的位移：

$$u_A = k_{\infty}\Delta P \quad \text{其中} \quad \Delta P = P_1$$

$$
\begin{aligned}
u_B &= u_A + k_{ta}^{-1}[\Delta P + e_{PA}] \quad \text{其中} \quad \Delta P = P_2 - P_1 \\
u_C &= u_B + k_{ta}^{-1}[\Delta P + e_{PB}] \quad \text{其中} \quad \Delta P = P_3 - P_2
\end{aligned} \tag{17.2-9}
$$

等等。这样我们获得点 A,B,C 等，通过这些点能够构建正确曲线的近似值。如果载荷不平衡项 e_{PA} 和 e_{PB} 从方程中略去，位移的误差将累积起来，提供一个精度较低的近似，如图 17.2-5(b)中点划线和开环所示。点划线被看作是用欧拉方法数值求解一阶微分方程的例证。

当解在逐渐增加载荷的情况下逼近极限点(图 17.2-3(a))的时候，物理结构通常接近破坏。矩阵$[\boldsymbol{K}_t]$的行列式值接近于零并且位移增量变得非常大。刚过极限点以后$[\boldsymbol{K}_t]$就具有一个负的行列式值，这可能会导致方程求解失败(依据所使用的算法而定)。是否达到极限点也可以通过当前刚度参数是否接近零来判断，当前刚度参数是用前面计算得到的力和位移增量来构建的刚度的数量度量[17.1]。

使用为结构动力学所设计的计算方法来求解与时间无关的问题是可能的。为结构设定一个假想的阻尼矩阵并且将位移当作时间的函数来计算。当结构停止运动时，就可以获得与时间无关的结果了。物理上可以想象这种方法相当于将结构沉浸在黏稠的液体当中，抑制了强的像由于猛然屈曲突然跳跃一类的几何非线性。这种方法被称为动态松弛或者是黏性松弛，这取决于在数值模型中是否包含有质量矩阵。参考文献包括[17.3,17.9～17.12]。

收敛准则 当计算结果足够接近软件自动应用的一个或多个准则时，在给定量级的平衡迭代就可以停止了。有两个表面上可以讲得通的收敛条件：一个是当前的力不平衡量是当前载荷量级中总作用力的一小部分，另一个是当前的位移增量是初始位移增量的一小部分。这样，对于一个多自由度结构，它的位移向量是$\{\boldsymbol{D}\}$，施加的载荷是$\{\boldsymbol{R}\}$，与位移相关的刚度是$[\boldsymbol{K}]$，力不平衡是$\{\boldsymbol{e}_R\}=\{\boldsymbol{R}\}-[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{D}\}$，两个收敛准则是：

$$
\begin{aligned}
&\text{力收敛：} && \| \boldsymbol{e}_R \| < \varepsilon_R \| \boldsymbol{R} \| \\
&\text{位移收敛：} && \| \Delta \boldsymbol{D} \| < \varepsilon_D \| \Delta \boldsymbol{D}_0 \|
\end{aligned} \tag{17.2-10}
$$

其中，在前面 N-R 方法的一维描述中，$\{\boldsymbol{e}_R\}$和$\{\Delta \boldsymbol{D}\}$与最近确定的 e_P 和 Δu 的值相对应。容差 ε_R 和 ε_D 的值可能在 0.001 与 0.01 之间，但是实际使用的值可能与其大相径庭，这取决于问题的性质、精度要求和连续迭代的花费。如果采用的范数是欧几里德(Euclidean)范数，则 $\| \boldsymbol{R} \| = \sqrt{\{\boldsymbol{R}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{R}\}}$，等等。在位移收敛准则中，$\| \Delta \boldsymbol{D}_0 \|$ 表示当前载荷步的初始位移增量。如果采用的是累加位移$\{\boldsymbol{D}\}$，当位移累积的时候，收敛检查将变得越来越宽松。

一般地，$\{\boldsymbol{R}\}$同时包含力和力矩。方程 17.2-10 的书写忽略了 R_i 在量纲上的不匹配。如果长度单位是毫米，力矩项对 $\| \boldsymbol{e}_R \|$ 和 $\| \boldsymbol{R} \|$ 起支配作用，而如果长度单位是米，则不是。在方程 17.2-10 的第一式中仅包含力，可以避开这个难题，或者用初始总体刚度矩阵中相应的对角项的平方根除$\{\boldsymbol{e}_R\}$和$\{\boldsymbol{R}\}$中的每一项来减小这个难度[17.1]。在普通单位制中，旋转项不可能变得大到足以支配 $\| \Delta \boldsymbol{D} \|$ 和 $\| \boldsymbol{D} \|$ 的程度。

因为对整体结构行为影响的局部力不平衡存在，满足力收敛准则偶尔也会遇到困难[17.1]。然而经验证明位移准则并不是一个非常令人满意的替代。位移准则可能仅仅因为收敛过慢而终止迭代，或者当力不平衡还相当大的时候就显示收敛。例如，如果在图 17.2-4(a)中曲线在 a 点几乎垂直，虽然点 B 与大的力不平衡相关，但距离 AB 与位移 u_A 比较可能是小的。通

常如果采用位移收敛准则，应该把力收敛准则作为这种方法的补充[17.2]。如果采用了欠松弛技术(式 17.2－8)，在方程 17.2－10 中的 $\| \Delta \boldsymbol{D}_0 \|$ 应该乘以 μ，使得不至于仅因为使用小增量 $\mu\{\Delta \boldsymbol{D}\}$ 而不表示收敛性[17.1]。

通常对迭代次数或计算时间都设置一个限度。在收敛以前达到了这些限度的一个，可能表明迭代次数不够或允许的时间不足，或收敛容差太严，或者算法遇到了问题。在这种情况下，可从前面载荷量级重新开始这个过程，但要用更小的载荷增量。否则分析者必须决定如何继续进行。可选择的包括改变迭代次数的限度，改变收敛容差和选择不同的算法。软件可能具备自动改变算法的能力，重新以低载荷开始，并改变步长[17.13,17.14]。

17.3　塑性：简介

塑性指的是载荷移去后不可恢复的变形。传统上以及在这本书里，塑性被认为是与时间无关的。这样蠕变被排除在外了，并且应变率在塑性计算当中不再起作用(尽管如此，一些作者还是喜欢用应变速率表示塑性方程。因此，假想的时间增量只作为对载荷、应力和应变增量计数的一种方法)。有几种描述物理行为的数学方法，还有许多计算方法和它们的变种。在这一部分，我们考虑一维的弹塑性关系。多维关系在 17.4 节中介绍，在 17.5 节中着重介绍适用于初始各向同性材料如钢和铝的一些问题，在 17.6 节将讲解使用切线刚度矩阵的增量计算方法。许多参考资料是可用的，包括在文献[17.1～17.3,17.8,17.15～17.19]中。

单轴应力　令 σ 表示单轴应力，比如在拉伸试验样本中的轴向应力，ε 表示相应的轴向应变。为了解释方便，我们暂时将应力和应变的关系理想化为双线性关系(图 17.3－1)。当 σ 从零增加时，在应力为 σ_Y 的时候屈服开始，相应的应变为 ε_Y。在一般的列式当中，屈服由 $F=0$ 定义，这里 F 叫做“屈服函数”。对于单轴应力 σ，$F=|\sigma|-\sigma_Y$，这里 σ_Y 总是取正值。

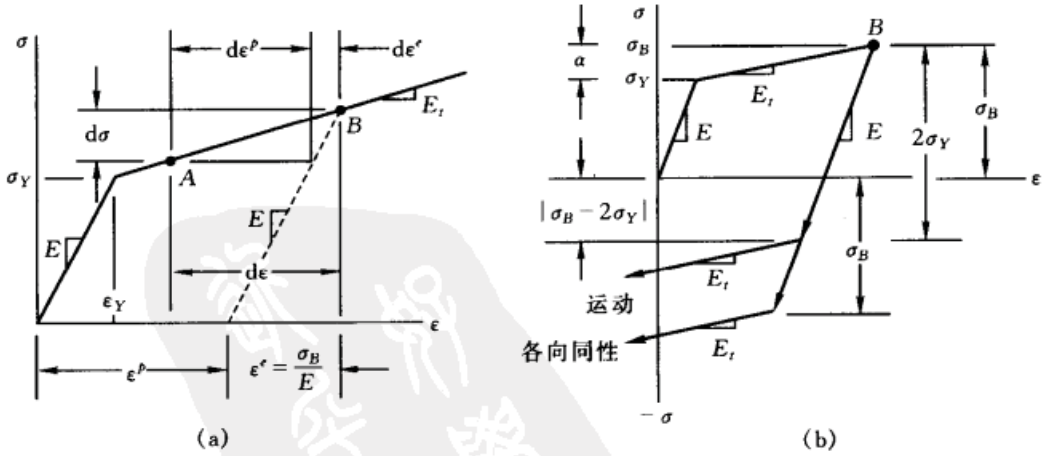


图 17.3－1　(a) 单轴应力的应力-应变关系图，理想化为双线性(两条直线)，其中 σ_Y 是屈服开始时的应力；(b) 各向同性和运动硬化规则

对于超过 ε_Y 的应变，应变增量 $d\varepsilon$ 被认为是两部分的组成：一部分是弹性贡献 $d\varepsilon^e$，另一部

分是塑性贡献 $d\varepsilon^p$（这里我们不考虑热应变和蠕变应变）。当 $\varepsilon>\varepsilon_Y$，增量 $d\varepsilon^e$ 仅当 $E_t\neq 0$ 时才存在，并且与应力增量 $d\sigma$ 关联，这种联系可以写成不同的形式。对于在塑性范围内的应变，$d\varepsilon=d\varepsilon^e+d\varepsilon^p$，

$$d\sigma = Ed\varepsilon^e \quad d\sigma = E(d\varepsilon - d\varepsilon^p) \quad d\sigma = E_t d\varepsilon \quad d\sigma = H_p d\varepsilon^p \tag{17.3-1}$$

这里 H_p 可以叫做应变硬化参数或者塑性模量。将方程 17.3-1 中的第二和第四式代入第三式得到：

$$H_p = \frac{E_t}{1-E_t/E} \quad \text{或者} \quad E_t = E\left(1-\frac{E}{E+H_p}\right) \tag{17.3-2}$$

当表达式中的切向模量 E_t 写成这种形式时，它与使用在多轴应力状态下的更一般形式相似。如果 $H_p=0$，而这时 $E_t=0$，这种材料被叫做“理想弹塑性体”。如果材料还没有屈服或没有卸载，那么 $E_t=E$ 并且在计算过程中不能用 H_p。就像图 17.3-1(b)中所示的那样，从塑性应力 σ_B 卸载的过程是弹性的。弹性状态或者保持到在同一个方向重新加载时超过应力 σ_B，或者反向加载时应力在数值上（至多）达到 σ_B。弹性范围的跨度由硬化规则定义。

两个普通的硬化规则是*各向同性硬化*和*运动硬化*。如图 17.3-1(b)所示，因在塑性范围内达到单轴应力 σ_B，根据各向同性硬化规则弹性范围从初始的 $2\sigma_Y$ 扩展到 $2\sigma_B$。因此忽略在实验上可观察到的包辛格(Bauschinger)效应。运动硬化规则通过保持一个 $2\sigma_Y$ 的弹性范围来解释包辛格效应，但是忽略弹性范围增加的可能性。实际上，这两个规则被结合起来使用。单轴屈服准则，通过硬化规则的修正，可以写成如下形式：

$$\text{各向同性硬化：}\quad F=|\sigma|-\sigma_0 \qquad \text{运动硬化：}\quad F=|\sigma-\alpha|-\sigma_Y \tag{17.3-3}$$

这里 $\sigma_0=\sigma_Y+\alpha$ 是在以前塑性应变中单轴应力所达到的最大值，α 在使用运动硬化规则时叫做“运动偏移”，如图 17.3-1(b)中所示。在初始屈服以前，$\alpha=0$，$\sigma_0=\sigma_Y$。当 σ 和 α 使得 $F<0$ 的时候，预示弹性状态，而当 $F=0$ 时材料屈服。$F>0$ 的情况在物理上不可能发生。伴随应变硬化的持续或重复的塑性行为改变了 α 的值，因此也修改了屈服准则。在多轴应力状态下，各向同性硬化保持着初始的各向同性性质，而运动硬化在每一次塑性应变增量后导致材料的各向异性。这里各向异性与屈服行为而不是与弹性模量有关系。

不同形式的屈服准则、流动规则和硬化规则用于不同的材料。因此适用于铜材的规则不适合于混凝土。冯·米赛斯屈服准则以及相关的流动规则很好地预示了所观察到的常用金属材料的行为(17.5 节)。

单轴应力计算 考虑在图 17.3-2 中所示的单轴应力-应变关系，并且让它与受载结构杆单元的轴向应力相关联。作为施加到结构上的载荷增量的作用结果产生应变增量 $\Delta\varepsilon=\varepsilon_B-\varepsilon_A$。应力 σ_A 是已知的，而 σ_B 必须通过计算得到。于是这种计算与我们在多轴应力状态下所做的工作相似，这里可以想象我们不能在已知 ε_B 的情况下简单地通过“测量曲线”的方法得到 σ_B。我们应该按照下面的方法做：首先计算与弹性应变相关联的应力增量部分，然后再计算与屈服后应变相关联的部分。

点 A 刚好位于线弹性区域内，于是 $(E_t)_C=E$。因此由应变增量 $\Delta\varepsilon=\varepsilon_B-\varepsilon_A$ 得到一个近似应力增量 $\Delta\sigma_{\text{trail}}=\sigma_D-\sigma_A=E\Delta\varepsilon$。一小步 $\beta\Delta\sigma_{\text{trail}}(0<\beta<1)$，位于弹性区内并使材料处于屈服

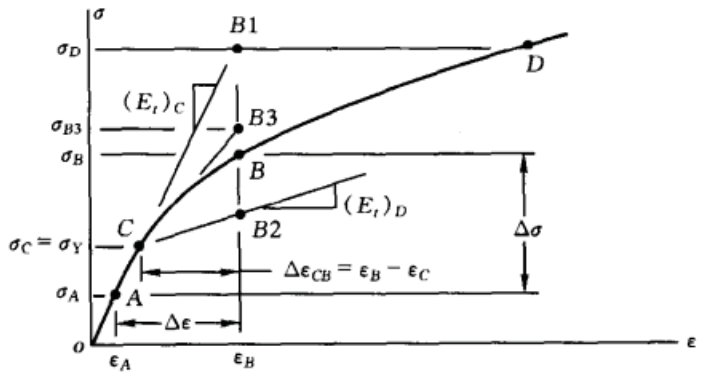


图 17.3－2　单轴应力下的应力-应变关系。A 点应力已知；希望知道与 ε_B 相对应的应力 σ_B

边缘的 C 点。我们应用方程 17.3－3 中的 $\sigma_0=\sigma_Y$ 来确定 β。

$$F_C = |\ \sigma_A + \beta\Delta\sigma_{\text{trial}}\ | - \sigma_Y = 0$$

$$\text{其中}\quad \Delta\sigma_{\text{trial}} = \sigma_D - \sigma_A \quad \text{因此} \quad \beta = \frac{\sigma_Y - \sigma_A}{\sigma_D - \sigma_A} = \frac{F_A}{F_A - F_D} \tag{17.3-4}$$

在单轴应力下，这些计算是说明那些明显结果的间接办法。在多轴应力状态下，类似的计算所得到的结果并不是显而易见的。

从图 17.3－2 中的 C 点出发，屈服后从 C 到 B 的应力增量可以通过如下的两步欧拉积分来估算。在这个特定例子的 C 点，曲线的斜率就是材料的弹性模量 E，从 C 到 B 的应变增量是 $\Delta\varepsilon_{CB}=\varepsilon_B-\varepsilon_C=\varepsilon_B-(\sigma_C/E)$。因此在 $(E_t)_C=E$ 的情况下，对从 C 到 B 的应力增量和在 B 点的应力的第一次估计是：

$$(\Delta\sigma)_1 = (E_t)_C(\varepsilon_B - \varepsilon_C) = \sigma_D - \sigma_C \quad \text{和} \quad \sigma_{B1} \approx \sigma_C + (\Delta\sigma)_1 = \sigma_D \tag{17.3-5}$$

接下来，重复计算过程，现在使用与估算的 σ_{B1} 相对应的切向模量，也就是在当前例子中 D 点的 E_t[17.17]。因此从 C 到 B 的应力增量和在 B 点应力的第二次估计就是：

$$(\Delta\sigma)_2 = (E_t)_D(\varepsilon_B - \varepsilon_C) \quad \text{和} \quad \sigma_{B2} \approx \sigma_C + (\Delta\sigma)_2 \tag{17.3-6}$$

将这两次估计的结果取平均，我们得到 $\sigma_B\approx\sigma_{B3}$，这里

$$\sigma_{B3} = \sigma_C + \frac{1}{2}[(\Delta\sigma)_1 + (\Delta\sigma)_2] \quad \text{或者} \quad \sigma_{B3} = \sigma_C + \frac{1}{2}[(E_t)_C + (E_t)_D]\Delta\varepsilon_{CB} \tag{17.3-7}$$

通过减小载荷的步长并且把 $\Delta\sigma$ 的计算分解为子增量，可以减小在方程 17.3－7 中的不精确性。方程 17.3－5 到 17.3－7 的多轴形式出现在 17.6 节。

熟悉数值方法的读者将会认为方程 17.3－7 是梯形法则数值积分的结果。当写出方程 $y=f(x)$ 的积分时，一般的梯形法规则是：

$$y_{n+1} = y_n + [(1-\gamma)(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)_n + \gamma(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)_{n+1}]\Delta x \tag{17.3-8}$$

这里 $0\leqslant\gamma\leqslant1$。从已知(或近似)值 y_n 开始，我们寻求由所取的步长 Δx 产生的 y_{n+1}。$\gamma=0$ 和 $\gamma=1$ 的情况分别称做向前和向后欧拉积分。$\gamma=0.5$ 的情况是传统的梯形规则，有时也被看作是二阶龙格-库塔(Runge-Kutta)方法的一种形式[17.20]。使用 $\gamma=0.5$ 得到二阶精度；即 $\Delta y=y_{n+1}-y_n$ 的误差与 $(\Delta x)^2$ 成比例[2.14,5.1]。

17.4 塑性：小应变下的一般列式

在任何屈服之前，许多材料几乎都表现出线弹性的性质，以至于应力可以通过已知弹性常数和应变求得。当有屈服出现时，不但载荷、变形与应力呈现非线性关系，而且它们还有历史相关性。也就是说，改变到特定最终载荷状态的历史路径有可能改变最终的计算结果。对于任意一个载荷历史，应力和变形的最终状态仅由应力和应变的历史所决定。在计算中，历史由应力增量与应变增量关系的列式来考虑。在这一节中，我们总结这类列式，以足够一般的形式使之适用各种不同的材料。适合于常用金属的形式出现在 17.5 节。详细信息和理论背景可以在参考文献[17.1～17.3,17.15,17.16]中找到。

增量理论对所有塑性问题不是唯一有效的理论。如果加载是成比例的话，应力也可以由总应变确定，这就是说，加载以相同的比例因子增加应力状态中的所有分量。因此，在增加载荷情况下，求解一个问题就好像材料属性是弹性的而不是非线性的一样。在应用中会出现一个卸载阶段，必须把它与加载阶段分开。比例加载的假设可能对许多涉及塑性作用的工程问题是适用的。

在本节以及以后的几节中，我们继续使用剪应变的工程定义：$\gamma_{xy}=u_{,y}+v_{,x}$，等等。在专门介绍塑性的教科书中，经常采用张量定义 $\epsilon_{xy}=\gamma_{xy}/2$。

塑性增量关系 就像在 17.3 节所讲的那样，应变增量包含可恢复的(弹性)和不可恢复的(塑性)两部分，

$$\{\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}\}=\{\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^e\}+\{\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^p\} \tag{17.4-1}$$

这里上角标字母 e 和 p 分别表示弹性和塑性。应力增量仅仅与弹性分量相关联。

$$\{\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\}=[\boldsymbol{E}]\{\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^e\}\quad\text{或者}\quad\{\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\}=[\boldsymbol{E}](\{\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}\}-\{\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^p\}) \tag{17.4-2}$$

这里 $[\boldsymbol{E}]$ 是弹性材料性能矩阵。一般地，$\{\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\}$ 包含所有 6 个应力分量的增量，$\{\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\}=\lfloor\,\mathrm{d}\sigma_x\ \mathrm{d}\sigma_y\ \mathrm{d}\sigma_z\ \mathrm{d}\tau_{xy}\ \mathrm{d}\tau_{yz}\ \mathrm{d}\tau_{zx}\,\rfloor^{\mathrm{T}}$。

在弹塑性分析中三个必不可少的要素是*屈服准则*、*流动规则*和*硬化规则*。屈服准则将应力状态与屈服的发生联系起来。流动规则是在塑性流动存在增量时将应力状态 $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ 与塑性应变 $\{\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^p\}$ 相应的 6 个增量联系起来。硬化规则描述了在超出初始屈服以后如何用应变修正屈服准则。

假设屈服函数写成如下形式

$$F=F(\{\boldsymbol{\sigma}\},\{\boldsymbol{\alpha}\},W_p) \tag{17.4-3}$$

这里$\{\boldsymbol{\alpha}\}$和W_p用描述多维应力空间中"屈服面"在塑性应变响应中如何改变来说明硬化现象。(方程 17.4－5 和方程 17.4－6)。关于单轴应力状态屈服函数 F 的例子出现在方程 17.3－3。在 $F<0$ 的时候弹性条件起主要作用。当应力恰使 $F=0$ 时屈服即将发生或者正在进行中。$F>0$的情况在物理上是不可能的。从 $F=0$ 的状态开始，塑性流动就与$\{\boldsymbol{\sigma}\}$的变化、$\{\boldsymbol{\alpha}\}$和/或W_p中的变化关联在一起。在塑性流动期间，应力依然在屈服表面上(根据硬化规则的要求，这种情况可能发生形状和/或位置上的变化)；因此 $dF=0$。当卸载的时候，$dF<0$，这意味着材料回复到弹性性质。

流动规则是用 Q 函数来表述的，Q 函数和应力具有相同的单位并且被称做"塑性势"。使用一个被称做"塑性因子"的标量 $d\lambda$，塑性应变增量可以写成如下形式：

$$\{d\boldsymbol{\varepsilon}^p\} = \left\{\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\} d\lambda \tag{17.4-4}$$

因此 $d\varepsilon_x^p=(\partial Q/\partial \sigma_x)d\lambda$，等等。如果 $Q=F$，流动规则被称做"关联流动规则"，否则称为"非关联流动规则"。关联流动规则普遍适用于有延伸性的金属。非关联流动规则更适用于泥土或是粒状材料。

硬化建模可以是各向同性的或运动的，这两者单独存在或组合在一起同时存在。各向同性硬化可以用每一个单位体积内的塑性功 W_p 表示，它描述屈服面的增长。运动硬化可以用在应力空间中说明屈服面平移的一个向量$\{\boldsymbol{\alpha}\}$来表示。用符号表示为

$$\begin{array}{ll} \text{各向同性硬化：} & \text{运动硬化：} \\ W_p = \int \{\boldsymbol{\sigma}\}^{\mathrm{T}} \{d\boldsymbol{\varepsilon}^p\} & \{\boldsymbol{\alpha}\} = \int \lceil \boldsymbol{C} \rfloor \{d\boldsymbol{\varepsilon}^p\} \end{array} \tag{17.4-5}$$

其中后面的表达式是从下式的积分得来：

$$\{d\boldsymbol{\alpha}\} = \lceil \boldsymbol{C} \rfloor \{d\boldsymbol{\varepsilon}^p\} \quad \text{在这里} \quad \lceil \boldsymbol{C} \rfloor = \frac{2}{3} H_p \lceil 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; \frac{1}{2} \;\; \frac{1}{2} \;\; \frac{1}{2} \rfloor \tag{17.4-6}$$

H_p 是塑性模量，第一次出现在方程 17.3－1 中。出现因子 2/3 的原因无法简单地解释。H_p 一般不是一个常量。可通过实验来确定与应力或应变的关系。因为我们写$\{d\boldsymbol{\varepsilon}\}$时使用的是工程上的剪应变定义而不是张量定义，所以对角矩阵$\lceil \boldsymbol{C} \rfloor$不是一个单位矩阵。塑性流动在一个常体积内发生，$d\varepsilon_x^p+d\varepsilon_y^p+d\varepsilon_z^p=0$；因此$\lfloor 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \rfloor \{\boldsymbol{\alpha}\}=\alpha_x+\alpha_y+\alpha_z=0$。

应力应变增量关系 在塑性应变增加的过程中，$dF=0$，于是我们从方程 17.4－3 中得到

$$\left\{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^{\mathrm{T}} \{d\boldsymbol{\sigma}\} + \left\{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\right\}^{\mathrm{T}} \{d\boldsymbol{\alpha}\} + \frac{\partial F}{\partial W_p} dW_p = 0 \tag{17.4-7}$$

将式 17.4－4 代入式 17.4－2，17.4－5 和 17.4－6，得到

$$\{d\boldsymbol{\sigma}\} = [\boldsymbol{E}]\left(\{d\boldsymbol{\varepsilon}\} - \left\{\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\} d\lambda\right), \quad dW_p = \{\boldsymbol{\sigma}\}^{\mathrm{T}} \left\{\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\} d\lambda, \quad \{d\boldsymbol{\alpha}\} = \lceil \boldsymbol{C} \rfloor \left\{\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\right\} d\lambda \tag{17.4-8}$$

将这个方程代入式 17.4－7 得到求解塑性因子的公式

$$\mathrm{d}\lambda = \lfloor \boldsymbol{P}_\lambda \rfloor \{\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}\} \tag{17.4-9}$$

这里$\lfloor \boldsymbol{P}_\lambda \rfloor$是一个行矩阵，

$$\lfloor \boldsymbol{P}_\lambda \rfloor = \frac{\left\{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{E}]}{\left\{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{E}]\left\{\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\} - \left\{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\right\}^{\mathrm{T}}\lceil \boldsymbol{C} \rfloor\left\{\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\right\} - \frac{\partial F}{\partial W_p}\{\boldsymbol{\sigma}\}^{\mathrm{T}}\left\{\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}} \tag{17.4-10}$$

虽然功硬化和应变硬化都包含在这个方程里面，但是在实际的应用中也许将会用一个或另一个，或者是每个的一部分(方程 17.5-6)。最后从方程 17.4-8 和 17.4-9 我们得到

$$\{\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\} = [\boldsymbol{E}_{ep}]\{\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}\} \quad \text{其中} \quad [\boldsymbol{E}_{ep}] = [\boldsymbol{E}]\left(\lceil \boldsymbol{I} \rfloor - \left\{\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}\lfloor \boldsymbol{P}_\lambda \rfloor\right) \tag{17.4-11}$$

这里$\lceil \boldsymbol{I} \rfloor$是单位矩阵。弹塑性矩阵$[\boldsymbol{E}_{ep}]$可以被看作是切线模量 E_t 的通用形式。对于关联流动规则($Q=F$)来说，这是一个对称矩阵。对于从塑性状态卸载($F=0$ 和 $\mathrm{d}F<0$)或者当屈服还未出现时($F<0$)，方程 17.4-11 的最后一项设定为零，这样就有$[\boldsymbol{E}_{ep}]=[\boldsymbol{E}]$。

在单元列式当中使用$[\boldsymbol{E}_{ep}]$而不是$[\boldsymbol{E}]$来得到切向刚度矩阵

$$[\boldsymbol{k}_t] = \int [\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{E}_{ep}][\boldsymbol{B}]\mathrm{d}V \tag{17.4-12}$$

可以使用简单的单元，假定$[\boldsymbol{E}_{ep}]$在单元上是常量。否则$[\boldsymbol{E}_{ep}]$的值从一个采样点到另一个都在变化。已经组集好的有限元结构方程是$[\boldsymbol{K}_t]\{\mathrm{d}\boldsymbol{D}\}=\{\mathrm{d}\boldsymbol{R}\}$。当有塑性应变时，它提供由载荷增量$\{\mathrm{d}\boldsymbol{R}\}$产生的位移增量$\{\mathrm{d}\boldsymbol{D}\}$。

单轴应力 对于单轴应力 σ，关联塑性和运动硬化，我们可写出：

$$F = Q = [(\sigma-\alpha)^2]^{1/2} - \sigma_Y \qquad W_p = 0 \tag{17.4-13}$$

这里 σ_Y 是初始屈服应力，它始终取作正的。因此

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma} = \frac{\partial Q}{\partial \sigma} = -\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{1}{2}\frac{2(\sigma-\alpha)}{[(\sigma-\alpha)^2]^{1/2}} = \frac{\sigma-\alpha}{\sigma_Y} \tag{17.4-14}$$

这里因为在屈服期间 $F=0$，所以可以在分母中引入 σ_Y。在一维形式中，方程 17.4-10 中的$\lfloor \boldsymbol{P}_\lambda \rfloor$变成一个标量 P_λ，$[\boldsymbol{E}]$成为 E，并且$\lceil \boldsymbol{C} \rfloor$被 H_p 取代。因此，令 r 代表$(\sigma-\alpha)/\sigma_Y$，由方程 17.4-10 和 17.4-11 得到

$$P_\lambda = \frac{rE}{r^2E + r^2H_p} = \frac{E}{r(E+H_p)} \quad \text{和} \quad E_t = E\left(1 - \frac{E}{E+H_p}\right) \tag{17.4-15}$$

这里 E_t 是$[\boldsymbol{E}_{ep}]$的一维形式。后一个结果与方程 17.3-2′相吻合。

17.5 塑性：冯·米赛斯理论列式

冯·米赛斯理论指的是与塑性相关($F=Q$)，其中假定屈服发生在冯·米赛斯应力或称

“有效”应力 σ_e 达到极限值的时候，这里

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}}[(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)]^{1/2} \quad (17.5-1)$$

要的是正根。冯·米赛斯理论非常适用描述常用金属的塑性行为。注意到如果应力状态是单轴的，σ_e 将简化到单轴应力状态的值。

偏斜应力在冯·米赛斯准则中起着非常突出的作用。任何应力状态都可以表示成一个静水应力状态和偏斜应力状态之和。静水应力状态不产生形状变化，而偏斜应力状态不改变体积。偏剪应力与实际的剪应力相同。偏斜法向应力等于实际法向应力减去平均法向应力 σ_m，这里 $\sigma_m=(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)/3$。采用符号 s 表示偏斜应力，我们有

$$\{\boldsymbol{s}_\sigma\}=\begin{Bmatrix}s_x\\s_y\\s_z\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sigma_x-\sigma_m\\\sigma_y-\sigma_m\\\sigma_z-\sigma_m\end{Bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{Bmatrix}2\sigma_x-\sigma_y-\sigma_z\\2\sigma_y-\sigma_z-\sigma_x\\2\sigma_z-\sigma_x-\sigma_y\end{Bmatrix} \quad \{\boldsymbol{s}_\tau\}=\begin{Bmatrix}s_{xy}\\s_{yz}\\s_{zx}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\tau_{xy}\\\tau_{yz}\\\tau_{zx}\end{Bmatrix} \quad (17.5-2)$$

因此 $s_x+s_y+s_z=0$。按照偏斜应力的定义，式 17.5－1 中的应力 σ_e 将有如下形式：

$$\sigma_e=\sqrt{\frac{3}{2}}[s_x^2+s_y^2+s_z^2+2(s_{xy}^2+s_{yz}^2+s_{zx}^2)]^{1/2} \quad (17.5-3)$$

列式　下面是对 17.4 节中塑性理论的专门总结。和前面一样，我们给出结论，并把细节和理论背景留在参考文献[17.3，17.15，17.16]中。

对于冯·米赛斯理论来说，塑性因子 $d\lambda$ 和与 σ_e 对应的有效塑性应变的增量是相同的。因此

$$d\lambda=d\varepsilon_e^p=\sqrt{\frac{2}{3}}\left[(d\varepsilon_x^p)^2+(d\varepsilon_y^p)^2+(d\varepsilon_z^p)^2+\frac{1}{2}\left\langle(d\gamma_{xy}^p)^2+(d\gamma_{yz}^p)^2+(d\gamma_{zx}^p)^2\right\rangle\right]^{1/2} \quad (17.5-4)$$

因为在塑性流动中泊松比是 0.5，所以 $d\varepsilon_x^p+d\varepsilon_y^p+d\varepsilon_z^p=0$。对于单轴应力 σ_x，$d\varepsilon_y^p=d\varepsilon_z^p=-0.5d\varepsilon_x^p$，并且我们得到 $d\varepsilon_e^p=d\varepsilon_x^p$。因此 σ_e 与 ε_e^p 关系图与单轴应力-应变图是相同的。

对于冯·米赛斯理论，能够证明既可以用应变硬化表达式也可以用做功硬化表达式来描述各向同性硬化。对于各向同性硬化形成的屈服函数的结果表达式是：

$$F=\sigma_e-\sigma_0 \quad (17.5-5)$$

这里 σ_0 是在前面塑性应变中 σ_e 所达到的最大值。$F<0$ 的情况描述的是弹性状态。$F=0$ 的情况定义了屈服。$F>0$ 的情况在物理上不可能发生。

通过引入一个数 η，这里 $0\leqslant\eta\leqslant1$，我们选择写出“混合”的硬化规则，它包括各向同性硬化和运动硬化。因此

$$F=\left[\frac{3}{2}\left\langle(s_x-\eta\alpha_x)^2+(s_y-\eta\alpha_y)^2+(s_z-\eta\alpha_z)^2\right\rangle+\right.$$

$$3\left\langle (s_{xy}-\eta\alpha_{xy})^2+(s_{yz}-\eta\alpha_{yz})^2+(s_{zx}-\eta\alpha_{zx})^2\right\rangle\Big]^{1/2}-\eta\sigma_Y-(1-\eta)\sigma_0 \quad (17.5-6)$$

这里 σ_Y 是冯·米赛斯应力 σ_e，或者是在初始屈服时单轴应力的数值。屈服界面的平移由 $\{\boldsymbol{\alpha}\}$ 控制，这里 $\{\boldsymbol{\alpha}\}=\lfloor\ \alpha_x\ \alpha_y\ \alpha_z\ \alpha_{xy}\ \alpha_{yz}\ \alpha_{zx}\ \rfloor^{\mathrm{T}}$。硬化在 $\eta=0$ 的时候是纯各向同性的，而在 $\eta=1$ 时是纯运动的(图 17.5-1)。

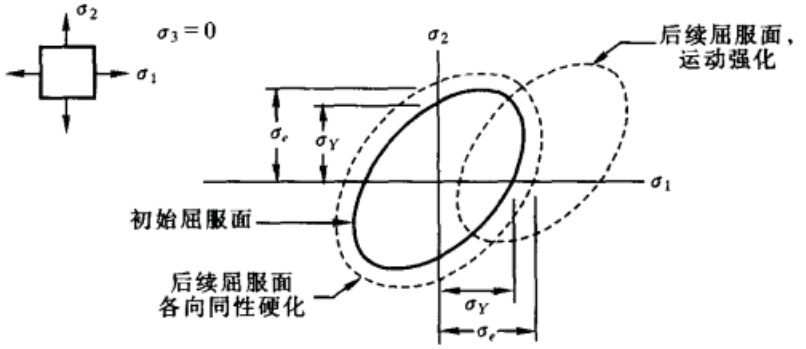


图 17.5-1 图示说明有非零应力 σ_1 和 σ_2 的平面应力情况下的硬化规则。椭圆内的应力是弹性的

方程 17.4-7 中的最后一项 $\{\partial F/\partial W_p\}\mathrm{d}W_p$ 由下式替代：

$$\frac{\partial F}{\partial\sigma_0}\mathrm{d}\sigma_0 \quad 其中 \quad \frac{\partial F}{\partial\sigma_0}=-(1-\eta) \quad 和 \quad \mathrm{d}\sigma_0=H_p\mathrm{d}\lambda \qquad (17.5-7)$$

我们看到 $\{\partial F/\partial\boldsymbol{\alpha}\}=-\eta\{\partial F/\partial\boldsymbol{\sigma}\}$。因此，在 $F=Q$ 的情况下，现在用产生方程 17.4-10 的相同操作得到

$$\lfloor\ \boldsymbol{P}_\lambda\ \rfloor=\frac{\left\{\dfrac{\partial F}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{E}]}{\left\{\dfrac{\partial F}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right\}^{\mathrm{T}}([\boldsymbol{E}]+\eta\lceil\ \boldsymbol{C}\ \rfloor)\left\{\dfrac{\partial F}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right\}+(1-\eta)H_p} \qquad (17.5-8)$$

按如下方式完成 F 对 $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ 的微分

$$\left\{\frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right\}=\frac{1}{2[\cdots]^{1/2}}\left\{\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\sigma}}[\cdots]\right\}=\frac{1}{2[\eta\sigma_Y+(1-\eta)\sigma_0]}\left\{\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\sigma}}[\cdots]\right\} \qquad (17.5-9)$$

这里[…]代表在方程 17.5-6 中方括号内的表达式。因为在屈服的时候 $F=0$，所以允许替代方程 17.5-9 后面形式中的分母。借助于式 17.5-2，$\{\partial[\cdots]/\partial\boldsymbol{\sigma}\}$ 中的第一项计算如下：

$$\frac{\partial}{\partial\sigma_x}[\cdots]=3\left[(s_x-\eta\alpha_x)\frac{\partial s_x}{\partial\sigma_x}+(s_y-\eta\alpha_y)\frac{\partial s_y}{\partial\sigma_x}+(s_z-\eta\alpha_z)\frac{\partial s_z}{\partial\sigma_x}\right] \quad (17.5-10a)$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma_x}[\cdots]=3\left[(s_x-\eta\alpha_x)\frac{2}{3}-(s_y-\eta\alpha_y)\frac{1}{3}-(s_z-\eta\alpha_z)\frac{1}{3}\right] \quad (17.5-10b)$$

对 σ_y 和 σ_z 的微分用类似的方法完成，而且对剪应力的微分很简单。从方程 17.5-2 可以得到

$2s_x - s_y - s_z = 3s_x$，对于其它的偏斜法向应力和相应的 α 项也相类似。这样我们得到在方程 17.5－8 中所需要的 6×1 向量，

$$\left\{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\} = \frac{3}{\eta\sigma_Y + (1-\eta)\sigma_0}\left(\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{s}_\sigma - \eta\boldsymbol{\alpha}_\sigma \\ \boldsymbol{0}\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{s}_\tau - \eta\boldsymbol{\alpha}_\tau\end{Bmatrix}\right)$$

$$\text{这里} \quad \{\boldsymbol{\alpha}\} = \begin{Bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_\sigma \\ \boldsymbol{\alpha}_\tau\end{Bmatrix} \tag{17.5-11}$$

最后，$[\boldsymbol{E}_{ep}]$和$[\boldsymbol{k}_t]$能够从方程 17.4－11 和 17.4－12 中获得。

对于 $Q=F$ 和各向同性硬化（$\eta=0$），方程 17.4－4 和 17.5－11 表明 $\mathrm{d}\varepsilon_x^p = (3s_x/2\sigma_0)\mathrm{d}\lambda$，…，$\mathrm{d}\gamma_{zx}^p = (3s_{zx}/\sigma_0)\mathrm{d}\lambda$。如果我们暂时对剪应变采用张量符号（$\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy}/2$，等等），这些关系具有下面的形式：

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_x^p}{s_x} = \frac{\mathrm{d}\varepsilon_y^p}{s_y} = \frac{\mathrm{d}\varepsilon_z^p}{s_z} = \frac{\mathrm{d}\varepsilon_{xy}^p}{s_{xy}} = \frac{\mathrm{d}\varepsilon_{yz}^p}{s_{yz}} = \frac{\mathrm{d}\varepsilon_{zx}^p}{s_{zx}} = \frac{3}{2\sigma_0}\mathrm{d}\lambda \tag{17.5-12}$$

方程 17.5－12 被称做 Prandtl-Reuss 关系式。它们说明在塑性流动期间，每个塑性应变增量与它相应的偏斜应力成比例。因此，应变增量主轴方向与主应力的方向相一致。对于单轴应力 σ_x 我们有 $s_x = 2\sigma_x/3$ 和 $\sigma_x = \sigma_0$，于是由方程 17.4－12 得到 $\mathrm{d}\varepsilon_x^p = \mathrm{d}\lambda$。

17.6 塑性：几种计算方法

在本节中我们基于 17.4 和 17.5 节的方程讨论一些与时间无关的塑性分析问题的计算方法。我们设定的目标是在加载过程中确定节点位移$\{\boldsymbol{D}\}$和应力$\{\boldsymbol{\sigma}\}$，这个外加的载荷用已知的外载矢量$\{\boldsymbol{R}\}$表示，它以准静态的方式随时间改变。实际的软件可能会加入一些支持其它功能的程序。我们不打算描述甚至提及所有的方法、变量和已经被倡导的组合。

除了求解总体的位移增量（式 17.6－1）和选择下一个作用的载荷增量以外，在本节中所描述的计算在每一个采样点被执行。这些采样点很可能与用于创建单元矩阵时用的高斯点相同。为了减小计算量，分析者更喜欢采用仅需要一个高斯点的单元。必须使大多数这样的单元稳定以便抑制寄生模式。当材料变得不可压缩时，单元必须对膨胀锁定不敏感，就像在塑性流动中的情况一样。

我们假定在实验室中已经做了材料单轴应力应变关系实验并且将结果以数值的形式存储起来。这样，对于冯·米赛斯材料来说，存储的数据为给定 σ_e 的值提供了 H_p。弹性模量和初始屈服应力 σ_Y 也被存储了起来。为了跟踪位移的变化，当前的$\{\boldsymbol{D}\}$也必须存储，并且随着求解过程的推进而更新。在下面的计算步中，各量必须在每个采样点可用并且随着求解过程的推进而更新，这些量有应力$\{\boldsymbol{\sigma}\}$和取决于所使用的硬化规则的$\{\boldsymbol{\alpha}\}$和/或 W_p（或者对于冯·米赛斯材料是 σ_0）。

如果从零载荷开始计算，初始的载荷步长应该将结构置于屈服的边缘。这非常容易实现：使用一个随机的载荷值，在最高的应力点上运用线性分析的方法确定 σ_e，然后将载荷和所有的

计算结果都以大小为 σ_Y/σ_e 的比例缩放。在接下来的载荷增加过程中，一单独的采样点可能是在弹性区、塑性区或者是弹塑性转换区。

在下面的讨论中我们假定先前的计算已经得到了一个变形状态和应力状态，这个状态不违反平衡条件、相容条件或者屈服准则，至少是可以接受的近似值。我们将把这个条件叫做状态 A。我们现在采用下面的步骤来确定状态 B 中的条件，它通过施加外载荷的增量 $\{\Delta \boldsymbol{R}\}_{AB}$ 来得到。

位移和应变增量 生成总体切向刚度矩阵 $[\boldsymbol{K}_t] = \sum [\boldsymbol{k}_t]$，$[\boldsymbol{k}_t]$ 见方程 17.4－12。为了修正可能存在于状态 A 中的平衡误差，增大载荷增量 $\{\Delta \boldsymbol{R}\}_{AB}$ 的值，这通过作用的载荷和由现存应力施加到节点上的载荷之间的不平衡来实现（见方程 17.2－3，3.3－8 或 4.8－15b 和 11.2－7中的一维例子）。因此

$$[\boldsymbol{K}_t]_A \{\Delta \boldsymbol{D}\}_{AB} = \{\Delta \boldsymbol{R}\} \quad \text{这里} \quad \{\Delta \boldsymbol{R}\} = \{\Delta \boldsymbol{R}\}_{AB} + (\{\boldsymbol{R}\}_A - \sum \int [\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}} \{\boldsymbol{\sigma}\}_A \mathrm{d}V) \tag{17.6-1}$$

其中 $\mathrm{d}V$ 是单元体积增量，并且求和跨越所有单元，通过把单元数组扩展到“结构范围”来实现。求解 $\{\Delta \boldsymbol{D}\}_{AB}$。更新位移并且获得单元内采样点的应变增量。

$$\{\boldsymbol{D}\}_B = \{\boldsymbol{D}\}_A + \{\Delta \boldsymbol{D}\}_{AB} \quad \{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}\}_{AB} = [\boldsymbol{B}]\{\Delta \boldsymbol{d}\}_{AB} \tag{17.6-2}$$

这里单元自由度 $\{\Delta \boldsymbol{d}\}_{AB}$ 是从总体自由度 $\{\Delta \boldsymbol{D}\}_{AB}$ 提取出来的。下面的主要工作就是更新每一个采样点的应力状态。

部分塑性增量 如果采样点在状态 A 是弹性的，确定现在它是否还是弹性的。因此计算

$$\text{试验弹性更新：} \quad \{\boldsymbol{\sigma}\}_{\text{trial}} = \{\boldsymbol{\sigma}\}_A + [\boldsymbol{E}]\{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}\}_{AB} \tag{17.6-3}$$

检查屈服准则：如果对于应力 $\{\boldsymbol{\sigma}\}_{\text{trial}}$，$F = F_{\text{trial}} < 0$，则状态仍然是弹性的，于是认为应力是正确的；也就是说 $\{\boldsymbol{\sigma}\}_B = \{\boldsymbol{\sigma}\}_{\text{trial}}$（图 17.6－1(a)）。如果 $F_{\text{trial}} > 0$，确定在弹性迭代步中的分数 β。这种问题的一维形式是线性的并且很容易求解（方程 17.3－4），但是这里我们必须在非线性问题中求解出 β。

$$F_C = F(\{\boldsymbol{\sigma}\}_C) = 0 \quad \text{其中} \quad \{\boldsymbol{\sigma}\}_C = \{\boldsymbol{\sigma}\}_A + \beta[\boldsymbol{E}]\{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}\}_{AB} \tag{17.6-4}$$

其中应力 $\{\boldsymbol{\sigma}\}_C$ 是在“屈服面”上（图 17.6－1(b)）。加在方程 17.3－4 中使用的相同论证可得到 β 的初次近似值。

$$\beta \approx \frac{F_A}{F_A - F_{\text{trial}}} = \beta_1 \quad \text{因此} \quad \{\boldsymbol{\sigma}\}_{C1} \approx \{\boldsymbol{\sigma}\}_A + \beta_1[\boldsymbol{E}]\{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}\}_{AB} \tag{17.6-5}$$

这里应力 $\{\boldsymbol{\sigma}\}_{C1}$ 是估算值，来自增量的整个弹性部分。更精确的结果由割线迭代提供[17.17]，它类似于经典的牛顿-拉斐逊算法。因此，对于 i 次迭代，我们可以写出（见图 17.6－2）

$$\{\boldsymbol{\sigma}\}_{Ci} = \{\boldsymbol{\sigma}\}_A + \beta_i[\boldsymbol{E}]\{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}\}_{AB} \tag{17.6-6a}$$

$$\beta_{i+1} = \beta_i - \frac{F_{Ci}}{\Delta F_C / \Delta\beta} \quad \text{其中} \quad \frac{\Delta F_C}{\Delta\beta} = \frac{F_{C(i-1)} - F_{Ci}}{\beta_{i-1} - \beta_i} \tag{17.6-6b}$$

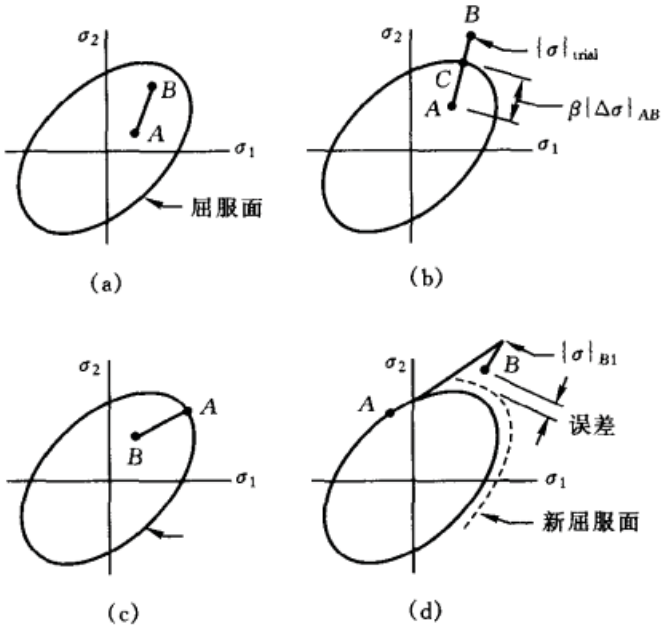


图 17.6－1　图示说明具有非零主应力 σ_1 和 σ_2 的平面应力情况，从状态 A 到状态 B 可能的应力变化
(a) 完全弹性；(b) 部分弹性；(c) 弹性卸载；(d) 完全塑性

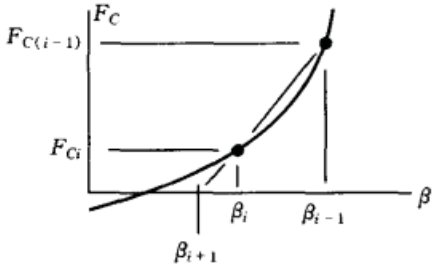


图 17.6－2　确定 $F_c=0$ 时 β 值的割线迭代

初始值是 $i=1,\beta_0=0,\{\boldsymbol{\sigma}\}_{C0}=\{\boldsymbol{\sigma}\}_A$，并且 β_1 和 $\{\boldsymbol{\sigma}\}_{C1}$ 取自方程 17.6－5。即使有严格的收敛容差，四或五步迭代也就足够了[17.17]。最终屈服条件的应力状态是 $\{\boldsymbol{\sigma}\}_{C(i+1)}$。从这个状态开始，剩下的应变增量是 $(1-\beta)\{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}\}_{AB}$，这是一个塑性增量，将按照下面被称做 $\{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}\}_{AB}$ 的整个塑性应变增量的描述来处理。

塑性增量　考虑在一个采样点上应力 $\{\boldsymbol{\sigma}\}_A$ 满足屈服条件 $F_A=0$。希望得到当前增量末端的应力 $\{\boldsymbol{\sigma}\}_B$。需要塑性因子 $\Delta\lambda$。从方程 17.4－4 和 17.4－9 可以得到

$$\{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p\}_{AB} = \left\{\frac{\partial Q}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right\}\Delta\lambda \qquad \Delta\lambda = \lfloor \boldsymbol{P}_\lambda \rfloor \{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}\}_{AB} \tag{17.6-7}$$

在这里，就像在开始猜测的那样，$\lfloor \boldsymbol{P}_\lambda \rfloor$ 是在状态 A 估计的值。那么，如果 $\Delta\lambda\leqslant 0$ 则发生卸载，在这种情况下用 $\{\boldsymbol{\sigma}\}_{\text{trial}}=\{\boldsymbol{\sigma}\}_B$，从方程 17.6－3 得到该步末端的应力（图 17.6－1(c)）。但是

如果 $\Delta\lambda \geqslant 0$，则这一步是塑性的，在方程 17.6－7 当中我们有在哪里估计$\{\partial Q/\partial \boldsymbol{\sigma}\}$和$\lfloor \boldsymbol{P}_\lambda \rfloor$值的问题，它们沿路径从 A 到 B 变化。我们可以写出下面的表达式，它是方程 17.3－8 的多维形式。

$$\{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p\}_{AB} = \left[(1-\gamma)\left\{\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}_A \lfloor \boldsymbol{P}_\lambda \rfloor_A + \gamma\left\{\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}_B \lfloor \boldsymbol{P}_\lambda \rfloor_B\right]\{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}\}_{AB} \tag{17.6-8}$$

$\gamma=0$ 给出了前向欧拉积分，因为它仅用在增量步开始时的信息而被称为显式积分。$\gamma=1$ 给出后向欧拉积分，由于它还要用到增量步末端的信息，所以被称为隐式积分。由于预先不知道末端点信息，于是方程通过预估-修正的形式进行求解。预估者使用起点信息来获得塑性应变增量和端点应力的第一次估计值。从方程 17.4－2，17.4－4 和 17.4－9 可以得到

$$\{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p\}_{AB1} = \left\{\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}_A \lfloor \boldsymbol{P}_\lambda \rfloor_A \{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}\}_{AB} \qquad \{\Delta\boldsymbol{\sigma}\}_{AB1} = [\boldsymbol{E}](\{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}\}_{AB} - \{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p\}_{AB1}) \tag{17.6-9}$$

估计的当前端点应力值是$\{\boldsymbol{\sigma}\}_{B1} \approx \{\boldsymbol{\sigma}\}_A + \{\Delta\boldsymbol{\sigma}\}_{AB1}$（图 17.6－1(d)）。使用这些应力和$\{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p\}_{AB1}$我们可以更新方程 17.4－10 中的几个量，获得估算的末端点数组$\lfloor \boldsymbol{P}_\lambda \rfloor_{B1}$。塑性应变增量和端点应力的第二次估计是

$$\{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p\}_{AB2} = \left\{\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}_{B1} \lfloor \boldsymbol{P}_\lambda \rfloor_{B1} \{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}\}_{AB} \qquad \{\Delta\boldsymbol{\sigma}\}_{AB2} = [\boldsymbol{E}](\{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}\}_{AB} - \{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p\}_{AB2}) \tag{17.6-10}$$

用方程 17.6－8 中的 $\gamma=1/2$，我们将两次估计的结果取平均，这样可以得到

$$\{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p\}_{AB} \approx \frac{1}{2}(\{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p\}_{AB1} + \{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p\}_{AB2}) \tag{17.6-11}$$

$$\{\boldsymbol{\sigma}\}_B \approx \{\boldsymbol{\sigma}\}_A + \frac{1}{2}(\{\Delta\boldsymbol{\sigma}\}_{AB1} + \{\Delta\boldsymbol{\sigma}\}_{AB2}) \tag{17.6-12}$$

可以通过减小载荷增量的方法来减小误差。

回到屈服面 虽然误差可能比图 17.6－1(d)的夸张描绘小得多，但是方程 17.6－12 所提供的应力$\{\boldsymbol{\sigma}\}_B$通常不能满足屈服条件 $F_B=0$。建议使用几种将应力返回到屈服面的方法。广泛使用的方法是在允许产生小塑性应变增量的同时，保持整体应变为常量[17.2]。因此使用符号 δ 表示回归调节量，我们设$\{\delta\boldsymbol{\varepsilon}\}=\{\boldsymbol{0}\}$并且寻找塑性应变增量$\{\delta\boldsymbol{\varepsilon}^p\}$，使得 $F_B+\delta F=0$。由 $F_B+\delta F=0$ 得到 $F_B+\delta F$ 的一阶泰勒(Taylor)级数表达式

$$0 = F_B + \left\{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^{\mathrm{T}}\{\delta\boldsymbol{\sigma}\} + \left\{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\right\}^{\mathrm{T}}\{\delta\boldsymbol{\alpha}\} + \frac{\partial W}{\partial W_p}\delta W_p \tag{17.6-13}$$

对于$\{\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}\}=\{\boldsymbol{0}\}$，使用方程 17.4－2，17.4－4，17.4－6 和 17.4－8，我们得到

$$\delta\lambda = \frac{F_B}{[\mathrm{denom}]_B} \tag{17.6-14}$$

这里$[\text{denom}]_B$是方程 17.4－10 的分母，在状态 B 下估算得到。用$\{d\boldsymbol{\varepsilon}\}=\{\mathbf{0}\}$，从方程17.4－8可得到更新的应力。因此

$$\{\boldsymbol{\sigma}\}_{B(\text{new})} = \{\boldsymbol{\sigma}\}_B - [\boldsymbol{E}]\left\{\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}_B \delta\lambda \tag{17.6-15}$$

为了提高精度，对于每次附加迭代前的分母(denom)更新值，可反复使用式17.6－14和17.6－15，直到(对冯·米赛斯材料)$F_{B(\text{new})}/\sigma_0$ 在 0.01 到 0.001 的范围内[17.21]。然而有些研究者认为单一的的调整已经足够了，或者完全不考虑调整，他们更倾向于根据需要细分增量步长去满足误差标准的要求[17.17]。

载荷增量大小 可以调整载荷增量的大小以满足误差标准的要求。一个建议是如果方程17.6－9中应力增量$\{\Delta\boldsymbol{\sigma}\}_{AB1}$的第一次估计导致屈服函数改变 10%，就要细分当前的载荷步长[17.21]。另一个建议[17.22]是把子步数 NS 与应力$\{\boldsymbol{\sigma}\}_{B1}$的初始估计值联系起来，在$\{\boldsymbol{\sigma}\}_{B1}$中的应力估计误差是

$$\{\Delta\boldsymbol{\sigma}^{\text{err}}\} = \{\boldsymbol{\sigma}\}_{B1} - \{\boldsymbol{\sigma}\}_B \approx \frac{1}{2}(\{\Delta\boldsymbol{\sigma}\}_{AB1} - \{\Delta\boldsymbol{\sigma}\}_{AB2}) \tag{17.6-16}$$

然后用一个标量 e 来表示这个误差向量，它用于估计合适的子步数，NS：

$$e = 2\frac{\Delta\sigma_e^{\text{err}}}{\sigma_e} \quad \text{和} \quad NS = 20e \tag{17.6-17}$$

这里 $\Delta\sigma_e^{\text{err}}$ 通过方程 17.5－1 计算，但是用式 17.6－16 中应力变化值$\{\Delta\boldsymbol{\sigma}^{\text{err}}\}$替代的应力。在文献[17.17]中建议了带误差控制的附加子步方案。离散误差与网格自动细化在弹塑性分析的文献[17.18,17.19]当中也有所研究。

最后，更新$\{\boldsymbol{\sigma}\}$，$\{\boldsymbol{\alpha}\}$和 W_p(或者 σ_0，对冯·米赛斯材料)，我们使用方程 17.4－12 获得新的单元切向刚度矩阵，组装新的结构矩阵$[\boldsymbol{K}_t]$，用另一个载荷增量$\{\Delta\boldsymbol{R}\}$返回方程 17.6－1。

17.7 非线性动力学问题

如果受激振动频率超过结构最低固有振动频率的大约 1/4，惯性将变得非常重要并且这时的问题必须作为动力学而不是准静态问题来分析。当非线性存在的时候，在第 11 章所讨论的显式和隐式积分法仍然适用。显式方法比隐式方法更容易适应非线性问题。因为显式方法是条件稳定的，所以它每一时间步要求的计算量少但是要求时间步也要短，故比较适合于持续时间短的载荷比如冲击。隐式方法每一步需要较多的计算量但是允许更大的时间步长，所以适合于持续时间长的载荷比如地震。用于线性问题的无条件稳定方法不是必然能用于非线性问题的。

下面我们假设熟悉 11.11 节到 11.13 节。我们也假设非线性影响刚度矩阵但是保留不变的质量矩阵和阻尼矩阵。

显式方法 考虑中心差分法(方程 11.12－3,11.12－6 或者 11.12－8)。在线弹性问题中,项$\{\boldsymbol{R}^{\text{int}}\}_n$代表用来平衡结构中弹性应力所需的力。为了适应材料非线性,此项可以这样计算

$$\{\boldsymbol{R}^{\text{int}}\}_n = \sum \{\boldsymbol{r}^{\text{int}}\}_n \quad \text{其中} \quad \{\boldsymbol{r}^{\text{int}}\}_n = \int [\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}} \{\boldsymbol{\sigma}\}_n \mathrm{d}V \tag{17.7-1}$$

这里$\{\boldsymbol{\sigma}\}_n$代表在 n 步的末端单元中的弹性和/或塑性应力,求和包括结构的所有单元,用通常的把单元数组扩展到"结构尺寸"的方法。更新$\{\boldsymbol{\sigma}\}_n$的过程已经在 17.6 节中解释过了,那里的状态 A 和 B 分别与现在讨论中的状态 $n-1$ 和状态 n 相对应。

对于非线性问题和线性问题,当时间步长 Δt 小到足以保证显式计算的稳定性时,往往可以保证足够的精度。计算经验表明式 11.12－9 和 11.12－10 的稳定性准则也适用于使用瞬时值 $\omega_{\max}$ 的非线性问题,对于材料非线性来说,$\omega_{\max}$ 是材料属性变化的函数。对于切向模量 E_t 随着应力或应变增加而减小的柔性材料来说,$\omega_{\max}$ 的瞬时值通常不超过线弹性响应的 $\omega_{\max}$[17.23]。因此一个能够使弹性响应稳定的时间步长 Δt 也可以使弹塑性响应稳定。虽然 Δt 的许用值有可能增加,但是增加的总量通常非常小,这是因为 $\omega_{\max}$ 常被经历很小或者是没有塑性变形的网格单元所控制。对于刚性材料,通常有必要在求解过程中监测 $\omega_{\max}$ 的值,可以使用方程11.12－5,在必要的时候可以减小 Δt。

由于求解过程没有限制,所以在线性问题当中数值不稳定很容易被发现(图 11.12－2)。对于弹塑性或者其它能量耗散的非线性材料的行为,由数值不稳定人为引入的能量可以被材料耗散到不稳定性被抑制的程度[11.48]。因为尽管误差达到 10%至 100%甚至更高,计算结果仍可能表现出一定的合理性,所以"抑制的不稳定性"经常难以被检测到。

当显式方法用于非线性动力学问题的时候,进行能量平衡检测来警告可能的数值不稳定性通常是很谨慎的。一个基于应变能、动能和外力功的公式已经提出来了[2.20,11.48]。

例:动力学塑性问题,显式算法 我们重新考虑在 11.12 节中出现过的例子,但是现在使用在图 17.3－1(b)中描述的弹塑性硬化模型,其中 $E=30\times10^6$ 磅/平方英寸,$E_t=E/4$,并且 $\sigma_Y=40\times10^3$ 磅/平方英寸。在图 11.12－1 中,长度为 20 英寸的杆处于初始静止状态并用 40 个等长的 2 节点单元建模,于是 $L=L_T/40=0.5$ 英寸。轴端的载荷示于图 11.12－1 中,不同的是现在的值是 $P_0=2A\sigma_Y=80\times10^3$ 磅。因为 $E_t<E$,对于弹性分析稳定的时间步在屈服出现时仍然稳定。因此我们设定临界时间步长是 $\Delta t=2.484\times10^{-6}$ s,就像在方程 11.12－20 之后的计算一样。在计算中我们选用 $\Delta t=2.400\times10^{-6}$s(这时的 Courant 数是 $C_n=0.966$),并且取 83 个时间步。总的来说,除了$\{\boldsymbol{R}^{\text{int}}\}$是由弹塑性单元中的应力而不是由方程 11.12－19 所述的弹性条件计算之外,整个计算与 11.12 节相同。

图 17.7－1 显示了在第 20 号单元的中点 $x=9.75$ 英寸处应力的变化过程。两个独立的应力波在不同的时间到达。首先到达的是传播速度为 $c_e=\sqrt{E/\rho}$的弹性波,跟着是一个传播速度为 $c_p=\sqrt{E_t/\rho}=c_e/2$ 的塑性波。因此在 $x=9.75$ 英寸处,一个弹性波在 $t=0.048\,4$ ms 的时候到达,而塑性波在 $t=0.096\,8$ ms 的时候到达。

在 $x=9.75$ 英寸处的解直到塑性波到达的时候都是平稳的,然后表现为振荡。原因是当弹性波在杆中传播时,数值噪声在初始屈服应力上产生了应力飘移。这些飘移以塑性波的速

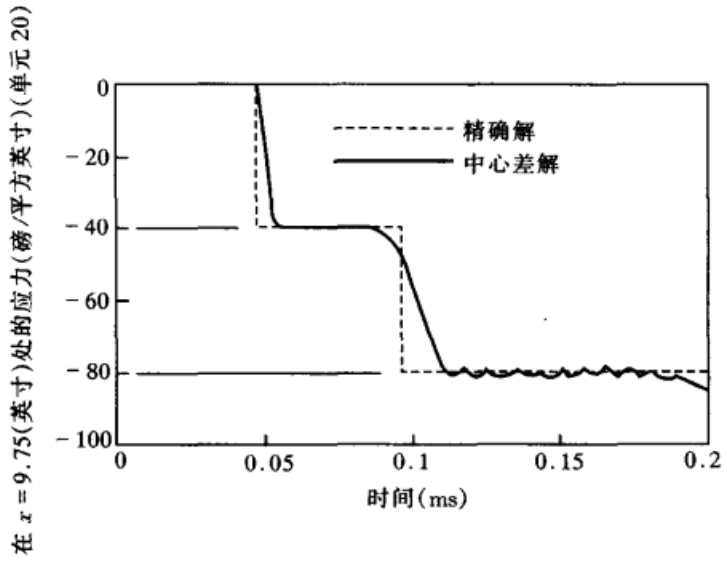


图 17.7－1　20 英寸长的弹塑性材料杆有 40 个单元模型，这里是 $x=9.75$ 英寸处的应力-时间关系。时间步 $\Delta t=2.400\times10^{-6}$ s，对此，$C_n=0.966$。图 11.12－1 也应用了，只是现在 $P_0=80\,000$ 磅

度传递，因此直到经过大约 0.11 ms 才到达 $x=9.75$ 英寸处。

对于实际的车辆碰撞分析所需要的计算时间可能很长。参考文献[15.7]引用了一个分析实例，它对模型划分了 14 805 个壳单元，选择的时间步长是 $\Delta t=8\times10^{-9}$ s，在一个 Cray 超级计算机上运算了 17 个小时。

切向刚度(隐式)方法　隐式方法相对于显式方法的优势是普遍使用的隐式方法允许有较大的时间步长。然而应当注意到在线性问题中的无条件稳定性并不能确保在非线性问题当中的无条件稳定性。非线性问题对静态和隐式动态算法都呈现出相同的困难：刚度是位移的函数，而且预先并不知道。在动态分析中解决这些困难的方法类似于静态分析的同类方法(17.6 节)。

使用切向刚度矩阵的一阶近似是[11.47]

$$\{\boldsymbol{R}^{\text{int}}\}_{n+1}=\{\boldsymbol{R}^{\text{int}}\}_n+[\boldsymbol{K}_t]_n\{\Delta\boldsymbol{D}\}\quad\text{这里}\quad\{\Delta\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{D}\}_{n+1}-\{\boldsymbol{D}\}_n \tag{17.7-2}$$

因此，在 $(n+1)\Delta t$ 时刻运动方程 11.2－11 变成

$$[\boldsymbol{M}]\{\ddot{\boldsymbol{D}}\}_{n+1}+[\boldsymbol{C}]\{\dot{\boldsymbol{D}}\}_{n+1}+\{\boldsymbol{R}^{\text{int}}\}_n+[\boldsymbol{K}_t]_n\{\Delta\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}^{\text{ext}}\}_{n+1} \tag{17.7-3}$$

现在将方程 11.13－4 中的 $(n+1)\Delta t$ 时刻的速度和加速度代入方程 17.7－3，由于 $\{\Delta\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{D}\}_{n+1}-\{\boldsymbol{D}\}_n$，因此

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\beta\Delta t^2}[\boldsymbol{M}]+\frac{\gamma}{\beta\Delta t}[\boldsymbol{C}]+[\boldsymbol{K}_t]_n\right)\{\Delta\boldsymbol{D}\}&=\{\boldsymbol{R}^{\text{ext}}\}_{n+1}-\{\boldsymbol{R}^{\text{int}}\}_n+[\boldsymbol{M}]\left\{\frac{1}{\beta\Delta t}\{\dot{\boldsymbol{D}}\}_n\right.\\&\left.+\left(\frac{1}{2\beta}-1\right)\{\ddot{\boldsymbol{D}}\}_n\right\}+[\boldsymbol{C}]\left\{\left(\frac{\gamma}{\beta}-1\right)\{\dot{\boldsymbol{D}}\}_n+\Delta t\left(\frac{\gamma}{2\beta}-1\right)\{\ddot{\boldsymbol{D}}\}_n\right\}\end{aligned} \tag{17.7-4}$$

因为 $[\boldsymbol{K}_t]$ 变化，根据方程 17.7－4 $\{\Delta\boldsymbol{D}\}$ 每次新的计算要求对系数矩阵进行分解。右边使用了

文献[11.3]中的替代形式。

接下来我们临时更新节点自由度，$\{\boldsymbol{D}\}_{n+1}=\{\boldsymbol{D}\}_n+\{\Delta\boldsymbol{D}\}$，从方程 11.13-4 中得到$\{\dot{\boldsymbol{D}}\}_{n+1}$和$\{\ddot{\boldsymbol{D}}\}_{n+1}$，并且在接受更新自由度的正确性之前，使用下面所描述的误差度量。通过使用临时自由度，可以更新应力，并且用于计算$\{\boldsymbol{R}^{\text{int}}\}_{n+1}$(方程 17.7-1 用下标 $n+1$)。因此在$(n+1)\Delta t$时刻从方程 11.2-11 可以得到，

$$\{\boldsymbol{R}^{\text{err}}\}_{n+1}=\{\boldsymbol{R}^{\text{ext}}\}_{n+1}-[\boldsymbol{M}]\{\ddot{\boldsymbol{D}}\}_{n+1}-[\boldsymbol{C}]\{\dot{\boldsymbol{D}}\}_{n+1}-\{\boldsymbol{R}^{\text{int}}\}_{n+1} \tag{17.7-5}$$

能量误差可定义为

$$W^{\text{err}}=\frac{1}{2}\{\Delta\boldsymbol{D}\}^{\mathrm{T}}(\{\boldsymbol{R}^{\text{err}}\}_n+\{\boldsymbol{R}^{\text{err}}\}_{n+1})\approx\Delta t\{\dot{\boldsymbol{D}}\}_{n+1}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{R}^{\text{err}}\}_{n+1} \tag{17.7-6}$$

它用于 $n>1$。在数值计算实例中[17.24]，W^{err}不允许超过 $10^{-6}W$，这里 W 是当前动能与到目前为止外力所做累计功的总和。如果超过了误差容限，将$\{\boldsymbol{R}^{\text{err}}\}$加到方程 17.7-4 中的$\{\boldsymbol{R}^{\text{ext}}\}_{n+1}$上，并且重新计算$\{\Delta\boldsymbol{D}\}$，如果必要的话可继续重复计算直到满足误差容限的要求。这样，在一个时间步内我们追求“平衡迭代”，就像在与方程 17.2-4 和 17.2-5 有关的描述中一样。

如果没有使用误差控制，$\{\boldsymbol{R}^{\text{err}}\}$可能变得无界限，求解过程就会发散，类似于中心差分法时间步长超过了临界值的发散方式。如果 W^{err}在整个分析的过程中是有界的，并且梯形规则算法($\gamma=1/2,\beta=1/4$)是无条件稳定的[17.24]，但假若 W^{err}太大的话仍然不能确定结果是精确的。如果同样的结果是由更小的时间步长计算得来，我们对计算结果的信心将会增加。对能量守恒算法的进一步讨论出现在文献[17.25]中。

17.8 间隙和接触问题

接触问题是一种几何非线性问题，它是当不同的结构或者是单一结构的两个不同的表面在接触和分离或是相互滑动摩擦的时候产生的。为了计算结构的行为，接触力无论是获得还是丢失都必须确定。接触的位置和程度预先是不知道的，也必须确定。通常两个接触面之间的摩擦也要考虑进去，而且有一种比我们熟悉的库伦定律更适合的表示方法。有时在接触面上会产生热流或电流，它本身可能就是一个分析课题，或者可能因为它影响结构行为而必须考虑。这类问题是准静态或是与时间相关的。在本节中我们仅介绍这个有广泛内涵的学科领域[17.3,17.26~17.29]。

一种类型的接触问题是在 14.3 节讨论的紧缩配合应用问题，在那里相互配合的有限元结构的节点排成列并且接触面也能事先确认(然而在 14.3 节中只假定配合部件间无轴向相对运动)。在 14.3 节中两种接触面都被认为是可变形的，这对于机械零件的滚动接触和螺纹连接也是适合的。在金属成形过程中一个接触面可以认为是刚性的。如果关心接触区的状态可能需要了解接触区域的许多细节。如果仅需要发现接触对于结构其余部分的影响，则知道少量局部细节信息就足够了。涉及摩擦的接触问题列式与 17.4 节中的塑性问题方程相似。因为当接触形成时有大的和突然的刚度变化，所以接触问题是非线性问题。

接触问题所带来的计算困难在图 17.8-1(a)所示的简单问题中有所表示。在数学模型

中，当 $D=g$ 并且 $P=kg$ 时，刚性块与刚性水平面接触。P 再增大没有产生进一步的变位。图 17.8-1(b)中的计算模型已经增加了一个刚度为 k_g 的弹簧。这是一个不需要物理尺寸的“数学弹簧”。因为这个弹簧在 $D<g$ 的时候刚度为零，而在 $D>g$ 的时候具有非常大的刚度，所以它是非线性的。图 17.8-1(c)中实线表示由此形成的载荷和变位性能的关系，用方程表示即为

$$kD = P \qquad (P < kg) \tag{17.8-1a}$$

$$(k + k_g)D = P \qquad (P > kg) \tag{17.8-1b}$$

这样以惩罚方式近似施加约束条件 $D \leqslant g$(13.3 节)。如果 k_g 太小，间隙则“过度闭合”。另一方面，过大的 k_g 可能产生收敛困难，甚至在连续迭代中数值解在 $D<g$ 和接触状态间交替变换时会“跳跃式”收敛失败。

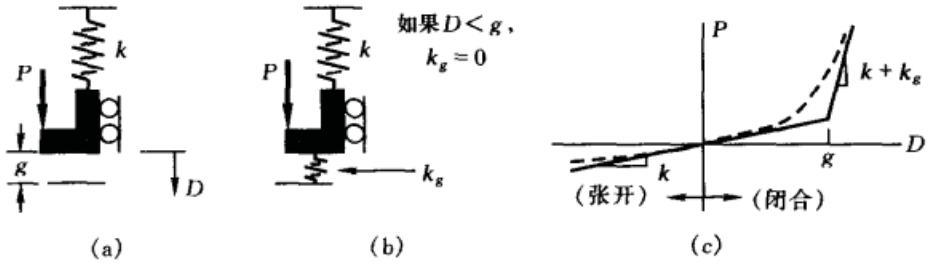


图 17.8-1　(a) 数学模型：L 型刚体在 $D=g$ 时与刚性水平面接触；
(b) 计算模型：设置非线性弹簧；(c) 计算模型的载荷-位移性能关系

作为另一种选择，可以通过拉格朗日乘子法精确施加约束(13.2 节)。因此当 $P<kg$ 时 $P=kD$，于是

$$\begin{bmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ g \end{Bmatrix} \quad \text{当} \quad P > kg \quad \text{则有} \quad \begin{matrix} D = g \\ \lambda = P - kg \end{matrix} \tag{17.8-2}$$

这里 $\lambda=P-kg$ 是约束力。在计算选择中，“增强的拉格朗日法”当前受到好评，它是将一个惩罚项加入到基本拉格朗日方法中去。

当刚度为 k_g 的弹簧一直起作用并特定为非线性刚度时形成图 17.8-1(c)中的点划线。这个表达式的目的是减小与方程 17.8-1 和 17.8-2 相关联的刚度的突然变化。对于岩石中的连接来说点划线是真实存在的，在那里相邻的坚固岩石接触界面间可能存在着可压碎的材料。

一般来说，当接触形成的时候，一个有限元离散化的表面节点并不与另一个离散化的表面节点相重合。因此，如果碰巧均匀的接触压力在物理上真实存在，可能没有有限元模型提供给它。

有限元分析中的接触算法可允许“接触单元”附加到期望接触的两个有限元离散化的一个表面上。接触单元不是常规的有限元。它的功能是敏感于接触，然后提供惩罚刚度或使用一些其它方法防止或限制相互渗透。也可“反方向”应用间隙算法来阻止间隙进一步扩大而不是

它的闭合。因此人们能够为缆索效应建模，当松弛时它有很低的刚度，而当拉紧时刚度非常大。

17.9 几何非线性

几何非线性是由大变形引起的，这种变形大到足以改变作用载荷的分布和方向，或者内部阻抗力和力矩的方向。相关的例子包括在滚柱轴承当中的弹性接触，在那里随着载荷增加，接触压力在一个不断增大的表面上扩展，和拱顶支柱，它主要以 P/A 应力或者主要以方向与柱体相切的 My/I 应力来抵抗载荷，这取决于支柱是否几乎是直的或严重弯曲。要注意到几何非线性可能不涉及大位移，在弹性接触问题中，位移是小的，在所谓“大位移”板分析中，横向的挠度可能比板的厚度还小。在几何非线性分析中主要的困难是平衡方程必须根据变形后的几何结构来写出，而这事先并不知道。

呈现出几何非线性的问题往往也同时呈现出接触非线性和塑性，就像车辆碰撞分析中的例子。对几何非线性的讨论自然地会导致不稳定和屈曲，但是我们将这部分的讨论放在后面的第 18 章。本节仅限于讨论简单的概念和可能用于求解几何非线性问题的方法。

格林应变 在许多用于大变形分析的应变测量方法中，我们只引入一个（对于每一个几何非线性应变测量方法都有一个共轭的应力测量方法，这样应力和应变的乘积始终等于同一个应变能）。格林应变的定义如下。考虑在图 17.9-1(a)中的线段 AB，由于变形的结果它由 AB 移动到位置 $A'B'$。它的轴向应变可定义为

$$\varepsilon_G = \frac{1}{2}\left(\frac{ds^2 - ds_0^2}{ds_0^2}\right) \tag{17.9-1}$$

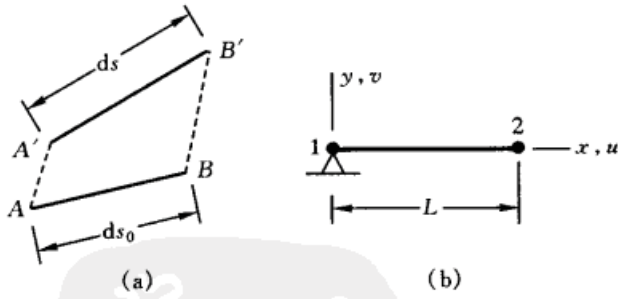


图 17.9-1 (a) 一个线段的位移和变形；(b) 在节点 1 铰支且初始水平的杆

从这个表达式可以得到用通常在 x，y 和 z 坐标方向上由位移分量 u，v 和 w 表示的应变分量表达式[2.14,3.2,4.3,17.2]。

$$\varepsilon_x = u_{,x} + \frac{1}{2}(u_{,x}^2 + v_{,x}^2 + w_{,x}^2) \tag{17.9-2a}$$

$$\varepsilon_y = v_{,y} + \frac{1}{2}(u_{,y}^2 + v_{,y}^2 + w_{,y}^2) \tag{17.9-2b}$$

$$\varepsilon_z = w_{,z} + \frac{1}{2}(u_{,z}^2 + v_{,z}^2 + w_{,z}^2) \tag{17.9-2c}$$

$$\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} + (u_{,x}u_{,y} + v_{,x}v_{,y} + w_{,x}w_{,y}) \tag{17.9-2d}$$

$$\gamma_{yz} = v_{,z} + w_{,y} + (u_{,y}u_{,z} + v_{,y}v_{,z} + w_{,y}w_{,z}) \tag{17.9-2e}$$

$$\gamma_{zx} = w_{,x} + u_{,z} + (u_{,z}u_{,x} + v_{,z}v_{,x} + w_{,z}w_{,x}) \tag{17.9-2f}$$

在这里，括号内的表达式扩充了常规线性表达式。

把方程 17.9－2a 应用于图 17.9－1(b)所示杆的平面运动，令在节点 1 处有 $u_1 = v_1 = 0$，在节点 2 处的位移为 u_2 和 v_2，并且沿杆对位移进行线性插值。这样

$$\begin{aligned} u &= (x/L)u_2 \\ v &= (x/L)v_2 \end{aligned} \quad \text{得到} \quad \varepsilon_x = \frac{u_2}{L} + \frac{1}{2}\left(\frac{u_2^2}{L^2} + \frac{v_2^2}{L^2}\right) \tag{17.9-3}$$

如果 $u_2 \ll L$ 并且 $v_2 \ll L$，我们得到传统的工程定义，$\varepsilon_x = u_2/L$。对于绕节点 1 的刚体转动，无论有多大，都有 $\varepsilon_x = 0$。例如，考虑 90°的旋转($u_2 = -L$ 和 $v_2 = L$)或者 180°的旋转($u_2 = -2L$ 和 $v_2 = 0$)。

方程 17.9－3 中的 ε_x 表达式符合拉格朗日描述，也就是说，位移参考的是初始坐标系。因此在图 17.9－1(b)中，无论杆旋转了多少，节点 2 始终由坐标 $x = L, y = 0$ 来定位，并且在位移场 $u = (x/L)u_2$ 和 $v = (x/L)v_2$ 中使用水平坐标 x。虽然杆可能已经旋转了一个相当大的角度，它的轴向应变仍叫做 ε_x 并且由方程 17.9－3 定义。总括地说，在拉格朗日列式中，结构不是根据它在哪里，而是根据它原来在哪里被描述的。

旋转列式　旋转坐标系也被称为“对换坐标系”。一个局部坐标系被附加到每一个单元上，在变形发生的时候，坐标系与单元一起平移或者旋转。总体坐标系统仍然是固定的。单元的变形分解为一个刚体分量，它与局部坐标系中刚体的运动是一样的，和一个应变量，它能够用在局部坐标系度量的自由度来描述。把分量分离开，它们可以独立地进行处理。

如果相对于变形场的复杂程度来说单元足够小，并且当变形累加的时候单元在大小和形态上改变不大，那么可以在局部坐标系中使用小应变和小转角的传统理论来列出单元矩阵。因此，并不需要格林应变。在获得单元矩阵以后就可以进行坐标变换，以便它们能用总体自由度进行运算，并组集成总体刚度矩阵。这样总体刚度矩阵和总体平衡方程适用于变形后的结构几何体。因为这个几何形状事先是不知道的，所以要求使用迭代算法。参考文献包括[17.2,17.3,17.30～17.32]。

在本节中，我们只限于说明与时间无关的平面刚架问题，其结构承受拉伸和弯曲载荷，用梁单元建模。材料假定是线弹性的。作为一个简单的应用，可以计算图 17.9－2 所示梁的大挠度行为。限制单元做平面运动使得对每个单元建立局部坐标系以及跟踪它的运动变得容易。因为大的转角不能以矢量方式组合，类似的三维情况不那么简单[17.32]。这容易用下述的方法来说明，把一本书依次绕 x，y 和 z 轴旋转 90°，然后将第二本书以相反的顺序绕这些轴旋转 90°，两本书的最终方位是不同的。

在描述计算方法以前我们先解释一下局部坐标系统的建立，确定变形单元施加在节点上

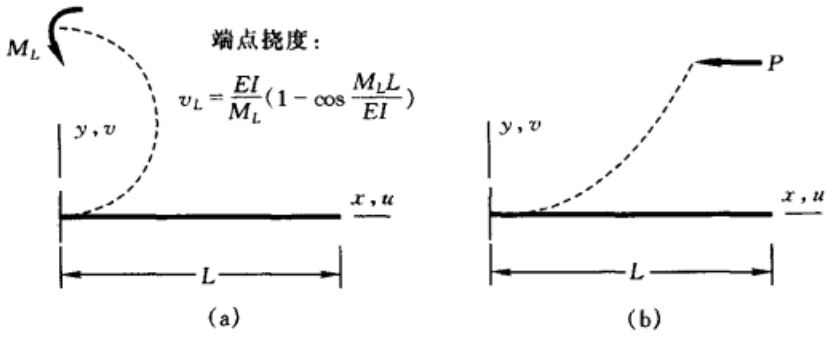


图 17.9-2 悬臂梁受两种载荷作用在 xy 平面内的大变形
(a) 端部力矩；(b) 沿 x 轴方向的端点力 P

的力和将这些力以及单元刚度矩阵向总体坐标的转换。在图 17.9-3(a)中，显示了单元 1-2 在结构发生变形之前的初始位形(因此，对将要用于为图 17.9-2 中梁建模的所有单元来说，$\beta_0=0$)。由总体自由度 D_1 到 D_6 定义的同一单元变形后的情况显示在图 17.9-3(b)中。随单元一起运动的局部坐标系 $x'y'$ 及其原点在节点 1 处，而节点 2 在 x' 轴上。因此，在局部坐标系中自由度 u_1，v_1 和 v_2 始终等于零。我们必须从初始节点位置和总体自由度 D_1 到 D_6 确定非零局部自由度 θ_1，θ_2，u_2，x' 轴向方位角 β。我们假定单元足够小以至于 $|\theta_1|\ll 1$ 和 $|\theta_2|\ll 1$。

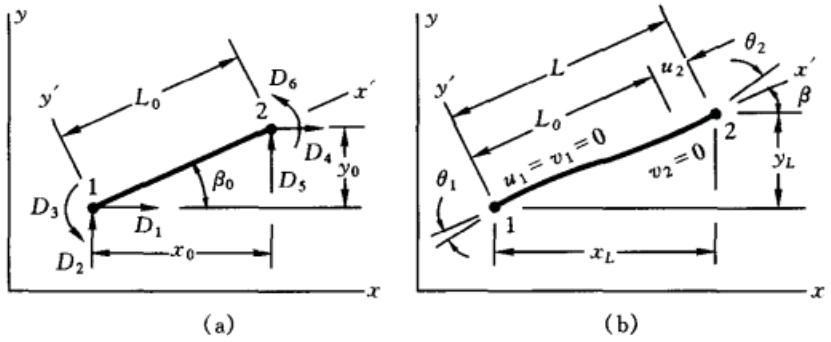


图 17.9-3 (a) 变形前的平面梁单元。依次标出了非零的总体自由度 D_1 到 D_6；
(b) 变形后的同一单元，非零的局部自由度是 θ_1，u_2 和 θ_2

在变形以后，单元长度在总体坐标系 xy 轴的投影和局部坐标 x' 轴的方位角是

$$x_L = x_0 + D_{41} \quad y_L = y_0 + D_{52} \quad \beta = \arctan(y_L/x_L) \tag{17.9-4a}$$

其中

$$D_{41} = D_4 - D_1 \quad \text{和} \quad D_{52} = D_5 - D_2 \tag{17.9-4b}$$

在局部坐标系 $x'y'$ 中的单元自由度是 $\{\boldsymbol{d}'\}=\lfloor 0 \;\; 0 \;\; \theta_1 \;\; u_2 \;\; 0 \;\; \theta_2 \rfloor^{\mathrm{T}}$，在这里

$$\theta_1 = D_3 - (\beta-\beta_0) \quad \theta_2 = D_6 - (\beta-\beta_0) \quad u_2 = L - L_0 \tag{17.9-5a}$$

其中 $L^2=x_L^2+y_L^2$ 和 $L_0^2=x_0^2+y_0^2$。然而，如果按照 $u_2=L-L_0$ 计算的话，u_2 可能会有相当大的对消误差。将方程 17.9-4a 代入 L^2 表达式得到改进数值计算的表达式，构成 $L^2-L_0^2$，并且写出 $L^2-L_0^2=(L-L_0)(L+L_0)=u_2(L+L_0)$。这样[17.31]

$$u_2=\frac{1}{L+L_0}[(2x_0+D_{41})D_{41}+(2y_0+D_{52})D_{52}] \tag{17.9-5b}$$

因为 $u_2\ll L$，分母也可以写成 $2L_0$。

在局部坐标系 $x'y'$ 中，用于平衡单元变形的节点载荷 $\{\boldsymbol{r}'\}$ 既可以由局部单元刚度矩阵也可以通过单元应力进行计算。一般地，

$$\{\boldsymbol{r}'\}=[\boldsymbol{k}']\{\boldsymbol{d}'\}\quad 或者\quad \{\boldsymbol{r}'\}=\int \lfloor \boldsymbol{B} \rfloor^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\sigma}\}\mathrm{d}V \tag{17.9-6}$$

在当前的应用中，可以从方程 2.3-6 中得到 $[\boldsymbol{k}']$，因为在图 17.9-3(b)中 u_1，v_1 和 v_2 始终为零，所以如果需要的话能够将它简化为一个 3×3 的矩阵。通过角 β 变换到总体坐标系

$$[\boldsymbol{k}]=[\boldsymbol{T}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{k}'][\boldsymbol{T}]\quad 和\quad \{\boldsymbol{r}\}=[\boldsymbol{T}]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{r}'\} \tag{17.9-7}$$

这里 $[\boldsymbol{T}]$ 在 8.3 节中描述过。接下来，通过一般的组集过程，可以得到结构当前位形的切线刚度矩阵和内部节点力的数组，把单元数组扩展到“结构规模”。

$$[\boldsymbol{K}_t]=\sum[\boldsymbol{k}]\quad 和\quad \{\boldsymbol{R}^{\mathrm{int}}\}=\sum\{\boldsymbol{r}\} \tag{17.9-8}$$

下面是对算法的总结。我们假定已经作用了外部载荷，并且已经得到了与载荷相应的收敛解。现在再增加一个外载荷增量，这样净外载荷变化到了 $\{\boldsymbol{R}^{\mathrm{ext}}\}$。新位形通过迭代算法获得。令 i 表示迭代次数。切线刚度 $[\boldsymbol{K}_t]_1$、总体自由度 $\{\boldsymbol{D}\}_1$，和内部载荷 $\{\boldsymbol{R}_{\mathrm{int}}\}_1$ 都可以从当前的收敛结果中得到。从 $i=1$ 开始，我们求解新的外载荷增量产生的位移增量并且更新计算结果。

$$\{\Delta\boldsymbol{D}\}_{i+1}=[\boldsymbol{K}_t]_i^{-1}(\{\boldsymbol{R}^{\mathrm{ext}}\}-\{\boldsymbol{R}^{\mathrm{int}}\}_i)\quad \{\boldsymbol{D}\}_{i+1}=\{\boldsymbol{D}\}_i+\{\Delta\boldsymbol{D}\}_{i+1} \tag{17.9-9}$$

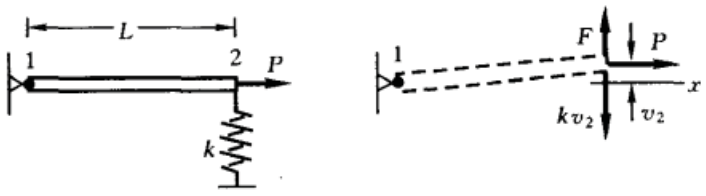
用 $\{\boldsymbol{D}\}_{i+1}$，可以建立更新的数组 $[\boldsymbol{K}_t]_{i+1}$ 和 $\{\boldsymbol{R}^{\mathrm{int}}\}_{i+1}$。我们返回到方程 17.9-9，现在令 $i=2$。迭代继续执行直到收敛，当 $\{\Delta\boldsymbol{D}\}_{i+1}\approx\{\boldsymbol{0}\}$ 并且 $\{\boldsymbol{D}\}_{i+1}$ 能够使变了形的结构有可支持载荷 $\{\boldsymbol{R}^{\mathrm{ext}}\}$ 的位形。求解过程是牛顿-拉斐逊迭代，它能使载荷的不平衡趋向零。可以选择仅当增加新的载荷增量时更新 $[\boldsymbol{K}_t]$，这样，在给定载荷量级上的迭代过程可以使用改进的 N-R 方法。

备注　其它问题　当应力使结构接近屈曲状态时，在求解过程中应该包括“应力刚化”。下面是一个关于应力刚化的简单例子(更完整的讨论将出现在第 18 章)。在图 17.9-4(a)中，一个弹簧支撑的刚性杆受到一个轴向力 P 的作用。由于附加横向力而引起的横向位移示于图 17.9-4(b)中，通过对节点 1 取矩，因 $v_2\ll L$，我们得到

$$(k+k_\sigma)v_2=F\quad 其中\quad k_\sigma=\frac{P}{L} \tag{17.9-10}$$

这里 k_σ 是“应力刚度”。压缩的力 P 的效应是减小净刚度 $k+k_\sigma$。实际上当 $P=-kL$ 时，

$k+k_\sigma=0$，它定义了结构屈曲的条件。尽管叫“应力刚化”，我们更关心它在减小刚度时的效应。在多自由度问题当中，k_σ 的类似量是单元矩阵$[\boldsymbol{k}_\sigma]$，它增强了传统的刚度矩阵$[\boldsymbol{k}]$。应力刚化效应自动包含在基于完全格林应变表达式的列式中，但是必须通过包含矩阵$[\boldsymbol{k}_\sigma]$将它加入到旋转列式中。在图 17.9-2(b)中，如果载荷 P 大致与支柱屈曲载荷 P_{cr} 相等，那么应力刚化是数值模型中非常重要的部分，但是如果 P 的值已经比较大，应力刚化就不那么重要了。



(a) (b)

图 17.9-4 (a) 在一端由线性弹簧支撑并承受轴向力 P 的刚性杆
(b) 由横向力 F 引起位移的刚性杆

如果把方程 17.9-2 中的应变项在刚度矩阵列式中合并在一起，结果可以写成$[\boldsymbol{k}]=[\boldsymbol{k}_0]+[\boldsymbol{k}_1]+[\boldsymbol{k}_2]$的形式，这里下标表示所含位移的阶数。因此$[\boldsymbol{k}_0]$是传统的小位移刚度矩阵，它与位移不相关。矩阵$[\boldsymbol{k}_1]$包含位移的一次幂。如果$[\boldsymbol{k}_1]$中的位移可以被单元内与它们相应的应力取代，就能够认为$[\boldsymbol{k}_1]$等同于应力刚度矩阵$[\boldsymbol{k}_\sigma]$。矩阵$[\boldsymbol{k}_2]$包含位移的二次幂，有时候称其为“初始位移刚度矩阵”。

几何上的非线性结构平衡位形可以不止一个。例如，在图 17.9-2(b)中，对于 $P>P_{cr}$ 当向上弯曲、向下弯曲和处于平直状态时，结构都处于平衡状态。直的位形是不稳定平衡，但是数值解可能向它收敛。特别是接近屈曲条件时，小的载荷增量是合适的，并且可以暂时施加小辅助横向载荷使结构开始向期望的方向移动。$P>P_{cr}$的柱状问题是经典的弹性问题。它提供了一个便于试验的算例。这个问题在 1744 年被欧拉用解析的方法解决了。理论和数值结果出现在文献[17.33,17.34]中。

平板和无应力薄膜开始没有抵抗横向载荷的刚度。为了避免在横向载荷的作用下切向刚度分析第一个循环中的奇异性，可以暂时施加一个假想的薄膜应力，以便在开始呈现出非奇异的应力刚度矩阵$[\boldsymbol{K}_\sigma]$。基于计算的真实$[\boldsymbol{K}_\sigma]$可以在接下来的迭代循环中使用。

如果挠曲相当大，就像给气球充气一样，那里有几个产生非线性的原因。材料具有非线性的应力-应变的关系。挠曲大了单元的尺寸实质上也增大了；结果作用在每个单元上的外力随着单元的增大而增大，并且随着单元的旋转，作用力也在改变方向[17.35]。由于单元增大和畸变，可能需要采用格林应变，而旋转列式可能不再适用。参考文献见[16.47～16.50]。

因为线缆几乎没有弯曲刚度，同时也因为需要考虑应力刚化和存在大变形的可能，线缆问题大致和薄膜问题相似。可以用许多标准的 2 节点单元为线缆建模，但是这样的模型可能会因为位移与结构尺寸相近而存在收敛问题，即使计算成功也需要相当的计算代价。建立在精确悬链线方程基础之上的列式用单一单元有效描述两个支撑点之间的完整线缆，看上去更合适[17.36～17.38]。向动力学的扩展在文献[17.39]中可以找到。通过增加一些弯曲刚度，可以产生“长柔性梁单元”[17.40]。

17.10 建模考虑·备注

与线性分析相比，非线性分析可能对计算机资源、分析者的时间和专门知识的要求高得多。分析的目标更加多种多样，并且也有更多的计算路径供选择。预测结构响应更加困难。更好地理解结构响应和知道如何进行计算，必须提前做一些试分析才能做到。在 1.5 节和第 10 章中的建模建议仍然适用：努力从物理上理解问题和支承分析程序的概念，学习软件的帮助文档；希望使用一模型系列；仔细检查计算结果；记录下在每次分析当中所做的工作和从中学到的东西，等等。在进行非线性分析以前，应该确定它是否真的很有必要。

记着叠加规则对于非线性分析已经不再适用。将载荷加倍所产生的效果将大于或小于两倍的响应。不同载荷情况所得到的结果不能进行代数或向量加法。如果不同的载荷是顺序加载的，应力和变形的最终状态可能取决于加载顺序。

策略 相对于线性分析，只有在试图去解决它的时候非线性问题的本质才会变得更加清晰。在开始分析时，非线性的类型和范围都是不明显的，即使清楚了，合适的单元、网格布局、求解算法和载荷步长可能还是不明确。试图一次性地去解决非线性问题很可能失败，产生混乱和挫折感。通过做一些简单的初级分析来预测有限元的结果一直是我们所希望的。非线性分析应该利用实验算例作导向性研究。线性分析应该先于非线性分析。线性分析可以发现影响非线性建模的错误，并且可以检测出初始离散化充分程度。它也可以给出屈服发生的位置和程度，或者什么样的间隙可能张开或闭合，或者真实破坏的近似载荷和变形状态。如果非线性是由不同的原因造成的，可以一次考虑一个因素然后叠加起来，这样可以更好地理解它们的效应和如何去处理它们[2.14]。连续建模的初始模型可以使用相对粗糙的网格、较大的载荷步长和足够大的收敛容差。其后所有的这些量都修改。通常必须经过几步才能接近最终的载荷。太大的步长能够使收敛速度变慢或者在载荷-位移图上产生突然变化，可能会把实际的物理行为搞错。收敛失败可能是因为数值计算的困难，也许是由于载荷步长过大引起的，或者它正确地表示已经到达了破坏的状态。

一旦通过初步试算，应该对剩余的分析内容如每个阶段做什么和为什么做订出计划。每个载荷步能够产生与完全线性分析一样多的输出，因此很有必要预测需要什么输出和怎样检查它。至少在每个载荷步之后应该简略地检查输出。软件发出的通报和警告应该认真地采纳和理解。只有当分析工作看起来比较满意时才可望继续到下一个载荷量级。因此，为了允许从当前的载荷量级重新开始，应当储存足够的数据。在重新开始时，分析者需要变化载荷增量、收敛容差，或算法的其它方面。

建模 可以复习一下在第 1 章、第 10 章和第 11 章所提到的建模建议，因为它们包括适用于非线性分析的建议。下面再罗列一些建议。相对于变形表面保持相同方向的随动载荷，不能按在空间方向固定的载荷的更一般情况来对待。软件可以自动把流体压力作为随动载荷对待，但是分析者必须进行确认而不能假定它是这样的。残余或初始应力可能在外载荷作用以前就存在。在标准轧制钢梁中的残余应力是明显的，它在屈服发生时有减小外载荷的作用。初始应力也可能是由于装配工艺而产生，并且像在结构变形时累积的应力，它可以通过应力刚

化效应使结构的刚性变大或是柔性变大。

如果结构可以被划分为线性和非线性部分，则线性部分可以由一个或者多个子结构描述。代表线性部分的矩阵不需要随着迭代的进行而改变。与完整的模型相比，因为线性子结构可以用它们的连接自由度来描述，所以它只需要较少的自由度。在装配过程中保留的大多数自由度都在非线性部分中，它的矩阵必须随着迭代的进行而逐次改变。

对称和反对称条件必须小心使用或者避免一起使用。在线性问题中(不是屈曲或是振动)几何、支撑、弹性属性和载荷的对称性允许用施加的对称性条件对结构的一部分建模。在非线性问题中，这样的对称性可能随着载荷的增加而消失，这取决于模型的细节和它后来的加载情况。

大应变可能使网格的变形如此之大而使形状很好的单元变得非常差。尽管有大的变形，修正的初始网格可以使得单元的形状依然可以接受(图 17.10-1)。在变形累积的时候细化网格也是合适的。对于大的变形和转角，应力和应变可能必须用不同于线性分析中习惯的方法来定义。计算的应力和应变可能要参照全局方向和旋转后的单元方向来记录。必须学习软件的文档以确定输出结果是什么并知道它意味着什么。

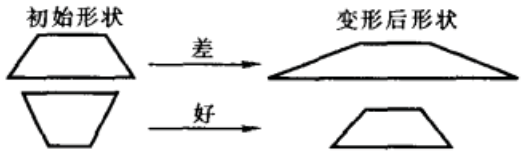


图 17.10-1 大变形引起单元形状的可能畸变

对于大位移，连接节点的弹簧或者杆的方位受与其相连接的节点位置所控制。因此在图 17.10-2 中如果预想连杆仅给相邻表面施加法向力，这可能不是变形以后的情况。如果这是接触问题的一种，那么抵抗相邻表面相互渗透的无摩擦接触单元可提供更好的表述。注意到无论计算得到的位移有多大，对于图 17.10-2 中模型的线性分析是基于连杆的初始垂直方向的。

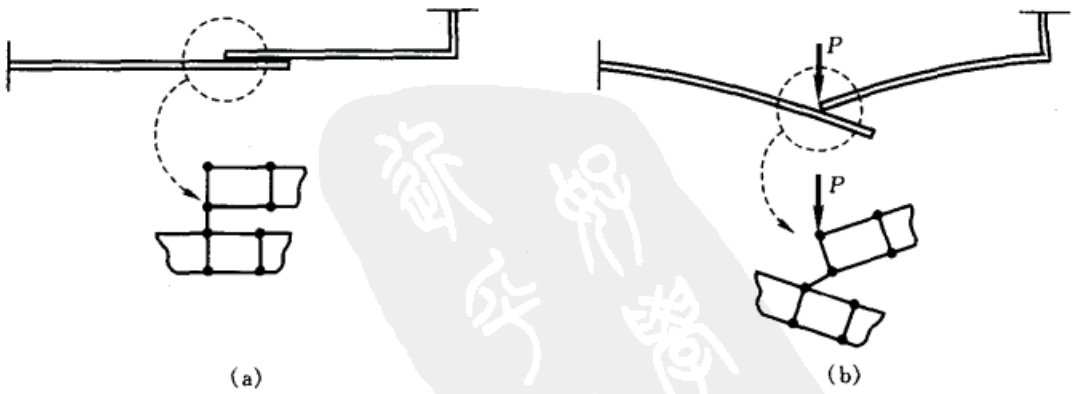


图 17.10-2 弹簧或连杆把横跨缝隙的节点连接起来
(a) 加载前连杆垂直于相邻的表面；(b) 大变形后，连杆不再垂直于表面

在弹塑性分析中，如果处于初始载荷使结构即将屈服但还没有屈服的情况，载荷步可以大一些。检测屈服开始并且跟踪它的扩展需要对网格进行充分的细化并且在受影响单元中的采样点有满足要求的分布，如果单元严重畸变的话，就需要比平常多得多的采样点。弯曲的部件要求在屈服开始的表面有采样点，并且在厚度方向也要有足够的采样点以满足对弯矩计算的要求。塑性应变的增量 $\Delta\lambda$ 不应该超过任何载荷增量的 5%[8.7]。在检测计算结果的时候，画出变形的结构同时也画出在载荷增加时塑性变形的程度通常是非常有帮助的。

单元能够被激活或钝化（在文献[8.7]中称单元“出生”和“死亡”）。一个单元可用设置它的刚度接近于零来使其钝化，在易碎的材料中如果计算表明有太大的应力，这可能是合理的。质量保留，除非它也设置为零，对于熔化流失的材料可能要这样做。相反，单元初始不起作用，但当结构由于凝固、喷镀或纤维缠绕等这类原因而增长时，可能需要激活它。

非线性动力学分析通常通过直接积分法来完成，这是因为大多数的软件缺乏启动模态法处理非线性问题所需的手段。在用中心差分法解决接触问题的非线性分析中，如果引入大的刚度，许用的时间步长要以相当大的幅度减小，因为大刚度产生很高的固有振动频率。尽管使用直接积分，为了防止算法在振动过程中耗散能量，每个最高频周期内可能需要 30 个时间步[8.7]。

收敛 只有在收敛的情况下平衡条件才可以得到满足。收敛速度慢或者收敛失败可能有各种原因。在一个弹塑性问题中，集中载荷和点支撑可能与高的局部应力有关。在试图消除这些局部状况时，算法可能要用多次迭代，如果感兴趣的地域在另一处，迭代是无益的。可以通过对邻近集中载荷和支撑点处的单元指定非常高的屈服应力的方法来回避这样的困难。收敛失败也可能表明结构已经到达它的承载极限，这大概是由于结构屈曲，或者是由于在塑性区应变硬化能力已经耗尽，或者裂纹持续扩展以至于有一部分结构“流失”。当接近破坏条件或是极限点的时候（图 17.2－3(a)），位移的增量将变大。在破坏条件或是极限点，或者在它之上的某个距离，切向刚度矩阵[$\boldsymbol{K}_t$]将不是正定的，通常这将导致软件停止执行或者发出一个错误信息。

在收敛失败的时候有许多策略可以使用。通常每个载荷一步允许的迭代次数大约是 20 次，对于裂缝和接触问题来说也许超过 80 次。这些界限也可以提高。载荷的步长能减小。可以搜索形状很差的单元，采用连续的曲线型应力-应变关系代替双线性关系，或者放宽收敛容差[10.37]。可以探索替代算法和软件能够提供的计算路径组合。如果最终获得收敛，必须认真检查计算结果以确定计算策略是不是改变了给定的问题。如果依然有困难，可以寻求专家的咨询。

一个收敛的结果未必就是符合物理实际的结果。对于一个给定的载荷，平衡位形可能不止一个，而数值解可能只收敛到其中的任何一个，甚至这个位形是物理不稳定的。

屈曲 屈曲可以定义为这样一种状态，在这种状态下平衡的稳定性消失了。最简单的弹性稳定性实例是初始直的柱体承受轴向载荷和初始平板承受平面载荷，他们没有横向挠度直到其解在临界载荷处“分叉”为止。实际的结构很可能从开始加载的时候就现出横向挠度，它也许与载荷有非线性关系。屈曲可能是由分叉引起的或与极限点相关联（图 17.2－3(a)）。结构屈曲以后的强度也许有也许没有。很明显，非线性分析在结构屈曲研究中起着非常重要的作用。这些内容将在第 18 章讨论。

分析题

17.2-1 (a) 在图 17.2-1(a)中，令 $k=0.2-u$ 和 $P=0.006$。从 $u=0$ 开始，运用直接替换算法的循环三次。

(b) 用图 17.2-2 所示的方式，在 $P-u$ 图上定性地画出算法过程。

(c) 用 u 表示的切向刚度 k_t 的表达式是什么？

17.2-2 图示给出非线性关系 $P=P(D)$。在这个问题的下面部分，我们自认为 P 和 dP/dD 在知道 D 的情况下是可以确定的，但是用 P 表示的关于 D 的显式表达式现在得不到。在下面每一部分中，用所提示的方法和给出的数据求 D 的数值解。在 P-D 图上画出每次求解的过程。

(a) 令 $P=8$。从 $D=0$ 开始，通过 N-R 迭代的五次循环以后 D 的结果是什么？

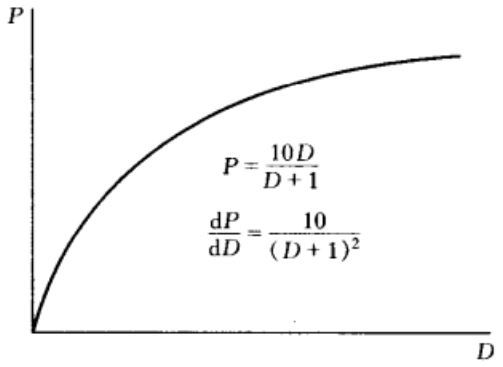
(b) 令 $P=8$。从 $D=3$ 开始，通过改进 N-R 迭代的五次循环以后 D 的结果是什么？

(c) 重复(b)的工作，但是进行三次循环，仅在第一次循环以后更新切向刚度矩阵。

(d) 从 $P=1$ 开始(这里 $D=0.111\ 1$)到 $P=9$，仅用 $\Delta P=2$ 的四个增量步(欧拉方法)预示 D 的结果是什么？

(e) 重复(d)的工作，但是每一步包含力不平衡校正。

(f) 令 $P=8$。从 $D=0$ 开始，使用直接替换算法经过五次循环以后 D 的值是什么？



题 17.2-2

17.2-3 应用问题 17.2-2 的文字说明，现在参考所示的硬化曲线。

(a) 令 $P=0.8$。从 $D=0$ 开始，使用 N-R 迭代方法经过五次循环以后 D 的值是什么？

(b) 令 $P=3$。从 $D=6$ 开始，使用改进的 N-R 迭代方法经过五次循环以后 D 的值是什么？

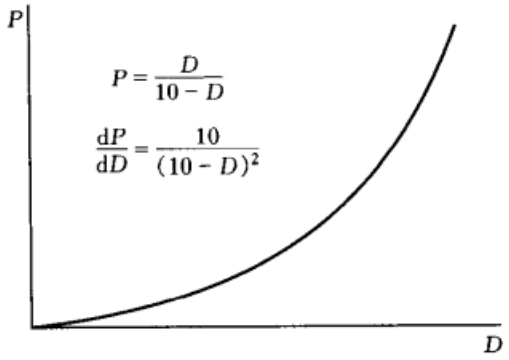
(c) 重复(b)的工作，现在根据方程 17.2-8 更新位移，其中 $\mu=0.6$。

(d) 重复(b)的工作，但进行四次循环并且只在第一次循环以后更新切向刚度矩阵。

(e) 从 $P=1.5$(这里 $D=6$)到 $P=4.5$，仅用 $\Delta P=1$ 的三个增量步(欧拉方法)D 的结果是什么？

(f) 重复(e)的工作，但是每一步包含力不平衡校正。

(g) 令 $P=4$。从 $D=0$ 开始，使用直接置换算法经过四次循环以后 D 的值是什么？



题 17.2-3

17.2-4　图示的杆在没有受力的情况下长度是 L，这里 $L^2=a^2+c^2$。令 $a\gg c$。当载荷 P 是零的时候，位移 D 也是零。这个杆的轴向刚度是 AE/L。在 B 处无摩擦地滚动，并且没有像圆柱杆那样屈曲。假定限制滚柱保持与墙接触并且在图示的平面内。

(a) 对于 $a\gg c$，证明势能 $\Pi_p=U-PD$ 是

$$\Pi_p=(AE/8a^3)(D^2-2cD)^2-PD$$

(b) 证明 D 的平衡值由下列方程的根给出

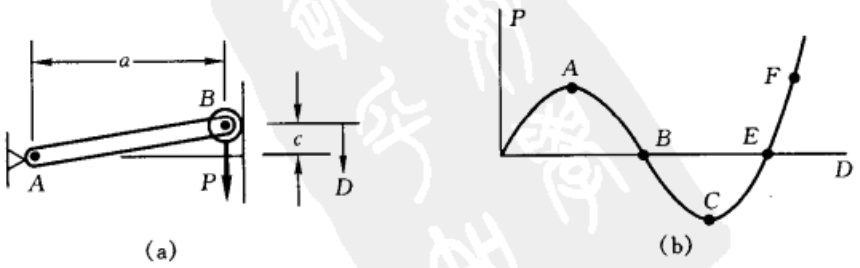
$$P=(AE/2a^3)(2cD-D^2)(c-D)$$

(c) 确定割线刚度 $k_{sec}=P/D$ 和切向刚度的表达式。

(d) 证明在 $D=c(1\pm1/\sqrt{3})$ 处有极限点。

(e) 令系统的常量为一定值以便使得点 A 和点 F 在所示的 P-D 曲线图上的位置是 $P_A=241$，$D_A=0.211$，$P_F=250$，和 $D_F=1.080$。在 $P=200$ 收敛以后，P 的值增加到 250，通过 N-R 算法得到的一系列位移 D 的值是：0.173，0.219，0.071，0.143，0.190，0.249，0.199，0.294，0.235，0.175，0.222，0.108，0.166，0.210，1.178，1.096，1.080，1.080。通过将结果画于 P-D 图上来解释这条收敛路径。

(f) 从 $D=0$ 开始，画出在 $P=250$ 时由改进的 N-R 算法得到的收敛路径。



题 17.2-4

17.2-5　令载荷 P_1 和 P_2 是位移 D_1 和 D_2 的函数；也就是说 $P_1=f_1(D_1,D_2)$ 和 $P_2=f_2(D_1,$

D_2)。令 D_A 和 D_B 是 D_1 和 D_2 的准确值，它是由载荷 P_A 和 P_B 产生的。令 D_A^* 和 D_B^* 是 D_A 和 D_B 的近似值。假设 $D_A=D_A^*+\Delta D_A$ 和 $D_B=D_B^*+\Delta D_B$。推导 N-R 方法的下列方程：

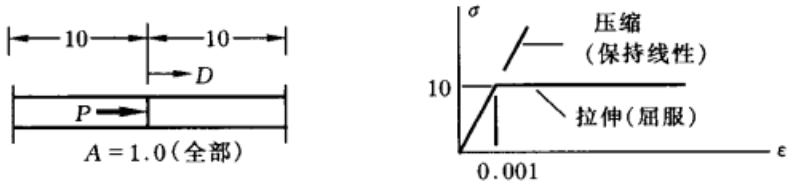
$$\begin{bmatrix}\partial P_1/\partial D_1 & \partial P_1/\partial D_2\\ \partial P_2/\partial D_1 & \partial P_2/\partial D_2\end{bmatrix}_{D_A^*,D_B^*}\begin{Bmatrix}\Delta D_A\\ \Delta D_B\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}P_A-f_1(D_A^*,D_B^*)\\ P_B-f_2(D_A^*,D_B^*)\end{Bmatrix}$$

17.2-6 考虑函数 $g(x)=x-[f(x)/f'(x)]$，这里字母右上角的小撇号"′"表示对 x 的微分。为了用 N-R 法求解方程 $f(x)=0$，我们从给定的 x_0 开始迭代，寻找一个满足方程 $x^*=g(x^*)$ 的 x^*；即 $x_{i+1}=g(x_i)$。$g(x)$ 的二阶泰勒级数展开是

$$g(x)=g(x^*)+g'(x^*)(x-x^*)+\frac{1}{2}g''(\bar{x})(x-x^*)^2$$

这里 $\bar{x}$ 在 x 和 x^* 之间。由此证明 N-R 方法终止于二次式。

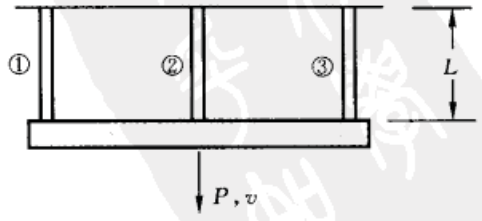
17.3-1 图示的两个杆其外端被固定在刚性墙上，相邻端焊接在一起，并在该处作用载荷 P。材料的行为显示在图的第二部分。使用切向刚度方法。从零载荷开始，连续的载荷增量是 $\Delta P=20$，$\Delta P=10$ 和 $\Delta P=-30$。确定相应的位移值 D。在 P-D 图上表示结果。



题 17.3-1

17.3-2 对于问题 17.3-1 中的杆，达到载荷 P 的屈服点值后作用单个的载荷增量 $\Delta P=10$。用初始刚度法经过五次循环确定位移 D 的值。

17.3-3 想象在图中的水平杆是刚性的，当载荷 P 和位移 v 增加的时候杆受到约束保持在水平位置。三个垂直杆是理想弹塑性体，且 $A=1$，$E=1$ 和 $L=2$。各杆分别具有屈服点载荷 $F_1=2$，$F_2=4$ 和 $F_3=6$。使用切向刚度方法三次迭代产生 $P-v$ 关系图。确定每一步结果的比例使得一个杆在下一步开始时开始屈服。

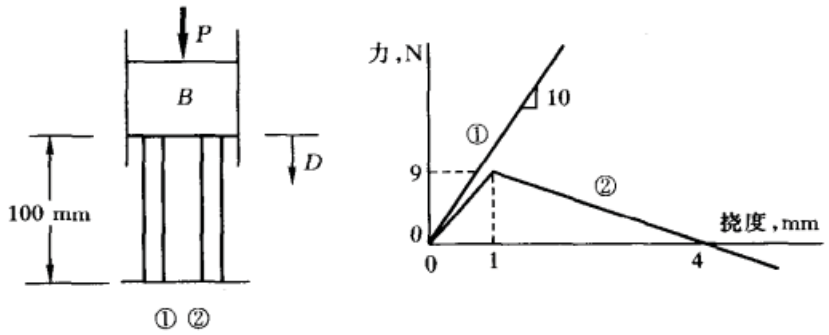


题 17.3-3

17.3－4　图示的无重量刚性块 B 在无摩擦的导向装置中由力 P 向下推。两个支撑杆中的每一个的力-挠曲图也在图中示出。根据下面要求，求由于分力 $P=24\text{N}$ 产生的块 B 的位移 D

(a) 确定精确解。

(b) 使用切向刚度方法。令 $\Delta P=19\text{N}$ 为初始载荷增量，而 $\Delta P=5\text{N}$ 是第二和最终载荷增量。



题 17.3－4

17.3－5　假定桁架中的构件只能承受单轴应力，并且受压构件经常没有屈服就在它们的临界载荷处弹性屈曲。假定受拉构件具有理想弹塑性性能。略述为计算由单调增加载荷产生位移的切向刚度算法。

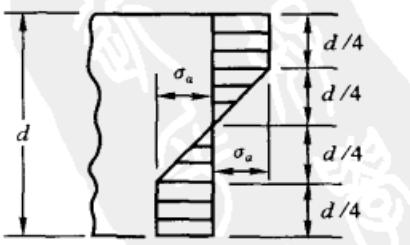
17.3－6　令单轴应力-应变具有方程 $\sigma^2=10^6\varepsilon$ 所描述的关系。在曲线上从 $\sigma=1000$ 开始，使用方程 17.3－5 到 17.3－7 的方法确定由应变增量 $\Delta\varepsilon=3$ 预示的应力。结果的百分比误差是多少？

17.5－1　假定对弯曲过程中的塑性作用建模并且在厚度方向(在图中的尺寸为 d)使用几个采样点。

(a) 为什么梯形规则或辛普森积分规则比高斯规则更可取？

(b) 想象图示的应力分布在深度为 d 的矩形截面梁中占主导地位。如果利用两点高斯规则从应力分布积分 M_c，计算其矩 M_c 的百分比误差是多少？三点高斯规则的误差又是多少？

(c) 类似地，确定与使用 3，5，7 和 9 个采样点的梯形规则相关的百分比误差。



题 17.5－1

17.5－2　设想单轴应力状态在应力方向产生塑性应变增量 $d\varepsilon^p$。证明如果应力作用在 x 和 y

轴的 45°方向，由方程 17.5－4 可以得到 $d\varepsilon_x^p = d\varepsilon^p$。

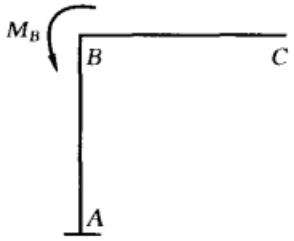
17.5－3 描述切向刚度求解算法的步骤，其中每个载荷增量都引起单个附加采样点开始屈服。假定载荷是单调增加，材料是理想弹塑性。

17.5－4 考虑一个平面结构的有限元模型。材料是各向同性、线弹性的并且具有脆性：当在任何方向的拉应力超过 σ_t 时都会断裂。略述一下用于预测由单调增加载荷导致变形的切向刚度算法。用这个算法如何检测破坏条件？

17.9－1 考虑图 17.9－1(b)中的轴向应变。u_2/L 取什么值的时候可以使工程定义的 $\varepsilon_x = u_2/L$ 与方程 17.9－3 定义的格林应变 ε_x 差值超过 5%？考虑(a) $v_2 = 0$，(b) $v_2 = u_2$ 和(c) $v_2 = 100u_2$。

17.9－2 在式 17.9－2 中，为得到在 xy 面内格林应变的表达式，令 $w = 0$。证明对于一般的平面运动，式 4.9－1 和图 4.9－1 这个应变为零。

17.9－3 如图所示，在刚架 ABC 的 B 点承受一个大小为 M_B 的力矩。假定刚架没有屈服。对于下面的情况，足够细致地画出能看见差别的挠曲形状(如果它们确实不同)。



题 17.9－3

(a) 软件直接大比例放大线性(小挠度)解，以至于角 B 旋转将近 60°。

(b) M_B 大到足以在角点 B 产生约 60°的实际转角。

(c) 重复(a)和(b)，现在假定一个无摩擦的垂直墙阻止在 B 点的水平运动。

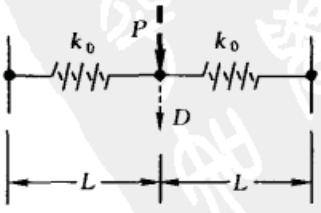
17.9－4 当载荷 P 为零时，在图中显示的位移 D 是零并且弹簧是共线的和不受力的。弹簧的刚度 k_0 是常数。

(a) 根据 k，L 和 D 确定割线刚度 $k_{sec} = P/D$。

(b) 对于小的 D 值($D \ll L$)，k_{sec} 是什么？

(c) 对于小的 D 值切向刚度是什么？

(d) 令 $P = 1$ N，$L = 10$ mm 并且 $k_0 = 800$ N/mm。于是 $D = 0.5$ mm。现在以 $\Delta P = 7$ N 增加 P，使用 N-R 迭代的三次循环去近似所得到的 D。

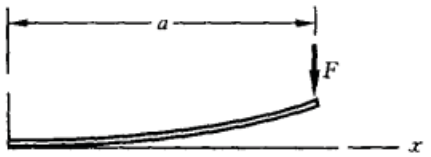


题 17.9－4

17.9－5　在方程 17.9－5b 中，证明从图 17.9－3 的 $\beta_0=0$ 开始，对于单元 1 围绕节点 1 的大的刚体旋转 $u_2=0$。

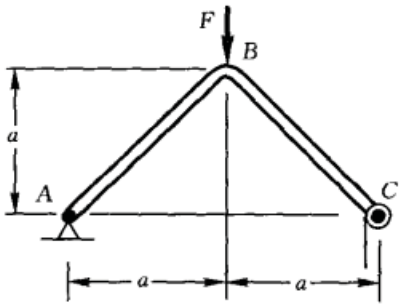
17.9－6　在图 17.9－2(a)中，令梁是均匀的和线弹性的。导出尖端 y 方向的位移 v_L 作为 M，L，E 和 I 的函数，它对于任何 M 值均是有效的。证明当 M 非常小的时候，这个表达式退化为标准的线性关系。

17.9－7　当没有加载的时候，图示的细长杆有一个常曲率半径 R，这里 $R\gg a$。它的左端点与刚性水平面相切。其后把垂直力加载到它的右端点上。如果这个梁仍然保持线弹性，多大的力 F 可以使左端的曲率变为零？对于更大的 F，在 x 多大时这个梁离开水平表面？使用材料力学的方法。



题 17.9－7

17.9－8　图示的角刚架具有均匀的弯曲刚度 EI 并且可以看作是无重量的。在 C 点，一个无摩擦小轮与垂直刚性平面相接触。使用材料力学方法，确定 C 点由力 F 引起的垂直挠度。假定这个挠度是很小的。



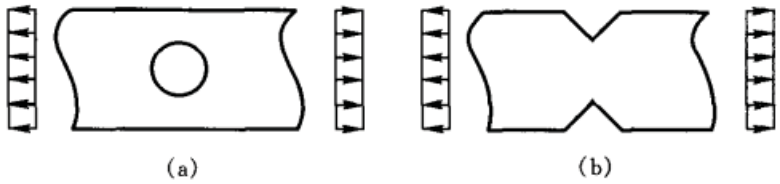
题 17.9－8

计算题

在下面的问题中恰当地计算位移、力矩和应力。尽可能地利用对称性。当网格细化的时候，估计由最精细的有限元网格所得结果的百分比误差的最大值。在尺寸、载荷和材料属性没有指定的地方，选择看上去合理和方便的数值。如果需要附加假设条件，清楚地说明它们是什么。使用在 1.5 节中所建议的分析方法。

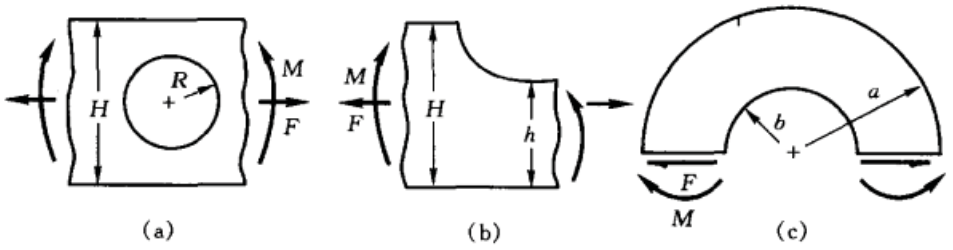
C17.1　用数值方法求解分析类问题：(a)问题 17.9－3；(b)问题 17.9－7 和(c)问题 17.9－8。

C17.2　平面矩形条承受拉伸载荷。作用均匀远场-应力 σ 如图示。确认当载荷增加的时候哪些区域变成塑性区[15.7]。



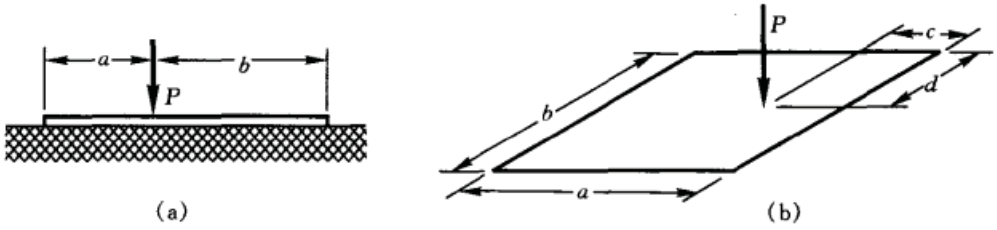
题 C17.2

C17.3 图示的平面物体每一个板可能受一个力 F 和/或一个力矩 M 作用。加载大到足以产生屈服。研究屈服的程度和卸载时的残余应力。



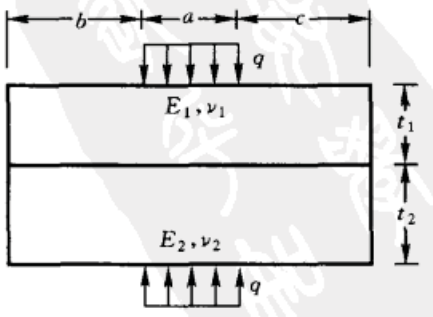
题 C17.3

C17.4 (a) 如图所示,一个弹性梁受到一个横向力 P 的作用。这个梁放在弹性基上,弹性基座能够推压梁但不能在其上拖它。研究梁和和弹性基座之间接触压力的范围和强度。
(b) 和问题(a)的情况一样,但是现在考虑一个长方形平板放在一个弹性基上。



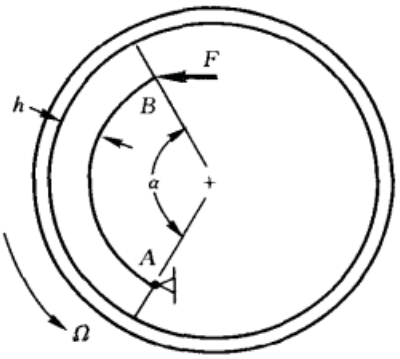
题 C17.4

C17.5 如图所示,两个平面弹性块被挤压在一起。假定在两个块之间的摩擦力为零,研究这两个块之间接触压力的范围和强度。



题 C17.5

C17.6　这个图表示一个理想化的鼓轮刹车问题。弯曲的弹性杆 AB 铰支在 A 点并且被一个力 F 压在一个刚性的圆形刹车鼓轮上。鼓轮以角速度 Ω 转动。研究旋转鼓轮所需要的扭矩怎样随着角 α、摩擦系数和尺寸 h 变化？对于反向旋转可能要重新进行分析。



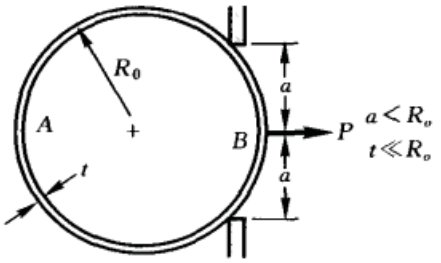
题 C17.6

C17.7　如图所示，一个细的弹性圆环被拉着通过一个小的开口。圆环与开口之间的摩擦系数是 μ。研究力 P 与位移之间的关系。当 P 作用在 A 点而不是 B 点的时候可能要重新分析这个问题。

C17.8　(a) 在图 17.9-2(a)中，研究载荷 M_L 与梁端点处位移分量之间的关系。

(b) 图 17.9-2(b)中，研究当 P 超过柱体屈曲载荷时平行 x 轴的端点载荷 P 和梁端点处位移分量之间的关系。为得到初始横向挠度附加一个很小的横向力。

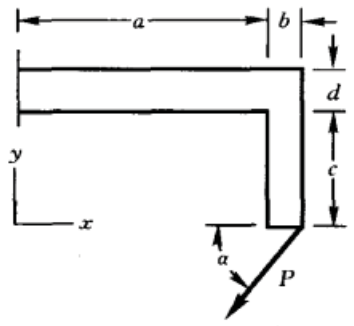
(c) 研究初始无应力弹性薄膜受均匀横向压力 P 作用时的挠度(对于一个边长为 L，厚度为 t，泊松比为 0.3 并且每一处的斜率远远小于 1 的方形薄膜，文献[17.41]报告称横向中心挠曲为 $w_c = 0.286\,6t[(p/E)(L/t)^4]^{1/3}$。



题 C17.7

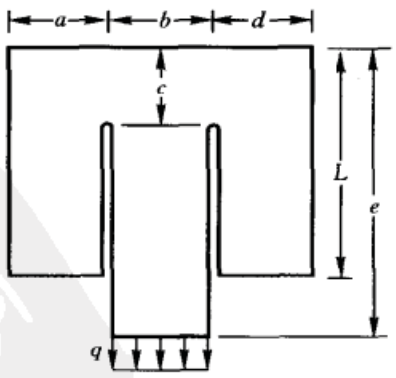
C17.9　研究射箭用弓的力与挠度的关系。

C17.10　图示为薄平金属片在 $x=0$ 处固定在刚体支撑上。开始时结构的中面和力 P 位于 xy 平面内。研究涉及垂直于 xy 平面位移分量的大挠曲弹性性能。为了得到初始横向挠度，在垂直 xy 面方向附加一个很小的力。



题 C17.10

C17.11　图示为薄平金属片在垂直平面内。垂直方向的缝隙非常窄。外腿的下端固定并且在中心腿底端上作用有垂直方向的分布载荷 q。研究涉及纸面法向方向位移分量的大挠曲弹性性能。如图所示，q 的作用方向可能向上或者向下。为得到初始横向挠度，附加一个很小的横向力。



题 C17.11

第 18 章

应力刚度和屈曲

说明薄膜力对弯曲刚度影响的矩阵已列式化。其应用包括屈曲问题。本章回顾不同类型的屈曲问题。要注意过度简化计算问题所带来的风险。

18.1 引言·能量考虑

*应力刚化*这一术语指的是薄膜力对横向挠度的影响，特别是与梁、板和壳有关的横向挠度。薄膜力和相应的薄膜应力沿杆或梁的轴向作用而与板或壳的中面相切。尽管使用"应力刚化"的名称，当薄膜力的作用是压缩而不是拉伸的时候，抵抗弯曲变形的能力是在减小，就像圆柱体承受轴向压力一样。

*屈曲*指的是在没有断裂、材料分离或者至少在它们之前，一个平衡位形失去了稳定性。*分叉屈曲*是一种与初等圆柱理论相似的屈曲形式，其中，对于称做临界载荷的轴向压力值 P_{cr}，屈曲前处于稳定平衡状态的直的位形会在该点终止，替代的可能是屈曲后的位形。当处于极限点时，那里没有可替代的和无限接近平衡的位形，也可能会出现无分叉的屈曲（图 17.2－3(a)）。

当一个构件或结构在不改变外部载荷的情况下将薄膜应变能转换为弯曲应变能时，会发生分叉屈曲。在细圆柱体和薄板或壳中，薄膜刚度比弯曲刚度大得多，并且大量的薄膜应变能可以存储在小变形中。当屈曲发生时，需要相当大的弯曲变形来吸收释放的薄膜应变能。

在有限元分析当中，薄膜应力对横向挠曲的作用可以通过矩阵$[\boldsymbol{k}_\sigma]$来解释，它是传统刚度矩阵$[\boldsymbol{k}]$的扩展。矩阵$[\boldsymbol{k}_\sigma]$是单元几何形状、位移场和薄膜应力状态的函数。我们称$[\boldsymbol{k}_\sigma]$为*应力刚度矩阵*。其它的名称包括"初始应力刚度矩阵"（虽然薄膜应力可能随着变形的累积而改变）和"几何刚度矩阵"（虽然传统的刚度矩阵也依赖于几何形态）。

矩阵$[\boldsymbol{k}_\sigma]$与材料属性无关，所以尽管存在各向异性和屈服它仍然适用。组集单元矩阵$[\boldsymbol{k}_\sigma]$可以得到结构矩阵$[\boldsymbol{K}_\sigma]$，所使用的方法与传统的单元刚度矩阵$[\boldsymbol{k}]$被组集成$[\boldsymbol{K}]$一样。分

叉屈曲是一个特征值问题，与振动问题具有相同的形式，只是振动问题使用质量矩阵[$\boldsymbol{M}$]而不是[$\boldsymbol{K}_\sigma$]。

梁-柱分析　为了举例说明应力刚度和分叉屈曲计算的概念，我们考虑一个简支梁（图 18.1－1(a)）。轴向力 P 在本例中受拉为正，它被认为在开始时就施加在梁上，也许是由于温度变化，而梁的两端不允许轴向移动。下面是基于能量概念的分析。

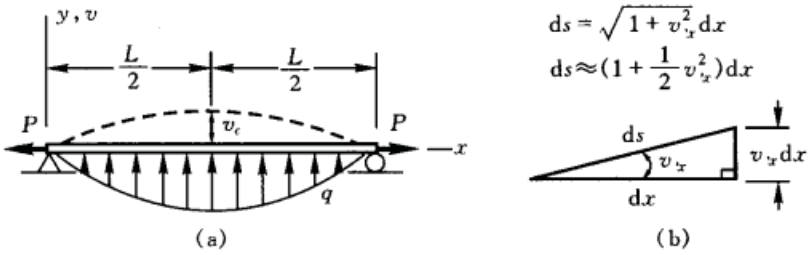


图 18.1－1　(a) 简支均匀梁；(b) 初始长度为 dx 的微元几何关系

对于小的横向位移 $v=v(x)$，弯曲应变能是根据曲率 $v_{,xx}$ 用标准的表达式给出的。

$$U_b = \frac{1}{2}\int_0^L EI_z v_{,xx}^2\,dx \tag{18.1-1}$$

想象 $v=v(x)$ 是在没有任何轴向位移 u 的情况下发生的。每一个微分长度 dx 变成一个新的微分长度 ds，这里 ds>dx。ds 的表达式是基于二项展开式前两项的近似，并且确保 $|v_{,x}|\ll 1$，如图 18.1－1(b)所示。因此杆中的轴向薄膜应变是

$$\epsilon_m = \frac{ds-dx}{dx} = \frac{ds}{dx} - 1 \quad \text{因此} \quad \epsilon_m \approx \left(1+\frac{1}{2}v_{,x}^2\right) - 1 = \frac{1}{2}v_{,x}^2 \tag{18.1-2}$$

对于基于格林应变的 ϵ_x，当 v 仅仅是位移的时候方程 17.9－2a 也给出了 $v_{,x}^2/2$。

在小横向位移过程中，轴向力 P 基本上保持常量。当每个单元的长度 dx 的伸长量是 $\epsilon_m dx$ 时，它所承受的拉力 P 做功，并且存储的应变能总量是 $P\epsilon_m dx$。因此薄膜能量的改变是

$$U_m = \int_0^L P\epsilon_m\,dx \quad \text{或者} \quad U_m = \frac{1}{2}\int_0^L P v_{,x}^2\,dx \tag{18.1-3}$$

让我们假定 v 按照半正弦波的形式变化，即 $v=v_c\sin(\pi x/L)$，这里 v_c 是中心挠度。因此

$$U_b = \frac{\pi^4 EI_z}{4L^3}v_c^2 \qquad U_m = \frac{\pi^2 P}{4L}v_c^2 \tag{18.1-4}$$

如果载荷也是按照半正弦波的形式变化，即 $q=q_c\sin(\pi x/L)$，总势能是

$$\Pi_p = U_b + U_m + \Omega \quad \text{其中} \quad \Omega = -\int_0^L vq\,dx = -\frac{q_c L}{2}v_c \tag{18.1-5}$$

平衡状态由 dΠ_p/dv=0 给出，由此得出

$$v_c = \frac{q_c L}{2(k + k_\sigma)} \quad \text{其中} \quad k = \frac{\pi^4 EI_z}{2L^3} \quad \text{和} \quad k_\sigma = \frac{\pi^2 P}{2L} \tag{18.1-6}$$

轴向载荷可能使横向挠度或者增加或者减小，这取决于 P 是拉力还是压力。

当 P 在 $q_c=0$ 时能够使 v_c 不为零，此时发生屈曲。换言之，实际的弯曲刚度在 $P=P_{cr}$ 的情况下减小到零。从方程 $k+k_\sigma=0$ 我们可以得到 $P_{cr}=-\pi^2 EI_z/L^2$，它是经典的欧拉屈曲载荷。在数学上，我们求解了单自由度的特征值问题 $(k+k_\sigma)v_c=0$。

相同的临界载荷也可由下面的能量方法给出。当产生屈曲模式的无限小横向位移时，在载荷没有做任何功的条件下薄膜能和弯曲能发生了交换。因此

$$U_m + U_b = 0 \quad \text{得到} \quad P_{cr} = -\frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \tag{18.1-7}$$

注意 现在想象事先不知道轴向载荷 P 的值。它可以通过 $P=AE\epsilon_m$ 得到，这里轴向薄膜应变 ϵ_m 是通过轴向自由度来计算的。虽然这个过程对于图 18.1-1(a)所示的简支梁的问题是没有必要的，但是对于薄膜应力事先不知道的更加复杂的问题是适用的，比如一个不规则的薄板在一个不规则平面分布力作用下的情况。在薄膜应力已经被平面应力分析计算出来以后，$[\boldsymbol{K}_\sigma]$矩阵能够构建出来并用于屈曲分析或者对横向载荷的响应分析。

然而，这两步过程仅仅在薄膜变形与弯曲变形之间有少量或者没有耦合的情况下才适用。初始直圆柱或者初始的平板很可能是这种情况。考虑图 18.1-2，其中初始的不完整性 e 表示微小的初始曲率或压力 P 的轻微偏心。计算得到的屈曲载荷 $P_{cr}=\pi^2 EI/L^2$ 仅仅在 $e=0$ 的物理问题中才是正确的。当 e 增加的时候薄膜变形和弯曲变形的耦合情况加剧，圆柱体呈现出大的位移而不是屈曲，P_{cr} 预测行为的功用大大下降。对于大多数可能出现屈曲的实际问题，薄膜和弯曲作用耦合在一起，线性分叉分析可能严重地高估了实际崩溃载荷。通常非线性分析更加合适，它将薄膜和弯曲作用的耦合在一开始就考虑进去了。最终的崩溃可能与分叉或是与到达极限点相关联，或者崩溃可以被定义为过大的挠曲。

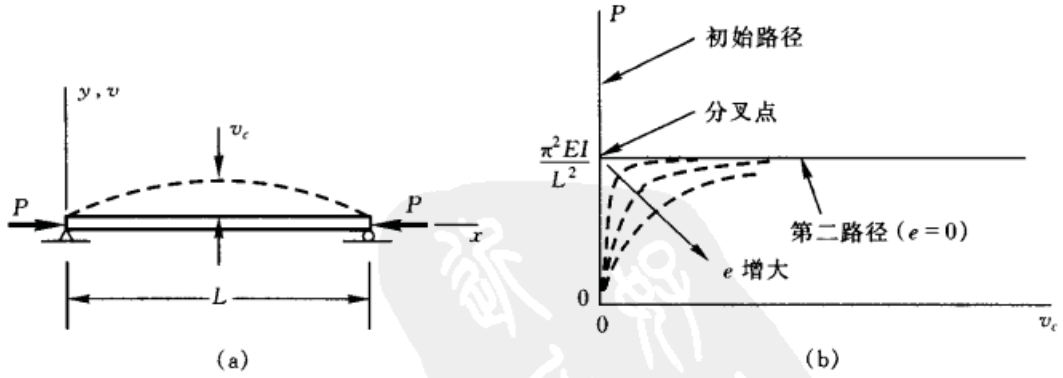


图 18.1-2 (a) 承受轴向压力载荷 P 的杆；(b) 初始不完整性 e 的影响

这些告诫性意见并不排除$[\boldsymbol{k}_\sigma]$在分析中的作用，无论$[\boldsymbol{k}_\sigma]$的作用是减小弯曲刚度(在破坏分析)或者增加刚度(比如在存在拉伸薄膜应力的旋转结构中)。

补充术语 *初始路径*(图 18.1-2(b))是最初的载荷-位移直线或曲线和它的扩展。*第二路径*是当载荷达到临界值时最可能出现的迹线。这两条线在*分叉点*相交。过了分叉点以后，

第一条线变得不稳定：虽然在数学上可能，但是真实的结构将按照第二条线的规律运动。如果第二条线上升，则结构具有屈曲后强度。在图 18.1－2(b)中所示的第二条线作为一条水平直线显示是因为在初等圆柱屈曲分析中是小位移假设。实际上，这条线在开始是水平的，然后就变成向上的曲线。极限点，也就是在图 17.2－3(a)中的点 L，是载荷-位移曲线上的最大值。因为没有直接相邻的平衡位形，所以它不是分叉点。当载荷不断增加达到极限点载荷的时候，突然发生完全屈曲。也就是说结构突然沿图 17.2－3(a)中的 $L1$ 或 $L2$ 曲线移动而呈现出一种新的位形。崩溃载荷是指在没有严重变形的情况下结构所能承受载荷的最大值。它可能大于或是小于计算得到的分叉屈曲载荷。在通常的应用中，临界载荷可以指的是分叉屈曲载荷、极限点载荷或崩溃载荷。关于这些问题的更进一步讨论出现在 18.7 节。

18.2　杆和梁单元

令一个直杆或梁沿 x 轴放置，并且让在 xy 平面内的横向位移 v 和转角 $v_{,x}$ 由节点自由度 $\{\boldsymbol{d}\}$ 确定。因此

$$v = \lfloor \boldsymbol{N} \rfloor \{\boldsymbol{d}\} \quad 和 \quad v_{,x} = \lfloor G \rfloor \{\boldsymbol{d}\} \quad 其中 \quad \lfloor G \rfloor = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \lfloor N \rfloor \tag{18.2-1}$$

与横向位移 v 相关的薄膜应变能 U_m 由方程 18.1－3 给出。在认为轴向力 P 是拉力为正的情况下，

$$U_m = \frac{1}{2}\int_0^L P v_{,x}^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^L v_{,x}^{\mathrm{T}} P v_{,x} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\{\boldsymbol{d}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{k}_\sigma]\{\boldsymbol{d}\} \tag{18.2-2}$$

这里应力刚度矩阵 $[\boldsymbol{k}_\sigma]$ 由下式给出

$$[\boldsymbol{k}_\sigma] = \int_0^L \lfloor \boldsymbol{G} \rfloor^{\mathrm{T}} \lfloor \boldsymbol{G} \rfloor P \mathrm{d}x \tag{18.2-3}$$

如果在 z 方向也允许有横向位移，则需要在 $\{\boldsymbol{d}\}$ 中附加自由度并且位移 w 也要包含在计算过程中。由此产生的 $[\boldsymbol{k}_\sigma]$ 矩阵很类似于平面变形中的矩阵但包含更多的项。

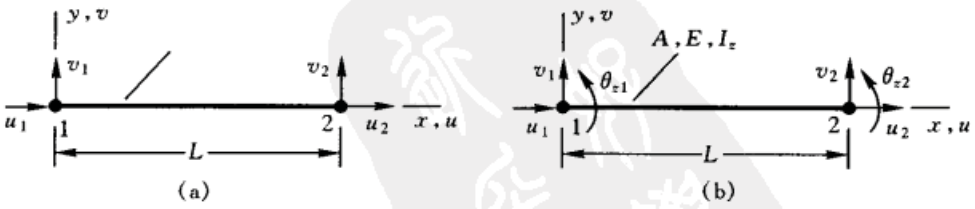


图 18.2－1　平面杆和梁单元以及它们的自由度。A＝横截面积，E＝弹性模量，$I_z = A$ 的形心惯性矩

杆单元 对于图 18.2-1(a)中杆的平面运动

$$v=\lfloor \frac{L-x}{L} \quad \frac{x}{L} \rfloor \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad \text{因此} \quad \begin{aligned} \lfloor \boldsymbol{G} \rfloor &= \frac{1}{L}\lfloor -1 \quad 1 \rfloor \\ \lfloor \boldsymbol{k}_\sigma \rfloor &= \frac{P}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{18.2-4}$$

其中认为轴向力 P 拉为正。如果也允许杆在 z 方向的运动，将出现与节点自由度 w_1 和 w_2 相关的附加项 P/L。如果允许有随平面运动的轴向自由度 u_1 和 u_2，矩阵对角线位置上将出现零。这些结果分别是

对于 $\{\boldsymbol{d}\}=\lfloor v_1 \quad w_1 \quad v_2 \quad w_2 \rfloor^{\mathrm{T}}$：

$$[\boldsymbol{k}_\sigma]=\frac{P}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

对于 $\{\boldsymbol{d}\}=\lfloor u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \rfloor^{\mathrm{T}}$：

$$[\boldsymbol{k}_\sigma]=\frac{P}{L}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{18.2-5}$$

梁单元 如图 18.2-1(b)所示，对于被限制在 xy 平面内的变形，$\lfloor N \rfloor$ 中的形状函数出现在图 2.3-1 和图 3.2-4 中。因此，$\lfloor \boldsymbol{G} \rfloor$ 从方程 18.2-1 中得到，并且因为 P 独立于 x 且拉力为正，方程 18.2-3

$$\text{对于} \quad \{\boldsymbol{d}\}=\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} \quad \text{得到} \quad [\boldsymbol{k}_\sigma]=\frac{P}{30L}\begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \tag{18.2-6}$$

如果允许 z 方向的变形和轴向变形的话，这个结果可以用在方程 18.2-5 中看到的相同的方式来扩展。

对于受自重作用的柱体，力 P 可以认为是 x 的函数，但是实际上它更像是用 P 从一个单元到另一个单元阶梯形变化来模拟轴向力。

在横截面是薄壁形状的开口梁中，无论梁承受轴向还是横向载荷，屈曲通常是由于扭转和弯曲联合作用的结果。方程 18.2-6 中的应力刚度矩阵仅仅可以解释初始直的棱柱形梁的弯曲行为。关于带扭转和横截面挠曲的梁单元中应力刚化效应的文献包括[15.8,18.1～18.4]。虽然特殊的梁单元有更多的自由度，但是在实际的计算中不使用它，而使用像图 10.2-1(c)中那样的壳单元模型。

例题 下面简单的例子说明了在位移计算中如何使用$[\boldsymbol{k}_\sigma]$。一个均匀梁左端固定并且右端被限制不能旋转，如图 18.2-2(a)所示。位移被限制在 xy 平面。在梁上施加有轴向压力 P 和横向力 F。需要计算右端的挠度。

净刚度矩阵是$[\boldsymbol{k}]+[\boldsymbol{k}_\sigma]$，其中对于没有横向剪切变形的平面梁来说$[\boldsymbol{k}]$表示在式 2.3-5 和式 3.3-4 中。在自由度 u_1 和 u_2 都保留的情况下，轴向刚度 AE/L 出现在$[\boldsymbol{k}]$中。对于$[\boldsymbol{k}_\sigma]$，我们或者使用式 18.2-5 的第二个公式或者使用式 18.2-6，并扩展为包含轴向自由度。后一个选择可以得到更高的精确度。为了讲解的方便我们从前一个开始。因为 P 是压力，所

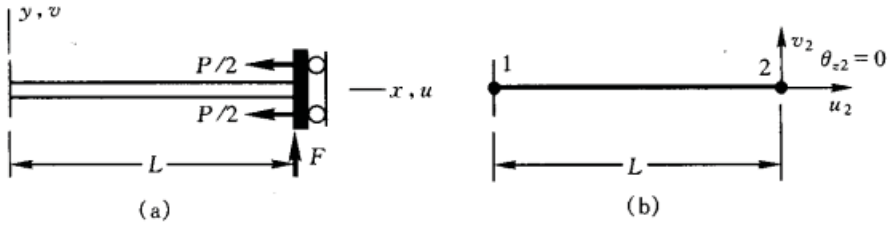


图 18.2－2　(a) 右端有零转角的悬臂梁；(b) 一个单元的有限元模型

以 P 取负值，

$$\left(\begin{bmatrix} AE/L & 0 \\ 0 & 12EI_z/L^3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -P/L \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -P \\ F \end{Bmatrix} \tag{18.2-7}$$

u_2 和 v_2 的方程没有发生耦合。由它们可以得到

$$u_2=-\frac{PL}{AE} \qquad v_2=\frac{FL^3/12EI_z}{1-PL^2/12EI_z} \tag{18.2-8}$$

如果不是这样，而是从方程 18.2－6 中得到$[\boldsymbol{k}_\sigma]$，则有 $u_2=-PL/AE$，并且

$$\left(\frac{12EI_z}{L^3}-\frac{6P}{5L}\right)v_2=F \quad \text{从中可得} \quad v_2=\frac{FL^3/12EI_z}{1-PL^2/10EI_z} \tag{18.2-9}$$

我们看到压力 P 将使 v_2 增大，并且根据方程 18.2－9，当 $P=10EI_z/L^2$ 时 v_2 将变成无穷大，此处的 P 值是预测的屈曲载荷(准确的屈曲载荷是 π^2EI_z/L^2)。

18.3　板单元

就像直杆和梁一样，对于平板，$[\boldsymbol{k}_\sigma]$的表达式能够用考查一些常量薄膜力在与横向小挠度相关的位移上所做的功来得到。薄膜力 N_x，N_y 和 N_{xy} 是单位长度上的力。它们示于图 16.1－1中并且是由方程 18.3－1 根据薄膜应力 σ_x，σ_y 和 τ_{xy} 来表述的。我们假定薄膜应力是已知的，或者通过直觉的或者是根据以前的平面应力分析。

与平板的横向挠曲 $w=w(x,y)$ 相关联的薄膜应变由式 17.9－2 中的项给出。

$$\varepsilon_x=\frac{1}{2}w_{,x}^2 \qquad \varepsilon_y=\frac{1}{2}w_{,y}^2 \qquad \gamma_{xy}=w_{,x}w_{,y} \tag{18.3-1}$$

与常量薄膜力以及方程 18.3－1 中的应变相关的薄膜应变能的改变以类似方程 18.2－2 的形式写出来[17.33]：

$$U_m=\int\left(\frac{1}{2}N_xw_{,x}^2+\frac{1}{2}N_yw_{,y}^2+N_{xy}w_{,x}w_{,y}\right)\mathrm{d}A \tag{18.3-2a}$$

或者

$$U_m=\frac{1}{2}\iint\begin{Bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{Bmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\{\boldsymbol{d}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{k}_\sigma]\{\boldsymbol{d}\} \tag{18.3-2b}$$

对于一个具有 n 个自由度的单元，

$$w = \underset{1\times n}{\lfloor \boldsymbol{N} \rfloor}\{\boldsymbol{d}\} \quad \text{得到} \quad \begin{Bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{Bmatrix} = \underset{2\times n}{[\boldsymbol{G}]}\{\boldsymbol{d}\} \tag{18.3-3}$$

方程 18.3-2b 和方程 18.3-3 得到

$$[\boldsymbol{k}_\sigma] = \iint [\boldsymbol{G}]^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} [\boldsymbol{G}] \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{18.3-4}$$

这里积分区间是整个单元区域。如果单元是等参数族，$\lfloor \boldsymbol{N} \rfloor$ 中形状函数由无量纲的坐标 ξ 和

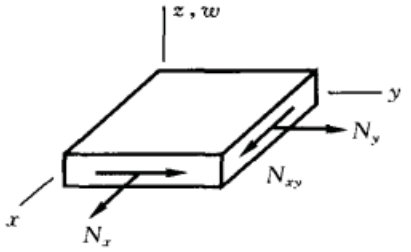


图 18.3-1 平板微单元，显示薄膜力 N_x，N_y 和 N_{xy}

η 表示，我们必须调用方程 6.2-5 中的雅可比矩阵 $[\boldsymbol{J}]$。因此

$$\begin{Bmatrix} w_{,\xi} \\ w_{,\eta} \end{Bmatrix} = [\boldsymbol{G}_I]\{\boldsymbol{d}\} \quad \text{和} \quad \begin{Bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{Bmatrix} = [\boldsymbol{J}]^{-1} \begin{Bmatrix} w_{,\xi} \\ w_{,\eta} \end{Bmatrix} \tag{18.3-5}$$

这里 $[\boldsymbol{G}_I]$ 包含形状函数对 ξ 和 η 的导数。用 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = J\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$，其中 J 是 $[\boldsymbol{J}]$ 的行列式，根据方程 18.3-2b 和 18.3-5 得到

$$[\boldsymbol{k}_\sigma] = \int_1^1 \int_{-1}^1 [\boldsymbol{G}_I]^{\mathrm{T}} [\boldsymbol{J}]^{-\mathrm{T}} \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} [\boldsymbol{J}]^{-1} [\boldsymbol{G}_I] J \,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{18.3-6}$$

对于三角形平板单元，$[\boldsymbol{k}_\sigma]$ 的列式可以只由单元边界位移得来[18.5]。这比基于单元内位移的 $[\boldsymbol{k}_\sigma]$ 精度稍差一些，但它需要的计算时间少得多，这可能对于非线性问题来说是非常重要的。$[\boldsymbol{k}_\sigma]$ 的对角形式也是很有用的。

18.4 一般列式

在 18.2 节和 18.3 节中，每一种单元类型都被当作一种特殊情况来处理。希望 $[\boldsymbol{k}_\sigma]$ 也能有类似于常规刚度矩阵的一般公式（在方程 3.3-7 和方程 4.8-15a 中有所表述），能够限定于特殊的几何和位移场。在本节中研究的就是这样的一种公式。就像在前面 18.1 到 18.3 节所讲述的那样，建立的 $[\boldsymbol{k}_\sigma]$ 被限制在位移梯度比 1 小得多的情况下。

作为这种列式非常有用的例题，想象一个 I 型的梁承受轴向载荷并且它的腹板和凸缘每

个都用平的壳单元建模。令横向挠度发生在梁腹所在平面的法向方向。在 18.3 节所建立的 $[k_\sigma]$ 将说明梁腹上的平面单元的应力刚化效应，但不能说明凸缘单元上的刚化效应，它在自身的平面内变形。这些单元需要附加的应力刚化项。

想象应变状态 $\{\boldsymbol{\varepsilon}_0\}$ 和相应的应力 $\{\boldsymbol{\sigma}_0\}$ 起主导作用。当产生额外应变 $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ 时假设 $\{\boldsymbol{\sigma}_0\}$ 仍然保持为常数。应变 $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ 符合方程 18.1－7 之后所总结的两步分析中的第二步。我们假设应变足够的小以至于应力的工程定义依然可以使用。与额外应变相关联的虚功是

$$\int \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\sigma}_0\}\mathrm{d}V \quad \text{其中} \quad \begin{aligned}\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^{\mathrm{T}} &= \lfloor\, \varepsilon_x \;\; \varepsilon_y \;\; \cdots \;\; \gamma_{zx} \,\rfloor \\ \{\boldsymbol{\sigma}_0\} &= \lfloor\, \sigma_{x0} \;\; \sigma_{y0} \;\; \cdots \;\; \tau_{zx0} \,\rfloor^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{18.4-1}$$

对于方程 17.9－2 中的格林应变 $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$，乘积 $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\sigma}_0\}$ 首先显示出 $u_{,x}\sigma_{x0}+u_{,y}\sigma_{y0}+\cdots$ 项。这些项导致圆柱内与轴向力相关联的节点载荷项或者板内与薄膜力相关联的项，等等。接下来的高阶项与类似于式 18.2－2 和 18.3－2 中 U_m 的应变能相关联。在此我们叫这个能量为 U_σ，

$$U_\sigma = \int\Big[\frac{1}{2}(u_{,x}^2+v_{,x}^2+w_{,x}^2)\sigma_{x0}+\cdots+(u_{,z}u_{,x}+v_{,z}v_{,x}+w_{,z}w_{,x})\tau_{zx0}\Big]\mathrm{d}V \tag{18.4-2}$$

如果我们定义

$$\{\boldsymbol{\delta}\} = \lfloor\, u_{,x} \;\; u_{,y} \;\; u_{,z} \;\; v_{,x} \;\; v_{,y} \;\; v_{,z} \;\; w_{,x} \;\; w_{,y} \;\; w_{,z} \,\rfloor^{\mathrm{T}} \tag{18.4-3}$$

则方程 18.4－2 可以写成下面的形式

$$U_\sigma = \frac{1}{2}\int\{\boldsymbol{\delta}\}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{s} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{s} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{s}\end{bmatrix}\{\boldsymbol{\delta}\}\mathrm{d}V \quad \text{其中} \quad [\boldsymbol{s}] = \begin{bmatrix}\sigma_{x0} & \tau_{xy0} & \tau_{zx0}\\ \tau_{xy0} & \sigma_{y0} & \tau_{yz0}\\ \tau_{zx0} & \tau_{yz0} & \sigma_{z0}\end{bmatrix} \tag{18.4-4}$$

这个表达式与方程 18.2－2 和 18.3－2b 相似，并且产生 $[k_\sigma]$ 的方式也类似。令单元的位移场由通常的表达式 $\{u\}=[N]\{d\}$ 给出，这里 $\boldsymbol{u}=\lfloor\, u \;\; v \;\; w \,\rfloor^{\mathrm{T}}$，并且 $\{d\}$ 包含单元的自由度。也令 $\{\boldsymbol{\delta}\}=\{G\}\{d\}$，其中 $\{G\}$ 中的项从 $[N]$ 中形状函数用相应的微分及项的排序得到。方程 18.4－4成为 $U_\sigma=\{d\}^{\mathrm{T}}[k_\sigma]\{d\}/2$，这里单元应力刚度矩阵是

$$\{k_\sigma\} = \int[G]^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{s} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{s} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{s}\end{bmatrix}[G]\mathrm{d}V \tag{18.4-5}$$

举例 考虑图 18.2－1(a)中的杆，在这里变形依然被限制在 xy 平面内，于是 $w=0$。初始应力除了轴向应力 σ_{x0} 之外均为零。我们假定在 x 和 y 方向 u 和 v 都是线性的。如果将方程 18.4－5 完整地写出来，我们发现与垂直于 xy 面的节点力和位移相关的许多项为零。将这些项除去以后，用形状函数 $N_1=(L-x)/L$ 和 $N_2=x/L$，我们得到

$$\begin{aligned}u &= N_1u_1+N_2u_2\\ v &= N_1v_1+N_2v_2\end{aligned} \qquad \{\boldsymbol{\delta}\} = \begin{Bmatrix}u_{,x}\\ v_{,x}\end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{L}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{[G]}\begin{Bmatrix}u_1\\ v_1\\ u_2\\ v_2\end{Bmatrix} \tag{18.4-6}$$

$$[\boldsymbol{k}_\sigma]=\int_0^L[\boldsymbol{G}]^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\sigma_{x0} & 0\\ 0 & \sigma_{x0}\end{bmatrix}[\boldsymbol{G}]A\mathrm{d}x=\frac{P}{L}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{18.4-7}$$

其中 $P=\sigma_{x0}A$，这个结果与方程 18.2-5 第二部分的结果几乎一样，但是包含四个附加项。附加项和杆单元传统弹性刚度矩阵$[\boldsymbol{k}]$中的 AE/L 项占据相同的位置。因此，在净刚度矩阵$[\boldsymbol{k}]+[\boldsymbol{k}_\sigma]$中，我们发现了乘 u_1 和 u_2 的系数$\pm(AE+P)/L$ 和乘 v_1 和 v_2 的系数$\pm P/L$。因为在任何实际弹性问题中 $AE\gg|P|$，所以在方程 18.4-7 中的四个附加项并没有多大的影响。

18.5 屈曲载荷的计算

我们已经定义屈曲为一种状态，在这种状态下载荷足够大以至于它破坏了平衡位形的稳定性。屈曲可以分叉发生，这意味着在相同的载荷下，结构的参考位形和无限接近(屈曲)的位形都是有可能出现的。在分叉以前，载荷和挠度的关系可能是线性的也可能是非线性的。屈曲也与极限点相关联(图 17.2-3(a)中的 L 点)，在那里失去了稳定性但没有直接地邻近平衡状态。极限点屈曲在本质上是非线性的。

线性分叉屈曲 在本小节里，我们讨论一种普遍适用于直圆柱和平板单元的分析方法。第一步用任意参考量级的外载荷$\{\boldsymbol{R}\}_{\mathrm{ref}}$给结构加载，并且运用标准线性分析确定单元应力，比如板中的薄膜应力。对于与载荷$\{\boldsymbol{R}\}_{\mathrm{ref}}$相关联的应力，应力刚度矩阵是$[\boldsymbol{K}_\sigma]_{\mathrm{ref}}$。对于其它的载荷量级水平，使用标量因子 λ，

$$\text{当}\quad \{\boldsymbol{R}\}=\lambda\{\boldsymbol{R}\}_{\mathrm{ref}},\quad \text{则}\quad [\boldsymbol{K}_\sigma]=\lambda[\boldsymbol{K}_\sigma]_{\mathrm{ref}} \tag{18.5-1}$$

方程 18.5-1 意味着$\{\boldsymbol{R}\}$中所有载荷 R_i 与λ 的乘积也相当于将应力场强度乘以λ，但是并没有改变应力的分布。因为这个问题被假定为线性的，加载没有改变传统刚度矩阵$[\boldsymbol{K}]$。设相对于参考位形的位移$\{\boldsymbol{D}\}_{\mathrm{ref}}$产生大小为$\{\delta\boldsymbol{D}\}$的屈曲位移。因为外部载荷并不在分叉点上改变，

$$\begin{aligned}&([\boldsymbol{K}]+\lambda_{\mathrm{cr}}[\boldsymbol{K}_\sigma]_{\mathrm{ref}})\{\boldsymbol{D}\}_{\mathrm{ref}}=\lambda_{\mathrm{cr}}\{\boldsymbol{R}\}_{\mathrm{ref}}\\ &([\boldsymbol{K}]+\lambda_{\mathrm{cr}}[\boldsymbol{K}_\sigma]_{\mathrm{ref}})\{\boldsymbol{D}_{\mathrm{ref}}+\sigma\boldsymbol{D}\}=\lambda_{\mathrm{cr}}\{\boldsymbol{R}\}_{\mathrm{ref}}\end{aligned} \tag{18.5-2}$$

从第二式减去第一式得到

$$([\boldsymbol{K}]+\lambda_{\mathrm{cr}}[\boldsymbol{K}_\sigma]_{\mathrm{ref}})\{\delta\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{0}\} \tag{18.5-3}$$

方程 18.5-3 是一个特征值问题，它的最小根 λ_{cr}定义了分叉的最小外载荷量级，即

$$\{\boldsymbol{R}\}_{\mathrm{cr}}=\lambda_{\mathrm{cr}}\{\boldsymbol{R}\}_{\mathrm{ref}} \tag{18.5-4}$$

与 λ_{cr}关联的特征向量$\{\delta\boldsymbol{D}\}$是屈曲模式。因为$\{\delta\boldsymbol{D}\}$的值在线性屈曲问题中是不确定的，它只定义了形态但是没有定义幅值。

方程 18.5-3 的物理解释如下。在圆括号中的项组成了整体或净刚度矩阵$[\boldsymbol{K}_{\mathrm{net}}]$。因为

力$[\boldsymbol{K}_{\text{net}}]\{\delta\boldsymbol{D}\}$为零，对于屈曲模式$\{\delta\boldsymbol{D}\}$，可以说临界强度下的应力将净刚度矩阵减小到零。在数学上，$[\boldsymbol{K}_{\text{net}}]$是奇异的并且行列式为零。

例题：线性分叉 考虑在图 18.5－1 中的均匀柱体。设有限元模型采用的是单一的梁单元。我们从方程 2.3－5或者方程3.3－14中得到$[\boldsymbol{k}]$并且从方程 18.2－6 中得到$[\boldsymbol{k}_\sigma]$。我们任意选择的参考载荷是 $P_{\text{ref}}=-1.0$，这里负号表示压力。从方程 18.2－7 的类似例子中我们认识到在特征值问题中不需要包含轴向自由度。在圆柱的右端，与横向位移相关的非零自由度是 v_2 和 θ_{z2}。对于在 xy 平面内的屈曲，方程 18.5－3 变成

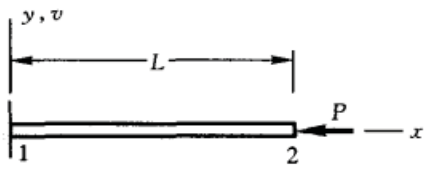


图 18.5－1 均匀弹性柱，在 $x=0$ 处固定，在 $x=L$ 处自由

$$\left(\frac{EI_z}{L^3}\begin{bmatrix}12 & -6L\\ -6L & 4L^2\end{bmatrix}+\lambda_{\text{cr}}\frac{-1}{30L}\begin{bmatrix}36 & -3L\\ -3L & 4L^2\end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}\delta v_2\\ \delta\theta_{z2}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix} \tag{18.5-5}$$

除了 $\delta v_2=0$ 和 $\delta\theta_{z2}=0$ 外，其解要求在圆括号中的表达式的行列式为零。因此我们可以写出特征多项式并且求出它的最小根（这种方程适于自由度很少的手算求解）。方程 18.5－5 的最小根是

$$\lambda_{\text{cr}}=2.486\,0EI_z/L^2 \quad \text{因此} \quad P_{\text{cr}}=\lambda_{\text{cr}}(-1.0)=-2.486\,0EI_z/L^2 \tag{18.5-6}$$

如果不是这样，$[\boldsymbol{k}_\sigma]$是从方程 18.2－5 中求得，我们将得到 $P_{\text{cr}}=-3EI_z/L^2$，它比方程 18.5－6 所得到的结果精度差。两个结果都是正确结果 $\lambda_{\text{cr}}=-2.467\,4EI_Z/L^2$ 的上界（关于边界问题的讨论出现在 18.6 节）。

与 λ_{cr} 相关的屈曲模式可以由方程 18.5－6 通过下面的方法得到。插入 $\lambda_{\text{cr}}=-2.486\,0EI_Z/L^2$，为其中的一个自由度任意选择一个值（比如 $\delta\theta_{z2}=1.0$），并且求解其余的自由度。因此，从方程 18.5－5 我们得到

$$\{\delta\boldsymbol{D}\}=\lfloor\,\delta v_2\quad\delta\theta_{z2}\,\rfloor^{\text{T}}=\lfloor\,0.637\,9L\quad 1\,\rfloor^{\text{T}} \tag{18.5-7}$$

一般地，$\{\delta\boldsymbol{D}\}$代表相对于参考位形位移$\{\boldsymbol{D}\}_{\text{ref}}$的位移，而参考位形提供了用于构建$[\boldsymbol{K}_\sigma]$的应力。在当前的例子中，对于自由度 u_2 被事先忽略的情况，$\{\boldsymbol{D}\}_{\text{ref}}=\{\boldsymbol{0}\}$。

举例：自由度凝聚 在结构动力学中，凝聚自由度可以减小特征值问题的规模（11.6 节）。在屈曲问题中也是一样，只是用$[\boldsymbol{K}_\sigma]$取代了质量矩阵$[\boldsymbol{M}]$。在以前的例子当中，如果我们选择从方程 18.5－5 中消去 $\delta\theta_{z2}$，通过计算方程 11.6－3 可以得到变换矩阵$[\boldsymbol{T}]$：

$$[-\boldsymbol{K}_{ss}^{-1}\boldsymbol{K}_{ms}^{\text{T}}]=-\left(\frac{L}{4EI_z}\right)\left(-\frac{6EI_z}{L^2}\right)=\frac{3}{2L} \quad \text{因此} \quad [\boldsymbol{T}]=\begin{Bmatrix}1\\3/2L\end{Bmatrix} \tag{18.5-8}$$

方程 11.6－4 的变换将方程 18.5－5 转变为

$$\left(\frac{3EI_z}{L^3}-\lambda_{\text{cr}}\frac{6}{5L}\right)\delta v_2=0 \quad \text{因此} \quad \lambda_{\text{cr}}=\frac{2.5EI_z}{L^2} \quad \text{和} \quad P_{\text{cr}}=-\frac{2.5EI_z}{L^2} \tag{18.5-9}$$

凝聚稍微增加了屈曲载荷的计算值。

非线性屈曲 当在屈曲前存在大的转角时，屈曲问题就会变成非线性的。这样的问题可以用 17 章所描述的方法解决。因此我们可以构建一个切向刚度矩阵$[\boldsymbol{K}_t]$，它包括几何形态改变的影响，也包括应力刚化的影响。在计算中我们使用增量方法解方程$[\boldsymbol{K}_t]\{\Delta \boldsymbol{D}\}=\{\Delta \boldsymbol{R}\}$，带校正项的载荷增量是$\{\Delta \boldsymbol{R}\}$，在每一个增量步之后更新$[\boldsymbol{K}_t]$。在接近极限点的时候，位移增量$\{\Delta \boldsymbol{D}\}$变得很大。或者在极限点或者在分叉点，$[\boldsymbol{K}_t]$变成奇异矩阵。把求解一个非线性屈曲问题作为求解一系列线性化近似解的一种方法在文献[18.7]中有所描述。

在前面的讨论中我们已经默认了外载荷$\{\boldsymbol{R}\}$与变形无关，这样提供了一个右边为零的方程 18.5－3。当屈曲是发生在静水压力载荷作用下的时候，情况也许不是这样。关于屈曲中的非线性问题将在 18.6 和 18.7 节有更深入的讨论。

18.6 关于应力刚度及其用法的备注

$[\boldsymbol{k}_\sigma]$的形式 边界和误差 如果应力刚度矩阵与形成传统刚度矩阵是基于相同的形状函数，则可称其为“一致性”。此外，如果单元是协调的并且没有被低阶的积分规则所软化的话，线性屈曲分析(方程 18.5－3)可以提供数学模型上线性分叉屈曲载荷的上界。计算的振动频率上限特性是从类似的特征问题得到的，由此看来这个性能是可以期待的。有限元方法计算的屈曲载荷的离散误差估计过程出现在文献[9.31,9.39]中。

一个不一致的$[\boldsymbol{k}_\sigma]$不会违背在 4.9 节中述及的用于传统刚度矩阵$[\boldsymbol{k}]$的收敛条件。不一致形式的一个单元的实例出现在方程 18.2－7 中。如果在这个问题中使用更多的单元，结果将会相当精确。在形成$[\boldsymbol{k}_\sigma]$的过程中使用简化的积分方法有将它建立在简化位移场中的作用。在简化的极端情况下，将出现对角形式的$[\boldsymbol{k}_\sigma]$，它将提供在试验情况下屈曲载荷的下限[18.6]。在计算量非常大的场合下，使用简化形式的$[\boldsymbol{k}_\sigma]$有可能节省计算费用。

对于传统的刚度矩阵$[\boldsymbol{k}]$，如果节点自由度$\{\boldsymbol{d}\}$表示刚体的平移或是(小的)刚体旋转，则乘积$[\boldsymbol{k}]\{\boldsymbol{d}\}$是零。对于应力刚度矩阵，当$\{\boldsymbol{d}\}$代表刚体旋转的时候，乘积$[\boldsymbol{k}_\sigma]\{\boldsymbol{d}\}$产生一个非零的节点力。这个结果是不正确的。一个简单的例子是图 18.2－2 和方程 18.2－7，在那里一个杆单元提供应力刚度项。节点位移 v_2 引起杆单元旋转，结果在节点 2 施加了一个 y 方向的载荷$(P/L)v_2$。这个力被弯曲产生的弹性力$(12EI_z/L^3)v_2$抵抗。因此这个模型提供 $P_{cr}=12EI_z/L^2$。更一般地，可以将方程 18.5－3 的屈曲问题解释成要求一个伪载荷$\lambda_{cr}[\boldsymbol{K}_\sigma]_{ref}\{\delta \boldsymbol{D}\}$在数值上等于弹性阻力$[\boldsymbol{K}]\{\delta \boldsymbol{D}\}$。

在分叉屈曲分析中所用$[\boldsymbol{k}_\sigma]$的形式不能脱离实际的问题来选择。在夹层结构中，核的剪切变形可能相当大，正确的结果要求场之间匹配，$[\boldsymbol{k}]$和$[\boldsymbol{k}_\sigma]$正是基于这一点[18.8]。一个更重要的例子是壳受到静水压力的作用：当屈曲模式出现时受载表面会旋转，于是载荷改变方向(也就是说，静水压力是一个随从载荷)。作为一个简单的特殊情况，考虑一个半径为 R 且具有均匀弯曲刚度 EI 的细圆环。令均匀的分布线载荷 q 作用在圆周上，方向向内。对于随从载荷的静水压力，$q_{cr}=3EI/R^3$。但是如果 q 具有恒定的方向，则 $q_{cr}=4EI/R^3$，并且如果 q 的方向总是径向，则 $q_{cr}=4.5EI/R^3$。如果分叉屈曲分析为静水加载提供正确的屈曲载荷，在

$[k_\sigma]$中必须增加"压力刚度矩阵。"此外，压力刚度矩阵的形式必须与建立单元刚度矩阵的壳理论联系起来。虽然矩阵对称化的时候，在很多情况下很少出现问题，但在有些情况下压力刚度矩阵是不对称的。参考文献包括[18.9～18.13]。

多方面的应用　即使当几何形状、支撑、材料属性和载荷是轴对称的时候，旋转壳通常也具有非对称的屈曲模式。屈曲模式可能在每一个平行圆上表现出许多波形。这个问题可以使用在 14.4 和 14.5 节中描述回转体类型的傅里叶级数法来解决[18.14]。首先壳在经线方向被离散化，这样就可以用环状单元对其进行建模。接下来为周向波形选择一个特殊的数 n，得到关于 n 的屈曲载荷。为 $n+1$，$n+2$ 的波形重复进行分析，等等。如果开始的 n 足够小，计算得到的最小屈曲载荷就是我们需要的结果。哪个模式处于决定性的地位是不明确的，需要做几个分析过程：文献[18.15]引述了一种情况，在这种情况下屈曲与 $n=39$ 相关联。如果许多波形也出现在经线方向，即使壳仅有简单的几何形状，也需要许多环状单元。

一个初始平面薄膜没有抵抗横向压力的能力，除非初始应力提供了应力刚化。一个已经发生挠曲的薄膜可以抵抗压力是因为它的形状，但是应力刚化的作用依然相当重要。类似的备注也适用于电缆网。由无摩擦的铰链连接的杆的链状连环套在自重作用下悬垂着，仅由于应力刚化能抵抗初始横向载荷，并且从方程$[\boldsymbol{K}_\sigma]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\}$得到横向自由度$\{\boldsymbol{D}\}$。

对有初始应力的无阻尼结构线性动力学分析由下面的方程表示

$$\text{动态响应：}\quad [\boldsymbol{K}+\boldsymbol{K}_\sigma]\{\boldsymbol{D}\}+[\boldsymbol{M}]\{\ddot{\boldsymbol{D}}\}=\{\boldsymbol{R}^{\text{ext}}\} \tag{18.6-1}$$

$$\text{固有频率：}\quad ([\boldsymbol{K}+\boldsymbol{K}_\sigma]-\omega^2[\boldsymbol{M}])\{\bar{\boldsymbol{D}}\}=\{\boldsymbol{0}\} \tag{18.6-2}$$

这里$[\boldsymbol{M}]$＝质量矩阵，$\{\ddot{\boldsymbol{D}}\}$＝节点自由度的加速度，$\omega$＝圆频率，$\{\bar{\boldsymbol{D}}\}$＝节点自由度的振幅。拉伸薄膜力提高振动的固有频率。压缩薄膜力减小振动的固有频率，并且如果屈曲即将发生时产生根 $\omega=0$。

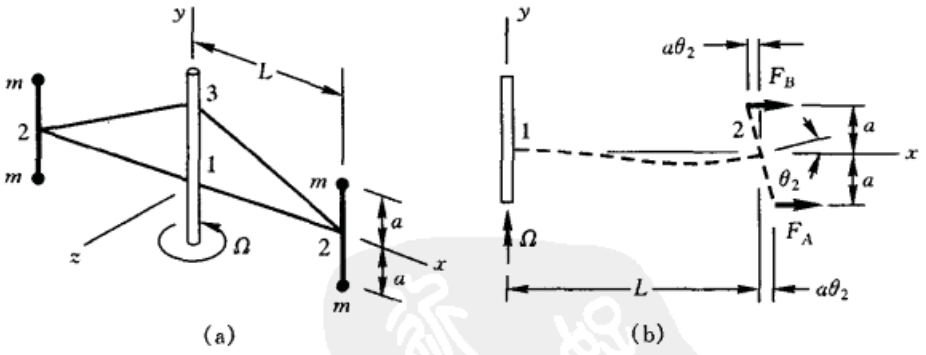


图 18.6－1　(a) 质量为 m 的质点和无重部件连接到以角速度 Ω 旋转的轴上；(b) 与旋转有关的力

旋转软化　由旋转引入的拉伸应力具有刚化构件的功能，比如风扇叶片。有时也能产生称做"旋转软化"或者"离心软化"的相反效应。这种作用并没有和矩阵$[\boldsymbol{K}_\sigma]$相关联。我们用图 18.6－1 中的简单例子来解释这个概念。质量为 m 的四个质点被连接在一个刚性、没有质量且与 y 轴平行的杆上，杆则附着在一个无质量的与 x 轴平行的梁1－2上。无质量的连接件2－3的作用仅仅是防止梁端点的轴向(y 方向)运动。整个结构围绕 y 轴以角速度 Ω 旋转。如果 Ω 足够大，梁的端点 2 将在径向平面内旋转，就像圆柱体在轴向压力达到屈曲载荷时发生

横向挠曲一样。如果节点 2 在径向平面内旋转一个小角度 θ_2，在这些质量点上的离心力将变得不相等，因此产生了一个我们叫做 M_Ω 的力矩。

$$F_A = m(L + a\theta_2)\Omega^2 \qquad F_B = m(L - a\theta_2)\Omega^2 \qquad M_\Omega = F_A a - F_B a = 2ma^2\Omega^2\theta_2 \tag{18.6-3}$$

现在想象用单一的梁单元对构件 1－2 建模，节点 1 固支和节点 2 简支，以致仅有非零自由度是 θ_2。应力刚化是通过方程 18.2－6 中的最后一项说明的，轴向力 $P=2mL\Omega^2$。令外部力矩 M_2 作用在节点 2。因此

$$(k + k_\sigma)\theta_2 = M_2 + M_\Omega \quad \text{其中} \quad k + k_\sigma = \frac{4EI_z}{L} + 2mL\Omega^2\,\frac{2L}{15} \tag{18.6-4}$$

从方程 18.6－3 和 18.6－4 可以得到

$$\left[\frac{2EI_z}{L} + m\Omega^2\left(\frac{2L^2}{15} - a^2\right)\right]\theta_2 = \frac{M_2}{2} \tag{18.6-5}$$

我们看到应力刚化的作用被旋转软化减小了。实际上括号里面的表达式可能因为所涉及量在物理上的可能结合而消失，以至于平衡的稳定性将消失并且 θ_2 将变得无法确定。节点 2 围绕 x 轴旋转一个小的角度 θ_{x2} 导致质量 m 在构件 1－2 的轴上施加一个大小为 $2ma^2\Omega^2\theta_{x2}$ 的扭矩。这样与 x 轴平行的构件的扭力刚度也有效地被旋转软化减小了，但是没有抵消应力刚化效应。

不难想象在这个简单例子中看到的效应也可能会出现在许多实际的结构上。通常应力刚化比旋转软化对结构行为的影响更大。旋转机构的相应参考文献包括[11.13～11.19]。

18.7 备注和实例

在图 18.7－1 中薄平面桁架显示了第二迹线的可能类型[18.10]。设位移被限制在图示平面内。因为桁架是极薄的，所以问题是非线性的。载荷 F 和它的位移 D 之间的定性关系可以不通过计算就能理解。如果中心可选的弹簧没有或者足够软，初始迹线出现极限点。但是如果组成桁架的梁是比较细的，其中的一个或者另一个构件可能会屈曲，就像圆柱在到达极限点以前的情况一样。如果桁架非常薄并且在中心没有弹簧，柱体屈曲载荷 P_{cr} 可以在 D 增加而 F 减小的情况下保持不变。因此第二迹线会下降，这是没有后屈曲强度的结构的特征。在这种情况下，虽然必须考虑前屈曲的非线性，分叉屈曲载荷仍是最大强度好的表征。通过加上具有适当刚度 k 的中心弹簧，可使图 18.7－1(b)中第二迹线呈上升趋势。这样结构就有了后屈曲强度。它不会在分叉时崩溃，虽然在 B 点会终止初始迹线的稳定性。

在前面的例子当中，薄厚程度、圆柱屈曲强度和中心弹簧刚度的微小改变可能会强烈影响结构行为。薄壳的行为对微小的改变也很敏感。图 18.7－2(a)显示了一个轴向受压的圆柱壳和一个在外压作用下深的球型顶盖的性能。由线性分叉分析预示的屈曲载荷过高地估计了极限点的载荷。即使计算是基于理想的几何外形，极限点载荷也是实际破坏载荷一个很差的

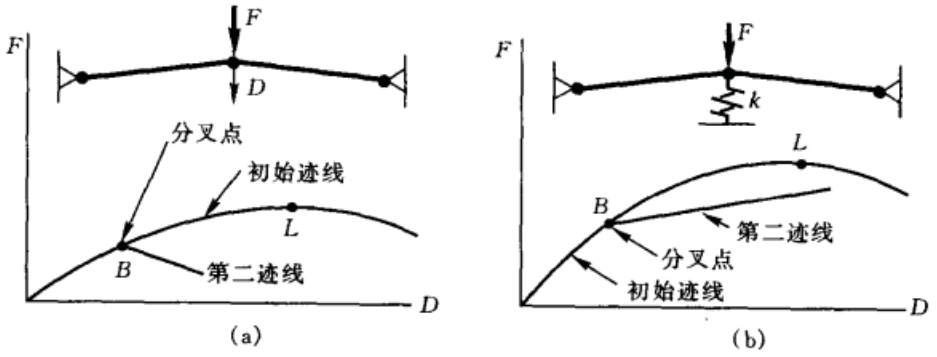


图 18.7－1　薄的平面桁架所受载荷 F 与其位移 D 的定性关系图
(a) 无支撑弹簧；(b) 有支撑弹簧

估算值。如果一个结构呈现出图示行为，我们称其为“不良敏感性”，它意味着结构几何形态、载荷分布和方向以及支撑方式的微小变化强烈影响结构的破坏载荷。有不良敏感性的实际薄壳结构的极限点载荷仅仅是由线性分叉分析所得到的屈曲载荷的 10%[18.16]。当为获得完美结果付出很大努力时，在实验室的测试中这个百分比可能会上升到 50%。

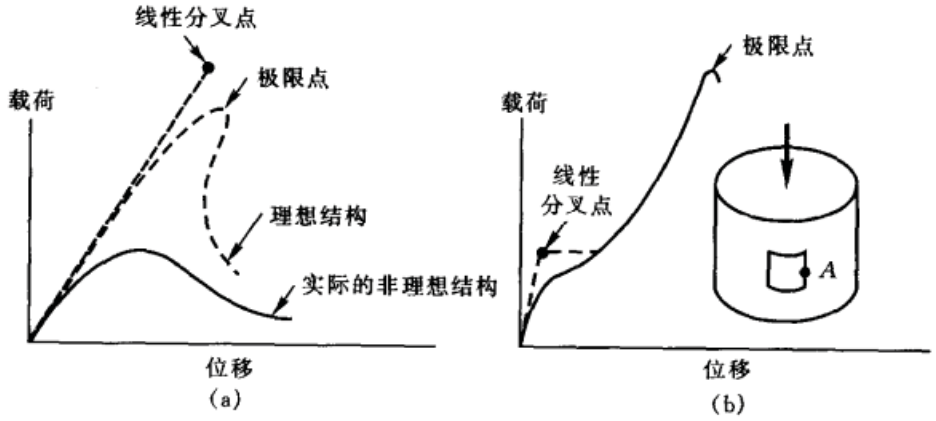


图 18.7－2　薄壳载荷-挠度定性关系图。
(a) 柱壳中轴向载荷和轴向挠度关系或在深的球形顶盖中外压和径向挠度的关系；
(b) 在带有开口的柱壳中 A 点处轴向载荷和径向挠度关系图

轻微的不完整性容易引入到有限元模型中去。但引入必须非常谨慎：当一个对称性模型在数学上可能但实际上是不稳定的时候，数值计算中小的内在偏差不足以把计算的性能引入不完整模型或不对称模型中[18.11]。几何上的不规则性可以直接引入。其中的一个可能是线性分叉分析所得到的屈曲模式。或者，施加一个小的额外载荷以产生与主要初始几何不完整性相似的变形可能是非常容易实现的。

开口可能突然改变轴向受压薄圆柱壳的行为(图 18.7－2(b))。因此，线性分叉分析严重低估了实际发生崩溃的极限载荷[18.16]。这个例子说明了分叉屈曲可能和一个局部屈曲模式相关联，这个模式对于最终产生破坏的模式几乎没有什么影响。对于这个结构，就像对许多实际的结构一样，实际的几何形态是不完整的并且可能没有必要增加人工不完整性。

崩溃分析应该小心谨慎地进行，就如同解决其它非线性问题一样。线性分叉分析相对简

单，并且可能得到一个有用的初次估计，但是仅进行这样的分析是远远不够的。甚至在线性分叉分析当中，也很容易被误导。举个例子，用三角形壳单元建模的轴向受压的圆柱壳是一个具有吸引力的用于和经典分叉理论相比较的例子，但是因为与完全不同的特征模式相对应的几个特征值已经集中在一起，所以这个问题在计算上有困难。即使软件可以处理这些困难，如果结构几何形态的简化出错，分析者使用如此少的自由度，以至于不能对屈曲模式的许多波形合适地进行建模，那么计算结果会非常差。有用的研究报告出现在参考文献[18.17,18.18]中。

数值计算实例：平面刚架 图 18.7-3(a)所示的刚架 $ABCD$ 中的杆都具有边长为 8 mm 的正方形横截面。假定材料在所有时间内都是线弹性的，它的弹性模量 $E=200$ GPa。有限元模型使用的是梁单元：沿着 AB 杆有 5 个单元，BC 杆有 2 个单元，CD 杆有 12 个单元。节点 A 铰接，节点 D 可以在水平方向无摩擦地移动，位移被限制在 xy 平面。我们研究在节点 C 水平载荷 F 的作用下发生的行为。

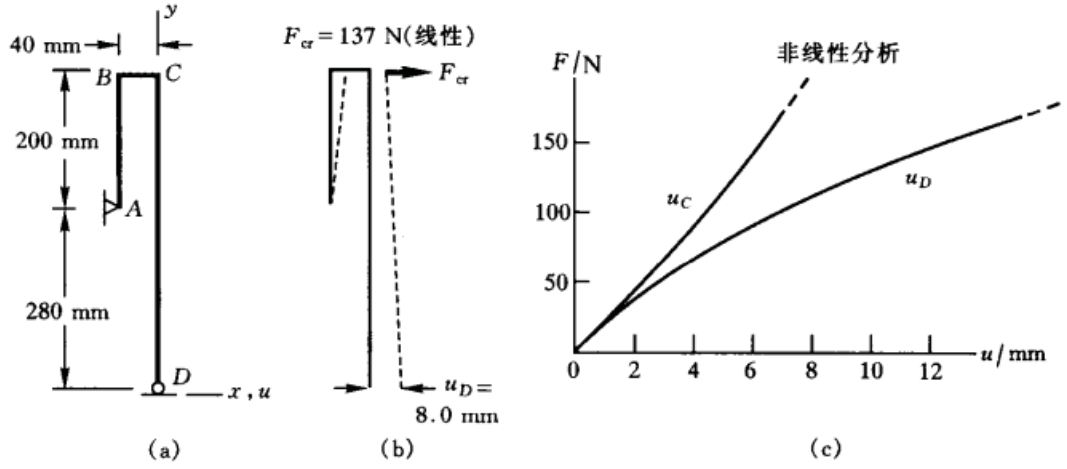


图 18.7-3 (a) 平面刚架；(b) 当 $F=F_{cr}$ 时根据线性分叉分析得到的位移形态；(c) 由非线性计算的载荷-位移关系

因为构件比较细，所以有可能出现屈曲。近似的初步分析可以认为杆 CD 是一个圆柱形杆，它的长度是 480 mm，并且 C 点固定 D 点自由，于是圆柱形杆的屈曲载荷就是 $P_{cr}=\pi^2 EI_z/4L^2$。在初始位形中，为了平衡，在 D 节点上需要一个垂直方向大小为 $5F$ 的力。因此由 $5F=P_{cr}$ 得到 $F_{cr}=146$ N。在有限元计算中，作用在构件上的轴向力可以通过线性静态分析确定，接下来的线性分叉屈曲分析使用这些力得到 $F_{cr}=137$ N。在达到 F_{cr} 的情况下占主导地位的变形示于图 18.7-3(b)中。非线性分析的结果示于图 18.7-3(c)中，而在非线性分析当中几何形态是随着载荷的增加而更新的。非线性分析表明刚架根本没有屈曲。相反，位移可以随着载荷的增加而继续增大。

为了说明小的几何不完整性的影响，用倾斜最下面的单元使节点 D 从构件 CD 中心线左移 2 mm，来稍微改变初始(未受载)几何形状，如图 18.7-4(a)。在有限元计算中，首先进行线性静态分析，然后进行线性分叉屈曲分析，得到 $F_{cr}=114$ N 和节点 D 向左移动 2.6 mm 的位移(图 18.7-4(b))。非线性分析(图 18.7-4(c))表明节点 D 首先向右移动，然后当载荷进一步增加时向相反的方向运动。当 $F=86$ N 的时候刚架由于突然完全屈曲而崩溃。在这个例子中，就像通常情况一样，线性分叉分析过高地估计了崩溃载荷。

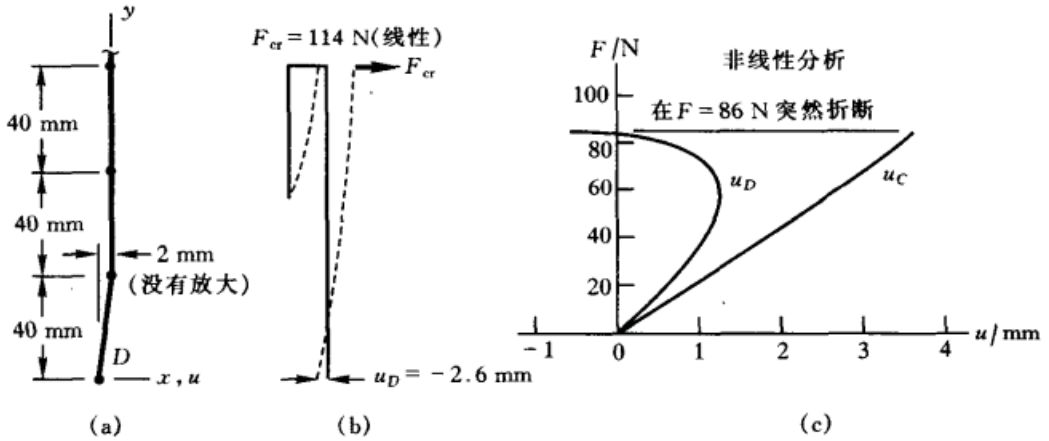
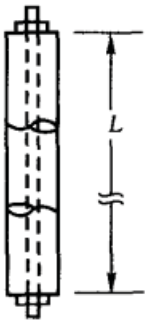


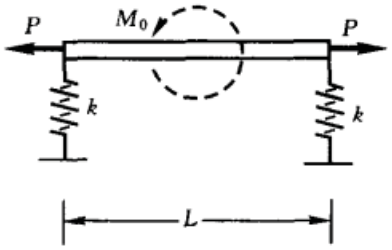
图 18.7－4　(a) 图 18.7－3(a)刚架初始几何形状改变后的细节；
(b) 当 $F=F_{cr}$ 时根据线性分叉分析位移后的形态；
(c) 用非线性分析计算的载荷位移关系

分析题

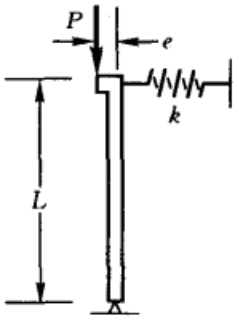
18.1－1　直木圆柱有一个轴向中心孔，围绕一个带螺纹的金属棒无摩擦地紧密与其装配在一起，如图示。在两端拧上螺母，金属棒受拉而木圆柱受压。这样装配会发生屈曲吗？



题 18.1－1



题 18.1－2



题 18.1－3

18.1－2　如图所示，一个刚性杆被线性弹簧支撑。力 P 始终在水平方向。在杆上施加有力矩 M_0。位移被限制在图面内。考虑与力矩和弹簧相关联的功和能量，并且确定：
(a) 由 M_0，P，k 和 L 所表示的杆旋转角度。
(b) 由 k 和 L 表示杆屈曲时的压力 P 的值(当 $M_0=0$ 时)。

18.1－3　一个刚性杆下端装有枢轴，上端连接在一个线性弹簧上，如图所示。位移被限制在图面内。在中心加载($e=0$)的情况下确定 P_{cr} 的大小。然后，对于 $e\neq0$，根据 P，e，k 和 L，使用小角度近似的方法表示顶部横向挠度 Δ。对于 $e/L=0$，0.01 和 0.02 画出 Δ/L 和 P/P_{cr} 的关系曲线。

18.1－4　对于图 18.1－1 和方程 18.1－6 所描述的问题，令 $P_{cr}=-\pi^2EI_z/L^2$ 和令 v_{c0} 代表仅由 q 产生的 v_c 的值(当 $P=0$ 时)。描绘出当 P 由 $P=P_{cr}$(压力)到 $P=5|P_{cr}|$(拉

力)时 v_c/v_{c0} 和 P/P_{cr} 的关系曲线。

18.2-1 对于在 x 轴上的直杆，它可以在 xy 平面内拉伸或者弯曲，小位移条件下的应变和应变能由下式给出

$$\varepsilon_x = u_{,x} + \frac{1}{2}v_{,x}^2 - yv_{,xx} \qquad U = \int \frac{1}{2}E\varepsilon_x^2 \mathrm{d}V$$

证明如何从这些表达式得到我们熟悉的传统的单元刚度矩阵和应力刚度矩阵。

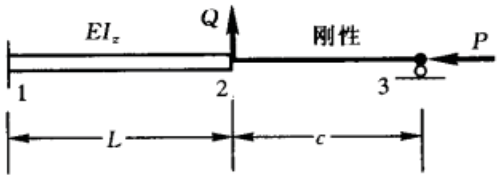
18.2-2 想象一个杆单元是锥形的，其横截面积是其轴向坐标的连续函数。在哪个单元矩阵里面($[\boldsymbol{k}]$和$[\boldsymbol{k}_\sigma]$)锥形的影响将会出现，并且如何将它们考虑进去？

18.2-3 类似于方程 18.2-6，使用如下的二次横向位移场，为均匀的 2 节点梁单元构建一个 4×4 的矩阵$[\boldsymbol{k}_\sigma]$。

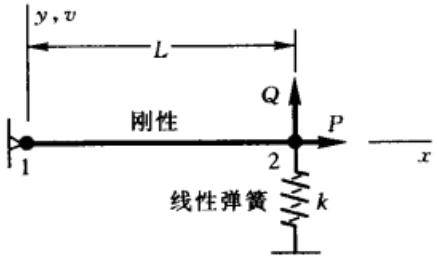
$v=(1-\xi)v_1+\xi v_2+(1-\xi)\xi L(\theta_{z1}-\theta_{z2})/2$ 其中 $\xi=x/L$。

18.2-4 用适当限定式 18.2-6 中$[\boldsymbol{k}_\sigma]$的范围获得式 18.2-5 中第二个矩阵$[\boldsymbol{k}_\sigma]$内的 P/L 项。

18.2-5 对于图示的平面系统，建立由 P,Q,E,I,L 和 c 表示的可以用作确定横向挠度和节点 2 转角的两个矩阵方程。



题 18.2-5



题 18.2-6

18.2-6 图示的杆在节点 1 处铰接并且可以认为是刚性和无重量的。力 P 保持水平方向并且运动被限制在 xy 平面内。根据 P,Q,k 和 L，(a) 如果 P 是零的话挠度 v_2 是多少？(b) 如果 P 是 $0.96kL$ 且处于拉伸状态，那么挠度 v_2 又是多少？(c) 如果 P 是 $0.96kL$ 且处于压缩状态呢？

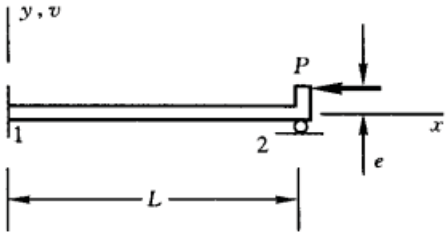
18.2-7 求解问题 18.2-6(c)，其中 $P=-0.96kL$，使用如下的迭代方法。仅对于 Q，$v_2=Q/k$，现在非零的 P 将围绕节点 1 施加一个力矩。作另一次分析，其中用绕节点 1 的力矩，因而产生一个更大的 v_2 值。重复这个过程。

18.2-8 图示的圆柱左端固定。在简支端，x 方向载荷 P 有一个偏移 e。将这个圆柱用一个单元建模。

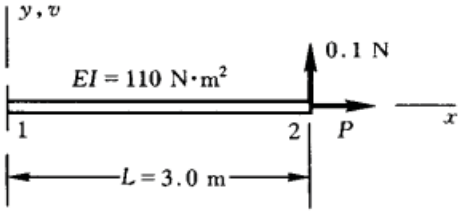
(a) 确定用 P,L,E,I 和 e 表示的转角 θ_{z2}。

(b) 如果 $e=0$，P 的什么值可以使 θ_{z2} 非零？计算结果的百分比误差是多少？

18.2-9 作用在图示悬臂梁上 x 方向的力 P 可能是压力也可能是拉力。使用一个单元对这个梁进行建模。使用 v_2 和 θ_{z2} 作为自由度并且从方程 18.2-6 中得到$[\boldsymbol{k}_\sigma]$。在下面的情况下确定 v_2：(a) P 等于零，(b) P 是拉力，大小为 30 N，(c) P 是压力，大小为 30 N。



题 18.2－8



题 18.2－9

18.2－10　重新求解问题 18.2－9，不同的是所用$[\boldsymbol{k}_\sigma]$是从问题 18.2－3 中得到的。

18.2－11　在问题 18.2－9(c)中，通过计算 $M=EI[\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{d}\}$来估计 $x=0$ 处的弯曲力矩，这里$[\boldsymbol{B}]$基于通常的三次场量，并且$\{\boldsymbol{d}\}=\lfloor\, 0\ 0\ v_2\ \theta_{z2}\,\rfloor^{\mathrm{T}}$。将这个 M 和静态分析所得到的 $M=0.1L-Pv_2$ 进行比较；其中 $P=-30$ N。

18.2－12　对角质量矩阵在 11 章中已经讨论过了。如果它的非零项仅按平移自由度运算，为什么类似的应力刚度对角矩阵是不可接受的？

18.4－1　对于 8 节点三线实体等参单元，在方程 18.4－5 中的$\{\boldsymbol{G}\}$有多少行多少列？用形状函数的导数、雅可比逆矩阵的系数 Γ_{ij} 来表示 G_{ij}。为了方便，令$\{\boldsymbol{d}\}=\lfloor\, u_1\ u_2\cdots u_8\ v_1\ \cdots\ v_8\,\rfloor^{\mathrm{T}}$。

18.4－2　(a) 考虑一个被限制在自身平面内运动的 3 节点三角形单元。用一个 2×2 的子矩阵$[\boldsymbol{s}]$和方程 7.2－6 中的矩阵$[\boldsymbol{B}]$写出$[\boldsymbol{k}_\sigma]$的公式。为了方便起见，命$\{\boldsymbol{d}\}$中自由度为$\lfloor\, u_1\ u_2\ u_3\ v_1\ v_2\ v_3\,\rfloor^{\mathrm{T}}$。(b) 现在让同样的单元可以在其自身所在的平面法向有小的挠度 $w=w(x,y)$，这时$[\boldsymbol{k}_\sigma]$的表达式又是什么？令$\{\boldsymbol{d}\}=\lfloor\, w_1\ w_2\ w_3\,\rfloor^{\mathrm{T}}$。

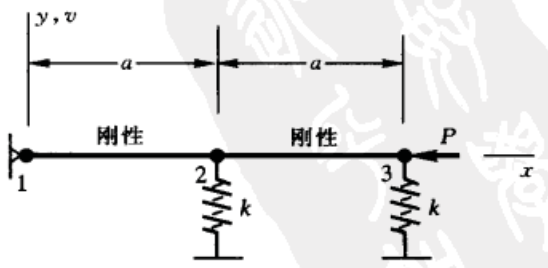
18.5－1　方程 18.5－5 有两个根，其中较小根 $\lambda=\lambda_{\mathrm{cr}}$ 由方程 18.5－6 给出。另外一个根是什么？与其相对应的模式形状又是什么？

18.5－2　使用从问题 18.2－3 中得到的$[\boldsymbol{k}_\sigma]$，确定在图 18.5－1 中的临界载荷。使用一个单元。仅需要的自由度是 v_2 和 θ_{z2}。

18.5－3　假定图示两端铰接的杆是刚性和无重量的。每一个线性弹簧的刚度是 k。位移被限制在 xy 平面内。

(a) 确定屈曲载荷 P_{cr}。

(b) 在屈曲模式中，设 $v_2=1$，确定 v_3。画出这种模式并且证明横向力$[\boldsymbol{K}_\sigma]\lfloor\, v_2\ v_3\,\rfloor^{\mathrm{T}}$在数值上等于挠曲弹簧中的力。



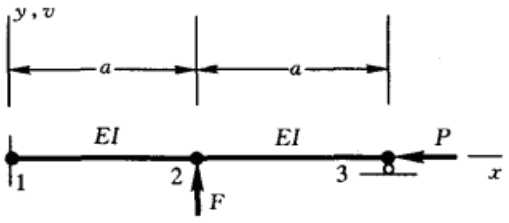
题 18.5－3

18.5－4 图示的均匀梁左端固定，右端简支，并且被分为两个相同的梁单元，每一个的长度都是 a。位移被限制在 xy 平面内。

(a) 建立三方程组 $[\boldsymbol{K}+\boldsymbol{K}_\sigma]\{\boldsymbol{D}\}=\{\boldsymbol{R}\}$，然后通过凝聚消去自由度 θ_{z2} 和 θ_{z3}，保留 v_2 作为唯一的自由度。

(b) 从这个结果计算 P_{cr}（对于 $F=0$ 的情况）和它的百分比误差。

(c) 对于非零的 F，如果 $F=0.10EI/a^2$，画出 v_2/a 和 P/P_{cr} 的关系曲线。



题 18.5－4

18.5－5 假定图示的圆柱在图面内发生屈曲。用 E，I 和 L 表示屈曲载荷 P_{cr}。使用方程 18.2－6中的 $[\boldsymbol{k}_\sigma]$。

(a) 在图(a)中使用 θ_1 和 θ_2 作为自由度。

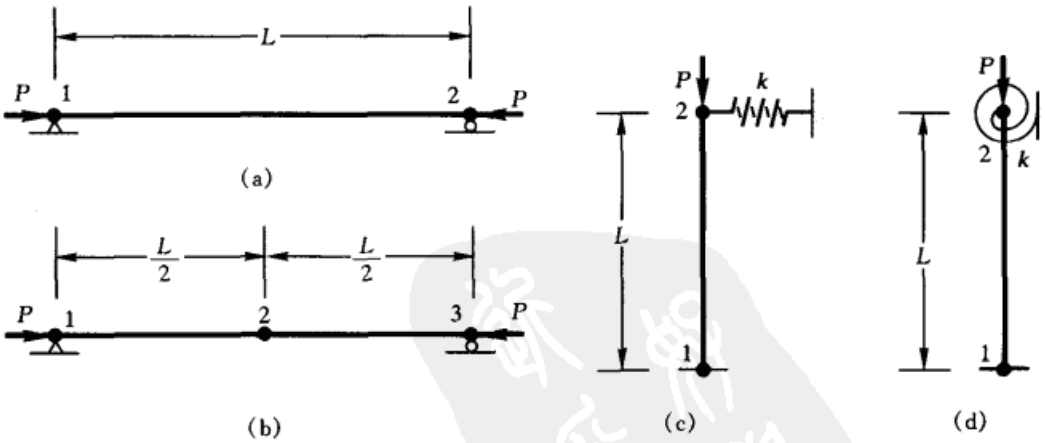
(b) 在图(b)中有两个单元。围绕节点 2（它不是铰链）施加对称性使得 θ_1 和 θ_2 是唯一需要的自由度。

(c) 在图(c)中，下端固支并且线性弹簧的刚度 $k=2EI/L^3$。

(d) 在图(d)中，下端固支并且旋转弹簧的刚度 $k=EI/L$。

(e) 重复问题(c)，令 $k\to\infty$（顶端可以自由旋转但是不能平移）。

(f) 重复问题(d)，令 $k\to\infty$（顶端可以自由平移但是不能旋转）。



题 18.5－5

18.5－6 重做问题 18.5－5，使用从问题 18.2－3 中得到的 $[\boldsymbol{k}_\sigma]$。

18.5－7 重做问题 18.5－5，尽可能利用杆单元的 $[\boldsymbol{k}_\sigma]$（方程 18.2－5）。

18.5－8 (a) 将凝聚用于屈曲问题时（如在方程 18.5－8 和 18.5－9），应该怎样选择被消去的自由度？

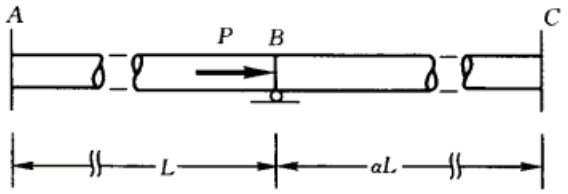
(b) 使用自由度凝聚求解问题 18.2－9(b)。

(c) 使用自由度凝聚求解问题 18.2－9(c)。

(d) 使用自由度凝聚消去 θ_1，求解问题 18.5－5(b)。

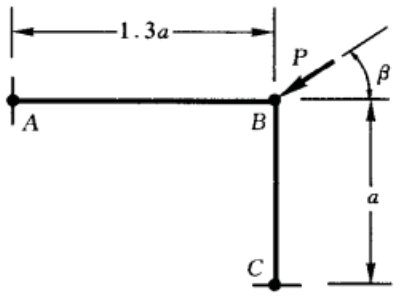
(e) 使用自由度凝聚消去 θ_1，求解问题 18.5－6(b)。

18.5－9　图示的两个细杆长度不相同但是其它方面完全一样。它们在 A 和 C 点固定并且在 B 点被焊接在一起，在 B 点它们被简支并且施加一个轴向载荷 P。研究屈曲的可能性。



题 18.5－9

18.5－10　图示的两单元刚架在 A 点和 C 点固定。构件在 B 点刚性连接在一起并且具有完全相同的 EI。对于在图平面内的屈曲，确定使屈曲载荷 P_{cr} 最小的角度 β。

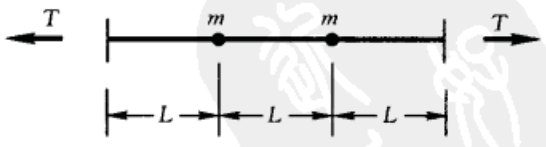


题 18.5－10

18.6－1　图示的无质量细绳呈水平状态并且带有两个质量是 m 的质点。假定细绳中的拉力 T 没有被小的横向挠曲所改变。

(a) 确定由重力引起的质点静态挠度。

(b) 确定振动频率以及相应的振型。



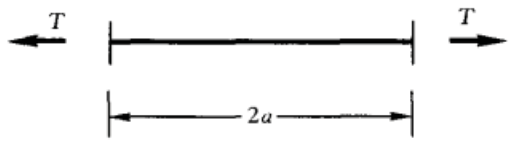
题 18.6－1

18.6－2　重复问题 18.6－1，但是将左边质点的质量增加到 $2m$。

18.6－3　图示细绳单位长度的质量是 ρ。假定细绳中的拉力 T 不被小的横向挠曲所改变。忽略传统刚度矩阵[$\boldsymbol{K}$]，使用与三次横向位移场相关联的[$\boldsymbol{K}_\sigma$]和[$\boldsymbol{M}$]矩阵。确定固有频率和相应的振型(精确的基本频率是 $\omega_1^2=\pi^2 T/4\rho a^2$)。

(a) 使用一个单元(非零的自由度是 θ_1 和 θ_2)。

(b) 使用两个单元并且在中心处施加对称性。(这种方法的可能优点是什么?)



题 18.6-3

18.6-4 重复问题 18.6-3,在可能的范围内,对于杆单元使用$[k_o]$(方程 18.2-5),和(a)基于三次横向位移场的$[M]$,(b)集中的$[M]$。

18.6-5 一根长度为 $2L$ 的软绳系在天花板上。两个质量都是 m 的质点系于绳上,一个系于绳的中部,另一个系于绳的低端。

(a) 如果一个小的水平力 Q 作用在低端,确定此处的水平偏移量。

(b) 确定固有频率和相关的振型。

18.6-6 用单一的单元对一个均匀的简支梁进行建模。令 $L=1.0$ m,$A=0.000\ 2$ m^2,$EI=300.0$ N·m^2 和 $\rho=2100$ kg/m^3。通过设置 $\theta_2=-\theta_1$ 强加对称性,这样把问题减小到单个自由度。

(a) 如果没有轴向力,确定基本振动频率。

(b) 确定使振动频率达到 347 rad/s 的轴向力大小。

(c) 如果轴向施加的压力是 1200 N,确定振动频率。

18.6-7 令在图 18.6-1(a)中长度为 L 的构件具有静态扭转刚度 K。忽略连杆 2-3 可能的影响。多大的旋转速度 Ω 可以有效地将扭转刚度减小到零?换句话说,长度为 a 的构件不再处于平行于转轴方向的稳定位形时的 Ω 有多大?

计算题

在下面的问题中,计算与分叉点相关的载荷和/或实际导致崩溃的载荷。在合适的地方利用对称性。当使用网格细化时,估计最精细的有限元网格所产生结果的最大百分比误差。在尺寸、载荷,或者材料属性没有指定的地方,选择看起来合理或方便的值。可以考虑材料非线性。当需要附加的假设条件时,清楚地说明它们是什么。应用 1.5 节所建议的分析方法。

C18.1 对于许多问题来说经典的线弹性分叉屈曲载荷是已知的,它包括直圆柱、横向受载梁和平板,有不同载荷分布和支撑条件[1,16,17,33]。这些问题在学习使用软件和说明网格细化的作用时是很有帮助的。

C18.2 重新考虑下面的问题,现在把注意力放在分叉载荷和崩溃载荷的比较上面。(a)问题 C17.10。(b)问题 C17.11。

C18.3 一个平薄的圆板放在软的弹性基座上。作用在中心的横向力 F 将板压在基座上面。

C18.4 一个薄长方形板,初始是平的,承受四个横向力 F,作用在每个角上。在两个对角力向上作用,另两个对角力向下作用,施加的支撑条件仅足以阻止刚体运动。

C18.5 求解问题 C16.1。令高度 h 比半径 R_1 和 R_2 小得多,以至于变形相对于载荷 q 是非线性的。

C18.6　一个均匀的双金属条在制造的时候有一个初始曲率。两种金属的弹性属性可能不同，就像它们的热膨胀系数 α_1 和 α_2 一样。它的两端铰接在刚性墙上，如图所示。在初始温度 T_0 下没有力作用在墙上。载荷是通过均匀的改变温度到 T 来产生的[18.19]。



题 C18.6

C18.7　求解壳体问题，其类型在与图 18.7-2 相关的问题中已经讨论过。为了与已经公布的结果相比较，参看本章中所提到的参考文献。

C18.8　钢卷尺的横截面是薄的浅圆弧，使卷尺长度具有从薄圆柱壳切割下的纵带形状。在弯曲的端点处施加一个反向的力矩使条带弯曲。力矩矢量的方向与横截面弧线的弦平行或者垂直。

C18.9　一条均匀的缆索在自身重力作用下悬垂。研究它的固有频率和振动模式。

(a) 缆索的一端被吊起，另一端自由。

(b) 缆索是两端支撑。下垂的总长度和一端相对另一端的高度可以任意选择。

C18.10　一个薄平的圆盘以角速度 Ω 围绕着与其平面垂直并且通过其中心的轴旋转。研究角速度 Ω 对下面两个量的影响

(a) 振动频率。

(b) 导致屈曲的温度，这里的 T 在径向坐标下从中心的零到边缘的 T_0 线性变化。

C18.11　将风扇叶片理想化为一个薄平的矩形板，一端与轴刚性连接在一起。研究轴的旋转速度对平板振动频率的影响。研究的效应包括(a)仅有应力刚化，(b)仅有旋转软化，(c)两者都有。

C18.12　在有内压和没有内压的情况下，研究铝啤酒罐由于轴向压力而导致的屈曲。

附录 A

矩阵：定义和运算

这个附录复习了经常在有限元理论当中使用的矩阵理论。所使用的符号是任意的并且没有特定的物理意义。进一步的解释可以在下面几个参考文献中的任意一个找到，包括文献[9.8,17.20,A.1]。

定义 矩阵是包含数字和/或符号的数组。下面是使用符号的例子

$$[\boldsymbol{A}]=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix} \quad \{\boldsymbol{b}\}=\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{Bmatrix} \quad \lfloor \boldsymbol{r} \rfloor = \lfloor r_1 \ \ r_2 \ \cdots \ r_n \rfloor \tag{A.1}$$

这些矩阵分别被叫做矩形矩阵、列矩阵(或列向量)和行矩阵(或行向量)。在习惯上，黑体字用来表示矩阵。方括号和圆括号是任选的；我们使用它们表示矩阵类型。如果 $m=n$，矩阵$[\boldsymbol{A}]$就是方阵，n 是它的阶数。具有相同下标的系数(A_{11}，A_{22}等等)在主对角线上(也简称对角线)。单位矩阵是对角线上全是 1 而其它位置全是零的方阵。

$$\lceil \boldsymbol{I} \rfloor = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \quad \text{或者} \quad \lceil \boldsymbol{I} \rfloor = \lfloor 1 \ \ 1 \ \cdots \ \ 1 \rfloor \tag{A.2}$$

所有元素都是零的矩阵是零矩阵。方阵的迹是指方阵中所有对角线项的和；对于 n 阶矩阵 $\mathrm{tr}[\boldsymbol{A}]=A_{11}+A_{22}+\cdots+A_{nn}$。

矩阵的转置是通过行和列的相互交换产生的。对于在方程 A.1 中的矩阵，

$$[\boldsymbol{A}]^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{m1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{m2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{mn}\end{bmatrix}\quad \{\boldsymbol{b}\}^{\mathrm{T}}=\lfloor b_1\ \ b_2\ \ \cdots\ \ b_n\rfloor\quad \lfloor\boldsymbol{r}\rfloor^{\mathrm{T}}=\begin{Bmatrix}r_1\\ r_2\\ \vdots\\ r_n\end{Bmatrix}\tag{A.3}$$

如果 $A_{12}=A_{21}$，$A_{13}=A_{31}$，等等，也就是说如果$[\boldsymbol{A}]^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{A}]$，那么$[\boldsymbol{A}]$是对称的。一个对称矩阵一定是方阵($m=n$)。

对角线以上的元素都是零的矩阵叫做下三角矩阵；对角线以下所有元素都是零的矩阵叫做上三角矩阵。例如在方程 A.7 中的$[\boldsymbol{L}]$和$[\boldsymbol{U}]$。

加法和乘法　如果两个矩阵具有相同的 m 数和 n 数，它们就可以相加或者相减。这些运算可以一项一项地进行。因此$[\boldsymbol{C}]=[\boldsymbol{A}]+[\boldsymbol{B}]$是通过 $C_{ij}=A_{ij}+B_{ij}$ 进行的。用一个标量 β 与一个矩阵相乘也是一项一项进行的；因此$[\boldsymbol{D}]=\beta[\boldsymbol{C}]$表示 $D_{ij}=\beta C_{ij}$。
两个矩阵乘积是

$$\underset{l\times n}{[\boldsymbol{P}]}=\underset{l\times m}{[\boldsymbol{A}]}\underset{m\times n}{[\boldsymbol{B}]}\quad \text{其中}\quad P_{ij}=\sum_{k=1}^{m}A_{ik}B_{kj}\tag{A.4}$$

例如，$P_{23}=A_{21}B_{13}+A_{22}B_{23}+A_{23}B_{33}+\cdots$。两个相乘的矩阵必须相一致；也就是说，如果$[\boldsymbol{A}]$的列数是 m，那么$[\boldsymbol{B}]$必须有 m 行。矩阵相乘的例子是

$$\lfloor 1\ \ 2\rfloor\begin{Bmatrix}3\\4\end{Bmatrix}=11\quad \begin{Bmatrix}1\\2\end{Bmatrix}\lfloor 3\ \ 4\rfloor=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 6 & 8\end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 6 & 7\\ 8 & 9 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}21 & 24 & 7\\ 47 & 54 & 21\end{bmatrix}\tag{A.5}$$

一般地，$[\boldsymbol{A}][\boldsymbol{B}]\neq[\boldsymbol{B}][\boldsymbol{A}]$；这就是说，除了一些特殊形式，矩阵相乘不是可交换的。下面表达了矩阵运算的一些属性(这里当然假定矩阵对于提到的运算是一致的)。

$$\begin{aligned}&[\boldsymbol{A}]([\boldsymbol{B}]+[\boldsymbol{C}])=[\boldsymbol{A}][\boldsymbol{B}]+[\boldsymbol{A}][\boldsymbol{C}] \qquad [\boldsymbol{A}]([\boldsymbol{B}][\boldsymbol{C}])=([\boldsymbol{A}][\boldsymbol{B}])[\boldsymbol{C}]\\ &([\boldsymbol{A}]+[\boldsymbol{B}])[\boldsymbol{C}]=[\boldsymbol{A}][\boldsymbol{C}]+[\boldsymbol{B}][\boldsymbol{C}] \qquad ([\boldsymbol{A}]+[\boldsymbol{B}])^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{A}]^{\mathrm{T}}+[\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}\\ &[\boldsymbol{A}]\lceil\boldsymbol{I}\rfloor=\lceil\boldsymbol{I}\rfloor[\boldsymbol{A}]=[\boldsymbol{A}] \qquad ([\boldsymbol{A}][\boldsymbol{B}]\cdots[\boldsymbol{Z}])^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{Z}]^{\mathrm{T}}\cdots[\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{A}]^{\mathrm{T}}\end{aligned}\tag{A.6}$$

最后一个方程经常在有限元分析当中使用：*乘积的转置等于相反顺序的转置的乘积*。

如果$[\boldsymbol{B}]$是方阵且是对称的，矩阵的乘积$[\boldsymbol{P}]=[\boldsymbol{A}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{B}][\boldsymbol{A}]$也是如此。如果$[\boldsymbol{A}]$是列向量，那么$[\boldsymbol{P}]$是一个标量。

有时将一个矩阵分成子矩阵是十分方便的，就像下面的例子所表示的一样。

$$[\boldsymbol{L}][\boldsymbol{U}]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ a & 1 & 0\\ b & c & 1\end{bmatrix}\left[\begin{array}{ccc}d & e & f\\ 0 & g & h\\ 0 & 0 & i\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}\boldsymbol{A}\\ \hdashline \boldsymbol{B}\end{array}\right][\boldsymbol{C}\ \vdots\ \boldsymbol{D}]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{AC} & \boldsymbol{AD}\\ \boldsymbol{BC} & \boldsymbol{BD}\end{bmatrix}\tag{A.7}$$

子矩阵可以被当作矩阵的项参与运算，只要它们遵守运算法则。

逆矩阵　方阵的逆矩阵是一个同阶的方阵，它与原来的矩阵相乘的结果是单位矩阵。

$$[\boldsymbol{A}][\boldsymbol{A}]^{-1}=[\boldsymbol{A}]^{-1}[\boldsymbol{A}]=[\boldsymbol{I}] \tag{A.8}$$

一个 2×2 矩阵的逆矩阵是非常简单的，可以用显式方法写出来：

$$[\boldsymbol{A}]=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\quad [\boldsymbol{A}]^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}\quad \text{其中}\quad |\boldsymbol{A}|=ad-bc \tag{A.9}$$

在这里$|\boldsymbol{A}|$是矩阵$[\boldsymbol{A}]$的行列式（对$|\boldsymbol{A}|$的数值计算将在附录 B 中讨论）。逆矩阵的性质包括

$$([\boldsymbol{A}][\boldsymbol{B}])^{-1}=[\boldsymbol{B}]^{-1}[\boldsymbol{A}]^{-1}\quad \text{和}\quad ([\boldsymbol{A}]^{-1})^{\mathrm{T}}=([\boldsymbol{A}]^{\mathrm{T}})^{-1} \tag{A.10}$$

因此，乘积的逆等于相反顺序的逆的乘积，逆的转置等于转置的逆。

如果用符号表示，一个代数方程组和它的未知数$\{\boldsymbol{x}\}$是

$$[\boldsymbol{A}]\{\boldsymbol{x}\}=\{\boldsymbol{b}\}\qquad \{\boldsymbol{x}\}=[\boldsymbol{A}]^{-1}\{\boldsymbol{b}\} \tag{A.11}$$

在有限元中，$[\boldsymbol{A}]$是大型的稀疏矩阵。求它的逆矩阵将会非常浪费存储空间和时间。因此，表达式$\{\boldsymbol{x}\}=[\boldsymbol{A}]^{-1}\{\boldsymbol{b}\}$通常仅意味着用典型的高斯消元法或迭代的方法"求解未知数"（见附录 B）。

如果一个矩阵的逆矩阵等于它的转置矩阵，那么我们称这个矩阵为正交矩阵。例如

$$[\boldsymbol{A}]=\begin{bmatrix}0.8 & 0.6\\ -0.6 & 0.8\end{bmatrix}\quad [\boldsymbol{A}]^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0.8 & -0.6\\ 0.6 & 0.8\end{bmatrix}\quad [\boldsymbol{A}][\boldsymbol{A}]^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{A.12}$$

正交矩阵出现在一些坐标变换运算当中。

秩和奇异性　矩阵的秩指的是能够从矩阵中形成的最大非零行列式的阶数。可能不得不从方阵中删除一行或者更多的行和相同数量的列，以便从剩余的行和列当中得到不为零的行列式。因此，人们发现在方程 A.12 中矩阵的秩为 2，下面矩阵的秩依次是 2，1，1 和 1。

$$\begin{bmatrix}7 & -8 & 1\\ -8 & 16 & -8\\ 1 & -8 & 7\end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix}2 & 4 & -2\\ 1 & 2 & -1\\ 3 & 6 & -3\end{bmatrix}\quad \begin{Bmatrix}a\\ b\\ c\end{Bmatrix} \tag{A.13}$$

在第一个矩阵里面，任何一行（或者列）都是其它两行（或者列）的线性组合。在第二个矩阵中，一行或者一列是其它行或者列的相反数。两种这样的线性相关性出现在第三个矩阵里面。方阵的秩还可以定义为矩阵中最大的线性无关行或者列数。一个矩阵其秩数小于它的阶数被叫做缺秩。一个缺秩矩阵是奇异的并且它的行列式等于零。奇异矩阵没有逆矩阵，并且对于方程 A.11 中的$\{\boldsymbol{x}\}$没有唯一解。如果两个矩阵具有秩 r_1 和 r_2，在 $r_1<r_2$ 的情况下，它们乘积的秩是 r_1。因此，方阵$[\boldsymbol{A}]=\{\boldsymbol{a}\}\lfloor \boldsymbol{b} \rfloor$的秩是 1 或是 0，无论它的阶数是多少。

二次型　考虑一个实际方阵$[\boldsymbol{A}]$和一个与它有相同阶数的实际向量$\{\boldsymbol{x}\}$。标量 F 被叫做二次型，这里

$$F=\{\boldsymbol{X}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{A}]\{\boldsymbol{X}\} \tag{A.14}$$

设想用令$\{x\}$中的x_i项取任意值且全为实数(除所有x_i同时为零)来计算F所有可能的值。那么这$[A]$被叫做

正定　如果对于所有的$\{x\}$，$F>0$

半正定　如果对于所有的$\{x\}$，$F\geqslant 0$

不定　如果$F>0$和$F<0$都有可能出现

半负定　如果对于所有的$\{x\}$，$F\leqslant 0$

负定　如果对于所有的$\{x\}$，$F<0$

作为例子，在方程 A.12 中的矩阵$[A]$是正定的，在方程 A.13 中的第一个矩阵是半正定的。如果一个方阵是正定或者是负定的，那么它也是非奇异的。

微分　矩阵的微分就是对矩阵的每一项进行微分。例如，如果$\lfloor a \rfloor=\lfloor 1 \quad x^2 \rfloor$，那么$\mathrm{d}\lfloor a \rfloor/\mathrm{d}x=\lfloor 0 \quad 2x \rfloor$。

令$\{X\}=\lfloor x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n \rfloor^{\mathrm{T}}$，并且令$[A]$是与$x_i$不相关的任意$n\times n$的方阵。假设现在要将下面的二次型对$x_i$进行微分

$$\phi=\frac{1}{2}\{X\}^{\mathrm{T}}[A]\{X\} \tag{A.15}$$

相对于x_i中的每一个微分，其结果可以简便地用向量表示：

$$\left\{\frac{\partial \phi}{\partial X}\right\}=\left\lfloor\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_n}\right\rfloor^{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}([A]+[A]^{\mathrm{T}})\{X\} \tag{A.16}$$

用x_i和A_{ij}写出ϕ，然后求导并且对各项进行整理汇总，就可以验证以上公式的正确性。如果$[A]$是对称的，那么

$$\left\{\frac{\partial \phi}{\partial X}\right\}=[A]\{X\} \quad \text{和} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}=A_{ij}=A_{ji} \tag{A.17}$$

作为一个特殊情况，如果$[A]$是单位矩阵，那么$\{\partial\phi/\partial X\}=\{X\}$。

令$\{X\}=\lfloor x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_m \rfloor^{\mathrm{T}}$，$\{Y\}=\lfloor y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n \rfloor^{\mathrm{T}}$，$[A]$是与$x_i$无关的$m\times n$的任意矩阵。想象标量$\psi=\{X\}^{\mathrm{T}}[A]\{Y\}$对$x_i$微分。结果可以方便地写成：

$$\left\{\frac{\partial \psi}{\partial X}\right\}=\left\lfloor\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_m}\right\rfloor^{\mathrm{T}}=[A]\{Y\} \tag{A.18}$$

至于对y_i中的每一个微分，我们注意到因为ψ是标量，

$$\psi=\psi^{\mathrm{T}}=\{Y\}^{\mathrm{T}}[A]^{\mathrm{T}}\{X\} \tag{A.19}$$

因此，如果$[A]$与y_i无关，

$$\left\{\frac{\partial \psi}{\partial Y}\right\}=\left\lfloor\frac{\partial \psi}{\partial y_1} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial \psi}{\partial y_n}\right\rfloor^{\mathrm{T}}=[A]^{\mathrm{T}}\{X\} \tag{A.20}$$

作为一个特殊情况，如果$[A]$是单位矩阵，那么$m=n$，并且

$$\psi = \{\boldsymbol{X}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{Y}\} = \{\boldsymbol{Y}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{X}\} \qquad \left\{\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{X}}\right\} = \{\boldsymbol{Y}\} \qquad \left\{\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{Y}}\right\} = \{\boldsymbol{X}\} \tag{A.21}$$

范数　范数是矩阵或向量大小的一种度量。范数在检测数值方法收敛性的时候是有用的。对于一个 n 阶的向量$\{\boldsymbol{x}\}$，可以定义不同的向量范数。1-范数、2-范数、无穷-范数和 p-范数可以通过两条竖线和适当的下标来辨别(一条竖线表示标量的大小)。

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{X}\|_1 &= |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \qquad \|\boldsymbol{X}\|_2 = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2} \\ \|\boldsymbol{X}\|_\infty &= \max_i |x_i| \qquad \|\boldsymbol{X}\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p} \end{aligned} \tag{A.22}$$

2-范数通常也叫做欧几里德范数。对于 $n=2$ 和 $n=3$ 的范数分别是$\{\boldsymbol{x}\}$在二维和三维空间中的长度。当 x_i 是空间坐标的函数的时候，称做 L_2 范数的度量被在体积 V 上定义为

$$\|\boldsymbol{X}\|_{L_2} = \left[\int \{\boldsymbol{X}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{X}\}\mathrm{d}V\right]^{1/2} \quad \text{这里} \quad \{\boldsymbol{X}\}^{\mathrm{T}} = \lfloor x_1\ x_2\ \cdots\ x_n \rfloor \tag{A.23}$$

矩阵范数可以用与方程 A.22 相类似的方式定义。对于一个 n 阶的方阵$[\boldsymbol{A}]$，

$$\|\boldsymbol{A}\|_1 = \max_j\left(\sum_{i=1}^{n} |A_{ij}|\right) \quad \|\boldsymbol{A}\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}} \quad \|\boldsymbol{A}\|_\infty = \max_i\left(\sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|\right) \tag{A.24}$$

其中 $\lambda_{\max}$是$[\boldsymbol{A}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{A}]$的最大特征值。1-范数是最大列绝对值之和；无穷-范数是最大行绝对值之和。

另外一个度量方阵大小的方法是谱半径 $\rho(\boldsymbol{A})$。如果 μ_i 是$[\boldsymbol{A}]$的特征值，谱半径定义为

$$\rho(\boldsymbol{A}) = \max_i |\mu_i| \tag{A.25}$$

对于在方程 A.24 中定义的任何范数，$\rho(\boldsymbol{A}) \leqslant \|\boldsymbol{A}\|$。

令$[\boldsymbol{A}]$和$[\boldsymbol{B}]$是方阵，$\{\boldsymbol{x}\}$和$\{\boldsymbol{y}\}$是向量，对于此处表示的乘法和加法具有合适的阶次，并且令 s 为标量。下面的关系式对于在方程 A.22 和 A.24 中定义的任何范数都是适用的。

$$\begin{aligned} &\|\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}\| \leqslant \|\boldsymbol{X}\| + \|\boldsymbol{Y}\| \qquad \|s\boldsymbol{X}\| = |s|\,\|\boldsymbol{X}\| \qquad \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\| \leqslant \|\boldsymbol{A}\|\,\|\boldsymbol{X}\| \\ &\|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\| \leqslant \|\boldsymbol{A}\| + \|\boldsymbol{B}\| \qquad \|s\boldsymbol{A}\| = |s|\,\|\boldsymbol{A}\| \qquad \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\| \leqslant \|\boldsymbol{A}\|\,\|\boldsymbol{B}\| \end{aligned} \tag{A.26}$$

在方程 A.26 中的第一个关系式叫做三角不等式。别的关系式中 $\|\boldsymbol{A}\| > 0$，除非$[\boldsymbol{A}]$是零矩阵，在这种情况下 $\|\boldsymbol{A}\| = 0$，类似地，$\|\boldsymbol{X}\| > 0$，除非$\{\boldsymbol{X}\}$是零向量。

附录 B

联立代数方程组

B.1 概述

计算方法产生很大的代数联立方程组。在这个附录当中我们将代数方程组记为$[A]\{x\}=\{b\}$，它求解的是未知向量$\{x\}$。在有限元分析当中，系数矩阵$[A]$通常是刚度矩阵。大的系数矩阵很可能是稀疏矩阵，非零项和零项之间的比例可能不足1/100。在$[A]$中非零项的数量和位置叫做*矩阵拓扑结构*。因为即使当$[A]$是稀疏矩阵的时候，$[A]^{-1}$也是满阵，所以获得$\{x\}=[A]^{-1}\{b\}$的正规求逆并不是一种实用的求解方法。

如果$[A]$和$\{b\}$包括已知的常量，那么方程组系统就是线性的，而如果$[A]$和/或$\{b\}$是$\{x\}$的函数，方程就是非线性的。在有限元分析当中处理的总是线性方程组$[A]\{x\}=\{b\}$，而且求解非线性问题也是通过基于最新计算得到的$\{x\}$反复更新$[A]$和/或$\{b\}$来实现的。求解非线性问题方程可能需要消耗总计算时间的大部分。

方程求解器可以分为*直接*和*迭代*求解器。直接求解器在有限步内得到结果。在$[A]$的拓扑结构已知的情况下，计算的步数可以预测出来。直接求解器可以有效地处理多重方程右端项(在有限元分析当中的复合载荷)，因为在缩减$[A]$中花费的计算量最大，而每个$[b]$的处理却非常快。直接求解器也有缺点，主要是产生了许多填充区，需要把许多零系数A_{ij}转变成非零系数，在以后的计算中必须处理它们并分配储存空间。迭代求解器重复计算直到收敛的条件得到满足。所需要的计算次数是无法预测的。迭代求解器产生少量的填充区(或者不产生，这依赖于所使用的方法)，但是这种方法在处理多重右端项上不是太理想，并且在有的情况下收敛速度比较慢。在非线性问题中，对于一个给定的载荷，为了更新仅在最终阶段有收敛要求的方程组，利用不完全收敛的$\{x\}$来减少迭代次数是完全可能的。

在包括直接法和间接法的每个类型中，有许多可用求解器的选择。假定在配备可用储存空间和获得足够精确度$\{x\}$的方法上竞争，人们会寻找最快的方法。影响速度的因素包括矩阵的大小和拓扑结构，矩阵的大小是否要求数据频繁地被写入磁盘和从磁盘中读取，有多少个

向量$\{\boldsymbol{b}\}$需要处理，$[\boldsymbol{A}]$的条件数，和编写算法的技巧。求解方法的选择对于大型问题和要求重复求解的问题来说是至关重要的，比如非线性问题。

下面我们对这些问题作简短而有选择性的讨论，作为对 2.8 节内容的补充。

B.2 直接求解方法

高斯消元法 我们描述的高斯消元法要求$[\boldsymbol{A}]$是非奇异的。也要求在每一次消元步骤中当对角线上的系数作为除数的时候必须不为零。在典型的情况下，对角线系数A_{ii}在开始的时候都是非零的。如果A_{ii}在开始的时候是零，它必须在前一步消去步骤当中转化为非零值（例如，当使用拉格朗日乘子加强约束条件的时候）。

为了说明高斯消元法的系统操作过程，我们考虑一个 3×3 的系统$[\boldsymbol{A}]\{\boldsymbol{x}\}=\{\boldsymbol{b}\}$。让未知数按照数值顺序被消去。因此，我们首先针对$x_1$解方程，得到

$$x_1 = \frac{1}{A_{11}}(b_1 - A_{12}x_2 - A_{13}x_3) \tag{B.2-1}$$

将x_1的表达式代入第二和第三个方程消去x_1

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & A_{22}-(A_{21}/A_{11})A_{12} & A_{23}-(A_{21}/A_{11})A_{13} \\ 0 & A_{32}-(A_{31}/A_{11})A_{12} & A_{33}-(A_{31}/A_{11})A_{13} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2-(A_{21}/A_{11})b_1 \\ b_3-(A_{31}/A_{11})b_1 \end{Bmatrix} \tag{B.2-2}$$

接下来的消去过程是将方程 B.2-2 中右下方的 2×2 矩阵以相似的方法进行处理，也就是说解中间的方程得到x_2并且将结果代入最后一个方程之中。这样$[\boldsymbol{A}]$就被三角化了，并且未知数可以按照x_3，x_2和x_1的顺序通过回代确定出来。一个高斯消元法的数值例子是求解一个 4×4 的系统，它出现在图 2.8-3 中。

如果高斯消元法被运用到 2×2 的矩阵$[\boldsymbol{A}]$中，我们得到

$$\text{初始}[\boldsymbol{A}]:\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \text{缩减的}[\boldsymbol{A}]:\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d-bc/a \end{bmatrix} \tag{B.2-3}$$

后一种形式将与下面相关联的形式比较。

对称矩阵$[\boldsymbol{A}]$ 下面我们考虑将高斯消元法应用于$[\boldsymbol{A}]$是对称矩阵的普遍情况。那么，仅有矩阵$[\boldsymbol{A}]$的上三角需要存储和处理。具有n个方程的对称系统的求解算法出现在表 B.2-1 中。它不同于方程 B.2-2，在那里下三角中的项比如A_{21}出现在方程 B.2-2 中，这个算法使用与其等效的上三角中的项A_{12}来替代（因为在矩阵$[\boldsymbol{A}]$中还没有被三角化的部分仍然具有对称性）。也仅处理$[\boldsymbol{A}]$的上三角中的数据。步骤 1 的最后一行，$A_{ki}=r$，在初始A_{ki}不再需要后，用比例因子A_{ki}/A_{kk}覆盖了初始A_{ki}。因此，在简化的$\{\boldsymbol{b}\}$中使用的A_{ki}/A_{kk}值被保存了起来，处理向量$\{\boldsymbol{b}\}$中的任何数将不需要再次处理$[\boldsymbol{A}]$。最后，在回代中，解向量覆盖了原来的

$\{b\}$。在第一和第三步中，注意在向前简化以后，除了最后一行，$[A]$的每一行都被对角线系数相除了，没有存储或处理对角线上单位数值的麻烦。

表 B.2-1　高斯消元法求解$[A]\{x\}=\{b\}$，其中$[A]$是$n\times n$的对称矩阵。输入矩阵$[A]$和$\{b\}$被缩减的$[A]$和解$\{x\}$所覆盖。$[A]$的缩减必须在$\{b\}$的缩减之前进行。在编程中"="意味着"被取代"

1. 对称矩阵$[A]$的缩减	2. $\{b\}$的向前缩减	3. 回代，$\{b\}\leftarrow\{x\}$
对于 $k=1,2,\cdots,n-1$ 　对于 $i=k+1,k+2,\cdots,n$ 　　$r=A_{ki}/A_{kk}$ 　　对于 $j=i,i+1,\cdots,n$ 　　$A_{ij}=A_{ij}-rA_{kj}$ 　　$A_{ki}=r$ [现在存储比例因子 $r=A_{ki}/A_{kk}$，作为 A_{ki} 和所有对角项 A_{kk}，但是最后一个是 1(隐式地)]	对于 $k=1,2,\cdots,n-1$ 　对于 $i=k+1,k+2,\cdots,n$ 　　$b_i=b_i-A_{ki}b_k$	$b_n=b_n/A_{nn}$ 对于 $k=n-1,n-2,\cdots,1$ 　对于 $i=k+1,k+2,\cdots,n$ 　　$b_k=b_k-A_{ki}b_i$

运算量统计表明如果 n 是个大数，满阵但对称的矩阵$[A]$有效的缩减大约需要 $n^3/6$ 次相乘，而对$\{b\}$的向前简化和回代，每次需要 $n^2/2$ 次相乘。因此，处理每一个载荷向量的费用约是简化$[A]$所需费用的 $6/n$ 倍。

Choleski 方法　求解具有$[A]$对称矩阵的方程$[A]\{x\}=\{b\}$的 Choleski 方法要求将矩阵$[A]$分解为乘积$[U]^{\mathrm{T}}[U]$，其中$[U]$是一个上三角矩阵。例如，如果$[A]$是 2×2 矩阵，我们得到

$$[A]=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=[U]^{\mathrm{T}}[U]=\begin{bmatrix}\sqrt{a} & 0\\ b/\sqrt{a} & \sqrt{d-(b^2/a)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{a} & b/\sqrt{a}\\ 0 & \sqrt{d-(b^2/a)}\end{bmatrix}\tag{B.2-4}$$

上式可与 $c=b$ 的方程 B.2-3 相比较。求解方程$[A]\{x\}=\{b\}$中$\{x\}$的过程如下

$$[U]^{\mathrm{T}}[U]\{x\}=\{b\}\quad 定义\quad [U]\{x\}=\{y\}\tag{B.2-5a}$$

$$求解方程[U]^{\mathrm{T}}\{y\}=\{b\}\text{ 中的}\{y\}\qquad(向前代入)\tag{B.2-5b}$$

$$求解方程[U]\{x\}=\{y\}\text{ 中的}\{x\}\qquad(向后代入)\tag{B.2-5c}$$

从一个 n 阶的对称矩阵$[A]$得到$[U]$的算法如下：

$$U_{11}=\sqrt{A_{11}}\qquad U_{1j}=A_{1j}/U_{11}\quad j=2,3,\cdots,n\tag{B.2-6a}$$

$$U_{ii}=\left(A_{ii}-\sum_{k=1}^{i-1}U_{ki}^2\right)^{1/2}\quad i=2,3,\cdots,n\tag{B.2-6b}$$

$$U_{ij}=\frac{1}{U_{ii}}\left(A_{ij}-\sum_{k=1}^{i-1}U_{ki}U_{kj}\right)\quad j=i+1,\cdots,n\tag{B.2-6c}$$

方程 B.2-6b 和 B.2-6c 交替使用：一旦计算出 U_{ii} 的值，就计算有相同的 i 值的 U_{ij}。矩阵

[A]被矩阵[U]覆盖。

Choleski 因式分解的变式是[A]=[U_1]^T 「D」[U_1]，这里[U_1]是一个上三角矩阵且在对角线上所有的元素都是 1，而「D」是对角矩阵。Choleski 法和它的变式提供了一种比高斯消元法更有效的求解方法，它们之间主要的差别就是计算循环的安排和数据存储的方式[B.1]。Choleski 分解和它的变式经常用作共轭梯度迭代求解方法的“预处理器”。

行列式 从方程 B.2－3 我们看到[A]的行列式 det[A]是简化的[A]的对角线项的乘积。对于任意阶的[A]结果都是成立的。在表示 Choleski 分解的方程 B.2－5a 中，[A]的行列式是 U_{ii} 平方的乘积，并且在分解[A]=[U_1]^T 「D」[U_1]中，它是「D」中 D_{ii} 的乘积。因为 det[A]的值通常非常大，对角线项的乘积有可能在数值计算中溢出。更好的方法是通过将对角线系数的对数相加计算行列式的对数。

稀疏性 前述的算法是对满阵[A]而言的，它忽略了[A]在有限元分析中通常是稀疏矩阵这样一个事实。在简化之前一个总体矩阵[A]只有不超过 5%的非零项，如果有上千个自由度的话那么非零项的个数大概不及 1%。在[A]的简化过程中，直接求解方法将位于数据轮廓线到对角线之间的大多数零转变成了非零值，但数据轮廓线上的零完整地留了下来。有限元软件通过使用压缩存储格式充分地利用矩阵稀疏性，以至于位于数据轮廓线以上的项既不被存储也不被处理，并且通过对节点重新编号（只在内部处理当中使用）可以非常有效地使用压缩存储格式。在这里我们对这样一个广泛的题目范围不做进一步的研究。在 2.8 节中作过简明的讨论。参考文献包括在[2.16，B.2～B.4]中。

前沿法 像高斯消元法这样的直接求解法不要求在开始求解方程之前组集总体矩阵[A]。组集的步骤可与消元的步骤交替进行。当足够多的元素已经组集好可以形成总体矩阵的初始部分时，求解开始，然后当需要更多的矩阵项通过组集来构建时，求解过程暂停。部分组集和部分求解的过程交替进行直到整个系统被组集和求解出来。与这种计算安排相关的名字是*前沿法*或者*波前法*，这是因为正在组集中被激活的自由度和求解过程可以形象化为“波”或“波前”，它们越过结构继续前进就像组集-求解的交替进程。当“波前”用于表示大小时，它指现在正在激活的自由度数量。当波前尺寸减小时效率提高。方程被处理的顺序取决于单元的编号而不是节点的编号，于是我们需要寻找一种有效的单元编号顺序[B.4]。

波前法发展的推动力是想在高速存储器有限的机器上求解相当大的问题。与在计算开始之前要求组集所有系数矩阵的解法相比，前沿法要求更多的内部系统分类记录。这种安排的整体效率在很大程度上受调整存储读写数据转换计算的影响。如果高速存储器可以容纳整个系数矩阵时，前沿解算法并没有多少速度上的优势。

评论 每一种求解算法都有许多变式，比如系数是如何存储的和计算机编码是按行还是按列的。这些细节都不是一个典型的有限元分析使用者需要关心的问题。有兴趣的读者可以参考已经出版的编码程序。可见参考文献[2.13，2.14，4.4，B.2，B.5～B.10]。

B.3 迭代求解方法

数值分析的教材讨论了经典的迭代方法比如 Gauss-Seidel 方法和连续过松弛法[17.20]。这

些方法在有限元分析中使用显得太慢了。下面我们概述共轭梯度法，它是现在最受欢迎的方法也是一种多栅方法。

共轭梯度(CG)法 现在的问题是求解方程$[\boldsymbol{A}]\{\boldsymbol{x}\}=\{\boldsymbol{b}\}$中的未知数$\{\boldsymbol{x}\}$。在下面的简述中我们假定矩阵$[\boldsymbol{A}]$是对称的。求解$\{\boldsymbol{x}\}$的问题可以表述为最小值问题：

$$\text{最小化} \quad \{\boldsymbol{r}\}=\{\boldsymbol{b}\}-[\boldsymbol{A}]\{\boldsymbol{x}\} \quad \text{或者最小化} \quad \Pi=\frac{1}{2}\{\boldsymbol{x}\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{A}]\{\boldsymbol{x}\}-\{\boldsymbol{x}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{b}\} \tag{B.3-1}$$

这里$\{\boldsymbol{r}\}$是余量，在结构力学中，Π是势能。可以将共轭梯度算法看作是一种最小值搜索法，同样地它也是最优化理论的一部分[B.11]。Π的梯度是$-\{\boldsymbol{r}\}$，于是(正)$\{\boldsymbol{r}\}$是从给定的近似点$\{\boldsymbol{x}\}$陡降最快的方向。CG方法使用搜索方向$\{\boldsymbol{p}\}$，它靠近陡降最快的方向，在约束条件下向量$\{\boldsymbol{p}\}$是共轭的；这就是说，与$[\boldsymbol{A}]$正交，这意味着对于$i\neq j$有$\{\boldsymbol{p}\}_i^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{A}]\{\boldsymbol{p}\}_j=0$。其解是向量$\{\boldsymbol{p}\}$的加权和。

$$\{\boldsymbol{x}\}=\alpha_1\{\boldsymbol{p}\}_1+\alpha_2\{\boldsymbol{p}\}_2+\cdots+\alpha_m\{\boldsymbol{p}\}_m \tag{B.3-2}$$

如果计算能用精确的算术方法做，那么当$m=n$时将会得到精确的$\{\boldsymbol{x}\}$，这里m是搜索方向的个数(或者迭代的次数)，n是需要解决的方程组的阶数。计算机表示的数仅有有限的精度，于是经过n步不会产生精确的结果。如果根据收敛条件得出计算结果已经“十分接近”精确值，计算也就停止了。对于实际使用的方法，当m比n小得多的时候，收敛条件必须得到满足。

据1952年的文献报道[B.12]，即使是基本的CG算法也有几种变式。它们其中的一个写在表B.3-1的左边一列。必须为初始对称矩阵$[\boldsymbol{A}]$的上三角或者下三角分配存储空间，毫无疑问在一些稀疏矩阵的格式中，为包括$\{\boldsymbol{x}\}$的五个向量分配存储空间。这种算法的缺点是当$[A]$的条件数增大时，要求越来越多的迭代次数。对于实际的应用，需要进行预处理。

预处理的CG法 预处理器是在表B.3-1中叫做$[\boldsymbol{C}]$的附加矩阵，它被插入到CG算法中。它的作用是提供一个$[\boldsymbol{A}]$逆矩阵的近似值。当然不是去构建逆矩阵，而是用求解运算方程来提供表B.3-1右边一列的$\{\boldsymbol{z}\}=[\boldsymbol{C}]^{-1}\{\boldsymbol{r}\}$。这些运算增加了每一次迭代循环的计算量，但是减小了所需的迭代循环次数。我们不使用$[\boldsymbol{C}]=[\boldsymbol{A}]$是因为它意味着完全的直接求解，做了不必要的迭代。$[\boldsymbol{C}]^{-1}$所希望的特性是矛盾的：它应该很容易被构建，包含很少的非零项，并且对于$[\boldsymbol{A}]^{-1}$有很好的近似。

实际上近似可能是粗糙的。在叫做雅可比预处理的最简单近似中，$[\boldsymbol{C}]$是一个对角矩阵，它的列入项是矩阵$[\boldsymbol{A}]$的对角线系数。这样我们就得到了JCG方法。更广泛地使用是不完全的Choleski预处理，它提供了ICCG方法。ICCG方法使用Choleski因子(方程B.2-6或者接近Choleski变式的一种)，它最重要的不同之处是忽略填充项。不完整的Choleski因子$[\boldsymbol{U}]$仅需要占用与未分解的$[\boldsymbol{A}]$相同的内部存储空间。在分解法的变式中，如果填充项的值降到一个指定的门槛值以下就被忽略掉[B.13～B.15]。忽略填充项可能导致在分解期间对角线上出现负数。将初始对角线上的项乘以一个比1稍大的数可以避免在对角线上出现负数，典型地比1.05小，但也许可以与1.5一样大[B.1,B.14,B.15]。当使用表B.3-1中的ICCG算法时，经过Choleski分解的矩阵$[\boldsymbol{A}]$被当作预处理矩阵$[\boldsymbol{C}]$使用，这里$[\boldsymbol{C}]=[\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}][\boldsymbol{U}]$。在表B.3-1

中使用$[C]^{-1}$的运算要求进行直接求解方程，并不是求实际的逆矩阵。如果问题情况不良，ICCG算法比JCG算法优越。ICCG算法需要两倍于JCG算法的存储空间，但是ICCG算法仍然比直接求解方法要求的存储空间少得多。参考文献包括[2.14,2.20,12.15,B.16]。

收敛测试可取不同的形式。一种可能的形式是在残数向量的欧几里德范数小于$\{b\}$的欧几里德范数乘以10^{-6}的时候停止迭代[B.17]。这里我们假定$\{b\}$不是一个零向量；于是，载荷和/或边界条件的处理必须对$\{b\}$有所贡献。基于能量或完全基于位移的收敛条件也被推荐使用。可以要求满足两个不同的收敛条件(例如，方程17.2-10)。关于这一问题的讨论见文献[2.17,B.17,B.18]。

对于一些问题的测试表明，直接解法比ICCG解法差，是由于前者所需要的时间和贮存空间分别是后者的6倍和15倍[B.19]。这种比较也出现在文献[B.1]和其它各种论文中。比较必然要依赖于具体的算法和编程的技巧，以及在测试中使用的特定问题和所用计算机的类型。

表B.3-1 求解方程组$[A]\{x\}=\{b\}$中$\{x\}$的共轭梯度算法，其中$[A]$是对称矩阵。在预处理的CG算法中使用了预处理矩阵$[C]$

共轭梯度(CG)算法	带预处理的CG算法
初始化：	初始化：
选择$\{x\}_1$	选择$\{x\}_1$
$\{p\}_1=\{r\}_1=\{b\}-[A]\{x\}_1$	$\{r\}_1=\{b\}-[A]\{x\}_1$
	$\{p\}_1=\{z\}_1=[C]^{-1}\{x\}_1$
$i=1,2,\cdots$，直到收敛：	$i=1,2,\cdots$，直到收敛：
$\{v\}_i=[A]\{p\}_i$	$\{v\}_i=[A]\{p\}_i$
$\alpha_i=\dfrac{\{r\}_i^{\mathrm{T}}\{r\}_i}{\{p\}_i^{\mathrm{T}}\{v\}_i}$	$\alpha_i=\dfrac{\{z\}_i^{\mathrm{T}}\{r\}_i}{\{p\}_i^{\mathrm{T}}\{v\}_i}$
$\{x\}_{i+1}=\{x\}_i+\alpha_i\{p\}_i$	$\{x\}_{i+1}=\{x\}_i+\alpha_i\{p\}_i$
$\{r\}_{i+1}=\{r\}_i-\alpha_i\{v\}_i$	$\{r\}_{i+1}=\{r\}_i-\alpha_i\{v\}_i$
如果收敛则停止迭代	如果收敛则停止迭代
	$\{z\}_{i+1}=[C]^{-1}\{r\}_{i+1}$
$\beta_i=\dfrac{\{r\}_{i+1}^{\mathrm{T}}\{r\}_{i+1}}{\{r\}_i^{\mathrm{T}}\{r\}_i}$	$\beta_i=\dfrac{\{z\}_{i+1}^{\mathrm{T}}\{r\}_{i+1}}{\{z\}_i^{\mathrm{T}}\{r\}_i}$
$\{p\}_{i+1}=\{r\}_{i+1}+\beta_i\{p\}_i$	$\{p\}_{i+1}=\{z\}_{i+1}+\beta_i\{p\}_i$
$i\leftarrow i+1$	$i\leftarrow i+1$

多栅方法 在结构项中，我们发现迭代方法可以快速地减少与网格所描述的复杂位移模式相关联的残数向量的值，但是对于跨越许多单元的长波模式来说收敛速度就很慢了。观察资料表明同时使用精细和粗糙的网格可以解决单一的问题。迭代方法可以用于描述两种网格的方程。与短波长相关的误差在使用精细网格的时候可以迅速减小，剩下的余量(与长波长相关)被移到粗糙网格，在这里发现由于网格的粗糙性它们与短波长相关联。作为一种选择，直

接求解方法可以被用于粗糙网格。在网格之间交替进行下去直到收敛。

多栅方法肯定比 JCG 方法有更高的效率。与大多数其它的迭代方法相比较，每一个新的向量$\{\boldsymbol{b}\}$构成一个新的问题，并且当问题是病态的时候收敛速度更慢。在迭代的编程中必须增加将残余向量从精细网格转变到粗糙网格和将求解从粗糙网格更新到精细网格的代码。于是，与直接求解法和 CG 方法相反，多栅求解不能与网格分离。参考文献包括[B. 17，B. 20，B. 21]。

备注 与直接求解方法相比，CG 方法适合求解更大的问题，如 50 000 或更多的自由度，其系数矩阵有良好的。如果系数矩阵情况不是很好(在单元被拉得相当长的情况下，已经有一些关于在求解壳问题时遇到困难的报道)，CG 方法可能比直接求解方法更慢。类似的评论也适合于直接求解方法与多栅方法的比较。如果有足够的存储空间来存储直接求解方法所需要的数据，几乎没有人选用迭代求解方法。

迭代求解方法还有一个缺点，那就是每一个新的向量$\{\boldsymbol{b}\}$构成一个新的问题，于是所需的计算时间与方程右端的的个数成比例。另一种基于预处理 Lanczos 方法的迭代求解法，能更好地适应具有多个右端项的方程，但是对于单个右端项的方程它不如 ICCG 算法快[2.17]。迭代方法可能特别适合非线性问题，那里每一次求解过程的前进(如通过增加载荷)仅仅产生很小的变化，以至于以前的求解向量对于下一次求解来说是非常好的初始向量。

在迭代方法之间和迭代与直接解法之间存在着联系[B.12]。ICCG 方法的预处理器与$[A]$的逆矩阵近似，它受$[\boldsymbol{A}]$较小特征值的控制[见方程 9.3－5 或者方程 C.2－4]。换句话说，在 ICCG 算法中预处理器减小长波长误差，就像在多栅方法中粗糙网格减小这种误差一样。也可以说在多栅方法中的粗糙网格对于精细网格起着预处理器的作用。粘性松弛解法的收敛速度也可以通过应用预处理器的概念得到加快(见 17.2 节和文献[17.10])。

附录 C

特征值和特征向量

C.1 概述

令[$\boldsymbol{A}$]和[$\boldsymbol{B}$]是 $n\times n$ 的方阵。特征问题要求求解标量 λ 的值使得矩阵方程

$$([\boldsymbol{A}]-\lambda[\boldsymbol{B}])\{\boldsymbol{x}\}=\{\boldsymbol{0}\} \tag{C.1-1}$$

有非零解，而不是无价值的$\{\boldsymbol{x}\}=\{\boldsymbol{0}\}$。这里有最多 n 个非零根 λ_i，并没有必要所有的根都不同。λ_i 被叫做特征值（其它名称包括特性值、特征根、固有值、主值）。与每个 λ_i 相对应的$\{\boldsymbol{x}\}_i$叫做特征向量（其它的名称包括本征矢量，固有矢量，主矢量，主振型，标准振型，固有振型）。λ_i 与相应的$\{\boldsymbol{x}\}_i$在一起叫做特征对。方程 C.1-1 叫做广义的特征问题或者简称特征问题。如果[$\boldsymbol{B}$]恰巧是单位矩阵[$\boldsymbol{I}$]，方程 C.1-1 就叫做标准特征问题并且相应的 λ_i 叫做[$\boldsymbol{A}$]的特征值。

方程 C.1-1 表征的普通物理问题是无阻尼机械振动，其中[$\boldsymbol{A}$]是刚度矩阵，[$\boldsymbol{B}$]是质量矩阵，$\sqrt{\lambda_i}=\omega_i$ 是振动频率，$\{\boldsymbol{x}\}_i$ 是相应的振动振型。振动特征问题的基本理论在 11.4 节有讨论。

下面我们将不加证明地讲述特征问题的一些属性，然后简要地概述一些求解方法，但是没有讨论具体的细节。用辅助方法去提高基本算法效能和使用一些基本算法的组合使实际的计算复杂化。影响选择算法的考虑因素包括所涉及的矩阵的阶数、它们的拓扑结构和需要计算多少特征值。

关于特征问题的理论和数值算法的文献相当多，我们仅仅引用了其中很少一部分。一些有限元书籍作了广泛的讨论[2,13,2,14,2,20]。其它的书籍和综述论文包括在文献[11.24，C.1～C.7]中。

C.2　标准特征问题

首先考虑如下形式的特征问题

$$([\boldsymbol{A}^*]-\lambda\lceil\boldsymbol{B}^*\rfloor)\{\boldsymbol{x}^*\}=\{\boldsymbol{0}\} \tag{C.2-1}$$

这里$[\boldsymbol{A}^*]$是 n 阶的任意方阵并且$\lceil\boldsymbol{B}^*\rfloor$是一个与$[\boldsymbol{A}^*]$有相同阶数的非奇异对角阵。因此所有的 B_{ij}^* 必定都不是零。我们定义对角阵$\lceil\boldsymbol{T}\rfloor$和$\{\boldsymbol{x}^*\}$的变换形式如下

$$T_{ii}=\frac{1}{\sqrt{B_{ii}}}\quad 和\quad \{\boldsymbol{x}^*\}=\lceil\boldsymbol{T}\rfloor\{\boldsymbol{x}\} \tag{C.2-2}$$

将方程 C.2-1 左乘以$\lceil\boldsymbol{T}\rfloor$并将方程 C.2-2 代入，得到标准特征问题：

$$([\boldsymbol{A}]-\lambda\lceil\boldsymbol{I}\rfloor)\{\boldsymbol{x}\}=\{\boldsymbol{0}\} \tag{C.2-3}$$

这里$[\boldsymbol{A}]=\lceil\boldsymbol{T}\rfloor[\boldsymbol{A}^*]\lceil\boldsymbol{T}\rfloor$。方程 C.2-1 和 C.2-3 具有相同的特征值，并且特征向量与方程 C.2-2 相关。方程 C.2-3 可以用于工程应用的属性如下，它们大多数可以从[A.1]的信息中推导出来。

1. 如果$[\boldsymbol{A}]$是实数和对称的矩阵，则 λ_i 是实数。
2. 如果$[\boldsymbol{A}]$是实数和对称的半正定矩阵，则不存在负的 λ_i。非零的 λ_i 数量等于矩阵$[\boldsymbol{A}]$的秩。
3. 如果$[\boldsymbol{A}]$是实数和对称的正定矩阵，则所有的 λ_i 都是正的。
4. 如果$[\boldsymbol{A}]$是实数正定矩阵，但是不对称，那么矩阵$[\boldsymbol{A}]+[\boldsymbol{A}]^{\mathrm{T}}$拥有正的特征值。
5. λ_i 的和等于矩阵$[\boldsymbol{A}]$的迹，并且 λ_i 的乘积等于矩阵$[\boldsymbol{A}]$的行列式。
6. 如果$\{\boldsymbol{x}\}_i$是特征向量，$c\{\boldsymbol{x}\}_i$便也是特征向量，这里 c 是任意的非零标量。
7. 如果所有的 λ_i 都不相同，则所有的特征向量也不相同并且是线性无关的。
8. 如果有 k 个相同的λ_i，则与其相关的特征向量不是唯一的，但是可以构造一组 k 个正交的特征向量[2.24]。
9. 令$[\boldsymbol{G}]$是非奇异的、与$[\boldsymbol{A}]$有相同阶数的方阵，但在别的方面是任意的。通过相似变换$[\boldsymbol{C}]=[\boldsymbol{G}]^{-1}[\boldsymbol{A}][\boldsymbol{G}]$得到的矩阵$[\boldsymbol{C}]$与$[\boldsymbol{A}]$有相同的特征值。如果$\{\boldsymbol{x}_c\}$是$[\boldsymbol{C}]$的特征向量，那么$[\boldsymbol{A}]$的相应特征向量是$[\boldsymbol{G}]\{\boldsymbol{x}_c\}$。
10. 如果$[\boldsymbol{A}]$是实数对称矩阵，它的特征向量是正交的；即对于 $i\neq j$ 有$\{\boldsymbol{x}\}_i^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{x}\}_j=0$。
11. 如果特征向量正则化使得$\{\boldsymbol{x}\}_i^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{x}\}_i=1$，那么$\{\boldsymbol{x}\}_i^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{A}]\{\boldsymbol{x}\}_j=\lambda_i$（见实数对称情况的瑞雷商，方程 11.4-13 或者方程 C.3-11）。
12. 如果每个特征向量正则化使$\{\boldsymbol{x}\}_i^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{x}\}_i=1$，并且$[\boldsymbol{A}]$是 n 阶的对称正定矩阵，那么

$$[\boldsymbol{A}]=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\{\boldsymbol{x}\}_i\{\boldsymbol{x}\}_i^{\mathrm{T}}\quad 和\quad [\boldsymbol{A}]^{-1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\{\boldsymbol{x}\}_i\{\boldsymbol{x}\}_i^{\mathrm{T}} \tag{C.2-4}$$

C.3 一般特征问题

一般特征问题具有下面的形式：

$$([\boldsymbol{A}]-\lambda[\boldsymbol{B}])\{\boldsymbol{x}\}=\{\boldsymbol{0}\} \tag{C.3-1}$$

这里$[\boldsymbol{A}]$和$[\boldsymbol{B}]$是n阶方阵。下面我们假定$[\boldsymbol{A}]$和$[\boldsymbol{B}]$是对称且不是不定的。有限元应用中大多数都是这种情况。在结构力学中，$[\boldsymbol{A}]$是半正定的刚度矩阵，如果是刚体运动和机构被抑制，那么矩阵$[\boldsymbol{A}]$是正定的；如果有的自由度没有质量则$[\boldsymbol{B}]$是半正定的质量阵，如果所有的自由度与正质量相关联则$[\boldsymbol{B}]$是正定的(一些优化的大系统能产生负质量和不定矩阵$[\boldsymbol{B}]$；见[11.11,C.8])。

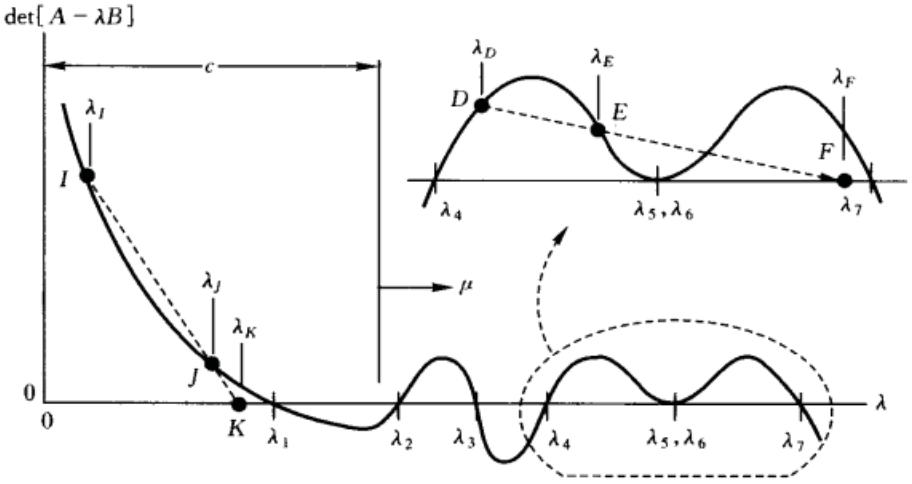


图 C.3-1 方程 C.3-2 的特征多项式，λ_i 是特征根，$i=1,2,3,\cdots$，距离 c 是特征值偏移量，方程 C.3-3

如果非零的$\{\boldsymbol{x}\}$能满足方程 C.3-1，系数矩阵的行列式必须为零。

$$\det[\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{B}]=\boldsymbol{0} \tag{C.3-2}$$

将行列式乘出来，它是λ的n次多项式，这里n是$[\boldsymbol{A}]$和$[\boldsymbol{B}]$的阶数，并且它的根就是我们想得到的特征值(图 C.3-1)。如果$n=2$，手算也可以求解多项式的根，但是它不是实用的数值方法。实际上对于$n>4$，不存在闭合形式求解多项式根的方法。因此，对于$n>4$，所有求解特征值的方法都是迭代法[2.14]。

偏移 如果我们将$\lambda=\mu+c$代入方程 C.3-1，这里c是称做“特征值偏移量”的常数，我们得到

$$([\boldsymbol{A}-c\boldsymbol{B}]-\mu[\boldsymbol{B}])\{\boldsymbol{x}\}=\{\boldsymbol{0}\}\quad \text{其中}\quad \mu=\lambda-c \tag{C.3-3}$$

方程 C.3-3 与方程 C.3-1 有相同的特征向量，但是特征值减小了c(图 C.3-1)。在结构力学中，偏移的物理解释是刚度为$-cB_{ii}$的弹簧被加入到每一个自由度x_i和地之间，因此阻止刚

体运动。如果[A]和[B]是半正定的并且 c 是一个负数，[$A-cB$]在实际问题中几乎总是正定的。因此偏移的一种可能应用是使利用不能处理奇异矩阵[A]的特征解算器成为可能。最常用的 c 是正数，如同在反向迭代中去获得特征值 λ 而不是最小特征值。虽然当 c 接近一个特征值的时候矩阵[$A-cB$]变成病态的，但在$\{x\}$中产生的误差与$\{x\}$成比例，因此并未对求解过程有什么损害[11.21]。

简化到标准形式 如果在方程 C.3-1 中的[B]是正定的，它可按照 B.2-6 分解。让我们这样做，并且再定义一个新的向量$\{x_U\}$。于是，

$$[B]=[U]^{\mathrm{T}}[U] \quad 和 \quad \{x_U\}=[U]\{x\}, \quad 于是 \quad \{x\}=[U]^{-1}\{x_U\} \tag{C.3-4}$$

如果用$[U]^{-\mathrm{T}}$左乘方程 C.3-1 并且将方程 C.3-4 代入，我们得到

$$([A_U]-\lambda[I]\{x_U\}=\{0\} \quad 其中 \quad [A_U]=[U]^{-\mathrm{T}}[A][U]^{-1} \tag{C.3-5}$$

这种变换叫做全等变换，它改变特征向量而不改变特征值。如果[B]是对角阵，这种变换简化为方程 C.2-2 和 C.2-3 的形式。如果[B]是奇异阵而[A]不是，方程 C.3-1 可以重写为下面的形式：

$$\left([B]-\frac{1}{\lambda}[A]\right)\{x\}=\{0\} \tag{C.3-6}$$

并且$[U]^{\mathrm{T}}[U]$分解可以运用到[A]。如果一般的特征问题可以被转化为标准的特征问题，那么它的属性变成为标准问题的属性[2.14]。

特征向量的正交性 假定为第 i 个特征对和第 j 个特征对写出方程 C.3-1

$$([A]-\lambda_i[B])\{x\}_i=\{0\} \qquad ([A]-\lambda_j[B])\{x\}_j=\{0\} \tag{C.3-7}$$

接着，用$\{x\}_j^{\mathrm{T}}$左乘上面的第一个方程，用$\{x\}_i^{\mathrm{T}}$左乘第二个方程，并将第二个方程转置，记住[A]和[B]是对称的。因此，

$$\{x\}_j^{\mathrm{T}}([A]-\lambda_i[B])\{x\}_i=0 \qquad \{x\}_j^{\mathrm{T}}([A]-\lambda_j[B])\{x\}_i=0 \tag{C.3-8}$$

最后，从第二个方程中减去第一个方程，现在假定在通常情况下$\lambda_i-\lambda_j\neq 0$。这样，

$$(\lambda_i-\lambda_j)\{x\}_j^{\mathrm{T}}[B]\{x\}_i=0 \quad 因此 \quad \{x\}_j^{\mathrm{T}}[B]\{x\}_i=0 \quad i\neq j \tag{C.3-9}$$

后一个公式表明特征向量关于矩阵[B]是正交的。在 $i=j$ 的情况下，以上的证明失败，但仍然有可能选出与有多重特征值一样多的正交特征向量[2.14]。重复上面的论证，使用方程 C.3-6 而不是方程 C.3-1，我们证明特征向量关于矩阵[A]也是正交的。

$$\{x\}_j^{\mathrm{T}}[A]\{x\}_i=0 \quad i\neq j \tag{C.3-10}$$

瑞雷商 假设对第 i 个特征对写出方程 C.3-1。然后左乘$\{x\}_i^{\mathrm{T}}$并且求解λ_i。得到的结果叫做瑞雷商：

$$\lambda_i = \frac{\{x\}_i^{\mathrm{T}}[A]\{x\}_i}{\{x\}_i^{\mathrm{T}}[B]\{x\}_i} \tag{C.3-11}$$

如果$\{x\}_i$是一个有一阶误差的特征向量近似值，λ_i则具有二阶误差。因此，精度较差的$\{x\}_i$的近似值可能产生具有足够高精度的λ_i。实际上，瑞雷商是当$\{x\}_i$在它的精确值附近变化时所达到的极值。因此求解特征值问题可以近似为求解最小值问题。方程 C.3-1 的最大和最小特征值限定了瑞雷商的范围；也就是说，对于任意向量$\{v\}$，

$$\lambda_{\min} \leqslant \frac{\{v\}^{\mathrm{T}}[A]\{v\}}{\{v\}^{\mathrm{T}}[B]\{v\}} \leqslant \lambda_{\max} \tag{C.3-12}$$

如果$[B]$是不定或是半定矩阵，就如同有优化的质量集中或没有旋转惯性的质量集中所发生的情况一样，对于向量$\{v\}$的一些选择，瑞雷商可能是正或负无穷大。

正则化的特征向量 特征向量可以通过用一个常数a来缩比它的项从而实现相对于矩阵$[B]$的正则化：

$$\text{计算：}\quad \{x\}_i^{\mathrm{T}}[B]\{x\}_i = a^2 \qquad \text{正则化的向量：}\quad \{x_N\}_i = \frac{1}{a}\{x\}_i \tag{C.3-13}$$

正则化的特征向量将瑞雷商减小到$\lambda_i = \{x_N\}_i^{\mathrm{T}}[A]\{x_N\}_i$。

C.4 求解算法

作为具有代表性的例子，我们只寻找方程 C.1-1 中最小的特征对。在结构动力学中，$[A]$是刚度矩阵，$[B]$是质量矩阵，不需要最大特征对，总之由于离散误差，最大特征值的计算是不精确的。有时需要一定频率范围内的特征对。提取特征对比解方程需求更多的计算量。现在已经提出了许多方法。哪种算法最快取决于数组的大小、它们的稀疏性、需要多少特征对、计算机的体系结构和编写程序的技巧。

下面是对有实用价值方法的简单研究。具体的细节出现在所引用的参考文献中。所做的解释是关于方程 C.3-1 的，但代之使用的是方程 C.3-3，在那种情况下计算偏移位的特征值μ。

变换方法 经典的变换方法适用于方程 C.2-3 的标准特征问题。如果$[B]$是对角阵，标准形式很容易得到(方程 C.2-2)，并且$[A]$的原始拓扑结构可以保存下来。在使用变换方法的时候，可能不要求先求解几个最小的特征值。所有的特征值可以同时得到。因此变换方法适用于规模较小的矩阵。

雅可比方法可以将矩阵$[A]$简化为对角阵，这样的矩阵对角线项就是特征值，并且它提供的辅助矩阵的列向量就是特征向量。这种方法简单而且稳定，并且可以处理正的、负的和零特征值。如果矩阵$[A]$是窄带矩阵的话它的效率最高。它的一种改进形式可以处理方程 C.3-1 的一般特征问题[2,14]。

当$[A]$更接近于满阵的时候，Householder-QR 方法是比较合适的。Householder 变换将

[**A**]简化为三角阵，它的特征值可以通过 QR 方法得到[2.14]。如果希望求解特征向量，可以通过其它的方法比如反向迭代得到，因为特征值已经知道，所以收敛速度很快。

行列式搜索　行列式搜索是一种"强力"法，它最适合于求窄带矩阵仅有的几个特征值。这种方法利用当 λ 是特征值的时候行列式[$\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{B}$]等于零的特性。从 λ_I 的一个试探值开始，计算行列式的值(计算方法在 B.2 中作了概述)。然后利用试探值 λ_J 计算行列式的值。这样我们得到了在图 C.3-1 中的 I 点和 J 点。割线标识了进行下一次行列式值计算中的试探值 λ_K，用点划线表示这样持续下去直到在特征值 λ_1 处收敛为止。可以加速割线迭代[C.5]。对于收敛过程来说，可能要求 $\Delta\lambda/\lambda$ 小于 10^{-5} 或者 10^{-6}，这里 $\Delta\lambda$ 是在当前和前一个 λ 的估计值之间的变化量，λ 是当前的估计值。如果希望求解特征向量，可以通过其它方法比如反向迭代来得到，因为特征值是已知量，所以收敛的速度相当快。行列式搜索可能收敛到一个我们不需要的那个根，而割线迭代可能跳过一个根(见图 C.3-1 中的小插图)。

Sturm 序列　对于一个 λ 的试探值，用高斯消元法将[$\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{B}$]转换成一个上三角矩阵[$\boldsymbol{U}_G$]，或者分解成[$\boldsymbol{U}_1$]^{T}⌈$\boldsymbol{D}$⌋[$\boldsymbol{U}_1$]的形式。(如果要估计行列式的值也可以使用这些运算)在[$\boldsymbol{U}_G$]或者⌈$\boldsymbol{D}$⌋中，对角线上负数项的数量等于比 λ 小的特征值数量。这就是 Strum 序列的属性。这对于检查算法是否漏根是非常有用的。因此在图 C.3-1 的小插图上，我们就可以发现在试探值 λ_E 和 λ_F 之间有两个特征值。

反向迭代　从一个近似向量开始连续确定改进的向量。在向量被计算后就使其正则化。然后由瑞雷商提供特征值，因为向量被正则化了，所以它的分母是 1。基本反向迭代算法的第 k 步结果是

$$\begin{aligned}
&\text{确定}\{\boldsymbol{x}^k\}: && [\boldsymbol{A}]\{\boldsymbol{x}^k\}=[\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{x}_N^{k-1}\}\\
&\text{正则化}: && \{\boldsymbol{x}_N^k\}=\frac{\{\boldsymbol{x}^k\}}{(\{\boldsymbol{x}^k\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{x}^k\})^{1/2}} \qquad \text{(C.4-1)}\\
&\text{得到根}: && \lambda_k=\{\boldsymbol{x}_N^k\}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{A}]\{\boldsymbol{x}_N^k\}
\end{aligned}$$

这里，从 $k=1$ 开始计算并且初始的试探向量可以任意取值比如$\{\boldsymbol{x}_N^0\}=\lfloor 1\ 0\ 0\ \cdots\ 0\rfloor^{\mathrm{T}}$。$\{\boldsymbol{x}^k\}$ 计算涉及求解方程的操作，没有求[$\boldsymbol{A}$]逆矩阵的过程。正则化的目的是防止特征向量没有限制地增大或者减小，所以可以使用任何方便的正则化方法。如果在方程 C.4-1 中显示出的正则化方法被代入了"得到根"步中，我们看到可用瑞雷商 C.3-11 计算 λ_k。

λ_k 收敛到最小的特征值，或者，如果已经使用了偏移方程 C.3-3，收敛于与偏移量 c 最接近的特征值 λ。当 c 接近于特征值的时候收敛的速度将加快，这表明在少量迭代几次以后 c 的值被更新了；然而，为了求解方程，系数矩阵必须被重新分解。具体细节和改进的计算方法出现在文献[2.14]中。就像在行列式搜索法中描述的一样，可以对收敛进行估计。

这种方法之所以叫做"反向迭代"是因为有一种叫"前向迭代"的方法，在那里[$\boldsymbol{A}$]和[$\boldsymbol{B}$]在式 C.4-1 的第一个方程中被相互交换。如果[$\boldsymbol{B}$]是对角阵，前向迭代的收敛速度是非常快的，但是这种方法收敛于方程 C.3-1 的最大特征值。

子空间迭代　这种方法被广泛应用于获得设定数量的最小特征对。它是反向迭代的一般

化形式，其中单个的向量$\{x\}$被矩阵$[x]$取代，矩阵$[x]$的列起到 Ritz 向量的作用，而 Ritz 向量则横跨整个特征值问题的子空间。如果需要 p 个高精度的特征对，推荐矩阵$[x]$的列数是 $2p$ 或 $p+8$，无论哪个都要最小者。Sturm 序列检测能发现该方法是否有遗漏的特征对。具体细节出现在文献[2.13,2.14,C.9]中。

Lanczos 方法 像子空间迭代，Lanczos 方法通过使用子空间之上的复合向量来获得一定数量的特征对。这些向量在迭代过程中依次产生。结果是可以从中提取特征值的三角矩阵。这种方法使用较少的存储空间，并且声称比子空间迭代方法快 2 到 10 倍[11.24]。基本的算法"可能易于被错用但也非常易于矫正"[C.10]。事实上，经过多年的增补完善该方法被优先认可，这样的工作仍在继续。参考文献包括[2.13,2.14,11.24,C.3]。

其它方法 在 B.3 节中作为方程求解方法而总结的共轭梯度方法，当在方程 C.3-1 中使用近似值 λ 时，可以用于使保留的残数向量$\{r\}$最小化[11.24,C.11]。QZ 方法比较复杂，但是在$[A]$和/或$[B]$是不定的时候仍可以计算。这种方法可用于阻尼的特征值问题[C.12,C.13]。新方法在继续发展，每一种都声称在效率上有所提高[C.14,C.15]。老方法和新发展方法的程序列表出现在包括文献[2.13,2.14,C.16~C.20]在内的一些参考文献中。

参考文献

第 1 章

1.1 E. L. Wilson, "Structural Analysis of Axisymmetric Solids," *AIAA Journal*, Vol. 3, No. 12, 1965, pp. 2269–2274.

1.2 F. Williamson, Jr., "A Historical Note on the Finite Element Method," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 15, No. 6, 1980, pp. 930–934.

1.3 K. Wieghardt, "Über einen Grenzübergang der Elastizitätslehre und Seine Anwendung auf die Statik hochgradig statisch unbestimmter Fachwerke," *Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewehrbefliesses*, Vol. 85, 1906, pp. 139–176.

1.4 W. Riedel, "Beiträge zur Lösung des ebenen Problems eines elastischen Körpers mittels der Airyschen Spannungsfunktion," *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol. 7, No. 3, 1927, pp. 169–188 (discussion by C. Weber, Vol. 8, No. 2, 1928, pp. 159–160).

1.5 A. Hrennikoff, "Solution of Problems in Elasticity by the Framework Method," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 8, No. 4, 1941, pp. A169–A175.

1.6 C. A. Felippa, "50 Year Classic Reprint: An Appreciation of R. Courant's 'Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations,' 1943," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, No. 13, 1994, pp. 2159–2187 [includes Courant's paper].

1.7 M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, and L. J. Topp, "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures," *Journal of the Aeronautical Sciences*, Vol. 23, No. 9, 1956, pp 805–823.

1.8 J. Robinson, *Early FEM Pioneers*, Robinson and Associates, Dorset, UK, 1985.

1.9 J. H. Argyris and S. Kelsey, *Energy Theorems and Structural Analysis*, Butterworths, London, 1960 [collection of papers published in *Aircraft Engineering* in 1954 and 1955].

1.10 R. W. Clough, "The Finite Element Method after Twenty-Five Years: A Personal View," *Computers & Structures*, Vol. 12, No. 4, 1980, pp. 361–370.

1.11 R. W. Clough, "Original Formulation of the Finite Element Method," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 7, No. 2, 1990, pp. 89–101.

1.12 E. L. Wilson, "Automation of the Finite Element Method—A Personal Historical View," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 13, Nos. 2 & 3, 1993, pp. 91–104.

1.13 K. K. Gupta and J. L. Meek, "A Brief History of the Finite Element Method," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 39, No. 22, 1996, pp. 3761–3774.

1.14 O. C. Zienkiewicz and Y. K. Cheung, *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*, McGraw-Hill Publishing Co. Ltd., London, 1967.

1.15 J. Mackerle, "Some Remarks on Progress with Finite Elements," *Computers & Structures*, Vol. 55, No. 6, 1995, pp. 1101–1106.

1.16 W. C. Young, *Roark's Formulas for Stress and Strain*, 6th ed., McGraw-Hill, New York, 1989.

1.17 T. Sussman and K. J. Bathe, "Studies of Finite Element Procedures—Stress Band Plots and the Evaluation of Finite Element Meshes," *Engineering Computations*, Vol. 3, No. 3, 1986, pp. 178–191.

1.18 "Computer Misuse—Are We Dealing with a Time Bomb? Who Is to Blame and What Are We Doing about It? A Panel Discussion," in *Forensic Engineering*, Proceedings of the First Congress, K. L. Rens (ed.), American Society of Civil Engineers, Reston, VA, 1997, pp. 285–336.
1.19 P. S. Symonds and T. X. Yu, "Counterintuitive Behavior in a Problem of Elastic-Plastic Beam Dynamics," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 52, No. 3, 1985, pp. 517–522.
1.20 G. E. Smith, "The Dangers of CAD," *Mechanical Engineering*, Vol. 108, No. 2, 1986, pp. 58–64.

第 2 章

2.1 G. R. Cowper, "The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 33, No. 2, 1966, pp. 335–340.
2.2 J. S. Przemieneicki, *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1968.
2.3 R. T. Severn, "Inclusion of Shear Deflection in the Stiffness Matrix for a Beam Element," *Journal of Strain Analysis*, Vol. 5, No. 4, 1970, pp. 239–241.
2.4 R. Narayanaswami and H. M. Adelman, "Inclusion of Transverse Shear Deformation in Finite Element Displacement Formulations," *AIAA Journal*, Vol. 12, No. 11, 1974, pp. 1613–1614 (discussion: Vol. 13, No. 9, 1975, pp. 1253–1254).
2.5 W. L. Cleghorn, B. Tabarrok, Y. Xiong, and T. W. Lee, "A Note on Some Exact Elements," *International Journal of Mechanical Engineering Education*, Vol. 19, No. 2, 1991, pp. 143–154.
2.6 R. D. Cook and W. C. Young, *Advanced Mechanics of Materials*, 2nd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1999.
2.7 J. W. Bull, ed., *Finite Element Applications to Thin-Walled Structures*, Elsevier Applied Science, London, 1990.
2.8 D. Krajcinovic, "A Consistent Discrete Elements Technique for Thinwalled Assemblages," *International Journal of Solids & Structures*, Vol. 5, No. 7, 1969, pp. 639–662.
2.9 P. W. Sharman, "Analysis of Structures with Thin-Walled Open Sections," *International Journal of Mechanical Sciences,* Vol. 27, No. 10, 1985, pp. 665–677.
2.10 H. Chen and G. E. Blandford, "A C^0 Finite Element Formulation for Thin-Walled Beams," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 28, No. 10, 1989, pp. 2239–2255.
2.11 J. W. Wekezer, "Vibrational Analysis of Thin-Walled Bars with Open Cross Sections," *ASCE Journal of Structural Engineering*, Vol. 115, No. 12, 1989, pp. 2965–2978.
2.12 S. Y. Back and K. M. Will, "A Shear-Flexible Element with Warping for Thin-Walled Open Beams," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 43, No. 7, 1998, pp. 1173–1191.
2.13 T. J. R. Hughes, *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987.
2.14 K. J. Bathe, *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1996.
2.15 I. M. Smith and D. V. Griffiths, *Programming the Finite Element Method*, 3rd ed., John Wiley & Sons, Chichester, UK, 1998.
2.16 S. W. Sloan, "A Fortran Program for Profile and Wavefront Reduction," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 28, No. 11, 1989, pp. 2651–2679 [includes program listing].
2.17 M. A. Crisfield, *Finite Elements and Solution Procedures for Structural Analysis*, Pineridge Press, Swansea, UK, 1986.
2.18 M. Papadrakakis and S. Smerou, "A New Implementation of the Lanczos Method in Linear Problems," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 29, No. 1, 1990, pp. 141–159.

2.19 G. Prathap and B. P. Naganarayana, "Consistent Thermal Stress Evaluation in Finite Elements," *Computers & Structures*, Vol. 54, No. 3, 1995, pp. 415–426.
2.20 H. Kardestuncer, ed., *Finite Element Handbook*, McGraw-Hill, New York, 1987.
2.21 C. Meyer, ed., *Finite Element Idealization*, American Society of Civil Engineers, New York, 1987.
2.22 P. D. Mangalgiri, B. Dattaguru, and T. S. Ramamurthy, "Specification of Skew Conditions in Finite Element Formulation," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 12, No. 6, 1978, pp. 1037–1041.
2.23 C. J. Burgoyne and R. Dilmaghanian, "Bicycle Wheel as Prestressed Structure," *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 119, No. 3, 1993, pp. 439–455.

第 3 章

3.1 S. P. Timoshenko and J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1970.
3.2 Y. C. Fung, *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1965.
3.3 R. H. MacNeal, *Finite Elements: Their Design and Performance*, Marcel Dekker, New York, 1994.
3.4 C. A. Felippa, "Refined Finite Element Analysis of Linear and Nonlinear Two-Dimensional Structures," Ph.D. Dissertation, University of California, Berkeley, 1966 [also available as PB-178-418 and PB-178-419, N.T.I.S.; computer programs in the latter].
3.5 D. J. Allman, "A Compatible Triangular Element Including Vertex Rotations for Plane Elasticity Analysis," *Computers & Structures*, Vol. 19, No. 1–2, 1984, pp. 1–8.
3.6 K. Y. Sze and Y. S. Pan, "Hybrid Stress Tetrahedral Elements with Allman's Rotational D.O.F.," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 48, No. 7, 2000, pp. 1055–1070.
3.7 K. Y. Sze, Chen Wanji, and Y. K. Cheung, "An Efficient Quadrilateral Plane Element with Drilling Degrees of Freedom Using Orthogonal Stress Modes," *Computers & Structures*, Vol. 42, No. 5, 1992, pp. 695–705.
3.8 M. Iura and S. N. Atluri, "Formulation of a Membrane Finite Element with Drilling Degrees of Freedom," *Computational Mechanics*, Vol. 9, No. 6, 1992, pp. 417–428.
3.9 Long Yuqiu and Xu Yin, "Generalized Conforming Triangular Membrane Element with Vertex Rigid Rotational Freedoms," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 17, No. 4, 1994, pp. 259–271.
3.10 T. J. R. Hughes, A. Masud, and I. Harari, "Numerical Assessment of Some Membrane Elements with Drilling Degrees of Freedom," *Computers & Structures*, Vol. 55, No. 2, 1995, pp. 297–314.
3.11 E. L. Wilson, R. L. Taylor, W. P. Doherty, and J. Ghaboussi, "Incompatible Displacement Models," in *Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics*, S. J. Fenves et al., eds., Academic Press, New York, 1973, pp. 43–57.
3.12 I. U. Ojalvo, "Improved Thermal Stress Determination by Finite Element Methods," *AIAA Journal*, Vol. 12, No. 8, 1974, pp.1131-1132.
3.13 J. Pittr and H. Hartl, "Improved Stress Evaluation Under Thermal Load for Simple Elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 15, No. 10, 1980, pp. 1507–1515.
3.14 D. Munz and Y. Y. Yang, "Stress Singularities at the Interface in Bonded Dissimilar Materials under Mechanical and Thermal Loading," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 59, No. 4, 1992, pp. 857–861.
3.15 S. Ioka, S. Kubo, K. Ohji, and J. Kishimoto, "Thermal Residual Stresses in Bonded Dissimilar Materials and Their Singularities," *International Journal JSME, Series A: Mechanics and Materials Engineering*, Vol. 39, No. 2, 1996, pp. 197–203.

3.16 W. J. O'Donnell, "The Additional Deflection of a Cantilever Due to the Elasticity of the Support," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 27, No. 3, 1960, pp. 461–464.

第 4 章

4.1 H. L. Langhaar, *Energy Methods in Applied Mechanics*, John Wiley & Sons, New York, 1962.
4.2 K. Washizu, *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, 3rd ed., Pergamon Press, Oxford, UK, 1982.
4.3 J. N. Reddy, *Variational Methods in Applied Mechanics*, John Wiley & Sons, New York, 1984.
4.4 O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, *The Finite Element Method*, 4th ed., Vol. 1, McGraw-Hill, London, 1989.
4.5 R. J. Melosh and D. W. Lobitz, "On a Numerical Sufficiency Test for Monotonic Convergence of Finite Element Models," *AIAA Journal*, Vol. 13, No. 5, 1975, pp. 675–678.
4.6 T. H. H. Pian, "Derivation of Element Stiffness Matrices by Assumed Stress Functions," *AIAA Journal*, Vol. 2, No. 7, 1964, pp. 1333–1336 (discussion: Vol. 3, No. 1, 1965, pp.186–187).
4.7 J. P. Wolf, "Alternate Hybrid Stress Finite Element Models," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 9, No. 3, 1975, pp. 601–615.
4.8 T. H. H. Pian and C.-C. Wu, "A Rational Approach for Choosing Stress Terms for Hybrid Finite Element Formulations," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 26, No. 10, 1988, pp. 2331–2343.
4.9 C. K. Lee and R. E. Hobbs, "Closed Form Stiffness Matrix Solutions for Some Commonly Used Hybrid Finite Elements," *Computers & Structures*, Vol. 67, No. 6, 1998, pp. 463–482.
4.10 K. Y. Sze, "On Immunizing Five-Beta Hybrid-Stress Models from 'Trapezoidal Locking' in Practical Analyses," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 47, No. 4, 2000, pp. 907–920.
4.11 J. Jirousek and P. Teodorescu, "Large Finite Elements Method for the Solution of Problems in the Theory of Elasticity," *Computers & Structures*, Vol. 15, No. 5, 1982, pp. 575–587.
4.12 J. Jirousek and L. Guex, "The Hybrid-Trefftz Finite Element Model and Its Application to Plate Bending," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, No. 4, 1986, pp. 651–693.
4.13 J. Jirousek and A. Wróblewski, "T-Elements: State of the Art and Future Trends," *Archives of Computational Methods in Engineering*, Vol. 3, No. 4, 1996, pp. 323–434.
4.14 J. Jirousek and A. P. Zielinski, "Survey of Trefftz-Type Element Formulations," *Computers & Structures*, Vol. 63, No. 2, 1997, pp. 225–242.
4.15 M. Fröier, L. Nilsson, and A. Samuelsson, "The Rectangular Plane Stress Element by Turner, Pian, and Wilson," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 8, No. 2, 1974, pp. 433–437.

第 5 章

5.1 S. H. Crandall, *Engineering Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1956.
5.2 B. A. Finlayson and L. E. Scriven, "The Method of Weighted Residuals—A Review," *ASME Applied Mechanics Reviews*, Vol. 19, No. 9, 1966, pp. 735–748 [cites 187 refs.].
5.3 B. A. Finlayson, *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*, Academic Press, New York, 1972.
5.4 C. A. J. Fletcher, *Computational Galerkin Methods*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
5.5 E. D. Eason, "A Review of Least-Squares Methods for Solving Partial Differential Equations," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 10, No. 5, 1976, pp. 1021–1046 [cites 241 refs.].

5.6 M. F. N. Mohsen, "Some Details of the Galerkin Finite Element Method," *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 6, No. 3, 1982, pp. 165–170.
5.7 S. Kumaresan, S. Radhakrishnan, and N. Ganesan, "Mixed Models in Finite Element Analysis," *Computers & Structures*, Vol. 51, No. 1, 1994, pp. 117–123.
5.8 D. S. Malkus and T. J. R. Hughes, "Mixed Finite Element Methods—Reduced and Selective Integration Techniques: A Unification of Concepts," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 15, No. 1, 1978, pp. 63–81.
5.9 R. H. Gallagher, J. A. Liggett, and S. T. K. Chan, "Finite Element Shallow Lake Circulation Analysis," *ASCE Journal of the Hydraulics Division*, Vol. 99, No. HY7, 1973, pp. 1083–1096.

第 6 章

6.1 B. M. Irons, "Engineering Applications of Numerical Integration in Stiffness Methods," *AIAA Journal*, Vol. 4, No. 11, 1966, pp. 2035–2037.
6.2 A. H. Stroud and D. Secrest, *Gaussian Quadrature Formulas*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1966.
6.3 T. K. Hellen, "Effective Quadrature Rules for Quadratic Solid Isoparametric Elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 4, No. 4, 1972, pp. 597–599.
6.4 G. Bedrosian, "Shape Functions and Integration Formulas for Three-Dimensional Finite Element Analysis," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 35, No. 1, 1992, pp. 95–108.
6.5 J. Springer, "Shape-Derived Anisotropy Directions on Quadrangle and Brick Finite Elements," *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 12, No. 6, 1996, pp. 351–357.
6.6 R. L. Taylor, J. C. Simo, O. C. Zienkiewicz, and A. C. H. Chan, "The Patch Test---A Condition for Assessing FEM Convergence," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 22, No. 1, 1986, pp. 39–62.
6.7 R. L. Taylor, P. J. Beresford, and E. L. Wilson, "A Non-Conforming Element for Stress Analysis," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 10, No. 6, 1976, pp. 1211–1219.
6.8 E. L. Wilson and A. Ibrahimbegovic, "Use of Incompatible Displacement Modes for the Calculation of Element Stiffnesses or Stresses," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 7, No. 3, 1990, pp. 229–241.
6.9 E. L. Wilson, "The Static Condensation Algorithm," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 8, No. 1, 1974, pp. 198–203.
6.10 R. D. Cook and V. N. Shah, "A Cost Comparison of Two Static Condensation Algorithms," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 12, No. 4, 1978, pp. 581–588.
6.11 N. Bicanic and E. Hinton, "Spurious Modes in Two-Dimensional Isoparametric Elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 14, No. 10, 1979, pp. 1545–1557.
6.12 Y. H. Kim, R. F. Jones, and S. W. Lee, "Study of 20-Node Solid Element," *Communications in Applied Numerical Methods*, Vol. 6, No. 3, 1990, pp. 197–205.
6.13 W. K. Liu, Y. K. Hu, and T. Belytschko, "Multiple Quadrature Underintegrated Finite Elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, No. 19, 1994, pp. 3263–3289.
6.14 K. Y. Sze, A. K. Soh, and Y. S. Sim, "Solid Elements with Rotational DOFs by Explicit Hybrid Stabilization," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 39, No. 17, 1996, pp. 2987–3005.

6.15 M. A. Puso, "A Highly Efficient Enhanced Assumed Strain Physically Stabilized Hexahedral Element," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 49, No. 8, 2000, pp. 1029–1064.
6.16 J. Barlow, "Optimal Stress Locations in Finite Element Models," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 10, No. 2, 1976, pp. 243–251 (comment: Vol. 11, No. 3, 1977, p. 604).
6.17 J. Barlow, "More on Optimal Stress Points—Reduced Integration, Element Distortions and Error Estimation," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 28, No. 7, 1989, pp. 1487–1504.
6.18 R. T. Tenchev, "Empirical Way to Improve Stress Accuracy at Stress Concentrations in Finite Element Analysis," *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 10, No. 7, 1994, pp. 565–576.
6.19 I. Fried, "Accuracy of Complex Finite Elements," *AIAA Journal*, Vol. 10, No. 3, 1972, pp. 347–349.
6.20 N. S. Lee and K. J. Bathe, "Effects of Element Distortions on the Performance of Isoparametric Elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, No. 20, 1993, pp. 3553–3576.
6.21 K. E. Barrett, "Jacobians for Isoparametric Elements," *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 12, No. 11, 1996, pp. 755–766.
6.22 I. Ergatoudis, B. M. Irons, and O. C. Zienkiewicz, "Curved Isoparametric, 'Quadrilateral' Elements for Finite Element Analysis," *International Journal of Solids & Structures*, Vol. 4, No. 1, 1968, pp. 31–42.
6.23 T. Belytschko and D. Lasry, "A Fractal Patch Test," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 26, No. 10, 1988, pp. 2199–2210.
6.24 W. D. Pilkey, *Peterson's Stress Concentration Factors*, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York, 1997.
6.25 B. M. Irons, "Quadrature Rules for Brick Based Finite Elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 3, No. 2, 1971, pp. 293–294.
6.26 R. H. MacNeal and R. L. Harder, "A Proposed Standard Set of Problems to Test Finite Element Accuracy," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 1, No. 1, 1985, pp. 3–20.

第 7 章

7.1 R. E. Newton, "Degeneration of Brick-Type Isoparametric Elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 7, No. 4, 1973, pp. 579–581.
7.2 B. M. Irons, "A Technique for Degenerating Brick-Type Isoparametric Elements Using Hierarchical Midside Nodes," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 8, No. 1, 1974, pp. 203–209.
7.3 K. Moser and G. Swoboda, "Explicit Stiffness Matrix of the Linearly Varying Strain Triangular Element," *Computers & Structures*, Vol. 8, No. 2, 1978, pp. 311–314.
7.4 G. Subramanian and C. Jayachandra Bose, "Convenient Generation of Stiffness Matrices for the Family of Plane Triangular Elements," *Computers & Structures*, Vol. 15, No. 1, 1982, pp. 85–89.
7.5 P. S. Shiakolas, K. L. Lawrence, and R. V. Nambiar, "Closed-Form Expressions for the Linear and Quadratic Strain Tetrahedral Finite Elements," *Computers & Structures*, Vol. 50, No. 6, 1994, pp. 743–747.
7.6 N. M. Ferrers, *An Elementary Treatise on Trilinear Coordinates, the Method of Reciprocal Polars and the Theory of Projections*, Macmillan, London, 1861.
7.7 K. Bell, "A Refined Triangular Plate Bending Finite Element," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 1, No. 1, 1969, pp. 101–122.

7.8 D. A. Dunavant, "High Degree Efficient Symmetrical Gaussian Quadrature Rules for the Triangle," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, No. 6, 1985, pp. 1129–1148.
7.9 K. S. Sunder and R. A. Cookson, "Integration Points for Triangles and Tetrahedrons Obtained from the Gaussian Quadrature Points for a Line," *Computers & Structures*, Vol. 21, No. 5, 1985, pp. 881–885.
7.10 D. J. Naylor, "On Integration Formulas for Triangles," in *Numerical Methods in Geotechnical Engineering*, I. M. Smith, ed., A. A. Balkema, Rotterdam, 1994.
7.11 M. Gellert and R. Harbord, "Moderate Degree Cubature Formulas for 3-D Tetrahedral Finite Element Approximations," *Communications in Applied Numerical Methods*, Vol. 7, No. 6, 1991, pp. 487–495.
7.12 K. Y. Sze and D. Zhu, "On the Relative Merits of Three-Point Integration Rules for Six-Node Triangles," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 27, No. 4, 1997, pp. 335–343.
7.13 C. A. Felippa, "Programming the Isoparametric Six-Node Triangle," *Engineering Computations*, Vol. 7, No. 2, 1990, pp. 173–177.
7.14 P. Keast, "Moderate Degree Tetrahedral Quadrature Formulas," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 55, No. 3, 1986, pp. 339–348.

第 8 章

8.1 A. Ranjbaran, "Mathematical Formulation of Embedded Reinforcements in 3D Brick Elements," *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 12, No. 12, 1996, pp. 897–903.
8.2 R. D. Cook, "Beam Cantilevered from Elastic Support: Finite Element Modeling," *Communications in Applied Numerical Methods*, Vol. 7, No. 8, 1991, pp. 621–623.
8.3 A. K. Gupta and P. S. Ma, "Error in Eccentric Beam Formulation," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 11, No. 9, 1977, pp. 1473–1477.
8.4 R. E. Miller, "Reduction of the Error in Eccentric Beam Modeling," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 15, No. 4, 1980, pp. 575–582.
8.5 M. A. Crisfield, "The Eccentricity Issue in the Design of Plate and Shell Elements," *Communications in Applied Numerical Methods*, Vol. 7, No. 1, 1991, pp. 47–56.
8.6 M. F. Kanninen and C. H. Popelar, *Advanced Fracture Mechanics*, Oxford University Press, New York, 1985.
8.7 *ANSYS Structural Analysis Guide*, ANSYS, Inc., Canonsburg, PA, 1997.
8.8 L. Banks-Sills, "Application of the Finite Element Method to Linear Elastic Fracture Mechanics," *ASME Applied Mechanics Reviews*, Vol. 44, No. 10, 1991, pp. 447–461.
8.9 B. Y. Ting and E. F. Mockry, "Beam on Elastic Foundation Finite Element," *ASCE Journal of Structural Engineering*, Vol. 110, No. 10, 1984, pp. 2324–2339.
8.10 M. Eisenberger and D. Z. Yankelevsky, "Exact Stiffness Matrix for Beams on Elastic Foundation," *Computers & Structures*, Vol. 21, No. 6, 1985, pp. 1355–1359.
8.11 M. Eisenberger and J. Bielak, "Finite Beams on Infinite Two-Parameter Elastic Foundations," *Computers & Structures*, Vol. 42, No. 4, 1992, pp. 661–664.
8.12 M. S. Cheung, "A Simplified Finite Element Solution for the Plates on Elastic Foundation," *Computers & Structures*, Vol. 8, No. 1, 1978, pp. 139–145.
8.13 P. Bettess, *Infinite Elements*, Penshaw Press, Sunderland, UK, 1992.
8.14 J. M. C. Marques and D. R. J. Owen, "Infinite Elements in Quasi-Static Materially Nonlinear Problems," *Computers & Structures*, Vol. 18, No. 4, 1984, pp. 739–751.
8.15 S. Kay and P. Bettess, "Revised Mapping Functions for Three-Dimensional Serendipity Infinite Elements," *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 12, No. 3, 1996, pp. 181–184.

8.16 W.-S. Park, C.-B. Yun, and C.-K. Pyun, "Infinite Elements for 3-Dimensional Wave-Structural Interaction Problems," *Engineering Structures*, Vol. 14, No. 5, 1992, pp. 335–346.
8.17 Y.-B. Yang, S.-R. Kuo, and H.-H. Hung, "Frequency-Independent Infinite Elements for Analysing Semi-Infinite Problems," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 39, No. 20, 1996, pp. 3553–3596.
8.18 M. Cohen and P. C. Jennings, "Silent Boundary Methods for Transient Analysis," in *Computational Methods for Transient Analysis*, T. Belytschko and T. J. R. Hughes, eds., North-Holland, Amsterdam, 1983.
8.19 R. T. Fenner, "The Boundary Integral Equation (Boundary Element) Method in Engineering Stress Analysis," *Journal of Strain Analysis*, Vol. 18, No. 4, 1983, pp. 199–205.
8.20 D. E. Beskos, ed., *Boundary Element Methods in Mechanics*, North-Holland, Amsterdam, 1987.
8.21 J. Mackerle, "A Guide to the Literature on Finite and Boundary Element Techniques and Software," *Software for Engineering Workstations*, Vol. 4, No. 4, 1988, pp. 170–182.
8.22 G. Beer and J. O. Watson, *Introduction to Finite and Boundary Element Methods for Engineers*, John Wiley & Sons, Chichester, UK, 1992.
8.23 J. H. Kane, *Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1994.
8.24 J. Ma and M. Le, "A New Method for Coupling of Boundary Element Method and Finite Element Method," *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 16, No. 1, 1992, pp. 43–46.
8.25 C.-C. Lin, E. C. Lawton, J. A. Caliendo, and L. R. Anderson, "An Iterative Finite Element—Boundary Element Algorithm," *Computers & Structures*, Vol. 59, No. 5, 1996, pp. 899–909.
8.26 X. Li and Q. Du, " Recent Engineering Applications in China on Coupling Boundary Elements with Finite Elements," *ASME Applied Mechanics Reviews*, Vol. 50, No. 11, 1997, pp. 731–740.
8.27 S.-W. Wu, "Finite Elements with Nonreflecting Boundary Conditions Formulated by the Helmholtz Integral Equation," *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 121, No. 2, 1999, pp. 214–220.
8.28 C. Song and J. P. Wolf, "Consistent Infinitesimal Finite-Element Cell Method: Three-Dimensional Vector Wave Equation," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 39, No. 13, 1996, pp. 2189–2208.
8.29 J. P. Wolf and C. Song, *Finite Element Modelling of Unbounded Media*, John Wiley & Sons, Chichester, UK, 1996.
8.30 C. Song and J. P. Wolf, "The Scaled Boundary Finite-Element Method—Alias Consistent Infinitesimal Finite-Element Cell Method—For Elastodynamics," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 147, No. 3–4, 1997, pp. 329–355.
8.31 C. Song and J. P. Wolf, "Consistent Infinitesimal Finite-Element Cell Method for Incompressible Unbounded Medium," *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 13, No. 1, 1996, pp. 21–32.
8.32 J. S. Aurora, "Survey of Structural Reanalysis Techniques," *ASCE Journal of the Structural Division*, Vol. 102, No. ST4, 1976, pp. 783–802 [cites 89 refs.].
8.33 A. M. Abu Kassim and B. H. V. Topping, "Static Reanalysis: A Review," *ASCE Journal of Structural Engineering*, Vol. 113, No. 5, 1987, pp. 1029–1045 [cites 110 refs.].
8.34 E. Castillo, A. Cobo, A. Fernández-Canteli, F. Jubete, and E. Pruneda, "Updating Inverses in Matrix Analysis of Structures," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 43, No. 8, 1998, pp. 1479–1504.
8.35 P. B. Nair, A. J. Keane, and R. S. Langley, "Improved First-Order Approximation of Eigenvalues and Eigenvectors," *AIAA Journal*, Vol. 36, No. 9, 1998, pp. 1721–1727.
8.36 U. Kirsch, "Efficient, Accurate Reanalysis for Structural Optimization," *AIAA Journal*, Vol. 37, No. 12, 1999, pp. 1663–1669.
8.37 W. M. Jenkins, "A Neural Network for Structural Re-Analysis," *Computers & Structures*, Vol. 72, No. 6, 1999, pp. 687–698.

8.38 G. L. Rigby and G. M. McNeice, "A Strain Energy Basis for Studies of Element Stiffness Matrices," *AIAA Journal*, Vol. 10, No. 11, 1972, pp. 1490–1493.
8.39 W. P. Doherty, E. L. Wilson, and R. L. Taylor, "Stress Analysis of Axisymmetric Solids Utilizing Higher-Order Quadrilateral Finite Elements," *Report UC-SESM-69-3*, Civil Engineering Dept., University of California, Berkeley, 1969 (PB-190-312, N.T.I.S.).
8.40 D. J. Kidger and I. M. Smith, "Eigenvalues of Element Stiffness Matrices. Part II: 3-D Solid Elements," *Engineering Computations*, Vol. 9, No. 3, 1992, pp. 317–328.
8.41 J. O. Dow, T. H. Ho, and H. D. Cabiness, "Generalized Finite Element Evaluation Procedure," *ASCE Journal of Structural Engineering*, Vol. 111, No. 6, 1985, pp. 435-452.
8.42 J. Robinson, "Element Shape Sensitivity Testing Using the CRE-Method and Without a FEM System," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 7, No. 1, 1990, pp. 73–84.

第 9 章

9.1 R. A. Rosanoff, J. F. Gloudemann, and S. Levy, "Numerical Conditioning of Stiffness Matrix Formulations for Frame Structures," *Proceedings of the Second Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Wright-Patterson AFB, Ohio, 1968 (AFFDL-TR-68-150), pp. 1029–1060.
9.2 S. Utku and R. J. Melosh, "Estimating the Manipulation Errors in Finite Element Analysis, Part I," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 3, No. 4, 1987, pp. 285–295.
9.3 R. T. Haftka, "Stiffness-Matrix Condition Number and Shape Sensitivity Errors," *AIAA Journal*, Vol. 28, No. 7, 1990, pp. 1322–1324.
9.4 R. A. Rosanoff and T. A. Ginsburg, "Matrix Error Analysis for Engineers," *Proceedings of the Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965 (AFFDL-TR-66-80), pp. 887–910.
9.5 I. Fried, "Condition of Finite Element Matrices generated from Nonuniform Meshes," *AIAA Journal*, Vol. 10, No. 2, 1972, pp. 219–221.
9.6 I. Fried, "Influence of Poisson's Ratio on the Condition of the Finite Element Stiffness Matrix," *International Journal of Solids & Structures*, Vol. 9, No. 3, 1973, pp. 323–329.
9.7 B. M. Irons, "Roundoff Criteria in Direct Stiffness Solutions," *AIAA Journal*, Vol. 6, No. 7, 1968, pp. 1308–1312.
9.8 B. Noble, *Applied Linear Algebra*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1969.
9.9 G. Strang and G. J. Fix, *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973.
9.10 C. Militello and C. A. Felippa, "*r*-Adaptive Methods Based on Element-Level Error Indicators for Parallel Analysis of Plates and Shells," *The 33rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, AIAA, Washington, DC, 1992, pp. 292–301a.
9.11 R. J. Melosh and P. V. Marcal, "Energy Basis for Mesh Refinement of Structural Continua," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 11, No. 7, 1977, pp. 1083–1091.
9.12 D. J. Turke, "Characteristics of Piecewise Approximation in Numerical Analysis," in *Finite Element Grid Optimization*, M. S. Shephard and R. H. Gallagher, eds., ASME, New York, 1979, pp. 15–26.
9.13 J. Fish, "The *s*-Version of the Finite Element Method," *Computers & Structures*, Vol. 43, No. 3, 1992, pp. 539–547.
9.14 T. Belytschko, J. Fish, and A. Bayliss, "Spectral Overlay on Finite Elements for Problems with High Gradients," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 81, No. 1, 1990, pp. 71–89.

9.15 E. Rank and R. Krause, "A Multiscale Finite-Element Method," *Computers & Structures*, Vol. 64, Nos. 1–4, 1997, pp. 139–144.
9.16 E. Hinton and J. S. Campbell, "Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using a Least Squares Method," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 8, No. 3, 1974, pp. 461–480.
9.17 M. Ulbin and T. K. Hellen, "Post-Processing Techniques for Assessing Element Distortion Errors," *Engineering Computations*, Vol. 6, No. 1, 1989, pp. 35–43.
9.18 J. Avrashi and R. D. Cook, "New Error Estimation for C^0 Eigenproblems in Finite Element Analysis," *Engineering Computations*, Vol. 10, No. 3, 1993, pp. 243–256.
9.19 J. Avrashi, "High Order Gradient Smoothing Towards Improved C^1 Eigenvalues," *Engineering Computations*, Vol. 12, No. 6, 1995, pp. 513–528.
9.20 G. Loubignac, G. Cantin, and G. Touzot, "Continuous Stress Fields in Finite Element Analysis," *AIAA Journal*, Vol. 15, No. 11, 1977, pp. 1645–1647.
9.21 O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu, "The Superconvergent Patch Recovery and *A Posteriori* Error Estimates. Part 1: The Recovery Technique," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 33, No. 7, 1992, pp. 1331–1364.
9.22 N. E. Wiberg, R. Bausys, and P. Hager, "Adaptive *h*-Version Eigenfrequency Analysis," *Computers & Structures*, Vol. 71, No. 5, 1999, pp. 565–584.
9.23 N. E. Wiberg and F. Abdulwahab, "Patch Recovery based on Superconvergent Derivatives and Equilibrium," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, No. 16, 1993, pp. 2703–2724.
9.24 T. Blacker and T. Belytschko, "Superconvergent Patch Recovery with Equilibrium and Conjoint Interpolant Enhancements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, No. 3, 1994, pp. 517–536.
9.25 I. Babuška, T. Strouboulis, and C. S. Upadhyay, "A Model Study of the Quality of *A Posteriori* Error Estimators for Finite Element Solutions of Linear Elliptic Problems, with Particular Reference to the Behavior Near the Boundary," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, No. 14, 1997, pp. 2521–2577.
9.26 N. E. Wiberg, F. Abdulwahab, and S. Ziukas, "Improved Element Stresses for Node and Element Patches Using Superconvergent Patch Recovery," *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 11, No. 7, 1995, pp. 619–627.
9.27 H. C. Park, S.-H. Shin, and S. W. Lee, "A Superconvergent Stress Recovery Technique for Accurate Boundary Stress Extraction," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 45, No. 9, 1999, pp. 1227–1242.
9.28 A. A. Yazdani, H. R. Riggs, and A. Tessler, "Stress Recovery and Error Estimation for Shell Structures," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 47, No. 11, 2000, pp. 1825–1840.
9.29 A. Pica, R. D. Wood, A. O. Adekunle, and J. Bonet, "Smoothing Stress Resultants in Adaptive Finite Element Shell Analysis," *Computers & Structures*, Vol. 54, No. 5, 1995, pp. 835–849.
9.30 K. M. Okstad, T. Kvamsdal, and K. M. Mathisen, "Superconvergent Patch Recovery for Plate Problems Using Statically Admissible Stress Resultant Fields," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 44, No. 5, 1999, pp. 697–727.
9.31 R. D. Cook, J. Avrashi, and C. H. Lin, "Buckling Analysis: Alternative Formulations, Error Estimation, and Adaptive Meshing," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 11, No. 1, 1992, pp. 55–65.
9.32 O. C. Zienkiewicz znd J. Z. Zhu, "A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 24, No. 2, 1987, pp. 337–357.
9.33 O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu, "The Superconvergent Patch Recovery and *A Posteriori* Error Estimates. Part 2: Error Estimates and Adaptivity," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 33, No. 7, 1992, pp. 1365–1382.

9.34 M. K. Georges and M. S. Shephard, "Automated Adaptive Two-Dimensional System for the *hp*-Version of the Finite Element Method," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 32, No. 4, 1991, pp. 867–893.

9.35 K. Jayaswal and I. R. Grosse, "Finite Element Error Estimation for Crack Tip Singular Elements," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 14, No. 1, 1993, pp. 17–35.

9.36 O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu, "Error Estimates and Adaptive Refinement for Plate Bending Problems," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 28, No. 12, 1989, pp. 2839–2853.

9.37 E. Hinton, M. Özakça, and N. V. R. Rao, "Adaptive Analysis of Thin Shells Using Facet Elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 32, No. 6, 1991, pp. 1283–1301.

9.38 I. R. Grosse, P. Katragadda, and J. Bonoit, "An Adaptive Accuracy-Based *A Posteriori* Error Estimator," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 12, No. 1, 1992, pp. 75–90.

9.39 D. B. Stephen and G. P. Steven, "Error Estimation for Plate Buckling Elements," *Computers & Structures*, Vol. 61, No. 4, 1996, pp. 747–761.

9.40 A. Dutta, C. V. Ramakrishnan, and P. Mahajan, "Adaptive Finite Element Analysis of Structures Under Transient Dynamic Loading Using Modal Superposition," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 31, No. 4, 1999, pp. 255–272.

9.41 T. J. Baker, "Mesh Adaptation Strategies for Problems in Fluid Dynamics," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 25, Nos. 3–4, 1997, pp. 243–273.

9.42 E. Oñate and G. Bugeda, "A Study of Mesh Optimality Criteria in Adaptive Finite Element Analysis," *Engineering Computations*, Vol. 10, No. 4, 1993, pp. 307–321.

9.43 L. Y. Li, P. Bettess, J. W. Bull, and T. Bond, "Mesh Refinement Formulations in Adaptive Finite Element Methods," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, Vol. 210, No. C4, 1996, pp. 353–361.

9.44 H. S. Oh and J. K. Lim, "Modified *h*-Method with Directional Error Estimate for Finite Element Stress Analysis," *Computers & Structures*, Vol. 65, No. 2, 1997, pp. 191–204.

9.45 *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 33, Nos. 3–4, 1996 [special issue on *p*- and *hp*-methods].

9.46 *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 25, Nos. 1–4, 1997 [special issue on adaptive meshing].

9.47 S. C. Cannan, S.-C. Lin, and A. V. Mobley, "Automatic 3D Surface Meshing to Address Today's Industrial Needs," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 25, Nos. 1–2, 1997, pp. 185–198.

第 10 章

10.1 W. G. Dodge and S. E. Moore, "Stress Indices and Flexibility Factors for Moment Loadings on Elbows and Curved Pipes," *Welding Research Council Bulletin 179*, December 1972.

10.2 S. P. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1959.

10.3 R. D. Henshell, D. Walters, and G. B. Warburton, "A New Family of Curvilinear Plate Bending Elements for Vibration and Stability," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 20, No. 3, 1972, pp. 381–397 (discussion and authors' closure: Vol. 23, No. 4, 1972, pp. 507–513).

10.4 *The Standard NAFEMS Benchmarks* (Revision), National Agency for Finite Elements Methods and Standards, Glasgow, UK, 1989.

10.5 F. Osweiler, "Evolution and Synthesis of the Effective Elastic Constants Concept for the Design of Tubesheets," *ASME Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 111, No. 3, 1989, pp. 209–217.

10.6 *A Finite Element Primer*, National Agency for Finite Elements Methods and Standards, Glasgow, UK, 1986.
10.7 D. P. Jones, J. L. Gordon, D. N. Hutula, J. E. Holliday, and W. D. Jandrasits, "Application of Equivalent Elastic Methods in Three-Dimensional Finite Element Analysis," *ASME Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 121, No. 3, 1999, pp. 283–290.
10.8 R. D. Adams and W. C. Wake, *Structural Adhesive Joints in Engineering*, Elsevier Applied Science, London, 1984.
10.9 J. H. Bickford, *An Introduction to the Design and Behavior of Bolted Joints*, 3rd ed., Marcel Dekker, New York, 1995.
10.10 J. Bortman and B. A. Szabó, "Analysis of Fastened Structural Connections," *AIAA Journal*, Vol. 30, No. 11, 1992, pp. 2758–2764.
10.11 H. Chen and G. E. Blandford, "Finite-Element Model for Thin-Walled Space Frame Flexible Connection Behavior," *ASCE Journal of Structural Engineering*, Vol. 121, No. 10, 1995, pp. 1514–1521.
10.12 H. Shakourzadeh, Y. Q. Guo, and J. L. Batoz, "Modeling of Connections in the Analyses of Thin-Walled Space Frames," *Computers & Structures*, Vol. 71, No. 4, 1999, pp. 423–433.
10.13 J. M. Stallings and D. Y. Huang, "Modeling Pretensions in Bolted Connections," *Computers & Structures*, Vol. 45, No. 4, 1992, pp. 801–803.
10.14 E. Zhahavi, "A Finite Element Analysis of Flange Connections," *ASME Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 115, No. 3, 1993, pp. 327–330.
10.15 J. M. Stallings, "Member End Releases in Framed Structures," *Computers & Structures*, Vol. 46, No. 3, 1993, pp. 443–449.
10.16 O. C. Zienkiewicz and F. C. Scott, "On the Principle of Repeatability and Its Application in Analysis of Turbine and Pump Impellers," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 4, No. 3, 1972, pp. 445–448.
10.17 I. Taig, "Finite Element Analysis in Industry—Expertise or Efficiency?" in *Accuracy, Reliability, and Training in FEM Technology* (Proceedings of Fourth World Congress and Exhibition on Finite Element Methods), J. Robinson, ed., Robinson and Associates, Wimbourne, UK, 1984, pp. 56–70.
10.18 N. F. Knight, Jr., J. B. Ransom, O. H. Griffen, Jr., and D. M. Thompson, "Global/Local Methods Research Using a Common Structural Analysis Framework," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 9, No. 2, 1991, pp. 91–112.
10.19 J. B. Ransom, S. L. McCleary, and M. A. Aminpour, "A New Interface Element for Connecting Independently Modeled Substructures," *The 34th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, AIAA, Washington, DC, 1993, pp. 1693–1703.
10.20 M. A. Aminpour, T. Krishnamurthy, and Y. Shin, "Coupling of Independently Modeled Three-Dimensional Finite Element Meshes with Non-Matching Arbitrary Shape Interface Boundaries," *AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit*, AIAA, Washington, DC, 1999, pp. 856–865.
10.21 C. Zhao, B. E. Hobbs, H. B. Mühlhaus, and A. Ord, "A Consistent Point-Searching Algorithm for Solution Interpolation in Unstructured Meshes Consisting of 4-Node Bilinear Quadrilateral Elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 45, No. 10, 1999, pp. 1509–1526.
10.22 C. R. Dohrman, S. W. Key, and M. W. Heinstein, "A Method for Connecting Dissimilar Finite Element Meshes in Two Dimensions," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 48, No. 5, 2000, pp. 655–678.
10.23 T. C. Gmür and R. H. Kauten, "Three-Dimensional Solid-to-Beam Transition Elements for Structural Dynamics Analysis," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, No. 9, 1993, pp. 1429–1444.
10.24 J. S. Przemienicki, "Matrix Structural Analysis of Substructures," *AIAA Journal*, Vol. 1, No. 1, 1963, pp. 138–147.

10.25 A. J. Rizzo, "Quality Engineering with FEA and DOE," *Mechanical Engineering*, Vol. 116, No. 5, 1994, pp. 76–78.
10.26 J. Robinson, "Distortion Measures for Quadrilaterals with Curved Boundaries," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 4, No. 2, 1988, pp. 115–131.
10.27 D. A. Field, "Qualitative Measures for Initial Meshes," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 47, No. 4, 2000, pp. 887–906.
10.28 A. El-Hamalawi, "A Simple and Effective Element Distortion Factor," *Computers & Structures*, Vol. 75, No. 5, 2000, pp. 507–513.
10.29 H. S. Oh and J. K. Lim, "A Simple Error Estimator for Size and Distortion of 2D Isoparametric Finite Elements," *Computers & Structures*, Vol. 59, No. 6, 1996, pp. 989–999.
10.30 G. Gendron, "A Review of Four PC Packages for FE Structural Analysis," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 28, No. 2, 1997, pp. 105–114.
10.31 J. R. Rice, *Numerical Methods, Software, and Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1983.
10.32 P. Naur, B. Randell, and J. N. Buxton, *Software Engineering: Concepts and Techniques*, Petrocelli-Charter, New York, 1976.
10.33 K. Bell, "Some Thoughts on Design, Development and Maintenance of Engineering Software," *Advances in Engineering Software*, Vol. 8, No. 2, 1986, pp. 66–72.
10.34 J. T. Christian, "Verification and Documentation of Engineering Software," in *Reliability of Methods for Engineering Analysis*, K. J. Bathe and D. R. J. Owen, eds., Pineridge Press, Swansea, UK, 1986.
10.35 R. Evans, "Guidelines for the Selection of Analysis Software," *Mechanical Engineering*, Vol. 109, No. 3, 1987, pp. 42–43.
10.36 *Guide for Evaluating Engineering Software*, ASCE, New York, 1989.
10.37 V. Adams and A. Askenazi, *Building Better Products with Finite Element Analysis*, OnWord Press, Santa Fe, NM, 1999.
10.38 B. A. Szabó and R. L. Actis, "Finite Element Analysis in Professional Practice," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 133, Nos. 3–4, 1996, pp. 209–228.
10.39 L. Z. Emkin, "Computers in Structural Engineering Practice: The Issue of Quality," *Computers & Structures*, Vol. 30, No. 3, 1988, pp. 439–446.

第 11 章

11.1 R. R. Craig Jr., *Structural Dynamics: An Introduction to Computer Methods*, John Wiley & Sons, New York, 1981.
11.2 R. W. Clough and J. Penzien, *Dynamics of Structures*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1993.
11.3 A. K. Chopra, *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1995.
11.4 J. S. Archer, "Consistent Matrix Formulations for Structural Analysis Using Finite Element Techniques," *AIAA Journal*, Vol. 3, No. 10, 1965, pp. 1910–1918.
11.5 T. Yokoyama, "Vibrations of a Hanging Timoshenko Beam Under Gravity," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 141, No. 2, 1990, pp. 245–258.
11.6 C. Stavrinidis, J. Clinckemaillie, and J. Dubois, "New Concepts for Finite-Element Mass Matrix Formulation," *AIAA Journal*, Vol. 27, No. 9, 1989, pp. 1249–1255.
11.7 K.-O. Kim, "A Review of Mass Matrices for Eigenproblems," *Computers & Structures*, Vol. 46, No. 6, 1993, pp. 1041–1048.
11.8 E. Hinton, T. Rock, and O. C. Zienkiewicz, "A Note on Mass Lumping and Related Processes in the Finite Element Method," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 4, No. 3, 1976, pp. 245–249.

11.9 G. J. Fix, "Effect of Quadrature Errors in Finite Element Approximation of Steady State Eigenvalue and Parabolic Problems," in *Mathematical Foundations of the Finite Element Method*, I. Babuška and A. K. Aziz, eds., Academic Press, New York, 1972, pp. 525–556.
11.10 I. Fried and D. S. Malkus, "Finite Element Mass Matrix Lumping by Numerical Integration With No Convergence Rate Loss," *International Journal of Solids & Structures*, Vol. 11, No. 4, 1975, pp. 461–466.
11.11 D. S. Malkus and M. E. Plesha, "Zero and Negative Masses in Finite Element Vibration and Transient Analysis," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 59, No. 3, 1986, pp. 281–306.
11.12 R. A. Brockman, "Dynamics of the Bilinear Mindlin Plate Element," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 24, No. 12, 1987, pp. 2343–2356.
11.13 W. Carnegie, "Vibrations of Rotating Cantilever Blading: Theoretical Approaches to the Frequency Problem Based on Energy Methods," *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 1, No. 3, 1959, pp. 235–240.
11.14 R. M. Laurenson, "Modal Analysis of Rotating Flexible Structures," *AIAA Journal*, Vol. 14, No. 10, 1976, pp. 1444–1450.
11.15 W. H. Wittrick and F. W. Williams, "On the Free Vibration Analysis of Spinning Structures by Using Discrete or Distributed Mass Models," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 82, No. 1, 1982, pp. 1–15.
11.16 M. Geradin and N. Kill, "A New Approach to Finite Element Modelling of Flexible Rotors," *Engineering Computations*, Vol. 1, No. 1, 1984, pp. 52–64.
11.17 A. Y. T. Leung and T. C. Fung, "Spinning Finite Elements," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 125, No. 3, 1988, pp. 523–537 (discussion: Vol. 140, No. 2, 1990, pp. 341–347).
11.18 G. Sauer and M. Wolf, "Finite Element Analysis of Gyroscopic Effects," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 5, No. 2, 1989, pp. 131–140.
11.19 Q. H. Qin and C. X. Mao, "Coupled Torsional-Flexural Vibration of Shaft Systems in Mechanical Engineering—I. Finite Element Model," *Computers & Structures*, Vol. 58, No. 4, 1996, pp. 835–843.
11.20 J. W. S. Rayleigh, *The Theory of Sound*, 2nd ed., 1894 (reprinted by Dover Publications, New York, 1945), Vol. I, p. 102; Vol. II, p. 312.
11.21 D. Hitchings, ed., *A Finite Element Dynamics Primer*, NAFEMS, Glasgow, UK, 1992.
11.22 C. F. Beards, "Damping in Structural Joints," *Shock and Vibration Digest*, Vol. 24, No. 7, 1992, pp. 3–7.
11.23 A. K. Noor, "Recent Advances and Applications of Reduction Methods," *ASME Applied Mechanics Reviews*, Vol. 47, No. 5, 1994, pp. 125–146 [cites 235 refs.].
11.24 A. F. Bertolini, "Review of Eigensolution Procedures for Linear Dynamic Finite Element Analysis," *ASME Applied Mechanics Reviews*, Vol. 51, No. 2, 1998, pp. 155–172 [cites 320 refs.].
11.25 R. J. Guyan, "Reduction of Stiffness and Mass Matrices," *AIAA Journal*, Vol. 3, No. 2, 1965, p. 380.
11.26 B. Irons, "Structural Eigenvalue Problems: Elimination of Unwanted Variables," *AIAA Journal*, Vol. 3, No. 5, 1965, pp. 961–962.
11.27 R. L. Kidder, "Reduction of Structural Frequency Equations," *AIAA Journal*, Vol. 11, No. 6, 1973, p. 892 (discussion: Vol. 13, No. 5, 1975, pp. 701-703).
11.28 R. G. Anderson, B. M. Irons, and O. C. Zienkiewicz, "Vibration and Stability of Plates Using Finite Elements," *International Journal of Solids & Structures*, Vol. 4, No. 10, 1968, pp. 1031–1055.
11.29 V. N. Shah, and M. Raymund, "Analytical Selection of Masters for the Reduced Eigenvalue Problem," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 18, No. 1, 1982, pp. 89–98.
11.30 J. H. Ong, "Improved Automatic Masters for Eigenvalue Economization," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 3, No. 2, 1987, pp. 149–160.

11.31 K.-O. Kim and M.-K. Kang, "Convergence Acceleration of Iterative Modal Reduction Methods," *AIAA Journal*, Vol. 39, No. 1, 2001, pp. 134–140.
11.32 R. E. Cornwell, R. R. Craig, Jr., and C. P. Johnson, "On the Application of the Mode-Acceleration Method to Structural Engineering Problems," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 11, No. 5, 1983, pp. 679–688.
11.33 H. L. Soriano and F. V. Filho, "On the Modal Acceleration Method in Structural Dynamics. Mode Truncation and Static Correction," *Computers & Structures*, Vol. 29, No. 5, 1988, pp. 777–782.
11.34 J. M. Dickens, J. M. Nakagawa, and M. J. Wittbrodt, "A Critique of Mode Acceleration and Modal Truncation Augmentation Methods for Modal Response Analysis," *Computers & Structures*, Vol. 62, No. 6, 1997, pp. 985–998.
11.35 O. E. Hansteen and K. Bell, "On the Accuracy of Mode Superposition Analysis in Structural Dynamics," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 7, No. 5, 1979, pp. 405–411.
11.36 V. N. Shah, G. J. Bohm, and A. N. Nahavandi, "Modal Superposition Method for Computationally Economical Nonlinear Structural Analysis," *ASME Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 101, No. 2, 1979, pp. 134–141.
11.37 N. F. Knight Jr., "Nonlinear Structural Dynamic Analysis Using a Modified Modal Method," *AIAA Journal*, Vol. 23, No. 10, 1985, pp. 1594–1601.
11.38 R. Villaverde and M. M. Hanna, "Efficient Mode Superposition Algorithm for Seismic Analysis of Non-Linear Structures," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 21, No. 10, 1992, pp. 849–858.
11.39 R. R. Arnold, R. L. Citerly, M. Chargin, and D. Galant, "Application of Ritz Vectors for Dynamic Analysis of Large Structures," *Computers & Structures*, Vol. 21, No. 5, 1985, pp. 901–907.
11.40 E. L. Wilson, M.-W. Yuan, and J. M. Dickens, "Dynamic Analysis by Direct Superposition of Ritz Vectors," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 10, No. 6, 1982, pp. 813–821.
11.41 K.-J. Joo, E. L. Wilson, and P. Leger, "Ritz Vectors and Generation Criteria for Mode Superposition Analysis," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 18, No. 2, 1989, pp. 149–167.
11.42 R. R. Craig, Jr., "A Review of Time-Domain and Frequency-Domain Component-Mode Synthesis Methods," *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, Vol. 2, No. 2, 1987, pp. 57–72.
11.43 A. Y. T. Leung, "A Simple Dynamic Substructure Method," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 16, No. 6, 1988, pp. 827–837.
11.44 L. Meirovitch and M. K. Kwak, "Rayleigh-Ritz Based Substructure Synthesis for Flexible Multibody Systems," *AIAA Journal*, Vol. 29, No. 10, 1991, pp.1709–1719.
11.45 L. E. Suarez and M. P. Singh, "Improved Fixed Interface Method for Modal Synthesis," *AIAA Journal*, Vol. 30, No. 12, 1992, pp. 2952–2958.
11.46 W.-H. Shyu, Z.-D. Ma, and G. M. Hulbert, "A New Component Mode Synthesis Method: Quasi-Static Mode Compensation," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 24, No. 4, 1997, pp. 271–281.
11.47 T. Belytschko, "A Survey of Numerical Methods and Computer Programs for Dynamic Structural Analysis," *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 37, No. 1, 1976, pp. 23–34.
11.48 T. Belytschko, "An Overview of Semidiscretization and Time Integration Procedures," in *Computational Methods for Transient Analysis*, T. Belytschko and T. J. R. Hughes, eds., North-Holland, Amsterdam, 1983, pp. 1–65.
11.49 T. Belytschko, W. K. Liu, and B. Moran, *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, John Wiley & Sons, Chichester, UK, 2000.
11.50 D. P. Flanagan and T. Belytschko, "Eigenvalues and Stable Time Steps for the Uniform Strain Hexahedron and Quadrilateral," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 51, No. 1, 1984, pp. 35–40.

11.51 R. Courant, K. O. Friedrichs, and H. Lewy, "Über die Partiellen Differenzengleichungen der Mathematischen Physik," *Mathematische Annalen*, Vol. 100, 1928, pp. 32–74.
11.52 E. Isaacson and H. B. Keller, *Analysis of Numerical Methods*, John Wiley & Sons, New York, 1966.
11.53 J. I. Lin, "Bounds on Eigenvalues of Finite Element Systems," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 32, No. 5, 1991, pp. 957–967.
11.54 N. M. Newmark, "A Method of Computation for Structural Dynamics," *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 5, No. EM3, 1959, pp. 67–94.
11.55 H. M. Hilber, T. J. R. Hughes, and R. L. Taylor, "Improved Numerical Dissipation for Time Integration Algorithms in Structural Dynamics," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 5, No. 3, 1977, pp. 283–292.
11.56 G. M. Hulbert and T. J. R. Hughes, "An Error Analysis of Truncated Starting Conditions in Step-by-Step Time Integration: Consequences for Structural Dynamics," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 15, No. 7, 1987, pp. 901–910.
11.57 T. J. R. Hughes, "Analysis of Transient Algorithms with Particular Reference to Stability Behavior," in *Computational Methods for Transient Analysis*, T. Belytschko and T. J. R. Hughes, eds., North-Holland, Amsterdam, 1983, pp. 67–155.
11.58 T. Belytschko and R. Mullen, "Stability of Explicit-Implicit Mesh Partitions in Time Integration," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 12, No. 10, 1978, pp. 1575–1586.
11.59 T. J. R. Hughes and W.-K. Liu, "Implicit-Explicit Finite Elements in Transient Analysis: Stability Theory," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 45, No. 2, 1978, pp. 371–374.
11.60 T. J. R. Hughes and W.-K. Liu, "Implicit-Explicit Finite Elements in Transient Analysis: Implementation and Numerical Examples," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 45, No. 2, 1978, pp. 375–378.
11.61 T. J. R. Hughes, K. S. Pister, and R. L. Taylor, "Implicit-Explicit Finite Elements in Nonlinear Transient Analysis," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 17/18, Part I, 1979, pp. 159-182.
11.62 G. L. Goudreau and R. L. Taylor, "Evaluation of Numerical Integration Methods in Elastodynamics," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 2, No. 1, 1972, pp. 69–97.
11.63 S. D. Conte and C. de Boor, *Elementary Numerical Analysis*, McGraw-Hill, New York, 3rd ed., 1980.
11.64 M. L. James, G. M. Smith, J. C. Wolford, and P. W. Whaley, *Vibration of Mechanical and Structural Systems*, 2nd ed., Harper Collins, New York, 1994.
11.65 A. K. Gupta, *Response Spectrum Method*, Blackwell Scientific, Boston, MA, 1990.
11.66 C. M. Harris, ed., *Shock and Vibration Handbook*, McGraw-Hill, New York, 1996.
11.67 G. J. O'Hara and R. O. Belsheim, *Interim Design Values for Shock Design of Shipboard Equipment*, NRL Memorandum Report 1396, U.S. Naval Research Laboratory, Washington, DC, 1963.
11.68 S. Kawashima and T. Fujimoto, "Vibration Analysis of Frames with Semi-Rigid Connections," *Computers & Structures*, Vol. 19, Nos. 1–2, 1984, pp. 85–92.
11.69 Z. P. Bazant and Z. Celep, "Spurious Reflection of Elastic Waves in Nonuniform Meshes of Constant and Linear Strain Finite Elements," *Computers & Structures*, Vol. 15, No. 4, 1982, pp. 451–459.
11.70 A. O. Cifuentes, "Dynamic Response of a Beam Excited by a Moving Mass," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 5, No. 3, 1989, pp. 327–346.
11.71 M. R. Taheri, E. C. Ting, and A. R. Kukreti, "Vehicle-Guideway Interactions: A Literature Review," *Shock and Vibration Digest*, Vol. 22, No. 6, 1990, pp. 3–9 [cites 47 refs.].
11.72 J. R. Rieker, Y.-H. Lin, and M. W. Trethewey, "Discretization Considerations in Moving Load Finite Element Beam Models," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 21, No. 3, 1996, pp. 129–144.

11.73 Y.-B. Yang and J.-D. Yau, "Vehicle-Bridge Interaction Element for Dynamic Analysis," *ASCE Journal of Structural Engineering*, Vol. 123, No. 11, 1997, pp. 1512–1518.
11.74 J. Padovan and I. Zeid, "On the Development of Traveling Load Finite Elements," *Computers & Structures*, Vol. 12, No. 1, 1980, pp. 77–83.
11.75 T. R. Sutter, C. J. Camarda, J. L. Walsh, and H. M. Adelman, "Comparison of Several Methods for Calculating Vibration Mode Shape Derivatives," *AIAA Journal*, Vol. 26, No. 12, 1988, pp. 1506–1511.
11.76 B. P. Wang, "Improved Approximate Methods for Calculating Eigenvector Derivatives in Structural Dynamics," *AIAA Journal*, Vol. 29, No. 6, 1991, pp. 1018–1020.
11.77 J. E. Mottershead and M. I. Friswell, "Model Updating in Structural Dynamics: A Survey," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 167, No. 2, 1993, pp. 347–375 [cites 243 refs.].
11.78 M. I. Friswell and J. E. Mottershead, *Finite Element Model Updating in Structural Dynamics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.
11.79 S. H. Chen and X. W. Yang, "Extended Kirsch Combined Method for Eigenvalue Reanalysis," *AIAA Journal*, Vol. 38, No. 5, 2000, pp. 927–930.
11.80 R. D. Cook and J. Avrashi, "Error Estimation and Adaptive Meshing for Vibration Problems," *Computers & Structures*, Vol. 44, No. 3, 1992, pp. 619–626.
11.81 Y. M. Xie and G. P. Steven, "Explicit Formulas for Correcting Finite Element Predictions of Natural Frequencies," *Communications in Numerical Methods Engineering*, Vol. 9, No. 8, 1993, pp. 671–680.
11.82 D. B. Stephen and G. P. Steven, "Error Estimation for Natural Frequency Finite Element Analysis," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 26, No. 1, 1997, pp. 21–40.
11.83 X. D. Li, L. F. Zeng, and N.-E. Wiberg, "A Simple Local Error Estimator and an Adaptive Time-Stepping Procedure for Direct Integration Method in Dynamic Analysis," *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 9, No. 4, 1993, pp. 273–292.
11.84 N.-E. Wiberg and X. D. Li, "A Post-Processing Technique and an *A Posteriori* Error Estimate for the Newmark Method in Dynamic Analysis," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 22, No. 6, 1993, pp. 465–489.
11.85 C.-K. Choi and H.-J. Chung, "Error Estimates and Adaptive Time Stepping for Various Direct Time Integration Methods," *Computers & Structures*, Vol. 60, No. 6, 1996, pp. 923–944.
11.86 J. A. Zukas, "Some Common Problems in the Numerical Modeling of Impact Phenomena," *Computing Systems in Engineering*, Vol. 4, No. 1, 1993, pp. 43–58.

第 12 章

12.1 K. D. Hagen, *Heat Transfer with Applications*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1999.
12.2 H.-C. Huang and A. S. Usmani, *Finite Element Analysis for Heat Transfer*, Springer-Verlag, London, 1994.
12.3 E. L. Wilson, K. J. Bathe, and F. E. Peterson, "Finite Element Analysis of Linear and Nonlinear Heat Transfer," *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 29, No. 1, 1974, pp. 110–124.
12.4 R. Siegel and J. R. Howell, *Thermal Radiation Heat Transfer*, 3rd ed., Hemisphere Publishing Corp., Washington, DC, 1992.
12.5 J. F. Stelzer and R. Welzel, "Experiences in Non-Linear Analysis of Temperature Fields with Finite Elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 24, No. 1, 1987, pp. 59–73.
12.6 B. Nour-Omid, "Lanczos Method for Heat Conduction Analysis," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 24, No. 1, 1987, pp. 251–262.
12.7 T. J. R. Hughes, "Unconditionally Stable Algorithms for Nonlinear Heat Conduction," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 10, No. 2, 1977, pp. 135–139.

12.8 R. E. Cornwell and D. S. Malkus, "Improved Numerical Dissipation for Time Integration Algorithms in Conduction Heat Transfer," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 97, No. 2, 1992, pp. 149–156.
12.9 K. E. Barrett, D. M. Butterfield, J. H. Tabor, and S. Ellis, "Quadratic Elements for Heat Transfer—A Cautionary Tale," *International Journal of Mechanical Engineering Education*, Vol. 18, No. 1, 1990, pp. 59–74.
12.10 A. Craggs, "A Note on the Theory and Application of a Simple Pipe Acoustic Element," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 85, No. 2, 1982, pp. 292–295.
12.11 O. C. Zienkiewicz and R. E. Newton, "Coupled Vibrations of a Structure Submerged in a Compressible Fluid," in *Proceedings of the Symposium on Finite Element Techniques*, M. Sörensen, ed., University of Stuttgart, Germany, 1969, pp. 359–379.
12.12 O. C. Zienkiewicz and P. Bettess, "Fluid-Structure Dynamic Interaction and Wave Forces. An Introduction to Numerical Treatment," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 13, No. 1, 1978, pp. 1–16.
12.13 R. J. Astley and W. Eversman, "Finite Element Formulations for Acoustical Radiation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 88, No. 1, 1983, pp. 47–64.
12.14 A. Craggs, "A Finite Element Model for Acoustically Lined Small Rooms," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 108, No. 2, 1986, pp. 327–337.
12.15 *ANSYS Theory Reference*, Release 5.4, ANSYS Inc. Canonsburg, PA, 1997.
12.16 O. C. Zienkiewicz, "Coupled Problems and their Numerical Solution," in *Numerical Methods in Coupled Systems*, R. W. Lewis, P. Bettess, and E. Hinton, eds., John Wiley & Sons, Chichester, UK, 1984, pp. 35–58.
12.17 R. E. D. Bishop and W. G. Price, *Hydroelasticity of Ships*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1979.
12.18 A. K. Chopra and P. Chakrabarti, "Dynamics of Gravity Dams—Significance of Compressibility of Water and Three-Dimensional Effects," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 2, No. 1, 1973, pp. 103–104.
12.19 O. C. Zienkiewicz and P. Bettess, "Dynamic Fluid-Structure Interaction. Numerical Modelling of the Coupled Problem," in *Numerical Methods in Offshore Engineering*, O. C. Zienkiewicz, R. W. Lewis, and K. G. Stagg, eds., John Wiley & Sons, Chichester, UK, 1978, pp. 185–193.
12.20 L. Kiefling and G. C. Feng, "Fluid-Structure Finite Element Vibrational Analysis," *AIAA Journal*, Vol. 14, No. 2, 1976, pp. 199–203.
12.21 M. A. Hamdi, Y. Ousset, and G. Verchery, " A Displacement Method for the Analysis of Vibrations of Coupled Fluid-Structure Systems," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 13, No. 1, 1978, pp. 130–150.
12.22 L. G. Olson and K.-J. Bathe, "A Study of Displacement-Based Fluid Finite Elements for Calculating Frequencies of Fluid and Fluid-Structure Systems," *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 76, No. 2, 1983, pp. 137–151.

第 13 章

13.1 J. F. Abel and M. S. Shephard, "An Algorithm for Multipoint Constraints in Finite Element Analysis," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 14, No. 3, 1979, pp. 464–467.
13.2 S.-C. Chang and T.-W. Lin, "Constraint Relation Implementation for Finite Element Analysis from an Element Basis," *Advances in Engineering Software*, Vol. 10, No. 4, 1988, pp. 191–194.
13.3 C. A. Felippa, "Iterative Procedures for Improving Penalty Function Solutions of Algebraic Equations," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 12, No. 5, 1978, pp. 821–836.

13.4 U. Hueck, H. L. Schreyer, and P. Wriggers, "On the Incompressible Constraint of the Four-Node Quadrilateral Element," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 38, No. 17, 1995, pp. 3039–3053.
13.5 D. S. Malkus, *Finite element Analysis of Incompressible Solids*, Ph.D. Dissertation, Boston University, Boston, MA, 1976.
13.6 T. J. R. Hughes, W. K. Liu, and A. Brooks, "Finite Element Analysis of Incompressible Viscous Flows by the Penalty Function Formulation," *Journal of Computational Physics*, Vol. 30, No. 1, 1979, pp. 1–60.
13.7 C. Johnson and J. Pitikäranta, "Analysis of Some Mixed Finite Element Methods Related to Reduced Integration," *Mathematics of Computation*, Vol. 38, No. 158, 1982, pp. 375–400.
13.8 J. C. Simo, R. L. Taylor, and K. S. Pister, "Variational and Projection Methods for the Volume Constraint in Finite Deformation Plasticity," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 51, Nos. 1–3, 1985, pp. 177–208.
13.9 T. J. R. Hughes, "Generalization of Selective Integration Procedures to Anisotropic and Nonlinear Media," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 15, No. 9, 1980, pp. 1413–1418.
13.10 J. Donea and T. Belytschko, "Advances in Computational Mechanics," *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 134, No. 1, 1992, pp. 1–22.
13.11 O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, "The Finite Element Patch Test Revisited: A Computer Test for Convergence, Validation and Error Estimates," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 149, Nos. 1–4, 1997, pp. 223–254.
13.12 M. Engelman, R. L. Sani, P. M. Gresho, and M. Bercovier, "Consistent vs. Reduced Integration Penalty Methods for Incompressible Media Using Several Old and New Elements," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 2, No. 1, 1982, pp. 25–42.

第 14 章

14.1 *ANSYS News*, Swanson Analysis Systems Inc., Houston, PA, Third Issue, 1989.
14.2 R. D. Cook, "A Note on Certain Incompatible Elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 6, No. 1, 1973, pp. 146–147.
14.3 R. D. Cook, "Axisymmetric Finite Element Analysis for Pure Moment Loading of Curved Beams and Pipe Bends," *Computers & Structures*, Vol. 33, No. 2, 1989, pp. 483–487.
14.4 R. D. Cook, "Pure Bending of Curved Beams of Thin-Walled Rectangular Box Section," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 58, No. 1, 1991, pp. 154–156.
14.5 Y. K. Cheung and L. G. Tham, *Finite Strip Method*, CRC Press, Boca Raton, Florida, 1998.
14.6 O. C. Zienkiewicz and J. M. Too, "The Finite Prism in Analysis of Thick Simply Supported Box Bridges," *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, Vol. 53, Part 2, 1972, pp. 147–172.
14.7 T. Belytschko, "Finite Elements for Axisymmetric Solids Under Arbitrary Loadings with Nodes on Origin," *AIAA Journal*, Vol. 10, No. 11, 1972, pp. 1532–1533 (discussion and closure: Vol. 11, No. 9, 1973, pp. 1357–1358).
14.8 J. Padovan, "Quasi-Analytical Finite Element Procedures for Axisymmetric Anisotropic Shells and Solids," *Computers & Structures*, Vol. 4, No. 3, 1974, pp. 467–483.
14.9 J. G. Crose, "Stress Analysis of Axisymmetric Solids with Asymmetric Properties," *AIAA Journal*, Vol. 10, No. 7, 1972, pp. 866–871.
14.10 M. Sedaghat and L. R. Herrmann, "A Nonlinear, Semi-Analytical Finite Element Analysis for Nearly Axisymmetric Solids," *Computers & Structures*, Vol. 17, No. 3, 1983, pp. 389–401.

第 15 章

15.1 E. Reissner, "On Bending of Elastic Plates," *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 5, No. 1, 1947, pp. 55–68.
15.2 R. D. Mindlin, "Influence of Rotary Inertia and Shear On Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 18, No. 1, 1951, pp. 31–38.
15.3 M. M. Hrabok and T. M. Hrudey, "A Review and Catalog of Plate Bending Finite Elements," *Computers & Structures*, Vol. 19, No. 3, 1984, pp. 479–495.
15.4 J. M. Whitney and A. W. Leissa, "Analysis of Heterogeneous Anisotropic Plates," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 36, No. 2, 1969, pp. 261–266.
15.5 A. K. Noor, W. S. Burton, and C. W. Bert, "Computational Models for Sandwich Panels and Shells," *ASME Applied Mechanics Reviews*, Vol. 49, No. 3, 1996, pp. 155–199 [cites 1376 refs.].
15.6 B. M. Irons and K. J. Draper, "Inadequacy of Nodal Connections in a Stiffness Solution for Plate Bending," *AIAA Journal*, Vol. 3, No. 5, 1965, p. 961.
15.7 O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, *The Finite Element Method*, 4th ed., Vol. 2, McGraw-Hill, London, 1991.
15.8 R. H. Gallagher, *Finite Element Analysis: Fundamentals*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1975.
15.9 L. S. D. Morley, "The Constant-Moment Plate-Bending Element," *Journal of Strain Analysis*, Vol. 6, No. 1, 1971, pp. 20–24.
15.10 L. R. Herrmann, "Finite-Element Bending Analysis for Plates," *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 93, No. EM5, 1967, pp. 13–26.
15.11 J.-L. Batoz, K.-J. Bathe, and L. W. Ho, "A Study of Three-Node Triangular Plate Bending Elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 15, No. 12, 1980, pp. 1771–1812.
15.12 J.-L. Batoz, "An Explicit Formulation for an Efficient Triangular Plate Bending Element," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 18, No. 7, 1982, pp. 1077–1089.
15.13 C. Jayachandrabose, J. Kirkhope, and C. R. Babu, "An Alternative Formulation for the DKT Plate Bending Element," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, No. 7, 1985, pp. 1289–1293.
15.14 J. A. Stricklin, W. E. Haisler, P. R. Tisdale, and R. Gunderson, "A Rapidly Converging Triangular Plate Element," *AIAA Journal*, Vol. 7, No. 1, 1969, pp. 180–181.
15.15 C. Jayachandrabose and J. Kirkhope, "Construction of New Efficient Three-Node Triangular Thin-Plate Bending Elements," *Computers & Structures*, Vol. 23, No. 5, 1986, pp. 587–603.
15.16 C. Wanji and Y. K. Cheung, "Refined Quadrilateral Discrete Kirchhoff Thin Plate Bending Element," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, No. 21, 1997, pp. 3937–3953.
15.17 C. Wanji and Y. K. Cheung, "Refined Triangular Discrete Kirchhoff Plate Element for Thin Plate Bending, Vibration and Buckling Analysis," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 41, No. 8, 1998, pp. 1507–1525.
15.18 T. Belytschko, C.-S. Tsay, and W. K. Liu, "A Stabilization Matrix for the Bilinear Mindlin Plate Element," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 29, No. 3, 1981, pp. 313–327.
15.19 T. Belytschko and C.-S. Tsay, "A Stabilization Procedure for the Quadrilateral Plate Element with One-Point Quadrature," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 19, No. 3, 1983, pp. 405–419.
15.20 E. Hinton and H. C. Huang, "A Family of Quadrilateral Mindlin Plate Elements with Substitute Shear Strain Fields," *Computers & Structures*, Vol. 23, No. 3, 1986, pp. 409–431.

15.21 E. D. Pugh, E. R. Hinton, and O. C. Zienkiewicz, "A Study of Quadrilateral Plate Bending Elements with 'Reduced' Integration," *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 12, No. 7, 1978, pp. 1059–1079.

15.22 M. Dhainaut, " A Comparison Between Serendipity and Lagrange Plate Elements in the Finite Element Method," *Communications in Numerical Methods in Engineering,* Vol. 13, No. 5, 1997, pp. 343–353.

15.23 A. F. Saleeb and T. Y. Chang, "An Efficient Quadrilateral Element for Plate Bending Analysis," *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 24, No. 6, 1987, pp. 1123–1155.

15.24 H. Parisch, " A Critical Survey of the 9-Node Degenerated Shell Element with Special Emphasis on Thin Shell Application and Reduced Integration," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 20, No. 3, 1979, pp. 323–350.

15.25 A. Tessler and T. J. R. Hughes, "A Three-Node Mindlin Plate Element with Improved Transverse Shear," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 50, No. 1, 1985, pp. 71–101.

15.26 N. Carpenter, T. Belytschko, and H. Stolarski, "Locking and Shear Scaling Factors in C^0 Bending Elements," *Computers & Structures*, Vol. 22, No. 1, 1986, pp. 39–52.

15.27 G. Shi and P. Tong, "Assumed Stress C^0 Quadrilateral/Triangular Plate Elements by Interrelated Edge Displacements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 39, No. 6, 1996, pp. 1041–1051.

15.28 A. K. Soh, L. Zhifei, and C. Song, "A Mindlin Plate Triangular Element with Improved Interpolation Based on Timoshenko's Beam Theory," *Communications in Numerical Methods in Engineering,* Vol. 15, No. 7, 1999, pp. 527–532.

15.29 K. Y. Sze and C. L. Chow, "A Mixed Formulation of a Four-Node Mindlin Shell/Plate with Interpolated Covariant Transverse Shear Strains," *Computers & Structures*, Vol. 40, No. 3, 1991, pp. 775–784.

15.30 F. Auricchio and R. L. Taylor, "A Triangular Thick Plate Finite Element with an Exact Thin Limit," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 19, Nos. 1-2, 1995, pp. 57–68.

15.31 K.-J. Bathe and E. N. Dvorkin, "A Four-Node Plate Bending Element Based on Mindlin/ Reissner Plate Theory and a Mixed Interpolation," *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 21, No. 2, 1985, pp. 367–383.

15.32 C. K. Choi, S. H. Kim, Y. M. Park, and H. J. Chung, "The Best of the Enhanced Displacement Non-conforming Plate/shell Elements," *Archives of Computational Methods in Engineering*, Vol. 7, No. 1, 2000, pp. 3–18.

15.33 J. L. Batoz and P. Lardeur, "A Discrete Shear Triangular Nine D.O.F. Element for the Analysis of Thick to Very Thin Plates," *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 28, No. 3, 1989, pp. 533–560.

15.34 Y. K. Cheung and W. Chen, "Generalized Hybrid Degenerated Elements for Plates and Shells," *Computers & Structures*, Vol. 36, No. 2, 1990, pp. 279–290.

15.35 J. Jirousek, "Comment on Evaluation of Shear Forces and Reactions from Transverse Shear Deformations by using Isoparametric Quadratic Mindlin Plate Elements," *Computers & Structures*, Vol. 19, No. 5/6, 1984, pp. 899–903.

15.36 K.-J. Bathe, N.-S. Lee, and M. L. Bucalem, "On the Use of Hierarchical Models in Engineering Analysis," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 82, No. 1/3, 1990, pp. 5–26.

15.37 A. Selman, E. Hinton, and W. Atamaz-Sibai, "Edge Effects in Mindlin-Reissner Plates using Adaptive Mesh Refinement," *Engineering Computations*, Vol. 7, No. 3, 1990, pp. 217–226.

15.38 J. Jirousek and M. N'Diaye, "Accurate Evaluation of Support Reaction in Finite Element Plate-Bending Analysis," *Computers & Structures*, Vol. 38, No. 5/6, 1991, pp. 653–658.

15.39 L. S. D. Morley, *Skew Plates and Structures*, Macmillan, New York, 1963.

第 16 章

16.1 G. Wempner, "Mechanics and Finite Elements of Shells," *ASME Applied Mechanics Reviews*, Vol. 42, No. 5, 1989, pp. 129–142 [cites 148 refs.].
16.2 R. H. MacNeal, "The Evolution of Lower Order Plate and Shell Elements in MSC/NASTRAN," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 5, No. 3, 1989, pp. 197–222.
16.3 A. K. Noor, "Bibliography of Monographs and Surveys on Shells," *ASME Applied Mechanics Reviews*, Vol. 43, No. 9, 1990, pp. 223–234 [cites 538 refs.].
16.4 W. Gilewski and M. Radwanska, "A Survey of Finite Element Models for the Analysis of Moderately Thick Shells," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 9, No. 1, 1991, pp.1–21 [cites 329 refs.].
16.5 M. L. Bucalem and K. J. Bathe, "Finite Element Analysis of Shell Structures," *Archives of Computational Methods in Engineering*, Vol. 4, No. 1, 1997, pp. 3–61.
16.6 H. T. Y. Yang, S. Saigal, A. Masud, and R. K. Kapania, "A Survey of Recent Shell Finite Elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 47, Nos. 1–3, 2000, pp. 101–127 [cites 379 refs.].
16.7 T. Moan, "A Note on the Convergence of Finite Element Approximations for Problems Formulated in Curvilinear Coordinate Systems," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 3, No. 2, 1974, pp. 209–235.
16.8 F. Kikuchi, "On the Validity of the Finite Element Analysis of Circular Arches Represented by an Assemblage of Beam Elements," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 5, No. 3, 1975, pp. 253–276.
16.9 F. Kikuchi and K. Tanizawa, "Accuracy and Locking-Free Property of the Beam Element Approximation for Arch Problems," *Computers & Structures*, Vol. 19, Nos. 1–2, 1984, pp. 103–110.
16.10 K. Marguerre, " Zur Theorie der Gekrümmten Platte Grosser Formänderung," in *Proceedings of the 5th International Congress for Applied Mechanics*, J. P. Den Hartog and H. Peters, eds., John Wiley & Sons, New York, 1939, pp. 93–101.
16.11 R. D. Cook, "Simulating Curved Elements by Offsets: Rationale and Application to Shells of Revolution," *Engineering Computations*, Vol. 7, No. 1, 1990, pp. 79–80.
16.12 H. Stolarski, T. Belytschko, N. Carpenter, and J. M. Kennedy, "A Simple Triangular Curved Shell Element," *Engineering Computations*, Vol. 1, No. 3, 1984, pp. 210–218.
16.13 T. Belytschko, H. Stolarski, W. K. Liu, N. Carpenter, and S.-J. Ong, "Stress Projection for Membrane and Shear Locking in Shell Finite Elements," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 51, Nos. 1–3, 1985, pp. 221–258.
16.14 N. Carpenter, H. Stolarski, and T. Belytschko, "Improvements in Three-Node Triangular Shell Elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, No. 9, 1986, pp. 1643–1667.
16.15 R. D. Cook, "Further Development of a Three-Node Triangular Shell Element," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, No. 8, 1993, pp. 1413–1425.
16.16 G. Prathap, "The Curved Beam/Deep Arch/Finite Ring Element Revisited," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, No. 3, 1985, pp. 389–407.
16.17 H. Meck, "An Accurate Polynomial Displacement Function for Finite Ring Elements," *Computers & Structures*, Vol. 11, No. 4, 1980, pp. 265–269.
16.18 W. E. Haisler and J. L. Stricklin, "Rigid-Body Displacements of Curved Elements in the Analysis of Shells by the Matrix-Displacement Method," *AIAA Journal*, Vol. 5, No. 8, 1967, pp. 1525–1527.
16.19 P. M. Mebane and J. L. Stricklin, "Implicit Rigid-Body Motion in Curved Finite Elements," *AIAA Journal*, Vol. 9, No. 2, 1971, pp. 344–345.

16.20 G. Prathap and C. R. Babu, "An Isoparametric Quadratic Thick Curved Beam Element," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, No. 9, 1986, pp. 1583–1600.
16.21 S. F. Pawsey and R. W. Clough, "Improved Numerical Integration of Thick Shell Finite Elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 3, No. 4, 1971, pp. 575–586.
16.22 P.-G. Lee and H.-C. Sin, "Locking-Free Curved Beam Element Based on Curvature," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, No. 6, 1994, pp. 989–1007.
16.23 J. G. Kim and Y. Y. Kim, "A New Higher-Order Hybrid-Mixed Curved Beam Element," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 43, No. 5, 1998, pp. 925–940.
16.24 P. Raveendranath, G. Singh, and B. Pradhan, "A Two-Noded Locking-Free Shear Flexible Curved Beam Element," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 44, No. 2, 1999, pp. 265–280.
16.25 D. Bushnell, "Stress, Buckling and Vibration of Hybrid Bodies of Revolution," *Computers & Structures*, Vol. 7, No. 4, 1977, pp. 517–537.
16.26 J. A. Stricklin, W. E. Haisler, and W. A. Von Riesemann, "Large-Deflection Elastic-Plastic Dynamic Response of Stiffened Shells of Revolution," *ASME Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 96, No. 2, 1974, pp. 87–95.
16.27 V. Paramasivam and D. Muthiah Raj, "Shear-Deformable Axisymmetric Conical Shell Element with 6-DOF and Convergence of $O(h^4)$," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 113, Nos. 1–2, 1994, pp. 47–54.
16.28 A. Tessler, "An Efficient, Conforming Axisymmetric Shell Element Including Transverse Shear and Rotary Inertia," *Computers & Structures*, Vol. 15, No. 5, 1982, pp. 567–574.
16.29 N. Carpenter, H. Stolarski, and T. Belytschko, "A Flat Triangular Shell Element with Improved Membrane Interpolation," *Communications in Applied Numerical Methods*, Vol. 1, No. 4, 1985, pp. 161–168.
16.30 E. Providas and M. A. Kattis, "An Assessment of Two Fundamental Flat Triangular Shell Elements with Drilling Rotations," *Computers & Structures*, Vol. 77, No. 2, 2000, pp. 129–139.
16.31 R. H. MacNeal, C. T. Wilson, R. H. Harder, and C. C. Hoff, "Treatment of Shell Normals in Finite Element Analysis," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 30, No. 3, 1998, pp. 235–242.
16.32 R. H. MacNeal, "Derivation of Element Stiffness Matrices by Assumed Strain Distributions," *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 70, No. 1, 1982, pp. 3–12.
16.33 T. Belytschko, B. L. Wong, and H.-Y. Chiang, "Advances in One-Point Quadrature Shell Elements," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 96, No. 1, 1992, pp. 93–107.
16.34 Y. G. Zhu and T. Zacharia, "A New One-Point Quadrature, Quadrilateral Shell Element with Drilling Degrees of Freedom," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 136, Nos. 1–2, 1996, pp. 165–203.
16.35 B. P. Naganarayana and G. Prathap, "Force and Moment Corrections for the Warped Four-Node Quadrilateral Plane Shell Element," *Computers & Structures*, Vol. 33, No. 4, 1989 pp. 1107–1115.
16.36 R. V. Milford and W. C. Schnobrich, "Degenerated Isoparametric Finite Elements Using Explicit Integration," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, No. 1, 1986, pp. 133–154.
16.37 M. A. Crisfield, "Explicit Integration and the Isoparametric Arch and Shell Elements," *Communications in Applied Numerical Methods*, Vol. 2, No. 2, 1986, pp. 181–187.
16.38 S. M. Yunus, P. Kohnke, and S. Saigal, "An Efficient Through-Thickness Integration Scheme in an Unlimited Layer Doubly Curved Isoparametric Composite Shell Element," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 28, No. 12, 1989, pp. 2777–2793.

16.39 T. Belytschko and B. L. Wong, "Assumed Strain Stabilization Procedure for the 9-Node Lagrange Shell Element," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 28, No. 2, 1989, pp. 385–414.
16.40 T. Belytschko, W. -K. Liu, J. S. –J. Ong, and D. Lam, "Implementation and Application of a 9-Node Lagrange Shell Element with Spurious Mode Control," *Computers & Structures*, Vol. 20, Nos. 1–3, 1985, pp. 121–128.
16.41 H. Stolarski and T. Belytschko, "Shear and Membrane Locking in Curved C^0 Elements," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 41, No. 3, 1983, pp. 279–296.
16.42 K. C. Park and G. M. Stanley, "A Curved C^0 Shell Element Based on Assumed Natural-Coordinate Strains," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 53, No. 2, 1986, pp. 278–290.
16.43 R. H. MacNeal and R. L. Harder, "Eight Nodes or Nine?," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 33, No. 5, 1992, pp. 1049–1058.
16.44 N. F. Knight, Jr., "Raasch Challenge for Shell Elements," *AIAA Journal*, Vol. 35, No. 2, 1997, pp. 375–381.
16.45 W. J. Koves and S. Nair, "A Finite Element for the Analysis of Shell Intersections," *ASME Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 118, No. 4, 1996, pp. 399–406.
16.46 A. M. Yan, R. J. Jospin, and D. H. Nguyen, "An Enhanced Pipe Elbow Element—Application in Plastic Limit Analysis of Pipe Structures," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 46, No. 3, 1999, pp. 409–431.
16.47 W. R. Spillers, M. Schlogel, and D. Pilla, "A Simple Membrane Finite Element," *Computers & Structures*, Vol. 45, No. 1, 1992, pp. 181–183.
16.48 F. Muttin, "A Finite Element for Wrinkled Curved Elastic Membranes, and Its Application to Sails," *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 12, No. 11, 1996, pp. 775–785.
16.49 Y. F. Zhao, T. N. Wong, S. T. Tan, and W. J. Chen, "A Model for Simulating Flexible Surfaces of Cloth Objects," *Computers & Structures*, Vol. 63, No. 1, 1997, pp. 133–147.
16.50 S. Kang and S. Im, "Finite Element Analysis of Wrinkling Membranes," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 64, No. 2, 1997, pp. 263–269.

第 17 章

17.1 E. Hinton, ed., *NAFEMS Introduction to Nonlinear Analysis*, NAFEMS, Glasgow, UK, 1992.
17.2 M. A. Crisfield, *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Vol. 1: Essentials*, John Wiley & Sons, Chichester, UK, 1991.
17.3 M. A. Crisfield, *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Vol. 2: Advanced Topics*, John Wiley & Sons, Chichester, UK, 1997.
17.4 E. Riks, "Progress in Collapse Analyses," *ASME Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 109, No. 1, 1987, pp. 33–41.
17.5 H.-B. Hellweg and M. A. Crisfield, "A New Arc-Length Method for Handling Sharp Snap-Backs," *Computers & Structures*, Vol. 66, No. 5, 1998, pp. 705–709.
17.6 P. X. Bellini and A. Chulya, "An Improved Automatic Incremental Algorithm for the Efficient Solution of Nonlinear Finite Element Equations," *Computers & Structures*, Vol. 26, Nos. 1/2, 1987, pp. 99–110.
17.7 C.-C. Chang, "Periodically Restarted Quasi-Newton Updates in Constant Arc-Length Method," *Computers & Structures*, Vol. 41, No. 5, 1991, pp. 963–972.
17.8 C.-C. Chang, "Consistent-Stiffness Iteration Method for Elastic-Plastic Analysis," *Computers & Structures*, Vol. 43, No. 2, 1992, pp. 255–263.
17.9 P. Underwood, "Dynamic Relaxation," in *Computational Methods for Transient Analysis*, T. Belytschko and T. J. R. Hughes, eds., North-Holland, Amsterdam, 1983, pp. 245–265.

17.10 O. C. Zienkiewicz and R. Löhner, "Accelerated 'Relaxation' or Direct Solution? Future Prospects for FEM," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, No. 1, 1985, pp. 1–11.
17.11 L. C. Zhang, M. Kadkhodayan, and Y.-W. Mai, "Development of the maDR Method," *Computers & Structures*, Vol. 52, No. 1, 1994, pp. 1–8.
17.12 L. M. Kutt, A. B. Pifko, J. A. Nardiello, and J. M. Papazian, "Slow-Dynamic Finite Element Simulation of Manufacturing Processes," *Computers & Structures*, Vol. 66, No. 1, 1998, pp. 1–17.
17.13 M. M. Abdel-Gaffar, D. W. White, and W.-F. Chen, "An Error Estimate and Step Size Control Method for Nonlinear Solution Techniques," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 13, Nos. 2–3, 1993, pp. 137–148.
17.14 A. J. Abbo and S. W. Sloan, "An Automatic Load Stepping Algorithm with Error Control," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 39, No. 10, 1996, pp. 1737–1759.
17.15 A. Mendelson, *Plasticity: Theory and Application*, Macmillan Co., New York, 1968.
17.16 W. F. Chen and D. J. Han, *Plasticity for Structural Engineers*, Springer-Verlag, New York, 1988.
17.17 S. W. Sloan, "Substepping Schemes for the Numerical Integration of Elastoplastic Stress-Strain Relations," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 24, No. 5, 1987, pp. 893–911.
17.18 N.-S. Lee and K.-J. Bathe, "Error Indicators and Adaptive Remeshing in Large Deformation Finite Element Analysis," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 16, No. 2, 1994, pp. 99–139.
17.19 L.-Y. Li and P. Bettess, "Error Estimates and Adaptive Remeshing Techniques in Elasto-Plasticity," *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 13, No. 4, 1997, pp. 285–299.
17.20 J. D. Hoffman, *Numerical Methods for Engineers and Scientists*, McGraw-Hill, New York, 1992.
17.21 J. M. C. Marques, "Stress Computation in Elastoplasticity," *Engineering Computations*, Vol. 1, No. 1, 1984, pp. 42–51.
17.22 C. Nyssen, "An Efficient and Accurate Iterative Method, Allowing Large Incremental Steps, to Solve Elasto-Plastic Problems," *Computers & Structures*, Vol. 13, Nos. 1–3, 1981, pp. 63–71.
17.23 M. E. Plesha, "Eigenvalue Estimation for Dynamic Contact Problems," *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 113, No. 3, 1987, pp. 457–462.
17.24 T. Belytschko and D. F. Schoeberle, "On the Unconditional Stability of an Implicit Algorithm for Nonlinear Structural Dynamics," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 42, No. 4, 1975, pp. 865–869.
17.25 D. Kuhl and M. A. Crisfield, "Energy-Conserving and Decaying Algorithms in Non-Linear Structural Dynamics," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 45, No. 5, 1999, pp. 569–599.
17.26 Z.-Z. Zhong and J. Mackerle, "Static Contact Problems—A Review," *Engineering Computations*, Vol. 9, No. 1, 1992, pp. 3–37 [cites 629 refs.].
17.27 D. Peric and D. R. J. Owen, "Computational Model for 3-D Contact Problems with Friction Based on the Penalty Method," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 35, No. 6, 1992, pp. 1289–1309.
17.28 M. Oldenburg and L. Nilsson, "The Position Code Algorithm for Contact Searching," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, No. 3, 1994, pp. 359–386.
17.29 V. Chawla and T. A. Laursen, "Energy Consistent Algorithms for Frictional Contact Problems," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 42, No. 5, 1998, pp. 799–827.
17.30 D. W. Murray and E. L. Wilson, "Finite-Element Large Deflection Analysis of Plates," *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 95, No. EM1, 1969, pp. 143–165.

17.31 T. Belytschko and B. J. Hsieh, "Non-Linear Transient Finite Element Analysis with Convected Coordinates," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 7, No. 3, 1973, pp. 255–271.
17.32 K.-M. Hsiao, H.-J. Horng, and Y.-R. Chen, "A Corotational Procedure that Handles Large Rotations of Spatial Beam Structures," *Computers & Structures*, Vol. 27, No. 6, 1987, pp. 769–781.
17.33 S. P. Timoshenko and J. M. Gere, *Theory of Elastic Stability*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1961.
17.34 K. E. Bisshopp and D. C. Drucker, "Large Deflection of Cantilever Beam," *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 3, No. 3, 1945, pp. 272–275.
17.35 K. Schweizerhof and E. Ramm, "Displacement Dependent Pressure Loads in Nonlinear Finite Element Analysis," *Computers & Structures*, Vol. 18, No. 6, 1984, pp. 1099–1114.
17.36 A. H. Peyrot and A. M. Goulois, "Analysis of Cable Structures," *Computers & Structures*, Vol. 10, No. 5, 1979, pp. 805–813.
17.37 H. B. Jayaraman and W. C. Knudson, "A Curved Element for the Analysis of Cable Structures," *Computers & Structures*, Vol. 14, Nos. 3–4, 1981, pp. 325–333.
17.38 B. M. McDonald and A. H. Peyrot, "Analysis of Cables Suspended in Sheaves," *ASCE Journal of Structural Engineering*, Vol. 114, No. 3, 1988, pp. 693–706.
17.39 U. Starossek, "Dynamic Stiffness Matrix of Sagging Cable," *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 117, No. 12, 1991, pp. 2815–2829.
17.40 A. H. Peyrot, "Large Deflection Analysis of Beams, Pipes, or Poles," *Engineering Structures*, Vol. 4, No. 1, 1982, pp. 11–16.
17.41 P. Seide, "Large Deflections of Rectangular Membranes under Uniform Pressure," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 12, No. 6, 1977, pp. 397–406.

第 18 章

18.1 R. S. Barsoum and R. H. Gallagher, "Finite Element Analysis of Torsional and Torsional-Flexural Stability Problems," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 2, No. 3, 1970, pp. 335–352.
18.2 M. M. Attard, "Lateral Buckling Analysis of Beams by the FEM," *Computers & Structures*, Vol. 23, No. 2, 1986, pp. 217–231.
18.3 F. Laudiero and D. Zaccaria, "Finite Element Analysis of Stability of Thin-Walled Beam of Open Section," *Computers & Structures*, Vol. 30, No. 8, 1988, pp. 543–557.
18.4 C. H. Yoo, Y. J. Kang, and J. S. Davidson, "Buckling Analysis of Curved Beams by Finite-Element Discretization," *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 122, No. 8, 1996, pp. 762–770.
18.5 H. K. Stolarski and N. J. Carpenter, "An Alternative Formulation of the Geometric Stiffness Matrix for Plate Elements," *Computers & Structures*, Vol. 24, No. 6, 1986, pp. 935–940.
18.6 S. J. Shah and W. D. Pilkey, "Lumped-Parameter Approach to Stability Analysis," *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 119, No. 10, 1993, pp. 2109–2129.
18.7 S.-C. Chang and J.-J. Chen, "Effectiveness of Linear Bifurcation Analysis for Predicting the Nonlinear Stability Limits of Structures," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, No. 5, 1986, pp. 831–846.
18.8 R. D. Cook, "Finite Element Buckling Analysis of Homogeneous and Sandwich Plates," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 9, No. 1, 1975, pp. 39–50.
18.9 S. R. Bodner, "On the Conservativeness of Various Distributed Force Systems," *Journal of the Aeronautical Sciences*, Vol. 25, No. 1, 1958, pp. 132–133.
18.10 D. O. Brush and B. O. Almroth, *Buckling of Bars, Plates, and Shells*, McGraw-Hill, New York, 1975.

18.11 R. F. Jones, Jr., M. G. Costello, and T. E. Reynolds, "Buckling of Pressure Loaded Rings and Shells by the Finite Element Method," *Computers & Structures*, Vol. 7, No. 2, 1977, pp. 267–274.
18.12 H. A. Mang, "Symmetricability of Pressure Stiffness Matrices for Shells with Loaded Free Edges," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 15, No. 7, 1980, pp. 981–990.
18.13 T. Q. Ye and R. H. Gallagher, "Instability Analysis of Pressure-Loaded Thin Arches of Arbitrary Shape," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 50, No. 2, 1983, pp. 315–320.
18.14 D. Bushnell, "Analysis of Ring-Stiffened Shells of Revolution under Combined Thermal and Mechanical Loadings," *AIAA Journal*, Vol. 9, No. 3, 1971, pp. 401–410.
18.15 D. R. Navaratna, T. H. H. Pian, and E. Witmer, "Analysis of Elastic Stability of Shells of Revolution by the Finite Element Method," *AIAA Journal*, Vol. 6, No. 2, 1968, pp. 355–361.
18.16 B. O. Almroth and F. A. Brogan, "Bifurcation Buckling as an Approximation of the Collapse Load for General Shells," *AIAA Journal*, Vol. 10, No. 4, 1972, pp. 463–467.
18.17 D. Bushnell, "Buckling of Shells—Pitfall for Designers," *AIAA Journal*, Vol. 19, No. 9, 1981, pp. 1183–1226.
18.18 D. Bushnell, *Computerized Buckling Analysis of Shells*, Marinus Nijhoff, Dordrecht, 1985.
18.19 W. C. Orthwein, "Thermal Buckling of a Bimetallic Strip," *ASME Journal of Vibrations, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, Vol. 106, No. 4, 1984, pp. 538–542.
18.20 J. G. Gale and C. E. Smith, "Vibrations of Suspended Cables," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 50, No. 3, 1983, pp. 687–689.

附录 A

A.1 G. Strang, *Linear Algebra and Its Applications*, 3rd ed., Harcourt-Brace-Jovanovich, San Diego, CA, 1988.

附录 B

B.1 E. L. Poole, "Comparing Direct and Iterative Equation Solvers in a Large Structural Analysis Software System," *Computing Systems in Engineering*, Vol. 2, No. 4, 1991, pp. 397–408.
B.2 D. J. Rose, G. G. Whitten, A. H. Sherman, and R. E. Tarjan, "Algorithms and Software for In-Core Factorization of Sparse Symmetric Positive Definite Matrices," *Computers & Structures*, Vol. 11, No. 6, 1980, pp. 597–608.
B.3 J. K. Reid and J. A. Scott, "Ordering Symmetric Sparse Matrices for Small Profile and Wavefront," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 45, No. 12, 1999, pp. 1737–1755.
B.4 J. A. Scott, "On Ordering Elements for a Frontal Solver," *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 15, No. 5, 1999, pp. 309–323.
B.5 D. P. Mondkar and G. H. Powell, "Towards Optimal In-Core Equation Solving," *Computers & Structures*, Vol. 4, No. 3, 1974, pp. 531–548.
B.6 C. A. Felippa, "Solution of Linear Equations with Skyline-Stored Symmetric Matrix," *Computers & Structures*, Vol. 5, No. 1, 1975, pp. 13–29.
B.7 E. L. Wilson and H. H. Dovey, "Solution or Reduction of Equilibrium Equations for Large Complex Structural Systems," *Advances in Engineering Software*, Vol. 1, No. 1, 1978, pp. 19–25.
B.8 E. Mendelssohn and M. Baruch, "Solution of Linear Equations with a Skyline-Stored Nonsymmetric Matrix," *Computers & Structures*, Vol. 18, No. 2, 1984, pp. 215–246.

B.9 S. H. Lo, "On Bandsolver Using Skyline Storage," *Computers & Structures*, Vol. 44, No. 6, 1992, pp. 1187–1196.
B.10 M. Klisinski and K. Runesson, "Improved Symmetric and Non-Symmetric Solvers for FE Calculations," *Advances in Engineering Software*, Vol. 18, No. 1, 1993, pp. 41–51.
B.11 S. S. Rao, *Engineering Optimization: Theory and Practice*, 3rd ed., John Wiley & Sons, New York, 1996.
B.12 M. R. Hestenes and E. Stiefel, "Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems," *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, Vol. 49, No. 6, 1952, pp. 409–436.
B.13 E. Graham and P. A. Forsyth, "Preconditioning Methods for Very Ill-Conditioned Three-Dimensional Linear Elasticity Problems," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 44, No. 1, 1999, pp. 77–99.
B.14 P. Saint-George, G. Warzee, Y. Notay, and R. Beauwens, "Problem-Dependent Preconditioners for Iterative Solvers in FE Elastostatics," *Computers & Structures*, Vol. 73, Nos. 1–5, 1999, pp. 33–43.
B.15 J. K. Dickenson and P. A. Forsyth, "Preconditioned Conjugate Gradient Methods for Three-Dimensional Linear Elasticity," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, No. 13, 1994, pp. 2211–2234.
B.16 G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix Computations*, 3rd ed., Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1996.
B.17 C. E. Jouglard and A. L. G. A. Coutinho, "A Comparison of Iterative Multi-Level Finite Element Solvers," *Computers & Structures*, Vol. 69, No. 5, 1998, pp. 655–670.
B.18 A. Jennings and G. M. Malik, "The Solution of Sparse Linear Equations by the Conjugate Gradient Method," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 12, No. 1, 1978, pp. 141–158.
B.19 K. J. Bathe, J. Walczak, and H. Zhang, "Some Recent Advances for Practical Finite Element Analysis," *Computers & Structures*, Vol. 47, Nos. 4/5, 1993, pp. 511–521.
B.20 I. D. Parsons and J. F. Hall, "The Multigrid Method in Solid Mechanics: Part I—Algorithm Description and Behavior," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 29, No. 4, 1990, pp. 719–737.
B.21 D. Braess, *Finite Elements: Theory, Fast Solvers, and Applications in Structural Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

附录 C

C.1 J. H. Wilkinson, *The Algebraic Eigenvalue Problem*, Clarendon Press, Oxford, UK, 1965.
C.2 B. N. Parlett, *The Symmetric Eigenvalue Problem*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980.
C.3 N. S. Sehmi, *Large Order Structural Eigenanalysis Techniques*, Ellis Horwood Ltd., Chichester, UK, 1989.
C.4 Y. K. Cheung and A. Y. T. Leung, *Finite Element Methods in Dynamics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.
C.5 K.-J. Bathe and E. L. Wilson, "Solution Methods for Eigenvalue Problems in Structural Mechanics," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 6, No. 2, 1973, pp. 213–226.
C.6 A. Jennings, "Eigenvalue Methods for Vibration Analysis," *Shock and Vibration Digest*, Vol. 16, No. 1, 1984, pp. 25–33.
C.7 V. A. Tischler and V. B. Venkayya, "Evaluation of Eigenvalue Routines for Large Scale Applications," *Shock and Vibration*, Vol. 1, No. 3, 1994, pp. 201–216.

C.8 D. S. Malkus and X. Qui, "Divisor Structure of Finite Element Eigenproblems Arising from Zero and Negative Masses," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 66, No. 3, 1988, pp. 365–368.

C.9 X. Wang and J. Zhou, "An Accelerated Subspace Iteration Method for Generalized Eigenproblems," *Computers & Structures*, Vol. 71, No. 3, 1999, pp. 293–301.

C.10 I. U. Ojalvo, "Proper Use of Lanczos Vectors for Large Eigenvalue Problems," *Computers & Structures*, Vol. 20, Nos. 1–3, 1985, pp. 115–120.

C.11 D. T. Nguyen and J. S. Arora, "An Algorithm for Solution of Large Eigenvalue Problems," *Computers & Structures*, Vol. 24, No. 4, 1986, pp. 645–650.

C.12 I.-W. Lee, M.-C. Kim, and A. R. Robinson, "Efficient Solution Method of Eigenproblems for Damped Structural Systems Using Modified Newton-Raphson Technique," *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 124, No. 5, 1998, pp. 576–580.

C.13 M.-C. Kim and I.-W. Lee, "A Computationally Efficient Algorithm for the Solution of Eigenproblems for Large Structures with Non-Proportional Damping Using Lanczos Method," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 28, No. 2, 1999, pp. 157–172.

C.14 K. K. Gupta and C. L. Lawson, "Development and Application of a Progressive Simultaneous Iteration (PSI) Method for Vibration Analysis of Structures," *39th AIAA/ ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference and Exhibit and AIAA/ASME/AHS Adaptive Structures Forum*, Long Beach, CA, 1998, pp. 2609–2613.

C.15 I.-W. Lee, H.-J. Jung, M.-C. Kim, and A. R. Robinson, "Eigensolution Method for Structures with Multiple or Close Eigenvalues," *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 125, No. 11, 1999, pp. 1286–1292.

C.16 W. Weaver, Jr. and D. M. Yoshida, "The Eigenvalue Problem for Banded Matrices," *Computers & Structures*, Vol. 1, No. 4, 1971, pp. 651–654.

C.17 K. K. Gupta, "Eigenproblem Solution by a Combined Sturm Sequence and Inverse Iteration Technique," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 7, No. 1, 1973, pp. 17–42 (discussion: Vol. 11, No. 4, 1977, pp. 759–764).

C.18 K. K. Gupta, "Eigenproblem Solution of Damped Structural Systems," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 8, No. 4, 1974, pp. 877–911.

C.19 P. C. Chowdhury, "The Truncated Lanczos Algorithm for Partial Solution of the Symmetric Eigenproblem," *Computers & Structures*, Vol. 6, No. 6, 1976, pp. 439–446.

C.20 R. B. Corr and A. Jennings, "A Simultaneous Iteration Algorithm for Symmetric Eigenvalue Problems," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 10, No. 3, 1976, pp. 647–663.

[General Information]
SS号=11886435
书名=有限元分析的概念与应用　　(第四版)
页数=624
下载位置=http://image2.5read.com/image/ss2jpg.dll?did=b36&pid=E01E93D242EA7F3FF9ACEA1B302F4908DB26D0EFF04D652ABAE5FEFFCA2B54B6A24867392258FCEC83F3AF5D6E3CABB1F2901694 0F2BD2E12210 02C62EA1D1843D6F5AE375295 83CF324E4B59CEB0BA0355D3A939BBF5BDE1D34C3B74&jid=/000139.jpg
作者=：(美) 罗伯特·D ·库克　戴维·S ·马尔库斯　迈克尔·E ·普利沙　罗伯特·J ·威特著
出版社=西安交通大学出版社
出版日期=2007
摘要=
报文=78%