CERN-TH/97-218
hep-th/9709062

超弦理论导论

Elias Kiritsis*

Theory Division, CERN,
CH-1211, Geneva 23, SWITZERLAND

翻译：吕海港
hgngl@sohu.com

自由传播，欢迎提出修改意见。
2002年3月7日修订

Abstract

摘要

在这些讲义中，介绍了超弦理论，讨论了经典弦，协变和光锥量子化，超对称弦，反常自由，紧致化，T-对偶，超对称破缺和低能耦合的阈值修正，也包括了非微扰对偶对称性的简要介绍。

Lectures presented at the Catholic University of Leuven and
at the University of Padova during the academic year 1996-97.
To be published by Leuven University Press.

CERN-TH/97-218
March 1997

*e-mail: KIRITSIS@NXTH04.CERN.CH

Contents

1 介绍 **4**

2 历史 **5**

3 经典弦论 **7**

3.1 点粒子 8

3.2 相对论弦 11

3.3 振子展开 16

4 Boson弦的量子化 **19**

4.1 协变正则量子化 19

4.2 光锥量子化 21

4.3 Boson弦的谱 22

4.4 路径积分量子化 24

4.5 拓扑非平庸的世界叶 25

4.6 BRST初步 26

4.7 弦论中的BRST和物理谱 28

5 相互作用和圈图振幅 **31**

6 共形场论 **32**

6.1 共形变换 32

6.2 共形不变场论 34

6.3 径向量子化 36

6.4 例子：自由Boson 39

6.5 中心荷 41

6.6 自由Fermion 42

6.7 模式展开 43

6.8 Hilbert空间 44

6.9 共形代数的表示 46

6.10 仿射代数 48

6.11 自由Fermion和O(N)仿射对称性 50

6.12 N=1超共形对称性 56
6.13 N=2超共形对称性 58
6.14 N=4超共形对称性 60
6.15 鬼场的CFT 60

7 环面上的CFT **63**
7.1 紧致标量 66
7.2 增强对称性和弦Higgs效应 71
7.3 T-对偶性 72
7.4 环面上的自由Fermion 74
7.5 Boson化 75
7.6 轨流形 77
7.7 在高亏格Riemann曲面上的CFT 82

8 Boson弦的散射振幅和顶角算符 **83**

9 在背景场和低能有效作用量中的弦 **86**

10 超弦和超对称性 **88**
10.1 闭(Type-II)超弦 89
10.2 无质量R-R态 92
10.3 Type-I超弦 94
10.4 杂优超弦 95
10.5 超弦顶角算符 98
10.6 超对称有效作用量 99

11 反常 **103**

12 紧致化和超对称破缺 **109**
12.1 环面紧致化 109
12.2 在非平庸流形上的紧致化 113
12.3 世界叶对时空超对称性 117
12.4 有N=2超对称性的杂优轨流形紧致化 121
12.5 自发超对称破缺 128

12.6 杂优N=1理论和在4维中的手性 129
12.7 Type-II弦的轨流形紧致化 131

References **134**

1 介绍

到过去的几年，对于自洽地统一包括引力在内的所有自然基本相互作用的理论，弦论已成为首要候选者。在某种意义上，它预言了引力和在平坦空间上的规范对称性。而且，它是UV-有限的。它的基本对象是一维弦，弦的振动模式对应于通常的基本粒子。

在相对于弦尺寸的大距离上，低能激发态可用有效场论来描写。这样，它可以建立与量子场论的联系，这表明，在描述低能现实世界的动力学上，弦论是成功的。

这里我将设法解释弦论的基本结构，它的预言和问题。

在第2章中，追溯了从起初为描写强子建立的理论到“万物理论”的弦论发展。在第3章中，给出了经典Boson弦论的描写；描述了弦的振子模式，为量子化做铺垫。在第4章中，讲述了Boson弦的量子化。因为在不同量子化手续中，某些指定的性质在这种手续中比在其它手续中更明显，所以不同程度地讨论了三种不同量子化程序。因此，我讲述了旧的协变量子化，光锥量子化和现代的路径积分量子化。在第6章中，对共形场论的重要概念给出了简要的介绍，因为在讨论一次量子化弦论中，它们是基本工具。在第8章中，讲述了散射振幅的计算。在第9章中，讲述了对无质量模式的低能有效作用量。

在第10章，引入超弦。它们提供了时空Fermion，并在时空中和世界叶上实现了超对称性。再次进行量子化，描述在10维中的不同超对称弦论。在第11章，讨论了规范和引力反常；特别是，证明了超弦理论是反常自由的。在第12章，讲述了10维超弦理论的紧致化；在这个背景下，还讨论了超对称破缺。在第13章，描述了怎样对有效耦合常数计算圈图修正。在第14章，简要给出了非微扰弦的关系和非微扰效应。这是一个日新月异的课题，我仅仅提供了一些基础知识及工具，使读者能在对偶联系的网络中确定各自的方向。最后，在第15章，提出了一个简要的展望和未来的问题。

为了使本文包含技术性的讨论，我添加了许多附录。在附录A中，包含了关于椭圆ϑ 函数的知识。在附录B，我重新推导了在环面紧致化中出现的各种格点和。在附录C，描述了Kaluza-Klein假设，在环面紧致化后，用它得到更低维数中的作用量。在附录D，介绍了一些N=1,2,4超对称性的四维局域超对称理论。在附录E，描述了BPS态以及它们的表示理论和螺旋性超迹公式，可用这些公式求它们在超对称理论中的表观迹。在附录F中，介绍了关于椭圆模形式的情况，在许多情况下它都有用处，特别是在阈值的单圈图计算和BPS多重数计算中。在附录G中，介绍了螺旋性生成的弦配分函数的计算和相应的BPS多重数的计算。最后，在附录H，简要复习了在四维中的电磁对偶性。

我不想提供所有的参考文献。在大多数情况下，主要为进一步学习提供相应的评论文章。只有在最后一章中，由于相关评论文章的缺乏，因而我更多地提供了原始论文。

2 历史

在60年代，物理学家尝试搞清与强相互作用相关的大量实验数据的含义。当时存在大量的粒子(或“共振态”)，这个情况可能用混乱来描述最恰当。但还是观察到一些规律：

•相当线性的Regge行为。人们注意到，这些大量的共振态的质量对它们的自旋作图，得到的几乎是直线

$$m^2 = \frac{J}{\alpha'} \,, \tag{2.1}$$

其中$\alpha' \sim 1\ \mathrm{GeV}^{-2}$。直到$J = 11/2$都验证了这个关系。

• s-t对偶性。如果我们考虑两个强子→两个强子$(1,2 \to 3,4)$的散射振幅，那么它可以用Mandelstam不变量来描写

$$s = -(p_1+p_2)^2 \quad , \quad t = -(p_2+p_3)^2 \quad , \quad u = -(p_1+p_3)^2 \,, \tag{2.2}$$

其中$s+t+u = \sum_i m_i^2$。我们采用度量的符号为$(-+++)$。这样的振幅依赖于强子的味量子数（例如SU(3)）。考虑味的部分，在味空间中它是循环对称的。对于对称的总振幅，它在动量空间p_i中也必须是循环对称的。这个对称性等价于$t \leftrightarrow s$互换。这样，振幅应满足$A(s,t) = A(t,s)$。考虑属于质量M自旋J的粒子交换t通道的贡献。那么，在高能量下

$$A_J(s,t) \sim \frac{(-s)^J}{t-M^2} \,. \tag{2.3}$$

因而，对大的J值，随s增长，这个部分振幅的行为变得不好。如果把这种形式的振幅结合在一起来构造一个圈图振幅，那么，对$J > 1$产生无法控制的UV 发散。公式(2.3)的振幅的任何有限求和都有这种不好的UV行为。然而，如果允许无限数目的项，那么可以想像，UV行为可能不同。另外，这样一个有限求和没有s通道极点。

对这样的对偶振幅，Veneziano提出一个建议[1]

$$A(s,t) = \frac{\Gamma(-\alpha(s))\Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(-\alpha(s)-\alpha(t))} \,, \tag{2.4}$$

其中，Γ是标准Γ函数，还有

$$\alpha(s) = \alpha(0) + \alpha' s \,. \tag{2.5}$$

利用Γ函数的标准性质，可以验证振幅(2.4)有无穷多个s,t通道的极点：

$$A(s,t) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha(s)+1)\ldots(\alpha(s)+n)}{n!} \frac{1}{\alpha(t)-n} \,. \tag{2.6}$$

在这个展开式中，(2.4)的$s \leftrightarrow t$互换对称性不明显。在(2.6) 中的极点对应于无穷多质量$M^2 = (n-\alpha(0)/\alpha')$和高自旋的粒子的交换。也可以验证，Veneziano振幅的高能行为比局域量子场论的振幅更温和，因此无穷多极点是至关重要的。

Nambu和Goto随后认识到这样的振幅来自相对论弦理论。但是，在解释强相互作用的动力学时，这个理论有几个缺点。

• 它们看起来都预言了一个超光子。

• 它们中有几个看起来包含不可能被去掉的无质量自旋2的粒子。

• 为了不破坏在量子水平的Lorentz不变性，它们看起来都要求26维时空。

• 它们仅仅包含Boson。

同时，SLAC的实验数据表明，即使在更高的能量，强子也有类点的结构；这为作为描述强相互作用正确理论的量子色动力学打开了大门。

然而，就“对偶模型”而言，一些工作在继续；在70年代中期，出现了几个有意义的突破。

• Neveu, Schwarz和Ramond搞清楚了怎样在弦论中包含时空Fermion。

• Gliozzi, Scherk和Olive搞清楚怎样去掉无所不在的超光子。在这种方法中，构造的理论有时空超对称性。

• Scherk和Schwarz以及Yoneya(独立地)提出建议：闭超弦理论总存在无质量自旋2的粒子，它可以自然地描写引力；标度α'应该等价于Planck标度。而且，利用Kaluza-Klein的思想，理论可以在4维中定义，即认为额外维数是紧致的和很小的。

然而，弦论的革命在1984年来到。在全面分析规范和引力反常后，人们认识到在高维中反常自由的理论是非常有限的。在[3]中，Green和Schwarz 指出，如果规范群是O(32)，在10维中的开超弦是反常自由的。$E_8 \times E_8$ 也是反常自由的，但是在开弦理论中不能出现。[4]表明在10维中存在另一个弦，即超弦和Boson弦的混合物，它可以实现$E_8 \times E_8$或O(32)规范对称性。

自从80年代早期，弦论领域一直在持续发展，在这些演讲的其他部分中，我们将了解要点。我鼓励读者在[5]–[8]中学习更详细的讨论。

也许有人想知道是什么使得弦论如此特殊。一个关键因素就在于它提供了量子引力的一个有限理论(至少在微扰理论中如此)。为了完全认识Einstein引力量子化的困难，研究在两个粒子之间一个单引力子的交换(Fig. 1a)。我们约定$h = c = 1$。那么，振幅正比于$E^2/M^2_{\rm Planck}$，其中E是相互作用过程中的能量，$M_{\rm Planck}$ 是Planck质量，$M_{\rm Planck} \sim 10^{19}$ GeV。它与Newton常数$G_N \sim M^2_{\rm Planck}$有关。于是，我们看到，在IR($E << M_{\rm Planck}$)，引力相互作用是弱的；但是，在UV是很强的。特别是，两个引力子交换图(Fig. 1b) 正比于

$$\frac{1}{M^4_{\rm Planck}} \int_0^\Lambda dE\ E^3 \sim \frac{\Lambda^4}{M^4_{\rm Planck}}, \tag{2.7}$$

它有强烈的UV发散。实际上，已经知道与物质耦合的Einstein引力在微扰理论中是不可重整化的。超对称使得UV发散更温和，但是不可重整化仍然存在。

解决它有两种方法：

• 存在一个非平庸的UV固定点来控制量子引力的UV行为。到现在，没有人在这方面花费力气。

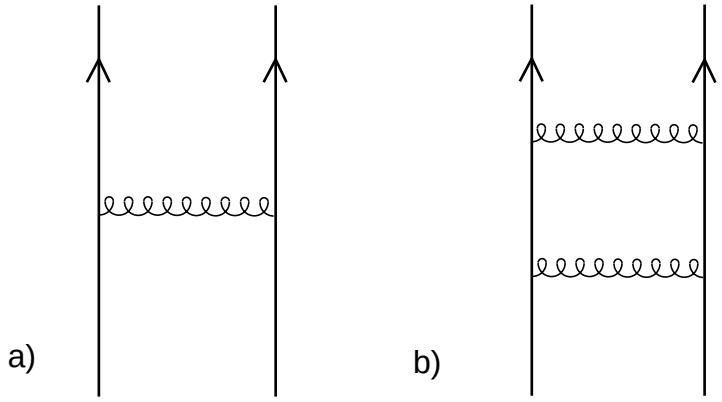


Figure 1: 通过交换引力子的两个粒子之间的引力相互作用。

• 在$E \sim M_{\text{Planck}}$处存在新物理学，它在Planck标度及其之外有效，Einstein引力是一个更广义理论的IR极限。可以想想与弱相互作用的Fermi理论类似的情形。在那里，有一个类似的不可重整化的流－流相互作用，可是今天我们知道，这是以$W^{\pm}$和Z^0规范Boson为媒介的标准弱相互作用的IR极限。至今，还没有一个自洽的场论，它在M_{Planck}之外的能量有意义而且包含引力。弦正好提供了一个理论：由于Planck 级别质量的弦激发态的无限塔，它在Planck标度导致新的物理，而且小心地调节相互作用可以使得它在小距离变得温和。

此外，弦论看起来具有所有好的大统一性质，因为它不但产生和统一了规范耦合和引力，而且有Yukawa耦合。到今天，作为理想大统一理论的弦论的缺点是：大量不同的真空；在10维中存在三种看起来不同的弦论(类型I，类型II和杂优弦)的事实；最重要的是超对称破缺。近来，在这些方向上有一些进展：有效的证据表明，看起来不同的弦论可能是非微扰等价的[2]。

3 经典弦论

象在场论中一样，讨论经典和量子弦论有两种方法。一个是一次量子化方法，它讨论单个弦的动力学。动力学变量是弦的时空坐标。这是一个限制在质壳上的方法。另一个是二次量子化或场论方法。其中，动力学变量是弦坐标的函数，或弦场，我们可以有一个离壳的公式。不幸的是，虽然有优美的开弦场论公式，但是闭弦场论方法是复杂而且难于使用。而且，因为我们知道开弦理论还要求出现闭弦，所以，开弦理论是不完善的。在这些演讲中，虽然读者被邀请来研究开弦场论的更优美的公式[11]，但我们仍采用一次量子化方法。

[2]在这些讲义的后面以及[9]，你可以找到这些进展的教学式评论文章。

3.1 点粒子

在讨论弦之前，首先来看一下相对论点粒子是有帮助的。我们将采用一次量子化的路径积分语言。当从一个时空点运动到另一个点时，点粒子经典上沿着极值路径。自然作用量正比于起点和终点的世界线的长度。

$$S = m\int_{s_i}^{s_f} ds = m\int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}, \tag{3.1.1}$$

其中$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,+1,+1,+1)$. 与$x^\mu(\tau)$共轭的动量是

$$p_\mu = -\frac{\delta L}{\delta\dot{x}^\mu} = \frac{m\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}}, \tag{3.1.2}$$

从关于$x^\mu(\tau)$变分作用量(3.1.1)得到Lagrange 方程

$$\partial_\tau\left(\frac{m\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}}\right) = 0. \tag{3.1.3}$$

方程(3.1.2)给出下列质壳约束：

$$p^2 + m^2 = 0. \tag{3.1.4}$$

下面给出正则Hamilton量

$$H_{can} = \frac{\partial L}{\partial\dot{x}^\mu}\dot{x}^\mu - L. \tag{3.1.5}$$

把(3.1.2)代入(3.1.5)，我们看到H_{can}恒为零。因此，约束(3.1.4) 完全控制体系的动力学。利用Lagrange乘子，我们可以把它加入到Hamilton量中。那么，这个体系可以用

$$H = \frac{N}{2m}(p^2 + m^2) \tag{3.1.6}$$

来描写，从它得到

$$\dot{x}^\mu = \{x^\mu, H\} = \frac{N}{m}p^\mu = \frac{N\dot{x}^\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}}, \tag{3.1.7}$$

或者

$$\dot{x}^2 = -N^2, \tag{3.1.8}$$

这样，我们描述了类时的轨迹。选择N=1对应于参数τ的标度选择为固有时间。

(3.1.1)中的平方根有一个讨厌的性质。当然，对自由粒子，它没有问题；但就象我们后面所看到的，对弦的情形，它将是一个问题。还有，对无质量粒子我们上面用到的作用量定义是不清楚的。经典上，存在一个可选的作用量，它不包含平方根，而且还允许推广到无质量情形。考虑下面的作用量：

$$S = -\tfrac{1}{2}\int d\tau e(\tau)\left(e^{-2}(\tau)(\dot{x}^\mu)^2 - m^2\right). \tag{3.1.9}$$

辅助变量$e(\tau)$可以看作世界线上的单标架。相应的度量应为$g_{\tau\tau} = e^2$。(3.1.9)可重新写为

$$S = -\tfrac{1}{2}\int d\tau\sqrt{\det g_{\tau\tau}}(g^{\tau\tau}\partial_\tau x\cdot\partial_\tau x - m^2). \tag{3.1.10}$$

在世界线的重新参数化下，作用量是不变的。给出无穷小重新参数化

$$\delta x^\mu(\tau) = x^\mu(\tau + \xi(\tau)) - x^\mu(\tau) = \xi(\tau)\dot{x}^\mu + \mathcal{O}(\xi^2). \tag{3.1.11}$$

在(3.1.9)中，变分e得到

$$\delta S = \tfrac{1}{2}\int d\tau \left(\frac{1}{e^2(\tau)}(\dot{x}^\mu)^2 + m^2\right)\delta e(\tau). \tag{3.1.12}$$

要求$\delta S = 0$给出对e的运动方程：

$$e^{-2}\dot{x}^2 + m^2 = 0 \quad \rightarrow \quad e = \frac{1}{m}\sqrt{-\dot{x}^2}\,. \tag{3.1.13}$$

变分x给出

$$\delta S = \tfrac{1}{2}\int d\tau e(\tau)\left(e^{-2}(\tau)2\dot{x}^\mu\right)\partial_\tau \delta x^\mu. \tag{3.1.14}$$

分部积分后，我们得到运动方程

$$\partial_\tau(e^{-1}\dot{x}^\mu) = 0. \tag{3.1.15}$$

把(3.1.13)代入(3.1.15)，我们得到象前面(eq.(3.1.3)) 一样的方程。如果我们把(3.1.13)直接代入作用量(3.1.9)，我们得到前面的方程，它建立了两个作用量的经典等价性。

我们将推导点粒子的传播子。由定义，

$$\langle x|x'\rangle = N\int_{x(0)=x}^{x(1)=x'} DeDx^\mu \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{e}(\dot{x}^\mu)^2 - em^2\right)d\tau\right), \tag{3.1.16}$$

其中，我们已赋予$\tau_0 = 0$, $\tau_1 = 1$。

在世界线的重新参数化下，单标架象矢量一样变换。准确到一阶，有

$$\delta e = \partial_\tau(\xi e). \tag{3.1.17}$$

这是路径的局域重新参数化不变量。因为我们正在e上积分，这意味着(3.1.16) 将给出一个无穷大的结果。因此，我们需要对重新参数化不变量(3.1.17)进行规范固定。我们可以规范固定e为常数。然而，现在(3.1.17)表明我们不能进一步固定。为了搞清楚这个常数可以是什么，注意到粒子路径的长度是

$$L = \int_0^1 d\tau\sqrt{\det g_{\tau\tau}} = \int_0^1 d\tau e, \tag{3.1.18}$$

这样，我们所能做的最多是$e = L$。这是规范固定后剩余的(Teichmüller)参数的最简单的例子。e的积分包含在常数模式以及其它模式上的积分。这个其它模式是“规范体积”，我们将扔掉它。还有，为了使路径积分收敛，我们旋转到Euclid时间$\tau \rightarrow i\tau$。这样，我们剩下

$$\langle x|x'\rangle = N\int_0^\infty dL\int_{x(0)=x}^{x(1)=x'} Dx^\mu \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{L}\dot{x}^2 + Lm^2\right)d\tau\right). \tag{3.1.19}$$

现在写出

$$x^\mu(\tau) = x^\mu + (x'^\mu - x^\mu)\tau + \delta x^\mu(\tau), \tag{3.1.20}$$

其中，$\delta x^\mu(0) = \delta x^\mu(1) = 0$。这个表达式的前两项表示经典路径。涨落$\delta x^\mu$的测度是

$$\| \delta x \|^2 = \int_0^1 d\tau e (\delta x^\mu)^2 = L \int_0^1 d\tau (\delta x^\mu)^2, \tag{3.1.21}$$

所以，

$$Dx^\mu \sim \prod_\tau \sqrt{L} d\delta x^\mu(\tau). \tag{3.1.22}$$

于是，

$$\langle x|x'\rangle = N \int_0^\infty dL \int \prod_\tau \sqrt{L} d\delta x^\mu(\tau) e^{-\frac{(x'-x)^2}{2L} - m^2 L/2} e^{-\frac{1}{2L}\int_0^1 (\delta \dot{x^\mu})^2}. \tag{3.1.23}$$

包含$\delta \dot{x}^\mu$的Guass积分可立即算出

$$\int \prod_\tau \sqrt{L} d\delta x^\mu(\tau) e^{-\frac{1}{L}\int_0^1 (\delta \dot{x^\mu})^2} \sim \left(\det\left(-\frac{1}{L}\partial_\tau^2\right)\right)^{-\frac{D}{2}}. \tag{3.1.24}$$

我们必须计算算符$-\partial_\tau^2/L$的行列式。为了算出它，我们首先计算它的本征值。然后，所有本征值的积将给出行列式。为了得到本征值，我们考虑有边界条件$\psi(0) = \psi(1) = 0$的本征值问题

$$-\frac{1}{L}\partial_\tau^2 \psi(\tau) = \lambda \psi(\tau) \tag{3.1.25}$$

注意，由于边界条件，这里有一个非零模式的问题。它的解为

$$\psi_n(\tau) = C_n \sin(n\pi\tau) \quad , \quad \lambda_n = \frac{n^2}{L} \quad , \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3.1.26}$$

因而，

$$\det\left(-\frac{1}{L}\partial_\tau^2\right) = \prod_{n=1}^\infty \frac{n^2}{L}. \tag{3.1.27}$$

很明显，行列式是无穷大，我们必须把它规制化。我们将用ζ函数来规制化，其中[3]

$$\prod_{n=1}^\infty L^{-1} = L^{-\zeta(0)} = L^{1/2} \quad , \quad \prod_{n=1}^\infty n^a = e^{-a\zeta'(0)} = (2\pi)^{a/2}. \tag{3.1.28}$$

调节归一化因子，我们最后得到

$$\langle x|x'\rangle = \frac{1}{2(2\pi)^{D/2}} \int_0^\infty dL L^{-\frac{D}{2}} e^{-\frac{(x'-x)^2}{2L} - m^2 L/2} = \tag{3.1.29}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{D/2}} \left(\frac{|x-x'|}{m}\right)^{(2-D)/2} K_{(D-2)/2}(m|x-x'|).$$

这是在D维中标量粒子的自由传播子。为了得到更熟悉的表达式，我们必须过渡到动量空间

$$|p\rangle = \int d^D x e^{ip\cdot x} |x\rangle, \tag{3.1.30}$$

[3]在[13]中，你可得到有关这方面的更多细节。

$$\begin{aligned}\langle p|p'\rangle &= \int d^D x e^{-ip\cdot x}\int d^D x'\ e^{ip'\cdot x'}\langle x|x'\rangle \\ &= \frac{1}{2}\int d^D x' e^{i(p'-p)\cdot x'}\int_0^\infty dL\ e^{-\frac{L}{2}(p^2+m^2)} \\ &= (2\pi)^D\delta(p-p')\ \frac{1}{p^2+m^2},\end{aligned} \tag{3.1.31}$$

这正是希望得到的。

这里，我们应多作一点注释。如果我们把作为初始态的$e^{ip\cdot x}$ 和作为终止态的$e^{-ip'\cdot x}$插入到路径积分中，我们也可直接计算出动量空间的振幅$\langle p|p'\rangle$。因此，振幅由自由粒子量子力学波函数的路径积分的平均给出。

3.2 相对论弦

现在我们用前一节的思想来构造弦的作用量。在点粒子的情形下，作用量正比于起点和终点之间世界线的长度。对于弦，当它在时空传播时，作用量与被弦扫过的“世界叶”曲面的面积有关。Nambu-Goto作用量定义为

$$S_{NG} = -T\int dA. \tag{3.2.1}$$

常数因子T使作用量无维数化；它的维数必须是$[\text{length}]^{-2}$或$[\text{mass}]^2$。假设ξ^i $(i=0,1)$是世界叶上的坐标，$G_{\mu\nu}$ 是弦传播空间的时空度量。那么，$G_{\mu\nu}$在世界叶上诱导出一个度量：

$$ds^2 = G_{\mu\nu}(X)dX^\mu dX^\nu = G_{\mu\nu}\frac{\partial X^\mu}{\partial\xi^i}\frac{\partial X^\nu}{\partial\xi^j}d\xi^i d\xi^j = G_{ij}d\xi^i d\xi^j\,, \tag{3.2.2}$$

其中，诱导的度量是

$$G_{ij} = G_{\mu\nu}\partial_i X^\mu \partial_j X^\nu. \tag{3.2.3}$$

这个度量可用来计算曲面的面积。如果时空是平坦Minkowski空间，那$G_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$，而且Nambu-Goto作用量变成

$$S_{NG} = -T\int\sqrt{-\det G_{ij}}d^2\xi = -T\int\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2-(\dot{X}^2)(X'^2)}d^2\xi, \tag{3.2.4}$$

其中，$\dot{X}^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial\tau}$和$X'^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial\sigma}$ $(\tau=\xi^0,\ \sigma=\xi^1\ )$。运动方程为

$$\partial_\tau\left(\frac{\delta L}{\delta\dot{X}^\mu}\right)+\partial_\sigma\left(\frac{\delta L}{\delta X'^\mu}\right)=0. \tag{3.2.5}$$

对弦的不同种类，我们可附加不同的边界条件。在闭弦情形，世界叶是一个管。如果我们取σ从0 到$\bar{\sigma}=2\pi$，边界条件是周期性的：

$$X^\mu(\sigma+\bar{\sigma}) = X^\mu(\sigma). \tag{3.2.6}$$

对开弦，世界叶是一条带子；在这种情形下，我们取$\bar{\sigma}=\pi$。经常用到的边界条件有两种[4]：

[4]也可以附加这两个边界条件的任意线性组合。在最后一章，我们将回到这样的边界条件的解释。

- Neumann :

$$\left.\frac{\delta L}{\delta X'^{\mu}}\right|_{\sigma=0,\bar{\sigma}} = 0; \tag{3.2.7}$$

- Dirichlet :

$$\left.\frac{\delta L}{\delta \dot{X}^{\mu}}\right|_{\sigma=0,\bar{\sigma}} = 0. \tag{3.2.8}$$

就象我们将在本节结尾看到的那样，Neumann条件意味着没有动量从弦的端点飞出。Dirichlet条件意味着弦的端点固定在时空中。我们不再进一步讨论它们，但是，它们与描写弦论中的(扩展)孤立子(也就是著名的D-胚[10]) 有关。

与X^{μ}共轭的动量是

$$\Pi^{\mu} = \frac{\delta L}{\delta \dot{X}^{\mu}} = -T\frac{(\dot{X}\cdot X')X'^{\mu} - (X')^2\dot{X}^{\mu}}{[(X'\cdot\dot{X})^2 - (\dot{X})^2(X')^2]^{1/2}}. \tag{3.2.9}$$

矩阵$\frac{\delta^2 L}{\delta\dot{X}^{\mu}\delta\dot{X}^{\nu}}$有两个零本征值，对应于本征矢量$\dot{X}^{\mu}$和$X'^{\mu}$。这表示两个约束的产生，它们直接来自共轭动量的定义。它们是

$$\Pi\cdot X' = 0 \quad , \quad \Pi^2 + T^2X'^2 = 0\,. \tag{3.2.10}$$

正则Hamilton量

$$H = \int_0^{\bar{\sigma}} d\sigma(\dot{X}\cdot\Pi - L) \tag{3.2.11}$$

恒为零，就象点粒子情形。再次看到，约束完全确定动力学。

在Nambu-Goto作用量中的平方根使得量子理论的处理相当复杂。我们可再次通过引入世界叶上的固有涨落度量来简化作用量。在这种方法中，对平坦时空中运动的弦，我们得到Polyakov作用量[12]

$$S_P = -\frac{T}{2}\int d^2\xi\sqrt{-\det g}\; g^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}X^{\mu}\partial_{\beta}X^{\nu}\eta_{\mu\nu}. \tag{3.2.12}$$

象场论中熟知的一样，关于度量变分作用量产生应力张量：

$$T_{\alpha\beta} \equiv -\frac{2}{T}\frac{1}{\sqrt{-\det g}}\frac{\delta S_P}{\delta g^{\alpha\beta}} = \partial_{\alpha}X\cdot\partial_{\beta}X - \tfrac{1}{2}g_{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}\partial_{\gamma}X\cdot\partial_{\delta}X. \tag{3.2.13}$$

设变分为零并对$g_{\alpha\beta}$求解，除一个因子外，我们得到

$$g_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha}X\cdot\partial_{\beta}X. \tag{3.2.14}$$

换句话说，世界叶度量$g_{\alpha\beta}$经典等价于诱导度量。如果我们把它代回作用量，我们得到Nambu-Goto作用量。因此，至少在经典水平上，这两个作用量等价。一般不清楚在量子力学水平这是否还正确。无论如何，可以证明在临界维数它们是等价的。从现在开始，我们采用Polyakov方法来进行弦论的量子化。

通过(3.2.12)对X^{μ}变分，我们得到运动方程：

$$\frac{1}{\sqrt{-\det g}}\partial_{\alpha}(\sqrt{-\det g}g^{\alpha\beta}\partial_{\beta}X^{\mu}) = 0. \tag{3.2.15}$$

从而，在Polyakov方法中的世界叶作用量包含耦合到动力学二维度量的D个二维标量场X^μ，我们因此可以考虑耦合到物质的二维量子引力理论。有人可能会问，是否有其它项可以加入到(3.2.12)。已证明只有两种：宇宙项

$$\lambda_1 \int \sqrt{-\det g} \tag{3.2.16}$$

和Guass-Bonnet项

$$\lambda_2 \int \sqrt{-\det g} R^{(2)}, \tag{3.2.17}$$

其中，$R^{(2)}$是与$g_{\alpha\beta}$相关的二维标量曲率。这给出了世界叶的Euler数，它是拓扑不变量。因此，这些项不能影响弦的局域动力学，但它给出衡量各种不同拓扑的因子。不难证明，(3.2.16)经典上必须为零。实际上，对$\lambda_1 \neq 0$，经典运动方程意味着$g_{\alpha\beta} = 0$，这给出了平庸的动力学。我们不再考虑它。对开弦，有其它可能的项，它定义在世界叶的边界上。

我们将考虑Polyakov作用量的对称性：

- Poincaré 不变性：

$$\delta X^\mu = \omega^\mu_\nu X^\nu + \alpha^\mu \quad , \quad \delta g_{\alpha\beta} = 0 \ , \tag{3.2.18}$$

  其中，$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$；

- 局域二维重新参数化不变性：

$$\begin{aligned} \delta g_{\alpha\beta} &= \xi^\gamma \partial_\gamma g_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \xi^\gamma g_{\beta\gamma} + \partial_\beta \xi^\gamma g_{\alpha\gamma} = \nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha, \\ \delta X^\mu &= \xi^\alpha \partial_\alpha X^\mu, \\ \delta(\sqrt{-\det g}) &= \partial_\alpha (\xi^\alpha \sqrt{-\det g}); \end{aligned} \tag{3.2.19}$$

- 共形(或Weyl)不变性：

$$\delta X^\mu = 0 \quad , \quad \delta g_{\alpha\beta} = 2\Lambda g_{\alpha\beta}. \tag{3.2.20}$$

由于共形不变性，应力张量将是无迹的。实际上，这一般是正确的。考虑在任意时空维数的作用量$S(g_{\alpha\beta}, \phi^i)$。我们假设在共形变换下它是不变的

$$\delta g_{\alpha\beta} = 2\Lambda(x) g_{\alpha\beta} \quad , \quad \delta\phi^i = d_i \Lambda(x) \phi^i \ . \tag{3.2.21}$$

在无穷小共形变换下，作用量的变分是

$$0 = \delta S = \int d^2\xi \left[2\frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}} g^{\alpha\beta} + \sum_i d_i \frac{\delta S}{\delta \phi_i} \phi_i \right] \Lambda. \tag{3.2.22}$$

利用对场ϕ_i的运动方程，即$\frac{\delta S}{\delta \phi_i} = 0$，我们得到

$$T^\alpha_\alpha \sim \frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}} g^{\alpha\beta} = 0 \ , \tag{3.2.23}$$

当且仅当$d_i = 0$时，它不需要利用运动方程。这是由Polyakovzyl描述的Boson弦的情形，而没有Fermion扩充。

就象我们对利用重新参数化不变性的点粒子可以固定$e(\tau)$一样，我们可把$g_{\alpha\beta}$约化到$\eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-1, +1)$。这称为共形规范。首先，我们选择一个使度量共形平坦的参数，即

$$g_{\alpha\beta} = e^{2\Lambda(\xi)}\eta_{\alpha\beta}. \tag{3.2.24}$$

可以证明，在二维中，对拓扑平庸的世界叶这总是可以的。后面我们将讨论对非平庸拓扑出现的微妙问题。

利用共形对称性，我们可进一步把度量约化到$\eta_{\alpha\beta}$。我们还采用“光锥坐标”

$$\xi_+ = \tau + \sigma \quad , \quad \xi_- = \tau - \sigma. \tag{3.2.25}$$

度量变成

$$ds^2 = -d\xi_+ d\xi_-. \tag{3.2.26}$$

度量的分量为

$$g_{++} = g_{--} = 0 \quad , \quad g_{+-} = g_{-+} = -\frac{1}{2} \tag{3.2.27}$$

和

$$\partial_\pm = \frac{1}{2}(\partial_\tau \pm \partial_\sigma)\ . \tag{3.2.28}$$

在共形规范下，Polyakov作用量为

$$S_P \sim T \int d^2\xi\ \partial_+ X^\mu \partial_- X^\nu \eta_{\mu\nu}. \tag{3.2.29}$$

通过进行共形规范，我们没有完全固定所有重新参数化。特别是，重新参数化

$$\xi_+ \longrightarrow f(\xi_+) \quad , \quad \xi_- \longrightarrow g(\xi_-) \tag{3.2.30}$$

仅仅在度量前面放了一个因子$\partial_+ f \partial_- g$，因此，它们可以用$d^2\xi$ 的变换补偿。

注意，这里我们正好有足够的对称性来完全固定度量。在d维世界叶上，一个度量有d(d+1)/2个独立分量。利用重新参数化，它们的d个分量可以被固定。共形不变性固定一个附加分量。剩余的分量的数目是

$$\frac{d(d+1)}{2} - d - 1. \tag{3.2.31}$$

在$d = 2$(弦)的情形下，它等于零，但对$d > 2$(膜)不等于零。这使类似处理高维扩展对象是有问题的。

我们将从共形规范下的Polyakov作用量(方程(3.2.29))来推导运动方程。通过对X^μ变分，我们得到(在分部积分后)：

$$\delta S = T \int d^2\xi (\delta X^\mu \partial_+ \partial_- X_\mu) - T \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau X'_\mu \delta X^\mu. \tag{3.2.32}$$

利用对闭弦的周期边界条件和对开弦的

$$X'^{\mu}|_{\sigma=0,\bar{\sigma}} = 0 \tag{3.2.33}$$

我们得到运动方程

$$\partial_+\partial_- X^\mu = 0. \tag{3.2.34}$$

即使规范固定后，度量的运动方程也必须被附加上。它们是

$$T_{\alpha\beta} = 0, \tag{3.2.35}$$

或

$$T_{10} = T_{01} = \tfrac{1}{2}\dot{X}\cdot X' = 0 \quad , \quad T_{00} = T_{11} = \frac{1}{4}(\dot{X}^2 + X'^2) = 0, \tag{3.2.36}$$

它也可以写作

$$(\dot{X} \pm X')^2 = 0. \tag{3.2.37}$$

这就是Virasoro约束。它们类似于在弦论中的Guass定律。

在光锥坐标中，应力张量的分量是

$$T_{++} = \tfrac{1}{2}\partial_+ X\cdot\partial_+ X \quad , \quad T_{--} = \tfrac{1}{2}\partial_- X\cdot\partial_- X \quad , \quad T_{+-} = T_{-+} = 0. \tag{3.2.38}$$

这最后一个表达式等价于$T^\alpha_\alpha = 0$；它是平庸满足的。能动量守恒$\nabla^\alpha T_{\alpha\beta} = 0$变成

$$\partial_- T_{++} + \partial_+ T_{-+} = \partial_+ T_{--} + \partial_- T_{+-} = 0. \tag{3.2.39}$$

利用(3.2.38)，这表明

$$\partial_- T_{++} = \partial_+ T_{--} = 0 \tag{3.2.40}$$

它导致守恒荷

$$Q_f = \int_0^{\bar{\sigma}} f(\xi^+) T_{++}(\xi^+), \tag{3.2.41}$$

对T_{--}类似。为了让我们相信Q_f的确守恒，需要计算

$$0 = \int d\sigma \partial_-(f(\xi^+)T_{++}) = \partial_\tau Q_f + f(\xi^+)T_{++}\Big|_0^{\bar{\sigma}}. \tag{3.2.42}$$

对闭弦，边界项自动消失；对开弦，我们需要利用约束条件。当然，在理论中有其它守恒荷，即与Poincaré不变性有关的那些：

$$P^\alpha_\mu = -T\sqrt{\det g}\, g^{\alpha\beta}\partial_\beta X_\mu\,, \tag{3.2.43}$$

$$J^\alpha_{\mu\nu} = -T\sqrt{\det g}\, g^{\alpha\beta}(X_\mu\partial_\beta X_\nu - X_\nu\partial_\beta X_\mu). \tag{3.2.44}$$

由于X的运动方程，我们有$\partial_\alpha P^\alpha_\mu = 0 = \partial_\alpha J^\alpha_{\mu\nu}$。相应的荷是

$$P_\mu = \int_0^{\bar{\sigma}} d\sigma P^\tau_\mu \quad , \quad J_{\mu\nu} = \int_0^{\bar{\sigma}} d\sigma J^\tau_{\mu\nu}. \tag{3.2.45}$$

这些荷是守恒的，例如

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_\mu}{\partial \tau} &= T\int_0^{\bar\sigma} d\sigma \partial_\tau^2 X_\mu = T\int_0^{\bar\sigma} d\sigma \partial_\sigma^2 X_\mu \\ &= T(\partial_\sigma X_\mu(\sigma=\bar\sigma) - \partial_\sigma X_\mu(\sigma=0)).\end{aligned} \tag{3.2.46}$$

(在第二行中，我们利用了X的运动方程。)对闭弦，这个表达式自动为零。对开弦，我们需要Neumann边界条件。这里，我们看到这些条件意味着没有动量飞出弦的端点。同样可以应用到角动量。

3.3 振子展开

现在我们求解有适当边界条件的Boson弦的运动方程，

$$\partial_+\partial_- X^\mu = 0\ , \tag{3.3.1}$$

为此，我们必须分开对待开弦和闭弦。我们首先考虑闭弦情形。

- 闭弦

  对同时满足周期条件

  $$X^\mu(\tau,\sigma+2\pi) = X^\mu(\tau,\sigma)$$

  的方程(3.3.1)，最一般解可分成左移动和右移动部分：

  $$X^\mu(\tau,\sigma) = X_L^\mu(\tau+\sigma) + X_R^\mu(\tau-\sigma), \tag{3.3.2}$$

  其中，

  $$\begin{aligned}X_L^\mu(\tau+\sigma) &= \frac{x^\mu}{2} + \frac{p^\mu}{4\pi T}(\tau+\sigma) + \frac{i}{\sqrt{4\pi T}}\sum_{k\neq 0}\frac{\bar\alpha_k^\mu}{k}e^{-ik(\tau+\sigma)}, \\ X_R^\mu(\tau-\sigma) &= \frac{x^\mu}{2} + \frac{p^\mu}{4\pi T}(\tau-\sigma) + \frac{i}{\sqrt{4\pi T}}\sum_{k\neq 0}\frac{\alpha_k^\mu}{k}e^{-ik(\tau-\sigma)}.\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

  α_k^μ和$\bar\alpha_k^\mu$是任意Fourier模，k取值为整数。函数$X^\mu(\tau,\sigma)$ 必须是实值的，所以，我们知道了x^μ和p^μ也必须是实值的，还有，我们能推导出α的下列实值条件：

  $$(\alpha_k^\mu)^* = \alpha_{-k}^\mu \qquad 和 \qquad (\bar\alpha_k^\mu)^* = \bar\alpha_{-k}^\mu \tag{3.3.4}$$

  如果我们定义$\alpha_0^\mu = \bar\alpha_0^\mu = \frac{1}{\sqrt{4\pi T}}p^\mu$，我们可得到

  $$\partial_- X_R^\mu = \frac{1}{\sqrt{4\pi T}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\alpha_k^\mu e^{-ik(\tau-\sigma)}, \tag{3.3.5}$$

  $$\partial_+ X_L^\mu = \frac{1}{\sqrt{4\pi T}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\bar\alpha_k^\mu e^{-ik(\tau+\sigma)}. \tag{3.3.6}$$

- 开弦

  在开弦的情形下，我们现在推导振子展开(3.3.3)。代替周期性条件，现在我们必须附加上Neumann边界条件

$$X'^{\mu}(\tau,\sigma)|_{\sigma=0,\pi}=0.$$

  如果我们替换波动方程的解，我们得到下列条件：

$$X'^{\mu}|_{\sigma=0}=\frac{p^{\mu}-\bar{p}^{\mu}}{\sqrt{4\pi T}}+\frac{1}{\sqrt{4\pi T}}\sum_{k\neq 0}e^{ik\tau}(\bar{\alpha}_k^{\mu}-\alpha_k^{\mu}), \tag{3.3.7}$$

  从这里，我们可得出下列结论：

$$p^{\mu}=\bar{p}^{\mu}\qquad 和\qquad \alpha_k^{\mu}=\bar{\alpha}_k^{\mu}$$

  我们发现，左移动的和右移动的解被边界条件混合起来。在另一端点$\sigma=\pi$的边界条件预示k是一个整数。因此，解变成了：

$$X^{\mu}(\tau,\sigma)=x^{\mu}+\frac{p^{\mu}\tau}{\pi T}+\frac{i}{\sqrt{\pi T}}\sum_{k\neq 0}\frac{\alpha_k^{\mu}}{k}e^{-ik\tau}\cos(k\sigma). \tag{3.3.8}$$

  如果我们再次利用$\alpha_0^{\mu}=\frac{1}{\sqrt{\pi T}}p^{\mu}$，我们可以写出：

$$\partial_{\pm}X^{\mu}=\frac{1}{\sqrt{4\pi T}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\alpha_k^{\mu}e^{-ik(\tau\pm\sigma)}. \tag{3.3.9}$$

对所有的开弦和闭弦情形，我们可以计算弦的质心位形：

$$X_{CM}^{\mu}\equiv\frac{1}{\bar{\sigma}}\int_0^{\bar{\sigma}}d\sigma X^{\mu}(\tau,\sigma)=x^{\mu}+\frac{p^{\mu}\tau}{\pi T}, \tag{3.3.10}$$

这样，x^{μ}是在$\tau=0$质心的位形，它象自由粒子一样运动。用同样的方法，我们能计算质心动量，就是弦的动量。从(3.2.45)我们得到

$$\begin{aligned}p_{CM}^{\mu} &= T\int_0^{\bar{\sigma}}d\sigma\dot{X}^{\mu}=\frac{T}{\sqrt{4\pi T}}\int d\sigma\sum_k(\alpha_k^{\mu}+\bar{\alpha}_k^{\mu})e^{-ik(\tau\pm\sigma)}\\ &= \frac{2\pi T}{\sqrt{4\pi T}}(\alpha_0^{\mu}+\bar{\alpha}_0^{\mu})=p^{\mu}\,.\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

在开弦情形下，没有$\bar{\alpha}$项。

我们观察到，描述弦经典运动的变量是质心位形x^{μ}和动量p^{μ}，再加上变量α_n^{μ}和$\bar{\alpha}_n^{\mu}$的无穷集合体。这反映了这样的事实：弦可以象整体一样运动，但它也可以在各种模式上振动，振子变量正好表示振动自由度。

对弦的角动量，可做相似计算：

$$J^{\mu\nu}=T\int_0^{\bar{\sigma}}d\sigma(X^{\mu}\dot{X}^{\nu}-X^{\nu}\dot{X}^{\mu})=l^{\mu\nu}+E^{\mu\nu}+\bar{E}^{\mu\nu}\,, \tag{3.3.12}$$

其中，

$$l^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu \,, \tag{3.3.13}$$

$$E^{\mu\nu} = -i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\alpha^\mu_{-n}\alpha^\nu_n - \alpha^\nu_{-n}\alpha^\mu_n) \,, \tag{3.3.14}$$

$$\bar{E}^{\mu\nu} = -i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\bar{\alpha}^\mu_{-n}\bar{\alpha}^\nu_n - \bar{\alpha}^\nu_{-n}\bar{\alpha}^\mu_n) \,. \tag{3.3.15}$$

在Hamilton图像中，对动力学变量(X^μ场和它的共轭动量)我们有等-τPoisson括号(PB)：

$$\{X^\mu(\sigma,\tau), \dot{X}^\nu(\sigma',\tau)\}_{PB} = \frac{1}{T}\delta(\sigma-\sigma')\eta^{\mu\nu} \,. \tag{3.3.16}$$

其它括号$\{X,X\}$和$\{\dot{X},\dot{X}\}$为零。对于振子和质心位形及动量，我们可以容易地从(3.3.16)推出PB。

$$\begin{aligned} \{\alpha^\mu_m,\alpha^\nu_n\} &= \{\bar{\alpha}^\mu_m,\bar{\alpha}^\nu_n\} = -im\delta_{m+n,0}\ \eta^{\mu\nu} \,, \\ \{\bar{\alpha}^\mu_m,\alpha^\nu_n\} &= 0 \quad , \quad \{x^\mu,p^\nu\} = \eta^{\mu\nu} \,. \end{aligned} \tag{3.3.17}$$

对开弦情形，$\bar{\alpha}$项还是不存在。

Hamilton量

$$H = \int d\sigma(\dot{X}\Pi - L) = \frac{T}{2}\int d\sigma(\dot{X}^2 + X'^2) \tag{3.3.18}$$

也可以用振子的方式来表达。在闭弦情形，它由

$$H = \tfrac{1}{2}\sum_{n\in Z}(\alpha_{-n}\alpha_n + \bar{\alpha}_{-n}\bar{\alpha}_n), \tag{3.3.19}$$

给出；对开弦，它是

$$H = \tfrac{1}{2}\sum_{n\in Z}\alpha_{-n}\alpha_n. \tag{3.3.20}$$

在前一节，我们看到在共形规范中的Virasoro约束就是$T_{--} = \frac{1}{2}(\partial_- X)^2 = 0$ 和$T_{++} = \frac{1}{2}(\partial_+ X)^2 = 0$。那么，我们把Virasono算符定义为应力张量的Fourier模式。对闭弦，它们变成

$$L_m = 2T\int_0^{2\pi} d\sigma\ T_{--}e^{im(\tau-\sigma)} \quad , \quad \bar{L}_m = 2T\int_0^{2\pi} d\sigma\ T_{++}e^{im(\sigma+\tau)} \,, \tag{3.3.21}$$

或用振子表示：

$$L_m = \tfrac{1}{2}\sum_n \alpha_{m-n}\alpha_n \quad , \quad \bar{L}_m = \tfrac{1}{2}\sum_n \bar{\alpha}_{m-n}\bar{\alpha}_n \,. \tag{3.3.22}$$

它们满足实值条件

$$L^*_m = L_{-m} \qquad 和 \qquad \bar{L}^*_m = \bar{L}_{-m} \,. \tag{3.3.23}$$

如果我们把这些表达式与(3.3.19)比较，我们看到可以用Virasoro模式的方式把Hamilton量写成

$$H = L_0 + \bar{L}_0. \tag{3.3.24}$$

这是一个经典约束。另一个算符$\bar{L}_0 - L_0$是在σ上的平移生成元，就象在基本Poisson括号(3.3.16)帮助下证明的一样。在弦上，没有优先的点可以被约束$\bar{L}_0 - L_0 = 0$来表示。

在开弦情形下，在α和$\bar{\alpha}$之间没有差别，Virasoro模式可以被定义为

$$L_m = 2T \int_0^\pi d\sigma \{T_{--} e^{im(\tau-\sigma)} + T_{++} e^{im(\sigma+\tau)}\} \ . \tag{3.3.25}$$

用振子表示，这变成：

$$L_m = \tfrac{1}{2} \sum_n \alpha_{m-n} \alpha_n . \tag{3.3.26}$$

那么，Hamilton量是

$$H = L_0 .$$

在振子Poisson括号的帮助下，我们可以对Virasoro约束推导出括号。它们形成已知的经典Virasono代数：

$$\begin{aligned} \{L_m, L_n\}_{PB} &= -i(m-n) L_{m+n} \ , \\ \{\bar{L}_m, \bar{L}_n\}_{PB} &= -i(m-n) \bar{L}_{m+n} \ , \\ \{L_m, \bar{L}_n\}_{PB} &= 0 \ . \end{aligned} \tag{3.3.27}$$

在开弦情形，$\bar{L}$项不存在。

4 Boson弦的量子化

量子化相对论弦有几种方法：

• 协变正则量子化，其中，弦运动的经典变量变成算符。因为弦是一个约束体系，这里有两种选择。第一个是量子化无约束的变量，再把量子理论中的约束作为在Hilbert空间中态上的条件附加上。这个过程保持了明显的Lorentz不变性，是旧的协变方法。

• 光锥量子化。就正则量子化而言，有另一个选择，即在经典水平解出约束再量子化。经典约束的解在所谓“光锥”规范中获得。这个过程也是正则的，但失去了明显的Lorentz不变性，协变性必须在后面验证。

• 路径积分量子化。这可以和BRST技术结合起来，有明显的Lorentz不变性，但它作用在包含鬼场的的扩展Hilbert空间中。它类似于规范理论的Faddeev-Popov 方法。

所有这三种量子化方法可以应用和比较，任何时候这三种方法一致。每一个都有一些优点，这要看在量子理论中我们遇到问题的性质，所以这三种都应讲述。

4.1 协变正则量子化

进行正则量子化的通常方法是用算符来代替所有的场和用交换子代替Poisson 括号

$$\{ \ , \ \}_{PB} \quad \longrightarrow \quad -i[\ , \ ].$$

于是Virasoro约束是必须湮灭物理态算符的约束。

采用正则规定，振子和质心以及动量的交换子变成

$$[x^\mu, p^\nu] = i\eta^{\mu\nu}, \tag{4.1.1}$$

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = m\delta_{m+n,0}\eta^{\mu\nu}\ ; \tag{4.1.2}$$

在闭弦情形下，对$\bar{\alpha}$有相似的表达式，同时α_n^μ和$\bar{\alpha}_n^\mu$可互换。现在实值条件(3.3.4)变成在振子上的Hermite条件。如果我们把(4.1.2)中的因子m吸收到振子中，我们可以把交换关系写成

$$[a_m^\mu, a_n^{\nu\dagger}] = \delta_{m,n}\eta^{\mu\nu}\ , \tag{4.1.3}$$

这正好是一个振子无穷集合的谐振子交换关系。

我们必须做的下一件事就是，确定算符作用的Hilbert空间。因为我们的体系是一个谐振子的无穷集合体，所以这并不困难。我们的确知道怎样来构造Hilbert空间。在这种情形下，负频率模式$\alpha_m,\ m<0$是L_0的升算符，正频率模式是降算符。现在我们把Hilbert空间的基态定义为被所有降算符湮灭的态。这仍没有完全确定这个态：我们也必须考虑质心算符x^μ 和p^μ。然而，从基本量子力学知道的，如果我们对角化p^μ，那么这些态也可以用动量来表征。如果我们用$|p^\mu\rangle$ 来表示态，我们有

$$\alpha_m\,|p\rangle = 0 \quad \forall m>0. \tag{4.1.4}$$

通过用负频率模式作用在这个基态上，我们可以构造更多的态[5]

$$|p\rangle\,, \quad \alpha_{-1}^\mu|p^\mu\rangle\,, \quad \alpha_{-1}^\mu\alpha_{-1}^\nu\alpha_{-2}^\nu|p^\mu\rangle\,, \quad \text{etc.} \tag{4.1.5}$$

这看起来是个问题，然而：由于振子交换子中的Minkowski度量，我们得到

$$|\ \alpha_{-1}^0|p\rangle\ |^2 = \langle p|\alpha_1^0\alpha_{-1}^0|p\rangle = -1\,, \tag{4.1.6}$$

这意味着有负模态。但我们仍必须附加经典约束$L_m=0$。附加这些约束应该帮助我们把有负模的态从物理谱中扔掉。

然而，在我们深入研究之前，当量子化一个经典体系时我们必须处理典型的含糊之处。经典变量是坐标和动量的函数。在量子理论中，坐标和动量是不可互换的算符。为了在量子理论中把它们定义成清晰的算符，必须做一个特殊的顺序规定。特别是我们希望它们在物理态上的本征值是有限的；从而，我们将不得不选取一个正规编序规定，象在通常的场论中一样。正规编序把所有的正频率模式放在负频率模式的右边。现在量子理论中的Virasoro算符用它们的正规编序表达式来确定

$$L_m = \tfrac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} :\alpha_{m-n}\cdot\alpha_n: \ . \tag{4.1.7}$$

只有L_0对正规编序是敏感的，

$$L_0 = \tfrac{1}{2}\alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{-n}\cdot\alpha_n\,. \tag{4.1.8}$$

[5]这里，为简单起见，我们考虑开弦的情形。

因为两个振子的交换子是一个常数，而且因为我们预先不知道这个常数应该是多少，我们把一个正规编序常数a包括在含有L_0的所有表达式中；因而，我们用$(L_0 - a)$来代替L_0。

现在我们可以计算L_m的代数。由于正规编序这必须十分小心地进行。于是Virasoro代数变成

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0}, \tag{4.1.9}$$

其中，c是中心荷，在这种情况下$c = d$(目标空间的维数或在世界叶上自由标量场的数目)。

现在我们可以看到我们不能把经典约束$L_m = 0$附加为算符约束，原因是

$$0 = \langle\phi|[L_m, L_{-m}]|\phi\rangle = 2m\ \langle\phi|L_0|\phi\rangle + \frac{d}{12}m(m^2-1)\langle\phi|\phi\rangle \neq 0\,.$$

这类似于发生在规范理论中的相似现象。在那里，假设了Gupta-Bleuler方法，它确保约束“弱”等于零。这里我们可以附加在物理态上的约束的最大集合是

$$L_{m>0}|\text{phys}\rangle = 0 \quad , \quad (L_0 - a)|\text{phys}\rangle = 0 \tag{4.1.10}$$

和，在闭弦情形下，$\bar{L}$的等价的表达式。因为$\langle\text{phys}'|L_n|\text{phys}\rangle = 0$，这与经典约束一致。

这样，理论中的物理态是我们如今构造的态，但它也满足(4.1.10)。从物理态中分出的态，是所谓的“伪造态”$|\text{spur}\rangle = L_{-n}|\ \rangle$，它们与所有物理态正交。甚至存在既是物理的又是伪造的态，但是因为它们可证明对应到零态，我们希望它们从物理Hilbert空间退耦。有一个弦论物理谱的详细而复杂的分析，它以著名的“无鬼”定理达到最高点；它声明，如果$d = 26$，由(4.1.10)定义的物理谱只包含正模态。我们不再进一步讨论这方面。

我们将进一步分析L_0条件。如果我们把在(4.1.10)中的L_0的表达式用$p^2 = -m^2$和$\alpha' = \frac{1}{2\pi T}$来代替，我们得到质壳条件

$$\alpha' m^2 = 4(N - a)\,, \tag{4.1.11}$$

其中，N是能级数算符：

$$N = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{-m} \cdot \alpha_m\,. \tag{4.1.12}$$

我们可以推演出$(\bar{L}_0 - a)$的相似表达式，从它可以得到$\bar{N} = N$。

4.2 光锥量子化

在这种方法中，我们首先解出经典约束。这留给我们更少的经典约束。接着，我们把它们量子化。

在光锥规范中，Virasoro约束的解是简单的。回想进行共形规范后，我们仍剩下一些不变性：

$$\xi'_+ = f(\xi_+)\,, \qquad \xi'_- = g(\xi_-)\,.$$

这个不变性可用来设定

$$X^+ = x^+ + \alpha' p^+ \tau \,. \tag{4.2.1}$$

这个规范的确可以达到，因为按照规范变换，变换后的坐标σ'和τ'必须满足按旧坐标方式的波动方程，而X^+明显是这样。光锥坐标定义为

$$X^\pm = X^0 \pm X^1 \,.$$

现在，附加经典Virasoro约束(3.2.37)，我们可以用横向坐标X^i的方式来解X^-，这意味着我们可以消除掉X^+和X^-，只有横向方向存在。这样，解出约束后，我们只剩下弦的所有位形和动量，但只有横向振子。

那么，光锥振子可以用下面的方法来表述(闭弦)

$$\begin{aligned} \alpha_n^+ &= \bar{\alpha}_n^+ = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^+ \delta_{n,0} \,, \\ \alpha_n^- &= \frac{1}{\sqrt{2\alpha'} p^+} \left\{ \sum_{m\in\mathbb{Z}} : \alpha_{n-m}^i \alpha_m^i : - 2a\delta_{n,0} \right\} , \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

和一个$\bar{\alpha}^-$的相似表达式。

现在，我们已明确地解出Virasoro约束，可以进行量子化，即用算符代替x^μ，p^μ，α_n^i和$\bar{\alpha}_n^i$。指标i在横向方向上取值。然而，我们已经放弃了理论的明显Lorentz协变性。因为这个光锥规范的理论起源于一个d维中明显Lorentz不变理论，有人希望规范固定后，这个不变性仍然出现。然而，已经证明，在量子理论中，这只在26维中正确，即在$d = 26$，Poincaré代数才封闭。

4.3 Boson弦的谱

因此，我们将假设$d = 26$并且分析理论的谱。在光锥规范中，我们已解出几乎所有Virasoro约束。然而，对闭弦，我们仍必须附加$(L_0 - a)|\text{phys}\rangle = 0$和类似的$(\bar{L}_0 - \bar{a})|\text{phys}\rangle$。给读者留下一个练习来说明只有$a = \bar{a}$给出了与Lorentz不变性自洽的非平庸的谱。特别是，这意味着$L_0 = \bar{L}_0$在物理态上。这个态用一个类似于前一节的那种方式来构造。可以从作为横向振子的真空的态$|p^\mu\rangle$出发，然后通过横向振子的负频模式的作用来生成更多的态。

我们从闭弦开始。基态是$|p^\mu\rangle$，对于它，我们有质壳条件$\alpha' m^2 = -4a$和自洽理论$a = 1$；这个态就是声名狼藉的超光子。

第一激发能级是(附加$L_0 = \bar{L}_0$)

$$\alpha_{-1}^i \bar{\alpha}_{-1}^j \, |p\rangle \,. \tag{4.3.1}$$

我们可以用下列方式把它分解成横向旋转群SO(24)的不可约表示

$$\begin{aligned} \alpha_{-1}^i \bar{\alpha}_{-1}^j \, |p\rangle = \alpha_{-1}^{[i} \bar{\alpha}_{-1}^{j]} \, |p\rangle + \left[\alpha_{-1}^{\{i} \bar{\alpha}_{-1}^{j\}} - \frac{1}{d-2} \delta^{ij} \alpha_{-1}^k \bar{\alpha}_{-1}^k \right] |p\rangle + \\ + \frac{1}{d-2} \delta^{ij} \alpha_{-1}^k \bar{\alpha}_{-1}^k |p\rangle \,. \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

这些态可以被解释为一个自旋为2的粒子$G_{\mu\nu}$(引力子)，一个反对称张量$B_{\mu\nu}$和一个标量Φ。

Lorentz不变性要求物理态是Lorentz群SO(d-1,1)的小群的表示，这个小群对有质量态是SO(d-1)，对无质量态是SO(d-2)。这样，我们得到结论：在第一激发能级态必须是无质量的，因为表示的内容导致它们不能被组合到SO(25)的表示中。它们的质壳条件是

$$\alpha' m^2 = 4(1-a)\,,$$

从这里我们能推导出正规编序常数的值$a=1$，就象我们以前声明的一样。这个常数也可以用目标空间的维数d通过ζ函数的规制来表示：那么可以得到$a=\frac{d-2}{24}$。我们得到结论：Lorentz不变性要求$a=1$和$d=26$。

下一个能级是什么？它表明了更高激发态(它是SO(24)的自然张量)可以唯一地结合到SO(25)的表示。这与有质量的Lorentz不变性自洽的，可以证明，对所有更大质量的激发态[5]成立。

现在，考虑开弦：基态又是超光子的。第一激发能级是

$$\alpha^i_{-1}|p\rangle\,,$$

它又是无质量的，而且是SO(24)的矢量表示，就象对一个26维的无质量的矢量应该的那样。第二能级激发态由

$$\alpha^i_{-2}|p\rangle\,,\quad \alpha^i_{-1}\alpha^j_{-1}|p\rangle\,,$$

给出，它是SO(24)张量；然而，最后一个可以与SO(24)矢量一起分解为对称部分和迹部分，这三个部分可以唯一地组合到一个对称的SO(25)有质量张量。

在开弦情形，我们看到，在质壳条件$\alpha' m^2=(n-1)$的能级n，我们总是有一个由秩为n的对称张量描述的态。我们得出结论，在能级n，最大自旋可以用质量的形式表达

$$j^{\max}=\alpha' m^2+1\,.$$

开弦允许在端点携带荷。这些就是Chan-Paton因子，在非定向情形给出Sp(N)或O(N)型的非Abel规范对称性，在定向情形给出U(N)型。为了弄清楚它怎样发生，我们将把由指标标记的$i=1,2,\cdots$,N的荷附在开弦的两个端点。然后，除了动量，基态可以由端点的荷$|p,i,j\rangle$来标记，其中，i在一个端点，j在另一个。在定向弦的情形，无质量的态是$a^\mu_{-1}|p,i,j\rangle$，而且它们给出N^2个矢量的集合体。通过研究三个矢量的散射振幅，可以证明规范群是U(N)。

在非定向情形，我们必须用变换来投影；这个变换互换弦的两个端点Ω，也反转弦本身的定向：

$$\Omega|p,i,j\rangle=\epsilon|p,j,i\rangle \tag{4.3.3}$$

其中，由于$\Omega^2=1$，有$\epsilon^2=1$。这样，从N^2无质量粒子，当$\epsilon=1$时只有N(N+1)/2个留下，形成Sp(N)的伴随矩阵；同时，当$\epsilon=-1$，N(N-1)/2个留下，形成O(N)的伴随矩阵。

我们已经看到，一个自洽的Boson弦量子化要求26时空维数。这个维数称为临界维数。弦论也可以定义在小于26维，所以称为非临界的。它们不是Lorentz 不变的。详细参考[8]。

4.4 路径积分量子化

在本节，我们将从Polyakov作用量开始，利用路径积分来量子化弦。考虑Boson弦的配分函数

$$Z = \int \frac{\mathcal{D}g\mathcal{D}X^\mu}{V_{\text{gauge}}} e^{iS_p(g,X^\mu)}\,, \tag{4.4.1}$$

来自模的测度定义为

$$\begin{aligned} ||\delta g|| &= \int d^2\sigma\sqrt{g}g^{\alpha\beta}g^{\delta\gamma}\delta g_{\alpha\gamma}\delta g_{\beta\delta}\,, \\ ||\delta X^\mu|| &= \int d^\sigma\sqrt{g}\delta X^\mu\delta X^\nu\eta_{\mu\nu}\,. \end{aligned}$$

这个作用量是Weyl不变的，但测度不是。这意味着，一般地，在量子场论中，Weyl因子将耦合到场的其余部分。我们可以利用共形重新参数化来重新标度我们的度量

$$g_{\alpha\beta} = e^{2\phi}h_{\alpha\beta}\,.$$

在重新参数化和Weyl重新标度下，度量的变分可以分解为

$$\delta g_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha\xi_\beta + \nabla_\beta\xi_\alpha + 2\Lambda g_{\alpha\beta} = (\hat{P}\xi)_{\alpha\beta} + 2\tilde{\Lambda}g_{\alpha\beta}, \tag{4.4.2}$$

其中$(\hat{P}\xi)_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha\xi_\beta + \nabla_\beta\xi_\alpha - (\nabla_\gamma\xi^\gamma)g_{\alpha\beta}$ 和$\tilde{\Lambda} = \Lambda + \frac{1}{2}\nabla_\gamma\xi^\gamma$. 积分测度可以写作

$$\mathcal{D}g = \mathcal{D}(\hat{P}\xi)\mathcal{D}(\tilde{\Lambda}) = \mathcal{D}\xi\mathcal{D}\Lambda\left|\frac{\partial(P\xi,\tilde{\Lambda})}{\partial(\xi,\Lambda)}\right|, \tag{4.4.3}$$

其中，Jacobi行列式是

$$\left|\frac{\partial(P\xi,\tilde{\Lambda})}{\partial(\xi,\Lambda)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix}\hat{P} & 0\\ * & 1\end{pmatrix}\right| = |\det P| = \sqrt{\det\hat{P}\hat{P}^\dagger}\,. \tag{4.4.4}$$

这里的$*$表示行列式的不重要的一些算符。

在路径积分中，有两个破坏Weyl不变性的根源：Faddeev-Popov行列式和X^μ 测度。象Polyakov[12]证明的一样，在量子理论中只有$d = 26$，度量的Weyl 因子也退耦。这就是在路径积分中得到临界指数的方法。如果$d \neq 26$，那么Weyl因子必须保留；我们就得处理所谓的非临界弦论，但我们这里不讨论它(有兴趣的可以参考[8]。)。在我们这里的讨论中，我们总是假设处于临界维数。我们可以把重新参数化和Weyl群上的积分因子提出来，在这种情况下，配分函数变成：

$$Z = \int \mathcal{D}X^\mu\sqrt{\det PP^\dagger}e^{iS_p(\hat{h}_{\alpha\beta},X^\mu)}\,, \tag{4.4.5}$$

其中，$\hat{h}_{\alpha\beta}$是可以随意选定的固定的参考度量。现在我们可以利用所谓的Faddeev-Popov技巧：我们可以利用反交换鬼变量c^α和$b_{\alpha\beta}$把行列式指数化，其中$b_{\alpha\beta}$(反鬼场)是对称和无迹的：

$$\sqrt{\det PP^\dagger} = \int \mathcal{D}c\mathcal{D}b e^{i\int d^2\sigma\sqrt{g}g^{\alpha\beta}b_{\alpha\gamma}\nabla_\beta c^\alpha}. \tag{4.4.6}$$

如果我们现在选择$h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$，配分函数变成：

$$Z = \int \mathcal{D}X\mathcal{D}c\mathcal{D}b e^{i(S_p[X]+S_{gh}[c,b])}, \tag{4.4.7}$$

其中，

$$S_p[X] = T\int d^2\sigma\partial_+X^\mu\partial_-X_\mu, \tag{4.4.8}$$

$$S_{gh}[b,c] = \int b_{++}\partial_-c^+ + b_{--}\partial_+c^-. \tag{4.4.9}$$

4.5 拓扑非平庸的世界叶

上面我们看到，规范固定微分同胚和Weyl重新标度给出Faddeev-Popov行列式。当个行列式等于零时，出现了微妙之处，这里，我们将讨论适当的处理方法。

就象已经提到的，在重新参数化和Weyl重新标度的联合作用下，度量按

$$\delta g_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha\xi_\beta + \nabla_\beta\xi_\alpha + 2\Lambda g_{\alpha\beta} = (\hat{P}\xi)_{\alpha\beta} + 2\tilde{\Lambda}g_{\alpha\beta}, \tag{4.5.1}$$

变换，其中$(\hat{P}\xi)_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha\xi_\beta + \nabla_\beta\xi_\alpha - (\nabla_\gamma\xi^\gamma)g_{\alpha\beta}$ 和$\tilde{\Lambda} = \Lambda + \frac{1}{2}\nabla_\gamma\xi^\gamma$. 这些算符$\hat{P}$把矢量映射到无迹对称张量。满足

$$\hat{P}\xi^* = 0 \tag{4.5.2}$$

的重新参数化不影响度量。方程(4.5.2)称为共形Killing方程，它的解是共形Killing矢量。这些是$\hat{P}$的零模式。当一个曲面允许存在共形Killing矢量时，在那时，有不能由固定度量而固定但只能分离地被固定的重新参数化。

现在，对矢量和张量定义自然内积：

$$(V_\alpha, W_\alpha) = \int d^2\xi\sqrt{\det g}g^{\alpha\beta}V_\alpha W_\beta \tag{4.5.3}$$

和

$$(T_{\alpha\beta}, S_{\alpha\beta}) = \int d^2\xi\sqrt{\det g}g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}T_{\alpha\beta}S_{\gamma\delta}. \tag{4.5.4}$$

从迹中分离出无迹变分的分解(4.5.1)是正交的。关于这个积的Hermite共轭把无迹对称张量$T_{\alpha\beta}$映射到矢量：

$$(\hat{P}^\dagger t)_\alpha = -2\nabla^\beta t_{\alpha\beta}. \tag{4.5.5}$$

$\hat{P}^\dagger$的零模式是

$$\hat{P}^\dagger t^* = 0 \tag{4.5.6}$$

的解，对应于对称无迹张量，对任何矢量场ξ，它不能写成$(\hat{P}\xi)_{\alpha\beta}$。的确，如果满足(4.5.6)，那么，对所有$\xi^\alpha$，有$0 = (\xi, \hat{P}^\dagger t^*) = -(\hat{P}\xi, t^*)$。因此，$\hat{P}^\dagger$的零模式对应于不能被重新参数化和Weyl 重新标度补偿的度量的变形。这样的变形不能通过固定规范来固定，称为Teichmüller变形。在点粒子情形，我们已经看到这样的例子。因为它不能被微分同胚改变，所以，路径的长度是Teichmüller参数。

下表给出了$\hat{P}^\dagger$的共形Killing矢量和零模式的数目，它依赖于闭弦世界叶的拓扑。亏格本质上是闭曲面的手柄的数目。

亏格	# $\hat{P}$的零模式	#$\hat{P}^\dagger$ 的零模式
0	3	0
1	1	1
≥ 2 | 0 | $3g-3$ |

上面的结果对计算散射振幅的圈图修正有重要作用。

4.6 BRST初步

我们将简要看一下一般的BRST公式。考虑场ϕ_i的理论，它有确定的规范对称性。规范变换将满足代数关系[6]

$$[\delta_\alpha, \delta_\beta] = f_{\alpha\beta}{}^\gamma \delta_\gamma \,. \tag{4.6.1}$$

我们现在用附加适当规范条件来固定规范

$$F^A(\phi_i) = 0 \,. \tag{4.6.2}$$

再次利用Faddeev-Popov技巧，我们可以把路径积分写成

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathcal{D}\phi}{V_{\text{gauge}}} e^{-S_0} &\sim \int \mathcal{D}\phi \delta(F^A(\phi)=0) \mathcal{D}b_A \mathcal{D}c^\alpha e^{-S_0 - \int b_A(\delta_\alpha F^A)c^\alpha} \\ &\sim \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}B_A \mathcal{D}b_A \mathcal{D}c^\alpha e^{-S_0 - i\int B_A F^A(\phi) - \int b_A(\delta_\alpha F^A)c^\alpha} \\ &= \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}B_A \mathcal{D}b_A \mathcal{D}c^\alpha e^{-S} \,, \end{aligned} \tag{4.6.3}$$

其中

$$S = S_0 + S_1 + S_2 \quad , \quad S_1 = i\int B_A F^A(\phi) \quad , \quad S_2 = \int b_A(\delta_\alpha F^A)c^\alpha \,. \tag{4.6.4}$$

注意，与鬼场c_α相关的指标α一一对应于在(4.6.1)中的规范变换参数。与鬼场b_A和反鬼场B_A相关的指标A一一对应于规范固定条件。

[6]这可能不是最一般的代数关系，但是对我们的要求是足够的。

完全的规范固定作用量S在*Becchi-Rouet-Stora-Tyupin (BRST)*变换下是不变的，

$$\begin{aligned}
\delta_{BRST}\ \phi_i &= -i\epsilon c^\alpha \delta_\alpha \phi_i\,, \\
\delta_{BRST}\ b_A &= -\epsilon B_A\,, \\
\delta_{BRST}\ c^\alpha &= -\tfrac{1}{2}\epsilon c^\beta c^\gamma f_{\beta\gamma}{}^\alpha\,, \\
\delta_{BRST}\ B_A &= 0\,.
\end{aligned} \tag{4.6.5}$$

在这些变换中，ϵ必须是反交换的。第一个变换仅仅是在ϕ_i 上的原始规范变换，但是有被鬼场c_α代替的规范参数。

在(4.6.3)中，由于鬼场和规范固定，在作用量中的额外项可以用BRST变换的方式写出：

$$\delta_{BRST}(b_A F^A) = \epsilon[B_A F^A(\phi) + b_A c^\alpha \delta_\alpha F^A(\phi)]\,. \tag{4.6.6}$$

由于下面的原因，BRST对称性的概念很重要。当我们在规范固定的过程引入鬼场时，在原来的对称性下，理论不再是不变的。BRST对称性是原来对称性的扩展，它仍然是成立的。

现在，考虑在规范固定条件上的一个小的变化δF，看看在物理振幅中诱导的变化

$$\epsilon\delta_F\langle\psi|\psi'\rangle = -i\langle\psi|\delta_{BRST}(b_A\delta F^A)|\psi'\rangle = \langle\psi|\{Q_B, b_A\delta F^A\}|\psi'\rangle\,, \tag{4.6.7}$$

其中，Q_B是对应于BRST变分的守恒荷。在规范条件的变分下，振幅不应该变化，我们得到结论，$(Q_B^\dagger = Q_B)$

$$Q_B|\text{phys}\rangle = 0\,. \tag{4.6.8}$$

因此，所有物理态是BRST不变的。

接下来，我们来验证是否这个BRST荷守恒，或者等价地，在规范条件的变分下它是否与Hamilton量中的变化是可交换的。BRST荷的守恒等价于说：我们原来的规范对称性是成立的，而且我们不希望仅仅由于改变我们的规范固定条件来危及我们的量子理论的守恒：

$$\begin{aligned}
0 &= [Q_B, \delta H] = [Q_B, \delta_B(b_A\delta F^A)] \\
&= [Q_B, \{Q_B, b_A\delta F^A\}] = [Q_B^2, b_A\delta F^A]\,.
\end{aligned} \tag{4.6.9}$$

这应该对规范条件中的任意变化是正确的，我们得到结论

$$Q_B^2 = 0\,, \tag{4.6.10}$$

也就是说，为了我们的量子理论的描述是自洽的，BRST荷必须是幂零的。例如，如果在量子水平的规范对称中有反常，这将表现为量子理论中BRST荷幂零性的失败。这意味着它所在的量子理论是不自洽的：我们固定了在量子水平不是对称性的一个经典对称性。

BRST荷的幂零性有很强的后果。考虑态$Q_B|\chi\rangle$。不管$|\chi\rangle$是什么，这个态被Q_B湮灭，因此它是物理的。然而，这个态正交于包括它本身的所有物理态，因而是零态。这样，当我们讨论量子力学时，它应该被忽略。与

$$|\psi'\rangle = |\psi\rangle + Q_B|\chi\rangle$$

相关的两个态有同样的内积，是不可区分的。这是原来规范对称性的规范固定形式中的残余。因而物理态的Hilbert空间是Q_B的上同调，即，物理态是以BRST恰当态为模的BRST闭态：

$$\begin{aligned} Q_B|\text{phys}\rangle &= 0\,, \\ \text{和} \qquad |\text{phys}\rangle &\neq Q_B|\text{something}\rangle\,. \end{aligned} \tag{4.6.11}$$

4.7 弦论中的BRST和物理谱

我们现在准备把这个公式应用到Boson弦。通过明确解出规范固定条件我们也可以去掉反鬼场B，就象以前那样，通过规定二维度量等于某些固定的参考度量的方法。在世界叶光锥坐标中表示，我们得到下列BRST变换：

$$\begin{aligned} \delta_B X^\mu &= i\epsilon(c^+\partial_+ + c^-\partial_-)X^\mu\,, \\ \delta_B c^\pm &= \pm i\epsilon(c^+\partial_+ + c^-\partial_-)c^\pm\,, \\ \delta_B b_\pm &= \pm i\epsilon(T_\pm^X + T_\pm^{gh})\,. \end{aligned} \tag{4.7.1}$$

我们采用简化记号$T_\pm^X = T_{\pm\pm}(X)$等。包含鬼场项的作用量是

$$S_{gh} = \int d^2\sigma \left(b_{++}\partial_- c^+ + b_{--}\partial_+ c^-\right)\,. \tag{4.7.2}$$

鬼场的应力张量有不等于零的项

$$\begin{aligned} T_{++}^{gh} &= i(2b_{++}\partial_+ c^+ + \partial_+ b_{++}c^+)\,, \\ T_{--}^{gh} &= i(2b_{--}\partial_- c^- + \partial_- b_{--}c^-)\,, \end{aligned} \tag{4.7.3}$$

它的守恒式变成

$$\partial_- T_{++}^{gh} = \partial_+ T_{--}^{gh} = 0\,. \tag{4.7.4}$$

鬼场的运动方程是

$$\partial_- b_{++} = \partial_+ b_{--} = \partial_- c^+ = \partial_+ c^- = 0\,. \tag{4.7.5}$$

我们必须再次在鬼场上附加适当的周期性(闭弦)或边界(开弦)条件。于是我们再次扩充Fourier模式中的场：

$$\begin{aligned} c^+ &= \sum \bar{c}_n e^{-in(\tau+\sigma)}\,, \quad c^- = \sum c_n e^{-in(\tau-\sigma)}\,, \\ b_{++} &= \sum \bar{b}_n e^{-in(\tau+\sigma)}\,, \quad b_{--} = \sum c_n e^{-in(\tau-\sigma)}\,. \end{aligned}$$

可以证明，Fourier模式满足下列反交换关系

$$\{b_m, c_n\} = \delta_{m+n,0} \quad , \quad \{b_m, b_n\} = \{c_m, c_n\} = 0 \, . \tag{4.7.6}$$

我们可以把鬼场体系的Virasono算符定义为应力张量的展开模式。然后，我们得到

$$L_m^{gh} = \sum_n (m-n) : b_{m+n} c_{-n} : \quad , \quad \bar{L}_m^{gh} = \sum_n (m-n) : \bar{b}_{m+n} \bar{c}_{-n} : \, . \tag{4.7.7}$$

从这里，我们可以计算Virasono算符的代数：

$$[L_m^{gh}, L_n^{gh}] = (m-n) L_{m+n}^{gh} + \tfrac{1}{6}(m - 13m^3) \delta_{m+n,0} \, . \tag{4.7.8}$$

于是，X^μ场和鬼场的组合体系的总Virasono算符变成

$$L_m = L_m^X + L_m^{gh} - a\delta_m \, , \tag{4.7.9}$$

其中，常数项归结于L_0的正规编序。于是，结合体系的代数可写作

$$[L_m, L_n] = (m-n) L_{m+n} + A(m) \delta_{m+n} \, , \tag{4.7.10}$$

以及

$$A(m) = \frac{d}{12} m(m^2 - 1) + \frac{1}{6}(m - 13m^3) + 2am \, . \tag{4.7.11}$$

当且仅当$d = 26$和$a = 1$，这个反常消失。这精确地是在光锥规范中量子化后要求Lorentz不变性所得到的同样的结果。

也可以利用BRST公式来证明它。通过Noether定理，在BRST变换下不变性诱导了一个BRST流：

$$j_B = cT^X + \tfrac{1}{2} : cT^{gh} := cT^X + : bc\partial c : \, , \tag{4.7.12}$$

以及BRST荷变成

$$Q_B = \int d\sigma j_B \, .$$

现在，在Q_B^2中，反常出现了：当且仅当$d = 26$时，BRST荷是幂零的。

我们可以用X^μ Virasono算符和鬼场振子的方式把BRST荷表示为

$$Q_B = \sum_n c_n L_{-n}^X + \sum_{m,n} \frac{m-n}{2} : c_m c_n b_{-m-n} : - c_0 \, , \tag{4.7.13}$$

其中，c_0来自L_0^X的正规编序。在闭弦情形，当然也有一个$\bar{Q}_B$，BRST荷是$Q_B + \bar{Q}_B$。

我们将在BRST背景下找到物理谱。按照前面的讨论，物理态必须被BRST荷湮灭，而且不是形式$Q_B|\ \rangle$的态。它说明我们必须附加一个另外的条件，即

$$b_0 |\text{phys}\rangle = 0 \, . \tag{4.7.14}$$

这就是“Siegel规范”，虽然把它附加在这个能级看来很神秘，但它需要以下理由[7]：当计算物理态的散射振幅时，传播子总是伴随b_0因子，由于$b_0^2 = 0$，它有效地把物理态投

[7] 也可以参看[5]中的讨论。

射到那些满足(4.7.14)的态。从路径积分理解这方面的另一个方法是，当插入顶角算符来计算散射振幅时，顶角算符的位形是一个Teichmüller 模，而且总有与每一个这样的模相关的b插入项。

首先，我们必须描述我们包括鬼场的扩展Hilbert空间。至于X^μ方面，情况与前一节一样，所以，我们只需要关心鬼场Hilbert空间。整个Hilbert空间是二者的张量积。

首先我们必须描写鬼场真空态。它应该被正频鬼场振子模式湮灭

$$b_{n>0}|\text{鬼场真空}\rangle = c_{n>0}|\text{鬼场真空}\rangle = 0\ . \tag{4.7.15}$$

按照(4.7.6)，零模式b_0和c_0满足$b_0^2 = c_0^2 = 0$和$\{b_0, c_0\} = 1$。然而，由于b_0和c_0的存在，有了微妙之处。

这些反交换关系与光锥坐标下的二维时空中的γ矩阵代数的关系一样。这个代数最简单的表示是二维的，由$b_0 = (\sigma^1 + i\sigma^2)/\sqrt{2}$ 和$c_0 = (\sigma^1 - i\sigma^2)/\sqrt{2}$来实现。因此，在这个表示中，应该有两个态：“上自旋态”和“下自旋态”，并满足

$$b_0|\downarrow\rangle = 0\,, \qquad b_0|\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle\,,$$
$$c_0|\uparrow\rangle = 0\,, \qquad c_0|\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle\,.$$

再次附加(4.7.14)意味着正确的鬼场真空是$|\downarrow\rangle$。我们现在可以，用鬼场b_m, c_n的负频模式的作用从这个真空生成态。由于由c_0生成的新态不满足Siegel条件(4.7.14)，我们不能用它来作用。现在，我们准备在开弦中描写物理态。注意，由于(4.7.13)中的Q_B有“能级”零[8]，我们可以一级一级地附加物理态上的BRST不变性。

在能级零，只有一个态,即整个真空$|\downarrow, p^\mu\rangle$

$$0 = Q_B|\downarrow, p\rangle = (L_0^X - 1)c_0|\downarrow, p\rangle\,. \tag{4.7.16}$$

BRST不变性给出同样的质壳条件，即我们在前面量子化程序中得到的$L_0^X - 1 = 0$。这个态不可能是BRST的恰当态；从而它是物理的：超光子。

在第一能级，可能的算符是α_{-1}^μ，b_{-1}和c_{-1}。于是，这个形式最一般的态是

$$|\psi\rangle = (\zeta\cdot\alpha_{-1} + \xi_1 c_{-1} + \xi_2 b_{-1})|\downarrow, p\rangle\,, \tag{4.7.17}$$

它有28个参数：一个26-矢量ζ_μ和两个另外的常数ξ_1,ξ_2。BRST条件要求

$$0 = Q_B|\psi\rangle = 2(p^2 c_0 + (p\cdot\zeta)c_{-1} + \xi_1 p\cdot\alpha_{-1})|\downarrow, p\rangle\,. \tag{4.7.18}$$

这只有在$p^2 = 0$(无质量)，$p\cdot\zeta = 0$和$\xi_1 = 0$时成立。因此，只剩下26个参数。接下来我们必须确保这个态不是Q-恰当的：一般的态是象(4.7.17)一样同样形式的，但是有参数ζ'^μ, $\xi'_{1,2}$。所以，在这个$p^2 = 0$能级的最一般的Q-恰当态是

$$Q_B|\chi\rangle = 2(p\cdot\zeta' c_{-1} + \xi'_1 p\cdot\alpha_{-1})|\downarrow, p\rangle\,.$$

[8]这里，我们通过能级想要得到总的模式的数目。因此，L_0和$L_{-n}L_n$都有能级零。

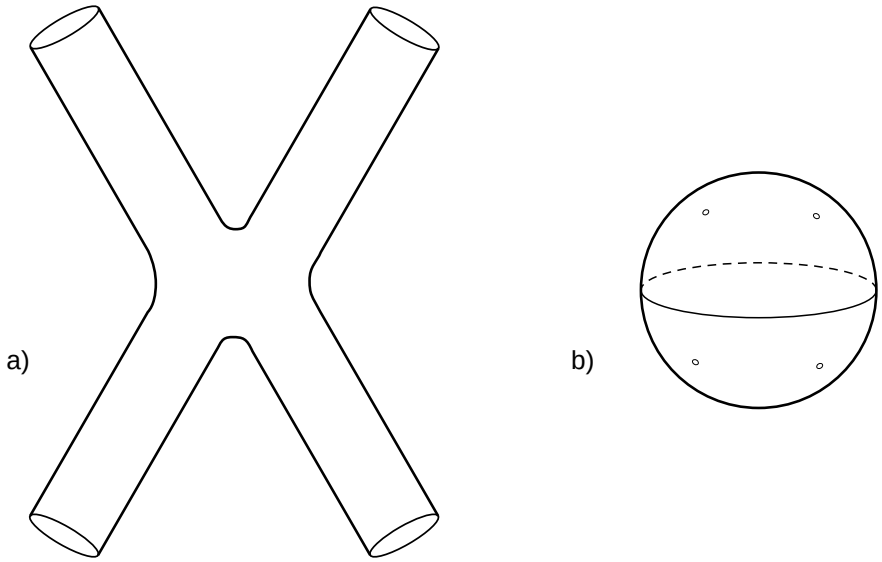


Figure 2: a) 描述四点散射的闭弦树图。b) 它的共形等价，即四孔球

这意味着(4.7.17)中的c_{-1}部分是BRST恰当的，而且极化有等价关系$\zeta_\mu \sim \zeta_\mu + 2\xi_1' p_\mu$。这给我们留下了对26维中一个无质量矢量粒子我们所期望的24个物理自由度。

对高能级可以采用同样的手续。在闭弦情形，我们必须包括带－的算符，采用$Q_B + \bar{Q}_B$。

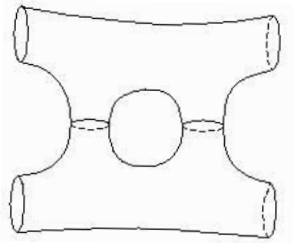
5 相互作用和圈图振幅

很明显，下一个问题是计算物理态的散射振幅。考虑两个闭弦，在树图中它们进入，相互作用和离开(Fig. 2a)。

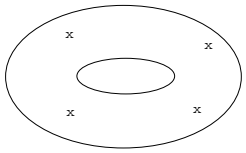
通过共形变换，我们可以把树图映射到有四个无穷小孔洞的球上(Fig. 2b)。在每一个孔洞，我们必须给出适当的边界条件，由它们来确定参与相互作用的外部物理态。用路径积分的语言：我们必须插入一个“顶角算符”，即，就象我们在点粒子情形所做的适当的波函数。于是，我们必须取在球上的有Polyakov 作用量权重的这些顶角算符的路径积分平均值。用算符的语言，这个振幅(S-矩阵元)将由在二维世界叶量子理论中的这些顶角算符的相关函数给出。我们也必须在这些顶角算符的位形上进行积分。在球上，有三个共形Killing矢量，这意味着有三个未被固定的重新参数化。我们可以通过固定三个顶角算符的位形来固定它们。剩下的位形是Teichmüller模，应该被积分。

与一个给定物理态关联的顶角算符是什么？这可以直接从二维世界叶理论得到。当顶角算符逼近外面的真空时，正确的顶角算符应产生确定的物理态，但是，更多的内容在下一节。

关于圈图振幅的附加介绍。考虑在Fig. 3a中的弦图。这是对Fig. 2a 中四粒子散射的弦的单圈振幅贡献的推广。再次，通过共形变换，它可以变形到有四个孔洞的一个环



a)



b)

Figure 3: a) 与四点散射的单圈图贡献相应的世界叶；b) 它的共形变换，其中洞变成在环面上的小孔。

面上(Fig. 3b)。这个推广是直接了当的。在g-圈图阶次的N点振幅(S矩阵元)由N个恰当的顶角函数的平均值给出，平均时，取g个手柄的二维曲面(亏格为g的Riemann曲面)上的Polyakov作用量的权重。细节参考[5]。

从这个讨论中，我们已经看到，在球上的0-，1-和2-点振幅没有确定。这与这样的振幅在质壳上不存在是一致的。在单圈图的0-点振幅也没有确定。当我们下面讨论单圈图真空振幅时，将暗中考虑在零真空的1-点胀子的振幅。

6 共形场论

如今我们已经看到，描写Boson弦的世界叶量子理论是二维中共形不变的量子场论。为了描述弦的更一般的基态，我们需要详细地研究这个概念。本章，我们将给出共形场论的基本介绍以及它在弦论中的应用。我们假定采用二维的Euclid符号。更完整的讨论见[13]。

6.1 共形变换

在一般的坐标变换下，$x \to x'$，度量按

$$g_{\mu\nu} \to g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}(x)\,.$$

变换。那么，在任意维数，共形变换群定义为除了一个标度改变外保持度量不变的那些坐标变换的子群：

$$g_{\mu\nu}(x) \to g'_{\mu\nu}(x') = \Omega(x) g_{\mu\nu}(x)\,. \tag{6.1.1}$$

这正好是保持两个矢量之间角度的坐标变换，故称为共形变换。注意，Poincaré是共形变换的子群(有$\Omega = 1$)。

我们将检验这些变换的生成元。在无穷小坐标变换下，$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu$，我们有

$$ds'^2 = ds^2 - (\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu) dx^\mu dx^\nu\,.$$

为了使它是一个共形变换，右边的第二项必须正比于$\eta_{\mu\nu}$，或

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = \frac{2}{d}(\partial \cdot \epsilon)\eta_{\mu\nu}\,, \tag{6.1.2}$$

其中比例因子可以用$\eta^{\mu\nu}$约缩两边而得到。如果我们用∂^μ作用在这个方程的两边，有

$$\Box \epsilon_\nu + \left(1 - \frac{2}{d}\right)\partial_\nu(\partial \cdot \epsilon) = 0\,,$$

或者，我们用$\Box = \partial_\mu \partial^\mu$作用在(6.1.2)的两边，有

$$\partial_\mu \Box \epsilon_\nu + \partial_\nu \Box \epsilon_\mu = \frac{2}{d}\eta_{\mu\nu}\Box(\partial \cdot \epsilon)\,.$$

由这两个方程，我们可以把参数上的约束写出

$$[\eta_{\mu\nu}\Box + (d-2)\partial_\mu \partial_\nu]\,\partial \cdot \epsilon = 0\,. \tag{6.1.3}$$

在(6.1.3)中，我们看到，$d = 2$是一个特殊的情形。的确，对于$d > 2$，(6.1.3)意味着参数ϵ对x最多是二次。于是我们确定对ϵ的下列可能性：

$$\begin{aligned} \epsilon^\mu &= a^\mu && \text{平移}\,, \\ \epsilon^\mu &= \omega^\mu_{\ \nu} x^\nu && \text{旋转} \quad (\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu})\,, \\ \epsilon^\mu &= \lambda x^\mu && \text{标度变换} \end{aligned} \tag{6.1.4}$$

和

$$\epsilon^\mu = b^\mu x^2 - 2x^\mu (b \cdot x)\,, \tag{6.1.5}$$

它是特殊的共形变换。这样，我们的参数总计为

$$d + \tfrac{1}{2}d(d-1) + 1 + d = \tfrac{1}{2}(d+2)(d+1)$$

在符号(p,q)的空间中，Lorentz群是$O(p,q)$。其中，$d = p + q$。

练习：证明共形变换的代数同构于$O(p+1, q+1)$的李代数。

现在我们研究$d = 2$的特殊情形。ϵ最多可以是二阶的限制不再适用，但，在Euclid空间($g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$)的(6.1.2)约化到

$$\partial_1 \epsilon_1 = \partial_2 \epsilon_2\,, \qquad \partial_1 \epsilon_2 = -\partial_2 \epsilon_1\,. \tag{6.1.6}$$

通过转变到复数坐标，$z, \bar{z} = x^1 \pm i x^2$，这可以进一步简化。如果我们定义复参数$\epsilon, \bar{\epsilon} = \epsilon_1 \pm i\epsilon_2$，参数的方程变成

$$\partial \bar{\epsilon} = 0\,, \qquad \bar{\partial}\epsilon = 0\,, \tag{6.1.7}$$

其中，我们采用了缩写符号$\bar{\partial} = \partial_{\bar{z}}$。这表示$\epsilon$可以是$z$的任意函数，但它独立于$\bar{z}$，对$\bar{\epsilon}$反之亦然。整个地，这表示二维中的共形变换包含解析坐标变换

$$z \to f(z) \quad \text{和} \quad \bar{z} \to \bar{f}(\bar{z})\,. \tag{6.1.8}$$

我们可以展开无穷小参数

$$\epsilon(z) = -\sum a_n z^{n+1}\,.$$

于是，对应到这些变换的生成元是

$$\ell_n = -z^{n+1}\partial_z\,, \tag{6.1.9}$$

即，ℓ_n与$\epsilon = -z^{n+1}$生成变换。生成元满足以下代数

$$[\ell_m, \ell_n] = (m-n)\ell_{m+n}\,, \qquad [\bar{\ell}_m, \bar{\ell}_n] = (m-n)\bar{\ell}_{m+n}\,, \tag{6.1.10}$$

和$[\bar{\ell}_m, \ell_n] = 0$。因此，二维共形群是无限维的。

这个代数的一个有趣的子代数有生成元$\ell_{0,\pm1}$和$\bar{\ell}_{0,\pm1}$构成。这些是在Riemann球$S^2 = \mathbb{C} \cup \infty$上全局清晰的唯一生成元。它们形成O(2,2)~SL(2,$\mathbb{C}$) 的代数，生成下列变换：

生成元	无穷小变换	有限变换	
ℓ_{-1}	$z \to z - \epsilon$	$z \to z + \alpha$	平移
ℓ_0	$z \to z - \epsilon z$	$z \to \lambda z$	标度
ℓ_1	$z \to z - \epsilon z^2$	$z \to \frac{z}{1-\beta z}$	特殊共形

对带－的生成元有相当的表达式。从这里，立即搞清楚了：生成元$i(\ell_0 - \bar{\ell}_0)$生成一个相的重新标度；或换句话说，它生成了在z平面的旋转。膨胀由$\ell_0 + \bar{\ell}_0$生成。这些由$\ell_{0,\pm1}$生成的变换可以由表达式

$$z \to \frac{az+b}{cz+d}\,, \tag{6.1.11}$$

来总结，其中，$a, b, c, d \in \mathbb{C}$和$ad - bc = 1$。这是群SL(2,$\mathbb{C}$)/$\mathbb{Z}_2$，其中$\mathbb{Z}_2$确定把所有参数$a, b, c, d$用它们自己的相反数代替的自由，保持(6.1.11)不变。我们将称这个共形群的有限子群为限制的共形群。

6.2 共形不变场论

如果一个二维理论的应力张量的迹在平坦空间的量子理论中等于零，它被称为共形不变的。这样的理论有以下性质：

1) 有一个场$\{A_i\}$的无穷集合。特别是，这个集合包含场的所有微商。

2) 存在一个子集$\{\phi_j\} \subset \{A_i\}$，称为准原场，它在限制的共形变换下变换。

$$z \to f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad , \quad \bar{z} \to \bar{f}(\bar{z}) = \frac{\bar{a}\bar{z}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{z}+\bar{d}} \tag{6.2.1}$$

按照下面的方式，

$$\Phi(z,\bar{z}) \to \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^{h} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}\right)^{\bar{h}} \Phi\left(f(z),\bar{f}(\bar{z})\right) . \tag{6.2.2}$$

我们后面将看到，所有不是其它场的微商的场都是准原的。

3) 最后，有所谓的原场，对所有的共形变换它象在(6.2.2)中一样变换；$h,\bar{h}$是实值的($\bar{h}$不是h的复共轭)。注意，这个变换的性质非常类似于张量的变换性质。至于张量，表达式

$$\Phi(z,\bar{z})dz^{h}d\bar{z}^{\bar{h}}$$

在共形变换下是不变的；$(h,\bar{h})$是原场的共形权重。

理论在共形变换中是协变的。因此，相关函数满足

$$\left\langle \prod_{i=1}^{N} \Phi_i(z_i,\bar{z}_i) \right\rangle = \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^{h_i}_{z\to z_i} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}\right)^{\bar{h}_i}_{\bar{z}\to \bar{z}_i} \left\langle \prod_{j=1}^{N} \Phi_j\left(f(z_j),\bar{f}(\bar{z}_j)\right) \right\rangle . \tag{6.2.3}$$

后面我们将看到，共形反常自发破缺整个共形群的不变性。在球上，未破缺的子群是限制的共形群，因此，(6.2.3)只对SL(2,$\mathbb{C}$)有效。然而，应该有Ward恒等式来编码理论的整个共形协变性。

在无穷小变换$z \to z+\epsilon(z)$和$\bar{z} \to \bar{z}+\bar{\epsilon}(\bar{z})$下，原场按

$$\delta_{\epsilon,\bar{\epsilon}}\Phi(z,\bar{z}) = \left[(h\partial\epsilon + \epsilon\partial) + (\bar{h}\bar{\partial}\bar{\epsilon} + \bar{\epsilon}\bar{\partial})\right]\Phi(z,\bar{z}) , \tag{6.2.4}$$

变换和两点函数$G^{(2)}(z_i,\bar{z}_i) = \langle\, \Phi(z_1,\bar{z}_1)\Phi(z_2,\bar{z}_2) \,\rangle$ 按

$$\delta_{\epsilon,\bar{\epsilon}}G^{(2)}(z_i,\bar{z}_i) = \langle\, \delta_{\epsilon,\bar{\epsilon}}\Phi_1,\Phi_2 \,\rangle + \langle\, \Phi_1,\delta_{\epsilon,\bar{\epsilon}}\Phi_2 \,\rangle = 0 .$$

变换。如果我们把这两个放在一起，得到下列两点函数的微分方程

$$[(\epsilon(z_1)\partial_{z_1} + h_1\partial\epsilon(z_1) + \epsilon(z_2)\partial_{z_2} + h_2\partial\epsilon(z_2)) + (\text{barred terms})]\, G^{(2)}(z_i,\bar{z}_i) = 0 . \tag{6.2.5}$$

我们现在利用$\epsilon(z)$的级数展开来分析这个方程。如果我们先取$\epsilon(z)=1$和$\bar{\epsilon}(\bar{z})=1$(这对应于平移)，那么由(6.2.5)可知$G^{(2)}(z_i,\bar{z}_i)$只依赖于$z_{12}=z_1-z_2$, $\bar{z}_{12}=\bar{z}_1-\bar{z}_2$。这并不奇怪，因为在平移不变的理论中，我们可以料想相关函数只依赖于相对距离。如果我们再利用$\epsilon(z)=z$, $\bar{\epsilon}(\bar{z})=\bar{z}$(旋转不变性)，就得到$G^{(2)} \sim 1/(z_{12}^{h_1+h_2}\bar{z}_{12}^{\bar{h}_1+\bar{h}_2})$ ；如果我们最后利用$\epsilon(z)=z^2$(特殊共形变换)，就得到限制$h_1=h_2=h$和$\bar{h}_1=\bar{h}_2=\bar{h}$。结论是两点函数除一个常数外被完全固定：

$$G^{(2)}(z_i,\bar{z}_i) = \frac{C_{12}}{z_{12}^{2h}\bar{z}_{12}^{2\bar{h}}} . \tag{6.2.6}$$

这个常数可以通过归一化算符来假定为1。

对三点函数可以作相似分析，表明也是除一个常数外被完全确定。

练习:解Ward恒等式，证明三点函数允许的最一般的形式是

$$G^{(3)}(z_i,\bar{z}_i) = \frac{C_{123}}{z_{12}^{\Delta_{12}}z_{23}^{\Delta_{23}}z_{31}^{\Delta_{31}}\bar{z}_{12}^{\bar{\Delta}_{12}}\bar{z}_{12}^{\bar{\Delta}_{12}}\bar{z}_{12}^{\bar{\Delta}_{12}}} , \tag{6.2.7}$$

其中$\Delta_{12} = h_1 + h_2 - h_3$, $\bar{\Delta}_{12} = \bar{h}_1 + \bar{h}_2 - \bar{h}_3$, 等。

然而，下一个相关函数，即四点函数不能完全被确定。采用上面的程序，共形不变性把它限制到有下列形式

$$G^{(4)}(z_i, \bar{z}_i) = f(x, \bar{x}) \prod_{i<j} z_{ij}^{-(h_i+h_j)+h/3} \prod_{i<j} \bar{z}_{ij}^{-(\bar{h}_i+\bar{h}_j)+\bar{h}/3} , \tag{6.2.8}$$

其中，$h = \sum h_i$, $\bar{h} = \sum \bar{h}_i$。函数f是任意的，但仅仅依赖于交比$x = z_{12}z_{23}/z_{13}z_{24}$ 和$\bar{x}$。

在球上的准原场的一般N点函数

$$G^N(z_1, \bar{z}_1, \ldots z_N, \bar{z}_N) = \left\langle \prod_{i=1}^{N} \Phi_i(z_i, \bar{z}_i) \right\rangle \tag{6.2.9}$$

满足来自SL(2,$\mathbb{C}$)协变性的下列约束

$$\sum_{i=1}^{N} \partial_i \, G^N = 0 \, , \tag{6.2.10}$$

$$\sum_{i=1}^{N} (z_i \partial_i + h_i) \, G^N = 0 \, , \tag{6.2.11}$$

$$\sum_{i=1}^{N} (z_i^2 \partial_i + 2 z_i h_i) \, G^N = 0 \tag{6.2.12}$$

以及$z_i \to \bar{z}_i$，$h_i \to \bar{h}_i$的相似公式。这些是反映球上相关函数SL(2,$\mathbb{C}$)不变性的Ward恒等式。

6.3 径向量子化

我们现在研究共形不变理论的Hilbert空间。我们从坐标为τ和σ 的二维Euclid空间开始。(注意，我们可以通过Wick转动$\tau \to i\tau$的方式，从二维Euclid时空到Minkowski时空。)为了避免红外(IR)问题，紧致化空间方向，$\sigma = \sigma + 2\pi$，二维空间变成柱面。接下来，我们做共形变换

$$z = e^{\tau + i\sigma} \, , \qquad \bar{z} = e^{\tau - i\sigma} \, ,$$

它把柱面映射到复平面(拓扑上是一个球。)，见Fig. 4。

在柱面上，等时间的曲线变成复平面上等半径的圆。这意味着过去无穷($\tau = -\infty$)映射到平面的原点，未来无穷变成$z = \infty$。时间反演变成复平面上的$z \to 1/z^*$，宇称反演变成$z \to z^*$。

我们已经看到ℓ_0是在柱面上的膨胀生成元，$z \to \lambda z$，所有，$\ell_o + \bar{\ell}_0$将是在平面上的径向方向，它对应于在柱面上的时间方向。这意味着膨胀因子是我们体系的Hamilton量[9]

$$H = \ell_0 + \bar{\ell}_0 \, .$$

[9]因为我们是在Euclid空间中，Hamilton量的项可能看来古怪。适当的名称是平移算符，在Wick转动后它变成Hamilton量。类似地，平移算符的指数是平移矩阵，它变成Wick转动的时间演化。

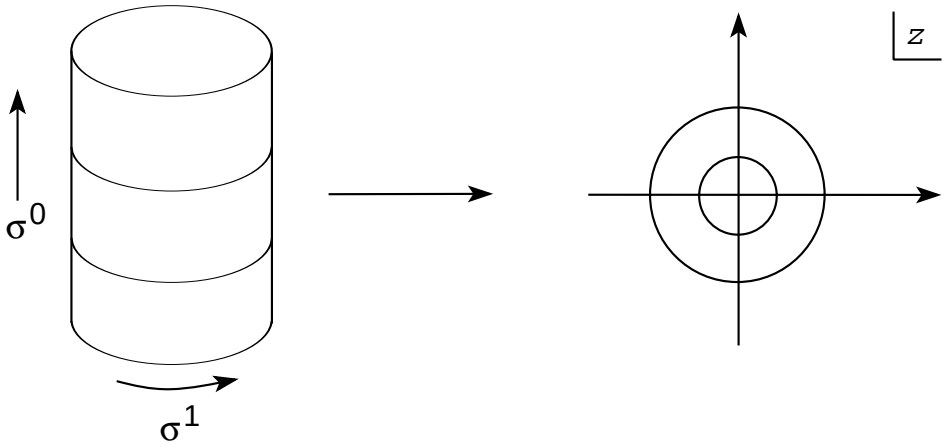


Figure 4: 从柱面到紧致复平面的映射

在空间方向σ上的积分将变成在复平面的围道积分。这使得我们可以利用复分析中发展的所有有力的技术。

无穷小坐标变换由应力张量生成的，在共形场论的情形它是无迹的[10]

$$T_\mu{}^\mu = 0. \tag{6.3.1}$$

在复坐标中，这意味着应力张量有不等于零的分量T_{zz}和$T_{\bar{z}\bar{z}}$。同时，由于$T_{z\bar{z}}$是应力张量的迹，所以$T_{z\bar{z}} = 0$。可以把它们在Euclid坐标中表示来证明这个，$z = x + iy$，

$$T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = \tfrac{1}{4}(T_{00} + T_{11}) = \tfrac{1}{4}T_\mu{}^\mu \,.$$

守恒律$\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$和无迹条件一起给出

$$\partial_z T_{\bar{z}\bar{z}} = 0 \quad \text{and} \quad \partial_{\bar{z}} T_{zz} = 0 \,, \tag{6.3.2}$$

这意味着应力张量的两个不等于零的分量分别是全纯的和反全纯的：

$$T(z) \equiv T_{zz} \quad \text{and} \quad \bar{T}(\bar{z}) \equiv T_{\bar{z}\bar{z}} \,. \tag{6.3.3}$$

因此，我们可以构造无穷个守恒荷，因为如果$T(z)$是守恒的，那么对每一个全纯函数$\epsilon(z)$，$\epsilon(z)T(z)$也是守恒的。

这些流产生下列守恒荷

$$Q_\epsilon = \frac{1}{2\pi i}\oint dz\epsilon(z)T(z) \quad , \quad Q_{\bar{\epsilon}} = \frac{1}{2\pi i}\oint d\bar{z}\bar{\epsilon}(\bar{z})\bar{T}(\bar{z}) \,. \tag{6.3.4}$$

这些荷是无穷小共形变换的生成元

$$z \to z + \epsilon(z) \,, \qquad \bar{z} \to \bar{z} + \bar{\epsilon}(\bar{z}) \,.$$

[10]这只在平坦空间是正确的。一般上，$T_\mu{}^\mu \sim cR^{(2)}$，其中，$c$是一个共形方程中的数，也出现在Virasono 代数；$R^{(2)}$是二维曲率变量。

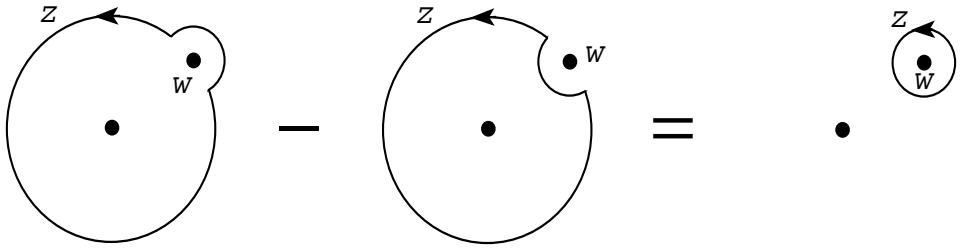


Figure 5: 与交换子对应的围道的重新布置。

通常，在这些变换下的场的变分由有生成元的场的交换子给出：

$$\delta_{\epsilon,\bar{\epsilon}}\Phi(z,\bar{z}) = [Q_\epsilon + Q_{\bar{\epsilon}}, \Phi(z,\bar{z})] \ . \tag{6.3.5}$$

我们知道，如果算符是时间编序的，那么，它们的积只是在量子理论中是明确的。在复平面上径向量子化中，这个的相似的东西是径向编序的。径向编序的算符R被定义为

$$R(A(z)B(w)) = \begin{cases} A(z)B(w) & |z| > |w| \\ (-1)^F B(w)A(z) & |z| < |w| \end{cases} \ . \tag{6.3.6}$$

在Fermion算符情形，如果互换它们，当然会出现一个负号。在这个编序的帮助下，我们可以写出一个含空间积分的算符的等时交换子，它等于作为围道积分的另一个算符和两个算符的径向编序积的乘积。

$$\left[\int d\sigma B, A\right] = \oint dz R(B(z)A(w))$$

象Fig. 5中一样。这表示我们可以把(6.3.5)重写为

$$\begin{aligned} \delta_{\epsilon,\bar{\epsilon}}\Phi(z,\bar{z}) &= \frac{1}{2\pi i}\oint \left(dz\epsilon(z)R(T(z)\Phi(w,\bar{w})) + d\bar{z}\bar{\epsilon}(\bar{z})R(\bar{T}(\bar{z})\Phi(w,\bar{w}))\right) \\ &= \left[(h\partial\epsilon(w) + \epsilon(w)\partial) + (\bar{h}\bar{\partial}\bar{\epsilon}(\bar{w}) + \bar{\epsilon}(\bar{w})\bar{\partial})\right]\Phi(w,\bar{w}) \, , \end{aligned}$$

其中，最后一行是从(6.2.4)复制的所希望的结果。如果T和$\bar{T}$与Φ有如下短距离的奇异性，这个等同性才成立：

$$R(T(z)\Phi(w,\bar{w})) = \frac{h}{(z-w)^2}\Phi(w,\bar{w}) + \frac{1}{z-w}\partial_w\Phi(w,\bar{w}) + \dots \, , \tag{6.3.7}$$

$$R(\bar{T}(\bar{z})\Phi(w,\bar{w})) = \frac{\bar{h}}{(\bar{z}-\bar{w})^2}\Phi(w,\bar{w}) + \frac{1}{\bar{z}-\bar{w}}\partial_{\bar{w}}\Phi(w,\bar{w}) + \dots \, , \tag{6.3.8}$$

其中，这些点(我们先写下它，但没有什么暗示。)表示正规项。从现在开始，我们不再讨论R符号，假定算符乘积展开(OPE)总是径向编序的。应力张量的OPE可以用来代替(6.2.2)作为权重$(h,\bar{h})$的共形场的定义。

这里，我们描述对应力张量插入的一般Ward恒等式。考虑相关函数

$$F^N(z,z_i,\bar{z}_i)=\left\langle T(z)\prod_{i=1}^{N}\Phi_i(z_i,\bar{z}_i)\right\rangle\,, \tag{6.3.9}$$

其中，Φ_i是原场。看做z的函数，当$z\to z_i$时，有极点的F^N是亚纯的。这些极点的残数可以在(6.3.8)的帮助下计算出来。球面上的亚纯函数由它的极点和残数唯一确定。因此，得到

$$F^N(z,z_i,\bar{z}_i)=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{h_i}{(z-z_i)^2}+\frac{\partial_{z_i}}{z-z_i}\right)\left\langle\prod_{i=1}^{N}\Phi_i(z_i,\bar{z}_i)\right\rangle\,. \tag{6.3.10}$$

这个Ward恒等式用原场本身的相关子的方式，把应力张量插入项的原场的相关函数表达出来。除此之外，利用(6.5.1)，多个插入项也可以处理。

一般地，两个算符的积可以用一个正交局域算符的完全集来展开

$$\Phi_i(z,\bar{z})\Phi_j(w,\bar{w})=\sum_k C_{ijk}(z-w)^{h_k-h_i-h_j}(\bar{z}-\bar{w})^{\bar{h}_k-\bar{h}_i-\bar{h}_j}\Phi_k(w,\bar{w})\,, \tag{6.3.11}$$

其中，数字常数C_{ijk}可证明与在三点函数$\langle\,\Phi_i\Phi_j\Phi_k\,\rangle$中的常数一致。在量子理论中这是正确的；然而在这里，由于共形不变性，没有出现OPE中的质量标度。因为在幺正理论中(6.3.11)的知识完全确定它们，所以这种类型的展开可以被认为是编码相关函数的一种方法。

6.4 例子：自由Boson

就象我们在弦论中遇到的一样，二维非紧致自由Boson的作用量是

$$S=\frac{1}{4\pi}\int d^2z\;\partial X\bar{\partial}X\,. \tag{6.4.1}$$

场$X(z,\bar{z})$有下列传播子：

$$\langle\,X(z,\bar{z})X(w,\bar{w})\,\rangle=-\log(|z-w|^2\mu^2)\,. \tag{6.4.2}$$

这通过对二维有质量标量传播子取无质量极限得到；μ是IR截断。方程(6.4.2)可以通过下列过程得出：从质量为μ的传播子开始，取极限$\mu\to 0$，在极限时保持这些项不等于零。对μ的依赖性从相关函数中消失。注意，由于X的相关函数是IR发散的，所以它本身不是共形场。然而，微商$\partial_z X$有恰当的行为。它的微商的OPE是

$$\begin{aligned}\partial_z X(z)\partial_w X(w) &= \partial_z\partial_w\langle XX\rangle+:\partial_z X\partial_w X:\\ &= -\frac{1}{(z-w)^2}+:\partial_z X\partial_w X:\end{aligned} \tag{6.4.3}$$

$\partial_z X$是权重$(1,0)$的共形场。注意，μ消失了。现在我们计算它的应力张量的OPE。

按照作用量(6.4.1)，自由Boson的应力张量由

$$T(z) = -\tfrac{1}{2} : \partial X \partial X := -\tfrac{1}{2} \lim_{z\to w} \left[\partial_z X \partial_w X + \frac{1}{(z-w)^2} \right] , \tag{6.4.4}$$

$$\bar{T}(\bar{z}) = -\tfrac{1}{2} : \bar{\partial} X \bar{\partial} X := -\tfrac{1}{2} \lim_{\bar{z}\to \bar{w}} \left[\partial_{\bar{z}} X \partial_{\bar{w}} X + \frac{1}{(\bar{z}-\bar{w})^2} \right] . \tag{6.4.5}$$

给出。利用Wick定理，我们可计算

$$\begin{aligned} T(z)\partial X(w) &= -\tfrac{1}{2} : \partial X(z)\partial X(z) : \partial X(w) \\ &= -\partial X(z) \langle \partial X(z) \partial X(w) \rangle + \dots \\ &= \partial X(z) \frac{1}{(z-w)^2} + \dots \\ &= \frac{\partial X(w)}{(z-w)^2} + \frac{1}{z-w} \partial^2 X(w) + \dots , \end{aligned} \tag{6.4.6}$$

其中，省略号表示当$z \to w$时非奇异的项。类似地，我们得到$\bar{T}\partial X = $ 规制的。因此，∂X是$(0,1)$原场。用同样的方法，我们得到$\bar{\partial} X$是$(0,1)$原场。

还有其它原场吗？答案是肯定的。当然还有几个，由X的微商的积构造出来。我们将考虑另一个有意义的种类，顶角算符$V_a(z) =: e^{iaX(z)} :$。应力张量的OPE是

$$T(z) V_a(w,\bar{w}) = -\tfrac{1}{2} : \partial X(z) \partial X(z) : \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n a^n}{n!} : X^n(w,\bar{w}) : . \tag{6.4.7}$$

对展开式中的所有项，可以有一次或者两次缩并。我们得到

$$\begin{aligned} T(z)V_a(w) &= -\tfrac{1}{2} \left[ia \partial \langle XX \rangle \right]^2 e^{iaX(w)} - \tfrac{1}{2} 2ia : \partial X(z) \partial \langle XX \rangle e^{iaX(w)} : + \dots \\ &= \frac{a^2/2}{(z-w)^2} e^{iaX(w)} + \frac{ia\partial X(z)}{z-w} e^{iaX(w)} + \dots \\ &= \frac{a^2/2}{(z-w)^2} V_a(w) + \frac{1}{z-w} \partial V_a(w) + \dots . \end{aligned} \tag{6.4.8}$$

因此，顶角算符V_a是权重为$(a^2/2, 0)$的共形场。

现在，考虑顶角算符的相关函数

$$G^N = \left\langle \prod_{i=1}^{N} V_{a_i}(z_i, \bar{z}_i) \right\rangle = \exp \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j=1; i\neq j}^{N} a_i a_j \langle X(z_i, \bar{z}_i) X(z_j, \bar{z}_j) \rangle \right] , \tag{6.4.9}$$

其中，上面第二个等号是由于我们有一个自由的(Guass)场论。利用传播子(6.4.2)，我们看到，只有当

$$\sum_i a_i = 0. \tag{6.4.10}$$

时，IR发散取消。这是一个荷守恒条件。

对于一个两点函数，我们得到

$$\begin{aligned}\langle V_a(z)V_{-a}(w)\rangle &= \langle :e^{iaX(z)}::e^{-iaX(w)}:\rangle \\ &= e^{-a^2\log|z-w|^2} = \frac{1}{|z-w|^{2a^2}}\,, \end{aligned} \tag{6.4.11}$$

它确认$a^2 = 2h = 2\bar{h}$。

在这个理论中，算符$i\partial X$是U(1)流，它是手征守恒的。它与在$X \to X + \epsilon$下作用量的对称性相关。流的零模式是荷算符。从

$$i\partial_z X\ V_a(w,\bar{w}) = a\ \frac{V_a(w,\bar{w})}{(z-w)} + \text{有限的} \tag{6.4.12}$$

我们可以说，算符V_a携带荷a。荷守恒条件正好是由于理论的U(1)不变性。在弦论情形，这个U(1)不变性本质上是动量守恒。

6.5 中心荷

应力张量$T_{\mu\nu}$是守恒的，所以它有标度维数2。特别是，$T(z)$有共形权重$(2,0)$，$\bar{T}(\bar{z})$有(0,2)。它们明显是准原场。从这些性质，我们可以写出与守恒(全纯性)和共形不变性相容的两个应力张量之间的最一般的OPE。

$$T(z)T(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + 2\frac{T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} + \ldots\,. \tag{6.5.1}$$

第四阶极点只能是常数。因为$\langle T(z)T(w)\rangle = c/2(z-w)^4$，这个常数在幺正理论中必须是正的。因为OPE在$z \leftrightarrow w$必须是对称的，所以不能有第三阶极点。最后，其余的奇异项被T是共形权重(2,0) 的事实固定。对$z \to \bar{z}$和$c \to \bar{c}$的$\bar{T}$，有类似的OPE，以及

$$T(z)\bar{T}(\bar{w}) = \text{规制的}\,. \tag{6.5.2}$$

把(6.5.1)与(6.3.8)，我们得到，由于最奇异项的出现，$T(z)$ 本身不是原场。常数c称为(左)中心荷，$\bar{c}$称为右中心荷。模不变性意味着，对左右不对称性的理论，$c - \bar{c} = 0(\text{ mod } 24)$，以及二维Lorentz不变性要求$c = \bar{c}$。

我们对自由Boson理论计算$c, \bar{c}$的值。由$T(z) = -\frac{1}{2} :\partial X \partial X:$，我们可以计算OPE

$$\begin{aligned} T(z)T(w) &= \tfrac{1}{4}\left\{2\left(\partial\partial\langle XX\rangle\right)^2 + 4:\partial X(z)\partial X(w):\partial\partial\langle XX\rangle + \ldots\right\} \\ &= \frac{1/2}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}T(w) + \frac{1}{z-w}\partial T(w) + \ldots\,, \end{aligned} \tag{6.5.3}$$

我们看到，单个自由Boson有中心荷$c = \bar{c} = 1$。在Boson弦理论中，我们有d个自由Boson，从而中心荷是$c = \bar{c} = d$。

练习：考虑另一个(2,0)算符

$$\tilde{T} = -\tfrac{1}{2} : \partial X \partial X : + iQ\partial^2 X \,,$$

其中，第二项是一个全微分。这是对有一些背景荷Q的自由Boson的一个修正理论的应力张量。按照上面的程序，证明两个应力张量的OPE还是象(6.5.1)一样的形式，但是中心荷为

$$c = 1 - 12Q^2 \,. \tag{6.5.4}$$

验证现在顶角算符V_α的共形权重是$\Delta = \alpha(\alpha - 2Q)/2$。特别是，$V_\alpha$和$V_{-\alpha+2Q}$有同样的共形权重。荷中性条件(6.4.10)现在变成$\sum_i \alpha_i = 2Q$。

6.6 自由Fermion

我们现在分析描写自由无质量Fermion的共形场论。在二维中，可能有既是Majorana型又是Weyl型的旋量，它们只有一个分量。γ矩阵可以用Pauli矩阵来表示，即，$\gamma^1 = \sigma^1$, $\gamma^2 = \sigma^2$，因此，手征投影是$\frac{1}{2}(1 \pm \sigma^3)$。Dirac算符变成

$$\not{\partial} = \sigma^1\partial_1 + \sigma^2\partial_2 = \begin{pmatrix} 0 & \partial_1 - i\partial_2 \\ \partial_1 + i\partial_2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ \bar{\partial} & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.6.1}$$

对Majorana旋量$\begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}$的作用量是

$$S = -\frac{1}{8\pi}\int d^2z(\psi\bar{\partial}\psi + \bar{\psi}\partial\bar{\psi}). \tag{6.6.2}$$

运动方程是

$$\bar{\partial}\psi = \partial\bar{\psi} = 0, \tag{6.6.3}$$

这意味着左和右手性分别由全纯和反全纯的旋量表示。

ψ和$\bar{\psi}$与它们自己的算符积展开或者可以通过把作用量变换到动量空间来得到，或者通过明确写出有正确共形维数的最一般的幂表达式来得到。这给出

$$\psi(z)\psi(w) = \frac{1}{z-w} \quad , \quad \bar{\psi}(\bar{z})\bar{\psi}(\bar{w}) = \frac{1}{\bar{z}-\bar{w}} \,. \tag{6.6.4}$$

除了一个常数因子，共形维数$(2,0)$ 和$(0,2)$的唯一表达式分别是

$$T(z) = -\tfrac{1}{2} : \psi(z)\partial\psi(z) : \quad , \quad \bar{T}(\bar{z}) = -\tfrac{1}{2} : \bar{\psi}(\bar{z})\bar{\partial}\bar{\psi}(\bar{z}) : \,. \tag{6.6.5}$$

这个应力张量有正确的算符积展开

$$T(z)T(w) = \frac{1/4}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}T(w) + \frac{1}{z-w}\partial T(w), \tag{6.6.6}$$

以及对$\bar{T}(\bar{z})$的一个类似表达式，所以$c = \bar{c} = \frac{1}{2}$.

练习：通过计算$T(z)\psi(w)$和$\bar{T}(\bar{z})\bar{\psi}(\bar{w})$的表达式，证明$\psi$和$\bar{\psi}$分别是共形权重$(\frac{1}{2}, 0)$和$(0, \frac{1}{2})$的原场。

6.7 模式展开

我们把应力张量的模式展开写作

$$T(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{-n-2} L_n \quad , \quad \bar{T}(\bar{z}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \bar{z}^{-n-2} \bar{L}_n. \tag{6.7.1}$$

因为指数选择为$-n-2$，所以，对标度变化$z \to \frac{z}{\lambda}$，在$T(z) \to \lambda^2 T\left(\frac{z}{\lambda}\right)$下，我们有$L_{-n} \to \lambda^n L_{-n}$。于是，$L_{-n}$ 和$\bar{L}_{-n}$ 有标度维数n。如果我们考虑一个在闭弦世界叶上的理论，那么，从Euclid空间的柱面到复平面的变换由

$$w = \tau + i\sigma \to z = e^w. \tag{6.7.2}$$

给出。对于共形权重h的全纯场Φ，我们写出

$$\Phi_{\text{cyl}}(w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi_n e^{-nw} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi_n e^{in(i\tau-\sigma)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi_n z^{-n}. \tag{6.7.3}$$

当在平面上并利用(6.2.2)时，对原场，这变成：

$$\Phi(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi_n z^{-n-h}. \tag{6.7.4}$$

在(6.2.2)中，非原场还有一个非齐性的部分。特别是，应力张量的正确变换是

$$T(z) \to (f')^2 T(f(z)) + \frac{c}{12}\left[\frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2\right]. \tag{6.7.5}$$

这证明了应力张量展开式(6.7.1)是正确的。

模式展开可以被

$$L_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} T(z) \quad , \quad \bar{L}_n = \oint \frac{d\bar{z}}{2\pi i} \bar{z}^{n+1} \bar{T}(\bar{z}). \tag{6.7.6}$$

转换。$T(z)T(w)$和$\bar{T}(\bar{z})\bar{T}(\bar{w})$的算符积展开现在可以用模式的方式写出，有

$$[L_n, L_m] \;=\; \left(\oint \frac{dz}{2\pi i}\oint \frac{dw}{2\pi i} - \oint \frac{dw}{2\pi i}\oint \frac{dz}{2\pi i}\right) z^{n+1} T(z) w^{m+1} T(w)$$

$$= \oint \frac{dw}{2\pi i} \oint_{C_w} \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} w^{m+1} \left(\frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} + \dots \right)$$

$$= \oint \frac{dw}{2\pi i} \Big(\frac{c}{12}(n+1)n(n-1)w^{n-2}w^{m+1} +$$

$$+2\,(n+1)w^n w^{m+1}T(w) + w^{n+1}w^{m+1}\partial T(w) \Big)\,. \tag{6.7.7}$$

第一项的残数来自 $\frac{1}{3!}\partial_z^3 z^{n+1}\Big|_{z=w} = \frac{1}{6}(n+1)n(n-1)w^{n-2}$。我们分部积分最后一项，并与第二项联合起来。这给出了$(n-m)w^{n+m+1}T(w)$。求w的积分导致Virasoro代数

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3-n)\delta_{n+m,0}. \tag{6.7.8}$$

对$\bar{T}(\bar{z})$的类似计算产生

$$[\bar{L}_n, \bar{L}_m] = (n-m)\bar{L}_{n+m} + \frac{\bar{c}}{12}(n^3-n)\delta_{n+m,0}. \tag{6.7.9}$$

因为$T\bar{T}$在它的OPE中没有奇异性，

$$[L_n, \bar{L}_m] = 0. \tag{6.7.10}$$

每一个共形不变理论都实现共形代数，它的谱形成共形代数的表示。对$c = \bar{c} = 0$，它退化到经典代数。共形反常的一个后果是

$$T^\alpha_\alpha = \frac{c}{96\pi^3}\sqrt{g}\; R^{(2)}, \tag{6.7.11}$$

其中，$R^{(2)}$是二维标量曲率。在普通的非共形不变的理论中，迹可以是它的不同场的普通函数。在CFT中，它只与标量曲率成比例。这意味着，在$c \neq 0$的CFT中，理论依赖于度量的共形因子，除了在一个非常特殊的(6.7.11)的形式中。我们想起，如果应力张量是作用量关于度量的变分，我们可以求(6.7.11)的积分来得到量子理论对共形因子的依赖性。设$\hat{g}_{\alpha\beta} = e^\phi g_{\alpha\beta}$。于是，

$$\int [DX]_{\hat{g}} e^{-S[\hat{g}_{\alpha\beta}, X]} = e^{-cS_L[g_{\alpha\beta},\phi]} \int [DX]_g e^{-S[g_{\alpha\beta}, X]}\,, \tag{6.7.12}$$

其中，X是场的普通集合，以及

$$S_L[g_{\alpha\beta},\phi] = \frac{1}{96\pi}\int \sqrt{\det g} g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi + \frac{1}{48\pi}\int \sqrt{\det g} R^{(2)}\;\phi\,. \tag{6.7.13}$$

这是Liouville作用量。在临界弦论中，鬼场体系抵消弦坐标的中心荷，整个理论不依赖于标度因子。

6.8 Hilbert空间

为了描写Hilbert空间，我们将采用适合我们坐标体系的量子场论的入和出态的标准公式。对准原场$A(z,\bar{z})$，入态被定义为

$$|A_{\text{in}}\rangle = \lim_{\tau\to-\infty} A(\tau,\sigma)|0\rangle = \lim_{z\to 0} A(z,\bar{z})|0\rangle. \tag{6.8.1}$$

对于出态，我们需要在$z \to \infty$的邻域中的描述。如果我们定义$z = \frac{1}{w}$，那么，这是点$w = 0$。映射$f : w \to z = \frac{1}{w}$ 是一个共形变换，因而$A(z, \bar{z})$按

$$\tilde{A}(w, \bar{w}) = A(f(w), \bar{f}(\bar{w}))(\partial f(w))^h (\bar{\partial} \bar{f}(\bar{w}))^{\bar{h}}. \tag{6.8.2}$$

变换。替换$f(w) = \frac{1}{w}$后，我们得到

$$\tilde{A}(w, \tilde{w}) = A\left(\frac{1}{w}, \frac{1}{\bar{w}}\right)(-w^{-2})^h (-\bar{w}^{-2})^{\bar{h}}. \tag{6.8.3}$$

可自然定义

$$\langle A_{\text{out}}| = \lim_{w, \bar{w} \to 0} \langle 0|\tilde{A}(w, \bar{w}). \tag{6.8.4}$$

我们希望$\langle A_{\text{out}}|$是$|A_{\text{in}}\rangle$ 的Hermite共轭。权重为$(h, \bar{h})$的算符的Hermite共轭由

$$[A(z, \bar{z})]^\dagger = A\left(\frac{1}{\bar{z}}, \frac{1}{z}\right) \bar{z}^{-2h} z^{-2\bar{h}}. \tag{6.8.5}$$

来定义。在从Euclid空间回到Minkowski空间的后续中，这个定义可以找到它合理的理由。在Euclid时间演化$A(\sigma, \tau) = e^{\tau H} A(\sigma, 0) e^{-\tau H}$ 中缺失的i因子必须被Euclid时间反演补偿到伴随矩阵的定义中，在平面上，它通过$z \to 1/z^*$来实现。用(6.8.5)的定义，我们得到

$$\begin{aligned} \langle A_{\text{out}}| &= \lim_{w \to 0} \langle 0|\tilde{A}(w, \bar{w}) = \lim_{z \to 0} \langle 0|A\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{\bar{z}}\right) \bar{z}^{-2h} z^{-2\bar{h}} \\ &= \lim_{z \to 0} \langle 0|\,[A(z, \bar{z})]^\dagger = |A_{\text{in}}\rangle^\dagger. \end{aligned} \tag{6.8.6}$$

应力张量是一个Hermite算符的事实可以利用(6.8.5)按下列方法表达：

$$T^\dagger(z) = \sum_m \frac{L_m^\dagger}{\bar{z}^{m+2}} \equiv \sum_m \frac{L_m}{\bar{z}^{-m-2}} \frac{1}{\bar{z}^4}, \tag{6.8.7}$$

或者用振子模式的方式：

$$L_m^\dagger = L_{-m}, \tag{6.8.8}$$

以及，类似地，$\bar{L}_m^\dagger = \bar{L}_{-m}$。

这些条件也可以从Minkowski空间中T的Hermite性推出。

真空上的条件来自

$$T(z)|0\rangle = \sum_{m \in \mathbb{Z}} L_m z^{-m-2} |0\rangle \tag{6.8.9}$$

在$z = 0$的规制性。因为只允许z的正幂，所以我们必须要求

$$L_m|0\rangle = 0, \quad m \geq -1. \tag{6.8.10}$$

$\lim_{w \to 0} \langle 0|\tilde{T}(w)$的同样条件给出

$$\langle 0|L_m = 0, \quad m \leq 1. \tag{6.8.11}$$

方程(6.8.10)表明，入真空是SL(2,$\mathbb{C}$)不变的，对$m > 1$有附加条件。其余Virasoro算符从真空生成非平庸的态。湮灭$\langle 0|$ 和$|0\rangle$的唯一算符由$L_{\pm 1,0}$和$\bar{L}_{\pm 1,0}$生成，组成共形群的SL(2,$\mathbb{C}$)子群。

如果我们考虑模式展开式(6.7.4)的全纯场，真空的共形不变性和SL(2,$\mathbb{C}$)不变性意味着

$$\Phi_{n>-h}|0\rangle = 0\,. \tag{6.8.12}$$

6.9 共形代数的表示

在CFT中，谱分解为普通对称代数的表示，即Virasoro代数的两个副本。这里，为避免重复，我们只描述算符L_m的左代数。

Virasoro代数的Cartan子代数由L_0生成。正模式是上升算符，负模式是下降算符。最高权重(HW)表示由被所有上升算符湮灭的态开始构造的。于是，表示通过用下降算符作用在HW态上而生成。

假设Φ是左权重为h的原场(算符)。从应力张量(6.3.8)的算符乘积展开，我们得到

$$[L_n, \Phi(w)] = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} T(z)\Phi(w) = h(n+1)w^n\Phi(w) + w^{n+1}\partial\Phi(w). \tag{6.9.1}$$

与这个算符关联的态是

$$|h\rangle \equiv \Phi(0)|0\rangle. \tag{6.9.2}$$

首先，$[L_n, \Phi(0)] = 0$, $n > 0$，因此

$$L_{m>0}|h\rangle = L_{m>0}\Phi(0)|0\rangle = [L_m, \Phi(0)]|0\rangle + \Phi(0)L_{m>0}|0\rangle = 0\,. \tag{6.9.3}$$

这样，原场是与HW态一一对应。那么，每一个原场生成Virasoro代数的一个表示。还有，$L_0|h\rangle = h|h\rangle$。更一般地，共形维数为$(h, \bar{h})$的$\Phi$的(6.9.2)定义的入态$|h, \bar{h}\rangle$也满足$\bar{L}_0|h, \bar{h}\rangle = \bar{h}|h, \bar{h}\rangle$和$\bar{L}_{n>0}|h, \bar{h}\rangle = 0$。

在表示中，由$|h\rangle$生成的其余态有

$$|\chi\rangle = L_{-n_1}L_{-n_2}\ldots L_{-n_k}|h\rangle, \tag{6.9.4}$$

的形式，其中，所有$n_i > 0$。它们被称为子态。它们是本征值$h + \sum_k n_k$的L_0本征态。这种类型的表示称为Verma模。

我们已经看到，在HW态$|h\rangle$和(6.9.2)给出的原场$\Phi_h(z)$之间有一个一一对应关系。对子态可以有类似的表述。考虑态$L_{-1}|h\rangle$。不难证明，利用(6.7.6)，从真空产生这个态的算符是

$$(L_{-1}\Phi)(z) \equiv \oint_{C_z} \frac{dw}{2\pi i}\, T(w)\Phi_h(z)\,, \tag{6.9.5}$$

对一般的态(6.9.4)，我们必须利用多重围道

$$\Phi_\chi(z) = \prod_{i=1}^{k} \oint \frac{dw_i}{2\pi i}\, (w_i - z)^{-n_i+1} T(w_i)\Phi_h(z)\,. \tag{6.9.6}$$

因此，子态算符的一般相关函数可以用关联原场和应力张量的若干个插入项的相关函数的多重围道积分的形式写出。然而，在前一节，我们已经看到，共形Ward恒等式只用相关函数和原场来表达这样一个相关函数。于是，原场相关子的知识决定CFT的所有相关子。

我们同样讨论准原场。我们已经看到，在球上，L_{-1}是平移算符

$$[L_{-1}, O(z,\bar{z})] = \partial_z\, O(z,\bar{z})\ . \tag{6.9.7}$$

准原态是全局共形群的HW态。考虑由$L_{\pm 1}, L_0$生成的部分。升算符是L_1，同时，L_{-1}是降算符。HW态被L_1湮灭。其余表示由用L_{-1}作用若干次产生。因此，子(非准原)态是准原态的衍生态。

由维数为h的原场生成的共形表示的一个有意义的函数是特征标

$$\chi_h(q) \equiv \mathrm{Tr}[q^{L_0 - \frac{c}{24}}]\,, \tag{6.9.8}$$

其中，在整个表示上取迹。在(6.9.8)中，有一个与中心荷成比例的L_0的额外移动。原因是当讨论在环面上的配分函数时，特征标会出现；其中，环面可以认为是两个端点等同(用一个扭曲)的柱面。从球面到柱面，正好有一个L_0的移动，这是由于应力张量不是一个原场，而是象在(6.7.5)中一样变换。

练习：对没有零矢量的一般表示，计算特征标，证明它由

$$\chi_h(q) = \frac{q^{h-c/24}}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)}\,. \tag{6.9.9}$$

给出。从这个表达式，我们可以看出任何给定能级的态的多重数。

有一个特殊表示，称为真空表示。如果从单位算符开始，由(6.9.2)，与它关联的态是真空态。其余表示由负的Virasoro模式生成。然而，注意，从(6.9.1)，L_{-1}象一个z微商一样作用。可是，单位算符的z微商是零。这等价于说，L_{-1}湮灭真空态。对于$c \geq 1$，真空特征标由

$$\chi_0(q) = \frac{q^{-c/24}}{\prod_{n=2}^{\infty}(1-q^n)}\,. \tag{6.9.10}$$

给出。$n=1$的项在这里不存在，因为L_{-1}不从真空生成任何态。

在正的(幺正)理论中，态的模必须是正的。$L_{-n}|0\rangle,\ n>0$态的模是

$$\begin{aligned} \| L_{-n}|0\rangle \|^2 &= \langle 0|L_{-n}^{\dagger}L_{-n}|0\rangle = \langle 0|\left[\frac{c}{12}(n^3-n) + 2nL_0\right]|0\rangle \\ &= \frac{c}{12}(n^3-n), \end{aligned} \tag{6.9.11}$$

其中，我们利用了Virasoro代数的交换关系和真空的SL(2,$\mathbb{C}$)不变性。幺正性要求这是正的。对于足够大的n，这意味着$c \geq 0$(如果$c = 0$，Hilbert空间是一维的，用$|0\rangle$张开。) 更详细的研究表明，对$c \geq 1$，我们不能从幺正性得到直接的约束。然而，当$0 < c < 1$时，幺正性意味着c必须有形式

$$c = 1 - \frac{6}{m(m+1)}. \tag{6.9.12}$$

Ising模型是$m = 3$的例子，$m = 4$是三临界Ising模型，$m = 5$是三态Potts模型；$m = 2$是$c = 0$的平庸理论。

一般地，上面提到的Verma模对应于Virasoro代数的不可约表示。然而，在特殊情况下，可能出现Verma模包含“零”态(与任何其它态正交的零模态)。于是，不可约表示通过分解出零态而得到。考虑Ising模型，上面的$m = 3$，有$c = 1/2$。这本质上是我们前面讨论的Majorana Fermion的共形场论。考虑对应于Fermion $|1/2\rangle$ 有$h = 1/2$的原态和下列子态

$$|\chi\rangle = \left(L_{-2} - \frac{3}{4}L_{-1}^2\right)|1/2\rangle\,. \tag{6.9.13}$$

练习：证明在(6.9.13)中，$|\chi\rangle$虽然是一个子态，也是一个原态，以及模等于零。

6.10 仿射代数

如今，我们已经看到，在任何CFT中，有一个权重为(2,0)的全纯应力张量。然而，CFT还有手征对称性，它的守恒荷有权重(1,0)。手性守恒意味着$\bar{\partial}J = 0$。于是，这样的荷是全纯的。考虑出现在理论中的整个全纯流$J^a(z)$的集合。我们可以写出与手性守恒和共形不变性相容的这些流的最一般的OPE：

$$J^a(z)J^b(w) = \frac{G^{ab}}{(z-w)^2} + \frac{if^{ab}{}_c J^c(w)}{z-w} + \text{有限项}, \tag{6.10.1}$$

其中，$f^{ab}{}_c$对上标是反对称的，G^{ab}是对称的。利用算符乘积的结合性，可以证明$f^{ab}{}_c$也满足Jacobi恒等式，而且$f^{abc} = f^{ab}{}_d G^{dc}$是完全反对称的。从而，它们必须是不变度量$G^{ab}$的李群的结构常数。

展开$J^a(z) = \sum_n J_n^a z^{-n-1}$，我们可以把(6.10.1)转换到流模式的交换关系

$$[J_m^a, J_n^b] = m\, G^{ab}\, \delta_{m+n,0} + if^{ab}{}_c J_{m+n}^c. \tag{6.10.2}$$

这个代数是李代数的无穷维推广，称为仿射代数。很明显，零模式J_0^a的子代数组成结构常数为$f^{ab}{}_c$的李代数。

练习：证明权重(1,0)的共形场在正定理论中必须是原的。

于是，应力张量的OPE应该是

$$T(z)J^a(w) = \frac{J^a(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial J^a(w)}{z-w} \tag{6.10.3}$$

以及$\bar{T}(\bar{z})J^a(w) =$ 规制的。

象我们将看到的，这种类型的代数可在许多CFT中实现。原型是有Wess-Zumino项的非线性σ模型[15]。这是一个二维中的理论，其中，基本场$g(x)$在群G的矩阵表示中。

$$S = \frac{1}{4\lambda^2}\int_{M_2} d^2\xi\ \mathrm{Tr}(\partial_\mu g \partial^\mu g^{-1}) + \frac{ik}{8\pi}\int_{B;\partial B=M_2} d^3\xi\ \mathrm{Tr}(\epsilon_{\alpha\beta\gamma}U^\alpha U^\beta U^\gamma), \tag{6.10.4}$$

其中，$U_\mu = g^{-1}\partial_\mu g$。作用量中的第二项是在三维流形B上的积分，三维流形的边界是我们定义理论于其上的二维空间M_2。这是WZ项，它有特殊的性质：它的变分给出代替三维的二维运动方程。但是，必须附加一个自洽条件。考虑有同样边界的另一个三维流形。我们希望理论保持一样。这给出关于耦合常数k的量子化条件[11]。上面的理论有两个不同的耦合常数，λ和k。可以证明，当$\lambda^2 = 4\pi/k$时，理论是共形不变的(这称为WZW模型)。在这种情况，可以验证，矩阵流$J = g^{-1}\partial g$和$\bar{J} = \bar{\partial}gg^{-1}$ 是手征守恒的$\bar{\partial}J = \partial\bar{J} = 0$。这是在$g \to h_1\ g\ h_2$下作用量(6.10.4)对称性的反映，其中，$h_{1,2}$是任意$G$元素。于是，流$J$生成$G_L$仿射代数，同时，流$\bar{J}$生成$G_R$流代数。

在这个理论(它证实是一般的)中，一个有趣的现象就是应力张量可以用流的形式写成双线性的。这称为仿射－Sugawara构造。考虑单群G。那么，通过在(6.10.1)基的变换，我们可以调整$G^{ab} = k\delta^{ab}$。选择一个基，使它的长根的平方是2。于是，(2,0)算符

$$T_G(z) = \frac{1}{2(k+\tilde{h})} : J^a(z)J^a(z) : \tag{6.10.5}$$

满足有中心荷

$$c_G = \frac{kD_G}{k+\tilde{h}}\ . \tag{6.10.6}$$

的Virasoro代数。$\tilde{h}$是群G的对偶Coxeter数目。在SU(N)情形，我们有$\tilde{h}$ =N；对SO(N)，$\tilde{h}$ =N-2，等等。和这个标准化一致，为了有一个正定的理论，k应该是一个正整数。它称为仿射代数的等级。

在这种类型的理论中，仿射对称性比Virasoro对称性“大”，因为我们可以从流算符构造Virasoro算符。特别是，谱将形成仿射代数的表示。为了描述这样的表示，我们就

[11]有另一个方法来证明k的量子化。如果我们要求量子理论的正定性，那么，我们得到同样的量子化条件。

采用类似Virasoro代数情形的程序。表示由态$|R_i\rangle$的集合生成，它在零模式子代数的表示R中变换，被流的正模式湮灭。

$$J^a_{m>0}|R_i\rangle = 0 \quad , \quad J^a_0|R_i\rangle = i(T^a_R)_{ij}|R_j\rangle \, . \tag{6.10.7}$$

其余的仿射表示由流的负模式的作用量，从态$|R_i\rangle$生成。态$|R_i\rangle$象通常一样，由局域算符$R_i(z,\bar{z})$，从真空生成。于是，条件(6.10.7)转变到下列OPE

$$J^a(z)R_i(w,\bar{w}) = i\,\frac{(T^a_R)_{ij}}{(z-w)}R_j(w,\bar{w}) + \dots \, . \tag{6.10.8}$$

这是仿射原场的定义，它起着象在共形代数情形的原场一样的作用[16]。

仿射原场的共形权重可以从应力张量的仿射－Sugawara形式计算，并给出

$$h_R = \frac{C_R}{k+\tilde{h}} \, , \tag{6.10.9}$$

其中，C_R是表示R的二次Casimir。例如，SU(2)的自旋j有$h_j = j(j+1)/(k+2)$。

如今我们已经看到，仿射代数$\hat{g}$的不可约表示与有限李代数的不可约表示一一对应。然而，这不是问题的结束。发现，不是有限代数的所有表示可出现，而只有可积的那些。在SU(2)情形，这暗示$j \leq k/2$。对$SU(N)_k$，可积表示是在它们的Young图中至多有k列的那些表示。

不可积表示不是幺正的，它们可以证明是从相关函数退耦的。

练习：余集构造：考虑与群G相关的仿射－Sugawara应力张量T_G。选取一个有规则嵌入的子群H $\subset$ G，考虑从H流构造的相关仿射－Sugawara应力张量$T_{\rm H}$，其中，H流是G流的子集。也考虑$T_{\rm G/H} = T_{\rm G} - T_{\rm H}$。证明：

$$T_{\rm G/H}(z)J^{\rm H}(w) = \text{规制的} \quad , \quad T_{\rm G/H}(z)T_{\rm H}(w) = \text{规制的} \, . \tag{6.10.10}$$

再证明$T_{\rm G/H}$满足中心荷$c_{\rm G/H} = c_{\rm G} - c_{\rm H}$ 的Virasoro代数。粗略地讲，上面的构造的解释是，G-WZW理论可以分解为H-理论和由应力张量描写的G/H理论。作为一个应用，证明：如果选择G = $\mathrm{SU(2)_m \times SU(2)_1}$以及H是$\mathrm{SU(2)_{m+1}}$的对角子群，那么，G/H理论是中心荷(6.9.12) 的最小模型的理论。对这个构造的推广，见[17]。

有兴趣的读者可以在[18, 19]中找到关于仿射代数和相关理论的详细资料。

6.11 自由Fermion和O(N)仿射对称性

自由Fermion和Boson可以用来实现流代数的特别表示。它对于我们后面考虑的N个自由Majorana-Weyl Fermion ψ^i是有用的。

$$S = -\frac{1}{8\pi}\int d^2z \; \psi^i\bar{\partial}\psi^i \, . \tag{6.11.1}$$

明显地，这个模型显示出O(N)对称性，$\psi^i \to \Omega_{ij}\psi_j$，$\Omega^T\Omega = 1$，它导致手征守恒Hermite ($J_m^{ij\dagger} = J_{-m}^{ij}$)流

$$J^{ij}(z) = i \ :\psi^i(z)\psi^j(z): \ , \quad i < j \, . \tag{6.11.2}$$

利用OPE

$$\psi^i(z)\psi^j(w) = \frac{\delta^{ij}}{z-w} \tag{6.11.3}$$

和Wick定理，我们可计算

$$J^{ij}(z)J^{kl}(w) = \frac{G^{ij,kl}}{(z-w)^2} + i \ f^{ij,kl}{}_{mn}\frac{J^{mn}(w)}{(z-w)} + \dots \, , \tag{6.11.4}$$

其中，$G^{ij,kl} = (\delta^{ik}\delta^{jl} - \delta^{il}\delta^{jk})$ 是O(N)不变度量，和

$$2 \ f^{ij,kl}{}_{mn} = (\delta^{ik}\delta^{ln} - \delta^{il}\delta^{kn})\delta^{jm} + (\delta^{jl}\delta^{kn} - \delta^{jk}\delta^{ln})\delta^{im} - (m \leftrightarrow n) \tag{6.11.5}$$

在某个基中O(N)的结构常数，基的长根的平方等于2。于是，N个自由Fermion实现了在能级$k = 1$的O(N)流代数。

我们可以构造仿射－Sugawara应力张量

$$T(z) = \frac{1}{2(N-1)}\sum_{i<j}^{N} :J^{ij}(z)J^{ij}(z): \, . \tag{6.11.6}$$

象前面讨论一样，$T(z)$满足一个算符乘积展开

$$T(z)T(w) = \frac{c_G/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} \, , \tag{6.11.7}$$

其中，

$$c_G = \frac{kD}{k+\tilde{h}} \, . \tag{6.11.8}$$

对SO(N)，有$\tilde{h} = N-2$和$D = \frac{1}{2}N(N-1)$。用$k = 1$，这给出

$$c_G = \frac{N(N-1)/2}{1+N-2} = \frac{N}{2}, \tag{6.11.9}$$

即，每一个Fermion给中心荷贡献$\frac{1}{2}$。因为两个理论的张量积的中心荷是两个中心荷的和，所以，这正是所预期的。还有，如果我们利用采用Fermion方式流的明确形式，可以用结果

$$T(z) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \ :\psi^i\partial\psi^i: , \tag{6.11.10}$$

直接计算在(6.11.6)中的正规编序乘积。这个结果是我们直接从自由Fermion作用量计算的应力张量。

因为N个自由Fermion实现$O(N)_1$仿射对称性，我们应该可以把谱分类到$O(N)_1$的不可约表示中。从流代数的表示理论，我们认识到在第一级，存在下列可积(幺正)表示。单位(真空)表示由用负流模式作用在真空上构造，有矢量V表示和旋量表示。如果N是奇

数，有一个维数为$2^{(N-1)/2}$的单个旋量表示。当N是偶数，有两个维数为$2^{N/2-1}$的不等价旋量表示：旋量S和共轭旋量C。从现在开始，我们假设N是偶数，这是我们下面感兴趣的情形。把(6.10.9)应用到这种情形，我们得到矢量的共形权重是

$$h_V = \frac{(N-1)/2}{1+N-2} = \frac{1}{2}\,. \tag{6.11.11}$$

矢量的候选仿射原场是Fermion本身，它的共形权重是1/2，在全局O(N)对称性下象矢量一样变换。这可以通过计算

$$J^{ij}(z)\psi^k(w) = i\,\frac{T^{ij}_{kl}}{z-w}\psi^l(w) + \dots\,, \tag{6.11.12}$$

来验证，其中，$T^{ij}_{kl} = (\delta^{il}\delta^{jk} - \delta^{ik}\delta^{jl})$ 是矢量的表示矩阵。把(6.11.12)与(6.10.8)比较，我们的确看到，ψ^i是矢量表示的原场。

旋量和共轭旋量的共形权重是相等的，并且，从(6.10.9)，我们得到$h_S = h_C = N/16$。在我们迄今已描述的方法的自由Fermion理论中，这样一个共形权重的算符不存在。

如果我们注意到作用量(6.11.1)有$\mathbb{Z}_2$对称性，

$$\psi^i \to -\psi^i. \tag{6.11.13}$$

事情会更好一些。由于这个对称性，我们可以在柱面上选择不同的边界条件：

- Neveu-Schwarz : $\psi^i(\sigma + 2\pi) = -\psi^i(\sigma)$,
- Ramond : $\psi^i(\sigma + 2\pi) = \psi^i(\sigma)$.

我们将把同样的边界条件附加在所有Fermion上，否则将破坏O(N)对称性。

在柱面上，周期性全纯场的模式展开是

$$\psi(\tau + i\sigma) = \sum_n \psi_n e^{-n(\tau+i\sigma)}, \tag{6.11.14}$$

其中，n是整数。于是，在Ramond(R)部分，ψ是整数模的。在Neveu-Schwarz(NS)部分，ψ是反周期的，所以，它的Fourier展开象(6.11.14)，但是，现在n是半整数。就象以前讨论的，当我们从柱面转到球面，$z = e^{\tau+i\sigma}$，模式展开变成

$$\psi^i(z) = \sum_n \psi^i_n z^{-n-h} = \sum_n \psi^i_n z^{-n-1/2}\,. \tag{6.11.15}$$

我们观察到，在NS部分(半整数n)，场$\psi^i(z)$是单值的(在$z \to ze^{2\pi i}$下不变)，而在R部分，它有一个Z_2分支截断。总之，

- $n \in \mathbb{Z}$ (Ramond),
- $n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ (Neveu-Schwarz).

OPE(6.11.3)暗示了在NS和R部分，Fermion模式的下列反交换关系

$$\{\psi^i_m, \psi^j_n\} = \delta^{ij}\delta_{m+n,0}\,, \tag{6.11.16}$$

我们首先看看NS部分。这里，Fermion振子是半整数模的，而且(6.11.16)表明：$\psi^i_{-n-\frac{1}{2}}$，$n \leq 0$是产生算符；同时，$\psi^i_{n+\frac{1}{2}}$是湮灭算符。因此，真空满足

$$\psi^i_{n>0}|0\rangle = 0 \tag{6.11.17}$$

以及整个谱由用负模振子作用在真空上生成。我们希望把谱分解到仿射表示。上面我们已经提出，这里我们希望得到真空和矢量表示。矢量的原态是

$$|i\rangle = \psi^i_{-\frac{1}{2}}|0\rangle \tag{6.11.18}$$

而且，其余的表示从上述态，通过用负流模式作用而构造。

在这点上，引入Fermion数算符是有用的，它本质上以2为模来计Fermion模式的数。表示这个的精确方法是

$$\{(-1)^F, \psi^i_n\} = 0 \tag{6.11.19}$$

和真空有本征值1：$(-1)^F|0\rangle = |0\rangle$。利用(6.11.19)，我们计算出矢量原态(6.11.18)有$(-1)^F = -1$。因为流包含偶数个Fermion模式，我们可以规定如下：

- 所有真空(幺正)表示的态有$(-1)^F = 1$。第一个非平庸的态对应于流本身：

$$J^{ij}_{-1}|0\rangle = i\psi^i_{-\frac{1}{2}}\psi^j_{-\frac{1}{2}}|0\rangle\,. \tag{6.11.20}$$

- 矢量表示的所有态有$(-1)^F = -1$。原态以下第一个非平庸的态是

$$J^{ij}_{-1}|k\rangle = i\left[\delta^{jk}\psi^i_{-\frac{3}{2}} - \delta^{ik}\psi^j_{-\frac{3}{2}} + \psi^i_{-\frac{1}{2}}\psi^j_{-\frac{1}{2}}\psi^k_{-\frac{1}{2}}\right]|0\rangle\,. \tag{6.11.21}$$

我们将计算NS中的特征标(多重数)。我们首先计算整个NS部分的$q^{L_0-c/24}$的迹。由于每一个负模Fermion振子$\psi^i_{-n-\frac{1}{2}}$贡献$1+q^{n+1/2}$，这不难计算。第一项对应于不存在的振子，而第二项对应于出现的振子。因为振子是Fermion的，所以它的平方是零，从而没有更多的项出现。综合一下，我们得到

$$\mathrm{Tr}_{NS}[q^{L_0-c/24}] = q^{-\frac{N}{48}}\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{n-\frac{1}{2}})^N\,. \tag{6.11.22}$$

利用附录A的(A.8)和(A.10)，我们可以把它写成

$$\mathrm{Tr}_{NS}[q^{L_0-c/24}] = \left[\frac{\vartheta_3}{\eta}\right]^{N/2}\,, \tag{6.11.23}$$

其中，$\vartheta_i = \vartheta_i(0|\tau)$。为了分离单位表示和矢量表示的贡献，我们还需要计算同样的迹，但是要插入$(-1)^F$。于是，$\psi^i_{-n-\frac{1}{2}}$贡献$1-q^{n+1/2}$和

$$\mathrm{Tr}_{NS}[(-1)^F\ q^{L_0-c/24}] = q^{-\frac{N}{48}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{n-\frac{1}{2}})^N = \left[\frac{\vartheta_4}{\eta}\right]^{N/2}\,. \tag{6.11.24}$$

现在，我们可以投影到矢量表示或单位表示上：

$$\chi_0 = \mathrm{Tr}_{NS}\left[\frac{(1+(-1)^F)}{2}\, q^{L_0-c/24}\right] = \frac{1}{2}\left(\left[\frac{\vartheta_3}{\eta}\right]^{N/2} + \left[\frac{\vartheta_4}{\eta}\right]^{N/2}\right), \tag{6.11.25}$$

$$\chi_V = \mathrm{Tr}_{NS}\left[\frac{(1-(-1)^F)}{2}\, q^{L_0-c/24}\right] = \frac{1}{2}\left(\left[\frac{\vartheta_3}{\eta}\right]^{N/2} - \left[\frac{\vartheta_4}{\eta}\right]^{N/2}\right). \tag{6.11.26}$$

有时出现不等价的流代数表示有同样的共形权重和同样的多重数，从而有同样的特征标。这对旋量会发生。为了区别它们，我们定义一个精确的特征标(仿射特征标)，这里，我们在迹中插入一个任意的仿射群。通过一个伴随作用量(它保持迹不变)，我们可以把这个元素提出到Cartan环面。在这种情形，群元可以被写成Cartan生成元$g = e^{2\pi i \sum_i v_i J_0^i}$的指数。我们考虑

$$\chi_R(v_i) = \mathrm{Tr}_R\left[q^{L_0-c/24}\; e^{2\pi i \sum_i v_i J_0^i}\right], \tag{6.11.27}$$

其中，i取在Cartan子代数上，J_0^i是Cartan流的零模式。偶数N的O(N)Cartan子代数由J_0^{12}，$J_0^{34},\ldots,J_0^{N/2-1,N/2}$ 生成，维数为$N/2$。我们将计算单位表示和矢量表示的仿射特征标。考虑Fermion ψ^1和ψ^2的贡献。通过转到基$\psi^\pm = \psi^1 \pm i\psi^2$，我们可以看到，$\psi_n^\pm$的$J_0^{12}$本征值是$\pm 1$。综合起来，并利用附录A的$\vartheta$函数乘积公式，我们得到

$$\chi_0(v_i) = \frac{1}{2}\left[\prod_{i=1}^{N/2}\frac{\vartheta_3(v_i)}{\eta} + \prod_{i=1}^{N/2}\frac{\vartheta_4(v_i)}{\eta}\right], \tag{6.11.28}$$

$$\chi_V(v_i) = \frac{1}{2}\left[\prod_{i=1}^{N/2}\frac{\vartheta_3(v_i)}{\eta} - \prod_{i=1}^{N/2}\frac{\vartheta_4(v_i)}{\eta}\right]. \tag{6.11.29}$$

我们现在转到Ramond部分，构造Hilbert空间。这里，Fermion是整数模的。对$n \neq 0$的ψ_n^i，应用前面同样的讨论。我们分开产生和湮灭算符，真空应该被湮灭算符所湮灭。然而，这里一个重要的差别就是反交换零模的出现

$$\{\psi_0^i, \psi_0^j\} = \delta^{ij}\,. \tag{6.11.30}$$

当讨论鬼场体系时，这种情况发生。方程(6.11.30)是O(N)Clifford代数，由Hermite O(N)的γ来实现。从而，“真空”必须是有$2^{N/2}$分量的O(N)的(Dirac)旋量$\hat{S}$。我们用$|\hat{S}_\alpha\rangle$来标记R真空，有

$$\psi_{m>0}^i|\hat{S}_\alpha\rangle = 0 \quad , \quad \psi_0^i|\hat{S}_\alpha\rangle = \gamma_{\alpha\beta}^i|S_\beta\rangle\,. \tag{6.11.31}$$

再考虑

$$\gamma^{N+1} = \prod_{i=1}^{N}(\psi_0^i/\sqrt{2}) \quad , \quad \{\gamma^{N+1}, \psi_0^i\} = 0 \quad , \quad [\gamma^{N+1}]^2 = 1\,. \tag{6.11.32}$$

为了定义Weyl旋量，这个矩阵起γ^5的作用。于是，我们得到旋量$S = (1+\gamma^{N+1})/2\ \hat{S}$和共轭旋量$C = (1-\gamma^{N+1})/2\ \hat{S}$。事实上，在Ramond部分

$$(-1)^F = \gamma^{N+1}\,(-1)^{\sum_{n=1}^{\infty}\psi_{-n}^i\psi_n^i} \tag{6.11.33}$$

以及有这个定义

$$(-1)^F|S\rangle = |S\rangle \quad , \quad (-1)^F|C\rangle = -|C\rangle \, . \tag{6.11.34}$$

现在，通过用负模Fermion振子的作用，我们构造Ramond部分的整个谱。

按照我们的构造，R真空有正确的权重吗？下面我们可以验证这个。考虑在Ramond真空的Fermion两点函数

$$G_R^{ij}(z,w) = \langle \hat{S}|\psi^i(z)\psi^j(w)|\hat{S}\rangle \, . \tag{6.11.35}$$

这可以直接利用模式展开(6.11.15)和交换关系(6.11.16)和(6.11.31)来计算，为

$$G_R^{ij}(z,w) = \delta^{ij}\frac{z+w}{2\sqrt{zw}}\frac{1}{z-w} \, . \tag{6.11.36}$$

还要注意，对在CFT中对应于共形权重为h的算符的任何态$|X\rangle$，我们有

$$\langle X|T(z)|X\rangle = \frac{h}{z^2} \, . \tag{6.11.37}$$

最后，记住应力张量的定义

$$T(w) = \lim_{z\to w}\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\psi^i(z)\partial_w\psi^i(w) + \frac{N}{2(z-w)^2}\right] , \tag{6.11.38}$$

其中，我们减掉OPE的奇异部分。把这些因素综合在一起，我们可以计算出

$$\langle \hat{S}|T(z)|\hat{S}\rangle = \frac{N}{16\ z^2} \, , \tag{6.11.39}$$

它给出了旋量的正确共形权重。我们现在计算Ramond部分的多重数。首先计算直接的迹。每一个有$n>0$的振子ψ^i_{-n}给出贡献$1+q^n$。从S和C基态，也有多重数$2^{N/2}$。于是，

$$\mathrm{Tr}_R[q^{L_0-c/24}] = 2^{N/2}\ q^{\frac{N}{16}-\frac{N}{48}}\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)^N = \left[\frac{\vartheta_2}{\eta}\right]^{N/2} \, . \tag{6.11.40}$$

如果我们考虑有$(-1)^F$插入的迹，就得到0，因为对任何态，有一个与零模式有关的相反的$(-1)^F$本征值。$\mathrm{Tr}[(-1)^F]=0$的事实说明，R是非手性的(C和S都出现)。所以，

$$\chi_S = \chi_C = \frac{1}{2}\left[\frac{\vartheta_2}{\eta}\right]^{N/2} \, . \tag{6.11.41}$$

在C和S表示之间，仿射特征标的确不同：

$$\chi_S(v_i) = \frac{1}{2}\left[\prod_{i=1}^{N/2}\frac{\vartheta_2(v_i)}{\eta} + \prod_{i=1}^{N/2}\frac{\vartheta_1(v_i)}{\eta}\right] , \tag{6.11.42}$$

$$\chi_C(v_i) = \frac{1}{2}\left[\prod_{i=1}^{N/2}\frac{\vartheta_2(v_i)}{\eta} - \prod_{i=1}^{N/2}\frac{\vartheta_1(v_i)}{\eta}\right] \, . \tag{6.11.43}$$

对$v_i=0$，它们约化到(6.11.41)。

最后，对应于C和S表示的R真空用仿射原场$\hat{S}_\alpha(z)$，从NS真空$|0\rangle$产生：

$$|\hat{S}_\alpha\rangle = \lim_{z\to 0} \hat{S}_\alpha(z)|0\rangle \,. \tag{6.11.44}$$

我们将用O(N)的反对称荷共轭矩阵$C^{\alpha\beta}$升降旋量指标。于是我们有下列OPE：

$$\psi^i(z)\hat{S}_\alpha(w) = \gamma^i_{\alpha\beta}\frac{\hat{S}_\beta(w)}{\sqrt{z-w}} + \dots \tag{6.11.45}$$

$$J^{ij}(z)\hat{S}_\alpha(w) = \frac{i}{2}[\gamma^i,\gamma^j]_{\alpha\beta}\frac{\hat{S}_\beta(w)}{(z-w)} + \dots \tag{6.11.46}$$

$$\hat{S}_\alpha(z)\hat{S}_\beta(w) = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{(z-w)^{N/8}} + \gamma^i_{\alpha\beta}\frac{\psi^i(w)}{(z-w)^{N/8-1/2}} + \frac{i}{2}[\gamma^i,\gamma^j]_{\alpha\beta}\frac{J^{ij}(w)}{(z-w)^{N/8-1}} + \dots \tag{6.11.47}$$

6.12 N=1超共形对称性

我们已经看到，CFT的共形对称性可以用手征(2,0)算符的应力张量T的OPE编码。遇到的生成对称性的其它手征算符包括手征Fermion(1/2,0)和流(1,0)。这里，我们研究守恒手征流有自旋3/2的对称性。它们与称为超对称的Fermion型对称性相关。

考虑有作用量

$$S = \frac{1}{2\pi}\int d^2z\partial X\bar{\partial}X + \frac{1}{2\pi}\int d^2z(\psi\bar{\partial}\psi + \bar{\psi}\partial\bar{\psi}) \,. \tag{6.12.1}$$

的自由标量和Majorana Fermion的理论。作用量在左移动超对称

$$\delta X = \epsilon(z)\psi \quad , \quad \delta\psi = -\epsilon(z)\partial X \quad , \quad \delta\bar{\psi} = 0 \tag{6.12.2}$$

和右移动超对称

$$\delta X = \bar{\epsilon}(\bar{z})\bar{\psi} \quad , \quad \delta\bar{\psi} = -\bar{\epsilon}(\bar{z})\bar{\partial}X \quad , \quad \delta\psi = 0 \,, \tag{6.12.3}$$

下不变，其中，ϵ和$\bar{\epsilon}$是反交换的。

相关的守恒律可写作$\partial\bar{G} = \bar{\partial}G = 0$，守恒手征流是

$$G(z) = i\psi\partial X \quad , \quad \bar{G}(\bar{z}) = i\bar{\psi}\bar{\partial}X \,. \tag{6.12.4}$$

我们容易得到OPE

$$\begin{aligned} G(z)G(w) &= \frac{1}{(z-w)^3} + 2\frac{T(w)}{z-w} + \dots \,, \\ T(z)G(w) &= \frac{3}{2}\frac{G(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial G(w)}{z-w} + \dots \,, \end{aligned} \tag{6.12.5}$$

其中，$T(z)$是满足$c = 3/2$的(6.5.1)的理论的总应力张量，

$$T(z) = -\tfrac{1}{2} : \partial X\partial X : -\tfrac{1}{2} : \psi\partial\psi : \,. \tag{6.12.6}$$

(6.12.5)暗示$G(z)$是维数为3/2的原场。由T和G生成的代数称为N=1共形代数，因为它编码了共形不变性和一个超对称性。最一般的这样的代数可以利用共形不变性和结合性来写出。定义$\hat{c}=2c/3$。于是，从(6.5.1)分离，这个代数包含下列OPE

$$G(z)G(w)=\frac{\hat{c}}{(z-w)^3}+2\frac{T(w)}{z-w}+\dots\,,$$
$$T(z)G(w)=\frac{3}{2}\frac{G(w)}{(z-w)^2}+\frac{\partial G(w)}{z-w}+\dots\,. \tag{6.12.7}$$

引入超流$G(z)=\sum G_r/z^{r+3/2}$的模式，和Virasoro代数一起，我们得到下列(反)交换关系

$$\begin{aligned}\{G_r,G_s\} &= \frac{\hat{c}}{2}\left(r^2-\frac{1}{4}\right)\delta_{r+s,0}+2L_{r+s}\,,\\ [L_m,G_r] &= \left(\frac{m}{2}-r\right)G_{m+r}\,,\end{aligned} \tag{6.12.8}$$

这个代数有对称性(外自同构)$G\to -G$和$T\to T$。从而，NS或R边界条件对超流是可能的。在直接实现(6.12.4)中，它们对应于Fermion的各自边界条件。

在NS部分，超流模式有半整数，对$r>0$有$G_r|0\rangle=0$。原态被G和T的正模式湮灭，超共形表示由G和T的负模式的作用量生成。一般特征标是

$$\chi^{NS}_{N=1}=\mathrm{Tr}[q^{L_0-c/24}]=q^{h-c/24}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1+q^{n-\frac{1}{2}}}{1-q^n}\,. \tag{6.12.9}$$

在Ramond部分中，G是整数模的，特别是有一个零模式G_0，按照(6.12.8)它满足

$$\{G_0,G_0\}=2L_0-\frac{\hat{c}}{8}\,. \tag{6.12.10}$$

原态再次被正模式湮灭。在幺正理论中，(6.12.10)预示对任何态，$h\geq\hat{c}/16$。当(6.12.10)的右边不等于零，态是双重简并的，G_0在两个简并态之间移动。当$h=\hat{c}/16$ 时没有简并，因为从(6.12.10)有$G_0^2=0$，它意味着在这样的态上$G_0=0$。当在自由Fermion情形，我们可引入算符$(-1)^F$，它与G反交换，并且计数以模为2的Fermion数目。

在归于G_0的R部分中态的配对可规定如下：在R部分中的$(-1)^F$的迹只有从$\Delta=\hat{c}/16$的基态的贡献。这个迹称为N=1超共形场论的椭圆亏格，是Dirac指标的CFT推广[12]。

给出一般R特征标

$$\chi^{R}_{N=1}=\mathrm{Tr}[q^{L_0-c/24}]=q^{h-c/24}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1+q^{n}}{1-q^n}\,. \tag{6.12.11}$$

N=1超共形理论在N=1超空间中有一个优美的公式，其中，和坐标$z,\bar{z}$一起，我们引入两个反交换变量$\theta,\bar{\theta}$ 和协变微商

$$D_\theta=\frac{\partial}{\partial\theta}+\theta\partial_z\quad,\quad \bar{D}_{\bar{\theta}}=\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}}+\bar{\theta}\partial_{\bar{z}}\,. \tag{6.12.12}$$

[12]进一步讨论见[20]

场X和$\psi,\bar{\psi}$写作可用超空间中的函数描写，标量超场是

$$\hat{X}(z,\bar{z},\theta,\bar{\theta}) = X + \theta\psi + \bar{\theta}\bar{\psi} + \theta\bar{\theta}F\,, \tag{6.12.13}$$

其中，F是没有动力学的辅助场。作用量(6.12.1)变成

$$S = \frac{1}{2\pi}\int d^2z \int d\theta d\bar{\theta}\ D_\theta\hat{X}\ \bar{D}_{\bar{\theta}}\hat{X}\,. \tag{6.12.14}$$

练习：通过在反交换坐标上作积分，用分量写出作用量(6.12.14)，证明它与(6.12.1)等价。

6.13 N=2超共形对称性

超共形对称性有更进一步的推广。下一个简单的情形是N=2超共形代数，除了应力张量，它包含两个超流$G^\pm$ 和一个U(1)流J。撇开Virasoro OPE，它的OPE是

$$G^+(z)G^-(w) = \frac{2c}{3}\frac{1}{(z-w)^3} + \left(\frac{2J(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial J(w)}{z-w}\right) + \frac{2}{z-w}T(w) + \dots\,, \tag{6.13.1}$$

$$G^+(z)G^+(w) = \text{regular} \quad , \quad G^-(z)G^-(w) = \text{regular}\,, \tag{6.13.2}$$

$$T(z)G^\pm(w) = \frac{3}{2}\frac{G^\pm(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial G^\pm(w)}{z-w} + \dots\,, \tag{6.13.3}$$

$$J(z)G^\pm(w) = \pm\frac{G^\pm(w)}{z-w} + \dots\,, \tag{6.13.4}$$

$$T(z)J(w) = \frac{J(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial J(w)}{z-w} + \dots\,, \tag{6.13.5}$$

$$J(z)J(w) = \frac{c/3}{(z-w)^2} + \dots\,. \tag{6.13.6}$$

N=2超共形代数的对称性是一个连续的O(2)对称性，在实数基$G^1 = G^+ + G^-$，$G^2 = i(G^+ - G^-)$中，它旋转两个超荷。SO(2)部分是一个内部自同构。额外的Z_2变换$G^1 \to G^1$, $G^2 \to -G^2$是一个外部自同构。我们可以利用对称性附加各种边界条件。对外自同构的扭曲提供了一个不等价的代数，即扭曲的N=2代数，其中，$G^{1,2}$有相反的边界条件。对我们而言，当T, J是单值的时候，为了附加

$$G^\pm(e^{2\pi i}z) = e^{\mp 2\pi i\alpha}G^\pm(z)\,, \tag{6.13.7}$$

更有兴趣的是利用SO(2)~U(1)对称性。参数α取值为[0,1]。对$\alpha = 0$ ，我们有NS部分，其中，所有超荷都是半整数模的。对$\alpha = \pm 1/2$，我们得到Ramond部分，其中所有超荷

都是整数模的。因为我们使用的U(1)对称性是内自同构，所以对各种边界条件得到并用α 标记的代数是自同构的。我们可以明确地写出这个自同构(称为谱流动)：

$$J_n^\alpha = J_n - \alpha\frac{c}{3}\delta_{n,0} \quad , \quad L_n^\alpha = L_n - \alpha J_n + \alpha^2\frac{c}{6}\delta_{n,0} \quad , \tag{6.13.8}$$

$$G_{r+\alpha}^{\alpha,+} = G_r^+ \quad , \quad G_{r-\alpha}^{\alpha,-} = G_r^- \quad , \tag{6.13.9}$$

其中，$n \in Z$和$r \in Z + \frac{1}{2}$。谱流动在NS和R部分之间提供了一个连续映射。

在NS部分中，HW不可约表示由HW态$|h,q\rangle$生成，被$T, J, G^\pm$的正模式湮灭，由L_0的本征值h和J_0的本征值q表征。SL(2,$\mathbb{C}$)一不变真空有$h = q = 0$。表示的其余态由超共形生成元的负模式作用量生成。

在R部分中，HW态还是被正模式湮灭。然而，这里，我们还有满足

$$G_0^\pm G_0^\pm = 0 \quad , \quad \{G_0^+, G_0^-\} = 2\left(L_0 - \frac{c}{24}\right) \ . \tag{6.13.10}$$

的超流$G_0^\pm$的零模式。幺正性还是意味着在R部分中，$\Delta \geq c/24$。当$\Delta > c/24$时，所有$G_0^\pm$非平庸地作用，HW态是四个态的集合体。当$\Delta = c/24$，在那时，$G_0^\pm$是等于零的，HW矢量是一个单态。这里，我们可以再次用类似于N=1的方法引入$(-1)^F$算符。在R部分的$(-1)^F$的迹(椭圆亏格)只从$\Delta = c/24$的态得到贡献。

利用(6.13.9)，我们推导出

$$J_0^{R\pm} = J_0^{NS} \mp \frac{c}{6} \quad , \quad L_0^{R\pm} - \frac{c}{24} = L_0^{NS} - \frac{1}{2}J_0^{NS} \ . \tag{6.13.11}$$

因此，正定条件$L_0^R - c/24 \geq 0$在NS部分中转换到$2h - |q| \geq 0$。Ramond基态对应到有$2h = |q|$的NS态，称为手征态。它们由手征场算符从真空生成。由于荷守恒，它们的OPE在短距离是规制的，可以写成环(手征环)

$$O_{q_1}(z)O_{q_2}(z) = O_{q_1+q_2}(z) \ . \tag{6.13.12}$$

这个手征环变换关于N=2超共形理论的大多数重要知识。

从(6.13.11)，我们可以推出，在NS部分中的单位算符(h=q=0)，在谱流动下，被映射到在R部分中(h=c/24,q=$\pm$c/6)的算符。这是在R部分中的最大荷基态，再次应用谱流动，我们认识到，在NS部分中必然有(h=c/6,q=$\pm$c/3)的手征算符。我们后面将看到，这个算符在弦论中对时空超对称性非常重要。

N=2超共形理论可以作为有SU(N)完整群的流形上的σ一模型来实现。6维情形对应于Calabi-Yau(CY)流形，是Ricci平坦的。在CY情形，N=2代数的中心荷是c=9。上面提到的(h=3/2,q=$\pm$3)态对应于CY流形的唯一(3,0)形式。

这个对称性与4维中N=1时空超对称的超弦基态有关。超空间几何，表示理论和有N=2超共形对称性的CFT的动力学的更深入的描述见[21, 22, 23]。

6.14 N=4超共形对称性

最后，另一个在弦论中有用的扩展超共形代数是“简短”的N=4超共形代数，除了应力张量，它包含四个超流和形成$SU(2)_k$流代数的三个流。四个超流在$SU(2)_k$下象两个共轭旋量一样变换。Virasoro中心荷c与SU(2)流代数的级别k有关，$c = 6k$。这个代数用通常的Virasoro OPE，相应共形权重的原场$J^a, G^\alpha, \bar{G}^\alpha$和下列OPE来确定

$$J^a(z)J^b(w) = \frac{k}{2}\frac{\delta^{ab}}{(z-w)^2} + i\epsilon^{abc}\frac{J^c(w)}{(z-w)} + \dots , \tag{6.14.1}$$

$$J^a(z)G^\alpha(w) = \frac{1}{2}\sigma^a_{\beta\alpha}\frac{G^\beta(w)}{(z-w)} + \dots \quad , \quad J^a(z)\bar{G}^\alpha(w) = -\frac{1}{2}\sigma^a_{\alpha\beta}\frac{\bar{G}^\beta(w)}{(z-w)} + \dots , \tag{6.14.2}$$

$$G^\alpha(z)\bar{G}^\beta(w) = \frac{4k\delta^{\alpha\beta}}{(z-w)^3} + 2\sigma^a_{\beta\alpha}\left[\frac{2J^a(w)}{(z-w)^2} + \frac{\delta J^a(w)}{(z-w)}\right] + 2\delta^{\alpha\beta}\frac{T(w)}{(z-w)} + \dots , \tag{6.14.3}$$

$$G^\alpha(z)G^\beta(w) = \text{regular} \quad , \quad \bar{G}^\alpha(z)\bar{G}^\beta(w) = \text{regular} \ . \tag{6.14.4}$$

象N=2情形一样，我们可以附加各种条件，但最感兴趣NS和R边界条件。类似于N=2，也有一个谱流动，添在NS和R边界条件之间。

在NS部分中，原态被正模式湮灭，由它们的共形权重h和$SU(2)_k$自旋j表征。象通常一样，对幺正性，我们有$j \le k/2$。

练习：利用在N=2超共形情形的同样程序，证明：在NS部分中，$h - j \ge 0$；同时，在R部分中，$h \ge k/4$。

满足上面限制的表示称为“无质量的”，因为它们在相应的弦背景中将对应于无质量态。在k=1的特殊情形，相应于弦的紧致化，N=4超共形代数可以用在有SU(2)完整群的4维Ricci平坦的Kähler流形上的σ模型来实现。在紧致情形，这是流形的K3类。在NS部分中，两个有质量表示有(h,j)=(0,0)和(1/2,1/2)；同时，在R部分中，(h,j)=(1/4,0)和(1/4,1/2)。

再次，在$(-1)^F$的R部分，迹只从基态得到贡献，提供N=4超共形理论的椭圆亏格。

关于N=4表示理论的更多资料见[24]。

6.15 鬼场的CFT

我们已经看到，在弦的协变量子化中，我们不得不引入一个反交换鬼场体系，它包含共形权重为2的b鬼场和共形权重为-1的c鬼场。在这里，可以预料有更多的应用，我们将

一般地描写这样的鬼场体系的CFT。场b有共形权重$h=\lambda$，同时，c有$h=1-\lambda$。我们也考虑它们是反交换的($\epsilon=1$)或者交换的$\epsilon=-1$。它们被自由作用量

$$S_\lambda=\frac{1}{\pi}\int d^2z\; b\bar\partial c\,, \tag{6.15.1}$$

控制，从它，我们得到OPE

$$c(z)b(w)=\frac{1}{z-w}\quad,\quad b(z)c(w)=\frac{\epsilon}{z-w}\,. \tag{6.15.2}$$

运动方程$\bar\partial b=\bar\partial c=0$暗示场是全纯的。它们的共形权重决定球面上的模式展开和Hermite性质

$$c(z)=\sum_{n\in Z} z^{-n-(1-\lambda)}\;c_n\quad,\quad c_n^\dagger=c_{-n}\,, \tag{6.15.3}$$

$$b(z)=\sum_{n\in Z} z^{-n-\lambda}\;b_n\quad,\quad b_n^\dagger=\epsilon b_{-n}\,. \tag{6.15.4}$$

于是，它们的(反)交换关系为

$$c_mb_n+\epsilon b_nc_m=\delta_{m+n,0}\quad,\quad c_mc_n+\epsilon c_nc_m=b_mb_n+\epsilon b_nb_m=0\,. \tag{6.15.5}$$

这里还有，由于Z_2对称性$b\to -b, c\to -c$，我们可以引入NS和R部分的类似物(对应于柱面上反周期或周期的边界条件)：

$$\text{NS}\;:\;\; b_n,\quad n\in\mathbb{Z}-\lambda\quad,\quad c_n,\quad n\in\mathbb{Z}+\lambda\,, \tag{6.15.6}$$

$$\text{R}\;:\;\; b_n,\quad n\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}-\lambda\quad,\quad c_n,\quad n\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}+\lambda\,. \tag{6.15.7}$$

应力张量被bc体系的共形性质固定为

$$T=-\lambda b\partial c+(1-\lambda)(\partial b)c\,. \tag{6.15.8}$$

在这个应力张量下，b和c象共形权重(λ,0)和(0,1-λ)的原场一样变换。

练习：证明T满足有中心荷

$$c=-2\epsilon(6\lambda^2-6\lambda+1)=\epsilon(1-3Q^2)\quad,\quad Q=\epsilon(1-2\lambda)\,. \tag{6.15.9}$$

的Virasoro代数。

迄今，我们已经遇到这个体系的两个特殊情形。第一个是$\lambda=2$和$\epsilon=1$，它对应于$c=-26$的重新参数化鬼场。第二个是$\lambda=1/2$和$\epsilon=1$，它对应于$c=1$的复(Dirac)Fermion，或等价的两个Majorana Fermion。

在(6.15.1)，有一个经典U(1)对称性：$b \to e^{i\theta} b$，$c \to e^{-i\theta} c$。相应的U(1)荷是

$$J(z) = -:b(z)c(z): = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{-n-1} J_n \,, \tag{6.15.10}$$

其中，关于标准SL(2,$\mathbb{C}$)不变真空$|0\rangle$来选择正规编序，并且，$\langle c(z)b(w)\rangle = 1/(z-w)$。它生成U(1)流代数

$$J(z)J(w) = \frac{\epsilon}{(z-w)^2} + \dots \,, \tag{6.15.11}$$

在它下面，b, c是仿射原场

$$J(z)b(w) = -\frac{b(w)}{z-w} + \dots \quad , \quad J(z)c(w) = \frac{c(w)}{z-w} \dots \,. \tag{6.15.12}$$

TJ OPE的直接计算给出

$$T(z)J(w) = \frac{Q}{(z-w)^3} + \frac{J(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w J(w)}{z-w} + \dots \,. \tag{6.15.13}$$

注意在(6.15.13)中，中心荷的出现，这使得它不同于(6.10.3)。转变到交换关系，我们得到

$$[L_m, J_n] = -nJ_{m+n} + \frac{Q}{2} m(m+1)\delta_{m+n,0} \,. \tag{6.15.14}$$

中心项意味着在流代数中的一个“反常”：从(6.15.14)，我们得到

$$[L_1, J_{-1}] = J_0 + Q \quad , \quad Q + J_0^\dagger = [L_1, J_{-1}]^\dagger = -J_0 \,, \tag{6.15.15}$$

所以，$J_0^\dagger = -(J_0 + Q)$和U(1)荷守恒更改为$\sum_i q_i = Q$ (Q是体系的背景荷)。这是bc体系零模式结构的反映，转化为

$$\#c\text{的零模式} - \#b \text{ 的零模式} = -\frac{\epsilon}{2} Q\chi \,, \tag{6.15.16}$$

其中，$\chi = 2(1-g)$是亏格g的曲面的Euler数。

按照(6.8.12)，我们得到(NS部分)

$$b_{n>-\lambda}|0\rangle = c_{n>\lambda-1}|0\rangle = 0 \,. \tag{6.15.17}$$

因此，对于标准重新参数化鬼场($\lambda = 2$)，最低态不是真空，而是L_0等于-1的$c_1|0\rangle$。

在这里，我们还要描述Boson鬼场体系的重新Boson化，因为在超弦情形需要它。从现在开始，我们假定$\epsilon = -1$。我们首先Boson化U(1)流：

$$J(z) = -\partial\phi \quad , \quad \langle\phi(z)\phi(w)\rangle = -\log(z-w) \,. \tag{6.15.18}$$

给出OPE(6.15.13)的应力张量是

$$\hat{T} = \frac{1}{2} :J^2: + \frac{1}{2} Q\partial J = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{Q}{2}\partial^2\phi \,. \tag{6.15.19}$$

由于在Boson ϕ的应力张量中的微商项，Boson ϕ有“背景荷”。由下列作用量

$$S_Q = \frac{1}{2\pi}\int d^2z\left[\partial\phi\bar{\partial}\phi - \frac{Q}{4}\sqrt{g}R^{(2)}\ \phi\right], \tag{6.15.20}$$

描述，其中，$R^{(2)}$是二维标量曲率。利用(9.2)，我们看到，有一个$-Q\chi/2$的背景荷，其中，$\chi = 2(1-g)$是曲面的Euler数。

然而，直接的计算表明，$\hat{T}$有中心荷$\hat{c} = 1+3Q^2$。象在(6.15.9)看到的，理论的最初中心荷是$c = \hat{c} - 2$。于是，我们还必须添加一个$\lambda = 1$的辅助Fermi体系，由维数1场$\eta(z)$和维数0场$\xi(z)$组成。这个体系有中心荷-2。最初体系的应力张量可写作

$$T = \hat{T} + T_{\eta\xi}\,. \tag{6.15.21}$$

标量ϕ的指数有下列应力张量和U(1)流的OPE。

$$T(z) : e^{q\phi(w)} := \left[-\frac{q(q+Q)}{(z-w)^2} + \frac{1}{z-w}\partial_w\right] : e^{q\phi(w)} : + \ldots, \tag{6.15.22}$$

$$J(z) : e^{q\phi(w)} := \frac{q}{z-w} : e^{q\phi(w)} : \ldots \quad \to \quad [J_0, : e^{q\phi(w)} :] = q\ \ : e^{q\phi(w)} : . \tag{6.15.23}$$

用新变量的方式，我们可以把最初的b, c鬼场表示为

$$c(z) = e^{\phi(z)}\eta(z) \quad , \quad b(z) = e^{-\phi(z)}\partial\xi(z)\,. \tag{6.15.24}$$

练习：利用(6.15.24)的表达式，通过直接计算来验证(6.15.2), (6.15.8) and (6.15.10)。

最后，插入NS和R部分之间的b, c自旋场由共形权重为$-(1 \pm 2Q)/8$的$e^{\pm\phi/2}$给出。注意，场ξ的零模式不进入b, c的定义。于是，因为任何态$|\rho\rangle$有简并伙伴$\xi_0|\rho\rangle$，所以Boson化Hilbert空间提供了最初Hilbert空间的两个副本。

我们不再进一步钻研bc体系的CFT结构，有兴趣的读者参考[26]。

7 环面上的CFT

球面之后考虑下一个最简单的闭Riemann曲面，即环面。它的亏格$g = 1$和Euler数$\chi = 0$。通过利用关系对称性，我们可以挑出一个常数度量，使得体积归一化到1。选取坐标$\sigma_1, \sigma_2 \in [0, 1]$。于是，如果度量的行列式为1，那么体积为1。我们可以用单个复数来参数化度量，它是对称正定矩阵，复数有如下的正定的虚数部分$\tau_2 \geq 0$：

$$g_{ij} = \frac{1}{\tau_2}\begin{pmatrix} 1 & \tau_1 \\ \tau_1 & |\tau|^2 \end{pmatrix}. \tag{7.1}$$

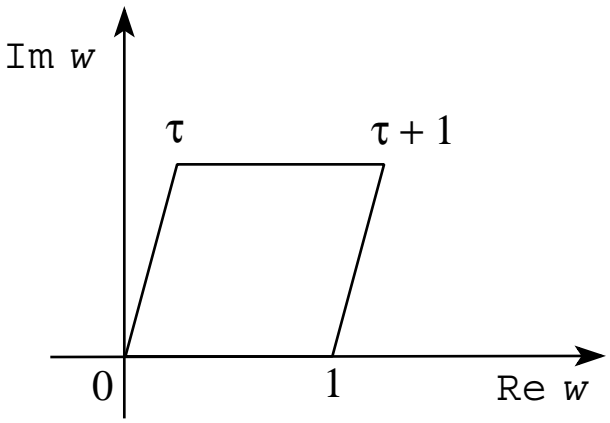


Figure 6: 作为复平面商的环面

线元是

$$ds^2 = g_{ij} d\sigma_i d\sigma_j = \frac{1}{\tau_2} |d\sigma_1 + \tau \, d\sigma_2|^2 = \frac{dw \, d\bar{w}}{\tau_2} \,, \tag{7.2}$$

其中，

$$w = \sigma_1 + \tau \sigma_2 \quad , \quad \bar{w} = \sigma_1 + \bar{\tau} \sigma_2 \tag{7.3}$$

是环面的复坐标。这是参数τ称为环面复结构(或模)的原因。它不能被无穷小微分同构或Weyl重新标度改变，因而是环面的复Teichmüller参数。σ_1, σ_2的周期性质转化为

$$w \to w + 1 \quad , \quad w \to w + \tau \,. \tag{7.4}$$

环面可以认为是复平面w的点，在两个平移下，对应于复数1和τ两个矢量等同，见Fig. 6。

虽然τ在无穷小微分同构下不变，但在一些“大”变换下改变。代替在Fig. 6中确定环面的平行四边形，考虑Fig. 7a中的那个。很明显，由于周期性条件(7.4)，它们是等价的。然而，第二个对应于模数$\tau + 1$。我们得出结论：模相差1的两个环面等价。于是，变换

$$T \quad : \quad \tau \to \tau + 1 \tag{7.5}$$

保持环面不变。现在，考虑在Fig. 7b描写的另一个等价的平行四边形选择，由复数τ和$\tau + 1$表征。把它变到原来的形式并保持它的定向，我们必须用因子$\tau + 1$来测量所有边。于是，它将对应到模为$\tau/(\tau + 1)$的一个等价环面。我们已经得到第二个模变换

$$TST \quad : \quad \tau \to \frac{\tau}{\tau + 1} \,. \tag{7.6}$$

可以证明，取这些变换的积生成环面的整个模群。生成元的一个方便的集合也由在(7.5)中的T给出，以及

$$S \quad : \quad \tau \to -\frac{1}{\tau} \quad , \quad S^2 = 1 \quad , \quad (ST)^3 = 1 \,. \tag{7.7}$$

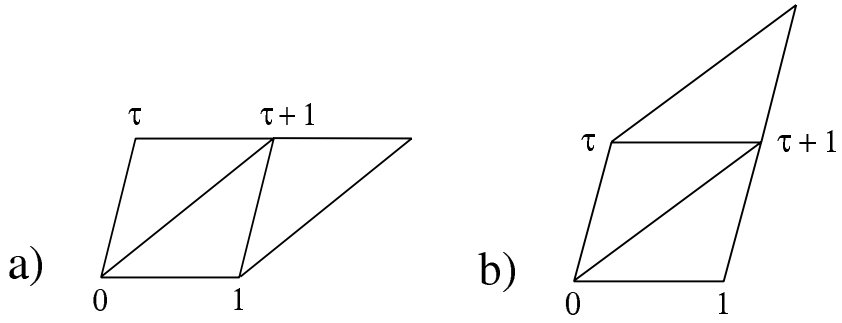


Figure 7: a) 模变换$\tau \to \tau + 1$。b) 模变换$\tau \to \tau/(\tau + 1)$。

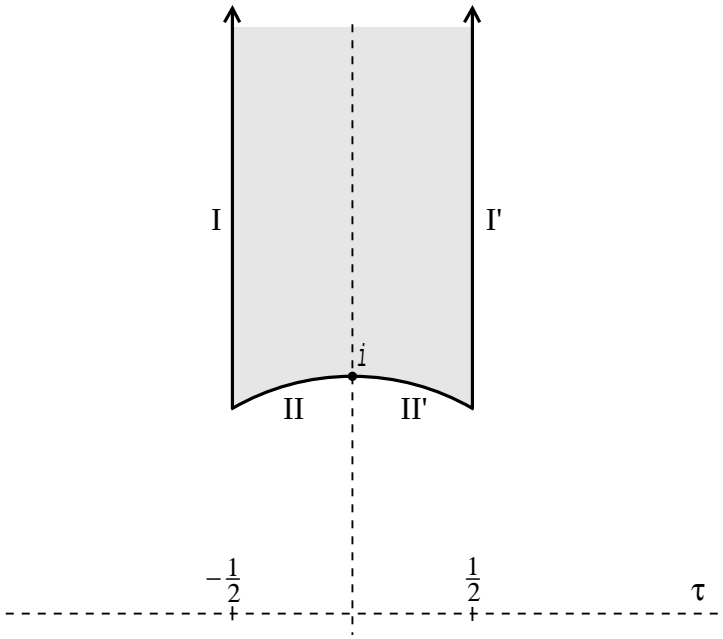


Figure 8: 环面的模空间

最一般的变换有形式

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad \leftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tag{7.8}$$

其中，矩阵A有整数个体和行列式为1。这样的矩阵形成群SL(2,$\mathbb{Z}$)。因为改变矩阵的符号不影响(7.8)中的模的变换，模群是PSL(2,$\mathbb{Z}$) = SL(2, $\mathbb{Z}$)/$\mathbb{Z}_2$。

象上面所提到的，模在上半平面$\mathcal{H}$ ($\tau_2 \geq 0$)取值，它是环面的Teichmüller空间。然而，为了找到真正不等价的环面的模空间，我们必须用模群除这个。可以证明，模群的基本域$\mathcal{F} = \mathcal{H}$/PSL(2,$\mathbb{Z}$)是在直线$\tau_1 = \pm 1/2$之间和中心在原点的单位圆上方的面积。见Fig. 8。

从柱面开始，有一个有意思的环面构造。考虑一个长度为$2\pi\tau_2$和圆周为1的柱面。抓住一端，把它旋转$2\pi\tau_1$，再把它粘到另一端。这产生了模为$\tau = \tau_1 + i\tau_2$的环面。这个构造给出了环面上CFT的路径积分和Hilbert空间上的迹之间的非常有用的关系。首先，沿着柱面的传播被“Hamilton量”(变换矩阵)$H = L_0^{cyl} + \bar{L}_0^{cyl}$控制着。柱面周围的旋转

由“动量”算符$P = L_0^{cyl} - \bar{L}_0^{cyl}$实现。粘在一起的两个端在Hilbert空间中给出一个迹。从(6.7.5)

$$L_0^{cyl} = L_0 - \frac{c}{24} \quad , \quad \bar{L}_0^{cyl} = \bar{L}_0 - \frac{\bar{c}}{24} \, , \tag{7.9}$$

其中，$L_0, \bar{L}_0$是在球面上的算符。综合在一起，我们得到

$$\begin{aligned} \int e^{-S} &= \mathrm{Tr}\left[e^{-2\pi\tau_2 \ H} \ e^{2\pi i\tau_1 \ P}\right] = \mathrm{Tr}\left[e^{2\pi i\tau L_0^{cyl}} \ e^{-2\pi i\bar{\tau}\bar{L}_0^{cyl}}\right] = \\ &= \mathrm{Tr}\left[q^{L_0 - c/24} \ \bar{q}^{\bar{L}_0 - \bar{c}/24}\right] \, , \end{aligned} \tag{7.10}$$

其中，$q = \exp[2\pi i\tau]$。迹也包括谱的可能的连续部分。这是一个非常有用的关系，也提供了路径积分的正确规制化。

7.1 紧致标量

在6.4节，我们已经描述非紧致实标量场的CFT。这里，我们将考虑在半径为R上取值的紧致实标量场X。因而，值X和$X + 2\pi mR$, $m \in Z$认为是等价的。

我们首先计算在环面上理论的路径积分。作用量为

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{g} \ g^{ij} \partial_i X \partial_j X \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^1 d\sigma_1 \int_0^1 d\sigma_2 \frac{1}{\tau_2} |\tau\partial_1 X - \partial_2 X|^2 \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \ X \Box \ X \, , \end{aligned} \tag{7.1.1}$$

其中，给出的Laplace算子为

$$\Box = \frac{1}{\tau_2} |\tau\partial_1 - \partial_2|^2 \, . \tag{7.1.2}$$

我们希望计算在环面上的路径积分

$$Z(R) = \int \ DX \ e^{-S} \tag{7.1.3}$$

象通常一样，我们必须得到有限作用量(瞬子)的经典解，计算它们附近的涨落。场X在环面上应该是周期性的，是一个从环面(拓扑上$S^1 \times S^1$) 到圆周S^1的一个映射。这样的映射由两个整数分类，它们指定X沿着环面的两个圆周缠绕的圈数。运动方程$\Box X = 0$有以下瞬子解

$$X_{class} = 2\pi R(n\sigma_1 + m\sigma_2) \quad , \quad m, n \in \mathbb{Z} \quad . \tag{7.1.4}$$

它们有正确的周期性性质

$$X_{class}(\sigma_1 + 1, \sigma_2) = X(\sigma_1, \sigma_2) + 2\pi nR \ , \ X_{class}(\sigma_1, \sigma_2 + 1) = X(\sigma_1, \sigma_2) + 2\pi mR \, , \tag{7.1.5}$$

和下列经典作用量

$$S_{m,n} = \frac{\pi R^2}{\tau_2} |m - n\tau|^2 \, . \tag{7.1.6}$$

于是，我们可以分开$X = X_{class} + \chi$，路径积分可以写作

$$\begin{aligned} Z(R) &= \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \int D\chi \; e^{-S_{m,n}-S(\chi)} \\ &= \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} e^{-S_{m,n}} \int D\chi \; e^{-S(\chi)} \,. \end{aligned} \tag{7.1.7}$$

还要做的是在χ的路径积分。总有一个我们可以分出的常数零模式，$\chi(\sigma_1,\sigma_2) = \chi_0 + \delta\chi(\sigma_1,\sigma_2)$, 其中$0 \le \chi_0 \le 2\pi R$。场$\delta\chi$可以用Laplace算子的本征函数展开

$$\Box\psi_i = -\lambda_i \; \psi_i \,. \tag{7.1.8}$$

不难看到，这些本征函数是

$$\psi_{m_1,m_2} = e^{2\pi i(m_1\sigma_1+m_2\sigma_2)} \quad , \quad \lambda_{m_1,m_2} = \frac{4\pi^2}{\tau_2}|m_1\tau - m_2|^2 \,. \tag{7.1.9}$$

本征函数满足

$$\int d^2\sigma \; \psi_{m_1,m_2}\psi_{n_1,n_2} = \delta_{m_1+n_1,0}\delta_{m_2+n_2,0} \,, \tag{7.1.10}$$

所以，我们可以展开

$$\delta\chi = {\sum_{m_1,m_2\in\mathbb{Z}}}' A_{m_1,m_2}\psi_{m_1,m_2} \,, \tag{7.1.11}$$

其中，撇意味着忽略常数模式$(m_1,m_2) = (0,0)$。实值条件意味着$A^*_{m_1,m_2} = A_{-m_1,-m_2}$ 作用量变成

$$S(\chi) = \frac{1}{4\pi}{\sum_{m_1,m_2}}' \; \lambda_{m_1,m_2} \; |A_{m_1,m_2}|^2 \,. \tag{7.1.12}$$

我们可以从

$$\|\delta X\| = \int d^2\sigma\sqrt{\det G}(d\chi)^2 = {\sum_{m_1,m_2}}' |dA_{m_1,m_2}|^2 \tag{7.1.13}$$

把测度确定为

$$\int \; D\chi = \int_0^{2\pi R} d\chi_0 \; {\prod_{m_1,m_2}}' \frac{dA_{m_1,m_2}}{2\pi} \,. \tag{7.1.14}$$

综合在一起，我们得到

$$\int D\chi e^{-S(\chi)} = \frac{2\pi R}{{\prod_{m_1,m_2}}' \lambda^{1/2}_{m_1,m_2}} = \frac{2\pi R}{\sqrt{\det{}'\Box}} \,. \tag{7.1.15}$$

利用本征值的明确形式，利用ζ函数规制化，我们可以计算Laplace算子的行列式[13]，

$$\det{}'\Box = 4\pi^2\tau_2\eta^2(\tau)\bar{\eta}^2(\bar{\tau}) \,, \tag{7.1.16}$$

其中，η是在(A.10)中定义的Dedekind函数。汇总(7.1.7)中的所有项，我们得到

$$Z(R) = \frac{R}{\sqrt{\tau_2}|\eta|^2} \sum_{m,n\in Z} e^{-\frac{\pi R^2}{\tau_2}|m-n\tau|^2} \,. \tag{7.1.17}$$

这是配分函数的Lagrange量。在前一章，我们已经提到，在环面上的配分函数也可以按在(7.10)中的Hamilton量形式写出。为了计算它，我们必须就象关于整数m的Poisson二次求和(见附录A)。我们得到

$$Z(R) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \frac{q^{\frac{P_L^2}{2}}\ \bar{q}^{\frac{P_R^2}{2}}}{\eta\bar{\eta}} \tag{7.1.18}$$

其中，

$$P_L = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{m}{R} + nR\right) \quad , \quad P_R = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{m}{R} - nR\right) \ . \tag{7.1.19}$$

这是形式(7.10)，从这里，我们可以读出共形权重的谱和理论的多重数。然而，在继续之前，让我们返回球面，讨论理论的流代数结构。象在6.4一样，有一个全纯和反全纯的U(1)流：

$$J(z) = i\partial X \quad , \quad \bar{J}(\bar{z}) = i\bar{\partial}X \tag{7.1.20}$$

它满足U(1)流代数

$$J(z)J(w) = \frac{1}{(z-w)^2} + \text{finite} \ , \ \bar{J}(\bar{z})\bar{J}(\bar{w}) = \frac{1}{(\bar{z}-\bar{w})^2} + \text{finite}\,. \tag{7.1.21}$$

我们可以在仿射－Sugawara形式中写出应力张量

$$T(z) = -\frac{1}{2}(\partial X)^2 = \frac{1}{2} : J^2 : \ , \quad \bar{T}(\bar{z}) = -\frac{1}{2}(\bar{\partial}X)^2 = \frac{1}{2} : \bar{J}^2 : \ . \tag{7.1.22}$$

象可以6.10讨论的一样，谱可以分解到仿射HW表示。在左和右移动流代数下，一个仿射原场由它的荷Q_L和Q_R确定。从(7.1.22)，我们得到，共形权重由

$$\Delta = \frac{1}{2}Q_L^2 \quad , \quad \bar{\Delta} = \frac{1}{2}Q_R^2\,. \tag{7.1.23}$$

给出。其余的表示通过用负流模式J_{-n}和$\bar{J}_{-n}$作用在仿射原场上构造。我们很容易计算这样一个表示($c = \bar{c} = 1$)的特征标：

$$\chi_{Q_L,Q_R}(q,\bar{q}) = \mathrm{Tr}[q^{L_0-1/24}\bar{q}^{\bar{L}_0-1/24}] = \frac{q^{Q_L^2/2}\ \bar{q}^{Q_R^2/2}}{\eta\bar{\eta}}\,. \tag{7.1.24}$$

与(7.1.18)的比较表明，谱包含无穷多$Q_L = P_L$和$Q_R = P_R$的仿射U(1)表示，标记为m,n。对$m = n = 0$，我们有真空表示，它的HW态是标准真空。其它标记为m,n的HW态满足

$$J_0|m,n\rangle = P_L\ |m,n\rangle \quad , \quad \bar{J}_0|m,n\rangle = P_R\ |m,n\rangle \ . \tag{7.1.25}$$

在算符图像中，它们被顶角算符从这里产生(象通常一样，我们分离$X(z,\bar{z}) \sim X(z) + \bar{X}(\bar{z})$)：

$$V_{m,n} =: \exp[i\ p_L\ X + i\ p_R\ \bar{X}] :, \tag{7.1.26}$$

$$\begin{aligned} J(z)V_{m,n}(w,\bar{w}) &= p_L\frac{V_{m,n}(w,\bar{w})}{z-w} + \dots \ , \\ \bar{J}(\bar{z})V_{m,n}(w,\bar{w}) &= p_R\frac{V_{m,n}(w,\bar{w})}{\bar{z}-\bar{w}} + \dots \ . \end{aligned} \tag{7.1.27}$$

它们的相关子还由Guass公式给出

$$\left\langle \prod_{i=1}^{N} V_{m_i,n_i}(z_i,\bar{z}_i) \right\rangle = \prod_{i<j}^{N} z_{ij}^{p_L^i p_L^j} \ \bar{z}_{ij}^{p_R^i p_R^j}\,, \tag{7.1.28}$$

其中，象通常一样，$z_{ij}=z_i-z_j$。利用Gauss公式

$$\begin{aligned} :e^{ia\phi(z)}::e^{ib\phi(w)}: &= (z-w)^{ab}:e^{ia\phi(z)+ib\phi(w)}: \\ &= (z-w)^{ab}\left[:e^{i(a+b)\phi(w)}:+\mathcal{O}(z-w)\right]\,, \end{aligned} \tag{7.1.29}$$

我们得到U(1)表示的下列OPE

$$[V_{m_1,n_1}]\cdot[V_{m_2,n_2}]\sim[V_{m_1+m_2,n_1+n_2}]\,, \tag{7.1.30}$$

与U(1)荷守恒相容。在$\mathrm{U}(1)_\mathrm{L}\times\mathrm{U}(1)_\mathrm{R}$变换$e^{i\theta_L+i\theta_R}$下，振子是不变的，但是态$|m,n\rangle$获得一个相$e^{i(m+n)\theta_L+i(m-n)\theta_R}$。

在正则表示中，象由在半径为R的圆周上通常(点粒子)量子力学量子化条件要求的一样，动量算符取值m/R。弦的额外空间维数的存在允许X出现，它绕圆周n次。这是在(7.1.19)中整数n的精确解释。它没有点粒子(一维)类似物。

在CFT中，有一个特殊算符类型，称为边缘算符，有$(\Delta,\bar{\Delta})=(1,1)$。对这样一个算符$\phi_{1,1}$，密度$\phi_{1,1}dzd\bar{z}$是共形不变的。如果用$g\int\phi_{1,1}$扰动作用量，我们希望理论仍然共形不变。然而在量子理论中，有微妙之处(短距离奇异性)，它有时候破坏共形不变性。当共形不变性仍然存在，我们称$\phi_{1,1}$是精确边缘的。用这种方法，通过$\phi_{1,1}$的微扰，我们得到参数为耦合g的CFT 的连续族。在边缘微扰时，中心荷不可变化。

在我们现在的例子中，出现了这个现象。有一个(1,1)算符，即$\phi=\partial X\bar{\partial}X=J\bar{J}$。通过把这个加入到作用量(7.1.1)，容易看出，微扰的效果是改变有效半径R。理论保持共形不变，还是一个自由场论。在这种情形，算符看起来平庸，然而，在更复杂的CFT中，边缘算符存在。

最后，回到环面，再看一看配分函数。为弦论的目的，我们希望它在整个微分同构群下不变。特别是，它应该在大的变换下不变，即模变换。这对弦论是重要的，因为模不变性处于弦论有效性的绝对核心，对空间反常的抵消是根本的。

在两个生成变换T和S证明不变性是足够的，因为这些生成模群。我们将利用配分函数(7.1.17)的Lagrange量表示。利用附录A的公式不难验证，$\sqrt{\tau_2}\eta\bar{\eta}$单独是模不变的。于是，我们只需要考虑瞬子和。在$\tau\to\tau+1$，我们可以改变求和$(m,n)\to(m+n,n)$，整个和是不变的。在$\tau\to\tau+1$下，我们再次改变求和$(m,n)\to(-n,m)$，和再次是不变的。我们得出结论，紧致Boson的环面配分函数是模不变的。注意，在Hamilton表示(7.10)中，对整个谱，在T变换下的不变性意味着

$$\Delta-\bar{\Delta}-\frac{c-\bar{c}}{24}=\text{整数} \tag{7.1.31}$$

特别是，对真空态$\Delta=\bar{\Delta}=0$，它意味着$c-\bar{c}=0\bmod(24)$。在我们的情形，$c=\bar{c}=1$，从(7.1.19), (7.1.23)，$P_L^2/2-P_R^2/2=mn\in\mathbb{Z}$。

另一个注释涉及在非紧致Boson上的配分函数。它可以通过取极限$R \to \infty$得到。我们预料在极限配分函数象空间的体积一样发散，所以我们必须首先分开体积。单位体积的自由能是有限的。从(7.10)我们注意到，随着R变大，不是指数抑制的唯一项是有$m = n = 0$的项，所以

$$\lim_{R\to\infty} \frac{Z(R)}{R} = \frac{1}{\sqrt{\tau_2}\eta\bar{\eta}} \,. \tag{7.1.32}$$

在我们继续之前，我们将推导Boson的环面传播子。它可以用Laplace算子的非零本征值和相应的本征函数的方式写出：

$$\Delta(\sigma_1,\sigma_2) \equiv \langle \delta\chi(\sigma_1,\sigma_2)\delta\chi(0,0)\rangle = -{\sum_{m,n}}' \frac{1}{|m\tau - n|^2} e^{2\pi i(m\sigma_1 + n\sigma_2)} \,. \tag{7.1.33}$$

求和是有条件收敛的，必须利用ζ函数规制化来规制。我们得到

$$\Box\ \Delta(\sigma_1,\sigma_2) = \frac{4\pi^2}{\tau_2}\left[\delta(\sigma_1)\delta(\sigma_2) - 1\right] , \tag{7.1.34}$$

使得根据我们已忽略零模式的事实，在环面上的积分给出零。它也可以用ϑ函数的方式，在复坐标中表示为

$$\Delta(\sigma_1,\sigma_2) = -\log G(z,\bar{z}) \quad , \quad G = e^{-2\pi\frac{Imz^2}{\tau_2}} \left|\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_1'(0)}\right|^2 \,. \tag{7.1.35}$$

上面的讨论可以容易地推广到N自由标量场$X^i,\ i = 1,2,\ldots,N$的情形。它们的值取在$[0,2\pi]$。它们确定N维环面的参数。最一般的二次作用量是

$$S = \frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma\sqrt{\det\ g}g^{ab}G_{ij}\partial_a X^i\partial_b X^j + \frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma\epsilon^{ab}B_{ij}\partial_a X^i\partial_b X^j \,, \tag{7.1.36}$$

其中，g_{ab}是环面度量(7.1)，ϵ^{ab}是通常的ϵ 符号，$\epsilon^{12} = 1$；G_{ij}是对称正定常数矩阵，它在X^i的空间中(目标空间环面)起度量的作用。常数矩阵B_{ij}是反对称的。它是在四维规范理论中的θ项的类似物。

路径积分的一个类似计算得到

$$\mathbb{Z}_{\mathrm{d,d}}(G,B) = \frac{\sqrt{\det\ G}}{(\sqrt{\tau_2}\eta\bar{\eta})^N}\sum_{\vec{m},\vec{n}} e^{-\frac{\pi(G_{ij}+B_{ij})}{\tau_2}(m_i+n_i\tau)(m_j+n_j\bar{\tau})} \,. \tag{7.1.37}$$

对N=1, $G = R^2$, $B = 0$，这个配分函数约化到(7.10)。利用在m_i上的多重Poisson重新求和，可以变换到Hamilton表示：

$$\mathbb{Z}_{\mathrm{d,d}}(G,B) = \frac{\Gamma_{d,d}(G,B)}{\eta^d\bar{\eta}^d} = \sum_{\vec{m},\vec{n}\in\mathbb{Z}^N} \frac{q^{\frac{1}{2}P_L^2}\ \bar{q}^{\frac{1}{2}P_R^2}}{\eta^N\bar{\eta}^N} \,, \tag{7.1.38}$$

其中，

$$P_{L,R}^2 \equiv P_{L,R}^i\ G_{ij}P_{L,R}^j \,, \tag{7.1.39}$$

$$P_L^i = \frac{G^{ij}}{\sqrt{2}}(m_j + (B_{jk}+G_{jk})n_k) \quad , \quad P_R^i = \frac{G^{ij}}{\sqrt{2}}(m_j + (B_{jk}-G_{jk})n_k) \,. \tag{7.1.40}$$

理论有被流

$$J^i(z) = i\partial X^i \quad , \quad \bar{J}^i = i\bar{\partial} X^i \ , \tag{7.1.41}$$

$$J^i(z)J^j(w) = \frac{G^{ij}}{(z-w)^2} + \dots \tag{7.1.42}$$

生成的左移动和右移动$\mathrm{U}(1)^N$流代数，对$\bar{J}^i$类似。应力张量还是仿射－Sugawara形式的

$$T(z) = -\frac{1}{2} G_{ij} \partial X^i \partial X^j = \frac{1}{2} G_{ij} : J^i J^j : \ . \tag{7.1.43}$$

仿射原场由$Q^i_{L,R}$表征，以及

$$\Delta = \frac{1}{2} G_{ij} Q^i_L Q^j_L \quad , \quad \bar{\Delta} = \frac{1}{2} G_{ij} Q^i_R Q^j_R \, . \tag{7.1.44}$$

与(7.1.38)比较，我们得到$Q^i_{L,R} = P^i_{L,R}$。

可以证明，配分函数(7.1.38)是模不变的。

7.2 增强对称性和弦Higgs效应

当半径$R = 1$时，对于单个紧致Boson的CFT，有一些特殊情况出现。现在原场的共形权重由

$$\Delta = \frac{1}{4}(m+n)^2 \quad , \quad \bar{\Delta} = \frac{1}{4}(m-n)^2 \, . \tag{7.2.1}$$

给出。注意，$m = n = \pm 1$的两个态是(1,0)算符。对于一般的R，唯一的(1,0)(手征)算符是$\mathrm{U}(1)$流$J(z) = i\partial X$。现在，我们有另外两个。如果我们也包括这些算符，流代数变大。类似地，$m = -n = \pm 1$的态是(0,1)算符，右移动流代数也被增强。我们只讨论左移动部分，因为右移动部分有相似的行为。变成(1,0)的两个算符可以写作顶角算符(7.1.26)

$$J^{\pm}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} : e^{\pm i\sqrt{2}X(z)} : \ . \tag{7.2.2}$$

再定义

$$J^3(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} J(z) = \frac{i}{\sqrt{2}} \partial X(z) \, . \tag{7.2.3}$$

它们满足下列OPE，它可以直接利用$\langle X(z)X(0)\rangle = -\log z$计算，

$$J^3(z)J^{\pm}(w) = \pm \frac{J^{\pm}(w)}{z-w} + \dots \quad , \quad J^+(z)J^+(w) = \dots \ ,$$
$$J^-(z)J^-(w) = \dots \, , \tag{7.2.4}$$

$$J^+(z)J^-(w) = \frac{1/2}{(z-w)^2} + \frac{J^3(w)}{z-w} + \dots \ ,$$
$$J^3(z)J^3(w) = \frac{1/2}{(z-w)^2} + \dots \, . \tag{7.2.5}$$

不难实现，这是一个$k=1$能级的SU(2)流代数。这并不令人惊讶，因为由(6.10.6)给出的$SU(2)_k$的中心荷是$c=3k/(k+2)$。当$k=1$时，它的确变成$c=1$。这个用自由Boson的方式，在能级1的流代数的实现称为Halpern-Frenkel-Kac-Segal构造。

以前我们看到，$SU(2)_1$有两个可积仿射表示：$j=0$的真空表示和共形权重为$\Delta=1/4$的$j=1/2$表示(来自(6.10.9))。$j=0$的原态是真空。$j=1/2$表示的原算符象$SU(2)_L$的二分量旋量和共形权重为(1/4,1/4) 的$SU(2)_R$二分量旋量一样变换。它们由$(m,n)=(0,\pm1)$ 和$(\pm1,0)$的四顶角算符$V_{m,n}$表示。它们有正确的共形权重和流的OPE(7.2.2)。

这个现象推广到N维环面模型。U(1)荷$p^i_{L,R}$在依赖于G_{ij},B_{ij}的N维格点上取值。对于G,B的特殊值，这个格点与秩为N的李群G的根格点一致。于是，一些顶角算符变成额外的手性流，与N个Abel流J^i一起，形成在能级$k=1$的仿射G代数。

当环面CFT获得增强流代数对称性时，那么相应的弦论获得增强规范对称性。考虑在半径为R的圆周上紧致的一个26维(比方说X^{25})Boson弦。那么，无质量的态还是相似的，只是有一点不同的解释。现在，有25个非紧致的维数，所以有25维Lorentz不变性。无质量态是

$$a^\mu_{-1}\bar a^\nu_{-1}|0\rangle \quad , \quad a^\mu_{-1}\bar a^{25}_{-1}|0\rangle \quad , \quad a^{25}_{-1}\bar a^\mu_{-1}|0\rangle \quad , \quad a^{25}_{-1}\bar a^{25}_{-1}|0\rangle\,, \tag{7.2.6}$$

它们是引力子，反对称张量，胀子，两个U(1)规范场和一个标量。注意，标量态由$\partial X^{25}\bar\partial X^{25}$生成，是改变半径的微扰。于是，标量的期望值是半径$R$。在它们中间，有其它有质量的态

$$|A^\pm_\mu\rangle=\bar a^\mu|m=\pm1,n=\pm1\rangle\,, \tag{7.2.7}$$

它是质量为$m^2=(R-1/R)^2/4$的矢量，以及

$$|\bar A^\pm_\mu\rangle=a^\mu|m=\pm1,n=\mp1\rangle \tag{7.2.8}$$

有上面同样的质量。当我们变分R，质量改变；在$R=1$，它们变成无质量的。在这点上，弦论获得SU(2)×SU(2)规范对称性。从$R=1$移开，SU(2)×SU(2)规范对称性自发破缺到U(1)×U(1)。这是一个通常的Higgs效应，期望值为半径的标量起Higgs标量的作用(虽然这里没有势能)。

7.3 T-对偶性

我们现在回到前一节讨论的在半径为R的圆周上紧致的单个标量的例子。象我们已经看到的，原场有

$$H=L_0+\bar L_0=\frac{1}{2}\left(\frac{m^2}{R^2}+n^2R^2\right) \quad , \quad P=L_0-\bar L_0=mn\,. \tag{7.3.1}$$

明显地，上面的谱在

$$R\to\frac{1}{R} \quad , \quad m\leftrightarrow n\,. \tag{7.3.2}$$

不变。这对应于U(1)荷的下列变换

$$P_L\to P_L \quad , \quad P_R\to -P_R\,. \tag{7.3.3}$$

只有右荷改变符号。关于各自流的作用量是类似的

$$J(z) \to J(z) \quad , \quad \bar{J}(\bar{z}) \to -\bar{J}(\bar{z}) \, . \tag{7.3.4}$$

容易验证，不但谱，而且相互作用都不妨碍这个性质。这是一个特殊的性质，因为它意味着CFT不能区别半径为R和半径为$1/R$的圆周。严格地讲，这不是二维理论的对称性。它声称两个先验不同的两个理论实际上是相同的。然而，就弦论而言，它将变成真正的对称性，称为$T-$对偶性。注意，对$T-$对偶性的出现，缠绕模式的出现是根本的。从而，它可以在弦论中出现，但不能在点粒子场论中出现。

在弦论中，有一个$T-$对偶性的有用的解释。我们从$R = 1$的CFT出发。已经看到，在这点上，有一个增强对称性$\mathrm{SU(2)_L \times SU(2)_R}$。于是，在这点上，对偶变换(7.3.4)是一个$\mathrm{SU(2)_R}$Weyl变换。这解释了在$R = 1$的自对偶。现在，通过扰动有边缘算符$\epsilon \int J^3 \bar{J}^3 = \epsilon \int \partial X \bar{\partial} X$的CFT，从$R = 1$作无穷小移动。由于未扰动理论的自对偶性，$\epsilon$扰动和$-\epsilon$扰动给出同样的理论。这是在$R = 1$周围$R \to 1/R$的无穷小样本。我们可以进一步在整个直线上扩展这个对偶性。在这个意义上，对偶性是在$R = 1$ SU(2)对称性的结果，对偶变换是一个$\mathrm{SU(2)_R}$变换。再次考虑有一维紧致的Boson弦。在$R = 1$，$\mathrm{SU(2)_L}$变换是规范变换。离开$R = 1$，规范对称性被破缺，对偶对称性是原来规范对称性的离散残余。

我们可以把$T-$对偶对称性推广到N维环面模型；这里，对偶变换形成一个无限离散群，不象一维情形的群为Z_2。

首先观察到，配分函数(7.1.37)在按照任何整数实体的反对称矩阵的B_{ij} 转换中是不变的。通过构造理论，在标量G_{ij}和B_{ij}的$GL(N)$旋转中也是不变的。然而，因为旋转也作用在m_i, n_i上，必须把它们旋转回整数。$GL(N)$矩阵必须有整数实体，这样的矩阵形成离散群$GL(N, \mathbb{Z})$。最后，有诸如半径反演的变换，它保持谱不变。总之，所有这些变换结合成一个无限离散群O(N,N,$\mathbb{Z}$)。它有下列形式的$2N \times 2N$整数值矩阵描写

$$\Omega = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} , \tag{7.3.5}$$

其中，A, B, C, D是$N \times N$矩阵。再定义O(N,N)不变矩阵

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_N \\ \mathbf{1}_N & 0 \end{pmatrix} , \tag{7.3.6}$$

其中，$\mathbf{1}_N$是N维单位矩阵。如果Ω有整数实体，它属于O(N,N,$\mathbb{Z}$)，而且满足

$$\Omega^T \; L \; \Omega = L \, . \tag{7.3.7}$$

定义$E_{ij} = G_{ij} + B_{ij}$。那么，对偶变换是

$$E \to (AE + B)(CE + D)^{-1} \quad , \quad \begin{pmatrix} \vec{m} \\ \vec{n} \end{pmatrix} \to \Omega \begin{pmatrix} \vec{m} \\ \vec{n} \end{pmatrix} . \tag{7.3.8}$$

在特殊(但是有用)的情形N=2，我们可以确定

$$G_{ij} = \frac{T_2}{U_2} \begin{pmatrix} 1 & U_1 \\ U_1 & U_1^2 + U_2^2 \end{pmatrix} \quad , \quad B_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & T_1 \\ -T_1 & 0 \end{pmatrix} , \tag{7.3.9}$$

的参数，其中$T_2, U_2 \geq 0$。定义复参数$T = T_1 + iT_2$, $U = U_1 + iU_2$，格点求和(7.1.38)变成

$$\Gamma_{2,2}(T,U) = \sum_{\vec{m},\vec{n}} \exp\left[-\frac{\pi\tau_2}{T_2U_2}|-m_1U+m_2+T(n_1+Un_2)|^2+\right.$$
$$\left.+2\pi i\tau(m_1n_1+m_2n_2)\right]. \qquad (7.3.10)$$

对偶群O(2,2,$\mathbb{Z}$)用独立的PSL(2,$\mathbb{Z}$)变换(7.8)以及交换$T \leftrightarrow U$作用在T和U上。

T-对偶性可以推广到有弯曲目标空间的σ模型。详细讨论见[25]。

7.4 环面上的自由Fermion

在6.11节，我们已经分析了N个自由Majorana-Weyl Fermion的CFT。我们将考虑这个理论在环面上的配分函数。作用量在(6.11.1)中给出。为了计算路径积分，我们必须选择Fermion在环面两个圆周上的边界条件。整个地，有四个可能的部分。Fermion路径积分给出由适当的边界条件定义的Fermion行列式的幂(也称为自旋结构)。

$$\int e^{-S} = (\det\,\partial)^{N/2}\,. \qquad (7.4.1)$$

通过找到适当的本征值和取ζ规制积，可以计算它。我们首先考虑在所有圆周(A,A)上的反周期性条件。于是，本征值是

$$\lambda_{AA} \sim \left(\left(m_1+\frac{1}{2}\right)\tau+\left(m_2+\frac{1}{2}\right)\right) \quad , \quad m_{1,2} \in \mathbb{Z}\,. \qquad (7.4.2)$$

规制化积的计算给出

$$(\det\,\partial)_{AA} = \frac{\vartheta_3(\tau)}{\eta(\tau)}\,. \qquad (7.4.3)$$

对(A,P)边界条件，我们得到

$$\lambda_{AP} \sim \left(\left(m_1+\frac{1}{2}\right)\tau+m_2\right) \quad , \quad m_{1,2} \in \mathbb{Z}\,, \qquad (7.4.4)$$

$$(\det\,\partial)_{AP} = \frac{\vartheta_4(\tau)}{\eta(\tau)}\,. \qquad (7.4.5)$$

对(P,A)边界条件，我们有

$$\lambda_{PA} \sim \left(m_1\tau+\left(m_2+\frac{1}{2}\right)\right) \quad , \quad m_{1,2} \in \mathbb{Z}\,, \qquad (7.4.6)$$

$$(\det\,\partial)_{PA} = \frac{\vartheta_2(\tau)}{\eta(\tau)}\,. \qquad (7.4.7)$$

最后，对(P,P)边界条件，行列式等于零，因为这些边界条件现在允许零模式。通过耦合到常数规范场(对零模式，它象源一样作用)，可以看到，这里的行列式与$\vartheta_1(\tau)$成比例，的确恒等于零。

可以把上述结果总结如下。让$a=0,1$分别指示在第一个圆周上的A,P边界条件；$b=0,1$指示在第二个圆周上的A,P边界条件。那么，

$$(\det\partial)\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\frac{\vartheta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(\tau)}{\eta(\tau)}\,. \tag{7.4.8}$$

(P,P)自旋结构称为奇自旋结构；其余的称为偶自旋结构。从附录A，我们看到模变换置换各种边界条件，因为它们置换各种圆周。为了构造模不变的东西，我们必须在所有边界条件上求和。再包括右移动Fermion后，我们把整个配分函数写作

$$Z_N^{\text{fermionic}}=\tfrac{1}{2}\sum_{a,b=0}^{1}\left|\frac{\vartheta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}}{\eta}\right|^N\,. \tag{7.4.9}$$

可以直接验证它是模不变的。为了揭示谱，我们可以用(6.11.28), (6.11.29), (6.11.42), (6.11.43) 的特性的方式把配分函数表示为

$$Z_N^{\text{fermionic}}=|\chi_0|^2+|\chi_V|^2+|\chi_S|^2+|\chi_C|^2\,, \tag{7.4.10}$$

从这里，我们看到，所有的$\mathrm{O(N)}_1$可积表示都参与。

在偶自旋结构中的Fermion的两点函数可以用它们的极点结构和在模变换下的变换性质的方式来固定。它们有Szegö核给出

$$\langle\psi^i(z)\psi^j(0)\rangle=\delta^{ij}\;S\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(z)\quad,\quad S\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(z)=\frac{\vartheta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(z)\vartheta_1'(0)}{\vartheta_1(z)\vartheta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(0)}\,. \tag{7.4.11}$$

我们也将进一步讨论在奇自旋结构中的零模式。每一个真实Fermion有零模式，并且路径积分等于零。第一个非零相关函数必须包含N个Fermion，使得它们吸收所有零模式。在零模式上的积分给出一个完全反对称的张量，我们把它归一化到不变的ϵ张量。其余的贡献由在没有零模式的配分函数给出。因为振子有可积的模和因为有一个$(-1)^F$插入，非零模式的贡献为

$$q^{-N/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^N=\eta^N=\left[\frac{1}{2\pi}\frac{\partial_v\vartheta_1(v)|_{v=0}}{\eta}\right]^{N/2}\,. \tag{7.4.12}$$

于是，

$$\left\langle\prod_{k=1}^{N}\psi^{i_k}(z_k)\right\rangle_{\text{odd}}=\epsilon^{i_1,\ldots,i_N}\;\eta^N\,. \tag{7.4.13}$$

7.5 Boson化

考虑两个Majorana-Weyl Fermion，并且

$$\psi^i(z)\psi^j(w)=\frac{\delta^{ij}}{z-w}+\ldots\,. \tag{7.5.1}$$

我们可以把基变换到

$$\psi=\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^1+i\psi^2)\quad,\quad\bar\psi=\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^1-i\psi^2)\,. \tag{7.5.2}$$

整个理论包含由(1,0)流生成的U(1)流代数

$$J(z) =: \psi\bar{\psi} : \quad , \quad J(z)J(w) = \frac{1}{(z-w)^2} + \dots , \tag{7.5.3}$$

$$J(z)\psi(w) = \frac{\psi(w)}{z-w} + \dots \quad , \quad J(z)\bar{\psi}(w) = -\frac{\bar{\psi}(w)}{z-w} + \dots . \tag{7.5.4}$$

方程(7.5.4)表明，$\psi, \bar{\psi}$是荷为1和-1的仿射原场。应力张量为

$$T(z) = -\frac{1}{2} : \psi^i \partial \psi^i := \frac{1}{2} : J^2 : . \tag{7.5.5}$$

它有中心荷$c = 1$。

我们可以利用单个手征Boson $X(z)$来表示同样的算符代数。即，

$$J(z) = i\partial X \quad , \quad \psi =: e^{iX} : \quad , \quad \bar{\psi} =: e^{-iX} : . \tag{7.5.6}$$

练习：验证：上面的定义可以重新产生象Fermion理论中的一样的同样OPE。

而且，把这些定义应用到(7.5.5)，它们产生正确的标量应力张量，即，$T = -\frac{1}{2} : \partial X^2 :$。这个手征算符构造提出，两个Majorana-Weyl Fermion和一个手征Boson 可能给出等价的理论。然而，整个理论也包含右移动部分。当包括时，我们一方面考虑一个Dirac Fermion，另一方面考虑一个标量。然而，对于标量理论，我们必须确定半径R。为了计算它，我们从N=2的一个Dirac Fermion(7.4.9)的环面上的配分函数开始。

把Poisson重新求和应用到ϑ函数，我们可以证明，

$$|\vartheta[{}^{a}_{b}]|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\tau_2}} \sum_{m,n\in Z} \exp\left[-\frac{\pi}{2\tau_2}|n-b+\tau(m-a)|^2 + i\pi mn\right] \tag{7.5.7}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\tau_2}} \sum_{m,n\in Z} \exp\left[-\frac{\pi}{2\tau_2}|n+\tau m|^2 + i\pi(m+a)(n+b)\right] .$$

当$a, b \in Z$时，第二个方程有效。于是，

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{2}\sum_{a,b=0}^{1} \left|\frac{\vartheta[{}^{a}_{b}]}{\eta}\right|^2 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\tau_2}} \sum_{a,b=0}^{1} \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \exp\left[-\frac{\pi}{2\tau_2}|n+\tau m|^2 + i\pi(m+a)(n+b)\right] . \end{aligned} \tag{7.5.8}$$

在b上的求和给出因子2，规定$m+a$是偶数的。于是，$m = 2\tilde{m} + a$。在a上的求和重新规定m为任意整数。从而，

$$Z_{\text{Dirac}} = \frac{1}{\sqrt{2\tau_2}} \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \exp\left[-\frac{\pi}{2\tau_2}|n+\tau m|^2\right] \tag{7.5.9}$$

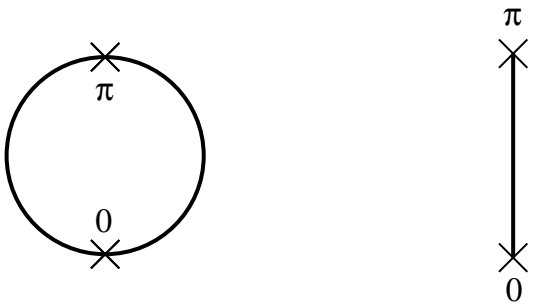


Figure 9: 轨流形S^1/Z_2。

以及，与(7.1.17)比较，我们看到，它与半径为$R = 1/\sqrt{2}$的Boson的一样。

总之，Dirac Fermion等价于半径$R = 1/\sqrt{2}$的紧致Boson。

7.6 轨流形

当我们考虑有离散对称群G的流形M时，轨流形概念出现。我们可以考虑一个新的流形$\tilde{M} \equiv M/G$，它通过除以对称群G而从旧的流形得到。如果G是自由作用的(在G的作用下，M没有固定点)，那么，M/G是一个光滑流形。另一方面，如果G有固定点，那么M/G不再是一个光滑流形，而有在固定点的圆锥奇异性，称为轨流形奇异性。现在，我们将提供上面的例子。

考虑实直线$\mathbb{R}$。它有Z_2对称性$x \to -x$。轨流形$\mathbb{R}/Z_2$是有一个在边界$x = 0$的轨流形点(奇异性)的半直线。另外，直线$\mathbb{R}$有另一个离散无限对称群，即，平移$x \to x + 2\pi\lambda$。这个对称性是自由作用的，所得的流形是一个光滑流形，即，一个半径为λ的圆周。

就CFT和弦论而言，轨流形是有兴趣的，因为它们为弦紧致提供比环面更丰富的空间，但是允许精确的CFT描写。还有，虽然它们的经典几何是奇异的，弦在它们上光滑地传播。换句话说，相应的CFT的相关函数是有限的。

为了指出这个重要的结果，这里我们将描述一些轨流形的简单例子。为了在弦论中破缺超对称性，它们是在后面是有用的。在原始论文[27]可以找到更多。

首先考虑一个非自由作用轨流形的简单例子。考虑半径为R的圆周，其中参数为$x \in [0, 2\pi]$，再除以对称性$x \to -x$。在对称作用下，有两个固定点，$x = 0$和$x = \pi$。所得的流形是在边界有固定点的线段(Fig. 9)。

不难构造轨流形的CFT。每一个在原始Hilbert空间中的算符在Z_2轨流形变换$X \to -X$下，有一个明确的行为；对顶角算符，$V_{m,n} \to V_{-m,-n}$。

轨流形构造表明，在轨流形变换下我们只应保持算符不变。于是，轨流形理论包含Z_2不变的算符，它们的相关子与在原始理论中一样。特别是，不变顶角算符是$V^+_{m,n} = \frac{1}{2}(V_{m,n} + V_{-m,-n})$。

然而，这不是事情的结束。迄今我们已构造的是“未扭曲的部分”。从环面的配分

函数可以看到迹象：我们必须有更多。我们从Hamilton表示中的(7.1.18)开始。为了只保留不变的态，我们必须在迹中插入一个投影子。这个投影子是$(1+g)/2$，其中，g是象下面一样作用在态上的非平庸轨流形群元素

$$g\left[\prod_{i=1}^{N} a_{-n_i}\prod_{j=1}^{\bar{N}}\bar{a}_{\bar{n}_j}|m,n\rangle\right]=(-1)^{N+\bar{N}}\prod_{i=1}^{N} a_{-n_i}\prod_{j=1}^{\bar{N}}\bar{a}_{\bar{n}_j}|-m,-n\rangle\,. \tag{7.6.1}$$

于是，

$$Z(R)^{\text{invariant}}=\frac{1}{2}Z(R)+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[g\ q^{L_0-1/24}\ \bar{q}^{\bar{L}_0-1/24}]\,. \tag{7.6.2}$$

为了计算第二个迹，我们注意到$\langle m_1,n_1|m_2,n_2\rangle\sim\delta_{m_1+m_2}\delta_{n_1+n_2}$，它意味着只有$m=n=0$的态对那个迹有贡献。这些是纯振子态(真空模)，由于g的作用，每一个振子有-1因子的权重。我们得到

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[g\ q^{L_0-1/24}\ \bar{q}^{\bar{L}_0-1/24}]=\frac{1}{2}(q\bar{q})^{-1/24}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+q^n)(1+\bar{q}^n)}=\left|\frac{\eta}{\vartheta_2}\right| \tag{7.6.3}$$

和

$$Z(R)^{\text{invariant}}=\frac{1}{2}Z(R)+\left|\frac{\eta}{\vartheta_2}\right|\,. \tag{7.6.4}$$

对ϑ函数的模性质的简单观察表明，这个配分函数不是模不变的。缺少了某些东西。这精确地是扭曲态的集合。现在，对场X，有其它可能的边界条件，即，$X(\sigma+2\pi)=-X(\sigma)$。这还是周期性条件，因为现在$X$和$-X$是等同的。在这一部分(它类似于对Fermion的Ramond部分)动量和缠绕数被边界条件强制为零，振子是半整数模的。把上面的边界条件附加到Laplace方程的解，我们得到在扭曲部分的下列模式展开

$$X(\sigma,\tau)=x_0+\frac{i}{\sqrt{4\pi T}}\sum_{n\in Z}\left(\frac{a_{n+1/2}}{n+1/2}e^{i(n+1/2)(\sigma+\tau)}+\frac{\bar{a}_{n+1/2}}{n+1/2}e^{-i(n+1/2)(\sigma-\tau)}\right)\,. \tag{7.6.5}$$

零模式强制处于两个固定点上：$x_0=0,\pi R$。这表明在这个部分中，两个基态$|H^{0,\pi}\rangle$出现，它在Virasoro代数是原的，在轨流形变换下是不变的。它们满足

$$a_{n+1/2}|H^{0,\pi}\rangle=\bar{a}_{n+1/2}|H^{0,\pi}\rangle=0\qquad n\geq 0\ \ . \tag{7.6.6}$$

象在Fermion情形对自旋场所做的一样，我们可以计算它们的共形权重。它是$h=\bar{h}=1/16$。其余的态由负模振子作用在基态上生成。然而，不是所有的态都是不变的。为了选取不变态，我们必须用我们在扭曲部分中的投影子来计算迹：

$$\begin{aligned}Z^{\text{twisted}} &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[(1+g)q^{L_0-1/24}\ \bar{q}^{\bar{L}_0-1/24}]\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{(q\bar{q})^{48}}\left[\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{n-\frac{1}{2}})(1-\bar{q}^{n-\frac{1}{2}})}+\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+q^{n-\frac{1}{2}})(1+\bar{q}^{n-\frac{1}{2}})}\right]\\ &= \left|\frac{\eta}{\vartheta_4}\right|+\left|\frac{\eta}{\vartheta_3}\right|\,.\end{aligned} \tag{7.6.7}$$

整个配分函数

$$Z^{\text{orb}}(R)=Z^{\text{untwisted}}+Z^{\text{twisted}}=\frac{1}{2}Z(R)+\left|\frac{\eta}{\vartheta_2}\right|+\left|\frac{\eta}{\vartheta_4}\right|+\left|\frac{\eta}{\vartheta_3}\right| \tag{7.6.8}$$

是模不变的。实际上，在(7.6.8)中的四个不同部分可以被解释为在两个圆周上的四个不同边界条件的环面上进行路径积分的结果，就象在Fermion情形一样。我们将引入记号$Z[^h_g]$，其中，h,g在$0,1$取值；$g=0$表示未扭曲的部分，而$g=1$表示一个投影。在这种记号中，轨流形的配分函数可以写成

$$Z^{\rm orb}=\frac{1}{2}\sum_{h,g=0}^{1} Z[^h_g]\ , \tag{7.6.9}$$

有$Z[^0_0]=Z(R)$和

$$Z[^h_g]=2\left|\frac{\eta}{\vartheta[^{1-h}_{1-g}]}\right| \quad , \quad (h,g)\neq(0,0)\,. \tag{7.6.10}$$

在模变换下，它们变换如下

$$\tau\to\tau+1 \quad : \quad Z[^h_g]\to Z[^h_{h+g}]\,, \tag{7.6.11}$$

$$\tau\to-\frac{1}{\tau} \quad : \quad Z[^h_g]\to Z[^g_h] \tag{7.6.12}$$

以及，我们得出结论，(7.6.9)是模不变的。

还要注意，整个扭曲的部分不依赖于半径。这是非自由作用轨流形的一个普遍特性。就象我们后面将看到的，对自由作用轨流形，情况是不同的。

扭曲的基态由扭曲算符$H^{0,\pi}(z,\bar z)$从SL(2,$\mathbb{C}$)不变真空生成。扭曲算符的相关函数更难于计算，但是，这个计算是可以进行的(详细见[28, 29])。可以确定下列示意的OPE[28, 29]

$$[H^0]\cdot[H^0]\sim\sum_{n,m} C^{2m,2n}[V^+_{2m,2n}]+C^{2m,2n+1}[V^+_{2m,2n+1}]\,, \tag{7.6.13}$$

$$[H^\pi]\cdot[H^\pi]\sim\sum_{n,m} C^{2m,2n}[V^+_{2m,2n}]-C^{2m,2n+1}[V^+_{2m,2n+1}]\,, \tag{7.6.14}$$

$$[H^0]\cdot[H^\pi]\sim\sum_{n,m} C^{2m+1,2n}[V^+_{2m+1,2n}]\,. \tag{7.6.15}$$

这里，$[V^+_{m,n}]$代表由U(1)流模式的作用量从原顶角算符$V^+_{m,n}=(V_{m,n}+V_{-m,-n})/\sqrt{2}$生成的整个U(1)表示。OPE的系数由下面给出

$$C^{m,n}=\sqrt{2}2^{-2(h_{m,n}+\bar h_{m,n})} \quad , \quad C_{0,0}=1 \tag{7.6.16}$$

和

$$h_{m,n}=(m/R+nR)^2/4 \quad , \quad \bar h_{m,n}=(m/R-nR)^2/4\,. \tag{7.6.17}$$

注意，原始理论的两个U(1)流∂X和$\bar\partial X$可以被投影出来。因此，在轨流形理论中，我们不再期望有连续的$\mathrm{U(1)_L}\times\mathrm{U(1)_R}$不变性。在扭曲的OPE中，这已经很明显，它表明，荷m,n不再守恒。然而，仍然还有残余的$Z_2\times Z_2$对称性

$$(H^0,H^\pi,V^+_{m,n})\to(-H^0,H^\pi,(-1)^m\,V^+_{m,n})\,, \tag{7.6.18}$$

$$(H^0, H^\pi, V^+_{m,n}) \to (H^\pi, H^0, (-1)^n\ V^+_{m,n})\,. \tag{7.6.19}$$

当这些变换与改变扭曲场符号的额外对称性结合起来

$$(H^0, H^\pi, V^+_{m,n}) \to (-H^0, -H^\pi, V^+_{m,n})\,, \tag{7.6.20}$$

它们生成群D_4，它是轨流形的不变群。

轨流形理论还依赖于一个连续参数,即半径R。而且，这里我们还有对偶对称性$R \to 1/R$，因为从(7.6.8)：

$$Z^{\rm orb}(R) = Z^{\rm orb}(1/R)\,. \tag{7.6.21}$$

练习：对在$R \to 1/R$下的扭曲场，利用在(7.6.13)-(7.6.15)中的OPE来推导下列变换规则，

$$\begin{pmatrix} H^0 \\ H^\pi \end{pmatrix} \to \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H^0 \\ H^\pi \end{pmatrix}\,. \tag{7.6.22}$$

练习：进一步考虑由在(7.6.20)中的Z_2变换“轨流形化”轨流形理论。证明所得的理论是原来的环面理论。在这种关系中，环面理论不再比轨流形理论更基本。

练习：证明，当$R = \sqrt{2}$时，轨流形配分函数变成Ising配分函数的平方。

$$Z^{\rm Ising} = \frac{1}{2}\left[\left|\frac{\vartheta_2}{\eta}\right| + \left|\frac{\vartheta_3}{\eta}\right| + \left|\frac{\vartheta_4}{\eta}\right|\right]\,, \tag{7.6.23}$$

它在(7.4.9)中算出。这里，N=1。你也需要(A.14)。

从上面的轨流形可以轻松地在各种方向上推广。首先，我们可以考虑其它起始的CFT，例如高维环面或相互作用CFT。还有，我们除以的对称性可以是一个更大的Abel或非Abel离散群。由于时间关系，我们不在这个方向上进行更多探讨。

我们现在讨论一个自由作用轨流形群的简单例子。我们再次从在半径为R的圆周上的标量理论开始。但是，这里，我们采用U(1)对称性的Z_2子群，它按照$|m,n\rangle \to (-1)^m\ |m,n\rangle$一样作用，保持振子不变。几何作用量是半格点平移：$X \to X + \pi\ R$。我们将利用前面的方法来计算配分函数。可再次用$Z^{[0]}_{[0]} = Z(R)$的形式写出。$Z^{[0]}_{[1]}$必须包含群元素：

$$Z^{[0]}_{[1]} = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} (-1)^m\ \frac{\exp\left[\frac{i\pi\tau}{2}\left(\frac{m}{R} + nR\right)^2 - \frac{i\pi\bar\tau}{2}\left(\frac{m}{R} - nR\right)^2\right]}{\eta\bar\eta}\,. \tag{7.6.24}$$

通过注意到扭曲边界条件类似于半径一半的圆周的边界条件，所以$n \to n+1/2$，或者，通过在$Z^{[0]}_{[1]}$上执行$\tau \to -1/\tau$变换，$Z^{[1]}_{[0]}$的计算可以作出。两种方法都给出

$$Z^{[1]}_{[0]} = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \frac{\exp\left[\frac{i\pi\tau}{2}\left(\frac{m}{R}+\left(n+\frac{1}{2}\right)R\right)^2 - \frac{i\pi\bar{\tau}}{2}\left(\frac{m}{R}-\left(n+\frac{1}{2}\right)R\right)^2\right]}{\eta\bar{\eta}}. \tag{7.6.25}$$

最后，通过$\tau \to \tau+1$变换或者通过插入群元素，$Z^{[1]}_{[1]}$可以从$Z^{[1]}_{[0]}$得到：

$$Z^{[1]}_{[1]} = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} (-1)^m \frac{\exp\left[\frac{i\pi\tau}{2}\left(\frac{m}{R}+\left(n+\frac{1}{2}\right)R\right)^2 - \frac{i\pi\bar{\tau}}{2}\left(\frac{m}{R}-\left(n+\frac{1}{2}\right)R\right)^2\right]}{\eta\bar{\eta}}. \tag{7.6.26}$$

上述总结如下：

$$Z^{[h]}_{[g]} = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} (-1)^{gm} \frac{\exp\left[\frac{i\pi\tau}{2}\left(\frac{m}{R}+\left(n+\frac{h}{2}\right)R\right)^2 - \frac{i\pi\bar{\tau}}{2}\left(\frac{m}{R}-\left(n+\frac{h}{2}\right)R\right)^2\right]}{\eta\bar{\eta}} \tag{7.6.27}$$

或者，在Lagrange表示中：

$$Z^{[h]}_{[g]} = \frac{R}{\sqrt{\tau_2}\eta\bar{\eta}} \sum_{m,n,\in\mathbb{Z}} \exp\left[-\frac{\pi R^2}{\tau_2}\left|m+\frac{g}{2}+\left(n+\frac{h}{2}\right)\tau\right|^2\right]. \tag{7.6.28}$$

把(7.6.9)中的贡献汇总起来，我们得到，Boson的配分函数在半径为$R/2$的圆周上紧致。这是从轨流形元素的几何作用量我们所期望的。这里还要注意，扭曲部分对半径有一个非平庸的依赖。这是自由作用轨流形的一般特性。

这个轨流形的例子虽然看起来平庸，它却可以与其它投影结合起来，作出非平庸的CFT。

练习：考虑二维环面的CFT，环面是两个半径为$R_{1,2}$和坐标为$X_{1,2}$的圆周的直积。这个理论在其余当中有Z_2对称性，它按照$X_1 \to -X_1$和$X_2 \to X_2+\pi R_2$同时作用。构造这个轨流形的配分函数。

这里我们将讨论环面模型的最一般的轨流形群。d维环面CFT的一般对称性包含$\mathrm{U(1)^d_L \times U(1)^d_R}$手征对称性。相应于它的变换是任意格点平移。它们如下作用在动量为m_i和缠绕数为n_i的态上

$$g_{\text{translation}} = \exp\left[2\pi i \sum_{i=1}^{d}(m_i\theta_i + n_i\phi_i)\right], \tag{7.6.29}$$

其中，为了得到离散群，θ_i, ϕ_i是有理数。还有不被模G_{ij}和B_{ij}破缺的O(d,d)群的子群的对称性。这些依赖于模空间的点。从而，一般元素是作用在理论左部分的一个平移和旋转与作用在理论右部分的一个先验不同的平移和旋转的结合。

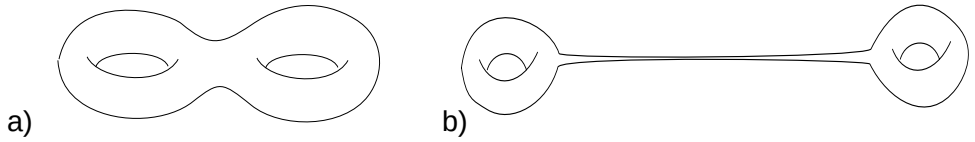


Figure 10: a) 双重环面。b) 到两个环面的简并极限。

练习：考虑两个等半径的积的CFT。在两个圆周的互换下它是不变的。这个变换形成旋转群O(2)的Z_2子群。由这个对称性轨流形化和构造配分函数的轨流形块。配分函数是模不变的吗？你需要(A.14)。

有限制轨流形群选择的由模不变性附加的约束。轨流形手续可以看做离散对称性的规范化。可能发生离散对称性是反常的。于是，理论将不是模不变的。

练习：重作自由标量的自由作用轨流形，但是现在利用下列群元素：$g = (-1)^{m+n}$。它对应于非几何平移。证明，不可能构造一个模不变的配分函数。于是，这是一个反常对称性，因为它对应于手征$\mathrm{U}(1)_\mathrm{L}$的Z_2子群的规范化。

7.7 在高亏格Riemann曲面上的CFT

迄今，我们已经分析了在低亏格的曲面，即Riemann球($g = 0$)和环面($g = 1$)上的CFT。类似地，我们可以定义和分析在有更多手柄的曲面上的各种CFT。在亏格$g \geq 2$的Riemann曲面上的一般N点函数依赖于算符的N(复)位形和作为曲面模的$3(g-1)$个复数。它们是环面的模τ的推广。还有作用在模上的模群的概念。在N个孔洞的亏格为g的曲面上的模群下，配分函数必须是不变的。

然而，在定义在各种Riemann曲面上的同一CFT的相关函数之间，有一组关系。这称为因子化。作为一个例子，考虑在Fig. 10a中描写的亏格2的曲面上CFT的配分函数。它依赖于3个复模。特别是，有一个用q表示的模，使得：当$q \to 0$时，曲面发展成在之间的长柱面；当$q = 0$时，曲面退化到每个上有一个孔洞的两个环面(Fig. 10b)。这表示对配分函数的Hamilton退化公式

$$\langle\ 1\ \rangle_{g=2} = \sum_i q^{h_i - c/24}\ \bar{q}^{\bar{h}_i - \bar{c}/24}\ \langle\phi_i\rangle_{g=1}\ \langle\phi_i\rangle_{g=1}\,, \tag{7.7.1}$$

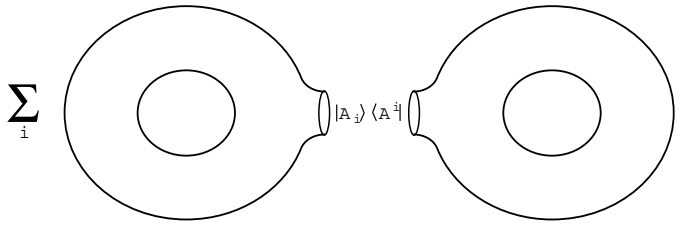


Figure 11: 到一对环面的退化的Hamilton描写

其中，在理论的所有态上求和，在曾经穿孔的环面上计算单点函数。之所以这样是因为，当中间的环面变长时，我们可以利用柱面Hamilton量来描写理论的这部分。方程(7.7.1)在Fig. 11中概要地表示。这可以被推广到任意相关函数和任意简并。

因为因子化表示在潜在弦论中的微扰幺正性，所以它是重要的。例如，$g = 2$振幅是一个对散射振幅的2－圈图修正，在微扰理论中，我们可以通过把单圈图振幅缝起来构造它。

8 Boson弦的散射振幅和顶角算符

在前一章，我们已经看到，对CFT中的每一个态，对应一个从SL(2,$\mathbb{C}$) 不变真空生成的各自的态的局域算符。所以，对弦论中的所有态，对应于世界叶上的局域算符。然而，我们只需要考虑物理态。物理态条件怎样转换到局域算符？

我们将在旧的协变方法中操作，考虑闭弦情形。我们已经看到，物理态必须满足$L_0 = \bar{L}_0 = 1$，它们应当被Virasoro算符的正模式湮灭。用CFT的话说，它们必须是共形权重为(1,1)的原态。而且，从它们的定义，伪态对应于Virasoro子态。

在共形规范中，Polyakov作用量是

$$S_P = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \; \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu \eta_{\mu\nu} \,, \tag{8.1}$$

从这里，我们得到2－点函数

$$\langle X^\mu(z,\bar{z}) X^\nu(w,\bar{w}) \rangle = -\frac{\alpha'}{4} \eta^{\mu\nu} \log|z-w|^2 \tag{8.2}$$

和应力张量

$$T = -\frac{2}{\alpha'} \eta_{\mu\nu} \partial X^\mu \partial X^\nu \tag{8.3}$$

已经类似地对$\bar{T}$。

在零能级的态$|p\rangle$对应于算符$V_p =: e^{ip^\mu X^\mu} :$。在$T, \bar{T}$下，它们是共形权重为$\Delta = \bar{\Delta} = \alpha' p^2/4$的原态。为了它们为(1,1)从而是物理的，我们需要$p^2 = -m^2 = 4/\alpha'$，它是超光子质壳条件。

下一个态的集合是$a^\mu_{-1}\bar{a}^\nu_{-1}|p\rangle$，对应于算符: $\partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu V_p$:. 我们考虑这些算符的线性组合$O(\epsilon) = \epsilon_{\mu\nu} : \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu V_p :$用$T, \bar{T}$计算它们的OPE：

$$T(z)O(w,\bar{w}) = -ip^\mu \epsilon_{\mu\nu} \frac{\alpha'}{4} \frac{\bar{\partial} x^\nu V_p}{(z-w)^3} + \left(1 + \frac{\alpha' p^2}{4}\right) \frac{O(w,\bar{w})}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w O(w,\bar{w})}{z-w} + \dots \qquad (8.4)$$

以及对$\bar{T}$有一个类似情况。为了有原(1,1)算符，我们必须有消失的三阶极点

$$p^\mu \epsilon_{\mu\nu} = p^\nu \epsilon_{\mu\nu} = 0 \qquad (8.5)$$

和$p^2 = 0$，它是对引力子(对称无迹的ϵ)，反对称张量(反对称的ϵ)和胀子(有$\bar{p}^2 = 0$, $p \cdot \bar{p} = 1$的$\epsilon_{\mu\nu} \sim \eta_{\mu\nu} - p_\mu \bar{p}_\nu - \bar{p}_\mu p_\nu$)的质壳和横向条件。更高能级按类似方式处理。

在现代的(BRST)协变量子化中，物理态条件变化到$[Q_{BRST}, V_{phys}(z,\bar{z})] = 0$，它约化到物理态上的通常条件。在这种情形，物理顶角算符是用$c\bar{c}$乘以在旧的协变情形我们找到的顶角算符。

在球面上的N点散射振幅(S矩阵元)可以通过计算相应顶角算符的适当N点相关子和在插入位形上的积分来构造。就象我们以前提到的，在球面上，有一个残余的SL(2,$\mathbb{C}$)不变性，它不能由进行共形规范而固定。这可以用来把三个顶角算符的位形指定到按照惯例取为$0, 1, \infty$的三个固定点上。于是，我们在剩下的N-3个位形上积分。三个(球面)散射振幅的详细计算见[5]。

移动到单圈图中，有类似的规定。对于N点单圈图振幅，我们首先必须计算在环面上的适当顶角函数的N点函数。由于环面的平移不变性($c, \bar{c}$零模式)，相关子依赖于N-1个位形以及环面τ的模。这些是模，它们应该被积出。微分同构不变性表示在N-1个位形上积分的相关子在模变换下应该是不变的。最后，我们必须在基本域中的τ上积分(Fig. 8)。

我们将计算闭Boson弦的单圈图真空能量。这是单圈图泡图，对应于计算潜在CFT的环面配分函数和环面模空间的积分。我们将在协变方法中进行这个计算。我们已经看到，对一个单个非紧致Boson的环面配分函数由$1/(\sqrt{\tau_2}\eta\bar{\eta})$给出，我们有26个这种。鬼场$b, c$对配分函数贡献$\eta^2$，抵消了两个左移动振子的贡献。类似地，鬼场$\bar{b}, \bar{c}$贡献$\bar{\eta}^2$。最后，积分测度包含$\tau_1$上的积分，它附加了$L_0 = \bar{L}_0$和通常的Schwinger测度$d\tau_2/\tau_2$。总之，我们得到

$$\Lambda^4 = \int_{\mathcal{F}} \frac{d^2\tau}{\tau_2^2} \, Z_{\text{bosonic}}(\tau,\bar{\tau}) = \int_{\mathcal{F}} \frac{d^2\tau}{\tau_2^2} \, \frac{1}{(\sqrt{\tau_2}\eta\bar{\eta})^{24}} \,, \qquad (8.6)$$

其中，$\mathcal{F}$是基本域。注意，Z_{bosonic}只是24个横向非紧致坐标的贡献。在光锥规范中，类似计算将包括对横向坐标的Z_{bosonic}，从光锥零模式的额外$1/\tau_2$因子和象在(8.6)中的给出同样结果的Schwinger测度。

在场论中，τ_2积分向下扩展到$\tau_2 = 0$，UV发散来自这个区域。我们看到，在弦论中，由于模不变性，这个区域不存在。这提供了弦论中UV发散不存在的(技术性)解释。当然，在Boson弦情形，由于超光子的出现，真空能是IR发散的。

用类似的方式，g圈图可以由在亏格g的Riemann曲面上的CFT上积分相关子的积分来计算。一个最后的成分是弦耦合g_{string}。一个g圈图贡献必须由一个因子$g_{\text{string}}^{-\chi}$来增加权

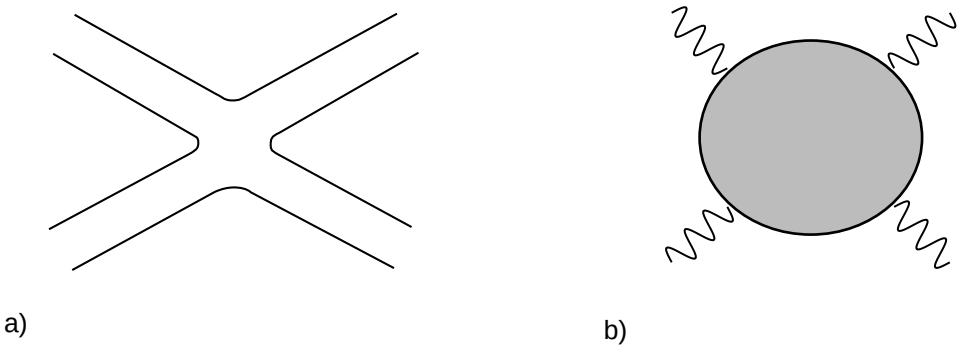


Figure 12: a) 四点开弦树振幅。b)到有四点标记在边界的圆盘的它的共形变换。

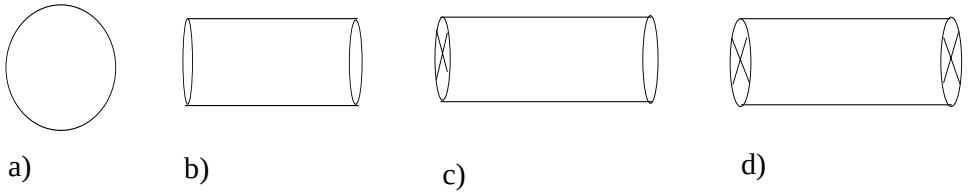


Figure 13: a)圆盘。b)圆环。c)Möbius带。d)Klein瓶。

重，其中，$\chi = 2(1-g)$是Riemann曲面的Euler数。微扰展开是拓扑展开。还要注意，顶角算符的插入在Riemann曲面中生成一个无穷小洞，把它的Euler数增长1。因此，就象它应该的那样，它伴随着因子$1/g_{\rm string}$。

这里，我们主要描写对开弦情形的拓扑展开。在这种情形的树图四点图在Fig. 12a表示。通过一个共形变换，可以被映射到有四点标记在边界上的圆盘(Fig. 12b)。这些是适当顶角算符插入的位置。于是，开弦顶角算符被插入在曲面的边界。开弦也可以放射出闭弦。在这样的振幅中，闭弦放射由在曲面的内部中闭弦顶角算符的插入来表示。

这里，拓扑展开也包括有边界的Riemann曲面。而且，我们可以考虑可定向的弦(其中，弦被定向)以及不可定向弦(其中，弦的定向是非物质的)。在第二种情形，我们必须在拓扑展开中包括不可定向的Riemann曲面。这样的曲面由手柄数g，边界数B和引入曲面不可定向性的交叉数C来表征。交叉为不是S^1而是$S^1/Z_2 = RP^1$的边界。Euler数由

$$\chi = 2(1-g) - B - C\,. \tag{8.7}$$

给出。在Fig. 13中，我们展示有边界的四个最简单曲面：$\chi = 1$的圆盘，$\chi = 0$的圆环，以及两个不可定向的曲面，$\chi = 0$的Möbius带和$\chi = 0$的Klein瓶。

象在后面要看到的，未定向的开弦的自洽理论必须包含未定向闭弦的耦合。说明这个的简单方法是考虑圆环图(Fig. 13b)。如果我们取时间向上，那么它描写一个开弦的单圈图。然而，如果我们取时间向侧面，那么它描写闭弦的树图传播。

9 在背景场和低能有效作用量中的弦

至今，我们已经描述了在26维平坦Minkowski空间的弦的传播。然而，我们想能够描写当无质量场$G_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$和Φ 有非平庸VEV时的弦物理。这可以通过平坦CFT的有限微扰，利用无质量场的顶角算符来进行。对胀子耦合的正确处理由Fradkin和Tseytlin给出。Polyakov作用量变成[13]

$$S_P = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\xi \left[\sqrt{g}g^{ab}G_{\mu\nu}(X) + \epsilon^{ab}B_{\mu\nu}(X)\right]\partial_a X^\mu \partial_b X_\nu + \\ + \frac{1}{8\pi}\int d^2\xi \sqrt{g}R^{(2)}\Phi(X)\,, \tag{9.1}$$

其中，$R^{(2)}$是固有世界叶度量g_{ab}的标量曲率。下面有一个有意思的观察：考虑胀子场(VEV)Φ_0的常数部分。因为世界叶的Euler特征标由下列给出

$$\chi = \frac{1}{4\pi}\int \sqrt{g}\ R^{(2)}\,, \tag{9.2}$$

我们观察到，在e^{-S_P}前，我们有一个因子$e^{-\chi\Phi_0/2}$。于是，弦耦合本质上由胀子VEV给出

$$g_{\rm string} = e^{\Phi_0/2}\,. \tag{9.3}$$

对一般背景场，这个σ模型不是共形不变的。而且，

$$\frac{T_a{}^a}{\sqrt{g}} = \frac{\beta^\Phi}{96\pi^3}R^{(2)} + \frac{1}{2\pi}(\beta^G_{\mu\nu}\ g^{ab} + \beta^B_{\mu\nu}\epsilon^{ab})\partial_a X^\mu \partial_b X_\nu\,, \tag{9.4}$$

其中，β函数可以通过σ模型$\alpha'\to 0$的弱耦合展开微扰地得到。到领头非平庸阶，

$$\frac{\beta^G_{\mu\nu}}{\alpha'} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}H_{\mu\rho\sigma}H_\nu{}^{\rho\sigma} + \nabla_\mu\nabla_\nu\Phi + \mathcal{O}(\alpha')\,, \tag{9.5}$$

$$\frac{\beta^B_{\mu\nu}}{\alpha'} = \nabla^\mu\left[e^{-\Phi}\ H_{\mu\nu\rho}\right] + \mathcal{O}(\alpha') \tag{9.6}$$

和

$$\beta^\Phi = D - 26 + 3\alpha'\left[(\nabla\Phi)^2 - 2\Box\Phi - R + \frac{1}{12}H^2\right] + \mathcal{O}(\alpha'^2)\,, \tag{9.7}$$

其中，$H_{\mu\nu\rho}$是$B_{\mu\nu}$的完全反对称场强，

$$H_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\nu B_{\rho\mu} + \partial_\rho B_{\mu\nu} \tag{9.8}$$

和D是时空维数。

当G, B, Φ是这样使得$\beta^G_{\mu\nu} = \beta^B_{\mu\nu} = 0$，那么，$\sigma$模型描写中心荷为$c = \beta^\Phi$的CFT。特别是，可以证明，当其它$\beta$函数消失时，$\beta^\Phi$是常数。

共形不变的条件和从而自洽的弦传播由方程

$$\beta^\Phi = \beta^G_{\mu\nu} = \beta^B_{\mu\nu} = 0\,. \tag{9.9}$$

[13]这里，我们正在讨论定向闭弦。

给出。

这些条件是背景场的二阶方程，可以从下列作用量得到

$$\alpha'^{D-2}S^{tree} \sim \int d^Dx\sqrt{-\det G}e^{-\Phi}\left[R+(\nabla\Phi)^2-\frac{1}{12}H^2+\frac{D-26}{3}\right]+\mathcal{O}(\alpha')\,. \tag{9.10}$$

在这点上，停下来问一个问题：为什么我们需要共形不变性？毕竟，因为我们在二维度量上积分，我们希望共形不变性被积分保持。实际上，我们将考虑两个不同情形：

• 背景场和时空维数使得所有β函数消失。那么，在量子水平，我们有共形不变性，共形因子退耦，我们闭弦从路径积分的定义分解出它的体积。这是我们至今考虑的情形。而且，β函数的消失意味着，到在α'的领头阶的背景场的二阶方程。

• β函数不是零。那么，共形因子不退耦。因为$T_a{}^a \sim \delta_\phi \log Z$，其中，$\phi$是共形因子，我们可以解这个方程以推出有效作用量的$\phi$依赖性。离开在(6.7.13)讨论的Liouville作用量，如果$\beta^{B,G}$不消失，我们也将有到标量X^μ的ϕ的耦合。有效地，我们有了一个在$D+1$中的新的σ模型(ϕ提供那个额外的坐标)，它被Weyl不变地构造。[14] 于是，我们回到第一种情形。

我们现在考虑轻场的有效作用量的概念。我们已经看到，(忽略动量的超光子)无质量的场是G, B, Φ。所有其它场有弦标度级次的质量。我们可以想像积出重场，它对轻场作用量将诱导出修正。这是低能有效作用量的定义。这个有效作用量只包含轻场，直到重场质量的级次的能量是有效的。在树图，这个手续可以通过考虑从弦计算的轻场的完全(质壳)散射振幅，用α'来展开它们，和找到在轻场上诱导的额外相互作用而得到。这个手续的完整展示可在[33]中找到。因为所用的振幅是在质壳上的，直到通过利用运动方程消失的项，可以计算有效相互作用。

可以证明，直到在质壳上消失的项，σ模型的共形不变性和弦振幅的计算产生同样的低能有效作用量(9.10)。

在(9.10)中，出现的场是耦合到弦的σ模型的场。这称为“弦标架”。在这个标架中，度量G和胀子的运动学项不是对角的。它们在通过度量的共形重新标度与弦标架有关的“Einstein标架”中变成对角的。分出胀子$\Phi \to \Phi_0+\Phi$的期望值，把Einstein度量定义为

$$G^E_{\mu\nu} = e^{-\frac{2\Phi}{D-2}}G_{\mu\nu}\,, \tag{9.11}$$

我们得到在Einstein标架中的作用量：

$$S_E^{\rm tree} \sim \frac{1}{\kappa^2}\int d^Dx\sqrt{G^E}\left[R-\frac{1}{D-2}(\nabla\Phi)^2-\frac{e^{-4\Phi/(D-2)}}{12}H^2\right.$$
$$\left.+e^{2\Phi/(D-2)}\frac{D-26}{3}\right]+\mathcal{O}(\alpha')\,, \tag{9.12}$$

其中，引力常数由下列给出

$$\kappa = g_{\rm string}\alpha'^{(D-2)/2}\,. \tag{9.13}$$

[14]在必须处理的扩展时空的符号上有个微妙之处。对有兴趣的读者，我们指出[8]。

10 超弦和超对称性

迄今，我们已经看到，Boson弦遇到两个主要问题：

- 它们的谱总包含一个超光子。在那方面，它们的真空是不稳定的。
- 它们不包含时空Fermion。

在另一方面，我们已经看到，在我们研究自由Fermion CFT时，它们包含一些态，这些态在相应的正交对称性下象旋量一样变换。因此，为了得到象旋量一样变换的态，我们想在弦的世界叶上增加自由Fermion。至于旋量，为了成为时空旋量，这些Fermion应该携带时空指标，即$\psi^\mu, \bar{\psi}^\mu$。然而，在这种情形，将有对应于ψ^0的模式的附加负模态。为了从物理谱中去掉这些态，我们需要比单独的Virasoro约束更多的约束。适当的结果来自于考虑约束的N=1超共形代数。在Boson弦情形，我们从二维引力开始，最后归结于Hilbert空间上的一组Virasoro 约束，其中这个引力与世界叶上的D个标量X^μ耦合。这里，我们将从耦合到D的N=1超场的二维N=1超引力开始，每个超场包含一个Boson坐标X^μ和两个Fermion坐标：一个是左移动ψ^μ和一个是右移动$\bar{\psi}^\mu$。二维N=1超引力多重态包含度量和一个引力微子。

Boson Polyakov作用量的类似物是

$$S_P^{II} = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int\sqrt{g}\left[g^{ab}\partial_a X^\mu\partial_b X^\mu + \frac{i}{2}\psi^\mu\partial\!\!\!/\psi^\mu + \right.$$
$$\left.\frac{i}{2}(\chi_a\gamma^b\gamma^a\psi^\mu)\left(\partial_b X^\mu - \frac{i}{4}\chi_b\psi^\mu\right)\right]. \tag{10.1}$$

在局域N=1左移动(1,0)超对称下是不变的

$$\delta g_{ab} = i\epsilon(\gamma_a\chi_b + \gamma_b\chi_a) \quad , \quad \delta\chi_a = 2\nabla_a\epsilon\,, \tag{10.2}$$

$$\delta X^\mu = i\epsilon\psi^\mu \quad , \quad \delta\psi^\mu = \gamma^a\left(\partial_a X^\mu - \frac{i}{2}\chi_a\psi^\mu\right)\epsilon \quad , \quad \delta\bar{\psi}^\mu = 0\,, \tag{10.3}$$

其中，ϵ是一个左移动Majorana-Weyl旋量。有一个类似的右移动(0,1)超对称性，它包括一个右移动Majorana-Weyl Fermion $\bar{\epsilon}$和Fermion $\bar{\psi}^\mu$。按我们的记号，我们有(1,1)超对称性。

共形规范的类似物是超共形规范

$$g_{ab} = e^\phi\delta_{ab} \quad , \quad \chi_a = \gamma_a\zeta\,, \tag{10.4}$$

其中，ζ是一个常数Majorana旋量；ϕ和ζ从经典作用量(10.1)退耦。除了Virasoro算符，我们还有超流

$$G_{\rm matter} = i\psi^\mu\partial X^\mu \quad , \quad \bar{G}_{\rm matter} = i\bar{\psi}^\mu\bar{\partial}X^\mu\,. \tag{10.5}$$

我们还必须引入适当的鬼场。我们仍有与微分同胚有关的$\lambda = 2$的通常的b,c体系，但是现在，我们也需要与超对称性有关的$\epsilon = -1,\ \lambda = \frac{3}{2}$的鬼场$\beta,\gamma$的交换集合。超共形不变性将在量子水平来引入，提供的鬼场中心荷抵消了物质中心荷。每一个Boson和Fermion坐标对中心荷贡献3/2。因为我们有它们的D，物质中心荷是$c_{\rm matter} =$

$\frac{3}{2}D$。b,c体系对中心荷贡献-26，同时，β,γ贡献$+11$。总的中心荷等于零，导致$D=10$。

经典约束意味着$T,G,\bar{T},\bar{G}$等于零。从而，我们有足够的约束来去掉负模态。

BRST流是[26]

$$j_{BRST}=\gamma G_{\rm matter}+cT_{\rm matter}+\frac{1}{2}\left(cT_{\rm ghost}+\gamma G_{\rm ghost}\right)\,, \tag{10.6}$$

其中，

$$G_{\rm matter}=i\psi^\mu\partial X^\mu\quad,\quad T_{\rm matter}=-\frac{1}{2}\partial X^\mu\partial X^\mu-\frac{1}{2}\psi^\mu\partial\psi^\mu\,, \tag{10.7}$$

$$G_{\rm ghost}=-i(c\;\partial\beta-\frac{1}{2}\gamma\;b+\frac{3}{2}\partial c\;\beta)\quad,\quad T_{\rm ghost}=T_{bc}-\frac{1}{2}\gamma\;\partial\beta-\frac{3}{2}\partial\gamma\;\beta\,. \tag{10.8}$$

练习：验证$G_{\rm ghost}$和$T_{\rm ghost}$满足有正确中心荷的N=1超共形代数的OPE(6.5.1),(6.12.7)。

BRST荷是

$$Q=\frac{1}{2\pi i}\left[\oint dz\;j_{BRST}+\oint d\bar{z}\;\bar{j}_{BRST}\right]\,. \tag{10.9}$$

它对$D=10$是幂零的，可以用标准方法来定义物理态。

10.1 闭(Type-II)超弦

我们将首先考虑闭(type-II)超弦情形。我们将在物理规范中处理和推导谱。超对称情形中的光锥规范类似物是[15]

$$X^+=x^++p^+\tau\quad,\quad\psi^+=\bar{\psi}^+=0\,. \tag{10.1.1}$$

就象在Boson情形，通过用横向模式的方式表示$X^-,\psi^-,\bar{\psi}^-$，我们可以清楚地解出约束。于是，物理态可以从横向Boson和Fermion振子来构造。但是，所有的零模式出来了。

象我们以前提到的，我们有对应于ψ^μ和G的NS和R边界条件的两个左移动部分和对应于$\bar{\psi}^\mu$和$\bar{G}$的$\overline{NS}$和$\bar{R}$边界条件的另两个部分。

为避免重复，对动量，我们只讨论左部分。象通常一样，我们引入超共形生成元的模式L_n和G_r [16]。

在光锥规范中，除了与零模式相应的约束外，我们已经解出它们了。在NS部分，G是半整数模的，唯一零模式是L_0。还有一个正规编序常数，它按如下计算：或者

[15]这里，关于超光锥规范，有一个微妙之处。例如，如果ψ^+有NS边界条件，那么它可以设定为零。如果它有R边界条件，那么除它的零模式外，可以被设定为零。类似评论可以应用到$\bar{\psi}^+$。

[16]记住，在光锥规范中，没有鬼场，只有横向(Boson和Fermion)振子。

象我们的Boson弦方法，要求物理态的Lorentz不变性；或者在协变公式中认识到最低能量态不是通常的真空$|0\rangle$，而是$c_1\gamma_{-1/2}|0\rangle$。两种方法都得到等于$a=\frac{1}{2}$的正规编序常数，以及在物理态上$L_0-\frac{1}{2}$应该等于零。态$|p\rangle$是一个$p^2=-m^2=2/\alpha'$的特殊态，它是超光子。下一个态有形式$\psi^i_{-1/2}|p\rangle$；如果$p^2=0$，它满足$L_0=\frac{1}{2}$。然而，我们不希望有超光子态。因为超光子有$(-1)^{F_L}=1$，我们希望附加额外的约束(GSO投影)：在$NS$部分中的物理态应该有奇Fermion数。

在R部分，我们有两个零模式：L_0和G_0。L_0的约束和在NS部分一样。浏览一下(10.5)的G_0的表达式足以使我们确信：不可能有正规编序常数，在物理态上G_0应该是零。在另一方面，从超共形代数我们知道

$$0=\{G_0,G_0\}=2\left(L_0-\frac{D-2}{16}\right)\ . \tag{10.1.2}$$

与L_0约束一致再次意味着$D=10$。R的基态是O(10)的旋量。再回想起$G_0=\psi^\mu_0 a^\mu_0+2\sum_{n\neq 0}^{\infty}\psi^i_n a^i_{-n}$。象在6.11节表明的一样，算符$\psi^\mu_0$由$\gamma^\mu$来表示，$a^\mu_0$用$p_\mu$。$G_0$中的其它态对基态没有贡献。$G_0=0$意味着Dirac方程$\not{p}\equiv\gamma^\mu\ p_\mu=0$。于是，在$R$部分中可能的无质量态是O(10)的一个旋量$S$和一个共轭旋量$C$，它们满足无质量的Dirac方程。在$(-1)^{F_L}$下，$S$本征值为1，$C$本征值为$-1$。所有其它态建立在这些基态上，是有质量的。至今，还没有一个先验的理由把一个GSO投影附加到R部分。象我们后面将看到的，单圈图模不变性迫使我们这样做。预期到这个事实，在R部分中我们还固定了Fermion宇称。因为$(-1)^F=$正或负在R部分中是一个约定的事实，我们允许所有的两种可能性。我们只保持S或C旋量基态，但不是同时保持。

类似的讨论可以应用在右移动部分。把二者结合起来，我们有全部的四个部分：

• $(NS\text{-}\overline{NS})$：由于它们在旋转群的张量表示中变换，这些是Boson。这里，投影是$(-1)^{F_L}=(-1)^{F_R}=-1$。被约束和GSO投影允许的最低态有形式$\psi^i_{-1/2}\bar{\psi}^j_{-1/2}|p\rangle$，它们是无质量的，对应于一个对称的无迹张量(引力子)、一个反对称的张量和一个标量。超光子消失了。

• $(NS\text{-}\overline{R})$：这些是Fermion。这里的GSO投影是$(-1)^{F_L}=-1$，通过约定，我们保留$\bar{R}$部分中的S表示。处于最低态的$\psi^i_{-1/2}|p,\bar{S}\rangle$是无质量的时空Fermion，而且包含一个$C$ Majorana-Weyl引力微子和一个S Fermion。

• $(R\text{-}\overline{NS})$：这里，$\overline{NS}$中的GSO投影是$(-1)^{F_R}=-1$，但是，在R部分中，我们有两个物理上不同的选项：保持S旋量(type-IIB)或C旋量(type-IIA)。再次，处于最低态的$\bar{\psi}^i_{-1/2}|p,S\text{ 或 }C\rangle$是无质量时空Fermion。

• $(R\text{-}\bar{R})$：在IIA情形，无质量态是$|S,\bar{C}\rangle$，它分解为一个矢量和一个三指标反对称张量，就象后面将看到的。在Type-IIB中，它们是$|S,\bar{S}\rangle$，它分解为一个标量，一个二指标反对称张量和一个自对偶反对称张量。

还有对我们有用的Boson振子，但是，就象我们已经看到的，在无质量态中不含有它们。然而，它们的确对有质量态有贡献。

所有的type-IIA和IIB理论都有两个引力微子，于是预期有10维中的N=2局域超对称

性。在type-IIB中，引力微子有同样的时空手性，而两个自旋$\frac{1}{2}$的Fermion有相反的手性。type-IIA理论是无手性的，因为引力微子和$\frac{1}{2}$的Fermion有相反的手性。

在光锥规范中，左移动约束本质上是线性化的运动方程。在NS-$\overline{NS}$部分中，约束是

$$L_0 = \bar{L}_0 \quad , \quad L_0 - \frac{1}{2} = 0 \; ; \tag{10.1.3}$$

和，象我们在Boson情形已经看到的，它给出质壳条件。这对应于自由Klein-Gordon方程。R-$\overline{NS}$部分包含时空Fermion，约束是所有无质量和有质量态的Dirac方程，就象在(10.1.3)中，加上$G_0 = 0$约束(按我们上面证明的来提供它)。从(10.1.2)，它的平方给出Klein-Gordon方程；独立的方程因此是$G_0 = 0$和$L_0 = \bar{L}_0$。类似讨论可以用在NS-$\overline{R}$部分。最后，在R-$\overline{R}$部分，态是双旋量，它们满足两个Dirac方程：$G_0 = \bar{G}_0 = 0$。因为两个原因，Ramond-Ramond无质量态是特殊的。首先，它们总是通过微商形成其它态和总是通过微商耦合到其它态。没有微扰理论在它们的控制下。象我们后面将看到的，它们处于非微扰对偶猜测的核心。它们的性质的更详细讨论在下一节。

我们将更密切地检验算符$(-1)^{F_{L,R}}$的时空意义。在NS部分

$$(-1)^F = \exp\left[i\pi \sum_{r \in Z+1/2} \psi^i_r \psi^i_{-r} \right] \; . \tag{10.1.4}$$

在R部分

$$(-1)^F = \prod_{\mu=0}^{9} \psi^\mu_0 \; \exp\left[i\pi \sum_{n=1}^{\infty} \psi^i_n \psi^i_{-n} \right] = \Gamma^{11} \; \exp\left[i\pi \sum_{n=1}^{\infty} \psi^i_n \psi^i_{-n} \right] \; , \tag{10.1.5}$$

其中，Γ^{11}是γ^5在10维中的类似物。我们可以从超流的形式(10.5)推导出零模式满足

$$\{(-1)^{F_L}, G_0\} = 0 \quad , \quad \{(-1)^{F_R}, \bar{G}_0\} = 0 \, . \tag{10.1.6}$$

这些推广了场论关系

$$\{\Gamma^{11}, \not{\partial}\} = 0 \, . \tag{10.1.7}$$

注意，在弦论中，这个关系对有质量的Dirac算符G_0也成立。

练习：证明，在无质量水平，有同等数目的在质壳上的Fermion和Boson自由度。如果理论有(至少一个)时空超对称性，这应该是必需的。还要在type-IIA和type-IIB理论中找到在下一个(有质量的)能级的物理态。证明它们理所当然与SO(9)表示结合，还有等同数目的Fermion和Boson自由度。

现在我们研究单圈图真空振幅(或配分函数)。对作用量的Boson部分，我们有8个横向振子；类似于Boson弦情形，我们得到的贡献为$(\sqrt{\tau_2}\eta\bar{\eta})^{-8}$。然而，这里，我们还有世

界叶Fermion的贡献。我们将首先考虑IIB情形。在NS-$\overline{NS}$部分，两个GSO投影意味着在两边我们都有矢量。所以，对配分函数的贡献是$\chi_V\bar{\chi}_V$。从R-$\overline{R}$部分，我们已经投影出C表示，所以贡献是$\chi_S\bar{\chi}_S$。在R-$\overline{NS}$和NS-$\overline{R}$部分，我们分别得到$-\chi_S\bar{\chi}_V$和$-\chi_V\bar{\chi}_S$。那里的负号是因为时空Fermion相对于时空Boson有一个负的贡献。所以，

$$Z^{IIB} = \frac{(\chi_V - \chi_S)(\bar{\chi}_V - \bar{\chi}_S)}{(\sqrt{\tau_2}\eta\ \bar{\eta})^8}\,. \tag{10.1.8}$$

利用SO(8)特征标的公式(6.11.26)和(6.11.42)，我们可以把配分函数写作

$$Z^{IIB} = \frac{1}{(\sqrt{\tau_2}\eta\bar{\eta})^8}\ \frac{1}{2}\sum_{a,b=0}^{1}(-1)^{a+b+ab}\ \frac{1}{2}\sum_{\bar{a},\bar{b}=0}^{1}(-1)^{\bar{a}+\bar{b}+\bar{a}\bar{b}}\ \frac{\vartheta^4[{}^a_b]\ \bar{\vartheta}^4[{}^{\bar{a}}_{\bar{b}}]}{\eta^4\ \bar{\eta}^4}\,, \tag{10.1.9}$$

$a=0$标记NS部分，$a=1$标记R部分，对右移动类似。

在Type-II情形，唯一的差别是χ_S应该用χ_C代替。配分函数变成

$$Z^{IIA} = \frac{1}{(\sqrt{\tau_2}\eta\bar{\eta})^8}\ \frac{1}{2}\sum_{a,b=0}^{1}(-1)^{a+b}\ \frac{1}{2}\sum_{\bar{a},\bar{b}=0}^{1}(-1)^{\bar{a}+\bar{b}+\bar{a}\bar{b}}\ \frac{\vartheta^4[{}^a_b]\ \bar{\vartheta}^4[{}^{\bar{a}}_{\bar{b}}]}{\eta^4\ \bar{\eta}^4}\,. \tag{10.1.10}$$

练习：证明Z^{IIB}, Z^{IIA}是模不变的。利用(A.18)，证明它们还恒等于零。这意味着，在每一个质量能级，有等同数目的Boson和Fermion自由度，与时空超对称性的出现一致。

10.2 无质量R-R态

现在，我们将更详细地讨论无质量Type-IIA,B弦论的R-R态，因为它们有不寻常的性质，在非微扰对偶对称性中起核心作用。更多资料见[30]。

我将首先从详细描述10维平坦Minkowski空间的Γ矩阵约定[5]开始。

(32×32)维Γ矩阵满足

$$\{\Gamma^\mu,\Gamma^\nu\} = -2\eta^{\mu\nu} \quad , \quad \eta^{\mu\nu} = (-++\ldots+)\,. \tag{10.2.1}$$

Γ矩阵指标用平坦Minkowski度量$\eta^{\mu\nu}$来升降：

$$\Gamma_\mu = \eta_{\mu\nu}\Gamma^\nu \qquad \Gamma^\mu = \eta^{\mu\nu}\Gamma_\nu\ . \tag{10.2.2}$$

我们将采用Majorana表示，其中，Γ矩阵是纯虚的，Γ^0 是反对称的，其余的是对称的。另外，

$$\Gamma^0\Gamma^\dagger_\mu\Gamma^0 = \Gamma_\mu \quad , \quad \Gamma^0\Gamma_\mu\Gamma^0 = -\Gamma^T_\mu\,. \tag{10.2.3}$$

Majorana旋量S_α是实的：$S^*_\alpha = S_\alpha$；

$$\Gamma_{11} = \Gamma_0 \ldots \Gamma_9 \quad , \quad (\Gamma_{11})^2 = 1 \quad , \quad \{\Gamma_{11}, \Gamma^\mu\} = 0 \; ; \; . \tag{10.2.4}$$

Γ_{11}是实对称的。在10维中，这是Weyl条件$\Gamma_{11} S = \pm S$与Majorana条件相容的原因。[17] 对Levi-Civita张量，我们采用$\epsilon^{01\ldots 9} = 1$的约定。我们将定义$\Gamma$矩阵的反对称积

$$\Gamma^{\mu_1 \ldots \mu_k} = \frac{1}{k!} \Gamma^{[\mu_1} \ldots \Gamma^{\mu_k]} = \frac{1}{k!} \left(\Gamma^{\mu_1} \ldots \Gamma^{\mu_k} \pm \text{permutations} \right) . \tag{10.2.5}$$

通过直接计算，我们可以推导出Γ矩阵中的下列恒等式：

$$\Gamma_{11} \Gamma^{\mu_1 \ldots \mu_k} = \frac{(-1)^{[\frac{k}{2}]}}{(10-k)!} \epsilon^{\mu_1 \ldots \mu_{10}} \Gamma_{\mu_{k+1} \ldots \mu_{10}} \; , \tag{10.2.6}$$

$$\Gamma^{\mu_1 \ldots \mu_k} \Gamma_{11} = \frac{(-1)^{[\frac{k+1}{2}]}}{(10-k)!} \epsilon^{\mu_1 \ldots \mu_{10}} \Gamma_{\mu_{k+1} \ldots \mu_{10}} \; , \tag{10.2.7}$$

其中，$[x]$确定x的整数部分。于是。

$$\Gamma^\mu \Gamma^{\nu_1 \ldots \nu_k} = \Gamma^{\mu \nu_1 \ldots \nu_k} - \frac{1}{(k-1)!} \eta^{\mu [\nu_1} \Gamma^{\nu_2 \ldots \nu_k]} \, , \tag{10.2.8}$$

$$\Gamma^{\nu_1 \ldots \nu_k} \Gamma^\mu = \Gamma^{\nu_1 \ldots \nu_k \mu} - \frac{1}{(k-1)!} \eta^{\mu [\nu_k} \Gamma^{\nu_1 \ldots \nu_{k-1}]} \, , \tag{10.2.9}$$

其中，方括号定义在封闭指标的所有置换上可选择的求和。两个旋量χ, ϕ的不变Lorentz标量积是$\chi^*_\alpha (\Gamma^0)_{\alpha\beta} \phi_\beta$.

现在，考虑R-R部分的基态。在左边，我们有按约定满足$\Gamma_{11} S = S$的Majorana旋量S_α。在右边，我们有另一个满足$\Gamma_{11} \tilde{S} = \xi \tilde{S}$的Majorana旋量$\tilde{S}_\alpha$，其中，对Type-IIB弦$\xi = 1$和对Type-IIA弦$\xi = -1$。总基态是二者的积。为了表示它，定义下列双旋量场是方便的

$$F_{\alpha\beta} = S_\alpha (i\Gamma^0)_{\beta\gamma} \tilde{S}_\gamma \, . \tag{10.2.10}$$

用这个定义，$F_{\alpha\beta}$是实的，迹$F_{\alpha\beta} \delta^{\alpha\beta}$是Lorentz不变的。在旋量上的手征条件转化成

$$\Gamma_{11} F = F \quad , \quad F \Gamma_{11} = -\xi F \, , \tag{10.2.11}$$

其中，我们已经利用了Γ_{11}是对称的和对Γ^0是反对称的事实。

现在，我们可以把双旋量F展开到反对称Γ的完全集：

$$F_{\alpha\beta} = \sum_{k=0}^{10} \frac{i^k}{k!} F_{\mu_1 \ldots \mu_k} (\Gamma^{\mu_1 \ldots \mu_k})_{\alpha\beta} \, , \tag{10.2.12}$$

其中，$k = 0$项正比于单位矩阵，张量$F_{\mu_1 \ldots \mu_k}$是实的。

现在，我们可以变换利用(10.2.7)的(10.2.11)中的第一个手征条件来得到下列方程：

$$F^{\mu_1 \ldots \mu_k} = \frac{(-1)^{[\frac{k+1}{2}]}}{(10-k)!} \epsilon^{\mu_1 \ldots \mu_{10}} F_{\mu_{k+1} \ldots \mu_{10}} \, . \tag{10.2.13}$$

[17] 在有符号(p,q)的空间中，Majorana和Weyl条件是相容的，只要$|p-q|$是8的倍数。

第二个手征条件意味着

$$F^{\mu_1\cdots\mu_k} = \xi\frac{(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]+1}}{(10-k)!}\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_{10}}F_{\mu_{k+1}\cdots\mu_{10}}\,. \tag{10.2.14}$$

(10.2.13)和(10.2.14)之间的相容性意味着，Type-IIB理论($\xi = 1$)包含奇秩张量(独立的是满足自对偶条件的k=1,3和k=5)和type-IIA理论($\xi = -1$)包含偶秩张量(独立的有k=0,2,4)。在所有情形，独立张量分量的数目总计$16\times 16 = 256$。

象在10.1节提到的，质壳条件意味着双旋量场(10.2.1) 遵守来自G_0和$\bar{G}_0$的两个无质量Dirac方程：

$$(p_\mu\Gamma^\mu)F = F(p_\mu\Gamma^\mu) = 0\ \ . \tag{10.2.15}$$

为了把这些转换到张量方程，我们利用Γ恒等式(10.2.8)和(10.2.9)。一些直接的但是计算后，得到

$$p^{[\mu}F^{\nu_1\ldots\nu_k]} = p_\mu F^{\mu\nu_2\ldots\nu_k} = 0\,, \tag{10.2.16}$$

它是Bianchi恒等式和反对称张量场强的自由无质量方程。我们可以用简便的形式把这些写作

$$dF = d\,{}^*F = 0\,. \tag{10.2.17}$$

解出Bianchi恒等式局部地允许我们把k指标场强表示为$(k-1)$形式势能的外微商

$$F_{\mu_1\ldots\mu_k} = \frac{1}{(k-1)!}\partial_{[\mu_1}C_{\mu_2\ldots\mu_k]}\,, \tag{10.2.18}$$

或者，用简化的记号

$$F_{(k)} = dC_{(k-1)}\,. \tag{10.2.19}$$

从而，type-IIA理论，除一个常数非传播0形式场强外，还有一个矢量(C^μ)和一个3指标张量势($C^{\mu\nu\rho}$)，同时，type-IIB理论有一个0形式(C),一个2形式($C^{\mu\nu}$) 和一个4形式势($C^{\mu\nu\rho\sigma}$)，后者有自对偶场强。在所有情形，物理横向自由度的数目总计$64 = 8\times 8$。

不难看出，在微扰弦谱中，没有在R-R形式下控制的态。首先，分别守恒的左和右Fermion数不允许形式$\langle s|R\overline{R}|s\rangle$的耦合。其次，$R$-$R$顶角算符包含场强，而不是势，运动方程和Bianchi恒等式在一个相等的地位上进入。如果在微扰理论中有电的态，我们还应该有磁的态。

R-R形式有另一个特色。有各种方法来推导出它们与胀子的耦合是奇异的。在微扰理论的第k级，胀子的F^{2m}项的依赖是$e^{(k-1)\Phi}e^{m\Phi}$，而不是NS-NS场的通常的$e^{(k-1)\Phi}$项。例如，在树图水平，二次项独立于胀子。

10.3 Type-I超弦

现在我们将考虑开超弦。有两种可能性：定向的和未定向的开超弦。未定向的开超弦通过用互换两个端点的算符等价开弦而得到。早先讨论了Boson弦情形。我们已经知道，可以在端点添加Chan-Paton因子。在定向情形，我们得到U(N)规范群，而在非定向情

形，我们得到O(N)和Sp(N)规范群。象通常一样，在超弦情形，GSO投影去掉超光子基态，最低Boson态是无质量矢量的集合体。

从Ramond部分，我们将得到规范群伴随矩阵中的Majorana-Weyl旋量。于是，在开弦部分的无质量谱由10维Yang-Mills超多重态组成。在下一章将讨论反常，我们将指出，10维中的Yang-Mills理论对任何规范群都有引力和规范反常。为了得到反常自由的理论，把开弦与适当的闭弦耦合是必要的。唯一反常自由的可能性表明是未定向的O(32)开弦理论。

进行这个构造的现代方法是利用定向流形的概念。定向流形是轨流形概念的推广：随同作用在目标空间上的投影，还有一个在世界叶上的投影。这个投影是在世界叶Ω: $z \leftrightarrow \bar{z}$上或用柱面坐标$\tau, \sigma$: $\sigma \to -\sigma$的方式的定向反演(宇称)算符。因为这个是一个对称性，我们必须从左右对称的闭超弦理论出发。从我们至今已经考虑的Type-IIA,B理论，只有IIB是左右对称的(在左和右的同样的手征Ramond基态)。于是，我们将考虑IIB弦，利用作为投影算符的世界叶宇称算符来构造它的定向流形。象在标准轨流形情形，我们将有一个未扭曲的部分，它包含原始理论的不变态。在我们的情形，首先要找到未扭曲的部分是什么。

在NS-$\overline{NS}$部分，残存的态是引力和一个标量(胀子)。作为左和右振子反对称积的反对称张量被投影出来。在R-$\overline{R}$部分，2指标反对称张量留下了，但是标量和4指标自对偶反对称张量被投影出来。最后，从包含两个Majorana-Weyl引力微子和两个Majorana-Weyl Fermion的Fermion部分，我们只得到它们的一半。于是，整个地，我们有引力，一个标量和反对称张量，以及一个Majorana-Weyl 引力微子和一个Majorana-Weyl Fermion。这是10维中(手征)N=1超引力多重态的内容。总之，定向流形的未扭曲部分是未定向的闭弦。

扭曲的部分是什么？我们通常推广附加周期性条件和轨流形变换来定义它，这里，我们再写出它：

$$X(\sigma + 2\pi) = X(2\pi - \sigma) \tag{10.3.1}$$

以及对Fermion类似。再利用它们满足二维Laplace方程$\partial_\tau^2 - \partial_\sigma^2 = 0$的事实，我们可以证明，有这些边界条件的解可以写成在所有端点满足Neumann边界条件的开弦坐标和满足Dirichlet-Neumann边界条件的开弦坐标的和。它表明，自洽性(蝌蚪图的抵消)要求第二类振子不存在。所有这些的结论是，扭曲的部分就是开超弦。在这种情况下，我们可以把Chan-Paton因子解释为扭曲部分基态的标记。于是，与未扭曲(闭弦)的部分一起，我们得到无质量的部分是耦合到N=1 超Yang-Mills的10维N=1超引力。这是(未定向的)Type-I超弦理论。就象我们后面看到的，反常抵消限制规范群为O(32)。

10.4 杂优超弦

如今，我们已经看到，为了从弦论中去掉鬼场，或者可以利用Virasoro代数(Boson弦)，或者可以利用N=1超共形代数(超弦)。而且，闭弦理论是左右对称的，在某种意义上，类似代数都作用在左和右上。然而，我们可以设想在左上利用Virasoro代数而在右上利

用超共形代数的可能性。

考虑一个弦论，其中，在左边，我们有一定数目的Boson坐标和相等数目的左移动世界叶Fermion。左约束代数将是超弦的约束代数，Weyl反常的取消意味着左移动坐标的数目必须是10。在右移动部分，我们将只包括一定数目的Boson坐标。约束代数将是Virasoro代数，Weyl反常取消意味着右移动坐标的数目是26。放在一起，我们有10个左＋右Boson坐标$X^\mu(z,\bar{z})$，10个左移动Fermion $\psi^\mu(z)$和一个额外的16个右移动坐标$\phi^I(\bar{z})$, $I=1,2,\ldots,16$。X^μ是非紧致的，但是，ϕ^I必须是紧致的(因为模不变性)，必须在某些16维格点上取值。为了去掉超光子，我们还将在左上附加通常的GSO投影，即$(-1)^F=-1$。这里，我们将有两个部分由左移动Fermion生成：NS部分(时空Boson)和R(时空Boson)。还有10个非紧致时空维数，ϕ^I是紧致(“内”)坐标。

我们将尝试计算在这种情形(光锥规范)的单圈图配分函数。8个横向非紧致Boson象通常一样贡献$(\sqrt{\tau_2}\eta\bar{\eta})^{-8}$。左移动Fermion贡献(由于GSO投影)$\chi_V-\chi_S$。最后，右移动紧致Boson ϕ^I的贡献通过取环面CFT的右移动部分(7.1.38) 来得到：

$$Z_{\rm compact}(\bar{q})=\sum_{L_{16}}\frac{\bar{q}^{\frac{\vec{p}_R^{\,2}}{2}}}{\bar{\eta}^{16}}=\frac{\bar{\Gamma}_{16}(\bar{q})}{\bar{\eta}^{16}}\,, \tag{10.4.1}$$

其中，$\vec{p}_R$是格点矢量。综合在一起，我们得到

$$Z^{\rm heterotic}=\frac{1}{(\sqrt{\tau_2}\eta\bar{\eta})^8}\,\frac{\bar{\Gamma}_{16}}{\bar{\eta}^{16}}\,\frac{1}{2}\sum_{a,b=0}^{1}(-1)^{a+b+ab}\frac{\vartheta[{}^a_b]^4}{\eta^4}\,. \tag{10.4.2}$$

为了使$Z^{\rm heterotic}$是模不变的，格点和$\bar{\Gamma}_{16}$在$\tau\to\tau+1$ 下必须不变，它意味着格点必须是偶数的($\vec{p}_R^{\,2}$ =偶数)。它还必须如下变换

$$\tau\to-\frac{1}{\tau}\quad:\quad\bar{\Gamma}_{16}\to\bar{\tau}^8\,\bar{\Gamma}_{16}\,, \tag{10.4.3}$$

它意味着格点是自对偶的(格点的对偶与格点本身吻合)。满足上面要求的有两个16维格点：

• $\mathrm{E}_8\times\mathrm{E}_8$格点。这是群$\mathrm{E}_8\times\mathrm{E}_8$的根格点。$\mathrm{E}_8$的根由O(16)的根$\vec{\epsilon}_{ij}$和O(16)的旋量权重组成，O(16)的根是8维矢量，在位置i为±1，在位置j为±1，其它地方为0，O(16)的旋量权重是$\vec{\epsilon}^{\,s}_\alpha=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_8)/2$, $\alpha=1,2,\cdots,128$，有$\zeta_i=\pm1$和$\sum_i\zeta_i=0$ mod (4)。根的平方的长度等于2。一个一般的格点矢量可以写作$\sum_{i<j}n_{ij}\vec{\epsilon}_{ij}+\sum_\alpha m_\alpha\vec{\epsilon}^{\,s}_\alpha$,其中$n_{ij},m_\alpha\in Z$。格点和可以用$\vartheta$函数的形式写作

$$\bar{\Gamma}_{\mathrm{E}_8\times\mathrm{E}_8}=(\bar{\Gamma}_8)^2=\left[\frac{1}{2}\sum_{a,b=0,1}\bar{\vartheta}[{}^a_b]^8\right]^2=1+2\cdot240\;\bar{q}+\mathcal{O}(\bar{q}^2)\,. \tag{10.4.4}$$

把它与振子结合，我们观察到，有$\bar{L}_0=1$的$2\cdot240+16=2\cdot248$ 个态，它形成$\mathrm{E}_8\times\mathrm{E}_8$的伴随表示。事实上，这个左移动理论实现了在能级1的$\mathrm{E}_8\times\mathrm{E}_8$的流代数。唯一的可积表示是真空表示，真空以上第一个非平庸的态由流模式$\bar{J}^a_{-1}$生成。

• O(32)/Z_2格点。这是被两个旋量权重其中之一扩张的O(32)的根格点。O(32)的根是$\vec{\epsilon}_{ij}$，它是16维矢量，在位置i有一个±1，在位置j有一个±1，其余为0。旋量权重是$\vec{\epsilon}^{\,s}_{\alpha} = (\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_{16})/2$，$\alpha = 1, 2, 3, \cdots, 2^{16}$，其中$\zeta_i = \pm 1$和$\sum_i \zeta_i = 0 \bmod (4)$。根的平方长度等于2。一般格点矢量是$\sum_{i<j} n_{ij}\vec{\epsilon}_{ij} + \sum_\alpha m_\alpha \vec{\epsilon}^{\,s}_{\alpha}$, with $n_{ij}, m_\alpha \in Z$。格点和可以写作

$$\bar{\Gamma}_{\mathrm{O}(32)/\mathrm{Z}_2} = \frac{1}{2}\sum_{a,b=0,1} \bar{\vartheta}[{}^{a}_{b}]^{16} = 1 + 480\ \bar{q} + \mathcal{O}(\bar{q}^2)\,. \tag{10.4.5}$$

这个理论在能级1有一个O(32)右移动流代数。参与的可积表示是真空和旋量，在$\bar{L}_0 = 1$的态还来自流模式$\bar{J}^a_{-1}$。旋量基态有$\bar{L}_0 = 2$。

所有的右移动流理论也可以从32个右移动Fermion $\bar{\psi}^i$, $i = 1, 2, \ldots, 32$来构造。我们将从O(32)/Z_2理论出发。流

$$\bar{J}^{ij} = i\bar{\psi}^i\bar{\psi}^j \tag{10.4.6}$$

形成能级1的O(32)流代数。在Ramond部分，所有Fermion是周期的，在这种情形，O(32)不变性不破缺，我们得到两个O(32)的旋量S, C。最后，附加类GSO投影$(-1)^F = 1$保留在NS部分的真空表示和在R部分的一个旋量。

对$\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8$理论，我们将对两组16个Fermion考虑各自的周期或反周期条件。在这种情形，O(32)不变性被破缺到$\mathrm{O}(16) \times \mathrm{O}(16)$。然而，在Ramond部分，我们得到$\bar{L}_0 = 1$的一个O(16)旋量。这个旋量与O(16)的伴随矩阵结合，形成E_8的伴随矩阵。

现在我们可以描述杂优弦论的无质量谱(光锥规范)。在NS部分，这个约束是

$$L_0 = \frac{1}{2} \quad , \quad \bar{L}_0 = 1\,. \tag{10.4.7}$$

再考虑GSO投影，我们得到，没有超光子，无质量态是$\psi^i_{-1/2}\bar{a}^j_{-1}|p\rangle$，它给出引力，反对称张量和胀子，以及$\psi^i_{-1/2}\bar{J}^a_{-1}|p\rangle$，它给出在$\mathrm{G} = \mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8$或O(32)的伴随表示中的矢量。

在R部分，独立约束是

$$G_0 = 0 \quad , \quad \bar{L}_0 = 1\,, \tag{10.4.8}$$

与GSO条件一起，它给出一个Majorana-Weyl引力微子，一个Majorana-Weyl Fermion，和一组在规范群G的伴随表示中Majorana-Weyl Fermion。理论在10维中有N=1超对称性，在无质量能级包含超引力多重态和在G的伴随表示中的矢量超多重态。还有，理论是手性的。

在10维中，我们可以构造另一个有兴趣的杂优理论。这可以作为$\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8$理论的$Z_2$轨流形而得到。我们将利用的第一个对称性是$(-1)^F$。在两个$\mathrm{E}_8$的每一个，还有一个对称性，它保持O(16)子群的矢量不变，改变O(16)旋量的符号。我们将称分别作用在第一和第二个E_8的这个对称生成元$\mathcal{S}_i$, $i = 1, 2$。Z_2元素是$(-1)^{F+1}\ \mathcal{S}_1\ \mathcal{S}_2$，我们通过它来轨流形化。我们将构造轨流形块。在左移动世界叶Fermion部分，只有$(-1)^{F+1}$非平庸地作用。利用(6.11.26)和(6.11.42)，我们可以看到$(-1)^{F+1}$象单位元一样作用在矢量上，象-1作用在旋量上。扭曲的块是

$$Z_{\mathrm{fermions}}[{}^{h}_{g}] = \frac{1}{2}\sum_{a,b=0}^{1} (-1)^{a+b+ab+ag+bh+gh}\ \frac{\vartheta^4[{}^{a}_{b}]}{\eta^4}\,. \tag{10.4.9}$$

在每一个E_8，非平庸投影是$\mathcal{S}_i$，它给出下列轨流形块

$$\bar{Z}_{E_8}\begin{bmatrix}h\\g\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\sum_{\gamma,\delta=0}^{1}(-1)^{\gamma g+\delta h}\,\frac{\bar{\vartheta}^8\begin{bmatrix}\gamma\\\delta\end{bmatrix}}{\bar{\eta}^8}\,. \tag{10.4.10}$$

总配分函数是

$$Z^{\text{heterotic}}_{\mathrm{O}(16)\times\mathrm{O}(16)} = \frac{1}{2}\sum_{h,g=0}^{1}\frac{\bar{Z}_{E_8}\begin{bmatrix}h\\g\end{bmatrix}^2}{(\sqrt{\tau_2}\eta\bar{\eta})^8}\,\frac{1}{2}\sum_{a,b=0}^{1}(-1)^{a+b+ab+ag+bh+gh}\,\frac{\vartheta^4\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}}{\eta^4}\,. \tag{10.4.11}$$

练习：证明(10.4.11)是模不变的。再证明它描写规范群为$\mathrm{O}(16)\times\mathrm{O}(16)$的10维理论，得到无质量谱。这个理论是超对称的吗？

练习：为了构造10维杂优理论的配分函数，我们一般需要左移动的O(8)特征标和内部右移动部分的秩为16、能级为1的流代数的特征标。(Boson 贡献总是一样的。) 首先考虑G=O(32)情形。把最一般的作用量写作特征标的配分函数，再附加下列约束：

- 真空贡献归一化到1。
- 模不变性。
- 正确的自旋统计关系。
- 没有超光子。

你找到多少理论？超对称性是多少？

对$\mathrm{G}=\mathrm{E}_8\times\mathrm{O}(16)$和$\mathrm{O}(16)\times\mathrm{O}(16)$重复上面的程序。

10.5 超弦顶角算符

与Boson弦类似，顶角算符必须是超共形代数的原态。利用手征超场语言(见(6.12.12), (6.12.13))，其中，

$$\hat{X}^\mu(z,\theta) = X^\mu(z) + \theta\psi^\mu(z)\,. \tag{10.5.1}$$

左移动顶角算符可以写作形式：

$$\int dz\ \int d\theta\ V(z,\theta) = \int dz\ \int d\theta\ (V_0(z)+\theta V_{-1}(z)) = \int dz\ V_{-1}\,. \tag{10.5.2}$$

V_0的共形权重是$\frac{1}{2}$，而V_{-1}的是1。V_{-1}的积分有共形权重0。对无质量时空Boson，顶角算符是

$$V^{\text{boson}}(\epsilon,p,z,\theta) = \epsilon_\mu :D\hat{X}^\mu\ e^{ip\cdot\hat{X}}\ :, \tag{10.5.3}$$

$$V_0^{\text{boson}} = \epsilon_\mu\psi^\mu e^{ip\cdot X}\quad,\quad V_{-1}^{\text{boson}}(\epsilon,p,z) = \epsilon_\mu :(\partial X^\mu + ip\cdot\psi\ \psi^\mu)e^{ip\cdot X}:, \tag{10.5.4}$$

其中，$\epsilon \cdot p = 0$。在协变图像中，这个顶角算符变成

$$V_{-1}^{\rm boson}(\epsilon, p, z) = [Q_{\rm BRST}, \xi(z) e^{-\phi(z)} \epsilon \cdot \psi \; e^{ip\cdot X}] \,. \tag{10.5.5}$$

时空Fermion顶角算符只能在协变公式中构造。对无质量态，它们有形式

$$V_{-1/2}^{\rm fermion}(u, p, z) = u^\alpha(p) : e^{-\phi(z)/2} \; S_\alpha(z) \; e^{ip\cdot X} : , \tag{10.5.6}$$

ϕ是来自β, γ超共形鬼场的Boson化的Boson，$e^{-\phi/2}$是共形权重为3/8的β, γ体系的自旋场(见6.15节)，S_α是共形权重为5/8的Fermion ψ^μ(见6.11节)，它形成$O(10)_1$流代数。下标$-1/2$表示ϕ荷。$V_{-1/2}$的总共形权重是1。最后，u^α是一个满足无质量Dirac方程$\not{p} u = 0$的旋量。

在必须处理β, γ体系的Fermion弦情形，有一个微妙之处。就象我们已经看到的，在Boson化形式中，背景荷的出现改变荷中性条件[18]。这与超模或超Killing旋量有关。于是，依赖于相关函数和曲面，对于有不同ϕ荷的给定物理态的顶角算符，我们必须有不同的表示。这可以按照下列方法进行。考虑ϕ荷为q, V_q的物理顶角算符。它是BRST不变的，$[Q_{\rm BRST}, V_q] = 0$。我们可以构造表示同样物理态的物理顶角算符，但是当$V_{q+1} = [Q_{\rm BRST}, \xi V_q]$时，荷为$q+1$，因为$Q_{\rm BRST}$携带荷1。因为它是BRST交换子，$V_{q+1}$也是BRST不变的。然而，我们已经看到，物理态的BRST交换子的态是伪造的。在这种情形，因为ξ场出现在交换子中，它的零模式在鬼场Hilbert空间外面，这个被避免。不同的ϕ荷在文献中通常称为图像。对Fermion顶角的$\frac{1}{2}$图像可以计算出，为

$$\begin{aligned} V_{1/2}^{\rm fermion}(u, p) &= [Q_{\rm BRST}, \xi(z) V_{-1/2}^{\rm fermion}(u, p, z)] \\ &= u^\alpha(p) e^{\phi/2} S_\alpha e^{ip\cdot X} + \cdots , \end{aligned} \tag{10.5.7}$$

其中，省略号包括对四点振幅没有贡献的项。10维时空超对称荷可以从在零动量的Fermion顶角来构造

$$Q_\alpha = \frac{1}{2\pi i} \oint dz \; : e^{-\phi(z)/2} \; S_\alpha(z) \,. \tag{10.5.8}$$

它把Fermion变换到Boson，反之亦然

$$[Q_\alpha, V_{-1/2}^{\rm fermion}(u, p, z)] = V_{-1}^{\rm boson}(\epsilon^\mu = u^\beta \gamma^\mu_{\beta\alpha}, p, z) \,, \tag{10.5.9}$$

$$[Q_\alpha, V_0^{\rm boson}(\epsilon, p, z)] = V_{-1/2}^{\rm fermion}(u^\beta = ip^\mu \epsilon^\nu (\gamma_{\mu\nu})^\beta_\alpha, p, z) \,. \tag{10.5.10}$$

对超对称荷也有各种图像。

10.6 超对称有效作用量

如今我们已经看到，在10维中，有下列时空超对称弦论。

- Type-I理论(手性)，有N=1超对称性和规范群O(32)。

[18]在(6.4.10)给出荷中性条件。它声称，在非零相关函数中，顶角算符的荷的总和必须等于零。

- 杂优理论(手性)，有N=1超对称性和规范群O(32)和$E_8\times E_8$。
- Type-IIA理论(无手性)，有N=2超对称性。
- Type-IIB理论(手性)，有N=2超对称性。

我们想找到描写无质量场动力学的有效场论。一个直接的方法是我们在Boson情形采用的，即或者从散射振幅中提取出它们，或者在一般的背景场中要求相应σ模型的Weyl不变性。然而，由于超对称性的出现，这些有效作用量唯一被固定。在70年代后期和80年代早期，它们已经象超引力理论一样被构造。

首先，我们想在领头阶近似得到低能有效作用量。当只有Boson场出现时，我们只必须保留到二次微商的项。然而，由于Fermion的出现，我们想修改一点计数规则，使得Boson的动力学项$\phi\Box\phi$和Fermion的$\bar\psi\not\partial\psi$在低能重要性相同。我们将对Boson给出权重0，对Fermion为1和对微商为1。于是，所有的动能项有同样的权重，即2。这些权重也可以用超对称(SUSY)来考虑，可以直接从一般的SUSY变换来验证

$$\delta_\epsilon\phi\sim\phi^m\ \psi\epsilon\quad,\quad\delta_\epsilon\psi\sim\partial\phi^m\ \epsilon+\phi^m\ \psi^2\epsilon\,. \tag{10.6.1}$$

在领头阶的作用量权重必须为2，对所有超引力作用量这是正确的。

在10维中，为了只有自旋不大于2的无质量场，我们必须限制到$N\leq 2$ SUSY。

我们将首先考虑N=1超对称性。有两个无质量超对称表示(超多重态)。矢量多重态包含一个矢量(A_μ)和一个Majorana-Weyl Fermion(χ_α)。超引力多重态包含引力($g_{\mu\nu}$)，反对称张量($B_{\mu\nu}$)和一个标量ϕ(胀子)，以及一个Majorana-Weyl引力微子(ψ^μ_α)和一个Majorana-Weyl Fermion(λ_α)。耦合到超Yang-Mills的N=1超引力的有效作用量被超对称固定，剩下的唯一选择是规范群。超Yang-Mills作用量是(缺少引力时)

$$L_{\rm YM}=-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a,\mu\nu}-\bar\chi^a\Gamma^\mu D_\mu\chi^a\,, \tag{10.6.2}$$

其中，

$$F^a_{\mu\nu}=\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu+gf^a{}_{bc}A^b_\mu A^c_\nu\,, \tag{10.6.3}$$

$$D_\mu\chi^a=\partial_\mu\chi^a+gf^a{}_{bc}A^b_\mu\chi^c \tag{10.6.4}$$

和g是Yang-Mills耦合常数。纯N=1超引力作用量是

$$\begin{aligned}L^{N=1}_{\rm SUGRA}\ =\ &-\frac{1}{2\kappa^2}R-\frac{3}{4}\phi^{-3/2}H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho}-\frac{9}{16\kappa^2}\frac{\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi}{\phi^2}-\frac{1}{2}\bar\psi^\mu\Gamma^{\mu\nu\rho}\nabla_\nu\psi_\rho-\\&-\frac{1}{2}\bar\lambda\Gamma^\mu\nabla_\mu\lambda-\frac{3\sqrt{2}}{8}\frac{\partial_\nu}{\phi}\bar\psi^\mu\Gamma^\nu\Gamma^\mu\lambda+\frac{\sqrt{2}\kappa}{16}\phi^{-3/4}H_{\nu\rho\sigma}\Big[\bar\psi_\mu\Gamma^{\mu\nu\rho\sigma\tau}\psi_\tau+\\&+6\bar\psi^\nu\Gamma^\rho\psi^\sigma-\sqrt{2}\bar\psi_\mu\Gamma^{\nu\rho\sigma}\Gamma^\mu\lambda\Big]+({\rm Fermi})^4\,,\end{aligned} \tag{10.6.5}$$

其中，κ是Newton常数，$\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_n}$是$\Gamma$矩阵的完全反对称积，$H_{\mu\nu\rho}$由(9.8)给出，我们没有明确写出包含四个Fermion的项。

两个作用量可以被耦合到一起

$$L^{N=1}_{\rm SUGRA+YM}=L^{N=1}_{\rm SUGRA}{}'+\phi^{-3/4}\ L'_{\rm YM}\,. \tag{10.6.6}$$

在Yang-Mills作用量中的撇意味着协变微商选择包含自旋联络。在超引力上的撇意味着我们必须修改场强B的定义：

$$\hat{H}_{\mu\nu\rho} = H_{\mu\nu\rho} - \frac{\kappa}{\sqrt{2}}\omega^{CS}_{\mu\nu\rho}\,, \tag{10.6.7}$$

其中，Chern-Simons项是

$$\omega^{CS}_{\mu\nu\rho} = A^a_\mu F^a_{\nu\rho} - \frac{g}{3} f_{abc} A^a_\mu A^b_\nu A^c_\rho + \text{cyclic}\,. \tag{10.6.8}$$

这个修改意味着，为了整个理论是规范不变的，反对称张量在规范变换$\delta A \to d\Lambda + [A,\Lambda]$下必须如下变换

$$\delta B = \frac{\kappa}{\sqrt{2}}\text{Tr}[\Lambda dA]\,, \tag{10.6.9}$$

使得修改后的场强$\hat{H}$是不变的。

因为组合g^4/κ^3是无维数的，可以通过场ϕ的重新标度变成1，所有理论只包含一个单一的参数。

当我们有两个超对称性时，只有两种可能性：

• Type-IIA 超引力。这是10维Type-IIA超弦的低能极限。它包含一个N=2超对称的单个超多重态，其中包括了引力($g_{\mu\nu}$)，一个反对称张量($B_{\mu\nu}$)，一个标量ϕ (胀子)，一个矢量A_μ和一个3指标反对称张量$C_{\mu\nu\rho}$；以及一个Majorana引力微子(ψ^μ_α)和一个Majorana Fermion (λ_α)。超引力作用量是完全固定的，可以从11维N=1超引力[31]的维数约化得到，这个11维超引力包含11维度量$G_{\mu\nu}$和一个3指标反对称张量$\hat{C}_{\mu\nu\rho}$。作用量是

$$\begin{aligned} L^{D=11} &= \frac{1}{2\kappa^2}\left[R - \frac{1}{2\cdot 4!}G_4^2\right] - i\bar{\psi}_\mu\Gamma^{\mu\nu\rho}\tilde{\nabla}_\nu\psi_\rho + \frac{1}{2\kappa^2(144)^2}G_4\wedge G_4\wedge\hat{C} + \\ &\quad + \frac{1}{192}\left[\bar{\psi}_\mu\Gamma^{\mu\nu\rho\sigma\tau\upsilon}\psi_\upsilon + 12\bar{\psi}^\nu\Gamma^{\rho\sigma}\psi^\tau\right](G+\hat{G})_{\nu\rho\sigma\tau}\,, \end{aligned} \tag{10.6.10}$$

其中，$\tilde{\nabla}$关于联络$(\omega+\tilde{\omega})/2$来定义，$\omega$是自旋联络，同时

$$\tilde{\omega}_{\mu,ab} = \omega_{\mu,ab} + \frac{i\kappa^2}{4}\left[-\bar{\psi}^\nu\Gamma_{\nu\mu ab\rho}\psi^\rho + 2(\bar{\psi}_\mu\Gamma_b\psi_a - \bar{\psi}_\mu\Gamma_a\psi_b + \bar{\psi}_b\Gamma_\mu\psi_a)\right] \tag{10.6.11}$$

是超协变化。最后，G_4是$\hat{C}$的场强，

$$G_{\mu\nu\rho\sigma} = \partial_\mu\hat{C}_{\nu\rho\sigma} - \partial_\nu\hat{C}_{\rho\sigma\mu} + \partial_\rho\hat{C}_{\sigma\mu\nu} - \partial_\sigma\hat{C}_{\mu\nu\rho} \tag{10.6.12}$$

和$\tilde{G}_4$是它的超协变化

$$\tilde{G}_{\mu\nu\rho\sigma} = G_{\mu\nu\rho\sigma} - 6\kappa^2\bar{\psi}_{[\mu}\Gamma_{\nu\rho}\psi_{\sigma]}\,. \tag{10.6.13}$$

经过维数约化，11维度量给出如下一个10维度量，一个规范场和一个标量(见附录C)：

$$G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + e^{2\sigma}A_\mu A_\nu & e^{2\sigma}A_\mu \\ e^{2\sigma}A_\mu & e^{2\sigma} \end{pmatrix}\,. \tag{10.6.14}$$

3形式$\hat{C}$给出10维中的一个3形式和2形式

$$C_{\mu\nu\rho} = \hat{C}_{\mu\nu\rho} - \left(\hat{C}_{\nu\rho,11}A_\mu + \text{cyclic}\right) \quad , \quad B_{\mu\nu} = \hat{C}_{\mu\nu,11} \; . \tag{10.6.15}$$

利用附录C的公式，10维作用量可以直接从11维作用量得到。对Boson部分，我们得到

$$\begin{aligned} S^{IIA} &= \frac{1}{2\kappa^2}\int d^{10}x\sqrt{g}e^{\sigma}\left[R - \frac{1}{2\cdot 4!}\hat{G}^2 - \frac{1}{2\cdot 3!}e^{-2\sigma}H^2 - \frac{1}{4}e^{2\sigma}F^2\right] + \\ &+ \frac{1}{2\kappa^2(48)^2}\int B\wedge G\wedge G \; , \end{aligned} \tag{10.6.16}$$

其中，

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad , \quad H_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu B_{\nu\rho} + \text{cyclic} \; , \tag{10.6.17}$$

$$\hat{G}_{\mu\nu\rho\sigma} = G_{\mu\nu\rho\sigma} + (F_{\mu\nu}B_{\rho\sigma} + 5 \;\; \text{permutations}) \; . \tag{10.6.18}$$

这是在Einstein标架中的Type-IIA有效作用量。我们可以通过$g_{\mu\nu} \to e^{-\sigma}g_{\mu\nu}$变到弦标架。10维胀子是$\Phi = 3\sigma$。作用量是

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{10} &= \frac{1}{2\kappa^2}\int d^{10}x\sqrt{g}e^{-\Phi}\left[\left(R + (\nabla\Phi)^2 - \frac{1}{12}H^2\right) - \frac{1}{2\cdot 4!}\hat{G}^2 - \frac{1}{4}F^2\right] + \\ &+ \frac{1}{2\kappa^2(48)^2}\int B\wedge G\wedge G \, . \end{aligned} \tag{10.6.19}$$

注意，在树图水平，R-R场A_μ和$C_{\mu\nu\rho}$的动能项不依赖于胀子，就象在10.2节选择的一样。

• Type-IIB 超引力。它包含引力($g_{\mu\nu}$)，两个反对称张量($B^i_{\mu\nu}$)，两个标量ϕ^i，一个自对偶4指标反对称张量T^+ 两个Majorana-Weyl引力微子和两个同样手性的Majorana-Weyl Fermion。联络是手征的，但是反常自由，就象我们将看到的。自对偶条件意味着4形式场强F等于它的对偶。这个方程不能从协变作用量得到。从而，对Type-IIB超引力，我们可以做的最好是写出运动方程[32]。

在这个理论中，有一个SL(2,$\mathbb{R}$)全局不变性，它变换反对称张量和标量二重态(度量和4形式是不变的)。我们将用ϕ表示来自$(NS-NS)$部分的胀子，用χ表示来自R-R 部分的标量。定义复标量

$$S = \chi + ie^{-\phi/2} \, . \tag{10.6.20}$$

于是，SL(2,$\mathbb{R}$)通过分数变换作用在S和线性地作用在B^i上

$$S \to \frac{aS+b}{cS+d} \quad , \quad \begin{pmatrix} B^N_{\mu\nu} \\ B^R_{\mu\nu} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B^N_{\mu\nu} \\ B^R_{\mu\nu} \end{pmatrix} \; , \tag{10.6.21}$$

其中，a,b,c,d是实的，有$ad-bc=1$。B^N是NS-NS反对称张量，同时，B^R是R-R反对称张量。当我们设定4形式为0时，其余的运动方程可以从下列作用量得到

$$S^{IIB} = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^{10}x\sqrt{-\det g}\left[R - \frac{1}{2}\frac{\partial S\partial\bar{S}}{S_2^2} - \frac{1}{12}\frac{|H^R + SH^N|^2}{S_2}\right] \; , \tag{10.6.22}$$

其中，H是反对称张量的场强。(10.6.22)是明显SL(2,$\mathbb{R}$)不变的。

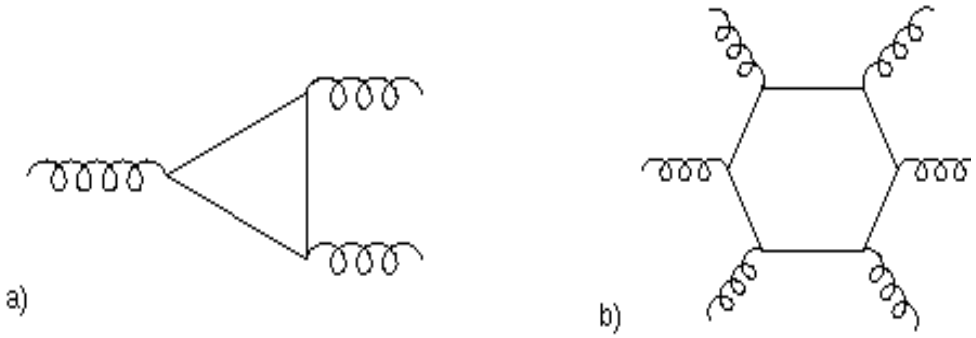


Figure 14: a) 在4维中的三角反常。b) 在10维中的反常六角图。

11 反常

反常就是在量子理论中经典对称性的破缺。两种对称性可以有反常，全局的或定域(规范)的对称性。下面，我们将对定域对称性的反常感兴趣。如果一个定域对称性有反常，这意味着径向自由度不再退耦。这预示有幺正性的问题。在二维，反常不是致命的。手征Schwinger模型(耦合到无质量Fermion的U(1)规范理论)的例子表明，可以包括一个额外的自由度，得到一个自洽的理论。然而，我们仍然不知道在大于二维怎样实现这个程序。于是，我们将附加上反常的不存在这个约束。

考虑理论的物理有效作用量，它包含规范场以及度量$\Gamma^{\rm eff}[A_\mu, g_{\mu\nu}, \ldots]$。规范流和能动量张量是

$$J^\mu = \frac{\delta\Gamma^{\rm eff}}{\delta A_\mu} \quad , \quad T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\Gamma^{\rm eff}}{\delta g_{\mu\nu}} \, . \tag{11.1}$$

在规范变换$\delta_\Lambda A = [a, \Lambda]$下，有效作用量的变分是

$$\delta_\Lambda\Gamma^{\rm eff} = {\rm Tr}\int \; D_\mu\Lambda \; \frac{\delta\Gamma^{\rm eff}}{\delta A_\mu} = {\rm Tr}\int \; \Lambda \; D_\mu\frac{\delta\Gamma^{\rm eff}}{\delta A_\mu} = \int \; Tr \; [\Lambda \; D_\mu J^\mu] \, , \tag{11.2}$$

其中，我们已经利用了部分积分。因此，当且仅当$D_\mu J^\mu \neq 0$，在规范对称性中有一个反常。在微分同胚下，类似的讨论可以应用到不变性。

$$\delta_{diff}\Gamma^{\rm eff} = \int \; (\nabla^\mu\epsilon^\nu + \nabla^\nu\epsilon^\mu)\frac{\delta\Gamma^{\rm eff}}{\delta g_{\mu\nu}} = \int \epsilon^\mu \nabla_\nu T^{\mu\nu} \, . \tag{11.3}$$

于是，引力反常意味着在量子理论中应力张量的不守恒。

在场论中，由于UV问题，反常出现了。考虑在四维中的著名三角图(Fig. 14a)。它是表观线性发散的，规范不变性把它约化到指数发散。如果在圈图周围的Fermion是非手性的，我们可以利用Pauli-Villars规制化来规制这个图，可以简单地证明出，当一个规范场极化是径向的时，图消失。在这种情形，没有反常。然而，如果Fermion是手性的，Pauli-Villars规制化(或其它规制化)将破坏规范不变性，当规制子质量趋于无穷时，它不复原。

在10维中，可以对反常给出贡献的领头图是在Fig. 14b中描出的六角图。外线可以是规范Boson或引力子。可以证明，图的唯一完全对称的部分对反常给出一个非平庸的贡

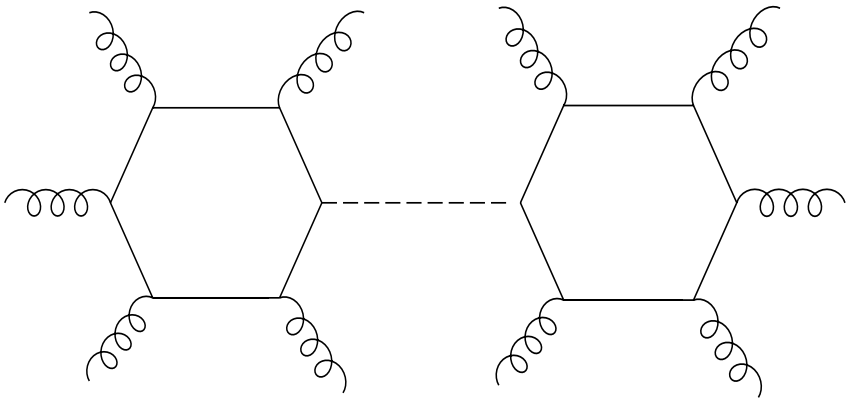


Figure 15: 有物理外线的二圈图，含有径向模式传播

献。非对称的贡献可以被局域相反项抵消。如果当一个外线是径向的时图是非零的，那么这将意味着非物理的极化将在Fig. 15的二圈图中传播。

我们将考虑线性近似，它与领头六角图有关：$F = F_0 + A^2, F_0 = dA$和$A \to A + d\Lambda$。这里，Λ是规范参数矩阵(0形式)。由于在外线中的规范场的六角图，反常有以下一般形式

$$\delta\Gamma|_{\text{gauge}} \sim \int d^{10}x \ \left[c_1 \text{Tr}[\Lambda F_0^5] + c_2 \text{Tr}[\Lambda F_0]\text{Tr}[F_0^4] + c_3 \text{Tr}[\Lambda F_0](Tr[F_0^2])^2\right] , \tag{11.4}$$

其中，形式的幂可以理解为外积。作为比较，四维中类似表达式正比于$\text{Tr}[\Lambda F_0^2]$。三个不同系数c_i对应于在对称群迹中的给定群生成元的三个群不变量$\text{Tr}[T^6], \text{Tr}[T^4]Tr[T^2]$和$(\text{Tr}[T^2])^3$。对引力反常，有类似的结果，其中，$F$的作用由O(D)2形式$R^{ab}_{\mu\nu} = e^a_\rho e^b_\sigma R^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu}$来代替。矩阵值2形式$R$由$R^{ab}$与O(D)的伴随矩阵$T^{ab}$的乘积而得到。它可以用自旋联络1形式$\omega$的方式写作$R = d\omega + \omega^2$。

考虑有引力外线的反常图，我们得到

$$\delta\Gamma|_{\text{grav}} \sim \int d^{10}x \ \left[d_1 Tr[\Theta R_0^5] + d_2 \text{Tr}[\Theta R_0]\text{Tr}[R_0^4] + d_3 \text{Tr}[\Theta R_0](\text{Tr}[R_0^2])^2\right] . \tag{11.5}$$

最好，通过考虑一些外线是规范Boson和一些外线是引力子，我们得到混合的反常

$$\begin{aligned}\delta\Gamma|_{\text{mixed}} \ \sim \ & \int d^{10}x \ \left[e_1 \text{Tr}[\Lambda F_0]\text{Tr}[R_0^4] + e_2 \text{Tr}[\Theta R_0]\text{Tr}[F_0^4] + \right. \\ & \left. + e_3 \text{Tr}[\Theta R_0](\text{Tr}[F_0^2])^2 + e_4 \text{Tr}[\Lambda F_0](\text{Tr}[R_0])^2\right] .\end{aligned} \tag{11.6}$$

还有另一个势能项$\text{Tr}[\Lambda F_0]\text{Tr}[F_0^2]\text{Tr}[R_0^2]$，但是它可以用局域相反项抵消。

有一个几何规则，它从领头线性部分提供了整个反常(更完整的讨论见[5], p. 343)。首先，反常满足所谓的Wess-Zumino自洽条件，它反映了规范变换的群结构。取$G(\Lambda) = \delta\Gamma/\delta\lambda$。于是，

$$\delta_{\Lambda_1} G(\Lambda_2) - \delta_{\Lambda_2} G(\Lambda_1) = G([\Lambda_1, \Lambda_2]) . \tag{11.7}$$

在规范变换和微分同胚下，场强按如下变换

$$\delta F = [F, \Lambda] \quad , \quad \delta R = [R, \Theta] \, . \tag{11.8}$$

直接证明迹$\mathrm{Tr}[R^m]$, $\mathrm{Tr}[F^m]$是规范不变和闭的：

$$d \ \mathrm{Tr}[R^m] = d \ \mathrm{Tr}[F^m] = 0 \, . \tag{11.9}$$

还有，对偶数m，迹是非零的。为了在D维中规则反常的D形式，我们从最一般的规范不变和闭的$(D+2)$ 形式$I^{D+2}(R,F)$开始，它可以写作F, R偶迹的积的线性组合。因为I^{D+2}是闭的，它可以(局域)被写作

$$I^{D+2}(R,F) = d\Omega^{D+1}(\omega, A) \, , \tag{11.10}$$

其中，$(D+1)$形式Ω^{D+1}不再规范不变，但是在规范变换下按如下变换

$$\delta_\Lambda \Omega^{D+1}(\omega, A) = d\Omega^D(\omega, A, \Lambda) \, . \tag{11.11}$$

I^{D+2}是规范不变的事实要求这样。最后，D反常是在Λ中Ω^D线性的部分。

除了正比于$\mathrm{Tr}\Lambda F_0^5$和$\mathrm{Tr}[\Theta R_0^5]$的规范反常的不可约部分，其余的可以抵消，如果它出现在合适的线性组合中。这称为Green-Schwarz机制。

假定反常的可约部分按如下分解

$$\begin{aligned} \delta\Gamma|_{\mathrm{reduc}} \ \sim \ & \int d^{10}x \ \left(\mathrm{Tr}[\Lambda F_0] + \mathrm{Tr}[\Theta R_0]\right) \Big(a_1 \mathrm{Tr}[F_0^4] + a_2 \mathrm{Tr}[R_0^4] + \\ & + a_3 (\mathrm{Tr}[F_0^2])^2 + a_4 (\mathrm{Tr}[R_0^2])^2 + a_5 Tr[F_0^2] \mathrm{Tr}[R_0^2] \Big) \, . \end{aligned} \tag{11.12}$$

我们已经看到，在N=1超引力中，反对称张量的场强被规范Chern-Simons形式改变。我们还可以添加引力Chern-Simons形式(它将贡献4个微商项)：

$$\hat{H} = dB + \Omega^{CS}(A) + \Omega^{CS}(\omega) \, . \tag{11.13}$$

我们还看到，这个添加使得在规范变换和微分同胚下B形式的变换保持$\hat{H}$不变。因为

$$\delta_\Lambda \Omega^{CS}(A) = d\mathrm{Tr}[\Lambda dA] \quad , \quad \delta_\Theta \Omega^{CS}(\omega) = d\mathrm{Tr}[\Theta d\omega] \tag{11.14}$$

所以，反对称张量必须按如下变换

$$\delta B = -\mathrm{Tr}[\Lambda F_0 + \Theta R_0] \, . \tag{11.15}$$

于是，相反项

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathrm{counter}} \sim \int d^{10}x \ B \ \Big(& a_1 \mathrm{Tr}[F_0^4] + a_2 \mathrm{Tr}[R_0^4] + a_3 (\mathrm{Tr}[F_0^2])^2 + \\ & + a_4 (\mathrm{Tr}[R_0^2])^2 + a_5 \mathrm{Tr}[F_0^2] \mathrm{Tr}[R_0^2] \Big) \end{aligned} \tag{11.16}$$

可以抵消可约的反常。这个机制也可以在理论中存在的一个反对称张量其它维数进行。还可以把这个机制推广到超过一个反对称张量的理论中。这样的理论通过把超弦理论紧致到6维而得到。

哪一类场对反常有贡献？首先，它们必须是无质量的，其次，它们必须是手性的。在偶维中，手征性存在，可以是手性的场是(自旋1/2)Fermion，(自旋3/2) 引力微子和(反)自对偶反对称张量$B_{\mu_1\dots\mu_{D/2-1}}$。它们的场强$F=dB$是(反)自对偶的$D/2$形式

$$F_{\mu_1\dots\mu_{D/2}}=\pm\frac{i}{(D/2)!}\epsilon_{\mu_1\dots\mu_D}F^{\mu_{D/2+1}\dots\mu_D}\,. \tag{11.17}$$

对引力反常的出现，我们必须有Lorentz群O(1,D-1)的手征表示。它们在$D=4k+2$维中存在。对规范反常，我们必须有规范群G的手征表示。这可以在偶数维发生和当规范群允许复表示时。

现在，我们将给出来自各种手征场对反常的贡献。象我们前面讨论的，反常由一个闭的规范不变的(D+2)形式完全表征。通过正交变换，我们可以把$D\times D$反对称紧致变换到下列块对角形式

$$R_0=\begin{pmatrix} 0 & x_1 & 0 & 0 & & \dots & \\ -x_1 & 0 & 0 & 0 & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & & \dots & \\ 0 & 0 & -x_2 & 0 & & \dots & \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & \dots & & & & 0 & x_{D/2} \\ & \dots & & & & -x_{D/2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{11.18}$$

于是，$\mathrm{Tr}[R_0^{2m}]=2(-1)^m\sum_i x_i^{2m}$。一个自旋$\frac{1}{2}$ Fermion对引力反常的贡献由下列给出[34]

$$\hat{I}_{1/2}(R)=\prod_{i=1}^{D/2}\left(\frac{x_i/2}{\sinh(x_i/2)}\right)\,. \tag{11.19}$$

在前面的公式中，我们必须用一个系列来展开它，它包含各种阶的形式；选取(D+2)形式的部分。类似地，我们有对手性引力微子的下列贡献：

$$I_{3/2}(R)=\hat{I}_{1/2}(R)\left(-1+2\sum_{i=1}^{D/2}\cosh(x_i)\right) \tag{11.20}$$

和自对偶张量

$$I_A(R)=-\frac{1}{8}\prod_{i=1}^{D/2}\left(\frac{x_i}{\tanh(x_i)}\right)\,. \tag{11.21}$$

引力微子和自对偶张量对规范或混合反常没有贡献，因为在规范群下，它们不能被控制。然而，自旋1/2的Fermion可以非平庸地变换，它们对反常的总贡献由下列给出

$$I_{1/2}(R,F)=Tr\left[e^{iF}\right]\hat{I}_{1/2}(R)\,. \tag{11.22}$$

假定$D=10$和展开上面的公式，我们得到

$$\begin{aligned} I_{1/2}(R,F)\big|_{12-\text{form}} &= -\frac{\text{Tr}[F^6]}{720}+\frac{Tr[F^4]Tr[R^2]}{24\cdot 48}+ \\ &\quad -\frac{Tr[F^2]}{256}\left(\frac{Tr[R^4]}{45}+\frac{(Tr[R^2])^2}{36}\right)+ \\ &\quad +\frac{n}{64}\left(\frac{Tr[R^6]}{5670}+\frac{Tr[R^2]Tr[R^4]}{4320}+\frac{(Tr[R^2])^3}{10368}\right), \end{aligned}$$

其中，n是自旋3/2Fermion的总数目。

$$\begin{aligned} I_{3/2}(R)\big|_{12-\text{form}} &= -\frac{495}{64}\left(\frac{Tr[R^6]}{5670}+\frac{Tr[R^2]Tr[R^4]}{4320}+\frac{(Tr[R^2])^3}{10368}\right)+ \\ &\quad +\frac{Tr[R^2]}{384}\left(Tr[R^4]+\frac{(Tr[R^2])^2}{4}\right), \end{aligned}$$

$$I_A(R)|_{12-\text{form}}=\hat{I}_{1/2}(R)\big|_{12-\text{form}}-I_{3/2}(R)\big|_{12-\text{form}}. \tag{11.23}$$

上面给出的反常贡献$I_{1/2}$和$I_{3/2}$对应于Weyl Fermion。因为在10维中，我们还有Majorana-Weyl Fermion，它们对反常的贡献是上面的一半。

我们现在验证哪一个10维理论是反常自由的。

没有物质的N=1超引力理论包含一个Majorana-Weyl引力微子和相反手性的自旋$\frac{1}{2}$的Majorana-Weyl Fermion。从上面的公式容易验证，这是反常的。

Type-IIA超引力是没有手性的，于是平庸地反常自由。然而，Type-IIB是手性的，包含对反常贡献$I_{3/2}$的两个Majorana-Weyl 引力微子，贡献$-I_{1/2}$的相反手性的两个Majorana-Weyl Fermion，和贡献$-I_A$的一个自对偶张量。从(11.23)可以看出总反常等于零。

现在，我们将考虑耦合到矢量多重态N=1超引力。规范微子与引力子有同样的手性。总反常是

$$2I^{N=1}=I_{3/2}(R)-I_{1/2}(R)+I_{1/2}(R,F). \tag{11.24}$$

我们至少应要求对应于R^6的F^6的迹的不可约反常抵消。$\text{Tr}[R^6]$不能被写作更低迹的乘积，因为群O(10)有一个独立的阶为6的Casimir。于是，在(11.24)中$\text{Tr}[R^6]$项的系数必须等于零。这意味着$n=496$。因为规范微子在规范群的伴随表示中，它们的数目是规范群的维数。我们得到，对反常抵消的一个必要(但不是充分)条件是$\dim G=496$。在(11.24)中插入$n=496$，我们得到

$$\begin{aligned} 96I^{\text{total}} &= -\frac{\text{Tr}[F^6]}{15}+\frac{\text{Tr}[R^2]\text{Tr}[F^4]}{24}+\frac{\text{Tr}[R^2]\text{Tr}[R^4]}{8}+\frac{(\text{Tr}[R^2])^3}{32}- \\ &\quad -\frac{\text{Tr}[F^2]}{960}\left(4\text{Tr}[R^4]+5(\text{Tr}[R^2])^2\right). \end{aligned} \tag{11.25}$$

从上面，很明显，取消剩余的反常的唯一希望是可以利用Green-Schwarz机制。如果我们可以分解I^{total}，它才可行。这种情况出现当且仅当

$$\text{Tr}[F^6]=\frac{1}{48}\text{Tr}[F^2]\text{Tr}[F^4]-\frac{1}{14400}(\text{Tr}[F^2])^3. \tag{11.26}$$

于是，

$$96I^{\rm total} = \left({\rm Tr}[R^2] - \frac{1}{30}{\rm Tr}[F^2]\right)\ X_8\,, \tag{11.27}$$

有

$$X_8 = \frac{{\rm Tr}[F^4]}{24} - \frac{({\rm Tr}[F^2])^2}{720} - \frac{{\rm Tr}[F^2]{\rm Tr}[R^2]}{240} + \frac{{\rm Tr}[R^4]}{8} + \frac{({\rm Tr}[R^2])^2}{32}\,, \tag{11.28}$$

和其余的反常可以通过Green-Schwarz机制抵消。唯一保留的非平庸条件是(11.26)。

首先考虑规范群O(N)。于是，下列公式应用[5]

$${\rm Tr}[F^6] = (N-32){\rm tr}[F^6] + 15{\rm tr}[F^2]{\rm tr}[F^4]\,, \tag{11.29}$$

$${\rm Tr}[F^4] = (N-8){\rm tr}[F^4] + 3({\rm tr}[F^2])^2 \quad , \quad {\rm Tr}[F^2] = (N-2){\rm tr}[F^2]\,, \tag{11.30}$$

其中，Tr是在伴随表示中的迹，tr是在O(N)基本表示中的迹。

练习：证明，分解条件(11.26)和dim$G = 496$被G=O(32)满足。于是，有G=O(32)的Type-I 和杂优弦理论是反常自由的。

现在，考虑G = $\rm E_8 \times E_8$，它也有维数496。$\rm E_8$没有阶为4和6的独立Casimirs。

$${\rm Tr}[F^6] = \frac{1}{7200}({\rm Tr}[F^2])^3 \quad , \quad {\rm Tr}[F^4] = \frac{1}{100}({\rm Tr}[F^2])^2\,. \tag{11.31}$$

练习：验证$\rm E_8 \times E_8$满足(11.26)。于是，$\rm E_8 \times E_8$杂优弦也是反常自由的。再检验，群$\rm E_8 \times U(1)^{248}$和$\rm U(1)^{496}$是反常自由的。没有已知的10维理论对应这些群。

对可约反常取消的必要的Green-Schwarz相反项的出现，通过在杂优弦中的单圈图计算来检验[35]。而且，得到在模不变性和反常抵消之间的直接关系。

从(11.13)，我们得到(G=O(32))，

$$d\hat{H} = {\rm tr}[R^2] - \frac{1}{30}{\rm Tr}[F^2]\,. \tag{11.32}$$

在任何闭4维子流形上积分(11.24)，我们得到被背景场满足的重要约束：

$$\int {\rm tr}[R^2] = \frac{1}{30}\int {\rm Tr}[F^2]\,. \tag{11.33}$$

练习：考虑10维中的非紧致$\mathrm{O}(16)\times\mathrm{O}(16)$杂优弦。它是包含Fermion的手征理论，在规范群下，按照(V,V), $(\bar{S},1)$ 和$(1,\bar{S})$变换。S是O(16)的128维旋量表示。利用

$$\mathrm{tr}_S[F^6]=16\mathrm{tr}[F^6]-15\mathrm{tr}[F^2]\mathrm{tr}[F^4]+\frac{15}{4}(\mathrm{tr}[F^2])^3\,, \tag{11.34}$$

$$\mathrm{tr}_S[F^4]=-8\mathrm{tr}[F^4]+6(\mathrm{tr}[F^2])^2\quad,\quad \mathrm{tr}_S[F^2]=16\mathrm{tr}[F^2]\,, \tag{11.35}$$

有在旋量表示空间中的迹tr_S和在基本表示空间中的迹tr，来证明理论是反常自由的。什么是Green-Schwarz相反项？在10维中有其它手征，非超对称反常自由理论吗？

练习：考虑在10维中的$\mathrm{E}_8\times\mathrm{E}_8$杂优弦。这个理论有对称性$\mathcal{I}$，它互换两个$\mathrm{E}_8$因子。考虑关于对称性变换$g=(-1)^{F+1}\cdot\mathcal{I}$的这个理论的$Z_2$轨流形。构造模不变配分函数(你将需要$\vartheta$函数的重复公式，可以在附录A找到)。规范群和无质量谱是什么？这个理论是超对称的吗？手征的吗？反常自由的吗？

12 紧致化和超对称破缺

如今，我们已经考虑了非紧致10维中的超弦理论。然而，我们的直接物理兴趣是在4维理论。得到它们的一个方法是利用Kaluza-Klein的思想：考虑某些维数被卷曲到一个紧致流形，只留下非紧致的4维。象我们已经在Boson弦中看到的，弦论运动方程的精确解对应于CFT。在Type-II弦论情形，它们应对应于(1,1)超共形FT；在杂优弦情形，对应于(1,0)超共形FT。例如，到4维的紧致化概念的推广是把原来的非紧致平坦CFT用另一个代替，其中，4维仍旧是平坦的，但是其余的由有适当中心荷的任意CFT来描写。这种描述比几何紧致化更一般，因为存在无几何解释的CFT。下面，我们来检查几何观点和CFT观点，主要是通过轨流形紧致化。

12.1 环面紧致化

最简单的可能性是,“内紧致”流形是平坦环面。这可以被认为是10维理论的不同背景，其中，对内度量和其它背景场，我们已经给出常数期望值。

首先考虑紧致到$D<10$维的杂优弦情形。相当直接地来构造紧致后理论的配分函数。现在，有$D-2$个横向非紧致坐标，每一个贡献$\sqrt{\tau_2}\eta\bar{\eta}$。在左移动世界叶Fermion和16个右移动紧致坐标的贡献没有改变。最后，$10-D$个紧致坐标的贡献由(7.1.38)给出。汇总得到

$$Z_D^{\text{heterotic}}=\frac{\Gamma_{10-D,10-D}(G,B)\,\bar{\Gamma}_H}{\tau_2^{\frac{D-2}{2}}\eta^8\bar{\eta}^8}\,\frac{1}{2}\sum_{a,b=0}^{1}(-1)^{a+b+ab}\,\frac{\vartheta^4[{a\atop b}]}{\eta^4}\,, \tag{12.1.1}$$

其中，$\bar{\Gamma}_H$是O(32)或$\mathrm{E}_8\times\mathrm{E}_8$的格点和；$G_{\alpha\beta}, B_{\alpha\beta}$是内$(10-D)$维度量和反对称张量的常数期望值。不能找到理论的无质量谱。原来的10维度量给出D维度量，$(10-D)$个U(1)规范场和$\frac{1}{2}(10-D)(11-D)$个标量。反对称张量产生一个D维反对称张量，$(10-D)$个$U(1)$规范场和$\frac{1}{2}(10-D)(9-D)$个标量(规范场的内部分量)。10维胀子给出另一个标量。最后，(H的维数)个10维规范场给出(H的维数)个规范场和$(10-D)\cdot$ (H的维数)个标量。对Fermion有类似约化。

我们将更详细地考虑来自10维矢量的标量Y^a_α，其中，a是伴随指标，α是取值为$1,2,\ldots,10-D$的内部指标。非Abel场强(10.6.3)包含没有微商的项。根据维数约化，这给出(Higgs)标量Y^a_α的一个势能项：

$$V_{\text{Higgs}} \sim f^a{}_{bc} f^a{}_{b'c'}\ G^{\alpha\gamma}\ G^{\beta\delta}\ Y^b_\alpha\ Y^c_\beta\ Y^{b'}_\gamma\ Y^{c'}_\delta\ . \tag{12.1.2}$$

当Y^a_α在李代数的Cartan子代数中取常数期望值时，这个势能有平坦的方向(最小值的连续族)。我们将用Y^I_α, $I=1,2,\ldots,16$来标记这些值。这是一个正常Higgs现象，它对规范场生成质量矩阵

$$\left[m^2\right]^{ab} \sim G^{\alpha\beta}\ f^{ca}{}_d\ f^{cb'}{}_d\ Y^d_\alpha\ Y^{d'}_\beta\ . \tag{12.1.3}$$

这个质量矩阵有秩为H类的0本征值。当其它规范场得到非零质量时，属于Cartan子群的规范场仍保持无质量。从而，规范群被破缺到Cartan子群$\sim \mathrm{U}(1)^{\mathrm{rank-H}}$。如果我们再写出这些期望值，那么杂优紧致化后的配分函数变成

$$Z_D^{\text{heterotic}} = \frac{\Gamma_{10-D,26-D}(G,B,Y)}{\tau_2^{\frac{D-2}{2}}\,\eta^8\bar{\eta}^8}\ \frac{1}{2}\sum_{a,b=0}^{1}\ (-1)^{a+b+ab}\ \frac{\vartheta^4[{}^a_b]}{\eta^4}\,, \tag{12.1.4}$$

其中，$\Gamma_{10-D,26-D}$格点荷的微商在附录B中详细描述。

$(10-D)(26-D)$个标量场G,B,Y称为模，因为它们可以有任意期望值。于是，紧致化到D维的杂优弦本质上是真空的连续族，真空由模的期望值来参数化，模描述内部流形(G,B)和(平坦)规范丛(Y)的几何。

现在，在任意环面紧致化后的理论中，对无质量Boson模式考虑树图有效作用量。它可以通过10维杂优弦有效作用量的直接维数约化来得到，在σ标架[19]中，它由(9.10)和规范场加在一起给出

$$\alpha'^8\ S^{\text{heterotic}}_{10-d} = \int d^{10}x\sqrt{-\det\ G_{10}}e^{-\Phi}\left[R+(\nabla\Phi)^2-\frac{1}{12}\hat{H}^2-\frac{1}{4}\mathrm{Tr}[F^2]\right]+\mathcal{O}(\alpha')\,. \tag{12.1.5}$$

在D维中，无质量场从10维理论的那些场得到(通过假定后者不依赖于内坐标X^α)。而且，我们只保留Cartan规范场，因为只有它们对Wilson线Y^I_α, $I=1,2,\ldots,16$的普通值仍将保持无质量的。所以，规范动能项用下列来Abel化$\mathrm{Tr}[F^2]\to\sum_{I=1}^{16}F^I_{\mu\nu}F^{I,\mu\nu}$：

$$F^I_{\mu\nu} = \partial_\mu A^I_\nu - \partial_\nu A^I_\mu\,. \tag{12.1.6}$$

还有，

$$\hat{H}_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu B_{\nu\rho} - \frac{1}{2}\sum_I A^I_\mu F^I_{\nu\rho} + \text{cyclic}\,, \tag{12.1.7}$$

[19]这也称为“弦标架”。

其中，我们已经忽略了依赖Chern-Simons贡献，因为它是α'的更高阶。

有一个标准方法来定义D维场，使得紧致化后的理论的规范不变性是简单的。这在附录C给出。用这种方法，我们得到

$$S_D^{\text{heterotic}} = \int d^D x \sqrt{-\det G} e^{-\Phi} \Big[R + \partial^\mu \Phi \partial_\mu \Phi - \frac{1}{12} \hat{H}^{\mu\nu\rho} \hat{H}_{\mu\nu\rho} - \\ - \frac{1}{4} (\hat{M}^{-1})_{ij} F^i_{\mu\nu} F^{j\mu\nu} + \frac{1}{8} \text{Tr}(\partial_\mu \hat{M} \partial^\mu \hat{M}^{-1}) \Big] , \tag{12.1.8}$$

其中，$i = 1, 2, \ldots, 36 - 2D$和

$$\hat{H}_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu B_{\nu\rho} - \frac{1}{2} L_{ij} A^i_\mu F^j_{\nu\rho} + \text{cyclic} . \tag{12.1.9}$$

模标量矩阵$\hat{M}$在(B.4)中给出。这个作用量有一个连续的O(10-D,26-D)对称性。如果$\Lambda \in$ O(10-D,26-D)是一个$(36 - 2D) \times (36 - 2D)$矩阵，那么

$$\hat{M} \to \Omega \ \hat{M} \ \Omega^T \quad , \quad A_\mu \to \Omega \cdot A_\mu \tag{12.1.10}$$

保持有效作用量不变。然而，从确切的弦论处理我们知道，来自格点的有质量态的出现把这个对称性破坏到离散无限子群O(10-D,26-D,$\mathbb{Z}$)。这是T对偶性的群。在(12.1.8)中的$(10 - D)(26 - D)$标量作用量是$\text{O}(10 - \text{D}, 26 - \text{D})/(\text{O}(10 - \text{D}) \times \text{O}(26 - \text{D})$ σ模型。

我们还可以通过(9.11)转到Einstein标架，在那里，作用量变成

$$S_D^{\text{heterotic}} = \int d^D x \sqrt{-\det G_E} \Big[R - \frac{1}{D-2} \partial^\mu \Phi \partial_\mu \Phi - \frac{e^{-\frac{4\Phi}{D-2}}}{12} \hat{H}^{\mu\nu\rho} \hat{H}_{\mu\nu\rho} - \\ - \frac{e^{-\frac{2\Phi}{D-2}}}{4} (\hat{M}^{-1})_{ij} F^i_{\mu\nu} F^{j\mu\nu} + \frac{1}{8} Tr(\partial_\mu \hat{M} \partial^\mu \hat{M}^{-1}) \Big] . \tag{12.1.11}$$

对$D = 4$，10维引力微子给出4个4维Majorana引力微子。从而，4维紧致化后的理论有N=4局域SUSY。相关的无质量的N=4超多重态是超引力多重态和矢量多重态。超引力多重态包含度量，6个矢量(引力光子)，1个标量和1个反对称张量，以及4个Majorana引力微子和4个自旋为$\frac{1}{2}$的Majorana Fermion。矢量多重态包含1个矢量，4个自旋为$\frac{1}{2}$的Majorana Fermion和6个标量。除了SUGRA多重态，，我们总体有22个矢量多重态。

在$D = 4$，反对称张量通过一个对偶变换(在壳上)等价于一个赝标量a，“轴子”。它通过下列来定义(在Einstein标架中)

$$e^{-2\phi} \hat{H}_{\mu\nu\rho} = \frac{\epsilon_{\mu\nu\rho}{}^\sigma}{\sqrt{-\det g_E}} \nabla_\sigma a . \tag{12.1.12}$$

这个定义使得$B_{\mu\nu}$运动方程$\nabla^\mu e^{-\Phi} \hat{H}_{\mu\nu\rho} = 0$通过代替(12.1.12)而自动解出。然而，从(12.1.9)，$\hat{H}$的Bianchi恒等式

$$\frac{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{\sqrt{-\det g_E}} \partial_\mu \hat{H}_{\nu\rho\sigma} = -L_{ij} F^i_{\mu\nu} \tilde{F}^{j,\mu\nu} , \tag{12.1.13}$$

其中，

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\frac{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{\sqrt{-\det\ g_E}}F_{\rho\sigma}\ , \tag{12.1.14}$$

变成轴子的运动方程(代替(12.1.12)后)：

$$\nabla^\mu\ e^{2\phi}\nabla_\mu a = -\frac{1}{4}F^i_{\mu\nu}\tilde{F}^{j,\mu\nu}\ . \tag{12.1.15}$$

这个方程可以从“对偶”作用量得到

$$\begin{aligned}\tilde{S}^{\rm heterotic}_{D=4} = \int d^4x\sqrt{-\det\ g_E}\ \Big[R - \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}e^{2\phi}\partial^\mu a\partial_\mu a + \\ -\frac{1}{4}e^{-\phi}(M^{-1})_{ij}F^i_{\mu\nu}F^{j,\mu\nu} + \frac{1}{4}a\ L_{ij}F^i_{\mu\nu}\tilde{F}^{j,\mu\nu} + \\ +\frac{1}{8}{\rm Tr}(\partial_\mu M\partial^\mu M^{-1})\Big]\ .\end{aligned} \tag{12.1.16}$$

最后，通过定义复S场

$$S = a + i\ e^{-\phi}\ , \tag{12.1.17}$$

我们可以把作用量写作

$$\begin{aligned}\tilde{S}^{\rm heterotic}_{D=4} = \int d^4x\sqrt{-\det\ g_E}\ \Big[R - \frac{1}{2}\frac{\partial^\mu S\partial_\mu\bar{S}}{{\rm Im}S^2} - \frac{1}{4}{\rm Im}S(M^{-1})_{ij}F^i_{\mu\nu}F^{j,\mu\nu} \\ +\frac{1}{4}{\rm Re}S\ L_{ij}F^i_{\mu\nu}\tilde{F}^{j,\mu\nu} + \frac{1}{8}{\rm Tr}(\partial_\mu M\partial^\mu M^{-1})\Big]\ .\end{aligned} \tag{12.1.18}$$

从定义(12.1.17)，$1/{\rm Im}S$是弦圈图真空参数(杂优弦耦合常数)。就象我们后面将看到的，4维杂优弦有一个通过部分变换作用在S上的非微扰SL(2,$\mathbb{Z}$)对称性，就象在Able规范群上的电磁对偶一样。标量场S在上半平面SL(2,$\mathbb{R}$)/U(1)中取值。其余的标量在余集空间O(6,22)/O(6)×O(22)中取值。

这里，我们将主要描述Type-II弦论到4维的环面紧致化。可以证明，在有半径为R的紧致维数的闭弦理论中，对偶变换$R \to 1/R$与左移动旋量基态的手性反演伴随。在最后一节，这将被详细解释。于是，半径为R的Type-IIA理论等价于半径为$1/R$的Type-IIB理论。一旦我们在环面上紧致化，所有两种理论是非手性的。我们只需要检验Type-IIA理论到$D = 4$的约化。首先，两个Majorana-Weyl引力微子和Fermion给出8个$D = 4$Majorana引力微子和48个自旋$\frac{1}{2}$的Majorana Fermion。于是，$D = 4$的理论有最大的N=8超对称性。10维度量产生4维度量，6个U(1)矢量和21个标量。反对称张量产生(4维对偶化后)6个U(1)矢量和16个标量。胀子给出一个额外的标量。R-R U(1)规范场给出一个规范场和6个标量。R-R 3形式给出一个3形式(在4维中没有物理自由度)，15个矢量和26个标量。所有上面的自由度形成N=8超引力多重态，它包含引力，28个矢量，70个标量，8个引力微子和48个Fermion。

练习：从(10.6.19)中的10维有效作用量出发，利用环面维数约化，(你将需要附

录C中的相关公式)推导4维有效作用量。对偶化所有2形式。

12.2 在非平庸流形上的紧致化

下一步将是尝试在非平坦的流形上紧致化10维理论。然而，这样的背景必须满足弦运动方程。就象我们在前一节描述的，这等价于相应σ模型的共形不变性。当背景场缓慢变换时，α'展开可以应用；对领头阶，背景必须满足低能有效场的运动方程。

在基态中，我们将对平坦的4维世界感兴趣。在最一般的情形，这样的基态由4维非紧致平坦CFT和一个内部CFT的张量积给出。有相应中心荷和对称性的CFT是到α'所有阶的(树图)弦运动方程的精确解。在杂优弦情形，这个内部CFT必须有左N=1不变性和$(c,\bar{c})=(9,22)$。在Type-II情形，它必须有左和右N=1超共形不变性和$(c,\bar{c})=(9,9)$。如果CFT有一个“大体积极限”，那么α'展开是可能的，我们可以重新得到领头σ模型(几何)的结果。

对紧致化后的理论，在紧致化标度有一些剩余超对称性也是有兴趣的。为了唯象的目的，我们最后需要N=1超对称性，因为它是允许手征表示的唯一情形。虽然非常低能的世界不是超对称的，由于等级问题，在标准模型之外，我们的确需要一些超对称性。

在有效场论方法中，我们假定一些Boson场获得满足运动方程的期望值，而Fermion期望值是零(为了保留$D=4$ Lorentz不变性)。在一般情形，背景破缺平坦10维空间的所有超对称性。如果相应Fermion的变分等于零，那么超对称性将保持。这给出一组一阶方程。如果它们至少对一个超对称性满足，那么全部运动方程也将满足。说明这个的另一个方法是说，保留至少一个SUSY的每一个紧致流形是运动方程的一个解。

这里，我们将考虑在局域空间$M_4\times K$上的杂优弦情形，其中，M_4是4维Minkowski空间，K是某些6维紧致流形。把指标分裂为M_4的希腊指标和K的拉丁指标后，我们有下列10维杂优作用量的超对称变分(在Einstein标架)

$$\delta\psi_\mu=\nabla_\mu\epsilon+\frac{\sqrt{2}}{32}e^{2\Phi}\left(\gamma_\mu\gamma_5\otimes H\right)\epsilon\,, \tag{12.2.1}$$

$$\delta\psi_m=\nabla_m\epsilon+\frac{\sqrt{2}}{32}e^{2\Phi}\left(\gamma_m H-12H_m\right)\epsilon\,, \tag{12.2.2}$$

$$\delta\lambda=\sqrt{2}(\gamma^m\nabla_m\Phi)\epsilon+\frac{1}{8}e^{2\Phi}H\epsilon\,, \tag{12.2.3}$$

$$\delta\chi^a=-\frac{1}{4}e^{\Phi}F^a_{m,n}\gamma^{mn}\epsilon\,, \tag{12.2.4}$$

其中，ψ是引力微子，λ是胀子微子，χ^a是规范微子；ϵ是一个旋量(超对称变换的参数)。而且，我们利用

$$H=H_{mnr}\ \gamma^{mnr}\quad,\quad H_m=H_{mnr}\ \gamma^{nr}\,. \tag{12.2.5}$$

10维Γ矩阵可以从$D=4$的矩阵γ^μ和内部矩阵γ^m构造为

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu \otimes \mathbf{1}_6 \quad , \quad \Gamma^m = \gamma^5 \otimes \gamma^m \, , \tag{12.2.6}$$

$$\gamma^5 = \frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^{\mu\nu\rho\sigma} \quad , \quad \gamma = \frac{i}{6!}\sqrt{\mathrm{detg}}\epsilon_{mnrpqs}\gamma^{mnrpqs} \, . \tag{12.2.7}$$

γ是内部空间的γ^5的类似物。

对某些背景场的值，如果方程$\delta(\mathrm{fermions}) = 0$存在一个解，即一个全局定义的非平庸旋量$\epsilon$，那么背景是N=1超对称的。如果不止一个解存在，那么我们将有扩展超对称性。这个问题与假设$H_{mnr} = 0$一起在[36]中考虑。在$H = 0$的4维中，N=1超对称性存在的条件可以总结如下：胀子必须是常数，流形K必须允许一个Killing旋量ξ，

$$\nabla_m \, \xi = 0 \, . \tag{12.2.8}$$

还有，这个条件意味着K是一个Ricci平坦($R_{mn} = 0$)的Kähler流形。最后，背景(内部)规范场必须满足

$$F^a_{mn}\gamma^{mn} \, \xi = 0 \tag{12.2.9}$$

，于是，(11.32)变成

$$R^{rs}{}_{[mn}R_{pq]rs} = \frac{1}{30}F^a_{[mn}F^a_{pq]} \, . \tag{12.2.10}$$

在普通的6维流形中，自旋联络是在$\mathrm{O}(6) \sim \mathrm{SU}(4)$中。如果流形是Kähler的，那么自旋联络是在$\mathrm{U}(3) \subset \mathrm{SU}(4)$中。最后，如果Ricci张量等于零，自旋联络是一个SU(3)联络。这样的流形称为Calabi-Yau(CY)流形。

解(12.2.9)和(12.2.10)的简单方法是把自旋联络$\omega \in \mathrm{SU}(3)$嵌入到规范联络$A \in \mathrm{O}(32)$或$\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8$中。在O(32)中满足(12.2.10)的SU(3)的唯一嵌入是在$\mathrm{O}(32) \ni 32 \to 3 + \bar{3} + \mathrm{singlets} \in \mathrm{SU}(3)$中。在这种情形，O(32)破缺到$\mathrm{U}(1) \times \mathrm{O}(26)$(这是与SU(3)交换的子群)。U(1)是“反常”的，即，无质量态的U(1)荷$\rho = \sum_i q^i$的荷不是零。这个反常是明显的，因为我们知道，弦论不是反常的。所发生的是这里的Green-Schwarz机制意味着有一个形式$\rho \; B \wedge F$的单圈图耦合。这对U(1)规范场给出一个质量，它不能作为一个低能对称性出现。在13.4节，有这个现象的一个更详细的讨论。剩余的规范群O(26)只有非手征表示。

更有兴趣的是在$\mathrm{E}_8 \times \mathrm{E}_8$情形。$\mathrm{E}_8$有最大$\mathrm{SU}(3) \times \mathrm{E}_6$子群，在它下面，$\mathrm{E}_8$的伴随表示分解为$\mathrm{E}_8 \ni \mathbf{248} \to (\mathbf{8},\mathbf{1}) \otimes (\mathbf{3},\mathbf{27}) \otimes (\bar{\mathbf{3}},\overline{\mathbf{27}}) \otimes (\mathbf{1},\mathbf{78}) \in \mathrm{SU}(3) \times \mathrm{E}_6$。在这种方式中，把自旋联络嵌入在一个$\mathrm{E}_8$中解出(12.2.10)。在这种情形，未破缺的规范群是$\mathrm{E}_6 \times \mathrm{E}_8$。让$N_L$是在$\mathrm{E}_6$的**27**中变换的4维无质量左手Weyl Fermion的数目，N_R是对$\overline{\mathbf{27}}$的同样数目。净手性的数目(“代”的数目)是$|N_L - N_R|$；它可以通过在CY流形上的指标定理得到。**27**的象SU(3)的**3**一样变换，$\overline{\mathbf{27}}$在SU(3)的$\bar{\mathbf{3}}$中变换。于是，代的数目是在Fermion场$\psi_{\alpha A}$的K上Dirac算符的指标，其中，α是旋量指标，A是**3**指标。可以证明[36]，Dirac算符的指标，和因此的代的数目，等于$|\chi(K)/2|$，其中，$\chi(K)$是流形K的Euler数。

上述考虑对α'的领头阶是正确的。在更高阶，我们一般地预料有修正，而且只有关于无质量态的那些结论避免这些修正。

作为另一个例子，我们将考虑在到6维K3流形上Type-II理论的紧致化。K3是没有等距的4维紧致，Ricci平坦的Kähler流形的拓扑类。这样的流形有SU(2)⊂O(4)完整群，还是超Kähler的。超Kähler条件等价于满足SU(2)代数的3个可积复结构的存在。可以证明，在这样的流形上左右对称的N=1超对称σ模型精确地是共形不变的，在两边都有N=4超共形对称性。而且，K3有一个协变的常数旋量，使得其上紧致的Type-II理论在6维中有N=2超对称性。(如果进一步在两个环面上紧致，N=4)。为了后面的目的，主要描述K3的上同调。有一个调和的0形式(因为流形是紧致和连通的)。没有调和的1形式。有一个(2,0)和一个(0,2)调和形式以及20个(1,1)形式。(2,0), (0,2)和一个(1,1)Kähler形式是自对偶的，其它19个(1,1) 形式是反自对偶的。没有调和的3形式，有唯一的4形式(体积形式)。关于K3的几何和拓扑的细节可在[37]找到。

首先考虑Type-II理论，在6维中推导无质量Boson谱。为了找到来自10维度量G的无质量态，我们做下列分解

$$G_{MN} \sim h_{\mu\nu}(x) \otimes \phi(y) + A_\mu(x) \otimes f_m(y) + \Phi(x) \otimes h_{mn}(y)\,, \tag{12.2.11}$$

其中，x确定6维非紧致平坦坐标，y是内部坐标。还有，$\mu = 0, 1, \ldots, 5$和$m = 1, 2, 3, 4$是K3指标。把10维运动方程应用到度量G，我们得到$h_{\mu\nu}$(6维引力)是无质量的，如果

$$\Box_y\ \phi(y) = 0\,. \tag{12.2.12}$$

这个方程的解是调和0形式，只有它们中的一个。于是，在6维中，有一个无质量引力。如果$f_m(y)$在K3上是协变常数的，$A_\mu(x)$是无质量的。那么，它必须是调和1形式，在K3上没有其它的。从而，没有来自度量的无质量矢量。$\Phi(x)$是无质量标量，如果$h_{mn}(y)$满足Lichnerowicz方程

$$-\Box h_{mn} + 2R_{mnrs}h^{rs} = 0 \quad , \quad \nabla^m h_{mn} = g^{mn}h_{mn} = 0\,. \tag{12.2.13}$$

这个方程的解可以从3个自对偶2形式S_{mn}和19个反自对偶2形式A_{mn} 来构造。因为是调和的，它们满足下列方程(R_{mnrs}是反自对偶的)

$$\Box f_{mn} - R_{mnrs}f^{rs} = \Box f_{mn} + 2R_{mrsn}f^{rs} = 0\,, \tag{12.2.14}$$

$$\nabla_m A_{np} + \nabla_p A_{mn} + \nabla_n A_{pm} = 0 \quad , \quad \nabla^m A_{mn} = 0\,. \tag{12.2.15}$$

利用这些方程和自对偶性质，可以验证，Lichnerowicz方程的解由下列给出

$$h_{mn} = A^p_m S_{pm} + A^p_n S_{pm}\,. \tag{12.2.16}$$

于是，有$3 \cdot 19 = 57$个无质量标量。有一个对应于K3度量常数重新标度的一个附加无质量标量(K3体积)，它明显保留Ricci平坦性条件。我们总共得到58个标量。在6维中，10维胀子还给出一个额外是无质量标度。

对2指标反对称张量有一个类似展开

$$B_{MN} \sim B_{\mu\nu}(x) \otimes \phi(y) + B_{\mu}(x) \otimes f_m(y) + \Phi(x) \otimes B_{mn}(y)\,. \tag{12.2.17}$$

无质量条件意味着0，1和2形式(ϕ,f_m, B_{mn}各自地)是调和的。我们得到6维中的一个无质量2指标反对称张量和22个标量。

从R-R部分，按照同样的程序，在6维中，我们有一个给出1个无质量矢量1形式，和一个给出1个无质量3形式和22个矢量的3形式。在6维中，一个无质量3形式通过一个对偶变换等价于一个无质量矢量。

总之，我们有一个引力子，一个反对称张量，24个矢量和81个标量。在10维中的两个引力微子给出6维中的两个Weyl引力微子。它们的内部波函数正比于K3上存在的协变常数旋量。引力微子保持它们的原来的手性。从而它们有相反的手性。6维中，(无手性或(1,1))N=2超对称性的相关表示是：

• 矢量多重态。它包含1个矢量，2个相反手性的Weyl旋量和4个标量。

• 超引力多重态。它包含引力子，2个相反手性的Weyl引力微子，4个矢量，1个反对称张量，1个标量和4个相反手性的Weyl Fermion。

我们得到结论，在K3上Type-IIA理论的6维无质量内容由超引力多重态和20个U(1)矢量多重态组成。6维中，N=(1,1)超对称性对固定无质量场的2微商低能耦合是充分的。Boson部分是

$$\begin{aligned} S^{IIA}_{\rm K3} = \int d^6x\sqrt{-\det\, G_6}e^{-\Phi}\Big[R + \nabla^\mu\Phi\nabla_\mu\Phi - \frac{1}{12}H^{\mu\nu\rho}H_{\mu\nu\rho} + \\ + \frac{1}{8}{\rm Tr}(\partial_\mu\hat{M}\partial^\mu\hat{M}^{-1})\Big] - \frac{1}{4}\int d^6x\sqrt{-\det\, G}(\hat{M}^{-1})_{IJ}F^I_{\mu\nu}F^{J\mu\nu} + \\ + \frac{1}{16}\int d^6x\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma\tau\upsilon}B_{\mu\nu}F^I_{\rho\sigma}\hat{L}_{IJ}F^J_{\tau\upsilon}\,, \end{aligned} \tag{12.2.18}$$

其中，$I = 1, 2, \ldots, 24$。超对称性和有20个矢量多重态的事实限制4·20个标量处在余集空间$\mathrm{O}(4,20)/\mathrm{O}(4)\times\mathrm{O}(20)$上，将有一个连续的O(4,20)全局对称性。于是，它们通过象在有$p = 4$的(B.4)中的矩阵$\hat{M}$来参数化，其中，$\hat{L}$是不变的O(4,20)度量。这里，$H_{\mu\nu\rho}$不包含Chern-Simons项。还要注意胀子－规范场耦合的不存在。这是由于规范场来自R-R部分的事实。

观察到在K3上的Type-II理论精确给出象在T^4上紧致的杂优弦理论的同样的无质量谱。虽然低能作用量(12.1.8)和(12.2.18)是不同的。就象我们后面将看到的，在二者之间，有一个非平庸和有意义的关系。

现在，考虑在K3上紧致化掉6维后的Type-IIB理论。NS-NS部分Boson场(G, B, Φ)与在Type-IIA中一致，我们再次得到1个引力子，1个反对称张量和81个标量。

从R-R部分，我们有另一个标量(D=6中它给出一个无质量标量)，另一个2指标反对称张量(在6维中，它给出一个2指标反对称张量和22个标量)，和一个自对偶4指标张

量(它给出3个自对偶指标反对称张量和19个反自对偶2指标反对称张量和标量)。因为我们可以把1个2指标反对称张量分裂为1个自对偶和1个反自对偶部分，所以可以用下列方法来总结Boson谱：1个引力子，5个自对偶和21个反自对偶反对称张量，105个标量。

这里，不象Type-IIA情形，我们得到同样手性的两个无质量Weyl引力微子。它们在6维生成一个手征N=(2,0)超对称性。相关的无质量表示是：

• (2,0) SUGRA多重态。它包含引力子，5个自对偶反对称张量和2个左手Weyl引力微子。

• (2,0) 张量多重态。它包含1个反自对偶反对称张量，5个标量和2个对应于引力微子的相反手性的Weyl Fermion。总的无质量谱形成超引力多重态和21个张量多重态。理论是手征的，但是反常自由的。标量处于余集空间$\mathrm{O}(5,21)/\mathrm{O}(5)\times\mathrm{O}(21)$上，有一个全局O(5,21)对称性。因为理论包含自对偶张量，所以没有协变作用量原理，但是我们可以写出协变运动方程。

练习：利用关于反常的结果来证明O(5,21)，(2,0)，6维超引力是反常自由的。

练习：考虑Type-IIA,B理论到4维的紧致化。希腊指标描写4维部分，拉丁指标描写6维内部部分。重复在本节开始的分析，找到内场g_{mn}, B_{mn}, Φ的条件，以及Type-IIA的A_m, C_{mnr}和Type-IIB的$\chi, B^{RR}_{mn}, F^{+}_{mnrst}$，使得有效4维理论在平坦空间有N=1,2,4超对称性。

12.3 世界叶对时空超对称性

在世界叶和时空超对称性之间有一个有趣的关系。我们将再次首先考虑有D=4平坦Minkowski空间的杂优弦情形。在4维中，一个N-扩展超对称代数由满足下列代数的N个Weyl超荷Q^I_a和它们的共轭$\bar{Q}^I_{\dot\alpha}$生成：

$$\begin{aligned}
\{Q^I_\alpha, Q^J_\beta\} &= \epsilon_{\alpha\beta} Z^{IJ}\ , \\
\{\bar{Q}^I_{\dot\alpha}, Q^J_\beta\} &= \epsilon_{\dot\alpha\dot\beta} \bar{Z}^{IJ}\ , \\
\{Q^I_\alpha, \bar{Q}^J_{\dot\alpha}\} &= \delta^{IJ}\ \sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha} P_\mu\ ,
\end{aligned} \tag{12.3.1}$$

其中，Z^{IJ}是反对称中心荷矩阵。

就象我们在10.5看到的，时空超对称荷可以从在零动量的无质量Fermion顶角来构造。在我们的情形，有

$$Q^I_\alpha = \frac{1}{2\pi i}\oint dz\ e^{-\phi/2} S_\alpha \Sigma^I \quad , \quad \bar{Q}^I_{\dot\alpha} = \frac{1}{2\pi i}\oint dz\ e^{-\phi/2} C_{\dot\alpha}\bar{\Sigma}^I\ , \tag{12.3.2}$$

其中，S, C是O(4)的旋量或共轭旋量，$\Sigma^I, \bar{\Sigma}^I$是共形权重为$\frac{3}{8}$ 的内部CFT的R部分中的算符。我们还需要

$$: e^{q_1\phi(z)} :: e^{q_2\phi(w)} := (z-w)^{-q_1q_2} : e^{(q_1+q_2)\phi(w)} : + \dots , \tag{12.3.3}$$

$$S_\alpha(z) C_{\dot\alpha}(w) = \sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\ \psi^\mu(w) + \mathcal{O}(z-w) , \tag{12.3.4}$$

$$\begin{aligned} S_\alpha(z) S_\beta(w) &= \frac{\epsilon_{\alpha\beta}}{\sqrt{z-w}} + \mathcal{O}(\sqrt{z-w}) , \\ C_{\dot\alpha}(z) C_{\dot\beta}(w) &= \frac{\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}}{\sqrt{z-w}} + \mathcal{O}(\sqrt{z-w}) , \end{aligned} \tag{12.3.5}$$

利用上面和附加反交换关系(12.3.1)，我们得到，内部算符必须满足下列OPE：

$$\Sigma^I(z)\bar{\Sigma}^J(w) = \frac{\delta^{IJ}}{(z-w)^{3/4}} + (z-w)^{1/4}\ J^{IJ}(w) + \dots , \tag{12.3.6}$$

$$\begin{aligned} \Sigma^I(z)\Sigma^J(w) &= (z-w)^{-1/4}\Psi^{IJ}(w) + \dots , \\ \bar{\Sigma}^I(z)\bar{\Sigma}^J(w) &= (z-w)^{-1/4}\bar{\Psi}^{IJ}(w) + \dots , \end{aligned} \tag{12.3.7}$$

其中，J^{IJ}是权重为1的某些内部理论算符，$\Psi^{IJ}, \bar{\Psi}^{IJ}$ 的权重为1/2。中心荷由$Z^{IJ} = \oint \Psi^{IJ}$给出。R场$\Sigma, \bar{\Sigma}$关于内部超流有平方根分支截断

$$G^{int}(z)\Sigma^I(w) \sim (z-w)^{-1/2} \quad , \quad G^{int}(z)\bar{\Sigma}^I(w) \sim (z-w)^{-1/2} \quad . \tag{12.3.8}$$

Fermion顶角的BRST不变性意味着OPE $(e^{-\phi/2}S_\alpha\Sigma^I)(e^\phi G)$的确有一个单一的极点项。这接着意味着在(12.3.8)中不再有奇异项。

考虑有两点函数$\langle X(z)X(w)\rangle = -\log(z-w)$的额外标量X。构造维数$\frac{1}{2}$的算符

$$\lambda^I(z) = \Sigma^I(z)e^{iX/2} \quad , \quad \bar{\lambda}(z) = \bar{\Sigma}^I(z)e^{-iX/2} . \tag{12.3.9}$$

利用(12.3.6)和(12.3.7)，我们可以验证下列OPE

$$\lambda^I(z)\bar{\lambda}^J(w) = \frac{\delta^{IJ}}{z-w} + \hat{J}^{IJ} + \mathcal{O}(z-w) , \tag{12.3.10}$$

$$\lambda^I(z)\lambda^J(w) = e^{iX}\Psi^{IJ} + \mathcal{O}(z-w) , \tag{12.3.11}$$

$$\bar{\lambda}^I(z)\bar{\lambda}^J(w) = e^{-iX}\bar{\Psi}^{IJ} + \mathcal{O}(z-w) , \tag{12.3.12}$$

其中，$\hat{J}^{IJ} = J^{IJ} + \frac{i}{2}\delta^{IJ}\partial X$。于是，$\lambda^I, \bar{\lambda}^I$是N个复自由Fermion，它们生成一个$\mathrm{O(2N)_1}$的流代数。而且，这立即证明，$\Psi^{IJ} = -\Psi^{JI}$。于是，原来的场属于余集$\mathrm{O(2N)_1/U(1)}$。不难证明，$\mathrm{O(2N)_1}$ $\sim \mathrm{U(1)\times SU(N)_1}$。U(1)精确地是由$\partial X$生成的。现在我们可以计算Cartan流$\hat{J}^{II}$的OPE

$$\hat{J}^{II}(z)\hat{J}^{JJ}(w) = \frac{\delta^{IJ}}{(z-w)^2} + \text{regular} , \tag{12.3.13}$$

从这里，我们得到

$$J^{II}(z)J^{JJ}(w) = \frac{\delta^{IJ} - 3/4}{(z-w)^2} + \text{regular}\,. \tag{12.3.14}$$

- N=1时空超对称性。在这种情形，有一个单一场和一个单一流，我们称为J

$$J = 2J^{11} \quad , \quad J(z)J(w) = \frac{3}{(z-w)^2} + \text{regular} \tag{12.3.15}$$

，没有Ψ算符。计算3点函数

$$\langle J(z_1)\Sigma(z_2)\bar{\Sigma}(z_3)\rangle = \frac{3}{2}\frac{z_{23}^{1/4}}{z_{12}z_{13}} \tag{12.3.16}$$

我们得到$\Sigma, \bar{\Sigma}$是仿射原的，分别有U(1)荷3/2和$-3/2$。Boson化U(1)流和分开荷自由度

$$J = i\sqrt{3}\partial\Phi \quad , \quad \Sigma = e^{i\sqrt{3}\Phi/2}W^+ \quad , \quad \bar{\Sigma} = e^{-i\sqrt{3}\Phi/2}W^-\,, \tag{12.3.17}$$

其中，$W^\pm$不依赖于Φ。如果我们把内部Virasoro算符写成有$T_\Phi = -(\partial\Phi)^2/2$的$T^{int} = \hat{T} + T_\Phi$，那么，$\hat{T}$和$T_\Phi$可交换。$\Sigma$场的维数等于U(1)荷的平方除以2的事实意味着$W^\pm$有维数0，于是必须正比于单位元。从而，$\Sigma, \bar{\Sigma}$是场$\Phi$的纯顶角算符。

现在考虑内部超流，用U(1)荷本征算符来展开它

$$G^{int} = \sum_{q\geq 0} e^{iq\Phi}T^{(q)} + e^{-q\Phi}T^{(-q)}\,, \tag{12.3.18}$$

其中，算符$T^{(\pm q)}$不依赖于Φ。那么，(12.3.8)意味着(12.3.18)中的q只取值$q = 1/\sqrt{3}$。我们可以把$G^{int} = G^+ + G^-$ 写作

$$J(z)G^\pm(w) = \pm\frac{G^\pm(w)}{(z-w)} + \ldots\,. \tag{12.3.19}$$

最后，满足G^{int}的N=1超共形代数分别意味着，$G^\pm$是权重为3/2 的Virasoro原的。而且，G^{int}满足(6.12.7)的事实意味着$J, G^\pm, T^{int}$ 满足有$c = 9$的N=2超共形代数(6.13.1)-(6.13.6)。逆讨论是明显的：如果内部CFT有N=2不变性，那么我们可以利用荷$\pm 3/2$的(手征)算符来构造时空超对称荷。在6.13节，利用谱流动，我们已经证明，这样的Ramond算符总在谱中，因为它们是NS基态的像。

这里，我们将描述无质量谱怎样从内部N=2超共形代数的一般性质而出现。就象在6.13讨论的，在内部N=2的NS部分，，有两个相关的基态：真空$|0\rangle$和手征基态$|h,q\rangle = |1/2, \pm 1\rangle$。我们还有4维左移动世界叶Fermion振子$\psi_r^\mu$，4维右移动Boson振子$\bar{a}_n$。还有，在内部CFT的右移动部分，除了真空态，我们有$\bar{h} = 1$态的集合体。结合内部基态，得到：

$$|h, q; \bar{h}\rangle \quad : \quad |0,0;0\rangle \ , \ |0,0;1\rangle^I \ , \ |1/2, \pm 1; 1\rangle^i \ , \tag{12.3.20}$$

其中，指标$I = 1, 2, \cdots, M$, $i = 1, 2\cdots, \bar{M}$计数各种这样的态。物理无质量Boson态是：

- $\psi^\mu_{-1/2}\bar{a}^\nu_{-1}|0,0;0\rangle$，它提供了引力子，反对称张量和胀子。

- $\psi^{\mu}_{-1/2}|0,0;1\rangle^I$。它们提供维数为$M$的规范群的无质量矢量。

- $|1/2,\pm 1;1\rangle^i$。它们提供$\bar{M}$复标量。

再考虑Fermion，从R部分，我们可以把无质量谱组织在N=1 的4维超对称多重态。利用附录D的结果，我们得到N=1超引力多重态，一个张量多重态(在对偶变换下，等价于一个手征多重态)，M矢量多重态和$\bar{M}$手征多重态。

• N=2 时空超对称性。在这种情形，有2个场$\Sigma^{1,2}$和4个流J^{IJ}。为了对角化(12.3.14)，定义$J^s = J^{11} + J^{22}$, $J^3 = (J^{11} - J^{22})/2$：

$$\begin{aligned} J^s(z)J^s(w) &= \frac{1}{(z-w)^2} + \dots , \\ J^3(z)J^3(w) &= \frac{1/2}{(z-w)^2} + \dots , \\ J^s(z)J^3(w) &= \cdots . \end{aligned} \tag{12.3.21}$$

用类似方式，我们可以证明，在(J^s, J^3)下，Σ^1有荷$(1/2, 1/2), \Sigma_2$有$(1/2, -1/2)$,$\bar{\Sigma}^1$ 有$(-1/2, -1/2)$和$\bar{\Sigma}^2$有$(-1/2, 1/2)$。而且，它们的荷充满它们的共形权重，使得如果我们Boson化流，那么场$\Sigma, \bar{\Sigma}$是纯顶角算符

$$J^s = i\partial\phi \quad , \quad J^3 = \frac{i}{\sqrt{2}}\partial\chi \, , \tag{12.3.22}$$

$$\Sigma^1 = \exp\left[\frac{i}{2}\phi + \frac{i}{\sqrt{2}}\chi\right] \quad , \quad \Sigma^2 = \exp\left[\frac{i}{2}\phi - \frac{i}{\sqrt{2}}\chi\right] , \tag{12.3.23}$$

$$\bar{\Sigma}^1 = \exp\left[-\frac{i}{2}\phi - \frac{i}{\sqrt{2}}\chi\right] \quad , \quad \bar{\Sigma}^2 = \exp\left[-\frac{i}{2}\phi + \frac{i}{\sqrt{2}}\chi\right] . \tag{12.3.24}$$

利用(12.3.6)中的这些，我们得到$J^{12} = \exp[i\sqrt{2}\chi]$ 和$J^{21} = \exp[-i\sqrt{2}\chi]$。于是，$J^3, J^{12}, J^{21}$形成流代数$\mathrm{SU}(2)_1$。而且，$\Psi^{12} = \exp[i\phi]$, $\bar{\Psi}^{12} = \exp[-i\phi]$。

我们再次考虑内部超流，用荷本征态展开它。利用(12.3.5)，我们可以验证出现的荷是$(\pm 1, 0)$和$(0, \pm 1/2)$。我们可以分裂

$$\begin{aligned} G^{int} = G_{(2)} + G_{(4)} \quad , \quad G_{(2)} = G^+_{(2)} + G^-_{(2)} \, , \\ G_{(4)} = G^+_{(4)} + G^-_{(4)} \, , \end{aligned} \tag{12.3.25}$$

$$\begin{aligned} J^s(z)G^{\pm}_{(2)}(w) &= \pm\frac{G^{\pm}_{(2)}(w)}{z-w} + \dots , \\ J^3(z)G^{\pm}_{(4)}(w) &= \pm\frac{1}{2}\frac{G^{\pm}_{(4)}(w)}{z-w} + \dots , \end{aligned} \tag{12.3.26}$$

$$J^s(z)G^{\pm}_{(4)}(w) = \text{finite} \quad , \quad J^3(z)G^{\pm}_{(2)}(w) = \text{finite} \tag{12.3.27}$$

$$G^{\pm}_{(2)} = e^{\pm i\phi} Z^{\pm} \, . \tag{12.3.28}$$

$Z^{\pm}$是维数1算符。它们可以用标量的形式写成$Z^{\pm} = i\partial X^{\pm}$。顶角算符$e^{\pm i\phi}$是复自由Fermion的那些算符。于是，对应于$G^{(2)}$的内部理论的部分是$c = 3$的一个自由2维CFT。最后，可以证明作用在$G^{\pm}_{(4)}$超流上的SU(2)代数生成两个另外的超流，它形成$c = 6$的N=4超共形代数(6.14.1)-(6.14.3)。

因为在$c = 3$的内部CFT中，有一个复自由Fermion $\psi = e^{i\phi}$，我们可以构造两个无质量矢量Boson态$\psi_{-1/2}\bar{a}^{\mu}_{-1}|p\rangle$ 和$\bar{\psi}_{-1/2}\bar{a}^{\mu}_{-1}|p\rangle$。它们中的一个是属于N=2超引力多重态的引力光子，同时，另一个是属于矢量张量多重态(胀子和$B_{\mu\nu}$也属于它)的矢量。无质量矢量多重态的矢量对应于$\psi^{\mu}_{-1/2}\bar{J}^{a}_{-1}|p\rangle$ 形式的态，其中，$\bar{J}^{a}$是一个右移动仿射流。相应的无矢量多重态的质量复标量对应于态$\psi_{-1/2}\bar{J}^{a}_{-1}|p\rangle$。无质量超多重态Boson从N=4的内部CFT出现。象在6.14节已经描述的，一个$c = 6$的N=4超共形CFT 总是包含$\Delta = \frac{1}{2}$的态，它按照$SU(2)_1$流代数的两个共轭双重态变换。把它们与$\bar{\Delta} = 1$的右移动算符结合给出4个无质量的超多重态的标量。

• N=4 时空超对称性。在这种情形，通过同样的分析，我们得到从4个对角流(即$J^{11}+J^{22}+J^{33}+J^{44}$)的那个是零的，于是恒等于零。

练习：Boson化剩余的3个流，把$\Sigma, \bar{\Sigma}$写作顶角算符，证明在这种情形，左移动内部CFT必须是环面的。

在N=4超引力多重态中参与的6个引力光子是形式$\bar{a}^{\mu}_{-1}\psi^{I}_{-1/2}|p\rangle$的态，其中，$I = 1, \ldots, 6$和$\psi^{I}$是前面提到的环面CFT 的6个左移动流的Fermion伙伴。

在上述所有情形，在杂优弦的右移动部分上没有来自时空SUSY的约束。我们将利用记号(p, q)来定义p个左移动超共形对称性和q个右移动超共形对称性。总之，在D=4的杂优弦中，内部CFT至少有(1,0)不变性。如果它有(2,0)不变性，那么我们有N=1时空SUSY。如果我们有$c = 3$ $(2, 0) \oplus c = 6$ $(4, 0)$，那么我们有时空中的N=2。最后，如果我们有6个自由左移动坐标，那么我们有时空中的N=4。

在Type-II理论中，情形是类似的，但是，这里超对称性或者来自右移动和/或来自左移动部分。例如，N=1时空超对称性需要(2,1)世界叶SUSY。对N=2时空超对称性，有两种可能。或者(2,2)，其中一个超对称性来自左一个来自右；或者只在同一边的$c = 3$ $(2, 0) \oplus c = 6$ $(4, 0)$，其中，两种时空超对称性都来自这边。

更多细节见[39, 40]。

12.4 有N=2超对称性的杂优轨流形紧致化

在本节，我们将考虑精确轨流形CFT来提供在4维中约化最大超对称性的紧致化空间。我们将主要集中在杂优弦。

在12.1节，我们已经看到，到4维的杂优弦环面紧致化，给出N=4超对称性的理论。我们想做的是考虑这个理论的轨流形，它有N=1,2时空超对称性。我们将必须找到轨流形的对称性，在它下面，4个4维引力微子中的某些是不变的。它们将被从谱中投影出来，我们将剩下一个更少超对称性的理论。为了找到这样的对称性，首先我们将必须仔细观察引力微子的顶角算符。我们将在光锥规范中进行，约定把8个横向左移动Fermion ψ_i Boson化到4个右移动标量。对Fermion选取一个复数基

$$\psi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^3 + i\psi^4) \quad , \quad \psi^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^5 + i\psi^6)\,, \tag{12.4.1}$$

$$\psi^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^7 + i\psi^8) \quad , \quad \psi^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^9 + i\psi^{10}) \tag{12.4.2}$$

，对$\bar{\psi}^I$类似。它们满足

$$\langle \psi^I(z)\bar{\psi}^J(w)\rangle = \frac{\delta^{IJ}}{z-w} \quad , \quad \langle \psi^I(z)\psi^J(w)\rangle = \langle \bar{\psi}^I(z)\bar{\psi}^J(w)\rangle = 0\,. \tag{12.4.3}$$

左移动$\mathrm{O}(8)_1$流代数$J^I = \psi^I\bar{\psi}^I$的4个Cartan流可以用4个自由Boson的形式写作

$$J^I(z) = i\partial_z\phi^I(z) \quad , \quad \langle \phi^I(z)\phi^J(w)\rangle = -\delta^{IJ}\log(z-w)\,. \tag{12.4.4}$$

用Boson的方式，

$$\psi^I =: e^{i\phi^I} : \quad , \quad \bar{\psi}^I =: e^{-i\phi^I} : \tag{12.4.5}$$

旋量原态由下列给出

$$V(\epsilon_I) =: \exp\left[\frac{i}{2}\sum_{I=0}^{3}\epsilon_I\ \phi^I\right] :, \tag{12.4.6}$$

有$\epsilon_I = \pm 1$。这个算符有$2^4 = 16$个分量，包含S和C O(8)旋量。

Fermion体系有一个O(8)全局对称性($\mathrm{O}(8)_1$流代数的零模式部分)。它的$\mathrm{U}(1)^4$ Abel子群按照下列作用

$$\psi^I \to e^{2\pi i\theta^I}\psi^I \quad , \quad \bar{\psi}^I \to e^{-2\pi i\theta^I}\bar{\psi}^I\,. \tag{12.4.7}$$

这按照下列等价地作用在Boson上

$$\phi^I \to \phi^I + 2\pi\ \theta^I\,. \tag{12.4.8}$$

$\mathrm{U}(1)^4$对称性的Z_2子群，即对所有I $\theta^I = 1/2$，是$(-1)^F$对称性。在这个变换下，Fermion是奇的，就象它们应该的那样，旋量顶角算符有相为$\exp[i\pi(\sum_I\ \epsilon^I)/2]$的变换。于是，

- $\sum_I\ \epsilon^I = 4k,\ k \in \mathbb{Z}$对应到旋量$S$。
- $\sum_I\ \epsilon^I = 4k+2,\ k \in \mathbb{Z}$对应到共轭旋量$C$。

标准GSO投影选取两个旋量中的一个，我们称其为S。考虑由下列给出的无质量物理顶角算符

$$V^{\pm,\epsilon} = \bar{\partial}X^{\pm}\ V_S(\epsilon)e^{ip\cdot X} \quad , \quad X^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^3 \pm iX^4)\,. \tag{12.4.9}$$

Boson ϕ^0从$D = 4$光锥时空Fermion构造出，于是携带4维螺旋性。$X^{\pm}$ Boson也携带4维螺旋性± 1。在(12.4.9)中对应于引力微子的顶角算符的子集是$\bar{\partial}X^+V(\epsilon^0\ =\ 1)$，有螺

旋性3/2，和$\bar{\partial}X^-V(\epsilon^0 = -1)$，有螺旋性$-3/2$。再考虑GSO投影，我们得到4个螺旋性$(\pm 3/2)$的态，就象在N=4理论中我们期望的。

考虑最大子群$O(2)\times O(6)\subset O(8)$，其中，O(2)对应于4维螺旋性。从4维的观点，O(6)对称性是一个内部对称性。这是所谓的N=4超对称性的R对称性，因为N=4超荷按照O(6) 的4维旋量变换，O(6)是N=4超对称代数的自同构(有中心荷等于零)。因为超荷被用来生成一个N=4超多重态的态，所以在多重态中的各种态在O(6) R对称性下有明确的变换性质。这里有一些有用的例子：

• N=4 SUGRA 多重态。它包含引力子(O(6)单态)，4个Majorana引力微子(O(6)的旋量)，6个引力光子(O(6)的矢量)，4个Majorana Fermion(O(6)的共轭旋量)，和2个标量(单态)。

• 无质量自旋3/2多重态。它包含1个ylwz(单态)，4个矢量(旋量)，7个Majorana Fermion (矢量＋单态) 和8个标量(旋量＋共轭旋量)。

• 无质量矢量多重态。它包含1个矢量(单态)，4个Majorana Fermion(旋量)和6个标量(矢量)。

如果我们破缺O(6) R对称性，那么我们将破缺超多重态的N=4结构。这将破缺N=4超对称性。

现在，我们将寻找CFT的对称性，轨流形化后，它将约化超对称性。为了保留Lorentz不变性，对称性不应该作用在4维超坐标X^μ, ψ^μ上。[20] 其余的是作用在内部左移动Fermion上的对称性，一个简单情形是作用在Fermion 上的O(6)的$U(1)^3$子群的离散子群。还有作用在Boson $(6,22)$紧致CFT上的对称性。在这样对称性上的一个重要约束是保持下列内部超流不变。

$$G^{\rm int} = \sum_{i=5}^{10} \psi^i \, \partial \, X^i \tag{12.4.10}$$

原因是$G^{\rm int}$和$G^{D=4}$一起，确定了对鬼场不存在负责的约束(运动方程)，因为我们不作用在$D=4$部分，所以$G^{D=4}$是不变的。把它们混起来可能危及轨流形理论的幺正性。

我们将从Z_2轨流形的简单例子开始，它将在4维产生N=2超对称性。考虑对动量设定Wilson线为零和适当地选取内部6－环面，使得$(6,22)$格点按照$(2,2)\otimes(4,4)\otimes(0,16)$分解。这个格点有一个改变所有(4,4) Boson坐标符号的对称性。为了保持内部超流不变，我们还必须改变Fermion ψ^i, $i=7,8,9,10$ 的符号。这对应于改变相应Boson

$$\phi^2 \to \phi^2 + \pi \quad , \quad \phi^3 \to \phi^3 - \pi \, . \tag{12.4.11}$$

对4个引力微子顶角算符的快速观察表明，它们之中的两个是不变的，同时，其余两个变换有一个负号。我们确切地有我们所需要的。虽然我们仍未做什么。

[20] 对这个说法有应该例外，但是我们将不考虑这个。

练习：计算上述轨流形的配分函数。证明它不是模不变的。

另外，我们必须在某处做一个更进一步的作用量。仍然保留的是$(0,16)$部分。考虑它对应于$\mathrm{E}_8\times\mathrm{E}_8$格点的情形。就象我们已经提到的，$\mathrm{E}_8\ni[\mathbf{248}]\to[\mathbf{120}]\oplus[\mathbf{128}]\in\mathrm{O}(16)$。关于$\mathrm{O}(16)$的子群$\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{O}(12)$进一步分解，我们得到：

$$[\mathbf{120}]\to[\mathbf{3},\mathbf{1},\mathbf{1}]\oplus[\mathbf{1},\mathbf{3},\mathbf{1}]\oplus[\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{66}]\oplus[\mathbf{2},\mathbf{1},\mathbf{12}]\oplus[\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{12}]$$
$$\in\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{O}(12)\,, \tag{12.4.12}$$

$$[\mathbf{128}]\to[\mathbf{2},\mathbf{1},\mathbf{32}]\oplus[\mathbf{1},\bar{\mathbf{2}},\mathbf{32}]\in\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{O}(12)\,. \tag{12.4.13}$$

在E_8上的作用量将是取两个$\mathrm{SU}(2)$子群的旋量($[\mathbf{2}]$的)为负的本身，但是保留共轭旋量($[\bar{\mathbf{2}}]$的)不变。这个投影保留$[\mathbf{3},\mathbf{1},\mathbf{1}],[\mathbf{1},\mathbf{3},\mathbf{1}],[\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{66}],[\mathbf{1},\bar{\mathbf{2}},\mathbf{32}]$表示，它组合以形成群$\mathrm{E}_7\times\mathrm{SU}(2)$。这可以在$\mathrm{E}_8$的$\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{E}_7$子群下分解它的伴随表示来看出。

$$\mathrm{E}_8\ni[\mathbf{248}]\to[\mathbf{1},\mathbf{133}]\oplus[\mathbf{3},\mathbf{1}]\oplus[\mathbf{2},\mathbf{56}]\in\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{E}_7\,, \tag{12.4.14}$$

其中，在这个基中，上面的变换对应于$[\mathbf{3}]\to[\mathbf{3}]$ 和$[\mathbf{2}]\to-[\mathbf{2}]$。为什么我们考虑用正交群方式的一个更复杂的方法，原因是，在这种语言中，轨流形块的构造是直接的。

我们将构造各种轨流形块。左移动Fermion贡献

$$\frac{1}{2}\sum_{a,b=0}^{1}(-1)^{a+b+ab}\,\frac{\vartheta^2\left[{a\atop b}\right]\vartheta\left[{a+h\atop b+g}\right]\vartheta\left[{a-h\atop b-g}\right]}{\eta^4}\,. \tag{12.4.15}$$

Boson (4,4)块可以在类似于(7.6.10)的方式中构造。我们得到

$$Z_{(4,4)}\left[{0\atop 0}\right]=\frac{\Gamma_{4,4}}{\eta^4\bar\eta^4}\quad,\quad Z_{(4,4)}\left[{h\atop g}\right]=2^4\frac{\eta^2\bar\eta^2}{\vartheta^2\left[{1-h\atop 1-g}\right]\bar\vartheta^2\left[{1-h\atop 1-g}\right]}\quad,\quad(h,g)\neq(0,0)\,. \tag{12.4.16}$$

我们的投影作用的E_8因子块由下列给出：

$$\frac{1}{2}\sum_{\gamma,\delta=0}^{1}\frac{\bar\vartheta\left[{\gamma+h\atop\delta+g}\right]\bar\vartheta\left[{\gamma-h\atop\delta-g}\right]\bar\vartheta^6\left[{\gamma\atop\delta}\right]}{\bar\eta^8}\,. \tag{12.4.17}$$

最后，有一个(2,2)环面和一个E_8部分，它们不被投影作用。总之，我们得到Z_2轨流形的杂优配分函数

$$Z^{\text{heterotic}}_{N=2}=\frac{1}{2}\sum_{h,g=0}^{1}\frac{\Gamma_{2,2}\,\bar\Gamma_{E_8}Z_{(4,4)}\left[{h\atop g}\right]}{\tau_2\eta^4\bar\eta^{12}}\,\frac{1}{2}\sum_{\gamma,\delta=0}^{1}\frac{\bar\vartheta\left[{\gamma+h\atop\delta+g}\right]\bar\vartheta\left[{\gamma-h\atop\delta-g}\right]\bar\vartheta^6\left[{\gamma\atop\delta}\right]}{\bar\eta^8}\times \tag{12.4.18}$$
$$\times\frac{1}{2}\sum_{a,b=0}^{1}(-1)^{a+b+ab}\,\frac{\vartheta^2\left[{a\atop b}\right]\vartheta\left[{a+h\atop b+g}\right]\vartheta\left[{a-h\atop b-g}\right]}{\eta^4}\,.$$

练习：证明，上述的配分函数是模不变的。找到Boson($a=0$)无质量谱。特别是证明，从未扭曲部分($h=0$)，我们得到引力子，一个反对称张量，在$\mathrm{G}=\mathrm{U}(1)^4\times\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{E}_7\times\mathrm{E}_8$的伴随表示中的矢量，在规范群G的伴随表示中的1个复标量，16个另外的中性标量和按照$\mathrm{E}_7\times\mathrm{SU}(2)$的$[\mathbf{56},\mathbf{2}]$表示的4个副本变换的标量。从扭曲的部分($h=1$)证明，我们得到只按照$[\mathbf{56},\mathbf{1}]$的32个副本和$[\mathbf{1},\mathbf{2}]$的128个副本变换的标量。

就象以前提到的，这个4维理论有N=2局域超对称性。相应的R对称性是SU(2)，它旋转两个超荷。我们将描述有关的无质量表示和它们在R对称性下的变换性质。

• SUGRA多重态包含引力子(单态)，2个Majorana 引力微子(双重态)和1个矢量(单态)。

• 矢量多重态包含1个矢量(单态)，2个Majorana Fermion (双重态)，和1个复(2个实)标量(单态)。

• 矢量张量多重态包含1个矢量(单态)，2个Majorana Fermion(双重态)，1个实标量(单态)和1个反对称张量(单态)。

• 超多重态包含2个Majorana Fermion(单态)和4个标量(2个双重态)。

现在，我们把无质量态安排到N=2多重态中。我们有SUGRA多重态，1个矢量张量多重态(包含胀子)，在$\mathrm{U}(1)^2\times\ \mathrm{SU}(2)\times\mathrm{E}_7\times\mathrm{E}_8$的伴随表示中的1个矢量多重态；其余的是超多重态，在$\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{E}_7$下，按照$\mathbf{4}[\mathbf{1},\mathbf{1}]+[\mathbf{2},\mathbf{56}]+\mathbf{8}[\mathbf{1},\mathbf{56}]+\mathbf{32}[\mathbf{2},\mathbf{1}]$来变换。

我们还将进一步考察SU(2) R对称性的起源。考虑4个实左移动Fermion $\psi^{7,\dots,10}$。虽然在轨流形作用下它们变换有一个负号，它们的O(4)~SU(2)×SU(2) 流(对Fermion是双线性的)是不变的。重新把4个实Fermion标记为ψ^0和ψ^a,$a=1,2,3$。于是，$\mathrm{SU}(2)_1\times\mathrm{SU}(2)_1$流代数由下列生成：

$$J^a=-\frac{i}{2}\left[\psi^0\psi^a+\frac{1}{2}\epsilon^{abc}\psi^b\psi^c\right]\quad,\quad\tilde{J}^a=-\frac{i}{2}\left[\psi^0\psi^a-\frac{1}{2}\epsilon^{abc}\psi^b\psi^c\right]. \tag{12.4.19}$$

虽然在未扭曲部分的所有SU(2)的都是不变的，在扭曲部分的情况是不同的。O(4)旋量基态在$\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SU}(2)$下，按照$[\mathbf{4}]\to[\mathbf{2},\mathbf{1}]+[\mathbf{1},\mathbf{2}]$ 来分解。轨流形投影平庸地作用在第一个SU(2)旋量上，在第二个旋量上有一个负号。轨流形投影破坏第二个SU(2)不变性。剩余的$\mathrm{SU}(2)_1$不变性变成N=2理论的R对称性。而且，在SU(2)下非平庸变换的唯一算符(与无质量态有关)是(四元数)线性组合

$$V^{\pm}_{\alpha\beta}=\pm i(\delta_{\alpha\beta}\psi^0\pm i\sigma^a_{\alpha\beta}\ \psi^a)\,, \tag{12.4.20}$$

它分别按照$[\mathbf{2}]$和$[\bar{\mathbf{2}}]$变换，以及在R部分中按照$[\mathbf{2}]$旋量。我们得到

$$V^+_{\alpha\gamma}(z)V^+_{\gamma\beta}(w)=V^-_{\alpha\gamma}(z)V^-_{\gamma\beta}(w)=\frac{\delta_{\alpha\beta}}{z-w}-2\sigma^a_{\alpha\beta}(J^a(w)-\tilde{J}^a(w))+\mathcal{O}(z-w)\,, \tag{12.4.21}$$

$$V^+_{\alpha\gamma}(z)V^-_{\gamma\beta}(w) = \frac{3\delta_{\alpha\beta}}{z-w} + 4\sigma^a_{\alpha\beta}\ \tilde{J}^a(w) + \mathcal{O}(z-w)\,, \tag{12.4.22}$$

$$V^-_{\alpha\gamma}(z)V^+_{\gamma\beta}(w) = \frac{3\delta_{\alpha\beta}}{z-w} - 4\sigma^a_{\alpha\beta}\ J^a(w) + \mathcal{O}(z-w)\,, \tag{12.4.23}$$

其中，求和在γ上。

这个$SU(2)_1$流代数与共形权重为3/2的4个算符结合，形成在有N=2时空超对称性的任何理论中N=4超共形代数，与12.3节的一般讨论一致。

在一个N=2理论中，复标量是模(它们没有势能)，它是属于规范群的Cartan 子群的规范Boson的伙伴。如果它们获得普通期望值，它们把规范群破缺到Cartan。所有带荷的超多重态也得到质量。

上述轨流形的推广，其中所有的Higgs期望值都打开，对应于把原来的(6,22)格点分裂到(4,4)$\oplus$(2,18)。我们在$(4,4)$中实行一个Z_2反演，它将破缺$\mathrm{N}=4\to\mathrm{N}=2$。在剩下的格点中，我们只实行一个$Z_2$平移(否则超对称性将进一步破缺)。我们将用$\epsilon/2$实行平移，其中$\epsilon\in L_{2,18}$。于是，配分函数是

$$Z^{\rm heterotic}_{N=2} = \frac{1}{2}\sum_{h,g=0}^{1}\frac{\Gamma_{2,18}(\epsilon)\left[{}^{h}_{g}\right]\ Z_{(4,4)}\left[{}^{h}_{g}\right]}{\tau_2\eta^4\bar{\eta}^{20}}\ \frac{1}{2}\sum_{a,b=0}^{1}\ (-1)^{a+b+ab}\ \frac{\vartheta^2\left[{}^{a}_{b}\right]\vartheta\left[{}^{a+h}_{b+g}\right]\vartheta\left[{}^{a-h}_{b-g}\right]}{\eta^4}\,, \tag{12.4.24}$$

变化的格点和$\Gamma_{2,18}(\epsilon)\left[{}^{h}_{g}\right]$在附录B描述。

练习：证明，如果$\epsilon^2/2 = 1 \bmod(4)$，那么(12.4.24)是模不变的。

理论依赖于$\Gamma_{2,18}(\epsilon)\left[{}^{h}_{g}\right]$的$2\times 18$个模和在$Z_{4,4}\left[{}^{0}_{0}\right]$中的16个模。除了张量多重态，还另有18个无质量矢量多重态。2×18个模是这些矢量多重态的标量。还有4个中性超多重态，它的标量是未扭曲的(4,4)轨流形模。在矢量多重态模空间的特殊子流形，额外的无质量矢量多重态和/或超多重态出现。在CFT水平，我们已经看到这样一个对称性提升。

矢量模空间的局域结构是$\mathrm{O}(2,18)/\mathrm{O}(2)\times\mathrm{O}(18)$的。从实数模$G_{\alpha\beta}, B_{\alpha\beta}, Y^I_\alpha$，我们可以构造如下的18个复模$T = T_1 + iT_2, U = U_1 + iU_2, W^I = W^I_1 + iW^I_2$

$$\begin{aligned} G &= \frac{T_2 - \frac{W^I_2 W^I_2}{2U_2}}{U_2}\begin{pmatrix} 1 & U_1 \\ U_1 & |U|^2 \end{pmatrix}\,, \\ B &= \left(T_1 - \frac{W^I_1 W^I_2}{2U_2}\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{12.4.25}$$

和$W^I = -Y^I_2 + UY^I_1$。还有一个另外的复标量——有$\mathrm{Im}\ S = S_2 = e^{-\phi}$的$S$场，它的实部是轴子$a$，轴子来自反对称张量的对偶。树图预势和Kähler势能是

$$f = S(TU - \tfrac{1}{2}W^I W^I)\quad,\quad K = -\log(S_2) - \log\left[U_2T_2 - \tfrac{1}{2}W^I_2 W^I_2\right]\,. \tag{12.4.26}$$

超多重态属于四元数流形$\mathrm{O}(4,4)/\mathrm{O}(4)\times\mathrm{O}(4)$。因为N=2超对称性不允许矢量和超多重态之间的中性耦合，胀子属于一个矢量多重态，超多重态模空间没有收到微扰或非微扰修正。

在这个N=2基态类中，我们将考虑螺旋性超迹B_2，它对N=2(短)BPS多重态的出现取迹。[21] 利用附录E和F，计算是直接的。我们得到

$$\begin{aligned}\tau_2\ B_2 &= \tau_2\ \langle\lambda^2\rangle = \Gamma_{2,18}\left[{}^{0}_{1}\right]\frac{\bar\vartheta_3^2\bar\vartheta_4^2}{\bar\eta^{24}} - \Gamma_{2,18}\left[{}^{1}_{0}\right]\frac{\bar\vartheta_2^2\bar\vartheta_3^2}{\bar\eta^{24}} - \Gamma_{2,18}\left[{}^{1}_{1}\right]\frac{\bar\vartheta_2^2\bar\vartheta_4^2}{\bar\eta^{24}}\\ &= \frac{\Gamma_{2,18}\left[{}^{0}_{0}\right]+\Gamma_{2,18}\left[{}^{0}_{1}\right]}{2}\bar F_1 - \frac{\Gamma_{2,18}\left[{}^{0}_{0}\right]-\Gamma_{2,18}\left[{}^{0}_{1}\right]}{2}\bar F_1 +\\ &\quad -\frac{\Gamma_{2,18}\left[{}^{1}_{0}\right]+\Gamma_{2,18}\left[{}^{1}_{0}\right]}{2}\bar F_+ - \frac{\Gamma_{2,18}\left[{}^{1}_{0}\right]-\Gamma_{2,18}\left[{}^{1}_{0}\right]}{2}\bar F_-\end{aligned} \tag{12.4.27}$$

有

$$\bar F_1 = \frac{\bar\vartheta_3^2\bar\vartheta_4^2}{\bar\eta^{24}}\quad,\quad \bar F_\pm = \frac{\bar\vartheta_2^2(\bar\vartheta_3^2\pm\bar\vartheta_4^2)}{\bar\eta^{24}}\,. \tag{12.4.28}$$

对所有N=2杂优基态，B_2按照下列变化：

$$\tau\to\tau+1\ :\ B_2\to B_2\quad,\quad \tau\to-\frac{1}{\tau}\ :\ B_2\to\tau^2\ B_2\,. \tag{12.4.29}$$

所有函数$\bar F_i$有正系数，可以展开

$$F_1 = \frac{1}{q}+\sum_{n=0}^{\infty}d_1(n)q^n = \frac{1}{q}+16+156q+\mathcal{O}(q^2)\,, \tag{12.4.30}$$

$$F_+ = \frac{8}{q^{3/4}}+q^{1/4}\sum_{n=0}^{\infty}d_+(n)q^n = \frac{8}{q^{3/4}}+8q^{1/4}(30+481q+\mathcal{O}(q^2))\,, \tag{12.4.31}$$

$$F_- = \frac{32}{q^{1/4}}+q^{3/4}\sum_{n=0}^{\infty}d_-(n)q^n = \frac{32}{q^{1/4}}+32q^{3/4}(26+375q+\mathcal{O}(q^2))\,. \tag{12.4.32}$$

还有，格点和$\frac{1}{2}(\Gamma_{2,18}\left[{}^{h}_{0}\right]\pm\Gamma_{2,18}\left[{}^{h}_{1}\right])$有正的多重性。全部正号对应于类矢量多重态，提升负号对应于类超多重态。普通无质量多重态的贡献由F_1的常数系数给出；它与我们期望的一致：$16=20-4$，因为我们有贡献为20的超引力多重态和19个矢量多重态和贡献为-4的超多重态。

我们将分析与(12.4.27)相应的BPS质量公式。我们将利用变化矢量的记号$\epsilon=(\vec\epsilon_L;\vec\epsilon_R,\vec\zeta)$，其中，$\epsilon_L,\epsilon_R$是二维整数矢量和$\zeta$是在$\mathrm{O}(32)/\mathrm{Z}_2$格点中的一个矢量。我们还有模不变约束$\epsilon^2/2=\vec\epsilon_L\cdot\vec\epsilon_R-\vec\zeta^{\,2}/2=1\ (\mathrm{mod}\ 4)$。

利用附录B的结果，我们可以把相应于上面格点和的BPS质量公式写出。对$h=0$，质量公式是

$$M^2 = \frac{|-m_1U+m_2+Tn_1+(TU-\frac{1}{2}\vec W^2)n_2+\vec W\cdot\vec Q|^2}{4\ S_2\left(T_2U_2-\frac{1}{2}\mathrm{Im}\vec W^2\right)}\,, \tag{12.4.33}$$

[21] 在附录D，你将找到螺旋性超迹的定义和它们与BPS多重性的关系。

其中，$\vec{W}$是Wilson线的16维复矢量。当整数

$$\rho = \vec{m}\cdot\vec{\epsilon}_R + \vec{n}\cdot\epsilon_L - \vec{Q}\cdot\vec{\zeta} \tag{12.4.34}$$

是偶数，这些态是有(12.4.30)的多重性函数$d_1(s)$的类矢量多重态和

$$s = \vec{m}\cdot\vec{n} - \frac{1}{2}\vec{Q}\cdot\vec{Q}\ ; \tag{12.4.35}$$

当ρ是奇数，这些态是有多重性$d_1(s)$的类超多重态。在$h=1$部分，质量公式是

$$\begin{aligned} M^2 \ &= \ \Big|(m_1+\tfrac{1}{2}\epsilon_L^1)U-(m_2+\tfrac{1}{2}\epsilon_L^2)-T(n_1+\tfrac{1}{2}\epsilon_R^1)+ \\ &\quad -(TU-\tfrac{1}{2}\vec{W}^2)(n_2+\tfrac{1}{2}\epsilon_R^2)+ \\ &\quad -\vec{W}\cdot(\vec{Q}+\tfrac{1}{2}\vec{\zeta})\Big|^2/4\ S_2\left(T_2U_2-\tfrac{1}{2}\mathrm{Im}\vec{W}^2\right)\ . \end{aligned} \tag{12.4.36}$$

ρ为偶数的态是有多重性$d_+(s')$的类矢量多重态，有

$$s' = \left(\vec{m}+\frac{\vec{\epsilon}_L}{2}\right)\cdot\left(\vec{n}+\frac{\vec{\epsilon}_R}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\vec{Q}+\frac{\vec{\zeta}}{2}\right)\cdot\left(\vec{Q}+\frac{\vec{\zeta}}{2}\right)\ , \tag{12.4.37}$$

同时，ρ为奇数的态是有多重性$d_-(s')$的类超多重态。

12.5 自发超对称破缺

在前一节我们已经看到，可以通过轨流形化程序破缺最大超对称性。额外的引力微子从谱中投影出来。然而，关于破缺超对称性的复原，在自由作用和非自由作用的轨流形之间有一个主要的差别。

为了使差别明显，考虑前面描述的T^4上的Z_2扭曲，在它的作用下，引力微子中的两个变换到一个负号，于是被投影出来。现在，考虑在额外的(2,2)环面的一个方向上同时作一个Z_2变换。取半径为R,R'的正交的两个圆周，在第一个圆周上作一个$X\to X+\pi$变换。振子模式是不变的，但是顶角算符态$|m,n\rangle$变化了一个相因子$(-1)^m$。这是一个自由作用的轨流形，因为在圆周上的作用是自由的。虽然两个引力微子的态$\bar{a}^\mu_{-1}|S^I_a\rangle$ $I=1,2$在扭曲下改变了一个负号，态$\bar{a}^\mu_{-1}|S^I_a\rangle\otimes|m=1,n\rangle$是不变的。它们有两个引力微子的时空量子数，但是它们不再是无质量的。实际上，在没有态$|m=1,n\rangle$时，它们应该是无质量的，但是现在，我们有应该来自那个态的质量的额外贡献：

$$m_L^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{R}+nR\right)^2 \quad , \quad m_R^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{R}-nR\right)^2\ . \tag{12.5.1}$$

匹配条件$m_L=m_R$意味着$n=0$，使得这些态的质量是$m^2=1/4R^2$。这些是有质量的引力微子，在这个理论中，N=4超对称性被破缺到N=2。用场论的语言，有效场论是N=4超引力的规范描述，其中，超对称性被自发破缺到在势能最小处的N=2。

虽然看起来在这样的基态和前面讨论的基态之间差别很小，但这是误导。

这里，我们将注意在明确和自发破缺的超对称性之间的一些重要差别。

• 在自发破缺的超对称理论中，高能行为比在相反情形更温和。如果超对称性被自发破缺，那么仍有剩余的破缺的Ward恒等式，它控制理论短距离的性质。在这样的理论中，有一个特征能标，即引力微子质量$m_{3/2}$，在它以上，超对称性有效地被复原。在能量$E >> m_{3/2}$的散射实验将揭示超对称物理。对这样的效应，有重要的含义，就象低能耦合参数的跑动一样。稍后我们将回到这个问题。

• 还有一个技术差别。就象我们已经讨论的，在自由作用轨流形情形，来自扭曲部分的态有依赖于模的质量，它一般是非零的(虽然在模空间的特殊值它们可以变成零)。这不象非自由作用的轨流形，那里，扭曲的部分质量独立于原来的模，从扭曲部分，一般得到无质量态。

• 在自发破缺超对称性的基态中，超对称破缺标度$m_{3/2}$是一个自由滑动的标度，因为它依赖于任意期望值的模。特别是，有一个模空间拐角，那里$m_{3/2} \to 0$，物理在所有标度都变成超对称的。利用模标量的自然度量，这些点是一个无穷远距离。在我们上面的简单例子中，当$R \to \infty$时，$m_{3/2} \sim 1/R \to 0$。在这点，一个额外的时空维数变成非紧致的，超对称性在5维复原。这个行为在所有来自平移的自由作用量的基态中是普遍的。

考虑我们在(12.4.24)描述的N=2轨流形基态类。如果(2,18)平移矢量ϵ处于格点的(0,16)部分中，那么$\mathrm{N} = 4 \to \mathrm{N} = 2$ 的破缺是“明显的”。然而，当$(\vec{\epsilon}_L, \vec{\epsilon}_R) \neq (\vec{0}, \vec{0})$，那么破缺是自发的。

在一般情形，在模空间中，由于挽救对偶多重性，没有有质量引力微子的全局证明。在前面的简单例子中，考虑下列变化。代替$(-1)^m$平移作用量，选取$(-1)^{m+n}$。在这种情形，有两个有引力微子的量子数的候选态：质量为$m_{3/2} \sim 1/R$ 的$\bar{a}^{\mu}_{-1}|S^I_a\rangle \otimes |m = 1, n = 0\rangle$和质量为$\tilde{m}_{3/2} \sim R$的$\bar{a}^{\mu}_{-1}|S^I_a\rangle \otimes |m = 0, n = 1\rangle$。在大的$R$区域，第一集合的态行为象有质量引力微子，而在小的$R$区域，它是轻的第二个。

12.6 杂优N=1理论和在4维中的手性

迄今，我们已经看到，利用轨流形技术，我们怎样才能去掉两个引力微子最后得到N=2超对称性。为了约化到N=1超对称性，我们可以把这个程序更推进一步。

练习：考虑把在N=4杂优弦中的(6,22)格点按照(6,22)= $\oplus_{i=1}^{3}$(2,2)$_i\oplus$(0,16)来分裂。把每一个2环面用$X_i^{\pm}, i = 1, 2, 3$来标记。考虑下列$Z_2 \times Z_2$轨流形作用量：第一个Z_2的元素g_1有一个负号作用在第一和第二环面的坐标上，第二个Z_2的元素g_2有一个负号作用在第一和第三个环面的坐标上，以及g_1g_2有一个负号作用在第二和第三个环面的坐标上。证明四个引力微子中只有一个避免这个$Z_2 \times Z_2$投影。

为了确保模不变性，我们还将必须作用在规范部分。我们将假定从有一个E_8的是Fermion实现的$E_8 \times E_8$弦开始。把实现第一个E_8的16个实Fermion分裂到10+2+2+2的群中。$Z_2 \times Z_2$投影按类似的方法作用在两个Fermion的三个群的每一个中，而其它的10是不变的。

这个$Z_2 \times Z_2$轨流形的配分函数是直接的：

$$
\begin{aligned}
Z^{N=1}_{Z_2\times Z_2} \;=\; & \frac{1}{\tau_2\ \eta^2\bar\eta^2}\ \frac{1}{4}\sum_{h_1,g_1=0,h_2,g_2=0}^{1}\ \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=0}^{1}(-)^{\alpha+\beta+\alpha\beta}\times \\
& \times\frac{\vartheta[{}^{\alpha}_{\beta}]}{\eta}\frac{\vartheta[{}^{\alpha+h_1}_{\beta+g_1}]}{\eta}\frac{\vartheta[{}^{\alpha+h_2}_{\beta+g_2}]}{\eta}\frac{\vartheta[{}^{\alpha-h_1-h_2}_{\beta-g_1-g_2}]}{\eta}\ \ \frac{\bar\Gamma_8}{\bar\eta^8}\ Z^1_{2,2}[{}^{h_1}_{g_1}]Z^2_{2,2}[{}^{h_2}_{g_2}]Z^3_{2,2}[{}^{h_1+h_2}_{g_1+g_2}]\times \\
& \times\frac{1}{2}\sum_{\bar\alpha,\bar\beta=0}^{1}\ \frac{\bar\vartheta[{}^{\bar\alpha}_{\bar\beta}]^5}{\bar\eta^5}\frac{\bar\vartheta[{}^{\bar\alpha+h_1}_{\bar\beta+g_1}]}{\bar\eta}\frac{\bar\vartheta[{}^{\bar\alpha+h_2}_{\bar\beta+g_2}]}{\bar\eta}\frac{\bar\vartheta[{}^{\bar\alpha-h_1-h_2}_{\bar\beta-g_1-g_2}]}{\bar\eta}\,. \qquad (12.6.1)
\end{aligned}
$$

我们将找到无质量谱，在N=1的超对称性多重态中分类。当然有N=1超引力多重态。接着，我们考虑这个基态的规范群。它来自未扭曲部分，所以我们必须在N=2基态的规范群上附加额外的投影。作为胀子的矢量伙伴的引力光子和来自T^2的两个U(1)的现在被投影出来。E_8避免了。

练习：证明在$E_7 \times SU(2)$上的额外Z_2投影给出$E_6 \times U(1) \times U(1)'$。$E_6$的伴随矩阵可以写作O(10)的伴随矩阵加上O(10)旋量再加上一个U(1)。

于是，这个基态的规范群是$E_8\times E_6\times$U(1)×U(1)'，我们有适当的矢量多重态。还有包含反对称张量和胀子的线性多重态。考虑形成N=1标量多重态的剩余的态。首先注意没有在E_8下控制的无质量多重态。

练习：证明在$E_6 \times U(1) \times U(1)'$下的标量多重态的荷和它们的多重性是下列表1和表2的那些。

E_6	U(1)	U(1)'	Sector	Multiplicity
27	1/2	1/2	Untwisted	1
27	-1/2	1/2	Untwisted	1
27	0	-1	Untwisted	1
1	-1/2	3/2	Untwisted	1
1	1/2	3/2	Untwisted	1
1	1	0	Untwisted	1
1	1/2	0	Twisted	32
1	1/4	3/4	Twisted	32
1	1/4	-3/4	Twisted	32

表1：$Z_2 \times Z_2$轨流形的非手征无质量内容

E_6	U(1)	U(1)'	Sector	Multiplicity
27	0	1/2	Twisted	16
27	1/4	-1/4	Twisted	16
27	-1/4	-1/4	Twisted	16
1	0	3/2	Twisted	16
1	3/4	-3/4	Twisted	16
1	-3/4	-3/4	Twisted	16

表2：$Z_2 \times Z_2$轨流形的手征无质量内容

就象我们可以看到的，理论的谱是手征的。例如，**27**的数目减去$\overline{\mathbf{27}}$的数目是3×16。然而，理论是规范反常自由的。

更复杂的轨流形给出不同的规范群和谱，甚至有某些唯象解释。构造这样的基态的方法(它可以系统化)，由Fermion构造提供[41]。我们不再进一步讨论，只指出[42]，它总结了有一个现实谱的已知的N=1杂优基态。

12.7 Type-II弦的轨流形紧致化

在12.2节，我们已经考虑在4维流形K3上的10维Type-II弦的紧致化。这提供了一个N=2超对称的6维理论。在一个额外T^2上的环面紧致化上，我们得到一个N=4超对称的4维理论。

这里我们将考虑到N=2超对称的6维上的一个Z_2轨流形紧致化，讨论它描述的在我们以前考虑的K3上的几何紧致化。

如果我们通过坐标符号的反演投影出作用在T^4上的轨流形变换(对在左和右上的世界叶Fermion类似)，我们将得到有一半(即两个)超对称性的(在6维中的)基态。配分函数如下

$$Z_{6-d}^{II-\lambda}=\frac{1}{2}\sum_{h,g=0}^{1}\frac{Z_{(4,4)}\left[\begin{smallmatrix}h\\g\end{smallmatrix}\right]}{\tau_2^2\eta^4\bar{\eta}^4}\times\frac{1}{2}\sum_{a,b=0}^{1}(-1)^{a+b+ab}\frac{\vartheta^2\left[\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right]\vartheta\left[\begin{smallmatrix}a+h\\b+g\end{smallmatrix}\right]\vartheta\left[\begin{smallmatrix}a-h\\b-g\end{smallmatrix}\right]}{\eta^4}\times \tag{12.7.1}$$

$$\times\frac{1}{2}\sum_{\bar{a},\bar{b}=0}^{1}(-1)^{\bar{a}+\bar{b}+\lambda\bar{a}\bar{b}}\frac{\bar{\vartheta}^2\left[\begin{smallmatrix}\bar{a}\\\bar{b}\end{smallmatrix}\right]\bar{\vartheta}\left[\begin{smallmatrix}\bar{a}+h\\\bar{b}+g\end{smallmatrix}\right]\bar{\vartheta}\left[\begin{smallmatrix}\bar{a}-h\\\bar{b}-g\end{smallmatrix}\right]}{\bar{\eta}^4}\,,$$

其中，$Z_{4,4}\left[\begin{smallmatrix}h\\g\end{smallmatrix}\right]$是(12.4.16)中的$T^4/Z_2$轨流形块，$\lambda=0,1$分别对应于Type-IIB,A。

我们将找到无质量Boson谱。在未扭曲的NS-NS部分中，我们得到引力子，反对称张量，胀子和16个标量(T^4/Z_2的模)。在NS-NS扭曲部分，我们得到4·16个标量。(除了胀子)标量总数是4·20。于是，NS-NS的无质量谱与12.2节中的K3紧致化的是一样的。

在R-R部分中，我们必须从B区分出A。在Type-IIA理论中，我们得到来自R-R未扭曲部分的7个矢量和1个3形式，和来自R-R扭曲部分的另外16个矢量。在Type-IIB中，我们得到来自R-R未扭曲部分的4个2指标反对称张量和8个标量，和来自R-R扭曲部分的16个反自对偶2指标反对称张量和16个标量。这再次与K3紧致化一致。

为了促进我们正在描述的在K3流形上运动的弦的一个CFT实现的事实，让我们更紧密地寻找T^4/Z_2的上同调。我们将利用两个复坐标$z_{1,2}$来描写T^4。T^4有1个0形式(常数)，2个(1,0)1形式(dz_1,dz_2)，2个(0,1)1形式($d\overline{z_1},d\overline{z_2}$)，1个(2,0)形式($dz_1\wedge dz_2$)，1个(0,2)形式($d\overline{z_1}\wedge d\overline{z_2}$)，和4个(1,1) 形式($dz_i\wedge d\overline{z_j}$)。最后，有4个3形式和1个4形式。在轨流形化$Z_2$下，1和3形式被投影出来，我们剩下1个0形式，1个4形式，1个(0,2), (2,0)和4个(1,1)形式。然而，Z_2作用量在T^4上有16个固定点，在轨流形中它变成奇异的。为了形成一个规则的流形，我们在每一个奇异点周围切去一个小邻域。边界是S^3/Z_2，我们可以粘上一个投影边界的Ricci平坦流形。有这个性质的相关流形是Eguchi-Hanson引力瞬子的零尺寸极限。这是最简单的一类4维非紧致超Kähler流形，称为渐近局域平坦Euclid(ALE)流形。在无限的3维流形有结构S^3/Γ。Γ是SU(2)单有限子群的一个。在S^3上的SU(2)作用是通常的群作用(记住，S^3是SU(2)的群流形)。这个作用在有限子群Γ上诱导一个作用。有限单SU(2)子群有一个A-D-E分类。A系列对应于Z_N子群。Eguchi-Hanson空间对应于$N=2$。D系列对应于SU(2)的Z_N子群，它是被一个额外Z_2元素扩张的Z_N群。最后，3个例外情形对应于二面、四面和八面群。读者可以在[43]中找到关于Eguchi-Hanson空间的更多内容。这个空间携带一个反自对偶(1,1)形式。于是，总体上，我们得到它们中的16个。我们最终得到K3流形的上同调，它当然是在一个奇异极限。我们还可以计算Euler数。假定我们有一个流形M，我们用阶为g的一个Abel群的作用来分割；切除一组固定点F，用一些规则流形N粘回去。那么Euler数由下列给出

$$\chi=\frac{1}{g}[\chi(M)-\chi(F)]+\chi(N)\,. \tag{12.7.2}$$

这里，$\chi(T^4)=0$，F是每点有$\chi=1$的16个固定点，而对每一个Eguchi-Hanson瞬子，$\chi=2$，我们有16个这样的，所以，总体上，$\chi(T^4/Z_2)=24$，它是K3的Euler数。通过从零瞬子尺寸离开，轨流形可以被退奇异。这个程序称为轨流形奇异的“销毁”。在轨流形CFT描述中，它对应于被扭曲算符的边缘微扰，或用弦论的语言，改变由16个轨流形扭曲场生成的标量的期望值。注意，在轨流形极限，虽然K3流形是奇异的，相应

的弦论却不是。虽然在模空间有一些点，在那里弦论变成奇异的。后面我们将回到这样的奇异性的解释。

References

[1] G. Veneziano, Nuovo Cimento **57A** (1968) 190.

[2] L. Alvarez-Gaumé and E. Witten, Nucl. Phys. **B234** (1984) 269.

[3] M. Green and J. Schwarz, Phys. Lett. **B149** (1984) 117.

[4] D. Gross, J. Harvey, E. Martinec and R. Rohm, Nucl. Phys. **B256** (1985) 253; *ibid.* **B267** (1986) 75.

[5] M. Green, J. Schwarz and E. Witten, *Superstring Theory, Vols I and II*, Cambridge University Press, 1987.

[6] D. Lüst and S. Theisen, *Lectures in String Theory*, Lecture Notes in Physics, 346, Springer Verlag, 1989.

[7] L. Alvarez-Gaumé and M. Vazquez-Mozo, *Topics in String Theory and Quantum Gravity*, in the 1992 Les Houches School, Session LVII, eds. B. Julia and J. Zinn-Justin, Elsevier Science Publishers, 1995.

[8] J. Polchinski, hep-th/9411028.

[9] J. Polchinski, Rev. Mod. Phys. **68** (1996) 1245, hep-th/9607050.

[10] J. Polchinski, hep-th/9611050.

[11] E. Witten, Nucl. Phys. **B276** (1986) 291.

[12] A. Polyakov, Phys. Lett. **B103** (1981) 207, 211.

[13] P. Ginsparg, *Applied Conformal Field Theory*, Proceedings of the XLIX Les Houches Summer School, eds. E. Brezin and J. Zinn-Justin, North Holland, 1990.

[14] A. Belavin, A. Polyakov and A. Zamolodchikov, Nucl. Phys. **B241** (1984) 333.

[15] E. Witten, Comm. Math. Phys. **92** (1984) 455.

[16] V. Knizhnik and A. Zamolodchikov, Nucl. Phys. **B247** (1984) 83.

[17] E. Kiritsis, Mod. Phys. Lett. **A4** (1989) 437.

[18] P. Goddard and D. Olive, Int. J. Mod. Phys. **A1** (1986) 303.

[19] M. Halpern, E. Kiritsis, N. Obers and C. Clubock, Phys. Rep. **265** (1996) 1, hep-th/9501144.

[20] W. Lerche, A.N. Schellekens and N.P. Warner, Phys. Rep. **177** (1989) 1.

[21] E. Kiritsis, Phys. Rev. **D36** (1987) 3048; Int. J. Mod. Phys. **A3** (1988) 1871.

[22] N. Warner, *Lectures on N=2 Superconformal Theories and Singularity Theory*, Lectures given at Spring School on Superstrings, Trieste, Italy, April 3-14 1989.

[23] S. Ketov, *Conformal Field Theory*, World Scientific Publishing Company, 1995.

[24] T. Eguchi and A. Taormina, Phys. Lett. **B200** (1988) 315.

[25] A. Giveon, M. Porrati and E. Rabinovici, Phys. Rept. **244** (1994) 77, hep-th/9401139.

[26] D. Friedan, E. Martinec and S. Shenker, Nucl. Phys. **B271** (1986) 93.

[27] L. Dixon, J. Harvey, C. Vafa and E. Witten, Nucl. Phys. **B261** (1985) 678; *ibid.* **B274** (1986) 285.

[28] L. Dixon, D. Friedan, E. Martinec and S. Shenker, Nucl. Phys. **B282** (1987) 13.

[29] R. Dijgkraaf, E. Verlinde and H. Verlinde, Comm. Math. Phys. **115** (1988) 649.

[30] C. Bachas, hep-th/9701019.

[31] E. Cremmer, B. Julia and J. Scherk, Phys. Lett. **B76** (1978) 409.

[32] J.H. Schwarz, Nucl. Phys. **B226** (1983) 269;
P.S. Howe and P.C. West, Nucl. Phys. **B238** (1984) 181.

[33] D. Gross and J. Sloan, Nucl. Phys. **B291** (1987) 41.

[34] L. Alvarez-Gaumé and P. Ginsparg, Ann. Phys. **161** (1985) 423.

[35] W. Lerche, B. Nilsson and A. Schellekens, Nucl. Phys. **B289** (1987) 609; *ibid.* **B299** (1988) 91.

[36] P. Candelas, G. Horowitz, A. Strominger and E. Witten, Nucl. Phys. **B258** (1985) 46.

[37] P. Aspinwall, hep-th/9611137.

[38] P. Ginsparg, Phys. Rev. **D35** (1987) 648.

[39] T. Banks, L. Dixon, D. Friedan and E. Martinec, Nucl. Phys. **B299** (1988) 613.

[40] T. Banks and L. Dixon, Nucl. Phys. **B307** (1988) 93.

[41] H. Kawai, D.C. Lewellen and S.-H.H. Tye, Phys. Rev. Lett. **57** (1986) 1832; (E) Phys. Rev. Lett. **58** (1987) 492; Nucl. Phys. **B288** (1987) 1;
I. Antoniadis, C. Bachas and C. Kounnas, Nucl. Phys. **B289** (1987) 87;
H. Kawai, D.C. Lewellen, J.A. Schwarz and S.-H.H. Tye, Nucl. Phys. **B299** (1988) 431.

[42] K. Dienes, Phys. Rept. **287** (1997) 447, hep-th/9602045.

[43] T. Eguchi, P. Gilkey and A. Hanson, Phys. Rep. **66** (1980) 213.

[44] V. Kaplunovsky, Nucl. Phys. **B307** (1988) 145; ERRATUM-ibid. **B382** (1992) 436.

[45] L. Dixon, V. Kaplunovsky and J. Louis, Nucl. Phys. **B355** (1991) 649.

[46] I. Antoniadis, E. Gava, and K. Narain, Nucl. Phys. **B383** (1992) 93;
I. Antoniadis, E. Gava, K. Narain and T. Taylor, Nucl. Phys. **B407** (1993) 706.

[47] E. Kiritsis and C. Kounnas, Nucl. Phys. **B442** (1995) 472; Nucl. Phys. [Proc. Suppl.] **41** (1995) 331, hep-th/9410212; hep-th/9507051.

[48] C. Bachas and C. Fabre, Nucl. Phys. **B476** (1996) 418, hep-th/9605028;
I. Antoniadis, C. Bachas, C. Fabre, H. Partouche and T. R. Taylor, Nucl. Phys. **B489** (1997) 160, hep-th/9608012.

[49] C.G. Callan, J. Harvey and A. Strominger, hep-th/9112030.

[50] J. Atick, L. Dixon and A. Sen, Nucl. Phys. **B292** (1987) 109.

[51] M. Petropoulos and J. Rizos, Phys. Lett. **B374** (1996) 49, hep-th/9601037;
E. Kiritsis, C. Kounnas, P. M. Petropoulos and J. Rizos, Nucl. Phys. **B483** (1997) 141, hep-th/9608034.

[52] E. Kiritsis, C. Kounnas, P. M. Petropoulos and J. Rizos, Phys. Lett. **B385** (1996) 87, hep-th/9606087.

[53] N. Seibeg, Phys. Rev. **D49** (1994) 6857, hep-th/9402044.

[54] N. Seiberg and E. Witten, Nucl. Phys. **B426** (1994) 19, hep-th/9407087; *ibid.* **B431** (1994) 484, hep-th/9408099.

[55] K. Intriligator and N. Seiberg, Nucl. Phys. [Proc. Suppl.] **45BC** (1996) 1;
M. Shifman, hep-th/9704114.

[56] L. Alvarez-Gaumé and S.F. Hassan, hep-th/9701069;
A. Bilal, hep-th/9601007.

[57] J. Schwarz, Phys. Lett. **B360** (1995) 13, hep-th/9508143; *ibid.* **B367** (1996) 97, hep-th/9510086; hep-th/9607201.

[58] C. Hull and P. Townsend, Nucl. Phys. **B438** (1995) 109, hep-th/9410167.

[59] E. Witten, Nucl. Phys. **B443** (1995) 85, hep-th/9503124; hep-th/9507121.

[60] P. Horava and E. Witten, Nucl. Phys. **B475** (1996) 94, hep-th/9603142.

[61] J. Polchinski and E. Witten, Nucl. Phys. **B460** (1996) 525, hep-th/9510169.

[62] T. Banks, W. Fischler, S. Shenker and L. Susskind, Phys. Rev. **D55** (1997) 5112, hep-th/9610043;
T. Banks, Nucl. Phys. **62** [Proc. Suppl.] (1998) 341, hep-th/9706168.

[63] J. Polchinski, Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 4724, hep-th/9510017.

[64] R. Dijkgraaf, E. Verlinde and H. Verlinde, Nucl. Phys. **B500** (1997) 43, hep-th/9703030.

[65] R. Nepomechie, Phys. Rev. **D31** (1985) 1921;
C. Teitelboim, Phys. Lett. **B167** (1986) 69.

[66] A. Sen, Nucl. Phys. **58** [Proc. Suppl.] (1997) 5, hep-th/9609176.

[67] E. Witten, Nucl. Phys. **B460** (1996) 541, hep-th/9511030.

[68] A. Dabholkar, Phys. Lett. **B357** (1995) 307, hep-th/9511053.

[69] A. Tseytlin, Phys. Lett. **B367** (1996) 84, hep-th/9510173; Nucl. Phys. **B467** (1996) 383, hep-th/9512081.

[70] C. Bachas and E. Kiritsis, Nucl. Phys. [Proc. Suppl.] **55B** (1997) 194, hep-th/9611205.

[71] C. Bachas, C. Fabre, E. Kiritsis, N. Obers and P. Vanhove, Nucl. Phys. **B509** (1998) 33, hep-th/9707126;
E. Kiritsis and N. Obers, JHEP **10** (1997) 004, hep-th/9709058.

[72] N. Kim and S. J. Rey, hep-th/9701139;
S. J. Rey, hep-th/9704158.

[73] G.W. Gibbons, M.B. Green and M.J. Perry, Phys. Lett. **B370** (1996) 37, hep-th/9511080.

[74] A. Dabholkar, G. Gibbons, J.A. Harvey and F. Ruiz Ruiz, Nucl. Phys. **B340** (1990) 33;
A. Dabholkar and J.A. Harvey, Phys. Rev. Lett. **63** (1989) 478.

[75] H. Ooguri and C. Vafa, Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 3296;
M.B. Green and M. Gutperle, Phys. Lett. **B398** (1997) 69, hep-th/9612127; hep-th/9701093;
M.B. Green, M. Gutperle and P. Vanhove, hep-th/9706175;
E. Kiritsis and B. Pioline, Nucl. Phys. **B508** (1997) 509, hep-th/9707018; Phys. Lett. **B418** (1998) 61, hep-th/9710078;
J. Russo and A. Tseytlin, Nucl. Phys. **B508** (1997) 245, hep-th9707134.

[76] C. Vafa, Nucl. Phys. **B469** (1996) 403, hep-th/9602022;
D. Morrison and C. Vafa, Nucl. Phys. **B473** (1996) 74, hep-th/9602114; Nucl. Phys. **B476** (1996) 437, hep-th/9603161;
M. Bershadsky, A. Johansen, T. Pantev, V. Sadov and C. Vafa, Nucl. Phys. **B505** (1997) 153, hep-th/9612052.

[77] E.S. Fradkin and A.A. Tseytlin, Phys. Lett. **B163** (1985) 123;
A.A. Abouelsaood, C.G. Callan, C.R. Nappi and S.A. Yost, Nucl. Phys. **B280** (1987) 599.

[78] M.B. Green, J. Harvey and G. Moore, Class. Quant. Grav. **14** (1997) 47, hep-th/9605033.

[79] C. Bachas, Phys. Lett. **B374** (1996) 37, hep-th/9511043;
M. R. Douglas, D. Kabat, P. Pouliot and S. Shenker, Nucl. Phys. **B485** (1997) 85, hep-th/9608024.

[80] A. Strominger and C. Vafa, Phys. Lett. **B379** (1996) 99, hep-th/9601029.

[81] J. Maldacena, hep-th/9607235.

[82] S. Cherkis and J.H. Schwarz, Phys. Lett. **B403** (1997) 225, hep-th/9703062.

[83] S. Kachru and C. Vafa, Nucl. Phys. **B450** (1995) 69, hep-th/9505105.

[84] S. Ferrara, J. Harvey, A. Strominger and C. Vafa, Phys.Lett. **B361** (1995) 59, hep-th/9505162.

[85] A. Klemm, W. Lerche and P. Mayr, Phys.Lett. **B357** (1996) 313, hep-th/9506112;
S. Kachru, A. Klemm, W. Lerche, P. Mayr and C. Vafa, Nucl. Phys. **B459** (1996) 537, hep-th/9508155;
G. Aldazabal, A. Font, L. Ibañez and F. Quevedo, Nucl. Phys. **B461** (1996) 85, hep-th/9510093, Phys. Lett. **B380** (1996) 33, hep-th/9602097.

[86] W. Lerche, Nucl. Phys. [Proc. Suppl.] **55B** (1997) 83, hep-th/9611190.

[87] J. Harvey and G. Moore, Phys. Rev. **D57** (1998) 2323, hep-th/9610237;
A. Gregori, E. Kiritsis, C. Kounnas, N. A. Obers, P. M. Petropoulos and B. Pioline, Nucl. Phys. **B510** (1998) 423, hep-th/9708062.

[88] J. Scherk and J. Schwarz, Nucl. Phys. **B153** (1979) 61;
J. Maharana and J. Schwarz, Nucl. Phys. **B390** (1993) 3.

[89] V. Kaplunovsky and J. Louis, Nucl. Phys. **B355** (1991) 649; *ibid.* **B422** (1994) 57, hep-th/9402005.

[90] L. Andrianopoli, M. Bertolini, A. Ceresole, R. D'Auria, S. Ferrara, P. Fre and T. Magri, J. Geom. Phys. **23** (1997) 111, hep-th/9605032;
J. Louis and K. Foerger, Nucl. Phys. **55** [Proc. Suppl.] (1997) 33, hep-th/9611184.

[91] J. Bagger and J. Wess, *Supersymmetry and Supergravity* , Princeton Series in Physics, second edition, 1992.

[92] L. Andrianopoli, R. D'Auria and S. Ferrara, Int. J. Mod. Phys. **A13** (1998) 431, hep-th/9612105.

[93] T. Curtright, Phys. Lett. **B102** (1981) 17.

[94] S. Ferrara, C.A. Savoy and L. Girardello, Phys. Lett. **B105** (1981) 363.

[95] J. Harvey and G. Moore, Nucl. Phys. **B463** (1996) 315, hep-th/9510182.

[96] E. Kiritsis, hep-th/9708130.