连续介质力学

简明理论和例题

（英）P·查德维克 著
傅依斌 译 严宗达 审校

天津大学出版社

366051

连续介质力学

简明理论和例题

〔英〕 P·查德维克 著

傅依斌 译

严宗达 审校

哈尔滨船舶工程学院
图书馆
藏书

天津大学出版社

O1663

内 容 摘 要

本书是一本连续介质力学的入门书，是由传统的流体力学和固体力学（弹性力学、塑性力学等）向理性力学过渡的一座很好的桥梁。

全书共四章：第一章为矢量及张量理论；第二章为基本运动学；第三章为守恒定律、场方程和跳跃条件；第四章为本构方程。每章既有基本理论的阐述，又有难度适当的例题和习题。

本书最大的特点就是深入浅出，既保持数学的严密性，又以简明的阐述和不多的篇幅使读者从传统的流体力学、固体力学的基础进入理性力学的境界。

本书可供工程力学、应用物理和应用数学专业高年级本科生及研究生作为连续介质力学课程的教材，也可供研究工作者和有志于基础理论工作的工程技术人员参考。

(津)新登字012号

连续介质力学

简明理论和例题

〔英〕 P·查德维克 著

傅依斌 译

严宗达 审校

*

天津大学出版社出版

（天津大学内）

河北省邮电印刷厂印刷

新华书店天津发行所发行

*

开本：850×1168毫米1/32 印张：8 字数：206 千字

1992年9月第一版 1992年9月第一次印刷

印数：1—1 500

ISBN 7-5618-0398-2

O·43

定 价：5.20 元

作者为中文版写的序言

本书写于1973年，其目的在于满足广大读者对连续介质力学例题和习题集的需要。当时在英国各大学，将连续介质力学的一般理论教授给学生还是一件新鲜事，也没有人写过合适的基础性教科书。因此，我觉得有必要配合我在教学过程中汇编起来的习题撰写一本连续介质力学的简明理论。其结果既不是一本教科书，也不是一本传统的“理论与习题”，但是本书在英国和北美洲所收到的良好反应使我相信，它满足了广大学生和教师的需要。

本书是基于我在东英格兰大学（University of East Anglia）给三年级数学和理论物理本科生及理论力学硕士生所讲授过的课程。我的主要目的首先是想设计出一些例题来提起读者的兴趣，并系统地扩大他的技能和理解，然后将各例题紧凑地穿插到理论中去，最后尽可能清楚地、尽量用较少数学背景地介绍连续介质力学的最基本概念和框架。阅读本书需具备高等代数和数学分析的有关知识，包括R^n中的矢量空间理论和微积分理论，亦需要熟悉质点和刚体力学及矢量的几何描述。

在1977年准备日文版时使我能够作出一些修订，并插进一些以前由于英文版的篇幅所限而未能加进的材料。这些修订已编入了目前的中文版。另外我也利用这次机会作了进一步修改，并在每章末尾又增加了一些习题。不过如今重读这本书时，我发现我以前有关连续介质力学的基本观点实质上并没有被过去15年的进展所改变。现在已有一批优秀的教科书，故我不愿意作大规模的修订去损害本书与众不同的鲜明特征。我希望中国的科学工作者能从本书获得对当前连续介质力学状况的基本认识，并通过对本书的学习为今后阅读更高深的著作打下一个坚实的基础。

本书的翻译能由东英格兰大学数学系的毕业生来完成我感到极大的满足。在此我衷心地感谢傅依斌博士和严宗达教授，感谢他们的细致、耐心以及为使本书与广大中国读者见面所作的一切努力。

彼得·查德维克

1990年10月于东英格兰大学

原英文版序言

目前开设连续介质力学课程的大学和学院在不断增多，越来越多的理论力学教师认识到，有必要为学生今后进一步学习流体动力学和固体力学提供一个统一的基础。一个学位课程表中较新的学科不可避免地需要一段时间才能得到足够的参考书供给，适合于课堂内外使用的习题开始时也往往会发生短缺。本书是从过去在东英格兰大学的六年中给二年级和最高年级主攻数学的本科生和理论力学一年级硕士研究生所讲授过的课程中整理出来的。从事连续介质力学教学的同事们曾要求我，将为这些课程的习题课和考试的使用所编纂的习题集拿出来与更多的人分享。这些习题现在以扩充后的形式出现在这里。鉴于缺乏适当的基础性教科书，为了使学生能够用来查找这些习题中所用到的某些结论，这里加入了一些解释性的课文。

本书主要适用于配合课程的讲授或其它等同的教学形式。该书对连续介质力学基本原理的处理既在数学上比较完整，又有意安排得比较简洁：且在很大程度上略去了物理方面的考虑、诱导性的描述以及详细的解释。在这些方面教师们自然希望采用自己的观点：如果因为学生有了这本关于理论基础的简明描述而使他可以支配的时间增加了，我便非常满意了。全书的重点放在连续介质力学的一般理论之上，且本书在这样一个地方结束：再往前便应是那些专门讨论流体力学和固体力学的课程。为了与这些课程的传统理论相连接，本书的最后两节给出了一些有关线性粘性流体和各向同性弹性体的示范性例题。

本书假定读者已具备代数和分析的有关知识，包括 n-维欧几里得空间上的矢量空间理论和微分理论；另外还假定读者熟悉质点和

刚体力学及矢量的几何描述。在英国，数学专业的学生在他课程的前半部分通常就已覆盖了这些课题，而大多数读数学物理或理论物理、或选取混合课程的学生在最后一年开始时也充分具备了这方面的知识。对应用科学的学生来说，本课程恐怕只能在上研究生时选修。

在这样一本主要供连续介质力学领域中的初学者阅读的书里，我觉得给出所有材料的最初来源是不合适的。本书中所讨论的有关理论的更高级的论述连同完整的历史回顾和参考文献可在Truesdell-Toupin和Truesdell-Noll*的两本权威性著作里找到，在此我希望对这些作者的著作表示感谢。

我将非常高兴得到来自本书读者的任何建议和指正。

彼得·查德维克

---

*C.Truesdell, R.A.Toupin, The Classical Field Theories, Handbuch der Physik（S.Flügge主编）第3卷第1册，第226—858页。

C.Truesdell, W.Noll, The Non-Linear Field Theories of Mechanics, Handbuch der Physik（S.Flügge主编）第3卷第3册。

译 者 序 言

1985年是祖国对外开放的黄金年代。这年秋天译者受国家教委公派，远渡英伦，来到东英格兰大学攻读博士学位。第一年注册硕士学位，内容包括入门功课（连续介质力学、流体动力学、偏微分方程、摄动理论、水波和稳定理论、冰川学、海洋学、粘弹性理论）及一篇硕士论文。其中连续介质力学的主要参考书便是这部译文的原版：该校数学系Peter Chadwick FRS教授所著的Continuum Mechanics—Concise Theory and Problems。由此激发起翻译这本书的念头。

连续介质力学又称为理性力学。它在我国的普及已有10多年了。其间已出版了不少这方面的理论书籍，但以习题集为主要内容的书似乎还没有。现在决定翻译这本书，旨在填补这一空白。

一个优秀的学生往往会将一门课程好好归纳一下，并会将有用的公式和结论紧凑地收集在一起。这本书的理论部分正好作了这一工作。作者的最初意图是想编纂一本习题集，后来决定加上简明的理论部分，为的是便于读者对公式和理论的查找。

查德维克教授是英国颇负盛名的应用数学教授，一直以治学严谨著称，著述甚丰。1979年出版的本书日译本被布莱因(ブレイン)出版社列入“海外理工科名著系列”。在日文版出版时，作者曾作过一些修订，这些修订已在本版中引入。这次为中文本的出版，查德维克教授又作了进一步的修改和补充，并重新写了序言。原著中只给了部分习题的提示和答案，译者在征求了部分同行的意见后决定在此中文版中附上所有习题的解答。此外，书的末尾还附上了东英格兰大学连续介质力学硕士课程1985—1987年的考题，因此这本书也是一个了解英国教学的窗口。

本书正文的翻译工作由傅依斌完成，严宗达担任了全书译文的审校工作。

本书不仅适用于应用数学、力学和物理等专业的高年级大学生和研究生，也可供大学教师和工程技术人员参考。

在本书翻译过程中，得到原作者Chadwick教授的大力支持和协助，译者对他表示衷心的感谢。在译稿的整理过程中，得到胡兆虹女士的大力协助，在出版过程中，天津大学出版社的责任编辑陈家修同志及许多有关同志都付出了辛勤的劳动，译者在此一并表示谢意。

译文中可能尚有不妥之处，欢迎广大读者批评指正。

译者

1991年5月

著译校者简历

P. Chadwick教授

查德维克教授是本书作者，1952年毕业于曼彻斯特大学，1957年在剑桥大学获哲学博士学位，1973年被剑桥大学授予科学博士学位。1959年至1965年任教于谢菲尔德大学数学系，1965年至今一直为东英格兰大学数学系教授。他的早期研究涉猎固体力学和热力学的各个领域，后期研究主要集中在固体热力学的基本理论，固体中加速度波、冲击波及表面波的传播。1977年当选为英国皇家学会会员。

傅依斌博士

本书译者。1982年在长沙铁道学院数理力学系获理学学士学位。其后留校任教2年，1984年考取教委公派出国研究生。1985年赴英国东英格兰大学数学系，1986年获硕士学位。所做的研究为受内约束热弹性体中加速度波的传播。1986年至1988年攻读博士学位，从事固体中弱冲击波的研究。1989年至1991年在埃恩特大学数学系做博士后，从事高超音速边界层中Görtler不稳定机制的研究。1991年开始任教于曼彻斯特大学数学系。

严宗达教授

本书校者。1948年毕业于北洋大学土木系，留校任教。一直在北洋大学、天津大学历任助教、讲师、副教授、教授至今。曾从事板壳理论、计算力学等方面的研究。著作有《塑性力学》，《结构力学中的富里叶级数解法》等。

目　录

作者为中文版写的序言……（ Ⅰ ）
原英文版序言……（ Ⅲ ）
译者序言……（ Ⅴ ）
著译校者简历……（ Ⅶ ）
第一章　矢量和张量理论……（ 1 ）
第一节　矢量代数……（ 1 ）
第二节　张量代数……（ 6 ）
第三节　张量积……（ 11 ）
第四节　张量的特征矢量与特征值……（ 14 ）
第五节　对称张量……（ 15 ）
第六节　反对称张量……（ 18 ）
第七节　正交张量……（ 20 ）
第八节　极分解……（ 22 ）
第九节　几何方法，坐标……（ 24 ）
第十节　标量场、矢量场和张量场……（ 26 ）
第十一节　积分定理……（ 32 ）
习题……（ 35 ）
第二章　基本运动学……（ 42 ）
第一节　物体、构形和运动……（ 42 ）
第二节　物质描述和空间描述……（ 45 ）
第三节　变形梯度和速度梯度……（ 49 ）
第四节　伸长和旋转……（ 59 ）
第五节　伸长率和自旋……（ 66 ）

第六节　环量和涡度……（ 70 ）
习题……（ 75 ）
第三章　守恒定律、场方程和跳跃条件……（ 81 ）
第一节　质量……（ 81 ）
第二节　动量、力和力矩……（ 84 ）
第三节　应力理论……（ 89 ）
第四节　运动方程……（ 94 ）
第五节　能量……（ 102 ）
第六节　跳跃条件……（ 109 ）
习题……（ 116 ）
第四章　本构方程……（ 122 ）
第一节　基本本构假设……（ 122 ）
第二节　本构方程的例子……（ 126 ）
第三节　观察者变换……（ 127 ）
第四节　简化后的本构方程……（ 134 ）
第五节　物质对称性……（ 136 ）
第六节　内约束……（ 142 ）
第七节　不可压缩牛顿粘性流体……（ 146 ）
第八节　各向同性弹性材料……（ 152 ）
习题……（ 157 ）
附录一　英国东英格兰大学数学系硕士课程连续介质力学考题选编（1985—1987）……（ 165 ）
附录二　习题解答……（ 173 ）

第一章　矢量和张量理论

连续介质力学赖以建立的主要数学基础是定义在三维欧几里得空间子集上的标量、矢量和张量函数的理论。本章旨在对本书其它部分将要用到的一些基本结果做一个简要的概括，其内容将被紧凑地安排在以下各节之内。不过读者没有必要等到完全掌握了这些内容之后才开始连续介质力学这一正题的学习。他应该先用下面第1至3，9和10各节去对他已有的矢量代数和矢量分析知识温故而知新，然后在需要时，再回到其余各节所讨论的问题中去。

第一节　矢量代数

标量和矢量积（假定读者已对此熟悉）可以由一系列公理来定义。我们这里就采用这种方式来简略地重温一下矢量代数的基本内容，并同时为后面的张量代数的展开准备一个自然的出发点。该方式与初等矢量理论描述中通常采用的几何方法之间的联系将在第九节中阐述。

令E为实数域R上的一个三维矢量空间。如果对E中的每对矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$，都有一个用$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$表示并称为$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的**标量积**的标量(属于R)，和一个记为$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$并叫做$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的**矢量积**的矢量（属于E）与之对应，且满足(*)：

$$\text{(i)}\quad \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\quad\forall\quad \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\in\mathrm{E}, \tag{1}$$

$$\text{(ii)}\quad (\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\alpha(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})+\beta(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$$
$$\forall\,\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\in\mathrm{E},\ \alpha,\ \beta\in\mathrm{R}, \tag{2}$$

(*)译者注：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$也可写为$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$，$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}$；$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$也可写为$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$，$[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$。它们又分别被称为内积和外积。

(iii) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\geqslant 0 \quad \forall \boldsymbol{a}\in \mathbf{E},\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=0$当且仅当$\boldsymbol{a}=0$, (3)

(iv) $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \quad \forall \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\in \mathbf{E}$, (4)

(v) $(\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\alpha(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})+\beta(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$

$\forall \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\in \mathbf{E},\ \alpha,\ \beta\in \mathbf{R}$, (5)

(vi) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=0 \quad \forall \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\in \mathbf{E}$, (6)

(vii) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$

$\forall \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\in \mathbf{E}$, (7)

则称**E**为一个欧几里得矢量空间。

矢量$\boldsymbol{a}$的**模**（或称为**大小**）$|\boldsymbol{a}|$定义为

$$|\boldsymbol{a}|=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})^{\frac{1}{2}}, \tag{8}$$

模为1的矢量称为**单位矢量**。若$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则称两矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$**正交**。

例1 证明$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$当且仅当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$线性相关。

证：(*a*)若$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$线性相关，则$\boldsymbol{a}=0$或者存在一标量α满足$\boldsymbol{b}=\alpha\boldsymbol{a}$。在前种情况下，由公理(5)我们有$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$，在后种情况下，由公理(4)和(5)得到同样的结论。

(*b*)若$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$，由公理(7)、(3)和式(8)给出

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\pm|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|$。假定正号成立，则由公理(2)和(1)有$(|\boldsymbol{b}|\,\boldsymbol{a}-|\boldsymbol{a}|\,\boldsymbol{b})\cdot(|\boldsymbol{b}|\,\boldsymbol{a}-|\boldsymbol{a}|\,\boldsymbol{b})=2|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，再由公理(3)即得到$|\boldsymbol{b}|\,\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\,\boldsymbol{b}$。当负号成立时，可以类似地得到$|\boldsymbol{b}|\,\boldsymbol{a}=-|\boldsymbol{a}|\,\boldsymbol{b}$。在两种情况下，我们都有$\boldsymbol{a}=0$或者$\boldsymbol{b}$为$\boldsymbol{a}$的某一标量倍数。因此$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$线性相关。

三**矢量**$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$的**标量三重积**由$[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}]$表示，定义为

$$[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}]=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}). \tag{9}$$

今后我们就将它简称为**三重积**。

例2 证明三重积的下列性质：

(i) $[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a}]=[\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]=-[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{b}]$

$=-[\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c}]=-[\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}]$

$\forall \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\subset \mathbf{E}$, (10)

(ii) $[\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{d}]=\alpha[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{d}]+\beta[\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{d}]$

$$\forall \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{d}\in \mathbf{E},\ \alpha,\ \beta\in \mathbf{R}, \tag{11}$$

(iii) $[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}]=0$ 当且仅当$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$线性相关。

证：(i) 由公理(4)、(2)和(1)知三重积当其中第二和第三元素交换位置时改变符号。由公理(6)并借助于公理(2)和(5)，

$$\begin{aligned}0&=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}\}\\&=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\\&=[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}]+[\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c}],\end{aligned}$$

由此得知，当交换第一和第二个元素时，三重积也改变符号，反复使用这两个性质即得到恒等式(10)。

(ii) 在公理(2)中用$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}$替换$\boldsymbol{c}$即得等式(11)。

(iii) (a) 首先注意到公理(2)和性质(10)，意味着如果三重积中任何一个元素为零矢量，则其值为零。若$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$线性相关，则存在三个不全为零的标量α、β、γ，满足$\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，因此三重积

$$[\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}],\ [\boldsymbol{a},\ \alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{c}],$$

$[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}]$均为零。利用式(10)和(11)，它们分别简化为$\alpha[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}]$、$\beta[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}]$、$\gamma[\boldsymbol{a}、\boldsymbol{b}、\boldsymbol{c}]$。既然$\alpha$、$\beta$、$\gamma$中至少有一个非零，故$[\boldsymbol{a}、\boldsymbol{b}、\boldsymbol{c}]=0$。

(b) 逆结论可用归谬法获得。假设$[\boldsymbol{a}、\boldsymbol{b}、\boldsymbol{c}]=0$且$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$为线性无关的矢量。例1告诉我们$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$，由式(9)和(10)我们看到$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{c}$都与$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$正交。既然$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$构成$\mathbf{E}$中一基底(*)，那么任何矢量都应当与$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$正交。但是这个结论显然是错误的，因为$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$不与自身正交，因此$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$必须线性相关。

赋有标量积的有限维矢量空间的一个基本性质是存在一个标准

(*)译者注：把在三维欧几里得空间中的任何矢量表示为彼此线性无关的三个矢量的线性组合，从而称这样的三个矢量为该空间的基底（矢量）。

正交基(*),(1)。

因此，在以上所定义的欧几里得矢量空间里存在一个三矢量组 $e=\{e_1, e_2, e_3\}$，满足

$$e_i \cdot e_j=\delta_{ij} \quad (i, j=1, 2, 3), \tag{12}$$

这里δ_{ij}为**克隆内克尔符号**，当$i=j$时其值为1，当$i\neq j$时其值为0。对任一矢量a都存在一个有序的三标量组(a_1, a_2, a_3)，满足

$$a=a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3=a_re_r; \tag{13}$$

a_1、a_2、a_3称为a相对于基e的**分量**。在方程(13)的右边，我们使用了**求和约定**。按此约定，如果一表达式中某角标重复出现二次，则该表达式要在该角标的取值范围（1，2，3）内求和。**在本书中，只有字母p、q、r、s和π、ρ、σ用作重复角标，遇到一角标出现两次以上仍表示求和约情况，我们会特别说明。**利用标准正交化条件(12)，

$$a \cdot e_i=a_re_r \cdot e_i=a_r\delta_{ri}=a_i,$$

因此 $$a=(a \cdot e_r)e_r. \tag{14}$$

例3 证明

$$e_2 \times e_3=\pm e_1, \quad e_3 \times e_1=\pm e_2, \quad e_1 \times e_2=\pm e_3, \tag{15}$$

式中应同时取正号或同时取负号。

证：在式(14)中令$a=e_2 \times e_3$即得

$$e_2 \times e_3=\{(e_2 \times e_3) \cdot e_r\}e_r=[e_2, e_3, e_r]e_r$$
$$=[e_1, e_2, e_3]e_1, \tag{A}$$

这里用了式(9)和(10)。类似地，

$$e_3 \times e_1=[e_1, e_2, e_3]e_2, \quad e_1 \times e_2=[e_1, e_2, e_3]e_3. \tag{B}$$

借助于(12)，我们从(A)和(B)中导出

$|e_2 \times e_3|^2=|e_3 \times e_1|^2=|e_1 \times e_2|^2=[e_1, e_2, e_3]^2$，但由公理(7)和式(12)我们得到同样的结果，不过是以1代替$[e_1, e_2,$

(*)译者注，“标准”是指取其模为1。

(1) 参阅K.Hoffman and R.Kunze, Linear Algebra (Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, 1961)，第230页。

$e_3]^2$。因此$[e_1, e_2, e_3]=\pm 1$，从而由式（A）和（B）即得到(15)。

式(15)可写为以下紧凑的形式：

$$e_i \times e_j = \pm \varepsilon_{ijr} e_r, \tag{16}$$

这里，ε_{ijr}为**置换符号**，当i、j、k为1、2、3的循环排列时，其值为1；当i、j、k为1、2、3的逆循环排列时，其值为-1；在其它情形下其值取零。

设a、b为任意一对矢量，相对于基e的分量分别为a_i、b_i。那么由公理（1）、（2）和式(12)得

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (a_p \cdot e_p) \cdot (b_q \cdot e_q) = a_p b_q e_p \cdot e_q \\ &= a_p b_q \delta_{pq} = a_p b_p. \end{aligned} \tag{17}$$

这个用相对于某一标准正交基的分量表示的两矢量的标量积公式表明，E上满足公理（1）至（3）的标量积刚好只有一个。当$b=a$时，式(17)和（8）给出

$$|a| = (a_p a_p)^{\frac{1}{2}}. \tag{18}$$

借助公理（4）和（5）及式(16)，我们得到矢量积$a \times b$相对于基e的分量形式为

$$\begin{aligned} a \times b &= (a_p e_p) \times (b_q e_q) = a_p b_q e_p \times e_q \\ &= \pm \varepsilon_{pqr} a_p b_q e_r. \end{aligned} \tag{19}$$

从式(19)可以看出，E上有两个矢量满足公理（4）至（7），两者仅差一个正负号。若c为另一个相对于基e分量为c_i的任意矢量，则由式（9），(17)和(19)，我们可求得三重积$[a, b, c]$的分量形式为

$$[a, b, c] = \pm \varepsilon_{pqr} a_p b_q c_r. \tag{20}$$

如果E中两组基的三重积同号(2)，我们就说它们是**相似的**。相似性是一个等价关系，它将E中的所有有序基底划分为两大类，一类基底具有正的三重积，另一类具有负的三重积。把E和一种能判断每个有序基底属于哪个等价类的规则(3)联系在一起，称为对E的**定**

（2） 例2中的性质(iii)表明形成E中一基底的三矢量的三重积一定非零。

（3） 例如，对于一组特定的标准正交基底的描述$[e_1, e_2, e_3]=1$。

向。显然共有两个这样的方向，它们分别由$\mathbf{E}^+$和$\mathbf{E}^-$表示。通过给E定向，便消除了式(15)、(16)、(19)和(20)中符号的不确定性，到底是取＋号还是取－号，取决于e的定义域是$\mathbf{E}^+$还是$\mathbf{E}^-$。很显然，一个**定向的**欧几里得矢量空间只有一个唯一的矢量积满足公理(4)至(7)。

第二节　张量代数

一**张量**(4) $\boldsymbol{A}$是欧几里得矢量空间到其自身的一个线性变换。具体地说就是，对任一矢量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{A}$按以下方式赋予一新矢量$\boldsymbol{Aa}$与之对应

$$\boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b})=\alpha(\boldsymbol{Aa})+\beta(\boldsymbol{Ab})$$
$$\forall \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\in\mathbf{E},\ \alpha,\ \beta\in\mathbf{R}. \tag{21}$$

E中所有张量的集合用L表示。

当且仅当它们作用于任一矢量的效果等同时，两张量才相等。张量的加法、数乘和乘法（或称合成）规则为

$$\left.\begin{aligned}&(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{a}=\boldsymbol{Aa}+\boldsymbol{Ba}\quad \forall \boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}\in\mathbf{L},\ \boldsymbol{a}\in\mathbf{E},\\ &(\alpha\boldsymbol{A})\boldsymbol{a}=\alpha(\boldsymbol{Aa})\quad \forall \boldsymbol{A}\in\mathbf{L},\ \boldsymbol{a}\in\mathbf{E},\ \alpha\in\mathbf{R},\\ &(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{a}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Ba})\quad \forall \boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}\in\mathbf{L},\ \boldsymbol{a}\in\mathbf{E}.\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

零张量$\boldsymbol{O}$将任何矢量$\boldsymbol{a}$变换到零矢量，单位张量$\boldsymbol{I}$将任意矢量$\boldsymbol{a}$变到$\boldsymbol{a}$自身：

$$\boldsymbol{Oa}=0,\ \boldsymbol{Ia}=\boldsymbol{a}\quad \forall \boldsymbol{a}\in\mathbf{E}. \tag{23}$$

我们留给读者借助于式(21)至(23)去证明张量的以下性质：

(i)　$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\quad \forall \boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}\in\boldsymbol{L}$,

(ii)　$\alpha(\boldsymbol{AB})=(\alpha\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{B}),\ \forall \boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}\in\mathbf{L},\ \alpha\in\mathbf{R}$,

(iii)　$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}\\ &(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}\end{aligned}\right\}\forall \boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{C}\in\mathbf{L}$,

(iv)　$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$

(4)　严格地说，A是一个二阶张量，但是在本书中不会引进更高阶的张量。

(v) $AO=OA=O$, $AI=IA=A$ $\forall A\in\mathsf{L}$.

对应于任一张量A，存在唯一的一个被称作A的转置的张量A^{T}满足(5)

$$a\cdot(A^{\mathrm{T}}b)=b\cdot(Aa)\quad\forall a,\ b\in\mathsf{E}. \tag{24}$$

由该定义我们有$(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$，且利用式(22)和公理(1)和(2)我们还得到

$$(\alpha A+\beta B)^{\mathrm{T}}=\alpha A^{\mathrm{T}}+\beta B^{\mathrm{T}},\quad\forall A,\ B\in\mathsf{L},\ \alpha,\ \beta\in\mathsf{R}, \tag{25}$$

$$(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\quad\forall A,\ B\in\mathsf{L}. \tag{26}$$

如一张量A满足$A^{\mathrm{T}}=A$，则称其为**对称张量**，如果它满足$A^{\mathrm{T}}=-A$，则称其为**反对称张量**。恒等式

$$A=\frac{1}{2}(A+A^{\mathrm{T}})+\frac{1}{2}(A-A^{\mathrm{T}}) \tag{27}$$

表明任一张量都可以分解为一对称张量与一反对称张量的和，该分解是唯一的。

例4 令$\{f,\ g,\ h\}$和$\{l,\ m,\ n\}$为E中任意选取的两组基。A为任意张量，证明

$$\{[Af,\ g,\ h]+[f,\ Ag,\ h]+[f,\ g,\ Ah]\}/[f,g,h]$$
$$=\{[Al,\ m,\ n]+[l,\ Am,\ n]+[l,\ m,\ An]\}$$
$$/[l,\ m,\ n], \tag{A}$$

$$\{[f,Ag,Ah]+[Af,g,Ah]+[Af,Ag,h]\}/[f,g,h]$$
$$=\{[l,\ Am,\ An]+[Al,\ m,\ An]+[Al,\ Am,\ n]\}$$
$$/[l,\ m,\ n], \tag{B}$$

$$[Af,\ Ag,\ Ah]/[f,\ g,\ h]=[Al,\ Am,\ An]$$
$$/[l,\ m,\ n]. \tag{C}$$

证：令f_i、g_i、h_i为矢量f、g、h相对于标准正交基底e的分量。利用式(13)、(21)、(10)和(11)，我们得到：

$$[Af,\ g,\ h]=[A(f_re_r),\ g_qe_q,\ h_se_s]$$

---

(5) 参看K.Hoffman and R.Kunze，前引书第237页。

$$=(f_p\boldsymbol{Ae}_p,\ g_q\boldsymbol{e}_q,\ h_r\boldsymbol{e}_r)=f_pg_qh_r(\boldsymbol{Ae}_p,\ \boldsymbol{e}_q,\ \boldsymbol{e}_r),$$

由此可将式(A)的左边写成以下形式：

$$f_pg_qh_r\{(\boldsymbol{Ae}_p,\ \boldsymbol{e}_q,\ \boldsymbol{e}_r)+(\boldsymbol{e}_p,\ \boldsymbol{Ae}_q,\ \boldsymbol{e}_r)+(\boldsymbol{e}_p,\ \boldsymbol{e}_q,\ \boldsymbol{Ae}_r)\}/(\boldsymbol{f},\ \boldsymbol{g},\ \boldsymbol{h}). \tag{D}$$

大括号里的表达式当角标p、q、r为循环排列时，其值不变；为逆循环排列时其值改变符号；当p、q、r中任何两个相同时其值为零。回想一下置换符号的定义及式(20)，我们便可以将(D)改写为

$$f_pg_qh_r\varepsilon_{pqr}\{(\boldsymbol{Ae}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3)+(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{Ae}_2,\ \boldsymbol{e}_3)+(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{Ae}_3)\}/(\boldsymbol{f},\ \boldsymbol{g},\ \boldsymbol{h})$$
$$=\pm\{(\boldsymbol{Ae}_1,\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3)+(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{Ae}_2,\boldsymbol{e}_3)+(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{Ae}_3)\}. \tag{E}$$

如e在$\mathbf{E}^+$中定义，则应在(E)中取“+”号且$(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3)=1$；如$e$在$\mathbf{E}^-$中定义，则应在(E)中取“−”号且$(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3)=-1$。因此不管$e$为何方向，我们都有

$$\{(\boldsymbol{Af},\ \boldsymbol{g},\ \boldsymbol{h})+(\boldsymbol{f},\ \boldsymbol{Ag},\ \boldsymbol{h})+(\boldsymbol{f},\ \boldsymbol{g},\ \boldsymbol{Ah})\}/(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g},\boldsymbol{h})$$
$$=\{(\boldsymbol{Ae}_1,\ \boldsymbol{e}_2.\ \boldsymbol{e}_3)+(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{Ae}_2,\ \boldsymbol{e}_3)+(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{Ae}_3)\}$$
$$/(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3), \tag{F}$$

并且既然(F)左边基底的选择是任意的，这样我们便立刻得到结果(A)。

证明(A)所用的步骤同样适用于证明式(B)和式(C)，读者应当通过写出细节来检查是否对此证明过程真正理解了。

由例4我们有以下结论：对应于任一张量$\boldsymbol{A}$，存在三个标量I_A、II_A、III_A，满足

$$(\boldsymbol{Aa},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{Ab},\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{Ac})=\mathrm{I}_A(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \tag{28}$$
$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{Ab},\boldsymbol{Ac})+(\boldsymbol{Aa},\boldsymbol{b},\boldsymbol{Ac})+(\boldsymbol{Aa},\boldsymbol{Ab},\boldsymbol{c})=\mathrm{II}_A(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \tag{29}$$
$$(\boldsymbol{Aa},\boldsymbol{Ab},\boldsymbol{Ac})=\mathrm{III}_A(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}) \tag{30}$$

$$\forall \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\in\mathbf{E}.$$

这三个量称为$\boldsymbol{A}$的**主不变量**，但I_A通常称为$\boldsymbol{A}$的**迹**，记为$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}$；$\mathrm{III}_A$通常称为$\boldsymbol{A}$的**行列式**，记为$\det\boldsymbol{A}$。因此

$$I_A=\mathrm{tr}A,\quad \mathrm{I\!I}_A=\det A.$$

由式$(22)_{1,2}$，(*)及(11)和(10)我们可以看出

$$\mathrm{tr}(\alpha A+\beta B)=\alpha\mathrm{tr}A+\beta\mathrm{tr}B\quad \forall A,B\in \mathsf{L},\alpha,\ \beta\in \mathsf{R},\tag{31}$$

因此迹是一个由L到R的线性函数。定义(30)的直接结果为

$$\det(\alpha A)=\alpha^3\det A\quad \forall A\in \mathsf{L},\ \alpha\in \mathsf{R},\tag{32}$$

$$\det(AB)=\det A\det B\quad \forall A,\ B\in \mathsf{L},\tag{33}$$

$$\det I=1.\tag{34}$$

由(30)还可以得到以下结论：一张量变换保留E的方向当且仅当其行列式为正。

例5 给定一张量A，试证明存在一非零矢量n满足 $An=0$ 当且仅当$\det A=0$。

证：(a) 假定 $\det A=\mathrm{I\!I}_A=0$，并令$\{f,\ g,\ h\}$为E中任一基底，那么由式(30)及例2中的性质(iii)，矢量Af、Ag、Ah线性相关。这意味着存在着三个不全为零的标量α、β、γ使得下式成立：$\alpha(Af)+\beta(Ag)+\gamma(Ah)=A(\alpha f+\beta g+\gamma h)=0$，这里用到了式(21)。因此有$An=0$，$n=\alpha f+\beta g+\gamma h\neq 0$。

(b) 反过来，假定有一非零矢量n满足$An=0$，选取二矢量l、m与n组成一线性无关组，然后在式(30)中用$\{l,\ m,\ n\}$替换$\{a,\ b,\ c\}$并利用例2中的性质(iii)，我们便得到了$\mathrm{I\!I}_A=\det A=0$。

如果$\det A\neq 0$，则称A可逆，因为此时存在(6)一唯一的张量，称为A的**逆张量**并记为A^{-1}，满足

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I.\tag{35}$$

式(33)至(35)给出

$$\det A^{-1}=(\det A)^{-1},\tag{36}$$

如果B为另一可逆张量，则由式(35)得知AB亦可逆并满足

(*)译者注：下角数字表示该式中的等式的顺序。此处表示式(22)中的第一和第二个等式，以下同。

(6) 参看K.Hoffman and R.Kunze，前引书第150页。

$$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}. \tag{37}$$

令$\boldsymbol{c}$和$\boldsymbol{d}$为二线性无关矢量，并令矢量$\boldsymbol{f}$和$\boldsymbol{g}$满足 $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}=\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}$，由式(9)和公理(6)知

$$[\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{d},\ \boldsymbol{f}]=0=[\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{d},\ \boldsymbol{g}],$$

因此我们由例2中的性质(iii)推知$\boldsymbol{f}$和$\boldsymbol{g}$可以表为$\boldsymbol{c}$和$\boldsymbol{d}$的线性组合：

$$\boldsymbol{f}=\alpha\boldsymbol{c}+\beta\boldsymbol{d},\ \ \boldsymbol{g}=\gamma\boldsymbol{c}+\delta\boldsymbol{d},$$

式中，$\alpha\delta-\beta\gamma=1$。令$\boldsymbol{A}$为一任意张量，那么由式(21)我们有

$$(\boldsymbol{Af})\times(\boldsymbol{Ag})=(\alpha\delta-\beta\gamma)(\boldsymbol{Ac})\times(\boldsymbol{Ad})=(\boldsymbol{Ac})\times(\boldsymbol{Ad}).$$

以上结果意味着：对任何$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\in\mathrm{E}$，$(\boldsymbol{Aa})\times(\boldsymbol{Ab})$总是$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$的线性函数。因此对应于$\boldsymbol{A}$，存在唯一的张量$\boldsymbol{A}^*$，称的A的**转置伴随张量**，满足

$$\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{Aa})\times(\boldsymbol{Ab})\quad\forall\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\in\mathrm{E}. \tag{38}$$

假定$\boldsymbol{A}$可逆，$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$为任意矢量，则有

$$\begin{aligned}\{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}*}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\}\cdot\boldsymbol{c}&=[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}]\\&=(\det\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\{(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}\}\\&=(\det\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\{\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\}\cdot\boldsymbol{c},\end{aligned}$$

这里依次用到了式(38)、(35)、(26)、(30)和(24)。由$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$的任意性，我们便得到$\boldsymbol{A}$的逆与$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$的转置伴随之间的下列关系：

$$\boldsymbol{A}^{-1}=(\det\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}*}. \tag{39}$$

例6 令$\boldsymbol{A}$为一可逆张量，其值依赖于一实参数τ。假定$\mathrm{d}\boldsymbol{A}/\mathrm{d}\tau$(*)存在，试证

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\det\boldsymbol{A})=(\det\boldsymbol{A})\,\mathrm{tr}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}\tau}\boldsymbol{A}^{-1}\right). \tag{40}$$

证：式(30)两边关于τ的微分为

$$\begin{aligned}&[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\det\boldsymbol{A})\\&=[\boldsymbol{BAa},\ \boldsymbol{Ab},\ \boldsymbol{Ac}]+[\boldsymbol{Aa},\ \boldsymbol{BAb},\ \boldsymbol{Ac}]\end{aligned}$$

(*)译者注：$\frac{\mathrm{dA}}{\mathrm{d}\tau}$的含意是以$\frac{\mathrm{d}A_{ij}}{\mathrm{d}\tau}$为其$(i,\ j)$分量。

$$+[\boldsymbol{Aa},\ \boldsymbol{Ab},\ \boldsymbol{BAc}],$$

这里$\boldsymbol{B}=(\mathrm{d}\boldsymbol{A}/\mathrm{d}\tau)\boldsymbol{A}^{-1}$。由(28)和(30)，该式变为

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\det\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}\boldsymbol{B}[\boldsymbol{Aa},\ \boldsymbol{Ab},\boldsymbol{Ac}]$$

$$=(\mathrm{tr}\boldsymbol{B})(\det\boldsymbol{A})[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}],$$

消掉两边的因子$[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}]$即得所需公式。

第三节　张　量　积

对有序的每对矢量（$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{v}$），都有一张量与之对应。该张量记为$\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}$，称为$\boldsymbol{u}$与$\boldsymbol{v}$的**张量积**，它通过它对任一矢量$\boldsymbol{a}$的作用由下式定义

$$(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}\quad\forall\boldsymbol{a}\in\mathbf{E}.\tag{41}$$

性质

$$\left.\begin{aligned}&(\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v})\otimes\boldsymbol{w}=\alpha(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{w})+\beta(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w})\\&\boldsymbol{u}\otimes(\alpha\boldsymbol{v}+\beta\boldsymbol{w})=\alpha(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})+\beta(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{w})\end{aligned}\right\}$$

$$\forall\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w}\in\mathbf{E},\ \alpha,\ \beta\in\mathbf{R},\tag{42}$$

及

$$(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}\qquad\forall\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}\in\mathbf{E}\tag{43}$$

可用公理（1）和（2）及式(22)$_1$和(24)很容易地由式(41)导出。

例 7　令$\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3\}$为E中一标准正交基底，试证

$$\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{I}.\tag{44}$$

证：依次利用式(41)，(14)和(23)$_2$，我们有

$$(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{a}=\boldsymbol{I}\boldsymbol{a}\quad\forall\boldsymbol{a}\in\mathbf{E}.$$

由此即得所需结果。

例 8　令$\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{w}$、$\boldsymbol{x}$为任意矢量，$\boldsymbol{A}$为一任意张量，试证

(i)　$(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})(\boldsymbol{w}\otimes\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{x})$,　(45)

(ii)　$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{Au})\otimes\boldsymbol{v}$，$(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{u}\otimes(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v})$.　(46)

证：令$\boldsymbol{a}$为一任意矢量。

(i) $\{(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})(\boldsymbol{w}\otimes\boldsymbol{x})\}\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})\{(\boldsymbol{w}\otimes\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}\}$

$=(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})\{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{w}\}$

$=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})\boldsymbol{w}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}$

$=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}$,

此上各步依次由式$(22)_3$、(41)、(21)、(41)、(1)和(41)得到。

(ii) $\{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})\}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{A}\{(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})\boldsymbol{a}\}=\boldsymbol{A}\{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}\}$

$=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}=\{(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u})\otimes\boldsymbol{v}\}\boldsymbol{a}$,

$\{(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})\boldsymbol{A}\}\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})(\boldsymbol{A}\boldsymbol{a})=\{(\boldsymbol{A}\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{v}\}\boldsymbol{u}$

$=\{\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{A}\boldsymbol{a})\}\boldsymbol{u}=\{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v})\}\boldsymbol{u}=\{\boldsymbol{u}\otimes(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v})\}\boldsymbol{a}$.

这里除用到(j)中用过的各式外，还用到了式(24)。

例 9 令$\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{v}$为任意矢量，试证

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v},\quad \det(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})=0, \tag{47}$$

并证明$\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}$的第二主不变量为零。

证：在式(28)至(30)中用$\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}$替换$\boldsymbol{A}$，并将$\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$看作E中的任意一组基，即可导出所需结果。利用定义(41)，我们发现$\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}$的第二和第三主不变量均为零，因为式(29)左边的各三重积中都有两元素为$\boldsymbol{u}$的标量倍数，而式(30)左边的各三重积中的三个矢量均为$\boldsymbol{u}$的标量倍数。式(28)给出

$$\begin{aligned}&[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}]\mathrm{tr}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})\\&=[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}]+[\boldsymbol{a},\ (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{c}]+[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ (\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{a}]\\&=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v})[\boldsymbol{u},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]+(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v})[\boldsymbol{a},\boldsymbol{u},\boldsymbol{c}]+(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{v})[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{u}],\end{aligned}\tag{A}$$

这里用到了式(10)和(11)。既然$\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$是E中的一组基，则存在三个标量$\alpha$、$\beta$、$\gamma$满足$\boldsymbol{u}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}$，将此式代入(A)并再次利用式(10)和(11)，我们可从两边消去非零因子$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$，从而得到

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})&=\alpha(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v})+\beta(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v})+\gamma(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{v})\\&=(\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}.\end{aligned}$$

张量代数的最基本内容已在第二节中以不变量形式（即不依赖

于E中的任何特定基底）给出。现在让我们讨论任意张量$\boldsymbol{A}$相对于标准正交基$e=\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3\}$该如何表示。令$A_{ij}$为矢量$\boldsymbol{Ae}_j$相对于$e$的分量，即

$$\boldsymbol{Ae}_j=A_{ij}\boldsymbol{e}_i\text{且}A_{ij}=\boldsymbol{e}_i\cdot(\boldsymbol{Ae}_j). \tag{48}$$

任意选取一矢量$\boldsymbol{a}$，其相对于e的分量为a_i，借助于式(13)、(21)、(41)和(12)我们发现

$$(\boldsymbol{A}-A_{pq}\boldsymbol{e}_p\otimes\boldsymbol{e}_q)\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{A}-A_{pq}\boldsymbol{e}_p\otimes\boldsymbol{e}_q)(a_r\boldsymbol{e}_r)$$
$$=a_r\{\boldsymbol{Ae}_r-A_{pq}(\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{e}_q)\boldsymbol{e}_p\}$$
$$=a_r(A_{pr}-A_{pq}\delta_{rq})\boldsymbol{e}_p=\boldsymbol{0}.$$

因此$\boldsymbol{A}$有其表示式

$$\boldsymbol{A}=A_{pq}\boldsymbol{e}_p\otimes\boldsymbol{e}_q, \tag{49}$$

且标量A_{ij}可相应地称为$\boldsymbol{A}$相对于e的**分量**。

在推导(49)的过程中，我们还得到一附带结果：矢量$\boldsymbol{Aa}$相对于e的分量为$A_{ip}a_p$，而参看式$(48)_2$及(24)后又发现$\boldsymbol{A}^T$的分量为A_{ji}。若$\boldsymbol{B}$为另一任意张量，其相对于e的分量为B_{ij}，依次使用式(49)、(45)和(12)则得到

$$\boldsymbol{AB}=(A_{pq}\boldsymbol{e}_p\otimes\boldsymbol{e}_q)(B_{rs}\boldsymbol{e}_r\otimes\boldsymbol{e}_s)=A_{pq}B_{rs}(\boldsymbol{e}_p\otimes\boldsymbol{e}_q)(\boldsymbol{e}_r\otimes\boldsymbol{e}_s)$$
$$=A_{pq}B_{rs}(\boldsymbol{e}_q\cdot\boldsymbol{e}_r)(\boldsymbol{e}_p\otimes\boldsymbol{e}_s)=A_{pq}B_{rs}\delta_{qr}\boldsymbol{e}_p\otimes\boldsymbol{e}_s$$
$$=A_{pq}B_{qs}\boldsymbol{e}_p\otimes\boldsymbol{e}_s.$$

因此$\boldsymbol{AB}$相对于e的分量为$A_{ip}B_{pj}$。另外，如果$\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$为任意矢量，相对于e的分量分别为u_i、v_i，则由式(13)及(42)得到$\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}$的分量为$u_iv_j$。最后，在式(28)和(30)中用$\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3\}$替换$\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$并利用(48)，我们得到张量$\boldsymbol{A}$的主不变量的以下分量形式：

$$\mathrm{I}_A=\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=A_{pp}, \tag{50}$$

$$\mathrm{II}_A=\frac{1}{2}(A^2{}_{pp}-A_{pq}A_{qp}), \tag{51}$$

$$\mathrm{III}_A=\det\boldsymbol{A}=\varepsilon_{pqr}A_{p1}A_{q2}A_{r3}. \tag{52}$$

式(50)还给出迹的另外两个性质，即

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^T=\mathrm{tr}\boldsymbol{A}\quad\forall\boldsymbol{A}\in\mathrm{L},\ \mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})\quad\forall\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}\in\mathrm{L}. \tag{53}$$

读者不妨将式(52)的右边写成六项之和，并验证其结果与展开 $\varepsilon_{pqr}A_{1p}A_{2q}A_{3r}$ 所得的结果相同。此即

$$\det\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\det\boldsymbol{A}\quad\forall\boldsymbol{A}\in\mathrm{L}. \tag{54}$$

第四节　张量的特征矢量与特征值

令$\boldsymbol{A}$为一任意张量。若存在一标量（即一实数）λ使得一非零矢量$\boldsymbol{p}$满足

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{p},\quad\text{即}\quad(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{p}=0, \tag{55}$$

则称$\boldsymbol{p}$为$\boldsymbol{A}$的**特征矢量**(7)，λ则称为$\boldsymbol{A}$对应于$\boldsymbol{p}$的**特征值**(7)。反过来，如果存在一非零矢量$\boldsymbol{p}$使得实数λ满足式(55)，便称λ为$\boldsymbol{A}$的特征值，此时$\boldsymbol{p}$即为$\boldsymbol{A}$的对应于λ的特征矢量。

例5表明：λ为$\boldsymbol{A}$的特征值当且仅当它为下列方程的根

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=0.$$

该式称为$\boldsymbol{A}$的**特征方程**。由式(30)它还可表为

$$[\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{c}-\lambda\boldsymbol{c}]=0, \tag{56}$$

这里$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$为任意矢量。借助于式(10)及(11)展开式(56)的左边，然后利用定义(28)至(30)，任意因子$[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}]$即可消去，我们便得到特征方程的另外一种形式：

$$\lambda^3-\mathrm{I}_A\lambda^2+\mathrm{II}_A\lambda-\mathrm{III}_A=0. \tag{57}$$

既然主不变量I_A、II_A、III_A均为实数，我们从式(57)推断：$\boldsymbol{A}$或者有三个特征值，或者只有一个。

例10　令f为一实多项式，$\boldsymbol{A}$为一任意张量，其特征值为λ，试证：$f(\lambda)$为$f(\boldsymbol{A})$的特征值，且$\boldsymbol{A}$对应于λ的特征矢量亦为$f(\boldsymbol{A})$对应于$f(\lambda)$的特征矢量。

证：令$\boldsymbol{p}$为$\boldsymbol{A}$对应于λ的特征矢量。由式(55)知下式当 $r=1$ 时成

(7)　特征矢量及特征值也常称固有矢量与固有值。

立：

$$\boldsymbol{A}^r\boldsymbol{p}=\lambda^r\boldsymbol{p} \tag{A}$$

假定该式当 $r=1$，2，…，n 时成立，则有

$$\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{p}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{p})=\boldsymbol{A}(\lambda^n\boldsymbol{p})=\lambda^n\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}=\lambda^{n+1}\boldsymbol{p},$$

由归纳法即知(A)对任意正整数 r 均成立。因 $f(\boldsymbol{A})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的各次幂的线性组合，故得知 $f(\lambda)$ 为 $f(\boldsymbol{A})$ 的特征值，且 $\boldsymbol{p}$ 为相应的特征矢量。

当应用到式(57)左边的特征多项式时，例10告诉我们：如果 $\boldsymbol{A}$ 有三个特征值，则张量 $\boldsymbol{A}^3-\mathrm{I}_A\boldsymbol{A}^2+\mathrm{II}_A\boldsymbol{A}+\mathrm{III}_A\boldsymbol{I}$ 亦有三个特征值，且三个特征值均为零。**凯莱-哈密顿**（Cayley-Hamilton）**定理**(8)指出：对**任何**张量 $\boldsymbol{A}$，该张量实际上都为零(9)；换句话说，任何张量都满足它自己的特征方程：

$$\boldsymbol{A}^3-\mathrm{I}_A\boldsymbol{A}^2+\mathrm{II}_A\boldsymbol{A}-\mathrm{III}_A\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}\quad\forall\boldsymbol{A}\in\mathrm{L}. \tag{58}$$

第五节　对称张量

一对称张量 $\boldsymbol{S}$ 具有三个特征值（设为 λ_1，λ_2，λ_3）和一组分别与 λ_1、λ_2、λ_3 相对应的标准正交的特征矢量 $\boldsymbol{p}_1$、$\boldsymbol{p}_2$、$\boldsymbol{p}_3$(10)，依次使用式(44)、$(46)_1$、(55)和$(42)_1$，我们可用 λ_i 和 $\boldsymbol{p}_i$（$i=1,2,3$）将 $\boldsymbol{S}$ 表为

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{I}=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{p}_r\otimes\boldsymbol{p}_r)=(\boldsymbol{S}\boldsymbol{p}_r)\otimes\boldsymbol{p}_r=\sum_{r=1}^{3}\lambda_r(\boldsymbol{p}_r\otimes\boldsymbol{p}_r). \tag{59}$$

该结果称为一对称张量的**谱表示**。由于 $\boldsymbol{S}$ 肯定有三个特征值，我们直接从式(57)得到 $\boldsymbol{S}$ 的主不变量的表示式：

$$\mathrm{I}_S=\mathrm{tr}\boldsymbol{S}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3, \tag{60}$$

---

(8) 参看K.Hoffman and R.Kunze，前引书第166页。

(9) 例9表明：若矢量 u 与 v 非零且相互正交，则 $u\otimes v$ 的所有主不变量均为零。这便给出一个非零张量的三个特征值均为零的例子。

(10) 参看K.Hoffman and R.Kunze，前引书第264页。

$$\mathbf{I}_S = \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2, \tag{61}$$

$$\mathbf{I}_S = \det \boldsymbol{S} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \tag{62}$$

如果张量$\boldsymbol{A}$满足

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}) \geqslant 0 \quad \forall \boldsymbol{a}\in \mathbf{E}, \tag{63}$$

我们便称它**半正定**。如果$\boldsymbol{A}$满足更强的条件

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}) > 0 \quad \forall \text{非零}\boldsymbol{a}\in \mathbf{E}, \tag{64}$$

则称它**正定**。我们分别用**半负定**和**负定**描述那些反号后为半正定和正定的张量。

令$\boldsymbol{S}$为一半正定对称张量，特征值为λ_i，相应的单位特征矢量为$\boldsymbol{p}_i$（$i=1,\ 2,\ 3$）。由定义(63)连同式(59)、(41)给出

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}) = \lambda_r(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{p}_r)^2 \geqslant 0 \quad \forall \boldsymbol{a}\in \mathbf{E},$$

因此有$\lambda_1 \geqslant 0$，$\lambda_2 \geqslant 0$，$\lambda_3 \geqslant 0$。由下式定义的张量$\boldsymbol{S}^{\frac{1}{2}}$

$$\boldsymbol{S}^{\frac{1}{2}} = \sum_{r=1}^{3} \lambda_r^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{p}_r\otimes\boldsymbol{p}_r), \tag{65}$$

显然是对称且半正定的，并且由式(42)、(45)和(59)知其平方即为$\boldsymbol{S}$。如果$\overline{\boldsymbol{S}}^{\frac{1}{2}}$为具有这些性质的另一张量，例10表明$\overline{\boldsymbol{S}}^{\frac{1}{2}}$的特征矢量亦为$\boldsymbol{S}$的特征矢量，并且$\overline{\boldsymbol{S}}^{\frac{1}{2}}$相应的特征根的平方即为$\boldsymbol{S}$的特征根。因此$\overline{\boldsymbol{S}}^{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{S}^{\frac{1}{2}}$，由此我们推断：一半正定对称张量具有唯一的其谱表示为(65)的半正定对称平方根。

一正定对称张量$\boldsymbol{S}$具有正的特征值。因此由式(62)，$\det \boldsymbol{S} > 0$，从而$\boldsymbol{S}$可逆。其逆的谱表示为

$$\boldsymbol{S}^{-1} = \sum_{r=1}^{3} \lambda_r^{-1}(\boldsymbol{p}_r\otimes\boldsymbol{p}_r). \tag{66}$$

例11 令$\boldsymbol{A}$为一任意张量，证明$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$为半正定对称张量。若$\boldsymbol{A}$可逆，证明这些张量正定。

证：由式(26)，

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A},\quad (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}.$$

这表明$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$均为对称张量。令$\boldsymbol{a}$为一任意矢量，则利用式(24)我们有

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{a}\cdot\{(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{a}\}=\boldsymbol{a}\cdot\{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{a})\}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}),\\&\boldsymbol{a}\cdot\{\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{a}\}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}).\end{aligned}\right\}\quad(\mathrm{A})$$

公理(3)保证式(A)右边的标量积非负，因此由定义(63)，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$均为半正定张量。若$\boldsymbol{A}$可逆，则由例5知当$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$时，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}$均非零。从而由公理(3)知式(A)最后的标量积对所有非零$\boldsymbol{a}$均为正，由式(64)便得到$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$正定。

例12 给定一非零对称张量$\boldsymbol{T}$，试证：任何一个对称张量$\boldsymbol{S}$都可以唯一地表示为$\boldsymbol{S}=\alpha\boldsymbol{T}+\boldsymbol{U}$，这里$\alpha$为一标量，$\boldsymbol{U}$为一满足$\mathrm{tr}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{U})=0$的对称张量。由此进一步证明：若$\boldsymbol{T}_1$和$\boldsymbol{T}_2$为非零对称张量，且对所有满足$\mathrm{tr}(\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{A})=0$的张量$\boldsymbol{A}$，$\mathrm{tr}(\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{A})=0$均成立，则$\boldsymbol{T}_1$与$\boldsymbol{T}_2$只差一标量乘数。

证：既然$\boldsymbol{T}$非零，由其谱表示(59)即知它至少有一个特征值非零。而由**例**10知$\boldsymbol{T}^2$的特征值为$\boldsymbol{T}$的特征值的平方。因此由式(60)我们有$\mathrm{tr}\boldsymbol{T}^2>0$。很显然，其平方的迹为零的对称张量必为零张量。

对应于任何一个对称张量$\boldsymbol{S}$，我们现在定义

$$\alpha=\mathrm{tr}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{S})/\mathrm{tr}\boldsymbol{T}^2,\quad\boldsymbol{U}=\boldsymbol{S}-\alpha\boldsymbol{T}$$

则有

$$\boldsymbol{S}=\alpha\boldsymbol{T}+\boldsymbol{U}\quad\text{且}\mathrm{tr}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{U})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{S})-\alpha\mathrm{tr}\boldsymbol{T}^2=0,$$

这表明$\boldsymbol{S}$能有题中所叙的表示。为证明其唯一性，我们假定$\boldsymbol{S}=\beta\boldsymbol{T}+\boldsymbol{V}$且$\mathrm{tr}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{V})=0$。则有

$$(\beta-\alpha)\boldsymbol{T}=\boldsymbol{U}-\boldsymbol{V},\quad\text{且}(\beta-\alpha)\mathrm{tr}\boldsymbol{T}^2=\mathrm{tr}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{U})-\mathrm{tr}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{V})=0,$$

既然$\mathrm{tr}\boldsymbol{T}^2>0$，那么有$\beta=\alpha$，$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{U}$。

由刚刚得到的结果，我们可以写出$\boldsymbol{T}_1=\alpha\boldsymbol{T}_2+\boldsymbol{U}$，这里$\mathrm{tr}(\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{U})=0$。既然只要$\mathrm{tr}(\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{A})=0$便有$\mathrm{tr}(\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{A})=0$，那么$\boldsymbol{U}$必须满足对所有满足$\mathrm{tr}(\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{A})=0$的张量$\boldsymbol{A}$都成立的条件$\mathrm{tr}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{A})=0$。但是$\mathrm{tr}(\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{U})=0$，因而有$\mathrm{tr}\boldsymbol{U}^2=0$，由此推断$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{O}$且$\boldsymbol{T}_1=\alpha\boldsymbol{T}_2$。

第六节　反对称张量

下一步转到讨论反对称张量的主要性质。令W为一此类张量（即有$W^T=-W$），且令a、b为任意矢量。由式(24)有，

$$b\cdot(Wa)=a\cdot(W^Tb)=-a\cdot(Wb), \tag{67}$$

令$b=a$，有

$$a\cdot(Wa)=0. \tag{68}$$

这些结果连同式$(48)_2$表明：相对于E中一标准正交基，W的三个分量为0，另外三个为其余三个的反号。因此一反对称张量仅有三个独立的分量，这就意味着从某种意义上来说，它等于一个矢量。以下的讨论便要揭示这种关系的实质。

我们知道，象其它张量一样，一反对称张量W至少有一个特征值，设为λ。令p为相应的两个单位特征矢量之一。则有$wp=\lambda p$，两边与p点乘（即作标量积），并利用式(68)便得到

$\lambda=p\cdot(Wp)=0$。这意味着W要么只有一个特征值，其值为零，要么有三个特征值，其值均为零。这也表明存在单位矢量p满足$Wp=0$。

令q和r为二单位矢量，并与p组成E中的一个在E^+中定义的标准正交基。则有

$$p=q\times r,\ q=r\times p,\ r=p\times q,\ [p,\ q,\ r]=1. \tag{69}$$

相对于基$\{p,\ q,\ r\}$，由式$(48)_2$、(49)、(67)和(68)，W有以下简单形式：

$$W=\omega(r\otimes q-q\otimes r), \tag{70}$$

这里$\omega=r\cdot(Wq)$。并且只要W不为零张量，ω必非零。再让$w=\omega p$，且令a为一任意矢量，那么有

$$\begin{aligned}Wa-w\times a&=\omega\{(r\otimes q)a-(q\otimes r)a\\&\quad-p\times\{(a\cdot p)p+(a\cdot q)q+(a\cdot r)r\}\}\\&=\omega\{(a\cdot q)(r-p\times q)-(a\cdot r)(q+p\times r)\}=0,\end{aligned}$$

http://www.junshilei.cn/printing.htm　2009-9-18

这里用到了式(70)、(14)、(41)及(69)。这样我们就证明了，对应于一反对称张量$\boldsymbol{W}$，存在一矢量$\boldsymbol{w}$满足

$$\boldsymbol{W}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{a}\quad\forall\boldsymbol{a}\in\mathrm{E},\tag{71}$$

$\boldsymbol{w}$称为$\boldsymbol{W}$的**轴矢量**。

例13 令$\boldsymbol{W}$为一任意反对称张量，且$\boldsymbol{w}$为其轴矢量。试证：

$$\mathrm{I}_{\boldsymbol{W}}=\mathrm{tr}\boldsymbol{W}=0,\quad\mathrm{II}_{\boldsymbol{W}}=|\boldsymbol{w}|^2,\quad\mathrm{III}_{\boldsymbol{W}}=\det\boldsymbol{W}=0,\tag{72}$$

并推断$\boldsymbol{W}$只有一个特征值。

证：我们先在式(28)至(30)中以$\boldsymbol{W}$替代$\boldsymbol{A}$，以上面引进的标准正交基$\{\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{q},\ \boldsymbol{r}\}$替代$\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$来计算$\boldsymbol{W}$的主不变量。由于$\boldsymbol{W}\boldsymbol{p}=\boldsymbol{0}$且$[\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{q},\ \boldsymbol{r}]=1$，我们有

$$\mathrm{I}_{\boldsymbol{W}}=[\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{W}\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{r}]+[\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{q},\ \boldsymbol{W}\boldsymbol{r}],$$

$$\mathrm{II}_{\boldsymbol{W}}=[\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{W}\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{W}\boldsymbol{r}],\quad\mathrm{III}_{\boldsymbol{W}}=0.$$

然后由式(71)及(69)，并记住$\boldsymbol{w}=\omega\boldsymbol{p}$，

$$\boldsymbol{W}\boldsymbol{q}=\omega\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}=\omega\boldsymbol{r},\quad\boldsymbol{W}\boldsymbol{r}=\omega\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{r}=-\omega\boldsymbol{q},$$

因此有$\mathrm{I}_{\boldsymbol{W}}=0$，且

$$\mathrm{II}_{\boldsymbol{W}}=[\boldsymbol{p},\ \omega\boldsymbol{r},\ -\omega\boldsymbol{q}]=\omega^2[\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{r},\ -\boldsymbol{q}]=\omega^2=|\boldsymbol{w}|^2.$$

由将式(72)代入式(57)，得到$\boldsymbol{W}$的特征方程为 $\lambda^3+|\boldsymbol{w}|^2\lambda=0$。该方程只有一个实根，其值为零。

例14 设$\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{v}$为任意矢量。证明$\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}$为一反对称张量，且$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$为其轴矢量。

证：张量$\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}$的反对称性质可借助于式(25)和式(43)验证：

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}&=(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}-(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}=-(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}).\end{aligned}$$

其次注意到

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})&=\{\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\}\boldsymbol{v}\\&\quad-\{\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\}\boldsymbol{u}=0,\end{aligned}$$

由此，并参看式(71)的推导过程，便知$\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}$的轴矢量与$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$只差一标量乘数。因此

$$(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{v})\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{a}=\alpha(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{a}$$

$$\forall\boldsymbol{a}\in\mathbf{E}, \qquad (\mathrm{A})$$

为了完成整个证明，我们还应证$\alpha=1$。在式(A)中，令$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$，然后用$\boldsymbol{v}$点乘两边，有

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v})^2=\alpha\{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{a}\}\cdot\boldsymbol{v}$$

$$=\alpha(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{v}).$$

从而由公理(7)得到$\alpha=1$。

〔由式(A)得到的以下有用等式：

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{c}-\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

$$\forall\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\in\mathbf{E}, \qquad (73)$$

列在这里为以后用。〕

第七节　正交张量

本章中要讨论的第三类特殊张量以保持标量积不变作为其定义性质：满足

$$(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\quad\forall\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\in\mathbf{E} \qquad (74)$$

的张量$\boldsymbol{Q}$称为**正交张量**。既然

$$(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot\{\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{a})\}=\boldsymbol{b}\cdot\{(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{a}\},$$

则$\boldsymbol{Q}$为正交张量的充分和必要条件为

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}. \qquad (75)$$

式(33)，(54)，和(34)给出$\det(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q})=(\det\boldsymbol{Q})^2=1$。因此$\boldsymbol{Q}$可逆，且由式(35)及(75)，

$$\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}},\quad\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}. \qquad (76)$$

若$\det\boldsymbol{Q}=1$，则称$\boldsymbol{Q}$为一**正规正交张量**；若$\det\boldsymbol{Q}=-1$，便称$\boldsymbol{Q}$为一**非正规正交张量**。由式(32)知一非正规正交张量的反号为一正规正交张量。在本节的其余部分，假设$\det\boldsymbol{Q}=1$。

等式$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{I})=-(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{I})^{\mathrm{T}}$是式(75)的一直接结果。在该式两边取行列式并利用式(33)，(54)及(32)，得到$\det(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{I})=0$，

这表明$\boldsymbol{Q}$有一特征值为1。因此存在一单位矢量$\boldsymbol{p}$满足

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}. \tag{77}$$

若$\boldsymbol{q}$和$\boldsymbol{r}$为与$\boldsymbol{p}$的关系跟在第六节中一样的单位矢量，则由式(77)，我们导出

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{p})=\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{p})=\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{q})=\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{r})=0,\\&\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{p})=1,\end{aligned} \tag{78}$$

以及由式(74)得

$$(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{q})\cdot(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{r})=0,\quad |\boldsymbol{Q}\boldsymbol{q}|=|\boldsymbol{Q}\boldsymbol{r}|=1.$$

由此知$\boldsymbol{q}$、$\boldsymbol{r}$和$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{q}$、$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{r}$为两对均与$\boldsymbol{p}$正交的正交单位矢量，因此满足关系式

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{q}=\alpha\boldsymbol{q}+\beta\boldsymbol{r},\quad \boldsymbol{Q}\boldsymbol{r}=\gamma\boldsymbol{q}+\delta\boldsymbol{r},$$

这里$\alpha^2+\beta^2=1$，$\gamma^2+\delta^2=1$，$\alpha\gamma+\beta\delta=0$。进一步由式(30)，$(69)_4$及$(77)_1$，得

$$\begin{aligned}\det\boldsymbol{Q}&=[\boldsymbol{Q}\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{Q}\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{Q}\boldsymbol{r}]=[\boldsymbol{p},\ \alpha\boldsymbol{q}+\beta\boldsymbol{r},\ \gamma\boldsymbol{q}+\delta\boldsymbol{r}]\\&=\alpha\delta-\beta\gamma=1.\end{aligned}$$

标量α、β、γ、δ之间的四个关系式保证存在一角度$\theta(-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi)$满足$\alpha=\delta=\cos\theta$，$\beta=-\gamma=\sin\theta$，式(78)中的标量积组再加上

$$\begin{aligned}&-\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{r})=\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{q})=\sin\theta,\\&\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{q})=\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{r})=\cos\theta,\end{aligned}$$

就完全了。借助于式$(48)_2$及(49)，将$\boldsymbol{Q}$参照到标准正交基$\{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r}\}$，便得到

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{p}+(\boldsymbol{q}\otimes\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}\otimes\boldsymbol{r})\cos\theta-(\boldsymbol{q}\otimes\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}\otimes\boldsymbol{q})\sin\theta. \tag{79}$$

在第九节中我们将展示，利用该表示式，可以很自然地将一个任意正规正交张量解释为一个旋转。

例15 令$\boldsymbol{Q}$为一正规正交张量。试证：若用出现在表示式(79)中的θ表示，则

$$\mathrm{I}_{\boldsymbol{Q}}=\mathrm{I}\!\mathrm{I}_{\boldsymbol{Q}}=1+2\cos\theta.$$

并推断：若$\theta\neq0$，π，则$\boldsymbol{Q}$仅有一个特征值。

证 与在例13中一样，借助于式$(69)_4$及$(77)_1$，由式(28)和(29)中

导出以下结果：

$$\mathrm{I}_Q=1+[\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{Qq},\ \boldsymbol{r}]+[\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{q},\ \boldsymbol{Qr}],$$

$$\mathrm{II}_Q=[\boldsymbol{Qp},\ \boldsymbol{Qq},\ \boldsymbol{Qr}]+[\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{q},\ \boldsymbol{Qr}]+[\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{Qq},\ \boldsymbol{r}].$$

由式(30)还有

$$[\boldsymbol{Qp},\ \boldsymbol{Qq},\ \boldsymbol{Qr}]=\det\boldsymbol{Q}=1,$$

且按上面所示，

$$\boldsymbol{Qq}=\cos\theta\boldsymbol{q}+\sin\theta\boldsymbol{r},\quad \boldsymbol{Qr}=-\sin\theta\boldsymbol{q}+\cos\theta\boldsymbol{r}.$$

因此

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_Q=\mathrm{II}_Q&=1+[\boldsymbol{p},\ \cos\theta\boldsymbol{q}+\sin\theta\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r}]+[\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{q},\\&\quad -\sin\theta\boldsymbol{q}+\cos\theta\boldsymbol{r}]\\&=1+2\cos\theta[\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{q},\ \boldsymbol{r}]=1+2\cos\theta.\end{aligned}$$

在式(57)中作适当的代换，便可以写出$\boldsymbol{Q}$的特征方程。因式分解后其结果为

$$(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda\cos\theta+1)=0.$$

若$\theta\neq 0,\ \pi$，则$|\cos\theta|<1$，因而二次多项式因子的判别式为负。因此在这些限制条件下$\boldsymbol{Q}$仅有一个特征值，其值为1。

第八节　极　分　解

在第二节中已经指出，任何一个张量都有唯一的一个表示为对称与反对称部分之和的加式分解（式(27)）。在连续介质力学中占有同等地位的另一分解为由**极分解定理**给出的乘式分解。该定理指出：**一任意可逆张量可以表为以下形式：**

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{QU}=\boldsymbol{VQ},\tag{80}$$

并且右极分解(80)$_1$**及左极分解**(80)$_2$**均唯一，这里$\boldsymbol{Q}$为一正交张量，$\boldsymbol{U}$和$\boldsymbol{V}$为正定对称张量**(11)。

该定理的简单证明如下．首先注意到，既然$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}$均为

(11)　值得注意的是该定理与复数的极表示$z=re^{i\theta}$有些相似。式(80)中的正定张量对应于复数的模r，而正交张量Q对应于可以解释为复平面上一旋转的因子$e^{i\theta}$。

正定对称张量（由例11），那么它们都有唯一的正定对称平方根，不妨分别用U和V表示。张量$Q=AU^{-1}$和$R=V^{-1}A$都是正交张量，因为

$$\begin{aligned}Q^{\mathrm{T}}Q&=(AU^{-1})^{\mathrm{T}}(AU^{-1})=(U^{-1}A^{\mathrm{T}})(AU^{-1})\\&=U^{-1}(A^{\mathrm{T}}A)U^{-1}=U^{-1}U^{2}U^{-1}=I,\\RR^{\mathrm{T}}&=(V^{-1}A)(V^{-1}A)^{\mathrm{T}}=(V^{-1}A)(A^{\mathrm{T}}V^{-1})\\&=V^{-1}(AA^{\mathrm{T}})V^{-1}=V^{-1}V^{2}V^{-1}=I,\end{aligned}$$

因此 $A=QU=VR$。

假定A还有另外一个右极分解$A=\overline{Q}\,\overline{U}$，这里$\overline{Q}$为正交张量，$\overline{U}$正定且对称，那么

$$\begin{aligned}A^{\mathrm{T}}A&=(\overline{Q}\,\overline{U})^{\mathrm{T}}(\overline{Q}\,\overline{U})=(\overline{U}\,\overline{Q}^{\mathrm{T}})(\overline{Q}\,\overline{U})\\&=\overline{U}(\overline{Q}^{\mathrm{T}}\overline{Q})\overline{U}=\overline{U}^{2},\end{aligned}$$

由此得到$\overline{U}=U$。因为$A^{\mathrm{T}}A$仅有一个正定对称平方根，且有

$$\overline{Q}=A\overline{U}^{-1}=AU^{-1}=Q.$$

左极分解$A=VR$的唯一性可用类似的方法证明。

然后仅剩下证明$R=Q$。由R的正交性及V的正定平方根的存在性，有

$$\begin{aligned}A&=QU=(RR^{\mathrm{T}})(VR)=R(R^{\mathrm{T}}VR)\\&=R\{(V^{\frac{1}{2}}R)^{\mathrm{T}}(V^{\frac{1}{2}}R)\},\end{aligned}$$

由此知QU和$R(R^{\mathrm{T}}VR)$为A的不同形式的右极分解。从而由刚刚证明过的唯一性，有$Q=R$及$U=R^{\mathrm{T}}VR$。

应该注意，Q是正规还是非正规正交张量取决于$\det A$为正还是负。

例16 令A为一可逆张量，并设其右极分解和左极分解分别为QU和VQ。由于U和V为对称张量，它们都分别有三个特征值和一组相应的正交特征矢量：令λ_i和p_i（$i=1,\ 2,\ 3$）为U的特征值和特征矢量；μ_i和q_i为对应于V的特征值和特征矢量。证明

$$\mu_i=\lambda_i,\quad q_i=Qp_i, \tag{81}$$

并将U、V、Q、A和A^{-1}用λ_i、p_i和q_i表示。

证 由式(55)知$\boldsymbol{U}$的特征值和特征矢量由$\boldsymbol{U}\boldsymbol{p}_i=\lambda_i\boldsymbol{p}_i$相联系*。另外，$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{V}\boldsymbol{Q}(=\boldsymbol{A})$。因此$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{p}_i)=(\boldsymbol{V}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{p}_i=(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{U})\boldsymbol{p}_i=\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{p}_i)=\boldsymbol{Q}(\lambda_i\boldsymbol{p}_i)=\lambda_i\boldsymbol{Q}\boldsymbol{p}_i$，这表明$\lambda_i$是$\boldsymbol{V}$的特征值，且$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{p}_i$为相应的特征矢量。由此便知，适当地定序后的$\lambda_i$即等于$\mu_i$，而适当地定序和冠以符号后的单位矢量$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{p}_i$即等于$\boldsymbol{q}_i$。

$\boldsymbol{U}$和$\boldsymbol{V}$用λ_i、$\boldsymbol{p}_i$和$\boldsymbol{q}_i$表示的表示式由以下谱表示给出：

$$\boldsymbol{U}=\sum_{r=1}^{3}\lambda_r(\boldsymbol{p}_r\otimes\boldsymbol{p}_r),\quad \boldsymbol{V}=\sum_{r=1}^{3}\lambda_r(\boldsymbol{q}_r\otimes\boldsymbol{q}_r). \tag{82}$$

借助于式(44)，(46)及$(81)_2$，我们得到

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{I}=\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{p}_r\otimes\boldsymbol{p}_r)=(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{p}_r)\otimes\boldsymbol{p}_r=\boldsymbol{q}_r\otimes\boldsymbol{p}_r, \tag{83}$$

而通过类似的运算，并利用到式$(76)_1$和(66)，则有

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{Q}\sum_{r=1}^{3}\lambda_r(\boldsymbol{p}_r\otimes\boldsymbol{p}_r)=\sum_{r=1}^{3}\lambda_r\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{p}_r\otimes\boldsymbol{p}_r)$$

$$=\sum_{r=1}^{3}\lambda_r\{(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{p}_r)\otimes\boldsymbol{p}_r\}=\sum_{r=1}^{3}\lambda_r(\boldsymbol{q}_r\otimes\boldsymbol{p}_r), \tag{84}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{U})^{-1}=\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\Big(\sum_{r=1}^{3}\lambda^{-1}{}_r(\boldsymbol{p}_r\otimes\boldsymbol{p}_r)\Big)\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$$

$$=\sum_{r=1}^{3}\lambda_r{}^{-1}(\boldsymbol{p}_r\otimes\boldsymbol{q}_r). \tag{85}$$

第九节 几何方法：坐标

我们将这样一个集$\overline{\mathrm{E}}$称为**欧几里得点空间**：该集的元素叫做**点**，且该集与一欧几里得矢量空间E之间以下列方式相联系。对应于$\overline{\mathrm{E}}$中的每一有序点对（x，y），在E中存在一唯一的矢量，用$\overrightarrow{xy}$表示，具有性质

(*)译者注：在这里一个式子中两次出现角标i并不表示求和。

(i) $\overrightarrow{yx} = -\overrightarrow{xy}$ $\quad \forall x, y \in \overline{E}$,

(ii) $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{xz} + \overrightarrow{zy}$ $\quad \forall x, y, z \in \overline{E}$,

(iii) 给定一从$\overline{E}$中任意选取的点o，则对应于每一矢量$x \in E$，存在唯一的点$x \in \overline{E}$满足$x = \overrightarrow{ox}$。在上面公理(iii)中，点o称为**原点**，x称为x相对于o的**位置**(*)。

$\overline{E}$中距离和角度的概念是从相应的矢量空间E中的标量积导出的：任意两点x和y之间的距离xy由$xy = |\overrightarrow{xy}|$定义，而$x$和$y$在另一任意点$z$所对的角由下式定义(12)

$$\varphi = \cos^{-1}\{(\overrightarrow{zx}) \cdot (\overrightarrow{zy})/(zx)(zy)\} \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi .$$

利用在第一节中赋给E以及上面赋给$\overline{E}$的那些性质，我们也可以了解到矢量式地处理$\overline{E}$中点、线和面的解析几何。这里假定读者已熟悉这些知识。

假如我们在$\overline{E}$中选定一原点o，在E中选定一由单位矢量组成的基底$g = \{g_1, g_2, g_3\}$，则对$\overline{E}$中的任一点x，都有E中唯一的位置矢量x和唯一的有序三标量数组(x_1, x_2, x_3)与之对应，后者为x相对于g的分量。(x_1, x_2, x_3)称为x在由原点o及基底g组成的坐标系中的**坐标**。若g为一标准正交基底，则称(o, g)为一**直角笛卡儿坐标系**。在以后诸章中采用的所有坐标均属于这种坐标系。

例17(13) 令x为一任意点x相对于一原点o的位置矢量，并令S和Q分别为E中的正定对称张量和正规正交张量。试给出S和Q对x的作用的几何解释。

解：(i)S有式(59)所示的谱表示，其中特征值$\lambda_i (i=1,2,3)$均为正，且相应的特征矢量组成E中的一标准正交基底$p = \{p_1, p_2, p_3\}$。因此

$$Sx = \sum_{r=1}^{3} \lambda_r (p_r \otimes p_r)x = \sum_{r=1}^{3} \lambda_r (x \cdot p_r)p_r = \sum_{r=1}^{3} \lambda_r x_r p_r ,$$

(*)译者注：也称为**位置矢量**。

(12) 若a和b为任意矢量，则由公理(7)和(3)有，$-|a||b| \leqslant a \cdot b \leqslant |a||b|$。

(13) 在初次读第一章时，此例题可以略去。

这里 x_i 为 x 在直角笛卡儿坐标系（ o， p ）中的坐标。从而用几何语言表述便是：S 对 x 的作用就是将点 x 变到相对于 o 的位置矢量为 Sx，在（ o， p ）中的坐标为 $\lambda_i x_i$ 的点 y。从坐标平面 $x_1=0$ 到 $\overline{E}$ 中每一点的距离变到原距离的 λ_1 倍（若 $\lambda_1>1$，则增加；若 $0<\lambda_1<1$，则缩短），而从通过 o 的平面 $x_2=0$ 和 $x_3=0$ 到该点的距离则也应分别乘上 λ_2 和 λ_3。因此，张量 S 表示 $\overline{E}$ 沿由单位特征矢量 p_i 所定义的三个相互正交的方向上，比例伸长量为 λ_i 的一种变形。这三个方向称为 S 的**主轴**。

(ii) Q 可以表为式(79)所示的形式，其中 $-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi$，$\{p, q, r\}$ 为 E 中的一标准正交基底。因此

$$Qx=\{p\otimes p+(q\otimes q+r\otimes r)\cos\theta-(q\otimes r-r\otimes q)\sin\theta\}x$$
$$=pp+(q\cos\theta-r\sin\theta)q+(q\sin\theta+r\cos\theta)r,$$

这里 $p=x\cdot p$，$q=x\cdot q$，$r=x\cdot r$。在原点为 o 的基矢量为 p、q、r 的直角笛卡儿坐标系中，点 x 和相对于 o 位置矢量为 Qx 的点 y 分别有坐标（ p， $\mathrm{Re}z$， $\mathrm{Im}z$ ）和（ p， $\mathrm{Re}ze^{i\theta}$， $\mathrm{Im}ze^{i\theta}$ ），这里 $z=q+ir$，且从图1-1中我们看到，点 x 是通过将径矢量 ox 绕 oc 轴转动角度 θ 移动到点 y 的。因此 Q 对 x 的作用可解释为 $\overline{E}$ 绕过 o 且沿由 p 所定义的方向的轴转动量为 θ 的一个旋转。

第十节　标量场、矢量场和张量场

一个点 x 的**邻域**是所有与 x 的距离小于某一正实数的点的集合。对 $\overline{E}$ 的某一子集 P 来说，术语**内点**、**外点**和**边界点**依次表示存在一个完全属于 P 的邻域的点，存在一个不含 P 中任何点的邻域的点，以及这样的点：其每一邻域包含至少一个属于 P 的点和至少一个不属于 P 的点。边界点本身既可从属于也可以不属于 P，所有内点的全体和所有边界点的全体分别称为 P 的**内域**和**边界**，后者由 ∂P 表示。若一点集 P 与其内域重合，则称它为**开集**，若它的每一对元素都可以用一完全在 P 中的路径连起来，则称它是**连通的**，若 P 中某一元素有

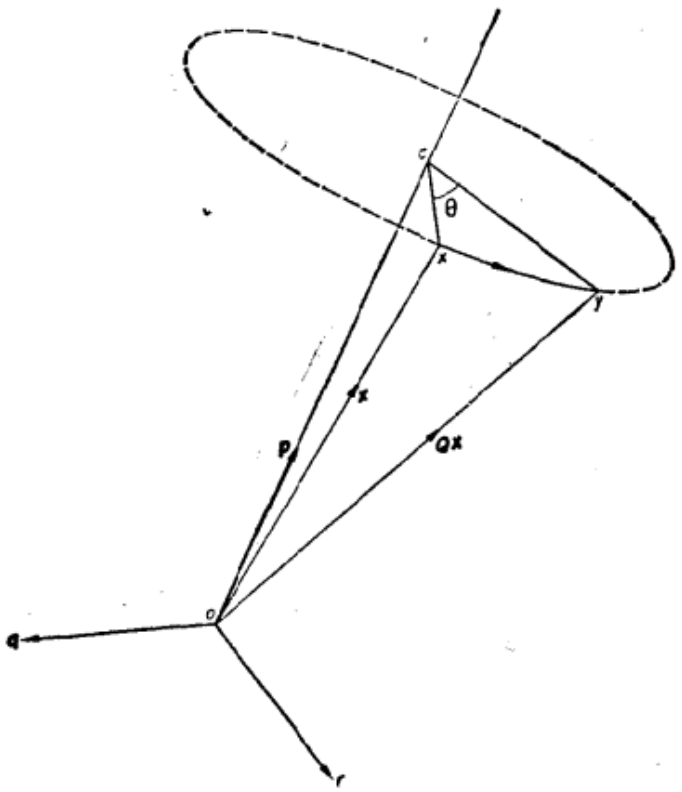


图1-1　一绕oc轴转角为θ的旋转对任意点x的位置矢量的作用（例17）

一包含P中所有点的邻域，则称P**有界**。$\overline{E}$中的一**开域**为一连通的开点集，$\overline{E}$中的一**闭域**为一具有非空内域且包括其全部边界的连通点集。

如果对一开域P的每一点都有一标量与之对应，则这样定义的从D到R的函数称为D上的**标量场**。类似地，给D的每一点分别赋予一矢量和一张量的从D到E和从D到L的函数称为D上的**矢量场**和**张量场**。

当原点o选定后，D中的点便与其相对于o的位置矢量一一对应，我们用符号D_0表示所有这种位置矢量的集合$\{\boldsymbol{x}: \boldsymbol{x}\in D\}$。显然，由标量场$\phi$：$D\to$R产生一个由下式定义的标量函数$\phi_0$：$D_0\to$R

$$\phi_0(\boldsymbol{x})=\phi(x)\quad \forall \boldsymbol{x}\in D_0,$$

矢量函数$\boldsymbol{u}_0$：$D_0\to$E和张量函数$\boldsymbol{T}_0$：$D_0\to$L以类似的方式对应于定

义在D上的矢量场$\boldsymbol{u}$和张量场$\boldsymbol{T}$。尽管函数ϕ_0、$\boldsymbol{u}_0$和$\boldsymbol{T}_0$依赖于原点的选择，但这无关紧要，因为由式(86)，原点变化的影响仅仅在于所有位置矢量加上一固定矢量。因此，我们从现在起不再区分ϕ和ϕ_0，$\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{u}_0$，以及$\boldsymbol{T}$和$\boldsymbol{T}_0$，$\phi(\boldsymbol{x})$、$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$和$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$就表示在相对于一任意选定的原点位置矢量为$\boldsymbol{x}$的代表性点$x$处$\phi$、$\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{T}$的值。如果一标准正交基底$e$与$o$结合组成一直角笛卡儿坐标系，在该系中代表性点$x$有坐标$(x_1, x_2, x_3)$，则$\phi$、$\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{T}$以及$\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{T}$相对于$e$的分量均可以看成是三变量$x_1$、$x_2$、$x_3$的函数。

除了是位置矢量的函数外，标量、矢量和张量还可以依赖于一个或多个实参数。这在连续介质力学中常常碰到。在那里描述一运动物体行为的场量往往随时间而变化。在本章余下部分给出的结果将不受有关场依赖于其它参数的影响。

若定义在开域D上的标量场ϕ满足

$$\lim_{\alpha\to 0}|\phi(\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{a})-\phi(\boldsymbol{x})|=0 \qquad \forall\boldsymbol{x}\in D,\ \boldsymbol{a}\in \mathrm{E},$$

则称它是**连续的**，若存在一矢量场$\boldsymbol{w}$使得

$$\lim_{\alpha\to 0}|\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{a}-\alpha^{-1}\{\phi(\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{a})-\phi(\boldsymbol{x})\}|=0 \qquad \forall\boldsymbol{x}\in D_0,\ \boldsymbol{a}\in \mathrm{E}, \tag{87}$$

则称ϕ是**可微的**。最多只有一个矢量场具备性质(87)：因为如果有两个的话，比如说$\boldsymbol{w}$和$\boldsymbol{w}^*$，则由不等式

$$0\leqslant|\{\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{w}^*(\boldsymbol{x})\}\cdot\boldsymbol{a}|\leqslant|\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{a}-\alpha^{-1}\{\phi(\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{a})-\phi(\boldsymbol{x})\}|+|\boldsymbol{w}^*(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{a}-\alpha^{-1}\{\phi(\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{a})-\phi(\boldsymbol{x})\}|,$$

通过让$\alpha\to 0$并利用$\boldsymbol{a}$的任意性得到$\boldsymbol{w}^*=\boldsymbol{w}$。当$\phi$可微时，唯一的矢量场$\boldsymbol{w}$称为$\phi$的**梯度**，并记为$\mathrm{grad}\phi$。

我们将连续性和可微性赋给定义在D上的矢量场$\boldsymbol{u}$和张量场$\boldsymbol{T}$，如果标量场$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{T}\boldsymbol{b})$对所有矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$都具有这些性质[14]。如果$\mathrm{grad}\phi$存在且连续，则称$\phi$是**连续可微的**，该性质同样可推广到$\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{T}$，如果$\mathrm{grad}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a})$和$\mathrm{grad}\{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{T}\boldsymbol{b})\}$对所有$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}\in\mathrm{E}$都存

(14) 注意：在这句话里a和b为E中的任意矢量，而不是D上的矢量场。

在且连续。

假定矢量场$\boldsymbol{u}$是可微的，则$\boldsymbol{u}$的梯度由grad$\boldsymbol{u}$表示，是一由下式定义的张量场[15]：

$$\{(\mathrm{grad}\boldsymbol{u})(\boldsymbol{x})\}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}=\mathrm{grad}\{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{a}\}\ \forall\boldsymbol{x}\in D_0,\ \boldsymbol{a}\in\mathrm{E},\quad(88)$$

$\boldsymbol{u}$的散度和旋度，记为div$\boldsymbol{u}$和curl$\boldsymbol{u}$，* 分别一标量场和一矢量场，并由下式定义

$$(\mathrm{div}\boldsymbol{u})(\boldsymbol{x})=\mathrm{tr}\{(\mathrm{grad}\boldsymbol{u})(\boldsymbol{x})\}\ \forall\boldsymbol{x}\in D_0,\quad(89)$$

$$\{(\mathrm{curl}\boldsymbol{u})(\boldsymbol{x})\}\cdot\boldsymbol{a}=\mathrm{div}\{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{a}\}\ \forall\boldsymbol{x}\in D_0,\ \boldsymbol{a}\in\mathrm{E}.\quad(90)$$

当张量场$\boldsymbol{T}$可微时，其散度，由div$\boldsymbol{T}$表示，是一由下式定义的矢量场：

$$\{(\mathrm{div}\boldsymbol{T})(\boldsymbol{x})\}\cdot\boldsymbol{a}=\mathrm{div}\{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}\}\quad\forall\boldsymbol{x}\in D_0,\ \boldsymbol{a}\in\mathrm{E}.\quad(91)$$

例18 令ϕ，$\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{T}$为可微的标量、矢量和张量场。试证：相对于直角笛卡儿坐标系$(o,\ \boldsymbol{e})$，这里$\boldsymbol{e}=\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3\}$，(**)

$$\mathrm{grad}\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x_p}\boldsymbol{e}_p,\quad(92)$$

$$\mathrm{grad}\boldsymbol{u}=\frac{\partial u_p}{\partial x_q}\boldsymbol{e}_p\otimes\boldsymbol{e}_q,\ \mathrm{div}\boldsymbol{u}=\frac{\partial u_p}{\partial x_p},$$

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{u}=\pm\varepsilon_{pqr}\frac{\partial u_r}{\partial x_q}\boldsymbol{e}_p,\quad(93)$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{T}=\frac{\partial T_{pq}}{\partial x_p}\boldsymbol{e}_q.\quad(94)$$

---

(15) 关于满足定义(88)的唯一张量场和满足(90)和(91)的唯一矢量场的存在，可参见下面在例题18末尾括号内的说明。

(*)译者注：curl也可写为rot。

(**)译者注：如果使用被读做“纳布拉”的微分算子

$\nabla\left(=\left(\frac{\partial}{\partial x_p}\boldsymbol{e}_p\right)\text{，为矢量形式}\right)$，则可写为

$\mathrm{grad}\phi=\nabla\phi$，

$\mathrm{grad}\boldsymbol{u}=\nabla\boldsymbol{u}$(用本中的写法为$\nabla\otimes\boldsymbol{u}$)，

$\mathrm{div}\boldsymbol{u}=\nabla\cdot\boldsymbol{u}$，$\mathrm{curl}\boldsymbol{u}=\nabla\times\boldsymbol{u}$，$\mathrm{div}\boldsymbol{T}=\nabla\cdot\boldsymbol{T}$。

拉普拉斯算子$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_p\partial x_p}\right)$为$\Delta=\nabla\cdot\nabla=\nabla^2$。

这里u_i和T_{ij}为$\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{T}$相对于e的分量，式(93)$_3$中正负号的选取取决于e是在$\mathbf{E}^+$中定义还是在$\mathbf{E}^-$中定义。

证 既然ϕ是可微的，则在式(87)中依次用基矢量$\boldsymbol{e}_i$替换$\boldsymbol{a}$后，知偏导数$\frac{\partial\phi}{\partial x_i}$在$D$中存在，并且有$w_i=\partial\phi/\partial x_i$。因此

$$\mathrm{grad}\phi=\boldsymbol{w}=w_p\boldsymbol{e}_p=\frac{\partial\phi}{\partial x_p}\boldsymbol{e}_p.$$

$\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{T}$的可微性保证偏导数$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$和$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k}$在$D$中存在。由定义(88)至(91)并利用式(92)，通过下面的运算即可建立式(93)和(94)：

$$\left(\mathrm{grad}\boldsymbol{u}-\frac{\partial u_p}{\partial x_q}\boldsymbol{e}_p\otimes\boldsymbol{e}_q\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}=(\mathrm{grad}\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}-\frac{\partial u_p}{\partial x_q}(\boldsymbol{e}_q\otimes\boldsymbol{e}_p)\boldsymbol{a}$$

$$=\mathrm{grad}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a})-\frac{\partial u_p}{\partial x_q}a_p\boldsymbol{e}_q=\mathrm{grad}\,(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a})$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_q}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{e}_q=0. \qquad (A)$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{u}=\mathrm{tr}\left(\frac{\partial u_p}{\partial x_q}\boldsymbol{e}_p\otimes\boldsymbol{e}_q\right)=\frac{\partial u_p}{\partial x_q}\mathrm{tr}(\boldsymbol{e}_p\otimes\boldsymbol{e}_q)=\frac{\partial u_p}{\partial x_q}\boldsymbol{e}_p\cdot\boldsymbol{e}_q$$

$$=\frac{\partial u_p}{\partial x_q}\delta_{pq}=\frac{\partial u_p}{\partial x_p}.$$

$$\left(\mathrm{curl}\boldsymbol{u}\mp\varepsilon_{pqr}\frac{\partial u_r}{\partial x_q}\boldsymbol{e}_p\right)\cdot\boldsymbol{a}=(\mathrm{curl}\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{a}\mp\varepsilon_{qrp}\frac{\partial u_r}{\partial x_q}a_p$$

$$=\mathrm{div}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{a})-\frac{\partial}{\partial x_q}(\pm\varepsilon_{qrp}u_ra_p)=0. \qquad (B)$$

$$\left(\mathrm{div}\boldsymbol{T}-\frac{\partial T_{pq}}{\partial x_p}\boldsymbol{e}_q\right)\cdot\boldsymbol{a}=(\mathrm{div}\boldsymbol{T})\cdot\boldsymbol{a}-\frac{\partial T_{pq}}{\partial x_p}a_q$$

$$=\mathrm{div}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{a})-\frac{\partial}{\partial x_p}(T_{pq}a_q)=0. \qquad (C)$$

〔重新整理(A)中各步骤，证实(93)$_1$右边的张量满足定义式(88)，并且不难证明没有其它张量场满足这一条件。类似地，满足定义式(90)和(91)的矢量场的存在性可以通过重新整理(B)和(C)得到证明，并且也不难验证这些矢量场是唯一的。〕

假定读者已熟悉曲线和曲面的初等微分几何以及线、面和体积分的基本理论。符号$d\boldsymbol{x}$用来表示$\overline{E}$中曲线上有向的弧长单元。$\overline{E}$中曲面上的面积微分和$\overline{E}$中闭区域的体积微分则分别用da和dv表示。

例19 令ϕ为一在某开域D中连续的标量场。

若

$$\int_R \phi \mathrm{d}v = 0$$

对D中的每一闭域R均成立，证明在D中$\phi = 0$。

证 假定上述结论不对，则在D中存在一点y，其相对于某原点o的位置矢量设为$\boldsymbol{y}$，在该点处ϕ非零。命$\phi(\boldsymbol{y}) = 2k$并假定$k > 0$。既然$y$必为一内点（$D$是开的），则与$y$的距离小于某$\delta$的所有点均在$D$内。又因为$\phi$在$y$处连续，故能找到一正实数$\delta' < \delta$，满足

$$|\phi(\boldsymbol{x}) - \phi(\boldsymbol{y})| < k, \quad \text{只要 } |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| < \delta'.$$

由于点集$B = \{x: xy \leqslant \delta'\}$为$D$中一闭区域，且在一相对于$o$位置矢量为$\boldsymbol{x}$的代表性点$x \in B$处$\phi(\boldsymbol{x}) > \phi(\boldsymbol{y}) - k = k$，那么

$$\int_B \phi \mathrm{d}v > k \int_B \mathrm{d}v = \frac{4}{3}\pi \delta'^3 k > 0,$$

这与假设相矛盾。假定$k < 0$，类似地也导致矛盾的结论，因此D中没有使得ϕ非零的点。

〔即使ϕ被一矢量或张量场代替，刚证过的结果仍然成立。将以上所用的推理稍微修改一下，我们还可证明(i)，使得

$$\int_S \phi \mathrm{d}a = 0$$

对D中每一曲面片S均成立的连续标量场ϕ在D中必为零，(ii)条件

$$\int_S \boldsymbol{u}\mathrm{d}a=0 \text{ 与 } \int_S \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a=0,$$

之一对D中每一曲面片S均成立，便足可以使连续矢量场$\boldsymbol{u}$在D中为零。这里，$\boldsymbol{n}$为一垂直于S的单位矢量。）

第十一节　积分定理

将在闭区域R的边界面∂R上的积分转化为在R上的积分是连续介质力学场方程推导中的一个重要步骤。完成这一转化所借助的工具为**散度定理**，该定理的一种足以满足以后所有需要的一般形式可表述如下：

令R为$\overline{\mathbf{E}}$中一边界为∂R的规则闭区域，$\boldsymbol{n}$为∂R上沿外法线方向的单位矢量，并令$\boldsymbol{u}$为一矢量场，$\boldsymbol{T}$为一张量场，两者都在R中连续且在R的内域中连续可微，则有

$$\int_{\partial R}\boldsymbol{u}\otimes(\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n})\mathrm{d}a=\int_R\{\boldsymbol{u}\otimes\mathrm{div}\boldsymbol{T}+(\mathrm{grad}\boldsymbol{u})\boldsymbol{T}\}\mathrm{d}v. \qquad (95)$$

隐含在术语**规则闭区域**里的是某些加在边界∂R之上而不太容易简洁描绘的一定的几何型约束条件。[16] 大致上说，∂R应该是一个可分为有限个**规则曲面片**所组成的、有界的且有两面的（亦即可定向的[17]）曲面。这里，规则曲面片是指具有连续单位法矢量场的可定向曲面。

现讨论以上公式的两个特殊情况。首先，若将$\boldsymbol{u}$看成为一固定矢量，式(95)则变为

(16) 参见O.D.Kellogg所著的Foundations of Potential Theory(New York, Ungar, 1929)，第四节，或者为了更为近代的处理参见H.Flanders所著的Differential Forms with Applications to the Physical Sciences (New York etc., Academic Press, 1963)，第五章。

(17) 例如，可参见T.M.Apostol所著的Mathematical Analysis (Reading, Mass, etc., Addison—Wesley, 1963)，第338页。

$$\boldsymbol{u}\otimes\int_{\partial R}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}\mathrm{d}a=\boldsymbol{u}\otimes\int_{R}\mathrm{div}\boldsymbol{T}\mathrm{d}v,$$

既然从E中选取$\boldsymbol{u}$不受任何限制，便有

$$\int_{\partial R}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}\mathrm{d}a=\int_{R}\mathrm{div}\boldsymbol{T}\mathrm{d}v. \tag{96}$$

其次，若$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{I}$，式(95)则变为

$$\int_{\partial R}\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{n}\mathrm{d}a=\int_{R}\mathrm{grad}\boldsymbol{u}\mathrm{d}v. \tag{97}$$

取(97)两边的迹并利用式$(47)_1$及(89)，我们得到

$$\int_{\partial R}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a=\int_{R}\mathrm{div}\boldsymbol{u}\mathrm{d}v, \tag{98}$$

该式即为散度定理的标准形式。由此看来，好象(95)比(98)更一般，但其实式(95)，从而(96)及(97)，都可由(98)导出。为了证明这一点，先在(98)中用矢量场$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{T}\boldsymbol{b})$代替$\boldsymbol{u}$，这里$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$为任意矢量。等式

$$\{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{T}\boldsymbol{b})\}\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}\cdot\{\boldsymbol{u}\otimes(\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n})\}\mathrm{b}\},$$

$$\mathrm{div}\{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{T}\boldsymbol{b})\}=\boldsymbol{a}\cdot\{\{(\mathrm{grad}\boldsymbol{u})\boldsymbol{T}+\boldsymbol{u}\otimes\mathrm{div}\boldsymbol{T}\}\boldsymbol{b}\},$$

很容易借助于定义式(24)和(41)及众所周知的公式

$$\mathrm{div}(\phi\boldsymbol{u})=\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{grad}\phi+\phi\mathrm{div}\boldsymbol{u}$$

导出。然后将这两个等式用于作过上述代换的式(98)并利用矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的任意性，我们便重新得到式(95)。

例20 令R为一规则闭区域，并令$\boldsymbol{T}$为一在R中连续且在R的内部连续可微的张量场。试证

$$\int_{\partial R}\boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n})\mathrm{d}a=\int_{R}(\boldsymbol{x}\times\mathrm{div}\boldsymbol{T}-\tau)\mathrm{d}v, \tag{99}$$

这里$\boldsymbol{x}$为R中一代表性点的位置矢量，τ为$\boldsymbol{T}-\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$的轴矢量。

证 先在矢量等式$(73)_1$中分别用$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}$代替$\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{c}$，然后在两边沿曲面$\partial R$积分，我们便得到

$$\boldsymbol{a}\times\int_{\partial R}\boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}a=\left(\int_{\partial R}\{\boldsymbol{x}\otimes(\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n})-(\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n})\otimes\boldsymbol{x}\}\,\mathrm{d}a\right)\boldsymbol{a},\tag{A}$$

这里$\boldsymbol{a}$为一任意矢量。再在散度定理(95)中令$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{x}$，并注意到$\mathrm{grad}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{I}$，我们有

$$\int_{\partial R}\boldsymbol{x}\otimes(\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n})\,da=\int_{R}(\boldsymbol{x}\otimes\mathrm{div}\boldsymbol{T}+\boldsymbol{T})\,\mathrm{d}v.\tag{B}$$

若利用(B)将面积分转化为体积分，式(A)的右边便变为

$$\int_{R}\{(\boldsymbol{x}\otimes\mathrm{div}\boldsymbol{T}-\mathrm{div}\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{a}\}\,\mathrm{d}v.\tag{C}$$

再次利用等式$(73)_1$可将(C)中的被积函数变为

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{x}\times\mathrm{div}\boldsymbol{T})+\mathrm{T}\times\boldsymbol{a},$$

这里还将式(71)应用于反对称张量$\boldsymbol{T}-\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$。因此

$$\boldsymbol{a}\times\int_{\partial R}\boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}a=\boldsymbol{a}\times\int_{R}(\boldsymbol{x}\times\mathrm{div}\boldsymbol{T}-\mathrm{T})\,\mathrm{d}v,$$

从而由$\boldsymbol{a}$的任意性得到式(99)。

将沿一封闭曲线的线积分转换为沿张在该曲线之上的一开曲面的积分在连续介质力学中也非常重要。所需要的转换由**斯托克斯**(Stokes)**定理**给出，该定理的以下形式[18]适合于以后的应用。

令$\mathcal{A}$为一以简单封闭曲线Γ为其边界的规则曲面片，并令$\boldsymbol{a}$为一在包含$\mathcal{A}$的某开域内连续可微的矢量场。则有

$$\oint_{\Gamma}\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_{\mathcal{A}}\mathrm{curl}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}a,\tag{100}$$

其中Γ相对于垂直于$\mathcal{A}$的单位矢量场$\boldsymbol{n}$具有正的走向。

上述定理中所提到的走向如图1–2所示。x、y和z是三个相邻的点，其中x和y在Γ上，z为$\mathcal{A}$的内点。图中所示的由Γ的走向所诱导出的环路xyz的走向与z点处$\mathcal{A}$的法线方向的关系符合右手螺旋

(18) 其证明可参见T.M.Apostol，前引书第335页。

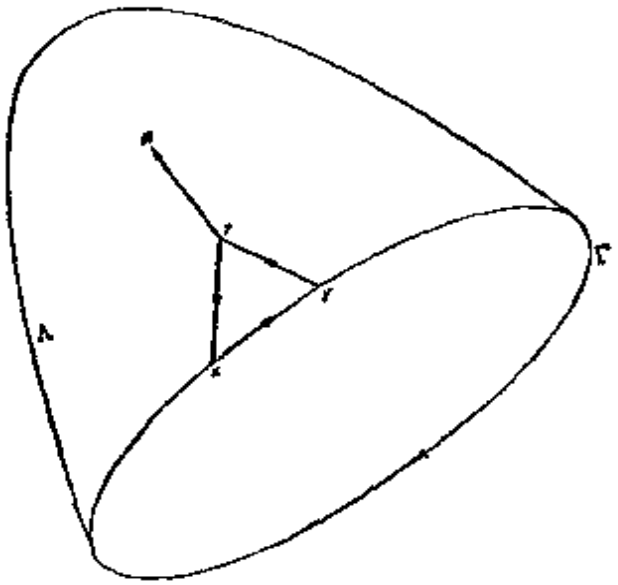


图 1-2　简单封闭曲线Γ的走向与张在它之上的曲面A的单位法矢量场n之间的关系

法则[19]。

习　题

（加星号的习题含有在以后章节中要用到的结果）

1.*试证：任何一个张量$\boldsymbol{A}$都可表示为一球张量（即单位张量的标量倍数）与一迹为零的张量的和，并证此分解是唯一的，且$\boldsymbol{A}$的无迹部分$\boldsymbol{A}'$由下式给出

$$\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}-\frac{1}{3}(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}.$$

〔$\boldsymbol{A}'$称为$\boldsymbol{A}$的偏张量。〕

2.*令$\boldsymbol{A}$为一任意张量，试证

$$\mathbf{I}_A=\frac{1}{2}\{(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^2-\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2\},$$

(19)　用更正规的术语来说就是：存在一正实数e使得只要xz和yz均小于e便有$[\overrightarrow{xz},\ \overrightarrow{yz},n]>0$。

并用凯莱——哈密顿定理导出

$$\mathrm{I\!I}_A=\frac{1}{6}\{(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^3-3\mathrm{tr}\boldsymbol{A}\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2+2\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^3\}。$$

3. 令$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{f}$为任意矢量。证明：

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{f}\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{f}\\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{e} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{f}\end{vmatrix}=[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}][\boldsymbol{d},\ \boldsymbol{e},\ \boldsymbol{f}].$$

利用此等式或其它方法证明：

$$\det(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{d}+\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{f})=[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{e}][\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{d},\ \boldsymbol{f}].$$

4. 利用习题3中的第一结果或其它方法证明

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}=\delta_{il}(\delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{km})+\delta_{im}(\delta_{jn}\delta_{kl}-\delta_{jl}\cdot\delta_{kn})+\delta_{in}(\delta_{jl}\delta_{km}-\delta_{jm}\delta_{kl}).$$

并由此导出公式：

$(a)\ \varepsilon_{ijp}\varepsilon_{imp}=\delta_{jl}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}$,

$(b)\ \varepsilon_{ipq}\varepsilon_{lpq}=2\delta_{il}$。

5. 令$\boldsymbol{A}$为一任意张量，$\boldsymbol{A}^*$为其转置伴随张量。

(i)给定A_{ij}为$\boldsymbol{A}$相对于标准正交基e的分量，试证：$\boldsymbol{A}^*$的分量为$\frac{1}{2}\varepsilon_{ipq}\varepsilon_{jrs}A_{pr}A_{qs}$，且导出$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*=(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}$。

(ii)证明

$(a)\ (\boldsymbol{A}^*)^*=(\det\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}$,

$(b)\ \mathrm{tr}\boldsymbol{A}^*=\mathrm{I\!I}_A$,

$(c)\ \boldsymbol{A}\{\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})\}=(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}\quad\forall\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\in\mathrm{E}$,

$(d)\ (\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{d})^*=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\otimes(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d})\quad\forall\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}\in\mathrm{E}$.

6. 令$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$为任意张量，$\boldsymbol{A}^*$及$\boldsymbol{B}^*$为$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$的转置伴随张量，α和β为任意标量。试证：

$$\det(\alpha\boldsymbol{A}+\beta\boldsymbol{B})=\alpha^3\det\boldsymbol{A}+\alpha^2\beta\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*)+\alpha\beta^2\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^*)+\beta^3\det\boldsymbol{B}.$$

7. 设一对称张量$\boldsymbol{S}$相对于标准正交基e的分量为 $-S_{11}=S_{33}=\frac{1}{3}$, $-S_{12}=-S_{21}=S_{23}=S_{32}=\frac{2}{3}$,

$S_{22}=S_{31}=S_{13}=0$，求$\boldsymbol{S}$的特征值以及相应的特征矢量所组成的一标准正交组相对于e的分量。

答案：$\lambda_1=1$，$\lambda_2=0$，$\lambda_3=-1$.

$$\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{3}(-\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3),\quad \boldsymbol{p}_2=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3),$$

$$\boldsymbol{p}_3=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3).$$

8. 令$\boldsymbol{p}$为一非零矢量，$\boldsymbol{S}$为一对称张量。证明

(i)$\boldsymbol{p}$为$\boldsymbol{S}$的特征矢量当且仅当$\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{p}$可与$\boldsymbol{S}$交换（译者注：张量$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$是**可交换**的是指$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$成立的情况）。

(ii)若$\boldsymbol{S}$为半定且$\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{Sp})=0$，则$\boldsymbol{p}$为$\boldsymbol{S}$的零矢量(即$\boldsymbol{Sp}=0$)。

9. 令$\boldsymbol{S}$为一对称张量，$\boldsymbol{n}$为一单位矢量，α为一正标量。证明张量

$\hat{\boldsymbol{S}}=\boldsymbol{S}+\alpha\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}$的主不变量为

$$\mathrm{I}_{\hat{S}}=\mathrm{I}_S+\alpha,$$

$$\mathrm{II}_{\hat{S}}=\mathrm{II}_S+\alpha\{\mathrm{tr}\boldsymbol{S}-\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{Sn})\},$$

$$\mathrm{III}_{\hat{S}}=\mathrm{III}_S+\alpha\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{S}^*\boldsymbol{n}).$$

假定$\boldsymbol{S}$具有特征值$\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$，且其特征矢量场均不与$\boldsymbol{n}$正交。

证明：$\hat{\boldsymbol{S}}$的特征值$\hat{\lambda}_1$，$\hat{\lambda}_2$，$\hat{\lambda}_3$当适当地排列之后具有以下的交织特性：

$$\lambda_1<\hat{\lambda}_1<\lambda_2<\hat{\lambda}_2<\lambda_3<\hat{\lambda}_3.$$

提示：令$\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$，$\boldsymbol{p}_3$为张量$\boldsymbol{S}$对应于特征值λ_1，λ_2，λ_3的标准正交特征矢量。证明$\hat{\boldsymbol{S}}$的特征方程为

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)$$
$$-\alpha\{q_1^2(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)+q_2^2(\lambda-\lambda_3)(\lambda-\lambda_1)$$
$$+q_3^2(\lambda-\lambda_1)\cdot(\lambda-\lambda_2)\}=0,$$

式中$q_i=\boldsymbol{p}_i\cdot\boldsymbol{n}$，$i=1$，$2$，$3$。确定方程式左边当$\lambda=\lambda_i$时的符号。

10. 令$\boldsymbol{A}$为一任意可逆张量，并假设$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$。由例11知$\boldsymbol{S}$

是正定对称的，且具有特征值 $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$ 和相应的特征矢量 $\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$，$\boldsymbol{p}_3$。证明：

$$\boldsymbol{S}=\lambda_2\boldsymbol{I}-\frac{1}{2}(\lambda_3-\lambda_1)(\boldsymbol{q}\otimes\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}\otimes\boldsymbol{q}),$$

式中

$$(\lambda_3-\lambda_1)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{q}=(\lambda_2-\lambda_1)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}_1+(\lambda_3-\lambda_2)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}_3,$$
$$(\lambda_3-\lambda_1)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{r}=(\lambda_2-\lambda_1)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}_1-(\lambda_3-\lambda_2)^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{p}_3.$$

如果对所有与 $\boldsymbol{n}$ 正交的单位矢量 $\boldsymbol{m}$，$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{m}|$ 都具有相同的值，则称单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 确定一整盘对 $\boldsymbol{A}$ 来说是特殊的方向，并将这个特殊方向盘记为 $C_{(n)}$。试验证 $C_{(q)}$ 和 $C_{(r)}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特殊方向盘。并证明 $\boldsymbol{A}$ 没有其它的特殊方向盘。进一步证明如果单位矢量 $\boldsymbol{m}_1$ 和 $\boldsymbol{m}_2$ 确定着 $\boldsymbol{A}$ 的特殊方向盘，则 $\boldsymbol{m}_1$ 和 $\boldsymbol{m}_2$ 之间与 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{m}_1$ 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{m}_2$ 之间具有相同的夹角。

提示：张量 $\boldsymbol{A}$ 具有一殊殊方向盘当且仅当存在有标准正交矢量 $\boldsymbol{l}$，$\boldsymbol{m}$ 使得 $|\boldsymbol{A}(\cos\theta\boldsymbol{l}+\sin\theta\boldsymbol{m})|$ 的值不依赖于 θ。证明 $\boldsymbol{l}$ 和 $\boldsymbol{m}$ 都与 $\boldsymbol{q}$ 或 $\boldsymbol{r}$ 正交。

11．（i）令 $\boldsymbol{W}$ 为一反对称张量，其轴矢量为 $\boldsymbol{w}$。将 $\boldsymbol{W}$ 的分量（相对于一标准正交基）用 $\boldsymbol{w}$ 的分量表示并找出逆关系。

(ii)*设 $\boldsymbol{S}$ 为一对称张量，$\boldsymbol{W}$ 为一反对称张量，证：$tr(\boldsymbol{S}\boldsymbol{W})=0$。

答案：（i）$W_{ij}=\mp\varepsilon_{ijp}w_p$，$w_i=\mp\varepsilon_{ipq}W_{pq}$，基在 E^+ 上定义时取上面的符号，在 E^- 上定义时取下面的符号。

12．令 $\boldsymbol{W}_1$ 和 $\boldsymbol{W}_2$ 为反对称张量，分别具有轴矢量 $\boldsymbol{w}_1$ 和 $\boldsymbol{w}_2$。证明

$$(a)\boldsymbol{W}_1\boldsymbol{W}_2=\boldsymbol{w}_2\otimes\boldsymbol{w}_1-(\boldsymbol{w}_1\cdot\boldsymbol{w}_2)\boldsymbol{I},$$
$$(b)\mathrm{tr}(\boldsymbol{W}_1\boldsymbol{W}_2)=-2\boldsymbol{w}_1\cdot\boldsymbol{w}_2.$$

通过适当选取 $\boldsymbol{w}_1$ 和 $\boldsymbol{w}_2$，从(b)推导出矢量等式

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$$
$$\forall\,\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{d}\in\mathsf{E}.$$

13*. 令$e=\{e_1, e_2, e_3\}$和$e'=\{e'_1, e'_2, e'_3\}$为标准正交基。证明$e'_i\otimes e_j$为一正交张量，是否为正规正交张量取决于e与e'是否相似。再证明任何一个正交张量都可以用两个标准正交基通过这种方式来表示。

令a为一任意矢量，A为一任意张量，并令它们相对e和e'的分量分别为a_i, A_{ij}和a'_i, A'_{ij}。试推导出变换法则

$$a'_i=l_{ip}a_p \text{和} A'_{ij}=l_{ip}l_{jq}A_{pq},$$

这里$l_{ij}=e'_i\cdot e_j$.

提示：如Q为任意正交张量且(e_1, e_2, e_3)为一标准正交基，则(Qe_1, Qe_2, Qe_3)也为一标准正交基。

14. 如果l, m, n为彼此正交的单位矢量，证明

$$Q=m\otimes n+n\otimes l+l\otimes m$$

是正交张量。进一步证明$Q^2=Q^T$，并推证Q是正规正交张量。

15. 证明标准正交张量的表示式(79)可以改写成

$$Q=I+\sin\theta P+(1-\cos\theta)P^2,$$

式中P是一以满足$Qp=p$的单位矢量p为其轴矢量的反对称张量。求证

$$P^n=-P^{n-2}, \quad n\geqslant 3$$

并推证沿同一轴先旋转角度θ_1然后再旋转角度θ_2等价于一次旋转角度$\theta_1+\theta_2$。

16*. 令T为一可与所有正规正交张量交换的张量。利用习题15的第一结果或其它方法证明所有单位矢量都是T的特征矢量，并推证T是球形的。

提示：通过考虑T对$3^{-\frac{1}{2}}(l+m+n)$的作用(l, m, n为标准正交矢量)，来证明所有这些矢量都对应于同一特征值。

17. 设某张量A相对于标准正交基e的分量为

$$A_{11}=A_{12}=2, \quad -A_{21}=A_{22}=-A_{33}=1,$$

$$A_{23}=A_{32}=A_{31}=A_{13}=0,$$

验证$\boldsymbol{A}$可逆，并找出它相对于e的极分解。

提示及答案：当$A_{23}=A_{32}=A_{31}=A_{13}=0$，$\boldsymbol{U}$，$\boldsymbol{V}$和$\boldsymbol{Q}$的相应分量也为零。解释此性质并用以简化计算。以矩阵形式表示的结果（相对于e）为

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

18. 证明：若$\boldsymbol{p}$为一单位矢量，则$\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{p}$为一非正规正交张量，并几何地解释该张量对$\overline{\mathbf{E}}$中的点的位置矢量的作用。

提示及答案：一代表性点将移至它相对于过原点且与$\boldsymbol{p}$正交的平面的镜象的位置。注意到所给张量正好与在方程(1.79)中以$\theta=\pi$代入所得张量差一负号。因此其作用等价于绕$\boldsymbol{p}$轴旋转180°再施以由$-\boldsymbol{I}$表示的中心映射。

19*.令ϕ，$\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{T}$为可微的标量、矢量和张量场。证明

(i) $\operatorname{grad}(\phi\boldsymbol{u})=\boldsymbol{u}\otimes\operatorname{grad}\phi+\phi\operatorname{grad}\boldsymbol{u}$，

(ii) $\operatorname{div}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{u})=\boldsymbol{u}\cdot\operatorname{div}\boldsymbol{T}+\operatorname{tr}(\boldsymbol{T}\operatorname{grad}\boldsymbol{u})$，

(iii) $\mathrm{div}(\phi \boldsymbol{T}) = \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\mathrm{grod}\phi + \phi \mathrm{div}\boldsymbol{T}$。

20*. 令$\boldsymbol{u}$为一在某开区域D内连续可微的矢量场，试证明$\mathrm{grad}\boldsymbol{u} - (\mathrm{grad}\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}$为一在 D 上轴矢量为$\mathrm{curl}\boldsymbol{u}$的反对称张量场。由此或用其它方法证明

$$\int_{\partial R} \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{u} \mathrm{d}a = \int_{R} \mathrm{curl}\boldsymbol{u} \mathrm{d}v,$$

这里R为D中一规则闭区域，$\boldsymbol{n}$为其边界∂R的外法线单位矢量。

第二章　基本运动学

运动学研究运动本身，而不考虑产生运动的力。有关的原始概念为**位置**、**时间**及**物体**。后者将一些关于能够运动和变形的物质集合的直观想法抽象为数学术语。在本章前三节，我们阐述在推导连续介质力学场方程时将要用到的一些简单运动学概念。那些奠定弹性力学和粘性流体力学基础的更复杂的运动学理论将在第四到第六节中介绍。

第一节　物体、构形和运动

一物体 $\widetilde{B}$是这样一个集合，它的元素能与一欧几里得点空间 $\mathbf{E}$ 中的闭区域 B 的点建立起一一对应的关系。$\widetilde{B}$ 中的元素叫做**质点**(1)，B 称为 $\widetilde{B}$**的构形**；我们说 $\widetilde{B}$ 中的某质点在 B 中所对应的点是由该质点**占据**着。若用 $\widetilde{X}$ 表示 $\widetilde{B}$ 中一代表性质点，用 x 表示 $\widetilde{X}$ 在 B 中占据的点 x 相对于某原点 o 的位置矢量，则上句话意味着存在一函数(2) θ：$\widetilde{B}\to B_o$ 及其逆 Θ：$B_o\to\widetilde{B}$ 满足

$$x=\theta(\widetilde{X}),\quad \widetilde{X}=\Theta(x). \tag{1}$$

在物体的运动过程中，其构形随时间变化。令 t 为一实变量，用以表示时间，并令 I 为实数域 $\mathbf{R}$ 中的某区间（不一定有界）。如果对 I 中每个 t 的值，都相应地存在物体 $\widetilde{B}$ 的唯一构形 B_t，则称这一系列构形 $\{B_t: t\in I\}$ 为 $\widetilde{B}$**的运动**。由该定义，必然存在函数 ϕ：$\widetilde{B}\times I\to(B_t)$，及函数 $\Phi\{(x,t): t\in I,\ x\in(B_t)。\}\to\widetilde{B}$ 满足

$$x=\phi(\widetilde{X},\ t),\quad \widetilde{X}=\Phi(x,\ t)。 \tag{2}$$

（1）当用在连续介质力学中时，该术语仅仅表示物体的一个元素，它并不象在牛顿力学中那样表示一个点质量。

（2）B_o 代表 B 中所有点相对于 o 的位置矢量的全体。

在$\tilde{B}$的运动过程中，一代表性质点先后占据了一系列点，这些点在$\overline{E}$中形成一条曲线。这条曲线就称为$\tilde{X}$**的路径**，并以参数形式由(2)$_1$表示。$\tilde{X}$**的速度**和**加速度**分别定义为当它沿其路径移动时位置矢量与速度矢量随时间的变化率。

式(2)将一运动描述为一系列物质点与点的对应，其中各点是由其相对于一选定原点 o 的位置矢量来确定的。我们也想用类似的方法来区别各质点。为此目的，选取$\tilde{B}$的某一特殊构形B_r，并将它取名为**参照构形**。$\tilde{B}$中的一代表性质点$\tilde{X}$就由它在B_r中所占据点的位置矢量X来识别。确定X所用的原点O不一定与 o 重合。式(1)意味着存在函数 $\pi:\tilde{B}\to(B_r)_o$及函数 $\Pi:(B_r)_o\to\tilde{B}$ 满足 $X=\pi(\tilde{X})$，$\tilde{X}=\Pi(X)$。将这两式与(2)相结合，便得到

$$x=\phi(\Pi(X),\ t)=\Psi(X,\ t), \tag{3}$$

$$X=\pi(\Phi(x,\ t))=\Psi(x,\ t). \tag{4}$$

式(3)和式(4)将一代表性质点的参照位置矢量、即时位置矢量及时间联系起来，给出了物体$\tilde{B}$运动的另外两种表示式。函数 Ψ及Ψ分别为B_r和B_t中的矢量场，当然取决于参照构形的选取。

为了避免进一步讨论那些实际上不能实现的运动，假定各构形$\{B_t\}$互相相似，这就是说，每个三重积$[\vec{px},\ \vec{py},\ \vec{pz}]$都具有固定的符号，这里 p，x，y，z 为任意四个物质点所占据的四个相邻的点。我们还假定B_r与B_t相似，并假定 **Ψ和Ψ关于位置和时间变量二次连续可微**。因此物体$\tilde{B}$原则上说能够占据参照构形B_r，尽管它并不必须在区间 I 内的某个时间占据。上面黑体字的光滑性条件意味着B_r中的曲线、曲面及闭区域将随运动变为B_t中的曲线、曲面及闭区域。由于B_t中的这些子集在时间区间 I 内总是由同样的质点占据着，因而称它们为**物质曲线**、**物质曲面**和**物质区域**。

当函数 Ψ和Ψ不依赖于t时就采用术语**变形**，该术语也应用于上下文中与时间无关的论述。更准确地说，变形就是参照构形到即

时（或称变形的）构形的（光滑）变换。显然运动可以看成是以时间为参数的一系列变形。

例1 如果物体$\tilde{B}$运动过程中任意两质点所占据的两点之间的距离保持不变，则称这样的运动为**刚性运动**。证明：对这样的运动，式(3)和式(4)具有以下形式：

$$x=c(t)+Q(t)X,\quad X=Q^{\mathrm{T}}(t)\{x-c(t)\},\qquad (5)$$

这里Q为一正规正交张量。利用上式可计算与刚性运动相应的速度和加速度场。

证 令$\tilde{P}$、$\tilde{X}$、$\tilde{Y}$为$\tilde{B}$中三个质点，并令P、X、Y和p、x、y分别为这些质点在参照构形B_r和即时构形B_t中所占据的点相对于原点O和o的位置矢量。运动的刚性要求

$|x-y|=|X-Y|$，$|x-p|=|X-P|$，$|y-p|=|Y-P|$，从而有

$$(x-p)\cdot(y-p)=(X-P)\cdot(Y-P)。\qquad (A)$$

假定$\tilde{P}$占据着B_r中一内点，因此如果$g=\{g_1,\ g_2,g_3\}$为$\mathbf{E}$中一标准正交基，则对足够小的标量l来说，相对于O具有位置矢量$P+lg_i$（$i=1,\ 2,\ 3$）的三点将由质点$\tilde{Q}_i\in\tilde{B}$占据着。若质点$\tilde{Q}_i$在B_t中所占据的点相对于o的位置矢量为$p+le_i$，则由式(A)，先用$\tilde{Q}_i$代替$\tilde{Y}$，然后用$\tilde{Q}_i$、$\tilde{Q}_j$代表$\tilde{X}$、$\tilde{Y}$，我们得到

$$(x-p)\cdot e_i=(X-P)\cdot g_i\text{及}e_i\cdot e_j=g_i\cdot g_j=\delta_{ij}\qquad (B)$$

因此$e=\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$为$\mathbf{E}$中的另一标准正交基，并且由于B_r与B_t为相似构形，g与e还是相似基。将$x-p$参照到基e上并借助于式(1.14)、$(B)_1$及(1.41)，我们得到

$$\begin{aligned}x-p&=\{(x-p)\cdot e_r\}e_r=\{(X-P)\cdot g_r\}e_r\\&=(e_r\otimes g_r)(X-P)=Q(X-P),\end{aligned}$$

这里$Q=e_r\otimes g_r$为一正规正交张量（参见练习1.13）。令$c=p-QP$并注意到P和e_i从而c和Q均依赖于时间，便得到式$(5)_1$。逆关系$(5)_2$可借助于式（1.75）由式$(5)_1$导出。

速度v和加速度a可通过固定参照位置矢量X而将空间位置矢量

x对时间求一次和二次偏导数计算出。从而由式$(5)_1$得，

$$v=\dot{c}+\dot{Q}X,\quad a=\ddot{c}+\ddot{Q}X, \tag{C}$$

式中，字符上面一圆点表示对t微分。利用式$(5)_2$，v和a可用x和t表示为

$$v=\dot{c}+\dot{Q}Q^{T}(x-c),\quad a=\ddot{c}+\ddot{Q}Q^{T}(x-c)。 \tag{D}$$

将正交关系式$QQ^{T}=I$对t微分得出$\dot{Q}Q^{T}=-Q\dot{Q}^{T}=-(\dot{Q}Q^{T})^{T}$，这表时张量$W=\dot{Q}Q^{T}$是反对称的。此外

$$\ddot{Q}Q^{T}=(\dot{Q}Q^{T})-\dot{Q}\dot{Q}^{T}=\dot{W}-(\dot{Q}Q^{T})(Q\dot{Q}^{T})=\dot{W}+W^{2}.$$

从而式(D)可改写为

$$v=\dot{c}+W(x-c),\quad a=\ddot{c}+(\dot{W}+W^{2})(x-c), \tag{6}$$

或者用W的轴矢量w表示为

$$v=\dot{c}+w\times(x-c),\quad a=\ddot{c}+\dot{w}\times(x-c)+w\times\{w\times(x-c)\}. \tag{7}$$

由式(7)，我们认识到w为$\tilde{B}$的**角速度**，而$\dot{c}$和$\ddot{c}$分别为在时间t瞬时占据相对于o位置矢量为c的点的质点的速度和加速度。

第二节　物质描述和空间描述

在阐述连续介质力学基本原理时，物体$\tilde{B}$将被赋予各种各样的物理量。这些物理量由标量、矢量及张量场表示，而这些场量不是定义在参照构形B_r上，就是定义在形成$\tilde{B}$的运动的构形$\{B_t\}$上。在前种情况下，参照位置矢量X和时间t为自变量，我们说这些场量用的是**物质描述**(3)。在后种情况下，自变量为即时位置矢量x和t，相应的描述为**空间描述**(3)。物质描述中的场量可以借助于关系式(4)转化为空间描述，这一过程已在例1中由式(C)推导式(D)时用到过。从空间描述到物质描述的转化可类似地借助于式(3)来实现。

(3) 在许多书中，尤其是那些专门论述流体力学的书中所使用的术语拉格朗日描述和欧拉描述分别与这里的物质描述和空间描述同义。

例2 在空间描述中速度的场线称为**流线**，速度仅依赖于即时位置矢量的运动称为**定常运动**。证明：在定常运动中流线与质点路径重合。反过来是否成立？

证：我们首先注意到，一般说来，运动的质点的路径是$\overline{\mathbf{E}}$中的固定曲线，而流线图却随时间变化，可是在定常运动中，速度场在每个构形B_t中都一样，且流线是固定的。如果我们能够证明对某$t\in I$，通过B_t中任意一点x的质点路径和流线具有相同的切线，那我们就证明了题中所述的结论。但既然由定义，在任一运动中，在任一物质点即时所占据的点处，速度既沿着质点路径的方向又沿着流线的方向，那在该点处质点的路径必与流线相切。

考虑由$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}+\frac{1}{2}kt^2\boldsymbol{p}$给出的运动，式中$k$为一正常数，$\boldsymbol{p}$为一固定单位矢量。其速度为$\boldsymbol{v}=kt\boldsymbol{p}$，质点的路径和流线均为$\boldsymbol{p}$方向上的直线。但该运动却是非定常的，因此，“质点路径与流线重合的运动是定常的”这一推论一般来说是不成立的。

将两个相似的标准正交基$E=\{\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3\}$和$e=\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$分别联系到原点$O$和$o$处，便建立起一个参照直角坐标系和一个空间直角坐标系。在坐标系(O,E)中的参照坐标用$X_\alpha(\alpha=1,2,3)$表示，坐标系(o,e)中的空间坐标用$x_i(i=1,2,3)$表示。矢量可以参照到基E和e中的任何一个，而张量既可参照到它们其中之一，又可同时参照到这两个基上。因此矢量场$\boldsymbol{u}$和张量场$\boldsymbol{T}$有下述表示(4)：

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{u}=u_\alpha\boldsymbol{E}_\alpha=u_i\boldsymbol{e}_i,\\&\boldsymbol{T}=T_{\alpha\beta}\boldsymbol{E}_\alpha\otimes\boldsymbol{E}_\beta=T_{\alpha i}\boldsymbol{E}_\alpha\otimes\boldsymbol{e}_i\\&\quad=T_{j\alpha}\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{E}_\alpha=T_{ji}\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_i.\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

式中各组分量由下式给出：

(4) 读者请记住第1.1节中的求和约定。

$$\left.\begin{aligned} &u_\alpha=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{E}_\alpha,\quad u_i=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_i,\\ &T_{\alpha\beta}=\boldsymbol{E}_\alpha\cdot(\boldsymbol{T}\boldsymbol{E}_\beta),\quad T_{\alpha i}=\boldsymbol{E}_\alpha\cdot(\boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_i),\\ &T_{i\alpha}=\boldsymbol{e}_i\cdot(\boldsymbol{T}\boldsymbol{E}_\alpha),\quad T_{ij}=\boldsymbol{e}_i\cdot(\boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_j).\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

例 3 在时刻t通过p点的**条纹线**是这样一条曲线，以前曾经占据过p点的所有质点在该时刻所占据的点都在该曲线上。设一运动当$x\geqslant 0$时，由

$$x_1=X_1(1+kt),\quad x_2=X_2+lt,\quad x_3=X_3\qquad(A)$$

给出，试求出代表条纹线的方程，式中参照和空间坐标都参照到同一直角坐标系，k，l为正常数。

解 令$\widetilde{\boldsymbol{X}}$为在时刻$t$占据通过$p$点的条纹线上某点$x$的质点，则$x$的坐标$x_i$与$t$和$\widetilde{\boldsymbol{X}}$的参照坐标$X_\alpha$之间由式(A)相联系。另外因为$\widetilde{\boldsymbol{X}}$在区间〔0，$t$〕中的某时刻$t'$占据$p$点，故有

$$p_1=X_1(1+kt'),\quad p_2=X_2+lt',\quad p_3=X_3,\qquad(B)$$

式中p_i为p的坐标。条纹线的表示式可以通过在式(A)和(B)中消去X_α和t得到。消去X_α给出

$$x_1(1+kt')=p_1(1+kt),\quad x_2-p_2=l(t-t'),\quad x_3=p_3,$$

从而消去t'得到

$$x_1\{x_2-p_2-(l/k)(1+kt)\}=-p_1(l/k)(1+kt),\quad x_3=p_3$$

〔上式确定的条纹线为平面$x_3=p_3$上一等轴双曲线的一段弧。当$p_1>0$，$p_2>0$时的情形如图2-1所示。如果我们想象将通过p点的质点染上颜色，则所求的条纹线即为在时刻t所观察到的有色曲线。但是应该注意，在该时刻染过颜色的质点实际上在沿直线的质点路径运动；只有一个质点（即正在占据p点的那个）是在沿条纹线运动。〕

令ϕ为一描述物体$\widetilde{\boldsymbol{B}}$某种特性的标量场。在$\widetilde{\boldsymbol{B}}$的运动过程中，$\phi$的物质导数为$\phi$跟随一固定质点随$t$的变化率，用$\dot{\phi}$表示。既然$\widetilde{\boldsymbol{B}}$中的质点由它们在参照构形中的位置矢量确定，那么，$\dot{\phi}$可通过固定参照矢量$\boldsymbol{X}$将$\phi$对$t$微分求得。其结果为

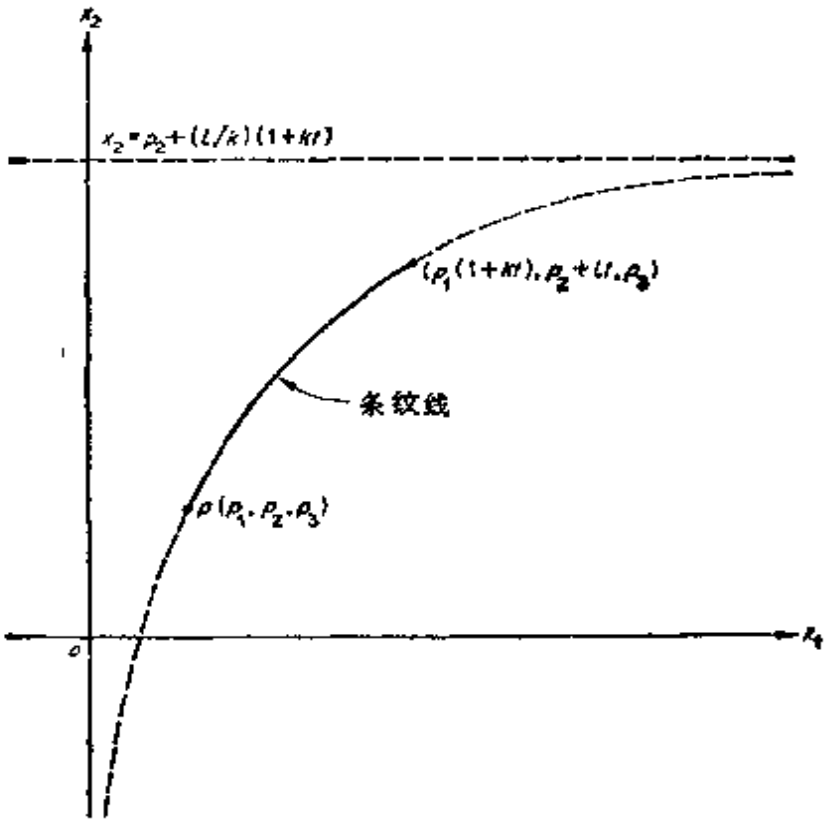


图 2-1 一条纹线的即时构形（例 3 ）

$$\dot{\phi}(\boldsymbol{X},\ t)=\frac{\partial\phi}{\partial t}(\boldsymbol{X},\ t)\text{或}\dot{\phi}(\boldsymbol{x},\ t)=\frac{\partial\phi}{\partial t}(\boldsymbol{x},\ t)$$

$$+\{(\mathrm{grad}\phi)(\boldsymbol{x},\ t)\}\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\ t),\qquad(10)$$

取决于 ϕ 是由物质描述给出还是由空间描述给出。关于矢量场 $\boldsymbol{u}$ 相应的公式为

$$\dot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{X},\ t)=\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}(\boldsymbol{X},\ t),\quad \dot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},\ t)=\frac{\partial u}{\partial t}(\boldsymbol{x},\ t)$$

$$+\{(\mathrm{grad}\boldsymbol{u})(\boldsymbol{x},\ t)\}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\ t).\qquad(11)$$

在式(11)中依次用 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 代替 $\boldsymbol{u}$，我们得到

$$\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{x}},\quad \boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{v}}=\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\mathrm{grad}\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{v}=\ddot{\boldsymbol{x}},\qquad(12)$$

式中方程用的是空间描述。

例4 方程 $\eta(\boldsymbol{x},\ t)=0$ 在运动着的物体 $\widetilde{\mathcal{B}}$ 所占据的每一个构形 B_t 上

定义一个曲面S_t。证明：S_t为一物质曲面当且仅当$\dot{\eta}=0$。

证 （a） 因为η为一定义在构形B_t上的标量场，所以如果$\dot{\eta}=0$，$\tilde{\boldsymbol{B}}$中任意质点处的η值在运动过程中便保持不变。特别地，那些在某时刻η值为零的质点在所有其它时刻都将保留零值，这就意味着S_t上的点在整个运动过程中都是由同样的质点占据着。因此S_t是一物质曲面。

（b） 既然一物质曲面上的点总是由相同的质点占据着，该曲面在参照构形中必由一具有形式$\zeta(\boldsymbol{X})=0$的方程所定义。如果S_t为一物质曲面，那么函数η当变换到物质描述后肯定只依赖于参照位置矢量$\boldsymbol{X}$。从而，由式(10)$_1$有$\dot{\eta}=0$。

第三节 变形梯度和速度梯度

将第一章第10节的符号加以扩展，我们用Grad、Div及Curl表示关于参照构形B_t中的位置矢量的梯度、散度和旋度算子，而用grad，div及curl表示相应的关于空间位置矢量的算子。

为变形和运动局部分析之根本的基本运动学张量是**变形梯度** $\boldsymbol{F}$，定义为

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X},\ t)=(\mathrm{Grad}\boldsymbol{\psi})(\boldsymbol{X},\ t),\ \text{或}\boldsymbol{F}=\mathrm{Grad}\boldsymbol{x}。\tag{13}$$

相对于参照和空间坐标系（O，E）和（o，e），

$$\boldsymbol{F}=F_{ia}\,\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{E}_a,\ \text{式中}F_{ia}=\frac{\partial x_i}{\partial X_a}\tag{14}^{(*)}$$

在第一节中施加的光滑性条件保证$\frac{\partial\psi_i}{\partial X_a}$和$\frac{\partial\Psi_a}{\partial x_i}$这两组偏导数的存在性。这就意味着$\boldsymbol{F}$可逆，并由

$$\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{x},\ t)=(\mathrm{grad}\Psi)(\boldsymbol{x},\ t),\ \text{或}\boldsymbol{F}^{-1}=\mathrm{grad}\boldsymbol{X},\tag{15}$$

所定义，且具有分量形式

(*)译者注：本书在后面尽可能用希腊字母和小写拉丁字母分别与系(O,E)和(o,e)相对应。

$$\boldsymbol{F}^{-1}=F^{-1}{}_{\alpha i}\boldsymbol{E}_\alpha\otimes\boldsymbol{e}_i,\quad \text{式中 } F^{-1}{}_{\alpha i}=\frac{\partial X_\alpha}{\partial x_i}。\tag{16}$$

另外因为$\boldsymbol{F}$可逆，故有

$$J=\det\boldsymbol{F}\neq 0\tag{17}$$

例5 设ϕ和$\boldsymbol{u}$为描述一运动物体两种性质的标量和矢量场，证明

$$\mathrm{Grad}\phi=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\mathrm{grad}\phi,\quad \mathrm{Grad}\boldsymbol{u}=(\mathrm{grad}\boldsymbol{u})\boldsymbol{F}.\tag{18}$$

证 所述结果可以通过借助于式(14)，(1.92)及(1.93)，将$\boldsymbol{F}$和各梯度参照到坐标系（$\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{E}$）和（o，e）来导出。各推导步骤如下：

$$\mathrm{Grad}\phi-\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\mathrm{grad}\phi=\frac{\partial\phi}{\partial X_\alpha}\boldsymbol{E}_\alpha-\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha}\boldsymbol{E}_\alpha\otimes\boldsymbol{e}_i\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_q}\boldsymbol{e}_q\right)$$

$$=\left(\frac{\partial\phi}{\partial X_\alpha}-\frac{\partial\phi}{\partial x_q}\frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha}\delta_{qi}\right)\boldsymbol{E}_\alpha=\left(\frac{\partial\phi}{\partial X_\alpha}-\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha}\right)\boldsymbol{E}_\alpha=0。$$

$$\mathrm{Grad}\boldsymbol{u}-(\mathrm{grad}\boldsymbol{u})\boldsymbol{F}=\frac{\partial u_\alpha}{\partial X_\alpha}\boldsymbol{E}_\alpha\otimes\boldsymbol{E}_\alpha$$

$$-\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_q}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_q\right)\left(\frac{\partial x_r}{\partial X_\alpha}\boldsymbol{e}_r\otimes\boldsymbol{E}_\alpha\right)$$

$$=\left(\frac{\partial u_r}{\partial X_\alpha}\boldsymbol{E}_\alpha-\frac{\partial u_i}{\partial x_q}\frac{\partial x_r}{\partial X_\alpha}\delta_{qr}\boldsymbol{e}_i\right)\otimes\boldsymbol{E}_\alpha$$

$$=\left\{\frac{\partial}{\partial X_\alpha}(u_r\boldsymbol{E}_r-u_i\boldsymbol{e}_i)\right\}\otimes\boldsymbol{E}_\alpha=\boldsymbol{O}.$$

例6 若$\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{T}$为描述一运动物体两种性质的矢量场和张量场，证明

$$\mathrm{Div}\boldsymbol{u}=J\mathrm{div}(J^{-1}\boldsymbol{F}\boldsymbol{u}),\quad \mathrm{Div}\boldsymbol{T}=J\mathrm{div}(J^{-1}\boldsymbol{F}\boldsymbol{T})。\tag{19}$$

证 式(19)依赖于等式

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(J^{-1}F_{i\alpha})=0,$$

而该式可以借助于练习1.6证得。在公式（1.40）中分别用 $\boldsymbol{F}$ 和 X_α 代替 $\boldsymbol{A}$ 和 τ，我们有

$$\frac{\partial J}{\partial X_\alpha}=J\mathrm{tr}\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial X_\alpha}\boldsymbol{F}^{-1}\right)=J\frac{\partial F_{q\rho}}{\partial X_\alpha}F^{-1}{}_{\rho q}=J\frac{\partial^2 x_q}{\partial X_\alpha \partial X_\rho}F^{-1}{}_{\rho q},$$

这里用到了式(17)、(1.50)及$(14)_2$，因此有

$$\frac{\partial}{\partial x_p}(J^{-1}F_{p\alpha})=\frac{\partial}{\partial X_\kappa}(J^{-1}F_{p\alpha})\frac{\partial X_\kappa}{\partial x_p}$$

$$=\left(J^{-1}\frac{\partial^2 x_p}{\partial X_\alpha \partial X_\kappa}-J^{-1}\frac{\partial^2 x_q}{\partial X_\kappa \partial X_\rho}F^{-1}_{\rho q}F_{p\alpha}\right)F^{-1}_{\kappa p}$$

$$=J^{-1}\left(\frac{\partial^2 x_q}{\partial X_\alpha \partial X_\rho}F^{-1}_{\rho q}-\frac{\partial^2 x_q}{\partial X_\kappa \partial X_\rho}\delta_{\kappa\alpha}F^{-1}_{\rho q}\right)=0。$$

接下来我们借助式$(1.93)_2$和(1.94)将各散度参照到相应的坐标系，从而得到

$$\mathrm{Div}\boldsymbol{u}-J\mathrm{div}(J^{-1}\boldsymbol{F}\boldsymbol{u})=\frac{\partial u_\kappa}{\partial X_\kappa}-J\frac{\partial}{\partial x_p}(J^{-1}F_{p\kappa}u_\kappa)$$

$$=\frac{\partial u_\kappa}{\partial X_\kappa}-F_{p\kappa}\frac{\partial u_\kappa}{\partial x_p}=\frac{\partial u_\kappa}{\partial X_\kappa}-\frac{\partial u_\kappa}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial X_\kappa}=0,$$

及[6]

$$\mathrm{Div}\boldsymbol{T}-J\mathrm{div}(J^{-1}\boldsymbol{F}\boldsymbol{T})=\frac{\partial T_{\kappa\rho}}{\partial X_\kappa}\boldsymbol{E}_\rho-J\frac{\partial}{\partial x_p}(J^{-1}F_{p\kappa}T_{\kappa q})\boldsymbol{e}_q$$

$$=\frac{\partial T_{\kappa\rho}}{\partial X_\kappa}\boldsymbol{E}_\rho-F_{p\kappa}\frac{\partial T_{\kappa q}}{\partial x_p}\boldsymbol{e}_q=\frac{\partial}{\partial X_\kappa}(T_{\kappa\rho}\boldsymbol{E}_\rho-T_{\kappa q}\boldsymbol{e}_q)=0.$$

本章余下部分将主要讨论与图2、3和4所示情形有关的问题。在图2-2中，C_t和D_t为一运动物体即时构形B_t中的物质曲线。这两条曲线在点x相交，它们在参照构形B_r中的影像C_r和D_r在X

（5） 最后一步利用了关系式$T_{\alpha\rho}E_\rho=T_{\alpha q}e_q=T^{\mathrm{T}}E_\alpha$（参见式$(8)_{3,4}$）。

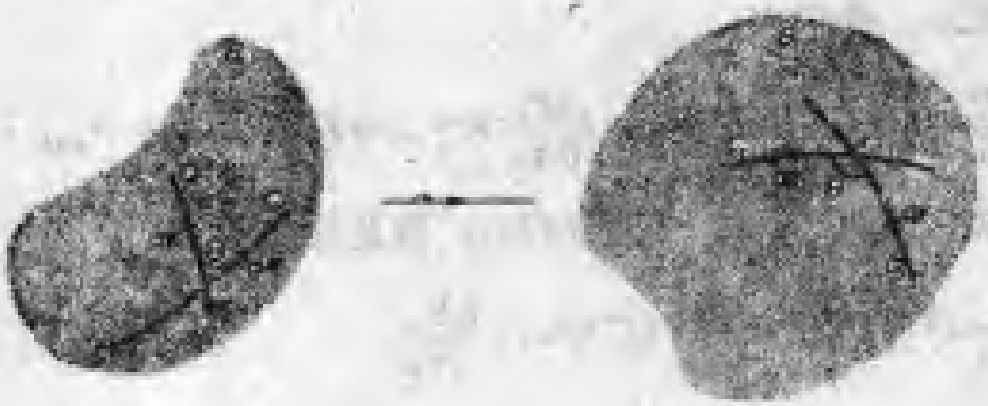


图 2-2 两相交物质曲线上基本微元的参照和即时构形

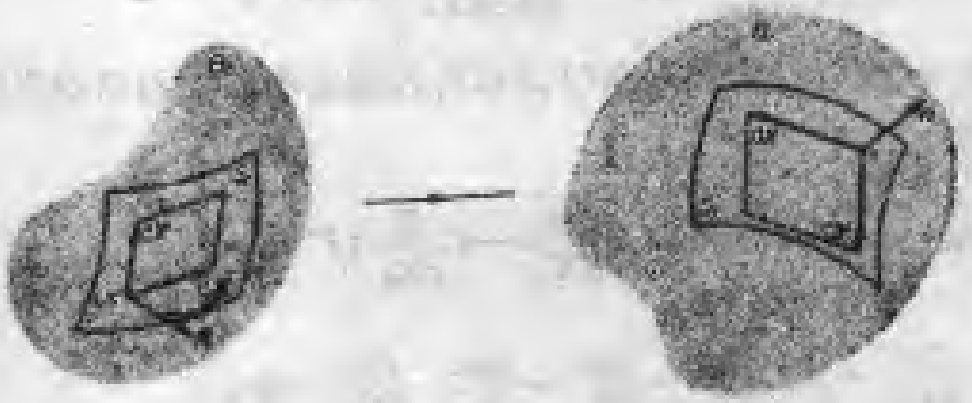


图 2-3 一物质曲面元的参照和即时构形

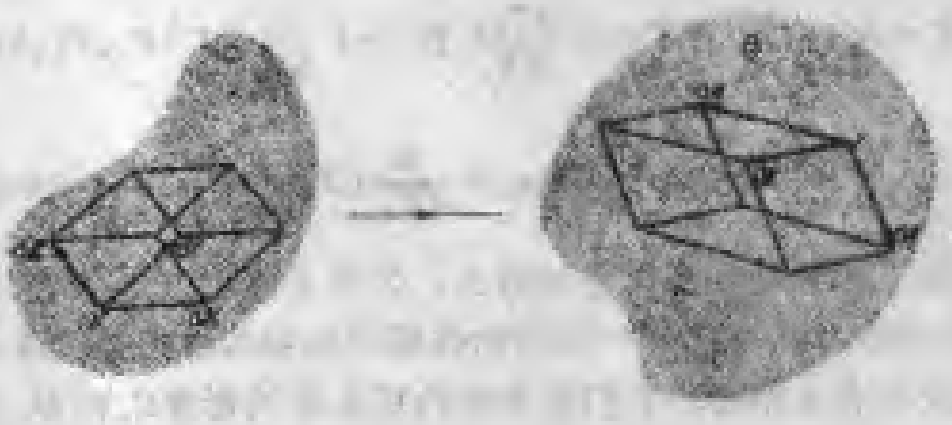


图 2-4 一物质区域元的参照和即时构形

处相交。在点X处C_r和D_r的基本弧元用$\mathrm{d}\boldsymbol{X}$和$\mathrm{d}\boldsymbol{Y}$表示，随运动变成为x点处的C_t和D_t的弧元$\mathrm{d}\boldsymbol{x}$和$\mathrm{d}\boldsymbol{y}$。这些矢量通过变形梯度（在物质描述和空间描述中分别在X和x处取值）由下式相联系：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{X},\quad \mathrm{d}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{Y} \tag{20}$$

图2-3所示的是一物质曲面，在B_t和B_r中的构形分别为S_t和S_r。S_r上点X处的面积元$\mathrm{d}A$随运动变成为S_t上点x处的面积元$\mathrm{d}a$。$\mathrm{d}A$由与S_r相切的两矢量$\mathrm{d}\boldsymbol{X}$和$\mathrm{d}\boldsymbol{Y}$所定义，而$\mathrm{d}a$则由与$\mathrm{d}\boldsymbol{X}$和$\mathrm{d}\boldsymbol{Y}$相对应的矢量$\mathrm{d}\boldsymbol{x}$和$\mathrm{d}\boldsymbol{y}$所定义。因此有$\boldsymbol{N}\mathrm{d}A=\mathrm{d}\boldsymbol{X}\times\mathrm{d}\boldsymbol{Y}$及$\boldsymbol{n}\mathrm{d}a=\mathrm{d}\boldsymbol{x}\times\mathrm{d}\boldsymbol{y}$，式中$\boldsymbol{N}$和$\boldsymbol{n}$分别为$S_r$和$S_t$在点$X$和$x$处的单位法矢量，且这些有向面积之间的关系式可借助式(1.38)和(1.39)通过式(20)建立起来，结果为

$$\boldsymbol{n}\mathrm{d}a=(\boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{X})\times(\boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{F}^{*}(\mathrm{d}\boldsymbol{X}\times\mathrm{d}\boldsymbol{Y})=J(\boldsymbol{F}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\mathrm{d}A。 \tag{21}$$

在图2-4中，x为一物质区域的一个内点，即时占据该点的质点在B_r中所占据的点为X。点X处的一体积元，由三矢量$\mathrm{d}\boldsymbol{X}$、$\mathrm{d}\boldsymbol{Y}$和$\mathrm{d}\boldsymbol{Z}$所定义，随运动变成为点x处的体积元$\mathrm{d}v$，后者由矢量$\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{X}$，$\mathrm{d}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{Y}$和$\mathrm{d}\boldsymbol{z}=\boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{Z}$所定义。因此，由定义式(1.30)有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}v&=\pm[\mathrm{d}\boldsymbol{x},\ \mathrm{d}\boldsymbol{y},\ \mathrm{d}\boldsymbol{z}]=\pm[\boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{Y},\ \boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{Z}]\\&=\pm\det\boldsymbol{F}[\mathrm{d}\boldsymbol{X},\ \mathrm{d}\boldsymbol{Y},\ v\boldsymbol{Z}]=J\mathrm{d}V,\end{aligned} \tag{22}$$

假定的B_r与B_t之间的相似性保证三重积$[\mathrm{d}\boldsymbol{X},\ \mathrm{d}\boldsymbol{Y},\ \mathrm{d}\boldsymbol{Z}]$和$[\mathrm{d}\boldsymbol{x},\ \mathrm{d}\boldsymbol{y},\ \mathrm{d}\boldsymbol{z}]$同号。由式(22)得到$J>0$。

例7 试确定变形梯度满足何种条件才能保证在一给定质点处，

(i)沿某一规定方向没有伸长，

(ii)某一对规定方向之间的夹角保持不变，

(iii)在垂直于某规定方向的平面内面积不发生变化，

(iv)体积不发生变化。

解 (i)参照图2-2，令点X处C_r和点x处C_t的单位切矢量分别为$\boldsymbol{L}$和$\boldsymbol{l}$，则有$\mathrm{d}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{L}\mathrm{d}S$及$\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{l}\mathrm{d}s$，这里$\mathrm{d}S$和$\mathrm{d}s$为弧长，且由式

(20)$_1$，$\boldsymbol{l}\mathrm{d}s=\boldsymbol{F}\boldsymbol{L}\mathrm{d}S$，$\boldsymbol{L}\mathrm{d}S=\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{l}\mathrm{d}s$。既然$\boldsymbol{L}$和$\boldsymbol{l}$为单位矢量，利用式(1.24)便进一步有

$$(\mathrm{d}s/\mathrm{d}S)^2=\boldsymbol{L}\cdot(\boldsymbol{C}\boldsymbol{L})=\{\boldsymbol{l}\cdot(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{l})\}^{-1}, \tag{23}$$

式中，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$. (24)*

若沿在X处由$\boldsymbol{L}$定义，在x处由$\boldsymbol{l}$定义的方向上不发生伸长，便有$\mathrm{d}s=\mathrm{d}S$，从而由式(23)变形梯度所应满足的条件为

$$\boldsymbol{L}\cdot(\boldsymbol{C}\boldsymbol{L})=1 \text{ 或 } \boldsymbol{l}\cdot(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{l})=1 \tag{25}$$

(ii)仍然参照图2-2。令$\boldsymbol{M}$，$\mathrm{d}U$和$\boldsymbol{m}$，$\mathrm{d}u$分别为点X处D_r和点x处D_t的单位切矢量和弧长，则有$\mathrm{d}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{M}\mathrm{d}U$，$\mathrm{d}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{m}\mathrm{d}u$。另外如果$\Theta$和$\theta$为如图所示的夹角，便有$\cos\Theta=\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{M}$，及$\cos\theta=\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{m}$。由式(20)，

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{X})\cdot(\boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{Y})=\mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot(\boldsymbol{C}\mathrm{d}\boldsymbol{Y}),$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{Y}=\mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{B}^{-1}\mathrm{d}\boldsymbol{y}).$$

$$\left.\begin{aligned}\text{从而有 } \cos\theta=\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{m}&=\{\boldsymbol{L}\cdot(\boldsymbol{C}\boldsymbol{M})\}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}u},\\ \cos\Theta=\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{M}&=\{\boldsymbol{l}\cdot(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{m})\}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}S}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}U}.\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

如果在X处由$\boldsymbol{L}$和$\boldsymbol{M}$定义，在x处由$\boldsymbol{l}$、$\boldsymbol{m}$所定义的两方向之间的夹角保持不变，便有$\theta=\Theta$，从而利用式(23)由式(26)得到关系式

$$\boldsymbol{L}\cdot(\boldsymbol{C}\boldsymbol{M})=(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{M})[\{\boldsymbol{L}\cdot(\boldsymbol{C}\boldsymbol{L})\}\{\boldsymbol{M}\cdot(\boldsymbol{C}\boldsymbol{M})\}]^{1/2},$$

$$\boldsymbol{l}\cdot(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{m})=(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{m})[\{\boldsymbol{l}\cdot(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{l})\}\{\boldsymbol{m}\cdot(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{m})\}]^{1/2}。$$

(*)译者注：如将在后面所指出的，C 和B分别是右和左柯西—格林应变张量。由式(14)，

$$\mathbf{C}=\frac{\partial x_p}{\partial X_\alpha}\cdot\frac{\partial x_p}{\partial X_\beta}E_\alpha\otimes E_\beta,\ \mathbf{B}=\frac{\partial x_p}{\partial X_\alpha}\cdot\frac{\partial x_q}{\partial X_\alpha}e_p\otimes e_q.$$

注意到C对应于(O,E)系的分量为 $\frac{\partial x_p}{\partial X_i}\cdot\frac{\partial x_p}{\partial X_j}$，$B$对应于$(o,e)$系的分量为 $\frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha}\cdot\frac{\partial x_j}{\partial X_\alpha}$.

http://www.junshilei.cn/printing.htm 2009-9-18

它们分别为所求条件的参照和空间形式。

(iii) 利用$\boldsymbol{N}$和$\boldsymbol{n}$均为单位矢量这一条件，我们可以由式(21)导出一对类似式(23)的关系式，即

$$(\mathrm{d}a/\mathrm{d}A)^2=J^2\boldsymbol{N}\cdot(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{N})=J^2\{\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}\boldsymbol{n})\}^{-1} \tag{27}$$

如果在图2-3所描述的运动中，当选定的质点从$\boldsymbol{X}$移动到$\boldsymbol{x}$时，面积不发生变化，便有$\mathrm{d}a=\mathrm{d}A$，那么关系式

$$\boldsymbol{N}\cdot(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{N})=J^{-2},\ \text{或}\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}\boldsymbol{n})=J^2,$$

即为$\boldsymbol{F}$应满足的条件。

(iv) 若要满足此条件，则图2-4所示的两个体积元的体积必相等，即

$$\mathrm{d}V=\mathrm{d}v$$

从而由式(22)，得

$$J=1 \tag{28}$$

若例7中的条件(iv)对每个质点都成立，则称变形是**等容的**。在$\{B_t\}$中的任何构形上都成立的式(28)即为一运动具有此性质的必要和充分条件。

例8 在参照构形中，某物体含有一装满炸药的中心为o半径为A的球形洞穴。设炸药在时刻$t=0$起爆并使该物体发生由下式给出的球对称运动：

$$\boldsymbol{x}=(r/R)\boldsymbol{X},\ r=f(R,\ t),\ \text{式中}R=|\boldsymbol{X}|,\ r=|\boldsymbol{x}|,$$

且参照和空间位置矢量$\boldsymbol{X}$和$\boldsymbol{x}$均以o作为原点。如果运动是等容的，并设在时刻t，洞穴的半径为a，证明

$$f(R,\ t)=(R^3+a^3-A^3)^{\frac{1}{3}}, \tag{A}$$

并确定以空间描述表示的速度和加速度场。

解 在给定的运动中，质点路径为通过o的直线段，而R和r则分别为一代表性质点初始和即时所占据的点距o的距离。因此中心为o，半径大于或等于a的球面是物质曲面，并且由于运动是等容的，外面以半径为r的物质球面为界里面以洞穴表面为界的区域的体积应保持不变。当$t=0$时，该物质区域的半径为R和A，因此

有$\frac{4}{3}\pi(r^3-a^3)=\frac{4}{3}\pi(R^3-A^3)$，由此便直接得到(A)。

〔熟悉式(A)的从计算变形梯度着手的另一推导方法也是有益的。利用练习1.19(i)并注意到

$\mathrm{Grad}R=R^{-1}X$，$\mathrm{Grad}X=I$，有(*)

$$F=\mathrm{Grad}x=\left(\frac{\partial f}{\partial R}-\frac{f}{R}\right)R^{-2}X\otimes X+\frac{f}{R}I.$$

借助于式(1.44)，该式可重新写为

$$F=\frac{\partial f}{\partial R}\hat{r}\otimes\hat{r}+\frac{f}{R}(\hat{\theta}\otimes\hat{\theta}+\hat{\phi}\otimes\hat{\phi}),$$

式中$\hat{r}=R^{-1}X$，$\hat{\theta}$和$\hat{\phi}$为与$\hat{r}$构成一标准正交基的单位矢量。可以看得出，F是一对称张量并有特征值$\frac{\partial f}{\partial R}$、$-\frac{f}{R}$—和$\frac{f}{R}$及主轴$\hat{r}$、$\hat{\theta}$和$\hat{\phi}$。$F$的行列式$J$为这些特征值之积，于是由等容运动条件(28)得到关于f的一阶微分方程

$$f^2\frac{\partial f}{\partial R}=R^2。\qquad(B)$$

因为在洞穴表面上$R=A$，$r=a$，故有$f(A,t)=a$。积分式(B)并利用该条件，我们便又得到结果(A)。〕

在物质描述中，速度和加速度由下式给出：

$$v=\frac{\partial f}{\partial t}R^{-1}X=\frac{\partial f}{\partial t}\hat{r},\quad a=\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}R^{-1}X=\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\hat{r},$$

(*)译者注，$\mathrm{Grad}x=\mathrm{Grad}\left(\frac{r}{R}X\right)=x\otimes\mathrm{Grad}\left(\frac{r}{R}\right)+\frac{r}{R}\mathrm{Grad}\,x$.

$$\mathrm{Grad}\left(\frac{r}{R}\right)=\{\partial(f/R)/\partial X_p\}E_p-\left\{\frac{1}{R}(\partial f/\partial X_p)-\frac{f}{R^2}(\partial R/\partial X_p)\right\}E_p,$$

$\frac{\partial R}{\partial X_p}=\frac{\partial|x|}{\partial X_p}=\frac{\partial(X_1^2+X_2^2+X_3^2)^{1/2}}{\partial X_p}=\frac{X_p}{R}$，代入即得。

正如所期望的那样，这两个场都是沿着对于球对称运动中心 o 的径向。

由式(Λ)，

$$\frac{\partial f}{\partial t}=f^{-2}a^2\dot{a},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=f^{-2}(a^2\ddot{a}+2a\dot{a}^2)-2f^{-3}\frac{\partial f}{\partial t}a^2\dot{a}$$

$$=f^{-2}(a^2\ddot{a}+2a\dot{a}^2)-2f^{-6}a^4\dot{a}^2,$$

式中，$\dot{a}=\frac{da}{dt}$，$\ddot{a}=d^2a/dt^2$。将这些结果转化为空间描述只需要以 r 代 f，因此有

$$\boldsymbol{v}=a^2\dot{a}r^{-2}\hat{\boldsymbol{r}},\quad \boldsymbol{a}=\{(a^2\ddot{a}+2a\dot{a}^2)r^{-2}-2a^4\dot{a}^2r^{-5}\}\hat{\boldsymbol{r}}.$$

速度梯度 $\boldsymbol{L}$ 由下式所定义.

$$\boldsymbol{L}=\mathrm{grad}\boldsymbol{v}=\mathrm{grad}\dot{\boldsymbol{x}}. \tag{29}$$

在式$(18)_2$中令$\boldsymbol{u}=\dot{\boldsymbol{x}}$，得到 $\mathrm{Grad}\,\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{F}$。因为在物质描述中梯度和物质导数可交换，故由式(29)并利用定义(13)，我们有以下速度梯度和变形梯度之间的关系式：

$$\dot{\boldsymbol{F}}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{F},\quad \boldsymbol{L}=\dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{F}^{-1}=-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{F}^{-1})^{\cdot}。 \tag{30}$$(*)

在式(1.40)中用$\boldsymbol{F}$和t代替$\boldsymbol{A}$和τ并利用$(30)_2$，我们得到

$$\dot{J}=J\mathrm{tr}\boldsymbol{L}=J\mathrm{div}\boldsymbol{v}. \tag{31}$$

在等容运动中，$J=1$，式(31)化为

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{L}=\mathrm{div}\boldsymbol{v}=0. \tag{32}$$

例 9 对图2-2所示的运动，确定与物质曲线C_t上的基本弧元有关的量$d\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{l}$和ds的物质导数，以及C_t和D_t之间的夹角 θ 的物质导数。

解 由式$(20)_1$和$(30)_1$，

$$(d\boldsymbol{x})^{\cdot}=\dot{\boldsymbol{F}}d\boldsymbol{X}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{F}d\boldsymbol{X}=\boldsymbol{L}d\boldsymbol{x},$$

或者以$\boldsymbol{l}ds$代$d\boldsymbol{x}$，

(*)译者注：$I=FF^{-1}$，两边求物质导数，有$O=\dot{F}F^{-1}+F(F^{-1})^{\cdot}$。

$$\boldsymbol{l}(\mathrm{d}s)^{\cdot}+\dot{\boldsymbol{l}}\mathrm{d}s=\boldsymbol{L}\boldsymbol{l}\mathrm{d}s.$$

因为$\boldsymbol{l}$为单位矢量，故有$\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{l}=1$及$\boldsymbol{l}\cdot\dot{\boldsymbol{l}}=0$。从而，

$$(\mathrm{d}s)^{\cdot}=\boldsymbol{l}\cdot(\boldsymbol{L}\boldsymbol{l})\mathrm{d}s,\quad \dot{\boldsymbol{l}}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{l}-\{\boldsymbol{l}\cdot(\boldsymbol{L}\boldsymbol{l})\}\boldsymbol{l}. \tag{33}$$

物质微分$(26)_1$给出

$$-\sin\theta\cdot\dot{\theta}=\dot{\boldsymbol{l}}\cdot\boldsymbol{m}+\boldsymbol{l}\cdot\dot{\boldsymbol{m}}.$$

利用$(33)_2$及与之类似的$\dot{\boldsymbol{m}}$的表示式，并令$\sin\theta=|\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{m}|$，我们便得到以下关于$\dot{\theta}$的公式：

$$\dot{\theta}=|\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{m}|^{-1}\{\{\boldsymbol{l}\cdot(\boldsymbol{L}\boldsymbol{l})+\boldsymbol{m}\cdot(\boldsymbol{L}\boldsymbol{m})\}(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{m})-\boldsymbol{l}\cdot\{(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{m}\}\}. \tag{34}$$

利用式(30)和(31)，我们可以由式(20)至(22)为物质曲线、曲面和区域上的积分的变化率导出一组**传输方程**。令C_t、S_t和R_t依次表示物体$\tilde{\boldsymbol{B}}$的即时构形B_t中的任一物质曲线、物质曲面和物质区域，并令ϕ为一描述$\tilde{\boldsymbol{B}}$某种性质的连续可微的标量场。则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{C_t}\phi\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_{C_t}(\dot{\phi}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\phi\boldsymbol{L}\mathrm{d}\boldsymbol{x}), \tag{35}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S_t}\phi\boldsymbol{n}\mathrm{d}a=\int_{S_t}\{(\dot{\phi}+\phi\mathrm{tr}\boldsymbol{L})\boldsymbol{n}-\phi\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}\}\mathrm{d}a, \tag{36}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{R_t}\phi\mathrm{d}v=\int_{R_t}(\dot{\phi}+\phi\mathrm{tr}\boldsymbol{L})\mathrm{d}v, \tag{37}$$

式中$\boldsymbol{n}$为S_t上的单位法矢量。对一连续可微的矢量场$\boldsymbol{u}$来说，相应的结果为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{C_t}\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_{C_t}(\dot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{38}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S_t}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a=\int_{S_t}(\dot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{u}\mathrm{tr}\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a, \tag{39}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{R_t}\boldsymbol{u}\mathrm{d}v=\int_{R_t}(\dot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{u}\mathrm{tr}\boldsymbol{L})\mathrm{d}v. \tag{40}$$

以上(35)至(40)各式可以这样建立起来：先将左边的表示式转换为物质描述，这样积分范围为参照构形B_r中的固定曲线、曲面和区域，因此对t的微分可以在积分号内进行。最后将所得的结果变回到空间描述即得到右边的表示式。我们下面以式(39)为例来演示以上各步骤，读者应自己将其他公式的推导写出来。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S_t}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a=\int_{S_r}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{u}\cdot\{J(\boldsymbol{F}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\mathrm{d}A\})$$

$$=\int_{S_r}\frac{\partial}{\partial t}(J\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{N}\mathrm{d}A$$

$$=\int_{S_r}\{J\boldsymbol{F}^{-1}\dot{\boldsymbol{u}}+(J\mathrm{tr}\boldsymbol{L})\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{u}+J(-\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{L})\boldsymbol{u}\}\cdot\boldsymbol{N}\mathrm{d}A$$

$$=\int_{S_t}(\dot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{u}\mathrm{tr}\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{u})\cdot\{J(\boldsymbol{F}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\mathrm{d}A\}$$

$$=\int_{S_r}(\dot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{u}\mathrm{tr}\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a.$$

在以上各步中，我们依次用到了式(21)、(1.24)、(31)和$(30)_3$、(1.24)和(21)。

第四节　伸长和旋转

式(22)至(24)、(26)及(27)表明：变形梯度$\boldsymbol{F}$是将某物体即时构形B_t中的物质单元的尺寸和形状与参照构形B_r中相应的尺寸和形状加以比较。现在让我们利用第一章第8节中所给的极分解定理及相应的结果更加详细地研究变形梯度的几何含义。$\boldsymbol{F}$的右极分解和左极分解分别具有

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}\qquad\text{及}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{V}\boldsymbol{R}\tag{41}$$

形式。式中，$\boldsymbol{U}$和$\boldsymbol{V}$为正定对称张量，且由于$J>0$，$\boldsymbol{R}$为一正规正

交张量。

我们考虑图2-2所示的基本矢量$d\boldsymbol{x}$，它连接一对邻近质点在B_t中所占据的两点。例1.17告诉我们：首先正定对称张量$\boldsymbol{U}$和$\boldsymbol{V}$对这样一个基本矢量的作用就分别等价于一个三向拉伸，拉伸方向由各自的特征矢量所定义，伸长量就等于$\boldsymbol{U}$和$\boldsymbol{V}$所共有的特征值λ_i，其次$\boldsymbol{R}$对$d\boldsymbol{x}$的作用可以看成是一旋转。此外，由式$(1.81)_2$，$\boldsymbol{V}$的特征矢量$\boldsymbol{q}_i$所定义的方向可通过对$\boldsymbol{U}$的特征矢量$\boldsymbol{p}_i$所代表的方向施以由$\boldsymbol{R}$所定义的旋转得到。利用这些事实，我们便得到式(41)的以下几何解释：**物体在某一给定质点附近所经历的变形可以分解为首先在B_t中沿标准正交矢量$\boldsymbol{p}_i$方向上的伸长λ_i然后再加上由$\boldsymbol{R}$所给定的刚体旋转，或将次序反过来，不过伸长方向变为由B_t中的标准正交矢量$\boldsymbol{q}_i$所定义。**因此，$\boldsymbol{R}$称为**旋转张量**，$\boldsymbol{U}$和$\boldsymbol{V}$分别称为**右伸长张量**和**左伸长张量**，λ_i称为**主伸长**；而矢量$\boldsymbol{p}_i$和$\boldsymbol{q}_i$所定义的主轴则分别称为**参照伸长轴**和**即时伸长轴**。

将极分解式(41)代入定义式(24)，我们便发现张量$\boldsymbol{C}$和$\boldsymbol{B}$就是伸长张量的平方：$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{U}^2$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{V}^2$，$\boldsymbol{C}$和$\boldsymbol{B}$通常称为**右和左柯西-格林应变张量**(*)。参照和即时伸长轴分别与$\boldsymbol{C}$和$\boldsymbol{B}$的主轴重合(**)，$\boldsymbol{C}$和$\boldsymbol{B}$所共有的特征值为主伸长的平方。

通过例7我们看到，柯西-格林应变张量很自然地出现在由运动所产生的长度、夹角和面积的局部变化的计算中。利用式$(23)_1$和$(26)_2$所给出的关系式

$$\boldsymbol{L}\cdot(\boldsymbol{C}\boldsymbol{L})=(ds/dS)^2,\quad \boldsymbol{L}\cdot(\boldsymbol{C}\boldsymbol{M})=\cos\theta(ds/dS)(du/dU),$$

并参照图2-2所示的那对相交的物质弧，我们可将以下的几何意义赋给右柯西-格林应变张量，相对于标准正交基$\boldsymbol{E}$并在B_r中$\boldsymbol{X}$取值的分量$C_{\alpha\beta}$。$C_{\alpha\alpha}$为这样一个物质线元所经历的伸长的平方，该线

(*)译者注：正确地说，它们不是固体力学中的应变。这一点可以从以下事实中看出来，对无变形状态它们等于$\boldsymbol{I}$，而不是等于$\boldsymbol{O}$。在固体力学中令$\boldsymbol{E}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{I})$，称$\boldsymbol{E}$为格林（或拉格朗日）应变张量。

(**)译者注：主轴一致的张量之间称为彼此共轴。

元在B_r中位于X处并沿着基矢量$\boldsymbol{E}_\alpha$所定义的方向。$C_{\alpha\beta}(\alpha\neq\beta)$与一对在$B_r$中相交于$X$并分别沿着由$\boldsymbol{E}_\alpha$和$\boldsymbol{E}_\beta$所定义的正交方向的物质线元有关，其值为这一对线元所经历的伸长与它们在B_t中的交角的余弦三者的积。左柯西-格林应变张量的逆相对于基$\boldsymbol{e}$的分量B_{ij}^{-1}可以用类似的方式加以解释，只不过需将构形B_r和B_t所扮演的角色交换一下。

下面的两个例子将以一永久地占据构形B的物体为例来示范变形分析的一些基本特性。在即时构形中的每点处取值都相同的$\boldsymbol{F}$所描述的变形称为**均匀变形**。这样的变形在弹性理论中有着非常重要的地位(6)。

例10 由

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{I}+\gamma\boldsymbol{l}\otimes\boldsymbol{m} \tag{42}$$

所定义的变形称为**简单剪切**，式中γ为正常数，$\boldsymbol{l}$和$\boldsymbol{m}$为正交单位矢量。试为此变形确定主伸长、参照和即时伸长轴以及旋转张量。

解 令$\boldsymbol{n}$为一与$\boldsymbol{l}$和$\boldsymbol{m}$构成一标准正交基的单位矢量。在B_r中为一各面与$\boldsymbol{l}$、$\boldsymbol{m}$和$\boldsymbol{n}$所表示的方向垂直的平行六面体的物质区域在B中的构形如图2-5所示：$\boldsymbol{l}$所定义的方向称为**剪切方向**，垂直于$\boldsymbol{m}$和$\boldsymbol{n}$的平面分别称为**滑动平面**和**剪切平面**。

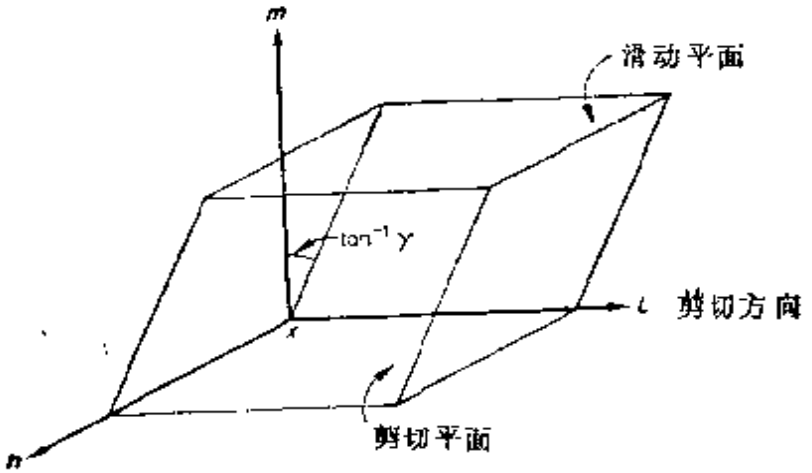


图 2-5 初始时的立方形物质区域在简单剪切中变形后的构形

(6) 参见下面的4.2和4.8节。

由式(42)，得

$$(\boldsymbol{Fl},\ \boldsymbol{Fm},\ \boldsymbol{Fn})=(\boldsymbol{l},\ \boldsymbol{m}+\gamma\boldsymbol{l},\ \boldsymbol{n})=(\boldsymbol{l},\ \boldsymbol{m},\ \boldsymbol{n}).$$

因此$\det\boldsymbol{F}=1$，故变形是等容的。另外，利用等式$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{l}\otimes\boldsymbol{l}+\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}$，我们有

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}&=\boldsymbol{l}\otimes\boldsymbol{l}+(1+\gamma^2)\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}\\&\quad+\gamma(\boldsymbol{l}\otimes\boldsymbol{m}+\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{l}),\\\boldsymbol{B}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}&=(1+\gamma^2)\boldsymbol{l}\otimes\boldsymbol{l}+\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}\\&\quad+\gamma(\boldsymbol{l}\otimes\boldsymbol{m}+\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{l}).\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{A})$$

$\boldsymbol{C}$和$\boldsymbol{B}$的谱表示为

$$\boldsymbol{C}=\sum_{r=1}^{3}\lambda^2_r\boldsymbol{p}_r\otimes\boldsymbol{p}_r,\qquad\boldsymbol{B}=\sum_{r=1}^{3}\lambda^2_r\boldsymbol{q}_r\otimes\boldsymbol{q}_r,$$

式中，标准正交矢量组$\boldsymbol{p}_i$和$\boldsymbol{q}_i$（$i=1$，2，3）分别定义参照和即时伸长轴。由(A)，$\boldsymbol{Cn}=\boldsymbol{Bn}=\boldsymbol{n}$，这说明有一个主伸长为1，并且相应的伸长轴在$B_r$和$B$中均沿$\boldsymbol{n}$方向。简言之，该变形对于剪切平面是二维的。此外，$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\det\boldsymbol{F}=1$。上面的各谱表示式可以重新写为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{C}&=\alpha^2\boldsymbol{p}_1\otimes\boldsymbol{p}_1+\alpha^{-2}\boldsymbol{p}_2\otimes\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n},\\\boldsymbol{B}&=\alpha^2\boldsymbol{q}_1\otimes\boldsymbol{q}_1+\alpha^{-2}\boldsymbol{q}_2\otimes\boldsymbol{q}_2+\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n},\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{B})$$

式中$\alpha=\lambda_1=\lambda_2^{-1}$。

因为$\boldsymbol{p}_1$、$\boldsymbol{p}_2$和$\boldsymbol{q}_1$、$\boldsymbol{q}_2$为两组正交单位矢量且都与$\boldsymbol{n}$正交，故它们可以表示为$\boldsymbol{l}$和$\boldsymbol{m}$的线性组合：

$$\boldsymbol{p}_1=\cos\Theta\boldsymbol{l}+\sin\Theta\boldsymbol{m},\quad\boldsymbol{p}_2=-\sin\Theta\boldsymbol{l}+\cos\Theta\boldsymbol{m}$$

$$\left(0<\Theta<\frac{1}{2}\pi\right),$$

$$\boldsymbol{q}_1=\cos\theta\boldsymbol{l}+\sin\theta\boldsymbol{m},\quad\boldsymbol{q}_2=-\sin\theta\boldsymbol{l}+\cos\theta\boldsymbol{m}$$

$$\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right).$$

将这些表达式代入(B)并令所得到的$\boldsymbol{C}$和$\boldsymbol{B}$的表示式与式(A)给出

的相等，我们得到关系式：

$$\alpha^2\cos^2\Theta+\alpha^{-2}\sin^2\Theta=1,\quad \alpha^2\sin^2\Theta+\alpha^{-2}\cos^2\Theta=1+\gamma^2,$$
$$(\alpha^2-\alpha^{-2})\sin\Theta\cos\Theta=\gamma,$$
$$\alpha^2\cos^2\theta+\alpha^{-2}\sin^2\theta=1+\gamma^2,\quad \alpha^2\sin^2\theta+\alpha^{-2}\cos^2\theta=1,$$
$$(\alpha^2-\alpha^{-2})\sin\theta\cos\theta=\gamma,$$

由此解出α，Θ和θ便有

$$\alpha=\left(1+\frac{1}{4}\gamma^2\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\gamma=\cot\psi,\quad \Theta=\frac{1}{2}\pi-\psi,\quad \theta=\psi,$$

式中

$$\psi=\frac{1}{2}\mathrm{arctg}(2/\gamma)\quad\left(0<\psi<\frac{1}{4}\pi\right).$$

从而主伸长为$\lambda_1=\cot\psi$，$\lambda_2=\tan\psi$，$\lambda_3=1$，而定义参照和即时伸长轴的单位矢量则为

$$\boldsymbol{p}_1=\sin\psi\boldsymbol{l}+\cos\psi\boldsymbol{m},\quad \boldsymbol{p}_2=-\cos\psi\boldsymbol{l}+\sin\psi\boldsymbol{m},\quad \boldsymbol{p}_3=\boldsymbol{n},$$
$$\boldsymbol{q}_1=\cos\psi\boldsymbol{l}+\sin\psi\boldsymbol{m},\quad \boldsymbol{q}_2=-\sin\psi\boldsymbol{l}+\cos\psi\boldsymbol{m},\quad \boldsymbol{q}_3=\boldsymbol{n}.$$

这些伸长轴的方向如图2-6所示。旋转张量可借助式(1.83)用矢量$\boldsymbol{p}_i$和$\boldsymbol{q}_i$来表示：

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{q}_r\otimes\boldsymbol{p}_r=\sin2\psi(\boldsymbol{l}\otimes\boldsymbol{l}+\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})+\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}$$
$$+\cos2\psi(\boldsymbol{l}\otimes\boldsymbol{m}-\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{l}).$$

将该结果与式(1.79)相比较便知，$\boldsymbol{R}$代表一绕$\boldsymbol{n}$轴旋转量为$-\left(\frac{1}{2}\pi-2\psi\right)$(*)的旋转，这一结论也已由图2-6清楚表明。

例11 一物体通过在其中埋置两组不可伸长的纤维而加强。该物体具有一无变形的构形B_r，在此构形中每组中的纤维都是直的且互相平行，并且确定这两组纤维方向的单位矢量相对于某一标准正交基$\boldsymbol{E}$的分量为$(\cos\Theta,\ \pm\sin\Theta,\ 0)$、$\left(0<\Theta<\frac{1}{2}\pi\right)$，若给该物体施加一均匀的三向伸长，并设基矢量$\boldsymbol{E}_1$、$\boldsymbol{E}_2$、$\boldsymbol{E}_3$所定义的方

(*)译者注，在$\boldsymbol{R}$为正规时，正号的旋转为逆时针方向。因而这里$-\left(\frac{\pi}{2}-2\psi\right)$表示顺时针旋转$\left(\frac{\pi}{2}-2\psi\right)$。如用$\gamma$表示则为$-\left(\frac{\pi}{2}-2\psi\right)=-\mathrm{arctg}(\gamma/2)$。

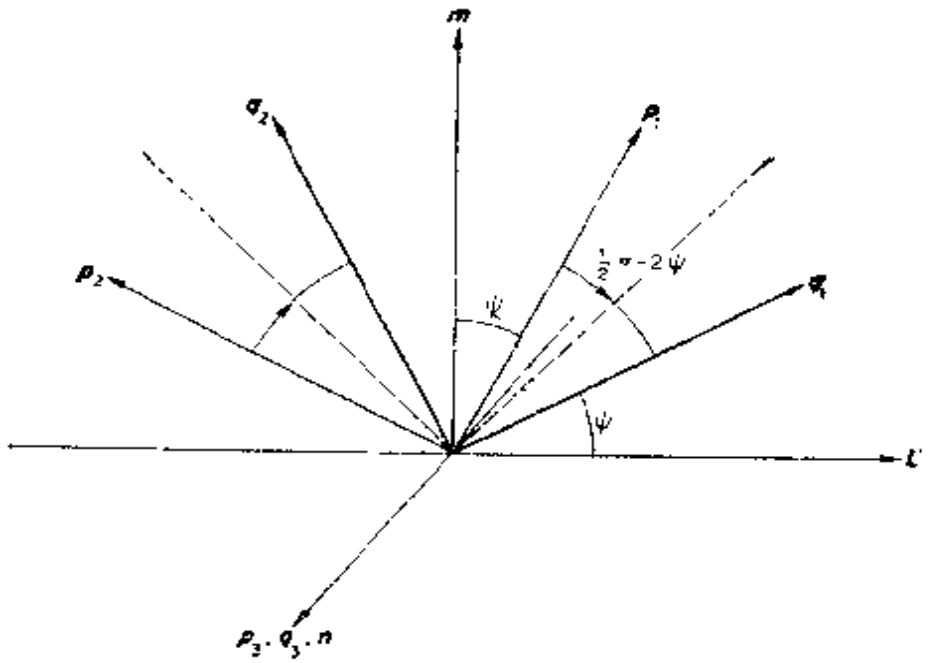


图 2-6 在简单剪切（例10）中参考和即时伸长轴方向

向上的伸长量分别为$\lambda^{-1/2}\alpha$、$\lambda^{-1/2}\alpha^{-1}$、$\lambda$(*)，试确定$\alpha$，$\lambda$和$\Theta$之间的关系式，并由此推论

(a) 该物体沿3-方向能够收缩的限度为不等式$\lambda \geqslant \sin 2\Theta$所限制；

(b) 当$\sin 2\Theta < \lambda \neq 1$时，可能有两个变形的构形；

(c) 当沿3-方向的收缩达到最大值时，两组纤维在变形的构形中相互正交。

解 表示所给三向应变的变形梯度为

$$\boldsymbol{F}=\lambda^{-\frac{1}{2}}\alpha \boldsymbol{E}_1\otimes\boldsymbol{E}_1+\lambda^{-\frac{1}{2}}\alpha^{-1}\boldsymbol{E}_2\otimes\boldsymbol{E}_2+\lambda\boldsymbol{E}_3\otimes\boldsymbol{E}_3. \quad (A)$$

若$\boldsymbol{L}_1$和$\boldsymbol{L}_2$为B_r中确定纤维方向的单位矢量，则有

$$\boldsymbol{L}_1=\cos\Theta\boldsymbol{E}_1+\sin\Theta\boldsymbol{E}_2,\ \boldsymbol{L}_2=\cos\Theta\boldsymbol{E}_1-\sin\Theta\boldsymbol{E}_2. \quad (B)$$

既然在这两个方向上不能有伸长，则由式$(25)_1$有

$$\boldsymbol{L}_1\cdot(\boldsymbol{C}\boldsymbol{L}_1)=1,\ \boldsymbol{L}_2\cdot(\boldsymbol{C}\boldsymbol{L}_2)=1\ (\boldsymbol{C}=\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}). \quad (C)$$

将式(A)和(B)代入式(C)，我们得到同一等式：

(*)译者注：在此情形下，主伸长为$\lambda^{-\frac{1}{2}}\alpha$，$\lambda^{-\frac{1}{2}}\alpha^{-1}$，$\lambda$，永为正。因而$\alpha>0$，$\lambda>0$。当主伸长大于1时为实际上的伸长，小于1时为负的伸长（即收缩）。

$$\alpha^2\cos^2\Theta+\alpha^{-2}\sin^2\Theta=\lambda. \qquad (D)$$

这就是所求的α、λ和Θ之间的关系式。当给定λ和Θ时，式(D)是一关于α^2的二次方程，其根为

$$\alpha^2=\frac{1}{2}\sec^2\Theta\{\lambda\pm(\lambda^2-\sin^2 2\Theta)^{1/2}\}. \qquad (E)$$

(a) 式(E)所给出的α值只有当$\lambda\geqslant\sin 2\Theta$时才是正实数。这就为沿3-方向所能产生的收缩设置了一个下限$\sin 2\Theta$。〔注意如果$\Theta=\frac{1}{4}\pi$，则根本不能有收缩。〕

(b) 当$\lambda>\sin 2\Theta$时，式(E)给出两个不同的正α值，这就意味着可以有两个变形的构形。但是如果$\lambda=1$，则有一α值为1，从而无变形发生。因此只有当$\sin 2\Theta<\lambda\neq 1$时才可能有两个变形的构形。

(c) 由式(20)及(A)和(B)，表示纤维在变形的构形中的方向的单位矢量$\boldsymbol{l}_1$和$\boldsymbol{l}_2$由下式给出：

$$\boldsymbol{l}_1=\boldsymbol{F}\boldsymbol{L}_1=\lambda^{-\frac{1}{2}}(\alpha\cos\Theta\boldsymbol{E}_1+\alpha^{-1}\sin\Theta\boldsymbol{E}_2),$$

$$\boldsymbol{l}_2=\boldsymbol{F}\boldsymbol{L}_2=\lambda^{-\frac{1}{2}}(\alpha\cos\Theta\boldsymbol{E}_1-\alpha^{-1}\sin\Theta\boldsymbol{E}_2).$$

由此可以看得出，两组纤维与1-方向的交角θ都满足 $\tan\theta=\alpha^{-2}\tan\Theta$，或者在(D)中令$\alpha^2=\tan\Theta\cot\theta$，得到$\theta$所满足的关系式$\sin 2\theta=\lambda^{-1}\sin 2\Theta$。当沿3-方向的收缩达到最大值时，$\lambda=\sin 2\Theta$，$2\theta=\pi/2$。

〔当$\lambda>\sin 2\Theta$时，在区间$(0,\ \pi/2)$内有两个θ值，对应于两个可能的变形的构形。这两个θ值为$\theta=\varphi$，$\frac{1}{2}\pi-\varphi$，这里$\varphi=\frac{1}{2}\arcsin(\lambda^{-1}\sin 2\Theta)$$(0<\varphi<\frac{1}{2}\pi)$。如果将该物体放在两个与$\boldsymbol{E}_3$垂直的光滑刚性板之间加以非常缓慢的压缩，那么将实现对应于$\theta=\varphi$的变形，因为当$\lambda\to 1$时$\varphi\to\Theta$，但$\frac{1}{2}\pi-\varphi\not\to\Theta$。在这种情形下，纤维与1-方向的交角$\theta$将随$\lambda$有1减小而增大或减小，取决于$0<\Theta<\frac{1}{4}\pi$还是$\frac{1}{4}\pi<\Theta<\frac{1}{2}\pi$，在两个情况下当$\lambda\to\sin 2\Theta$时$\theta$

都趋近于$\frac{\pi}{4}$。）

第五节　伸长率和自旋

变形梯度$\boldsymbol{F}$所刻划的是一运动物体的物质元的大小和形状所经历的变化，而由式(31)$_1$，(33)和(34)明显看出，速度梯度$\boldsymbol{L}$所描述的是这些变化发生的**速率**。然而，在这两种梯度之间还存在另一重要区别。这就是：$\boldsymbol{F}$既依赖于物体的即时构形又依赖于该物体的某一参照构形，而$\boldsymbol{L}$作为速度的**空间**梯度其定义不需借助于参照构形。这一区别引出对$\boldsymbol{L}$的进一步分析，并且其手段都与第四节中用到的大不一样。

我们目前的出发点是将$\boldsymbol{L}$表示为一对称部分与一反对称部分之和这一唯一的加式分解：

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{D}+\boldsymbol{W}$$

式中
$$\boldsymbol{D}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}),\quad \boldsymbol{W}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}) \tag{43}$$

将极分解(41)引入式(30)$_2$，我们发现

$$\boldsymbol{L}=\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}+\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=\dot{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{V}^{-1}+\boldsymbol{V}\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}^{-1}.$$

如果重温例1，由于$\boldsymbol{R}$的正交性$\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$是反对称的，便由定义式(43)得到关系式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}&=\frac{1}{2}\boldsymbol{R}(\dot{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{U}^{-1}+\boldsymbol{U}^{-1}\dot{\boldsymbol{U}})\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\\&=\frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{V}^{-1}+\boldsymbol{V}^{-1}\dot{\boldsymbol{V}}+\boldsymbol{V}\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}^{-1}-\boldsymbol{V}^{-1}\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}),\\\boldsymbol{W}&=\frac{1}{2}\boldsymbol{R}(\dot{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{U}^{-1}-\boldsymbol{U}^{-1}\dot{\boldsymbol{U}})\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}+\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\\&=\frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{V}^{-1}-\boldsymbol{V}^{-1}\dot{\boldsymbol{V}}+\boldsymbol{V}\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}^{-1}+\boldsymbol{V}^{-1}\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}).\end{aligned} \tag{44}$$

假使现在将隐含在$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{V}$及$\boldsymbol{R}$定义中的参照构形就取为即时构形B_t，那么$\boldsymbol{F}$便是单位张量且$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{V}=\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}$。从而式(44)简化为

$$\boldsymbol{D}=\dot{\boldsymbol{U}}_t=\dot{\boldsymbol{V}}_0,\quad \boldsymbol{W}=\dot{\boldsymbol{R}}_0,$$

式中下标“0”表示B_0与B_t等同。因此速度梯度的对称和反对称部分即为物体经过其即时构形时伸长和旋转的变化率，从而称$\boldsymbol{D}$为**伸长率（或应变率）张量**，而称$\boldsymbol{W}$为**自旋张量**。

在B_t中，一代表性点x附近伸长率和自旋的几何解释基于式(33)和(34)，而且我们还是参照图2-2所示的那对相交的物质弧。若用伸长率张量表示，式$(33)_1$变为$\boldsymbol{l}\cdot(\boldsymbol{Dl})=(\mathrm{d}s)^{\cdot}/\mathrm{d}s$。如果$C_t$和$D_t$在$x$处正交，则$\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{m}=0$且式(34)简化为$\boldsymbol{l}\cdot(\boldsymbol{Dm})=-\frac{1}{2}\dot{\theta}$。从而在$x$处取值的伸长率张量相对于标准正交基$\boldsymbol{e}$的分量$D_{ij}$可以赋予以下意义。$D_{ii}$是这样一个物质线元每单位长度的伸长率，该线元在即时构形B_t中位于x处，并瞬时地沿着基矢量$\boldsymbol{e}_i$所定义的方向。D_{ij}（$i\neq j$）是这样一对物质线元间夹角的缩小率的一半，这一对线元在B_t中相交于x，且瞬时地沿着$\boldsymbol{e}_i$和$\boldsymbol{e}_j$所代表的方向。

因为$\boldsymbol{D}$为对称张量，它具有三个特征值ν_i，称为**主伸长率**，和一组相应的定义**伸长率主轴**的标准正交特征矢量。由刚才给出的几何解释知，x处的主伸长率就是即时与伸长率主轴同方向的物质线元所经历的每单位长度的伸长率，而这些线元间夹角的变化率瞬时地为零。因此所考虑的三物质线元所构成的三重组即时地在绕x作刚体旋转。最后我们证明该旋转的角速度就是自旋张量$\boldsymbol{W}$的轴矢量$\boldsymbol{w}$。对一在B_t中位于x处且沿着由$\boldsymbol{D}$的单位特征矢量$\boldsymbol{r}_i$所定义的伸长率主轴方向的物质线元，式$(33)_2$给出

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{r}}&=(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{W})\boldsymbol{r}_i-\{\boldsymbol{r}_i\cdot(\boldsymbol{D}\boldsymbol{r}_i)\}\boldsymbol{r}_i\\&=\boldsymbol{W}\boldsymbol{r}_i+\nu_i\boldsymbol{r}_i-\{\boldsymbol{r}_i\cdot(\nu_i\boldsymbol{r}_i)\}\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{W}\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r}_i,\end{aligned}$$

式中，ν_i为与$\boldsymbol{r}_i$相对应的主伸长率。因此如上所述，在时刻t物质元在以角速度$\boldsymbol{w}$绕x旋转。

综合上述：**在点x附近的相对运动由一个为$\boldsymbol{W}$所定义的刚体旋转叠加一个由$\boldsymbol{D}$所代表的三向伸长所组成。**

例12 一在空间描述中速度为

$$\boldsymbol{v}=c(\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{q})\boldsymbol{x}=c(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{q})\boldsymbol{p}$$

的运动称为**简单剪切运动**，式中 c 为正常数，$\boldsymbol{p}$和$\boldsymbol{q}$为正交单位矢量。试确定该运动的主伸长率、伸长率主轴及角速度。

解 这是一定常运动，在运动过程中质点路径和流线始终为沿 $\boldsymbol{p}$所定义的方向的直线，且垂直于$\boldsymbol{q}$的物质平面不变形地互相滑动。利用习题1.19(i)我们得到

$$\boldsymbol{L}=\mathrm{grad}\boldsymbol{v}=c\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{q},$$

由此及式$(43)_{2,3}$，得

$$\boldsymbol{D}=\frac{1}{2}c(\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}\otimes\boldsymbol{p}),\quad \boldsymbol{W}=\frac{1}{2}c(\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}\otimes\boldsymbol{p}).$$

上面的伸长率张量可以写成以下的谱形式：

$$\boldsymbol{D}=\frac{1}{4}c\,(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})\otimes(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})-\frac{1}{4}c(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\otimes(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}).$$

由此可以看出（通过与(1.59)相比较），主伸长率为$\frac{1}{2}c$，$-\frac{1}{2}c$，0，且定义伸长率主轴的标准正交矢量为$2^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})$，$2^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})$，$\boldsymbol{r}$，式中$\boldsymbol{r}$与$\boldsymbol{p}$和$\boldsymbol{q}$都正交。由于主伸长率之和为零，$\mathrm{tr}\boldsymbol{D}=\mathrm{tr}\boldsymbol{L}=0$，这就意味着该运动是等容的。

为确定起见，假定标准正交基$\{\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{q},\ \boldsymbol{r}\}$在$\boldsymbol{E}^+$中定义，相应地关系式（1.69）成立。令$\boldsymbol{a}$为一任意矢量。于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{W}\boldsymbol{a}&=\frac{1}{2}c\{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{q})\boldsymbol{p}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{q}\}\\&=-\frac{1}{2}c\boldsymbol{r}\times\{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{p}+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{q})\boldsymbol{q}+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}\}\\&=-\frac{1}{2}c\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a},\end{aligned}$$

由此看到，$-\frac{1}{2}c\boldsymbol{r}$作为旋张量$\boldsymbol{W}$的轴矢量，就是要求的角速度。

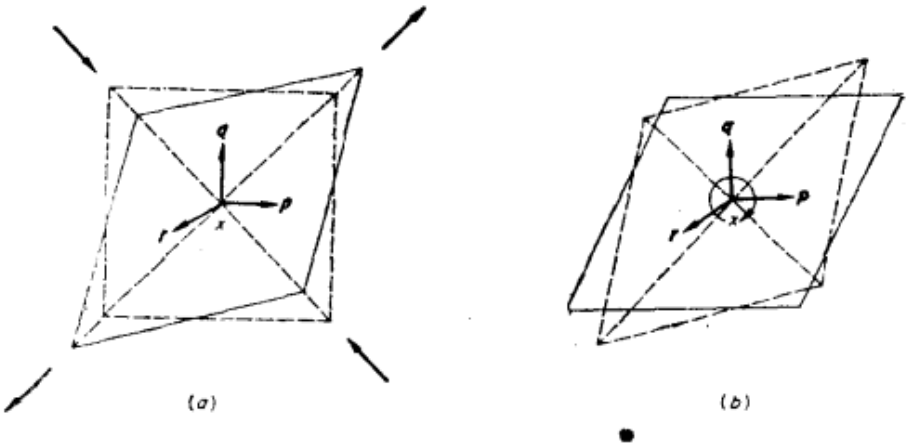


图 2-7　在简单剪切运动中（例12）初始时为立方形的物质区域在一短时间区间内的变形分解为一伸长(a)和一自旋(b)

代表性点x附近的相对运动的伸长和旋转部分分别如图2-7(a)和(b)所示。

例13　证明：一物体$\widetilde{\boldsymbol{R}}$的运动是刚性的当且仅当其伸长率张量在所有构形$\{B_t\}$中都为零。

推论：没有伸长发生的运动必然是刚性的。

解　(a)若$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{O}$，则速度梯度$\boldsymbol{L}$与自旋张量$\boldsymbol{W}$重合。此外，如以下所证，$\boldsymbol{L}$还不随$B_t$中的位置变化。

相对于一空间直角坐标系统（o，e），$\boldsymbol{L}$的分量为$\partial v_i/\partial x_j$（见式$(29)_1$和$(1.93)_1$）并由$\boldsymbol{D}$为零得到关系式

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=-\frac{\partial v_j}{\partial x_i}. \qquad (A)$$

若假定速度分量v_i具有连续的二阶偏导数，则由(A)导出

$$\frac{\partial L_{ij}}{\partial x_k}=\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j\partial x_k}=-\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i\partial x_k}=\frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i\partial x_j}$$

$$=-\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j\partial x_k}=-\frac{\partial L_{ij}}{\partial x_k}.$$

因此有$\partial L_{ij}/\partial x_k=0$，故$\boldsymbol{L}$不依赖于空间位置矢量$x$。

于是有

$$\mathrm{grad}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{W}, \tag{B}$$

式中$\boldsymbol{W}$是反对称的，且仅为t的函数。只要积分式(B)，便能得到一等价于式$(6)_1$的$\boldsymbol{v}$的表示式，因此运动必须是刚性的。

(*b*)如果运动是刚性的，则速度由式$(6)_1$给出。将空间梯度算子作用于该式两边，我们便发现速度梯度是反对称的。从而有$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{O}$。

在一无伸长发生的运动中，伸长张量以及柯西-格林应变张量全部等于$\boldsymbol{I}$。借助于式$(24)_2$和$(30)_1$，我们得到关系式

$$\dot{\boldsymbol{B}}=\dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{F}\dot{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}},$$

而由此式我们有$\boldsymbol{O}=\dot{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{D}$。从而由上面(*a*)中已证得的结果便知运动是刚性的。

第六节　环量和涡度

速度绕一运动物体即时构形B_t中的一环路Γ（即一条简单封闭曲线）的线积分

$$C(\Gamma)=\oint_{\Gamma}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{45}$$

称为绕Γ的**环量**。如果Γ在B_t中是可缩减的，也就是如果存在一规则曲面片A以Γ作为边界而且全部含在B_t中，我们便可利用斯托克斯定理（式(1.100)）将式(45)改写为

$$C(\Gamma)=\int_{A}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a,\quad \text{式中}\boldsymbol{\omega}=\mathrm{curl}\boldsymbol{v}, \tag{46}$$

这里相对于与A垂直的单位矢量场$\boldsymbol{n}$环路的走向为正。因此，绕Γ的环量就等于矢量$\boldsymbol{\omega}$穿过一覆盖Γ的曲面的通量，$\boldsymbol{\omega}$称为**涡度**。因为$\frac{1}{2}\mathrm{curl}\boldsymbol{v}$为自旋张量的轴矢量（参见练习1.20），所以涡度等于局部角速度的两倍。

由式(38)和(39)可导出。绕一可缩减的**物质**环路Γ_t的环量随时间的变化率的公式依次将(38)(7)和（1.100）用于定义式(45)．便得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C(\Gamma_t)=\oint_{\Gamma_t}\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\oint_{A_t}(\mathrm{curl}\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a, \tag{47}$$

而将式（39）用于式（46），则给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C(\Gamma_t)=\int_{A_t}(\dot{\boldsymbol{\omega}}+\boldsymbol{\omega}\mathrm{tr}\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{\omega})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a, \tag{48}$$

这里，A_t是一以Γ_t为边界的规则物质曲面片。等式

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{\omega}}+\boldsymbol{\omega}\mathrm{tr}\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{\omega},$$

可由式（47）和（48）明显看出，但也可以直接导出。这一工作就留给读者自己去做。

如果在某一运动过程中绕任一物质环路的环量都保持不变，便称该运动是**保环量**的。这种类型的运动在流体动力学中占有重要的地位（参见练习3.7(i)）。重温一下例1.19末尾的附註，便可由式（47）和（48）推知：一运动是保环量的当且仅当

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{\omega}}+\boldsymbol{\omega}\mathrm{tr}\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{\omega}=0. \tag{49}$$

涡度方程式$(49)_2$还可借助于式$(30)_3$及$(31)_1$改写为$(\boldsymbol{J}\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{\omega})^{\cdot}=\boldsymbol{O}$。该式告诉我们：在一代表性质点处的$\boldsymbol{J}\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{\omega}$值在运动过程中保持不变。在定义变形梯度时用到的参照构形B_r中，$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{I}$，$J=1$。因此有

$$\boldsymbol{\omega}=J^{-1}\boldsymbol{F}\boldsymbol{\omega}_r, \tag{50}$$

式中，$\boldsymbol{\omega}_r$为B_r中的涡度。这一结果通常称为**柯西涡度公式**。它展示出在一保环量运动的两个构形中涡度场之间的一个简单关系。

例14 在空间描述中涡度的场线称为**涡线***)，试证明在保环量运动

---

(7) $\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}=\mathrm{grad}(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})$绕$\Gamma$的积分为零。

(*)译者注：涡线是这样的曲线：曲线上任意点处切线的方向就是该处涡度$\boldsymbol{\omega}$的方向。是与流线相对应的用语。

中，涡线是物质曲线。

证 令C_t为B_t中一物质曲线，在B_τ中其相应的构形为C_τ，并设C_τ是一涡线。如果我们能证明C_t也是一涡线，那么问题就解决了。

还是参照图2-2，我们首先重新写出关系式$\boldsymbol{l}\mathrm{d}s=\boldsymbol{F}\boldsymbol{L}\mathrm{d}S$，这里$\boldsymbol{L}$、$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$和$\boldsymbol{l}$、$\mathrm{d}s$分别为$C_\tau$和$C_t$上相应的基本弧元的单位切矢量和弧长。其次，由于$C_\tau$是参照涡度场$\boldsymbol{\omega}_\tau$的一条场线，我们有$\boldsymbol{\omega}_\tau=\pm|\boldsymbol{\omega}_\tau|\boldsymbol{L}$。将这些结果与涡度公式(50)相结合便得到

$$\boldsymbol{\omega}=\pm J^{-1}|\boldsymbol{\omega}_\tau|\boldsymbol{F}\boldsymbol{L}=\pm J^{-1}|\boldsymbol{\omega}_\tau|(\mathrm{d}s/\mathrm{d}S)\boldsymbol{l}.$$

该式表明：在任一点处，涡度的方向与C_t相切。因此C_t是一涡线。

〔作为此证明的一个系，我们写下以下在保环量运动中涡线的伸长率所满足的关系式：

$$(\mathrm{d}s/J|\boldsymbol{\omega}|)^{\cdot}=0,\ \text{或}(\mathrm{d}s)^{\cdot}/\mathrm{d}s=\mathrm{tr}\boldsymbol{L}+|\boldsymbol{\omega}|^{\cdot}/|\boldsymbol{\omega}|.\ 〕$$

如果涡度$\boldsymbol{\omega}$（或等价地，自旋张量$\boldsymbol{W}$）在由一运动物体的质点所占据的某区域内处处为零，便称在该区域的运动是**无旋**的。由式(46)知，一运动在某给定区域R内是无旋的当且仅当绕任一在R中可缩减的环路的环量都为零。当$\boldsymbol{\omega}$或$\boldsymbol{W}$在所有构形中都为零时，我们就说整个运动是无旋的。

例15 相对于一直角坐标系，在某运动中的速度场有以下的空间描述：

$$v_1=-\frac{1}{2}\alpha x_1-f(r)x_2,\quad v_2=-\frac{1}{2}\alpha x_2+f(r)x_1,\quad v_3=\alpha x_3,\qquad (\mathrm{A})$$

式中$r=(x_1^2+x_2^2)^{1/2}$表示距3-轴的距离，α为一正常数。试描述该运动的特点，确定其涡度，并讨论该运动是(*a*)无旋的和(*b*)保环量的可能性。

解 式(A)所描述的定常运动是两个运动的叠加。一个是渐缩运动，其速度分量为$\left(-\frac{1}{2}\alpha x_1,-\frac{1}{2}\alpha x_2,\alpha x_3\right)$；另一个是循环运动，其速度分量为$(-f(r)x_2,\ f(r)x_1,\ 0)$。渐缩运动在将质点带离平面$x_3=0$的同时使质点向3-轴靠拢，它只具有原点这一个驻

点。在循环运动中，质点以常速$rf(r)$在平面$x_3=$常数内作以3-轴为中心的圆周运动。参照式$(32)_2$，我们很容易验证这两个分运动都是等容的，从而合运动也是等容的。总运动中的质点路径(8)和流线（两者重合）由绕3-轴的锥形螺旋线（如图2-8所示）和$x_3=0$内收敛于原点的平面螺旋线所组成。

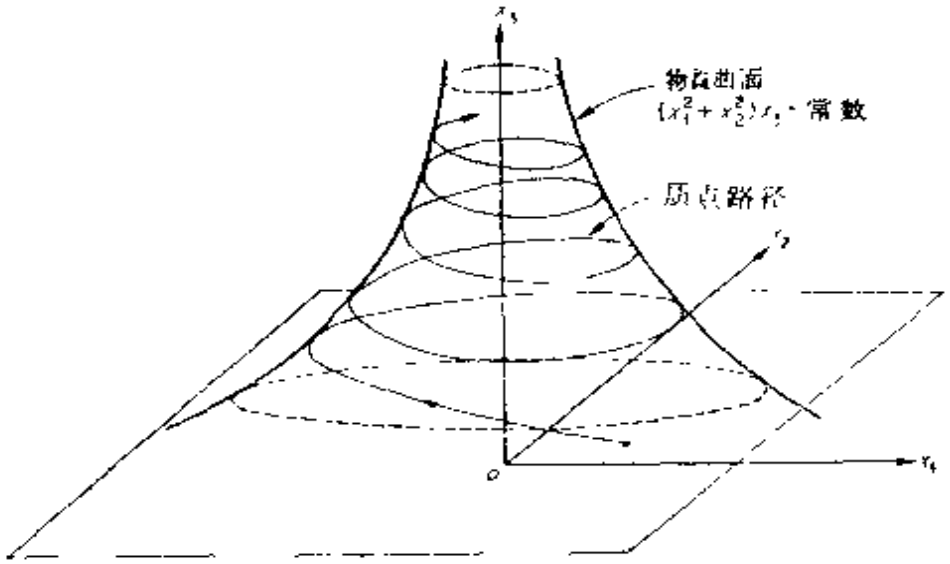


图 2-8 一代表性质点路径和包含它的物质曲面（例15）

（8） 该运动的完整描述可以通过积分式(A)获得，其结果为

$$x_1=(X_1\cos\chi-X_2\sin\chi)e^{-\frac{1}{2}at},$$

$$x_2=(X_1\sin\chi+X_2\cos\chi)e^{-\frac{1}{2}at},\qquad x_3=X_3e^{at},$$

式中

$$\chi=\frac{2}{a}\int_{\rho a}^{r}\frac{1}{s}e^{-\frac{1}{2}at}f(s)\frac{ds}{s},\quad R=(X_1^2+X_2^2)^{\frac{1}{2}}.$$

这里参照和空间坐标属于同一坐标系，参照构形取为物体在$t=0$时的构形。消去t，我们得到

$$(x_1^2+x_2^2)x_3=(X_1^2+X_2^2)X_3.$$

此式代表一族包含质点路径的物质曲面（参见图2-8）。

〔译者注：表示运动的上式，可由式(A)积分，并考虑到初始条件$t=0$，$x_i=X_i$而得到。将$(A)_1$式乘以x_1，$(A)_2$式乘以x_2，两者相加，然后求解即得

$r=(x_1^2+x_2^2)^{1/2}=Re^{-\frac{at}{2}}=(X_1^2+X_2^2)e^{-\frac{at}{2}}$，由此可知$x_1$和$x_2$具有如下形式：$x_1=(X_1\cos\psi-X_2\sin\psi)e^{-\frac{at}{2}}$，$x_2=(X_1\sin\psi+X_2\cos\psi)e^{-\frac{at}{2}}$，以之代入$(A)_4$得$\frac{d\psi}{dt}=f(r)$，得到的$\psi$就是上面给出的$\chi$〕

由(A)借助于式(46)$_2$和(1.93)$_3$所计算出的涡度分量为

$$\left.\begin{aligned}&\omega_1=\frac{\partial v_3}{\partial x_2}-\frac{\partial v_2}{\partial x_3}=0,\quad \omega_2=\frac{\partial v_1}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_1},\quad 0,\\&\omega_3=\frac{\partial v_2}{\partial x_1}-\frac{\partial v_1}{\partial x_2}=rf'(r)+2f(r),\end{aligned}\right\}\quad (B)$$

这里取给定坐标系的基为定义在E^+中。因此涡度完全是由循环运动引起的，且处处沿着3-轴的方向。

(a)如果该运动是无旋的，那么ω必须为零。由(B)式我们看到f就必须满足一阶微分方程$rf'(r)+2f(r)=0$。

其通解为

$$f(r)=kr^{-2},\qquad (C)$$

式中k是一常数。当f具有形式(C)时，速度场在$r\to 0$时无界，因此该运动含有一通常称为**线涡**的奇异性。在任何不包含该线涡的区域内，运动总是无旋的。但绕圆周C：$x_1^2+x_2^2=r^2$，$x_3=$常数的环量为$2\pi k$(*)，故该运动作为一个整体不是无旋的。

(b)如果条件(49)中的任意一式得以满足，该运动就是保环量的。由于$\mathrm{tr}L$、ω_1和ω_2均为零且v_1、v_2和ω_3不依赖于x_3，式(49)$_2$简化为

$$0=\dot{\omega}_3-L_{33}\omega_3=v_1\frac{\partial\omega_3}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial\omega_3}{\partial x_2}-\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\omega_3.$$

(*)译者注：将(A)，(C)代入(45)式，$C(\Gamma)=\oint_\Gamma\left\{\left(-\frac{1}{2}ax_1-k\frac{x_2}{r^2}\right)dx_1+\left(\frac{1}{2}ax_2+k\frac{x_2}{r_2}\right)dx_2+ax_3dx_3\right\}$，这里$x_1=r\cos\theta$，$x_2=r\sin\theta$，$x_3=C$，取$r$和$C$为定值，则有$dx_1=-r\sin\theta d\theta$，$dx_2=r\cos\theta d\theta$及$\oint_\Gamma dx_3=0$。因此，

$$C(\Gamma)=\int_0^{2\pi}\left\{\left(-\frac{1}{2}ar\cos\theta-\frac{k}{r}\sin\theta\right)(-r\sin\theta)+\left(-\frac{1}{2}ar\sin\theta+\frac{k}{r}\cos\theta\right)(r\cos\theta)\right\}d\theta=\int_0^{2\pi}kd\theta=2\pi k.$$

将(A)和(B)中v_1、v_2、v_3和ω_3的表达式代入上式，然后去掉非零因子$-\frac{1}{2}\alpha$，便得到一个 f 的二阶微分方程，即

$$r^2f''(r)+5rf'(r)+4f(r)=0.$$

其通解为

$$f(r)=kr^{-2}+lr^{-2}\ln r, \qquad (D)$$

式中 k 和 l 为常数。与(a)中的情况一样，速度场在 $r=0$ 处发生奇异，从而在推导式$(49)_2$时事先所假设的光滑性条件不能满足。由于这个原因，我们就不能马上说式(D)一定意味着绕被3-轴所贯穿的物质环路的环量为常数。对一个即时构形为上面所定义的圆周 C 的物质环路来说，环量为

$$2\pi(k+l\ln r)=2\pi\{k+l(\ln R-\frac{1}{2}\alpha t)\},$$

式中R为环路在 $t=0$ 时的半径。因此该运动只当 f 具有形式(C)时才是保环量的。与前面一样，涡度在3-轴以外的其他点处处为零。在3-轴上，涡度的模为无穷大，ω_3在以C为界的圆盘上的面积分为$2\pi k$。

习　题

（加星号的练习含有第三章中要用到的结果。）

1. 一物体当 $t\geqslant 0$ 时的运动由下式给定：

$x_1=X_1+ktX_3$，$x_2=X_2+ktX_3$，$x_3=X_3-kt(X_1+X_2)$，式中参照和空间坐标所参照的是同一直角坐标系，k 为正常数。证明：一任意质点$\tilde{X}$的路径是一条与OX正交的直线，这里O为原点，X为$\tilde{X}$在参照构形中（即在 $t=0$ 时）所占据的点。设B_r为一以平面$X_1=\pm A$为边界面的板，试验证：该板的即时构形仍然是一个板，并且其边界面对1-方向的倾角当 $t\to\infty$时趋近于$\frac{1}{4}\pi$。

2. 设有物体的运动由下式给定

$$x_1=e^{-at}(X_1\cos bX_3t-X_2\sin bX_3t),$$

$$x_2=e^{-at}(X_1\sin bX_3t+X_2\cos bX_3t),$$

$$x_3=\phi(t)X_3,$$

式中 a 和 b 为常数。假定该运动是等容的，试先求出 $\phi(t)$ 的表示式，然后确定该运动在空间描述中的速度和加速度分量，最后证明质点路径和流线均在曲面 $(x_1^2+x_2^2)x_3=$ 常数之上。

提示与答案：$\phi=e^{2at}$，$v_1=-ax_1-be^{-2at}x_2x_3$，

$v_2=-ax_2+be^{-2at}x_1x_3$，$v_3=2ax_3$，

$a_1=a^2x_1+2abe^{-2at}x_2x_3-b^2e^{-4at}x_1x_3^2$，

$a_2=a^2x_2-2abe^{-2at}x_1x_3-b^2e^{-4at}x_2x_3^2$，$a_3=4a^2x_3$。

证明流线满足 $2(x_1dx_1+x_2dx_2)x_3+(x_1^2+x_2^2)dx_3=0$。

3. 在某物体 $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ 的一刚体运动中，由四个质点 $\widetilde{\boldsymbol{P}}$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{Q}}_i$（$i=1,2,3$）所占据的点相对于一固定原点 O 的空间位置矢量分别为 $\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}_i$，这里 $\boldsymbol{a}_i$ 为标准正交矢量。证明：$\widetilde{\boldsymbol{B}}$ 的自旋张量 $\boldsymbol{W}$ 和角速度 $\boldsymbol{w}$ 的表示式为

$$\boldsymbol{W}=\frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{a}}_i\otimes\boldsymbol{a}_i-\boldsymbol{a}_i\otimes\dot{\boldsymbol{a}}_i),$$

$$\boldsymbol{w}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}_i\times\dot{\boldsymbol{a}}_i.$$

设 $\widetilde{\boldsymbol{R}}$ 为第五个质点，在 $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ 的即时构形中它相对于 O 的位置矢量为 $\boldsymbol{c}+\boldsymbol{r}$，计算 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 和 $\ddot{\boldsymbol{r}}$。

提示与答案：$\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{W}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r}$，

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=(\dot{\boldsymbol{W}}+\boldsymbol{W}^2)\boldsymbol{r}=\dot{\boldsymbol{w}}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{w}\times(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r})。$$

4. 一物体的运动在空间描述中相对于一直角坐标系的加速度场由下式给出：

$$v_1=-n\sin t(2+\cos nt)^{-1}x_1,$$

$$v_2=n\cos nt(2+\sin nt)^{-1}x_2,\quad v_3=0,$$

式中 n 是一正常数。若将物体在 $t=0$ 时的状态取为参照构形并采用同一直角坐标系，试求出 x_i 用参照坐标 X_a 和 t 表示的表达式。确

定运动的质点路径和流线并讨论它们之间的关系式。计算在参照构形中体积为V的物质区域在时刻t的体积v，并证明v的最大值和最小值为$\left(\frac{3}{4}\pm\frac{\sqrt{2}}{3}\right)V$。

提示与答案：$x_1=\frac{1}{3}X_1(2+\cos nt)$，$x_2=\frac{1}{2}X_2(2+\sin nt)$，$x_3=X_3$

质点路径：$\left(\frac{x_1-\frac{2}{3}X_1}{\frac{1}{3}X_1}\right)^2+\left(\frac{x_2-X_2}{\frac{1}{2}X_2}\right)^2=1$，$x_3=X_3$。

流线：$x_1 2\cos nt+\cos^2 nt\ x_2 2\sin nt+\sin^2 nt=$常数，$x_3=$常数。

在$t=0$和$t=\frac{2\pi}{n}$之间以每$\frac{\pi}{4n}$间隔考察流线的样式。$v=\frac{1}{6}(2+\sin nt)(2+\cos nt)V$。

5. 设在某一运动中相对于一空间直角坐标系表示式为：

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha_1}+\frac{x_2^2}{a_2^2}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha_2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha_3}=1$$

的椭球面是一物质曲面，试确定该运动的速度场。（这里a_1、a_2、a_3、α_1、α_2、α_3和τ都是正常数）。当指数α_1、α_2和α_3满足怎样的条件时你所得到的运动才是等容的？

答案：$v_i=-\frac{1}{2}\alpha_i x_i t^{-1}$（$i=1$，2，3），$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$。

6. 推导出面积为da，单位法矢量为$\boldsymbol{n}$的物质曲面元的有关的公式

$$(da)^{\cdot}=\{\mathrm{tr}\boldsymbol{L}-\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{L}\boldsymbol{n})\}da,\quad \dot{\boldsymbol{n}}=\{\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{L}\boldsymbol{n})\}\boldsymbol{n}-\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n},$$

式中$\boldsymbol{L}$为曲面元即时所在位置处的速度梯度。

7. 假定某物体含有一组光滑的物质曲线，且每个质点都刚好只属于其中的一根曲线。设相对于一代表性物质曲线，dS、$\boldsymbol{L}$和ds、$\boldsymbol{l}$具有如例7中所定义的含义，试证明

$$\mathrm{Div}\boldsymbol{L}=\lambda\mathrm{div}\boldsymbol{l}+(\mathrm{grad}\lambda-\lambda J^{-1}\mathrm{grad}J)\cdot\boldsymbol{l},$$

式中$\lambda=ds/dS$。推证：如果变形是等容的，且沿物质曲线方向无伸长，则有

$$\mathrm{Div}\boldsymbol{L}=\mathrm{div}\boldsymbol{l}。$$

8. 证明：只要物质区域R_t是规则的，公式(37)和(40)就能整理成以下另外一种形式：

$$-\frac{d}{dt}\int_{R_t}\phi dv=\int_{R_t}-\frac{\partial\phi}{\partial t}\,dv+\int_{\partial R_t}\phi\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}da,$$

$$\frac{d}{\partial t}\int_{R_t}\boldsymbol{u}dv=\int_{R_t}\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}\,dv+\int_{\partial R_t}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})da\cdot$$

式中$\boldsymbol{n}$为R_t的边界∂R_t的外向单位法矢量。

9. (i)为式(42)所确定的简单剪切找出变形的构形中无伸长发生的方向，以及与无面积变化发生的平面垂直的方向。

(ii)假设有这样一个非刚性的等容均匀变形，在该变形中任何与无面积变化发生的平面垂直的方向又是一个无伸长发生的方向。证明：这样的方向最多只有一个，并且如果该方向存在的话，它必然沿着某一伸长轴。

提示与答案：(i)在滑动平面内的所有方向和在垂直于剪切平面且与剪切方向成倾角$2\psi=\mathrm{arctg}(2/\gamma)$的平面内的所有方向。

与剪切方向垂直的平面内的所有方向和与剪切平面垂直且与逆剪切方向成倾角$\frac{\pi}{2}-2\psi$的平面内的所有方向。

(ii)依次考虑以下各种情形：$\lambda_1>1>\lambda_2>\lambda_3$，$\lambda_1>\lambda_2>1>\lambda_3$，$\lambda_1>\lambda_2=1>\lambda_3$和$\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3$，其中$\lambda_1$，$\lambda_2$，$\lambda_3$为主伸长。

10. 如果在例11中去掉一组纤维，结论(*a*)，(*b*)和(*c*)应作怎样的修改？

答案：(*a*)和(*b*)不受影响。(*c*)以下述结论代替原结果，当3-方向发生最大收缩时，在变形的构形中，余下的一组纤维与1-方向成倾角$\pi/4$。

11. 推导出关于速度梯度的公式

$$\boldsymbol{L}=\sum_{r=1}^{3}\frac{\dot{\lambda}_r}{\lambda_r}\boldsymbol{q}_r\otimes\boldsymbol{q}_r-\boldsymbol{F}\boldsymbol{M}\boldsymbol{F}^{-1}+\boldsymbol{N},$$

式中

$$\boldsymbol{M}=\sum_{r=1}^{3}\dot{\boldsymbol{p}}_r\otimes\boldsymbol{p}_r\text{和}\boldsymbol{N}=\sum_{r=1}^{3}\dot{\boldsymbol{q}}_r\otimes\boldsymbol{q}_r$$

分别为代表参照和即时伸长轴自旋的反对称张量。从而证明：

(i)若固定参照伸长轴，则即时伸长轴就是伸长率主轴；

(ii)若固定即时伸长轴，则它们就是应变率张量$\dot{\boldsymbol{B}}$的主轴；

(iii)若将参照伸长轴和即时伸长轴都固定，则自旋张量$\boldsymbol{W}$为零。

12．设定义在一运动物体构形元上的矢量场$\boldsymbol{H}$满足方程

$$\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}=\mathrm{curl}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}),\quad \mathrm{div}\boldsymbol{H}=0,$$

式中$\boldsymbol{v}$为速度。证明：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S_t}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a=0,$$

这里S_t是一任意物质曲面的即时构形。并证明$\boldsymbol{H}$的场线是物质曲线。

13．在一纯循环运动中，速度场在空间描述中相对于一直角坐标系的分量为

$$v_1=-f(r,\ t)x_2,\quad v_2=f(r,\ t)x_1,\quad v_3=0,$$

式中$r=(x_1^2+x_2^2)^{1/2}$，试确定点(x_1,x_2,x_3)处的主伸长率，伸长率主轴及角速度。证明：该运动是保环量的当且仅当它是定常的。

答案：$v_1=-v_2=\frac{1}{2}r\frac{\partial f}{\partial r}$，$v_3=0$。

$$\boldsymbol{w}=\frac{1}{2}\left(2f+r\frac{\partial f}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_3.$$

$$\boldsymbol{r}_1=\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\boldsymbol{e}_1+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\boldsymbol{e}_2,$$

$$\boldsymbol{r}_2=-\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\boldsymbol{e}_1+\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\boldsymbol{e}_2,\quad \boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{e}_3,$$

其中$x_1=r\cos\theta$，$x_2=r\sin\theta$，而$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$为基矢量。

14. 在空间描述中速度为$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$的运动称为**定常均匀运动**，这里$\boldsymbol{A}$是一常张量。证明：如果这样的运动是保环量的，则其伸长率张量和涡度满足关系式$\boldsymbol{D}\boldsymbol{\omega}=(\mathrm{tr}\boldsymbol{D})\boldsymbol{\omega}$。推论：有两个主伸长率大小相等，符号相反，且每一相应的伸长率主轴均与涡度正交，并证明$\boldsymbol{A}^2$是对称的。

提示：证明$\boldsymbol{A}^2$为对称张量的一种直接方法就是通过下式的结果：$\mathrm{grad}\boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{L}}+\boldsymbol{L}^2$（此式应加证明）。

15. 设Γ为一环路，Π为一平面，$\boldsymbol{l}$为Π的单位法线矢量。求证Γ在Π上面的投影所包含的面积为

$$\frac{1}{2}\oint_{\Gamma}(\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{x})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

假设一物体的运动具有以下性质：对任一物质环路来说，它在平面$x_3=0$上的投影所包含的面积都不随时间改变。若Γ_t表示一任意物质环路的即时构形，证明：

$$\oint_{\Gamma_t}(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{v})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0.$$

并推证速度分量$v_1=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_1$和$v_2=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_2$，与$x_3$无关。如果该运动是等容的，那么其速度场还具有哪些性质？

由此进一步证明：一运动是刚性平移当且仅当任一物质环路在任一平面上的投影所包含的面积都不随时间改变。

第三章　守恒定律、场方程和跳跃条件

经典连续介质力学的基础是表述一运动物体中质量、线动量、角动量及能量守恒的各种守恒定律。这些守恒定律适用于所有物体，不管其组成是流体还是固体，且每一定律都给出一个场方程和一个跳跃条件，前者在那些处于足够光滑的运动状态的物体的构形上成立，而后者适用于那些不连续面上。像位置、时间和物体一样，质量、力、加热及内能这些出现在守恒定律中的概念在连续介质力学中也被看作是具有原始的地位，因为它们不能用那些更基本的概念来定义(1)。在本章中，我们主要关心的是各守恒定律及相应的场方程和跳跃条件，但我们也突出应力理论，因为除提供一些对场方程的推导必不可少的结果外，它在力的分析中也占有十分重要的地位。

第一节　质　　量

直观地说，质量可以看成是一物体任意部分所含物质多少的度量。因此，它是一个非负的标量，与时间无关，且一般来说不依赖于这部分物体所占据的构形的大小。此外，一物体的质量是该物体各组成部分质量的和。通过将质量刻画成一个具有特定性质的集合函数，我们便可将上面的这些特征用数学语言正式地表述出来。我们的讨论就以下面的定义作为基础。

令B为物体$\tilde{\boldsymbol{B}}$的任一构形，并令A为$\tilde{\boldsymbol{B}}$的任一子集$\tilde{\boldsymbol{A}}$中的质点

(1) 但这并不是说在原子级别上研究特定材料中影响力、内能等的表现形式的各种过程就不是最重要的。

在$\widetilde{B}$中所占据的点的集合。如果与$\widetilde{A}$相应地存在一非负实数$m(\widetilde{A})$，具有与时间和距离无关的物理量纲且满足

(i)对$\widetilde{B}$中任一对不相交的子集$\widetilde{A}_1$和$\widetilde{A}_2$，有

$$m(\widetilde{A}_1 \cup \widetilde{A}_2) = m(\widetilde{A}_1) + m(\widetilde{A}_2)，及$$

(ii)若A的体积趋近于零，则$m(\widetilde{A}) \to 0$，

则称$\widetilde{B}$为一具有**质量函数**的**物质体**。A的物质含量，用$m(A)$表示，就等于$\widetilde{A}$的质量$m(\widetilde{A})$，并且我们今后就将$\widetilde{A}$称作占据A的物质。性质(i)和(ii)意味着存在一定义在B之上的标量场ρ，满足

$$m(\widetilde{A}) = m(A) = \int_A \rho \mathrm{d}v \qquad (1)$$

ρ称为$\widetilde{B}$中物质的**质量密度**，或简称为**密度**。

当一物体作运动$\{B_t;\ t \in I\}$时，密度就是一定义在构形$\{B_t\}$之上的标量场，即时构形B_t中的任一物质区域R_t的物质含量$m(R_t)$便等于时刻t占据R_t的物质$\widetilde{R}$的质量$m(\widetilde{R})$。由于$m(\widetilde{R})$不依赖于t，我们直接由(1)导出**质量守恒方程**。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{R_t} \rho \mathrm{d}v = 0 \qquad (2)$$

我们恒定密度关于它所依赖的位置和时间变量连满可微。那么传输公式(2.37)便可用来将式(2)变换成

$$\int_{R_t} (\dot{\rho} + \rho \mathrm{div} \boldsymbol{v}) \mathrm{d}v = 0,$$

式中被积函数在R_t中连续，且积分区域为B_t中任一子域。从而由例1.19得，被积函数在B_t中为零，这样就得到**空间连续方程**

$$\dot{\rho} + \rho \mathrm{div} \boldsymbol{v} = 0. \qquad (3)$$

在假定的关于ρ的光滑性条件下，式(3)可由式(2)导出，反过来也明显可以。因此**守恒定律**(2)和**场方程**(3)是质量守恒定律两种等价的表达式。

例 1 令 ϕ 和 $\boldsymbol{u}$ 各为代表一运动物质体 $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ 某种属性的标量场和矢量场，并令 $\widetilde{R}_t$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的即时构形中任一物质区域。证明：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{R_t}\rho\phi\,\mathrm{d}v=\int_{R_t}\rho\,\dot{\phi}\,\mathrm{d}v, \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{R_t}\rho\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}v=\int_{R_t}\dot{\rho}\,\dot{\boldsymbol{u}}\,\mathrm{d}v. \tag{5}$$

解 在式(2.37)中以 $\rho\phi$ 代替标量场 ϕ 的结果为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{R_t}\rho\phi\,\mathrm{d}v=\int_{R_t}\{(\rho\phi)^{\cdot}+\rho\phi\,\mathrm{tr}\boldsymbol{L}\}\mathrm{d}v$$

$$=\int_{R_t}\{\rho\,\dot{\phi}+(\dot{\rho}+\rho\,\mathrm{div}\boldsymbol{v})\phi\}\mathrm{d}v.$$

利用式(3)，便得到第一个要证的式子。式(2.40)也可类似地给出矢量公式(5)。

例 2 试建立一运动物质体的密度、速度和加速度之间的关系式

$$\rho\boldsymbol{a}=\frac{\partial}{\partial t}(\rho\boldsymbol{v})+\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}).$$

解 令 R_t 为该物体即时构形中的一规则物体区域。那么先在习题1.8的第二个结果中以 $\rho\boldsymbol{v}$ 代替 $\boldsymbol{u}$，我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{R_t}\rho\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}v-\int_{R_t}\frac{\partial}{\partial t}(\rho\boldsymbol{v})\mathrm{d}v$$

$$=\int_{\partial R_t}\rho(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}\mathrm{d}a=\int_{\partial R_t}\rho(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v})\boldsymbol{n}\mathrm{d}a.$$

再将式(5)用于左边第一项，式(1.96)中的散度定理用于右边的面积分，便得到

$$\int_{R_t}\{\rho\boldsymbol{a}-\frac{\partial}{\partial t}(\rho\boldsymbol{v})-\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v})\}\mathrm{d}v=0.$$

最后，像在推导式(3)时那样利用例1.19即建立起所要求的关系式。

在式(3)和式(2.31)之间消去 $\mathrm{div}\boldsymbol{v}$ 给出 $(\rho J)^{\cdot}=0$，这表明在一给定质点处的 ρJ 值在物质体的运动过程中保持不变。令 ρ_r 为在定义变形梯度时用到的参考构形 B_r 中的密度。那么在 B_r 中 $\rho=\rho_r$，$J=1$，故 ρJ 的常值即为 ρ_r，因此**参照连续方程**为

$$\rho=J^{-1}\rho_r. \tag{6}$$

该式也可由式(2.22)直接导出，图2-4所示的物质体积元在 B_r 和 B_t 中的质量含量分别为 $\rho_r dV$ 和 ρdv。

如果一物质体只能发生等容运动，我们就称该物质体是由**不可压缩材料**组成的。既然在等容运动中 $J=1$，由式(6)便可看出，一不可压缩材料中任意质点处的密度总保持不变。特别地，若密度在某一构形中处处相同，则它在物体所能据占据的任何构形中都将处处具有同样的常值。

第二节　动量、力和力矩

在本节中，我们的讨论将从上节中有关物质体的纯运动学和惯性方面转向运动的起因以及它们所遵从的规律。

令 R_t 为一运动物质体 $\tilde{\boldsymbol{B}}$ 在时刻 t 所具有的构形 B_t 中的任一物质区域。占据 R_t 的物质的**线动量** $\boldsymbol{M}(R_t)$ 定义为

$$\boldsymbol{M}(R_t)=\int_{R_t}\rho\boldsymbol{v}\,dv. \tag{7}$$

若 $\boldsymbol{x}$ 为 R_t 中一代表性点相对于原点 o 的位置矢量，则该物质**相对于 o 的角动量** $\boldsymbol{H}(R_t;\ o)$ 定义为

$$\boldsymbol{H}(R_t;\ 0)=\int_{R_t}\boldsymbol{x}\times(\rho\boldsymbol{v})\,dv. \tag{8}$$

例 3　计算一作刚性运动的物质体的 $\boldsymbol{M}(R_t)$ 和 $\boldsymbol{H}(R_t;\ o)$。

解 在空间描述中刚性运动的速度由$(2.7)_1$给出。因此由定义式(7)和(8)有

$$\boldsymbol{M}(R_t)=\int_{R_t}\rho\{\dot{\boldsymbol{c}}+\boldsymbol{w}\times(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\}\mathrm{d}v$$

$$=m(R_t)\{\dot{\boldsymbol{c}}+\boldsymbol{w}\times(\overline{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{c})\} \qquad (A)$$

和

$$\boldsymbol{H}(R_t;\ 0)=\int_{R_t}\rho\boldsymbol{x}\times\{\dot{\boldsymbol{c}}+\boldsymbol{w}\times(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}\}\mathrm{d}v$$

$$=m(R_t)\overline{\boldsymbol{x}}\times(\dot{\boldsymbol{c}}-\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{J}(R_t)\boldsymbol{w}, \qquad (B)$$

式中

$$\overline{\boldsymbol{x}}=\{m(R_t)\}^{-1}\int_{R_t}\rho\boldsymbol{x}\mathrm{d}v,$$

$$\boldsymbol{J}(R_t)=\int_{R_t}\rho\{(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{I}-\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x}\}\mathrm{d}v,$$

我们用到了式(1)，$(1.73)_2$和(1.41)。$\overline{\boldsymbol{x}}$和$\boldsymbol{J}(R_t)$分别为占据$Rt$的物质的质量中心位置矢量和相对于$o$的**惯性张量**。

若将结果(A)和(B)改写为

$$\boldsymbol{M}(R_t)=m(R_t)\overline{\boldsymbol{v}},\quad \boldsymbol{H}(R_t;\ o)=m(R_t)\overline{\boldsymbol{x}}\times\overline{\boldsymbol{v}}+\overline{\boldsymbol{J}}(R_t)\boldsymbol{w}$$

则更易理解，式中$\overline{\boldsymbol{v}}=\dot{\boldsymbol{c}}+\boldsymbol{w}\times(\overline{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{c})$为质心的速度，$\overline{\boldsymbol{J}}(R_t)$为相对于质心的惯性张量。

力和力矩的概念描述外界对一运动物质体$\widetilde{\boldsymbol{B}}$的作用和$\widetilde{\boldsymbol{B}}$的各部分之间的相互作用。这些概念的数学表示是定义在$\widetilde{\boldsymbol{B}}$各子集之上的矢量函数。因此在构形$B_t$中，每一物质区域$R_t$都有矢量$\boldsymbol{F}(R_t)$和$\boldsymbol{G}(R_t;\ o)$与之对应，分别称为作用在占据$R_t$的物质之上的**力**和**相对于o的力矩**。在连续介质力学中，我们将两种不同的力和力矩区分开来：**体力**和**体力矩**被看作是作用在物体的质点之上，而**接触力**和**接触力矩**(*)则是来源于物体的一部分通过交界面对与之邻近

(*)译者注：在固体力学中常称为**面力**和**面力矩**。

部分的作用。

作用在$\tilde{B}$上面的体力和体力矩由定义在$\tilde{B}$的构形之上的矢量场b和c所表示。这些场按每单位质量来度量，**并假设它们是连续的**。因此它们对$F(R_t)$和$G(R_t;\ o)$的贡献分别为

$$\int_{R_t}\rho b\,dv \quad 及 \quad \int_{R_t}\{x\times(\rho b)+\rho c\}\,dv. \qquad (9)$$

重力场或电磁场对场中物体的作用力便是体力的例子。

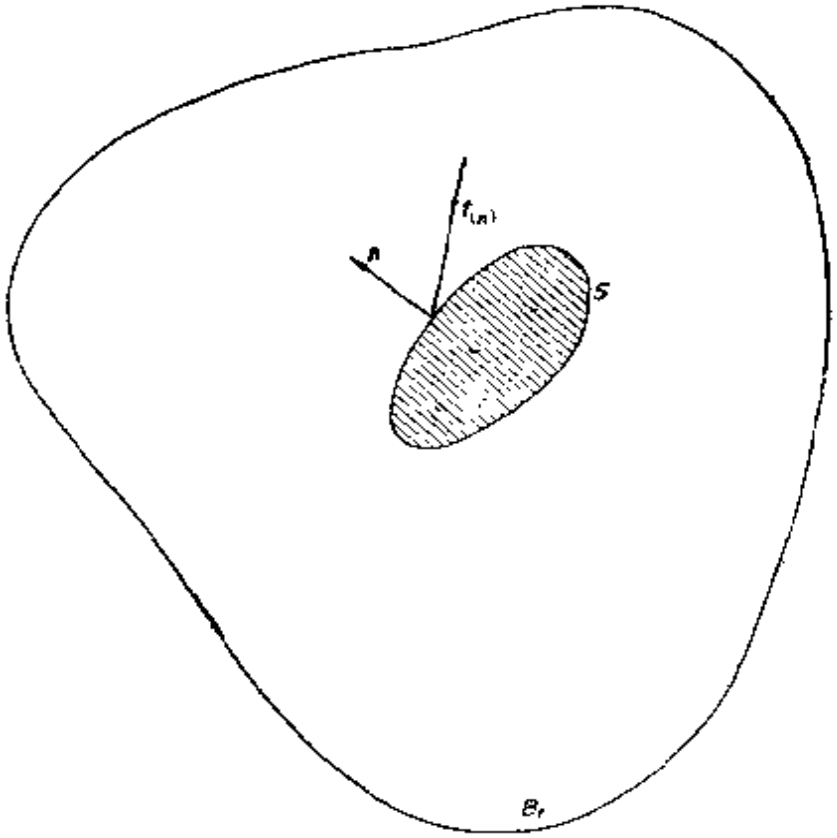


图 3-1 作用在具有外单位法矢量n的曲面S上的应力矢量$t_{(n)}$

接触力的数学描述源于以下的**欧拉-柯西应力原理**：占据 B_t 中封闭曲面 S 以外部分的物质对占据 S 以内部分的物质的作用由一矢量场 $t_{(n)}$ 所代表，该矢量场定义在 S 之上，并且有每单位面积力的物理量纲（参见图3-1）。我们称$t_{(n)}$为**应力矢量，并假定它连续地依赖于** S 的外单位法矢量n。

如果一物质体各部分间的相互作用能完全由上面的说明所描

述，就称该物体是由**非极材料**所组成的。在这样的材料中只存在接触力而不存在接触力矩。连续介质力学的经典理论只涉及非极材料，在本书中我们就不正面讨论极性介质了。

作用在任意物质区域R_t的边界∂R_t之上的接触力对$\boldsymbol{F}(R_t)$和$\boldsymbol{G}(R_t;\ o)$的贡献分别为

$$\int_{\partial R_t}\boldsymbol{t}_{(n)}\mathrm{d}a \quad 及 \quad \int_{\partial R_t}\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t}_{(n)}\mathrm{d}a$$

与两个表达式(9)对应相叠加便有

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{F}(R_t)&=\int_{R_t}\rho\boldsymbol{b}\mathrm{d}v+\int_{\partial R_t}\boldsymbol{t}_{(n)}\mathrm{d}a,\\ \boldsymbol{G}(R_t;\ 0)&=\int_{R_t}\rho(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\mathrm{d}v+\int_{\partial R_t}\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t}_{(n)}\mathrm{d}a\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

首先由欧拉所阐明的**运动定律**适用于所有由非极材料组成的物体。这些定律指出：存在这样一个标架，在这个标架中不论原点o怎样选择，总有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{M}(R_t)=\boldsymbol{F}(R_t),\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{H}(R_t;\ o)=\boldsymbol{G}(R_t;\ o),\tag{11}$$

这里术语**标架**表示$\overline{\boldsymbol{E}}$中一测量位置的系统（即$\overline{\boldsymbol{E}}$与第1.9节中所描述过的那种矢量空间E之间的一种对应关系）和一种度量时间的方法的结合。

例 4 证明

$$\boldsymbol{G}(R_t;\ y)=\boldsymbol{G}(R_t;\ o)-\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{F}(R_t),$$

式中y为一任意点，$\boldsymbol{y}=\overrightarrow{oy}$。

解 根据第二运动定律，

$$\boldsymbol{G}(R_t;\ y)=(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\boldsymbol{H}(R_t;\ y),$$

且由定义(8)和(7)，

$$\boldsymbol{H}(R_t;\ y)=\int_{R_t}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\times(\rho\boldsymbol{v})\mathrm{d}v$$

$$=\int_{R_t}\boldsymbol{x}\times(\rho\boldsymbol{v})\mathrm{d}v-\boldsymbol{y}\times\int_{R_t}\rho\boldsymbol{v}\mathrm{d}v$$
$$=\boldsymbol{H}(R_t;\ o)-\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{M}(R_t)$$

因此，利用式(11)有

$$\boldsymbol{G}(R_t;\ y)=(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\boldsymbol{H}(R_t;\ o)-\boldsymbol{y}\times\{(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\boldsymbol{M}(R_t)\}$$
$$=\boldsymbol{G}(R_t;\ o)-\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{F}(R_t)$$

[用文字表达就是：相对于y的力矩等于相对于o的力矩加上总合力绕y的力矩，这里假定总合力作用在o点，所有力和力矩都作用在占据R_t的材料上。这一结论也可直接由式(10)证得，但这里所用的证明方法不需要对合成$\boldsymbol{F}$和$\boldsymbol{G}$的各种力和力矩的性质作任何假设。]

体力矩不出现在用经典连续介质力学的方法所通常讨论的各种情形之中，所以今后就假定它们不存在。因此将式(7)、(8)和(10)代入(11)后所得到的积分关系式就是

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{R_t}\rho\boldsymbol{v}\mathrm{d}v=\int_{R_t}\rho\boldsymbol{b}\mathrm{d}v+\int_{\partial R_t}\boldsymbol{t}_{(n)}\mathrm{d}a,\\&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{R_t}\rho\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v}\mathrm{d}v=\int_{R_t}\rho\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{b}\mathrm{d}v+\int_{\partial R_t}\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t}_{(n)}\mathrm{d}a\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

并且在这种形式下，我们能够认出这两个运动定律就是线动量和角动量守恒方程。将矢量公式(5)用于其左边后，式(12)就变为

$$\left.\begin{aligned}&\int_{R_t}\rho(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\mathrm{d}v=\int_{\partial R_t}\boldsymbol{t}_{(n)}\mathrm{d}a,\\&\int_{R_t}\rho\boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\mathrm{d}v=\int_{\partial R_t}\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t}_{(n)}\mathrm{d}a\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

只要在式$(13)_2$两边同时叉乘一任意矢量并利用式$(1.73)_1$便可看出，该式中的两个被积函数可以由两个以它们为轴矢量的反对轴张量所取代，从而有

$$\int_{R_t}\rho\{\boldsymbol{x}\otimes(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\otimes\boldsymbol{x}\}\mathrm{d}v$$

$$=\int_{\partial R_t}(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{n})}-\boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{n})}\otimes\boldsymbol{x})da \qquad (14)$$

第三节　应力理论

作为由式(13)$_1$和式(14)推导表示局部线动量和角动量守恒的场方程的必要前奏，我们下面必须对接触力作更深的分析。我们的主要结果是一应力矢量$\boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{n})}$依赖于单位法矢量$\boldsymbol{n}$的表达式，它可通过将式(13)$_1$用于图3-2所示的$B_t$中四面体子区域来获得。在图3-2中，顶点$x$是$B_t$中一代表性内点，三边$xy_1$、$xy_2$、$xy_3$分别沿着一任意选取的标准正交基$e=\{e_1, e_2, e_3\}$的基矢量方向。$x$到斜面$y_1y_2y_3$的距离及$y_1y_2y_3$的外单位法矢量分别以$d$和$\boldsymbol{n}$表示。因此，边$xy_i$的长度为$n_i^{-1}d$，这里$n_i=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_i$(2)，且垂直于$xy_i$的表面的外单位法矢量为$-\boldsymbol{e}_i$。

有了这些事实之后，我们便可将即时占据区域$xy_1y_2y_3$的物质的线动量平衡表示为

$$\frac{1}{6}(n_1n_2n_3)^{-1}d^3\rho\ (\bar{\boldsymbol{a}}-\bar{\boldsymbol{b}})$$

$$=\frac{1}{2}(n_1n_2n_3)^{-1}d^2\{\overline{\boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{n})}}+n_i\overline{\boldsymbol{t}_{(-\boldsymbol{e}_i)}}\} \qquad (A)$$

在式（A）的每项中，我们都用到了重积分的中值定理，上面横线表示在有关区域表面的某点处取值。在（A）中消去共同因子$(n_1n_2n_3)^{-1}d^2$，然后通过令d趋近于零使四面体收缩成点x，便得到关系式

$$\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{n}}=-(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{t}_{(-\boldsymbol{e}_i)}, \qquad (B)$$

式中的应力矢量在x处取值。式（A）只有当分量n_i都不为零时才有意义，但由于$\boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{n})}$连续地依赖于$\boldsymbol{n}$，式（B）在该限制去掉后仍然成立。因此可在（B）中令$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{e}_i$，得到

（2）　注意由图3-2的构造知$n_i>0$。

$$t_{(e_i)} = -t_{(-e_i)}$$

于是，（B）可由下式代替：

$$t_n = (n \cdot e_j) t_{(e_j)} = \{t_{(e_j)} \otimes e_j\} n \qquad (C)$$

张量

$$\sigma = e_j \otimes t_{(e_j)} \qquad (D)$$

显然不依赖于n。它也与基底的选取无关，因为如果$e' = \{e_1', e_2', e_3'\}$是另外一个标准正交基底，我们有

$$\sigma = (e_j' \otimes e_j')\sigma = e_j' \otimes (\sigma^T e_j') = e_j' \otimes t_{(e_j')},$$

这里用到了式(C)和(D)。当式(C)写成

$$t_{(n)} = \sigma^T n \qquad (15)$$

后，就将$t_{(n)}$对n的依赖关系显式地表现出来。此外，σ显然为作用在x处的接触力提供了一个张量描述，因此它称为**应力张量**。σ相对于基e的分量为

$$\sigma_{ij} = e_i \cdot (\sigma e_j) = e_j \cdot (\sigma^T e_i) = t_{(e_i)} \cdot e_j, \qquad (16)$$

从而σ_{ij}就是B_t中x点处外法线沿i-方向的表面上每单位面积(所受)的接触力沿j-方向的分量。

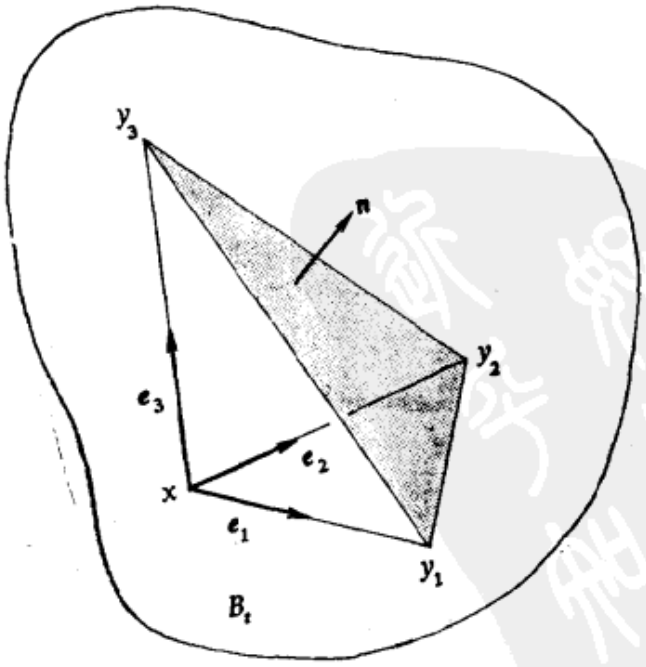


图 3-2 推导式(15)时所用到的四面体

例 5　设一物质体在一空间直角坐标系（o，e）中的构形B为$-a\leqslant x_1\leqslant a$，$-a\leqslant x_2\leqslant a$，$-h\leqslant x_3\leqslant h$，且$B$中的应力场具有分量

$$\sigma_{11}=-q(x_1^2-x_2^2)/a^2,\quad \sigma_{22}=q(x_1^2-x_2^2)/a^2,\quad \sigma_{33}=0,$$

$$\sigma_{23}=\sigma_{32}=0,\quad \sigma_{31}=\sigma_{13}=0,\quad \sigma_{21}=\sigma_{12}=2qx_1x_2/a^2,$$

这里a、h、q为正常数。试确定为维持此应力状态在B的边界上所需施加的张力（即每单位面积的力），并计算作用在$x_1=\pm a$，$x_2=\pm a$各表面上的合力和相对于o的合力矩。

解　在表面$x_1=a$上，外单位法矢量与基矢量e_1重合，故应力矢量具有分量（σ_{11}，σ_{12}，σ_{13}）。在相对的表面$x_1=-a$上，外单位法矢量是$-e_1$，故应力矢量的分量为（$-\sigma_{11}$，$-\sigma_{12}$，$-\sigma_{13}$）。类似地处理表面$x_2=\pm a$，$x_3=\pm h$，我们就得到图3-3中所标出的六组分量。这些分量便是为维持所给应力状态所需施加的表面张力，其值就是所给公式中的应力分量在相应边界上所取的值。因此，

在$x_1=\pm a$上，$\sigma_{11}=-q(a^2-x_2^2)/a^2$，$\sigma_{12}=\pm 2qx_2/a$，

$\sigma_{13}=0$，

在$x_2=\pm a$上，$\sigma_{21}=\pm 2qx_1/a$，$\sigma_{22}=q(x_1^2-a^2)a^2$，$\sigma_{23}=0$，

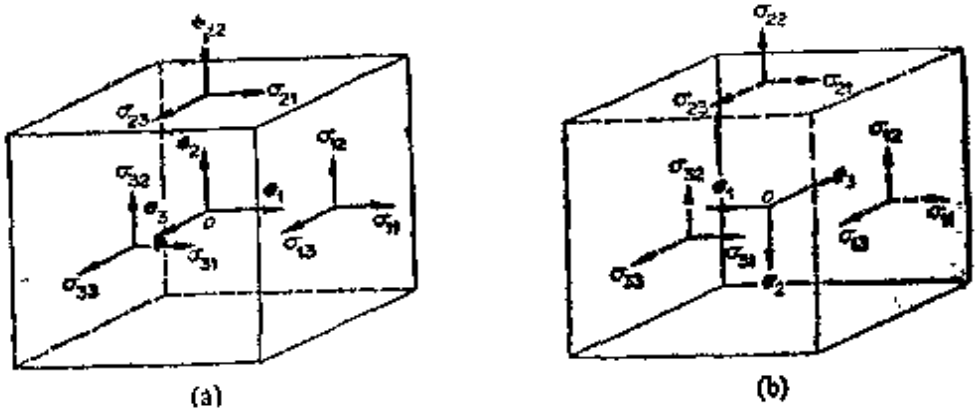


图 3-3　作用在一长方体各表面上的张力（例5）
(a)表面$x_1=a$、$x_2=a$、$x_3=h$上的张力；(b)相对的表面上的张力

而表面$x_3=\pm h$上则无张力存在。

表面$x_1=a$上的合力和相对于o的合力矩为

$$\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\sigma_{1\beta}|_{x_1=a}e_\beta dx_2dx_3$$

$$=2h\int_{-a}^{a}\left(-q\frac{a^2-x_2^2}{a^2}e_1+2q\frac{x_2}{a}e_2\right)dx_2$$

及

$$\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}(ae_1+x_2e_2+x_3e_3)\times(\sigma_{1\beta}|_{x_1=a}e_\beta)dx_2dx_3$$

$$=\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left(-2q\frac{x_2x_3}{a}e_1-q\frac{a^2-x_2^2}{a^2}x_3e_2\right.$$

$$\left.+q\frac{3a^2-x_2^2}{a^2}x_2e_3\right)dx_2dx_3,$$

这里基 e 取为在 $\mathbf{E}^+$ 上定义。求出上面的积分，便得到合力和合力矩分别为 $-\frac{8}{3}qahe_1$ 和 $\boldsymbol{O}$。类似的计算表明，表面 $x_1=-a$、$x_2=a$ 及 $x_2=-a$ 上的合力依次为 $\frac{8}{3}qahe_1$、$-\frac{8}{3}qahe_2$ 及 $\frac{8}{3}qahe_2$，而这些面上相对于 o 的合力矩都为零。

图3-1中的曲面 S 上一面积为 da 的曲面元在它的内侧和外侧分别承受着接触力 $\boldsymbol{t}_{(n)}da$ 和 $\boldsymbol{t}_{(-n)}da=-\boldsymbol{t}_{(n)}da$，如图3-4所示。应力矢量的法向分量

$$\sigma_n=\boldsymbol{t}_n\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}\cdot(\sigma\boldsymbol{n}),\qquad(17)$$

称为**正应力**，如果为正就说它是**拉伸**的，如果为负就说它是**压缩**的。

应力矢量沿 S 切向的分量具有模

$$\tau_{(n)}=|\boldsymbol{t}_{(n)}-(\boldsymbol{t}_{(n)}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}|=(|\boldsymbol{t}_{(n)}|^2-\sigma_n^2)^{\frac{1}{2}},\qquad(18)$$

并通常称为**剪应力**。如果在某构形中，剪应力恒为零且法应力不依赖于 $\boldsymbol{n}$，就称应力是**球形的**(3)。在这种情况下，存在一标量场 p，

(3) 这里不用“静水压力”这一广泛使用的名词，因为它有其特殊的含义。

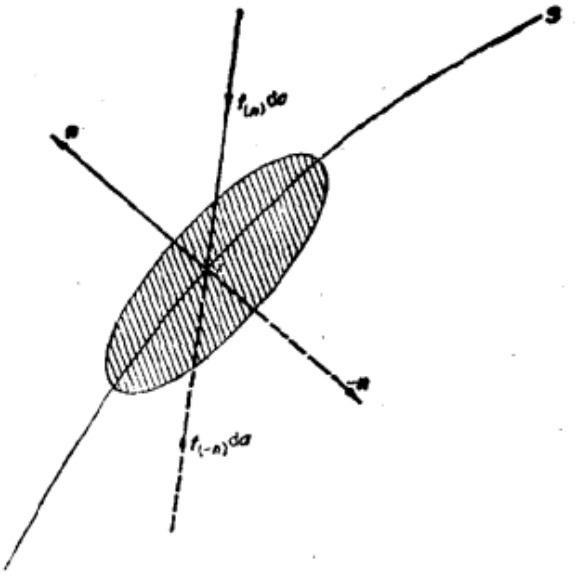


图 3-4 作用在一曲面元的两面上值相等方向相反的接触力

称作**压力**，使得

$$t_n = -pn \quad 及 \quad \sigma = -pI. \tag{19}$$

例 6 令 x 为 B_t 中一代表性点，$e = \{e_1, e_2, e_3\}$ 为一标准正交基，S_1、S_2、S_3 为通过 x 并以基矢为其外单位法矢量的面元。证明：S_1、S_2 及 S_3 上 x 点处的正应力之和以及应力矢量模的平方之和均不依赖于基的选取。

解 所需的和可由式(17)和(15)求得：

$$\sigma(e_1) + \sigma(e_2) + \sigma(e_3) = e_i \cdot (\sigma e_i) = \sigma_{ii} = \mathrm{tr}\sigma,$$

$$|t_{(e_1)}|^2 + |t_{(e_2)}|^2 + |t_{(e_3)}|^2 = t_{(e_i)} \cdot t_{(e_i)}$$

$$= (\sigma^{\mathrm{T}} e_i) \cdot (\sigma^{\mathrm{T}} e_i) = e_i \cdot (\sigma\sigma^{\mathrm{T}} e_i) = \mathrm{tr}(\sigma\sigma^{\mathrm{T}})$$

在这两个和式中，我们看到基的选取是无关紧要的。

当有必要将它与其它应力张量区分开来时，σ 就称为**柯西应力**(*)，另外一种既有实用又有理论意义的应力度量为**名义应力**(**)

(*)译者注：柯西应力也称真应力，是与下面引出的名义应力相对而言。

(**)译者注：也称为拉格朗日应力。它等于下面引出的第一种朴拉-基尔霍夫应力 π 的转置。

$\boldsymbol{s}$，其定义为

$$\boldsymbol{s}=J\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma},\quad \boldsymbol{\sigma}=J^{-1}\boldsymbol{F}\boldsymbol{s}。\tag{20}$$

由于变形梯度的出现，名义应力还牵涉到一个参照构形B_r，而柯西应力却只与物质体的即时构形有关。$\boldsymbol{s}$相对于参照直角坐标系(O, E)和空间直角坐标系(o, e)的分量形式为

$$\boldsymbol{s}=S_{\alpha i}\boldsymbol{E}_\alpha\otimes\boldsymbol{e}_i,\quad 这里 S_{\alpha i}=JF^{-1}_{\alpha p}\sigma_{pi}。$$

名义应力可以通过考虑这样一个物质曲面元来解释，该面元在B_t和B_r中的面积和外单位法矢量分别为$\mathrm{d}a$、$\boldsymbol{n}$和$\mathrm{d}A$、$\boldsymbol{N}$(参见图2-3)。作用在B_t中该面元上的接触力为$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}\mathrm{d}a$，且由式$(20)_2$及运动学公式(2.21)，可得

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}\mathrm{d}a=(J^{-1}\boldsymbol{F}\boldsymbol{s})^{\mathrm{T}}\{J(\boldsymbol{F}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\mathrm{d}A\}=\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\mathrm{d}A\tag{21}$$

因此，名义应力确定B_r中垂直于某方向的表面上每单位面积的接触力在B_t(*)中的表示。在B_t中的某代表性点x处（如图2-3所示），相对于坐标系(O, E)和(o, e)，$S_{\alpha i}=(\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_\alpha)\cdot\boldsymbol{e}_i$就表示在构形$B_r$中（点$X$处）垂直于$\alpha$-方向的物质曲面上每单位面积的接触力在$i$-方向上的分量。

还有两个有时用到的应力度量为朴拉-基尔霍夫应力张量。**第一朴拉-基尔霍夫应力张量**为$\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}$，它就是名义应力的转置。**第二朴拉-基尔霍夫应力张量**$\boldsymbol{t}$定义为(**)

$$\boldsymbol{t}=J\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{F}^{-1})^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\sigma}=J^{-1}\boldsymbol{F}\boldsymbol{t}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\tag{22}$$

遗憾的是，$\boldsymbol{t}$不象柯西应力张量和名义应力张量那样可以用作用在一表面元上的接触力来直接加以解释。

第四节　运动方程

回到式$(13)_1$和(14)并利用式(15)，我们有

(*)译者注：注意，这里的B_t只应理解为“变形后的”，$\boldsymbol{s}$或是接触力$\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}$都是对应于$B_r$定义的。

(**)译者注：$\boldsymbol{t}$也单称为基尔霍夫应力，在固体力学中它与柯西应力有同样程度的应用。其意义将在第五节中阐明。

$$\int_{R_t}\rho(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\mathrm{d}v=\int_{\partial R_t}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}\mathrm{d}a,$$

$$\int_{R_t}\rho\{\boldsymbol{x}\otimes(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\otimes\boldsymbol{x}\}\mathrm{d}v$$

$$=\int_{\partial R_t}\{\boldsymbol{x}\otimes(\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n})-(\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n})\otimes\boldsymbol{x}\}\mathrm{d}a$$

假定应力张量 σ关于它所依赖的位置和时间变量连续可微。将物质区域R_t取成为规则的，我们便用(1.96)和(1.95)中的散度定理将上面的方程式的右边转换为体积分，从而得到

$$\int_{R_t}\{\rho(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}\}\mathrm{d}v=\boldsymbol{0},$$

$$\int_{R_t}\{\boldsymbol{x}\otimes\{\rho(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}\}$$

$$-\{\rho(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}\}\otimes\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\sigma}\}\mathrm{d}v=\boldsymbol{0}$$

因为我们已假设运动、密度、应力和体力是光滑的，所以上面的方程式中的被积函数在即时构形B_t中是连续的。此外，上面的积分区域为B_t中的任意规则子区域。因此，由例1.19，被积函数必为零，这样我们就得到**柯西运动方程**

$$\rho\boldsymbol{a}=\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}+\rho\boldsymbol{b}, \tag{23}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\sigma} \tag{24}$$

偏微分方程式(23)习惯地称为**运动方程**。可以看成为角动量守恒局部表示式的纯代数对称条件(24)意味着σ有三个特征值σ_1、σ_2、σ_3；我们称为**主应力**，相应的标准正交特征矢量组就确定**应力主轴**。

式(23)用的是空间描述。借助于公式$(2.19)_2$，我们可以很容易地将它转换成参照描述。由此公式及式(6)和$(20)_2$，得

$$\mathrm{Div}\boldsymbol{s}=J\mathrm{div}(\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{F}\boldsymbol{s})=(\rho_r/\rho)\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}$$

从而，再利用式$(2.12)_4$，便得到运动方程的参照形式

$$\rho_r \ddot{\boldsymbol{x}} = \mathrm{Div}\boldsymbol{s} + \rho_r \boldsymbol{b}$$

由定义式(22)$_1$我们看到，式(24)保证了第二朴拉-基尔霍夫应力$\boldsymbol{t}$的对称性。但正如式(20)$_1$所表明的那样，名义应力$\boldsymbol{s}$一般是不对称的。因此，式(24)的两种参照形式为

$$\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{s} \qquad 及 \qquad \boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{t}$$

例7　不可压缩理想流体：是其应力必为球形的这样一种具有均匀密度的不可压缩材料。由这种流体所组成的物质体经历着例2.8中所考虑过的运动。假定无体力作用，试写出运动方程。推证：在时刻t时的洞穴半径满足微分方程式

$$\rho\left(a\ddot{a} + \frac{3}{2}\dot{a}^2\right) = P - p_0 \qquad (A)$$

式中，ρ为流体密度，p_0为爆炸以前流体中的均匀压力，P为炸药施加在洞穴表面上的压力。如果给定P与洞穴体积的平方成反比，试将$\dot{a}^2$用a来表示，并讨论该运动的一般特征。

解　当应力是球形时，式(19)$_2$成立，从而运动方程(23)简化为

$$\rho\boldsymbol{a} = -\mathrm{grad}p + \rho\boldsymbol{b} \qquad (25)$$

对所考虑的球对称运动，$\boldsymbol{b}=0$且

$$\boldsymbol{a} = \{(a^2\ddot{a} + 2a\dot{a}^2)r^{-2} - 2a^4\dot{a}^2r^{-5}\}\hat{\boldsymbol{r}},$$

式中，$r = |\boldsymbol{x}|$，$\hat{\boldsymbol{r}} = r^{-1}\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}$为一代表性点相对于洞穴中心的位置矢量。由(25)知压力p仅为r和t的函数，且

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\rho\{(a^2\ddot{a} + 2a\dot{a}^2)r^{-2} - 2a^4\dot{a}^2r^{-5}\}$$

积分该式便得到

$$p = p_0 + \rho\{(a^2\ddot{a} + 2a\dot{a}^2)r^{-1} - \frac{1}{2}a^4\dot{a}^2r^{-4}\}, \qquad (B)$$

这里我们用到了当$r\to\infty$时$p\to p_0$这一条件（因为当离洞穴的距离趋于无穷时，由爆炸所引起的压力变化应趋于零）。在洞穴的表面上$r=a$，$p=P$。将此条件代入(B)，便得到式(A)。

为了积分（A），我们先利用 $\ddot{a}=\frac{1}{2}\mathrm{d}\dot{a}^2/\mathrm{d}a$ 将自变量由 t 变为 a：

$$a\frac{\mathrm{d}\dot{a}^2}{\mathrm{d}a}+3\dot{a}^2=2\rho^{-1}(P-p_0)$$

然后在两边同乘以积分因子 a^2，便有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}(a^3\dot{a}^2)=2\rho^{-1}(P-p_0)a^2。$$

当 $t=t_0$ 时，洞穴半径为 A 且 $\dot{a}=0$（因为初始时该物体处于静止。）因此有

$$a^3\dot{a}^2=2\rho^{-1}\int_A^a(P-p_0)a^2\mathrm{d}a \qquad (C)$$

题中所给出的 P 与洞穴体积之间的关系可简便地表为 $P=P_0(a/A)^{-3}$，这里 P_0 为 $t=0$ 时所施加的压力。于是（C）中的积分便可求出，从而得到

$$\dot{a}^2=(2P_0/3\rho)\{1-(a/A)^{-3}\}\{(a/A)^{-3}-(p_0/P_0)\}$$

要 $\dot{a}$ 为实的，则应有 $1\leqslant a/A\leqslant P_0/p_0)^{\frac{1}{3}}$ 或 $(P_0/p_0)^{\frac{1}{3}}\leqslant a/A\leqslant 1$。但后种可能性所对应的不是爆炸，而是爆聚，因为若要使流体向外运动，则施加在洞穴表面上的最大压力 P_0 应超过周围流体中的初始压力 p_0。因此洞穴半径在极限 A 与 $(P_0/p_0)^{\frac{1}{3}}A$ 之间变化。在任一给定时刻，速度处处同时指向或背离 o。从这种意义上说各质点的运动是一致的，因此该物体作为一个整体在作稳定振动。读者可以验证，该运动的周期为(*)

$$(2\rho A^2/3P_0)^{1/2}\int_{p_0/P_0}^1\{(1-\xi)(\xi-p_0/P_0)\}^{-1/2}\xi^{-4/3}\mathrm{d}\xi$$

例 8 确定并用主应力和应力主轴来表示一给定点 x 处的正应力

(*)译者注：周期 T 即是从膨胀开始至膨胀终止时间的2倍。在此期间，因为 $\dot{a}\geqslant 0$，在上面 $\dot{a}^2$ 的式中令 $\xi=\left(\frac{a}{A}\right)^{-3}$，则有

$$\mathrm{d}t=(3\rho/2P_0)^{\frac{1}{2}}\{(1-\xi)(\xi-\frac{p_0}{P_0})\}^{\frac{1}{2}}(-\frac{A}{3}\xi^{-\frac{1}{3}})\mathrm{d}\xi \qquad (D)$$

参照上面 $\frac{a}{A}$ 的变化范围，对（D）式由 1 到 $\frac{P_0}{p_0}$ 积分再加倍，即得周期 T。

$\sigma_{(n)}$和剪应力值$\tau_{(n)}$随单位法矢量n变化的极值特征。

解 设基矢沿点x处应力主轴方向的标准正交基为$\{e_1, e_2, e_3\}$。令σ_i为点x处的主应力，n_i为单位法矢量n相对于该基的分量。那么点x处的应力张量和应力矢量具有表示式

$$\sigma=\sum_{r=1}^{3}\sigma_r e_r\otimes e_r,\qquad \vec{t}_{(n)}=\sum_{r=1}^{3}\sigma_r n_r e_r,$$

从而由式$(17)_2$和$(18)_2$得到以下关于正应力和剪应力值的表示式：

$$\sigma_{(n)}=\sigma_1 n_1^2+\sigma_2 n_2^2+\sigma_3 n_3^2, \tag{A}$$

$$\tau_{(n)}=\{\sigma_1^2 n_1^2+\sigma_2^2 n_2^2+\sigma_3^2 n_3^2-(\sigma_1 n_1^2+\sigma_2 n_2^2+\sigma_3 n_3^2)^2\}^{1/2} \tag{B}$$

$$=\{(\sigma_2-\sigma_3)^2 n_2^2 n_3^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2 n_3^2 n_1^2+(\sigma_1-\sigma_2)^2 n_1^2 n_2^2\}^{1/2} \tag{C}$$

(a)先假定各主应力都互不相同，由于n_i的值须满足约束条件$n_1^2+n_2^2+n_3^2=1$，故$\sigma_{(n)}$和$\tau_{(n)}$的极值应通过解方程

$$\frac{\partial}{\partial n_i}\{\tau_{(n)}-\mu(n_1^2+n_2^2+n_3^2-1)\}=0$$

及

$$\frac{\partial}{\partial n_i}\{\tau_{(n)}-\nu(n_1^2+n_2^2+n_3^2-1)\}=0$$

来求得，式中μ和ν为拉格朗日乘子。将式（A）和（B）代入并求出各偏导数，便得到关系式

$$(\sigma_1-\mu)n_1=0,\ (\sigma_2-\mu)n_2=0,\ (\sigma_3-\mu)n_3=0, \tag{D}$$

及

$$\left.\begin{aligned}&(\sigma_1^2-2\sigma_1\sigma_{(n)}-2\nu\tau_{(n)})n_1=0,\\&(\sigma_2^2-2\sigma_2\sigma_{(n)}-2\nu\tau_{(n)})n_2=0,\\&(\sigma_3^2-2\sigma_3\sigma_{(n)}-2\nu\tau_{(n)})n_3=0\end{aligned}\right\} \tag{E}$$

由(D)知n_i中必有两个为零。从而由(A)知正应力的极值就是

主应力值，且当$n=\pm e_i$时，即当n沿着相应的应力主轴方向时，$\sigma_{(n)}=\sigma_i$。

由(E)推知n_i中至少有一个为零，因为不然的话，二次方程$\sigma^2-2\sigma\sigma_{(n)}-2\nu\tau_{(n)}=0$就有三个根，即$\sigma_1$、$\sigma_2$及$\sigma_3$。若$n_1=0$，$n_2\neq 0$，$n_3\neq 0$，式(C)、(A)和(E)给出

$$\tau_{n}=|(\sigma_2-\sigma_3)n_2n_3|,\quad \sigma_{(n)}=\sigma_2n_2^2+\sigma_3n_3^2=\frac{1}{2}(\sigma_2+\sigma_3),$$

且因 $n_2^2+n_3^2=1$，有

$$n_1=0,\ n_2=\pm 1/\sqrt{2},\ n_3=\pm 1/\sqrt{2},\ \tau_{n}=\frac{1}{2}|\sigma_2-\sigma_3|$$

式(E)当n_2和n_3分别为零时相应的解为

$$n_1=\pm 1/\sqrt{2},\ n_2=0,\ n_3=\pm 1/\sqrt{2},\ \tau_{n}=\frac{1}{2}|\sigma_3-\sigma_1|,$$

$$n_1=\pm 1/\sqrt{2},\ n_2=\pm 1/\sqrt{2},\ n_3=0,\ \tau_{n}=\frac{1}{2}|\sigma_1-\sigma_2|.$$

在式(E)的其他解n_i中有两个为零，由(C)知相应的$\tau_{(n)}$值为零。因此，剪应力值的极值为主应力差值的一半及0。

(*b*)再考虑有两个主应力相等的情形，设$\sigma_1=\sigma_2\neq\sigma_3$，那么式(A)和(C)简化为

$$\sigma_{(n)}=\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3)-\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)\cos 2\theta,\quad \tau_{(n)}=\frac{1}{2}|(\sigma_3-\sigma_1)\sin 2\theta|,$$

式中$\theta=\arccos n_3$（$0\leqslant\theta\leqslant\pi$）是$n$与相应于$\sigma_3$的应力主轴间的夹角。$\sigma_{(n)}$和$\tau_{(n)}$的极值分别为$\sigma_1$，$\sigma_3$和$\frac{1}{2}|\sigma_1-\sigma_3|$，0，这与(*a*)中的结果相符。

(*c*)最后，若$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$，则点$x$处的应力是球形的。对所有$n$的方向，均有$\sigma_{(n)}=\sigma_1$，$\tau_{(n)}=0$。

由以上讨论我们得出以下结论：点x处的最大剪应力值等于最大和最小主应力差值的一半，相应的法线方向与中间主应力所对应

的主轴垂直，与其它主轴的夹角为$\frac{1}{4}\pi$或$\frac{3}{4}\pi$。

例9 设有一总是处于静止状态且具有规则构形B的物质体。试为该物体中的平均应力导出公式

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}=\frac{1}{2}V^{-1}\int_B\rho(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{x})\mathrm{d}v$$

$$+\frac{1}{2}V^{-1}\int_{\partial B}(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{t}_{(n)}+\boldsymbol{t}_{(n)}\otimes\boldsymbol{x})\mathrm{d}a, \qquad (\Lambda)$$

式中V为B的体积。

如果边界∂B由两个封闭曲面∂B_1和∂B_2组成，前者包含后者，且在∂B_1和∂B_2上分别作用有均匀压力p_1和p_2，证明当无体力时，

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}=-(V_1-V_2)^{-1}(p_1V_1-p_2V_2)\boldsymbol{I},$$

式中V_1和V_2分别为∂B_1和∂B_2所包含的体积。

解 对一个总是处于静止状态的物质体来说，加速度为零，运动方程(23)简化为**平衡方程**

$$\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}+\rho\boldsymbol{b}=0 \qquad (26)$$

因此对于给定的物体，我们有

$$\int_B\{\boldsymbol{x}\otimes(\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}+\rho\boldsymbol{b})+(\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}+\rho\boldsymbol{b})\otimes\boldsymbol{x}\}\mathrm{d}v=0 \qquad (\mathrm{B})$$

借助于式(1.95)中的散度定理，式(B)可转化为

$$\int_B\{\rho(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{x})-\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\}\mathrm{d}v$$

$$+\int_{\partial B}\{\boldsymbol{x}\otimes(\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n})+(\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n})\otimes\boldsymbol{x}\}\mathrm{d}a=0$$

利用式(15)和(24)，并注意B中的平均应力定义为

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}=V^{-1}\int_B\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}v, \qquad (\mathrm{C})$$

即可由上式得到要求的公式(Λ)。

[式(A)表明：处于平衡状态的物质体中的平均应力只依赖于体力和边界张力；求它时不需要知道有关体内应力状态的任何信息。读者也许已经注意到，若不要(B)中的第二个张量积，我们将得到看起来更为简单的结果

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}=V^{-1}\int_B \rho \boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{b}\,dv+V^{-1}\int_{\partial B}\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{t}_{(n)}da. \qquad (D)$$

但是与(A)和(C)不一样，$\overline{\boldsymbol{\sigma}}$的这个表达式不一定是对称的。导致此差异的原因是什么？(*)]

在图3-5所示的特殊情形中，$\boldsymbol{b}=0$，边界张力为在∂B_1上，$\boldsymbol{t}_{(n)}=-p_1\boldsymbol{n}_1$；在$\partial B_2$上，$\boldsymbol{t}_{(n)}=-p_2\boldsymbol{n}_2$。这里单位法矢量$\boldsymbol{n}_1$和$\boldsymbol{n}_2$的方向如图3-5所示。因此，由式(A)，得

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}=-\frac{1}{2}(V_1-V_2)^{-1}\Big(p_1\int_{\partial B_1}(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{n}_1\otimes\boldsymbol{x})da$$

$$+p_2\int_{\partial B_2}(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{n}_2+\boldsymbol{n}_2\otimes\boldsymbol{x})da\Big),$$

这里，B的体积为V_1-V_2。散度定理(1.97)给出等式

(*)译者注：推导(D)式时完全没有用到σ的对称性，也就是说，即使σ是非对称的，只要式(26)成立，也可导得(D)式。另一方面，(A)式却是在(C)式上面的式子中考虑了σ的对称性而得到的。这就仅靠(D)式不能保证σ的对称性，而(A)式却可以直接保证σ对称性的理由。实际上，如果对(D)式考虑σ的对称性，由(26)式即有，右侧=右侧的转置。或者由$(10)_2$和$(11)_2$式，静止状态的角动量守恒方程为

$$\int_{R_t}\rho(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{b})dv+\int_{\partial R_t}\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t}_{(n)}da=0$$

因而有

$$\int_{R_t}\rho(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{x})dv+\int_{\partial R_t}(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{t}_{(n)}-\boldsymbol{t}_{(n)}\otimes\boldsymbol{x})da=0$$

由此可知，由(D)式求出的$\overline{\sigma}$也是对称的。但是，由于在此种情况下角动量守恒方程与$\sigma^T=\sigma$等价，所以仍然与用到σ的对称性一样。

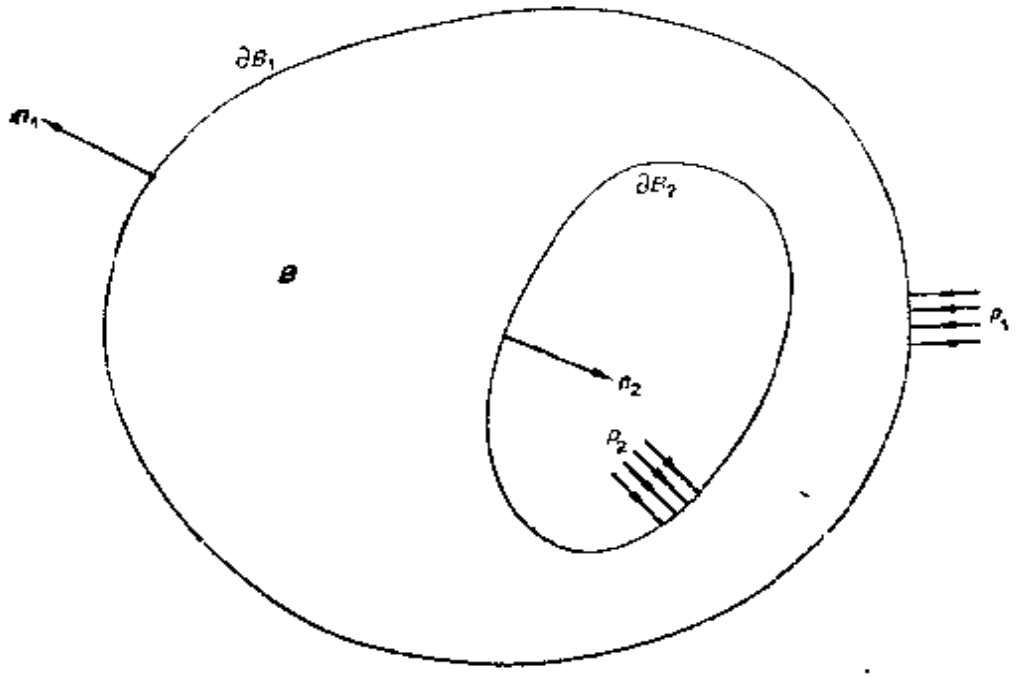


图 3-5 表面张力和外法线（例 9）

$$\int_{\partial B_1}(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{n}_1\otimes\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}a=\int_{B_1}\{\mathrm{grad}\boldsymbol{x}+(\mathrm{grad}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\}\mathrm{d}v$$

$$=2\boldsymbol{I}\int_{B_1}\mathrm{d}v=2V_1\boldsymbol{I},$$

类似地，

$$\int_{\partial B_2}(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{n}_2+\boldsymbol{n}_2\otimes\boldsymbol{x})\mathrm{d}a=-2V_2\boldsymbol{I},$$

这里符号与前一式相反，这是因为$\boldsymbol{n}_2$指向以∂B_2为边界的区域以内。这样便得到要证的结果。

第五节 能 量

占据R_t的物质的**动能**$\mathrm{K}(R_t)$定义为

$$K(R_t)=\int_{R_t}\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}v, \tag{27}$$

作用在该物质体上的力的机械功率$P(R_t)$定义为

$$P(R_t)=\int_{R_t}\rho \boldsymbol{b}\cdot \boldsymbol{v}\mathrm{d}v+\int_{\partial R_t}\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{n}}\cdot \boldsymbol{v}\mathrm{d}a \tag{28}$$

这里所用到的符号与第一、二节中的相同，我们仍假定所考虑的物质是非极的，且不受体力矩的作用。对即时占据R_t的这团代表性物质来说，能量守恒定律认为其能量含量的变化率等于输给R_t的体积元和输进∂R_t的表面元能量速率的积分和。动能的变化率和机械功率出现在该方程的两边，但它们不是能量守恒定律的全部构成，首先因为一可变形的物体所具有的能量不仅仅是由运动产生的，其次因为机械功和热的相互可转换性尚未考虑进去，这是能量转换的一个基本物理定律。因此我们假定对运动物质体中的每一个构形$\{B_t\}$中的任意物质区域R_t都相应地存在有两个标量$U(R_t)$和$H(R_t)$，分别称为占据R_t的物质的**内能含量**和**热接受量**，满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{K(R_t)+U(R_t)\}=P(R_t)+H(R_t) \tag{29}$$

这就是**能量守恒方程**，其中的函数组U和H分别代表物质所具有的除动能之外的能量和物质由于和外界非机械地相互作用所得到的能量的速率。我们假定内能U具有在第一节中赋给质量函数的性质(i)和(ii)。这些条件就保证了存在一标量场ε，满足

$$U(R_t)=\int_{R_t}\rho\varepsilon\mathrm{d}v, \tag{30}$$

ε称为物质（每单位质量）的**内能**。此外，类似于式(10)中的作法，我们认为热接受量可以表为以下形式：

$$H(R_t)=\int_{R_t}\rho r\mathrm{d}v+\int_{\partial R_t}h_{(\boldsymbol{n})}\mathrm{d}a \tag{31}$$

标量场r代表热量输送给单位质量物质的速率，称为**热供给**。一分布型辐射性热源所引起的热量传送就是这样一个例子。**热流量**$h_{(\boldsymbol{n})}$所度量的是热量通过边界∂R_t传给占据R_t的物质时每单位面积上传

递热量的速率。标量ε、r和$h_{(n)}$的定义域分别与ρ、$\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{t}_{(n)}$的一样，我们假定它们与其对应量也具有相同的以前所列出的光滑性质(4)。

将式(27)、(28)、(30)和(31)代入(29)，便得到以下积分形式的能量守恒方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{R_t}\rho\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}+\varepsilon\right)\mathrm{d}v=\int_{R_t}\rho(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}+r)\,\mathrm{d}v$$

$$+\int_{\partial R_t}(\boldsymbol{t}_{(n)}\cdot\boldsymbol{v}+h_{(n)})\,\mathrm{d}a \tag{32}$$

例10 推导出以下的机械和热能守恒方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K(R_t)+S(R_t)=P(R_t),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(R_t)-S(R_t)=H(R_t), \tag{33}$$

式中

$$S(R_t)=\int_{R_t}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{D})\,\mathrm{d}v. \tag{34}$$

解 只要证得(33)式中的任何一个便可由总能量守恒方程(29)得到另外一个。因此只要推导出$(33)_1$就行了。这可分两步来实现：首先作运动方程(23)中各项与速度的标量积，然后沿一任意规则物质区域逐项积分所得到的方程。第一步给出

$$\rho\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}=(\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma})\cdot\boldsymbol{v}+\rho\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}$$

该式借助于式$(2.12)_2$及习题1.19(ii)可重新写为

$$\rho\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right)^{\cdot}+\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{L})=\mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{v})+\rho\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}$$

另外，利用定义(2.43)及练习1.11(ii)，我们还有

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{L})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{D})+\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{W})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{D})$$

(4) 见本章第一节和第二节中有关的黑体字。

http://www.lishidl.cn/printing.htm 2009-10-20

因此，按第二步积分便有

$$\int_{R_t}\rho\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right)^{\cdot}\mathrm{d}v+\int_{R_t}\mathrm{tr}(\sigma\boldsymbol{D})\mathrm{d}v$$

$$=\int_{R_t}\rho\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}v+\int_{R_t}\mathrm{div}(\sigma\boldsymbol{v})\mathrm{d}v \qquad (A)$$

将标量公式(4)用于(A)式左边的第一项，式(1.98)中的散度定理用于右边的第二项，我们即得到$(33)_1$。后一步的细节为

$$\int_{R_t}\mathrm{div}(\sigma\boldsymbol{v})\mathrm{d}v=\int_{\partial R_t}\boldsymbol{n}\cdot(\sigma\boldsymbol{v})\mathrm{d}a$$

$$=\int_{\partial R_t}\boldsymbol{v}\cdot(\sigma^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}a=\int_{\partial R_t}\boldsymbol{t}_{\cdot}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}a$$

标量场$\mathrm{tr}(\sigma\boldsymbol{D})$称为$B_t$中每单位体积的**应力功率**。将张量$\sigma$和$\boldsymbol{D}$参照到基矢沿伸长率主轴方向的标准正交基$\{\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{r}_3\}$，便得到表达式：

$$\mathrm{tr}(\sigma\boldsymbol{D})=\sum_{p=1}^{3}\{\boldsymbol{r}_p\cdot(\sigma\boldsymbol{r}_p)\}v_p=\sigma_{(r_t)}v_p$$

从此式我们可以看出，在点x处的应力功率就是x处各主伸长率v_p与垂直于伸长率主轴的面元上的正应力$\sigma_{(r_t)}$乘积的和。这一解释阐明了这样的意义：应力功率可以看成是应力因为体积元的伸长率而作功的功率。式(33)表明应力功率的积分S实际上把机械能和热能的守恒耦联在一起。占据R_t的物质的内能含量的变化率可以看成是具有一机械分量$S(R_t)$和一热分量$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(R_t)$—$S(R_t)$。但是，一般来说，$S(R_t)$不能表为一标量场沿$R_t$的积分的变化率。

我们顺便注意到，当应力是球形的时，应力功率由$-p\mathrm{tr}\boldsymbol{D}=-p\mathrm{div}\boldsymbol{v}$给出。因此，在一不可压缩理想流体中应力功率恒为零，从而机械能守恒和热能的守恒不耦联。这就意味着这种流体的运动和热状态互不影响。

例11 推导应力功率用名义应力$\boldsymbol{s}$和第二朴拉-基尔霍夫应力$\boldsymbol{t}$表示的表达式。

解 首先提醒读者注意迹算子的一般性质(1.31)和(1.53)。

(*a*)

$$\mathrm{tr}(\sigma \boldsymbol{D})=\mathrm{tr}(\sigma \boldsymbol{L})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}\sigma)=J^{-1}\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}\boldsymbol{F}\boldsymbol{s})=J^{-1}\mathrm{tr}(\dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{s})$$
$$=(\rho/\rho_r)\mathrm{tr}(\boldsymbol{s}\dot{\boldsymbol{F}}) \tag{35}$$

这里依次用到了式$(20)_2$，$(2.30)_1$和(6)。

(*b*)

$$\mathrm{tr}(\sigma \boldsymbol{D})=\mathrm{tr}(\sigma \boldsymbol{L})=\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}\sigma+\sigma \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}})$$

$$=\frac{1}{2}J^{-1}\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}\boldsymbol{F}\boldsymbol{t}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{F}\boldsymbol{t}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}})$$

$$=\frac{1}{2}J^{-1}\mathrm{tr}(\dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{t}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{F}\boldsymbol{t}\dot{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{T}})$$

$$=\frac{1}{2}J^{-1}\mathrm{tr}\{(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{F}}+\dot{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F})\boldsymbol{t}\}$$

$$=\frac{1}{2}J^{-1}\mathrm{tr}(\dot{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{t})=\frac{1}{2}(\rho/\rho_r)\mathrm{tr}(\boldsymbol{t}\,\dot{\boldsymbol{C}}),$$

以上各步由式$(22)_2$，$(2.30)_1$，$(2.24)_1$和(6)得到。

若将热能守恒方程$(33)_2$用到图3-2中B_t的一四面体子域，便知存在一**热通量矢量**$\boldsymbol{q}$，通过它热流量$h_{(\boldsymbol{n})}$对单位法矢量$\boldsymbol{n}$的依赖关系可表为

$$h_{\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}. \tag{36}$$

该结果在热流动分析中所处的地位与式(15)在应力分析中所处的地位相似。像应力张量那样，$\boldsymbol{q}$定义在构形$\{B_t\}$上。**我们假定它具有与第四节中赋给σ一样的光滑度**(5)。参照一空间直角坐标系

(5) 见本章第四节开始有关的黑体字。

$(o,\ e)$和B_t中一代表性点x，我们由式(36)知$q_i=\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{e}_i$就是$B_t$中在$x$点处外法线沿$i$-方向的表面上每单位面积内热能的**流入量**。

参照热通量$\boldsymbol{Q}$由

$$\boldsymbol{Q}=J\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{q},\qquad \boldsymbol{q}=J^{-1}\boldsymbol{F}\boldsymbol{Q},\tag{37}$$

所定义，与(21)对应的公式

$$\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}da=\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{N}dA,$$

可借助于式(2.21)得到。因此，相对于一参照直角坐标系$(O,\ E)$，$Q_\alpha=\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{E}_\alpha$就是通过$x$点且在构形$B_r$中的外法线沿$\alpha$-方向的物质表面上在参照构形$B_r$中每单位面积内热能的流入量。

将式(30)、(31)和(34)代入$(33)_2$，我们便可将热能守恒方程写成积分形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{R_t}\rho\varepsilon dv=\int_{R_t}\{\rho r+\mathrm{tr}(\sigma\boldsymbol{D})\}dv+\int_{\partial R_t}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}da,\tag{38}$$

这里还用到了式(36)。当借助于式(4)和散度定理(1.98)变换式(38)中的第一和最后一项后，我们有

$$\int_{R_t}\{\rho\dot{\varepsilon}-\mathrm{tr}(\sigma\boldsymbol{D})-\mathrm{div}\boldsymbol{q}-\rho r\}dv=0\ .$$

由在B_t中被积函数的连续性和规则物质区域R_t的任意性，我们便从此式最后得到**能量方程**(*)

$$\rho\dot{\varepsilon}=\mathrm{tr}(\sigma\boldsymbol{D})+\mathrm{div}\boldsymbol{q}+\rho r\tag{39}$$

这就是与守恒定律(32)相对应的场方程。它是用空间描述导出的，我们也可以借助于式$(2.19)_1$和(35)将它转换成参照描述。式$(2.91)_1$与$(37)_2$和(6)相结合给出

$$\mathrm{Div}\boldsymbol{Q}=J\mathrm{div}(J^{-1}\boldsymbol{F}\boldsymbol{Q})=(\rho_r/\rho)\mathrm{div}\boldsymbol{q},$$

因此，式(39)的参照形式就是

(*)译者注：式(39)为热力学第一定律的局部形式，而式$(33)_2$、式(38)为其整体形式。此外，机械能守恒的整体形式为(33)式或例10中的(A)式，其局部形式则为运动方程式(23)。本书中不引入熵的概念，因而也不介绍热力学第二和第三定律。

$$\rho_r \dot{e} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{s}\dot{\boldsymbol{F}}) + \mathrm{Div}\boldsymbol{Q} + \rho_r r.$$

例12 证明：对一既不受体力作用也无热供给的物质体来说，占据任一规则区域R_t的物质的总能量（即动能含量加内能含量）的变化率等于矢量$\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{\sigma v} - \boldsymbol{q}$穿过边界$\partial R_t$的总通量。

解 在给定的条件下，能量守恒方程(32)右边的体积分为零，且借助于式(15)和(36)，右边的面积分中的被积函数可以转换成

$$\boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}) + \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma v} + \boldsymbol{q}) = -\boldsymbol{jn}$$

从而式(32)简化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{R_t} \rho\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} + \varepsilon\right)\mathrm{d}v = -\int_{\partial R_t} \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}a$$

由此可清楚地看出$\boldsymbol{j}$具有题中所述的性质。

〔鉴于这一结果，$\boldsymbol{j}$通常称为**能量通量矢量**〕。

刻画不可压缩理想流体的特征已在例 7 中给出。**可压缩理想流体**是这样一种物质，在该物质中，应力必为球形的，热通量矢量恒为零。如果在该流体的某运动过程中压力和内能完全由其密度所确定，我们就称该运动是**正压的**。

例13 **完全气体**是这样一种可压缩理想流体，在该流体中当无热供给时运动必为正压的，且压力与ρ^{γ}成正比，这里$\gamma(>1)$是一常数(*)。证明：当$r = 0$时，完全气体的内能由下式给出：

$$\varepsilon = (\gamma - 1)^{-1}(p/\rho) + \text{常数}。 \tag{40}$$

解 当应力是球形的且热通量矢量和热供给为零时，能量方程(39)简化为：

$$\rho\dot{\varepsilon} + p\mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0.$$

在正压运动中，

$$\dot{\varepsilon} = (\mathrm{d}\varepsilon/\mathrm{d}\rho)\dot{\rho} = -\rho(\mathrm{d}\varepsilon/\mathrm{d}\rho)\mathrm{div}\boldsymbol{v},$$

这里用到了空间连续方程(3)。因此，对无热供给的完全气体来说，

(*)译者注：$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$，c_p为等压比热，c_v等容比热。

$$\{\rho^2(\mathrm{d}\varepsilon/\mathrm{d}\rho)-p\}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}=0\,. \qquad (A)$$

在该方程中，大括号中的各项只依赖于ρ。既然该结果对这种气体的所有运动都成立，那么我们就应有[6]$\rho^2(\mathrm{d}\varepsilon/\mathrm{d}\rho)=p$。在该微分方程中令$p=k\rho^{\gamma}$（$k$为常数），然后积分，就得到所需要的$e$的表达式。

第六节　跳跃条件

在推导方程(3)、(23)、(24)及(39)时，我们假定物质体$\widetilde{\boldsymbol{B}}$的运动和表示$\widetilde{\boldsymbol{B}}$中物质属性的场变量$\rho$、$\sigma$、$\varepsilon$及$\boldsymbol{q}$满足某些光滑性条件[7]。但也有一些具有很大的物理意义的问题，在这些问题中这些条件不能满足，尤其重要的是那些其中的场变量只在一个或多个面上不具备所需的光滑度的情形。我们下面就来讨论守恒定律(2)，(12)和(32)在这样的**奇异面**上应具有怎样的形式。

在$\widetilde{\boldsymbol{B}}$由(2.3)和(2.4)所表示的运动中，一个**$n$阶**($n\geqslant 1$)奇异面$\Sigma$是指这样一个可定向的光滑面，在该面上，函数$\Psi$和$\Psi$以及它们对位置和时间的1，2，…$n-1$阶导数都连续，但$n$阶导数几乎处处不连续。如果$\boldsymbol{n}$为$\Sigma$上的一单位法矢量场，则一场变量$\phi$在$\Sigma$上$\boldsymbol{n}$所指的那边所取的值与在另一边上所取的值的差就称为$\phi$在$\Sigma$上的**跳跃量**，并记为$[\phi]$。相对于物质在传播的奇异面有时候称为**波**，而术语**接触间断面**则用来形容物质奇异曲面。当Σ是一个波时，法矢量$\boldsymbol{n}$就取为沿着它传播的方向。

---

(6) 该论断的严密证明可以利用反证法来进行。假定存在一ρ值，比如说$\bar{\rho}$，使得$\rho^2(\mathrm{d}\varepsilon/\mathrm{d}\rho)-p\neq 0$，让我们来考虑由下式确定的运动：

$$\boldsymbol{x}=(\rho_r/\bar{\rho})^{\frac{1}{3}}\left\{1+\frac{1}{3}v(t-\bar{t})\right\}\boldsymbol{X},$$

式中v和$\bar{t}$为正常数。读者可以通过直接计算来验证，当$t=\bar{t}$时，ρ和$\mathrm{div}\,v$分别具有均匀值$\bar{\rho}$和v，这意味着(A)不能满足。因此没有任何ρ值使得上面的不等式成立。

(7) 参见第2.1节及本章第1节，第4节，第5节及例11中有关的黑体字。

http://www.lishidl.cn/printing.htm 2009-10-20

为了推导各守恒定律在奇异面所应满足的间断关系，我们必须首先将传输公式(2.37)和(2.40)推广到区域R_t与一奇异面（在它上面场变量ϕ和u不连续）相交的情形。习题2.8中给出的传输公式的另外一种形式是一个方便的出发点。我们注意到速度场v仅仅通过它在边界∂R_t上的法向分量出现在那些公式中。

在时刻t，令R_t^+、∂R_t^+和R_t^-及∂R_t^-分别代表R_t和∂R_t在奇异面Σ前面和后面的部分，如图3-6所示，并令$\Lambda=\Sigma\cap R_t$。一般说来，区域$N_t^\pm=R_t^\pm\cup\Lambda$相对于$\widetilde{B}$的运动来说不是物质的，但我们可以在这样一个假想的运动中将它们看成是物质区域：在该假设运动中，$N^\pm$的边界中$\partial R_t^\pm$部分上的质点速度为v，面公共部分Λ上的质点速度则为$V_n n$，这里V_n为Σ的传播速度。将标量传输方程分别用在N^+和N^-上就有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{N^+}\phi\mathrm{d}v=\int_{N^+}\frac{\partial\phi}{\partial t}\mathrm{d}v+\int_{\partial R_t^+}\phi v\cdot n\mathrm{d}a-\int_\Lambda\phi^+V_n\mathrm{d}a,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{N^-}\phi\mathrm{d}v=\int_{N^-}\frac{\partial\phi}{\partial t}\mathrm{d}v+\int_{\partial R_t^-}\phi v\cdot n\mathrm{d}a+\int_\Lambda\phi^-V_n\mathrm{d}a,$$

这里最后项中的上标＋和－分别表示在Σ的前边和后边取值，左边的变化率应理解为是相对于假想的运动。若将上两式相加，便得到以下所需的公式（2.37）的推广(8)：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{R_t}\phi\mathrm{d}v=\int_{R_t}\frac{\partial\phi}{\partial t}\mathrm{d}v+\int_{\partial R_t}\phi v\cdot n\mathrm{d}a-\int_\Lambda[\phi]V_n\mathrm{d}a,\tag{41}$$

而式(2.40)相应的修改后的表示式则为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{R_t}u\mathrm{d}v=\int_{R_t}\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}v+\int_{\partial R_t}u(v\cdot n)\mathrm{d}a-\int_\Lambda[u]V_n\mathrm{d}a.\tag{42}$$

（8） 当左边相加时，注意假想的和实际的运动在R_t（$=N^+\cup N^-$）的边界上是等同的。

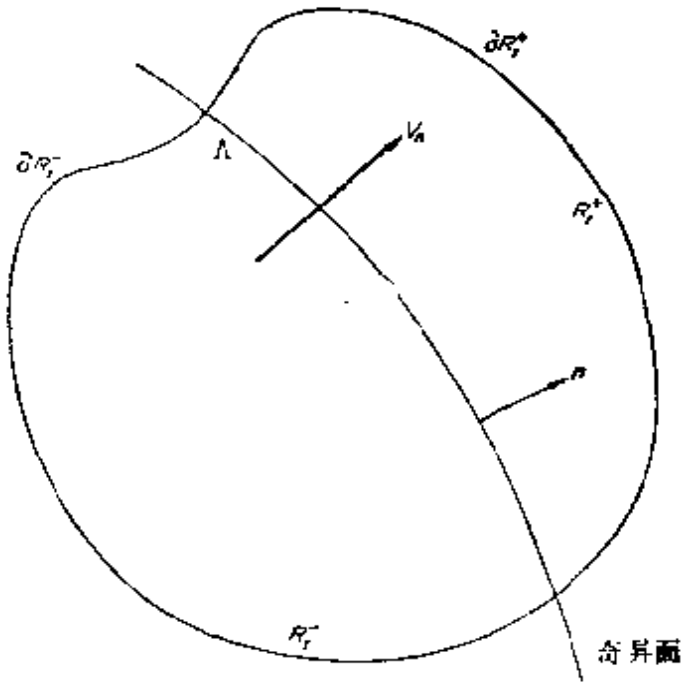


图 3-6 与一奇异面相交的物质区域

下面我们就把刚刚得到的结果用到守恒定律(2)、(12)和(32)。为简洁起见，我们先将这些定律写成通用形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{R_t}\rho\pi\,\mathrm{d}v=\int_{R_t}\rho s\,\mathrm{d}v+\int_{\partial R_t}f_{(n)}\,\mathrm{d}a, \tag{43}$$

这里的变量π、s(每单位质量π的供热量)和$f_{(n)}$(B_t中每单位面积上π的流入量)由下面的表确定。若与式(41)或式(42)相结合，式(43)便给出

$$\int_{R_t}\left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho\pi)-\rho s\right)\mathrm{d}v+\int_{\partial R_t}(\rho\pi v\cdot n-f_{(n)})\,\mathrm{d}a$$

$$-\int_{\Lambda}[\rho\pi]V_n\,\mathrm{d}a=0$$

然后，我们在上式中按以下方式令R_t的体积趋近于零，在此极限下，∂R_t收缩成图3-7所示的Λ的两面。如果我们假定ρ、π和s在Σ之外的其它点处仍具有以前(9)赋予它们的光滑性质，那么这样取

(9) 见第2.1节、本章第1节、第2节和第5节中有关的黑体字。

守恒定律	π	s	$f(s)$
质　　量	1	0	0
线 动 量	$\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{t}_{(n)}$
角 动 量	$\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t}_{(n)}$
能　　量	$\varepsilon+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}+r$	$\boldsymbol{t}_{(n)}\cdot\boldsymbol{v}+h_{(n)}$

极限的结果为(10)

$$\int_{\Delta}(([\rho\pi\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}-f_{(n)}]-[\rho\pi]V_n)\,da=0 \tag{44}$$

式(44)对Σ的任何部分都成立（任何部分都可以看成是B_t中规则区域与Σ的交面）。因此，只要被积函数在Σ上连续(11)，便得得通用的跳跃条件

$$[\rho V\pi+f_{(n)}]=0\,, \tag{45}$$

式中

$$V=V_n-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}, \tag{46}$$

称为Σ的**局部传播速度**，它是奇异面**相对于物质**的传播速度。将表中第二和第四列中的表示式代入式(45)，即得到**基本跳跃条件**

$$[\rho V]=0\,, \tag{47}$$

$$[\rho V\boldsymbol{v}+\boldsymbol{t}_{(n)}]=0, \tag{48}$$

$$[\rho V(\varepsilon+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})+\boldsymbol{t}_{(n)}\cdot\boldsymbol{v}+h_{(n)}]=0 \tag{49}$$

在非极材料的情形下，与角动量守恒相对应的跳跃条件由式(48)所隐含。

按前面给出的分类法，使速度不连续的奇异面是1阶的。如果在Σ上$[\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}]\neq 0$，则由式(46)知局部传播速度$V$不连续，从而由式(47)知$\Sigma$无论是相对于它前面的物质还是相对于它后面的物质都是运动的。因此一个一阶奇异面使得速度的法向分量发生跳跃时，

(10) 注意由式(15)及(36)，$f_{(-n)}=-f_{(n)}$。

(11) 我们再次参考例1.19的末尾括号中的附注。

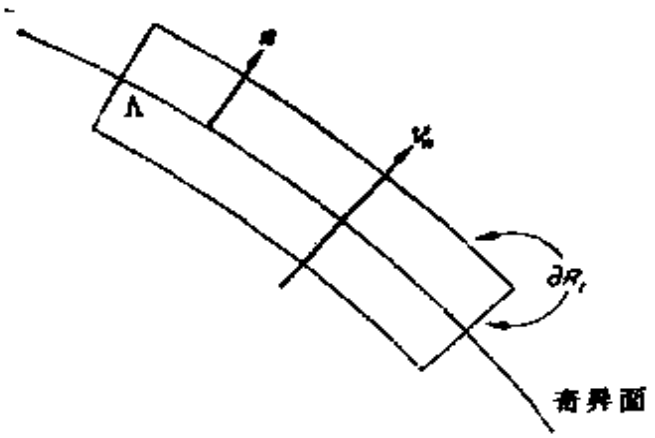


图 3-7 物质区域的表面收缩成奇异面的两面

我们就称它为**冲击波**。当Σ上的速度跳跃完全是切向时(即$[\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}]=0,[\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n}]\neq 0$)，我们就用**涡片**这个名词来形容它。在二阶奇异面上，速度和变形梯度是连续的。那么由式(46)和物质连续方程(6)即知跳跃条件(47)总能满足，而式(48)和(49)则简化为

$$[\boldsymbol{t}_{(n)}]=0,\quad \rho V[\varepsilon]+[h_{(n)}]=0。$$

传播的二阶奇异面通常称为**加速度波**。

例14 证明在一其应力为球形的材料中，涡片必为接触间断面。若材料是一可压缩理想流体，证明：在一传播奇异面上的基本跳跃条件可表为

$$[\rho V]=0,\quad [p+\rho V^2]=0,\quad \left[\varepsilon+p/\rho+\frac{1}{2}V^2\right]=0。\qquad (50)$$

解 在一涡片上，$[\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}]=0$，我们由式(46)、(47)和(48)推出跳跃关系式

$$[V]=0,\quad [\rho]=0,\quad [\boldsymbol{t}_{(n)}\cdot\boldsymbol{n}]=0,\quad [\boldsymbol{t}_{(n)}]+\rho V[\boldsymbol{v}]=0。\qquad (A)$$

当应力是球形的时，$\boldsymbol{t}_{(n)}$由式$(19)_1$给出，从而式(A)的最后两式简化为$[p]=0$，$\rho V[\boldsymbol{v}]=0$。因为$\rho>0$，且$[\boldsymbol{v}]\neq 0$，所以V必为零。因此，这样的涡片是物质面，从而也就是接触间断面。

在一可压缩理想流体中，热通量矢量及应力偏张量恒为零。利用式$(19)_1$、(36)和(47)，我们可以简化跳跃条件(48)和(49)，从

而得到

$$\rho^{\pm}V^{\pm}[v]-[p]n=0,\quad \rho^{\pm}V^{\pm}[\varepsilon+\frac{1}{2}v\cdot v]-[pv\cdot n]=0。\text{(B)}\ ^{(*)}$$

如果所考虑的奇异面是一个波，则V^+和V^-均不为零。从而由$(B)_1$知速度的跳跃完全是沿法向的，且有

$$[p]=\rho^{\pm}V^{\pm}[v\cdot n]=-\rho^{\pm}V^{\pm}[V],\qquad \text{(C)}$$

上面最后一步是由式(46)得到的。只要将式(C)的右边重新写为$-\rho^+(V^+)^2+\rho^-(V^-)^2$，我们便得到$(50)_2$。

为了证明$(50)_3$，我们先由式(46)得到

$$[v\cdot v]=[(v\cdot n)^2+|v\times n|^2]=[(v\cdot n)^2]=[V^2-2VV_n],\ ^{(**)}$$

然后依次利用式(46)、(47)和(C)，我们有

$$\begin{aligned}[pv\cdot n]&=p^+(V_n-V^+)-p^-(V_n-V^-)\\&=[p]V_n-(p^+/\rho^+)\rho^-V^-+(p^-/\rho^-)\rho^+V^+\\&=-\rho^{\pm}V^{\pm}[VV_n+p/\rho]\end{aligned}$$

将这两个结果代入式$(B)_2$并消去左边的非零因子$\rho^{\pm}V^{\pm}$，即得到所要证明的关系式$(50)_3$。

例15 一很长的汽缸中充有完全气体，并在一端由一平面刚性活塞封闭着。初始时气体处处静止，且处处具有密度ρ_0和压力p_0。如果将活塞以均速U向前推进，便会产生一冲击波。假定冲击波后面气体的速度是均匀的且平行于汽缸的母线，并假定不给气体提供任何热能，试确定冲击波的传播速度及气体密度和压力的分布。

解 在冲击波形成后，一代表性时刻的情形如图3-8所示。活塞表面上气体的速度应为U，因此冲击波后面受扰动气体的均匀速度即为$v^-=Un$。这里n是垂直于波面的并沿气缸母线方向的单位矢量，

(*)译者注：当(ρV)连续时，把$\rho^+V^+=\rho^-V^-$表为$\rho^{\pm}V^{\pm}$。以下用到关系式

$$V^+=\frac{1}{\rho^+}\rho^-V^-,\quad V^-=\frac{1}{\rho^-}\rho^+V^+。$$

(**)译者注，由式$(B)_1$，$(v^+-v^-)\times n=0$，因而$v^+\times n=v^-\times n$，$|v^+\times n|^2=|v^-\times n|^2$，所以$[|v\times n|^2]=0$

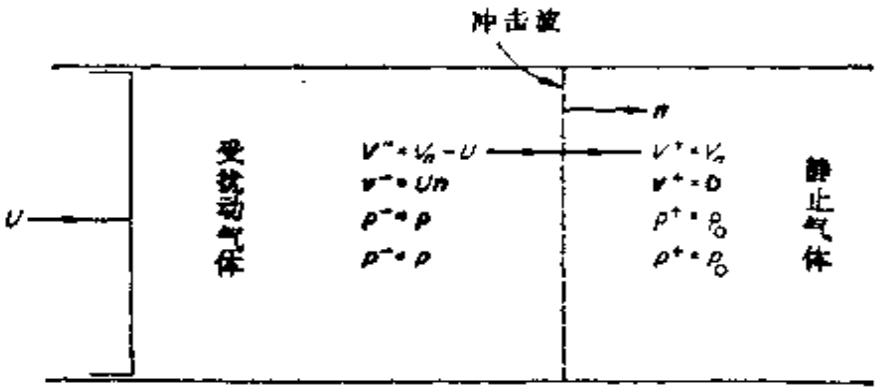


图 3-8　在一向前推进的活塞前面的均匀平面冲击波（例15）

如图3-8所示。既然所考虑的物质是没有热供给的完全气体，那么我们便可以用式(50)作为冲击波上的跳跃条件，其中的内能由式(40)给出。因此，利用式(46)，我们得到关系式

$$\rho(V_s-U)=\rho_0 V_s,\quad p_0-p=-\rho_0 V_s U, \tag{A}$$

$$\frac{1}{2}V_s^2+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}=\frac{1}{2}(V_s-U)^2+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}, \tag{B}$$

式中，ρ和p分别为冲击波后面气体的密度和压力的均匀值，V_s为局部传播速度，它也就是冲击波进入前面静止气体的速度。

如果令 $a=V_s/U$，$M_0=U/C_0$，这里 $C_0=(\gamma p_0/\rho_0)^{\frac{1}{2}}$，则式(A)给出表达式

$$\rho/\rho_0=1+(a-1)^{-1},\quad p/p_0=1+a\gamma M_0^2 \tag{C}$$

当V_s求出后，便可由此式计算ρ和p。将(C)代入(B)并加以简化后的结果为二次方程

$$2M_0^2a^2-(\gamma+1)M_0^2a-2=0$$

它仅有的正根为

$$a=\frac{1}{4}(\gamma+1)+\left\{\frac{1}{16}(\gamma+1)^2+M_0^{-2}\right\}^{1/2} \tag{D}$$

从而冲击波的传播速度为

$$V_s=\frac{1}{4}(\gamma+1)U+\left\{\frac{1}{16}(\gamma+1)^2U^2+C_0^2\right\}^{1/2},$$

而受扰动气体中的密度和压力则由(C)和(D)所确定。

〔上面结果中的某些细节还值得说明一下。正如可以期望的那样，V_s、ρ和p均随活塞速度U的增加而单调增加，但当$M_0\to\infty$时ρ/ρ_0却趋近于有限值$(\gamma+1)/(\gamma-1)$，这就表明一均匀平面冲击波通过一完全气体时，所产生的压缩有一上限。当$M_0\to 0$时，有$V_s\to C_0$、$\rho\to\rho_0$及$p\to p_0$。当$U\ll C_0$时，$[\rho]\ll\rho_0$，$[p]\ll p_0$。因此，在这种意义上说，冲击波比较弱。V_s所近似等于的速度C_0是不受扰动气体中的**声速**，因此，表示U与C_0之比的无量纲常数就称为活塞相对于气体初始状态的**马赫数**。最后，对那些已经注意到在本例中压力-密度关系$p=k\rho^\gamma$未被用到的读者，我们想指出的是，式中的比例因子k在冲击波的两边取值不一样。这与熵的跳跃有关，但我们不准备进一步讨论这个问题，因为连续介质热力学的详细论述不属于本书的范围。〕

习　题

1. 证明阿基米德定理：若一物质体在一均匀引力场的作用下永远静止在构形B中，则B中任一子区域R的表面∂R上的接触力的合力与占据R的物质的重量大小相等，方向相反。

2. 若点x处的应力矢量$\boldsymbol{t}_{(n)}$不依赖于$\boldsymbol{n}$地沿着某一固定方向，则称该点处的应力是**单向的**。设这个固定方向由单位矢量$\boldsymbol{q}$所定义，证明：

(i)x处的应力张量$\boldsymbol{\sigma}=\sigma\boldsymbol{q}\otimes\boldsymbol{q}$，这里$\sigma$是一标量；

(ii)通过x的任一表面元上的正应力当$\sigma>0$时为拉伸的，当$\sigma<0$时为压缩的；

(iii)x处的最大剪应力值为$\frac{1}{2}|\sigma|$。

提示：注意$\sigma=\boldsymbol{t}_{(q)}\cdot\boldsymbol{q}=\sigma_{(q)}$。

3. 某点x处的应力张量σ相对于一标准正交基e的分量为

$$\sigma_{ii}=\alpha,\ \sigma_{ij}=\beta(\neq 0)\qquad (i\neq j)$$

确定x处的主应力、应力主轴及最大剪应力值，并证明$-2\leqslant\alpha/\beta\leqslant 1$是$x$处存在一无正应力表面元的必要和充分条件。

答案：主应力$\sigma_1=\alpha+2\beta$，$\sigma_2=\sigma_3=\alpha-\beta$。

应力主轴

$$s_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(e_1+e_2+e_3),\quad s_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(e_1+e_2-2e_3),$$

$$s_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1-e_2)$$

最大剪应力的模为$\frac{3}{2}|\beta|$。

4. 设某点x处的应力张量相对于一标准正交基$\{e_1, e_2, e_3\}$具为分量σ_{ij}，且有一主轴与e_3平行。试证明：(i)σ_{33}是一主应力，且$\sigma_{31}=\sigma_{23}=0$；(ii)其它主应力$\sigma_1$和$\sigma_2$可由以下几何方法求出，相对于坐标轴$oxy$画出将坐标$(\sigma_{11}, \sigma_{12})$和$(\sigma_{22}, -\sigma_{12})$相联的线段$L$及以$L$为直径的圆$M$，$M$与$ox$两个交点的坐标即为$(\sigma_1, 0)$和$(\sigma_2, 0)$；(iii)如果$\sigma$和$\tau$为$x$点处法线与$e_3$正交的平面上的正应力和剪应力，则坐标$(\sigma, \tau)$必在$M$圆之上（$M$称为**莫尔圆**）。

5. 在一物质体的即时构形中，点x处其外法线与应力三主轴夹角相等的表面元上的剪应力值称为**八面体剪应力**，记为τ_{oct}。证明：

$$\tau_{oct}=\left(-\frac{2}{3}\mathrm{I}\,\sigma'\right)^{1/2}$$

$$=\frac{1}{3}\{(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2+(\sigma_1-\sigma_2)^2\}^{1/2},$$

式中，σ'为应力偏张量（见习题1.1），σ_1，σ_2，σ_3为x处的主应力值。

http://www.shengwukx.cn/printing.htm 2009-10-20

6. 若两对称张量的主轴重合（即如果它们具有相同的标准正交的特征矢量组），则称它们是**共轴的**。证明：当且仅当柯西应力$\boldsymbol{\sigma}$与左柯西-格林应变张量$\boldsymbol{B}$是共轴时，第二朴拉—基尔霍夫应力$\boldsymbol{t}$和右柯西-格林应变张量$\boldsymbol{C}$才共轴。

提示：注意当$\boldsymbol{\sigma}$和$\boldsymbol{B}$（或$\boldsymbol{t}$和$\boldsymbol{C}$）共轴时，主柯西和朴拉-基尔霍夫应力之间有关系式$\sigma_i=J^{-1}\lambda_i^2 t_i$成立。

7. 一物质体处于平衡状态，且相对于一具有空间坐标x_i的直角坐标系其应力$\boldsymbol{\sigma}$不随x_3变化。假设无体力作用，证明存在一矢量函数$\boldsymbol{\phi}$，使得

$$\sigma_{1i}=-\frac{\partial\phi_i}{\partial x_2},\qquad \sigma_{2i}=\frac{\partial\phi_i}{\partial x_1}$$

假设该物体的即时构形是一圆柱体，其母线与x_3-轴平行，其与任一平面$x_3=$常数的交面的边界是一圆周C。证明：C上的应力矢量为$-\partial\phi/\partial s$，这里s是C上的弧长，沿由x_1-轴到x_2-轴的方向量取。

8. 如果例2.8中所考虑的物质体中的应力主轴由单位矢量$\hat{\boldsymbol{r}}$，$\hat{\boldsymbol{\theta}},\hat{\boldsymbol{\phi}}$所定义，且相应的主应力$\sigma_r$，$\sigma_\theta$，$\sigma_\phi$仅为$r$和$t$的函数并满足关系式$\sigma_\theta=\sigma_\phi$，则称该物质体中的应力状态是**球对称**的。证明：

$$\boldsymbol{\sigma}=r^{-2}(\sigma_r-\sigma_\theta)\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x}+\sigma_\theta\boldsymbol{I},$$

并推证：当无体力存在时，运动方程简化为单个标量关系式

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial r}\right)=\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{2}{r}(\sigma_r-\sigma_\theta)$$

假定该物体由不可压缩材料所组成，在时刻t占据着区域$a(t)\leqslant r\leqslant b(t)$。不妨设物体的运动是因为内边界作用有均匀压力$P(t)$，外边界无外力作用而产生的。证明：

$$P=\rho\left(1-\frac{a}{b}\right)\left\{a\ddot{a}+\frac{1}{2}\dot{a}^2\left(1-\frac{a}{b}\right)\left(3+2\frac{a}{b}+\frac{a^2}{b^2}\right)\right\}$$
$$-2\int_a^b(\sigma_r-\sigma_\theta)\frac{dr}{r}.$$

http://www.shengwukx.cn/printing.htm 2009-10-20

9. 设有一物质体除受有体力$\boldsymbol{b}$和接触力$\boldsymbol{t}_{(n)}$作用外，还每单位质量受有体力矩$\boldsymbol{c}$，每单位面积受有接触力矩$\boldsymbol{u}_{(n)}$的作用。试先为该物体列出角动量守恒方程，然后利用“四面体方法”证明存在一**偶应力张量**μ满足$\boldsymbol{u}_{(n)}=\mu^{T}\boldsymbol{n}$，由此再进一步导出场方程及与守恒定律相应的跳跃条件。

提示与答案：可以用例题1.20，与运动方程(23)一起，将守恒定律写成以下形式

$$\int_{R_t}(\rho\boldsymbol{c}-\pi)\mathrm{d}v+\int_{\partial R_t}\boldsymbol{u}_{\cdot}\,\mathrm{d}a=0$$

式中π为$\sigma-\sigma^{T}$的轴矢量。

场方程为

$$\mathrm{div}\mu-\pi+\rho\boldsymbol{c}=0,$$

跳跃条件为$[\boldsymbol{u}_{(n)}]=0$。

10. 张量$\boldsymbol{J}$和$\boldsymbol{K}$由下式所定义：

$$\boldsymbol{J}=\int_{B_t}\rho\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x}\mathrm{d}v,\qquad \boldsymbol{K}=\int_{B_t}\rho\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}\mathrm{d}v,$$

式中的即时构形假定是规则的。试先推导出公式

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t^2}=2\boldsymbol{K}-2\int_{B_t}\sigma\mathrm{d}v+\int_{B_t}\rho(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{x})\mathrm{d}v$$

$$+\int_{\partial B_t}(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{t}_{\cdot}+\boldsymbol{t}_{\cdot}\otimes\boldsymbol{x})\mathrm{d}a,$$

然后通过考虑物体处于静止的这一特殊情形推导出例9中给出的平均应力公式(A)。

11. 若一体力可表示为一标量场（称为**体力势**）的梯度，便称该体力是**保守的**。

(i)证明**开尔文定理**：由不可压缩理想流体所组成的物质体在保守体力作用下的运动**总是保环量的**，由可压缩理想流体所组成的物质体在保守体力作用下的正压运动也是如此。

(ii)对一由不可压缩理想流体所组成的物质体在保守体力作用下的定常运动，证明其运动方程可转化成以下形式：

$$\mathrm{grad}(p/\rho+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}-\chi)=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v},$$

式中$\boldsymbol{\omega}$为涡度，χ为体力势。推证$p/\rho+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}-\chi$在流线上为常数〔定常运动的**伯努利方程**〕。

12. 证明：在一物质体的刚性运动中，占据区域R_t的物质的动能为

$$K(R_t)=\frac{1}{2}m(R_t)\,\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\overline{\boldsymbol{v}}+\frac{1}{2}\boldsymbol{w}\cdot\{\overline{\boldsymbol{J}}(R_t)\boldsymbol{w}\},$$

式中的符号与例3中的相同。

13. 证明：在一物质体$\widetilde{\boldsymbol{B}}$的等容运动中，占据任一规则区域$R_t$的物质的动能可以表示为以下形式：

$$K(R_t)=\int_{R_t}\rho[\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{v}]\mathrm{d}v$$

$$+\int_{\partial R_t}\rho\left\{\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}\right\}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a$$

推证：如果运动还是无旋的，该物体总是占据着$\overline{\mathbf{E}}$中的同一区域且在该区域的边界上$\boldsymbol{v}=0$，则$\widetilde{\boldsymbol{B}}$必处于静止状态。

14. 由基本跳跃条件(47)至(49)推导出以下结果：

(i)$V^+V^-[\rho]=-[\boldsymbol{t}_{(n)}\cdot\boldsymbol{n}]$。〔兰金—许贡纽关系〕

(ii)在接触间断面上，$[\boldsymbol{t}_{(n)}]=0$，$[\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}]=0$，如果应力还是球形的，则$[h_{(n)}]=0$。

(iii)在加速度波上，$[\rho]=0$，$[\boldsymbol{t}_{(n)}]=0$，

$\rho V[\varepsilon]+[h_{(n)}]=0$。

(iv)在等容过程中，冲击波不可能存在。

15. 由基本跳跃条件(47)至(49)导出关系式

$$(\rho V)^+\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}-\varepsilon\right]=[\rho V\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}]^+\cdot[\boldsymbol{v}]+[\boldsymbol{q}]\cdot\boldsymbol{n}.$$

证明：在非导热物体中（即$q=0$），朝着一静止，无应力区域传播的冲击波上每单位质量动能和内能的跳跃相等。

第四章　本构方程

如第三章所建立的那样，除了预先假定材料不能承受接触力矩外，连续介质力学的守恒定律并不涉及物体的其它构造性质。因此，若要确定一特定物体的力学和热力学特性，还要将目前我们已有的理论框架加以扩充，并且就是到这个阶段，本学科的几个主要分支，如粘性流理论和弹性理论，才开始从前两章中所建立的基础中分离出来。特定物质的刻划是通过本构方程（或称状态方程）的建立来纳入连续介质力学的大框架的。从数学上说，这些关系式旨在补充运动学、力学和热力学场之间的联系。它们与各场方程是相容的，并且与之结合后所给出的理论能够为正确建立起来的问题给出解答。从物理上说，本构方程是描述作为实际物质性能模型的理想化材料响应的各种不同形式。将这些模型所预测的值与在某些范围的物理条件下所得到的实验值加以比较，便可检验上面提到的各种特殊连续介质理论是否正确。在本章前六节中，我们论述在建立本构方程时所用到的一些通用概念和步骤，并以三个常见的理想化力学响应的例子：理想流动性、粘性和弹性作为示范。在第七、八节中，我们通过几个例子来专门讨论不可压缩粘性牛顿流体和各向同性弹性材料的性能。

第一节　基本本构假设

相对于$\mathbf{E}$中的一任意基，场方程(3.3)、(3.23)、(3.24)和(3.39)给出17个标量场之间的8个标量关系式。这17个场为：ρ、ε及$\boldsymbol{v}$、σ和$\boldsymbol{q}$的分量，体力$\boldsymbol{b}$和热供给r看作是已知的。因此一般来说，场方程本身不能确定物质的行为。这没有什么奇怪的，因为我

们都知道将给定的力和热供给作用到不同的物体上会产生不同的效果。

假定一物质体$\tilde{\mathcal{B}}$的运动是由式(2.3)和(2.4)所描述的，且在某参照构形中的密度也被给定，还假定我们给提供了计算应力$\mathbf{T}$，内能ε和热通量$\mathbf{q}$的公式，前者为对称张量函数。那么速度和密度便可由式(2.12)$_1$和(3.6)得出，由此我们可进一步计算出现在方程式(3.23)和(3.39)中的项$\rho\mathbf{a}$、$\operatorname{div}\mathbf{T}$、$\rho\dot{\varepsilon}$、$\operatorname{tr}(\mathbf{TD})$及$\operatorname{div}\mathbf{q}$。空间连续方程(3.3)和对称条件(3.24)被满足。只要适当地选取体力$\mathbf{b}$和热供给r，我们也能保证运动方程和能量方程得以满足。这一推理就启发我们，补充另外9个关系式的自然途径是指定$\mathbf{T}$、ε和$\mathbf{q}$。这些补充关系式应当与已有的8个场方程相结合，以便得到一个完整的控制方程组。但是如果指定$\mathbf{T}$、ε和$\mathbf{q}$只需要知道$\tilde{\mathcal{B}}$的运动，则8个场方程最终会给出只关于**4个**标量场（ρ及$\boldsymbol{v}$的分量）的**5个**标量关系式。这就引出一个同样可以预料的论断。这就是：一般来说，$\mathbf{T}$、ε和$\mathbf{q}$不完全是由$\tilde{\mathcal{B}}$的运动所决定的，它们还依赖于一个不作为独立变量出现在场方程中的标量场。既然ε和$\mathbf{q}$直接与物体的热状态有关，那么可以料想，这个附加的标量场是度量材料的热含量或者热度的。

有了这样一个启发的，我们就将**温度**θ引进为定义在$\tilde{\mathcal{B}}$的构形之上的标量场，并提出以下**基本本构假设：在时刻t由$\tilde{\mathcal{B}}$中一任意质点所占据的点x处的应力、内能和热通量完全由$\tilde{\mathcal{B}}$的运动及$\tilde{\mathcal{B}}$的构形上的温度所唯一确定（并满足(3.24)）**。隐含在这个假设中的10个标量方程组，连同由场方程所提供的8个标量关系式，将18个标量场，即ρ、ε、θ及$\boldsymbol{v}$、$\mathbf{T}$和$\mathbf{q}$的分量，联系起来。附加的方程实际上是限定$\tilde{\mathcal{B}}$对给定外力和热供给的响应，因此它们确定$\tilde{\mathcal{B}}$的组成物质的构造，故称为**本构方程**。

基本本构假设可以以许多方式转变为数学形式，为此制定有某些许可本构方程所应满足的规则。它们中最重要的是决定性原理、

局部作用原理和客观性原理(1)。

决定性原理指出：在时刻t点x处$\boldsymbol{\sigma}$、ε和$\boldsymbol{q}$的值完全由直到包括t的所有时刻在内的运动和温度场唯一确定。**局部作用原理**可以看成是从本构方程中去掉那些与远处的作用相关联的影响。它指出：在时刻t占据x任一邻域以外的点的质点所经历的运动和温度不影响(x, t)处$\boldsymbol{\sigma}$、ε和$\boldsymbol{q}$的值。根据**客观性原理**，材料的响应对任何一对等价的观察者来说都是一样的。在数学上，材料的响应是由本构方程所描绘的，一个观察者就用一个标架来表示（如第3.2节中所定义的那样）。因此客观性原理要求本构方程在保持空间和时间基本结构的标架变换下保持不变。

例1 若一物质体只能发生刚性运动，便称它是由**刚性材料**组成的。对这样的材料，如果内能ε仅为温度θ的函数，且热通量矢量给定为$\boldsymbol{q}=k(\theta)\mathrm{grad}\theta$，证明能量方程具有形式

$$\rho c\frac{\partial\theta}{\partial t}=\mathrm{Div}(k\mathrm{Grad}\theta)+\rho r, \qquad (\mathrm{A})$$

式中，ρ为密度，$c=\mathrm{d}\varepsilon/\mathrm{d}\theta$。

解 在刚性运动中，伸长率张量恒为零（见例2.13），应力功率也等于零。因此能量方程(3.39)简化为

$$\rho c\dot{\theta}=\mathrm{div}(k\mathrm{grad}\theta)+\rho r,$$

这里还用到了给出的ε和$\boldsymbol{q}$的表达式。当将该结果转换成参照描述时，我们用$\frac{\partial\theta}{\partial t}$代替$\dot{\theta}$，且由式$(2.18)_1$、$(2.19)_1$及$(2.24)_1$，有

$$\mathrm{div}(k\mathrm{grad}\theta)=J^{-1}\mathrm{Div}(k\boldsymbol{J}\boldsymbol{C}^{-1}\mathrm{Grad}\theta).$$

但因为在刚性运动中没有伸长和体积变化发生，故有$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}$及$J=1$。因此得到式(A)。

〔刚性材料可以作为第3.5节中所提到过的机械和热效应解耦的

(1) 尽管在这方面人们习惯使用“原理”这一术语，但上面提到的规则中只有一个，即决定性原理，被普遍认为与观察到的所有材料的性能是一致的。其它原理的地位仍有争议，但借助于它们所得到的理想化响应的表示式能够准确地模拟许多类实践中所碰到的流体和固体材料的性能，这一点却没有争议。

另外一个例子。在本问题中，ε 和q的本构方程给定后，最后得到的关于 θ 的非线性偏微分方程是刚性材料的**热传导方程**的一般形式，式中k和c分别为所考虑材料的热传导率和比热。在经典热传导理论中，k和c对温度的依赖性被忽略，于是式(A)就简化成线性扩散方程

$$\rho c\frac{\partial\theta}{\partial t}=k\Delta\theta+\rho r,$$

式中$\Delta(\cdot)=\mathrm{DivGrad}(\cdot)$是参照描述中的标量拉普拉斯算子。)

在本章的其余部分，我们在纯力学范围内，即在没有热-机械效应相互影响的条件下，讨论三个简单但又十分重要的本构方程例子。在这种简化处理中，我们假定温度要么是常数，要么由运动所决定，且能量方程已被满足，于是式(3.3)和(3.23)最后给出ρ和$\boldsymbol{v}$的分量之间的四个标量关系式。在一些特殊的连续介质理论（包括本章开头所提到过的那些）已成功地应用过的大量情形中，这些条件或是能精确地或是能非常近似地得以满足，但要想正确地检验它们的有效性，则需要涉及热力学，这便超出了本书的范围。加上以上限制后，我们所采用的基本本构假设就变成：

在时刻t点x处的应力完全由从$\widetilde{\boldsymbol{B}}$的运动中所导出的场在$(x,\ t)$处的值所唯一确定（并满足(3.24)）。 （1）

我们看到，该假设与决定性原理和局部作用原理一致，此外，此假设还排除了应力对运动的过去历史的依赖性。因此，将要考虑的材料不记得它在时刻t以前所占据的构形。对许多常见的流体和固体，尤其是对一很宽范围条件下的空气和水以及承受适度外力的金属和其它建筑材料来说，该假设所导致的结果与实验符合得很好。但对某些材料，比如聚合物溶液、固体塑料和混凝土来说，将记忆的影响排除在外就有可能过于简单化了。

第二节　本构方程的例子

在第3.5节中已介绍过的本构方程

$$\boldsymbol{\sigma}=-p(\rho)\boldsymbol{I}, \tag{2}$$

所描述的是可压缩理想流体。该方程显然是与假设(1)相符合，而且如果我们让压力 p 除依赖密度外还依赖于参照位置矢量 $\boldsymbol{X}$ 也还是如此。但这样，p 与 ρ 之间的函数关系式就将会随质点而变，我们称这样的流体为**非均匀的**。在本章中给出的本构方程的入门性论述中，我们将始终把注意力限于均质材料。

流体最基本的物理性质是当处于平衡状态时它不能受剪应力。服从本构方程(2)的流体当运动时也还保持着这种性质，从这种意义上说，这种流体是“理想的”。在非理想流体的情况下，我们可以很自然地将应力表为

$$\boldsymbol{\sigma}=-p\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\sigma}^{E},$$

这里，**附加应力** $\boldsymbol{\sigma}^{E}$ 当流体静止时为零。在刻划可压缩**粘性流体**的本构方程中，p 取为密度 ρ 的函数，而 $\boldsymbol{\sigma}^{E}$ 则假定为依赖于 ρ 和速度梯度 $\boldsymbol{L}$。于是

$$\boldsymbol{\sigma}=-p(\rho)\boldsymbol{I}+\boldsymbol{f}(\rho,\ \boldsymbol{L}), \tag{3}$$

式中 $\boldsymbol{f}$ 是一对称张量函数。在理想流体中，不存在剪应力就意味着在简单剪切运动中(见例2.12)相邻的流体层可以无任何阻力的相互滑动。而在粘性流体中，这种流体间的相对运动却遇到摩擦阻力，该阻力首先由斯托克斯将它与流体物质元的变形速率联系起来。如第2.5节中所证明过的那样，运动中大小和形状的局部变化率是由速度梯度 $\boldsymbol{L}$ 所确定的。既然粘性的影响仅限于附加应力，那么使用至今的理想流体这一术语就可以很恰当地由**无粘性流体**来代替。

描述弹性材料的本构方程为

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{F}), \tag{4}$$

式中$\boldsymbol{g}$是一对称张量函数。与本构方程(2)和(3)不一样，由于变形梯度的出现，式(4)牵涉到参照构形的选取，而式(2)和(3)所表示的应力与局部运动之间的关系却不依赖于任何这样的参照构形。既然参照构形的选取是任意的，那么式(4)可以这样来解释：在弹性材料中，任一代表性质点处的应力随构形的变化而变化，与材料从一个构形变到另一构形过程中所占据的中间状态无关。换句话说，弹性材料可以刻划为这样一种特定的材料，其应力响应原则上说可以从只涉及均匀变形(见第2.4节)的静力实验中导出。

与(2)一样，式(3)和(4)都符合基本假设(1)，但还有它们是否遵循客观性原理这一问题，我们将在第四节中讲到这一点。

第三节　观察者变换

我们已经指出过，一个观察者在数学上可以由一个标架来表征，因此他能够度量欧几里得点空间$\overline{\mathrm{E}}$里的位置和实数域R上的时间。如果两个观察者在以下四个方面相吻合，就称他们是**等价的**：(a)$\overline{\mathrm{E}}$中任一对点之间的距离；(b)在$\overline{\mathrm{E}}$中的取向(即遵循右手或左手法则)；(c)R中任一对时刻之间所相隔的时间，及(d)两个时刻发生的次序。

令$\widetilde{\boldsymbol{F}}$代表一任意标架，在此标架中相对于某原点o的位置矢量和时间分别为$\boldsymbol{x}$和t，并令$\widetilde{\boldsymbol{F}}'$为另一任意标架，在此标架中相对于某原点$o'$的位置矢量和时间为$\boldsymbol{x}'$和$t'$。当且仅当$(\boldsymbol{x}, t)$和$(\boldsymbol{x}', t')$由关系式

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{c}(t)+\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{x},\quad t'=t-a \qquad (5)$$

相联系时，这两个标架才能满足上面的不变性条件(a)至(d)，式中$\boldsymbol{Q}$是一正规正交张量，a是一常数。式(5)所定义的是一时空(即$\overline{\mathrm{E}}\times\mathrm{R}$)到其自身的映射，我们将它称为**观察者变换**$\widetilde{\boldsymbol{F}}\to\widetilde{\boldsymbol{F}}'$。很显然，观察者变换引起空间描述的变化。

式(5)$_1$可以由空间条件(a)和(b)[2]通过将例2.1第一部分的解直接修改一个来导出，而(5)$_2$则是(c)和(d)的直接结果。我们建议读者将证明写出来，并验证(5)也是上面四个不变性质得以满足的充分条件。

从式(5)中解出$\boldsymbol{x}$和t，我们就得到

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(t'+a)\{\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{c}(t'+a)\},\quad t=t'+a。\tag{6}$$

由这些关系式所定义的逆映射$\widetilde{\boldsymbol{F}}'\to\widetilde{\boldsymbol{F}}$也是一个观察者变换，并且很容易证明，若$\widetilde{\boldsymbol{F}}\to\widetilde{\boldsymbol{F}}'$和$\widetilde{\boldsymbol{F}}'\to\widetilde{\boldsymbol{F}}''$是观察者变换，则$\widetilde{\boldsymbol{F}}\to\widetilde{\boldsymbol{F}}''$也是。因此，本章开头中所定义的观察者的等价性的确是一个等价关系。我们将能从一给定标架$\widetilde{\boldsymbol{F}}$通过观察者变换来得到的所有标架的集合记为$\widetilde{\boldsymbol{E}}(\widetilde{\boldsymbol{F}})$。从今以后，$\widetilde{\boldsymbol{F}}'$就表示$\widetilde{\boldsymbol{E}}(\widetilde{\boldsymbol{F}})$中一任意元素，且观察者变换$\widetilde{\boldsymbol{F}}\to\widetilde{\boldsymbol{F}}'$就认为具有表示式(5)。

现在让我们假定一定义在某区域上的标量场当参照到$\widetilde{\boldsymbol{F}}$上时由$\phi$表示，当参照到$\widetilde{\boldsymbol{F}}'$上时则由$\phi'$表示，$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{u}'$和$\boldsymbol{T}$，$\boldsymbol{T}'$为定义在同样区域上具有类似含义的矢量和张量场。若对所有$\widetilde{\boldsymbol{F}}'\in\widetilde{\boldsymbol{E}}(\widetilde{\boldsymbol{F}})$，

$$\left.\begin{aligned}&\phi'(\boldsymbol{x}',t')=\phi(\boldsymbol{x},t),\quad \boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}',t')=\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t),\\&\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{x}',t')=\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(t),\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

则称这三个场是**客观的**。变换法则(7)$_{2,3}$保证与矢量$\boldsymbol{u}$和张量$\boldsymbol{T}$相应的方向不会因观察者变换而改变。为了证明这一点，我们首先注意到，$\widetilde{\boldsymbol{F}}$中由标准正交基$\boldsymbol{e}=\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3\}$所定义的三个方向与$\widetilde{\boldsymbol{F}}'$中由类似的基$\boldsymbol{e}'=\{\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3'\}$所定义的三个方向是等同的，其中

$$\boldsymbol{e}_i'(t)=\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{e}_i,\tag{8}$$

于是，$\boldsymbol{Q}(t)=\boldsymbol{e}_i'(t)\otimes\boldsymbol{e}_i$(参见练习1.13)。只要将这个表达式代入式(7)$_{2,3}$，我们便发现上述的矢量场和张量场在标架$\widetilde{\boldsymbol{F}}$中相对于$\boldsymbol{e}$的分量与在标架$\widetilde{\boldsymbol{F}}'$中相对于$\boldsymbol{e}'$的分量是相等的。

---

(2) 若将取向条件(b)略去的话，式(5)$_1$仍然有效，但正交张量$\boldsymbol{Q}$就不再必须一定是正规的。实际上下面给出的结果都不受这一变化的影响。

$$\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}',\ t')\cdot\boldsymbol{e}_i'=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\ t)\cdot\boldsymbol{e}_i,$$

$$\boldsymbol{e}_i'\cdot\{\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{x}',t')\boldsymbol{e}_j'\}=\boldsymbol{e}_i\cdot\{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{e}_j\}\qquad(9)^{*}$$

例 2 证明

(i)一客观标量场的空间梯度是一客观矢量场；

(ii)一客观矢量场的空间散度是一客观标量场；

(iii)一客观张量场的空间散度是一客观矢量场。

解 令$(o,\ e)$和$(o',\ e')$分别为$\widetilde{\boldsymbol{F}}$和$\widetilde{\boldsymbol{F}'}$中的直角坐标系，其基矢量由(8)相联系。那么式$(5)_1$给出

$$(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{e}_i'=\boldsymbol{e}_i'\cdot(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_i')=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e}_i$$

该式告诉我们，坐标系$(o',\ e')$中任一点的坐标$x_i'=\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{e}_i'$与它在$(o,\ e)$中相应的坐标$x_i=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e}_i$的差只是时间的函数。如果$\phi$、$\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{T}$和$\phi'$、$\boldsymbol{u}'$、$\boldsymbol{T}'$为所考虑的客观标量、矢量和张量场在$\widetilde{\boldsymbol{F}}$和$\widetilde{\boldsymbol{F}'}$中所具有的形式，则我们由式$(7)_1$和(9)导出

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\phi'}{\partial x_i'}(\boldsymbol{x}',t)=\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(\boldsymbol{x},\ t),\ \frac{\partial u_i'}{\partial x_j'}(\boldsymbol{x}',t)\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x},t),\\&\frac{\partial T_{ij}'}{\partial x_i'}(\boldsymbol{x},t)=\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k}(\boldsymbol{x},t),\end{aligned}\right\}\quad(\mathrm{A})$$

式中，u_i和T_{ij}为相对于e的分量，u_i'和T_{ij}'为相对于e'的分量。

(i)利用式(1.92)、$(\mathrm{A})_1$及(8)，便有

$$(\mathrm{grad}\phi')(\boldsymbol{x}',t')=\frac{\partial\phi'}{\partial x_p'}(\boldsymbol{x}',t')\boldsymbol{e}_p'$$

$$=\frac{\partial\phi}{\partial x_p}(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{e}_p=\boldsymbol{Q}(t)(\mathrm{grad}\phi)(\boldsymbol{x},t)$$

(ii)其次，由式$(1.93)_2$及$(\mathrm{A})_2$，有

$$(\mathrm{div}\boldsymbol{u}')(\boldsymbol{x}',t')=\frac{\partial u_p'}{\partial x_p'}(\boldsymbol{x}',\ t')$$

(*)译者注：由式$(7)_3$和(8)，$\boldsymbol{e}_i'\cdot\{\mathbf{T}'\mathbf{e}_j'\}=(\mathbf{Q}\mathbf{e}_i)\cdot[(\mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}})(\mathbf{Q}\mathbf{e}_j)]$
$=(\mathbf{Q}\mathbf{e}_i)\cdot[(\mathbf{Q}\mathbf{T})\mathbf{e}_j]=\mathbf{e}_i\cdot[(\mathbf{Q}\mathbf{T})^{\mathrm{T}}(\mathbf{Q}\mathbf{e}_i)]=\mathbf{e}_i\cdot\{\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}_i\}=\mathbf{e}_i\cdot\{\mathbf{T}\mathbf{e}_j\}$.

$$=\frac{\partial u_p}{\partial x_p}(x,\ t)=(\mathrm{div}\boldsymbol{u})(x,\ t)$$

(iii) 最后，式(1.94)，$(A)_s$和(8)给出

$$(\mathrm{div}\boldsymbol{T}')(x',t')=\frac{\partial T_{pq}'}{\partial x_p'}(x',\ t')e_q'$$

$$=\frac{\partial T_{pq}}{\partial x_p}(x,\ t)\boldsymbol{Q}(t)e_q=\boldsymbol{Q}(t)(\mathrm{div}\boldsymbol{T})(x,t)$$

例 3 试导出在观察者变换下描述一运动物体内速度$\boldsymbol{v}$、加速度$\boldsymbol{a}$、变形梯度$\boldsymbol{F}$及速度梯度$\boldsymbol{L}$变化规律的方程。

解 假定物体的运动在$\widetilde{\boldsymbol{F}}$中由式(2.3)所表示，那么它在$\widetilde{\boldsymbol{F}'}$中由下式所确定：

$$x'=c(t'+a)+\boldsymbol{Q}(t'+a)\psi(\boldsymbol{X},\ t'+a)\underset{(10)}{\overset{\text{假定为}}{=\!=\!=}}\psi'(X,t'),$$

这里用到了式(5)。

(a)只要将式(10)对t'微分，我们便得到以下在$\widetilde{\boldsymbol{F}}$和$\widetilde{\boldsymbol{F}'}$中速度和加速度之间的关系。

$$v'(x',t')=\frac{\partial\psi'}{\partial t'}(\boldsymbol{X},\ t')$$

$$=\dot{c}(t'+a)+\dot{\boldsymbol{Q}}(t'+a)\psi(\boldsymbol{X},t'+a)+\boldsymbol{Q}(t'+a)\frac{\partial\psi}{\partial t}(\boldsymbol{X},t'+a)$$

$$=\dot{c}(t)+\dot{\boldsymbol{Q}}(t)x+\boldsymbol{Q}(t)v(x,t),$$

$$a'(x',t')=\frac{\partial^2\psi'}{\partial t'^2}(\boldsymbol{X},t')$$

$$=\ddot{c}(t)+\ddot{\boldsymbol{Q}}(t)x+2\dot{\boldsymbol{Q}}(t)v(x,t)+\boldsymbol{Q}(t)a(x,t).$$

像在例2.1中那样，我们可以证明$\Omega=\dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}^T$是一反对称张量(代表$\widetilde{\boldsymbol{F}}$相对于$\widetilde{\boldsymbol{F}'}$的自旋)，且$\ddot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}^T=\dot{\Omega}+\Omega^2$。借助于这些结果及式(6)，速度和加速度的变换公式就可表为

$$v'=\dot{c}+\boldsymbol{Q}v+\Omega(x'-c),$$

$$\boldsymbol{a}'=\ddot{\boldsymbol{c}}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{v}'-\dot{\boldsymbol{c}})+(\dot{\boldsymbol{\Omega}}-\boldsymbol{\Omega}^2)(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{c}) \tag{11}$$

(*b*)将参照梯度算子用到式(10)的结果为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X},t')&=(\mathrm{Grad}\,\psi')(\boldsymbol{X},t')\\&=\boldsymbol{Q}(t'+a)(\mathrm{Grad}\psi)(\boldsymbol{X}',\ t'+a)\\&=\boldsymbol{Q}(t)(\mathrm{Grad}\psi)(\boldsymbol{X},t)=\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X},t)\end{aligned}$$

因此，在$\widetilde{\boldsymbol{F}}$和$\widetilde{\boldsymbol{F}'}$中的变形梯度之间的关系式为

$$\boldsymbol{F}'=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F} \tag{12}$$

(*c*)只要将式(12)对t'微分，我们便得到

$$\dot{\boldsymbol{F}}'(\boldsymbol{X},t')=\boldsymbol{Q}(t)\dot{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{X},t)+\dot{\boldsymbol{Q}}(t)\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X},t)$$

从而，再利用式$(2.30)_2$及(12)并略去各函数中的自变量，我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}'&=\dot{\boldsymbol{F}}'\boldsymbol{F}'^{-1}=(\boldsymbol{Q}\dot{\boldsymbol{F}}+\dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{F})(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F})^{-1}\\&=\boldsymbol{Q}\dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}+\dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{L}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\Omega}\end{aligned} \tag{13}$$

这就是要求的速度梯度的变换公式。

从式(11)至(13)可以看出，例 3 中所讨论过的四个场都不是客观的。但由式(12)和$(2.24)_1$，在观察者变换下左柯西-格林应变张量的变换公式为(*)

$$\boldsymbol{B}'=\boldsymbol{F}'\boldsymbol{F}'^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F})(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}},$$

而式(13)和$(2.43)_2$则为伸力率张量给出以下的变换公式：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}'&=\frac{1}{2}(\boldsymbol{L}'+\boldsymbol{L}'^{\mathrm{T}})\\&=\frac{1}{2}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{L}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

从而$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{D}$都是客观张量。这一结果在后面进一步讨论本构方程时非常重要。

例 4　设ϕ、$\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{T}$分别为定义在运动物体$\widetilde{\boldsymbol{B}}$的构形之上的标量、矢

(*)译者注：对于右柯西-格林应变张量$\boldsymbol{C}'=\boldsymbol{F}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}'=(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F})=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{C}$。变换前后没有变化。但它不是客观的（参见本章习题7(*a*)）。

量和张量场。$\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{T}$的**迁移变化率**定义为[*]

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{u}}=\dot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u},\qquad \overset{\circ}{\boldsymbol{T}}=\dot{\boldsymbol{T}}+\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}+\boldsymbol{T}\boldsymbol{L}. \tag{14}$$

如果ϕ、$\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{T}$是客观的，证明$\dot{\phi}$、$\overset{\circ}{\boldsymbol{u}}$和$\overset{\circ}{\boldsymbol{T}}$也是客观的。

解 (*a*)定义在$\widetilde{\boldsymbol{B}}$的构形之上的客观标量场满足式$(7)_1$。借助于(2.3)和(10)，该式可重新写成以下参照形式：

$$\phi'(\boldsymbol{\psi}'(\boldsymbol{X},t'),t')=\phi(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{X},t),t)$$

在该关系式两边对t'微分，然后转换成标架$\widetilde{\boldsymbol{F}}$和$\widetilde{\boldsymbol{F}'}$中的空间描述，我们利用式$(2.10)_1$和$(6)_2$便得到：

$$\dot{\phi}'(\boldsymbol{x}',t')=\dot{\phi}(\boldsymbol{x},t)(\partial t/\partial t')=\dot{\phi}(\boldsymbol{x},t)$$

因此$\dot{\phi}$是一客观标量。

(*b*)假定像(*a*)中那样，我们已利用式(2.3)和(10)将$\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{T}$和$\boldsymbol{u}'$、$\boldsymbol{T}'$表示成了参照位置矢量$\boldsymbol{X}$和t或t'的函数。那么如果省略这些函数的宗量，就有

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\boldsymbol{u}}'&=(\partial\boldsymbol{u}'/\partial t')+\boldsymbol{L}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}'\\&=\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{u})+(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}-\Omega)(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{u})\\&=\boldsymbol{Q}(\dot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u})+(\dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}-\Omega)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{Q}\overset{\circ}{\boldsymbol{u}},\end{aligned}$$

这里用到了式$(6)_2$、$(7)_2$、(13)、$(14)_1$及关系式$\Omega=\dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$。类似地，利用式$(6)_2$，$(7)_3$，(13)及$(14)_2$，我们便得出

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\boldsymbol{T}}'&=(\partial\boldsymbol{T}'/\partial t')+\boldsymbol{L}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}'+\boldsymbol{T}'\boldsymbol{L}'\\&=(\partial/\partial t)(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})+(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}-\Omega)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\\&\quad+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{L}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}+\Omega)\end{aligned}$$

(*)译者注：令$\boldsymbol{W}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}})$，它就表示除去由这里所考虑的$\boldsymbol{Q}$而产生的自旋$\Omega=\dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$以外的，由物体自身变形而产生的物体的（瞬时）刚体旋转速度（自旋）张量（参见第2.5节）。用这里的$\boldsymbol{W}$给$\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{T}$的焦曼（Jaumann）变化率（或称共旋变化率）张量以如下的定义：

$$\overset{\triangledown}{\boldsymbol{u}}=\dot{\boldsymbol{u}}-\boldsymbol{W}\boldsymbol{u},\qquad \overset{\triangledown}{\boldsymbol{T}}=\dot{\boldsymbol{T}}-\boldsymbol{W}\boldsymbol{T}+\boldsymbol{T}\boldsymbol{W}.$$

它也是客观的（因为$\boldsymbol{W}'=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{W}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}+\dot{\boldsymbol{Q}}$）。此外，一般常用$\circ$表示焦曼变化率，而用$\Delta$表示本书所定义的迁移变化率。这里仍按本书的规定。

$$= \boldsymbol{Q}(\dot{\boldsymbol{T}} + \boldsymbol{L}'\boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}\boldsymbol{L})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} + (\dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}' - \Omega)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}\boldsymbol{Q}'$$
$$+ \boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}\dot{\boldsymbol{Q}}^{\mathrm{T}} + \Omega)$$
$$= \boldsymbol{Q}\overset{\circ}{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$$

因此，客观矢量和张量场的迁移变化率本身也是客观的。

例 2 至例 4 的结果可以用来研究观察者变换对第三章中所导出的基本场方程的影响。但首先我们有必要确定一下代表质量、力、内能及热接受量这些原始概念的各个场在这种变换下的特性。在这些场中，密度 ρ、应力矢量 $\boldsymbol{t}_{(n)}$、内能 e 及热通量 $h_{(n)}$ 只与物质体的内部情况有关，它们对所有等价的观察者来说看起来都应该一样。因此，我们认为这些场是客观的，这一假设可以严格地看成是客观性原理的一部分。于是，应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 和热通量矢量 $\boldsymbol{q}$ 是客观的，从而由例 2 至例 4，出现在场方程中的各项 ρ、$\rho\mathrm{div}\boldsymbol{v}(=\rho\mathrm{tr}\boldsymbol{D})$、$\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}$、$\rho\dot{e}$、$\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{D})$ 及 $\mathrm{div}\boldsymbol{q}$ 也都是客观的。这样，空间连续方程(3.3)和对称性条件(3.24)在任意观察者变换下将保持其形式不变，且只要假定热供给 r 是一客观标量场，能量方程(3.39)也是如此。但对运动方程(3.23)来说，情况就没有那么简单，因为由 $(11)_2$ 知，惯性项 $\rho\dot{\boldsymbol{v}}$ 不是一客观矢量。在阐述运动定律时（第3.2节）已声明，存在有这样一个标架（称为惯性标架），在该标架中运动方程成立。既然 $\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}$ 是客观的，那么该方程在 $\widetilde{\boldsymbol{E}}$（$\widetilde{\boldsymbol{F}}$）的另一标架中的有效性便要求 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 应作为一客观矢量进行变换，这就意味着式 $(11)_2$ 右边中除 $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{a}$ 以外的其它项是新标架中的体力的一部分。以这种方式出现的非真实体力通常称为**惯性力**(*)。

(*)译者注：如果由于变换有 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})' = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，$\boldsymbol{a}'$ 由 $(11)_2$ 式给出，令 $\boldsymbol{b}' = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}^*$，则必有

$$\boldsymbol{b}^* = \ddot{\boldsymbol{c}} + 2\dot{\Omega}(\boldsymbol{v}' - \dot{\boldsymbol{c}}) - \Omega^2(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{c}) + \dot{\Omega}(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{c}). \qquad (A)$$

即产生对应于此式右边第二项的哥氏力及对应于第三项的离心力。对于满足 $\ddot{\boldsymbol{c}} = 0$，$\Omega = 0$ 的观察者变换，$\boldsymbol{b}^* = 0$，因而(3.23)式是客观的（惯性系）。但是，对于一般变换，除非所受体力与观察者变换无关，必须加上由于该变换而得到的式（A）中给出的假想体力。

第四节　简化后的本构方程

按照第三节中的论述，我们可将客观性原理重新陈述为：在标架$\widetilde{\boldsymbol{F}}$中列出的本构方程在$\{\widetilde{\boldsymbol{F}}\to\widetilde{\boldsymbol{F}}'\,,\widetilde{\boldsymbol{F}}'\in\widetilde{\boldsymbol{E}}(\widetilde{\boldsymbol{F}})\}$这一类观察者变换下形式保持不变。下面我们就来讨论这一要求对第二节中所介绍过的本构方程(2)、(3)和(4)的影响。

先考虑式(2)，我们不妨将它看成是在$\widetilde{\boldsymbol{F}}$中成立。利用应力和密度的客观性，便有

$$\boldsymbol{\sigma}'=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=-p(\rho)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{I}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=-p(\rho)\boldsymbol{I}=-p(\rho')\boldsymbol{I}。\tag{15}$$

这里，一撇表示相应的场是参照到从$\widetilde{\boldsymbol{E}}(\widetilde{\boldsymbol{F}})$中任意选出的另一标架$\widetilde{\boldsymbol{F}}'$，$\boldsymbol{Q}$是一通过式(5)与观察者变换$\widetilde{\boldsymbol{F}}\to\widetilde{\boldsymbol{F}}'$相关联的正规正交张量。等式(15)证实，如果(2)在$\widetilde{\boldsymbol{F}}$中成立，那么它也在$\widetilde{\boldsymbol{F}}'$中成立，换句话说，不管压力以怎样的函数形式依赖于密度，描述无粘性流体的本构方程总是遵循客观性原理。

由变换公式(13)和(12)可明显看出，只有将**响应函数**$\boldsymbol{f}$和$\boldsymbol{g}$以某种方式加以限制后，本构方程(3)和(4)才是客观的。下面的例题就是用来弄清楚这些限制的具体形式。

例 5　证明：当且仅当

$$\boldsymbol{f}(\rho,\boldsymbol{Q}\boldsymbol{L}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}+\Omega)=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{f}(\rho,\boldsymbol{L})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\tag{16}$$

和

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F})=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{F})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\tag{17}$$

对所有的正规张量$\boldsymbol{Q}$和所有反对称张量Ω(对(16)来说)都成立时，本构方程(3)和(4)才符合客观性原理。

解　(a)上面已证明了式(3)中应力的$-p(\rho)\boldsymbol{I}$部分是客观的。因此附加应力$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{E}}$是客观张量，所以只要证明(16)是本构方程

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{E}}=\boldsymbol{f}(\rho,\ \boldsymbol{L})\tag{A}$$

遵循客观性原理的必要和充分条件就够了。

为了证明(16)的必要性，我们假定(A)是客观的。那么，

在$\tilde{F}$中 $\sigma^E=f(\rho,L)$及在$\tilde{F}'$中$\sigma'^E=f(\rho',L')$　　(B)

对所有$\tilde{F}'\in\tilde{E}(\tilde{F})$都成立。此外，$\sigma'^E=Q\sigma^EQ^T$，$\rho'=\rho$，且$L'$和$L$满足关系式(13)。只要将这些关系式与(B)相结合，并注意到标架$\tilde{F}'$总可以从$\tilde{E}(\tilde{F})$中这样选取，以致使观察者变换$\tilde{F}\to\tilde{F}'$中的正规正变张量Q及其导数$\dot{Q}(=\Omega Q)$可以取任何给定的值，我们便得到式(16)。

反过来，如果式(16)对所有正规正交张量Q和所有反对称张量Ω都有效，且本构方程(A)在某标架$\tilde{F}$中成立，则

$$\sigma'^E=Q\sigma^EQ^T=Qf(\rho,L)Q^T=f(\rho,QLQ^T+\Omega)$$
$$=f(\rho',L'),$$

这里，用到了σ^E和ρ的客观性及式(13)。因此，(A)在$\tilde{F}'$中也成立，从而式(16)既是式(3)满足客观性原理的必要条件，也是它满足该原理的充分条件。

(*b*)式(17)是式(4)满足客观性原理的必要和充分条件的证明可以沿着与(*a*)中相同的路线进行，只不过需将使用式(13)的地方改为使用式(12)。具体工作留给读者自己去作。

在粘性流体的一代表性质点处，式(16)对所有的正规正交张量Q和所有的反对称张量Ω都成立。若特殊地选取$Q=I$，$\Omega=\frac{1}{2}(L^T-L)$，便得到等式

$$f(\rho,L)=f(\rho,\frac{1}{2}(L+L^T)),\qquad(18)$$

从而有以下结论：粘性流体中的应力通过伸长率张量D来依赖于速度梯度。因此本构方程(3)可以由

$$\sigma=-p(\rho)I+f(\rho,D)\qquad(19)$$

来取代，且由式(18)，响应函数f所应满足的条件(16)变为

$$f(\rho,QDQ^T)=Qf(\rho,D)Q^T\ \forall\text{正规正交张量}Q.\qquad(20)$$

本构方程(4)相应的简化形式可由条件(17)导出，将式(17)右边的F用它的右极分解RU来代替并令$Q=R^T$，我们便得到

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{F})=\boldsymbol{R}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{U})\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}. \tag{21}$$

实际上若将式(17)看成是一个关于$\boldsymbol{g}$的函数方程，那么式(21)就是它的解，这可通过直接将以下等式代入来验证：

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{F})=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F})^{-1/2}\boldsymbol{g}((\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F})^{1/2})(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F})^{-1/2}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}},$$

该式是由式(21)通过将$\boldsymbol{R}$写成$\boldsymbol{F}\boldsymbol{U}^{-1}$并利用$\boldsymbol{U}$是$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}$唯一正定的平方根这一事实来得到的。因此，弹性材料的本构方程就简化为

$$\sigma=\boldsymbol{R}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{U})\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}, \tag{22}$$

且在由(4)到(22)的过渡中，一典型质点处的伸长和旋转对该点处应力的影响已完全分离开来。我们看到σ对右伸长率张量$\boldsymbol{U}$的依赖关系不受任何约束，但旋转却应以式(22)所示的显式形式出现在应力-变形关系式中。

第五节　物质对称性

假定一由弹性材料所组成的物体相对于一指定的参照构形经受着某种给定的变形。如果选取另一个不同的参照构形，然后给物体施加以同样的变形，那么在一代表性质点$\widetilde{\boldsymbol{X}}$处所产生的应力一般说将会不一样。但对大部分弹性材料来说，存在着特定参照构形改变，它不会使$\widetilde{\boldsymbol{X}}$处由任意变形所产生的应力发生变化，在这种意义上，这些材料具有**物质对称性**。一种材料中具有这种性质的参照构形的变换越多，它所具有的对称度就越高。

为了将物质对称性这一概念用数学语言描述出来，首先有必要确定一下参照构形的变化对变形梯度的影响。令B_r和B_r^*为物体$\widetilde{\boldsymbol{B}}$的任意一对构形，并令$\boldsymbol{F}$和$\boldsymbol{F}^*$分别为物体由参照状态$B_r$和$B_r^*$到其即时构形的变形梯度。相对于参照和空间直角坐标系(O, E)、(O^*, E^*)和(o, e)，$\boldsymbol{F}$和$\boldsymbol{F}^*$的表示式为

$$\boldsymbol{F}=\frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{E}_\alpha, \qquad \boldsymbol{F}^*=\frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha^*}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{E}_\alpha^*$$

(参见式(2.14))。从而利用偏微分的连锁法则及基E^*的标准正交

性，便得到

$$\boldsymbol{F}=\frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha^*}\frac{\partial X_\alpha^*}{\partial X_\kappa}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{E}_\kappa$$

$$=\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha^*}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{E}_\alpha^*\right)\left(\frac{\partial X_\alpha^*}{\partial X_\kappa}\boldsymbol{E}_\alpha^*\otimes\boldsymbol{E}_\kappa\right)=\boldsymbol{E}^*\boldsymbol{P},\tag{23}$$

这里$\boldsymbol{P}$为与变换$B_r\to B_r^*$相应的变形梯度。

隐含在本构方程(4)中的响应函数$\boldsymbol{g}$里的是参照构形B_r，变形梯度$\boldsymbol{F}$便是相对于它而定义的。若以B_r^*作为参照构形，式(4)就具有形式

$$\sigma=\boldsymbol{g}^*(\boldsymbol{F}^*),\tag{24}$$

式中的响应函数$\boldsymbol{g}^*$由关系式(23)知，是由下式所定义的：

$$\boldsymbol{g}^*(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{AP})\quad\forall\text{可逆的}\boldsymbol{A}.\tag{25}$$

现在假定存在有一可逆张量$\boldsymbol{P}$使得

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{AP})=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{A})\qquad\forall\text{可逆的}\boldsymbol{A},\tag{26}$$

那么，将$\boldsymbol{P}$看成是与参照构形变换相应的变形梯度，便有

$$\sigma=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{F})=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{FP})=\boldsymbol{g}^*(\boldsymbol{F})$$
$$=\boldsymbol{g}^*(\boldsymbol{F}^*)=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{F}^*\boldsymbol{P})=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{F}^*),\tag{27}$$

这里依次用到了式(4)、(26)、(25)、(24)、(25)及(26)。式(27)中的第一、三、四及六式表明：在计算代表性质点$\widetilde{\boldsymbol{X}}$处的应力时，无论用哪个响应函数($\boldsymbol{g}$或$\boldsymbol{g}^*$)，哪个变形梯度($\boldsymbol{F}$或$\boldsymbol{F}^*$)都没有关系。简言之，材料的应力响应不区分参照构形B_r和B_r^*。

很显然，所有具备性质

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{AH})=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{A})\qquad\forall\text{可逆张量}\boldsymbol{A}\tag{28}$$

的可逆张量$\boldsymbol{H}$的集合$\boldsymbol{G}$表征所考虑的弹性材料相对于参照构形B_r的对称性。如果$\boldsymbol{H}_1$和$\boldsymbol{H}_2$是$\boldsymbol{G}$中的元素，那么$\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{H}_2$也是，因为

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{AH}_1\boldsymbol{H}_2)=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{AH}_1)=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{A}).$$

另外，如果$\boldsymbol{H}\in\boldsymbol{G}$且$\boldsymbol{A}$是可逆的，则$\boldsymbol{AH}^{-1}$是可逆张量，故有$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{AH}^{-1})$，这就意味着$\boldsymbol{H}^{-1}\in\boldsymbol{G}$。这些性质就确保$\boldsymbol{G}$具有

群[3]的结构，因此称它为该材料相对于B_r的**对称群**。

例 6　在上面所讨论过的情形中，证明材料相对于B_r*的对称群为

$$\boldsymbol{G}^*=\boldsymbol{P}\boldsymbol{G}\boldsymbol{P}^{-1}, \tag{29}$$

式中$\boldsymbol{P}$为与参照构形的变化$B_r\to B_r$*相应的变形梯度。

解　令$\boldsymbol{H}$属于$\boldsymbol{G}$。那么式(28)成立，并且可以在该方程中用$\boldsymbol{AP}$代替$\boldsymbol{A}$。利用定义式(25)的另外一种形式$g(\boldsymbol{A})=g^*(\boldsymbol{AP}^{-1})$，我们便发现

$$g^*(\boldsymbol{APHP}^{-1})=g^*(\boldsymbol{A})\quad \forall\text{可逆张量}\boldsymbol{A}。$$

因此，如果$\boldsymbol{H}\in\boldsymbol{G}$，则$\boldsymbol{PHP}^{-1}$便是$\boldsymbol{G}^*$中的元素，从而关系式(29)得证。〔这一结果通常称为**诺尔法则**。〕

式(29)的一个直接结果为：如果$\boldsymbol{P}$是一球形张量，则$\boldsymbol{G}^*=\boldsymbol{G}$。这就意味着弹性材料相对于这样两个参照构形具有等同的对称群：这两个参照构形之间的联系为一膨胀（即主伸长均相等的三维应变），或者还伴有由$-\boldsymbol{I}$所表示的中心翻转。

从今以后，我们将把注意力放在某相应的变形梯度是**么模群**[4] U中一元素的这种参照构形变换上。由式(3.6)和(23)知，密度不会因这样的变换而改变[5]。所有满足式(28)的么模张量$\boldsymbol{H}$的集合称为材料相对于B_r的**各向同性群**[*]。若$\boldsymbol{H}\in\mathrm{U}$且$\boldsymbol{P}$为一任意可逆张量，则$\boldsymbol{PHP}^{-1}\in\mathrm{U}$。从而再由诺尔法则知，在参照构形变化下，各向同性群变换到各向同性群。特别地，由于$\mathrm{U}=\boldsymbol{P}\mathrm{U}\boldsymbol{P}^{-1}$（这很容易验证），因此一相对于某参照构形与完全么模群重合的各向同性群

（3）　可参见L.Mirsky所著的An Introduction to Linear Algebra(Oxford, Clarendon Press, 1955)，第263页。

（4）　若一张量的行列式为± 1，便称它是么模的。

（5）　在这里的讨论中我们并未假定B_r和B_r*是相似的构形。因此应该注意，当有关的两构形不相似时，式(2.22)变成$\mathrm{d}v=-J\mathrm{d}V$，而参照连续方程则不是(3.6)，而是$\rho=-J^{-1}\rho_r$。

(*)译者注：因各向同性群这一名词易与物质的各向同性性质相混淆，有时也称之为对称群或同格群。当对所有的Q均有此性质时才称该物质是各向同性的（参见后文）。

相对于所有其它参照构形都将具有此性质。

例 7 证明各向同性群与么模群重合的弹性材料是可压缩无粘性流体。

解 相对于一任意参照构形B_r，式(28)对所有$\boldsymbol{H}\in\mathbf{U}$成立。因此，若特别地选取$\boldsymbol{H}=|J|^{1/3}\boldsymbol{F}^{-1}$，便有

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{F})=\boldsymbol{g}(|J|^{1/3}\boldsymbol{I}). \tag{A}$$

将(A)代入客观性原理加在$\boldsymbol{g}$上的限制条件(17)，得到

$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{g}(|J|^{1/3}\boldsymbol{I})=\boldsymbol{g}(|J|^{1/3}\boldsymbol{I})\boldsymbol{Q}$ $\forall$正规正交张量$\boldsymbol{Q}$，从而由习题1.16知，$\boldsymbol{g}(|J|^{1/3}\boldsymbol{I})$必为一$|J|$的标量函数与单位张量$\boldsymbol{I}$的积。但借助于式(3.6)，$|J|$的函数可以表示为密度$\rho$的函数。因此，式(4)便简化为表征无粘性流体的本构关系式(2)。

〔当各向同性群与U重合时，相对于一任意参照构形的对称群是所有可逆张量的集合(*)。因此，可压缩无粘性流体是具有最大对称性且无特定构形的弹性材料。这些性质与流体的直观概念显然是一致的。〕

如果一弹性材料具有这样一个参照构形，相对于它，材料的各向同性群包含完全正交群O（即所有正交张量的集合），则称该材料是**各向同性的**。这样的参照构形就称为材料的**无畸变状态**。因此，如果参照构形的变换仅仅是一无畸变状态的任意旋转，或者还伴有由$-\boldsymbol{I}$所表示的中心翻转，则各向同性材料的应力响应不会受到这种变换的影响。在这种意义上来说，各向同性材料没有方向选择性。在例7中所考虑的弹性流体这一情况下，所有构形都是无畸变状态。

现在假定本构方程(4)所描述的是一各向同性弹性材料，且将$\boldsymbol{g}$和$\boldsymbol{F}$的定义中所涉及到的参照构形B_r取成材料的无畸变状态。那么由式(28)有

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{F}\boldsymbol{Q})=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{F})\quad\forall\text{正交张量}\boldsymbol{Q}。 \tag{30}$$

(*)译者注：诺尔将流体定义为各向同性群与么模群重合的物质。由前面译者注，流体总是各向同性的。

在式(30)的左边将$\boldsymbol{F}$用其左极分解$\boldsymbol{VR}$来代替并令$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$，我们得到$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{F})=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{V})$，且因为$\boldsymbol{V}$是左柯西—格林应变张量$\boldsymbol{B}$唯一的正定平方根，故式(4)简化为

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{B}), \tag{31}$$

式中$\boldsymbol{h}$是一对称张量函数。因此，各向同性弹性材料中的应力由从无畸变状态所量得的拉伸完全确定。在这种程度上说，式(31)是简化后的本构方程(22)的一个特例，但(31)直接来源于材料的对称性条件(28)，而(22)则是通过将客观性原理用于式(4)来导出的。将等式$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{F})=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{FF}^{T})$代入条件(17)中，便得到客观性原理加在响应函数$\boldsymbol{h}$上的限制条件

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{QBQ}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{Qh}(\boldsymbol{B})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \quad \forall \text{正规正交张量} \boldsymbol{Q}. \tag{32}$$

假定有一个定义域和值域均为所有对称张量的集合的函数$\boldsymbol{h}$。若$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{QSQ}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{Qh}(\boldsymbol{S})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$对所有对称张量$\boldsymbol{S}$和所有正交张量$\boldsymbol{Q}$均成立，便称$\boldsymbol{h}$是**各向同性**的。可以证明(6)，这样的函数具有表示式

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{S})=\eta_0\boldsymbol{I}+\eta_1\boldsymbol{S}+\eta_2\boldsymbol{S}^2, \tag{33}$$

式中η_0，η_1和η_2为$\boldsymbol{S}$的主不变量的标量函数。由式(32)知，响应函数$\boldsymbol{h}$是各向同性的(7)(*)，故确定各向同性材料相对一无畸变状态的应力响应的本构方程(31)可以写成以下形式：

$$\boldsymbol{\sigma}=\phi_0\boldsymbol{I}+\phi_1\boldsymbol{B}+\phi_2\boldsymbol{B}^2, \tag{34}$$

式中ϕ_0、ϕ_1和ϕ_2为$\boldsymbol{B}$的主不变量的标量函数。于是由式(34)即知，在各向同性弹性材料的每一构形中，应力张量$\boldsymbol{\sigma}$和应变张量$\boldsymbol{B}$都是共轴的，且当这种材料处于无畸变状态时，应力是球形的。

例 8 如果一各向同性弹性体具有两个彼此相似的无畸变状态B_r和B_r^*，证明变形$B_r\to B_r^*$必是一旋转和一膨胀的结合。

解：材料相对于B_r和B_r^*的各向同性群均与**O**重合，故由诺尔法则

---

(6) 关于该表示定理的证明可参见C.Truesdell和W.Noll合著的The Nonlinear Field Theories of Mechanics (Berlin等, Springer, 1965)，第32页。

(7) 由于$\boldsymbol{Q}$以二次形式出现在式(32)中，该条件显然对所有的正交张量$\boldsymbol{Q}$都成立。

(*)译者注：这里的用词“各向同性的”与物质是各向同性并不等同。保证物质各向同性的是式(31)，而式(32)是同时考虑物质的各向同性和客观性而得到的。

(29)知，对所有$\boldsymbol{Q}\in\mathcal{O}$，$\boldsymbol{PQP}^{-1}$都是正交的，这里$\boldsymbol{P}$是与变换$B_r\to B_r^*$相应的变形梯度。从而利用式(1.76)$_1$，便有

$$(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{PQ}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{-1}\quad\forall\text{正交张量}\boldsymbol{Q}.$$

只要在该式两边左乘以$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$，右乘以$\boldsymbol{P}$，便可看出$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$可与所有的正交张量交换，因此它是一正定球张量（参见例1.11及习题1.16）。由极分解定理，$\boldsymbol{P}$可表示为形式$\boldsymbol{RU}$，且因为B_r和B_r^*是彼此相似的构形，故正交张量$\boldsymbol{R}$是正规的。此外，$\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})^{\frac{1}{2}}$，而我们已证明$(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})^{1/2}$是球形的，于是问题得证。

如果一弹性材料具有这样一个构形B_r，相对于它的材料的各向同性群完全是由正交张量所组成，便称该材料是一**固体***。该定义形成的物理因素来源于这样一种体验：即一固体材料的应力响应一般会因形状的变化而改变（形状的变化就可由参照构形的非正交变换来代表）。我们还是将所选用的构形作为材料的无畸变状态，当固体碰巧是各向同性的，即当它具有最大对称性时，该术语保留其以前的意义。一弹性材料应力处处为零的非畸变状态称为**自然状态**。如果一弹性固体相对于一无畸变状态的各向同性群是$\mathcal{O}$中一个真子集，便称它是**各向异性的**。

本节中所阐述的有关弹性材料的物质对称性理论是以参照构形变换下的不变性概念为中心，但如第二节中所指出的那样，粘性和无粘性流体的本构方程无需引进一个参照构形就可建立起来。因此，将最大对称性这一例7中已证明过的表征无粘性流体的特性赋给所有粘性和无粘性流体将是有意义的。特别地，粘性流体在所有构形中都是各向同性的，这一性质现在看来已由客观性原理通过加在响应函数$\boldsymbol{f}$上的限制条件(20)所保证。若再一次利用表示定理(33)，本构方程(19)便可进一步简化成

$$\boldsymbol{\sigma}=(-p+\nu_0)\boldsymbol{I}+\nu_1\boldsymbol{D}+\nu_2\boldsymbol{D}^2. \tag{35}$$

(*)译者注：各向同性条件为：(各向同性群)$\supset\mathcal{O}$，固体的定义为：(各向同性群)$\subset\mathcal{O}$，因而至少存在一个使二者同时满足的构形B_r。对各向同性固体，(各向同性群)$=\mathcal{O}$，且二者的无畸变状态重合。不是各向同性固体的固体称为各向异性固体。

这里，p为ρ的函数，v_0，v_1和v_2为ρ和$\boldsymbol{D}$的主不变量的函数。当$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{O}$时$v_0$为零。

式(34)和(35)是各向同性弹性材料和粘性流体符合客观性原理的本构方程的最一般形式。式(35)是由赖纳(Reiner)和里夫林(Rivlin)首先获得的，故本章中所讨论过的这种类型的粘性流体通常称为**赖纳-里夫林流体**。

牛顿粘性流体是这样一种赖纳-里夫林流体，在这种流体中附加应力对伸长率张量的依赖关系是线性的。在这种情况下，式(35)简化成(*)

$$\sigma=\left\{-p+\left(k-\frac{2}{3}\mu\right)\mathrm{tr}\boldsymbol{D}\right\}\boldsymbol{I}+2\mu\boldsymbol{D}, \qquad (36)$$

式中，p、k和μ为ρ的函数。k和μ分别称为流体的**体积粘性系数**和**剪切粘性系数**(或简称后者为**粘性系数**)。

自然界中最常见的流体：空气和水，以及其它一些气体和液体(比如水银和某些轻油类)都可以很好地由牛顿本构方程来表征。但也有许许多多的流体，其表现行为不能用牛顿粘性流体理论来解释，乳液(比如油漆)、聚合物溶液，融熔物质、糊剂、胶液及血液的运动都是这样的例子。当赖纳-里夫林本构方程被发现的时候(1945—1948)，人们期望它能够为研究这些流体的运动特性提供一个理论基础，但到目前为止的实验结果表明，只有牛顿流体是已知的赖纳-里夫林流体。因此，近年来有关非牛顿流体的研究中许多都是在试图表征比式(3)更一般的粘性。

第六节 内 约 束

到目前为止，我们一直在不言明地假定着我们可以通过施加适

(*)译者注：因为对于D是线性的，所以其不变量只有$\mathrm{tr}D$。此外，式(35)中的v_1只是p的函数，v_0为p和$\mathrm{tr}D$的函数(且为$\mathrm{tr}D$的一次形式)，$v_2=0$。因此有$\sigma=(-p+a\mathrm{tr}D)I+bD$，即可写为$\sigma=(-p+k\mathrm{tr}D)I+2\mu D'$，再由$D'=D-\frac{1}{3}I$，即得式(36)，由此也可看出$k$和$\mu$名称的由来。

当的力使物质体作任何（光滑的）运动。但有些流体和固体材料所能经历的变形却受到某些限制，而对这种材料的理论研究往往非常重要。这样的限制称为**内约束**。这里我们要考虑的最重要的例子由以下形式的方程所代表：

$$\zeta(\boldsymbol{F})=0, \tag{37}$$

式中ζ是一标量函数。利用式(12)，内约束应该是客观的，这一条件就是

$$\zeta(\boldsymbol{QF})=\zeta(\boldsymbol{F}) \quad \forall \text{正规正定张量} \boldsymbol{Q}。 \tag{38}$$

只要在式(38)的左边将$\boldsymbol{F}$用它的右极分解$\boldsymbol{RU}$代替并令$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{R}^{T}$，我们便发现$\zeta$是通过$\boldsymbol{U}$，从而也就是通过右柯西-格林应变张量$\boldsymbol{C}$来依赖于变形梯度的。因此式(37)由以下的客观形式来取代：

$$\lambda(\boldsymbol{C})=0。 \tag{39}$$

为了使其运动满足内约束条件，物质体$\widetilde{\boldsymbol{B}}$必须能有适当的接触力作用，并且决定其应力响应的本构方程也应该将这些力作用考虑进去。因此，第一节中所述的决定性原理应该修改一下。为此目的，我们假定因内约束的作用而产生的那部分应力不作功且不由运动所确定。故对一受约束的物体来说，与式(1)相应的基本本构假设就是：

在时刻t点x处的应力由从$\widetilde{\boldsymbol{B}}$的运动中所导出的场在$(x, t)$处的值唯一确定到只相差这样一个对称张量$\boldsymbol{N}$，该张量不能以这种形式由$\widetilde{\boldsymbol{B}}$的运动所确定，且它在任何与约束相容的运动中都不作功。

只要回忆一下第3.5节中所给出的关于应力功率的解释，便知使式(39)成为无功约束的条件具有形式：

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{ND})=0, \tag{40}$$

它对所有允许运动都成立。为了得到$\boldsymbol{N}$与λ之间的关系式，我们利用式(39)的微分形式$\dot{\lambda}=0$。相对于参照直角坐标系(O, E)，

$$\dot{\lambda}=(\partial\lambda/\partial C_{\alpha\beta})\dot{C}_{\alpha\beta}=\operatorname{tr}(\lambda_{C}\dot{\boldsymbol{C}}), \tag{41}$$

式中λ_{C}是一对称张量，其分量形式为(8)

(8) 这里我们假定λ对应变分量$C_{\alpha\beta}$的依赖关系已表示成对称的形式。

$$\lambda_C=(\partial\lambda/\partial C_{\kappa\rho})\boldsymbol{E}_\kappa\otimes\boldsymbol{E}_\rho. \tag{42}$$

因为$\dot{\boldsymbol{C}}=2\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{F}$（见习题1），所以利用迹算子的一般性质$(1.53)_2$，我们有

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{F}\lambda_C\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D})=0. \tag{43}$$

条件(40)对所有满足式(43)的伸长率张量$\boldsymbol{D}$都成立，从而由例1.12知，$\boldsymbol{N}$是$\boldsymbol{F}\lambda_C\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$的标量倍数：

$$\boldsymbol{N}=\alpha\boldsymbol{F}\lambda_C\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}. \tag{44}$$

因此，**约束应力**$\boldsymbol{N}$由约束的形式(39)确定到只相差一个标量乘子。如果$\tilde{\boldsymbol{B}}$受有以下几个内约束的作用(9)：

$$\lambda_\Gamma(\boldsymbol{C})=0,\quad \Gamma=1,2,\cdots,n,$$

则只要将λ用λ_1，λ_2，…，λ_n的任意线性组合来代替，上面的推导仍然适用。因此约束应力就是

$$\boldsymbol{N}=\sum_{\Gamma=1}^{n}\alpha_\Gamma\boldsymbol{F}(\lambda_\Gamma)_C\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}. \tag{45}$$

我们在第三章中已碰到过一个内约束的例子：不可压缩材料是只能作等容运动的材料，且由于在这种情况下，$J=(\det\boldsymbol{C})^{\frac{1}{2}}=1$，故式(39)相应的形式为

$$\lambda(\boldsymbol{C})=\det\boldsymbol{C}-1=0. \tag{46}$$

有关行列式微分的公式(1.40)给出

$$\dot{\lambda}(\det\boldsymbol{C})\mathrm{tr}(\dot{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{C}^{-1})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{C}^{-1}\dot{\boldsymbol{C}}),$$

从而只要将此式与式(41)相比较，便得到$\lambda_C=\boldsymbol{C}^{-1}=\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{F}^{-1})^{\mathrm{T}}$。因此由式(44)知，约束应力由下式给出：

$$\boldsymbol{N}=-p\boldsymbol{I},$$

这里由$-p$所表示的任意标量显然可以解释为压力。

对一不可压缩各向同性弹性材料来说，本构方程由下式所代替。

$$\boldsymbol{\sigma}=-p\boldsymbol{I}+\phi_1\boldsymbol{B}+\phi_2\boldsymbol{B}^2, \tag{47}$$

(9) 因为式(39)实际上决定应变张量C的一个分量，所以这种类型的独立约束的最大数目是6。

式中，ϕ_1和ϕ_2仅为I_B和II_B的函数（因$\mathrm{III}_B=J^2=1$），球形项$\phi_0\boldsymbol{I}$已合并到约束应力里[10]。式(47)能准确地模拟天然和人造橡胶的表现行为。

合成橡胶材料在常规应力水平下所表现出的极低的可压缩性也是液体的一个基本特征，因此，表征不可压缩牛顿流体的本构方程是粘性流动理论中广泛讨论的基础。将式(36)作适当修改，并记住在等容运动中$\mathrm{tr}\boldsymbol{D}=0$（由式(2.32)），我们得到该式的以下简单形式：

$$\boldsymbol{\sigma}=-p\boldsymbol{I}+2\mu\boldsymbol{D}, \tag{48}$$

式中的粘性系数μ在目前情况下是一常数。只要将式(48)代入运动方程(3.23)，然后再利用式(2.32)所表示的空间连续方程，我们便建立起以下的**纳维-斯托克斯方程**：

$$\rho\boldsymbol{a}=-\mathrm{grad}p+\mu\,\text{☆}\boldsymbol{v}+\rho\boldsymbol{b}, \tag{49}$$

式中$\text{☆}(\cdot)=\mathrm{div}\{\mathrm{grad}(\cdot)\}^{\mathrm{T}}$是空间描述中的矢量拉普拉斯算子。

式(2.32)和(49)给出p和$\boldsymbol{v}$的分量之间的四个标量关系式，这里压力作为因变量之一取代了密度，后者已由约束所限定。这组方程的某些解将会在第七节中给出。在不可压缩无粘性流体的情况下，整个应力都用来维持不可压缩这一约束，控制压力和速度的方程为(2.32)和(3.25)。这组方程的一个特解已在例3.7中讨论过。

例 9 回到例2.11，试确定与两组埋置纤维相应的约束应力。

解 由例2.11解中的式(C)知，内约束的表达式为

$$\lambda_\Gamma(\boldsymbol{C})=\boldsymbol{L}_\Gamma\cdot(\boldsymbol{C}\boldsymbol{L}_\Gamma)-1=0,\quad \Gamma=1,\ 2,$$

式中$\boldsymbol{L}_1$和$\boldsymbol{L}_2$为定义纤维在未变形构形B_r中的方向的单位矢量。引入一参照直角坐标系$(O,\ E)$并注意本节前面的脚注(8)，我们有

$$\frac{\partial\lambda_\Gamma}{\partial C_{\alpha\beta}}=\frac{\partial}{\partial C_{\alpha\beta}}\left\{\frac{1}{2}(L_\Gamma)_\kappa(L_\Gamma)_\rho(C_{\kappa\rho}+C_{\rho\kappa})\right\}$$

---

(10) 在例15中，我们将介绍压力p的计算。通过学习该例后，读者便会更清楚地认识到这样做不失一般性。

http://www.shengwukx.cn/printing.htm 2009-10-27

$$=\frac{1}{2}(L_T)_\alpha(L_T)_\delta(\delta_{\alpha\alpha}\delta_{\beta\delta}+\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\alpha})$$

$$=(L_T)_\alpha(L_T)_\beta,$$

从而由定义式(42)得到$(\lambda_T)_C=\boldsymbol{L}_T\otimes\boldsymbol{L}_T$。于是，

$$\boldsymbol{F}(\lambda_T)_C\boldsymbol{F}^T=(\boldsymbol{F}\boldsymbol{L}_T)\otimes(\boldsymbol{F}\boldsymbol{L}_T)=\boldsymbol{l}_T\otimes\boldsymbol{l}_T,$$

这里，单位矢量$\boldsymbol{l}_1$和$\boldsymbol{l}_2$定义纤维在变形后的构形B中的方向，故由式(45)知约束应力的表达式为

$$\boldsymbol{N}=T_1\boldsymbol{l}_1\otimes\boldsymbol{l}_1+T_2\boldsymbol{l}_2\otimes\boldsymbol{l}_2$$

由习题3.2，我们看出$\boldsymbol{N}$就是B中纤维方向上的单向应力的叠加。因此，与约束相应的任意标量T_1和T_2显然就可解释为两组纤维中的张力。

第七节　不可压缩牛顿粘性流体

在本节中，我们考虑不可压缩牛顿粘性流体的某些控制方程(2.32)和(49)具有精确解的简单流动。这些解的获得有助于理解粘性流动理论中的基本概念，特别是边界层和涡度的扩散这两个概念。但这些专题的详细论述应属于有关的专门著作[11]，在此不作介绍。

在以下各例中，体力都假定不存在，基本方程均参照到一具有坐标x_1，x_2，x_3的空间直角坐标系。利用式(1.92)至(1.94)和$(2.12)_3$，我们可以将这些方程的分量形式写为

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i}=0,$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j\partial x_j},\qquad(50)$$

(11) 比如参看Rosenhead所编辑的Laminar Boundary Layers(Oxford, Clarendon Press, 1963)，第Ⅰ，Ⅱ章，及G.K.Batchelor所著的An Introduction to Fluid Dynamics(Cambridge, Cambridge University Press, 1967)。

式中，ρ和μ分别为流体的密度和粘度。

例10 讨论一不可压缩牛顿粘性流体在一直管中的定常流动，并特别考虑直管横截面是圆形的情形。

解 将3-方向取为沿着直管母线的方向，我们寻求式(50)的速度处处沿着直管方向的解[12]：

$$v_1=0,\quad v_2=0,\quad v_3=v(x_1,\ x_2)。\tag{A}$$

这些表达式显然满足连续性方程$(50)_1$。若将它们代入纳维-斯托克斯方程$(50)_2$，我们便有

$$\frac{\partial p}{\partial x_1}=\frac{\partial p}{\partial x_2}=0,\qquad \frac{\partial p}{\partial x_3}=\mu\Delta_1 v,\tag{B}$$

这里

$$\Delta_1(\cdot)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)(\cdot)$$

为平面标量拉普拉斯算子。由(B)知，压力p仅为x_3的函数，且$\mathrm{d}p/\mathrm{d}x_3$不依赖于$x_3$。因此

$$p=p_0-Gx_3,\tag{C}$$

式中，p_0和G为常数。并由此可以看出，式(A)所描述的定常线性流动需要有一个常压力梯度来维持。如果$G>0$，则p随x_3增加而减少，流体将会沿正的3-方向流动。

式$(B)_3$和(C)给出以下的泊松方程：

$$\Delta_1 v=-G/\mu,\tag{D}$$

该方程应在直管的横截面在$(x_1,\ x_2)$-平面上所占据的区域上与在该区域的周边c上成立的边界条件一道求解[13]。这个边界条件就是以下的**无滑动条件**：在一粘性流体和一固体的交面上，两种材料之间应无相对运动发生。因此

$$\text{在}c\text{上}\quad v=0。\tag{E}$$

由式(D)和(E)所组成的边值问题有唯一有界的解。在c是一由

(12) 式$(A)_3$可由$v_3=v(x_1,\ x_2,\ x_3)$来代替，但v对x_3的依赖性随即会被连续性方程所排除。

(13) c由一个或多个封闭曲线所组成。

$x_1^2+x_2^2=a^2$所确定的圆周的情形下，可以很容易证明其解为

$$v=\frac{1}{4}(G/\mu)(a^2-r^2),$$

式中，$r=(x_1^2+x_2^2)^{1/2}$为离圆管轴线的距离。该情形中圆管横截面上的速度分布是抛物线形的，最大速度发生在轴上，其值为$Ga^2/4\mu$。通过圆管的流体体积通量由以下的**泊肃叶公式**给出：

$$F=\int_0^a 2\pi r v_3 dr=\frac{1}{8}\pi G a^4/\mu.$$

例11 一不可压缩牛顿粘性流体充满了一刚性平板一侧的半无限区域。忽略过渡状态，试确定由于平板在其自身平面内作直线振动所引起的流体的振动运动。

解 将坐标原点放在板平面上，并使2-方向与板垂直地指向流体，1-方向沿着板的运动方向。我们假定质点速度处处沿着1-方向，且只依赖于离板的距离x_2和时间t。于是有

$$v_1=v(x_2,t),\quad v_2=0,\quad v_3=0 \qquad (A)$$

不管函数v具有什么形式，式$(50)_1$总能满足。如果

$$\frac{\partial p}{\partial x_1}=\mu\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}-\rho\frac{\partial v}{\partial t},\quad \frac{\partial p}{\partial x_2}=\frac{\partial p}{\partial x_3}=0, \qquad (B)$$

则纳维-斯托克斯方程$(50)_2$也能成立。这些关系式意味着p只依赖于x_1和t，而$\frac{\partial p}{\partial x_1}$则与$x_1$无关。因此，与所假设的速度场一致的压力分布的最一般形式为

$$p=p_0(t)-G(t)x_1.$$

但我们所关心的是液体流动完全是由平板的运动所推动的这种情形，因此压力梯度G应取为零。于是由$(B)_1$知，v满足一维扩散方程

$$\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}=\frac{\partial v}{\partial t}, \qquad (C)$$

式中，$\nu=\mu/\rho$为流体的**动粘性系数**。由无滑动条件，v 在$x_2=0$处等于给定的平板速度，且为了使远处的流体不受边界运动的影响，我们要求：

当$x_2\to\infty$时，对所有t均有$v\to 0$。　　(D)

如果另外还假定当$t=0$时流体是静止的，我们便得到一个有关v的具有唯一解的初边值问题。

在平板以角频率ω和速度幅值V振动这一特殊情况下，边界条件可以表为以下复数形式：

在$x_2=0$处　$v=Ve^{i\omega t}$。　　(E)

如果忽略与流体的启动相应的过渡性扰动，我们就放弃初始条件，而寻求式(C)具有以下形式的解：

$$f(x_2)e^{i\omega t}　　(F)$$

将(F)代入(C)后所得到的关于f的常微分方程为

$$f''(x_2)=(i\omega/\nu)f(x_2)=\{(1+i)k\}^2f(x_2),　　(G)$$

式中，$k=(\omega/2\nu)^{1/2}$，我们注意到该常数具有量纲(长度)$^{-1}$。出现在(G)的通解中的两个任意常数可由条件(D)和(E)确定。于是，由(F)的实部所提供的式(C)的解为

$$v=Ve^{-kx_2}\cos(\omega t-kx_2),　　(H)$$

与之相应的板的速度为$V\cos\omega t$。

式(A)和(H)表明：与平板平行的平面内的质点所作的振动的振幅随着x_2的增加按指数规律衰减。因此，流体的运动基本上是局限在与平板相邻的一薄层内，更远处的流体表现得就好像平板是处于静止的。边界层的厚度具有量级$k^{-1}=(2\nu/\omega)^{1/2}$。这就表明在高粘性介质内缓慢振动的平板拖带着大量流体随它一道运动，而在粘性系数很低的流体中快速振动的平板则在一薄边界层之外，基本上不引起任何显著的运动。

由式(A)和(H)所导出的涡度分量为

$$\omega_1=0,\ \omega_2=0,\ \omega_3=2^{1/2}Vke^{-kx_2}\cos\left(\omega t-kx_2+\frac{1}{4}\pi\right),$$

非零分量ω_3与v_1满足同样的扩散方程。很显然，涡度在运动边界处产生，向流体内部扩散。

例12 证明在例2.15中所考虑过的渐缩循环运动可以不借助于体力由一不可压缩牛顿粘性流体来维持，并将与此解相应的涡度分布与在那里所得到的关于保环量运动的结果加以比较。

解 在给定运动中速度和涡度的分量为

$$v_1=-\frac{1}{2}\alpha x_1-f(r)x_2,$$

$$v_2=-\frac{1}{2}\alpha x_2+f(r)x_1,\qquad v_3=\alpha x_3, \tag{A}$$

及

$$\omega_1=0,\ \omega_2=0,\ \omega_3=\omega(r)=rf'(r)+2f(r), \tag{B}$$

式中$r=(x_1^2+x_2^2)^{1/2}$，α为正常数。由于已经知道该运动是等容的，我们的任务就是要证明函数f和压力分布可以这样来选择，以使速度分量(A)满足纳维-斯托克斯方程$(50)_2$。

将(A)代入$(50)_2$后所得到的三个关系式可以写为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x_1}&=-\chi(r)x_1-\psi(r)x_2,\\ \frac{\partial p}{\partial x_2}&=-\psi(r)x_2+\psi(r)x_1,\\ \frac{\partial p}{\partial x_3}&=-\rho a^2x_3,\end{aligned}\right\} \tag{C}$$

式中

$$\chi(r)=\frac{1}{4}\rho\alpha^2-\rho\{f(r)\}^2,$$

$$\psi(r)=\mu r^{-1}\omega'(r)+\frac{1}{2}\rho\alpha\omega(r), \tag{D}$$

ω由$(B)_3$给定。足以保证存在一函数p满足(C)的可积性条件

$\partial^2 p/\partial x_i\partial x_j = \partial^2 p/\partial x_j\partial x_i$简化为单一方程

$$r\psi'(r)+2\psi(r)=0\ .$$

该式唯一有界的解是$\psi=0$。从而式$(D)_2$给出一关于涡度ω的一阶常微分方程，且利用$(D)_1$，我们可以得到式(C)的积分为如下形式：

$$p=p_0-\frac{1}{8}\rho\alpha^2(r^2+4x_3^2)+\rho\int^r\{f(s)\}^2s\,ds,$$

这里p_0为常数。ω所满足的方程的解为

$$\omega(r)=\omega_0\exp\left(-\frac{1}{4}\alpha r^2/\nu\right), \qquad (E)$$

式中$\nu=\mu/\rho$为流体的动粘性系数，ω_0是另一常数。于是剩下来的仅仅是要指出f可以由式$(B)_3$和(E)通过积分来确定(*)。

式(E)表明涡度处处是有限的，且强烈地集中在其半径具有量级$2(\nu/\alpha)^{\frac{1}{2}}$的中心区域内(**)。涡度由该区域向外的扩散是显然的，但可以非常近似地说，周围流体的运动是无旋的且不受粘性的影响。与此相反，例2.15中所考虑过的保环量运动的涡度在3-轴上是奇异的。既然这是不可压缩**无粘性**流体在零体力下的一种可能的运动，那么线涡的消除和涡度的扩散便是由**粘**性的存在直接引起的。

在无粘性流动中，与对流和涡线的伸长相应的效应互相平衡，

(*)译者注：由$(C)_1$求出$\frac{\partial^2 p}{\partial x_1\partial x_2}$，由$(C_2)$求出$\frac{\partial^2 p}{\partial x_2\partial x_1}$，并令其相等，即得$\left(\frac{\partial\chi}{\partial x_2}\right)x_1=\left(\frac{\partial\chi}{\partial x_1}\right)x_2$和上文中关于$\psi(r)$的方程，由于$\left(\frac{\partial\chi}{\partial x_2}\right)x_1=\left(\frac{\partial\chi}{\partial r}\right)\frac{x_1x_2}{r}=\left(\frac{\partial\chi}{\partial x_1}\right)x_2$，所以前式为恒等式。后者的通解为$\psi=\frac{C}{r^2}$，因$r=0$时须有界，故$C=0$，因而$\psi=0$。将其代入$(C)_1$得$\frac{\partial p}{\partial x_1}=\frac{dp}{dr}\cdot\frac{x_1}{r}=-\chi(r)x_1$，故$\frac{dp}{dr}=-r\chi(r)$，求解得$p=p_0'-\frac{1}{g}\rho\alpha^2r^2+\rho\int^r\{f(s)\}^2sds$，再由$(C)_3$解得$p_0'=p_0-\frac{1}{2}\rho\alpha^2x_3^2$，因而得到文中的$p$的式子。由$(D)_2$和$\psi=0$容易得出(E)式。由(E)和$(B)_3$即得到关于$f(r)$的微分方程。

(**)译者注：取“中心区域”的标准是使(E)式中的指数函数成为e^{-1}（以前确定边界层厚度，对衰减现象的衰减时间等都是按同样方法考虑的）。

而在粘性流体中，这些过程共同与涡度的扩散相平衡，涡线一般来说相对于物质是运动的。

第八节　各向同性弹性材料

这最后一节中的几个例子将阐明各向同性材料的非线性弹性理论的一些基本的、但富有启发性的方面。我们由本构方程(4)看出，当一可压缩弹性体经受着一种均匀变形时，它在即时构形中的应力也是均匀的，于是由平衡方程(3.26)知，该弹性体可以在没有体力的干预下，即只在表面力的作用下永久地静止在这样一个状态。例13和14就涉及这种情形。在例15中，我们讨论不可压缩弹性体的一种简单运动。

例13　设一可压缩各向同性弹性体受着例2.10中所讨论过的那种简单剪切的作用，试计算其中的应力。

解　这是一种均匀等容变形，其相应的左柯西-格林应变张量由下式所给定：

$$\boldsymbol{B}=(1+\gamma^2)\boldsymbol{l}\otimes\boldsymbol{l}+\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}+\gamma(\boldsymbol{l}\otimes\boldsymbol{m}+\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{l}),\quad(A)$$

式中，γ为剪切量，基矢量$\boldsymbol{l}$，$\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$的定义如图2.5所示。因此，

$$\boldsymbol{B}^2=(1+3\gamma^2+\gamma^4)\boldsymbol{l}\otimes\boldsymbol{l}+(1+\gamma^2)\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}$$
$$+\gamma(2+\gamma^2)(\boldsymbol{l}\otimes\boldsymbol{m}+\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{l}),\quad(B)$$

从而本构方程(34)给出以下关于应力的表示式：

$$\boldsymbol{\sigma}=\{\phi_0+\phi_1(1+\gamma^2)+\phi_2(1+3\gamma^2+\gamma^4)\}\boldsymbol{l}\otimes\boldsymbol{l}$$
$$+\{\phi_0+\phi_1+\phi_2(1+\gamma^2)\}\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m}+(\phi_0+\phi_1+\phi_2)\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}$$
$$+\gamma\{\phi_1+\phi_2(2+\gamma^2)\}(\boldsymbol{l}\otimes\boldsymbol{m}+\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{l})\quad(C)$$

由(A)和(B)，求得$\boldsymbol{B}$的主不变量为

$$\mathrm{I}_B=\mathrm{II}_B=3+\gamma^2,\quad \mathrm{III}_B=1,$$

习题1.2给出了一种计算III_B的简便方法。因此，式(C)中的ϕ_0，ϕ_1和ϕ_2可以看成是γ^2的函数。应力相对于选定基底的分量可由式(C)求得：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{(l)}&=\boldsymbol{l}\cdot(\boldsymbol{\sigma l})=\phi_0+\phi_1(1+\gamma^2)+\phi_2(1+3\gamma^2+\gamma^4),\\ \sigma_{(m)}&=\boldsymbol{m}\cdot(\boldsymbol{\sigma m})=\phi_0+\phi_1+\phi_2(1+\gamma^2),\\ \sigma_{(n)}&=\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{\sigma n})=\phi_0+\phi_1+\phi_2,\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{D})$$

$$\boldsymbol{m}\cdot(\boldsymbol{\sigma n})=0,\quad \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{\sigma l})=0,\quad \boldsymbol{l}\cdot(\boldsymbol{\sigma m})=\gamma\{\phi_1+\phi_2(2+\gamma^2)\}.\qquad(\mathrm{E})$$

这些公式展示出这样一个显要的事实：为了在一各向同性弹性材料中产生出一简单剪切状态，除需要剪应力之外，还需要正应力[14]。正应力在简单剪切中的极端重要性由以下关系式进一步加以突出：

$$\sigma_{(l)}-\sigma_{(m)}=\gamma\boldsymbol{l}\cdot(\boldsymbol{\sigma m}),\qquad(\mathrm{F})$$

该式是由(D)$_{1,2}$和(E)$_3$得来的结果。这一结果非同平常，因为它与确定材料应力响应的函数ϕ_0、ϕ_1和ϕ_2无关，所以我们称它为**通用关系**。式(F)以最直接的方式表明，剪应力$\boldsymbol{l}\cdot(\boldsymbol{\sigma m})$是由正应力差$\sigma_{(l)}-\sigma_{(m)}$所产生的，并且在所有各向同性弹性材料中它都是以完全相同的方式这样产生的。另外还由(F)知，正应力$\sigma_{(l)}$与$\sigma_{(m)}$不相等，这一性质称为**坡印廷效应***。

例14 有人猜想，表征某类泡沫橡胶应力响应的本构方程可能为

$$\boldsymbol{\sigma}=\mathrm{I}_B^{-3/2}[\{\psi(\mathrm{I}_B,\mathrm{II}_B)-\beta\mathrm{II}_B\}\boldsymbol{I}+(\alpha\mathrm{I}_B+\beta\mathrm{II}_B)\boldsymbol{B}-\beta\boldsymbol{B}^2],$$

式中α和β为常数。在一实验中，一柱形试件被施加以主伸长为Λ、λ、λ的均匀变形，其中与Λ相应的即时伸长轴与柱体的母线方向重合，并且测得横向伸长λ和轴向伸长Λ之间用对数尺度所表示的关系图是一条具有负斜率的直线。假设柱体的曲面边界上无张力作用，试导出函数ψ的形式。

---

(14) 如果正应力全部为零，则由式(D)知ϕ_0、ϕ_1和ϕ_2均在所考虑的正γ^2值处为零，从而由(E)$_3$有$\boldsymbol{l}\cdot(\boldsymbol{\sigma m})=0$。因此就有可能在零应力作用下使材料产生剪切，这一退化情形无任何意义。（译者注：虽然在线弹性理论中允许出现$\boldsymbol{l}\cdot(\boldsymbol{\sigma m})\propto\gamma$，而正应力全为0的情况，但这只是在$\gamma^2\ll1$的情形。这时所有正应力$\approx\phi_0+\phi_1+\phi_2$，即使令此值为0，而$\boldsymbol{l}\cdot(\boldsymbol{\sigma m})\approx\gamma(\phi_1+2\phi_2)\propto\gamma$却不能令其为零，这两种理论并不是矛盾的。）

(*) 译者注：一般常把"为了产生简单剪切必须有正应力"这一效应称为坡印廷效应。

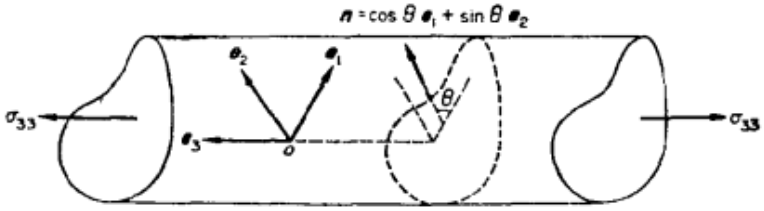


图 4-1 承受单向拉伸的柱体变形后的构形（例14）

解 图4-1中所示的标准正交矢量$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$定义试件变形后的构形中任一点处的即时伸长轴，故左柯西-格林应变张量为

$$\boldsymbol{B}=\lambda^2(\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_2)+\Lambda^2\boldsymbol{e}_3\otimes\boldsymbol{e}_3=\lambda^2\boldsymbol{I}+(\Lambda^2-\lambda^2)\boldsymbol{e}_3\otimes\boldsymbol{e}_3.$$

$\boldsymbol{B}$的主不变量可借助于式(1.60)至(1.62)求得，其值为

$$\mathrm{I}_B=2\lambda^2+\Lambda^2,\quad \mathrm{II}_B=2\lambda^2\Lambda^2+\lambda^4,\quad \mathrm{III}_B=\lambda^4\Lambda^2.$$

因此，由猜想本构方程所求得的柱体中的应力就是

$$\boldsymbol{\sigma}=\lambda^{-6}\Lambda^{-3}\{\{\psi(\lambda^4\Lambda^2)+\alpha\lambda^6\Lambda^2-\beta\lambda^2\Lambda^2\}\boldsymbol{I}+(\alpha\lambda^4\Lambda^2+\beta\lambda^2)(\Lambda^2-\lambda^2)\boldsymbol{e}_3\otimes\boldsymbol{e}_3\}$$

柱体曲线边界上的应力矢量为

$$\boldsymbol{t}_{(n)}=\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}=\lambda^{-6}\Lambda^{-3}\{\psi(\lambda^4\Lambda^2)+\alpha\lambda^6\Lambda^2-\beta\lambda^2\Lambda^2\}\times(\cos\theta\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\boldsymbol{e}_2),$$

式中的单位法矢量$\boldsymbol{n}$和夹角θ如图4-1所示。由于$\boldsymbol{t}_{(n)}=0$对θ在区间〔0，2π)内的所有取值都成立，故有

$$\psi(\lambda^4\Lambda^2)+\alpha\lambda^6\Lambda^2-\beta\lambda^2\Lambda^2=0.\qquad(\mathrm{A})$$

由试验所导出的结果具有以下形式：

$$\ln\lambda=-\nu\ln\Lambda,\quad 即\quad \lambda=\Lambda^{-\nu},\qquad(\mathrm{B})$$

式中ν为正常数。将(B)代入(A)，便得到

$$\psi(\Lambda^{2-4\nu})=-\alpha\Lambda^{2-6\nu}+\beta\Lambda^{2-2\nu}.$$

由于这是一个关于Λ的等式，故所要求的结果可通过以III_B代替$\Lambda^{2-4\nu}$来得到：

$$\psi(\mathrm{III}_B)=-\alpha\,\mathrm{III}_B^{(1-3\nu)/(1-2\nu)}+\beta\,\mathrm{III}_B^{(1-\nu)/(1-2\nu)}.$$

维持这种变形所需的轴向张力为

http://www.shengwukx.cn/printing.htm 2009-10-27

$$\sigma_{33}=(\alpha\Lambda+\beta\Lambda^{-1+2\gamma})(\Lambda^{2\gamma}-\Lambda^{-2})$$

例15 一在其自然状态中具有半径A和长度L的橡胶圆柱体以常角速度ω绕其对称轴旋转，该运动给定为

$$x_1=\lambda^{-1/2}(X_1\cos\omega t-X_2\sin\omega t),$$

$$x_2=\lambda^{-1/2}(X_1\sin\omega t+X_2\cos\omega t),\quad x_3=\lambda X_3,$$

这里参照和空间坐标均参照到同一直角坐标系上，λ为正常数。验证该运动是等容的，并求出主伸长。这种橡胶是不可压缩的，并且可以看成是一种由以下本构方程所表征的**穆尼材料**：

$$\boldsymbol{\sigma}=-p\boldsymbol{I}+(\alpha+\beta\mathrm{I}_B)\boldsymbol{B}-\beta\boldsymbol{B}^2,$$

式中α和β为正常数。假定圆柱体的曲面边界上无张力，且无任何体力作用，试确定压力p。进一步假定圆柱体端面上的合力为零，试导出一个可以用来计算旋转圆柱体长度的公式。

解 与给定运动相应的变形梯度为

$$\boldsymbol{F}=\lambda^{-1/2}(\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_2)\cos\omega t+\lambda\boldsymbol{e}_3\otimes\boldsymbol{e}_3$$

$$-\lambda^{-1/2}(\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_1)\sin\omega t,$$

式中共用坐标系的基矢$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$如图4-2中所示。从而

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}=\lambda^{-1}(\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_2)+\lambda^2\boldsymbol{e}_3\otimes\boldsymbol{e}_3,\qquad(\mathrm{A})$$

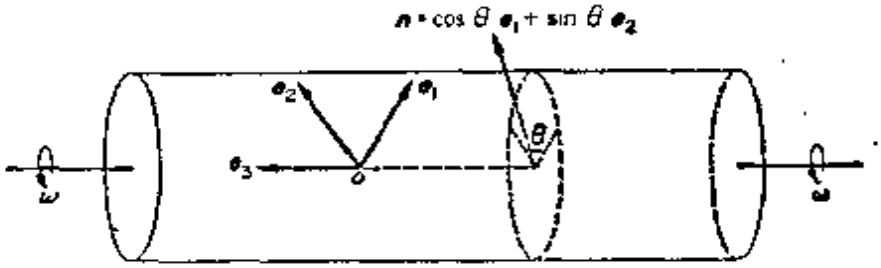


图 4-2 一绕其轴旋转的圆柱体的即时构形（例15）

由此我们可以看出主伸长（即$\boldsymbol{B}$的特征值的平方根）为$\lambda^{-1/2}$、$\lambda^{-1/2}$、λ。因此，由旋转所产生的均匀变形给圆柱体施加一个轴向伸长λ和横向伸长$\lambda^{-1/2}$。因为主伸长的乘积为1，所以运动是等容的。

将表示式(A)代入穆尼本构方程，并注意$\mathrm{I}_B=2\lambda^{-1}+\lambda^2$，我

们便得到圆柱体中的应力为

$$\boldsymbol{\sigma}=\{-p+\alpha\lambda^{-1}+\beta(\lambda^{-2}+\lambda)\}\boldsymbol{I}$$
$$+(\alpha+\beta\lambda^{-1})(\lambda^{2}-\lambda^{-1})\boldsymbol{e}_3\otimes\boldsymbol{e}_3. \qquad (B)$$

加速度可通过对给定运动的表示式微分求得，结果为

$$\boldsymbol{a}=-\omega^{2}(x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2).$$

因此，在无体力的情况下，运动方程(3.23)给出三个标量关系式

$$\frac{\partial p}{\partial x_1}=\rho\omega^{2}x_1, \qquad \frac{\partial p}{\partial x_2}=\rho\omega^{2}x_2, \qquad \frac{\partial p}{\partial x_3}=0.$$

这三个方程式是可积的，并可将压力确定到只差一个t的任意函数：

$$p=\frac{1}{2}\rho\omega^{2}r^{2}+\varphi(t).$$

这里$r=(x_1^2+x_2^2)^{1/2}$为距旋转轴的距离，ρ为橡胶的密度。圆柱体曲线边界上应力矢量的计算可按例14中所述的方式进行，这一矢量为零便给出以下条件：

在$r=\lambda^{-1/2}A$处，$-p+\alpha\lambda^{-1}+\beta(\lambda^{-2}+\lambda)=0$ (C)

（旋转圆柱的半径为$\lambda^{-1/2}A$）。式(C)确定φ，从而导出以下关于压力的表示式：[15]

$$p=\frac{1}{2}\rho\omega^{2}(r^{2}-\lambda^{-1}A^{2})+\alpha\lambda^{-1}+\beta(\lambda^{-2}+\lambda) \qquad (D)$$

圆柱体左边端面（见图4-2）上的应力矢量为

$$\boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{e}_3)}=\boldsymbol{\sigma}^{T}\boldsymbol{e}_3=\{-\frac{1}{2}\rho\omega^{2}(r^{2}-\lambda^{-1}A^{2})$$
$$+(\alpha+\beta\lambda^{-1})(\lambda^{2}-\lambda^{-1})\}\boldsymbol{e}_3,$$

这里用到了式(B)和(D)。右边端面上的应力矢量为该矢量的反号。因此，端面上合力为零这一条件具有形式

$$2\pi\int_0^{\lambda^{-1/2}A}\left\{-\frac{1}{2}\rho\omega^{2}(r^{2}-\lambda^{-1}A^{2})+(\alpha+\beta\lambda^{-1})(\lambda^{2}-\lambda^{-1})\right\}r\,dr$$
$$=0.$$

(15) 注意这里求压力所用到的方法与例3.7中的一样。

积分该式后我们便得到以下关于λ的四次方程

$$\alpha\lambda^4+\beta\lambda^3-\left(\alpha-\frac{1}{4}\rho\omega^2A^2\right)\lambda-\beta=0 \qquad \text{(E)}$$

旋转圆柱体的长度即为λL。

考察式(E)便知，它在0与1之间有一个根，且所有根之积为负。有三个正根的可能性可以排除，因为不然的话，该四次式的二阶导数就应该有一个正零点，可以看出这是不对的。因此式(E)正好只有一个正根，位于区间(0，1)之内，而且正如我们所期望的那样，旋转使得圆柱体缩短，变粗。

习 题

1. 由能量方程(3.39)推证：在无热供给的情况下，刚体中的定常热流动由下式所确定：

$$\mathrm{div}\boldsymbol{q}=0.$$

假定有这样一个刚体占据着边界为∂B的区域B。∂B有部分S_1和S_2分别被控制在恒温θ_1和θ_2之下，其它部分处于绝热状态，因此有$\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}=0$，这里$\boldsymbol{n}$为单位外法线矢量。试导出关系式

$$\int_B\boldsymbol{q}\cdot\mathrm{grad}\theta\,dv=(\theta_1-\theta_2)\int_{S_1}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\,da$$

从而证明：如果热量从S_1流入B，从S_2流出B，则热传导不等式

$$\int_B\boldsymbol{q}\cdot\mathrm{grad}\theta\,dv\geqslant 0$$

为S_2不比S_1热的充分必要条件。

2. **里夫林-埃里克森**(Rivlin-Ericksen)**张量** $\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$，…由下式所定义：

$$\overset{(n)}{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{F},\qquad n=1,\ 2,\ \cdots,$$

式中的上标(n)表示第n阶物质导数。试证明

$$\boldsymbol{A}_1=2\boldsymbol{D}\text{及}\boldsymbol{A}_n=\mathring{\boldsymbol{A}}_{n-1},\qquad n=2,\ 3,\ \cdots$$

这里$\circ$表示由式(14)$_2$所定义的迁移变化率，并推证：每个里夫林-埃里克森张量都是对称的和客观的。

3. 证明：基本跳跃条件(3.47)至(3.49)在观察者变换下形式不变。

提示：设在标架$\widetilde{\boldsymbol{F}}$中奇异面由$\Phi(\boldsymbol{x},\ t)=0$给出，在等价标架$\widetilde{\boldsymbol{F}}'$中由$\Phi'(\boldsymbol{x}',\ t)=0$给出。即有

$$\boldsymbol{n}=|\mathrm{grad}\Phi|^{-1}\mathrm{grad}\Phi,\qquad V_n=-|\mathrm{grad}\Phi|^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial t},$$

$$V=-|\mathrm{grad}\Phi|^{-1}\dot{\Phi},$$

在标架$\widetilde{\boldsymbol{F}}'$中也有类似结果，从而可得$V'=V$。

4. 试确定以下各本构方程是否满足客观性原理（α为标量常数，p是一标量函数，$\boldsymbol{f}$是一对称张量函数。）

(i)$\sigma=-p(t)\boldsymbol{I}$

(ii)$\sigma=\alpha(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}})$

(iii)$\sigma=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v})$

(iv)$\sigma=\alpha\{\mathrm{grad}\boldsymbol{a}+(\mathrm{grad}\boldsymbol{a})^{\mathrm{T}}+2\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}\}$

(v)$\sigma=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})$

答案：(i)是，如果把t理解为$t-0$，这里0为一瞬时时间。

(ii)不是。

(iii)，(v)当且仅当$\boldsymbol{f}$为一常数球张量时。

(iv)是。此本构方程可改号为$\sigma=\alpha\boldsymbol{A}_2$，这里$\boldsymbol{A}_2$为第二里夫林-埃里克森张量（见习题2和对习题2.14的提示）。

5. 试证明由

$$\overset{\triangledown}{\sigma}=\dot{\sigma}-\boldsymbol{W}\sigma+\sigma\boldsymbol{W}$$

所定义的**焦曼**(Jaumann)**应力率**$\overset{\triangledown}{\sigma}$是一客观张量并推证本构关系

$$\overset{\triangledown}{\sigma}=\alpha(\mathrm{tr}\boldsymbol{D})\boldsymbol{I}+2\beta\boldsymbol{D}\qquad(\mathrm{A})$$

满足客观性原理，式中α和β为常数。

假定有一由(A)所描绘的**低弹性**(hypo-elastic)材料所组成的物体经受着例2.12中所定义的简单剪切运动。设体内的应力是均匀的，且在$t=0$时为零，试证明在以后任一时刻的应力为

$$\sigma=\beta\{(1-\cos ct)(\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}\otimes\boldsymbol{q})+\sin ct(\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}\otimes\boldsymbol{p})\},$$

你认为这种响应是否合乎实际？

6. 某类既呈现出弹性又呈现出粘性的材料的应力响应由以下的本构方程所描述。

$$\sigma=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{F},\ \dot{\boldsymbol{F}}),\qquad\qquad(A)$$

式中$\boldsymbol{f}$为一对称张量函数。试确定客观性原理加在$\boldsymbol{f}$上的限制条件，并由此证明式(A)最一般的客观形式为

$$\sigma=\boldsymbol{R}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{U},\ \dot{\boldsymbol{U}})\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}.$$

7. (a) 如果一矢量或张量场在观察者变换下保持不变，便称它是**观察者不变**的。设$\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{T}$分别为客观矢量和客观张量，证明：

$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{u}$及$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{F}^{-1})^{\mathrm{T}}$都是观察者不变的。推证：参照热通量矢量$\boldsymbol{Q}$，右柯西-格林应变张量$\boldsymbol{C}$及第二朴拉-基尔霍夫应力张量$\boldsymbol{t}$也都是观察者不变的。

(b) 由(a)知，本构方程$\boldsymbol{t}=\boldsymbol{l}(\boldsymbol{C})$满足客观性原理，这里$\boldsymbol{l}$是一对称张量函数。利用式(22)或其它途径证明：弹性材料的本构方程必具有此种形式。

8. (i)适用于各向同性弹性材料的简化后的本构方程(34)在书中是直接从基本本构方程(4)导出的。试证明它也可以由客观形式(22)导出。

(ii)如果在习题6中所考虑过的材料是一流体(即如果该材料具有这样一个构形，相对于它，材料的各向同性群与么模群重合)，证明它是一赖纳-里夫林流体。

9. 一分层物体具有这样一组物质曲面，这些曲面在某构形中为平行的平面，且在这些曲面内不能产生面积改变。证明：在该物体即时构形中的一代表性点x处，相应的约束应力为沿着与通过x的常面积曲面相切的、一对正交方向上的等值单向应力的叠加。

提示：相应的内约束由例2.7的(iii)给出。

10. 假定有一物体经受着以下意义下的**约束剪切**：在即时构形中的任一点x处，两条在参照构形中在交点处与固定单位矢量$\boldsymbol{L}$和$\boldsymbol{M}$相切的物质曲线间的角度为$\arccos(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{M})$。证明相应的约束应力与

$$\boldsymbol{l}\otimes\boldsymbol{m}+\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{l}-(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{m})(\boldsymbol{l}\otimes\boldsymbol{l}+\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})$$

之间只差一个标量乘子，式中$\boldsymbol{l}$和$\boldsymbol{m}$为即时构形中x点处与以上两条相交曲线相切的单位矢量。

提示：相应的内约束由例2.7的(ii)给出。

11. (i)证明：对可压缩牛顿粘性流体来说，当且仅当体积和剪切粘性系数均为非负时，附加应力功率$\operatorname{tr}(\sigma^{E}\boldsymbol{D})$才会总是非负的。

(ii)一不可压缩牛顿粘性流体占据一具有固定刚性边界∂B的规则区域$\boldsymbol{B}$，且不受任何体力作用。证明：该流体的总动能在以速率

$$-\mu\int_{B}|\omega|^{2}\mathrm{d}v$$

减少，这里μ为流体的粘性系数，ω为涡度。

提示：(i)引入伸长率张量的偏张量。

12. (a)证明：只要函数f满足偏微分方程

$$\nu\left(\frac{\partial^{2}f}{\partial r^{2}}+\frac{3}{r}\frac{\partial f}{\partial r}\right)=\frac{\partial f}{\partial t},$$

由习题2.13所定义的循环运动便可以不借助体力地维持在一不可压缩牛顿粘性流体中，并证明相应的压力为

$$p=p_{0}+\rho\int^{r}\{f(s,t)\}^{2}s\,\mathrm{d}s$$

这里ρ和ν分别为流体的密度和动粘性系数，p_{0}是一常数。

(b)在两个分别以角速度Ω_{1}和Ω_{2}绕其公共轴线旋转，半径分别

为r_1和r_2($r_1<r_2$)的共轴刚性长圆筒之间盛有一不可压缩牛顿流体。假定流体在作定常循环运动，且不存在任何体力，试由(a)中的结果推证：与轴线相距r处的周向速度为

$$\frac{\Omega_2 r_2^2-\Omega_1 r_1^2}{r_2^2-r_1^2}\,r-\frac{\Omega_2-\Omega_1}{r_2^2-r_1^2}\,\frac{r_1^2 r_2^2}{r},$$

并计算出转动每个圆筒所需要的单位长度上的扭矩。

答案：外筒为$4\pi\mu r_1^2 r_2^2\,\dfrac{\Omega_2-\Omega_1}{r_2^2-r_1^2}$，与旋转方向一致，$\mu$为流体的粘性系数。内筒与此等值反向。

13. 两种互不混合的不可压缩牛顿流体形成两个各具有均匀厚度h的流体层，并一道在重力的作用下流成与水平面交角为α的固定平面。上下层流体的密度分别为ρ_1和ρ_2，相应的粘性系数为μ_1和μ_2。假定空气在流体上面施加有一均匀压力，证明上层流体在其自由表面上的速度为

$$\frac{1}{2}gh^2\{\rho_1(\mu_1^{-1}+2\mu_2^{-1})+\rho_2\mu_2^{-1}\}\sin\alpha$$

14. 假设例题11中的流体被限制在区域$0\leqslant x_2\leqslant h$且表面$x_2=h$上无应力，试找出其速度场。证明表面$x_2=h$的振荡运动具有速度幅值

$$V\cdot\left\{\frac{1}{2}(\cos 2kh+\cosh 2kh)\right\}^{-\frac{1}{2}},$$

且滞后板的振动一个相位角$\operatorname{arctg}(\tan kh\cdot\tanh kh)$。

答案：$v_1=V(x_2,t)$，$v_2=0$，$v_3=0$，这里

$$V(x_2,t)=V(\cos 2kh+\cosh 2kh)^{-1}$$

$$\times\{\{\cos kx_2\cosh k(2h-x_2)+\cos k(2h-x_2)\cosh kx_2\}\sin\omega t$$

$$+\{\sin kx_2\sinh k(2h-x_2)+\sin k(2h-x_2)\sinh kx_2\}\cos\omega t\}$$

15. 相对于一具有坐标x_1，x_2，x_3的直角坐标系，区域$-\infty<x_1<\infty$，$x_2\geqslant 0$，$x_3\geqslant 0$充满了一不可压缩牛顿流体。该区域的两个半无限大边界平面均由多孔薄壁所组成。流体可以被吸穿过墙

壁，但不能相对于薄壁切向滑动。设流体处于定常运动状态在远离薄壁处其速度沿着1-方向的分量值为V，并假定在1-方向无压力梯度，且无体力作用。试确定为使表示式

$$v_1=Vf(x_2x_3),\quad v_2=-\alpha x_3,\quad v_3=-\alpha x_2$$

成为速度场的精确解函数f所应具备的形式，式中α为正常数，并以薄壁附近为重点讨论该流动的特征。

答案：$f(x)=1-\exp\left(-\frac{\alpha x}{\nu}\right)$，式中$\nu$为流体的动粘性系数。在壁$x_2=0$和$x_3=0$上有相同的边界层，二者在角点附近合并。在$x_2=0$上边界层的厚度为$\frac{\nu}{\alpha x_3}$量级。流体逐渐地从主流被带入边界层。事实上，一个典型质点的前进速度v_1当它达到任一多孔壁时降为零，因而被吸收。

16. 证明：一不可压缩赖纳-里夫林流体的本构方程可以表为以下形式：

$$\sigma=-p\boldsymbol{I}+\nu_1\boldsymbol{D}+\nu_2\boldsymbol{D}^2,$$

式中的响应函数ν_1和ν_2依赖于主伸长率不变量II_D和III_D。

这样一种流体充满着两平行刚性板之间的整个空间。其中一板是固定的，另一板在其自身平面内作速度为V的匀速运动使流体发生定常剪切运动。引入坐标为x_1、x_2、x_3的直角坐标系。假定在该坐标系下固定板和运动板分别占据着平面$x_2=0$和$x_2=d$，运动板在沿着1-方向运动，并设流体中的速度场具有形式

$$v_1=v(x_2),\quad v_2=0,\quad v_3=0,$$

试计算其应力分量，并验证剪应力σ_{12}仅为D_{12}的函数（不妨将该函数设为τ）。假定在1-方向无压力梯度，无体力作用，且τ为单值，试证明$v_1=Vx_2/d$且p为常数。

将你的结果用到流体是牛顿流体的特殊情形。这两个解主要在哪个方面不同？

答案：两种解答所给出的正应力之间有质的区别。在牛顿流体

的特殊情形$-\sigma_{11}$、$-\sigma_{22}$和$-\sigma_{33}$都等于p_0，即常数的外围压力。而在一般情形

$$\sigma_{11}=\sigma_{22}=-p_0+\frac{1}{4}\left(\frac{V}{d}\right)^2\nu_2\left(-\frac{1}{4}\left(\frac{V}{d}\right)^2,\ 0\right),\sigma_{33}=-p_0,$$

这意味着为了维持剪切运动必须加在板上的张力有一个依赖于板速度V的法向分量。

17. 证明：在由无约束或不可压缩材料所组成的各向同性弹性体的任何变形中，处处有

$$\sigma\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\sigma. \qquad (A)$$

假设

$$\boldsymbol{B}=B_{11}\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_1+B_{22}\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_2+B_{33}\boldsymbol{e}_3\otimes\boldsymbol{e}_3$$
$$+B_{12}(\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_1),$$

式中$\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3\}$为一标准正交基，试证明由(A)可导出关系式

$$\sigma_{(\boldsymbol{e}_1)}-\sigma_{(\boldsymbol{e}_2)}=\{(B_{11}-B_{22})/B_{12}\}\boldsymbol{e}_1\cdot(\sigma\boldsymbol{e}_2)$$

并为例13中所求得的简单剪切运动导出类似上式的通用关系式。

18. 一半径为A的球由例14中所讨论过的那种泡沫橡胶所制成，所用材料的ν值为$\frac{1}{4}$。如果该球承受着由其边界上所施加的均匀压力P所产生的均匀压缩，证明其半径将减至$\gamma^{-1}A$，这里

$$(\gamma^5-1)(\alpha\gamma+\beta)=P$$

如果$\alpha>0$，$\beta>0$且$P>-\beta$，证明这个方程正好只有一个正根，且当$P>0$时该根大于1。

19. 一个半径为A，长度为L的橡胶圆柱体一端被固定，另外一端绕其对称轴转动一个τL角，相对于一原点在固定端中心，3-方向沿着对称轴并被空间和参照坐标公用的直角坐标系，该旋转所导致的变形为

$$x_1=X_1\cos\tau X_3-X_2\sin\tau X_3,$$
$$x_2=X_1\sin\tau X_3+X_2\cos\tau X_3,\ x_3=X_3$$

验证这是一个等容变形。假定所用橡胶为穆尼材料（遵循例15中所

述的本构方程），先证明该圆柱体可以在只有端面上张力作用的情况下永久地保持在这样一个扭转状态，然后证明圆柱体中的压力为

$$p=\alpha+2\beta+\frac{1}{2}\tau^2\{\alpha(A^2-r^2\}+2\beta r^2\}$$

式中$r=(x_1^2+x_2^2)^{1/2}$，最后求出应施加在各端面上的合力偶和合力。

答案：取坐标系中的基$\{e_1, e_2, e_3\}$为在$\mathbf{E}^+$上定义的。固定端面上的合力矩$\boldsymbol{M}$与合力$\boldsymbol{N}$为

$$\boldsymbol{M}=-\frac{1}{2}\pi(\alpha+\beta)A^4\boldsymbol{e}_3,$$

$$\boldsymbol{N}=\frac{1}{4}\pi(\alpha+\beta)\tau^2A^4\boldsymbol{e}_3$$

在扭转端面上的合力矩与合力为$-\boldsymbol{M}$和$-\boldsymbol{N}$。

20。 相对于一参照和空间坐标公用的直角坐标系，一物质体的运动给定为

$$x_1=\lambda X_1+a\cos\gamma(X_3,\ t),\qquad x_2=\lambda X_2+a\sin\gamma(X_3,\ t),$$

$$x_3=\Lambda X_3$$

式中$\gamma(X_3,\ t)=(kc/a)\{t-(\Lambda X_3/c)\}$，$\lambda$，$\Lambda$，$a$，$k$及$c$均为正常数。证明：如果对给定的$\lambda$，$\Lambda$，$a$和$k$值，

$$\phi_1+\phi_2\{\lambda^2+(1+k^2)\Lambda^2\}>0,$$

这里响应函数ϕ_1和ϕ_2的自变量为

$$2\lambda^2+(1+k^2)\Lambda^2,\quad \lambda^4+(2+k^2)\lambda^2\Lambda^2,\quad \lambda^4\Lambda^2,$$

那么该运动便可不借助体力地维持在一由本构方程(3.4)所描述的各向同性弹性材料中。试一般性地描述该运动的特征。

答案：该运动为一具有角频率kc/a和(有限)振幅a的有极的环形横向调和波与一主伸长为λ，λ和Λ的三向均匀变形的叠加。波沿3-方向以速度c传播。

附录一　英国东英格兰大学数学系硕士课程连续介质力学考题选编

（1985—1987）

说明：1. 每年考试时间均为三小时，两题中任选一题。

2. 在以下各考题中，$\boldsymbol{X}$代表一物质质点在参照构形B_r中的位置矢量，$\boldsymbol{x}$则代表同一物质质点在即时构形B_t中的位置矢量。$\boldsymbol{F}$为变形梯度张量，J为其行列式，而$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{C}$则分别代表左和右柯西-格林应变张量。σ为柯西应力，W为参照构形中每单位体积的应变能函数。

1985年考题

1. （a）假设定义在某物体即时构形上的矢量场$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$和定义在参照构形上的矢量场$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X})$满足关系式

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u},$$

试证明：(i) $\boldsymbol{F}\mathrm{Curl}\boldsymbol{U}=J\mathrm{curl}\boldsymbol{u}$,

(ii) $\boldsymbol{U}\cdot\mathrm{Curl}\boldsymbol{U}=J\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{curl}\boldsymbol{u}$,

式中的矢量算子Curl和curl分别表示对参照坐标和即时坐标求导。

（b）令$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{X})$为一定义在参照构形上的非零矢量场。试证明：存在一具有与$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{X})$相平行的法线的单参数曲面族$S$的必要条件为：

$$\boldsymbol{N}\cdot\mathrm{Curl}\boldsymbol{N}=0 \qquad (\mathrm{A})$$

[提示：如果S_1为S中的某曲面，而Γ为S_1上的任一封闭曲线，则有

$$\oint_{\Gamma}\boldsymbol{N}(\boldsymbol{X})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X}=0\ .\Big]$$

利用南森（Nansen）关系式或其它类似结果，证明由关系式

$$\mathbf{v}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{F}^{-T}\boldsymbol{N}(\boldsymbol{X})$$

所定义在即时构形上的矢量场$\mathbf{v}(\boldsymbol{x})$在曲面族$S$变形之后与之正交，并证明$\mathbf{v}(\boldsymbol{x})$在即时构形上满足以下与(A)相类似的关系式

$$\mathbf{v}\cdot\mathrm{curl}\,\mathbf{v}=0$$

如果进一步假定$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{X})$为一单位矢量，试证明处处与$\mathbf{v}(\boldsymbol{x})$相平行的单位矢量场$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$为

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{N})^{-1/2}\boldsymbol{F}^{-T}\boldsymbol{N}$$

（c）设有一由多层各向同性超弹性材料粘合而成的复合材料（各材料层不一定是平面的）。这些材料层构成（b）中的曲面族S，因此它们的单位法线矢量就由$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{X})$表示。作为一个连续介质，我们假定该复合材料是一个在B_r中相对于方向$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{X})$横观各向同性的超弹性体，因此我们将把其应变能看成是以下五个不变量的函数$W(J_1, J_2, J_3, J_4, J_5)$：

$$J_1=\mathrm{tr}\boldsymbol{C},\quad J_2=\frac{1}{2}\{(\mathrm{tr}\boldsymbol{C})^2-\mathrm{tr}\boldsymbol{C}^2\},$$

$$J_3=\det\boldsymbol{C},\quad J_4=(\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{N})\det\boldsymbol{C},$$

$$J_5=\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{C}\boldsymbol{N}.$$

试先说明J_4代表S中表面元面积的变化，然后再证明该弹性体中的柯西应力为

$$\boldsymbol{\sigma}=2J_3^{-1/2}\{J_3W_3\boldsymbol{I}+(W_1+J_1W_2)\boldsymbol{B}-W_2\boldsymbol{B}^2\}$$
$$+2J_3^{-1/2}J_4\{W_4(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n})+J_3^{-1}W_5(\boldsymbol{B}\boldsymbol{n})\otimes(\boldsymbol{B}\boldsymbol{n})\},\qquad(B)$$

式中，$W_i=\partial W/\partial J_i$（$i=1, 2, \cdots, 5$），$\boldsymbol{I}$为单位张量。

[你可假定以下关系式成立：

$$\frac{\partial(\det\boldsymbol{C})}{\partial C_{AB}}=(\det\boldsymbol{C})C^{-1}_{BA},$$

$$\frac{\partial C^{-1}_{CD}}{\partial C_{AB}}=-\frac{1}{2}(C^{-1}_{CA}C^{-1}_{DB}+C^{-1}_{CB}C^{-1}_{DA}).\ ]$$

（d）试用(B)证明等式

$$\sigma \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\sigma \qquad \text{(C)}$$

成立的必要和充分条件为：

$$n_1 n_2(\lambda_2^2-\lambda_1^2)(W_4-\lambda^{-2}_3 W_6)=0,$$
$$n_2 n_3(\lambda_3^2-\lambda_2^2)(W_4-\lambda^{-2}_1 W_5)=0,$$
$$n_3 n_1(\lambda_1^2-\lambda_3^2)(W_4-\lambda^{-2}_2 W_6)=0,$$

式中$\lambda_1{}^2$，$\lambda_2{}^2$，$\lambda_3{}^2$为$\boldsymbol{B}$的特征值；n_1，n_2，n_3为$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$沿$\boldsymbol{B}$的主轴方向的分量。从而推论：(i)如果$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$本身就沿$\boldsymbol{B}$的某主轴方向，则(C)肯定成立；(ii)反过来，如果(C)成立，且W_4和W_5反号，则$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$必沿$\boldsymbol{B}$的某主轴方向。（为简单起见，你可以只考虑$\lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3\neq\lambda_1$的情形）

（e）假定（c）中的复合材料由具有法线$\boldsymbol{e}_3$的平行平面构成。如果该材料经受变形（在直角坐标系下）

$$x_1=\lambda_1 X_1+\gamma\lambda_1 X_2,\quad x_2=\lambda_2 X_2,\quad x_3=\lambda_3 X_3,$$

式中λ_1，λ_2，λ_3，γ为正常数，试证明(C)式成立，并导出通用关系式：

$$\sigma_{11}-\sigma_{22}=\frac{\lambda_1^2(1+\gamma^2)-\lambda_2^2}{\gamma\lambda_1\lambda_2}\sigma_{12}.$$

2. 设有一不可压缩且各向同性的超弹性体，初始时为一环形楔块：

$$R_1\leqslant R\leqslant R_2,\quad -\Theta_0\leqslant\Theta\leqslant\Theta_0,\quad -H\leqslant Z\leqslant H,$$

式中R，Θ，Z为直角坐标系e中的柱坐标，R_1，R_2，Θ_0及H为正常数。该物体经历变形

$$x=\frac{1}{2}AR^2,\qquad y=C\Theta,\qquad z=\frac{Z}{AC}, \qquad \text{(D)}$$

式中x，y，z为e中的直角坐标，A和C为正常数。

（a）试证明用相对于e的直角坐标所表示的变形梯度张量$\boldsymbol{F}$可以写作

$$\boldsymbol{F}=\hat{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{R}_0,$$

式中$\boldsymbol{R}_0$为某正交张量，$\widehat{\boldsymbol{F}}$为变形梯度张量在柱坐标系中的表示：

$$\widehat{\boldsymbol{F}}=\begin{pmatrix} AR & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{C}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{AC} \end{pmatrix},$$

并验证(D)式表示的变形是等容的。

利用本构方程

$$\boldsymbol{\sigma}=-p\boldsymbol{I}+\psi_1\boldsymbol{B}+\psi_{-1}\boldsymbol{B}^{-1},$$

先证明该变形只借助于表面力就可以完全确定，然后在假定平行于y–z面的各平面上无张力的情况下找出压力p的表示式，并证明体内的应力分量为

$$\sigma_{xx}=0,$$

$$\sigma_{yy}=\psi_1\left\{\frac{AC^2}{2x}-2Ax\right\}+\psi_{-1}\left\{\frac{2x}{AC^2}-\frac{1}{2Ax}\right\},$$

$$\sigma_{zz}=\psi_1\left\{\frac{1}{A^2C^2}-2Ax\right\}+\psi_{-1}\left\{A^2C^2-\frac{1}{2Ax}\right\},$$

所有剪应力均为零。

（b）如果现在假定其应变能函数由新胡克关系式

$$W=\frac{1}{2}\mu(I-3)$$

所确定，式中μ为常数（可正可负），$I=\mathrm{tr}\boldsymbol{B}$，试先证明表面$z=H/AC$和表面$y=C\Theta_0$上的合成法向张力$N_z$和$N_y$分别为

$$N_z=\frac{\mu\Theta_0R_1^2}{2\overline{A}\,\overline{C}}\{2(\tau-1)-\overline{A}^4\overline{C}^2(\tau^2-1)\},$$

$$N_y=\frac{\mu HR_1}{2\overline{C}}\{2\overline{C}^2\ln\tau-\overline{A}^2(\tau^2-1)\},$$

式中

$$\overline{A}=AR_1,\quad \overline{C}=C/R_1,\quad \tau=R_2^3/R_1^3;$$

然后证明在表面 $y=C\Theta_0$ 上作用有一力偶 Me_z 且

$$M=\frac{\mu HR_1^3\overline{A}}{6\overline{C}}\{3\overline{C}^2(\tau-1)-\overline{A}^2(\tau^3-1)\}.$$

按实际情况分析，你认为 M 为正还是为负？

（c）假设变形体表面上的所有合成张力均为零，试确定 $\overline{A}$ 和 $\overline{C}$ 依赖于 τ 的表示式，并证明相应的力偶 M 应为

$$M=\frac{1}{6}\mu HR_1^3\left(\frac{\tau+1}{2}\right)^{-7/6}\left(\frac{\ln\tau}{\tau-1}\right)^{-1/6}(\tau^3-1)F(\tau),$$

式中

$$F(\tau)=\frac{3}{2}\cdot\frac{\tau+1}{\tau^2+\tau+1}-\frac{\ln\tau}{\tau-1}.$$

（d）假设环形楔块非常薄，故有

$$\tau=1+\epsilon,\qquad 0<\epsilon\ll 1,$$

试通过将 $F(1+\epsilon)$ 展开至 ϵ^2 阶的项来证明

$$M=-\frac{1}{12}\mu HR_1^3\epsilon^3+0(\epsilon^4).$$

借助于这一结果，你认为 μ 应具有怎样的符号才会与客观实际的响应相符？

1986年考题

1. 某弹性体的运动 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t)$ 除开一奇异曲面 S 之外处处两次连续可导，而在曲面 S 上速度 $\dot{\boldsymbol{x}}$ 和变形梯度 $\boldsymbol{F}$（其分量为 $F_{iA}=\partial x_i/\partial X_A$）连续，但加速度 $\ddot{\boldsymbol{x}}$ 有跳跃

$$\boldsymbol{a}=[\ddot{\boldsymbol{x}}].$$

因此曲面 S 实际上是一**加速度波**（注意曲面 S 的定义域为四维空间 $(\boldsymbol{X},t)$）。

（a）借助通常定义下的波前导数

$$\frac{\hat{\partial}\varphi}{\partial X_A}=\frac{\partial\varphi}{\partial X_A}+\frac{m_A}{V}\dot{\varphi},$$

式中，V是加速度波相对于物体的传播速度，$m_A=F_{iA}n_i$，这里$\boldsymbol{n}$为波面的单位法矢量，证明：如果函数φ在波面上连续，则有

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right]=-\frac{n_i}{V}[\dot{\varphi}].$$

利用这一结果及标准关系式

$$[\dot{F}_{iA}]=-\frac{1}{V}a_im_A$$

进一步证明

$$\left[\frac{\partial B_{kl}}{\partial x_i}\right]=\frac{1}{V^2}n_i(a_kB_{lr}+a_lB_{kr})n_r.$$

（b）某可压缩各向同性弹性体具有本构律

$$\sigma_{ij}=I_3^{-1/2}\{f(I_3)\delta_{ij}+(aI_1+b)B_{ij}+cB_{ij}^2\},\qquad(A)$$

式中，σ_{ij}和B_{ij}分别为柯西应力和左柯西-格林应变张量的分量，

$$I_1=\mathrm{tr}\boldsymbol{B},\qquad I_3=\det\boldsymbol{B},$$

$f(\cdot)$为某给定函数，a、b、c为常数。

试利用（a）中的结果及柯西运动方程

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}=\rho\ddot{x}_j$$

证明任何加速度波的波速V和波幅$\boldsymbol{a}$必满足

$$\{\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{n})-\rho_0V^2\boldsymbol{I}\}\boldsymbol{a}=0,\qquad(B)$$

式中，$\rho_0=\rho I_3^{1/2}$，**传音张量**$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{n})$的定义为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{n})=&\{2I_3f'(I_3)-f(I_3)\}\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}\\&+\{(aI_1+b)\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}\boldsymbol{n}+c\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{n}\}\boldsymbol{I}\\&+c(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}\boldsymbol{n})\boldsymbol{B}+(2a+c)(\boldsymbol{B}\boldsymbol{n})\otimes(\boldsymbol{B}\boldsymbol{n}).\end{aligned}$$

〔提示：你可以利用以下结果：

$$\frac{\partial I_1}{\partial B_{kl}}=\delta_{kl},\qquad \frac{\partial I_3}{\partial B_{kl}}=I_3B^{-1}_{lk},$$

$$\frac{\partial B_{ij}}{\partial B_{kl}}=\frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}),$$

$$\frac{\partial B^2_{ij}}{\partial B_{kl}}=\frac{1}{2}(\delta_{ik}B_{jl}+\delta_{jl}B_{ik}+\delta_{il}B_{jk}+\delta_{jk}B_{il}).\ )$$

若某材料无论应变$\boldsymbol{B}$为何，总能传播纵波（即波幅$\boldsymbol{a}$与传播方向$\boldsymbol{n}$平行的波），则称该材料为**阿达玛**（Hadamard）**材料**。通过研究矢量$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}$，试证如果

$$c=-a,\qquad (C)$$

则由(A)所定义的材料为阿达玛**材**料。

在下面的小题(c)和(d)中，我们假定(C)成立。

(c)传播方向$\boldsymbol{n}$与$\boldsymbol{B}$的主轴平行的波称为**主波**。设有一主波满足$\boldsymbol{B}\boldsymbol{n}=\lambda_1{}^2\boldsymbol{n}$，证明其相应的传音张量可简化为

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{n})=\{2I_3f'(I_3)-f(I_3)+a\lambda_1^4\}\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}$$
$$+\lambda_1^2\{a(\lambda_2^2+\lambda_3^2)+b\}\boldsymbol{I}-a\lambda_1^2\boldsymbol{B},$$

并证明该**材**料能传播波速V_1由下式所定义的纵波：

$$\rho_0V_1^2=2I_3f'(I_3)-f(I_3)+a\lambda_1^2(\lambda_2^2+\lambda_3^2)+b\lambda_1^2.\qquad (D)$$

〔注意：如果波幅$\boldsymbol{a}$为一单位矢量，则由(B)知其相应的波速为$\rho_0V^2=\boldsymbol{a}\cdot Q(n)\boldsymbol{a}$。〕

最后证明：除能传播纵波外，该材料还能传播两个波速由下式所定义的横波（即波幅$\boldsymbol{a}$满足$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}=0$的波）：

$$\rho_0V_2^2=a\lambda_1^2\lambda_3^2+b\lambda_1^2,\qquad \rho_0V_3^2=a\lambda_1^2\lambda_2^2+b\lambda_1^2.\qquad (E)$$

(d)证明V_2^2和V_3^2均为正（从而V_2和V_3均为实数）的必要和充分条件为

$$a\geqslant 0,\quad b\geqslant 0,$$

且上式两等号不能同时成立，并进一步找出V_1为实数的必要和充分条件。

2. 设有一柱形环，初始时占据着区域

$$R_1 \leqslant R \leqslant R_2, \qquad 0 \leqslant \Theta \leqslant 2\pi, \qquad 0 \leqslant Z \leqslant L,$$

式中（R，Θ，Z）为物质柱坐标，R_1，R_2及L为正常数。假使我们将该环在平面$\Theta=0$，2π处截开，并令其经受变形

$$r=R, \qquad \theta=\Theta, \qquad z=Z+\frac{\alpha L}{2\pi}\Theta, \tag{A}$$

式中（r，θ，z）为与（R，Θ，Z）享有同一参照直角坐标系的柱坐标，α为一正常数。试粗略画出物体的变形，并求出柱坐标下变形梯度$\hat{\boldsymbol{F}}$的物理分量（参见1985年考题2(a)），再证明该变形是等容的。

(a)假定该环由具有下列本构方程的不可压缩各向同性弹性材料所组成：

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}=-p\boldsymbol{I}+\psi_1\hat{\boldsymbol{B}}+\psi_{-1}\hat{\boldsymbol{B}}^{-1},$$

式中$\hat{\boldsymbol{\sigma}}$代表柯西应力的物理分量，$p$为任意压力，$\hat{\boldsymbol{B}}=\hat{\boldsymbol{F}}\hat{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{T}}$，$\psi_1$和$\psi_{-1}$仅为主不变量$\mathrm{I}=\mathrm{tr}\hat{\boldsymbol{B}}$和$\mathrm{II}=\mathrm{tr}\hat{\boldsymbol{B}}^{-1}$的函数。

试写出应力的非零物理分量，并推导出通用关系式

$$\sigma_{zz}-\sigma_{\theta\theta}=\frac{\alpha L}{2\pi r}\sigma_{\theta z}.$$

验证$\mathrm{I}=3+\left(\frac{\alpha L}{2\pi}\right)^2\frac{1}{r^2}=\mathrm{II}$，从而响应函数$\psi_1$和$\psi_{-1}$可写为

$$\psi_1=\tilde{\psi}_1(r^2), \qquad \psi_{-1}=\tilde{\psi}_{-1}(r^2)$$

假设在$r=r_1$处$\sigma_{rr}=0$，试利用柱坐标下的平衡方程推导出正应力的以下表示式：

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{rr}&=\left(\frac{\alpha L}{2\pi}\right)^2\int_{r_1}^{r}\frac{\tilde{\psi}_{-1}(r^2)}{r^3}\mathrm{d}r,\\
\sigma_{\theta\theta}&=\sigma_{rr}+\left(\frac{\alpha L}{2\pi}\right)^2\frac{\tilde{\psi}_{-1}(r^2)}{r^2},\\
\sigma_{zz}&=\sigma_{rr}+\left(\frac{\alpha L}{2\pi}\right)^2\frac{\tilde{\psi}_1(r^2)}{r^2},
\end{aligned}\right\} \tag{B}$$

并证明变形(A)可仅借助表面力来完全确定。

(b)写出(未变形体的)表面 $Z=L$ 变形后的表示式，并证明其外向单位法矢量 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 为

$$\hat{\boldsymbol{n}}=-\frac{\alpha\beta L}{2\pi r}\boldsymbol{e}_\theta+\beta\boldsymbol{e}_z, \tag{C}$$

式中，$\beta=\left(1+\frac{\alpha^2L^2}{4\pi^2r^2}\right)^{-1/2}$，$\{\boldsymbol{e}_r,\ \boldsymbol{e}_\theta,\ \boldsymbol{e}_z\}$为通常的柱坐标基矢量。证明该曲面上的张力矢量为

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{n}}=\beta\left(-\frac{\alpha L}{2\pi r}\sigma_{\theta\theta}+\sigma_{\theta z}\right)\boldsymbol{e}_\theta+\beta\left(-\frac{\alpha L}{2\pi r}\sigma_{\theta z}+\sigma_{zz}\right)\boldsymbol{e}_z$$

从而证明沿z-方向的合力为

$$N_z=2\pi\int_{r_1}^{r_2}\left(-\frac{\alpha L}{2\pi r}\sigma_{\theta z}+\sigma_{zz}\right)r\mathrm{d}r. \tag{D}$$

[提示：(1)任一标量函数$\psi(r,\ \theta,\ z)$的梯度为

$$\mathrm{grad}\psi=\frac{\partial\psi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\ \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta+\frac{\partial\psi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z.$$

(2)在表面 $Z=L$ 变形后的曲面上进行面积分的面积元为

$$\frac{r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}{\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{e}_z}. \quad]$$

再证明表面$\Theta=2\pi$上沿z-方向的切力合力为

$$T_z=\frac{\alpha L^2}{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}\{\tilde{\psi}_1(r^2)-\tilde{\psi}_{-1}(r^2)\}\frac{\mathrm{d}r}{r}. \tag{E}$$

(c)假定某沿螺线方向封闭缠绕的弹簧的一圈的伸展可由变形(A)来表示，因此我们可以令

$$R_2-R_1=L,\qquad L/R_2\ll 1,$$

从而现在的边缘$\Theta=2\pi$是一边长为L且远离z轴的正方形。

试近似地将(D)和(E)中的被积函数用它们在上限 $r=r_2=R_2$ 处的取值来代替，以此证明

$$\frac{N_z}{T_z}\simeq\alpha\frac{\widetilde{\psi}_{-1}}{\widetilde{\psi}_1-\widetilde{\psi}_{-1}},\qquad(F)$$

式中的响应函数在 $r=R_2$ 处取值。

使弹簧伸长的力为 T_z，该力应看做是作用在弹簧的整个圆形横截面上。试验证弹簧的伸长率为 α，并证明弹簧的有效杨氏模量为

$$E=\frac{1}{2\pi^2}\left[\frac{L}{R_2}\right]^3(\widetilde{\psi}_1-\widetilde{\psi}_{-1}),\qquad(G)$$

式中的响应函数也是在 $r=R_2$ 处取值。

弹簧的构成材料在小应变简单拉伸下的杨氏模量为

$$E_1=3(\widetilde{\psi}_1(\infty)-\widetilde{\psi}_{-1}(\infty))。$$

试从产生拉伸所需要的力和拉伸本身这两个量值方面来论述一下该材料与用该材料做成的弹簧在力学性能上的差别。

在实际中不可能施加 N_z 这样一个法向张力来维持(A)式中的变形，因此 N_z 值常常被忽略不计。你认为这样做会使杨氏模量的表示式失效吗？

1987年考题

1. 一具有本构关系

$$\sigma=f(F,\dot{F})\qquad(A)$$

的材料的**对称群**是这样一些（常数）张量 S（不一定是正交的）的所有集合，这些张量 S 使得关系式

$$f(FS,\dot{F}S)=f(F,\dot{F})$$

对所有具有正行列式值的张量 F 和所有 $\dot{F}$ 都成立。这里的 σ 代表柯西应力，F 代表变形梯度张量，而 $\dot{F}$ 则为其物质时间导数。

令 G_0 代表所有标准正交张量的集合，并令 G_1 为所有满足 $\det S=+1$ 的张量 S 的集合，因此 G_0 为 G_1 的子集。

我们将各向同性弹性体定义为具有本构方程

$$\sigma=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{F}) \tag{B}$$

和对称群G_0的弹性材料，而将流体定义为具有本构方程（A）和对称群G_1的材料。

（a）证明本构方程

$$\sigma=\tilde{\boldsymbol{f}}(\det\boldsymbol{F},\boldsymbol{L}), \tag{C}$$

是式（A）的一个特例，式中$\boldsymbol{L}$代表速度梯度，并证明按照以上的定义它必定代表一种流体。

〔注意：客观性质原理使得本构方程(C)可以简化为书中所定义过的赖纳-里夫林形式。〕

（b）证明：对于一个各向同性弹性体，本构方程(B)可以写成以下形式：

$$\sigma=\hat{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{B}),$$

式中$\boldsymbol{B}$为左柯西-格林应变张量。

〔提示：试利用$\boldsymbol{F}$的左极分解。〕

运用客观性原理进一步证明对所有标准正交张量$\boldsymbol{Q}$，$\hat{\boldsymbol{g}}$都得满足

$$\hat{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{Q}\,\hat{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{B})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}},$$

从而求出$\hat{\boldsymbol{g}}(\cdot)$的明显表达式，式中“T”代表转置。

（c）试将客观性原理用于本构方程（A），并由此证明该式必须简化为

$$\sigma=\boldsymbol{F}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{C},\ \dot{\boldsymbol{C}})\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}, \tag{D}$$

式中的$\boldsymbol{h}(\cdot,\ \cdot)$为右柯西-格林应变张量$\boldsymbol{C}$和其物质时间导数$\dot{\boldsymbol{C}}$的对称张量函数。

〔提示：试利用$\boldsymbol{F}$的右极分解。〕

如果题中的材料还是各向同性的并具有对称群G_0，那么我们还得对$\boldsymbol{h}$加以怎样的限制条件？

直接验证以下的特殊形式

$$\sigma=\alpha\boldsymbol{I}+2\mu_1\boldsymbol{B}+\beta(\mathrm{tr}\boldsymbol{D})\boldsymbol{I}+2\mu_2\boldsymbol{D}, \tag{E}$$

既符合客观性原理，又是各向同性的，且具有对称群G_0。式中$\boldsymbol{I}$代表单位张量，$\boldsymbol{D}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}})$，$\alpha$，$\beta$，$\mu_1$及$\mu_2$为常数。将式(E)改写成本构方程(D)的形式，并由此写出$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{C},\ \dot{\boldsymbol{C}})$的适当形式。

2. 设有一由不可压缩各向同性材料所组成的空管：

$$R_1\leqslant R\leqslant R_2,\quad -\pi\leqslant\Theta\leqslant\pi,\quad -\pi\leqslant Z\leqslant\pi,$$

式中（R，Θ，Z）为直角坐标系e中的柱坐标，R_1和R_2为正常数。试先证明该空管在经历以下变形后仍为空管：

$$r=\alpha^{-1/2}R,\quad \theta=Z,\quad z=-\alpha\Theta,\qquad (\mathrm{A})$$

式中（r，θ，z）也是e中的柱坐标，α为正常数。然后求出变形后空管的大小，并用简图说明怎样在实际中获得这样的变形。

（a）验证变形(A)是等容的。假使材料的本构律具有通常的形式：

$$\boldsymbol{\sigma}=-p\boldsymbol{I}+\psi_1\boldsymbol{B}+\psi_{-1}\boldsymbol{B}^{-1},$$

试证明该变形仅仅借助于表面力就可完全确定。另外假设空管内表面上的张力为零，试推出柯西应力径向分量的以下表达式：

$$\sigma_{rr}(r)=\int_{r_1}^{r}\left\{\psi_1\left(r^2-\frac{1}{\alpha}\right)+\psi_{-1}\left(\frac{1}{r^2}-\alpha\right)\right\}\frac{\mathrm{d}r}{r},\qquad (\mathrm{B})$$

式中r_1代表变形后空管的内半径。另外再求出其它非零应力分量的表达式。

如果我们假设空管外表面上的张力也为零，试证明空管端面上的法向合力和作用于任一平面$\theta=$常数之上的力偶分别为$N\hat{\boldsymbol{Z}}$和$-M\hat{\boldsymbol{Z}}$，且

$$N=\pi\int_{r_1}^{r_2}\left\{\psi_1\left(\frac{2\alpha}{r^2}-r^2-\frac{1}{\alpha}\right)+\psi_{-1}\left(\frac{2r^2}{\alpha}-\frac{1}{r^2}-\alpha\right)\right\}r\mathrm{d}r,$$

$$M=\frac{1}{2}\int_{r_1}^{r_2}\left\{\psi_1\left(r^2-\frac{1}{\alpha}\right)+\psi_{-1}\left(\frac{1}{r^2}-\alpha\right)\right\}r\mathrm{d}r,\qquad (\mathrm{C})$$

式中$\hat{\boldsymbol{z}}$代表z-方向上的单位矢量，r_2为空管变形后的外半径。

从实际情况出发，指出M应具有怎样的符号？

（b）现在我们进一步假定空管的组成材料为穆尼-里夫林材料（即假定ψ_1和ψ_{-1}分别为常数μ_1和μ_2）。〔注意：我们并不对μ_1和μ_2的符号作任何假设。〕

证明：若假设空管的外表面无张力，则α必为

$$\alpha=\left[\frac{\mu_1 f(z)}{\mu_2 f(1/z)}\right]^{1/2}, \tag{D}$$

式中$z=R_2^2>1$，$f(z)\equiv z-1-\ln z$，且为方便起见，我们已将R_1值假定为1。

求证$z=1$为$f(z)=0$的二重根，且$f(z)$在其它任何正z值处为正。利用这一结果，论述μ_1和μ_2具有怎样的相对符号时材料的响应才是符合实际的。

（c）证明：借助于(D)来消掉α，式(C)中力偶M的表示式可以改写为以下形式（针对穆尼-里夫林材料）：

$$\frac{8f(z)}{\mu_2}M=(z-1)^2\left(\ln z-\frac{z-1}{z}\right)-2(z-1-\ln z)^2$$

$$\equiv g(z).$$

通过假定空管的壁很薄，进一步证明当$z-1\to 0$时，

$$g(z)=\frac{1}{36}(z-1)^6+O((z-1)^7).$$

你认为常数μ_2是为正还是为负？请给出理由。

附录二　习题解答

第一章

1. 设$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=a$，则球张量$\boldsymbol{A}_2=\frac{1}{3}a\boldsymbol{I}$在$\boldsymbol{A}$中的取法是唯一的。令$\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}_2$，则$\boldsymbol{A}_1$也是唯一的。且$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}_1=\mathrm{tr}\boldsymbol{A}-\mathrm{tr}\boldsymbol{A}_2=a-a=0$。如令$\boldsymbol{A}'$表示$\boldsymbol{A}$的偏张量，即有$\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{A}-\frac{1}{3}(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}$.

2. 设$\boldsymbol{A}$对应于正规正交基$e=\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3\}$的分量为$A_{ij}$，则由式(51)有

$$\mathrm{II}_A=\frac{1}{2}(A_{pp}^2-A_{pq}A_{qp})=\frac{1}{2}\{(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^2-\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2\}\qquad(\mathrm{A})$$

再由凯莱-哈密顿定理有

$$\boldsymbol{A}^3-\mathrm{I}_A\boldsymbol{A}^2+\mathrm{II}_A\boldsymbol{A}-\mathrm{III}_A\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O},$$

两边取迹，再以式(A)和$\mathrm{I}_A=\mathrm{tr}\boldsymbol{A}$代入得

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^3-(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2+\frac{1}{2}\{(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^2-\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2\}\mathrm{tr}\boldsymbol{A}-3\mathrm{III}_A=0.$$

所以

$$\mathrm{II}_A=\frac{1}{6}\{(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^3-3\mathrm{tr}\boldsymbol{A}\,\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2+2\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^3\}.$$

3. 设$A_{k1}=a_k, A_{k2}=b_k, A_{k3}=c_k$，$B_{k1}=d_k$，$B_{k2}=e_k$，$B_{k3}=f_k$，则有

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})(\boldsymbol{d},\boldsymbol{e},\boldsymbol{f})=\det\boldsymbol{A}\det\boldsymbol{B}=\det\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\det\boldsymbol{B}$$
$$=\det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}),$$

而

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})_{ij}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})_{ip}B_{pj}=A_{pi}B_{pj},$$

所以

$$\det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})=\begin{vmatrix}A_{p1}B_{p1} & A_{p1}B_{p2} & A_{p1}B_{p3}\\ A_{p2}B_{p1} & A_{p2}B_{p2} & A_{p2}B_{p3}\\ A_{p3}B_{p1} & A_{p3}B_{p2} & A_{p3}B_{p3}\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{e} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{f} \end{vmatrix},$$

于是本题第一关系式得证。

为证第二关系式，令$A_{k1}=a_k$，$A_{k2}=c_k$，$A_{k3}=e_k$，$B_{k1}=b_k$，$B_{k2}=d_k$，$B_{k3}=f_k$，利用和前面证明相同的方法得$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{e}][\boldsymbol{b},\boldsymbol{d},\boldsymbol{f}]=\det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})$；再令

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{d}+\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{f},$$

则有

$$K_{ij}=a_ib_j+c_id_j+e_if_j=A_{i1}B_{j1}+A_{i2}B_{j2}+A_{i3}B_{j3}$$
$$=A_{ir}B_{jr}=A_{ir}(B^{\mathrm{T}})_{rj}=(AB^{\mathrm{T}})_{ij}.$$

故有，

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}},$$

$$\det\boldsymbol{K}=\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})=\det\boldsymbol{A}\det\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\det\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\det\boldsymbol{B}=\det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})$$

因而第二关系式也得证。

4. 设$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$对应于正规正交基$e=\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$的分量为$A_{ij}$、$B_{ij}$，则有

$$\det\boldsymbol{A}=\varepsilon_{pqr}A_{p1}A_{q2}A_{r3},\quad \det\boldsymbol{B}=\varepsilon_{\rho\sigma\tau}B_{\rho1}B_{\sigma2}B_{\tau3},$$

因而

$$\det\boldsymbol{A}\det\boldsymbol{B}=\varepsilon_{pqr}\,\varepsilon_{\rho\sigma\tau}\,A_{p1}\,A_{q2}\,A_{r3}\,B_{\rho1}\,B_{\sigma2}\,B_{\tau3}.\quad(\mathrm{A})$$

另外，因为$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$的$(i,\ j)$分量为$A_{ri}B_{rj}$，故有

$$\det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})=\varepsilon_{pqr}\,A_{\rho1}\,B_{r1}\,A_{\sigma2}\,B_{q2}\,A_{\tau3}\,B_{\sigma3}$$
$$=A_{p1}B_{r1}A_{\rho2}B_{q2}A_{\sigma3}B_{\tau3}-A_{p1}B_{r1}A_{\sigma3}B_{q2}A_{\tau2}B_{\sigma3}$$
$$+A_{p2}B_{r1}A_{\sigma3}B_{q2}A_{\tau1}B_{\sigma3}-A_{p2}B_{r1}A_{\tau1}B_{q2}A_{\sigma3}B_{\sigma3}$$
$$+A_{p3}B_{r1}A_{\tau1}B_{q2}A_{\sigma2}B_{\sigma3}-A_{p3}B_{r1}A_{q2}B_{q2}A_{\sigma1}B_{\sigma3}$$
$$=(\delta_{\rho p}A_{p1}B_{r1})(\delta_{\sigma q}A_{q2}B_{\sigma2})(\delta_{\tau\sigma}A_{r3}B_{\sigma3})$$
$$-(\delta_{\rho p}A_{p1}B_{r1})(\delta_{\tau\sigma}A_{r3}B_{\sigma2})(\delta_{q\sigma}A_{q2}B_{\sigma3})$$
$$+(\delta_{\sigma p}A_{q2}B_{r1})(\delta_{\tau\sigma}A_{r3}B_{\sigma2})(\delta_{p\sigma}A_{p1}B_{\sigma3})$$
$$-(\delta_{\tau p}A_{q2}B_{r1})(\delta_{p\sigma}A_{p1}B_{\sigma2})(\delta_{\tau\sigma}A_{r3}B_{\sigma3})$$

$$+(\delta_{rx}A_{r3}B_{x1})(\delta_{p\sigma}A_{p1}B_{\sigma 2})(\delta_{q\sigma}A_{q2}B_{\sigma 3})$$
$$-(\delta_{rx}A_{r3}B_{x1})(\delta_{q\sigma}A_{q2}B_{\sigma 2})(\delta_{p\sigma}A_{p1}B_{\sigma 3})$$
$$=(A_{p1}A_{q2}A_{r3}B_{x1}B_{\sigma 2}B_{\sigma 3})\{\delta_{px}(\delta_{q\rho}\delta_{r\sigma}-\delta_{r\rho}\delta_{q\sigma})$$
$$+\delta_{qx}(\delta_{r\rho}\delta_{p\sigma}-\delta_{p\rho}\delta_{r\sigma})+\delta_{rx}(\delta_{p\rho}\delta_{q\sigma}-\delta_{q\rho}\delta_{p\sigma})\}. \quad (B)$$

由$\det\boldsymbol{A}\det\boldsymbol{B}=\det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})$，且$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$均为任意的，故由(A)，(B)二式可得

$$\varepsilon_{pqr}\varepsilon_{x\rho\sigma}=\delta_{px}(\delta_{q\rho}\delta_{r\sigma}-\delta_{q\sigma}\delta_{r\rho})+\delta_{p\rho}(\delta_{q\sigma}\delta_{rx}-\delta_{qx}\delta_{r\sigma})$$
$$+\delta_{p\sigma}(\delta_{qx}\delta_{r\rho}-\delta_{q\rho}\delta_{rx}). \quad (C)$$

上式推导中对(B)式右方作了一些下标字母更替，将(C)式中的p、q、r、π、ρ、σ换为i、j、k、l、m、n，即得原题要证的关系式。

(a)在完成(C)式下标字母更替后，令$k=n=p$，

$$\varepsilon_{ijp}\varepsilon_{lmp}=\delta_{il}(\delta_{jm}\delta_{pp}-\delta_{jp}\delta_{pm})+\delta_{im}(\delta_{jp}\delta_{pl}-\delta_{ji}\delta_{pp})$$
$$+\delta_{ip}(\delta_{jl}\delta_{pm}-\delta_{jm}\delta_{pl})=\delta_{il}(3\delta_{jm}-\delta_{jm})+\delta_{im}(\delta_{jl}-3\delta_{jl})$$
$$+(\delta_{jl}\delta_{im}-\delta_{jm}\delta_{il})=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}. \quad (D)$$

(b)在(D)式中将p换为q，并令$j=m=p$，

$$\varepsilon_{ipq}\varepsilon_{lpq}=\delta_{il}\delta_{pp}-\delta_{ip}\delta_{pl}=3\delta_{il}-\delta_{il}=2\delta_{il}.$$

5. (i)由定义

$$\boldsymbol{A}^{*}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}) \quad \forall\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\in\mathbf{E}. \quad (A)$$

设$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{A}^{*}$对应于正规正交基$e=\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3\}$的分量为$A_{ij}$、$A^{*}_{ij}$。在(A)式中令$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_i$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_j$，

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{A}\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i)\times(\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_j)=(A_{pi}\boldsymbol{e}_p)\times(A_{qj}\boldsymbol{e}_q)$$
$$=A_{pi}A_{qj}(\boldsymbol{e}_p\times\boldsymbol{e}_q)=(\pm\varepsilon_{pqr}A_{pi}A_{qj})\boldsymbol{e}_r. \quad (B)$$
$$\boldsymbol{A}^{*}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\pm\varepsilon_{ijp}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{e}_p=(\pm\varepsilon_{ijp}A^{*}_{rp})\boldsymbol{e}_r. \quad (C)$$

令(B)和(C)相等，得

$$\pm\varepsilon_{ijp}A^{*}_{kp}=\pm\varepsilon_{pqk}A_{pi}A_{qj},$$

此式中的i、j换为r、s，并在两倾乘以ε_{rsi}，则

$$\varepsilon_{rsi}\varepsilon_{rsp}A^{*}_{kp}=\varepsilon_{rsi}\varepsilon_{pqk}A_{pr}A_{qs}. \quad (D)$$

由题4的(b)，$\varepsilon_{rsi}\varepsilon_{rsp}=2\delta_{ip}$，(D)式左侧为$2\delta_{ip}A^{*}_{kp}=2A^{*}_{ki}$，令

其等于(D)式的右侧，并将k、i换为i、j，即得

$$A^*_{ij}=\frac{1}{2}\varepsilon_{ipq}\varepsilon_{jrs}A_{pr}A_{qs}. \qquad (E)$$

由(E)式，

$$(A^T{}_{ij})^*=\frac{1}{2}\varepsilon_{ipq}\varepsilon_{jrs}A_{rp}A_{sq}=\frac{1}{2}\varepsilon_{irs}\varepsilon_{jpq}A_{pr}A_{qs}=(A^*_{ij})^T,$$

故有

$$(\boldsymbol{A}^T)^*=(\boldsymbol{A}^*)^T. \qquad (F)$$

(ii)(*a*)由式(39)，$\boldsymbol{A}^{-1}=(\det\boldsymbol{A}^T)^{-1}(\boldsymbol{A}^T)^*$，再利用(i)中(F)式，

$$\boldsymbol{A}^*=(\det\boldsymbol{A})(\boldsymbol{A}^T)^{-1}.$$

因而有

$$\det\boldsymbol{A}^*=(\det\boldsymbol{A})^3(\det\boldsymbol{A})^{-1}=(\det\boldsymbol{A})^2.$$

又

$$(\boldsymbol{A}^*)^*=(\det\boldsymbol{A}^*)\{(\boldsymbol{A}^*)^T\}^{-1}=(\det\boldsymbol{A})^2\{(\det\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}\}^{-1}$$
$$=(\det\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}.$$

(*b*)利用本题(i)中(E)式及题3(*a*)中(D)式，

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^*=\frac{1}{2}\varepsilon_{spq}\varepsilon_{sr}A_{pr}A_{qs}$$

$$=\frac{1}{2}(\delta_{pr}\delta_{qs}-\delta_{ps}\delta_{qr})A_{pr}A_{qs}$$

$$=\frac{1}{2}\{A_{pp}A_{qq}-A_{pq}A_{qp}\}$$

$$=\frac{1}{2}\{(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^2-\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2\}=\mathbf{I}_A.$$

(*c*)由$\boldsymbol{A}^*=(\det\boldsymbol{A})(\boldsymbol{A}^T)^{-1}=(\det\boldsymbol{A}^T)(\boldsymbol{A}^T)^{-1}$，

$$(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=(\det\boldsymbol{A}^T)\{(\boldsymbol{A}^T)^{-1}\boldsymbol{a}\}\times\boldsymbol{b},$$

$$\{(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}\}\cdot\boldsymbol{c}=(\det\boldsymbol{A}^T)[(\boldsymbol{A}^T)^{-1}\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{c}]$$

$$\forall c\in \mathbf{E}. \qquad (A)$$

另外，

$$\boldsymbol{A}\{\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})\}\cdot\boldsymbol{c}=\{\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})\}\cdot(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c})=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}]. \qquad (B)$$

因 c 为任意的，由(A)、(B)二式得

$$\boldsymbol{A}\{\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})\}=(\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}$$

（同法可证$\boldsymbol{A}\{(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}\}=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{b})\ \ \forall\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\in\mathbf{E}$.）

$$(d)\text{令}\boldsymbol{L}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\otimes(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d})=(a_p\boldsymbol{e}_p\times c_q\boldsymbol{e}_q)\otimes(b_x\boldsymbol{e}_x\times d_o\boldsymbol{e}_o)$$

$$=\varepsilon_{pqr}\varepsilon_{xo\cdot}a_pc_qb_xd_o\boldsymbol{e}_r\otimes\boldsymbol{e}_{\cdot},$$

故有 $$L_{ij}=\varepsilon_{pqi}\varepsilon_{xoj}a_pc_qb_xd_o. \qquad (C)$$

再设 $$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{d},$$

由本题(i)中(E)式，

$$k^{*}_{ij}=\frac{1}{2}\varepsilon_{ipq}\varepsilon_{jrs}k_{pr}k_{qs}$$

$$=\frac{1}{2}\varepsilon_{ipq}\varepsilon_{jrs}(a_pb_r+c_pd_r)(a_qb_s+c_qd_s)$$

$$=\frac{1}{2}\varepsilon_{ipq}\varepsilon_{jrs}(a_pa_qb_rb_s+a_pb_rc_qd_s+a_qb_sc_pd_r+c_pc_qd_rd_s).$$

上式中各项p和q或r和s取相同值时$\varepsilon_{ipq}\varepsilon_{jrs}=0$，括号中第一项与最后一项当$p$与$q$互换时数值不变，但$\varepsilon_{ipq}$却改号，故求和后彼此抵消。括号中第二、三两项之一$p$与$q$，$r$与$s$同时互换时两项相同，而$\varepsilon_{ipq}\varepsilon_{jrs}$仍为＋1。故有

$$k^{*}_{ij}=\varepsilon_{ipq}\varepsilon_{jrs}a_pc_qb_rd_s. \qquad (D)$$

由(C)、(D)二式知 $L_{ij}=k^{*}_{ij}$，

即有 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{k}^{*}$.

问题得证。

6. 设取$\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3\}$为正规正交基，则

$[\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3]=1$. 并令

$$D=\det(\alpha\boldsymbol{A}+\beta\boldsymbol{B})=\det(\alpha\boldsymbol{A}+\beta\boldsymbol{B})[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$$

$$
\begin{aligned}
&=[(\alpha\boldsymbol{A}+\beta\boldsymbol{B})\boldsymbol{e}_1,\ (\alpha\boldsymbol{A}+\beta\boldsymbol{B})\boldsymbol{e}_2,\ (\alpha\boldsymbol{A}+\beta\boldsymbol{B})\boldsymbol{e}_3]\\
&=[\,(\alpha\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_1,\ (\alpha\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_2,\ (\alpha\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_3]\\
&\quad+[(\alpha\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_1,(\alpha\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_2,(\beta\boldsymbol{B})\boldsymbol{e}_3]\\
&\quad+[(\alpha\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_1,\ (\beta\boldsymbol{B})\boldsymbol{e}_2,\ (\alpha\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_3]\\
&\quad+[(\alpha\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_1,\ (\beta\boldsymbol{B})\boldsymbol{e}_2,\ (\beta\boldsymbol{B})\boldsymbol{e}_3]\\
&\quad+[(\beta\boldsymbol{B})\boldsymbol{e}_1,\ (\alpha\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_2,\ (\alpha\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_3]\\
&\quad+[(\beta\boldsymbol{B})\boldsymbol{e}_1,\ (\alpha\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_2,\ (\beta\boldsymbol{B})\boldsymbol{e}_3]\\
&\quad+[(\beta\boldsymbol{B})\boldsymbol{e}_1,\ (\beta\boldsymbol{B})\boldsymbol{e}_2,\ (\alpha\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_3]\\
&\quad+[(\beta\boldsymbol{B})\boldsymbol{e}_1,\ (\beta\boldsymbol{B})\boldsymbol{e}_2,\ (\beta\boldsymbol{B})\boldsymbol{e}_3].
\end{aligned}
$$

分析其中各项：

$$[(\alpha\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_1,\ (\alpha\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_2,\ (\alpha\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_3]=\alpha^3\det\boldsymbol{A}, \tag{A}$$

$$[(\beta\boldsymbol{B})\boldsymbol{e}_1,\ (\beta\boldsymbol{B})\boldsymbol{e}_2,\ (\beta\boldsymbol{B})\boldsymbol{e}_3]=\beta^3\det\boldsymbol{B}, \tag{B}$$

$$
\begin{aligned}
&[(\alpha\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_1,\ (\alpha\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_2,\ (\beta\boldsymbol{B})\boldsymbol{e}_3]\\
&=\alpha^2\beta[\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_3]\\
&=\alpha^2\beta\{(\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1)\times(\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_2)\}\cdot(\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_3)\\
&=\alpha^2\beta\{\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2)\}\cdot(\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_3)\\
&=\alpha^2\beta(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2)\cdot\{(\boldsymbol{A}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{B})\boldsymbol{e}_3\}\\
&=\alpha^2\beta[\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ (\boldsymbol{A}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{B})\boldsymbol{e}_3].
\end{aligned}
\tag{C}
$$

又

$$
\begin{aligned}
&[\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_3]\\
&=\{(\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1)\times(\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_2)\}\cdot(\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_3)-[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\{(\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1)\times(\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_2)\}]\cdot\boldsymbol{e}_3\\
&=\{\boldsymbol{e}_1\times(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_2)\}\cdot\boldsymbol{e}_3=[\boldsymbol{e}_1,\ (\boldsymbol{A}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{B})\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3].
\end{aligned}
\tag{D}
$$

类似可证 $[\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_3]=[(\boldsymbol{A}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{B})\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3]$. (E)

由(C)—(E)得

$$
\begin{aligned}
&[(\alpha\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_1,(\alpha\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_2,(\beta\boldsymbol{B})\boldsymbol{e}_3]+[(\alpha\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_1,(\beta\boldsymbol{B})\boldsymbol{e}_2,(\alpha\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_3]\\
&\quad+[(\beta\boldsymbol{B})\boldsymbol{e}_1,\ (\alpha\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_2,\ (\alpha\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_3]\\
&=\alpha^2\beta\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{B})=\alpha^2\beta\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*),
\end{aligned}
\tag{F}
$$

将(F)式中 $\alpha\boldsymbol{A}$、$\beta\boldsymbol{B}$ 互换即得

$$
\begin{aligned}
&[(\beta\boldsymbol{B})\boldsymbol{e}_1,(\beta\boldsymbol{B})\boldsymbol{e}_2,(\alpha\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_3]+[(\beta\boldsymbol{B})\boldsymbol{e}_1,(\alpha\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_2,(\beta\boldsymbol{B})\boldsymbol{e}_3]\\
&\quad+[(\alpha\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_1,\ (\beta\boldsymbol{B})\boldsymbol{e}_2,\ (\beta\boldsymbol{B})\boldsymbol{e}_3]=\alpha\beta^2\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^*).
\end{aligned}
$$

(G)

以(A)、(B)、(F)、(G)代入D的表达式即完成本题证明。

7. 先求S的不变量

$$\mathrm{I}_s=\mathrm{tr}S=0,$$

$$\mathrm{II}_s=\frac{1}{2}\{(\mathrm{tr}S)^2-\mathrm{tr}S^2\}=-\frac{1}{2}\mathrm{tr}S^2=-1,$$

$$\mathrm{III}_s=\det S=0.$$

由式(57)得 $\lambda^3-\lambda=0$.

故知三个特征值为$\lambda_1=1$，$\lambda_2=0$，$\lambda_3=-1$.

再由$Sp_1=p_1$，得$p_{11}=-\frac{1}{2}p_{12}=-\frac{1}{2}p_{13}$（式中$p_{11}$，$p_{12}$，$p_{13}$分别为特征矢量沿$e_1$，$e_2$，$e_3$方向的分量）。经过标准化得到$p_1=\frac{1}{3}(-e_1+2e_2+2e_3)$。

同理可由$Sp_2=0$和$Sp_3=-p_3$得到

$$p_2=\frac{1}{3}(2e_1-e_2+2e_3),\quad p_3=\frac{1}{3}(2e_1+2e_2-e_3).$$

8. (i)若p为S的特征矢量，则存在一非零常数λ，满足$Sp=\lambda p$. 故有$(p\otimes p)S=p\otimes(S^{\mathrm{T}}p)=p\otimes(Sp)=\lambda p\otimes p=(Sp)\otimes p=S(p\otimes p)$.

反过来，若$p\otimes p$与S可交换，则有$(p\otimes p)S=S(p\otimes p)$，从而有 $p\otimes(Sp)=(Sp)\otimes p$，和$\{p\otimes(Sp)\}p=\{(Sp)\otimes p\}p$，即$\{p\cdot(Sp)\}p=(p\cdot p)Sp$. 此式即表明$p$为$S$的特征矢量，其相应的特征值为$\{p\cdot(Sp)\}/(p\cdot p)$.

(ii)若$p\cdot(Sp)=0$，则由上面最后一等式知必有$Sp=0$.

9. 不妨假定有一以n为x_3-轴的直角坐标系e；并假定S相对于e的分量为S_{ij}。$\hat{S}$相对于e的分量则为$\hat{S}_{ij}=S_{ij}+\alpha\delta_{3i}\delta_{3j}$. 由此得到

$$\mathrm{I}_{\hat{s}}=\hat{S}_{ii}=S_{ii}+\alpha\delta_{3i}\delta_{3i}=\mathrm{I}_s+\alpha,$$

$$\mathrm{II}_{\hat{s}}=\frac{1}{2}(\hat{S}_{ii}^2-\hat{S}_{ij}\hat{S}_{ji})$$

$$=\frac{1}{2}\{(S_{ij}^2+2\alpha S_{ij}+\alpha^2)-(S_{ij}S_{ji}+2\alpha S_{33}+\alpha^2)\}$$

$$=\frac{1}{2}(S_{ij}^2-S_{ij}S_{ji}+2\alpha S_{ij}-2\alpha S_{33})$$

$$=\mathrm{II}_S+\alpha\{\mathrm{tr}\boldsymbol{S}-\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{S}\boldsymbol{n})\},$$

$$\mathrm{II}_{\hat{S}}=\varepsilon_{ijk}\hat{S}_{i1}\hat{S}_{j2}\hat{S}_{k3}=\varepsilon_{ijk}(S_{i1})(S_{j2})(S_{k3}+\alpha\delta_{3k})$$
$$=\mathrm{II}_S+\alpha\varepsilon_{ij3}S_{i1}S_{j2}=\mathrm{II}_S+\alpha(S^*)_{33}=\mathrm{II}_S+\alpha\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{S}^*\boldsymbol{n}).$$

令
$$L(\lambda)=\lambda^3-\mathrm{I}_S\lambda^2+\mathrm{II}_S\lambda-\mathrm{II}_S,$$
$$\hat{L}(\lambda)=\lambda^3-\mathrm{I}_{\hat{S}}\lambda^2+\mathrm{II}_{\hat{S}}\lambda-\mathrm{II}_{\hat{S}}.$$

利用上面证得的主不变量之间的关系式，则有

$$\hat{L}(\lambda)=L(\lambda)-\alpha\lambda^2+\alpha\{\mathrm{tr}\boldsymbol{S}-\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{S}\boldsymbol{n})\}\lambda-\alpha\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{S}^*\boldsymbol{n}).\qquad(\mathrm{A})$$

令$\boldsymbol{S}$与特征值λ_1、λ_2、λ_3相对应的特征矢量为$\boldsymbol{p}_1$、$\boldsymbol{p}_2$、$\boldsymbol{p}_3$，则$\boldsymbol{S}$和$\boldsymbol{S}^*$可表示为

$$S=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i(\boldsymbol{p}_i\otimes\boldsymbol{p}_i),$$

$$\boldsymbol{S}^*=\lambda_2\lambda_3(\boldsymbol{p}_1\otimes\boldsymbol{p}_1)+\lambda_1\lambda_3(\boldsymbol{p}_2\otimes\boldsymbol{p}_2)+\lambda_1\lambda_2(\boldsymbol{p}_3\otimes\boldsymbol{p}_3).$$

将以上表示式代入式(A)，不难验证(A)可表为

$$\hat{L}(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)$$
$$-\alpha\{q_1^2(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)+q_2^2(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_3)$$
$$+q_3^2(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\},$$

式中$q_i^2=\boldsymbol{p}_i\cdot\boldsymbol{n}(i=1,\ 2,\ 3)$。由于题中给定$\boldsymbol{p}_i$不与$\boldsymbol{n}$正交，故$q_i^2>0$.

由上式可见，当$\alpha>0$时有$\hat{L}(\lambda_1)<0$，$\hat{L}(\lambda_2)>0$，$\hat{L}(\lambda_3)<0$，$\hat{L}(\infty)=\infty>0$，因此可知$\hat{L}(\lambda)=0$的根满足

$$\lambda_1<\hat{\lambda}_1<\lambda_2<\hat{\lambda}_2<\lambda_3<\hat{\lambda}_3.$$

10. 对称张量$\boldsymbol{S}$可以表示为

$$\boldsymbol{S}=\lambda_1\boldsymbol{p}_1\otimes\boldsymbol{p}_1+\lambda_2\boldsymbol{p}_2\otimes\boldsymbol{p}_2+\lambda_3\boldsymbol{p}_3\otimes\boldsymbol{p}_3.$$

通过将q和r的表达式直接代入题中所要求证的关系式，即知后者与上面的关系式等价。

A的特殊方向盘存在当且仅当有两个相互正交的单位矢量l，m使得$|A(\cos\theta l+\sin\theta m)|$不依赖于$\theta$。对任一矢量$a$，我们有

$$|Aa|^2=(Aa)\cdot(Aa)=a\cdot A^{\mathrm{T}}(Aa)=a\cdot Sa;$$

因此有

$$|A(\cos\theta l+\sin\theta m)|^2=\lambda_2-(\lambda_3-\lambda_1)(\cos\theta l\cdot q+\sin\theta m\cdot q)\cdot(\cos\theta l\cdot r+\sin\theta m\cdot r)$$

将上式左方记为I，两边对θ求导得

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\theta}=-(\lambda_3-\lambda_1)\{\cos2\theta\{(l\cdot q)(m\cdot r)+(m\cdot q)(l\cdot r)\}+\sin2\theta\{(m\cdot q)(m\cdot r)-(l\cdot q)(l\cdot r)\}\}.$$

由于I不依赖于θ，故上式恒等于零。因此有

$$(l\cdot q)(m\cdot r)=-(m\cdot q)(l\cdot r),$$

$$(m\cdot q)(m\cdot r)=(l\cdot q)(l\cdot r).$$

不难证明，上两式成立当且仅当l和m与q或r正交。因此C_q和C_r为A仅有的特殊方向盘。

题中最后一问等价于证明

$$\frac{m_1\cdot m_2}{|m_1|\cdot|m_2|}=\frac{(Am_1)\cdot(Am_2)}{|Am_1|\cdot|Am_2|}.$$

该式可简化为$m_1\cdot m_2=\frac{1}{\lambda_2}m_2\cdot(Sm_1)$. 利用本题第一问证明的$S$的表达式和$m_1$、$m_2$与$q$、$r$的正交特性，不难证明此式成立。

11. (i)因w为W的轴矢量，故有$Wa=w\times a\quad\forall a\in E$.

即

$$\begin{bmatrix}W_{11}&W_{12}&W_{13}\\W_{21}&W_{22}&W_{23}\\W_{31}&W_{32}&W_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{Bmatrix}=\pm\begin{Bmatrix}w_2a_3-w_3a_2\\w_3a_1-w_1a_3\\w_1a_2-w_2a_1\end{Bmatrix}$$

由于a的任意性可得$W_{ii}=0\ (i=1,\ 2,\ 3)$，$W_{12}=-W_{21}=\mp w_3$，$W_{23}=-W_{32}=\mp w_1$，$W_{31}=-W_{13}=\mp w_2$. 以上各式中

当基在E^+上定义时取上面的符号，在E^-上定义时取下面的符号。归纳各式即得$W_{ij}=\mp\varepsilon_{ijp}w_p$。反过来也不难得到$w_i=\mp\varepsilon_{ipq}W_{pq}$.

(ii)因$\boldsymbol{S}$对称张量，$\boldsymbol{W}$为反对称张量，故有$S_{ji}=S_{ij}$，$W_{ji}=-W_{ij}$. 故

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{SW})=S_{pq}W_{qp}=-S_{qp}W_{pq}, \qquad (A)$$

也可直接写为

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{SW})=S_{qp}W_{pq}. \qquad (B)$$

对比(A)、(B)二式即得$\mathrm{tr}(\boldsymbol{SW})=0$.

12. (a) 取任意矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$. 对于正规正交基e，以a_i、b_i、w_{1i}、w_{2i}表示$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{w}_1$、$\boldsymbol{w}_2$的分量。则有

$$(\boldsymbol{W}_1\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{W}_2\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\{(\boldsymbol{W}_1{}^T\boldsymbol{W}_2)\boldsymbol{b}\}=-\boldsymbol{a}\cdot\{(\boldsymbol{W}_1\boldsymbol{W}_2)\boldsymbol{b}\}. \qquad (A)$$

式(A)左方$=(\boldsymbol{w}_1\times\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{w}_2\times\boldsymbol{b})$

$$\begin{aligned}
&=(\varepsilon_{rpq}w_{1(p)}a_q)(\varepsilon_{ros}w_{2(o)}b_s)\\
&=(\varepsilon_{rpq}\varepsilon_{ros})w_{1p}w_{2o}a_qb_s\\
&=(\delta_{po}\delta_{qs}-\delta_{ps}\delta_{qo})w_{1(p)}w_{2(o)}a_qb_s\\
&=(w_{1(p)}w_{2(p)})(a_qb_q)-a_q(w_{2(q)}w_{1(p)})b_p\\
&=(\boldsymbol{w}_1\cdot\boldsymbol{w}_2)(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})-\boldsymbol{a}\cdot\{(\boldsymbol{w}_2\otimes\boldsymbol{w}_1)\boldsymbol{b}\}\\
&=\boldsymbol{a}\cdot[\{(\boldsymbol{w}_1\cdot\boldsymbol{w}_2)\boldsymbol{I}-\boldsymbol{w}_2\otimes\boldsymbol{w}_1\}\boldsymbol{b}]. \qquad (B)
\end{aligned}$$

因为(A)、(B)二式中的$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$的任意性，即得所求证的关系式。

(b) 对(a)的结果两侧取迹

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\boldsymbol{W}_1\boldsymbol{W}_2)&=\mathrm{tr}(\boldsymbol{w}_2\otimes\boldsymbol{w}_1)-\mathrm{tr}\{(\boldsymbol{w}_1\cdot\boldsymbol{w}_2)\boldsymbol{I}\}\\
&=\boldsymbol{w}_2\cdot\boldsymbol{w}_1-3(\boldsymbol{w}_1\cdot\boldsymbol{w}_2)\\
&=-2\boldsymbol{w}_1\cdot\boldsymbol{w}_2. \qquad (C)
\end{aligned}$$

再设$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$也是任意矢量，并取

$$\boldsymbol{W}_1=\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{W}_2=\boldsymbol{d}\otimes\boldsymbol{c}-\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{d},$$

$$\boldsymbol{w}_1=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{w}_2=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}.$$

则(C)式右方为$-2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})$.

式(C)左方$=\mathrm{tr}[(\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})(\boldsymbol{d}\otimes\boldsymbol{c}-\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{d})]$

$$=\mathrm{tr}[(\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{a})(\boldsymbol{d}\otimes\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{a})(\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{d})$$
$$-(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})(\boldsymbol{d}\otimes\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{d})]$$
$$=\mathrm{tr}[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{d})$$
$$-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{d})]$$
$$=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})$$
$$-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})$$
$$=2\{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})\}$$

对比式(C)左右两侧即得

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$$
$$\forall\quad \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{d}\in\mathrm{E}.$$

13. 设 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{e}_p'\otimes\boldsymbol{e}_p$，则$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{e}_p\otimes\boldsymbol{e}_p'$，故有

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_p\otimes\boldsymbol{e}_p')(\boldsymbol{e}_q'\otimes\boldsymbol{e}_q)=(\boldsymbol{e}_p'\cdot\boldsymbol{e}_q')(\boldsymbol{e}_p\otimes\boldsymbol{e}_q)$$
$$=\delta_{pq}(\boldsymbol{e}_p\otimes\boldsymbol{e}_q)=\boldsymbol{e}_p\otimes\boldsymbol{e}_p=\boldsymbol{I},$$

即$\boldsymbol{Q}$为正交张量。同时

$$\det\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}_3]/[\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3]$$
$$=[(\boldsymbol{e}_p'\otimes\boldsymbol{e}_p)\boldsymbol{e}_1,(\boldsymbol{e}_q'\otimes\boldsymbol{e}_q)\boldsymbol{e}_2,(\boldsymbol{e}_r'\otimes\boldsymbol{e}_r)\boldsymbol{e}_3]/[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$$
$$=[\delta_{1p}\boldsymbol{e}_p',\ \delta_{2q}\boldsymbol{e}_q',\ \delta_{3r}\boldsymbol{e}_r']/[\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3]$$
$$=[\boldsymbol{e}_1',\ \boldsymbol{e}_2',\ \boldsymbol{e}_3']/[\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3]=\pm 1,$$

在$\boldsymbol{e}'$和$\boldsymbol{e}$相似时取＋号，非相似时取－号。也就是$\boldsymbol{Q}$是否正规取决于$\boldsymbol{e}'$和$\boldsymbol{e}$是否相似。

其次，对任意正交张量$\boldsymbol{Q}$

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}=\boldsymbol{e}_p\otimes\boldsymbol{e}_p=\delta_{pq}(\boldsymbol{e}_p\otimes\boldsymbol{e}_q)=(\boldsymbol{e}_p'\cdot\boldsymbol{e}_q')(\boldsymbol{e}_p\otimes\boldsymbol{e}_q)$$
$$=(\boldsymbol{e}_p\otimes\boldsymbol{e}_p')(\boldsymbol{e}_q'\otimes\boldsymbol{e}_q)=\{(\boldsymbol{e}_p'\otimes\boldsymbol{e}_p)\}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{e}_q'\otimes\boldsymbol{e}_q).$$

因而可以表示为$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{e}_p'\otimes\boldsymbol{e}_p$.

最后，$\boldsymbol{e}_p'=(\boldsymbol{e}_p'\cdot\boldsymbol{e}_q)\boldsymbol{e}_q=l_{pq}\boldsymbol{e}_q$，$\boldsymbol{e}_p=(\boldsymbol{e}_p\cdot\boldsymbol{e}_q')\boldsymbol{e}_q'=l_{qp}\boldsymbol{e}_q'$，$\boldsymbol{a}=a_p\boldsymbol{e}_p=a_pl_{qp}\boldsymbol{e}_q'$，因而有$a_i'=l_{ip}a_p$.

又因 $\boldsymbol{A}=A_{pq}\boldsymbol{e}_p\otimes\boldsymbol{e}_q=A_{pq}(l_{rp}\boldsymbol{e}_r')\otimes(l_{sq}\boldsymbol{e}_s')$
$=l_{rp}l_{sq}A_{pq}(\boldsymbol{e}_r'\otimes\boldsymbol{e}_s')=A_{rs}'\,\boldsymbol{e}_r'\otimes\boldsymbol{e}_s'$，故有 $A_{ij}'=l_{ip}l_{jq}A_{pq}$.

14. 由$\boldsymbol{l}$，$\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$彼此正交的性质和$\boldsymbol{Q}$的定义式

$$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{m}+\boldsymbol{l}\otimes\boldsymbol{n}+\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{l})(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{n}+\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{l}+\boldsymbol{l}\otimes\boldsymbol{m})$$
$$=\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}+\boldsymbol{l}\otimes\boldsymbol{l}+\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m}=\boldsymbol{I}.$$

类似地可证明$\boldsymbol{Q}^2=\boldsymbol{Q}^T$，因而有$\det(\boldsymbol{Q}^2)=(\det\boldsymbol{Q})^2=\det\boldsymbol{Q}^T=\det\boldsymbol{Q}$. 即得到$\det\boldsymbol{Q}=1$，故$\boldsymbol{Q}$为正规正交张量。

15. 将题中所定义的$\boldsymbol{Q}$和式(79)中所定义的$\boldsymbol{Q}$分别记为$\boldsymbol{Q}_1$和$\boldsymbol{Q}_2$. 对任意矢量$\boldsymbol{a}$，我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{a}&=\boldsymbol{I}\boldsymbol{a}+\sin\theta\boldsymbol{P}\boldsymbol{a}+(1-\cos\theta)\boldsymbol{P}^2\boldsymbol{a}\\&=\boldsymbol{a}+\sin\theta\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{a}+(1-\cos\theta)\boldsymbol{p}\times(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{a})\\&=\boldsymbol{a}-\sin\theta\{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{q}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{q})\boldsymbol{r}\}\\&\quad+(1-\cos\theta)\{(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{p}-(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{a}\}\\&=-\sin\theta\{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{q}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{q})\boldsymbol{r}\}\\&\quad+(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{p}+\cos\theta\{\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{p}\},\end{aligned}$$

同时，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{a}&=(\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{p})\boldsymbol{a}+\cos\theta(\boldsymbol{q}\otimes\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}\otimes\boldsymbol{r})\boldsymbol{a}-\sin\theta(\boldsymbol{q}\otimes\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}\otimes\boldsymbol{q})\boldsymbol{a}\\&=(\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{p})\boldsymbol{a}+\cos\theta(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{p})\boldsymbol{a}-\sin\theta(\boldsymbol{q}\otimes\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}\otimes\boldsymbol{q})\boldsymbol{a}\\&=(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{p}+\cos\theta\{\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{p}\}-\sin\theta\{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{q}\\&\quad-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{q})\boldsymbol{r}\}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{a}.\end{aligned}$$

因此，$\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{Q}_2$.

对任一矢量$\boldsymbol{a}$，我们有

$$\boldsymbol{P}^3\boldsymbol{a}=\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{p}\times(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{a})\}=\boldsymbol{P}\{(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a}\}=-\boldsymbol{P}\boldsymbol{a},$$

故$\boldsymbol{P}^n=-\boldsymbol{P}^{n-2}$对$n=3$成立。（上式中用到$\boldsymbol{P}\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{p}=0$）用递推法很容易证明此式对所有$n\geqslant 3$均成立。

令 $\boldsymbol{Q}_3=\boldsymbol{I}+\sin\theta_1\boldsymbol{P}+(1-\cos\theta_1)\boldsymbol{P}^2$,

$\boldsymbol{Q}_4=\boldsymbol{I}+\sin\theta_2\boldsymbol{P}+(1-\cos\theta_2)\boldsymbol{P}^2$,

$\boldsymbol{Q}_5=\boldsymbol{I}+\sin(\theta_1+\theta_2)\boldsymbol{P}+[1-\cos(\theta_1+\theta_2)]\boldsymbol{P}^2$.

本题最后一问等价于证明$\boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{Q}_4=\boldsymbol{Q}_5$. 利用以上定义及关系式$\boldsymbol{p}^n=-\boldsymbol{p}^{n-2}$（$n\geqslant 3$）可以直接证得。

16. 令$\boldsymbol{Q}$为式(79)所定义的正规正交张量。由$\boldsymbol{T}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}$得

到

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{T}\boldsymbol{p})\otimes\boldsymbol{p}+\cos\theta\{(\boldsymbol{T}\boldsymbol{q})\otimes\boldsymbol{q}+(\boldsymbol{T}\boldsymbol{r})\otimes\boldsymbol{r}\}\\&\quad-\sin\theta\{(\boldsymbol{T}\boldsymbol{q})\otimes\boldsymbol{r}-(\boldsymbol{T}\boldsymbol{r})\otimes\boldsymbol{q}\}\\&=\boldsymbol{p}\otimes(\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p})+\cos\theta\{\boldsymbol{q}\otimes(\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q})+\boldsymbol{r}\otimes(\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r})\}\\&\quad-\sin\theta\{\boldsymbol{q}\otimes(\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r})-\boldsymbol{r}\otimes(\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q})\}.\end{aligned}\qquad(\mathrm{A})$$

将式(A)作用于$\boldsymbol{p}$，便得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}\boldsymbol{p}&=(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p})\boldsymbol{p}+\cos\theta\{(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q})\boldsymbol{q}+(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}\}\\&\quad-\sin\theta\{(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r})\boldsymbol{q}-(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q})\boldsymbol{r}\}\\&=(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{T}\boldsymbol{p})\boldsymbol{p}+\cos\theta\{(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{T}\boldsymbol{p})\boldsymbol{q}+(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{T}\boldsymbol{p})\boldsymbol{r}\}\\&\quad-\sin\theta\{(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{T}\boldsymbol{p})\boldsymbol{q}-(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{T}\boldsymbol{p})\boldsymbol{r}\}.\end{aligned}\qquad(\mathrm{B})$$

将(B)分别与$\boldsymbol{q}$、$\boldsymbol{r}$点乘，我们有

$$\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{T}\boldsymbol{p}=(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{T}\boldsymbol{p})\cos\theta-(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{T}\boldsymbol{p})\sin\theta,$$

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{T}\boldsymbol{p}=(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{T}\boldsymbol{p})\cos\theta+(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{T}\boldsymbol{p})\sin\theta.$$

上二式对任意θ均成立，令$\theta=\pi/2$便得到$\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{T}\boldsymbol{p}=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{T}\boldsymbol{p}=0$。类似地将(A)作用于$\boldsymbol{q}$、$\boldsymbol{r}$，然后分别与$\boldsymbol{p}$、$\boldsymbol{q}$、$\boldsymbol{r}$点乘，再令$\theta=0$或$\pi/2$，即能证明出$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{T}\boldsymbol{q}=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{T}\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{T}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{T}\boldsymbol{r}=0$及$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{T}\boldsymbol{p}=\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{T}\boldsymbol{q}=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{T}\boldsymbol{r}$. 这就意味着$\boldsymbol{p}$、$\boldsymbol{q}$、$\boldsymbol{r}$均为$\boldsymbol{T}$的特征矢量，且对应的特征值相等。由于任一矢量均可表示为$\boldsymbol{p}$、$\boldsymbol{q}$及$\boldsymbol{r}$的线性组合，以上结果表明任何矢量都是$\boldsymbol{T}$的特征矢量，且对应的特征值不依赖于矢量的选择。很显然，在以($\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}$，$\boldsymbol{r}$)为基底的直角坐标系里$\boldsymbol{T}$是球形的，因此$\boldsymbol{T}$是一球形张量。

17. 题给张量$\boldsymbol{A}$以矩阵形式表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&2&0\\-1&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

进行极分解为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{V}\boldsymbol{Q}\qquad(\mathrm{A})$$

式中$\boldsymbol{Q}$为正交张量，$\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{V}$为正定对称张量。$\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{Q}$、$\boldsymbol{V}$可依次由下列各式求出：

$$\boldsymbol{U}^2=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{Q}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}^{-1},\quad \boldsymbol{V}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \tag{B}$$

由于$A_{23}=A_{32}=A_{13}=A_{31}=0$，$A_{33}=-1$，可由$(B)_1$式判断出$U_{23}=U_{32}=U_{13}=U_{31}=0$，$U_{33}=1$.

$$\boldsymbol{U}^2=\begin{bmatrix} U_{11}^2+U_{12}^2 & (U_{11}+U_{22})U_{12} & 0 \\ (U_{11}+U_{22})U_{12} & U_{12}^2+U_{22}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

故有，$U_{11}^2+U_{12}^2=5$，$U_{12}^2+U_{22}^2=5$，$(U_{11}+U_{22})U_{12}=3$。满足这三个方程和正定条件的解为$U_{11}=U_{22}=3/\sqrt{2}$，$U_{12}=1/\sqrt{2}$，故

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix} 3/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

进而由$(B)_2$、$(B)_3$式求出

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

18. 令$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{p}$，则

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{p})(\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{p})=\boldsymbol{I}-4(\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{p})+4(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p})(\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{p})$$
$$=\boldsymbol{I},$$

故$\boldsymbol{Q}$为一正交张量。又

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{p}=-\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}\otimes\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}\otimes\boldsymbol{r},$$

$\det \boldsymbol{Q} = -1$，故$\boldsymbol{Q}$为非正规正交张量。

由于$\boldsymbol{Q}$正好与在(1.79)式中以$\theta = \pi$代入所得张量差一负号，因此其作用等价于绕$\boldsymbol{p}$轴旋转180°，再施以一个由$-\boldsymbol{I}$表示的中心映射。实际上这二步变换的结果也就相当于对于$\boldsymbol{q}$、$\boldsymbol{r}$组成的平面作镜象映射。

19. 以(x_1, x_2, x_3)表示对应于标准正交基$e=\{e_1, e_2, e_3\}$坐标，则有

(i) $$\operatorname{grad}(\phi \boldsymbol{u}) = \frac{\partial(\phi u_p)}{\partial x_q} e_p \otimes e_q$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial x_q}(u_p e_p) \otimes e_q + \phi \frac{\partial u_p}{\partial x_q} e_p \otimes e_q$$

$$= \boldsymbol{u} \otimes \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_q} e_q\right) + \phi \operatorname{grad} \boldsymbol{u}.$$

$$= \boldsymbol{u} \otimes \operatorname{grad} \phi + \phi \operatorname{grad} \boldsymbol{u}.$$

(ii) $$\operatorname{div}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}) = \frac{\partial(T_{pq} u_q)}{\partial x_p} = \frac{\partial T_{pq}}{\partial x_p} u_q + T_{pq} \frac{\partial u_q}{\partial x_p}$$

$$= \frac{\partial T_{pr}}{\partial x_p} u_q \delta_{rq} + \operatorname{tr}\left(T_{pr} \frac{\partial u_r}{\partial x_q} e_p \otimes e_q\right)$$

$$= \frac{\partial T_{pr}}{\partial x_p} u_q (e_r \cdot e_q) + \operatorname{tr}\left\{T_{pr} \frac{\partial u_s}{\partial x_q}(e_r \cdot e_s)(e_p \otimes e_q)\right\}$$

$$= (u_q e_q) \cdot \left(\frac{\partial T_{pr}}{\partial x_p} e_r\right) + \operatorname{tr}\left\{T_{pr} \frac{\partial u_s}{\partial x_q}(e_p \otimes e_r)(e_s \otimes e_q)\right\}$$

$$= \boldsymbol{u} \cdot \operatorname{div} \boldsymbol{T} + \operatorname{tr}\left\{T_{pr}(e_p \otimes e_r) \frac{\partial u_s}{\partial x_q}(e_s \otimes e_q)\right\}$$

$$= \boldsymbol{u} \cdot \operatorname{div} \boldsymbol{T} + \operatorname{tr}(\boldsymbol{T} \operatorname{grad} \boldsymbol{u}).$$

(iii) $$\operatorname{div}(\phi \boldsymbol{T}) = \frac{\partial(\phi T_{pq})}{\partial x_p} e_q = \frac{\partial \phi}{\partial x_p} T_{pq} e_q + \phi \frac{\partial T_{pq}}{\partial x_p} e_q$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial x_r} T_{rq}(\boldsymbol{e}_p \cdot \boldsymbol{e}_r)\boldsymbol{e}_q + \phi \mathrm{div}\boldsymbol{T}$$

$$= (T_{rq}\boldsymbol{e}_q \otimes \boldsymbol{e}_r)\frac{\partial \phi}{\partial x_p}\boldsymbol{e}_p + \phi \mathrm{div}\boldsymbol{T}$$

$$= \boldsymbol{T}^T \mathrm{grad}\phi + \phi \mathrm{div}\boldsymbol{T}.$$

20. 令$\boldsymbol{W} = \mathrm{grad}\boldsymbol{u} - (\mathrm{grad}\boldsymbol{u})^T$，则 $\boldsymbol{W}^T = (\mathrm{grad}\boldsymbol{u})^T - \mathrm{grad}\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{W}$，故$\boldsymbol{W}$为反对称张量。

$$\boldsymbol{W}(\mathrm{curl}\boldsymbol{u}) = (\mathrm{grad}\boldsymbol{u})(\mathrm{curl}\boldsymbol{u}) - (\mathrm{grad}\boldsymbol{u})^T(\mathrm{curl}\boldsymbol{u})$$

$$= \left(\frac{\partial u_p}{\partial x_q}\boldsymbol{e}_p \otimes \boldsymbol{e}_q\right)\left(\pm \varepsilon_{rso}\frac{\partial u_o}{\partial x_o}\boldsymbol{e}_r\right)$$

$$- \left(\frac{\partial u_q}{\partial x_p}\boldsymbol{e}_p \otimes \boldsymbol{e}_q\right)\left(\pm \varepsilon_{rso}\frac{\partial u_o}{\partial x_o}\boldsymbol{e}_r\right)$$

$$= \pm\left(\varepsilon_{qso}\frac{\partial u_p}{\partial x_q}\frac{\partial u_o}{\partial x_o}\boldsymbol{e}_p - \varepsilon_{qso}\frac{\partial u_q}{\partial x_p}\frac{\partial u_o}{\partial x_o}\boldsymbol{e}_p\right)$$

$$= \pm\varepsilon_{qso}\frac{\partial u_o}{\partial x_o}\left(\frac{\partial u_p}{\partial x_q} - \frac{\partial u_q}{\partial x_p}\right)\boldsymbol{e}_p.$$

现在来看$\boldsymbol{W}(\mathrm{curl}\boldsymbol{u})$在$\boldsymbol{e}_1$方向的分量。

$$\text{上式}(p=1)\text{的}\boldsymbol{e}_1\text{方向分量} = \pm\varepsilon_{1so}\frac{\partial u_o}{\partial x_o}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_q} - \frac{\partial u_q}{\partial x_1}\right)$$

$$= \pm\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \pm \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)$$

$$\cdot\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) = 0.$$

同法可证得$\boldsymbol{W}(\mathrm{curl}\boldsymbol{u})$在$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$方向的分量均为零。故

$$\boldsymbol{W}(\mathrm{curl}\boldsymbol{u}) = 0.$$

故知$\boldsymbol{W}$的轴矢量$\boldsymbol{w}$应为$\mathrm{curl}\boldsymbol{u}$的非零标量倍。令

$$\boldsymbol{w} = \alpha(\mathrm{curl}\boldsymbol{u}), \qquad (\alpha \neq 0)$$

则 $$(\mathrm{grad}\boldsymbol{u})\boldsymbol{a}-(\mathrm{grad}\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}=\alpha(\mathrm{curl}\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{a}.$$

$$\left(\frac{\partial u_p}{\partial x_q}a_q-\frac{\partial u_q}{\partial x_p}a_q\right)\boldsymbol{e}_p=\pm\alpha\varepsilon_{pqr}\left\{\pm\varepsilon_{qoa}\frac{\partial u_o}{\partial x_o}a_r\right\}\boldsymbol{e}_p$$

$$=-\alpha(\delta_{po}\delta_{ra}-\delta_{pa}\delta_{ro})\frac{\partial u_o}{\partial x_o}a_r\boldsymbol{e}_p$$

$$=\alpha\left(\frac{\partial u_p}{\partial x_r}-\frac{\partial u_r}{\partial x_p}\right)a_r\boldsymbol{e}_p.$$

即得到，$\alpha=1$，即$\boldsymbol{w}=\mathrm{curl}\boldsymbol{u}$.

现在再来证明最后的积分等式。由式(73)，

$$\boldsymbol{a}\times\int_{\partial R}\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{n}\mathrm{d}a=\left\{\int_{\partial R}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{u})\mathrm{d}a\right\}\boldsymbol{a}\quad\forall\boldsymbol{a}\in\mathrm{E},$$

由式(97)

$$\int_{\partial R}\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{n}\mathrm{d}a=\int_R\mathrm{grad}\boldsymbol{u}\mathrm{d}v,$$

$$\int_{\partial R}\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{u}\mathrm{d}a=\int_R(\mathrm{grad}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}})\mathrm{d}v.$$

将此二式代入前式得

$$\boldsymbol{a}\times\int_{\partial R}\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{n}\mathrm{d}a=\int_R\{\mathrm{grad}\boldsymbol{u}-(\mathrm{grad}\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\}\boldsymbol{a}\mathrm{d}v$$

$$=\int_R\{(\mathrm{curl}\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{a}\}\mathrm{d}v=-\boldsymbol{a}\times\int_R\mathrm{curl}\boldsymbol{u}\mathrm{d}v.$$

由于a的任意性，即得

$$\int_{\partial R}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{u}\mathrm{d}a=\int_R\mathrm{curl}\boldsymbol{u}\mathrm{d}v.$$

第 二 章

1. 由于在$X_3=0$、$X_1+X_2=0$时无运动产生，故只考虑其

他情形。当$X_3 \neq 0$、$X_1+X_2=0$时，有$t=(x_1-X_1)/kX_3=(x_2-X_2)/kX_3, x_3=X_3$；当$X_3=0$、$X_1+X_2\neq 0$时，有$x_1=X_1$，$x_2=X_2$，$x_3=X_3-kt(X_1+X_2)$；因而当$X_3\neq 0$、$X_1+X_2\neq 0$时，$t=(x_1-X_1)/kX_3=(x_2-X_2)/kX_3=-(x_3-X_3)/k(X_1+X_2)$. 在以上各种情况均为通过$t=0$时的点$(X_1, X_2, X_3)$的直线。此直线的方向余弦与$\{X_3, X_3, -(X_1+X_2)\}$成比例。另外，直线$OX$的方向余弦与$(X_1, X_2, X_3)$成比例。因而运动路径直线与$OX$直线夹角的余弦应与

$$X_3X_1+X_3X_2-(X_1+X_2)X_3=0$$

成比例，也就是等于零，因而两者正交。

然后，取常数B使$|B|\leqslant A$，考虑参照构形（$t=0$时）的平面$X_1=B$，代入运动方程式并消去X_2，X_3，得在$t>0$时有

$$(kt+\frac{1}{kt})x_1-(kt)x_2-x_3=2(kt)B. \qquad (A)$$

此式给出$t=0$时的平面$X_1=B$的当前形状，它显然是一个平面。因而在参照构形B_r中的板状领域在即时构形中仍为板状。平面(A)的法线方向余弦与$\{(kt+\frac{1}{kt}), -kt, -1\}$成比例。当$t\to\infty$时即与$(1, -1, 0)$成比例，也就是$(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$。因而$t\to\infty$时，平面(A)与1-轴成$\pi/4$倾角。所考虑的板状领域的表面为在(A)式中令$B=\pm A$，仍然与1-轴成$\pi/4$倾角。

2. 由$\det\boldsymbol{F}=|x_{i,\alpha}|=1$得到$\phi(t)=e^{2at}$。通过对运动关系式直接求导并消除物质坐标，我们有

$$\dot{x}_1=-ax_1-be^{-2at}x_2x_3, \quad \dot{x}_2=-ax_2+be^{-2at}x_1x_3,$$
$$\dot{x}_3=2ax_3.$$

再对以上表达式求导并消除$\dot{x}_1$、$\dot{x}_2$和$\dot{x}_3$，便得到用空间坐标表示的加速度分量：

$$\ddot{x}_1=a^2x_1+2abe^{-2at}x_2x_3-b^2e^{-4at}x_1x_3^2,$$
$$\ddot{x}_2=a^2x_2-2abe^{-2at}x_1x_3-b^2e^{-4at}x_2x_3^2,$$
$$\ddot{x}_3=4a^2x_3.$$

流线由下式确定：$\frac{dx_1}{\dot{x}_1}=\frac{dx_2}{\dot{x}_2}=\frac{dx_3}{\dot{x}_3}$. 任一流线均可表为二个曲面的交线。由上式可推知流线必在由方程$\frac{x_1dx_1+x_2dx_2}{x_1\dot{x}_1+x_2\dot{x}_2}=\frac{dx_3}{\dot{x}_3}$所确定的曲面之上。利用上面速度分量的表示式后，上式变为

$$2(x_1dx_1+x_2dx_3)x_3+(x_1^2+x_2^2)dx_3=0,$$

即

$$d\{(x_1^2+x_2^2)x_3\}=0.$$

因此流线所在的曲面为$(x_1^2+x_2^2)x_3=$常数。通过在运动方程中消除X_1、X_2和X_3，不难证明质点路径也在该曲面（族）上。

3. 对于以质点$\tilde{P}$在时刻t在即时构形B_t中所占据的点P为原点，以$\boldsymbol{a}_i$为基底的坐标系，B_t中一点R的位置矢量$\boldsymbol{r}$可表为$\boldsymbol{r}=r_i\boldsymbol{a}_i$. 对于刚体运动，$r_i$不随时间改变，即$\dot{r}_i=0$。故$\dot{\boldsymbol{r}}=r_i\dot{\boldsymbol{a}}_i$，该点处自旋张量$\boldsymbol{W}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}})$，$\boldsymbol{L}=\mathrm{grad}\dot{\boldsymbol{r}}=\mathrm{grad}(r_i\dot{\boldsymbol{a}}_i)=\dot{\boldsymbol{a}}_i\otimes\mathrm{grad}r_i+r_i\mathrm{grad}\dot{\boldsymbol{a}}_i=\dot{\boldsymbol{a}}_i\otimes\frac{\partial r_i}{\partial r_q}\boldsymbol{a}_q=\dot{\boldsymbol{a}}_i\otimes\boldsymbol{a}_i$（因为对均匀运动$\mathrm{grad}\dot{\boldsymbol{a}}_i=\boldsymbol{O}$），故$\boldsymbol{W}=\frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{a}}_i\otimes\boldsymbol{a}_i-\boldsymbol{a}_i\otimes\dot{\boldsymbol{a}}_i)$。又对任意矢量$\boldsymbol{d}$有$\boldsymbol{W}\boldsymbol{d}=\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{d}$，$\frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{a}}_i\otimes\boldsymbol{a}_i-\boldsymbol{a}_i\otimes\dot{\boldsymbol{a}}_i)\boldsymbol{d}=\frac{1}{2}\{(\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{d})\dot{\boldsymbol{a}}_i-(\dot{\boldsymbol{a}}_i\cdot\boldsymbol{d})\boldsymbol{a}_i\}=\frac{1}{2}\boldsymbol{d}\times(\dot{\boldsymbol{a}}_i\times\boldsymbol{a}_i)=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_i\times\dot{\boldsymbol{a}}_i)\times\boldsymbol{d}$，故有$\boldsymbol{w}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}_i\times\dot{\boldsymbol{a}}_i$. 又因$P$对原点$o$的位置矢量为$\boldsymbol{c}$，故$R$对$o$的位置矢量为$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}+\boldsymbol{r}$. 这里$\dot{\boldsymbol{r}}$和$\ddot{\boldsymbol{r}}$就是$\boldsymbol{c}$为固定时点$R$相对于固定坐标系（$o$，$e$）的速度$\dot{\boldsymbol{x}}$和加速度$\ddot{\boldsymbol{x}}$，由本书（7）式即得

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r},\quad\ddot{\boldsymbol{r}}=\dot{\boldsymbol{w}}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{w}\times(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r}).$$

4. 将速度式积分，并利用初始条件$t=0$，$x_i=X_i$，即得

$$x_1=\frac{1}{3}X_1(2+\cos nt),\ x_2=\frac{1}{2}X_2(2+\sin nt),\ x_3=X_3. \quad (A)$$

由(A)式消去t即得

$$\left(\frac{x_1-\frac{2}{3}X_1}{\frac{1}{3}X_1}\right)^2+\left(\frac{x_2-X_2}{\frac{1}{2}X_2}\right)^2=1,\quad x_3=X_3 \quad (B)$$

即质点的路径为$x_3=X_3$平面上的以$(x_1, x_2)=(\frac{2}{3}X_1, X_2)$为中心，以$\left|\frac{X_1}{3}\right|$和$\left|\frac{X_2}{2}\right|$为半长轴和半短轴的椭圆。再由运动方程，在时刻$t$流线上一点处

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1}=\frac{v_2}{v_1}=-\frac{\cos nt(2+\cos nt)}{\sin nt(2+\sin nt)}\cdot\frac{x_2}{x_1},$$

对坐标(x_1, x_2)积分得

$$x_1 2\cos nt+\cos^2 nt\, x_2 2\sin nt+\sin^2 nt=\text{常数},\quad x_3=\text{常数} \qquad (C)$$

这就是流线的方程。现在来考察不同时刻流线的式样。当$t=0$，(C)式成为$x_1=$常数，且此时$x_1=X_1$，$x_2=X_2$，质点位于与x_1-轴平行的主轴上，该线与质点路径相切。当$t=\pi/2n$，(C)式成为$x_2=$常数，质点位于与x_2-轴平行的主轴上，流线仍与质点路径相切。当$t=\pi/n$，(C)式又成为$x_1=$常数，当$t=3\pi/2n$，(C)式又成为$x_2=$常数，其讨论与前类似。当$t=\pi/4n$，(C)式成为$x_1x_2=$常数，质点的位置为$x_1=\frac{1}{3}X_1(2+1/\sqrt{2})$，$x_2=\frac{1}{2}X_2(2+1/\sqrt{2})$.该点处质点路径与流线有共同的斜率$-3X_2/2X_1$. 对$t=3\pi/4n$，$5\pi/4n$，$7\pi/4n$等均可进行同样的讨论。

又，$\frac{v}{V}=J=\det\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{F}=\frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_\alpha$. 由(A)式

可得 $v=\frac{1}{6}V(2+\sin nt)(2+\cos nt)$. 再由$\frac{\partial v}{\partial t}=0$ 得

$\cos nt-\sin nt=0$. 即$nt=\frac{\pi}{4}\pm m\pi$ $(m=0, \pm1, \pm2, \cdots)$时$v$有最大最小值。$v=\frac{1}{6}V(2\pm1/\sqrt{2})^2=V(\frac{3}{4}\pm\frac{1}{3}\sqrt{2})$. $m=0$

及偶数时，取＋号给出最大值，m为奇数时，取－号给出最小值。

5. 以$t=\tau$为参照时刻，在该时刻$x_i=X_i$. 此时物质曲面为

$$\frac{X_1^2}{a_1^2}+\frac{X_2^2}{a_2^2}+\frac{X_3^2}{a_3^2}=1, \qquad (A)$$

与题给式比较即得

$$x_i^2\left(\frac{t}{\tau}\right)^{a_i}=X_i^2 \qquad (i=1,\ 2,\ 3), \qquad (B)$$

将(B)式对时间t求导得

$$2x_i\dot{x}_i\left(\frac{t}{\tau}\right)^{a_i}+x_i^2a_i\cdot\frac{1}{\tau}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{a_i-1}=0,$$

即

$$v_i=\dot{x}_i=-\frac{1}{2}a_ix_i/t.$$

对等容运动$J=\det\boldsymbol{F}=1$，$\dot{J}=J\mathrm{tr}\boldsymbol{L}=0$，或$\mathrm{tr}\boldsymbol{L}=0$.

由于 $\boldsymbol{L}=\frac{\partial v_r}{\partial x_q}\boldsymbol{e}_r\otimes\boldsymbol{e}_q$，$\mathrm{tr}\boldsymbol{L}=\frac{\partial v_r}{\partial x_r}=-\frac{1}{2}(a_1+a_2+a_3)/t=0$，即等容运动的条件为$a_1+a_2+a_3=0$.

6. 参照书中图2-3，由$(21)_3$式两边自乘

$$(\mathrm{d}a)^2=J^2(\mathrm{d}A)^2\{(\boldsymbol{F}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\}\cdot\{(\boldsymbol{F}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\}=J^2(\mathrm{d}A)^2\boldsymbol{N}\cdot(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{N}), \qquad (A)$$

两边对时间求导得

$$2\mathrm{d}a(\mathrm{d}a)^{\cdot}=2J\dot{J}\boldsymbol{N}\cdot(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{N})(\mathrm{d}A)^2+J^2\boldsymbol{N}\cdot\{(-\boldsymbol{C}^{-1}\dot{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{C}^{-1})\boldsymbol{N}\}(\mathrm{d}A)^2. \qquad (B)$$

又 $\dot{J}=J\mathrm{tr}\boldsymbol{L}$，$\boldsymbol{C}^{-1}\dot{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{C}^{-1}=\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{F}^{-1})^{\mathrm{T}}(\dot{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{F}})\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{F}^{-1})^{\mathrm{T}}$

$=\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{L})(\boldsymbol{F}^{-1})^{\mathrm{T}}$，$J^2\boldsymbol{N}\cdot\{\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{L}(\boldsymbol{F}^{-1})^{\mathrm{T}}\}\boldsymbol{N}(\mathrm{d}A)^2$

$=\{J(\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{L})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\mathrm{d}A\}\cdot\{J(\boldsymbol{F}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\mathrm{d}A\}=\{\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}\mathrm{d}a\}\cdot\{\boldsymbol{n}\mathrm{d}a\}$

$=\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n})(\mathrm{d}a)^2=\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{L}\boldsymbol{n})(\mathrm{d}a)^2$，再由(B)式有

$$(\mathrm{d}a)^{\cdot}=\{\mathrm{tr}\boldsymbol{L}-\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{L}\boldsymbol{n})\}\mathrm{d}a. \qquad (C)$$

再将书中(21)$_3$式两侧对时间求导，$\dot{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}a+\boldsymbol{n}(\mathrm{d}a)^{\cdot}=\dot{J}(\boldsymbol{F}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\mathrm{d}A+J(\boldsymbol{F}^{-1})^{\cdot\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\mathrm{d}A=J\mathrm{tr}\boldsymbol{L}(\boldsymbol{F}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\mathrm{d}A+J(-\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{L})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\mathrm{d}A=(\mathrm{tr}\boldsymbol{L})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a-\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}\mathrm{d}a$，

再由(C)式得

$$\dot{\boldsymbol{n}}=\{(\mathrm{tr}\boldsymbol{L})-\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\}\boldsymbol{n}-\{(\mathrm{tr}\boldsymbol{L})-\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{L}\boldsymbol{n})\}\boldsymbol{n}$$
$$=\{\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{L}\boldsymbol{n})\}\boldsymbol{n}-\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}.$$

7. 对关系式$\lambda l_i=F_{i\alpha}L_\alpha$求导得到

$$\lambda\frac{\partial l_i}{\partial x_i}+l_i\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}=L_\alpha\frac{\partial F_{i\alpha}}{\partial x_i}+F_{i\alpha}\frac{\partial L_\alpha}{\partial X_\beta}F^{-1}_{\beta i}$$

$$=-F_{i\alpha}\frac{\partial J^{-1}}{\partial x_i}+\frac{\partial L_\alpha}{\partial X_\alpha}=\lambda J^{-1}l_i\frac{\partial J}{\partial x_i}+\frac{\partial L_\alpha}{\partial X_\alpha}.$$

这里我们用到了例 6 中的结果，将上式写成矢量形式，即得所要证的等式。

若变形是等容的，且沿$\boldsymbol{L}$方向无伸长，则$\lambda=1$，$J=1$，上式化为$\mathrm{Div}\boldsymbol{L}=\mathrm{div}\boldsymbol{l}$.

8. 由于$\dot{\phi}=\frac{\partial\phi}{\partial t}+(\mathrm{grad}\phi)\cdot\boldsymbol{v}$，$\mathrm{tr}\boldsymbol{L}=\mathrm{tr}(\mathrm{grad}\boldsymbol{v})=\mathrm{div}\boldsymbol{v}$，

故 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{R_t}\phi\mathrm{d}v=\int_{R_t}(\dot{\phi}+\phi\mathrm{tr}\boldsymbol{L})\mathrm{d}v=\int_{R_t}\frac{\partial\phi}{\partial t}\mathrm{d}v+\int_{R_t}\{(\mathrm{grad}\phi)\cdot\boldsymbol{v}+\phi\mathrm{div}\boldsymbol{v}\}\mathrm{d}v=\int_{R_t}\frac{\partial\phi}{\partial t}\mathrm{d}v+\int_{R_t}\mathrm{div}(\phi\boldsymbol{v})\mathrm{d}v=\int_{R_t}\frac{\partial\phi}{\partial t}\mathrm{d}v+\int_{\partial R_t}\phi\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a.$

又 $\dot{\boldsymbol{u}}=\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+(\mathrm{grad}\boldsymbol{u})\boldsymbol{v}$，故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{R_t}\boldsymbol{u}\mathrm{d}v=\int_{R_t}(\dot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{u}\mathrm{tr}\boldsymbol{L})\mathrm{d}v$$

$$=\int_{R_t}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\mathrm{d}v+\int_{R_t}\{(\mathrm{grad}\boldsymbol{u})\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\mathrm{div}\boldsymbol{v}\}\mathrm{d}v$$

$$=\int_{R_t}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\mathrm{d}v+\int_{R_t}\mathrm{div}(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u})\mathrm{d}v$$

$$=\int_{R_t}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\mathrm{d}v+\int_{\partial R_t}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})\boldsymbol{n}\mathrm{d}a$$

$$=\int_{R_t}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\mathrm{d}v+\int_{\partial R_t}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}a.$$

9. (i)$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{I}+\gamma\boldsymbol{l}\otimes\boldsymbol{m}$，设在参照构形中长度不变方向的单位矢量为$\boldsymbol{P}=a\boldsymbol{l}+b\boldsymbol{m}+c\boldsymbol{n}$，在变形后的变形中单位矢量为$\boldsymbol{p}$．则有$|\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{p}|=1$，$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{FP}$，

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{FP}=(a+\gamma b)\boldsymbol{l}+b\boldsymbol{m}+c\boldsymbol{n}, \qquad (A)$$

$$1=a^2+b^2+c^2=(a+\gamma b)^2+b^2+c^2,$$

由此得 $b(2a+\gamma b)=0$，因而有

$$b=0 \text{ 或 } b/a=-2/\gamma,\ c \text{ 为任意值。} \qquad (B)$$

因c为任意值，可知$\boldsymbol{p}$（$\boldsymbol{P}$也相同）必处于与剪切面垂直的平面(与$\boldsymbol{n}$轴平行的平面）内。此平面对$\boldsymbol{l}$轴的倾角θ可由(A)式求得。$\tan\theta=b/(a+\gamma b)$，以(B)式代入，即得 $\theta=0$ 或$\mathrm{aretg}(2/\gamma)$。前者说明$\boldsymbol{p}$在滑移平面内的任意方向，后者说明$\boldsymbol{p}$在垂直于剪切平面且与$\boldsymbol{l}$轴成倾角$\mathrm{arctg}(2/\gamma)$平面内的任意方向。

再求无面积变化平面的法线方向。设该单位法线矢量为$\boldsymbol{n}^*$，由书中(27)式

$$1=(\mathrm{d}a/\mathrm{d}A)^2=J^2\{\boldsymbol{n}^*\cdot(\boldsymbol{B}\boldsymbol{n}^*)\}^{-1}. \qquad (C)$$

$J=1$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{FF}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}+\gamma(\boldsymbol{l}\otimes\boldsymbol{m}+\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{l})+\gamma^2\boldsymbol{l}\otimes\boldsymbol{l}$，设$\boldsymbol{n}^*=c_1\boldsymbol{l}+c_2\boldsymbol{m}+c_3\boldsymbol{n}$，由(C)可得$c_1(2c_2+\gamma c_1)=0$。故有

$$c_1=0 \text{ 或} c_2/c_1=-\gamma/2,\ c_3\text{为任意值。} \qquad (D)$$

由于c_3为任意值，$\boldsymbol{n}^*$必处于与$\boldsymbol{n}$轴平行的平面内。现求该平面对$\boldsymbol{l}$轴的倾角θ^*，$\tan\theta^*=c_2/c_1$.

由(D)式可得

$$\theta^*=\pm\pi/2 \quad 或 \quad -\{\pi/2-\mathrm{arctg}(2/\gamma)\} \tag{E}$$

故$\boldsymbol{n}^*$应为与$\boldsymbol{l}$轴垂直的平面内的任意方向或与剪切平面垂直面与$-\boldsymbol{l}$方向成$\pi/2-\mathrm{arctg}(2/\gamma)$倾角平面内的任意方向。

(ii) $\det\boldsymbol{F}=1$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}=\sum_{r=1}^{3}\lambda_r^2(\boldsymbol{q}_r\otimes\boldsymbol{q}_r)$，$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}$

$=\boldsymbol{V}\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{U}=\sum_{r=1}^{3}\lambda_r(\boldsymbol{p}_r\otimes\boldsymbol{p}_r)$，$\boldsymbol{V}=\sum_{r=1}^{3}\lambda_r(\boldsymbol{q}_r\otimes\boldsymbol{q}_r)$，$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{q}_r\otimes\boldsymbol{p}_r$。

等容条件为$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=1$。设有某方向上长度既不改变，与之垂直的平面上面积也无改变，设该方向在参照构形及变形后构形中的单位矢量分别为$\boldsymbol{N}^*$和$\boldsymbol{n}^*$，令$\boldsymbol{N}^*=a_r\boldsymbol{p}_r$，因$\boldsymbol{F}=\sum_{r=1}^{3}\lambda_r(\boldsymbol{q}_r\otimes\boldsymbol{p}_r)$，故有$\boldsymbol{n}^*=\boldsymbol{F}\boldsymbol{N}^*=\sum_{r=1}^{3}\lambda_r a_r\boldsymbol{q}_r$，因$|\boldsymbol{N}^*|=|\boldsymbol{n}^*|=1$，有$a_r a_r=1$，$\sum_{r=1}^{3}\lambda_r^2a_r^2=1$，由面积不变，$\boldsymbol{n}^*\cdot(\boldsymbol{B}\boldsymbol{n}^*)=1$，即$\sum_{r=1}^{3}\lambda_r^4a_r^2=1$。

上面得到三个以a_r^2为未知量的联立方程式。其系数行列式

$$I=\begin{vmatrix}1&1&1\\ \lambda_1^2&\lambda_2^2&\lambda_3^2\\ \lambda_1^4&\lambda_2^4&\lambda_3^4\end{vmatrix}=(\lambda_2^2-\lambda_3^2)(\lambda_3^2-\lambda_1^2)(\lambda_1^2-\lambda_2^2)。 \tag{F}$$

如三个λ_i各不相同，有

$$\left.\begin{aligned}a_1^2&=-(\lambda_2^2-\lambda_3^2)(\lambda_2^2-1)(\lambda_3^2-1)/I,\\ a_2^2&=-(\lambda_3^2-\lambda_1^2)(\lambda_3^2-1)(\lambda_1^2-1)/I,\\ a_3^2&=-(\lambda_1^2-\lambda_2^2)(\lambda_1^2-1)(\lambda_2^2-1)/I。\end{aligned}\right\} \tag{G}$$

不失一般性，设$\lambda_1^2\geqslant\lambda_2^2\geqslant\lambda_3^2$（由等容条件$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=1$，$\boldsymbol{U}$和$\boldsymbol{V}$均为正定对称的，故所有$\lambda_i$均应为正）。由(G)可知，当$\lambda_1>1>\lambda_2>\lambda_3$，$a_1^2>0$，$a_2^2>0$，$a_3^2<0$，$a_3$无解。当$\lambda_1>\lambda_2>1>\lambda_3$，$a^2<0$，$a_2^2>0$，$a_3^2>0$，$a_1$无解。当$\lambda_1>\lambda_2=1>\lambda_3$，$a_1^2=a_3^2$

$=0$，$a_2^2=1$，此时$\boldsymbol{N}^*=\pm\boldsymbol{p}_2$，$\boldsymbol{n}^*=\pm\boldsymbol{q}_2$. 当$\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3$，$I=0$，所有$a_i$不定。若$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$为刚体旋转，无变形，不合本题题意。故所有$\lambda_i$中只有一个为1（设为$\lambda_r$），因而只有一个满足题意的方向，即与参照构形中$\boldsymbol{p}_r$、变形后构形中$\boldsymbol{q}_r$平行的方向。

10. 变形梯度$\boldsymbol{F}=\lambda^{-1/2}\alpha\boldsymbol{E}_1\otimes\boldsymbol{E}_1+\lambda^{-1/2}\alpha^{-1}\boldsymbol{E}_2\otimes\boldsymbol{E}_2+\lambda\boldsymbol{E}_3\otimes\boldsymbol{E}_3$. (A)

设$\boldsymbol{L}_1$为纤维方向的单位矢量（在B_r中），

$$\boldsymbol{L}_1=\cos\Theta\boldsymbol{E}_1+\sin\Theta\boldsymbol{E}_2, \tag{B}$$

因在此方向上不能伸长，故$\boldsymbol{L}_1\cdot(\boldsymbol{C}\boldsymbol{L}_1)=1$. (C)

将(A)，(B)代入(C)，得 $\alpha^2\cos^2\Theta+\alpha^{-2}\sin^2\Theta=\lambda$. (D)

解(D)得 $\alpha^2=\frac{1}{2}\sec^2\Theta\{\lambda\pm(\lambda^2-\sin^2 2\Theta)^{1/2}\}$. (E)

(*a*) 与例11相同，α有正实根的条件为$\lambda\geqslant\sin 2\Theta$. 这说明$\lambda$的下限为$\sin 2\Theta$.

(*b*) 与例11相同，$\lambda>\sin 2\Theta$时可能产生两种变形构形。

(*c*) 设$\boldsymbol{l}_1$为在变形后构形中表示纤维方向的单位矢量，由式（20）和(A)，(B)式

$$\boldsymbol{l}_1=\boldsymbol{F}\boldsymbol{L}_1=\lambda^{-1/2}(\alpha\cos\Theta\boldsymbol{E}_1+\alpha^{-1}\sin\Theta\boldsymbol{E}_2).$$

设变形后纤维方向与1-方向的夹角为θ，则

$$\tan\theta=(\lambda^{-1/2}\alpha^{-1}\sin\Theta)/(\lambda^{-1/2}\alpha\cos\Theta)=\alpha^{-2}\tan\Theta,$$

即$\alpha^2=\tan\Theta\cot\theta$，代入(D)式整理得$\lambda\sin 2\theta=\sin 2\Theta$. 当3-方向收缩最大时$\lambda=\sin 2\Theta$，即$\sin 2\theta=1$，$\theta=\pi/4$.

11. $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{V}\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{U}=\sum_{r=1}^{3}\lambda_r\boldsymbol{p}_r\otimes\boldsymbol{p}_r$，$\boldsymbol{V}=\sum_{r=1}^{3}\lambda_r\boldsymbol{q}_r\otimes\boldsymbol{q}_r$

$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{q}_r\otimes\boldsymbol{p}_r$，因而 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{V}\boldsymbol{R}=\sum_{r=1}^{3}\lambda_r\boldsymbol{q}_r\otimes\boldsymbol{p}_r$，又$\dot{\boldsymbol{F}}=\sum_{r=1}^{3}\dot{\lambda}_r\boldsymbol{q}_r\otimes\boldsymbol{p}_r+\sum_{r=1}^{3}\lambda_r\dot{\boldsymbol{q}}_r\otimes\boldsymbol{p}_r+\sum_{r=1}^{3}\lambda_r\boldsymbol{q}_r\otimes\dot{\boldsymbol{p}}_r$，$\boldsymbol{F}^{-1}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}^{-1}=\sum_{r=1}^{3}\lambda_r^{-1}\boldsymbol{p}_r\otimes\boldsymbol{q}_r$. 故有$\boldsymbol{L}=\dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{F}^{-1}=\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}\dot{\lambda}_r\lambda_s^{-1}(\boldsymbol{p}_r\cdot\boldsymbol{p}_s)(\boldsymbol{q}_r\otimes\boldsymbol{q}_s)+\sum_{r=1}^{3}$

$$\sum_{r=1}^{3}\lambda_r\lambda_r^{-1}(\boldsymbol{p}_r\cdot\boldsymbol{p}_s)(\dot{\boldsymbol{q}}_r\otimes\boldsymbol{q}_r)+\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}\lambda_r\lambda_s^{-1}(\boldsymbol{q}_r\otimes\boldsymbol{q}_s)(\dot{\boldsymbol{p}}_r\cdot\boldsymbol{p}_s)=\sum_{r=1}^{3}\dot{\lambda}_r\lambda_r^{-1}\boldsymbol{q}_r\otimes\boldsymbol{q}_r+\sum_{r=1}^{3}\dot{\boldsymbol{q}}_r\otimes\boldsymbol{q}_r+\boldsymbol{Z}.$$

式中

$$\boldsymbol{Z}=\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}\lambda_r\lambda_s^{-1}(\boldsymbol{q}_r\otimes\boldsymbol{q}_s)(\dot{\boldsymbol{p}}_r\cdot\boldsymbol{p}_s)=-\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}\lambda_r\lambda_s^{-1}(\boldsymbol{q}_r\otimes\boldsymbol{q}_s)(\boldsymbol{p}_r\cdot\dot{\boldsymbol{p}}_s)$$

$$=-\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}\lambda_r\lambda_s^{-1}(\boldsymbol{q}_r\otimes\boldsymbol{p}_r)(\dot{\boldsymbol{p}}_s\otimes\boldsymbol{q}_s)=-\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}\sum_{t=1}^{3}\lambda_r(\boldsymbol{q}_r\otimes\boldsymbol{p}_r)(\dot{\boldsymbol{p}}_s\otimes\boldsymbol{p}_s)\lambda_t^{-1}(\boldsymbol{p}_t\otimes\boldsymbol{q}_t)=-\boldsymbol{FMF}^{-1}.$$

以上推演中用到 $\delta_{rs}=\boldsymbol{p}_r\cdot\boldsymbol{p}_s$，因而有 $\dot{\boldsymbol{p}}_r\cdot\boldsymbol{p}_s+\boldsymbol{p}_r\cdot\dot{\boldsymbol{p}}_s=0$。根据以上推演即得

$$\boldsymbol{L}=\sum_{r=1}^{3}\dot{\lambda}_r\lambda_r^{-1}\boldsymbol{q}_r\otimes\boldsymbol{q}_r-\boldsymbol{FMF}^{-1}+\boldsymbol{N}.$$

(i)若 $\dot{\boldsymbol{p}}_r=0$，则 $\boldsymbol{M}=0$，

$$\boldsymbol{D}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}})=\frac{1}{2}\Big(2\sum_{r=1}^{3}\dot{\lambda}_r\lambda_r^{-1}\boldsymbol{q}_r\otimes\boldsymbol{q}_r+\boldsymbol{N}+\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\Big)$$

$$=\sum_{r=1}^{3}\dot{\lambda}_r\lambda_r^{-1}\boldsymbol{q}_r\otimes\boldsymbol{q}_r.$$

这里用到了 $\boldsymbol{q}_r\otimes\boldsymbol{q}_r=\boldsymbol{I}$，故 $\dot{\boldsymbol{q}}_r\otimes\boldsymbol{q}_r+\boldsymbol{q}_r\otimes\dot{\boldsymbol{q}}_r=\boldsymbol{N}+\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}$.

由上式可以看出即时伸长轴即是伸长率主轴。

(ii)若 $\dot{\boldsymbol{q}}_r=0$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{V}^2=\sum_{r=1}^{3}\lambda_r^2\boldsymbol{q}_r\otimes\boldsymbol{q}_r$，

$$\dot{\boldsymbol{B}}=\sum_{r=1}^{3}2\lambda_r\dot{\lambda}_r\boldsymbol{q}_r\otimes\boldsymbol{q}_r+\sum_{r=1}^{3}\lambda_r^2\dot{\boldsymbol{q}}_r\otimes\boldsymbol{q}_r+\sum_{r=1}^{3}\lambda_r^2\boldsymbol{q}_r\otimes\dot{\boldsymbol{q}}_r$$

$$=2\sum_{r=1}^{3}\lambda_r\dot{\lambda}_r\boldsymbol{q}_r\otimes\boldsymbol{q}_r.$$

由此可知即时伸长轴就是$\dot{\boldsymbol{B}}$的主轴。

(iii) 若 $\dot{\boldsymbol{p}}_r=\dot{\boldsymbol{q}}_r=0$，则 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{N}=0$，

$$\boldsymbol{L}=\sum_{r=1}^{3}\dot{\lambda}_r\lambda_r^{-1}\boldsymbol{q}_r\otimes\boldsymbol{q}_r=\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}},$$

故自旋张量$\boldsymbol{W}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{O}$.

12. 由本书式(2.39)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S_t}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a=\int_{S_t}(\dot{\boldsymbol{H}}+\boldsymbol{H}\mathrm{tr}\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a$$

$$=\int_{S_t}\boldsymbol{Z}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a,$$

式中 $\boldsymbol{Z}=\dot{\boldsymbol{H}}+\boldsymbol{H}\mathrm{tr}\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{H}$.

而 $\dot{\boldsymbol{H}}=\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}+(\mathrm{grad}\boldsymbol{H})\boldsymbol{v}=\mathrm{curl}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H})+(\mathrm{grad}\boldsymbol{H})\boldsymbol{v}$.

又 $\mathrm{curl}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H})=\varepsilon_{rqs}\{\partial(\varepsilon_{sit}v_iH_t)/\partial x_q\}\boldsymbol{e}_r=(\delta_{ri}\delta_{qt}-\delta_{rt}\delta_{qi})$

$$\left[\frac{\partial v_i}{\partial x_q}H_t+\frac{\partial H_t}{\partial x_q}v_i\right]\boldsymbol{e}_r,$$

$$=\left[\frac{\partial v_r}{\partial x_q}H_q-\frac{\partial v_q}{\partial x_q}H_r+v_r\frac{\partial H_q}{\partial x_q}-v_q\frac{\partial H_r}{\partial x_q}\right]\boldsymbol{e}_r$$

$$=\boldsymbol{L}\boldsymbol{H}-\boldsymbol{H}\mathrm{div}\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\mathrm{div}\boldsymbol{H}-(\mathrm{grad}\boldsymbol{H})\boldsymbol{v}.$$

由于$\mathrm{div}\boldsymbol{v}=\mathrm{tr}\boldsymbol{L}$，再由$\mathrm{div}\boldsymbol{H}=0$，即可得到$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{0}$. 因而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S_t}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a=0.$$

其次，$(J\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{H})^{\cdot}=\dot{J}\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{H}+J(\boldsymbol{F}^{-1})^{\cdot}\boldsymbol{H}+J\boldsymbol{F}^{-1}\dot{\boldsymbol{H}}$
$=J\mathrm{tr}\boldsymbol{L}\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{H}+J\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{F}^{-1})^{\cdot}\boldsymbol{H}+J\boldsymbol{F}^{-1}\dot{\boldsymbol{H}}=J\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{H}\mathrm{tr}\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{H}+\dot{\boldsymbol{H}})=J\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{0}$.

故如以$\boldsymbol{H}_r$表示参照构形中的$\boldsymbol{H}$，则有$\boldsymbol{H}=J^{-1}\boldsymbol{F}\boldsymbol{H}_r$. 现设在参照构形中$\boldsymbol{H}$的场线为$C_r$，并以$\boldsymbol{L}^*$表示其上一点的单位切线矢量，则有

$\boldsymbol{H}_r=\pm|\boldsymbol{H}_r|\boldsymbol{L}^*$. 再设该点处$C_r$上的线元为$dS$，物质曲线则为对应于即时构形的$C_t$. 设与$\boldsymbol{L}^*$和$dS$相对应的量为$\boldsymbol{l}$和$ds$，则有$\boldsymbol{F}(dS\boldsymbol{L}^*)=(ds\boldsymbol{l})$。由以上关系式得$\boldsymbol{H}=\pm J^{-1}|\boldsymbol{H}_r|(ds/dS)\boldsymbol{l}$. 这就说明$\boldsymbol{l}$与$\boldsymbol{H}$具有相同的方向. 因$C_t$为$\boldsymbol{H}$的场线，也就是说$\boldsymbol{H}$的场线是物质曲线。

13. 由所给速度场求出速度梯度$\boldsymbol{L}$的各分量L_{ij}为 $L_{11}=-\frac{\partial f}{\partial r}\frac{x_1}{r}x_2$，$L_{12}=-\frac{\partial f}{\partial f}\frac{x_2^2}{r}-f(r,\ t)$，$L_{13}=0$，

$L_{21}=\frac{\partial f}{\partial r}\frac{x_1^2}{r}+f(r,\ t)$，$L_{22}=\frac{\partial f}{\partial r}\frac{x_2}{r}x_1$，$L_{23}=0$，$L_{3i}=0$.

由此求得伸长率张量$\boldsymbol{D}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}})$的各分量为

$D_{11}=-\frac{\partial f}{\partial r}\frac{x_1x_2}{r}$，$D_{22}=\frac{\partial f}{\partial r}\frac{x_1x_2}{r}$，$D_{12}=D_{21}=\frac{1}{2}\frac{\alpha f}{\alpha r}\frac{1}{r}(x_1^2-x_2^2)$，$D_{i3}=D_{3i}=0$（由于$\mathrm{tr}\boldsymbol{L}=\mathrm{tr}\boldsymbol{D}=0$，运动是等容的）。自旋张量$\boldsymbol{W}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}})$的各分量为$-W_{12}=W_{21}=f+\frac{r}{2}\frac{\partial f}{\partial r}$，其余$W_{ij}=0$. 由$\det(\boldsymbol{D}-\lambda\boldsymbol{I})=0$求得$\boldsymbol{D}$的特征值为$(0,\ \frac{r}{2}\frac{\partial f}{\partial r},\ -\frac{r}{2}\frac{\alpha f}{\alpha r})$. 对应于$\lambda=0$的特征矢量为$\boldsymbol{D}\boldsymbol{p}_1=0$，$\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{e}_3$. 对应于$\lambda=\pm\frac{r}{2}\frac{\partial f}{\partial r}$的特征矢量$\boldsymbol{p}_2$，$\boldsymbol{p}_3$为$\boldsymbol{D}\boldsymbol{p}_{2,3}=\pm\frac{r}{2}\frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{p}_{2,3}$，由$\boldsymbol{p}_2$与$\boldsymbol{p}_3$正交可解得$\boldsymbol{p}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x_1-x_2}{r}\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x_1+x_2}{r}\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{p}_3=-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x_1+x_2}{r}\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x_1-x_2}{r}\boldsymbol{e}_2$. 以$x_1=r\cos\theta$，$x_2=r\sin\theta$代入得到伸长率主轴为$\boldsymbol{e}_3$，$\cos(\theta+\pi/4)\boldsymbol{e}_1+\sin(\theta+\pi/4)\boldsymbol{e}_2$，$-\sin(\theta+\pi/4)\boldsymbol{e}_1+\cos(\theta+\pi/4)\boldsymbol{e}_2$.

再来求$\boldsymbol{W}$的轴矢量$\boldsymbol{w}$，设其大小为ω，由$\boldsymbol{W}\boldsymbol{w}=0$，由前面求得的$\boldsymbol{W}$各分量得$\boldsymbol{w}=\omega\boldsymbol{e}_3$. 对任意矢量$\boldsymbol{a}$，有$\boldsymbol{W}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{a}=\omega\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{a}=\omega(a_1\boldsymbol{e}_2-a_2\boldsymbol{e}_1)$，可以定出$\omega=f+\frac{r}{2}\frac{\partial f}{\partial r}$. 轴矢量（角速度）$\boldsymbol{w}$

$\left(f+\frac{r}{2}\frac{\partial f}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_3$.

若运动为保环量的，涡度$\boldsymbol{\omega}=2\boldsymbol{w}$，故有

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C(\Gamma_t)=\int_{A_t}(\dot{\boldsymbol{\omega}}+\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{tr}\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{\omega})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a$$

$$=\int_{A_t}(2\dot{\omega}\boldsymbol{e}_3)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a. \qquad (A)$$

由本书例1.19末尾的附注，应有$\dot{\omega}=0$．即

$\dot{f}=\frac{\partial f}{\partial t}+v_r\left(\frac{\partial f}{\partial x_r}\right)=\frac{\partial f}{\partial t}+v_r\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)\frac{x_r}{r}=\frac{\partial f}{\partial t}=0$，因而题给的速度场与时间无关，即运动是定常的。

反之，若已知运动为定常的，则$\dot{f}=0$，因而$\dot{\omega}=0$，由(A)式知运动为保环量的。

14. 由于$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{L}=\frac{\partial v_p}{\partial x_q}\boldsymbol{e}_p\otimes\boldsymbol{e}_q=\boldsymbol{A}$，同时有加速度$\boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{v}}$

$=\boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}$，$\mathrm{grad}\boldsymbol{a}=\mathrm{grad}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{v})=\frac{\partial(A_{pq}v_q)}{\partial x_r}\boldsymbol{e}_p\otimes\boldsymbol{e}_r$

$=A_{pq}\frac{\partial v_q}{\partial x_r}\boldsymbol{e}_p\otimes\boldsymbol{e}_r=A_{pq}L_{qr}\boldsymbol{e}_p\otimes\boldsymbol{e}_r=\boldsymbol{A}\boldsymbol{L}=\boldsymbol{A}^2$.

又有 $\boldsymbol{D}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$，$\boldsymbol{W}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$，

涡度 $\boldsymbol{\omega}=\mathrm{curl}\boldsymbol{v}=\varepsilon_{pqr}\left(\frac{\partial v_r}{\partial x_q}\right)\boldsymbol{e}_p=\varepsilon_{pqr}A_{rq}\boldsymbol{e}_p=$常矢量，故有$\dot{\boldsymbol{\omega}}=0$．由保环量条件 $0=\mathrm{curl}\boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{\omega}}+\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{tr}L-\boldsymbol{L}\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{tr}A-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\omega}$.
因而有

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{a}=0,\qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{\omega}=(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})\boldsymbol{\omega}. \qquad (A)$$

又curl$\boldsymbol{a}$为反对称张量$(\mathrm{grad}\boldsymbol{a})-(\mathrm{grad}\boldsymbol{a})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^2-(\boldsymbol{A}^2)^{\mathrm{T}}$的轴矢量，故由式$(A)_1$，$\boldsymbol{A}^2-(\boldsymbol{A}^2)^{\mathrm{T}}=0$，知$\boldsymbol{A}^2$为对称张量。再由$(A)_2$式有$(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\omega}=(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{W})\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{\omega}$（因为$\boldsymbol{W}\boldsymbol{\omega}=2\boldsymbol{W}\boldsymbol{w}$

$=0$）又由$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=\mathrm{tr}\boldsymbol{D}$，故得

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{\omega}=(\mathrm{tr}\boldsymbol{D})\boldsymbol{\omega}. \tag{B}$$

由(B)式可知$\boldsymbol{D}$的一个特征值（令为λ_1）为$\mathrm{tr}\boldsymbol{D}$，与其相关的特征矢量即为$\boldsymbol{\omega}$。令其余二个特征值为$\lambda_2$和$\lambda_3$，则由$\lambda_1=\mathrm{tr}\boldsymbol{D}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$，得$\lambda_2+\lambda_3=0$．即$\lambda_2$与$\lambda_3$大小相等，符号相反。而且与该二特征值相关的特征矢量必和与λ_1相关的特征矢量正交，即与涡度$\boldsymbol{\omega}$正交。

15．积分$\frac{1}{2}\oint_{\Gamma}(\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{x})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}$中的$(\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{x})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}$为由$\boldsymbol{l}$，$\boldsymbol{x}$和$\mathrm{d}\boldsymbol{x}$组成的平行六面体的体积。可改写为$\boldsymbol{l}\cdot(\boldsymbol{x}\times\mathrm{d}\boldsymbol{x})$，这就是由$\boldsymbol{x}$和$\mathrm{d}\boldsymbol{x}$组成的三角形面积的2倍在与$\boldsymbol{l}$垂直平面上的投影（因为$|\boldsymbol{l}|=1$）。沿$\Gamma$积分一周再乘以1/2，即得到$\Gamma$在$\Pi$面上投影所包含的面积。

对平面$x_3=0$，$\boldsymbol{l}=\boldsymbol{e}_3$，由题意有

$$0=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint_{\Gamma_t}(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{x})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\Gamma_t}[\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{x})]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{A}$$

式中用到式（2.38）。又

$$\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{x})=\left\{\left(\frac{\partial v_q}{\partial x_p}\right)\boldsymbol{e}_q\otimes\boldsymbol{e}_p\right\}(x_1\boldsymbol{e}_2-x_2\boldsymbol{e}_1)$$

$$=\left\{x_1\frac{\partial v_2}{\partial x_q}-x_2\frac{\partial v_1}{\partial x_q}\right\}\boldsymbol{e}_q.$$

故有$\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{x})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\left\{x_1\frac{\partial v_2}{\partial x_q}-x_2\frac{\partial v_1}{\partial x_q}\right\}\mathrm{d}x_q$，而

$$\oint_{\Gamma_t}x_1\frac{\partial v_2}{\partial x_q}\mathrm{d}x_q=3[x_1v_2]_A^A-\oint_{\Gamma_t}v_2\delta_{1q}\mathrm{d}x_q$$

$$=-\oint_{\Gamma_t}v_2\,\mathrm{d}x_1,$$

其中A为Γ_t上任一点。同理可得

$$-\oint_{\Gamma_t} x_2\frac{\partial v_1}{\partial x_q}\mathrm{d}x_q=\oint_{\Gamma_t}V_1\mathrm{d}x_2.$$

因而 $$\oint_{\Gamma_t}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{x})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\oint_{\Gamma_t}(v_1\mathrm{d}x_2-v_2\mathrm{d}x_1)$$

$$=\oint_{\Gamma_t}(v_1\boldsymbol{e}_2-v_2\boldsymbol{e}_1)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\oint_{\Gamma_t}(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{v})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

代入(A)式即得

$$\oint_{\Gamma_t}(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{v})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0. \qquad (B)$$

式(B)也可写为

$$\oint_{\Gamma_t}(v_1\mathrm{d}x_2-v_2\mathrm{d}x_1)=0. \qquad (C)$$

由于此式对任意的Γ_t成立，所以如果v_1或v_2是x_3的函数，则(C)式左方也将是x_3的函数，因而(C)式不能成立，所以v_1，v_2均与x_3无关。

利用（1.100）式可将(B)式写成

$$\int_A\mathrm{curl}(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a=\int_A\mathrm{curl}(v_1\boldsymbol{e}_2-v_2\boldsymbol{e}_1)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a=0, \qquad (D)$$

式中，A和$\mathrm{d}a$为由Γ_t所围曲面及其上面元，$\boldsymbol{n}$为该面元的单位法线矢量。由于$\mathrm{curl}(v_1\boldsymbol{e}_2)=\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\boldsymbol{e}_2-\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\boldsymbol{e}_3$，$-\mathrm{curl}(v_2\boldsymbol{e}_1)=\frac{\partial v_2}{\partial x_3}\boldsymbol{e}_2-\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\boldsymbol{e}_3$，已知$v_1$，$v_2$均与$x_3$无关，故(D)式可以化为

$$-\int_A\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right)\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a=0. \qquad (E)$$

由Γ_t和A的任意性（$\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a$为$\mathrm{d}a$在$x_3=0$平面上的投影），可得

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}=0. \qquad (F)$$

对等容运动，$\mathrm{div}\boldsymbol{v}=\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+\frac{\partial v_3}{\partial x_3}=0$，由(F)式即得$\frac{\partial v_3}{\partial x_3}=0$，即$v_3$也与$x_3$无关，因而得到结论：在题中所给的等容运动中，$v_1$、$v_2$、$v_3$均与$x_3$无关。

最后，按题意当任一物质环路在任一平面上的投影均不随时间改变，我们可对$x_1=0$和$x_2=0$平面作与上面同样的讨论，即得到v_1、v_2和v_3均与x_1、x_2和x_3无关，也就是说均为常数。此运动一定是刚体平移。反之，当刚体平移时，由于质点间距离和方位均不改变，所以任意物质环路在任意平面上的投影面积也不随时间改变。

第 三 章

1. 作用于占据R物质体上总合力$\boldsymbol{F}(R)$为

$$\boldsymbol{F}(R)=\int_R\rho\boldsymbol{b}\mathrm{d}v+\int_{\partial R}\boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{n})}\mathrm{d}a=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_R\rho\boldsymbol{v}\mathrm{d}v=\boldsymbol{0}, \qquad (A)$$

静止时$\boldsymbol{v}=0$，体力$\boldsymbol{b}$=重力加速度$\boldsymbol{g}$，故总接触力为$\int_{\partial R}\boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{n})}\mathrm{d}a=-\int_R\rho\boldsymbol{g}\mathrm{d}v=-\left(\int_R\rho\mathrm{d}v\right)\boldsymbol{g}=-m(R)\boldsymbol{g}$.

2. (i) $\boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{q})}=\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}=\sigma\boldsymbol{q}$，$\sigma_{(\boldsymbol{q})}=\boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{q})}\cdot\boldsymbol{q}=\sigma$. 由于$\boldsymbol{\sigma}$为对称张量，由上面第一式有$\boldsymbol{\sigma q}=\sigma\boldsymbol{q}$，故知$\sigma$即为应力张量的一个特征值（设为$\lambda_1$）。又设$\boldsymbol{\sigma}$的特征矢量为$\boldsymbol{p}$、$\boldsymbol{q}$、$\boldsymbol{r}$，另外二特征值为$\lambda_2$，$\lambda_3$，则有$\boldsymbol{\sigma p}=\lambda_2\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{\sigma r}=\lambda_3\boldsymbol{r}$. 但$\boldsymbol{\sigma p}=\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}=a\boldsymbol{q}$（$a$为一标量），因而有$\lambda_2\boldsymbol{p}=a\boldsymbol{q}$. 由于$\boldsymbol{p}$与$\boldsymbol{q}$正交，故必有$\lambda_2=0$，同理$\lambda_3=0$. 故$\boldsymbol{\sigma}=\sigma\boldsymbol{q}\otimes\boldsymbol{q}$.

(ii) $\sigma_{(\boldsymbol{n})}=\boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{n})}\cdot\boldsymbol{n}=\sigma\{(\boldsymbol{q}\otimes\boldsymbol{q})\boldsymbol{n}\}\cdot\boldsymbol{n}=\sigma(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n})^2$. 故$\sigma_{(\boldsymbol{n})}$与$\sigma$同符号.

(iii) $\{\tau_{(\boldsymbol{n})}\}^2=|\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{n}}|^2-\{\sigma_{\boldsymbol{n}}\}^2=\{\sigma(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n})\}^2-\sigma^2(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n})^4$

$=\sigma^2\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)=\left[\frac{\sigma}{2}\sin2\theta\right]^2$（这里令$(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n})=\cos\theta$）。故知最大的$\tau_{(n)}$值为$|\sigma|/2$。

3. 求主应力的特征方程为

$$\det(\sigma-\lambda\boldsymbol{I})=(\alpha-\lambda-\beta)^2(\alpha-\lambda+2\beta)=0.$$

故主应力为$\sigma_1=\alpha+2\beta$，$\sigma_2=\sigma_3=\alpha-\beta$. 设相关的应力主轴以标准正交矢量$\boldsymbol{s}_1$，$\boldsymbol{s}_2$，$\boldsymbol{s}_3$来表示，由$\sigma\boldsymbol{s}_1=\sigma_1\boldsymbol{s}_1$得$-2\beta s_{11}+\beta s_{12}+\beta s_{13}=0$，$\beta s_{11}-2\beta s_{12}+\beta s_{13}=0$. 标准化以后得$\boldsymbol{s}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)$. 对$\boldsymbol{s}_2$和$\boldsymbol{s}_3$有$\sigma\boldsymbol{s}_i=\sigma_i\boldsymbol{s}_i$（$i=2$，$3$），除标准化条件以外再加上$s_{i1}+s_{i2}+s_{i3}=0$和$\boldsymbol{s}_2\cdot\boldsymbol{s}_3=0$的条件。由前二条件决定$\boldsymbol{s}_2$，再由第三条件确定$\boldsymbol{s}_3$（答案不唯一）。例如取$\boldsymbol{s}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_3)$，即有$\boldsymbol{s}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)$. 其次，$\sigma_{(n)}=\boldsymbol{t}_{(n)}\cdot\boldsymbol{n}=(\sigma^T\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{n}=\alpha+2\beta n$，式中$n=n_1n_2+n_2n_3+n_3n_1$. $\tau_{(n)}^2=(|t_{(n)}|^2-\sigma_{(n)}^2)=2\beta^2(1+n-2n^2)=2\beta^2\left\{-2\left(n-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}\right\}$，故知最大剪应力的模为$\frac{3}{2}|\beta|$.

最后有$\sigma_{(n)}=0$存在的条件为$\alpha/\beta=-2n$. 须由n_1，n_2，n_3的变化求n的极值。这里有约束条件$n_1^2+n_2^2+n_3^2=1$，用拉格朗日乘子μ引入此约束条件

$$\frac{\partial}{\partial n_i}\{x-\mu(n_1^2+n_2^2+n_3^2-1)\}=0. \qquad (A)$$

由(A)得

$$n_1+n_2+n_3=0, \qquad (B)$$

或

$$\mu=1. \qquad (C)$$

由(B) $n=n_1n_2+n_2n_3+n_3n_1=\frac{1}{2}\{(n_1+n_2+n_3)^2-(n_1^2+n_2^2+n_3^2)\}=-\frac{1}{2}$，即$n$的最小值，从而得$\alpha/\beta$的最大值为1. 将(C)代入(A)得

$$n_1=n_2=n_3=\frac{1}{\sqrt{3}},\qquad n=3n_1^2=1,$$

即为n的最大值，可得α/β的最小值为-2。显然$\frac{\alpha}{\beta}$值在1与-2之间时，可得到一组满足$n_1^2+n_2^2+n_3^2=1$的n_1、n_2和n_3，因而存在一个$\sigma_{(n)}=0$的面。所以$-2\leqslant\alpha/\beta\leqslant 1$是存在无正应力面元的充要条件。

4. (i)主轴之一与e_3平行，则e_3即为一特征矢量，设相应特征值为λ_3，则有$\sigma e_3=\lambda_3 e_3$，$t_{e_3}=\sigma^T e_3=\sigma e_3=\lambda_3 e_3$（$\sigma$为对称张量）。故$\sigma_{(e_3)}=\sigma_{33}=t_{(e_3)}\cdot e_3=\lambda_3 e_3\cdot e_3=\lambda_3$，即$\sigma_{33}$为一主应力。又$\sigma_{31}=t_{e_3)}\cdot e_1=\lambda e_3\cdot e_1=0$，同理$\sigma_{23}=0$。(由$\sigma$的对称性，又有$\sigma_{13}=\sigma_{32}=0$)。

(ii)题给的M圆的方程为

$$\left(x-\frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right)^2+\sigma_{12}^2,\quad(A)$$

当$y=0$时，有$x=\frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right)^2+\sigma_{12}^2}$.

另外，由$\det(\sigma-\lambda I)=0$，考虑到$\sigma_{31}=\sigma_{13}=\sigma_{32}=\sigma_{23}=0$，

解得 $\lambda_3=\sigma_{33}$，$\lambda_{1,2}=\frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right)^2+\sigma_{12}^2}$，

与M圆当$y=0$时得到的x值相同，以σ_1，σ_2代替λ_1，λ_2，即知M圆与ox轴交点为$(\sigma_1,0)$，$(\sigma_2,0)$。

(iii)设某面元外法线单位矢量为n（与e_3正交），并设$n=le_1+me_2$（l，m为n与e_1和e_2夹角的余弦）。则

$t_{n)}=\sigma^T n=\sigma n=l\sigma e_1+m\sigma e_2=lt_{e_1)}+mt_{e_2)}$。又

$t_{(e_1)}=(t_{e_1)}\cdot e_1)e_1+(t_{e_1)}\cdot e_2)e_2=\sigma_{11}e_1+\sigma_{12}e_2$，

$t_{(e_2)}=(t_{e_2)}\cdot e_1)e_1+(t_{e_2)}\cdot e_2)e_2=\sigma_{12}e_1+\sigma_{22}e_2$，

所以 $t_n=(l\sigma_{11}+m\sigma_{12})e_1+(l\sigma_{12}+m\sigma_{22})e_2$，$\quad(B)$

$\sigma_{(n)}=t_n\cdot n$

$$=(l\sigma_{11}+m\sigma_{12})(\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{n})+(l\sigma_{12}+m\sigma_{22})(\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{n})$$

$$=\sigma_{11}l^2+2\sigma_{12}lm+\sigma_{22}m^2. \qquad (C)$$

$$|\boldsymbol{t}_{(n)}|^2=\boldsymbol{t}_{(n)}\cdot\boldsymbol{t}_{(n)}$$

$$=l^2\sigma_{11}^2+2lm\sigma_{11}\sigma_{12}+m^2\sigma_{12}^2+l^2\sigma_{12}^2+2lm\sigma_{12}\sigma_{22}+m^2\sigma_{22}^2$$

$$=l^2\sigma_{11}^2+m^2\sigma_{22}^2+\sigma_{12}^2+2lm\sigma_{12}(\sigma_{11}+\sigma_{22}). \qquad (D)$$

这里用到了 $l^2+m^2=1$。比较(C)(D)二式，得

$$|\boldsymbol{t}_{(n)}|^2-\sigma_{(n)}(\sigma_{11}+\sigma_{22})=\sigma_{12}^2-\sigma_{11}\sigma_{22}. \qquad (E)$$

又由 $|\boldsymbol{t}_{(n)}|^2=\sigma_{(n)}^2+\tau_{(n)}^2$，代入(E)式，整理得

$$\left(\sigma_{(n)}-\frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2}\right)^2+\tau_{(n)}^2=\left(\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right)^2+\sigma_{12}^2. \qquad (F)$$

与M圆的方程(A)对比，可知点$(\sigma_{(n)},\ \tau_{(n)})$在$M$圆上。

5. 取与主应力轴一致的标准正交基$e=\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3\}$，则所考虑平面的法线$n$的分量为$(\pm1/\sqrt{3},\ \pm1/\sqrt{3},\ \pm1/\sqrt{3})$。将应力张量$\boldsymbol{\sigma}$用主应力表示，

$$\boldsymbol{\sigma}=\sum_{r=1}^{3}\sigma_r\boldsymbol{e}_r\otimes\boldsymbol{e}_r,\qquad \boldsymbol{t}_{(n)}=\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_p\boldsymbol{e}_p。\text{正应力}$$

$$\sigma_{(n)}=\boldsymbol{t}_{(n)}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3).$$

$$\tau_{(n)}=\tau_{oct}=(|\boldsymbol{t}_{(n)}|^2-\sigma_{(n)}^2)^{1/2}$$

$$=\left\{\frac{1}{3}\sigma_p\sigma_p-\frac{1}{9}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2\right\}^{1/2}$$

$$=\frac{1}{3}\{(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2+(\sigma_1-\sigma_2)^2\}^{1/2}$$

$$=\frac{1}{3}\{(\sigma_2'-\sigma_3')^2+(\sigma_3'-\sigma_1')^2+(\sigma_1'-\sigma_2')^2\}^{1/2}$$

$$=\frac{1}{3}\{3\sigma_p'\sigma_p'-(\sigma_1'+\sigma_2'+\sigma_3')^2\}^{1/2}$$

$$=\left\{\frac{1}{3}\sigma_i'\sigma_i'\right\}^{1/2}$$

$$=\left\{\frac{1}{3}(\sigma_1'+\sigma_2'+\sigma_3')^2-\frac{2}{3}(\sigma_1'\sigma_2'+\sigma_2'\sigma'_3+\sigma_3'\sigma'_1)\right\}^{1/2}$$

$$=\left\{-\frac{2}{3}(\sigma_1'\sigma_2'+\sigma_2'\sigma_3'+\sigma_3'\sigma_1')\right\}^{1/2}=\left(-\frac{2}{3}\mathrm{II}\,\sigma'\right)^{1/2}.$$

式中σ_i'为应力偏张量的分量，且有$\sigma_1'+\sigma_2'+\sigma_3'=0$.

6. 对变形梯度张量$\boldsymbol{F}$进行极分解：$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{RU}=\boldsymbol{VR}$,设右伸长$\boldsymbol{U}$的主轴为$\boldsymbol{p}_i$，左伸长$\boldsymbol{V}$的主轴为$\boldsymbol{q}_i$(均已标准化)。并设相应的特征值为$\lambda_i$. 则$\boldsymbol{C}=\sum_{r=1}^{3}\lambda_r^2\,\boldsymbol{p}_r\otimes\boldsymbol{p}_r$, $\boldsymbol{B}=\sum_{r=1}^{3}\lambda_r^2\boldsymbol{q}_r\otimes\boldsymbol{q}_r$,$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{q}_i\otimes\boldsymbol{p}_i$.

先设$\boldsymbol{t}$与$\boldsymbol{C}$共轴，则$\boldsymbol{t}=\sum_{r=1}^{3}t_r\boldsymbol{p}_r\otimes\boldsymbol{p}_r$（$t_i$为$\boldsymbol{t}$相应于$\boldsymbol{p}_i$的特征值），因而有

$$\boldsymbol{\sigma}=J^{-1}\boldsymbol{F}\boldsymbol{t}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}=J^{-1}(\boldsymbol{RU})\boldsymbol{t}(\boldsymbol{UR}^{\mathrm{T}})=J^{-1}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{UtU})\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$$

$$=J^{-1}\boldsymbol{R}\left\{\left(\sum_{r=1}^{3}\lambda_r\boldsymbol{p}_r\otimes\boldsymbol{p}_r\right)\left(\sum_{s=1}^{3}t_s\boldsymbol{p}_s\otimes\boldsymbol{p}_s\right)\left(\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\boldsymbol{p}_i\otimes\boldsymbol{p}_i\right)\right\}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$$

$$=J^{-1}(\boldsymbol{q}_s\otimes\boldsymbol{p}_s)\left(\sum_{r=1}^{3}\lambda_r^2t_r\boldsymbol{p}_r\otimes\boldsymbol{p}_r\right)(\boldsymbol{p}_i\otimes\boldsymbol{q}_i)$$

$$=J^{-1}\sum_{r=1}^{3}\lambda_r^2t_r\boldsymbol{q}_r\otimes\boldsymbol{q}_r,$$

因而$\boldsymbol{\sigma}$与$\boldsymbol{B}$共轴（$\boldsymbol{\sigma}$相应于$\boldsymbol{q}_i$的特征值为$J^{-1}\lambda_i^2t_i$）.

再设$\boldsymbol{\sigma}$与$\boldsymbol{B}$共轴，则$\boldsymbol{\sigma}=\sum_{r=1}^{3}\sigma_r\boldsymbol{q}_r\otimes\boldsymbol{q}_r$（$\sigma_i$为$\boldsymbol{\sigma}$相应于$\boldsymbol{q}_i$的特征值）。因而有

$$\boldsymbol{t}=J\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{F}^{-1})^T=J(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}^{-1})\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{R})$$

$$=J\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{V}^{-1})\boldsymbol{R}$$

$$= JR^{T}\Big\{\Big(\sum_{r=1}^{3}\lambda_r^{-1}\boldsymbol{q}_r\otimes\boldsymbol{q}_r\Big)\Big(\sum_{r=1}^{3}\sigma_r\boldsymbol{q}_r\otimes\boldsymbol{q}_r\Big)\Big(\sum_{i=1}^{3}\lambda_i^{-1}\boldsymbol{q}_i\otimes\boldsymbol{q}_i\Big)R$$

$$=J(\boldsymbol{p}_r\otimes\boldsymbol{q}_r)\Big(\sum_{r=1}^{3}\lambda_r^{-2}\sigma_r\boldsymbol{q}_r\otimes\boldsymbol{q}_r\Big)(\boldsymbol{q}_i\otimes\boldsymbol{p}_i)$$

$$=J\sum_{r=1}^{3}\lambda_r^{-2}\sigma_r\boldsymbol{p}_r\otimes\boldsymbol{p}_r.$$

因而$\boldsymbol{t}$与$\boldsymbol{C}$共轴。（$\boldsymbol{t}$相应于$\boldsymbol{p}_i$的特征值为$J\lambda_i^{-2}\sigma_i$）.

7. 由无体力的静力平衡方程$\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}=0$（(3.23)式），

有 $$\frac{\partial\sigma_{ri}}{\partial x_r}=\frac{\partial\sigma_{1i}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{2i}}{\sigma x_2}=0\quad(i=1,\ 2,\ 3),\qquad(\mathrm{A})$$

这里用到$\frac{\partial\sigma_{3i}}{\sigma x_3}=0$，将 $\sigma_{1i}=-\frac{\partial\phi_i}{\partial x_2}$，$\sigma_{2i}=\frac{\partial\phi_i}{\partial x_1}$代入(A)

得 $-\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x_2\partial x_1}=0$，平衡方程自动满足，说明矢量应力函数$\boldsymbol{\phi}$存在。

其次，考虑$\boldsymbol{C}$上的应力矢量

$$\boldsymbol{t}_{(n)}=\boldsymbol{\sigma}^{T}\boldsymbol{n}=\sigma_{rq}n_r\boldsymbol{e}_q=(\sigma_{1q}n_1+\sigma_{2q}n_2)\boldsymbol{e}_q$$

$$=\Big\{-\frac{\partial\phi_q}{\partial x_2}n_1+\frac{\partial\phi_q}{\partial x_1}n_2\Big\}\boldsymbol{e}_q=-\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial x_2}n_1+\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial x_1}n_2.$$

(B)

这里$\boldsymbol{n}$为侧面上的外法线，它与$\boldsymbol{e}_3$垂直，故$n_3=0$.

$$\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial s}=\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial x_r}\frac{\mathrm{d}x_r}{\mathrm{d}s}=\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}s}+\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}s}$$

$$=-n_2\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial x_1}+n_1\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial x_2}.\qquad(\mathrm{C})$$

比较(B)(C)二式，即得$\boldsymbol{t}_{(n)}=-\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial s}$.

8. $\hat{\boldsymbol{r}}=\dfrac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}=\dfrac{\boldsymbol{x}}{r}$,

所以 $$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}&=\sigma_r\,\hat{\boldsymbol{r}}\otimes\hat{\boldsymbol{r}}+\sigma_\theta(\hat{\boldsymbol{\theta}}\otimes\hat{\boldsymbol{\theta}}+\hat{\boldsymbol{\phi}}\otimes\hat{\boldsymbol{\phi}})\\&=(\sigma_r-\sigma_\theta)\hat{\boldsymbol{r}}\otimes\hat{\boldsymbol{r}}+\sigma_\theta\boldsymbol{I}\\&=r^{-2}(\sigma_r-\sigma_\theta)\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x}+\sigma_\theta\boldsymbol{I}.\end{aligned}\qquad(\mathrm{A})$$

将(A)式右端两项分别以$\boldsymbol{\sigma}_1$和$\boldsymbol{\sigma}_2$代表。速度$\boldsymbol{v}=v\hat{\boldsymbol{r}}$，加速度$\boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{v}}=\dot{v}\hat{\boldsymbol{r}}=\left\{\dfrac{\partial v}{\partial t}+(\operatorname{grad}\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{v}\right\}\hat{\boldsymbol{r}}=\left\{\dfrac{\partial v}{\partial t}+v\dfrac{\partial v}{\partial r}\right\}\hat{\boldsymbol{r}}$.

又$\boldsymbol{\sigma}_1=r^{-2}(\sigma_r-\sigma_\theta)\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x}=r^{-2}(\sigma_r-\sigma_\theta)x_px_q\boldsymbol{e}_q\otimes\boldsymbol{e}_p$。故有

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\sigma_1&=\{\partial[r^{-2}(\sigma_r-\sigma_\theta)x_px_q]/\partial x_p\}\boldsymbol{e}_q\\&=\{\partial(r^{-2}x_px_q)/\partial x_p\}(\sigma_r-\sigma_\theta)\boldsymbol{e}_q\\&\quad+r^{-2}x_px_q\{\partial(\sigma_r-\sigma_\theta)/\partial x_p\}\boldsymbol{e}_q.\end{aligned}$$

由于 $$\begin{aligned}&\partial(r^{-2}x_px_q)/\partial x_p\\&=\{\partial(r^{-2})/\partial r\}(\partial r/\partial x_p)x_px_q+r^{-2}\partial(x_px_q)/\partial x_p\\&=-2r^{-4}(x_px_px_q)+r^{-2}(3x_q+x_p\delta_{pq})\\&=-2r^{-2}x_q+4r^{-2}x_q=2r^{-2}x_q,\\&\partial(\sigma_r-\sigma_\theta)/\partial x_p=\{\partial(\sigma_r-\sigma_\theta)/\partial r\}(\partial r/\partial x_p)\\&\quad=\{(\partial\sigma_r/\partial r)-(\partial\sigma_\theta/\partial r)\}(x_p/r).\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}_1&=2r^{-2}(\sigma_r-\sigma_\theta)x_q\boldsymbol{e}_q+\{(\partial\sigma_r/\sigma r)-(\partial\sigma_\theta/\partial r)\}r^{-3}(x_px_px_q)\boldsymbol{e}_q\\&=[2r^{-1}(\sigma_r-\sigma_\theta)+(\partial\sigma_r/\partial r)-(\partial\sigma_\theta/\partial r)]\hat{\boldsymbol{r}}.\end{aligned}$$

此外 $$\begin{aligned}\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}_2&=\operatorname{div}(\sigma_\theta\boldsymbol{I})=\{\partial(\sigma_\theta\delta_{pq})/\partial x_p\}\boldsymbol{e}_q=(\partial\sigma_\theta/\partial x_q)\boldsymbol{e}_q\\&=(\partial\sigma_\theta/\partial r)(\partial r/\partial x_p)\boldsymbol{e}_q=(\partial\sigma_\theta/\partial r)x_q\boldsymbol{e}_q/r\\&=(\partial\sigma_\theta/\partial r)\hat{\boldsymbol{r}}.\end{aligned}$$

由平衡（运动）方程式$\rho\boldsymbol{a}=\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}$（无体力）就得到沿$\hat{\boldsymbol{r}}$方向的单个标量方程式

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial r}\right)=\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{2}{r}(\sigma_r-\sigma_\theta).\qquad(\mathrm{B})$$

由于不可压缩，ρ为常数，由(B)积分可得

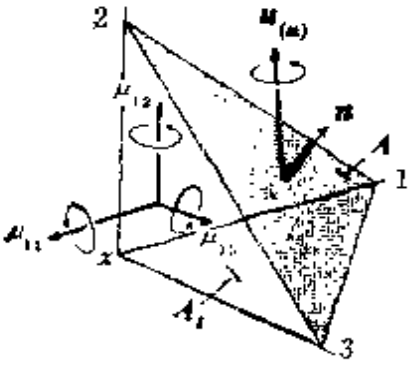
$$P=(\sigma_r)_{r=a}=\rho\int_a^{\infty}a_r\mathrm{d}r-2\int_a^{\infty}(\sigma_r-\sigma_\theta)\frac{\mathrm{d}r}{r}. \qquad (C)$$

式中，$a_r=\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial r}$为在$\hat{r}$方向的加速度分量。由例2.8的结果知，$a_r=\{(a^2\ddot{a}+2a\dot{a}^2)r^{-2}-2a^4\dot{a}^2r^{-5}\}$，代入(C)式积分即得本题所要求证的结果。

9. 首先，可以像从$t_{(n)}$导出σ一样，用四面体的力矩平衡由U_{ij}导出偶应力μ。如图所示，设在斜面上的接触力矩为$u_{(n)}$。在其余三个面上的接触力矩均沿坐标轴分解为三个分量。μ_{ij}即表示在i-平面上的接触力矩$u_{(e_i)}$在j方向的分量，即$\{u_{(e_i)}\}_j$. 以μ_{ij}为分量组成的张量即称为偶应力张量，以μ表示。考虑力矩的平衡，例如在1-方向有

$\{u_{(n)}\}_1A=A_1\mu_{11}+A_2\mu_{21}+A_3\mu_{31}=A(n_j\mu_{j1})$，也就是

$\{u_{(n)}\}_1=n_ju_{j1}$（式中A为斜面面积，A_i为i面面积）。由此即可写为



$$u_{(n)}=\mu^Tn。$$

接触力$t_{(n)}$及体力b产生的力矩，当四面体体积以零为极限时均告消失。

其次，再考虑同时作用有体力矩c、接触力矩$u_{(n)}$、体力b和接触力$t_{(n)}$的情形。作用于占据R_t的物质体上的合力与合力矩分别为

$$F(R_t)=\int_{R_t}\rho b\mathrm{d}v+\int_{\partial R_t}t_{(n)}\mathrm{d}a,$$

$$G(R_t,0)=\int_{R_t}(x\times\rho b+\rho c)\mathrm{d}v+\int_{\partial R}\{(x\times t_{(n)})+u_{(n)}\}\mathrm{d}a,$$

其中o为坐标原点。运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{R_t}\rho v\mathrm{d}v=\int_{R_t}\rho b\mathrm{d}v+\int_{\partial R_t}t_{(n)}\mathrm{d}a, \qquad (B)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{R_t}(\boldsymbol{x}\times\rho\boldsymbol{v})\mathrm{d}v=\int_{R_t}\rho(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\mathrm{d}v$$

$$+\int_{\partial R_t}(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t}_{(n)}+\boldsymbol{u}_{(n)})\mathrm{d}a. \tag{C}$$

利用式(1.96)和(1.99)，可将(C)式右方第二项改写为

$$\int_{\partial R_t}(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t}_{(n)}+\boldsymbol{u}_{(n)})\mathrm{d}a=\int_{\partial R_t}\{\boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n})+\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}\}\mathrm{d}a$$

$$=\int_{R_t}(\boldsymbol{x}\times\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\pi}+\mathrm{div}\boldsymbol{\mu})\mathrm{d}v,$$

式中$\boldsymbol{\pi}$为反对称张量$\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}$的轴矢量。因而(C)式化为

$$\int_{R_t}\{\boldsymbol{x}\times(\rho\boldsymbol{a}-\rho\boldsymbol{b}-\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma})+\boldsymbol{\pi}-\rho\boldsymbol{c}-\mathrm{div}\boldsymbol{\mu}\}\mathrm{d}v=0.$$

再利用(3.23)式，上式化为

$$\int_{R_t}(\boldsymbol{\pi}-\rho\boldsymbol{c}-\mathrm{div}\boldsymbol{\mu})\mathrm{d}v=0. \tag{D}$$

由R_t的任意性，得场方程为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\pi}+\rho\boldsymbol{c}=0. \tag{E}$$

再利用(1.96)式，将(D)式中$\int_{R_t}\mathrm{div}\,\boldsymbol{\mu}\,\mathrm{d}v$换为$\int_{\partial R_t}\boldsymbol{u}_{(n)}\mathrm{d}a$，即得守恒定律

$$\int_{R_t}(\rho\boldsymbol{c}-\boldsymbol{\pi})\mathrm{d}v+\int_{\partial R_t}\boldsymbol{u}_{(n)}\mathrm{d}a=0. \tag{F}$$

设有奇异面A，按书中图3-7取A两侧无限薄片为对象，由守恒定律得

$$\int_A[\boldsymbol{u}_{(n)}]\mathrm{d}a=0, \tag{G}$$

从而得到跳跃条件

$$[\boldsymbol{U}_{(n)}]=0. \tag{H}$$

10. 令B为某参照构形，对J的定义式直接求导得到

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{B_t}\rho J\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x}\mathrm{d}V=\rho_0\int_{B_t}(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{v})\mathrm{d}V,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t^2}=\rho_0\int_{B_t}(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}+\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{a})\mathrm{d}V$$

$$=2\boldsymbol{K}+\int_{B_t}[(\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}+\rho\boldsymbol{b})\otimes\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}\otimes(\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}+\rho\boldsymbol{b})]\mathrm{d}v$$

$$=2\boldsymbol{K}+\int_{B_t}\rho(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{x})\mathrm{d}v+\hat{\boldsymbol{J}},\qquad(\mathrm{A})$$

式中 $$\hat{\boldsymbol{J}}=\int_{B_t}(\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}\otimes\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}\otimes\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma})\mathrm{d}v$$

因为 $$\hat{J}_{ij}=\int_{B_t}(\sigma_{ik,k}x_j+x_i\sigma_{jk,k})\mathrm{d}v$$

$$=\int_{B_t}\left[\frac{\partial}{\partial x_k}(\sigma_{ik}x_j+\sigma_{jk}x_i)-2\sigma_{ij}\right]\mathrm{d}v$$

$$=\int_{\partial B_t}(\sigma_{ik}n_kx_j+x\,\sigma_{jk}n_k)\mathrm{d}a-2\int_{B_t}\sigma_{ij}\mathrm{d}v,$$

因此

$$\hat{\boldsymbol{J}}=\int_{\partial B_t}(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{t}_n+\boldsymbol{t}_n\otimes\boldsymbol{x})\mathrm{d}a-2\int_{B_t}\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}v.\qquad(\mathrm{B})$$

将(B)代入(A)即得所要求证的式子。

若物体处于静止状态，则由(A)(B)得到

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}=\frac{1}{V}\int_{B_t}\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}v=\frac{1}{2}V^{-1}\int_{B_t}\rho(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{x})\mathrm{d}v$$

$$+\frac{1}{2}V^{-1}\int_{\partial B_t}(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{t}_n+\boldsymbol{t}_n\otimes\boldsymbol{x})\mathrm{d}a$$

即为例3.9中的(A)式。

11. 令$\boldsymbol{b}=\mathrm{grad}\chi$。对理想流体$\boldsymbol{\sigma}=-p\boldsymbol{I}$，$\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}=-\mathrm{grad}p$。

（i）对不可压缩理想流体ρ为常数，运动方程为$\rho\boldsymbol{a}=\rho\boldsymbol{b}+\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}$
$=\rho\mathrm{grad}\chi-\mathrm{grad}p$，于是

$$\boldsymbol{a}=\mathrm{grad}(\chi-p/\rho)=\mathrm{grad}\chi^* \quad (令\chi^*=\chi-p/\rho)$$

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{a}=\mathrm{curl}(\mathrm{grad}\chi^*)=\varepsilon_{pqr}\frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{\partial\chi^*}{\partial x_q}\right)\boldsymbol{e}_p$$

$$=\sum_{i,j,k为循环排列}\left(\frac{\partial^2\chi^*}{\partial x_k\partial x_j}-\frac{\partial^2\chi^*}{\partial x_j\partial x_k}\right)\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{0}$$

处处成立。$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C(\Gamma_t)=\int_{\partial R}(\mathrm{curl}\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a=0$。运动是保环量的。

其次，对可压缩理想流体的正压运动，压力$p=f(\rho)$。$\boldsymbol{c}=\mathrm{grad}\chi-\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p$，$\mathrm{curl}(\mathrm{grad}\chi)=0$，而

$$\mathrm{curl}\left(\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\ p\right)=\mathrm{curl}\left\{\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}f(\rho)\right\}$$

$$=\varepsilon_{pqr}\frac{\partial}{\partial x_r}\left\{\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial f(\rho)}{\partial x_q}\right\}\boldsymbol{e}_p$$

$$=\varepsilon_{pqr}\left\{-\frac{1}{\rho^2}\ \frac{\partial\rho}{\partial x_r}\ \frac{\partial f(\rho)}{\partial x_q}+\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial^2 f(\rho)}{\partial x_r\partial x_q}\right\}\boldsymbol{e}_p$$

$$=\varepsilon_{pqr}\left\{-\frac{1}{\rho^2}\ \frac{\partial\rho}{\partial x_r}\ \frac{\partial\rho}{\partial x_q}\ \frac{\mathrm{d}f(\rho)}{\mathrm{d}\rho}+\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial^2 f(\rho)}{\partial x_r\partial x_q}\right\}\boldsymbol{e}_p$$

$$=\sum_{i,j,k为循环排列}\left\{-\frac{1}{\rho^2}\ \frac{\mathrm{d}f(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x_k}\ \frac{\partial\rho}{\partial x_j}-\frac{\partial\rho}{\partial x_j}\ \frac{\partial\rho}{\partial x_k}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\ \partial x_j}-\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_k}\right)\right\}\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{0},$$

故有curl$\boldsymbol{a}=0$，运动也是保环量的。

(ii)对不可压缩理想流体$\boldsymbol{\sigma}=-p\boldsymbol{I}$，$\rho=$常数。再令$\boldsymbol{b}=\mathrm{grad}\chi$。涡度$\boldsymbol{\omega}=\mathrm{curl}\boldsymbol{v}$，运动方程式为$\rho\boldsymbol{a}=\rho\boldsymbol{b}+\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}=\rho\mathrm{grad}\left(\chi-\frac{p}{\rho}\right)$。此外，$\mathrm{grad}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{grad}v^2=v\frac{\partial v}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i=v\frac{\partial v}{\partial v_q}\frac{\partial v_q}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i=v_q\frac{\partial v_q}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i=(\mathrm{grad}\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}$。涡度$\boldsymbol{\omega}=\mathrm{curl}\boldsymbol{v}$为反对称张量$\{(\mathrm{grad}\boldsymbol{v})-(\mathrm{grad}\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}\}$的轴矢量。$-\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}=-\{(\mathrm{grad}\boldsymbol{v})-(\mathrm{grad}\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}\}\boldsymbol{v}=-(\mathrm{grad}\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}+(\mathrm{grad}\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}$。对定常运动$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}=0$，故有$\boldsymbol{a}=\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\mathrm{grad}\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}=(\mathrm{grad}\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}$。故运动方程式为$-(\mathrm{grad}\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}=\mathrm{grad}(p/\rho-\chi)$，因而有

$$-\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}=\mathrm{grad}\left(p/\rho+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}-\chi\right).$$

在流线上其切线与速度$\boldsymbol{v}$的方向一致，故有$\boldsymbol{\omega}=\mathrm{curl}\boldsymbol{v}=\left(\boldsymbol{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\times\boldsymbol{v}=0$，$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}=\left\{\left(\boldsymbol{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\times\boldsymbol{v}\right\}\times\boldsymbol{v}=0$。因而沿流线有$\mathrm{grad}\left(p/\rho+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}-\chi\right)=0$，也就是$p/\rho+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}-\chi=$常数。

以上采用的标准正交基$\boldsymbol{e}=\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3\}$都是在$\mathbf{E}^+$上定义的。

12. $\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{c}}+\boldsymbol{w}\times(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})$，则

$$K(R_t)=\int_{R_t}\rho\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{2}\int_{R_t}\rho\{\dot{\boldsymbol{c}}+\boldsymbol{w}\times(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\}\cdot\{\dot{\boldsymbol{c}}+\boldsymbol{w}\times(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\}\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{2}\int_{R_t}\rho\{\dot{\boldsymbol{c}}\cdot\dot{\boldsymbol{c}}+2\dot{\boldsymbol{c}}\cdot\{\boldsymbol{w}\times(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}\}+\{\boldsymbol{w}\times(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\}\cdot\{\boldsymbol{w}\times(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\}\}\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{2}\{(\dot{\boldsymbol{c}}\cdot\dot{\boldsymbol{c}})\int_{R_t}\rho\mathrm{d}v+2\dot{\boldsymbol{c}}\cdot\boldsymbol{w}\times\int_{R_t}\rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\mathrm{d}v$$

$$+(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w})\int_{R_t}\rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\mathrm{d}v$$

$$-\int_{R_t}\rho\{\boldsymbol{w}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\}\{\boldsymbol{w}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\}\mathrm{d}v)$$

由于 $\int_{R_t}\rho\mathrm{d}v=m(R_t)$，$\int_{R_t}\rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\mathrm{d}v=m(R_t)\ (\overline{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{c})$，

$$\int_{R_t}\rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\mathrm{d}v$$

$$=\int_{R_t}\rho\{\overline{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})\}\cdot\{\overline{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})\}\mathrm{d}v$$

$$=m(R_t)(\overline{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{c})\cdot(\overline{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{c})+2(\overline{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{c})\cdot\int_{R_t}\rho(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})\mathrm{d}v$$

$$+\int_{R_t}\rho(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})\cdot(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})\mathrm{d}v$$

$$=m(R_t)\ (\overline{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{c})\cdot(\overline{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{c})+\int_{R_t}\rho(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})\cdot(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})\mathrm{d}v,$$

所以

$$\int_{R_t}\rho\{\boldsymbol{w}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\}\{\boldsymbol{w}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\}\mathrm{d}v$$

$$=\int_{R_t}\rho\{\boldsymbol{w}\cdot(\overline{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{c}+\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})\}\{\boldsymbol{w}\cdot(\overline{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{c}+\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})\}\mathrm{d}v$$

$$=m(R_t)\{\boldsymbol{w}\cdot(\overline{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{c})\}\{\boldsymbol{w}\cdot\{\overline{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{c})\}$$

$$+2\int_{R_t}\rho\{\boldsymbol{w}\cdot(\overline{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{c})\}\{\boldsymbol{w}\cdot(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})\}\mathrm{d}v$$

$$+\int_{R_t}\rho\{\boldsymbol{w}\cdot(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})\}\{\boldsymbol{w}\cdot(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})\}\mathrm{d}v$$

$$=m(R_t)\{\boldsymbol{w}\cdot(\overline{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{c})\}\{\boldsymbol{w}\cdot(\overline{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{c})\}$$

$$+\int_{R_t}\rho\{\boldsymbol{w}\cdot(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})\}\{\boldsymbol{w}\cdot(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})\}\mathrm{d}v$$

再由 $\overline{\boldsymbol{v}}=\dot{\boldsymbol{c}}+\boldsymbol{w}\times(\overline{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{c})$及以上各式可得

$$K(R_t)=\frac{1}{2}m(R_t)\,\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\overline{\boldsymbol{v}}$$

$$+\frac{1}{2}\Big[(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w})\int_{R_t}\rho(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})\cdot(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})\mathrm{d}v$$

$$-\int_{R_t}\rho\{\boldsymbol{w}\cdot(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})\}\{\boldsymbol{w}\cdot(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})\}\mathrm{d}v\Big]$$

$$=\frac{1}{2}m(R_t)\,\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\overline{\boldsymbol{v}}$$

$$+\frac{1}{2}\Big[\boldsymbol{w}\cdot\Big(\int_{R_t}\rho\{(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})\cdot(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})\}\boldsymbol{I}\mathrm{d}v\Big)\boldsymbol{w}$$

$$-\boldsymbol{w}\cdot\Big(\Big\{\int_{R_t}\rho(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})\otimes(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})\,\mathrm{d}v\Big\}\boldsymbol{w}\Big)\Big]$$

$$=\frac{1}{2}m(R_t)\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\overline{\boldsymbol{v}}+\frac{1}{2}\boldsymbol{w}\cdot\Big(\Big(\int_{R_t}\rho[\{(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})$$

$$\cdot(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})\}\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})\otimes(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})]\mathrm{d}v\Big]\boldsymbol{w}\Big)$$

$$=\frac{1}{2}m(R_t)\,\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\overline{\boldsymbol{v}}+\frac{1}{2}\boldsymbol{w}\cdot\{\overline{\boldsymbol{J}}(R_t)\,\boldsymbol{w}\}$$

13. 因为是等容运动，故$\mathrm{div}\boldsymbol{v}=0$。又因$\boldsymbol{\omega}=\mathrm{curl}\boldsymbol{v}$为反对称张量$\{(\mathrm{grad}\boldsymbol{v})-(\mathrm{grad}\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}\}$的轴矢量，故$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}=(\mathrm{grad}\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}-(\mathrm{grad}\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}$。所以有

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{v})=\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v})=\boldsymbol{x}\cdot\{(\mathrm{grad}\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}\}-\boldsymbol{v}\cdot\{(\mathrm{grad}\boldsymbol{v})\boldsymbol{x}\}\tag{A}$$

再令 $$\boldsymbol{T}=\mathrm{div}\Big[\rho\Big\{\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}\Big\}\Big]$$

$$=\left\{\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}\right\}\cdot\operatorname{grad}\rho$$

$$+\rho\operatorname{div}\left\{\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}\right\}. \qquad \text{(B)}$$

其中第2项

$$\rho\operatorname{div}\left\{\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}\right\}$$

$$=\rho\{\boldsymbol{x}\cdot\{\operatorname{grad}\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})\}$$

$$+\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})\operatorname{div}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}\cdot\{\operatorname{grad}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v})\}-(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v})\operatorname{div}\boldsymbol{v}\}$$

$$=\rho\{\boldsymbol{x}\cdot\{(\operatorname{grad}\boldsymbol{v})^{T}\boldsymbol{v}\}+\frac{3}{2}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})$$

$$-\{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\cdot(\{\operatorname{grad}\boldsymbol{v}\}^{T}\boldsymbol{x})\}\}$$

$$=\rho\{-[\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{v}]+\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})\}.$$

在上面推演中用到恒等式$\operatorname{div}(\phi\boldsymbol{u})=\boldsymbol{u}\cdot\operatorname{grad}\phi+\phi\operatorname{div}\boldsymbol{u}$，以及在本章习题11(ii)解答中推出的$\operatorname{grad}(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})=(\operatorname{grad}\boldsymbol{v})^{T}\boldsymbol{v}$和本题上面的(A)式。同时也用到$\operatorname{grad}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v})=\frac{\partial(x_i v_i)}{\partial x_a}\boldsymbol{e}_a$
$=\boldsymbol{v}+\{\operatorname{grad}\boldsymbol{v}\}^{T}\boldsymbol{x}$。

现设物体在初始状态具有均匀密度ρ_*，由于是等容运动，在任意时刻任意点均具有常密度ρ_*，因而$\operatorname{grad}\rho\equiv 0$。故(B)式右方第一项为零。

$$\int_{R_t}\rho[\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{v}]\mathrm{d}v+\int_{\partial R_t}\rho\left\{\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}\right\}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a$$

$$=\int_{R_t}\rho([\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{v}]+\operatorname{div}[\rho\left\{\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}\right\}])\mathrm{d}v$$

$$=\int_{R_t}\rho\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right)\mathrm{d}v=K(R_t). \qquad (C)$$

对无旋运动，$\omega=\mathrm{curl}\boldsymbol{v}=0$，由(C)式

$$K(B)=\int_{\partial B}\rho\left\{\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}\right\}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a=0,$$

这是因为在边界∂B上$\boldsymbol{v}=0$。但

$$K(B)=\frac{1}{2}\int_B\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}v,$$

由于$K(B)$为零，必须在B内处处$\boldsymbol{v}=0$（因为$\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\geqslant 0$），即物体$\tilde{\boldsymbol{B}}$处于静止状态。

14. (i)由式(3.48)，(3.46)和(3.47)

$$[\boldsymbol{t}_{(n)}\cdot\boldsymbol{n}]=-[\rho V\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}]=[\rho V(V-V_n)]$$
$$=[\rho V^2]-[\rho V]V_n=[\rho V^2]=\{(\rho^+V^+)V^+-(\rho^-V^-)V^-\}$$
$$=\{\rho^-V^-V^+-\rho^+V^+V^-\}=-(\rho^+-\rho^-)V^+V^-$$
$$=-V^+V^-[\rho],\ \text{即所求证。}$$

(ii)在接触间断面上$V=0$，由式(3.48)$[\boldsymbol{t}_{(n)}]=-[\rho V\boldsymbol{v}]=0$。由式(3.46)，$[\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}]=[V_n]-[V]=0$。当应力为球形时，$\sigma=-p\boldsymbol{I}$。由式(3.49)，因$V=0$，有$[\boldsymbol{t}_{(n)}\cdot\boldsymbol{v}+h_{(n)}]=0$　$[h_{(n)}]=-[\boldsymbol{t}_{(n)}\cdot\boldsymbol{v}]=[p\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}]=0$。

(iii)对加速度波，$[\boldsymbol{v}]=0$。由式(3.46)，$[V]=[V_n]-[\boldsymbol{v}]\cdot\boldsymbol{n}=0$。再由式(3.47)$[\rho V]=V^{\pm}[\rho]$。因为$V^{\pm}\neq 0$，所以$[\rho]=0$。再由式(3.48)，$[\boldsymbol{t}_{(n)}]=-[\rho V\boldsymbol{v}]=-(\rho V)^{\pm}[\boldsymbol{v}]=0$。再由(3.49)式，

$$\left[\rho V\left(e+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right)+\boldsymbol{t}_{(n)}\cdot\boldsymbol{v}+h_{(n)}\right]$$
$$=(\rho V)^{\pm}\left\{[e]+\frac{1}{2}[\boldsymbol{v}]\cdot\boldsymbol{v}^{\pm}\right\}+[\boldsymbol{t}_{(n)}]\cdot\boldsymbol{v}^{\pm}+[h_{(n)}]$$
$$=\rho V[e]+[h_{(n)}]=0.$$

(iv)在等容运动中$\rho^+=\rho^-=\rho$，故$[\rho]=0$。而在冲击波上$[v\cdot n]\neq 0$，故由式(3.46)，$[V]\neq 0$。由式(3.47)，$[\rho V]=\rho[V]=0$，即$\rho[V_n]-\rho[v\cdot n]=-\rho[v\cdot n]=0$。故冲击波不可能存在。

15. 首先将式(3.49)写为

$$(\rho V)^+\left(\frac{1}{2}v\cdot v-\varepsilon\right)=(\rho V)^+[v\cdot v]+[\sigma^T n\cdot v]+[q\cdot n]. \tag{A}$$

再由式(3.48)和(3.47)，我们有

$$[\sigma^T n\cdot v]=[\sigma^T n]\cdot v^-+(\sigma^T n)^+\cdot[v]$$
$$=-(\rho V)^+[v]\cdot v^-+(\sigma^T n)^+\cdot[v]$$

将上式及$[v\cdot v]=[v]\cdot v^-+v^+\cdot[v]$代入(A)式，即得到所要求证的等式。

如果冲击波前的区域是静止的，无应力的，且$q=0$，那末式(A)的右边为零。因此有

$$\left[\frac{1}{2}v\cdot v\right]=[\varepsilon].$$

第 四 章

1. 由于物体是刚性的，无热量供给，且热流动是定常的。因此$\mathrm{tr}(\sigma D)=0$，$\rho r=0$，$\dot{\varepsilon}=0$。式(3.39)便简化为$\mathrm{div}q=0$。

利用题中给出的所有条件，我们有

$$\int_B q\cdot\mathrm{grad}\theta\,dv=\int_B\mathrm{div}(q\theta)dv-\int_B\theta\mathrm{div}q\,dv$$
$$=\int_{\partial B}\theta q\cdot n\,da=\theta_1\int_{S_1}q\cdot n\,da$$
$$+\theta_2\int_{S_2}q\cdot n\,da.$$

又由

$$\int_B \mathrm{div}\boldsymbol{q}\,\mathrm{d}v=\int_{\partial B}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a=\int_{S_1}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a+\int_{S_2}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a=0,$$

知
$$\int_{S_2}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a=-\int_{S_1}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a,$$

所以
$$\int_B\boldsymbol{q}\cdot\mathrm{grad}\theta\,\mathrm{d}v=(\theta_1-\theta_2)\int_{S_1}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a.$$

若热流是从S_1进入物体，则在S_1上$\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}>0$，因此如果$S_2$不比$S_1$热，即$\theta_1\geqslant\theta_2$，则由上式必有

$$\int_B\boldsymbol{q}\cdot\mathrm{grad}\theta\,\mathrm{d}v\geqslant 0\ .$$

反之，若此不等式成立，必有$\theta_1\geqslant\theta_2$。

2. 首先对 $n=1$，有$\overset{(1)}{\boldsymbol{C}}=\dot{\boldsymbol{C}}=(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F})^{\cdot}=\dot{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{F}}$
$=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\{(\boldsymbol{F}^{-1})^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{T}}+\dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{F}^{-1}\}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{L})\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{D})\boldsymbol{F}$
$=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{F}$，故有$\boldsymbol{A}_1=2\boldsymbol{D}$。其次，若$\overset{(n-1)}{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{n-1}\boldsymbol{F}$，则$\overset{(n)}{\boldsymbol{C}}$
$=\{\overset{(n-1)}{\boldsymbol{C}}\}^{\cdot}=\dot{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{n-1}\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{A}}_{n-1}\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{n-1}\dot{\boldsymbol{F}}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{n-1}\boldsymbol{F}$
$+\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{A}}_{n-1}\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{n-1}\boldsymbol{L}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\mathring{\boldsymbol{A}}_{n-1}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{F}$，所以$\boldsymbol{A}_n=\mathring{\boldsymbol{A}}_{n-1}$（$n=2,\ 3,\ \cdots$）。由$\boldsymbol{D}$为客观的，知$\boldsymbol{A}_1$也是客观的。由$\mathring{\boldsymbol{A}}_{n-1}$是客观的（见例4.4），知$\boldsymbol{A}_n$（$n=2,\ 3,\ \cdots$）也是客观的。最后，由$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$，$\overset{(n)}{\boldsymbol{C}}=\overset{(n)}{\boldsymbol{C}}{}^{\mathrm{T}}$，故有$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{F})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_n{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}$，故$\boldsymbol{A}_n=\boldsymbol{A}_n{}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}_n$为对称的（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）。

3. 设所考虑的奇异面在标架$\widetilde{\boldsymbol{F}}$为$\Phi(x,\ t)=0$，在等体标架$\widetilde{\boldsymbol{F}}'$中为$\Phi'(x',\ t')=0$。可知$n=|\mathrm{grad}\Phi|^{-1}\mathrm{grad}\Phi$，又设奇异面法向移动速度为$V_n$，由梯度的性质及移动后的奇异面仍以$\Phi=0$表示，易知

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\Phi}{\partial t}+V_n|\mathrm{grad}\Phi|=0\ ,$$

故
$$V_n=-|\mathrm{grad}\Phi|^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial t}.$$

$$V=V_n-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=-|\mathrm{grad}\Phi|^{-1}\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot(\mathrm{grad}\Phi)\right\}$$

$$=-|\mathrm{grad}\Phi|^{-1}\dot{\Phi}$$

对$\Phi'=0$也可进行同样的推演，于是

$$V'=-|\mathrm{grad}\Phi'|^{-1}\dot{\Phi}'=-|\boldsymbol{Q}(\mathrm{grad}\Phi)|^{-1}\dot{\Phi}$$

$$=-|\mathrm{grad}\Phi|^{-1}\dot{\Phi}=V.$$

此外还有$\rho'=\rho$，$\varepsilon'=\varepsilon$，$\boldsymbol{t}'_{(n')}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{t}_n$，$h'_{(n')}=h_n$，$\boldsymbol{n}'=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{v}'=\dot{\boldsymbol{c}}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{v}+\Omega(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{c})$。

首先看式(3.47)，由于$\rho V=\rho' V'$，所以$[\rho V]=[\rho' V']=0$。

再看式(3.48)，$\rho' V'\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{t}'_{(n')}=\rho V\{\dot{\boldsymbol{c}}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{v}+\Omega(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{c})\}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{t}_{(n)}$，由于$[\dot{\boldsymbol{c}}+\Omega(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{c})]=0$，故有$[\rho' V'\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{t}'_{(n')}]=\boldsymbol{Q}[\rho V\boldsymbol{v}+\boldsymbol{t}_{(n)}]=0$。

最后看式(3.49)，由于

$$[\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{v}']=[\{\dot{\boldsymbol{c}}+\Omega(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{c})\}\cdot\{\dot{\boldsymbol{c}}+\Omega(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{c})\}$$

$$+2\{\dot{\boldsymbol{c}}+\Omega(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{c})\}\cdot(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{v})+(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{v})]$$

$$=2\{\dot{\boldsymbol{c}}+\Omega(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{c})\}\cdot[\boldsymbol{Q}\boldsymbol{v}]+[\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}],$$

$$[\boldsymbol{t}'_{(n')}\cdot\boldsymbol{v}']=[\{\boldsymbol{Q}\boldsymbol{t}_{(n)}\}\cdot\{\dot{\boldsymbol{c}}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{v}+\Omega(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{c})\}]$$

$$=[(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{t}_{(n)})\cdot(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{v})]+\{\dot{\boldsymbol{c}}+\Omega(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{c})\}\cdot[\boldsymbol{Q}\boldsymbol{t}_{(n)}].$$

因而有

$$[\rho' V'(\varepsilon'+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{v}')+\boldsymbol{t}'_{(n')}\cdot\boldsymbol{v}'+h'_{(n')}]$$

$$=[\rho V\varepsilon+h_{(n)}]+\{\dot{\boldsymbol{c}}+\Omega(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{c})\}\cdot\{\boldsymbol{Q}[\rho V\boldsymbol{v}+\boldsymbol{t}_{(n)}]\}$$

$$+[\rho V\cdot\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})]+[\boldsymbol{t}_{(n)}\cdot\boldsymbol{v}]$$

$$=[\rho V(\varepsilon+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})+\boldsymbol{t}_{(n)}\cdot\boldsymbol{v}+h_{(n)}]=0$$

4. 以下各式左方σ为客观张量，只要判断右方量是否客观的，即可确定其是否满足客观性原理。

(i)把t'理解为$t-0$，则$-p(t')\boldsymbol{I}=-p(t)\boldsymbol{I}=\boldsymbol{Q}\{-p(t)\boldsymbol{I}\}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$是客观的。

(ii)由式(4.12)$\boldsymbol{F}'=\boldsymbol{QF}$，故有$\alpha\{\boldsymbol{F}'+(\boldsymbol{F}')^{\mathrm{T}}\}=\alpha\{\boldsymbol{QF}+(\boldsymbol{QF})^{\mathrm{T}}\}=\alpha(\boldsymbol{QF}+\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{Q}\{\alpha(\boldsymbol{FQ}+\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}})\}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{Q}\sigma\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$，不是客观的。

(iii)由例4.3，$\boldsymbol{v}'=\dot{\boldsymbol{c}}+\dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{Qv}$，故有

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}')=\boldsymbol{f}(\dot{\boldsymbol{c}}+\dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{Qv})$，如是客观的必须有

$\boldsymbol{f}(\dot{\boldsymbol{c}}+\dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{Qv})=\boldsymbol{Qf}(\boldsymbol{v})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$，这只有在$\boldsymbol{f}=a\boldsymbol{I}$时才能成立($a$为标量常数)。

(iv)变换后右方为$\alpha\{\mathrm{grad}'\boldsymbol{a}'+(\mathrm{grad}'\boldsymbol{a}')^{\mathrm{T}}+2(\boldsymbol{L}')^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}'\}$

而

$$\mathrm{grad}'\boldsymbol{a}'=\mathrm{grad}'\{\boldsymbol{Qa}+2\boldsymbol{\Omega v}'+(\dot{\boldsymbol{\Omega}}-\boldsymbol{\Omega}^2)\boldsymbol{x}'\},$$

$$\mathrm{grad}'\boldsymbol{a}=\frac{\partial a_p}{\partial x_q'}\boldsymbol{e}_p\otimes\boldsymbol{e}_q'=\frac{\partial a_p}{\partial x_q}\boldsymbol{e}_p\otimes(\boldsymbol{Qe}_q)=(\mathrm{grad}\boldsymbol{a})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$$

因而 $\mathrm{grad}'(\boldsymbol{Qa})=\boldsymbol{Q}(\mathrm{grad}\boldsymbol{a})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$,

$$\mathrm{grad}'(2\boldsymbol{\Omega v}')=2\boldsymbol{\Omega}(\mathrm{grad}'\boldsymbol{v}')=2\boldsymbol{\Omega L}'=2\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{QLQ}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\Omega})$$
$$=2\dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{LQ}^{\mathrm{T}}+2\boldsymbol{\Omega}^2,$$

$$\mathrm{grad}'\{(\dot{\boldsymbol{\Omega}}-\boldsymbol{\Omega}^2)\boldsymbol{x}'\}=(\dot{\boldsymbol{\Omega}}-\boldsymbol{\Omega}^2)\mathrm{grad}'\boldsymbol{x}'=\dot{\boldsymbol{\Omega}}-\boldsymbol{\Omega}^2.$$

故有 $\mathrm{grad}'\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{Q}(\mathrm{grad}\boldsymbol{a})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}+2\dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{LQ}^{\mathrm{T}}+\dot{\boldsymbol{\Omega}}+\boldsymbol{\Omega}^2.$

此外，
$$(\boldsymbol{L}')^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}'=(\boldsymbol{QL}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\Omega})(\boldsymbol{QLQ}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\Omega})$$
$$=\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}-\dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{LQ}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{QL}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{Q}}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\Omega}^2.$$

由以上诸式即得到等式右方变换后成为

$$\boldsymbol{Q}\{\alpha\{\mathrm{grad}\boldsymbol{a}+(\mathrm{grad}\boldsymbol{a})^{\mathrm{T}}+2\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}\}\}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}\sigma\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}},$$

故本题等式符合客观性原理。

(v)由第4.3节末的译者注，$\boldsymbol{b}$在变换后应为$\boldsymbol{b}'=\boldsymbol{Qb}+\boldsymbol{b}^*$，式中$\boldsymbol{b}^*=\ddot{\boldsymbol{c}}+2\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{v}'-\dot{\boldsymbol{c}})-\boldsymbol{\Omega}^2(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{c})+\dot{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{c})$，因而$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}')=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Qb}+\boldsymbol{b}^*)$。如是客观的，应有$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Qb}+\boldsymbol{b}^*)=\boldsymbol{Qf}(\boldsymbol{b})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$。对任意的$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{x}'$，$\boldsymbol{v}'$，$\boldsymbol{Q}$，$\dot{\boldsymbol{Q}}$均使等式成立，这只有在$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})=a\boldsymbol{I}$时才有可能($a$为标量常数)。

5. 由式(4.13)知$\boldsymbol{L}'=\boldsymbol{QLQ}^{\mathrm{T}}+\Omega$。$\boldsymbol{W}'=\frac{1}{2}(\boldsymbol{L}'-\boldsymbol{L}'^{\mathrm{T}})$

$=\boldsymbol{QWQ}^{\mathrm{T}}+\Omega$。因此有$\overset{\nabla}{\sigma}{}'=\frac{\partial}{\partial t'}(\sigma')-\boldsymbol{W}\sigma'+\sigma'\boldsymbol{W}'$

$=\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{Q}\sigma\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})-\boldsymbol{QW}\sigma\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}-\Omega\boldsymbol{Q}\sigma\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Q}\sigma\boldsymbol{W}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Q}\sigma\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\Omega$

$=\boldsymbol{Q}\{\dot{\sigma}-\boldsymbol{W}\sigma+\sigma\boldsymbol{W}\}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}\overset{\nabla}{\sigma}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$

由此知$\overset{\nabla}{\sigma}$为客观张量。上式推演中考虑到$\Omega=\dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$和$\boldsymbol{QQ}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$，因而$\dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Q}\dot{\boldsymbol{Q}}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}$，故又可得$\Omega=-\boldsymbol{Q}\dot{\boldsymbol{Q}}^{\mathrm{T}}$。同时有$-\Omega\boldsymbol{Q}\sigma\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Q}\sigma\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\Omega=-\dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\sigma\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{Q}\sigma\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\dot{\boldsymbol{Q}}^{\mathrm{T}}=-\dot{\boldsymbol{Q}}\sigma\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{Q}\sigma\dot{\boldsymbol{Q}}^{\mathrm{T}}$。又因$\Omega$为反对称张量，$\sigma$为对称张量，故$\boldsymbol{Q}\sigma\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\Omega$也是反对称张量，$\boldsymbol{Q}\sigma\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\Omega=-\boldsymbol{Q}\sigma\dot{\boldsymbol{Q}}^{\mathrm{T}}=-(\dot{\boldsymbol{Q}}\sigma^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=-(\dot{\boldsymbol{Q}}\sigma\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\dot{\boldsymbol{Q}}\sigma\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$。故得$-\Omega\boldsymbol{Q}\sigma\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Q}\sigma\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\Omega=0$。

由于题中(A)式的所有张量和标量都是客观的，不难验证它满足客观性原理。

将例2.12中有关$\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{W}$的表达式及$\mathrm{tr}\boldsymbol{D}=0$代入(A)式，我们得到

$$\dot{\sigma}-\frac{1}{2}c(\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}\otimes\boldsymbol{p})\,\sigma+\frac{1}{2}c\sigma(\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}\otimes\boldsymbol{p})$$
$$=\beta c(\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}\otimes\boldsymbol{p}). \qquad (B)$$

设其解可表为

$$\sigma=A(t)(\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}\otimes\boldsymbol{q})+B(t)(\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}\otimes\boldsymbol{p}).$$

将此解代入(B)式得到

$$\dot{A}-cB=0,\qquad \dot{B}+cA=\beta c$$

求解此方程组，并利用题给初始条件，即得到

$$A(t)=\beta(1-\cos ct),\qquad B(t)=\beta\sin ct.$$

6. 题中式(A)满足客观性原理必须$f(\boldsymbol{F},\dot{\boldsymbol{F}})$为客观张量，即

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{F}',\dot{\boldsymbol{F}}')=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{QF},(\boldsymbol{QF})^{\cdot})=\boldsymbol{Qf}(\boldsymbol{F},\dot{\boldsymbol{F}})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}。\qquad (B)$$

对$\boldsymbol{F}$进行右极分解$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{RU}$，$\dot{\boldsymbol{F}}=\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{U}+\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{U}}$，令$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$，则

$\boldsymbol{QF}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{U}$，$(\boldsymbol{QF})^{\cdot}=\dot{\boldsymbol{U}}$，由式(B)有

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{F},\dot{\boldsymbol{F}})=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{QF},(\boldsymbol{QF})^{\cdot})\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U},\dot{\boldsymbol{U}})\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}},$$

即为题中式(A)最一般的客观形式。

7. (a) $(\boldsymbol{F}')^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}'=(\boldsymbol{QF})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Qu})=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}$，

$(\boldsymbol{F}')^{-1}\boldsymbol{u}'=(\boldsymbol{QF})^{-1}(\boldsymbol{Qu})=\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{u}$，

$(\boldsymbol{F}')^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}'\boldsymbol{F}'=(\boldsymbol{QF})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{QTQ}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{QF})=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{TF}$，

$(\boldsymbol{F}')^{-1}\boldsymbol{T}'\{(\boldsymbol{F}')^{-1}\}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{QF})^{-1}(\boldsymbol{QTQ}^{\mathrm{T}})\{(\boldsymbol{QF})^{-1}\}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{F}^{-1})^{\mathrm{T}}$，故以上各量都是观察者不变的。

由式(3.37)$\boldsymbol{Q}=J\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{q}$，$\boldsymbol{Q}'=J'(\boldsymbol{F}')^{-1}\boldsymbol{q}'=J(\boldsymbol{QF})^{-1}(\boldsymbol{Qq})=J\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{q}$，所以$\boldsymbol{Q}$也是观察者不变的。$\boldsymbol{C}$的观察者不变性已于例4.3中式(4.13)下面的译者注中给出。由式(3.22)

$\boldsymbol{t}=J\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\{(\boldsymbol{F})^{-1}\}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{t}'=J'(\boldsymbol{F}')^{-1}\boldsymbol{\sigma}\{(\boldsymbol{F}')^{-1}\}^{\mathrm{T}}$

$=J(\boldsymbol{QF})^{-1}(\boldsymbol{Q\sigma Q}^{\mathrm{T}})\{(\boldsymbol{QF})^{-1}\}^{\mathrm{T}}=J\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{F}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{t}$，　所以$\boldsymbol{t}$也是观察者不变的。

(b)　由(a)知，$\boldsymbol{t}=\boldsymbol{l}(\boldsymbol{C})$在视察者变换后成为$\boldsymbol{t}'=\boldsymbol{l}(\boldsymbol{C}')$，所以是满足客观性原理的。由式(3.22)和(4.22)

$\boldsymbol{t}=J\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{F}^{-1})^{\mathrm{T}}=J\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{U})\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{F}^{-1})^{\mathrm{T}}$

$=J(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{U})\{(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F})^{-1}\}^{\mathrm{T}}=J\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{U})(\boldsymbol{U}^{-1})^{\mathrm{T}}$

$=J\boldsymbol{C}^{-1/2}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{C}^{1/2})\boldsymbol{C}^{-1/2}=\boldsymbol{l}(\boldsymbol{C})$。(注意$J=\det\boldsymbol{F}=\{\det\boldsymbol{C}\}^{1/2}$)

8. (i)$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{U})\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{R})\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{F})=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{FQ})$。令$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$则$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{F}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{V})\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{V})=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{B}^{1/2})\equiv\boldsymbol{h}(\boldsymbol{B})$，

$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{R})\equiv\boldsymbol{h}((\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{R})^{2})=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}^{2}\boldsymbol{R})=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R})$。

故有　$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{B})\boldsymbol{R}$。再令$\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}$，即得

$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{QBQ}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{B})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$，由此式按与书内同样的方法即可得式(4.34)。

(ii)对任意么模张量$\boldsymbol{H}$，有

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U},\dot{\boldsymbol{U}})\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{F},\dot{\boldsymbol{F}})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{FH},\dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{H}).\qquad(\mathrm{A})$$

在这里，令$\boldsymbol{H}=|J|^{1/3}\boldsymbol{F}^{-1}$，$\boldsymbol{FH}=|J|^{1/3}\boldsymbol{I}$，$\dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{H}=|J|^{1/3}\dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{F}^{-1}=|J|^{1/3}\boldsymbol{L}$，则$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{f}(|J|^{1/3}\boldsymbol{I},\ |J|^{1/3}\boldsymbol{L})=-p(\rho)\boldsymbol{I}+\boldsymbol{g}(\rho,\ \boldsymbol{L})$，由客观性原理，$\boldsymbol{g}(\rho',\ \boldsymbol{L}')=g(\rho,\ \boldsymbol{QLQ}^{T}+\Omega)=\boldsymbol{Qg}(\rho,\ \boldsymbol{L})\boldsymbol{Q}^{T}$，若令$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}$，$\Omega=\frac{1}{2}(\boldsymbol{L}^{T}-\boldsymbol{L})$，则$\boldsymbol{g}(\rho,\ \boldsymbol{L})=\boldsymbol{g}(\rho,\ \boldsymbol{D})$。再由客观性原理，对任意正交张量$\boldsymbol{Q}$，$\boldsymbol{g}(\rho,\ \boldsymbol{QDQ}^{T})=\boldsymbol{Qg}(\rho,\ \boldsymbol{D})\boldsymbol{Q}^{T}$，再由表示定理即得$\boldsymbol{g}(\rho,\ \boldsymbol{D})=\nu_0\boldsymbol{I}+\nu_1\boldsymbol{D}+\nu_2\boldsymbol{D}^{2}$，因而有

$$\boldsymbol{\sigma}=(-p+\nu_0)\boldsymbol{I}+\nu_1\boldsymbol{D}+\nu_2\boldsymbol{D}^{2}.$$

此即赖纳-里夫林流体的本构方程。

9. 设所考虑曲面上一点处在参照构形及即时构形中的外向单位法线矢量分别为$\boldsymbol{N}$和$\boldsymbol{n}$，则由面积不变条件（式(2.27)）有$\boldsymbol{N}\cdot(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{N})=J^{-2}=(\det\boldsymbol{C})^{-1}$。约束条件为

$$\lambda(\boldsymbol{C})=\boldsymbol{N}\cdot(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{N})-(\det\boldsymbol{C})^{-1}=0,\qquad\text{(A)}$$

$\dot{\lambda}=(\partial\lambda/\partial C_{\alpha\beta})\dot{C}_{\alpha\beta}=\mathrm{tr}(\lambda_C\dot{\boldsymbol{C}})$，其中$\lambda_C=(\partial\lambda/\partial C_{\alpha\beta})\boldsymbol{E}_\alpha\otimes\boldsymbol{E}_\beta$。

$$\frac{\partial\boldsymbol{C}^{-1}}{\partial t}=-\boldsymbol{C}^{-1}\dot{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{C}^{-1},\quad\partial(\det\boldsymbol{C})^{-1}/\partial t=-(\det\boldsymbol{C})\mathrm{tr}(\boldsymbol{C}^{-1}\dot{\boldsymbol{C}})$$

$$(\det\boldsymbol{C})^{-2}=-(\det\boldsymbol{C})^{-1}\mathrm{tr}(\boldsymbol{C}^{-1}\dot{\boldsymbol{C}}).$$

故由式(A)，$\dot{\lambda}=-\boldsymbol{N}\cdot\{\boldsymbol{C}^{-1}\dot{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{N}\}+(\det\boldsymbol{C})^{-1}\mathrm{tr}(\boldsymbol{C}^{-1}\dot{\boldsymbol{C}})$

$$=\mathrm{tr}[\{-(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{N})\otimes(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{N})+(\det\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{C}^{-1}\}\ \dot{\boldsymbol{C}}].$$

故有　　$\lambda_C=-(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{N})\otimes(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{N})+(\det\boldsymbol{C})^{-1})\boldsymbol{C}^{-1}.\qquad\text{(B)}$

设约束应力为$\overline{\boldsymbol{N}}$，并设$\alpha$为任意标量常数，

$$\overline{\boldsymbol{N}}=\alpha\boldsymbol{F}\lambda_C\boldsymbol{F}^{T}=\alpha[-(\boldsymbol{FC}^{-1}\boldsymbol{N})\otimes(\boldsymbol{FC}^{-1}\boldsymbol{N})+(\det\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{I}]$$

$$=\alpha[-\{(\boldsymbol{F}^{-1})^{T}\boldsymbol{N}\}\otimes\{(\boldsymbol{F}^{-1})^{T}\boldsymbol{N}\}+(\det\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{I}].\qquad\text{(C)}$$

将(C)换为空间描述，$\det\boldsymbol{C}=\det\boldsymbol{B}=J^{2}$，由式(2.21)，$\boldsymbol{n}=J(\boldsymbol{F}^{-1})^{T}\boldsymbol{N}$（因为$\mathrm{d}a=\mathrm{d}A$，面积不变）。式(C)成为

$$\overline{\boldsymbol{N}}=\alpha[-J^{-2}\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}+(\det\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{I}]=\alpha J^{-2}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n})$$

$$=\alpha J^{-2}(\boldsymbol{l}\otimes\boldsymbol{l}+\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m}).\qquad\text{(D)}$$

也就是说，约束应力为在即时构形中与通过x的面积不变曲面相切的一对正交方向上等值单向应力的叠加。

10. 题中内约束的表达式已在例2.7中给出为

$$\lambda(\boldsymbol{C})=\boldsymbol{L}\cdot(\boldsymbol{CM})-\{(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{CL})(\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{CM})\}^{1/2}(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{M})=0。$$

将上式中的$\boldsymbol{C}$对称化后再求导可得

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\boldsymbol{C}}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{L}\otimes\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{L})$$

$$-(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{M})\frac{1}{2}\{(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{CL})(\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{CM})\}^{-1/2}\{(\boldsymbol{L}\otimes\boldsymbol{L})(\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{CM})$$

$$+(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{CL})(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M})\}.$$

利用关系式 $\boldsymbol{FL}=(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{CL})^{1/2}\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{FM}=(\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{CM})^{1/2}\boldsymbol{m}$,
后进一步得到

$$\boldsymbol{F}\frac{\partial\lambda}{\partial\boldsymbol{C}}\boldsymbol{F}^{T}=\frac{1}{2}\{(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{CL})(\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{CM})\}^{1/2}\{\boldsymbol{l}\otimes\boldsymbol{m}+\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{l}-(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{m})(\boldsymbol{l}\otimes\boldsymbol{l}+\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})\}.$$

从而由书中关于约束应力的定义(4.44)知，所求约束应力与$\boldsymbol{l}\otimes\boldsymbol{m}+\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{l}-(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{m})(\boldsymbol{l}\otimes\boldsymbol{l}+\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})$间只差一标量乘子。

11. (i)引入伸长率张量的偏张量$\boldsymbol{D}'=\boldsymbol{D}-\frac{1}{3}(\mathrm{tr}\boldsymbol{D})\boldsymbol{I}$，有$\boldsymbol{D}'\boldsymbol{D}=(\boldsymbol{D}')^2+\frac{1}{3}(\mathrm{tr}\boldsymbol{D})\boldsymbol{D}'$，同时有$\mathrm{tr}\boldsymbol{D}'=0$。

由式(4.36)后面的译者注，有

$$\boldsymbol{\sigma}=(-p+k\mathrm{tr}\boldsymbol{D})\boldsymbol{I}+2\mu\boldsymbol{D}', \qquad (A)$$

因而 $\boldsymbol{\sigma}^{g}=(k\mathrm{tr}\boldsymbol{D})\boldsymbol{I}+2\mu\boldsymbol{D}'$, $\boldsymbol{\sigma}^{g}\boldsymbol{D}=(k\mathrm{tr}\boldsymbol{D})\boldsymbol{D}+2\mu\boldsymbol{D}'\boldsymbol{D}$,

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}^{g}\boldsymbol{D})=k(\mathrm{tr}\boldsymbol{D})^2+2\mu\left\{\mathrm{tr}(\boldsymbol{D}')^2+\frac{1}{3}(\mathrm{tr}\boldsymbol{D})(\mathrm{tr}\boldsymbol{D}')\right\}$$

$$=k(\mathrm{tr}\boldsymbol{D})^2+2\mu\mathrm{tr}(\boldsymbol{D}')^2.$$

由于$\boldsymbol{D}$和$\boldsymbol{D}'$都是对称张量，故$\mathrm{tr}(\boldsymbol{D}')^2$和$(\mathrm{tr}\boldsymbol{D})^2$都是非负的，故附加应力功率总是非负的。

(ii)因为是不可压缩，故$\mathrm{tr}\boldsymbol{D}-\mathrm{div}\boldsymbol{v}=\mathrm{tr}\boldsymbol{L}=0$。本构方程成为

$\boldsymbol{\sigma}=-p\boldsymbol{I}+2\mu\boldsymbol{D}$。总动能$E_t=\frac{1}{2}\int_B\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\rho\int_B\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}v$，$\frac{\mathrm{d}E_t}{\mathrm{d}t}=\rho\int_B\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}v=\int_B(\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma})\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}v$。但$(\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma})\cdot\boldsymbol{v}=\mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma v})-\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma L})=\mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma v})-\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma D})$。这里用到了习题1.19(ii)的结果以及$\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma L})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma D})+\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma W})$，因$\boldsymbol{\sigma}$为对称张量，$\boldsymbol{W}$为反对称张量，因而$\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma W})=0$（习题1.11(ii)的结果）。于是

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E_t}{\mathrm{d}t}&=\int_B\mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma v})\mathrm{d}v-\int_B\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma D})\mathrm{d}v\\&=\int_{\partial B}\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{\sigma v})\mathrm{d}a-\int_B\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma D})\mathrm{d}v\\&=\int_{\partial B}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{n}\mathrm{d}a-\int_B\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma D})\mathrm{d}v\\&=\int_{\partial B}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{n})}\mathrm{d}a-\int_B\mathrm{tr}(-p\boldsymbol{D}+2\mu\boldsymbol{D}^2)\mathrm{d}v\\&=-2\mu\int_B\mathrm{tr}(\boldsymbol{D}^2)\mathrm{d}v\quad(\text{考虑了在}\partial B\text{上}\boldsymbol{v}=0).\end{aligned}\tag{B}$$

再次利用习题1.19(ii)的结果，

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\boldsymbol{Lv})&=\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{div}\boldsymbol{L}+\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}\mathrm{grad}\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{div}\boldsymbol{L}+\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}^2)\\&=\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}^2).\end{aligned}\tag{C}$$

这里用到了

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\boldsymbol{L}&=\mathrm{div}(\mathrm{grad}\boldsymbol{v})=\mathrm{div}\left\{\left(\frac{\partial v_r}{\partial x_q}\right)\boldsymbol{e}_r\otimes\boldsymbol{e}_q\right\}\\&=\frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{\partial v_r}{\partial x_q}\right)\boldsymbol{e}_q=\frac{\partial}{\partial x_q}\left(\frac{\partial v_r}{\partial x_r}\right)\boldsymbol{e}_q\\&=\mathrm{grad}\left(\frac{\partial v_r}{\partial x_r}\right)=\mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{v})=0.\end{aligned}$$

由式(C)，$\int_B\mathrm{tr}(\boldsymbol{L}^2)\mathrm{d}v=\int_B\mathrm{div}(\boldsymbol{Lv})\mathrm{d}v=\int_{\partial B}\boldsymbol{Lv}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a$

$$=\int_{\partial B} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}\,da=0. \qquad (D)$$

再由$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{D}+\boldsymbol{W}$，我们由式$(\boldsymbol{D})$得

$$\int_B \mathrm{tr}(\boldsymbol{L}^2)\,dv=\int_B \mathrm{tr}(\boldsymbol{D}^2)\,dv+\int_B \mathrm{tr}(\boldsymbol{W}^2)\,dv=0$$

（因为$\mathrm{tr}(\boldsymbol{DW})=0$）·

故有
$$\int_B \mathrm{tr}(\boldsymbol{D}^2)\,dv=-\int_B \mathrm{tr}(\boldsymbol{W}^2)\,dv. \qquad (E)$$

将式(E)代入(B)，得

$$\frac{dE_t}{dt}=2\mu\int_B \mathrm{tr}(\boldsymbol{W}^2)\,dv=-4\mu\int_B \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w}\,dv$$

$$=-\mu\int_B \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}\,dv=-\mu\int_B |\boldsymbol{\omega}|^2\,dv.$$

这里用到了习题1.12(*b*)的结果，$\boldsymbol{w}$为$\boldsymbol{W}$的轴矢量，$\boldsymbol{\omega}$为涡度($\boldsymbol{\omega}=2\boldsymbol{w}$)。

12. (*a*) 由式(4.49)，运动方程为 $\boldsymbol{a}=-\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p+\nu\mathrm{div}\{\mathrm{grad}\boldsymbol{v}\}^{\mathrm{T}}$. 题给运动为$v_1=-f(r,\ t)x_2$，$v_2=f(r,t)x_1$，$v_3=0$.

加速度分量为$a_1=\frac{\partial v_1}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_1}{\partial x_r}=-\left(f^2x_1+x_2\frac{\partial f}{\partial t}\right)$，

$a_2=-\left(f^2x_2+x_1\frac{\partial f}{\partial t}\right)$，$a_3=0$。此外，$[\mathrm{div}(\mathrm{grad}\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}]_1$

$=\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_r\partial x_r}=-x_2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{3}{r}\frac{\partial f}{\partial r}\right)$，$[\mathrm{div}(\mathrm{grad}\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}]_2$

$=\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_r\partial x_r}=-x_1\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{3}{r}\frac{\partial f}{\partial r}\right)$. 由运动方程式即有

$$f^2x_1+x_2\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial p}{\partial x_1}\frac{1}{\rho}+\nu x_2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{3}{r}\frac{\partial f}{\partial r}\right),$$

$$f^2x_2+x_1\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial p}{\partial x_2}\ \frac{1}{\rho}+\nu x_1\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{3}{r}\ \frac{\partial f}{\partial r}\right),$$

由此可得

$$\nu\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{3}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)\right\}=\frac{\partial f}{\partial t},\quad f^2x_i=\frac{\partial p}{\partial x_i}\ \frac{1}{\rho}\quad (i=1,2). \tag{A}$$

又因 $\frac{\partial p}{\partial x_i}=\frac{\partial p}{\partial r}\ \frac{x_i}{r}$，故由式(A)$_2$有$\rho f^2 r=\frac{\partial p}{\partial r}$，积分即得

$$p=p_0+\rho\int^r\{f(s,t)\}^2 s\,ds$$

(*b*) 因而定量运动，$\frac{\partial v_i}{\partial t}=0$，即$\frac{\partial f}{\partial t}=0$。故(*a*)中式(A)$_1$成为 $\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{3}{r}\ \frac{\partial f}{\partial r}=0$，其解为 $f=A+Br^{-2}$，故 $v=fr=Ar+B/r$，边界条件为 $r=r_i$，$v=r_i\Omega_i$($i=1,2$)。定出 $A=(\Omega_2r_2^2-\Omega_1r_1^2)/(r_2^2-r_1^2)$，$B=-(\Omega_2-\Omega_1)r_1^2r_2^2/(r_2^2-r_1^2)$。扭矩为 $T_2=(\sigma_{12})_{r=r_2}\times(2\pi r_2)r_2$，$T_1=-T_2$。而 $\sigma_{12}=2\mu D_{12}$，$2D_{12}=\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2}{\partial x_1}=-\frac{\partial f}{\partial r}\ \frac{x_2^2}{r}+\frac{\partial f}{\partial r}\ \frac{x_1^2}{r}$，以点$x_1=r_2$ $x_2=0$代入计算得$(2D_{12})_2=-2B/r_2^2$，代入求得扭矩为

$$T_2=4\pi\mu r_1^2r_2^2(\Omega_2-\Omega_1)/(r_2^2-r_1^2)=-T_1.$$

13. 体力$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{g}$，因为是定常运动$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=0$。取所考虑平面向上方的法线为2轴，平面上最大斜率线为1轴，向上方为正，与1，2轴垂直且组成右手系的方向为3轴。在各量上角码为(1)或(2)分别表示上下层流体。在式(4.50)中加入体力，并考虑$\frac{\partial v_j}{\partial t}=0$，得

$$\rho^{(i)}v_j^{(i)}\frac{\partial v_i^{(i)}}{\partial x_j}=-\frac{\partial p^{(i)}}{\partial x_i}+\mu^{(i)}\ \frac{\partial^2 v_i^{(i)}}{\partial x_j\partial x_j}-\rho^{(i)}gA,$$

$$(i,\ j=1,\ 2) \qquad (A)$$

式中，当 $j=1$ 时 $A=\sin\alpha$，当 $j=2$ 时 $A=\cos\alpha$。

由于 $v_2^{(i)}=0$，式(A) 化为 $-\frac{\partial p^{(i)}}{\partial x_2}-\rho^{(i)}g\cos\alpha=0$，即

$p^{(i)}=-(\rho^{(i)}g\cos\alpha)x_2+\overline{p^{(i)}}(x_1)$。由 $x_2=2h$ 处 $p=p_1=p_0$（常数）和 $x_2=h$ 处 $p_1=p_2$，可以得到 $\overline{p^{(1)}}=p_0+2g\rho^{(1)}h\cos\alpha$，$\overline{p^{(2)}}=p_0+gh(\rho^{(1)}+\rho^{(2)})\cos\alpha$，两者均与 x_1 无关。

由式(A)，沿 1 轴的运动方程为

$$\rho^{(i)}v_p^{(i)}\frac{\partial v_1^{(i)}}{\partial x_p}=\mu^{(i)}\frac{\partial^2 v_1^{(i)}}{\partial x_p\partial x_p}-\rho^{(i)}g\sin\alpha. \qquad (B)$$

由于不可压缩，$\frac{\partial v_p^{(i)}}{\partial x_p}=\frac{\partial v_1^{(i)}}{\partial x_1}=0$. (C)

由 $v_2^{(i)}=v_3^{(i)}=\frac{\partial v_1^{(i)}}{\partial x_3}=0$，和(B)(C)二式，有

$$\rho^{(i)}v_p^{(i)}\frac{\partial v_1^{(i)}}{\partial x_p}=0,\qquad \mu^{(i)}\frac{\partial^2 v_1^{(i)}}{(\partial x_2)^2}=\rho^{(i)}g\sin\alpha. \qquad (D)$$

边界条件为

$$x_2=0,\ v_1^{(2)}=0;\ x_2=h,\ v_1^{(1)}=v_1^{(2)},\ \sigma_{12}^{(1)}=\sigma_{12}^{(2)};$$
$$x_2=2h,\ \sigma_{12}^{(1)}=0. \qquad (E)$$

（当 $x_2=h$，$\sigma_{2i}^{(1)}=\sigma_{2i}^{(2)}(i=2,\ 3)$ 和 $x_2=2h$，$\sigma_{23}^{(1)}=-p_0$ 自然满足；因为 $v_2^{(i)}=v_3^{(i)}=0$，$D_{23}^{(i)}=D_{13}^{(i)}=0$，还用到 $\sigma_{12}^{(i)}=2\mu D_{12}^{(i)}=2\mu\frac{\partial v_1^{(i)}}{\partial x_2}$）。

由边界条件(E)解式(D)得到在 $x_2=2h$ 处

$$v_1^{(1)}=-\frac{1}{2}gh^2\sin\alpha\{\rho^{(1)}(1/\mu^{(1)}+2/\mu^{(2)})+\rho^{(2)}/\mu^{(2)}\}.$$

14. 例4.11中(G)式的通解为

$$f(x_2)=Ae^{(1+i)kx_2}+Be^{-(1+i)kx_2},$$

式中 A 和 B 为待定常数。流体中的剪应力 σ_{12} 为

$$\sigma_{12}=2\mu D_{12}=\mu\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)=\mu\frac{\partial v}{\partial x_2}$$

$$=\mu e^{i\omega t}(1+i)k\{Ae^{(1+i)kx_2}-Be^{-(1+i)kx_2}\}.$$

题中给出的边界条件为$v(0)=Ve^{i\omega t}$，$\sigma_{12}(h)=0$。代入上面表达式，即定出A，B：

$$A=V/(1+e^{2(1+i)kh}),\quad B=Ve^{2(1+i)kh}/(1+e^{2(1+i)kh})$$

代入$f(x_2)$表达式，再代入$v=f(x_2)e^{i\omega t}$，并取其实部

$$v=V(\cos 2kh+\mathrm{ch}2kh)^{-1}\{\{\cos kx_2\,\mathrm{ch}k(2h-x_2)+\cos k(2h-x_2)\,\mathrm{ch}kx_2\}\sin\omega t+\{\sin kx_2\,\mathrm{sh}(2h-x_2)+\sin k(2h-x_2)\,\mathrm{sh}kx_2\}\cos\omega t\}.$$

液体表面$x_2=h$上的速度为

$$v=V(\cos 2kh+\mathrm{ch}2kh)^{-1}\cdot 2(\cos kh\,\mathrm{ch}kh\sin\omega t+\sin kh\,\mathrm{sh}kh\cos\omega t).$$

利用此式不难验证题中有关幅值和位相的结论。

15. $b=0$，$\frac{\partial v_i}{\partial t}=0$，因而式(4.50)成为 $\rho v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j\partial x_j}$。按题给条件，当$x_2$，$x_3\to\infty$，$v_1=V$，且$\frac{\partial p}{\partial x_1}=0$，故按题给的$v_1=Vf(x_2x_3)$，$v_2=-\alpha x_3$，$v_3=-\alpha x_2$列出1方向的方程为$\rho V(v_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+v_3\frac{\partial f}{\partial x_3})=\mu V(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2})$，该式可化为$(\alpha\rho f'+\mu f'')(x_2^2+x_3^2)=0$，即得

$$\alpha f'+\nu f''=0,\qquad (A)$$

式中$\nu=\frac{\mu}{\rho}$为动粘性系数。由式(A)有$\alpha f+\nu f'=c$，再由$x=x_2x_3\to\infty$时$f(x)\to 1$，$f'(x)\to 0$，可定出$c=\alpha$。故有

$$\alpha f+\nu f'=\alpha.\qquad (B)$$

式(B)满足边界条件$x=0$，$v_1=0$的解为$f=1-e^{-(\alpha/\nu)x}$。

在$x_2=0$和$x_3=0$附近的边界层厚度可由$(\alpha/\nu)x=1$求得分别为$\nu/\alpha x_3$和$\nu/\alpha x_2$。流体逐渐地从主流被带入边界层。事实上一个典型质点的前进速度v_1当它达到任一多孔壁时降为零，因而被吸收。

16. 赖纳-里夫林流体的一般本构方程为 $\sigma=(-p+v_0)\boldsymbol{I}+v_1\boldsymbol{D}+v_2\boldsymbol{D}^2$，其中 p 为 ρ 的函数，v_i 则为 I_D II_D 和 III_D 的函数。由不可压缩条件 $\mathrm{I}_D=0$ 且 $\rho=$常数，因而 p 为常数（指不随时间而变），v_i 为 II_D，III_D 的函数。在本题中 $v_0=0$。速度分量为 $v_1=v(x_2)$，$v_2=v_3=0$。因此，$D_{12}=D_{21}=\frac{1}{2}\frac{\partial v_1}{\partial x_2}=\frac{1}{2}v'(x_2)$，$\boldsymbol{D}$ 的其它分量为零。再令 $D^*_{ij}=(\boldsymbol{D}^2)_{ij}=D_{ik}D_{kj}$，则有 $D^*_{11}=D^*_{22}=\frac{1}{4}\{v'(x_2)\}^2$，其它的 $D^*_{ij}=0$。以这些分量代入本构方程，求得应力分量为 $\sigma_{11}=\sigma_{22}=-p+\frac{1}{4}v_2\{v'(x_2)\}^2$，$\sigma_{12}=\sigma_{21}=\frac{1}{2}v_1v'(x_2)$，$\sigma_{33}=-p$，其它 $\sigma_{ij}=0$。$\mathrm{II}_D=-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{D}^2)=-\frac{1}{4}\{v'(x_2)\}^2$，$\mathrm{III}_D=\det\boldsymbol{D}=0$。因此 v_1，v_2 均为 $(v')^2$ 的函数，也就是 D_{12} 的函数。因而 $\sigma_{12}=\sigma_{21}=\tau=v_1D_{12}$，因此 τ 仅为 D_{12} 的函数。又因体力 $\boldsymbol{b}=0$，运动方程为

$$\rho\boldsymbol{a}=\mathrm{div}\sigma=\mathrm{div}(-p\boldsymbol{I}+v_1\boldsymbol{D}+v_2\boldsymbol{D}^2)=-\mathrm{grad}p+v_1\mathrm{div}\boldsymbol{D}+\boldsymbol{D}\mathrm{grad}v_1+v_2\mathrm{div}(\boldsymbol{D}^2)+\boldsymbol{D}^2\mathrm{grad}v_2. \tag{A}$$

考虑前面术得的结果及题给 $\frac{\partial p}{\partial x_1}=0$，将式(A)对 1，2，3，三个方向分别列出为

$$\mu\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}=0, \tag{B}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_2}+D_{12}\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+v_2\frac{\partial D^*_{22}}{\partial x_2}+D^*_{22}\frac{\partial v_2}{\partial x_2}=0, \tag{C}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_3}=0. \tag{D}$$

由式(B)，得 $v=c_1x+c_2$

由 $v(0)=0$，$v(d)=V$，可定出 $c_1=V/d$，$c_2=0$，故有

$$v=Vx_2/d,\quad v'=V/d。$$

由此可知 v_1，v_2，D_{12}，D^*_{22} 均为常数。由式(C)得 $-\frac{\partial p}{\partial x_2}=0$。与前

面结果和(D)式结合在一起即有$\frac{\partial p}{\partial x_i}=0(i=1, 2, 3)$，所以$p$为常数，令为$p_0$。最后的应力分量为

$$\sigma_{11}=\sigma_{22}=-p_0+\frac{1}{4}\left(\frac{V}{d}\right)^2\nu_2\left(-\frac{1}{4}\left(\frac{V}{d}\right)^2,\ 0\right),\ \sigma_{33}=-p_0,$$

$$\sigma_{12}=\sigma_{21}=\frac{1}{2}\left(\frac{V}{d}\right)\nu_1\left(-\frac{1}{4}\left(\frac{V}{d}\right)^2,\ 0\right)$$

对牛顿流体$\nu_2=0$，$\nu_1=$常数，$\sigma_{11}=\sigma_{22}=\sigma_{33}=-p_0$，$\sigma_{12}=\sigma_{21}=\frac{1}{2}\left(\frac{V}{d}\right)\nu_1\alpha\left(\frac{V}{d}\right)$，其余$\sigma_{ij}=0$。

两种解答给出的正应力有显著的区别。在牛顿流体有常数的外围压力，而在一般情形为了维持剪切运动必须在板上加有依赖于板速V的法向力。

17. 各向同性弹性材料的本构方程为式(4.34)，即$\boldsymbol{\sigma}=\phi_0\boldsymbol{I}+\phi_1\boldsymbol{B}+\phi_2\boldsymbol{B}^2$，由于$\boldsymbol{I}$、$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{B}^2$都是与$\boldsymbol{B}$可交换的，故有$\boldsymbol{\sigma B}=\boldsymbol{B\sigma}$。

对题中所给的$\boldsymbol{B}$，我们有

$$\boldsymbol{\sigma B}=B_{11}\boldsymbol{\sigma e}_1\otimes\boldsymbol{e}_1+B_{22}\boldsymbol{\sigma e}_2\otimes\boldsymbol{e}_2+B_{33}\boldsymbol{\sigma e}_3\otimes\boldsymbol{e}_3+B_{12}(\boldsymbol{\sigma e}_1\otimes\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{\sigma e}_2\otimes\boldsymbol{e}_1),$$

$$\boldsymbol{B\sigma}=B_{11}\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{\sigma e}_1+B_{22}\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{\sigma e}_2+B_{33}\boldsymbol{e}_3\otimes\boldsymbol{\sigma e}_3+B_{12}(\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{\sigma e}_2+\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{\sigma e}_1).$$

由于$\boldsymbol{\sigma B}=\boldsymbol{B\sigma}$，故有$\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{\sigma B e}_1=\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{B\sigma e}_1$，以上面表达式代入即得到

$$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{\sigma e}_1-\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{\sigma e}_2=\{(B_{11}-B_{22})/B_{12}\}(\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{\sigma e}_2).$$

如果$\boldsymbol{B}$具有例4.13中式(A)所给定的形式（对应于简单剪切），则类似地可由$\boldsymbol{m}\cdot(\boldsymbol{\sigma B}-\boldsymbol{B\sigma})\boldsymbol{l}=0$得到

$$\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{\sigma l}-\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\sigma m}=\gamma\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\sigma l}。$$

18. 例4.14所给出材料的本构关系为

$$\boldsymbol{\sigma}=\mathrm{I\!I}_B^{-3/2}[\{\psi(\mathrm{I\!I}_B)-\beta\mathrm{I\!I}_B\}\boldsymbol{I}+(\alpha\mathrm{I\!I}_B+\beta\mathrm{I}_B)\boldsymbol{B}-\beta\boldsymbol{B}^2]$$

当ν为1/4时，由该例给出的结果

$$\psi(\mathrm{I\!I}_B)=-\alpha\mathrm{I\!I}_B^{(1-3\nu)/(1-2\nu)}+\beta\mathrm{I\!I}_B^{(1-\nu)/(1-2\nu)}$$
$$=-\alpha\mathrm{I\!I}_B^{1/2}+\beta\mathrm{I\!I}_B^{3/2},$$

得到 $\boldsymbol{\sigma}=\mathrm{I\!I}_B^{-3/2}\{(-\alpha\mathrm{I\!I}_B^{1/2}+\beta\mathrm{I\!I}_B^{3/2}-\beta\mathrm{I\!I}_B)\boldsymbol{I}+(\alpha\mathrm{I\!I}_B+\beta\mathrm{I}_B)\boldsymbol{B}-\beta\boldsymbol{B}^2\}$。 (A)

由于是均匀压力和均匀压缩，故有$\boldsymbol{\sigma}=-P\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{B}=B\boldsymbol{I}$（$B$为正标量常数）。故$\mathrm{I}_B=3B$，$\mathrm{I\!I}_B=\frac{1}{2}\{(\mathrm{tr}\boldsymbol{B})^2-\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}^2)\}=3B^2$，$\mathrm{I\!I}_B=B^3$，代入式(A)得

$$-p\boldsymbol{I}=B^{-9/2}\{\{-2B^{3/2}+\beta B^{9/2}-3\beta B^2\}\boldsymbol{I}+(\alpha B^3+3\beta B)B\boldsymbol{I}-\beta B^2\boldsymbol{I}\},$$

由此式得到 $-P=(\beta+\alpha B^{-1/2})(1-B^{-5/2})$。令 $B^{-1/2}=\gamma$，即得

$$(\gamma^5-1)(\alpha\gamma+\beta)=P。 \qquad (B)$$

变形后的半径$=\sqrt{B}A=\gamma^{-1}A$。由式(B)令$f(\gamma)=(\gamma^5-1)(\alpha\gamma+\beta)-P$，则$f(0)=-\beta-P<0$（因为题给$P>-\beta$），当$\gamma\to\infty$，$f(\gamma)\to+\infty>0$（因为$\alpha>0$）；故知$f(\gamma)=0$至少有一正根。又$f'(\gamma)=6\alpha\gamma^5+5\beta\gamma^4-\alpha$，$f'(0)<0$；$\gamma\to\infty$时，$f'(\gamma)\to+\infty>0$；故知$f'(\gamma)=0$也至少有一个正根。再由$f''(\gamma)=30\alpha\gamma^4+20\beta\gamma^3$，在$\gamma>0$范围内总有$f''(\gamma)>0$。也就是说$f(\gamma)=0$没有拐点，因而$f'(\gamma)=0$和$f(\gamma)=0$在$\gamma>0$范围内都只能有一个正根。此外，因$f(1)=-P$，当$P>0$时$f(1)<0$，因而$f(\gamma)=0$的正根必在1和$+\infty$之间。

19. 例4.15中的本构方程为$\boldsymbol{\sigma}=-p\boldsymbol{I}+(\alpha+\beta\mathrm{I}_B)\boldsymbol{B}-\beta\boldsymbol{B}^2$。

由题给的变形规律可求得各变形梯度分量为

$$F_{11}=\cos\tau X_3,\quad F_{12}=-\sin\tau X_3,\quad F_{13}=-X_1\tau\sin\tau X_3-X_2\tau\cos\tau X_3=-\tau x_2,$$

$$F_{21}=\sin\tau X_3,\quad F_{22}=\cos\tau X_3,\quad F_{23}=X_1\tau\cos\tau X_3-X_2\tau\sin\tau X_3=\tau x_1,$$

$F_{31}=F_{32}=0$，$F_{33}=1$。$\det\boldsymbol{F}=\cos^2\tau X_3+\sin^2\tau X_3=1$。

因此变形是等容的。$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$，$B_{ij}=F_{ir}(F^{\mathrm{T}})_{rj}=F_{ir}F_{jr}$。故得

$$B_{11}=1+\tau^2x_2^2,\quad B_{12}=B_{21}=-\tau^2x_1x_2,\quad B_{13}=B_{31}=-\tau x_2,$$

$B_{22}=1+\tau^2x_1^2$，$B_{23}=B_{32}=\tau x_1$，$B_{33}=1$，$I_B=3+\tau^2(x_1^2+x_2^2)=3+\tau^2r^2$

由于所讨论的问题是对于中心轴对称的，所以可以在一个特定的半径($x_1=r\,|x_1|/x_1$，$x_2=0$)上来讨论。在该半径上$B_{11}=1$，$B_{12}=B_{21}=B_{13}=B_{31}=0$，$B_{22}=1+\tau^2r^2$，$B_{23}=B_{32}=\tau r$，$B_{33}=1$。设$B^*_{ij}=(\boldsymbol{B}^2)_{ij}$，则$B^*_{11}=1$，$B^*_{12}=B^*_{21}=B^*_{13}=B^*_{31}=0$，$B^*_{22}=1+3\tau^2r^2+\tau^4r^4$，$B^*_{23}=B^*_{32}=r\,|x_1|\,(2\tau+\tau^3r^2)/x_1$，$B^*_{33}=1+\tau^2r^2$.

将以上各分量代入本构方程即可求得

$\sigma_{11}=-p+\alpha+\beta(2+\tau^2r^2)$，$\sigma_{22}=-p+\alpha(1+\tau^2r^2)+\beta(2+\tau^2r^2)$，$\sigma_{33}=-p+\alpha+2\beta$，$\sigma_{32}=\sigma_{23}=(\alpha+\beta)\tau r\,|x_1|/x_1$，其余$\sigma_{ij}$均为零。

在侧面上$\boldsymbol{t}_{(n)}=\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}=0$（$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{e}_1$，$r=A$），故$p=\alpha+\beta(2+\tau^2A^2)$。

运动方程当$\boldsymbol{a}=0$，$\boldsymbol{b}=0$时为$\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}=0$，对$x_1=r$，$x_2=0$有$\dfrac{\partial p}{\partial x_1}=\tau^2(2\beta-\alpha)x_1$。考虑到$p$的轴对称性和$x_1=r=A$时$p=\alpha+\beta(2+\tau^2A^2)$，可以解得

$$p=\alpha+2\beta+\frac{1}{2}\tau^2\{\alpha(A^2-r^2)+2\beta r^2\}$$

在$x_3=L$端的合力 $\boldsymbol{R}=\int_0^A\int_0^{2\pi}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_3\,r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r=-\dfrac{\pi}{4}(\alpha+2\beta)\tau^2A^4\boldsymbol{e}_3$。合力偶 $\boldsymbol{M}=\int_0^A\int_0^{2\pi}(r\,|x_1|/x_1)\boldsymbol{e}_1\times(\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_3)r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r=-\dfrac{\pi}{2}(\alpha+\beta)\tau A^4\boldsymbol{e}_3$。

在$x_3=0$端的合力与合力偶分别为$-\boldsymbol{R}$和$-\boldsymbol{M}$。

20. 由题给的运动，得$\boldsymbol{F}$的分量为$F_{11}=\lambda$，$F_{12}=F_{21}=F_{32}=F_{31}=0$，$F_{22}=\lambda$，$F_{13}=-a\dfrac{kc}{a}(-\Lambda c)\sin\gamma=k\Lambda\sin\gamma$，$F_{23}=-k\Lambda\cos\gamma$，$F_{33}=\Lambda$。由$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$求得$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{B}^2$的各分量，代入本构方程 $\boldsymbol{\sigma}=\phi_0\boldsymbol{I}+\phi_1\boldsymbol{B}+\phi_2\boldsymbol{B}^2$（式(4.34)），即得各应力分量

366651

为 $\sigma_{11}=\phi_0+\phi_1(\lambda^2+k^2\Lambda^2s^2)+\phi_2(\lambda^4+\mu_1s^2)$，$\sigma_{12}=\sigma_{21}=(-\phi_1k^2\Lambda^2-\phi_2\mu_2)s\bar{c}$，$\sigma_{13}=\sigma_{31}=(\phi_1k\Lambda^2+\phi_2\mu_3)s$，$\sigma_{22}=\phi_0+\phi_1(\lambda^2+k^2\Lambda^2\bar{c}^2)+\phi_2(\lambda^4+\mu_1\bar{c}^2)$，$\sigma_{23}=\sigma_{32}=(-\phi_1k\Lambda^2-\phi_2\mu^3)\bar{c}$，$\sigma_{33}=\phi_0+\phi_1\Lambda^2+\phi_2\Lambda^4(1+k^2)$。上列各式中 $s=\sin\gamma$，$\bar{c}=\cos\gamma$，$\mu_1=k^2\Lambda^2(2\lambda^2+\Lambda^2+k^2\Lambda^2)$，$\mu_2=k^2\Lambda^2(2\lambda^2+k^2\Lambda^2+1)$，$\mu_3=k\Lambda^2(\lambda^2+k^2\Lambda^2+\Lambda^2)$。

此外，可以求出 $I_B=2\lambda^2+(1+k^2)\Lambda^2$，$II_B=\lambda^4+(2+k^2)\lambda^2\Lambda^2$，$III_B=\lambda^4\Lambda^2$。$\phi_0$，$\phi_1$，$\phi_2$ 是 I_B，II_B 和 III_B 的函数，因而是常数。在无体力时的运动方程为 $\rho\boldsymbol{a}=\mathrm{div}\sigma$。对 1-方向列出为

$$-\rho k^2c^2\cos\gamma/a=(\phi_1k\Lambda^2+\phi_2\mu_3)\partial(\sin\gamma)/\partial x_3,$$

由此可得

$$\phi_1+\phi_2\{\lambda^2+(1+k^2)\Lambda^2\}=\rho c^2/\Lambda^2>0. \qquad (A)$$

对2-方向列出的运动方程为

$$-\rho k^2c^2\sin\gamma/a=-(\phi_1k\Lambda^2+\phi_2\mu_3)\partial(\cos\gamma)/\partial x_3,$$

由此式也得到式(A)。3-方向运动方程自然满足。

本题描述的运动为一具有角频率 kc/a 和振幅 a 的有极的环形横向调和波与一主伸长为 λ，λ 和 Λ 的三向均匀变形的叠加。波沿3-方向以速度 c 传播。

哈尔滨船舶工程学院
图书馆
藏书