内 容 简 介

本书是教育部研究生工作办公室推荐的研究生教学用书.全书对激光光学的研究方法和主要论题做了系统深入的讨论.其中,第一章激光光学概论,第二章光学中的矩阵方法,第三章激光束的描述和光束质量为第一部分,阐述激光光学的基本概念、研究方法、光束描述、光束质量和光束控制等问题.第二部分包括第四章高斯光束、第五章高斯－谢尔模型光束、第六章平顶光束和第七章贝塞耳光束,研究有代表性光束的描述及其传输变换特性.第八章简单两镜光学谐振腔,第九章光学谐振腔的衍射积分方程理论,第十章一些典型光学谐振腔的特性和第十一章光学谐振腔的失调特性构成第三部分光腔技术物理的研究内容,第十二章为展望.本书内容丰富,取材新颖,基础知识和前沿进展并重,反映了国内外在激光光学领域的最新研究成果,同时还阐述了作者对激光光学中若干专门问题的个人见解.

本书可作为高等院校光学、光学工程、物理电子学及电子科学与技术等专业高年级本科生、研究生的教材,也可供在相关领域工作的教师和科技人员参考.

划编辑　胡凯飞
任编辑　董洪光
面设计　李卫青
任绘图　尹　莉
式设计　陆瑞红
任校对　殷　然
任印制

图书在版编目(CIP)数据

激光光学:光束描述、传输变换与光腔技术物理/吕百达著.—3版.—北京:高等教育出版社,2003.12

ISBN 7-04-012967-1

Ⅰ.激… Ⅱ.吕… Ⅲ.激光理论-研究生-教材 Ⅳ.TN241

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第075077号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷			
开　　本	787×960　1/16	版　　次	1986年7月第1版
			年　月第3版
印　　张	32.75	印　　次	年　月第　次印刷
字　　数	550 000	定　　价	44.30元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换.

版权所有　侵权必究

序　　言

《激光光学》一书这次新版时，百达教授对其做了大的改动，融入了近十年来该领域内的一些重要科研成果并吸收了各方面专家的建议，使它成为一本更为丰满、新颖的高校教材和科技参考书.有幸为新版做序，并读本书，对我是一次再学习的好机会.

整个激光科技领域，如果说激光的产生是“头”，激光与物质的相互作用是“尾”，则激光光学是其“中段”，它研究激光束在各种光学系统中传输变换的规律和光腔内的光束特性，以便尽可能按应用的要求对光束进行控制.显然，掌握激光光学的知识，对于与激光有关的科学研究和工程应用是十分重要的.写好一本《激光光学》，可以说是一番“红烧中段”的功夫.百达教授基于他深厚的学科基础和多年的潜心研究，娴熟地利用矩阵光学方法和光学衍射理论，对各种有代表性的激光束的传输变换和光腔技术物理问题进行了清晰而系统的阐述，为我国激光领域的教学和科研提供了一本非常有用的著作.

1992 年，邓锡铭先生在为本书第二版做序时，曾称赞这是一本激光光学方面的好书，并推荐再版.10 年后本书在修订后得以再版，不仅从一个侧面反映了我国激光科学技术的蓬勃发展，也可用以告慰我国光学界的先驱者.

杜祥琬

2002 年 9 月 22 日于北京

第二版序言

激光光学是研究激光束在空间传输变换的一门分支学科.在激光发明以前,研究光束通过光学系统的传输特性多以匀振幅光束为对象,而由腔模决定的激光束为非匀振幅光束,从而带来激光科学工作者感兴趣的一些新的传输特性,高斯光束的传输就是一个典型的例子.

作者娴熟地利用矩阵光学方法,并使之与光学衍射理论相结合,既简洁又清楚地描述了激光束的传输变换,特别是对谐振腔内光束特性的分析,更为系统、完整.

作者吕百达教授长期从事光束传输的研究,有深厚的基础.本书是他十多年来从事激光光学科研和教学工作成果的总结.在书中,由浅入深组织的材料相信对入门读者会是特别有用的.我认为,这是一本激光光学方面的好书,特此推荐再版.

邓锡铭　教授

1992 年 5 月于上海光机所

前　言

激光科学技术领域的研究内容大体上可分为三部分.第一部分研究激光的产生、工作原理和工作特性,以激光物理为其理论基础,并以激光器件和技术为其技术基础.第二部分研究激光束的传输变换规律以实现光束控制之目的,这是激光光学研究的论题.第三部分研究激光和物质相互作用,包括激光的多种辐照效应、激光等离子体物理以及涉及面非常广泛的激光工业材料加工、激光医学、激光生物学和激光化学等诸多实际应用.

在实际工作中,由激光器输出的光束常需要通过一些光学系统(包括自由空间)后,才能到达激光与物质相互作用面,或者因输出激光参数不能满足应用要求而需要设计合适的光学系统加以变换.激光光学正是研究激光束通过各类光学系统(成像、非成像光学系统,轴对称和非轴对称光学系统等)、各种介质(均匀和非均匀介质、各向同性和各向异性介质等)的传输变换规律以及与光腔工程相关的光腔技术物理问题的一门分支学科.自1960年世界上第一台红宝石激光器问世以来,因应用需求的牵引,光束传输变换特性和光腔技术物理的研究工作一直十分活跃,进展迅速,涉及的内容非常广泛,发表的文献浩如烟海,相关研究成果已获得了卓有成效的实际应用;系统地掌握激光光学的基础知识和研究方法,并应用这些知识和方法来解决实际问题,对于激光科学家和工程师而言都是必要的.

本书是以光束描述、传输变换与光腔技术物理作为重点内容编写的.全书从内容安排上可分为以下几部分.第一章激光光学概论,第二章光学中的矩阵方法,第三章激光束的描述和光束质量为第一部分,阐述激光光学的基本概念、研究方法、光束描述、光束质量和光束控制等问题.第二部分包括第四章高斯光束,第五章高斯－谢尔模型光束,第六章平顶光束和第七章贝塞耳光束,研究在实际工作中经常遇到、有代表性的高斯光束(包括基模和多模高斯光束)、部分相干光束(典型例为高斯－谢尔模型光束)、平顶均匀分布光束(超高斯光束、平顶高斯光束等)的描述及其传输变换特性.贝塞耳类光束(零阶和高阶贝塞耳光束等)不仅因其具有被称为“无衍射”的特性而引起学术界的研究兴趣,而且空间分布为贝塞耳函数的超短脉冲贝塞耳光束在色散介质中传输时还可能具有“无衍射和无色散”的特性而受到重视,因此也放在这部分中讨论.第八章简单两镜光学谐振腔,第九章光学谐振腔的衍射积分方程理论,第十章一些典型光学谐振腔的特性和第十一章光学谐振腔的失调特性构成第三部分光腔技术

物理的研究内容.在这部分中,除系统介绍光学谐振腔的计算设计方法外,还以若干典型有实际应用意义的光腔为例,研究光腔的设计、工作特性和改善光腔输出特性的专门技术,并以热透镜腔作为有源腔的代表,讨论其动态工作特性以及多棒串接热透镜腔的设计和热致应力双折射补偿技术等.最后,在第十二章展望中,阐述了作者对激光光学前沿和发展方向等方面的个人见解.全书用了六章即第一章至第四章、第八章和第九章的篇幅讨论激光光学的分析方法.基本理论和研究结果,其余各章介绍激光光学专门问题、前沿和进展.

《激光光学》是以1983年以来作者在四川大学、西南交通大学、宁波大学和江西师范大学等校对物理系,应用物理系和光电科学技术系的光学、光电子技术等专业高年级本科生、研究生和高访学者讲授《激光光学》和相关课程所用讲义、专题报告,以及在国内外学术会议和高级研讨班上所做学术报告为素材加以整理、修改而成的.在编写过程中还广为参考了在这一领域发表的中外学术论文、著作、博士论文和研究报告.每章末编入了习题和参考文献,供练习和进一步学习参考之用.本书力求较为全面和系统地反映国内外在激光光学研究领域包含的主要论题和有代表性的研究成果.其中,也包括我国激光科学家跻身于该领域取得的一些有重要意义的科研成果,书中亦写入了作者及其研究组在国内外从事激光光学相关课题研究的心得体会,希望能形成一本有中国特色、内容深度上适于作为高等院校光学、光学工程、物理电子学及电子科学与技术等专业高年级本科生、研究生的教材以及在相关科研领域工作的教师和科技人员的参考书.使用本书作教材时,可按授课对象和需要对书中章节进行选取.在本书新版时,作者认真考虑了国内外专家学者所提意见,与第二版(吕百达.激光光学——激光束的传输变换和光束质量控制.成都:四川大学出版社,1992)相比较,除在素材安排上有上述变动外,在内容上亦做了大的增删,例如:

- 对《激光光学》的研究方法做了较为一般的讨论,包括了光频电磁场的矢量理论、非近轴光束和超短光脉冲的研究方法等.
- 对光束描述和光束质量等问题做了较为系统的阐述,反映了国际上近年来相关研究工作的进展.
- 增加了有光阑系统中光束传输变换、矢量光束、非近轴光束、几个光周期(甚至更短)的超短光脉冲的传输等新的内容.
- 写入了多棒串接腔和热致应力双折射补偿技术、负支实共焦非稳腔、受激布里渊散射相位共轭腔和超高斯反射镜腔等有实际应用意义的新型光腔.

• 对激光光学前沿和发展方向，研究中存在的某些问题和可能的解决方法等做了讨论.

• 删去了原书第十章，新写第三章、第六章和第十二章，改写第一章、第五章和第七章.在第四章、第十章中增加了较多内容，其余各章也有修改.

激光光学是一门覆盖范围甚为广泛的分支学科，还可以包括激光在光纤和波导中的传输，在非线性介质中的传输，激光大气传输以及强激光的传输与控制等内容.因教学内容安排上的原因和受篇幅所限，本书未能专门讨论这些论题，有兴趣的读者请参阅有关专著或文献，例如：

[1] Snyder A W，Love J D. Optical Waveguide Theory. London: Chapman and Hall，1983

[2] Shen Y R. The Principles of Nonlinear Optics. New York: John Wiley & Sons，Inc，1984

[3] 宋正方.应用大气光学基础.北京：气象出版社，1990

[4] 吕百达.强激光的传输与控制.北京：国防工业出版社，1999

自 1980 年以来，作者曾多次去德国工作，难以忘怀的是在从事激光光学的专题研究中至今一直得到柏林技术大学著名激光科学家 H. Weber 教授的大力支持和热情帮助.自 20 世纪 80 年代末期以来，作者参加了国家高技术激光技术主题和惯性约束聚变主题的科研实践，在从事光束传输和光束控制研究中与邓锡铭院士、杜祥琬院士、王乃彦院士、贺贤土院士、刘盛纲院士、姜文汉院士、赵伊君院士、范滇元院士、姚建铨院士、林尊琪教授、华欣生教授、苏毅教授、魏光辉教授、陆启生教授、王绍民教授和杨成龙教授等(恕未在此一一列出)的多次深入讨论使作者获益匪浅，谨此向他们和曾经对作者在科学研究中给予帮助的国内外专家和朋友们以及 20 余年来先后曾在作者所在研究组工作和学习的 70 多位老师和研究生们一并致谢！

邓锡铭院士生前十分重视光束传输的研究，认为是对激光应用，特别是对强激光应用不可缺少的基础研究工作，1992 年他曾热情为本书第二版作序.中国工程院副院长杜祥琬院士在百忙之中为新版写了序言.特此，向他们表示衷心的感谢！

本书虽经多次修改，但受限于作者的学识水平，书中谬误之处难免，恳请阅者批评指正，不胜感激！

吕百达

2003 年 5 月于成都

本书使用的主要符号一览表

a	本征像散
A,B,C,D	变换矩阵 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 诸元素
$\boldsymbol{B}$	磁感应强度矢量
c	光速
$\boldsymbol{D}$	电位移矢量
D	失调灵敏度参量/光焦度
$\boldsymbol{E}$	电场强度矢量/能量/单位矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
E	电场强度/本征像散
F	菲涅耳数/透镜焦距
f	透镜焦距/频率
G	G 参数/光腔的特征参数
g	g 参数
g',g''	g'参数，g''参数
g^*	g^* 参数
g'^*,g''^*	g'^* 参数，g''^* 参数
g_0	小信号增益系数
$\boldsymbol{H}$	磁场强度矢量
h	维格纳分布函数
h_1,h_2	厚透镜主面与顶点间距离(主距)
I_0	零阶修正贝塞耳函数
$\boldsymbol{I}$	4×4 单位矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
I	光强
J_0	零阶贝塞耳函数
J_1	一阶贝塞耳函数

续表

$\boldsymbol{J}$	4×4 矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ /电流密度矢量
$\hat{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r})$	偏振矩阵
J	电流强度 /互强度
K	陡峭度(K 参数)
k	波数
L	腔长
l	激光介质长度 /距离
$\boldsymbol{M}$	矩阵 /磁化强度矢量
M	非稳腔往返一周放大率 /磁化强度
M_1, M_2, M_3	M_1 角放大率，M_2 横向放大率，M_3 轴向放大率
$\boldsymbol{M}^{-1}$	$\boldsymbol{M}$ 的逆矩阵
$\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}$	$\boldsymbol{M}$ 的转置矩阵
$\boldsymbol{M}^{+}$	$\boldsymbol{M}$ 的转置共轭矩阵
$\overleftarrow{\boldsymbol{M}}$	$\boldsymbol{M}$ 的反向变换矩阵
M^2	M^2 因子
$\boldsymbol{m}$	单程变换矩阵
m	非稳腔的单程放大率
n	介质折射率
m, n	横模序数(矩形域)
N	光子密度 /阶数
$\boldsymbol{P}$	电极化强度矢量
P	功率
p, l	横模序数(圆形域)
Q	腔的品质因数(Q 值)
Q^{-1}	复波前矩阵
q	q 参数 /纵模序数
R	反射率 /高斯光束等相面曲率半径 /球面波曲率半径
r	半径 /径向坐标 /距离
S	谱密度函数 /面积
s	匹配因子 /稳定性因子
T	透过率 /时间 /脉宽

续表

t	时间 /扭曲参数
u	物距
V	损耗因子
υ	像距
W	交叉谱密度函数
W_m，W_n，W_{pl}	高阶高斯光束束宽
w_0，W_0	束腰宽度
w，W	束宽
Z_0，Z_{0i}	瑞利长度
α	损耗系数 /吸收系数 /角度 /α 矩阵 /空间相关度
β	β 值 /角度 /β 矩阵 /空间相关参数
γ	本征值 /γ 矩阵 /复相干系数 /复相干度
δ	功率损耗
σ	电导率 /高斯光阑宽度 /相关长度
χ	线性极化率
τ_{R}	光子寿命
ρ	腔反射镜曲率半径 /距离
η	效率
ε_0	真空中的电容率
ε	电容率
λ	波长
μ_0	真空中的磁导率
μ	磁导率 /复相干度
ϕ	相移 /直径
φ	相移 /角度
ν	频率
$\Delta\nu_q$	纵模间隔
$\Delta\nu_c$	无源腔线宽
ω	圆频率
θ_0	基模高斯光束远场发散角
θ	远场发散角
θ_x，θ_y	x、y 方向远场发散角
Γ	非稳腔输出耦合率 /传输常数
Δ	望远镜离焦量

目　　录

第一章　激光光学概论 …… 1

§1.1　激光光学的研究内容和研究方法 …… 1

§1.2　波动光学的基本方程 …… 7

§1.3　广义衍射理论 …… 9

§1.4　算子光学方法 …… 18

§1.5　哈密顿光学 …… 21

§1.6　激光的模式 …… 22

§1.7　光学谐振腔的损耗　Q 值　线宽 …… 26

习题 …… 30

参考文献 …… 31

第二章　光学中的矩阵方法 …… 33

§2.1　变换矩阵　$ABCD$ 定律 …… 33

§2.2　变换矩阵示例 …… 38

§2.3　几何光学中的矩阵方法 …… 43

§2.4　复杂光学系统的菲涅耳数和程函公式 …… 49

§2.5　$ABCD$ 矩阵的分解 …… 53

§2.6　共轴球面腔的约束稳定性 …… 63

§2.7　光腔的本征方程　微扰稳定性 …… 67

§2.8　多程反射室 …… 69

习题 …… 72

参考文献 …… 73

第三章　激光束的描述和光束质量 …… 75

§3.1　激光光束质量的相关概念 …… 75

§3.2　M^2 因子和 K 参数 …… 78

§3.3　束宽和 M^2 因子的测量 …… 81

§3.4　实际激光光束质量的评价 …… 84

§3.5　激光束的描述:强度矩方法 …… 90

§3.6　光束控制 …… 94

习题 …… 95

参考文献 …… 95

第四章 高斯光束 …… 98
§4.1 高斯光束的基本性质 …… 98
§4.2 高阶高斯光束 …… 102
§4.3 高斯光束的复参数表示 *ABCD* 定律 …… 105
§4.4 高斯光束在非均匀介质中的传输 …… 109
§4.5 高斯光束通过复杂光学系统的变换 …… 111
§4.6 高斯光束通过薄透镜的变换 …… 117
§4.7 高斯光束的聚焦 …… 119
§4.8 高斯光束的焦移 …… 122
§4.9 高阶高斯光束的焦移和焦开关 …… 124
§4.10 高斯光束的匹配 …… 131
§4.11 高斯光束通过调焦望远镜系统的变换 …… 133
§4.12 高斯光束通过离焦望远镜系统的变换 …… 134
§4.13 高斯光束与球面波传输变换规律的比较 …… 141
§4.14 高斯光束通过复元素光学系统的变换 …… 145
§4.15 高斯光束强度的均匀化 …… 148
§4.16 高斯光束通过光阑传输中的衍射损耗 …… 151
§4.17 高斯光束通过有光阑光学系统的传输公式 …… 160
§4.18 像散椭圆高斯光束 …… 163
§4.19 像散厄米 – 高斯光束的对称化 …… 165
§4.20 复宗量厄米 – 高斯光束 …… 174
§4.21 非近轴高斯光束 …… 179
§4.22 非近轴椭圆高斯光束 …… 182
§4.23 高斯光束参数的实验测量 …… 191
习题 …… 194
参考文献 …… 196
第五章 高斯 – 谢尔模型光束 …… 199
§5.1 部分相干光的基本理论 …… 199
§5.2 高斯 – 谢尔模型光束的传输变换 …… 203
§5.3 高斯 – 谢尔模型光束的谱移动和谱开关 …… 210
§5.4 矢量高斯 – 谢尔模型光束的传输变换 …… 216
习题 …… 221
参考文献 …… 221
第六章 平顶光束 …… 223
§6.1 超高斯光束 …… 223

§6.2　平顶高斯光束 …… 228
§6.3　有光阑限制平顶高斯光束 …… 234
§6.4　超高斯光束和平顶高斯光束的比较 …… 238
§6.5　平顶多高斯光束 …… 240
习题 …… 246
参考文献 …… 247
第七章　贝塞耳光束 …… 250
§7.1　贝塞耳光束的产生 …… 250
§7.2　贝塞耳光束的传输变换 …… 254
§7.3　超短脉冲贝塞耳光束 …… 259
习题 …… 265
参考文献 …… 266
第八章　简单两镜光学谐振腔 …… 268
§8.1　约束稳定腔 …… 268
§8.2　各类稳定腔的模参数公式 …… 273
§8.3　等价共焦腔 …… 276
§8.4　非稳腔 …… 282
§8.5　各类非稳腔的模参数公式和共轭物像点的分布 …… 284
习题 …… 290
参考文献 …… 291
第九章　光学谐振腔的衍射积分方程理论 …… 293
§9.1　光学谐振腔的本征积分方程 …… 293
§9.2　反射镜几何尺寸无限大时光腔本征方程的解 …… 296
§9.3　反射镜几何尺寸有限时光腔的本征积分方程 …… 302
§9.4　共焦腔 …… 305
§9.5　福克斯－厉数值迭代法　平行平面腔 …… 312
§9.6　光腔损耗的计算 …… 318
§9.7　非稳腔的基本性质 …… 322
§9.8　非稳腔的衍射积分方程理论　帕若利法 …… 329
§9.9　有源非稳腔 …… 336
习题 …… 337
参考文献 …… 338
第十章　一些典型光学谐振腔的工作特性 …… 340
§10.1　多元件光学谐振腔的等价腔分析法 …… 340
§10.2　含热透镜多元件腔的动态工作特性 …… 345

§10.3 基模热稳腔和自孔径选模 …… 356
§10.4 望远镜腔 …… 361
§10.5 含热透镜望远镜腔 …… 367
§10.6 多棒串接腔 …… 375
§10.7 环形腔 …… 386
§10.8 折叠腔 …… 393
§10.9 相位共轭腔 …… 397
§10.10 超高斯反射镜腔 …… 405
§10.11 非轴对称像散腔 …… 412
§10.12 含偏振元件的光腔 …… 422
§10.13 负支实共焦非稳腔:自滤波和自成像非稳腔 …… 426
§10.14 多元件非稳腔 …… 429
§10.15 多元件共焦型非稳腔 …… 435
§10.16 各类棱镜腔 …… 444
§10.17 90°束转动非稳腔 …… 451
习题 …… 454
参考文献 …… 457
第十一章 光学谐振腔的失调特性 …… 461
§11.1 失调腔的几何光学分析方法 …… 461
§11.2 失调光学系统的增广矩阵 …… 465
§11.3 失调腔的矩阵光学分析方法 …… 473
§11.4 失调腔的衍射积分方程分析方法 …… 485
习题 …… 488
参考文献 …… 488
第十二章 展望 …… 490
参考文献 …… 493
名词索引(英汉对照) …… 494

第一章　激光光学概论

本章从激光光学的研究对象和研究方法开始，对激光光学全书的研究内容做了概述.除矩阵光学方法放在第二章外，对激光光学中常用的研究方法，包括几何光学方法、波动方程、广义衍射理论、傅里叶积分变换、算子光学和哈密顿光学方法等做了较为系统的阐述.虽然激光光学研究的重点是近轴标量光束的传输变换规律，但其中一些研究方法可直接用于处理矢量光束、非近轴光束的传输问题.最后，介绍了激光模式、线宽、光腔损耗和 Q 值等激光光学中的一些基本概念.本章是全书的导论和基础.

§1.1　激光光学的研究内容和研究方法

一、激光光学的研究内容

“光束”是现代光学中经常使用的一个概念.一般而言，光束是指以小的发散角定向传输的光频电磁波.激光光学研究激光束通过各种介质和各类光学系统的传输变换规律以及激光束在光学谐振腔中的变换特性.

在激光光学中涉及对以下几类光束变换特性的研究：

1. 高斯光束

用高斯函数表征的高斯光束是近轴波动方程的一个特解.可以证明，用高斯光束可以足够好地描述约束稳定腔基模激光束的特性.高斯光束的基本性质、表示方法，高斯光束通过成像光学系统、各类介质的传输以及像散高斯光束的变换等是激光光学的主要研究内容.高阶高斯光束在直角坐标系和柱坐标系下分别可用厄米－高斯函数和拉盖尔－高斯函数来描写，虽然与高斯光束相比，它们有不同的场分布，但是，采用适当的数学方法可以证明，厄米－高斯光束和拉盖尔－高斯光束与高斯光束有相似的变换规律.

2. 像散光束

当光束在非轴对称光学系统中传输时，会产生像散.像散光束也可由非轴对称光腔产生.像散光束可有不同分类.一般地，像散光束包括在子午面和弧矢面内光束参数可分离的简单像散光束和光束参数有耦合的或

者有扭曲项(twist)的复杂像散光束.像散光束及其对称化变换是应用中一个感兴趣的研究课题.

3. 受光阑限制光束

实际光束在产生和传输过程中都或多或少地受到光阑限制.对受硬边光阑限制光束的传输问题,一般需要用数值积分方法研究.本书讨论了三种解析方法:直接积分法、递推公式法以及将硬边光阑窗口函数展开为有限个复高斯函数之和的近似方法.

4. 高斯-谢尔模型光束

实际的激光束大多是部分空间和部分时间相干的.描写部分空间相干光的一个比较好的数学-物理模型是高斯-谢尔模型光束.与完全相干光用场分布描写不同,对部分相干光需要用空间-时间域中的互强度或者空间-频率域中的交叉谱密度函数描写,在传输中除光强变化外,谱密度也会发生变化.

5. 平顶光束

光强分布为非匀幅高斯函数的激光束在应用中并不一定是最理想的.例如,激光材料加工中某些应用和激光核聚变等就需要光强分布均匀的平顶光束.平顶光束可以用超高斯光束、平顶高斯光束和平顶多高斯光束(flat-topped multi-Gaussian beam)等多种数学形式描写.平顶光束一个显著特点是在传输中不能保持形状不变性.

6. 贝塞耳光束

由美国罗切斯特大学德尔林(Durnin)等人提出的“无衍射”贝塞耳光束是近年来引起广泛关注的一类光束.为方便起见,本书将零阶贝塞耳光束、高阶贝塞耳光束、韦伯(Weber)函数和修正贝塞耳函数描写的光束统称贝塞耳光束.贝塞耳光束是波动方程的特解,它和平顶光束可以作为非高斯光束的两个典型代表例,对其变换特性的研究扩展了激光光学中光束的研究范畴.

此外,本书中还涉及矢量光束、非近轴光束和超短脉冲光束,将在以后的章节中介绍.

光学谐振腔是常规激光器的主要组成部件之一.与微波腔相比,开式光学谐振腔的特点是侧面敞开以抑制振荡模式,并且它的轴向尺寸(腔长)远大于波长,一般也远大于横向尺寸(反射镜线度).光腔的作用是产生光学正反馈、选模和提供必要的输出耦合.光学谐振腔研究的基本问题是光频辐射场在腔内的运动规律,从数学上讲就是求场方程的本征函数和本征值.因此,光腔物理问题包括:振荡模式的分布、共振频率、模损耗、相移、模体积、与振荡模式对应的激光束宽、远场发散角等.光腔技术问题

则是：以光腔理论为基础，选择合适的腔型进行设计计算和实验，以满足实际应用要求.

光学谐振腔的研究大量集中在无源腔上.无源腔又称非激活腔、被动腔，可定义为不存在或未考虑激活介质作用的空腔.在腔内放置激光介质并形成激光振荡的光腔称为有源腔(或激活腔、主动腔).研究表明，当激光介质的增益作用不大时，无源腔的理论可以作为有源腔的良好近似.但当增益饱和效应、激活介质的热效应等起作用时，应当作为有源腔处理.

此外，激光光束质量是激光光学中一个重要物理概念，不仅有理论研究价值，也有实际应用意义，这部分内容将在第三章中讨论.

二、激光光学的研究方法

激光光学着眼于研究激光束的传输变换问题，而不追究光频辐射场与物质相互作用的细节.基于麦克斯韦(Maxwell)方程组的经典电磁场理论是全书的理论基础.在数学上，则归结于采用什么方法在合适的边界条件下求解波动方程或等价的衍射积分方程问题.对于腔内问题，因光腔侧面敞开，问题变得特殊，大多数情况下难于得到严格的解析结果，但数值计算是可行的.用几何光学近似或矩阵光学方法常可简化激光光学问题的分析.可以使用多种方法研究激光光学问题，比较重要的有：

1. 几何光学方法

在研究光束传输的多种方法中，以几何光学方法最为直观.当波长 $\lambda \to 0$ 时，几何光学近似成立，光的波动性不起主要作用，可用几何光学方法把光看成光线来处理.进一步，若光线的传输方向与光轴夹角 $\theta < 30°$，使得近轴近似(亦称傍轴近似)

$$\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta, \quad \cos\theta \approx 1 \tag{1.1.1}$$

成立，则问题归结为研究近轴光线的传输.对光腔而言，可以认为当腔的菲涅耳数

$$F = \frac{a^2}{\lambda l} \gg 1 \tag{1.1.2}$$

时，几何光学方法可行，典型例为非稳腔(亦称不稳腔).式(1.1.2)中 l 为腔长；a 为对光束起实际限制作用光学元件的宽度.

几何光学用几何学的方法来研究光线的运动轨迹，以光的直线传输定律，界面反射定律和折射定律三大实验定律为基础.几何光学的基本原理是费马(Fermat)原理.按照这一原理，沿光线真实路径上光程的变分为零，即

$$\delta \int n \mathrm{d}l = 0 \tag{1.1.3}$$

式中 n 为传输介质折射率，$\mathrm{d}l$ 为空间路径元.

从费马原理出发，很容易导出几何光学三大定律.不仅如此，还可得到描述稳态光传输的程函方程

$$(\nabla L)^2 = n^2, \quad L \text{ 为程函} \tag{1.1.4}$$

和光线方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left(n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}l}\right) = \nabla n \tag{1.1.5}$$

其中，$\boldsymbol{\rho}$ 为从某定点到光线上一点的矢量.在近轴近似下 $\mathrm{d}l = \mathrm{d}z$（$z$ 为光轴方向），式(1.1.5)简化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}z}\right) = \nabla n \tag{1.1.6}$$

光线方程，基于几何光学三大定律的光线追迹方法和透镜几何成像的高斯公式和牛顿方程等是激光光学中常用的几何光学方法.

2. 矩阵光学方法

矩阵光学，即用矩阵代数方法研究光学问题，最初本质上并未超出几何光学的范畴.随着激光器的问世和激光科学技术的发展，矩阵光学方法大大扩展了它的研究范围，并显示出处理问题简明、规范化和便于用计算机求解的特点.使用矩阵表述，可以把激光束通过近轴光学元件和系统的行为用一个变换矩阵（即 $ABCD$ 矩阵，亦称传输矩阵）来描写，激光束通过无光阑限制近轴 $ABCD$ 光学系统的变换则服从著名的 $ABCD$ 定律.形式简单却有着丰富物理内涵的 $ABCD$ 定律在激光光学中得到了广泛的应用和发展.矩阵光学方法是本书使用的主要方法之一，在第二章中对这一方法将做进一步阐述.

3. 波动方程

光频电磁场的普遍运动规律由麦克斯韦方程组描述.在光频段，人们主要关心电场强度矢量 $\boldsymbol{E}$ 的运动规律，对稳态电磁场，$\boldsymbol{E}$ 满足矢量亥姆霍兹(Helmholtz)方程.

在标量场理论框架内，进一步使用缓变振幅近似，得到近轴光波传输的基本微分方程，见 §1.2.亥姆霍兹方程和近轴波动方程是用微分方程方法研究光束传输的基本方程.

4. 广义衍射理论

除了求解亥姆霍兹方程外，也可以直接求解等价的衍射积分方程.数学上，前者相当于建立空间某一点的场与其附近场之间的联系，而后者相当于已知空间某一曲面上的场分布，求距该曲面一定距离的某一点或者定曲面上的场分布.应特别提到的是，广义惠更斯－菲涅耳(Huygens－

Fresnel)衍射积分公式或称柯林斯(Collins)公式,将复杂光学系统的衍射积分与 *ABCD* 矩阵联系起来,不仅大为增强了矩阵光学方法的活力,而且对衍射理论的进一步发展和在激光光学中应用范围的拓宽有重要意义.

对光学谐振腔,当腔的菲涅耳数不满足远大于 1 的条件时,衍射效应不能忽略,由菲涅耳－基尔霍夫(Fresnel－Kirchoff)光的标量衍射理论出发,可以建立腔的本征积分方程.数学上称这类具有连续复对称核的线性齐次积分方程为第二类弗里德霍姆(Fredholm)方程,并已严格证明了其解的存在性.对衍射理论的具体讨论见§1.3.

5. 积分变换法

函数 $f(x,y,z)$的二维傅里叶变换 $F(f_x,f_y,z)$定义为

$$F(f_x,f_y,z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y,z)\exp\left[-2\pi\mathrm{i}(f_xx+f_yy)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.1.7}$$

式中 f_x、f_y 为空间频率.对应于式(1.1.7)的逆傅里叶变换为

$$f(x,y,z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}F(f_x,f_y,z)\exp\left[2\pi\mathrm{i}(f_xx+f_yy)\right]\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y \tag{1.1.8}$$

这是在空间域和空间－频率域中傅里叶变换对的数学定义式.式(1.1.7)、式(1.1.8)可以有一些等价的表示法,例如

$$f(x,y,z)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}F(k_x,k_y,z)\exp\left[\mathrm{i}(k_xx+k_yy)\right]\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y \tag{1.1.9}$$

$$F(k_x,k_y,z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y,z)\exp\left[-\mathrm{i}(k_xx+k_yy)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.1.10}$$

式中 $k_x=2\pi f_x$,$k_y=2\pi f_y$,或者

$$f(x,y,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}F(k_x,k_y,z)\exp\left[\mathrm{i}(k_xx+k_yy)\right]\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y \tag{1.1.11}$$

$$F(k_x,k_y,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y,z)\exp\left[-\mathrm{i}(k_xx+k_yy)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.1.12}$$

等等.类似地,在时间域和频率域中有

$$f(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(t)\exp(\mathrm{i}\omega t)\mathrm{d}t \tag{1.1.13}$$

$$F(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)\exp(-\mathrm{i}\omega t)\mathrm{d}\omega \tag{1.1.14}$$

式中 t、ω 分别是时间和圆频率.

下面给出一个重要的分析方法——角谱表示法(Angular spectrum representation)的数学公式.在 $z>0$ 半空间中,矢量亥姆霍兹方程的解在形式上可写为

$$E_x(x,y,z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} A_x(p,q)\exp[\mathrm{i}k(px+qy+mz)]\mathrm{d}p\mathrm{d}q \tag{1.1.15}$$

$$E_y(x,y,z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} A_y(p,q)\exp[\mathrm{i}k(px+qy+mz)]\mathrm{d}p\mathrm{d}q \tag{1.1.16}$$

$$E_z(x,y,z)=-\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{p}{m}A_x(p,q)+\frac{q}{m}A_y(p,q)\right]\exp[\mathrm{i}k(px+qy+mz)]\mathrm{d}p\mathrm{d}q \tag{1.1.17}$$

式中

$$m=\begin{cases}(1-p^2-q^2)^{\frac{1}{2}}, & p^2+q^2\leqslant 1\\ \mathrm{i}(p^2+q^2-1)^{\frac{1}{2}}, & p^2+q^2>1\end{cases} \tag{1.1.18}$$

k 为波数.A_x、A_y 可由 $z=0$ 处电场的边界条件

$$\begin{aligned}E_x(x,y,z)|_{z=0}&=E_x(x,y,0)\\ E_y(x,y,z)|_{z=0}&=E_y(x,y,0)\end{aligned} \tag{1.1.19}$$

确定,即

$$A_x(p,q)=\left(\frac{k}{2\pi}\right)^2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} E_x(x,y,0)\exp[-\mathrm{i}k(px+qy)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.1.20}$$

$$A_y(p,q)=\left(\frac{k}{2\pi}\right)^2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} E_y(x,y,0)\exp[-\mathrm{i}k(px+qy)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.1.21}$$

式(1.1.15)~式(1.1.21)为矢量电场的角谱表示法的基本公式.对标量场式(1.1.15)~式(1.1.17),式(1.1.20)~式(1.1.21)简化为

$$E(x,y,z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} A(p,q)\exp[\mathrm{i}k(px+qy+mz)]\mathrm{d}p\mathrm{d}q \tag{1.1.22}$$

$$A(p,q)=\left(\frac{k}{2\pi}\right)^2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} E(x,y,0)\exp[-\mathrm{i}k(px+qy)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.1.23}$$

6. 算子光学方法

算子光学方法的要点是使用平方相位算子、标度算子、傅里叶变换算子和自由空间传输算子等基本正则算子及其有序乘积来表示光学系统. 这样,激光束通过光学系统的变换和衍射积分公式的计算可以用算子的对易法则和矩阵代数运算代替,使表述形式和运算过程得以简化. 见§1.4.

7. 哈密顿(Hamilton)光学方法

研究光束传输变换的另一途径是试图将光频电磁场的运动规律纳入物理学的"统一理论"框架之中. 于是,一些已经做过深入研究的物理学方程和相关数学手段可直接借用来处理激光光学问题. 在这里,类比、推理的方法是科学研究中又一次取得成功的范例. 例如,众所周知,用式(1.1.3)表述的费马原理与分析力学中的哈密顿原理数学形式上是相似的. 此外,缓变振幅近似下的亥姆霍兹方程即类薛定谔(Schrödinger-like)波动方程,与量子力学中的薛定谔方程有类似的形式. 因此,熟悉经典力学和波动力学的物理学家们很容易的采用类比的方式建立哈米顿光学,并用于研究光束传输变换问题. 在哈密顿光学中,最重要的结果是光学拉格朗日(Lagrange)方程和光学哈密顿正则方程,见§1.5.

§1.2 波动光学的基本方程

光频电磁场的普遍运动规律由麦克斯韦方程组

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} & (1.2.1) \\ \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho & (1.2.2) \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} & (1.2.3) \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 & (1.2.4) \end{cases}$$

和物质方程

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \tag{1.2.5}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) \tag{1.2.6}$$

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{1.2.7}$$

描写,式中 $\boldsymbol{E}$ 为电场强度,$\boldsymbol{D}$ 为电位移,$\boldsymbol{H}$ 为磁场强度,$\boldsymbol{B}$ 为磁感应强度,一般情况下它们都是矢量且为时间和空间坐标的函数,ρ 为自由电荷密度,σ 为电导率(在激光光学中作为等效损耗处理),ε_0、μ_0 分别为真空中的电容率(又称介电常量)和磁导率,$\boldsymbol{P}$ 为电极化强度,$\boldsymbol{J}$ 为电流密度,

$\boldsymbol{M}$ 为磁化强度，$\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{J}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 也是矢量.在线性极化情况下，

$$\boldsymbol{P}=\chi\varepsilon_0\boldsymbol{E} \tag{1.2.8}$$

式中 χ 为介质的线性极化率.

式(1.2.1)～式(1.2.7)为一般电磁束(electromagnetic beam)运动应遵循的方程.对光频电磁场，人们主要关心电场 $\boldsymbol{E}$ 的运动规律，由 $\boldsymbol{E}$ 可求出光强(忽略常数因子)

$$I=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^* \tag{1.2.9}$$

式中 * 表示复共轭.

在非磁、各向同性均匀介质中，由麦克斯韦方程组和物质方程可推出电场 $\boldsymbol{E}$ 满足的波动方程为

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\mu_0\sigma\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}-\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{P}}{\partial t^2}=0 \tag{1.2.10}$$

对无损耗介质($\sigma=0$)，式(1.2.10)简化为

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}-\frac{1}{\varepsilon_0c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{P}}{\partial t^2}=0 \tag{1.2.11}$$

式中 c 为真空中的光速，

$$c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \tag{1.2.12}$$

若用 $\boldsymbol{E}$ 表示复电场，则由式(1.2.11)可导出稳态电磁场的矢量亥姆霍兹方程：

$$\nabla^2\boldsymbol{E}+k^2\tilde{n}^2\boldsymbol{E}=0 \tag{1.2.13}$$

式中 $\tilde{n}$ 为介质复折射率，

$$\tilde{n}=\sqrt{1+\chi} \tag{1.2.14}$$

k 为波数，它与波长 λ 关系为

$$k=\frac{2\pi}{\lambda} \tag{1.2.15}$$

当 $\tilde{n}$ 为实数时 $\tilde{n}=n$，式(1.2.13)写为

$$\nabla^2\boldsymbol{E}+k^2n^2\boldsymbol{E}=0 \tag{1.2.16}$$

在标量场假设下，式(1.2.16)化为标量亥姆霍兹方程：

$$\nabla^2E+k^2n^2E=0 \tag{1.2.17}$$

在真空中 $n=1$，于是有

$$\nabla^2E+k^2E=0 \tag{1.2.18}$$

设

$$E=A\exp(-\mathrm{i}kz) \tag{1.2.19}$$

将式(1.2.19)代入式(1.2.18)，在缓变振幅近似

$$\frac{\partial A}{\partial z}\ll kA,\quad \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}\ll k\frac{\partial A}{\partial z} \tag{1.2.20}$$

下，得到

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}-2\mathrm{i}k\frac{\partial A}{\partial z}=0 \tag{1.2.21}$$

式(1.2.21)在柱坐标(r,φ,z)系下的形式为

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2}-2\mathrm{i}k\frac{\partial A}{\partial z}=0 \tag{1.2.22}$$

对旋转对称情况，A 与 φ 无关，式(1.2.22)简化为如下抛物方程：

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r}-2\mathrm{i}k\frac{\partial A}{\partial z}=0 \tag{1.2.23}$$

式(1.2.11)、式(1.2.13)、式(1.2.16)、式(1.2.17)、式(1.2.18)、式(1.2.21)、式(1.2.22)、式(1.2.23)是研究光波传输的基本微分方程.在经典电磁场理论中，对在各种边界条件下亥姆霍兹方程的解已做了相当详尽的研究.波动方程的解法和有关结果可进一步用于研究激光的传输问题.

§1.3 广义衍射理论

一、瑞利－索末菲(Rayleigh－Sommerfeld)衍射积分

可以证明，在边界条件

$$\boldsymbol{E}(x_1,y_1,z)\big|_{z=0}=E_{1x}(x_1,y_1,0)\boldsymbol{i}+E_{1y}(x_1,y_1,0)\boldsymbol{j} \tag{1.3.1}$$

下($\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 为x、y 方向的单位矢量)，矢量亥姆霍兹方程在 $z>0$ 半空间的解为

$$E_{2x}(x_2,y_2,z)=-\frac{1}{2\pi}\iint_{S_1}E_{1x}(x_1,y_1,0)\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\exp(\mathrm{i}kR)}{R}\right]\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1 \tag{1.3.2}$$

$$E_{2y}(x_2,y_2,z)=-\frac{1}{2\pi}\iint_{S_1}E_{1y}(x_1,y_1,0)\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\exp(\mathrm{i}kR)}{R}\right]\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1 \tag{1.3.3}$$

$$E_{2z}(x_2,y_2,z)=\frac{1}{2\pi}\iint_{S_1}\left\{E_{1x}(x_1,y_1,0)\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\exp(\mathrm{i}kR)}{R}\right]+E_{1y}(x_1,y_1,0)\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\exp(\mathrm{i}kR)}{R}\right]\right\}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1 \tag{1.3.4}$$

式中

$$R=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+z^2} \tag{1.3.5}$$

积分在 $z=0$ 的 S_1 面上进行.式(1.3.2)～(1.3.4)称为瑞利－索末菲衍射积分公式,是一个较为一般的公式,可用于研究非近轴矢量光束的传输.其应用见第四章.在标量场近似下瑞利－索末菲公式简化为

$$E_2(x_2,y_2,z)=-\frac{1}{2\pi}\iint_{S_1}E_1(x_1,y_1,0)\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\exp(\mathrm{i}kR)}{R}\right]\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1 \tag{1.3.6}$$

二、惠更斯－菲涅耳原理和菲涅耳－基尔霍夫方程

惠更斯－菲涅耳原理是标量衍射理论的基本原理.它可表述为:波前上每一点都可以看成是新的波源,从这些点发出次波来,而空间中某一点的光波场就是这些次波在该点相干叠加的结果.众所周知,这是研究光衍射现象的理论基础,并且可以按照这一原理用作图法在一些简单情况下求出新的波前来.但是,对于大量光衍射现象的处理,需要比较精确的数学表述,这就是菲涅耳－基尔霍夫衍射积分方程.

如图 1.3.1 所示,设已知空间 $z=0$ 的 S_1 面上的光波场为 $E_1(x_1,y_1,0)$,可按下式求出考察点 $P(x_2,y_2,z)$的场 $E_2(x_2,y_2,z)$:

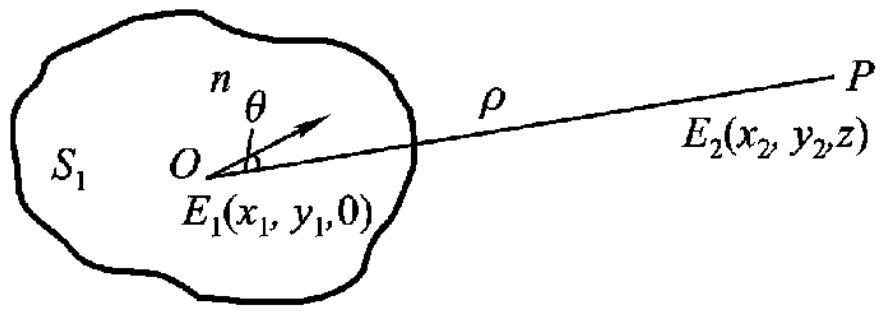


图 1.3.1　菲涅耳－基尔霍夫衍射积分示意图

$$E_2(x_2,y_2,z)=\left(-\frac{\mathrm{i}}{2\lambda}\right)\iint_{S_1}E_1(x_1,y_1,0)\frac{\exp(\mathrm{i}k\rho)(1+\cos\theta)}{\rho}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1 \tag{1.3.7}$$

式中 $E_1(x_1,y_1,z)$、$E_2(x_2,y_2,z)$分别为源点和场点处场的复振幅;ρ 为源点与场点间距离;$(1+\cos\theta)/2$ 为倾斜因子;θ 是 S 面上源点处$(x_1,y_1,0)$的法线与 ρ 的夹角.式(1.3.7)称为菲涅耳－基尔霍夫衍射积分公式.

注意在激光光学中也经常使用菲涅耳－基尔霍夫公式的另一形式:

$$E_2(x_2,y_2,z)=\left(\frac{\mathrm{i}}{2\lambda}\right)\iint_{S_1}E_1(x_1,y_1,0)\frac{\exp(-\mathrm{i}k\rho)(1+\cos\theta)}{\rho}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1 \tag{1.3.8}$$

形式上可将式(1.3.8)看作是式(1.3.7)作 $\lambda \to -\lambda$ 代换得出.式(1.3.7)和式(1.3.8)以及它们派生和推广的衍射积分公式的两种形式实际上是相同的.

当菲涅耳近似成立,即衍射面与观察面间距离 z 远大于衍射孔径和观察区的线度时

$$\rho \approx L, \quad \cos\theta \approx 1, \quad z \gg |x_2 - x_1|, |y_2 - y_1| \tag{1.3.9}$$

式(1.3.7)化为菲涅耳衍射积分公式:

$$E_2(x_2, y_2, z) = \left(-\frac{\mathrm{i}}{\lambda z}\right)\exp(\mathrm{i}kz)\iint_{S_1} E_1(x_1, y_1, 0)\cdot \exp\left\{\frac{\mathrm{i}k}{2z}\left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\right]\right\}\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y_1 \tag{1.3.10}$$

若进一步增加 L,使满足夫琅禾费(Fraunhofer)条件:

$$L \gg \frac{k}{2}(x_1^2 + y_1^2)_{\max} \tag{1.3.11}$$

则式(1.3.10)简化为夫琅禾费衍射积分公式:

$$E_2(x_2, y_2, z) = \left(-\frac{\mathrm{i}}{\lambda z}\right)\exp\left[\mathrm{i}k\left(z + \frac{x_2^2 + y_2^2}{2z}\right)\right]\cdot \iint_{S_1} E_1(x_1, y_1)\exp\left[-\frac{\mathrm{i}k}{z}(x_1 x_2 + y_1 y_2)\right]\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y_1 \tag{1.3.12}$$

菲涅耳衍射积分公式和夫琅禾费衍射积分公式为经典标量衍射理论中常用的公式,对经典光学中遇到的大量空域中的衍射问题都是适用的,在激光光学中常用于处理近轴标量光束在自由空间中的传输问题.

三、柯林斯(Collins)公式

对经典衍射理论最重要的有方法性意义的推广是柯林斯的工作.柯林斯证明,当衍射面与观察面间不是自由空间,而是用变换矩阵 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 表征的复杂光学系统时,菲涅耳衍射积分公式(1.3.10)不能直接应用.按柯林斯的方法,将衍射积分写为(为清楚起见,设 $n_1 = n_2 = 1$,对 $n_1 \neq n_2$ 情况可以类推)

$$E_2(x_2, y_2, z) = W\iint_{S_1} E_1(x_1, y_1, 0)\exp\left[\mathrm{i}kL(x_1, y_1, x_2, y_2, z)\right]\mathrm{d}S_1 \tag{1.3.13}$$

式中 $L(x_1, y_1, x_2, y_2, z)$ 为程函，有(见§2.4)

$$L(x_1, y_1, x_2, y_2) = z + \frac{1}{2B}\left[A(x_1^2 + y_1^2) + D(x_2^2 + y_2^2) - 2(x_1 x_2 + y_1 y_2)\right] \tag{1.3.14}$$

z 为沿轴上的光程，W 为一待定常数，可由能量(功率)守恒定律

$$\iint_{S_2} E_2(x_2, y_2, z) E_2^*(x_2, y_2, z)\,\mathrm{d}S_2 = \iint_{S_1} E_1(x_1, y_1, 0) E_1^*(x_1, y_1, 0)\,\mathrm{d}S_1 \tag{1.3.15}$$

和式(1.3.13)、式(1.3.14)推得

$$W = -\frac{1}{\lambda B} \tag{1.3.16}$$

于是式(1.3.13)可写为

$$E_2(x_2, y_2, z) = -\frac{\mathrm{i}}{\lambda B}\iint_{S_1} E_1(x_1, y_1, 0)\exp\left[\mathrm{i}kz(x_1, y_1, x_2, y_2, z)\right]\mathrm{d}S_1 \tag{1.3.17}$$

或写成

$$E_2(x_2, y_2, z) = \left(-\frac{\mathrm{i}}{\lambda B}\right)\exp(\mathrm{i}kz)\iint_{S_1} E_1(x_1, y_1, 0)\cdot \exp\left\{\frac{\mathrm{i}k}{2B}\left[A(x_1^2 + y_1^2) + D(x_2^2 + y_2^2) - 2(x_1 x_2 + y_1 y_2)\right]\right\}\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y_1 \tag{1.3.18}$$

式中积分对源点 $(x_1, y_1, 0)$ 所在 S_1 面进行.

在柱坐标下有

$$E_2(r_2, \varphi_2, z) = \left(-\frac{\mathrm{i}}{\lambda B}\right)\exp(\mathrm{i}kz)\iint_{S_1} E_1(r_1, \varphi_1, 0)\cdot \exp\left\{\frac{\mathrm{i}k}{2B}\left[Ar_1^2 + Dr_2^2 - 2r_1 r_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\right]\right\} r_1\,\mathrm{d}r_1\,\mathrm{d}\varphi_1 \tag{1.3.19}$$

对于旋转对称情况，

$$E_2(r_2, z) = \left(-\frac{\mathrm{i}k}{B}\right)\exp(\mathrm{i}kz)\int_{S_1} E_1(r_1, 0) J_0\left(\frac{kr_1 r_2}{B}\right)\cdot \exp\left[\frac{\mathrm{i}k}{2B}(Ar_1^2 + Dr_2^2)\right] r_1\,\mathrm{d}r_1 \tag{1.3.20}$$

式中，J_0 为零阶贝塞耳函数.

式(1.3.18)～式(1.3.20)称为广义惠更斯－菲涅耳衍射积分或柯林斯公式，用以研究光学系统的空间域衍射问题，是本书使用的一个重要公

式.

对自由空间,

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1 & L\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{1.3.21}$$

式(1.3.18)简化为菲涅耳衍射积分式(1.3.10).若考虑激光在谐振腔内的传输,有

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} g_1 & L\\ \dfrac{1}{L}(g_1 g_2-1) & g_2\end{bmatrix} \tag{1.3.22}$$

则式(1.3.18)成为光腔的衍射积分方程:

$$E_2(x_2,y_2,L)=-\frac{\mathrm{i}}{\lambda B}\exp(\mathrm{i}kL)\iint_{S_1}E_1(x_1,y_1,0)\cdot$$
$$\exp\left\{\frac{\mathrm{i}k}{2L}\left[g_1(x_1^2+y_1^2)+g_2(x_2^2+y_2^2)-2(x_1x_2+y_1y_2)\right]\right\}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1 \tag{1.3.23}$$

它较为严格地描述了激光在腔内的运动规律,详见第九章.

值得注意的是,对成像系统 $B=0$,式(1.3.18)~式(1.3.20)不能直接应用,应加以推广.利用 $ABCD$ 矩阵元基本关系式,

$$AD-BC=1 \tag{1.3.24}$$

可将这些公式做适当变化.例如,将式(1.3.18)写为

$$E_2(x_2,y_2,z)=-\frac{\mathrm{i}}{\lambda B}\exp(\mathrm{i}kz)\exp\left[\frac{\mathrm{i}kC}{2A}(x_2^2+y_2^2)\right]\cdot$$
$$\iint_{S_1}E_1(x_1,y_1,0)\exp\left\{\frac{\mathrm{i}kA}{2B}\left[\left(x_1-\frac{x_2}{A}\right)^2+\left(y_1-\frac{y_2}{A}\right)^2\right]\right\}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1 \tag{1.3.25}$$

当 $B\to 0$ 时,使用 δ 函数公式

$$\delta(x,y)=\lim_{N\to\infty}N^2\exp[-N^2\pi(x^2+y^2)] \tag{1.3.26}$$

式(1.3.25)化为

$$E_2(x_2,y_2,z)=\frac{1}{A}\exp(\mathrm{i}kz)\exp\left[\frac{\mathrm{i}kC}{2A}(x_2^2+y_2^2)\right]E_1\left(\frac{x_2}{A},\frac{y_2}{A},0\right) \tag{1.3.27}$$

这即式(1.3.18)当 $B=0$ 时的推广形式.式(1.3.19)、式(1.3.20)在 $B=0$ 时的推广形式亦可仿此推出.式(1.3.27)表明,场函数为 $E_1(x_1,y_1,0)$ 的光束通过光阑效应可忽略的成像光学系统后,自变量变为 $(x_2/A,y_2/A)$,振幅变为原来的 $1/A$,相位出现调制,但保持原来场分布

的形式不变，这即著名的像传递原理.

现举例说明柯林斯公式的应用：

1. 夫琅禾费衍射

夫琅禾费衍射典型的实验装置见图 1.3.2. 设参考面 RP_1 取在衍射屏上，RP_1 与焦距 f 的透镜 F 相距 l，参考面 RP_2 取在置于透镜后焦面的观察屏上. 由 RP_1 至 RP_2 的变换矩阵

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & f \\ -\dfrac{1}{f} & 1-\dfrac{1}{f} \end{bmatrix} \tag{1.3.28}$$

对各种类型的夫琅禾费衍射，可把相应的 $E_1(x_1, y_1, 0)$ 和式(1.3.28)代入柯林斯公式后积分之，便可求出在观察屏上的场分布 $E_2(x_2, y_2, z)$，现以直径 D 的圆孔衍射为例，则

$$E_1(x_1, y_1, 0) = \mathrm{circ}\frac{(x^2+y^2)^{1/2}}{D/2} \tag{1.3.29}$$

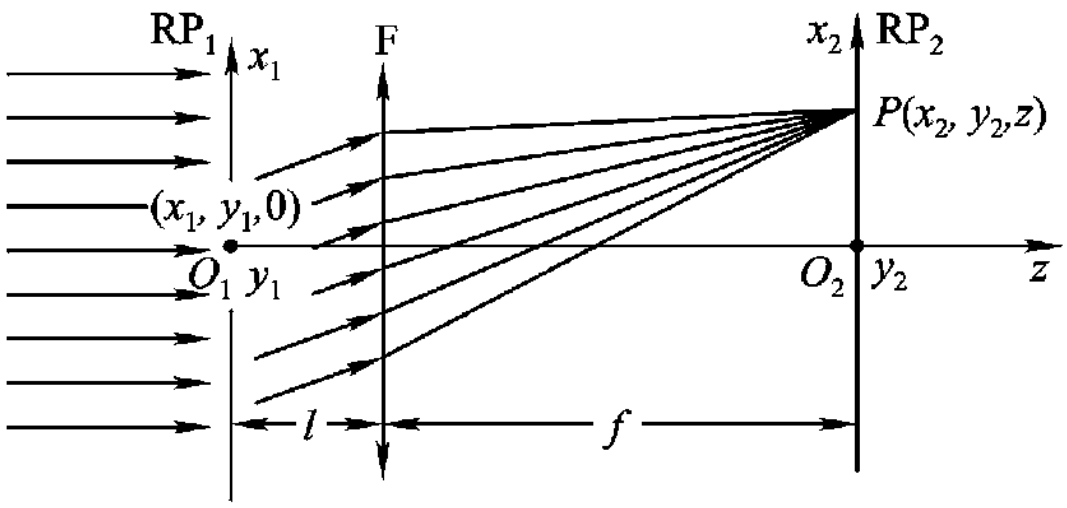


图 1.3.2　夫琅禾费衍射

式中圆域函数

$$\mathrm{circ}\frac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{D/2} = \begin{cases} 1, & \sqrt{x_1^2+y_1^2} \leqslant D/2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{1.3.30}$$

将式(1.3.28)、式(1.3.29)代入式(1.3.18)，得

$$E_2(x_2, y_2, z) = -\frac{\mathrm{i}}{\lambda f}\exp(\mathrm{i}kz)\exp\left[\frac{\mathrm{i}k}{2f}(x_2^2+y_2^2)\right]\cdot$$

$$\iint_{S_1} \mathrm{circ}\frac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{D/2}\exp\left[-\frac{2\pi\mathrm{i}}{\lambda f}(x_1x_2+y_1y_2)\right]\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1 \tag{1.3.31}$$

把积分变换到极坐标

$$r_i = \sqrt{x_i^2+y_i^2}, \quad x_i = r_i\cos\theta, y_i = r_i\sin\theta_i, \quad i=1,2 \tag{1.3.32}$$

利用贝塞耳函数积分公式

$$\mathrm{J}_0(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp[-\mathrm{i}a\cos(\theta-\varphi)]\mathrm{d}\theta \tag{1.3.33}$$

得

$$E_2(r_2,z)=-\frac{\mathrm{i}kD^2}{8f}\exp(\mathrm{i}kz)\exp\left(\frac{\mathrm{i}k}{2f}r_2^2\right)\left[2\frac{\mathrm{J}_1(kDr_2/2f)}{kDr_2/2f}\right] \tag{1.3.34}$$

式中，J_0、J_1 分别为零阶和一阶贝塞耳函数.

由式(1.3.34)易得 RP_2 面上衍射场强度分布

$$I_2(r_2,z)=\left(\frac{kD^2}{8f}\right)^2\left[2\frac{\mathrm{J}_1(kDr_2/2f)}{kDr_2/2f}\right]^2 \tag{1.3.35}$$

这即著名的爱里花样，其第一零点对应的衍射角 θ 为

$$\theta=1.22\frac{\lambda}{D} \tag{1.3.36}$$

2. 杨氏干涉

图 1.3.3 为杨氏双缝干涉装置示意图. 参考面 RP_1 取在杨氏干涉屏上，其间开有与 z 轴对称的两狭缝 s_1、s_2，间距为 d，RP_2 取在观察屏上，与 RP_1 间距离为 L，且 $L\gg d$，由 RP_1 至 RP_2 的变换矩阵为

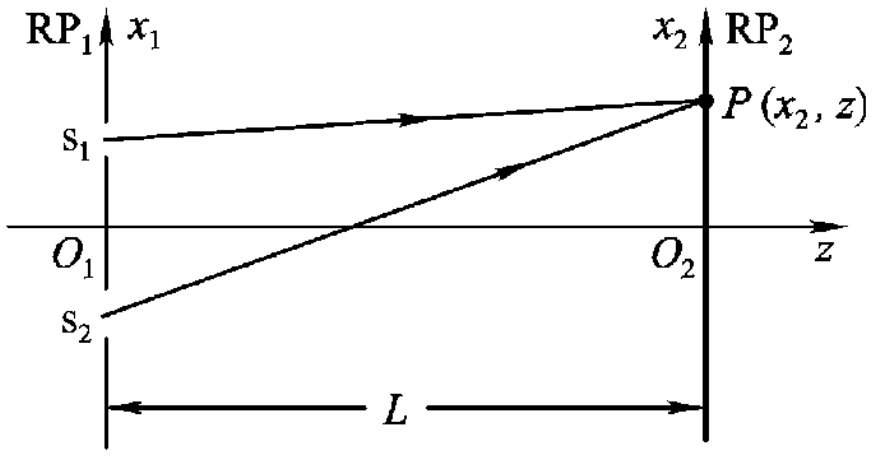


图 1.3.3 杨氏双缝干涉

$$\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & L\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{1.3.37}$$

忽略狭缝宽度，则入射场振幅可写为 δ 函数

$$E_1(x_1,0)=\delta\left(x_1+\frac{d}{2}\right)+\delta\left(x_1-\frac{d}{2}\right) \tag{1.3.38}$$

将式(1.3.37)、式(1.3.38)代入二维柯林斯公式，得

$$\begin{aligned}E_2(x_2,L)=&\left(-\frac{\mathrm{i}}{\lambda L}\right)^{\frac{1}{2}}\exp(\mathrm{i}kL)\int\left[\delta\left(x_1+\frac{d}{2}\right)+\right.\\&\left.\delta\left(x_1-\frac{d}{2}\right)\right]\exp\left[\frac{\mathrm{i}k}{2L}(x_2-x_1)^2\right]\mathrm{d}x_1\\=&2\left(-\frac{\mathrm{i}}{\lambda L}\right)^{\frac{1}{2}}\exp(\mathrm{i}kL)\exp\left[\frac{\mathrm{i}k}{2L}\left(x_2^2+\frac{d^2}{4}\right)\right]\cos\left(\frac{kd}{2L}x_2\right)\end{aligned} \tag{1.3.39}$$

干涉强度为

$$I_2(x_2,L)=\frac{4}{\lambda L}\cos^2\left(\frac{kd}{2L}x_2\right) \tag{1.3.40}$$

这是众所周知的结果.

3. *ABCD* 定律

作为柯林斯公式在激光光学中的典型应用，现证明高斯光束的复参数 q 满足 $ABCD$ 定律.

设在 $z=0$ 面入射高斯光束场分布为

$$E_1(x_1,0)=\exp\left(-\frac{\mathrm{i}k}{2q_1}x_1^2\right) \tag{1.3.41}$$

式中，q_1 为入射高斯光束复参数(详见第四章)，代入二维柯林斯公式，并积分之，得 $z=L$ 处场分布为

$$\begin{aligned}E_2(x_2,L)=&\left(\frac{\mathrm{i}k}{2\pi B}\right)^{\frac{1}{2}}\exp(-\mathrm{i}kL)\int\exp\left(-\frac{\mathrm{i}kx_1^2}{2q_1}\right)\cdot\\&\exp\left[-\frac{\mathrm{i}k}{2B}(Ax_1^2+Dx_2^2-2x_1x_2)\right]\mathrm{d}x_1\\=&\left(\frac{q_1}{Aq_1+B}\right)^{\frac{1}{2}}\exp(-\mathrm{i}kL)\exp\left[-\frac{\mathrm{i}kx_2^2}{2}\left(\frac{Cq_1+D}{Aq_1+B}\right)\right]\\=&\left(\frac{q_1}{Aq_1+B}\right)^{\frac{1}{2}}\exp(-\mathrm{i}kL)\exp\left(-\frac{\mathrm{i}kx_2^2}{2q_2}\right)\end{aligned} \tag{1.3.42}$$

式中

$$q_2=\frac{Aq_1+B}{Cq_1+D} \tag{1.3.43}$$

这一结果不难推广到三维情况.于是我们证明了，初始场分布为高斯函数(1.3.41)的激光束经过变换矩阵为 $\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}$ 的光学系统变换之后，仍旧保持为高斯函数的形式(1.3.42)，并且其复参数的变换服从 $ABCD$ 定律式(1.3.43)，这是两个十分重要的结论.

四、非轴对称光学系统的广义衍射积分

对用 4×4 变换矩阵 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{bmatrix}$ 描述的非轴对称光学系统，空间域中的广义惠更斯－菲涅耳衍射积分为

$$\begin{aligned}E_2(x_2,y_2,z)=&\left(-\frac{\mathrm{i}|\boldsymbol{B}|^{-\frac{1}{2}}}{\lambda}\right)\exp(\mathrm{i}kz)\iint_{S_1}E_1(x_1,y_1,0)\cdot\\&\exp\left\{\frac{\mathrm{i}k}{2}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\x_2\\y_2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{B}^{-1}\\ \boldsymbol{C}-\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\x_2\\y_2\end{bmatrix}\right\}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1\end{aligned} \tag{1.3.44}$$

式中积分对源点$(x_1, y_1, 0)$所在$z=0$的S_1面进行，$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$均为2×2矩阵.对成像光学系统，请读者推出相应的公式.

利用式(1.3.44)可推导出光束通过非轴对称光学系统的广义*ABCD*定律.设入射光束场振幅为

$$E_1(\boldsymbol{r}_1, z)=\exp\left\{\frac{\mathrm{i}k}{2}\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{r}_2\right\} \tag{1.3.45}$$

式中

$$\boldsymbol{r}_1=\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix} \tag{1.3.46}$$

$\boldsymbol{Q}_1^{-1}$为光束的2×2复波前矩阵，为书写简单起见，式(1.3.45)中略去了常数因子.将式(1.3.45)代入式(1.3.44)，利用$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{bmatrix}$矩阵满足的辛(Symplectic)条件

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}\\&(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\\&(\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1}\end{aligned} \tag{1.3.47}$$

(式中$\boldsymbol{E}$为单位矩阵$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$，“$-1$”表矩阵求逆)得到

$$E_2(\boldsymbol{r}_2, z)=\left|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_1^{-1}\right|^{-\frac{1}{2}}\exp(\mathrm{i}kz)\exp\left(\frac{\mathrm{i}k}{2}\boldsymbol{r}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2^{-1}\boldsymbol{r}_2\right) \tag{1.3.48}$$

式中

$$\boldsymbol{Q}_2^{-1}=(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}_1^{-1})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_1^{-1})^{-1} \tag{1.3.49}$$

这即广义*ABCD*定律.

五、时间域衍射积分

当研究色散光脉冲的传输时，对应的时间域衍射积分公式为

$$E_2(\tau_2)=\left(-\frac{\mathrm{i}\omega_0}{2\pi B}\right)^{\frac{1}{2}}\exp(\mathrm{i}\omega_0\xi_0)\int E_1(\tau_1)\exp\left[\frac{\mathrm{i}\omega_0}{2B}(A\tau_1^2-2\tau_1\tau_2+D\tau_2^2)\right]\mathrm{d}\tau_1 \tag{1.3.50}$$

积分在时间域进行，式中

$$\tau=t-k'(\omega_0)z=t-\frac{z}{v_g} \tag{1.3.51}$$

$$\xi=\omega_0 k''(\omega_0)z \tag{1.3.52}$$

群速度

$$v_g=\frac{1}{k'(\omega_0)} \tag{1.3.53}$$

$k''(\omega_0)=\dfrac{\mathrm{d}^2k(\omega_0)}{\mathrm{d}\omega_0^2}$表征群速度色散，$\omega_0$ 为色散脉冲中心圆频率，而

$$\begin{bmatrix}\tau_2\\ \dfrac{\mathrm{d}\tau_2}{\mathrm{d}\xi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tau_1\\ \dfrac{\mathrm{d}\tau_1}{\mathrm{d}\xi}\end{bmatrix} \tag{1.3.54}$$

式中$\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}$为时间域中系统的变换矩阵. 对 $B=0$ 情况，当积分限趋于无穷大时，由式(1.3.50)得

$$E_2(\tau_2)=\frac{1}{\sqrt{A}}\exp\left[\mathrm{i}\omega_0\left(\xi_0+\frac{C\tau_2^2}{2A}\right)\right]E_1\left(\frac{\tau_2}{A}\right) \tag{1.3.55}$$

§1.4　算子光学方法

一、基本正则算子

空间近轴光线可用正则坐标

$$\begin{cases}q_x=x\\ q_y=y\end{cases} \tag{1.4.1}$$

和正则动量

$$\begin{cases}p_x=\theta\\ p_y=\varphi\end{cases} \tag{1.4.2}$$

来描写，对应的正则共轭算子定义为

$$\begin{cases}\hat{q}_x=x\\ \hat{q}_y=y\end{cases} \tag{1.4.3}$$

$$\begin{cases}\hat{p}_x=-\mathrm{i}k^{-1}\dfrac{\partial}{\partial x}\\ \hat{p}_y=-\mathrm{i}k^{-1}\dfrac{\partial}{\partial y}\end{cases} \tag{1.4.4}$$

设 $\varphi(x)$为任意函数，对一维问题，由式(1.4.3)、式(1.4.4)得

$$\hat{x}\varphi(x)=x\varphi(x) \tag{1.4.5}$$

$$\hat{p}_x\varphi(x)=-\mathrm{i}k^{-1}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x} \tag{1.4.6}$$

$\hat{x}$、$\hat{p}_x$ 满足对易式

$$[\hat{x},\hat{p}_x]=\hat{x}\hat{p}_x-\hat{p}_x\hat{x}=\mathrm{i}k^{-1} \tag{1.4.7}$$

定义正则变换算子 T，它满足

$$\hat{x}_2 = T\hat{x}_1 T^{-1}$$
$$\hat{p}_2 = T\hat{p}_1 T^{-1} \tag{1.4.8}$$

且有

$$\hat{x}_2 = D\hat{x}_1 - B\hat{p}_1$$
$$\hat{p}_2 = -C\hat{x}_1 + A\hat{p}_1 \tag{1.4.9}$$

式中 A、B、C、D 为由

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ p_1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{M} \begin{bmatrix} x_1 \\ p_1 \end{bmatrix} \tag{1.4.10}$$

表示的变换矩阵诸元素，且

$$\det \boldsymbol{M} = AD - BC = 1 \tag{1.4.11}$$

det 表示对应行列式之值.

易证正则变换算子 T 满足

$$T[\boldsymbol{M}_2]T[\boldsymbol{M}_1] = \pm T[\boldsymbol{M}_2 \boldsymbol{M}_1] \tag{1.4.12}$$

$$\{T[\boldsymbol{M}_3]T[\boldsymbol{M}_2]\}T[\boldsymbol{M}_1] = T[\boldsymbol{M}_3]\{T[\boldsymbol{M}_2]T[\boldsymbol{M}_1]\} \tag{1.4.13}$$

$$\{T[\boldsymbol{M}]\}^{-1} = T[\boldsymbol{M}^{-1}] \tag{1.4.14}$$

$$T[\boldsymbol{E}] = 1, \quad \boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{为单位矩阵} \tag{1.4.15}$$

因此，正则变换算子构成一个群. 事实上，它是与辛群同构的 metaplectic group.

下述基本正则算子可用 T 表示为

(1) 平方相位算子（α 为自变量）

$$Q[\alpha] = \exp\left(\frac{\mathrm{i}k}{2}\alpha x^2\right) = T\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \tag{1.4.16}$$

(2) 标度算子（β 为自变量）

$$V[\beta]\varphi(x) = T\begin{bmatrix} \beta^{-1} & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}\varphi(x) = \beta^{\frac{1}{2}}\varphi(\beta x) \tag{1.4.17}$$

(3) 傅里叶变换算子

$$F = (\mathrm{i}\lambda)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x_1 \exp(-\mathrm{i}kx_1 x)\cdots = T\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.4.18}$$

式中省略号“…”表示被作用函数应当右乘等式两端，且其自变量应当与积分变元相同.

(4) 菲涅耳自由空间传输算子（传输距离 l）

$$R[l] = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}k}{2}lp^2\right) = T\begin{bmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.4.19}$$

基本正则算子的对易关系和公式为

$$\{FQ[\alpha]\}=\alpha^{-\frac{1}{2}}Q[-1/\alpha]$$
$$V[\beta]Q[\alpha]=Q[\beta^2\alpha]V[\beta]$$
$$FF=V[-1]$$
$$V[\beta]F=FV[1/\beta] \tag{1.4.20}$$

易证，$R[l]$可写为

$$R[l]=Q[1/l]V[1/l]FQ[1/l] \tag{1.4.21}$$
$$R[l]=F^{-1}Q[-l]F \tag{1.4.22}$$

于是有

$$R[l]Q\left[\frac{1}{\alpha}\right]=Q\left[\frac{1}{\alpha+l}\right]V\left[\frac{\alpha}{\alpha+l}\right]R\left[\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{l}\right)^{-1}\right]$$
$$R[l]V[\beta]=V[\beta]R[\beta^2 l]$$
$$R[l]F=FQ[-l] \tag{1.4.23}$$
$$FR[l]=Q[-l]F$$

二、应用

1．柯林斯公式的正则算子表示式

利用基本正则算子和它们的对易式，可将二维柯林斯公式写为（略去不重要的常数相位因子）

$$E_2(x_2,z)=Q\left[\frac{C}{A}\right]V\left[\frac{1}{A}\right]R\left[\frac{B}{A}\right]E_1(x_1,0),\quad A\neq 0$$
$$E_2(x_2,z)=Q\left[\frac{D}{B}\right]V\left[\frac{1}{B}\right]FQ\left[\frac{A}{B}\right]E_1(x_1,0),\quad B\neq 0$$
$$E_2(x_2,z)=R\left[\frac{A}{C}\right]V[-C]FR\left[\frac{D}{C}\right]E_1(x_1,0),\quad C\neq 0$$
$$E_2(x_2,z)=R\left[\frac{B}{D}\right]V[D]Q\left[\frac{C}{D}\right]E_1(x_1,0),\quad D\neq 0 \tag{1.4.24}$$

式中 A、B、C、D 为变换矩阵$\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}$诸元素.

2．特殊光学系统

物理光学中一些常用光学系统也可以用基本正则变换算子表示出来，例如：

（1）傅里叶变换系统

$$T\begin{bmatrix}0 & B\\ -B^{-1} & D\end{bmatrix}=Q\left[\frac{D}{B}\right]V\left[\frac{1}{B}\right]F \tag{1.4.25}$$

(2) 成像系统

$$T\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & A^{-1} \end{bmatrix} = Q\left[\frac{C}{A}\right]V\left[\frac{1}{A}\right] \tag{1.4.26}$$

(3) 远焦系统

$$T\begin{bmatrix} D^{-1} & B \\ 0 & D \end{bmatrix} = R\left[\frac{B}{D}\right]V[D] \tag{1.4.27}$$

(4) 菲涅耳变换系统

$$T\begin{bmatrix} A & B \\ -B^{-1} & 0 \end{bmatrix} = V\left[\frac{1}{B}\right]FQ\left[\frac{A}{B}\right] \tag{1.4.28}$$

(5) 理想放大器

$$T\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{bmatrix} = V\left[\frac{1}{A}\right] \tag{1.4.29}$$

(6) 理想谱分析仪

$$T\begin{bmatrix} 0 & B \\ -B^{-1} & 0 \end{bmatrix} = V\left[\frac{1}{B}\right]F \tag{1.4.30}$$

§1.5 哈密顿光学

一、光学拉格朗日方程

在直角坐标系中,光学拉格朗日方程为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\dfrac{\partial L}{\partial\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)}\right] = \dfrac{\partial L}{\partial x} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\dfrac{\partial L}{\partial\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right)}\right] = \dfrac{\partial L}{\partial y} \end{cases} \tag{1.5.1}$$

式中,光学拉格朗日量

$$L = n(x, y, z)\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right)^2} \tag{1.5.2}$$

n 为介质折射率.

二、光学哈密顿正则方程

光学哈密顿正则方程可写为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial x} = -\dfrac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}z} \\ \dfrac{\partial H}{\partial y} = -\dfrac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}z} \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_x} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_y} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} \end{cases} \tag{1.5.3}$$

式中，光学哈密顿量

$$H = -\left[n^2(x,y,z) - p_x^2 - p_y^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{1.5.4}$$

p_x、p_y 为正则动量.

采用类比方法可得出：(1) 当 $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ (h 为普朗克常数)→0 时，量子力学的结果与经典力学一致.类似地，当 k^{-1}→0 (短波长近似)时，则实现由波动光学到几何光学的过渡. (2) 与量子力学中的不确定关系

$$\Delta x \Delta p_x \geqslant \frac{\hbar}{2} \tag{1.5.5}$$

(式中 Δx、Δp_x 分别为粒子的坐标和动量的不确定量)类似，在激光光学中近轴近似下成立(见第三章)

$$w_{0m}\theta_m \geqslant M^2 \frac{\lambda}{\pi} \tag{1.5.6}$$

式中 w_{0m}、θ_m 分别为用二阶矩定义的光束的束腰宽度和远场发散角，M^2 称为光束传输因子或 M^2 因子，可用以描述激光光束质量。仅对理想基模高斯光束($m=0$)有

$$w_0\theta_0 = \frac{\lambda}{\pi} \tag{1.5.7}$$

式(1.5.6)、式(1.5.7)说明，小的光束发散角和小的束宽二者不可同时兼得，其乘积之最小值为 λ/π(或等价地，M^2 因子的最小值为 1).

§1.6 激光的模式

光学谐振腔内电磁场可能存在的本征态称为激光的模式，这是激光光学中一个重要概念.不同的模对应于不同的场分布和共振频率，模可以分为纵模和横模，本节将分析这些问题.

一、驻波条件

现在分析均匀平面波在腔长为 L 的平行平面腔内沿轴线方向的往

返传输.当光波在腔镜上反射时,入射波和反射波会发生干涉.为了能在腔内形成稳定的振荡,要求光波因干涉得到加强.相长干涉的条件是光波在腔内沿轴线方向往返传输一周(如图 1.6.1 中 $A\rightarrow A'\rightarrow B$)产生的相位差 $\Delta\phi$ 为 2π 的整数倍(用 q 表示):

$$\Delta\phi=2\pi q \tag{1.6.1}$$

由程差和相差间的著名关系式得到

$$\Delta\phi=2L\left(\frac{2\pi}{\lambda_q}\right)=2\pi q \tag{1.6.2}$$

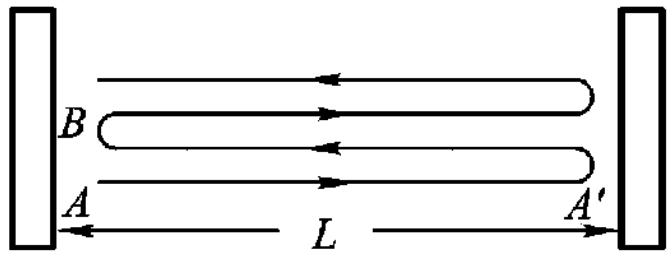


图 1.6.1 平行平面腔内光波的往返传输

于是有

$$L=q\frac{\lambda_q}{2} \tag{1.6.3}$$

或用光波频率 ν_q 表为

$$\nu_q=\frac{c}{2L}q \tag{1.6.4}$$

式中下标指对应于序数 q 的波长或频率.

由此可知,腔长为 L 的平行平面腔只对频率满足式(1.6.4)沿轴向传输的光波共振,式(1.6.4)称为谐振条件,ν_q 为谐振频率(或共振频率).当光波波长和平行平面腔腔长满足式(1.6.3)时将在腔内形成驻波,这时腔长应为半波长的整数倍.式(1.6.3)称为光腔的驻波条件.

二、纵模

平行平面腔中满足式(1.6.4)沿轴线方向(即纵向)形成的驻波场即为它的本征模式.通常把由整数 q 所表征的腔内纵向的稳定场分布称为激光的纵模(或轴模),q 称为纵模序数.不同的纵模相应于不同的 q 值,对应不同的频率.

腔内两个相邻纵模频率之差 $\Delta\nu_q$ 称为纵模间隔,由式(1.6.4)得

$$\Delta\nu_q=\nu_{q+1}-\nu_q=\frac{c}{2L} \tag{1.6.5}$$

应当指出的是,利用平面波在平行平面腔中的相长干涉来推导腔的谐振条件和建立纵模的物理图像只是一种粗略的近似.事实上,腔内不可能存在均匀平面波.但是在物理学中往往可以借助于直观的、相当近似的简化模型得出某些合理的结论,而避免了使用复杂的数学推导和计算.平面波理论的成功之处在于不仅正确指出了腔内存在有频率不同的多纵模振荡的可能性,而且正确地求出了纵模频率间隔的公式(1.6.5).事实上,这一公式也很容易由法布里-珀罗(Fabry-Perot,缩写为 F-P)干涉仪理论得出.当考虑了腔的损耗后,F-P 干涉仪的光强公式为

$$I = I_0 \frac{T_1 T_2 V}{(1-RV)^2 + 4RV\sin^2 kL} \tag{1.6.6}$$

式中 I、I_0 分别为透射光波和入射光波的光强，T_1、T_2 为两镜透过率

$$R = \sqrt{R_1 R_2} \tag{1.6.7}$$

R_1、R_2 为两镜反射率，V 为腔损耗因子，L 为腔长，k 为波数.

相长干涉条件等价于透射光强为极大条件，即

$$\sin kL = 0 \tag{1.6.8}$$

由此得 $\nu_q = \frac{c}{2L}q$，此即式(1.6.4).

在第八章和第九章将会看到，不仅平行平面腔，而且对于其它类型的谐振腔，如球面腔，具有同一横向场分布的相邻纵模间隔都可用式(1.6.5)计算，因此这是光腔理论的重要结果之一.

三、横模

除了在纵向(设为 z 轴方向)外，腔内电磁场在垂直于其传输方向的横向 $x-y$ 面内也存在稳定的场分布，称为横模.不同的横模对应于不同的横向稳定光场分布和频率.图 1.6.2 标志出在轴对称(矩形域)和旋转对称(圆形域)情况下各种横模的图形.

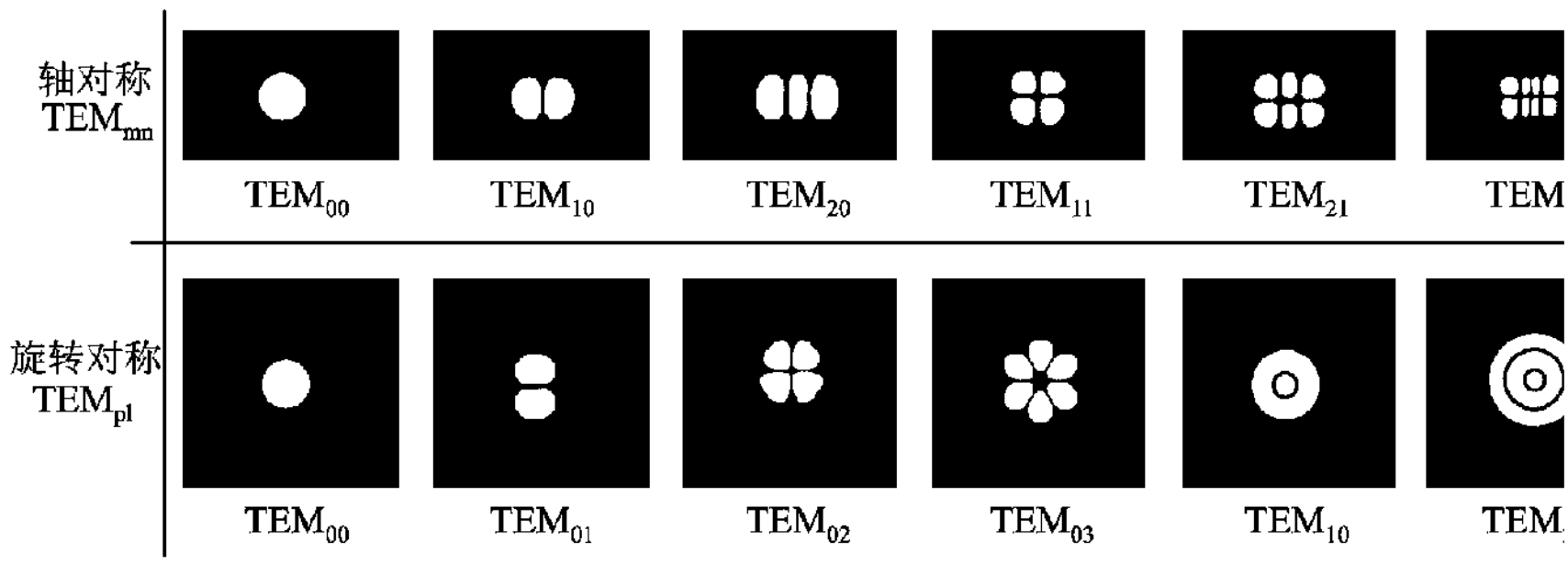


图 1.6.2　横模图

激光的模式一般用 TEM_{mnq} 来标记.q 为纵模序数，即纵向驻波波节数，一般约为 $10^4 \sim 10^7$ 量级，通常都不写出来.m、n(旋转对称时习惯上用 p、l)为横模序数，$m=0$，$n=0$ 即 TEM_{00} 称为基模，其它情况为高阶横模.对于轴对称情况(TEM_{mn})，m 表示 x 方向暗区数，n 表示 y 方向暗区数.旋转对称时(TEM_{pl})，p 表示径向节线数，即暗环数，l 表示角向节线数，即暗直径数.实际的激光器中常有模式畸变和简并现象，如图 1.6.3 中的横模 TEM_{01}^{*} 称简并模(Donat 模)，实际上是由 TEM_{10} 和 TEM_{01} 模叠加的结果，在图中箭头指处常可看到时隐时现的裂缝.

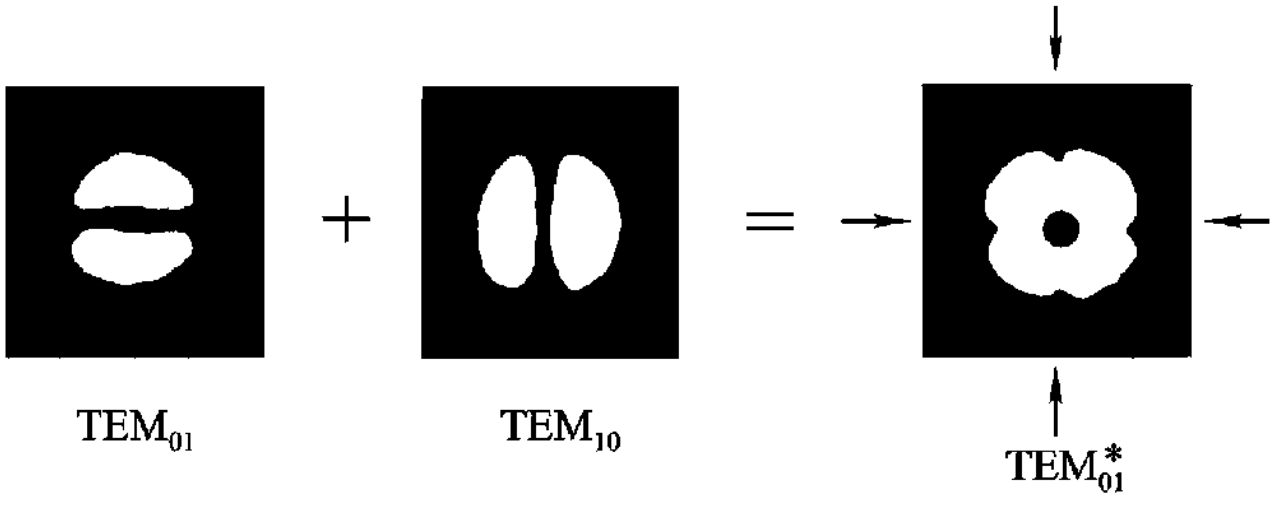


图 1.6.3　简并模

四、横模的形成

如前所述，纵模是光波在腔内多次往返传输形成的纵向稳定场分布，现在来分析这种往返传输对横向光场分布的影响.

由于谐振腔反射镜几何尺寸是有限的，当光波在两镜间往返传输时，必然会因镜边缘的衍射效应而产生损耗. 在决定腔中激光振荡稳定场分布的形成时，衍射将起主要作用.

分析图 1.6.4(a)所示光波在理想平行平面腔中的传输过程. 设在初始时镜 1 上有某一场分布 E_1，则光波由镜 1 传输到镜 2 时，将在镜 2 上产生一个新的场分布 E_2，场 E_2 经过第二次传输后又将在镜 1 上产生一个新的场分布 E_3，每经过一次传输，光波因衍射而损耗一部分能量，并且衍射还会引起场分布的变化，因此，经过一次往返传输之后所生成的场 E_3 不仅振幅小于 E_1，而且其分布也可能与 E_1 不同. 但理论分析表明，经过足够多次的往返传输之后，腔内能形成这样一种稳态场，它的相对分布不再受衍射影响，即在腔内往返传输一周后能够“再现”前一次的场分布. 这种稳态场经过一次往返后，可能的变化仅仅是：因为实际存在的损耗，镜面上各点的场振幅按同样的比例衰减，各点相位发生同样大小的滞后. 这种在腔反射镜面上经过一次往返传输后能“自再现”的稳定场分布就称为横模. 显然，对于两个反射镜几何尺寸完全相同的对称腔(但反射率可以不同)，这种稳定场分布在经单程传输后即可实现自再现.

为了形象地理解腔内自再现模的形成，可用光波在光阑传输线中的传输来模拟它在平行平面腔中的往返传输过程(这实际上是福克斯－厉(Fox－Li)数值迭代法的物理思想). 光阑传输线如图 1.6.4(b)所示，由一系列同轴光阑构成. 这些光阑的孔开在平行放置无限大、完全吸收屏(即黑体)上，相邻两个光阑间距离等于腔长 L，光阑大小等于镜的横向尺寸 $2a$，当模拟对称开腔时，所有光阑大小和形状都相同，光波从一个光阑传到另一个光阑就等效于在平行平面腔中从一个反射镜面传输到另一个

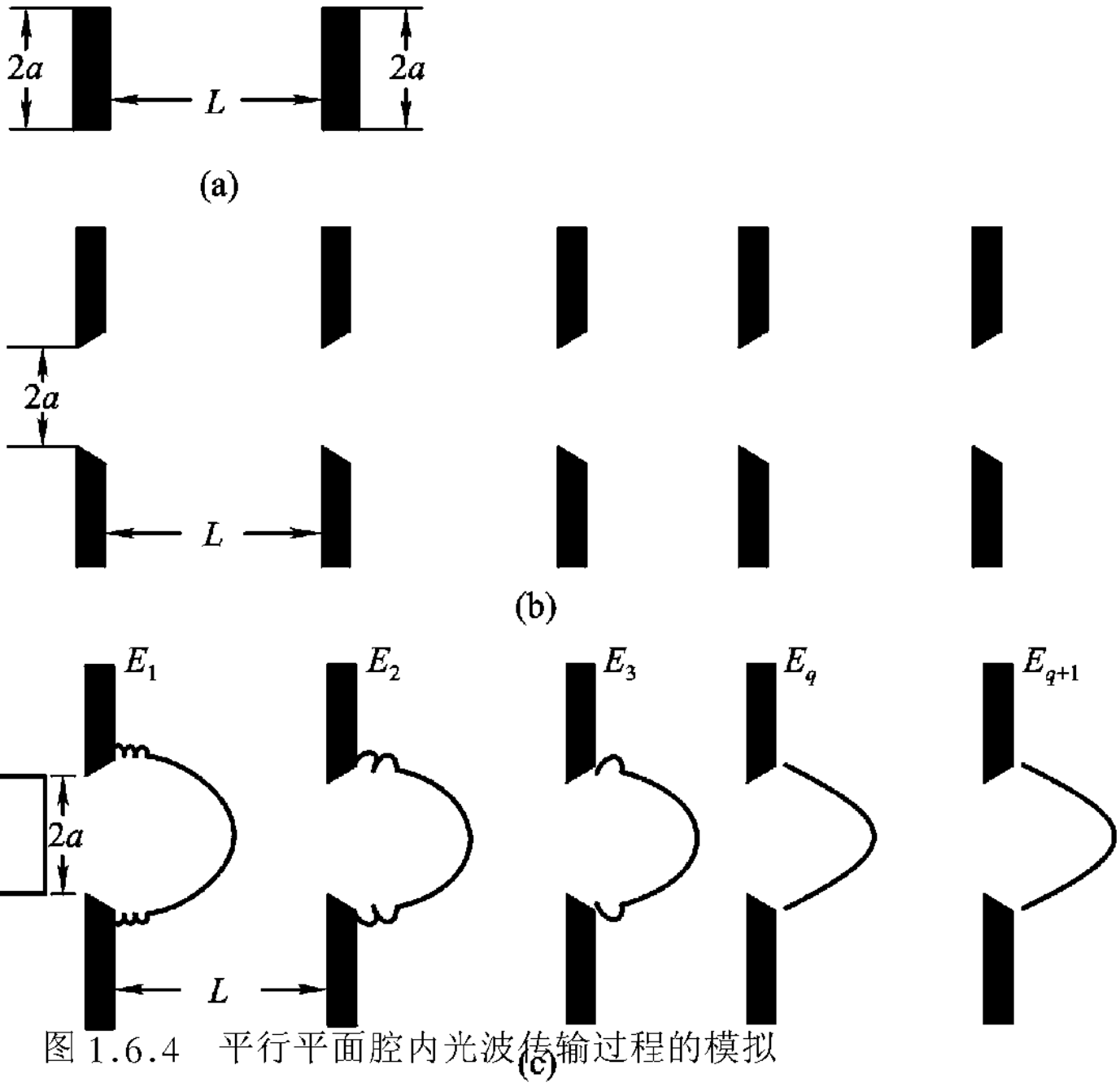


图 1.6.4 平行平面腔内光波传输过程的模拟

反射镜面的过程.每通过一个光阑时,光将发生衍射,射到光阑以外的光将被黑体屏所完全吸收.如图 1.6.4(c),设想初始时有一束均匀平面光波入射在传输线的第一个光阑上,这时第一个光阑上光波的强度分布是均匀的(矩形分布),由于衍射,在穿过该光阑后波前形状要发生改变,并且会产生一些衍射瓣.当它到达第二个光阑时,其边缘强度将比中心部分小,而且第二个光阑已不再是等相位面了.这样顺次通过第二个光阑、第三个光阑……,每通过一个光阑光波的振幅和相位都要发生一次改变.可以预期,在通过足够多的光阑后,镜面上光波的相对振幅和相位分布将不再发生变化,这种稳态自再现场分布即为激光的横模.

§1.7 光学谐振腔的损耗 Q 值 线宽

本节讨论与光学谐振腔有关的光腔损耗、腔内光子寿命、光腔品质因数(Q 值)和无源腔的线宽等重要概念,这对了解光学谐振腔的物理特性都是很重要的.

一、光腔的损耗

损耗大小是评价光腔质量的一个重要指标,本节仅对光腔损耗做一

般分析，进一步的讨论在第九章进行.腔的损耗可分为：

1. 几何损耗

按照几何光学观点，可以用光线来描述激光在腔内的往返传输过程.一些不平行于光轴(连接两反射镜曲率中心的直线)的光线在某些几何结构的腔内经有限次往返传输后有可能从侧面逃逸出去，即使平行于光轴的光线也仍然存在有逸出腔外的可能，故称为腔的几何损耗，其大小决定于腔的类型、镜面几何尺寸和横模阶次等，可用几何光学方法估算.

2. 衍射损耗

从波动光学观点看来，由于腔反射镜几何尺寸是有限的，光波在腔内往返传输时，必然因腔镜边缘的衍射效应而产生损耗.如果在腔内插入其它光学元件，还应当考虑其边缘或光阑的衍射引起的损耗.通常将这类损耗称为衍射损耗，可由求解腔的衍射积分方程得出，其大小与腔的菲涅耳数、g 参数和横模阶次等都有关系.

但是，应当注意由于几何光学和波动光学仅仅是观察分析问题的方法不同，而研究的对象是同一的，即具有波粒二象性的光，所以上述几何损耗和衍射损耗的划分带有明显人为的性质.

3. 透射损耗

通常稳定腔至少有一个反射镜是部分透射的，以获得必要的输出耦合.这部分有功损耗称为光腔的透射损耗，它与输出镜的透射率 T 有关.

4. 非激活吸收、散射等其它损耗

这类损耗是因为激光通过腔内光学元件和反射镜发生非激活吸收、散射等而引起的.

上述前两种损耗称为选择性损耗，它随不同横模而异，后两种损耗称非选择性损耗，它与光波模式无关.

为了定量描述损耗大小可定义“平均单程损耗”(简称单程损耗)为：如果初始光强为 I_0，在腔内往返一周后衰减为 I，则有

$$I = I_0 \exp[-2\delta] \tag{1.7.1}$$

于是平均单程损耗 δ 等于

$$\delta = \frac{1}{2} \ln \frac{I_0}{I} \tag{1.7.2}$$

如果损耗是由多种因素引起的，每种损耗可用相应的 δ_i 来描述，则总损耗

$$\delta = \sum_i \delta_i = \delta_1 + \delta_2 + \cdots \tag{1.7.3}$$

即总损耗与分损耗间为简单相加关系.

在文献中还经常使用“损耗系数”α，定义为单位长度的损耗，即

$$\alpha=\frac{\delta}{L} \tag{1.7.4}$$

所谓“单程损耗因子”V 是由下式定义的：

$$V=\sqrt{\frac{I}{I_0}} \tag{1.7.5}$$

因而有

$$\delta=-\ln V\approx 1-V \tag{1.7.6}$$

但式(1.7.6)中第二式仅当损耗较小时才近似成立.

二、光子寿命

由式(1.7.1)可以求出光在腔内经 m 次往返传输后强度将由 I_0 衰减为

$$I_m=I_0\exp[-2\delta m] \tag{1.7.7}$$

取 $t=0$ 时光强为 I_0，则 t 时刻光在腔内往返次数

$$m=\frac{t}{2L/c} \tag{1.7.8}$$

将式(1.7.8)代入式(1.7.7)得到 t 时刻的光强 $I(t)$ 为

$$I(t)=I_0\exp[-t/\tau_{\mathrm{R}}] \tag{1.7.9}$$

式中

$$\tau_{\mathrm{R}}=\frac{L}{\delta c} \tag{1.7.10}$$

称为光子在腔内的平均寿命，简称光子寿命，是描述光腔的一个重要物理量.由式(1.7.9)知 τ_{R} 的物理意义为光强衰减至初始值 1/e 所需要的时间.显然，腔损耗越大，则 τ_{R} 越小，腔内光强衰减得越快.

从光子说观点可以更清楚理解 τ_{R} 的含义.设 t 时刻腔内光子密度为 $N(t)$，则有

$$I(t)=N(t)h\nu c \tag{1.7.11}$$

式中 h 为普朗克常数.把式(1.7.11)代入式(1.7.9)得到

$$N(t)=N_0\exp(-t/\tau_{\mathrm{R}}) \tag{1.7.12}$$

式中 N_0 为 $t=0$ 时的光子密度.此式表明，腔内光子密度按指数规律衰减，到$t=\tau_{\mathrm{R}}$时，$N=N_0/\mathrm{e}$.因而 N_0 个光子的平均寿命 $\bar{t}$ 为

$$\bar{t}=\frac{1}{N_0}\int_0^{+\infty} t[-\mathrm{d}N(t)]=\frac{1}{\tau_{\mathrm{R}}}\int_0^{+\infty} t\exp(-t/\tau_{\mathrm{R}})\mathrm{d}t=\tau_{\mathrm{R}} \tag{1.7.13}$$

这就是将 τ_R 称为光子寿命的原因.

如果总损耗 δ 可表为式(1.7.3),则有

$$\frac{1}{\tau_R}=\sum_i\frac{1}{\tau_{R_i}}=\frac{1}{\tau_{R_1}}+\frac{1}{\tau_{R_2}}+\cdots \tag{1.7.14}$$

式中

$$\tau_R=\frac{L}{\delta_i c} \tag{1.7.15}$$

为由单程损耗 δ_i 所决定的光子寿命.

三、无源腔的 Q 值

无论是LC振荡回路、微波腔、原子核[穆斯堡尔(Mössbauer)效应]或是光频腔等共振系统都普遍使用 Q 值(亦称品质因数)来标志腔或系统的特性.谐振腔 Q 值的普遍定义为

$$Q=2\pi\nu\frac{\text{腔内储藏的能量}}{\text{腔损耗功率}} \tag{1.7.16}$$

式中 ν 为腔内电磁场的振荡频率.

由式(1.7.16)可求得 Q 值的另一表示式:

$$Q=2\pi\nu\tau_R=\omega\frac{L}{\delta c} \tag{1.7.17}$$

当腔内存在多种损耗时,总的 Q 值由下式决定:

$$\frac{1}{Q}=\sum_i\frac{1}{Q_i}=\frac{1}{Q_1}+\frac{1}{Q_2}+\cdots \tag{1.7.18}$$

式中

$$Q_i=2\pi\nu\tau_{R_i}=\omega\frac{L}{\delta_i c} \tag{1.7.19}$$

为由单程损耗 δ_i 所决定的品质因数.

四、无源腔的线宽

由式(1.7.9)所表征的光强对应的场振幅为

$$A(t)=A_0\exp(-t/2\tau_R) \tag{1.7.20}$$

场强 $E(t)$ 可表为

$$E(t)=A(t)\exp(\mathrm{i}\omega t)=A_0\exp(-t/2\tau_R)\exp(\mathrm{i}\omega t) \tag{1.7.21}$$

由傅里叶分析知,形如式(1.7.21)所表征的衰减光场将具有有限的频谱宽度 $\Delta\nu_c$

$$\Delta\nu_c=\frac{1}{2\pi\tau_R}=\frac{c\delta}{2\pi L} \tag{1.7.22}$$

$\Delta\nu_c$ 称为无源腔的线宽.式(1.7.22)说明,腔的损耗越小,光子在腔内寿命越长,$\Delta\nu_c$ 就越窄.

将式(1.7.22)代入式(1.7.17)得

$$Q=\frac{\nu}{\Delta\nu_c} \tag{1.7.23}$$

对于高 Q 腔,Q 值公式(1.7.16)、式(1.7.17)、式(1.7.23)是等价的.腔的 Q 值是衡量腔质量的一个重要物理量,它表征腔的储能及损耗特性.Q 值高意味着腔的储能性能好、损耗小、腔内光子寿命长、线宽 $\Delta\nu_c$ 窄.同时,Q 值对激光器的阈值特性、输出特性和频率响应特性等都有重要影响,设计腔时,应当综合各种因素全面考虑.现将一些共振系统的 Q 值、振荡频率 ν 和线宽 $\Delta\nu_c$ 的典型值列于表 1.7.1 中,以供参考.

表 1.7.1　一些共振系统的 Q 值、ν 和 $\Delta\nu_c$ 的典型值

谐振系统	ν_c /s^{-1}	$\Delta\nu_c$ /s^{-1}	Q
弹　　簧	2	0.1	20
音　　叉	4×10^{2}	4×10^{-2}	10^{4}
LC 线圈	10^{5}	10^{3}	10^{2}
石　　英	10^{6}	1	10^{6}
干涉滤波器	5×10^{14}	5×10^{12}	10^{12}
F－P 干涉仪	10^{14}	10^{6}	10^{8}
单模稳频激光器	10^{14}	1	10^{14}
原子核(穆斯堡尔效应)	10^{19}	10^{4}	10^{15}

习　　题

1. 从费马原理出发证明几何光学三大定律.

2. 推导波动方程式(1.2.10).

3. 推导亥姆霍兹方程(1.2.13).

4. 从波动方程出发,在基尔霍夫边界条件下推出菲涅耳－基尔霍夫衍射积分公式.分析该公式的物理意义和使用条件,并由此阐述经典电磁场理论和波动光学间的关系.

5. 证明瑞利－索末菲公式(1.3.6)在近轴近似下与菲涅耳衍射公式(1.3.10)等价.

6. 从波动方程出发,在边界条件式(1.3.1)下,推出瑞利－索末菲公式(1.3.2)～式(1.3.4).讨论瑞利－索末菲公式的物理意义和应用范围.

7. 时－空变量间存在何种类比关系？试由这些类比关系写出与空间域相对应的时间域中的物理量和物理定律，并讨论其应用.

8. 讨论正则变换算子 $T\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}$的物理意义. 在 (1) $A\neq0$; (2) $B\neq0$; (3) $C\neq0$; (4) $D\neq0$ 各种情况下，将 T 表示为基本正则算子 Q、V、F、R 之积的形式，说明其用途.

9. 证明式(1.5.6).

10. 推导式(1.6.6)，并列表总结 F－P 干涉仪的重要公式.

11. 不同的纵模和横模都对应于不同的场分布和频率，以 (1) 一般稳定球面腔；(2) 对称共焦腔为例，对此加以讨论.

参 考 文 献

[1] Born M, Wolf E. Principles of Optics. 2nd Edition, Oxford: Pergamon Press, 1964

[2] Luneburg R K. Mathematical Theory of Optics. Berkeley California: University California Press, 1964

[3] Siegman A E. Lasers, Mill Valley California: University Science Books, 1986

[4] Mandel L, Wolf E. Optical Coherence and Quantum Optics. Cambridge: University Press, 1995

[5] Kogelnik H. Imaging of optical modes－resonators with internal lenses. Bell Sys Tech J, 1965, 44: 455

[6] Collins S A. Lens－system diffraction integral written in terms of matrix optics. J Opt Soc Am, 1970, 60: 1 168

[7] Kostenbauder A G. Ray－pulse matrices: a rational treatment for dispersive optical systems. IEEE J Quant Electron, 1995, 27: 679

[8] Arnaud J A. Nonorthogonal optical waveguides and resonators. Bell Sys Tech J, 1970, 49: 2311

[9] Nazarathy M, Shamir J. First－order Optics－a canonical operator representation: lossless systems. J Opt Soc Am, 1982, 72: 356

[10] Nazarathy M, Shamir J. First－order Optics－a canonical operator representation for systems with loss or gain. J Opt Soc Am, 1982, 72: 1 398

[11] Nazarathy M, Hardy A, et al. Generalized mode propergation in first－order optical systems with loss or gain. J Opt Soc Am, 1982, 72: 1 409

[12] Nazarathy M, Hardy A, et al. Misaligned first－order optics: canonical operator theory. J Opt Soc Am A, 1986, 3: 1 360

[13] Arnaud J A. Hamiltionian theory of Beam Mode Propergation in Progress in Optics. XI Ed. Wolf E, Amsterdam: North－Holland Publishing Company,

1973

[14] 吕百达等.光束变换光学及其应用.红外与激光技术,1991,3:38

[15] 吕百达等.光束变换光学的进展.第一部分:时空域衍射理论与算子方法,强激光与粒子束,1993,5:612

[16] 吕百达等.光束变换光学的进展.第二部分:矩阵光学方法与李代数理论,强激光与粒子束,1993,5:153

[17] Ding G, Lü B. Canonical operator representation of diffraction integrals in the time domain. Opt Eng, 1993, 32:1 633

[18] Lü B, Ding G. Theoretical studies of synthetic imaging properties of optical arrays in third-order aberrations J Mod Opt, 1994, 41:1 027

第二章　光学中的矩阵方法

本章阐述近轴矩阵光学的基本方法，重点讨论 *ABCD* 变换矩阵和 *ABCD* 定律，并用来处理几何光学、程函和菲涅耳数、激光束的传输、光学谐振腔的稳定性和多程反射室等问题.

§2.1　变换矩阵　*ABCD* 定律

一、空间近轴光线的变换

由解析几何学知道，任意空间直线的位置和方向一般需要四个独立变量才能完全确定.例如，可选定一个垂直于 z 轴的 xy 平面作为参考面，那么空间光线可由它与 xy 面交点的坐标 (x,y) 和光线对 x、y 轴的方向余弦 (θ_x,θ_y) 来完全确定，如图 2.1.1 所示.空间光线经过任意光学系统变换后的位置和方向也可用这四个量来表示.对近轴光线，θ_x、θ_y 都很小，选择适当的坐标系统可使这种变换是线性的，于是可用一个 4×4 的变换矩阵来表示为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ \theta'_x \\ \theta'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & B_{11} & B_{12} \\ A_{21} & A_{22} & B_{21} & B_{22} \\ C_{11} & C_{12} & D_{11} & D_{12} \\ C_{21} & C_{22} & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} \tag{2.1.1}$$

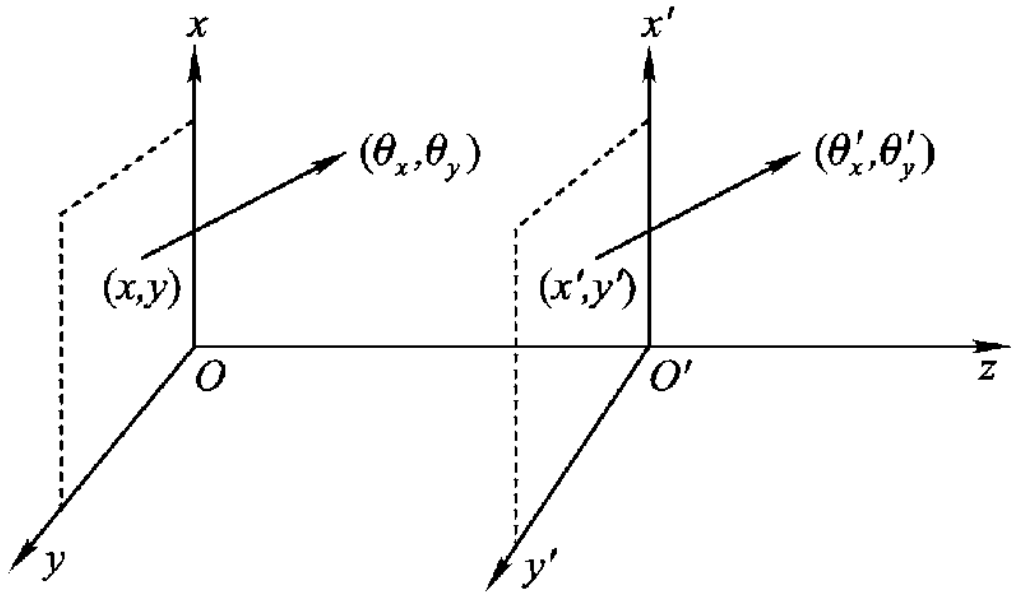


图 2.1.1　空间近轴光线的传输

式 (2.1.1) 为用几何光学方法研究空间近轴光线变换的基本方程.变换矩

阵一般为 4×4 的，但对于轴对称光学系统，(x,θ_x)和(y,θ_y)经历的变化相同，只需用一个 2×2 矩阵(称为轴对称光学系统的变换矩阵或 *ABCD* 矩阵)

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix} \tag{2.1.2}$$

来描述这一变换

$$\begin{bmatrix}x'\\ \theta'_x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \theta_x\end{bmatrix} \tag{2.1.3}$$

即

$$\begin{cases}x'=Ax+B\theta_x\\ \theta'_x=Cx+D\theta_x\end{cases} \tag{2.1.4}$$

可简写为

$$\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{X} \tag{2.1.5}$$

式中

$$\boldsymbol{X}'=\begin{bmatrix}x'\\ \theta'_x\end{bmatrix},\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x\\ \theta_x\end{bmatrix} \tag{2.1.6}$$

式(2.1.3)、式(2.1.4)或式(2.1.5)都是近轴光线 *ABCD* 定律的数学表示式.对于近轴球面波，曲率半径 R 等于

$$R=\frac{x}{\theta_x} \tag{2.1.7}$$

由式(2.1.4)立即可得

$$R'=\frac{AR+B}{CR+D} \tag{2.1.8}$$

或

$$\frac{1}{R'}=\frac{C+D/R}{A+B/R} \tag{2.1.9}$$

式(2.1.8)、式(2.1.9)都称为球面波的 *ABCD* 定律.

若光线顺次通过变换矩阵为

$$\boldsymbol{M}_1=\begin{bmatrix}A_1 & B_1\\ C_1 & D_1\end{bmatrix},\boldsymbol{M}_2=\begin{bmatrix}A_2 & B_2\\ C_2 & D_2\end{bmatrix}$$

的光学系统，利用矩阵乘法规则得到

$$\begin{bmatrix}x'\\ \theta'_x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \theta_x\end{bmatrix} \tag{2.1.10}$$

式中

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \tag{2.1.11}$$

简写为

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_2 \cdot \boldsymbol{M}_1 \tag{2.1.12}$$

式(2.1.10)又可写为

$$\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{M}_2 \cdot \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{X} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{X} \tag{2.1.13}$$

式中相乘矩阵的顺序易搞错，宜加注意.

二、符号规则

在光学著作中，为了避免因符号正负问题引起的混乱，常常需要事先做些人为的规定.应注意的是一旦规定之后，就不能任意变动，否则极易出错.

本书的符号规则如下：

(1) 对 x(光线离轴距离)、θ(光线与光轴夹角)正负号规定如图2.1.2，即在光轴上方为正，下方为负，光线出射方向指向光轴上方为正，指向下方为负.

(2) 反射面曲率半径 ρ.对凸面反射镜 $\rho<0$，对凹面反射镜 $\rho>0$.

(3) 折射面曲率半径 ρ.对凸折射面 $\rho<0$，凹折射面 $\rho>0$.

(4) 球面波波面曲率半径 R.对发散球面波 $R>0$，会聚球面波 $R<0$.

(5) 光学元件和系统的长度量，如光学系统的基点(基面)位置，物距和像距等，情况比较复杂，将在后面结合具体问题说明.

(6) 公式中文字符号均表示代数量.

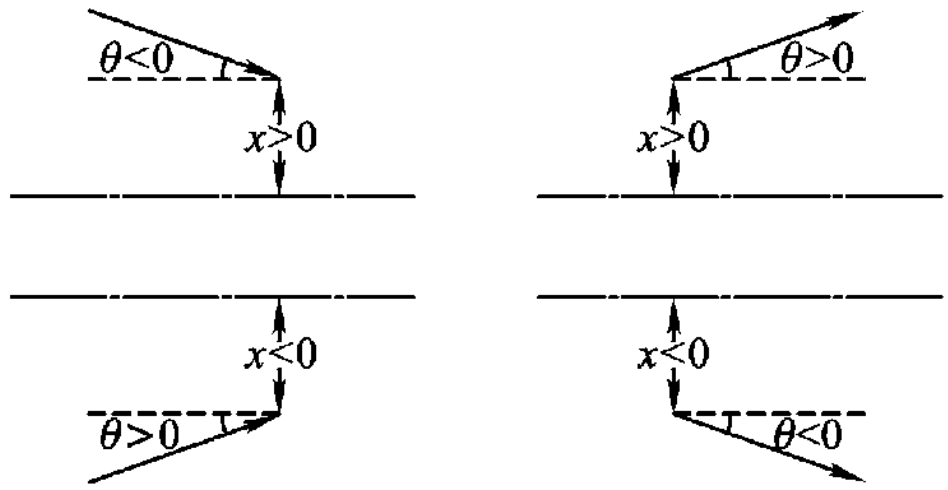


图 2.1.2　x、θ 符号法则示意图

值得说明的是光学中的符号规则和参考面选取等带有人为的性质，常因作者习惯不同而异，且往往还未能将所有物理量的正负号都做出统一的规定，因此对公式中物理量的正负号或数值运算结果出现的正负号

问题最好除使用确定的符号规则外，还应当从物理的角度加以分析和取舍，才能得出正确的结果.

三、变换矩阵的基本性质

1. $\det\boldsymbol{M}$

$ABCD$ 矩阵一个重要性质是它的行列式之值 $\det\boldsymbol{M}$ 仅由入射光线和出射光线所在空间折射率 n_1、n_2 决定，即

$$\det\boldsymbol{M}=AD-BC=n_1/n_2 \tag{2.1.14}$$

当入射光线和出射光线位于折射率相同空间时

$$\det\boldsymbol{M}=AD-BC=1 \tag{2.1.15}$$

但相位共轭镜的光线变换矩阵为一例外，将在第十章讨论.

2. $ABCD$ 矩阵的反向变换矩阵和逆矩阵

若规定由左向右光线传输方向为正，当光线由右向左即反向传输时有

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}x_1\\ \theta_1\end{bmatrix}_{\leftarrow}&=\begin{bmatrix}x_1\\ -\theta_1\end{bmatrix}_{\rightarrow}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ \theta_1\end{bmatrix}_{\rightarrow}\\&=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}x_2\\ \theta_2\end{bmatrix}_{\rightarrow}\\&=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2\\ \theta_2\end{bmatrix}_{\leftarrow}\end{aligned} \tag{2.1.16}$$

式中 $\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}^{-1}$ 为 $\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}$ 的逆矩阵，由矩阵代数知

$$\underset{\rightarrow}{\boldsymbol{M}}^{-1}=\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}^{-1}=\frac{\begin{bmatrix}D&-B\\-C&A\end{bmatrix}}{\det\underset{\rightarrow}{\boldsymbol{M}}} \tag{2.1.17}$$

将式(2.1.17)代入式(2.1.16)，得到

$$\begin{bmatrix}x_1\\ \theta_1\end{bmatrix}_{\leftarrow}=\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{M}}\begin{bmatrix}x_2\\ \theta_2\end{bmatrix}_{\leftarrow} \tag{2.1.18}$$

式中反向变换矩阵 $\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{M}}$ 为

$$\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{M}}=\frac{\begin{bmatrix}D&B\\C&A\end{bmatrix}}{\det\underset{\rightarrow}{\boldsymbol{M}}} \tag{2.1.19}$$

讨论　(1) $\det\underset{\rightarrow}{\boldsymbol{M}}=1$ 时

$$\underset{\rightarrow}{\boldsymbol{M}}^{-1}=\begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix} \tag{2.1.20}$$

$$\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{M}}=\begin{bmatrix} D & B \\ C & A \end{bmatrix} \tag{2.1.21}$$

(2) 折射率突变平界面

由表 2.2.1 知

$$\underset{\rightarrow}{\boldsymbol{M}}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n_1/n_2 \end{bmatrix} \tag{2.1.22}$$

则

$$\underset{\rightarrow}{\boldsymbol{M}}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n_2/n_1 \end{bmatrix} \tag{2.1.23}$$

$$\underset{\leftarrow}{\boldsymbol{M}}=\begin{bmatrix} n_2/n_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.1.24}$$

四、归一化变换矩阵

文献中还广为使用另一类归一化变换矩阵.较为一般地,空间光线在横平面上的位置 x、y 和方向可用正则坐标 q_x、q_y 和正则动量 p_x、p_y 来描述:

$$q_x=x,\ q_y=y$$

$$p_x=\frac{n\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right)^2}},\quad p_y=\frac{n\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right)^2}} \tag{2.1.25}$$

式中 n 为介质折射率.在近轴近似下有

$$\begin{cases} p_x=n\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=n\theta_x \\ p_y=n\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=n\theta_y \end{cases} \tag{2.1.26}$$

与式(2.1.1)、式(2.1.3)相应的变换公式分别为

$$\begin{bmatrix} q_{x2} \\ q_{y2} \\ p_{x2} \\ p_{y2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{B}_{11} & \tilde{B}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \tilde{B}_{21} & \tilde{B}_{22} \\ \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} & \tilde{D}_{11} & \tilde{D}_{12} \\ \tilde{C}_{21} & \tilde{C}_{22} & \tilde{D}_{21} & \tilde{D}_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} q_{x1} \\ q_{y1} \\ p_{x1} \\ p_{y1} \end{bmatrix} \tag{2.1.27}$$

$$\begin{bmatrix} q_{x2} \\ p_{x2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{A} & \widetilde{B} \\ \widetilde{C} & \widetilde{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{x1} \\ p_{x1} \end{bmatrix} = \widetilde{\boldsymbol{M}} \begin{bmatrix} q_{x1} \\ p_{x1} \end{bmatrix} \tag{2.1.28}$$

且

$$\det \widetilde{\boldsymbol{M}} = \widetilde{A}\widetilde{D} - \widetilde{B}\widetilde{C} = 1 \tag{2.1.29}$$

式中

$$\widetilde{\boldsymbol{M}} = \begin{bmatrix} \widetilde{A} & \widetilde{B} \\ \widetilde{C} & \widetilde{D} \end{bmatrix} \tag{2.1.30}$$

称为归一化变换矩阵. 当入射空间和出射空间折射率 n_1 和 n_2 不相等时，使用归一化变换矩阵是比较方便的. 容易证明式(2.1.2)和式(2.1.30)矩阵元间有关系

$$\begin{cases} A = \widetilde{A} \\ B = n_1 \widetilde{B} \\ C = \widetilde{C} / n_2 \\ D = \dfrac{n_1}{n_2} \widetilde{D} \end{cases} \tag{2.1.31}$$

§2.2　变换矩阵示例

使用几何光学定律(例如反射定律、折射定律等)和利用已知的变换矩阵是推导变换矩阵表示式的简单方法. 现将在激光光学中经常使用的变换矩阵列于表 2.2.1 中，以备查用.

下面举例说明变换矩阵推导方法.

(1) 光线通过距离为 l 的自由空间($n=1$)

由图 2.2.1 可得

$$\begin{cases} x' = x + l\theta \\ \theta' = \theta \end{cases} \tag{2.2.1}$$

所以

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.2.2}$$

(2) 球面反射

如图 2.2.2，设球面反射镜曲率半径为 ρ，考虑球面上 A 点，由反射定律知入射光线(x,θ)与反射光线(x',θ')间有关系

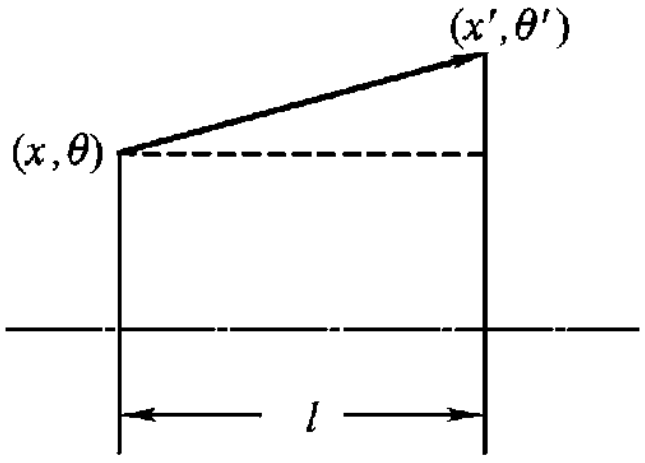


图 2.2.1　自由空间传输

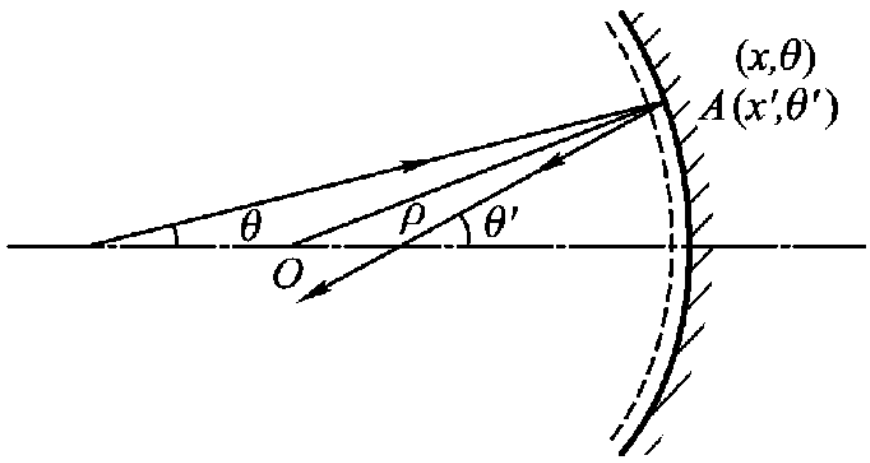


图 2.2.2　球面反射

$$\begin{cases} x' = x \\ \theta' = -\dfrac{2}{\rho}x + \theta \end{cases} \tag{2.2.3}$$

故

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{2}{\rho} & 1 \end{bmatrix} \tag{2.2.4}$$

因为焦距为 $f = \dfrac{\rho}{2}$ $(\rho > 0)$ 的薄透镜对近轴光线的折射与曲率半径为 ρ 的凹面镜对同一近轴光线的反射是等效的，所不同的仅仅是传输方向而已，于是立即得到薄透镜对近轴光线的变换矩阵

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \tag{2.2.5}$$

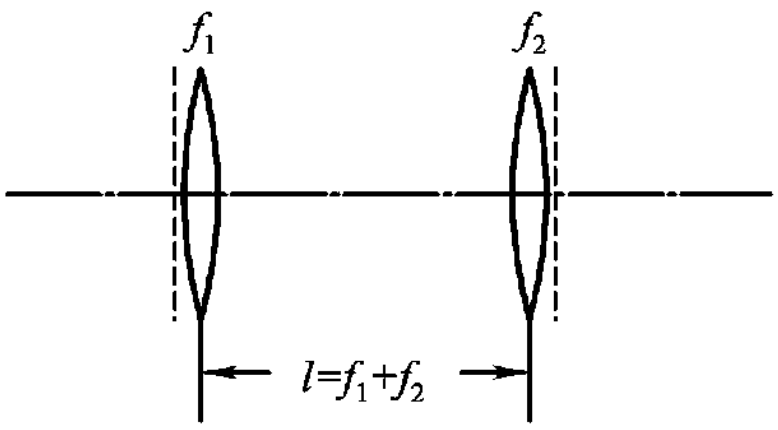


图 2.2.3　调焦望远镜

当然，这一结果也可直接由折射定律推出.

(3) 调焦望远镜系统

由图 2.2.3，利用式 (2.2.1)、式 (2.2.5)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & f_1 + f_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f_1} & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} M_T & l \\ 0 & \dfrac{1}{M_T} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

式中

$$M_T = -\frac{f_2}{f_1} \tag{2.2.7}$$

为望远镜系统的放大率，

$$l = f_1 + f_2 \tag{2.2.8}$$

为望远镜系统的两透镜间距离.

类似地可求出失调望远镜系统的变换矩阵，请读者自行完成之.

(4) 薄透镜序列

(i) 谢尔威斯特(Sylvester)定理

设矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 满足

$$\det \boldsymbol{M} = AD - BC = 1 \tag{2.2.9}$$

则有

$$\boldsymbol{M}^m = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^m = \frac{1}{\sin\varphi}\begin{bmatrix} A\sin m\varphi - \sin(m-1)\varphi & B\sin m\varphi \\ C\sin m\varphi & D\sin m\varphi - \sin(m-1)\varphi \end{bmatrix} \tag{2.2.10}$$

式中

$$\cos\varphi = \frac{A+D}{2} \tag{2.2.11}$$

m 为任意正整数.

谢尔威斯特定理可用数学归纳法证明.

$m=1$ 时式(2.2.10)显然成立，因

$$\boldsymbol{M}^1 = \boldsymbol{M} = \frac{1}{\sin\varphi}\begin{bmatrix} A\sin\varphi & B\sin\varphi \\ C\sin\varphi & D\sin\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \tag{2.2.12}$$

现设 $m=k$ 时式(2.2.10)成立，即

$$\boldsymbol{M}^k = \frac{1}{\sin\varphi}\begin{bmatrix} A\sin k\varphi - \sin(k-1)\varphi & B\sin k\varphi \\ C\sin k\varphi & D\sin k\varphi - \sin(k-1)\varphi \end{bmatrix} \tag{2.2.13}$$

利用式(2.2.13)和三角变换公式得到

$$\boldsymbol{M}^{k+1} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{k+1} = \frac{1}{\sin\varphi}\begin{bmatrix} A\sin(k+1)\varphi - \sin k\varphi & B\sin(k+1)\varphi \\ C\sin(k+1)\varphi & D\sin(k+1)\varphi - \sin k\varphi \end{bmatrix} \tag{2.2.14}$$

于是定理得证.

(ii) 薄透镜序列

现在分析图 2.2.4 中由 m 个焦距为 f、间隔均为 L 的薄透镜组成的序列，其中一个单程的变换矩阵为

$$\boldsymbol{M}_{fL} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & L \\ -\dfrac{1}{f} & 1-\dfrac{L}{f} \end{bmatrix} \tag{2.2.15}$$

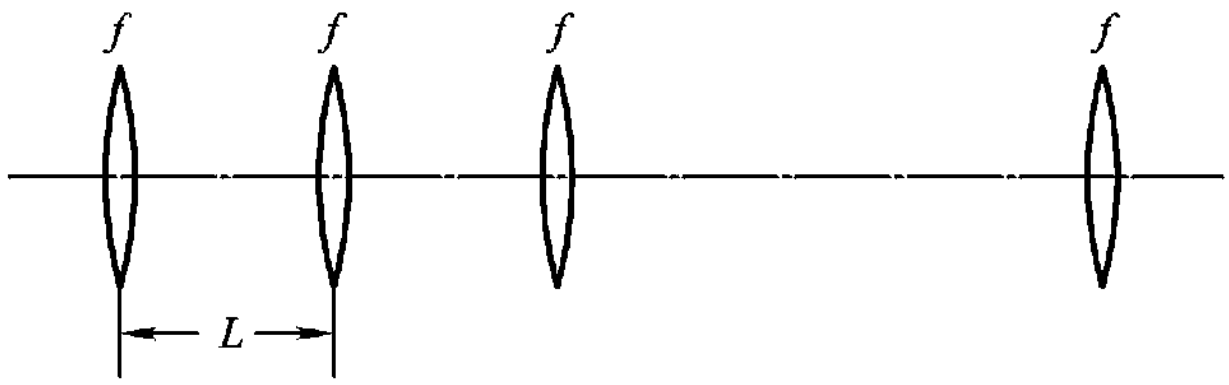


图 2.2.4　薄透镜序列

于是

$$\boldsymbol{M}=\underbrace{\boldsymbol{M}_{f\!L}\cdot\boldsymbol{M}_{f\!L}\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{M}_{f\!L}}_{m}=\boldsymbol{M}_{f\!L}^{m} \tag{2.2.16}$$

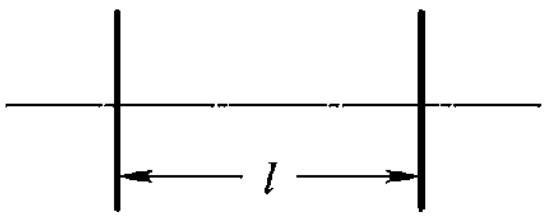
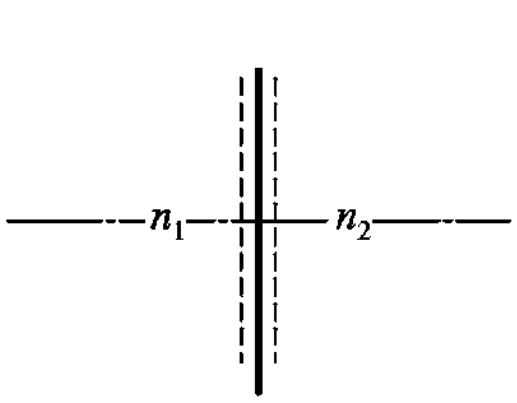
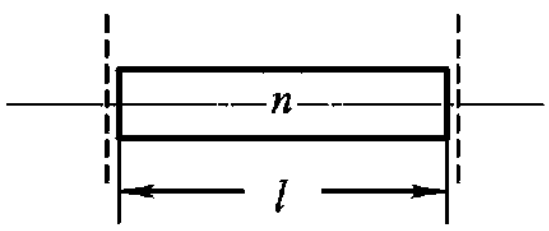
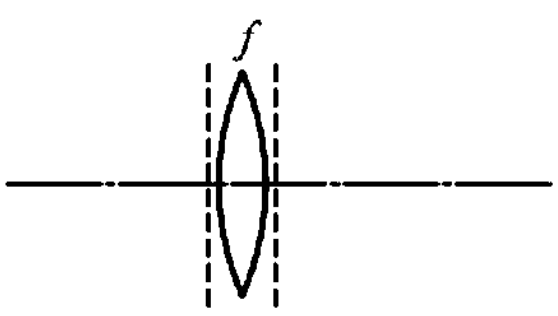
由谢尔威斯特定理得到

$$\boldsymbol{M}=\frac{1}{\sin\varphi}\begin{bmatrix}\sin m\varphi-\sin(m-1)\varphi & L\sin m\varphi\\ -\dfrac{1}{f}\sin m\varphi & \left(1-\dfrac{L}{f}\right)\sin m\varphi-\sin(m-1)\varphi\end{bmatrix} \tag{2.2.17}$$

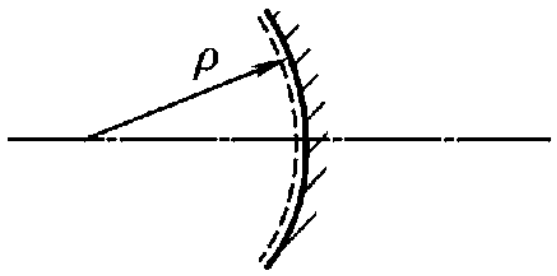
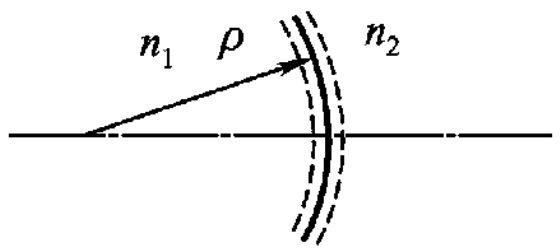
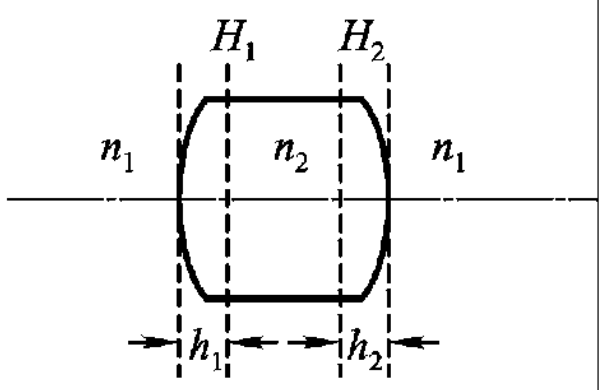
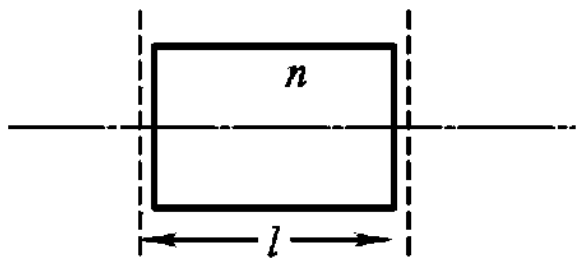
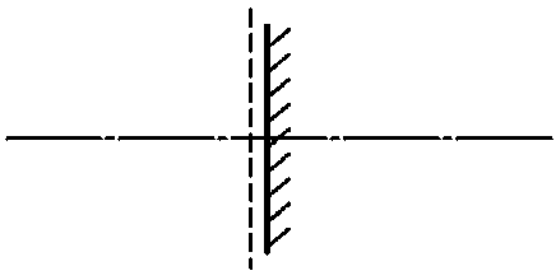
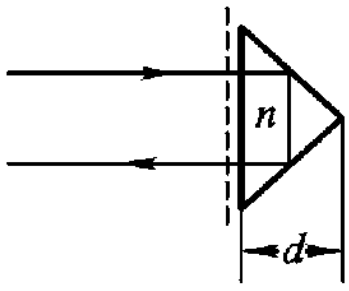
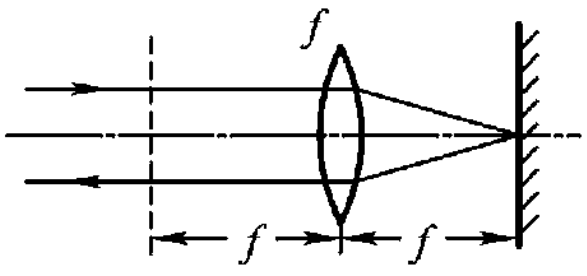
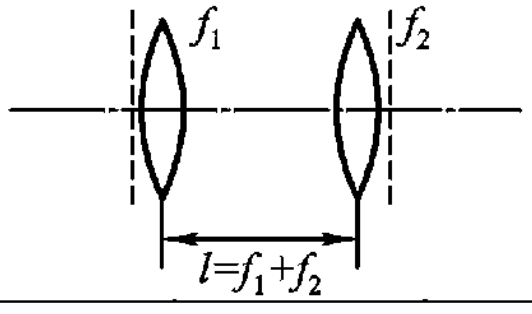
式中

$$\cos\varphi=1-\frac{L}{2f} \tag{2.2.18}$$

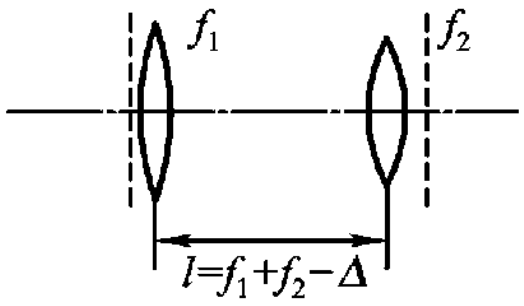
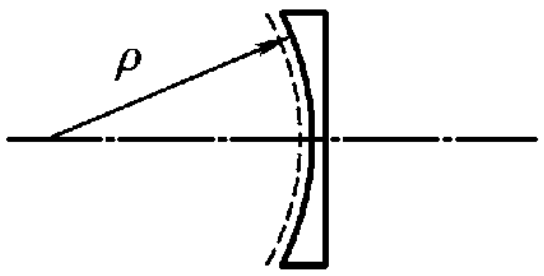
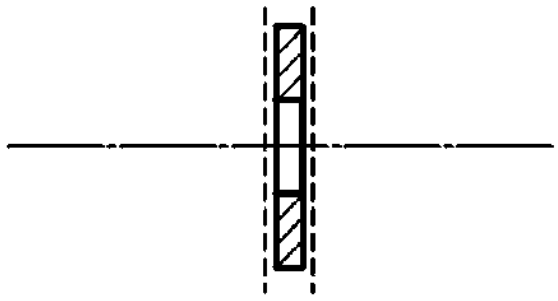
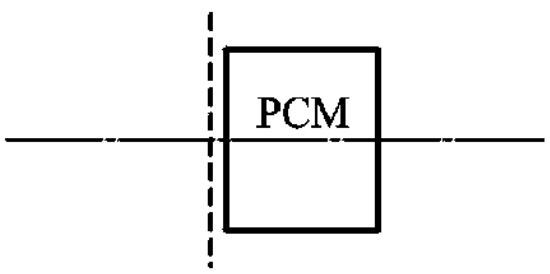
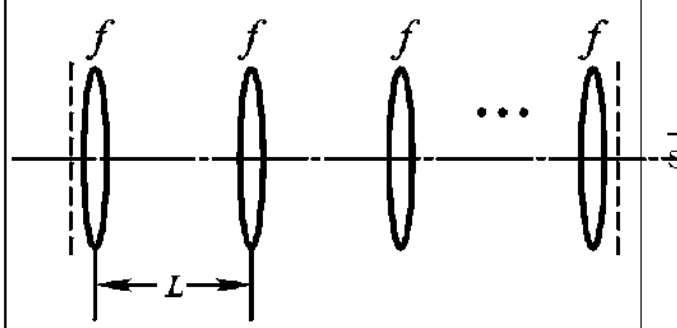
表 2.2.1　常用变换矩阵表

1. 距离为 l 的自由空间 $n=1$		$\begin{bmatrix}1 & l\\ 0 & 1\end{bmatrix}$
2. 界面折射(折射率分别为 n_1、n_2)		$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & n_1/n_2\end{bmatrix}$
3. 折射率 n、长 l 均匀介质		$\begin{bmatrix}1 & \dfrac{l}{n}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$
4. 薄透镜(焦距 f)		$\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{1}{f} & 1\end{bmatrix}$

续表

5. 球面反射镜(曲率半径 ρ)		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{\rho} & 1 \end{bmatrix}$
6. 球面折射		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2-n_1}{n_2\rho} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$
7. 厚透镜		$\begin{bmatrix} 1-\frac{h_2}{f} & h_1+h_2-\frac{h_1h_2}{f} \\ -\frac{1}{f} & 1-\frac{h_1}{f} \end{bmatrix}$
8. 热透镜		$\begin{bmatrix} 1+\gamma l^2 & l/n_0 \\ 2\gamma n_0 l & 1+\gamma l^2 \end{bmatrix}$ $n=n_0(1+\gamma r^2)$
9. 平面反射		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
10. 直角全反射棱镜		$\begin{bmatrix} -1 & -\frac{2d}{n} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
11. 猫眼反射器		$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
12. 调焦望远镜		$\begin{bmatrix} M_T & l \\ 0 & 1/M_T \end{bmatrix}$ $M_T=-f_2/f_1$

续表

13. 离焦望远镜		$\begin{bmatrix} M_T+\Delta/f_1 & l \\ -\Delta/(f_1 f_2) & 1/M_T+\Delta/f_2 \end{bmatrix}$
14. 高斯球面反射镜 $A(r)=A(0)\exp[-r^2/a^2]$		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{2}{\rho}-\dfrac{i\lambda}{\pi a^2} & 1 \end{bmatrix}$
15. 高斯光阑 $t(r)=t(0)\exp[-r^2/a^2]$		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{i\lambda}{\pi a^2} & 1 \end{bmatrix}$
16. 相位共轭镜(PCM)		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}$ R – 入射到 PCM 上的高斯光束等相面曲率半径
17. 薄透镜序列		$\dfrac{1}{\sin\varphi}\begin{bmatrix} \sin m\varphi- & L\sin m\varphi\bullet \\ \sin(m-1)\varphi & \left(1-\dfrac{L}{f}\right)\sin m\varphi \\ -\dfrac{1}{f}\sin m\varphi & -\sin(m-1)\varphi \end{bmatrix}$ $\cos\varphi=1-L/2f$

在变换矩阵使用中应当注意：(1)求复杂光学系统的变换矩阵时，可按上面介绍的方法用矩阵乘法顺次将单元的变换矩阵相乘就可得出总的变换矩阵.除了注意相乘矩阵顺序外，还不要漏掉进、出界面的矩阵.(2)当讨论光学系统对激光的变换问题时，对象不再是单条光线，而是光束，或称光线汇，变换矩阵描述了激光束通过光学系统的变换规律.

§ 2.3　几何光学中的矩阵方法

本节将证明，高斯光学，即近轴光线通过理想光学系统几何成像的基本问题，包括几何成像公式、基点和基面、三个放大率和拉格朗日 – 亥姆

霍兹不变式等都可用矩阵方法统一表述出来.

一、几何成像的 *ABCD* 定律

对于图 2.3.1 中介于参考面 RP_1、RP_2 间的一般光学系统，设其变换矩阵为 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，在折射率 n_1 的物空间中与 RP_1 相距 u 的入射面上的光线 $\begin{bmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$ 经该光学系统变换后，在折射率 n_2 的像空间中与 RP_2 相距 $(-v)$ 处对应光线矢量为 $\begin{bmatrix} x_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$，由 $\begin{bmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$ 总的变换矩阵为

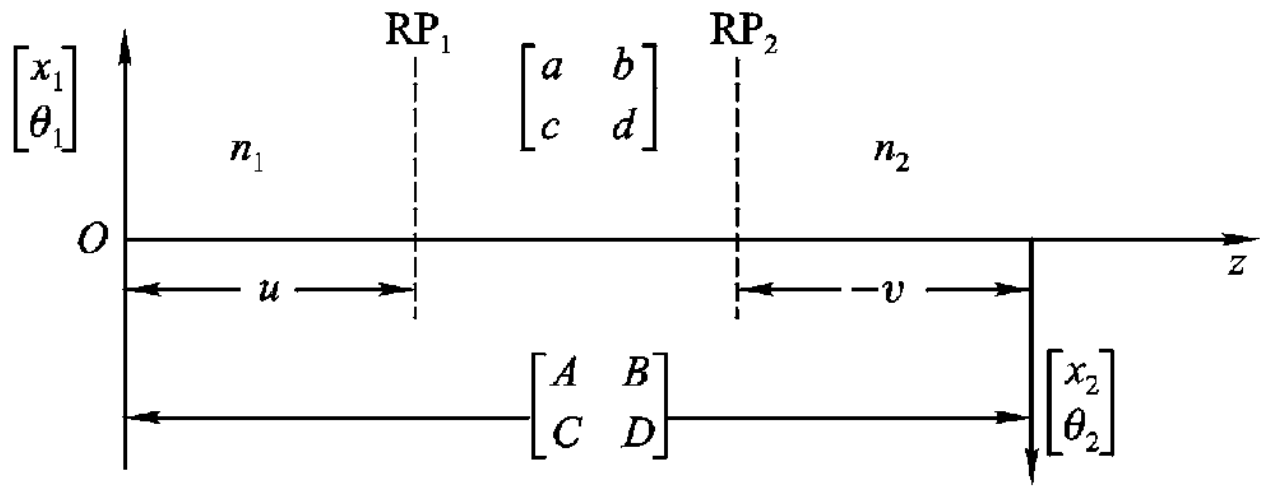


图 2.3.1　几何成像系统的矩阵表示

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - cv & au + b - v(cu + d) \\ c & cu + d \end{bmatrix} \tag{2.3.1}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} \tag{2.3.2}$$

式 (2.3.1) 可称为几何成像的特性矩阵. 若 $B=0$，由式 (2.3.2) 知

$$x_2 = Ax_1 \tag{2.3.3}$$

这表示在物空间中入射面上 $x_1 = \text{cons } t$，θ_1 在近轴条件下可取任意值的光线，经该光学系统变换后，在像空间中会聚于出射面上的同一点 $x_2 = Ax_1$ 处. 显然，$B=0$ 即为几何光学意义下的成像条件，此时入射面和出射面构成一对物像共轭面，u 和 $(-v)$ 分别为物距和像距.

在式 (2.3.1) 中令 $B=0$，得

$$v = \frac{au + b}{cu + d} \tag{2.3.4}$$

这即几何成像的 *ABCD* 定律，是用矩阵方法研究几何光学问题的一个基本公式. 注意，在上面的推导中，为了使式 (2.3.4) 与激光束传输变换的

ABCD 定律形式一致，我们规定分别以 RP_1、RP_2 为参考面，向左量起的 u、v 为正，向右为负，且像距用 $(-v)$ 来表示.

二、三个放大率公式和拉格朗日－亥姆霍兹不变式

1. 角放大率

在式(2.3.2)中令 $C=0$，得

$$\theta_2 = D\theta_1 \tag{2.3.5}$$

按角放大率 M_1 定义，有

$$M_1 = \frac{\theta_2}{\theta_1} = D = cu + d \tag{2.3.6}$$

2. 横向放大率

在式(2.3.2)中令 $B=0$，得

$$x_2 = Ax_1 \tag{2.3.7}$$

由横向放大率 M_2 定义，有

$$M_2 = \frac{x_2}{x_1} = A = a - cv \tag{2.3.8}$$

3. 轴向放大率

轴向放大率 M_3 通常是用导数定义的，即

$$M_3 = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} \tag{2.3.9}$$

由式(2.3.2)和式(2.1.14)，得

$$M_3 = \frac{a - cv}{cu + d} = \frac{M_2}{M_1} \tag{2.3.10}$$

4. 拉格朗日－亥姆霍兹不变式

由式(2.3.6)和式(2.3.8)

$$M_1 \cdot M_2 = \frac{\theta_2}{\theta_1} \cdot \frac{x_2}{x_1} = (cu + d)(a - cv) = \frac{n_1}{n_2} \tag{2.3.11}$$

故

$$n_1 x_1 \theta_1 = n_2 x_2 \theta_2 \tag{2.3.12}$$

这即几何光学中著名的拉格朗日－亥姆霍兹不变式.

三、高斯光学基本参数的变换矩阵元表示

高斯光学的基本参数为物像空间中共轭的焦点、主点和节点(基点)，或其所在的平面(基面)，即焦面、主面和节面，它们都可用变换矩阵元的形式简单表示出来.

1. 角放大率

在式(2.3.2)中令 $D=0$,得

$$\theta_2 = cx_1 \tag{2.3.13}$$

这说明物空间入射面上 $x_1=\mathrm{const}$,θ_1 取任意值的近轴光线,经变换矩阵 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的光学系统后,在像空间出射面上成为平行光线.显然,这时入射面为物方焦面.以 RP_1 为参考,物方焦面位置为

$$s_1 = -\frac{d}{c} \tag{2.3.14}$$

在式(2.3.2)中令 $A=0$,得

$$x_2 = B\theta_1 \tag{2.3.15}$$

类似的推理得知,这时出射面为像方焦面,以 RP_2 为参考,像方焦面位置为

$$s_2 = -\frac{a}{c} \tag{2.3.16}$$

2. 主面

按定义,主面为横向放大率 $M_2=\pm 1$ 的平面 $H_1^{\pm}$、$H_2^{\pm}$($M_2=1$ 称主面、$M_2=-1$ 常称反主面.对主面"+"号常略去),由式(2.3.1)知,应有

$$A=\pm 1, B=0 \tag{2.3.17}$$

由此得物、像方主面位置(分别以 RP_1、RP_2 为参考)

$$h_1^{\pm} = -\left(d \mp \frac{n_1}{n_2}\right) \Big/ c$$

$$h_2^{\pm} = -(a \mp 1)/c \tag{2.3.18}$$

3. 节面

节面定义为角放大率 $M_1=\pm 1$ 的平面 $H_1'^{\pm}$、$H_2'^{\pm}$($M_1=-1$ 常称反节面),由式(2.3.1)知,应有

$$D=\pm 1, B=0 \tag{2.3.19}$$

于是求得节面位置(分别以 RP_1、RP_2 为参考)

$$h_1'^{\pm} = -(d \mp 1)/c$$

$$h_2'^{\pm} = -\left(a \mp \frac{n_1}{n_2}\right) \Big/ c \tag{2.3.20}$$

4. 焦距

按光学中惯例,焦距是以主面为参考计算的,由式(2.3.14)、式(2.3.16)和式(2.3.18)易求得物、像方焦距分别为

$$f_1 = -\frac{n_1}{n_2} \Big/ c$$

$$f_2 = -1/c \tag{2.3.21}$$

现将本节有关结果和 $n_1 \neq n_2$，$n_1 = n_2$ 情况下公式的形式列于表 2.3.1 之中，变换矩阵元 A、B、C、D 为零时的物理意义示于图 2.3.2.

表 2.3.1　光学系统高斯光学参数的变换矩阵元表示

高斯光学参数		参考面	物像方折射率不同 $n_1 \neq n_2$	物像方折射率相同 $n_1 = n_2$	备　注
物方	焦点	RP_1	$s_1 = -d/c$	$s_1 = -d/c$	当 $n_1 = n_2$ 时有： (1) $h_i^{\pm} = h_i'^{\pm}$　$i = 1, 2$ (2) $f_1 = f_2$ 即(1) 物方主点与节点重合，像方亦然. (2) 物方与像方焦距相等.
	主点		$h_1^{\pm} = -(d \mp n_1/n_2)/c$	$h_1^{\pm} = -(d \mp 1)/c$	
	节点		$h_1'^{\pm} = -(d \mp 1)/c$	$h_1'^{\pm} = -(d \mp 1)/c$	
	焦距	H_1	$f_1 = -(n_1/n_2)/c$	$f_1 = -1/c$	
像方	焦点	RP_2	$s_2 = -a/c$	$s_2 = -a/c$	
	主点		$h_2^{\pm} = -(a \mp 1)/c$	$h_2^{\pm} = -(a \mp 1)/c$	
	节点		$h_2'^{\pm} = -(a \mp n_1/n_2)/c$	$h_2'^{\pm} = -(a \mp 1)/c$	
	焦距	H_2	$f_2 = -1/c$	$f_2 = -1/c$	

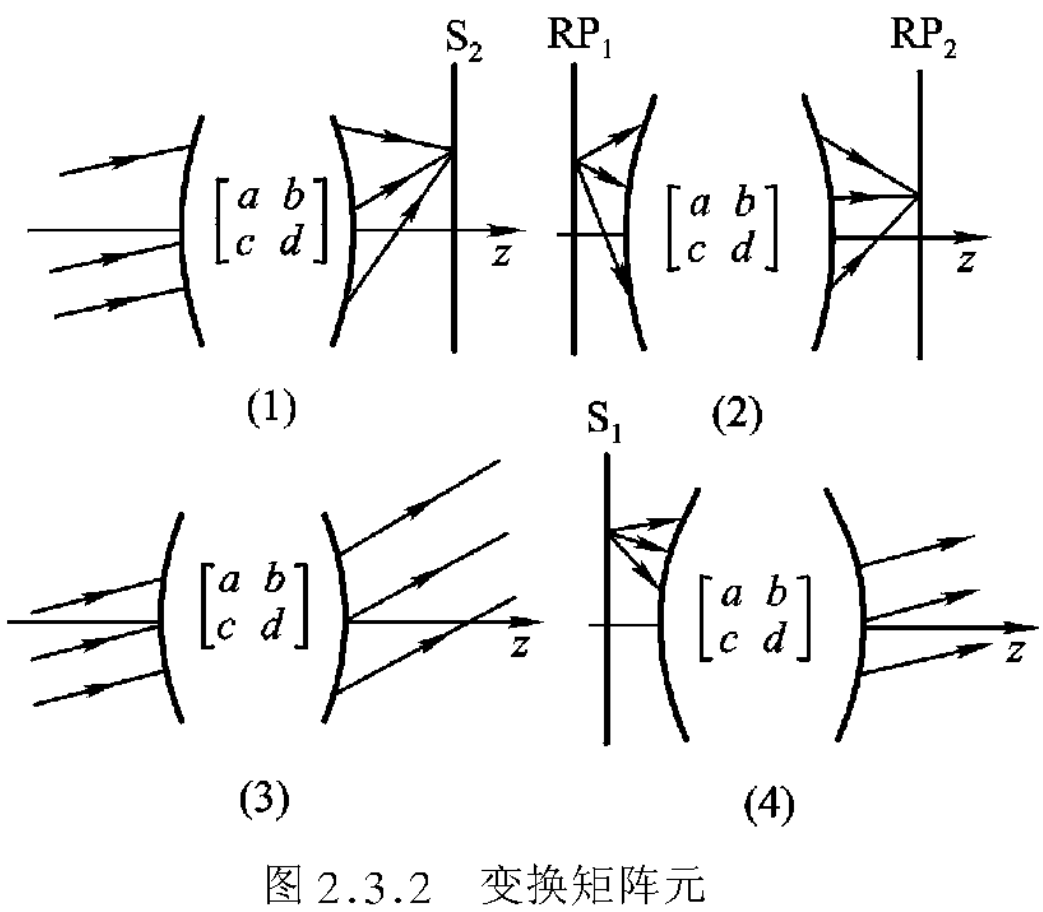


图 2.3.2　变换矩阵元

(1) $A = 0$; (2) $B = 0$; (3) $C = 0$; (4) $D = 0$ 的物理意义

四、薄透镜

薄透镜是最基本也是最重要的光学成像元件，设焦距 f 的薄透镜置于折射率均匀的介质中，其变换矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \tag{2.3.22}$$

将式(2.3.22)代入式(2.3.4)，得

$$\frac{1}{u}-\frac{1}{v}=\frac{1}{f} \tag{2.3.23}$$

这即几何光学中熟知的高斯成像公式.

若以焦面为参考,令

$$x=u-f,\ y=-(f+v) \tag{2.3.24}$$

就得到牛顿公式

$$xy=f^2 \tag{2.3.25}$$

五、厚透镜

设厚透镜两端面曲率半径分别为 ρ_1、ρ_2,几何厚度 l,由折射率为 n_2 的介质构成,并置于折射率为 n_1 的介质中,则其变换矩阵为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}&=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \dfrac{n_1-n_2}{n_1\rho_2} & \dfrac{n_2}{n_1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & l\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \dfrac{n_2-n_1}{n_2\rho_1} & \dfrac{n_1}{n_2}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1+\dfrac{(n_2-n_1)l}{n_2\rho_1} & \dfrac{n_1}{n_2}l\\ -\dfrac{(n_2-n_1)}{n_1}\left[\dfrac{1}{\rho_2}-\dfrac{1}{\rho_1}+\dfrac{(n_2-n_1)l}{n_2\rho_1\rho_2}\right] & 1+\dfrac{(n_1-n_2)l}{n_2\rho_2}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{2.3.26}$$

另一方面,设厚透镜主距为 h_1、h_2,焦距为 f,则有

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1 & h_2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{1}{f} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & h_1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-\dfrac{h_2}{f} & h_1+h_2-\dfrac{h_1h_2}{f}\\ -\dfrac{1}{f} & 1-\dfrac{h_1}{f}\end{bmatrix} \tag{2.3.27}$$

比较式(2.3.26)、式(2.3.27),得

$$\begin{cases}h_1=-\dfrac{n_1\rho_1 l}{n_2(\rho_2-\rho_1)-(n_2-n_1)l}\\ h_2=-\dfrac{n_1\rho_2 l}{n_2(\rho_2-\rho_1)-(n_2-n_1)l}\end{cases}$$

$$\frac{1}{f}=\frac{(n_2-n_1)}{n_1}\left[\frac{1}{\rho_2}-\frac{1}{\rho_1}+\frac{(n_2-n_1)l}{n_2\rho_1\rho_2}\right] \tag{2.3.28}$$

当 f 为有限值时,使用参考面移动技巧,即分别将 RP_1、RP_2 移至主面 H_1、H_2 处后,由式(2.3.27)知,厚透镜可视为一个焦距 f 的薄透镜.

因为一般透镜组都可用矩阵光学方法等效为一个厚透镜，所以使用这一方法，最终可将理想光具组的几何成像问题等效为薄透镜成像来简单解决.此外，利用式(2.3.4)和变换矩阵的性质，还可以进一步分析几何成像的特性(例如生成实、虚像条件等)，对以厚透镜为代表的一般光学系统的几何成像问题做深入分析.

对于物、像空间折射率不相等的一般情况，请读者不妨仿照上面推导出相应的公式并加以讨论.

§ 2.4　复杂光学系统的菲涅耳数和程函公式

菲涅耳数 F 是判断光学系统衍射效应大小的一个重要物理量.由 F 的值可对衍射场的基本特征做出定性或半定量的分析.例如，当 $F\approx 1$ 时为菲涅耳衍射；$F\ll 1$ 时属夫琅禾费衍射；而当 $F\gg 1$ 时，衍射效应可以忽略，几何光学近似成立.对复杂光学系统中任一观察面对入射面光阑的菲涅耳数公式的推导，实际上可归结为光线通过该光学系统传输时程函的计算.本节用矩阵方法对此进行分析，给出用变换矩阵元表示的程函和菲涅耳数的一般公式，并举例说明其应用.

一、程函公式

如图 2.4.1 所示，以光轴 z 上点 O_1 为球心发出的球面波，经变换矩阵 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$(由 $\mathrm{RP}_1 \rightarrow \mathrm{RP}_2$)的光学系统变换后，成为曲率半径 R_2、球心在 z 轴上 O_2 点的球面波，相应的光线矢量变换为 $\begin{bmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$，且有

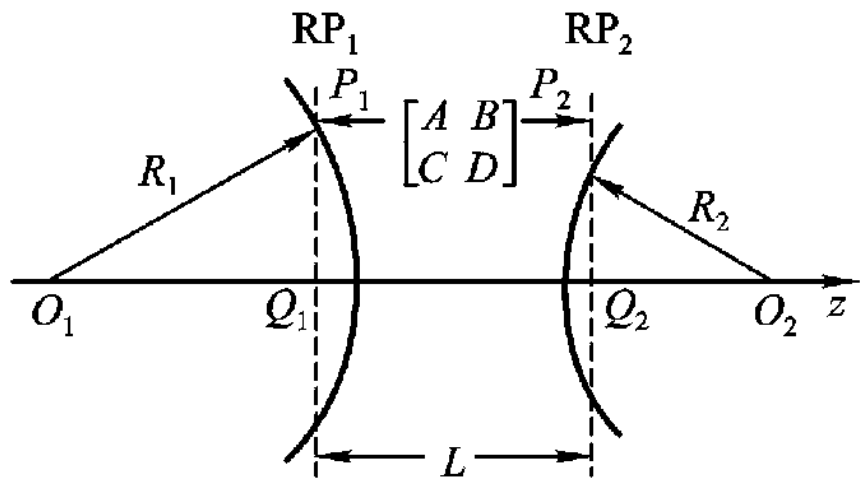


图 2.4.1　复杂光学系统的程函

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} \tag{2.4.1}$$

设 $L(x_1, x_2)$表示 RP_1、RP_2 上离 z 轴分别为 x_1、x_2 的两点间的光程(即程函),RP_1、RP_2 之外为 $n=1$ 的空气,由几何关系有

$$O_1P_1P_2O_2 = R_1 + L(x_1, x_2) - R_2 = \frac{x_1}{\theta_1} + L(x_1, x_2) - \frac{x_2}{\theta_2} \tag{2.4.2}$$

$$O_1Q_1Q_2O_2 = O_1Q_1 + L + Q_2O_2 \tag{2.4.3}$$

式中 L 为沿轴上的光程.由等光程定理知

$$O_1P_1P_2O_2 = O_1Q_1Q_2O_2 \tag{2.4.4}$$

则

$$L(x_1, x_2) = L - (R_1 - O_1Q_1) + (R_2 + O_2Q_2) \tag{2.4.5}$$

又由几何关系知

$$R_1 - O_1Q_1 = \frac{x_1^2}{2R_1} \tag{2.4.6}$$

$$R_2 + O_2Q_2 = \frac{x_2^2}{2R_2} \tag{2.4.7}$$

将式(2.4.1)、式(2.4.2)、式(2.4.3)、式(2.4.6)、式(2.4.7)代入式(2.4.5)得

$$L(x_1, x_2) = L + \frac{1}{2B}(Ax_1^2 + Dx_2^2 - 2x_1x_2) \tag{2.4.8}$$

这即用变换矩阵元表示的复杂光学系统的程函公式.式(2.4.8)对 $B=0$ 时不成立,这时,利用式(2.4.1)得

$$L(x_1, \theta_1) = L + \frac{1}{2}(ACx_1^2 + 2BCx_1\theta_1 + BD\theta_1^2) \tag{2.4.9}$$

当 $B=0$ 时,式(2.4.9)成为

$$L(x_1, \theta_1) = L + \frac{1}{2}ACx_1^2 \tag{2.4.10}$$

对于衍射空间中包含有多个折射率突变介面的复杂光学系统,设该系统的变换矩阵为 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$(由 $\mathrm{RP}_1 \rightarrow \mathrm{RP}_2$),类似的推导求得程函公式为

$$L(x_1, x_2) = L + \frac{1}{2B}(An_1x_1^2 + n_2Dx_2^2 - 2n_1x_1x_2) \tag{2.4.11}$$

式中 L 为沿 z 轴上的光程，n_1、n_2 分别为入射和出射光线矢量 $\begin{bmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} x_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$ 所在空间的折射率.

二、菲涅耳数

按照菲涅耳数的定义，它是图 2.4.2 中由半径 a 的光阑边缘发出的子波和光阑中心子波到达 RP_2 面轴上观察点时的相位差除以半波相位差 π 或等价地用光程差除以半波长.

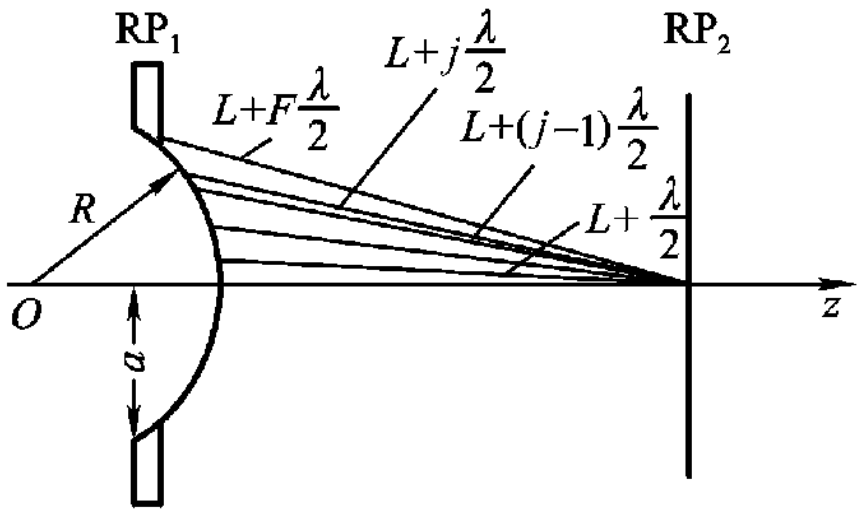


图 2.4.2　菲涅耳数 F 的定义

在式(2.4.11)中令 $x_1 = a$，$x_2 = 0$，当入射光为平面波时，将 $L(x_1, x_2) - L$ 除以半波长得到光程差对菲涅耳数的贡献

$$F_1 = \frac{a^2}{\lambda}\frac{A}{B} \tag{2.4.12}$$

式中 λ 为折射率 n_1 入射空间中光的波长. 当入射光是曲率半径 R 的球面波时，还应当计入初始相位差 $\Delta\varphi = \frac{\pi a^2}{\lambda R}$ 对菲涅耳数的贡献

$$F_2 = \frac{\Delta\varphi}{\pi} = \frac{a^2}{\lambda R} \tag{2.4.13}$$

总的菲涅耳数 F 应为二者之和

$$F = F_1 + F_2 = \frac{a^2}{\lambda}\left(\frac{A}{B} + \frac{1}{R}\right) \tag{2.4.14}$$

对自由空间，

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.4.15}$$

则

$$F=\frac{a^2}{\lambda}\left(\frac{1}{L}+\frac{1}{R}\right) \tag{2.4.16}$$

当平面波入射时，$R\to\infty$，则式(2.4.16)成为

$$F=\frac{a^2}{\lambda L} \tag{2.4.17}$$

这是熟知的结果.

三、应用例

1. 含有薄透镜的光学系统

对图2.4.3所示在半径 a 的光阑后有一焦距为 f 的薄透镜的光学系统，从光阑所在平面 RP_1 至观察面 RP_2 总的变换矩阵为

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & l_2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{f} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & l_1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1-\frac{l_2}{f} & l_1+l_2-\frac{l_1 l_2}{f}\\ -\frac{1}{f} & 1-\frac{l_1}{f}\end{bmatrix} \tag{2.4.18}$$

将式(2.4.18)代入式(2.4.14)，得

$$F=\frac{a^2}{\lambda}\left[\frac{f-l_2}{f(l_1+l_2)-l_1 l_2}+\frac{1}{R}\right] \tag{2.4.19}$$

若 $f\to\infty$，则

$$F=\frac{a^2}{\lambda}\left(\frac{1}{l_1+l_2}+\frac{1}{R}\right) \tag{2.4.20}$$

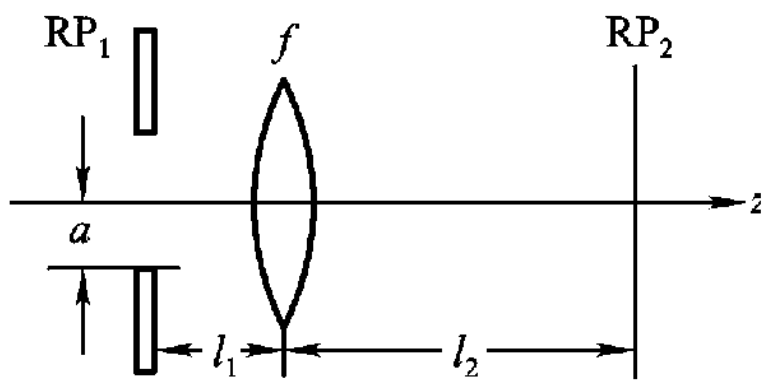


图2.4.3　含薄透镜光学系统

相当于 $L=l_1+l_2$ 自由空间情况. 又若当 $l_1=0$，即透镜紧靠光阑时，式(2.4.19)成为

$$F=\frac{a^2}{\lambda}\left[\frac{1}{l_2}-\left(\frac{1}{f}-\frac{1}{R}\right)\right] \tag{2.4.21}$$

2. 空间滤波器的像传递作用

真空空间滤波器由一对焦距分别为 f_1、f_2 的共焦透镜组成，在共焦面上放一光阑，整个系统置于真空之中，如图2.4.4所示. 从光阑所在面 RP_1 面至观察面 RP_2 的总变换矩阵为

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & l_2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{1}{f_2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & l_0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{1}{f_1} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & l_1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}M_{\mathrm{T}} & l_{\mathrm{T}}+M_{\mathrm{T}}l_1+l_2/M_{\mathrm{T}}\\ 0 & M_{\mathrm{T}}^{-1}\end{bmatrix} \tag{2.4.22}$$

式中

$$M_{\mathrm{T}}=-f_2/f_1 \tag{2.4.23}$$

$$l_{\mathrm{T}}=f_1+f_2=l_0 \tag{2.4.24}$$

由此得到该系统的菲涅耳数(设平面波入射)

$$F=\frac{a^2}{\lambda}\left(\frac{M_{\mathrm{T}}}{l_{\mathrm{T}}+M_{\mathrm{T}}l_1+l_2/M_{\mathrm{T}}}\right) \tag{2.4.25}$$

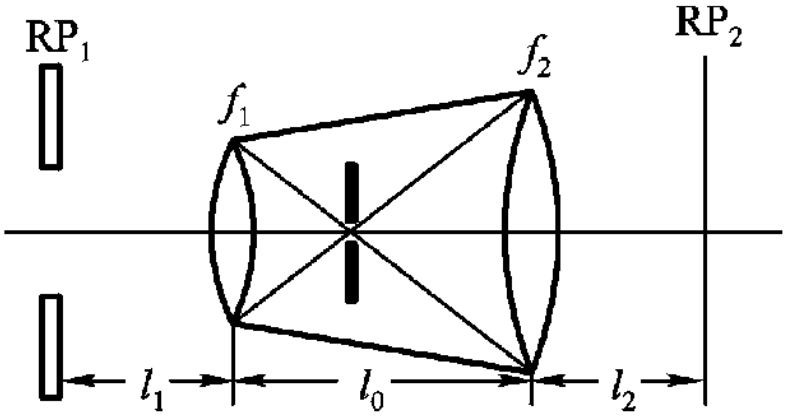


图 2.4.4　空间滤波器

当 $B=0$,即满足

$$f_1+f_2=\frac{f_2}{f_1}l_1+\frac{f_1}{f_2}l_2 \tag{2.4.26}$$

时,由式(2.4.25)知 $F\to\infty$,这就是空间滤波器实现像传递的条件.

§ 2.5　*ABCD* 矩阵的分解

在激光光学中常遇到光学系统的合成和等效变换问题,即根据所要求的变换矩阵 $\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}$来设计一个光学系统,确定组成该系统所需光学元件数目、类型、几何光学参数和组合顺序.从变换矩阵的角度来看,要求将 $\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}$进行合适的分解和有物理意义的等效.本节着重讨论按 α、β、γ 基本矩阵的分解方式,对其它分解方式请参阅章末文献.

一、基本矩阵和分解定理

设有一变换矩阵为

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix} \tag{2.5.1}$$

的光学系统(为明确起见,先设 A、B、C、D 均为实数,节五中再讨论复元

素变换矩阵的分解问题）入射光线和出射光线所在空间折射率分别为 n_1、n_2，则

$$\det \boldsymbol{M} = AD - BC = \frac{n_1}{n_2} > 0 \tag{2.5.2}$$

容易证明，至少三个元素非零的变换矩阵 (2.5.1)，可以用不超过四个基本矩阵

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \det \boldsymbol{\alpha} = 1$$

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{bmatrix} \quad \det \boldsymbol{\beta} = 1$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \quad \det \boldsymbol{\gamma} = \gamma = \frac{n_1}{n_2} \tag{2.5.3}$$

的有序乘积来表示，这即变换矩阵的分解定理. 物理上，$\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\gamma}$ 矩阵分别表示自由空间传输距离 α、焦距 $-\beta^{-1}$ 的薄透镜和折射率突变界面（两方介质折射率分别为 n_1、n_2）的变换矩阵. 直接的计算可知，$\boldsymbol{\gamma}$ 矩阵与 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 矩阵间存在下面的准对易关系

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\gamma\alpha} - \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\gamma} = 0, \quad \alpha' = \alpha/\gamma \\ &\boldsymbol{\gamma\beta} - \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\gamma} = 0, \quad \beta' = \beta\gamma \end{aligned} \tag{2.5.4}$$

但 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 矩阵间不存在准对易式.

二、至少三元素非零的变换矩阵的分解和等效

在这种情况下，共有两大类八种分解方式，即

1. 第一类为两个 $\boldsymbol{\alpha}$ 矩阵和 $\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\gamma}$ 矩阵的乘积

$$\begin{aligned} (1)\ \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{A-1}{C} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ C & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & AD-BC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & B + \dfrac{(1-A)D}{C} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \alpha_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

式中

$$\alpha_1 = B + \frac{(1-A)D}{C}, \quad \alpha_2 = \frac{A-1}{C}$$

$$\beta = C, \quad \gamma = AD - BC = \frac{n_1}{n_2} \tag{2.5.6}$$

令

$$\alpha_1 = h_1,\ \alpha_2 = h_2,\ C = -\frac{1}{f} \tag{2.5.7}$$

式(2.5.5)化为

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & \alpha_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & h_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f} & \dfrac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & h_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{2.5.8}$$

这表示，变换矩阵为 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 的光学系统可以等效为图 2.5.1 所示主距为 h_1、h_2，像方焦距为 f 的厚透镜，其物、像空间折射率分别为 n_1、n_2.

(2)

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & AD-BC \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{(A-1)(AD-BC)}{C} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{C}{AD-BC} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & B+\dfrac{(1-A)D}{C} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \alpha_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{2.5.9}$$

式中

$$\alpha_1 = B + \frac{(1-A)D}{C},\ \alpha_2 = \frac{(A-1)(AD-BC)}{C}$$

$$\beta = \frac{C}{AD-BC},\ \gamma = AD - BC \tag{2.5.10}$$

令

$$\alpha_2' = \alpha_2/\gamma,\ \beta' = \beta\gamma \tag{2.5.11}$$

并利用式(2.5.4)，式(2.5.9)可化为

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_2' \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta' & \gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.5.12}$$

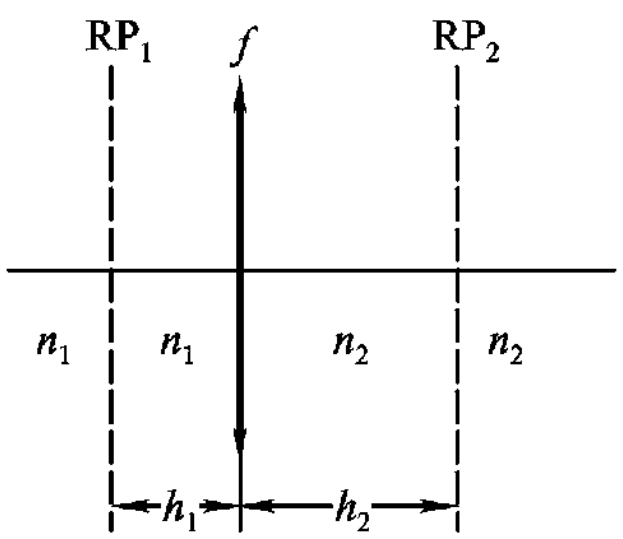


图 2.5.1　光学系统的等效厚透镜(h_1、h_2、f)

形式上与式(2.5.8)相同.类似地，有

(3) $$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{A-1}{C} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & AD-BC \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{C}{AD-BC} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & B+\dfrac{(1-A)D}{C} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & \alpha_2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \beta & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \alpha_1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & \alpha_2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \beta' & \gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \alpha_1\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{2.5.13}$$

式中

$$\alpha_1 = B+\frac{(1-A)D}{C},\ \alpha_2=\frac{A-1}{C}$$

$$\beta=\frac{C}{AD-BC},\ \gamma=AD-BC,\ \beta'=\beta\gamma \tag{2.5.14}$$

(4) $$\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \dfrac{A-1}{C}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ C & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \dfrac{B+(1-A)D/C}{AD-BC}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & AD-BC\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & \alpha_2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \beta & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \alpha_1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \gamma\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & \alpha_2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \beta & \gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \alpha_1''\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{2.5.15}$$

式中

$$\alpha_1=\frac{B+(1-A)D/C}{AD-BC},\ \alpha_2=\frac{A-1}{C}$$

$$\beta=C,\ \gamma=AD-BC,\ \alpha_1''=\alpha_1\gamma \tag{2.5.16}$$

2. 第二类为两个 $\boldsymbol{\beta}$ 矩阵与 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\gamma}$ 矩阵之积

(1) $$\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ C+\dfrac{(1-A)D}{B} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & AD-BC\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & B\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \dfrac{A-1}{B} & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \beta_2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \beta_1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \beta_2 & \gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \beta_1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{1}{f_2} & \dfrac{n_1}{n_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{1}{f_1} & 1\end{bmatrix} \tag{2.5.17}$$

式中

$$\alpha=B,\ \beta_1=\frac{A-1}{B}=-\frac{1}{f_1}$$

$$\beta_2 = C + \frac{(1-A)D}{B} = -\frac{1}{f_2},\ \gamma = AD - BC = \frac{n_1}{n_2} \tag{2.5.18}$$

式(2.5.17)表明，变换矩阵为 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 的光学系统也可以等效为图 2.5.2 所示相距为 α、焦距分别为 f_1、f_2 的薄透镜组，薄透镜 f_1 置于折射率为 n_1 的介质之中，薄透镜 f_2 两方介质折射率分别为 n_1、n_2.

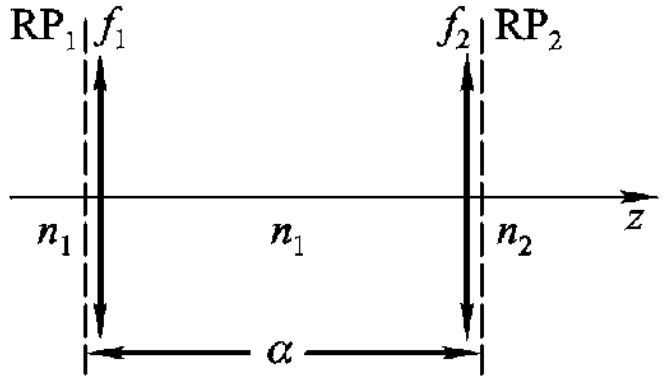


图 2.5.2　光学系统的等效薄透镜组(f_1、f_2、α)

容易证明，第二类还有如下三种分解方式，并且都可做与式(2.5.17)类似的等效，即

$$(2)\ \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & AD-BC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{C+(1-A)D/B}{AD-BC} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & B \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{A-1}{B} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta_2' & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.5.19}$$

式中

$$\alpha = B,\ \beta_1 = \frac{A-1}{B},\ \beta_2' = \beta_2\gamma,\ \beta_2 = \frac{C+(1-A)D/B}{AD-BC},\ \gamma = AD-BC \tag{2.5.20}$$

$$(3)\ \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ C+\dfrac{(1-A)D}{B} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{B}{AD-BC} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & AD-BC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{A-1}{B} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta_2 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha'' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.5.21}$$

式中

$$\alpha = \frac{B}{AD-BC},\ \beta_1 = \frac{A-1}{B},\ \beta_2 = C + \frac{(1-A)D}{B}$$

$$\gamma = AD - BC,\ \alpha'' = \alpha\gamma \tag{2.5.22}$$

(4) $$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ C+\dfrac{(1-A)D}{B} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{B}{AD-BC} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{(A-1)(AD-BC)}{B} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & AD-BC \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta_2 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha'' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1'' & 1 \end{bmatrix} \tag{2.5.23}$$

式中

$$\alpha = \frac{B}{AD-BC},\ \beta_1 = \frac{(A-1)(AD-BC)}{B},\ \beta_2 = C + \frac{(1-A)D}{B},$$

$$\gamma = AD - BC,\ \alpha'' = \alpha\gamma,\ \beta_1'' = \beta_1/\gamma \tag{2.5.24}$$

从上面的分析可知，当变换矩阵至少三元素非零时，有两大类八种分解方式，并存在两种等效变换：厚透镜和薄透镜组. 当 $B\neq 0$，$C\neq 0$ 时，这两种等价变换均成立，且彼此等价，当 $C=0$ 时，式(2.5.8)的等效变换失效，但式(2.5.17)仍成立，即此时只能作薄透镜组等效，当 $B=0$ 时，式(2.5.17)失效，但式(2.5.8)成立，这时只能作厚透镜等效. 物、像空间折射率相等($n_1=n_2$)时的有关结果也很容易作为我们所讨论一般情况的特例直接得到. 在这种情况下，$\boldsymbol{\gamma}$ 矩阵约化为单位矩阵，$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$可用三个基本矩阵的有序乘积表示. 第一类四种情况都约化为

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{A-1}{C} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ C & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{D-1}{C} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & h_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & h_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.5.25}$$

第二类四种情况都约化为

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{D-1}{B} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & B \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{A-1}{B} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f_1} & 1 \end{bmatrix} \tag{2.5.26}$$

三、$B=C=0$ 时变换矩阵的分解和等效

当 $B=C=0$ 时，节二的分解失效，应重新推导. 可分为两大类四种情况：

1. 第一类

$$(1)\quad \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ -\beta_2 A & D \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.5.27}$$

式中

$$\alpha_1 = \frac{(1-A)D}{\beta_2 A},\ \alpha_2 = \frac{1-A}{\beta_2 A}$$

$$\beta_1 = -\beta_2 A,\ \gamma = AD \tag{2.5.28}$$

β_2 取某一确定值.

$$(2)\quad \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -\beta_1 D & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \alpha_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.5.29}$$

式中

$$\alpha_1 = \frac{A-1}{\beta_1},\ \alpha_2 = \frac{1-A}{\beta_1 D}$$

$$\beta_2 = -\beta_1 D,\ \gamma = AD \tag{2.5.30}$$

β_1 取某一确定值.

式(2.5.27)可变换为

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.5.31}$$

式(2.5.29)可变换为

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta_2 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.5.32}$$

显然，这两种情况分别等效于图 2.5.3(a)、(b)所示的薄透镜与厚透镜的组合，将参考面移动后(RP→RP′)等效为一个薄透镜组.

2. 第二类

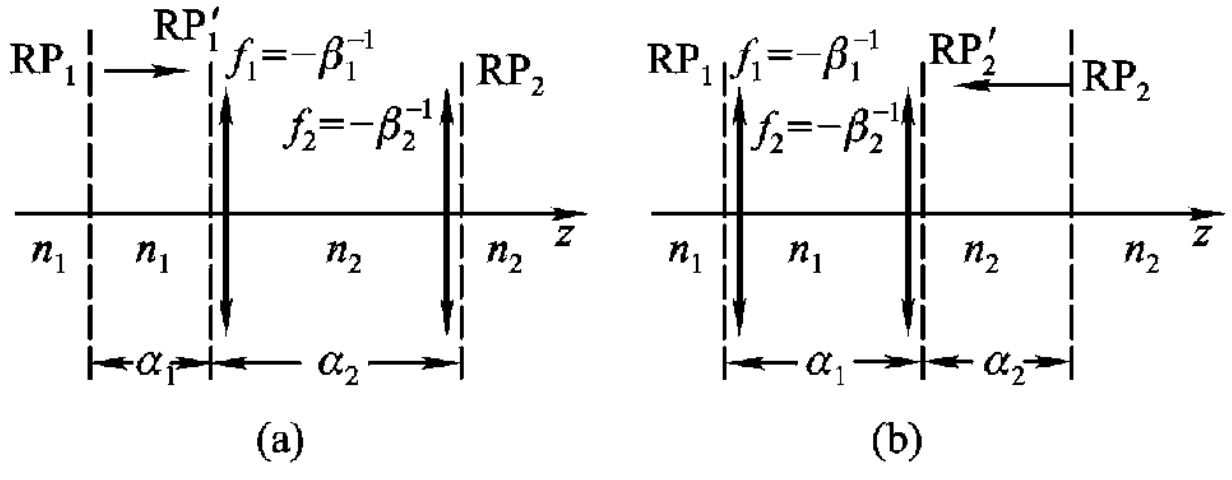


图 2.5.3　变换矩阵为 $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$ 的光学系统可等效为 (a)、(b) 所示的薄透镜与厚透镜的组合

$$(1)\quad \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -\alpha_2 D \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \alpha_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \alpha_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta_2 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.5.33}$$

式中

$$\alpha_1 = -\alpha_2 D,\ \beta_1 = \frac{1-A}{\alpha_2 D},\ \beta_2 = \frac{A-1}{\alpha_2},\ \gamma = AD \tag{2.5.34}$$

α_2 取某一确定值.

$$(2)\quad \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -\alpha_1 A \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta_2 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.5.35}$$

式中

$$\alpha_2 = -\alpha_1 A,\ \beta_1 = \frac{1-A}{\alpha_1 A},\ \beta_2 = \frac{(A-1)D}{\alpha_1 A},\ \gamma = AD \tag{2.5.36}$$

α_1 取某一确定值.

式 (2.5.33)、式 (2.5.35) 的物理意义是十分明显的，它们分别等效为图 2.5.4 (a)、(b) 中的薄透镜组加一段距离，移动参考面 (RP→RP′) 后，可等效为一个薄透镜组，$n_1 = n_2$ 的情况请读者自行完成之.

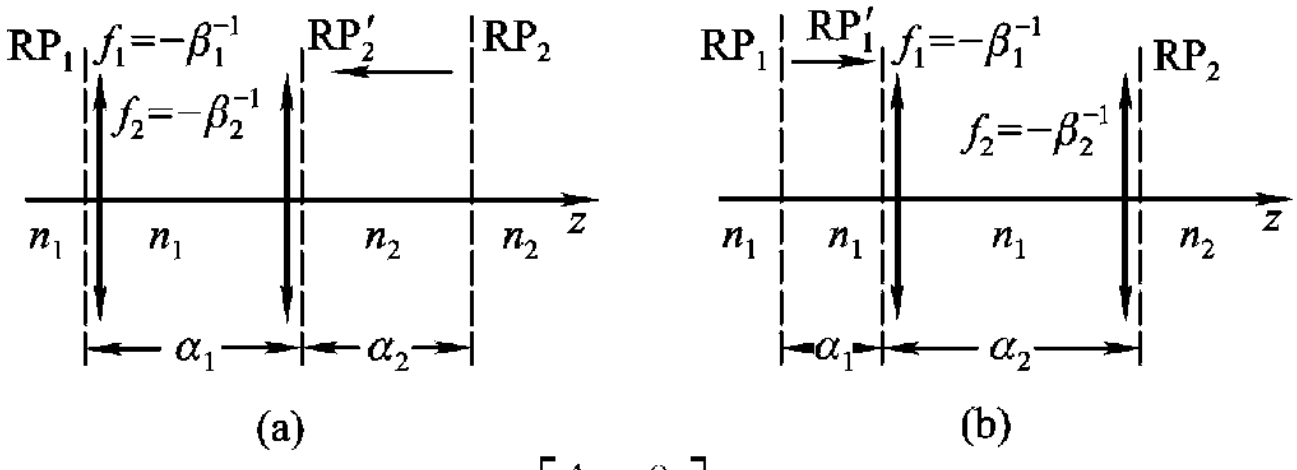


图 2.5.4　变换矩阵为 $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$ 的光学系统可等效为图(a)、(b)所示的薄透镜组加上一段距离

四、应用举例

例 1　A、B、C、D 都不为零

试设计一光学系统，使 $A=0.5$，$B=0.05\ \mathrm{m}$，$C=-5\ \mathrm{m}^{-1}$，$D=2.5$. 由式(2.5.5)～式(2.5.8)的计算，得

$$\alpha_1=h_1=-0.2\ \mathrm{m},\alpha_2=h_2=0.1\ \mathrm{m},\beta=C=-5\ \mathrm{m}^{-1},\gamma=\frac{n_1}{n_2}=1.5,f=0.2\ \mathrm{m},$$

故

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.05 \\ -5 & 2.5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -0.2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -0.2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

即这一光学系统可等效为一个像方焦距 $f=0.2\ \mathrm{m}$，主距 $h_1=-0.2\ \mathrm{m}$，$h_2=0.1\ \mathrm{m}$ 的厚透镜，其物、像空间的相对折射率 $n_{12}=\dfrac{n_1}{n_2}=1.5$.

例 2　$C=0$，$B\neq 0$

设 $A=-2$，$B=0.5\ \mathrm{m}$，$C=0$，$D=-0.75$. 由式(2.5.17)、式(2.5.18)得

$$\alpha=0.5\ \mathrm{m},\beta_1=-6\ \mathrm{m}^{-1},\beta_2=-4.5\ \mathrm{m}^{-1},\gamma=\frac{n_1}{n_2}=1.5,f_1=0.167\ \mathrm{m},f_2=0.22\ \mathrm{m},$$

故

$$\begin{bmatrix} -2 & 0.5 \\ 0 & -0.75 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4.5 & 1.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$$

它可等效于一个相距 0.5 m，焦距分别为 $f_1=0.167\ \mathrm{m}$，$f_2=0.22\ \mathrm{m}$ 的浸液薄透镜组，其中薄透镜 f_1 置于折射率 n_1 的介质中，薄透镜 f_2 两方介质折射率分别为 n_1、n_2，$n_{12}=\dfrac{n_1}{n_2}=1.5$.

例 3　$B=0$，$C\neq 0$

设 $A=2, B=0, C=1.5\ \mathrm{m}^{-1}, D=0.75$. 由式(2.5.5)～式(2.5.8)，得 $\alpha_1=h_1=-0.5\ \mathrm{m}, \alpha_2=h_2=0.667\ \mathrm{m}, \beta=1.5\ \mathrm{m}^{-1}, \gamma=\dfrac{n_1}{n_2}=1.5, f=-0.667\ \mathrm{m}$

故

$$\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1.5 & 0.75\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0.667\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1.5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -0.5\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0.667\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1.5 & 1.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -0.5\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

它可等效于一个 $f=-0.667\ \mathrm{m}, h_1=-0.5\ \mathrm{m}, h_2=0.667\ \mathrm{m}$ 的厚透镜，$n_{12}=\dfrac{n_1}{n_2}=1.5$.

例 4　$B=C=0$

设 $A=D=1, B=C=0$，由式(2.5.27)、式(2.5.28)、式(2.5.31)，取 β_2 为某一常数，则 $\alpha_1=\alpha_2=0, \beta_1=-\beta_2, \gamma=\dfrac{n_1}{n_2}=1, f_1=\beta_2^{-1}, f_2=-\beta_2^{-1}$，故

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \beta_2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -\beta_2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \beta_2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\beta_2 & 1\end{bmatrix}$$

这表示，当 $n_1=n_2$ 时，用两个紧靠的其焦距数值相等、但符号相反的薄透镜组可实现恒等变换.

五、复元素变换矩阵的分解和等效

当 $\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}$ 矩阵诸元素均可为复数时，仍可用 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\gamma}$ 基本矩阵进行分解和等效. 物理上，复元素 $\boldsymbol{\beta}$ 矩阵代表有高斯光阑的透镜(高斯透镜)或高斯反射镜. 虽然复元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 矩阵无直接的物理对应关系，但可用等间距 $l/2$ 的三个高斯透镜来实现，即

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \beta_1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & l/2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \beta_2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & l/2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \beta_1 & 1\end{bmatrix} \tag{2.5.37}$$

式中

$$\beta_1=2(\alpha^{-1}-l^{-1}),\ \beta_2=4(\alpha l^{-2}-l^{-1}) \tag{2.5.38}$$

l 取某一正实数. 因受条件式(2.5.2)的限制，可设 $\boldsymbol{\gamma}$ 矩阵为实矩阵. 容易

$$\begin{bmatrix} x_n \\ \theta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} \tag{2.6.5}$$

或写为

$$x_n = A_n x + B_n \theta \qquad \theta_n = C_n x + D_n \theta \tag{2.6.6}$$

由式(2.6.3)、式(2.6.4)、式(2.6.6)知，要求光线在腔内经 n 次往返传输而不致从反射镜侧横向逃逸的必要条件为式(2.6.6)有周期性正弦解，即

$$|\cos\varphi| = \left|\frac{A+D}{2}\right| < 1 \tag{2.6.7}$$

或

$$-1 < \left|\frac{A+D}{2}\right| < 1 \tag{2.6.8}$$

此外，当式(2.6.1)中 $\boldsymbol{M}$ 为

$$\boldsymbol{M} = \pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \pm \boldsymbol{E} \tag{2.6.9}$$

($\boldsymbol{E}$ 为 2×2 单位矩阵)时，显然也满足光线在腔内经 n 次往返传输不致横向逃逸条件.式(2.6.7)(或式(2.6.8))和式(2.6.9)即为在通常意义下光腔的稳定性条件，满足该条件的共轴球面腔称为约束稳定腔，或稳定腔.

引入腔的 g 参数

$$g_i = 1 - \frac{L}{\rho_i}, \quad i = 1,2 \tag{2.6.10}$$

后，式(2.6.2)可表示为

$$A = 4g_1 g_2 - 1 - 2g_2, \quad B = 2Lg_2$$

$$C = \frac{2}{L}(2g_1 g_2 - g_1 - g_2), \quad D = 2g_2 - 1 \tag{2.6.11}$$

光腔的稳定条件式(2.6.8)可用 g 参数写为

$$0 < g_1 \cdot g_2 < 1 \tag{2.6.12}$$

反之，当

$$\frac{A+D}{2} > 1 \tag{2.6.13}$$

或

$$\frac{A+D}{2} < -1 \tag{2.6.14}$$

时，式(2.6.6)有指数函数解，随着 n 的增大，x_n、θ_n 按指数规律增大，这意味着光束在腔内经有限次往返传输后终将从横向逃逸出去，这种腔具有较大的几何损耗，故称满足条件式(2.6.13)或式(2.6.14)的腔为非稳腔(不稳腔)或高损耗腔.

非稳定条件式(2.6.13)或式(2.6.14)的 g 参数表示为

$$g_1 \cdot g_2 > 1 \tag{2.6.15}$$

或

$$g_1 \cdot g_2 < 0 \tag{2.6.16}$$

处于不等式(2.6.8)、式(2.6.13)、式(2.6.14)的交界处，即满足条件

$$A + D = \pm 2 \tag{2.6.17}$$

的腔称为临界腔.式(2.6.17)亦可写为

$$g_1 \cdot g_2 = 0 \tag{2.6.18}$$

或

$$g_1 \cdot g_2 = 1 \tag{2.6.19}$$

但应注意，式(2.6.18)中 $g_1 = g_2 = 0$ 的对称共焦腔要除外，它满足式(2.6.9)，是一种特殊类型的稳定腔，将在第九章中详加讨论.为简单起见，本书中未加说明使用共焦腔一词均指对称共焦腔.

于是，按照几何光学观点，以判断光线在腔内经多次往返传输后是否横向逃逸，即以几何损耗大小为标准，将光学谐振腔分为稳定腔、非稳腔和临界腔.但是这里所用的“非稳腔”一词是一个不甚确定的概念，它并不是指这类腔不能稳定工作，仅意味着这类腔损耗较大而已.为了与后面要讨论的微扰稳定性、热稳定性等相区别，这里的稳定性可称为约束稳定性.

还需说明的是，上面的分析是以镜 1 为参考起点计算的.容易证明，往返矩阵式(2.6.1)的迹 $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{M} = A + D$ 对于一定几何结构的共轴球面腔是一个不变量，与光线初始坐标、参考点位置和往返一周顺序选择无关，且对共轴球面腔有

$$\frac{A+D}{2} = 1 - \frac{2L}{\rho_1} - \frac{2L}{\rho_2} + \frac{2L^2}{\rho_1 \rho_2} = 2g_1 g_2 - 1 \tag{2.6.20}$$

因而上面的分析在几何光学意义下都是成立的.后面进一步的分析表明，光腔的稳定性条件在高斯光束、衍射积分方程理论中都是普遍成立的，区别仅是从不同观点加以分析和解释而已.

现将几种典型的光学谐振腔列于表 2.6.1 中，以供参考.

表 2.6.1　几种典型的光腔

腔　型	ρ_1,ρ_2	g_1,g_2	$g_1\cdot g_2$
稳　定　腔			$0<g_1\cdot g_2<1$
半共焦腔	$\rho_1=2L,\rho_2\to\infty$	$g_1=1/2,g_2=1$	$1/2$
对称共焦腔	$\rho_1=\rho_2=L$	$g_1=g_2=0$	0
临　界　腔			$g_1\cdot g_2=0$ 或 1
共　心　腔	$\rho_1+\rho_2=L$		1
对称共心腔	$\rho_1=\rho_2=L/2$	$g_1=g_2=-1$	1
半　球　腔	$\rho_1=L,\rho_2\to\infty$	$g_1=0,g_2=1$	0
平行平面腔	$\rho_1=\rho_2\to\infty$	$g_1=g_2=1$	1
非　稳　腔			$g_1\cdot g_2<0$ 或 >1
双　凸　腔	$\rho_1<0,\rho_2<0$	$g_1>1,g_2>1$	>1
平　凸　腔	$\rho_1<0,\rho_2\to\infty$	$g_1>1,g_2=1$	>1
正支虚共焦望远镜腔	$\rho_1+\rho_2=2L$ ρ_1、ρ_2 异号	$g_1+g_2=2g_1g_2$	>1
负支实共焦望远镜腔	$\rho_1+\rho_2=2L$ $\rho_1>0,\rho_2>0$	$g_1+g_2=2g_1g_2$	<0

二、稳定图

稳定图用以表征不同类型谐振腔的工作区域.对于轴对称光腔，简化为一个二维问题，可用 g_1 和 g_2 为坐标画出，又称 g 参数图，见图 2.6.2.任何一个球面腔 (g_1,g_2) 惟一对应于稳定图上一个点，但稳定图上一点并不单值地代表某一具体几何尺寸 (ρ_1,ρ_2,L) 的球面腔，这点在数学上是十分显然的.图 2.6.2 中由 $g_1=0,g_2=0$ (两坐标轴) 和双曲线 $g_1\cdot g_2=1$ 所围成的区域(阴影区)为稳定区，其余为非稳区，两区的交线为临界

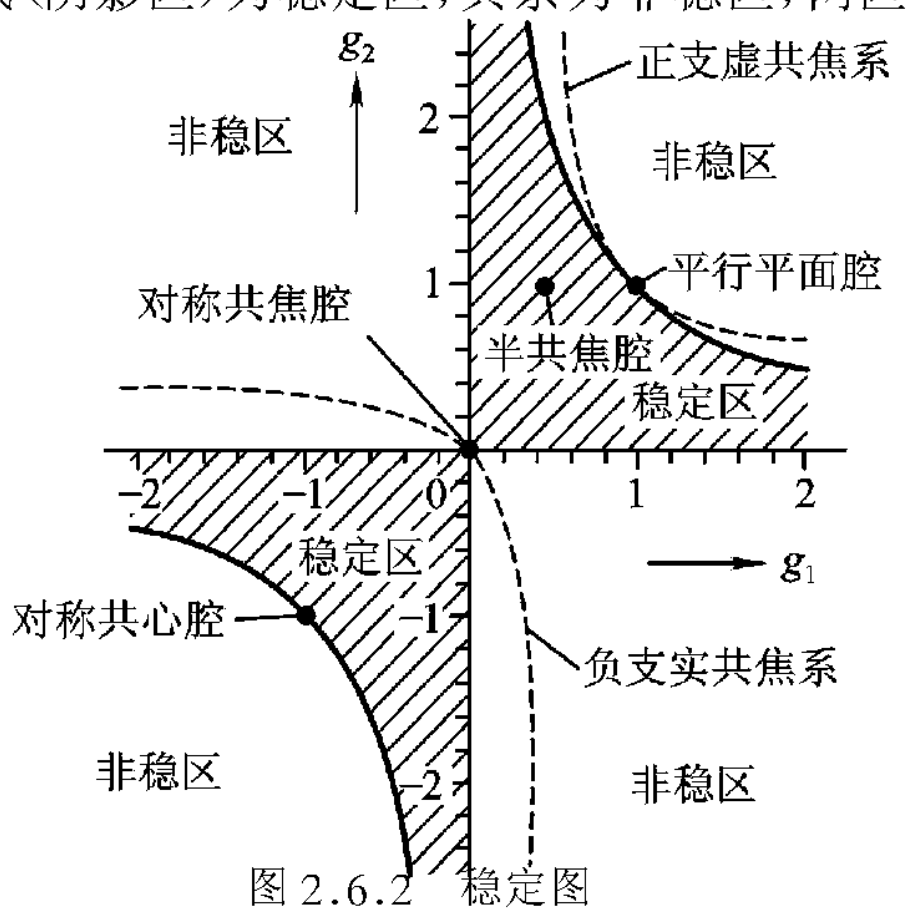


图 2.6.2　稳定图

区，一些典型的腔型在稳定图中的位置已用点标出来.

§2.7　光腔的本征方程　微扰稳定性

一、光腔的本征方程

实际上，§2.6 中所讨论的问题可用求解光腔本征方程的方法统一处理.

设图 2.6.1 中初始光线参数为(x,θ)，经一次往返传输后变为(x',θ')，往返矩阵为 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}$，则

$$\begin{bmatrix}x'\\ \theta'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \theta\end{bmatrix} \tag{2.7.1}$$

或简写为

$$\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{M}\boldsymbol{X} \tag{2.7.2}$$

如果光线 $\boldsymbol{X}$ 为谐振腔的一个本征态，它应当满足自再现条件.在几何光学意义下，这意味着 $\boldsymbol{X}$ 在腔内经一次往返后除一常数因子 γ 外，应当变为它自身，即

$$\boldsymbol{X}'=\gamma\boldsymbol{X} \tag{2.7.3}$$

利用式(2.7.2)得到

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{X}=\gamma\boldsymbol{X} \tag{2.7.4}$$

矩阵方程(2.7.4)称为光腔的本征方程，在数学上这是一个典型的本征值问题.式(2.7.4)可改写为

$$(\boldsymbol{M}-\gamma\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=0 \tag{2.7.5}$$

线性方程组(2.7.5)有非零解条件为其系数行列式为零，由此得到

$$\gamma^2-(A+D)\gamma+1=0 \tag{2.7.6}$$

其中已利用式(2.1.19).

式(2.7.6)有两解

$$\gamma_{1,2}=\frac{A+D}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{A+D}{2}\right)^2-1}=2g_1g_2-1\pm2\sqrt{g_1g_2(g_1g_2-1)} \tag{2.7.7}$$

二、非稳腔

由式(2.7.7)决定的本征值 γ 可为实数也可为复数，γ 为实数对应于光线往返一周后放大(或缩小)γ 倍变为 γx，这表示腔内满足自再现条

件的光线汇为一个点光束.由式(2.7.7)易知 γ 为实数条件是

$$\frac{A+D}{2}>1 \tag{2.7.8}$$

或

$$\frac{A+D}{2}<-1 \tag{2.7.9}$$

这正是非稳条件,因此非稳腔又称点光束腔.其往返一周放大倍数

$$M_1=\gamma_1=\frac{A+D}{2}+\sqrt{\left(\frac{A+D}{2}\right)^2-1}=2g_1g_2-1+2\sqrt{g_1g_2(g_1g_2-1)} \tag{2.7.10}$$

$$M_2=\gamma_2=\frac{A+D}{2}-\sqrt{\left(\frac{A+D}{2}\right)^2-1}=2g_1g_2-1-2\sqrt{g_1g_2(g_1g_2-1)} \tag{2.7.11}$$

且

$$M_1\cdot M_2=1 \tag{2.7.12}$$

M 两个值中有一个绝对值大于 1,另一个小于 1,大于 1 的对应非稳定腔内发散球面波,小于 1 的对应于会聚球面波,会聚球面波是微扰不稳定的,从物理上讲可以略去这一个解.

三、稳定腔

当 γ 为复数,即

$$-1<\frac{A+D}{2}<1 \tag{2.7.13}$$

成立时,为稳定腔情况.分析表明,这时腔的本征模为高斯光束.满足自再现条件的高斯光束复参数 q 为

$$\frac{1}{q}=\frac{D-A}{2B}\pm \mathrm{i}\,\frac{1}{B}\sqrt{1-\left(\frac{A+D}{2}\right)^2} \tag{2.7.14}$$

于是,激光在腔内的传输问题,可以统一用腔的本征方程处理,由此出发可建立光学谐振腔的模式理论.

四、微扰稳定性

微扰稳定性是指腔本征方程的解式(2.7.14)对扰动的稳定性.设光束参量 R 或 q(为确定起见用 R 表示)经历了某一扰动后改变了 ΔR,经过腔内多次往返后其偏移量为 $\Delta R'$,根据李亚普诺夫(Lyapnov)稳定性理论,若 $\Delta R/\Delta R'>1$,则该腔是微扰稳定的,反之若 $\Delta R/\Delta R'<1$,则是微扰不稳定的.

定义稳定性因子

$$S=\sqrt{\frac{\Delta R}{\Delta R'}} \tag{2.7.15}$$

由 $ABCD$ 定律式(2.7.9)和自再现条件,有

$$\frac{1}{R+\Delta R'}=\frac{C+\dfrac{D}{R+\Delta R}}{A+\dfrac{B}{R+\Delta R}} \tag{2.7.16}$$

由此求出

$$S=\left|A+\frac{B}{R}\right|=\left|\frac{A+D}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{A+D}{2}\right)^2-1}\right| \tag{2.7.17}$$

因此,S 等于矩阵方程式(2.7.4)的本征值 γ 的绝对值,对非稳腔,就等于其往返一周的放大率 M. 由上述可知,非稳腔内的发散球面波 $S>1$,故是微扰稳定的,而会聚球面波 $S<1$,因此是微扰不稳定的. 对于临界腔,应当将往返矩阵元代入式(2.7.17)作具体计算. 对稳定腔 $S=1$,因而是临界微扰稳定的.

§2.8 多程反射室

图 2.8.1 所示多程反射室(MPC),即赫里特室(Herriott cell),可以看作是镜面上开有光线入口和出口的球面干涉仪. 多程反射室最初用于电子束实验装置中,1963 年以后作为光学延迟系统、拉曼增益室等在激光光学、高分辨激光光谱学中获得应用.

一、多程反射室的工作原理

多程反射室中离轴光线的往返传输行为可用矩阵光学方法分析. 设系统是对称的,两镜曲率半径都为 ρ,镜间距离为 L. 光线的参数可用坐标 x、y 和斜率 α_x、α_y 来表征,并设可以分成 (x,α_x)、(y,α_y) 来处理,初始参数设为 x_0、α_{x0}、y_0、α_{y0} (图 2.8.1).

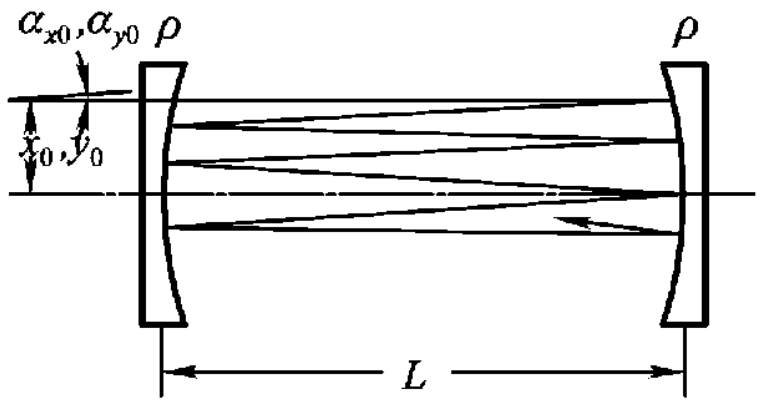


图 2.8.1 多程反射室

光线在 MPC 内的单程变换矩阵为

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1 & L\\ -\dfrac{2}{\rho} & 1-\dfrac{2L}{\rho}\end{bmatrix} \tag{2.8.1}$$

由谢尔威斯特定理得到经 n 次反射后的变换矩阵为

$$\boldsymbol{M}_n=\frac{1}{\sin\ \varphi}\begin{bmatrix}\sin\ n\varphi-\sin\ (n-1)\varphi & L\sin\ n\varphi\\ -\dfrac{2}{\rho}\sin\ n\varphi & \left(1-\dfrac{2L}{\rho}\right)\sin\ n\varphi-\sin\ (n-1)\varphi\end{bmatrix} \tag{2.8.2}$$

于是利用 $ABCD$ 定律可求出光线经 n 次反射后的坐标：

$$x_n=\widetilde{A}\sin\ (n\varphi+\delta_x) \tag{2.8.3}$$

$$y_n=\widetilde{B}\sin\ (n\varphi+\delta_y) \tag{2.8.4}$$

式中

$$\cos\ \varphi=\left(1-\frac{L}{\rho}\right) \tag{2.8.5}$$

L、ρ 应满足稳定条件

$$0<\frac{L}{\rho}<2 \tag{2.8.6}$$

$$\tan\ \delta_x=\left[\sqrt{\frac{2\rho}{L}-1}\Big/\left(1+\rho\,\frac{\alpha_{x0}}{x_0}\right)\right] \tag{2.8.7}$$

$$\widetilde{A}^2=\frac{2\rho}{2\rho-L}\left(x_0^2+x_0\alpha_{x0}L+\frac{L\rho}{2}\alpha_{x0}^2\right) \tag{2.8.8}$$

$$\delta_y=\tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{2\rho}{L}-1}\Big/\left(1+\rho\,\frac{\alpha_{y0}}{y_0}\right)\right] \tag{2.8.9}$$

$$\widetilde{B}^2=\frac{2\rho}{2\rho-L}\left(y_0^2+y_0\alpha_{y0}L+\frac{L\rho}{2}\alpha_{y0}^2\right) \tag{2.8.10}$$

由式(2.8.3)、式(2.8.4)知，一般情况下光线在镜面上的光斑轨迹为一椭圆，椭圆的参数由入射光线的初始坐标 x_0、α_{x0}、y_0、α_{y0} 和腔参数 L、ρ 决定. 当满足条件

$$A=B \tag{2.8.11}$$

$$\delta_x=\delta_y=\pm\frac{\pi}{2},\quad \text{或}\ \tan\ \delta_x\cdot\tan\ \delta_y=\pm1 \tag{2.8.12}$$

时，变为圆. 若进一步设

$$\alpha_{y0}=0 \tag{2.8.13}$$

有

$$y_0^2=x_0^2\left(\frac{2\rho}{L}-1\right) \tag{2.8.14}$$

$$\widetilde{A}^2=x_0^2+y_0^2=\frac{2\rho}{L}x_0^2 \tag{2.8.15}$$

$$\alpha_{x0}=-\frac{2x_0}{L}=-\frac{\widetilde{A}}{\sqrt{\dfrac{\rho L}{2}}} \tag{2.8.16}$$

在这种情况下，当多程室参数 L、ρ 给定后，入射光线和出射光线在两反射镜面上的坐标仅由 α_{x0}（或 x_0）决定，特别是圆半径 $\tilde{A}$ 可由式(2.8.15)确定，从而简化了多程室的设计、安装和调试.

多程室光路闭合条件为

$$m\varphi=\pi,\quad m=1,2,\cdots \tag{2.8.17}$$

更复杂的闭合光路由条件

$$m\varphi=\mu\pi \tag{2.8.18}$$

决定，μ 为小于 m 的正整数.

在腔内，光线的轨迹为一旋转双曲面，可以用计算机做数值计算模拟，反射次数 n 与 L、ρ 等参数有关.

二、多程反射室的应用举例

现以腔镜反射率的测定说明多程室的应用. 设为一无源、无损腔，则离轴光线在多程室内的往返传输中损耗仅由镜面的不完全反射引起. 设入射光强度为 I_0，两镜反射率均为 R，经 n_1 次反射后出射光强为

$$I_1=I_0R^{n_1} \tag{2.8.19}$$

经 n_2 次反射后，

$$I_2=I_0R^{n_2} \tag{2.8.20}$$

由此得

$$R=\left(\frac{I_2}{I_1}\right)^{\frac{1}{n_2-n_1}} \tag{2.8.21}$$

实验装置如图 2.8.2 所示. 为提高信噪比和测量精度采用参考光线和归一化方法，当反射次数为 n_1 和 n_2 时，分别测得相对信号强度：

$$k_1=\frac{I'_{D_2}}{I'_{D_1}} \tag{2.8.22}$$

$$k_2=\frac{I'_{D_2}}{I'_{D_1}} \tag{2.8.23}$$

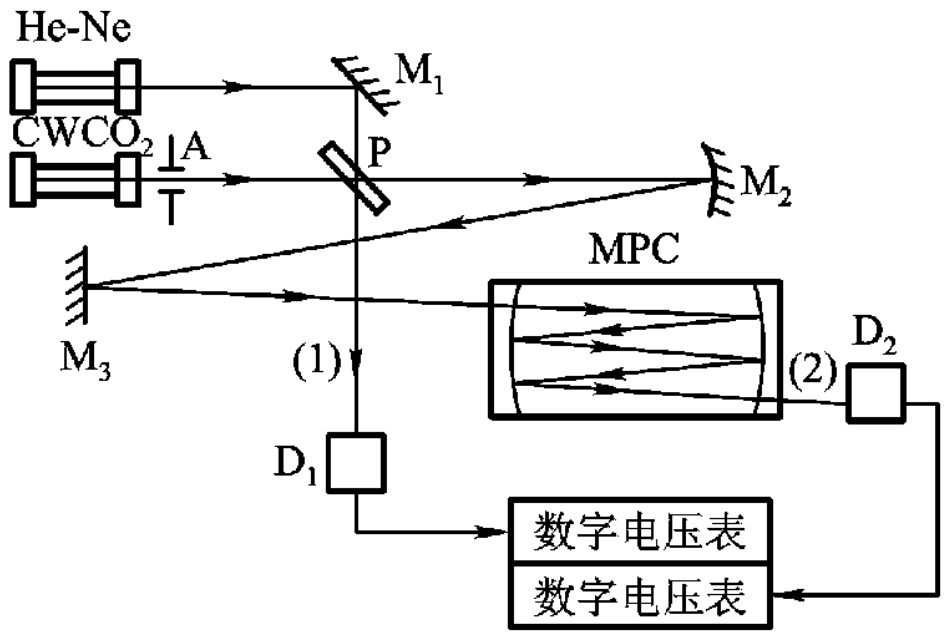
则反射率为

$$R=\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{\frac{1}{n_2-n_1}} \tag{2.8.24}$$

测量相对误差

$$\frac{|\Delta R|}{R}=\frac{1}{|n_2-n_1|}\left(\frac{|\Delta k_2|}{k_2}+\frac{|\Delta k_1|}{k_1}\right) \tag{2.8.25}$$

这一方法在测量红外镀金膜反射镜的高反射率（$R>98\%$）中得到应用，



M_1，M_3—平面反射镜；M_2—模匹配镜；P—分束器；

A—光阑；D_1，D_2—探测器

图 2.8.2　实验装置图

实验中测量相对误差为 0.1% 左右.

习　　题

1. 证明在轴对称情况下，4×4 变换矩阵可由 2×2 变换矩阵表示.

2. 证明折射率 n，长 l 均匀介质的变换矩阵为

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1 & \dfrac{l}{n}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

3. 证明曲率半径 ρ，球面折射的变换矩阵为

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \dfrac{n_2-n_1}{n_2\rho} & \dfrac{n_1}{n_2}\end{bmatrix}$$

式中 n_1、n_2 分别为入射和出射光线所在空间介质的折射率.

4. 证明直角全反射棱镜的变换矩阵为

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}-1 & -\dfrac{2d}{n}\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

式中 n 为棱镜折射率，d 为棱镜的高.

5. 证明对共轴球面腔 $\dfrac{A+D}{2}$ 为一不变量，且

$$\frac{A+D}{2}=1-\frac{2L}{\rho_1}-\frac{2L}{\rho_2}+\frac{2L^2}{\rho_1\rho_2}$$

式中 ρ_1、ρ_2 为两反射镜曲率半径，L 为腔长.

6. 证明式(2.7.14).

7. 证明式(2.7.17).

8. 推导三维光腔的约束稳定条件.

9. 由线性变换理论证明 γ_1、γ_2 [式(2.7.7)]本征值有下述性质:

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \mathrm{tr}\ \boldsymbol{M}, \qquad \gamma_1 \cdot \gamma_2 = \det\ \boldsymbol{M}$$

式中 tr $\boldsymbol{M}$ 为往返一周矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的迹,det $\boldsymbol{M}$ 为矩阵 $\boldsymbol{M}$ 对应行列式的值.

10. 除正文讨论的按 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\gamma}$ 基本矩阵分解外,$ABCD$ 矩阵还可有其它分解法,如文献[6]讨论的焦面表示法.阅读文献[6],说明矩阵分解的焦面表示的物理意义,并对这两种分解方式加以比较.

11. 表 2.2.1 中相位共轭镜的变换矩阵 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{PCM}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 不满足条件 det $\boldsymbol{M} = AD - BC = 1$,$\boldsymbol{M}_{\mathrm{PCM}}$ 能作分解吗? 试加以讨论.

12. 对 4×4 变换矩阵的分解问题进行讨论.

13. 写出表(2.2.1)变换矩阵对应的归一化 $\widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{C}\widetilde{D}$ 矩阵,列为一表,分析两类矩阵应用中的优缺点.

14. 分析光线通过变换矩阵 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 光学系统生成实像和虚像的条件.式中 A、B、C、D 矩阵元均为实数,$AD - BC = n_1 / n_2$ (n_1、n_2 分别为物、像空间折射率).

15. 对有三个折射率突变界面的复杂光学系统,推导出程函公式 $L(x_1, x_2)$.

16. 菲涅耳数是光学中一个重要概念.试分析菲涅耳数的物理意义,总结对圆形、矩形、环形光阑和光学谐振腔等不同情况下菲涅耳数的定义和作用.

参 考 文 献

[1] Gerrad A, Burch J M. Introduction to Matrix Methods in Optics. London, New York: John Wiley and Sons 1975

[2] 卢亚雄,吕百达 . 矩阵光学 . 大连:大连理工大学出版社,1989

[3] 王绍民,赵道木 . 矩阵光学原理 . 杭州:杭州大学出版社,1994

[4] 范滇元 . 用光线矩阵元表达的菲涅耳数 . 光学学报,1983,3:319

[5] Casperson L W. Synthesis of Gaussian beam optical systems. Appl Opt, 1981, 20: 2 243

[6] Arsenault H H, Macukow B. Factorization of the transfer matrix for symmetrical optical systems. J Opt Soc Am, 1983, 73:1 350

[7] Macukow B, Arsenault H H. Matrix decompositions for nonsymmetrical optical systems. J Opt Soc Am, 1983, 73: 1 360

[8] 吕百达,季小玲 . 光学系统的等效变换 . 光学学报,1991, 11:536

[9] 季小玲,吕百达 . 复元素变换矩阵的分解和物理实现 . 激光杂志,1991, 12:285

[10] 吕百达,季小玲 . 变换矩阵的两类分解方式和等效性问题 . 应用激光, 1992,12:62

[11] Lü B, Xu S et al. Matrix representation of three－dimensional astigmatic resonators. Opt & Quant Electron, 1992, 24:619

[12] Lü B, Feng G et al. Complex ray representation of the astigmatic Gaussian beam propagation. Opt & Quant Electron, 1993, 25:275

[13] 张廷蓉,吕百达．非对称光学系统的矩阵分解与等效变换．强激光与粒子束,2002,14:674

[14] 张廷蓉,吕百达．失调光学系统的矩阵分解与等效变换．激光技术,2002,26:428

第三章　激光束的描述和光束质量

在激光的实际应用中，除了对输出功率(能量)和效率等有要求外，光束质量是一个重要的指标.本章对与激光光束质量相关的概念、激光光束质量的评价参数和测量方法、实际激光光束质量的评价以及描述激光束的强度矩方法等问题做了较为详细的讨论，最后对光束控制概念做了介绍.

§3.1　激光光束质量的相关概念

通常认为光束质量是从质的方面来评价激光光束特性的.在激光的发展历史中，曾针对不同应用目的提出不同的评价参数.但是，较长时期以来光束质量一直没有确切的定义，也未建立标准的测量方法.20 世纪 90 年代初，西格曼(Siegman)对 M^2 因子概念提出了较为完整的理论.国际标准化组织(International Standard Organization，ISO)举行过多次会议研讨激光参数定义、测量方法和激光束的描述等问题.时至今日，研究工作仍十分活跃，取得不少进展，但问题尚未完全解决.本节讨论曾用以描述激光光束质量的一些评价参数和与激光光束质量评价参数密切相关的束宽的定义.

一、激光光束质量的评价参数

在激光的发展过程中，曾用多种参数评价激光光束质量，包括聚焦光斑尺寸、远场发散角、β 值、斯特列尔比、光束参数乘积和 M^2 因子等.

1. 聚焦光斑尺寸

用聚焦光斑尺寸作为衡量光束质量标准是一种较为直观而简便的方法.一般而言，焦斑大小除与聚焦激光束本身特性有关外，还与所用聚焦光学系统特性有关.并且，焦斑尺寸越小，光束远场发散角就越大，准直距离也越短，因此，只用聚焦光斑尺寸一个参数作为光束质量判据是不够的.

设一聚焦光学系统焦距为 f，光阑直径为 D，在理想情况下均匀平面波聚焦后爱里斑的宽度

$$a = 1.22\frac{f\lambda}{D} \tag{3.1.1}$$

即可聚焦到波长 λ 的量级.若实际激光束聚焦光斑尺寸为 a 的 N 倍,则称为 N 倍衍射极限.

2. 远场发散角 θ　β 值

激光远场发散角 θ 的大小决定激光束可传输多远距离而不显著发散开来,它与可聚焦能量(功率)有关,是激光许多实际应用中常作为判断光束质量的参数.设激光束沿 z 轴传输,束宽为 $w(z)$,定义远场发散角

$$\theta = \lim_{z\to\infty}\frac{w(z)}{z} \tag{3.1.2}$$

由于 θ 可以通过扩束或聚焦来改变,所以当用远场发散角作为光束质量判据时,必须将激光束宽取为某一确定值进行比较才有意义.

除 θ 外,文献中常用 β 值,即

$$\beta = \frac{\text{实际光束的远场发散角}}{\text{理想光束的远场发散角}} \tag{3.1.3}$$

作为光束质量判据.β 值一般大于 1,β 越接近 1,光束质量越高,$\beta=1$ 为衍射极限.

3. 斯特列尔比

在大气光学中常用斯特列尔比 S_R 作为评价光束质量参数,S_R 定义为

$$S_R = \frac{\text{实际焦斑处峰值功率}}{\text{理想焦斑处峰值功率}} \tag{3.1.4}$$

式中 $S_R \leqslant 1$,S_R 越大,则光束质量越高.

4. 光束参数乘积

虽然束宽和远场发散角都可以通过使用聚焦光学系统来改变,但对确定光束,其束腰宽度 w_0 和远场发散角 θ 的乘积是不变的,称为光束参数乘积(beam parameter product,BPP):

$$\text{BPP} = \text{光束的束腰宽度} \times \text{远场发散角} = w_0\theta \tag{3.1.5}$$

对基模高斯光束,$\text{BPP}_0 = \lambda/\pi$;对实际光束,$\text{BPP}_0 \geqslant \lambda/\pi$. BPP 值越大,光束质量越差.

5. M^2 因子

M^2 因子定义为

$$M^2 = \frac{\text{实际光束的空间束宽积}}{\text{理想光束的空间束宽积}} \tag{3.1.6}$$

式中,光束的空间束宽积(space－beam width product)是指光束在空间域中的宽度(束腰宽度)和在空间频率域中的角谱宽度(远场发散角)的

乘积，即

$$M^2=\frac{\text{实际光束的束腰宽度和远场发散角的乘积}}{\text{理想光束的束腰宽度和远场发散角的乘积}} \tag{3.1.7}$$

M^2 因子定义式中同时考虑了束宽和远场发散角的变化对激光光束质量的影响.一般情况下，激光束在通过理想无衍射、无像差光学系统时光束参数乘积是一个不变量，这样就避免了只用聚焦光斑尺寸或远场发散角作为光束质量判据带来的不确定性.因此 M^2 因子是一个判断光束质量较好的参数.

二、束宽的定义

在空间域中，光束宽度的常用定义有三种，即$\frac{1}{n}$定义、环围功率(能量)和二阶矩定义.

1. $\frac{1}{n}$定义

对旋转对称光束，在柱坐标系中光强分布曲线 $I(r)$ 上，最大值 $I_{\max}$ 的$\frac{1}{n}$处两点间距离之半定义为束宽 w

$$I(w)=\frac{I_{\max}}{n} \tag{3.1.8}$$

常用的 n 值有 e^2、e 和 2 等.

2. 环围功率(能量)

光强分布曲线 $I(r)$ 上占总功率(能量) η 处两点间距离之半定义为束宽 w

$$\int_0^w I(r)r\mathrm{d}r=\eta\int_0^{+\infty} I(r)r\mathrm{d}r \tag{3.1.9}$$

常用 $\eta=86.5\%,63\%$ 等.

3. 二阶矩定义

直角坐标系中，在 z 处 x、y 方向的束宽 w_x、w_y 按二阶矩方法定义为

$$w_x^2=\frac{4}{p}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2E(x,y,z)E^*(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$w_y^2=\frac{4}{p}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2E(x,y,z)E^*(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3.1.10}$$

式中

$$p=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} I(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3.1.11}$$

已设光束重心在原点，下同.对基模高斯光束、$1/e^2$ 定义、86.5%环围功率(能量)和二阶矩定义计算得到的束宽完全一致.但对其它光束，用不同的定义式可能会得出不同结果.其中，以束宽的二阶矩定义在理论上最为严格，而实验上用 86.5%“桶中功率(能量)”测量束宽较为准确和方便.

类似地，在柱坐标下可写出按二阶矩方法定义的束宽的公式，请读者自行完成之.

§3.2　M^2 因子和 K 参数

一、M^2 因子

对应于式(3.1.10)，在空间频率域中角谱宽度(远场发散角)定义为

$$\theta_x^2=\frac{4\lambda^2}{p}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}S_x^2\hat{E}(S_x,S_y,z)\hat{E}^*(S_x,S_y,z)\mathrm{d}S_x\mathrm{d}S_y$$

$$\theta_y^2=\frac{4\lambda^2}{p}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}S_y^2\hat{E}(S_x,S_y,z)\hat{E}^*(S_x,S_y,z)\mathrm{d}S_x\mathrm{d}S_y \tag{3.2.1}$$

式中 $\hat{E}(S_x,S_y,z)$ 为 $E(x,y,z)$ 的傅里叶变换对，

$$\hat{E}(S_x,S_y,z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}E(x,y,z)\exp[-2\pi\mathrm{i}(S_xx+S_yy)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3.2.2}$$

设光束在 x、y 方向的束腰宽度(二阶矩定义)分别为 w_{0x} 和 w_{0y}，在西格曼的理论中取基模高斯光束为理想光束，其束腰宽度 w_0 和远场发散角 θ_0 之积为

$$w_0\theta_0=\frac{\lambda}{\pi} \tag{3.2.3}$$

代入 M^2 因子定义式(3.1.7)得

$$M_x^2=\frac{\pi}{\lambda}w_{0x}\theta_x$$

$$M_y^2=\frac{\pi}{\lambda}w_{0y}\theta_y \tag{3.2.4}$$

这样，当实际光束的场分布已知时，利用式(3.2.4)和傅里叶变换公式就可计算出 M^2 因子.用式(3.1.10)～式(3.2.4)定义 M^2 因子的优点是：

1. 广义 *ABCD* 定理成立

可以证明，按式(3.1.10)定义的实际光束的束宽和由此定义的广义 Q 参数遵从广义 *ABCD* 定律，在自由空间中满足光束传输方程

$$w^2(z)=w_0^2+M^4\left(\frac{\lambda}{\pi w_0}\right)^2(z-L_0)^2 \tag{3.2.5}$$

式中 L_0 为相对某一参考面束腰 w_0 的位置.式(3.2.5)亦可写为

$$w^2(z)=w_0^2+\theta^2(z-L_0)^2 \tag{3.2.6}$$

2. M^2 因子的极小值为 1

在二阶矩定义下,利用与量子力学中不确定关系类似的数学证明过程可得

$$M^2\geqslant 1 \tag{3.2.7}$$

因此,光束传输中的衍射发散与量子力学中的不确定关系至少在形式上有类似之处.它说明小的束宽和小的发散角二者不可同时兼得,其乘积的极限为理想基模高斯光束值即式(3.2.3),对应 M^2 因子极小值为 1.

3. 多模光束的光束质量和相干模分解

对多模光束,M^2 因子为各模相对强度的加权平均,在直角坐标系下有

$$M_x^2=\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}(2m+1)|C_{mn}|^2$$

$$M_y^2=\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)|C_{mn}|^2 \tag{3.2.8}$$

在柱坐标系下

$$M_r^2=\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{l=-p}^{p}(2p+l+1)|C_{pl}|^2 \tag{3.2.9}$$

式中 C_{mn}、C_{pl} 为权重因子,且

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}|C_{mn}|^2=1$$

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{l=-p}^{p}|C_{pl}|^2=1 \tag{3.2.10}$$

m、n、p、l 为模序数.

二、关于 M^2 因子的进一步讨论

虽然使用 M^2 因子有上述一些优点,但无论从理论上或实际应用观点来看,将 M^2 因子作为光束质量评价参数都有一些问题值得深入研究,例如:

1. 理想光束

在 M^2 因子的定义式中是以基模高斯光束作为比较标准,即“衍射极限”,其光束参数乘积 $\mathrm{BPP}=\lambda/\pi$ 对应于傅里叶变换的极小值.这对要求基模工作的一些应用而言是适当的.但是,对某些实际应用,例如在激光

核聚变中，要求尽可能均匀分布的光强剖面，用基模高斯光束作为比较标准就不一定适当了.对截断均匀平面波，$M^2\approx2$，因此在使用 M^2 因子评价光束质量时未免有失公平.

2．硬边光阑衍射效应

在 M^2 因子的计算公式中，积分限趋于无限大，未计光阑的衍射效应.而由非稳腔输出的激光束或受硬边光阑限制的激光束，都因硬边光阑衍射效应会引起光强分布变化，计算 M^2 因子时会遇到积分发散的困难.尽管已提出了广义截断二阶矩(generalized truncated second－order moments)法、渐近分析法(asymptotic approach)和自收敛束宽(self－convergent beam width)法等多种方法来克服这一困难，但这些方法都不同程度上存在一些缺点，至今未被国际标准化组织采用作为计算有硬边光阑限制光束 M^2 因子的方法.

3．M^2 因子的实验测量误差

M^2 因子的测量实际上归结为束宽测量，实验测量中要求给出光强剖面.由束宽的二阶矩定义式知道，M^2 因子对离中心远的光强分布十分敏感.受测量方法和测量仪器的限制，二阶矩的测量有时会带来较大的实验误差.

4．光束质量的评价参数是否唯一

尽管二阶矩定义的物理量可给出光束的重要信息，但是理论上对光强剖面采用强度矩方法描述时，仅用二阶矩是不够的.更重要的是，实际应用中对激光光束质量提出的指标常常不是唯一的.西格曼曾提出一个有名的论断“二元相位板不能改善激光光束质量”.二元光学元件的使用者们会反驳说：“虽然二元相位板不能改善 M^2 因子，但却能改善激光光束质量.”这恰恰说明了使用 M^2 因子作为激光光束质量唯一评价参数的缺点.

三、三阶矩和四阶矩　K 参数

理论上，对光束剖面的完全描写要求所有强度矩的知识，但实际上，仅到四阶矩就够了.光强的三阶矩

$$\langle x^3\rangle=\frac{1}{p}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^3E(x,y,z)E^*(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3.2.11}$$

称为偏斜度(skewness)，$\langle x^3\rangle$ 描述光强分布的对称性.对于对称分布光束 $\langle x^3\rangle=0$. y 方向可写出类似公式，故从略.

光强分布的平整度或陡峭度用陡峭度参数(kurtosis parameter)来描述，称为 K 参数，定义为

$$K=\frac{\langle x^4\rangle}{\langle x^2\rangle} \tag{3.2.12}$$

式中

$$\langle x^n\rangle=\frac{1}{p}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^nE(x,y,z)E^*(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad n=2,4 \tag{3.2.13}$$

对高斯光束 $K=3$. 当 $K>3$ 时，与高斯光束比较，光强剖面变得陡峭；$K<3$ 时，光强剖面比高斯光束平坦. 值得注意的是，除少数光束（例如高斯光束）外，K 参数一般随传输距离 z 变化，不是一个常数，这是与 M^2 因子不同的. 此外，严格而言，用 K 参数描述光束的陡峭度和用 K 参数的大小比较光束在不同传输距离的陡峭度，以及比较不同光束的陡峭度仅对钟形平滑分布、旁瓣不显著的光束才是有效的. 当光束剖面有很强的调制时，K 参数只有形式上的意义，其值并不一定反映陡峭程度.

§3.3　束宽和 M^2 因子的测量

一、束宽的测量

用实验来确定 M^2 因子时，实质上归结为束宽的测量. 束宽的测量方法有多种，下面主要讨论由国际标准化组织推荐的几种方法：

1. 可变光阑法

用可变光阑法测量束宽的实验装置如图 3.3.1 所示. 实际测量时，首先应将可变光阑的中心与待测光束中心重合，然后由大到小变化光阑孔径，用探测器测量透过的激光功率（能量）. 当通过光阑的功率（能量）为激光束总功率（能量）的 86.5% 时，光阑口径则对应于激光束宽. 这一方法仅用于旋转对称光束，即光束两主轴上束宽之比不大于 1.15:1.

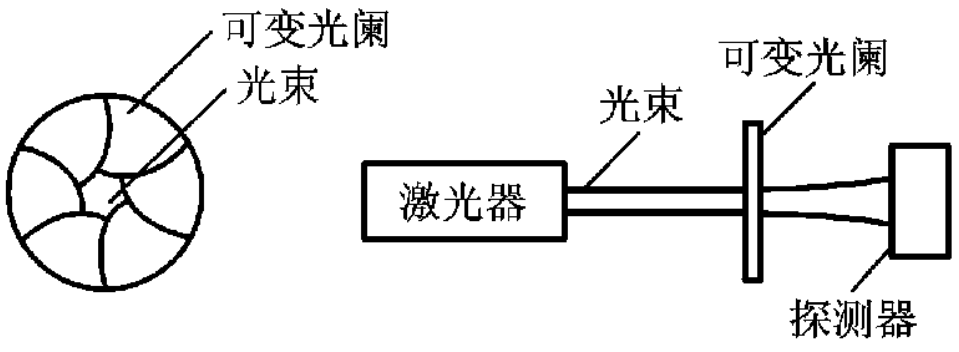


图 3.3.1　可变光阑法测量束宽的实验装置

2. 移动刀口法

测量装置如图 3.3.2 所示，在一个机械平台上沿光束截面移动刀口，探测器测量出的透射激光功率（能量）为刀口位置的函数. 由透射光功率

(能量)为总功率(能量)的 84%和 16%的刀口位置可确定束宽.

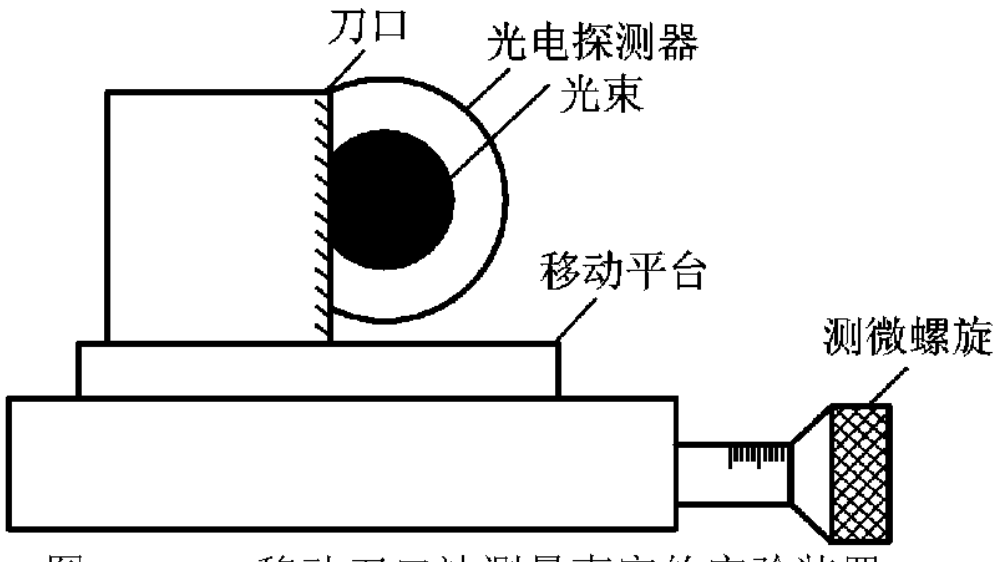


图 3.3.2　移动刀口法测量束宽的实验装置

3. 移动狭缝法

图 3.3.3 为移动狭缝法测量束宽装置示意图,与图 3.3.2 的区别是用狭缝代替了刀口,狭缝宽度应不大于被测光束宽度的 1/20.此时,探测器测出的透射激光功率(能量)为狭缝位置的函数,由测量透射光总功率(能量)13.5%的两个位置便可确定束宽.

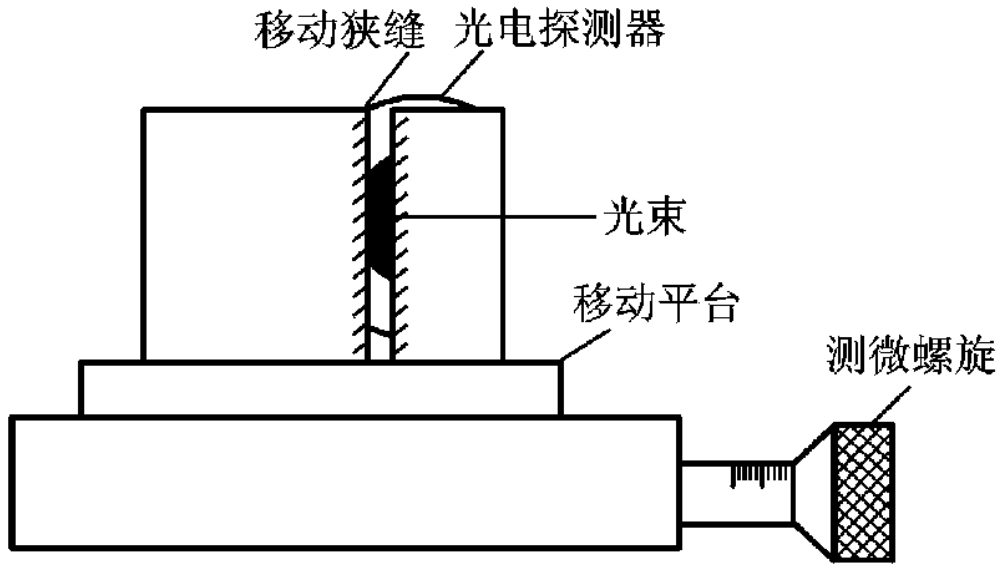


图 3.3.3　移动狭缝法测量束宽的实验装置

用以上三种方法测出的束宽都应当用适当的公式修正后,才能得到用二阶矩定义的束宽.

4. CCD 法

这是实验室中常用来测量束宽的一种简便方法.由 CCD 相机测量和记录光强分布,并配以计算机数值图像处理系统,可快速得到包括束宽在内的光束参数.

二、M^2 因子的测量

1. 三点法

由光束传输方程式(3.2.5)知,一般通过测量三处 z_i 的束宽 w_i ($i=1,2,3$),就可确定 M^2 因子、束腰宽度 w_0 和束腰位置 L_0.这即三点法.

采用这一方法时，要作三次测量或者用三个探测器同时测量.

2. 两点法

当束腰所在位置 L_0 已知时，测量次数可减少到两次，故称两点法. 测得束腰宽度 w_0 和距束腰 z_1 处束宽 w_1 后，M^2 因子由公式

$$M^2=\frac{\pi w_0}{\lambda}\frac{\sqrt{w_1^2-w_0^2}}{|z_1-L_0|} \tag{3.3.1}$$

得出.

3. 双曲线拟合法

为提高测量精度，采用多点测量双曲线拟合法计算 M^2 因子. 至少测量 10 次，其中必须有 5 次以上位于瑞利尺寸之内. 沿传输轴测量束宽 w 的双曲线拟合公式为

$$w^2=Az^2+Bz+C \tag{3.3.2}$$

式中 A、B、C 为拟合系数，与光束参数关系为

$$M^2=\frac{\pi}{\lambda}\sqrt{AC-\frac{B^2}{4}} \tag{3.3.3}$$

$$w_0=\sqrt{C-\frac{B^2}{4A}} \tag{3.3.4}$$

$$L_0=-\frac{B}{2A} \tag{3.3.5}$$

$$\theta=\sqrt{A} \tag{3.3.6}$$

测量 M^2 因子和激光束相关参数的仪器称为 M^2 因子测量仪或光束剖面分析仪，国际上已有多家产品出售. 实际测量中应当研究的重要问题是使用不同测量方法和对不同分布光束在测量中引入的误差，以及解决的方法. 理想的光束诊断仪应满足如下要求：

- 有足够高的测量精度，即可靠性好；
- 使用操作方便，能满足测量环境要求；
- 动态工作范围大，线性性能良好；
- 有高空间分辨和时间分辨能力；
- 有大的波长工作范围；
- 能用于连续和脉冲工作激光；
- 为理想光学系统，不引入附加像差和衍射；
- 计算机图像处理功能强，例如有光强分布的一维、二维实时动态显示，有平均、积分、对背景和对比度的处理等功能.

显然，要完全达到这些要求的仪器是难以制作出来的. 在实际工作中，只能针对使用要求在给定指标范围内予以满足.

§3.4　实际激光光束质量的评价

一、实际应用对激光光束质量的要求

在实际工作中，对激光光束质量的主要要求有：

1. 远场功率(能量)的可聚焦度(focusability)

实际应用中大多将激光聚焦到工件上或者长程传输后作用于靶目标上.在这些应用中，最感兴趣的指标是在靶上激光功率(能量)的可聚焦度.它用功率(能量)的集中度或桶中功率(power in the bucket，PIB)来描述.

2. 瞄准稳定性(pointing stability)

瞄准稳定性反映在时间平均意义上激光作用到目标上的偏移程度，发射激光的线偏移和角偏移都会影响瞄准稳定性.

3. 均匀性(uniformity)

在对光强剖面均匀分布有要求的应用中，应当提出描述光强分布均匀性的物理参数.例如

- 不均匀度 η(non－uniformity)

$$\eta=\frac{I_{\max}-I_{\min}}{I_{\max}+I_{\min}} \tag{3.4.1}$$

式中 $I_{\max}$、$I_{\min}$分别为最大和最小光强.$0\leqslant\eta\leqslant1$，η 越小，则光强剖面越均匀，$\eta=0$ 为完全均匀分布光束.或者

- 填充因子 f(fill factor)

$$f=\frac{I_{\max}}{\bar{I}} \tag{3.4.2}$$

式中 $\bar{I}$ 为平均光强.$0<f\leqslant1$，f 越大，光强分布越均匀.$f=1$ 为完全均匀分布光束.

4. 时间持续性(sustainability)

时间持续性是指在激光工作时间 Δt 内需要控制的激光光束质量参数的可持续性.设控制的参数为 F，则时间持续性可定义为

$$S=\frac{F_{\min}(t)}{F_{\max}(t)}\Delta t \tag{3.4.3}$$

式中 $F_{\max}(t)$、$F_{\min}(t)$分别为在 Δt 内 F 的最大值和最小值.$0\leqslant F_{\min}(t)/F_{\max}(t)\leqslant1$，等于 1 为理想情况.$S$ 越大表征激光的时间持续性越好.

5. 灵活性(flexibility)

在一些实际应用中，按不同应用需要，还要求对激光光强剖面（空间分布）和时间波形有灵活改变形状的能力.这可采用专门的空间和时间整形技术来实现，并且可根据不同要求提出相应指标.

二、桶中功率

桶中功率 PIB 定义为在远场给定尺寸的“桶”中围住的激光功率占总功率的百分比.在柱坐标下可表示为

$$PIB=\frac{\int_0^b I(r,z)r\mathrm{d}r}{\int_0^{+\infty} I(r,z)r\mathrm{d}r} \tag{3.4.4}$$

式中 $I(r,z)$ 为远场 z（例如在焦距为 f 的聚焦透镜的几何焦面 $z=f$，或者实际焦面 $z_{\max}$）处的光强分布，b 为“桶”的半径.$0\leqslant PIB\leqslant 1$，$PIB$ 越大，表征光束质量越好.

通常还用 β 参数来表征激光光束质量，β 定义为

$$\beta=\sqrt{\frac{A_m}{A_0}} \tag{3.4.5}$$

式中 A_m 和 A_0 分别表示实际光束和理想光束当 $PIB=63\%$ 时所对应的面积，理想光束可按应用目的选取.β 越大，则表示光束质量越差.

现以平面波通过环状光阑透镜为例，说明 PIB 和 β 的物理意义.设在 $z=0$ 面上初始场分布为 E_0 的平面波通过置于同一平面上，内、外半径分别为 a_0、a 的环状光阑透镜，透镜焦距为 f，由柯林斯公式可求得在 z 平面上的场分布$E(r,z)$为

$$E(r,z)=\frac{\mathrm{i}k}{z}\exp\left(-\frac{\mathrm{i}kr^2}{2z}\right)\int_{\varepsilon a}^{a}E_0\exp\left[-\frac{\mathrm{i}k(1-z/f)r_0^2}{2z}\right]\mathrm{J}_0\left(\frac{krr_0}{z}\right)r_0\mathrm{d}r_0 \tag{3.4.6}$$

式中已略去不重要的相位因子 $\exp(\mathrm{i}kz)$，遮拦比 $\varepsilon=a_0/a$，J_0 为零阶贝塞耳函数.为方便起见，设 $E_0=1$，令 $z=f$，得到几何焦面上的场分布

$$E(r,f)=\frac{\mathrm{i}k}{f}\exp\left(-\frac{\mathrm{i}kr^2}{2f}\right)\int_{\varepsilon a}^{a}\mathrm{J}_0\left(\frac{krr_0}{f}\right)r_0\mathrm{d}r_0 \tag{3.4.7}$$

对应光强分布为

$$I(r,f)=|E(r,f)|^2=\frac{4I(0,f)}{(1-\varepsilon^2)^2}\left[\frac{\mathrm{J}_1(kra/f)}{kra/f}-\varepsilon^2\frac{\mathrm{J}_1(kr\varepsilon a/f)}{kr\varepsilon a/f}\right]^2 \tag{3.4.8}$$

式中 $I(0,f)=s^2/\lambda^2f^2$ 为几何焦面上中心（$r=0$）光强，$s=\pi a^2(1-\varepsilon^2)$

为环的面积，J_1 为一阶贝塞耳函数.

对有球差的环状光束，则式(3.4.6)应修改为

$$E(r,z)=\frac{ik}{z}\exp\left(-\frac{ikr^2}{2z}\right)\int_{\varepsilon a}^{a}E_0\exp(-ikC_4r_0^4)\exp\left[-\frac{ik(1-z/f)r_0^2}{2z}\right]J_0\left(\frac{krr_0}{z}\right)r_0\mathrm{d}r_0 \tag{3.4.9}$$

式中 C_4 为球差系数.

对环状光束，理想光束可选取：① 半径为 a 的实心均匀平面波，对应式(3.4.5)为 β_1；② 内、外半径分别为 a_0、a 的空心均匀平面波，对应式(3.4.5)为 β_2. 这样，由式(3.4.8)、式(3.4.9)可求出 PIB、β_1、β_2.

由于存在焦移(详见第四章)，聚焦光强最大值不一定在几何焦面上. 设实际焦面位置为 z_{max}，在式(3.4.9)、式(3.4.6)中分别令 $z=f$，z_{max} 便可求出几何焦面和实际焦面上环状光束的光强分布 $I(r,z_{max})$ 和 PIB、β_1、β_2.

图 3.4.1 给出了环状光束在几何焦面和实际焦面上的归一化光强分布. 由图知，在几何焦面和实际焦面上光强分布是不同的. 并且光强分布还与遮拦比 ε 和球差系数 C_4 的值有关. 图 3.4.2 和 3.4.3 为有球差和无球差环状光束在几何焦面和实际焦面上的 PIB 曲线，计算参数为 $\lambda=1.06\ \mu m$，$a=1\ mm$，$f=200\ mm$. 在几何焦面上 $C_4=\pm1.0\times10^{-3}\ mm^{-3}$ 环状光束的 PIB 曲线是重合的，但在实际焦面上却分开了，且有负球差

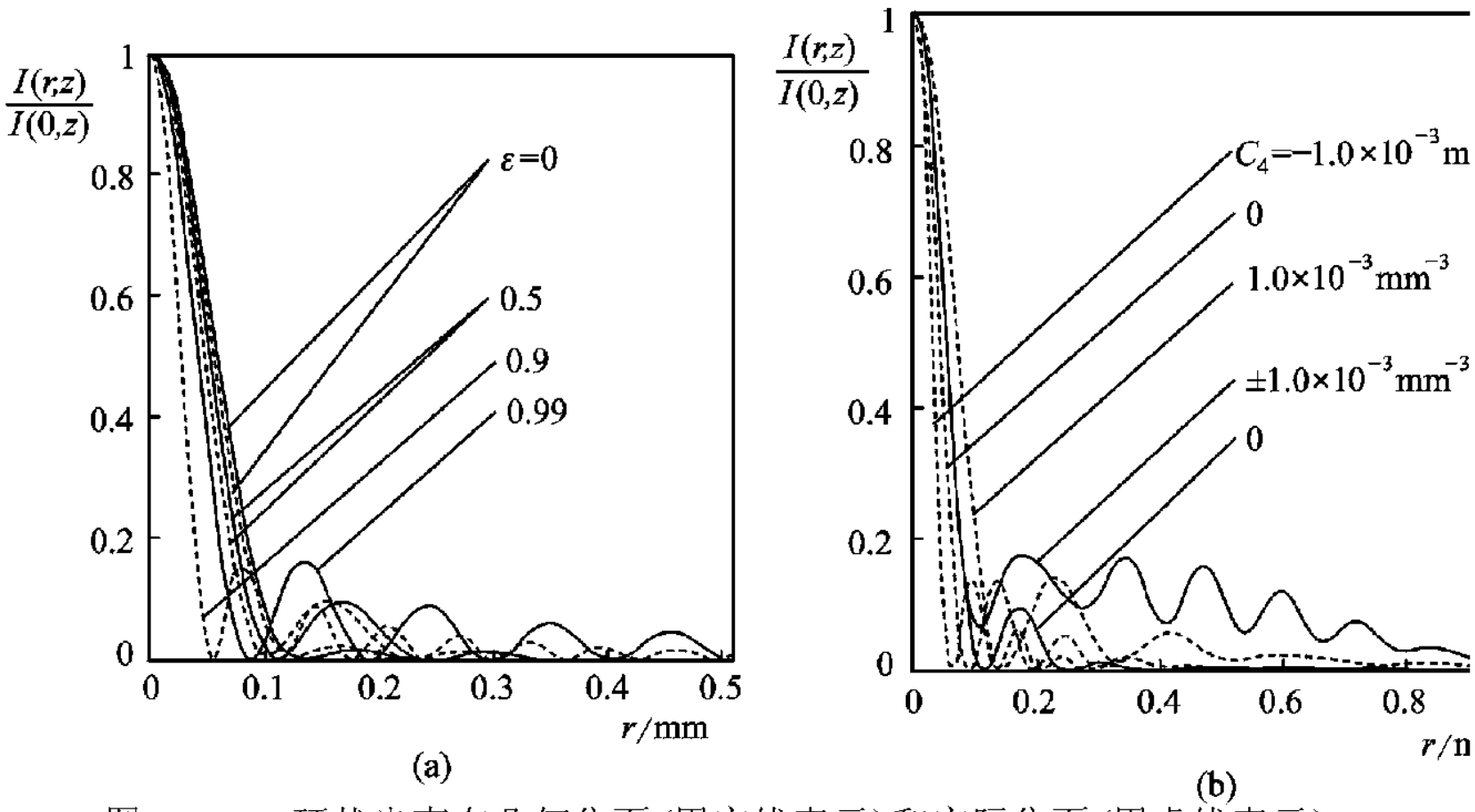


图 3.4.1　环状光束在几何焦面(用实线表示)和实际焦面(用虚线表示)上的归一化光强分布

(a) $C_4=0$；　　(b) $\varepsilon=0.7$

系数的环状光束有大的 PIB 值. 图中还表明当 C_4 取定值时，PIB 随 ε 的减小而增大，实心光束（$\varepsilon=0$）的 PIB 值最大. 当 ε 取定值（$\varepsilon=0.7$）时，在几何焦面和实际焦面上 PIB 值（球差系数 $C_4=\pm1.0\times10^{-3}\ \mathrm{mm}^{-3}$）的比较见图 3.4.4. 由图 3.4.4 和图 3.4.3(d)可见，适当选取负球差系数的透镜，在实际焦面上可得到最好的功率（能量）集中度.

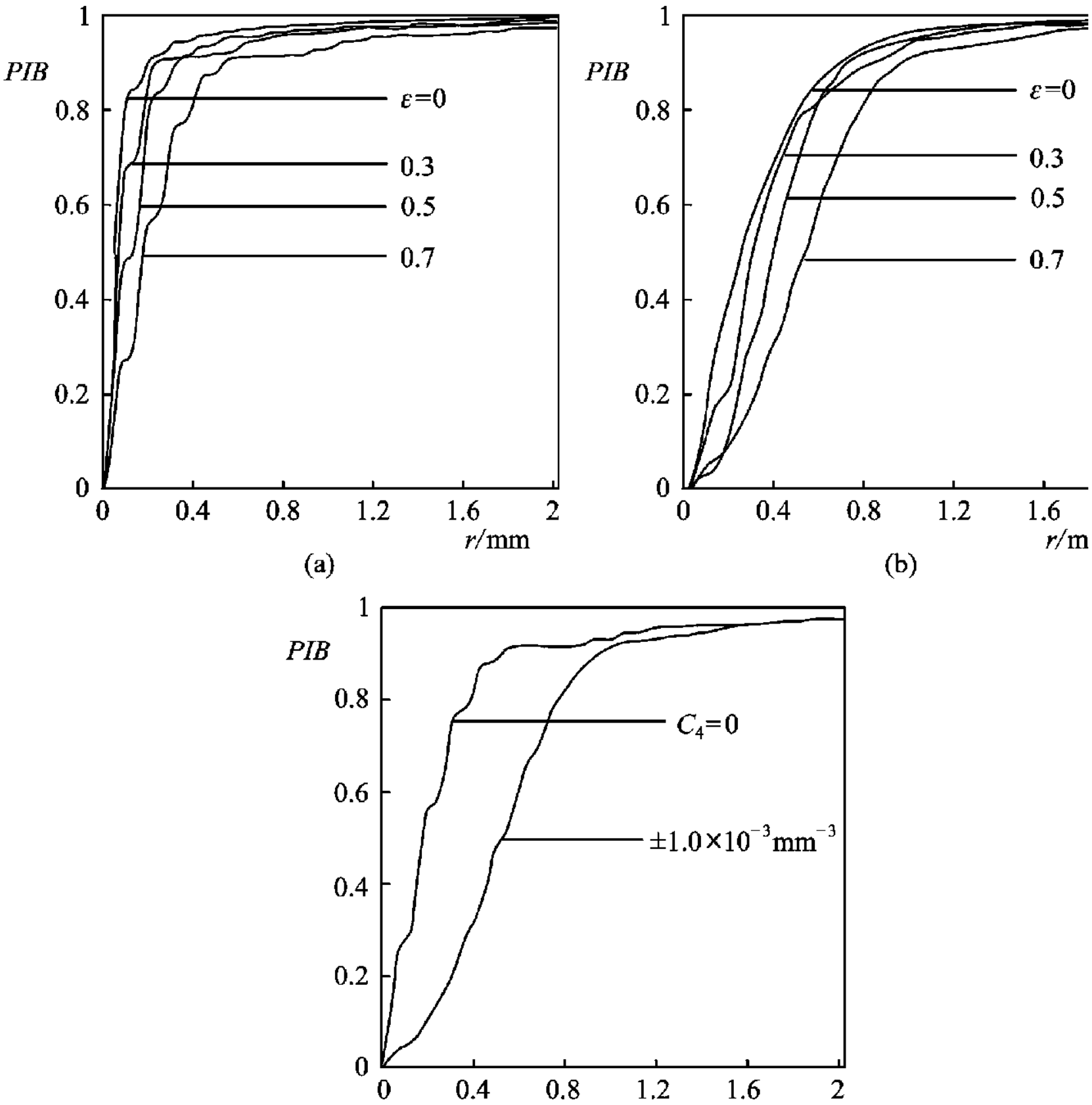


图 3.4.2　有和无球差环状光束在几何焦面上的 PIB 曲线

（a）$C_4=0$；　（b）$C_4=\pm1.0\times10^{-3}\ \mathrm{mm}^{-3}$；　（c）$\varepsilon=0.7$

由图 3.4.2、图 3.4.3 和式（3.4.5）计算得出的 β_1、β_2 值总结于表 3.4.1. 由表知，β_1 随 ε 的减小而减小. 在实际焦面上的 β_1、β_2 比几何焦面上的 β_1、β_2 要小. 在实际焦面上，有负球差系数环状光束的 β_1、β_2 值比有绝对值相同的正球差系数环状光束的 β_1、β_2 值小. 特别是，可实现 $\beta_2<1$.

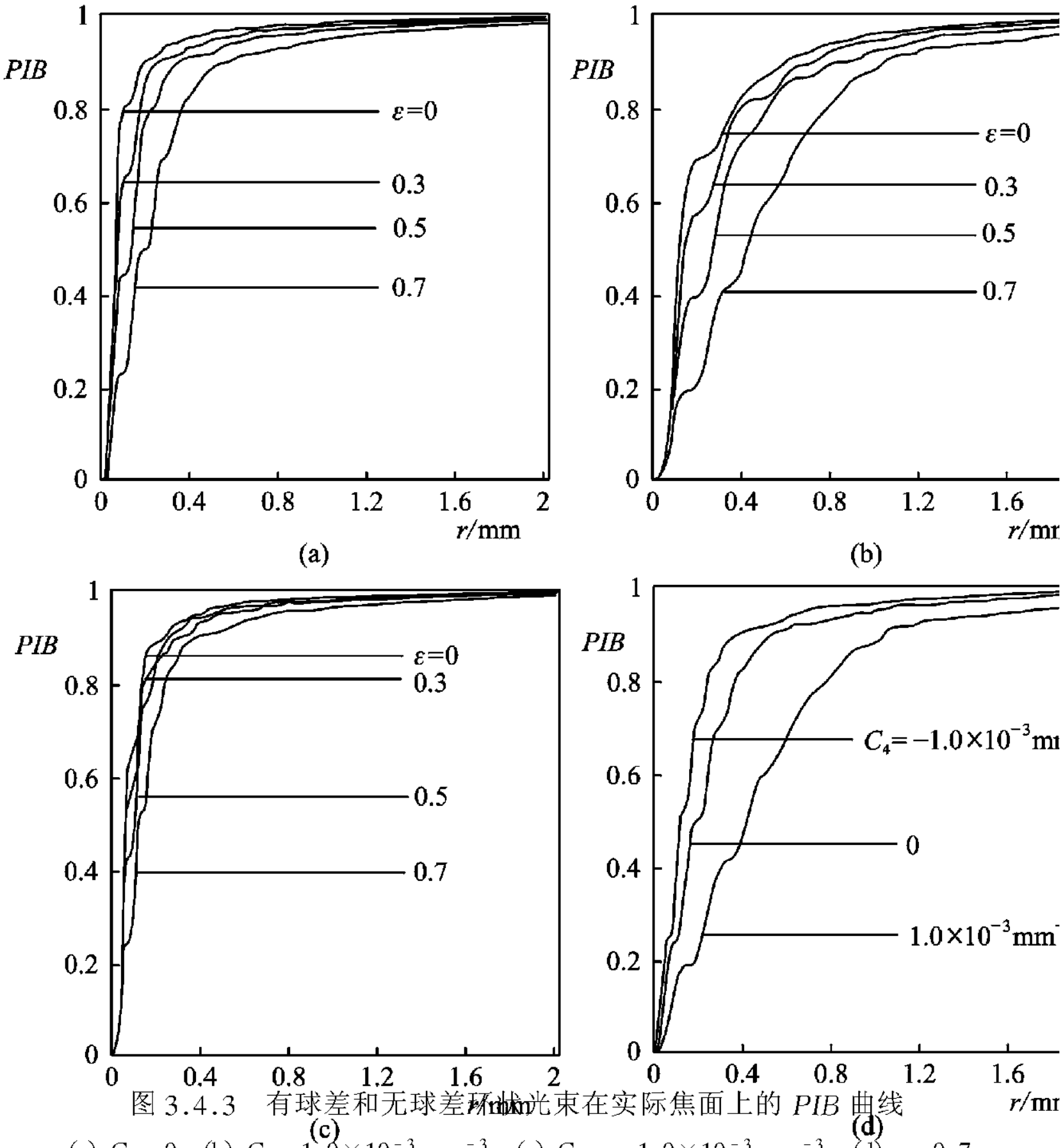


图 3.4.3　有球差和无球差环状光束在实际焦面上的 *PIB* 曲线

(a) $C_4=0$；(b) $C_4=1.0\times10^{-3}\ \mathrm{mm}^{-3}$；(c) $C_4=-1.0\times10^{-3}\ \mathrm{mm}^{-3}$；(d) $\varepsilon=0.7$

表 3.4.1　β_1 和 β_2 参数

β_1,β_2	ε			
	0	0.3	0.5	0.7
β_1（几何焦面上，$C_4=\pm1.0\times10^{-3}\ \mathrm{mm}^{-3}$）	5.04	5.37	6.68	8.98
β_1（实际焦面上，$C_4=1.0\times10^{-3}\ \mathrm{mm}^{-3}$）	2.00	3.77	4.43	7.98
β_1（实际焦面上，$C_4=-1.0\times10^{-3}\ \mathrm{mm}^{-3}$）	1.01	1.55	1.64	2.38
β_2（几何焦面上，$C_4=\pm1.0\times10^{-3}\ \mathrm{mm}^{-3}$）		4.49	2.79	2.32
β_2（实际焦面上，$C_4=1.0\times10^{-3}\ \mathrm{mm}^{-3}$）		2.98	1.92	2.22
β_2（实际焦面上，$C_4=-1.0\times10^{-3}\ \mathrm{mm}^{-3}$）		1.22	0.71	0.66

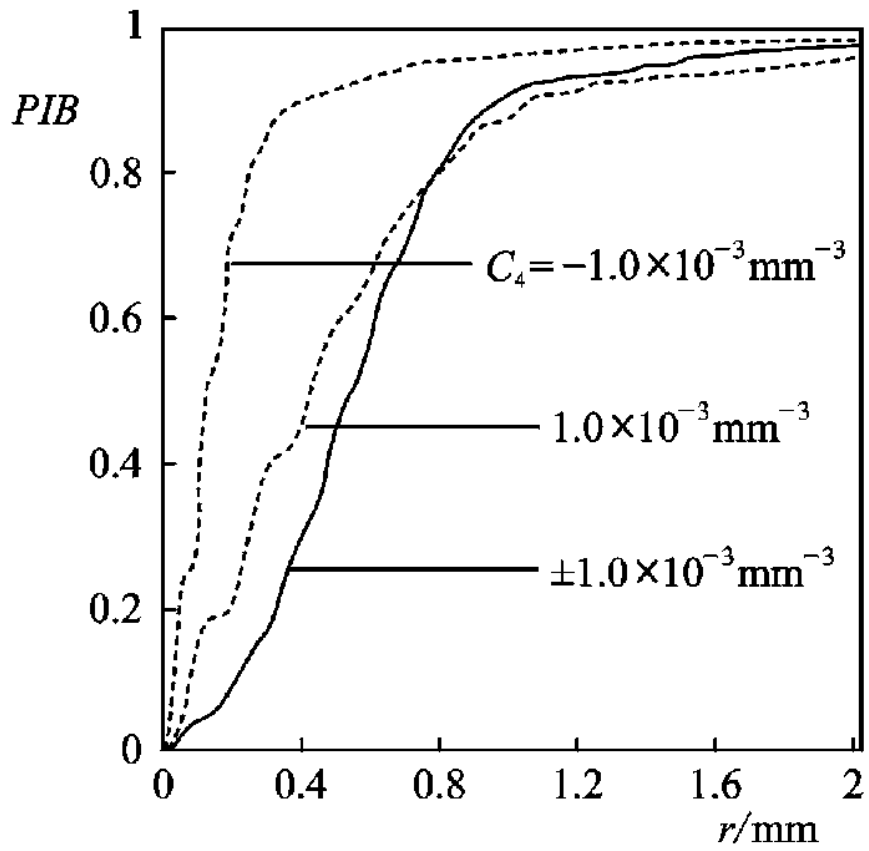


图 3.4.4　环状光束在几何焦面(用实线表示)和
实际焦面(用虚线表示)上 *PIB* 曲线的比较，$\varepsilon=0.7$

由常规非稳腔输出的光束在近场多呈环状. 从上面的分析可知，用 *PIB* 和 β 参数是实际工作中评价有硬边光阑衍射非稳腔输出激光光束质量的一个有效方法.

三、瞄准稳定性

光束的瞄准稳定性描述在时间平均意义上光束在空间瞄准或聚焦的精度. 瞄准稳定性可用失调叠加积分 η_m 来确定. 在直角坐标系下，η_m 定义为

$$\eta_m=\frac{1}{p}\int E(x)\left[E(x-\delta)\exp(-\mathrm{i}k\alpha x)\right]^* \mathrm{d}x \qquad (3.4.10)$$

式中 $E(x)$、$E(x-\delta)\exp(-\mathrm{i}k\alpha x)$分别表示未失调光束和实际测量光束的场分布，$\delta$ 和 α 分别是实际光束的线偏移和角偏移. $p=\int_{-\infty}^{+\infty}|E(x)|^2\mathrm{d}x$. $0\leqslant\eta_m\leqslant1$，$\eta_m=0$、1 时分别为完全失调和无失调情形. 实际工作中，通常处理的是$|\delta|$、$|\alpha|$都较小的情况，此时有

$$|\eta_m|\approx1-(M^2)^2\left(\frac{\alpha^2}{\theta^2}+\frac{\delta^2}{\omega_0^2}\right) \qquad (3.4.11)$$

式中 ω_0、θ 分别为未失调光束的束腰宽度和远场发散角，M^2 为 M^2 因子. 在推导式(3.4.11)时，已设积分在束腰处进行.

光束的瞄准稳定性参数 P_s 定义为在测量时间 T 内失调叠加积分 $|\eta_m|^2$的平均值

$$P_s=\frac{1}{T}\int_0^T|\eta_m(t)|^2\mathrm{d}t \qquad (3.4.12)$$

式(3.4.12)同时表示了光束失调线位移、角位移对时间平均意义上瞄准稳定性的影响，可作为瞄准稳定性的评价参数.

§3.5　激光束的描述：强度矩方法

可用多种方法描述激光束.在§3.1和§3.2中我们已引入了用强度二阶矩定义激光光束参数的方法.本节对描述激光束的强度矩方法做较为详细的讨论.

一、一阶矩

设在 z 平面处三维光束的光强为 $I(x,y,z)$，光束 x 方向强度的一阶矩决定光束 x 方向的重心位置，定义为

$$\langle x(z)\rangle=\frac{1}{p}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xI(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3.5.1}$$

式中

$$p=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}I(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3.5.2}$$

类似地，对 $\langle y(z)\rangle$ 有

$$\langle y(z)\rangle=\frac{1}{p}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yI(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3.5.3}$$

若光束重心在原点(0,0,0)，则 $\langle x(z)\rangle$、$\langle y(z)\rangle=0$.

光束在远场的重心位置由

$$\langle\theta_x\rangle=\frac{\lambda^2}{p}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\theta_xI_{\mathrm{F}}(\theta_x,\theta_y)\mathrm{d}\theta_x\mathrm{d}\theta_y \tag{3.5.4}$$

$$\langle\theta_y\rangle=\frac{\lambda^2}{p}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\theta_yI_{\mathrm{F}}(\theta_x,\theta_y)\mathrm{d}\theta_x\mathrm{d}\theta_y \tag{3.5.5}$$

确定，式中 $I_{\mathrm{F}}(\theta_x,\theta_y)$ 为光束在远场的光强，由傅里叶光学知，它就等于空间频率域中的光强.

一阶矩通过近轴 $ABCD$ 光学系统的传输遵从 $ABCD$ 定律，即

$$\begin{bmatrix}\langle x_2\rangle\\ \langle y_2\rangle\\ \langle\theta_{x2}\rangle\\ \langle\theta_{y2}\rangle\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&B_{11}&B_{12}\\ A_{21}&A_{22}&B_{21}&B_{22}\\ C_{11}&C_{12}&D_{11}&D_{12}\\ C_{21}&C_{22}&D_{21}&D_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\langle x_1\rangle\\ \langle y_1\rangle\\ \langle\theta_{x1}\rangle\\ \langle\theta_{y1}\rangle\end{bmatrix} \tag{3.5.6}$$

或写为

$$\begin{cases} \langle x_2\rangle = A_{11}\langle x_1\rangle + A_{12}\langle y_1\rangle + B_{11}\langle \theta_{x1}\rangle + B_{12}\langle \theta_{y1}\rangle & (3.5.7)\\ \langle y_2\rangle = A_{21}\langle x_1\rangle + A_{22}\langle y_1\rangle + B_{21}\langle \theta_{x1}\rangle + B_{22}\langle \theta_{y1}\rangle & (3.5.8)\\ \langle \theta_{x2}\rangle = C_{11}\langle x_1\rangle + C_{12}\langle y_1\rangle + D_{11}\langle \theta_{x1}\rangle + D_{12}\langle \theta_{y1}\rangle & (3.5.9)\\ \langle \theta_{y1}\rangle = C_{21}\langle x_1\rangle + C_{22}\langle y_1\rangle + D_{21}\langle \theta_{x1}\rangle + D_{22}\langle \theta_{y1}\rangle & (3.5.10) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & B_{11} & B_{12} \\ A_{21} & A_{22} & B_{21} & B_{22} \\ C_{11} & C_{12} & D_{11} & D_{12} \\ C_{21} & C_{22} & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \tag{3.5.11}$$

$\boldsymbol{M}$ 为辛矩阵,它满足条件

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{J}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{J} \tag{3.5.12}$$

亦可写为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} &= \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} &= \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} &= \boldsymbol{D}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{3.5.13}$$

式中

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{E} \\ -\boldsymbol{E} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.5.14}$$

为 4×4 矩阵,$\boldsymbol{E}$ 为 2×2 单位矩阵,上标 T 表示转置运算.

二、二阶矩

引入 4×4 方差矩阵

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} \langle x^2\rangle & \langle xy\rangle & \langle x\theta_x\rangle & \langle x\theta_y\rangle \\ \langle yx\rangle & \langle y^2\rangle & \langle y\theta_x\rangle & \langle y\theta_y\rangle \\ \langle \theta_x x\rangle & \langle \theta_x y\rangle & \langle \theta_x^2\rangle & \langle \theta_x\theta_y\rangle \\ \langle \theta_y x\rangle & \langle \theta_y y\rangle & \langle \theta_y\theta_x\rangle & \langle \theta_y^2\rangle \end{bmatrix} \tag{3.5.15}$$

式中以光束重心为参考,二阶矩 $\langle x^2(z)\rangle$、$\langle \theta_x^2\rangle$ 和混合矩 $\langle x(z)\theta_x\rangle$ 等的定义式为

$$\langle x^2(z)\rangle = \frac{1}{p}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 I(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3.5.16}$$

$$\langle \theta_x^2\rangle = \frac{\lambda^2}{p}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \theta_x^2 I_{\mathrm{F}}(\theta_x,\theta_y)\mathrm{d}\theta_x\mathrm{d}\theta_y \tag{3.5.17}$$

$$\langle x(z)\theta_x\rangle = -\frac{\mathrm{i}\lambda}{4\pi p}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\left[E(x,z)\frac{\partial E^*(x,z)}{\partial x} - E^*(x,z)\frac{\partial E(x,z)}{\partial x}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3.5.18}$$

且有

$$\langle yx\rangle = \langle xy\rangle,\ \langle\theta_x\theta_y\rangle = \langle\theta_y\theta_x\rangle,\ \langle\theta_x x\rangle = \langle x\theta_x\rangle,\ \langle y\theta_y\rangle = \langle\theta_y y\rangle \tag{3.5.19}$$

由式(3.5.19)知，$\boldsymbol{V}$ 矩阵 16 个矩阵元中最多有 10 个独立变数. 式中各矩阵元的物理意义为

$$w_x = 2\sqrt{\langle x^2\rangle},\quad w_y = 2\sqrt{\langle y^2\rangle} \tag{3.5.20}$$

$$\theta_x = 2\sqrt{\langle\theta_x^2\rangle},\quad \theta_y = 2\sqrt{\langle\theta_y^2\rangle} \tag{3.5.21}$$

$$R_x = \frac{\langle x^2\rangle}{\langle x\theta_x\rangle},\quad R_y = \frac{\langle y^2\rangle}{\langle y\theta_y\rangle} \tag{3.5.22}$$

$\langle xy\rangle$、$\langle\theta_x\theta_y\rangle$ 分别表示光束在近场和远场的取向，$\langle x\theta_y\rangle$、$\langle y\theta_x\rangle$ 为与光束扭曲有关的参数.

可证明，$\boldsymbol{V}$ 矩阵通过由式(3.5.11)表征的近轴光学系统的传输满足

$$\boldsymbol{V}_2 = \boldsymbol{M}\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}} \tag{3.5.23}$$

将式(3.5.23)改写为

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{W} & \boldsymbol{M}\\ \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{U}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & M_{11} & M_{12}\\ W_{21} & W_{22} & M_{21} & M_{22}\\ M_{11} & M_{21} & U_{11} & U_{12}\\ M_{12} & M_{22} & U_{21} & U_{22}\end{bmatrix} \tag{3.5.24}$$

利用式(3.5.24)，可将三维光束分为四大类：

(1) 无像散光束

无像散光束的矩阵元满足

$$W_{11} = W_{22},\ M_{11} = M_{22},\ U_{11} = U_{22},\ W_{12} = M_{12} = M_{21} = U_{12} = 0 \tag{3.5.25}$$

其独立变数最多有 3 个，为旋转对称光束

(2) 准直简单像散光束

矩阵元满足

$$W_{12} = M_{12} = M_{21} = U_{12} = 0 \tag{3.5.26}$$

称为准直简单像散光束，它最多有 6 个独立变数，光束的两个主轴与实验室 x、y 坐标取向一致.

(3) 旋转简单像散光束

这时有

$$M_{12}=M_{21},\ \frac{W_{12}}{W_{11}-W_{22}}=\frac{M_{12}}{M_{11}-M_{22}}=\frac{U_{12}}{U_{11}-U_{22}}=\frac{1}{2}\arctan(2\varphi) \tag{3.5.27}$$

将 $\boldsymbol{W}$、$\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{U}$ 旋转 φ 角后可使光束两主轴沿实验室 x、y 坐标方向，旋转简单像散光束最多有 7 个独立变数.

(4) 复杂像散光束

复杂像散光束最多有 10 个独立变数，最少有 4 个独立变数，有扭曲存在. 可证明，一般情况下，光束有两个传输不变量，即

$$M_{\mathrm{eff}}^4=4k^2(\det\ \boldsymbol{V})^{\frac{1}{2}}\geqslant 1 \tag{3.5.28}$$

$$a=2k^2T\geqslant 1 \tag{3.5.29}$$

式中

$$T=(W_{11}U_{11}-M_{11}^2)+(W_{22}U_{22}-M_{22}^2)+2(W_{12}U_{12}-M_{12}M_{21}) \tag{3.5.30}$$

k 为波数，det 表示行列式值. M_{eff}^2 称为总光束传输因子 (overall beam propagation factor)，a 描述光束的本征像散 (intrinsic astigmatism). 对无像散光束，式(3.5.28)、(3.5.29)简化为

$$M_{\mathrm{eff}}^4=(M^2)^2 \tag{3.5.31}$$

$$a=(M^2)^2 \tag{3.5.32}$$

式中 M^2 为式(3.1.7)定义的 M^2 因子.

对准直简单像散光束，有

$$M_{\mathrm{eff}}^4=M_x^2M_y^2 \tag{3.5.33}$$

$$a=\frac{1}{2}[(M_x^2)^2+(M_y^2)^2] \tag{3.5.34}$$

M_x^2、M_y^2 分别为 x 和 y 方向的 M^2 因子. 对旋转简单像散光束和复杂像散光束，M_{eff}^4 和 a 是两个独立的传输不变量.

三、高阶矩

光束强度的高阶矩用维格纳分布函数可以简单地表示出来. 对二维光束 $(m+n)$ 阶强度矩定义为

$$\langle x^m\theta_x^n\rangle=\frac{1}{p}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^m\theta_x^nh(x,\theta_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}\theta_x \tag{3.5.35}$$

式中

$$h(x,\theta_x)=\frac{k}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\mathrm{i}k\theta_xs)\left\langle E\left(x-\frac{s}{2}\right)E^*\left(x+\frac{s}{2}\right)\right\rangle_t\mathrm{d}s \tag{3.5.36}$$

为维格纳分布函数，$\Diamond_t$ 表示对时间平均.

$(m+n)$阶强度矩通过近轴 $ABCD$ 光学系统传输的 $ABCD$ 定律为

$$\langle x_2^m \theta_{x_2}^n \rangle = \langle (Ax_1 + B\theta_{x_1})^m (Cx_1 + D\theta_{x_1})^n \rangle \tag{3.5.37}$$

特别是，对 $\langle x^m \rangle$ 和 $\langle \theta_x^m \rangle$ 有

$$\langle x_2^m \rangle = \langle (Ax_1 + B\theta_{x_1})^m \rangle \tag{3.5.38}$$

$$\langle \theta_{x_2}^n \rangle = \langle (Cx_1 + D\theta_{x_1})^n \rangle \tag{3.5.39}$$

§3.6 光束控制

光束控制可解释为对激光光束质量进行控制，使之满足应用要求.由前面的分析知道，对激光光束质量尚无统一认识，描述光束质量的参数也可能因为应用目的而异，因此对光束控制的理解也不统一.对用 M^2 因子表征激光器光束质量情况，光束控制的意义就是采取适当的技术措施使激光器输出激光光束质量达到要求(例如设计的 M^2 值).然而，由于对实际的复杂激光系统和不同的应用需求对激光从“质”方面的要求往往是多方面的，有时甚至是十分苛刻的，使光束控制的物理内涵更加丰富，光束控制的技术难度大为增加.这时，需要对复杂光学系统(包括激光系统、发射光学系统和传输通道)进行全程光束质量控制，使之最终在激光与物质相互作用面上的诸多参数，例如功率(能量)集中度、瞄准稳定性、时间持续性以及空间和时间波形等均能满足应用要求，并且还可按照不同应用目的，灵活改变这些(或其中部分)参数.因此，实施全程光束控制要求按应用需求确定总系统的光束控制参数和指标，将指标进行分解，对各分系统分别实施光束控制.这需要对各分系统分别采用不同技术措施来实现，并且还应建立相应的光束控制评价体系和参数测试系统，对复杂的高功率激光系统这是一项技术难度非常大的工作.

光束控制技术包括的范围很广，例如：

- 抑制激光器高阶横模振荡，减小 M^2 因子的各种技术
- 像散光束的对称化变换
- 光束的空间和时间整形技术
- 靶面均匀辐照技术
- 捕获、跟踪和瞄准技术

等等，已超出本书范围，有兴趣的读者可参考相关文献，例如本章末参考文献[26]和[27].

习　　题

1. 使用二阶矩方法定义束宽和描述激光光束质量有什么优点？存在什么问题？试述个人见解.

2. 为什么说 M^2 因子的测量实质上归结为束宽的测量？在实际测量中会有些什么困难？如何克服？

3. 推导式(3.2.5)，该式对任意光束都成立吗？为什么？

4. 推导出用三点法测量 M^2 因子的计算公式.

5. 当光束受到硬边光阑衍射时，M^2 因子的计算遇到什么困难？能否克服？试举例说明.

6. 在近轴近似下，有可能使 $M^2<1$ 吗？为什么？

7. 用“桶中功率”评价激光远场光束质量有何优、缺点？为什么？

8. 证明对自由空间传输，有 $\langle\theta_x^2(z)\rangle=\langle\theta_x^2(0)\rangle$.

9. 由式(3.5.12)推导出式(3.5.13)，并证明式(3.5.13)可等价地表示为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$$

10. 证明式(3.5.23) $\boldsymbol{V}_2=\boldsymbol{M}\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}$.

11. 试述复杂像散光束 10 个独立参数的物理意义，并设计一个实验方案来测量这 10 个独立参数.

12. 阅读参考文献[9]，推导出广义光束的束宽、远场发散角、平均波前曲率半径公式和广义 *ABCD* 定律.

参 考 文 献

[1] Siegman A E. New development in laser resonator. SPIE, 1990, 2: 1 224

[2] Weber H. Some historical and technical aspects of beam quality. Opt & Quant Electron, 1992, 24: 861

[3] Weber H. Propagation of higher－order intensity moments in quadratic－index media. Opt & Quant Electron, 1992, 24: 1 027

[4] Martinez－Herrero R, Mejias P M, et al. Third－and forth－order parametric characterization of partially coherent beams propagating through *ABCD* optical systems. Opt & Quant Electron, 1992, 24: 1 021

[5] Martinez－Herrero R, Mejias P M, Arias M. Parametric characterization of coherent, lowest－order Gaussian beams propagating through hard－edged apertures. Opt Lett, 1995, 20: 124

[6] Pare C, Belanger P A. Propagation law and quasi－invariance properties of the

truncated second－order moment of a diffracted laser beam. Opt Commun，1996，123:679

[7] Amarande S，Giesen A，Hügel H. Propagation analysis of self－convergent beam width and characterization of hard－edge diffraction beams. Appl Opt，2000，39: 3 914

[8] Morin M，Bernard P，Galarneau P. Moment definition of the pointing stability of a laser beam. Opt Lett，1994，15: 1 379

[9] Belanger P A. Beam propagation and the *ABCD* ray matrices. Opt Lett，1991，16:196

[10] Nemes G，Serna J. Laser beam characterization with use of second order moments: an overview. TOPS，1998，17:200

[11] Garay A. Continuous wave deuterium fluoride laser beam diagnostic system. SPIE 1998，888:17

[12] Gao C，Weber H. The problems with M^2. Opt & Laser Tech，2000，32: 221

[13] 杜祥琬．实际强激光远场靶面上光束质量的评价因素．中国激光，1997，24:327

[14] Lü B，Zhang B，Cai B. A simple method for estimation the number of effectively oscillating models and weighting factors of mixed－mode laser beams behaving like Gaussian Schell－model beams. Opt Commun，1993，101:49

[15] Zhang B，Lü B. Transformation of Gaussian schell－model beams and their coherent－model representation. J Optics (Paris)，1996，27:99

[16] Lü B. Characterization of high－power laser beams and related problems of beam quality. Journal of the GCPD，1998，4:27

[17] Lü B，Zhang B. Mode expansion for Gaussian Schell－model beams with partially correlated modes. J Opt Soc Am A，1999，16:2 453

[18] Lü B，Zhang B，Ma H. Beam－propagation factor and mod－coherence coefficients of hyperbolic－cosine－Gaussian beams. Opt Lett，1999，24:640

[19] Zhang B，Lü B. Coherent－mode decomposition of Bessel－Gaussian beams. J Opt Soc Am A，1999，16:1 413

[20] Lü B，Luo S. General propagation equation of flattened Gaussian beams. J Opt Soc Am A，2000，17:2001

[21] Lü B，Ma H. Beam quality characterization of a radial laser array. J Mod Opt，2001，48:85

[22] Lü B，Ji X，Luo S. The beam quality of annular lasers and related problems. J Mod Opt，2001，48:1 171

[23] Lü B，Luo S. Asymptotic approach to the truncated cosh－Gaussian beams. Opt & Quant Electron，2001，33:107

[24] Lü B, Qing Y. Self－convergent beam width approach to truncated Hermite－cosh－Gaussian beams and a comparison with the asymptotic analysis. Opt Commun, 2001, 199: 25

[25] Lü B, Luo S. The pointing stability of flattened Gaussian beams. J Mod Opt, 2002, 49: 1 089

[26] 杜祥琬主编．高技术要览(激光卷)．北京：科学普及出版社，2003

[27] 吕百达．强激光的传输与控制．北京：国防工业出版社，1999

第四章　高斯光束

本章研究高斯光束及其传输变换特性，这是激光光学的一个重要研究内容.首先证明，高斯光束是亥姆霍兹方程在缓变振幅近似下的一个特解，它可以足够好地描述基模激光束的性质.使用高斯光束复参数表示和*ABCD*定律能统一而又简洁地处理高斯光束在腔内、外的传输变换问题.在本章中使用这一方法详细研究了高斯光束通过光学成像系统、非均匀介质、各向异性介质的传输变换规律，还研究了高斯光束和高阶高斯光束的焦移、高斯光束通过有光阑光学系统的变换、像散厄米－高斯光束的对称化、复宗量厄米－高斯光束和非近轴高斯光束等问题.最后讨论了高斯光束参数的实验测量方法.

§4.1　高斯光束的基本性质

一、高斯光束是亥姆霍兹方程在缓变振幅近似下的一个特解

由§1.2知，稳态传输电磁场满足亥姆霍兹方程：

$$\Delta E(x,y,z)+k^2E(x,y,z)=0 \tag{4.1.1}$$

式中$E(x,y,z)$与电场强度的复数表示$E(x,y,z,t)$间有关系

$$E(x,y,z,t)=E(x,y,z)\exp(\mathrm{i}\omega t) \tag{4.1.2}$$

容易证明，平面波和球面波都是式(4.1.1)的特解.高斯光束则不同，它不是式(4.1.1)的精确解，而是在缓变振幅近似(SVA)下的一个特解.设

$$E(r,z)=A(r,z)\exp(-\mathrm{i}kz) \tag{4.1.3}$$

且在$z=0$处有一振幅为

$$A(r,z)\Big|_{z=0}=A(r,0)=A_0\exp(-r^2/w_0^2) \tag{4.1.4}$$

的高斯光束，然后求在任意z处的$A(r,z)$.式中w_0为束腰，A_0为振幅常量，如果只考虑相对值，则可由归一化条件求出.

设试解为

$$A(r,z)=A_0f_1(z)\exp\left[-f_2(z)\frac{r^2}{w_0^2}\right] \tag{4.1.5}$$

式中 $f_1(z)$、$f_2(z)$为待定函数，满足

$$f_1(0)=f_2(0)=1 \tag{4.1.6}$$

将式(4.1.5)微分后代入式(1.2.21)，由该方程对任意 r 成立条件得到关系式：

$$\begin{cases}\dfrac{2f_2^2}{w_0^2}+\mathrm{i}kf_2'=0\\[2ex]\dfrac{2f_1f_2}{w_0^2}+\mathrm{i}kf_1'=0\end{cases} \tag{4.1.7}$$

式中撇号表示$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$.微分方程组(4.1.7)在边界条件为式(4.1.6)时的解为

$$f_1(z)=f_2(z)=\frac{1}{1-\mathrm{i}z(2/kw_0^2)}=\frac{1}{1-\mathrm{i}z/Z_0} \tag{4.1.8}$$

式中

$$Z_0=\frac{1}{2}kw_0^2=\frac{\pi w_0^2}{\lambda} \tag{4.1.9}$$

称为瑞利尺寸或共焦参数.

于是我们证明了，形如

$$A(r,z)=\frac{A_0}{1-\mathrm{i}z/Z_0}\exp\left(-\frac{r^2/w_0^2}{1-\mathrm{i}z/Z_0}\right) \tag{4.1.10}$$

的高斯光束是亥姆霍兹方程(4.1.1)在缓变振幅近似下的一个特解.其物理意义为：如果在 $z=0$ 处有一形如式(4.1.4)的高斯光束，则它将以式(4.1.10)非均匀高斯球面波的形式在空间传输.

式(4.1.10)可改写为

$$A(r,z)=\frac{A_0w_0}{w(z)}\exp\left[-\frac{r^2}{w^2(z)}\right]\exp\left\{-\mathrm{i}\left[\frac{kr^2}{2R(z)}-\Psi\right]\right\} \tag{4.1.11}$$

式中

$$w(z)=w_0\sqrt{1+(z/Z_0)^2}\qquad\text{(高斯光束的束宽)} \tag{4.1.12}$$

$$R(z)=Z_0\left(\frac{z}{Z_0}+\frac{Z_0}{z}\right)\qquad\text{(高斯光束的等相面曲率半径)} \tag{4.1.13}$$

$$\Psi=\tan^{-1}\frac{z}{Z_0}\qquad\text{(高斯光束的相位因子)} \tag{4.1.14}$$

为高斯光束的三个重要参量，其物理意义将在下面讨论.

利用式(4.1.11)可将 $E(r,z)$表为

$$E(r,z)=\underbrace{\frac{A_0 w_0}{w(z)}\exp\left[-\frac{r^2}{w^2(z)}\right]}_{\text{振幅部分}}\underbrace{\exp\left\{-\mathrm{i}\left\{k\left[\frac{r^2}{2R(z)}+z\right]-\Psi\right\}\right\}}_{\text{相位部分}} \tag{4.1.15}$$

二、高斯光束的基本性质

由式(4.1.14)～式(4.1.18)知，高斯光束有以下基本性质(图4.1.1)：

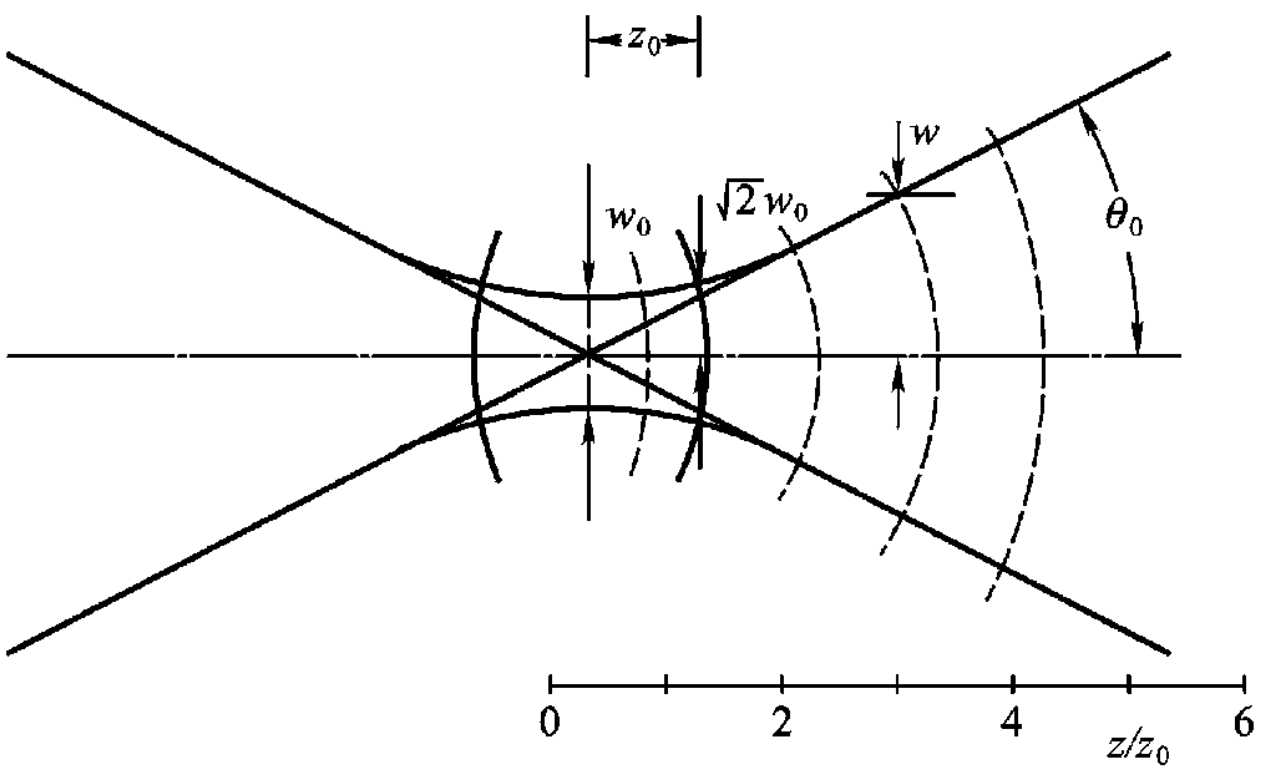


图4.1.1　高斯光束

1. 高斯光束在 $z=\text{const}$ 的面内场振幅以高斯函数 $\exp[-r^2/w^2(z)]$ 的形式从中心向外平滑地减小. 按式(3.1.10)二阶矩定义，由式(4.1.15)求出的 $w(z)$ 称为高斯光束的束宽. 显然，对高斯光束，$w(z)$ 也等于场振幅减小到中心值 1/e 处的 r 值. 由式(4.1.12)可知，束宽 $w(z)$ 随坐标 z 按双曲线

$$\frac{w^2(z)}{w_0^2}-\frac{z^2}{Z_0^2}=1 \tag{4.1.16}$$

规律向外扩展. $z=0$ 时，$w(0)=w_0$ 取最小值.

2. 高斯光束的等相面

所谓等相面是指相位相同点的轨迹，一般为空间曲面. 对高斯光束可由式(4.1.15)中令相位部分等于常数得出，即

$$k\left[\frac{r^2}{2R(z)}+z\right]-\Psi(z)=\text{const} \tag{4.1.17}$$

在近轴条件下，可略去 $\Psi(z)$ 项，

$$\frac{r^2}{2R(z)}+z=\text{const} \tag{4.1.18}$$

式(4.1.18)说明,除 $z=0$ 面附近之外,等相面为抛物型.式(4.1.18)也是原点在(0,0,a)、半径为 R 的球面方程

$$x^2+y^2+(z-a)^2=R^2 \tag{4.1.19}$$

的近轴形式.因此,可以认为高斯光束的等相面为球面,球面的曲率半径 $R(z)$ 由式(4.1.13)决定,且有

$z=0$,$R\to\infty$ 等相面为平面

$z\ll Z_0$,$R\sim Z_0^2/z$ 等相面亦可近似视为平面

$z=\pm Z_0$,$R=2Z_0$ 取极小值

$z\gg Z_0$,$R\to z$ 在远场处可将高斯光束近似视为一个由 $z=0$ 点发出,半径为 z 的球面波.

此外,还应当注意,高斯光束等相面的曲率中心并不是一个固定点,它随着光束的传输而移动.

3. 高斯光束的相移

由式(4.1.15)知,总相移

$$\phi(r,z)=k\left[z+\frac{r^2}{2R(z)}\right]-\Psi(z) \tag{4.1.20}$$

它表征高斯光束在点(r,z)处相对于原点(0,0)的相位差.其中 kz 为几何相移,$kr^2/2R(z)$ 表示与径向有关的相移,$\Psi(z)=\tan^{-1}(z/Z_0)$ 为高斯光束在空间传输距离 z 时相对于几何相移产生的附加相移.

4. 瑞利长度(共焦参数)

由式(4.1.9)知,瑞利长度的物理意义为:当 $|z|=Z_0$ 时,$w(Z_0)=\sqrt{2}w_0$.在实用中常取 $|z|\leqslant Z_0$ 范围为高斯光束的准直范围,在这段长度内,高斯光束可以近似认为是平行的.所以,瑞利长度越长,就意味着高斯光束的准直范围越大,反之亦然.

5. 远场发散角

高斯光束远场发散角 θ_0 可用下式定义

$$\theta_0=\lim_{z\to\infty}\frac{w(z)}{z} \tag{4.1.21}$$

利用式(4.1.12)求极限得

$$\theta_0=\frac{\lambda}{\pi w_0} \tag{4.1.22}$$

可知高斯光束远场发散角 θ_0 在数量级上等于以束宽 w_0 为半径的光束的衍射角,即它已达到了衍射极限.容易证明,式(4.1.21)和用二阶矩定义式(3.2.1)求出高斯光束远场发散角的公式是相同的.

利用式(4.1.12)、式(4.1.13)可将式(4.1.22)改写为

$$\theta_0=\sqrt{\left[\frac{w(z)}{R(z)}\right]^2+\left[\frac{\lambda}{\pi w(z)}\right]^2} \tag{4.1.23}$$

由此可知，高斯光束的远场发散角包含了在传输距离 z 处光束的几何张角与衍射发散两部分的贡献. 式(4.1.22)实际上是高斯光束在自由空间中传输时的远场发散角公式. 当考虑高斯光束在光学谐振腔中的传输问题时，式(4.1.23)是比式(4.1.22)更一般的公式.

综上所述，可知高斯光束在其轴线附近可以看做是一种非均匀高斯球面波，在传输过程中曲率中心不断改变，其振幅在横截面内为一高斯函数，强度集中在轴线及其附近，且等相面保持为球面(特殊范围内为平面).

§4.2 高阶高斯光束

一、高阶高斯光束

由式(4.1.14)表征的高斯光束通常称为基模(TEM_{00})高斯光束. 除此以外，还存在高阶高斯光束，相应于高阶横模(TEM_{pl} 或 TEM_{mn}).

利用拉盖尔多项式的递推公式，仿前推导，可以证明形如

$$E_{pl}(r,\varphi,z)=\frac{A_{pl}w_0}{w}\left(\sqrt{2}\frac{r}{w}\right)^l \mathrm{L}_p^l\left(2\frac{r^2}{w^2}\right)\exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right)\cdot$$
$$\exp\left\{-\mathrm{i}\left[k\left(z+\frac{r^2}{2R}\right)-(2p+l+1)\tan^{-1}\frac{z}{Z_0}\right]\right\}\begin{Bmatrix}\cos l\varphi\\ \sin l\varphi\end{Bmatrix} \tag{4.2.1}$$

的拉盖尔－高斯函数，也是亥姆霍兹方程在缓变振幅近似下式(1.2.22)的一个特解. 式中 $\mathrm{L}_p^l\left(2\frac{r^2}{w^2}\right)$ 为缔合拉盖尔多项式. (r,φ,z) 为场点的柱坐标. 与基模高斯光束比较，柱对称系统中高阶高斯光束的横向场分布由函数 $\mathrm{L}_p^l\left(2\frac{r^2}{w^2}\right)\exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right)\begin{Bmatrix}\cos l\varphi\\ \sin l\varphi\end{Bmatrix}$ 决定，它沿径向 r 有 p 个节线圆，沿辐角 φ 方向有 l 根节线. TEM_{pl} 模高斯光束的相移为

$$\phi(r,\varphi,z)=k\left(z+\frac{r^2}{2R}\right)-(2p+l+1)\tan^{-1}\frac{z}{Z_0} \tag{4.2.2}$$

利用特殊函数的数学理论可以证明，由式(4.2.1)所表征的解构成正交完备系，选择适当常数 A_{pl}，可使它归一化.

容易证明，形如

$$A(x,y,z)=\frac{A_{mn}w_0}{w}\mathrm{H}_m\left(\frac{\sqrt{2}}{w}x\right)\mathrm{H}_n\left(\frac{\sqrt{2}}{w}y\right)\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{w^2}\right)\cdot$$
$$\exp\left\{-\mathrm{i}\left[k\left(z+\frac{x^2+y^2}{2R}\right)-(m+n+1)\tan^{-1}\frac{z}{Z_0}\right]\right\} \tag{4.2.3}$$

的厄米－高斯函数为式(1.2.21)的一个特解，式中 $\mathrm{H}_m\left(\frac{\sqrt{2}}{w}x\right)$ 和 $\mathrm{H}_n\left(\frac{\sqrt{2}}{w}y\right)$ 分别为m 阶和 n 阶厄米多项式.于是

$$E_{mn}(x,y,z)=A(x,y,z)\exp(-\mathrm{i}kz) \tag{4.2.4}$$

厄米－高斯函数所表征的高阶高斯光束 TEM_{mn} 的横向场分布由函数

$$\mathrm{H}_m\left(\frac{\sqrt{2}}{w}x\right)\mathrm{H}_n\left(\frac{\sqrt{2}}{w}y\right)\exp[-(x^2+y^2)/w^2] \tag{4.2.5}$$

描述，它沿 x 方向有 m 条节线，沿 y 方向有 n 条节线，其相移为

$$\phi(x,y,z)=k\left(z+\frac{x^2+y^2}{2R}\right)-(m+n+1)\tan^{-1}\frac{z}{Z_0} \tag{4.2.6}$$

由式(4.2.3)所表示的解也构成正交完备系，A_{mn} 为归一化常数.

基模高斯光束和高阶高斯光束(对应于多模情况)通称高斯光束，今后未做特殊说明时，一般指的是基模高斯光束.

二、高阶高斯光束的束宽和远场发散角

1. 厄米－高斯光束

按二阶矩定义.对式(4.2.4)所示的厄米－高斯光束，在 x 方向的束宽 $w_m(z)$ 为

$$w_m^2(z)=\frac{4\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\mathrm{H}_m^2\left(\frac{\sqrt{2}}{w}x\right)\exp\left(-\frac{2x^2}{w^2}\right)\mathrm{d}x}{\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{H}_m^2\left(\frac{\sqrt{2}}{w}x\right)\exp\left(-\frac{2x^2}{w^2}\right)\mathrm{d}x}=(2m+1)w^2(z) \tag{4.2.7}$$

类似地，在 y 方向的束宽 $w_n(z)$ 为

$$w_n^2(z)=\frac{4\int_{-\infty}^{+\infty}y^2\mathrm{H}_n^2\left(\frac{\sqrt{2}}{w}y\right)\exp\left(-\frac{2y^2}{w^2}\right)\mathrm{d}y}{\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{H}_n^2\left(\frac{\sqrt{2}}{w}y\right)\exp\left(-\frac{2y^2}{w^2}\right)\mathrm{d}y}=(2n+1)w^2(z) \tag{4.2.8}$$

我们仍使用(4.1.21)来定义高阶高斯光束的远场发散角，则在 x 和 y 方向的 θ_m 和 θ_n 分别为

$$\theta_m = \lim_{z\to\infty}\frac{w_m(z)}{z} = \sqrt{2m+1}\lim_{z\to\infty}\frac{w(z)}{z} = \sqrt{2m+1}\frac{\lambda}{\pi w_0} = \sqrt{2m+1}\theta_0 \tag{4.2.9}$$

$$\theta_n = \lim_{z\to\infty}\frac{w_n(z)}{z} = \sqrt{2n+1}\lim_{z\to\infty}\frac{w(z)}{z} = \sqrt{2n+1}\frac{\lambda}{\pi w_0} = \sqrt{2n+1}\theta_0 \tag{4.2.10}$$

容易证明，这与用光强空间频率域中的二阶矩求得高阶高斯光束远场发散角的公式相同. 由式(4.2.9)、式(4.2.10)知，当 $m\neq n$ 时，厄米－高斯光束在 x 和 y 方向的远场发散角是不相等的，它们分别为基模高斯光束远场发散角的 $\sqrt{2m+1}$ 和 $\sqrt{2n+1}$ 倍.

厄米－高斯光束在按式(4.2.7)、式(4.2.8)所定义的束宽所围面积内的功率占总功率的百分比可按下式计算：

$$T_{mn} = \frac{\int_{-\sqrt{2m+1}w}^{\sqrt{2m+1}w}\int_{-\sqrt{2n+1}w}^{\sqrt{2n+1}w} H_m^2\left(\frac{\sqrt{2}}{w}x\right)H_n^2\left(\frac{\sqrt{2}}{w}y\right)\exp\left[-\frac{2(x^2+y^2)}{w^2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} H_m^2\left(\frac{\sqrt{2}}{w}x\right)H_n^2\left(\frac{\sqrt{2}}{w}y\right)\exp\left[-\frac{2(x^2+y^2)}{w^2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y} \tag{4.2.11}$$

所得数值计算结果见表 4.2.1. 由表知，绝大部分的激光功率都集中于所定义的束宽之内.

表 4.2.1 厄米－高斯光束的 T_{mn} 值

n \ m	0	1	2	3	4
0	0.911 0	0.947 4	0.952 8	0.954 0	0.954 3
1	0.947 4	0.985 3	0.990 9	0.992 2	0.992 5
2	0.952 8	0.990 9	0.996 6	0.997 8	0.998 2
3	0.954 0	0.992 2	0.997 8	0.999 1	0.999 4
4	0.954 3	0.992 5	0.998 2	0.999 4	0.999 8

2. 拉盖尔－高斯光束

对由式(4.2.1)表征的拉盖尔－高斯光束，束宽 $w_{pl}(z)$ 和远场发散角 θ_{pl} 为

$$w_{pl}^2(z)=\frac{2\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sqrt{2}}{w}r\right)^{2l}\left[L_p^l\left(\frac{2r^2}{w^2}\right)\right]^2\exp\left(-\frac{2r^2}{w^2}\right)\begin{cases}\cos^2 l\varphi\\ \sin^2 l\varphi\end{cases}r^3\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi}{\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sqrt{2}}{w}r\right)^{2l}\left[L_p^l\left(\frac{2r^2}{w^2}\right)\right]^2\exp\left(-\frac{2r^2}{w^2}\right)\begin{cases}\cos^2 l\varphi\\ \sin^2 l\varphi\end{cases}r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi}$$

$$=(2p+l+1)w^2(z) \tag{4.2.12}$$

$$\theta_{pl}=\lim_{z\to\infty}\frac{w_{pl}(z)}{z}=\sqrt{2p+l+1}\lim_{z\to\infty}\frac{w(z)}{z}$$

$$=\sqrt{2p+l+1}\frac{\lambda}{\pi w_0}=\sqrt{2p+l+1}\,\theta_0 \tag{4.2.13}$$

在所定义的束宽所围面积内，拉盖尔－高斯光束的功率占总功率百分比为

$$T_{pl}=\frac{\int_0^{\sqrt{2p+l+1}\,w}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sqrt{2}}{w}r\right)^{2l}\left[L_p^l\left(\frac{2r^2}{w^2}\right)\right]^2\exp\left(-\frac{2r^2}{w^2}\right)\begin{cases}\cos^2 l\varphi\\ \sin^2 l\varphi\end{cases}r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi}{\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sqrt{2}}{w}r\right)^{2l}\left[L_p^l\left(\frac{2r^2}{w^2}\right)\right]^2\exp\left(-\frac{2r^2}{w^2}\right)\begin{cases}\cos^2 l\varphi\\ \sin^2 l\varphi\end{cases}r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi} \tag{4.2.14}$$

数值计算结果见表 4.2.2.

表 4.2.2 拉盖尔－高斯光束的 T_{pl} 值

l \ p	0	1	2	3	4
0	0.864 7	0.908 3	0.922 8	0.930 9	0.936 4
1	0.908 4	0.921 8	0.930 0	0.935 6	0.939 8
2	0.938 0	0.936 7	0.939 3	0.942 1	0.944 6
3	0.957 6	0.949 9	0.948 6	0.949 0	0.950 0
4	0.970 7	0.960 9	0.957 2	0.955 9	0.955 7

§4.3 高斯光束的复参数表示 ABCD 定律

一、高斯光束的复参数表示

由式(4.1.12)～式(4.1.15)知，高斯光束由 $R(z)$、$w(z)$和 z 中任意两个即可确定，因此可用复参数 q 将这三个量联系起来.定义 q 为

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{R}-\mathrm{i}\frac{\lambda}{\pi w^2} \tag{4.3.1}$$

利用式(4.1.12)、式(4.1.13)易得

$$q=z+\mathrm{i}Z_0 \tag{4.3.2}$$

用复参数 q 可将式(4.1.11)简洁地表示为

$$A(r,q)=A_0\frac{\mathrm{i}Z_0}{q}\exp\left(-\frac{\mathrm{i}kr^2}{2q}\right) \tag{4.3.3}$$

于是高斯光束可由复参数 q 确定.当 q 已知时,$R(z)$、$w(z)$则按下式求出:

$$\frac{1}{R}=\mathrm{Re}\left(\frac{1}{q}\right) \tag{4.3.4}$$

$$\frac{1}{w^2}=-\frac{\pi}{\lambda}\mathrm{Im}\left(\frac{1}{q}\right) \tag{4.3.5}$$

其中 Re 表示复数取实部、Im 表示复数取虚部运算.

在讨论高斯光束的传输变换问题时,通常可用 w_0、z 参数,$R(z)$、$w(z)$参数或者复参数 q 来描述,但其中以 q 参数法最为简便、规范,本书就主要使用这一方法,注意对 $n=1$,式(4.3.1)中 λ 为真空(或空气)中波长,当 $n\neq1$ 时,λ 应理解为折射率 n 介质中波长.

二、高斯光束的 *ABCD* 定律

§1.3 中已证明,高斯光束复参数 q 通过变换矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}$的光学系统的变换遵守 *ABCD* 定律:

$$q_2=\frac{Aq_1+B}{Cq_1+D} \tag{4.3.6}$$

或写为

$$\frac{1}{q_2}=\frac{C+D/q_1}{A+B/q_1} \tag{4.3.7}$$

如果复参数为 q_1 的高斯光束顺次通过变换矩阵为

$$\boldsymbol{M}_1=\begin{bmatrix}A_1 & B_1\\ C_1 & D_1\end{bmatrix},\boldsymbol{M}_2=\begin{bmatrix}A_2 & B_2\\ C_2 & D_2\end{bmatrix},\cdots,\boldsymbol{M}_n=\begin{bmatrix}A_n & B_n\\ C_n & D_n\end{bmatrix} \tag{4.3.8}$$

的光学系统后变为复参数为 q 的高斯光束(图 4.3.1),利用矩阵乘法易证,此时 *ABCD* 定律亦成立,但其中 *ABCD* 为下面矩阵 $\boldsymbol{M}$ 诸元:

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}_n\cdots\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1$$

即

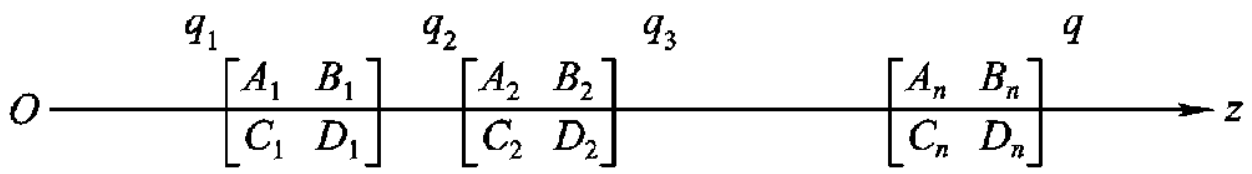


图 4.3.1　q 参数通过变换矩阵为 $\boldsymbol{M}_1$、$\boldsymbol{M}_2$、…、$\boldsymbol{M}_n$ 串接光学系统的变换

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \tag{4.3.9}$$

当 q_1 和 $\boldsymbol{M}_1$、$\boldsymbol{M}_2$、…、$\boldsymbol{M}_n$ 为已知时，原则上由 *ABCD* 定律可求出任意 z 处的 q，再由式(4.3.4)、式(4.3.5)做复数运算分离实、虚部得到 R 和 w，于是高斯光束的复参数表示和 *ABCD* 定律给出了研究高斯光束通过无光阑限制近轴 *ABCD* 光学系统传输变换的一个基本方法.现在以高斯光束在自由空间传输的最简单情况为例，说明 *ABCD* 定律的应用.如图 4.3.2，设在 $z=0$ 处有一等相面为平面的高斯光束：

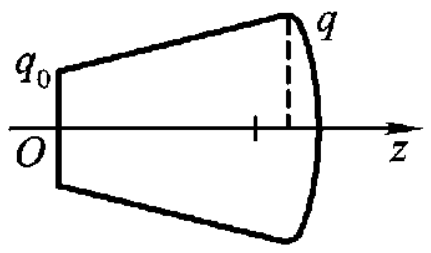


图 4.3.2　高斯光束在自由空间的传输

$$\frac{1}{q_0}=-\mathrm{i}\frac{\lambda}{\pi w_0^2} \tag{4.3.10}$$

在自由空间中传输距离 z 后，设其复参数为 q.因为

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.3.11}$$

由 *ABCD* 定律：

$$q=\frac{1\cdot q_0+z}{0+1}=q_0+z \tag{4.3.12}$$

将式(4.3.1)、式(4.3.10)代入式(4.3.12)中做复数运算，得到

$$w=w_0\sqrt{1+(z/Z_0)^2} \tag{4.3.13}$$

$$R=Z_0\left(\frac{z}{Z_0}+\frac{Z_0}{z}\right) \tag{4.3.14}$$

这即式(4.1.12)、式(4.1.13)，它描述了以束腰处为参考，高斯光束的等相面曲率半径 $R(z)$ 和束宽 $w(z)$ 随传输距离 z 的变化规律.式(4.3.13)还可用式(4.1.9)和式(4.1.22)改写为

$$w^2=w_0^2+\theta_0^2 z^2 \tag{4.3.15}$$

三、高阶高斯光束的传输方程和 *ABCD* 定律

为讨论高阶高斯光束的传输变换问题，引入所谓嵌入高斯光束是比较方便的. 如图 4.3.3 所示，嵌入 TEM_{00} 模高斯光束的束腰 w_0、束宽 $w(z)$和远场发散角 θ_0 与厄米－高斯光束在 x、y 方向的对应值 w_{0m}、$w_m(z)$、θ_m 和 w_{0n}、$w_n(z)$、θ_n 间有关系

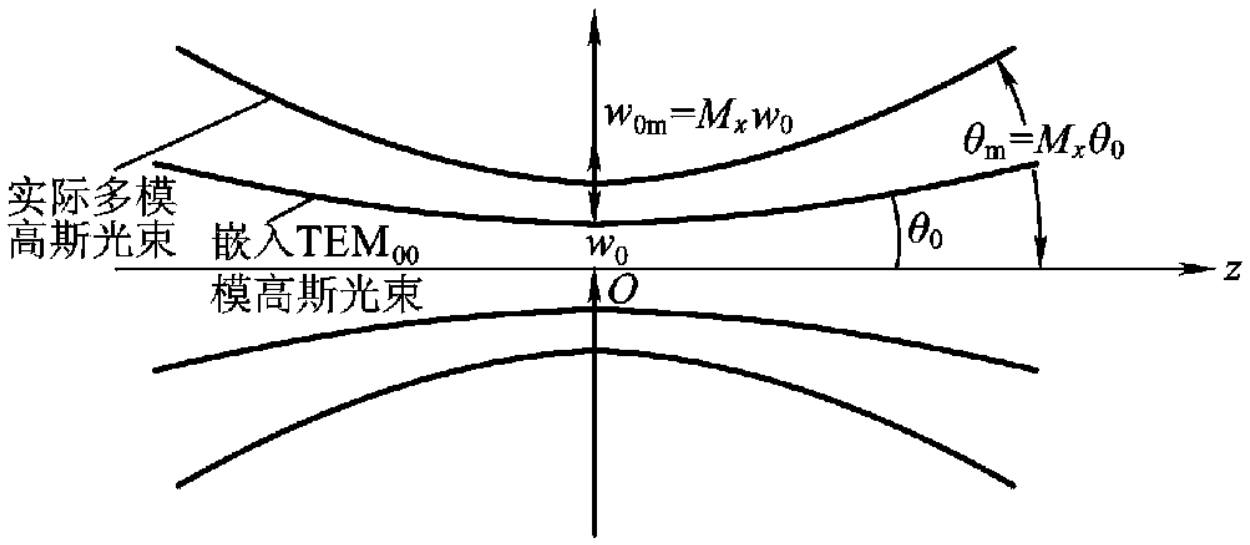


图 4.3.3　嵌入基模高斯光束

$$w_0 = w_{0m}/M_x$$
$$w(z) = w_m(z)/M_x$$
$$\theta_0 = \theta_m/M_x \tag{4.3.16}$$

和

$$w_0 = w_{0n}/M_y$$
$$w(z) = w_n(z)/M_y$$
$$\theta_0 = \theta_n/M_y \tag{4.3.17}$$

厄米－高斯光束在 x 和 y 方向的瑞利长度

$$Z_m = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} = \frac{\pi w_{0m}^2}{M_x^2\lambda} \tag{4.3.18}$$

$$Z_n = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} = \frac{\pi w_{0n}^2}{M_y^2\lambda} \tag{4.3.19}$$

借助于式(4.3.16)～式(4.3.19)，高阶高斯光束在自由空间中的传输方程可由嵌入基模高斯光束的传输方程式(4.3.15)求出，在 x 方向为

$$w_m^2 = w_{0m}^2 + \theta_m^2 z^2 \tag{4.3.20}$$

在 y 方向为

$$w_n^2 = w_{0n}^2 + \theta_n^2 z^2 \tag{4.3.21}$$

设厄米－高斯光束在 x 方向复参数为 q_m，

$$\frac{1}{q_m}=\frac{1}{R_m}-\mathrm{i}\frac{\lambda M_x^2}{\pi w_m^2} \tag{4.3.22}$$

式中 R_m 为厄米－高斯光束波面曲率半径，并将通过变换矩阵 $\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}$ 光学系统前后的 q_m 写为 q_{m1}、q_{m2}，仿前推导，可证明 q_m 满足

$$q_{m2}=\frac{Aq_{m1}+B}{Cq_{m1}+D} \tag{4.3.23}$$

式(4.3.23)称为高阶高斯光束的 $ABCD$ 定律，在 y 方向有类似的公式.

§4.4　高斯光束在非均匀介质中的传输

本节讨论高斯光束在折射率 n 和吸收(或增益)系数 α 与空间坐标有关的非均匀介质中的传输.

如图 4.4.1，设 n、α 随 r、z 变化规律为

$$n(r,z)=n_0[1+\gamma(z)r^2],\quad |\gamma|r^2\ll 1 \tag{4.4.1}$$

$$\alpha(r,z)=\alpha_0[1+\beta(z)r^2],\quad |\beta|r^2\ll 1 \tag{4.4.2}$$

这种抛物线函数形式实际上包括了类透镜介质、饱和吸收体、可变光阑等常见情况.

复折射率 $\tilde{n}$ 可写为

$$\tilde{n}=n-\mathrm{i}\frac{a}{2k} \tag{4.4.3}$$

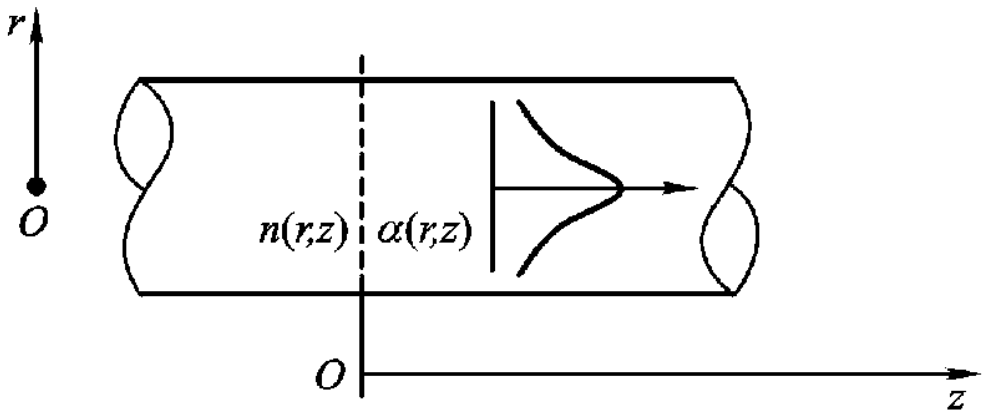


图 4.4.1　非均匀介质

将式(4.4.3)代入亥姆霍兹方程，得到

$$\Delta E+k^2\tilde{n}_0^2(1-\Gamma^2r^2)E=0 \tag{4.4.4}$$

式中

$$\tilde{n}_0=n_0-\mathrm{i}\frac{a_0}{2k} \tag{4.4.5}$$

$$\Gamma^2 = -2\gamma + \mathrm{i}\frac{a_0}{n_0 k}(\beta - \gamma) \tag{4.4.6}$$

Γ 称为传输常数.设

$$E(r,z) = A(r,z)\exp(-\mathrm{i}k\tilde{n}_0 z) \tag{4.4.7}$$

代入式(4.4.4),在缓变振幅近似下得到

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r} - 2\mathrm{i}k\tilde{n}_0\frac{\partial A}{\partial z} - k^2\tilde{n}_0^2\Gamma^2 r^2 A = 0 \tag{4.4.8}$$

设式(4.4.8)的解有高斯函数的形式:

$$A(r,z) = \frac{A_0}{s(z)}\exp[-\mathrm{i}k\tilde{n}_0 r^2/2q(z)] \tag{4.4.9}$$

将式(4.4.9)代入式(4.4.8),利用方程式对任意 r 成立条件,得到关于 $s(z)$和 $q(z)$的微分方程组:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}z} = 1 + \Gamma^2 q^2 & (4.4.10) \\ \dfrac{1}{s}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}z} = \dfrac{1}{q} & (4.4.11) \end{cases}$$

若传输常数 Γ 与 z 无关,在边界条件

$$q(z)\Big|_{z=0} = s(z)\Big|_{z=0} = q_1 \tag{4.4.12}$$

下,求得式(4.4.10)、式(4.4.11)的解为

$$q = \frac{q_1\cos\Gamma z + \dfrac{1}{\Gamma}\sin\Gamma z}{-q_1\Gamma\sin\Gamma z + \cos\Gamma z} \tag{4.4.13}$$

$$s = \frac{1}{\Gamma}\sin\Gamma z + q_1\cos\Gamma z \tag{4.4.14}$$

于是高斯光束的束宽 w 和等相面曲率半径 R 由下式决定

$$\frac{1}{w^2} = -\frac{\pi}{\lambda}\mathrm{Im}\left(\frac{\tilde{n}_0}{q}\right) \tag{4.4.15}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{\mathrm{Re}(\tilde{n}_0/q)}{\mathrm{Re}(\tilde{n}_0)} \tag{4.4.16}$$

式(4.4.13)可改写为

$$q = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \tag{4.4.17}$$

式中 A、B、C、D 为矩阵 $\boldsymbol{M}$ 诸元

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Gamma z & \dfrac{1}{\Gamma}\sin\Gamma z \\ -\Gamma\sin\Gamma z & \cos\Gamma z \end{bmatrix} \tag{4.4.18}$$

式(4.4.17)即为 *ABCD* 定律.

对热透镜介质

$$\Gamma=\sqrt{-2\gamma},\quad a_0=0 \tag{4.4.19}$$

令

$$z=l\text{(透镜厚度)} \tag{4.4.20}$$

设 $\Gamma l\ll 1$,当计及进、出端的界面折射后

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\cos\Gamma l & \sin\Gamma l/\Gamma n_0\\ -\Gamma n_0\sin\Gamma l & \cos\Gamma l\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+\gamma l^2 & l/n_0\\ 2\gamma l n_0 & 1+\gamma l^2\end{bmatrix} \tag{4.4.21}$$

这一公式已列入表 2.2.1 之中.

§4.5 高斯光束通过复杂光学系统的变换

本节使用高斯光束的复参数表示和 *ABCD* 定律推导出高斯光束通过复杂光学系统的一般变换公式,并讨论高斯光束的三个放大率和主面、节面等问题.对一般公式的应用,则放在§4.6、§4.7、§4.10~§4.12.

一、一般变换公式

如图 4.5.1 所示,在折射率 n_1 的物空间 s_1 处入射复参数为 q_1 的高斯光束,通过变换矩阵 $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ 的复杂光学系统后,在折射率 n_2 的像空间 s_2 处变换为复参数 q_2 的高斯光束,于是有

$$\frac{1}{q_i}=\frac{1}{R_i}-\mathrm{i}\frac{\lambda_i}{\pi w_i^2}=X_i-\mathrm{i}Y_i,\quad i=1,2 \tag{4.5.1}$$

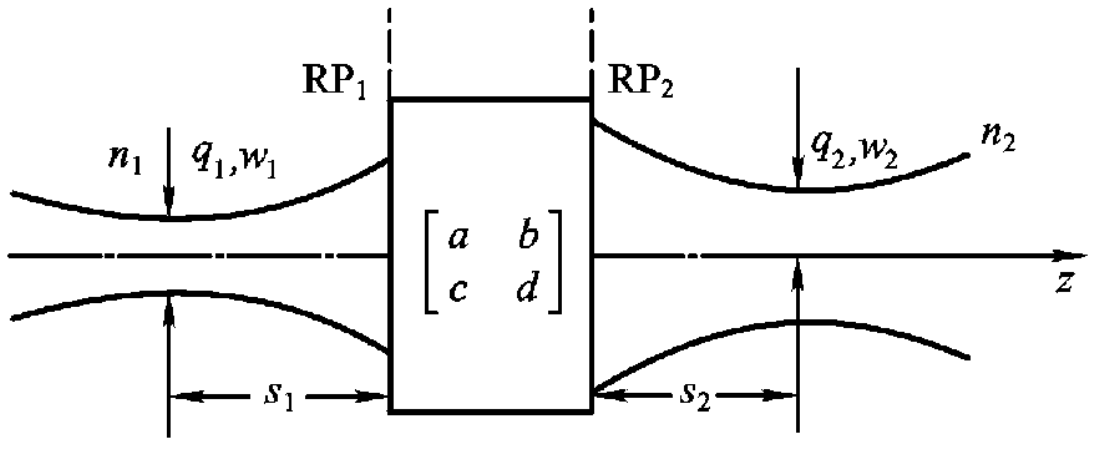


图 4.5.1 高斯光束通过复杂光学系统的变换

图 4.5.1 中 s_1、s_2 分别以 RP_1、RP_2 为参考计算,s_1 在 RP_1 之左为正,s_2 在 RP_2 之右为正,反之为负.由 q_1 至 q_2 的变换遵从 *ABCD* 定律

$$\frac{1}{q_2}=\frac{C+D/q_1}{A+B/q_1} \tag{4.5.2}$$

式中

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & s_2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & s_1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a+cs_2 & b+as_1+ds_2+cs_1s_2\\ c & d+cs_1\end{bmatrix} \tag{4.5.3}$$

将式(4.5.1)、式(4.5.3)代入式(4.5.2),并利用变换矩阵的性质,得

$$X_2=\frac{(X_1^2+Y_1^2)BD+X_1(AD+BC)+AC}{A^2+2X_1AB+(X_1^2+Y_1^2)B^2}$$

$$Y_2=\frac{(n_1/n_2)Y_1}{A^2+2X_1AB+(X_1^2+Y_1^2)B^2} \tag{4.5.4}$$

式(4.5.4)即高斯光束通过复杂光学系统的一般变换公式,式中诸量均为实数.现对公式的一些特例进行讨论.

(1) 当入射光束取在束腰 ω_{01} 处,$X_1=0$,

$$Y_1=Y_{01}=\frac{\lambda_1}{\pi\omega_{01}^2}=\frac{1}{Z_{01}} \tag{4.5.5}$$

式中 Z_{01} 为物方瑞利长度,则式(4.5.4)成为

$$X_2=\frac{BD+ACZ_{01}^2}{B^2+A^2Z_{01}^2}$$

$$Y_2=\frac{(n_1/n_2)Z_{01}}{B^2+A^2Z_{01}^2} \tag{4.5.6}$$

(2) 实际工作中最感兴趣的是 $X_1=X_2=0$,即研究入射与出射高斯光束束腰间的变换问题,此时式(4.5.4)简化为

$$BD+ACZ_{01}^2=0$$

$$Z_{02}=\frac{B^2+A^2Z_{01}^2}{(n_1/n_2)Z_{01}} \tag{4.5.7}$$

设

$$s_1=s_0,\ s_2=s_i \tag{4.5.8}$$

当 $c\neq 0$ 时,可将式(4.5.7)写为

$$s_i=-\frac{a}{c}+\frac{(n_1/n_2)(s_0+d/c)}{(d+cs_0)^2+c^2Z_{01}^2}$$

$$\omega_{02}=\frac{(n_1/n_2)\omega_{01}}{[(d+cs_0)^2+c^2Z_{01}^2]^{1/2}} \tag{4.5.9}$$

式(4.5.9)决定了像方束腰位置 s_i 和束腰大小 w_{02}，常称为成像公式和物像比例公式.

当 $n_2=n_1=1$ 时，式(4.5.7)亦可写成为

$$as_0+ds_i+cs_0s_i+b=-Z_{01}^2\frac{c(a+bs_i)}{d+cs_0}$$

$$w_{02}=w_{01}\left\{(a+cs_i)^2+\left[\frac{as_0+ds_i+cs_0s_i+b}{Z_{01}}\right]\right\}^{1/2}$$

$$=w_{01}\,|a+cs_i|\left[1+Z_{01}^2\frac{c^2}{(d+cs_0)^2}\right]^{1/2} \tag{4.5.10}$$

二、高斯光束的放大率、主面和节面

仿照§2.3，定义高斯光束放大率

(1) 角放大率

$$M_1=\frac{\theta_{02}}{\theta_{01}} \tag{4.5.11}$$

式中

$$\theta_{0i}=\frac{\lambda_i}{\pi w_{0i}},\quad i=1,2 \tag{4.5.12}$$

为物方和像方高斯光束远场发散角.

(2) 横向放大率

$$M_2=\frac{w_{02}}{w_{01}} \tag{4.5.13}$$

(3) 轴向放大率

$$M_3=\frac{Z_{02}}{Z_{01}} \tag{4.5.14}$$

式中 Z_{02} 为像方瑞利长度.

易证 M_1、M_2、M_3 间有关系

$$M_2=M_1M_3 \tag{4.5.15}$$

且

$$M_1M_2=n_1/n_2 \tag{4.5.16}$$

由式(4.5.11)、式(4.5.13)和式(4.5.16)得

$$n_2\theta_{02}w_{02}=n_1\theta_{01}w_{01} \tag{4.5.17}$$

这对应于经典光学的拉格朗日－亥姆霍兹不变式.

与经典光学中基面的概念相对应,对于高斯光束,有意义的是主面和节面(注意无反主面、反节面).

(1) 主面

由主面定义 $M_2=1$,并利用式(4.5.9),求得以 RP_1、RP_2 为参考,物方和像方主面位置

$$l_{1P}^{\pm}=-\frac{d}{c}\pm\frac{1}{c}\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2-(cZ_{01})^2},$$

$$l_{2P}^{\pm}=-\frac{a}{c}\pm\frac{1}{c}\sqrt{1-\left(\frac{n_2}{n_1}cZ_{01}\right)^2},\quad |c|Z_{01}\leqslant\frac{n_1}{n_2}\tag{4.5.18}$$

由式(4.5.18)知,$l_{1P}^{\pm}$、$l_{2P}^{\pm}$有两个值,分别对应于开方前取+或－号.

(2) 节面

由节面定义 $M_1=1$ 和式(4.5.9)求得以 RP_1、RP_2 为参考,物方和像方节面位置

$$l_{1N}^{\pm}=-\frac{d}{c}\pm\frac{1}{c}\sqrt{1-(cZ_{01})^2},$$

$$l_{2N}^{\pm}=-\frac{a}{c}\pm\frac{n_1}{n_2c}\sqrt{1-(cZ_{01})^2},\quad |c|Z_{01}\leqslant 1\tag{4.5.19}$$

利用式(4.5.18)、式(4.5.19)可求出高斯光束主、节面间的变换矩阵以及高斯光束主、节面与经典光学主、节面间的变换矩阵.显然当 $Z_{01}|c|\to 0$ 时,高斯光束公式过渡到经典光学的相应公式,现将所得结果和与经典光学的比较总结于表4.5.1、表4.5.2,以供参考.

三、反向变换公式

本节讨论高斯光束的反向变换,见图4.5.2.为简单起见,限于物、像方束腰 q'_{02}、q'_{01} 间的变换,余可类推.这时,q'_{02} 至 q'_{01} 的变换矩阵为

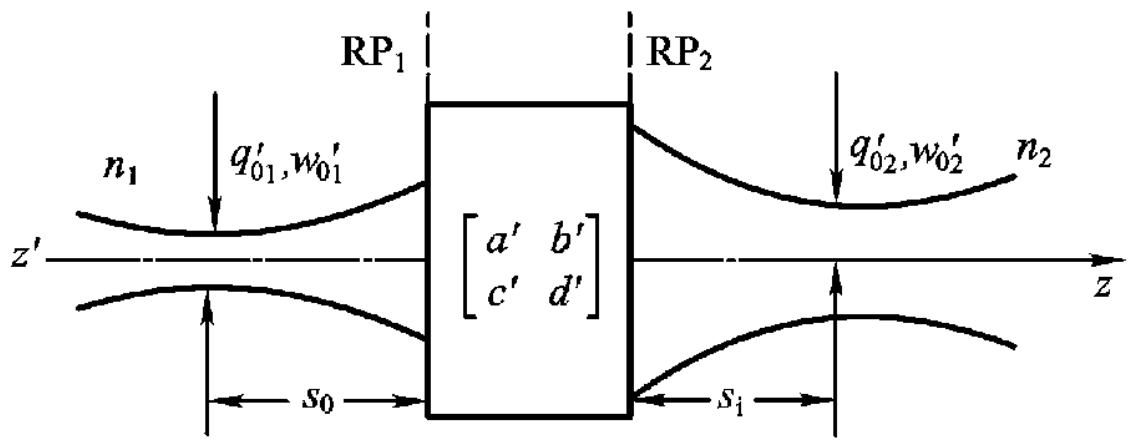
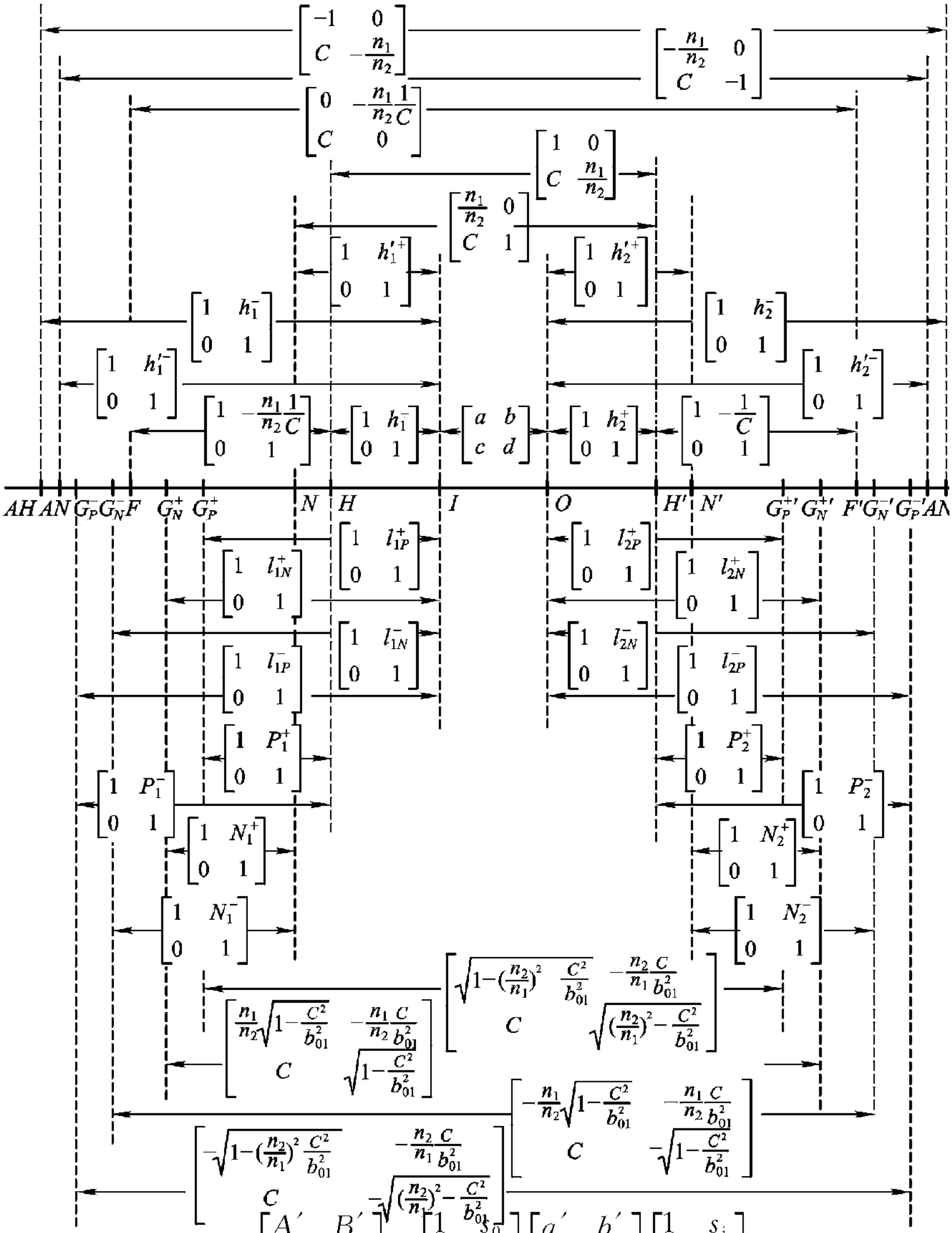


图 4.5.2　高斯光束的反向变换

表 4.5.1　高斯光束和经典光主面、节面位置有关的矩阵表示



$$\boldsymbol{M}' = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & s_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a' + c's_0 & b' + a's_i + d's_0 + c's_0 s_i \\ c' & d' + c's_i \end{bmatrix} \tag{4.5.20}$$

其中，反向变换矩阵 $\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$ 与正向变换矩阵 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 间有关系

表 4.5.2 高斯光束和经典光学的比较

	高斯光束		经典光学		备注
	$n_1 \neq n_2$	$n_1 = n_2$	$n_1 \neq n_2$	$n_1 = n_2$	
变换矩阵	$M_1 = \theta_{02}/\theta_{01}$ $M_2 = w_{02}/w_{01}$ $M_3 = Z_{02}/Z_{01}$ $M_2 = M_1 M_3$ $M_1 M_2 = n_1/n_2$	$M_1 = \theta_{02}/\theta_{01}$ $M_2 = w_{02}/w_{01}$ $M_3 = Z_{02}/Z_{01}$ $M_2 = M_1 M_3$ $M_1 M_2 = 1$	$M_1 = \theta_2/\theta_1$ $M_2 = x_2/x_1$ $M_3 = \mathrm{d}v/\mathrm{d}u$ $M_2 = M_1 M_3$ $M_1 M_2 = n_1/n_2$	$M_1 = \theta_2/\theta_1$ $M_2 = x_2/x_1$ $M_3 = \mathrm{d}v/\mathrm{d}u$ $M_2 = M_1 M_3$ $M_1 M_2 = \pm 1$	
主面	$l_{1p}^{\pm} = -\frac{d}{c} \pm \frac{1}{c}\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 - (cZ_{01})^2}$ $l_{2p}^{\pm} = -\frac{a}{c} \pm \frac{1}{c}\sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}cZ_{01}\right)^2}$ $M_2 = 1$	$l_{1p}^{\pm} = -\frac{d}{c} \pm \frac{1}{c}\sqrt{1 - (cZ_{01})^2}$ $l_{2p}^{\pm} = -\frac{a}{c} \pm \frac{1}{c}\sqrt{1 - (cZ_{01})^2}$ $M_2 = 1$	$h_1^{\pm} = -\frac{d}{c} \pm \frac{n_1/n_2}{c}$ $h_2^{\pm} = -\frac{a}{c} \pm \frac{1}{c}$ $M_2 = \pm 1$	$h_1^{\pm} = -\frac{d}{c} \pm \frac{1}{c}$ $h_2^{\pm} = -\frac{a}{c} \pm \frac{1}{c}$ $M_2 = \pm 1$	当 $Z_{01} \mid c \mid \to 0$，时，高斯光束公式过渡到经典光学结果
节面	$l_{1N}^{\pm} = -\frac{d}{c} \pm \frac{1}{c}\sqrt{1 - (cZ_{01})^2}$ $l_{2N}^{\pm} = -\frac{a}{c} \pm \frac{n_1}{n_2 c}\sqrt{1 - (cZ_{01})^2}$ $M_1 = 1$	$l_{1N}^{\pm} = -\frac{d}{c} \pm \frac{1}{c}\sqrt{1 - (cZ_{01})^2}$ $l_{2N}^{\pm} = -\frac{a}{c} \pm \frac{1}{c}\sqrt{1 - (cZ_{01})^2}$ $M_1 = 1$	$h_1^{\pm} = -\frac{d}{c} \pm \frac{1}{c}$ $h_2^{\pm} = -\frac{a}{c} \pm \frac{n_1/n_2}{c}$ $M_1 = \pm 1$	$h_1^{\pm} = -\frac{d}{c} \pm \frac{1}{c}$ $h_2^{\pm} = -\frac{a}{c} \pm \frac{1}{c}$ $M_1 = \pm 1$	
方程	$s_i = -\frac{a}{c} + \frac{(n_1/n_2)(s_0 + d/c)}{(d + cs_0)^2 + c^2 Z_{01}^2}$	$s_i = -\frac{a}{c} + \frac{s_0 + d/c}{(d + cs_0)^2 + c^2 Z_{01}^2}$	$\frac{\left(-\frac{1}{c}\right)}{u} + \frac{\left(-\frac{n_1/n_2}{c}\right)}{v} = 1$	$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$ $f = -\frac{1}{c}$	
例公	$w_{02} = \frac{(n_1/n_2)w_{01}}{[$	$w_{02} = \frac{w_{01}}{[$	$x_2 = \frac{(n_1/n_2)x_1}{}$	$x_2 = \frac{x_1}{}$	

$$\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n_2}{n_1} d & \frac{n_2}{n_1} b \\ \frac{n_2}{n_1} c & \frac{n_2}{n_1} a \end{bmatrix} \tag{4.5.21}$$

且

$$\det \boldsymbol{M}' = A'D' - B'C' = \frac{n_2}{n_1} \tag{4.5.22}$$

将式(4.5.20)～式(4.5.22)代入 $ABCD$ 定律，仿节一推导，得到高斯光束的反向变换公式：

$$B'D' + Z_{02}'^2 A'C' = 0$$

$$Z_{01}' = \frac{B'^2 + A'^2 Z_{02}'^2}{(n_2/n_1) Z_{02}'} \tag{4.5.23}$$

由此得出像方束腰位置：

$$\underleftarrow{s_0} = -\frac{d}{c} + \frac{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)\left(\underleftarrow{s_i} + \frac{a}{c}\right)}{(a + c\,\underleftarrow{s_i})^2 + c^2 Z_{02}'^2} \tag{4.5.24}$$

像方束腰大小：

$$w_{01}' = \frac{w_{02}'}{[(a + c\,\underleftarrow{s_i})^2 + c^2 Z_{02}'^2]^{1/2}} \tag{4.5.25}$$

放大率公式：

$$M_1' = \frac{\theta_{01}'}{\theta_{02}'} = \frac{n_2}{n_1}[(a + c\,\underleftarrow{s_i})^2 + c^2 Z_{02}'^2]^{1/2} \tag{4.5.26}$$

$$M_2' = \frac{w_{01}'}{w_{02}'} = \frac{1}{[(a + c\,\underleftarrow{s_i})^2 + c^2 Z_{02}'^2]^{1/2}} \tag{4.5.27}$$

$$M_3' = Z_{01}'/Z_{02}' = M_2'/M_1' \tag{4.5.28}$$

式中

$$Z_{0i}' = \frac{\pi w_{0i}'^2}{\lambda_i} = -\mathrm{i} q_{0i}', \quad i = 1,2 \tag{4.5.29}$$

§4.6 高斯光束通过薄透镜的变换

如图4.6.1设 $n_2 = n_1 = 1$，此时

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \tag{4.6.1}$$

式中 f 为薄透镜焦距.将式(4.6.1)代入式(4.5.9)，得到成像公式：

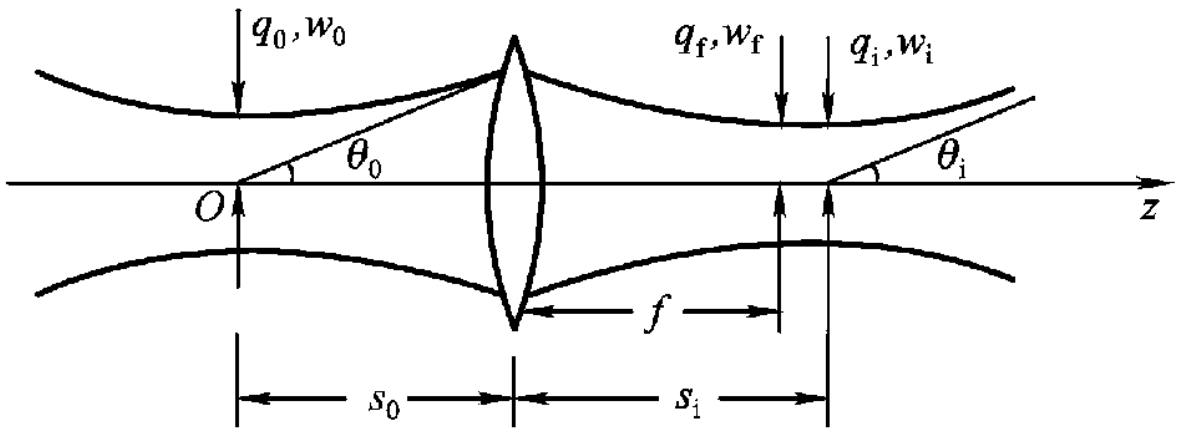


图 4.6.1 高斯光束通过薄透镜的变换

$$\frac{1}{s_i}=\frac{1}{f}-\frac{1}{s_0}\frac{1}{1+Z_{01}^2/s_0(s_0-f)} \tag{4.6.2}$$

物像比例公式：

$$w_i=\frac{fw_0}{[(s_0-f)^2+Z_{01}^2]^{1/2}} \tag{4.6.3}$$

按式(4.6.2)，s_i/f 作为 s_0/f 函数的曲线示于图 4.6.2，参数取为 Z_{01}/f. 当 $(s_0-f)^2\gg Z_{01}^2$，$Z_{01}\to 0$ 时，式(4.6.2)过渡为几何光学中薄透镜成像公式：

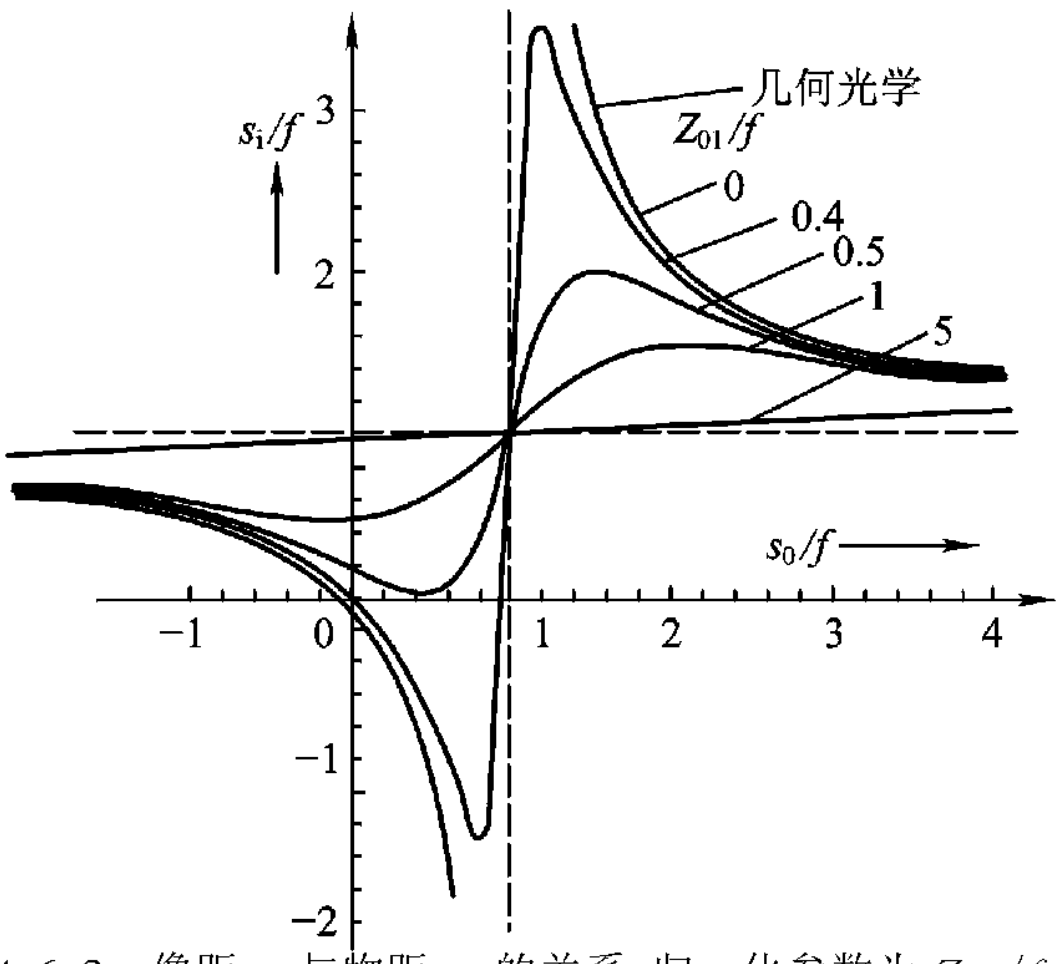


图 4.6.2 像距 s_i 与物距 s_0 的关系，归一化参数为 Z_{01}/f

$$\frac{1}{s_i}+\frac{1}{s_0}=\frac{1}{f} \tag{4.6.4}$$

图 4.6.3 为按式(4.6.3) w_i/w_0 作为 s_0/f 函数的曲线，参数仍为 Z_{01}/f. 当 $(s_0-f)^2\gg Z_{01}^2$，$Z_{01}\to 0$ 时，

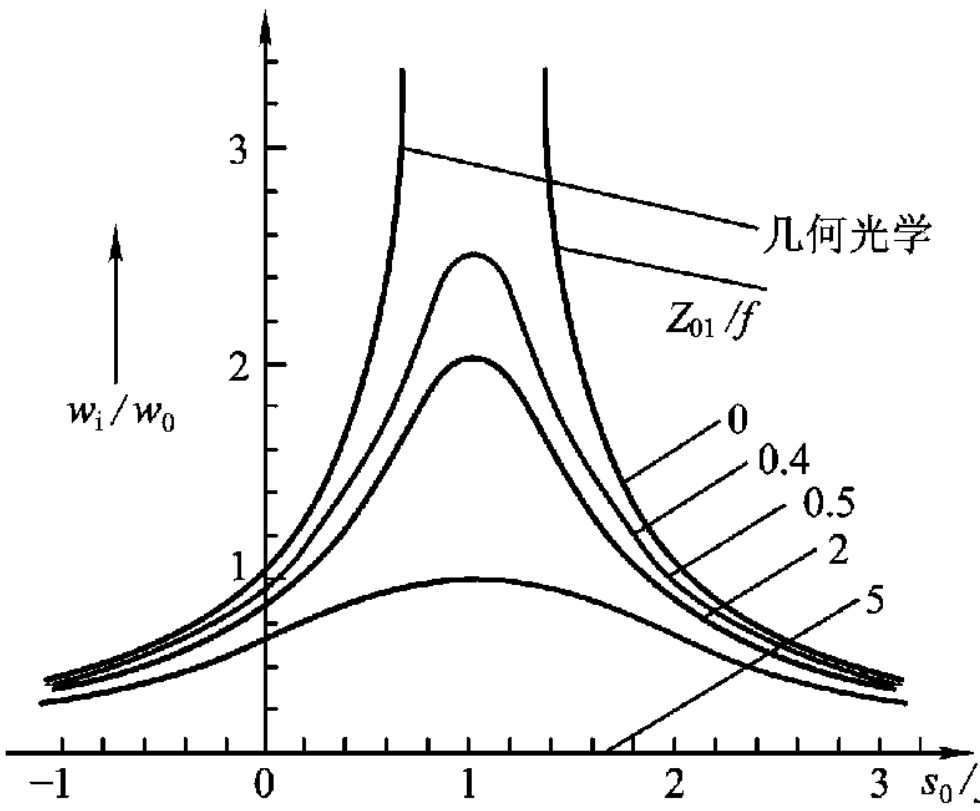


图 4.6.3　物像比例 w_i/w_0 与物距 s_0 的关系，
归一化参数为 Z_{01}/f

$$w_i = \frac{fw_0}{s_0 - f} = \frac{sw_0}{s_0} \tag{4.6.5}$$

像方瑞利长度 Z_{02} 为

$$Z_{02} = \frac{\pi w_i^2}{\lambda} = \frac{f^2 Z_{01}}{Z_{01}^2 + (s_0 - f)^2} \tag{4.6.6}$$

通常称式(4.6.6)为高斯光束的景深公式，它说明长的准直距离和良好的聚焦效果(小的束宽)二者不可兼得，在工程设计中只能根据具体问题要求选择适当参数，在一定容限范围内予以满足.

§ 4.7　高斯光束的聚焦

本节讨论高斯光束通过薄透镜的聚焦，出发点是式(4.6.2)、式(4.6.3).这一问题在数学上归结为求像方束宽 w_i 的极值.当 w_0 一定时，由式(4.6.3)知 w_i 是 f、s_0 的函数，下面分两种情况分别讨论：

一、f 一定时，w_i 随 s_0 变化情况

将式(4.6.3)对 s_0 求一阶偏导数，得到

$$\frac{\partial w_i}{\partial s_0} = \frac{w_0 f(f - s_0)}{[(s_0 - f)^2 + Z_{01}^2]^{3/2}} \tag{4.7.1}$$

1. $s_0 < f$ 时

因这时 $\dfrac{\partial w_i}{\partial s_0} > 0$，故 w_i 随 s_0 的减小而单调减小，当 $s_0 = 0$ 时，w_i 取极

小值，

$$w_{i,\min}=\frac{w_0}{\sqrt{1+(Z_{01}/f)^2}}<w_0 \tag{4.7.2}$$

由式(4.5.2)求得

$$s_i=\frac{f}{1+(f/Z_{01})^2}<f \tag{4.7.3}$$

因此，当 $s_0=0$ 时，w_i 总比 w_0 小，不论透镜焦距 f 多大($f>0$)，总有一定聚焦作用，并且像距始终小于 f，这表示像方束腰位置总在透镜后焦点以内.

若进一步满足 $f\ll Z_{01}$，即使用短焦距透镜时，由式(4.7.2)、式(4.7.3)得到

$$w_{i,\min}\approx\frac{\lambda f}{\pi w_0} \tag{4.7.4}$$

$$s_i\approx f \tag{4.7.5}$$

这时，像方束腰近似于透镜后焦面上，且透镜焦距越短，聚焦效果越好.

2. $s_0>f$ 时

因$\frac{\partial w_i}{\partial s_0}<0$，$w_i$ 随 s_0 的增加而单调减小，当 $s_0\to\infty$ 时，

$$w_i=0,\quad s_i=f \tag{4.7.6}$$

当然，这只是理想极限情形.实际上当 $s_0\gg f$ 时，有

$$w_i\approx\frac{\lambda f}{\pi w_0\sqrt{1+(\lambda s_0/\pi w_0^2)^2}}=\frac{\lambda f}{\pi w(s_0)} \tag{4.7.7}$$

式中

$$w(s_0)=w_0\sqrt{1+(s_0/Z_{01})^2} \tag{4.7.8}$$

为入射在透镜表面上的高斯光束束宽，且还有

$$s_i\approx f \tag{4.7.9}$$

若同时还满足 $s_0\gg Z_{01}$，则

$$w_i\approx\frac{\lambda f}{\pi w_0}\frac{Z_{01}}{s_0}=\frac{fw_0}{s_0} \tag{4.7.10}$$

因此，当物距 s_0 较透镜焦距 f 远大时，s_0 越大，f 越小，则聚焦效果越好.这是实际中常用情形.

3. $s_0=f$ 时

显然，这时 w_i 达到极大值

$$w_{i,\max}=\frac{\lambda f}{\pi w_0} \tag{4.7.11}$$

且

$$s_i = f \tag{4.7.12}$$

仅当 $\lambda f/\pi w^2 < 1$，即 $f < Z_{01}$ 时，透镜才有聚焦作用.

上述讨论结果可作图示于图 4.7.1. 由图知，不论 s_0 值多少，只要满足条件 $f < Z_{01}$ 时，总有一定聚焦作用.

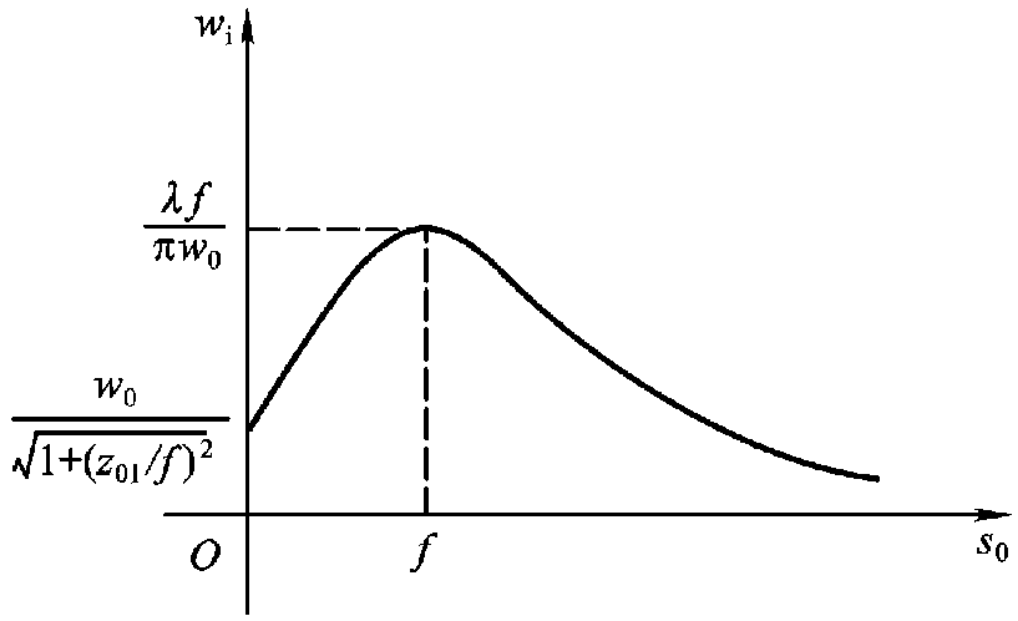


图 4.7.1　w_i 随 s_0 的变化，(f = const)

二、s_0 一定时，w_i 随 f 变化情况

因

$$\frac{\partial w_i}{\partial f} = w_0 \frac{Z_{01}^2 + s_0(s_0 - f)}{[(s_0 - f)^2 + Z_{01}^2]^{3/2}} \tag{4.7.13}$$

(1) 当

$$f = s_0[1 + (Z_{01}/s_0)^2] = R(s_0) \tag{4.7.14}$$

时，w_i 取极大值，

$$w_{i,\max} = w_0\sqrt{1 + (s_0/Z_{01})^2} = w(s_0) \tag{4.7.15}$$

式中 $R(s_0)$、$w(s_0)$ 分别为高斯光束入射在透镜处等相面的曲率半径和束宽.

(2) $f < R(s_0)$ 时

因 $\frac{\partial w_i}{\partial f} > 0$，故 w_i 随 f 的减小而单调减小. 当 $f = R(s_0)/2$ 时，

$$w_i = w_0 \tag{4.7.16}$$

仅当 $f < R(s_0)/2$ 时，透镜对高斯光束才有聚焦作用，且 f 越小，聚焦效果越好. 当 $f \ll s_0$ 时，有

$$w_i \approx \frac{\lambda f}{\pi w(s_0)} \tag{4.7.17}$$

$$s_i \approx f \tag{4.7.18}$$

(3) $f > R(s_0)$时

因$\frac{\partial w_i}{\partial f} < 0$，故 w_i随 f 的增加而单调减小. 当 $f \to \infty$时，$w_i \to w_0$，故在此范围无聚焦作用. w_i随 f 变化情况示于图 4.7.2.

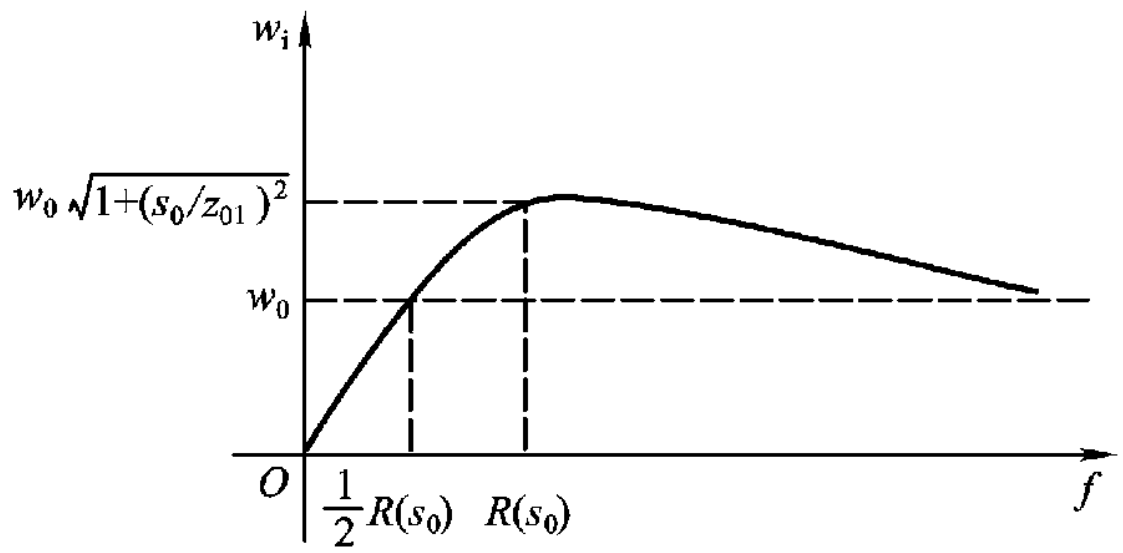


图 4.7.2 w_i随 f 的变化，(s_0 = const)

综上所述，(1) 使用短焦距会聚透镜，(2) 增大物距，使 $s_0 \gg f$，总会使高斯光束聚焦.

三、1:1 成像

由式(4.6.3)知，1:1 成像，即 $w_i = w_0$的条件为

$$s_0^2 - 2fs_0 + Z_{01}^2 = 0 \tag{4.7.19}$$

解之得

$$s_0 = f \pm \sqrt{f^2 - Z_{01}^2} = s_i \tag{4.7.20}$$

故在一般情况下，$s_0 = s_i \neq 2f$. 仅当 $Z_{01} \to 0$ 时，方有

$$s_0 = s_i = 2f \tag{4.7.21}$$

§4.8 高斯光束的焦移

本节研究在自由空间中传输的高斯光束的焦点移动现象，由此引入焦移这一重要概念.

一、高斯光束的有效菲涅耳数

定义无光阑限制高斯光束的有效菲涅耳数 F_{ef}为

$$F_{ef}(z) = \frac{w^2(z)}{\lambda R(z)} \tag{4.8.1}$$

式中 $R(z)$、$w(z)$分别为离束腰 z 处高斯光束的波面曲率半径和束宽，由式(4.8.1)知，对一个确定的高斯光束 $F_{ef}(z)$是 z 的函数.

由式(4.1.9)、式(4.1.12)、式(4.1.13)和 $F_{ef}(z)$的定义式(4.8.1)可得

$$w(z)=w_0\sqrt{1+\pi^2F_{ef}^2(z)} \tag{4.8.2}$$

$$R(z)=z\left[1+\frac{1}{\pi^2F_{ef}^2(z)}\right] \tag{4.8.3}$$

$$F_{ef}(z)=\frac{\lambda z}{\pi^2w_0^2}=\frac{z}{\pi Z_{01}} \tag{4.8.4}$$

$$F(z)=F_{ef}(z)+\frac{1}{\pi^2F_{ef}(z)} \tag{4.8.5}$$

式中

$$F(z)=\frac{w^2(z)}{\lambda z} \tag{4.8.6}$$

为同一 z 处的几何菲涅耳数.当 $F_{ef}(z)\gg1/\pi$ 时，由式(4.8.5)知

$$F(z)=F_{ef}(z) \tag{4.8.7}$$

此时，高斯光束与普通球面波特性相似.

二、高斯光束的焦移

当高斯光束通过焦距 f 的薄透镜聚焦时，由高斯光束基本性质可知，聚焦后高斯光束束腰 w_i所在面总是比其波面曲率中心所在面更为靠近薄透镜，这一现象称为高斯光束的焦点移动，简称焦移.设像距为 s_i，s_i 处高斯光束等相面曲率半径为 $R(s_i)$，则焦移量

$$\Delta=|R(s_i)|-s_i \tag{4.8.8}$$

利用式(4.1.13)、式(4.6.2)，得

$$\begin{aligned}\Delta&=\left|\frac{1}{s_i}\left(\frac{\pi w_i^2}{\lambda}\right)^2\right|\\&=\left|\frac{Z_{01}^2/f}{\left(\frac{s_0}{f}\right)\left(\frac{s_0}{f}-1\right)+\left(\frac{Z_{01}}{f}\right)^2}\right|\end{aligned} \tag{4.8.9}$$

相对焦移

$$\frac{\Delta}{f}=\left|\frac{\left(\frac{Z_{01}}{f}\right)^2}{\left(\frac{s_0}{f}\right)\left(\frac{s_0}{f}-1\right)+\left(\frac{Z_{01}}{f}\right)^2}\right| \tag{4.8.10}$$

Δ/f 随 s_0/f 的变化示于图 4.8.1.由图知，曲线关于直线 $s_0/f=1/2$

是对称的，当 $s_0/f=1/2$ 时取极值，而 $s_0/f\gg 1/2$ 时，$\Delta\to 0$，过渡到球面波（几何光学近似）情况.

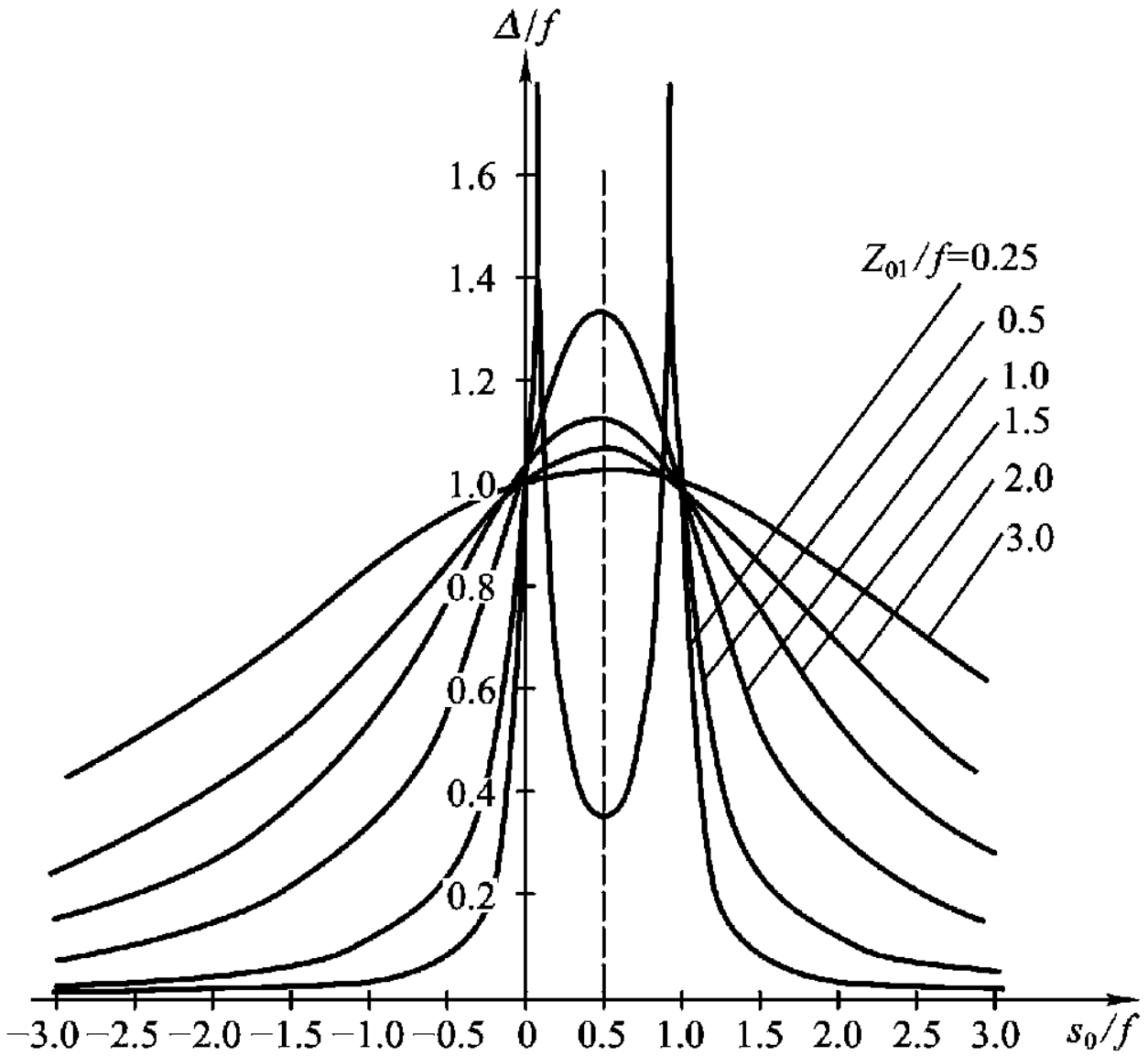


图 4.8.1 Δ/f 随 s_0/f 的关系，归一化参数为 Z_{01}/f

高斯光束的焦移量 Δ 亦可用 $z=s_i$ 处的有效菲涅耳数 $F_{ef}(s_i)$ 表示为

$$\Delta=\pi^2 s_i F_{ef}^2(s_i) \tag{4.8.11}$$

由式(4.8.11)知，一般情况下 $\Delta>0$，即高斯光束经透镜聚焦后束腰位置总是比几何焦点更靠近薄透镜.由于焦移的存在，使高斯光束聚焦特性区别于普通球面波，这在激光加工中的聚焦、微束光学系统设计中是值得注意的.

高斯光束通过有光阑透镜聚焦时，轴上光强极大点位置也会偏离几何焦点，即出现焦移，读者请对此自行推导.

§4.9 高阶高斯光束的焦移和焦开关

高阶高斯光束（拉盖尔－高斯或厄米－高斯光束）入射到一个光阑和透镜分离光学系统时，不仅会出现焦移，而且当改变系统参数时，还会出现焦点跃变的现象，称为焦开关.本节以拉盖尔－高斯光束为例，做具体研究.

一、拉盖尔－高斯光束通过光阑－透镜分离光学系统的轴上光强分布和焦移

设由式(4.2.1)所表征的拉盖尔－高斯光束入射到图4.9.1所示的光阑－透镜分离系统上，透镜焦距为 $f(f>0)$，光阑半径为 a，光阑和透镜间距离为 s.通过该系统后光束的场分布可由柯林斯公式表为

$$E(r,\varphi,z)=\frac{\mathrm{i}k}{2\pi B}\exp(-\mathrm{i}kz)\int_0^{2\pi}\int_0^a E_{pl}(r_0,\varphi_0,z_0=0)\cdot \exp\left\{-\frac{\mathrm{i}k}{2B}\left[Ar_0^2-2rr_0\cos(\varphi-\varphi_0)+Dr^2\right]\right\}r_0\mathrm{d}r_0\mathrm{d}\varphi_0 \tag{4.9.1}$$

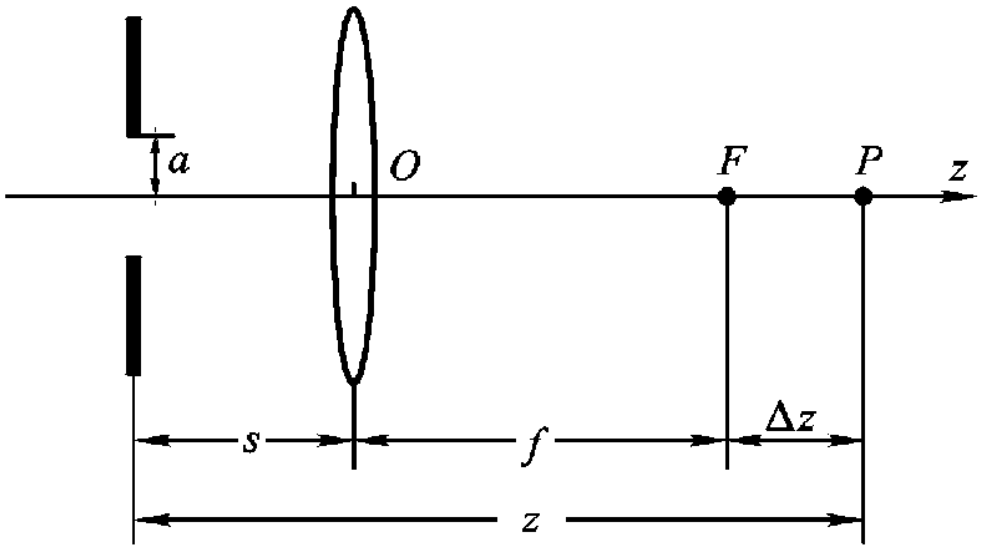


图4.9.1　光阑－透镜分离系统示意图

式中系统的变换矩阵为

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\Delta z/f & (-\Delta z/f)s+f+\Delta z\\ -1/f & 1-s/f\end{bmatrix} \tag{4.9.2}$$

将式(4.2.1)和式(4.9.2)代入式(4.9.1)，并令 $r=0$，得到轴上聚焦场分布

$$E(0,\varphi,z)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{i}\pi F}{2}\left[1-\dfrac{u(1-s/f)}{\pi F}\right]\exp(\mathrm{i}kz)N(p,\alpha,u), & l=0\\ 0, & l\neq 0\end{cases} \tag{4.9.3}$$

式中

$$N(p,\alpha,u)=\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\frac{1}{k!}\frac{1}{[(1-\mathrm{i}u)/2]^{k+1}}\gamma(k+1,\alpha-\mathrm{i}\alpha u) \tag{4.9.4}$$

$\gamma(k+1,\alpha-\mathrm{i}\alpha u)$表示非完全 γ 函数，且

$$\alpha=\left(\frac{a}{w_0}\right)^2\quad\text{(截断参数)} \tag{4.9.5}$$

$$F=\frac{\omega_0^2}{\lambda f}\quad\text{(与对应基模高斯光束有关的菲涅耳数)}\tag{4.9.6}$$

$$u=\frac{\pi F\Delta z}{f+z(1-s/f)}\tag{4.9.7}$$

为简单起见,在推导式(4.9.3)时设束腰位于光阑所在入射面上,且略去不重要的常数因子 A_{pl}. 由式(4.9.3)知,仅当 $l=0$ 时,轴上光强才不为零,以下限于讨论 $l=0$ 的情况.

由式(4.9.3)得到聚焦拉盖尔-高斯光束轴上光强分布:

$$I=|E|^2=\frac{(\pi F)^2}{4}\left[1-\frac{u(1-s/f)}{\pi F}\right]^2 N(p,\alpha,u)N^*(p,\alpha,u)\tag{4.9.8}$$

轴上最大光强的位置 $\Delta z_{\max}$ 由

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Delta z}=\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\Delta z}=0\tag{4.9.9}$$

决定.相对焦移为

$$\Delta z_f=\frac{|f+\Delta z_{\max}|-|R|}{|R|}\tag{4.9.10}$$

式中 R 为不受光阑限制时,聚焦拉盖尔-高斯光束的等相面曲率半径,它就等于对应基模高斯光束曲率半径

$$R=\frac{s+(\pi fF)^2/s}{1-(s/f+\pi^2 fF^2/s)}\tag{4.9.11}$$

图 4.9.2 给出了 TEM_{10} 模($p=1,l=0$)拉盖尔-高斯光束通过光阑-透镜后轴上光强分布,计算参数为 $\alpha=3.5,F=2,s/f=0,0.8,1,1.2,2$. 由图中看出轴上光强存在一个主极大 $I_{\max,c}$ 和次极大 $I_{\max,s}$,$I_{\max,c}>I_{\max,s}$. 当 s/f 从 0 增加到接近 1 时[图 4.9.2(a)、(b)],次极大 $I_{\max,s}$ 逐渐增大. 在 $s/f=1$ 处 $I_{\max,c}=I_{\max,s}$[图 4.9.2(c)]. 当离开 $s/f=1$ 位置时,出现主极大位置跃变,即焦开关. 随着 s/f 的继续增加,$I_{\max,c}<I_{\max,s}$[图 4.9.2(d)、(e)]. 聚焦拉盖尔-高斯光束轴上光强最大值 $I_{\max}$ 和相对焦移 Δz_f 随 s/f 的变化示于图 4.9.3(a)、(b),$\alpha=3.5,F=2$. 从图中可看出 $I_{\max}$ 和 Δz_f 随 s/f 变化的规律. 对 $p=1,2,l=0$,在 $s/f=1$ 处,$I_{\max}-s/f$ 曲线上都会出现一个拐点,其相对焦移由负变正. 对 $p=1$,Δz_f 由 -0.14 跃变至 0.10,对 $p=2$,Δz_f 由 -0.28 跃变至 0.24,其对应的相对焦点位置跃变量分别为 $\Delta z_{sw}=(z_{\max,s}-z_{\max,c})/|R|=0.24$ 和 0.52. Δz_{sw} 随截断参数 α 和菲涅耳数 F 的变化见图 4.9.4. 由图知,Δz_{sw} 随 α 和 F 的增加而减小. 对 TEM_{10} 模的拉盖尔-高斯光束,当 $\alpha=4.7$ 时,$\Delta z_{sw}=0$,对

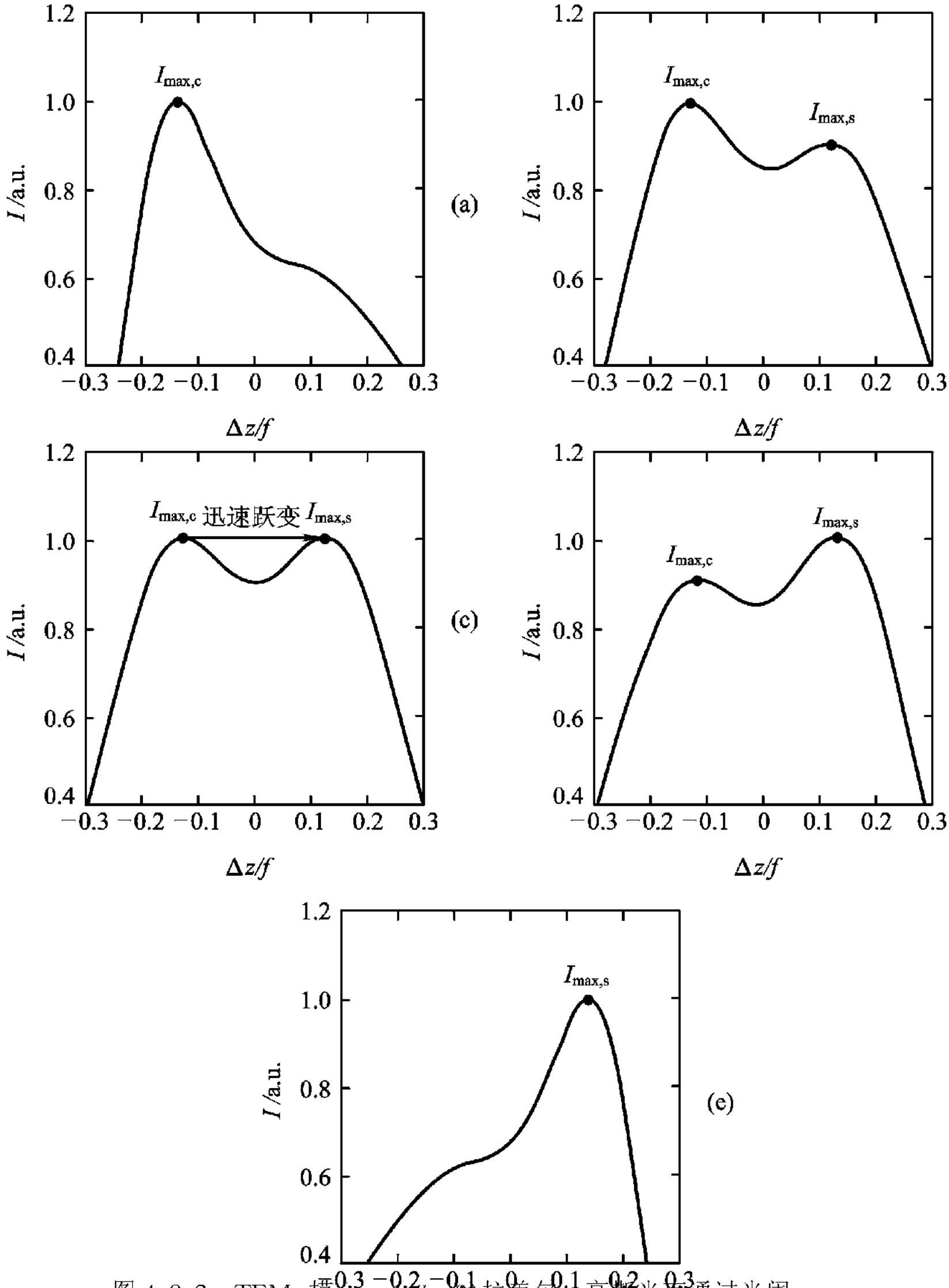


图 4.9.2　TEM_{10} 模（$p=1, l=0$）拉盖尔－高斯光束通过光阑－透镜后轴上光强分布

(a) $s/f=0$; (b) $s/f=0.8$; (c) $s/f=1$; (d) $s/f=1.2$; (e) $s/f=2$

TEM_{20} 模，$\alpha=7.7$ 时 $\Delta z_{sw}=0$.

由以上分析可知，在光阑－透镜分离光学系统中，有两个物理量对拉

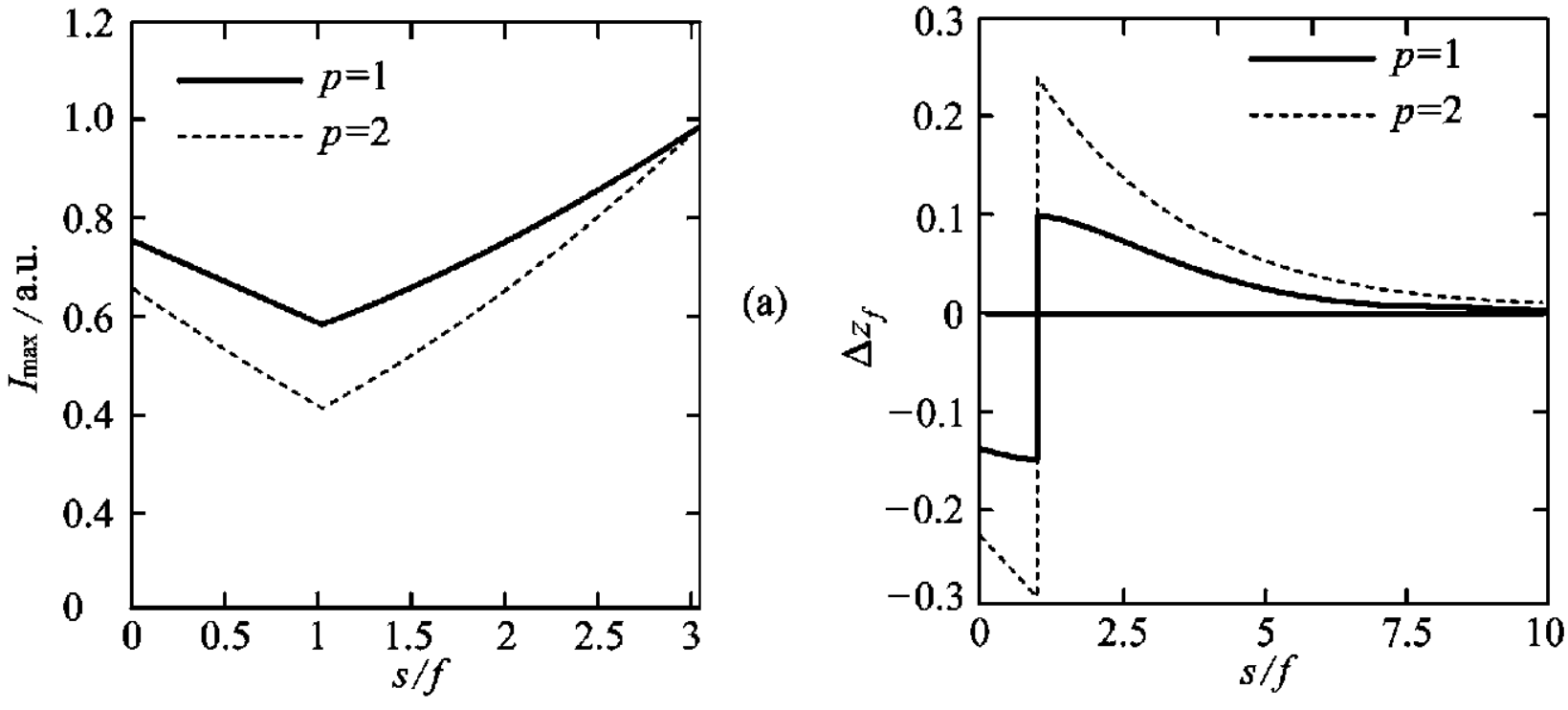


图 4.9.3 (a) I_{max}随 s/f 的变化； (b) Δz_f随 s/f 的变化

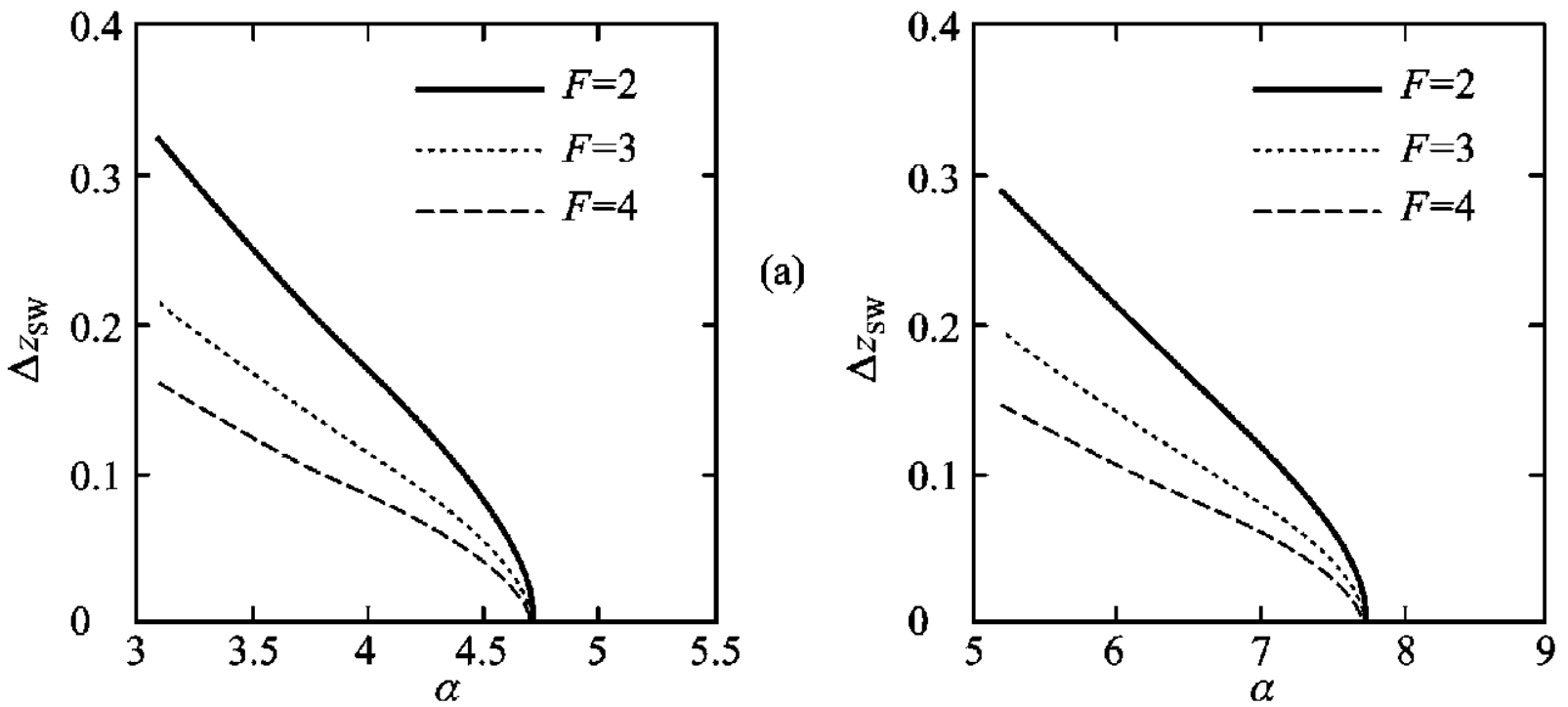


图 4.9.4 Δz_{sw}随截断参数 α 和菲涅耳数 F 的变化

(a) TEM_{10}模； (b) TEM_{20}模

盖尔－高斯光束的焦移和焦开关起重要作用：光阑－透镜的相对分离量 s/f 和截断参数 α. 当 $s/f<1$ 时，焦移 Δz_f 是负的，轴上最大光强点位置靠近透镜. 当 $s/f>1$ 时，Δz_f 为正，轴上光强最大点位置远离透镜. 随 s/f 增大，当 $s/f=1$ 时，Δz_f 由负变正，出现焦开关. 从图 4.9.5 看出，截断参数有一临界值 α_c，仅当 $\alpha<\alpha_c$ 时（对 TEM_{10} 模 $\alpha_c=4.7$），才会出现焦开关. $\alpha\geqslant\alpha_c$ 时仅有焦移出现而无焦开关. 类似地，对 TEM_{20} 模，当 $F=2$ 时，可得出 $\alpha_c=7.7$.

二、焦开关的物理诠释

产生焦开关的物理机制是由于存在两个轴上光强极大点，这两个极大点相互竞争导致了焦开关的出现. 式(4.9.3)可写为

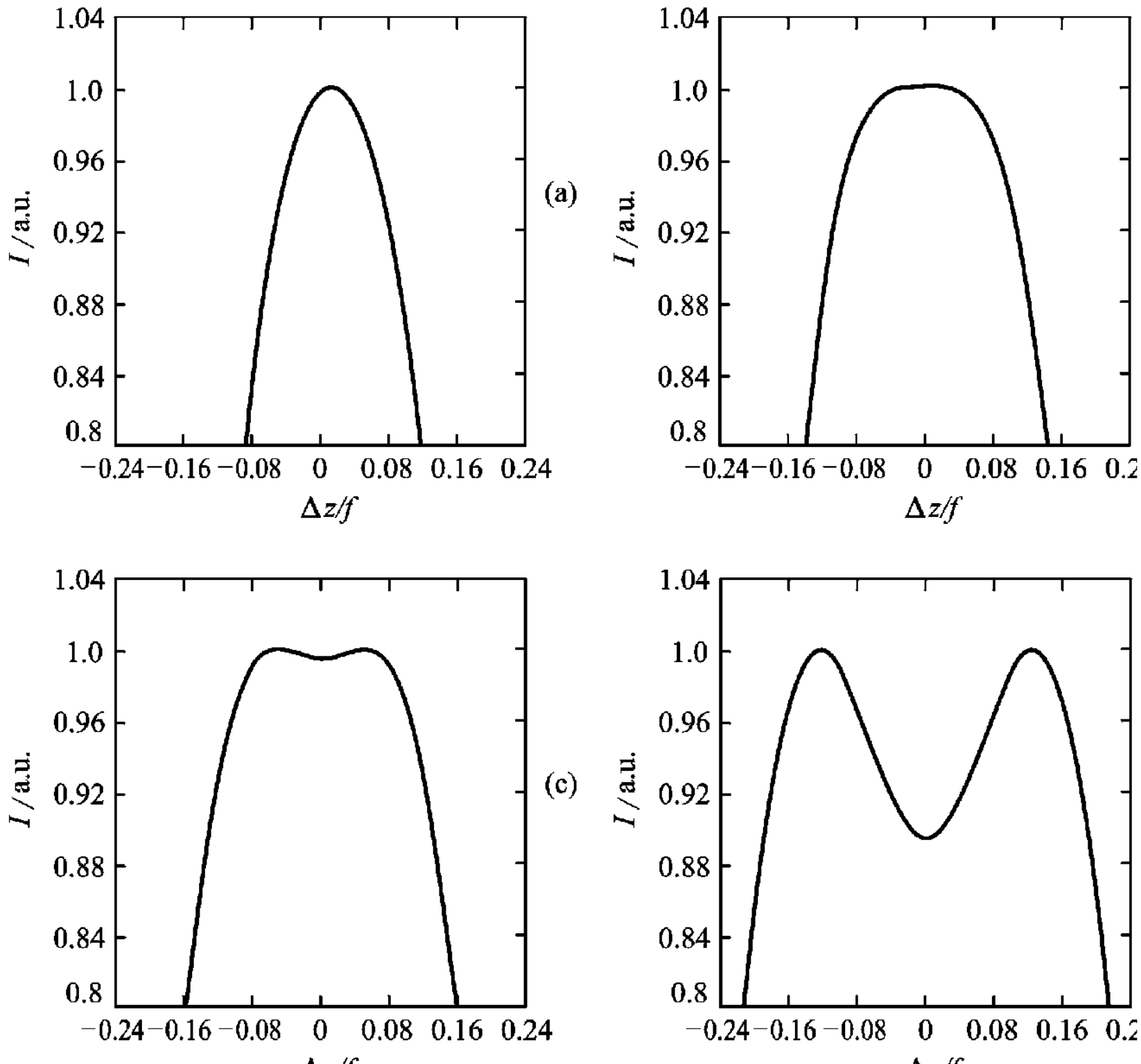


图 4.9.5　不同 α 值 L－G 光束($p=1, l=0$)轴上光强分布，$F=2$

(a) $\alpha=6$; (b) $\alpha=4.7$; (c) $\alpha=4.4$; (d) $\alpha=3.5$

$$I = I_1 \cdot I_2 \tag{4.9.12}$$

式中

$$I_1 = \frac{(\pi F)^2}{4}\left[1 - \frac{u\,(1 - s/f)}{\pi F}\right]^2 \tag{4.9.13}$$

$$I_2 = N(p, \alpha, u)\,N^*(p, \alpha, u) \tag{4.9.14}$$

TEM_{10} 拉盖尔－高斯光束 I_1 和 I_2 随 s/f 的变化见图 4.9.6，其计算参数同图 4.9.2. 第一部分 I_1 的变化与 s/f 有关，当 $s/f<1$ 时，I_1 随 s/f 增加而增加，$s/f>1$ 时恰好相反. $s/f=1$ 时，$I_1=(\pi F)^2/4=$ 常数. 第二部分 I_2 出现两个相等的轴上光强极大点，且不随 s/f 而变化. 轴上光强分布 $I=I_1\cdot I_2$ 在 I_1 和 I_2 叠加中随 s/f 的变化而变化. 当 $0<s/f<1$ 时，I_1 使靠近透镜的极大点增长，而 $s/f>1$ 时相反，从而使焦移反号. 当 $s/f=1$ 时 $I_{\max,s}=I_{\max,c}$，在 $s/f=1$ 附近变化就会出现焦开关. 图 4.9.7 说明

焦开关是由两个极大点间的竞争产生的. 图中给出了 $\Delta I_{max} = I_{max,s} - I_{max,c}$ 随 s/f 的变化，计算参数 $\alpha = 3.5$，$F = 4$. ΔI_{max} 随 s/f 增加而单调增加，由负交正，而在 $s/f = 1$ 焦开关出现处 $\Delta I_{max} = 0$. 由图还可看出，当改变 s/f 时，仅会出现一个焦开关.

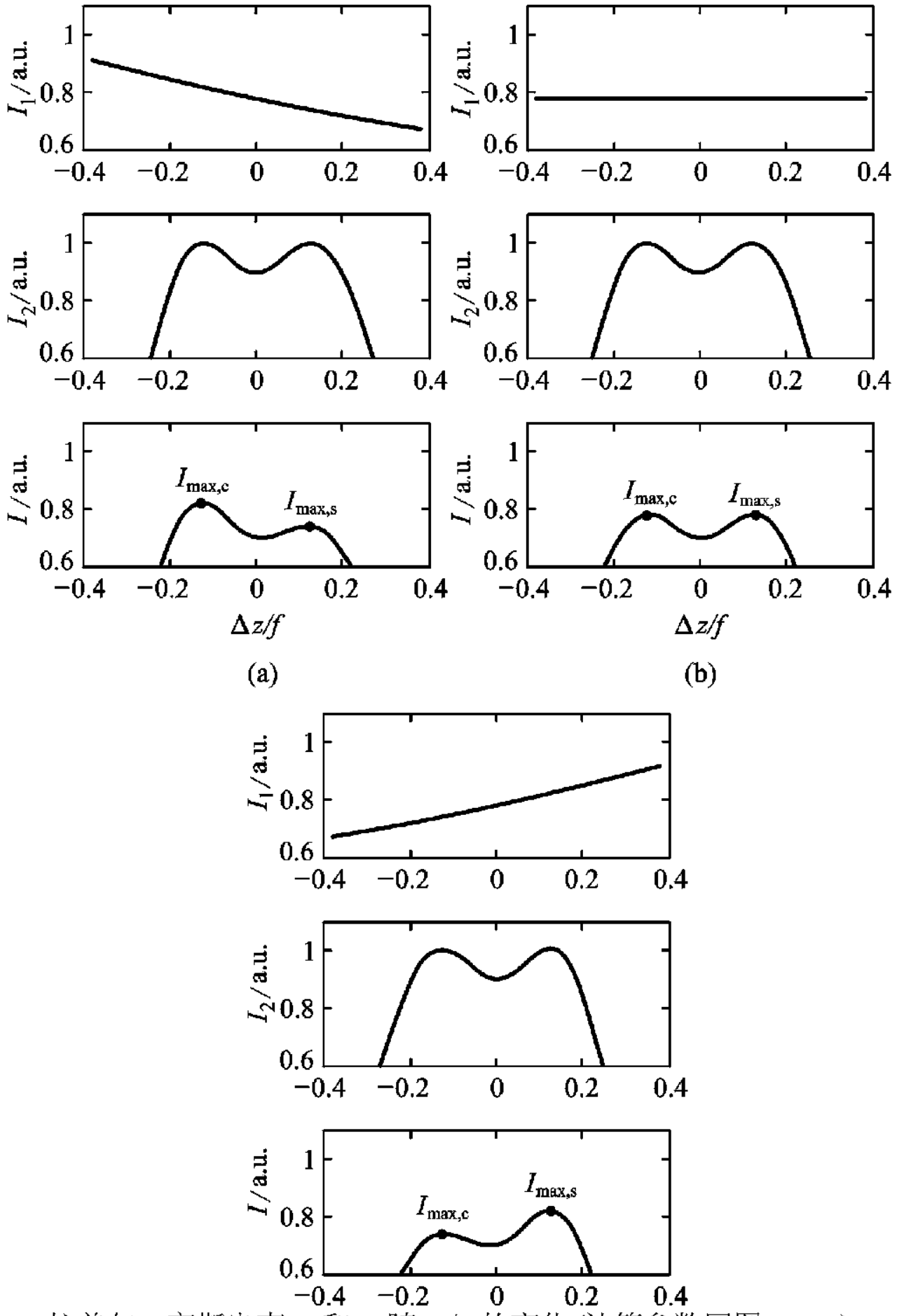


图 4.9.6 TEM_{10} 拉盖尔－高斯光束 I_1 和 I_2 随 s/f 的变化（计算参数同图 4.9.2）

(a) $s/f < 1$；(b) $s/f = 1$；(c) $s/f > 1$

用类似的方法分析可知，当厄米－高斯光束通过光阑－透镜分离系统时，也会出现焦移和焦开关.

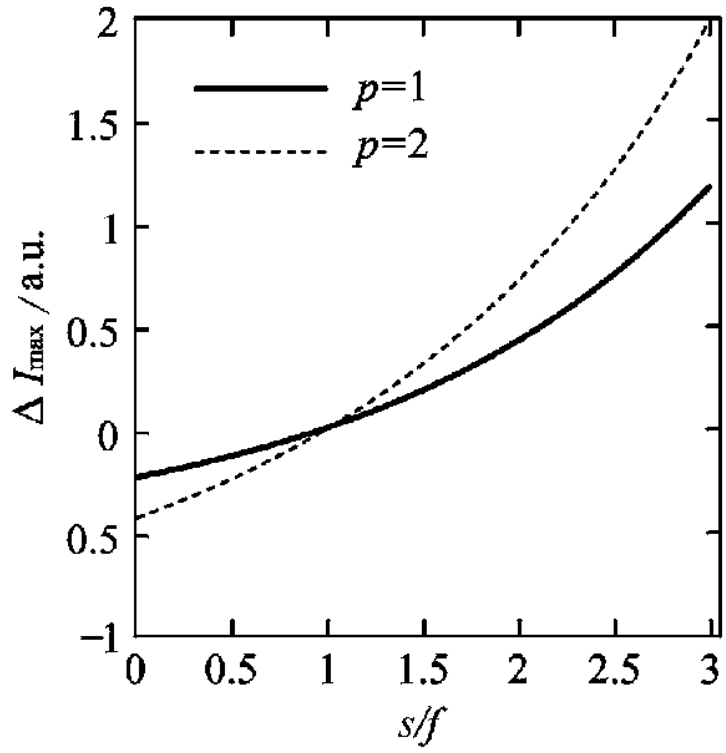


图 4.9.7　L－G 光束($p=1,2;l=0$)$\Delta I_{max}=I_{max,s}-I_{max,c}$ 随 s/f 的变化

§ 4.10　高斯光束的匹配

当一个谐振腔产生的单模高斯光束入射到另一个光学系统，例如干涉仪、多程反射室等时，由于光学系统都有自己的本征模式，且一般说来，与入射光束的模式是不匹配的，这样，第一腔发出的单模将激发起系统的多模，因交叉激发作用而使损耗增加，在很多情况下这是需要避免的. 而在模式匹配的情况下，一个入射的单模高斯光束只会激发起系统一个相对应的单模. 现在分析图 4.10.1 所示两个共轴球面腔，设在 Ⅰ 腔中产生束腰 w_0 的基模高斯光束，Ⅱ 腔中产生束腰 w_i 的基模高斯光束. 如果在其间适当位置(物距 p_0，像距 p_i)插入一个适当焦距 f 的薄透镜后，使由 Ⅰ 腔发出光束与由 Ⅱ 腔发出光束互为物像共轭，则该透镜称为两腔的模匹配透镜.

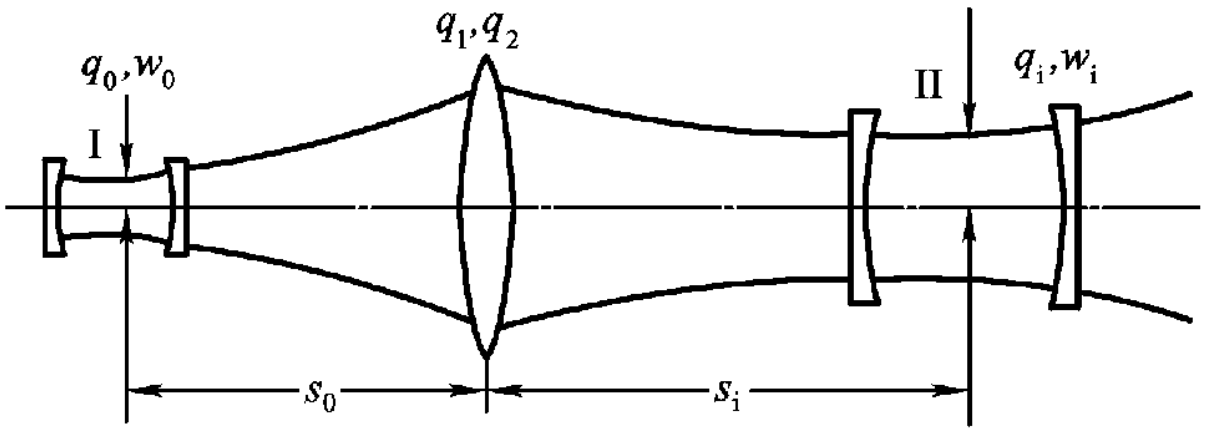


图 4.10.1　高斯光束的匹配

显然，因事先给定的量和可改变的参数可以变化，因而这一问题的提法可以是多种方式的，现在来分析这些参数间应满足的关系.

比较一般的提法是，已知物方高斯光束的束腰 w_0，要求在像方得到束腰为 w_i 的高斯光束，求物距 s_0、像距 s_i 和模匹配透镜的焦距 f 应满足的关系.模匹配公式推导方法很多，最简单的方法是直接利用高斯光束通过薄透镜变换的成像公式和物像比例公式稍加变化即可得出.现在我们利用高斯光束的复参数表示和 $ABCD$ 定律直接推导，以作为使用基本方法的又一示例.

设在透镜处物方和像方复参数分别为 q_1 和 q_2，物方束腰和像方束腰处复参数分别为 q_0 和 q_i，由 $ABCD$ 定律得到

$$q_0 \rightarrow q_1: \quad q_1 = q_0 + s_0 \tag{4.10.1}$$

$$q_1 \rightarrow q_2: \quad \frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{f} \tag{4.10.2}$$

$$q_2 \rightarrow q_i: \quad q_i = q_2 + s_i \tag{4.10.3}$$

将式(4.10.1)、式(4.10.2)代入式(4.10.3)，得

$$(q_i - s_i)\left(\frac{1}{q_0 + s_0} - \frac{1}{f}\right) = 1 \tag{4.10.4}$$

展开上式左方，分离实、虚部，并利用

$$\frac{1}{q_0} = -\mathrm{i}\frac{\lambda}{\pi w_0^2} \tag{4.10.5}$$

$$\frac{1}{q_i} = -\mathrm{i}\frac{\lambda}{\pi w_i^2} \tag{4.10.6}$$

均为纯虚数，得到

$$(s_0 - f)(s_i - f) = q_0 q_i + f^2 \tag{4.10.7}$$

$$q_i (s_0 - f) = q_0 (s_i - f) \tag{4.10.8}$$

把式(4.10.5)、式(4.10.6)代入式(4.10.7)、式(4.10.8)，对 s_0、s_i 求解，得出

$$s_0 = f \pm \frac{w_0}{w_i}\sqrt{f^2 - f_0^2} \tag{4.10.9}$$

$$s_i = f \pm \frac{w_i}{w_0}\sqrt{f^2 - f_0^2} \tag{4.10.10}$$

式中

$$f_0 = \frac{\pi w_0 w_i}{\lambda} \tag{4.10.11}$$

式(4.10.9)、式(4.10.10)称为高斯光束的模匹配公式.下面分两种情况讨论.

(1) 当 w_0、w_i 给定时，模匹配公式中仍包含三个未知量 s_0、s_i 和 f，

因而可以在物理上允许范围内独立选择其中一个量，求解其余两个量.

(2) 若 w_0、w_i和两腔相对位置

$$s = s_0 + s_i \tag{4.10.12}$$

给定时，数学上由三个联立方程可解出 s_0、s_i和 f，但在模匹配的实际问题中必须注意检查求出的结果在物理上是否合理.

由式(4.10.9)、式(4.10.10)可得

$$(s_0 - f)(s_i - f) = f^2 - f_0^2 \tag{4.10.13}$$

当 $f_0 \to 0$ 时，

$$(s_0 - f)(s_i - f) = f^2 \tag{4.10.14}$$

过渡为几何光学中的牛顿公式.

式(4.10.1)为 q 参数在自由空间中的传输公式，式(4.10.2)为 q 参数通过薄透镜的变换公式，它们与几何光学中曲率半径为 R 的球面波的相应公式在形式上是完全相同的.

§4.11 高斯光束通过调焦望远镜系统的变换

高斯光束通过望远镜系统的变换是高斯光束通过光学成像系统的又一典型例.在实际工作中常用以解决高斯光束的扩束、准直和发射等问题.本节讨论调焦望远镜系统，离焦量

$$\Delta = f_1 + f_2 - l = 0 \tag{4.11.1}$$

式中 f_1、f_2分别为两透镜焦距，l 为两透镜间距离.

如图4.11.1，设在物方束腰 w_{01} 处，复参数为 q_1、物距为 s_0的高斯光束，经望远镜系统后变为束腰 w_{02} (相应复参数 q_2)、像距 s_i的高斯光束 ($n_2 = n_1 = 1$)，则

$$\boldsymbol{m} = \begin{bmatrix} M_T & l \\ 0 & \dfrac{1}{M_T} \end{bmatrix} \tag{4.11.2}$$

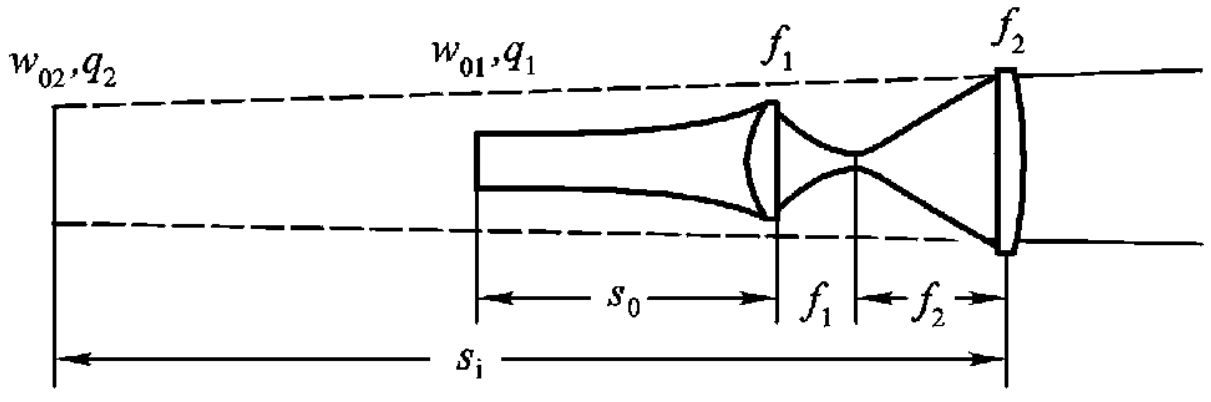


图 4.11.1 高斯光束通过调焦望远镜的变换

$$\frac{1}{q_1} = -\mathrm{i}\frac{\lambda}{\pi w_{01}^2} \tag{4.11.3}$$

$$\frac{1}{q_2} = -\mathrm{i}\frac{\lambda}{\pi w_{02}^2} \tag{4.11.4}$$

将式(4.11.2)、式(4.11.3)、式(4.11.4)代入一般变换公式(4.5.9)中,得到成像公式:

$$s_\mathrm{i} = -M_\mathrm{T}(f_1 + f_2) - M_\mathrm{T}^2 s_0 \tag{4.11.5}$$

物像比例公式:

$$w_{02} = |M_\mathrm{T}| w_{01} \tag{4.11.6}$$

分析式(4.11.5)、式(4.11.6),可得出以下结论:

(1) 式(4.11.5)、式(4.11.6)确定了经过望远镜系统变换后像方束腰 w_{02}、像距 s_i与物方参量 w_{01}、s_0和望远镜系统参量 f_1、f_2间关系.由式(4.11.6)可知,使用倒装望远镜系统,即 $|M_\mathrm{T}|>1$,可使高斯光束扩束 $|M_\mathrm{T}|$倍,由瑞利长度公式知,相应像方准直范围增大 M_T^2倍.

(2) 因远场发散角 θ_0与束腰 w_0间有反比关系,由式(4.11.6)可得出像方远场发散角 θ_{02}与物方远场发散角 θ_{01}间关系为

$$\theta_{02} = \frac{1}{|M_\mathrm{T}|}\theta_{01} \tag{4.11.7}$$

即像方远场发散角被压缩 $|M_\mathrm{T}|$倍,且与物距 s_0或像距 s_i均无关.

(3) 当 $s_0 = f_1$时,由式(4.11.5)得到

$$s_\mathrm{i} = f_2 \tag{4.11.8}$$

这意味着像方激光束腰 w_{02}位于第二透镜的后焦面上.容易证明,此时入射激光束经第一透镜成像后的束腰则位于第一透镜和第二透镜的公共焦面上.

(4) 当 $s_0 \gg f_1 + f_2$时,由式(4.11.5)得

$$s_\mathrm{i} \approx -M_\mathrm{T}^2 s_0 \tag{4.11.9}$$

使用调焦望远镜系统只能得到扩束比(又称准直率)

$$M' = \frac{w_{02}}{w_{01}} = |M_\mathrm{T}| \tag{4.11.10}$$

如下一节的分析表明,为了得到最大扩束比,常使望远镜系统在离焦状态下工作.

§4.12 高斯光束通过离焦望远镜系统的变换

高斯光束通过图 4.12.1 中所示离焦望远镜系统($\Delta \neq 0$)的变换可以

用多种等价方法进行分析，本节就来讨论这一问题.

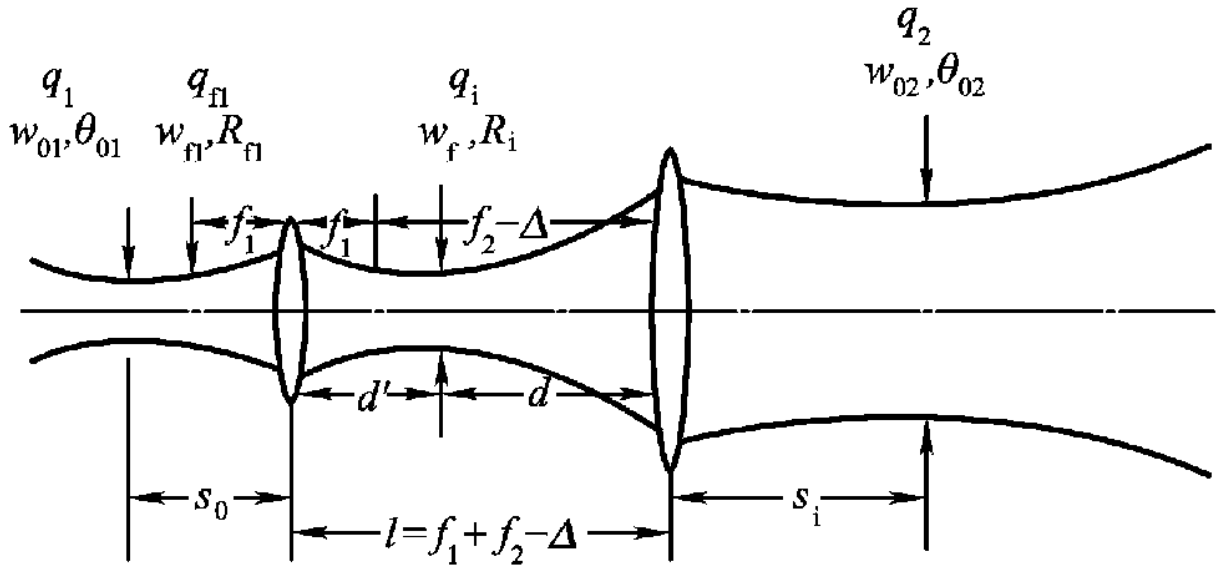


图 4.12.1　高斯光束通过离焦望远镜系统的变换

一、一般公式

由表 2.2.1，离焦望远镜系统的变换矩阵为

$$\boldsymbol{m}=\begin{bmatrix} M_T+\dfrac{\Delta}{f_1} & l \\ -\dfrac{\Delta}{f_1 f_2} & \dfrac{1}{M_T}+\dfrac{\Delta}{f_2} \end{bmatrix} \tag{4.12.1}$$

将式(4.12.1)、式(4.12.3)、式(4.11.4)代入一般变换公式(4.5.9)中，得到成像公式：

$$s_0\left(M_T+\frac{\Delta}{f_1}\right)+s_i\left(M_T+\frac{\Delta}{f_2}\right)-s_0 s_i\left(\frac{\Delta}{f_1 f_2}\right)+l=\frac{\left(\dfrac{\pi w_{01}^2}{\lambda}\right)\left(M_T+\dfrac{\Delta}{f_1}-\dfrac{\Delta s_i}{f_1 f_2}\right)}{\dfrac{f_1 f_2}{\Delta}\left(\dfrac{1}{M_T}+\dfrac{\Delta}{f_2}\right)-s_0} \tag{4.12.2}$$

物像比例公式：

$$w_{02}=w_{01}\left\{\left(M_T+\frac{\Delta}{f_1}-\frac{\Delta s_i}{f_1 f_2}\right)^2+\left[\frac{s_0\left(M_T+\dfrac{\Delta}{f_1}\right)+s_i\left(\dfrac{1}{M_T}+\dfrac{\Delta}{f_2}\right)-\dfrac{\Delta s_0 s_i}{f_1 f_2}+l}{\pi w_{01}^2/\lambda}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{4.12.3}$$

或写为

$$w_{02}=w_{01}\left|M_T+\frac{\Delta}{f_1}-\frac{\Delta s_i}{f_1 f_2}\right|\left\{1+\left(\frac{\pi w_{01}^2}{\lambda}\right)^2\left[\frac{1}{\dfrac{f_1 f_2}{\Delta}\left(\dfrac{1}{M_T}+\dfrac{\Delta}{f_2}\right)-s_0}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{4.12.4}$$

由式(4.12.3)或式(4.12.4)知,扩束比 $M'=\omega_{01}/\omega_{02}$ 不仅与望远镜系统放大率 M_T 有关,还依赖于系统的其他几何参数.实际工作中常常在两透镜(焦距分别为 f_1、f_2)已选定,固定条件 s_0、ω_{01} 下讨论最大扩束比 M'_{max},这在数学上归结于求方程式(4.12.3)在式(4.12.2)约束下的条件极值问题,可以用拉格朗日不定乘子法解决.

设

$$F(\Delta,s_i)=\frac{\omega_{02}}{\omega_{01}}+\mu\left[s_0\left(M_T+\frac{\Delta}{f_1}\right)+s_i\left(\frac{1}{M_T}+\frac{\Delta}{f_2}\right)-\frac{s_0 s_i\Delta}{f_1 f_2}+l-\frac{\left(\frac{\pi\omega_{01}^2}{\lambda}\right)^2\left(M_T+\frac{\Delta}{f_1}-\frac{\Delta s_i}{f_1 f_2}\right)}{\frac{f_1 f_2}{\Delta}\left(\frac{1}{M_T}+\frac{\Delta}{f_2}\right)-s_0}\right] \tag{4.12.5}$$

式中 μ 为待定常数.

求

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F(\Delta,s_i)}{\partial\Delta}=0 & (4.12.6)\\[2ex] \dfrac{\partial F(\Delta,s_i)}{\partial s}=0 & (4.12.7)\end{cases}$$

与式(4.12.2)联立,取物理上合理解得

$$\begin{cases}s_i=f_2 & (4.12.8)\\ \Delta=\dfrac{f_1^2(f_1-s_0)}{\left(\dfrac{\pi\omega_{01}^2}{\lambda}\right)^2+(s_0-f_1)^2} & (4.12.9)\\ \mu=0 & (4.12.10)\end{cases}$$

并由式(4.12.3)求出 ω_{02} 和最大扩束比为

$$\omega_{02}=\omega_{01}|M_T|\sqrt{1+\left(\frac{s_0-f_1}{Z_{01}}\right)^2} \tag{4.12.11}$$

$$M'_{max}=|M_T|\sqrt{1+\left(\frac{s_0-f_1}{Z_{01}}\right)^2} \tag{4.12.12}$$

式中 $Z_{01}=\pi\omega_{01}^2/\lambda$ 为物方瑞利长度.

由远场发散角定义得

$$\theta_{02}=\frac{\theta_{01}}{|M_T|\sqrt{1+[(s_0-f)/Z_{01}]^2}} \tag{4.12.13}$$

若进一步有 $s_0\gg f_1$,则

$$\omega_{02}\approx\omega_{01}|M_T|\sqrt{1+(s_0/Z_{01})^2} \tag{4.12.14}$$

$$M'_{\max}\approx|M_{\mathrm{T}}|\sqrt{1+(s_0/Z_{01})^2} \tag{4.12.15}$$

$$\theta_{02}\approx\frac{\theta_{01}}{|M_{\mathrm{T}}|\sqrt{1+(s_0/Z_{01})^2}} \tag{4.12.16}$$

由以上分析可知，最大扩束比及有关公式(4.12.11)、式(4.12.12)、式(4.12.13)成立条件为 $s_{\mathrm{i}}=f_2$，即出射激光束腰落在第二透镜的后焦面上.容易证明，这一条件也等价于入射激光束仅经第一透镜成像后的束腰 w_{i} 位于第二透镜的前焦面上.又若当 $s_0\gg f_1$ 条件满足，即入射激光束腰到第一透镜距离大于第一透镜焦距时，式(4.12.11)、式(4.12.12)和式(4.12.13)简化为式(4.12.14)、式(4.12.15)和式(4.12.16).

二、分段计算

分析表明，当以入射激光束在第一透镜的前焦面上的复参数 q_{f_1} (R_{f_1},w_{f_1}) 为参考时，做分段计算，可使上述公式在形式上大为简化.

(1) 计算入射激光束在第一透镜前焦面上的复参数 $q_{f_1}(R_{f_1},w_{f_1})$

由 $q_1\to q_{f_1}$ 的变换矩阵为

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1 & s_0-f_1\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{4.12.17}$$

又

$$\frac{1}{q_{f_1}}=\frac{1}{R_{f_1}}-\mathrm{i}\frac{\lambda}{\pi w_{f_1}^2} \tag{4.12.18}$$

由 *ABCD* 定律和式(4.11.3)求得

$$R_{f_1}=\frac{(s_0-f_1)^2+Z_{01}^2}{s_0-f_1} \tag{4.12.19}$$

$$Z_1=\frac{\pi w_{f_1}^2}{\lambda}=\frac{(s_0-f_1)^2+Z_{01}^2}{Z_{01}} \tag{4.12.20}$$

(2) 计算出射激光束复参数 $q_2(w_{02})$、像距 s_{i}

将 *ABCD* 定律写为

$$q_2-s_{\mathrm{i}}=\frac{A(q_{f_1}+f_1)+B}{C(q_{f_1}+f_1)+D} \tag{4.12.21}$$

式中 A、B、C、D 为失调望远镜系统变换矩阵式(4.12.1)诸元素.将式(4.12.1)、式(4.11.4)、式(4.12.19)、式(4.12.20)代入式(4.12.21)做复数运算，分离实、虚部得像方瑞利长度

$$Z_{02}=\frac{\pi w_{02}^2}{\lambda}=\frac{M_T^2 Z_1}{1+Z_1^2\left(\frac{\Delta}{f_1^2}+\frac{1}{R_{f_1}}\right)^2} \tag{4.12.22}$$

像距

$$s_i=f_2-\frac{M_T^2 Z_1^2\left(\frac{\Delta}{f_1^2}+\frac{1}{R_{f_1}}\right)}{1+Z_1^2\left(\frac{\Delta}{f_1^2}+\frac{1}{R_{f_1}}\right)^2} \tag{4.12.23}$$

令

$$\xi=Z_1\left(\frac{\Delta}{f_1^2}+\frac{1}{R_{f_1}}\right) \tag{4.12.24}$$

则

$$Z_{02}=\frac{M_T^2 Z_1}{1+\xi^2} \tag{4.12.25}$$

$$s_i=f_2-\frac{M_T^2 Z_1}{1+\xi^2}\xi \tag{4.12.26}$$

这样，用 Z_1 和 ξ 使 Z_{02}（或 w_{02}）和 s_i 的表达式大为简化，分析式(4.12.25)、式(4.12.26)可得以下结论：

(1) 调焦望远镜系统($\Delta=0$)

式(4.12.24)中令 $\Delta=0$ 得

$$\xi=\frac{Z_1}{R_{f_1}} \tag{4.12.27}$$

代入式(4.12.25)、式(4.12.26)

$$w_{02}=|M_T|w_{01} \tag{4.12.28}$$

$$s_i=-M_T^2 s_0-M_T(f_1+f_2) \tag{4.12.29}$$

这正是式(4.11.6)、式(4.11.5).

(2) 最大扩束比 M'_{max}

最大扩束比可由式(4.12.25)中令$\frac{dZ_{02}}{d\xi}=0$ 得到，这相当于 $\xi=0$，由此得

$$\Delta=-\frac{f_1^2}{R_{f_1}} \tag{4.12.30}$$

$$s_i=f_2 \tag{4.12.31}$$

$$w_{02}=|M_T|w_{01}\sqrt{1+\left(\frac{s_0-f_1}{Z_{01}}\right)^2} \tag{4.12.32}$$

$$M'_{\max}=|M_T|\sqrt{1+\left(\frac{s_0-f_1}{Z_{01}}\right)^2} \tag{4.12.33}$$

(3) ξ 的物理意义

为了说明量纲为 1 的参数 ξ 的物理意义，现在计算复参数 q_{f_1} 仅经过第一透镜变换后的结果.利用 $ABCD$ 定律得到

$$d'=\frac{f_1^2}{R_{f_1}}+f_1 \tag{4.12.34}$$

$$w_i=\frac{\lambda f_1}{\pi w_{f_1}} \tag{4.12.35}$$

式中 w_i 为入射激光经第一透镜变换后的束腰，d' 为入射激光经第一透镜变换后的束腰位置(以第一透镜为参考).

设 w_i 距第二透镜为 d，则

$$d=f_2-\left(\Delta+\frac{f_1^2}{R_{f_1}}\right) \tag{4.12.36}$$

于是

$$\xi=\frac{f_2-d}{Z_i} \tag{4.12.37}$$

式中

$$Z_i=\frac{\pi w_i^2}{\lambda} \tag{4.12.38}$$

因此 ξ 为入射激光束经第一透镜变换后的束腰 w_i 距第二透镜前焦面的距离 f_2-d 与瑞利长度 Z_i 的比值.在一般情况下，作为扩束、准直和发射等使用的望远镜系统常有 $|M_T|\gg 1$，Z_i 是个小量，所以望远镜系统的微小失调可使 ξ 取大的值，从而引起出射激光束参数与调焦情况相比较会发生很大的变化，这是实际应用中要注意的.

$\xi=0$ 表明最大扩束比出现在 $d=f_2$，即入射激光束经第一透镜变换后的束腰 w_i 恰好落在第二透镜的前焦面上，而出射激光束腰 w_{02} 则位于第二透镜的后焦面上.

(4) 对于某些应用，要求出射激光束腰 w_{02} 距离第二透镜尽可能远，即 $s_i\gg f_2$ (指绝对值)，且要求 s_i 等于出射激光束的瑞利长度

$$s_i=Z_{02} \tag{4.12.39}$$

由式(4.12.25)、式(4.12.26)得到

$$\xi=1 \tag{4.12.40}$$

且有

$$s_i = \frac{1}{2} M_T^2 Z_1 \tag{4.12.41}$$

$$w_{02}^2 = \frac{\lambda M_T^2}{2\pi} Z_1 \tag{4.12.42}$$

三、等效厚透镜法

如图 4.12.2(a)、(b)，容易证明，焦距分别为 f_1、f_2，相距 l 的透镜组 ($\Delta \neq 0$) 等效于一个焦距

$$f = \frac{f_1 f_2}{\Delta} \tag{4.12.43}$$

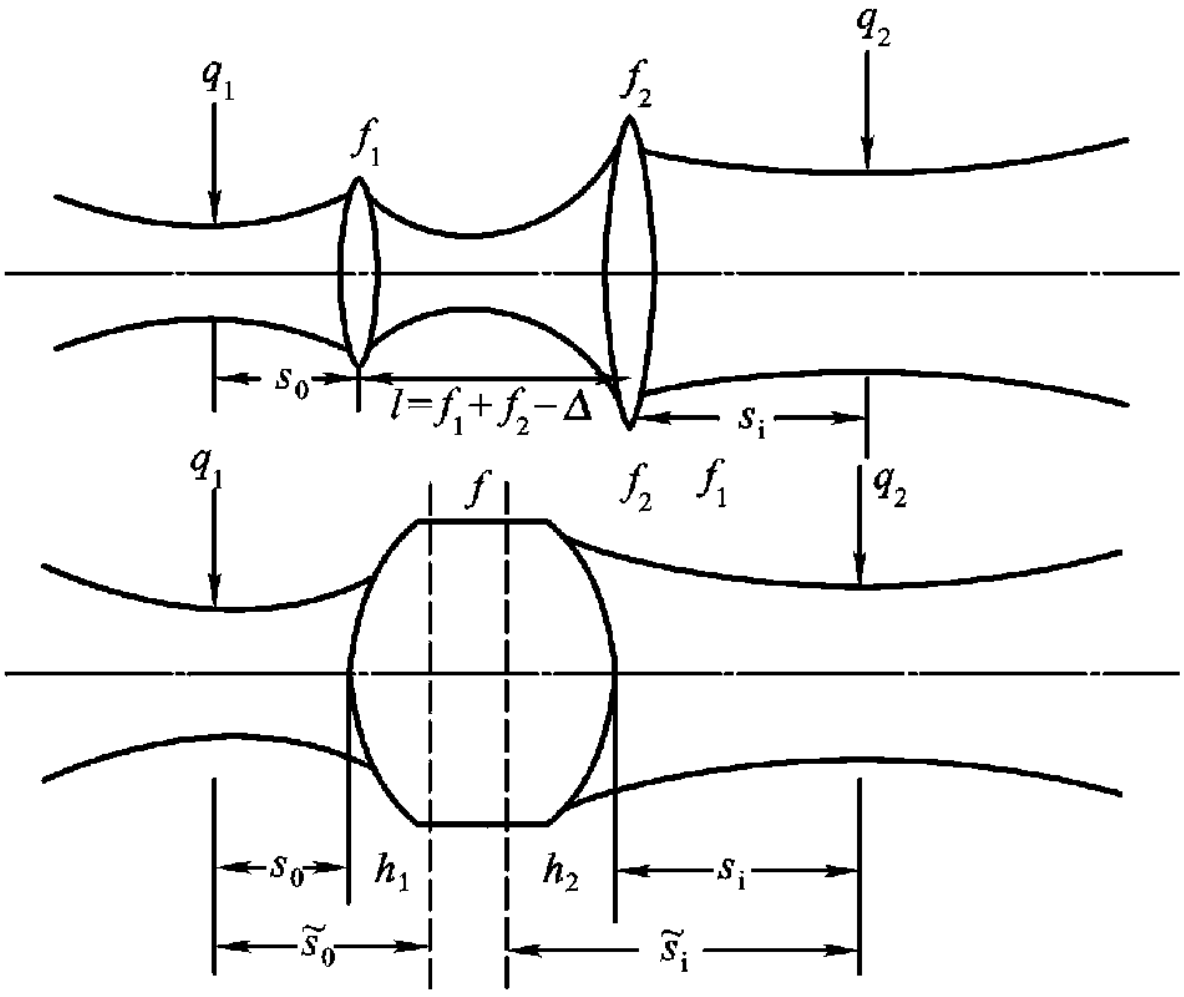


图 4.12.2 等效厚透镜法

主面距离

$$h_1 = \frac{l f_1}{\Delta} \tag{4.12.44}$$

$$h_2 = \frac{l f_2}{\Delta} \tag{4.12.45}$$

的厚透镜. 当物距用

$$\tilde{s}_0 = s_0 + h_1 \tag{4.12.46}$$

像距用

$$\tilde{s}_i = s_i + h_2 \tag{4.12.47}$$

代替后，就把高斯光束通过望远镜系统的变换转化为薄透镜的变换问题. 利用式(4.12.43)～式(4.12.47)和式(4.6.2)、式(4.6.3)得到成像公式：

$$s_i = \frac{f_2(\Delta - f_2)}{\Delta} + \frac{f_1^2 f_2^2 \left[s_0 + \frac{f_1}{\Delta}(f_1 - \Delta) \right]}{\Delta^2 \left\{ \left[s_0 + \frac{f_1}{\Delta}(f_1 - \Delta) \right]^2 + Z_{01}^2 \right\}} \tag{4.12.48}$$

或者

$$s_i - f_2 = -M_T^2 (s_0 - f_1) + \Delta M_T^2 \cdot \left\{ \frac{(s_0 - f_1)(s_i - f_2)}{f_1 f_2} + \frac{f_1 f_2 Z_{01}^2}{\Delta^2 Z_{01}^2 + [f_1^2 + \Delta(s_0 - f_1)]^2} \right\} \tag{4.12.49}$$

物像比例公式：

$$w_{02} = w_{01} |M_T| \frac{f_1^2}{\{\Delta^2 Z_{01}^2 + [f_1^2 + \Delta(s_0 - f_1)]^2\}^{\frac{1}{2}}} \tag{4.12.50}$$

可以证明，式(4.12.48)[或式(4.12.49)]、式(4.12.50)与式(4.12.2)、式(4.12.3)[或式(4.12.4)]是完全等价的.

当略去 Δ 的二级小量后，由式(4.12.49)、式(4.12.50)易得

$$s_i - f_2 = -M_T^2 (s_0 - f_1) + \Delta M_T^2 \left[\left(1 - \frac{s_0}{f_1}\right)^2 - \left(\frac{Z_{01}}{f_1}\right)^2 \right] \tag{4.12.51}$$

$$w_{02} = w_{01} |M_T| \left[1 - \frac{\Delta}{f_1} \left(\frac{s_0}{f_1} - 1 \right) \right] \tag{4.12.52}$$

应当注意，简化公式(4.12.51)、式(4.12.52)仅在 Δ 的二级小量可以略去的前提下才能使用，否则会带来较大的计算误差.

至此，我们用三种方法讨论了高斯光束通过离焦望远镜系统的变换问题.事实上，这些都是分析高斯光束传输变换的基本方法.如果能针对具体问题和要求灵活加以运用，常可带来很大的方便.

§ 4.13　高斯光束与球面波传输变换规律的比较

如前所述，在近轴近似下球面波的曲率半径 R 与光线矢量 $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix}$ 的关系为

$$R = \frac{x}{\theta} \tag{4.13.1}$$

用 $ABCD$ 定律式(2.1.8)可以简明地描述球面波几何成像的规律，例如推导出球面波通过自由空间、薄透镜和望远镜系统等的变换公式，现用表 4.13.1 和表 4.13.2 将高斯光束与球面波传输变换作了总结和

比较.

由此二表可知,高斯光束与球面波通过光学系统的变换有以下相似之处:

(1) 高斯光束的复参数 q 和球面波的光线矢量 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x\\ \theta\end{bmatrix}$(或曲率半径 R)都服从 $ABCD$ 定律.

(2) 等相面都为球面.

(3) 高斯光束的复参数 q 在自由空间中的传输公式和通过薄透镜的变换公式在形式上与曲率半径为 R 的球面波的对应公式完全相同,且当 $\lambda\to 0$ 时,$q\to R$.

(4) 当满足条件 $(s_0-f)^2\gg Z_{01}^2$,$Z_{01}\to 0$ 时,高斯光束通过薄透镜变换时的成像公式、物像比例公式等过渡为近轴球面波的有关公式,这时可用几何光学近轴光线的公式来处理高斯光束的变换,从而使计算简化.

但是,以下几点是值得注意的:

(1) 由近轴光线的 $ABCD$ 定律并不能直接推出高斯光束的复参数 q 也服从 $ABCD$ 定律.例如,按 $ABCD$ 定律,对光线矢量 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x\\ \theta\end{bmatrix}$ 有

$$x_2=Ax_1+B\theta_1 \tag{4.13.2}$$

$$\theta_2=Cx_1+D\theta_1 \tag{4.13.3}$$

但由式(4.13.2)、式(4.13.3)出发,并不能证明

$$\frac{1}{q_2}=\frac{1}{R_2}-\mathrm{i}\frac{\lambda}{\pi w_2^2}=\frac{\theta_2}{x_2}-\mathrm{i}\frac{\lambda}{\pi w_2^2} \tag{4.13.4}$$

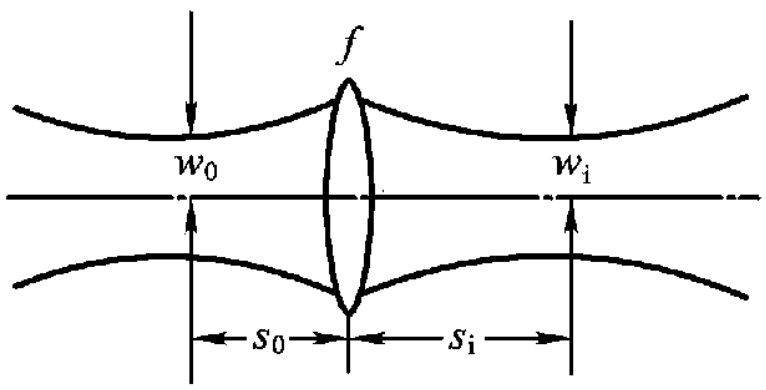
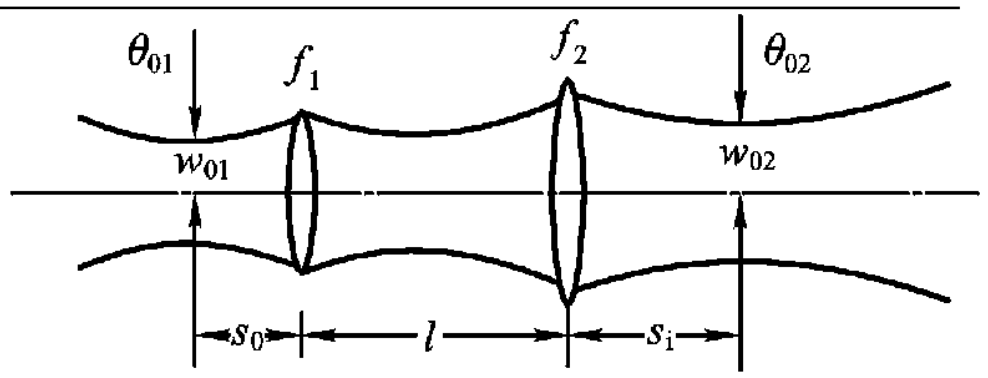
满足

$$\frac{1}{q_2}=\frac{C+D/q_1}{A+B/q_1} \tag{4.13.5}$$

因此,高斯光束复参数 q 的 $ABCD$ 定律式(4.13.5)需另加证明.但是,反过来却是对的,即 $\lambda\to 0$ 时,$q\to R$,式(4.13.5)过渡为式(4,13.2)、式(4.13.3).

(2) 当条件 $(s_0-f)^2\gg Z_{01}^2$,$Z_{01}\to 0$ 不满足时,高斯光束的变换规律与球面波大相径庭.特别是在几何光学中 $s_0=2f$ 生成等大实像(1:1 成像),$s_0=f$ 成像在无穷远(球面波变为平面波),以及 $s_0<f$ 时生成放大虚像这些传统概念完全不适用于高斯光束.而且,对高斯光束 1:1 成像条件是 $s=s_0=f\pm\sqrt{f^2-Z_{01}^2}$.所以,在设计用于激光束变换的光学系统时,不能一概套用基于几何光学定律的设计方程,否则会导致错误的结果.

表 4.13.1　高斯光束和球面波传输变换的主要公式

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">高　斯　光　束</td></tr>
<tr><td colspan="2">主　要　参　数</td><td colspan="2">$\frac{1}{q}=\frac{1}{R}-\mathrm{i}\frac{\lambda}{\pi w^2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$ABCD$ 定律</td><td colspan="2">$q_2=\frac{Aq_1+B}{Cq_1+D}$　变换矩阵 $M=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">自由空间通过距离 d</td><td colspan="2">$q_2-q_1=d$</td></tr>
<tr><td rowspan="5">通过焦距为 f 薄透镜的变换公式</td><td>q 参数或曲率半径 R 的变换公式</td><td colspan="2">$\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_2}=\frac{1}{f}$

</td></tr>
<tr><td>成像公式</td><td colspan="2">$\frac{1}{s_\mathrm{i}}+\frac{1}{s_0}\cdot\frac{1}{1+Z_{01}^2/s_0(s_0-f)}=\frac{1}{f}$</td></tr>
<tr><td>物像比例公式</td><td colspan="2">$w_\mathrm{i}=\frac{fw_0}{\sqrt{Z_{01}^2+(s_0-f)^2}}$</td></tr>
<tr><td>景深公式</td><td colspan="2">$Z_{02}=\frac{f^2Z_{01}}{Z_{01}^2+(s_0-f)^2}$</td></tr>
<tr><td>模匹配公式</td><td colspan="2">$(s_0-f)(s_\mathrm{i}-f)=f^2-f_0^2$</td></tr>
<tr><td rowspan="6">通过望远镜系统的变换公式</td><td>图　　示</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">成像公式</td><td>离焦 $\Delta\neq0$</td><td>$s_\mathrm{i}=\frac{f_2(\Delta-f_2)}{\Delta}+\frac{f_1^2f_2^2\left[s_0+\frac{f_1}{\Delta}(f_1-\Delta)\right]}{\Delta^2\left\{\left[s_0+\frac{f_1}{\Delta}(f_1-\Delta)\right]^2+Z_{01}^2\right\}}$</td></tr>
<tr><td>调焦 $\Delta=0$</td><td>$s_\mathrm{i}=-M_\mathrm{T}(f_1+f_2)-M_\mathrm{T}^2s_0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">物像比例公式</td><td>离焦 $\Delta\neq0$</td><td>$w_{02}=w_{01}\frac{|M_\mathrm{T}|f_1^2}{\{Z_{01}^2\Delta^2+[f_1^2+\Delta(s_0-f_1)]^2\}^{\frac{1}{2}}}$</td></tr>
<tr><td>调焦 $\Delta=0$</td><td>$w_{02}=|M_\mathrm{T}|w_{01}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">远场发散角(或几何张角)</td><td>离焦 $\Delta\neq0$</td><td>$\theta_{02}=\frac{\lambda}{\pi w_{02}}$</td></tr>
<tr><td>调焦 $\Delta=0$</td><td>$\theta_{02}=\frac{\theta_{01}}{|M_\mathrm{T}|}$</td></tr>
</table>

续表

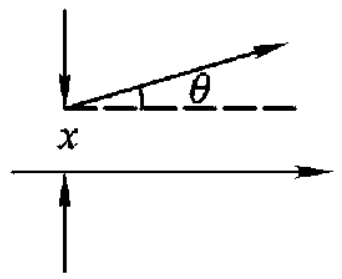
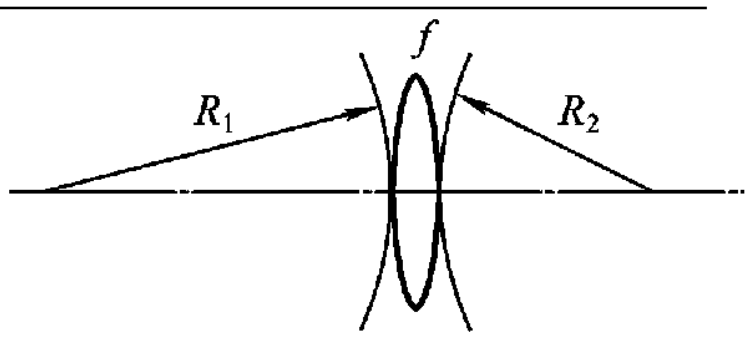
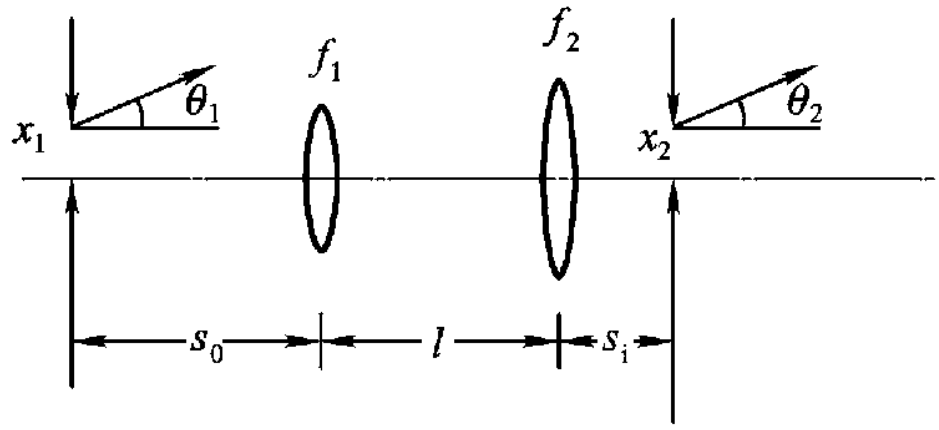
			球　面　波
主　要　参　数			$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x\\ \theta\end{bmatrix}$，　$R=\dfrac{x}{\theta}$　
ABCD 定　律			$x_2=Ax_1+B\theta_1$　　$R_2=\dfrac{AR_1+B}{CR_1+D}$ $\theta_2=Cx_1+D\theta_1$
自由空间通过距离 d			$R_2-R_1=d$
通过焦距为 f 薄透镜的变换公式	q 参数或曲率半径 R 的变换公式		$\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2}=\dfrac{1}{f}$　
	成像公式		$\dfrac{1}{s_i}-\dfrac{1}{s_0}=\dfrac{1}{f}$
	物像比例公式		$x_2=\dfrac{f}{s_0-f}x_1$
	模匹配公式		$(s_0-f)(s_i-f)=f^2$
通过望远镜系统的变换公式	图　示		
	成　像 公　式	离焦 $\Delta\neq0$	$s_0\left(M_T+\dfrac{\Delta}{f_1}\right)+s_i\left(\dfrac{1}{M_T}+\dfrac{\Delta}{f_2}\right)-\dfrac{\Delta s_0 s_i}{f_1 f_2}+l=0$
		调焦 $\Delta=0$	$s_i=-M_T(f_1+f_2)-M_T^2 s_0$
	物　像 比　例 公　式	离焦 $\Delta\neq0$	$x_2=\left(M_T+\dfrac{\Delta}{f_1}-\dfrac{\Delta s_i}{f_1 f_2}\right)x_1$
		调焦 $\Delta=0$	$x_2=M_T x_1$
	远场发散角(或几何张角)	离焦 $\Delta\neq0$	$\theta_2=-\dfrac{\Delta s_0}{f_1 f_2}+\left(\dfrac{1}{M_T}+\dfrac{\Delta}{f_2}-\dfrac{\Delta s_0}{f_1 f_2}\right)\theta_1$
		调焦 $\Delta=0$	$\theta_2=\dfrac{\theta_1}{M_T}$

表 4.13.2　高斯光束与球面波通过薄透镜变换公式的比较

类别 / 公式 / 条件	高斯光束			
	物像比例公式	成像公式		
一般公式	$\frac{w_i}{w_0}=\frac{f}{\sqrt{Z_{01}^2+(s_0-f)^2}}$	$\frac{1}{s_i}+\frac{1}{s_0}\frac{1}{1+Z_{01}^2/s_0(s_0-f)}=\frac{1}{f}$		
$(s_0-f)^2\gg Z_{01}^2$ $Z_{01}\to 0$	$\frac{w_i}{w_0}=\frac{f}{s_0-f}$	$\frac{1}{s_i}+\frac{1}{s_0}=\frac{1}{f}$		
$s=2f$	$\frac{w_i}{w_0}=\frac{f}{\sqrt{Z_{01}^2+f^2}}$	$s_i=f+\frac{f^3}{f^2+Z_{01}^2}$		
$s=f$	$\frac{w_i}{w_0}=\frac{f}{s_0}$	$s_i=f$		
$s<f$	$\frac{w_i}{w_0}=\frac{f}{\sqrt{Z_{01}^2+(s_0-f)^2}}$	$\frac{1}{s_i}+\frac{1}{s_0}\frac{1}{1+Z_{01}^2/s_0(s_0-f)}=\frac{1}{f}$		
1:1 成像	$\frac{w_i}{w_0}=1$	$s_i=s_0=f\pm\sqrt{f^2-Z_{01}^2}$		
类别 / 公式 / 条件	球面波		比较	
	物像比例公式	成像公式		
一般公式	$\frac{x_2}{x_1}=\frac{f}{s_0-f}$	$\frac{1}{s_i}+\frac{1}{s_0}=\frac{1}{f}$	不同	
$(s_0-f)^2\gg Z_{01}^2$ $Z_{01}\to 0$	$\frac{x_2}{x_1}=\frac{f}{s_0-f}$	$\frac{1}{s_i}+\frac{1}{s_0}=\frac{1}{f}$	相同	
$s=2f$	$\frac{x_2}{x_1}=1$	$s_i=2f$	不同	
$s=f$	$x_2\to\infty$	$s_i\to\infty$	不同	
$s<f$	$\frac{x_2}{x_1}=-\frac{f}{f-s_0}<0$	$s_i=-\frac{fs_0}{f-s_0}<0$ (虚像)	不同	
1:1 成像	$\frac{x_2}{x_1}=1$	$s_i=s_0=2f$	不同	

§ 4.14　高斯光束通过复元素光学系统的变换

当高斯光束通过复元素光学系统时，§ 4.5 中的变换公式失效，但 *ABCD* 定律仍成立. 本节以含有高斯光阑的光学系统为例，说明高斯光束通过上述光学系统的变换特性.

一、高斯光束通过 $C\neq0$ 复元素光学系统的变换

分析图 4.14.1 所示薄透镜(焦距 f)前置一高斯光阑 GA 的光学系统,该光学系统的变换矩阵为

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\left(\dfrac{1}{f}+\dfrac{\mathrm{i}}{z_\sigma}\right) & \dfrac{n_1}{n_2} \end{bmatrix} \tag{4.14.1}$$

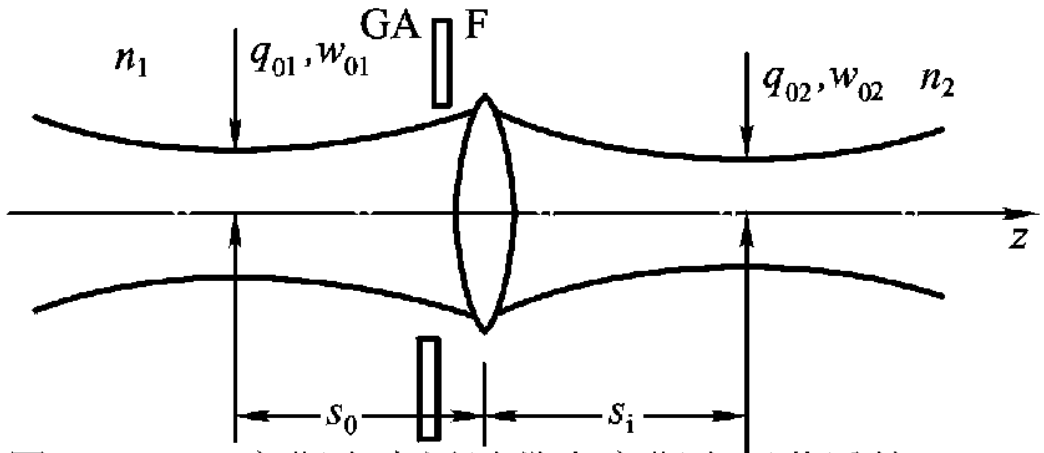


图 4.14.1　高斯光束通过带有高斯光阑薄透镜光学系统的变换

式中

$$z_\sigma = \frac{\pi\sigma^2}{\lambda_1} \quad (\sigma \text{ 为高斯光阑的宽度}) \tag{4.14.2}$$

n_1、n_2分别为物像空间折射率.

现研究物像空间中束腰 q_{01}、q_{02}间的变换,由 q_{01}至 q_{02}的变换矩阵

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\dfrac{s_i}{f}-\mathrm{i}\dfrac{s_i}{z_\sigma} & s_0+\dfrac{n_1}{n_2}s_i-\dfrac{s_0 s_i}{f}-\mathrm{i}\dfrac{s_0 s_i}{z_\sigma} \\ -\dfrac{1}{f}-\dfrac{\mathrm{i}}{z_\sigma} & \dfrac{n_1}{n_2}-\dfrac{s_0}{f}-\mathrm{i}\dfrac{s_i}{z_\sigma} \end{bmatrix} \tag{4.14.3}$$

将式(4.14.3)代入 $ABCD$ 定律

$$\frac{1}{q_{02}} = \frac{C+D/q_{01}}{A+B/q_{01}} \tag{4.14.4}$$

分离实、虚部得到

$$s_i = \frac{\dfrac{Z_{01}^2}{f}-\left(\dfrac{n_1}{n_2}-\dfrac{s_0}{f}\right)s_0}{\left(\dfrac{Z_{01}}{z_\sigma}+\dfrac{n_1}{n_2}-\dfrac{s_0}{f}\right)^2+\left(\dfrac{Z_{01}}{f}+\dfrac{s_0}{z_\sigma}\right)^2}$$

$$w_{02} = \frac{n_1}{n_2}w_{01}\left[\frac{1+\dfrac{n_2 Z_{01}^2}{n_1 z_\sigma}\left(1+\dfrac{s_0^2}{Z_{01}^2}\right)}{\left(\dfrac{Z_{01}}{z_\sigma}+\dfrac{n_1}{n_2}-\dfrac{s_0}{f}\right)^2+\left(\dfrac{Z_{01}}{f}+\dfrac{s_0}{z_\sigma}\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{4.14.5}$$

讨论

(1) $n_1 = n_2$，即物像空间折射率相等时，式(4.14.5)成为

$$s_i = \frac{\frac{Z_{01}^2}{f} - \left(1 - \frac{s_0}{f}\right)s_0}{\left(\frac{Z_{01}}{z_\sigma} + 1 - \frac{s_0}{f}\right)^2 + \left(\frac{Z_{01}}{f} + \frac{s_0}{z_\sigma}\right)^2}$$

$$w_{02} = w_{01}\left[\frac{1 + \frac{Z_{01}^2}{z_\sigma}\left(1 + \frac{s_0^2}{Z_{01}^2}\right)}{\left(\frac{Z_{01}}{z_\sigma} + 1 - \frac{s_0}{f}\right)^2 + \left(\frac{Z_{01}}{f} + \frac{s_0}{z_\sigma}\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{4.14.6}$$

(2) $z_\sigma \to \infty$，即无高斯光阑时，式(4.14.5)简化为

$$\frac{s_i}{f} = 1 + \frac{\frac{n_1}{n_2}\left(\frac{s_0}{f} - \frac{n_1}{n_2}\right)}{\left(\frac{s_0}{f} - \frac{n_1}{n_2}\right)^2 + \left(\frac{Z_{01}}{f}\right)^2}$$

$$w_{02} = \frac{\frac{n_1}{n_2}w_{01}}{\left[\left(\frac{n_1}{n_2} - \frac{s_0}{f}\right)^2 + \left(\frac{Z_{01}}{f}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{4.14.7}$$

进一步，若 $n_1 = n_2$，式(4.14.7)就回到式(4.6.2)、式(4.6.3).

二、高斯光束通过 $C=0$ 复元素光学系统的变换

在激光光学中也使用图 4.14.2 所示带高斯光阑的空间滤波器，为一般起见，设图中焦距为 f_1、f_2 的薄透镜 F_1、F_2 构成的滤波系统置于折射率 n 的介质之中，物、像空间折射率分别为 n_1、n_2，两薄透镜间距离

$$l_T = f_1 + \frac{n}{n_2}f_2 \tag{4.14.8}$$

在薄透镜 F_1 之右相距 f_1 处置有一高斯光阑 GA，于是

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n}{n_2}M_T & \frac{n_1}{n_2}l_T - i\frac{n_1 f_1 f_2}{n_2 z_\sigma} \\ 0 & \frac{n_1}{nM_T} \end{bmatrix} \tag{4.14.9}$$

由 q_{01} 至 q_{02} 的变换矩阵：

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n}{n_2}M_T & \frac{n_1}{n_2}l_T + \frac{n}{n_2}M_T s_0 + \frac{n_1 s_i}{nM_T} - i\frac{n_1 f_1 f_2}{n_2 z_\sigma} \\ 0 & \frac{n_1}{nM_T} \end{bmatrix} \tag{4.14.10}$$

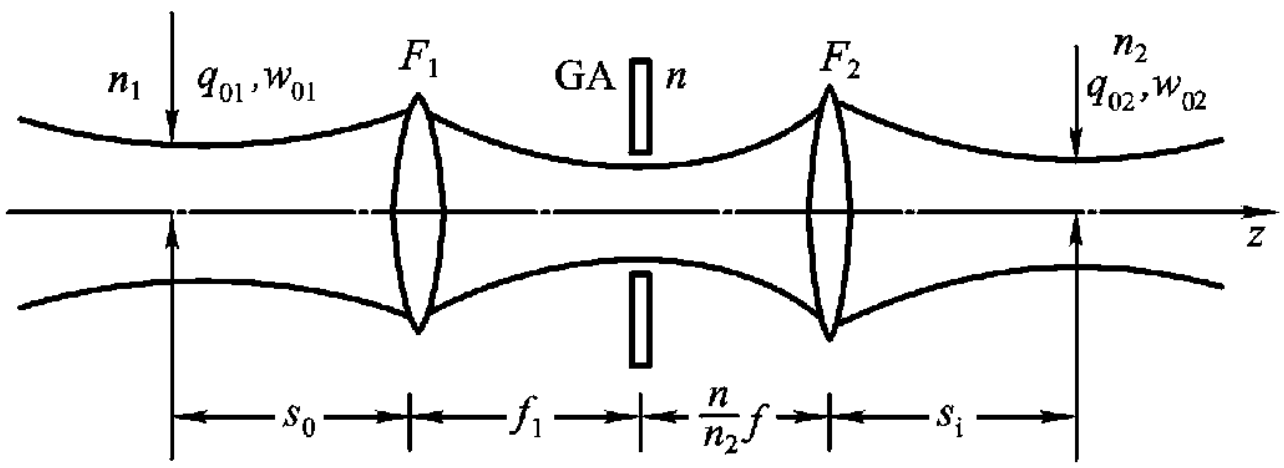


图 4.14.2 高斯光束通过带有高斯光阑的空间滤波器的变换

将式(4.14.10)代入式(4.14.4),得到

$$s_i = -\frac{n}{n_1 n_2} M_T^2 s_0 - M_T l_T$$

$$w_{02} = \frac{n}{n_2} |M_T| w_{01} \left[1 + \frac{(n_1/n) f_1^2}{Z_{01} z_\sigma}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{4.14.11}$$

讨论:

(1) $n_1 = n_2 = n$ 时,

$$s_i = -M_T^2 s_0 - M_T l_T$$

$$w_{02} = |M_T| w_{01} \left(1 + \frac{f_1^2}{Z_{01} z_\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.14.12}$$

若取 $s_0 = f_1$,则

$$s_i = f_2 \tag{4.14.13}$$

即像方束腰位于 F_2 的后焦面上.

(2) $z_\sigma \to \infty$ 时,

$$s_i = -\frac{n^2}{n_1 n_2} M_T^2 l_1 - M_T l_T$$

$$w_{02} = \frac{n}{n_2} |M_T| w_{01} \tag{4.14.14}$$

当 $n_1 = n_2 = n$ 时,就回到式(4.11.5)、式(4.11.6).

比较式(4.14.11)~式(4.14.14)知,折射率 n_1、n_2、n 对 s_i 和 $M_2 = w_{02}/w_{01}$ 都有影响;s_i 与 s_0 有关,但 M_2 与 s_0 无关,光阑的存在使 M_2 增大.

§4.15 高斯光束强度的均匀化

在激光材料加工和其它一些应用中,常常希望光强的径向分布尽可

能均匀，这就需要把光强为高斯分布的激光变为均匀平顶分布.本节讨论用一种透过率为反高斯分布的吸收滤光镜来实现强度均匀化的方法.

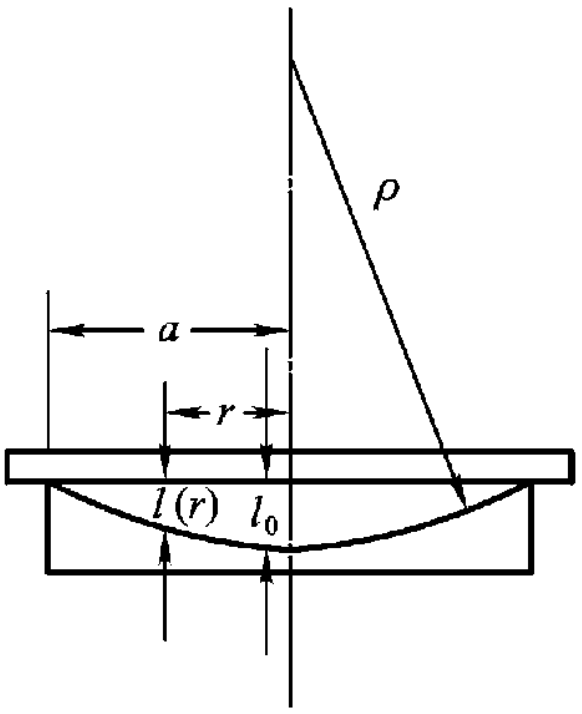


图 4.15.1　吸收滤光镜

如图 4.15.1 所示，在平凹透镜和平面镜组合的空腔部分充满折射率与平凹镜相同的吸光液就构成了透过率为反高斯分布的滤光装置，图 4.15.2 为装置的示意图.高斯光束经显微物镜焦点除去杂散光，由准直物镜变成平行光后通过吸收滤光镜.设吸光液的吸收系数为 α，离吸收滤光镜光轴为 r 处的液体厚度为 $l(r)$，则该处的透过率 $T(r)$ 为

$$T(r)=\exp[-\alpha l(r)] \tag{4.15.1}$$

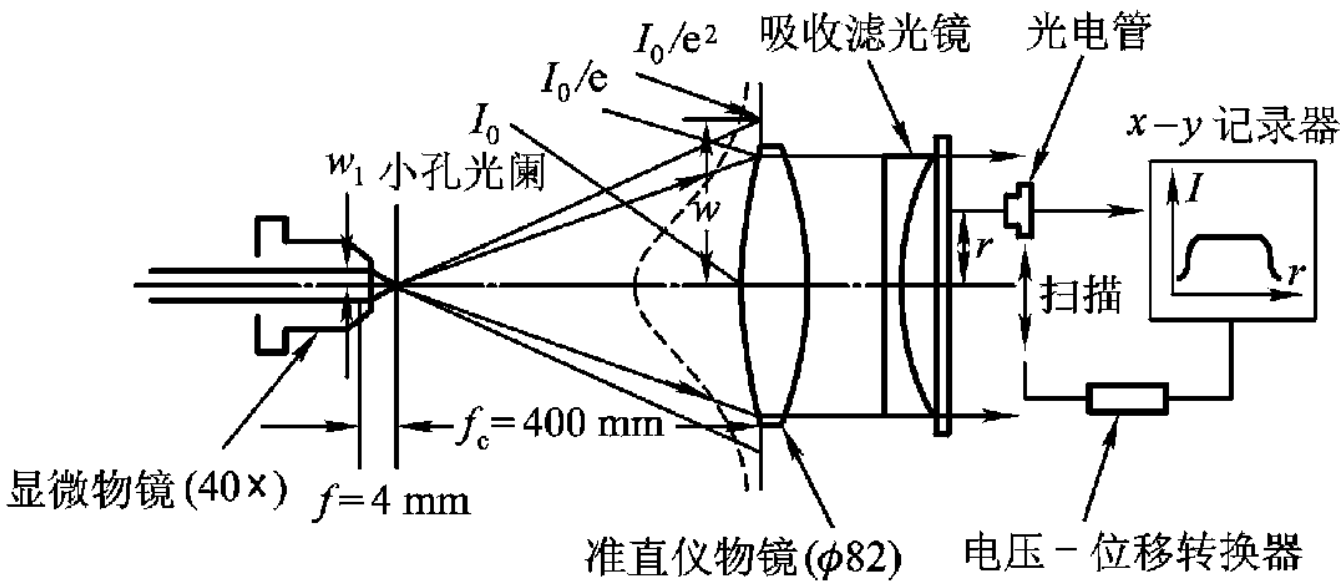


图 4.15.2　实验装置

若液槽的半径为 a，平凹镜曲率半径为 ρ，由简单几何关系求得

$$l(r)=\sqrt{\rho^2-r^2}-\sqrt{\rho^2-a^2}=l_0-\rho\left[\frac{1}{2}\left(\frac{r}{\rho}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{r}{\rho}\right)^4+\cdots\right] \tag{4.15.2}$$

式中

$$l_0=\rho-\sqrt{\rho^2-a^2} \tag{4.15.3}$$

为吸收滤光镜液体的中心厚度.

当 $\frac{r}{\rho}\leqslant\frac{a}{\rho}\leqslant 1$ 时，由式(4.15.1)、式(4.15.2)得

$$T(r)\approx T_0\exp[\alpha r^2/2\rho] \tag{4.15.4}$$

式中

$$T_0=\exp[-\alpha l_0] \tag{4.15.5}$$

为滤光镜中心的透过率.由式(4.15.4)知，滤光镜径向透过率呈反高斯分

布.设经准直后入射到滤光镜上的激光束宽为 w,光束中心强度为 I_0,径向强度为高斯分布:

$$I_r = I_0 \exp(-2r^2/w^2) \tag{4.15.6}$$

则通过滤光镜后,强度分布为

$$I(r) \approx I_r \cdot T(r) \approx I_0 T_0 \exp[(a/2\rho - 2/w^2) r^2] \tag{4.15.7}$$

当用吸收系数为

$$\alpha = \frac{4\rho}{w^2} \tag{4.15.8}$$

的液体充满滤光镜空腔时,有

$$I \approx I_0 T_0 \tag{4.15.9}$$

即可实现径向强度分布的均匀化.

实验中使用消色差平凹透镜,$a=40$ mm,$\rho=180$ mm 和 $a=41$ mm,$\rho=560$ mm 与平面镜组成滤光液槽.用 α 溴萘($C_{10}H_7Br$)和二甲苯(C_8H_{10})的混合液体作为吸收液,折射率在 1.58 至 1.60 之间,比平凹透镜的折射率 1.62 稍低.调整吸收液的吸光强度使之满足式(4.15.9)时,在 $\rho=560$ mm,$w=0.75$ mm 情况下,所得实验结果和理论值比较示于图4.15.3.由图可见,从吸收滤光镜的中心到边缘,与理论值相比实验所得光束透过率的偏差在 2% 以内,基本上实现了激光强度的均匀化.

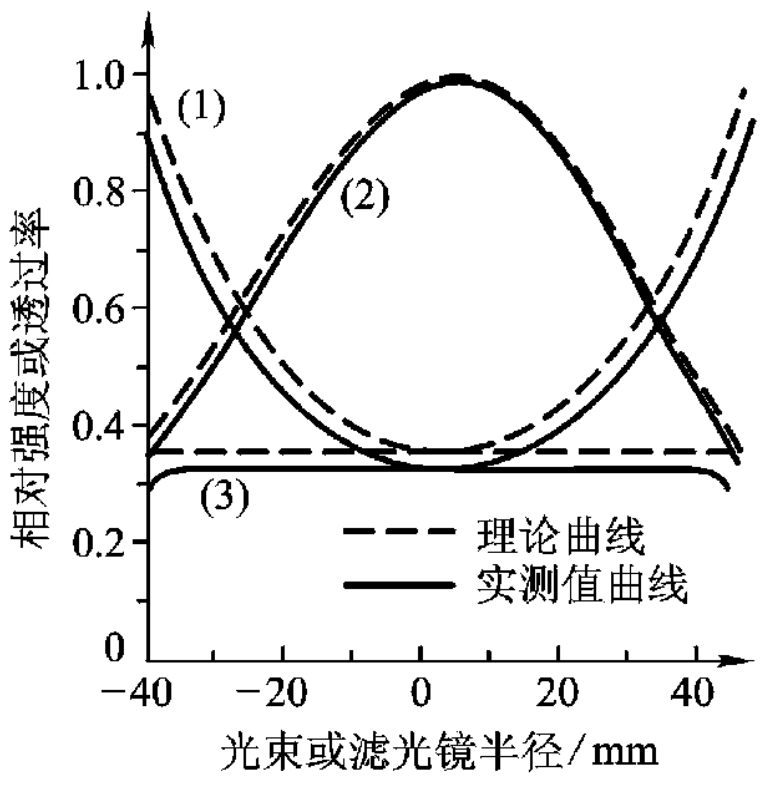


图 4.15.3　实验结果与理论的比较

(1) 吸收滤光镜的透过率分布曲线;(2) 经过小孔空间滤波后的激光束相对强度分布曲线;(3) 通过吸收滤光镜后的激光束相对强度分布曲线

§4.16　高斯光束通过光阑传输中的衍射损耗

高斯光束的衍射问题已做了研究.使用方法和物理光学中讨论平面波、球面波的衍射一样,即从菲涅耳－基尔霍夫衍射积分公式出发,分别在夫琅禾费和菲涅耳近似条件下,将高斯光束的场分布代入衍射积分公式中进行计算.结果表明,高斯光束通过单狭缝和圆孔的夫琅禾费衍射与平面波的衍射相似,而高斯光束通过圆孔的菲涅耳衍射则与球面波的衍射相似,其差别仅是零点和极值点的位置有所移动.当相对孔径 a/w (a 为光阑宽度)较小时,用激光做光源可以非常好地演示出夫琅禾费衍射和菲涅耳衍射现象.现在讨论基模和高阶高斯光束在传输中通过不同形状孔径光阑的功率透过率和衍射损耗问题.

一、厄米－高斯光束传输中的衍射损耗

由式(4.2.4)知,厄米－高斯光束的光强公式为

$$I_{mn}=\frac{A_{mn}^2 w_0^2}{w^2}\mathrm{H}_m^2\left(\frac{\sqrt{2}}{w}x\right)\mathrm{H}_n^2\left(\frac{\sqrt{2}}{w}y\right)\exp\left[-\frac{2(x^2+y^2)}{w^2}\right] \tag{4.16.1}$$

当通过一个任意形状的通光孔时,功率透过率 T_{mn} 为

$$T_{mn}=\frac{\iint_s \mathrm{H}_m^2\left(\frac{\sqrt{2}}{w}x\right)\mathrm{H}_n^2\left(\frac{\sqrt{2}}{w}y\right)\exp\left[-\frac{2(x^2+y^2)}{w^2}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{H}_m^2\left(\frac{\sqrt{2}}{w}x\right)\mathrm{H}_n^2\left(\frac{\sqrt{2}}{w}y\right)\exp\left[-\frac{2(x^2+y^2)}{w^2}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} \tag{4.16.2}$$

式中面积分的积分限由孔径的几何形状和尺寸确定.于是,m、n 阶厄米－高斯光束的衍射损耗 L_{mn} 可表示为

$$\begin{aligned}L_{mn}&=1-T_{mn}\\&=1-\frac{\iint_s \mathrm{H}_m^2\left(\frac{\sqrt{2}}{w}x\right)\mathrm{H}_n^2\left(\frac{\sqrt{2}}{w}y\right)\exp\left[-\frac{2(x^2+y^2)}{w^2}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{H}_m^2\left(\frac{\sqrt{2}}{w}x\right)\mathrm{H}_n^2\left(\frac{\sqrt{2}}{w}y\right)\exp\left[-\frac{2(x^2+y^2)}{w^2}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}\end{aligned} \tag{4.16.3}$$

下面,设通光孔分别为:(1) 边长 $2a$、$2b$ 的矩形孔;(2) 半长短轴为 a、b 的椭圆形孔,对 TEM_{00}、TEM_{10}、TEM_{11}、TEM_{20} 模进行推导和数值计算.

1. TEM_{00} 模 ($m=n=0$)

在式(4.16.1)中令 $m=n=0$,得

$$I_{00}=\frac{A_{00}^2 w_0^2}{w^2}\exp\left[-\frac{2(x^2+y^2)}{w^2}\right] \tag{4.16.4}$$

(1) 矩形孔

将式(4.16.4)代入式(4.16.3),计算得到

$$L_{00}=1-\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{w}a}\exp(-u^2)\mathrm{d}u\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{w}b}\exp(-v^2)\mathrm{d}v \tag{4.16.5}$$

式中

$$u=\frac{\sqrt{2}}{w}x,\quad v=\frac{\sqrt{2}}{w}y \tag{4.16.6}$$

(2) 椭圆形孔

设

$$x=wr\cos\theta,\quad y=wr\sin\theta \tag{4.16.7}$$

于是

$$r(\theta)=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{w\cos\theta}{a}\right)^2+\left(\frac{w\sin\theta}{b}\right)^2}} \tag{4.16.8}$$

将式(4.16.4)代入式(4.16.3),利用式(4.16.7)、式(4.16.8)化为极坐标,积分之,得

$$L_{00}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp[-2r^2(\theta)]\mathrm{d}\theta \tag{4.16.9}$$

2. TEM_{10} 模($m=1,n=0$)

在式(4.16.1)中取 $m=1,n=0$,得

$$I_{10}=\frac{4A_{10}^2 w_0^2}{w^2}\left(\frac{2x^2}{w^2}\right)\exp\left[-\frac{2(x^2+y^2)}{w^2}\right] \tag{4.16.10}$$

由此得:

(1) 矩形孔

$$L_{10}=1-\frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{w}a}u^2\exp(-u^2)\mathrm{d}u\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{w}b}\exp(-v^2)\mathrm{d}v \tag{4.16.11}$$

(2) 椭圆形孔

$$L_{10}=1-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{1-[2r^2(\theta)+1]\exp[-2r^2(\theta)]\}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta \tag{4.16.12}$$

式中 $r(\theta)$ 为式(4.16.8).

3. TEM_{11} 模($m=n=1$)

$$I_{11}=\frac{16A_{11}^2w_0^2}{w^2}\left(\frac{2x^2}{w^2}\right)\left(\frac{2y^2}{w^2}\right)\exp\left[-\frac{2(x^2+y^2)}{w^2}\right] \tag{4.16.13}$$

(1) 矩形孔

$$L_{11}=1-\frac{16}{\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{w}a}u^2\exp(-u^2)\mathrm{d}u\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{w}b}v^2\exp(-v^2)\mathrm{d}v \tag{4.16.14}$$

(2) 椭圆形孔

$$L_{11}=1-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{1-[2r^4(\theta)+2r^2(\theta)+1]\exp[-2r^2(\theta)]\}\sin^2 2\theta\mathrm{d}\theta \tag{4.16.15}$$

4. TEM_{20} 模 ($m=2, n=0$)

$$I_{20}=\frac{4A_{20}^2w_0^2}{w^2}\left(\frac{4x^2}{w^2}-1\right)^2\exp\left[-\frac{2(x^2+y^2)}{w^2}\right] \tag{4.16.16}$$

(1) 矩形孔

$$L_{20}=1-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{w}a}(4u^4-4u^2+1)\exp(-u^2)\mathrm{d}u\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{w}b}\exp(-v^2)\mathrm{d}v \tag{4.16.17}$$

(2) 椭圆形孔

$$L_{20}=1-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\left(2\cos^4\theta-\cos^2\theta+\frac{1}{4}\right)-\left[(4r^4(\theta)+4r^2(\theta)+2)\cos^4\theta-(2r^2(\theta)+1)\cos^2\theta+\frac{1}{4}\right]\exp[-2r^2(\theta)]\right\}\mathrm{d}\theta \tag{4.16.18}$$

利用上面的公式，用辛卜生法作数值积分，所得计算结果列于表 4.16.1、表 4.16.2，典型例示于图 4.16.1～图 4.16.6. 对公式和计算结果进行分析，可知：

表 4.16.1　厄米－高斯光束通过矩形孔的衍射损耗

(a) TEM_{00} 模：L_{00} 与 a/w、b/w 的关系

b/w \ a/w	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
0.25	0.853 4	0.738 6	0.668 2	0.634 5	0.621 8	0.618 1	0.617 3	0.617 1
0.50	0.738 6	0.533 9	0.408 5	0.348 4	0.325 8	0.319 2	0.317 6	0.317 4
0.75	0.668 2	0.408 5	0.249 4	0.173 0	0.144 4	0.136 0	0.134 0	0.133 7
1.00	0.634 5	0.348 4	0.173 0	0.088 9	0.057 4	0.048 1	0.045 9	0.045 7
1.25	0.621 8	0.325 8	0.144 4	0.057 4	0.024 7	0.015 1	0.012 9	0.012 5
1.50	0.618 1	0.319 2	0.136 0	0.048 1	0.015 1	0.005 39	0.003 16	0.002 6
1.75	0.617 3	0.317 6	0.134 0	0.045 9	0.012 9	0.003 16	0.000 93	0.000 53
2.00	0.617 1	0.317 4	0.133 7	0.045 6	0.012 5	0.002 76	0.000 53	0.000 13

续表

(b) TEM_{10}模：L_{10}与 a/w、b/w 的关系

b/w \ a/w	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
0.25	0.988 2	0.923 6	0.817 0	0.717 2	0.655 4	0.628 3	0.619 6	0.617 5
0.50	0.978 9	0.843 3	0.673 8	0.495 8	0.385 6	0.337 3	0.321 8	0.318 1
0.75	0.973 3	0.827 8	0.586 0	0.360 1	0.220 3	0.159 0	0.139 3	0.134 6
1.00	0.970 6	0.810 3	0.543 9	0.295 1	0.141 0	0.073 5	0.051 8	0.046 6
1.25	0.969 5	0.803 7	0.528 1	0.270 6	0.111 2	0.041 3	0.018 9	0.013 5
1.50	0.969 2	0.801 8	0.523 5	0.263 5	0.102 5	0.031 9	0.009 26	0.003 83
1.75	0.969 2	0.801 3	0.522 4	0.261 8	0.100 5	0.029 7	0.007 04	0.001 60
2.00	0.969 1	0.801 3	0.522 2	0.261 5	0.100 1	0.029 4	0.006 64	0.001 20

(c) TEM_{11}模：L_{11}与 a/w、b/w 的关系

b/w \ a/w	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
0.25	0.999 0	0.993 9	0.958 3	0.977 2	0.972 2	0.970 0	0.969 3	0.969 2
0.50	0.993 9	0.960 5	0.905 0	0.853 2	0.821 1	0.807 1	0.802 6	0.801 5
0.75	0.985 3	0.905 0	0.771 7	0.647 1	0.570 0	0.536 2	0.525 3	0.522 7
1.00	0.977 2	0.853 2	0.647 1	0.454 6	0.335 4	0.283 1	0.266 3	0.262 3
1.25	0.972 2	0.821 1	0.570 0	0.335 4	0.190 1	0.126 4	0.106 0	0.101 1
1.50	0.970 0	0.807 1	0.536 2	0.283 1	0.126 4	0.057 7	0.035 7	0.030 4
1.75	0.969 3	0.802 6	0.525 3	0.266 3	0.106 0	0.035 7	0.013 1	0.007 70
2.00	0.969 2	0.801 5	0.522 7	0.262 3	0.101 1	0.030 4	0.007 70	0.002 77

(d) TEM_{20}模：L_{20}与 a/w、b/w 的关系

b/w \ a/w	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
0.25	0.937 6	0.923 9	0.910 0	0.841 2	0.743 5	0.669 0	0.632 8	0.620 6
0.50	0.888 8	0.846 3	0.839 6	0.717 0	0.542 7	0.409 9	0.345 3	0.323 6
0.75	0.858 9	0.827 8	0.796 4	0.640 8	0.419 6	0.251 1	0.169 1	0.141 6
1.00	0.844 5	0.810 3	0.775 7	0.604 3	0.360 6	0.175 0	0.084 6	0.052 4
1.25	0.839 1	0.803 7	0.767 9	0.590 6	0.338 4	0.146 4	0.052 8	0.025 1
1.50	0.837 6	0.801 8	0.765 6	0.586 5	0.331 9	0.138 0	0.043 5	0.011 8
1.75	0.837 2	0.801 3	0.765 1	0.585 6	0.330 4	0.136 1	0.041 4	0.009 63
2.00	0.837 1	0.801 3	0.765 0	0.585 4	0.330 2	0.135 7	0.041 0	0.009 23

表 4.16.2　厄米－高斯光束通过椭圆形孔的衍射损耗

(a) TEM_{00} 模：L_{00} 与 a/w、b/w 的关系

b/w \ a/w	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
0.25	0.882 5	0.784 7	0.716 2	0.674 6	0.651 8	0.639 7	0.632 9	0.628 9
0.50	0.784 7	0.606 5	0.483 2	0.409 9	0.370 9	0.350 9	0.340 3	0.334 2
0.75	0.716 2	0.483 2	0.324 7	0.233 4	0.187 1	0.164 9	0.154 0	0.148 2
1.00	0.674 6	0.409 9	0.233 4	0.135 3	0.088 4	0.067 9	0.058 9	0.054 5
1.25	0.651 8	0.370 9	0.187 1	0.088 4	0.043 9	0.026 3	0.019 5	0.016 8
1.50	0.639 7	0.350 9	0.164 9	0.067 9	0.026 3	0.011 1	0.006 12	0.004 45
1.75	0.632 9	0.340 3	0.154 0	0.058 9	0.019 5	0.006 12	0.002 19	0.001 12
2.00	0.628 9	0.334 2	0.148 2	0.054 5	0.016 8	0.004 45	0.001 12	0.000 34

(b) TEM_{10} 模：L_{10} 与 a/w、b/w 的关系

b/w \ a/w	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
0.25	0.992 8	0.952 0	0.877 9	0.797 3	0.733 4	0.692 6	0.668 6	0.654 6
0.50	0.986 4	0.909 8	0.771 5	0.623 0	0.507 8	0.435 7	0.395 2	0.372 4
0.75	0.981 4	0.876 8	0.690 0	0.492 6	0.344 0	0.255 1	0.208 1	0.183 7
1.00	0.977 8	0.853 3	0.633 5	0.405 9	0.240 4	0.146 4	0.100 8	0.079 5
1.25	0.975 3	0.837 6	0.597 2	0.353 2	0.181 3	0.089 0	0.048 1	0.031 4
1.50	0.973 6	0.827 4	0.574 5	0.322 2	0.149 4	0.061 1	0.025 0	0.012 2
1.75	0.972 5	0.820 8	0.560 2	0.303 9	0.132 3	0.047 9	0.015 6	0.005 37
2.00	0.971 8	0.816 3	0.551 0	0.292 6	0.122 6	0.041 3	0.011 6	0.003 02

(c) TEM_{11} 模：L_{11} 与 a/w、b/w 的关系

b/w \ a/w	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
0.25	0.999 7	0.997 9	0.994 4	0.989 8	0.985 4	0.981 7	0.978 9	0.973 0
0.50	0.997 9	0.985 6	0.961 0	0.930 1	0.900 4	0.876 4	0.858 6	0.845 9
0.75	0.994 4	0.961 0	0.895 5	0.814 6	0.739 5	0.680 9	0.639 5	0.611 1
1.00	0.989 8	0.930 1	0.814 6	0.676 7	0.553 7	0.462 7	0.402 3	0.363 7
1.25	0.985 4	0.900 4	0.739 5	0.553 7	0.395 8	0.286 6	0.220 0	0.181 2
1.50	0.981 7	0.876 4	0.680 9	0.462 7	0.286 6	0.173 6	0.111 0	0.078 7
1.75	0.978 9	0.858 6	0.639 5	0.402 3	0.220 0	0.111 0	0.056 6	0.032 1
2.00	0.976 8	0.845 9	0.611 1	0.363 7	0.181 2	0.078 7	0.032 1	0.013 8

续表

(d) TEM_{20} 模：L_{20} 与 a/w、b/w 的关系

b/w \ a/w	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
0.25	0.948 0	0.929 0	0.920 7	0.885 1	0.822 7	0.759 8	0.713 9	0.685 3
0.50	0.905 1	0.871 9	0.857 0	0.789 0	0.671 1	0.554 7	0.471 9	0.422 1
0.75	0.875 5	0.834 7	0.815 4	0.720 4	0.558 3	0.402 7	0.296 7	0.236 7
1.00	0.858 1	0.814 9	0.793 0	0.676 7	0.482 6	0.302 5	0.185 9	0.124 9
1.25	0.849 0	0.806 2	0.782 3	0.650 0	0.434 4	0.241 1	0.122 6	0.065 73
1.50	0.844 4	0.803 0	0.777 2	0.633 2	0.404 0	0.204 8	0.088 5	0.037 15
1.75	0.842 0	0.801 8	0.774 5	0.622 1	0.384 3	0.183 2	0.070 4	0.023 9
2.00	0.840 7	0.801 5	0.772 7	0.614 3	0.371 3	0.170 0	0.060 6	0.017 8

(1) 厄米－高斯光束衍射损耗的大小与孔径形状、几何尺寸和横模阶次 m、n 有关，在 x、y 方向光强最集中于中心轴线上的基模高斯光束衍射损耗最小.

(2) 圆孔和方孔的结果可由相应公式中令 $a=b$ 得出.对圆孔情况，还可得到解析结果为.

$$
\begin{aligned}
L_{00} &= \exp(-a^2/w^2) \\
L_{10} &= \exp(-2a^2/w^2)\left(2\frac{a^2}{w^2}+1\right) \\
L_{11} &= \exp(-2a^2/w^2)\left(2\frac{a^4}{w^4}+2\frac{a^2}{w^2}+1\right) \\
L_{20} &= \exp(-2a^2/w^2)\left(3\frac{a^4}{w^4}+\frac{a^2}{w^2}+1\right)
\end{aligned}
\tag{4.16.19}
$$

(3) 当 m、n 一定时，对矩形孔和椭圆形孔，衍射损耗只与相对孔径 a/w，b/w 有关，而与 a，b，w 的绝对大小无关.例如，对圆孔，$a/w=1$ 时，$T_{00}=86.5\%$，$L_{00}=13.5\%$，这即束宽 w 的 86.5% 环围功率定义.而当 $a/w=1.5$ 时，$T_{00}=98.9\%$，$L_{00}=1.1\%$.

(4) 各阶模通过不同形状通光孔的衍射损耗特性可总结为：对 TEM_{00} 模，在相同的相对通光面积情况下，方孔(或圆孔)的衍射损耗一般比其它比例的矩形孔(或椭圆形孔)要小，这是因为 TEM_{00} 模在 x、y 方向的光强分布是对称的.对 $a\neq b$ 的孔，在一个方向上比 $a=b$ 的孔对光束的限制要大.对同一相对孔径的矩形孔和椭圆形孔，矩形孔的相对通光面积大于椭圆形孔，故通过矩形孔的衍射损耗小于椭圆形孔.TEM_{11} 模因光

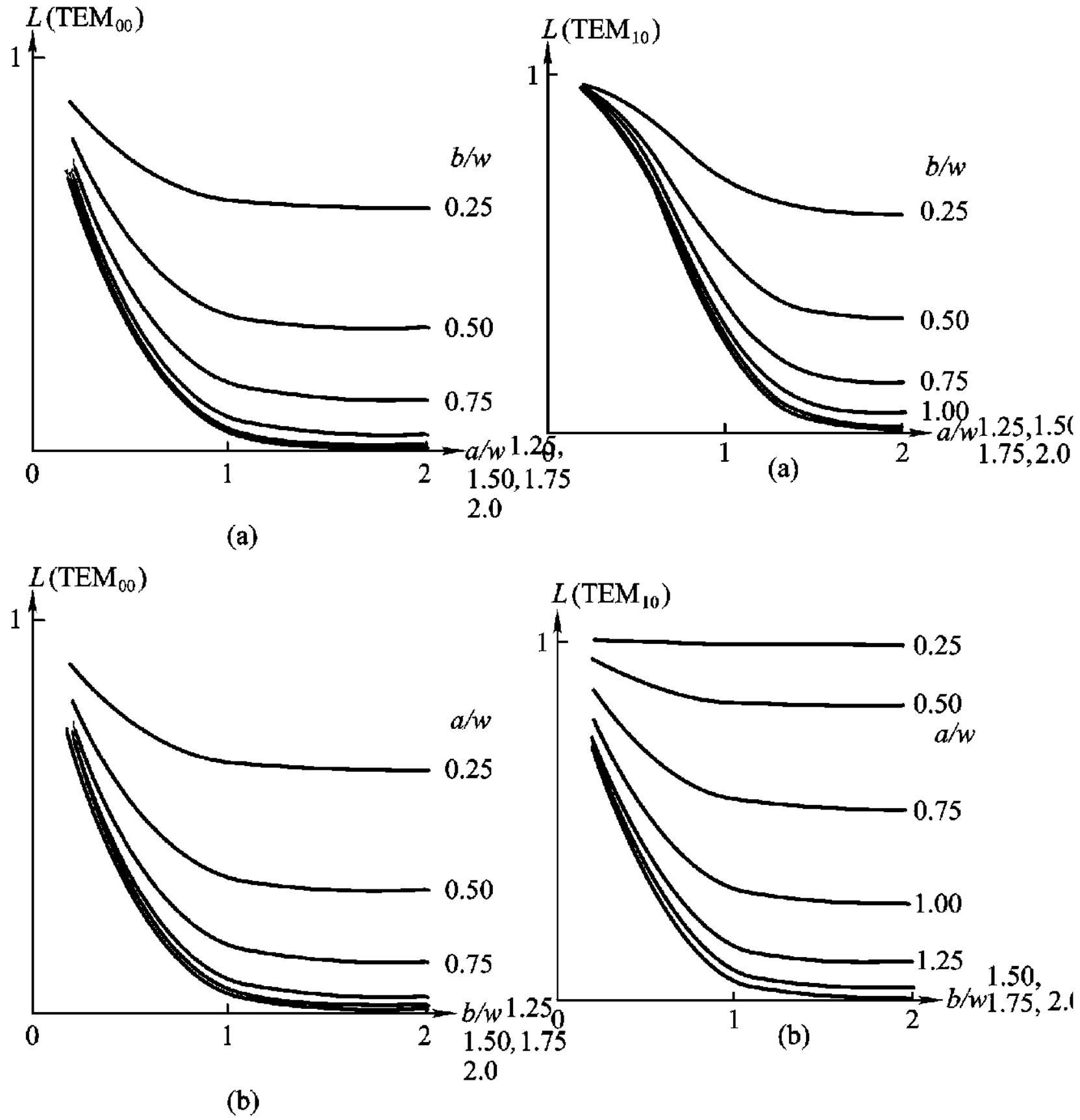
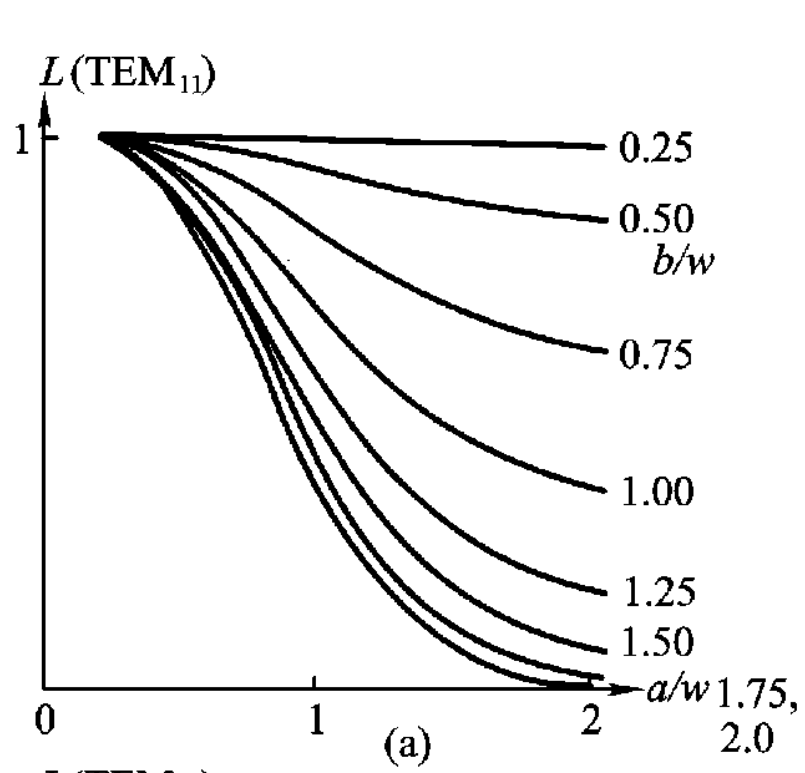


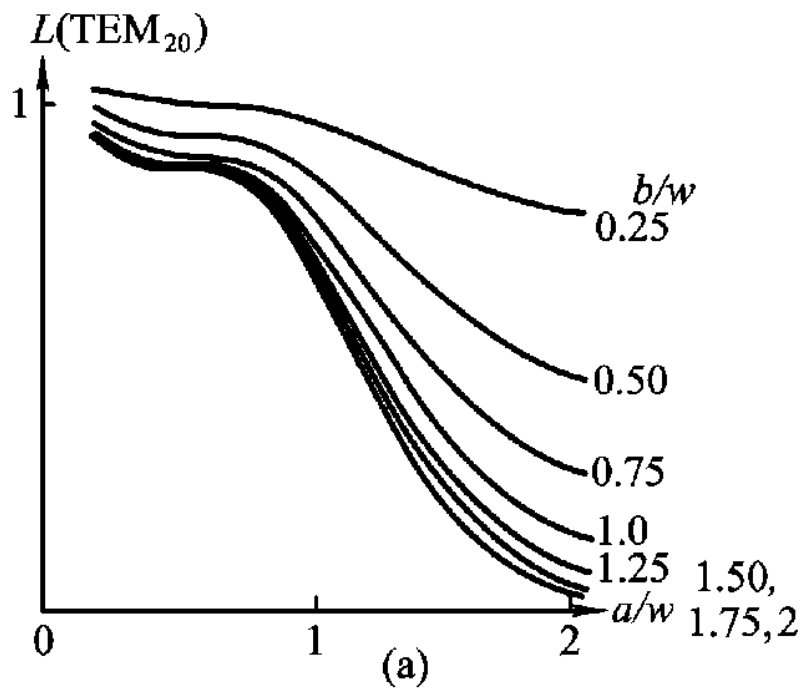
图 4.16.1　TEM_{00} 模高斯光束通过矩形孔的衍射损耗

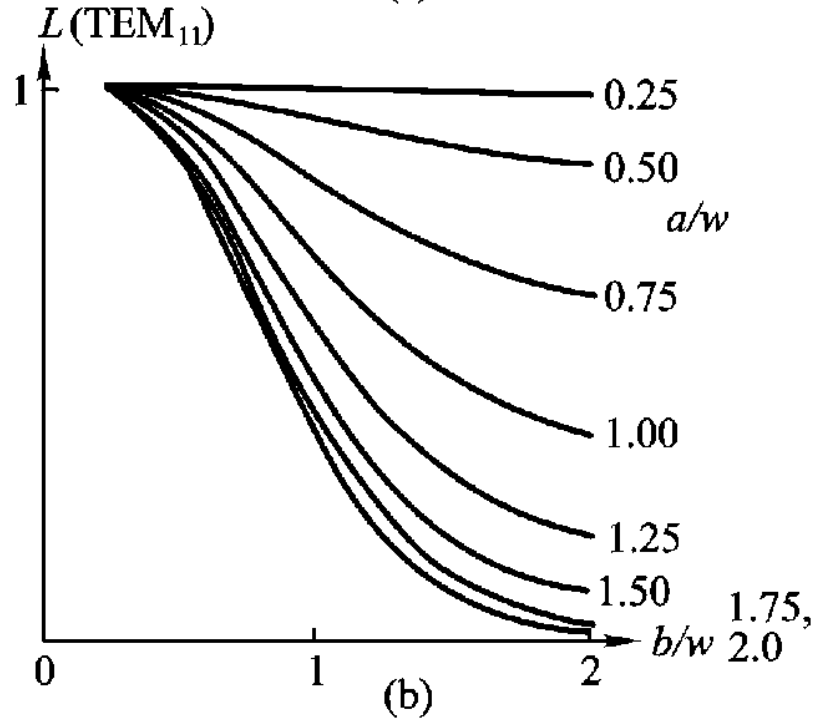
(a) L_{00} 与 a/w 的关系（b/w 为参数）；
(b) L_{00} 与 b/w 的关系（a/w 为参数）；
(c) L_{00} 与 a/w、b/w 的关系

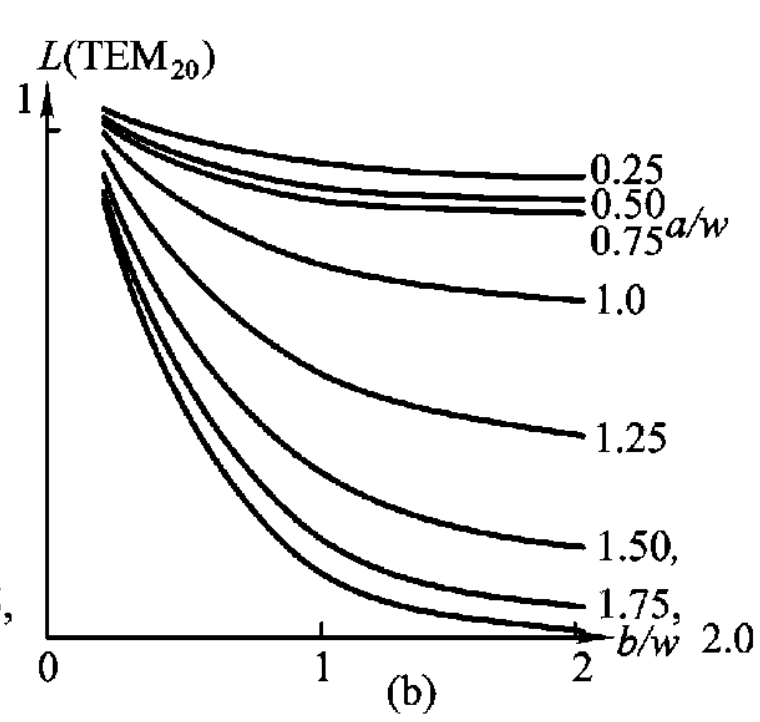
图 4.16.2　TEM_{10} 模厄米－高斯光束通过矩形孔的衍射损耗

(a) L_{10} 与 a/w 的关系（b/w 为参数）；
(b) L_{10} 与 b/w 的关系（a/w 为参数）；
(c) L_{10} 与 a/w、b/w 的关系









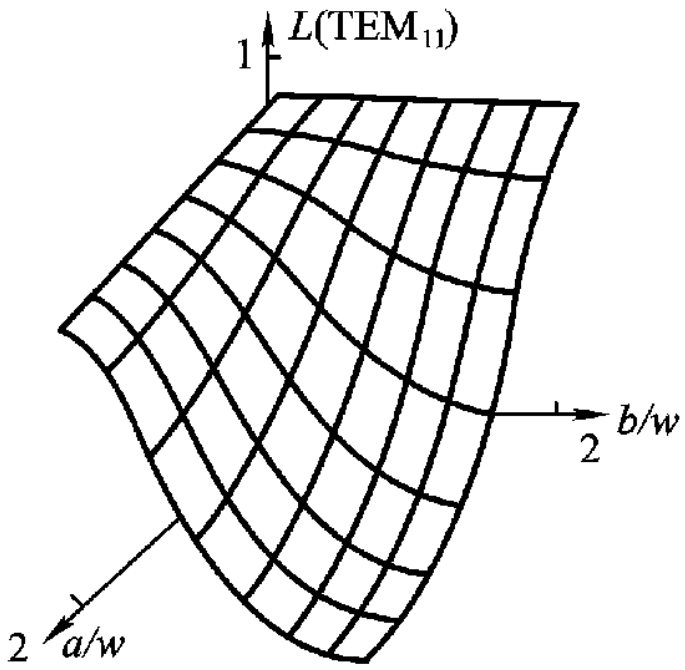


图 4.16.3 TEM_{11}模厄米－高斯光束通过椭圆形孔的衍射损耗

(a) L_{11}与 a/w 的关系(b/w 为参数)；

(b) L_{11}与 b/w 的关系(a/w 为参数)；

(c) L_{11}与 a/w、b/w 的关系

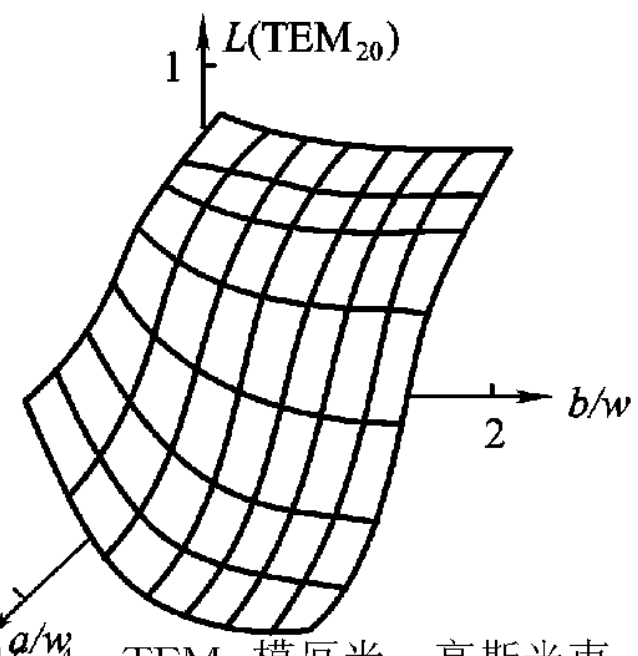


图 4.16.4 TEM_{20}模厄米－高斯光束通过椭圆形孔的衍射损耗

(a) L_{20}与 a/w 的关系(b/w 为参数)；

(b) L_{20}与 b/w 的关系(a/w 为参数)；

(c) L_{20}与 a/w、b/w 的关系

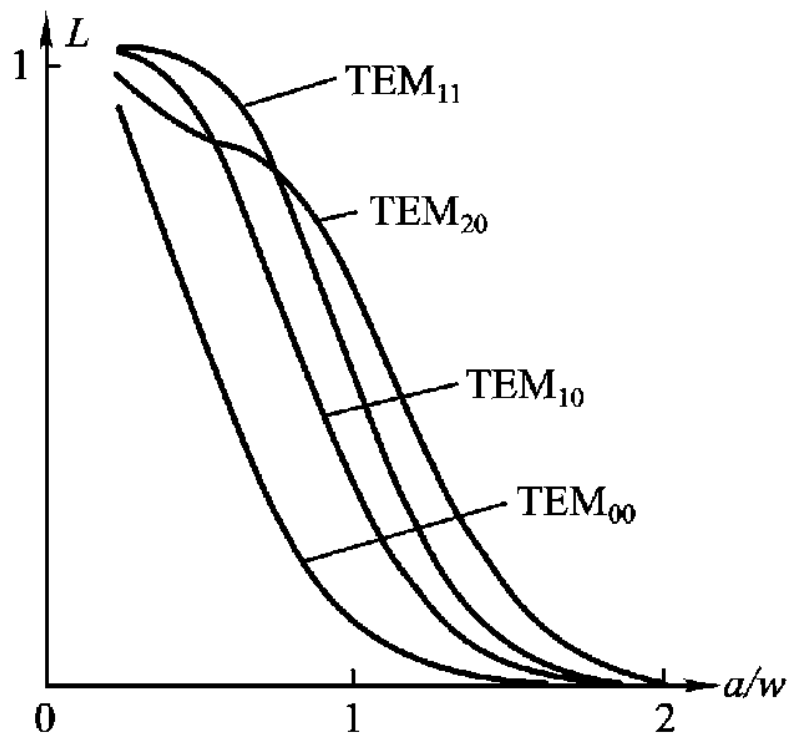


图 4.16.5　TEM_{00}、TEM_{10}、TEM_{11}、TEM_{20} 模厄米－高斯光束通过方孔的衍射损耗 L 与 a/w 的关系

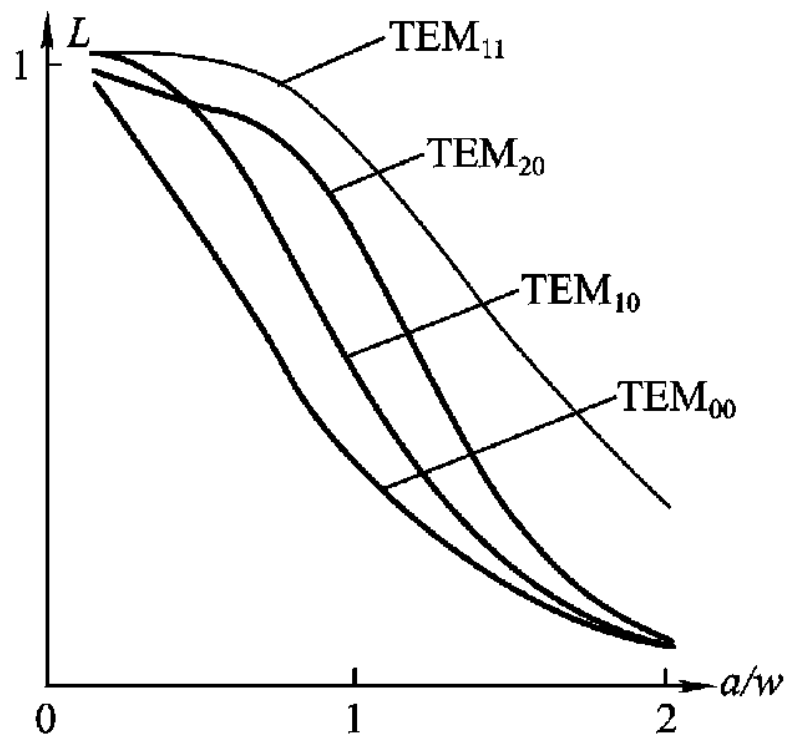


图 4.16.6　TEM_{00}、TEM_{10}、TEM_{11}、TEM_{20} 模厄米－高斯光束通过矩形孔（$a:b=2:1$）时的衍射损耗 L 与 a/w 的关系

强分布在 x、y 方向也是对称的，情况与 TEM_{00} 模相似. 对 TEM_{10} 模，在 x 方向有两个靠外的光强极大值，故在相同的相对通光面积下，$a/b>1$ 的矩形孔（或椭圆形孔）比 $a/b=1$ 的方孔（或圆孔）的衍射损耗小. 而 TEM_{20} 模，在 x 方向的光强分布有三个极大值，其中两个主极大更靠外，故欲减小 TEM_{20} 模的衍射损耗，需要在 x 方向用更宽的孔. 由此可见，根据不同阶模光强分布的特征，可选用不同几何形状和尺寸的光阑和空间滤波器，并在适当位置配置，就能改变光模横向场分布，实现光学滤波的目的.

二、拉盖尔－高斯光束的衍射损耗

由式（4.2.1）知，拉盖尔－高斯光束的光强公式为

$$I_{pl}=\frac{A_{pl}^2\omega_0^2}{\omega^2}\left(\frac{2r^2}{\omega^2}\right)^l\left[\mathrm{L}_p^l\left(\frac{2r^2}{\omega^2}\right)\right]^2\exp(-2r^2/\omega^2)\begin{cases}\cos^2 l\varphi\\ \sin^2 l\varphi\end{cases} \tag{4.16.20}$$

通过一任意形状通光孔径时的功率透过率为

$$T_{pl}=\frac{\iint_s\left(\frac{2r^2}{\omega^2}\right)^l\left[\mathrm{L}_p^l\left(\frac{2r^2}{\omega^2}\right)\right]^2\exp\left(-\frac{2r^2}{\omega^2}\right)\begin{cases}\cos^2 l\varphi\\ \sin^2 l\varphi\end{cases}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi}{\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\left(\frac{2r^2}{\omega^2}\right)^l\left[\mathrm{L}_p^l\left(\frac{2r^2}{\omega^2}\right)\right]^2\exp\left(-\frac{2r^2}{\omega^2}\right)\begin{cases}\cos^2 l\varphi\\ \sin^2 l\varphi\end{cases}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi} \tag{4.16.21}$$

衍射损耗

$$L_{pl}=1-\frac{\iint_s\left(\frac{2r^2}{w^2}\right)^l\left[\mathrm{L}_p^l\left(\frac{2r^2}{w^2}\right)\right]^2\exp\left(-\frac{2r^2}{w^2}\right)\begin{Bmatrix}\cos^2 l\varphi\\ \sin^2 l\varphi\end{Bmatrix}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi}{\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\left(\frac{2r^2}{w^2}\right)^l\left[\mathrm{L}_p^l\left(\frac{2r^2}{w^2}\right)\right]^2\exp\left(-\frac{2r^2}{w^2}\right)\begin{Bmatrix}\cos^2 l\varphi\\ \sin^2 l\varphi\end{Bmatrix}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi} \tag{4.16.22}$$

由此，可仿节一的方法进行分析计算.例如，对半径为 a 的圆孔，前几阶拉盖尔－高斯光束的衍射损耗为

$$\begin{aligned}
L_{00}&=\exp(-2a^2/w^2)\\
L_{01}&=\exp(-2a^2/w^2)\left(2\frac{a^2}{w^2}+1\right)\\
L_{02}&=\exp(-2a^2/w^2)\left(2\frac{a^4}{w^4}+2\frac{a^2}{w^2}+1\right)\\
L_{10}&=\exp(-2a^2/w^2)\left(4\frac{a^4}{w^4}+1\right)\\
L_{11}&=\exp(-2a^2/w^2)\left(4\frac{a^6}{w^6}-2\frac{a^4}{w^4}+2\frac{a^2}{w^2}+1\right)
\end{aligned}\tag{4.16.23}$$

等等.

最后要说明的是，本节的方法适用于高斯光束在传输中单次通过有限几何尺寸通光孔的功率透过率和衍射损耗的计算.对光学谐振腔内置限模光阑情况，腔的衍射损耗是激光多次通过限模孔径衍射的结果，应当用第九章讲述的方法计算，与这里讨论的情况是不相同的.

§4.17 高斯光束通过有光阑光学系统的传输公式

实际的激光束不同程度地会受到硬边光阑的限制.通常的办法是从柯林斯公式出发，直接进行数值积分，往往费时甚多.寻求解析的传输公式目的是可以直接从解析公式出发进行直观的物理分析，研究光束传输变换规律和影响场分布的物理因素.此外，利用解析公式进行数值计算常可节约机时，这对大型复杂光学系统中光传输问题的分析计算尤为必要.本节以高斯光束(包括高阶高斯光束)为例，讨论有光阑光学系统的两个解析分析方法：直接积分法和递推公式法.

一、高斯光束

设在 $z=0$ 处有场分布为

$$E(x,0)=\exp\left(-\frac{x^2}{w_0^2}\right) \tag{4.17.1}$$

的二维高斯光束通过近轴 $ABCD$ 光学系统，在 $z=0$ 处还置有一宽度为 a 的硬边光阑.式中 w_0 为束腰宽度，为简单起见，式(4.17.1)中已略去常数因子.由柯林斯公式，高斯光束通过该光学系统后，在 z 处的场分布为

$$E(x,z)=\sqrt{\frac{\mathrm{i}}{\lambda B}}\int_{-a}^{a}\exp\left(-\frac{x^2}{w_0^2}\right)\exp\left[-\frac{\mathrm{i}k}{2B}(Ax_0^2-2xx_0+Dx^2)\right]\mathrm{d}x_0 \tag{4.17.2}$$

式中已略去不重要的随传输距离 z 变化的相位因子.

利用误差函数公式

$$\mathrm{erf}(r)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-r}^{r}\exp(-t^2)\mathrm{d}t \tag{4.17.3}$$

直接积分式(4.17.2)得到

$$E(x,z)=\frac{1}{2}\left(A+\frac{B}{q_0}\right)^{-1/2}\exp\left(-\frac{\mathrm{i}kx^2}{2q}\right)\left[\mathrm{erf}\left(\frac{a}{w_0}\sqrt{\frac{A}{B}q_0+1}-\frac{q_0}{\sqrt{Aq_0/B+1}}\frac{x/B}{w_0}\right)-\right.$$
$$\left.\mathrm{erf}\left(-\frac{a}{w_0}\sqrt{\frac{A}{B}q_0+1}-\frac{q_0}{\sqrt{Aq_0/B+1}}\frac{x/B}{w_0}\right)\right] \tag{4.17.4}$$

式中 q、q_0 为高斯光束复参数.

当 $a\to\infty$，即无光阑限制时，式(4.17.4)简化为

$$E_\infty(x,z)=\left(A+\frac{B}{q_0}\right)^{-1/2}\exp\left(-\frac{\mathrm{i}kx^2}{2q}\right) \tag{4.17.5}$$

式(4.17.4)是用误差函数表示的高斯光束通过受硬边光阑限制近轴 $ABCD$ 光学系统的传输公式.由式(4.17.4)知，$E(x,z)$ 与光阑宽度 a、光束参数 w_0 和光学系统矩阵元 (A/B) 有关.由此可知，当 a、w_0 一定时，高斯光束通过 (A/B) 相同的光学系统后，有相同或相似的光强分布，矩阵元 B 仅对宗量起放、缩 $1/|B|$ 因子作用.

二、厄米－高斯光束

现设 $z=0$ 处有场分布

$$E(x,0)=\mathrm{H}_m\left(\sqrt{2}\frac{x}{w_0}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{w_0^2}\right) \tag{4.17.6}$$

的二维厄米－高斯光束通过硬边光阑限制 $ABCD$ 光学系统，其传输公式为

$$E(x,z)=\mathrm{S}\int_{-a}^{a}\mathrm{H}_m\left(\sqrt{2}\frac{x_0}{w_0}\right)\exp[-(Px_0-Qx)^2]\mathrm{d}x_0 \tag{4.17.7}$$

式中

$$P=\sqrt{\frac{1}{\omega_0^2}+\mathrm{i}\pi\frac{A}{\lambda B}} \tag{4.17.8}$$

$$Q=\frac{\mathrm{i}\pi}{\lambda BP} \tag{4.17.9}$$

$$S=\sqrt{\frac{\mathrm{i}}{\lambda B}}\exp\left[\left(Q^2-\frac{\mathrm{i}\pi D}{\lambda B}\right)x^2\right] \tag{4.17.10}$$

利用厄米多项式的递推公式

$$\mathrm{H}_m(-x)=(-1)^m\mathrm{H}_m(x) \tag{4.17.11}$$

$$\mathrm{H}_{m+1}(x)=2x\mathrm{H}_m(x)-2m\mathrm{H}_{m-1}(x) \tag{4.17.12}$$

$$\frac{\mathrm{dH}_m(x)}{\mathrm{d}x}=2m\mathrm{H}_{m-1}(x) \tag{4.17.13}$$

和式(4.17.3)、积分式(4.17.7)得到 TEM_1、TEM_2、TEM_3 模厄米－高斯光束的传输公式

$$E_1(x,z)=\frac{\sqrt{2}S}{P^2\omega_0}\{\exp[-(aP+Qx)^2]-\exp[-(aP-Qx)^2]+\sqrt{\pi}QFx\} \tag{4.17.14}$$

$$E_2(x,z)=\frac{S}{P^3\omega_0^2}\{-4(aP-Qx)\exp[-(aP+Qx)^2]-4(aP+Qx)\exp[-(aP-Qx)^2]+\sqrt{\pi}F(2-P^2\omega_0^2+4Q^2x^2)\} \tag{4.17.15}$$

$$E_3(x,z)=-\frac{2\sqrt{2}S}{P^4\omega_0^3}\{\exp[-(aP+Qx)^2]\{(4+4a^2P^2-3P^2\omega_0^2+4aPQx+4Q^2x^2)\cdot[-1+\exp(4aPQx)]+8aPQx\}-\sqrt{\pi}FQx(6-3P^2\omega_0^2+4Q^2x^2)\} \tag{4.17.16}$$

式(4.17.4)可写为

$$E_0=\sqrt{\pi}FS/2P \tag{4.17.17}$$

式中

$$F=\mathrm{erf}(aP-Qx)+\mathrm{erf}(aP+Qx) \tag{4.17.18}$$

对无光阑($a\to\infty$)情况,式(4.17.14)～式(4.17.16)简化为

$$\bar{E}_1(x,z)=\frac{2\sqrt{2\pi}QxS}{P^2\omega_0} \tag{4.17.19}$$

$$\bar{E}_2(x,z)=\frac{2\sqrt{\pi}S}{P^3\omega_0^2}(2-P^2\omega_0^2+4Q^2x^2) \tag{4.17.20}$$

$$\bar{E}_3(x,z)=\frac{4\sqrt{2\pi}S}{P^4\omega_0^3}Qx(6-3P^2\omega_0^2+4Q^2x^2) \tag{4.17.21}$$

TEM_m 模厄米－高斯光束的传输公式为

$$E_m(x,z)=S\int_{-a}^{a}\mathrm{H}_m(\sqrt{2}x'/w_0)\exp[-(Px'-Qx)^2]\mathrm{d}x' \tag{4.17.22}$$

利用式(4.17.3)和式(4.17.11)～式(4.17.13)，对式(4.17.7)进行分部积分，得

$$E_{m+1}(x,z)=\frac{2\sqrt{2}QxE_m(x,z)}{Pw_0}+2m\left(\frac{2}{P^2w_0^2}-1\right)E_{m-1}(x,z)-\frac{\sqrt{2}S}{P^2w_0}\cdot$$
$$\mathrm{H}_m\left(\frac{\sqrt{2}a}{w_0}\right)\{\exp[-(aP-Qx)^2]-(-1)^m\exp[-(aP+Qx)^2]\} \tag{4.17.23}$$

式(4.17.23)为 TEM_{m+1} 模厄米－高斯光束的传输的递推公式，公式中的 $E_m(x,z)$ 可由递推公式求得. 例如 TEM_4 模厄米－高斯光束的传输公式由式(4.17.20)、式(4.17.21)和式(4.17.23)推出为

$$E_4(x,z)=\frac{2\sqrt{2}QxE_3(x,z)}{Pw_0}+6\left(\frac{2}{P^2w_0^2}-1\right)E_2(x,z)-\frac{\sqrt{2}S}{P^2w_0}\cdot$$
$$\mathrm{H}_3\left(\frac{\sqrt{2}a}{w_0}\right)\{\exp[-(aP-Qx)^2]+\exp[-(aP+Qx)^2]\} \tag{4.17.24}$$

利用传输公式，可以分析硬边光阑的作用. 例如对 TEM_3 模，光阑对光传输影响的解析公式为

$$\bar{E}_3-E_3=\frac{2\sqrt{2}S}{P^4w_0^3}\exp[-(aP+Qx)^2]\{(4+4a^2P^2-3P^2w_0^2+$$
$$4aPQx+4Q^2x^2)[-1+\exp(4aPQx)]+8aPQx\}+$$
$$\frac{2\sqrt{2\pi}S}{P^4w_0^3}Qx(6-3P^2w_0^2+4Q^2x^2)(2-F) \tag{4.17.25}$$

§ 4.18　像散椭圆高斯光束

设高斯光束在各向异性非均匀介质中传输. 与 § 4.4 讨论相类似，可设介质折射率 n 和吸收(或增益)系数 α 为

$$n(x,y,z)=n_0(1+\gamma_xx^2+\gamma_yy^2),\quad |\gamma_x|x^2\ll1,|\gamma_y|y^2\ll1 \tag{4.18.1}$$

$$\alpha(x,y,z)=\alpha_0(1+\beta_xx^2+\beta_yy^2),\quad |\beta_x|x^2\ll1,|\beta_y|y^2\ll1 \tag{4.18.2}$$

场函数

$$E(x,y,z)=A(x,y,z)\exp(-\mathrm{i}k\tilde{n}_0 z) \tag{4.18.3}$$

将式(4.18.1)、式(4.18.2)、式(4.18.3)代入亥姆霍兹方程式,在缓变振幅近似下化为

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}-2\mathrm{i}k\tilde{n}_0\frac{\partial A}{\partial z}-k^2\tilde{n}_0^2(\Gamma_x^2x^2+\Gamma_y^2y^2)A=0 \tag{4.18.4}$$

式中

$$\tilde{n}_0=n_0-\mathrm{i}\frac{\alpha_0}{2k} \tag{4.18.5}$$

传输常数

$$\Gamma_i^2=-2\gamma_i+\frac{\mathrm{i}\alpha_0}{n_0k}(\beta_i-\gamma_i),\quad i=x,y \tag{4.18.6}$$

容易证明,在边界条件为

$$s(z)\big|_{z=0}=s_0=\sqrt{q_{0x}q_{0y}} \tag{4.18.7}$$

$$q(z)\big|_{z=0}=q_{0i} \tag{4.18.8}$$

传输常数 Γ_i 与 z 无关时,式(4.16.4)的一个特解是

$$A(x,y,z)=\frac{A''_{00}}{s(z)}\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}k\tilde{n}_0}{2}\left[\frac{x^2}{q_x(x)}+\frac{y^2}{q_x(y)}\right]\right\} \tag{4.18.9}$$

式中

$$s(z)=\left[\left(\frac{1}{\Gamma_x}\sin\Gamma_xz+q_{0x}\cos\Gamma_xz\right)\left(\frac{1}{\Gamma_y}\sin\Gamma_yz+q_{0y}\cos\Gamma_yz\right)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{4.18.10}$$

$$q_i(z)=\frac{q_{0i}\cos\Gamma_iz+\frac{1}{\Gamma_i}\sin\Gamma_iz}{-q_{0i}\Gamma_i\sin\Gamma_iz+\cos\Gamma_iz} \tag{4.18.11}$$

$\alpha=0$ 时,式(4.16.9)化为

$$A(x,y,z)=A''_{00}\left(\frac{w_{0x}w_{0y}}{w_xw_y}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{\mathrm{i}k}{2}\left(\frac{x^2}{q_x}+\frac{y^2}{q_x}\right)\right]\cdot$$
$$\exp\left[\frac{\mathrm{i}k}{2}\left(\arctan\frac{z}{Z_{0x}}+\arctan\frac{z}{Z_{0y}}\right)\right] \tag{4.18.12}$$

式中

$$Z_{0i}=\frac{\pi w_{0i}^2}{\lambda},\quad i=x,y \tag{4.18.13}$$

式(4.18.9)、式(4.18.12)描写的光束称为基模椭圆高斯光束.由式(4.16.11)知,在 xOz 和 yOz 面上,椭圆高斯光束的参数 $q_x(z)$ 和 $q_y(z)$

(R_x 和 R_y，w_x 和 w_y)一般是不相等的，因此称为像散椭圆高斯光束. 对于本节所讨论情况，光束参数虽然在 xOz 和 yOz 面不相等，但它们是可分离的，即具有简单像散特征. 式(4.16.11)可改写为

$$q_i(z)=\frac{A_i q_{0i}+B_i}{C_i q_{0i}+D_i} \tag{4.18.14}$$

式中

$$\begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos \Gamma_i z & \sin \Gamma_i z/\Gamma_i \\ -\Gamma_i \sin \Gamma_i z & \cos \Gamma_i z \end{bmatrix} \tag{4.18.15}$$

即 $q_x(z)$ 和 $q_y(z)$ 分别服从 $ABCD$ 定律. 因此前面对圆高斯光束讨论结果可以分别用于描述椭圆高斯光束在 xOz 和 yOz 面上的行为.

同法可证，场函数为

$$A(x,y,z)=A''_{mn}\left(\frac{w_{0x}w_{0y}}{w_x w_y}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{H}_m\left(\frac{\sqrt{2}}{w_x}x\right)\mathrm{H}_n\left(\frac{\sqrt{2}}{w_y}y\right)\exp\left[-\left(\frac{x^2}{w_x^2}+\frac{y^2}{w_y^2}\right)\right]\cdot$$
$$\exp\left\{-\mathrm{i}\left[k\left(\frac{x_2}{2R_x}+\frac{y_2}{2R_y}\right)-\left(m+\frac{1}{2}\right)\arctan\frac{z}{Z_{0x}}-\left(m+\frac{1}{2}\right)\arctan\frac{z}{Z_{0y}}\right]\right\} \tag{4.18.16}$$

的高阶像散椭圆高斯光束亦为 $\alpha=0$ 时式(4.18.4)的特解.

式中

$$w_i^2=w_{0i}^2\left[1+\left(\frac{Z_{0i}}{z}\right)^2\right] \tag{4.18.17}$$

$$R_i=z\left[1+\left(\frac{Z_{0i}}{z}\right)^2\right] \tag{4.18.18}$$

式(4.18.16)与厄米 – 高斯光束场函数表示式(4.2.4)有相似的形式，但因像散，椭圆高斯光束在 xOz 和 yOz 面上有不同的 w_i、R_i 和 Z_{0i}. 这是在将高阶圆高斯光束的有关结果推广用于高阶椭圆高斯光束时应当注意的.

§ 4.19　像散厄米 – 高斯光束的对称化

在一些应用中，要求将矩形光斑的像散光束变换成圆形光斑的对称光束，例如将像散厄米 – 高斯光束变换成拉盖尔 – 高斯光束. 这可用适当设计的非轴对称光学系统来实现. 本节首先给出像散光学元件的 4×4 扩展矩阵，然后推导出 TEM_{mn} 模像散厄米 – 高斯光束通过近轴 4×4 $ABCD$ 光学系统的传输方程，并用以研究像散厄米 – 高斯光束通过由三个柱透镜组成的模转换器的对称化问题.

一、光学元件的 4×4 扩展矩阵

利用§2.2的方法，可推出像散光学元件如柱透镜，倾斜介质板等的4×4扩展矩阵，现总结于表4.19.1

表 4.19.1　光学元件的 4×4 扩展矩阵

1. 柱面反射 $\rho_T=\rho,\rho_s\to\infty$ xOz 为子午面	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{2}{\rho\cos\theta} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
2. 柱面折射 $\rho_T=\rho,\rho_s\to\infty$ xOz 为子午面，$\theta=0°$ $p=(n_1-n_2)/\rho$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{p}{n_2} & 0 & \dfrac{n_1}{n_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$
3. 柱面折射 $\rho_T=\rho,\rho_s\to\infty$ yOz 为子午面，$\theta=0°$ $p=(n_1-n_2)/\rho$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{n_1}{n_2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{p}{n_2} & 0 & \dfrac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$
4. 球面折射 $\rho_T=\rho_s=\rho,\theta=0°$ $p=(n_1-n_2)/\rho$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{p}{n_2} & 0 & \dfrac{n_1}{n_2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{p}{n_2} & 0 & \dfrac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$
5. 通过厚 l、折射率 n 的均匀介质	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dfrac{n^2 l(1-\sin^2\theta)}{(n^2-\sin^2\theta)^{3/2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{l}{(n^2-\sin^2\theta)^{1/2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

续表

6. 通过厚 l、折射率 n 的均匀介质，$\beta=0°$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{l}{n} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{l}{n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
7. 柱面厚透镜 xOz 为子午面，$\theta=0°$ $p_1=(1-n)/\rho_1$ $p_2=(n-1)/\rho_2$ $p_{12}=p_1+p_2-p_1p_2l/n$ $=(n-1)[\rho_2^{-1}-\rho_1^{-1}$ $+(n-1)l/(n\rho_1\rho_2)]$	$\begin{bmatrix} 1-\frac{lp_1}{n} & 0 & \frac{l}{n} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{l}{n} \\ -p_{12} & 0 & 1-\frac{lp_2}{n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
8. 柱面厚透镜 yOz 为子午面，$\theta=0°$ p_1、p_2、p_{12}同 7	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{l}{n} & 0 \\ 0 & 1-\frac{lp_1}{n} & 0 & \frac{l}{n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -p_{12} & 0 & 1-\frac{lp_2}{n} \end{bmatrix}$
9. 柱面薄透镜 xOz 为子午面，$\theta=0°$ $f^{-1}=(n-1)(\rho_2^{-1}-\rho_1^{-1})$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
10. 柱面薄透镜 yOz 为子午面，$\theta=0°$ $f^{-1}=(n-1)(\rho_2^{-1}-\rho_1^{-1})$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{f} & 0 & 1 \end{bmatrix}$
11. 球面厚透镜 $\theta=0°$ p_1、p_2、p_{12}同 7	$\begin{bmatrix} 1-\frac{lp_1}{n} & 0 & \frac{l}{n} & 0 \\ 0 & 1-\frac{lp_1}{n} & 0 & \frac{l}{n} \\ -p_{12} & 0 & 1-\frac{lp_2}{n} & 1 \\ 0 & -p_{12} & 0 & 1-\frac{lp_2}{n} \end{bmatrix}$

续表

12. 球面薄透镜 $\theta=0°$ $f^{-1}=(n-1)(\rho_2^{-1}-\rho_1^{-1})$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{f} & 0 & 1 \end{bmatrix}$
13. 柱面厚透镜 xOz 为子午面，柱面 绕 z 轴旋转 α 角 p_1、p_2、p_{12}同 7	$\begin{bmatrix} 1-\frac{lp_1}{n}\cos^2\alpha & \frac{lp_1}{2n}\sin 2\alpha & \frac{l}{n} & 0 \\ \frac{lp_1}{2n}\sin 2\alpha & 1-\frac{lp_1}{n}\sin^2\alpha & 0 & \frac{l}{n} \\ -p_{12}\cos^2\alpha & \frac{p_{12}}{2}\sin 2\alpha & 1-\frac{lp_2}{n}\cos^2\alpha & \frac{lp_2}{2n}\sin 2\alpha \\ \frac{p_{12}}{2}\sin 2\alpha & -p_{12}\sin^2\alpha & \frac{lp_2}{2n}\sin 2\alpha & 1-\frac{lp_2}{n}\sin^2\alpha \end{bmatrix}$
14. 柱面薄透镜 xOz 为子午面，柱面 绕 z 轴旋转 α 角 $f^{-1}=(n-1)(\rho_2^{-1}-\rho_1^{-1})$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\cos^2\alpha}{f} & \frac{\sin 2\alpha}{2f} & 1 & 0 \\ \frac{\sin 2\alpha}{2f} & -\frac{\sin^2\alpha}{f} & 0 & 1 \end{bmatrix}$
15. 长 l 梯度折 射率光纤 $n=n_0[1-(\beta_x^2x^2+\beta_y^2y^2)/2]$	$\begin{bmatrix} \cos\beta_x l & 0 & \frac{\sin\beta_x l}{\beta_x} & 0 \\ 0 & \cos\beta_y l & 0 & \frac{\sin\beta_y l}{\beta_y} \\ -\beta_x\sin\beta_x l & 0 & \cos\beta_x l & 0 \\ 0 & -\beta_y\sin\beta_y l & 0 & \cos\beta_y l \end{bmatrix}$
16. 长 l 梯度折 射率光纤 $n=n_0[1-\beta^2(x^2+y^2)/2]$	$\begin{bmatrix} \cos\beta l & 0 & \frac{\sin\beta l}{\beta} & 0 \\ 0 & \cos\beta l & 0 & \frac{\sin\beta l}{\beta} \\ -\beta\sin\beta l & 0 & \cos\beta l & 0 \\ 0 & -\beta\sin\beta l & 0 & \cos\beta l \end{bmatrix}$

二、TEM_{mn}模厄米－高斯光束通过近轴 4×4 *ABCD* 光学系统的传输方程

一般地，像散厄米－高斯光束为 x、y 方向上模序数 $m\neq n$，且对应基模光束束宽也不相等的多模高斯光束. 设在 $z=0$ 处有场分布为

$$E_{mn}(x,y,z=0)=\mathrm{H}_m\left[\frac{\sqrt{2}x_0}{w_{0x}}\right]\mathrm{H}_n\left[\frac{\sqrt{2}y_0}{w_{0y}}\right]\exp\left[-\left(\frac{x^2}{w_{0x}^2}+\frac{y^2}{w_{0y}^2}\right)\right] \tag{4.19.1}$$

的 TEM_{mn} 模厄米 – 高斯光束通过 4×4 变换矩阵

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & b_{11} & b_{12}\\ a_{21} & a_{22} & b_{21} & b_{22}\\ c_{11} & c_{12} & d_{11} & d_{12}\\ c_{21} & c_{22} & d_{21} & d_{22}\end{bmatrix} \tag{4.19.2}$$

描述的近轴对称光学系统，则其变换由式(1.3.18)决定.将式(4.19.1)代入式(1.3.44)，利用公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{(x-y)^2}{2u}\right]\mathrm{H}_n(x)\mathrm{d}x=(2\pi u)^{\frac{1}{2}}(1-2u)^{\frac{n}{2}}\mathrm{H}_n\left(\frac{y}{\sqrt{1-2u}}\right) \tag{4.19.3}$$

$$\int_0^{+\infty}x^{2n}\exp(-ax^2)\mathrm{d}x=\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}},\quad a>0 \tag{4.19.4}$$

$$\mathrm{H}_n(x+y)=2^{-\frac{n}{2}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{H}_{n-k}(\sqrt{2}x)\mathrm{H}_k(\sqrt{2}y) \tag{4.19.5}$$

$$\mathrm{H}_n(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k n!}{k!\ (n-2k)!}(2x)^{n-2k} \tag{4.19.6}$$

经繁冗的积分运算，最后结果可整理为

$$\begin{aligned}E_{m,n}(x,y,z)=&-\frac{k\exp(-\mathrm{i}kz)}{\sqrt{\det B}}2^{-\frac{1}{2}(m+n)}\cdot\\ &\exp\left(\frac{p_2^2p_3-p_1p_2p_4+p_0p_4^2+p_1^2p_5-4p_0p_3p_5}{p_4^2-4p_3p_5}\right)\cdot\\ &\sqrt{\frac{1}{p_4^2-4p_3p_5}}\left(1+\frac{2}{p_5w_{0y}^2}\right)^{n/2}\sum_{v=0}^{n}\sum_{u=0}^{m}\frac{m!\ n!}{(m-u)!\ (n-v)!}\mathrm{H}_{n-v}\cdot\\ &\left[\frac{4p_2p_3-2p_1p_4}{\sqrt{w_{0y}^2+2/p_5}\,(p_4^2-4p_3p_5)}\right]\mathrm{H}_{m-u}\left[\frac{4p_1p_5-2p_2p_4}{(p_4^2-4p_3p_5)w_{0x}}\right]\cdot\\ &\sum_{k=0}^{\left[\frac{v}{2}\right]}\sum_{j=0}^{\left[\frac{u}{2}\right]}\frac{(-1)^{k+j}(v+u-2k-2j-1)!!}{k!\ j!\ (v-2k)!\ (u-2j)!}\left(\frac{-p_4w_{0x}}{2p_5\sqrt{w_{0y}^2+2/p_5}}\right)^{v-2k}\cdot\\ &\left(\frac{1}{w_{0x}}\sqrt{\frac{32p_5}{p_4^2-4p_3p_5}}\right)^{v+u-2k-2j}\end{aligned} \tag{4.19.7}$$

式中

$$p_0=\frac{-\mathrm{i}k}{2\det\ B}\{(b_{22}d_{11}-b_{21}d_{12})x^2+[(b_{22}d_{21}-b_{21}d_{22})+(b_{11}d_{12}-b_{12}d_{11})]xy+(b_{11}d_{22}-b_{12}d_{21})y^2\}$$

$$p_1=\frac{-\mathrm{i}k}{\det\ B}(b_{12}y-b_{22}x)$$

$$p_2=\frac{\mathrm{i}k}{\det\ B}(b_{11}y-b_{21}x)$$

$$p_3=-\frac{\mathrm{i}k w_{0x}^2(a_{11}b_{22}-a_{21}b_{12})+2\det\ B}{2\det\ B w_{0x}^2}$$

$$p_4=\frac{-\mathrm{i}k}{2\det\ B}[(a_{21}b_{11}-a_{11}b_{21})+(a_{12}b_{22}-a_{22}b_{12})]$$

$$p_5=-\frac{\mathrm{i}k w_{0y}^2(a_{22}b_{11}-a_{12}b_{21})+2\det\ B}{2\det\ B w_{0y}^2} \tag{4.19.8}$$

式(4.19.7)为像散厄米－高斯光束通过 $4\times4ABCD$ 光学系统解析的传输公式，当 $n=0$ 时式(4.19.7)简化为

$$E_{m,0}(x,y,z)=\frac{\mathrm{i}k\exp(-\mathrm{i}kz)}{\sqrt{\det B}}\exp\left(\frac{p_2^2p_3-p_1p_2p_4+p_0p_4^2+p_1^2p_5-4p_0p_3p_5}{p_4^2-4p_3p_5}\right)\cdot$$

$$\sqrt{\frac{1}{4p_3p_5-p_4^2}}\left[1+\frac{8p_5}{(4p_3p_5-p_4^2)w_{0x}^2}\right]^{m/2}\cdot$$

$$\mathrm{H}_m\left[\frac{2p_1p_5-p_2p_4}{(p_4^2-4p_3p_5)\sqrt{\dfrac{w_{0x}^2}{2}+\dfrac{4p_5}{4p_3p_5-p_4^2}}}\right] \tag{4.19.9}$$

三、TEM_{mn} 模像散厄米－高斯光束的对称化

图 4.19.1 为由三个柱透镜 C_1、C_2、C_3 组成的模转换器，C_1、C_3 在 x 方向的焦距为 f，C_2 在 y 方向的焦距为 f，入射参考面 RP_1 和出射参考面 RP_2 分别距 C_1、C_3 为 $f/2$. 这样，在 x 方向构成了一个傅里叶变换系统，而在 y 方向为一个成像光学系统.

现以 $\mathrm{TEM}_{6,4}$ 模厄米－高斯光束为例，具体进行计算分析. 计算参数取 $w_{0x}=1.5$ mm，$w_{0y}=0.5$ mm，$\lambda=1.06$ μm. 在 x 和 y 方向的瑞利长度 $Z_{0x}=\pi w_{0x}^2/\lambda=666.8$ mm 和 $Z_{0y}=\pi w_{0y}^2/\lambda=740.9$ mm 不相等，首先需要让光束通过用一个变换矩阵为

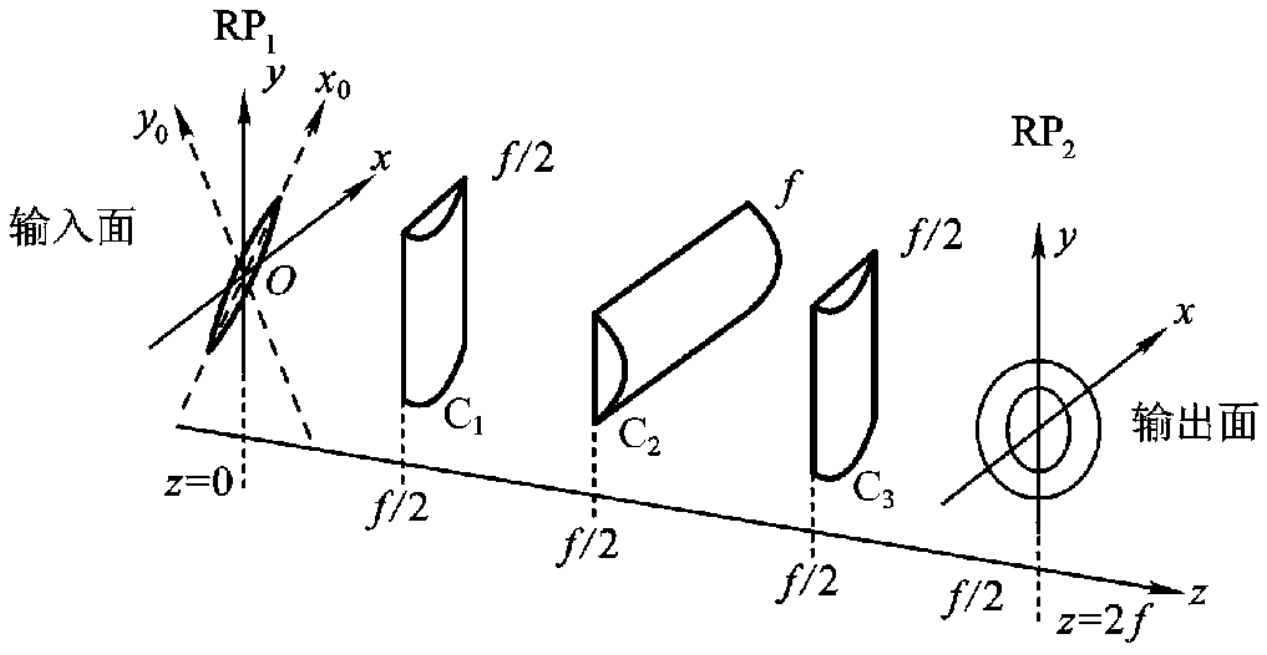


图 4.19.1　用于对称化像散厄米－高斯光束的光学系统

$$\boldsymbol{M}_0=\begin{bmatrix}\alpha & 0 & 0 & 0\\ 0 & \beta & 0 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\alpha} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{\beta}\end{bmatrix} \tag{4.19.10}$$

的双轴望远镜，式中 $\alpha=w_{0y}/w_{0x}=1/3$，$\beta=1$. 容易证明，当 $\mathrm{TEM}_{6,4}$ 光束通过这个双轴望远镜后，在 x 和 y 方向的瑞利长度变为相等，且有 $Z_0=740.9$ mm.

由式(4.19.7)、式(4.19.10)得出在 RP_1 (取为 $z=0$ 面)处光束场分布为

$$E_{6,4}(x_0,y_0,z=0)=\sqrt{3}\exp[-4(x_0^2+y_0^2)]\mathrm{H}_6(4x_0)\mathrm{H}_4(4y_0) \tag{4.19.11}$$

令 $f=Z_0$，并将模转换器绕入射光束轴线旋转 45°，或者等价地将入射光束反向旋转 45°，作坐标变换

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_0+y_0),\quad y=\frac{1}{\sqrt{2}}(-x_0+y_0) \tag{4.19.12}$$

由式(4.19.7)，可推出在 $z=5f/8$ 面和在 $z=3f/2$ 的 C_3 前、后面上光束的场分布分别为

$$\begin{aligned}E_{6,4}(x,y,5f/8)=\sqrt{15}(-0.03+0.02\mathrm{i})\exp[&(3.9-2.79\mathrm{i})(x^2+y^2)+\\&(2.05-9.18\mathrm{i})xy](0.41+\\0.91\mathrm{i})^2\sum_{v=0}^{4}\sum_{u=0}^{6}&\frac{17280}{(6-u)!\ (4-v)!}\mathrm{H}_{4-v}[(0.52+\\0.06\mathrm{i})+&(3.91+0.01\mathrm{i})y]\mathrm{H}_{6-u}[(3.28+2.13\mathrm{i})x+(0.41+\end{aligned}$$

$$0.33\mathrm{i})y]\cdot\sum_{j=0}^{\left[\frac{u}{2}\right]}\sum_{k=0}^{\left[\frac{v}{2}\right]}\frac{(-1)^{k+j}(v+u-2k-2j-1)!!}{k!\ j!\ (u-2j)!\ (v-2k)!}\cdot$$

$$(0.03)^{v-2k}(1.83-\mathrm{i})^{u+v-2k-2j} \tag{4.19.13}$$

$$E_{6,4(\text{前})}(x,y,3f/2)=\sqrt{6}(-0.04)\exp[-(3.2+1.6\mathrm{i})(x^2+y^2)-8\mathrm{i}xy]\cdot$$

$$(-0.28-0.96\mathrm{i})^2\sum_{v=0}^{4}\sum_{u=0}^{6}\frac{17280}{(6-u)!\ (4-v)!}\mathrm{H}_{4-v}\cdot$$

$$[(-0.8-2.4\mathrm{i})x+(-2.4+0.8\mathrm{i})y]\cdot$$

$$\mathrm{H}_{6-u}[(-0.8+2.4\mathrm{i})x+(-2.4-0.8\mathrm{i})y]\cdot$$

$$\sum_{j=0}^{\left[\frac{u}{2}\right]}\sum_{k=0}^{\left[\frac{v}{2}\right]}\frac{(-1)^{k+j}(v+u-2k-2j-1)!!}{k!\ j!\ (u-2j)!\ (v-2k)!}(-1)^{v-2k}(2)^{u+v-2k-2j}$$

$$=61.44\sqrt{6}\exp[(-3.2+1.6\mathrm{i})(x^2+y^2)-8\mathrm{i}xy]\cdot$$

$$(-0.28-0.96\mathrm{i})^2(-2.4-0.8\mathrm{i})^2r^2\mathrm{L}_4^2(-6.4r^2) \tag{4.19.14}$$

$$E_{6,4(\text{后})}(x,y,3f/2)=61.44\sqrt{6}\exp[(-3.2+1.6\mathrm{i})r^2]\cdot$$

$$(-0.28-0.96\mathrm{i})^2(-2.4-0.8\mathrm{i})^2r^2\mathrm{L}_4^2(-6.4r^2) \tag{4.19.15}$$

$\mathrm{TEM}_{6,4}$模厄米－高斯光束通过模转换器，在一些典型面上光强分布见图4.19.2.分析公式和图可知，$z=0$ 处光强分布为矩形的 $\mathrm{TEM}_{6,4}$模厄米－高斯光束(图 4.19.2(a))通过第一个柱透镜 C_1后，实宗量光束变成了有 xy 耦合项的复宗量光束，并且光斑形状发生变化(图 4.19.2(b)).在通过第二个柱透镜 C_2后，光斑形状逐渐变成椭圆(图 4.19.2(c))，当到达第三个柱透镜前时，光斑已变成圆(图 4.19.2(d)).由式(4.19.14)知，这时 $\mathrm{TEM}_{6,4}$模厄米－高斯光束已变成了实宗量拉盖尔－高斯光束，但有 xy 耦合项存在.研究表明，若不经第三个柱透镜 C_3的变换，光束在继续传输中形状将发生变化.式(4.19.15)和图 4.19.2(e)说明，经 C_3后，$\mathrm{TEM}_{6,4}$模厄米－高斯光束变成了圆对称的拉盖尔－高斯光束，并在传输中保持圆对称形状不变(图 4.19.2(f)).

由数值计算可得出经模转换器变换后在 $z=2f$ 面上的拉盖尔－高斯光束参数为 $w_{0x}=w_{0y}=3.30$ mm，$\theta_x=\theta_y=4.46$ mrad，$R_x=R_y=\infty$.但应注意，与通常的拉盖尔－高斯光束不同的是，由像散厄米－高斯光束转换成的拉盖尔－高斯光束的扭曲项不为零，请读者自行证明之.

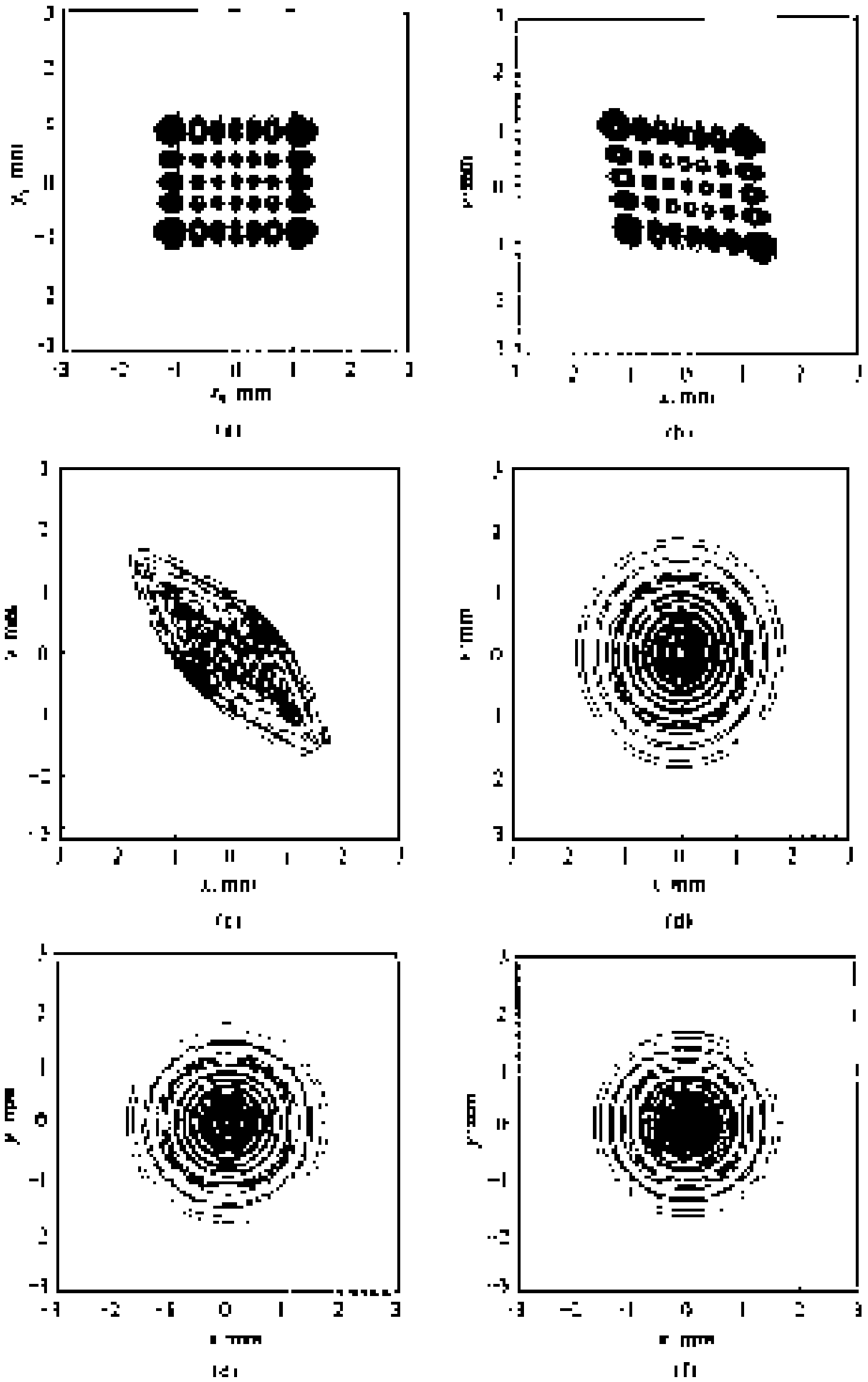


图 4.19.2　$TEM_{6,4}$ 厄米－高斯光束的等光强线

(a) 在 $z=0$ 平面处；(b) $z=5f/8$ 处；(c) $z=5f/4$ 处；

(d) 在柱透镜 C_3 前 ($z=3f/2$)；(e) 柱透镜 C_3 后 ($z=3f/2$)；(f) $z=2f$ 处

§4.20 复宗量厄米－高斯光束

一、复宗量厄米－高斯光束及其传输公式

厄米－高斯光束的表示式(4.2.3)中厄米多项式的宗量和指数函数的宗量有不对称的形式.是否近轴波动方程容许有宗量对称形式的解?对这一问题的回答是肯定的.容易证明,场分布为

$$E(x,z)=\left[\frac{q_0}{q(z)}\right]^{\frac{m+1}{2}}\mathrm{H}_m\left(c^{\frac{1}{2}}x\right)\exp(-cx^2) \tag{4.20.1}$$

的对称二维厄米－高斯光束也是近轴波动方程的解.式中

$$c=\frac{\mathrm{i}k}{2q(z)} \tag{4.20.2}$$

对 y 方向可写出类似表示式来.式(4.20.1)中厄米多项式的宗量为复数,故称为复宗量厄米－高斯光束.

现讨论复宗量厄米－高斯光束通过近轴 $ABCD$ 光学系统的传输.设束腰位于 $z=0$ 面上,在式(4.20.1)令 $z=0$ 得

$$E(x_0,0)=\mathrm{H}_m\left(\frac{x_0}{w_0}\right)\exp\left(-\frac{x_0^2}{w_0^2}\right) \tag{4.20.3}$$

将式(4.20.3)代入柯林斯公式,利用厄米多项式积分公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{(x-y)^2}{2u}\right]\mathrm{H}_m(x)\mathrm{d}x=\sqrt{2\pi u}\,(1-2u)^{m/2}\cdot \mathrm{H}_m\left[\frac{y}{(1-2u)^{1/2}}\right],\quad 2u\neq 1 \tag{4.20.4}$$

积分之,得

$$E(x',z)=A^{\frac{m}{2}}\left(A+\frac{B}{q_0}\right)^{-\frac{m+1}{2}}\mathrm{H}_m\left[\frac{x'}{\sqrt{A^2+AB/q_0}}\right]\exp\left(-\frac{q_0}{q}x'^2\right) \tag{4.20.5}$$

式中

$$x'=\frac{x}{w_0} \tag{4.20.6}$$

式(4.20.5)成立条件为 $A\neq 0$ 和 $A/B\neq 0$,如果这个条件不能满足,柯林斯公式成为

$$E(x,z)=\sqrt{\frac{\mathrm{i}}{\lambda B}}\int_{-\infty}^{+\infty}E(x_0,0)\exp\left[-\frac{\mathrm{i}k}{2B}(-2x_0x+Dx^2)\right]\mathrm{d}x \tag{4.20.7}$$

利用积分公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{H}_m(x)\exp[-(x-y)^2]\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}(2y)^m \tag{4.20.8}$$

由式(4.20.3)、式(4.20.7)得

$$E(x',z)=2^m\left(\frac{q_0}{B}\right)^{m+\frac{1}{2}}x'^m\exp\left[-\frac{q_0}{B}\left(D-\frac{q_0}{B}\right)x'^2\right] \tag{4.20.9}$$

式(4.20.5)、式(4.20.9)为复宗量厄米－高斯光束通过近轴 $ABCD$ 光学系统的传输公式.

二、复宗量厄米－高斯光束在自由空间和通过薄透镜的传输

1. 自由空间传输

令

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.20.10}$$

将式(4.20.10)代入式(4.20.5)和式(4.20.9)得到

$$E(x',z)=\left(\frac{\mathrm{i}\pi F}{1+\mathrm{i}\pi F}\right)^{\frac{m+1}{2}}\mathrm{H}_m\left(\sqrt{\frac{\mathrm{i}\pi F}{1+\mathrm{i}\pi F}}x'\right)\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\pi F}{1+\mathrm{i}\pi F}x'^2\right),\quad \frac{1}{z}\neq 0 \tag{4.20.11}$$

$$E(x',z)=2^m(\mathrm{i}\pi F)^{m+\frac{1}{2}}x'^m\exp[-\mathrm{i}\pi F(1-\mathrm{i}\pi F)x'^2],\quad \frac{1}{z}\to 0 \tag{4.20.12}$$

式中

$$F=\frac{\omega_0}{\lambda z}\qquad(\text{与光束有关的菲涅耳数}) \tag{4.20.13}$$

式(4.20.12)为复宗量厄米－高斯光束在远场的场分布公式.

2. 通过薄透镜的变换

设复宗量厄米－高斯光束通过 $z=0$ 处焦距为 f 的薄透镜，在传输距离 z 处变换矩阵为

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\Delta z & f(1+\Delta z) \\ -\dfrac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \tag{4.20.14}$$

式中

$$\Delta z=\frac{z-f}{f} \tag{4.20.15}$$

这时式(4.20.5)和式(4.20.9)分别成为

$$E(x',\Delta z)=(-\Delta z)^{\frac{m}{2}}\left[\frac{\mathrm{i}\pi F_f}{1+(1-\mathrm{i}\pi F_f)\Delta z}\right]^{\frac{m+1}{2}}\mathrm{H}_m\left[\sqrt{\frac{\mathrm{i}\pi F_f}{-\Delta z-(\Delta z)^2(1-\mathrm{i}\pi F_f)}}x'\right]\cdot$$

$$\exp\left[-\frac{\mathrm{i}\pi F_f(1-\mathrm{i}\pi F_f)}{1+(1-\mathrm{i}\pi F_f)\Delta z}x'^2\right],\quad z\neq f \tag{4.20.16}$$

$$E(x',\Delta z=0)=2^m(\mathrm{i}\pi F_f)^{m+\frac{1}{2}}x'^m\exp[-\mathrm{i}\pi F_f(1-\mathrm{i}\pi F_f)^2],\quad z=f \tag{4.20.17}$$

式中

$$F_f=\frac{\omega_0^2}{\lambda f}\qquad(\text{菲涅耳数}) \tag{4.20.18}$$

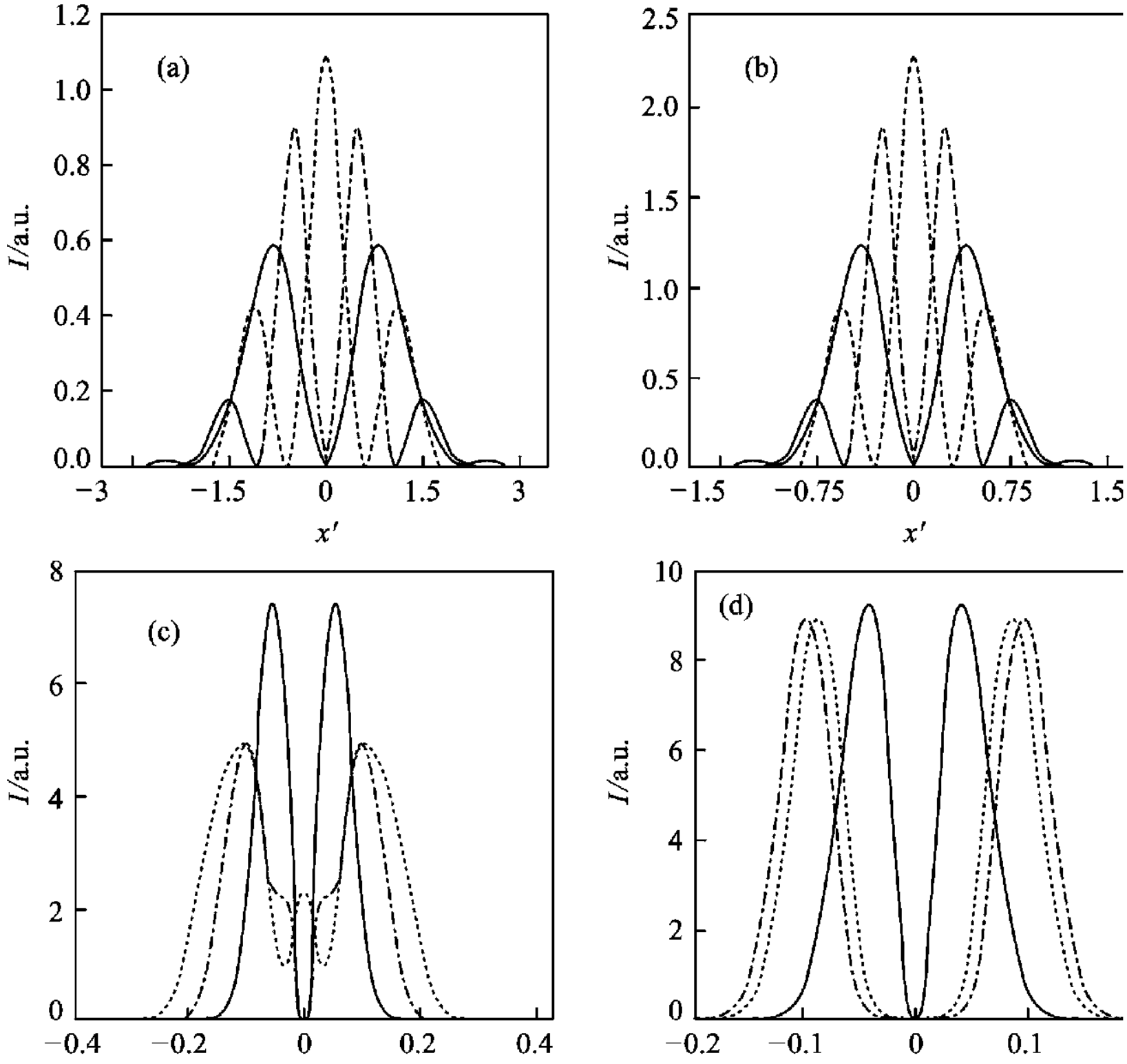


图 4.20.1 复宗量厄米－高斯光束通过薄透镜的相对光强分布

(a) $\Delta z=-1$; (b) $\Delta z=-0.5$; (c) $\Delta z=-0.05$; (d) $\Delta z=0$

(——) $m=1$; (－－－－) $m=4$; (—·—·—) $m=5$

复宗量厄米－高斯光束通过薄透镜变换后的数值计算例见图4.20.1(a)～(d)，计算参数为 $m=1$、4、5，$F_f=5$，作为对比 $z=0$ 处场分布为

$$E(x,0)=\mathrm{H}_m\left(\frac{\sqrt{2}x}{w_0}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{w_0^2}\right) \tag{4.20.19}$$

厄米－高斯光束的对应结果示于图 4.20.2(a)～(d)，计算参数与图 4.20.1 相同. 由图知，除了 $m=0$、1 的复宗量厄米－高斯光束与厄米－高斯光束无差异外，当 $m\geqslant 2$ 时，二者的传输特性是不同的. 复宗量厄米－高斯光束不仅在 $\Delta z=0$ 的焦面上，而且在离焦面 $\Delta z=-0.05$ 处光强分布都会发生变化，而厄米－高斯光束却能保持其形状在传输过程中不变化.

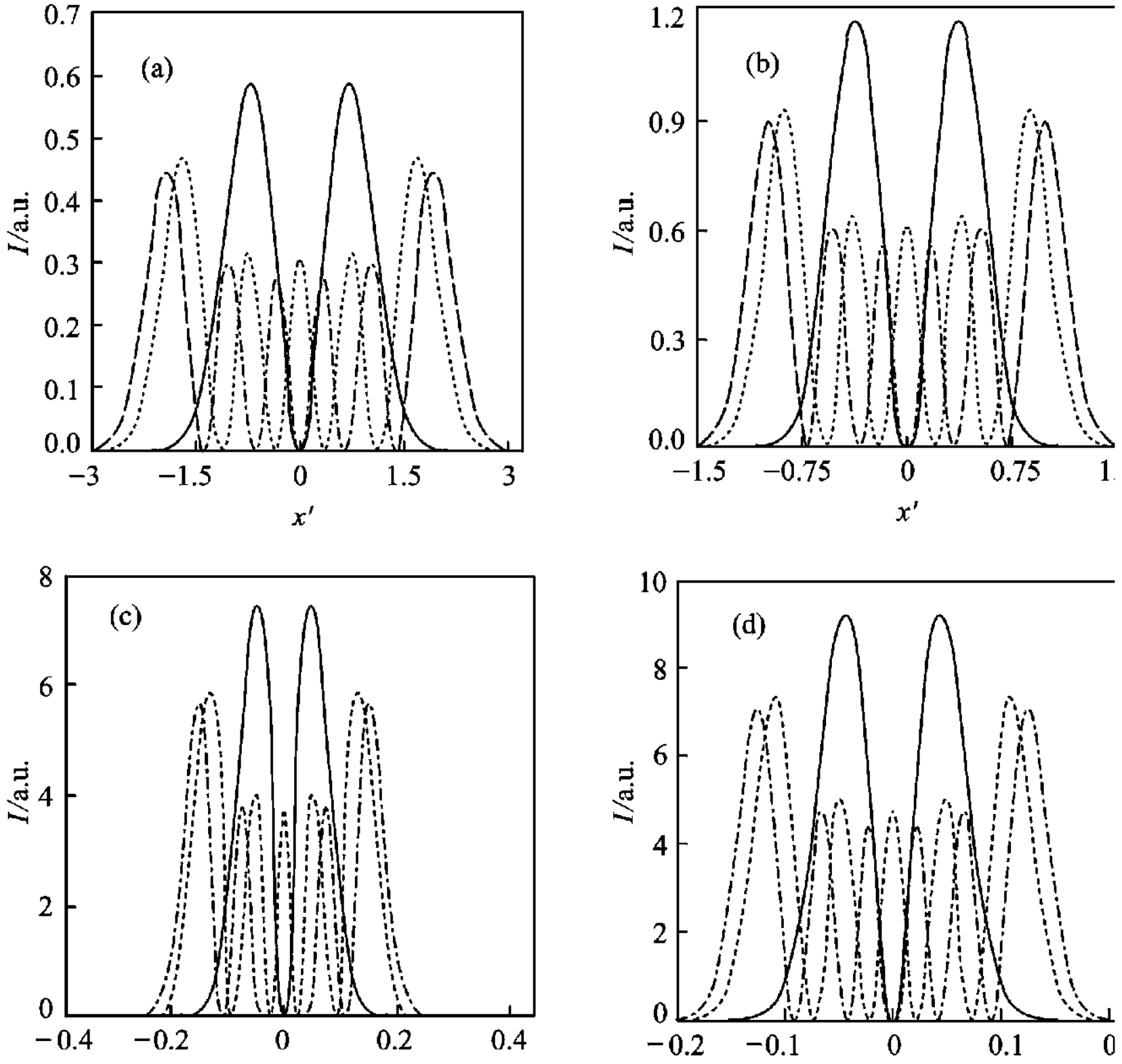


图 4.20.2　厄米－高斯光束通过薄透镜的相对光强分布

(a) $\Delta z=-1$；(b) $\Delta z=-0.5$；(c) $\Delta z=-0.05$；(d) $\Delta z=0$

(——) $m=1$；(－－－－) $m=4$；(—·—·—) $m=5$

三、复宗量厄米－高斯光束的 M^2 因子和桶中功率

由式(4.20.3)和 M^2 因子定义式，对 m 阶复宗量厄米－高斯光束可

证

$$M^2=\left[\frac{(4m-1)(2m+1)}{2m-1}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{4.20.20}$$

与 m 阶厄米－高斯光束的 M^2 因子

$$M^2=2m+1 \tag{4.20.21}$$

比较，二者都是阶数 m 的函数，且随 m 增加而增加，但当 $m\geqslant 2$ 时定量结果是不同的，见图 4.20.3. 对复宗量厄米－高斯光束，其 M^2 因子随 m 增加比厄米－高斯光束要小得多. 若用 M^2 因子评价光束质量，则复宗量厄米－高斯光束比同阶厄米－高斯光束的光束质量为优.

对应于式(4.20.17)，二维厄米－高斯光束的远场分布公式为

$$E(x',0)=(-1)^{\frac{m}{2}}(\mathrm{i}\pi F_f)^{\frac{1}{2}}\mathrm{H}_m(\sqrt{2}\pi F_f x')\exp[-\mathrm{i}\pi F_f(1-\mathrm{i}\pi F_f)x'^2] \tag{4.20.22}$$

将式(4.20.17)和式(4.20.22)代入二维光束桶中功率定义式

$$PIB=\frac{\int_{-b/w_0}^{b/w_0}|E(x',0)|^2\mathrm{d}x'}{\int_{-\infty}^{+\infty}|E(x',0)|\mathrm{d}x'} \tag{4.20.23}$$

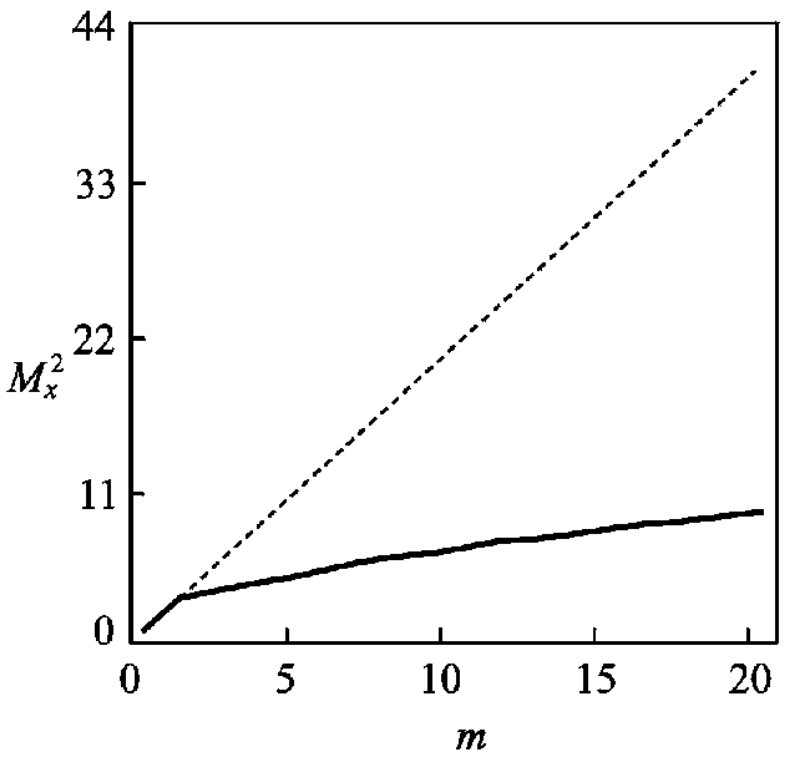


图 4.20.3 复宗量厄米－高斯光束(实线)和厄米－高斯光束(虚线)的 M^2 因子随阶数 m 的变化

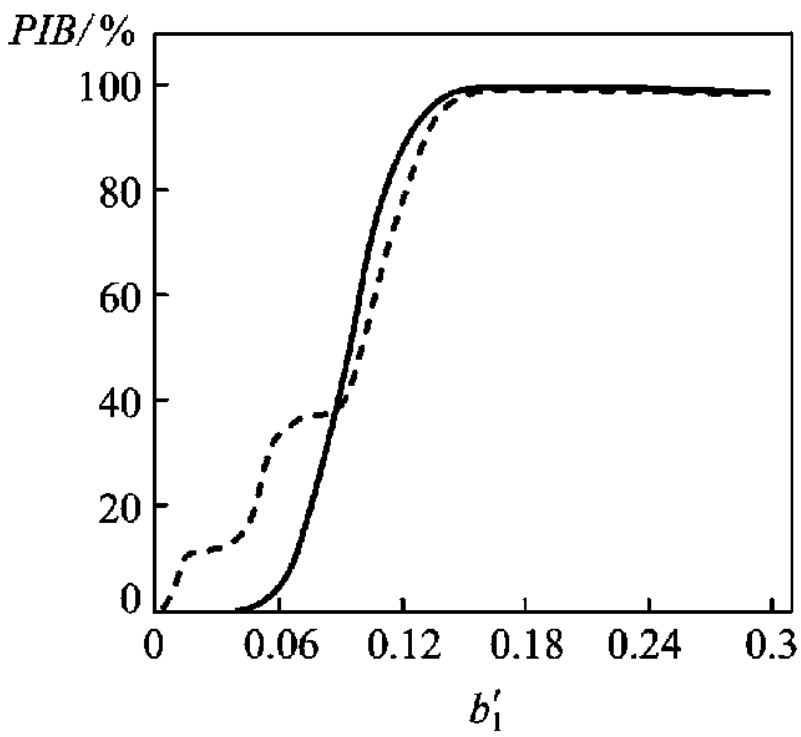


图 4.20.4 $m=4$ 的复宗量厄米－高斯光束(实线)和厄米－高斯光束(虚线)的桶中功率曲线

得到如图 4.20.4 所示的桶中功率曲线，由图知，在 $0<b/w_0<0.093$ 范围内，$m=4$ 的复宗量厄米－高斯光束的桶中功率值比厄米－高斯光束的值小，即功率(能量)集中度比厄米－高斯光束要差，而在 $0.093<b/w_0<0.192$ 范围内情况正相反. 由图 4.20.2(d)知，产生这一结果的物理

原因是复宗量厄米－高斯光束的远场光强分布中心有一凹陷，这一凹陷随 m 增加变得更加平坦.因此，除非桶的尺寸取得足够大，否则其桶中功率值小于厄米－高斯光束的对应值.

§4.21 非近轴高斯光束

对近轴近似下高斯光束的传输变换规律已做了详细的研究.在实际应用的大多数情况下，近轴近似都是成立的.但是，对二极管激光器输出发散角很大的光束，或者强聚焦光束光斑尺寸为波长量级时，近轴近似不再有效，本节使用角谱表示和级数展开法分析高斯光束的非近轴修正.为一般起见，采用矢量高斯光束模型.

一、矢量高斯光束

采用§1.1中的角谱表示法，矢量高斯光束电场的三个分量为

$$E_x(x,y,z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}A_x(p,q)\exp[\mathrm{i}k(px+qy+mz)]\mathrm{d}p\mathrm{d}q \tag{4.21.1}$$

$$E_y(x,y,z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}A_y(p,q)\exp[\mathrm{i}k(px+qy+mz)]\mathrm{d}p\mathrm{d}q \tag{4.21.2}$$

$$E_z(x,y,z)=-\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{p}{m}A_x(p,q)+\frac{q}{m}A_y(p,q)\right]\cdot \exp[\mathrm{i}k(px+qy+mz)]\mathrm{d}p\mathrm{d}q \tag{4.21.3}$$

在 $z>0$ 半空间中，式(4.21.1)～式(4.21.3)满足矢量亥姆霍兹方程.式中

$$m=\begin{cases}(1-p^2-q^2)^{1/2}, & p^2+q^2\leqslant 1\\ \mathrm{i}(p^2+q^2-1)^{1/2}, & p^2+q^2>1\end{cases} \tag{4.21.4}$$

设在 $z=0$ 面上高斯光束沿 x 方向线偏振，则

$$E_x(x,y,0)=\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2w_0^2}\right) \tag{4.21.5}$$

$$E_y(x,y,0)=0 \tag{4.21.6}$$

将式(4.21.5)、式(4.21.6)代入式(4.21.1)～式(4.21.2)，作傅里叶逆变换得

$$A_x(p,q)=\left(\frac{k}{2\pi}\right)^2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}E_x(x,y,0)\exp[-\mathrm{i}k(px+qy)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2\pi f^2}\exp\left(-\frac{p^2+q^2}{2f^2}\right) \tag{4.21.7}$$

$$A_y(p,q)=0 \tag{4.21.8}$$

式中

$$f = 1/kw_0 \tag{4.21.9}$$

由式(4.21.2)和式(4.21.8)得到

$$E_y(x,y,z)=0 \tag{4.21.10}$$

故以下仅讨论 $E_x(x,y,z)$ 和 $E_z(x,y,z)$ 分量.

由式(4.21.1)、式(4.21.3)和式(4.21.7)、式(4.21.8)得

$$E_x(x,y,z)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{f^2}\exp\left(-\frac{s^2}{2f^2}\right)\exp(\mathrm{i}kmz)\mathrm{J}_0(krs)\,s\,\mathrm{d}s \tag{4.21.11}$$

$$E_z(x,y,z)=-\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{i}x}{r}\frac{1}{f^2}\exp\left(-\frac{s^2}{2f^2}\right)\exp(\mathrm{i}kmz)\mathrm{J}_1(krs)\frac{s^2}{\sqrt{1-s^2}}\mathrm{d}s \tag{4.21.12}$$

式中

$$s=\sqrt{p^2+q^2} \tag{4.21.13}$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2} \tag{4.21.14}$$

当 $s>1$ 时,m 为复数,对应于随 z 的增加迅速衰减的倏逝波,在计算中可略去.将积分上限由∞改为 1,于是有

$$E_x(x,y,z)=\int_0^1\frac{1}{f^2}\exp\left(-\frac{s^2}{2f^2}\right)\exp(\mathrm{i}kmz)\mathrm{J}_0(krs)\,s\,\mathrm{d}s \tag{4.21.15}$$

$$E_z(x,y,z)=-\int_0^1\frac{\mathrm{i}x}{r}\frac{1}{f^2}\exp\left(-\frac{s^2}{2f^2}\right)\exp(\mathrm{i}kmz)\mathrm{J}_1(krs)\frac{s^2}{\sqrt{1-s^2}}\mathrm{d}s \tag{4.21.16}$$

二、矢量高斯光束的非近轴修正

利用级数展开式

$$\exp(\mathrm{i}kmz)=\exp(\mathrm{i}kz\sqrt{1-s^2})$$

$$=\left(\frac{\pi kz}{2}\right)^{1/2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{kzs^2}{2}\right)^n\mathrm{H}^{(1)}_{(n-1)/2}(kz),\quad s<1 \tag{4.21.17}$$

求解式(4.21.15)、式(4.21.16),式中

$$\mathrm{H}^{(1)}_{-1/2}(kz)=\left(\frac{2}{\pi kz}\right)^{1/2}\exp(\mathrm{i}kz) \tag{4.21.18}$$

$$H_{(n-1)/2}^{(1)}=\left(\frac{2}{\pi kz}\right)^{1/2}\exp(ikz)i^{-n}\sum_{m=0}^{n-1}\left(\frac{-1}{2ikz}\right)^{m}\frac{(n+m-1)!}{m!\ (n-m-1)!},\quad n\geqslant 1 \tag{4.21.19}$$

为第一类汉克尔(Hankel)函数. 当 $f<0.4$，$z\leqslant\sqrt{2}k^2w_0^3$ 时，求得

$$E_x(x,y,z)=E_x^{(0)}(x,y,z)+f^2E_x^{(2)}(x,y,z)+f^4E_x^{(4)}(x,y,z)+O(f^6) \tag{4.21.20}$$

$$E_x^{(0)}(x,y,z)=\frac{\exp(ikz)}{1+iz/l}\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{2w_0^2(1+iz/l)}\right] \tag{4.21.21}$$

$$E_x^{(2)}(x,y,z)=-\frac{iz/l}{(1+iz/l)^2}L_2\left[\frac{x^2+y^2}{2w_0^2(1+iz/l)}\right]E_x^{(0)}(x,y,z) \tag{4.21.22}$$

$$E_x^{(4)}(x,y,z)=-\frac{3iz/l}{(1+iz/l)^4}\left\{L_4\left[\frac{x^2+y^2}{2w_0^2(1+iz/l)}\right]+\frac{x^2+y^2}{8w_0^2}L_3^1\left[\frac{x^2+y^2}{2w_0^2(1+iz/l)}\right]\right\}E_x^{(0)}(x,y,z) \tag{4.21.23}$$

$E_x^{(0)}(x,y,z)$、$E_x^{(2)}(x,y,z)$、$E_x^{(4)}(x,y,z)$ 分别表示 $E_x(x,y,z)$ 的零阶(近轴近似)、二阶和四阶项，$O(f^6)$ 表示 6 阶和更高阶修正项，$l=kw_0^2=w_0/f$.

$$E_z(x,y,z)=fE_z^{(1)}(x,y,z)+f^3E_z^{(3)}(x,y,z)+O(f^5) \tag{4.21.24}$$

$$E_z^{(1)}(x,y,z)=-\frac{ix}{w_0}\frac{\exp(ikz)}{(1+iz/l)^2}\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{2w_0^2(1+iz/l)}\right] \tag{4.21.25}$$

$$E_z^{(3)}(x,y,z)=\left\{\frac{1}{1+iz/l}L_1^1\left[\frac{x^2+y^2}{2w_0^2(1+iz/l)}\right]-\frac{iz/l}{(1+iz/l)^2}L_2^1\left[\frac{x^2+y^2}{2w_0^2(1+iz/l)}\right]\right\}E_z^{(1)}(x,y,z) \tag{4.21.26}$$

$E_z^{(1)}(x,y,z)$、$E_z^{(3)}(x,y,z)$ 分别为 $E_z(x,y,z)$ 的一阶和三阶项，$O(f^5)$ 为 5 阶和更高阶修正项. 在式(4.21.21)～式(4.21.23)、式(4.21.24)～式(4.21.26)式中去掉 $\exp(ikz)$ 项，用 $A_x^{(i)}(x,y,z)$ $(i=0,2,4)$ 和 $A_z^{(j)}(x,y,z)$ $(j=1,3)$ 表示，可以证明它们满足

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2}{\partial^2 y}+2ik\frac{\partial}{\partial z}\right)A_x^{(0)}(x,y,z)=0 \tag{4.21.27}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2}{\partial^2 y}+2\mathrm{i}k\frac{\partial}{\partial z}\right)A_x^{(2)}(x,y,z)=-kl\frac{\partial^2 A_x^{(0)}(x,y,z)}{\partial z^2} \tag{4.21.28}$$

$$A_z^{(1)}(x,y,z)=\mathrm{i}w_0\frac{\partial A_x^{(0)}(x,y,z)}{\partial x} \tag{4.21.29}$$

$$A_z^{(3)}(x,y,z)=\mathrm{i}w_0\frac{\partial A_x^{(2)}(x,y,z)}{\partial x}+\mathrm{i}l\frac{\partial A_z^{(1)}(x,y,z)}{\partial z} \tag{4.21.30}$$

式(4.21.27)为熟知的近轴波动方程.其余为对矢量高斯光束非近轴修正方程.由此可知,初始 $z=0$ 面场分布为高斯的光束在非近轴传输时,不再保持高斯形式.其实,非近轴矢量高斯光束更为精确的解可由对式(4.21.15)、式(4.21.16)直接做数值计算求得,它可以将更高阶的修正都包括进去.

对标量高斯光束,其电场可表示为

$$E(x,y,z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}A_x(p,q)\exp[\mathrm{i}k(px+qy+mz)]\mathrm{d}p\mathrm{d}q \tag{4.21.31}$$

设边界条件为

$$E(x,y,0)=\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2w_0^2}\right) \tag{4.21.32}$$

仿照上面的处理方法,可求得其非近轴修正类似于式(4.21.21)~式(4.21.23).

§4.22 非近轴椭圆高斯光束

除了角谱表示法外,对非近轴光束的研究方法还可以直接使用非近轴衍射积分方程,例如瑞利-索末菲衍射积分公式.本节以非近轴矢量椭圆高斯光束为例进行分析.

一、亥姆霍兹方程的非近轴椭圆高斯光束解

由§1.3的讨论知道,矢量亥姆霍兹方程在 $z>0$ 的半空间的解可表示为瑞利-索末菲衍射积分的形式:

$$E_x(x,y,z)=-\frac{1}{2\pi}\int E_x(x_0,y_0)\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\exp(\mathrm{i}kR)}{R}\right]\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0 \tag{4.22.1}$$

$$E_y(x,y,z)=-\frac{1}{2\pi}\int E_y(x_0,y_0)\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\exp(\mathrm{i}kR)}{R}\right]\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0 \tag{4.22.2}$$

$$E_z(x,y,z)=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\left\{E_x(x_0,y_0)\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\exp(\mathrm{i}kR)}{R}\right]+E_y(x_0,y_0)\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\exp(\mathrm{i}kR)}{R}\right]\right\}\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0 \tag{4.22.3}$$

式中

$$R=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2} \tag{4.22.4}$$

计算所用直角坐标系如图 4.22.1 所示，积分在源平面 $z=0$ 上进行.

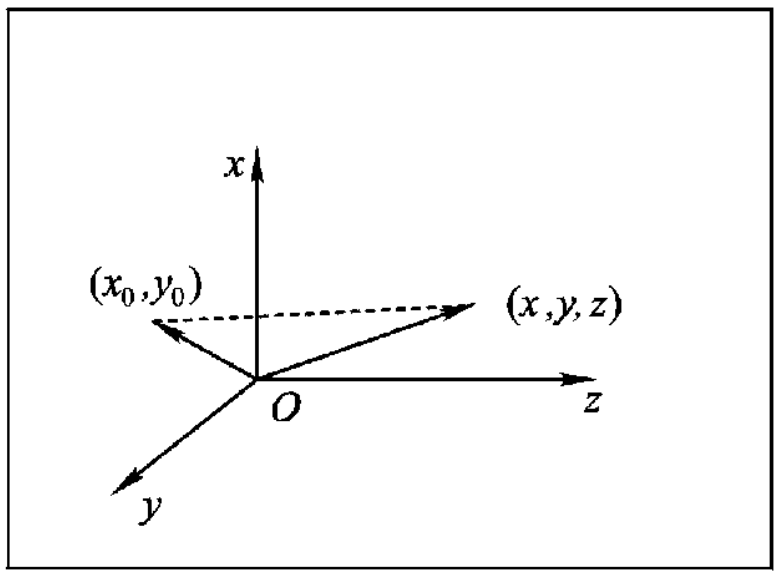


图 4.22.1　计算所用直角坐标系示意图

将式(4.22.4)代入式(4.22.1)～式(4.22.3)，得

$$E_x(x,y,z)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}E_x(x_0,y_0)z\,\frac{\mathrm{i}kR-1}{R^3}\exp(\mathrm{i}kR)\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0 \tag{4.22.5}$$

$$E_y(x,y,z)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}E_y(x_0,y_0)z\,\frac{\mathrm{i}kR-1}{R^3}\exp(\mathrm{i}kR)\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0 \tag{4.22.6}$$

$$E_z(x,y,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[E_x(x_0,y_0)(x-x_0)+E_y(x_0,y_0)(y-y_0)]\cdot$$

$$\frac{\mathrm{i}kR-1}{R^3}\exp(\mathrm{i}kR)\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0 \tag{4.22.7}$$

把 R 展开为泰勒级数，仅保留第一和第二项，有

$$R\approx\rho+\frac{x_0^2+y_0^2-2xx_0-2yy_0}{2\rho} \tag{4.22.8}$$

式中

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{4.22.9}$$

式(4.22.5)～式(4.22.7)中的指数项中的 R 用式(4.22.8)代替，其余用 ρ 代替，得到

$$E_x(x,y,z)=-\frac{\mathrm{i}z}{\lambda\rho}\frac{\exp(\mathrm{i}k\rho)}{\rho}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}E_x(x_0,y_0)\cdot \exp\left(\mathrm{i}k\frac{x_0^2+y_0^2-2xx_0-2yy_0}{2\rho}\right)\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0 \tag{4.22.10}$$

$$E_y(x,y,z)=-\frac{\mathrm{i}z}{\lambda\rho}\frac{\exp(\mathrm{i}k\rho)}{\rho}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}E_y(x_0,y_0)\cdot \exp\left(\mathrm{i}k\frac{x_0^2+y_0^2-2xx_0-2yy_0}{2\rho}\right)\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0 \tag{4.22.11}$$

$$E_z(x,y,z)=\frac{\mathrm{i}}{\lambda\rho}\frac{\exp(\mathrm{i}k\rho)}{\rho}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[E_x(x_0,y_0)(x-x_0)+E_y(x_0,y_0)(y-y_0)]\cdot \exp\left(\mathrm{i}k\frac{x_0^2+y_0^2-2xx_0-2yy_0}{2\rho}\right)\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0 \tag{4.22.12}$$

设在 $z=0$ 的平面上的场分布为

$$E_x(x_0,y_0,0)=\exp\left[-\left(\frac{x_0^2}{w_{0x}^2}+\frac{y_0^2}{w_{0y}^2}\right)\right]$$

$$E_y(x_0,y_0,0)=0 \tag{4.22.13}$$

式(4.22.13)表征了在 $z=0$ 面上沿 x 方向线偏振的椭圆高斯光束.将式(4.22.13)代入式(4.22.10)～式(4.22.12),并利用积分公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(ax^2+by^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{\sqrt{ab}} \tag{4.22.14}$$

直接积分得

$$E_x(x,y,z)=z\frac{k}{\rho}\frac{\exp(\mathrm{i}k\rho)}{\rho}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{k}{\rho}+\mathrm{i}\frac{2}{w_{0x}^2}\right)\left(\frac{k}{\rho}+\mathrm{i}\frac{2}{w_{0y}^2}\right)}}\cdot \exp\left[-\frac{\mathrm{i}k^2}{2\rho}\left(\frac{x^2w_{0x}^2}{2\mathrm{i}\rho+kw_{0x}^2}+\frac{y^2w_{0y}^2}{2\mathrm{i}\rho+kw_{0y}^2}\right)\right] \tag{4.22.15}$$

$$E_y(x,y,z)=0 \tag{4.22.16}$$

$$E_z(x,y,z)=-A\frac{\exp(\mathrm{i}k\rho)}{\rho}\frac{kx}{\rho-\mathrm{i}Z_{Rx}}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{k}{\rho}+\mathrm{i}\frac{2}{w_{0x}^2}\right)\left(\frac{k}{\rho}+\mathrm{i}\frac{2}{w_{0y}^2}\right)}}\cdot \exp\left[-\frac{\mathrm{i}k^2}{2\rho}\left(\frac{x^2w_{0x}^2}{2\mathrm{i}\rho+kw_{0x}^2}+\frac{y^2w_{0y}^2}{2\mathrm{i}\rho+kw_{0y}^2}\right)\right] \tag{4.22.17}$$

利用瑞利长度可将式(4.22.15)、式(4.22.16)和式(4.22.17)改写为

$$E_x(x,y,z)=z\frac{\exp(\mathrm{i}k\rho)}{\rho}\frac{1}{\sqrt{(1+\mathrm{i}\rho/Z_{0x})(1+\mathrm{i}\rho/Z_{0y})}}\cdot \exp\left[-\frac{\mathrm{i}\pi}{\rho\lambda}\left(\frac{x^2}{1+\mathrm{i}\rho/Z_{0x}}+\frac{y^2}{1+\mathrm{i}\rho/Z_{0y}}\right)\right] \tag{4.22.18}$$

$$E_y(x,y,z)=0 \tag{4.22.19}$$

$$E_z(x,y,z)=-\frac{\exp(\mathrm{i}k\rho)}{\rho}\frac{x}{1-\mathrm{i}Z_{0x}/\rho}\frac{1}{\sqrt{(1+\mathrm{i}\rho/Z_{0x})(1+\mathrm{i}\rho/Z_{0y})}}\cdot$$
$$\exp\left[-\frac{\mathrm{i}\pi}{\rho\lambda}\left(\frac{x^2}{1+\mathrm{i}\rho/Z_{0x}}+\frac{y^2}{1+\mathrm{i}\rho/Z_{0y}}\right)\right] \tag{4.22.20}$$

式(4.22.18)、式(4.22.19)、式(4.22.20)可合写为矢量的形式,即

$$\boldsymbol{E}(x,y,z)=\frac{\exp(\mathrm{i}k\rho)}{\rho}\frac{1}{\sqrt{(1+\mathrm{i}\rho/Z_{0x})(1+\mathrm{i}\rho/Z_{0y})}}\cdot$$
$$\exp\left[-\frac{\mathrm{i}\pi}{\rho\lambda}\left(\frac{x^2}{1+\mathrm{i}\rho/Z_{0x}}+\frac{y^2}{1+\mathrm{i}\rho/Z_{0y}}\right)\right]\begin{bmatrix}z\\0\\\dfrac{-x}{1-\mathrm{i}\rho/Z_{0x}}\end{bmatrix} \tag{4.22.21}$$

式中

$$Z_{0x}=\frac{\pi w_{0x}^2}{\lambda}$$
$$Z_{0y}=\frac{\pi w_{0y}^2}{\lambda} \tag{4.22.22}$$

分别为 x、y 方向的瑞利长度.式(4.22.21)为非近轴椭圆高斯光束的电场矢量的一般形式.对远场 $z\gg Z_{0x}$、Z_{0y},式(4.22.21)简化为

$$\boldsymbol{E}(x,y,z)=\mathrm{i}\frac{\pi w_0^2}{\lambda}\frac{\exp(\mathrm{i}k\rho)}{\rho^2}\exp\left(-\frac{k^2w_0^2}{4}\frac{x^2+y^2}{\rho^2}\right)\begin{bmatrix}-z\\0\\x\end{bmatrix} \tag{4.22.23}$$

由式(4.22.21)、式(4.22.23)知,$z=0$ 面上 x、y 分量可分离的椭圆高斯光束在传输中 x、y 分量不再可分离,在 z 平面处非近轴椭圆高斯光束的光强为

$$I(x,y,z)=|E_x(x,y,z)|^2+|E_y(x,y,z)|^2+|E_z(x,y,z)|^2$$
$$=\frac{1}{\sqrt{(\rho^2/Z_{0x}^2+1)(\rho^2/Z_{0y}^2+1)}}\left(\frac{x^2}{\rho^2+Z_{0x}^2}+\frac{z^2}{\rho^2}\right)\cdot$$
$$\exp\left\{-k\left[\frac{x^2}{Z_{0x}(\rho^2/Z_{0x}^2+1)}+\frac{y^2}{Z_{0y}(\rho^2/Z_{0y}^2+1)}\right]\right\} \tag{4.22.24}$$

二、非近轴椭圆高斯光束在自由空间的传输特性

对非近轴椭圆高斯光束在自由空间的传输特性已做了研究.图 4.

22.2 为直接用式(4.22.5)、式(4.22.6)、式(4.22.7)做数值积分和式(4.22.24)得到的非近轴椭圆高斯光束在轴上和离轴的光强分布，计算参数为 $w_{0x}=2.4\lambda$，$w_{0y}=0.8\lambda$，$\lambda=0.8\ \mu$m. 由图知，两种结果符合得很好，说明用展开式(4.22.8)得到的结果是正确的. 在不同的传输距离的光强分布和等光强线示于图 4.22.3 中. 从图可看出，在 $z=0$ 平面上，等光强线为椭圆，其长、短轴分别位于 x、y 轴上[见图 4.22.3(a)]. 但到 $z=2.94Z_{0y}$，椭圆变成了圆[见图 4.22.3(b)]，这是因为较小的束腰 w_{0y} 导致在 y 方向较大的发散角. 当继续传输时，等光强由圆又变成了椭圆，但长、短轴交换了位置[见图 4.22.3(c)、(d)].

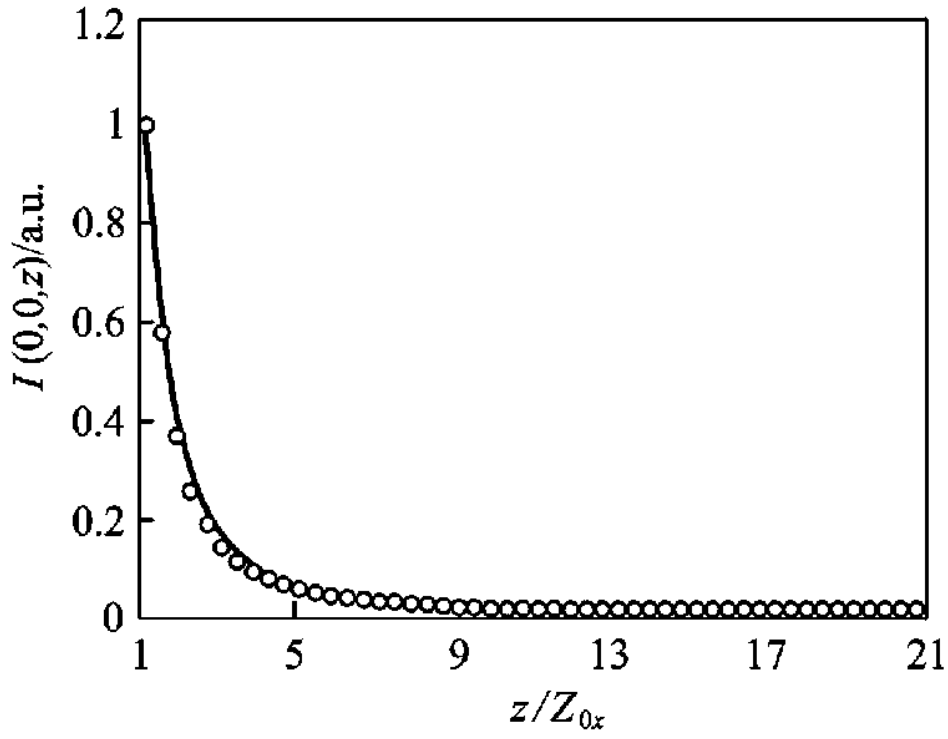


图 4.22.2 非近轴椭圆高斯光束光强分布

(a) 轴上光强分布；(b) 离轴光强分布

“——”按式(4.22.24)的计算结果；“。。。。”按式(4.22.5)～式(4.22.7)的计算结果

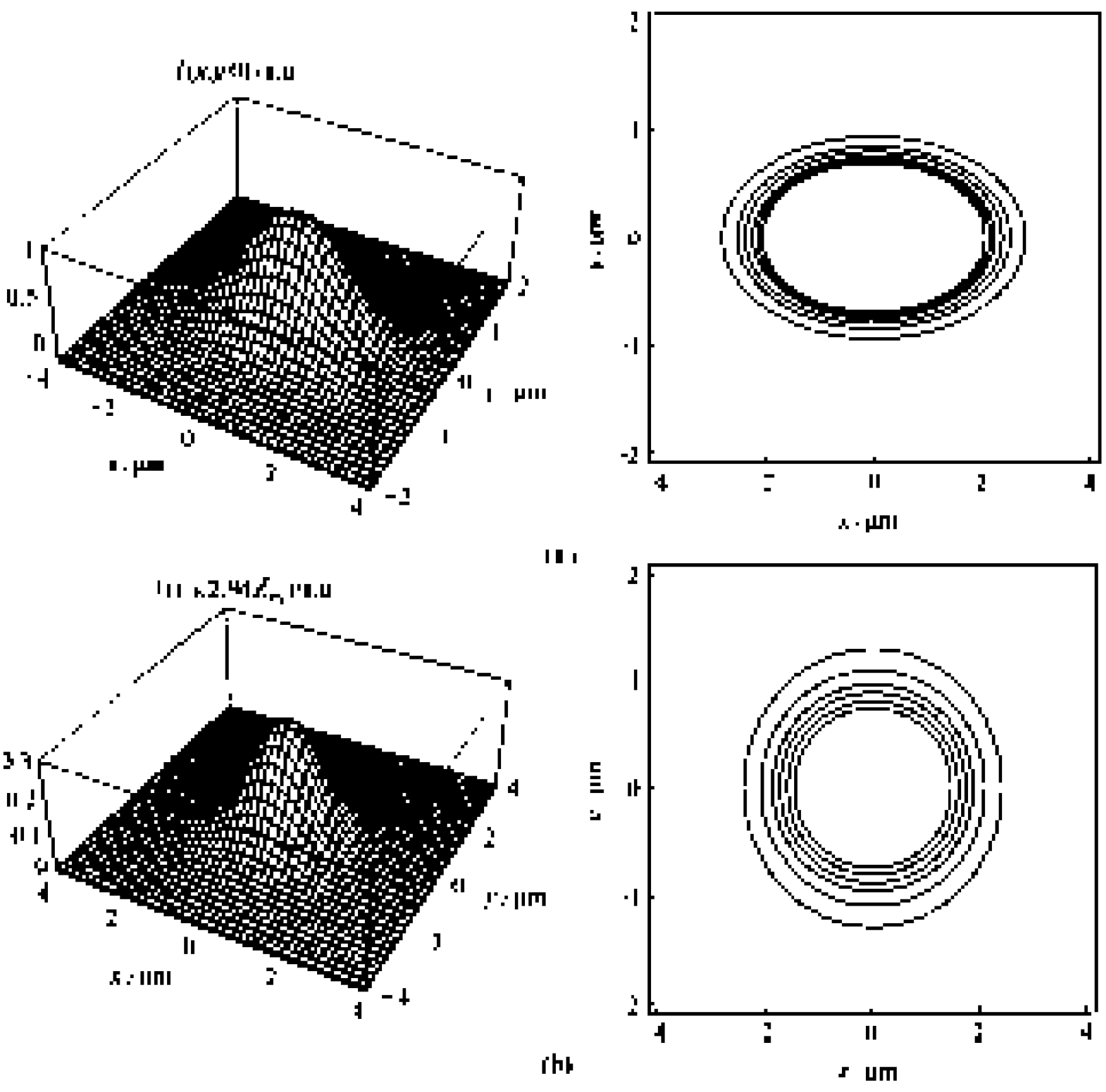
若对非近轴椭圆高斯光束的束宽用最大光强的 1/2 处定义，即

$$I(0,0,z)=2I(w_x(z),0,z)$$
$$I(0,0,z)=2I(0,w_y(z),z) \tag{4.22.25}$$

将式(4.22.24)代入式(4.22.25)得到

$$\left[1+\frac{w_x^2(z)}{z^2+Z_{0x}^2}\right]\left[1+\frac{w_x^2(z)}{z^2+Z_{0y}^2}\right]=4\exp\left[-2kZ_{0x}\frac{w_x^2(z)}{w_x^2(z)+z^2+Z_{0x}^2}\right]\cdot$$
$$\left[\frac{z^2}{w_x^2(z)+z^2}+\frac{w_x^2(z)}{w_x^2(z)+z^2+Z_{0x}^2}\right]^2$$
$$\left[1+\frac{w_y^2(z)}{z^2}\right]^2\left[1+\frac{w_y^2(z)}{z^2+Z_{0x}^2}\right]\left[1+\frac{w_y^2(z)}{z^2+Z_{0y}^2}\right]$$
$$=4\exp\left[-2kZ_{0y}\frac{w_y^2(z)}{w_y^2(z)+z^2+Z_{0y}^2}\right] \tag{4.22.26}$$

$w_x(z)$和 $w_y(z)$可由式(4.22.26)求出，数值计算见图 4.22.4，计算参数与图 4.22.2 相同. 由图可以看出，$w_x(z)$和 $w_y(z)$都随传输距离而增



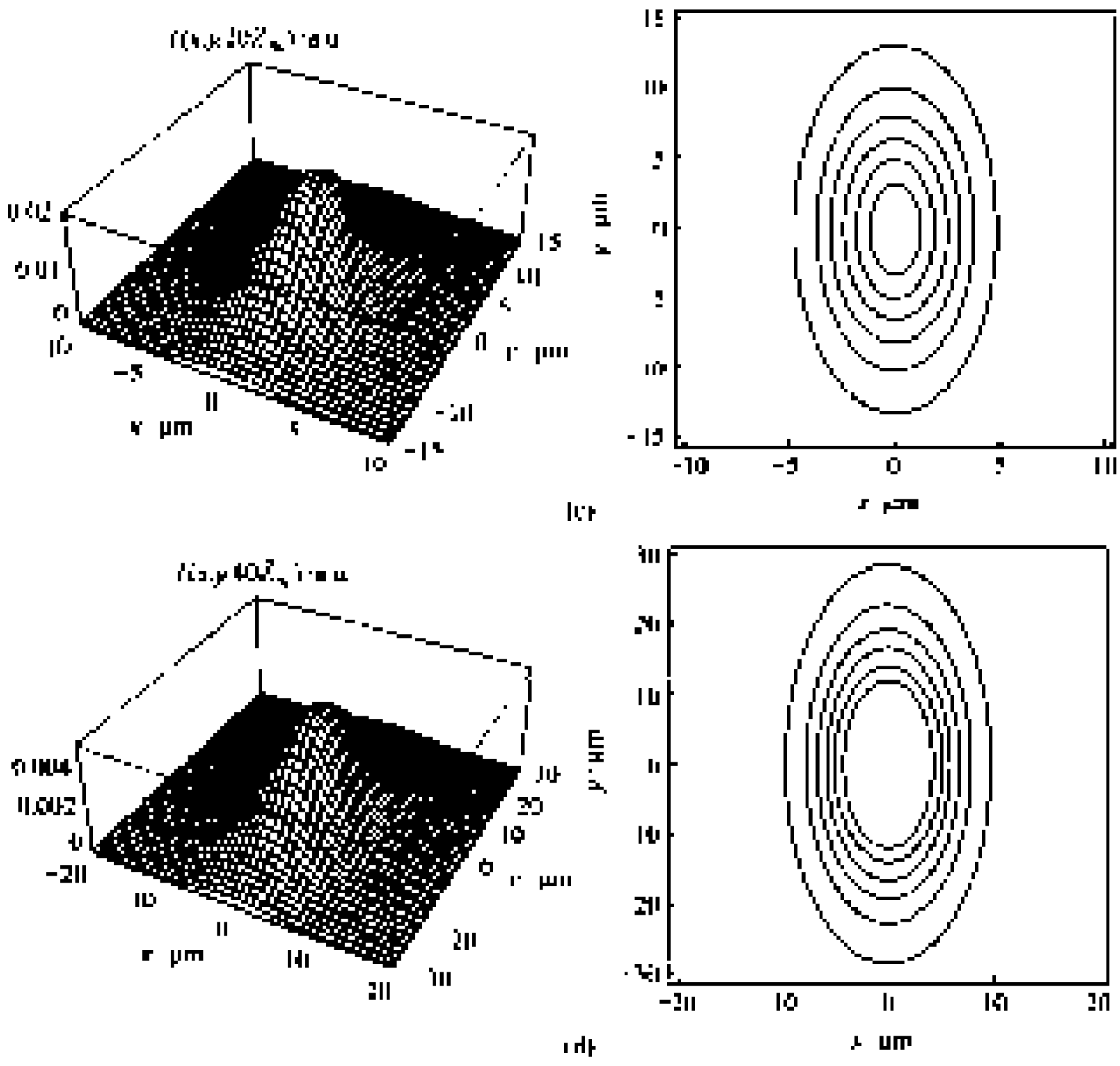


图 4.22.3 非近轴椭圆高斯光束的光强分布和等光强线

(a) 在源平面 $z=0$ 处；(b) $z/Z_{0y}=2.94$ 处；(c) $z/Z_{0y}=20$ 处；(d) $z/Z_{0y}=40$ 处

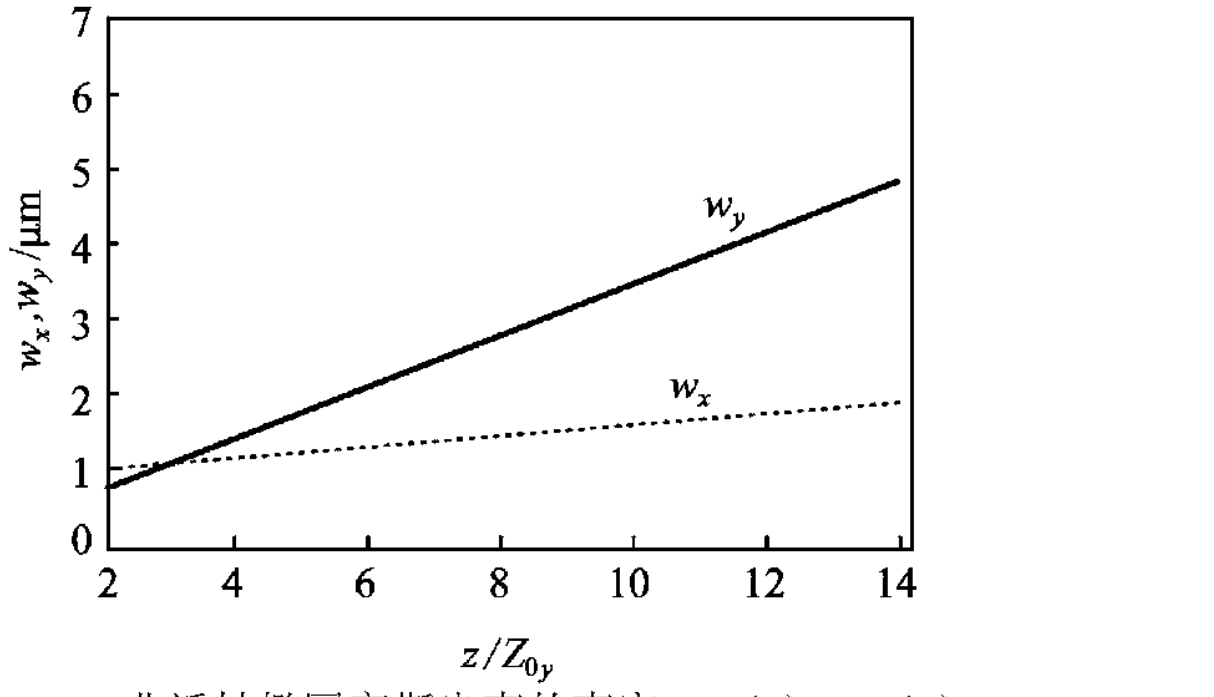


图 4.22.4 非近轴椭圆高斯光束的束宽 $w_x(z)$、$w_y(z)$ 随归一化传输距离 z/Z_{0y} 的变化

大，但 $w_y(z)$ 比 $w_x(z)$ 增加要快，故导致椭圆长短轴交换位置.

等光强线由椭圆变成圆的条件由 $w_x(z_e)=w_y(z_e)=w(z_e)$ 得出，即

$$\left[1+\frac{w^2(z_e)}{z_e^2}\right]^2\left[1+\frac{w^2(z_e)}{z_e^2+Z_{0x}^2}\right]\left[1+\frac{w^2(z_e)}{z_e^2+Z_{0y}^2}\right]=4\exp\left[-2kZ_{0y}\frac{w^2(z_e)}{w^2(z_e)+z_e^2+Z_{0y}^2}\right]\cdot$$
$$\left[\frac{z_e^2}{w^2(z_e)+z_e^2}+\frac{w^2(z_e)}{w^2(z_e)+z_e^2+Z_{0x}^2}\right]^2\left[1+\frac{w^2(z_e)}{z_e^2}\right]^2$$
$$=\exp\left\{2kw^2(z_e)\left[\frac{Z_{0x}}{w^2(z_e)+z_e^2+Z_{0x}^2}-\frac{Z_{0y}}{w^2(z_e)+z_e^2+Z_{0y}^2}\right]\right\} \tag{4.22.27}$$

由式(4.22.27)解得 $w_x(z_e=2.94Z_{0y})=w_y(z_e=2.94Z_{0y})=1.12\ \mu\mathrm{m}$.

从式(4.22.18)得到非近轴椭圆高斯光束的相位为

$$\psi(x,y,z)=k\rho-\frac{1}{2}\varphi_x-\frac{1}{2}\varphi_y-\frac{\pi}{\lambda\rho}\left[\frac{x^2}{1+(\rho/Z_{0x})^2}+\frac{y^2}{1+(\rho/Z_{0y})^2}\right] \tag{4.22.28}$$

式中

$$\varphi_x=\arctan\frac{\rho}{Z_{0x}}$$
$$\varphi_y=\arctan\frac{\rho}{Z_{0y}} \tag{4.22.29}$$

在远场，式(4.22.28)简化为

$$\psi_f(x,y,z)=k\rho \tag{4.22.30}$$

式(4.22.30)说明，非近轴椭圆高斯光束远场等相位面为中心在原点、半径为 ρ 的球面.

在近轴近似 $\rho\approx z+(x^2+y^2)/2z$ 下，式(4.22.28)成为

$$\psi_p(x,y,z)=-\frac{1}{2}\varphi_{px}-\frac{1}{2}\varphi_{py}+kz\left[1+\frac{x^2}{2(z^2+Z_{0x}^2)}+\frac{y^2}{2(z^2+Z_{0y}^2)}\right] \tag{4.22.31}$$

式中

$$\varphi_{px}=\arctan\frac{z}{Z_{0x}}$$
$$\varphi_{py}=\arctan\frac{z}{Z_{0y}} \tag{4.22.32}$$

式(4.22.31)代表抛物等相位面.

非近轴椭圆高斯光束在 x、y 方向的远场发散角为

$$\theta_x=\lim_{z\to+\infty}\arctan\frac{w_x(z)}{z} \tag{4.22.33}$$

$$\theta_y = \lim_{z\to+\infty} \tan^{-1}\frac{w_y(z)}{z} \tag{4.22.34}$$

θ_x、θ_y 随 w_{0y}/λ 的变化见图 4.22.5，计算中取 $w_{0x}=3w_{0y}$，$\lambda=0.8\ \mu m$. 作为比较，近轴近似下对应的高斯光束远场发散角 θ_{0x}、θ_{0y}

$$\theta_{0x} = \frac{(\ln 2/2)^{1/2}}{\pi}\frac{\lambda}{w_{0x}} \tag{4.22.35}$$

$$\theta_{0y} = \frac{(\ln 2/2)^{1/2}}{\pi}\frac{\lambda}{w_{0y}} \tag{4.22.36}$$

也一并画在图中. 图 4.22.5 表明，θ_x、θ_{0x}、θ_y 和 θ_{0y} 都随 w_{0y}/λ 的减小而增大. 然而，θ_x、θ_y 有上限. 事实上，在远场，式(4.22.26)化为

$$\left\{1+\left[\frac{w_y(z)}{z}\right]^2\right\}^2 = 2\exp\left(-\frac{2\pi Z_{0y}}{\lambda}\left\{1-\frac{1}{1+[w_y(z)/z]^2}\right\}\right)$$

$$1+\left(\frac{w_x(z)}{z}\right)^2 = 2\exp\left(-\frac{2\pi Z_{0x}}{\lambda}\left\{1-\frac{1}{1+[w_x(z)/z]^2}\right\}\right) \tag{4.22.37}$$

由式(4.22.33)、式(4.22.34)和式(4.22.37)得到

$$\theta_{x,\max} = \arctan 1 = 45^\circ \tag{4.22.38}$$

$$\theta_{y,\max} = \arctan\sqrt{\sqrt{2}-1} \approx 32.77^\circ \tag{4.22.39}$$

从图 4.22.5 还可以看出，当 $w_{0y}/\lambda>1$ 时，近轴和非近轴椭圆高斯光束的远场发散角的差异可以忽略，即 $\theta_x=\theta_{0x}$、$\theta_y=\theta_{0y}$，但是，当 $w_{0y}/\lambda\to0$ 时，θ_{0x}、$\theta_{0y}\to\infty$，此时近轴近似早已失效了.

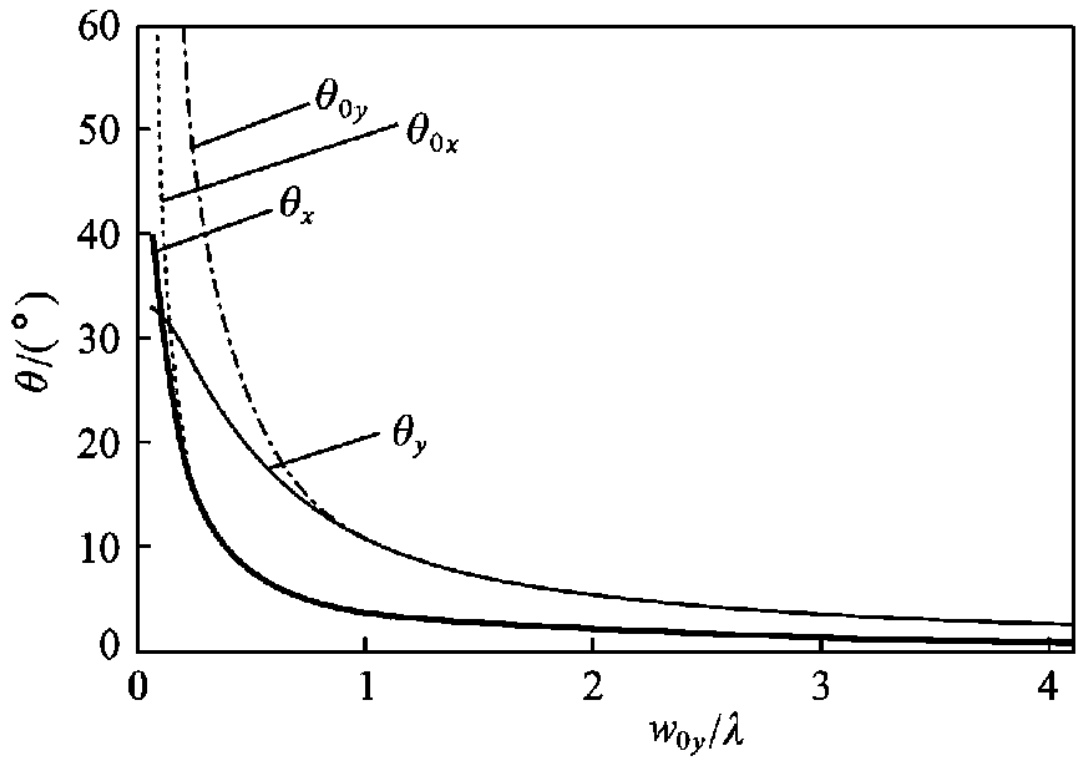


图 4.22.5 非近轴椭圆高斯光束和近轴椭圆高斯光束的远场发散角 θ_x、θ_y 和 θ_{0x}、θ_{0y} 随 w_{0y}/λ 的变化

§4.23　高斯光束参数的实验测量

现已发展了多种实验技术和方法，对高斯光束参数进行测量.本节仅对高斯光束束宽、远场发散角、等相面曲率半径、模式和线宽等参数的测量原理和简单实验测量方法做一介绍，更为详细的讨论可参考激光器件和技术的教材或章末文献(例如参考文献[52]、[53]).

一、束宽和远场发散角的测量

测量高斯光束束宽和远场发散角的实验装置示于图4.23.1，二极管阵列置于薄透镜的后焦面上，远场光束强度的径向分布在示波器上显示，并可照相记录(见图4.23.2).

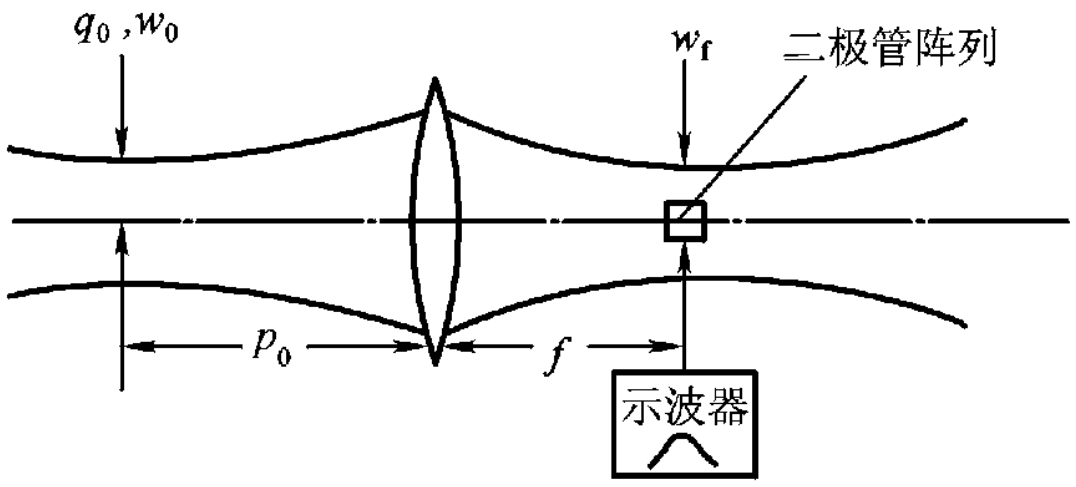


图4.23.1　测量高斯光束束宽和远场发散角的实验装置

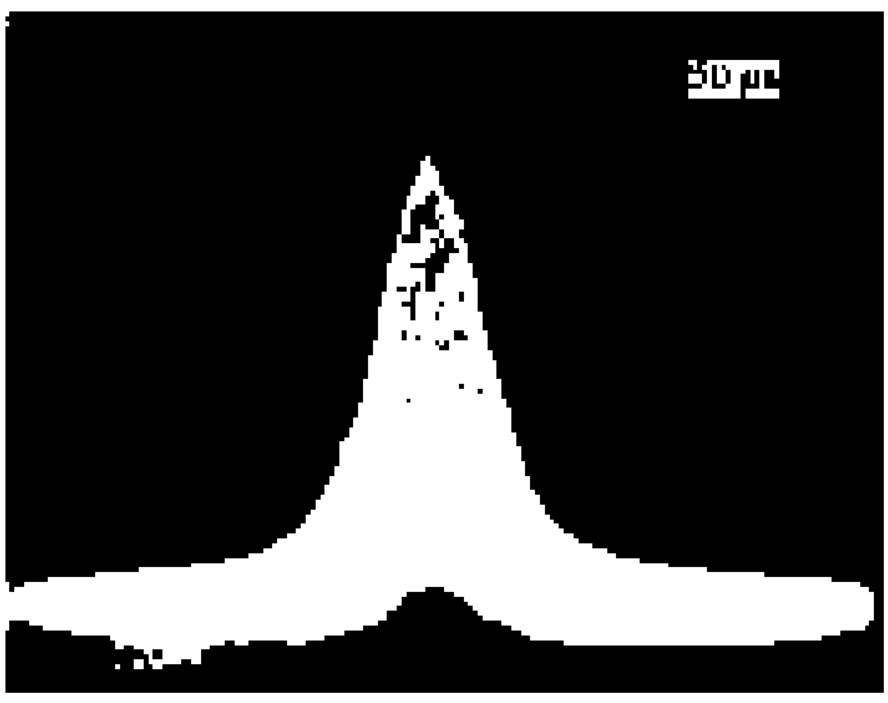


图4.23.2　径向光强分布图(照片)

由 $q_0 \to q(s)$ 总的变换矩阵为(f 为薄透镜焦距)

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1-\dfrac{s}{f} & s_0+s\left(1-\dfrac{s_0}{f}\right)\\ -\dfrac{1}{f} & 1-\dfrac{s_0}{f}\end{bmatrix} \tag{4.23.1}$$

令 $s=f$，由 $ABCD$ 定律求得

$$w_{\mathrm{f}}=\frac{\lambda f}{\pi w_0}=\theta_0 f \tag{4.23.2}$$

所以，使用这一方法可以测得高斯光束的束宽 w_{f} 并按式(4.23.2)求出远场发散角 θ_0.

二、等相面曲率半径的测量

高斯光束等相面曲率半径可以用一般测量波面曲率半径方法测量，或者利用高斯光束通过圆孔的菲涅耳衍射测量.

如图 4.23.3，让高斯光束通过半径 a 已知的圆孔，在屏上可看到高斯光束的衍射环.由测量第 m 个暗环对应屏与圆孔距离 z 后可按公式

$$R=\frac{za^2}{2m\lambda z-a^2} \tag{4.23.3}$$

求出高斯光束等相面曲率半径 R，式中 λ 为波长.不仅如此，利用这一方法还可测量高斯光束束腰宽度和位置.

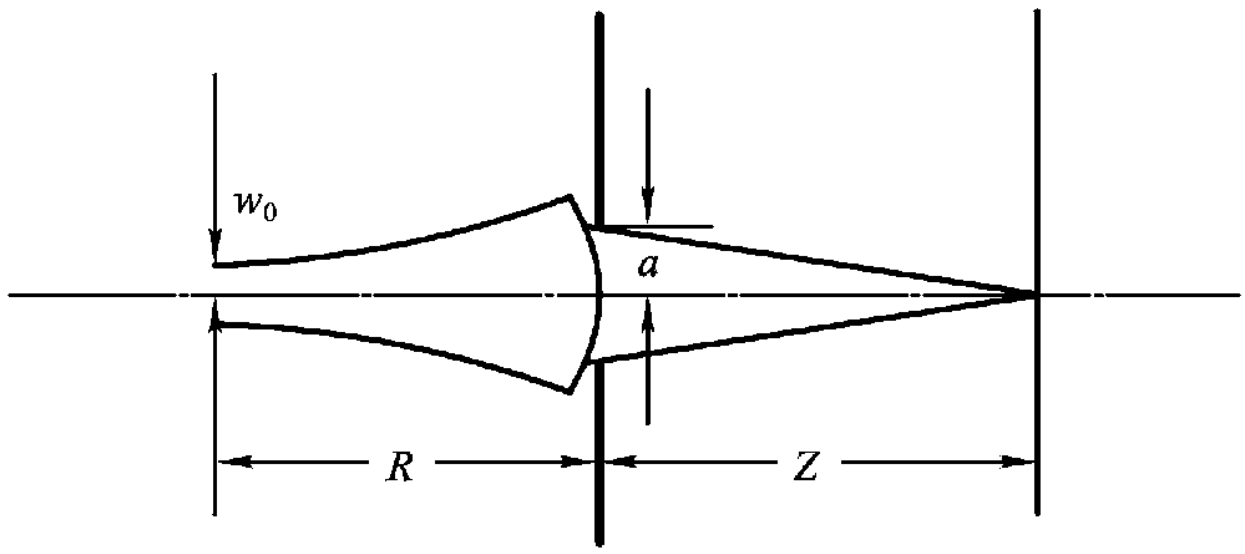


图 4.23.3　等相面曲率半径测量装置示意图

三、光点扫描法

对连续激光器发射的高斯光束可用光点扫描法测量横模的阶次和光强的径向分布.实验装置示于图 4.23.4.扩束后的连续激光经转镜反射后由带有圆孔光阑的光电探测器吸收，并在示波器上显示出光强的径向分布.

图 4.23.5 为在示波器上显示出的光强分布图，当为平滑的高斯曲线

时对应为基模，否则为高阶高斯光束，并可由光强的分布判断横模的阶次.

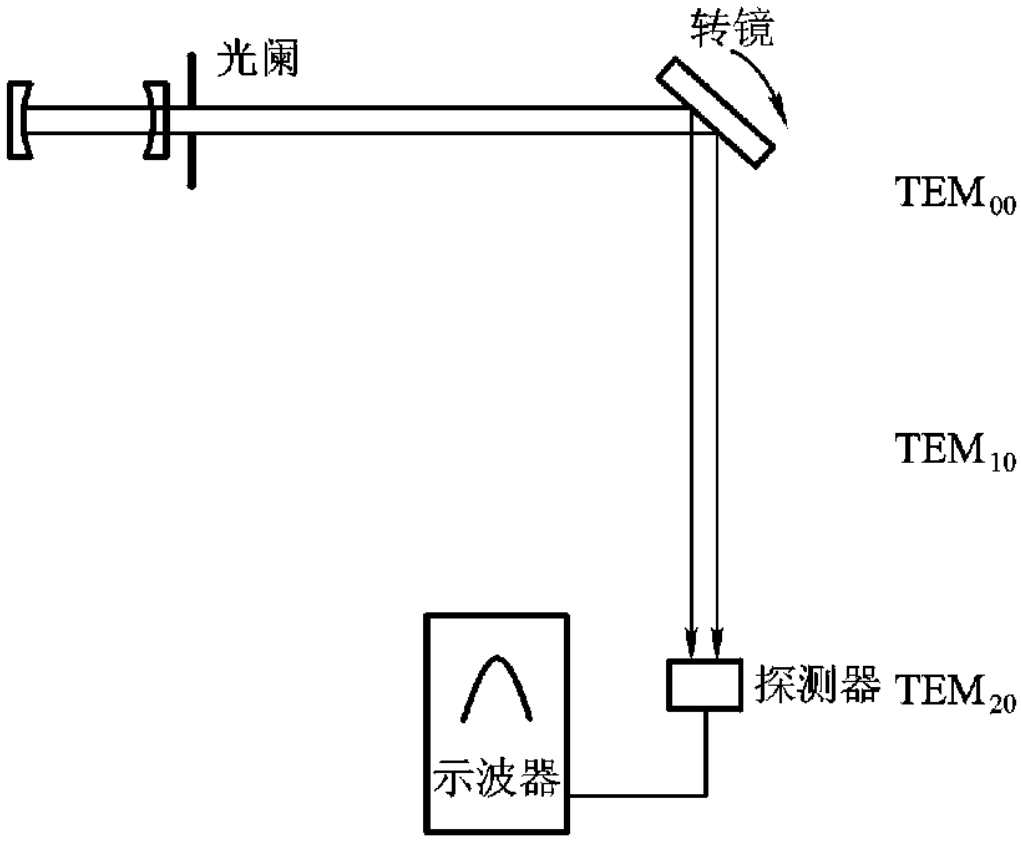


图 4.23.4　光点扫描法

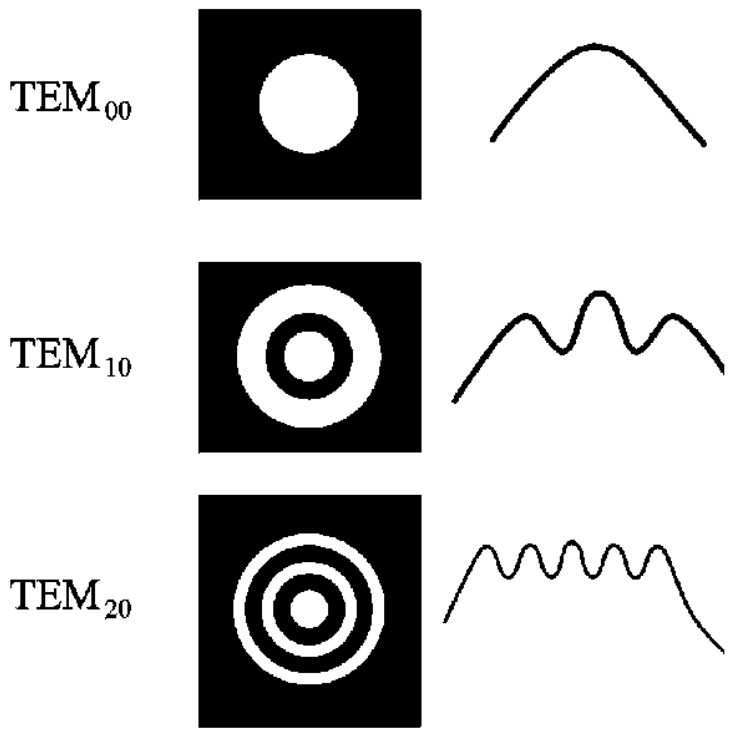


图 4.23.5　光强分布图

四、法布里－珀罗标准具法

法布里－珀罗标准具广泛用于激光光学中，其中一个用途就是判断脉冲激光器的输出是否为基模高斯光束和测量激光的线宽 $\Delta\nu$.

实验装置如图 4.23.6. 准直后的激光束经焦距为 f_1 的透镜会聚后入射到法布里－珀罗标准具上. 出射激光经焦距为 f_2 的透镜后在焦面 L 上形成一系列同心多光束干涉圆环，可用照相法记录.

设第 m 级亮环宽度为 Δa_m，与中心距离为 a_m，则可按公式

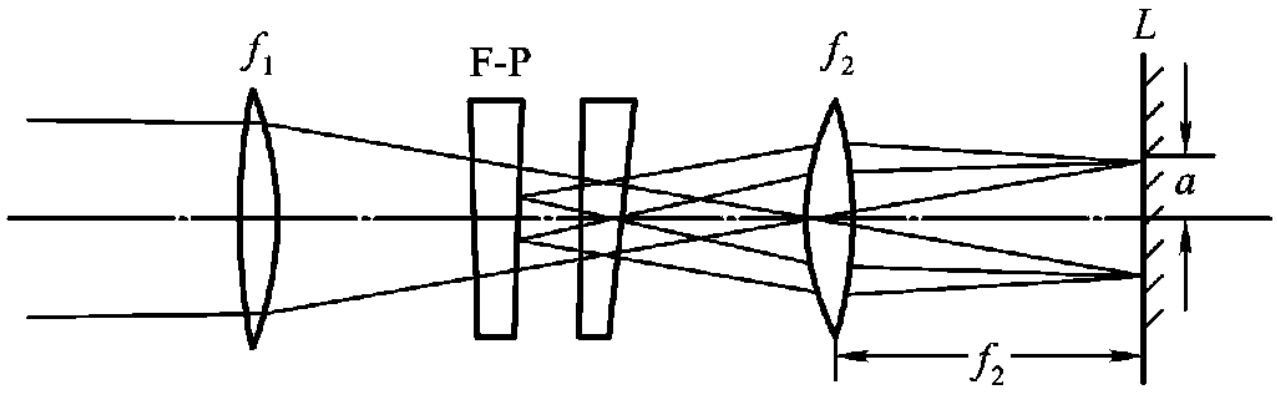


图 4.23.6　使用法布里－珀罗标准具测量的实验装置图

$$\Delta\nu = \frac{a_m \Delta a_m}{f_2^2}\nu \tag{4.23.4}$$

求出激光线宽 $\Delta\nu$，式中 ν 为激光频率.

由拍摄的多光束干涉照片还可以判断激光模式.单模激光只有一个频率,对应一套干涉环,如图 4.23.7(a)所示.多模激光会产生多套干涉环,见图 4.23.7(b).



图 4.23.7 多光束干涉照片

习 题

1. 证明式(4.2.1).

2. 证明式(4.4.21).

3. 推导式(4.16.23).

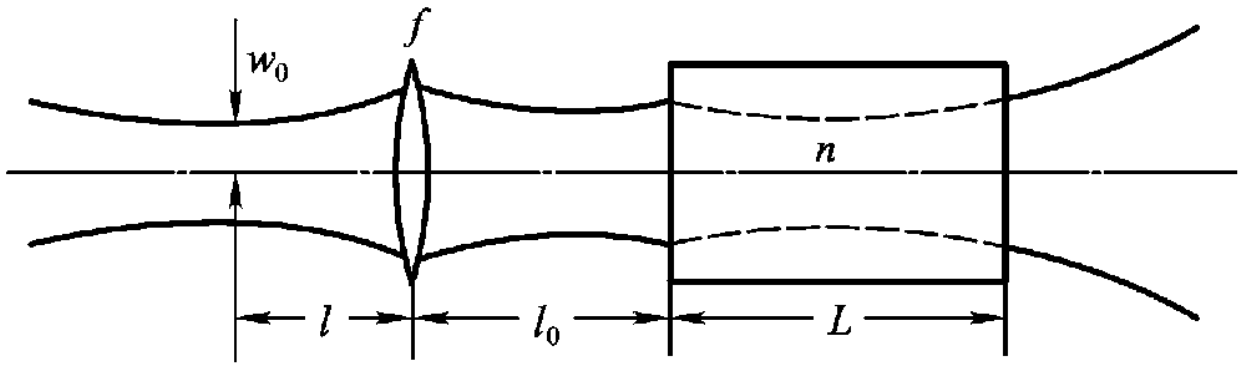
4. 推导式(4.18.9).

5. 试求高斯光束半功率点处的束宽 w_p 与用二阶矩定义束宽间的关系.

6. 已知一高斯光束束腰宽度为 w_0,束腰与焦距为 f 的薄透镜相距 l,经透镜变换后传输距离 l_0,又经一折射率为 n、长 L 的透明介质后输出,如图所示.

求:(1) 高斯光束在介质出射面处的 q 参数和束宽.

(2) 若将介质移到薄透镜处,即 $l_0=0$(不考虑可能存在的间隙),求输出高斯光束的远场发散角 θ_0.



习题 6 图

7. 设高斯光束通过一焦距为 f 的薄透镜传输,物方和像方焦平面处的束宽分别为 w_{f} 和 w'_{f},物方和像方高斯光束远场发散角分别为 θ_0 和 θ'_0.证明

$$w_{\mathrm{f}}=f\theta'_0,\qquad w'_{\mathrm{f}}=f\theta_0$$

8. 讨论嵌入基模高斯光束的物理意义.试由嵌入基模高斯光束定义推导出高阶高斯光束的传输方程.

9. 参阅§4.6、§4.7分析高阶高斯光束通过薄透镜的聚焦，并与§4.6、§4.7结果做一比较.

10. 编制拉盖尔－高斯光束传输中通过矩形孔和椭圆孔衍射损耗的计算程序，进行数值计算并对所得结果加以分析讨论.

11. 对高斯光束通过光阑透镜的焦移进行分析.由于焦移的存在，在实际工作中应当注意些什么？

12. 设$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$中诸元素都是复数，推导出 $ABCD$ 定律，写出复参数$\frac{1}{q_1}=\frac{1}{R_1}-\mathrm{i}\frac{\lambda}{\pi w_1^2}$的高斯光束通过复元素光学系统后波面曲率半径 R_2 和束宽 w_2 的计算公式.

13. 何谓像散高斯光束？由于像散的存在，对光束传输特性会产生哪些影响？

14. 推导出高阶椭圆高斯光束的场函数表示式(4.18.16)，说明高阶椭圆高斯光束和厄米－高斯光束的异同点.

15. 厄米－高斯光束的波面曲率半径 R_m（式(4.3.22)）与嵌入基模高斯光束波面曲率半径有何关系，为什么？

16. §4.16的计算表明，高斯光束通过有限尺寸孔径时会被截断一部分.从光束变换观点来看，截断高斯光束与原光束有何不同？

17. 设在 $z=0$ 处有场分布为

$$E(x,z=0)=\exp\left(-\frac{x^2}{w_0^2}\right)\cosh(\Omega_0 x)$$

的二维双曲余弦－高斯光束，式中 w_0 为高斯光束束腰宽度，Ω_0 为与双曲余弦部分有关参数.推导出双曲余弦－高斯光束通过 $z=0$ 处放置硬边光阑的近轴 $ABCD$ 光学系统的传输公式，举例说明其传输特性.

18. 像散复宗量厄米－高斯光束可以实现对称化吗？试对此进行计算分析.

19. 用§3.5讨论4×4方差矩阵方法研究 $\mathrm{TEM}_{6,4}$ 模像散厄米－高斯光束通过模转换器的对称化.计算在一些有代表性参考面处的光束参数.对用衍射积分和方差矩阵方法研究像散光束传输的优、缺点做一比较讨论.

20. 证明由式(4.20.1)表示的复宗量厄米－高斯光束是近轴波动方程的一个特解.

21. 设在 $z=0$ 处复宗量拉盖尔－高斯光束的场分布为

$$E(r,z=0)=\left(\frac{r}{w_0}\right)^l \mathrm{L}_p^l\left(\frac{r}{w_0}\right)^2\exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right)\exp(\mathrm{i}l\varphi),$$

研究复宗量拉盖尔－高斯光束的传输特性和光束质量.

22. 利用式(4.21.15)和式(4.21.21)～式(4.21.23)分别对非近轴高斯光束的 $E_x(\boldsymbol{r})$ 做数值计算和比较.

23. 使用瑞利－索末菲衍射积分公式研究非近轴高斯光束的传输特性，并用§4.21的方法对同一问题做数值计算.将所得结果做比较分析.

参考文献

[1] Siegman A E. Lasers. Mill Valley California: University Science Books, 1986

[2] Hodgson N, Weber H. Optische Resonatoren, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1992

[3] Arnaud J A. Beam and Fiber Optics. New York: Academic Press, 1976

[4] 魏光辉, 朱宝亮. 激光束光学. 北京: 北京工业学院出版社, 1988

[5] Kogelnik H, Li T. Laser beams and resonators. Proc IEEE, 1966, 54: 1 312

[6] Kogelnik H. Imaging of optical modes - resonators with internal lenses. Bell Syst Techn J, 1965, 44: 455

[7] Kogelnik H. On the propagation of Gaussian beams of light through lenslike media including those with a loss or gain variation. Appl Opt, 1965, 4: 1 562

[8] Arnaud J A, Kogelnik H. Gaussian light beams with general astigmatism. Appl Opt, 1969, 8: 1 687

[9] Casperson L W. Ganssian light beams in inhomogeneous media. Appl Opt, 1973, 12: 2 434

[10] Siegman A E. Hermite-Gaussian functions of complex argument as optical-beam eigenfunctions. J Opt Soc Am, 1973, 63: 1 093

[11] Carter W H. Focal shift and concept of effective Fresnel number for a Gaussian laser beam. Appl Opt, 1982, 21: 1 989

[12] Li Y, Wolf E. Focal shift in focused truncated Gaussian beams. Opt Commun, 1982, 42: 151

[13] Carter W H, Aburdence M F. Focal shift in Laguerre-Gaussian beams. J Opt Soc Am A, 1987, 4: 1 949

[14] Martinez-Corral M, Climert V. Focal switch: a new effect in low-Fresnel-number systems. Appl Opt, 1996, 35: 24

[15] Kawamura Y, Itagaki Y et al. A simple optical devise for generating square flat-top intensity irradiation from a Gaussian laser beam. Opt Commun, 1983, 48: 44

[16] Han C-Y, Ishii Y et al. Reshaping collimated laser beams with Gaussian profile to uniform profiles. Appl Opt, 1983, 22: 3 644

[17] Bernabeu E, Alda J. Gaussian beam propagation through optical systems with complex focal. Optik, 1987, 76: 108

[18] Bernabeu E, Alda J. The principal planes in Gaussian beam optics. Optik, 1989, 83: 145

[19] Laabs H, Gao C et al. Twisting of three-dimensional Hermite-Gaussian beams. J Mod Opt, 1999, 46: 709

[20] Gao C, Laabs H et al. Symmetrization of astigmatic high power diode laser stacks. Opt & Quant Electron, 1999,31:1 207

[21] Lax M, Louisell W H et al. From Maxwell to paraxial wave optics. Phys Rev A, 1975,11:1 365

[22] Daris L W. Theory of electromagnetic beams. Phys Rev A, 1979,19:1 177

[23] Agrawal G P, Pattanayak D N. Gaussian beam propagation beyond the paraxial approximation. J Opt Soc Am, 1979,69:575

[24] Nemoto S. Nonparaxial Gaussian beams. Appl Opt, 1990,29:1 940

[25] Zeng X, Liang C et al. Far - field propagation of an off - axis Gaussian wave, Appl Opt, 1999,38:6 253

[26] Chen C G, Konkola P T et al. Analyses of vector Gaussian beam propagation and the validity of paraxial and spherical approximations. J Opt Soc Am A, 2002,19:404

[27] 吕百达.高斯光束通过光学系统的传播公式及其应用.激光杂志,1984,5:55

[28] 吕百达,李大义.高斯光束通过望远镜系统的变换和准直.激光杂志,1984,5:72

[29] 吕百达,周兴灵,季小玲,许世发.高斯光束通过非轴对称光学系统的变换.量子电子学,1991,8:215

[30] 吕百达,季小玲等.高斯光束通过复杂光学系统的变换.光学学报,1991,11:115

[31] Lü B, Feng G, Cai B. Complex ray representation of the astigmatic Gaussian beam propagation. Optical and Quantum, 1993,25:275

[32] Lü B, Zhang B, Cai B. Focal shift in apertured Gaussian beams and relation with the lens focus. Optik, 1995,99:8

[33] Lü B, Ji X. Focal shift in Gaussian beams focused by a spherically aberrated bifocal lens. Opt Commun, 2001,189:47

[34] Ji X, Lü B. Propagation of Gaussian beams through an astigmatic lens. Optik, 2001,112:1

[35] 季小玲,吕百达.球差透镜对高斯光束质量的影响.中国激光,2001,A28:347

[36] 季小玲,吕百达.高斯光束通过倾斜光学元件的变换特性.激光技术,2001,25:351

[37] 王喜庆,梁国栋,吕百达.高斯光束通过有硬边光阑 *ABCD* 光学系统的近似解析传输公式.强激光与粒子束,2001,13:418

[38] Lü B, Peng R. Focal shift and focal switching in systems with the aperture and lens separated. J Opt A, 2002,4:1

[39] 彭润武,吕百达.厄米 - 高斯光束的焦开关.物理学报(即将发表)

[40] Tao X, Zhou N et al. Recurrence propagation equation of Hermite－Gaussian beams through a paraxial *ABCD* system with hard－edge aperture. Optic (to be published)

[41] Saghafi S, Sheppard C J R. Near field and far field of elegant Hermite－Gaussian and Laguerre－Gaussian modes. J Mod Optic, 1998,45:1 999

[42] Saghafic S, Sheppard C J R et al. Characterizing elegant and standard Hermite－Gaussian beam modes. Opt Commun, 2001,191:173

[43] Ma H, Lü B. The propagation of complex－argument Laguerre－Gaussian beams. Optik, 2000,111:273

[44] Lü B, Ma H. A comparative study of elegant and standard Hermite－Gaussian beams. Opt Commun, 2000,174:99

[45] Lü B, Ma H. Elegant Leguerre－Gaussian beams and their properties. 激光技术,2001,25:312

[46] Wu P, Lü B. Propagation of three－dimensional elegant Hermite－Gaussian beams through a 4×4 paraxial optical system, Optik, 2002,113:245

[47] 吴平,吕百达.对称化光学系统对像散复宗量厄米－高斯光束的变换.强激光与粒子束,2002,14:697

[48] 吴平,吕百达.像散厄米－高斯光束的对称化和相关问题的研究.强激光与粒子束,2002,14:546

[49] Lü B, Wu P. Analytical propagation equation of astigmatic Hermite－Gaussian beams through a 4×4 paraxial optical system and their symmetrizing transformation Opt & Laser Tech, 2003,35:497

[50] Duan K, Lü B. Far－field properties of non－paraxial elliptical Gaussian beams. Opt & Quant Electron. 2003,35:179

[51] Duan K, Lü B. Propagation of elliptical Gaussian beams beyond the paraxial approximation. (to be published)

[52] 马祖光主编.激光实验方法.上海:上海科学技术出版社,1987

[53] 屠钦澧,张自襄主编.激光实验原理和方法.北京:北京工业学院出版社,1988

第五章　高斯－谢尔模型光束

激光的基本特性是方向性好、单色性好、相干性高和亮度高.然而研究表明,完全的空间相干性并不是实现很好方向性的必要条件,部分空间相干的光源也可以产生与激光一样的远场光强分布.这类具有良好的方向性但只有部分空间相干性的光束称为高斯－谢尔模型光束,在一定条件下可作为描述多模激光的一种物理模型.本章从部分空间相干光的统计理论出发,分析高斯－谢尔模型光束的传输变换特性.同时,还研究了高斯－谢尔模型光束的谱移动和谱开关,以及矢量高斯－谢尔模型光束等问题.

§5.1　部分相干光的基本理论

一、空间－时间域

部分相干光的经典理论是以光场的统计特性为基础的.在空间－时间域中用互相干函数 $\Gamma(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\tau)$ 来描述光场的相干性,其定义为

$$\Gamma(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\tau)=\langle V(\boldsymbol{\rho}_1,t+\tau)V^*(\boldsymbol{\rho}_2,t)\rangle \tag{5.1.1}$$

式中 $V(\boldsymbol{\rho}_1,t+\tau)$ 和 $V(\boldsymbol{\rho}_2,t)$ 分别为光场在空间点 $\boldsymbol{\rho}_1$、时刻 $t+\tau$ 和在空间点 $\boldsymbol{\rho}_2$、时刻 t 的复解析信号(复振幅),$<>$ 表示系综平均,空间位置矢量用 $\boldsymbol{\rho}=(x,y,z)$ 表示,而 $z=\text{const}$ 平面上的位置矢量用 $\boldsymbol{r}=(x,y)$ 表示.设辐射场是各态历经的,于是对系综的平均可以用对时间 T 的平均来代替

$$\langle V(\boldsymbol{\rho}_1,t+\tau)V^*(\boldsymbol{\rho}_2,t)\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}V(\boldsymbol{\rho}_1,t+\tau)V^*(\boldsymbol{\rho}_2,t)\mathrm{d}t \tag{5.1.2}$$

式中 T 为测量时间(或仪器响应时间).

在(5.1.1)式中令 $\boldsymbol{\rho}_1=\boldsymbol{\rho}_2=\boldsymbol{\rho}$,$\tau=0$,得到空间点 $\boldsymbol{\rho}$ 处的平均光强

$$I(\boldsymbol{\rho})=\langle V(\boldsymbol{\rho},t)V^*(\boldsymbol{\rho},t)\rangle=\Gamma(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho},0) \tag{5.1.3}$$

归一化的互相干函数称为复相干度 $\gamma(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\tau)$,即

$$\gamma(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\tau)=\frac{\Gamma(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\tau)}{\sqrt{\Gamma(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_1,0)}\sqrt{\Gamma(\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}_2,0)}}=\frac{\Gamma(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\tau)}{\sqrt{I(\boldsymbol{\rho}_1)}\sqrt{I(\boldsymbol{\rho}_2)}} \tag{5.1.4}$$

光场的相干性可用复相干度来量度，它的模$|\gamma(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\tau)|$确定了干涉条纹的可见度$0\leqslant|\gamma(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\tau)|\leqslant1$，当$|\gamma(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\tau)|=1$时为完全相干，$|\gamma(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\tau)|=0$时为完全非相干，$0<|\gamma(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\tau)|<1$时为部分相干.显然，空间相干性用$\gamma(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,0)$描述，而时间相干性用$\gamma(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho},\tau)$描述，后者又称为自相干函数

$$\Gamma(\tau)=\Gamma(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho},\tau)=\langle V(\boldsymbol{\rho},t+\tau)V^*(\boldsymbol{\rho},t)\rangle \tag{5.1.5}$$

平均光强$I(\boldsymbol{\rho})$可用自相干函数表示为

$$I(\boldsymbol{\rho})=\Gamma(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho},0)=\Gamma(0) \tag{5.1.6}$$

归一化的自相干函数

$$\gamma(\tau)=\frac{\Gamma(\tau)}{\Gamma(0)} \tag{5.1.7}$$

称为复自相干度，$\gamma(0)=1$，$0\leqslant\gamma(\tau)\leqslant1$.

在准单色场近似下，即谱宽远小于平均频率时，可用互强度$J(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2)$代替互相干函数$\Gamma(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,0)$描述光场空间相干性

$$J(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2)=\langle V(\boldsymbol{\rho}_1,t)V^*(\boldsymbol{\rho}_2,t)\rangle=\Gamma(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,0) \tag{5.1.8}$$

当$\boldsymbol{\rho}_1=\boldsymbol{\rho}_2=\boldsymbol{\rho}$时，平均光强为

$$I(\boldsymbol{\rho})=\langle V(\boldsymbol{\rho},t)V^*(\boldsymbol{\rho},t)\rangle=\Gamma(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho},0)=J(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}) \tag{5.1.9}$$

归一化的互强度称为复相干系数$\gamma(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2)$，即

$$\gamma(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2)=\frac{J(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2)}{\sqrt{J(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_1)}\sqrt{J(\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}_2)}}=\frac{J(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2)}{\sqrt{I(\boldsymbol{\rho}_1)}\sqrt{I(\boldsymbol{\rho}_2)}} \tag{5.1.10}$$

且有$0\leqslant|\gamma(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2)|\leqslant1$.

复解析信号通过近轴$ABCD$光学系统的传输由柯林斯公式描述，在直角坐标系下有

$$V(x,y,z)=\frac{\mathrm{i}k}{2\pi B}\exp(-\mathrm{i}kz)\iint V'(x',y',0)\cdot$$
$$\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}k}{2B}[A(x'^2+y'^2)-2(xx'+yy')+D(x^2+y^2)]\right\}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \tag{5.1.11}$$

由此得到互强度的传输公式：

$$J(x_1,y_1,x_2,y_2,z)=\left(\frac{k}{2\pi B}\right)^2\iiiint J'(x_1',y_1',x_2',y_2',0)\cdot$$
$$\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}k}{2B}[A(x_1'^2+y_1'^2)-2(x_1x_1'+y_1y_1')+D(x_1^2+y_1^2)-(A(x_2'^2+y_2'^2)-\right.$$
$$\left.2(x_2x_2'+y_2y_2')+D(x_2^2+y_2^2))]\right\}\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}y_1'\mathrm{d}x_2'\mathrm{d}y_2' \tag{5.1.12}$$

二、空间－频率域

部分相干光的空间－时间域理论已被推广到空间－频率域.在空间－频率域中,描述光场相干性的基本物理量是交叉谱密度函数 $W(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\omega)$,定义为

$$W(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\omega)=\langle\hat{V}(\boldsymbol{\rho}_1,\omega)\hat{V}^*(\boldsymbol{\rho}_2,\omega)\rangle \tag{5.1.13}$$

式中 $\hat{V}(\boldsymbol{\rho}_j,\omega)$ 为场函数 $V(\boldsymbol{\rho}_j,\omega)$ 的傅里叶变换,即

$$\hat{V}(\boldsymbol{\rho}_j,\omega)=\int V(\boldsymbol{\rho}_j,t)\exp(\mathrm{i}\omega t)\mathrm{d}t \tag{5.1.14}$$

$j=1,2;\omega$ 为圆频率.因此 $W(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\omega)$ 与 $\Gamma(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\tau)$ 由傅里叶变换相联系:

$$W(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\omega)=\int\Gamma(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\tau)\exp(\mathrm{i}\omega\tau)\mathrm{d}\tau \tag{5.1.15}$$

$$\Gamma(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\tau)=\frac{1}{2\pi}\int W(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\omega)\exp(-\mathrm{i}\omega\tau)\mathrm{d}\omega \tag{5.1.16}$$

令 $\boldsymbol{\rho}_1=\boldsymbol{\rho}_2=\boldsymbol{\rho}$,得到空间点 $\boldsymbol{\rho}$ 处的平均光强

$$I(\boldsymbol{\rho},\omega)=W(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho},\omega) \tag{5.1.17}$$

归一化的交叉谱密度函数称为复空间相干长度

$$\begin{aligned}\mu(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\omega)&=\frac{W(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\omega)}{\sqrt{W(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_1,\omega)}\sqrt{W(\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}_2,\omega)}}\\&=\frac{W(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\omega)}{\sqrt{I(\boldsymbol{\rho}_1,\omega)}\sqrt{I(\boldsymbol{\rho}_2,\omega)}}\end{aligned} \tag{5.1.18}$$

与空间－时间域中情况类似,有 $0\leqslant|\mu(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\omega)|\leqslant1$.

对准单色场,$\hat{V}(\boldsymbol{\rho},\omega)=V(\boldsymbol{\rho})\exp(\mathrm{i}\omega t)$.于是,对应的交叉谱密度函数为

$$W(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2)=\langle\hat{V}(\boldsymbol{\rho}_1,\omega)\hat{V}^*(\boldsymbol{\rho}_2,\omega)\rangle=\langle V(\boldsymbol{\rho}_1)V^*(\boldsymbol{\rho}_2)\rangle \tag{5.1.19}$$

此时,交叉谱密度函数 $W(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2)$ 与互强度 $J(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2)$ 在描述光场空间相干性时等效.但它们分别是在空间－频率域和空间－时间域中描述光场相干性的物理量,其物理意义不同.仅当准单色场近似成立时,才使用互强度,但对交叉谱密度函数却无此限制.

在空间－频率域中,用谱密度函数 $S(\omega)$ 描述时间相干性,其定义为

$$S(\omega)=W(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho},\omega) \tag{5.1.20}$$

谱密度函数与自相关函数 $\Gamma(\tau)$ 有傅里叶变换关系.部分相干光即使在自

由空间中传输时，$S(\omega)$也会变化，此即沃耳夫(Wolf)效应.

交叉谱密度函数通过近轴 $ABCD$ 光学系统的传输公式为

$$W(x_1,y_1,x_2,y_2,z)=\left(\frac{k}{2\pi B}\right)^2\iiiint W'(x_1',y_1',x_2',y_2',0)\cdot$$

$$\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}k}{2B}[A(x_1'^2+y_1'^2)-2(x_1x_1'+y_1y_1')+D(x_1^2+y_1^2)-(A(x_2'^2+\right.$$

$$\left.y_2'^2)-2(x_2x_2'+y_2y_2')+D(x_2^2+y_2^2))]\right\}\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}y_1'\mathrm{d}x_2'\mathrm{d}y_2' \tag{5.1.21}$$

式中已略去圆频率 ω.

三、维格纳分布函数

设部分相干光的交叉谱密度函数为 $W(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)$，则其维格纳分布函数定义为

$$h(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\theta})=\left(\frac{k}{2\pi}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}W(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'/2,\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}'/2)\exp(-\mathrm{i}k\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \tag{5.1.22}$$

式中

$$\boldsymbol{r}=\frac{\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2}{2},\qquad \boldsymbol{r}'=\frac{\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2}{2} \tag{5.1.23}$$

$$\boldsymbol{r}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{\theta}=\begin{bmatrix}\theta_x\\\theta_y\end{bmatrix} \tag{5.1.24}$$

对式(5.1.22)作傅里叶逆变换得到交叉谱密度

$$W(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h\left(\frac{\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2}{2},\boldsymbol{\theta}\right)\exp[\mathrm{i}k(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\theta}]\mathrm{d}\boldsymbol{\theta} \tag{5.1.25}$$

维格纳分布函数描述了光束在空间域和空间－频率域中的性质，并与几何光学对光线的描述有类似之处.维格纳分布函数不是非负函数，它本身不是光强，但由式(5.1.22)可得光强

$$I(\boldsymbol{r})=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\theta})\mathrm{d}\boldsymbol{\theta} \tag{5.1.26}$$

空间－频率域中的光强亦可由式(5.1.22)得到为

$$I(\boldsymbol{\theta})=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\theta})\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{5.1.27}$$

式(5.1.27)也表示远场的光强分布.

使用维格纳分布函数的一个优点是使光束通过近轴 $ABCD$ 光学系统的传输公式可简单写为

$$h_2(\boldsymbol{V}) = h_1(\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{V}) \tag{5.1.28}$$

式中

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} \tag{5.1.29}$$

$\boldsymbol{M}$ 为光学系统的 4×4 变换矩阵. 在式(5.1.28)中积分运算被矩阵运算代替，使计算大为简化.

§5.2 高斯－谢尔模型光束的传输变换

一、各向同性高斯－谢尔模型光束

设部分相干光在源 $z=0$ 处的交叉谱密度函数可表示为

$$W(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, 0) = \sqrt{I(\boldsymbol{r}_1, 0) I(\boldsymbol{r}_2, 0)}\, \mu(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, 0) \tag{5.2.1}$$

式中复空间相干度 $\mu(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, 0)$ 只与 $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ 有关，称为谢尔源. 若光强 I 和复空间相干度 μ 都由高斯函数表征：

$$I(\boldsymbol{r}, 0) = I_0 \exp\left(-\frac{2\boldsymbol{r}^2}{w_0^2}\right) \tag{5.2.2}$$

$$\mu(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, 0) = \exp\left[-\frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)^2}{2\sigma_0^2}\right] \tag{5.2.3}$$

则称为各向同性高斯－谢尔模型光束. 式中 I_0 为一常数，w_0、σ_0 分别为源处高斯－谢尔模型光束的束腰宽度和相关长度. 高斯－谢尔模型光束是描述部分相干光的一个常用物理模型.

将式(5.2.1)～式(5.2.3)代入式(5.1.21)，得到高斯－谢尔模型光束在自由空间传输距离 z 的公式：

$$W(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, z) = I_0 \frac{w_0^2}{w^2(z)} \exp\left[-\frac{\boldsymbol{r}_1^2 + \boldsymbol{r}_2^2}{w^2(z)}\right] \exp\left[-\frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)^2}{2\sigma(z)^2}\right] \exp\left[-\frac{\mathrm{i}k(\boldsymbol{r}_1^2 - \boldsymbol{r}_2^2)}{2R(z)}\right] \tag{5.2.4}$$

式中

$$w(z) = w_0 \left[1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0}\right)^2 \left(\frac{1}{w_0^2} + \frac{1}{\sigma_0^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{5.2.5}$$

$$R(z) = z\left[1 + \left(\frac{\pi w_0}{\lambda z}\right)^2 \left(\frac{1}{w_0^2} + \frac{1}{\sigma_0^2}\right)^{-1}\right] \tag{5.2.6}$$

$$\sigma(z)=\sigma_0\left[1+\left(\frac{\lambda z}{\pi w_0}\right)^2\left(\frac{1}{w_0^2}+\frac{1}{\sigma_0^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{5.2.7}$$

$w(z)$、$R(z)$、$\sigma(z)$分别为高斯－谢尔模型光束在 z 处的束宽，等相面曲率半径和相关长度.

定义空间相关度 α 和空间相关参数 β，

$$\alpha=\frac{\sigma_0}{w_0}=\frac{\sigma(z)}{w(z)} \tag{5.2.8}$$

$$\beta=\left[1+\left(\frac{w_0}{\sigma_0}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}=\left[1+\left(\frac{w(z)}{\sigma(z)}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}=(1+\alpha^{-2})^{-\frac{1}{2}} \tag{5.2.9}$$

α、β 都是与传输距离 z 无关的量，且 $0\leqslant\alpha<+\infty$，$0\leqslant\beta\leqslant1$. 其中，两个极限情况 $\alpha=0(\beta=0)$，$\alpha\to+\infty(\beta=1)$分别对应于完全空间非相干光和完全空间相干光.

定义高斯－谢尔模型光束的瑞利长度

$$Z_0=\frac{\pi w_0^2}{\lambda}\beta \tag{5.2.10}$$

则式(5.2.5)～式(5.2.7)可写为

$$w(z)=w_0\left[1+\left(\frac{z}{Z_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{5.2.11}$$

$$R(z)=z\left[1+\left(\frac{Z_0}{z}\right)^2\right] \tag{5.2.12}$$

$$\sigma(z)=\sigma_0\left[1+\left(\frac{z}{Z_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{5.2.13}$$

式(5.2.11)和式(5.2.12)与基模高斯光束在自由空间中的传输公式在形式上完全相同.

利用式(5.1.21)还可证明，在一般情况下用交叉谱密度函数式(5.2.4)表征的高斯－谢尔模型光束通过无限大孔径近轴 $ABCD$ 光学系统的传输公式为

$$W(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,z)=I_0\frac{w_1^2}{w_2^2}\exp\left[-\frac{\boldsymbol{r}_1^2+\boldsymbol{r}_2^2}{w_2^2}\right]\exp\left[-\frac{(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)^2}{2\sigma_2^2}\right]\exp\left[-\frac{\mathrm{i}k(\boldsymbol{r}_1^2-\boldsymbol{r}_2^2)}{2R_2}\right] \tag{5.2.14}$$

$$w_2=w_1\left[\left(A+\frac{B}{R_1}\right)^2+\frac{\lambda^2}{\pi^2w_1^2}\left(\frac{1}{w_1^2}+\frac{1}{\sigma_1^2}\right)B^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{5.2.15}$$

$$R_2=\frac{\left(A+\dfrac{B}{R_1}\right)^2+\dfrac{\lambda^2}{\pi^2w_1^2}\left(\dfrac{1}{w_1^2}+\dfrac{1}{\sigma_1^2}\right)B^2}{\left(A+\dfrac{B}{R_1}\right)\left(C+\dfrac{D}{R_1}\right)+\dfrac{\lambda^2}{\pi^2w_1^2}\left(\dfrac{1}{w_1^2}+\dfrac{1}{\sigma_1^2}\right)BD} \tag{5.2.16}$$

$$\sigma_2 = \sigma_1 \left[\left(A + \frac{B}{R_1} \right)^2 + \frac{\lambda^2}{\pi^2 w_1^2} \left(\frac{1}{w_1^2} + \frac{1}{\sigma_1^2} \right) B^2 \right]^{\frac{1}{2}} \tag{5.2.17}$$

式中下标 1、2 分别对应入射光束和出射光束.

引入高斯－谢尔模型光束的复参数 q，

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} - \mathrm{i} \frac{\lambda}{\pi w^2 \beta} \tag{5.2.18}$$

易证 q 通过 $ABCD$ 光学系统的变换遵守 $ABCD$ 定律：

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \tag{5.2.19}$$

二、各向异性高斯－谢尔模型光束

各向异性高斯－谢尔模型光束在 xOz 和 yOz 面上参数不同，但是可分离，其交叉谱密度函数用下式描述：

$$W(x_1, y_1, x_2, y_2) = I_0 \frac{w_{0x} w_{0y}}{w_x w_y} \exp\left(- \frac{x_1^2 + x_2^2}{w_x^2} - \frac{y_1^2 + y_2^2}{w_y^2} \right) \cdot$$

$$\exp\left[- \frac{(x_1 - x_2)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y_1 - y_2)^2}{2\sigma_y^2} \right] \exp\left[- \frac{\mathrm{i}k(x_1^2 - x_2^2)}{2R_x} - \frac{\mathrm{i}k(y_1^2 - y_2^2)}{2R_y} \right] \tag{5.2.20}$$

类似于式(5.2.14)，从式(5.1.21)和式(5.2.20)可得到各向异性高斯－谢尔模型光束通过无限大孔径非轴对称近轴 $ABCD$ 光学系统的变换公式：

$$W(x_1, y_1, x_2, y_2) = I \exp\left(- \frac{x_1^2 + x_2^2}{w_{2x}^2} - \frac{y_1^2 + y_2^2}{w_{2y}^2} \right) \exp\left[- \frac{(x_1 - x_2)^2}{2\sigma_{2x}^2} - \frac{(y_1 - y_2)^2}{2\sigma_{2y}^2} \right] \cdot$$

$$\exp\left[- \frac{\mathrm{i}k(x_1^2 - x_2^2)}{2R_{2x}} - \frac{\mathrm{i}k(y_1^2 - y_2^2)}{2R_{2y}} \right] \tag{5.2.21}$$

$$I = I_0 \frac{w_{1x} w_{1y}}{w_{2x} w_{2y}} \tag{5.2.22}$$

$$w_{2j} = w_{1j} \left[\left(A_j + \frac{B_j}{R_{1j}} \right)^2 + \frac{\lambda^2}{\pi^2 w_{1j}^2} \left(\frac{1}{w_{1j}^2} + \frac{1}{\sigma_{1j}^2} \right) B_j^2 \right]^{\frac{1}{2}} \tag{5.2.23}$$

$$\sigma_{2j} = \sigma_{1j} \left[\left(A_j + \frac{B_j}{R_{1j}} \right)^2 + \frac{\lambda^2}{\pi^2 w_{1j}^2} \left(\frac{1}{w_{1j}^2} + \frac{1}{\sigma_{1j}^2} \right) B_j^2 \right]^{\frac{1}{2}} \tag{5.2.24}$$

$$R_{2j} = \frac{\left(A_j + \frac{B_j}{R_{1j}} \right)^2 + \frac{\lambda^2}{\pi^2 w_{1j}^2} \left(\frac{1}{w_{1j}^2} + \frac{1}{\sigma_{1j}^2} \right) B_j^2}{\left(A_j + \frac{B_j}{R_{1j}} \right) \left(C_j + \frac{D_j}{R_{1j}} \right) + \frac{\lambda^2}{\pi^2 w_{1j}^2} \left(\frac{1}{w_{1j}^2} + \frac{1}{\sigma_{1j}^2} \right) B_j D_j} \tag{5.2.25}$$

其中$\begin{bmatrix} A_x & B_x \\ C_x & D_x \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} A_y & B_y \\ C_y & D_y \end{bmatrix}$为$xOz$面和$yOz$面上的变换矩阵，$j=x,y$.

*ABCD*定律为

$$q_{2j}=\frac{A_jq_{1j}+B_j}{C_jq_{1j}+D_j} \tag{5.2.26}$$

$$\frac{1}{q_{ij}}=\frac{1}{R_{ij}}-\mathrm{i}\frac{\lambda}{\pi w_{ij}^2\beta_j},\quad i=1,2 \tag{5.2.27}$$

现以各向异性高斯－谢尔模型光束通过双轴透镜的变换说明式(5.2.26)的应用.双轴透镜是指在xOz和yOz面有不同焦距f_j的透镜，设透镜与入射面和出射面距离分别是l_{1j}和l_{2j}，入射参考面处高斯－谢尔模型光束的复参数q满足

$$\frac{1}{q_{1j}}=\frac{1}{R_{1j}}-\mathrm{i}\frac{\lambda}{\pi w_{1j}^2\beta_j}=X_{1j}-\mathrm{i}Y_{1j} \tag{5.2.28}$$

由*ABCD*定律式(5.2.26)得到出射参考面处的q参数，

$$\frac{1}{q_{2j}}=\frac{1}{R_{2j}}-\mathrm{i}\frac{\lambda}{\pi w_{2j}^2\beta_j}=X_{2j}-\mathrm{i}Y_{2j} \tag{5.2.29}$$

$$X_{2j}=\frac{B_jD_j(X_{1j}^2+Y_{1j}^2)+(A_jD_j+B_jC_j)X_{1j}+A_jC_j}{A_j^2+2A_jB_jX_{1j}+B_j^2(X_{1j}^2+Y_{1j}^2)} \tag{5.2.30}$$

$$Y_{2j}=\frac{Y_{1j}}{A_j^2+2A_jB_jX_{1j}+B_j^2(X_{1j}^2+Y_{1j}^2)} \tag{5.2.31}$$

$$\begin{bmatrix} A_j & B_j \\ C_j & D_j \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1-l_{2j}/f_j & l_{1j}+l_{2j}-l_{1j}l_{2j}/f_j \\ -1/f_j & 1-l_{1j}/f_j \end{bmatrix} \tag{5.2.32}$$

设入射面为光束的束腰位置，则

$$\begin{aligned} X_{01j}&=0 \\ Y_{01j}&=\lambda/(\pi w_{01j}^2\beta_j) \end{aligned} \tag{5.2.33}$$

故

$$X_{2j}=\frac{B_jD_jY_{01j}^2+A_jC_j}{A_j^2+B_j^2Y_{01j}^2}$$

$$Y_{2j}=\frac{Y_{01j}}{A_j^2+B_j^2Y_{01j}^2} \tag{5.2.34}$$

对于物像空间中的变换有

$$X_{2j}=0 \tag{5.2.35}$$

式(5.2.34)简化为

$$B_jD_jY_{01j}^2+A_jC_j=0$$

$$Y_{02j}=\frac{Y_{01j}}{A_j^2+B_j^2Y_{01j}^2} \tag{5.2.36}$$

在实际工作中感兴趣的光束变换问题有：

1. 像方 xOz 和 yOz 面上束腰相等且重合

$$\begin{cases} w_{02x}=w_{02y}=w_{02} \\ l_{02x}=l_{02y}=l_{02} \end{cases} \tag{5.2.37}$$

2. 像方 $z=l_2$ 面处光斑成圆

$$w_{2x}(l_2)=w_{2y}(l_2)=w_2(l_2) \tag{5.2.38}$$

3. 像方 $z=l_2$ 处相位面成球面

$$R_{2x}(l_2)=R_{2y}(l_2)=R_2(l_2) \tag{5.2.39}$$

原则上，这些问题都可以利用上面的公式来解决，并可统一表示为一个二次方程

$$\alpha f_x^2+\beta f_x+\gamma=0 \tag{5.2.40}$$

$$f_x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \tag{5.2.41}$$

f_x 为双轴透镜在 xOz 面上的焦距. 对于条件 1 式(5.2.37)，系数 α、β、γ 为

$$\begin{aligned} \alpha&=Y_{01x}^2(l_{01x}+N)^2+1-\beta_xPY_{01x} \\ \beta&=-\left[2N+2Y_{01x}^2l_{01x}N(N+l_{01x})\right] \\ \gamma&=N^2(1+Y_{01x}^2l_{01x}^2) \end{aligned} \tag{5.2.42}$$

式中

$$N=f_y+\frac{(l_{01y}-f_y)f_y^2}{(l_{01y}-f_y)^2+Y_{01y}^{-2}}$$

$$P=\left[\left(1-\frac{N}{f_y}\right)^2+Y_{01y}^2(l_{01y}+N-l_{01y}N/f_y)^2\right]Y_{01y}^{-1}\beta_y^{-1} \tag{5.2.43}$$

对于条件 2 式(5.2.38)，有

$$\begin{cases} \alpha=Y_{01x}^2(l_{01x}+l_2)^2-N\beta_xY_{01x}+1 \\ \beta=-\left[2l_2+2Y_{01x}^2l_{01x}l_2(l_{01x}+l_2)\right] \\ \gamma=l_2^2(1+Y_{01x}^2l_{01x}^2) \end{cases} \tag{5.2.44}$$

$$N=\left[\left(1-\frac{l_2}{f_y}\right)^2+Y_{01y}^2(l_{01y}+l_2-l_{01y}l_2/f_y)^2\right]Y_{01y}^{-1}\beta_y^{-1} \tag{5.2.45}$$

对于条件 3 式(5.2.39)，有

$$\alpha=Y_{01x}^2(l_{01x}+l_2)(l_{01x}+l_2-N)+1$$

$$\beta = -\left[2l_2 + 2Y_{01x}^2 l_{01x} l_2 (l_{01x} + l_2) - NY_{01x}^2 (l_{01x}^2 + 2l_{01x} l_2) - N\right]$$

$$\gamma = l_2 (l_2 - N)(1 + Y_{01x}^2 l_{01x}^2) \tag{5.2.46}$$

$$N = \frac{(1 - l_2/f_y)^2 + Y_{01y}^2 (l_{01y} + l_2 - l_{01y} l_2/f_y)^2}{Y_{01y}^2 (l_{01y} + l_2 - l_{01y} l_2/f_y)(1 - l_{01y}/f_y) - (1 - l_2/f_y)/f_y} \tag{5.2.47}$$

此外，对于 $R_{2x}(l_2) = -R_{2y}(l_2)$情况，只需将 N 用 $-N$ 代替就可得到相应的公式.

数值计算例见图 5.2.1～图 5.2.5. 图 5.2.1 和图 5.2.2 表示各向异性高斯－谢尔模型光束在像空间中的束宽 w_{2j}和等像面曲率半径R_{2j}随

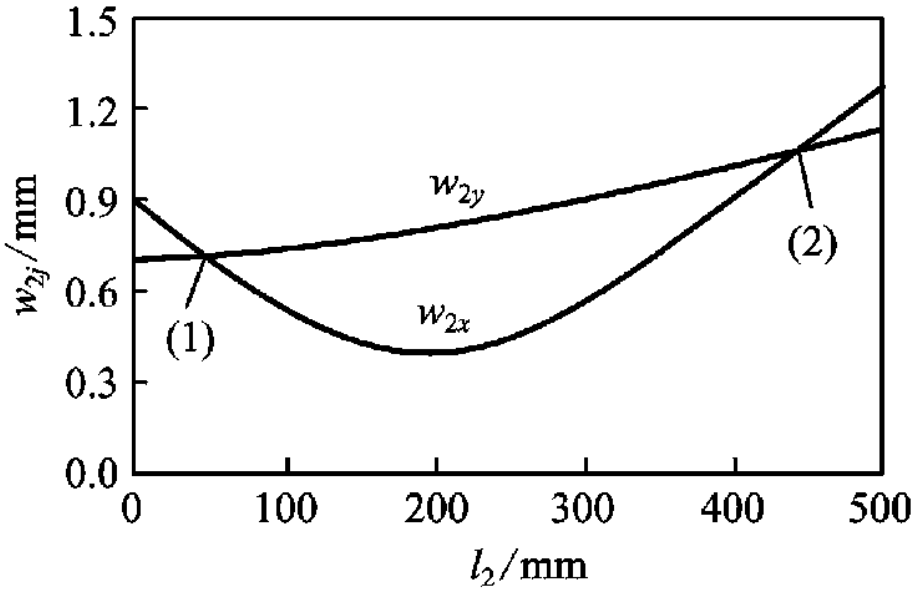


图 5.2.1　各向异性高斯－谢尔模型光束在像空间中的束宽 w_{2j}随距离 l_2 的变化

计算参数为 $w_{01x} = 0.3$ mm，$w_{01y} = 0.6$ mm，$l_{01x} = 150$ mm，$l_{01y} = 200$ mm，$\beta_x = 0.2$，$\beta_y = 0.3$，$\lambda = 1.064$ μm，$f_x = 100$ mm，$f_y = 1000$ mm. 交点 (1) $w_{2x} = w_{2y} = 0.72$ mm，$l_2 = 49$ mm；交点 (2) $w_{2x} = w_{2y} = 1.10$ mm，$l_2 = 442$ mm.

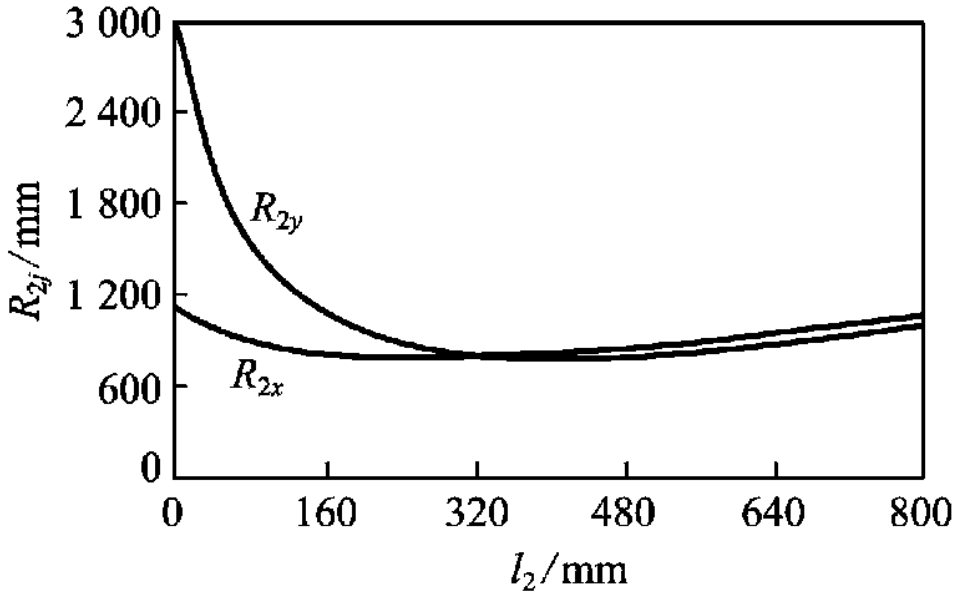


图 5.2.2　各向异性高斯－谢尔模型光束在像空间的等相面曲率半径 R_{2j}随距离 l_2 的变化

计算参数为 $f_x = 200$ mm，$f_y = 900$ mm，其余参数与图 5.2.1 相同.

交点 $R_{2x} = R_{2y} = 885.7$ mm，$l_2 = 459$ mm.

距离 l_2 ($l_{2x}=l_{2y}=l_2$)的变化，其交点坐标分别满足条件式(5.2.38)和式(5.2.39).显然，存在四种可能性，即无交点(无解)、一个交点(一个解)、两个交点(双解)和两条曲线完全重合(在像空间任意处均满足条件).图5.2.3～图5.2.5分别给出 f_x 随 $\Delta=l_{01x}-l_{01y}$、w_{01x}/w_{01y} 和 β_x/β_y 的变化曲线，它们分别满足式(5.2.37)、式(5.2.38)和式(5.2.39).其中实线对应于二次方程的正根、虚线对应于方程的负根.图5.2.3～图5.2.5说明适当选取光学系统的参数，或者调节入射高斯－谢尔模型光束参数，就可以实现所要求的变换.

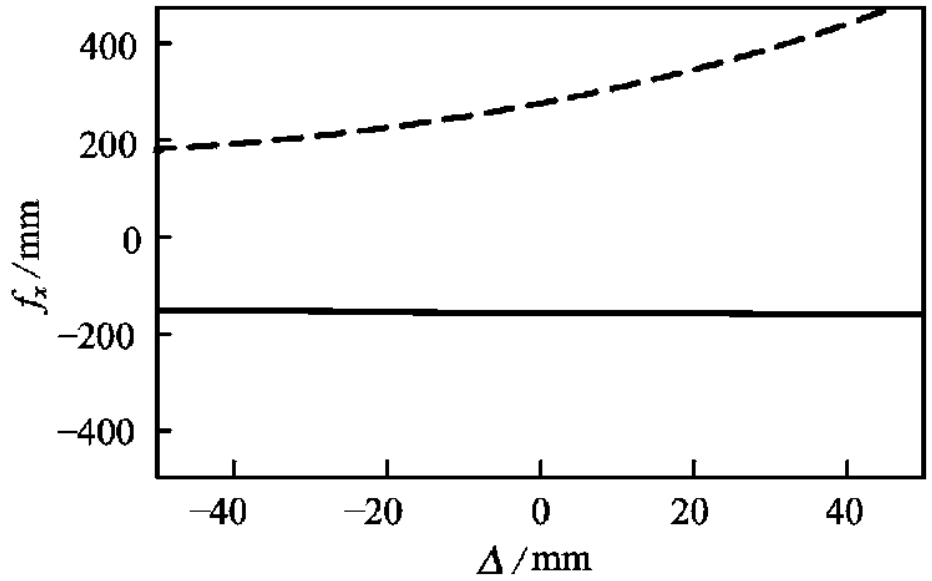


图 5.2.3　满足式(5.2.37)的 f_x 随 $\Delta=l_{01x}-l_{01y}$ 的变化

计算参数为 $w_{01x}=0.3$ mm，$w_{01y}=0.6$ mm，$l_{01y}=200$ mm，$\beta_x=0.3$，$\beta_y=0.2$，$\lambda=1.064$ μm，$f_y=1000$ mm.

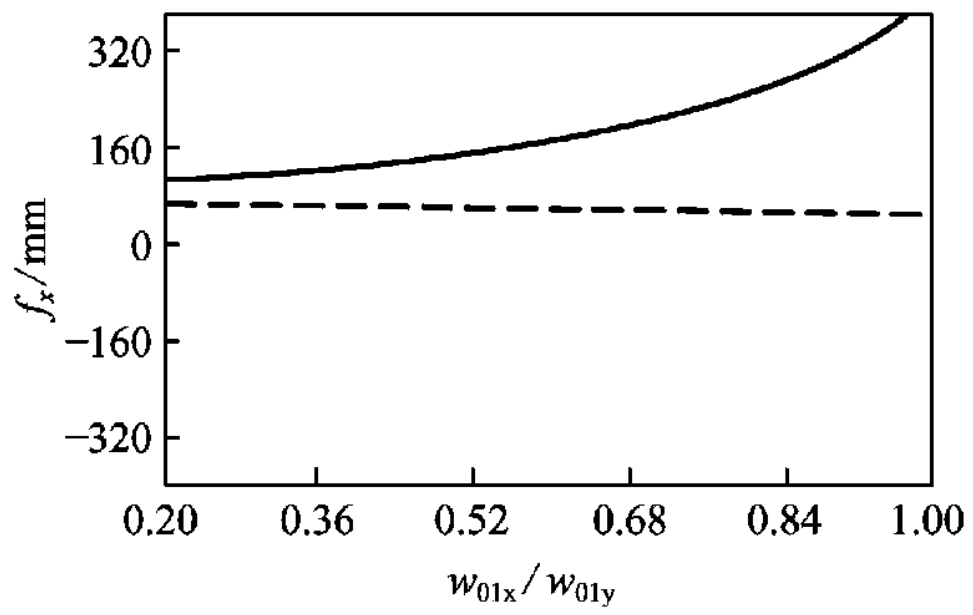


图 5.2.4　满足式(5.2.38)的 f_x 随 w_{01x}/w_{01y} 的变化

计算参数为 $w_{01y}=0.5$ mm，$l_{01x}=550$ mm，$l_{01y}=500$ mm，$\beta_x=0.3$，$\beta_y=0.2$，$\lambda=1.064$ μm，$f_y=200$ mm.

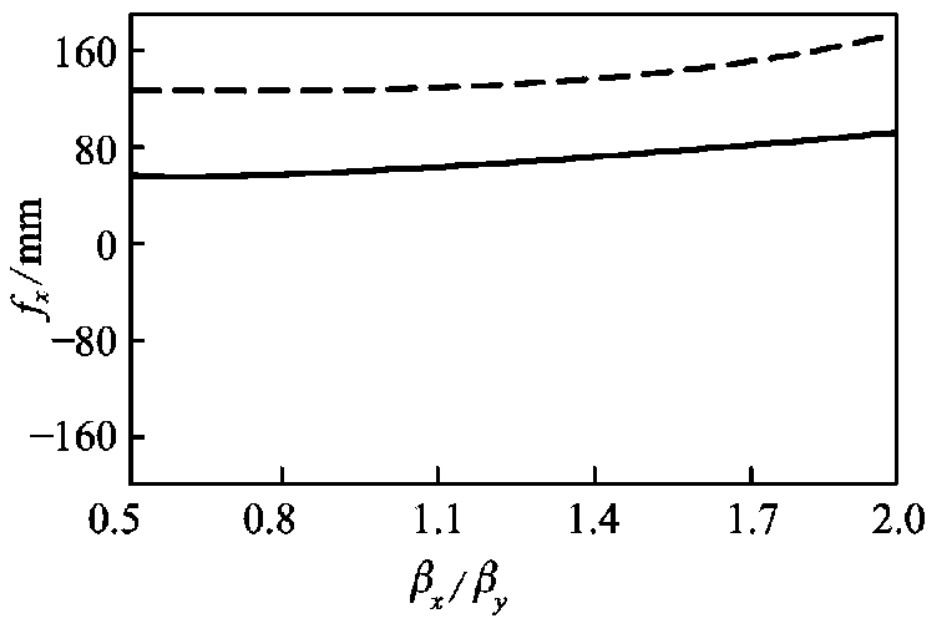


图 5.2.5　满足式(5.2.39)的 f_x 随 β_x/β_y 的变化

计算参数为 $w_{01x}=0.3$ mm, $w_{01y}=0.6$ mm, $l_{01x}=100$ mm, $l_{01y}=50$ mm, $\beta_y=0.2$, $l_2=120$ mm, $\lambda=1.064$ μm, $f_y=1200$ mm.

§5.3　高斯－谢尔模型光束的谱移动和谱开关

本节研究高斯－谢尔模型光束在传输中谱密度的变化和与谱移动相关的谱开关效应.

一、理论模型

如图 5.3.1 所示,在 $z=0$ 处的光阑透镜系统中,透镜焦距 f,光阑全宽度 $2a$.设 $z=0$ 处有一高斯－谢尔模型光束,其交叉谱密度函数为

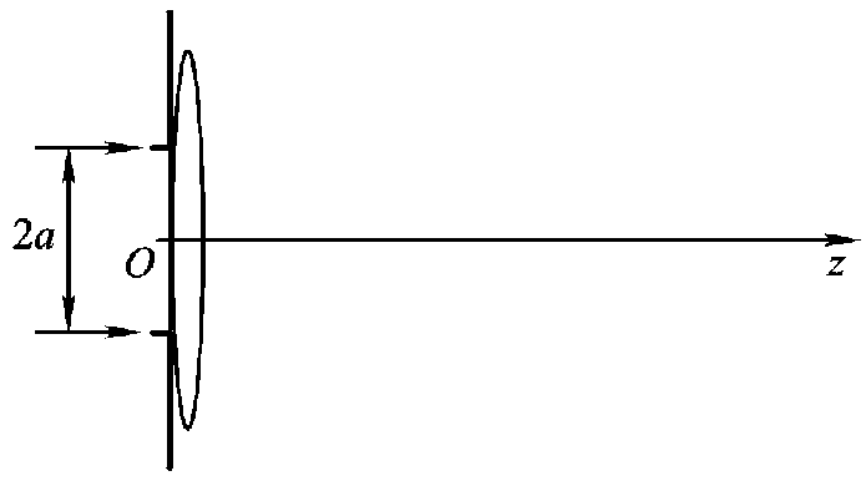


图 5.3.1　光阑透镜系统

$$W(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,z=0,\omega)=S^{(0)}(\omega)\exp\left(-\frac{\boldsymbol{r}_1^2+\boldsymbol{r}_2^2}{w^2}\right)\exp\left[-\frac{(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)^2}{2\sigma^2}\right]\cdot\exp\left[-\mathrm{i}\frac{k(\boldsymbol{r}_1^2-\boldsymbol{r}_2^2)}{2R}\right] \tag{5.3.1}$$

与式(5.2.4)比较,在式(5.3.1)中考虑了源处的谱密度 $S^{(0)}(\omega)$,略去了不重要的常数 I_0.将式(5.3.1)代入式(5.1.21),并令 $\boldsymbol{r}_1'=\boldsymbol{r}_2'=0$,得到 z

处轴上的谱密度

$$S(\Delta z,\omega)=W(\boldsymbol{r}_1'=0,\boldsymbol{r}_2'=0,z,\omega)$$

$$=4\pi^2\left(\frac{F}{\Delta z}\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 S^{(0)}(\omega)\int_0^{\delta}\int_0^{\delta}\exp\left[-\frac{u_1^2+u_2^2}{2\alpha^2}\right]\exp[-(u_1^2+u_2^2)]\cdot$$

$$\exp\left[-\mathrm{i}\frac{\pi w^2}{\lambda_0 R}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)(u_1^2-u_2^2)\right]\exp\left[\frac{\mathrm{i}\pi F(\Delta z-1)}{\Delta z}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)(u_1^2-u_2^2)\right]\cdot$$

$$I_0\left(\frac{u_1u_2}{\alpha^2}\right)u_1u_2\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2$$

$$=4\pi^2\left(\frac{F}{\Delta z}\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 S^{(0)}(\omega)\int_0^{\delta}\int_0^{\delta}\exp(Q_1u_1^2)\cdot$$

$$\exp(Q_2u_2^2)I_0[(\beta^{-2}-1)u_1u_2]u_1u_2\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2 \tag{5.3.2}$$

式中

$$\Delta z=\frac{z}{f}\qquad\text{(以透镜为参考的相对距离)} \tag{5.3.3}$$

$$Q_1=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\beta^{-2}+\mathrm{i}\left[\frac{\pi F(\Delta z-1)}{\Delta z}-\frac{\pi w^2}{\lambda_0 R}\right]\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \tag{5.3.4}$$

$$Q_2=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\beta^{-2}-\mathrm{i}\left[\frac{\pi F(\Delta z-1)}{\Delta z}-\frac{\pi w^2}{\lambda_0 R}\right]\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \tag{5.3.5}$$

$$I_0[(\beta^{-2}-1)u_1u_2]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp[(\beta^{-2}-1)u_1u_2\cos(\theta_1-\theta_2)]\mathrm{d}\theta_1$$

(零阶修正贝塞耳函数) (5.3.6)

$$u_i=\frac{r_i}{w},\qquad i=1,2\qquad\text{(相对坐标)} \tag{5.3.7}$$

$$\alpha=\frac{\sigma}{w}\qquad\text{(空间相关度)} \tag{5.3.8}$$

$$\beta=\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\qquad\text{(空间相关参数)} \tag{5.3.9}$$

$$F=\frac{w^2}{\lambda_0 f}\qquad\text{(与光束有关的菲涅耳数)} \tag{5.3.10}$$

$$\delta=\frac{a}{w}\qquad\text{(截断参数)} \tag{5.3.11}$$

式(5.3.2)表明,高斯 – 谢尔模型光束通过光阑透镜后的谱特性与源处的谱密度 $S^{(0)}(\omega)$、截断参数 δ、相关参数 β、菲涅耳数 F 和相对距离 Δz 有关.

设 $S^{(0)}(\omega)$ 为中心频率 ω_0 的洛伦兹(Lorentzian)线型,即

$$S^{(0)}(\omega)=S_0\frac{h^2}{(\omega-\omega_0)^2+h^2} \tag{5.3.12}$$

h 为线宽，$S_0=S^{(0)}(\omega_0)$.

将式(5.3.12)代入式(5.3.2)得到

$$S(\Delta z,\omega)=4\pi^2 S_0\left(\frac{F}{\Delta z}\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\frac{h^2}{(\omega-\omega_0)^2+h^2}\int_0^\delta\int_0^\delta \exp(Q_1 u_1^2)\cdot$$
$$\exp(Q_2 u_2^2)I_0[(\beta^{-2}-1)u_1 u_2]u_1 u_2 \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 \tag{5.3.13}$$

式(5.3.13)是我们分析谱变化的基本方程.

二、数值计算和分析

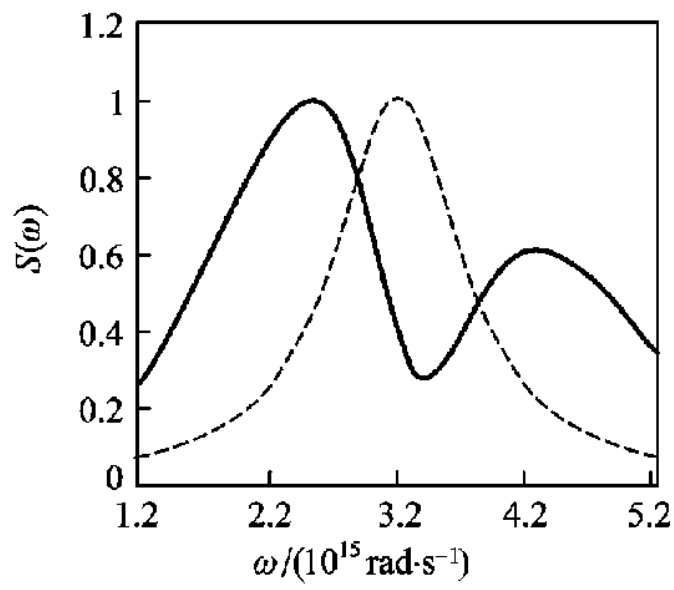
利用式(5.3.13)所作数值计算结果总结于图 5.3.2～图 5.3.6. 图 5.3.2为轴上的谱密度 $S(\Delta z,\omega)$ 随相对距离的变化. 计算参数为 $\omega_0=3.2\times10^{15}\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$，$h=0.6\times10^{15}\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$，$F=1.4$，$\delta=0.7$，$\beta=0.9$. 图中相对谱移动表示为

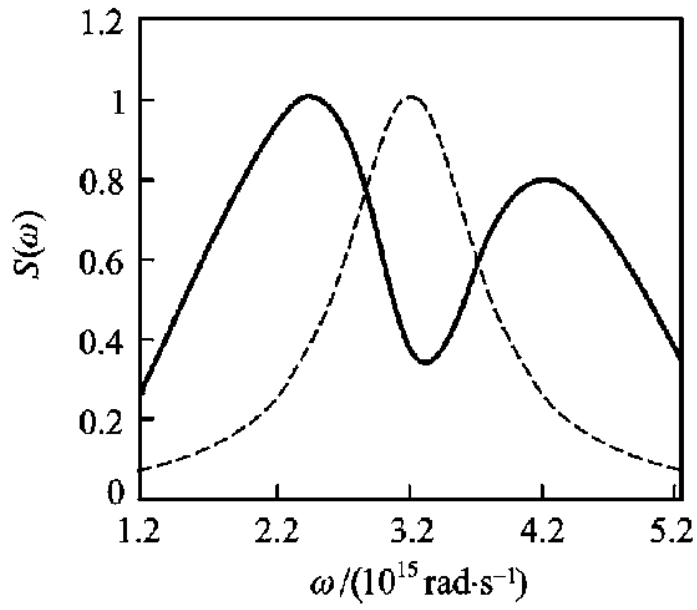
$$\frac{\delta\omega}{\omega_0}=\frac{\omega_\mathrm{m}-\omega_0}{\omega_0} \tag{5.3.14}$$

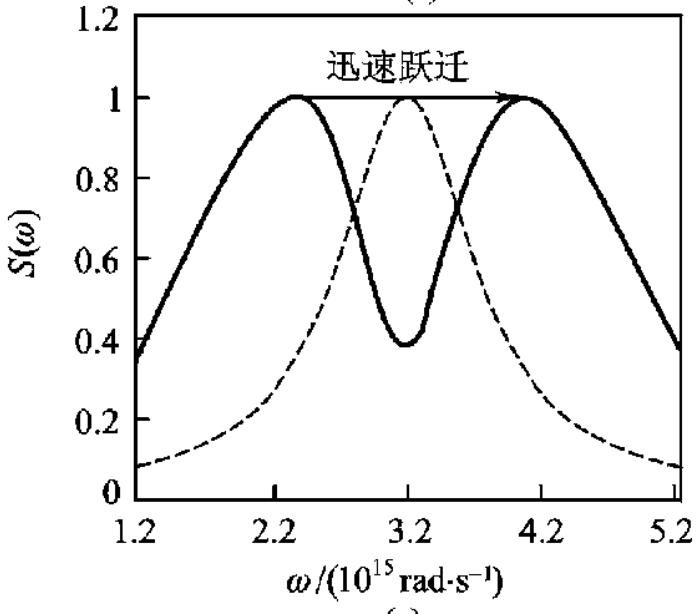
ω_m 为在 z 处轴上谱密度最大值对应的频率，谱参数见表 5.3.1. 由图 5.3.2和表 5.3.1 知，当 Δz 由 0.265 减到 0.260[图(a)～(b)]时，红移 $\delta\omega/\omega_0$(绝对值)由 0.205 增至 0.234，$S(\omega)\sim\omega$ 曲线上次峰相对的高度由0.606增加到 0.789. 在临界点 $\Delta z=0.256$[图(c)]，主峰和次峰的高度相等. 偏离临界点后，由红移突变为兰移，这一谱移动的新现象称为谱开关，部分相干多色光产生谱开关的物理原因是光阑的衍射效应. 若继续减小 Δz，则次峰在 $\Delta z=0.245$ 处变得比主峰更高，然后又出现单峰[图(e)]. 当 $\Delta z=0.155$ 时，主峰重新高于次峰[图(f)]，在 $\Delta z=0.146$ 处又出现第二个谱开关[图(g)].

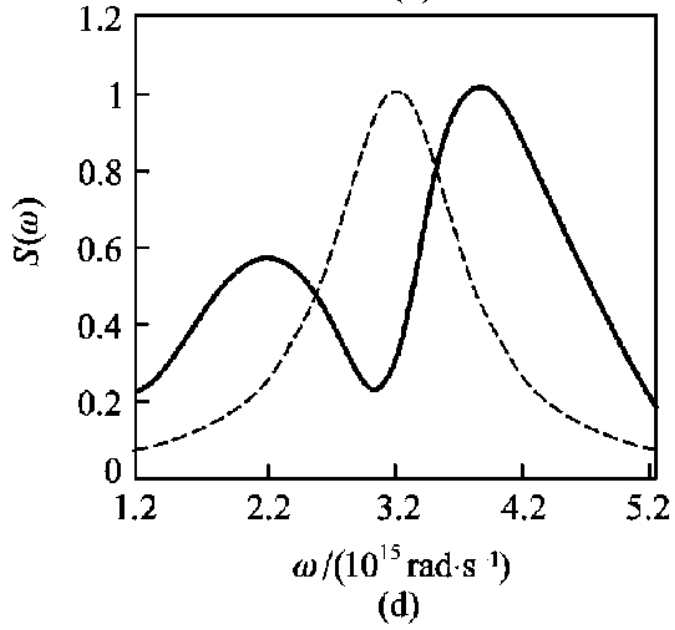
表 5.3.1　图 5.3.2 中的谱参数

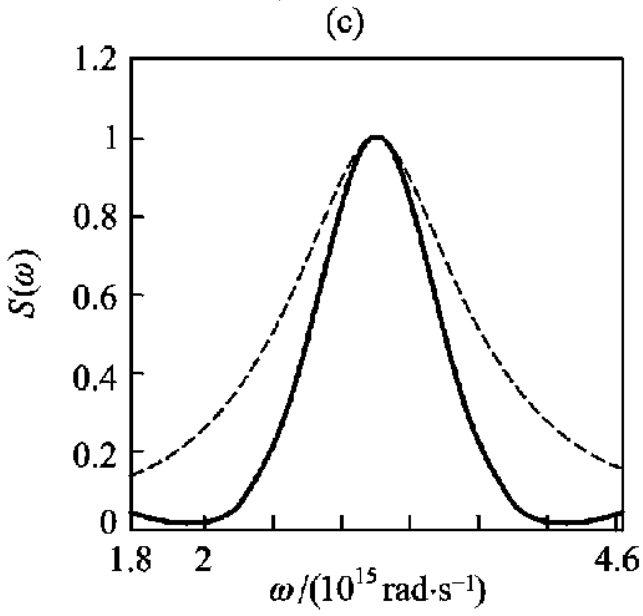
Δz	0.265	0.260	0.256	0.245	0.186	0.155	0.146
$\omega_\mathrm{m}/(10^{15}\mathrm{rad\cdot s^{-1}})$	2.543	2.452	2.360，4.040	3.827	3.200	2.801	2.622，3.778
$\delta\omega/\omega_0$	−0.205	−0.234	−0.263，0.263	0.196	0	−0.125	−0.181，0.181
次峰高度	0.606	0.789	1.000 二峰相等	1.000	1.000 仅有一个峰	0.485	1.000 二峰相等

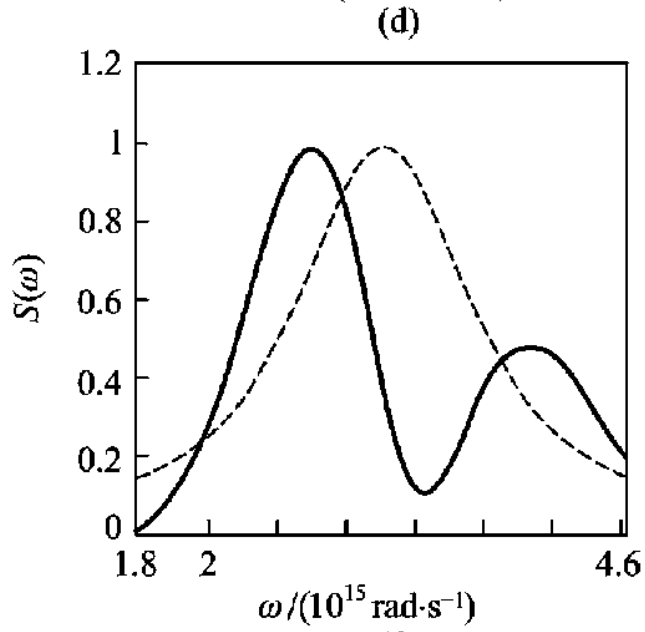












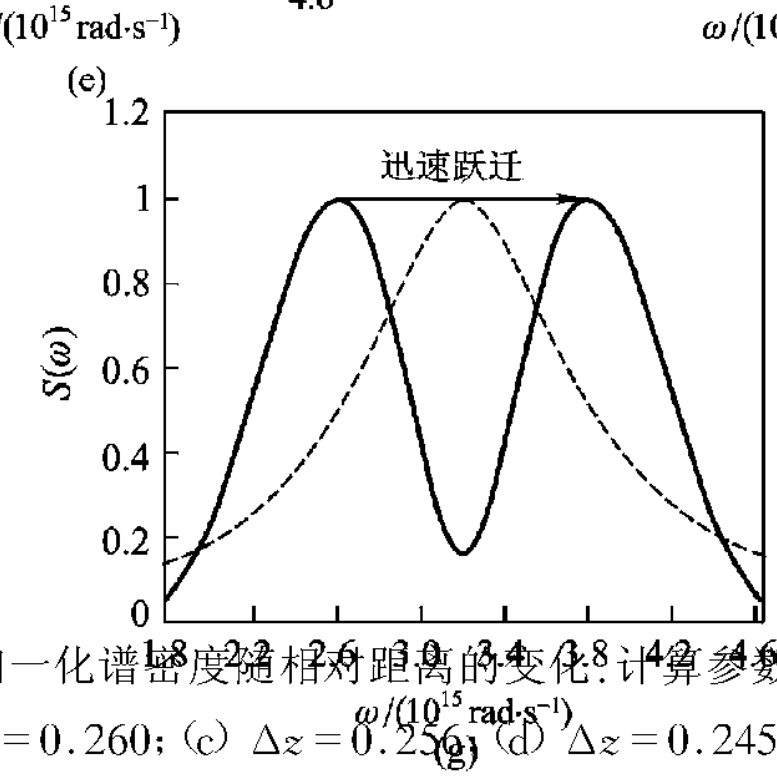


图 5.3.2　轴上归一化谱密度随相对距离的变化. 计算参数参见正文.

(a) $\Delta z = 0.265$; (b) $\Delta z = 0.260$; (c) $\Delta z = 0.256$; (d) $\Delta z = 0.245$; (e) $\Delta z = 0.186$; (f) $\Delta z = 0.155$; (g) $\Delta z = 0.146$. "– – –"—$\Delta z = 0$ 源处谱密度; "—"—Δz 处谱密度

谱移动 $\delta\omega/\omega_0$ 随截断参数 δ 的变化示于图 5.3.3. 计算参数 $\omega_0=3.2\times10^{15}\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$，$h=0.6\times10^{15}\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$，$F=1.4$，$\beta=0.5$，$\delta=0.3$，0.7 和 2.2. 图 5.3.3(a)、(b)中显示出有多个谱开关出现. 然而，若取 $\delta=2.2$ [图(c)]，即光阑效应可忽略时，谱开关消失了，仅有兰移出现.

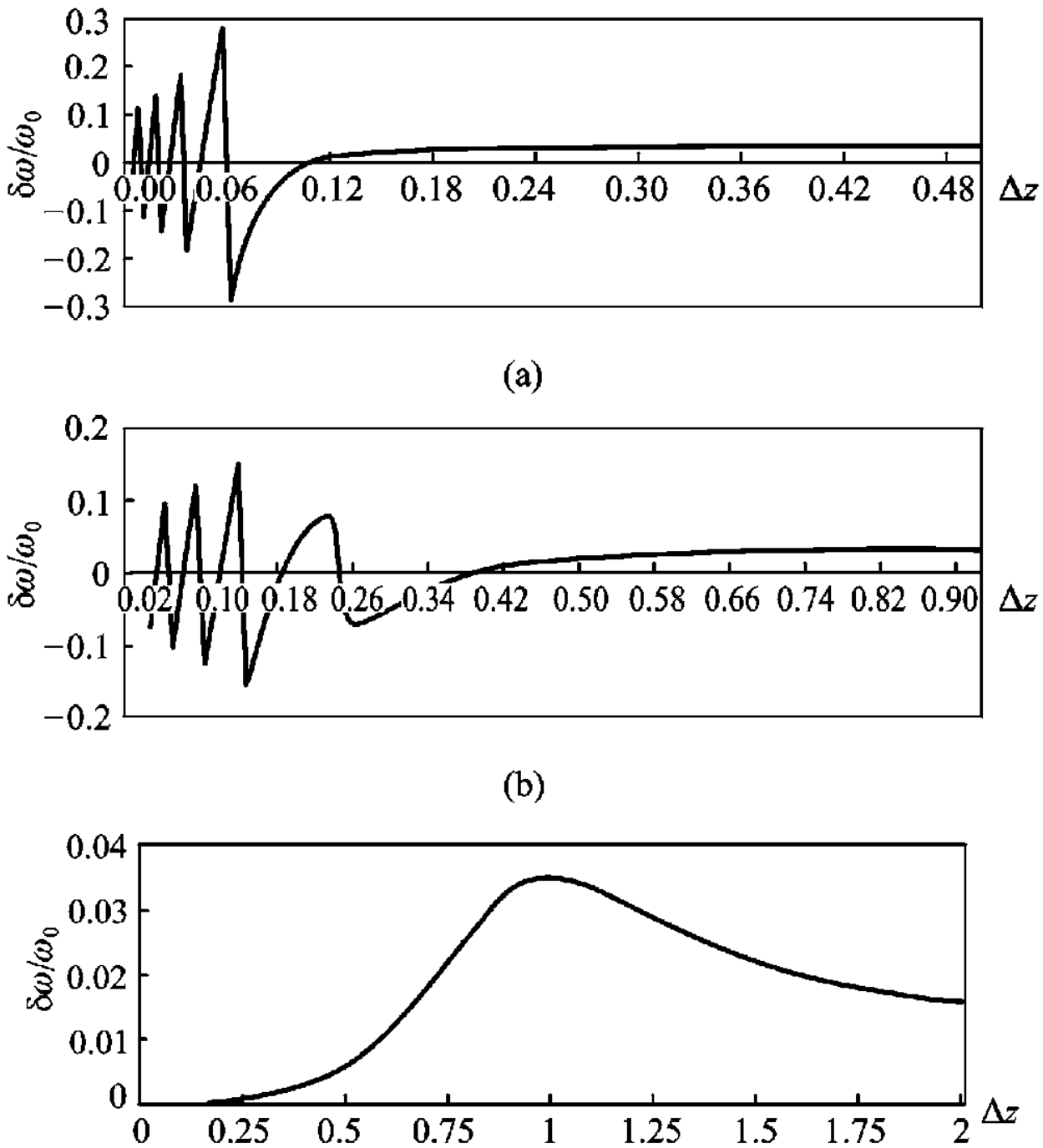
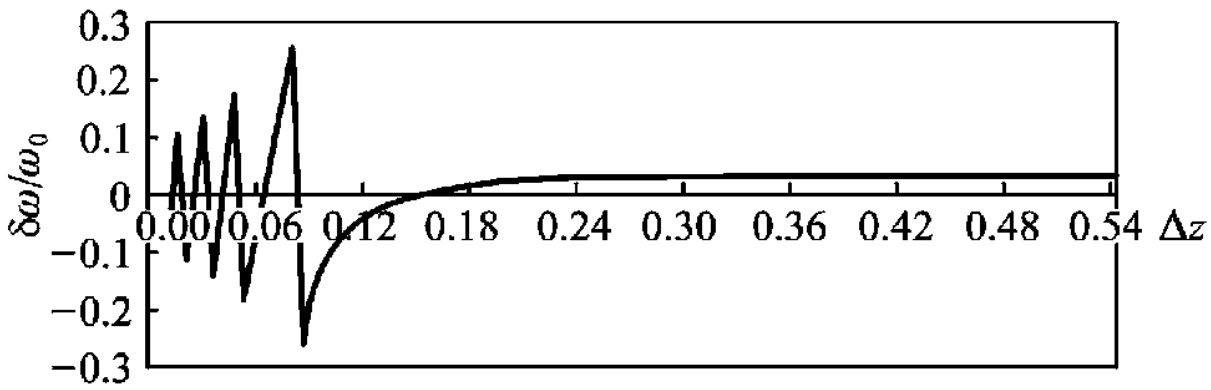


图 5.3.3　相对谱移动 $\delta\omega/\omega_0$ 随相对距离 Δz 的变化. (a) $\delta=0.3$; (b) $\delta=0.7$; (c) $\delta=2.2$

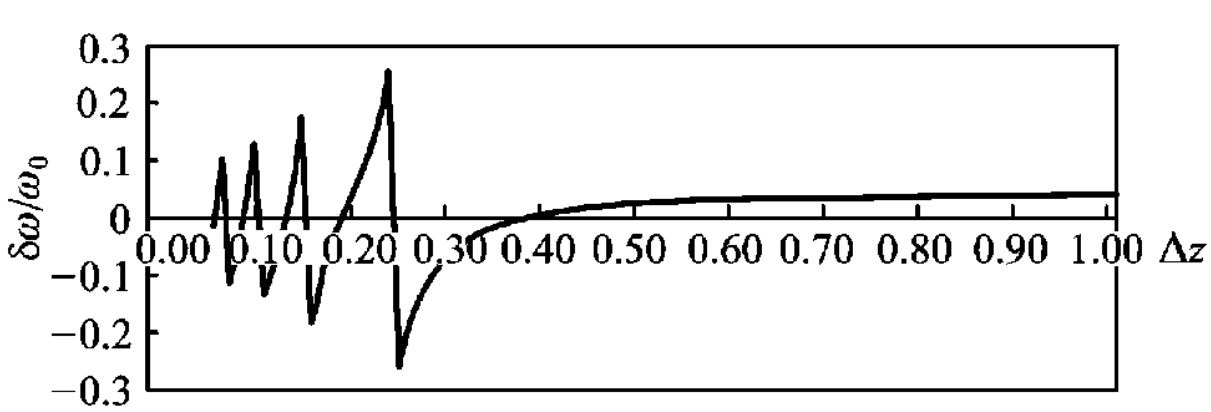
菲涅耳数 F 和相干参数 β 对谱开关的影响见图 5.3.4 和图 5.3.5. 由图可看出，谱开关的分布随 F 的大小而变化，而谱开关数目随 β 的减小而减小，当光束的空间相干性变得很差($\beta=0.2$)时，仅有谱移动而无谱开关出现.

图 5.3.6 表示第一个谱开关出现的相对位置 $\Delta z_s=\dfrac{z_s}{f}$ 随截断参数 δ 和菲涅耳数 F 的变化. 计算参数 $\omega_0=3.2\times10^{15}\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$，$h=0.6\times10^{15}\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ 和 $\beta=0.9$. 显然，随 δ 和 F 的增加，第一谱开关的位置向几何焦面靠近.

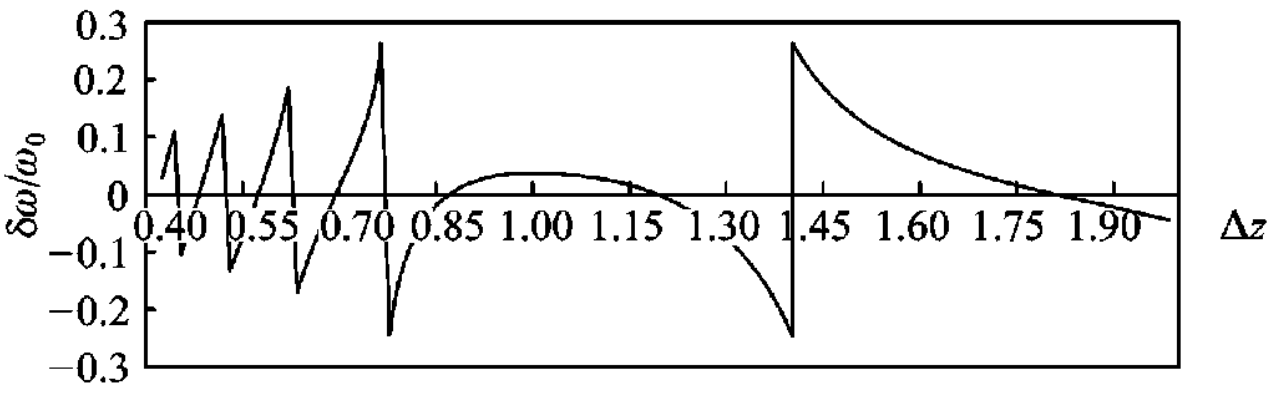
最近的实验已证实了理论上预言的谱开关的存在.谱开关有可能在谱选择、光互连等方面得到应用.



(a)



(b)



(c)

图 5.3.4　相对谱移动 $\delta\omega/\omega_0$ 随相对距离 Δz 的变化.

(a) $F=0.35$; (b) $F=1.4$; (c) $F=14$

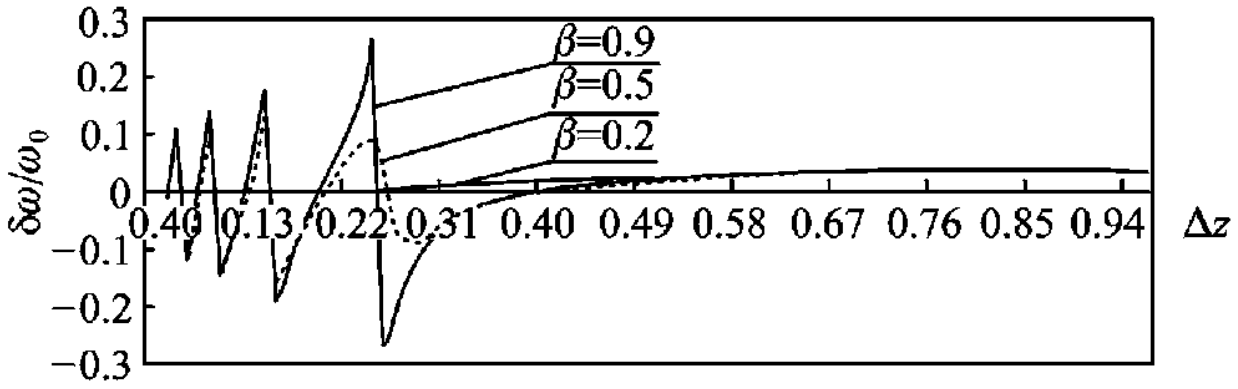


图 5.3.5　相对谱移动 $\delta\omega/\omega_0$ 随相对距离 Δz 的变化

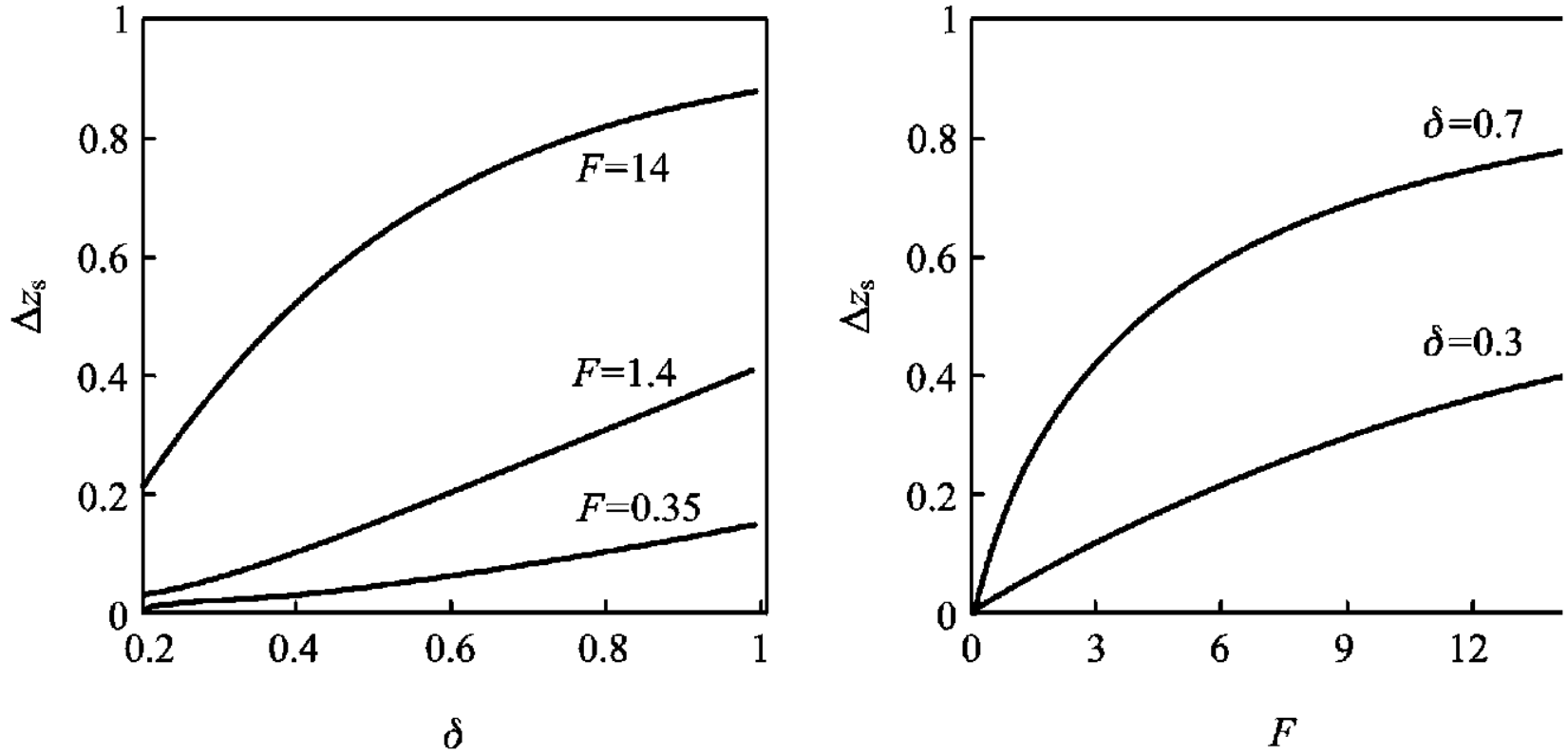


图 5.3.6　第一个谱开关出现的相对位置 $\Delta z_s = z_s/f$ 随
(a)截断参数 δ 和(b)菲涅耳数 F 的变化

§5.4　矢量高斯－谢尔模型光束的传输变换

矢量高斯－谢尔模型光束是标量高斯－谢尔模型光束的推广.对矢量高斯－谢尔模型光束,交叉谱密度函数应当代之以交叉谱密度矩阵.

设矢量高斯－谢尔模型光束源 $z=0$ 处的交叉谱密度矩阵为

$$\begin{bmatrix} W_{xx}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\omega) & W_{xy}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\omega) \\ W_{yx}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\omega) & W_{yy}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\omega) \end{bmatrix} \tag{5.4.1}$$

式中

$$W_{ij}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma_{ij}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\tau)\exp(\mathrm{i}\omega\tau)\mathrm{d}\tau,\quad i,j=x,y \tag{5.4.2}$$

Γ_{ij} 为相干矩阵元,ω 为频率.

交叉谱密度矩阵通过近轴 $ABCD$ 光学系统的传输公式为

$$W_{ij}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,z,\omega)=\left(\frac{k}{2\pi B}\right)^2\iint W'_{ij}(\boldsymbol{r}'_1,\boldsymbol{r}'_2,z=0,\omega)\cdot$$
$$\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}k}{2B}\left[A(\boldsymbol{r}'^2_1-\boldsymbol{r}'^2_2)-2(\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}'_1-\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}'_2)+D(\boldsymbol{r}_1^2-\boldsymbol{r}_2^2)\right]\right\}\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_1\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_2 \tag{5.4.3}$$

引入偏振矩阵 $\hat{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r})$ 用以描写光束的偏振特性.在相干矩阵元中令 $\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}$,$\tau=0$,得到

$$J_{ij}(\boldsymbol{r})=\Gamma_{ij}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r},0) \tag{5.4.4}$$

偏振度的计算公式为

$$P(\boldsymbol{r})=\left[1-\frac{4\det \hat{J}(\boldsymbol{r})}{\mathrm{tr}\hat{J}(\boldsymbol{r})^2}\right]^{1/2} \tag{5.4.5}$$

式中 tr、det 分别表示偏振矩阵的迹和对应行列式的值.

在 $z=0$ 处矢量高斯－谢尔模型光束的交叉谱密度矩阵可表示为

$$\begin{cases} W'_{xx}(\boldsymbol{r}'_1,\boldsymbol{r}'_2,\omega)=S(\omega)\left[I_x(\boldsymbol{r}'_1)I_x(\boldsymbol{r}'_2)\right]^{1/2}\gamma_a(\boldsymbol{r}'_1-\boldsymbol{r}'_2) \\ W'_{yy}(\boldsymbol{r}'_1,\boldsymbol{r}'_2,\omega)=S(\omega)\left[I_y(\boldsymbol{r}'_1)I_y(\boldsymbol{r}'_2)\right]^{1/2}\gamma_a(\boldsymbol{r}'_1-\boldsymbol{r}'_2) \\ W'_{xy}(\boldsymbol{r}'_1,\boldsymbol{r}'_2,\omega)=S(\omega)\left[I_x(\boldsymbol{r}'_1)I_y(\boldsymbol{r}'_2)\right]^{1/2}\gamma_c(\boldsymbol{r}'_1-\boldsymbol{r}'_2) \\ W'_{yx}(\boldsymbol{r}'_1,\boldsymbol{r}'_2,\omega)=W'^{*}_{xy}(\boldsymbol{r}'_2,\boldsymbol{r}'_1,\omega) \end{cases} \tag{5.4.6}$$

式中 $S(\omega)$为源 $z=0$ 处的谱密度，且有 $\int_{-\infty}^{+\infty}S(\omega)\mathrm{d}\omega=1$，

$$\left.\begin{aligned} I_x(\boldsymbol{r}'_k)&=I_1\exp\left(-\frac{|\boldsymbol{r}'_k|^2}{2\sigma_I^2}\right) \\ I_y(\boldsymbol{r}'_k)&=I_2\exp\left(-\frac{|\boldsymbol{r}'_k|^2}{2\sigma_I^2}\right) \end{aligned}\right\},\quad k=1,2 \tag{5.4.7}$$

为两个偏振分量的强度，σ_I 为束宽，$I_1=I_x(0)$，$I_2=I_y(0)$，

$$\begin{cases} \gamma_a(\boldsymbol{r}'_1-\boldsymbol{r}'_2)=\exp\left(-\dfrac{|\boldsymbol{r}'_1-\boldsymbol{r}'_2|^2}{2\sigma_a^2}\right) \\ \gamma_c(\boldsymbol{r}'_1-\boldsymbol{r}'_2)=\gamma_0\exp\left(-\dfrac{|\boldsymbol{r}'_1-\boldsymbol{r}'_2|^2}{2\sigma_c^2}\right) \end{cases} \tag{5.4.8}$$

分别为自相关和互相关系数，σ_a、σ_c 为相关长度，γ_0 为在同一点处两个偏振分量间的归一化互相关系数.

对由式(5.4.6)描写的矢量高斯－谢尔模型光束，在源 $z=0$ 处的偏振度为

$$P_0=\left[1-(1-|\gamma_0|^2)\frac{4I_1I_2}{(I_1+I_2)^2}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{5.4.9}$$

将式(5.4.6)～式(5.4.8)代入式(5.4.3)，积分之，得

$$
\begin{cases}
W_{xx}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,z,\omega)=\dfrac{I_1 S(\omega)}{Q_a}\exp\left(-\dfrac{1}{Q_a}\dfrac{|\boldsymbol{r}_1|^2+|\boldsymbol{r}_2|^2}{4\sigma_I^2}\right)\cdot \\
\qquad \exp\left(-\dfrac{1}{Q_a}\dfrac{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|^2}{2\sigma_a^2}\right)\exp\left[-\dfrac{\mathrm{i}k(|\boldsymbol{r}_1|^2-|\boldsymbol{r}_2|^2)}{2R_a}\right] \\
W_{yy}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,z,\omega)=\dfrac{I_2 S(\omega)}{Q_a}\exp\left(-\dfrac{1}{Q_a}\dfrac{|\boldsymbol{r}_1|^2+|\boldsymbol{r}_2|^2}{4\sigma_I^2}\right)\cdot \\
\qquad \exp\left(-\dfrac{1}{Q_a}\dfrac{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|^2}{2\sigma_a^2}\right)\exp\left[-\dfrac{\mathrm{i}k(|\boldsymbol{r}_1|^2-|\boldsymbol{r}_2|^2)}{2R_a}\right] \\
W_{xy}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,z,\omega)=\dfrac{\sqrt{I_1 I_2}S(\omega)\gamma_0}{Q_c}\exp\left(-\dfrac{1}{Q_c}\dfrac{|\boldsymbol{r}_1|^2+|\boldsymbol{r}_2|^2}{4\sigma_I^2}\right)\cdot \\
\qquad \exp\left(-\dfrac{1}{Q_c}\dfrac{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|^2}{2\sigma_c^2}\right)\exp\left[-\dfrac{\mathrm{i}k(|\boldsymbol{r}_1|^2-|\boldsymbol{r}_2|^2)}{2R_c}\right] \\
W_{yx}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,z,\omega)=W_{xy}^{*}(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1,z,\omega)
\end{cases}
\tag{5.4.10}
$$

式中

$$
Q_\alpha=A^2+\frac{B^2}{4\sigma_I^4k^2}\left(1+\frac{4\sigma_I^2}{\sigma_\alpha^2}\right),\quad \alpha=a,c
$$

$$
R_\alpha=\frac{BQ_\alpha}{DQ_\alpha-A},\quad \alpha=a,c \tag{5.4.11}
$$

式(5.4.10)为矢量高斯－谢尔模型光束的交叉谱密度矩阵元通过近轴 *ABCD* 光学系统的传输公式.由此式可得到光强、偏振度等变化的信息.

将式(5.4.10)代入式(5.4.2)和相干偏振矩阵

$$
J_{ij}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,z)=\Gamma_{ij}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\tau=0,z) \tag{5.4.12}
$$

式中,计算得到

$$
\begin{cases}
J_{xx}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,z)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{I_1 S(\omega)}{Q_a}\exp\left(-\dfrac{1}{Q_a}\dfrac{|\boldsymbol{r}_1|^2+|\boldsymbol{r}_2|^2}{4\sigma_I^2}\right)\cdot \\
\qquad \exp\left[-\dfrac{1}{Q_a}\dfrac{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|^2}{2\sigma_a^2}\right]\exp\left[-\dfrac{\mathrm{i}k(|\boldsymbol{r}_1|^2-|\boldsymbol{r}_2|^2)}{2R_a}\right]\mathrm{d}\omega \\
J_{yy}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,z)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{I_2 S(\omega)}{Q_a}\exp\left(-\dfrac{1}{Q_a}\dfrac{|\boldsymbol{r}_1|^2+|\boldsymbol{r}_2|^2}{4\sigma_I^2}\right)\cdot \\
\qquad \exp\left[-\dfrac{1}{Q_a}\dfrac{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|^2}{2\sigma_a^2}\right]\exp\left[-\dfrac{\mathrm{i}k(|\boldsymbol{r}_1|^2-|\boldsymbol{r}_2|^2)}{2R_a}\right]\mathrm{d}\omega \\
J_{xy}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,z)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\sqrt{I_1 I_2}S(\omega)\gamma_0}{Q_c}\exp\left(-\dfrac{1}{Q_c}\dfrac{|\boldsymbol{r}_1|^2+|\boldsymbol{r}_2|^2}{4\sigma_I^2}\right)\cdot \\
\qquad \exp\left[-\dfrac{1}{Q_c}\dfrac{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|^2}{2\sigma_c^2}\right]\exp\left[-\dfrac{\mathrm{i}k(|\boldsymbol{r}_1|^2-|\boldsymbol{r}_2|^2)}{2R_c}\right]\mathrm{d}\omega \\
J_{yx}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,z)=J_{xy}^{*}(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1,z)
\end{cases}
\tag{5.4.13}
$$

在式(5.4.13)中令 $\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}$ 代入式(5.4.5)，可求得矢量高斯－谢尔模型光束在 z 处的光强为

$$I(\boldsymbol{r},z)=\mathrm{tr}[J(\boldsymbol{r},z)]$$
$$=(I_1+I_2)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S(\omega)}{Q_a}\exp\left(-\frac{1}{Q_a}\frac{|\boldsymbol{r}|^2}{2\sigma_I^2}\right)\mathrm{d}\omega \quad (5.4.14)$$

式(5.4.10)的一个应用例是矢量高斯－谢尔模型光束通过图 5.4.1 所示望远镜系统的传输，设两透镜的焦距分别为 f_1、f_2，$z_1=OL_1$，$z_2=L_2Q$，$L_1L_2=l$，则有

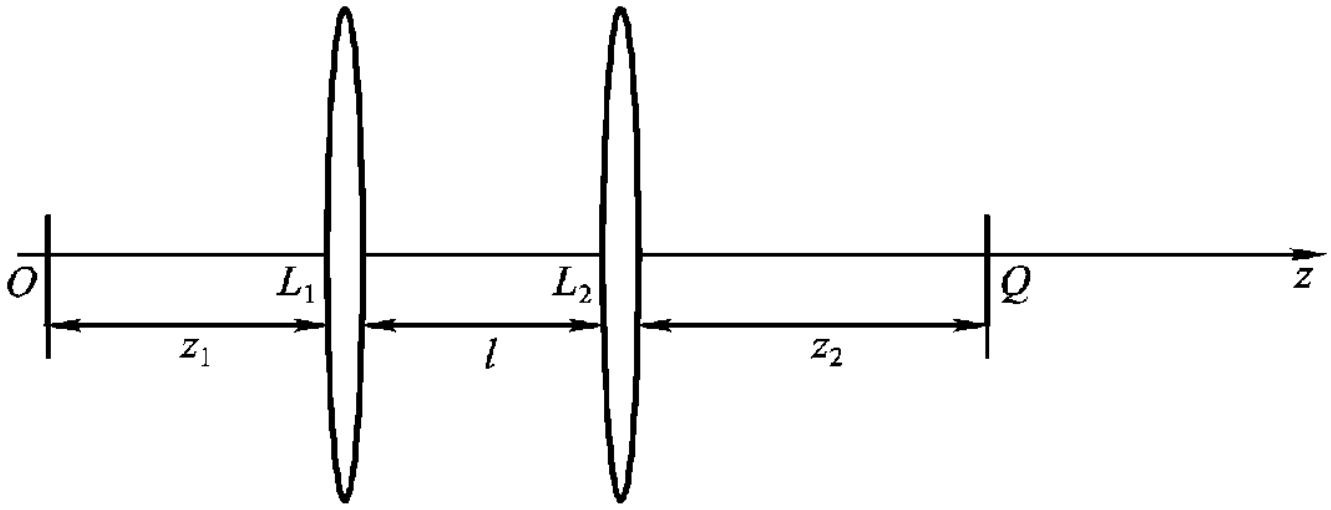


图 5.4.1　望远镜系统

$$Q_\alpha=M_{\mathrm{T}}^2+\frac{(z_1M_{\mathrm{T}}+l+z_2/M_{\mathrm{T}})^2}{4\sigma_I^4k^2}\left(1+\frac{4\sigma_I^2}{\sigma_\alpha^2}\right),\quad \alpha=a,c$$
$$R_\alpha=\frac{(z_1M_{\mathrm{T}}+l+z_2/M_{\mathrm{T}})Q_\alpha}{\frac{1}{M_{\mathrm{T}}}Q_\alpha-M_{\mathrm{T}}},\quad \alpha=a,c \quad (5.4.15)$$

式中

$$M_{\mathrm{T}}=-\frac{f_2}{f_1} \quad (5.4.16)$$

设源光谱为高斯型，即

$$S(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta\omega_0}\exp\left[-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\Delta\omega_0^2}\right] \quad (5.4.17)$$

式中 ω_0 和 $\Delta\omega_0$ 分别为中心频率和谱宽.数值计算结果见图 5.4.2～图 5.4.5.图 5.4.2 表示当 $R=(x^2+y^2)^{1/2}/\sigma_I(z)=0$、0.5、1、1.5、2 和 3 时，偏振度 P 随传输距离 z_2 的变化.计算参数为 $\gamma_0=0.2$，$\sigma_I=1$ mm，$\sigma_a=0.1$ mm，$\sigma_c=0.2$ mm，$I_2=0.6$，$I_1=0.8$，$l=80$ mm，$z_1=60$ mm，$M_{\mathrm{T}}=-1.7$，中心波长 $\lambda_0=632.8$ nm，$\delta=\Delta\omega_0/\omega_0=0.2$.由图 5.4.2 知，在源处均匀偏振的矢量高斯－谢尔模型光束通过望远镜系统后变得非均匀了，并且直到远场都是非均匀偏振的.$z=2$ m处偏振度随 σ_c/σ_I 和 M_{T} 的

变化示于图 5.4.3 和图 5.4.4，其余计算参数与图 5.4.2 相同. 由图可以看出，P 随 σ_c/σ_I 和 M_T 的变化依赖于 R 的取值. 但随 σ_c/σ_I 和 $|M_T|$ 的增大趋于一个定值 $P=0.24$. 谱宽对偏振度的影响示于图 5.4.5，源光谱为高斯型，用实线和虚线分别表示窄带（$\delta=0$）和宽带（$\delta=0.2$）谱，其余计算参数同图 5.4.2. 计算结果说明，对于对称分布的谱密度函数，带宽对偏振度的影响是不大的.

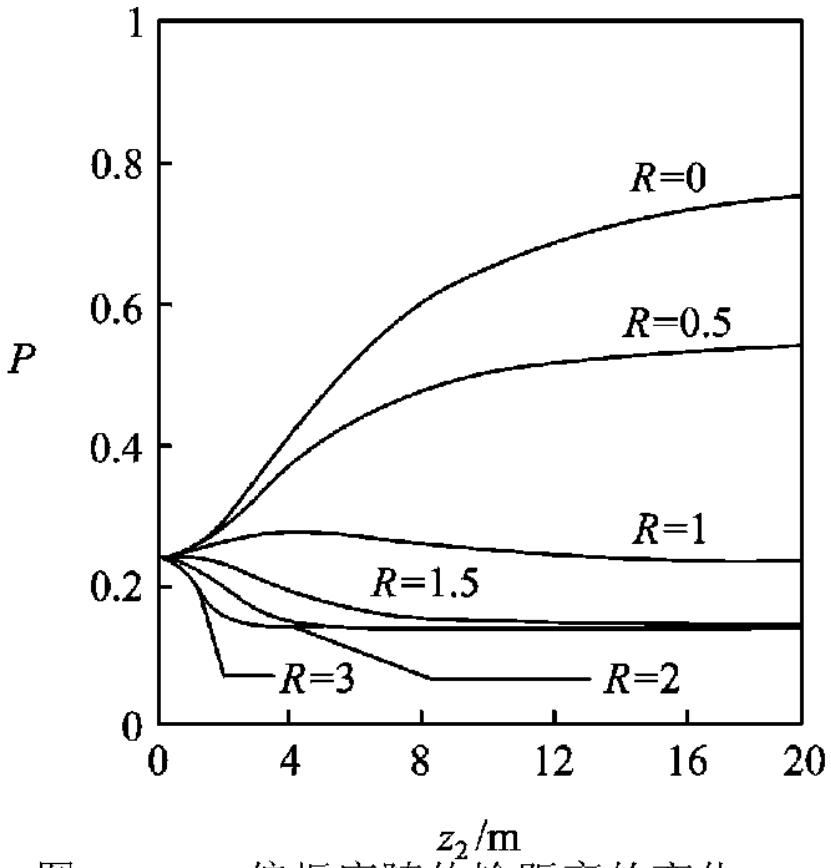


图 5.4.2　偏振度随传输距离的变化

$R=0$、0.5、1、1.5、2 和 3，计算参数参见正文

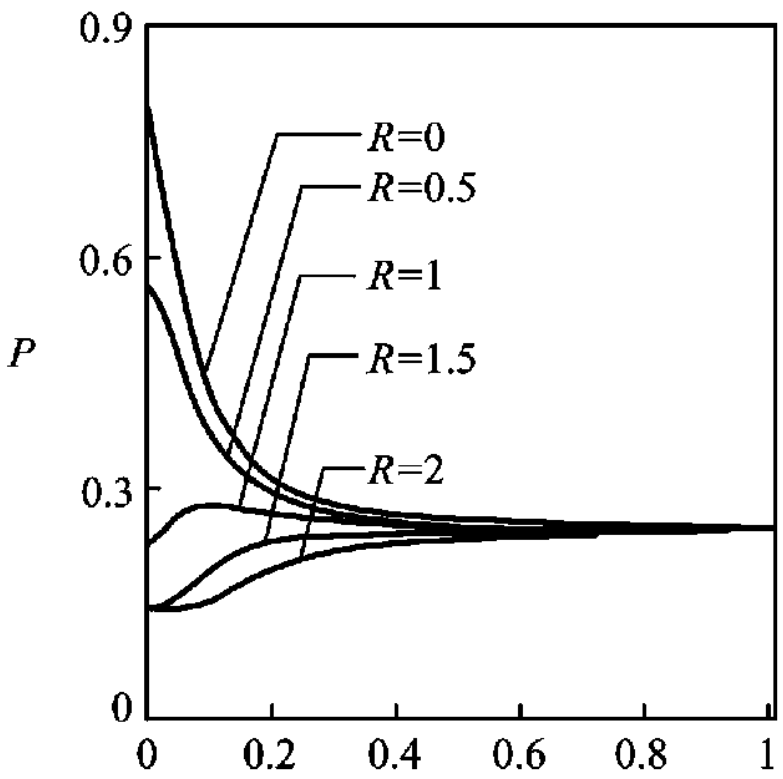


图 5.4.3　偏振度随 σ_c/σ_I 的变化

$R=0$、0.5、1、1.5 和 2

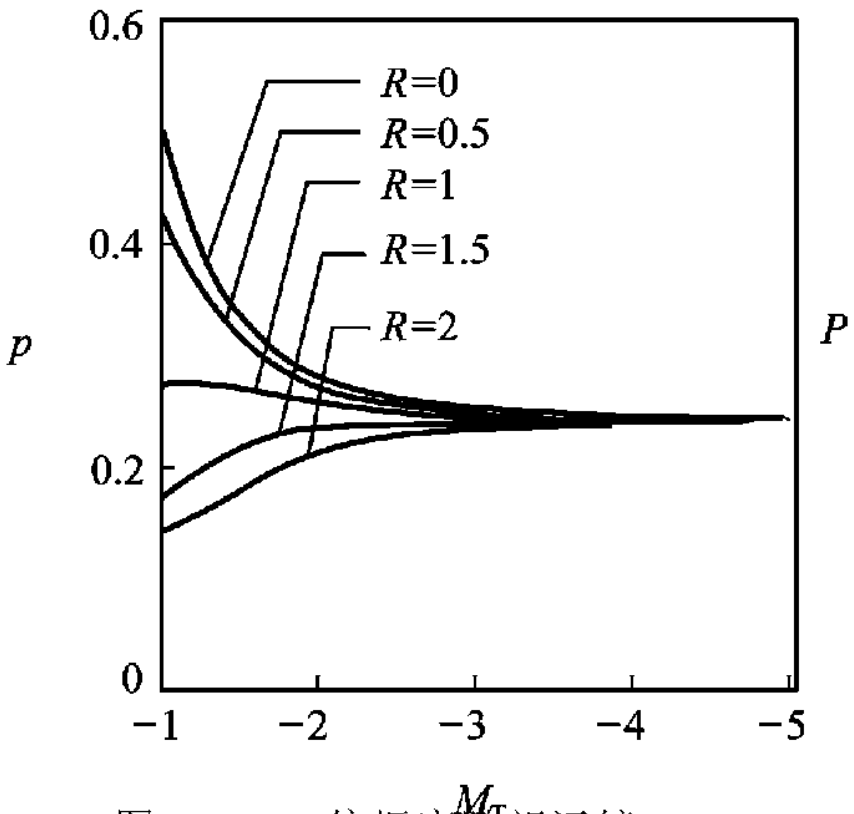


图 5.4.4　偏振度随望远镜放大率 M_T 的变化

$R=0$、0.5、1、1.5 和 2

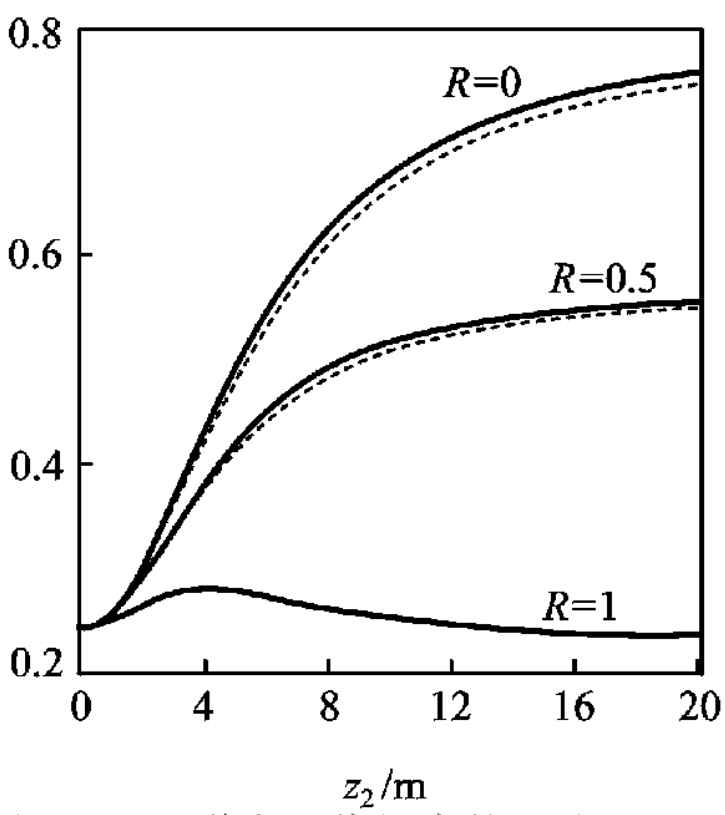


图 5.4.5　谱宽对偏振度的影响

$R=0$、0.5 和 1. 实线对应 $\delta=0$；虚线对应 $\delta=0.2$

习　　题

1. 证明交叉谱密度函数通过近轴*ABCD*光学系统的传输公式(5.1.21).

2. 用维格纳分布函数研究式(5.2.4)表征的高斯－谢尔模型光束通过近轴*ABCD*光学系统的变换规律.

3. 设用式(5.2.4)表征的高斯－谢尔模型光束入射到放置在 $z=0$ 面上的薄透镜上,研究其聚焦特性.

4. 研究高斯－谢尔模型光束在自由空间中传输时谱密度 $S(\omega)$式(5.1.20)的变化规律.

5. 由式(5.4.6)表征的矢量高斯－谢尔模型光束在自由空间中传输时偏振特性会发生变化吗？试做计算分析.

6. 在式(5.2.4)中令 $w(z)\to\infty$,$R(z)\to\infty$便得到谢尔模型光束.研究谢尔模型光束的变换特性.

参 考 文 献

[1] Goodman J W. Statistical Optics. New York: John Wiley & Sons, 1985

[2] Mandel L, Wolf E. Spectral coherence and concept of cross－spectral purity. J Opt Soc Am, 1976,66:529

[3] Wolf E. Coherence and radiometry. J Opt Soc Am, 1978,68:6

[4] Wolf E. New theory of partial coherence in the space－frequency domain. Part Ⅰ: spectra and cross spectra of steady－state source. J Opt Soc Am, 1982, 72:343

[5] Wolf E. New theory of partial coherence in the space－frequency domain. Part Ⅱ: spectra and cross spectra of steady－state source. J Opt Soc Am, 1986,3: 76

[6] Turunen J, Friberg A T. Matrix representation of Gaussian Schell－model beams in optical system. Opt & Laser Tech, 1986,18:619

[7] Friberg A T, Sodol R J. Propagation parameters of Gaussian Schell－model beams. Opt Commun, 1982,41:383

[8] Friberg A T, Turunen J. Imaging of Gaussian Schell－model sources. J Opt Soc Am A, 1988,5:713

[9] James D F V. Polarization of light radiated by black－body sources. Opt Commun, 1994,109:209

[10] Gori F. Matrix treatment for partially polarized, partially coherent beams. Opt Lett, 1998,23:241

[11] Agrawal G P, Wolf E. Propagation－induced polarization changes in partially

coherent optical beams. J Opt Soc Am A, 2000,17:2 019

[12] Lü B, Zhang B et al. Focusing of a Gaussian Schell－model beam through a circular lens. J Mod Optic, 1995,45:289

[13] Lü B, Zhang B et al. The intensity distribution of a Gaussian Schell－model beam focused by an aperture lens. J Mod Optic, 1995,42:523

[14] Zhang B, Lü B et al. Transformation of Gaussian Schell－model beam and their coherent－mode representation. J Opt, 1995,101:42

[15] Lü B, Zhang B. The integrated intensity of a Gaussian Schell－model beam focused by a lens. Optik, 1995,101:42

[16] Ding G, Yuan X et al. Propagation characteristics of the ten－parameter family of partially coherent general anisotropic Gaussian Schell－model (AGSM) beams passing through first－order optical systems. J Mod Optic, 2000,47:1 483

[17] Ding G, Lü B. Propagation of twisted Gaussian Schell－model beams through a misaligned first－order optical system. J Mod Optic, 2001,48:1 617

[18] Ding G, Lü B. Generalized Huygens－Fresnel diffraction integral for misaligned asymmetric first－order optical systems and decentered anisotropic Gaussian Schell－model beams. J Opt Soc Am A, 2002,19:485

[19] Pan L, Lü B. The spectral switch of partially coherent light in Young's experiment. IEEE J Quantum Electron, 2001,37:1 377

[20] Lü B, Pan L. Spectral switching of Gaussian Schell－model beams passing through an aperture lens. IEEE J Quantum Electron, 2002,38:340

[21] Lü B, Pan L. Propagation of vector Gaussian Schell－model beams through a paraxial optical *ABCD* system. Opt Commun, 2002,15:7

第六章　平顶光束

平顶光束指光强分布有一均匀平顶的光束，是在激光技术中广为应用的一类光束，它可由反射镜振幅呈超高斯函数变化或者带梯度相位镜的光腔产生，对高斯光束做空间整形等多种方法获得．本章研究用以描写平顶光束的三种数学－物理模型：超高斯光束、平顶高斯光束和平顶多高斯光束．平顶高斯光束的优点是其传输公式可写为解析的形式，本章以平顶高斯光束作为重点，分析平顶光束通过无光阑和有光阑近轴 $ABCD$ 光学系统的传输变换以及光束质量等问题．用将硬边光阑窗口函数展为有限个复高斯函数之和的方法，推导出了平顶高斯光束通过有光阑限制近轴 $ABCD$ 光学系统近似的解析传输公式．此外，还对这几种描述平顶光束的模型做了比较讨论．

§6.1　超高斯光束

一、超高斯光束不是波动方程在自由空间中的本征解

在柱坐标系中，$z=0$ 处超高斯光束的场分布可表为

$$E(r)=\exp\left[-\left(\frac{r}{w_0}\right)^N\right] \tag{6.1.1}$$

式中 w_0 和 N 分别为超高斯光束的束腰宽度和阶数，$N\geqslant 2$．$N=2$ 时为熟知的高斯光束，N 趋于无限大时对应于锐截止均匀平面波（图 6.1.1）．为简单起见，式中常数因子已略去．设在自由空间中，形如式（6.1.1）的超高斯光束传输距离 z 后场分布变为

$$E_2(r,z)=f_1(z)\exp\left[-f_2(z)\left(\frac{r}{w_0}\right)^N\right] \tag{6.1.2}$$

且

$$f_1(0)=f_2(0)=1 \tag{6.1.3}$$

将式（6.1.2）代入亥姆霍兹方程式（1.2.18），比较同阶幂系数

$$\left(\frac{r}{w_0}\right)^0 \text{项} \qquad \frac{\mathrm{d}^2 f_1(z)}{\mathrm{d}z^2}+k^2 f_1(z)=0 \tag{6.14a}$$

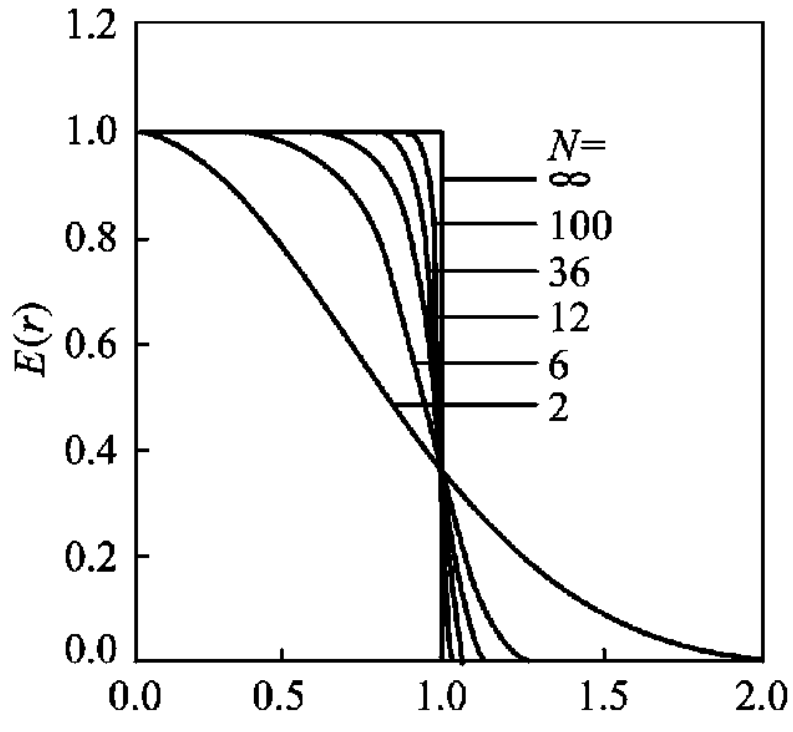


图 6.1.1 不同阶数超高斯光束的场分布

（$N=2$、∞分别为高斯光束和截断均匀平面波）

$$\left(\frac{r}{w_0}\right)^{n-2}\text{项} \qquad f_1(z)f_2(z)=0 \tag{6.1.4b}$$

$$\left(\frac{r}{w_0}\right)^{n}\text{项} \quad 2\frac{\mathrm{d}f_1(z)}{\mathrm{d}z}\cdot\frac{\mathrm{d}f_2(z)}{\mathrm{d}z}+f_1(z)\frac{\mathrm{d}f_2^2(z)}{\mathrm{d}z^2}=0 \tag{6.1.4c}$$

$$\left(\frac{r}{w_0}\right)^{2(n-1)}\text{项} \quad f_1(z)f_2^2(z)=0 \tag{6.1.4d}$$

$$\left(\frac{r}{w_0}\right)^{2n}\text{项} \qquad f_1(z)\left(\frac{\mathrm{d}f_2(z)}{\mathrm{d}z}\right)^2=0 \tag{6.1.4e}$$

由式(6.1.4)立即可知，亥姆霍兹方程不能容许有式(6.1.1)的解，因为式(6.1.4b)和式(6.1.4d)直接与式(6.1.3)相矛盾.

用类似的方法可以证明，形如式(6.1.1)的超高斯光束也不是亥姆霍兹方程在缓变振幅近似下的式(1.3.21)的解.

二、超高斯光束在自由空间中的传输

超高斯光束在自由空间中的传输由柯林斯公式描述，通过距离 z 后的传输公式为

$$E_2(r_2,z)=U(r_2,z)\exp\{\mathrm{i}[kz+\phi(r_2,z)]\} \tag{6.1.5}$$

式中

$$U(r_2,z)=2\pi F\int_0^{+\infty}\exp(-v^N)\mathrm{J}_0\left(2\pi Fv\frac{r_2}{w_0}\right)\exp(\mathrm{i}\pi Fv^2)v\mathrm{d}v \tag{6.1.6}$$

$$\phi(r_2, z) = \frac{kr^2}{2z} + \arg\left\{\int_0^{+\infty} \exp(-v^N) \mathrm{J}_0\left(2\pi F v \frac{r_2}{w_0}\right) \exp(\mathrm{i}\pi F v^2)\, v \mathrm{d}v\right\} \tag{6.1.7}$$

J_0 为零阶贝塞耳函数，F 为与光束有关的菲涅耳数，

$$F = \frac{w_0^2}{\lambda z} \tag{6.1.8}$$

由式(6.1.5)得光强分布

$$I_2(r_2, z) = U(r_2, z) U^*(r_2, z) \tag{6.1.9}$$

利用式(6.1.5)～式(6.1.9)所做的数值计算例见图 6.1.2 和图 6.1.3. 由图知，与高斯光束不同，超高斯光束在自由空间中传输时，其光强和相位分布都会发生畸变，在近场尤为显著，到远场后畸变变小，这是在实际工作中应当注意的.

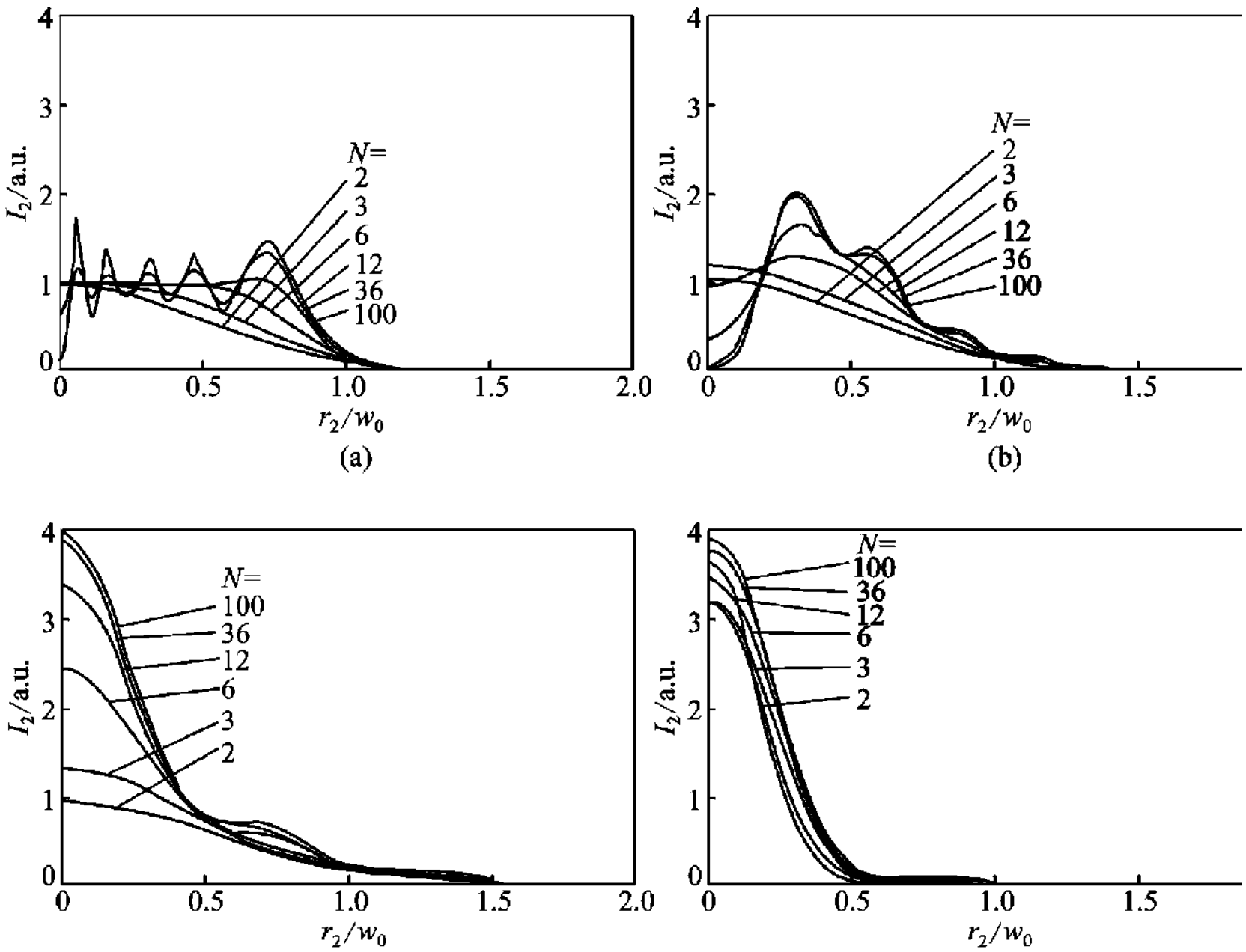


图 6.1.2　超高斯光束和高斯光束在自由空间中传输时的光强分布 I_2

(a.u.—任意单位)

(a) $F=10$; (b) $F=2$; (c) $F=1$; (d) $F=0.1$

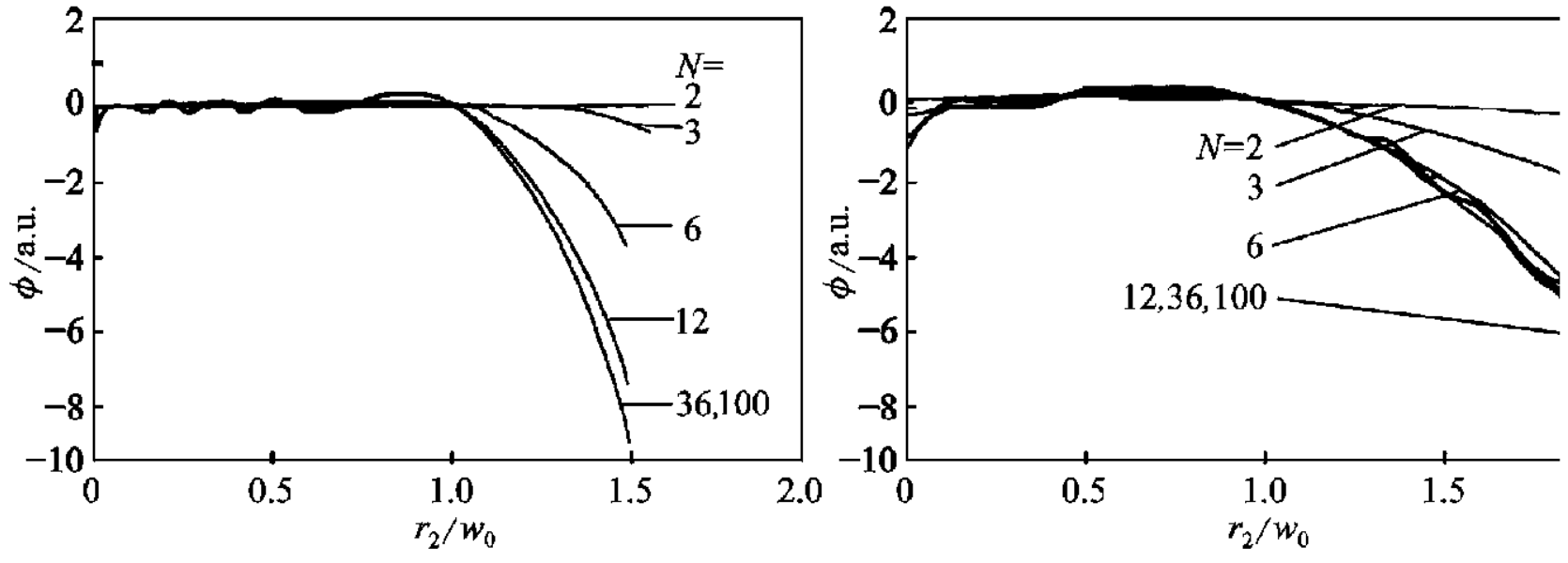


图 6.1.3 超高斯光束和高斯光束在自由空间中传输时的相位分布 ϕ

(a) $F=10$; (b) $F=2$; (c) $F=1$; (d) $F=0.1$

三、超高斯光束在无限大孔径光学系统中传输时保持形状不变条件

超高斯光束通过近轴 $ABCD$ 光学系统的传输公式为

$$E_2(r_2,z)=\frac{\mathrm{i}k}{B}\exp(-\mathrm{i}kz)\int\exp\left[-\left(\frac{r_1}{w_0}\right)^N\right]\cdot J_0\left(\frac{kr_2r_1}{B}\right)\exp\left[-\frac{\mathrm{i}k}{2B}(Ar_1^2+Dr_2^2)\right]r_1\mathrm{d}r_1 \tag{6.1.10}$$

对成像光学系统 $B=0$，当式(6.1.10)积分限趋于无限大时，由 δ 函数积分公式得

$$E_2(r_2,z)=\frac{1}{A}\exp\left\{-\mathrm{i}k\left[z+\frac{C}{2A}r_2^2\right]\right\}\exp\left[-\left(\frac{r_2}{|A|w_0}\right)^N\right] \tag{6.1.11}$$

这样，当超高斯光束通过无限大孔径成像光学系统时，在像面上保持其形状和阶次不变，但振幅乘上一个因子$\frac{1}{A}$，光斑半径变为 $|A|w_0$，其相

位增加一个径向调制项$\frac{C}{2A}r_2^2$.

一个简单的透镜成像光学系统示意于图 6.1.4. 设物距和像距分别为 L_1、L_2，透镜 L 的焦距为 f，由物面 RP_1 到像面 RP_2 的变换矩阵为

$$M=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-\frac{L_2}{f} & L_1+L_2-\frac{L_1L_2}{f}\\ -\frac{1}{f} & 1-\frac{L_1}{f}\end{bmatrix} \tag{6.1.12}$$

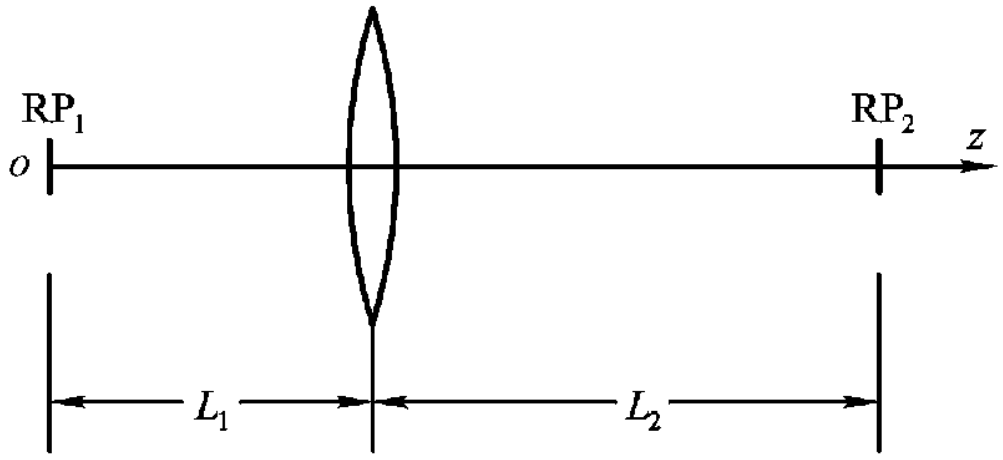


图 6.1.4 透镜成像光学系统

令 $B=0$，有

$$\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}=\frac{1}{f} \tag{6.1.13}$$

在像面处的场分布为

$$E(r_2,L_1+L_2)=-\frac{L_1}{L_2}\exp\left\{-\mathrm{i}k\left[(L_1+L_2)+\frac{L_1}{2L_2f}r_2^2\right]\right\}\exp\left[-\left(\frac{L_1r_2}{w_0L_2}\right)^N\right] \tag{6.1.14}$$

四、超高斯光束的 M^2 因子

在柱坐标系下，用二阶矩定义的光束束腰宽度 W_0 和远场发散角 θ 为

$$W_0^2=\frac{2\int_0^{+\infty}r^3\mid E(r,0)\mid^2\mathrm{d}r}{P_0} \tag{6.1.15}$$

$$\theta^2=\frac{2\lambda^2\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_0^{+\infty}\left|\frac{\partial E(r,0)}{\partial r}\right|^2r\mathrm{d}r}{P_0} \tag{6.1.16}$$

式中

$$P_0=\int_0^{+\infty}\mid E(r,0)\mid^2r\mathrm{d}r \tag{6.1.17}$$

将式(6.1.1)代入式(6.1.15)和式(6.1.17),直接的积分计算求得

$$W_0^2 = \frac{2w_0^2\Gamma(4/N)}{4^{1/N}\Gamma(2/N)} \tag{6.1.18}$$

$$\theta^2 = \frac{4^{1/N}N^2\lambda^2}{8\pi^2 w_0^2\Gamma(2/N)} \tag{6.1.19}$$

式中 Γ 为 γ 函数.

由式(6.1.18)、式(6.1.19)得

$$M^2 = \frac{\pi}{\lambda}\sqrt{W_0^2\theta^2} = \frac{N\sqrt{\Gamma(4/N)}}{2\Gamma(2/N)} \tag{6.1.20}$$

式(6.1.20)说明,超高斯光束的 M^2 因子与束腰宽度 w_0 无关,由阶数 N 决定.图 6.1.5 给出了 M^2 因子随 N 的变化,由图知,超高斯光束的 M^2 因子随 N 的增加而增加.当 $N=2$ 时,化为高斯光束,$M^2=1$.

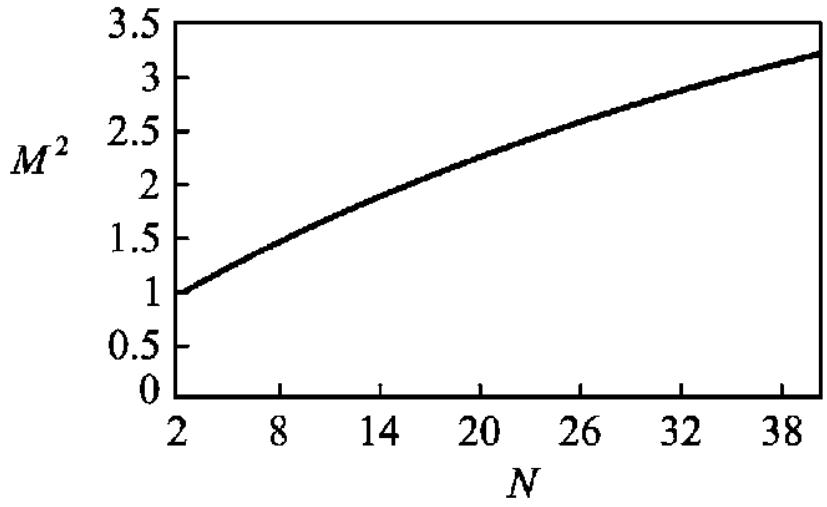


图 6.1.5 柱坐标系中超高斯光束的 M^2 因子随 N 的变化

类似地,在直角坐标系中,二维超高斯光束在 $z=0$ 处的场分布可表示为

$$E(x,0) = \exp\left[-\left(\frac{x}{w_0}\right)^N\right] \tag{6.1.21}$$

利用式(3.1.10)和式(3.2.1)可求出二维超高斯光束的 M^2 因子为

$$M^2 = \frac{N\sqrt{\Gamma(2-1/N)\Gamma(3/N)}}{\Gamma(1/N)} \tag{6.1.22}$$

§6.2 平顶高斯光束

一、平顶高斯光束的基本概念

在直角坐标系中,二维平顶高斯光束的场分布由下式定义给出

$$E(x,0)=\exp\left[-\frac{(N+1)x^2}{w_0^2}\right]\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}\left[\frac{(N+1)x^2}{w_0^2}\right]^n,\quad N=0,1,2\cdots \tag{6.2.1}$$

式中 w_0 为与平顶高斯光束束腰宽度有关的量，其物理意义为场振幅等于中心(0,0)振幅 $\exp[-(N+1)]\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}(N+1)^n$ 处的宽度，N 为阶数. 当 $N=0$ 时，式(6.2.1)化为高斯光束的场分布公式.

利用幂级数公式

$$x^{2k}=\frac{(2k)!}{2^{3k}}\sum_{n=0}^{k}\frac{1}{(k-n)!\ (2n)!}\mathrm{H}_{2n}(\sqrt{2}x),\quad k=0,1,2\cdots \tag{6.2.2}$$

可将式(6.2.1)用高斯函数和有限个厄米函数之和的乘积形式表示出来

$$E(x,0)=\exp\left[-\frac{(N+1)x^2}{w_0^2}\right]\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(2n)!}\sum_{k=n}^{N}\frac{1}{2^{3k}}\frac{(2k)!}{k!\ (k-n)!}\mathrm{H}_{2n}\left(\frac{\sqrt{2(N+1)}x}{w_0}\right) \tag{6.2.3}$$

类似地，在柱坐标系中平顶高斯光束在 $z=0$ 处的场分布为

$$E(r,0)=\exp\left[-\frac{(N+1)r^2}{w_0^2}\right]\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}\left[\frac{(N+1)r^2}{w_0^2}\right]^n \tag{6.2.4}$$

式中 N、w_0 分别为平顶高斯光束的阶数和光束参数.

利用展开式

$$r^{2k}=\frac{k!}{2^k}\sum_{n=0}^{k}(-1)^n\binom{k}{n}\mathrm{L}_k(2r^2),\quad k=0,1,2\cdots \tag{6.2.5}$$

可将式(6.2.4)表示为高斯函数和有限个拉盖尔函数之和的乘积形式：

$$E(r,0)=\exp\left[-\frac{(N+1)r^2}{w_0^2}\right]\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\sum_{m=n}^{N}\frac{1}{2^m}\binom{m}{n}\mathrm{L}_n\left[\frac{2(N+1)r^2}{w_0^2}\right] \tag{6.2.6}$$

二、平顶高斯光束通过近轴 *ABCD* 光学系统的传输

本节讨论直角坐标系下平顶高斯光束通过无光阑限制近轴 *ABCD* 光学系统的传输问题. 对柱坐标系情况可做类似处理.

将式(6.2.1)代入柯林斯公式，利用积分公式

$$\int_0^{+\infty}x^{2n}\exp(-\alpha^2x^2)\cos(xy)\mathrm{d}x=(-1)^n\pi^{1/2}2^{-(2n+1)}\alpha^{-(2n+1)}\exp\left(-\frac{y^2}{4\alpha^2}\right)\mathrm{H}_{2n}\left(\frac{y}{2\alpha}\right) \tag{6.2.7}$$

得到

$$E(x,z)=\frac{\sqrt{\frac{\mathrm{i}k}{2B}}\exp\left(-\frac{\mathrm{i}kD}{2B}x^2\right)}{\sqrt{\frac{N+1}{w_0^2}+\frac{\mathrm{i}kA}{2B}}}\exp\left[-\frac{\left(\frac{kx}{B}\right)^2}{4\left(\frac{N+1}{w_0^2}+\frac{\mathrm{i}kA}{2B}\right)}\right]\cdot$$

$$\sum_{n=0}^{N}\left(-\frac{1}{4}\right)^n\frac{1}{n!}\left(\frac{N+1}{w_0^2}\right)^n\left(\frac{N+1}{w_0^2}+\frac{\mathrm{i}kA}{2B}\right)^{-n}\mathrm{H}_{2n}\left[\frac{\frac{kx}{B}}{2\sqrt{\frac{N+1}{w_0^2}+\frac{\mathrm{i}kA}{2B}}}\right] \tag{6.2.8}$$

式(6.2.8)为平顶高斯光束通过无光阑限制近轴 $ABCD$ 光学系统解析的传输公式,式中略去了不重要的相位因子.解析公式的一个优点是可以直接用以做直观的物理分析.例如,由式(6.2.8)可知,若一平顶高斯光束通过两个近轴 $\begin{bmatrix}A_i & B_i\\ C_i & D_i\end{bmatrix}(i=1,2)$ 光学系统,其传输矩阵元满足

$$\frac{A_1}{B_1}=\frac{A_2}{B_2} \tag{6.2.9}$$

则有相似的光强分布,而矩阵元 B_i 则起将横向坐标 x 放大或缩小一个因子 $1/|B_i|$ 的作用.定义系统的广义菲涅耳数为

$$F=\frac{w_0^2A}{\lambda B} \tag{6.2.10}$$

式(6.2.8)也表示平顶高斯光束通过两个 $ABCD$ 光学系统时,若

$$F_1=F_2 \tag{6.2.11}$$

成立,则有相似的光强分布.

式(6.2.8)是将平顶高斯光束作为一个整体,从式(6.2.1)出发推出的传输方程.另一方面,也可将平顶高斯光束看成是有限个厄米-高斯光束(或拉盖尔-高斯光束)之和,从式(6.2.3)出发,利用柯林斯公式得到

$$E(x,z)=\left(A+\frac{B}{q_0}\right)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{\mathrm{i}kx^2}{2q}\right)\sum_{n=0}^{N}c_{2n}\left(\frac{A-B/q_0}{A+B/q_0}\right)^n\mathrm{H}_{2n}\left(\frac{\sqrt{2}}{W}x\right) \tag{6.2.12}$$

式中

$$c_{2n}=\frac{1}{(2n)!}\left[\sum_{k=n}^{N}\frac{1}{2^{3k}}\frac{(2k)!}{k!(k-n)!}\right] \tag{6.2.13}$$

$$W^2=\frac{w_0^2}{N+1}\left\{A^2+\left[\frac{B\lambda(N+1)}{\pi w_0^2}\right]^2\right\} \tag{6.2.14}$$

$$q_0=\frac{\mathrm{i}\pi w_0^2}{\lambda(N+1)} \tag{6.2.15}$$

复参数 q 与 q_0 满足 $ABCD$ 定律

$$\frac{1}{q}=\frac{C+D/q_0}{A+B/q_0} \tag{6.2.16}$$

式(6.2.12)虽然与式(6.2.8)在形式上不同，但大量数值计算表明，从两式得到的结果是完全一致的. 图 6.2.1 给出了 $N=10$，$w_0=1$ mm，$\lambda=1.06$ μm的平顶高斯光束通过自由空间和高斯光阑后的光强分布. 高斯光阑参数 $a=w_0\sqrt{2}w_0$. 图 6.2.1(a)为 $z=0$ 处的光强分布，它说明，平顶高斯光束在通过高斯光阑后，光强分布被“软化”了，更接近高斯分布，

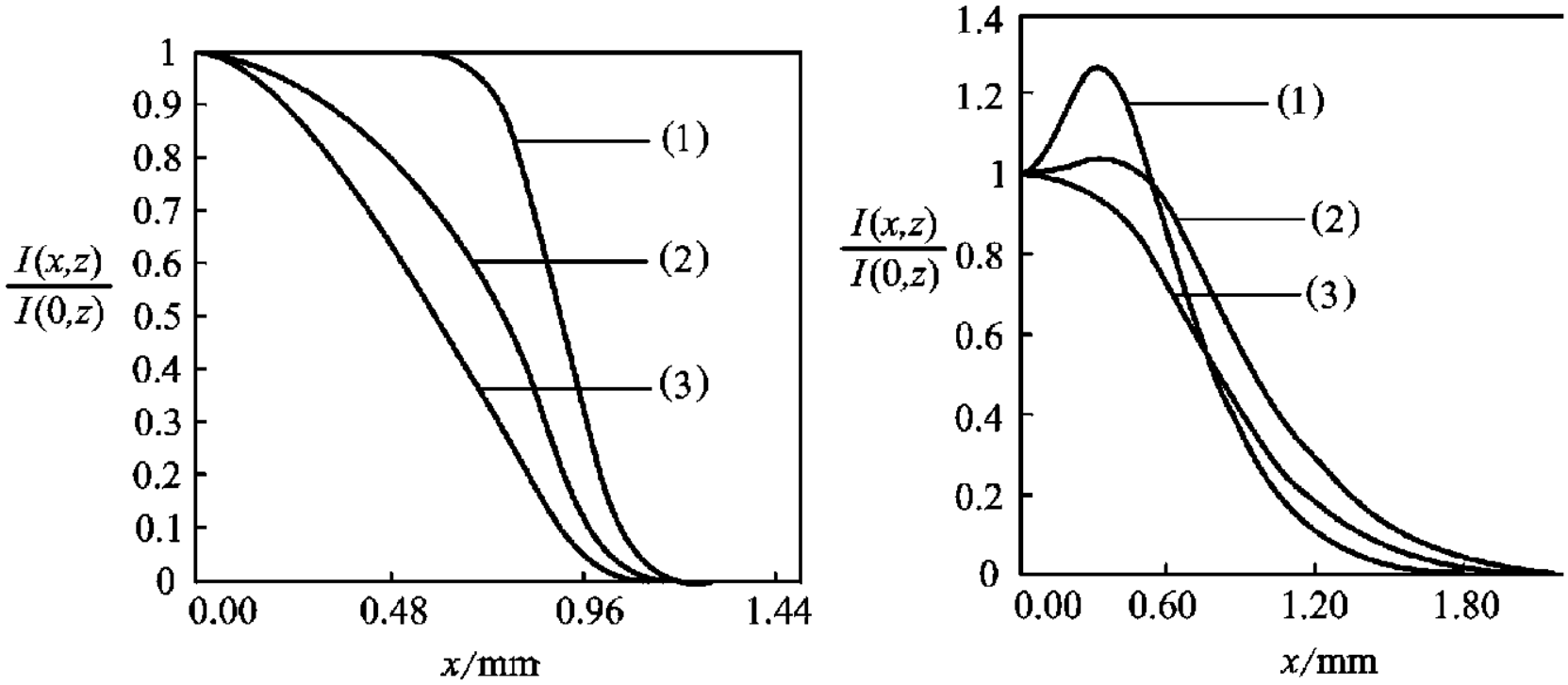


图 6.2.1　$N=10$，$w_0=1$ mm，$\lambda=1.06$ μm的平顶高斯光束的相对光强分布 $\frac{I(x,z)}{I(0,z)}$

(1)　自由空间中的相对光强分布

(2)　通过 $a=\sqrt{2}w_0=1.41$ mm 的振幅型高斯光阑后的相对光强分布

(3)　通过 $a=w_0=1$ mm 的振幅型高斯光阑后的相对光强分布

(a) $z=0$；(b) $F=1.5$；(c) $F=0.01$

且与高斯光阑宽度 a 大小有关.在菲涅耳衍射区(菲涅耳数 $F=\frac{w_0^2}{\lambda z}=1.5$,图 6.2.1(b)),平顶高斯光束的形状发生了变化,中心出现了凹陷,但在远场($F=0.01$,图 6.2.1(c)),三种情况有类似的分布,仅平顶高斯光束有大的旁瓣.

三、平顶高斯光束的 M^2 因子和 K 参数

将式(6.2.1)代入式(3.1.10)、式(3.2.1)得到

$$W_x^2=\frac{2w_0^2}{N+1}\cdot\frac{\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N}\frac{1}{n_1!n_2!}\Gamma(n_1+n_2+1.5)2^{-(n_1+n_2)}}{\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N}\frac{1}{n_1!n_2!}\Gamma(n_1+n_2+0.5)2^{-(n_1+n_2)}} \tag{6.2.17}$$

$$\theta_x^2=\frac{4\cdot 2^{-(2N+1)}(N+1)\lambda^2}{\pi^2 w_0^2 N!^2}\frac{\Gamma(2N+1.5)}{\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N}\frac{2^{-(n_1+n_2)}}{n_1!n_2!}\Gamma(n_1+n_2+0.5)} \tag{6.2.18}$$

由式(6.2.17)、式(6.2.18)和 M^2 因子公式得

$$M^2=\frac{\pi}{\lambda}\sqrt{W_x^2\theta_x^2}=\frac{2^{1-N}}{N!}\frac{\left\{\Gamma(2N+1.5)\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N}\frac{2^{-(n_1+n_2)}}{n_1!n_2!}\Gamma(n_1+n_2+1.5)\right\}^{\frac{1}{2}}}{\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N}\frac{2^{-(n_1+n_2)}}{n_1!n_2!}\Gamma(n_1+n_2+0.5)} \tag{6.2.19}$$

式(6.2.19)表明平顶高斯光束的 M^2 因子仅与阶数 N 有关,且计算表明 M^2 因子随 N 的增大而增大.

平顶高斯光束的 K 参数可由式(3.2.12)和式(6.2.12)求得,将式(6.2.12)代入强度矩公式

$$\langle x^n\rangle=\frac{1}{P_0}\int_{-\infty}^{+\infty}|E(x,z)|^2\mathrm{d}x,\quad n=2,4 \tag{6.2.20}$$

求出 $\langle x^4\rangle$、$\langle x^2\rangle$,再代入式(3.2.12)就得到 K 参数.略去繁冗的中间积分计算过程,最后结果可表示为

$$K=\frac{\left[\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N}\left(\frac{2^{-n-m}}{n!\,m!}\right)\Gamma(n+m+0.5)\right]\left\{\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N}\left[2^{-n-m}\frac{(b_1+b_2+b_3)}{n!\,m!}\right]\Gamma(n+m+0.5)\right\}}{\left\{\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N}\left(\frac{2^{-n-m}}{n!\,m!}\right)\left[\frac{(2n+2m+1)}{2}-\frac{4m(2m-1)\cos^2\theta}{(2n+2m-1)}\right]\Gamma(n+m+0.5)\right\}^2} \tag{6.2.21}$$

式中

$$b_1=\frac{(2n+2m+1)(2n+2m+3)}{4} \tag{6.2.22}$$

$$b_2=-2(-m+8m^2-n-4mn)\cos^2\theta \tag{6.2.23}$$

$$b_3=\frac{16m(m-1)(2m-3)(2m-1)\cos^4\theta}{(2n+2m-1)(2n+2m-3)} \tag{6.2.24}$$

$$\theta=a\tan\frac{\pi F}{N+1} \tag{6.2.25}$$

F 为广义菲涅耳数式(6.2.10).

式(6.2.21)为平顶高斯光束的 K 参数的一般公式.与 M^2 因子是传输常数不同,平顶高斯光束的 K 参数在传输中要发生变化,且与光束阶数 N 和广义菲涅耳数 F 有关.令 $F\to\infty$,对应于在束腰 $z=0$ 处或像面($B=0$),式(6.2.21)变为

$$K_{F\to\infty}=\frac{\left[\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N}\frac{2^{-n-m}}{n!m!}\Gamma(n+m+0.5)\right]\left[\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N}\frac{2^{-n-m}}{n!m!}\Gamma(n+m+2.5)\right]}{\left[\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N}\frac{2^{-n-m}}{n!m!}\Gamma(n+m+1.5)\right]^2} \tag{6.2.26}$$

在式(6.2.21)中令 $N=0$(高斯光束),得到 $K=3$.

数值计算例见图 6.2.2、图 6.2.3.图 6.2.2 给出了束腰处平顶高斯光束的 K 参数随阶数 N 的变化.由图知,当 $N=0$ 时,$K=3$,随着 N 的增加,K 逐渐减小,这意味着光强剖面变得平坦,当 $N\to\infty$ 时,$K_\infty=1.8$,对应于截断平面波的 K 参数值.K 参数随广义菲涅耳数的变化见图 6.2.3.从图 6.2.3(a)看出,当 $N=1$、2、3 时,$K-1/F$ 曲线上有三个极值

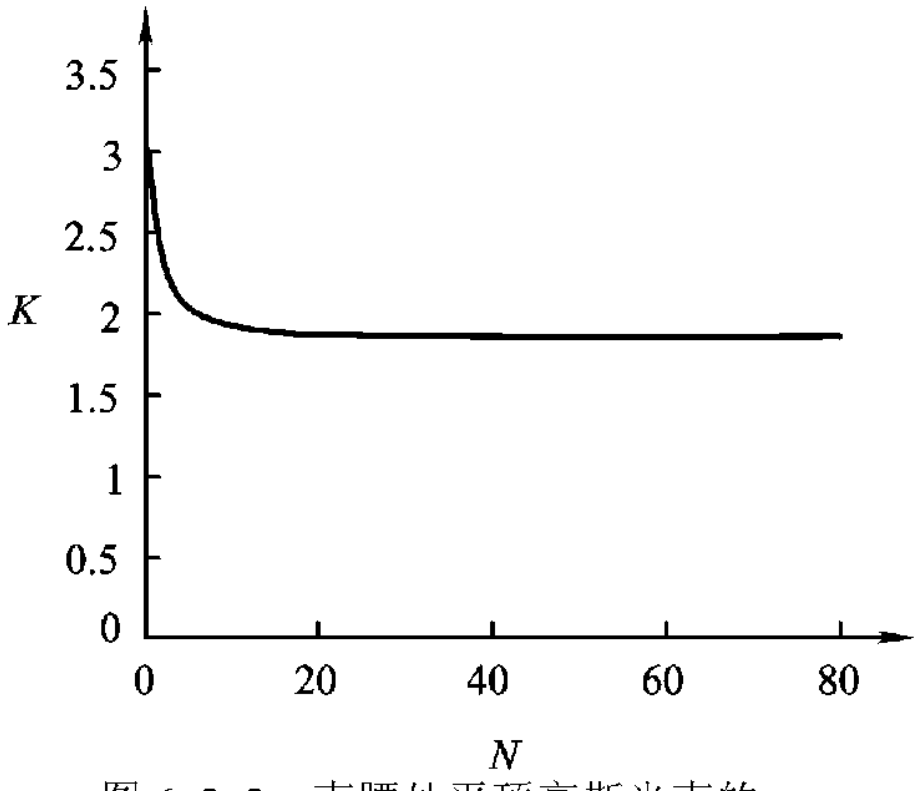


图 6.2.2　束腰处平顶高斯光束的 K 参数随阶数 N 的变化

点，在 $1/F=0$ 处有一个极小值，对 $N=1$、2、3 分别为 $K_{\min}=2.44$、2.23 和 2.12，而在 $1/F=\pm 4.71$（$N=1$）、± 5.91（$N=2$）和 ± 8.46（$N=3$）处有极大值 $K_{\max}=4.26$、5.23 和 6.05. K 参数随着 $1/|F|$ 继续增加而减小，最后趋近于渐近值 $K_a=3.96$（$N=1$）、5.06（$N=2$）、和 6.01（$N=3$），这对应于(6.2.21)式中 $F=0$ 的值. 图 6.2.3(b)说明，当 $N\geqslant 4$ 时 $K-1/F$ 曲线上仅在 $1/F=0$ 处有一个极小值. K 参数随着 $1/|F|$ 增加而减小并趋于渐近值 $K_a=6.85$（$N=4$）、10.70（$N=10$）、和 15.20（$N=20$）.

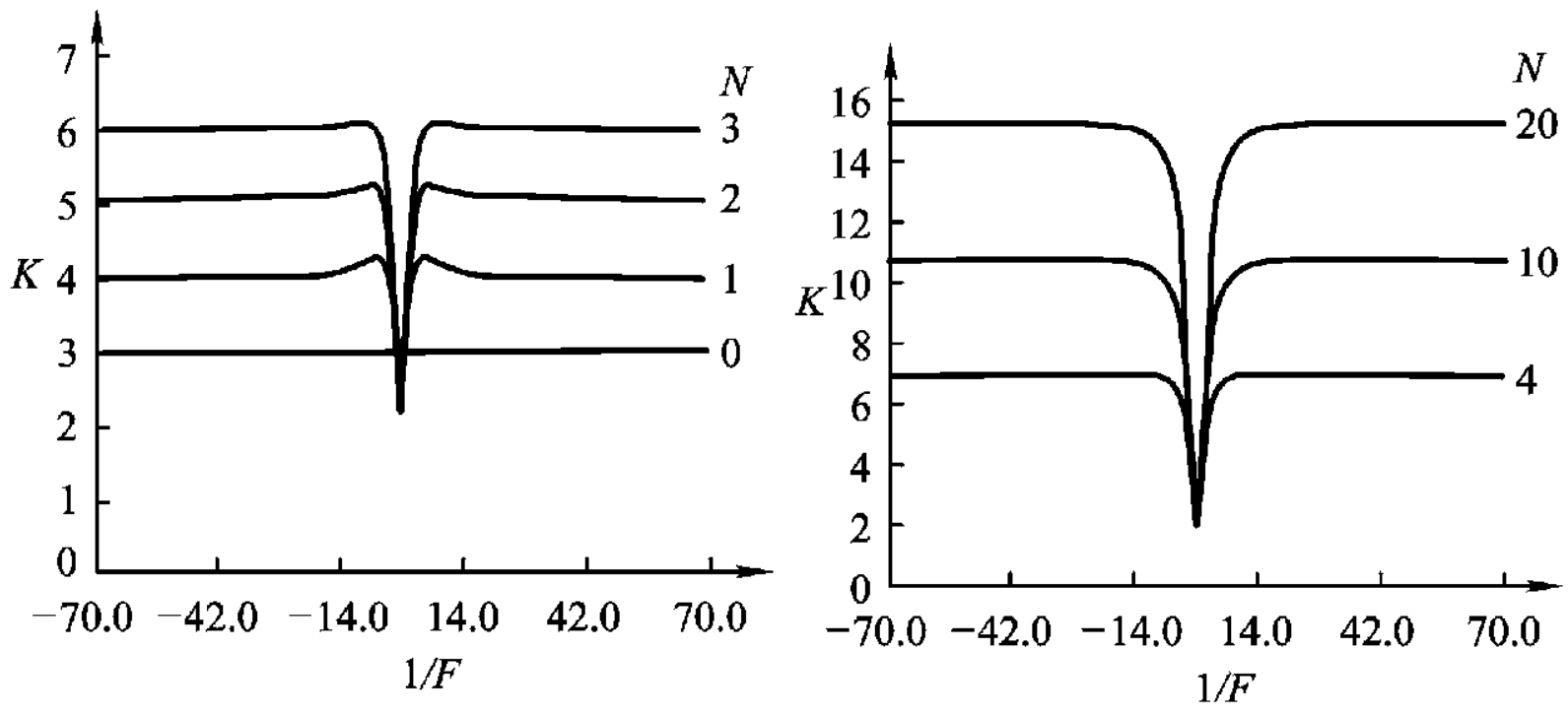


图 6.2.3 平顶高斯光束的 K 参数随广义菲涅耳数的变化

(a) $N=0,1,2,3$； (b) $N=4,10,20$

§6.3 有光阑限制平顶高斯光束

一、平顶高斯光束通过有光阑限制近轴 *ABCD* 光学系统的传输公式

在直角坐标系中，设 $z=0$ 处有一全宽度为 $2a$ 的硬边光阑，其窗口函数可表示为

$$\mathrm{rect}(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant a\\ 0, & |x|>a\end{cases} \tag{6.3.1}$$

式(6.3.1)可用有限个复高斯函数之和来逼近，即

$$\mathrm{rect}(x)=\sum_{m=1}^{M}A_m\exp\left(-\frac{B_m x^2}{a^2}\right) \tag{6.3.2}$$

复高斯函数的式中系数 A_m、B_m 和项数 m 见表 6.3.1. 使用式(6.3.2)的优点是它较好地描述了硬边光阑对入射光束振幅和相位的影响，并且，利用式(6.3.2)可以将一些光束通过有硬边光阑限制 *ABCD* 系统的传输表示为解析的形式.

表 6.3.1　复高斯函数的系数 A_m、B_m 和项数 m

m	A_m	B_m
1	2.029 7 − 0.396 47i	3.722 7 − 0.130 38i
2	0.067 33 − 0.004 17i	3.033 1 + 15.467 i
3	−0.291 08 − 0.109 13i	2.247 4 − 4.527 5i
4	0.009 01 − 0.015 54i	2.336 6 + 21.301i
5	0.117 51 + 0.211 08i	3.462 5 + 9.799 9i
6	−0.939 41 + 0.307 43i	3.773 1 + 4.531 8i

将式(6.3.1)、(6.3.2)代入柯林斯公式,积分之,得到

$$E(x,z)=\frac{w_0}{\sqrt{N+1}}\sqrt{\frac{\mathrm{i}k}{2B}}\exp\left(-\frac{\mathrm{i}kD}{2B}x^2\right)\sum_{m=1}^{M}A_m\exp\left[-\frac{\left(\frac{kx}{2B}\right)^2}{\frac{N+1}{w_0^2}+\frac{\mathrm{i}kA}{2B}+\frac{B_m}{a^2}}\right]\cdot$$

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{4}\right)^n\left[\frac{\frac{N+1}{w_0^2}}{\frac{N+1}{w_0^2}+\frac{\mathrm{i}kA}{2B}+\frac{B_m}{a^2}}\right]^{n+1/2}\mathrm{H}_{2n}\left(\frac{\frac{kx}{2B}}{\sqrt{\frac{N+1}{w_0^2}+\frac{\mathrm{i}kA}{2B}+\frac{B_m}{a^2}}}\right)\tag{6.3.3}$$

式(6.3.3)为平顶高斯光束通过有硬边光阑限制近轴 $ABCD$ 光学系统近似的解析传输公式.容易看出,令 $a\to\infty$,式(6.3.3)就化为无光阑限制的传输公式(6.2.8).

图6.3.1给出了 $N=15$ 的平顶高斯光束在自由空间中受硬边光阑

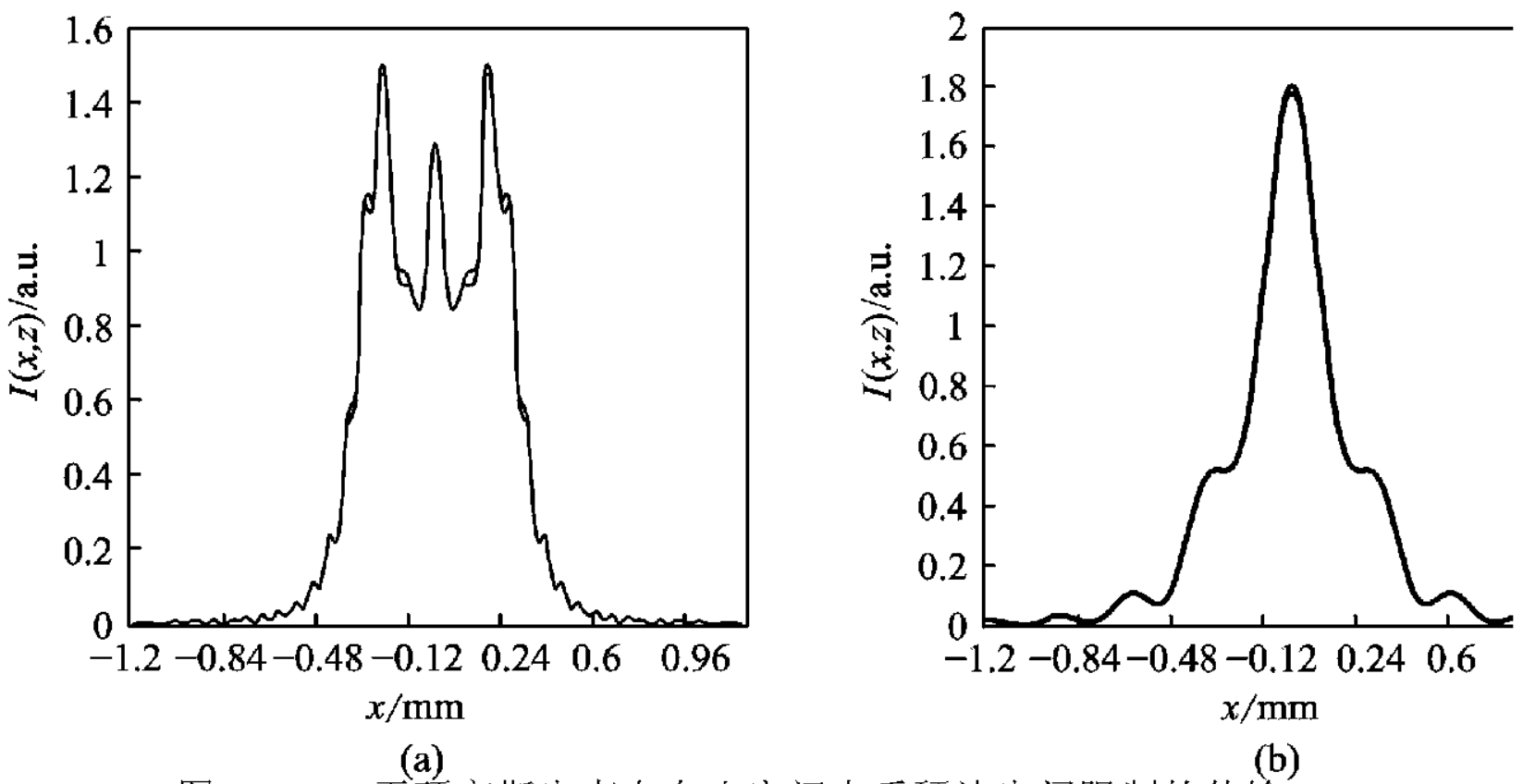


图 6.3.1　平顶高斯光束在自由空间中受硬边光阑限制的传输

(a) $1/F=0.33$;　(b) $1/F=1.33$

限制的传输，计算参数为 $\lambda=1.06\ \mu\mathrm{m}$，截断参数 $\alpha=a/w_0=0.5$. 图中实线和虚线分别表示利用式(6.3.3)和用柯林斯公式直接进行数值积分的结果，二者符合甚好. 除了在离光阑很近的范围外，近似公式(6.3.3)可以较好地描述受光阑限制平顶高斯光束的传输变换.

二、有光阑限制平顶高斯光束的广义 M^2 因子

如在第三章所述，当有硬边光阑衍射时，M^2 因子的计算遇到发散困难. 本节用广义截断二阶矩的方法计算有光阑限制平顶高斯光束的广义 M^2 因子.

截断二阶矩的定义为

$$\langle x^2\rangle=\frac{\int_{-a}^{a}x^2\mid E(x)\mid^2\mathrm{d}x}{P_a} \tag{6.3.4}$$

$$\langle\theta^2\rangle=\frac{\int_{-a}^{a}\left|\frac{\partial E(x)}{\partial x}\right|^2\mathrm{d}x}{k^2P_a}+\frac{4}{k^2P_aa}\left[\mid E(a)\mid^2+\mid E(-a)\mid^2\right] \tag{6.3.5}$$

$$\langle x\theta\rangle=\frac{\int_{-a}^{a}\left[x\left(\frac{\partial E(x)}{\partial x}\right)^*E(x)-x\frac{\partial E(x)}{\partial x}E(x)^*\right]\mathrm{d}x}{2\mathrm{i}kP_a} \tag{6.3.6}$$

式中

$$P_a=\int_{-a}^{a}\mid E(x)\mid^2\mathrm{d}x \tag{6.3.7}$$

为进入全宽度 $2a$ 硬边光阑内的功率.

将式(6.2.1)代入式(6.3.4)～式(6.3.7)，计算得到

$$\langle x^2\rangle=2^{-3/2}\frac{w_0^3}{(N+1)^{3/2}}\cdot\frac{\bar{B}}{P_a} \tag{6.3.8}$$

$$\langle\theta^2\rangle=\frac{\sqrt{N+1}}{w_0}\frac{2^{1/2}}{k^2P_0}\cdot\left(\bar{C}+\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{N+1}}\cdot\frac{I_a}{\alpha}\right) \tag{6.3.9}$$

$$\langle x\theta\rangle=0 \tag{6.3.10}$$

式中

$$P_a=2^{-\frac{1}{2}}\frac{w_0}{\sqrt{N+1}}\bar{A} \tag{6.3.11}$$

$$I_a=\mid E(a,0)\mid^2=\exp\left[-2(N+1)\alpha^2\right]\left\{\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}\left[(N+1)\alpha^2\right]^n\right\}^2 \tag{6.3.12}$$

$$\bar{A}=\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N}\frac{2^{-(n+m)}}{n!\ m!}\gamma(n+m+0.5,2(N+1)\alpha^2) \tag{6.3.13}$$

$$\bar{B}=\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N}\frac{2^{-(n+m)}}{n!\ m!}\gamma(n+m+1.5,2(N+1)\alpha^2) \tag{6.3.14}$$

$$\bar{C}=\frac{2^{-2N}}{N!^2}\gamma(2N+1.5,2(N+1)\alpha^2) \tag{6.3.15}$$

γ 为非完全 γ 函数.将式(6.3.8)～式(6.3.10)代入式

$$\langle x^2\rangle\langle\theta^2\rangle-\langle x\theta\rangle=(M_{\mathrm{G}}^2/2k)^2 \tag{6.3.16}$$

中,得到有光阑限制平顶高斯光束的广义 M^2 因子,

$$M_{\mathrm{G}}^2=\frac{2\sqrt{\bar{B}\left(\bar{C}+4\sqrt{2}I_a/\alpha\sqrt{N+1}\right)}}{\bar{A}} \tag{6.3.17}$$

式(6.3.17)表明,广义 M^2 因子与平顶高斯光束阶数 N 和截断参数 α 有关,可以证明,在式(6.3.17)中令截断参数 $\alpha\to\infty$,($a\to\infty$)就得到式(6.2.19).特别是,对有光阑限制均匀平面波

$$M_{\mathrm{G}}^2=4\sqrt{3}/3\approx 2.31 \tag{6.3.18}$$

式(6.3.18)的物理意义是:如果采用截断二阶矩法,截断均匀平面波的广义 M^2 因子约为无光阑限制基模高斯光束的二倍.

平顶高斯光束的 M_{G}^2 因子随阶数 N 和截断参数 α 的变化示于图6.3.2.由图可以看出,当 α 较小和较大时,M_{G}^2 因子分别趋近于有光阑限制平面波和无光阑限制平顶高斯光束的 M^2 因子之值.

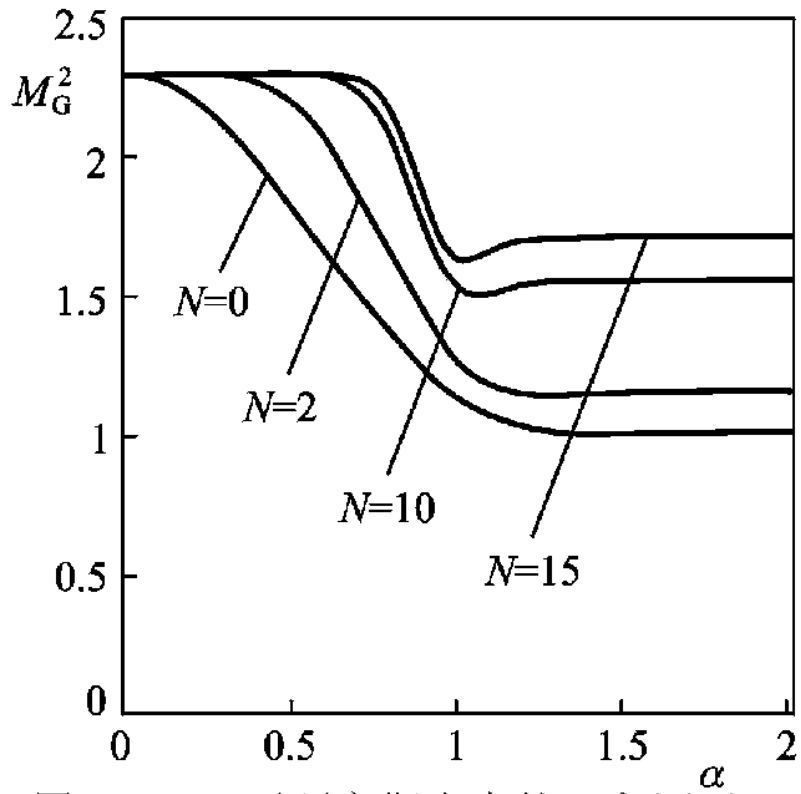


图 6.3.2　平顶高斯光束的 M_{G}^2 因子随阶数 N 和截断参数 α 的变化

§6.4 超高斯光束和平顶高斯光束的比较

超高斯光束和平顶高斯光束是用来描写光强分布有一平顶光束的不同数学－物理模型.在物理上,二者必然存在一致性关系.若将超高斯光束阶数的取值扩展为大于2的正实数,则在直角坐标系中由式(6.1.22)和式(6.2.19)可得到具有相同 M^2 因子的超高斯光束和平顶高斯光束阶数间的联系.计算结果见图6.4.1.设用 N_{SGB} 和 N_{FGB} 分别表示超高斯光束和平顶高斯光束的阶数,二者可用一个足够好的近似公式来描述

$$N_{\mathrm{SGB}}=\sum_{k=0} a_k\,(N_{\mathrm{FGB}}-x_0)^k \tag{6.4.1}$$

式中 $x_0=26.761\ 9$, $a_0=11.935$, $a_1=0.204\ 846$, $a_2=-1.483\ 56\times10^{-3}$, $a_3=7.684\ 71\times10^{-5}$, $a_4=-2.431\ 86\times10^{-6}$, $a_5=2.275\ 12\times10^{-8}$.数值计算例见表6.4.1,对应光强分布的比较见图6.4.2.由图6.4.2知,对有相同 M^2 因子和束腰宽度 w_0 的超高斯光束和平顶高斯光束,光强分布大体上是相同的,出现小的差异的主要原因是二者光场表示式中束宽的定义不一样,且对平顶高斯光束束宽还与 N_{FGB} 有关.

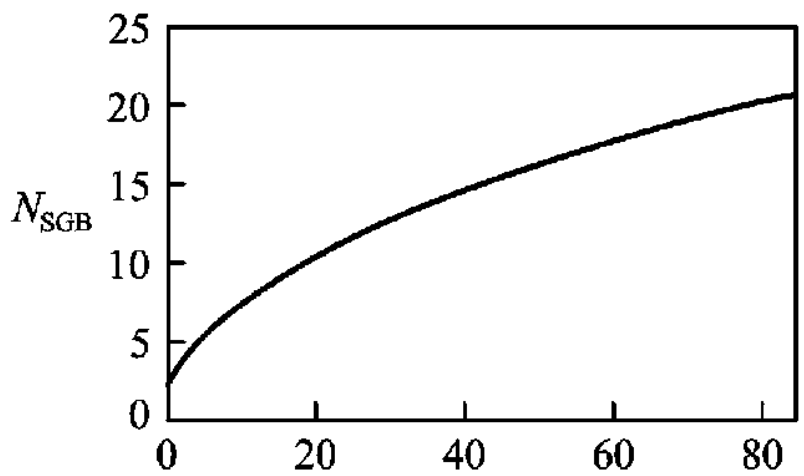


图6.4.1 直角坐标系下有相同 M^2 因子的超高斯光束和平顶高斯光束阶数 N_{SGB} 和 N_{FGB} 间的关系

表6.4.1 对应于相同 M^2 因子的超高斯光束和平顶高斯光束的阶数

M^2	1	1.06	1.43	1.61	1.70	1.82	2.09	2.28	2.6
N_{FGB}	0	1	7	12	15	20	35	50	84
N_{SGB}	2	3.0	6.35	8.16	9.07	10.41	13.66	16.27	21.0

为比较这两类光束的传输特性,选取了具有相同 M^2 因子和束腰宽度 w_0 的超高斯光束和平顶高斯光束通过光阑透镜的变换为例,利用柯林斯公式进行了数值计算和比较.典型例示于图6.4.3.其中图6.4.3(a)

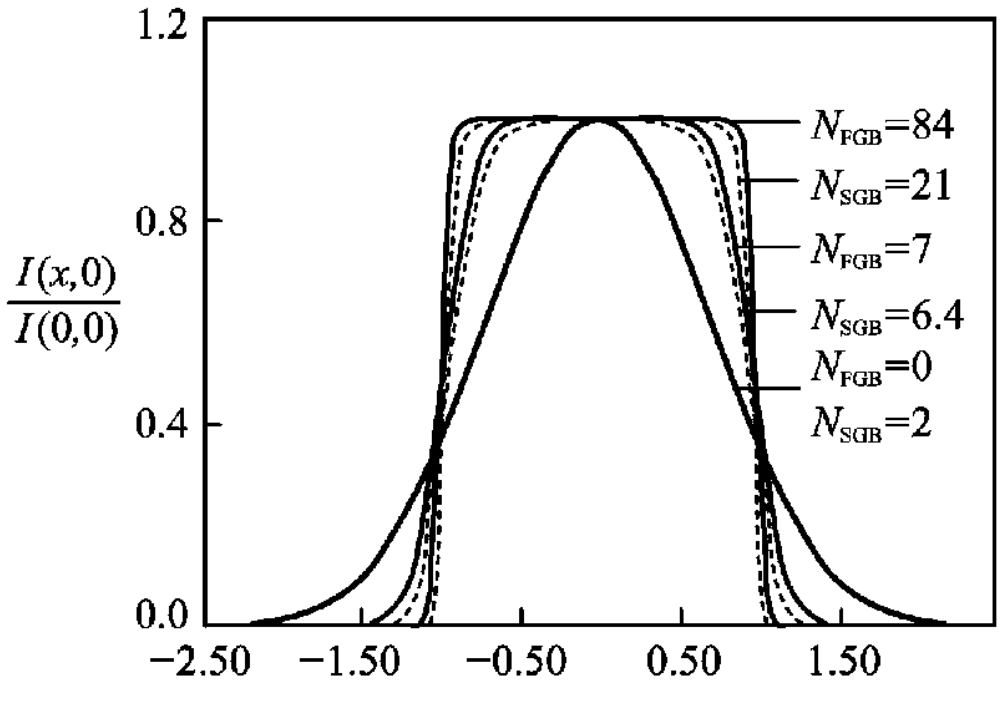


图 6.4.2　束腰宽度 $w_0=1$ mm 的超高斯光束和平顶高斯光束的相对光强 $\frac{I(x,0)}{I(0,0)}$ 分布参数为 N_{FGB} 和 N_{SGB}

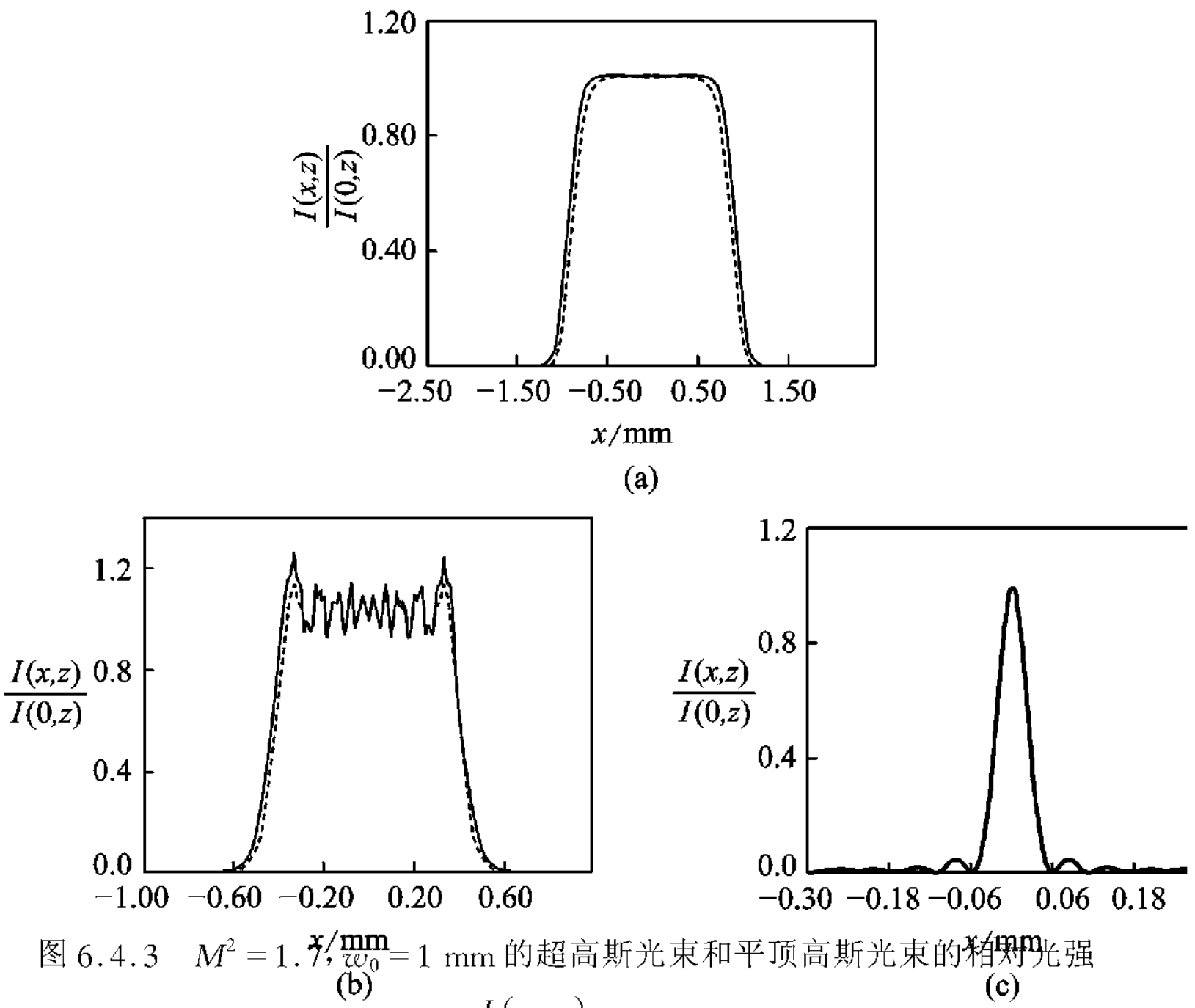


图 6.4.3　$M^2=1.7$，$w_0=1$ mm 的超高斯光束和平顶高斯光束的相对光强 $\frac{I(x,z)}{I(0,0)}$ 分布

实线为平顶高斯分布；虚线为超高斯分布

(a) 在焦距为 100 mm，半宽度为 1 mm 的薄透镜前表面（入射参考面 $z=0$）处的相对光强分布；

(b) 在透镜后 $z=50$ mm 处的相对光强分布；

(c) 在透镜后焦面上（$z=100$ mm）的相对光强分布.

为在透镜前表面入射 $N_{FGB}=15$，$N_{SGB}=9.07$，$w_0=1$ mm 的超高斯光束和平顶高斯光束的相对光强分布. 图 6.4.3(b)为通过透镜后，在离透镜 $z=50$ mm 处的相对光强分布，图 6.4.3(c)为在光阑透镜后焦面 $z=100$ mm 处的相对光强分布，其它计算参数为透镜焦距 $f=100$ mm，光阑宽度 1 mm。对图 6.4.3 做比较可知，具有相同 M^2 因子和束腰宽度 w_0 的超高斯光束和平顶高斯光束在通过光阑透镜后，无论菲涅耳衍射($z=50$ mm)或夫琅禾费衍射(透镜后焦面 $z=100$ mm)都有极为相似的光强分布.

进一步的分析还表明，具有相同 M^2 因子，但不同束腰宽度 w_0 的超高斯光束和平顶高斯光束，当通过近轴 $ABCD$ 光学系统时，在广义菲涅耳数式(6.2.10)相同处也有相似的光强分布.

§6.5 平顶多高斯光束

实际上，可以用多种数学－物理模型来模拟光强分布有一平顶的光束. 本节讨论用多束离轴高斯光束相干合成的方法来模拟平顶光束，称为平顶多高斯光束.

一、平顶多高斯光束通过近轴 $ABCD$ 光学系统的传输方程

$$E_n(x,z=0)=\exp\left[-\left(\frac{x-nx_d}{w_0}\right)^2\right] \tag{6.5.1}$$

式中 $n\in\left(-\frac{N-1}{2},\frac{N-1}{2}\right)$ $(n=1,3,5\cdots)$，设 N 为奇数，但所得结果不难推广用于 N 为偶数的情况.

N 束高斯光束相干合成后成为平顶多高斯光束，在 $z=0$ 面上的场分布为

$$E(x,z=0)=\sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}\exp\left[-\left(\frac{x-nx_d}{w_0}\right)^2\right] \tag{6.5.2}$$

平顶多高斯光束在 $z=0$ 面上的交叉谱密度函数

$$\begin{aligned}W(x_1,x_2,0)&=E(x_1,0)E^*(x_2,0)\\&=\sum_{m=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}\exp\left[-\left(\frac{x-mx_d}{w_0}\right)^2\right]\left\{\sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}\exp\left[-\left(\frac{x-nx_d}{w_0}\right)^2\right]\right\}^*\end{aligned} \tag{6.5.3}$$

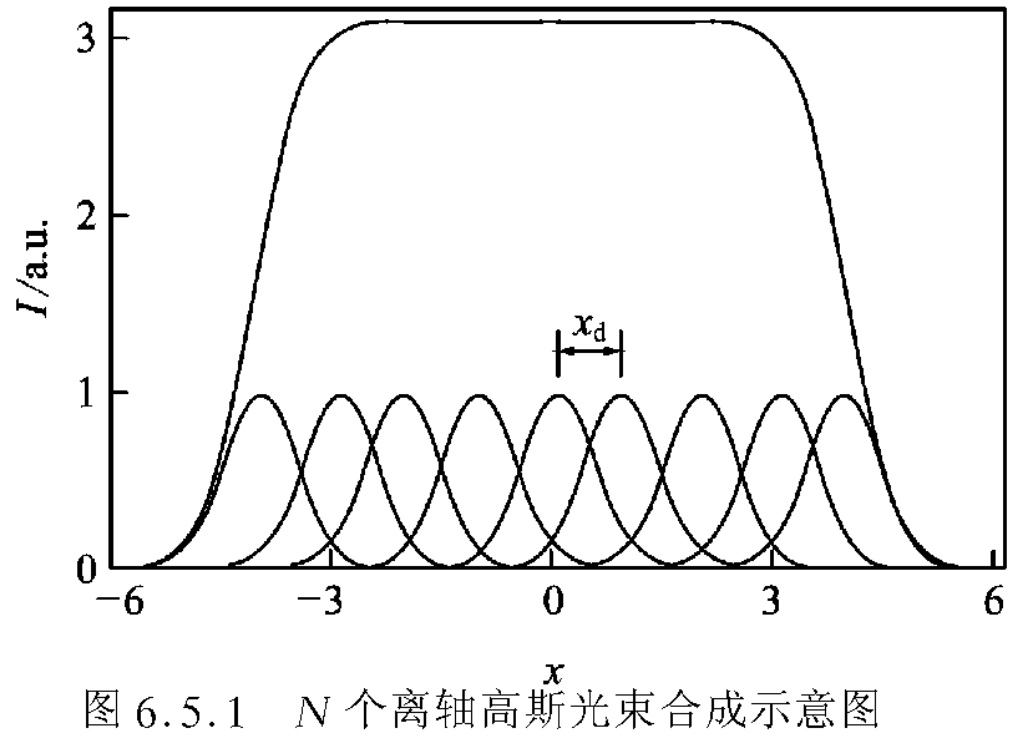


图 6.5.1　N 个离轴高斯光束合成示意图

$z=0$ 面上平顶多高斯光束的维格纳分布函数为

$$h_0(x_0,\theta_0,0)=\frac{k}{2\pi}\int W(x_0-s/2,x_0+s/2)\exp(-\mathrm{i}ks\theta_0)\mathrm{d}s$$

$$=\frac{k\omega_0}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}\sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(k\omega_0\theta_0)^2-\frac{[2x_0-(m+n)x_d]^2}{2\omega_0^2}+\mathrm{i}k(m-n)x_d\theta_0\right\} \tag{6.5.4}$$

维格纳分布函数通过近轴 $ABCD$ 光学系统的传输公式为

$$h(x,\theta)=h_0(Dx-B\theta,-Cx+A\theta) \tag{6.5.5}$$

式中

$$\begin{bmatrix}x\\ \theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\ \theta_0\end{bmatrix} \tag{6.5.6}$$

将式(6.5.4)代入式(6.5.5)得到 z 平面处平顶多高斯光束的维格纳分布函数

$$h(x,\theta,z)=\frac{k\omega_0}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}\sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}[k\omega_0(A\theta-Cx)]^2-\frac{[2(Dx-B\theta)-(m+n)x_d]^2}{2\omega_0^2}+\mathrm{i}k(m-n)x_d(A\theta-Cx)\right\} \tag{6.5.7}$$

由式(6.5.7)得到平顶多高斯光束的光强通过近轴 $ABCD$ 光学系统的传输方程为

$$I(x,z)=\int h(x,\theta,z)\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{k w_0^2}{\sqrt{g}} \sum_{m=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{g} \{ k^2 w_0^2 [2x^2 - 2A(m+n) x_d x + A^2 (m^2 + n^2) x_d^2] - \mathrm{i}2Bk(m-n) x_d [2x - A(m+n) x_d] \} \right] \tag{6.5.8}$$

式中

$$g = 4B^2 + A^2 k^2 w_0^4 \tag{6.5.9}$$

二、平顶多高斯光束的 M^2 因子和 K 参数

利用式(6.5.7)和用维格纳分布函数表示强度矩的公式(3.5.39)代入 M^2 因子公式得到平顶多高斯光束的 M^2 因子为

$$M^2 = \left[\sum_{m=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{m'=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{n'=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} p_{mn} p_{m'n'} F_{1mn} F_{2m'n'} \right]^{1/2} \Bigg/ \sum_{m=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} p_{mn} \tag{6.5.10}$$

式中

$$p_{\alpha\beta} = \exp\left[-\frac{(\alpha - \beta)^2 x'^2_d}{2} \right] \tag{6.5.11}$$

$$F_{1\alpha\beta} = 1 - (\alpha - \beta)^2 x'^2_d \tag{6.5.12}$$

$$F_{2\alpha\beta} = 1 + (\alpha + \beta)^2 x'^2_d, \quad \alpha = m, \beta = n \text{ 或者 } \alpha = m', \beta = n' \tag{6.5.13}$$

$$x'_d = x_d / w_0 \tag{6.5.14}$$

式(6.5.10)说明，平顶多高斯光束的 M^2 因子与合成光束数 N 和归一化间距 x'_d 有关.在推导式(6.5.10)时，同时得到用二阶矩定义的平顶多高斯光束的束宽

$$W(z) = 2\sqrt{\langle x^2 \rangle} = 2\sqrt{\left(\sum_{m=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} r_{mn} \right) \Bigg/ \left(\sum_{m=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} p_{mn} \right)} \tag{6.5.15}$$

和远场发散角

$$\theta = 2\sqrt{\langle \theta^2 \rangle} = 2\sqrt{\left(\sum_{m=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} q_{mn} \right) \Bigg/ \left(\sum_{m=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} p_{mn} \right)} \tag{6.5.16}$$

式中

$$r_{mn}=p_{mn}\left(\frac{B^2F_{1mn}}{k^2w_0^2}+\frac{A^2w_0^2F_{2mn}}{4}\right) \tag{6.5.17}$$

$$q_{mn}=p_{mn}\left(\frac{D^2F_{1mn}}{k^2w_0^2}+\frac{C^2w_0^2F_{2mn}}{4}\right) \tag{6.5.18}$$

类似的计算得到平顶多高斯光束的 K 参数，

$$K=\left(\sum_{m=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}\sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}p_{mn}\right)\left(\sum_{m=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}\sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}s_{mn}\right)\Bigg/\left(\sum_{m=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}\sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}r_{mn}\right)^2 \tag{6.5.19}$$

式中

$$\begin{aligned}s_{mn}=\frac{p_{mn}}{16k^4w_0^4}\{&16B^4[3-6(m-n)^2x'^2_{\mathrm{d}}+(m-n)^4x'^4_{\mathrm{d}}]+A^4k^4w_0^8\\&[3+6(m+n)^2x'^2_{\mathrm{d}}+(m+n)^4x'^4_{\mathrm{d}}]+24A^2B^2k^2w_0^4\\&[1+4mnx'^2_{\mathrm{d}}-(m^2-n^2)^2x'^4_{\mathrm{d}}]\}\end{aligned} \tag{6.5.20}$$

一般地，平顶多高斯光束的 K 参数与光束和光学系统参数有关，并随传输距离而变化.

现以自由空间中平顶多高斯光束的传输为例，说明平顶多高斯光束的传输特性.对自由空间中的传输，式(6.5.8)、式(6.5.19)简化为

$$\begin{aligned}I(x,z)=\frac{kw_0^2}{\sqrt{4z^2+k^2w_0^4}}&\sum_{m=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}\sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}\exp\Big[-\frac{k}{4z^2+k^2w_0^4}\{kw_0^2[2x^2-\\&2(m+n)x_{\mathrm{d}}x+(m^2+n^2)x_{\mathrm{d}}^2]+\mathrm{i}2(m-n)[(m+n)x_{\mathrm{d}}-2x]x_{\mathrm{d}}z\}\Big]\end{aligned} \tag{6.5.21}$$

$$K=\left(\sum_{m=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}\sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}p_{mn}\right)\left(\sum_{m=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}\sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}s_{0mn}\right)\Bigg/\left(\sum_{m=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}\sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}r_{0mn}\right)^2 \tag{6.5.22}$$

式中

$$r_{0mn}=p_{mn}\left(\frac{z^2F_{1mn}}{k^2w_0^2}+\frac{w_0^2F_{2mn}}{4}\right) \tag{6.5.23}$$

$$\begin{aligned}s_{0mn}=\frac{p_{mn}}{16k^4w_0^4}\{&16z^4[3-6(m-n)^2x'^2_{\mathrm{d}}+(m-n)^4x'^4_{\mathrm{d}}]+k^4w_0^8[3+\\&6(m+n)^2x'^2_{\mathrm{d}}+(m+n)^4x'^4_{\mathrm{d}}]+24z^2k^2w_0^4[1+4mnx'^2_{\mathrm{d}}-\\&(m^2-n^2)^2x'^4_{\mathrm{d}}]\}\end{aligned} \tag{6.5.24}$$

数值计算例见图 6.5.2～图 6.5.4. 计算参数为 $N=9$, $\lambda=0.85\ \mu m$, $w_0=75\ \mu m$, $x_d=75\ \mu m$. 由图 6.5.2 可见, 在 $z=0$ 面上得到光强分布为平顶的光束, 但在传输过程中不能保持形状不变. 例如, 在 $z/Z_0=3.7$ (Z_0 为瑞利长度) 处出现中心凹陷, 而在远场 ($z/Z_0=50$) 光强分布成为钟形. 这与超高斯光束和平顶高斯光束在自由空间传输特性是相似的. 图 6.5.3 说明平顶多高斯光束的 M^2 因子随阶数 N 和归一化间距 x_d' 增加

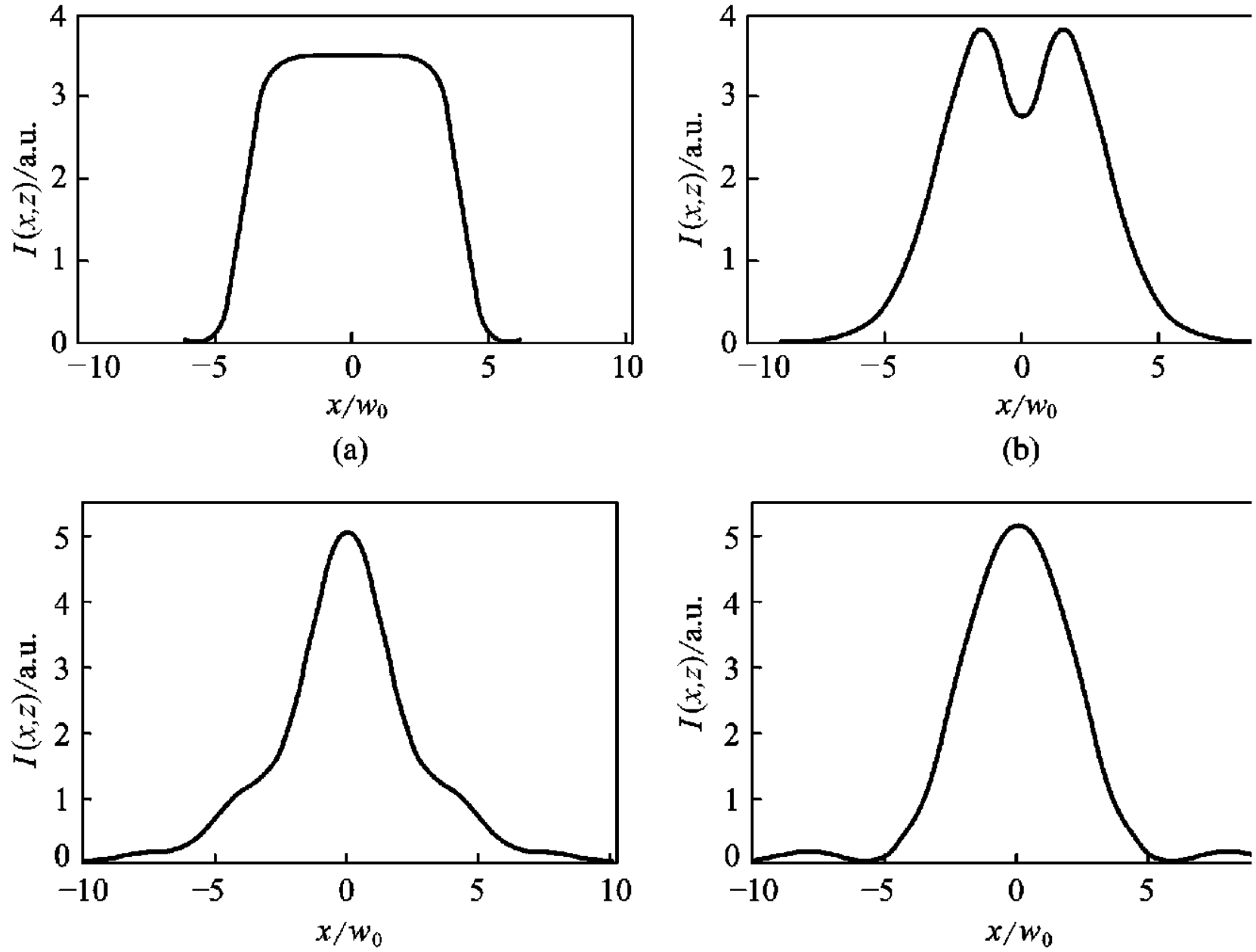


图 6.5.2 平顶多高斯光束在自由空间传输时的光强分布

(a) $z=0$; (b) $z/Z_0=3.7$; (c) $z/Z_0=9.5$; (d) $z/Z_0=50.0$

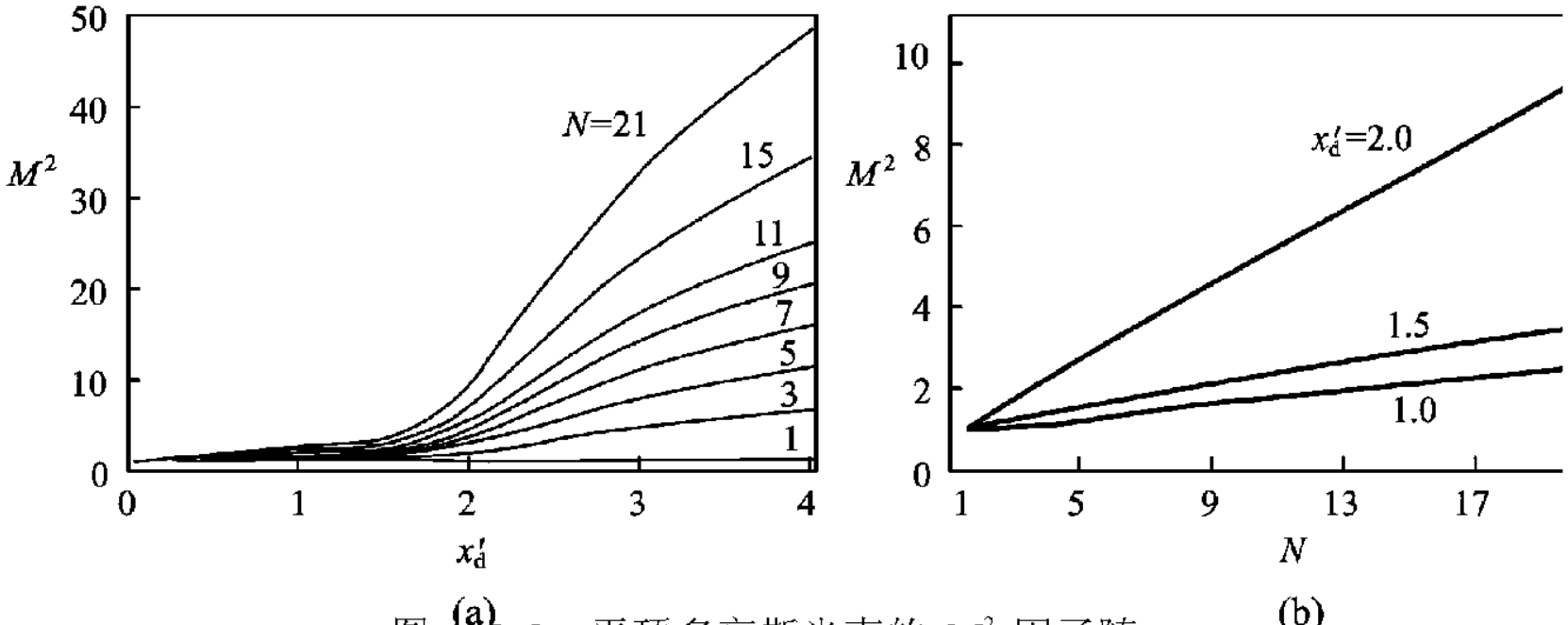


图 6.5.3 平顶多高斯光束的 M^2 因子随

(a) 归一化间距 x_d' 和 (b) 阶数 N 的变化

而增大.图6.5.4(a)给出了 K 参数随归一化传输距离 z/Z_0 的变化.当 $N=9$, $x'_d=1$ 时,在 $z/Z_0=0$, 3.7, 9.5 和 50.0 处 K 参数分别为 1.91, 2.58, 5.13 和 10.88.对照图 6.5.2,说明随 z/Z_0 的增加,光强剖面越来越陡峭.由图 6.5.4(b)的 $K-x'_d$ 曲线上看出,当 $x'_d=0.47$、0.67 和 1.73 时,K 参数在 $z/Z_0=3.7$、9.5、50.0 处分别出现一个最大值 $K_{max}=4.31$、6.11 和 32.11.

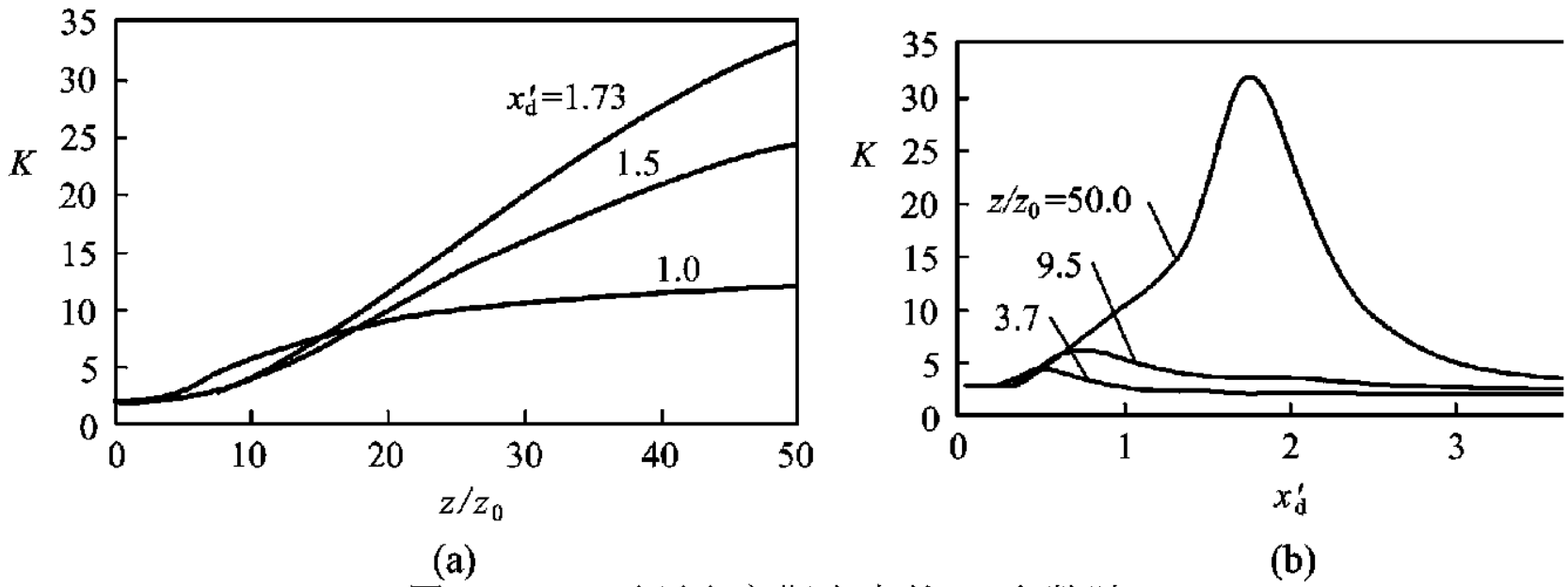


图 6.5.4 平顶多高斯光束的 K 参数随

(a) 归一化传输距离 z/Z_0 和 (b) 归一化间距 x'_d 的变化

三、平顶多高斯光束和超高斯光束的比较

用类似于§6.4的方法得出,有相同 M^2 因子的平顶多高斯光束和超高斯光束通过近轴 $ABCD$ 光学系统时,在广义菲涅耳数[式(6.2.10)]相同处,有相似的光强分布.有相同 M^2 因子的平顶多高斯光束和超高斯光束的阶数 N_{FMGB} 和 N_{SGB} 关系见表 6.5.1.

表 6.5.1 对应于相同 M^2 因子的平顶多高斯光束和超高斯光束的阶数

M^2	1	1.04	1.22	1.41	1.59	1.76	1.92	2.06	2.20	2.32	2.44	2.56	2.67
N_{FMGB}	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N_{SGB}	2	2.77	4.41	6.18	7.97	9.75	11.53	13.30	15.08	16.85	18.61	20.38	22.14

图 6.5.5 给出了有相同 $M^2=1.59$ ($F_{FMGB}=4$, $F_{SGB}=7.97$)的平顶多高斯光束和超高斯光束通过 $z=0$ 处焦距 $f=20$ mm 薄透镜后的光强分布,其它计算参数为 $w_{0SGB}=37.5$ μm, $w_{0FMGB}=75$ μm, $\lambda=0.8$ μm.由图知,在广义菲涅耳数相等处平顶多高斯光束和超高斯光束有相似的光强分布,虽然他们的 w_{0SGB} 和 w_{0FMGB} 位置 z_{SGB} 和 z_{FMGB} 可以不相等.注意,这时式(6.2.10)中的束宽应当用二阶矩定义.

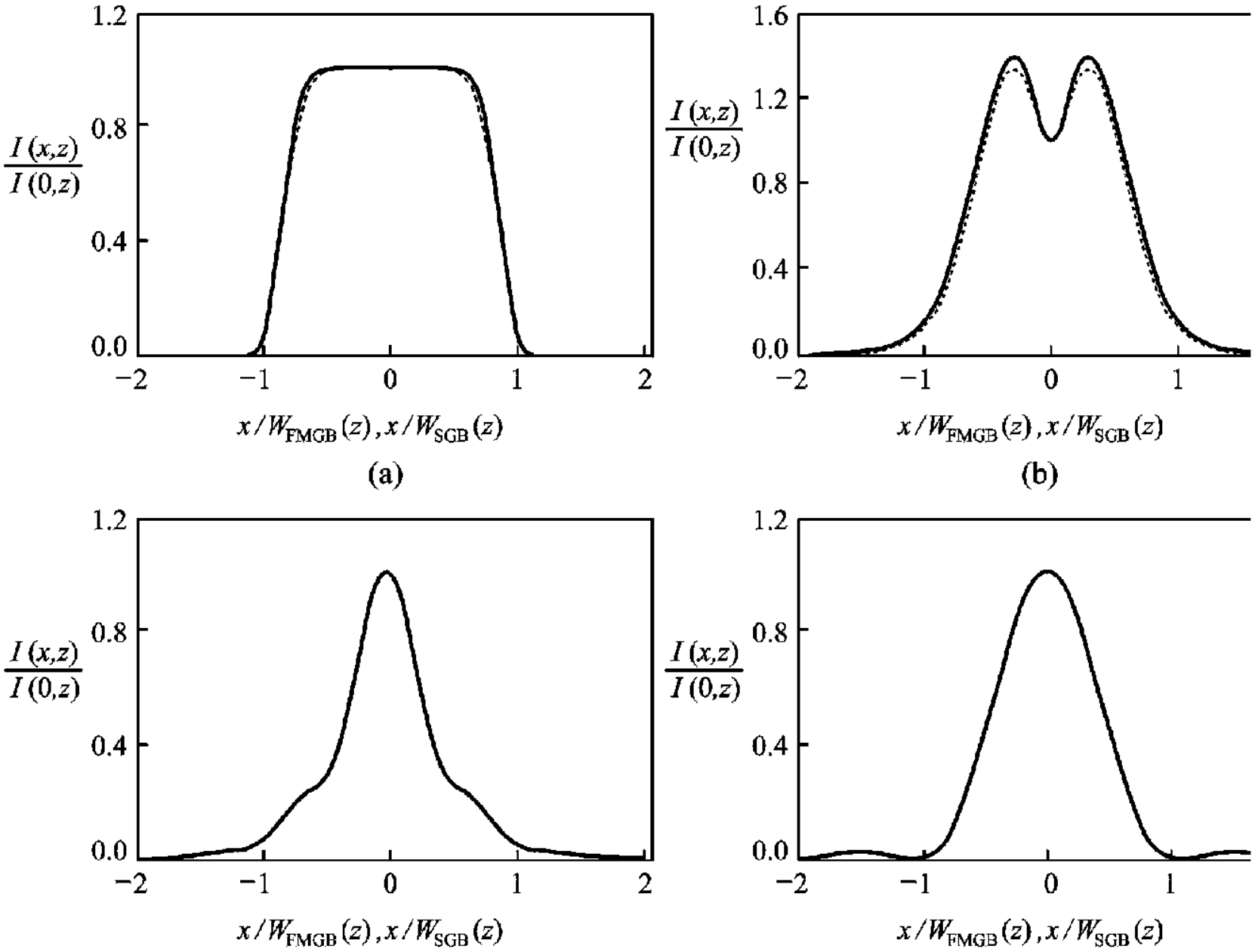


图 6.5.5 有相同 $M^2=1.59$($F_{\mathrm{FMGB}}=4$, $F_{\mathrm{SGB}}=7.97$)的平顶多高斯光束和超高斯光束通过薄透镜后的相对光强分布 $I(x,z)/I(0,0)$

(a) $z=0$; (b) $F_{\mathrm{FMGB}}=F_{\mathrm{SGB}}=2.1$($z_{\mathrm{FMGB}}=16.0$ mm, $z_{\mathrm{SGB}}=3.0$ mm); (c) $F_{\mathrm{FMGB}}=F_{\mathrm{SGB}}=0.8$($z_{\mathrm{FMGB}}=18.3$ mm, $z_{\mathrm{SGB}}=6.3$ mm); (d) $F_{\mathrm{FMGB}}=F_{\mathrm{SGB}}=0$($z=f=20$ mm)

习 题

1. 式(6.2.1)表征的平顶高斯光束是近轴波动方程的特解吗？为什么？

2. 推导出柱坐标下平顶高斯光束通过近轴 *ABCD* 光学系统的传输公式，并做数值计算和讨论.

3. 将硬边光阑的窗口函数展开为有限个复高斯函数之和是用解析方式研究光束通过受光阑限制近轴 *ABCD* 光学系统一个有用的方法.对这一方法的适用范围和误差进行分析，并举例说明.

4. 式(6.3.3)为分析受光阑限制平顶高斯光束的传输特性提供了一个解析公式.由式(6.3.3)能否得出结论：(1) 一束平顶高斯光束在通过有光阑限制 *ABCD* 光学系统时，在广义菲涅耳数相同处有相似的光强分布；(2) 两束阶数相同的平顶高斯光束通过两个有光阑限制 *ABCD* 光学系统时，若有相同的截断参数，则在广义菲涅耳数相等处有相似的光强分布.对此进行物理分析，并用数值计算例加以说明.

5. 截断二阶矩法是计算受硬边光阑衍射光束的 M^2 因子的一种方法，这一方法克服了计算 M^2 因子的发散困难，而且常可得出光束广义 M^2 因子的解析表达式.但

迄今国际标准化组织仍未将截断二阶矩法作为计算受硬边光阑衍射光束 M^2 因子的推荐方法使用，这是为什么？试述个人见解.

6. 平顶高斯光束和平顶多高斯光束是用有限个厄米－高斯(或拉盖尔－高斯)函数或高斯函数来描写平顶分布的数学－物理模型.对这两种模型的优缺点做分析讨论.超高斯函数的场分布也可以用厄米－高斯(或拉盖尔－高斯)函数展开吗？与平顶高斯光束比较，有何不同？

7. 有时希望不仅在近场，而且在远场都要求得到平顶均匀分布的光束.这在物理上可能实现吗？为什么？

8. 多束离轴高斯光束非相干合成的方法能否得到平顶分布光束？试研究离轴高斯光束非相干合成光束的传输特性和光束质量，并与 §6.5 平顶多高斯光束的有关结果进行比较.

参 考 文 献

[1] Parent A, Morin M et al. Propagation of super－Gaussian field distributions. Opt & Quant Electron, 1992, 24: 1 071

[2] Palma C, Bagini V. Propagation of super－Gaussian beams. Opt Commun, 1994, 111:6

[3] Lü B, Zhang B et al. Propagation and focusing properties of super－Gaussian beams upon propagation. Laser Tech, 1997,21:206

[4] Lü B, Zhang B et al. Propagation and focusing properties of apertured super－Gaussian beams. Optik, 1996, 104:1

[5] Lü B, Zhang B et al. Three－dimensional intensity distribution of focused super－Gaussian beams. Opt Commun, 1996, 126:1

[6] Gori F. Flattened gaussian beams. Opt Commun, 1994, 107: 335

[7] Bagini V, Borghi B, Gori F et al. Propagation of axially symmetric flattened Gaussian beams. J Opt Soc Am A, 1996, 13 :1 385

[8] Amarande S A. Beam propagation factor and kurtosis parameter of flattened Gaussian beams. Opt Commun, 1996, 129:311

[9] Santarsiero M, Aiello M, Borghi R, et al. Focusing of axially symmetric flattened Gaussian beams. J Mod Opt, 1997, 44:633

[10] Wen J J, Breazeale M A. A diffraction beam field expressed as the superposition of Gaussian beams. J Acoust Soc Am, 1988, 83:1 752

[11] Tovar A A. Propagation of flat－topped multi－Gaussian laser beams. J Opt Soc Am A, 2001,18:1 897

[12] Lü B, Luo S, Zhang B. Propagation of flattened Gaussian beams with rectangular asymmetry passing through a paraxial optical ABCD system with and without aperture. Opt Commun, 1999, 164:1

[13] Lü B, Luo S, Zhang B. A comparison between the flattened Gaussian beam and super-Gaussian beam. Optik, 1999, 110:185

[14] Lü B, Luo S, Zhang B. Propagation of three-dimensional flattened Gaussian beams. J Mod Opt, 1999, 46:1 573

[15] Lü B, Zhang B, Luo S. Far-field distribution, M^2 factor, and propagation flattened Gaussian beams, Appl Opt, 1999, 38:4 581

[16] Lü B, Ma H. Coherent and incoherent combinations of off-axis Gaussian beams with rectangular symmetry. Opt Commun, 1999, 171:185

[17] 罗时荣,吕百达,张彬. 平顶高斯光束与超高斯光束传输特性的比较. 物理学报,1999,48:1 446

[18] 吕百达,罗时荣,张彬. 平顶高斯光束的相关概念和对称化变换. 强激光与粒子束,1999,11:400

[19] Lü B, Luo S. Similar transformation of a flattened Gaussian beam through paraxial optical ABCD systems. Optik, 2000, 111:204

[20] Lü B, Luo S. General propagation equation of flattened Gaussian beams. J Opt Soc Am A, 2000, 17:2 001

[21] Lü B, Ma H. Coherent and incoherent off-axis Hermite-Gaussian beam combination. Appl Opt, 2000, 39:1 279

[22] 罗时荣,吕百达,张彬. 平顶高斯光束的传输特性. 光学学报,2000,20:1 213

[23] 吕百达,罗时荣,张彬. 相干和非相干平顶高斯光束的比较研究. 激光技术,2000, 24:110

[24] 罗时荣,吕百达. 三维平顶高斯光束通过环形光阑的传输特性. 激光技术,2000,24:211

[25] Lü B, Luo S, Ji X. A further comparative study of flattened Gaussian beams and super-Gaussian beams. J Mod Opt, 2001, 48:371

[26] Lü B, Luo S. Generalized M^2 factor of hard-edged diffracted flattened Gaussian beams. J Opt soc Am A, 2001, 18:2 098

[27] 罗时荣,吕百达. 平顶高斯光束通过透镜序列的传输特性. 激光技术,2001, 25:143

[28] Lü B, Luo S. Approximate propagation equations of flattened Gaussian beams passing through a paraxial ABCD systems with hard-edge aperture. J Mod Opt, 2001, 48:2 169

[29] 吕百达,罗时荣. 强激光的计算模拟:平顶高斯光束模型. 红外与激光工程, 2001, 30:457

[30] Lü B, Luo S. The pointing stability of flattened Gaussian beams. J Mod Opt, 2002, 49:1 089

[31] Lü B, Luo S. Analytical expression for the kurtosis parameter of flattened Gaussian beams propagating through *ABCD* optical systems. J Mod Opt 2002,

49:1 731

[32] Lü B, Li B. Study of the correspondence between flat - topped multi - Gaussian beams and super - Gaussian beams. J Opt A, 2002, 4:1

[33] Li B, Lü B. Irradiance - moments characterization of off - axis Gaussian beam combinations by means of the Wigner distribution function. Optik, 2002, 11: 469

第七章　贝塞耳光束

本章研究贝塞耳光束的产生方法、传输特性以及“无衍射”传输的问题.还分析了超短脉冲贝塞耳光束在色散介质中的传输,并对其“无衍射和无色散”传输的条件和有关问题做了讨论.

§7.1　贝塞耳光束的产生

一、贝塞耳光束的物理概念

容易证明,形如

$$E(r,z)=A_0\mathrm{J}_0(\alpha r)\exp(\mathrm{i}\beta z) \tag{7.1.1}$$

的场函数是亥姆霍兹方程式(1.3.16)在自由空间($z>0$)中的一个特解.式中 A_0 为一常数,J_0 为零阶贝塞耳函数,参数 α、β 满足

$$\alpha^2+\beta^2=k^2 \tag{7.1.2}$$

k 为波数.显然,当 $0<\alpha\leqslant k$ 时,由式(7.1.1)决定的横平面上的光强分布

$$I(r,z)=|A_0\mathrm{J}_0(\alpha r)|^2 \tag{7.1.3}$$

不随传输距离 z 而变化,这即德尔林(Durnin)将它命名为“无衍射光束”的原因,而 $\alpha=0$ 的极限情况对应于均匀平面波.除零阶贝塞耳光束外,高阶贝塞耳函数、韦伯函数和修正贝塞耳函数都是亥姆霍兹方程的特解,本书中统称贝塞耳光束,并以零阶贝塞耳光束为典型进行分析研究.

然而,这仅是数学上的结果.直观的分析表明,由式(7.1.1)表征的贝塞耳光束和无限大平面波一样,是非平方可积的,物理上意味着它携带有无限大的能量,这显然是不可能的.同时,式(7.1.3)说明光强分布与 z 无关,在 $z=0$ 的平面和 z 足够大的平面上光强分布都是 $|A_0\mathrm{J}_0(\alpha r)|^2$,即“无衍射”,又与衍射是光波场普遍特性的物理学原理相悖.因此,理想的、即数学上由式(7.1.1)描述的“无衍射”光束在物理上是不可能构造出来的,这亦为现今的实验所证实.在这种意义上,“无衍射光束”是一个容易引起歧义、并不十分确切的命名.

实际的光束都是有限束宽的.研究证实,有限束宽的近似无衍射光束可以用多种实验方法产生,例如使用环缝－透镜系统、法布里－珀罗腔、计算全息术、轴棱锥、折射系统和带二元屏的傅里叶变换器等.所谓“近似无衍射光束”的物理含义是指这类有限束宽、携带有限能量的贝塞耳光束,在其传输的最大准直范围 $Z_{\max}$ 内,横平面上的光强分布随传输距离不变化或变化甚少.但是,超过这段范围后,光束会发散开来.下面,以环缝－透镜系统和轴棱锥为例,说明有限束宽贝塞耳光束的产生方法.

二、用环缝－透镜系统产生贝塞耳光束

德尔林等人用来产生贝塞耳光束的实验装置如图 7.1.1 所示,在透镜 L 的前焦面上放置一个带有直径 $d=2.5$ mm,宽 $\Delta d=10$ μm 环缝的衍射屏 S,透镜焦距 $f=305$ mm,半径 $a=3.5$ mm,参数选择满足条件

$$\Delta d \ll d,\quad \Delta d \ll \frac{\lambda f}{a} \tag{7.1.4}$$

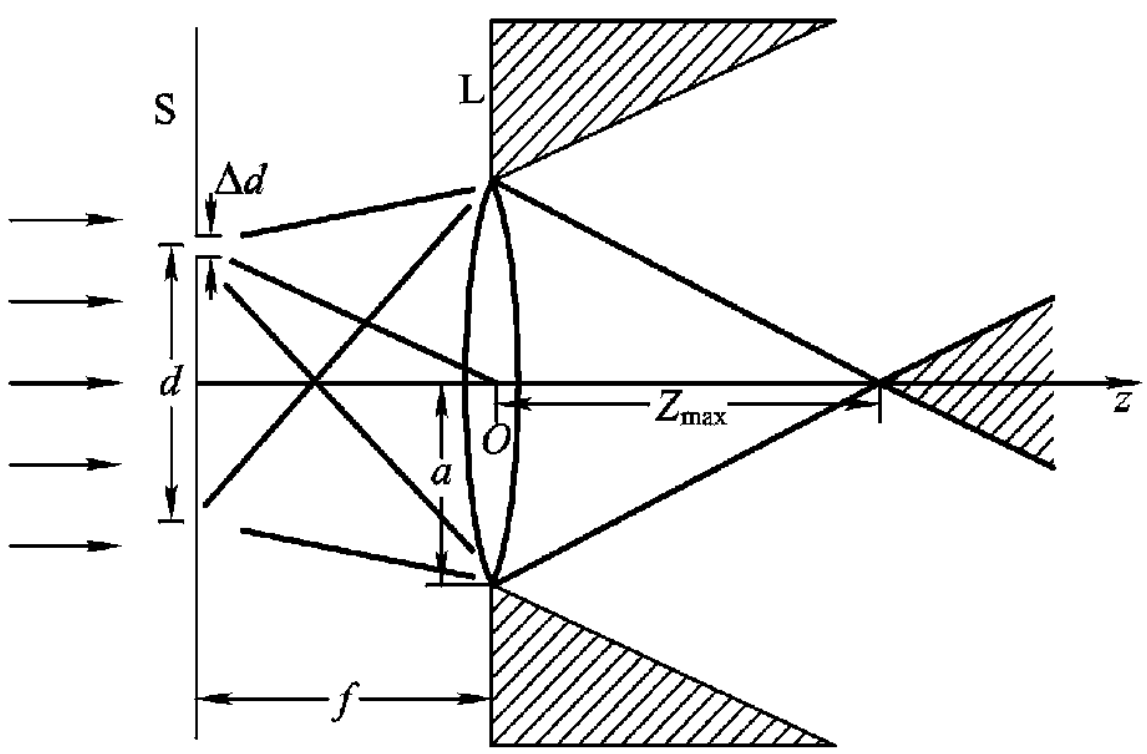


图 7.1.1　德尔林产生贝塞耳光束的实验装置

用波长 $\lambda=0.632\ 8$ μm 的准直 He－Ne 激光照射屏,则在透镜前表面 $(z=f)$ 的场为

$$E_1(r_1,f)=-\frac{\mathrm{i}}{\lambda f}\exp(\mathrm{i}kf)\iint_s E_0(r_0,0)\exp\left\{\frac{\mathrm{i}k}{2f}\left[r_1^2-2r_1r_0\cos(\varphi_1-\varphi_0)+r_0^2\right]\right\}\mathrm{d}s_0 \tag{7.1.5}$$

式中

$$E_0(r_0,0)=\begin{cases}E_0=\text{const}, & \dfrac{d}{2}\leqslant r_0\leqslant\dfrac{d}{2}+\Delta d\\[2ex] 0, & r_0>\dfrac{d}{2}+\Delta d \text{ 或 } r_0<\dfrac{d}{2}\end{cases} \tag{7.1.6}$$

积分沿狭缝进行，由条件(7.1.4)知可简化为夫琅禾费衍射积分.将式(7.1.6)带入式(7.1.5)得

$$E_1(r_1,f)=-\frac{\mathrm{i}E_0 d\Delta d}{2\lambda f}\exp(\mathrm{i}kf)\exp\left(\frac{\mathrm{i}kr_1^2}{2f}\right)\mathrm{J}_0(\alpha r_1) \tag{7.1.7}$$

式中

$$\alpha=\frac{kd}{2f}=k\sin\theta \tag{7.1.8}$$

$$\sin\theta\approx\tan\theta=\frac{d}{2f} \tag{7.1.9}$$

由傅里叶光学知，透镜可视为一个具有透过率函数

$$t_{\mathrm{F}}(r_1)=\begin{cases}\exp\left(-\dfrac{\mathrm{i}kr_1^2}{2f}\right), & r_1\leqslant a\\ 0, & r_1\geqslant a\end{cases} \tag{7.1.10}$$

的相位变换器，故经透镜变换后的场为

$$E'(r_1,f)=t_{\mathrm{F}}(r_1)E_1(r_1,f)=-\frac{\mathrm{i}E_0 d\Delta d}{2\lambda f}\exp(\mathrm{i}kf)\mathrm{J}_0(\alpha r_1) \tag{7.1.11}$$

以透镜为参考面，离透镜 z 处的场由式(7.1.11)求得为

$$E(r,z)=A_0\mathrm{J}_0(\alpha r)\exp(\mathrm{i}\,\beta z) \tag{7.1.12}$$

式中 A_0 为积分常数，

$$\beta=k\left(1-\frac{\alpha^2}{2k^2}\right)\approx\sqrt{k^2-\alpha^2} \tag{7.1.13}$$

式(7.1.12)正是零阶贝塞耳光束场分布的表达式.从傅里叶光学还可得出贝塞耳光束的最大准直范围

$$Z_{\max}=\frac{\alpha}{\tan\theta}=\frac{2\pi a}{\lambda\alpha} \tag{7.1.14}$$

从光束变换的观点可将图 7.1.1 的实验装置看做是一个贝塞耳光束变换器.德尔林实验的关键之处有两点：

(1) 衍射屏的设计　入射的准直光束可作傅里叶－贝塞耳级数展开为

$$E_0=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\mathrm{J}_0(\alpha_n r) \tag{7.1.15}$$

带环缝衍射屏设计得只允许 $\alpha=\dfrac{kd}{2f}$ 的 $\mathrm{J}_0(\alpha r)$ 光束通过，其它则被挡住了，因此衍射屏可称为空间滤波器.

(2) 相位变换器　与衍射屏相距 f 的透镜消去了入射光束的相位项

$\exp\left(\frac{\mathrm{i}kr_1^2}{2f}\right)$，起一个相位变换器的作用.总而言之，衍射屏加上透镜构成了一个贝塞耳光束变换器，它的作用是将入射平行光变换为零阶贝塞耳光束.

三、用轴棱锥产生贝塞耳光束

对轴棱锥已作了许多研究.从菲涅耳－基尔霍夫衍射积分出发，可证明平面波经轴棱锥变换后在一定近似条件下得到零阶贝塞耳光束.下面用稳相法来分析这一问题.

在图 7.1.2 所示的实验装置中，用准直的 He－Ne 激光入射到轴棱锥底面上，在轴棱锥后 $Z_{\max}=\frac{a}{(n-1)\gamma}$ 范围内，就可得到近似的零阶贝塞耳光束，式中 a 为轴棱锥底面半径，γ 为棱角，n 为折射率.轴棱锥的振幅透过率为

$$t(r)=\begin{cases}\exp\left[-\mathrm{i}k(n-1)\gamma r\right], & r\leqslant a\\ 0, & r>a\end{cases}\tag{7.1.16}$$

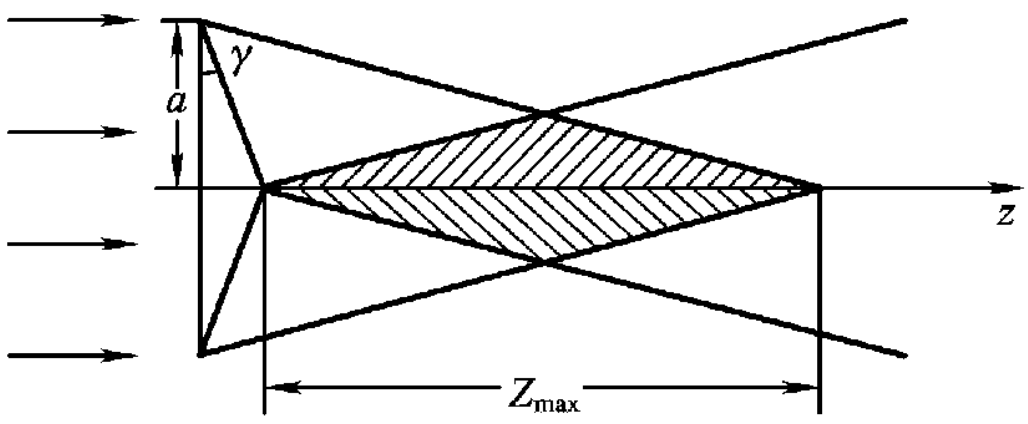


图 7.1.2　用轴棱锥产生贝塞耳光束的示意图

设入射光为 $E_1=E_0$（E_0 为一复常数）的平面波，经轴棱锥变换后的出射场为

$$E(r,z)=-\frac{\mathrm{i}kE_0\exp\left(\frac{\mathrm{i}k}{2z}\right)}{z}\int_0^a\exp\left\{\mathrm{i}k\left[\frac{r_1^2}{2z}-(n-1)\gamma r_1\right]\right\}\mathrm{J}_0\left(\frac{krr_1}{z}\right)r_1\mathrm{d}r_1\tag{7.1.17}$$

使用稳相法，当 $z<Z_{\max}=\frac{a}{(n-1)\gamma}$ 时式(7.1.17)可写为

$$E(r,z)=\sqrt{\lambda z}E_0\alpha\mathrm{J}_0(\alpha r)\exp\left(\frac{\mathrm{i}kr^2}{2z}\right)\exp\left\{-\mathrm{i}\left[\frac{k(n-1)^2\gamma^2 z}{2}+\frac{\pi}{4}\right]\right\}-\frac{aE_0\mathrm{J}_0\left(\frac{kar}{z}\right)}{a-(n-1)\gamma z}\exp\left(\frac{\mathrm{i}kr^2}{2z}\right)\exp\left\{\mathrm{i}k\left[\frac{a^2}{2z}-(n-1)\gamma a\right]\right\}\tag{7.1.18}$$

式中 $\alpha = k(n-1)\gamma$ 为波矢沿 Z 轴的分量，于是光强分布为

$$I(r,z) = \alpha^2\lambda|E_0|^2 z J_0^2(\alpha r) + |E_0|^2\left[\frac{aJ_0\left(\frac{kar}{z}\right)}{a-(n-1)\gamma z}\right]^2 - |E_0|^2\cdot$$

$$\left\{\frac{2\sqrt{\lambda z}\alpha a J_0(\alpha r)J_0\left(\frac{kar}{z}\right)}{a-(n-1)\gamma z}\cdot\cos\left[\frac{k}{2z}(a-(n-1)\gamma z)^2+\frac{\pi}{4}\right]\right\} \tag{7.1.19}$$

通常后两项比第一项远小，若用轴上几何光强

$$I_G(0,z) = \alpha^2\lambda|E_0|^2 z \tag{7.1.20}$$

对式(7.1.19)归一，则有

$$\frac{I(r,z)}{I_G(0,z)} \approx J_0^2(\alpha r), \quad z < Z_{\max} \tag{7.1.21}$$

式(7.1.21)表明，在一定近似条件下，平行光经轴棱锥变换后产生零阶贝塞耳光束.但与环缝－透镜系统不同，轴棱锥产生的贝塞耳光束其光强还有一个与传输距离 z 成正比的因子.

§7.2 贝塞耳光束的传输变换

对贝塞耳光束通过近轴 $ABCD$ 光学系统的传输已做了研究.本节给出在近轴近似下的有关解析结果，并对贝塞耳光束和高斯光束的传输性能进行比较.

一、无限大孔径近轴 *ABCD* 光学系统

1. 零阶贝塞耳光束

由柯林斯公式，得到 $z=0$ 处场分布为式(7.1.1)的零阶贝塞耳光束通过无限大孔径近轴 $ABCD$ 光学系统后的场分布为

$$E(r,z) = -\frac{\mathrm{i}}{\lambda B}\exp(\mathrm{i}\,kz)\cdot$$

$$\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} J_0(\alpha r_1)\exp\left\{\frac{\mathrm{i}k}{2B}\left[Ar_1^2+Dr^2-2rr_1\cos(\varphi_1-\varphi)\right]\right\} r_1\,\mathrm{d}r_1\,\mathrm{d}\varphi_1 \tag{7.2.1}$$

式中已略去常数因子 A_0.积分式(7.2.1)得

$$E(r,z) = \frac{1}{A}\exp\left[\mathrm{i}kz\left(1-\frac{\alpha^2 B}{2k^2 Az}\right)\right]\exp\left[\mathrm{i}kr^2\,\frac{D-\frac{1}{A}}{2B}\right]J_0\left(\frac{\alpha r}{A}\right), \quad B\neq 0$$

$$E(r,z) = \frac{1}{A}\exp(\mathrm{i}kz)\exp\left(\frac{\mathrm{i}kC}{2A}r^2\right)J_0\left(\frac{\alpha r}{A}\right), \quad B=0 \tag{7.2.2}$$

当在自由空间中传输时，式(7.2.2)化为

$$E(r,z)=\exp\left[\mathrm{i}kz\left(1-\frac{\alpha^2}{2k^2}\right)\right]\mathrm{J}_0(\alpha r) \tag{7.2.3}$$

2. 韦伯光束

对 $z=0$ 处场分布

$$E(r)=\begin{cases}\mathrm{Y}_0(\alpha r), & \mathrm{Y}_0(\alpha r)>-1\\ -1, & \mathrm{Y}_0(\alpha r)\leqslant -1\end{cases} \tag{7.2.4}$$

的韦伯光束(Y_0 为零阶韦伯函数)，用类似的方法可证明，通过无限大近轴 $ABCD$ 光学系统的传输公式为

$$E(r,z)=\frac{1}{A}\exp\left[\mathrm{i}kz\left(1-\frac{\alpha^2 B}{2k^2 Az}\right)\right]\exp\left[\mathrm{i}kr^2\frac{D-\frac{1}{A}}{2B}\right]\mathrm{Y}_0\left(\frac{\alpha r}{A}\right),\ B\neq 0,\mathrm{Y}_0(\alpha r)>-1$$

$$E(r,z)=\frac{1}{A}\exp(\mathrm{i}kz)\exp\left(\frac{\mathrm{i}kC}{2A}r^2\right)\mathrm{Y}_0\left(\frac{\alpha r}{A}\right),\quad B=0,\mathrm{Y}_0(\alpha r)>-1 \tag{7.2.5}$$

对自由空间中的传输

$$E(r,z)=\exp\left[\mathrm{i}kz\left(1-\frac{\alpha^2}{2k^2}\right)\right]\mathrm{Y}_0(\alpha r),\quad \mathrm{Y}_0(\alpha r)>-1 \tag{7.2.6}$$

3. 高阶贝塞耳光束

$z=0$ 处的高阶贝塞耳光束的场分布为

$$E(r,\theta)=\mathrm{J}_n(\alpha r)\exp(\mathrm{i}n\varphi) \tag{7.2.7}$$

式中 J_n 为 n 阶贝塞耳函数.将式(7.2.7)代入柯林斯公式，积分得

$$E(r,\varphi,z)=\frac{1}{A}\exp\left[\mathrm{i}kz\left(1-\frac{\alpha^2 B}{2k^2 Az}\right)\right]\exp\left[\mathrm{i}kr^2\frac{D-\frac{1}{A}}{2B}\right]\exp(\mathrm{i}n\varphi)\mathrm{J}_n\left(\frac{\alpha r}{A}\right),\quad B\neq 0$$

$$E(r,\varphi,z)=\frac{1}{A}\exp(\mathrm{i}kz)\exp\left(\frac{\mathrm{i}kC}{2A}r^2\right)\exp(\mathrm{i}n\varphi)\mathrm{J}_n\left(\frac{\alpha r}{A}\right),B=0 \tag{7.2.8}$$

在自由空间中的传输公式为

$$E(r,\varphi,z)=\exp\left[\mathrm{i}kz\left(1-\frac{\alpha^2}{2k^2}\right)\right]\exp(\mathrm{i}n\varphi)\mathrm{J}_n(\alpha r) \tag{7.2.9}$$

由式(7.2.2)～式(7.2.9)知，贝塞耳光束通过无限大孔径近轴 $ABCD$ 光学系统后仍保持同阶贝塞尔函数形式不变，但振幅变为原来的 $\frac{1}{A}$，

宗量变为$\frac{\alpha r}{A}$，径向和轴向相位项都有变化.当 $B\neq0$，$AD=1$ 时，相位的径向调制项为零，当 $B=0$ 时，相位的轴向调制项为零.与高斯光束通过无限大孔径近轴 $ABCD$ 光学系统的传输变换比较，贝塞耳光束遵从不同的变换规律，也写不出相应的 $ABCD$ 定律.

二、有限孔径近轴 *ABCD* 光学系统

这时仍可使用柯林斯公式.现以零阶贝塞耳光束通过半径为 a 的硬边光阑和振幅透过率为高斯分布的软边光阑为例加以说明，数值计算例见图 7.2.1、图 7.2.2，在图中同时画出了束腰宽度 w_0 与贝塞耳光束主瓣宽度 $r_0=2.404\ 8/a$ 相等的基模高斯光束的计算结果，以做比较.计算

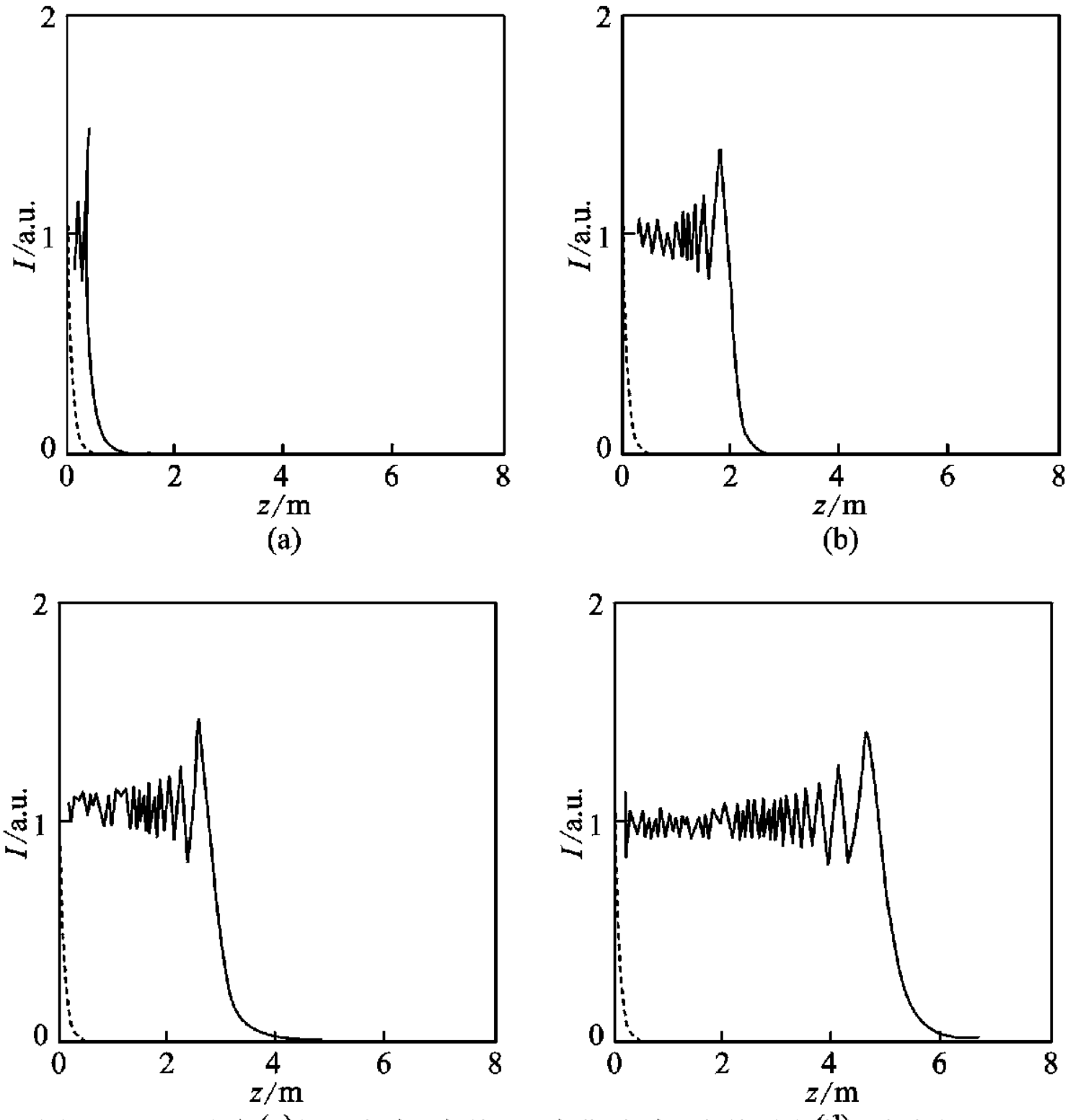


图 7.2.1　零阶贝塞耳光束(实线)和高斯光束(虚线)通过硬边光阑时的轴上光强 I 随传输距离 z 的变化

(a) $\frac{a}{r_0}=10$；(b) $\frac{a}{r_0}=40$；(c) $\frac{a}{r_0}=60$；(d) $\frac{a}{r_0}=100$.

参数为 $\alpha=2.404\ 8\times10^{4}\ \mathrm{m}^{-1}$，$r_0=w_0=0.1\ \mathrm{mm}$，$\lambda=0.5\ \mu\mathrm{m}$，软边高斯光阑振幅透过率 $t(a)=0.01$. 由图可知，一般而言，贝塞耳光束的最大准直范围 $Z_{\max}$ 随 a/r_0 的增加而增加，当 a/r_0 相同时，通过硬边光阑贝塞耳光束的 $Z_{\max}$ 比通过软边光阑的要大. 贝塞耳光束轴上光强随 z 振荡现象可由加软边光阑来克服，但这是以牺牲能量(功率)为代价的.

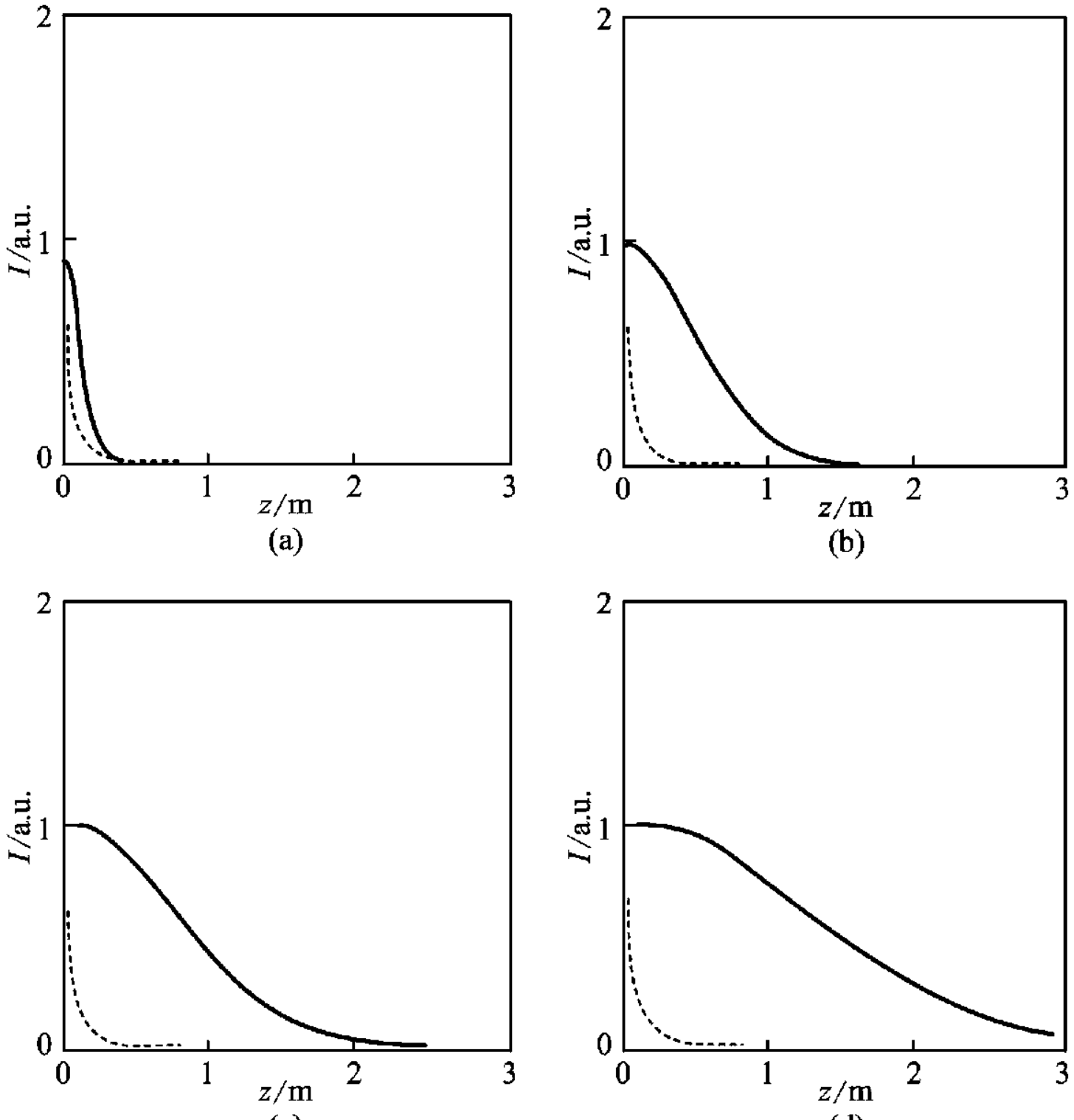


图 7.2.2　零阶贝塞耳光束(实线)和高斯光束(虚线)通过高斯型软边光阑时的轴上光强 I 随传输距离 z 的变化

(a) $\frac{a}{r_0}=10$; (b) $\frac{a}{r_0}=40$; (c) $\frac{a}{r_0}=60$; (d) $\frac{a}{r_0}=100$.

三、贝塞耳光束与高斯光束传输特性的比较

现分两种情况讨论，即：① 贝塞耳光束的中心主瓣尺寸与高斯光束束腰宽度相等 $r_0=w_0$；② 受光阑限制的贝塞耳光束的整个束宽(等于光阑宽度 a)与高斯光束束腰宽度相等 $a=w_0$，图 7.2.3、图 7.2.4 给出了相应于硬边光阑和高斯型软边光阑($t(a)=0.01$)的数值计算结果，计算

参数为 $\alpha = 2.404\ 8\ \text{mm}^{-1}$，$r_0 = 0.1\ \text{mm}$，$\frac{a}{r_0} = 40$，$\lambda = 0.632\ 8\ \mu\text{m}$. 图 7.2.3、图 7.2.4 中(a)为轴上光强沿传输距离 z 的变化，(b) 为横平面上的光强分布随 z 的变化. 图 (a) 中下面的横坐标单位用于贝塞耳光束和 $w_0 = r_0$ 的高斯光束，上面的 z 分度用于 $w_0 = a$ 的高斯光束. 由图 7.2.3、

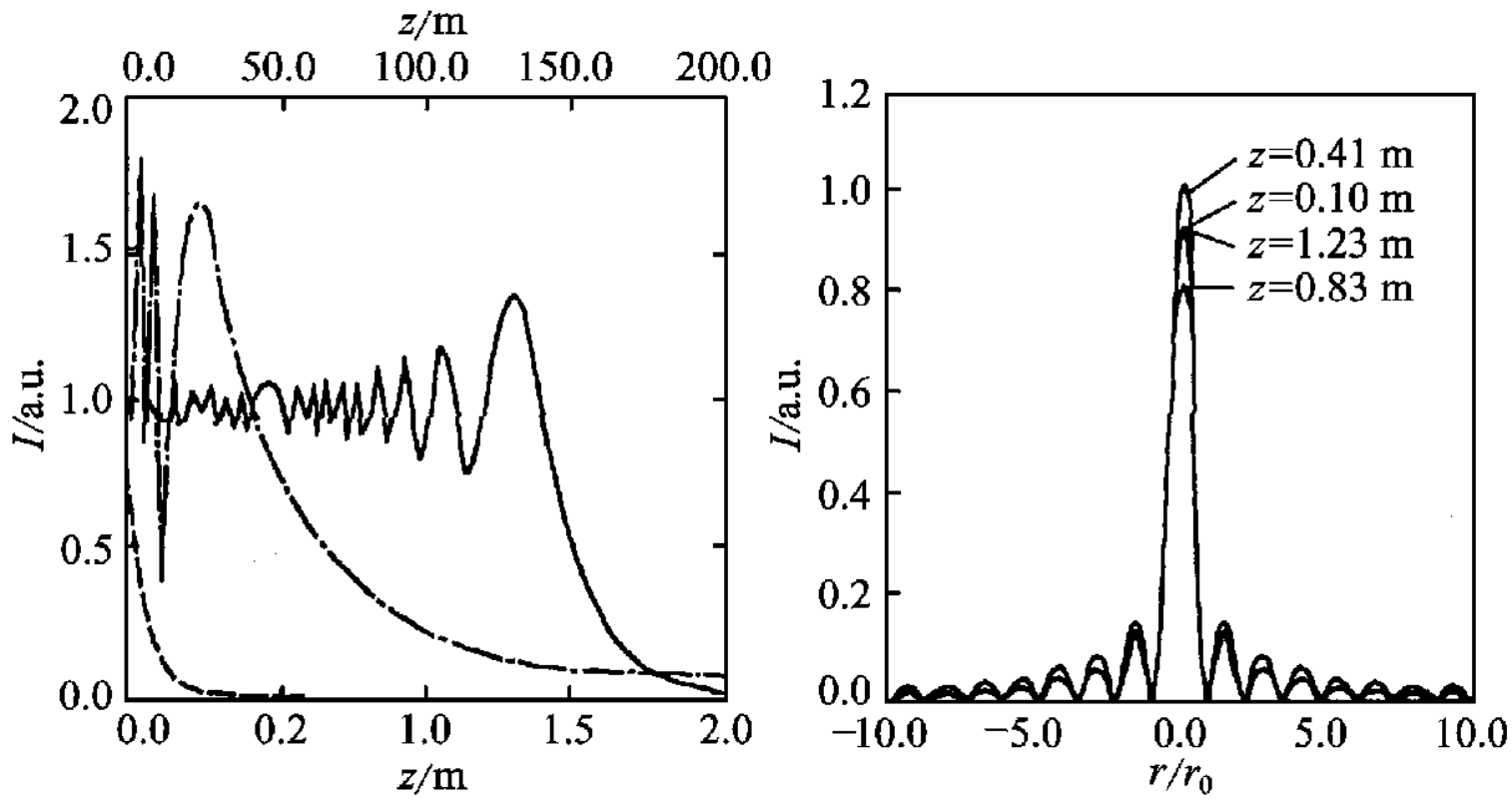


图 7.2.3　零阶贝塞耳光束光强的变化

(a) 零阶贝塞耳光束(——)、$w_0 = r_0$(− − −)和 $w_0 = a$(−•−•−)的高斯光束通过硬边光阑后，轴上光强 I 随传输距离 z 的变化；

(b) 在不同传输距离 z 处零阶贝塞耳光束的横向光强 I 随归一化径向坐标 r/r_0 的变化.

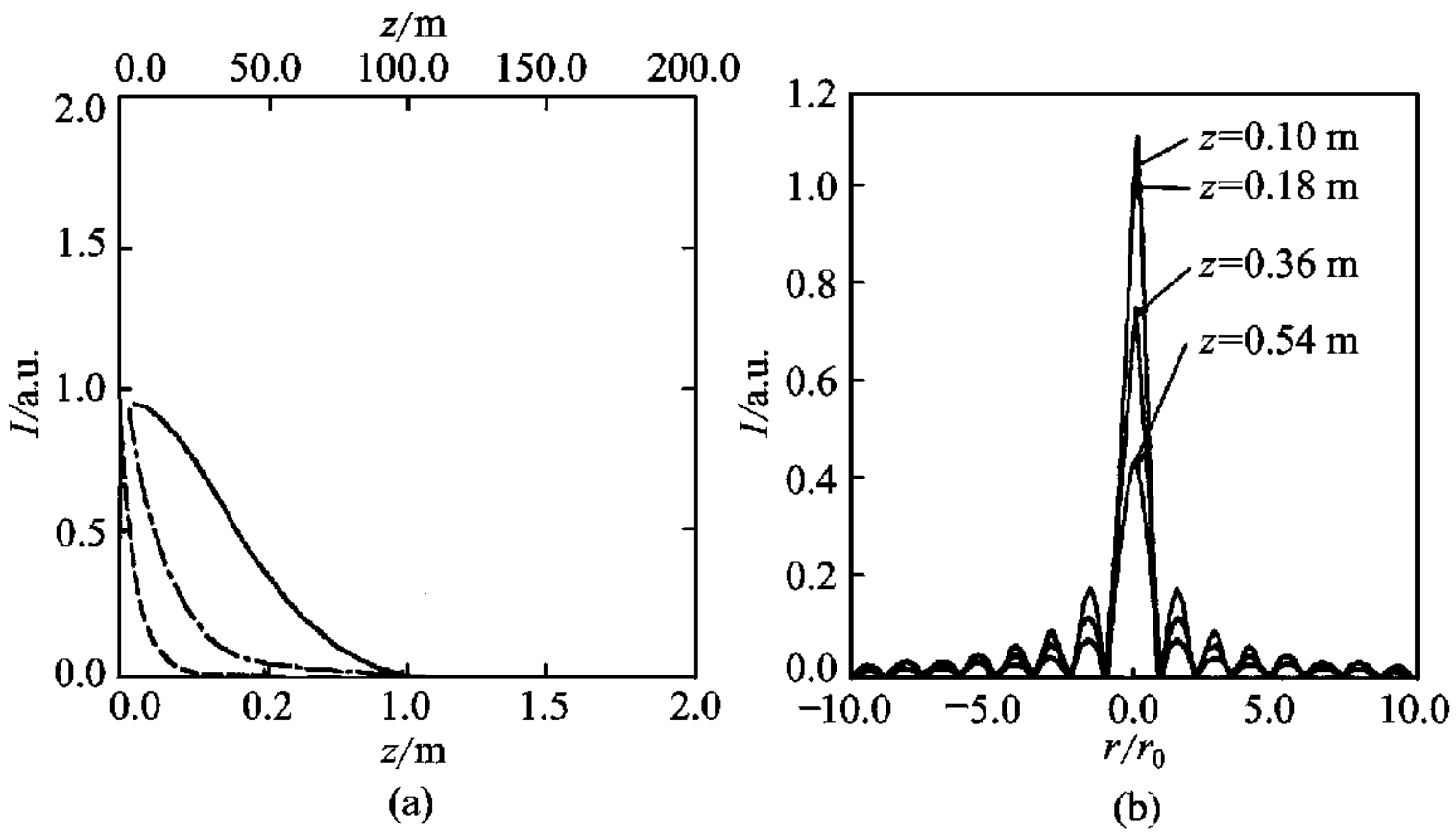


图 7.2.4　零阶贝塞耳光束光强的变化

(a) 零阶贝塞耳光束(——)、$w_0 = r_0$(− − −)和 $w_0 = a$(−•−•−)的高斯光束通过高斯型软边光阑后，轴上光强 I 随传输距离 z 的变化；

(b) 在不同传输距离 z 处零阶贝塞耳光束的横向光强 I 随归一化径向坐标 r/r_0 的变化.

图 7.2.4 可见，对于 $w_0 = r_0$ 的情况，贝塞耳光束有比高斯光束更远的传输距离，而对于 $w_0 = a$，则恰好相反. 并且，在 Z_{max} 范围内，受光阑限制贝塞耳光束横平面上光强分布基本上保持不变. 对图(a)分析得出截然相反结论的原因在于选用了不同的比较标准，但就整束光的传输能力和能量(功率)传输效率而言，显然贝塞耳光束是比不上高斯光束和超高斯光束的.

§7.3 超短脉冲贝塞耳光束

近年来，由于飞秒脉冲实验技术研究的进展，在实验室中已可产生几个光周期、甚至接近一个光周期的超短脉冲. 这类超短脉冲光束与一般激光束的传输特性有许多不同之处. 本节以超短脉冲贝塞耳光束在色散介质中的传输为例，在非近轴近似的情况下研究其传输变换特性. 对其它类型超短脉冲光束的传输问题可参考章末文献.

一、超短脉冲贝塞耳光束在色散介质中的传输方程

对只有几个光周期的超短光脉冲，其带宽很宽，准单色场近似不再成立. 可以首先在频率域中研究它的傅里叶单色分量的传输，然后用傅里叶逆变换得到在时间－空间域中传输方程.

脉冲光束的单色傅里叶分量 $\hat{E}(x, y, z, \omega)$ 满足亥姆霍兹方程：

$$[\nabla^2 + k(\omega)^2]\hat{E}(x, y, z, \omega) = 0 \tag{7.3.1}$$

式中 $\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$，$k(\omega)$ 表示在折射率 $n(\omega)$ 介质中的波数，与光速 c 间关系为

$$k(\omega) = n(\omega)\omega/c \tag{7.3.2}$$

注意式(7.3.2)中的 $k(\omega)$ 与式(1.2.17)中 k 关系为 $k(\omega) = nk$.

由 §7.2 知，用 n 阶贝塞耳函数描写的贝塞耳光束是在 $z>0$ 半空间中式(7.3.1)的解，可写为

$$\hat{E}(r, z, \omega) = \mathrm{J}_n(\alpha r)\exp[\mathrm{i}\beta(\omega)z + \mathrm{i}n\varphi]S(\omega) \tag{7.3.3}$$

式中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$，φ 为极角，$S(\omega)$ 是初始脉冲的傅里叶谱. 传输常数 $\beta(\omega)$ 由下式决定，

$$\beta(\omega) = \sqrt{k^2(\omega) - \alpha^2} \tag{7.3.4}$$

并设 α 取与频率无关的定值.

按照光脉冲在色散介质中的传输理论，将 $\beta(\omega)$ 在 $z=0$ 处的脉冲载频 ω_0 附近展为泰勒(Taylor)级数

$$\beta(\omega)=\beta_0+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\beta_m}{m!}(\omega-\omega_0)^m \tag{7.3.5}$$

式中 $\beta_m=(\mathrm{d}^m\beta/\mathrm{d}\omega^m)\big|_{\omega=\omega_0}$，$m=0,1,2,\cdots$.

将式(7.3.5)代入式(7.3.3)得到

$$\hat{E}(r,z,\omega)=\mathrm{J}_n(\alpha r)\mathrm{S}(\omega)\exp(\mathrm{i}n\varphi)\exp\left\{\mathrm{i}z\left[\beta_0+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\beta_m}{m!}(\omega-\omega_0)^m\right]\right\} \tag{7.3.6}$$

式(7.3.6)表明，谱强度 $|\hat{E}(r,z,\omega)|^2$ 在色散介质中传输时保持不变.

对式(7.3.6)作傅里叶逆变换得到

$$E(r,z,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{J}_n(\alpha r)\exp(\mathrm{i}n\varphi)\cdot$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{\mathrm{i}z\left[\beta_0+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\beta_m}{m!}(\omega-\omega_0)^m\right]\right\}\cdot\mathrm{S}(\omega)\exp(-\mathrm{i}\omega t)\mathrm{d}\omega \tag{7.3.7}$$

式(7.3.7)为时间－空间域中超短脉冲贝塞耳光束在色散介质中的传输方程.

引入脉冲包络表示式

$$E(r,z,t)=A(r,z,t)\exp[\mathrm{i}(\beta_0 z-\omega_0 t)] \tag{7.3.8}$$

由式(7.3.7)得到

$$A(r,z,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{J}_n(\alpha r)\exp(\mathrm{i}n\varphi)\cdot$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{\mathrm{i}z\left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\beta_m}{m!}\Delta\omega^m\right]\right\}\mathrm{S}(\Delta\omega+\omega_0)\exp(-\mathrm{i}\Delta\omega t)\mathrm{d}\Delta\omega \tag{7.3.9}$$

式中 $\Delta\omega=\omega-\omega_0$. 式(7.3.9)可改写为

$$A(r,z,t)=\mathrm{J}_n(\alpha r)\Psi(z,t) \tag{7.3.10}$$

式中

$$\Psi(z,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{\mathrm{i}z\left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\beta_m}{m!}\Delta\omega^m\right]\right\}\exp(\mathrm{i}n\varphi)$$

$$S(\Delta\omega+\omega_0)\exp(-\mathrm{i}\Delta\omega t)\mathrm{d}\Delta\omega \tag{7.3.11}$$

由式(7.3.8)、式(7.3.10)和式(7.3.11)可见，当 α 为常数时，超短脉冲贝塞耳光束在色散介质中传输时其时间和空间部分是可分离的. 空间部分在传输中保持 J_n 形式不变，而时间部分 $\Psi(z,t)$ 的演化与空间衍射和色散效应有关.

二、超短脉冲贝塞耳光束在色散介质中的传输特性

设超短脉冲贝塞耳光束的初始谱为高斯型，即

$$S(\omega)=\frac{T}{\sqrt{2}a_{\mathrm{g}}}\exp\left[-\frac{T^2(\omega-\omega_0)^2}{4a_{\mathrm{g}}^2}\right] \tag{7.3.12}$$

式中 $T=pT_0$ 为初始脉冲宽度，T_0 为对应于载频 ω_0 的振荡周期，p 为振荡次数，$a_{\mathrm{g}}=\sqrt{2\ln 2}$.

将式(7.3.12)代入式(7.3.11)并积分，得

$$\Psi(z,t)=\frac{T}{a_{\mathrm{g}}}(T^2/a_{\mathrm{g}}^2-2\mathrm{i}\beta_2 z)^{-\frac{1}{2}}\exp(\mathrm{i}n\varphi)\exp\left[-\frac{(t-\beta_1 z)^2}{T^2/a_{\mathrm{g}}^2+4\beta_2^2 z^2/(T^2/a_{\mathrm{g}}^2)}\right]\cdot$$

$$\exp\left[-\frac{2\mathrm{i}\beta_2 z(t-\beta_1 z)^2}{T^4/a_{\mathrm{g}}^4+4\beta_2^2 z^2}\right] \tag{7.3.13}$$

在推导式(7.3.13)时，仅考虑了 $m=1,2$ 项. β_1、β_2 的物理意义为：$\beta_1=1/v_{\mathrm{g}}$ 为群速度倒数，而 β_2 描述群速度色散.

由式(7.3.4)、(7.3.5)求得 β_1 和 β_2 为

$$\beta_1=k_1/\cos\gamma \tag{7.3.14}$$

$$\beta_2=k_2/\cos\gamma+[1/(k_0\cos\gamma)-1/(k_0\cos^3\gamma)]k_1^2 \tag{7.3.15}$$

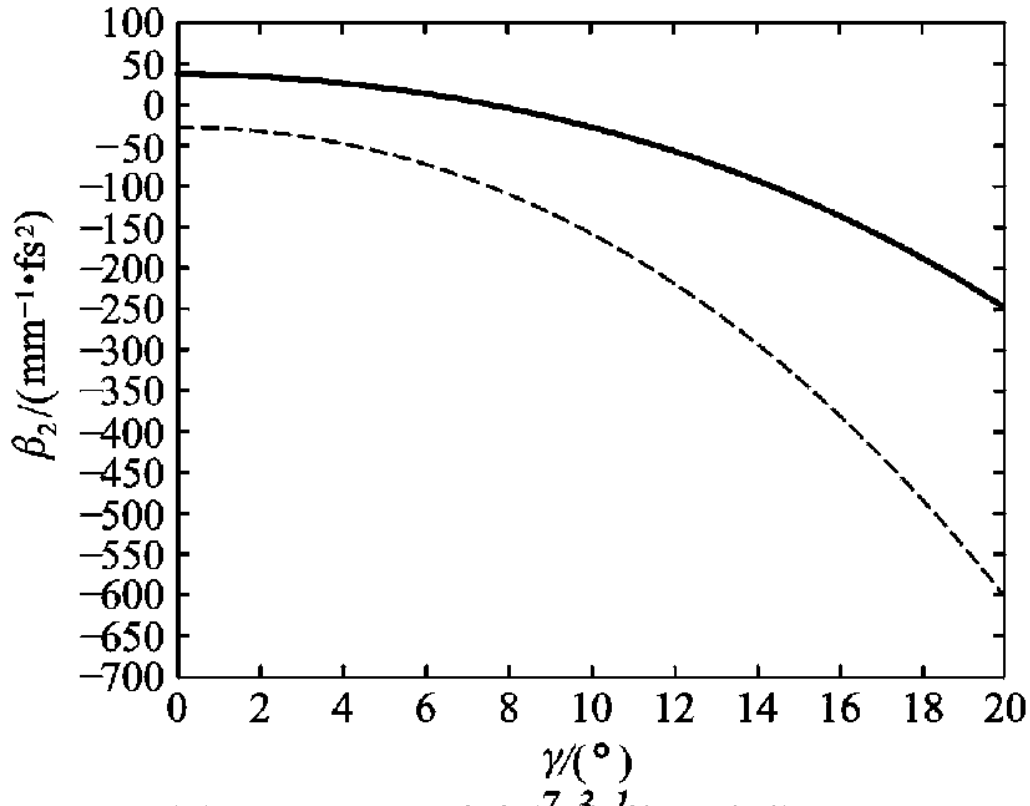
式中 $k_n=(\mathrm{d}^n k/\mathrm{d}\omega^n)\big|_{\omega=\omega_0}$，$n=0,1,2,\cdots$，$\gamma=\sin^{-1}(\alpha/k_0)$.

式(7.3.13)说明 β_1、β_2 对脉冲光束的时间演化行为有影响. 在反常色散介质($k_2<0$)中，由式(7.3.15)知，无论 γ 取何值，β_2 总是正的. 但是在正常色散介质($k_2>0$)中，依赖于 γ，β_2 可取正值、零和负值. 若超短脉冲贝塞耳光束在融石英介质中传输，其折射率 $n(\lambda)$ 由惹尔迈尔(Sellmeier)公式给出

$$n^2(\lambda)=1+\sum_{i=1}^{3}\frac{B_i}{1-\lambda_i^2/\lambda^2} \tag{7.3.16}$$

式中 $B_1=0.696\ 166\ 3$，$B_2=0.407\ 942\ 6$，$B_3=0.897\ 479\ 4$，$\lambda_1=0.068\ 404\ 3\ \mu\mathrm{m}$，$\lambda_2=0.116\ 241\ 4\mu\mathrm{m}$，$\lambda_3=9.896\ 161\ \mu\mathrm{m}$. $\lambda=2\pi c/\omega$ 是真空中波长. 接近 $\lambda=1.56\ \mu\mathrm{m}$ 时，融石英是反常色散介质，色散参数为

$k_0=5\ 816\ \mathrm{mm}^{-1}$，$k_1=4\ 876\ \mathrm{mm}^{-1}\cdot\mathrm{fs}$，$k_2=-29.1\ \mathrm{mm}^{-1}\cdot\mathrm{fs}^2$，$k_3=155\ \mathrm{mm}^{-1}\cdot\mathrm{fs}^3$. 当 $\lambda=0.78\ \mu\mathrm{m}$ 时，融石英是正常色散介质，并且 $k_0=11\ 710\ \mathrm{mm}^{-1}$，$k_1=4\ 893\ \mathrm{mm}^{-1}\cdot\mathrm{fs}$，$k_2=37.75\ \mathrm{mm}^{-1}\cdot\mathrm{fs}^2$，$k_3=26.8\ \mathrm{mm}^{-1}\cdot\mathrm{fs}^3$. 图 7.3.1 给出了 $\beta_2-\gamma$ 曲线，其中实线和虚线分别对应于上面讨论的正常和反常色散曲线.



7.3.1

图 7.3.1 β_2 随空间参数 γ 变化

一般而言，超短脉冲贝塞耳光束在正常和反常色散介质中的传输行为是不同的. 先考虑在正常色散介质中的传输，可分为三种情况：

1. 若

$$\tan\gamma<\sqrt{k_0k_2}/k_1 \tag{7.3.17}$$

则 $\beta_2>0$. 由式(7.3.13)可得脉宽展宽因子(脉宽与初始脉宽比值)

$$\delta=\sqrt{1+4a_g^4\beta_2^2z^2/T^4} \tag{7.3.18}$$

载频

$$\omega'_0=\omega_0+\frac{4\beta_2z(t-\beta_1z)}{T^4/a_g^4+4\beta_2^2z^2} \tag{7.3.19}$$

传输时间

$$t_p=k_1z/\cos\gamma \tag{7.3.20}$$

式(7.3.18)～式(7.3.20)表明，在这种情况下脉冲会展宽，出现啁啾，但脉冲波前是一平面. 展宽因子 δ 随脉冲传输距离 z 变化示于图 7.3.2(a)和(b)的点线，对应的载频 ω'_0 随本地时间 $\tau=t-\beta_1z$ 的变化见图 7.3.3(a)和(b)的点线($\gamma=1.5°$)，参数取 $\lambda_0=0.78\ \mu\mathrm{m}$ 对应于初始载频 ω_0 值. 由图可看出脉冲展宽，出现正啁啾，并且较短脉冲($p=4$)的展宽因子和啁啾数值都大于较长脉冲($p=6$)的值.

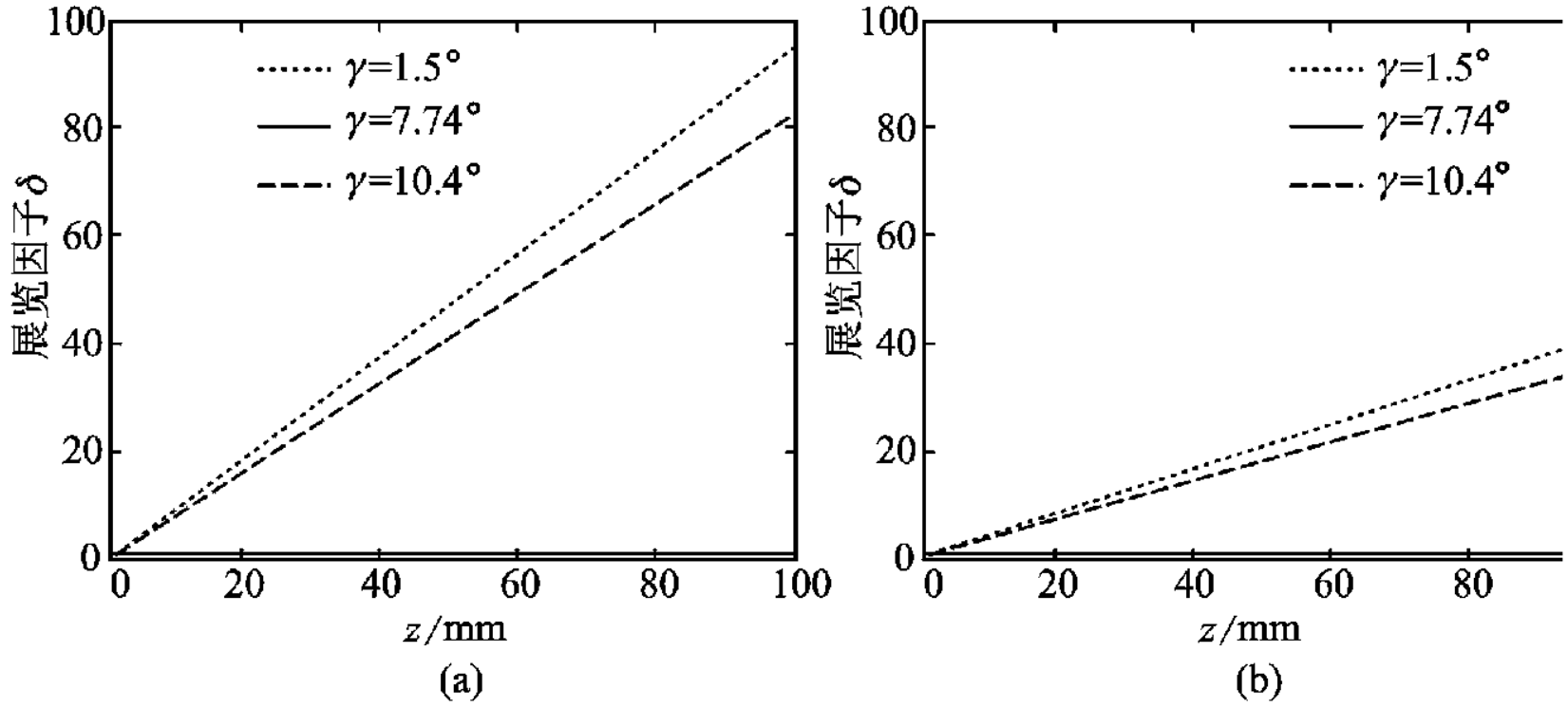


图 7.3.2　展宽因子 δ 随传输距离 z 的变化

(a) $p=4$; (b) $p=6$

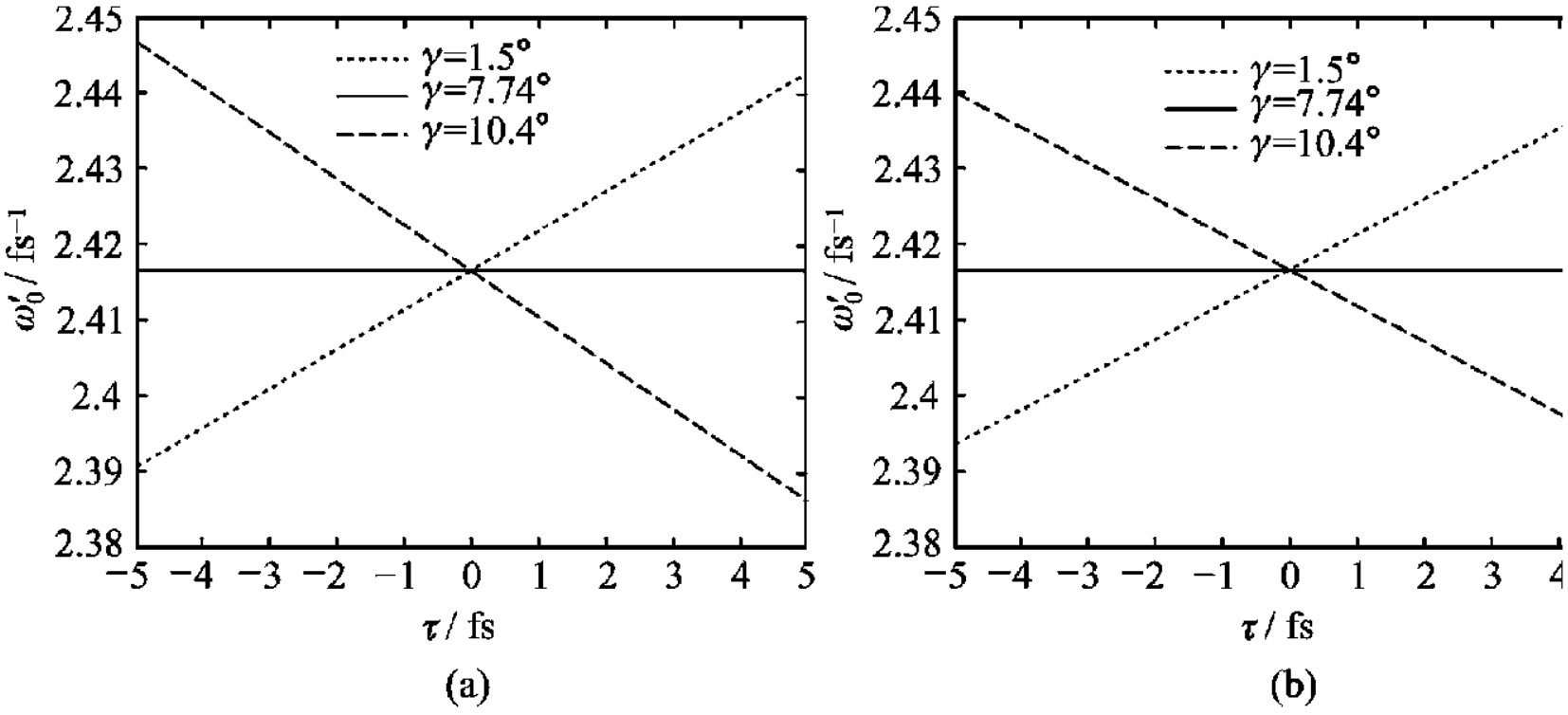


图 7.3.3　载频 ω'_0 随本地时间 τ 的变化

(a) $p=4$; (b) $p=6$

2. 若

$$\tan\gamma=\sqrt{k_0k_2}/k_1 \tag{7.3.21}$$

则 $\beta_2=0$. 此时脉冲的时间部分在传输过程中亦保持不变. 如果将空间衍射看做是一种反常色散效应，那么当式(7.3.21)满足时，介质的正常色散和衍射诱导的反常色散效应恰好抵消. 超短脉冲贝塞耳光束在这种正常色散介质中可实现“无衍射和无色散”传输. 由图 7.3.2 和图 7.3.3 中的实线($\gamma=7.74°$)可见，这时脉宽保持不变，并且无啁啾出现.

3. 若

$$\tan\gamma>\sqrt{k_0k_2}/k_1 \tag{7.3.22}$$

则 $\beta_2<0$，式(7.3.18)～式(7.3.20)仍成立. δ 和 ω'_0 的变化见图 7.3.2 和图7.3.3 中的虚线($\gamma=10.4°$). 这时脉冲仍会展宽，但出现负啁啾.

对于超短脉冲贝塞耳光束在反常色散介质中的传输问题，因为 $\beta_2<0$，其时间演化行为与上述第三种情况类似.

以上的分析对于式(7.3.7)中 $m=0,1,2,m>2$ 的高阶色散效应可忽略时成立.当考虑高阶色散时，一般会导致脉冲畸变、非对称和出现振荡拖尾等.

下面分析 $m=3$ 阶色散可忽略的条件.与 $m=2,3$ 对应的色散长度 L_2、L_3 定义为

$$L_2=T^2/|\beta_2| \tag{7.3.23}$$

$$L_3=T^3/|\beta_3| \tag{7.3.24}$$

式中 β_2 由式(7.3.15)给出，由式(7.3.4)、式(7.3.5)求得 β_3 为

$$\beta_3=k_3/\cos\gamma+3k_1k_2/k_0(1/\cos\gamma-1/\cos^3\gamma)+3k_1^3/k_0^2(1/\cos^5\gamma-1/\cos^3\gamma) \tag{7.3.25}$$

L_2/λ_0 和 L_3/λ_0 随 γ 的变化示于图 7.3.4.图 7.3.4(a)对应于反常色散情况，计算参数为 $\lambda_0=1.56\ \mu m$，$p=4$.当 γ 小时，β_2、β_3 导致的色散效应都很小.随着 γ 的增加，色散效应变得显著.当 $\gamma>69°$时 $L_3<L_2$，三阶色散效应大于二阶色散效应.图 7.3.4(b)为正常色散情况，计算参数为 $\lambda_0=0.78\ \mu m$，$p=4$.在 $\gamma=7.74°$时出现一个 L_2 的尖峰，这时二阶项作用可忽略而三阶项起主要作用.L_2 和 L_3 在正常和反常色散介质中的比较画于图 7.3.5(a)和(b)，计算参数同图 7.3.4.由图知，$L_3/L_2=0.1,1,10$ 三条曲线将 $\gamma-p$ 平面分成四个区域，即 $L_3\gg L_2$，$L_3>L_2$，$L_3<L_2$ 和 $L_3\ll L_2$.在 $L_3\gg L_2$ 范围中，与二阶色散相比，三阶色散效应可以忽略，而在 $L_3<L_2$ 和 $L_3\ll L_2$ 范围内，三阶色散效应必须考虑.

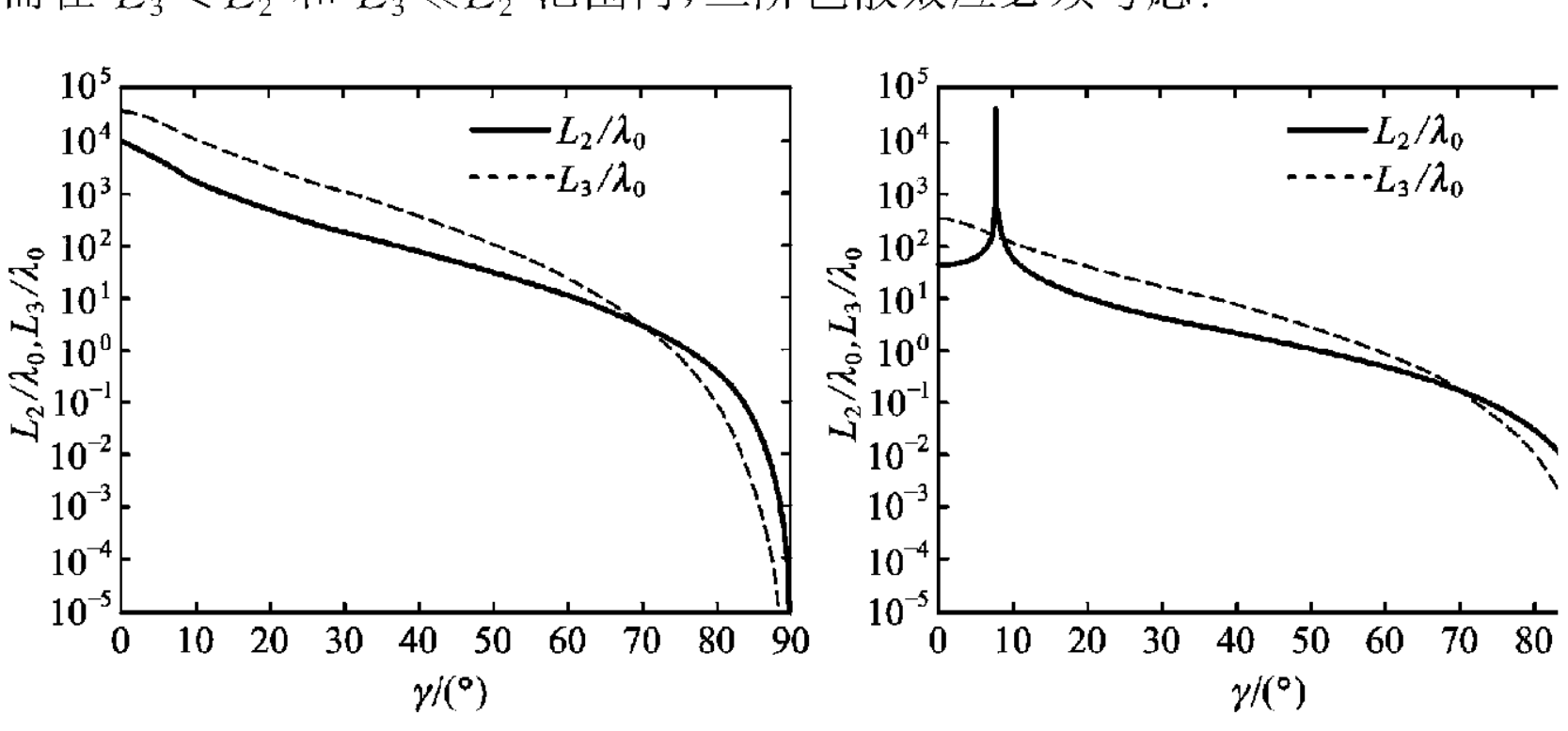


图 7.3.4　归一化色散长度随空间参数 γ 的变化

(a) 反常色散介质；(b) 正常色散介质

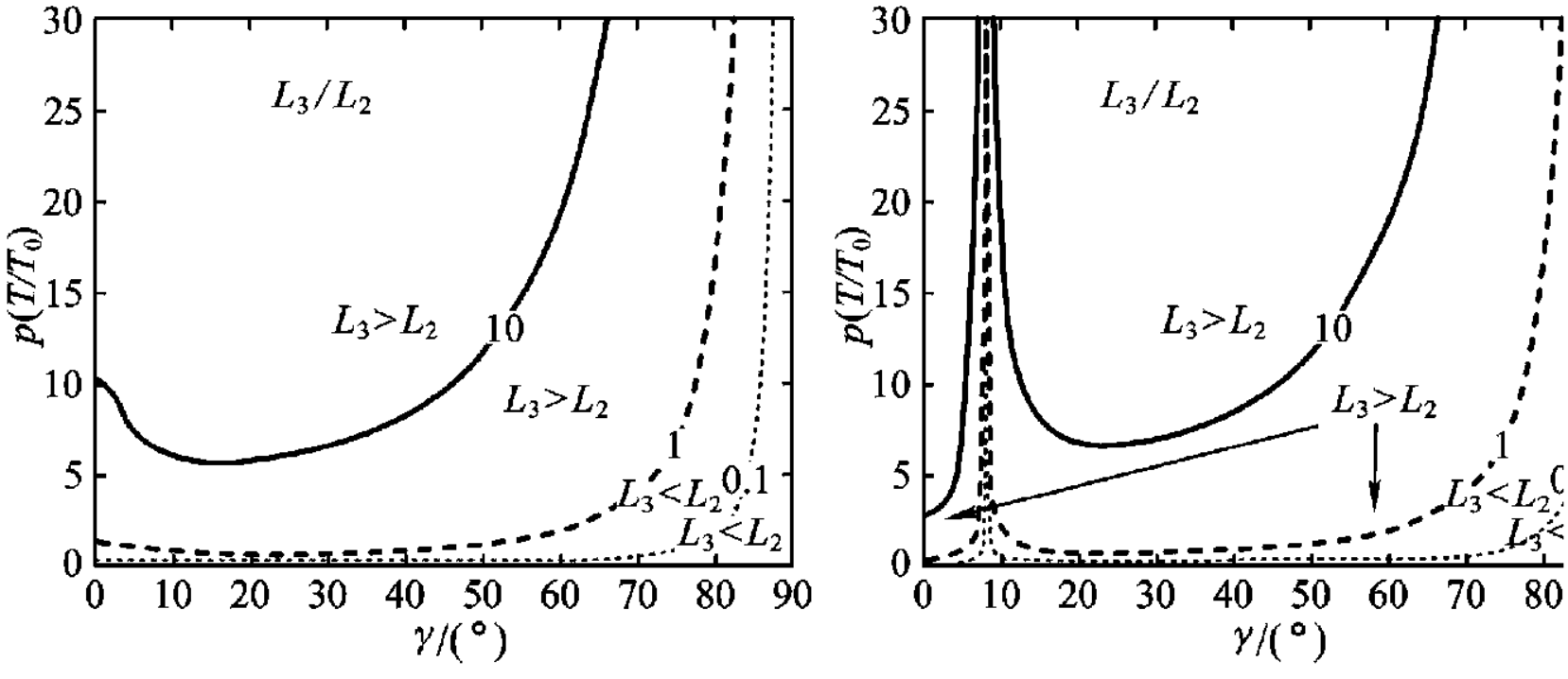


图 7.3.5　L_3/L_2 的等高线

(a) 反常色散介质；(b) 正常色散介质

习　　题

1. 众所周知，衍射现象是光波场的普遍特征. “无衍射”贝塞耳光束的物理含义是什么？对此阐述个人观点.

2. 贝塞耳光束和平面波的数学表示式一样，都是非平方可积的，这在物理上意味着什么？高斯光束的数学表示式也是非平方可积的吗？为什么？

3. 对贝塞耳光束的传输特性加以讨论，并举一数值计算例说明有关的物理结果.

4. 设在 $z=0$ 面上有形如

$$E(r,0)=\mathrm{J}_0(\alpha r)\exp\left[-\left(\frac{r}{w_0}\right)^2\right]$$

的贝塞耳－高斯光束(式中 J_0 为零阶贝塞耳函数，w_0 为束腰宽度，α 为常数，且 $0<\alpha\leqslant k$)，讨论它的传输特性. 贝塞耳－高斯光束是波动方程或近轴波动方程的解吗？是非平方可积的吗？为什么？

5. 阅读文献[18]和[19]，阐述个人见解.

6. 贝塞耳光束是波动方程而非近轴波动方程的解. 超高斯光束既非波动方程亦非近轴波动方程的解. 使用柯林斯公式处理它们的传输变换问题是合理的吗？为什么？

7. 当式(7.3.4)中 α 参数与频率有关时，超短脉冲贝塞耳光束的空间和时间部分可以分离吗？讨论这类脉冲贝塞耳光束的传输特性.

8. 对有限束宽脉冲贝塞耳光束实现“无衍射和无色散”传输的条件是什么？

9. 一般而言，空间衍射使光束在传输的横向产生扩展，而介质色散使光束在纵向产生扩展. 总结可以减小或补偿衍射和色散效应的技术和实验方法. “无衍射和无色散”脉冲贝塞耳光束能否在实验室中实现？为什么？

参 考 文 献

[1] Durnin J. Exact solution for nondiffracting beams I The scalar theory. J Opt Soc Am A, 1987, 4: 651

[2] Durnin J, Miceli J J et al. Diffraction－free beams. Phys Rev Lett, 1987, 58: 1 499

[3] Indebetou W. Nondiffracting optical fields: some remarks on their analysis and synthesis. J Opt Soc Am A, 1989, 6:150

[4] Vasara A, Turunen J et al. Realization of general nondiffracting beams with computergenerated holograms. J Opt Soc Am A, 1989, 6:1 748

[5] Lin Y, Seka W et al. Experimental investigation of Bessel beam characteristics. Appl Opt, 1992, 31:2 708

[6] Ruschin S. Modified Bessel nondiffracting beams. J Opt Soc Am, 1994, 11: 3 224

[7] Rosen J. Synthesis of nondiffracting beams in free space. Opt Lett, 1994, 19: 369

[8] Durnin J, Miceli J et al. Comparison of Bessel and Gaussian beams. Opt Lett, 1988, 13:79

[9] Bloisi F, Vicari L, Comparison of nondiffracting laser beams. Opt Commn, 1990, 75:353

[10] Gori F, Guattari. Bessel－Gauss beams. Opt Commn, 1987, 64:491

[11] Vicari L. Truncation of nondiffracting beams. Opt Commn, 1989, 70:263

[12] Herman R M, Wiggins T A. Production and uses of diffractionless beams. J Opt Soc Am A, 1991, 8:932

[13] Mahajan V N. Uniform verus Gaussian beams: a comparison of the effects of diffraction, obscuration and aberrations. J Opt Soc Am A, 1986, 3:470

[14] Hafizi B, Sprangle P. Diffraction effects in directed radiation beams. J Opt Soc Am A, 1991, 8:705

[15] Overfelt P L, Kenney C S. Comparison of the propagation characteristics of Bessel, Bessel－Gauss, and Gaussian beams diffracted by a circular aperture. J Opt Soc Am A, 1991, 8: 732

[16] Bloisi F, Vicari. Bessel beams propagation through axis symmetric optical systems. J Opt, 1991, 22:3

[17] 吕百达,张彬等.高阶贝塞耳光束及其传输特性的研究.光学学报,1993, 13:840

[18] Sprangle P, Hafizi B. Comment on nondiffracting beams. Phys Rev Lett, 1991, 66: 837

[19] Durnin J, Miceli J J et al. Durnin, Miceli, and Eberly reply. Phys Rev Lett, 1991, 66:838

[20] Lü B, Zhang B et al. Nondiffracting beams with finite beam width. Chin Sci bulletin, 1994, 39: 801

[21] Lü B et al. Characteristics of diffractionless beams. J Opt, 1993, 22:126

[22] Lü B, Huang W. Focal shift in unapertured Bessel－Gauss beams. Opt Commn, 1994, 109:43

[23] Lü B, Huang W et al. Fraunhofer diffraction of a Bessel beam focused by an aperture lens. Opt Commn, 1995, 119:6

[24] Lü B, Huang W et al. Focusing properties of Bessel beams. Opt Commn, 1996, 131:223

[25] 黄文龙，吕百达等. 有限束宽贝塞耳－高斯光束轴上的光强分布. 中国激光，1995，22:285

[26] Lü B, Huang W. Three－dimensional intensity distribution of focused Bessel－Gauss beams. J Mod Opt, 1996, 43:509

[27] Porras M A. Ultrashort pulsed Gaussian light beams. Phys Rev E, 1998 58: 1 086

[28] Porras M A. Nonsinusoidal few－cycle pulsed light beams in free space. J Opt Soc Am B, 1999, 16:1 468

[29] Agrawal G P. Far－field diffraction of pulsed optical beams in dispersive media. Opt Commun, 1999, 167: 15

[30] Porras M A. Diffraction －free and dispersion－free pulsed beam propagation in dispersive media. Opt Lett, 2001, 26:1 364

[31] Brabec T, Krausz F. Nonlinear optical pulse propagation in the single－cycle regime. Phys Rev Lett, 1997, 78 3 282

[32] Liu Z, Fan D. Propagation of pulsed zeroth－order Bessel beams. J Mod Opt, 1998, 45:17

[33] Hu W, Guo H. Ultrashort pulsed Bessel beams and spatially induced group－velocity dispersion. J Opt Soc Am A, 2002, 19:49

[34] Liu Z, Lü B. Spatiotemporal behavior of ultrashort pulses in the far field. Opt Commun, 2002, 206: 13

[35] Lü B, Liu Z. Spatial and temporal properties of ultrashort pulses propagating in free space. J Mod Opt, 2003, 50:815

[36] Lü B, Liu Z. Propagation properties of ultrashort pulsed Bessel beams in dispersive media. J Opt Soc Am A, 2003, 20:582

第八章　简单两镜光学谐振腔

简单两镜光学谐振腔是指由两个反射镜构成的光腔，腔内不含其它光学元件．利用 $ABCD$ 定律和激光束特征参数(对约束稳定腔为 q 参数，非稳腔为球面波波面曲率半径)的自再现条件，可以统一建立简单两镜光学谐振腔的模式理论，把激光束的模参数用 $ABCD$ 矩阵元或者 g 参数表示出来，也可以具体用腔参数写出模参数的表示式．建立简单两镜稳定腔模式理论的另一途径是利用等价共焦腔方法，在§8.3中对此做了讨论．本章给出模参数的 $ABCD$ 矩阵元表示式不仅对简单两镜腔适用，而且可以推广用于复杂多元件腔，因此具有一般性，是腔模理论中的基本公式，应当熟练掌握．

§8.1　约束稳定腔

一、自再现条件

在§2.7中已经提到，高斯光束的自再现条件可以表述为：复参数 q_1 的高斯光束通过变换矩阵 $M=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}$ 的光学系统后再现它自己，即满足条件

$$q=q_1 \tag{8.1.1}$$

由 $ABCD$ 定律

$$q_1=\frac{Aq_1+B}{Cq_1+D} \tag{8.1.2}$$

对 $\frac{1}{q_1}$ 求解得到

$$\frac{1}{q_1}=\frac{D-A}{2B}\pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{4-(A+D)^2}}{2B} \tag{8.1.3}$$

式中±号的选取应保证使 $\pm\frac{\sqrt{4-(A+D)^2}}{2B}$ 为负值(即束宽平方为正值)．

二、模参数公式

1. 镜面上高斯光束束宽和等相面曲率半径

在稳定腔内可能存在的高斯光束只能是自再现的.一般情况下,要求它在腔内往返传输一周后等于它自身.将自再现条件式(8.1.3)用于光学谐振腔问题时,以镜 1 为参考(图 8.1.1),往返一周矩阵为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}1 & L\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{2}{\rho_2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & L\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{2}{\rho_1} & 1\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}4g_1g_2-1-2g_2 & 2Lg_2\\ \dfrac{2}{L}(2g_1g_2-g_1-g_2) & 2g_2-1\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{8.1.4}$$

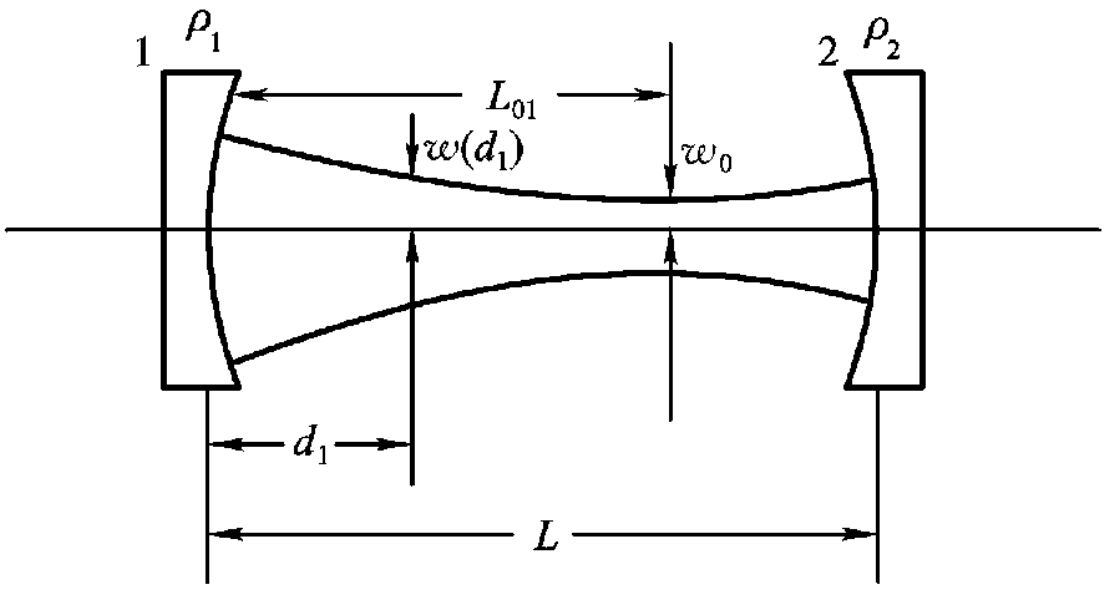


图 8.1.1　简单两镜谐振腔

又

$$\frac{1}{q_1}=\frac{1}{R_1}-\mathrm{i}\frac{\lambda}{\pi w_1^2}\tag{8.1.5}$$

式中 w_1、R_1 分别为在镜 1 面上入射高斯光束的束宽和等相面曲率半径.

将式(8.1.4)、(8.1.5)代入式(8.1.3)求得

$$w_{1入}^2=\pm\frac{2\lambda B}{\pi\sqrt{4-(A+D)^2}}=\frac{\lambda L}{\pi}\left[\frac{g_2}{g_1(1-g_1g_2)}\right]^{\frac{1}{2}}\tag{8.1.6}$$

$$R_{1入}=\frac{2B}{D-A}=\rho_1\tag{8.1.7}$$

以镜 1 为参考,往返一周矩阵亦可写为

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{2}{\rho_1} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & L\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{2}{\rho_2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & L\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2g_2 - 1 & 2Lg_2 \\ \dfrac{2}{L}(2g_1 g_2 - g_1 - g_2) & 4g_1 g_2 - 1 - 2g_2 \end{bmatrix} \tag{8.1.8}$$

相同的步骤求得镜 1 面上反射高斯光束参数为

$$w_{1反}^2 = \pm \frac{2\lambda B}{\pi\sqrt{4-(A+D)^2}} = \frac{L\lambda}{\pi}\left[\frac{g_2}{g_1(1-g_1 g_2)}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{8.1.9}$$

$$R_{1反} = \frac{2B}{D-A} = -\rho_1 \tag{8.1.10}$$

比较式(8.1.6)和式(8.1.9)，式(8.1.7)和式(8.1.10)知

$$w_{1入} = w_{1反} \tag{8.1.11}$$

$$R_{1入} = -R_{1反} \tag{8.1.12}$$

式(8.1.11)、式(8.1.12)正好是经曲率半径为 ρ_1 的球面反射镜(或焦距 $f_1 = \rho_1/2$ 的薄透镜)变换前后高斯光束复参数 q 应满足的关系式.

式(8.1.4)、式(8.1.8)在本书中都经常使用，为书写方便起见，后面略去注明入射或反射光束的下标“入”、“反”，但请读者注意到式(8.1.12)中的符号差别.

若以镜 2 为参考面，相似的推导求得

$$w_2^2 = \pm \frac{2\lambda B'}{\pi\sqrt{4-(A'+D')^2}} = \frac{L\lambda}{\pi}\left[\frac{g_2}{g_1(1-g_1 g_2)}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{8.1.13}$$

$$R_2 = \frac{2B'}{D'-A'} = \rho_2 \tag{8.1.14}$$

式中 $A'B'C'D'$ 为以镜 2 为参考入射高斯光束往返一周矩阵

$$\boldsymbol{M}' = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$$

诸元. 由式(8.1.6)～式(8.1.14)可得到以下结论：

(1) 光腔的约束稳定条件在高斯光束意义下可理解为使束宽 w 保持为有限值的条件. 由式(8.1.6)、式(8.1.13)得到

$$0 < g_1 g_2 < 1 \tag{8.1.15}$$

这就是式(2.6.12).

(2) 在简单两镜驻波腔情况下，高斯光束在腔内往返一周自再现条件导致的一个重要结果是式(8.1.7)、式(8.1.14)，即高斯光束在镜面处的等相面曲率半径等于镜面曲率半径.

2. 束腰宽度和位置

仍将参考面选在镜 1 处，设束腰距镜 1 为 L_{01}，由 $ABCD$ 定律，并利

用束腰处高斯光束等相面曲率半径趋于无穷大条件得到

$$L_{01}=\frac{B(D-A)}{2(1-AD)}=\frac{(1-g_1)g_2}{g_1+g_2-2g_1g_2}L \tag{8.1.16}$$

$$w_0^2=\pm\frac{\lambda B\sqrt{4-(A+D)^2}}{2\pi(1-AD)}=\frac{\lambda L}{\pi}\frac{[g_1g_2(1-g_1g_2)]^{\frac{1}{2}}}{|g_1+g_2-2g_1g_2|} \tag{8.1.17}$$

3. 腔内任意处的高斯光束束宽

公式的表述形式与参考面选取有关.若以束腰处为参考,距束腰 w_0 为 z 处的高斯光束束宽

$$w(z)=w_0\sqrt{1+\left(\frac{z}{Z_0}\right)^2} \tag{8.1.18}$$

当取镜 1 为参考时,距镜 1 为 d_1 处的束宽 $w(d_1)$ 可由 $ABCD$ 定律求得为

$$w(d_1)=w_1\sqrt{\left(1-\frac{d_1}{\rho_1}\right)^2+\left(\frac{\lambda d_1}{\pi w_1^2}\right)^2} \tag{8.1.19}$$

利用式(8.1.6)、式(8.1.7)、式(8.1.17)也可将式(8.1.18)、式(8.1.19)表为 $ABCD$ 矩阵元的形式.

4. 远场发散角

$$\theta_0^2=\frac{\lambda^2}{\pi^2w_0^2}=\pm\frac{2\lambda(1-AD)}{\pi B\sqrt{4-(A+D)^2}}=\frac{\lambda}{\pi L}\frac{|g_1+g_2-2g_1g_2|}{\sqrt{g_1g_2(1-g_1g_2)}} \tag{8.1.20}$$

三、高阶横模

除 TEM_{00} 模外,腔内还可能存在 TEM_{mn} (矩形域)或 TEM_{pl} (圆形域)高阶横模,分别对应于厄米 – 高斯光束和拉盖尔 – 高斯光束式(4.2.1)和式(4.2.3).

1. 束宽

§4.2 中已求得

(1) 矩形域

$$w_m(z)=\sqrt{2m+1}\,w(z) \tag{8.1.21}$$

$$w_n(z)=\sqrt{2n+1}\,w(z) \tag{8.1.22}$$

(2) 圆形域

$$w_{pl}(z)\approx\sqrt{2p+l+1}\,w(z) \tag{8.1.23}$$

2. 远场发散角

按 §4.2 对矩形域

$$\theta_m = \lim_{z\to\infty}\frac{w_m(z)}{z} = \sqrt{2m+1}\,\theta_0 \tag{8.1.24}$$

$$\theta_n = \lim_{z\to\infty}\frac{w_n(z)}{z} = \sqrt{2n+1}\,\theta_0 \tag{8.1.25}$$

设实际限模孔径大小为 R（例如对腔内未置限模光阑的固体激光器，R 就是激光棒的半径），在该处基模高斯光束和高阶高斯光束束宽分别为 w_{0p}、w_{mp} 则有

$$\frac{w_{mp}}{w_{0p}} = \frac{R}{w_{0p}} = \sqrt{2m+1} \tag{8.1.26}$$

代入式(8.1.24)得到

$$\theta_m = \frac{R}{w_{0p}}\theta_0 \tag{8.1.27}$$

容易证明，在圆形域中(8.1.27)亦成立.

3. 谐振频率

(1) 矩形域

谐振条件是激光在腔内单程传输的相移为 π 的整数倍，由式(4.25)得到

$$\pi kL - (m+n+1)[\Psi(z_2) - \Psi(z_1)] = \pi q \tag{8.1.28}$$

式中

$$\Psi(z_2) - \Psi(z_1) = \arctan\frac{z_2}{Z_0} - \arctan\frac{z_1}{Z_0} = \arccos\sqrt{g_1 g_2} \tag{8.1.29}$$

由此得到谐振频率

$$\nu_{mnl} = \frac{c}{2L}\left[q + \frac{m+n+1}{\pi}\arccos\sqrt{g_1 g_2}\right] \tag{8.1.30}$$

$$m, n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$q = 1, 2, \cdots$$

(2) 圆形域

利用式(8.1.28)得到

$$\nu_{plq} = \frac{c}{2L}\left[q + \frac{2p+l+1}{\pi}\arccos\sqrt{g_1 g_2}\right] \tag{8.1.31}$$

$$p, l = 0, 1, 2, \cdots$$

$$q = 1, 2, \cdots$$

现对上面结果做以下几点讨论：

(1) 本节中我们仅利用高斯光束的复参数表示、$ABCD$ 定律和自再现条件，未作附加假设就建立了稳定球面腔的模式理论.其中式(8.1.6)、

式(8.1.8)、式(8.1.13)、式(8.1.17)、式(8.1.19)、式(8.1.20)为稳定球面腔参数的基本公式,利用这些公式可以讨论各种类型稳定球面腔内基模高斯光束的传输规律,求出模参数用腔参数表示的公式,这只需把公式中的 g 参数用相应光腔的几何参数代入即可,下节中将对此做具体讨论.

(2) 式(8.1.7)、式(8.1.14)仅是在两镜驻波型稳定腔中高斯光束满足往返一周自再现的结果,而不是事先人为的假设,也不一定是普遍情况下的必然结果.例如,在第十章中,当把上述理论推广到环形腔之类的行波腔时,对于稳定腔仍旧可以用高斯光束自再现条件求出腔的稳定性条件和高斯光束模参数,但式(8.1.7)、式(8.1.14)一般不再成立.

(3) 上述稳定球面光学谐振腔的模式理论虽然式对简单两镜腔建立的,但可以直接推广到复杂多元件腔(见第十章),这时模参数的 g 参数的表示式一般不再成立,但 $ABCD$ 矩阵元的表示式仍旧有效.

§8.2 各类稳定腔的模参数公式

在本节中,我们把 TEM_{00} 模高斯光束模参数(两镜面上束宽 w_1、w_2,束腰宽度 w_0 和位置 L_{01},远场发散角 θ_0 等)用 g 参数或腔参数(腔长 L,腔反射镜曲率半径 ρ_1、ρ_2)表示出来,并加以讨论.

一、非对称稳定腔

将 g 参数用腔参数表出

$$g_i = 1 - \frac{L}{\rho_i}, \quad i = 1,2 \tag{8.2.1}$$

代入§8.1中有关公式得到

$$w_1^2 = \frac{\lambda}{\pi}\left[\frac{\rho_1^2 L(\rho_2 - L)}{(\rho_1 - L)(\rho_1 + \rho_2 - L)}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{8.2.2}$$

$$w_2^2 = \frac{\lambda}{\pi}\left[\frac{\rho_2^2 L(\rho_1 - L)}{(\rho_2 - L)(\rho_1 + \rho_2 - L)}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{8.2.3}$$

$$w_0^2 = \frac{\lambda}{\pi}\left[\frac{(\rho_1 - L)(\rho_2 - L)(\rho_1 + \rho_2 - L)L}{(\rho_1 + \rho_2 - 2L)^2}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{8.2.4}$$

$$L_{01} = \frac{(\rho_2 - L)L}{\rho_1 + \rho_2 - 2L} \tag{8.2.5}$$

$$\theta_0^2 = \frac{\lambda}{\pi}\left[\frac{(\rho_1 + \rho_2 - 2L)^2}{(\rho_1 - L)(\rho_2 - L)(\rho_1 + \rho_2 - L)L}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{8.2.6}$$

二、对称稳定腔

令

$$g_1 = g_2 = g, \quad \rho_1 = \rho_2 = \rho \tag{8.2.7}$$

得到

$$\omega_1^2 = \omega_2^2 = \frac{\lambda L}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-g^2}} = \frac{\lambda\rho}{\pi}\left(\frac{L}{2\rho - L}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{8.2.8}$$

$$\omega_0^2 = \frac{\lambda L}{2\pi}\sqrt{\frac{1+g}{1-g}} = \frac{\lambda}{2\pi}\sqrt{L(2\rho - L)} \tag{8.2.9}$$

$$L_{01} = \frac{L}{2} \tag{8.2.10}$$

$$\theta_0^2 = \frac{2\lambda}{\pi L}\sqrt{\frac{1-g}{1+g}} = \frac{2\lambda}{\pi\sqrt{L(2\rho - L)}} \tag{8.2.11}$$

三、平凹腔

令

$$g_2 = 1, \quad \rho_2 \to \infty \tag{8.2.12}$$

有

$$\omega_1^2 = \frac{\lambda L}{\pi}\frac{1}{\sqrt{g_1(1-g_1)}} = \frac{\lambda\rho_1}{\pi}\sqrt{\frac{L}{\rho - L}} \tag{8.2.13}$$

$$\omega_2^2 = \frac{\lambda L}{\pi}\sqrt{\frac{g_1}{1-g_1}} = \frac{\lambda}{\pi}\sqrt{L(\rho - L)} \tag{8.2.14}$$

$$\omega_0 = \omega_2 \tag{8.2.15}$$

$$\theta_0^2 = \frac{\lambda}{\pi L}\sqrt{\frac{1-g_1}{g_1}} = \frac{\lambda}{\pi\sqrt{L(\rho - L)}} \tag{8.2.16}$$

四、几种典型腔

现将常见的几种典型腔：对称共焦腔、半共焦腔、对称共心腔、平行平面腔和半球面腔的模参数列于表 8.2.1 中，以供参考.

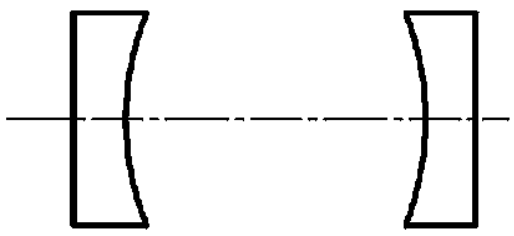
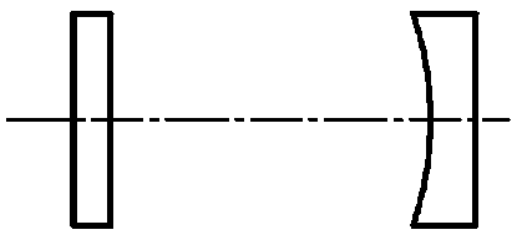
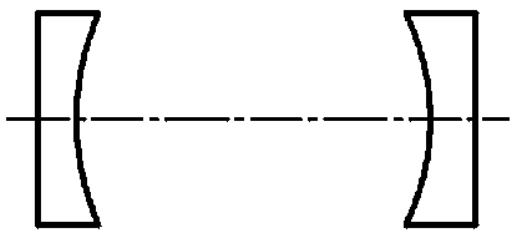
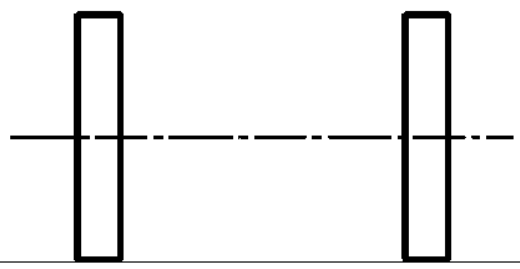
由本节讨论可知：

(1) 两镜平凹稳定腔中束腰位置始终位于平面镜上，这是平凹腔的一个特点.

(2) 对称共焦腔 $g_1 = g_2 = 0$，它位于稳定图中的原点，是光学谐振腔理论中很重要的一类腔型，在 §9.4 中还要详加讨论.

(3) 按照高斯光束理论，平行平面腔、对称共焦腔、对称共心腔两个镜面上和半球腔一个镜面上束宽的计算值都趋于无穷大，远场发散角的计算都趋于零或无限大，这是与实际情况不相符合的，原因是高斯光束理论已不能正确描述这类临界腔的模式分布. 这里有必要再次强调高斯光束理论使用前提：(i) 光的标量场理论，即视场强 E 为标量而忽视了它的矢量性质；(ii) 缓变振幅近似，研究对象是在轴向变化不是很陡的高斯光束传输规律；(iii) 稳定球面腔，其本征模为高斯模，可用高斯函数、厄米－高斯函数(矩形域)或拉盖尔－高斯函数(圆形域)来描写，腔的衍射损耗可以忽略.

表 8.2.1　几种典型的光腔

腔　型	g_1, g_2	w_0^2	w_1^2, w_2^2	θ_0	图示
对称共焦腔	$g_1 = g_2 = 0$	$\frac{\lambda L}{2\pi}$	$2w_0^2$	$\sqrt{\frac{2\lambda}{\pi L}}$	
半共焦腔	$g_1 = 1$ $g_2 = \frac{1}{2}$	$\frac{\lambda L}{\pi}$	$w_1^2 = \frac{\lambda L}{\pi}$ $w_2^2 = \frac{2\lambda L}{\pi}$	$\sqrt{\frac{\lambda}{\pi L}}$	
对称共心腔	$g_1 = g_2 = -1$	~ 0	$\sim \infty$	$\to \infty$	
平行平面腔	$g_1 = g_2 = 1$	$\sim \infty$	$\sim \infty$	$\to 0$	
半球腔	$g_1 = 1$ $g_2 = 0$	0	$w_1 \sim 0$ $w_2 \sim \infty$	$\to \infty$	

§8.3　等价共焦腔

至此，在高斯光束近似下已经严格而又简明地建立了稳定球面腔的模式理论，并用以将各类稳定球面腔的模参数用 g 参数或腔参数表示出来.事实上，这一理论可以从各种途径建立.例如在第九章将会看到，稳定球面腔的模式理论可以从光腔的衍射积分方程出发严格建立.而流行使用的另一方法是以共焦腔的模式理论为基础的，可称为等价共焦腔方法，这一方法固然也不失简明之优点，然而却不甚严格，本节就来讨论这一问题.

一、等价共焦腔的存在和唯一性定理

该定理可表述为，对于任意稳定球面腔必定存在一个，而且只有一个共焦腔，其行波场的某两个等相面与给定球面腔的两个反射镜面相重合，这样的共焦腔，称为与原来的稳定球面腔是等价的.

这一定理很容易证明.如图 8.3.1，设稳定球面腔参数为 ρ_1、ρ_2、L，并设两反射镜曲率半径为 $2L$ 的对称共焦腔是与该球面腔等价的，注意到对共焦腔成立

$$Z_0=\frac{\pi\omega_0^2}{\lambda}=L_c \tag{8.3.1}$$

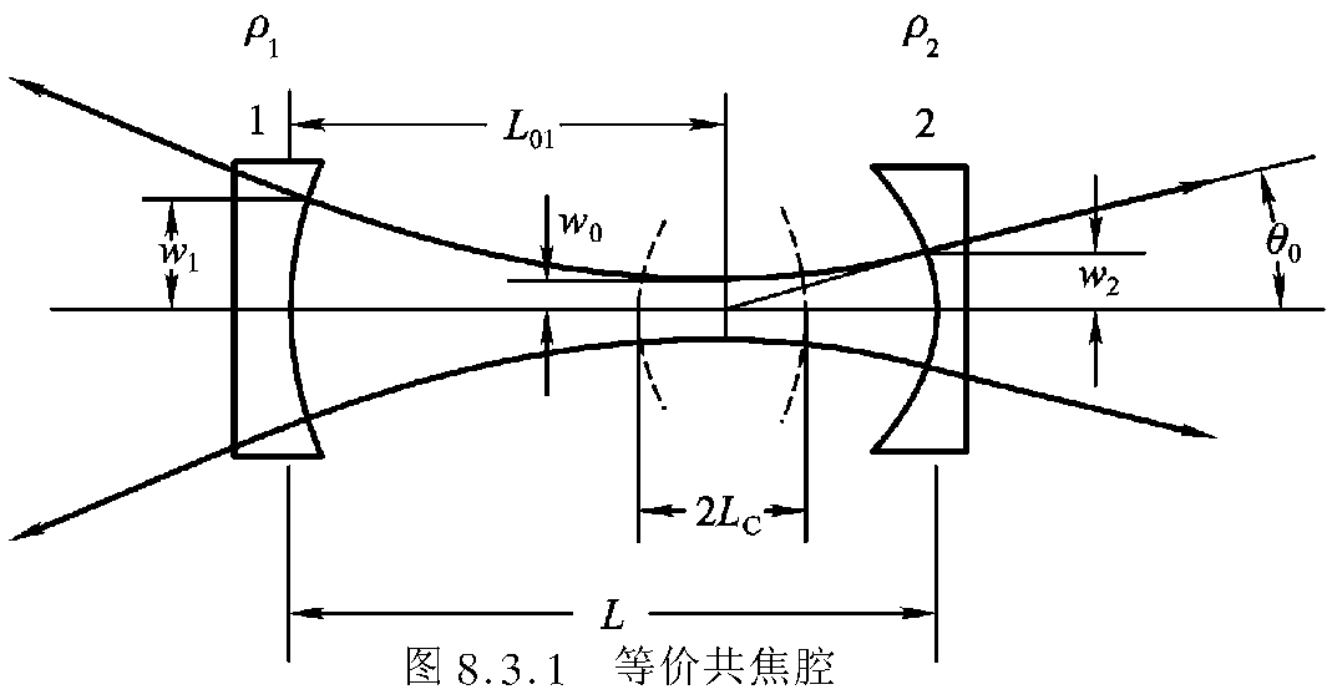


图 8.3.1　等价共焦腔

按图中所示符号有

$$\begin{cases}\rho_1=-\left(L_{01}+\dfrac{L_c^2}{L_{01}}\right) & (8.3.2)\\ \rho_2=\dfrac{L(\rho_2-L)}{(L-\rho_1)+(L-\rho_2)} & (8.3.3)\\ L_{02}=\dfrac{-L(\rho_1-L)}{(L-\rho_1)+(L-\rho_2)} & (8.3.4)\end{cases}$$

对 L_{01}、L_{02}、L_c求解以上联立方程组可得唯一解：

$$\begin{cases} L_c^2 = \dfrac{L(\rho_1 - L)(\rho_2 - L)(\rho_1 + \rho_2 - L)}{[(L-\rho_1)^2 + (L-\rho_2)^2]^2} & (8.3.5) \\ L_{01} = \dfrac{L(\rho_2 - L)}{(L-\rho_1) + (L-\rho_2)} & (8.3.6) \\ L_{02} = \dfrac{-L(\rho_1 - L)}{(L-\rho_1) + (L-\rho_2)} & (8.3.7) \end{cases}$$

因此，对腔几何参数为 ρ_1、ρ_2、L 的任意稳定球面腔，可按式(8.3.5)～式(8.3.7)求得对应等价共焦腔的位置(由 L_{01} 或 L_{02} 确定)、腔长和反射镜曲率半径(都等于 $2L_c$)，然后利用式(8.1.18)、式(8.1.19)，由共焦腔的模参数就可以求得对应稳定球面腔的模参数.因为联立方程组式(8.3.2)～式(8.3.4)的解存在且唯一，这种对应关系是唯一的，即任意稳定球面腔存在一个，而且只存在一个等价共焦腔.但是其逆定理不真，显然一个共焦腔与无穷多个稳定球面腔等价，因为在共焦腔行波场的任意两个等相面上放置与该处等相面曲率半径相同的球面反射镜所组成的腔如果满足约束稳定条件，都与这个共焦腔是等价的.

由式(8.3.5)～式(8.3.7)和共焦腔公式出发，很容易建立稳定球面腔的模式理论，得到和 §8.1、§8.2 相同结果.于此不再赘述，请读者自行完成之.

二、衍射损耗

利用等价共焦腔并引入有效菲涅耳数 F_{ef}，可以近似计算一般稳定球面腔的衍射损耗.

设共焦腔两反射镜的线度均为 a_0，则其菲涅耳数可表示为

$$F = \frac{a_0^2}{\lambda L_0} = \frac{a_0^2}{\pi w^2} \tag{8.3.8}$$

式中 L_0 为共焦腔腔长，w 为镜面处基模束宽.

由衍射理论，可以认为对于反射镜线度为 a_1，镜面束宽为 w_1 的对称稳定球面腔，当

$$\frac{a_1^2}{\pi w_1^2} = \frac{a_0^2}{\pi w^2} \tag{8.3.9}$$

成立时，它与共焦腔的单程损耗相等(图 8.3.2).称

$$F_{1ef} = \frac{a_1^2}{\pi w_1^2} = \frac{a_1^2}{\lambda L \sqrt{\dfrac{g_1}{g_2}(1 - g_1 g_2)}} \tag{8.3.10}$$

$$F_{2\mathrm{ef}}=\frac{a_2^2}{\pi w_2^2}=\frac{a_2^2}{\lambda L\sqrt{\dfrac{g_2}{g_1}(1-g_1g_2)}} \tag{8.3.11}$$

为该球面腔的有效菲涅耳数.

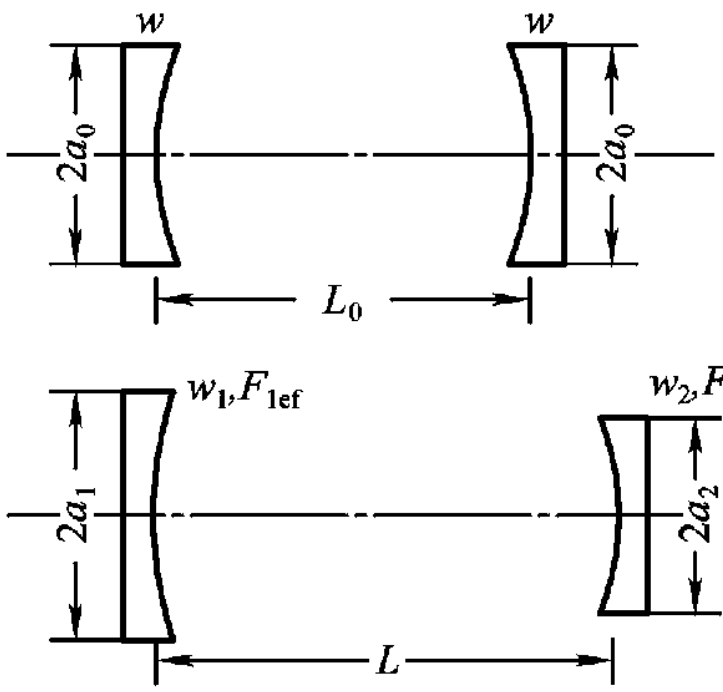


图 8.3.2　等价腔和对应的稳定球面腔

当 $a_1=a_2=a$ 时,有

$$F_{1\mathrm{ef}}=\frac{a^2}{\lambda L\sqrt{\dfrac{g_1}{g_2}(1-g_1g_2)}} \tag{8.3.12}$$

$$F_{2\mathrm{ef}}=\frac{a^2}{\lambda L\sqrt{\dfrac{g_2}{g_1}(1-g_1g_2)}} \tag{8.3.13}$$

上式表明,对于一般稳定球面腔,每一个反射镜对应于一个有效菲涅耳数,即使两个反射镜线度一样(但曲率半径不相同),对应的有效菲涅耳数也不相同.仅对 $a_1=a_2$,$\rho_1=\rho_2$ 的对称腔,才有 $F_{1\mathrm{ef}}=F_{2\mathrm{ef}}$.

求得了 $F_{1\mathrm{ef}}$和 $F_{2\mathrm{ef}}$后,就可以由共焦腔的单程衍射损耗曲线(见第九章)来求得稳定球面腔的衍射损耗.设两反射镜处损耗分别为 δ_1 和 δ_2,则稳定球面腔的平均单程损耗近似为

$$\delta=\frac{1}{2}(\delta_1+\delta_2) \tag{8.3.14}$$

由此可知,按照上面的方法,以共焦腔的模式理论和衍射损耗为基础,利用等价共焦腔和有效菲涅耳数,就可以建立稳定球面腔的模式理论和求得腔的衍射损耗.

三、关于等价共焦腔方法的讨论

等价共焦腔方法是以高斯光束等相位面的分布规律为依据的.特别

是在腔反射镜处应当有

$$R_i = \rho_i \ (i = 1, 2) \tag{8.3.15}$$

但此式的成立是有条件的，即 (i) 稳定腔(高斯腔)；(ii) 驻波腔；(iii) 无源腔.它是在满足上面条件下光束在腔内往返一周自再现的结果.事实上不满足式(8.3.15)的腔型式相当多的，兹举例如下：

(1) 腔内有类透镜平方损耗(或增益)介质存在

为简单起见，考虑图 8.3.3 所示两端面直接镀膜成镜的固体激光腔，则

$$\frac{1}{R} = \frac{R_e \, n_0 / q}{R_e \, n_0} \tag{8.3.16}$$

若 $a_0 \neq 0$，则在腔内满足往返一周自再现条件的高斯光束在镜面处等相面曲率半径 R 一般不再等于腔反射镜曲率半径 ρ.

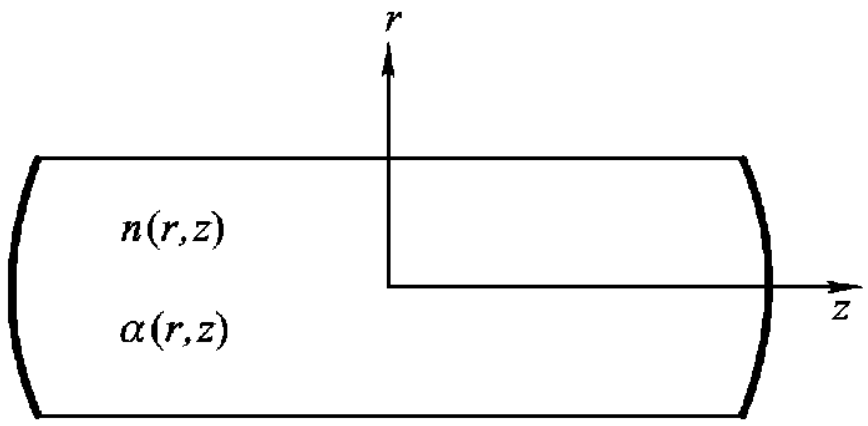


图 8.3.3 端面直接镀膜的固体激光腔

(2) 环形腔

对环形腔之类的行波腔，腔内本征模为行波，满足环绕一周自再现条件.计算表明，若无附加条件，式(8.3.15)不再成立.现以图 8.3.4 所示等边三角形环形腔为例加以说明，详细讨论见第九章.

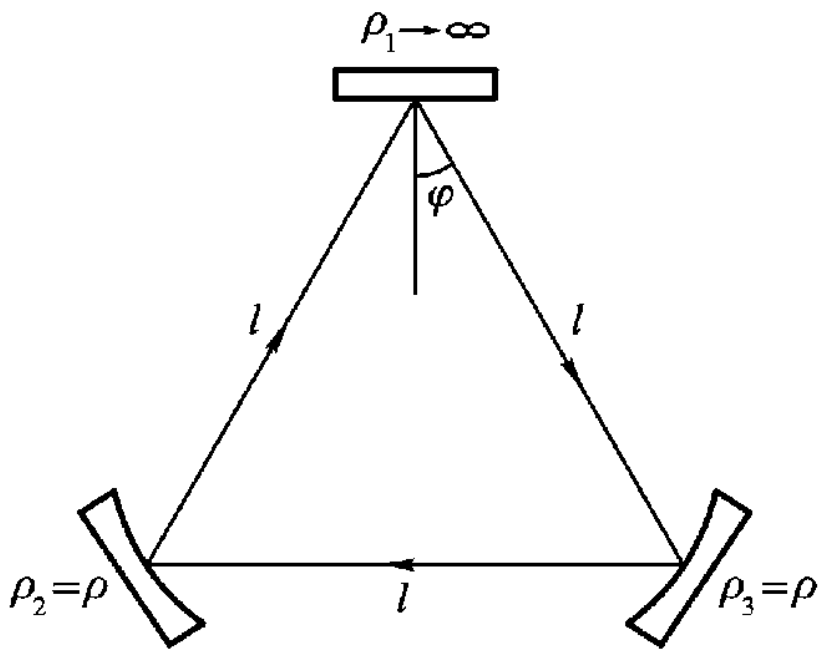


图 8.3.4 等边三角形环形腔

如图 8.3.4，设

$$l_1 = l_2 = l_3 = l \tag{8.3.17}$$

$$\rho_1 \to \infty,\quad \rho_2 = \rho_3 = \rho \tag{8.3.18}$$

在子午面(即包含环形回路的平面)，用带“~”量标记有

$$\tilde{\rho} = \rho\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}\rho \tag{8.3.19}$$

以镜 3 为参考面，环绕矩阵为

$$\widetilde{\boldsymbol{M}} = \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{10l}{\tilde{\rho}} + \dfrac{8l^2}{\tilde{\rho}^2} & 3l - \dfrac{4l^2}{\tilde{\rho}} \\ \dfrac{4l}{\tilde{\rho}^2} - \dfrac{4}{\tilde{\rho}} & 1 - \dfrac{2l}{\tilde{\rho}} \end{bmatrix} \tag{8.3.20}$$

由此可得

$$\widetilde{R}_3 = \frac{\tilde{\rho}}{1 + \dfrac{1}{3 - \dfrac{4l}{\tilde{\rho}}}} = \frac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\rho}{1 + \dfrac{1}{3 - \dfrac{8}{\sqrt{3}\rho}}} \tag{8.3.21}$$

(3) 像散腔

若腔内有像散存在(例如无像散补偿的环形腔和折叠腔)，则在子午面和弧矢面内的光束参数不同，由 §4.18 讨论知，光束截面一般为椭圆，其等相面为二次曲面，显然式(8.3.15)不再成立.

(4) 共焦腔的非对称往返一周自再现模

不仅如此，有趣的是，即使对共焦腔本身，式(8.3.15)也不一定成立. 在第九章中将对共焦腔的特性用不同理论详加讨论，这里只需要指出，因共焦腔的往返一周矩阵为

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{8.3.22}$$

即具有反演对称性质，腔内也可能存在这样一对非对称本征模，它虽然满足往返一周自再现条件，但在镜面处等相面的曲率半径并不等于镜的曲率半径.

由此可知，式(8.3.15)并不是一个普遍成立的规律，于是以式(8.3.15)为依据的等价共焦腔的存在和唯一性定理的现有证明方法的一般性是值得讨论的.

衍射损耗

以等价共焦腔和有效菲涅耳数为依据计算腔衍射损耗的方法不能用

对光腔普遍成立的等价定理加以解释.

仔细分析本节中对等价共焦腔方法和计算腔衍射损耗的讨论可知,这实际上包含有认为一般稳定球面腔和与它等价的共焦腔具有相同的自再现模的重要假设.实际上,这正是等价共焦腔方法"等价"物理意义.但是,应当注意,按照光腔的衍射积分方程理论(见第九章),高斯光束近似意味着腔反射镜面几何尺寸趋于无穷大,这时腔的衍射损耗为零.因此,严格来说,使用高斯光束建立的稳定球面腔模式理论是无法求出有限镜面尺寸光腔的衍射损耗的.引入有效菲涅耳数 F_{ief} 以及使用有关的数学定理,认为第 i 个腔镜面处的衍射损耗与菲涅耳数为 F_{ief} 的共焦腔的单程损耗相等,实际上已与本节第一段所描述等价共焦腔意义不同了,这里已隐含了可用弗莱姆(Flammer)函数(矩形域)或超球函数(圆形域)所表征的有限镜面尺寸的共焦腔场分布的损耗来计算一般稳定球面腔损耗的假设.但这一假设的正确性未见严格的证明,也不能用对光腔普遍成立的等价定理加以解释,故这一做法只能认为是近似的估算.下面我们对此做具体讨论.

第九章将证明,如果两个球面腔有相同的特征参数 G_1、G_2、F,即满足

$$\begin{aligned} G_1 &= G'_1 \\ G_2 &= G'_2 \\ F &= F' \end{aligned} \tag{8.3.23}$$

则这两个腔是等价的.式中

$$F = \frac{a_1 a_2}{\lambda L}$$

$$G_1 = g_1 \frac{a_1}{a_2} \tag{8.3.24}$$

$$G_2 = g_2 \frac{a_2}{a_1}$$

L 为腔长,a_1、a_2 为两反射镜面半径,g_i 为腔的 g 参数.这即对光腔(稳定腔、非稳腔、临界腔)普遍适用的等价定理.其等价性是指满足式(8.3.23)的两个腔有相同的本征值和成比例的本征函数,因而有相同的单程损耗和相应的共振频率.

现在分析与 F_{ef} 有关的等价性问题.以对称腔为例,按前述,对稳定球面腔 (a,ρ,L) 的单程损耗应当与 F 数为

$$F = F_{ef} = \frac{a^2}{\lambda L}\sqrt{1-g^2} \tag{8.3.25}$$

的对称共焦腔的单程损耗相等.对共焦腔有

$$G_1 = G_2 = 0 \tag{8.3.26}$$

而对稳定球面腔有

$$G_1 = G_2 = 1 - \frac{L}{\rho} \tag{8.3.27}$$

$$F' = \frac{a^2}{\lambda L} \tag{8.3.28}$$

比较式(8.3.25)、式(8.3.26)、式(8.3.27)、式(8.3.28),显然不满足式(8.3.23),与腔的等价定理不符.因此,用 F_{ef} 定量讨论腔的损耗至少是不严格的.

§8.4 非 稳 腔

由§2.6可知,图8.1.1所示光腔,当往返一周矩阵元满足条件

$$\left|\frac{A+D}{2}\right| > 1 \tag{8.4.1}$$

即光腔 g 参数满足不等式

$$g_1 g_2 > 1 \text{ 或 } g_1 g_2 < 0 \tag{8.4.2}$$

时为非稳腔.对非稳腔,取本征球面波波面曲率半径 R 为特征参数,由 $ABCD$ 定律和自再现条件可知,对镜1处本征球面波波面曲率半径 R_1 应有

$$R_1 = \frac{AR_1 + B}{CR_1 + D} \tag{8.4.3}$$

将式(8.1.8)代入式(8.4.3),得

$$\begin{aligned}\frac{1}{R_1} &= \frac{D-A}{2B} \pm \frac{1}{B}\sqrt{\left(\frac{A+D}{2}\right)^2 - 1} \\ &= \frac{g_1 - 1}{L} \pm \frac{1}{g_2 L}\sqrt{g_1 g_2 (g_1 g_2 - 1)}\end{aligned} \tag{8.4.4}$$

或写为

$$\begin{aligned}R_1 &= \frac{A-D}{2C} \pm \frac{1}{C}\sqrt{\left(\frac{A+D}{2}\right)^2 - 1} \\ &= \frac{g_2(1-g_1) \pm \sqrt{g_1 g_2 (g_1 g_2 - 1)}}{2g_1 g_2 - g_1 - g_2} L\end{aligned} \tag{8.4.5}$$

设以镜2为参考,往返一周矩阵为 $\boldsymbol{M}' = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$,同法求得镜2处

本征球面波波面曲率半径 R_2 为

$$\frac{1}{R_2}=\frac{D'-A'}{2B'}\pm\frac{1}{B'}\sqrt{\left(\frac{A+D}{2}\right)^2-1}$$

$$=\frac{g_2-1}{L}\pm\frac{1}{g_2L}\sqrt{g_1g_2(g_1g_2-1)} \tag{8.4.6}$$

或写为

$$R_2=\frac{A'D'}{2C}\pm\frac{1}{C'}\sqrt{\left(\frac{A+D}{2}\right)^2-1}$$

$$=\frac{g_1(1-g_2)\pm\sqrt{g_1g_2(g_1g_2-1)}}{2g_1g_2-g_1-g_2}L \tag{8.4.7}$$

在推导时已利用往返一周 $ABCD$ 矩阵基本性质

$$A+D=A'+D' \tag{8.4.8}$$

由简单的几何分析知，R_1、R_2 也就是满足往返一周自再现条件的非稳腔的一对共轭物像点 P_1、P_2 与镜 1、2 的距离.且以镜 1 为参考，$R_1>0$ 时，P_1 在镜之左方，$R_1<0$ 时，P_1 在镜 1 之右方，以镜 2 为参考，$R_2<0$ 时，P_2 在镜 2 左方，$R_2>0$ 时，P_2 在镜 2 右方，见图 8.4.1.

由 §2.7 可知，非稳腔的往返一周放大律 M 等于光腔本征方程的本征值，其绝对值等于微扰稳定判别因子 S，且

$$M_{1,2}=\gamma_{1,2}=\frac{A+D}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{A+D}{2}\right)^2-1}$$

$$=2g_1g_2-1\pm2\sqrt{g_1g_2(g_1g_2-1)} \tag{8.4.9}$$

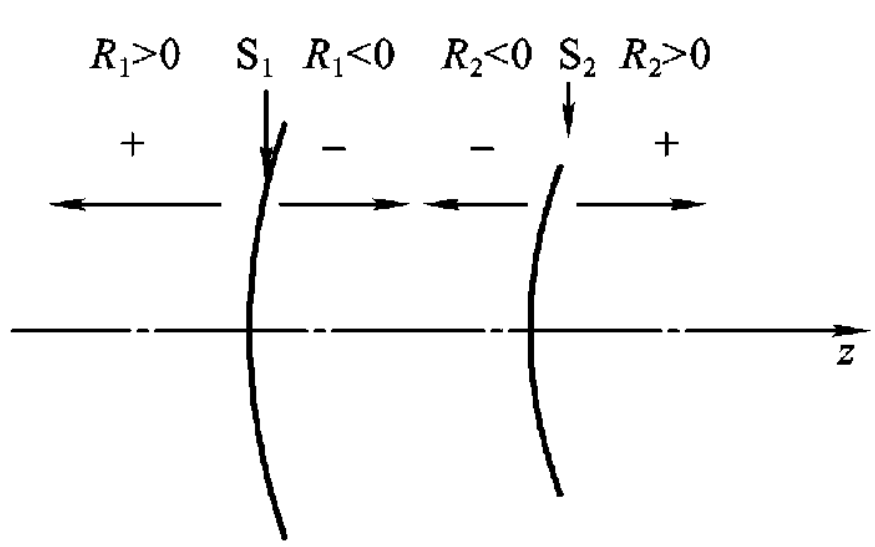


图 8.4.1 非稳腔共轭物像点位置正负值意义

由式(8.4.9)和简单的几何分析得到非稳腔往返一周能量输出耦合率 $\Gamma_{1,2}$

$$\Gamma_{1,2}=1-\frac{1}{M_{1,2}^2} \tag{8.4.10}$$

式(8.4.4)～式(8.4.10)为用 $ABCD$ 矩阵方法分析非稳腔的基本方程.式中开方号前“±”号的取舍,是由非稳腔应当满足微扰稳定条件来决定的.即当$\frac{A+D}{2}>1$($g_1g_2>1$)时取“+”号,称为正支非稳腔,$\frac{A+D}{2}<-1$($g_1g_2<0$)时,取“−”号,称为负支非稳腔.

在式(8.4.5)中令 $R_1\to\infty$,得到共焦非稳腔条件为

$$g_1+g_2=2g_1g_2 \tag{8.4.11}$$

即

$$\begin{cases} g_1g_2>1 \\ g_1+g_2=2g_1g_2 \end{cases} \tag{8.4.12}$$

时,为正支共焦非稳腔.

当

$$\begin{cases} g_1g_2<0 \\ g_1+g_2=2g_1g_2 \end{cases} \tag{8.4.13}$$

时,为负支非稳腔.

§8.5　各类非稳腔的模参数公式和共轭物像点的分布

上节推出的公式对各类简单几何结构非稳腔(双凹、凸凹、双凸、平凸、平凹型非稳腔)都是适用的.本节我们以双凹型和凸凹型非稳腔为例,说明公式的应用.

按本书符号法则,当 $R_i>0$ 或 $R_i<-L$ 时,共轭点在腔外,当 $-L<R_i<0$($i=1,2$)时,共轭点在腔内.腔内共轭点的存在对高功率激光器是不利的,应尽可能避免或采用有关措施(例如自滤波非稳腔).在本节中,我们还利用了 R_i 的公式对非稳腔共轭物像点的分布规律做了分析和总结.

一、双凹型非稳腔($\rho_1>0,\rho_2>0$)

双凹型非稳腔可分为二类:

1. 负支双凹非稳腔

设两反射镜曲率半径 $\rho_1>L,0<\rho_2<L$,式(8.4.5)、式(8.4.7)可用腔几何参数写为

$$R_1=\frac{(\rho_2-L)L-\sqrt{L(\rho_1-L)(L-\rho_2)(\rho_1+\rho_2-L)}}{2L-\rho_1-\rho_2} \tag{8.5.1}$$

$$R_2=\frac{(\rho_1-L)L-\sqrt{L(\rho_1-L)(L-\rho_2)(\rho_1+\rho_2-L)}}{2L-\rho_1-\rho_2}\tag{8.5.2}$$

M,Γ 的公式可以仿此写出，从略.现讨论共轭物像点的分布规律.

(1) 当 $L<\rho_1+\rho_2<2L$ 时，因

$$R_1+L=\frac{-(\rho_1-L)L-\sqrt{L(\rho_1-L)(L-\rho_2)(\rho_1+\rho_2-L)}}{2L-\rho_1-\rho_2}<0\tag{8.5.3}$$

故

$$R_1<-L\tag{8.5.4}$$

即共轭点 P_1 在镜 2 之左方.

因

$$\rho_2(2L-\rho_1-\rho_2)>0\tag{8.5.5}$$

成立，所以

$$(\rho_1-L)L-\sqrt{L(\rho_1-L)(L-\rho_2)(\rho_1+\rho_2-L)}<0\tag{8.5.6}$$

由此知

$$R_2<0\tag{8.5.7}$$

又

$$R_2+L=\frac{L(L-\rho_2)-\sqrt{L(\rho_1-L)(L-\rho_2)(\rho_1+\rho_2-L)}}{2L-\rho_1-\rho_2}\tag{8.5.8}$$

$$L(L-\rho_2)-\sqrt{L(\rho_1-L)(L-\rho_2)(\rho_1+\rho_2-L)}\geqslant L(L-\rho_2)-\frac{L(L-\rho_2)+(\rho_1-L)(\rho_1+\rho_2-L)}{2}=\frac{\rho_1(2L-\rho_1-\rho_2)}{2}>0\tag{8.5.9}$$

所以

$$-L<R_2<0\tag{8.5.10}$$

即共轭点 P_2 在腔内.

(2) 当 $\rho_1+\rho_2>2L$ 时，显然式(8.5.1)分子、分母都小于零，故

$$R_1>0\tag{8.5.11}$$

即 P_1 在镜 1 的左方.

由

$$\rho_2(2L-\rho_1-\rho_2)<0\tag{8.5.12}$$

得

$$(\rho_1 - L)L - \sqrt{L(\rho_1 - L)(L - \rho_2)(\rho_1 + \rho_2 - L)} > 0 \tag{8.5.13}$$

故

$$R_2 < 0 \tag{8.5.14}$$

再由

$$\rho_1(2L - \rho_1 - \rho_2) < 0 \tag{8.5.15}$$

可证

$$R_2 + L > 0 \tag{8.5.16}$$

所以

$$-L < R_2 < 0 \tag{8.5.17}$$

即 P_2 在腔内.

(3) $\rho_1 + \rho_2 = 2L$,为负支实共焦腔.

由式(8.5.1)、式(8.5.2)知,这时一个共轭点 P_1 位于无穷远,另一共轭点 P_2 位于腔内 $R_2 = -\rho_2/2$ 处(因 $-L < R_2 < 0$).

对 $0 < \rho_1 < L, \rho_2 > L$ 情况,可仿上分析.

2. 正支双凹非稳腔 $0 < \rho_1 + \rho_2 < L$

式(8.4.5)、式(8.4.7)可写为

$$R_1 = \frac{\sqrt{L(L - \rho_1)(L - \rho_2)(L - \rho_1 - \rho_2)} - (L - \rho_2)L}{2L - \rho_1 - \rho_2} \tag{8.5.18}$$

$$R_2 = \frac{\sqrt{L(L - \rho_1)(L - \rho_2)(L - \rho_1 - \rho_2)} - (L - \rho_1)L}{2L - \rho_1 - \rho_2} \tag{8.5.19}$$

因

$$\sqrt{L(L - \rho_1)(L - \rho_2)(L - \rho_1 - \rho_2)} - (L - \rho_2)L \leqslant$$

$$\frac{L(L - \rho_2) + (L - \rho_1)(L - \rho_1 - \rho_2)}{2} - (L - \rho_2)L = -\frac{\rho_1(2L - \rho_1 - \rho_2)}{2} < 0 \tag{8.5.20}$$

故

$$R_1 < 0 \tag{8.5.21}$$

又

$$R_1+L=\frac{L(L-\rho_1)+\sqrt{L(L-\rho_1)(L-\rho_2)(L-\rho_1-\rho_2)}}{2L-\rho_1-\rho_2}>0 \tag{8.5.22}$$

得

$$-L<R_1<0 \tag{8.5.23}$$

因此，P_1 在腔内.

同理，由

$$\sqrt{L(L-\rho_1)(L-\rho_2)(L-\rho_1-\rho_2)}-(L-\rho_1)L\leqslant$$

$$\frac{L(L-\rho_1)+(L-\rho_2)(L-\rho_1-\rho_2)}{2}-(L-\rho_1)L=-\frac{\rho_2(2L-\rho_1-\rho_2)}{2}<0 \tag{8.5.24}$$

和

$$R_2+L>0 \tag{8.5.25}$$

知

$$-L<R_2<0 \tag{8.5.26}$$

即 P_2 也在腔内.使用光线追迹方法对各类双凹型非稳腔几何共轭光线和共轭物像点作图示意于图 8.5.1.

二、凸凹型非稳腔

为确定起见，设 $\rho_1>0$，$\rho_2<0$，满足非稳定条件的非稳腔可分为两类：

1. 正支凸凹非稳腔

此时应有

$$\rho_1-|\rho_2|>L \tag{8.5.27}$$

于是

$$R_1=\frac{\sqrt{L(L-\rho_1)(L+|\rho_2|)(L-\rho_1+|\rho_2|)}+L(L+|\rho_2|)}{\rho_1-|\rho_2|-2L} \tag{8.5.28}$$

$$R_2=\frac{\sqrt{L(L-\rho_1)(L+|\rho_2|)(L-\rho_1+|\rho_2|)}-L(\rho_1-L)}{\rho_1-|\rho_2|-2L} \tag{8.5.29}$$

正支虚共焦非稳腔为其特例，这时

$$\rho_1 - |\rho_2| = 2L \tag{8.5.30}$$

且

$$R_1 \to \infty, R_2 = -\frac{\rho_2}{2} = \frac{|\rho_2|}{2} \tag{8.5.31}$$

即共轭点 P_1 在无穷远，而 P_2 在凸镜(镜 2)右方 $|\rho_2|/2$ 处.

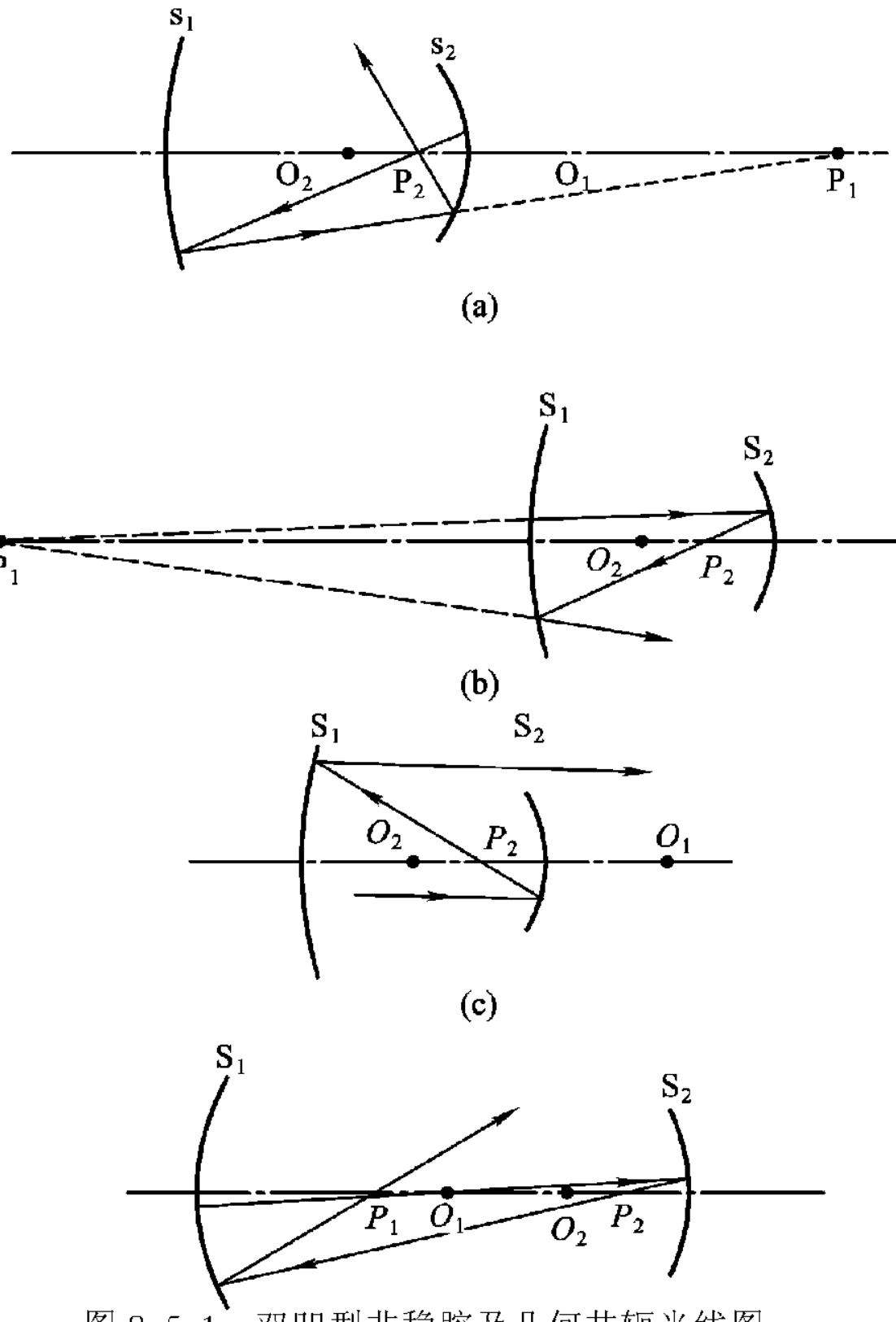


图 8.5.1　双凹型非稳腔及几何共轭光线图

(a) $\rho_1 > L, 0 < \rho_2 < L, L < \rho_1 + \rho_2 < 2L$；

(b) $\rho_1 > L, 0 < \rho_2 < L, \rho_1 + \rho_2 > 2L$；

(c) $\rho_1 > L, \rho_1 + \rho_2 = 2L$；(d) $0 < \rho_1 + \rho_2 < L$

2. 负支凸凹腔

此时应有

$$\rho_1 < L \tag{8.5.32}$$

于是

$$R_1=\frac{\sqrt{L(L-\rho_1)(L+|\rho_2|)(L-\rho_1+|\rho_2|)}-L(L+|\rho_2|)}{2L-\rho_1+|\rho_2|} \tag{8.5.32}$$

$$R_2=\frac{\sqrt{L(L-\rho_1)(L+|\rho_2|)(L-\rho_1+|\rho_2|)}-L(L-\rho_1)}{2L-\rho_1+\rho_2} \tag{8.5.33}$$

用节一相同方法可分析凸凹型非稳腔共轭物像点的分布规律，图 8.5.2 为用光线追迹法所做各类凸凹非稳腔几何共轭光线和共轭物像点的示意图.对于双凸、平凸和平凹非稳腔的公式请读者自行完成之，并与熟知的非稳腔的几何光学分析法所得结果(本章末参考文献[2]、[4])相比较.图 8.5.3 总结了各类非稳腔在 g 参数图上的位置和共轭物像点的分布情况，以供参考.

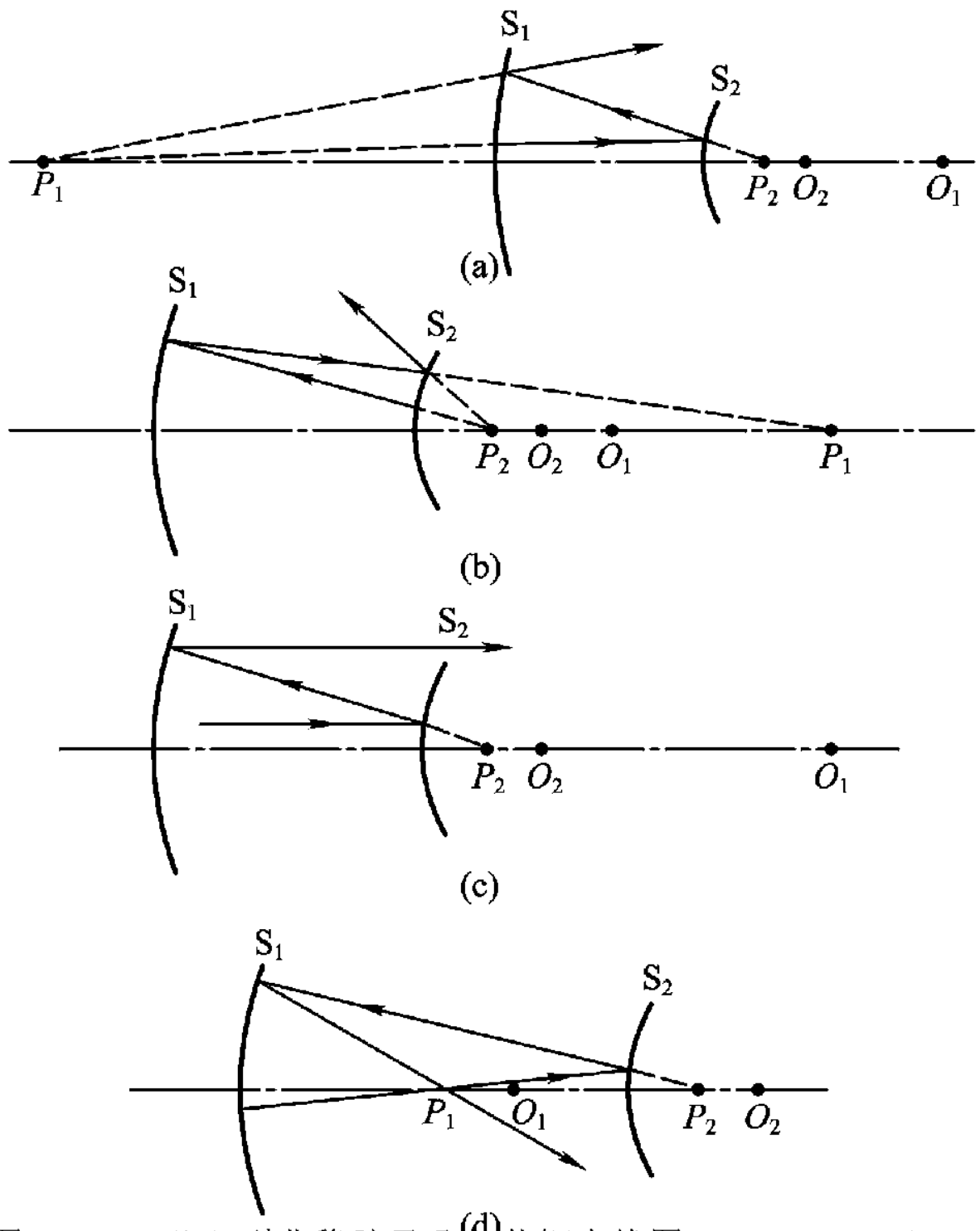


图 8.5.2　凸凹型非稳腔及几何共轭光线图($\rho_1>0,\rho_2<0$)

(a) $\rho_1+\rho_2>2L$；(b) $L<\rho_1+\rho_2<2L$；(c) $\rho_1+\rho_2=2L$；(d) $\rho_1<L$

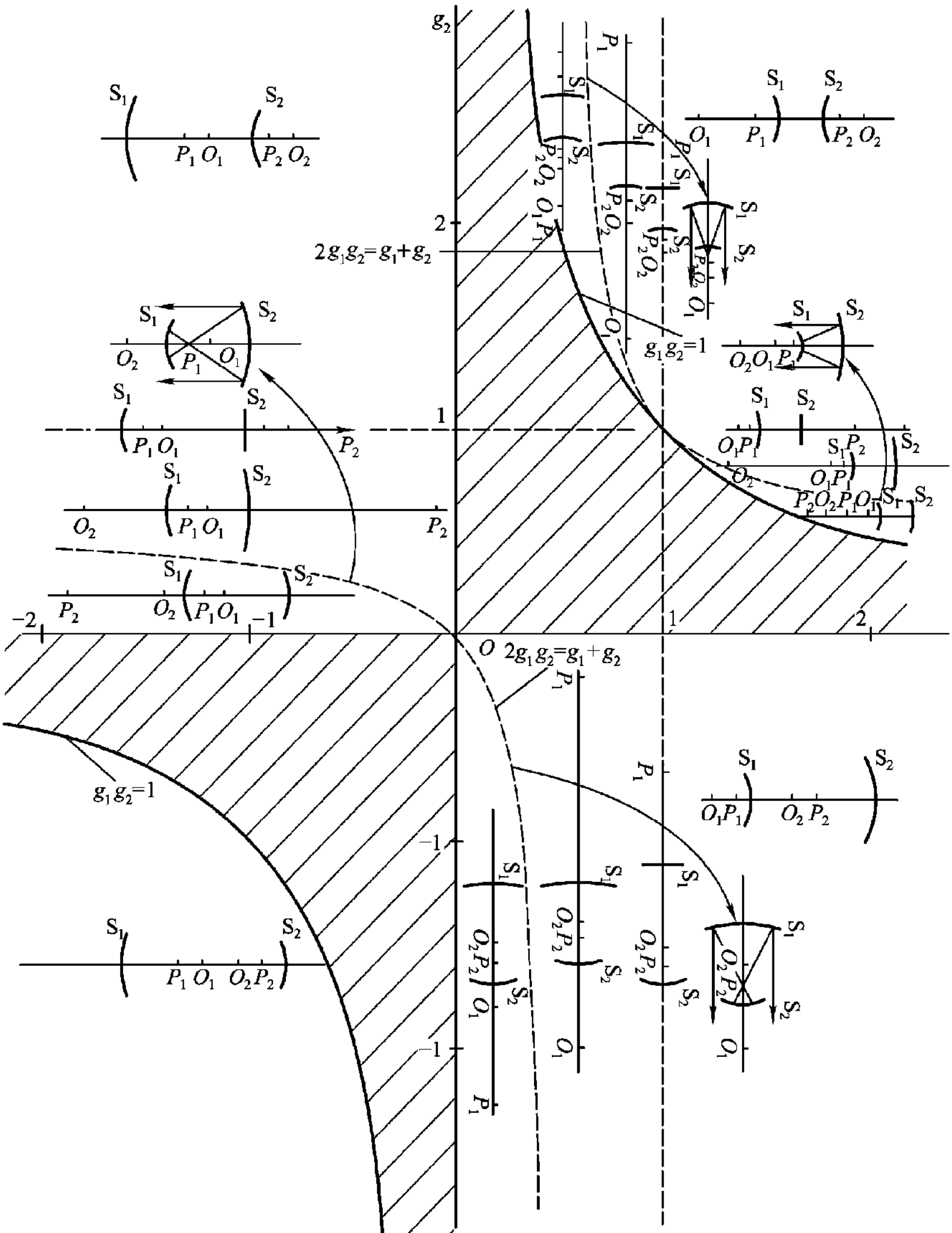
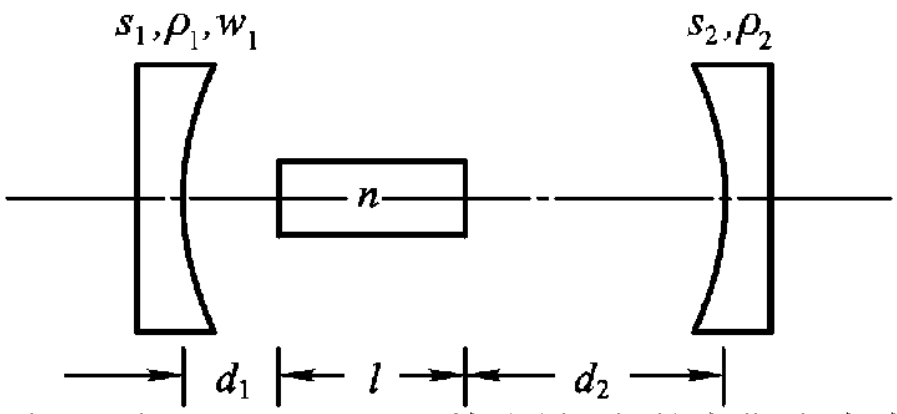


图 8.5.3 g 参数图上各类非稳腔及其共轭物像点的位置

习 题

1. 证明式(8.1.14).
2. 证明式(8.1.25).
3. 推导式(8.3.21).

4. 如下图所示固体激光器中两反射镜曲率半径分别为 ρ_1、ρ_2，内置几何长度 l，折射率 n 的 Nd:YAG 棒，设镜 s_1 处基模高斯光束束宽为 w_1.



(1) 求腔内距镜内 s_2 为 d 处(即 YAG 棒右端面)的高斯光束束宽和等相面曲率半径.

(2) 设 $\rho_1=\rho_2=\rho$，且不计棒的热透镜效应.欲构成一对称共焦腔，求腔的几何长度 L 应为多大？并求出高斯光束在此共焦腔内实现单程传输自再现的条件.

5. 对简单两镜非稳腔，可用(1) 几何光学方法(例如高斯成像公式或牛顿方程)；(2) 矩阵光学方法分析其模式特性，以(1)双凹非稳腔；(2) 凸凹非稳腔为例，使用上述方法进行分析，并对所得结果进行比较，归纳出统一的符号法则.

6. 写出双凸腔的模参数公式，并讨论双凸腔共轭物像点的分布规律.

7. 实共焦和虚共焦非稳腔各有何特点？在实际工作中使用实共焦非稳腔时应注意些什么？

8. 给出一种简易可行的实验方法，判断实验中非稳腔是否已经调整到共焦状态.

9. 分析近共心稳定腔和半球腔的模式结构.这两类腔可能存在非近轴本征模吗？

参 考 文 献

[1] Boyd G D, Kogelnik H. Generalized confocal resonator theory. Bell Syst Techn J, 1962, 41:1 369

[2] Siegman A E. Unstable optical resonators for laser application. Proc IEEE, 1965, 53:277

[3] Kogelnik H. Imaging of optical modes－resonators with internal lens. Bell Syst Techn J, 1965, 44:455

[4] Siegman A E. Stabilizing output with unstable resonators. Laser Focus, May, 1971, 42

[5] Siegman A E. Lasers. 1986

[6] 吕百达.光学谐振腔导论.成都:四川大学讲义,1983

[7] 吕百达.矩阵光学方法在谐振腔理论中的应用.激光杂志,1989,10:241

[8] 吕百达等.非稳腔几何共轭光线的特性.激光技术,1989,13:13

[9] 卢亚雄,吕百达,矩阵光学.大连:大连理工大学出版社,1989

[10] Lü B. Questions about equivalent confocal resonator method. Chin Phys Lasers，1986，13：763

第九章　光学谐振腔的衍射积分方程理论

本章讨论以菲涅耳－基尔霍夫衍射理论积分为基础的光学谐振腔的衍射积分方程理论.这是比较严格的理论,但也有近似.其主要的近似之处在于把光当作标量来处理,即只考虑对光现象起主要作用的电场强度一个分量的标量振幅,而且假定其它分量可以用同样方式独立处理.这就忽略了它们是由麦克斯韦方程组相耦合这一事实,也不涉及电磁波的偏振特性.但是,当满足:(1) 光腔反射镜(衍射孔径)几何尺寸比波长远大;(2) 不要在离反射镜太近的地方观察场的条件时,由标量衍射理论可以得到相当满意的结果.在这种意义上,与其它理论相比较,可以认为它是比较普遍和准确的理论.本章使用的研究方法和所得结果在光学谐振腔理论中有重要地位.

从菲涅耳－基尔霍夫衍射积分出发,可以建立一个描述光学谐振腔特性的本征积分方程.利用这个方程原则上可以求得任意光腔(稳定腔、非稳腔和临界腔)的模参数,包括腔模的场振幅、相位分布、谐振频率和衍射损耗等.虽然本征积分方程的解的存在性在数学上已严格证明是无疑的,但是迄今只在少数情况下求出了解析形式的解,在大多数情况下,需要求数值解.做为有代表性的典型,我们以平行平面腔为例,说明福克斯－厉数值迭代法的物理思想和求解方法,以非稳腔为例,说明帕若利(Prony)法的计算步骤.章末最后三节对非稳腔的基本性质,衍射积分方程理论的主要结果和与几何光学分析结果的比较以及有源非稳腔等问题进行了讨论.

§9.1　光学谐振腔的本征积分方程

一、腔的本征积分方程

将菲涅耳－基尔霍夫衍射积分式(1.1.23)用于处理图 9.1.1 所示光学谐振腔问题时,能把镜面 S_1 上的场 $E_1(x_1, y_1)$与镜面 S_2 上的场 $E_2(x_2, y_2)$联系起来.于是经过 q 次传输而产生的场$E_{q+1}(x_2, y_2)$与产生它的场 $E_q(x_1, y_1)$间应满足

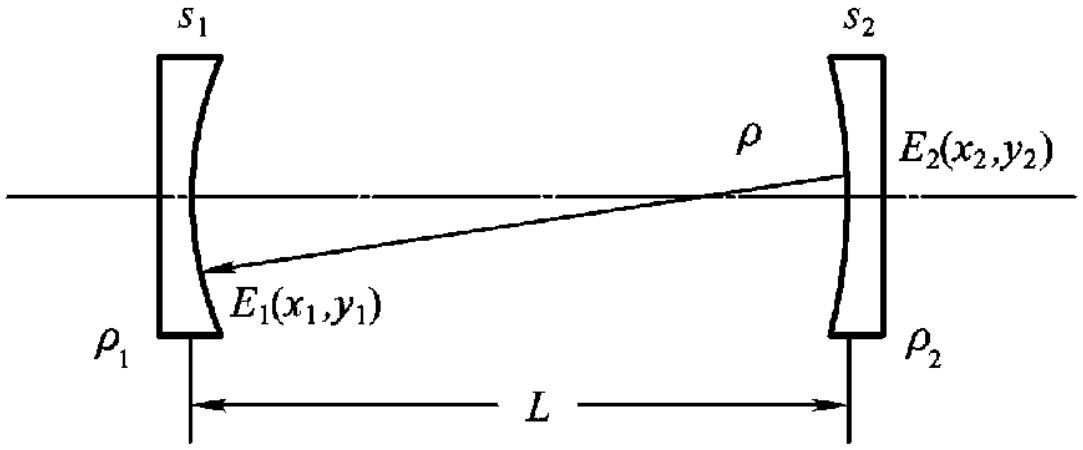


图 9.1.1　一般光学谐振腔

$$E_{q+1}(x_2,y_2)=\frac{\mathrm{i}}{2\lambda}\int_{s_1}E_q(x_1,y_1)\frac{\exp(-\mathrm{i}k\rho)}{\rho}(1+\cos\theta)\mathrm{d}s_1 \tag{9.1.1}$$

应用中常做如下简化：因光学谐振腔长度 L 一般远大于反射镜线度，故可将被积函数中因子 $\frac{1+\cos\theta}{\rho}$ 用 $\frac{2}{L}$ 代替而提出积分号外，于是式(9.1.1)成为

$$E_{q+1}(x_2,y_2)=\frac{\mathrm{i}}{\lambda L}\int_{s_1}E_q(x_1,y_1)\exp(-\mathrm{i}k\rho)\mathrm{d}s_1 \tag{9.1.2}$$

但注意因反射镜线度远大于波长，被积函数指数因子中的 ρ 不能用 L 来代替，只能因不同腔型和反射镜几何形状取合理的近似.

当光波在腔内传输次数 q 足够大时，根据 §1.6 的讨论，除了一个表示振幅衰减和相位移动的复常数因子 γ 外，镜面 s_1 上的场 $E_{1,q}$ 在腔内往返一周后应当自再现它本身：

$$E_{1,q+2}=\gamma E_{1,q} \tag{9.1.3}$$

同理，镜 s_2 上的场 $E_{2,q+1}$ 与往返一周后的场 $E_{2,q+3}$ 间有

$$E_{2,q+3}=\gamma E_{2,q+1} \tag{9.1.4}$$

式中 γ 为一与坐标无关的复常数.略去与 q 有关的下标，由式(9.1.3)、式(9.1.2)得到

$$\gamma E_1(x_1,y_1)=\frac{\mathrm{i}}{\lambda L}\int_{s_2}\exp(-\mathrm{i}\,k\rho)\mathrm{d}s_2\int_{s_1}\frac{\mathrm{i}}{\lambda L}E_1(x',y')\exp(-\mathrm{i}k\rho)\mathrm{d}s_1' \tag{9.1.5}$$

令

$$\gamma=\gamma_1\gamma_2 \tag{9.1.6}$$

上式可写为

$$\gamma_1 E_1(x_1,y_1)=\frac{\mathrm{i}}{\lambda L}\int_{s_2}E_2(x_2,y_2)\exp(-\mathrm{i}k\rho)\mathrm{d}s_2 \tag{9.1.7}$$

$$\gamma_2 E_2(x_2, y_2) = \frac{\mathrm{i}}{\lambda L}\int_{s_1} E_1(x_1, y_1)\exp(-\mathrm{i}k\rho)\mathrm{d}s_1 \tag{9.1.8}$$

引入

$$K(x_1, y_1, x_2, y_2) = \frac{\mathrm{i}}{\lambda L}\exp[-\mathrm{i}k\rho(x_1, y_1, x_2, y_2)] \tag{9.1.9}$$

后，式(9.1.7)、式(9.1.8)可写为

$$\gamma_1 E_1(x_1, y_1) = \int_{s_2} E_2(x_2, y_2)K(x_1, y_1, x_2, y_2)\mathrm{d}s_2 \tag{9.1.10}$$

$$\gamma_2 E_2(x_2, y_2) = \int_{s_1} E_1(x_1, y_1)K(x_2, y_2, x_1, y_1)\mathrm{d}s_1 \tag{9.1.11}$$

式(9.1.10)、式(9.1.11)称为光学谐振腔的本征积分方程，K 称为积分方程的核，且有

$$K(x_1, y_1, x_2, y_2) = K(x_2, y_2, x_1, y_1) \tag{9.1.12}$$

它是复对称，但非厄米的.

满足式(9.1.10)、式(9.1.11)的场函数 $E_1(x_1, y_1)$ 和 $E_2(x_2, y_2)$ 就是腔的自再现模，它描述了两个镜面上的稳态场分布.

二、复常数 γ 的物理意义

方程式(9.1.3)、式(9.1.4)中的复常数 γ 可以写为

$$\gamma = \exp[-(\sigma + \mathrm{i}\beta)] \tag{9.1.13}$$

其中 σ、β 为实常数. 于是

$$E_{1,q+2} = \exp(-\sigma)E_{1,q}\exp(-\mathrm{i}\beta) \tag{9.1.14}$$

由此可知，$\exp(-\sigma)$ 表示腔内往返一周后自再现模振幅的衰减，$\sigma = 0$ 时，腔损耗为零. β 表示往返一周的相移.

通常将自再现模在腔内单程传输一次的平均相对功率损耗称为模的平均单程功率损耗，简称单程损耗，用 δ 表示. 由式(9.1.14)

$$\delta = 1 - \exp(-\sigma) = 1 - |\gamma| \tag{9.1.15}$$

自再现模在腔内往返一周的相移 ϕ 定义为

$$\begin{aligned}\phi &= \arg E_{1,q+2} - \arg E_{1,q}\\ &= -\beta\\ &= \arg\gamma\end{aligned} \tag{9.1.16}$$

腔模的谐振频率由自再现模在腔内往返一周的相移 ϕ 等于 2π 的整数倍来确定(谐振条件)

$$\phi = \arg\gamma = \pm 2\pi q, \quad q = 1, 2, \cdots \tag{9.1.17}$$

对于对称腔，经单程传输即可实现自再现：

$$E_{q+1}=\gamma' E_q \tag{9.1.18}$$

仿上步骤，很容易推导出对称腔的本征积分方程，并讨论复常数 γ' 的物理意义.

§9.2　反射镜几何尺寸无限大时光腔本征方程的解

一、矩形域

对图 9.2.1 所示腔长为 L，两反射镜曲率半径分别为 ρ_1、ρ_2 的球面光学谐振腔，由几何关系，在直角坐标系下有

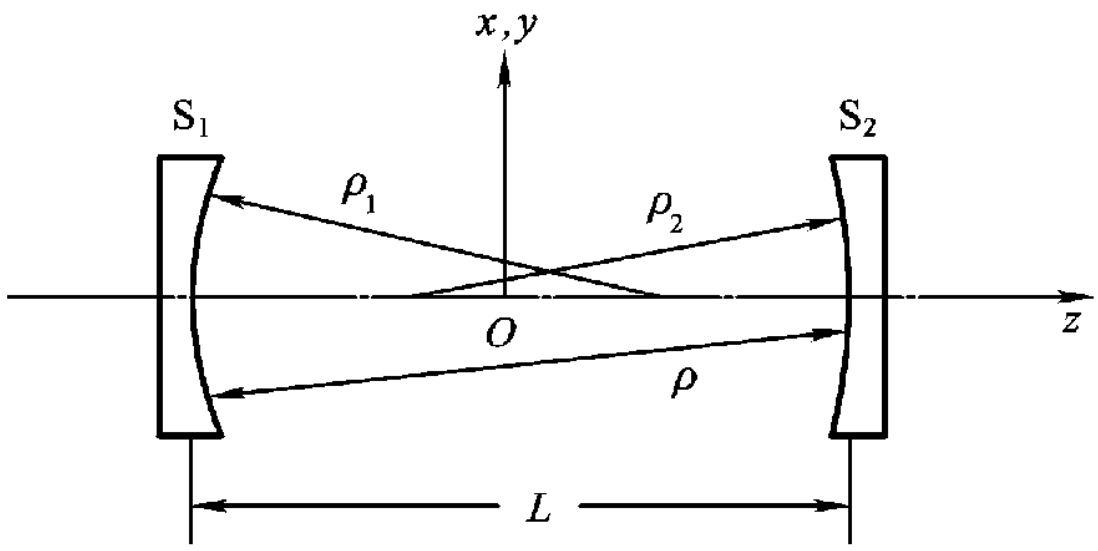


图 9.2.1　球面光学谐振腔

$$\rho^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2 \tag{9.2.1}$$

$$\rho_1^2=x_1^2+y_1^2+\left[z_1-\left(\rho_1-\frac{L}{2}\right)\right]^2 \tag{9.2.2}$$

$$\rho_2^2=x_2^2+y_2^2+\left[z_2+\left(\rho_2-\frac{L}{2}\right)\right]^2 \tag{9.2.3}$$

将式(9.2.2)、式(9.2.3)代入式(9.2.1)，并利用条件 $x_1, y_1, x_2, y_2 \ll \rho_1, \rho_2, L$ 得

$$\rho \approx L+\frac{1}{2L}\left[g_1(x_1^2+y_1^2)+g_2(x_2^2+y_2^2)-2x_1x_2-2y_1y_2\right] \tag{9.2.4}$$

把式(9.2.4)代入式(9.1.10)、式(9.1.11)，令积分限$\to\infty$，

$$\gamma_2 E_2(x_2,y_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}E_1(x_1,y_1)K(x_2,y_2,x_1,y_1)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1 \tag{9.2.5}$$

$$\gamma_1 E_1(x_1,y_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}E_2(x_2,y_2)K(x_1,y_1,x_2,y_2)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}y_2 \tag{9.2.6}$$

其中

$$K(x_2,y_2,x_1,y_1)=\frac{\mathrm{i}}{\lambda L}\exp\left(-2\mathrm{i}\pi\frac{L}{\lambda}\right)\cdot$$
$$\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}\pi}{\lambda L}\left[g_1(x_1^2+y_1^2)+g_2(x_2^2+y_2^2)-2(x_1x_2+y_1y_2)\right]\right\} \tag{9.2.7}$$

因式(9.2.7)是可分离变量的,故设

$$E_1(x_1,y_1)=u_1(x_1)V_1(y_1),\gamma_1=\gamma_{1x}\gamma_{1y} \tag{9.2.8}$$
$$E_2(x_2,y_2)=u_2(x_2)V_2(y_2),\gamma_2=\gamma_{2x}\gamma_{2y} \tag{9.2.9}$$

代入式(9.2.5)、式(9.2.9)得

$$\gamma_{2x}u_2(x_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}u_1(x_1)K(x_2,x_1)\mathrm{d}x_1 \tag{9.2.10}$$

其中

$$K(x_2,x_1)=\sqrt{\frac{\mathrm{i}}{\lambda L}}\exp\left(-\mathrm{i}\pi\frac{L}{\lambda}\right)\exp\left[-\frac{\mathrm{i}\pi}{\lambda L}(g_1x_1^2+g_2x_2^2-2x_1x_2)\right] \tag{9.2.11}$$

交换1↔2指标可得到$u_1(x_1)$的方程,交换$x\leftrightarrow y$指标可得到$V_1(y_1)$和$V_2(y_2)$的方程.

利用厄米多项式的递推公式,可以证明式(9.2.10)的解为

$$u_{2m}(x_2)=\exp(-x_2^2/w_2^2)\mathrm{H}_m\left(\sqrt{2}\frac{x_2}{w_2}\right) \tag{9.2.12}$$

$$\gamma_{2xm}=\left(\frac{g_2}{g_1}\right)^{\frac{1}{4}}\exp\left[-\frac{\mathrm{i}\pi}{\lambda}L+\frac{\mathrm{i}\psi}{2}(m+0.5)\right] \tag{9.2.13}$$

同法可求得

$$u_{1m}(x_1)=\exp(-x_1^2/w_1^2)\mathrm{H}_m\left(\sqrt{2}\frac{x_1}{w_1}\right) \tag{9.2.14}$$

$$\gamma_{1xm}=\left(\frac{g_1}{g_2}\right)^{\frac{1}{4}}\exp\left[-\frac{\mathrm{i}\pi}{\lambda}L+\frac{\mathrm{i}\psi}{2}(m+0.5)\right] \tag{9.2.15}$$

式中

$$\cos\frac{\psi}{2}=\sqrt{g_1g_2} \tag{9.2.16}$$

由指标的对称性质不难写出$V_{in}(y_i)$、γ_{iyn}的公式($i=1,2$).于是方程式(9.2.5)、式(9.2.6)的解可表为

$$E_{imn}(x,y)=E_{i0}\exp\left(-\frac{x_i^2+y_i^2}{w_i^2}\right)\mathrm{H}_m\left(\sqrt{2}\frac{x_i}{w_i}\right)\mathrm{H}_n\left(\sqrt{2}\frac{y_i}{w_i}\right),\quad i=1,2 \tag{9.2.17}$$

$$\gamma_{mn}=\gamma_{1xm}\gamma_{2xm}\gamma_{1yn}\gamma_{2yn}=\exp\left[-\mathrm{i}\frac{4\pi L}{\lambda}+\mathrm{i}\psi(m+n+1)\right] \tag{9.2.18}$$

式中

$$w_i^2=\frac{\lambda L}{\pi}\sqrt{\frac{g_j}{g_i(1-g_1g_2)}} \tag{9.2.19}$$

为两镜面上基模高斯光束束宽. $\mathrm{H_m}\left(\sqrt{2}\frac{x_i}{w_i}\right)$、$\mathrm{H}_n\left(\sqrt{2}\frac{y_i}{w_i}\right)$是厄米多项式. 前几阶厄米多项式的表示式为

$$\begin{aligned}&\mathrm{H}_0(\xi)=1\\&\mathrm{H}_1(\xi)=2\xi\\&\mathrm{H}_2(\xi)=4\xi^2-2\\&\mathrm{H}_3(\xi)=8\xi^3-12\xi\\&\mathrm{H}_4(\xi)=16\xi^4-48\xi^2+12\\&\cdots\cdots\end{aligned} \tag{9.2.20}$$

现对所得结果做以下讨论：

(1) 高阶横模

式(9.2.17)为两镜面上横模场振幅分布函数，即第四章中已讨论过的厄米－高斯函数. m 和 n 分别表示 x 方向 y 方向的节线数. 当 $m=n=0$ 时

$$E_{i00}=E_{i0}\exp\left(-\frac{x_i^2+y_i^2}{w_i^2}\right) \tag{9.2.21}$$

可见 $\mathrm{TEM_{00}}$ 模对应于高斯函数，$\mathrm{TEM_{00}}$ 模在两镜面处的束宽由式(9.2.19)决定. 镜面处高阶横模的束宽为

$$W_{mi}=\sqrt{2m+1}\,w_i \tag{9.2.22}$$

$$W_{ni}=\sqrt{2n+1}\,w_i \tag{9.2.23}$$

对于共焦腔

$$w_1=w_2=\sqrt{2}\,w_0 \tag{9.2.24}$$

因此

$$W_m=\sqrt{2(2m+1)}\,w_0 \tag{9.2.25}$$

$$W_n=\sqrt{2(2n+1)}\,w_0 \tag{9.2.26}$$

(2) 模体积

模体积描述该振荡模式在腔内所扩展的空间体积. 模体积越大，对该模式有贡献的受激粒子就越多，因而可获得较大的输出功率，这是对激活

介质充满腔的情况而言的，否则还应当引入有效模体积，即该振荡模式在激活介质内所扩展的空间体积.

虽然可以用积分学的方法来计算模体积，但除特殊情况（如共焦腔）外，所得表达式都比较复杂.通常都根据具体情况提出一些在数量级上相同，但易于求值的近似公式，并由实验来验证.例如可由下式定义基模模体积为

$$V_{00}=\frac{1}{2}\pi L\left(\frac{w_1+w_2}{2}\right)^2 \tag{9.2.27}$$

TEM_{mn} 模模体积

$$V_{mn}=\frac{1}{2}\pi L\left(\frac{\sqrt{W_{m1}W_{n1}}+\sqrt{W_{m2}W_{n2}}}{2}\right)^2$$

$$=\sqrt{(2m+1)(2n+1)}\,V_{00} \tag{9.2.28}$$

对共焦腔，易证

$$V_{00}^{0}=\frac{\lambda L^2}{2} \tag{9.2.29}$$

$$V_{mn}^{0}=\frac{\lambda L^2}{2}\sqrt{(2m+1)(2n+1)} \tag{9.2.30}$$

上式表明，模的阶次越高，模体积就越大.

(3) 平均单程损耗功率

由式(9.2.18)知，γ_{mn} 为纯虚数，$|\gamma_{mn}|=1$，因此，按式(9.2.15)，平均单程损耗功率 $\delta=0$.得到这一结果是很自然的，因为我们在反射镜几何尺寸趋于无穷大假定下求解积分方程，这时腔的菲涅耳数 $F\to\infty$，镜边缘的衍射损耗略而不计.这一结果也证实了第八章中得出的结论：在高斯光束近似下（场分布函数可以表为厄米－高斯函数或拉盖尔－高斯函数），腔的衍射损耗为零.

(4) 谐振频率

由式(9.2.17)、式(9.2.18)得到

$$\frac{4\pi L}{\lambda}-\psi(m+n+1)=2\pi q \tag{9.2.31}$$

因此求得 TEM_{mnq} 模谐振频率为

$$\nu_{mnq}=\frac{c}{2L}\left(q+\frac{m+n+1}{\pi}\cos^{-1}\sqrt{g_1g_2}\right)$$

$$m,n=0,1,2,\cdots$$

$$q=1,2,\cdots \tag{9.2.32}$$

(5) 当计及腔反射镜曲率半径 ρ_i 的影响后，场分布函数 E_{imn}（式(9.2.17)）还应乘上一个相位因子

$$\exp\left[\pm \mathrm{i}\frac{\pi}{\lambda\rho_i}(x_i^2+y_i^2)\right]=\exp\left[\pm \mathrm{i}\frac{\pi}{\lambda L}(g_i-1)(x_i^2+y_i^2)\right]$$

这在将简单两镜腔的衍射积分方程理论推广到多元件腔时也是不能忽略的.

二、圆形域

对圆形域处理方法与矩形域相似,只需用极坐标(r,φ)代替直角坐标(x_i,y_i)就可得到有关结果.

令

$$E_i(r_i,\varphi_i)=E_{i0}u_i(r_i)\begin{cases}\cos l\varphi_i\\ \sin l\varphi_i\end{cases} \tag{9.2.33}$$

代入式(9.1.10)、式(9.1.11)得

$$\gamma_{2pl}u_{2pl}(r_2)=\int_0^{+\infty}K(r_2,r_1)u_{1pl}(r_1)r_1\mathrm{d}r_1 \tag{9.2.34}$$

$$K(r_2,r_1)=\frac{2\mathrm{i}^{l+1}}{\lambda L}\exp\left[-\frac{\mathrm{i}\pi}{\lambda L}(g_1r_1^2+g_2r_2^2)\right]\exp\left(-\frac{2\mathrm{i}\pi}{\lambda}L\right)\mathrm{J}_l\left(\frac{2\pi}{\lambda L}r_1r_2\right) \tag{9.2.35}$$

$$\gamma_{1pl}u_{1pl}(r_1)=\int_0^{+\infty}K(r_1,r_2)u_{2pl}(r_2)r_2\mathrm{d}r_2 \tag{9.2.36}$$

$$\gamma_{pl}=\gamma_{1pl}\gamma_{2pl} \tag{9.2.37}$$

利用拉盖尔多项式的性质,可以证明,积分方程式(9.2.34)、式(9.2.36)的解可表为如下的拉盖尔－高斯函数:

$$u_{ipl}(r_i)=\exp(-r_i^2/w_i^2)\left(\frac{\sqrt{2}r_i}{w_i}\right)^l\mathrm{L}_p^l\left(\frac{2r_i^2}{w_i^2}\right) \tag{9.2.38}$$

$$\gamma_{ipl}=\left(\frac{g_i}{g_j}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{2\mathrm{i}\pi}{\lambda}L+\frac{\mathrm{i}\psi}{2}(2p+l+1)\right],\quad i=1,2 \tag{9.2.39}$$

$$\cos\frac{\psi}{2}=\sqrt{g_1g_2} \tag{9.2.40}$$

于是在两镜面上的场分布和本征值为

$$E_{ipl}(r_i,\varphi_i)=E_{i0}\exp(-r_i^2/w_i^2)\left(\frac{\sqrt{2}r_i}{w_i}\right)^l\mathrm{L}_p^l\left(\frac{2r_i^2}{w_i^2}\right)\begin{cases}\cos l\varphi_i\\ \sin l\varphi_i\end{cases} \tag{9.2.41}$$

$$\gamma_{pl}=\exp\left\{-\mathrm{i}\left[\frac{4\pi L}{\lambda}-\psi(2p+l+1)\right]\right\} \tag{9.2.42}$$

现对所得结果做以下讨论:

(1) 高阶横模

式(9.2.41)为圆形域反射镜几何尺寸趋于无穷大时两镜面上高阶横模的场分布函数,即拉盖尔－高斯函数,它沿径向 r_i 有 p 个节线圆,沿辐角 φ_i 有 l 条节线.前几阶缔合拉盖尔多项式的表示式为

$$\begin{aligned}
&\mathrm{L}_0^l(\xi)=1\\
&\mathrm{L}_1^l(\xi)=-\xi+l+1\\
&\mathrm{L}_2^l(\xi)=\frac{1}{2}\xi^2-(l+2)\xi+\frac{1}{2}(l+1)(l+2)\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}\tag{9.2.43}$$

TEM_{00} 模

$$p=l=0,E_{i00}(r_i)=E_{i0}\exp(-r_i^2/w_i^2)\tag{9.2.44}$$

两镜面上 TEM_{pl} 模束宽为

$$W_{ipl}=\sqrt{2p+l+1}\,w_i\tag{9.2.45}$$

(2) 模体积

TEM_{00} 模的模体积公式与式(9.2.27)相同.

对 TEM_{pl} 模有

$$V_{pl}=\frac{1}{2}\pi L\left(\frac{W_{pl1}+W_{pl2}}{2}\right)^2=(2p+l+1)V_{00}\tag{9.2.46}$$

对共焦腔

$$V_{pl}^0=(2p+l+1)\frac{\lambda L^2}{2}\tag{9.2.47}$$

(3) 平均单程功率损耗

由式(9.2.42)知 γ_{pl} 为纯虚数,$|\gamma_{pl}|=1$,故 $\delta=0$.

(4) 谐振频率

由式(9.1.17)、式(9.2.42)可求得 TEM_{plq} 模谐振频率为

$$\begin{aligned}
\nu_{plq}&=\frac{c}{2L}\left(q+\frac{2p+l+1}{\pi}\arccos\sqrt{g_1g_2}\right)\\
&p,l=0,1,2,\cdots\\
&q=1,2,\cdots
\end{aligned}\tag{9.2.48}$$

(5) 由反射镜几何尺寸趋于无穷大时本征积分方程的解出发,可以仿照§8.1建立稳定球面光学谐振腔的模式理论.其中基模高斯光束在镜面上的束宽由式(9.2.19)表示,高阶模在镜面上的束宽由式(9.2.22)、式(9.2.23)或式(9.2.45)表示.谐振频率为式(9.2.32)或式(9.2.48),再利用 $ABCD$ 定律,不难求得束腰宽度和位置、远场发散角等模参数.与前面两种方法比较,只有利用衍射积分方程理论才能揭示出在高斯光束近似下(相当于反射镜几何尺寸趋于无穷大)腔的衍射损耗为零:$\delta=0$.要

求出腔的衍射损耗，应当在反射镜几何尺寸有限情况下求解腔的本征积分方程，然后按式(9.1.15)计算，这将在下面讨论.

(6) 光腔的本征积分方程式(9.1.10)、式(9.1.11)对稳定腔、非稳腔和临界腔都是普遍适用的.但是，只有满足稳定条件

$$0<g_1g_2<1 \tag{9.2.49}$$

时，式(9.2.19)中的 w_i 才为实数.这里我们再一次看到第二章中从几何光学角度导出光腔稳定条件式(9.2.49)的普遍性.对非稳腔，

$$g_1g_2<0 \text{ 或 } g_1g_2>1 \tag{9.2.50}$$

按式(9.2.19)，w_i^2 为纯虚数，意味着在镜面上场振幅是一个常数，只有相位发生变化，而光腔的本征积分方程仍然有效.

§9.3　反射镜几何尺寸有限时光腔的本征积分方程

光腔反射镜几何尺寸有限时，一般情况下用解析方法求解本征积分方程是很困难的，通常只能采用近似方法求数值解.本节将建立反射镜几何尺寸有限时的本征积分方程，并讨论光腔的对称性质.分析对象仍是矩形域或圆形域中的非对称腔，对称腔的有关结果不难作为其特例得出.

一、矩形域

如图 9.3.1 所示球面腔中，设两反射镜几何尺寸分别为 $2a_1\times2b_1$，$2a_2\times2b_2$，曲率半径为 ρ_1、ρ_2，腔长为 L.引入腔的菲涅耳数

$$F_x=\frac{a_1a_2}{\lambda L} \tag{9.3.1}$$

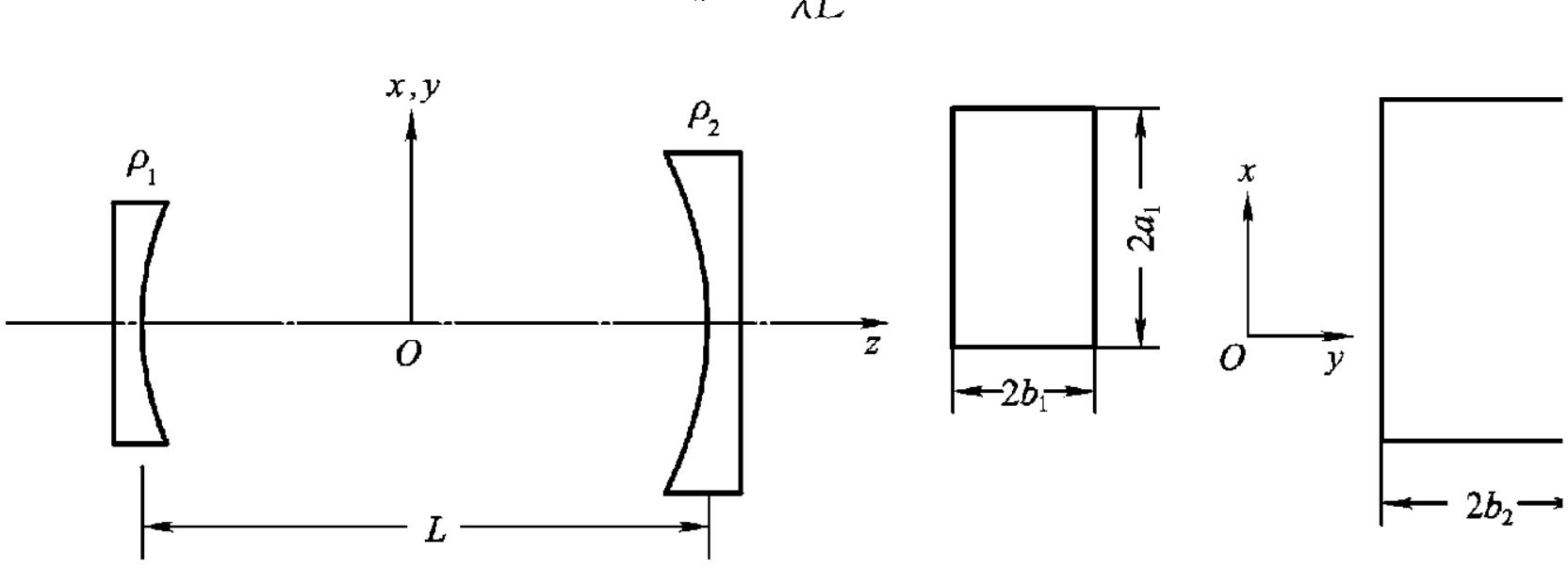


图 9.3.1　矩形反射镜

$$F_y=\frac{b_1b_2}{\lambda L} \tag{9.3.2}$$

考虑到镜的有限尺寸后，本征方程式(9.2.10)成为

$$\gamma_{2x}u_2(s_2)=\int_{-1}^{+1}K_x(s_2,s_1)u_1(s_1)\mathrm{d}s_1 \tag{9.3.3}$$

同理

$$\gamma_{1x}u_1(s_1)=\int_{-1}^{+1}K_x(s_1,s_2)u_2(s_2)\mathrm{d}s_2 \tag{9.3.4}$$

将式(9.3.3)代入式(9.3.4)得到

$$\gamma_x u_1(s_1)=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}K_x(s_1,s_2)K_x(s_2,s_1')u_1(s_1')\mathrm{d}s_1'\mathrm{d}s_2 \tag{9.3.5}$$

式中

$$\gamma_x=\gamma_{1x}\gamma_{2x} \tag{9.3.6}$$

$$K_x(s_1,s_2)=\mathrm{i}^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\pi L}{\lambda}}F_x^{\frac{1}{2}}\exp[-\mathrm{i}\pi F_x(G_{1x}s_1^2+G_{2x}s_2^2-2s_1s_2)] \tag{9.3.7}$$

$$s_1=\frac{x_1}{a_1},s_2=\frac{x_2}{a_2} \tag{9.3.8}$$

$$G_{1x}=\frac{a_1}{a_2}g_1,G_{2x}=\frac{a_2}{a_1}g_2 \tag{9.3.9}$$

式(9.3.3)、式(9.3.4)或式(9.3.5)称为有限矩形域中光腔的本征积分方程.

对于 y 方向,可以完全类似地写出 $V_1(y_1)$、$V_2(y_2)$所满足的本征积分方程.镜 $i(i=1,2)$上的场分布函数为

$$E_i(x_i,y_i)=u_i(x_i)V_i(y_i) \tag{9.3.10}$$

也可以用归一化坐标变量 s_i 等表示.

于是在有限矩形域中,两个反射镜面上的场分布、本征值由六个参数所完全确定,这六个参数为 G_{1x}、G_{2x}、G_{1y}、G_{2y}、F_x 和 F_y.

二、圆形域

设图 9.3.2 中球面腔两反射镜面半径分别为 a_1、a_2,镜曲率半径为 ρ_1、ρ_2,腔长为 L,与前相似处理得到本征积分方程

$$\gamma_{2pl}u_{2pl}(s_2)=\int_0^1K(s_2,s_1)u_{1pl}(s_1)s_1\mathrm{d}s_1 \tag{9.3.11}$$

$$\gamma_{1pl}u_{1pl}(s_1)=\int_0^1K(s_1,s_2)u_{2pl}(s_2)s_2\mathrm{d}s_2 \tag{9.3.12}$$

将式(9.3.11)代入式(9.3.12)得到

$$\gamma_{pl}u_{1pl}(s_1)=\int_0^1\int_0^1K(s_1,s_2)K(s_2,s_1')u_{1pl}(s_1)s_2s_1'\mathrm{d}s_1'\mathrm{d}s_2 \tag{9.3.13}$$

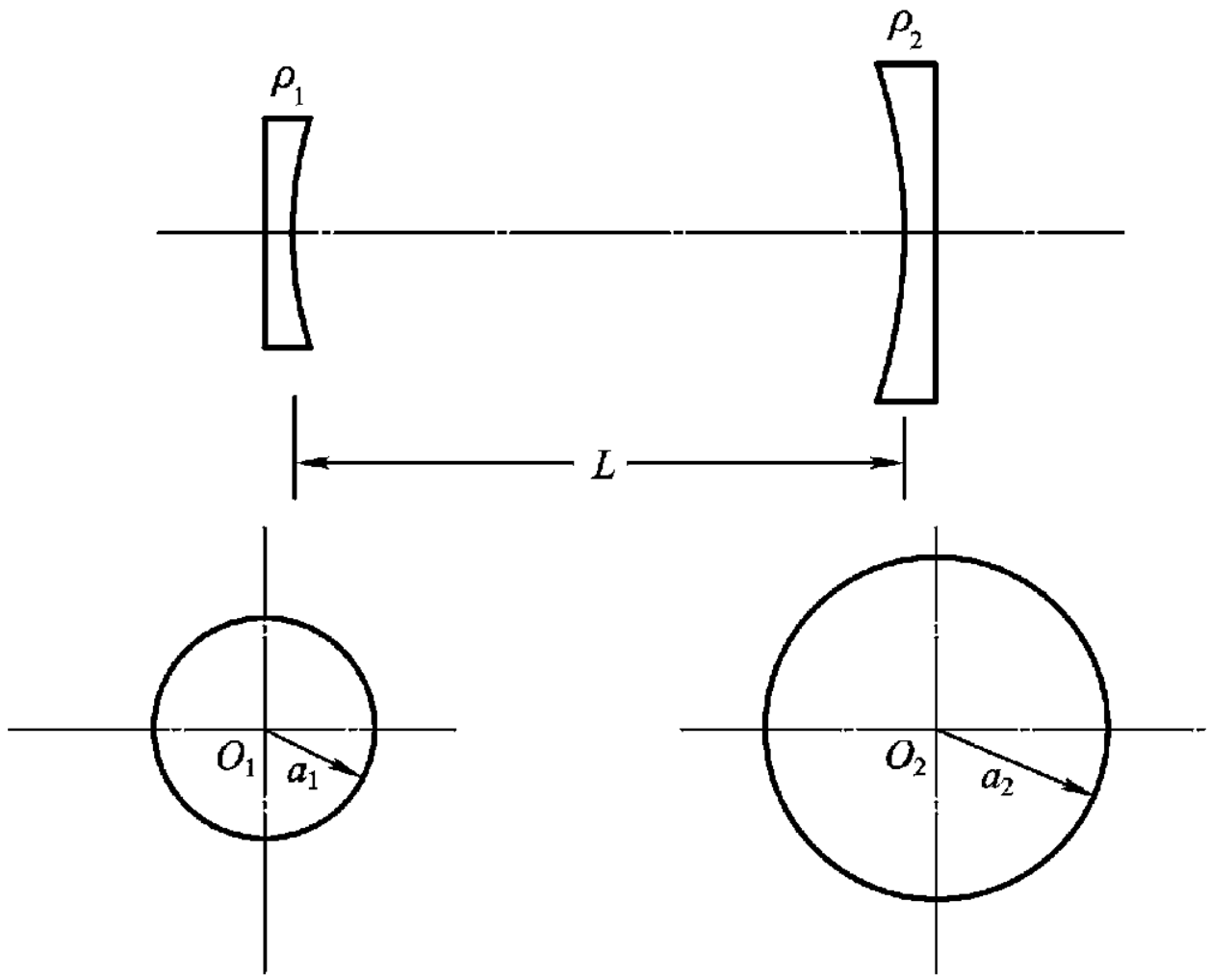


图 9.3.2　圆形反射镜腔

式中

$$\gamma_{pl}=\gamma_{1pl}\gamma_{2pl} \tag{9.3.14}$$

$$K(s_1,s_2)=(-1)^{\frac{l+1}{2}}\exp\left(\frac{-2\mathrm{i}\pi L}{\lambda}\right)2\pi F\mathrm{J}_l(2\pi F s_1 s_2)\exp\left[-\mathrm{i}\pi F(G_1 s_1^2+G_2 s_2^2)\right] \tag{9.3.15}$$

$$s_1=\frac{r_1}{a_1},\ s_2=\frac{r_2}{a_2} \tag{9.3.16}$$

$$F=\frac{a_1 a_2}{\lambda L} \tag{9.3.17}$$

$$G_1=\frac{a_1}{a_2}g_1,\ G_2=\frac{a_2}{a_1}g_2 \tag{9.3.18}$$

这时场分布函数

$$E_{ipl}(r_i,\varphi_i)=u_{ipl}(r_i)\begin{cases}\cos\ l\varphi_i\\ \sin\ l\varphi_i\end{cases} \tag{9.3.19}$$

和本征值 γ_{pl} 仅由三个参数 G_1、G_2 和 F 所完全确定.

三、腔的对称性

1. 等价定理

由本征积分方程式(9.3.11)、式(9.3.12)知，如果两个球面腔有相同的特征参数 G_1、G_2 和 F，即满足

$$G_1 = G_1', G_2 = G_2', F = F' \tag{9.3.20}$$

则这两个腔等价.这里的等价性意味着这两个谐振腔有相同的本征值 γ_{pl} 和成比例的本征函数 E_{pl} (场分布函数),因而有相同的衍射损耗和由式(9.1.17)所决定的谐振频率.

2. 互易定理

在式(9.3.11)、式(9.3.12)、式(9.3.15)中交换下标 1↔2,显然 $u_{1pl}(s_1)$ 与 $u_{2pl}(s_2)$、γ_{1pl} 与 γ_{2pl}、s_1 与 s_2、G_1 与 G_2 互换.这意味着反射镜 1 与反射镜 2 互换位置,但谐振腔的性质如衍射损耗、谐振频率等保持不变,腔的这一对称性质称为互易定理.

3. 共轭定理

在式(9.3.13)中令

$$K_{21}(s_1, s_1') = \int_0^1 K(s_1, s_2) K(s_2, s_1') s_2 \mathrm{d}s_2 \tag{9.3.21}$$

作变换

$$g_1 \to -g_1, g_2 \to -g_2 \tag{9.3.22}$$

则

$$K_{21}(s_1, s_1', -g_1, -g_2) = K_{21}^*(s_1, s_1', g_1, g_2) \tag{9.3.23}$$

(式中 $\exp(-2\mathrm{i}\pi L/\lambda)$因子对结果无影响,可略去)由此可知

$$u_{1pl}(s_1, -g_1, -g_2) = u_{1pl}^*(s_1, g_1, g_2) \tag{9.3.24}$$

同理

$$u_{2pl}(s_2, -g_1, -g_2) = u_{2pl}^*(s_2, g_1, g_2) \tag{9.3.25}$$

这意味着当作变换式(9.3.22)时,场的本征函数和本征值只是变为原来的复共轭,因而腔的衍射损耗和镜面上的光强分布仍然保持不变,称为共轭定理.作为一对共轭系统的例子是平行平面腔($g_1 = g_2 = 1$)和对称共心腔($g_1 = g_2 = -1$).

在圆形域中讨论腔的对称性质时并未对球面腔作特殊要求,即上面的三个定理对任何球面腔(稳定腔、非稳腔和临界腔)都是适用的,这是直接从光腔本征积分方程得出的普遍结果,在光学谐振腔理论中有重要意义.

§9.4 共 焦 腔

对称共焦腔($\rho_1 = \rho_2 = \rho = L, g_1 = g_2 = 0$)是一类特殊类型的稳定腔.本节分别用光线变换方法和衍射积分方程理论对共焦腔的性质加以

讨论.

一、共焦腔是稳定腔

如图 9.4.1 所示，以镜 1 或镜 2 为参考，光束在腔内往返一周的矩阵为

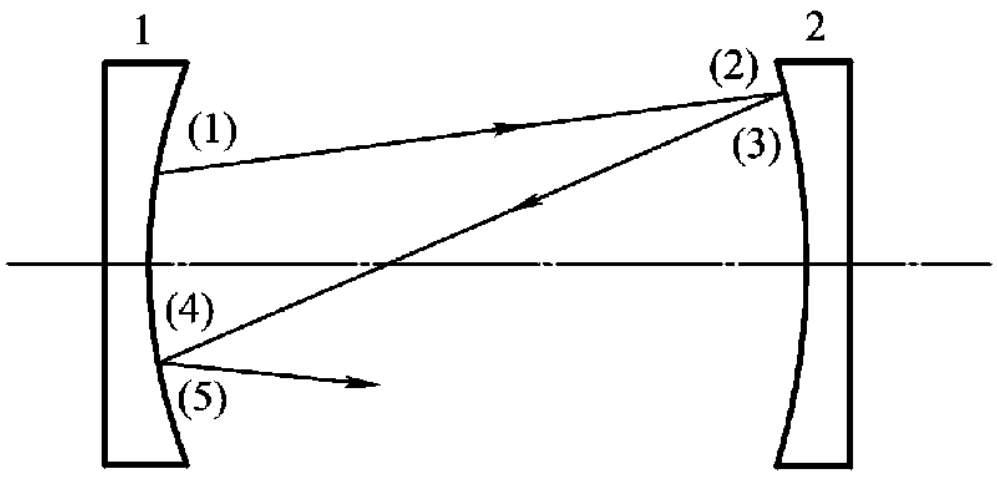


图 9.4.1　共焦腔及腔内往返一周光线

$$\boldsymbol{M}_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{2}{\rho} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & L\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{2}{\rho} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & L\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{9.4.1}$$

利用

$$\rho=L \tag{9.4.2}$$

得到

$$\boldsymbol{M}_1=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=-\boldsymbol{E} \tag{9.4.3}$$

式中 E 为单位矩阵.

而光线在腔内往返两周后

$$\boldsymbol{M}_2=\boldsymbol{M}_1^2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\boldsymbol{E} \tag{9.4.4}$$

事实上，这一结果也很容易用几何作图法得到(见图 7.4.2).所以，在共焦腔中，任意近轴光线均可在腔内往返多次而不逃逸出去，并且经过两次往返后就自行闭合，即任意近轴光线都是共焦腔的二次简并光线，共焦腔中的光线是高度简并的，在这一意义上，共焦腔是稳定腔.

按 $ABCD$ 定律，$\boldsymbol{X}_1=\begin{bmatrix}x_1\\ \theta_1\end{bmatrix}$的光线在腔内往返一周后

$$\boldsymbol{X}_2=\boldsymbol{M}\boldsymbol{X}_1 \tag{9.4.5}$$

即

$$\begin{bmatrix}x_2\\ \theta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ \theta_1\end{bmatrix} \tag{9.4.6}$$

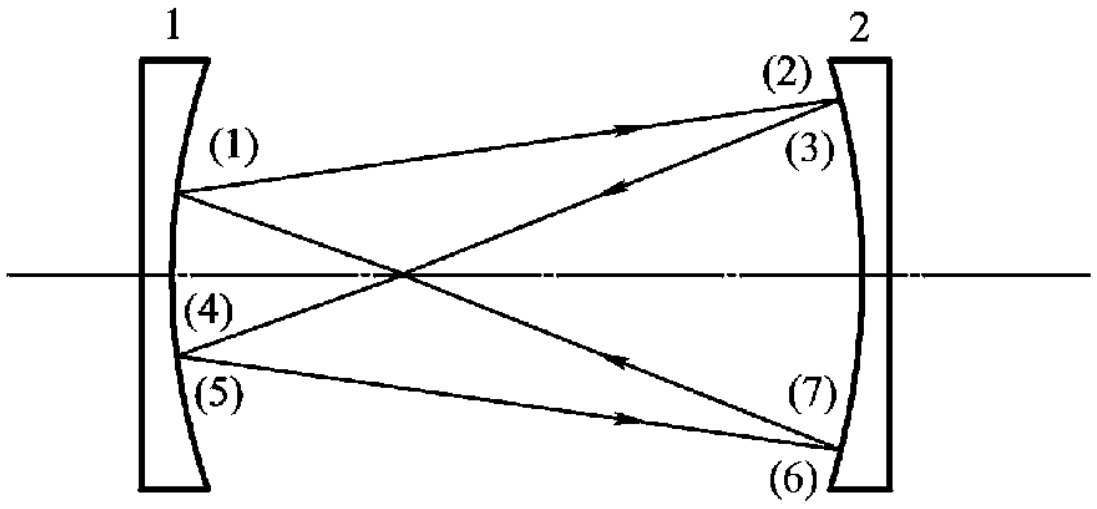


图 9.4.2 共焦腔及腔内往返两周光线

或

$$\begin{cases} x_2 = -x_1 \\ \theta_2 = -\theta_1 \end{cases} \tag{9.4.7}$$

这实际上是初始光线 $\boldsymbol{X}_1$ 关于腔轴线的一个反演操作，从光轴一方转到另一方，且与轴线交角改变符号，相当于图 9.4.1 中 (1)→(2)→(3)→(4)→(5).

二、任意高斯光束都是共焦腔的自再现模

设以镜 i 为参考，复参数 q_i 为

$$\frac{1}{q_i} = \frac{1}{R_i} - \mathrm{i}\frac{\lambda}{\pi w_i^2} \tag{9.4.8}$$

的高斯光束在共焦腔内往返一周后变为 q. 利用式 (9.4.3)，由 $ABCD$ 定律得到

$$q = \frac{Aq_i + B}{Cq_i + D} = \frac{-q_i + 0}{0 \cdot q_i - 1} = q_i \tag{9.4.9}$$

因此，任意高斯光束无论其在镜 i 处的等相面曲率半径 R_i 和束宽 w_i 多大，在腔内往返一周后均能实现自在现，因而是共焦腔的本征模. 这是一个重要结论. 进一步的分析表明，共焦腔内可能存在的自再现高斯光束分为三类：

(1) 对称分布的高斯光束，即

$$w_0 = \sqrt{\frac{L\lambda}{2\pi}} \tag{9.4.10}$$

$$L_{01} = \frac{L}{2} \tag{9.4.11}$$

这即通常意义下的共焦腔的本征模，它满足往返一周自再现条件，在镜 i 处高斯光束等相位面曲率半径 R_i 等于镜曲率半径 ρ，

$$R_i = \rho \tag{9.4.12}$$

(2) 不对称分布高斯光束，但在两镜面处式 (9.4.12) 仍成立. 这类自再现模满足条件

$$w_0 < \sqrt{\frac{L\lambda}{2\pi}}, \quad Z_0 = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} < \frac{L}{2}$$

$$L_{01} = \frac{L \pm \sqrt{L^2 - 4Z_0^2}}{2} \tag{9.4.13}$$

特例

$$w_0 \to 0, Z_0 \to 0, L_{01} = 0 \text{ 或 } L \tag{9.4.14}$$

(3) 不对称分布高斯光束，但在两镜面处有

$$R_i \neq \rho_i$$

所有

$$w_0 > \sqrt{\frac{L\lambda}{2\pi}}, \quad Z_0 > \frac{L}{2}$$

和

$$w_0 < \sqrt{\frac{L\lambda}{2\pi}} \text{ 但 } L_{01} \neq \frac{L \pm \sqrt{L^2 - 4Z_0^2}}{2} \tag{9.4.15}$$

的自再现高斯光束都属此类. 这类高斯光束经一个腔镜反射后变成另一个高斯光束，再经过第二个腔镜反射才复原，其中一例示于图 9.4.3.

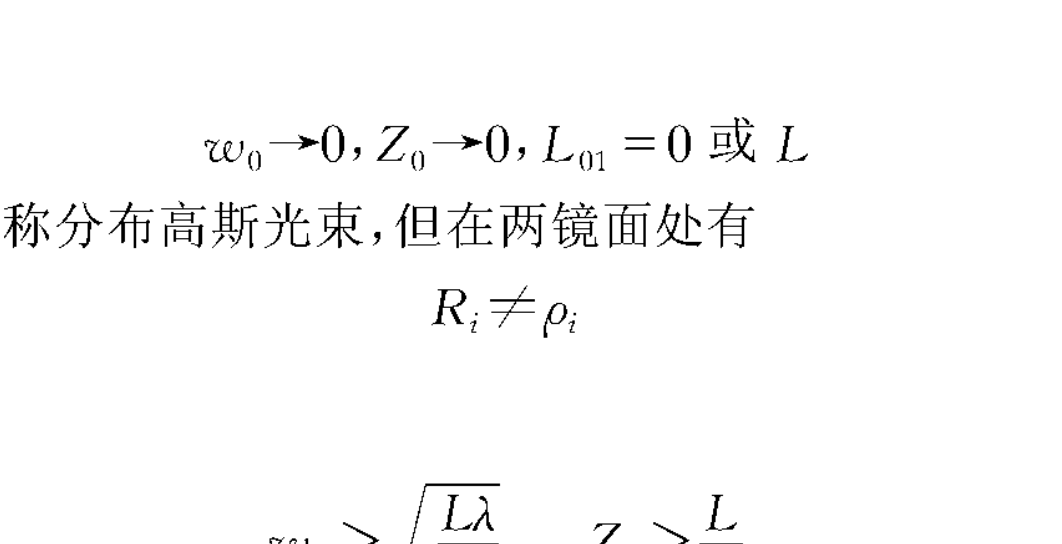


图 9.4.3　共焦腔内的自再现光线

三、共焦腔的衍射积分方程理论

共焦腔是在反射镜几何尺寸有限情况下形式上可解析求解的特殊情

况.下面仍分矩形域和圆形域进行讨论:

1. 矩形域

为一般起见,考虑图 9.4.4 所示两反射镜曲率半径相等(设为 ρ),但镜面几何尺寸 $a_1 \neq a_2, b_1 \neq b_2$ 的共焦腔,注意到这时 $G_1 = G_2 = 0$,由式(9.4.5)有

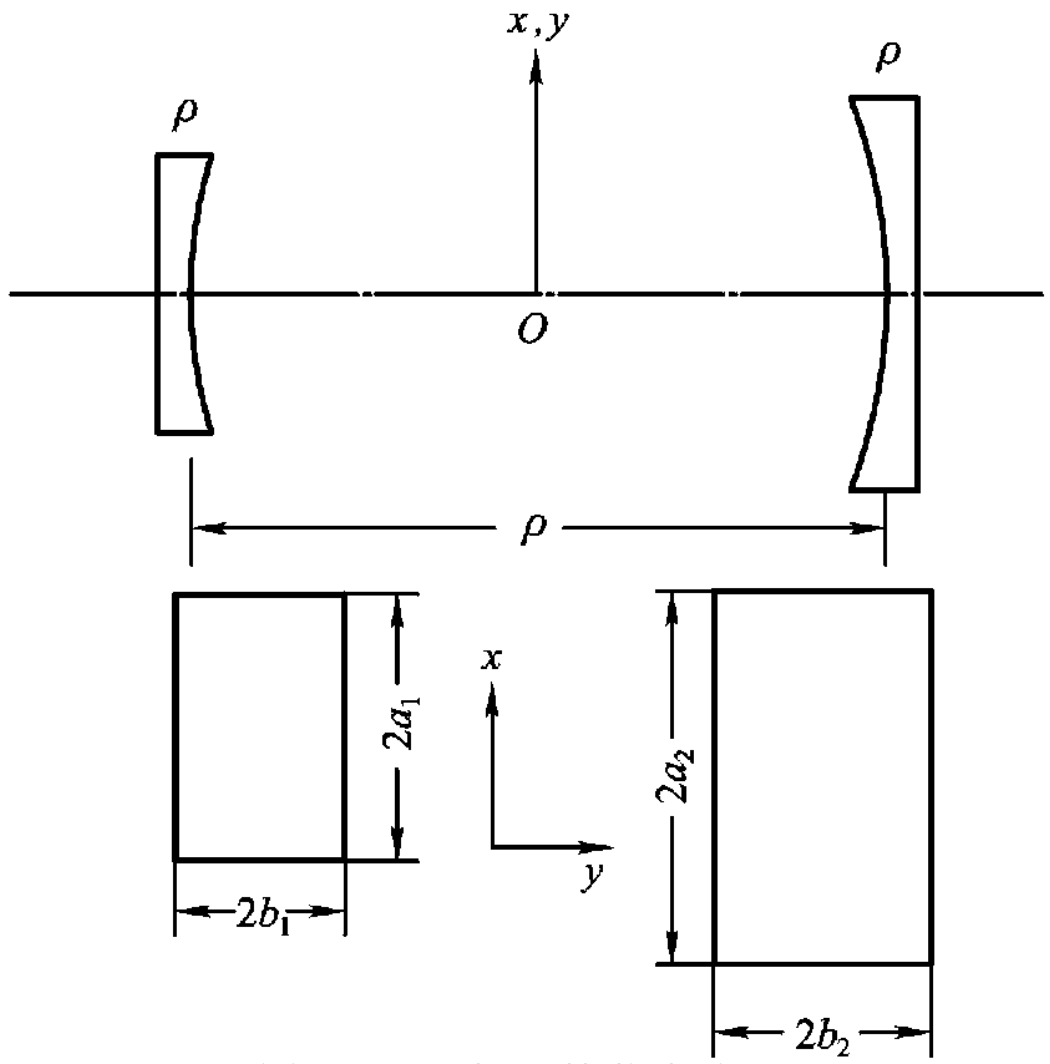


图 9.4.4 矩形镜共焦腔

$$\gamma_x u_1(s_1) = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} K_x(s_1, s_2) K_x(s_2, s_1') u_1(s_1') \mathrm{d}s_1' \mathrm{d}s_2 \tag{9.4.16}$$

式中

$$\gamma_x = \gamma_{1x}\gamma_{2x} \tag{9.4.17}$$

$$K_x(s_1, s_2) = \mathrm{i}^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\pi L}{\lambda}} F_x^{\frac{1}{2}} \exp(2\pi \mathrm{i} F_x s_1 s_2) \tag{9.4.18}$$

其余方程可仿此写出.

方程式(9.4.16)表明,$u_1(s_1)$就是它自己在区间(-1,+1)上的傅里叶变换,于是归结于寻找在有限域内对傅里叶变换不变的函数,这一问题在数学上已经解决,其解求得为

$$u_{1m}(s_1) = \mathrm{s}_{0m}(s_1) \tag{9.4.19}$$

s_{0m}称为长球函数或福拉默(Flammer)函数.因按 s_i 的表示式(9.3.8)可将 s_i 表示为$\frac{x_i}{a_i}$,而 u_{1m}(或 s_{0m})实际上还与菲涅耳数 F_x 有关,故式

(9.4.19)又可写为

$$u_{1m}\left(\frac{x_1}{a_1}\right)=\mathrm{s}_{0m}\left(2\pi F_x,\frac{x_1}{a_1}\right) \tag{9.4.20}$$

在矩形域共焦腔反射镜 i 处的场分布最后可表示为

$$E_{mn}=E_{i0}\,\mathrm{s}_{0m}\left(2\pi F_x,\frac{x_i}{a_i}\right)\mathrm{s}_{0n}\left(2\pi F_y,\frac{y_i}{b_i}\right) \tag{9.4.21}$$

式中 F_x、F_y 由式(9.4.18)、式(9.4.18)决定，m、n 为模序数.

若进一步有

$$a_1=a_2=a,\ b_1=b_2=b \tag{9.4.22}$$

则式(9.4.21)简化为

$$E_{1mn}=E_{2mn}=E_{mn}=E_0\,\mathrm{s}_{0m}\left(2\pi F_x,\frac{x}{a}\right)\mathrm{s}_{0n}\left(2\pi F_y,\frac{y}{b}\right) \tag{9.4.23}$$

式中菲涅耳数

$$F_x=\frac{a^2}{\lambda\rho},\ F_y=\frac{b^2}{\lambda\rho} \tag{9.4.24}$$

若更有

$$a=b\qquad\text{（正方形反射镜）} \tag{9.4.25}$$

则

$$E_{mn}=E_0\,\mathrm{s}_{0m}\left(2\pi F,\frac{x}{a}\right)\mathrm{s}_{0n}\left(2\pi F,\frac{y}{b}\right)=E_0\,\mathrm{s}_{0m}\left(c,\frac{x}{a}\right)\mathrm{s}_{0n}\left(c,\frac{y}{b}\right) \tag{9.4.26}$$

其中

$$F=\frac{a^2}{\lambda\rho} \tag{9.4.27}$$

$$c=2\pi F \tag{9.4.28}$$

长球函数 $\mathrm{s}_{0m}\left(c,\frac{x}{a}\right)$ 已做过深入研究，它虽然不能用解析函数表示出来，但已列有相当详细的表格备查，可以认为，这一问题在数学上已基本解决.

图 9.4.5 中画出了正方形镜共焦腔($a_1=a_2=b_1=b_2=a$)中几个最低阶模场的相对振幅与$\frac{x}{a}$的关系. 图中实线是按反射镜几何尺寸无限大时的解式(9.2.17)作出的，参数为 $c=2\pi F$，虚线表示 $c=5$ 时按精确解 $\mathrm{s}_{0m}\left(c,\frac{x}{a}\right)$ 作出场的分布. 由图可见，当反射镜几何尺寸一定时，c 越大(即 F 越大)场越集中在镜面中心及其附近. 随着 F 的减小，镜边缘处的场振幅逐渐增加. 对同一 F 值，高阶横模在镜边缘的振幅比基模大. 由近

似解与精确解的比较可见，对于 TEM_{00} 模的场分布，即使 $F=0.8$（$c=5$）时，式(9.2.17)的近似程度仍是令人满意的.对 TEM_{10}、TEM_{20} 模，当 $F=0.8$ 时，在镜面中心及其附近，近似解与精确解仍符合甚好.由此可明确高斯光束的近似程度与应用范围.

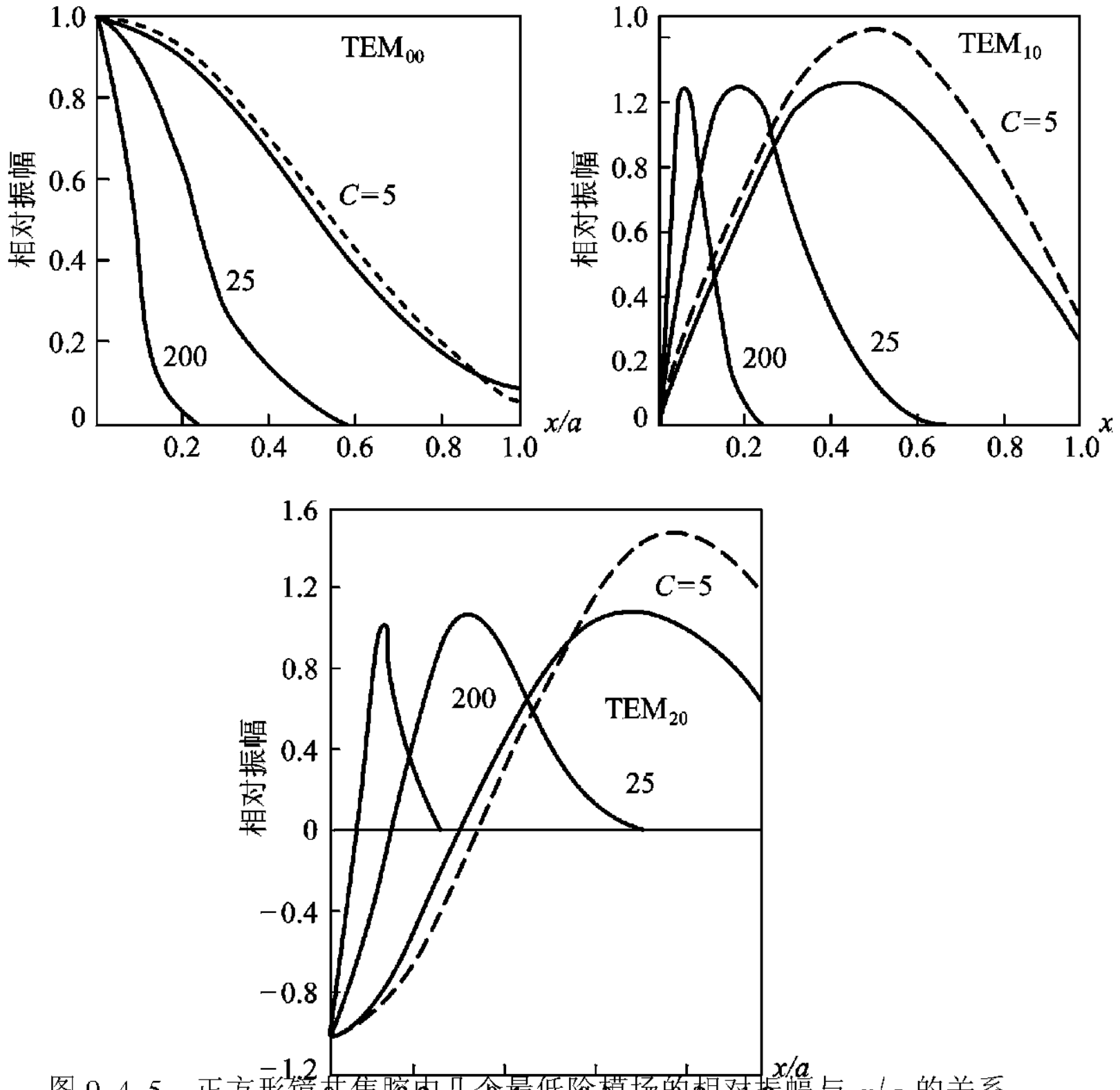


图 9.4.5 正方形镜共焦腔中几个最低阶模场的相对振幅与 x/a 的关系

2．圆形域

对有限圆形域共焦腔本征积分方程也做了深入研究.可以证明，其解可表为超球函数的形式.遗憾的是，迄今既未找出它的解析表达式，也未列出数值表格来.但对菲涅耳数远大于 1 和远小于 1 的极限情况，超球函数的渐近形式为

$$u_{pl}(r)=\begin{cases}\text{切里克(Zernike)多项式}, & F\ll 1\\ \text{拉盖尔－高斯函数}, & F\gg 1\end{cases} \tag{9.4.29}$$

§9.5　福克斯－厉数值迭代法　平行平面腔

从前面的讨论知道，谐振腔本征积分方程的解析求解只有在很少情况下才是可能的，在实际工作中遇到的大多数情况都只能做数值解，至于采取什么办法，则常因研究对象和目的的不同而异.本节介绍一种典型的方法，即福克斯－厉数值迭代法，并以平行平面腔为例加以说明.

一、福克斯－厉数值迭代法

福克斯－厉数值迭代法的基本物理思想已在§1.3中提及.这实际上认为可以把初始的场分布，例如平面波的场分布函数，视为由无穷多个本征函数以一定比例叠加的结果，不同的本征函数对应不同的模，在腔内往返传输过程中不同的模的衍射损耗不同，经过足够多次往返传输后，衍射损耗大的模受到的衰减比衍射损耗小的模大得多，当损耗大的模的贡献比损耗小的模的贡献相比可以忽略时，剩下的便是小损耗模的稳定场分布.初始任意光波场在腔内两反射镜间往返传输至形成自再现模这一过程可用计算机加以模拟，每次迭代计算相应于场的一次传输过程.这一方法在原则上可用来计算任意光腔的模式，利用标准化的计算机程序可以求得任意精确度的数值解.福克斯－厉方法的主要缺点是收敛性不好，计算误差无法事先估计.特别是对于 F 数很大的腔，计算量很大，结果也并不十分理想.另外，使用这种方法总是收敛于低阶模，计算高阶模误差较大.

二、平行平面腔

现以平行平面腔为例，说明福克斯－厉数值迭代法的应用.分析对象为对称窄带腔(又称“二维平行平面腔”)，实际的三维矩形平行平面腔中模的场分布可以认为是由 x 方向和 y 方向两个窄带腔中对应模的场分布函数的乘积，其损耗可以近似为二者之和.

对于图9.5.1所示 x 方向宽度为 $2a$、腔长为 L 的对称窄带腔，$g_1=g_2=1$，由式(9.1.2)可写出迭代方程

$$E_2(x_2)=\sqrt{\frac{\mathrm{i}}{\lambda L}}\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\pi L}{\lambda}\right)\int_{-a}^{+a}\exp\left[-\frac{\mathrm{i}\pi}{\lambda L}(x_2-x_1)^2\right]E_1(x_1)\mathrm{d}x_1$$

$$E_3(x_1)=\sqrt{\frac{\mathrm{i}}{\lambda L}}\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\pi L}{\lambda}\right)\int_{-a}^{+a}\exp\left[-\frac{\mathrm{i}\pi}{\lambda L}(x_1-x_2)^2\right]E_2(x_2)\mathrm{d}x_2 \tag{9.5.1}$$

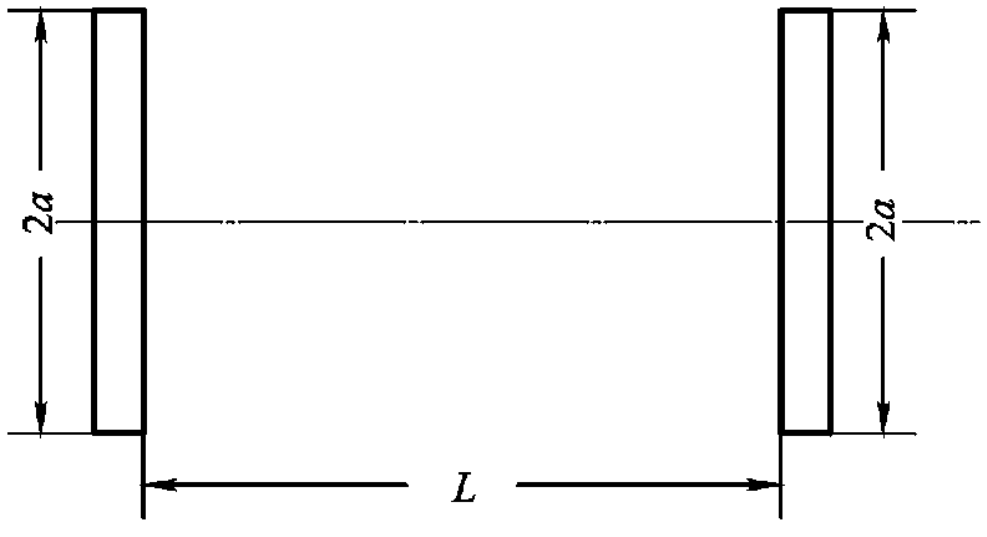


图 9.5.1 平行平面腔

初始入射波的场分布函数可任意选取，最简单的是取 $E_1(x_1)$ 为一列均匀平面波，由于所关心的只是场振幅和相位的相对分布，可设

$$E_1(x_1)=1 \tag{9.5.2}$$

即认为镜 1 为等相面 $\arg E_1(x_1)=0$，且镜 1 面上各点光波场振幅均为 1. 将式(9.5.2)代入式(9.5.1)中第一式，作数值计算，求出 $E_2(x_2)$，并将 $E_2(x_2)$ 归一化后代入式(9.5.1)中第二式，求出 $E_3(x_1)$，如此等等. 这种迭代计算一直进行到 E_{n+1} 和 E_n 只相差一个与坐标无关的常数因子为止，这时求出的 E_n 便是方程式(9.5.1)的本征函数，而 E_{n+1} 和 E_n 的比值就是方程式(9.5.1)的本征值.

福克斯－厉对图 9.5.1 所示窄带腔作了具体计算，所用参数为 $a=25\lambda$，$L=100\lambda$，$F=\dfrac{a^2}{\lambda F}=6.25$. 由初始场分布式(9.5.2)出发，经过第一次和 300 次传输后所得到的场振幅和相位分布示于图 9.5.2. 由图可见，均匀平面波在经过第一次传输后发生了很大变化，场 E_2 的振幅与相位随镜面坐标变化而急剧起伏，随着传输次数增加，这种变化越来越小，场的相对分布逐渐趋向一个稳定状态. 在经过 300 次传输后，归一化的场振幅和相位曲线实际上已不再发生变化，这即窄带腔的一个自再现模. 数值计算表明，对于 $F=6.25$ 的窄带腔，300 次左右的传输次数对实现自再现是必要的. 除了窄带腔外，还对其它镜面几何形状(例如圆形镜)和不同形状的初始入射波作了类似计算，从而用数值迭代法揭示出了平行平面腔模式特征. 其要点可归纳为：

1. 镜面上的场振幅分布

当取式(9.5.2)表征的均匀平面波作初始激发时，对各种几何尺寸的窄带腔和圆形镜平行平面计算所得镜面上稳态场振幅分布如图 9.5.3 所示. 这种稳态场分布的特点总的说来是在镜面中心处振幅最大，从中心到边缘振幅逐渐减小，整个镜面上的场分布具有偶对称性，这即平行平面腔

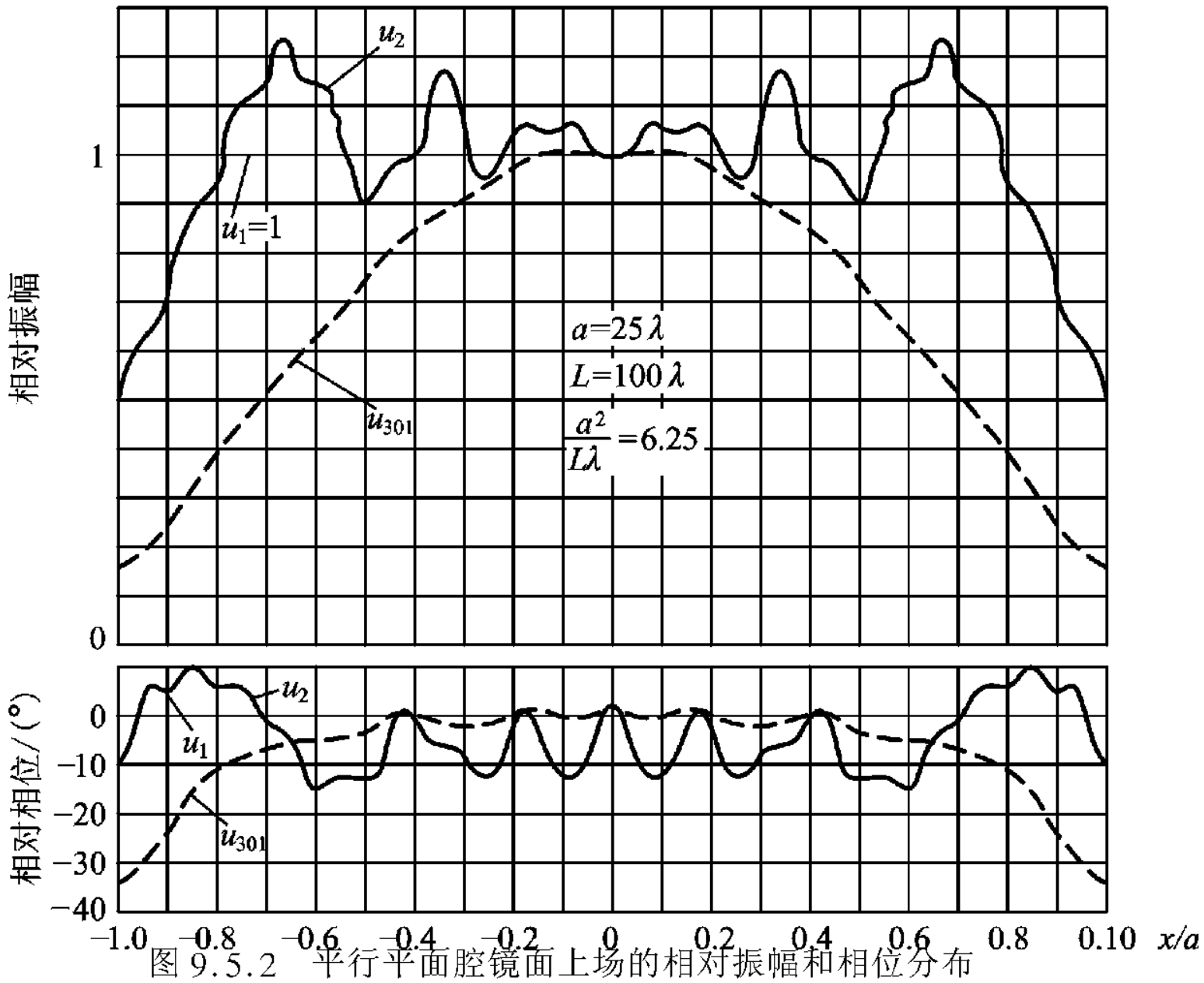


图 9.5.2　平行平面腔镜面上场的相对振幅和相位分布

的基模.除了基模外,数值计算结果表明,还可能存在其它高阶横模.

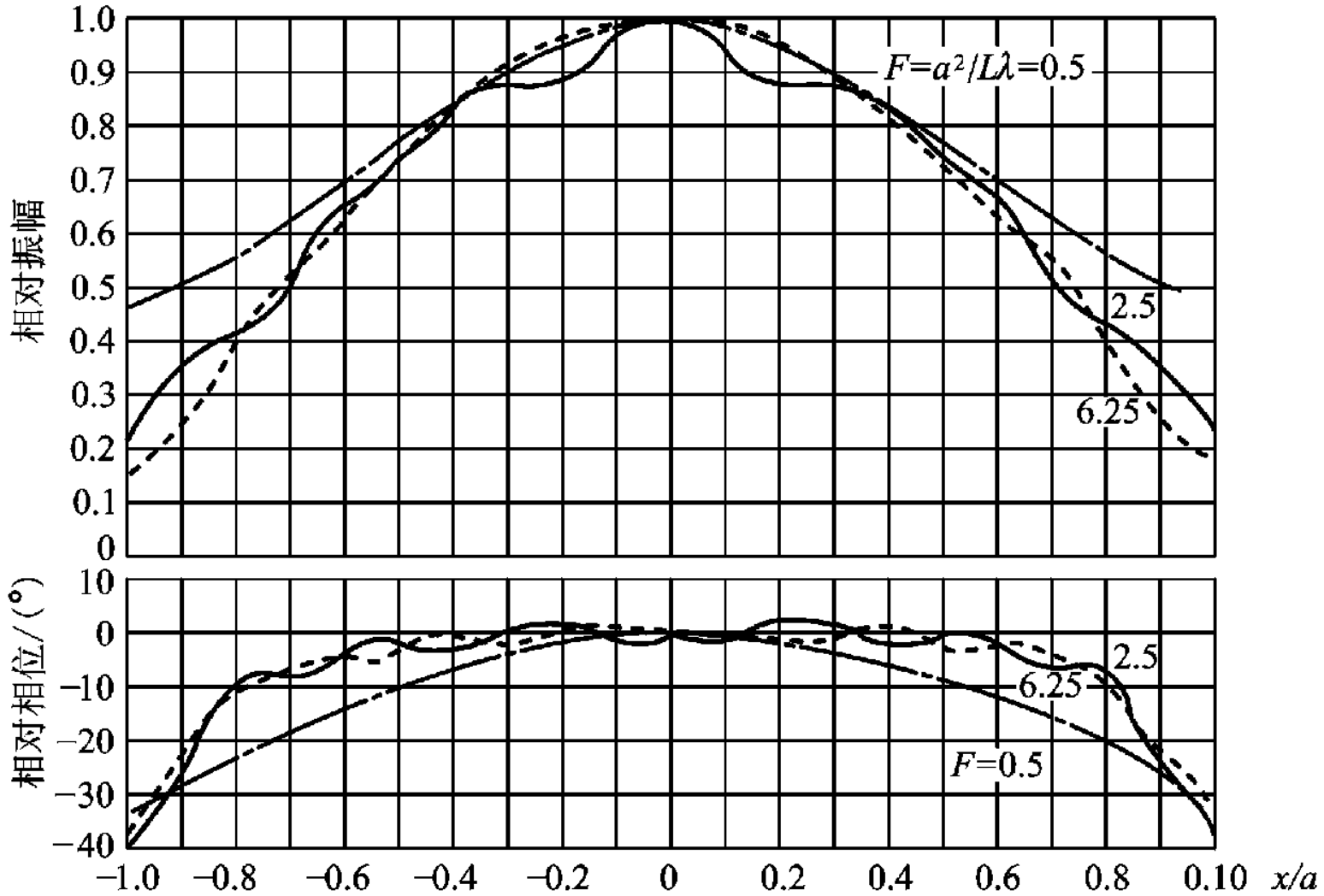
2. 镜面上场的相位分布

图 9.5.2、图 9.5.3 可见,初始激发均匀平面波在腔内经过足够多次的传输后,相位分布也发生了变化,镜面已不再是等相位面了.因此,严格说来,TEM_{00} 模已不再是平面波,在反射镜处的等相位面也不再和镜面重合.但是,计算表明,对于 F 数较大的平行平面腔,TEM_{00} 模仍可近似看作平面波,特别是在镜面中心及其附近,平面波是很好的近似.只有在镜的边缘处,波前才发生微小的弯曲.

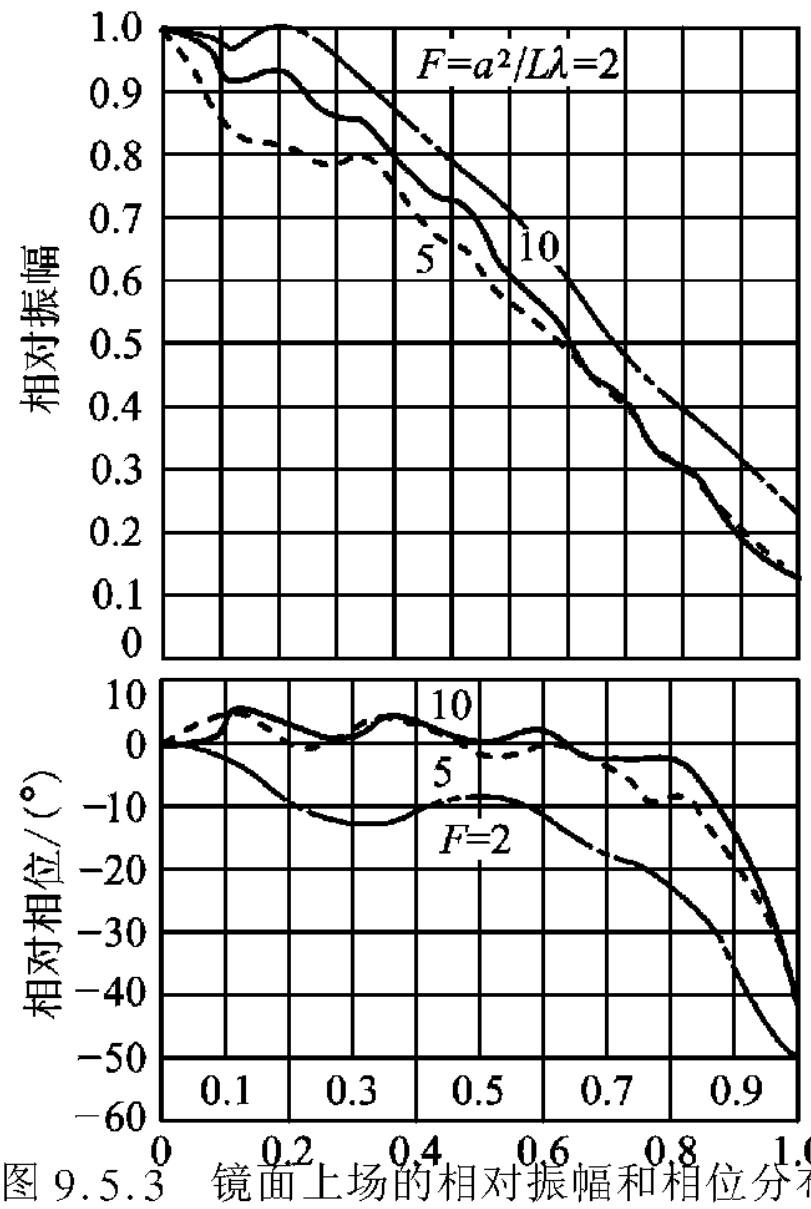
对于其它各阶横模,情况与基模相似,在被节线分开的各个区域内,仍可近似看做平面波.

3. 单程相移和谐振频率

使用数值计算方法,当解稳定后,就可以计算自再现模的单程相移和损耗.具体计算方法是,在镜面上取某一定点,然后计算经过一次往返传输后某一模式在该点场的振幅和相位大小的相对变化(这种变化应与坐标无关),由此做复数运算便可求出该模式的平均单程相移和单程功率损耗.当两反射镜完全对称(曲率半径和几何尺寸都相等)的情况下,只需对腔内一个单程传输做计算就可以了.



(a)



(b)

图 9.5.3　镜面上场的相对振幅和相位分布

(a) 窄带腔；(b) 圆形镜平行平面腔

(1) 单程相移计算结果表明，当自再现模从一个镜面传输到另一个镜面时，单程相移 ϕ 为

$$\phi = KL - \Delta\phi_{mn} \tag{9.5.3}$$

即 ϕ 并不刚好等于几何相移 KL，而是相对于几何相移还有一个附加相移 $-\Delta\phi_{mn}$，它与腔的 F 数有关，而且对不同横模也不相同. 表 9.5.1 列出了窄带腔 TEM_0 模和 TEM_1 模的几个单程相移的计算值. 可以看出，当 F 数相同时，不同横模的 $\Delta\phi_{mn}$ 值不同，基模最小，模的阶次越高，则相移越大. 对同一横模，F 数越大，则 $\Delta\phi_{mn}$ 越小. 窄带腔和圆形镜平行平面腔模的单程相移随 F 的变化如图9.5.4 所示.

表 9.5.1　窄带腔 TEM_0 模和 TEM_1 模的单程功率损耗 δ_0、δ_1 和相移 $\Delta\phi_0$、$\Delta\phi_1$

F	0.5	2	2.5	5	6.25	10
$\Delta\phi_0$	14°		3.15°		1.59°	
δ_0/%	18		3		0.688	
$\Delta\phi_1$		18°		8°		4°
δ_1/%		13		3.9		1.6

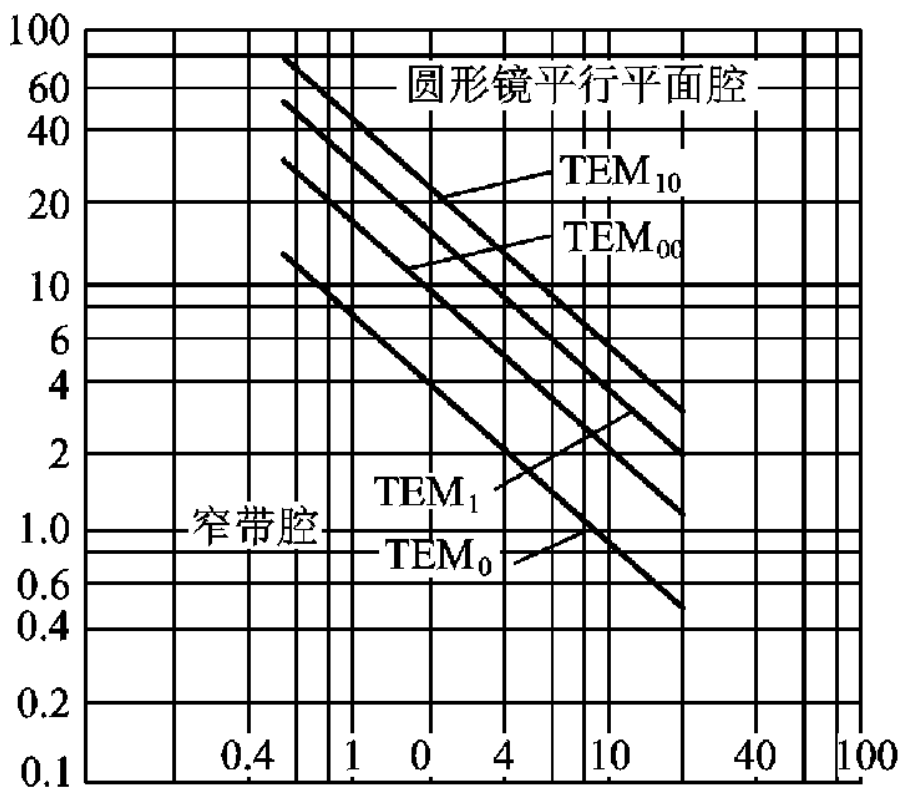


图 9.5.4　窄带腔和圆形镜平行平面腔的单程相移随 F 的变化

(2) 谐振频率

由式(9.1.17)和式(9.5.3)得到

$$\nu_{mnq}=\frac{c}{2L}\left(q+\frac{\Delta\phi_{mn}}{\pi}\right) \tag{9.5.4}$$

与§1.6 公式(1.6.4)相比，由平行平面腔衍射积分方程理论求得的谐振频率多了一项

$$\Delta\nu_{mn}=\frac{c}{2L\pi}\Delta\phi_{mn} \tag{9.5.5}$$

这是由 TEM_{mn} 模的附加相移 $\Delta\phi_{mn}$ 所引起的.但具有相同横向场分布(m、n 相同)的纵模间隔 $\Delta\nu_q$ 仍为式(1.6.5).

4. 单程功率损耗

计算表明,对 m、n 一定的横模,无论是窄带腔或是圆形镜平行平面腔单程功率损耗都惟一由菲涅耳数 F 决定,这是和腔的等价定理一致的.

对窄带腔内 TEM_0 模和 TEM_1 模计算所得几个单程功率损耗之值已列于表 9.5.1 中,窄带腔和圆形镜平行平面腔的单程功率损耗随 F 的变化如图9.5.5 所示.由上述图表可知:

(1) 基模是平行平面腔一切横模中损耗最低阶的模,模的损耗随阶次的增加而增加.

(2) 对某一确定阶次的横模,损耗仅由 F 数单值决定,且随 F 数增

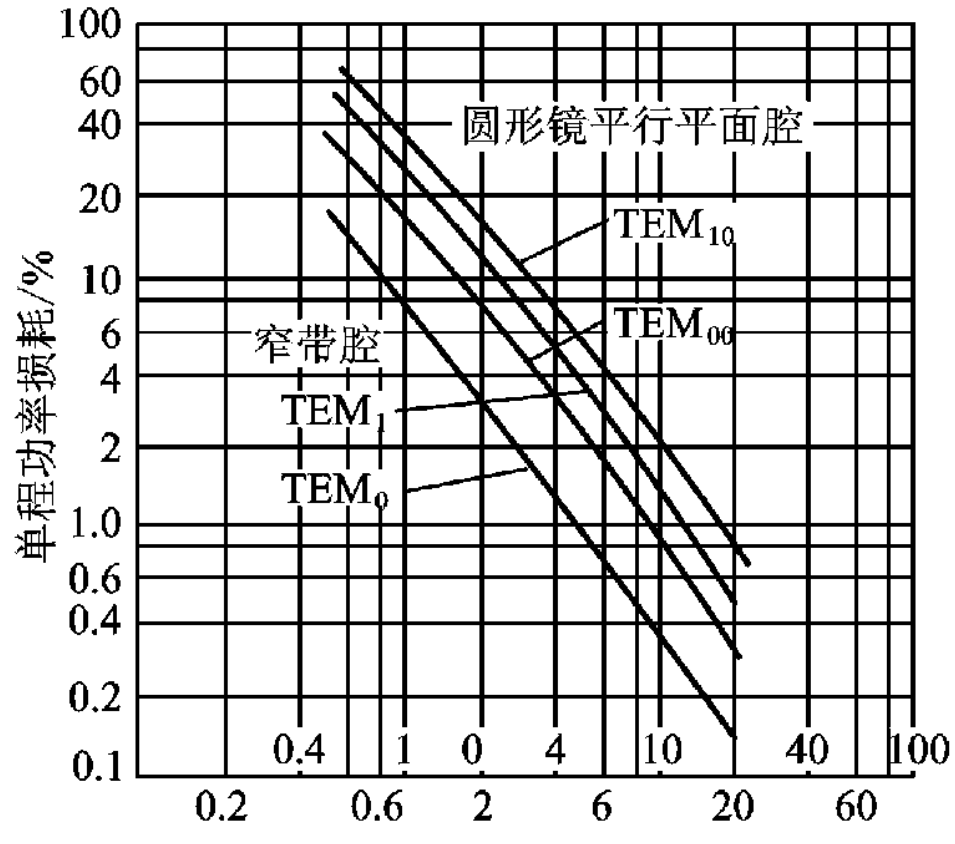


图 9.5.5　窄带腔和圆形镜平行平面腔的单程功率损耗随 F 的变化

大而迅速减小.在对数坐标中,δ_{mn} 与 F 近似成线性关系.圆形镜平行平面腔中基模损耗 δ 可用公式

$$\delta_{00}=0.207F^{-1.4},\quad F>1 \tag{9.5.6}$$

近似计算.

(3) 低阶横模损耗都远比均匀平面波小.这是因为自再现模的场主要集中在镜面中心及其附近,边缘场振幅已经很小.此外,自再现模是在腔内经足够多次往返传输因衍射效应而形成的,因而它入射到腔镜面上时,已具有一种合适的场分布和相位分布,使因衍射而造成的损耗尽可能小.

§9.6　光腔损耗的计算

本节分析几种不同类型的损耗，给出计算 δ、τ_R、Q、$\Delta\nu_c$ 的公式，着重讨论稳定球面腔损耗的计算问题.最后，对用衍射积分方程方法求解稳定和临界光学谐振腔的主要结果做一小结，非稳腔的有关问题则放在后面三节专门讨论.

一、计及腔镜不完全反射后计算损耗的公式

以图 9.6.1 所示一般稳定球面谐振腔为例，设两镜反射率分别为 R_1、R_2，腔长 L.在镜 1 附近初始强度为 I 的光，在腔内往返传输一周，经两镜反射，回到原始位置后光强变为 I_1，设腔的单程功率损耗因子为 V，则

$$I_1 = I_0 R_1 R_2 V^2 = I_0 \exp(-2\delta_{RV}) \tag{9.6.1}$$

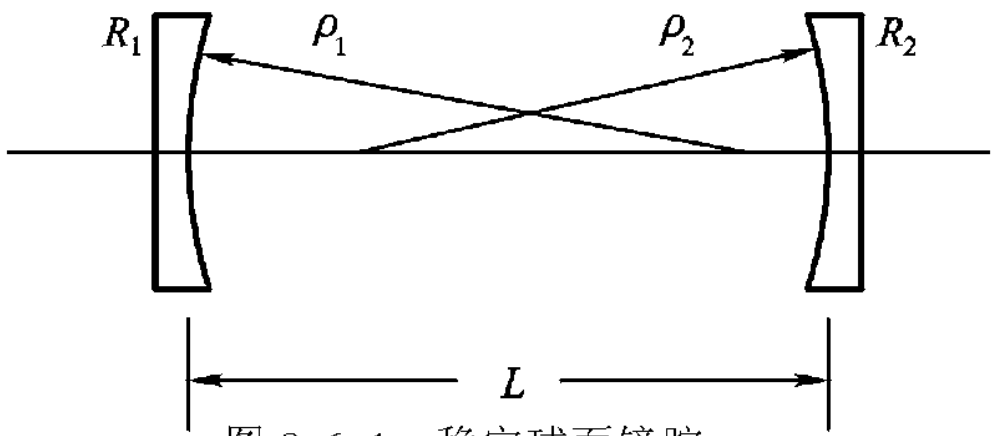


图 9.6.1　稳定球面镜腔

$$\delta_{RV} = -\frac{1}{2}\ln(R_1 R_2 V^2) = -\ln RV \approx 1 - RV \tag{9.6.2}$$

式中

$$R = \sqrt{R_1 R_2}\ (\text{两镜平均反射率}) \tag{9.6.3}$$

由式(1.7.10)、式(1.7.19)、式(1.7.22)可得

$$\tau_{RV} = -\frac{L}{c\ln RV} \approx \frac{L}{c(1-RV)} \tag{9.6.4}$$

$$Q_{RV} = -\frac{\omega L}{c\ln RV} \approx \frac{\omega L}{c(1-RV)} \tag{9.6.5}$$

$$\Delta\nu_{c,RV} = -\frac{c\ln RV}{2\pi L} \approx \frac{c(1-RV)}{2\pi L} \tag{9.6.6}$$

二、平行平面腔中斜向传输光线的偏折损耗

设光线在图 9.6.2 中所示对称平行平面腔(镜线度为 $2a$)中与轴线成 θ 角传输，由简单几何关系求得光线在腔内传输最大次数(往返传输

算一次)为

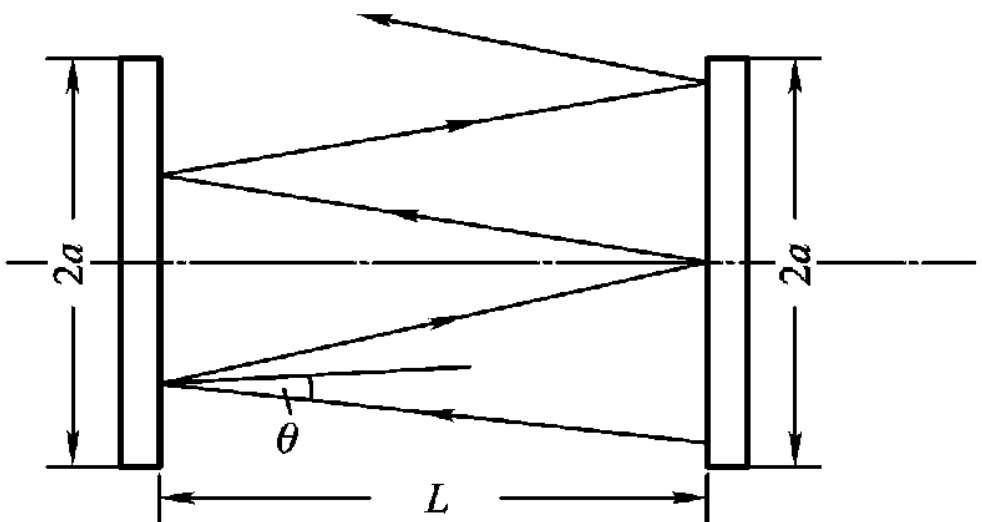


图 9.6.2　平行平面腔中的偏折光线

$$m=\frac{\tau_\theta}{t_0} \tag{9.6.7}$$

式中

$$t_0=\frac{2L}{c}\quad\text{(光线在腔内往返一周所需时间)} \tag{9.6.8}$$

当 θ 很小时有

$$2\theta mL=2a \tag{9.6.9}$$

由式(9.6.7)、式(9.6.9)和 Q、$\Delta\nu_c$ 定义式得到

$$\tau_\theta=\frac{2a}{c\theta} \tag{9.6.10}$$

$$\delta_\theta=\frac{L\theta}{2a} \tag{9.6.11}$$

$$Q_\theta=\frac{2\omega a}{c\theta} \tag{9.6.12}$$

$$\Delta\nu_{c,\theta}=\frac{c\theta}{4\pi a} \tag{9.6.13}$$

三、单程功率损耗的计算

略去其它次要因素，按照无源腔的衍射积分方程理论，单程功率损耗可以认为近似等于单程衍射损耗，这是不能用几何光学或高斯光束近似方法求出的.对于反射镜几何尺寸有限的共焦腔，虽然求得了本征积分方程的解，但它不具有明显的解析形式，也难于提供定量的知识.所以，目前关于腔衍射损耗的大量工作都是用数值计算的方法进行的，有时亦可利用经验公式作近似估算，将所得数据与实验结果进行比较.在计算中常可利用腔的对称性质，简化同一类型腔的计算，或者将非对称腔化为对称腔的问题处理.

对于共焦腔，腔内确定模式的损耗仅与腔的菲涅耳数 F 有关.对正方

形镜共焦腔($a_1=a_2=a$)TEM_{00}模单程损耗因子 V_{00} 的近似计算公式为

$$V_{00}=\begin{cases}1-35.54F^{\frac{1}{2}}\exp(-4\pi F), & F>0.5\\ 16F^2\exp\left(-\dfrac{8}{9}\pi^2F^2\right), & F\ll 1\end{cases}\tag{9.6.14}$$

对圆形镜共焦腔

$$V_{00}=\begin{cases}1-16\pi^2F\exp(-4\pi F), & F>0.5\\ \pi^2F^2, & F\ll 1\end{cases}\tag{9.6.15}$$

共焦腔单程功率损耗与 F 数关系的计算曲线示于图 9.6.3(a)、(b). TEM_{00}模的单程损耗因子 V_{00} 和 TEM_{01} 模的单程损耗因子 V_{01} 与 F 数关系的实验结果与理论计算数据的比较见图 9.6.4.

对于一般稳定球面腔,理论分析和实验结果都表明,腔的损耗由菲涅耳数、腔的几何结构和横模阶数 m、n 所决定,可用对本征积分方程求数值解方法求出.作为示例,将$|g_1|=|g_2|=0$、0.5、0.8、0.95、1 和 $g_1=1$,$g_2=0.5$、0.75、0.9、0.95、1 腔的TEM_{00}、TEM_{10}模的单程损耗 δ_{00}、δ_{01} 与

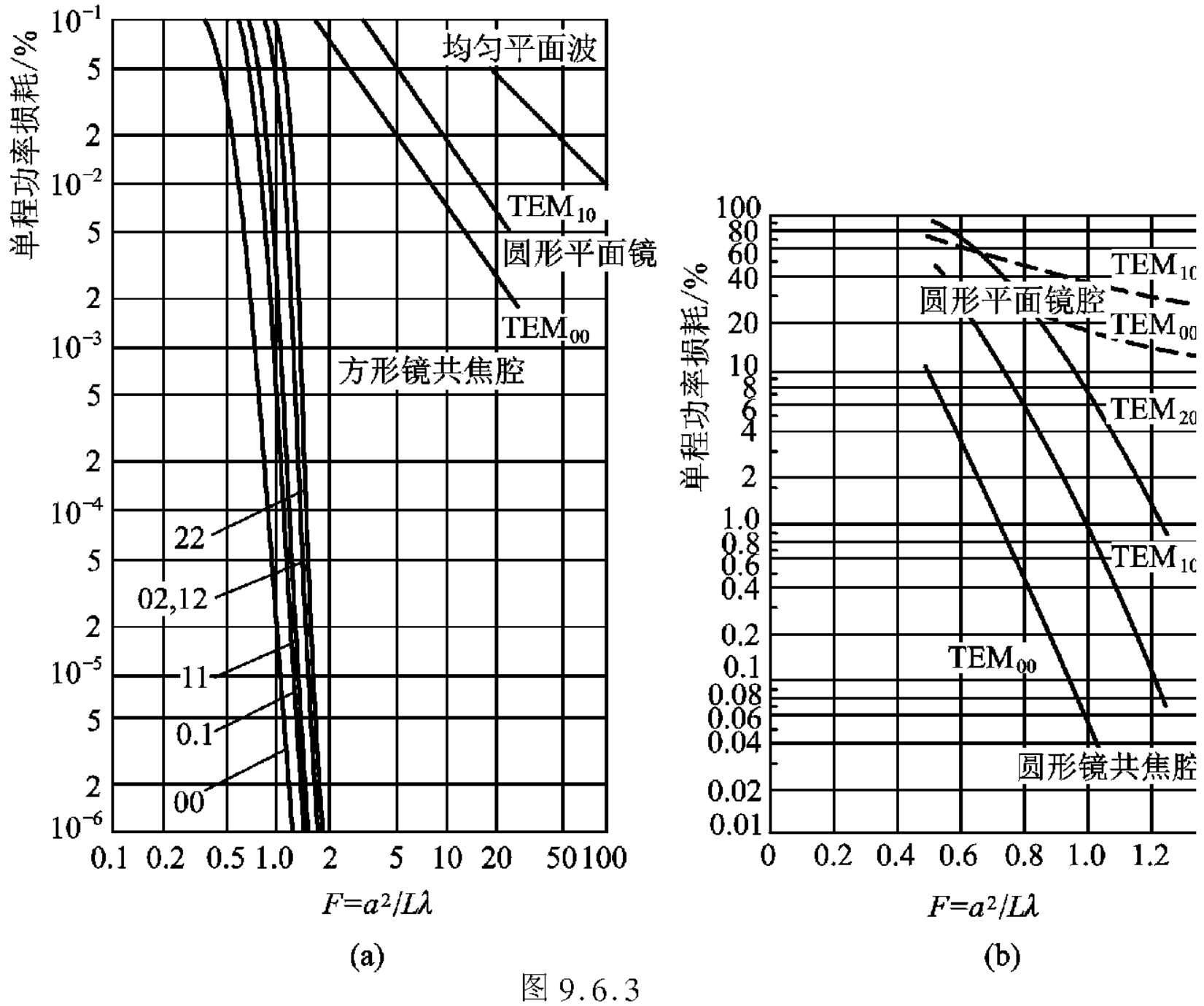


图 9.6.3

(a) 方形镜共焦腔的单程功率损耗与菲涅耳数 F 数的关系

(b) 圆形镜共焦腔的单程功率损耗与菲涅耳数 F 数的关系

F 数关系的计算结果示于图 9.6.5 中. 由图可见:

(1) 共焦腔 ($g_1 = g_2 = 0$) 的衍射损耗最小;

(2) δ 随 F 数的增加而急剧减小;

(3) 同一腔中, TEM_{00} 模的衍射损耗小于 TEM_{10} 模的衍射损耗.

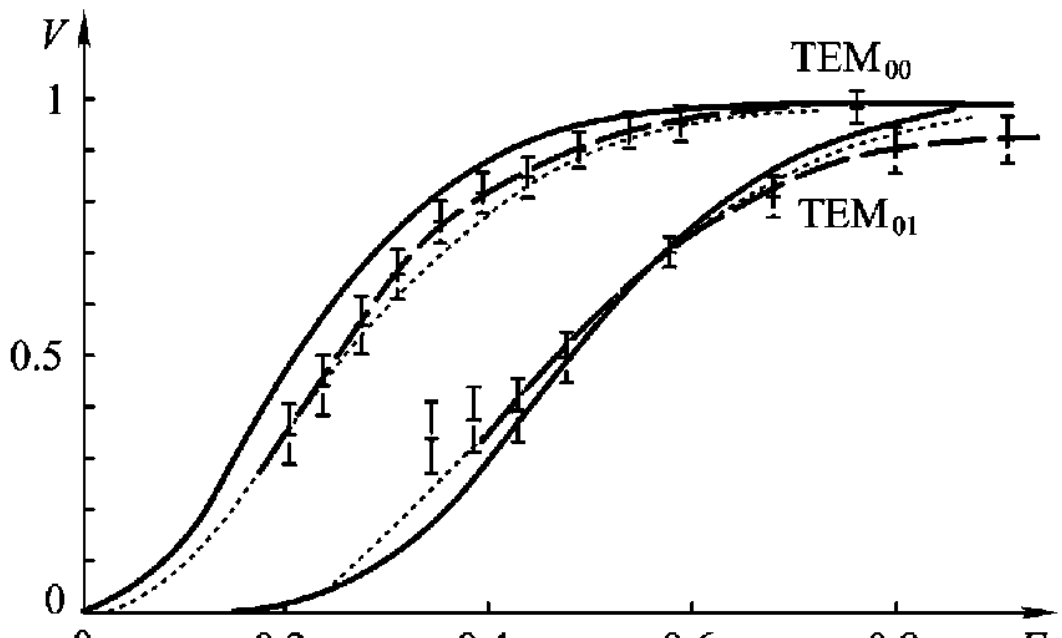


图 9.6.4　共焦腔的单程损耗因子 V 与菲涅耳数 F 数的关系

……圆形域中的理论值;—矩形域中的理论值;|||圆形域中的实验结果

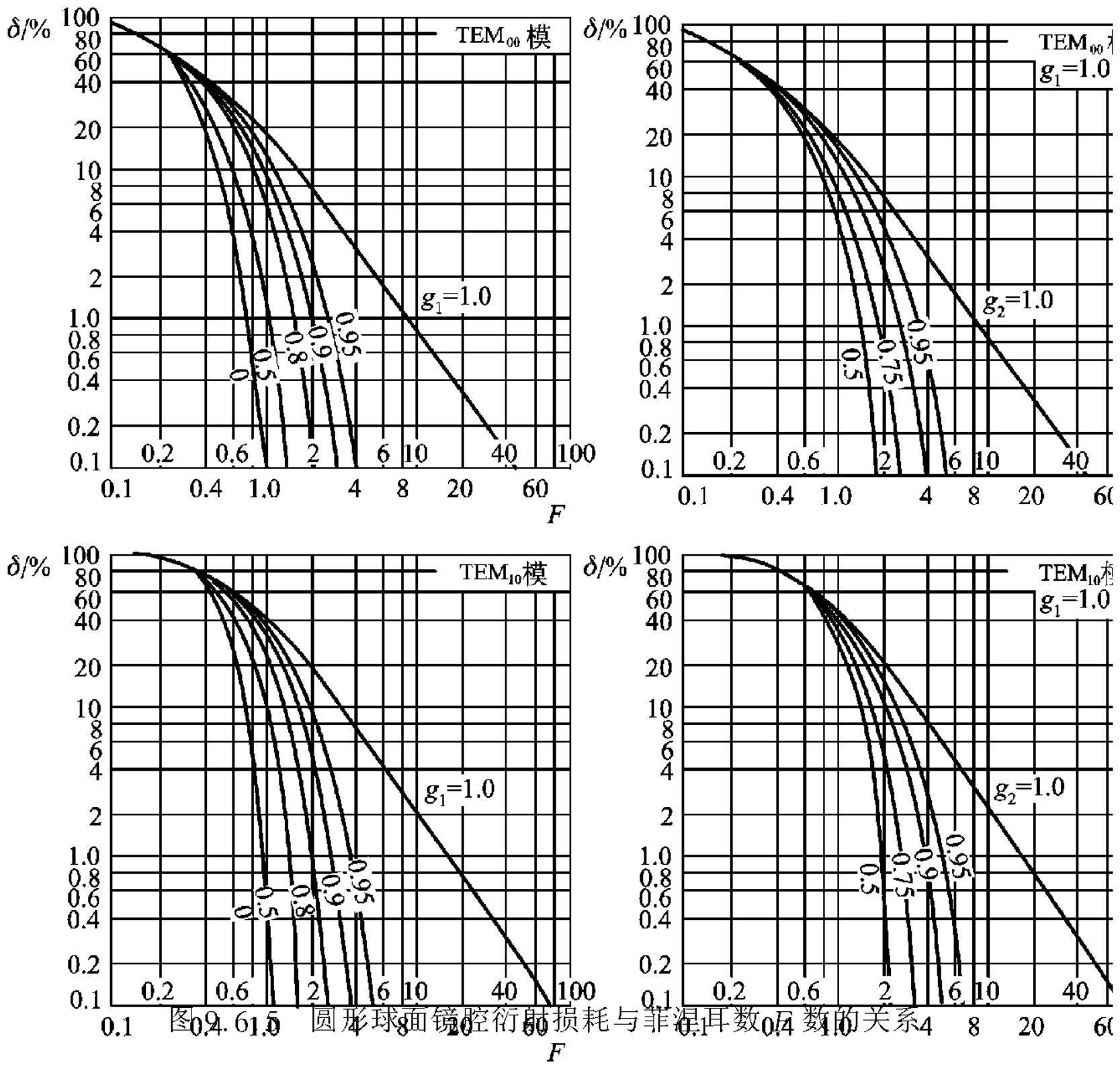


图 9.6.5　圆形球面镜腔衍射损耗与菲涅耳数 F 数的关系

四、小结

现将使用衍射积分方程理论研究稳定腔和临界腔所得主要结果列于表9.6.1中，以备参考.

表 9.6.1　光腔衍射理论的主要结果

腔　　型	镜几何形状	参　　数	本征积分方程的解
反射镜几何尺寸有限一般稳定球面腔	矩　形	$\lambda, a_1, b_1, \rho_1, a_2, b_2, \rho_2, L$	数值解
	圆　形	$\lambda, r_1, \rho_1, r_2, \rho_2, L$	数值解
反射镜几何尺寸有限对称稳定球面腔	矩　形	λ, a, b, ρ, L	数值解
	圆　形	λ, r, ρ, L	数值解
反射镜几何尺寸有限对称共焦腔	矩　形	λ, a, b, L	长球函数
	圆　形	λ, r, L	超球函数/数值解
反射镜几何尺寸有限平行平面腔	矩　形	$\lambda, a_1, b_1, a_2, b_2, L$	数值解
	圆　形	λ, r_1, r_2, L	数值解
反射镜几何尺寸有限窄带腔	矩形，非对称	λ, a_1, a_2, L	数值解
	矩形，对称	λ, a, L	数值解
反射镜几何尺寸无限一般稳定球面腔	矩　形	$\lambda, \rho_1, \rho_2, L$	厄米－高斯函数
	圆　形	$\lambda, \rho_1, \rho_2, L$	拉盖尔－高斯函数
反射镜几何尺寸无限对称稳定球面腔	矩　形	λ, ρ, L	厄米－高斯函数
	圆　形	λ, ρ, L	拉盖尔－高斯函数
反射镜几何尺寸无限对称共焦腔	矩　形	λ, ρ	厄米－高斯函数
	圆　形	λ, ρ	拉盖尔－高斯函数

说明：表中 λ 为波长，L 为腔长，ρ_1、ρ_2 为两反射镜曲率半径，r_1、r_2 为圆形反射镜镜面半径，$2a_i$、$2b_i$ 为矩形反射镜镜面长和宽.

§9.7　非稳腔的基本性质

由§2.7的讨论已经知道，非稳腔是指 g 参数满足不等式 $g_1 g_2 < 0$ 或者 $g_1 g_2 > 1$ 的腔. 非稳腔又称“点光束腔”，是因为腔内本征模为球面波. 从几何光学观点分析，光在腔内经有限次往返后就会逸出腔外，即腔的损耗很大. 通常认为比“非稳腔”更为准确的名称是“高损耗腔”.

虽然用几何光学方法可以揭示出非稳腔基模的主要特征，但只有使用衍射积分方程理论才能对非稳腔复杂的模式结构进行深入分析. 因为非稳腔的菲涅耳数大，本征积分方程的数值计算很费时. 本节分析非稳腔

的特点和基本性质.

一、非稳腔的特点

与稳定腔相比较,非稳腔的主要特点可归纳为:

1. 大的可控制的模体积

非稳腔中,基模在反射镜上的振幅分布大致是均匀的,它不仅充满反射镜,而且不可避免地要向外扩展.波束的横向尺寸比反射镜要大一个与反射镜横向尺寸无关的放大倍数 M.例如把反射镜尺寸增大一倍时,模的横向尺寸也增大一倍.因此,只要把反射镜扩大到所需要的尺寸,总能使模大致充满激光工作物质.这样,即使在腔长很短时也可以得到足够大的模体积,因而特别适于选用做高功率激光器的腔型.

2. 可控的衍射耦合输出

一般的稳定球面腔是用半反射镜作为输出耦合镜使用的.但对非稳腔来说,从反射镜边缘衍射出去的部分是一种有功损耗,即从腔中提取出的有用的衍射耦合输出.在球面波近似下,输出耦合率 Γ 为

$$\Gamma=1-\frac{1}{M^2} \tag{9.7.1}$$

因 M 只与 g 参数有关,故可选择适当的 g 参数来得到所需要的耦合输出,而反射镜的几何尺寸只需要根据所要求的模体积来单独确定.Γ 则可根据激光介质的增益、泵浦水平、输出功率等方面的要求设计.

3. 容易鉴别和控制横模

非稳腔的基模是均匀球面波(特殊情况下是均匀平面波).进一步的分析表明,非稳腔中仍可能有结构复杂的高阶模存在.但是,即使对于大的模尺寸和大菲涅耳数的非稳腔,低阶模和高阶模损耗的差异也是较大的,因此容易得到单横模.

4. 易于得到单端输出和准直的平行光束

通常非稳腔的两个反射镜都做成全反的,只要把其中一个反射镜做得比另一个大得多,以满足单端输出条件就可以实现单端输出.出于应用目的,可用透镜或其它光学系统把非稳腔单端输出的球面波准直成平行光束.有些类型的非稳腔,例如虚共焦腔,不需要外部光学系统,可以自动从单端输出平行光束.

二、输出耦合方式

非稳腔通常都要求单端输出.输出耦合方式通常有图 9.7.1 中所示的三种:

(1) 将输出端的反射镜安装在对激光“透明”的材料上[图 9.7.1(a)].

(2) 用辐射型支架将输出耦合镜支承在输出光束中心，支架应尽可能少挡光[图 9.7.1(b)].

(3) 在腔内放置带孔的倾斜耦合镜，耦合镜上的孔应能保证从 P_2 点发出并在镜 1 端充满全部激活介质的球面波顺利通过[图 9.7.1(c)]，而镜的其余部分又能有效地将来自镜 1 的光束耦合出腔外. 因此，耦合镜为有适当孔径的全反射镜，孔的半径还与镜在腔内位置有关，当它紧靠镜 2 时有

$$a_2' \approx a_0/M \tag{9.7.2}$$

式中 a_0 为激活介质半径.

图 9.7.1　非稳腔的输出耦合方式

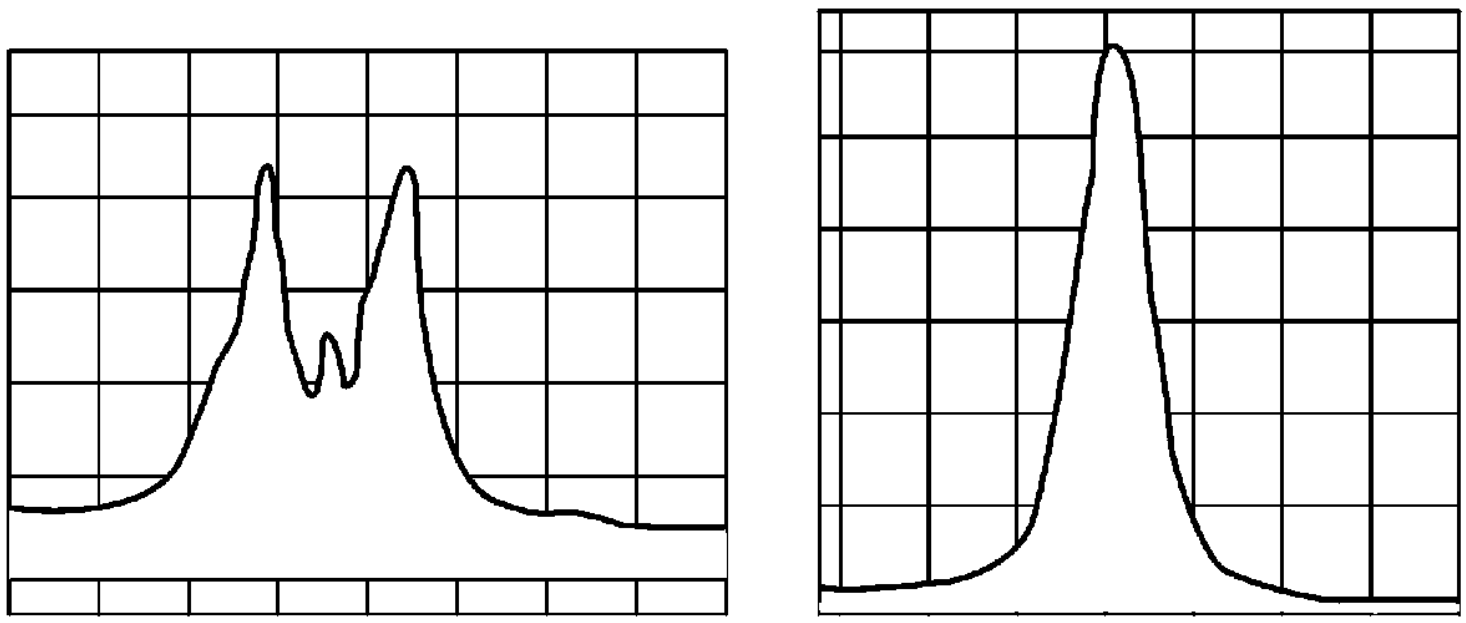
三、非稳腔的近场和远场分布

1. 近场分布

由非稳腔的几何光学理论可知，在近场，非稳腔的输出为一被均匀球

面波照明的亮环，特殊情况下是一个被均匀平面波照明的亮环如图9.7.2(a)所示.在紧靠输出反射镜2处，环的外径等于工作物质的半径a_0，环的内径等于输出镜的半径a_2.在单端输出情况下，近场亮环的外径与内径之比等于腔的放大率M

$$M=\frac{a_0}{a_2} \tag{9.7.3}$$



(a)　　(b)

图9.7.2　非稳腔的场分布(a)近场分布；(b) 远场分布

2. 远场分布

光场的远场分布是指它在无穷远屏上所形成的光强分布，即夫琅禾费衍射图.实验中可用一透镜将光束聚焦后观察在透镜焦平面上的光强分布.按照夫琅禾费衍射理论，可求得远场光强的角分布为

$$I(\theta)=I_0\left\{\frac{M^2}{M^2-1}\left[\frac{\mathrm{J}_1(2\pi M\theta a_2/\lambda)}{\pi M\theta a_2/\lambda}-\frac{\mathrm{J}_1(2\pi\theta a_2/\lambda)}{M^2\pi\theta a_2/\lambda}\right]\right\}^2 \tag{9.7.4}$$

式中I_0为$\theta=0$时远场分布图中心处的光强值，θ为远场图中的角半径

$$\theta=\frac{r}{f} \tag{9.7.5}$$

f为透镜焦距，r为焦面上观察点到光斑中心距离，J_1为一阶贝塞耳函数.

当$\theta=0$时，$I(0)=I_0$，随着θ增大$I(\theta)$交替地取得一系列极大值和极小值.因此，式(9.7.4)所描述的远场分布为在焦平面上一组明暗交替的同心光环，其中心永远为一亮斑，见图9.7.2(b).

特例：(1) $M\gg1$

这时式(9.7.4)化为圆孔的夫琅禾费衍射公式

$$I(\theta)\approx I_0\left[\frac{\mathrm{J}_1(2\pi M\theta a_2/\lambda)}{\pi M\theta a_2/\lambda}\right]^2 \tag{9.7.6}$$

中心亮斑的角半径为

$$\theta = 0.51\lambda / a_2 M \tag{9.7.7}$$

(2) $M-1 \ll 1$

式(9.7.4)过渡为半径 a_2 薄环的衍射公式：

$$I(\theta) \approx I(0)\left[\mathrm{J}_0(2\pi\theta a_2/\lambda)\right]^2 \tag{9.7.8}$$

中心亮斑的角半径为

$$\Delta\theta = 0.35\lambda / a_2 \tag{9.7.9}$$

这时中心亮斑的角半径减小，但次级大的强度增加.对这两种极限情况的比较见图 9.7.3.远场光强的理论和实验比较例见图 9.7.4，图中所用非稳腔参数为 $a_2 = 0.66$ cm，$M = 1.42$，$\lambda = 2.795$ μm.

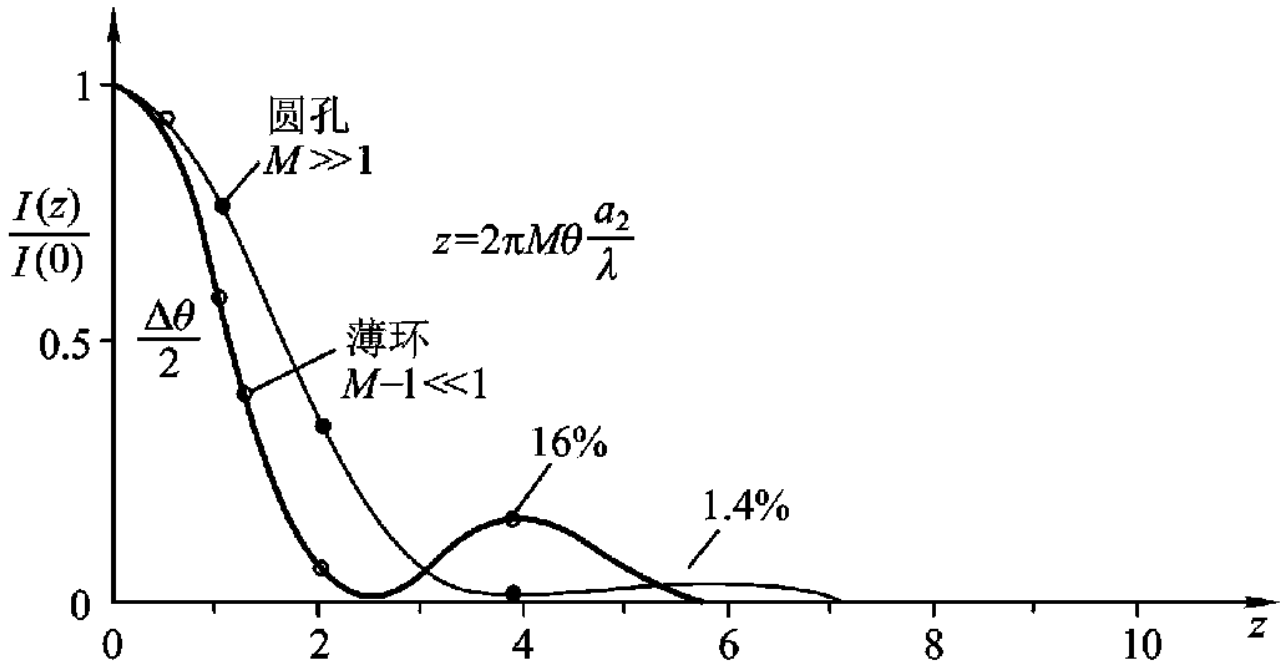


图 9.7.3　圆孔光阑($M \gg 1$)和薄环($M-1 \ll 1$)衍射的远场分布

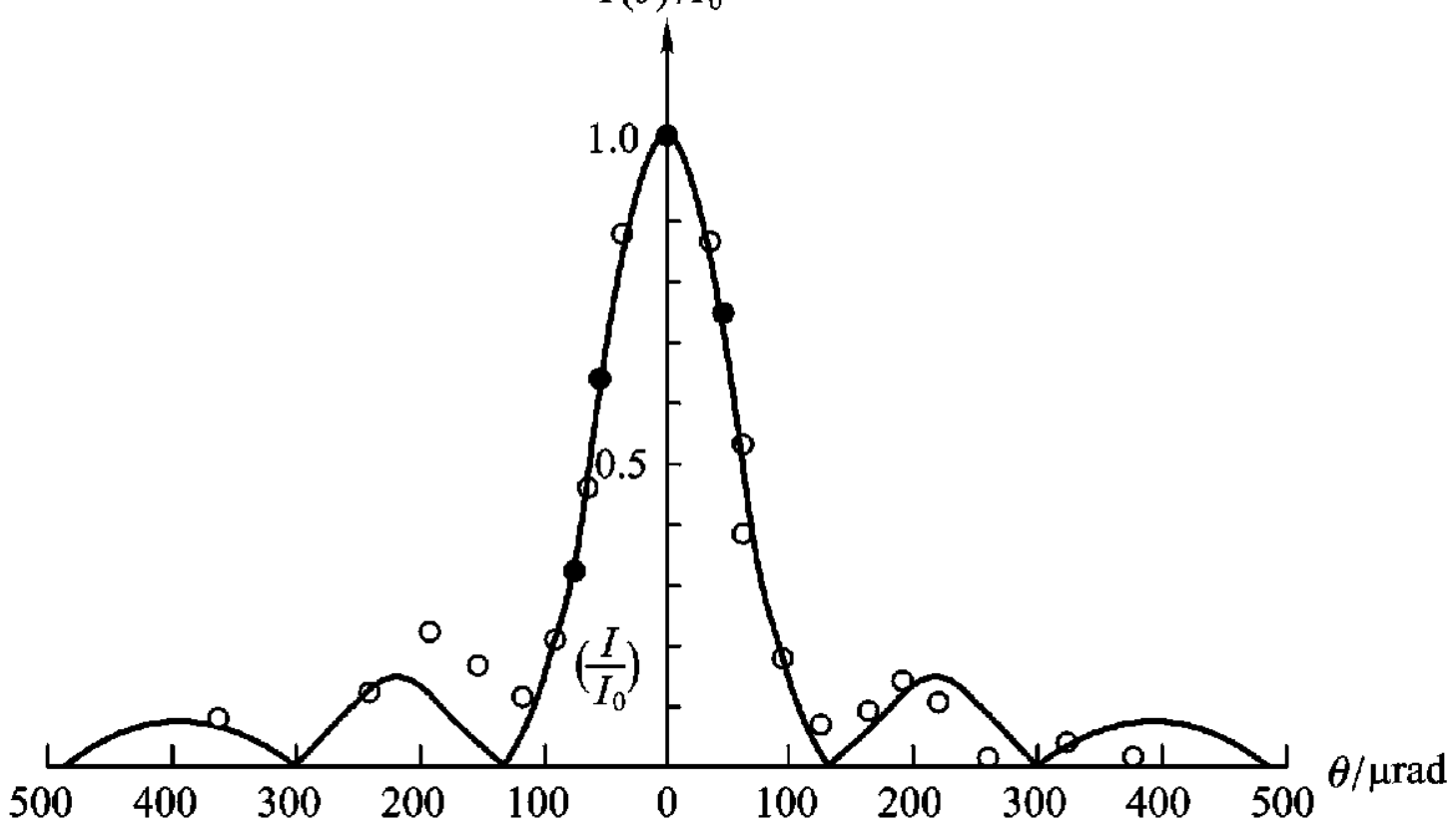


图 9.7.4　非稳腔远场分布的实验例 $a_2 = 0.66$ cm，$M = 1.42$，$\lambda = 2.795$ μm

四、远场发散角

非稳腔的远场发散角可用式(3.1.26)估算.对图9.7.5所示双凸腔，从镜2侧输出球面波的远场发散角

$$\theta_0=\left(\frac{Ma_2}{l_1+L}\right)^2+\left(\frac{\lambda}{\pi Ma_2}\right)^2=\left[\frac{a_2}{L}(m_1-1)m_2\right]^2+\left(\frac{\lambda}{\pi Ma_2}\right)^2 \tag{9.7.10}$$

非稳腔的远场发散角仍可视为由纯几何分量$\left(\frac{Ma_2}{l_1+L}\right)$和衍射分量$\left(\frac{\lambda}{\pi Ma_2}\right)$的贡献所组成.对于共焦型非稳腔，几何分量趋于零，所以得到只受衍射影响准直的平行光束.

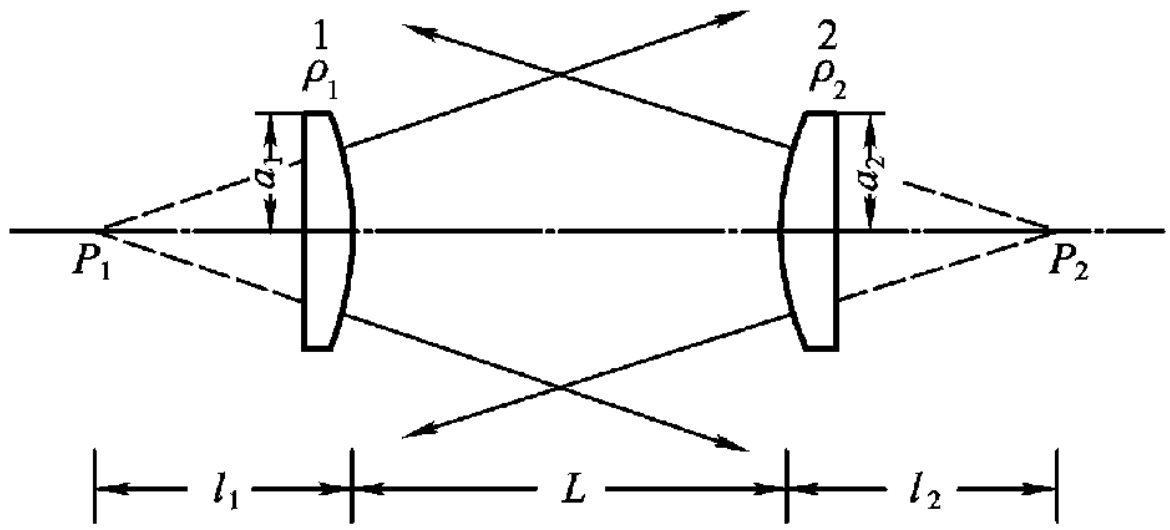


图9.7.5　双凸型非稳腔

五、有效菲涅耳数和锐边反射镜

现在介绍与非稳腔衍射理论有关的两个基本概念：

1.有效菲涅耳数

如图9.7.6中，设反射镜曲率半径为ρ，镜面半径为a，轴线上点P到反射镜中心距离为b，光从P点到反射镜中心和边缘处光程差为Δ，则有效菲涅耳数定义为

$$F_{\mathrm{ef}}=\frac{\Delta}{\lambda/2} \tag{9.7.11}$$

式中λ为波长.

设$a\ll b$，对非稳腔，易证

$$F_{i,\mathrm{ef}}=\frac{1}{2}F_i\left(m_i-\frac{1}{m_j}\right)=F_i\left[\frac{g_i}{g_j}(g_1g_2-1)\right]^{\frac{1}{2}},\quad i,j=1,2,i\neq j \tag{9.7.12}$$

式中

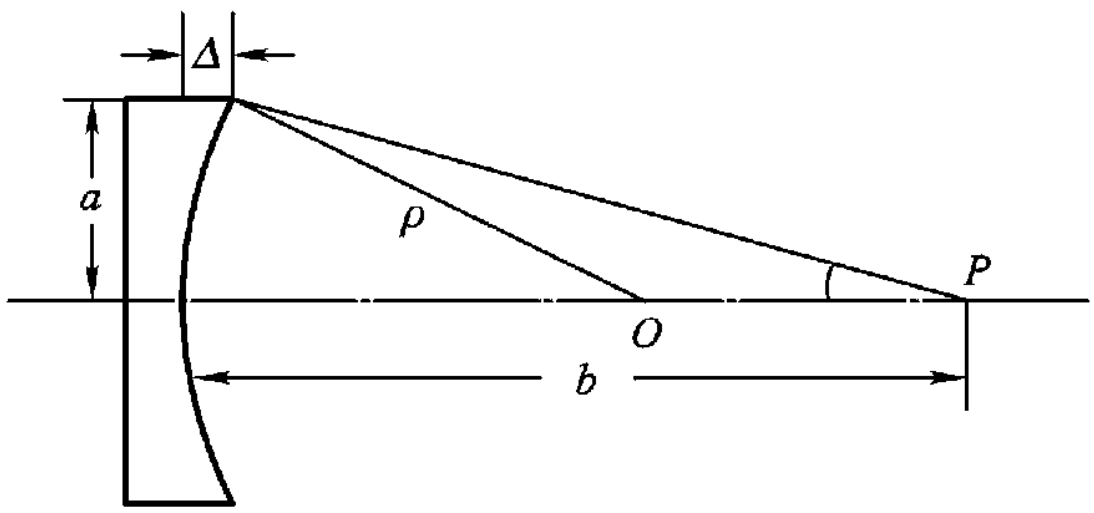


图 9.7.6　说明有效菲涅耳数 F_{ef} 定义的示意图

$$F_i=\frac{a_i^2}{\lambda L}\text{（菲涅耳数）} \tag{9.7.13}$$

对于对称非稳腔

$$a_1=a_2,g_1=g_2,m_1=m_2 \tag{9.7.14}$$

于是有

$$F_{1,\mathrm{ef}}=F_{2,\mathrm{ef}}=F_{\mathrm{ef}}=F\frac{m^2-1}{m^2}=F\sqrt{g^2-1} \tag{9.7.15}$$

式中

$$F=\frac{a^2}{\lambda L}\text{（菲涅耳数）} \tag{9.7.16}$$

2. 锐边反射镜

如图 9.7.7 所示反射镜，设在横向很小范围 Δa 内，反射率 R 由零突变到 1，而 Δa 满足由 P 点发出光波到达 a 和 $a+\Delta a$ 的光程差远小于半波长条件

$$\Delta a\sin\varphi\ll\frac{\lambda}{2} \tag{9.7.17}$$

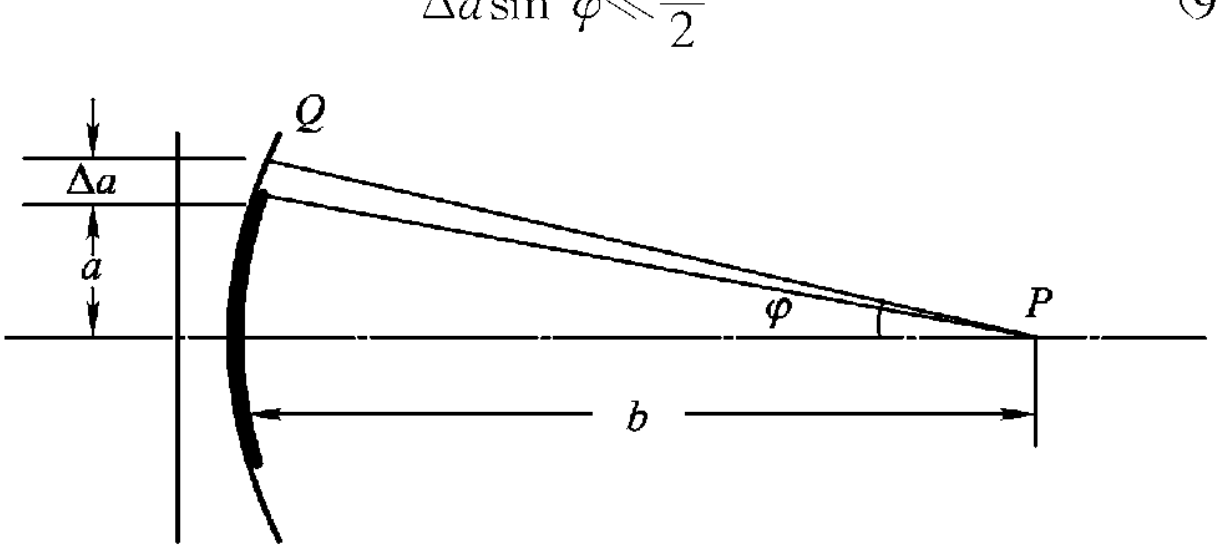


图 9.7.7　锐边反射镜

则称该反射镜为锐边反射镜. 式中 φ 为由 P 点发出光线 PQ 与轴线夹角. 易证条件式(9.7.17)相当于

$$\frac{\Delta a}{a}\ll\frac{1}{2F} \tag{9.7.18}$$

§9.8　非稳腔的衍射积分方程理论　帕若利法

一、非稳腔的本征积分方程　帕若利法

§9.1 中推导球面光学谐振的本征积分方程式(9.1.10)、式(9.1.11)时，并未对腔型加以限制，因此，式(9.1.10)、式(9.1.11)就是非对称非稳腔的本征积分方程，仅式中隐含的 g 参数应当满足条件 $g_1 g_2 < 0$ 或 $g_1 g_2 > 1$ 而已.

对于数值积分中常用的对称非稳腔，本征积分方程为

$$\gamma' E(x_1, y_1) = \int_S E(x_2, y_2) K(x_1, y_1, x_2, y_2) \mathrm{d}S \tag{9.8.1}$$

$$K(x_1, y_1, x_2, y_2) = \frac{\mathrm{i}}{\lambda L} \exp[-\mathrm{i}k\rho(x_1, y_1, x_2, y_2)] \tag{9.8.2}$$

对于锐边反射镜情况，求解非稳腔衍射积分方程的方法与稳定腔没有原则上的差异.已经发展了多种方法求解非稳腔的本征积分方程.主要有：(1) 福克斯－厉数值迭代法　这已在 §9.5 中做了讨论.但是对于非稳腔，$F \gg 1$，使用这一方法一般计算量很大；(2) 帕若利法　实际上是一种矩阵代数法，主要优点是可以同时求出多个腔模的场分布、相移和损耗等；(3) 超模波导法；(4) 快速傅里叶变换法等.下面以帕若利法为例，做一具体讨论.

设本征矢 u 和本征值 γ' 满足矩阵本征方程

$$\boldsymbol{M}u = \gamma' u \tag{9.8.3}$$

其中 $\boldsymbol{M}$ 为复对称矩阵.式(9.8.3)中的复本征矢对应于光腔模式的场分布，γ' 对应于光模的本征值.

现用迭代法求解本征方程(9.8.3).设初始值为

$$u = \tilde{u}_0 \tag{9.8.4}$$

代入式(9.8.3)得到

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1 &= \boldsymbol{M}\tilde{u}_0 \\ \tilde{u}_2 &= \boldsymbol{M}\tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_3 &= \boldsymbol{M}\tilde{u}_2 \\ &\cdots\cdots \end{aligned} \tag{9.8.5}$$

将 $\tilde{u}_0$ 按 M 的本征矢展开成级数，于是可把式(9.8.5)写为

$$\tilde{u}_0 = k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 + \cdots$$

$$\tilde{u}_1 = k_1\gamma'_1 u_1 + k_2\gamma'_2 u_2 + k_3\gamma'_3 u_3 + \cdots$$
$$\cdots\cdots$$
$$\tilde{u}_{m-1} = k_1\gamma'^{m-1}_1 u_1 + k_2\gamma'^{m-1}_2 u_2 + k_3\gamma'^{m-1}_3 u_3 + \cdots$$
$$\tilde{u}_m = k_1\gamma'^{m}_1 u_1 + k_2\gamma'^{m}_2 u_2 + k_3\gamma'^{m}_3 u_3 + \cdots \tag{9.8.6}$$

式中 k_i 为常数.易证

$$u_n u_m = \delta_{nm} \tag{9.8.7}$$

故

$$F_m \equiv \tilde{u}_m \tilde{u}_{m-m'}$$
$$= k_1^2\gamma'^{m}_1 + k_2^2\gamma'^{m}_2 + k_3^2\gamma'^{m}_3 + \cdots \tag{9.8.8}$$

令 $m=0,1,2,\cdots,2N$,按式(9.8.8)展开

$$\begin{aligned}
F_0 &= K_1 + K_2 + \cdots + K_N + \cdots \\
F_1 &= K_1\gamma'_1 + K_2\gamma'_2 + \cdots + K_N\gamma'_N + \cdots \\
F_2 &= K_1\gamma'^{2}_1 + K_2\gamma'^{2}_2 + \cdots + K_N\gamma'^{2}_N + \cdots \\
&\cdots\cdots \\
F_m &= K_1\gamma'^{m}_1 + K_2\gamma'^{m}_2 + \cdots + K_N\gamma'^{m}_N + \cdots \\
&\cdots\cdots \\
F_{2N} &= K_1\gamma'^{2N}_1 + K_2\gamma'^{2N}_2 + \cdots + K_N\gamma'^{2N}_N + \cdots
\end{aligned} \tag{9.8.9}$$

式中

$$K_n = k_n^2 \tag{9.8.10}$$

由此可知：

(1) 从初始值 $\tilde{u}_0$ 出发,经过 m 次迭代可得到 F_m 的 $2m+1$ 个值.

(2) 式(9.8.9)中虚线框内的方程组表明,由 F_0 出发,经过 $2N$ 次迭代,可以同时求出 N 个起主要作用的本征模.

设有 N 个本征值存在,按代数学基本定理,它是 N 次方程

$$\gamma'^{N} + Q_1\gamma'^{N-1} + \cdots + Q_{N-1}\gamma' + Q_N = 0 \tag{9.8.11}$$

的根,式中 Q_i 为常数.由此得

$$F_{m+N} + Q_1 F_{m+N-1} + \cdots + Q_{N-1}F_{m+1} + Q_N F_m = 0 \tag{9.8.12}$$

在式(9.8.12)中依次令 $m=0,1,2,\cdots,N$,得到线性方程组

$$\begin{cases}
F_N Q_1 + F_{N-1}Q_2 + \cdots + F_1 Q_N = -F_{N+1} \\
F_{N+1}Q_1 + F_N Q_2 + \cdots + F_2 Q_N = -F_{N+2} \\
\cdots\cdots \\
F_{2N-1}Q_1 + F_{2N-2}Q_2 + \cdots + F_N Q_N = -F_{2N}
\end{cases} \tag{9.8.13}$$

于是利用帕若利法求解本征方程式(9.8.13)的具体步骤可归纳为：

(1) 由式(9.8.4)出发得到式(9.8.6).

(2) 按式(9.8.8)求 F_m.

(3) 由式(9.8.13)求出 $Q_1,\cdots,Q_N$.

(4) 将诸 Q_N 代入式(9.8.11)求出 N 次多项式的 N 个复根 $\gamma'_1,\cdots,\gamma'_N$. 由 γ'_N 可以得到模的损耗、相移和谐振频率这样一些模的特征参数.

(5) 由式(9.8.9)中虚线框内的方程组可求得 $K_1,\cdots,K_N$, 再由式(9.8.10)求得 $k_1,\cdots,k_N$.

(6) 将 $k_1,\cdots,k_N$ 代入式(9.8.6)可求得本征矢 $u_1,\cdots,u_N$, 由此可求得镜面上的场分布.

二、等价定理

实际使用的非稳腔大多数是单端输出的非对称腔, 数值计算比较麻烦, 但可以使用等价定理, 由对称腔的计算而得到相应非对称腔的模参数.

非稳腔的等价定理是§9.3中腔的等价定理的推广, 可表述为: 若图9.8.1中单端输出非稳腔(设从镜2端输出)的特征参数 g_1、g_2、F_1、$F_{2,\mathrm{ef}}$ 与对称非稳腔的特征参数 g、F、F_{ef} 间有关系:

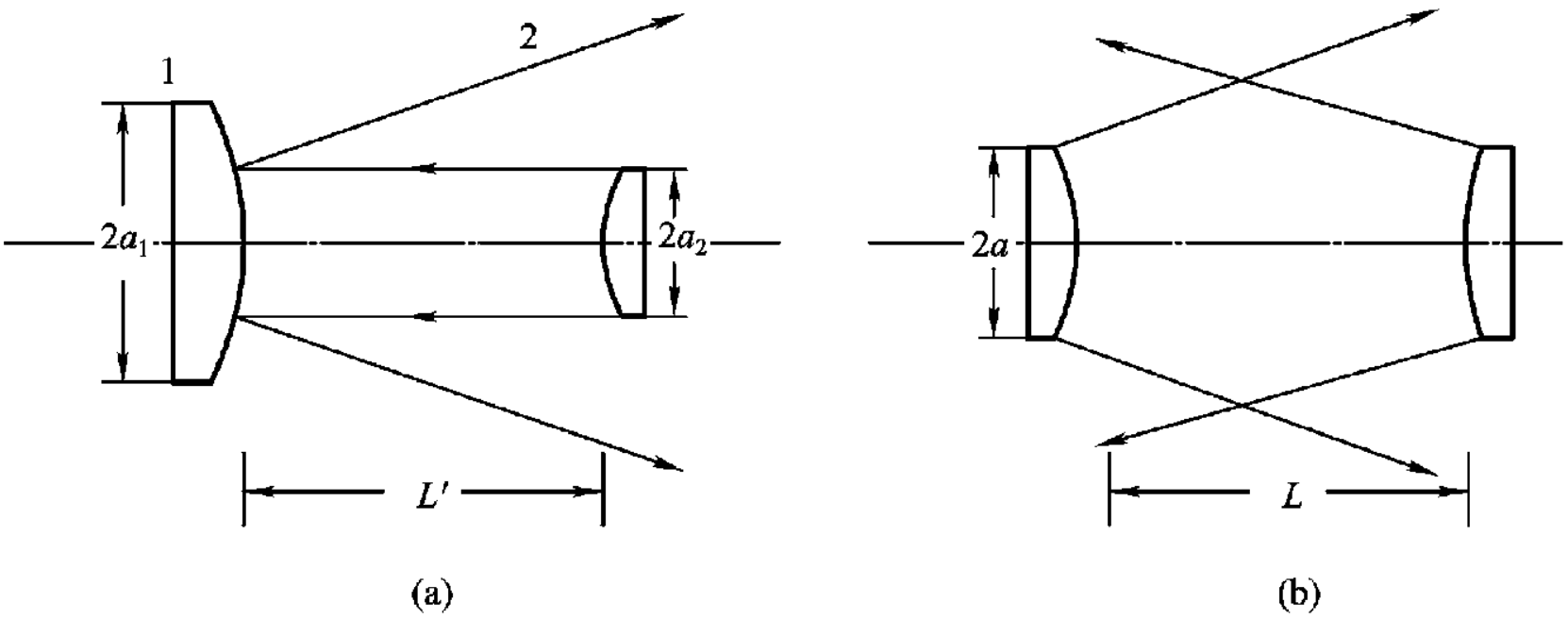


图 9.8.1　说明等价腔的示意图

$$F=\left|\frac{F_2}{2g_1}\right| \tag{9.8.14}$$

$$g=|1-2g_1g_2| \tag{9.8.15}$$

$$F_{\mathrm{ef}}=F_{2,\mathrm{ef}}=F_2\sqrt{\frac{g_2}{g_1}(g_1g_2-1)} \tag{9.8.16}$$

则这两个非稳腔是等价的. 式中 g_i 为 g 参数, F_2、F 为菲涅耳数, F_{ef}、$F_{2,\mathrm{ef}}$ 为有效菲涅耳数.

等价性是指对称非稳腔的本征值 γ' 与非对称非稳腔的本征值 γ_1、γ_2 间有关系

$$|\gamma'|=|\gamma_1\gamma_2| \tag{9.8.17}$$

由此可知：

(1) 非对称非稳腔的全程功率损耗 δ 等于对称非稳腔的单程功率损耗

$$\delta=1-|\gamma_1\gamma_2|^2=1-|\gamma'|^2 \tag{9.8.18}$$

(2) 由下列关系可求出非对称非稳腔的相移

$$\gamma'=\begin{cases}\gamma_1\gamma_2 & g_1g_2>1,g_1>0\\ \gamma_1^*\gamma_2^* & g_1g_2>1,g_1<0\\ (-1)^{l+1}\gamma_1^*\gamma_2^* & g_1g_2<0,g_1>0\\ (-1)^{l+1}\gamma_1\gamma_2 & g_1g_2<0,g_1<0\end{cases} \tag{9.8.19}$$

三、非稳腔衍射积分方程理论的主要结果

用上述方法求解非稳腔的衍射积分方程，可对其模式特征进行深入分析，所得主要结果有：

1. 非稳腔的损耗　模交叉

衍射积分方程理论揭示出非稳腔的损耗与腔的几何参数比按照几何光学计算公式有更为复杂的关系. 福克斯－厉数值迭代法计算表明(图 9.8.2)，仅当 $F\gg1$ 时，用几何光学方法计算出的损耗才近似等于按衍射积分方程理论求出损耗的平均值.

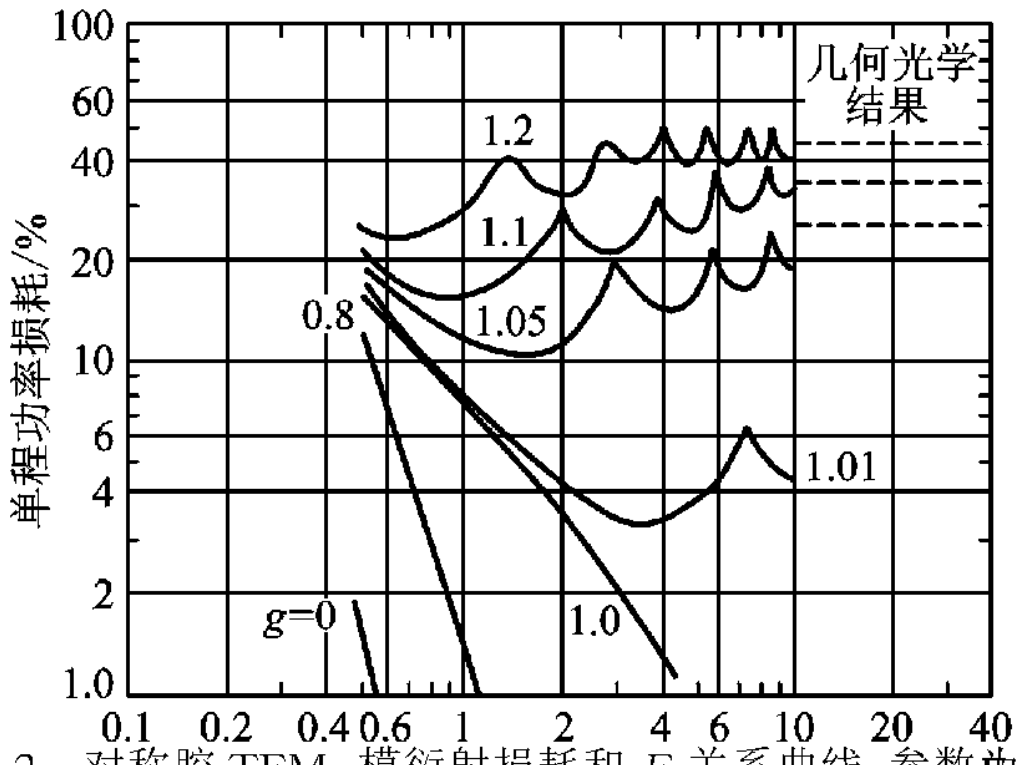


图 9.8.2　对称腔 TEM_{00} 模衍射损耗和 F 关系曲线，参数为 g

一般情况下，腔损耗随有效菲涅耳数 F_{ef} 呈现准周期变化，并出现模交叉现象(图 9.8.3). 在交叉处简并的模式有相同的损耗，但复本征值并不相等，即交叉处的简并模有不同相位. 由图 9.8.3 还可以看出，当 F_{ef} 为

整数 1、2、3、……时，损耗达到极大值，而 F_{ef} 为半整数 0.5、1.5、2.5、……时，损耗取极小值.

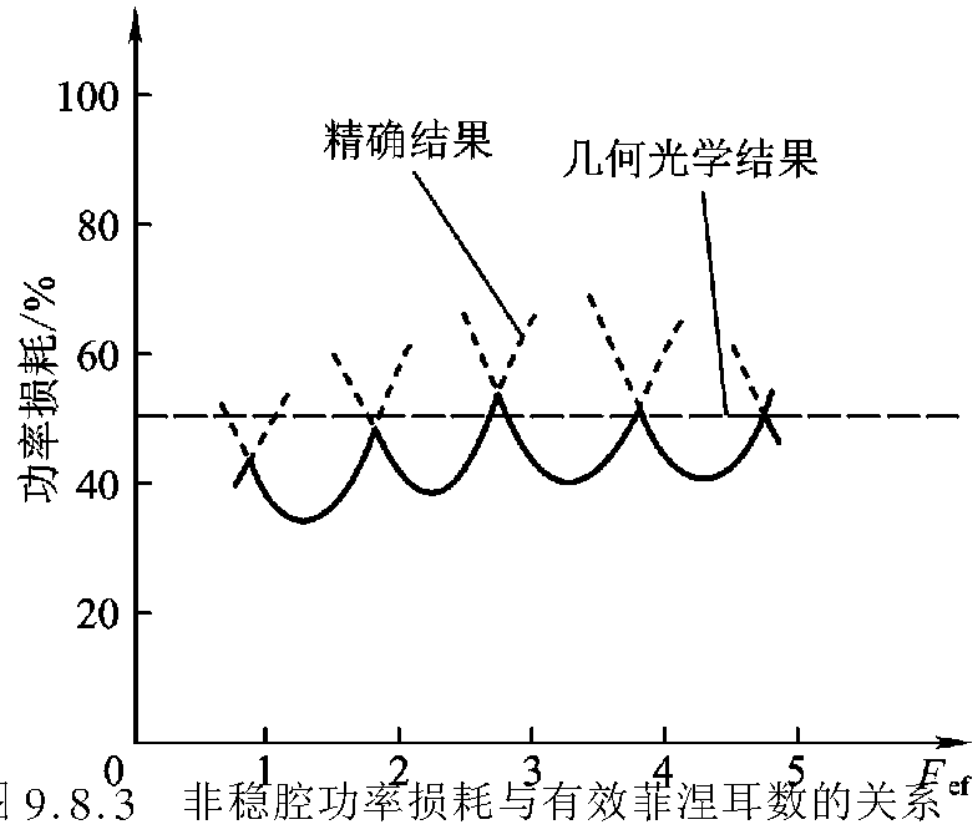


图 9.8.3　非稳腔功率损耗与有效菲涅耳数的关系

非稳腔的全程功率损耗 δ 与往返放大率 M 的关系示于图 9.8.4，参数为 F_{ef}. 由图可见，衍射的作用使腔损耗总是低于几何光学的计算值.

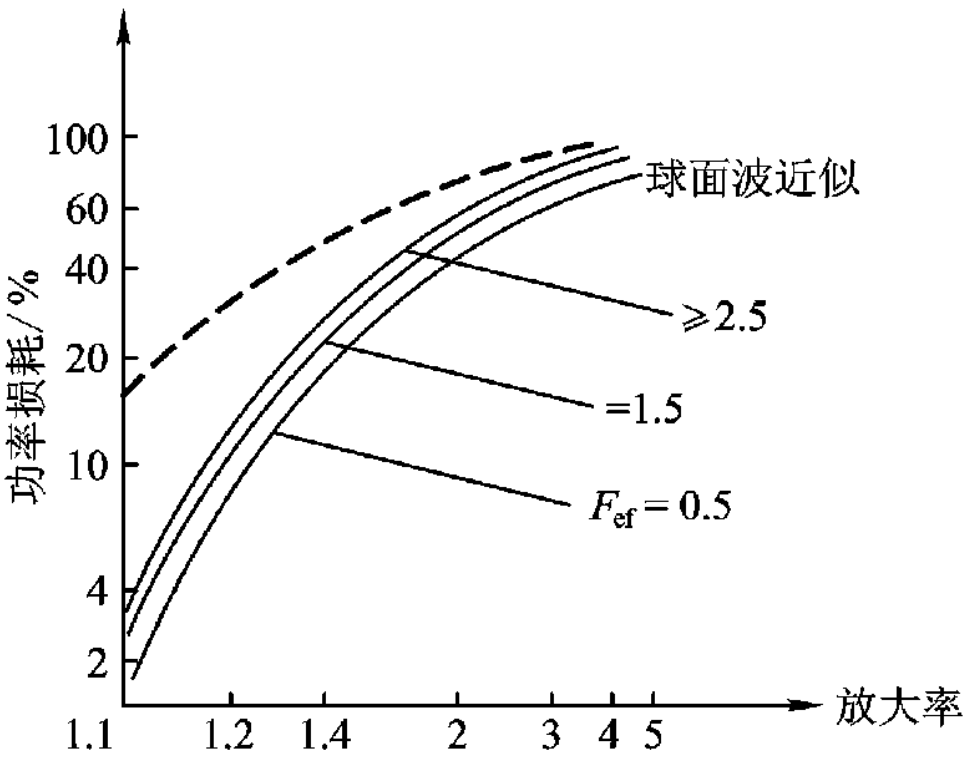


图 9.8.4　非稳腔功率损耗与放大率关系

当 F_{ef} 为半整数时，非稳腔的全程功率损耗 δ 与往返放大率 M 间有关系式

$$\left(1-\frac{1}{M^2}\right)^2=\begin{cases}1.44\delta-0.44\delta^2, & k=1\\ 1.06\delta-0.06\delta^2, & k=3\\ \delta, & k\geqslant 1\end{cases}\tag{9.8.20}$$

并设

$$F_{ef}=\frac{1}{2}k,\quad k=1,3,5,\cdots\tag{9.8.21}$$

2. 高阶模式

衍射积分方程理论还揭示出非稳腔中可能存在高阶横模，这些模的结构是复杂的，典型的数值计算结果示于图 9.8.5. 图中模的本征值的数值(决定功率损耗)和相移是作为有效菲涅耳数 F_{ef} 的函数作出的.

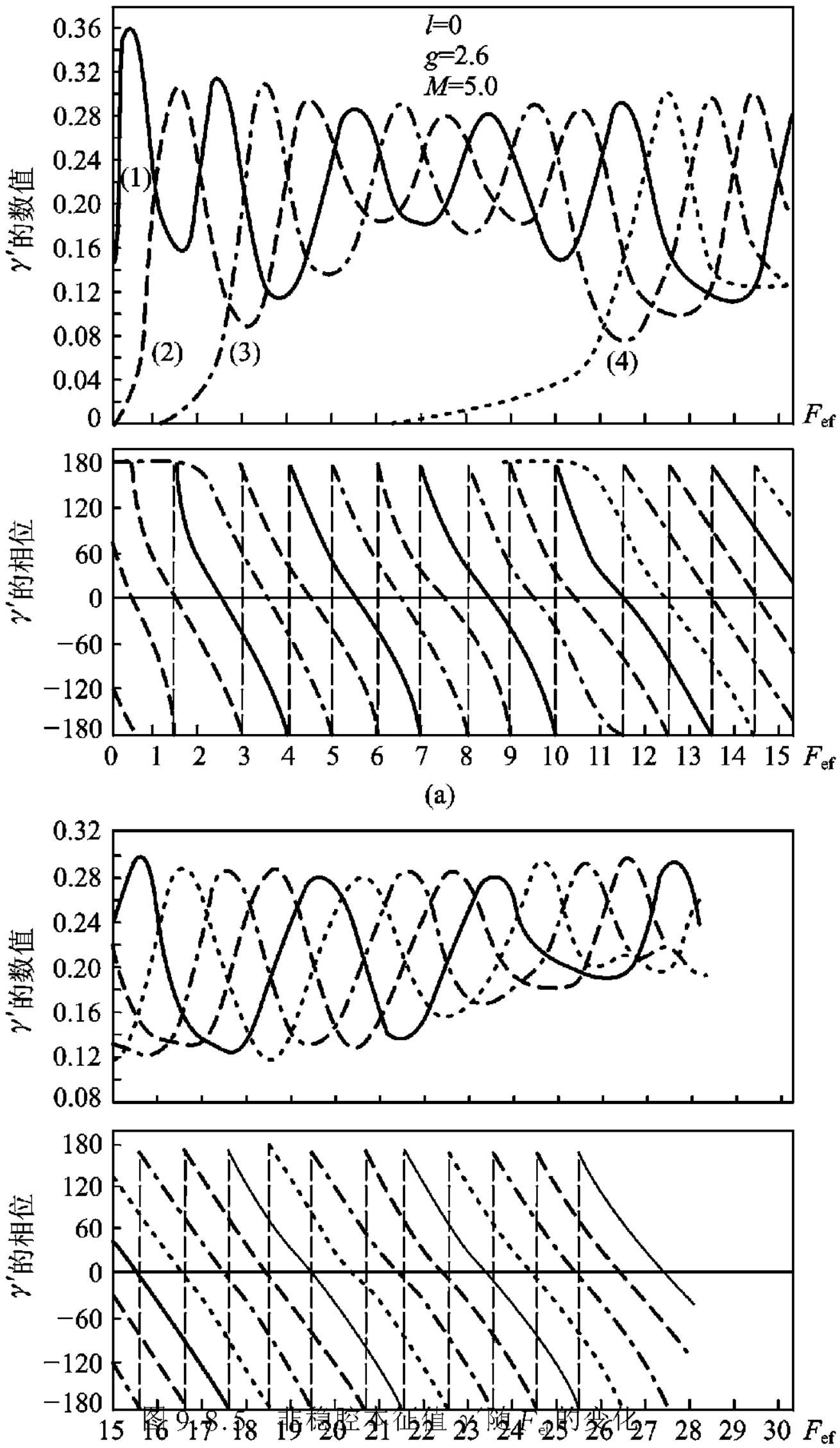


图 9.8.5　非稳腔本征值 γ' 随 F_{ef} 的变化

由模的本征值可得出该模的特征.由图可见模交叉的现象,而且在交叉处有复杂的行为.高阶模在径向和角向都有模交叉现象,这一现象在菲涅耳数很大时也会发生.

由本征函数 u_n 可以得到非稳腔的近场和远场分布特征.图 9.8.6 (a)为对窄带非稳腔镜面上基模光场分布的计算曲线,(b)为远场分布 $M=2.5, F_{ef}=0.6$.由图可见,它与按照夫琅禾费衍射的计算结果相似.

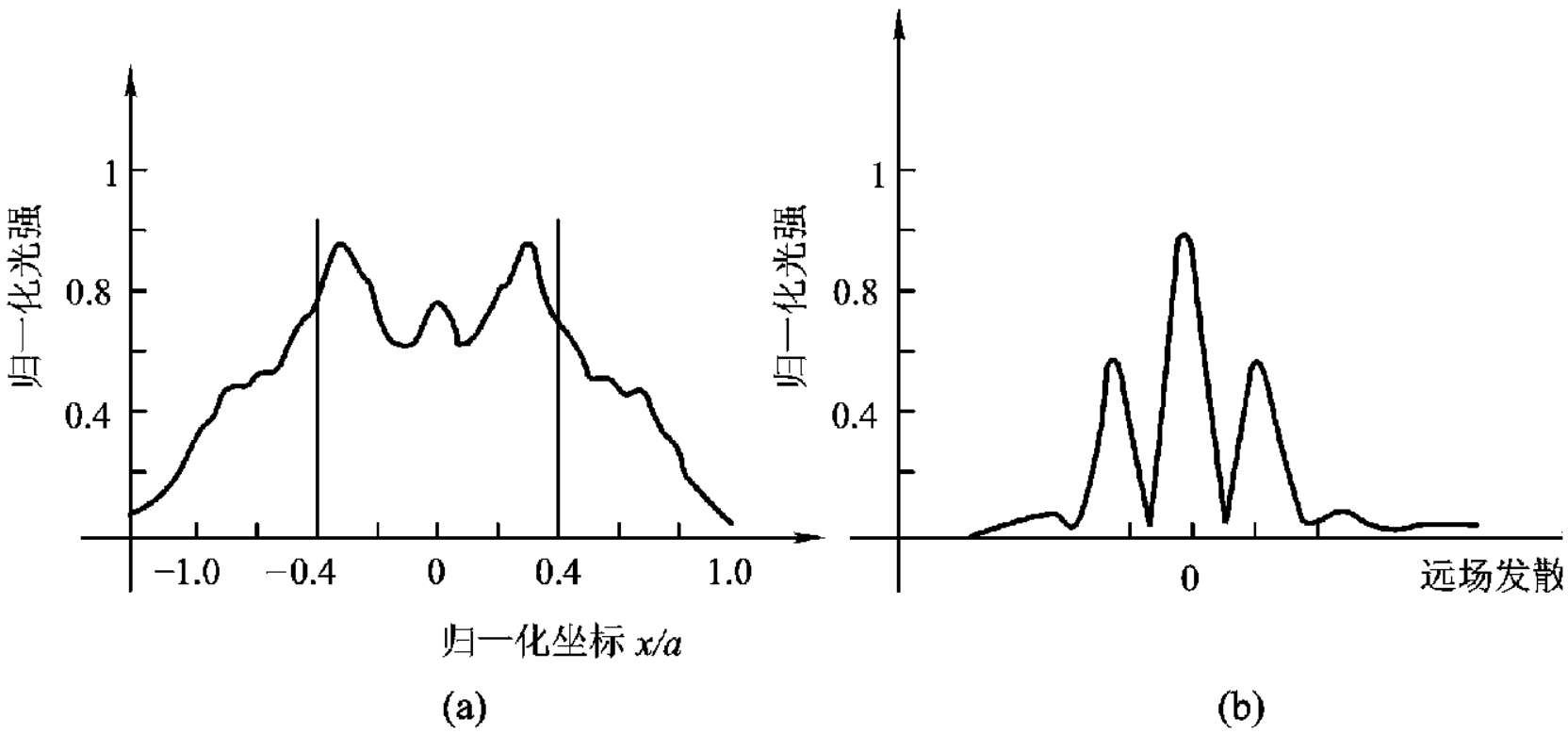


图 9.8.6　窄带非稳腔

(a) 镜面上基模光强随 x/a 的变化;(b) 远场分布

3. 模分裂

当有效菲涅耳数 F_{ef} 足够大时,非稳腔的模式出现分裂现象,图 9.8.7 为对窄带非稳腔 α、γ、β、δ 模的计算结果.由图可见,在模式分裂后仍旧出现损耗随 F_{ef} 周期性变化的现象,但是最低阶模在 F_{ef} 足够大时,趋近于几何光学的计算结果.

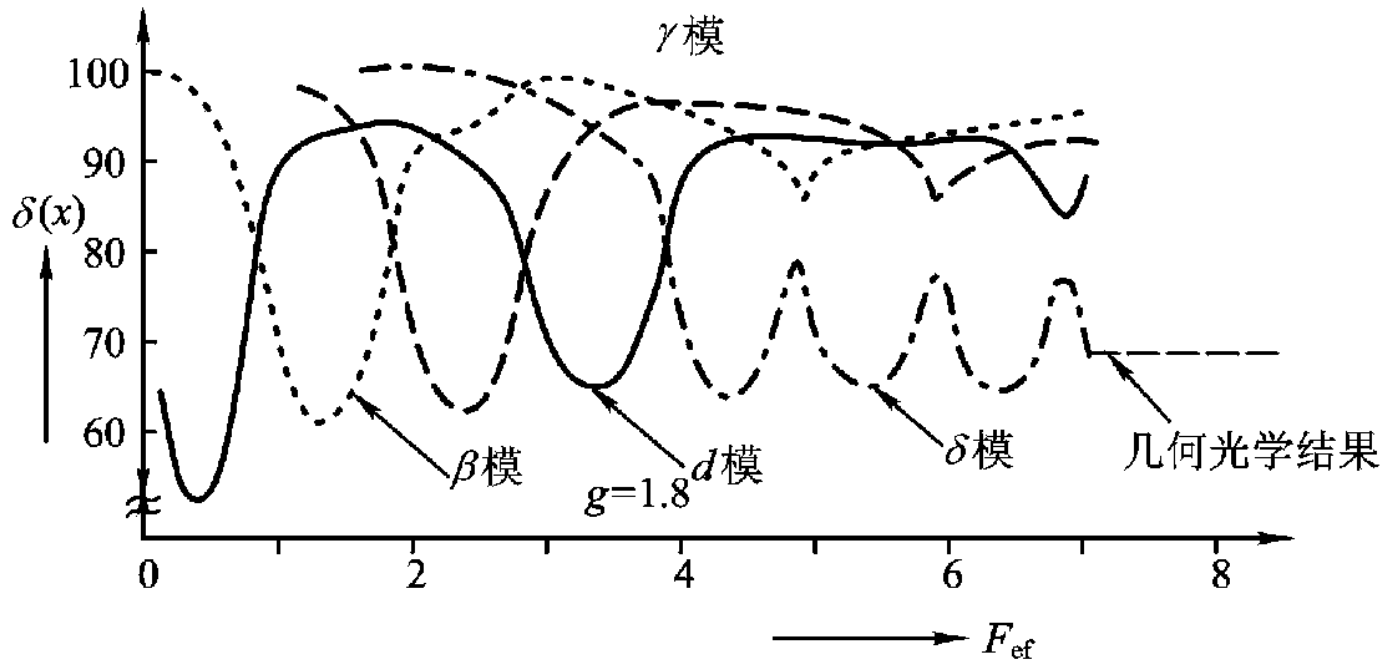


图 9.8.7　窄带非稳腔中的模分裂

§9.9　有源非稳腔

非稳腔常选做高功率激光器的腔型，这时激活介质的增益饱和以及增益的非均匀等会引起腔内折射率的非均匀分布.此外，对一些高功率气体激光器和化学激光器，腔内工作气体介质需作超声速流动，因冲击波作用也会使腔内折射率出现不均匀，因此不能再作为无源腔来处理.

这类有源非稳腔的实际物理图像十分复杂，为了能使问题变得比较容易处理而又接近实际情况，需做一些合理的近似和简化.

一、物理模型

1. 片状增益模型(图 9.9.1)

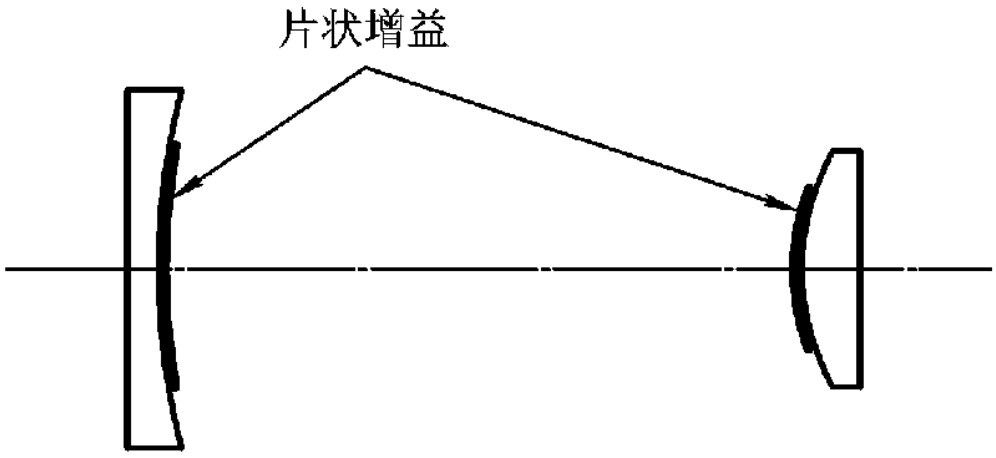


图 9.9.1　片状增益模型

作为初级近似，可以把激活介质视为一个薄片，并且紧贴其中一个反射镜，或者一分为二，紧贴在两个反射镜的内侧，称为片状增益模型.在这一模型中，虽然考虑了增益饱和效应，但增益仅集中在空间非常有限区域，也未考虑腔内增益分布的非均匀性和工作介质的流动效应，对于高功率固体激光器比高功率气体激光器使用这一模型要更接近实际情况一些.

2. 分布增益模型

改进的模型认为激活介质充满腔内，并且横向流动，而在轴向可以分成若干小段，在每一小段内增益和折射率在轴向上是相等的，在横向(即流动方向上)可以变化.这一模型称为分布增益模型，适用于高功率横流气体激光器.

二、计算方法和主要结果

1. 计算方法

虽然在有源腔的物理模型中做了上述近似和简化，但是只要考虑增

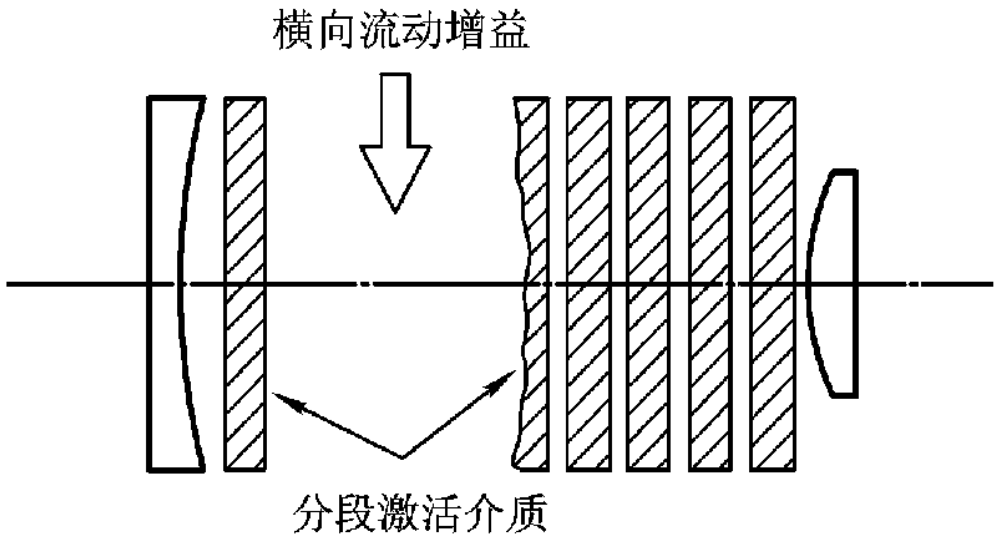


图 9.9.2　分布增益模型

益饱和效应后衍射积分方程就成为非线性的，问题变得比线性积分方程复杂得多.为此，已发展了多种方法对有源非稳腔进行数值求解.例如：

(1) 有限差分代数法；

(2) 厄米－高斯函数展开法；

(3) 快速傅里叶变换法；

(4) 超模波导法；

(5) 光线技术等.

这些方法各有优缺点，一般而言，在选择方法时计算时间多少和计算误差大小是要考虑的重要因素.对菲涅耳数大的腔，有限差分法较好，对菲涅耳数不很大的腔，使用快速傅里叶变换法可大为减少计算时间.

2. 主要结果

使用上述方法，对有源非稳腔的计算结果表明：

(1) 在高功率非稳腔的设计中，有必要考虑激活介质的增益饱和、折射率的空间非均匀性等因素，它们对计算结果有显著影响.

(2) 有源非稳腔的近场分布在介质流动方向因增益的非均匀性而出现畸变，近场相位分布也是非均匀的.

(3) 远场强度因折射率非均匀性和冲击波作用与无源腔相比有减小.

习　　题

1. 已知矩形域中，当反射镜几何尺寸无限大时腔本征方程的解为厄米－高斯函数，求：

(1) TEM_{00}、TEM_{10}、TEM_{20}模场分布函数 E_{mn}的表示式.

(2) 作函数 $F(\xi)=\mathrm{H}(\xi)$、$\exp(-\xi^2/2)$、$\exp(-\xi^2/2)\mathrm{H}_m(\xi)$及 $I(\xi)=|E_{m0}(\xi)|^2$的图形.

(3) 根据(2)画出 TEM_{00}、TEM_{10}、TEM_{20}模的光斑图.

2. 写出无限大圆形镜共焦腔 TEM_{00}、TEM_{01}、TEM_{10}、TEM_{20}、TEM_{02}模镜面上的场分布函数 $E_{00}(r,\varphi)$、$E_{01}(r,\varphi)$、$E_{10}(r,\varphi)$、$E_{20}(r,\varphi)$、$E_{02}(r,\varphi)$的表示式,计算各节线的位置.

3. 计算均匀平面波通过长 L、直径 $2a$ 的光阑传输线后的相对功率损耗.

4. 按式(9.2.32)做出共焦腔中共振频率的频谱图,讨论其简并特性.

5. 用矩阵光学方法证明共焦腔为稳定腔,腔内光线是高度简并的,即任意近轴光线在腔内可往返无限多次,且两次往返就自行闭合.

6. "任意高斯光束都是共焦腔的自再现模"的论断与共焦腔衍射积分方程理论所得结果有矛盾吗?为什么?

7. 证明式(9.7.4).

8. 列表总结正支虚共焦腔与负支实共焦腔的有关公式,并对这两类腔型的特点加以比较.

9. 推导式(9.2.34).

10. 证明§9.8中所述非稳腔的等价定理.该定理能用于稳定腔吗?对此加以分析讨论.

11. 证明厄米-高斯函数式(9.2.12)为积分方程式(9.2.10)的解.

提示:利用公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-a^2+2\beta x)H_n(\delta x)\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\left(\frac{a-\delta^2}{a}\right)^{\frac{n}{2}}\exp\left(\frac{\beta^2}{a}\right)H_n\left(\frac{\beta\delta}{\sqrt{a(a-\delta^2)}}\right)$$

12. 证明拉盖尔-高斯函数式(9.2.38)为积分方程式(9.2.34)、式(9.2.36)的解.

提示:利用公式

$$\exp\left(-\frac{x}{2}\right)x^{\frac{l}{2}}L_p^l(x)=\frac{(-1)^l}{2}\int_0^{+\infty}J_l(\sqrt{xy})\exp\left(-\frac{y}{2}\right)y^{\frac{l}{2}}L_p^l(y)\mathrm{d}y$$

参 考 文 献

[1] Siegman A E. Lasers. Mill Valley, California: University Science Books, 1986

[2] Hodgson N, Weber H. Optische Resonatoren. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1992

[3] Hall D R, Jackson P E. The Physics and Technology of Laser Resonators. Adam Hilger, Bristol and New York, 1989

[4] Fox A G, Li T. Resonant modes in a maser interferometer. Bell Syst Techn J, 1961, 40: 453

[5] Boyd G D, Kogelnik H. Generalized confocal resonator theory. Bell Syst Techn J, 1961, 41: 1 347

[6] Gordon J P, Kogelnik H, Boyd G D, Gordon J P. Confocal multitude resonator

for millimeter through optical wavelength masers. Bell Syst Techn J, 1961, 40: 489

[7] Kogelnik H, Li T. Laser beams and resonators. Proc IEEE, 1966, 54: 1 312

[8] Siegman A E. Unstable optical resonators for laser applications. Proc IEEE, 1965, 53: 277

[9] Siegman A E, Miller H Y. Unstable optical resonator loss calculations using Prony method. Appl Opt, 1970, 9: 2 729

[10] Siegman A E. Unstable optical resonators. Appl Opt, 1974, 13: 353

[11] Sziklas E A, Siegman A E. Mode calculations in Unstable resonators with flowing saturation gain. Appl Opt, 1975, 14: 1 874

[12] Ernst G J, Witteman W J. Mode Structure of active resonators. IEEE J Quant Electron, 1973, 9: 911

[13] Hodgson N. Optische Resonatoren für Hockleistungs - Festkörper - Laser. Festkörper - Laser - Institut Berlin GmbH, 1990

[14] Dembowski J. Die transversale Modenstruktur in aktiven Resonatoren. Diplomarbeit, Universität Kaiserslautern, 1981

[15] Hodgson N. Verluste, Modenstrukturen und Dejustierungsempfindlichkeit instabiler Resonatoren. Diplomarbeit, Universität Kaiserslautern, 1986

[16] Hauck R. Theoretische und experimentelle Untersuchungen über Verluste und Modenstruktur instabiler Resonatoren. Dissertation, Universität Kaiserslautern, 1986

[17] Ozygus B. Hochleistungslaser mit konfokalem Resonator. Diplomarbeit, T. U. Berlin, 1989

[18] Lü B. Questions about equivalent confocal resonator method. Chin Phys Lasers, 1986, 13: 763

[19] 周炳琨, 高以智等. 激光原理. 北京: 国防工业出版社, 1984

[20] 吕百达, 冯国英. 板条激光器用光腔的模式计算, 快速傅里叶变换法. 激光技术, 1993, 17: 335

[21] 冯国英, 叶一东, 吕百达. 带可变反射率镜无源和有源腔的衍射分析. 四川大学学报, 1995, 32: 283

第十章　一些典型光学谐振腔的工作特性

本章以一些典型的光学谐振腔为例，介绍光学谐振腔研究工作的进展.以含热透镜光腔作为有源腔的代表，详细分析了热透镜腔及其动态工作特性，包括用于工业激光材料加工中的动态热稳腔和多棒热透镜腔以及热致应力双折射补偿技术.还对环形腔和折叠腔、相位共轭腔、非均匀反射镜腔、含偏振元件光腔、非轴对称腔、负支实共焦非稳腔、多元件非稳腔、各类棱镜腔和90°束转动非稳腔等有实际应用意义光腔的设计和工作特性做了讨论.

§10.1　多元件光学谐振腔的等价腔分析法

多元件光学谐振腔是在实际工作中经常遇到的一类腔型.例如，对于高功率固体激光器，作为激活介质的激光棒本身除了有放大光的作用外，还有随泵浦功率大小而变化的折射光的性质.在一级近似下，可以把激光棒简化为一个具有可变焦距 f（常用其倒数 D 称为光焦度）的热透镜，这样就构成了腔内含有一个透镜的多元件光学谐振腔.

对于多元件光学谐振腔，可以用等价腔的方法分析，下面以含有一个薄透镜的多元件腔为例加以说明.

一、g'、g''参数等价腔

对于图10.1.1(a)所示两反射镜曲率半径分别为 ρ_1、ρ_2，腔长 L，内含光焦度为 D 薄透镜（该透镜距镜1、镜2分别为 d_1、d_2）的多元件腔，将镜1经薄透镜成像得到 g''参数腔（图10.1.1(b)）.由成像方程有

$$\frac{1}{d_1''}+\frac{1}{d_1}=D$$

$$\frac{1}{d_1-\rho_1}+\frac{1}{d_1''+\rho_1''}=D \tag{10.1.1}$$

由此求得

$$\rho_1''=\frac{\rho_1}{(Dd_1-1)\lfloor D(d_1-\rho_1)-1\rfloor}$$

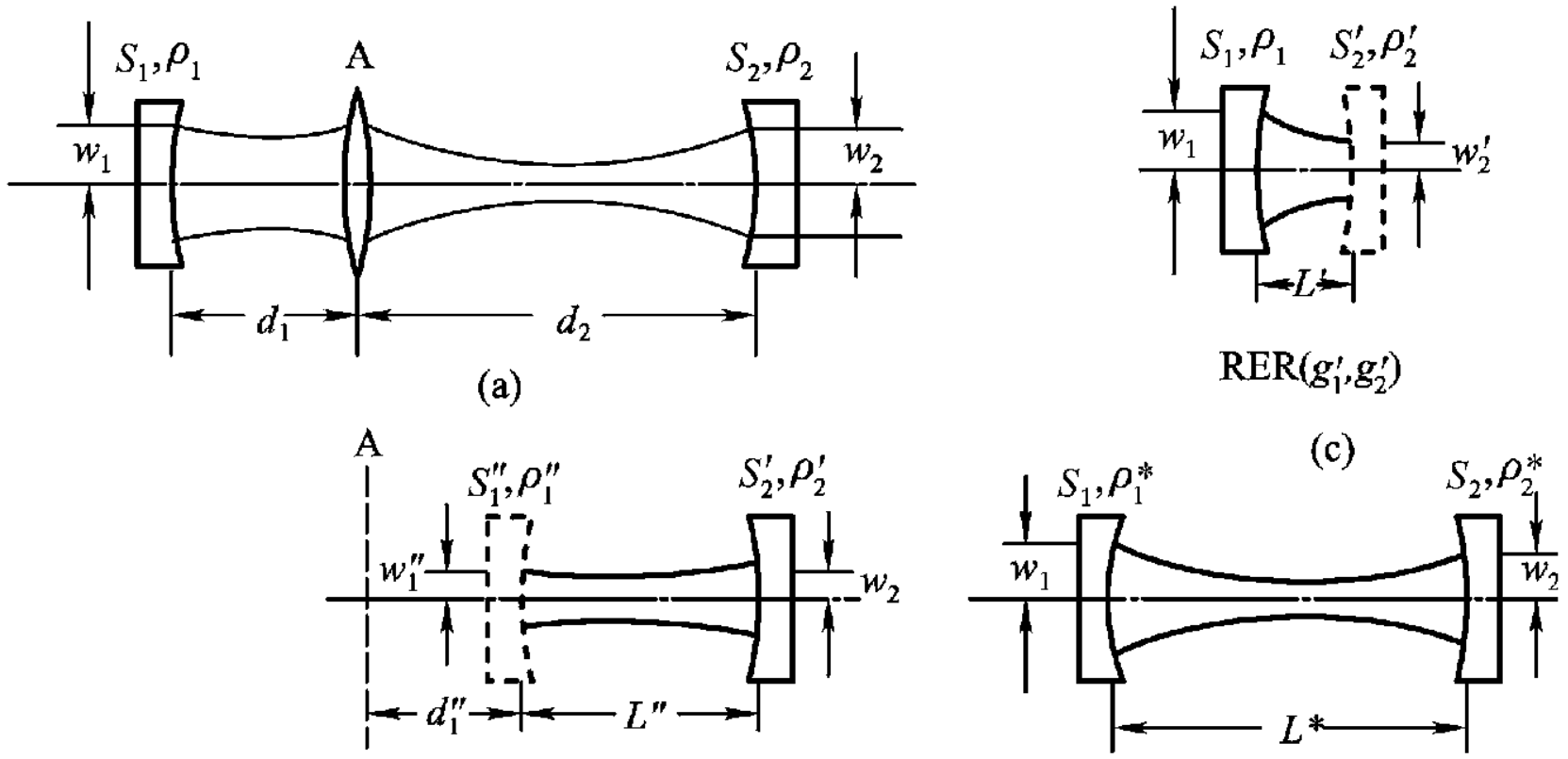


图 10.1.1　透镜腔和它的等价腔

(a) 含有一个透镜的多元件腔；(b) g''参数等价腔；(c) g'参数等价腔；(d) g''参数等价腔

$$d_1''=\frac{1}{D-\dfrac{1}{d_1}}$$

$$L''=d_2''-d_1'' \tag{10.1.2}$$

g''参数为

$$g_1''=1-\frac{L''}{\rho_1''}$$

$$g_2''=1-\frac{L''}{\rho_2''} \tag{10.1.3}$$

这样，由式(10.1.2)表示的腔参数构成一个新的 g''参数空腔，而原来的多元件腔可以用这一个 g''参数腔来代替. 值得注意的是，在物理学中经常使用“等价”的概念，但等价性却常常是相对的、有条件的，与几何学上的“全等性”之类的概念截然不同. 在文献中使用等价腔方法造成的混淆常常因为将等价性的概念绝对化或者错误理解而引起. g''参数腔的等价性是指，利用式(10.1.1)～式(10.1.3)可以直接求出原多元件腔的下述参数：

- 镜 2 处基模高斯光束束宽

$$w_2^2=\pm\frac{\lambda L''}{\pi}\left(\frac{g_1''/g_2''}{1-g_1''g_2''}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{10.1.4}$$

- 由 A 线向右腔内光束分布，例如右端的束腰(注意此时腔内可以

有两个束腰存在)

$$\omega_{02}^2 = \pm \frac{\lambda L'' [g_1'' g_2'' (1 - g_1'' g_2'')]^{1/2}}{\pi (g_1'' + g_2'' - 2g_1'' g_2'')} \tag{10.1.5}$$

和束腰位置(以镜 2 为参考)

$$L_{02} = L'' \frac{g_1'' (1 - g_2'')}{g_1'' + g_2'' - 2g_1'' g_2''} \tag{10.1.6}$$

• 基模和多模工作时镜 2 端远场发散角 θ_{02}、θ_{m2}.

• 镜 2 的失调灵敏度参量 D_2(设两反射镜处置限模光阑)(见第十一章).

• 成立稳定性条件

$$0 < g_1'' g_2'' < 1 \tag{10.1.7}$$

但 g''参数腔不能直接提供 A 线向左腔的参数,为此可利用 g'参数腔(图 10.1.1(c)),它是由镜 2 经透镜成像得到的.完全类似地,可以写出 g'参数腔的等价条件和相应的公式为

成像方程

$$\frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_2'} = D$$

$$\frac{1}{d_2 - \rho_2} + \frac{1}{d_2' + \rho_2'} = D \tag{10.1.8}$$

由此求得 g'参数等价腔参数

$$\rho_2' = \frac{\rho_2}{(Dd_2 - 1)\lfloor D(d_2 - \rho_2) - 1 \rfloor}$$

$$d_2' = \frac{1}{D - \dfrac{1}{d_2}}$$

$$L' = d_1 - d_2' \tag{10.1.9}$$

g'参数

$$g_1' = 1 - \frac{L'}{\rho_1}$$

$$g_2' = 1 - \frac{L'}{\rho_2} \tag{10.1.10}$$

稳定性条件

$$0 < g_1' g_2' < 1 \tag{10.1.11}$$

关于 g'参数等价腔的模参数公式,请读者自行完成之.

二、g^* 参数等价腔(图 10.1.1(d))

从式(10.1.2)、式(10.1.3)出发,若引入以下参数

$$L^{*}=(1-Dd_1)L''=L''M''=d_1+d_2-Dd_1d_2 \tag{10.1.12}$$

$$g_1^{*}=\frac{g_1''}{1-d_1D}=\frac{g_1''}{M''}$$

$$=1-\frac{d_1+d_2}{\rho_1}-Dd_2\left(1-\frac{d_1}{\rho_1}\right)$$

$$g_2^{*}=g_2''(1-d_1D)=g_2''M''$$

$$=1-\frac{d_1+d_2}{\rho_2}-Dd_1\left(1-\frac{d_2}{\rho_2}\right) \tag{10.1.13}$$

式中

$$M''=1-d_1D \tag{10.1.14}$$

则构成 g^{*} 参数等价腔.在物理上,这相当于用图 10.1.1(d)中所示的 g^{*} 参数空腔来等价代替原来的多元件腔.

g^{*} 参数腔与原多元件腔的等价性是指,由 g^{*} 参数可直接求出原多元件腔的下述参数:

- 两镜上的基模高斯光束束宽

$$w_i^2=\pm\frac{\lambda L^{*}}{\pi}\left[\frac{g_j^{*}}{g_i^{*}(1-g_1^{*}g_2^{*})}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{10.1.15}$$

- 当两镜处置限模光阑时两镜的失调灵敏度参量 D_1、D_2.
- 成立稳定性条件

$$0<g_1^{*}g_2^{*}<1 \tag{10.1.16}$$

再利用式(10.1.5)、式(10.1.6)可得(以镜 i 为参考)

$$w_{0i}^2=\pm\frac{\lambda L^{*}}{\pi}\left\{\frac{[g_1^{*}g_2^{*}(1-g_1^{*}g_2^{*})]^{\frac{1}{2}}}{g_j^{*}\left(\frac{L^{*}}{\rho_i}\right)^2+g_i^{*}(1-g_1^{*}g_2^{*})}\right\} \tag{10.1.17}$$

$$L_{0i}=L^{*}\frac{g_j^{*}\left(\frac{L^{*}}{\rho_i}\right)}{g_j^{*}\left(\frac{L^{*}}{\rho_i}\right)^2+g_i^{*}(1-g_1^{*}g_2^{*})} \tag{10.1.18}$$

以及远场发射角 θ_{0i}、θ_{mi}.

三、G 参数等价腔

此外,还可以直接使用矩阵光学方法对图 10.1.1(a)所示多元件腔进行分析,并利用模参数的 $ABCD$ 矩阵元表示式作计算.设腔内单程变换矩阵(包括薄透镜)为 $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$,则以镜 1 为参考,光束在腔内往返一周

的总变换矩阵 $\boldsymbol{M}$ 为

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d & b\\ c & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{2}{\rho_2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{2}{\rho_1} & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}b\left(c-\dfrac{2d}{\rho_1}\right)+\left(a-\dfrac{2b}{\rho_1}\right)\left(d-\dfrac{2b}{\rho_2}\right) & bd+b\left(d-\dfrac{2b}{\rho_2}\right)\\ a\left(c-\dfrac{2d}{\rho_1}\right)+\left(a-\dfrac{2b}{\rho_1}\right)\left(c-\dfrac{2a}{\rho_2}\right) & ad+b\left(c-\dfrac{2a}{\rho_2}\right)\end{bmatrix} \tag{10.1.19}$$

令

$$G_1=a-\frac{b}{\rho_1} \tag{10.1.20}$$

$$G_2=d-\frac{b}{\rho_2}$$

由高斯光束在腔内自再现条件式(8.1.3)求得

- 镜 i 处基模高斯光束束宽

$$w_i^2=\pm\frac{\lambda b}{\pi}\sqrt{\frac{G_j}{G_i(1-G_1G_2)}} \tag{10.1.21}$$

- 束腰大小和位置

$$w_{01}^2=\pm\frac{\lambda b}{\pi}\left[\frac{\sqrt{G_1G_2(1-G_1G_2)}}{|G_1+a^2G_2-2aG_1G_2|}\right] \tag{10.1.22}$$

$$w_{02}^2=\pm\frac{\lambda b}{\pi}\left[\frac{\sqrt{G_1G_2(1-G_1G_2)}}{|G_2+d^2G_1-2dG_1G_2|}\right] \tag{10.1.23}$$

$$L_{01}=\frac{bG_2(a-G_1)}{G_1+a^2G_2-2aG_1G_2} \tag{10.1.24}$$

$$L_{02}=\frac{bG_1(d-G_2)}{G_2+d^2G_1-2dG_1G_2} \tag{10.1.25}$$

- 失调灵敏度参量 D_i
- 远场发散角 θ_{0i}、θ_{mi}
- 成立稳定性条件

$$0<G_1G_2<1 \tag{10.1.26}$$

容易证明

$$G_1=g_1^*,\ G_2=g_2^*,\ b=L^* \tag{10.1.27}$$

因而除计算方法上的不同外，g^* 参数腔和 G 参数腔实际上是完全等价的.

§ 10.2　含热透镜多元件腔的动态工作特性

一、热透镜腔

图 10.2.1 为含一个热透镜的多元件腔，图中热透镜用光焦度 D 和两主面距顶点距离 h_1、h_2 来表征.

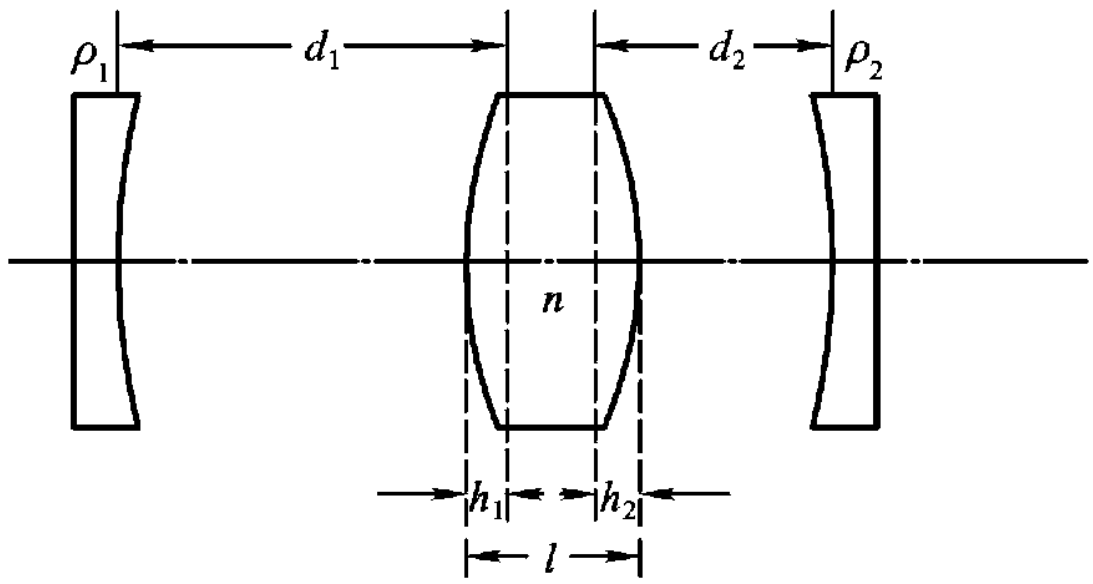


图 10.2.1　热透镜腔

热透镜的矩阵表示为

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1+\gamma l^2 & l/n\\ 2\gamma l n & 1+\gamma l^2\end{bmatrix} \tag{10.2.1}$$

由此可知

$$D=-2\gamma l n\propto P \tag{10.2.2}$$

或写成

$$D=D_0\frac{P}{P_0} \tag{10.2.3}$$

式中 P 为 $D=D_0$ 时的泵浦功率. D_0/P_0 为与激光介质有关量，应由实验来确定.

现在用 g^* 参数等价腔对热透镜进行分析. 稳定性条件为

$$0<g_1^*\,g_2^*<1 \tag{10.2.4}$$

令

$$g_1^*\,g_2^*=0 \text{ 或 } g_1^*\,g_2^*=1 \tag{10.2.5}$$

得到临界光焦度应满足的方程

$$D_{\mathrm{I}}=-\frac{1}{\rho_1-d_1}-\frac{1}{\rho_2-d_2} \tag{10.2.6}$$

$$D_{\text{Ⅱ},\text{Ⅲ}}=\frac{1}{d_i}-\frac{1}{\rho_j-d_j},\quad i,j=1,2\ i\neq j \tag{10.2.7}$$

$$D_{\text{Ⅳ}}=\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2} \tag{10.2.8}$$

以及在 g^* 参数图上工作点的直线运动方程

$$g_2^*-g_2=(g_1^*-g_1)\frac{\dfrac{d_1}{d_2}+g_2}{\dfrac{d_2}{d_1}+g_1} \tag{10.2.9}$$

由图 10.2.2 可见，g^* 参数图工作点从 $D=0$ 的点开始，随着泵浦功率的增加按方程式(10.2.9)作直线运动，直线斜率 k 为

$$k=\frac{d_1/d_2+g_2}{d_2/d_1+g_1} \tag{10.2.10}$$

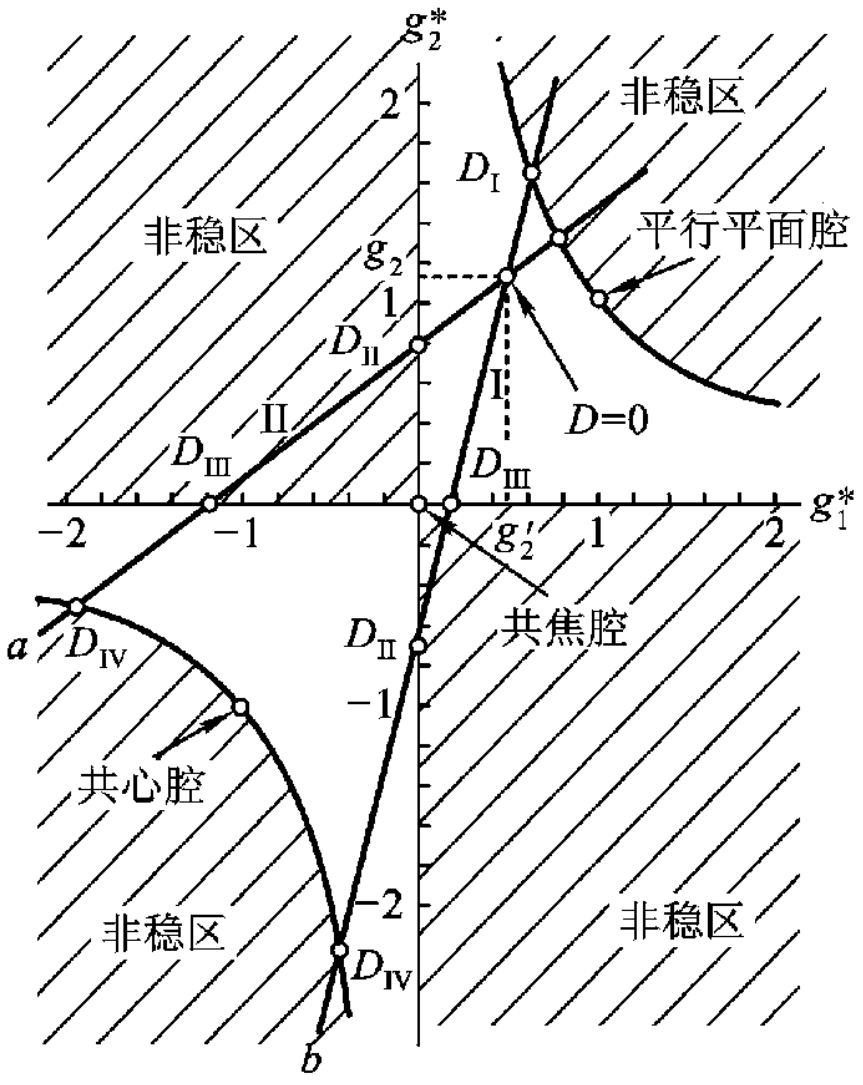


图 10.2.2　g^* 参数图上工作点的运动直线

若 $\dfrac{d_1/d_2+g_2}{d_2/d_1+g_1}>\dfrac{g_2}{g_1}$ 为图中Ⅰ直线，反之为Ⅱ直线，运动方向与泵浦参数有关.直线与双曲线 $g_1^*\,g_2^*=1$ 和二坐标轴的交点决定临界 g^* 参数和临界光焦度的值(见表 10.2.1).

热透镜腔远场发散角 θ_{0i} 与光焦度的关系见图 10.2.3，(a)图为含热透镜球面腔，(b) 图为含热透镜平行平面腔.

表 10.2.1　临界光焦度和临界 g^* 参数

临界类型	临界光焦度	临界 g^* 参数
$g_1^* g_2^* = 1$	$D_{\mathrm{I}} = -\dfrac{1}{\rho_1 - d_1} - \dfrac{1}{\rho_2 - d_2}$	$g_{1,\mathrm{I}}^* = \dfrac{1 - d_1/\rho_1}{1 - d_2/\rho_2}, g_{2,\mathrm{I}}^* = \dfrac{1 - d_2/\rho_2}{1 - d_1/\rho_1}$
$g_1^* g_2^* = 0$	$D_{\mathrm{II}} = \dfrac{1}{d_2} - \dfrac{1}{\rho_1 - d_1}$	$g_{1,\mathrm{II}}^* = 0, g_{2,\mathrm{II}}^* = g_2 - g_1 \dfrac{d_1}{d_2}\left(\dfrac{1 - d_2/\rho_2}{1 - d_1/\rho_1}\right)$
$g_1^* g_2^* = 0$	$D_{\mathrm{III}} = \dfrac{1}{d_1} - \dfrac{1}{\rho_2 - d_2}$	$g_{1,\mathrm{III}}^* = g_1 - g_2 \dfrac{d_2}{d_1}\left(\dfrac{1 - d_1/\rho_1}{1 - d_2/\rho_2}\right), g_{2,\mathrm{III}}^* = 0$
$g_1^* g_2^* = 1$	$D_{\mathrm{IV}} = \dfrac{1}{d_1} + \dfrac{1}{d_2}$	$g_{1,\mathrm{IV}}^* = -d_2/d_1, g_{2,\mathrm{IV}}^* = -d_1/d_2, g_{i,\mathrm{IV}}^* < 0$

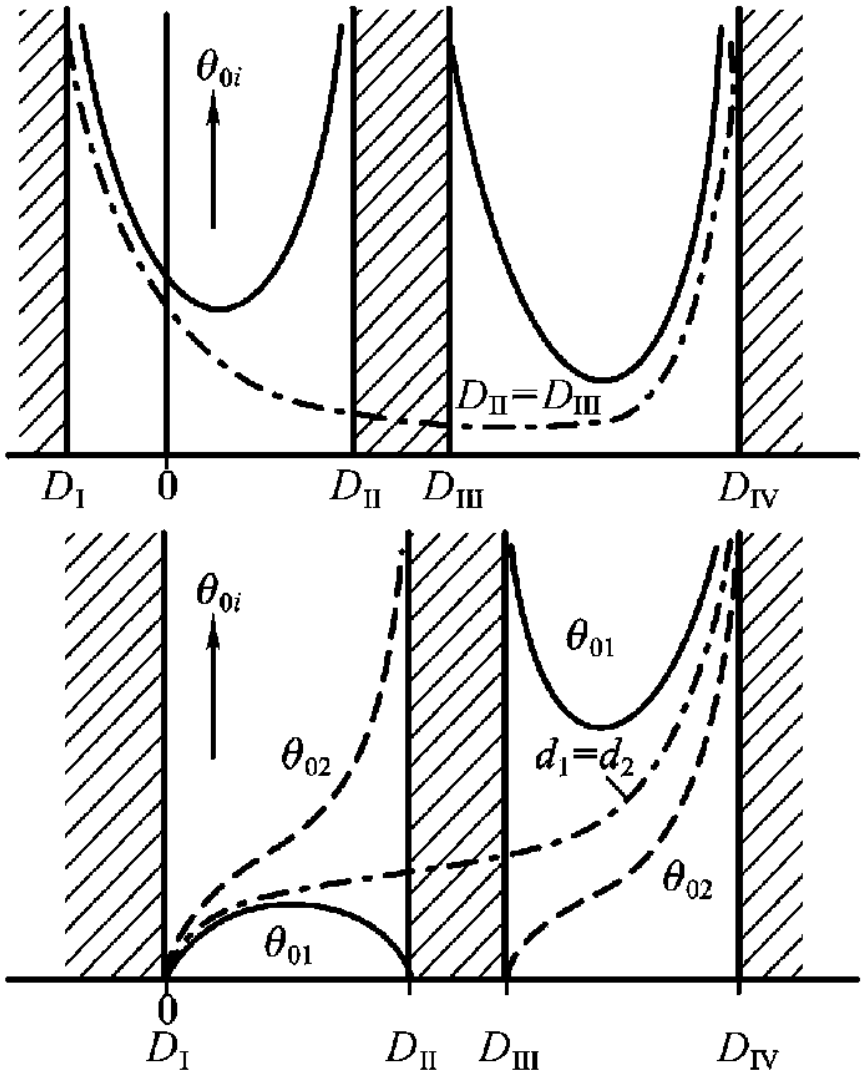


图 10.2.3　含热透镜(a) 球面腔；(b) 平行平面腔 θ_{0i} 随 D 的变化

二、热透镜腔的动态工作特性

由上节讨论知道，热透镜腔的动态工作特性由 g^* 参数图上工作点的直线运动方程式(10.2.9)来描述，其运动规律由 $D=0$ 时工作点的初始位置和直线斜率 k 式(10.2.10)(依赖于光腔几何参数)决定. 下面对 $D=0$ 时在稳定图上属于稳定腔或临界腔的各类腔型的动态工作特性进行分析.

1. 凸凹稳定腔

$D=0$ 时的凸凹稳定腔位于稳定图第一象限的部分区域内. 为确定起见，设 $\rho_1>0$，$\rho_2<0$，所得结果总结于表 10.2.2，由表知：(1) 依赖于腔

参数，直线斜率 k 可大于、小于或等于 g_2/g_1，也可为零或趋于无穷大. 由 $D_{\text{II}}=D_{\text{III}}$ 得到直线过原点条件为

$$(d_1-d_2)\rho_1\rho_2=d_1^2\rho_2-d_2^2\rho_1 \tag{10.2.11}$$

表 10.2.2　凸凹稳定腔的临界光焦度和临界 g^* 参数 $k=\dfrac{d_1/d_2+g_2}{d_2/d_1+g_1}\geqslant 0,\to\infty$

临界类型	临界光焦度 D	临界 g^* 参数	w_1, w_2	θ_{01}, θ_{02}
I $g_1^*\ g_2^*=1$	$D_{\text{I}}=-\dfrac{1}{\rho_1-d_1}+\dfrac{1}{\lvert\rho_2\rvert+d_2}$	$g_{1,\text{I}}^*=\dfrac{1-d_1/\rho_1}{1+d_2/\lvert\rho_2\rvert}$ $g_{2,\text{I}}^*=\dfrac{1}{g_{1,\text{I}}^*}, g_{i,\text{I}}^*>0$	$\infty\ \infty$	$\infty\ \infty$
II $g_1^*\ g_2^*=0$	$D_{\text{II}}=\dfrac{1}{d_2}-\dfrac{1}{\rho_1-d_1}$	$g_{1,\text{II}}^*=0$ $g_{2,\text{II}}^*=g_2-g_1\dfrac{d_1}{d_2}\dfrac{1+d_2/\lvert\rho_2\rvert}{1-d_1/\rho_1}$	$\infty\ 0$	$\infty\ \infty$
III $g_1^*\ g_2^*=0$	$D_{\text{III}}=\dfrac{1}{d_1}+\dfrac{1}{\lvert\rho_2\rvert+d_2}$	$g_{1,\text{III}}^*=g_1-g_2\dfrac{d_2}{d_1}\dfrac{1-d_1/\rho_1}{1+d_2/\lvert\rho_2\rvert}$ $g_{2,\text{III}}^*=0$	$0\ \infty$	$\infty\ \infty$
IV $g_1^*\ g_2^*=1$	$D_{\text{IV}}=\dfrac{1}{d_1}+\dfrac{1}{d_2}$	$g_{1,\text{IV}}^*=-\dfrac{d_2}{d_1}, g_{2,\text{IV}}^*=\dfrac{1}{g_{1,\text{IV}}^*}, g_{i,\text{IV}}^*<0$	$0\ 0$	$\infty\ \infty$

或用 g 参数表示为

$$g_2/g_1=(d_1/d_2)^2 \tag{10.2.12}$$

但对 $D=0$ 时的凸凹稳定腔 k 不能取负值. (2) 由临界光焦度的公式可知，这类似于几何光学中焦距 $f=1/D$ 的薄透镜成像公式，共轭的物、像分别为镜 1、2 的曲率中心或顶点. 由此可以将在临界状态时凸凹腔内光束分布情况示意作于图 10.2.4. (3)在临界点，按高斯光束公式的计算值 $w_i\to 0$ 或 ∞，$\theta_{0i}\to\infty$，这与实际情况不符，原因是高斯光束近似已不能正确描述临界腔的模式分布. 实验中观察到当工作点由稳定区趋近临界点时，激光输出由大变小最后终止现象.

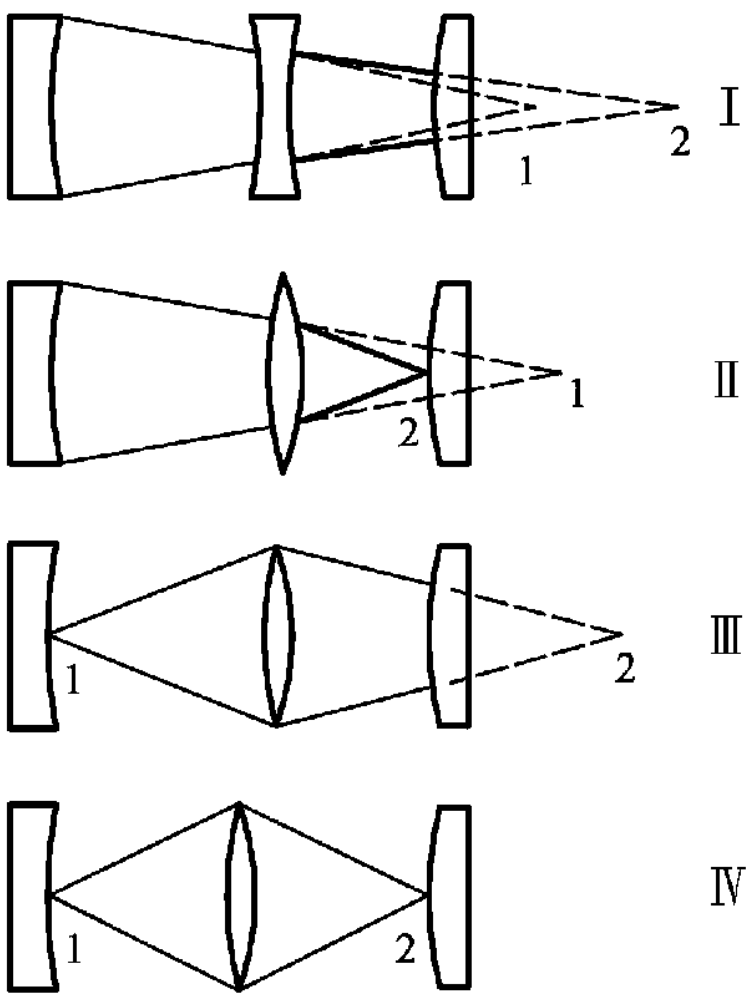


图 10.2.4　临界状态下凸凹腔内光束分布示意图

I. $\rho_1>d_1, D_{\text{I}}<0$；II. $\rho_1>d_1, D_{\text{II}}>0$；III. $D_{\text{III}}>0$；IV. $D_{\text{IV}}>0$

2. 双凹稳定腔

双凹腔在稳定图中占有相当多的位置，结果见表 10.2.3，由此可知，

$g_i^*|_{D=0}<0$与$g_i^*|_{D=0}>0$的双凹稳定腔相异之处在于：(1) $k|_{g_i^*(D=0)<0}\begin{cases}>0\\<0\\=0,\to\infty\end{cases}$而$k|_{g_i^*(D=0)>0}\geqslant 0,\to\infty$. (2) $g_i^*|_{D=0}<0, k<0$ 双凹腔的 $g_{i,\mathrm{I}}^*$ 和 $g_{i,\mathrm{IV}}^*$ 的对应点都在 $g_1^* g_2^* =1$ 的负支双曲线上，而 $g_i^*|_{D=0}>0$ 双凹腔的 $g_{i,\mathrm{I}}^*$ 和 $g_{i,\mathrm{IV}}^*$ 的对应点则分别在 $g_1^* g_2^* =1$ 的正支和负支双曲线上. (3) $g_i^*|_{D=0}>0$ 双凹腔的工作直线与 $g_1^* g_2^* =1$ 正支和负支双曲线相交，而 $g_i^*|_{D=0}<0, k<0$ 双凹腔的工作直线则仅与 $g_1^* g_2^* =1$ 负支双曲线相切，由 $D_{\mathrm{I}} = D_{\mathrm{IV}}$ 得到相切条件为

$$(d_1+d_2)\rho_1\rho_2 = d_1^2\rho_2 + d_2^2\rho_1 \tag{10.2.13}$$

表 10.2.3　双凹稳定腔的临界光焦度和临界 g^* 参数

$$g_i^*|_{D=0}>0, k=\frac{d_1/d_2+g_2}{d_2/d_1+g_1}\geqslant 0,\to\infty$$

$$g_i^*|_{D=0}<0, k=\frac{d_1/d_2+g_2}{d_2/d_1+g_1}\begin{cases}>0 & \begin{cases}0>g_1>-d_2/d_1\\0>g_2>-d_1/d_2\end{cases}\\<0 & \begin{cases}\begin{cases}0>g_1>-d_2/d_1\\g_2>-d_1/d_2\end{cases}\\\begin{cases}g_1<-d_2/d_1\\0>g_2>-d_1/d_2\end{cases}\end{cases}\\=0,\to\infty & d_1=0, d_2=0\end{cases}$$

临界类型	临界光焦度	临界 g^* 参数	w_1, w_2	θ_{01}, θ_{02}
Ⅰ $g_1^* g_2^* =1$	$D_{\mathrm{I}} = -\dfrac{1}{\rho_1-d_1}-\dfrac{1}{\rho_2-d_2}$	$g_{1,\mathrm{I}}^* = \dfrac{1-d_1/\rho_1}{1-d_2/\rho_2}, g_{2,\mathrm{I}}^* = \dfrac{1}{g_{1,\mathrm{I}}^*}$	$\infty\infty$	$\infty\infty$
Ⅱ $g_1^* g_2^* =0$	$D_{\mathrm{II}} = \dfrac{1}{d_2}-\dfrac{1}{\rho_1-d_1}$	$g_{1,\mathrm{II}}^* =0, g_{2,\mathrm{II}}^* = g_2 - g_1\dfrac{d_1}{d_2}\dfrac{1-d_2/\rho_2}{1-d_1/\rho_1}$	$\infty 0$	$\infty\infty$
Ⅲ $g_1^* g_2^* =0$	$D_{\mathrm{III}} = \dfrac{1}{d_1}-\dfrac{1}{\rho_2-d_2}$	$g_{1,\mathrm{III}}^* = g_1 - g_2\dfrac{d_2}{d_1}\dfrac{1-d_1/\rho_1}{1-d_2/\rho_2}$ $g_{2,\mathrm{III}}^* =0$	0∞	$\infty\infty$
Ⅳ $g_1^* g_2^* =1$	$D_{\mathrm{IV}} = \dfrac{1}{d_1}+\dfrac{1}{d_2}$	$g_{1,\mathrm{IV}}^* = -\dfrac{d_2}{d_1}, g_{2,\mathrm{IV}}^* = \dfrac{1}{g_{1,\mathrm{IV}}^*}, g_{i,\mathrm{IV}}^*<0$	00	$\infty\infty$

或用 g 参数写为

$$d_1^2 g_1 + d_2^2 g_2 + 2d_1 d_2 = 0 \tag{10.2.14}$$

图 10.2.15 为临界状态时双凹腔内光束分布示意图，由Ⅱ交换下标可得出Ⅲ，故从略.

3. 平凹稳定腔

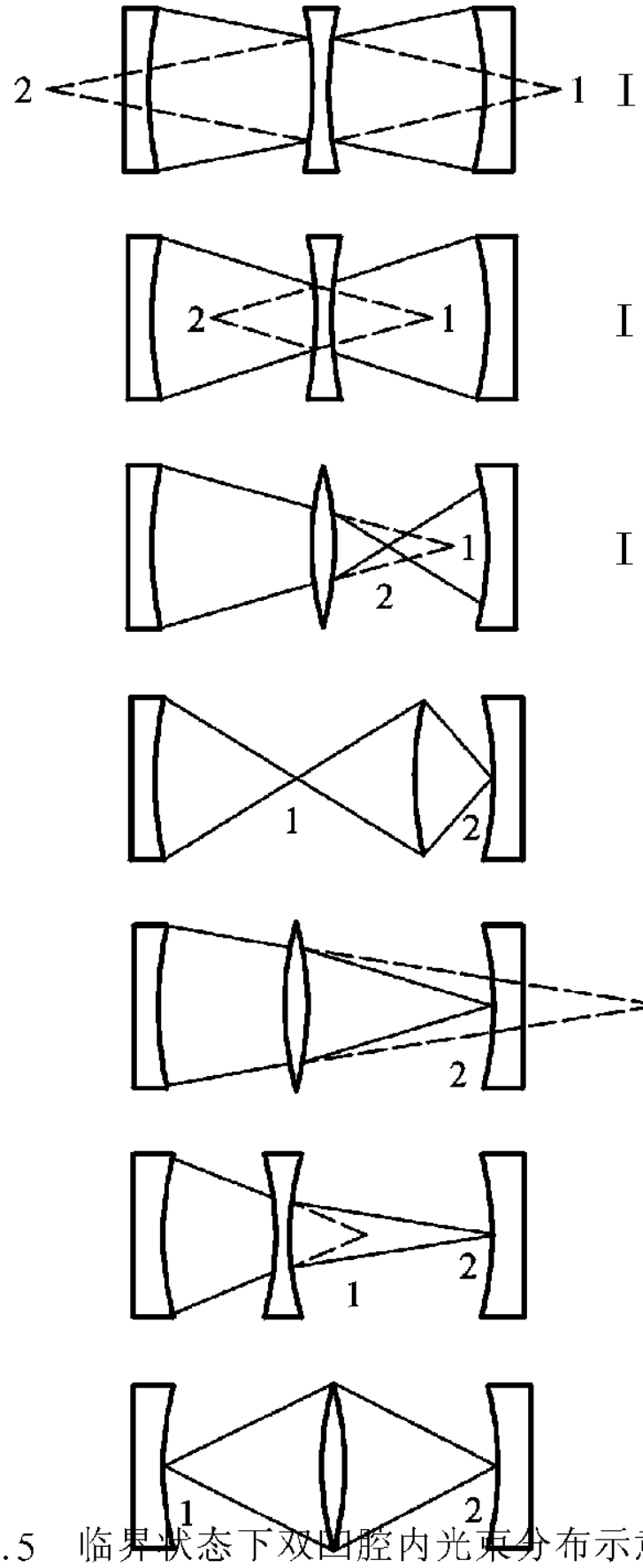


图 10.2.5 临界状态下双凹腔内光束分布示意图

Ⅰ. $\rho_i > d_1 + d_2, D_{\mathrm{I}} < 0$; Ⅰ. $d_i < \rho_i < d_1 + d_2, D_{\mathrm{I}} < 0$, Ⅰ. $d_1 < \rho_1 < d_1 + d_2, \rho_2 < d_2, D_{\mathrm{I}} > 0$;

Ⅱ. $\rho_1 < d_1, D_{\mathrm{II}} > 0$; Ⅱ. $\rho_1 > d_1, D_{\mathrm{II}} > 0$, Ⅱ. $\rho_1 > d_1, D_{\mathrm{II}} < 0$; Ⅳ. $D_{\mathrm{IV}} > 0$

为确定起见 $\rho_2 \to \infty$，有关结果见表 10.2.4，在临界状态时腔内光束分布见图 10.2.6. 其中典型例为半共焦腔 $\rho_1 = 2(d_1 + d_2)$，有关结果见表 10.2.5.

表 10.2.4 平凹稳定腔的临界光焦度和临界 g^* 参数

$$k = \frac{d_1/d_2 + 1}{d_2/d_1 + g_1} \geqslant 0, \to \infty$$

临界类型	临界光焦度 D	临界 g^* 参数	w_1, w_2	θ_{01}, θ_{02}
Ⅰ $g_1^* g_2^* = 1$	$D_{\mathrm{I}} = -\dfrac{1}{\rho_1 - d_1}$	$g_{1,\mathrm{I}}^* = 1 - \dfrac{d_1}{\rho_1}, g_{2,\mathrm{I}}^* = \dfrac{1}{g_{1,\mathrm{I}}^*}, g_{i,\mathrm{I}}^* > 0$	$\infty\ \infty$	$\infty 0$

续表

$$k=\frac{d_1/d_2+1}{d_2/d_1+g_1}\geqslant 0,\to\infty$$

临界类型	临界光焦度 D	临界 g^* 参数	w_1,w_2	θ_{01},θ_{02}
Ⅱ $g_1^*\ g_2^*=0$	$D_{\text{Ⅱ}}=\frac{1}{d_2}-\frac{1}{\rho_1-d_1}$	$g_{1,\text{Ⅱ}}^*=0, g_{2,\text{Ⅱ}}^*=1-g_1\frac{d_1}{d_2}\frac{1}{1-d_1/\rho_1}$	$\infty 0$	$\infty\infty$
Ⅲ $g_1^*\ g_2^*=0$	$D_{\text{Ⅲ}}=\frac{1}{d_1}$	$g_{1,\text{Ⅲ}}^*=g_1-\frac{d_2}{d_1}\left(1-\frac{d_1}{\rho_1}\right), g_{2,\text{Ⅲ}}^*=0$	0∞	$\infty 0$
Ⅳ $g_1^*\ g_2^*=1$	$D_{\text{Ⅳ}}=\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}$	$g_{1,\text{Ⅳ}}^*=-\frac{d_2}{d_1}, g_{2,\text{Ⅳ}}^*=\frac{1}{g_{1,\text{Ⅳ}}^*}, g_{i,\text{Ⅳ}}^*<0$	00	$\infty\infty$

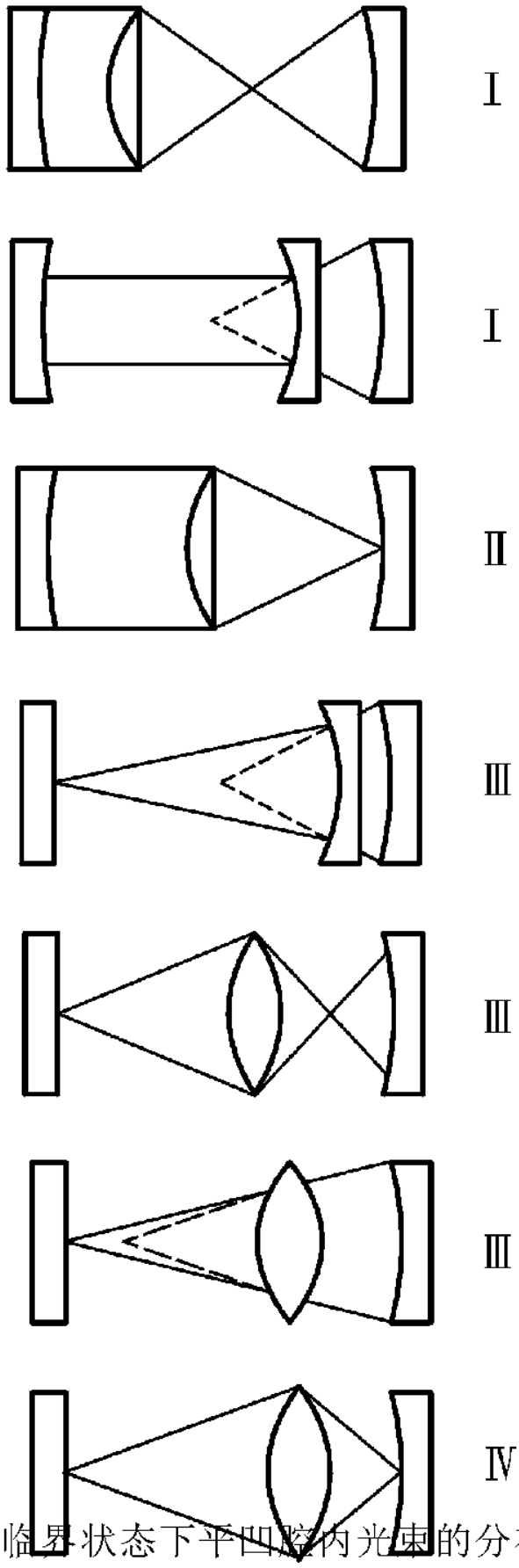


图 10.2.6　临界状态下平凹腔内光束的分布示意图

Ⅰ. $\rho_2<d_2$；Ⅰ. $\rho_2>d_2$；Ⅱ，Ⅲ. $\rho_2>d_2, d_1>\rho_2-d_2$；

Ⅲ. $\rho_2<d_2$；Ⅲ. $\rho_2>d_2, d_1<\rho_2-d_2$；Ⅳ. $\rho_2>d_2$

表 10.2.5　半共焦腔的临界光焦度和临界 g^* 参数

$$k=\frac{1+d_1/d_2}{1/2+d_2/d_1}\geqslant 0,\to\infty$$

临界类型	临界光焦度 D	临界 g^* 参数	w_1,w_2	θ_{01},θ_{02}
Ⅰ $g_1^*\ g_2^*=1$	$D_{\mathrm{I}}=-\dfrac{1}{2d_2-d_1}$	$g_{1,\mathrm{I}}^*=1-\dfrac{d_1}{2(d_1+d_2)},g_{2,\mathrm{I}}^*=\dfrac{1}{g_{1,\mathrm{I}}^*},g_{i,\mathrm{I}}^*>0$	$\infty\ \infty$	$\infty\ 0$
Ⅱ $g_1^*\ g_2^*=0$	$D_{\mathrm{II}}=\dfrac{1}{d_2}-\dfrac{1}{2d_2+d_1}$	$g_{1,\mathrm{II}}^*=0,g_{2,\mathrm{II}}^*=1-\dfrac{d_1}{d_2}\dfrac{d_1+d_2}{2d_2+d_1}$	$\infty\ 0$	$\infty\ \infty$
Ⅲ $g_1^*\ g_2^*=0$	$D_{\mathrm{III}}=\dfrac{1}{d_1}$	$g_{1,\mathrm{III}}^*=\dfrac{1}{2}-\dfrac{d_2}{2d_1}\dfrac{2d_2+d_1}{d_1+d_2},g_{2,\mathrm{III}}^*=0,$	$0\ \infty$	$\infty\ 0$
Ⅳ $g_1^*\ g_2^*=1$	$D_{\mathrm{IV}}=\dfrac{1}{d_1}+\dfrac{1}{d_2}$	$g_{1,\mathrm{IV}}^*=-\dfrac{d_2}{d_1},g_{2,\mathrm{IV}}^*=\dfrac{1}{g_{1,\mathrm{IV}}^*},g_{i,\mathrm{IV}}^*<0$	$0\ 0$	$\infty\ \infty$

4. 共焦稳定腔

对 $g_1=g_2=0$ 的共焦腔，结果见表 10.2.6.

表 10.2.6　对称共焦腔的临界光焦度和临界 g^* 参数

$$k=(d_1/d_2)^2\geqslant 0,\to\infty$$

临界类型	Ⅰ $g_1^*\ g_2^*=1$	Ⅱ $g_1^*\ g_2^*=0$	Ⅲ $g_1^*\ g_2^*=0$	Ⅳ $g_1^*\ g_2^*=1$
临界光焦度 D	$D_{\mathrm{I}}=-\dfrac{1}{d_1}-\dfrac{1}{d_2}$	$D_{\mathrm{II}}=0$	$D_{\mathrm{III}}=0$	$D_{\mathrm{IV}}=\dfrac{1}{d_1}+\dfrac{1}{d_2}$
临界 g^* 参数	$g_{1,\mathrm{I}}^*=d_2/d_1$ $g_{2,\mathrm{I}}^*=1/g_{1,\mathrm{I}}^*$ $g_{i,\mathrm{I}}^*>0$	$g_{1,\mathrm{II}}^*=g_{2,\mathrm{II}}^*=0$	$g_{1,\mathrm{III}}^*=g_{2,\mathrm{III}}^*=0$	$g_{1,\mathrm{IV}}^*=-d_2/d_1$ $g_{2,\mathrm{IV}}^*=1/g_{1,\mathrm{IV}}^*$ $g_{i,\mathrm{IV}}^*<0$
w_1	∞	$\sqrt{\lambda(d_1+d_2)/\pi}$	$\sqrt{\lambda(d_1+d_2)/\pi}$	0
w_2	∞	$\sqrt{\lambda(d_1+d_2)/\pi}$	$\sqrt{\lambda(d_1+d_2)/\pi}$	0
θ_{01}	∞	$\sqrt{\dfrac{\lambda(1+n^2)}{\pi(d_1+d_2)}}$	$\sqrt{\dfrac{\lambda(1+n^2)}{\pi(d_1+d_2)}}$	∞
θ_{02}	∞	$\sqrt{\dfrac{\lambda(1+n^2)}{\pi(d_1+d_2)}}$	$\sqrt{\dfrac{\lambda(1+n^2)}{\pi(d_1+d_2)}}$	∞

5. $D=0$ 时位于 $g_1^*\ g_2^*=1$ 正支双曲线上的临界腔

取 $0<g_1<1,g_2>1$，有关结果见表 10.2.7，其中 $g_1^*\mid_{D=0}=g_2^*\mid_{D=0}=1$ 的平行平面腔为一特例，其结果见表 10.2.8，在临界状态时，平行平面腔内光束分布见图 10.2.7.

表 10.2.7　位于正支双曲线上光腔的临界光焦度和临界 g^* 参数

$$k=\frac{d_1\rho_1}{d_2|\rho_2|}\geqslant 0,\to\infty$$

临界类型	临界光焦度 D	临界 g^* 参数	w_1,w_2	θ_{01},θ_{02}
Ⅰ $g_1^*\ g_2^*=1$	$D_{\mathrm{I}}=0$	$g_{1,\mathrm{I}}^*=\dfrac{1-d_1/\lvert\rho_2\rvert+d_1+d_2}{1+d_2/\lvert\rho_2\rvert},g_{2,\mathrm{I}}^*=\dfrac{1}{g_{1,\mathrm{I}}^*},g_{i,\mathrm{I}}^*>0$	$\infty\infty$	$\infty\infty$
Ⅱ $g_1^*\ g_2^*=0$	$D_{\mathrm{II}}=\dfrac{1}{d_2}-\dfrac{1}{\lvert\rho_2\rvert+d_2}$	$g_{1,\mathrm{II}}^*=0,g_{2,\mathrm{II}}^*=\dfrac{1}{g_1}-g_1\dfrac{d_1}{d_2}\left(\dfrac{1+d_2/\lvert\rho_2\rvert}{1-d_1/\lvert\rho_2\rvert+d_1+d_2}\right)$	$\infty 0$	$\infty\infty$
Ⅲ $g_1^*\ g_2^*=0$	$D_{\mathrm{III}}=\dfrac{1}{d_1}+\dfrac{1}{\lvert\rho_2\rvert+d_2}$	$g_{1,\mathrm{III}}^*=g_1-\dfrac{d_2}{g_1d_1}\left(\dfrac{1-d_1/\lvert\rho_2\rvert+d_1+d_2}{1+d_2/\lvert\rho_2\rvert}\right),g_{2,\mathrm{III}}^*=0$	0∞	$\infty\infty$
Ⅳ $g_1^*\ g_2^*=1$	$D_{\mathrm{IV}}=\dfrac{1}{d_1}+\dfrac{1}{d_2}$	$g_{1,\mathrm{IV}}^*=-\dfrac{d_2}{d_1},g_{2,\mathrm{IV}}^*=\dfrac{1}{g_{1,\mathrm{IV}}^*},g_{i,\mathrm{IV}}^*<0$	00	$\infty\infty$

表 10.2.8　平行平面腔的临界光焦度和临界 g^* 参数

$$k=d_1/d_2\geqslant 0,\to\infty$$

临界类型	临界光焦度 D	临界 g^* 参数	w_1,w_2	θ_{01},θ_{02}
Ⅰ $g_1^*\ g_2^*=1$	$D_{\mathrm{I}}=0$	$g_{1,\mathrm{I}}^*=g_{2,\mathrm{I}}^*=1$	$\infty\infty$	0 0
Ⅱ $g_1^*\ g_2^*=0$	$D_{\mathrm{II}}=\dfrac{1}{d_2}$	$g_{1,\mathrm{II}}^*=0,g_{2,\mathrm{II}}^*=1-\dfrac{d_1}{d_2}$	$\infty 0$	$0\ \infty$
Ⅲ $g_1^*\ g_2^*=0$	$D_{\mathrm{III}}=\dfrac{1}{d_1}$	$g_{1,\mathrm{III}}^*=1-\dfrac{d_2}{d_1},g_{2,\mathrm{III}}^*=0$	0∞	$\infty\infty$
Ⅳ $g_1^*\ g_2^*=1$	$D_{\mathrm{IV}}=\dfrac{1}{d_1}+\dfrac{1}{d_2}$	$g_{1,\mathrm{IV}}^*=-\dfrac{d_2}{d_1},g_{2,\mathrm{IV}}^*=\dfrac{1}{g_{1,\mathrm{IV}}^*},g_{i,\mathrm{IV}}^*<0$	0 0	$\infty\infty$

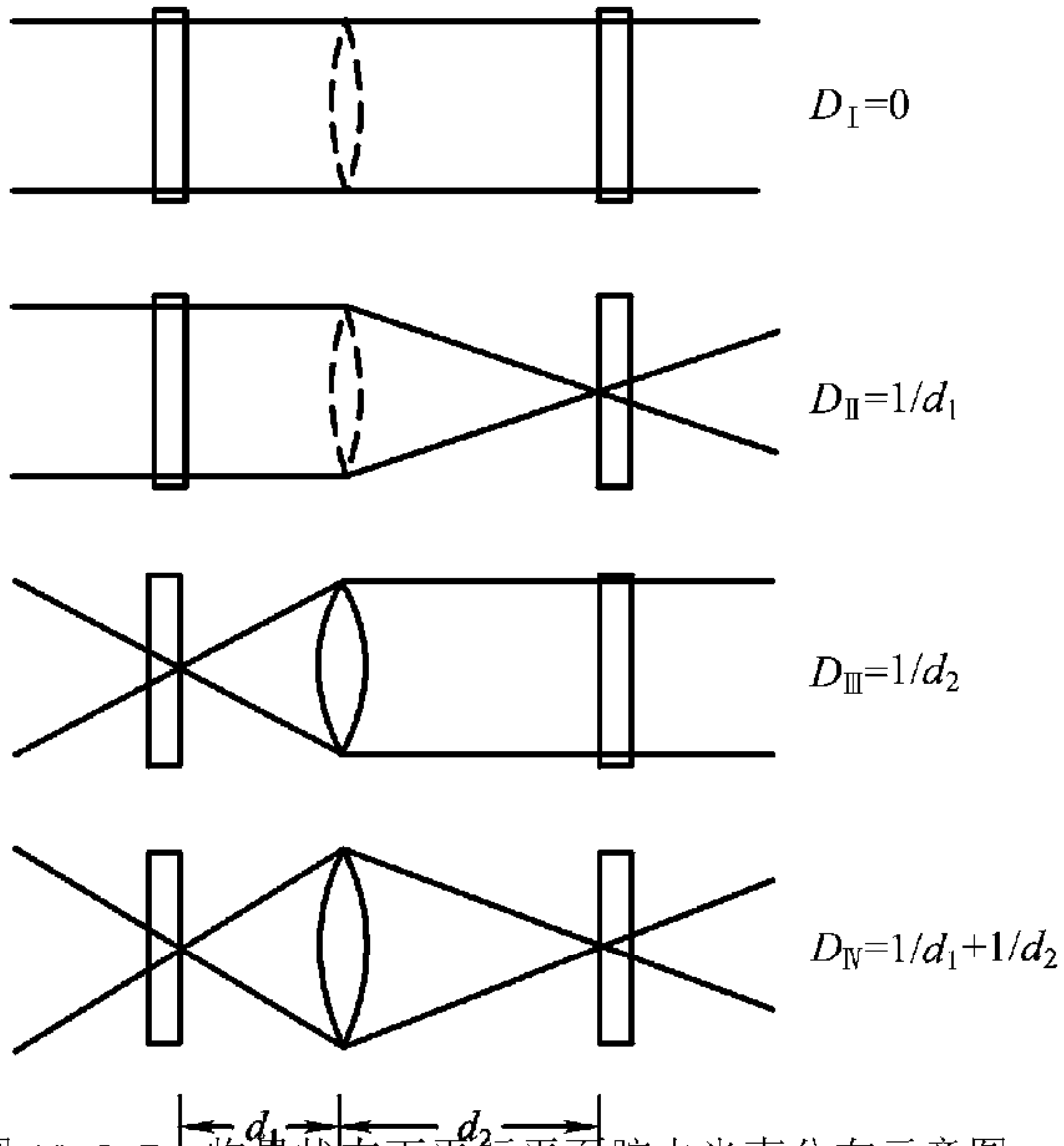


图 10.2.7　临界状态下平行平面腔内光束分布示意图

6. $D=0$ 时位于 $g_1^*\,g_2^*=1$ 负支双曲线上的临界腔

取 $g_1<-1$，$-1<g_2<1$，其结果见表 10.2.9，特别为 $g_1^*\,|_{D=0}=g_2^*\,|_{D=0}=1$ 的对称共心腔，结果见表 10.2.10.

表 10.2.9　位于负支双曲线上光腔的临界光焦度和临界 g^* 参数

$$k=-\frac{d_1\rho_1}{d_2\rho_2}\leqslant 1,\to\infty$$

临界类型	临界光焦度 D	临界 g^* 参数	w_1,w_2	θ_{01},θ_{02}
$\mathrm{I}\,g_1^*\,g_2^*=1$	$D_{\mathrm{I}}=0$	$g_{1,\mathrm{I}}^*=\dfrac{1-d_1/(d_1+d_2)-\rho_2}{1-d_2/\rho_2},\ g_{2,\mathrm{I}}^*=\dfrac{1}{g_{1,\mathrm{I}}^*},\ g_{i,\mathrm{I}}^*>0$	$\infty\,\infty$	$\infty\,\infty$
$\mathrm{II}\,g_1^*\,g_2^*=0$	$D_{\mathrm{II}}=\dfrac{1}{d_2}+\dfrac{1}{\rho_2+d_2}$	$g_{1,\mathrm{II}}^*=0,\ g_{2,\mathrm{II}}^*=\dfrac{1}{g_1}-g_1\dfrac{d_1}{d_2}\left(\dfrac{1+d_2/\rho_2}{1-d_1/(d_1+d_2)-\rho_2}\right)$	$\infty\ 0$	$\infty\,\infty$
$\mathrm{III}\,g_1^*\,g_2^*=0$	$D_{\mathrm{III}}=\dfrac{1}{d_1}+\dfrac{1}{d_2-\rho_2}$	$g_{1,\mathrm{III}}^*=g_1-\dfrac{d_2}{g_1d_1}\left(\dfrac{1-d_1/(d_1+d_2)-\rho_2}{1-d_2/\rho_2}\right),\ g_{2,\mathrm{III}}^*=0$	$0\,\infty$	$\infty\,\infty$
$\mathrm{IV}\,g_1^*\,g_2^*=1$	$D_{\mathrm{IV}}=\dfrac{1}{d_1}+\dfrac{1}{d_2}$	$g_{1,\mathrm{IV}}^*=-\dfrac{d_2}{d_1},\ g_{2,\mathrm{IV}}^*=\dfrac{1}{g_{1,\mathrm{IV}}^*},\ g_{i,\mathrm{IV}}^*<0$	$0\ 0$	$\infty\,\infty$

表 10.2.10　对称共心腔的临界光焦度和临界 g^* 参数

$$k=-\frac{d_1}{d_2}\leqslant 0,\to\infty$$

临界类型	临界光焦度 D	临界 g^* 参数	w_1,w_2	θ_{01},θ_{02}
$\mathrm{I}\ g_1^*\,g_2^*=1$	$D_{\mathrm{I}}=0$	$g_{1,\mathrm{I}}^*=g_{2,\mathrm{I}}^*=-1$	$\infty\,\infty$	$\infty\,\infty$
$\mathrm{II}\ g_1^*\,g_2^*=0$	$D_{\mathrm{II}}=\dfrac{d_1+d_2}{d_2(d_1-d_2)}$	$g_{1,\mathrm{II}}^*=0,\ g_{2,\mathrm{II}}^*=-1-\dfrac{d_1}{d_2}$	$\infty\ 0$	$\infty\,\infty$
$\mathrm{III}\ g_1^*\,g_2^*=0$	$D_{\mathrm{III}}=\dfrac{d_1+d_2}{d_1(d_2-d_1)}$	$g_{1,\mathrm{III}}^*=-1-\dfrac{d_2}{d_1},\ g_{2,\mathrm{III}}^*=0$	$0\,\infty$	$\infty\,\infty$
$\mathrm{IV}\ g_1^*\,g_2^*=1$	$D_{\mathrm{IV}}=\dfrac{1}{d_1}+\dfrac{1}{d_2}$	$g_{1,\mathrm{IV}}^*=-\dfrac{d_2}{d_1},\ g_{2,\mathrm{IV}}^*=\dfrac{1}{g_{1,\mathrm{IV}}^*},\ g_{i,\mathrm{IV}}^*<0$	$0\ 0$	$\infty\,\infty$

7. $D=0$ 时位于 g_i^* 轴上的临界腔

其结果见表 10.2.11，特例为半球腔 $g_1=0$，$g_2=1$，有关结果见表 10.2.12.

作为各类热透镜动态工作特性的总结，可以指出：(1) 含热透镜腔工作点直线运动方程描述了光腔的动态工作特性，直线过原点的必要条件为 $D_{\mathrm{II}}=D_{\mathrm{III}}$，直线与 $g_1^*\,g_2^*=1$ 负支双曲线相切的必要条件为 $D_{\mathrm{I}}=D_{\mathrm{IV}}$.

表 10.2.11　g_i^* 轴上光腔的临界光焦度和临界 g^* 参数

$$g_1^* \text{ 轴上 } k=\frac{d_1/d_2}{d_2/d_1+g_1}\begin{cases}>0, g_1\geqslant-\dfrac{d_2}{d_1}\\ <0, g_1\leqslant-\dfrac{d_2}{d_1}\\ =0,\to\infty\ d_1=0, d_2=0\end{cases}$$

$$g_2^* \text{ 轴上 } k=\frac{d_1}{d_2}\left(\frac{d_1}{d_2}+g_2\right)\begin{cases}>0, g_2\geqslant-\dfrac{d_1}{d_2}\\ <0, g_2\leqslant-\dfrac{d_1}{d_2}\\ =0,\to\infty\ d_1=0, d_2=0\end{cases}$$

以 g_2^* 轴上点为例

临界类型	临界光焦度 D	临界 g^* 参数	w_1, w_2	θ_{01}, θ_{02}
Ⅰ $g_1^*\ g_2^*=1$	$D_{\mathrm{Ⅰ}}=-\dfrac{1}{d_2}-\dfrac{1}{\rho_2-d_2}$	$g_{1,\mathrm{Ⅰ}}^*=\dfrac{1-d_1/(d_1+d_2)}{1-d_2/\rho_2}, g_{2,\mathrm{Ⅰ}}^*=\dfrac{1}{g_{1,\mathrm{Ⅰ}}^*}$	∞ ∞	∞ ∞
Ⅱ $g_1^*\ g_2^*=0$	$D_{\mathrm{Ⅱ}}=0$	$g_{1,\mathrm{Ⅱ}}^*=0, g_{2,\mathrm{Ⅱ}}^*=1-\dfrac{d_1+d_2}{\rho_2}$	∞ 0	∞ ∞
Ⅲ $g_1^*\ g_2^*=0$	$D_{\mathrm{Ⅲ}}=\dfrac{1}{d_1}-\dfrac{1}{\rho_2-d_2}$	$g_{1,\mathrm{Ⅲ}}^*=-g_2\dfrac{d_2}{d_1}\cdot\dfrac{1-d_1/(d_1+d_2)}{1-d_2/\rho_2}, g_{2,\mathrm{Ⅲ}}^*=0$	0 ∞	∞ ∞
Ⅳ $g_1^*\ g_2^*=1$	$D_{\mathrm{Ⅳ}}=\dfrac{1}{d_1}+\dfrac{1}{d_2}$	$g_{1,\mathrm{Ⅳ}}^*=-\dfrac{d_2}{d_1}, g_{2,\mathrm{Ⅳ}}^*=\dfrac{1}{g_{1,\mathrm{Ⅳ}}^*}, g_{i,\mathrm{Ⅳ}}^*<0$	0 0	∞ ∞

表 10.2.12　半球腔的临界光焦度和临界 g^* 参数

$$k=\frac{d_1}{d_2}\left(\frac{d_1}{d_2}+1\right)\geqslant 0,\to\infty$$

临界类型	临界光焦度 D	临界 g^* 参数	w_1, w_2	θ_{01}, θ_{02}
Ⅰ $g_1^*\ g_2^*=1$	$D_{\mathrm{Ⅰ}}=-\dfrac{1}{d_2}$	$g_{1,\mathrm{Ⅰ}}^*=\dfrac{1}{1+d_1/d_2}, g_{2,\mathrm{Ⅰ}}^*=\dfrac{1}{g_{1,\mathrm{Ⅰ}}^*}, g_{i,\mathrm{Ⅰ}}^*>0$	∞ ∞	∞ 0
Ⅱ $g_1^*\ g_2^*=0$	$D_{\mathrm{Ⅱ}}=0$	$g_{1,\mathrm{Ⅱ}}^*=0, g_{2,\mathrm{Ⅱ}}^*=1$	∞ 0	∞ ∞
Ⅲ $g_1^*\ g_2^*=0$	$D_{\mathrm{Ⅲ}}=\dfrac{1}{d_1}$	$g_{1,\mathrm{Ⅲ}}^*=-\dfrac{d_2}{d_1}\left(\dfrac{1}{1+d_1/d_2}\right), g_{2,\mathrm{Ⅲ}}^*=0$	0 ∞	∞ 0
Ⅳ $g_1^*\ g_2^*=1$	$D_{\mathrm{Ⅳ}}=\dfrac{1}{d_1}+\dfrac{1}{d_2}$	$g_{1,\mathrm{Ⅳ}}^*=-\dfrac{d_2}{d_1}, g_{2,\mathrm{Ⅳ}}^*=\dfrac{1}{g_{1,\mathrm{Ⅳ}}^*}, g_{i,\mathrm{Ⅳ}}^*<0$	0 0	∞ ∞

(2) $g^*_{i,\mathrm{IV}}$ 恒小于零，即不存在与 $g_1^*\,g_2^*=1$ 正支双曲线有两个交点或相切的运动直线. (3) 各类腔型的动态工作图可为选取腔型、初始工作点和动态工作范围提供必要的参考数据. 在设计中应该注意，由腔几何参数决定工作点在 g^* 参数图上 $D=0$ 时的位置和直线斜率，它们与泵浦参数无关，而激光器的动态工作范围则依赖于光焦度，因此与泵浦参数和激光介质的选取有关.

§10.3　基模热稳腔和自孔径选模

光泵浦引起的热透镜效应会影响激光器输出参数的稳定性，严重时甚至不出光或使激光介质破坏. 但在一定的条件下，泵浦热效应也能加以利用，例如增大有效模体积、限模等，本节将讨论与此有关的实际问题.

一、基模热稳腔

1. 基模热稳条件

当激光器的参数满足一定条件时，能使基模参数在一定泵浦功率范围内保持不变或变化甚缓，这即是基模热稳腔的基本思想.

如图 10.3.1 所示球面稳定光学谐振腔，设输出端为镜 1，其内、外曲率半径 ρ_1、ρ_3 满足(取 $\rho_1,\rho_3>0$)

$$\rho_3=(\rho_1+d)\left(1-\frac{1}{n_s}\right) \tag{10.3.1}$$

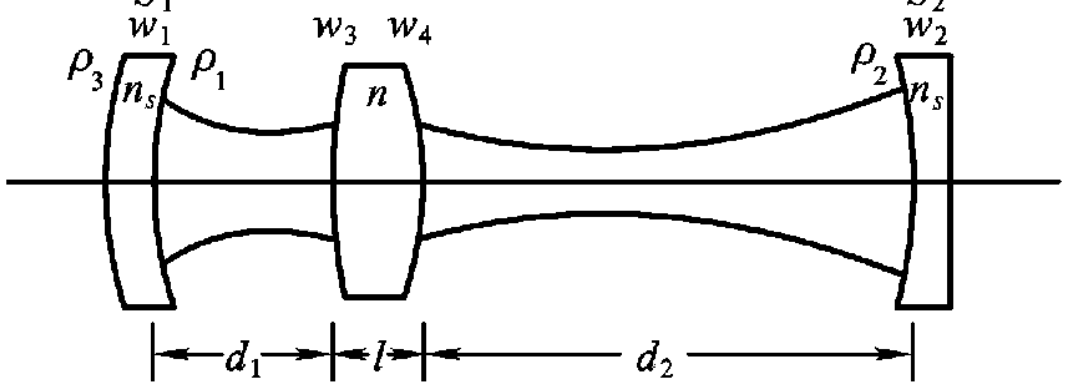


图 10.3.1　含热透镜稳定腔

式中 d 为镜 1 厚度，n_s 为反射镜介质折射率.

这时，腔内输出激光束经镜 1 变换后，在镜 1 处等相面为平面，于是

$$\theta_{01}=\frac{\lambda}{\pi w_1} \tag{10.3.2}$$

w_1 为镜 1 处高斯光束束宽. 设镜 2 曲率半径为 ρ_2，腔内有折射率 n、长 l 的激光棒，光腔几何长度(图 10.3.1)

$$L \approx d_1 + d_2, \quad d_1 + d_2 \gg l \tag{10.3.3}$$

基模有效模体积近似为

$$V_{00} \approx \frac{1}{3}(w_3^2 + w_3 w_4 + w_4^2)\pi l \tag{10.3.4}$$

式中 w_3、w_4 分别为激光棒两端面处束宽.

利用 g^* 参数等价腔易求得

$$w_i^2 = \frac{\lambda L^*}{\pi}\left[\frac{g_j^*}{g_i^*(1-g_1^* g_2^*)}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad i,j=1,2; i \neq j \tag{10.3.5}$$

$$w_3^2 = w_1^2\left[\left(1-\frac{d_1}{\rho_1}\right)^2 + \left(\frac{\lambda d_1}{\pi w_1^2}\right)^2\right] \tag{10.3.6}$$

$$w_4^2 = w_1^2\left\{\left[\xi - \frac{1}{\rho_1}\left(d_1\xi + \frac{l}{n}\right)\right]^2 + \left(d_1\xi + \frac{l}{n}\right)^2\left(\frac{\lambda}{\pi w_1^2}\right)^2\right\} \tag{10.3.7}$$

式中

$$g_1^* = \xi - \frac{L^*}{\rho_1} - Dd_2 \tag{10.3.8}$$

$$g_2^* = \xi - \frac{L^*}{\rho_2} - Dd_1 \tag{10.3.9}$$

$$L^* = \xi(d_1 + d_2) + \frac{l}{n} - Dd_1 d_2 \tag{10.3.10}$$

$$\xi = \left(1 - \frac{Dl}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{10.3.11}$$

D 为热透镜的光焦度

$$D = \frac{1}{f} \tag{10.3.12}$$

f 为焦距.

下面分析限于 $g_i^* > 0$ 的稳定腔，且设

$$g_2^* \geqslant 1, \ \frac{d_1}{d_2} \ll \frac{1}{2g_1^*}, \ d_2 \gg \frac{l}{n} \tag{10.3.13}$$

在

$$\xi = \left(1 - \frac{Dl}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1 \tag{10.3.14}$$

条件下有

$$w_3 \approx w_4 \approx w_1 \ \frac{d_2}{L^*} \approx \frac{\phi}{3} \tag{10.3.15}$$

式中 ϕ 为激光棒直径，最后一个等式实际上为自孔径选模条件.

设基模远场发散角式(10.3.2)和有效模体积的式(10.3.4)等模参数不随泵浦参数变化，即热稳条件为

$$\frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}f}=\frac{\mathrm{d}w_3}{\mathrm{d}f}=\frac{\mathrm{d}w_4}{\mathrm{d}f}=0 \tag{10.3.16}$$

实际上，只要

$$\frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}f}=0 \tag{10.3.17}$$

成立即可.

由式(10.3.5)、式(10.3.8)～式(10.3.10)、式(10.3.12)和式(10.3.14)求得

$$\frac{1}{g_1^*}=2g_2^*+\frac{1}{g_2^*}\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2+2\left(\frac{d_1}{d_2}\right) \tag{10.3.18}$$

式(10.3.18)即为基模热稳条件.当式(10.3.13)成立时，式(10.3.18)成为

$$g_1^*\,g_2^*=\frac{1}{2} \tag{10.3.19}$$

这时

$$g_1^*=\frac{9}{\pi}\left(\frac{\lambda d_2^2}{\phi^2 L^*}\right) \tag{10.3.20}$$

$$g_2^*=\frac{\pi}{18}\left(\frac{\phi^2 L^*}{d_2^2\lambda}\right) \tag{10.3.21}$$

利用 g_1^* 可将式(10.3.13)表示为

$$\frac{d_1}{L^*}\ll\frac{\pi\phi^2}{18\lambda d_2} \tag{10.3.22}$$

且

$$w_2=\frac{3\sqrt{2}\lambda d_2}{\pi\phi} \tag{10.3.23}$$

$$w_1=\frac{\phi L^*}{3d_2} \tag{10.3.24}$$

$$\theta_{01}=\frac{3\lambda d_2}{\pi\phi L^*} \tag{10.3.25}$$

$$V_{00}=\frac{\phi^2}{9}\pi l \tag{10.3.26}$$

图 10.3.2 为 g^* 参数图上稳定区内归一化束宽$\frac{w_1}{\sqrt{\lambda L^*}}$为常数的点的

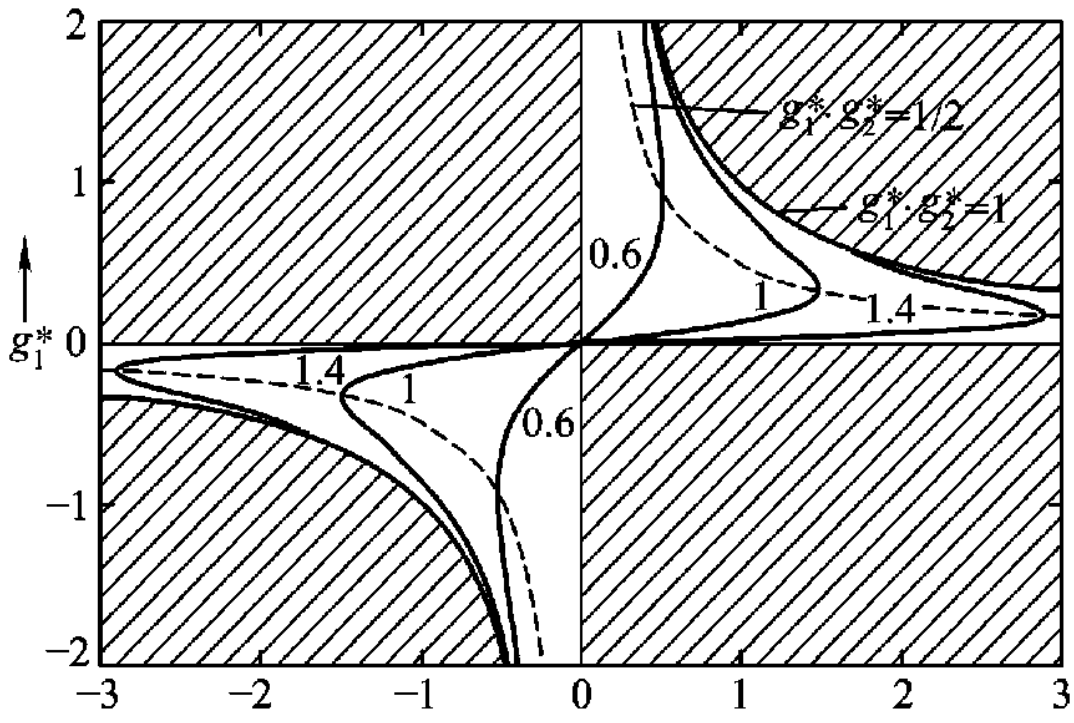


图 10.3.2　g^* 参数图上归一化束宽 $\frac{w_1}{\sqrt{\lambda L^*}}$ = const 点的轨迹

轨迹. 图中虚线为满足热稳条件式(10.3.19)的点的轨迹.

由上述分析可知，仅当式(10.3.13)成立时，才得到通常使用的简化热稳条件式(10.3.19). 式(10.3.13)实际上要求 d_1 尽可能短，即激活介质尽可能靠输出耦合镜一端，而且腔长比激光棒长得多.

2. 基模热稳腔参数的设计步骤

对于设计一个基模热稳腔而言，下述参数应当是事先给定的

$$\phi, l, n, n_s, d, \lambda, f, w_{2\text{th}}$$

其中 f 为与泵浦功率有关的平均热焦距，应在一定泵浦功率范围内由实验来确定. $w_{2\text{th}}$ 为不使镜 2 破坏束宽的最小值. 其余各量的物理意义如前述.

可按下面的步骤选择满足条件式(10.3.19)的基模热稳腔参数：

(1) d_1、d_2 和 L^*

由式(10.3.10)、式(10.3.13)、式(10.3.22)、式(10.3.23)、式(10.3.24)可取

$$d_{1,\max} = \frac{0.01\phi^2/\lambda}{1-0.01\phi^2/(\lambda d_2)} \text{和} \ d_{2,\max} = \frac{f}{10} \tag{10.3.27}$$

$$d_{1,\min} = \frac{0.74 w_{2\text{th}}\phi}{\lambda} \text{和} \ d_{2,\min} = \frac{10l}{n} \tag{10.3.28}$$

$$L^* = d_1 + d_2 + \frac{l}{n} - \frac{d_1 d_2}{f} \approx d_1 + d_2 \approx L \tag{10.3.29}$$

(2) ρ_1、ρ_2 和 ρ_3

由式(10.3.20)、式(10.3.21)、式(10.3.27)和式(10.3.1)计算得

$$\frac{L^*}{\rho_2}=1-\frac{d_1}{f}-\frac{\pi}{18}\left(\frac{L^*\phi^2}{\lambda d_2^2}\right)\approx 1-\frac{\pi}{18}\left(\frac{L^*\phi^2}{\lambda d_2^2}\right) \tag{10.3.30}$$

$$\frac{L^*}{\rho_1}=1-\frac{9\lambda d_2^2}{\pi\phi^2 L^*}-\frac{d_2}{f} \tag{10.3.31}$$

$$\rho_3=(\rho_1+d)\left(1-\frac{1}{n_s}\right) \tag{10.3.32}$$

按式(10.3.30)、式(10.3.31)作图 10.3.3(a)、(b).应将 ϕ、d_1、d_2 与图中参数相匹配以得到合乎要求的 ρ_1、ρ_2 值.同时,设计时宜取 g_2^* 在1～3范围,以使热焦距 f 发生波动时,$\frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}f}$变化缓慢.

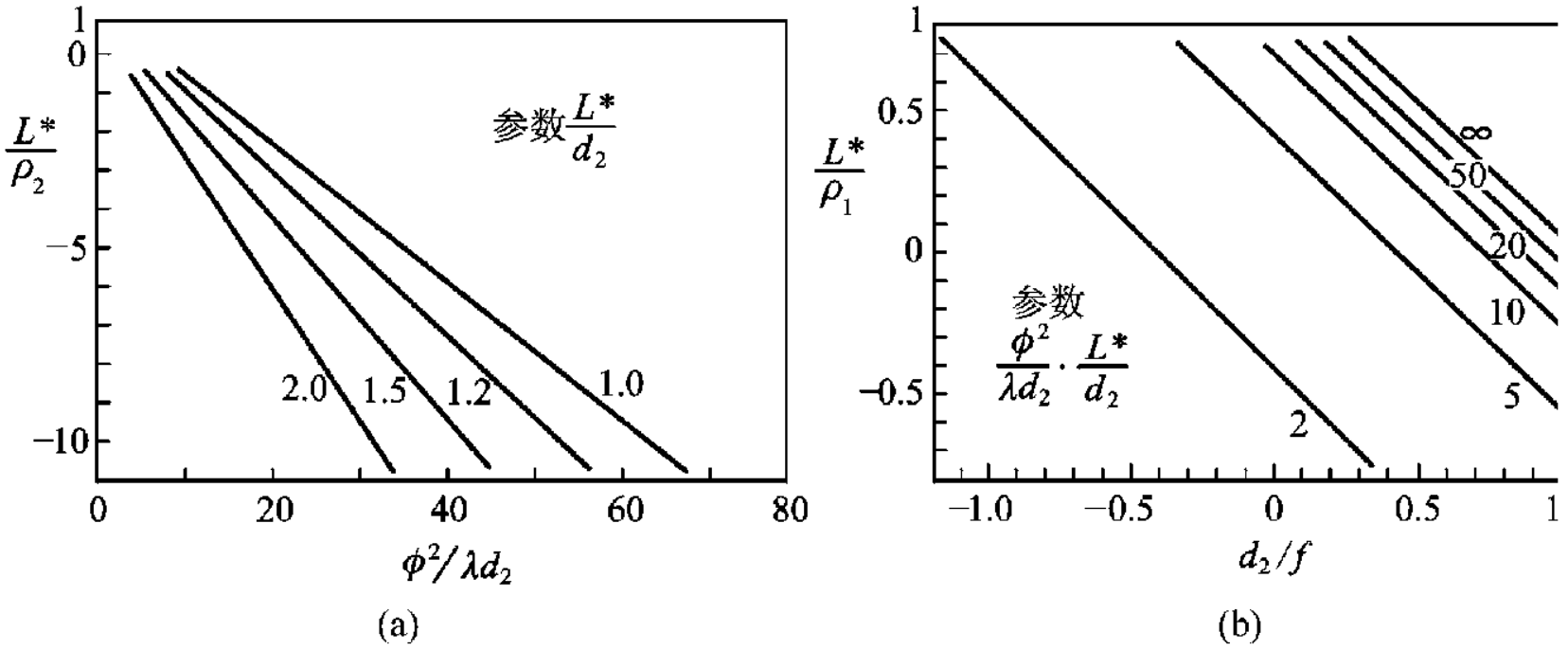


图 10.3.3　(a) L^*/ρ_2 随 $\phi^2/(\lambda d_2)$;(b) L^*/ρ_1 随 d_2/f 的变化

二、自孔径选模

自孔径选模是一种特殊的选模技术,它通过选择适当的腔参数以增大基模在激光介质处的光斑尺寸,这样一方面增大了有效模体积,另一方面可利用激光介质本身的横向尺寸起限模光阑作用,抑制了高阶模式,获得基模输出.

如图 10.3.4 所示热透镜腔,设两反射镜曲率半径为 ρ_1、ρ_2,腔长 $L=d_1+d_2$,热透镜的热焦距设为 f,使用 g'参数等价分析法,可求得基模高斯光束在激光棒处束宽

$$w_\mathrm{f}=w_{01}\left[1+\left(\frac{\lambda d_{01}}{\pi w_{01}^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{10.3.33}$$

或者

$$w_\mathrm{f}=w_{02}\left[1+\left(\frac{\lambda d_{02}}{\pi w_{02}^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{10.3.34}$$

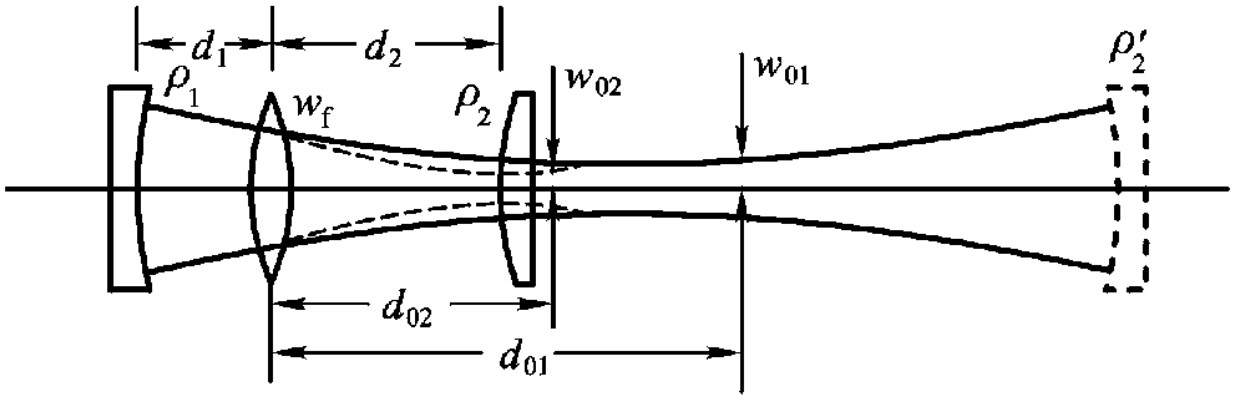


图 10.3.4 自孔径选模

自孔径选模条件为

$$\frac{1}{2}\phi \leqslant 2w_f \leqslant \frac{2}{3}\phi \tag{10.3.35}$$

将式(10.3.33)或式(10.3.34)与式(10.3.35)联立,用计算机求解,便可选择出满足条件式(10.3.35)的腔参数.

§ 10.4 望 远 镜 腔

§10.1 的分析方法原则上可以推广到含有多个透镜的多元件光学谐振腔.为了增大有效模体积、准直光束和增加有效腔长等应用目的,常在腔内置两个透镜而构成望远镜腔.本节以望远镜腔为例,对分析方法和主要结果加以说明.

一、g'和g''参数等价腔

望远镜腔同样可以用将腔的右反射镜或左反射镜经透镜组成像后得到的 g'参数或g''参数空腔来等价代替.

对 g'参数腔,由成像方程求得等效腔长

$$L' = \frac{f_1 f_2 (l + d_1 + d_2) - d_1 d_2 \Delta - l(f_1 d_2 + f_2 d_1)}{f_1 f_2 - \Delta d_2 - l f_2} \tag{10.4.1}$$

镜 2 等效曲率半径

$$\rho_2' = \frac{f_1^2 f_2^2 \rho_2}{(d_2\Delta + f_2 l - f_1 f_2)(d_2\Delta + f_2 l - f_1 f_2 - \rho_2 \Delta)} \tag{10.4.2}$$

式中 f_1、f_2 分别为两透镜焦距,ρ_1、ρ_2 为两反射镜曲率半径.望远镜调焦量

$$\Delta = f_1 + f_2 - l \tag{10.4.3}$$

l 为两透镜间距离,其余各量如图 10.4.1 所示.于是得到 g'参数

$$g_1' = 1 - \frac{L'}{\rho_1} \tag{10.4.4}$$

$$g_2' = 1 - \frac{L'}{\rho_2} \tag{10.4.5}$$

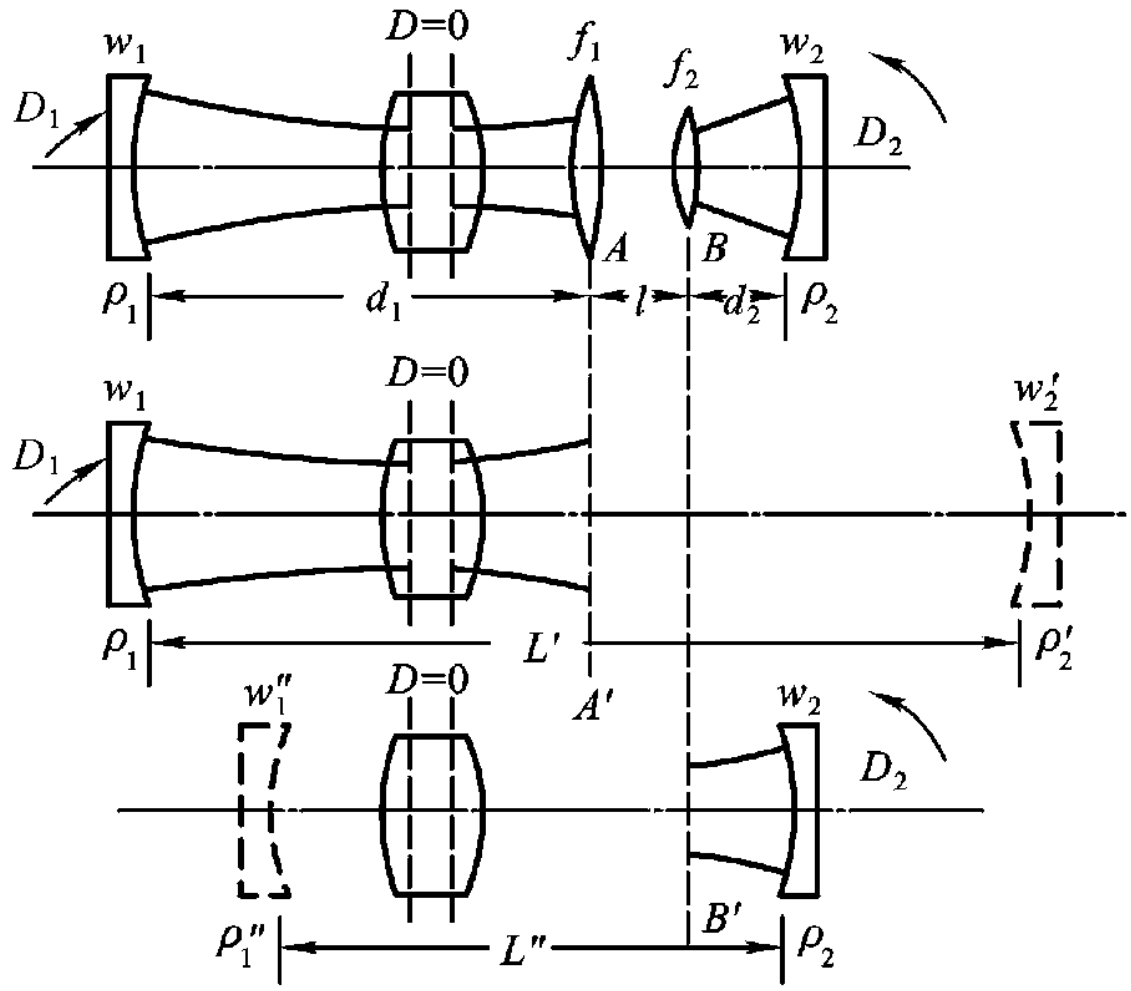


图 10.4.1　望远镜腔和 g'参数、g''参数等价腔

对 g''参数等价腔可做类似处理，得到等效腔长

$$L''=\frac{f_1 f_2 (l+d_1+d_2)-d_1 d_2 \Delta - l(f_1 d_2+f_2 d_1)}{f_1 f_2-\Delta d_1 - l f_1} \tag{10.4.6}$$

镜 1 等效曲率半径

$$\rho_1''=\frac{f_1^2 f_2^2 \rho_1}{(d_1\Delta+f_1 l-f_1 f_2)(d_2\Delta+f_1 l-f_1 f_2-\rho_1\Delta)} \tag{10.4.7}$$

g''参数

$$g_1''=1-\frac{L''}{\rho_1''} \tag{10.4.8}$$

$$g_2''=1-\frac{L''}{\rho_2''} \tag{10.4.9}$$

利用 g'、g''参数腔可求得激光模参数：

束腰宽度

$$w_{01}^2=\frac{\lambda L'}{\pi}\left\{\frac{[g_1' g_2'(1-g_1' g_2')]^{\frac{1}{2}}}{g_1'+g_2'-2g_1' g_2'}\right\} \tag{10.4.10}$$

$$w_{02}^2=\frac{\lambda L''}{\pi}\left\{\frac{[g_1'' g_2''(1-g_1'' g_2'')]^{\frac{1}{2}}}{g_1''+g_2''-2g_1'' g_2''}\right\} \tag{10.4.11}$$

束腰位置(分别以两反射镜为参考)

$$L_{01}=\frac{(1-g_1')g_2' L'}{g_1'+g_2'-2g_1' g_2'} \tag{10.4.12}$$

$$L_{02}=\frac{(1-g_2'')\,g_1''L''}{g_1''+g_2''-2g_1''g_2''} \tag{10.4.13}$$

基模远场发散角

$$\theta_{0i}=\frac{\lambda}{\pi w_{0i}},\quad i=1,2 \tag{10.4.14}$$

多模远场发散角

$$\theta_{mi}=\sqrt{2m+1}\,\theta_{0i} \tag{10.4.15}$$

两反射镜处基模高斯光束束宽

$$w_1^2=\frac{\lambda L'}{\pi}\left[\frac{g_2'}{g_1'(1-g_1'g_2')}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$w_2^2=\frac{\lambda L''}{\pi}\left[\frac{g_1''}{g_2''(1-g_1''g_2'')}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{10.4.16}$$

失调灵敏度参量(见第十一章)

$$D_1^2=\frac{\pi L'}{\lambda}\left(\frac{g_2'}{g_1'}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1+g_1'g_2'}{(1-g_1'g_2')^{\frac{3}{2}}}\right] \tag{10.4.17}$$

$$D_2^2=\frac{\pi L''}{\lambda}\left(\frac{g_1''}{g_2''}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1+g_1''g_2''}{(1-g_1''g_2'')^{\frac{3}{2}}}\right] \tag{10.4.18}$$

二、g^* 参数等价腔

先将图 10.4.2 中所示两薄透镜组成的透镜组用一个厚透镜等效代替,然后由成像方程和相应代换得出

$$L^*=L-\frac{d_1d_2}{f_1f_2}\Delta-l\left(\frac{d_1}{f_1}+\frac{d_2}{f_2}\right) \tag{10.4.19}$$

$$g_i^*=1-\frac{L}{\rho_i}-\frac{l}{f_i}-\frac{d_j\Delta}{f_1f_2}\left(1-\frac{d_i}{\rho_i}\right)+\frac{l}{\rho_i}\left(\frac{d_1}{f_1}+\frac{d_2}{f_2}\right),\quad i,j=1,2;\ i\neq j \tag{10.4.20}$$

式中

$$L=d_1+d_2+l \tag{10.4.21}$$

由此得到激光模参数

$$w_{01}^2=\frac{\lambda L^*}{\pi M'}\left\{\frac{[g_1^*g_2^*(1-g_1^*g_2^*)]^{\frac{1}{2}}}{g_1^*/M'+M'g_2^*-2g_1^*g_2^*}\right\} \tag{10.4.22}$$

$$w_{02}^2=\frac{\lambda L^*}{\pi M''}\left\{\frac{[g_1^*g_2^*(1-g_1^*g_2^*)]^{\frac{1}{2}}}{M''g_1^*+g_2^*/M''-2g_1^*g_2^*}\right\} \tag{10.4.23}$$

$$L_{01}=\frac{L^{*2}g_2^*/(M'\rho_1)}{g_1^*/M'+M'g_2^*-2g_1^*g_2^*} \tag{10.4.24}$$

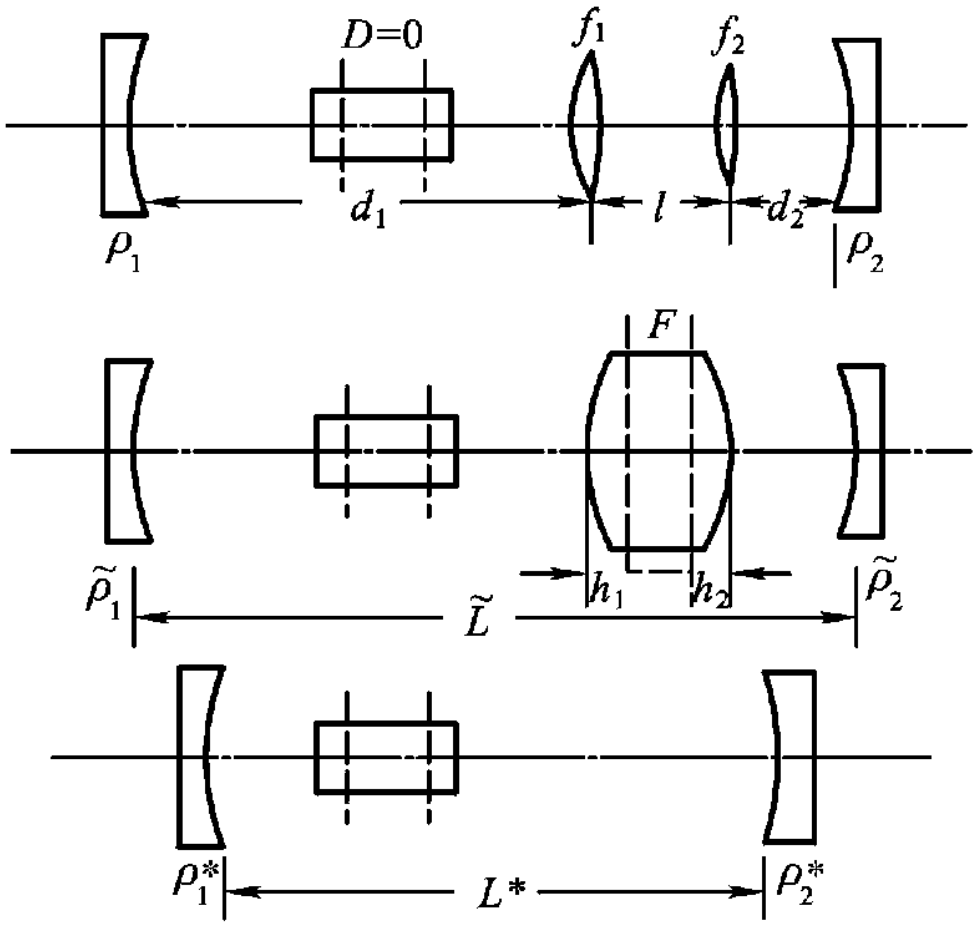


图 10.4.2　望远镜腔和 g^* 参数等价腔

$$L_{02}=\frac{L^{*2}g_1^*/(M''\rho_2)}{M''g_1^*+g_2^*/M''-2g_1^*g_2^*} \tag{10.4.25}$$

$$\omega_i^2=\frac{\lambda L^*}{\pi}\left[\frac{g_j^*}{g_i^*(1-g_1^*g_2^*)}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{10.4.26}$$

$$\theta_{0i}=\frac{\lambda}{\pi\omega_0} \tag{10.4.27}$$

$$\theta_{mi}=\sqrt{2m+1}\,\theta_{0i} \tag{10.4.28}$$

$$D_i^2=\frac{\pi L^*}{\lambda}\left(\frac{g_j^*}{g_i^*}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1+g_1^*g_2^*}{(1-g_1^*g_2^*)^{\frac{3}{2}}}\right] \tag{10.4.29}$$

$$D=\sqrt{D_1^2+D_2^2}=D_0\left[\frac{(1+g_1^*g_2^*)\,|g_1^*+g_2^*|}{2(1-g_1^*g_2^*)^{\frac{3}{2}}(g_1^*\cdot g_2^*)^{\frac{1}{2}}}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{10.4.30}$$

$$D_0=\left(\frac{2\pi L^*}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{10.4.31}$$

$$M'=\frac{f_1f_2-\Delta d_2-f_2l}{f_1f_2} \tag{10.4.32}$$

$$M''=\frac{f_1f_2-\Delta d_1-f_1l}{f_1f_2} \tag{10.4.33}$$

三、G 参数等价腔

由自再现方程式(10.1.3)可得到

$$G_1 = \frac{(d_2 - f_2)(f_1 + \rho_1 - d_1)}{f_1 f_2 \rho_1}\left(\frac{f_1^2}{f_1 + \rho_1 - d_1} + \frac{f_2^2}{f_2 - d_2} - \Delta\right) \tag{10.4.34}$$

$$G_2 = \frac{(d_1 - f_1)(f_2 + \rho_2 - d_2)}{f_1 f_2 \rho_2}\left(\frac{f_2^2}{f_2 + \rho_2 - d_2} + \frac{f_1^2}{f_1 - d_1} - \Delta\right) \tag{10.4.35}$$

$$L_G = f_1 f_2\left[\frac{f_1 - d_1}{f_1^2} + \frac{f_2 - d_2}{f_2^2} - \Delta\,\frac{(f_1 - d_1)}{f_1^2}\cdot\frac{(f_2 - d_2)}{f_2^2}\right] \tag{10.4.36}$$

由此可求得

$$\omega_{01}^2 = \frac{\lambda b}{\pi}\left\{\frac{[G_1 G_2 (1 - G_1 G_2)]^{\frac{1}{2}}}{G_1 + a^2 G_2 - 2aG_1 G_2}\right\} \tag{10.4.37}$$

$$\omega_{02}^2 = \frac{\lambda b}{\pi}\left\{\frac{[G_1 G_2 (1 - G_1 G_2)]^{\frac{1}{2}}}{G_2 + d^2 G_1 - 2dG_1 G_2}\right\} \tag{10.4.38}$$

$$L_{01} = \frac{bG_2 (a - G_1)}{G_1 + a^2 G_2 - 2aG_1 G_2} \tag{10.4.39}$$

$$L_{02} = \frac{bG_1 (d - G_2)}{G_2 + d^2 G_1 - 2dG_1 G_2} \tag{10.4.40}$$

$$\omega_i^2 = \frac{\lambda b}{\pi}\left[\frac{G_j}{G_i (1 - G_1 G_2)}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{10.4.41}$$

$$\theta_{0i} = \frac{\lambda}{\pi \omega_{0i}} \tag{10.4.42}$$

$$\theta_{mi} = \sqrt{2m + 1}\,\theta_{0i} \tag{10.4.43}$$

$$D_i^2 = \frac{\pi b}{\lambda}\left(\frac{G_j}{G_i}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1 + G_1 G_2}{(1 - G_1 G_2)^{3/2}}\right] \tag{10.4.44}$$

$$D = D_0\left[\frac{(1 + G_1 G_2)\,|G_1 + G_2|}{2(1 - G_1 G_2)^{3/2}(G_1 G_2)^{1/2}}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{10.4.45}$$

$$D_0 = \left(\frac{2\pi b}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{10.4.46}$$

式中 a、b、c、d 为下述矩阵诸元

$$\boldsymbol{m} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{10.4.47}$$

四、特例

1. 调焦望远镜

可在相应公式中令 $\Delta\to 0$ 得到

g'参数腔

$$L'=d_1+\frac{1}{M}\left(\frac{d_2}{M}+l\right) \tag{10.4.48}$$

$$\rho_2'=\rho_2/M^2 \tag{10.4.49}$$

g''参数腔

$$L''=d_2+M(Md_1+l) \tag{10.4.50}$$

$$\rho_1''=M^2\rho_1 \tag{10.4.51}$$

g^* 参数腔

$$L^*=l+\frac{d_2}{M}+Md_1 \tag{10.4.52}$$

$$g_1^*=M\left(1-\frac{d_1}{\rho_1}\right)-\frac{l}{\rho_1}-\frac{d_2}{M\rho_1} \tag{10.4.53}$$

$$g_2^*=\frac{1}{M}\left(1-\frac{d_2}{\rho_2}\right)-\frac{l}{\rho_2}-\frac{Md_1}{\rho_2} \tag{10.4.54}$$

G 参数腔

$$L_G=M(d_1-f_1)+\frac{1}{M}(d_2-f_2) \tag{10.4.55}$$

$$G_1=\frac{(f_2-d_2)/M+M(f_1+\rho_1-d_1)}{\rho_1} \tag{10.4.56}$$

$$G_2=\frac{M(f_1-d_1)+(f_2+\rho_2-d_2)/M}{\rho_2} \tag{10.4.57}$$

式中

$$M=-\frac{f_2}{f_1} \tag{10.4.58}$$

2．平行平面腔

令 $\rho_1\to\infty$，$\rho_2\to\infty$得到

g'参数腔

$$L'=\frac{f_1f_2(l+d_1+d_2)-d_1d_2\Delta-l(f_1d_2+f_2d_1)}{f_1f_2-d_2\Delta-lf_2} \tag{10.4.59}$$

$$\rho_2'=\frac{f_1^2f_2^2}{\Delta(f_1f_2-d_2\Delta-lf_2)} \tag{10.4.60}$$

g''参数腔

$$L''=\frac{f_1f_2(l+d_1+d_2)-d_1d_2\Delta-l(f_1d_2+f_2d_1)}{f_1f_2-d_1\Delta-lf_1} \tag{10.4.61}$$

$$\rho_1''=\frac{f_1^2f_2^2}{\Delta(f_1f_2-d_1\Delta+lf_1)} \tag{10.4.62}$$

g^* 参数腔

$$L^* = L - \frac{d_1 d_2}{f_1 f_2}\Delta - l\left(\frac{d_1}{f_1} + \frac{d_2}{f_2}\right) \tag{10.4.63}$$

$$g_i^* = 1 - \frac{l}{f_i} - \frac{d_j \Delta}{f_1 f_2} \tag{10.4.64}$$

G 参数腔

$$L_G = f_1 f_2 \left[\frac{f_1 - d_1}{f_1^2} + \frac{f_2 - d_2}{f_2^2} - \Delta\ \frac{(f_1 - d_1)(f_2 - d_2)}{f_1^2 f_2^2}\right] \tag{10.4.65}$$

$$G_1 = -\frac{f_2}{f_1}\left[1 + \Delta\ \frac{(d_2 - f_2)}{f_2^2}\right] \tag{10.4.66}$$

$$G_2 = -\frac{f_1}{f_2}\left[1 + \Delta\ \frac{(d_1 - f_1)}{f_1^2}\right] \tag{10.4.67}$$

3．平凹腔

令 $\rho_1 \to \infty$ 或 $\rho_2 \to \infty$，代入有关公式可得相应表示式．

将上述公式代入模参数公式可求出在各种情况下光束模参数的表示式．

五、几种腔的等价性

对 g'、g'' 与 g^* 参数腔，用直接代入法易证

$$L^* = M'L' = M''L'' \tag{10.4.68}$$

$$g_1^* = M'g_1' = g_1''/M'' \tag{10.4.69}$$

$$g_2^* = g_2'/M' = M''g_2'' \tag{10.4.70}$$

对 g^* 与 G 参数腔，有

$$L^* = L_G \tag{10.4.71}$$

$$g_1^* = G_1 \tag{10.4.72}$$

$$g_2^* = G_2 \tag{10.4.73}$$

即它们是等价的，且有

$$L_G = b \tag{10.4.74}$$

$$M' = a \tag{10.4.75}$$

$$M'' = d \tag{10.4.76}$$

$$g_1' g_2' = g_1'' g_2'' = g_1^*\ g_2^*\ = G_1 G_2 \tag{10.4.77}$$

§ 10.5　含热透镜望远镜腔

当考虑高功率泵浦下激光介质热透镜效应时，§ 10.4 讨论的望远镜

腔成为含热透镜望远镜腔，本节使用“混合”等价腔和 G 参数等价腔法对这类光腔的特性和基模动态热稳定望远镜腔的问题做较为详细的分析.

一、“混合”等价腔法

仔细分析前面的讨论结果可知，对于仅含一个透镜的多元件腔，使用§10.1 的任一等价腔分析法，就能得出腔内光束分布情况.但是，当腔内含有多个透镜时，由于 g'、g''、g^* 和 G 参数腔的等价性是有条件的，即不存在与原来多元件腔完全等价的空腔.因此，仅用其中一种等价腔，腔内光束参数(例如所有束腰大小和位置)的公式化表述就遇到困难.“混合”等价腔正是为克服这一困难而提出的，以含热透镜望远镜腔为例，它可分为约化为无热透镜望远镜腔和约化为透镜腔两类计算方法：

1. 约化为无热透镜望远镜腔的计算方法

现在我们分析图 10.5.1 所示含热透镜(热焦距 f')和望远镜(相距 l、焦距分别为 f_1、f_2 的两个薄透镜)的多元件腔，两反射镜曲率半径分别为 ρ_1、ρ_2，其余参数见图.

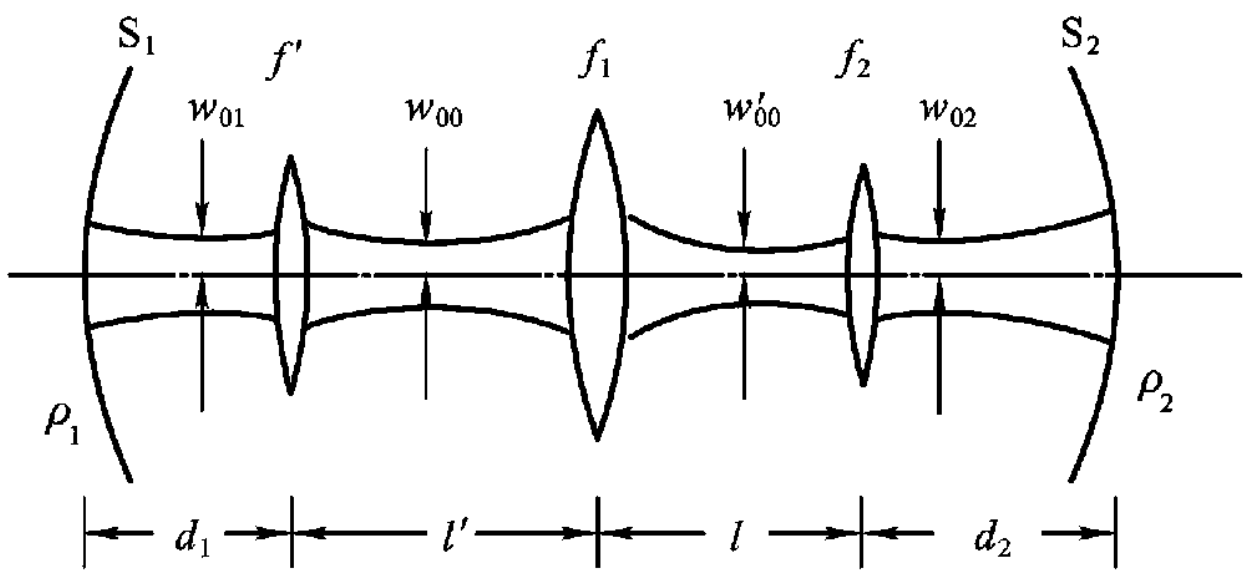


图 10.5.1　含热透镜的望远镜腔

镜 1 通过热透镜 f' 成像，构成 g'' 参数等价腔(见图 10.5.2).这是一个不含热透镜的望远镜腔，利用§10.4 的方法，得到镜 2 处基模高斯光束束宽：

$$w_2^2 = \pm \frac{\lambda L''^*}{\pi}\left[\frac{g''^*_1}{g''^*_2\,(1-g''^*_1\,g''^*_2)}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{10.5.1}$$

束腰宽度

$$w_{02}^2 = \pm \frac{\lambda L''^*}{\pi M''}\left\{\frac{[g''^*_1\,g''^*_2\,(1-g''^*_1\,g''^*_2)]^{\frac{1}{2}}}{M''g''^*_1 + g''^*_2/M'' - 2g''^*_1\,g''^*_2}\right\} \tag{10.5.2}$$

$$w_{00}^2 = \pm \frac{\lambda L''^*}{\pi M'}\left\{\frac{[g''^*_1\,g''^*_2\,(1-g''^*_1\,g''^*_2)]^{\frac{1}{2}}}{g''^*_1/M' + M'g''^*_2 - 2g''^*_1\,g''^*_2}\right\} \tag{10.5.3}$$

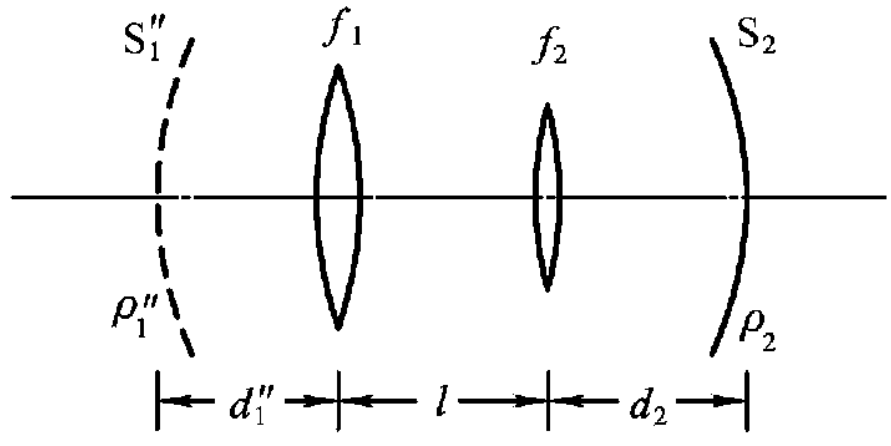


图 10.5.2　g''参数等价腔

束腰位置

$$L_{02}=\frac{L''^{*2}g''^{*}_{1}/(M''\rho_2)}{M''g''^{*}_{1}+g''^{*}_{2}/M''-2g''^{*}_{1}g''^{*}_{2}}\text{（以镜 2 为参考）}\tag{10.5.4}$$

$$L_{00}=\frac{d_1^2}{d_1-f'}+\frac{L''^{*2}g''^{*}_{2}/(M'\rho''_1)}{g''^{*}_{1}/M'+M'g''^{*}_{2}-2g''^{*}_{1}g''^{*}_{2}}\text{（以镜 1 为参考）}\tag{10.5.5}$$

式中

$$L''^{*}=d''_1+d_2+l-\frac{d''_1d_2\Delta}{f_1f_2}-l\left(\frac{d''_1}{f_1}+\frac{d_2}{f_2}\right)\tag{10.5.6}$$

$$g''^{*}_{1}=1-\frac{d''_1+d_2+l}{\rho_1}-\frac{l}{f_1}-\frac{d_2\Delta}{f_1f_2}\left(1-\frac{d''_1}{\rho''_1}\right)+\frac{l}{\rho''_1}\left(\frac{d''_1}{f_1}+\frac{d_2}{f_2}\right)$$

$$g''^{*}_{2}=1-\frac{d''_1+d_2+l}{\rho_2}-\frac{l}{f_2}-\frac{d''_1\Delta}{f_1f_2}\left(1-\frac{d_2}{\rho_2}\right)+\frac{l}{\rho_2}\left(\frac{d''_1}{f_1}+\frac{d_2}{f_2}\right)\tag{10.5.7}$$

$$M'=\frac{f_1f_2-d_2\Delta-f_2l}{f_1f_2}$$

$$M''=\frac{f_1f_2-d''_1\Delta-f_1l}{f_1f_2}$$

$$\Delta=f_1+f_2-l$$

$$d''_1=\frac{l'(d_1-f')-f'd_1}{d_1-f}$$

$$\rho''_1=\frac{\rho_1}{\left(\dfrac{d_1}{f_1}-1\right)\left(\dfrac{d_1-\rho_1}{f'}-1\right)}\tag{10.5.8}$$

利用 $g''+g^{*}$ 参数等价腔，不能直接求出 w_1、w_{01}、w'_{01} 和位置（L_{01}、L'_{01}）.为此可将镜 2 通过薄透镜 f_2 成像，构成 g'参数等价腔后，仿照上面方法，用 $g'+g^{*}$ 参数等价腔，就能得出这些模参数的公式.

2. 化为透镜腔的计算方法

也可用将反射镜通过透镜组（望远镜）成像化为透镜腔的方法来求得光腔的模参数.例如把镜 2 通过望远镜（f_1，f_2，l）成像构成 g'参数等价

腔，这是一个§10.2已讨论过的热透镜腔(图10.5.3)，由此易得

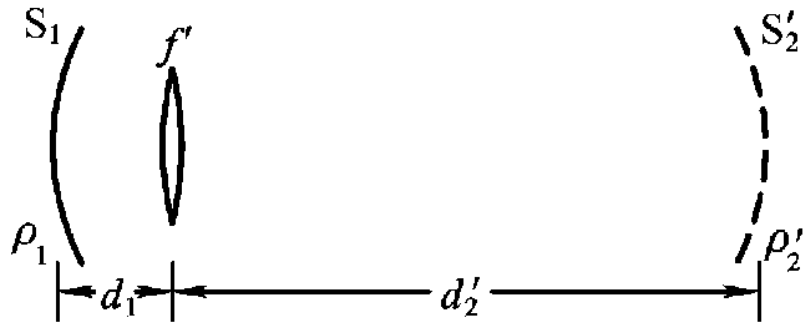


图10.5.3　g'参数等价腔

镜1处束宽

$$\omega_1^2 = \pm\frac{\lambda L'^*}{\pi}\left[\frac{g'^*_2}{g'^*_1\,(1-g'^*_1\,g'^*_2)}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{10.5.9}$$

束腰宽度

$$\omega_{01}^2 = \pm\frac{\lambda L'^*}{\pi}\left\{\frac{[g'^*_1\,g'^*_2\,(1-g'^*_1\,g'^*_2)]^{\frac{1}{2}}}{g'^*_2\,(L'^*/\rho_1)^2+g'^*_1\,(1-g'^*_1\,g'^*_2)}\right\} \tag{10.5.10}$$

$$\omega_{00}^2 = \pm\frac{\lambda L'^*}{\pi}\left\{\frac{[g'^*_1\,g'^*_2\,(1-g'^*_1\,g'^*_2)]^{\frac{1}{2}}}{g'^*_1\,(L'^*/\rho'_2)^2+g'^*_2\,(1-g'^*_1\,g'^*_2)}\right\} \tag{10.5.11}$$

束腰位置

$$L_{01} = \frac{g'^*_2\,L'^{*2}/\rho_1}{g'^*_2\,(L'^*/\rho_1)^2+g'^*_1\,(1-g'^*_1\,g'^*_2)}\text{(以镜1为参考)} \tag{10.5.12}$$

$$L_{00} = d_1+d'_2-\frac{g'^*_1\,L'^{*2}/\rho'_2}{g'^*_1\,(L'^*/\rho'_2)^2+g'^*_2\,(1-g'^*_1\,g'^*_2)}\text{(以镜1为参考)} \tag{10.5.13}$$

式中

$$L'^* = d_1+d'_2-\frac{d_1\,d'_2}{f'} \tag{10.5.14}$$

$$g'^*_1 = 1-\frac{d_1+d'_2}{\rho_1}-\frac{d'_2}{f'}\left(1-\frac{d_1}{\rho_1}\right)$$

$$g'^*_2 = 1-\frac{d_1+d'_2}{\rho'_2}-\frac{d_1}{f'}\left(1-\frac{d'_2}{\rho'_2}\right) \tag{10.5.15}$$

$$d'_2 = \frac{f_1 f_2\,(d_2+l'+l)-\Delta d_2\,l'-l\,(f_1 d_2+f_2 l')}{f_1 f_2-f_2 l-\Delta d_2}$$

$$\rho'_2 = \frac{f_1^2 f_2^2\rho_2}{(\Delta d_2+f_2 l-f_1 f_2)\,(\Delta d_2+f_2 l-f_1 f_2-\Delta\rho_2)} \tag{10.5.16}$$

类似地，用镜1通过透镜组(f', f_1, l')成像方法，可求出ω_2、ω_{02}、ω'_{00}、L_{02}、L'_{00}等.于是，使用上述两种方法之一都可以完整地得出光腔重要的模参数，再利用高斯光束在自由空间中传输公式，便可求出整个腔内

光束分布.

二、G 参数等价腔法

对图 10.5.1 所示含热透镜望远镜腔,先对望远镜系统用一个焦距 f、主距 h_1、h_2 的厚透镜来等价代替[式(10.5.43)～式(10.5.45)]:

$$f=\frac{f_1 f_2}{\Delta} \tag{10.5.17}$$

$$h_1=\frac{lf_1}{\Delta}$$

$$h_2=\frac{lf_2}{\Delta} \tag{10.5.18}$$

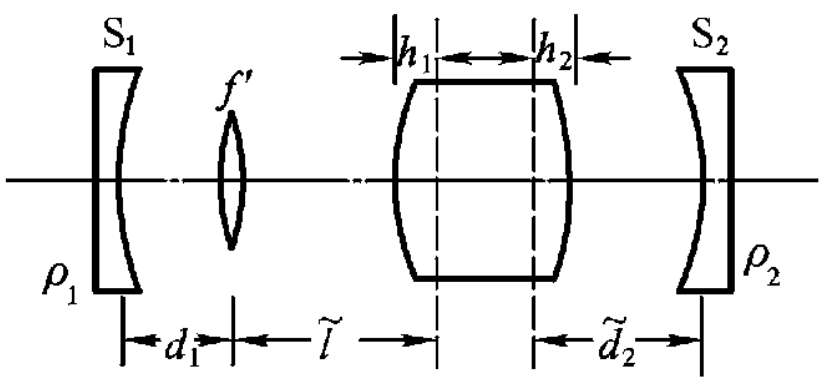


图 10.5.4　等效厚透镜腔

于是,对图(10.5.4)所示等价腔,以镜 1 为参考,腔内单程变换矩阵

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & \tilde{d}_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \tilde{l} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{10.5.19}$$

式中

$$\tilde{d}_2=d_2+\frac{f_2 l}{\Delta}$$

$$\tilde{l}=l'+\frac{f_1 l}{\Delta} \tag{10.5.20}$$

由此求得 G 参数等价腔的 G 参数和有效腔长 L_G 为

$$G_1=1-\frac{\tilde{l}}{f'}-\frac{\tilde{d}_2}{F}-\frac{L_G}{\rho_1}$$

$$G_2=1-\frac{l}{f}-\frac{d_1}{F}-\frac{L_G}{\rho_2} \tag{10.5.21}$$

$$L_G=d_1+\tilde{d}_2+\tilde{l}-\frac{d_1\tilde{d}_2}{F}-\frac{\tilde{l}}{f'}d_1-\frac{\tilde{l}}{f}\tilde{d}_2 \tag{10.5.22}$$

式中

$$F=\frac{ff'}{f+f'-\tilde{l}} \tag{10.5.23}$$

将式(10.5.21)、式(10.5.22)代入式(10.1.21)～式(10.1.25),便可求出 w_1、w_2、w_{01}、w_{02}、L_{01}、L_{02}.

可以证明,一般情况下有

$$g_1'^{\,*}\,g_2'^{\,*}=g_1''^{\,*}\,g_2''^{\,*}=G_1 G_2 \tag{10.5.24}$$

因此,含热透镜望远镜腔的约束稳定性条件可表示为

$$0<g_1'^{*}\,g_2'^{*}<1$$

或

$$0<g_1''^{*}\,g_2''^{*}<1$$

或

$$0<G_1G_2<1 \tag{10.5.25}$$

但一般有

$$g_i'^{*}\neq g_i''^{*}\neq G_i \tag{10.5.26}$$

含热透镜望远镜腔的动态工作特性可仿§10.2讨论.

三、含热透镜望远镜腔的基模热稳定性

1. 基模热稳条件

含热透镜望远镜腔的基模热稳定性可用上述任一种等价腔方法分析.例如,采用 G 参数等价腔法,按§10.3,当激光由镜1端输出,且镜1是“匹配”的,则基模热稳条件为

$$\frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}f'}=0 \tag{10.5.27}$$

式中

$$w_1^2=\frac{\lambda L_G}{\pi}\left[\frac{G_2}{G_1(1-G_1G_2)}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{10.5.28}$$

将式(10.5.28)代入式(10.5.27),得到

$$\frac{\partial L_G}{\partial f'}+\left(2G_2-\frac{1}{G_1}\right)\left(L_G\frac{\partial G_1}{\partial f'}-G_1\frac{\partial L_G}{\partial f'}\right)+\frac{L_G}{G_2}\frac{\partial G_2}{\partial f'}=0 \tag{10.5.29}$$

对 L_G、G_1、G_2 求导,并利用式(10.5.21)~式(10.5.23),对结果加以适当整理后得到下面几个有用的表示式

$$\frac{\partial L_G}{\partial f'}=\frac{d_1}{f'^2}\left(\tilde{d}_2+\tilde{l}-\frac{\tilde{d}_2\tilde{l}}{f}\right)$$

$$L_G\frac{\partial G_1}{\partial f'}-G_1\frac{\partial L_G}{\partial f'}=\frac{1}{f'^2}\left(\tilde{d}_2+\tilde{l}-\frac{\tilde{d}_2\tilde{l}}{f}\right)^2$$

$$L_G^2\frac{\partial}{\partial f'}\left(\frac{G_2}{L_G}\right)=\frac{d_1^2}{f'^2} \tag{10.5.30}$$

将式(10.5.30)代入式(10.5.29),得到

$$\frac{1}{G_1}=2G_2+\frac{2d_1}{\tilde{d}_2+\tilde{l}-\frac{\tilde{d}_2\tilde{l}}{f}}+\frac{1}{G_2}\left(\frac{d_1}{\tilde{d}_2+\tilde{l}-\frac{\tilde{d}_2\tilde{l}}{f}}\right)^2 \tag{10.5.31}$$

这即一般情况下含热透镜望远镜腔的基模热稳公式.

特例:(1) $\rho_1\to\infty$,$\rho_2\to\infty$(含热透镜平行平面望远镜腔)

这时基模热稳公式仍为式(10.5.31)，但式中 G 参数简化为

$$G_1 = 1 - \frac{\tilde{l}}{f'} - \frac{\tilde{d}_2}{F}$$

$$G_2 = 1 - \frac{\tilde{l}}{f} - \frac{d_1}{F} \tag{10.5.32}$$

(2) $f_1 \to \infty, f_2 \to \infty$ (热透镜腔)

令 $f_1 \to \infty, f_2 \to \infty$，式(10.5.31)化为

$$\frac{1}{G_1} = 2G_2 + \frac{2d_1}{\tilde{d}_2 + \tilde{l}} + \frac{1}{G_1}\left(\frac{d_1}{\tilde{d}_2 + \tilde{l}}\right)^2 \tag{10.5.33}$$

式中

$$G_1 = 1 - \frac{d_1 + \tilde{d}_2 + \tilde{l}}{\rho_1} - \frac{(\tilde{d}_2 + \tilde{l})}{f'}\left(1 - \frac{d_1}{\rho_1}\right)$$

$$G_2 = 1 - \frac{d_1 + \tilde{d}_2 + \tilde{l}}{\rho_2} - \frac{d_1}{f'}\left(1 - \frac{\tilde{d}_2 + \tilde{l}}{\rho_2}\right) \tag{10.5.34}$$

$$L_G = d_1 + \tilde{d}_2 + \tilde{l} - \frac{d_1}{f'}(\tilde{d}_2 + \tilde{l}) \tag{10.5.35}$$

显然，式(10.5.33)即为热透镜的基模热稳公式(10.3.18).

2. 推广

上面的结果可推广用于图10.5.5含热透镜多元件腔的一般情况. 设镜1、2与焦距 f' 的热透镜间的变换矩阵分别为 $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix}$，则腔内单程变换矩阵

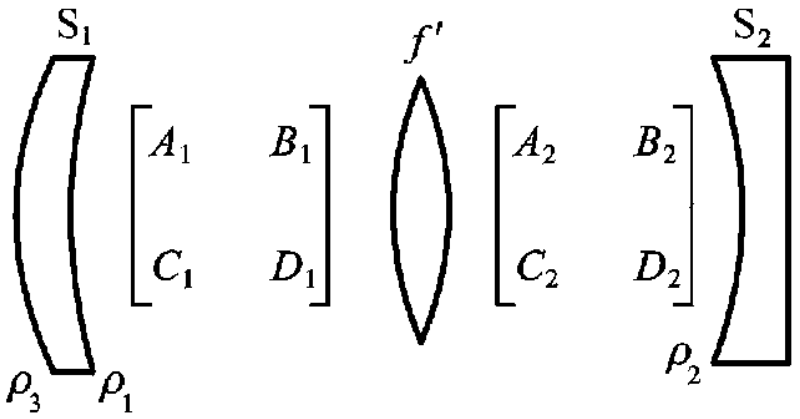


图 10.5.5　含热透镜一般多元件腔

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f'} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \tag{10.5.36}$$

由此得

$$\begin{cases} a = A_1 A_2 + B_2 C_1 - \dfrac{A_1 B_2}{f'} \\ b = A_2 B_1 + B_2 D_1 - \dfrac{B_1 B_2}{f'} \\ c = A_1 C_2 + C_1 D_2 - \dfrac{A_1 D_2}{f'} \\ d = B_1 C_2 + D_1 D_2 - \dfrac{B_1 D_2}{f'} \end{cases} \tag{10.5.37}$$

将式(10.5.37)代入

$$G_1 = a - \frac{b}{\rho_1}$$

$$G_1 = d - \frac{b}{\rho_1} \tag{10.5.38}$$

$$w_1^2 = \frac{\lambda b}{\pi}\left[\frac{G_2}{G_1(1-G_1G_2)}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{10.5.39}$$

和式(10.5.27),在求导运算中利用

$$A_iD_i - B_iC_i = 1, \quad i = 1,2 \tag{10.5.40}$$

得到

$$\frac{1}{G_1} = 2G_2 + 2\left(\frac{B_1}{B_2}\right) + \frac{1}{G_1}\left(\frac{B_1}{B_2}\right)^2 \tag{10.5.41}$$

式(10.5.41)即为一般情况下含热透镜多元件腔的基模热稳公式,式中 B_1、B_2 分别为镜 1、2 与热透镜间的有效长度,G_1、G_2 由式(10.5.38)确定.直接的计算就可证明式(10.3.18)、式(10.5.31)都是式(10.5.41)的特例.又如图 10.5.6 所示多元件腔,设焦距 f' 的热透镜位于两薄透镜(焦距分别为 f_1、f_2)中间,则由式(10.5.31)立即得到基模热稳条件为

$$\frac{1}{G_1} = 2G_2 + 2\left(\frac{d_1^*}{d_2^*}\right) + \frac{1}{G_2}\left(\frac{d_1^*}{d_2^*}\right)^2 \tag{10.5.42}$$

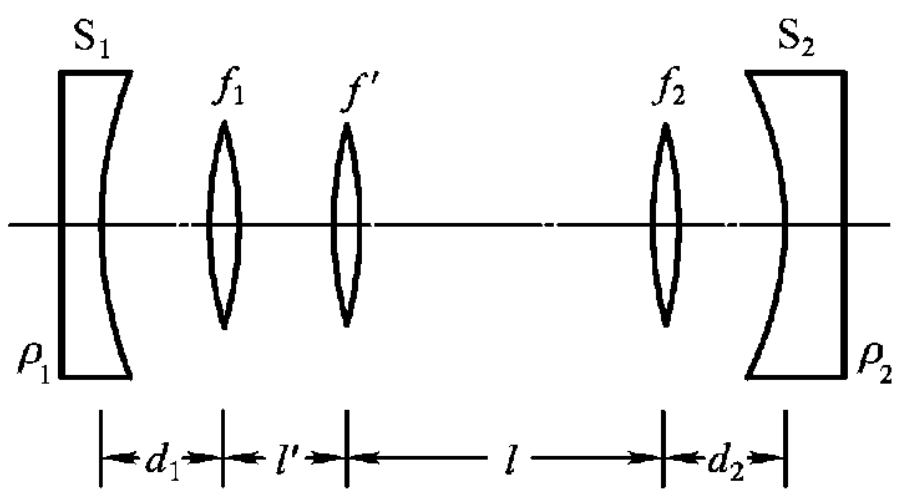


图 10.5.6　含热透镜和两个薄透镜的多元件腔

式中

$$d_1^* = d_1 + l' - \frac{d_1 l'}{f_1}$$

$$d_2^* = d_2 + l - \frac{d_2 l}{f_1} \tag{10.5.43}$$

G_1、G_2 为光腔的 G 参数,请读者写出其显式.

§ 10.6　多棒串接腔

一、多棒串接腔

在输出功率为数百瓦至数千瓦量级的高功率固体激光器中，常采用在一个光腔内多棒串接的技术方案. 现以图 10.6.1 所示两棒串接腔为例进行分析. 设镜 S_1、S_2 曲率半径分别为 R_1、R_2，两棒等效热焦距相等均为 f，其余腔参数见图. 以镜 S_1 为参考，腔内单程变换矩阵为

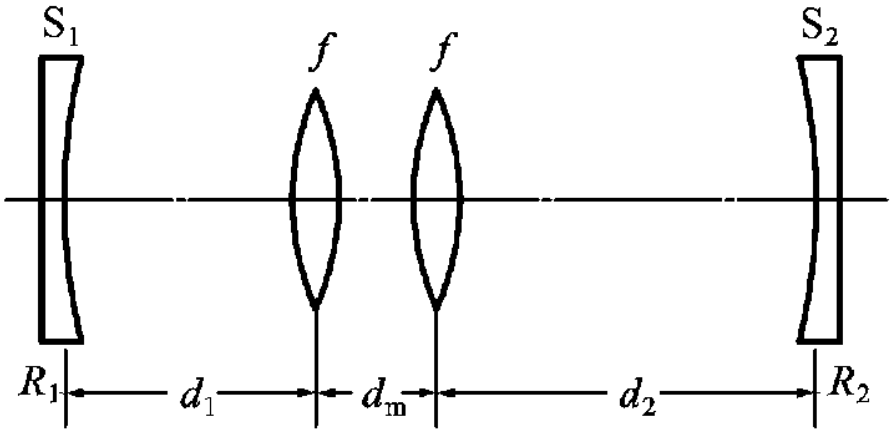


图 10.6.1　含两个热透镜的光腔

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d_{\mathrm{m}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{d_2}{f} + \left(1-\dfrac{d_2}{f}\right)\left(1-\dfrac{d_{\mathrm{m}}}{f}\right) & d_1\left(1-\dfrac{d_2}{f}\right) + d_2\left(1-\dfrac{d_1}{f}\right) + d_{\mathrm{m}}\left(1-\dfrac{d_1}{f}\right)\left(1-\dfrac{d_2}{f}\right) \\ -\left(\dfrac{2}{f} - \dfrac{d_{\mathrm{m}}}{f^2}\right) & -\dfrac{d_1}{f} + \left(1-\dfrac{d_1}{f}\right)\left(1-\dfrac{d_{\mathrm{m}}}{f}\right) \end{bmatrix} \tag{10.6.1}$$

往返一周矩阵为

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{2}{R_1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & b \\ c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{2}{R_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{10.6.2}$$

光腔 g^* 参数

$$g_i^* = g_i + d_{\mathrm{m}} d_j \left(1-\frac{d_i}{R_i}\right)\frac{1}{f^2} - \left[\left(1-\frac{d_i}{R_i}\right)(2d_j + d_{\mathrm{m}}) - \frac{d_j d_{\mathrm{m}}}{R_i}\right]\frac{1}{f} \tag{10.6.3}$$

式中

$$g_i = 1 - \frac{d_1 + d_2 + d_{\mathrm{m}}}{R_i}, \quad i, j = 1, 2, i \neq j \text{ 下同} \tag{10.6.4}$$

利用式(10.6.1)～式(10.6.4)可求出镜 S_i 处的束宽、束腰 w_{0i} 及其位置 L_{0i}.光腔的约束稳定条件为

$$0<g_1^* g_2^*<1 \tag{10.6.5}$$

由式(10.6.3)还可得出光腔工作点在 g^* 参数图上的动态特性曲线方程

$$\begin{aligned}&(g_1^*-g_1)(2\alpha_2+\beta_2)-(g_2^*-g_2)(2\alpha_1+\beta_1)\\&=\frac{[\alpha_2(g_1^*-g_1)-\alpha_1(g_2^*-g_2)]^2}{\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1}\end{aligned} \tag{10.6.6}$$

式中

$$\alpha_i=\frac{d_j}{d_{\mathrm{m}}}\left(1-\frac{d_i}{R_i}\right) \tag{10.6.7}$$

$$\beta_i=1-\frac{d_1+d_2}{R_i} \tag{10.6.8}$$

显然,式(10.6.6)表征的是 g^* 参数图上的抛物线,典型例见图 10.6.2,计算中取 $d_1=0.45L$,$d_2=0.22L$,$d_{\mathrm{m}}=0.33L$,L 为光腔几何长度.抛物线与双曲线 $g_1^* g_2^*=1$ 和两坐标轴的八个交点决定临界 g^* 参数和临界光焦度的值.类似于§10.1 的方法求得八个临界光焦度为

$$\begin{cases}D_{1,2,3,4}=\dfrac{[(d_{\mathrm{m}}+2d_j)(R_i-d_i)-d_{\mathrm{m}}d_j]\pm[d_{\mathrm{m}}^2(R_i+d_j-d_i)^2+4d_1^2(R_i-d_i)^2]^{\frac{1}{2}}}{2d_{\mathrm{m}}d_j(R_i-d_i)}\\[2ex]D_{5,6}=\dfrac{[d_{\mathrm{m}}(d_1+d_2)+2d_1d_2]\pm[d_{\mathrm{m}}^2(d_1-d_2)^2+4d_1^2d_2^2]^{\frac{1}{2}}}{2d_1d_2d_{\mathrm{m}}}\\[2ex]D_{7,8}=\dfrac{[2(R_1-d_1)(R_2-d_2)-d_{\mathrm{m}}(R_1-d_1+R_2-d_2)]}{2d_{\mathrm{m}}(R_1-d_1)(R_2-d_2)}\pm\\[2ex]\qquad\dfrac{[d_{\mathrm{m}}^2(R_1-d_1-R_2+d_2)^2+4(R_1-d_1)^2(R_2-d_2)^2]^{\frac{1}{2}}}{2d_{\mathrm{m}}(R_1-d_1)(R_2-d_2)}\end{cases} \tag{10.6.9}$$

动态工作点的位置由光腔的五个几何参数 R_1、R_2、d_1、d_2、d_{m} 和光焦度 D 决定.

借助于计算机做数值计算,这一方法容易推广用于含多个热透镜光腔,以及各透镜焦距不相等的情况.图 10.6.3 为对含四个热透镜光腔的计算例,光腔几何参数为 $R_1=R_2=\infty$;$d_1=0.04$ m;$d_2=0.20$ m;$d_3=0.35$ m;$d_4=0.25$ m;$d_5=0.13$ m.

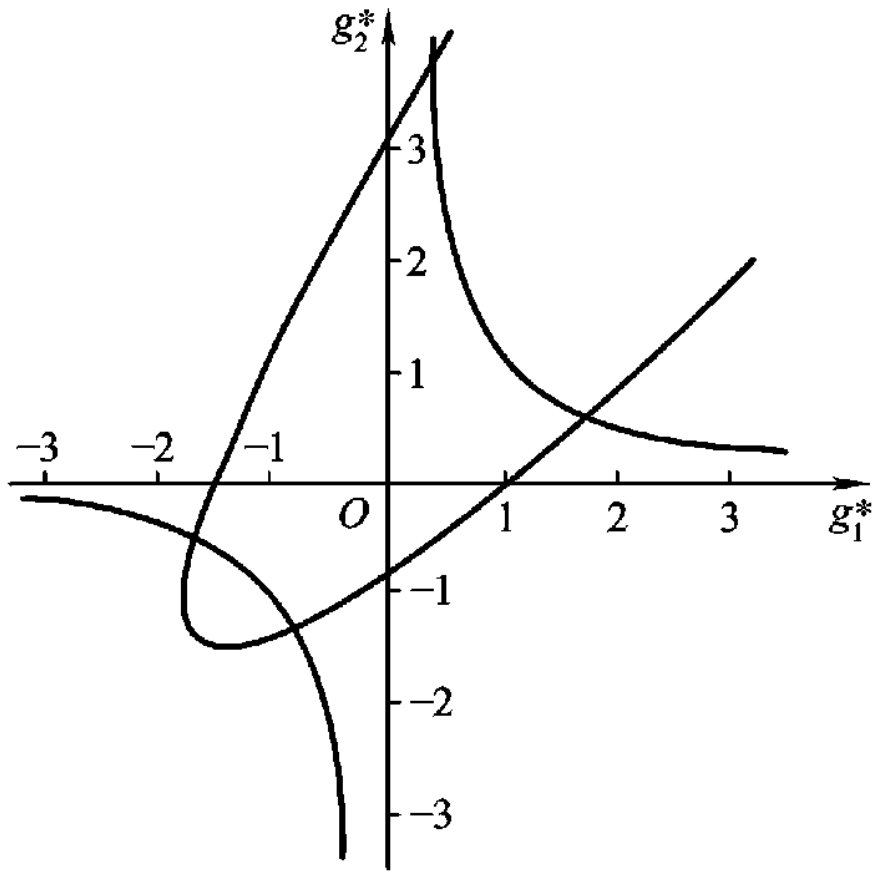


图 10.6.2　两棒串接工作点在 g^* 参数图上的动态特性曲线

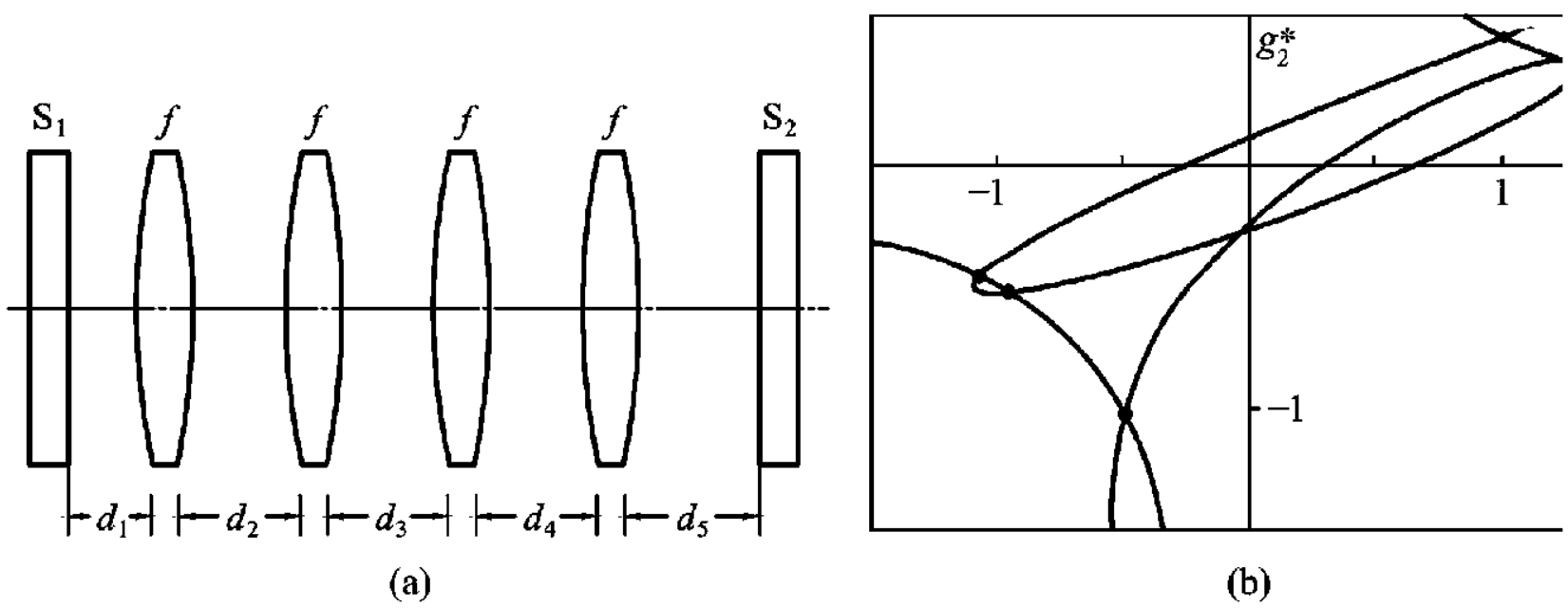


图 10.6.3

(a) 四棒串接平行平面腔；(b) 四棒串接平行平面腔中 g^* 参数图上的工作点动态特性曲线

多棒串接腔实际上是光束相干合成的一种技术方案，其主要优点是可与棒数成比例地增加输出功率(能量)，而保持单棒输出光束质量几乎不变. 表10.6.1列出了德国柏林技术大学光学研究所多棒串接平行平面腔的实验测量结果，图10.6.4、图 10.6.5 为单棒和六棒激光器的光束质量(用光束参数乘积 *BPP* 表示)和输出功率的实验比较. 在实验中用 $\phi 8 \times 152$ mm^2 Nd:YAG 棒. 对六棒串接平行平面腔，当每棒注入功率 10 kW 时，总效率为 3.2%，最大输出功率为1.95 kW，*BPP* = 43 mm•mrad.

表 10.6.1　多棒激光器的实验数据

串接棒数	最大输出功率 $P_{out,max}$/W	总效率 η_{tot}/%（每棒输入功率 10 kW）	光束参数乘积 BPP/(mm•mrad)
1	320	3.2	42
1	290	2.9	31
4	1 200	3.0	32
4	1 050	2.6	20
6	1 950	3.2	43

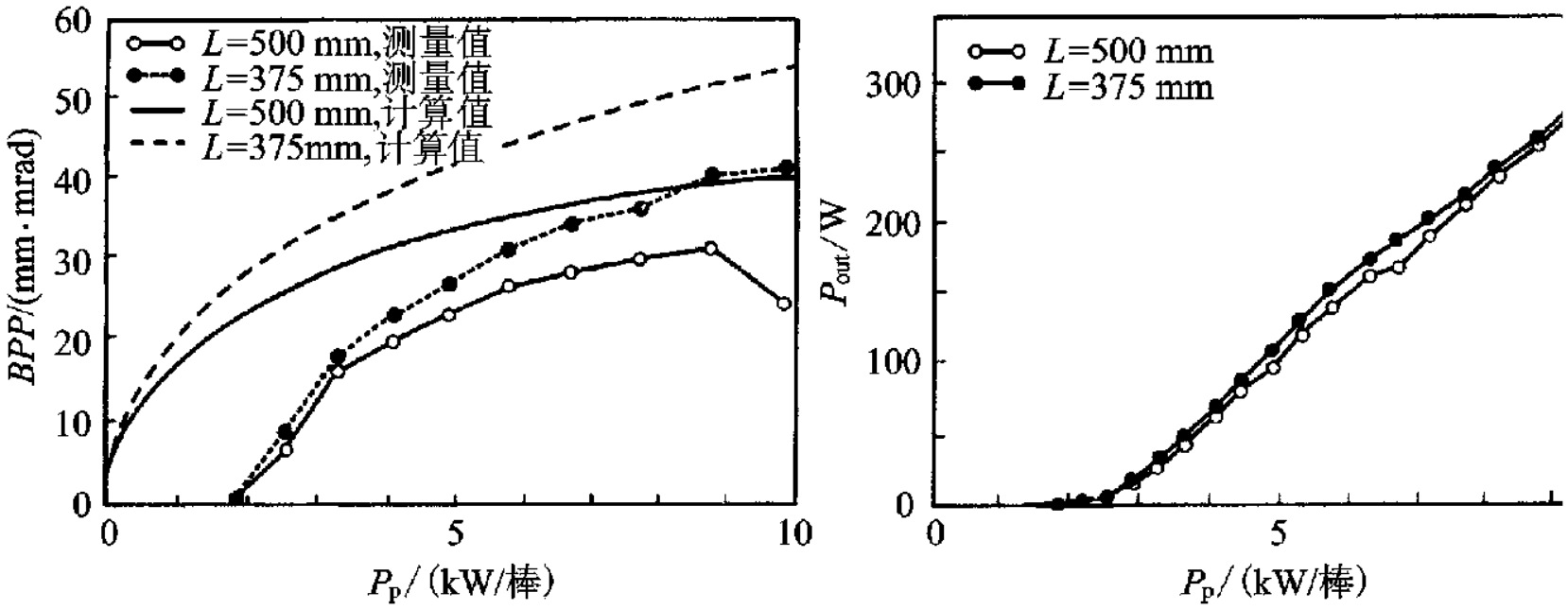


图 10.6.4　单棒激光器的光束质量和输出功率的实验比较

(a) 光束参数乘积 BPP；(b) 输出功率 P_{out}随泵浦功率 P_p 的变化

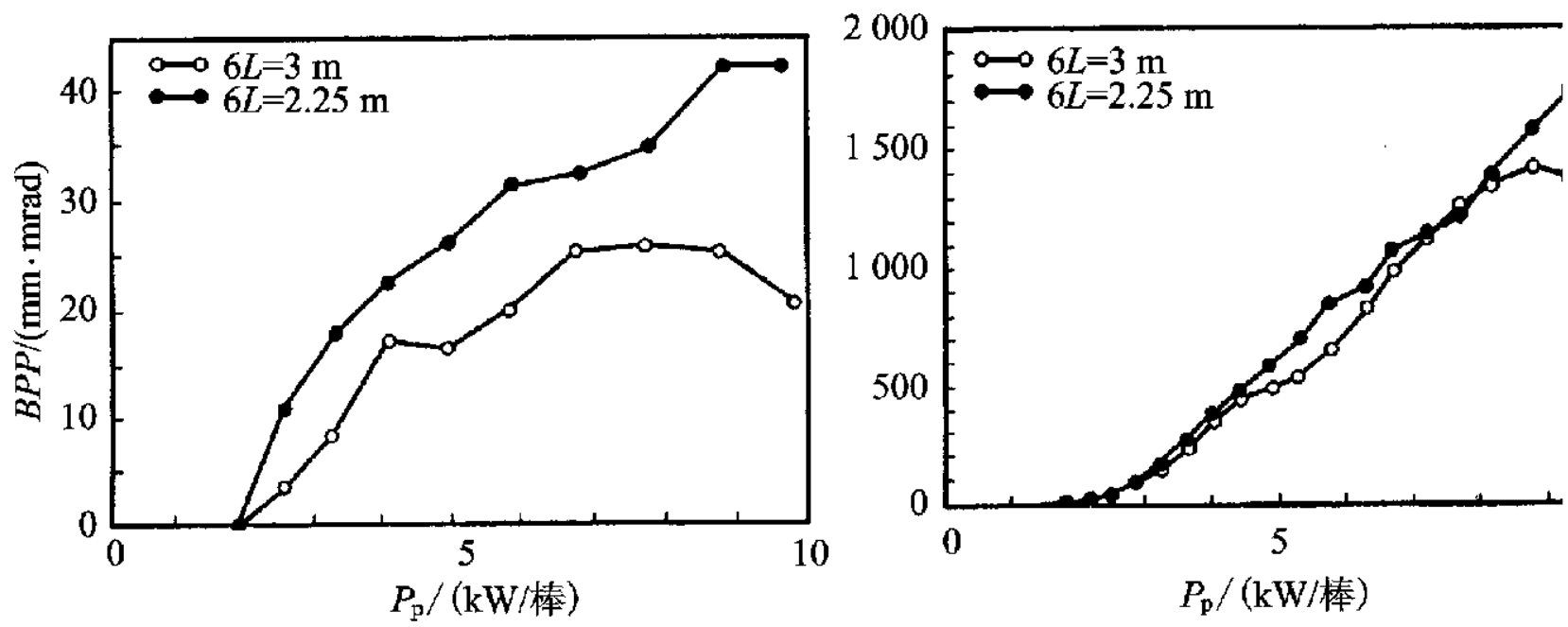


图 10.6.5　六棒激光器的光束质量和输出功率的实验比较

(a) 光束参数乘积 BPP；(b) 输出功率 P_{out}随泵浦功率 P_p 的变化

对多棒串接非稳腔用光线追迹作了分析，并进行了实验研究. 在对称近共心非稳腔中，用两根 $\phi 10\times 150$ mm^2 Nd:YAG 棒串接，实验中得到输出功率 780 W，$BPP=6\sim 10$ mm•mrad. 在高功率固体激光器中采用非稳

腔会降低功率、引起焦点移动和放大率变化(意味着输出耦合率变化),应当作进一步研究.

由于受到腔内不能更多增加串接棒数(例如棒数 $n\leqslant 8$)的限制,为提高输出功率可用主振荡器－功率放大(MOPA)系统.实际工作中亦采用多台激光器并联方式,但这类光束非相干合成方式一般会降低输出光束质量.此外,也常使用串/并联混合方式.图 10.6.6 和图 10.6.7 为高功率固体激光器的串联方式和串/并混合方式示意图.

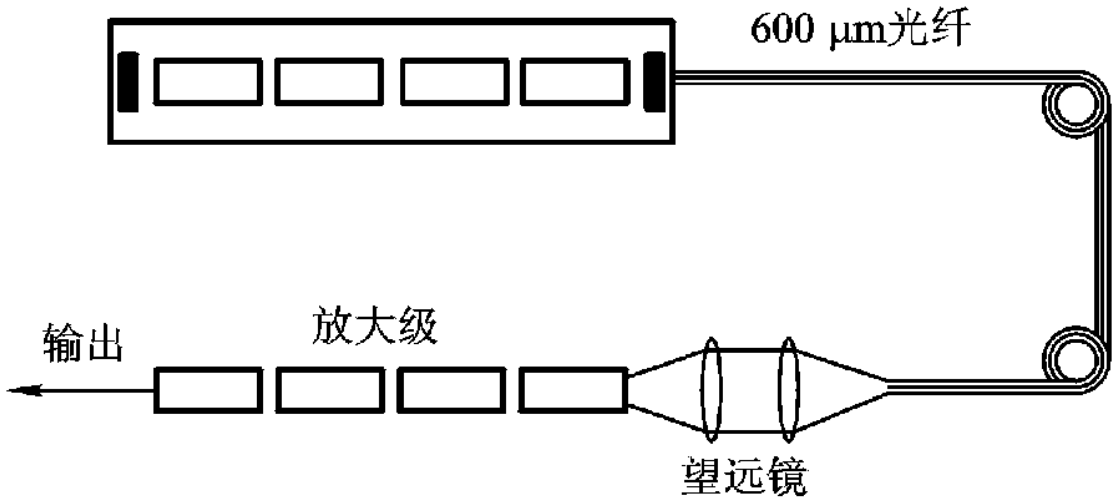


图 10.6.6　高功率固体激光器的串联方案

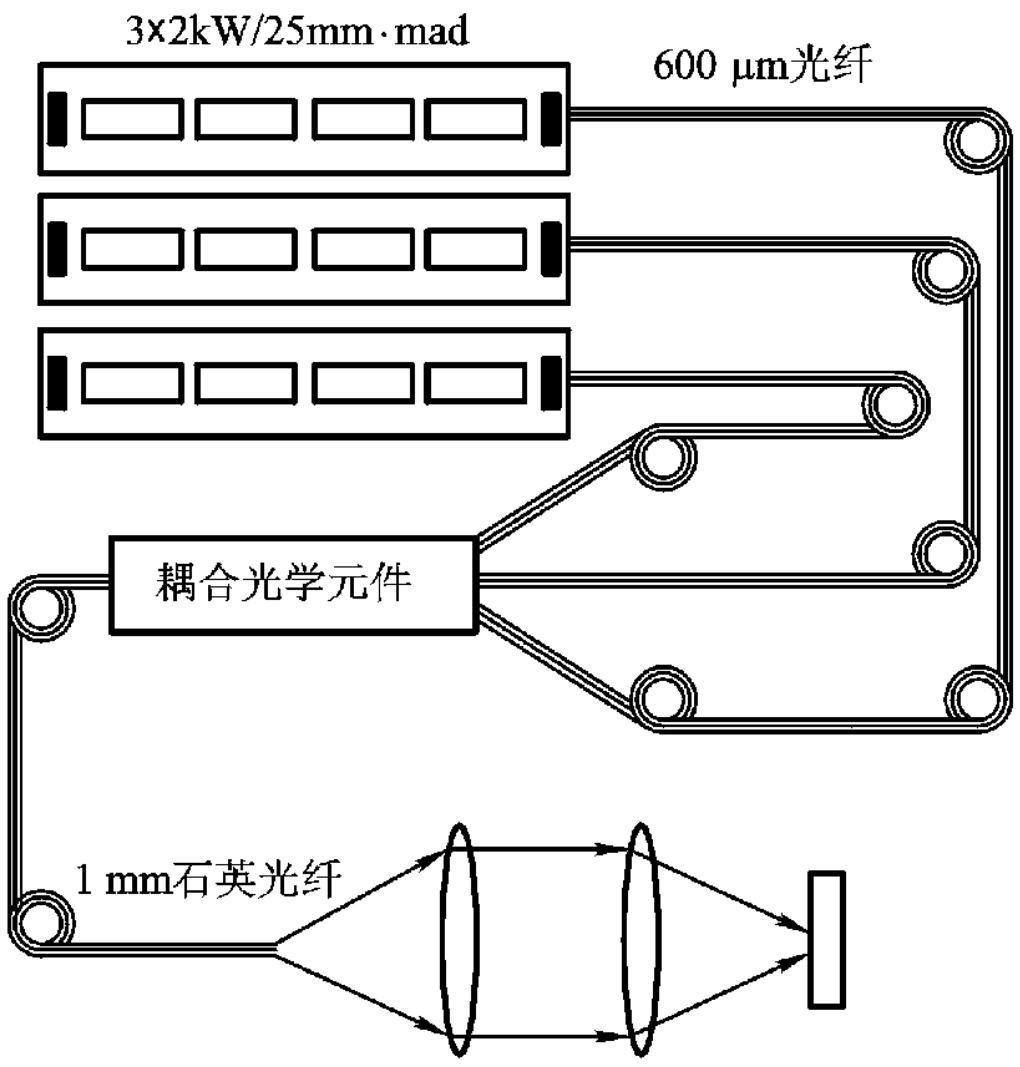


图 10.6.7　高功率固体激光器的串/并联混合方案

二、热致应力双折射补偿技术

在多棒串接腔中，因光泵浦热效应在固体激光介质中产生的应力双折射和退偏，可以用在腔内插入偏振旋转器和像传递光学系统方法来补偿，现以图10.6.8所示的两棒串接构型进行分析.

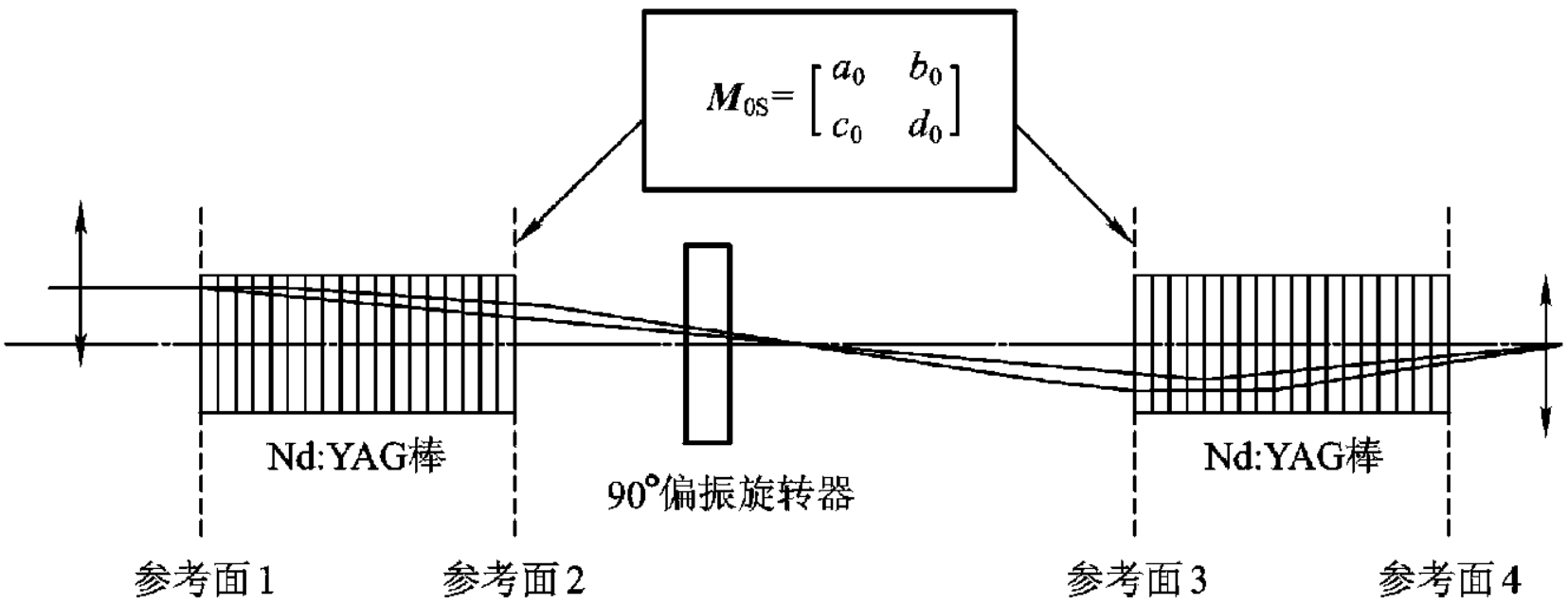


图 10.6.8　补偿热致应力双折射激光器构型示意图

设两根 Nd:YAG 棒完全相同，中间置一 90°偏振旋转器，在两棒间的各向同性光学系统用变换矩阵

$$\boldsymbol{M}_{0S}=\begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{bmatrix} \tag{10.6.10}$$

来描述.考虑从图 10.6.8 参考面 1 出发的线偏振光，其电场在柱坐标(r,θ)系下用矢量

$$\boldsymbol{E}_1(r,\theta)=\begin{bmatrix} E_r(r,\theta) \\ E_\varphi(r,\theta) \end{bmatrix} \tag{10.6.11}$$

来表示，式中 $E_r(r,\theta)$和 $E_\varphi(r,\theta)$分别为径向和切向偏振本征态，并忽略增益饱和和衍射效应.在任意传输平面 z 处的光线用四维矢量

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} w_r \\ \alpha_r \\ w_\theta \\ \alpha_\theta \end{bmatrix} \tag{10.6.12}$$

来表示.式中 w_r、α_r 分别是径向偏振光$E_r(r,\theta)$与光轴的距离和斜率，w_θ、α_θ 则是切向偏振光$E_\varphi(r,\theta)$与光轴的距离和斜率.当这样的光线通过柱对称各向异性光学元件，例如双折射激光棒时，联系输出面和输入面的变换矩阵成为 4×4 矩阵

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{LM}}=\begin{bmatrix} a_r & b_r & 0 & 0 \\ c_r & a_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_\theta & b_\theta \\ 0 & 0 & c_\theta & a_\theta \end{bmatrix} \tag{10.6.13}$$

式中

$$\begin{aligned} &a_r=1+\beta_r S^2\,,\ c_r=2n_0 S\beta_r \\ &a_\theta=1+\beta_\theta S^2\,,\ c_r=2n_0 S\beta_\theta \\ &b_r=b_\theta=\frac{S}{n_0} \end{aligned} \tag{10.6.14}$$

S 为激光棒几何长度，n_0 是棒中心折射率，β_r、β_θ 是因偏振光的径向和切向分量引起的径向折射率的变化，见式(4.2.29).

一个薄的 90°偏振旋转器只交换径向和切向偏振光的光线参数，相应的矩阵为

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{R}}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{10.6.15}$$

最后，各向同性光学元件对两个偏振分量影响是相同的，其变换矩阵写为

$$\boldsymbol{M}_0=\begin{bmatrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 \\ c_0 & d_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & b_0 \\ 0 & 0 & c_0 & d_0 \end{bmatrix} \tag{10.6.16}$$

注意到关系式

$$\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{M}_{\mathrm{R}}=\boldsymbol{M}_{\mathrm{R}}\boldsymbol{M}_0 \tag{10.6.17}$$

成立，这意味着偏振旋转器可放于参考面 2 和 3 间的任意位置.

由参考面 1 到参考面 4 的总光线变换矩阵为

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{tot}}=\boldsymbol{M}_{\mathrm{LM}}\boldsymbol{M}_{\mathrm{R}}\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{M}_{\mathrm{LM}}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & E & F \\ 0 & 0 & G & H \\ A & B & 0 & 0 \\ C & D & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{10.6.18}$$

式中

$$\begin{cases} A = a_0 a_r a_\theta + c_0 a_r b_r + b_0 a_\theta c_r + d_0 b_r c_r \\ B = a_0 a_\theta b_r + c_0 b_r b_r + b_0 a_r a_\theta + d_0 a_r b_r \\ C = a_0 a_r c_\theta + c_0 a_r a_\theta + b_0 c_r c_\theta + d_0 a_\theta c_r \\ D = a_0 b_r c_\theta + c_0 a_\theta b_r + b_0 a_r c_\theta + d_0 a_r a_\theta \\ E = a_0 a_r a_\theta + c_0 b_r a_\theta + b_0 a_r c_\theta + d_0 b_r c_\theta \\ F = a_0 a_r b_r + c_0 b_r b_r + b_0 a_r a_\theta + d_0 b_r a_\theta \\ G = a_0 c_r a_\theta + c_0 a_r a_\theta + b_0 c_r c_\theta + d_0 a_r c_\theta \\ H = a_0 b_r c_r + c_0 a_r b_r + b_0 c_r a_\theta + d_0 a_r a_\theta \end{cases} \tag{10.6.19}$$

为实现对双折射的完全补偿，用变换矩阵 $\boldsymbol{M}_{\text{tot}}$ 表征的整个光学系统对光线的作用应当与一个各向同性光学元件相同，这表示条件

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} \tag{10.6.20}$$

必须满足，由此得

$$a_0 = d_0 \tag{10.6.21}$$

$$2n_0^2 b_0 + S^2 c_0 + 2n_0 S d_0 = 0 \tag{10.6.22}$$

$$a_0 d_0 - b_0 c_0 = 1 \tag{10.6.23}$$

式(10.6.21)～式(10.6.23)为设计双折射补偿光学系统的基本方程. 显然式(10.6.21)和式(10.6.23)是容易满足的，但欲满足式(10.6.22)，需要进行专门的设计. 下面举三个典型例双折射补偿光学系统为例，并予以说明.

1. 一个 90°偏振旋转器和一个薄透镜

装置示于图 10.6.9. 这时由参考面 2 至 3 的变换矩阵为

$$\begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{d_2}{f} & d_1 + d_2 - \dfrac{d_1 d_2}{f} \\ -\dfrac{1}{f} & 1 - \dfrac{d_1}{f} \end{bmatrix} \tag{10.6.24}$$

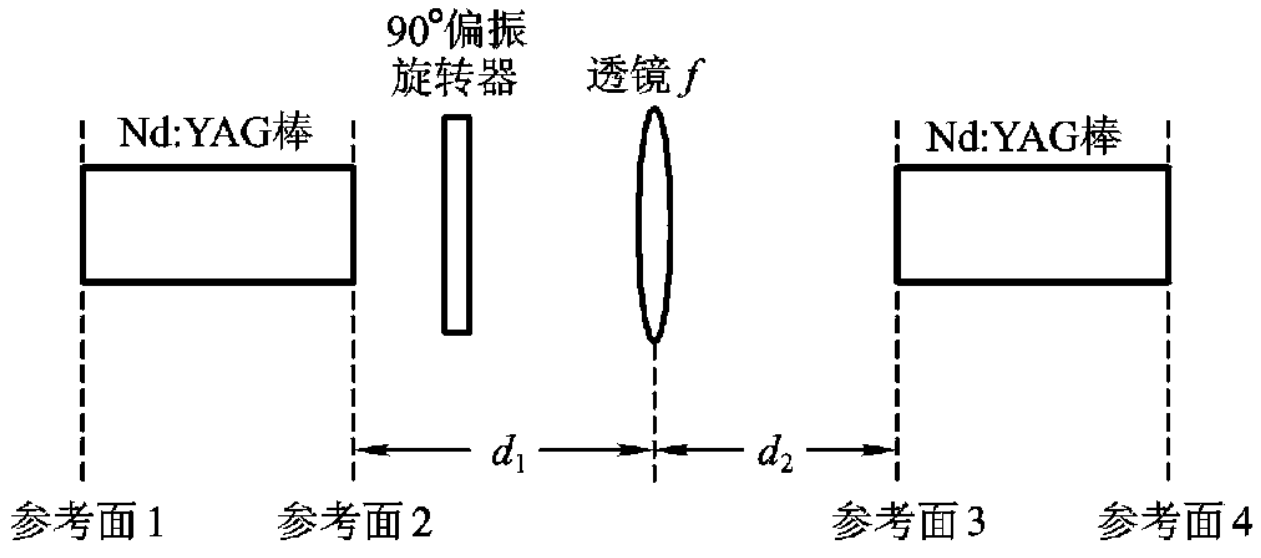


图 10.6.9　一个 90°偏振旋转器和一个薄透镜的双折射补偿系统

式中 f 为薄透镜焦距. 将式(10.6.24)代入式(10.6.21)、式(10.6.22)，得

$$d_1 = d_2 = d$$

$$d = f - \frac{S}{2n_0} + \left[f^2 - \left(\frac{S}{2n_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \quad f \geqslant \frac{S}{2n_0} \tag{10.6.25}$$

选择合适的 d 或 f 以满足式(10.6.25)，就可得到满足实用要求的双折射补偿效果.

2. 一个 90°偏振旋转器和两个薄透镜

图 10.6.10 给出了系统示意图. 设两透镜焦距相等，均为 f，这时由参考面 2 至 3 的变换矩阵为

$$\begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{d_1 + 2d_2}{f} + \dfrac{d_1 d_2}{f^2} & \left(1 - \dfrac{d_2}{f}\right)\left(d_1 + 2d_2 - \dfrac{d_1 d_2}{f}\right) \\ -\dfrac{1}{f}\left(2 - \dfrac{d_2}{f}\right) & 1 - \dfrac{d_1 + 2d_2}{f} + \dfrac{d_1 d_2}{f^2} \end{bmatrix} \tag{10.6.26}$$

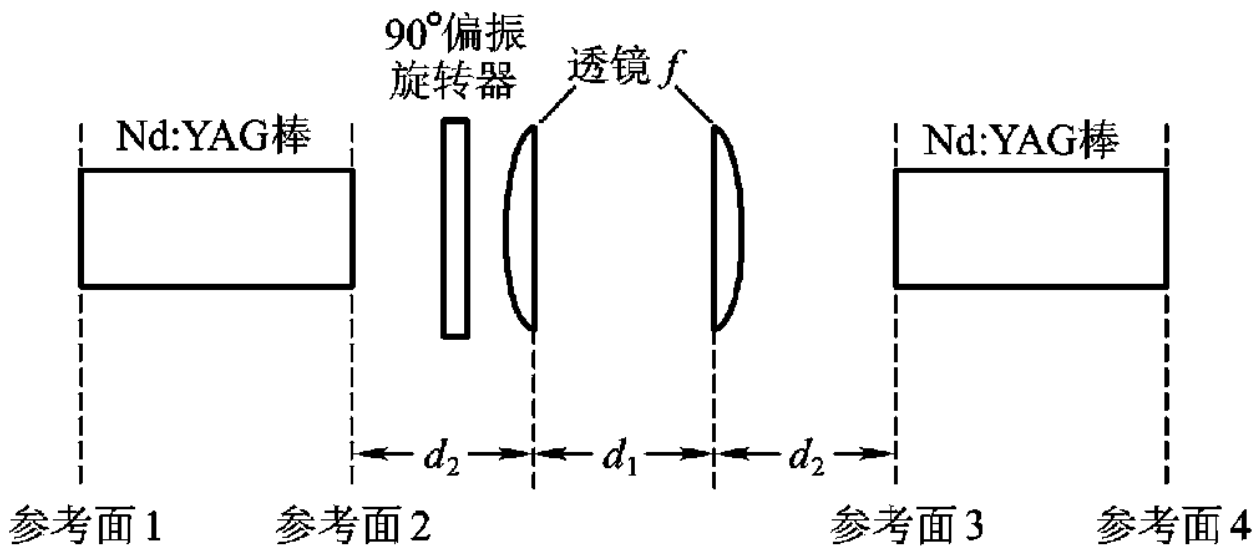


图 10.6.10　一个 90°偏振旋转器和两个薄透镜的双折射补偿系统

由此易得补偿条件为

$$\left(f - d_2 - \frac{S}{2n_0}\right)\left[(d_1 + d_2)f - d_1 d_2\right] + \frac{S}{2n_0^2}\left(2n_0 f^2 - 2Sf + Sd_1\right) = 0 \tag{10.6.27}$$

d_1、d_2 和 f 三个量中两个可自由选取. 其中一个重要情况是取 $d_1 = f$(调焦望远镜系统)，这时若取

$$d_2 = f - \frac{S}{2n_0} \tag{10.6.28}$$

则式(10.6.27)可满足，式(10.6.28)表示透镜相对于激光棒主面的光程等于焦距，即两个激光棒的主面间构成像传递光学系统.

3. 一个 90°偏振旋转器和两凸端面激光棒

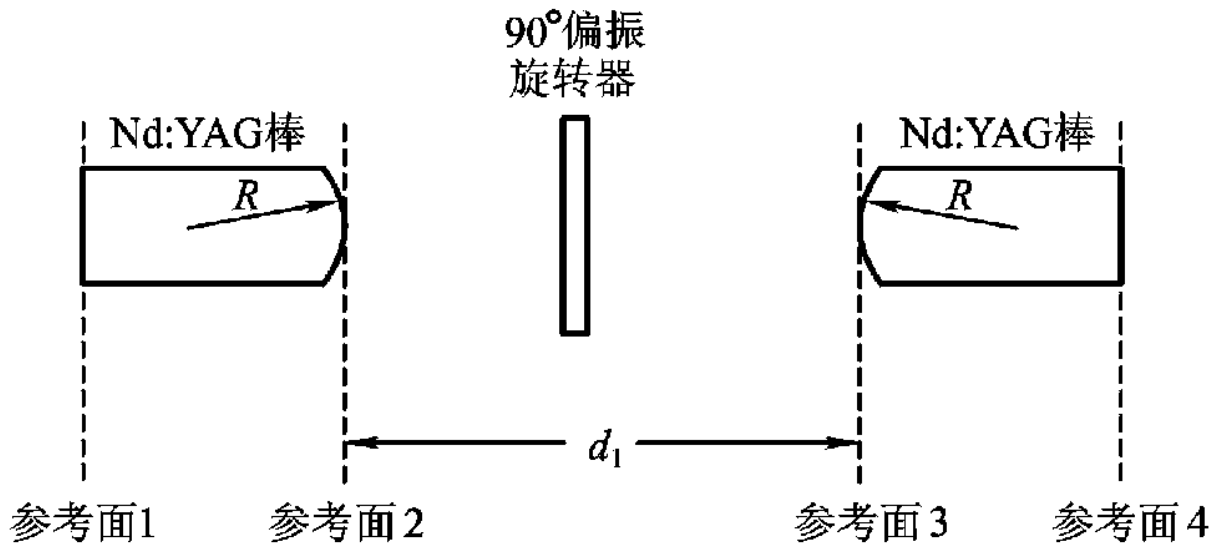


图 10.6.11　一个 90°偏振旋转器和两凸端面激光棒的双折射补偿系统

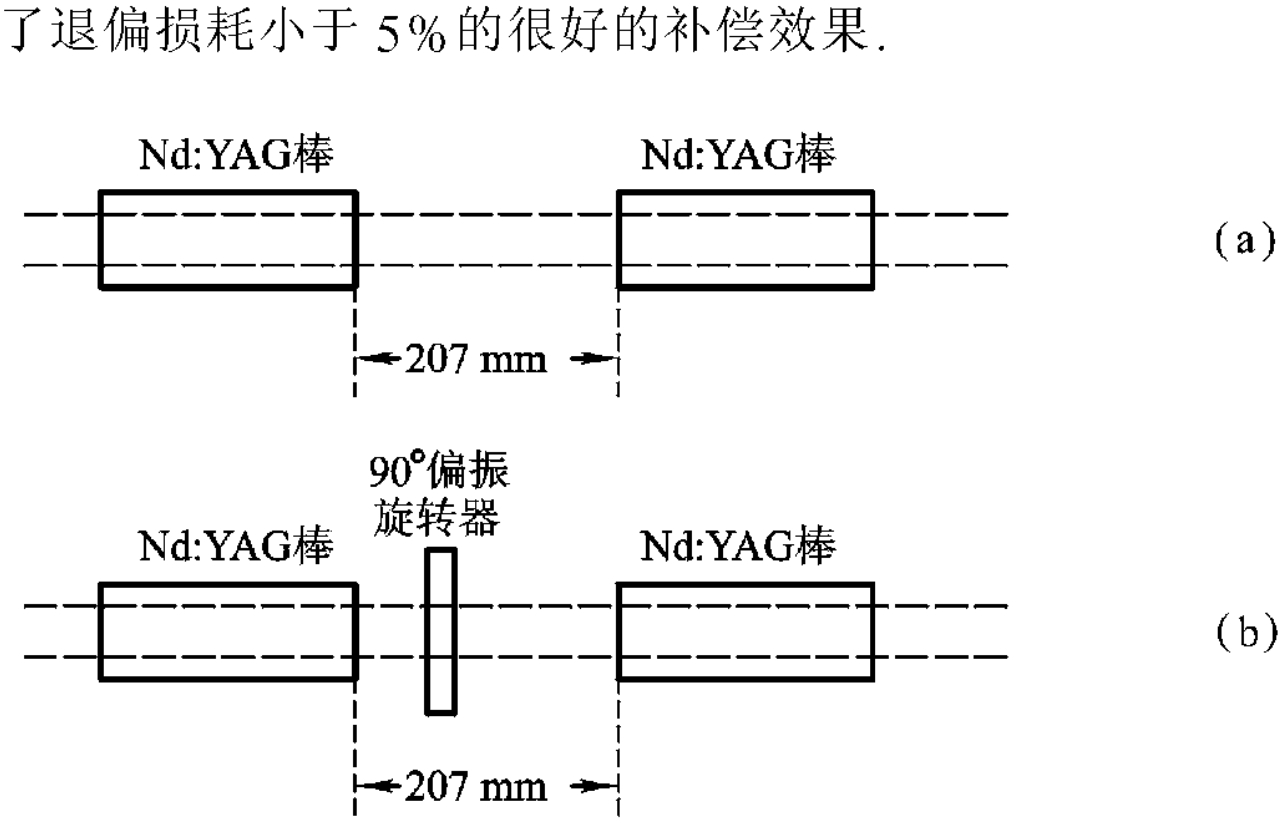
装置示意于图 10.6.11. 设两棒凸端面曲率半径为 R. 类似于前面的计算得到补偿条件为

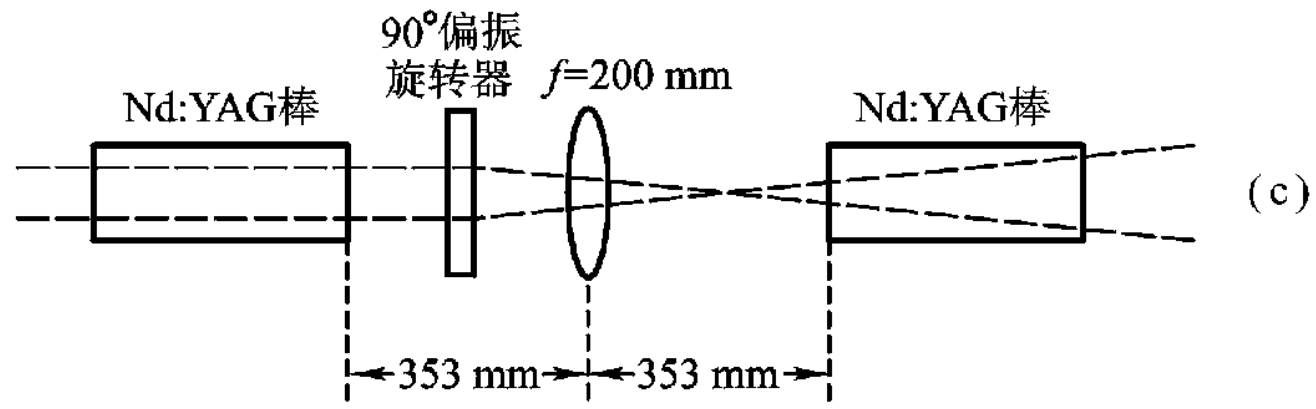
$$d_1 = 2SR\frac{2S - n_0 R}{n_0^2 R^2 + (2S - n_0 R)^2} \tag{10.6.29}$$

$d_1 > 0$ 的物理条件要求

$$0 < R < \frac{2S}{n_0} \tag{10.6.30}$$

使用了图 10.6.12(a)所示四种实验装置来验证上述理论分析结果. 实验用两根 $\phi 10 \times 150\ \text{mm}^2$ 平端面 Nd:YAG 棒，其余参数见图. 实验结果总结于图 10.6.12(b). 由图知，当不用任何双折射补偿元件(构型 A)，泵浦功率 0.5 kW/棒时，单程退偏损耗达 26%. 在构型 B 中，使用一个 90°偏旋转器仅在低泵浦功率时有补偿效果. 当泵浦功率为 2.4 kW/棒时，最大退偏损耗达 27%. 而使用构型 C 和 D，直到泵浦功率为 6 kW/棒时都得到了退偏损耗小于 5%的很好的补偿效果.





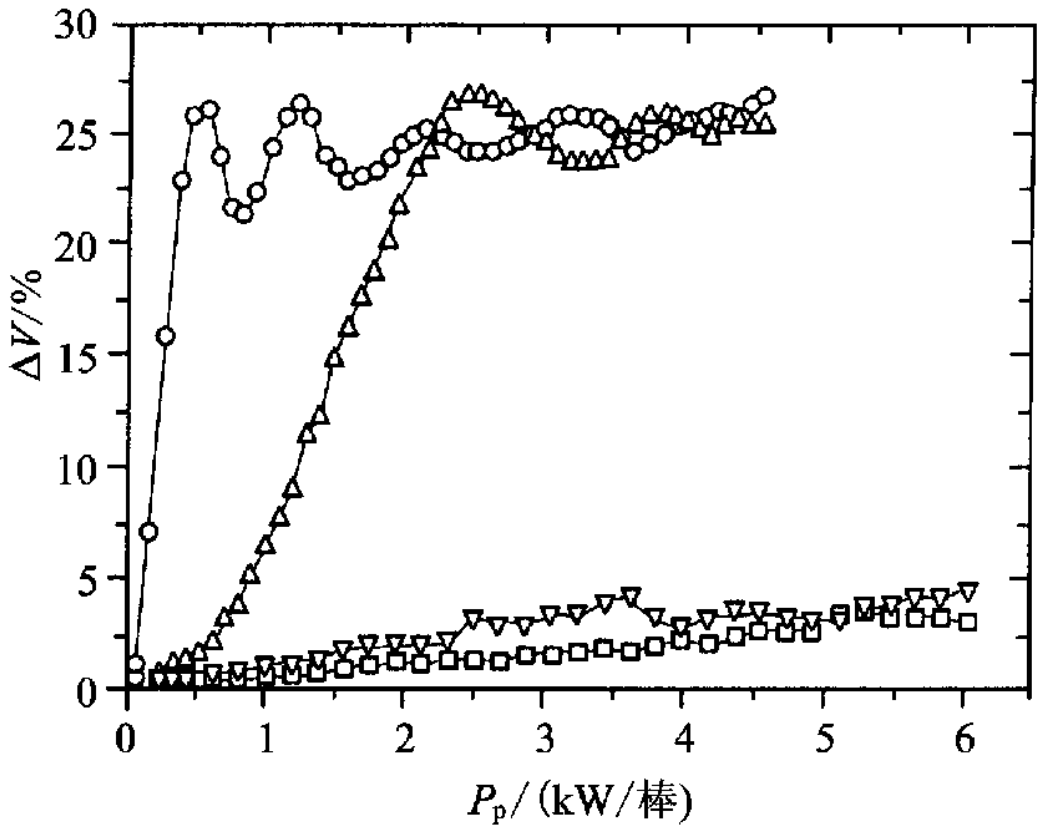
(a)

(a) 实验装置示意图

(a) 无补偿元件；(b) 一个 90°偏振旋转器；

(c) 一个 90°偏振旋转器和一个焦距 200 mm 薄透镜；

(d) 一个 90°偏振旋转器和像传递望远镜系统 (f = 200 mm)



(b)

(b) 实验测量结果

○—构型 A; △—构型 B; ▽—构型 C; □—构型 D

图 10.6.12　图 10.6.11 中四种构型的单程退偏损耗 ΔV 随泵浦功率 P_p 变化的实验装置示意图及实验测量结果

§10.7　环　形　腔

图 10.7.1 中所示谐振腔为环形腔，腔内光束沿一多边形闭合光路传输. 如果仅着眼于分析环形腔内光束传输特性和计算模参数，可以把环形腔从某一参考面处截断，展开成一个等效多元件直腔来处理，这样，就能够利用本章所述的各种方法来计算环形腔的光束参数. 尽管如此，也应当注意环形腔与多元件直腔有下述不同点：

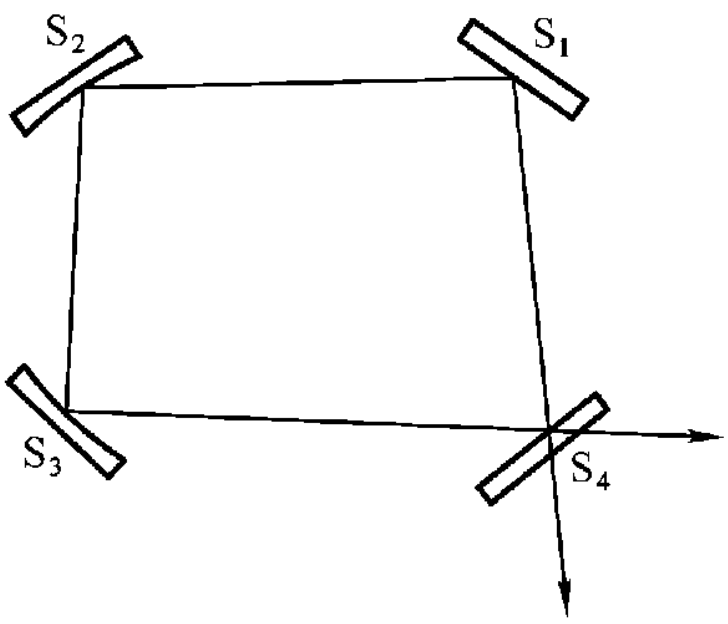


图 10.7.1　环形腔

(1) 与驻波腔不同，环形腔是行波腔.

(2) 在高斯光束近似下，稳定环形腔内能够存在的光束 q 参数应当满足环绕一周自再现条件，而不是往返一周自再现条件. 代替往返一周矩阵，在相应的计算中对环形腔应当使用环绕矩阵.

一、计算方法

研究对象设为图 10.7.2 所示常用四镜 8 字形环形腔. 四个反射镜曲率半径分别为 ρ_1、ρ_2、ρ_3、ρ_4 ($\rho_4\to\infty$)，各分臂长设为 l_1、l_2、l_3、l_4，暂时不计像散.

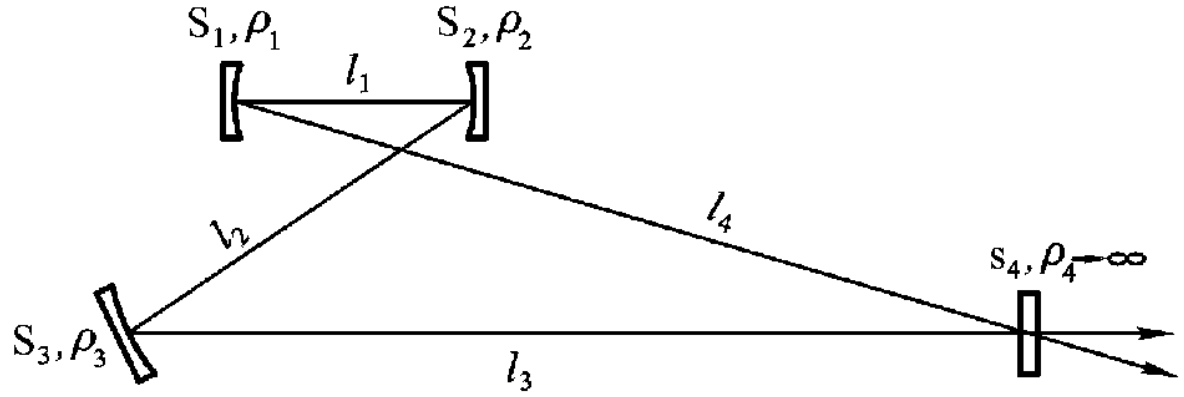


图 10.7.2　四镜 8 字形环形腔

1. 变换矩阵法

分别取镜 1、2、3、4 为参考面，将环形腔展开为周期性薄透镜序列，设以镜 i 为参考，环形矩阵为

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}$$

则

(1) 稳定条件

$$|A+D|<2 \tag{10.7.1}$$

由自再现条件式(8.1.3)可求得：

(2) 镜 i 处基模高斯光束束宽

$$w_i^2=\pm\frac{2\lambda B/\pi}{\sqrt{4-(A+D)^2}} \tag{10.7.2}$$

(3) 镜 i 处高斯光束等相面曲率半径

$$R_i=\frac{2B}{D-A} \tag{10.7.3}$$

(4) 分臂上束腰宽度

$$w_{0ij}^2=\pm\frac{\lambda}{2\pi C}\sqrt{4-(A+D)^2} \tag{10.7.4}$$

(5) 以镜 i 为参考束腰位置

$$L_{0ij}=\frac{A-D}{2C} \tag{10.7.5}$$

例如，以镜 1 为参考，正向行波(设为沿镜 $S_1\to S_2\to S_3\to S_4\to S_1$ 方向)等效周期性薄透镜序列为图 10.7.3，由此得到环绕矩阵

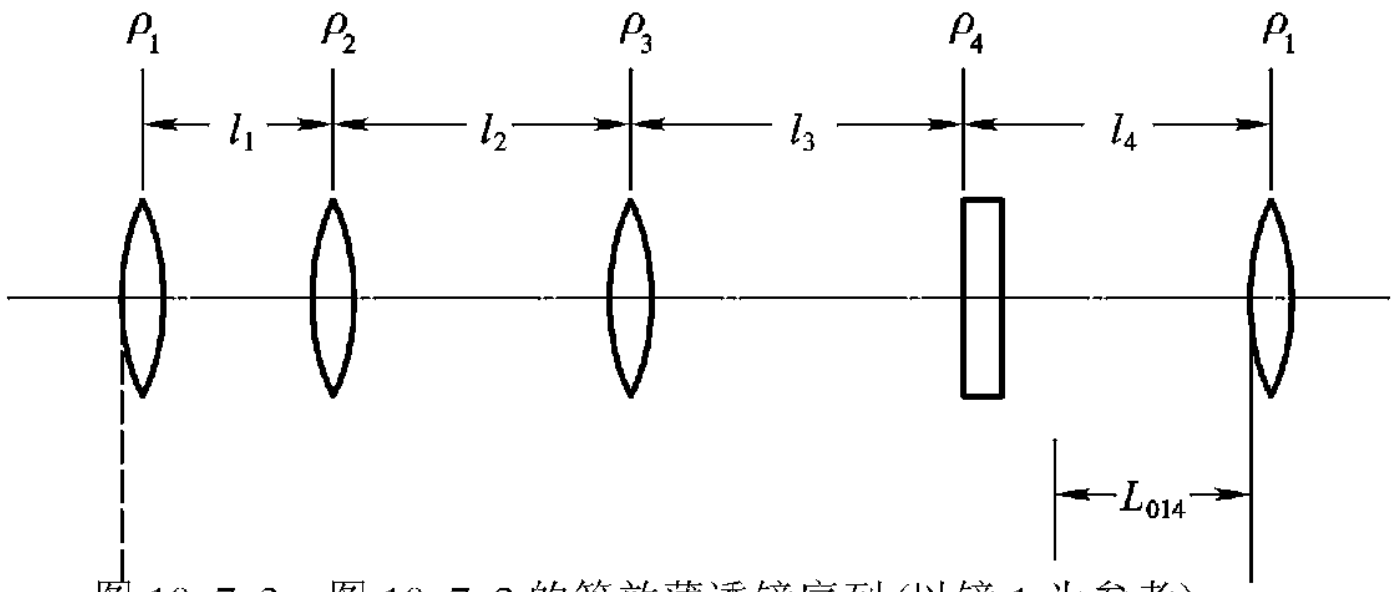


图 10.7.3 图 10.7.2 的等效薄透镜序列(以镜 1 为参考)

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1 & l_3+l_4\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\frac{2}{\rho_3} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & l_2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\frac{2}{\rho_2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & l_1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\frac{2}{\rho_1} & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix} \tag{10.7.6}$$

$$A=\left(1-\frac{2l_1}{\rho_1}\right)\left(1-\frac{2l_2}{\rho_2}\right)\left[1-\frac{2(l_3+l_4)}{\rho_3}\right]-\frac{2(l_3+l_4)}{\rho_1}\left(1-\frac{2l_1}{\rho_1}-\frac{2l_2}{\rho_3}\right)-\frac{2l_2}{\rho_1}-\frac{2(l_3+l_4)}{\rho_2} \tag{10.7.7}$$

$$B=l_1\left(1-\frac{2l_2}{\rho_2}\right)\left[1-\frac{2(l_3+l_4)}{\rho_3}\right]+(l_3+l_4)\left(1-\frac{2l_1}{\rho_2}-\frac{2l_2}{\rho_3}\right)+l_2 \tag{10.7.8}$$

$$C=-\frac{2}{\rho_3}\left(1-\frac{2l_1}{\rho_1}\right)\left(1-\frac{2l_2}{\rho_2}\right)-\frac{2}{\rho_1}\left(1-\frac{2l_1}{\rho_2}-\frac{2l_2}{\rho_3}\right)-\frac{2}{\rho_2} \tag{10.7.9}$$

$$D=-\frac{2l_1}{\rho_3}\left(1-\frac{2l_2}{\rho_2}\right)+\left(1-\frac{2l_1}{\rho_1}-\frac{2l_2}{\rho_3}\right) \tag{10.7.10}$$

把式(10.7.7)～式(10.7.10)代入式(10.7.1)～式(10.7.5)便可判断腔的稳定性，求出 ω_1、ω_{014}、L_{014}、R_1，再分别以镜 2、镜 3、镜 4 为参考面，仿上计算就可求出其余分臂上光束的模参数，反向行波亦可仿此计算.在计算中若注意利用高斯光束基本公式，常可减少计算矩阵次数.

2. 等效厚透镜法

这一方法的要点在于首先将环形腔等效周期性薄透镜序列中的镜 i 与相邻透镜按几何光学公式合成一个厚透镜，然后将这个厚透镜与第三个薄透镜合成一个厚透镜，仿此下去，最后可以用一个等效焦距 f_{ef}，主面距离 h_1、h_2 的厚透镜和等效腔长 L_{ef} 来代替原来的薄透镜序列.由 f_{ef}、h_1、h_2 和 L_{ef} 便可求出以镜 i 为参考对应分臂上的光束模参数.仍以镜 1 为参考(见图 10.7.4)，对正向行波可求得

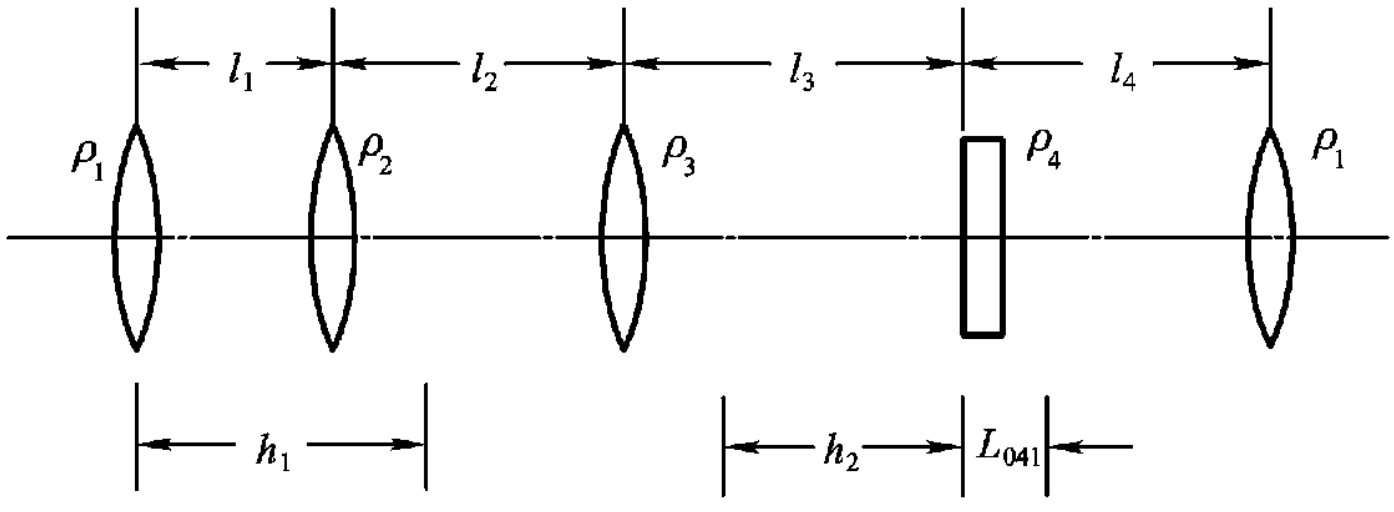


图 10.7.4　图 10.7.2 的等效薄透镜序列(以镜 1 为参考)

(1) 稳定性判据

$$0<\frac{L_{ef}}{f_{ef}}<4 \tag{10.7.11}$$

(2) 镜 1 处基模高斯光束束宽

$$\omega_1^2=\omega_{014}^2\left[1+\left(\frac{l_4-L_{041}}{Z_{014}}\right)^2\right] \tag{10.7.12}$$

(3) 镜 1 处高斯光束等相面曲率半径

$$R_1=Z_{014}\left(\frac{l_4-L_{041}}{Z_{014}}+\frac{Z_{014}}{l_4-L_{041}}\right) \tag{10.7.13}$$

(4) 分臂上束腰宽度

$$w_{014}^2 = \frac{\lambda L_{ef}}{2\pi}\left(\frac{4f_{ef}}{L_{ef}} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \tag{10.7.14}$$

(5) 以镜 4 为参考束腰位置

$$L_{041} = \frac{1}{2}(h_1 - h_2 + l_4) \tag{10.7.15}$$

式中

$$Z_{041} = \frac{\pi w_{014}^2}{\lambda} \tag{10.7.16}$$

为瑞利尺寸

$$\begin{aligned}\frac{L_{ef}}{f_{ef}} = {} & 2(l_1 + l_2 + l_3 + l_4)\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3}\right) - \frac{4l_1 l_2}{\rho_2}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_3}\right) - \\ & \frac{4l_2 l_3}{\rho_3}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) - \frac{4l_1 l_3}{\rho_1}\left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3}\right) - \\ & \frac{4l_1 l_4}{\rho_1}\left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3}\right) - \frac{4l_2 l_4}{\rho_3}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) + \frac{8l_1 l_2}{\rho_1 \rho_2 \rho_3}(l_3 + l_4)\end{aligned} \tag{10.7.17}$$

$$L_{ef} = h_1 + h_2 + l_4 \tag{10.7.18}$$

$$h_1 = 2f_{ef}\left[\frac{l_2}{\rho_3} + l_1\left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3}\right) - \frac{2l_1 l_2}{\rho_2 \rho_3}\right] \tag{10.7.19}$$

$$\begin{aligned}h_2 = {} & 2f_{ef}\left[\frac{l_1}{\rho_1} + l_2\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) + l_3\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3}\right) - \right. \\ & \left. \frac{2l_1 l_2}{\rho_1 \rho_2} - \frac{2l_1 l_3}{\rho_1}\left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3}\right) - \frac{2l_2 l_3}{\rho_3}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) + \frac{4l_1 l_2 l_3}{\rho_1 \rho_2 \rho_3}\right]\end{aligned} \tag{10.7.20}$$

3. 束腰处展开法

这是变换矩阵法的一个重要特例，即参考面选在分臂束腰处，利用高斯光束在束腰处的等相面曲率半径$\to\infty$及有关对称性质可简化运算并直接得出模参数的计算公式.

例如以分臂 l_1 上的束腰 w_{012} 处为参考(图 10.7.5)，正向行波的环绕矩阵设为 $\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$，则由

$$R_0 = \frac{2B}{D - A} \to \infty \tag{10.7.21}$$

可求出 L_{012} (以镜 2 参考 l_1 臂上束腰位置)，并解出 A、B、C、D，于是有：

(1) 稳定性判据

$$|A + D| < 2 \tag{10.7.22}$$

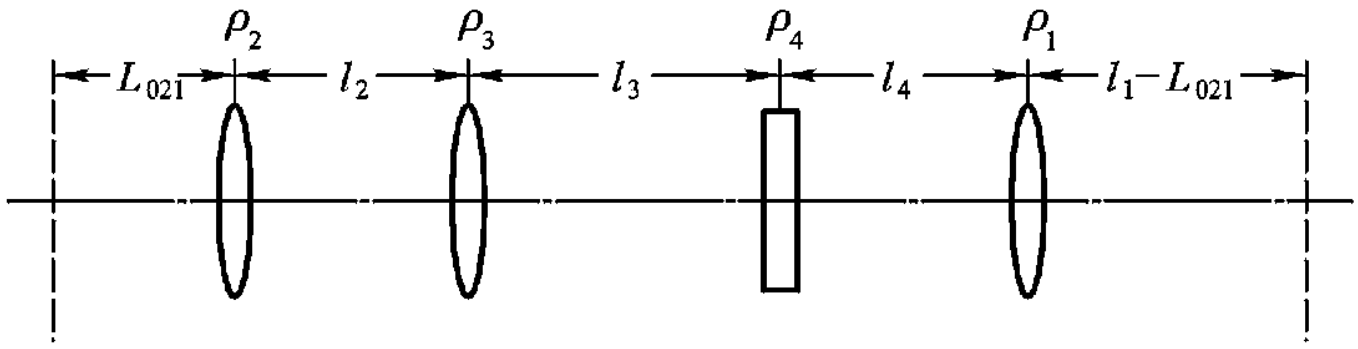


图 10.7.5　图 10.7.2 的等效薄透镜序列(以束腰 w_{012} 为参考)

(2) 基模高斯光束束腰宽度

$$w_{012}^2 = \pm \frac{2\lambda B}{\pi\sqrt{4-(A+D)^2}} \tag{10.7.23}$$

(3) 镜 2 处基模高斯光束束宽

$$w_2^2 = w_{012}^2\left[1+\left(\frac{L_{021}}{Z_{012}}\right)^2\right] \tag{10.7.24}$$

(4) 镜 2 处高斯光束等相面曲率半径

$$R_2 = Z_{012}\left(\frac{Z_{012}}{L_{021}}+\frac{L_{021}}{Z_{012}}\right) \tag{10.7.25}$$

式中

$$Z_{012} = \frac{\pi w_{012}^2}{\lambda} \tag{10.7.26}$$

为瑞利尺寸.

可以证明,以上三种计算方法是等价的.一般而言,对 n 镜环形腔用变换矩阵法,每选定一次参考面,需计算 $2n$ 个 2×2 矩阵之积,用束腰处展开法,则需计算 $2n+1$ 个 2×2 矩阵之积.此外,利用分臂上的模参数应满足与另一臂上模参数匹配条件,或利用某些对称性质和高斯光束传输公式,有时可以得到一些简化公式.

二、像散的影响

离轴放置的环形腔球面反射镜在子午面和弧矢面内的焦距不同

$$f_{i\text{子午}} = \frac{\rho_i}{2}\cos\varphi_i \tag{10.7.27}$$

$$f_{i\text{弧矢}} = \frac{\rho_i}{2}\sec\varphi_i \tag{10.7.28}$$

式中 φ_i 为腔内光束在镜 i 上的入射角.

镜 i 对沿子午面传输光束的反射矩阵为

$$\boldsymbol{M}_{i\text{子午}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f_{i\text{子午}}} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{2}{\rho_i}\sec\varphi_i & 1 \end{bmatrix} \tag{10.7.29}$$

镜 i 对沿弧矢面传输光束的反射矩阵为

$$\boldsymbol{M}_{i\text{弧矢}}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{1}{f_{i\text{弧矢}}} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{2}{\rho_i}\cos\varphi_i & 1\end{bmatrix} \tag{10.7.30}$$

这样，把式(10.7.29)和式(10.7.30)代入上面公式，可以分别求出子午面和弧矢面上光束的模参数.由于像散，会产生以下影响：

(1) 一般情况下，在子午面和弧矢面内光束的模参数不同，合成后为一椭圆高斯光束.

(2) 在分臂上，子午面和弧矢面内束腰不相等，位置也不重合.在反射镜处，子午面和弧矢面内束宽大小不相等，等相面曲率半径也不相等，光束截面为一椭圆，等相面为非球二次曲面.

(3) 在子午面和弧矢面内稳定区的交叉部分才是系统的稳定区，即为联立方程组

$$\begin{cases}|A+D|_{\text{子午}}<2\\ |A+D|_{\text{弧矢}}<2\end{cases} \tag{10.7.31}$$

的解所决定.故像散作用不仅影响输出激光束质量，而且使环形腔稳定工作区缩小.

三、环形腔光束的传输特性

使用上述方法，可对环形腔内正、反向传输光束进行计算和分析，并与实验比较，从而揭示出环形腔内光束的传输特性.现将主要结果归纳为：

(1) 实验结果和计算都表明，高斯光束可以作为稳定环形腔内的本征模式存在，一般情况下为一椭圆高斯光束，并且可以存在沿正向和反向独立传输的行波模.

(2) 环绕矩阵元 A、D 之和 $A+D$ 为一常数，仅由腔参数决定，与计算参考面和环绕方向选择无关.例如，对图 10.7.2 中所示四镜 8 字形环形腔(不计像散)，有

$$\begin{aligned}A+D=&\left(1-\frac{2l_1}{\rho_1}\right)\left(1-\frac{2l_2}{\rho_2}\right)\left\{1-\frac{2(l_3+l_4)}{\rho_3}-\frac{2l_1}{\rho_2}\left[1-\frac{2l_2}{\rho_3}-\frac{2(l_3+l_4)}{\rho_1}\right]\right\}\\ &+\left(1-\frac{2l_2}{\rho_3}\right)\left[1-\frac{2(l_3+l_4)}{\rho_1}\right]-\frac{2(l_3+l_4)}{\rho_2}-\frac{2l_1}{\rho_3}-\frac{2l_2}{\rho_1}\\ =&\text{const}\end{aligned} \tag{10.7.32}$$

(3) 当不计像散时，正向行波和反向行波在各分臂中束腰宽度和位置重合，在各镜面处的束宽大小也相等.

(4) 即使在不计像散情况下，环形腔内在反射镜面处高斯光束等相

面曲率半径一般也不等于镜面曲率半径.在镜 i 处,入射高斯光束等相面曲率半径 $R_{i入}$ 与从镜 i 出射高斯光束等相面曲率半径 $R_{i出}$ 间满足薄透镜对高斯光束变换关系

$$\frac{1}{R_{i出}}=\frac{1}{R_{i入}}-\frac{2}{\rho} \tag{10.7.33}$$

(5) 像散使稳定区缩小.

作为计算例,取图 10.7.2 中环形腔参数为 $\rho_1=\rho_2=60$ mm, $\rho_3=212$ mm, $\rho_4\to\infty$, $l_1=71.5$ mm, $l_2=227$ mm, $l_3=660$ mm, $l_4=508$ mm, 波长 $\lambda=0.595$ μm,对腔内光束模参数作了计算,所得结果见表 10.7.1 和表 10.7.2 中.

表 10.7.1　四镜 8 字形环形腔 $A+D$ 值和正反向光束模参数(不计像散)

$A+D$	镜面处束宽 w_i/mm	束腰宽度 w_{0ij}/mm	束腰位置 L_{0ij}/mm	镜面处光束等相面曲率半径 R_i/mm	
				正向	反向
0.628	$w_1=0.403$	$w_{014}=0.342$	$L_{014}=384.7$	$R_1=1378.5$	$R_1'=30.7$
	$w_2=0.538$	$w_{012}=0.014$	$L_{012}=30.6$	$R_2=40.9$	$R_2'=112.6$
	$w_3=0.552$	$w_{023}=0.040$	$L_{023}=112.0$	$R_3=115.6$	$R_3'=1271.4$
	$w_4=0.349$			$R_4=3219$	$R_4'=3219$

表 10.7.2　考虑像散后在子午面和弧矢面上的 $A+D$ 值和光束模参数

$A+D$		镜 2 处束宽 w_2/mm		束腰宽度 w_{012}/mm		束腰位置 L_{012}/mm		镜 2 处光束等相面曲率半径 R_2/mm	
子午面	弧矢面	子午面	弧矢面	子午面	弧矢面	子午面	弧矢面	子午面	弧矢面
0.426	1.606	0.540	0.666	0.014	0.012	31.1	30.1	40.4	41.4

注:取$\angle s_1=8°$, $\angle s_2=20°$, $\angle s_3=19.5°$, $\angle s_4=8.5°$计算值.

四、像散补偿

在实际工作中常需进行像散补偿.例如为补偿 S_1S_2 臂上的像散,可在该臂中加入厚度 t 折射率 n 倾斜旋转的像散补偿板,设板的法线与入射光线方向成 β 角,在子午面和弧矢面上补偿板的变换矩阵分别为

$$\boldsymbol{M}_{子午}=\begin{bmatrix}1 & n^2(1-\sin^2\beta)\,t/(n^2-\sin^2\beta)^{3/2}\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{10.7.34}$$

$$\boldsymbol{M}_{弧矢}=\begin{bmatrix}1 & t/(n^2-\sin^2\beta)^{1/2}\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{10.7.35}$$

对以布儒斯特角入射情况

$$\tan\beta=n \tag{10.7.36}$$

式(10.7.34)、式(10.7.35)简化为

$$\boldsymbol{M}_{子午}=\begin{bmatrix}1 & t\sqrt{n^2+1}/n^4\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{10.7.37}$$

$$\boldsymbol{M}_{弧矢}=\begin{bmatrix}1 & t\sqrt{n^2+1}/n^2\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{10.7.38}$$

对正入射情况，$\beta=0°$，有

$$\boldsymbol{M}_{子午}=M_{弧矢}=\begin{bmatrix}1 & t/n\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{10.7.39}$$

这时，无补偿作用.

在 s_1s_2 臂中，当以布氏角放置补偿板时，在子午面和弧矢面上有

$$l_0+l_{子午}=\frac{\rho_1}{2}\cos\alpha_1+\frac{\rho_2}{2}\cos\alpha_2+\Delta_{子午}$$

$$l_0+l_{弧矢}=\frac{\rho_1}{2}\sec\alpha_1+\frac{\rho_2}{2}\sec\alpha_2+\Delta_{弧矢} \tag{10.7.40}$$

式中 l_0 为 s_1s_2 臂中空气段的长度，$l_{子午}$、$l_{弧矢}$ 分别为补偿板在子午面和弧矢面上的有效长度，由式(10.7.37)、式(10.7.38)知

$$l_{子午}=t\sqrt{n^2+1}/n^4$$

$$l_{弧矢}=t\sqrt{n^2+1}/n^2 \tag{10.7.41}$$

$\Delta_{子午}$、$\Delta_{弧矢}$ 分别为子午面和弧矢面上的调整量，α_1、α_2 为光束在 s_1、s_2 镜上的入射角(像散角).

实现像散补偿条件为子午面和弧矢面上的调整量应相等.

$$\Delta_{子午}=\Delta_{弧矢} \tag{10.7.42}$$

由式(10.7.40)～式(10.7.42)得

$$\rho_1\sin\alpha_1\tan\alpha_1+\rho_2\sin\alpha_2\tan\alpha_2=2Nt \tag{10.7.43}$$

式中

$$N=(n^2-1)\sqrt{n^2+1}/n^4 \tag{10.7.44}$$

§10.8 折 叠 腔

如图 10.8.1，当使用多个反射镜将光路折叠后，就构成折叠腔. 与环形腔不同，折叠腔是驻波腔，但因折叠反射镜一般工作在离轴位置而引入像散，所以折叠腔又是像散腔，在这点上，它又与环形腔相似. 本节以图 10.8.1 所示常用三镜折叠腔为例进行分析讨论.

一、计算方法

显然，折叠腔可以展开为多元件直腔来进行分析.例如，以镜 1 为参考，三镜折叠腔可以展开为图 10.8.2 所示薄透镜序列.这样 §10.7 中使用的方法都可以用于计算折叠腔内光束的模参数，其区别只是在稳定折叠腔中能够存在的高斯光束应当满足往返一周自再现条件，因此 §10.7 公式中应当用往返矩阵元代替环绕矩阵元.

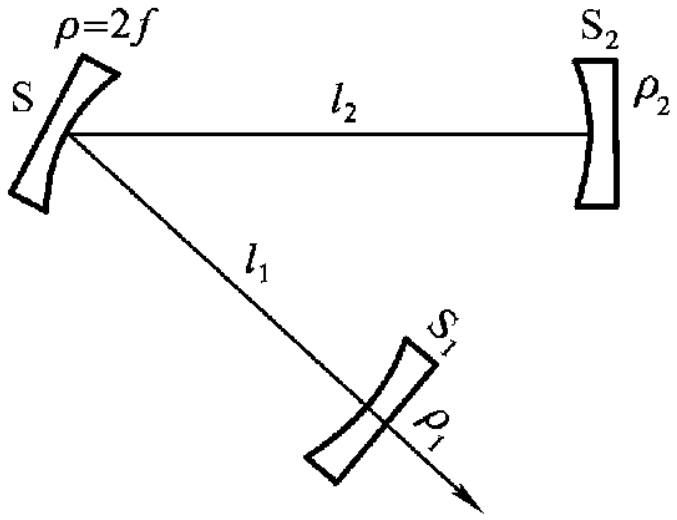


图 10.8.1　折叠腔

但是，这种计算比较繁杂.对 n 镜折叠腔，一般需计算 $4(n-1)$ 个 2×2 矩阵的乘积，当 n 较大时，多使用计算机计算，也可以使用一些方法简化运算：

1. 等价腔法

把三镜折叠腔展开为图 10.8.2 的多元件直腔后，实际上已等效为腔内含一个透镜的多元腔件，因此可用 §10.1 所示的方法处理.对四镜折叠腔可用 §10.4望远镜腔的公式计算.

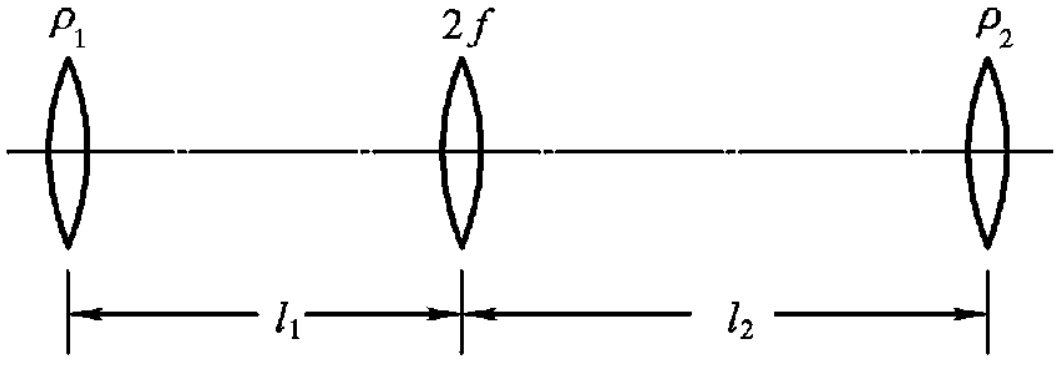


图 10.8.2　图 10.8.1 的等效薄透镜序列

现以 G 参数等价腔分析法为例加以说明(不计像散).

设镜 1、镜 S、镜 S_2 曲率半径分别为 ρ_1、$\rho(=2f)$、ρ_2，各分臂长为 l_1、l_2，$l_1+l_2=L$(腔长).以镜 S_1 为参考面，有

$$\boldsymbol{m}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & l_2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{1}{f} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & l_1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1-\dfrac{l_2}{f} & l_1+l_2-\dfrac{l_1l_2}{f}\\ -\dfrac{1}{f} & 1-\dfrac{l_1}{f}\end{bmatrix} \tag{10.8.1}$$

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d & b\\ c & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{2}{\rho_2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{2}{\rho_1} & 1\end{bmatrix} \tag{10.8.2}$$

$$A = b\left(c-\frac{2d}{\rho_1}\right)+\left(a-\frac{2b}{\rho_1}\right)\left(d-\frac{2b}{\rho_2}\right)=\left(L-\frac{l_1 l_2}{f}\right)\left(\frac{2l_1}{\rho_1 f}-\frac{1}{f}-\frac{2}{\rho_1}\right)+$$
$$\left(1-\frac{l_2}{f}-\frac{2L}{\rho_1}+\frac{2l_1 l_2}{\rho_1 f}\right)\left(1-\frac{l_1}{f}-\frac{2L}{\rho_2}+\frac{2l_1 l_2}{\rho_2 f}\right) \tag{10.8.3}$$

$$B = bd + b\left(d-\frac{2b}{\rho_2}\right)=2\left(L-\frac{l_1 l_2}{f}\right)\left(1-\frac{l_1}{f}-\frac{L}{\rho_2}+\frac{l_1 l_2}{\rho_2 f}\right) \tag{10.8.4}$$

$$C = a\left(c-\frac{2d}{\rho_1}\right)+\left(a-\frac{2b}{\rho_1}\right)\left(c-\frac{2a}{\rho_2}\right)=\left(1-\frac{l_2}{f}\right)\left(\frac{2l_1}{\rho_1 f}-\frac{1}{f}-\frac{2}{\rho_1}\right)+$$
$$\left(1-\frac{l_2}{f}-\frac{2L}{\rho_1}+\frac{2l_1 l_2}{\rho_1 f}\right)\left(\frac{2l_2}{\rho_2 f}-\frac{1}{f}-\frac{2}{\rho_2}\right) \tag{10.8.5}$$

$$D = ad + b\left(c-\frac{2a}{\rho_2}\right)=\left(1-\frac{l_2}{f}\right)\left(1-\frac{l_1}{f}\right)+\left(L-\frac{l_1 l_2}{f}\right)\left(\frac{2l_2}{f\rho_2}-\frac{1}{f}-\frac{2}{\rho_1}\right) \tag{10.8.6}$$

$$G_1 = a-\frac{b}{\rho_1}=1-\frac{l_2}{f}-\frac{L}{\rho_1}+\frac{l_1 l_2}{f\rho_1} \tag{10.8.7}$$

$$G_2 = d-\frac{b}{\rho_2}=1-\frac{l_1}{f}-\frac{L}{\rho_2}+\frac{l_1 l_2}{f\rho_2} \tag{10.8.8}$$

由此求得

(1) 稳定性条件

$$|A+D|<2 \tag{10.8.9}$$

(2) 分臂上束腰宽度

$$\omega_{01}^2 = \pm\frac{\lambda B}{2\pi}\frac{\sqrt{4-(A+D)^2}}{1-AD}=\pm\frac{\lambda b\sqrt{G_1 G_2(1-G_1 G_2)}}{\pi(G_1+a^2 G_2-2aG_1 G_2)} \tag{10.8.10}$$

(3) 以镜 S_1 为参考,束腰位置

$$l_{01}=\frac{B(D-A)}{2(1-AD)}=\frac{bG_2(a-G_2)}{G_1+a^2 G_2-2aG_1 G_2} \tag{10.8.11}$$

(4) 镜 S_1 处高斯光束束宽

$$\omega_1^2 = \pm\frac{2\lambda B}{\pi\sqrt{4-(A+D)^2}}=\pm\frac{\lambda b}{\pi}\sqrt{\frac{G_2}{G_1(1-G_1 G_2)}} \tag{10.8.12}$$

(5) 镜 S_1 处高斯光束等相面曲率半径

$$R_1=\frac{2B}{D-A}=\rho_1 \tag{10.8.13}$$

同时,还得到

(6) 另一分臂上束腰宽度

$$\omega_{02}^2 = \pm\frac{\lambda b\sqrt{G_1 G_2(1-G_1 G_2)}}{\pi(G_2+d^2 G_1-2dG_1 G_2)} \tag{10.8.14}$$

(7) 以镜 S_2 为参考束腰位置

$$l_{02}=\frac{bG_1(d-G_2)}{G_2+d^2G_1-2dG_1G_2} \tag{10.8.15}$$

(8) 镜 S_2 处高斯光束束宽

$$\omega_2^2=\pm\frac{\lambda b}{\pi}\sqrt{\frac{G_1}{G_2(1-G_1G_2)}} \tag{10.8.16}$$

(9) 镜 S_2 处高斯光束等相面曲率半径

$$R_2=\rho_2 \tag{10.8.17}$$

2. 取调整量 Δ 为参数

调整量 Δ 定义为

$$\Delta=l_1-(\rho_1+f) \tag{10.8.18}$$

实验中可调整 Δ 以使腔满足稳定性条件.用上法可求得

(1) 稳定性条件

由式(10.8.9)可求得 Δ 的最大值和最小值为

$$\Delta_{\min}=f^2/(l_2-\rho_2-f) \tag{10.8.19}$$

$$\Delta_{\max}=f^2/(l_2-f) \tag{10.8.20}$$

(2) 束腰宽度

$$\omega_{01}^4=\frac{\lambda^2}{\pi^2}\frac{(\rho_1+\Delta-\Delta_{\max})(\rho_1+\Delta-\Delta_{\min})(\Delta_{\max}-\Delta)(\Delta-\Delta_{\min})}{(\rho_1+2\Delta-\Delta_{\max}-\Delta_{\min})^2} \tag{10.8.21}$$

(3) 以镜 S_1 为参考,束腰位置

$$l_{01}=\frac{(\rho_1+\Delta-\Delta_{\max})(\rho_1+\Delta-\Delta_{\min})}{\rho_1+2\Delta-\Delta_{\max}-\Delta_{\min}} \tag{10.8.22}$$

其他模参数也可类似地表示为 Δ、$\Delta_{\max}$、$\Delta_{\min}$ 等参数形式.

对图 10.8.1 所示折叠腔,设折叠反射镜 S 上光束入射角为 α,仿§10.7 方法,可推出当在 SS_2 臂上插入布氏角放置像散补偿板时,实现像散补偿条件为

$$\rho\sin\alpha\tan\alpha=2Nt \tag{10.8.23}$$

式中

$$N=(n^2-1)\sqrt{n^2+1}/n^4 \tag{10.8.24}$$

t、n 分别为补偿板的厚度和折射率.

二、折叠腔内光束的传输特性

实验结果和理论计算都表明,折叠腔内光束有以下传输特性:

(1) 高斯光束可以作为稳定折叠腔内的本征模式存在，当不计像散时，折叠腔完全可以按照一般对多元件光学谐振腔的方法进行分析.在腔的两端，高斯光束等相面曲率半径等于反射镜曲率半径，但在腔内诸折叠镜处，这一关系一般并不成立.

(2) 考虑像散后，稳定折叠腔内本征模式为椭圆高斯光束，像散使稳定区减小，子午面和弧失面内高斯光束模参数不相同.

§ 10.9　相位共轭腔

由相位共轭器作为一个或两个反射镜构成的光腔称为相位共轭腔.这类光腔有能补偿波前畸变、对失调不灵敏、稳定性好和能得到高光束质量激光输出等优点而受到重视，本节以简并四波混频形成的相位共轭腔为例，对相位共轭腔的基本特性作理论分析，还以受激布里渊散射相位共轭腔为例，介绍了相位共轭腔的一些实验研究结果.

一、相位共轭腔的理论研究

1. 相位共轭镜的两种变换矩阵

在图 10.9.1 的相位共轭腔中设镜 1 为普通反射镜，镜 2 为由简并四波混频构成相位共轭反射镜，则当入射在镜 2 的光波为

$$E_i = E_0 \exp\left(-\frac{\mathrm{i}kr^2}{2q_i}\right) \tag{10.9.1}$$

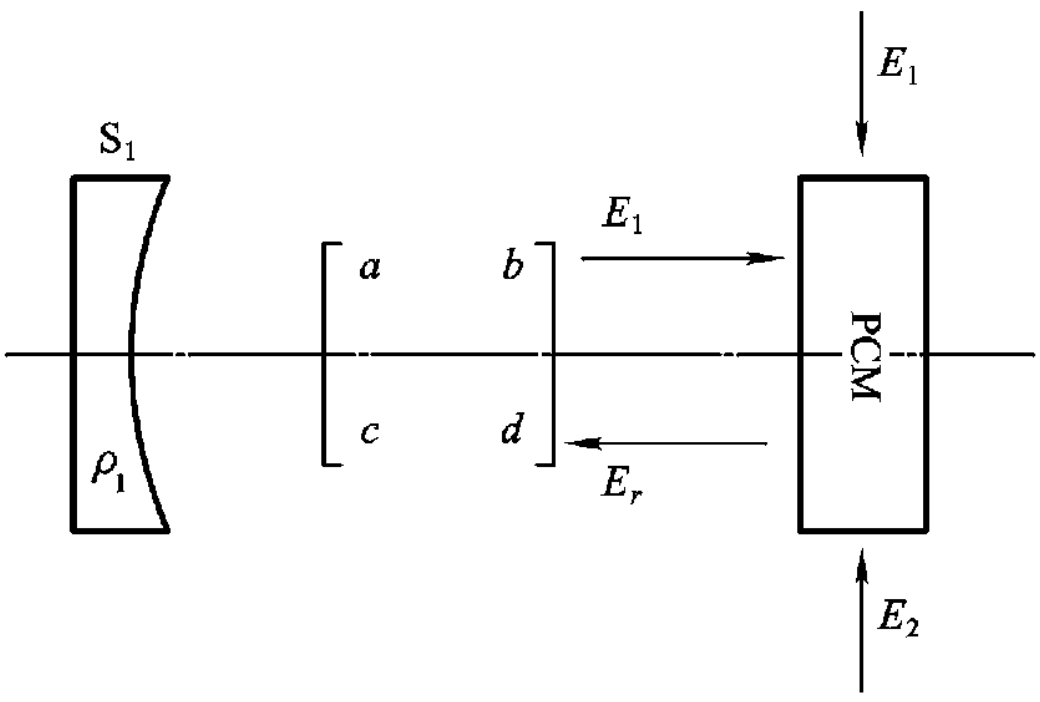


图 10.9.1　由简并四波混频形成的相位共轭腔

时，反射波具有式(10.9.1)复共轭的形式

$$E_r = E_0^* \exp\left(-\frac{\mathrm{i}kr^2}{2q_r}\right) = E_0^* \exp\left(\frac{\mathrm{i}kr^2}{2q_i^*}\right) \tag{10.9.2}$$

入射高斯光束复参数

$$\frac{1}{q_i}=\frac{1}{R}-\mathrm{i}\frac{\lambda}{\pi w^2} \tag{10.9.3}$$

与反射高斯光束复参数 q_r 间有关系

$$\frac{1}{q_r}=-\frac{1}{q_i^*}=-\frac{1}{R}-\mathrm{i}\frac{\lambda}{\pi w^2} \tag{10.9.4}$$

即

$$q_r=-q_i^* \tag{10.9.5}$$

说明入射到相位共轭镜上的高斯光束反射后波前反演，而光斑尺寸不变.

由式(10.9.3)、式(10.9.4)得到相位共轭镜的光线变换矩阵(第Ⅰ矩阵形式)为

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{PCM,\,I}}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} \tag{10.9.6}$$

$$\det\boldsymbol{M}_{\mathrm{PCM,\,I}}=-1 \tag{10.9.7}$$

ABCD 定律应写为

$$q_r=\frac{Aq_i^*+B}{Cq_i^*+D} \tag{10.9.8}$$

由式(10.9.3)、式(10.9.4)还可得到相位共轭镜的等效变换矩阵(第Ⅱ矩阵形式)为

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{PCM,\,II}}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{2}{R} & 1\end{bmatrix} \tag{10.9.9}$$

$$\det\boldsymbol{M}_{\mathrm{PCM,\,II}}=1 \tag{10.9.10}$$

ABCD 定律为通用形式

$$q_r=\frac{Aq_i+B}{Cq_i+D} \tag{10.9.11}$$

注意，式(10.9.9)中 R 为入射到相位共轭镜上高斯光束等相面曲率半径.

$\boldsymbol{M}_{\mathrm{PCM,\,I}}$、$\boldsymbol{M}_{\mathrm{PCM,\,II}}$从不同角度描写了相位共轭镜对入射光的变换特性，在计算相位共轭腔的模参数时，若与相应的 *ABCD* 定律式(10.9.8)、式(10.9.11)一同使用，所得结果完全相同. 下面以 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{PCM,\,II}}$为例，具体加以说明.

2. 相位共轭腔内仅有实光学元件

图 10.9.1 中以镜 2 为参考，光腔往返一周矩阵为

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{2}{\rho_1} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d & b\\ c & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{2}{R} & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{2}{R} & 1 \end{bmatrix} \tag{10.9.12}$$

式中 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 为以镜 1 为参考的腔内单程变换矩阵，ρ_1 为镜 1 曲率半径. 由式(10.9.12)知

$$A_r D_r - B_r C_r = 1$$

$$A_r = D_r \tag{10.9.13}$$

利用 $ABCD$ 定律式(10.9.11)和高斯光束的自再现条件，求得入射到镜 2 上高斯光束复参数 q 为

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} - \mathrm{i}\frac{\lambda}{\pi w^2} = \frac{C_r - 2D_r/R + D_r/q}{A_r - 2B_r/R + B_r/q} \tag{10.9.14}$$

由此得

$$\left(\frac{B_r \lambda}{\pi w^2}\right)^2 + \left(\frac{B_r}{R} - A_r\right)^2 = 1 \tag{10.9.15}$$

式(10.9.15)定义了一个中心在 $(A_r, 0)$，以 $|B_r|/R$ 为横坐标，$\lambda|B_r|/\pi w^2$ 为纵坐标的一个单位圆. 显然，仅由式(10.9.15)所限制的高斯模参数有无穷多，因此，当相位共轭腔内仅有实光学元件时，高斯模是不确定的.

对腔长 L 的相位共轭空腔

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{10.9.16}$$

$$\begin{bmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2g_1 - 1 & 2g_1 L \\ 2(g_1 - 1)/L & 2g_1 - 1 \end{bmatrix} \tag{10.9.17}$$

式中 g_1 参数为

$$g_1 = 1 - L/\rho_1 \tag{10.9.18}$$

将式(10.9.17)代入式(10.9.15)，得

$$w^2 = \frac{\lambda L}{\pi}\left[\frac{1 - g_1}{g_1} + \frac{L}{g_1 R}(2g_1 - 1) - \left(\frac{L}{R}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{10.9.19}$$

3. 相位共轭腔内有虚光学元件

当相位共轭腔内有虚光学元件，例如在相位共轭镜 2 前有一高斯光阑时，可以消除横模的不稳定性. 这时有

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\left(\dfrac{2}{R} + \dfrac{\mathrm{i}\lambda}{\pi\sigma^2}\right) & 1 \end{bmatrix} \tag{10.9.20}$$

式中 σ 为高斯光阑的宽度.

由 *ABCD* 定律和自再现条件，对入射在镜 2 上高斯光束参数有

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{R}-\mathrm{i}\frac{\lambda}{\pi w^2}=\frac{C_r-D_r\left(\frac{2}{R}+\mathrm{i}\frac{\lambda}{\pi\sigma^2}\right)+D_r\left(\frac{1}{R}-\mathrm{i}\frac{\lambda}{\pi w^2}\right)}{A_r-B_r\left(\frac{2}{R}+\frac{\mathrm{i}\lambda}{\pi\sigma^2}\right)+B_r\left(\frac{1}{R}-\mathrm{i}\frac{\lambda}{\pi w^2}\right)} \tag{10.9.21}$$

由此得

$$R=\frac{B_r}{A_r} \tag{10.9.22}$$

$$\frac{|B_r|\lambda}{\pi w^2}=\frac{1}{2}\left\{-\left(\frac{B_r\lambda}{\pi\sigma^2}\right)\pm\left[\left(\frac{B_r\lambda}{\pi\sigma^2}\right)^2+4\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \tag{10.9.23}$$

令相位共轭腔的 G 参数为

$$G_1=a-\frac{b}{\rho_1}$$

$$G_2=d-\frac{b}{R} \tag{10.9.24}$$

则由式(10.9.22)得

$$R=\frac{2bG_1}{2dG_1-1} \tag{10.9.25}$$

在弱高斯光阑近似下 $\sigma\to\infty$，式(10.9.23)简化为

$$w^2=\frac{2\lambda|bG_1|}{\pi} \tag{10.9.26}$$

同法可求出在弱高斯光阑近似下镜 1 处入射高斯光束参数

$$R_1=\rho_1 \tag{10.9.27}$$

$$w_1^2=\frac{\lambda}{\pi}\left|\frac{b}{G_1}\right| \tag{10.9.28}$$

由式(10.9.24)、式(10.9.25)有

$$G_1G_2=\frac{1}{2} \tag{10.9.29}$$

因此，当相位共轭腔内有虚光学元件时，高斯模是确定的，且在弱高斯光阑近似下式(10.9.29)总是成立的，即相位共轭腔是约束稳定的，与腔几何参数选择无关(但使束宽趋于零和无穷大的点除外)，这是相位共轭腔区别于常规光腔的一个显著特点.

对相位共轭空腔，将式(10.9.16)、式(10.9.17)代入得

$$R=\frac{2Lg_1}{2g_1-1} \tag{10.9.30}$$

$$w^2 = \frac{2\lambda L |g_1|}{\pi} \tag{10.9.31}$$

$$w_1^2 = \frac{\lambda L}{\pi |g_1|} \tag{10.9.32}$$

由此还能求出束腰宽度 w_0 为

$$w_0^2 = \frac{\lambda L}{\pi} \left| \frac{g_1}{2g_1^2 - 2g_1 + 1} \right| \tag{10.9.33}$$

束腰位置 L_{01}（以镜 1 为参考）

$$L_{01} = L^2 / [\rho_1 (2g_1^2 - 2g_1 + 1)] \tag{10.9.34}$$

二、相位共轭腔的实验研究

在各种非线性光学相位共轭技术中，受激布里渊散射（SBS）结构简单、较易实现、能实时产生相位共轭波和比较好的补偿波前畸变能力，是在相位共轭腔和主振荡器－功率放大（MOPA）系统中应用得最多的相位共轭技术. 已发现，从红外到紫外多种气体、液体和固体，例如二硫化碳（CS_2）、六氟化硫（SF_6）、四氯化碳（CCl_4）、苯、硝基苯、丙酮和石英等都可作为布里渊介质.

近年来对在多模石英光纤中的 SBS 及在光腔和 MOPA 系统中的应用作了深入研究。光纤相位共轭器有 SBS 阈值低、保真度高、反射率高和无毒等优点。图 10.9.2 表示芯径 200 μm 多模石英光纤的 SBS 反射率随输入功率的变化. 表 10.9.1 为 SBS 阈值与芯径的关系. CS_2 为一种有很低 SBS 阈值但有毒的常用 SBS 介质，表 10.9.2、表 10.9.3 分别对在近衍射极限和 $M^2 = 10$ 的畸变光束输入畸变时，ϕ200 μm 光纤和 CS_2 的 SBS 阈值 P_{th}，最大反射率 R_{max} 和保真度 F 作了比较. 由表中数据可看出，尤其在畸变光束输入时，多模石英光纤有显著优点. 下面，以典型实验例介绍 SBS 相位共轭器在光腔（相位共轭腔）和 MOPA 系统中的应用.

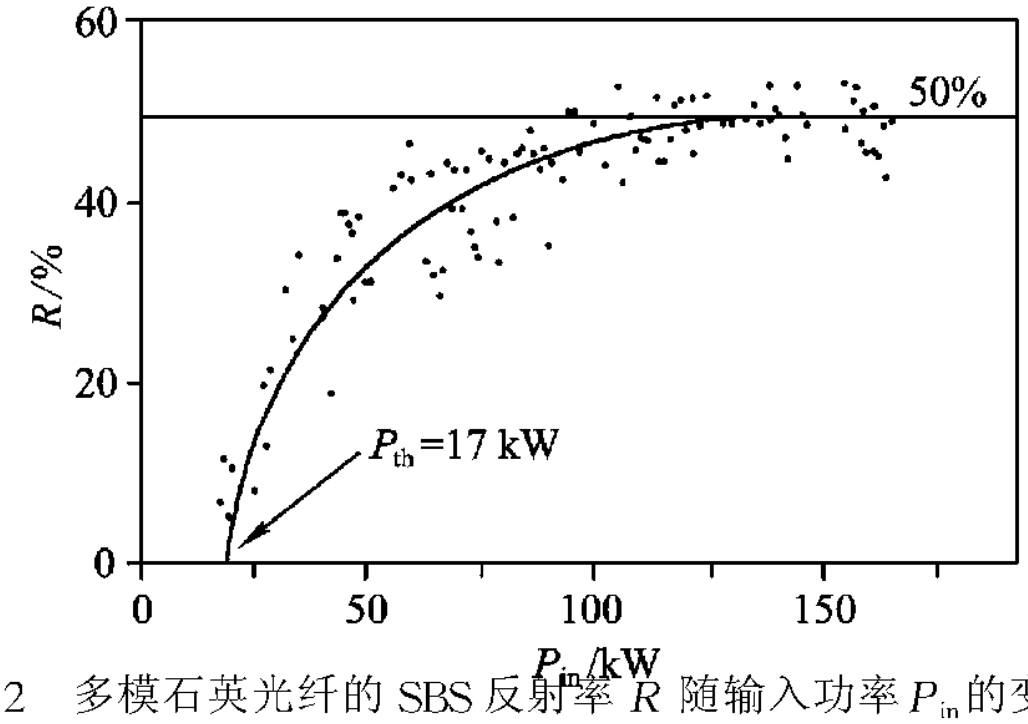


图 10.9.2　多模石英光纤的 SBS 反射率 R 随输入功率 P_{in} 的变化

表 10.9.1　不同芯径光纤的 SBS 阈值 P_{th}

光纤芯径/μm	P_{th}/kW
400	29
200	17
100	6.4
50	0.5*
25	0.2*

* 相干长度为 6 m，其余为 0.5 m

表 10.9.2　SBS200 μm 光纤和 CS_2 在近衍射极限激光输入时的 P_{th}、最大反射率 R_{max} 和保真度 F

	200 μm 光纤	CS_2
P_{th}/kW	17	13
R_{max}/%	50	70
F/%	93±2	75±13

表 10.9.3　200 μm 光纤和 CS_2 在 $M^2=10$ 激光输入时的 P_{th}、R_{max} 和 F

	200 μm 光纤	CS_2
P_{th}/kW	17	57
R_{max}/%	50	10
F/%	78	70

1. 受激布里渊散射相位共轭腔

实验装置示于图 10.9.3. Nd:YAG 激光器的光腔由镜 S_2 和一体化 SBS 池构成，同时镜 S_1 是辅助腔的腔镜. 池内装有高压 SF_6 (20 MPa) 气体介质. 在激光振荡初期，自由振荡激光通过全反射镜 S_1 反射后经望远系统再次通过 Nd:YAG 被放大. 当腔内自由振荡激光能量增大至超过 SBS 阈值时，腔长 L、由镜 S_1 和镜 S_2 构成的辅助腔被腔长 l 的 SBS 相位共轭腔取代，并且由于 SBS 反射率的增高等原因而使腔内 Q 值增大，形成调 Q 脉冲输出. 实验中当泵浦能量 50 J 时得到 250 mJ、脉宽 25 ns 的调 Q 激光脉冲输出，远场发散角 0.5 mrad，输出激光能量稳定度 ±4%.

使用多模石英光纤作 SBS 介质的相位共轭腔示意于图 10.9.4. 实验中，用 Nd:YAP (Nd:$YalO_3$) 作激光介质，工作频率 1 Hz～25 Hz. 因光纤有低的 SBS 阈值，在闪光灯泵浦的一个脉冲时间内，观察到调 Q 脉冲串，见图 10.9.5.

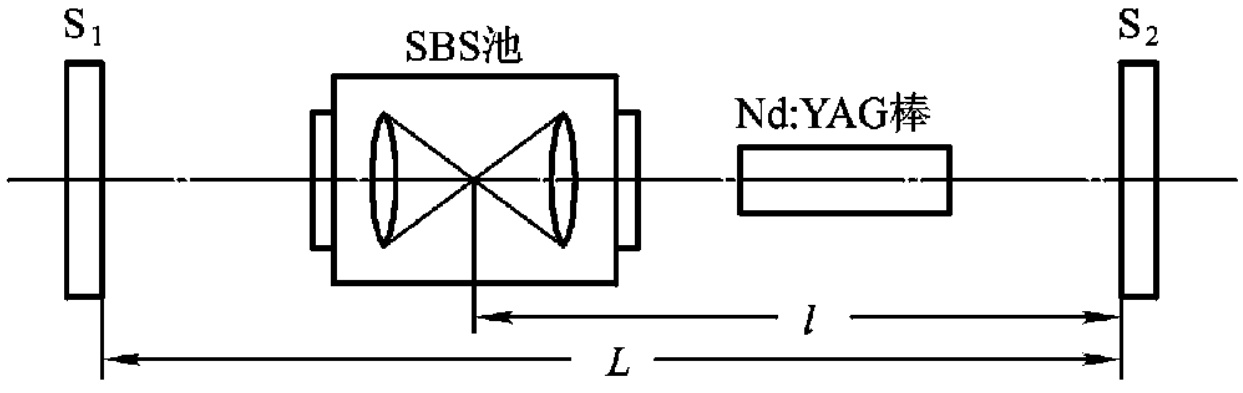


图 10.9.3　SBS 相位共轭腔(SF_6 作 SBS 介质)

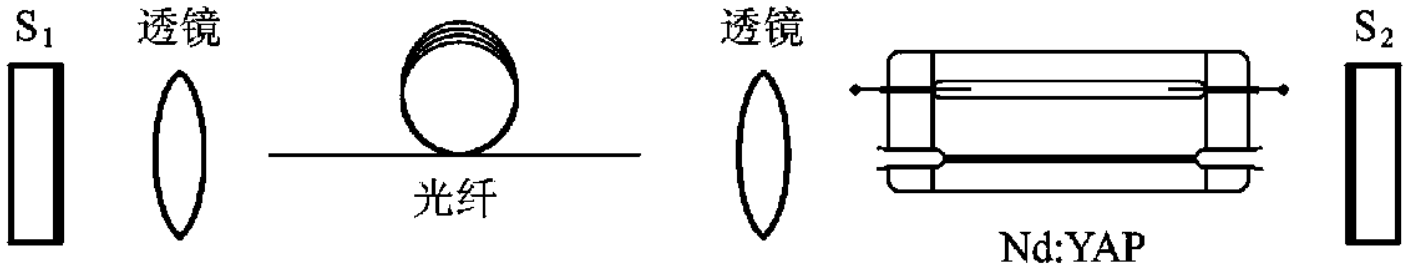


图 10.9.4　相位共轭腔(多模光纤作布里渊介质)

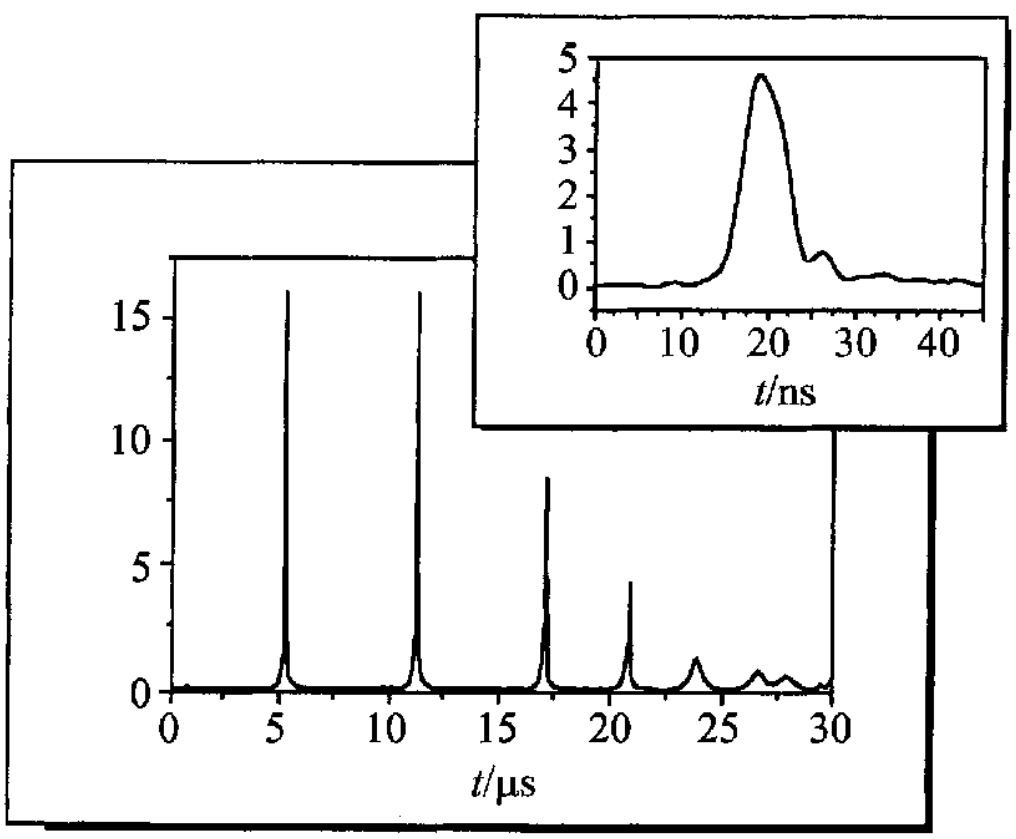


图 10.9.5　在闪光灯泵浦一个脉冲时间内,输出调 Q 激光的时间特性

2. 受激布渊散射和退偏补偿的 MOPA 系统

在高功率 Nd:YAG MOPA 系统中,使用相位共轭器可以补偿激光的波前畸变,但却不能自动补偿热致应力双折射和由此引起的退偏,因此还应当同时使用 §10.6 中所讨论的热致应力双折射补偿技术. 图 10.9.6 为柏林技术大学光学研究所使用的受激 SBS 和退偏补偿的高功率 Nd:YAG MOPA系统实验装置示意图. 该系统由主振荡器和两级双程放大器 Amp. 1、Amp. 2 组成. 振荡级示意于图 10.9.7,激活介质为 $\phi 6.3\times 102\ mm^2$ Nd:YAG 棒,用两根氙灯泵浦,Cr^{4+}:YAG 被动调 Q,并

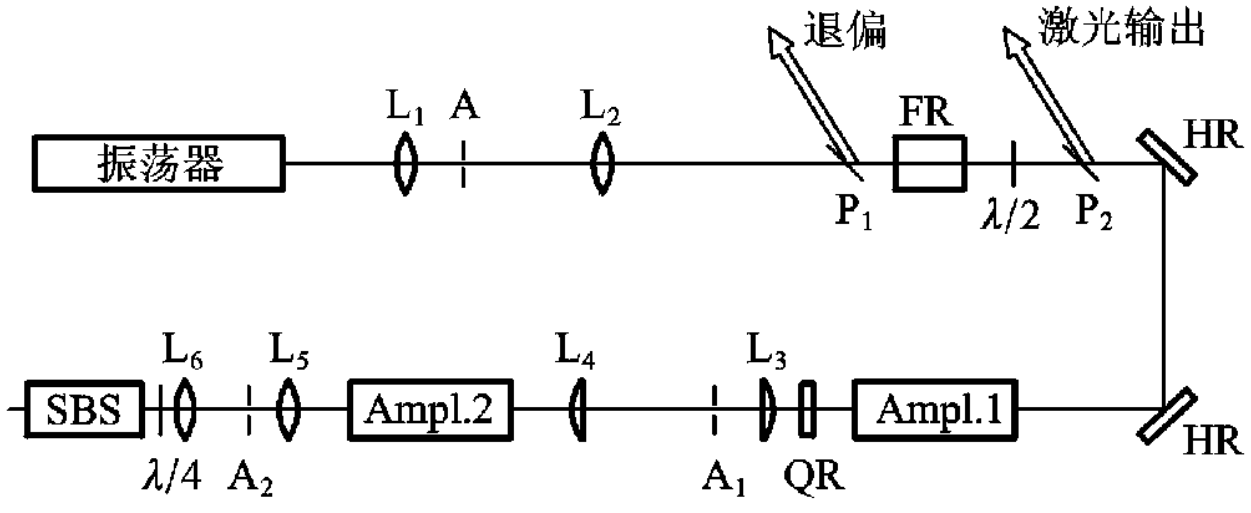


图 10.9.6　SBS 和退偏补偿的高功率Nd:YAG MOPA系统实验装置

L_1—L_6—透镜；P_1，P_2—偏振片；FR—45°法拉第旋转器；$\lambda/2$，$\lambda/4$—$\lambda/2$、$\lambda/4$ 波片；HR—高反镜；Amp1，Amp2—Nd:YAG 放大器；QR—90°石英旋转器；A，A_1，A_2—光阑；SBS—SBS 池

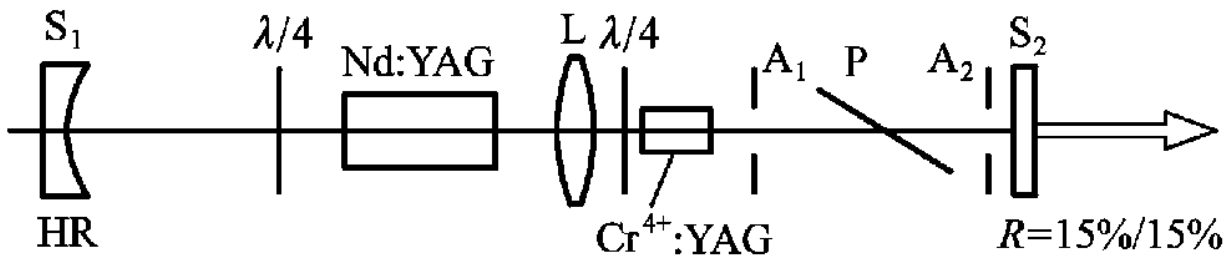


图 10.9.7　扭转模腔振荡器示意图

S_1，S_2—腔镜；$\lambda/4$—$\lambda/4$ 波片；L—透镜；A_1，A_2—光阑，P—偏振片

使用了线性扭转模腔，在由镜 S_1、镜 S_2 构成的腔内插入一对光轴相互垂直并与偏振方向成 45°，以产生扭转模，避免了线性腔中因空间烧孔效应引起纵模的跳模. 使用两面反射率均为 15%、厚度 5 mm 的反射镜 S_2 作输出耦合镜进一步增强了选纵模能力. 同时，扭转模腔和 Cr^{4+}：YAG 饱和吸收体对横模的选择性，使输出激光有较长的相干长度，以保证在 MOPA 系统中使用的 SBS 有高反射率和高保真度. 此外，为了使激光振荡器有长时间稳定性和最佳输出，光腔还设计成为基模动态稳定腔.

由振荡级输出的激光被 L_1、L_2 组成的望远镜扩束，经过由偏振片 P_1、P_2、45°法拉第旋转器和 $\lambda/2$ 波片构成的光学隔离器后进入放大级. 在放大级 Amp.1 和 Amp.2 中 Nd:YAG 棒尺寸均为 $\phi 9.5\times 152$ mm^2，级间置一个 90°偏振旋转器和像传递望远镜系统 L_3，L_4 补偿热致应力双折射. 被 Amp.1 和 Amp.2 放大的激光束通过透镜 L_5，L_6 聚焦到 SBS 池中，池长 350 mm，内盛有 CS_2. 经 SBS 池后，激光再次通过 Amp.1 和 Amp.2 被放大，然后从 P_2 偏振耦合输出，退偏部分则从偏振片 P_1 输出. 实验结果见图 10.9.8、图 10.9.9. 由图知，实验得到最大平均输出功率 215 W. 退偏损耗小于 5%，光束参数乘积 $BPP<1$ mm•mrad.

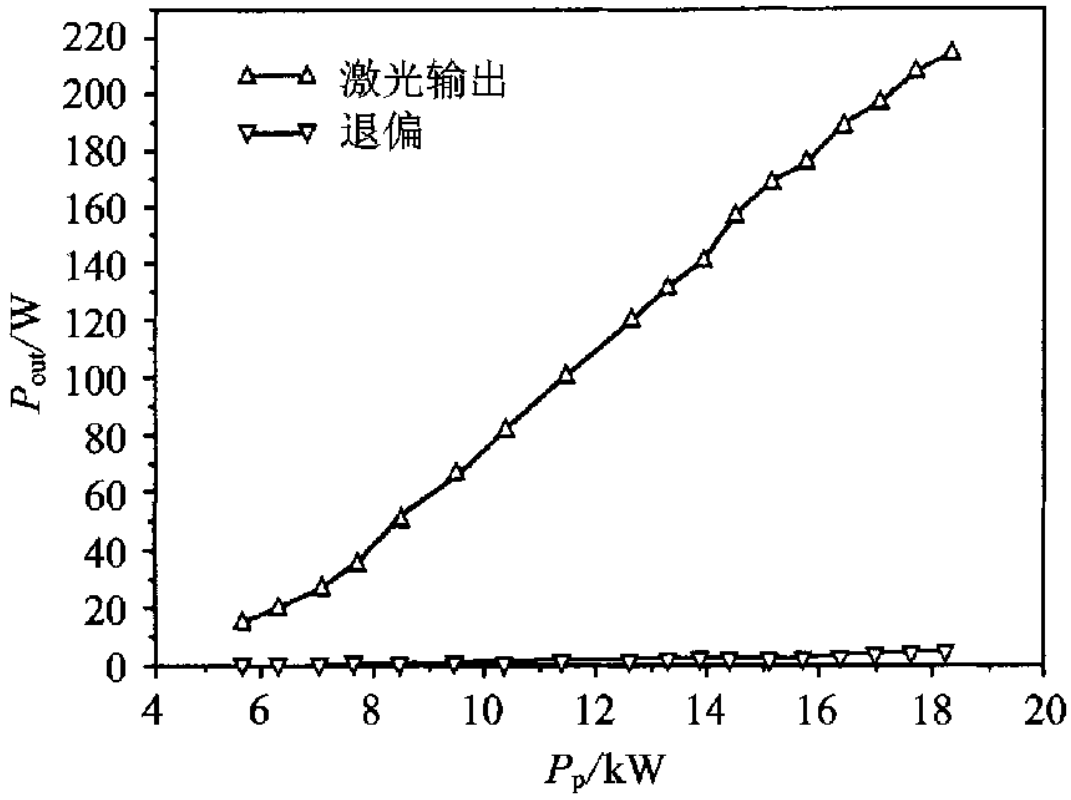


图 10.9.8　Nd:YAG MOPA 系统输出功率 P_{out} 随泵浦功率 P_p 的变化

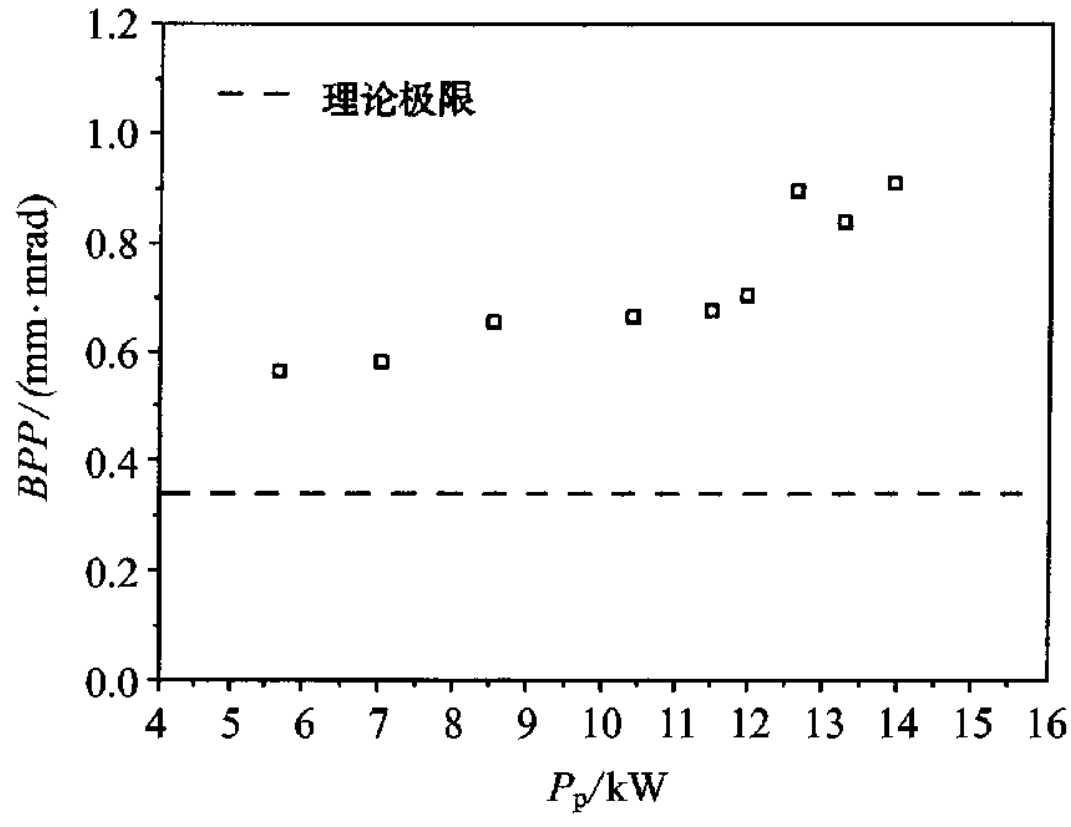


图 10.9.9　Nd:YAG MOPA 系统输出激光光束质量随泵浦功率的变化

§ 10.10　超高斯反射镜腔

为消除非稳腔输出耦合镜硬边光阑衍射的影响，可将非稳腔的反射镜用非均匀反射镜来代替，就构成了非均匀反射镜腔.非均匀反射镜起软边光阑作用，能改善输出光束的近场和远场特性.当反射镜呈高斯分布时，则成为高斯反射镜腔.用矩阵方法所作解析分析知其本征基模为高斯光束，远场亦为高斯分布，可得到光束传输因子 $M^2=1$ 的输出光束.但高斯基模填充因子小，提取效率不高.超高斯分布反射镜腔的提出是对非均匀反射腔的一大改进，它能兼顾光束质量和提取效率.超高斯镜的光强反

射率为

$$R(r)=R(0)\exp\left[-2\left(\frac{r}{\sigma}\right)^{n}\right] \tag{10.10.1}$$

式中 $R(0)$ 为中心 $(r=0)$ 反射率，σ 为镜上膜斑尺寸，n 为超高斯阶数.

对超高斯反射镜腔已用几何光学和衍射积分方法做了详细研究. 在几何光学近似下，光腔振荡模式由自洽场方程

$$\lambda E(r)=\frac{1}{M}\sqrt{R\left(\frac{r}{M}\right)}E\left(\frac{r}{M}\right) \tag{10.10.2}$$

求出，式中 $E(r)$ 为入射在超高斯镜上光的场振幅，λ、M 分别为本征值和放大率. 式(10.10.2)的基模解可表示为函数 $\sqrt{R\left(\frac{r}{M}\right)}$ 无穷乘积的形式

$$E_0(R)=A_0\prod_{k=1}^{\infty}\sqrt{R\left(\frac{r}{M^k}\right)}\Big/\sqrt{R(0)} \tag{10.10.3}$$

式中 A_0 为任意常数. 高阶模 $E_m(r)$ 由下式决定

$$E_m(r)=E_0(r)r^m,\ (m=1,2,\cdots) \tag{10.10.4}$$

m 阶模的本征值为

$$\lambda=\sqrt{R(0)}\,M^{-(m+1)} \tag{10.10.5}$$

因此，往返一周损耗为

$$\delta=1-\lambda^2=1-R(0)M^{-2(m+1)} \tag{10.10.6}$$

对于超高斯反射镜腔，式(10.10.3)收敛于与反射率同阶的超高斯函数，故超高斯镜上的基模表示为

$$E_0(r)=A_0\exp\left[-\left(\frac{r}{\omega_i}\right)^{n}\right] \tag{10.10.7}$$

$$\omega_i=\sigma(M^n-1)^{\frac{1}{n}} \tag{10.10.8}$$

因此，至少在几何光学近似下，基模场分布与镜面上反射率分布是相似的. 对基模，往返一周损耗为

$$\delta_0=1-\frac{R(0)}{M^2} \tag{10.10.9}$$

与超高斯阶数 n 无关. 由式(10.10.5)知超高斯反射镜腔的模式鉴别力为 $\frac{1}{M^2}$，即使对中等放大率，其鉴别力也是相当高的.

从式(10.10.1)和式(10.10.7)得到输出基模光束的近场光强分布

$$\begin{aligned}I(r)&=\mu_0^2(r)[1-R(r)]\\&=|A_0|^2\exp\left[-2\left(\frac{r}{\omega_i}\right)^{n}\right]\left\{1-R(0)\exp\left[-2\left(\frac{r}{\sigma}\right)^{n}\right]\right\}\end{aligned} \tag{10.10.10}$$

由式(10.10.10)知，当 $R(0)M^n>1$ 时，近场光强中心将出现一个凹陷，随超高斯阶数 n 的增加，凹陷宽度和深度都会增加，其远场功率(能量)向旁瓣分散得越多.当

$$R(0)M^n=1 \tag{10.10.11}$$

时，近场光强分布刚好平顶.因此，式(10.10.11)称为平顶条件，是设计超高斯镜腔的一个重要公式.

图 10.10.1 给出了用几何光学和衍射积分计算得到的超高斯反射镜腔输出镜上光束的光强分布.光腔由曲率半径 0.5 m 的全反射凸面镜和 $n=9,\sigma=2.03$ 的超高斯平面输出镜组成，腔长 450 mm，$M=1.8$，激活介质为 $\phi 6.3\times 75$ mm^2 的 Nd:YAG，图(a)为激光棒的光阑效应可忽略的计算结果.这时，几何光学与衍射积分的计算符合甚好.图(b)为在离凸面镜 130 mm 处置一直径6.1 mm的光阑后的计算结果，衍射积分的计算表明光强分布出现了调制.对这一激光器的理论和实验研究结果总结于图 10.10.1～图 10.10.5.图 10.10.2 和图 10.10.3 分别为超高斯反射镜腔输出光束的近场和远场分布.对 $n=9$ 时远场光强分布 I 随 θ 变化的理论和实验比较见图 10.10.4.图 10.10.5 给出了超高斯反射镜腔输出激光能量随泵浦能量变化的理论和实验比较.由图可知，随着超高斯阶数 n 的增加，输出激光能量和效率增加，但同时出现近场凹陷加深加宽和远场中心亮斑能量向旁瓣的分散.因此，针对具体的实验装置，n 有一最佳取值，以兼顾效率和光束质量.研究表明，当 $n>15$ 和 $M>1.5$ 时，几何光学分析是可行的，与实验结果和衍射积分计算基本一致.

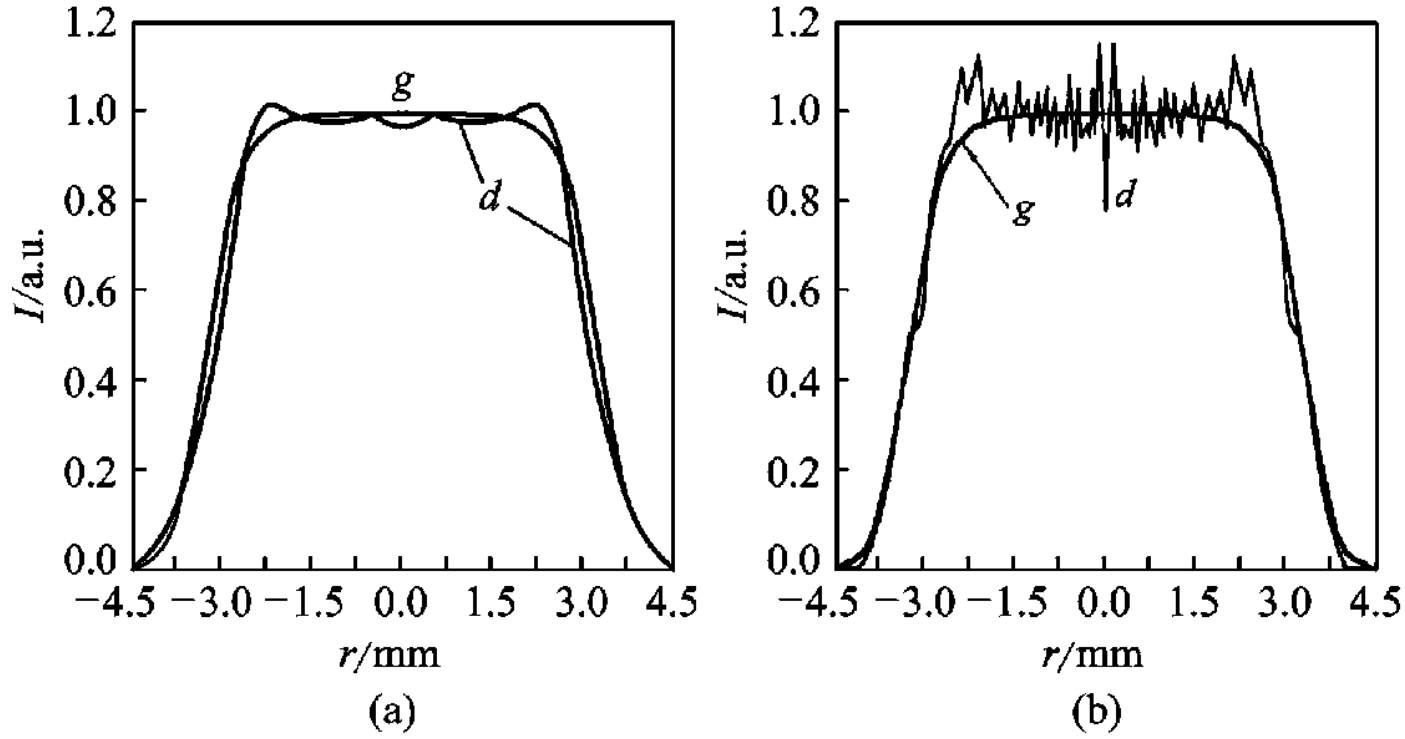


图 10.10.1　几何光学和衍射积分计算得到输出超高斯镜上的光强分布

(a) 激光棒光阑效应可以忽略；(b) 考虑光阑效应

g—几何光学；d—衍射积分

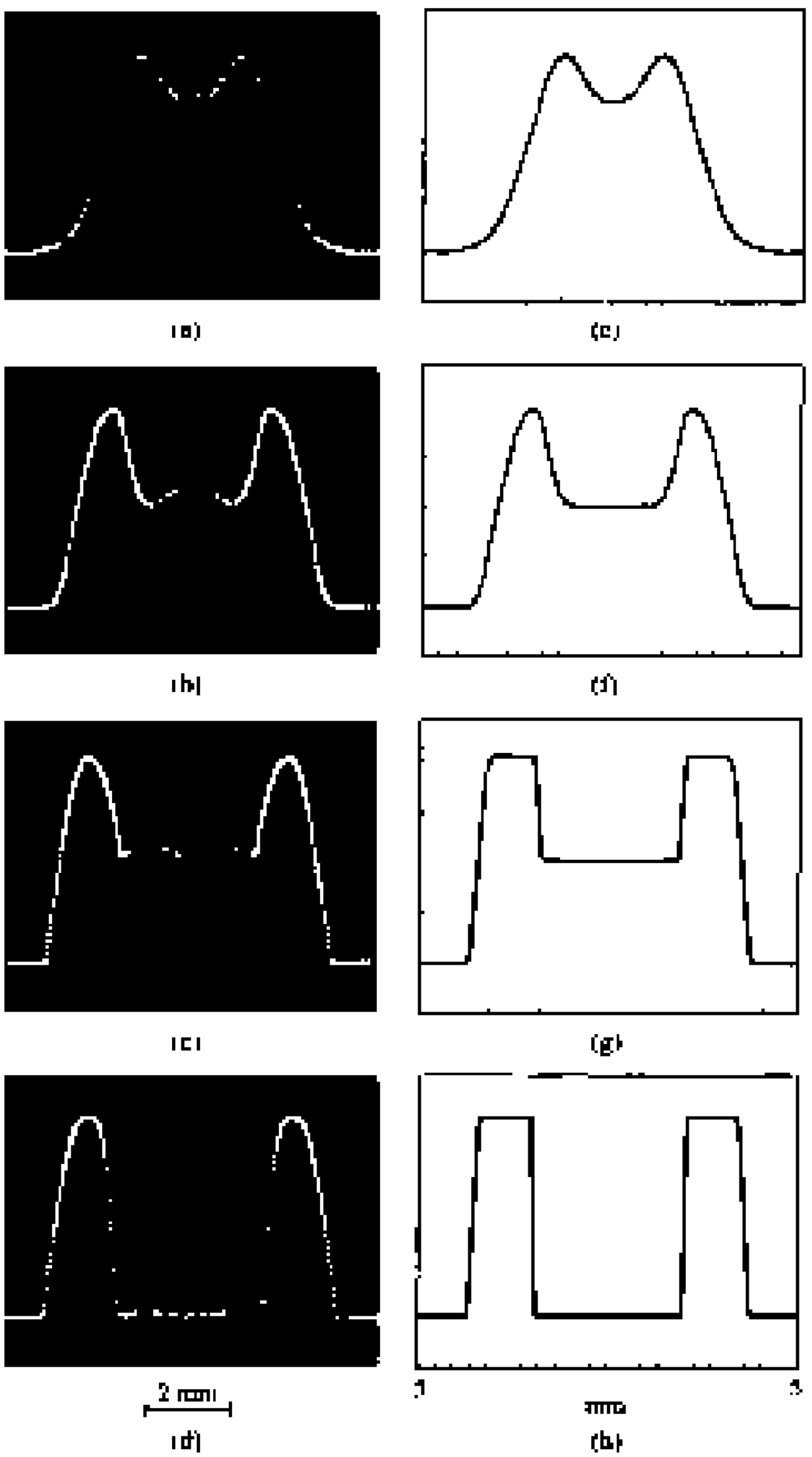


图 10.10.2 超高斯反射镜腔的近场光强分布

(a) $n=2.8$; (b) $n=9$; (c) $n=35$; (d) $n\to\infty$ (硬边反射镜)的实验结果;
(e)～(h)为对应几何光学计算结果

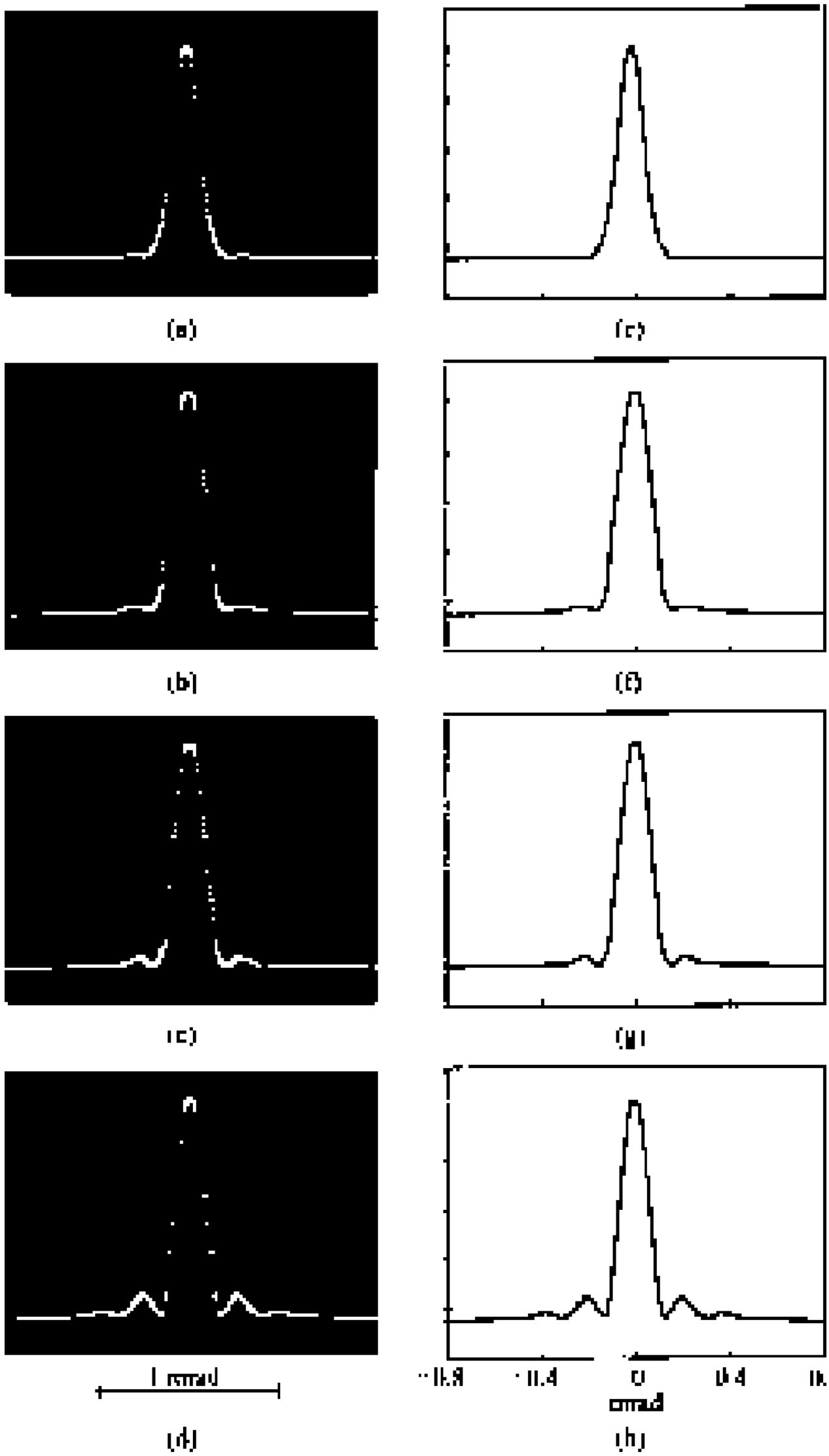


图 10.10.3　超高斯反射镜腔的远场光强分布

(a) $n=2.8$; (b) $n=9$; (c) $n=35$; (d) $n\to\infty$的实验结果;

(e) ~ (h) 为对应图 10.10.2 (e) ~ (h) 的傅里叶变换

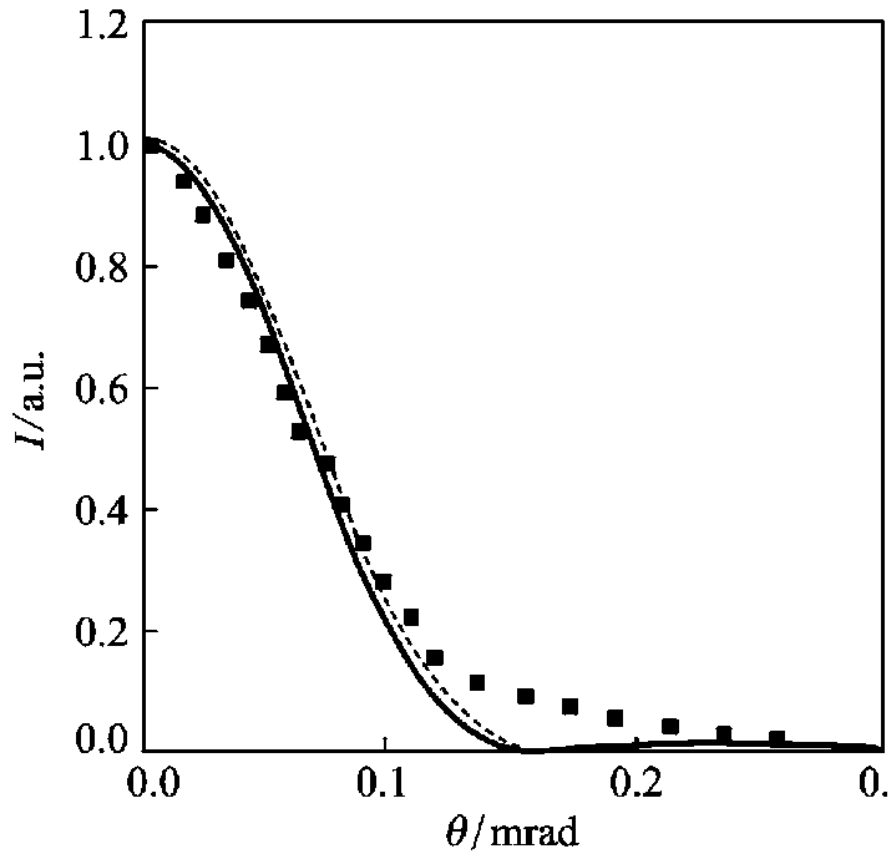


图 10.10.4　超高斯反射镜腔($n=9$)远场光强分布 I 的实验和理论结果的比较

"■"—实验值;"---"—几何光学近场计算结果的傅里叶变换;

"—"—图 10.10.2(b)的实验结果的傅里叶变换

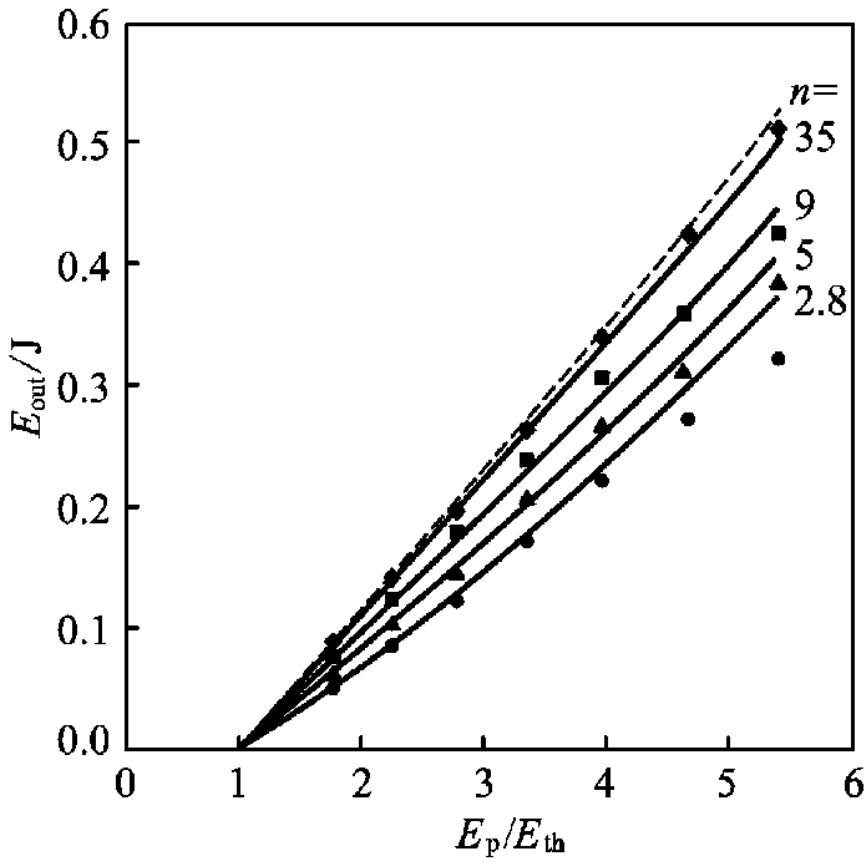


图 10.10.5　超高斯反射镜腔输出激光能量 E_{out} 随归一化泵浦能量 E_p/E_{th} 的变化

E_{th}—阈值泵浦能量;$n=2.8,5,9,35$,图中虚线对应于均匀反射镜腔($n\to\infty$)的结果

在二极管泵浦固体激光器中,也使用非均匀反射镜腔.图 10.10.6、图 10.10.7 为用于高功率二极管泵浦固体激光器的两类超高斯反射镜腔.图 10.10.6 为棒成像超高斯镜非稳腔,图 10.10.7 为近共心超高斯镜非稳腔.激光介质用两根 $\phi 8.5\times 40\ mm^2$ 的 Nd:YAG 棒串接,每根棒用长 40 mm 的高功率二极管阵列双侧泵浦.对图 10.10.6 的棒成像超高斯

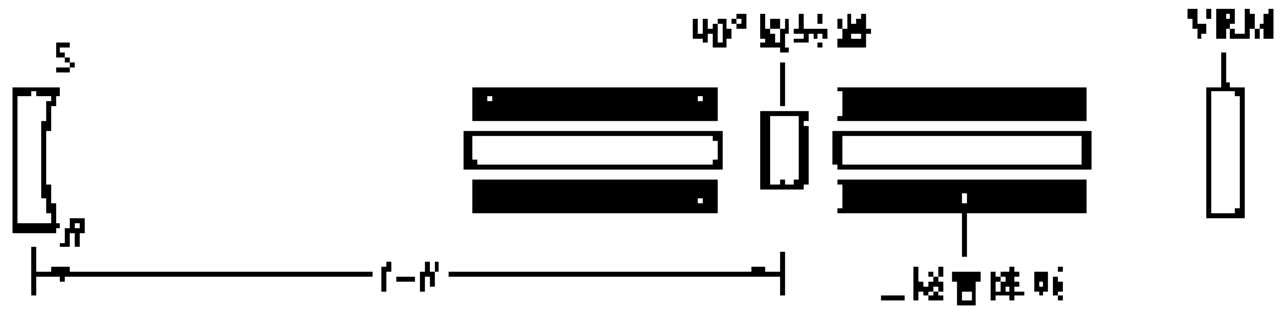


图 10.10.6　棒成像超高斯镜非稳腔

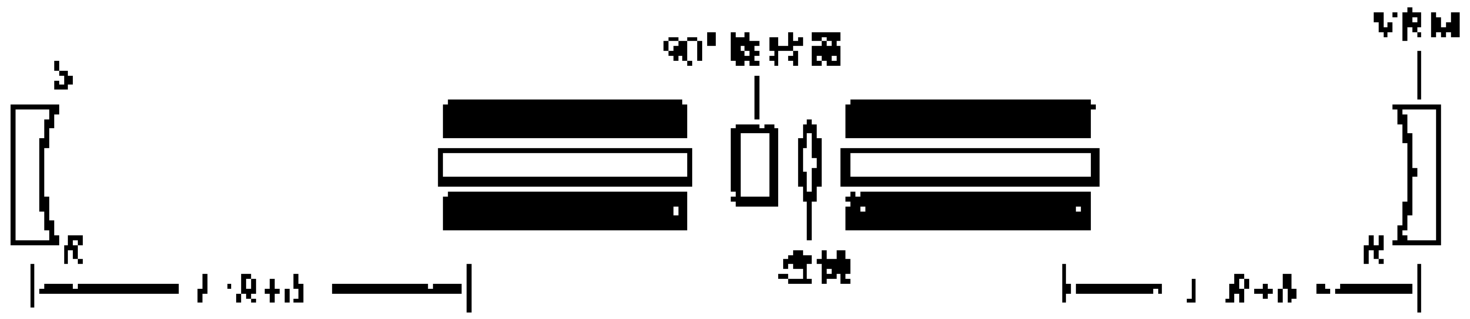


图 10.10.7　近共心超高斯非稳腔

非稳腔，曲率半径 $R=30$ cm 的凹面全反射镜 S 位于距两棒中点 30 cm 处，以满足棒成像条件. 输出镜 VRM 为 $n=6$ 超高斯反射镜，中心反射率 85%，膜斑尺寸 $\sigma=3$ mm. 在两棒中间置 90°石英偏振旋转器，用以补偿热致应力双折射. 当输入电功率 3.3 kW、占空比 15% 时，实验得到平均输出功率 335 W，总效率 10%，光束参数乘积3.8 mm•mrad（$M^2=11$）.

为进一步提高光束质量和补偿热效应，设计了图 10.10.7 位于 g 参数图上第三象限刚好在 $g_1g_2=-1$ 点之外的近共心非稳超高斯镜腔，并且用 §10.6 中 90°石英偏振旋转器和一个薄透镜的方案来更为有效地补偿热致应力双折射. 镜 S 和 VRM 曲率半径 R 均为 10 cm，VRM 为 $n=6$，$\sigma=3.5$ mm 超高斯反射镜. 偏置量 $\delta=l\cdot R$（l 为棒与同侧腔镜间距离）决定光腔放大率与棒热焦距关系，实验中应调节 δ 使输出光束亮度达到最大. 当平均输出功率为 185 W 时，光束参数乘积为 1.3 mm•mrad（$M^2=3.8$），当平均输出功率为 215 W 时，$BPP=2.1$ mm•mrad（$M^2=6$）. 实验中发现光束质量随输出功率变化比预期的要大，这是因为除棒的热透镜效应外，还出现热畸变，主要畸变是球差，由棒中非抛物线径向温度分布引起. 表 10.10.1 中总结了主要实验结果. 在表中同时给出了使用稳定腔的实验结果，以供比较. 由表知，使用棒成像超高斯镜非稳腔和近共心超高斯镜非稳腔，有效地提高了高功率二极管泵浦固体激光器输出激光光束质量.

表 10.10.1　实验结果比较

约束稳定腔		
	Ⅰ	Ⅱ
棒长/mm	40	70
输出功率/W	540	550
光束质量	60 mm•mrad($M^2=176$)	75 mm•mrad($M^2=221$)
棒热透镜(屈光度)	3.0	4.6
输入功率/kW	3.3	12
总效率/%	16.4	4.6

非 稳 腔		
	棒成像超高斯反射镜腔	近共心超高斯反射镜腔
棒长/mm	40	40
输出功率/W	335	185 215
光束质量	3.8 mm•mrad($M^2=11$)	1.3 mm•mrad($M^2=3.8$) 2.1 mm•mrad($M^2=6$)

注：Ⅱ为闪光灯泵浦，其余为二极管泵浦.

§10.11　非轴对称像散腔

非轴对称像散腔是指腔内光束在 xOz 和 yOz 面经历不同变换，甚至光腔在 xOz 和 yOz 面类型(约束稳定腔、临界腔或非稳定腔)都不同. 非轴对称腔可分为两类：(1) 简单像散腔：在这类腔中，虽然光束在 xOz 和 yOz 面有不同的变换特性，但光束参数在这二面上是可以分开的，其输出为简单像散光束；(2) 复杂像散腔：光束参数在 xOz 和 yOz 面有耦合，输出复杂像散光束. 对简单像散腔，可分别在 xOz 和 yOz 面上进行分析，问题比较简单. 本节主要讨论分析非轴对称复杂像散腔的方法，并介绍非轴对称板条固体激光器的有关实验研究结果.

一、非轴对称像散腔的分析方法

1. 复波前自再现法

现考虑图 10.11.1 所示一般非轴对称腔. 非轴对称腔镜 S_1、S_2 的变换矩阵为别是

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & 0 \\ \boldsymbol{R}_1 & \boldsymbol{E} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & 0 \\ \boldsymbol{R}_2 & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \tag{10.11.1}$$

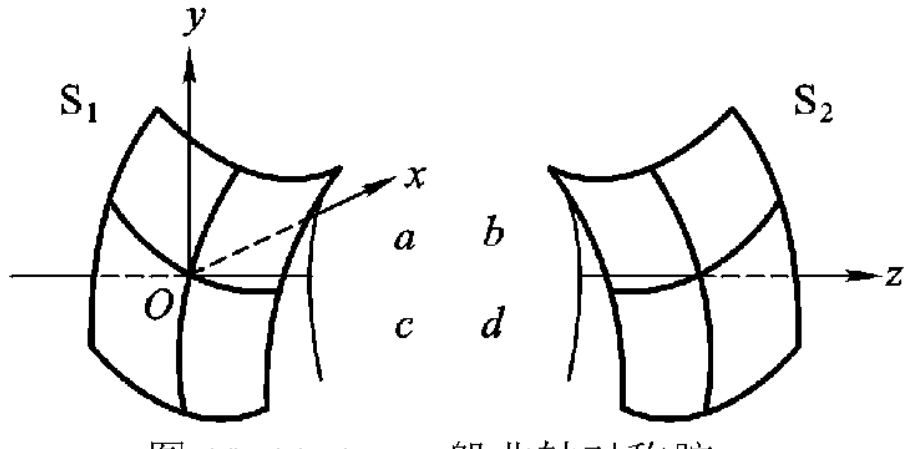


图 10.11.1　一般非轴对称腔

式中 $\boldsymbol{E}$ 为 2×2 单位矩阵. $\boldsymbol{R}_1$、$\boldsymbol{R}_2$ 是转置对称的 2×2 单位矩阵，其形式与坐标选取有关. 若设镜 S_2 的两个主曲率方向分别与 x、y 轴重合，镜 S_1 的两个主曲率方向与 x、y 轴交角为 θ，则有

$$\boldsymbol{R}_1=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\dfrac{2}{R_{1x}} & 0\\ 0 & -\dfrac{2}{R_{1y}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} \tag{10.11.2}$$

$$\boldsymbol{R}_2=\begin{bmatrix}-\dfrac{2}{R_{2x}} & 0\\ 0 & -\dfrac{2}{R_{2y}}\end{bmatrix} \tag{10.11.3}$$

式中 R_{ix}、R_{iy} 分别是镜 S_i $(i=1,2)$ 的两个主曲率半径.

以镜 S_1 为参考，光腔往返一周矩阵为

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{R}_2 & \boldsymbol{E}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{R}_1 & \boldsymbol{E}\end{bmatrix} \tag{10.11.4}$$

式中 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d}\end{bmatrix}$ 为光腔内单程变换 4×4 矩阵，上标 T 表示转置运算.

引入光腔 G 参数矩阵

$$\boldsymbol{G}_1=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\boldsymbol{R}_1 \tag{10.11.5}$$

$$\boldsymbol{G}_2=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_2 \tag{10.11.6}$$

后，可将式(10.11.4)写为

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{G}_1-2\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{E} & 2\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{b}\\ 4\boldsymbol{b}^{-1}\boldsymbol{a}\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{G}_1-2\boldsymbol{b}^{-1}\boldsymbol{G}_1-2\boldsymbol{b}^{-1}\boldsymbol{a}\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{a} & 2\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_2^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{E}\end{bmatrix} \tag{10.11.7}$$

式中上标 −1 表示矩阵求逆. 对图 10.11.1 所示非轴对称腔，在镜面处有

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B} \tag{10.11.8}$$

定义像散光束的 2×2 复波前矩阵

$$\boldsymbol{Q}^{-1}=\begin{bmatrix} q_{xx}^{-1} & q_{xy}^{-1} \\ q_{xy}^{-1} & q_{yy}^{-1} \end{bmatrix} \tag{10.11.9}$$

$\boldsymbol{Q}^{-1}$ 是高斯光束 q 参数的推广. 对简单像散高斯光束，$q_{xy}^{-1}=0$，$q_{xx}^{-1}\neq q_{yy}^{-1}$，对圆对称高斯光束，则进一步有 $q_{xx}^{-1}=q_{yy}^{-1}=q^{-1}$.

将式(10.11.7)代入镜 S_1 处复波前往返一周自再现条件

$$\boldsymbol{Q}^{-1}=(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}_1^{-1})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_1^{-1})^{-1} \tag{10.11.10}$$

并利用式(10.11.8)，得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}_1^{-1}&=\boldsymbol{B}^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}}{2}\right)\pm\mathrm{i}\boldsymbol{B}^{-1}\sqrt{\boldsymbol{E}-\left(\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}}{2}\right)^2}\\&=-\frac{1}{2}\boldsymbol{R}_1\pm\mathrm{i}\boldsymbol{b}^{-1}\boldsymbol{G}_2^{-1}\sqrt{\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{G}_1)},\quad \det\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{b}\neq0\end{aligned} \tag{10.11.11}$$

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_1^{-1}=\frac{\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}}{2}\pm\mathrm{i}\sqrt{\boldsymbol{E}-\left(\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}}{2}\right)^2},\quad \det\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{b}=0 \tag{10.11.12}$$

以镜 S_2 为参考，光腔往返一周矩阵为

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}' & \boldsymbol{B}'\\ \boldsymbol{C}' & \boldsymbol{D}'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{G}_2-2\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{E} & 2\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\\ 4\boldsymbol{d}\boldsymbol{b}^{-1}\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{G}_2-2\boldsymbol{b}^{-1\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_2-2\boldsymbol{d}\boldsymbol{b}^{-1}\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}} & 2\boldsymbol{d}\boldsymbol{G}_1^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{E}\end{bmatrix} \tag{10.11.13}$$

且有

$$\boldsymbol{B}'^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B} \tag{10.11.14}$$

同法可证镜 S_2 处复波前为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}_2^{-1}&=\boldsymbol{B}'^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{D}'^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}'}{2}\right)\pm\mathrm{i}\boldsymbol{B}'^{-1}\sqrt{\boldsymbol{E}-\left(\frac{\boldsymbol{A}'+\boldsymbol{D}'^{\mathrm{T}}}{2}\right)^2}\\&=-\frac{1}{2}\boldsymbol{R}_2\pm\mathrm{i}(\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{G}_1^{-1}\sqrt{\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{G}_2(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{G}_2)},\quad \det\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\neq0\end{aligned} \tag{10.11.15}$$

$$\boldsymbol{B}'\boldsymbol{Q}_2^{-1}=\frac{\boldsymbol{D}'^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}'}{2}\pm\mathrm{i}\sqrt{\boldsymbol{E}-\left(\frac{\boldsymbol{A}'+\boldsymbol{D}'^{\mathrm{T}}}{2}\right)^2},\quad \det\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}=0 \tag{10.11.16}$$

利用式(10.11.11)或式(10.11.12)、式(10.11.15)或式(10.11.16)求出 $\boldsymbol{Q}_1^{-1}$、$\boldsymbol{Q}_2^{-1}$ 后，将它们的实部和虚部分开，分别对实部和虚部对角化. 按照对角化复波前矩阵主对角元的物理意义，其实、虚部分别对应于

像散光束在对角化坐标系中主方向上的波面曲率半径和光束束宽，于是得出复杂像散两镜腔镜面处的光束参数. 当 $\boldsymbol{Q}_1^{-1}$ 或 $\boldsymbol{Q}_2^{-1}$ 求出后，利用广义 *ABCD* 定律，就可求出腔内任意处的 $\boldsymbol{Q}_1^{-1}$，从而得到该处的光束参数. 计算表明，对于从复杂像散非轴对称腔输出光束，不仅有简单像散光束的特征，而且，实部和虚部矩阵对角化角度 α 和 β 一般是不相等的，在传输过程中 α 和 β 也在发生变化. 这意味着光束的强度曲面和相位曲面的主方向不重合，还在以不同速度旋转，于是光束参数出现复杂耦合.

非轴对称腔的稳定性有多种判别法，其中以用光腔本征值判别较为简明，且物理意义明确. 以镜 S_1 为参考，设往返一周矩阵的本征矢 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{r}\\ \boldsymbol{p}\end{bmatrix}$（$\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{p}$ 分别为空间光线的位置和方向矢量）对应的本征值为 λ，它可由解久期方程

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}-\lambda\boldsymbol{E}\end{vmatrix}=0 \tag{10.11.17}$$

得出. 本征值 λ 共四个，由互为倒数的两对组成. 若 λ 由两对共轭复数组成，则光腔为约束稳定—稳定腔，若 λ 为两对互为倒数的实数组成，则光腔为非稳－非稳腔；若一组 λ 为共轭复数，另一组为实数，则光腔为约束稳定－非稳腔，亦称为混合腔. 因此，非轴对称像散腔的本征基模光束可以是高斯光束－高斯光束、点光束－点光束和高斯光束－点光束的组合. 当 $\lambda=\pm1$ 时为临界腔，复波前分析法失效.

注意到用公式在对 $\boldsymbol{Q}_1^{-1}$、$\boldsymbol{Q}_2^{-1}$ 求数值解时会出现多解，选解法则为：当 λ 为复数时，应取使光束束宽平方为正的解；当 λ 为实数时，选取满足微扰稳定，即 λ 绝对值大于 1 的解. 此外，按上述公式计算出镜 S_i 处的模参数值，应当与以腔内任意处（包括另一镜面处）为出发点，用广义 *ABCD* 定律求得数值相同.

式（10.11.11）、式（10.11.12）、式（10.11.15）、式（10.11.16）成立的前提是式（10.11.8）和式（10.11.14）. 容易证明，这对线性腔的腔镜处是成立的，但若计算参考面取在腔内任意处，则不一定成立. 此外对非轴对称环形腔，即使在腔镜处，也不一定成立. 当用复波前矩阵研究这类问题时，可用参考面移动技巧来解决. 现具体说明如下：设 RP 为非轴对称腔内某一参考面，以该处为起点，往返一周矩阵设为 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{bmatrix}$，其中 $\boldsymbol{B}$ 不满足式（10.11.8）. 从 RP 移动计算参考面至 RP′处，从 RP 至 RP′的变换矩阵为 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{l}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{O}$ 为 2×2 零矩阵，

$$\boldsymbol{l}=\begin{bmatrix} l & 0 \\ 0 & l \end{bmatrix} \tag{10.11.18}$$

以 RP′为参考，往返一周矩阵为

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{A}} & \widetilde{\boldsymbol{B}} \\ \widetilde{\boldsymbol{C}} & \widetilde{\boldsymbol{D}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{l} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & -\boldsymbol{l} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}+\boldsymbol{lC} & \boldsymbol{B}+\boldsymbol{lD}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{lC})\boldsymbol{l} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}-\boldsymbol{Cl} \end{bmatrix} \tag{10.11.19}$$

设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix},\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{bmatrix} \tag{10.11.20}$$

令

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}=\widetilde{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}} \tag{10.11.21}$$

则有

$$(C_3-C_2)l^2+[(A_3-A_2)-(D_3-D_2)]l-(B_3-B_2)=0 \tag{10.11.22}$$

式(10.11.22)是决定新的计算参考面 l 的方程. 当 l 求出后，在 RP′处式(10.11.21)成立，这样，就可用复波前自再现法对非轴对称腔进行分析.

2. 本征光线矢量法

在参考面 1 和 2 处空间光线的位置和方向矢量 $\boldsymbol{r}_j$、$\boldsymbol{p}_j$ $(j=1,2)$满足

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_2 \\ \boldsymbol{p}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{p}_1 \end{bmatrix} \tag{10.11.23}$$

式中 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{bmatrix}$ 为由参考面 1 至 2 的 4×4 变换矩阵.

利用程函公式和方向矢量的物理意义可推出

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{r} \tag{10.11.24}$$

式(10.11.23)、式(10.11.24)是在普遍情况下对空间光线成立公式. 现把它们用于图 10.11.1 的非轴对称腔. 以镜 S_1 为参考，光腔往返一周矩阵 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}$ 的本征矢 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{p} \end{bmatrix}$ 对应的本征值为 λ，则有

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}-\lambda\boldsymbol{E} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{p} \end{bmatrix}=0 \tag{10.11.25}$$

式中本征值 λ 可由解式(10.11.17)求出. 四个本征值中，每一对本征值对应了一组有物理意义的本征矢 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_j \\ \boldsymbol{p}_j \end{bmatrix}$，将由式(10.11.25)求得的本征矢

代入式(10.11.24)，求出 $\boldsymbol{Q}_1^{-1}$

$$\boldsymbol{Q}_1{}^{-1}=\begin{bmatrix} q_{xx}^{-1} & q_{xy}^{-1} \\ q_{xy}^{-1} & q_{yy}^{-1} \end{bmatrix}=\frac{1}{x_1y_2-x_2y_1}\begin{bmatrix} p_{1x} & p_{2x} \\ p_{1y} & p_{2y} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_2 & -x_2 \\ -y_1 & x_1 \end{bmatrix} \tag{10.11.26}$$

由此易得

$$q_{xx}^{-1}=\frac{y_2p_{1x}-y_1p_{2x}}{x_1y_2-x_2y_1} \tag{10.11.27}$$

$$q_{xy}^{-1}=\frac{x_1p_{2x}-x_2p_{1x}}{x_1y_2-x_2y_1}=\frac{y_2p_{1y}-y_1p_{2y}}{x_1y_2-x_2y_1} \tag{10.11.28}$$

$$q_{yy}^{-1}=\frac{x_1p_{2y}-x_2p_{1y}}{x_1y_2-x_2y_1} \tag{10.11.29}$$

同法可求出镜 S_2 处的复波前 $\boldsymbol{Q}_2^{-1}$ 和腔内任意处的复波前矩阵.将复波前实、虚部分开后分别对角化就得到非轴对称腔的本征光束参数.

使用本征光线矢量法时的选解法则与复波前自再现法相同.

2. 复光线数值迭代法

三维像散光束可用两条用 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{r}_j \\ \boldsymbol{p}_j\end{bmatrix}(j=1,2)$ 表征的复光线来表示

$$\boldsymbol{r}_j=\begin{bmatrix} r_{jx} \\ r_{jy}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{p}_j=\begin{bmatrix} p_{jx} \\ p_{jy}\end{bmatrix} \tag{10.11.30}$$

式中 r_x、r_y、p_x、p_y 分别表示光线在横平面 xOy 上的坐标和方向，或其用矩阵写为

$$\boldsymbol{r}=\begin{bmatrix} r_{1x} & r_{2x} \\ r_{1y} & r_{2y}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{p}=\begin{bmatrix} p_{1x} & p_{1y} \\ p_{2x} & p_{2y}\end{bmatrix} \tag{10.11.31}$$

亦可等价地用四条实光线表示，它们分别是式(10.11.30)的实部(用下标 r 记)和虚部(用下标 i 记)

$$\begin{bmatrix} r_{jx} \\ r_{jy} \\ p_{jx} \\ p_{jy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r_{jrx} \\ r_{jry} \\ p_{jrx} \\ p_{jry}\end{bmatrix}+i\begin{bmatrix} r_{jix} \\ r_{jiy} \\ p_{jix} \\ p_{jiy}\end{bmatrix} \tag{10.11.32}$$

$\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{p}$ 通过变换矩阵为 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{bmatrix}$ 的非轴对称光学系统的传输用公式

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{r}_2' \\ \boldsymbol{p}_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{p}\end{bmatrix} \tag{10.11.33}$$

描述，式中不带撇和带撇量分别表示变换前、后的参数.

用复波前矩阵 $\boldsymbol{Q}^{-1}$ 表示的像散光束满足式(10.11.24)，在经式(10.11.33)变换后有

$$\boldsymbol{Q}'^{-1}=\boldsymbol{p}'\boldsymbol{r}'^{-1} \tag{10.11.34}$$

现将这一方法用于分析非轴对称腔.设以腔内某处为参考(对应复波前为 $\boldsymbol{Q}^{-1}$)，往返一周矩阵为 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{bmatrix}$，将式(10.11.24)、式(10.11.33)代入公式

$$\boldsymbol{Q}_1'^{-1}=(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}^{-1})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{-1}) \tag{10.11.35}$$

注意到自再现条件下带撇量和不带撇量无区别(统一用不带撇量表示)，并取单位 $\boldsymbol{r}$ 矩阵光线

$$\boldsymbol{r}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{10.11.36}$$

则得

$$\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{p}\boldsymbol{B}\boldsymbol{p} \tag{10.11.37}$$

令

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{bmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}C_1 & C_2\\ C_3 & C_4\end{bmatrix},\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}D_1 & D_2\\ D_3 & D_4\end{bmatrix} \tag{10.11.38}$$

代入式(10.11.37)，展开得

$$\begin{cases}p_{1x}^2B_1+p_{2x}^2B_4+p_{1x}p_{2x}(B_2+B_3)+p_{1x}(A_1-D_1)+\\ p_{2x}(A_3-D_2)-C_1=0\\ p_{2x}^2B_3+p_{1x}p_{2x}B_1+p_{1x}p_{2y}B_2+p_{2x}p_{2y}B_4+p_{1x}A_2+\\ p_{2x}(A_4-D_1)-p_{2y}D_2-C_2=0\\ p_{2x}^2B_2+p_{1x}p_{2x}B_1+p_{1x}p_{2y}B_3+p_{2x}p_{2y}B_4-p_{1x}D_3+\\ p_{2x}(A_1-D_4)+p_{2y}A_3-C_3=0\\ p_{2x}^2B_1+p_{2y}^2B_4+p_{2x}p_{2y}(B_2+B_3)+p_{2x}(A_2-D_3)+\\ p_{2y}(A_4-D_4)-C_4=0\end{cases} \tag{10.11.39}$$

将式(10.11.39)中第1、2式分别对 p_{1x}、p_{1y} 求解，得

$$p_{1x}=\frac{1}{2B_1}\{(D_1-A_1)-(B_2+B_3)p_{2x}\pm\sqrt{[(B_2+B_3)p_{2x}+(A_1-D_1)]^2-4B_1[B_4p_{2x}^2+(A_3-D_2)p_{2x}-C_1]}\} \tag{10.11.40}$$

$$p_{2y}=\frac{1}{2B_4}\{(D_4-A_4)-(B_2+B_3)p_{2x}\pm\sqrt{[(B_2+B_3)p_{2x}+(A_4-D_4)]^2-4B_4[B_1p_{2x}^2+(A_2-D_3)p_{2x}-C_4]}\} \tag{10.11.41}$$

由 $\boldsymbol{Q}^{-1}$ 的转置对称性，可推知

$$p_{1y} = p_{2x} \tag{10.11.42}$$

显然，一旦 p_{2x} 求得，便可由式(10.11.40)～式(10.11.42)解出 p_{1x}、p_{1y}、p_{2y}，对应的 $\boldsymbol{Q}^{-1}$ 从式(10.11.24)求出，于是问题得以解决. p_{2x} 可由数学上熟知的数值迭代法计算出来，计算步骤为

令

$$p_{2x} = a\exp(\mathrm{i}\theta), \quad 0 \leqslant a < \infty, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \tag{10.11.43}$$

a 为某一初值，表示为 a_0，将式(10.11.43)、式(10.11.40)、式(10.11.41)代入式(10.11.39)中第3式，在 $\theta \in [0, 2\pi]$ 范围内，寻找出使该式左端取绝对值最小的 θ 值，写为 θ_0，然后令 $a = a_0 + h$ (h 为步长)，重复上述迭代计算，直至找到终值，$p_{2xf} = a_f\exp(\mathrm{i}\theta_f)$ 使该式之左端为零时为止.

本征光线矢量法和复光线迭代法揭示出光线和光束的联系，即满足一定关系的光线在传输中携带了对应光束参数的信息，它可以简单地从光线光学的变换公式得出.而且这两种方法的使用不受光腔参考面位置选取的限制，但是数值计算一般比较复杂.本章末列出参考文献中的大量计算例表明，这三种方法所得计算结果是相同的，它们是用来分析非轴对称像散腔的等价方法.

二、非轴对称像散腔的实验例

对有非轴对称几何形状的激光介质(例如板条)，使用合理设计的非轴对称腔的主要优点是在不降低效率和输出功率前提下，显著提高光束质量.对板条激光器，常将宽度方向上设计成非稳共焦型腔，厚度方向上设计成平行平面腔或约束稳定腔，即非稳－临界、非稳－稳定混合腔，通常可用柱面－柱面镜腔或球面－柱面镜腔，但也可用在轴对称或非轴对称腔内插入非轴对称光学元件(例如柱透镜)来实现.图10.11.2(a)为一个用于板条激光器的非轴对称离轴非稳－稳定腔，在两个柱面镜 S_1、S_2 中插入一个柱透镜，在板条宽度方向上设计成负支实共焦腔，厚度方向上为平行平面腔.作为比较实验，还用了图10.11.2(b)所示内置球面透镜的平行平面腔(其等价腔为平－凹稳定腔).

实验用 $7 \times 35 \times 131.7$ mm^3 Nd:GGG 板条介质，双灯泵浦，柱面镜 S_1、S_2 主曲率半径分别为 $R_1 = 519$ mm，$R_2 = 363$ mm，腔长 $L = 441$ mm，柱透镜和球面透镜焦距相等，均为 $f = 1000$ mm.这样，两腔在板条厚度方向上为相同的平－凹稳定腔.实验结果总结于图10.11.3、图10.11.4和图10.11.5.图10.11.3给出了当单次工作和当泵浦功率为12 kW，以

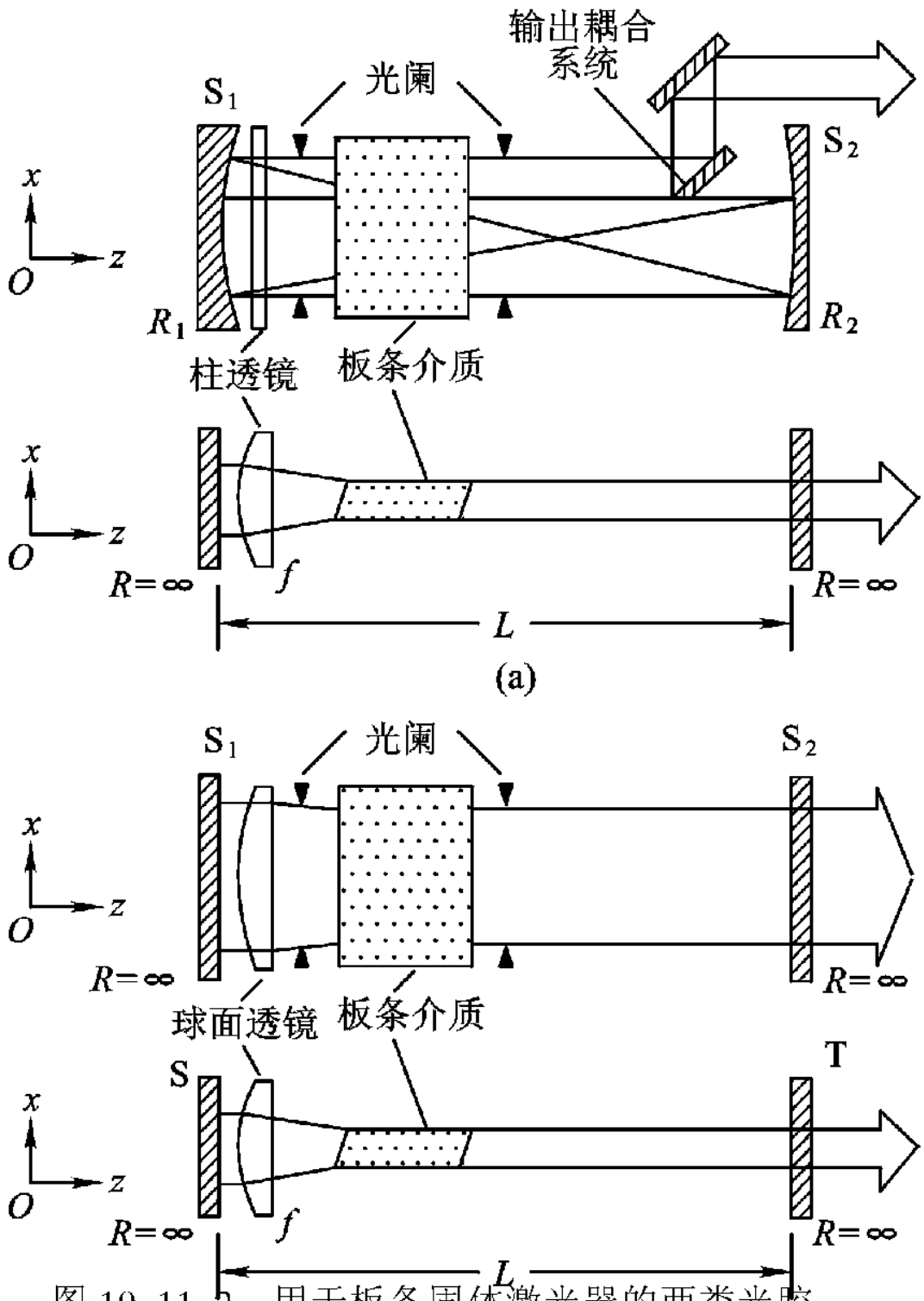


图 10.11.2　用于板条固体激光器的两类光腔

(a) 离轴负支实共焦非稳－稳定混合腔；(b) 平－凹稳定腔

	单次工作	输入功率12 kW 工作频率100 Hz
非稳－稳定腔	10 mm x y	
稳定腔		

图 10.11.3　单次工作和重复频率工作时混合腔和稳定腔输出光束的近场光斑

100 Hz 重复频率工作时，混合腔和稳定腔输出光束的近场光斑. 由图知，在板条宽度方向上，混合腔输出光束宽为 7 mm，约为稳定腔的 1 /3. 对两种腔型，近场光斑形状几乎不受输入功率和工作方式的影响.

输出光束远场发散全角随泵浦功率的变化示于图 10.11.4. 由图知，

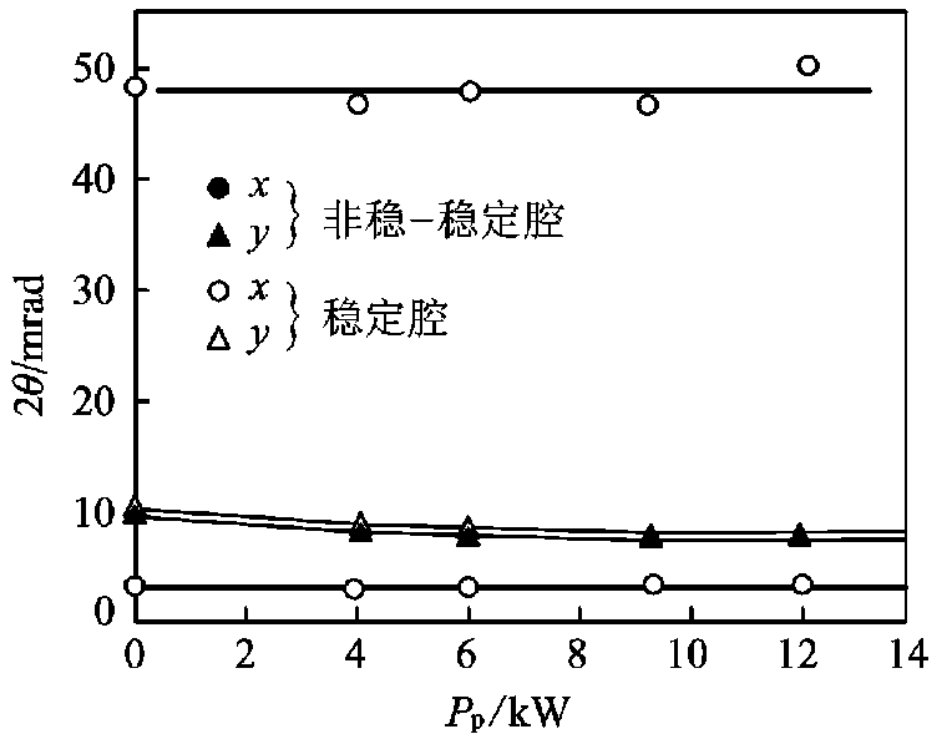


图 10.11.4　在板条宽度(x)和厚度(y)方向全发散角 2θ 随泵浦功率 P_P 的变化

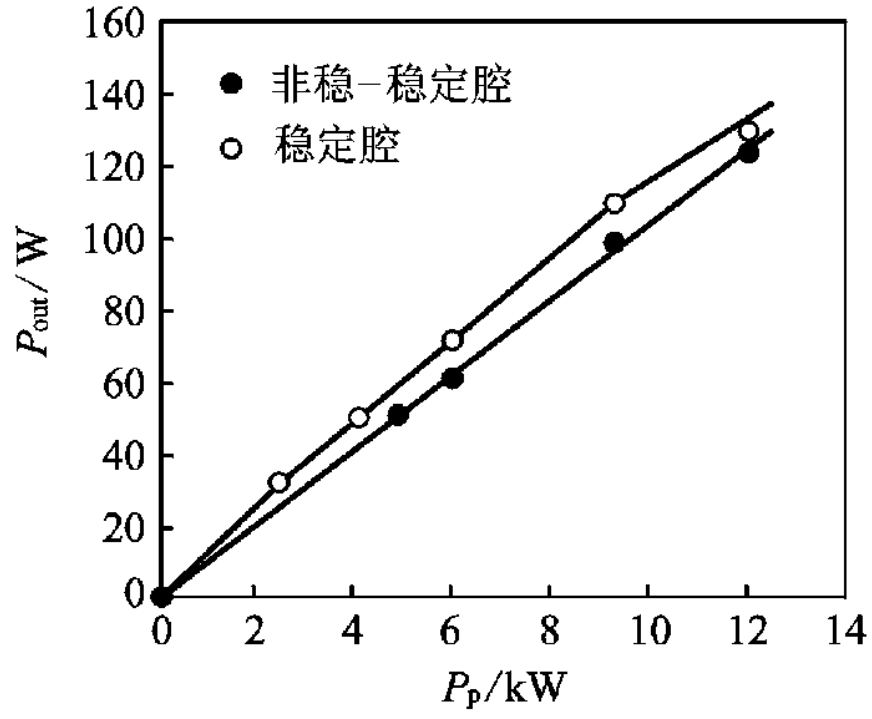


图 10.11.5　板条激光器输出功率 P_{out} 随泵浦功率 P_p 的变化

在宽度方向上，混合腔的输出光束发散全角约为 2.5 mrad，减小到稳定腔的 1/19，且不随泵浦功率变化. 在厚度方向上，两类腔的输出光束发散全角约为 8 mrad，随泵浦功率增加略有减小，这是由板条介质在厚度方向的热透镜效应引起的. 由以上分析可知，对混合腔 Nd:GGG 板条固体激光器，在板条宽度方向上光束参数乘积减小了 1/57，因此，光束质量提高了 57 倍.

平均输出功率示于图 10.11.5. 图中显示出对两种腔型，输出功率近似与泵浦功率成正比，当泵浦功率为 12 kW 时，输出功率约为 120 W. 实验证实了非轴对称像散腔用于板条固体激光器在宽度方向上显著提高光束质量的优点，而其效率几乎没有降低. 对图 10.11.2(a)的腔型作改进和最佳化设计后，可以期望使厚度方向的光束发散角近似与宽度方向相等，进一步提高输出激光光束质量.

§10.12　含偏振元件的光腔

由于实际应用目的，有时需要在光腔内放入普克尔(Pockels)盒、相位延迟器、布儒斯特(Brewster)角窗片、斯塔克(Stark)板等偏振元件，本节使用琼斯(Jones)矩阵讨论含偏振元件光腔的特性.

一、偏振态和琼斯矩阵

任意偏振光可以用在 x、y 方向的电场 E_x、E_y 构成的琼斯矢量表示为

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}E_x\\E_y\end{bmatrix} \tag{10.12.1}$$

式中

$$E_x=E_{0x}$$

$$E_y=E_{0y}\exp(\mathrm{i}\varphi) \tag{10.12.2}$$

φ 为 E_x 和 E_y 间的相位差，对圆偏振光 $\varphi=\pm\pi/2$，

$$E_{0x}=E_{0y}=E_0 \tag{10.12.3}$$

$$\boldsymbol{E}=\frac{E_0}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\\mp i\end{bmatrix} \tag{10.12.4}$$

对线偏振光 $\varphi=0$.对图 10.12.1 在径向和角向场振幅分别为 E_r、E_φ 的偏振光

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}E_r\cos\ \varphi-E_\varphi\sin\ \varphi\\E_r\sin\ \varphi+E_\varphi\cos\ \varphi\end{bmatrix} \tag{10.12.5}$$

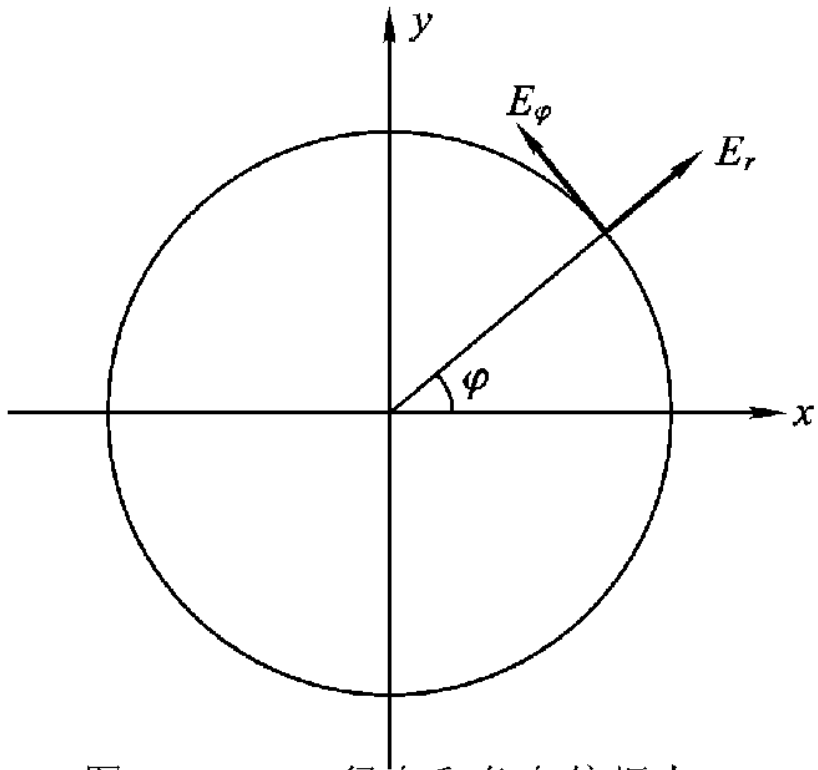


图 10.12.1　径向和角向偏振态

偏振元件对入射光场的偏振态的变化可表示为

$$\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{M}\boldsymbol{E}_1 \tag{10.12.6}$$

式中 $\boldsymbol{M}$ 为一个 2×2 矩阵，称琼斯矩阵. 取复共轭有

$$\boldsymbol{E}_2^* = \boldsymbol{E}_1\boldsymbol{M}^+ \tag{10.12.7}$$

$\boldsymbol{M}^+$ 为 $\boldsymbol{M}$ 的转置共轭阵.

现将常用偏振元件的琼斯矩阵总结如下：

1. 偏振片

设光线方向平行于 x 轴则有

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{p}}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{10.12.8}$$

若光线与 x 轴成 α 角，则

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{p}}(\alpha) = \boldsymbol{D}(\alpha)\boldsymbol{M}_{\mathrm{p}}(0)\boldsymbol{D}^{-1}(\alpha) \tag{10.12.9}$$

式中

$$\boldsymbol{D}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{10.12.10}$$

将式(10.12.8)、式(10.12.10)代入式(10.12.9)，得

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{p}}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha \\ \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix} \tag{10.12.11}$$

2. 布儒斯特角板和斯塔克偏振器

设 x 轴在板表面(图 10.12.2)，有

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} \left(\dfrac{2n}{n^2+1}\right)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{10.12.12}$$

式中 n 为介质折射率. N 个布氏角板堆积在一起，就构成斯塔克偏振器，其琼斯矩阵为

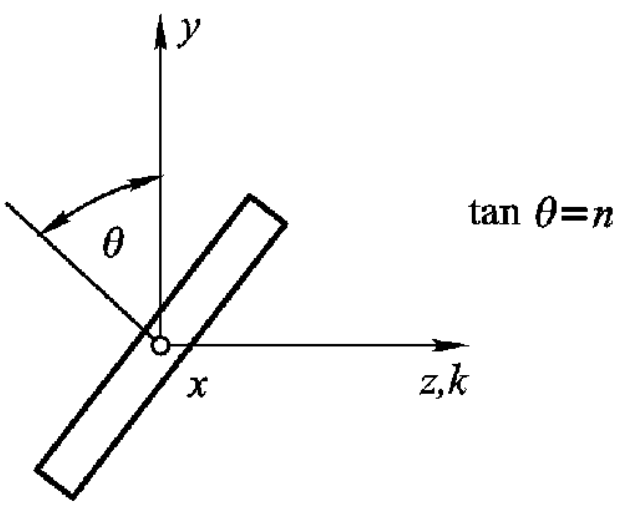


图 10.12.2　布儒斯特角板

$$(\boldsymbol{M}_{\mathrm{B}})^N = \begin{bmatrix} \left(\dfrac{2n}{n^2+1}\right)^{2N} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{10.12.13}$$

3. 相位延迟片

双折射晶体、普克尔盒、克尔盒等相位延迟片的琼斯矩阵均具有如下形式

$$\boldsymbol{M}_v(0,\delta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(-\mathrm{i}\delta) \end{bmatrix} \tag{10.12.14}$$

式中 δ 为相位移动量. 若主轴与 x 轴成 α 角，则

$$\boldsymbol{M}_v(\alpha,\beta)=\begin{bmatrix}\cos^2\alpha+\exp(-\mathrm{i}\delta)\sin^2\alpha & \sin\alpha\cos[1-\exp(-\mathrm{i}\delta)]\\ \sin\alpha\cos[1-\exp(-\mathrm{i}\delta)] & \sin^2\alpha+\exp(-\mathrm{i}\delta)\cos^2\alpha\end{bmatrix} \tag{10.12.15}$$

4. $\lambda/4$ 波片

此时 $\delta=\pi/2$，当光轴平行于 x 轴时，$\alpha=0$，

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{V}/\!/}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -\mathrm{i}\end{bmatrix} \tag{10.12.16}$$

光轴平行于 y 轴时，$\alpha=\pi/2$，

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{V}\perp}=\begin{bmatrix}-\mathrm{i} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{10.12.17}$$

光轴与 x 轴成 $\pm45°$ 时，

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{V}\pm45°}=\frac{(1-\mathrm{i})}{2}\begin{bmatrix}1 & \pm\mathrm{i}\\ \pm\mathrm{i} & 1\end{bmatrix} \tag{10.12.18}$$

5. 法拉第(Faraday)旋转器

法拉第旋转器使线偏振光的偏振面旋转角度为 δ，其琼斯矩阵为

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{F}}=\begin{bmatrix}\cos\delta & -\sin\delta\\ \sin\delta & \cos\delta\end{bmatrix} \tag{10.12.19}$$

二、偏振矩阵的本征值

设入射光通过一系列偏振元件，则总的偏振矩阵为

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}m_{11} & m_{12}\\ m_{21} & m_{22}\end{bmatrix}=\boldsymbol{M}_n\boldsymbol{M}_{n-1}\cdots\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1 \tag{10.12.20}$$

式中 $\boldsymbol{M}_1$、$\boldsymbol{M}_2$、…、$\boldsymbol{M}_n$ 分别为各偏振元件的琼斯矩阵. 若保持偏振状态不变，则有

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{E}_v=\gamma_v\boldsymbol{E}_v \tag{10.12.21}$$

式中 $\boldsymbol{E}_v$ 为本征 γ_v 值对应矢量，$v=1,2$. 将式(10.12.20)代入式(10.12.21)，求得

$$\gamma_{1,2}=\frac{m_{11}+m_{22}}{2}\pm\left[\left(\frac{m_{11}+m_{22}}{2}\right)^2-(m_{11}m_{22}-m_{12}m_{21})\right]^{\frac{1}{2}} \tag{10.12.22}$$

光通过偏振器的损耗因子 V_v 为

$$V_v=|\gamma_v|^2=\frac{\boldsymbol{E}_{v2}\cdot\boldsymbol{E}_{v2}^*}{\boldsymbol{E}_{v1}\cdot\boldsymbol{E}_{v1}^*} \tag{10.12.23}$$

由式(10.12.21)求得本征矢量在 y 和 x 方向上的分量之比为

$$\frac{E_{y,v}}{E_{x,v}}=\frac{\gamma_v-m_{11}}{m_{12}},\quad m_{12}\neq0 \tag{10.12.24}$$

三、光腔中的偏振本征态

现以图 10.12.3 中含有普克尔盒(它与光轴成 45°角偏振)和斯塔克偏振器的光腔为例进行分析.以镜 1 为参考,往返一周偏振矩阵为

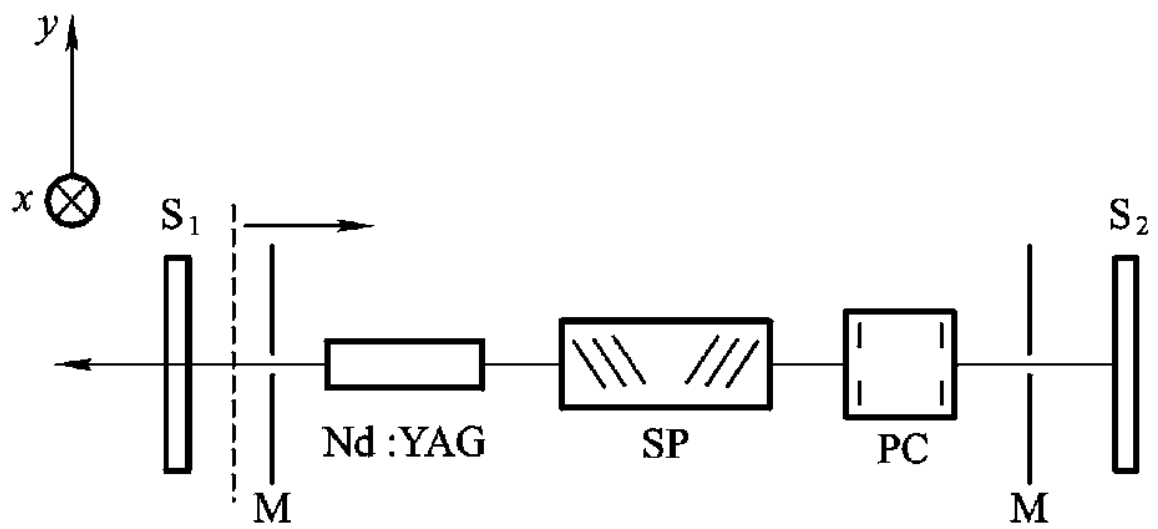


图 10.12.3　含斯塔克偏振器(SP)和普克尔盒(PC)的光腔

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}=\boldsymbol{M}_{s_1}\boldsymbol{M}_{\mathrm{B}}^{n}\boldsymbol{M}_{\mathrm{V},45^\circ}^{-1}\boldsymbol{M}_{s_2}\boldsymbol{M}_{\mathrm{V},45^\circ}\boldsymbol{M}_{\mathrm{B}}^{n} \tag{10.12.25}$$

式中 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{B}}^{n}$、$\boldsymbol{M}_{\mathrm{V},45^\circ}$矩阵如式(10.12.13)、式(10.12.18)所示,反射镜 S_1、S_2 的琼斯矩阵可写为

$$\boldsymbol{M}_{S_i}=r_i\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{10.12.26}$$

这是因为反射时入射场的分量方向保持不变,但可绕圆周转动(与此有关的波矢 $\boldsymbol{k}$ 是固定的),r_i 为振幅反射率.

将上面公式代入式(10.12.25),得到

$$\begin{aligned} m_{11}&=r_1r_2t^{2n}\left[1+\exp(2\mathrm{i}\delta)\right]/2 \\ m_{12}&=m_{21}=r_1r_2t^{2n}\left[1-\exp(2\mathrm{i}\delta)\right]/2 \\ m_{22}&=r_1r_2\left[1+\exp(2\mathrm{i}\delta)\right]/2 \end{aligned} \tag{10.12.27}$$

式中

$$t=\left(\frac{2n}{n^2+1}\right)^2 \tag{10.12.28}$$

利用式(10.12.27)和式(10.12.22),求得偏振态的本征值

$$\gamma_{1,2}=r_1r_2\,\frac{\exp(\mathrm{i}\delta)}{1+P}\left[\cos\delta\pm(P^2-\sin^2\delta)^{\frac{1}{2}}\right] \tag{10.12.29}$$

式中 P 为斯塔克斯偏振器的偏振度,定义为

$$P=\frac{I_y-I_x}{I_y+I_x}=\frac{(n^2+1)^{4m}-(2n)^{4m}}{(n^2+1)^{4m}+(2n)^{4m}} \tag{10.12.30}$$

I_x、I_y 分别为 x、y 方向的光强.

光通过偏振元件引起的附加损耗可用透过率 T_{P_v} 来描述,定义为

$$T_{P_v}=\left|\frac{\gamma_v}{r_1 r_2}\right|^2,\quad v=1,2 \tag{10.12.31}$$

于是，附加损耗为

$$1-T_{P_v}=\begin{cases}\dfrac{P+\sin^2\delta \mp \cos\delta\,(P^2-\sin^2\delta)^{\frac{1}{2}}}{(1+P)^2}, & P^2\geqslant\sin^2\delta\\[2ex] \dfrac{2P}{1+P}, & P^2\leqslant\sin^2\delta\end{cases} \tag{10.12.32}$$

当 $P=1$ 时，式(10.12.32)简化为

$$1-T_{P_1}=\sin^2\delta \tag{10.12.33}$$

$$1-T_{P_2}=1$$

即 $v=2$ 态损耗为 100%，$v=1$ 态损耗与 $\sin^2\delta$ 有关，在自激时，仅有 $v=1$ 态出现.

若 $P<1$，则损耗与 P 和 δ 有关，且 $T_{P_1}>T_{P_2}$，其结果是只有本征态 1 出现. 值得注意的是，当

$$\delta_c\leqslant\delta\leqslant 180-\delta_c \tag{10.12.34}$$

$$\sin\delta_c=P \tag{10.12.35}$$

时，损耗与加在普克尔盒上的电压无关.

由式(10.12.24)可求出场强分量之比和相差

$$\frac{E_{y,v}}{E_{x,v}}=\mathrm{i}\,\frac{P\cos\delta\pm(P-\sin^2\delta)^{\frac{1}{2}}}{(1-P)\sin\delta} \tag{10.12.36}$$

当 $P^2\geqslant\sin^2\delta$ 时相位差与 δ 无关，且等于 90°，但场强分量之比却与 P 和 δ 有关，且不等于 1，这意味着变为椭圆偏振光.

§10.13　负支实共焦非稳腔：自滤波和自成像非稳腔

采用共焦型非稳腔可得到准直平面波输出，是高增益激光介质常选用的一类腔型，尤其是腔内无实焦点的正支虚共焦非稳腔已获得广泛应用. 负支实共焦非稳腔因腔内有实焦点，易引起光腔内光学元件损坏，在早期使用很少. 但负支非稳腔有对失调相对不灵敏的优点，专门设计的负支非稳腔不仅可避免实焦点的破坏作用，而且能得到比虚共焦腔更好的输出光束质量. 本节以自滤波和自成像负支共焦型非稳腔为例进行分析.

一、自滤波非稳腔

自滤波技术方案的提出是对负支实共焦非稳腔的重要改进. 其基本

原理是在图 10.13.1 的实共焦非稳腔中,适当选择位于两腔镜 S_1、S_2 共同焦面上的光阑宽度,使经过镜 S_1 反射后形成的爱里斑大小与之完全匹配.这样,中心亮斑能顺利通过光阑,被激活介质放大,进行傅里叶变换,为镜 S_2 所准直传输到光阑所在平面后再进行类似的传输变换,并耦合输出,而旁瓣则被滤波光阑截止,因此有很好的限模能力,能得到高光束质量的输出激光.

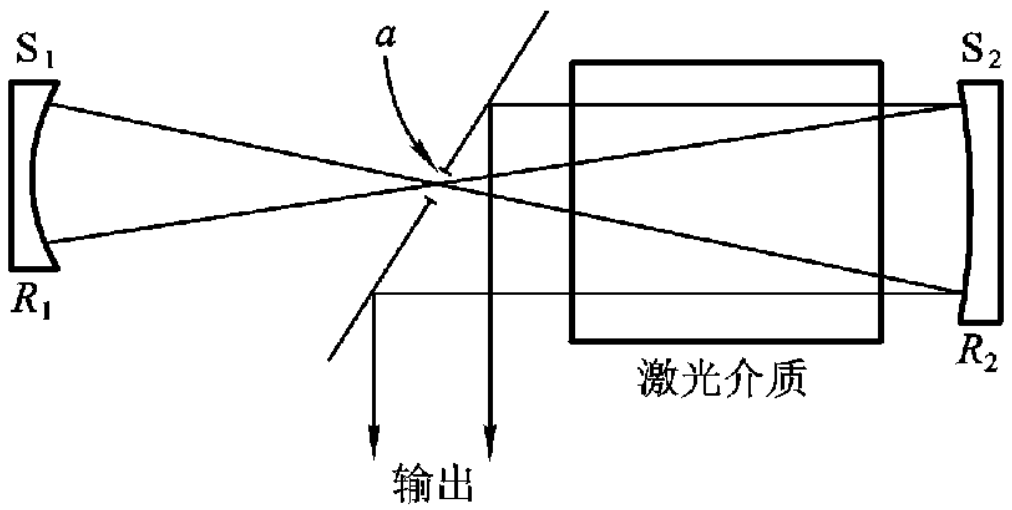


图 10.13.1　自滤波非稳腔

设计负支实共焦腔的基本方程为

$$R_1=\frac{2L}{M+1} \tag{10.13.1}$$

$$R_2=\frac{2ML}{M+1} \tag{10.13.2}$$

式中 R_1、R_2 分别为 S_1、S_2 镜曲率半径,L 为腔长,M 为非稳腔放大率.

自滤波条件可表示为

$$a=R_A=\frac{0.305\lambda R_1}{a} \tag{10.13.3}$$

式中 a 为滤波光阑半径,R_A 为爱里斑第一零点半径.由式(10.13.3)得到滤波光阑半径为

$$a=(0.305\lambda R_1)^{\frac{1}{2}} \tag{10.13.4}$$

自滤波非稳腔的设计方程还有有效放大率

$$M_{\text{eff}}=1.5M=-\frac{1.5R_2}{R_1} \tag{10.13.5}$$

和准直光束束宽

$$b=|M_{\text{eff}}|a \tag{10.13.6}$$

自滤波非稳腔利用光阑和镜 S_1 的组合对腔内光场起一个低通滤波器作用,有很好的横模鉴别力,其下一个低阶模的损耗比基模要高两个数量级以上,因此可得到很高的光束质量.同时,在焦面上存在实焦点的危险性被衍射效应消除.自滤波非稳腔另一特点是激光从腔内耦合输出.除

图 10.13.1 中用倾斜刮刀镜方式外，还可采用图 10.13.2 所示 λ/4 波片加上偏振器的偏振耦合输出. 自滤波非稳腔适于中等和高增益、菲涅尔数小于 20 的固体激光器使用.

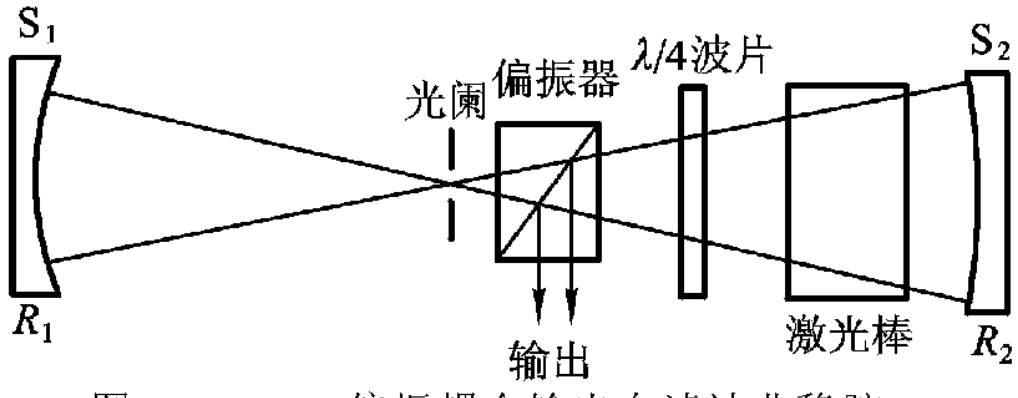


图 10.13.2　偏振耦合输出自滤波非稳腔

二、自成像非稳腔

对图 10.13.3 所示负支非稳环形腔，设 S_1、S_2 分别为曲率半径 R_1、R_2 的凹面镜，S_3、S_4 为平面镜，AP 为光阑. AP 在腔内环行一周自成像条件为

$$L_1-\frac{L_2}{|M|}+\frac{L_3}{|M|^2}=0 \tag{10.13.7}$$

式中 L_1、L_2、L_3 分别为镜 S_1 与 AP、S_1 与 S_2 和 AP 与 S_2 间距离，且 $L_3=L_{3a}+L_{3b}+L_{3c}$，M 为放大率. 共焦条件为

$$L_2=\frac{R_1+R_2}{2} \tag{10.13.8}$$

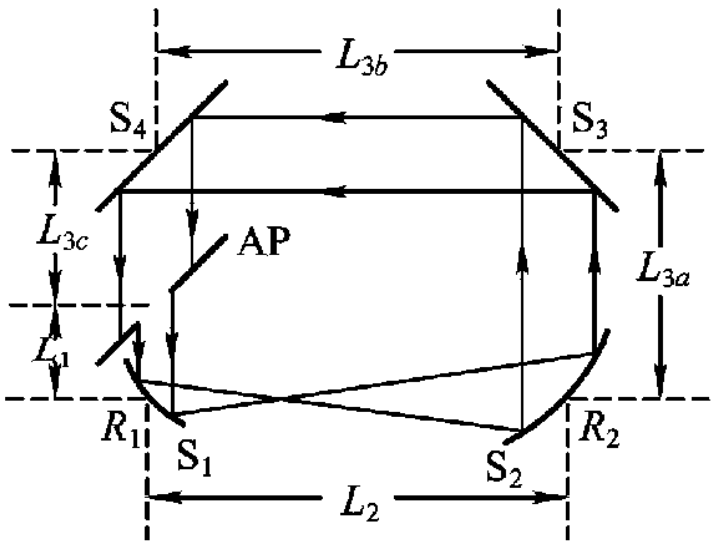


图 10.13.3　自成像负支非稳环形腔

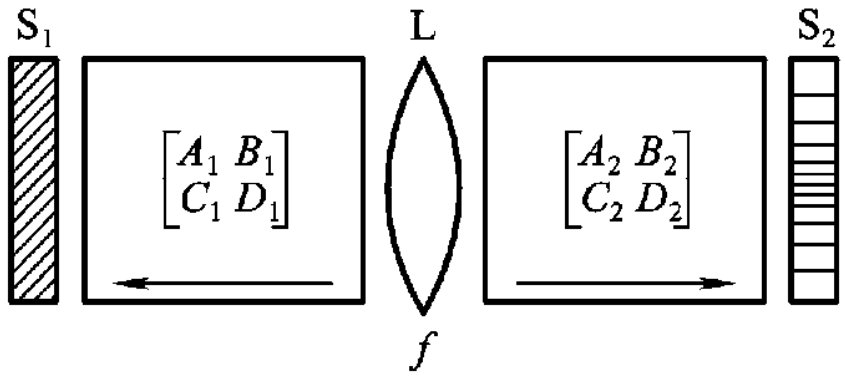


图 10.13.4　棒成像非稳腔示意图

自成像非稳腔利用像传递原理抑制衍射效应，得到高光束质量输出激光. 类似地，图 10.13.4 中的棒成像非稳腔也利用了这一原理. 图中置于两平面镜 S_1、S_2 间的固体激光棒可等效为有一可变焦距 f 的热透镜 L. 以 L 为参考，L 至镜 S_i 的单程变换矩阵为 $\begin{bmatrix}A_i & B_i\\ C_i & D_i\end{bmatrix}$，　$i=1,2$. 容易证明，当条件

$$D_1 = 0 \tag{10.13.9}$$

成立时，激光棒经镜 S_1 反射后成像于自身位置，因此式(10.13.9)称为棒成像条件.

棒成像负支非稳腔实验例见图 10.13.5，实验中使用 $\phi 6.3 \times 152$ mm^2 Nd:YAG 棒，双灯泵浦.光腔由曲率半径 $R_1 = 170$ mm 的全反射凹面镜 S_1 和超高斯输出镜 SGM(见 § 10.10)构成，超高斯阶数 5，峰值反射率 50%，超高斯宽度1.92 mm，置于离激光棒主面 $L_2 = 170$ mm处.镜 S_1 距激光棒主面 $L_1 = R_1 = 170$ mm 处，当激光棒的热焦距 $f = R_1$ 时，棒成像条件 $D_1 = 0$ 得以满足，实际中对应泵浦功率为 12 kW 左右，得到大于 200 W 的输出功率和比多模稳定腔低 20 倍的光束发散角.

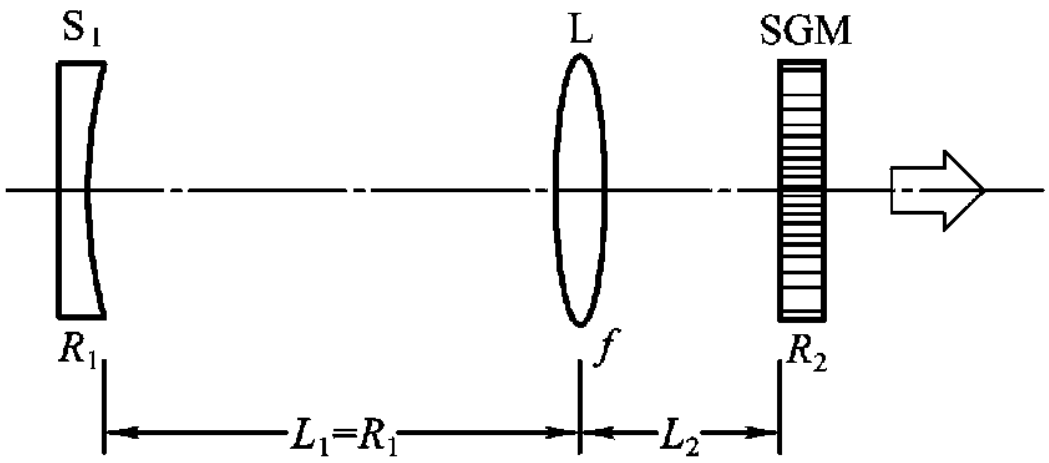


图 10.13.5　带超高斯反射镜的棒成像非稳腔

§ 10.14　多元件非稳腔

本节将分析简单两镜非稳腔，这些方法包括矩阵分析方法(G 参数法)和几何光学方法(利用高斯成像公式或牛顿方程).并以含一个内透镜的非稳腔为例，对这些方法的应用做了说明和比较.

一、矩阵光学分析方法

§8.4 对简单两镜非稳腔用矩阵分析方法可直接推广用于图10.14.1所示一般多元件非稳腔.这时，以镜 1 为参考，往返一周矩阵为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M} &= \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{2}{\rho_1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & b \\ c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{2}{\rho_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2aG_2 - 1 & 2bG_2 \\ \dfrac{2}{b}(2aG_1G_2 - G_1 - a^2G_2) & 4G_1G_2 - 2aG_2 - 1 \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{10.14.1}$$

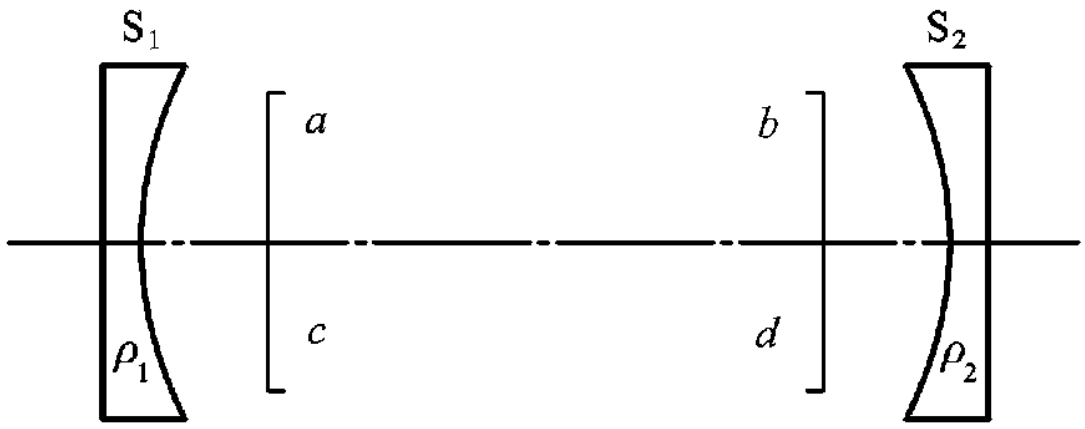


图 10.14.1　多元件非稳腔($G_1G_2>1$ 或 $G_1G_2<0$)

式中 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 为单程变换矩阵，G 参数为

$$G_1 = a - \frac{b}{\rho_1}$$

$$G_2 = d - \frac{b}{\rho_2} \tag{10.14.2}$$

由 $ABCD$ 定律和自再现条件知，对镜 1 处本征球面波波面曲率半径 R_1 应满足

$$R_1 = \frac{AR_1 + B}{CR_1 + D} \tag{10.14.3}$$

将式(10.14.1)代入，解之得

$$\frac{1}{R_1} = \frac{D-A}{2B} \pm \frac{1}{B}\sqrt{\left(\frac{A+D}{2}\right)^2 - 1}$$

$$= -\frac{1}{\rho_1} \pm \frac{1}{bG_2}\sqrt{G_1G_2(G_1G_2-1)} \tag{10.14.4}$$

或写为

$$R_1 = \frac{G_2(1-G_1) \pm \sqrt{G_1G_2(G_1G_2-1)}}{2aG_1G_2 - a^2G_2 - G_1}b \tag{10.14.5}$$

同法可求出镜 2 处本征球面波曲率半径 R_2

$$\frac{1}{R_2} = \frac{D'-A'}{2B'} \pm \frac{1}{B'}\sqrt{\left(\frac{A+D}{2}\right)^2 + 1}$$

$$= -\frac{1}{\rho_2} \pm \frac{1}{bG_1}\sqrt{G_1G_2(G_1G_2-1)} \tag{10.14.6}$$

式中 A'、B'、C'、D' 为以镜 2 以参考往返一周矩阵 $\begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$ 诸元. 式(10.14.6)亦可写为

$$R_2 = \frac{G_1(1-G_2) \pm \sqrt{G_1G_2(G_1G_2-1)}}{2dG_1G_2 - d^2G_1 - G_2}b \tag{10.14.7}$$

非稳条件为

$$\left|\frac{A+D}{2}\right|>1 \tag{10.14.8}$$

或用 G 参数写作

$$G_1 G_2>1\text{(正支非稳腔)或 } G_1 G_2<0\text{(负支非稳腔)} \tag{10.14.9}$$

将式(10.14.1)代入本征方程式(2.7.5)，可求出多元件非稳腔的往返一周放大率

$$M_{1,2}=2G_1 G_2-1\pm 2\sqrt{G_1 G_2(G_1 G_2-1)} \tag{10.14.10}$$

由此求出往返一周能量输出耦合率

$$\Gamma_{1,2}=1-\frac{1}{M_{1,2}^2} \tag{10.14.11}$$

式(10.14.4)～式(10.14.11)描述了多元件非稳定腔的主要特征.式中开方号前“±”号取法与§8.4相同，即对正支非稳腔取“+”，负支非稳腔取“−”.

式(10.14.5)中令 $R_1\to\infty$，得

$$G_1+a^2 G_2=2aG_1 G_2 \tag{10.14.12}$$

若令 $R_2\to\infty$，由式(10.14.7)得

$$G_2+d^2 G_1=2dG_1 G_2 \tag{10.14.13}$$

式(10.14.12)、式(10.14.13)都称为广义共焦条件.

现将这一方法用于分析图10.14.2所示含一个内透镜(焦距 f)的非稳腔，则

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1-\dfrac{l_2}{f} & l_1+l_2-\dfrac{l_1 l_2}{f} \\ -\dfrac{1}{f} & 1-\dfrac{l_1}{f} \end{bmatrix} \tag{10.14.14}$$

$$G_1=1-\frac{l_2}{f}-\frac{1}{\rho_1}\left(l_1+l_2-\frac{l_1 l_2}{f}\right)$$

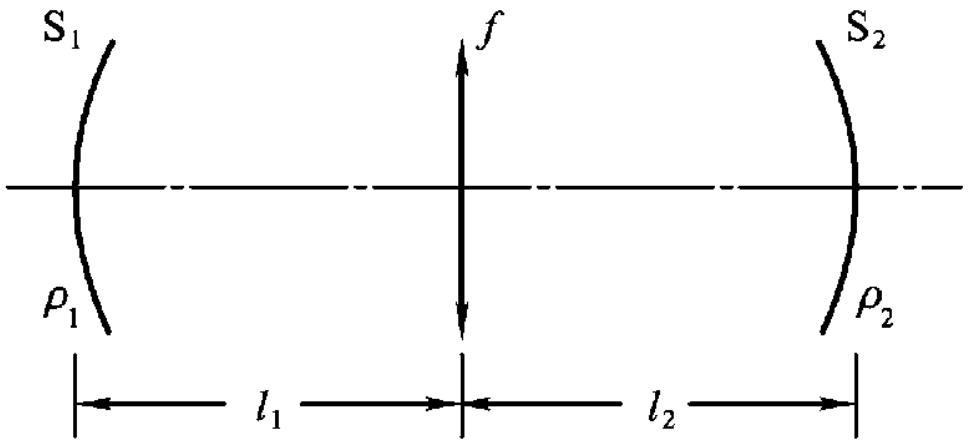


图 10.14.2　含内透镜的非稳腔

$$G_2 = 1 - \frac{l_1}{f} - \frac{1}{\rho_2}\left(l_1 + l_2 - \frac{l_1 l_2}{f}\right) \tag{10.14.15}$$

将式(10.14.4)～式(10.14.15)代入上面的公式，就能得到有关结果.

二、几何光学法

非稳腔的几何光学分析法是以高斯成像公式为基础的.为与矩阵方法符号保持一致性，高斯成像公式应按式(2.3.23)写作

$$\frac{1}{u} - \frac{1}{v} = \frac{1}{f} \tag{10.14.16}$$

现以图 10.14.2 所示非稳腔为例进行分析.将图 10.14.2 的非稳腔展开为图 10.14.3 的等效薄透镜序列

$$f_i = \rho_i/2, \quad i = 1,2 \tag{10.14.17}$$

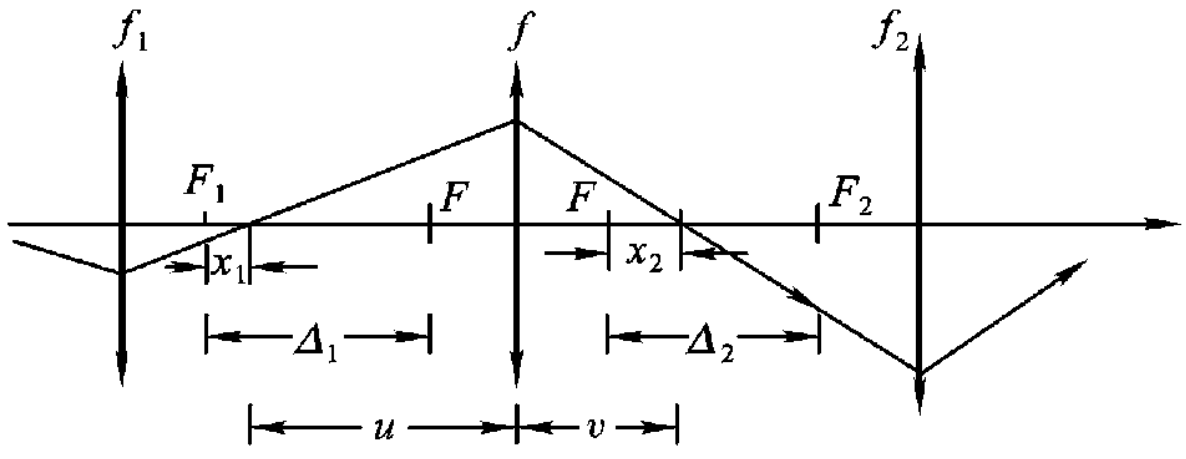


图 10.14.3　图 10.14.2 腔的等效薄透镜序列

几何共轭光线已在图中画出.按式(10.14.16)写出联立的高斯成像方程组求解，就得出以镜 1、2 为参考，决定非稳腔共轭物像点位置 R_1、R_2 的方程(它也就是本征球面波波面曲率半径)

$$p_i r_i^2 + q_i r_i + m_i = 0 \tag{10.14.18}$$

式中

$$\begin{aligned} p_i &= -\{[(f_i - l_i)(f - l_j) - f l_j](l_j - f - 2f_j) - f_j f^2\} \\ q_i &= -[f l_i + (f - l_i)(l_j - 2f_j)][(f - l_i) l_j + f l_i] \\ m_i &= f_i q_i, \quad i, j = 1,2;\ i \neq j, \text{下同} \end{aligned} \tag{10.14.19}$$

也可使用牛顿成像方程进行分析.为此将物、像距的参考面分别移动到成像透镜的前、后焦面上，设

$$\Delta_i = l_i - f - f_i \tag{10.14.20}$$

则式(10.14.16)化为牛顿方程(见图 10.14.3)

$$(\Delta_1 - x_1) x_2 = f^2 \tag{10.14.21}$$

式中 $\Delta_1 - x_1$、x_2 为分别以 F_1、F 为参考，共轭的物距和像距.用式

(10.14.21)对图 10.14.3 所示薄透镜序列递推,便得到共轭物像点的自再现方程

$$[\Delta_1(f_2^2-\Delta_2^2)+\Delta_2 f^2](x_1^2+f_1^2)+[f^2(f^2-2\Delta_1\Delta_2)-(f_1^2+\Delta_1^2)\cdot(f_2^2-\Delta_2^2)]x_1=0$$

$$[\Delta_2(f_1^2-\Delta_1^2)+\Delta_1 f^2]x_2^2+[(f_1^2-\Delta_1^2)\cdot(f_2^2-\Delta_2^2)-f^4]x_2+f^2[\Delta_1(f_2^2-\Delta_2^2)+\Delta_2 f^2]=0 \tag{10.14.22}$$

决定非稳腔共轭物像点位置 R_1、R_2 的方程为

$$R_1=-(f_1+x_1)$$

$$R_2=-\left(f_2+\frac{f_2^2}{\Delta_2-x_2}\right) \tag{10.14.23}$$

在几何光学分析法中,广义共焦条件,即有平行光耦合输出条件可表述为共轭光线过相应的焦点.例如,若要求在镜 1 和 f 透镜间输出平行光,可令式(10.14.22)中

$$x_2=0 \tag{10.14.24}$$

得到

$$\Delta_1(f_2^2-\Delta_2^2)+f^2\Delta_2=0 \tag{10.14.25}$$

值得注意的是,共焦型非稳腔共轭物像点的位置方程因平行光传输方向不同而异.若存在由镜 1 至 f 透镜方向平行光,则

$$R_1\to\infty$$

$$R_2=-\left(f_2+\frac{f_2^2}{\Delta_2}\right) \tag{10.14.26}$$

若平行光沿透镜 f 至镜 1 方向,则

$$R_1=-f_1$$

$$R_2=f-l_2 \tag{10.14.27}$$

对含内透镜非稳腔数值计算表明,使用上述方法所得计算结果是相同的,典型数值计算例见表 10.14.1 和图 10.14.4(a)、(b)、(c).图中还用光线追迹方法作出了腔内的几何共轭光线,它表征了腔内光线往返传输中的某些特征.

表 10.14.1　多元件非稳腔的数值计算例

参数 / 序号	ρ_1 (m)	ρ_2 (m)	f (m)	I_1 (m)	I_2 (m)	R_1 (m)	R_2 (m)	G_1	G_2	G_1G_2	M	Γ
Ⅰ	−1	−1	1	0.70	0.45	0.50	0.55	1.38	1.14	1.57	4.03	0.94
Ⅱ	−2	−4	3	0.50	0.30	0.76	1.11	1.28	1.02	1.30	2.85	0.88
Ⅲ	∞	−1.4	3	0.50	0.50	2.50	0.70	0.83	1.49	1.24	2.57	0.85

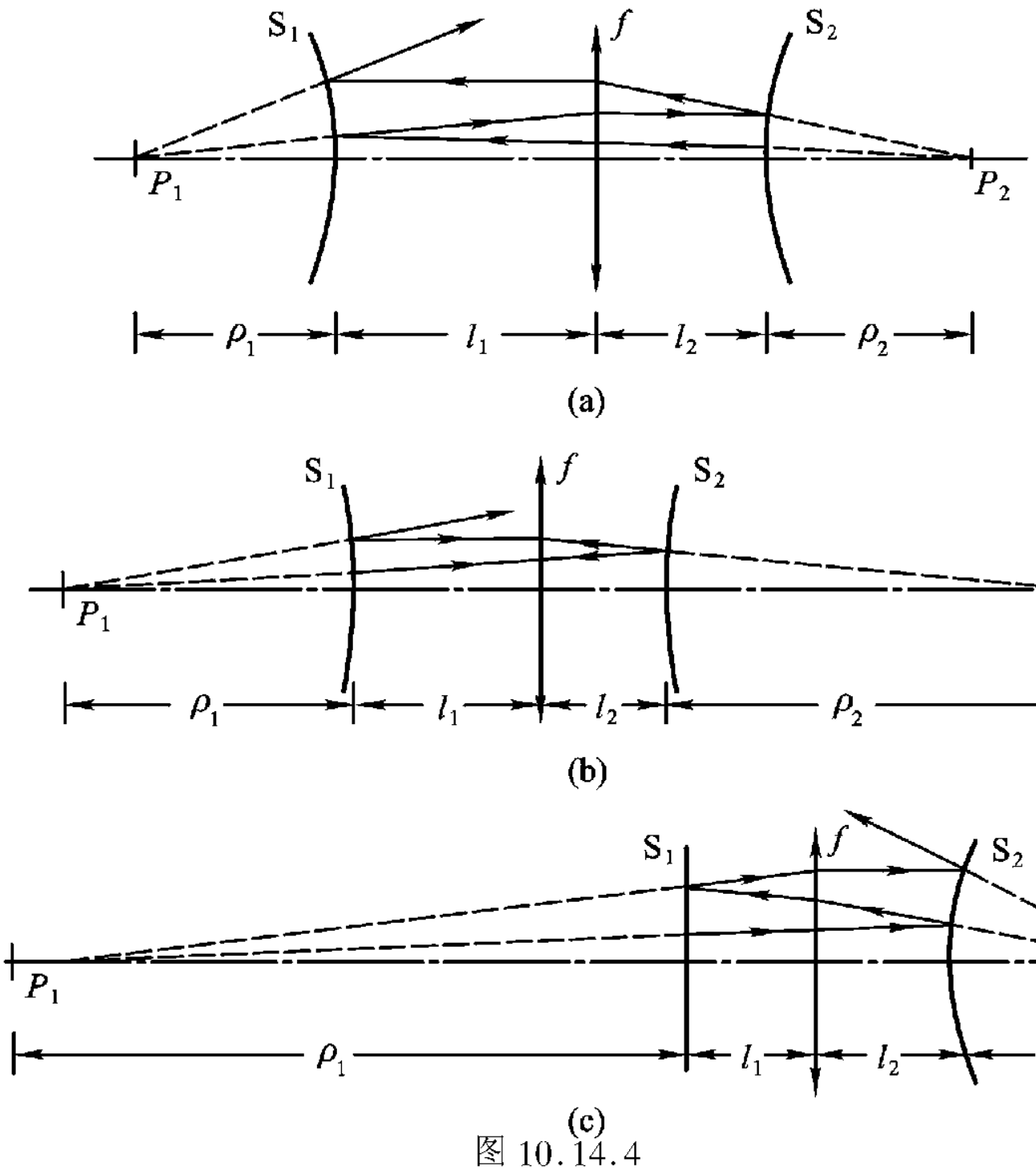


图 10.14.4

(a) 共焦型非稳腔Ⅰ(R_1、R_2 有限)及其几何共轭光线;

(b) 非共焦型非稳腔Ⅱ(R_1、R_2 有限)及其几何共轭光线;

(c) 共焦型非稳腔Ⅲ($R_1\to\infty$、R_2 有限)及其几何共轭光线

三、比较和讨论

现以含内透镜非稳腔为例,对上面使用三种方法的等价性给出数学证明.由式(10.14.23)中第一式得

$$x_1=-(f_1+R_1) \tag{10.14.28}$$

将式(10.14.28)代入式(10.14.22)中第一式,并利用式(10.14.20),关于 R_1 的各幂次整理,得到

$$p_1R_1^2+q_1R_1+m_1=0 \tag{10.14.29}$$

式中,p_1、q_1、m_1 为式(10.14.19)所示.于是式(10.14.18)与式(10.14.23)的等价性得到证明.其实,这是十分明显的结果.

将式(10.14.3)改写为

$$CR_1^2+(D-A)R_1-B=0 \tag{10.14.30}$$

将式(10.14.1)、式(10.14.14)、式(10.14.15)代入上式，得到

$$C=-\frac{p_1}{f_1 f_2 f^2}$$

$$D-A=-\frac{q_1}{f_1 f_2 f^2}$$

$$-B=-\frac{m_1}{f_1 f_2 f^2} \tag{10.14.31}$$

即

$$\frac{p_1}{C}=\frac{q_1}{D-A}=\frac{m_1}{(-B)}=-f_1 f_2 f^2 \tag{10.14.32}$$

故式(10.14.3)与式(10.14.18)同解，因此矩阵光学分析方法与几何光学方法(利用高斯成像公式或牛顿方程)是等价的.上面的证明方法亦可推广用于更为复杂的多元件非稳腔.

在矩阵光学分析法中，我们使用了腔镜处非稳腔的本征球面波波面曲率半径应当满足的自再现条件，而在几何光学方法中，用了共轭物像点的自再现条件，二者在几何光学意义下是等价的.但非稳腔内几何共轭光线(或等价地，本征球面波)在往返传输中不断被放大，经有限次往返后最终从侧面逸出腔外.换言之，非稳腔的往返一周放大率$|M|>1$，这一条件由式(10.14.10)和符号取舍法则予以保证.

所用这些方法各有特点.矩阵光学分析法对非稳腔的基模特征给出用往返一周矩阵元或G参数表示的正则描述，简明而又规范.计算表明，对复杂多元件非稳腔(例如含有多个内透镜的非稳腔)使用牛顿公式递推，迭代运算方便，并可直接写出光腔几何参数表示的非稳腔的设计方程(见§10.15).使用高斯成像公式的优点是可以直接得出共轭物像点的位置方程式(10.14.18)，而不必先推出它的自再现方程式(10.14.22).在多元件非稳腔的分析中，根据具体问题灵活使用这些等价的方法，常可带来不少方便.

§ 10.15　多元件共焦型非稳腔

高功率激光器使用的非稳腔中的激光介质本身可等效为一个具有可变焦距的热透镜，并在腔内插入望远镜系统以提高选模能力和用调整望远镜系统离焦量方法来补偿热透镜效应.为了得到准直平行光输出，常需工作在共焦状态.本节以含热透镜望远镜共焦型非稳腔作为复杂多元件

非稳腔的典型例，使用牛顿公式对这类光腔的主要物理特征进行分析.

图 10.15.1 所示多元件非稳腔，两腔反射镜曲率半径分别为 ρ_1、ρ_2（等效焦距 $f_1=\rho_1/2$，$f_2=\rho_2/2$），热透镜焦距 f_3，望远镜系统由像距 l_4，焦距分别为 f_4、f_5 的两薄透镜构成，其余长度参数见图，光腔几何长度 $L=l_1+l_2+l_3+l_4$，与 l_1、l_2、l_3、l_4 对应的离焦量分别用 Δ_1、Δ_2、Δ_3、Δ_4 表示，例如，望远镜离焦量 $\Delta_4=l_4-f_4-f_5$ 等等.

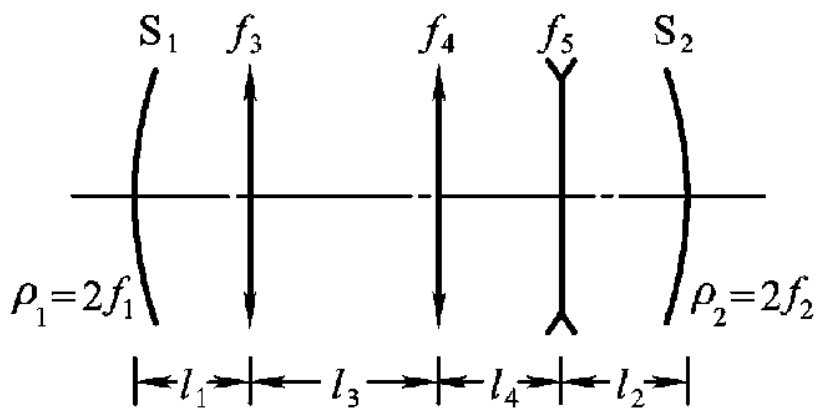


图 10.15.1　含热透镜望远镜非稳腔

对图 10.15.1(a)中的薄透镜序列，牛顿公式为

$$(\Delta_i-x_i)\,x_{i+1}=f_{i+1}^2,\quad i=1,2,3,\cdots \tag{10.15.1}$$

式中，f_{i+1}为第 $i+1$ 个透镜焦距，x_{i+1}为以 f_{i+1}的后焦面 F_{i+1}为参考，与物距(Δ_i-x_i)(以 f_{i+1}的前焦面 F_{i+1}为参考)共轭的像距，等等. 当透镜 f_{k-1}、f_k 间有平行光时[图 10.15.2(b)]，则有

$$\Delta_k x_{k+1}=f_{k+1}^2 \tag{10.15.2}$$

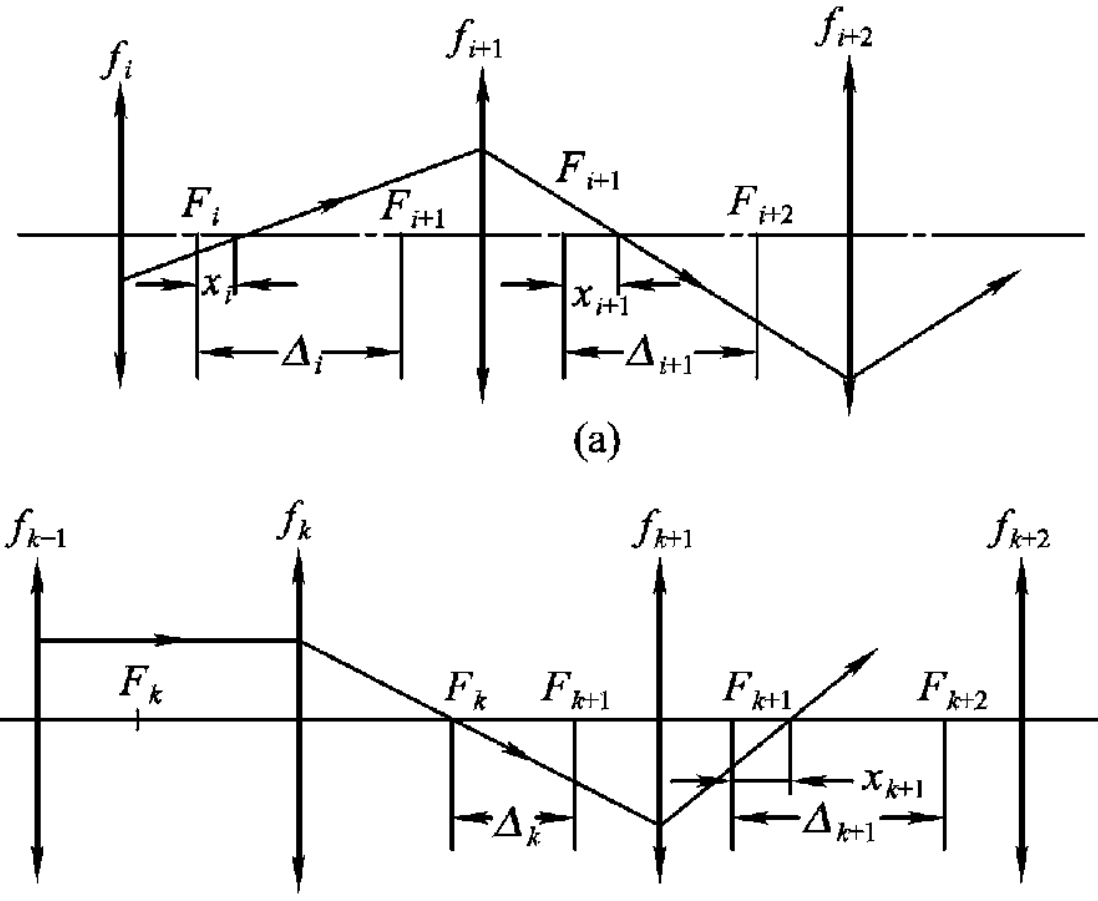


图 10.15.2　牛顿成像方程的图示

现在，把图 10.15.1 的腔展开为与图 10.15.2 类似的等效周期性薄透镜序列，使用式(10.15.1)递推，并在设计中按所要求存在平行光区间使用式(10.15.2)，就得到所需结果. 例如，若要求在镜 1 和 f_3 间存在准直平行光，则广义共焦条件的腔几何参数表示式为

$$(\Delta_2\Delta_3\Delta_4-f_4^2\Delta_2-f_5^2\Delta_3)[\Delta_1(\Delta_2\Delta_3\Delta_4-f_4^2\Delta_2-f_5^2\Delta_3)-f_3^2(\Delta_2\Delta_4-f_5^2)]-f_2^2(\Delta_3\Delta_4-f_4^2)(\Delta_1\Delta_3\Delta_4-f_4^2\Delta_1-f_3^2\Delta_4)=0 \tag{10.15.3}$$

分别以镜 1、2 为参考，共轭物像点 P_1、P_2 的位置 R_1、R_2 为

(1) 当存在镜 1→f_3 方向平行光时

$$R_1=\infty$$

$$R_2=-f_2-\frac{f_2^2(\Delta_3\Delta_4-f_4^2)}{(\Delta_3\Delta_4-f_4^2)\Delta_2-f_5^2\Delta_3} \tag{10.15.4}$$

(2) 当存在 f_3→镜 1 方向平行光时

$$R_1=-f_1$$

$$R_2=\frac{f_5^2\Delta_3}{\Delta_3\Delta_4-f_4^2}-f_2-\Delta_2 \tag{10.15.5}$$

实际工作中一个感兴趣的问题是当泵浦参数改变导致热焦距 f_3 变化时，应当如何较为方便地调整光腔几何参数以保持准直平行光输出. 为此，讨论两类情况：

(1) 若只改变 l_1 (l_2、l_3、l_4 保持不变)，则 l_1 与 f_3 应满足关系

$$l_1=f_1+f_3+f_3^2(PQ-f_2^2\Delta_4R)/(Q^2-f_2^2R^2) \tag{10.15.6}$$

式中

$$P=\Delta_2\Delta_4-f_5^2,\ Q=\Delta_3P-\Delta_2f_4^2,\ R=\Delta_3\Delta_4-f_4^2 \tag{10.15.7}$$

(2) 若只改变 l_4，则 l_4 与 f_3 间应满足

$$l_4=f_4+f_5+(B\pm\sqrt{B^2-4AC})/(2A) \tag{10.15.8}$$

式中

$$A=\Delta_3(\Delta_2^2-f_2^2)(\Delta_1\Delta_3-f_3^2)$$

$$B=f_4^2(\Delta_2^2-f_2^2)(2\Delta_1\Delta_3-f_3^2)+2f_5^2\Delta_2\Delta_3(\Delta_1\Delta_2\Delta_3-f_3^2)$$

$$C=\Delta_1(f_4^2\Delta_2+f_5^2\Delta_3)^2-f_3^2f_5^2(f_4^2\Delta_2+f_5^2\Delta_3)-f_2^2f_4^4\Delta_1 \tag{10.15.9}$$

式中，开方号前 ± 号取法由具体物理条件，例如透镜间几何距离应为正

值，光腔几何长度应合乎实用要求，对应于正支或负支的选取等来决定.

光腔的非稳定条件为

$$G_1 G_2 > 1 \quad 或 \quad G_1 G_2 < 0 \tag{10.15.10}$$

式中

$$G_1 = a - \frac{b}{\rho_1}$$

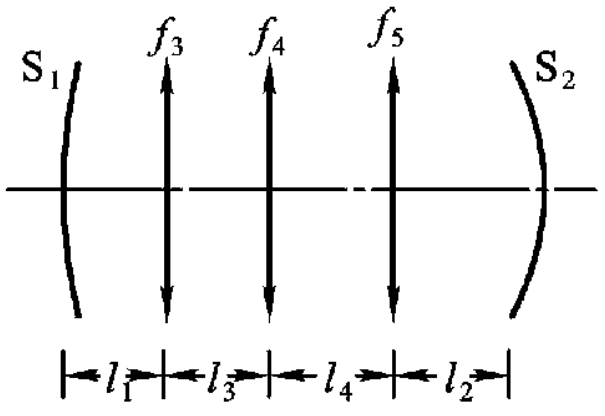
$$G_2 = d - \frac{b}{\rho_2} \tag{10.15.11}$$

a、b、d 为腔内单程变换矩阵 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 诸元，可用腔几何参数表示为

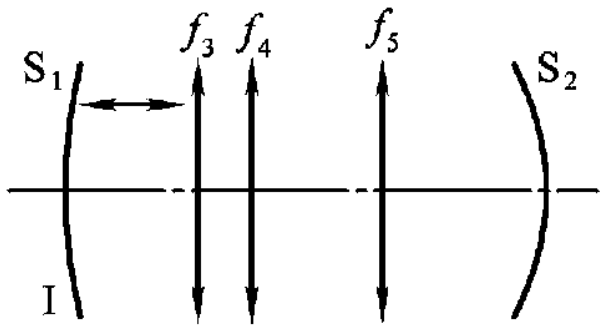
$$\begin{aligned} a &= c(\Delta_2 + f_2) + \frac{f_5 \Delta_3}{f_3 f_4} \\ b &= a(\Delta_1 + f_1) + \frac{f_3 [(\Delta_2 + f_2)\Delta_4 - f_5^2]}{f_4 f_5} \\ c &= \frac{f_4^2 - \Delta_3 \Delta_4}{f_3 f_4 f_5} \\ d &= c(\Delta_1 + f_1) + \frac{f_3 \Delta_4}{f_4 f_5} \end{aligned} \tag{10.15.12}$$

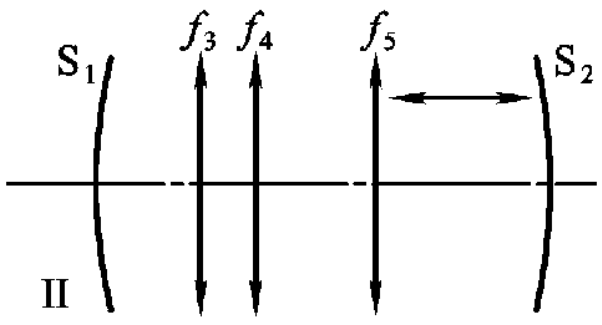
用上述方法对各种类型含热透镜望远镜共焦型非稳腔所做推导结果总结于表 10.15.1，数值计算例见图 10.15.3(a)、(b). 由表和图可见，这类光腔远比简单两镜非稳腔要复杂，例如广义共焦条件因在腔内不同区间耦合输出平行光而异. 并且，在正支多元件共焦型非稳腔内，也可能存在实光线的会聚点，这是在多元件非稳腔设计中值得注意的.

表 10.15.1　多元件共焦型非稳腔的特征方程

	$G_1 = a - b/2f_1, G_2 = d - b/2f_2$ $a = c(\Delta_2 + f_2) + f_5\Delta_3/(f_3 f_4)$, $b = a(\Delta_1 + f_1) + f_3[(\Delta_2 + f_2)\Delta_4 - f_5^2]/(f_4 f_5)$, $d = c(\Delta_1 + f_1) + f_3\Delta_4/(f_4 f_5)$, $c = (f_4^2 - \Delta_3\Delta_4)/(f_3 f_4 f_5)$, $L = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = f_1 + f_2 + 2(f_3 + f_4 + f_5) + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4$
非稳条件	$G_1 G_2 > 1$ 或　$G_1 G_2 < 0$

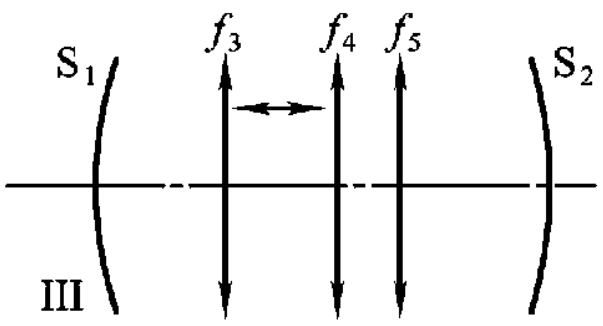
续表

<table>
<tr><td>

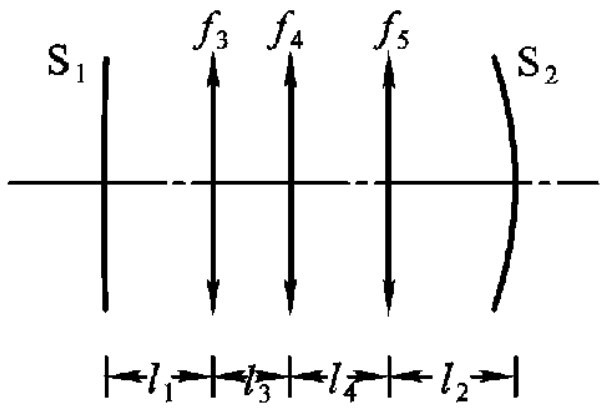
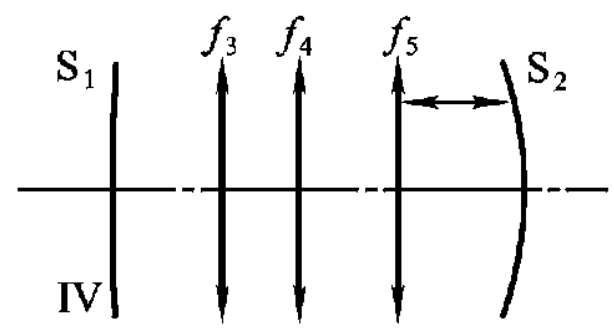
广义共焦条件</td><td colspan="2">$\Delta_1(\Delta_2\Delta_3\Delta_4-f_4^2\Delta_2-f_5^2\Delta_3)^2-$
$f_3^2(\Delta_2\Delta_4-f_5^2)(\Delta_2\Delta_3\Delta_4-f_4^2\Delta_2-f_5^2\Delta_3)-$
$f_2^2(\Delta_3\Delta_4-f_4^2)(\Delta_1\Delta_3\Delta_4-f_4^2\Delta_2-f_3^2\Delta_4)=0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">R_1</td><td>$s_1\to f_3$
$(aG_1^{-1}>1)$</td><td>∞</td></tr>
<tr><td>$f_3\to s_1$
$(aG_1^{-1}<1)$</td><td>$-f_1$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">R_2</td><td>$s_1\to f_3$
$(aG_1^{-1}>1)$</td><td>$-f_2-f_2^2(\Delta_3\Delta_4-f_4^2)/$
$(\Delta_2\Delta_3\Delta_4-f_4^2\Delta_2-f_5^2\Delta_3)$</td></tr>
<tr><td>$f_3\to s_1$
$(aG_1^{-1}<1)$</td><td>$f_5^2\Delta_3/(\Delta_3\Delta_4-f_4^2)-f_2-\Delta_2$</td></tr>
<tr><td>若仅 l_1 变化</td><td colspan="2">$l_1=f_1+f_3+f_3^2(PQ-f_2^2\Delta_4R)/(Q^2-f_2^2R^2)$
$P=\Delta_2\Delta_4-f_5^2,Q=\Delta_3P-\Delta_1f_4^2,R=\Delta_3\Delta_4-f_4^2$</td></tr>
<tr><td>若仅 l_4 变化</td><td colspan="2">$l_4=f_4+f_5+(B\pm\sqrt{B^2-4AC})/(2A)$
$A=\Delta_3(\Delta_2^2-f_2^2)(\Delta_1\Delta_3-f_3^2)$
$B=f_4^2(\Delta_2^2-f_2^2)(2\Delta_1\Delta_3-f_3^2)+2f_5^2\Delta_2\Delta_3(\Delta_1\Delta_3-f_3^2)$
$C=\Delta_1(f_4^2\Delta_2+f_5^2\Delta_3)^2-f_3^2f_5^2(f_4^2\Delta_2+f_5^2\Delta_3)-f_2^2f_4^4\Delta_1$</td></tr>
<tr><td>

广义共焦条件</td><td colspan="2">$\Delta_2(\Delta_1\Delta_3\Delta_4-f_4^2\Delta_1-f_3^2\Delta_4)^2-$
$f_5^2(\Delta_1\Delta_3-f_3^2)(\Delta_1\Delta_3\Delta_4-f_4^2\Delta_1-f_3^2\Delta_4)-$
$f_1^2(\Delta_3\Delta_4-f_4^2)(\Delta_2\Delta_3\Delta_4-f_4^2\Delta_2-f_5^2\Delta_3)=0$</td></tr>
</table>

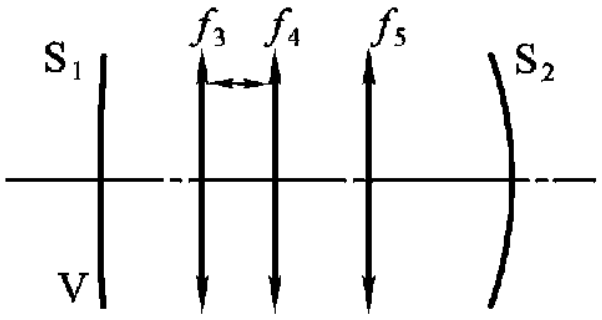
续表

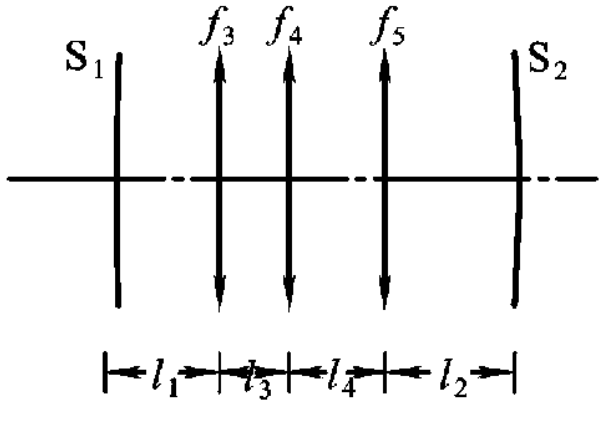
R_1	$s_2 \to f_5$ $(dG_2^{-1} > 1)$	$-f_1 - f_1^2(\Delta_3\Delta_4 - f_4^2)/$ $(\Delta_1\Delta_3\Delta_4 - f_4^2\Delta_1 - f_3^2\Delta_4)$
	$f_5 \to s_2$ $(dG_2^{-1} < 1)$	$f_3^2\Delta_4/(\Delta_3\Delta_4 - f_4^2) - f_1 - \Delta_1$
R_2	$s_2 \to f_5$ $(dG_2^{-1} > 1)$	∞
	$f_5 \to s_2$ $(dG_2^{-1} < 1)$	$-f_2$
若仅 l_2 变化		$l_2 = f_2 + f_5 + f_5^2(PQ - \Delta_3 f_1^2 R)/(Q^2 - f_1^2 R^2)$ $P = \Delta_1\Delta_3 - f_3^2$，$Q = \Delta_4 P - \Delta_1 f_4^2$ $R = \Delta_3\Delta_4 - f_4^2$
若仅 l_4 变化		$l_4 = f_4 + f_5 + (B \pm \sqrt{B^2 - 4AC})/(2A)$ $A = \Delta_2[(\Delta_1\Delta_3 - f_3^2)^2 - \Delta_3^2 f_1^2]$ $B = 2\Delta_2 f_4^2[\Delta_1(\Delta_1\Delta_3 - f_3^2) - \Delta_3 f_1^2] + f_5^2 A/\Delta_2$ $C = f_4^2[\Delta_2 f_4^2(\Delta_1^2 - f_1^2) + \Delta_1 f_5^2(\Delta_1\Delta_3 - f_3^2) - \Delta_3 f_5^3 f_1^2]$
 广义共焦条件		$(\Delta_1^2\Delta_3 - \Delta_1 f_3^2 - \Delta_3 f_1^2)[(\Delta_2\Delta_4 - f_5^2)^2 - f_2^2\Delta_4^2] -$ $f_4^2(\Delta_1^2 - f_1^2)[(\Delta_2\Delta_4 - f_5^2)\Delta_2 - f_2^2\Delta_4] = 0$
R_1	$f_3 \to f_4$	$-(f_1 + \Delta_1)$
	$f_4 \to f_3$	$-f_1(1 + f_1/\Delta_1)$
R_2	$f_3 \to f_4$	$-f_2 - f_2^2\Delta_4/(\Delta_2\Delta_4 - f_5^2)$
	$f_4 \to f_3$	$f_5^2/\Delta_4 - f_2 - \Delta_2$

续表

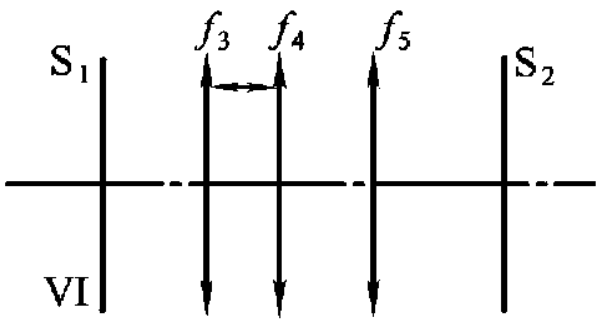
<table>
<tr><td>若仅 l_1 变化</td><td colspan="2">$l_1 = f_1 + f_3 + (B \pm \sqrt{B^2 - 4AC})/(2A)$
$A = (\Delta_2\ \Delta_4 - f_5^2)[(\Delta_2\Delta_4 - f_5^2)\Delta_3 - f_4^2\Delta_2] - f_2^2\Delta_4 \cdot (\Delta_3\Delta_4 + f_4^2)$
$B = -f_3^2[f_2^2\Delta_4^2 - (\Delta_2\Delta_4 - f_5^2)^2], C = -f_1^2 A$</td></tr>
<tr><td>若仅 l_4 变化</td><td colspan="2">$l_4 = f_4 + f_5 + (Q \pm \sqrt{Q^2 - 4PR})/(2P)$
$P = (\Delta_1^2\Delta_3 - f_3^2\Delta_1 - f_1^2\Delta_3)(\Delta_2^2 - f_2^2)$
$Q = (\Delta_1^2 - f_1^2)[2f_5^2\Delta_2\Delta_3 + (\Delta_2^2 - f_2^2)f_4^2] - 2f_3^2 f_5^2\Delta_1\Delta_2$
$R = f_5^2[(\Delta_1^2 - f_1^2)(f_5^2\Delta_3 + f_4^2\Delta_2) - f_3^2 f_5^2\Delta_1]$</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">$G_1 = a, G_2 = d - b/(2f_2)$
$a = c(\Delta_2 + f_2) + f_5\Delta_3/(f_3 f_4)$
$b = a(l_1 - f_3) + f_3[(\Delta_2 + f_2)\Delta_4 - f_5^2]/(f_4 f_5)$
$d = c(l_1 - f_3) + f_3\Delta_4/(f_4 f_5)$
$c = (f_4^2 - \Delta_3\Delta_4)/(f_3 f_4 f_5)$
$L = l_1 + l_2 + l_3 + l_4$
$= l_1 + f_2 + f_3 + 2(f_4 + f_5) + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4$</td></tr>
<tr><td>非稳条件</td><td colspan="2">$G_1 G_2 > 1$　或　$G_1 G_2 < 0$</td></tr>
<tr><td>
广义共焦条件</td><td colspan="2">$(\Delta_2\Delta_3\Delta_4 - f_4^2\Delta_2 - f_5^2\Delta_3) \cdot [2(l_1 - f_3)(\Delta_3\Delta_4 - f_4^2) - f_3^2\Delta_4] - f_3^2(\Delta_2\Delta_4 - f_4^2)(\Delta_3\Delta_4 - f_4^2) = 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">R_1</td><td>$s_2 \to f_5$
$(dG_2^{-1} > 1)$</td><td>$-l_1 + f_3 + \dfrac{f_3^2(\Delta_2\Delta_4 - f_5^2)}{\Delta_2\Delta_3\Delta_4 - f_4^2\Delta_2 - f_5^2\Delta_3}$</td></tr>
<tr><td>$f_5 \to s_2$
$(dG_2^{-1} < 1)$</td><td>$l_1 - f_3 - \dfrac{f_3^2(\Delta_2\Delta_4 - f_5^2)}{\Delta_2\Delta_3\Delta_4 - f_4^2\Delta_2 - f_5^2\Delta_3}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">R_2</td><td>$s_2 \to f_5$
$(dG_2^{-1} > 1)$</td><td>∞</td></tr>
<tr><td>$f_5 \to s_2$
$(dG_2^{-1} < 1)$</td><td>$-f_2$</td></tr>
</table>

续表

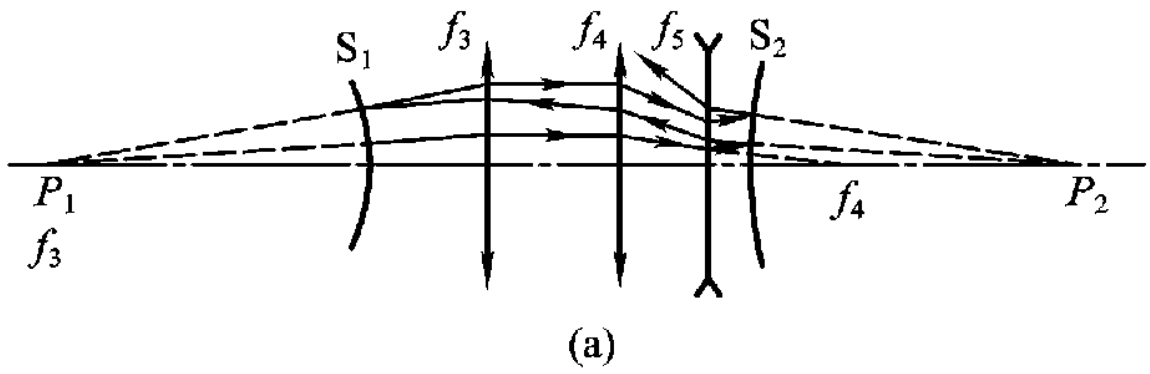
<table>
<tr><td>若仅 l_2变化</td><td colspan="2">$l_2=f_2+f_5+f_5^2(\Delta_3+f_3^2f_4^2/2s)/R$
$R=\Delta_3\Delta_4-f_4^2$，$s=(l_1-f_3)R-f_3^2\Delta_4$</td></tr>
<tr><td>若仅 l_4变化</td><td colspan="2">$l_4=f_4+f_5+(B\pm\sqrt{B^2-4AC})/(2A)$
$A=2\Delta_2\Delta_3[(l_1-f_3)\Delta_3-f_3^2]$
$B=2\Delta_2\Delta_3f_4^2(l_1-f_3)+2(f_4^2\Delta_2+f_5^2\Delta_3)\cdot[(l_1-f_3)\Delta_3-f_3^2]$
$C=f_4^2[2(l_1-f_3)(f_4^2\Delta_2+f_5^2\Delta_3)-f_3^2f_5^2]$</td></tr>
<tr><td>

广义共焦条件</td><td colspan="2">$[2(l_1-f_3)\Delta_3-f_3^2][(\Delta_2\Delta_4-f_5^2)^2-f_2^2\Delta_4^2]-2f_4^2(l_1-f_3)[(\Delta_2\Delta_4-f_5^2)\Delta_2-f_2^2\Delta_4]=0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">R_1</td><td>$f_3\rightarrow f_4$</td><td>f_3-l_1</td></tr>
<tr><td>$f_4\rightarrow f_3$</td><td>l_1-f_3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">R_2</td><td>$f_3\rightarrow f_4$</td><td>$-f_2-f_2^2\Delta_4/(\Delta_2\Delta_4-f_5^2)$</td></tr>
<tr><td>$f_4\rightarrow f_3$</td><td>$f_5^2/\Delta_4-f_2-\Delta_2$</td></tr>
<tr><td>若仅 l_1变化</td><td colspan="2">$l_1=f_3+f_3^2P/[2(\Delta_3P-f_4Q)]$
$P=(\Delta_2\Delta_4-f_5^2)^2-f_2^2\Delta_4^2$
$Q=(\Delta_2\Delta_4-f_5^2)\Delta_2-f_2^2\Delta_4$</td></tr>
<tr><td>若仅 l_4变化</td><td colspan="2">$l_4=f_4+f_5+(B\pm\sqrt{B^2-4AC})/(2A)$
$A=(\Delta_2^2-f_2^2)[2(l_1-f_3)\Delta_3-f_3^2]$
$B=2\Delta_2f_5^2[(l_1-f_3)\Delta_3-f_3^2]+2f_4^2(l_1-f_3)(\Delta_2^2-f_2^2)$
$C=f_5^2[f_5^2(2\Delta_3l_1-2\Delta_3f_3-f_3^2)-2\Delta_2f_4^2(l_1-f_3)]$</td></tr>
<tr><td>
</td><td colspan="2">$G_1=a$，$G_2=d$
$a=c(l_2-f_5)+f_5\Delta_3/(f_3f_4)$
$b=a(l_1-f_3)+f_3[(l_2-f_5)\Delta_4-f_5^2]/(f_4f_5)$
$d=c(l_1-f_3)+f_3\Delta_4/(f_4f_5)$
$c=(f_4^2-\Delta_3\Delta_4)/(f_3f_4f_5)$
$L=l_1+l_2+l_3+l_4$
$=l_1+l_2+f_3+2f_4+f_5+\Delta_3+\Delta_4$</td></tr>
</table>

续表

<table>
<tr><td>非稳条件</td><td colspan="2">$G_1G_2>1$　或　$G_1G_2<0$</td></tr>
<tr><td>

广义共焦条件</td><td colspan="2">$\Delta_4[(l_2-f_5)\Delta_4-f_5^2][2(l_1-f_3)\Delta_3-f_3^2]-$
$f_4^2(l_1-f_3)[2(l_2-f_5)\Delta_4-f_5^2]=0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">R_1</td><td>$f_3\to f_4$</td><td>f_3-l_1</td></tr>
<tr><td>$f_4\to f_3$</td><td>l_1-f_3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">R_2</td><td>$f_3\to f_4$</td><td>$l_2-f_5-f_5^2/\Delta_4$</td></tr>
<tr><td>$f_4\to f_3$</td><td>$f_5-l_2+f_5^2/\Delta_4$</td></tr>
<tr><td>若仅 l_1变化</td><td colspan="2">$l_1=f_3+f_3^2P/(2\Delta_3P-Q)$
$P=\Delta_4[(l_2-f_5)\Delta_4-f_5^2]$
$Q=f_4^2[2(l_2-f_5)\Delta_4-f_5^2]$</td></tr>
<tr><td>若仅 l_4变化</td><td colspan="2">$l_4=f_4+f_5+(B\pm\sqrt{B^2-4AC})/(2A)$
$A=(l_2-f_5)[2(l_1-f_3)\Delta_3-f_3^2]$
$B=f_5^2[2(l_1-f_3)\Delta_3-f_3^2]+2f_4^2(l_1-f_3)(l_2-f_5)$
$C=f_4^2f_5^2(l_1-f_3)$</td></tr>
</table>



(a)

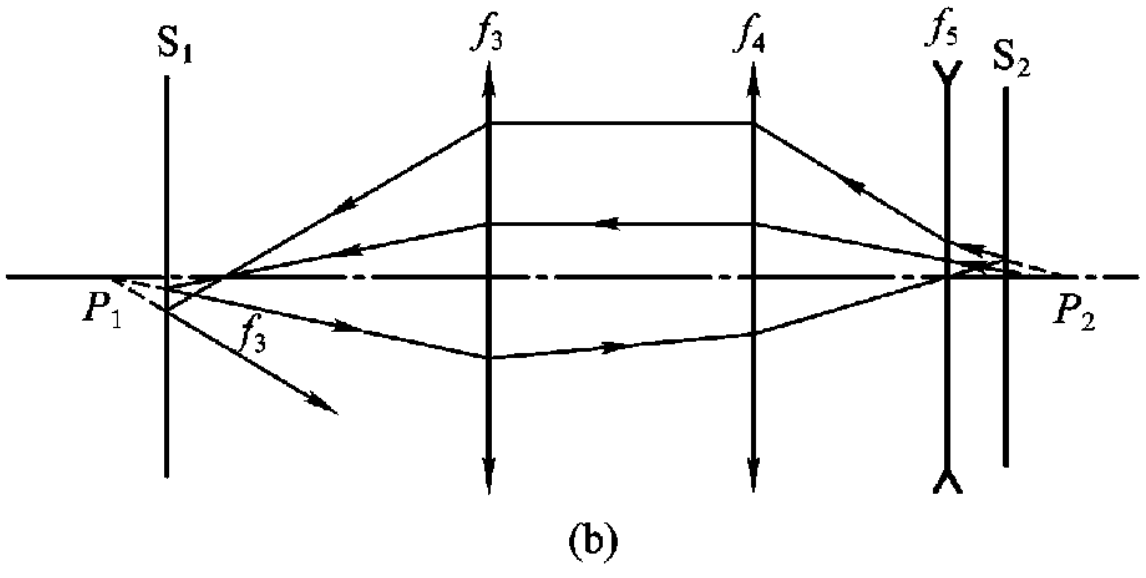


图 10.15.3　含热透镜望远镜共焦型非稳腔的数值计算例

(a) $f_1=-0.5$ m, $f_2=-1.5$ m, $f_3=1$ m, $f_4=0.5$ m, $f_5=-0.25$ m, $l_1=0.27$ m, $l_2=0.10$ m, $l_3=0.30$ m, $l_4=0.20$ m, $G_1=G_2=1.12$, $R_1=0.73$ m, $R_2=0.77$ m

(b) $f_1\to\infty$, $f_2\to\infty$, $f_3=f_4=0.5$ m, $f_5=-0.3$ m, $l_1=0.6$ m, $l_2=0.11$ m, $l_3=0.50$ m, $l_4=0.37$ m, $G_1=G_2=1.24$, $R_1=0.1$ m, $R_2=0.12$ m

§10.16　各类棱镜腔

将直角棱镜、球面直角棱镜等作为腔的一个或者两个反射腔使用，可提高谐振腔选模能力、增加对失调不灵敏性等. 棱镜的配置方式有多样，如共轴或离轴方式等，工作状态亦可根据实际需要为稳定、非稳或临界型. 本书以交叉球面棱镜腔为例，讨论这类光腔的模式特性和稳定性，并介绍了交叉直角棱镜腔、平行平面镜－复式全内反射棱镜腔、折叠棱镜腔和离轴棱镜腔的有关实验结果.

一、稳定交叉球面棱镜腔

在图 10.16.1 所示的交叉球面棱镜腔中，设球面棱镜 P_i 入射球面半径为 ρ_i ($i=1,2$，下同)，厚度均为 d，两球面棱镜相距 L. 采用偏振耦合方式由介质偏振片输出激光. 从光线变换观点来看，它可等效为图 10.16.2 的多元件平行平面腔，图中两个内透镜焦距

$$f_i=\frac{\rho_i}{n-1} \tag{10.16.1}$$

$l_0=\dfrac{d}{n}$，其中 n 为棱镜介质折射率. 直接用 §10.5 中所述“混合等价腔”方法，就可以写出稳定交叉球面棱镜的模参数公式. 例如，决定输出光束远场发散的束腰宽度 w_{00} 和位置 L_{01} (以镜 1 为参考)为

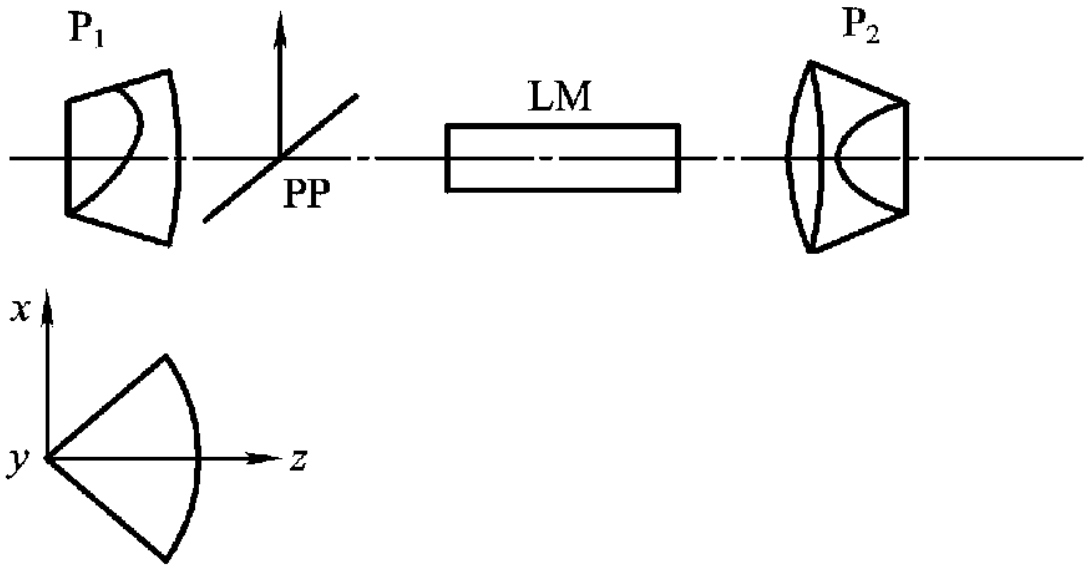


图 10.16.1　交叉球面棱镜腔

P_1，P_2—球面棱镜；PP—多层介质偏振片；LM—激光介质

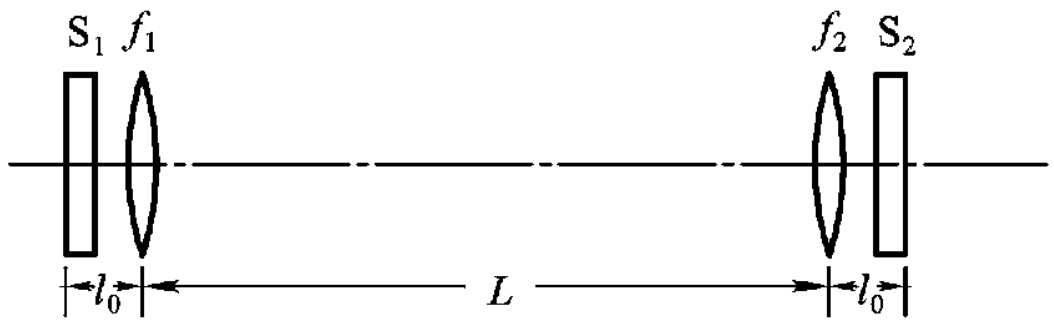


图 10.16.2　图 10.16.1 的等价多元件平行平面腔

$$\omega_{00}^2=\frac{\pm\lambda L'^{*}}{\pi}\frac{\left[g'^{*}_1 g'^{*}_2(1-g'^{*}_1 g'^{*}_2)\right]^{\frac{1}{2}}}{g'^{*}_1(L'^{*}/\rho'_2)^2+g'^{*}_2(1-g'^{*}_1 g'^{*}_2)} \tag{10.16.2}$$

$$L_{01}=l_0+l'_2-L'^{*}\frac{g'^{*}_1(L'^{*}/\rho'_2)}{g'^{*}_1(L'^{*}/\rho'_2)^2+g'^{*}_2(1-g'^{*}_1 g'^{*}_2)} \tag{10.16.3}$$

式中

$$L'^{*}=l_0+l'_2-l_0 l'_2/f_1 \tag{10.16.4}$$

$$g'^{*}_1=1-l'_2/f_1$$

$$g'^{*}_2=1-\frac{l_0+l'_2}{\rho'_2}-\frac{l_0}{f_1}\left(1-\frac{l'_2}{\rho'_2}\right) \tag{10.16.5}$$

$$\rho'_2=\frac{f_2^2}{f_2-l_0}$$

$$l'_2=L-f_2+\frac{f_2^2}{f_2-l_0} \tag{10.16.6}$$

光腔的约束稳定条件为

$$0<g'^{*}_1 g'^{*}_2<1 \tag{10.16.7}$$

远场发散角

$$\theta_0=\frac{\lambda}{\pi\omega_{00}} \tag{10.16.8}$$

对于更为复杂的光腔，例如图 10.16.3 含热透镜 f 的交叉球面棱镜腔，亦可用“混合等价腔”方法推导出 f_1、f 间的束腰宽度 w_{00} 和位置 L_{01}（以镜 1 为参考）以及 f_2、f 间的束腰宽度 w'_{00} 和位置 L_{02}（以镜 2 为参考）的公式. 表 10.16.1 给出了几个稳定交叉球面棱镜腔的数值计算例，以供参考.

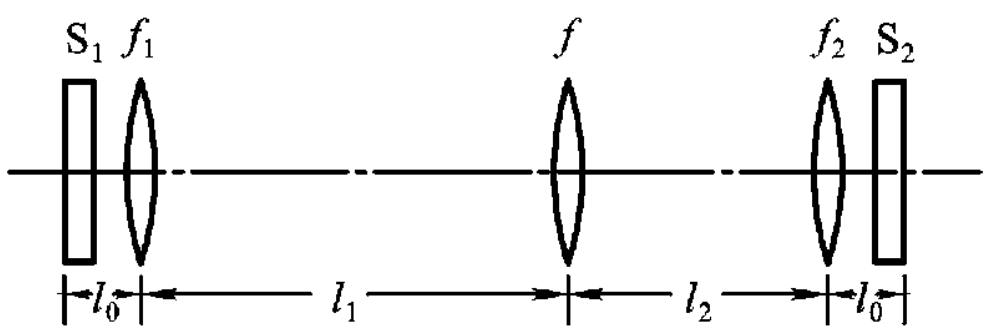


图 10.16.3　含热透镜的交叉球面棱镜腔的等价腔

表 10.16.1　稳定交叉球面棱镜的数值计算例

参数 / 序号	ρ_1 /m	ρ_2 /m	l_0 /mm	L /mm		w_{00} / mm	L_{01} / mm	w'_{00} / mm	L_{02} / mm	g'^{*}_1 g'^{*}_2	备注
Ⅰ	∞	1.2	6.6	761.8		0.62	0			0.68	
Ⅱ	∞	1.9	6.6	761.8		0.72	0			0.80	
Ⅲ	1.9	1.2	6.6	761.8		0.57	271.1			0.54	Ⅳ中取 $f=5$ m
Ⅳ	1.9	1.2	6.6	$\frac{l_1}{\text{mm}}$	$\frac{l_2}{\text{mm}}$	0.53	191.5	0.53	341.6	0.51	
				250	400						

二、非稳共焦型交叉球面棱镜腔

现对图 10.16.4 所示非稳交叉球面棱镜腔的等价腔进行分析. 当按图 10.16.1 要求方向耦合输出准直平行光时，应先计算以 f_1 为参考，腔内往返一周矩阵 $\boldsymbol{M}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M} &= \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f_1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2l_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f_1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \\ &\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2l_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{10.16.9}$$

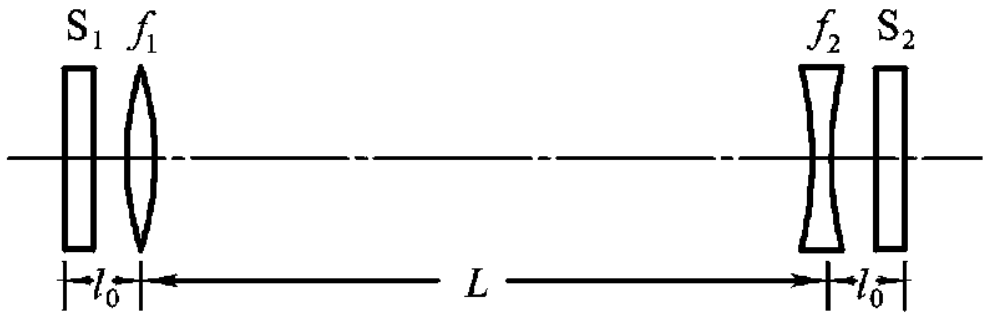


图 10.16.4　非稳交叉球面棱镜腔的等价腔

平行光输出条件可表示为 $C=0$，由式(10.16.9)得

$$L=\frac{1}{2}\left(\frac{f_1^2}{l_0-f_1}+\frac{f_2^2}{l_0-f_2}\right)+f_1+f_2 \tag{10.16.10}$$

共轭物像点位置

$$\begin{aligned} R_1&=f_1-l_0\\ R_2&=l_0-f_2 \end{aligned} \tag{10.16.11}$$

往返一周放大率

$$M=2g'^{*}_1\,g'^{*}_2-1\pm2\sqrt{g'^{*}_1\,g'^{*}_2\,(g'^{*}_1\,g'^{*}_2-1)} \tag{10.16.12}$$

能量输出耦合率

$$\Gamma=1-\frac{1}{M^2} \tag{10.16.13}$$

式中 g_1^*、g_2^* 为式(10.16.5)所示.

对含有热透镜 f 的非稳共焦型交叉球面棱镜腔(图 10.16.5)，稍复杂的计算得到非稳共焦型腔的设计方程为

$$\begin{aligned} &\Delta_2\left[(l_0-f_2)\Delta_2-f_2^2\right]\left[2(l_0-f_1)\Delta_1-f_1^2\right]\\ &=f^2(l_0-f_1)\left[2(l_0-f_2)\Delta_2-f_2^2\right] \end{aligned} \tag{10.16.14}$$

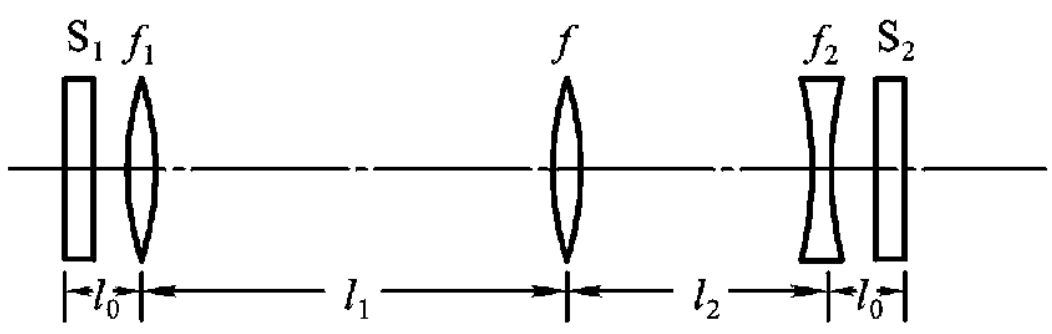


图 10.16.5　含热透镜非稳交叉球面棱镜腔的等价腔

式中

$$\begin{aligned} \Delta_1&=l_1-f-f_1\\ \Delta_2&=l_2-f-f_2 \end{aligned} \tag{10.16.15}$$

共轭物像点位置

$$R_1=f_1-l_0$$

$$R_2 = l_0 - f_2 - \frac{f_2^2}{\Delta_2} \tag{10.16.16}$$

往返一周放大率 M 和能量输出耦合率 Γ

$$M = 2G_1G_2 - 1 \pm 2\sqrt{G_1G_2(G_1G_2 - 1)} \tag{10.16.17}$$

$$\Gamma = 1 - \frac{1}{M^2} \tag{10.16.18}$$

式中 G 参数

$$G_1 = \frac{(f^2 - \Delta_1\Delta_2)(l_0 - f_2) + f_2^2\Delta_1}{f_1 f_2 f} \tag{10.16.19}$$

$$G_2 = \frac{(f^2 - \Delta_1\Delta_2)(l_0 - f) + f_1^2\Delta_2}{f_1 f_2 f}$$

非稳共焦型交叉球面棱镜腔的数值计算例见表 10.16.2.

表 10.16.2　非稳共焦型交叉球面棱镜腔的数值计算例

参数 / 序号	ρ_1 /m	ρ_2 /m	l_0 /mm	L /mm		R_1 /mm	R_2 /mm	$g'^*_1\ g'^*_2$	M	Γ	备注
Ⅰ	1.2	−0.26	6.6	933.4		2 393.4	526.6	1.73	4.68	0.95	
Ⅱ	0.70	−0.26	6.6	433.4		1 393.4	526.6	1.28	2.74	0.87	
Ⅲ	1.2	−0.26	6.6	l_1 /mm	l_2 /mm	2 393.4	737.9	1.27	2.69	0.86	Ⅲ、Ⅳ中取 $f=2$ m
				522	200						
Ⅳ	0.7	−0.26	6.6	l_1 /mm	l_2 /mm	1 393.4	717.4	1.11	1.93	0.73	
				284	40						

除交叉球面棱镜腔外，还设计了交叉直角棱镜腔、平行平面镜－全内反射棱镜腔、直角棱镜－屋脊棱镜腔，并用光线追迹法和琼斯矩阵法对这类腔的偏振特性作了分析.典型实验例见图 10.16.6、图 10.16.7.

三、折叠棱镜腔和离轴棱镜腔

在对板条固体激光器研究中设计了一些新型折叠棱镜腔和离轴棱镜腔.其基本腔型是图 10.16.8(a)中由一个直角棱镜 P_2 和一个阴阳镜 S_1 构成的光腔.所谓阴阳镜是指镜面一部分是全反射而另一部分是部分反射.阴阳镜可设计成平面镜、球面镜或柱面镜，图 10.16.8 中的输出镜 S_1 都可称为阴阳镜.阴阳镜的作用是减小输出光斑尺寸，棱镜起折叠光路增加有效腔长作用，同时还有使光束“翻转”作用.即从上面入射的光束经棱镜折射和反射后，从下面出射，反之亦然.

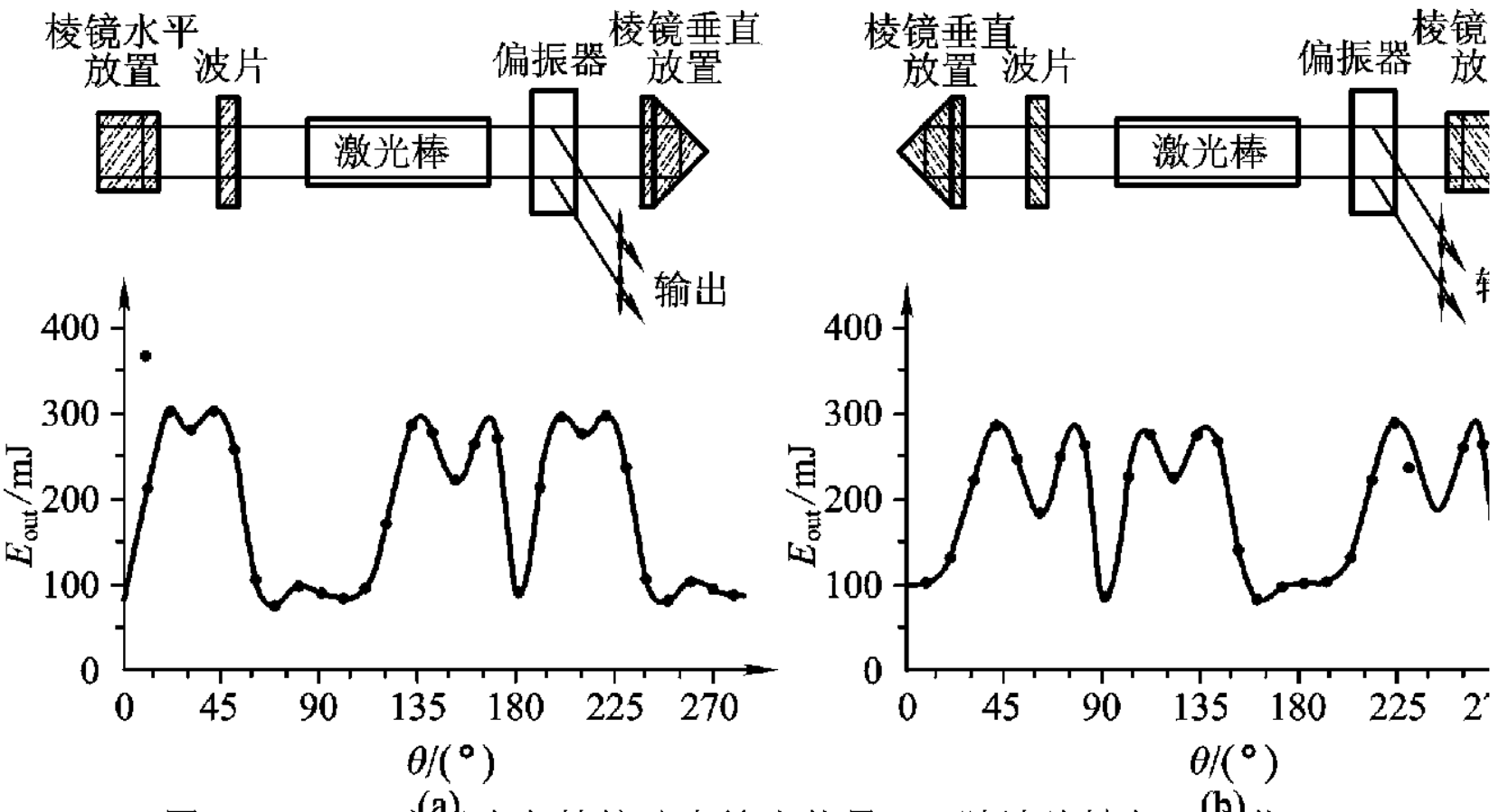


图 10.16.6　交叉直角棱镜腔中输出能量 E_{out} 随波片转角 θ 变化

($\phi 6.3\times 76$ mm^2 Nd:YAG 棒状激光器)

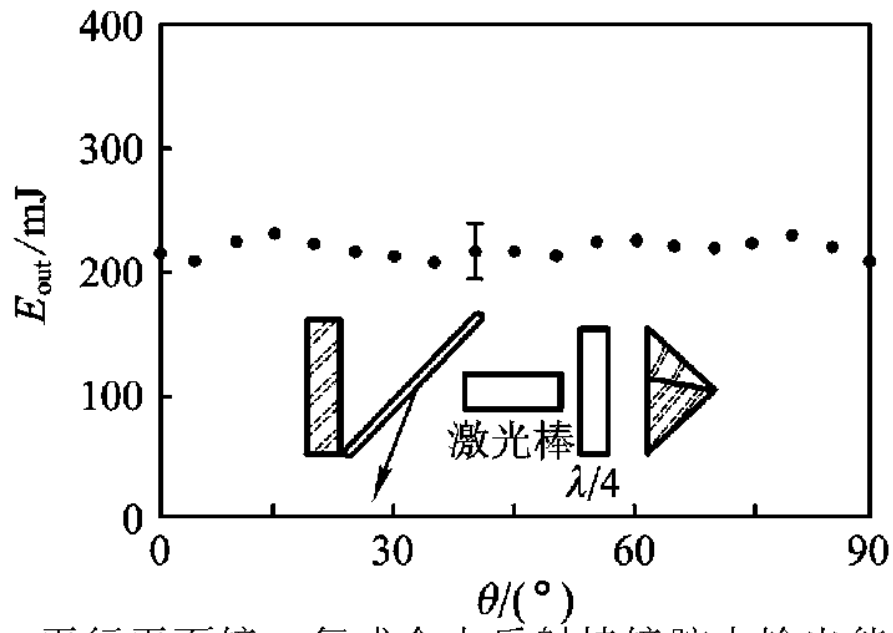


图 10.16.7　平行平面镜－复式全内反射棱镜腔中输出能量 E_{out} 随 $\lambda/4$ 波片转角 θ 变化

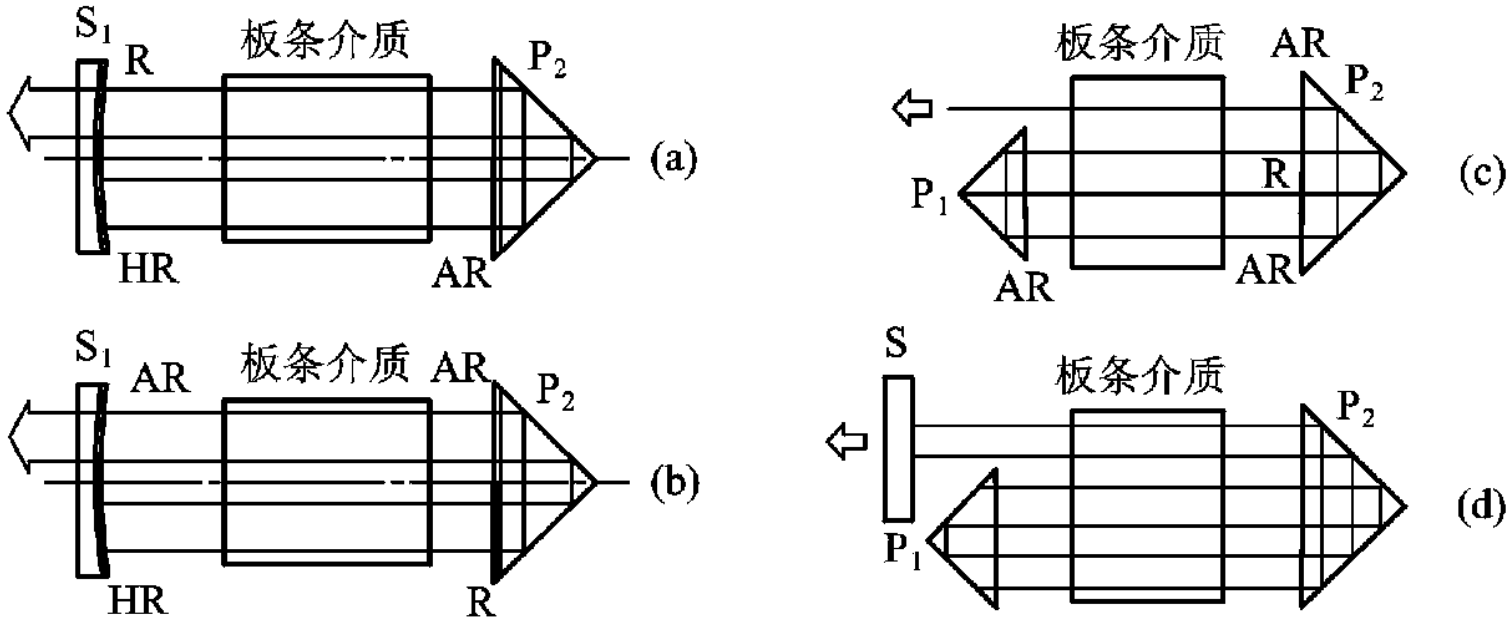


图 10.16.8　折叠棱镜腔和离轴棱镜腔

用于板条固体激光器的这类棱镜腔的显著优点是能够在几乎不降低输出功率的前提下，提高光束质量.腔型有多种选择，可作成稳定、临界或非稳腔.德国柏林技术大学固体激光研究所用图 10.16.8(a)折叠棱镜腔，在 Nd:YAG 板条激光器中得到平均输出功率 200 W，光束参数乘积 BPP=1.5 mm•mrad($M^2=4.5$)的激光输出.

在图 10.16.8(a)的基础上，又提出了图 10.16.8(b)、(c)、(d)所示振荡－放大棱镜腔和离轴棱镜腔.在图(b)中，球面镜 S_1 的下半部分镀高反膜，上半部分镀减反膜，棱镜上半部分镀减反膜，下半部分镀部分反射(反射率 R)膜.这样，在板条介质宽度方向的下半部形成一个振荡器，而激光在上半部分被放大后输出.若用小棱镜 P_1 代替球面镜 S_1 就构成图(c)的振荡－放大棱镜－棱镜腔，P_1 镀减反膜，P_2 的一部分是减反、另一部分是部分反射的.在图(d)的离轴棱镜腔中，可通过改变离轴棱镜的斜边长度来实现大的填充因子和减小输出光斑尺寸.

实验结果如图 10.16.9(a)、(b)所示.实验中用 $6\times25\times162$ mm^3 Nd:

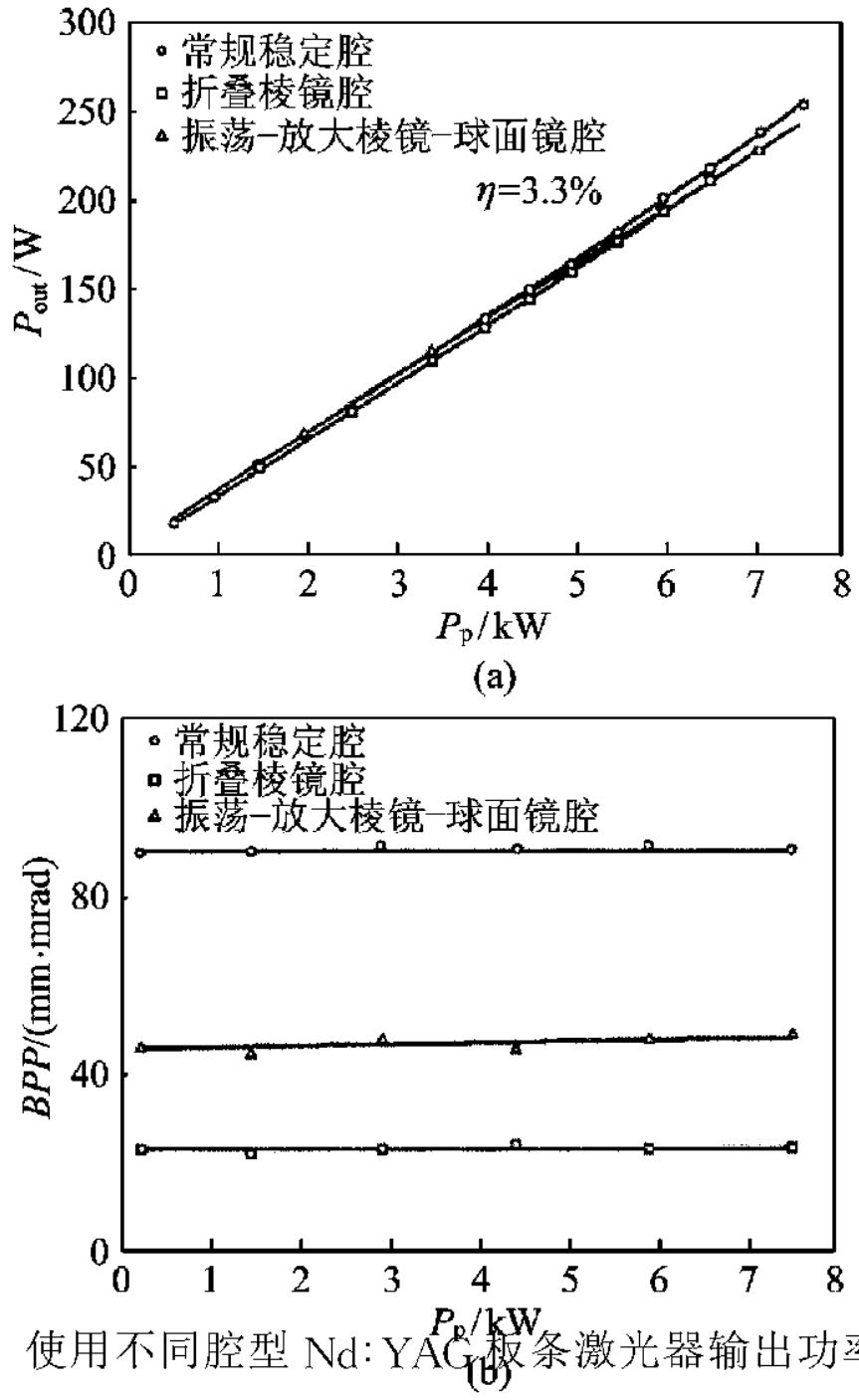


图 10.16.9　使用不同腔型 Nd:YAG 板条激光器输出功率 P_{out} 和光束参数乘积 BPP 随泵浦功率的变化

(a) 使用不同腔型的 Nd:YAG 板条激光器输出功率 P_{out} 随泵浦功率的变化

(b) 使用不同腔型的 Nd:YAG 板条激光器光束参数乘积 BPP 随泵浦功率的变化

YAG 板条，作为比较还给出了用常规稳定腔的结果. 由图可知，在保持总效率 $\eta = 3.3\ \%$ 和输出功率 250 W 不变情况下，使用折叠棱镜腔和振荡－放大棱镜－球面镜腔后，光束质量显著提高. 实验表明，用图 10.16.8(d)的离轴棱镜腔得到最好的光束质量，但效率要降低 20 % 左右，这可能是未实现最佳输出耦合之故. 表 10.16.3 总结了主要的实验结果.

表 10.16.3　四种板条固体激光腔输出激光效率和光束质量的比较

腔型	效率 η /%	光束参数乘积 BPP /(mm•mrad)	
		板条厚度方向	板条宽度方向
常规稳定腔	3.3	6	90
折叠棱镜腔	3.3	6	46
振荡－放大棱镜－球面镜腔	3.3	6	23
离轴棱镜腔	2.7	4	5

§ 10.17　90°束转动非稳腔

对于低增益激光器(典型例为氧化碘化学激光器)，要实现高功率、高光束质量输出，使用常规非稳腔受到放大率 M 不可能做得很大的限制，其近场输出是一个薄环，降低了远场的能量功率集中度. 为克服这一困难，可采用 90°束转动非稳腔(UR90 腔).

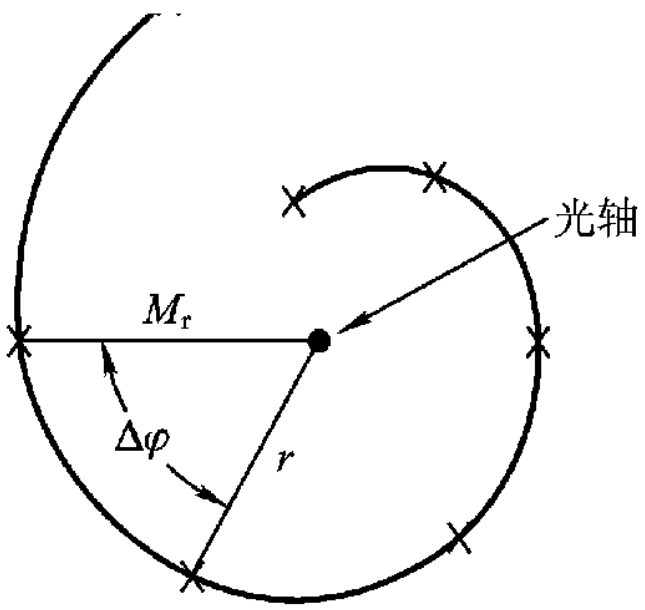


图 10.17.1　束转动示意图

束转动，又称为像转动或场转动. 束转动腔的腔内光束在往返传输一周后，会作旋转和被放大. 设腔模中的一条光线，在腔镜上的初始位置用 (r, φ) 表示，这条光线在腔内往返传输一周后到达腔镜上的位置变为 $(M_r, \varphi + \Delta\varphi)$，$\Delta\varphi$ 为旋转角. 这样，一条光线在腔内多次往返传输后，在镜面画出一条如图 10.17.1 所示的螺旋线.

UR90 腔的基本构型如图 10.17.2 所示. 它是一个内置扩束望远镜的环形非稳腔. 左侧的屋脊镜相对于右侧的屋脊镜旋转 45°. 光束在腔内环行一周后将沿顺时针方向旋转 90°，放大 M 倍，从刮刀镜上输出. 在刮刀镜处光束截面如图 10.17.3 所示，图中 $abde$ 表示光束轮廓，虚线表示

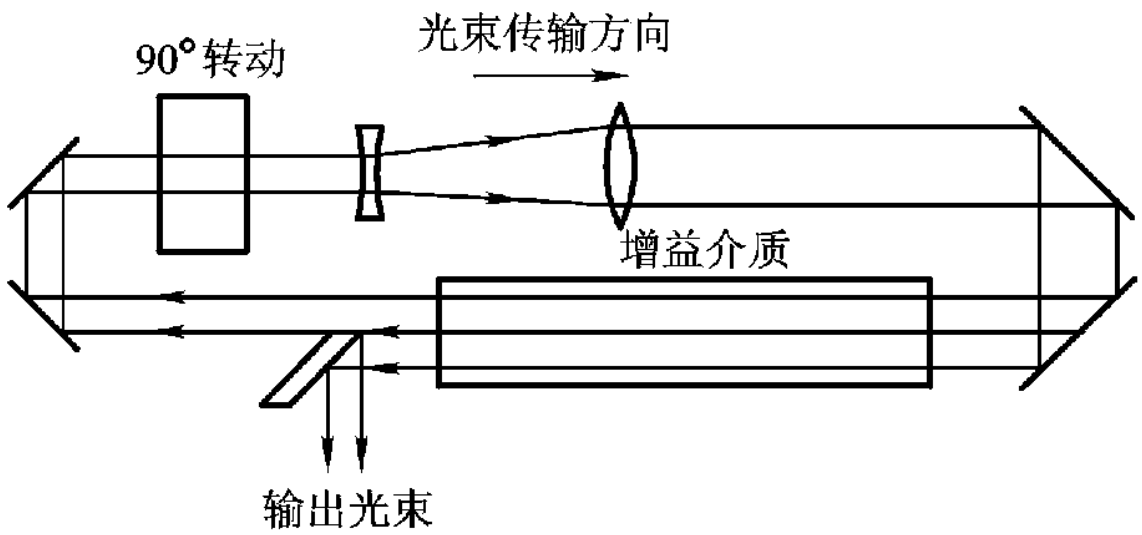


图 10.17.2　UR90 腔示意图

刮刀镜边缘在该平面上的投影.光束的一部分,即图中 $cdef$ 被耦合输出,其余部分 $abcf$ 被反馈回腔内,环行一周后绕光轴 O(与刮刀镜上缘 cf 相距 a)旋转 90°,其上缘 cf 旋转到左缘 af,再放大后成 ae.这样,经旋转 90°和放大 M 倍后,变成截面与原来大小形状相同光束,其宽高比为 $1/M$,被反馈光束的宽高比为 M.因此,腔的反馈功率比(它主要依赖于 M)决定了光束的形状.

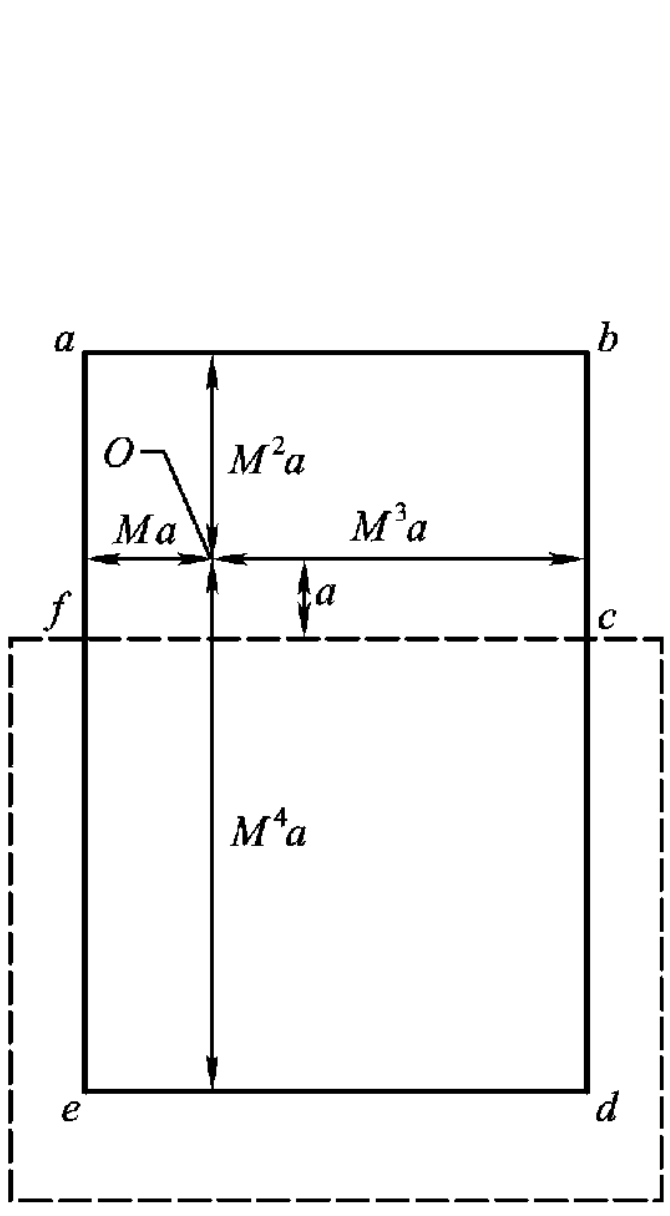


图 10.17.3　刮刀镜处光束截面图

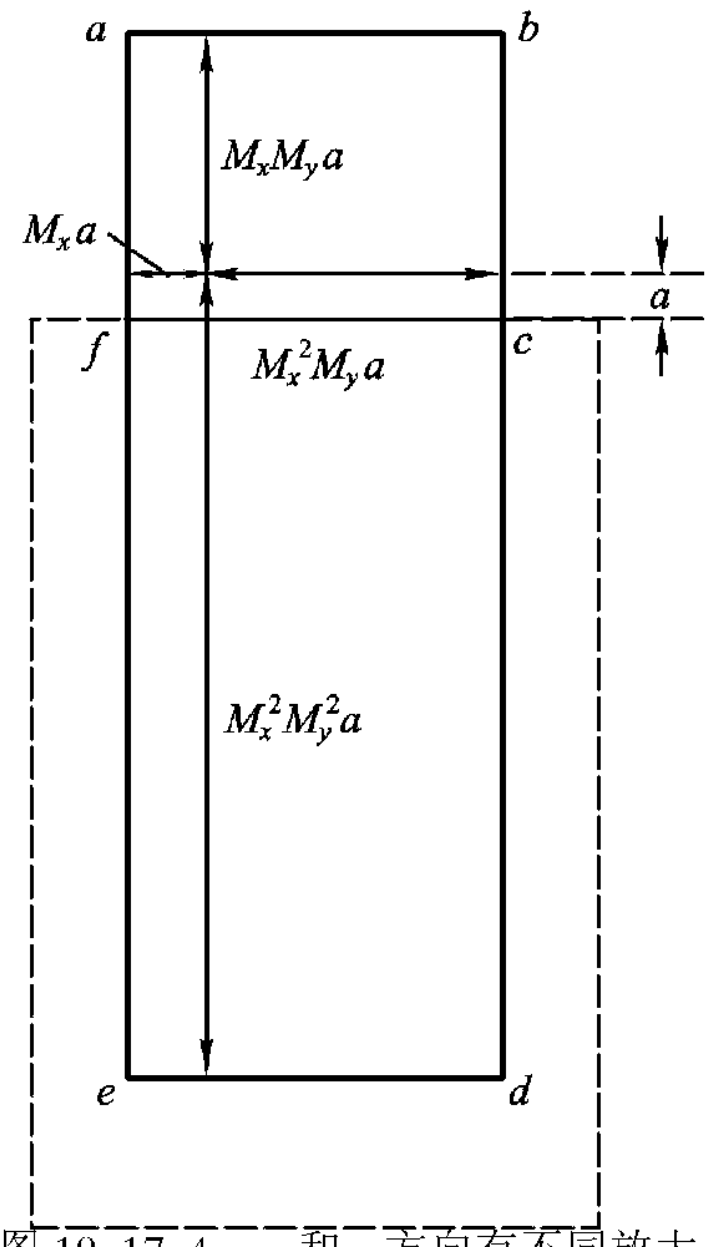


图 10.17.4　x 和 y 方向有不同放大率时刮刀镜光束截面图

为了使反馈功率比不依赖于光束的宽高比,可设计使光束在 x 和 y 方向(水平和垂直方向)有不同放大率 M_x 和 M_y 图 10.17.4.图中 $abcf$ 是

反馈回腔内部分，然后光束沿顺时针方向旋转 90°，在 x 和 y 方向分别被放大 M_x 和 M_y 倍，光腔的有效放大率成为 $\sqrt{M_xM_y}$. 当光束到达刮刀镜时的宽高比为 $1/M_y$，经反馈后宽高比变为 M_x. 在 x 和 y 方向的不同放大率可用球面－柱面望远镜来获得，也可利用倾斜旋转球面镜的像散实现.

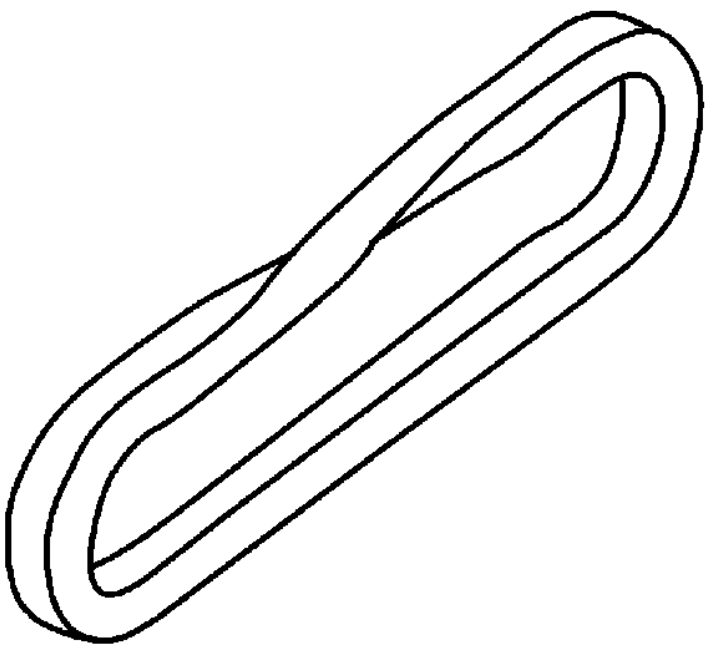


图 10.17.5　莫比乌斯带

UR90 腔的腔模类似于拓扑学中的莫比乌斯(Möbius)带，为一个矩形截面且有 90° 扭曲闭合的环带，如图 10.17.5 所示. 当光束在腔内环行一周后，其各边界互相交换，实际上四个侧面都在同一个表面上.

对 UR90 腔已用矩阵光学方法和衍射积分方程作了详细研究. UR90 腔正向模的本征方程为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_x \\ \boldsymbol{r}_y \end{bmatrix} \tag{10.17.1}$$

$$\boldsymbol{r}_x = \begin{bmatrix} x \\ \theta_x \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{r}_y = \begin{bmatrix} y \\ \theta_y \end{bmatrix} \tag{10.17.2}$$

$\boldsymbol{r}_x$、$\boldsymbol{r}_y$ 为 x、y 方向的光线矢量，$\boldsymbol{M}_1$、$\boldsymbol{M}_2$ 为 UR90 腔在 x 和 y 方向的 2×2 变换矩阵，γ 为本征值. 式(10.17.1)可分解为

$$-\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{r}_x = \gamma\boldsymbol{r}_x$$

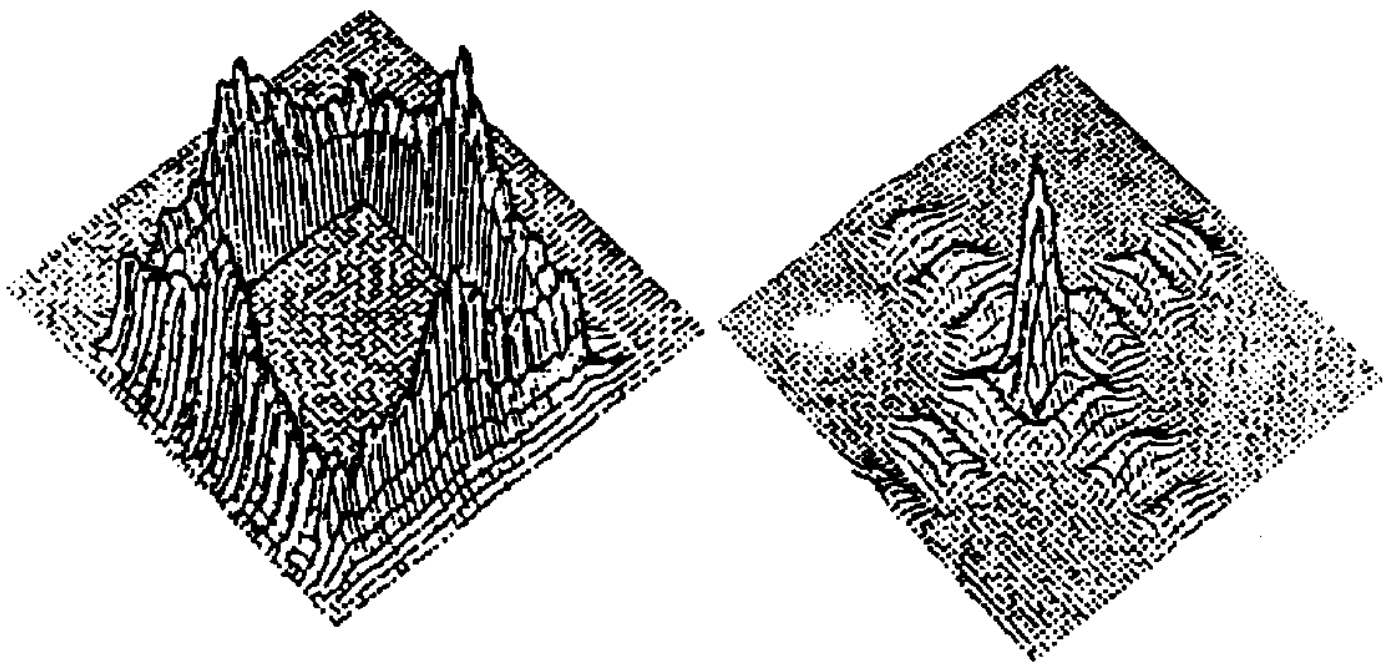
$$-\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{r}_y = \gamma\boldsymbol{r}_y \tag{10.17.3}$$

由此得

$$-\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{r}_y = \gamma^2\boldsymbol{r}_y \tag{10.17.4}$$

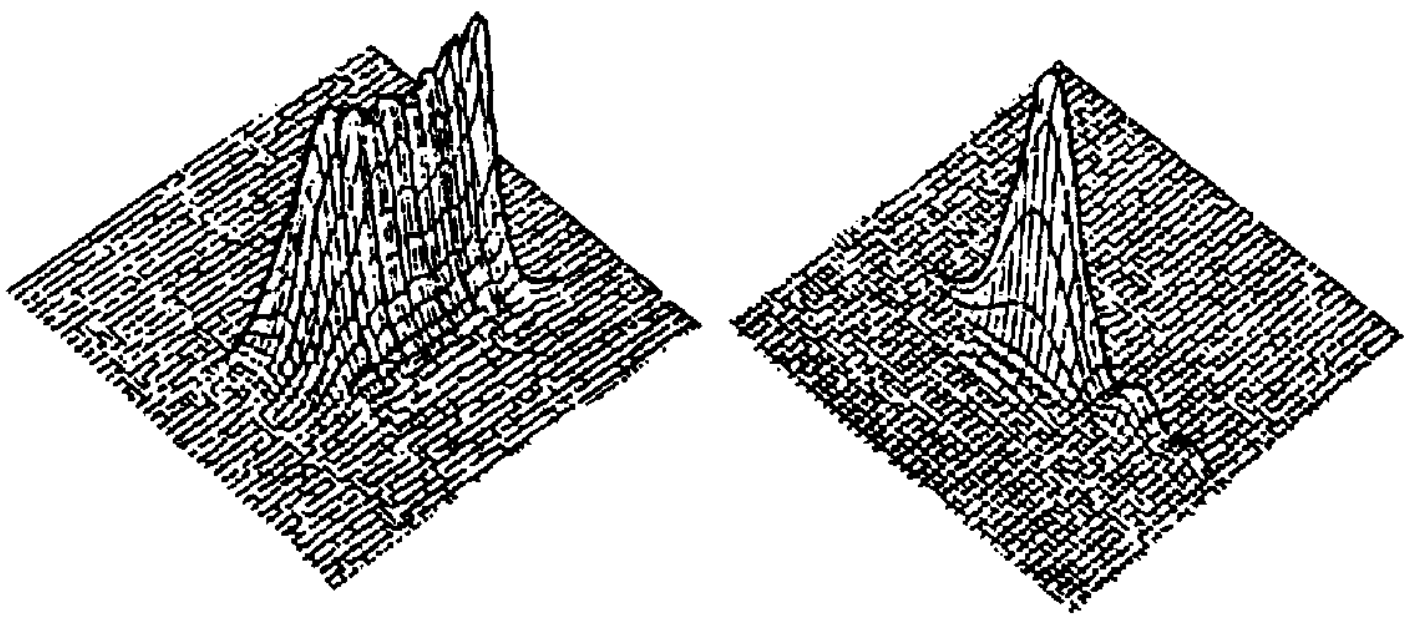
由式(10.17.4)求出 $\boldsymbol{r}_y$ 和 γ 后，代入式(10.17.3)便可解出 $\boldsymbol{r}_x$. 这样，UR90 腔的 x 和 y 方向有同一本征值 γ，它等价于环绕矩阵为 $-\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1$ 单侧耦合输出的负支窄带非稳腔.

为了进行比较，图 10.17.6 给出了用衍射积分数值计算得到的常规非稳腔($M=1.39$)的近场和远场光强分布，其近场是一个薄的矩形环，对应的远场分布在四个方向都有很大的旁瓣. 而 UR90 腔近场输出(见图 10.17.7，图中 $M=1.2$)为实心矩形光束，对应的远场分布中旁瓣大为抑制.



近场　　远场

图 10.17.6　$M=1.39$ 常规非稳腔的光强分布



近场　　远场

图 10.17.7　$M=1.2$ UR90 腔的光强

UR90 腔的主要优点是利用 90°束转动的平均效应有效地补偿了腔内因折射率和增益分布不均匀性引起的光束畸变，近场输出圆偏振实心光束，能从低增益介质中获得近衍射极限的高功率激光输出，对腔失调不敏感等.其缺点是结构复杂，对光学元件加工精度和镀膜要求高.UR90 腔常设计成负支实共焦腔型，亦可设计为正支虚共焦型，已在 CO_2 激光器、氧化碘化学激光器和氟化氢化学激光器中获得应用.

习　　题

1. 参考图 10.1.1(c)，对 g' 参数等价腔推出腔参数和模参数公式.
2. 推导式(10.1.21)～式(10.1.25)，并用 $ABCD$ 矩阵元写出相应的表示式.
3. 推导式(10.3.18).

4. 证明当式(10.3.1)满足时，在镜 1 处输出高斯光束的等相面为平面.

5. 基模热稳条件式(10.3.18)实际上对内含有一个热薄透镜情况成立.试对腔内含有一个热厚透镜情况下证明基模热稳条件为

$$\frac{1}{g_1^*}=2g_2^*+\frac{1}{g_2^*}\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2\frac{\left(1+\dfrac{1}{nd_1}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{l}{nd_1}\right)^2}{\left(1+\dfrac{l}{nd_2}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{l}{nd_2}\right)^2}$$

$$+2\left(\frac{d_1}{d_2}\right)\frac{d_2+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{l}{n}\left(1+\dfrac{d_2}{d_1}\right)}{\left(d_2+\dfrac{l}{n}\right)+\dfrac{1}{2d_2}\left(\dfrac{l}{n}\right)^2}$$

当 $d_1\approx 0$ 时，上式简化为

$$\frac{1}{g_1^*}=2g_2^*+\frac{\dfrac{l}{n}\left(\dfrac{1}{2g_2^*}\dfrac{l}{n}+d_2\right)}{d_2\left(d_2+\dfrac{l}{n}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{l}{n}\right)^2}$$

式中 l 为透镜厚度，n 为透镜折射率.

6. 推导出满足自孔径选模条件式(10.3.34)时，ρ_1、ρ_2、w_1、w_2的表示式.

7. 对含望远镜系统的平凹腔写出等价 g'参数腔、g''等价腔、g^* 参数腔和 G 参数腔的有关公式.

8. 证明式(10.4.68)～式(10.4.70).

9. 设计一个望远镜腔，它既是基模热稳的，又能获得大体积基模激光输出.

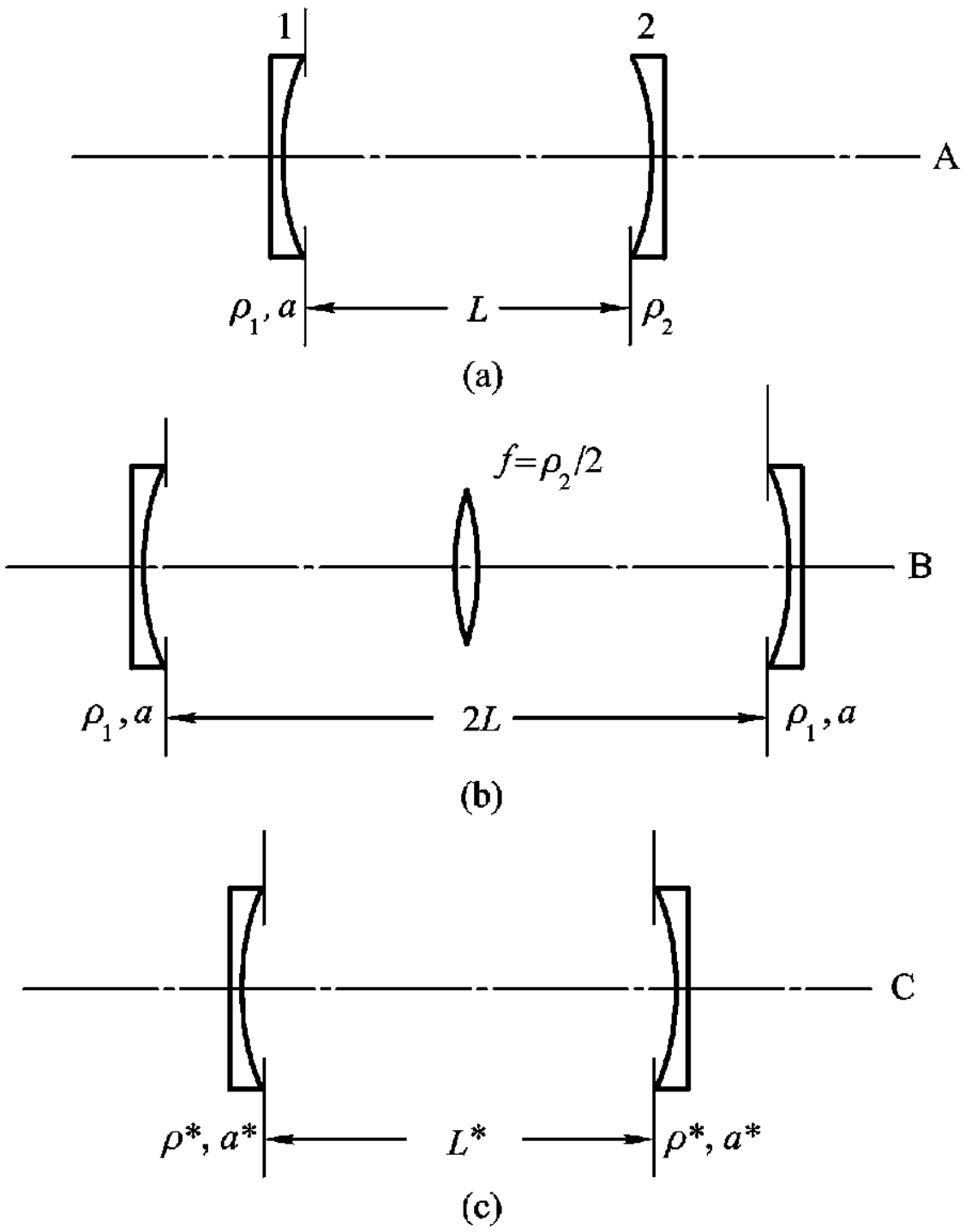
10. 基模热稳腔的思想可以推广于多模工作情况吗？为什么？试对此加以讨论.

11. 推导出望远镜腔的临界 g^* 参数和临界调焦量 Δ 的公式，并对其稳定性进行讨论.

12. 按照模匹配原理，稳定多元件腔内被某一光学元件(例如透镜)所分开 A、B 两空间内的激光模参数经过该光学元件变换后，A 空间的模参数经变换应当等于 B 空间的模参数，反之亦然.利用此原理以§10.1 所述含一个透镜多元件腔为例进行具体分析，并讨论：(1) 利用模匹配分段计算法的特点；(2) 对望远镜腔能用此法分析吗？试归纳出主要计算步骤.

13. 推导出含有两个热薄透镜多元件腔的基模热稳条件并加以讨论.

14. 设有如图(a)所示在镜 1 处置限模光阑的腔 A，两反射镜曲率半径分别为 ρ_1、ρ_2，限模光阑半径 $a=sw_1$，w_1为镜 1 处基模高斯光束束宽，s 为匹配因子，例如 $s=1.5$.现按图(b)、(c)所示步骤，先将 A 腔变换为腔长 $2L$、内置焦距 $f=\rho_2/2$ 的多元件腔 B，然后用 B 腔的对称 g^* 参数等价腔 C 代替腔 B.(1) 求出 C 腔的 g^* 参数和菲涅尔数 F；(2) 对称腔 C 的衍射损耗易于用计算机求数值积分得出，说明如何由 C 腔的衍射损耗求得 A 腔的衍射损耗.(3) C 腔是 A 腔的 g^* 参数等价腔吗？为什么？



15. 在(1) $f_1=f_2=f$; (2) $f_1\neq f_2$ (f_1、f_2为腔内两激光棒热透镜焦距)情况下分别讨论含两个热透镜光腔的动态工作特性,作出动态特性曲线图.

16. 含热透镜望远镜腔是腔内含有三个透镜多元件腔的典型例.对(1)约束稳定;(2)非稳定情况下这类光腔的分析方法进行总结、比较.

17. 分析基模动态热稳定望远镜腔的工作特性.当 $G_1G_2\approx 1/2$ 满足条件时,推导出能补偿热扰动望远镜失调量 Δ 的公式,并加以讨论.

18. 何谓像散补偿?以环形腔和折叠腔为例,说明像散补偿的原理、条件和补偿方法.

19. 相位共轭有何物理特性?用相位共轭镜的第Ⅰ矩阵作§10.9有关推导,并将所得结果进行比较.

20. 在弱高斯光阑近似下,对§10.9讨论相位共轭腔有 $G_1G_2=1/2$,这是否意味着它总是约束稳定的,为什么?

21. 讨论由两个相位共轭镜构成相位共轭腔的物理特性.

22. 非均匀反射镜腔有何特点?实现非均匀反射的方法有哪些?举1~2例详加分析.

23. 腔内加入偏振元件有哪些作用?含偏振元件光腔有何特点?

24. 多元件共焦型非稳腔与简单两镜共焦型非稳腔物理特性上有何异同？设计时值得注意之处有哪些？

25. 交叉球面棱镜腔有何特点？为什么在分析这类腔的光模特征时可以等效为图 10.16.2 的多元件平行平面腔？用(1)混合等价腔方法；(2)矩阵光学方法对含热透镜的交叉球面棱镜腔进行分析，对所得结果加以比较.

26. 在实际工作中使用非轴对称腔的目的是什么？以母线交叉成任意角度的柱面－柱面镜腔为例，用(1)复波前自再现；(2)本征光线矢量法做数值计算和分析.

27. 讨论式(10.11.11)、式(10.11.12)、式(10.11.15)和式(10.11.16)中矩阵开方的物理意义和“±”的取舍法则.

28. 列出常用偏振元件的琼斯矩阵表，讨论这些偏振元件在激光光学中的用途.

29. 除改变光腔反射镜的光强反射率外，也可以通过改变反射镜的相位分布实现改善输出光束质量的目的，这即梯度相位镜腔的基本思想.对梯度相位镜腔进行设计、计算和分析，讨论实现超高斯分布激光输出时反射镜应具有的相位分布.

30. 若将光腔的一个反射镜用曲率半径可变的自适应镜代替，或者腔内放置自适应光学元件时，就构成了自适应光学谐振腔.分析这类光腔的工作特性.

参 考 文 献

[1] Hodgson N, Weber H. Optische Resonatoren. Berlin. Heidelberg. New York: Springer. Verlag, 1992

[2] Kudryashov A V, Weber H et al. Laser Resonators. Novel Design and Development. Bellingham. Washington: SPIE Optical Engineering Press, 1999

[3] Koechner W. Solid State Laser Engineering 5th edition. Berlin. Heidelberg: Springer Verlag, 1999

[4] Kortz H P, Iffländer R, Weber H. Stability and beam divergence of multimode laser with internal varible lasers. Appl Opt, 1981, 20:4 124

[5] Steffen J, Lörtscher J P, Herziger G. Fundamental mode radiation with solid state lasers. IEEE J Quant Electron, 1972, 8:239

[6] Hanna D C, Sawyers C G, Yuratich M A. Telescopic resonators for large volume TEM_{00} mode operation. Opt & Quant Electron, 1981, 13:493

[7] 吕百达.含有多个透镜谐振腔的研究.兵器激光，1984，4:20

[8] 吕百达.望远镜谐振腔的研究.兵器激光，1984，5:46

[9] Wei G, Lü B. Analysis of optical resonators with two internal lenses. Laser'83, München, 1983

[10] Driedger K P, Lü B, Weber H. Multimode resonators insensitive against thermal lensing. Opt Acta, 1985, 32:847

[11] 吕百达. Weber H. 多模热不灵敏腔.光学学报，1986，6:577

[12] Lü B. The general condition for insensitivity against thermal lensing of mul-

tielement resonators. Optoelektronik in der Technik: Springer Verlag, 1987

[13] 吕百达.基模动态稳定望远镜腔.光学学报,1987,7:105

[14] 吕百达,李铁平.含热透镜多元件腔的动态工作特性.中国激光,1987,14:328

[15] Lü B. Study of characteristics of telescopic resonators with a thermal lens. Revue Roumaine de Physique, 1988,34:7

[16] 吕百达.廖严,陈文娱等.深度热稳定望远镜腔.光学学报,1988,8:966

[17] 吕百达,陈文娱,廖严等.光学谐振腔的动态特性Ⅰ.分析方法和相关概念.光电与真空(台湾),1990,4:35

[18] 吕百达,陈文娱,廖严等.光学谐振腔的动态特性Ⅱ.典型光腔的动态特性分析.光电与真空(台湾),1991,5:41

[19] 吕百达,蔡邦维,丘悦等.固体激光谐振腔研究进展.激光与红外,1993,23:20

[20] Driedger K P, Iffländer R M, Weber H. Multirod resonators for high power solid state lasers with improved beem quality. IEEE J Quant Electron, 1988, 24:665

[21] Kumkar H, Wedel B, Richter K. Beam quality and efficiency of high average - power multirod lasers. Opt & Laser Tech, 1992, 24:67

[22] Lü Q, Kugler N, Weber H et al. A novel approach for compensation of birefringence in cylindrical Nd:YAG rods. Opt & Quant Electron, 1996,28:57

[23] Hanna D C. Astigmatic Gaussian beams produced by axially asymmetric laser cavities. IEEE J Quant Electron, 1969, 5:483

[24] Gobbi P G, Reali G C. A novel unstable resonator configuration with a self - filtering aperture. Opt Commun, 1984, 52:195

[25] Paxton A H, Salvi T C. Unstable optical resonator with self - imaging aperture. Opt Commun, 1978, 26:305

[26] Magni V, Silvestri S D, Qian L et al. Rod imaging supergaussian unstable resonator for high power solid - state lasers. Opt Commun, 1992, 94:87

[27] 邓仁亮,徐荣甫,张自襄等.交叉棱镜望远镜腔激光器.光学学报,1984,4:721

[28] 吕百达,蔡邦维,廖严等.交叉棱镜腔 Nd:YAG 板条激光器.光学学报,1990,10:213

[29] 吕百达,冯国英等.板条固体激光器用新型棱镜腔的偏振特性.光学学报,1994,14:1 127

[30] Lü B, Cai B, Feng G et al. Beam quality improvement of slab lasers. SPIE, 1992,1 813:265

[31] 吕百达,胡玉芳,周兴灵等.失调正交棱镜腔的分析.中国激光,1991,18:341

[32] 吕百达，蔡邦维，廖严等. 板条固体激光器研究的进展. 激光与红外，1990，20:8

[33] Dong S，Lü Q，Eicher J. Folded prism resonators for slab lasers with high beam quality. Opt Commun，1991，82(5，6):514

[34] Lü B，Feng G et al. Characteristics of two types of prism resonators. SPIE，1994，2 206:542

[35] Lü B，Feng G et al. Study of slab geometry lasers and their beam transformation characteristics. International Symposium on Laser，Pyongyang'Science Publishing House DPRK，1993:118

[36] 林强，王绍民，吕百达. 非轴对称光腔的矩阵光学分析. 中国激光，1990，17:150

[37] Lü B，Xu S，Hu Y et al. Matrix representation of three. dimensional astigmatic resonators. Opt & Quant Electron，1992，24:619

[38] Lü B，Xu S，Feng G et al. Astigmatic resonator analysis using an eigenray vetor concept. Optik，1992，90:158

[39] Lü B，Feng G，Cai B. Invariant relations of complex rays in propagation and transformation. Optik，1994，96:125

[40] Lü B，Feng G，Yang F et al. Some properties of dynamically stable resonators. Optik，1993，94:83

[41] Lü B，Feng G. Iterative computing method for analyzing ring resonators with general astigmatism. Optik，1995，99:41

[42] 吕百达，冯国英等. 分析非轴对称腔的复光线数值迭代法. 光学学报，1994，14:984

[43] 冯国英，吕百达. 使用参考面移动法分析非轴对称腔的特性. 四川大学学报，1994，31:78

[44] Kuba K，Yamamoto T，Yagi S. Improvement of slab laser beam divergence by using an offaxis unstable stable resonators. Opt Lett，1990，15:21

[45] Hodgson N，Haase T. Beam parameters mode structure and diffraction losses of slab lasers with unstable resonators. Opt & Quant Electron，1992，24:903

[46] Magni V，Valentini G et al. Recent development in laser resonator design. Opt & Quant Electron，1991，23:1 105

[47] Silvestri S D，Laporta P，Magni V et al. Solid state laser unstable resonators with tapered reflectivity mirrors: the super Ganssian approach. IEEE J Quant Electron，1988，24:1 172

[48] 陈军，马跃如，龙鹰. 用 SF_6 气体作 SBS 相位共轭镜的激光腔. 光学学报，1992，12:1 068

[49] Seidel S，Kugler N. Nd:YAG 200W average power oscillator amplifier system with SBS phase conjugation and depolarization compensation. J Opt Soc Am B，

1997，14:1 885

[50] Eichler H J，Mehl O，Eichler J. Multiamplifier arrangements with phase conjugation for power scaling of high beam quality solid state lasers. SPIE，1999，3 613:166

[51] 吕百达，蔡邦维，王绍民. 相位共轭光腔的热稳定性. 光学学报，1988，8:140

[52] 吕百达，蔡邦维，王绍民. 弱高斯光阑近似和相位共轭腔的基本性质. 中国激光，1988，15:544

[53] 林强，王绍民，吕百达. 双相位共轭光腔的横模及其特性. 杭州大学学报，1988，15:293

[54] 常兵，蔡希洁，李庆国. 变反射率镜非稳腔优化设计－超高斯途径. 光学学报，1995，15:977

[55] 冯国英，叶一东，吕百达. 带可变反射率镜无源和有源腔的衍射分析. 四川大学学报，1995，32:283

[56] 冯国英，吕百达等. 1D VRM 非轴对称虚共焦腔(Nd，Ce)：YAG 板条激光器的实验研究. 中国激光，1997，24:13

第十一章　光学谐振腔的失调特性

光学谐振腔的失调是从事激光工作中经常遇到的一个实际问题.一方面,因为使用氦氖激光器或平行光管仪等很难百分之百把腔调准.另一方面,即使完全调准的腔在激光器工作时,也会因客观存在的机械、热等扰动原因而偏离校准位置.在这个意义上,可以认为实际的激光谐振腔都有不同程度的失调.失调腔可以作为离轴光学系统的一个典型例.本章讨论失调腔的主要分析方法和光腔的失调特性,并以失调平行平面腔、非稳腔、失调多元件稳定腔、交叉球面棱镜腔和相位共轭腔等为例,对方法的应用加以说明.

§11.1　失调腔的几何光学分析方法

一、平行平面腔

用几何光学方法分析腔的失调最为简单、直观.基本方法是设腔反射镜 i 有一偏角 α_i(定义为失调角),利用几何关系可以求出失调线位移 Δ_{ii}、Δ_{ji},由此还可以求出腔因失调而引起的损耗 δ.现以平行平面腔为例做一分析.

如图 11.1.1 所示腔长为 L、反射镜横向尺寸为 $2a$ 平行平面腔中,设镜 1 失调,失调角为 α_1,由简单的几何关系可知,光线经第 n 次往返后的失调线位移为

$$\Delta_{21}=2(2n-1)\alpha_1 L \tag{11.1.1}$$

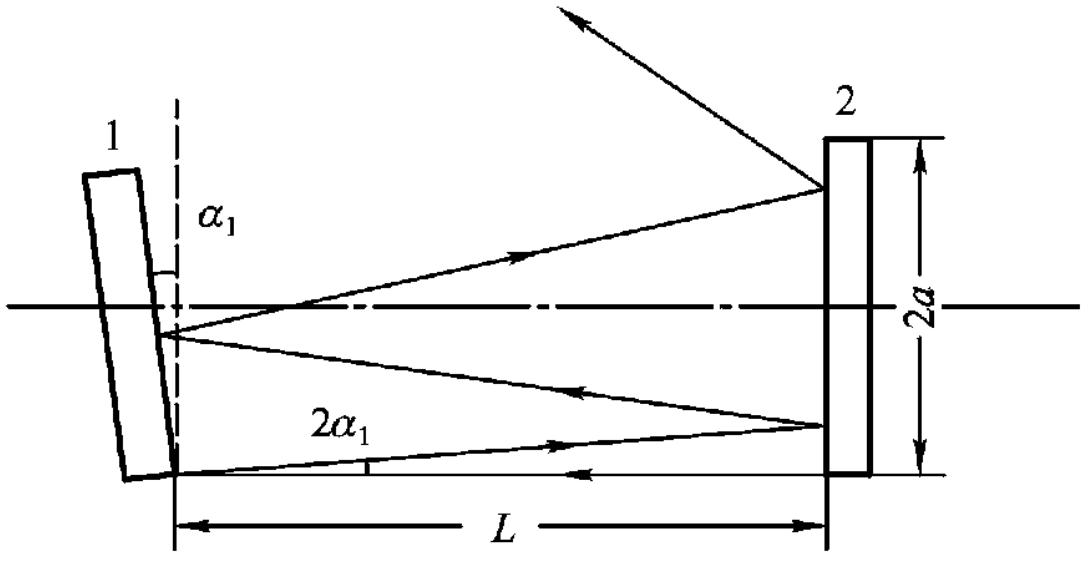


图 11.1.1　失调平行平面腔

于是，与原光轴平行的光线经过

$$m=\sqrt{\frac{a}{\alpha_1 L}} \tag{11.1.2}$$

次往返传输后将逸出腔外.因 α_1 角很小，近似有

$$t_0=\frac{2L}{c}\qquad\text{(光在腔内往返一周时间)} \tag{11.1.3}$$

将式(11.1.2)、式(11.1.3)代入式(1.7.10)、式(1.7.17)、式(1.7.22)得到

$$\tau_a=mt_0=\frac{2}{c}\sqrt{\frac{aL}{\alpha_1}} \tag{11.1.4}$$

$$\delta_a=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha_1 L}{a}} \tag{11.1.5}$$

$$Q_a=\frac{4\pi}{\lambda}\sqrt{\frac{aL}{\alpha_1}} \tag{11.1.6}$$

$$\Delta\nu_a=\frac{c}{4\pi}\sqrt{\frac{\alpha_1}{aL}} \tag{11.1.7}$$

设 $a=5$ mm，$L=1$ m，为使 $\delta_a\leqslant 10\ \%$ 则 $\alpha_1=41$ s.若 $\alpha_1=0.4$ s，则 $\delta_a=1\ \%$.由此可知，平行平面腔的调整精度要求很高，对失调相当灵敏.

二、非稳腔

对非稳腔可用类似方法分析.如图 11.1.2，设镜 1 倾斜 α_1 角，由此引起在镜 1 处的失调线位移为

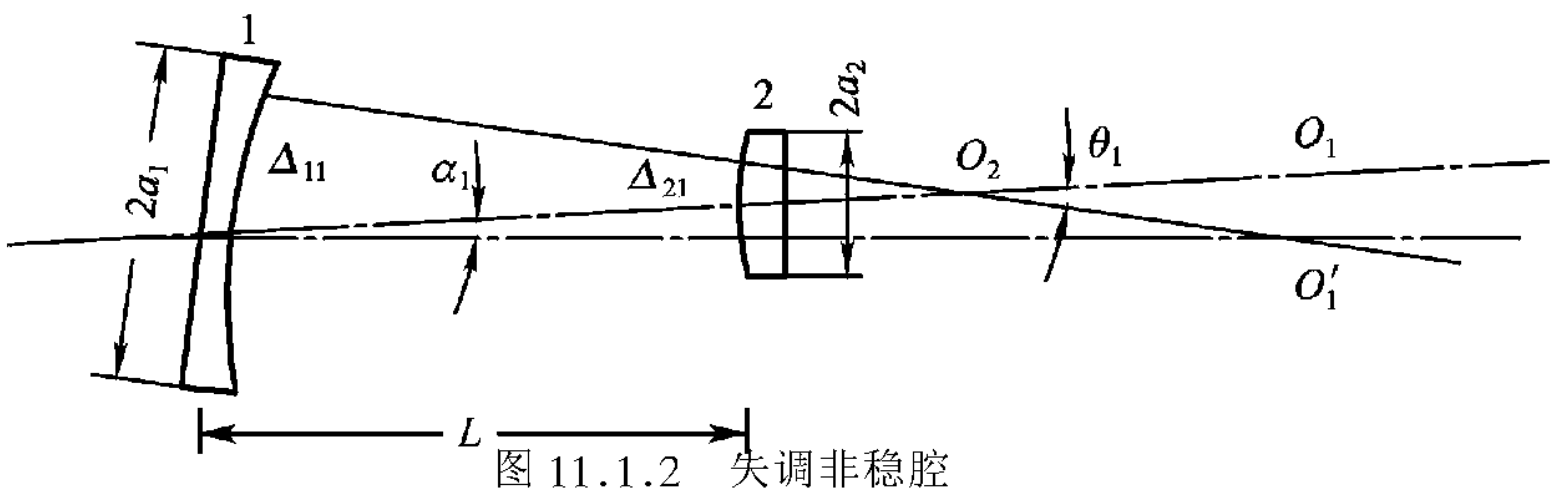


图 11.1.2　失调非稳腔

$$\Delta_{11}=\frac{g_2 L}{1-g_1 g_2}\alpha_1 \tag{11.1.8}$$

在镜 2 处的失调线位移为

$$\Delta_{21}=\frac{L}{1-g_1 g_2}\alpha_1 \tag{11.1.9}$$

可用角灵敏度 ζ、第一和第二临界失调角来描写非稳腔的失调特性.角灵敏度定义为

$$\zeta=\frac{\theta_1}{\alpha_1} \tag{11.1.10}$$

式中 θ_1 为失调腔光轴 $O_1'O_2$ 与未失调时光轴 O_1O_2 间夹角.

利用式(11.1.8)、式(11.1.9)可求得对正支虚共焦腔

$$\zeta_+=\frac{2M}{M-1} \tag{11.1.11}$$

对负支实共焦腔

$$\zeta_-=\frac{2M}{M+1} \tag{11.1.12}$$

式中 M 为往返一周放大率.

设镜 1 倾斜至失调角为 α_{CI} 时,就没有光线可以从镜 2 的一侧耦合出去,则 α_{CI} 称为第一临界角.第二临界角 $\alpha_{\mathrm{C\,II}}$ 定义为当光轴倾斜至超过其中一镜的边缘时所对应的失调角.对共焦非稳腔有

$$\alpha_{\mathrm{CI}}=\frac{a_1-a_2}{\rho_1} \tag{11.1.13}$$

$$\alpha_{\mathrm{C\,II}}=\frac{a_2L}{\rho_1\rho_2} \tag{11.1.14}$$

式中 a_i 为镜 i 的半径.

当满足单端输出条件时,对正支虚共焦腔

$$\alpha_{\mathrm{CI}}^{+}=\frac{a_1}{2L}\left(\frac{M-1}{M}\right)^2 \tag{11.1.15}$$

$$\alpha_{\mathrm{C\,II}}^{+}=-\frac{a_1}{L}\left(\frac{M-1}{2M}\right)^2 \tag{11.1.16}$$

对负支实共焦腔

$$\alpha_{\mathrm{CI}}^{-}=\frac{a_1}{2L}\left(\frac{M^2-1}{M^2}\right) \tag{11.1.17}$$

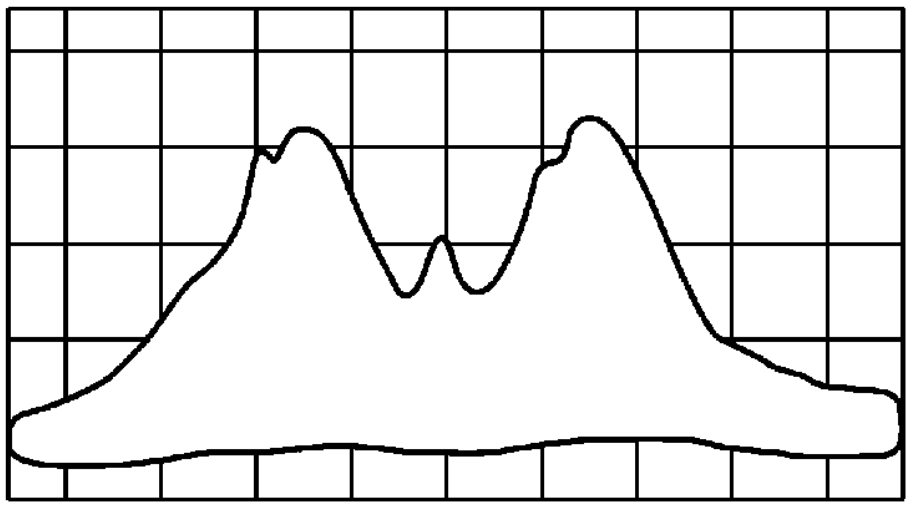
$$\alpha_{\mathrm{C\,II}}^{-}=\frac{a_1}{L}\left(\frac{M+1}{M}\right)^2 \tag{11.1.18}$$

显然,ζ 越小,α_{C}越大,则腔对失调就越不灵敏.因 M 大于 1,对于相同菲涅耳数的共焦非稳腔,就失调特性而言,负支比正支要不灵敏.但 α_{CI} 是大于或小于 $\alpha_{\mathrm{C\,II}}$,则要由腔型、几何尺寸等因素决定.对正支虚共焦腔有

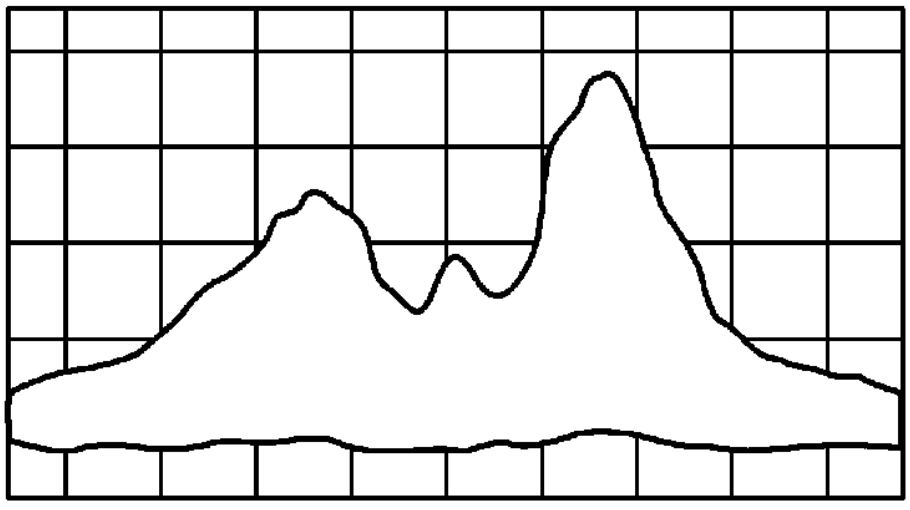
$$\alpha_{\mathrm{CI}}^{+}=2\left|\alpha_{\mathrm{C\,II}}^{+}\right| \tag{11.1.19}$$

其值一般约为几十微弧度,因而对失调十分灵敏,这给腔的调整和使用带来很大的不便.

图 11.1.3 为用二极管阵列和示波器测得失调非稳腔输出光束的近



$\alpha_1=25$ μrad



$\alpha_1=50$ μrad

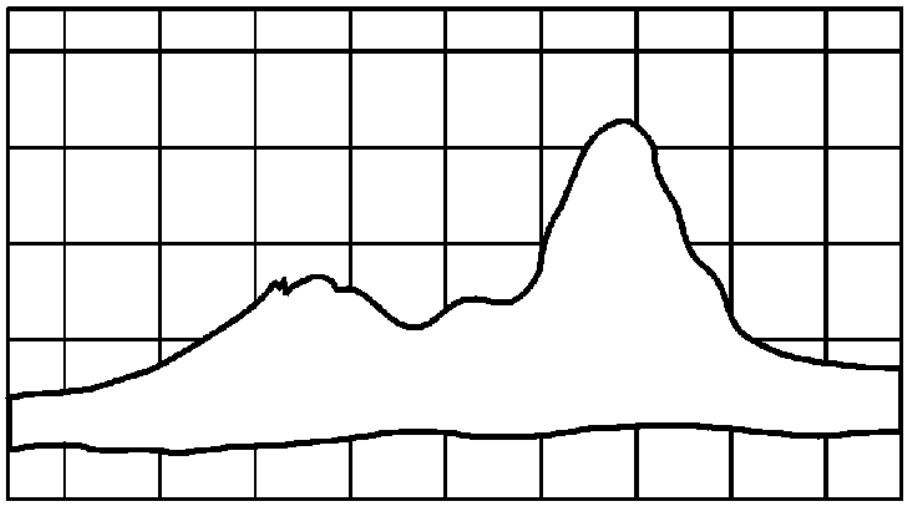


图 11.1.3　失调非稳腔远场光强分布

场强度分布图.凸凹非稳腔参数为 $L=0.5$ m，$\rho_1=2$ m，$\rho_2=-0.5$ m，$a_1\to\infty$，$a_2=0.9$ mm.设反射镜 1 失调，激光由镜 2 端耦合输出.由图可见，失调后光环上出现缺蚀，光强分布也不均匀了.

图 11.1.4 为在与图 11.1.3 使用同一非稳腔中，输出能的径向分布量 E（表为相对值）随失调角 α_1 变化的实验曲线.

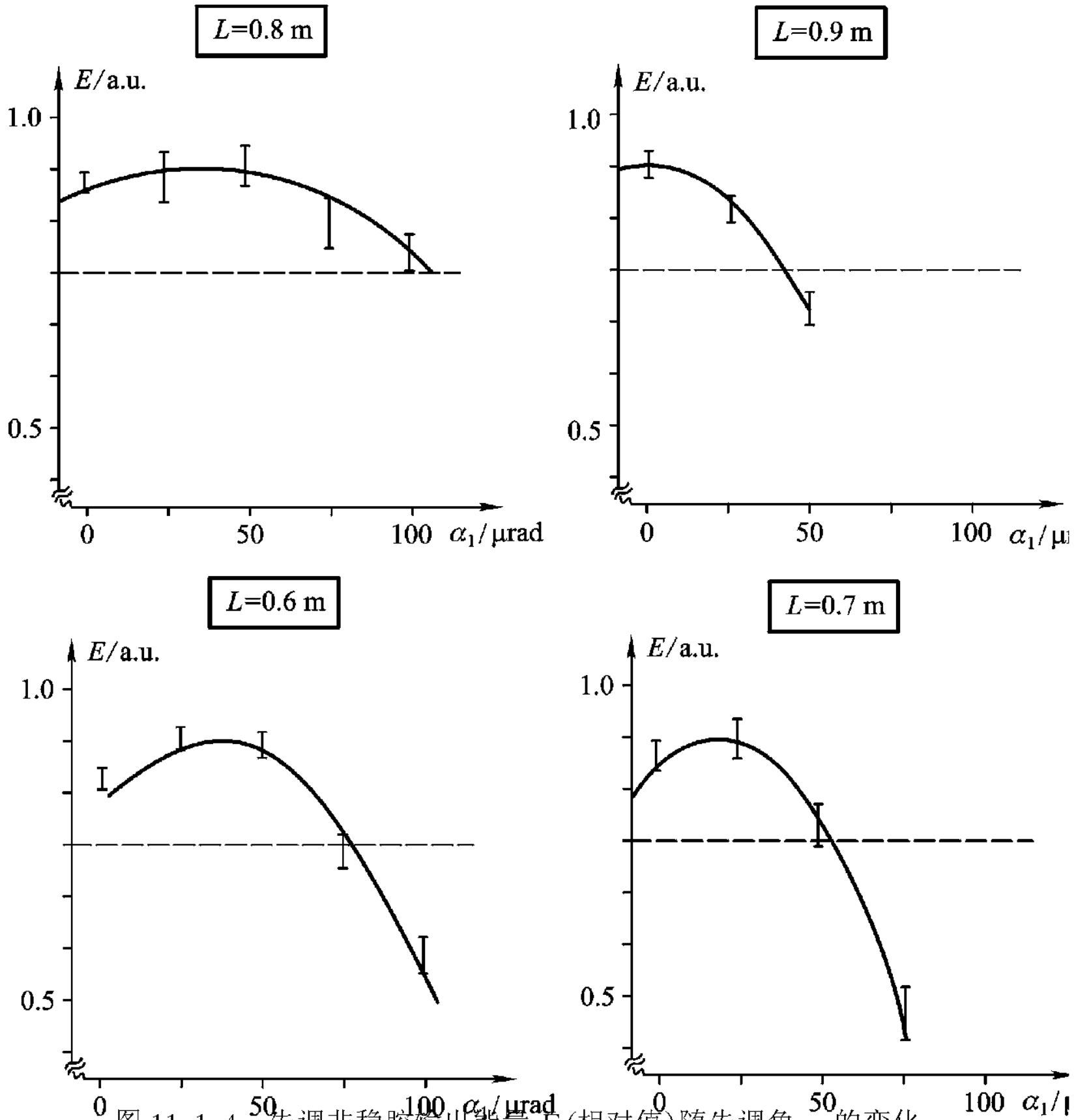


图 11.1.4　失调非稳腔输出能量 E(相对值)随失调角 α_1 的变化

§ 11.2　失调光学系统的增广矩阵

一、无相对失调的光学系统

图 11.2.1 中，设在参考面 RP_1、RP_2 间用变换矩阵 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 表征的光学系统相对于理想光轴 z 轴失调，$RP_1 \rightarrow RP_{1m}$，$RP_2 \rightarrow RP_{2m}$，失调后的光轴为 z' 轴，但参考面 RP_{1m} 与 RP_{2m} 间无相对失调，可用失调线位移 ε(RP_1 与 z、z' 轴交点间的距离)和失调角位移 ε'(z、z' 轴间夹角)来描述，光线经过失调光学系统可等效如下面的变换：

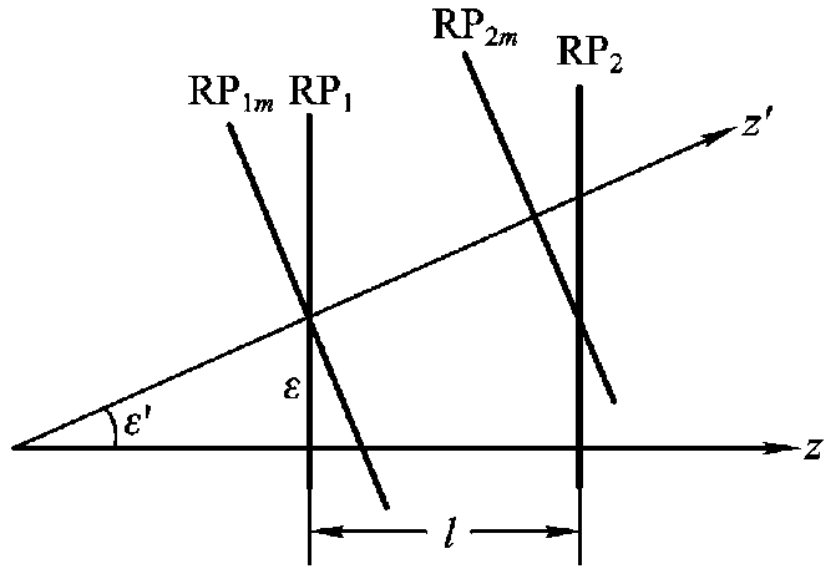


图 11.2.1　失调光学系统(无相对失调情况)

$$\mathrm{RP}_1 \xrightarrow{\text{坐标旋转}} \mathrm{RP}_{1m}$$

$$\mathrm{RP}_{1m} \xrightarrow{\text{共轴传输}} \mathrm{RP}_{2m}$$

$$\mathrm{RP}_{2m} \xrightarrow{\text{坐标旋转}} \mathrm{RP}_2$$

在各参考面处的光线矢量分别用相应的 $\begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix}$ 来表示. 在近轴近似和系统小失调(ε、ε′二阶以上小量可略去，ε′≈sin ε′≈tan ε′，cos ε′≈1)假设下，上述变换可用矩阵形式简写为

$$\begin{bmatrix} x_{1m} \\ \theta_{1m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{2m} \\ \theta_{2m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1m} \\ \theta_{1m} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{2m} \\ \theta_{2m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix} \tag{11.2.1}$$

由此得

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix} \tag{11.2.2}$$

式中

$$\begin{cases} \alpha = 1 - A \\ \beta = l - B \\ \gamma = -C \\ \delta = 1 - D \end{cases} \tag{11.2.3}$$

l 为两参考面 RP_1、RP_2 间的轴向距离.

式(11.2.2)可改写为

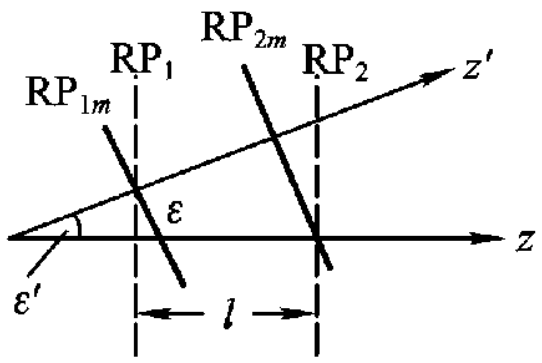
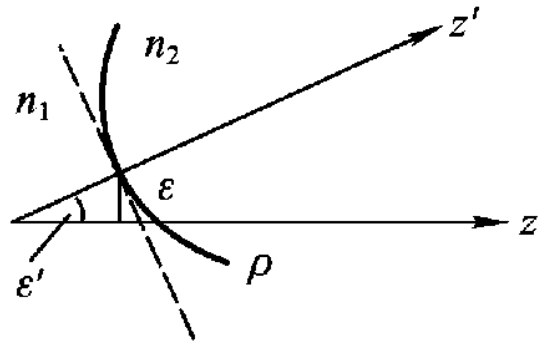
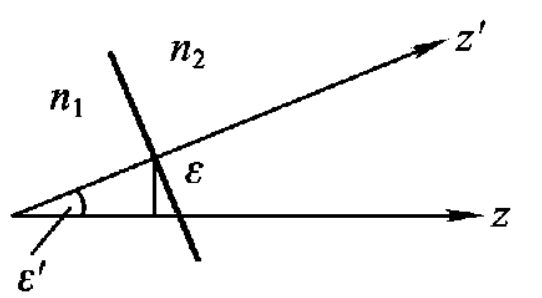
$$\begin{bmatrix} x_2 \\ \theta_2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & \alpha\varepsilon & \beta\varepsilon' \\ C & D & \gamma\varepsilon & \delta\varepsilon' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \theta_1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & E & F \\ C & D & G & H \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \theta_1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{11.2.4}$$

式中 4×4 矩阵称为失调光学系统的增广矩阵(亦可等价地写为 3×3 增广矩阵形式),它描述了失调光学系统对入射光线的变换特征.对折射光学系统,α、β、γ、δ 如式(11.2.3)所示.对于反射光学系统,$l=0$,易证

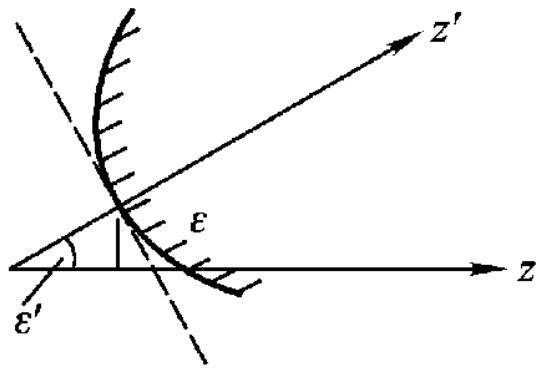
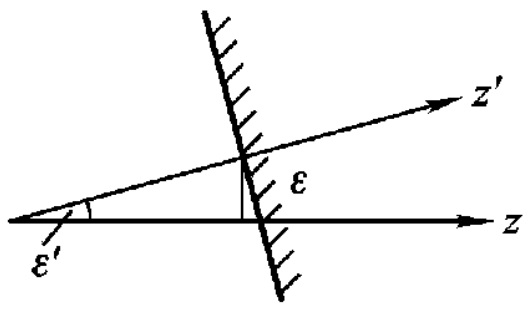
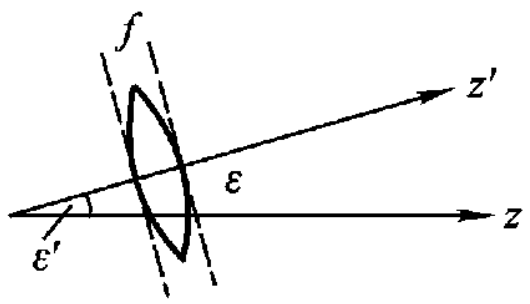
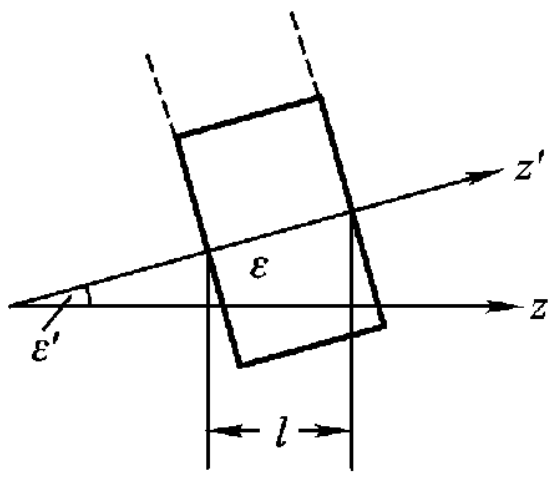
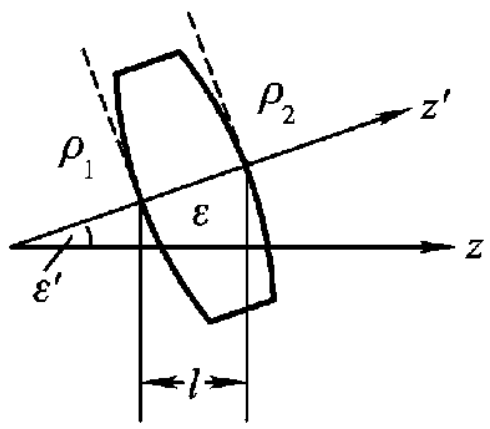
$$\begin{cases} \alpha = 1 - A \\ \beta = -B \\ \gamma = -C \\ \delta = -1 - D \end{cases} \tag{11.2.5}$$

利用式(11.2.3)、式(11.2.5),对表 2.2.1 中常用的光学元件和系统容易写出相应的增广矩阵,见表 11.2.1.

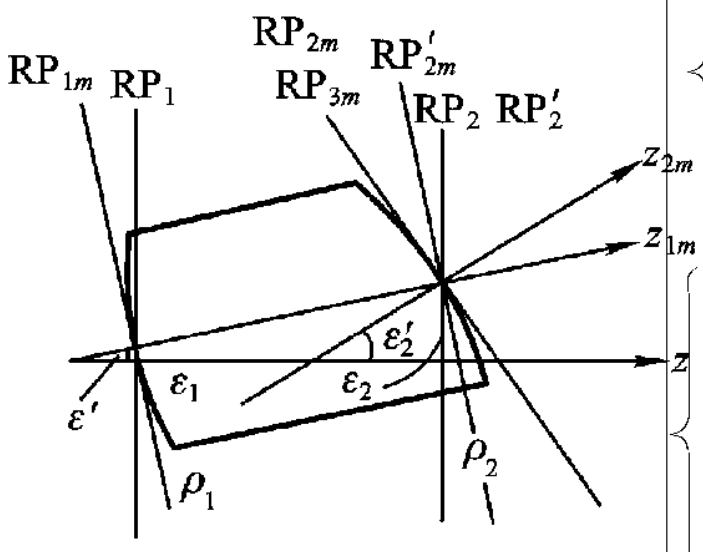
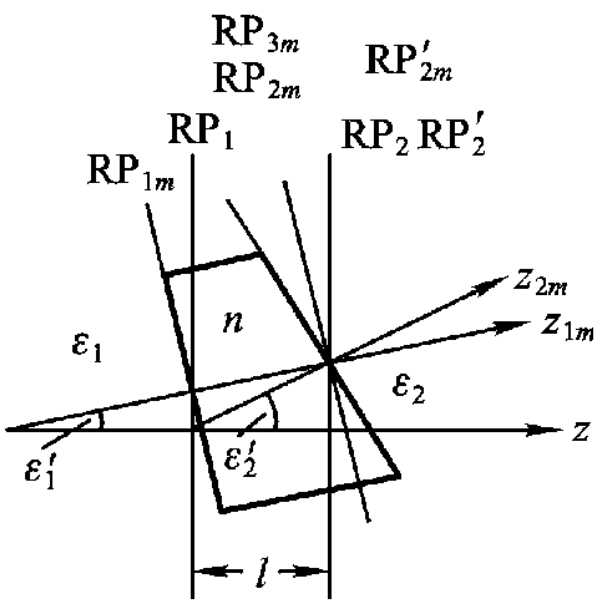
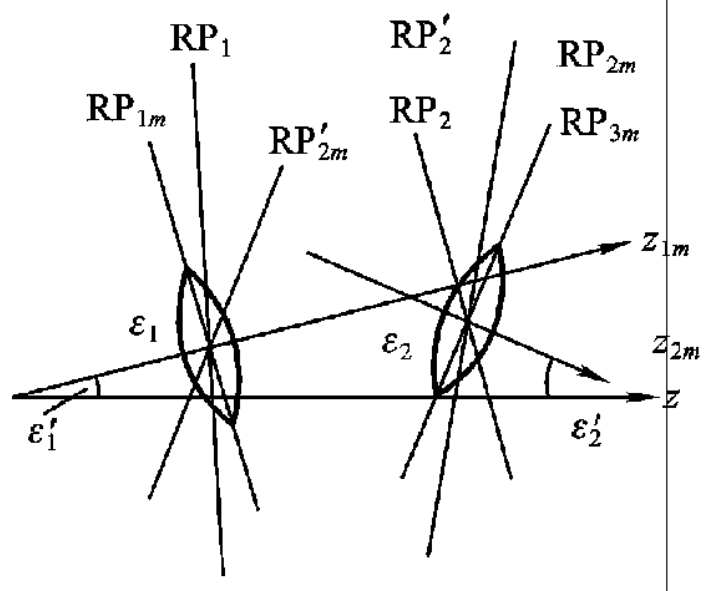
表 11.2.1　失调光学元件的增广矩阵表

1. 均匀介质		$\begin{bmatrix} 1 & l & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
2. 球面折射		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{n_2-n_1}{n_2\rho} & \frac{n_1}{n_2} & \frac{n_1-n_2}{n_2\rho}\varepsilon & \left(1-\frac{n_1}{n_2}\right)\varepsilon' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
3. 平面折射		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} & 0 & \left(1-\frac{n_1}{n_2}\right)\varepsilon' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

续表

4. 球面反射		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{\rho} & 1 & \frac{2\varepsilon}{\rho} & -2\varepsilon' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
5. 平面反射		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2\varepsilon' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
6. 薄透镜		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 & \frac{\varepsilon}{f} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
7. 平行平板		$\begin{bmatrix} 1 & \frac{l}{n} & 0 & \left(1-\frac{1}{n}\right)l\varepsilon' \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
8. 厚透镜(无相对失调)		$\begin{cases} A=1+\frac{(n-1)l}{n\rho_1}, B=\frac{l}{n} \\ C=-(n-1)\left[\frac{1}{\rho_2}-\frac{1}{\rho_1}+\frac{(n-1)l}{n\rho_1\rho_2}\right] \\ D=1-\frac{(n-1)}{n\rho_2}l \end{cases}$ $\begin{cases} E=-(n-1)l\varepsilon/(n\rho_1) \\ F=(n-1)l\varepsilon'/n \\ G=-(n-1)\varepsilon\left[\frac{1}{\rho_2}-\frac{1}{\rho_1}-\frac{(n-1)l}{n\rho_1\rho_2}\right] \\ H=(n-1)l\varepsilon'/(n\rho_2) \end{cases}$

续表

9．厚透镜（有相对失调）		$\begin{cases} A=1+\dfrac{(n-1)l}{n\rho_1}, B=\dfrac{l}{n} \\ C=-(n-1)\left[\dfrac{1}{\rho_2}-\dfrac{1}{\rho_1}+\dfrac{(n-1)l}{n\rho_1\rho_2}\right] \\ D=1-\dfrac{(n-1)}{n\rho_2}l \\ E=-(n-1)l\varepsilon_1/(n\rho_1) \\ F=(n-1)l\varepsilon_1'/n \\ G=-(n-1)\left[\dfrac{\varepsilon_1}{\rho_1}-\dfrac{\varepsilon_2}{\rho_2}-\dfrac{(n-1)l\varepsilon_1}{n\rho_1\rho_2}\right] \\ H=(n-1)(\varepsilon_1'-\varepsilon_2')-\dfrac{(n-1)^2 l\varepsilon_1'}{n\rho_2} \end{cases}$
10．光楔		$\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{l}{n} & 0 & (n-1)l\varepsilon_1'/n \\ 0 & 1 & 0 & (1-n)(\varepsilon_2'-\varepsilon_1') \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
11．有相对失调的薄透镜组		$\begin{cases} A=1-l/f, B=l \\ C=-\left(\dfrac{1}{f_1}+\dfrac{1}{f_2}-\dfrac{l}{f_1 f_2}\right) \\ D=1-l/f_2 \end{cases}$ $\begin{cases} E=l\varepsilon_1/f, F=0 \\ G=\dfrac{\varepsilon_1}{f_1}+\dfrac{\varepsilon_2}{f_2}-\dfrac{l\varepsilon_1}{f_1 f_2} \\ H=0 \end{cases}$

二、有相对失调的光学系统

对图 11.2.2 所示 RP_{1m}、RP_{2m} 间有相对失调的光学系统，应对节一方法加以推广．设在无失调时，RP_1、RP_2 处分别有变换矩阵为 $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix}$ 的光学系统，RP_1、RP_2 间轴向距离为 l，z 轴为理

想光轴.现设两光学系统对理想光轴失调,且相互间亦存在相对失调,失调光轴分别用 z_{1m}、z_{2m} 表示,失调线位移和角位移分别为 ε_1、ε_1'、ε_2、ε_2',相对于第一失调系统的参考面取为 RP_{1m}、RP'_{2m},相对于第二失调系统取为 RP_{2m}、RP_{3m},详见图 11.2.2,然后,做如下的坐标旋转和共轴传输变换:

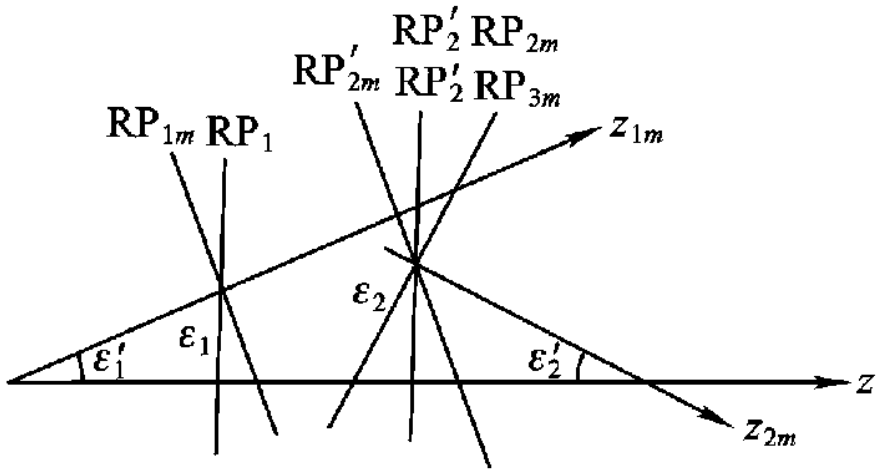


图 11.2.2　失调光学系统
(有相对失调情况)

$$RP_1 \xrightarrow{\text{坐标旋转}} RP_{1m}$$

$$RP_{1m} \xrightarrow{\text{共轴传输}} RP'_{2m}$$

$$RP'_{2m} \xrightarrow{\text{坐标旋转}} RP'_2$$

$$RP'_2 \xrightarrow{\text{坐标旋转}} RP_{2m}$$

$$RP_{2m} \xrightarrow{\text{共轴传输}} RP_{3m}$$

$$RP_{3m} \xrightarrow{\text{坐标旋转}} RP_2 \qquad (RP'_2 \text{与 } RP_2 \text{重合})$$

设各参考面处的光线矢量分别用对应的 $\begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix}$ 来表示,在近轴近似和系统小失调假设下,对应上面各变换关系的矩阵方程为

$$\begin{bmatrix} x_{1m} \\ \theta_{1m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'_{2m} \\ \theta'_{2m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1m} \\ \theta_{1m} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'_2 \\ \theta'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_{2m} \\ \theta'_{2m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{2m} \\ \theta_{2m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_2 \\ \theta'_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{3m} \\ \theta_{3m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & l' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{2m} \\ \theta_{2m} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{3m} \\ \theta_{3m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & l' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2' \end{bmatrix} \qquad (11.2.6)$$

式中 l' 为 RP_{2m}、RP_{3m} 间的轴向距离,在所讨论的两个失调光学系统情况

下，$l'=0$. 由式(11.2.6)得

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} A_2-A & B_2+A_2 l-B \\ C_2-C & D_2+C_2 l-D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1' \end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix} 1-A & -B_2 \\ -C_2 & 1-D_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2' \end{bmatrix} \tag{11.2.7}$$

式中

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \tag{11.2.8}$$

为由 RP_1 至 RP_2 系统总的变换矩阵. 对式(11.2.7)增广，得

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ \theta_2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & B & \tilde{\alpha}_1\varepsilon_1+\tilde{\alpha}_2\varepsilon_2 & \tilde{\beta}_1\varepsilon_1'+\tilde{\beta}_2\varepsilon_2' \\ C & D & \tilde{\gamma}_1\varepsilon_1+\tilde{\gamma}_2\varepsilon_2 & \tilde{\delta}_1\varepsilon_1'+\tilde{\delta}_2\varepsilon_2' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \theta_1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} A & B & E & F \\ C & D & G & H \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \theta_1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{11.2.9}$$

式中

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}_1=A_2-A \\ \tilde{\beta}_1=B_2+A_2 l-B \\ \tilde{\gamma}_1=C_2-C \\ \tilde{\delta}_1=D_2+C_2 l-D \end{cases} \tag{11.2.10}$$

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}_2=1-A_2 \\ \tilde{\beta}_2=-B_2 \\ \tilde{\gamma}_2=-C_2 \\ \tilde{\delta}_2=1-D_2 \end{cases} \tag{11.2.11}$$

式(11.2.9)中的 4×4 增广矩阵是有相对失调光学系统增广矩阵的一般形式. 容易证明，无相对失调光学系统增广矩阵是它的特例.

当在 RP_1、RP_2 处失调光学系统的失调增广矩阵

$$M_i=\begin{bmatrix} A_i & B_i & \alpha_i\varepsilon_i & \beta_i\varepsilon_i' \\ C_i & D_i & \gamma_i\varepsilon_i & \delta_i\varepsilon_i' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad i=1,2 \tag{11.2.12}$$

已知情况下，系统的失调增广矩阵也可直接由 M_1、M_2 和空间距离矩阵的乘积得出. 易证

$$\begin{bmatrix} A_2 & B_2 & \alpha_2\varepsilon_2 & \beta_2\varepsilon_2' \\ C_2 & D_2 & \gamma_2\varepsilon_2 & \delta_2\varepsilon_2' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & \alpha_1\varepsilon_1 & \beta_1\varepsilon_1' \\ C_1 & D_1 & \gamma_1\varepsilon_1 & \delta_1\varepsilon_1' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A & B & \tilde{\alpha}_1\varepsilon_1 + \tilde{\alpha}_2\varepsilon_2 & \tilde{\beta}_1\varepsilon_1' + \tilde{\beta}_2\varepsilon_2' \\ C & D & \tilde{\gamma}_1\varepsilon_1 + \tilde{\gamma}_2\varepsilon_2 & \tilde{\delta}_1\varepsilon_1 + \tilde{\delta}_2\varepsilon_2' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11.2.13}$$

式中 $\tilde{\alpha}_i$、$\tilde{\beta}_i$、$\tilde{\gamma}_i$、$\tilde{\delta}_i$ 为式(11.2.10)、式(11.2.11). 典型的有相对失调光学系统的增广矩阵也总结在表 11.2.1 中.

例：有相对失调的薄透镜组.

设图 11.2.3 中焦距 f_1、f_2 的两薄透镜间相对失调，薄透镜间距 l，则

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\dfrac{l}{f_1} & l \\ -\left(\dfrac{1}{f_1}+\dfrac{1}{f_2}-\dfrac{1}{f_1 f_2}\right) & 1-\dfrac{l}{f_2} \end{bmatrix} \tag{11.2.14}$$

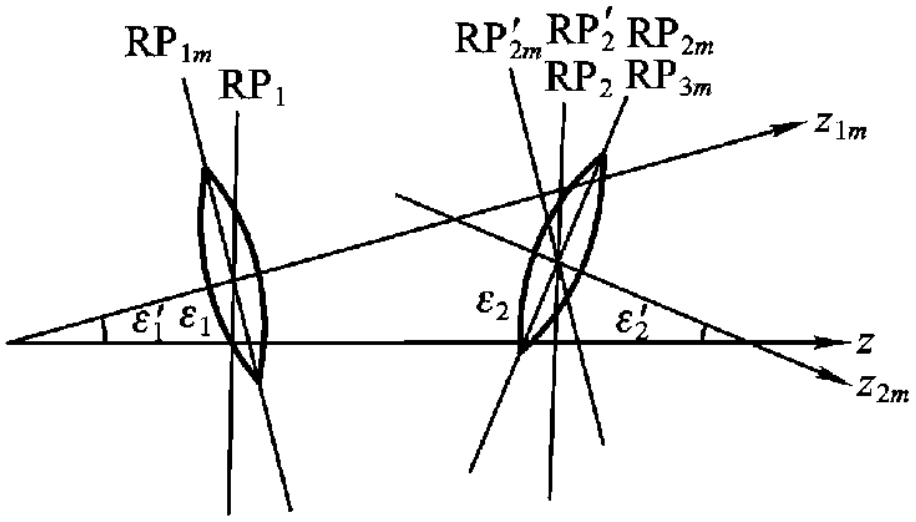


图 11.2.3　有相对失调的薄透镜组

$$\begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f_2} & 1 \end{bmatrix} \tag{11.2.15}$$

将式(11.2.14)、式(11.2.15)代入式(11.2.9)，得到

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ \theta_2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & E & F \\ C & D & G & H \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \theta_1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{11.2.16}$$

式中

$$\begin{cases} E=\dfrac{l}{f_1}\varepsilon_1 \\ F=0 \\ G=\dfrac{\varepsilon_1}{f_1}+\dfrac{\varepsilon_2}{f_2}-\dfrac{l\varepsilon_1}{f_1 f_2} \\ H=0 \end{cases} \tag{11.2.17}$$

A、B、C、D 矩阵元为式(11.2.14)所示.

§ 11.3　失调腔的矩阵光学分析方法

一、失调灵敏度参量

图 11.3.1 所示一般稳定多元件失调腔中，设在镜 1、2 处分别置限模光阑，且相对孔径 s 满足

$$s=\frac{a_1}{w_1}=\frac{a_2}{w_2} \tag{11.3.1}$$

式中 w_i 镜 i 处基模高斯光束束宽，a_i 为限模光阑宽度，$i=1,2$. 设镜 1 倾斜 ε_1' 角(称失调角)，由此引起镜 1 处的失调线位移和角位移 x_{11}、θ_{11}，镜 2 处的失调线位移和角位移 x_{21}、θ_{21}. 同样，因镜 2 倾斜 ε_2' 角而引起镜 2 和镜 1 处的失调线位移和角位移分别为 x_{22}、θ_{22} 和 x_{12}、θ_{12}.

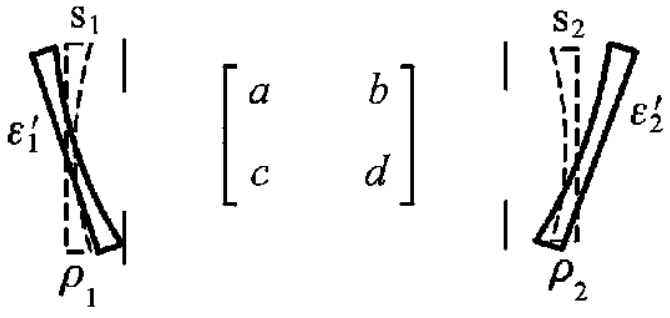


图 11.3.1　失调多元件稳定腔

因镜 i 失调引入的失调灵敏度参量 D_i 定义为

$$D_i=\frac{1}{\varepsilon_i'}\left[\left(\frac{x_{ii}}{w_i}\right)^2+\left(\frac{x_{ji}}{w_j}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},\quad i,j=1,2;\ i\neq j \tag{11.3.2}$$

若两镜都失调则总失调灵敏度参量 D 定义为

$$D=\sqrt{D_1^2+D_2^2} \tag{11.3.3}$$

式中的 x_{ii}、x_{ji} 可用 §11.2 方法计算. 例如，设镜 1 失调，失调角为 ε_1'，则以镜 1 为参考，往返一周后($\varepsilon_1=0$)有

$$\begin{bmatrix} x_{11} \\ \theta_{11} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{2}{\rho_1} & 1 & 0 & -2\varepsilon_1' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & b & 0 & 0 \\ c & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{2}{\rho_2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ \theta_{11} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{11.3.4}$$

以镜 2 为参考，往返一周后（$\varepsilon_2 = 0$）有

$$\begin{bmatrix} x_{21} \\ \theta_{21} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{2}{\rho_2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{2}{\rho_1} & 1 & 0 & -2\varepsilon_1' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d & b & 0 & 0 \\ c & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ \theta_{21} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{11.3.5}$$

由式（11.3.4）、式（11.3.5）求得

$$\begin{cases} x_{11} = -\varepsilon_1' bG_2 / (1 - G_1 G_2) & (11.3.6) \\ \theta_{11} = -\varepsilon_1' (1 - aG_2) / (1 - G_1 G_2) & (11.3.7) \\ x_{21} = -\varepsilon_1' b / (1 - G_1 G_2) & (11.3.8) \\ \theta_{11} = \varepsilon_1' (d - G_2) / (1 - G_1 G_2) & (11.3.9) \end{cases}$$

式中 G_1、G_2 为多元件腔的 G 参数. 将式（11.3.6）、式（11.3.8）代入式（11.3.2）得到

$$D_1^2 = \frac{\pi |b|}{\lambda} \left(\frac{G_2}{G_1} \right)^{1/2} \frac{1 + G_1 G_2}{(1 - G_1 G_2)^{3/2}} \tag{11.3.10}$$

若镜 2 失调，失调角为 ε_2'，类似地有

$$\begin{bmatrix} x_{22} \\ \theta_{22} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{2}{\rho_2} & 1 & 0 & -2\varepsilon_2' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{2}{\rho_1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d & b & 0 & 0 \\ c & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{22} \\ \theta_{22} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{11.3.11}$$

$$\begin{bmatrix} x_{12} \\ \theta_{12} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{2}{\rho_1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & b & 0 & 0 \\ c & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{2}{\rho_2} & 1 & 0 & -2\varepsilon_2' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ \theta_{12} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{11.3.12}$$

由此得

$$\begin{cases} x_{22} = -\varepsilon_2' bG_1 /(1 - G_1 G_2) & (11.3.13) \\ \theta_{22} = -\varepsilon_2' (1 - dG_1) /(1 - G_1 G_2) & (11.3.14) \\ x_{12} = -\varepsilon_2' b /(1 - G_1 G_2) & (11.3.15) \\ \theta_{12} = \varepsilon_2' (a - G_1) /(1 - G_1 G_2) & (11.3.16) \end{cases}$$

于是求得

$$D_2^2 = \frac{\pi |b|}{\lambda} \left(\frac{G_1}{G_2}\right)^{1/2} \frac{1 + G_1 G_2}{(1 - G_1 G_2)^{3/2}} \tag{11.3.17}$$

若两镜都失调，则总的失调灵敏度参量 D 为

$$D^2 = D_1^2 + D_2^2$$

$$= \frac{\pi |b|}{\lambda} \frac{1 + G_1 G_2}{(1 - G_1 G_2)^{3/2}} \frac{|G_1 + G_2|}{(G_1 G_2)^{1/2}} \tag{11.3.18}$$

失调灵敏度参量的物理意义为：若 D_1、D_2 越小，则因光腔反射镜失调引入的附加损耗也越小，光腔对失调就越不灵敏. 在 G 参数图上可作出等失调灵敏度曲线图 11.3.2，并用以对各类稳定多元件腔的失调特性进行比较. 图中

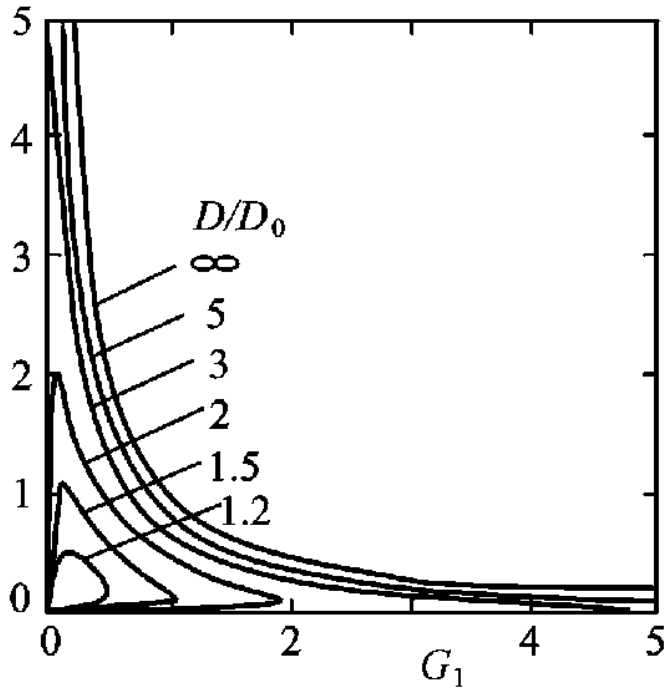


图 11.3.2　多元件腔的等失调灵敏度曲线

$$D_0=\sqrt{\frac{2\pi|b|}{\lambda}} \tag{11.3.19}$$

为稳定多元件对称共焦腔的失调灵敏度参量.虽然对称共焦腔是对失调极不灵敏的光腔,但它对腔型的变化非常敏感,因腔长或反射镜曲率半径的微小变化都会离开 G 参数图上原点位置,这是实际工作中使用共焦腔时要特别注意的.

下面,我们以失调相位共轭腔和稳定交叉球面棱镜腔为例,说明如何利用失调灵敏度参量来分析光腔的失调特性.

二、相位共轭腔的失调特性

将图 11.3.1 中的常规反射镜 2 用相位共轭镜代替,对相位共轭镜

$$\alpha=\beta=\gamma=\delta=0 \tag{11.3.20}$$

故相位共轭镜的失调增广矩阵为

$$\boldsymbol{M}_{\text{pcm}}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \tag{11.3.21}$$

由式(11.3.21)知,相位共轭镜是对失调完全不灵敏的光学元件.

现设常规反射镜 1 失调,失调角 ε_1',在相位共轭镜上引起的失调线位移和角位移为 x_{211} 和 θ_{211},则

$$\begin{bmatrix}x_{211}\\\theta_{211}\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b&0&0\\c&d&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-\dfrac{2}{\rho_1}&1&0&-2\varepsilon_1'\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot$$

$$\begin{bmatrix}d&b&0&0\\c&a&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{210}\\\theta_{210}\\1\\1\end{bmatrix}=\boldsymbol{M}_{21}\begin{bmatrix}x_{210}\\\theta_{210}\\1\\1\end{bmatrix} \tag{11.3.22}$$

式中,x_{210}、θ_{210} 为初始线位移、角位移;$\boldsymbol{M}_{21}$ 为以相位共轭镜为参考,往返一周矩阵

$$\boldsymbol{M}_{21}=\begin{bmatrix}ad+bc-\dfrac{2bd}{\rho_1}&2ab-\dfrac{2b^2}{\rho_1}&0&-2\varepsilon_1'b\\-\left(2cd-\dfrac{2d^2}{\rho_1}\right)&-\left(ad+bc-\dfrac{2bd}{\rho_1}\right)&0&2\varepsilon_1'd\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

易证

$$\boldsymbol{M}_{21}\cdot\boldsymbol{M}_{12}=\boldsymbol{I} \tag{11.3.23}$$

式中

$$\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \tag{11.3.24}$$

这表示以相位共轭镜为参考，任意高斯光束在失调相位共轭腔内往返两周后均能自再现.

以镜 1 为参考，往返一周矩阵为

$$\boldsymbol{M}_{11}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-\dfrac{2}{\rho_1}&1&0&-2\varepsilon_1'\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d&b&0&0\\c&a&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a&b&0&0\\c&d&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-\dfrac{2}{\rho_1}&-1&0&-2\varepsilon_1'\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \tag{11.3.25}$$

由式(11.3.25)知，因常规镜 1 的失调并不引起该镜上失调线位移的变化.

容易证明

$$\boldsymbol{M}_{11}\cdot\boldsymbol{M}_{11}=\boldsymbol{I} \tag{11.3.26}$$

即以镜 1 为参考，任意高斯光束在失调相位共轭腔内往返二周也是自现的.

由上面分析可知，相位共轭腔中当相位共轭镜失调时不会引起 x_{22}、θ_{22}、x_{12} 和 θ_{12} 的变化. 当常规镜失调时，不引起 x_{11} 的变化，但 x_{21}、θ_{11} 和 θ_{21} 要变化.

由图 11.3.3，激光光斑重心的变化可表示为

$$\Delta=\left.\frac{x_{211}-x_{210}}{2}\right|_{\substack{x_{210}=0\\ \theta_{210}=0}}=-\varepsilon_1' b \tag{11.3.27}$$

按式(11.3.2)、式(11.3.3)，因

$$x_{11}=x_{12}=x_{22}=0 \tag{11.3.28}$$

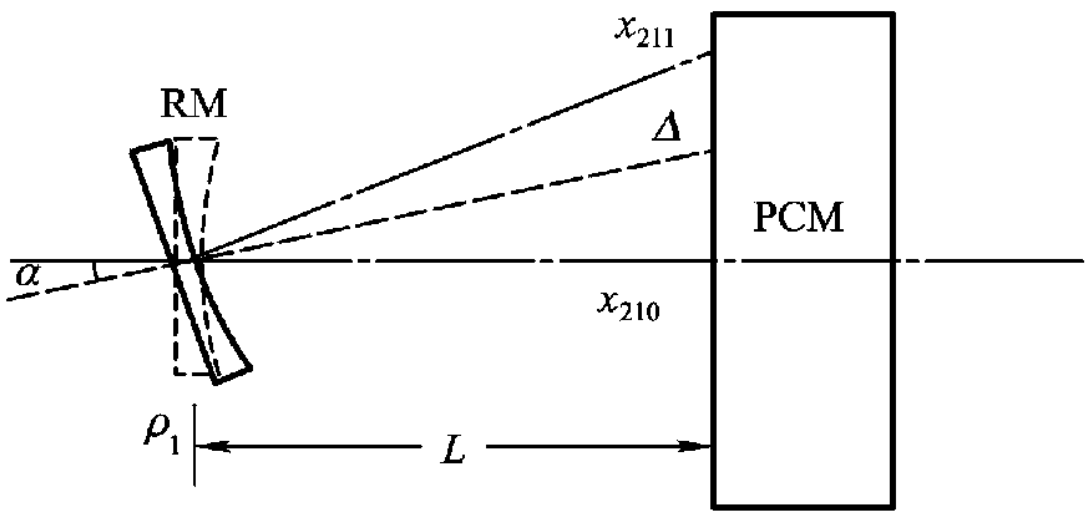


图 11.3.3　失调相位共轭腔

$$x_{21}=\Delta=-\varepsilon_1' b \tag{11.3.29}$$

故有

$$D=D_1=\Delta/(\varepsilon_1' w) \tag{11.3.30}$$

式中 w 为在相位共轭镜处的光束宽度.在弱高斯光阑近似下,有

$$w^2=\frac{2\lambda|bG_1|}{\pi}=\frac{2\lambda}{\pi}\left|b\left(a-\frac{b}{\rho_1}\right)\right| \tag{11.3.31}$$

将式(11.3.27)、式(11.3.31)代入式(11.3.30),得

$$D=\left(\frac{\pi}{2\lambda}\left|\frac{b}{a-b/\rho_1}\right|\right)^{1/2} \tag{11.3.32}$$

对相位共轭腔,$a=1$,$b=L$(腔长)

$$D=\left[\frac{\pi L}{2\lambda}\left(\frac{1}{1-L/\rho_1}\right)\right]^{1/2} \tag{11.3.33}$$

D 和 ρ_1/L 关系示于图 11.3.4.由图知,除了 $\rho_1\approx L$ 情况之外,相位共轭腔的失调灵敏度 D 均小于常规光腔,即相位共轭腔对失调是不灵敏的.

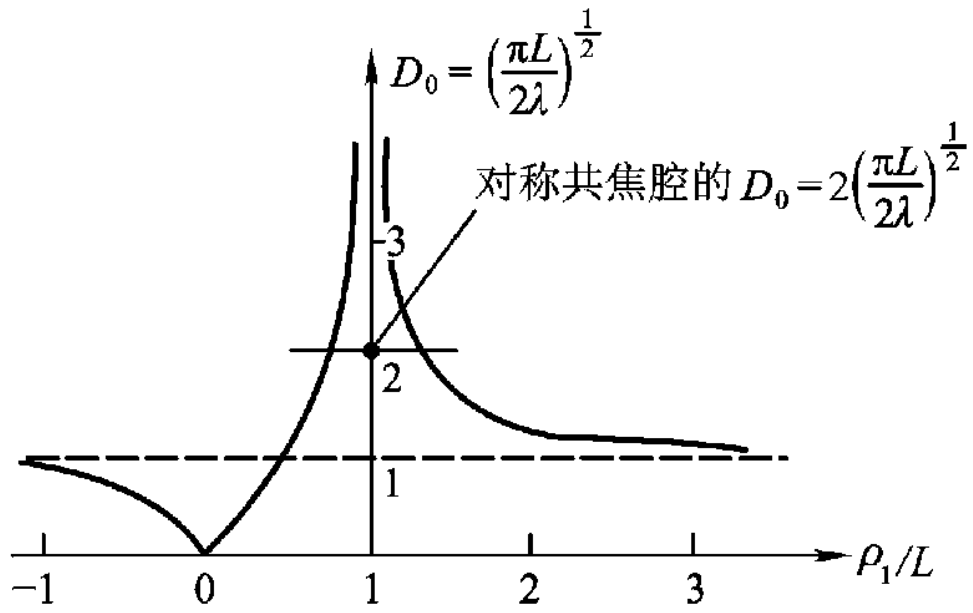


图 11.3.4　相位共轭腔的失调灵敏度参量曲线

三、稳定交叉球面棱镜腔的失调特性

在交叉球面棱镜腔中，设两球面棱镜的棱线置于相互垂直位置（严格来说，为提高选模能力，可置于接近 90°、取为 π 的无理数倍位置），选择 xyz 坐标系如图 11.3.5，其中 z 为光轴，y 轴沿棱镜 P_1 棱线方向，x 轴与棱镜 P_2 棱线平行.

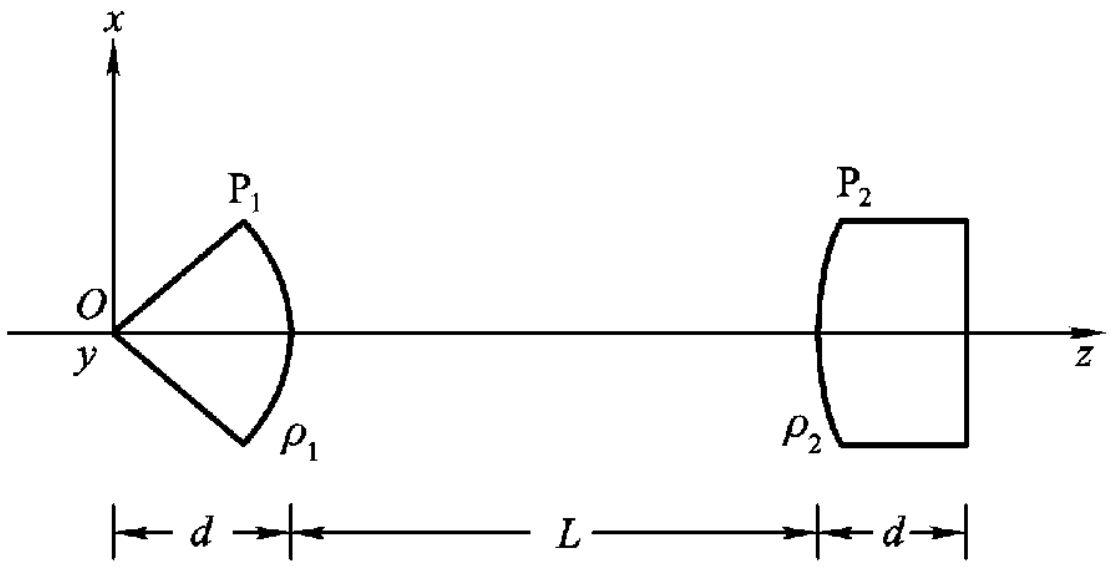


图 11.3.5　交叉球面棱镜示意图

设两个球面棱镜厚度相等均为 d，折射率为 n，两个球面半径分别为 ρ_1、ρ_2，则在 xOz 和 yOz 面棱镜 P_1、P_2 的变换矩阵分别为

$$\boldsymbol{M}_{xOz,1}=\begin{bmatrix} -1+\dfrac{2l_0}{f_1} & -2l_0 \\ \dfrac{2}{f_1}\left(1-\dfrac{l_0}{f_1}\right) & -1+\dfrac{2l_0}{f_1} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_{yOz,1}=\begin{bmatrix} 1-\dfrac{2l_0}{f_1} & 2l_0 \\ -\dfrac{2}{f_1}\left(1-\dfrac{l_0}{f_1}\right) & 1-\dfrac{2l_0}{f_1} \end{bmatrix} \tag{11.3.34}$$

$$\boldsymbol{M}_{xOz,2}=\begin{bmatrix} 1-\dfrac{2l_0}{f_2} & 2l_0 \\ -\dfrac{2}{f_2}\left(1-\dfrac{l_0}{f_2}\right) & 1-\dfrac{2l_0}{f_2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_{yOz,2}=\begin{bmatrix} -1+\dfrac{2l_0}{f_2} & -2l_0 \\ \dfrac{2}{f_2}\left(1-\dfrac{l_0}{f_2}\right) & -1+\dfrac{2l_0}{f_2} \end{bmatrix} \tag{11.3.35}$$

式中

$$f_i=\frac{\rho_i}{n-1},\qquad i=1,2 \tag{11.3.36}$$

$$l_0=\frac{d}{n} \tag{11.3.37}$$

将式(11.3.35)、式(11.3.36)增广，得到棱镜在 xOz 面(相当于棱镜 P_i 绕 y 轴转 ε'_{ix} 角)和在 yOz 面(棱镜 P_i 绕 x 轴转 ε'_{iy} 角)的 4×4 失调增广矩阵

$$\boldsymbol{M}_{xOz,1}=\begin{bmatrix} -1+\dfrac{2l_0}{f_1} & -2l_0 & 0 & 2l_0\varepsilon'_{1x} \\ \dfrac{2}{f_1}\left(1-\dfrac{l_0}{f_1}\right) & -1+\dfrac{2l_0}{f_1} & 0 & -\dfrac{2l_0}{f_1}\varepsilon'_{1x} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_{yOz,1}=\begin{bmatrix} 1-\dfrac{2l_0}{f_1} & 2l_0 & 0 & -2l_0\varepsilon'_{1y} \\ -\dfrac{2}{f_1}\left(1-\dfrac{l_0}{f_1}\right) & 1-\dfrac{2l_0}{f_1} & 0 & -2\left(1-\dfrac{l_0}{f_1}\right)\varepsilon'_{1y} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11.3.38}$$

$$\boldsymbol{M}_{xOz,2}=\begin{bmatrix} 1-\dfrac{2l_0}{f_1} & 2l_0 & 0 & -2l_0\varepsilon'_{2x} \\ -\dfrac{2}{f_2}\left(1-\dfrac{l_0}{f_2}\right) & 1-\dfrac{2l_0}{f_2} & 0 & -2\left(1-\dfrac{l_0}{f_2}\right)\varepsilon'_{2x} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_{yOz,2}=\begin{bmatrix} -1+\dfrac{2l_0}{f_2} & -2l_0 & 0 & 2l_0\varepsilon'_{2y} \\ \dfrac{2}{f_2}\left(1-\dfrac{l_0}{f_2}\right) & -1+\dfrac{2l_0}{f_2} & 0 & -\dfrac{2l_0}{f_2}\varepsilon'_{2y} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11.3.39}$$

现计算 P_1 失调时引入的失调灵敏度参量 D_1. 为此先设 P_1 绕 y 轴转 ε'_{1x} 角，由此引起在 P_1 和 P_2 的线偏移和角偏移分别为 x_{11}、θ_{11}、x_{21}、θ_{21}(为

书写简便，略去了这些量的下标 xOz，下同）时，则有

$$\begin{bmatrix} x_{11} \\ \theta_{11} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+\dfrac{2l_0}{f_1} & -2l_0 & 0 & 2l_0\varepsilon'_{1x} \\ \dfrac{2}{f_1}\left(1-\dfrac{l_0}{f_1}\right) & -1+\dfrac{2l_0}{f_1} & 0 & -\dfrac{2l_0}{f_1}\varepsilon'_{1x} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & L & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} 1-\dfrac{2l_0}{f_2} & 2l_0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{2}{f_2}\left(1-\dfrac{l_0}{f_2}\right) & -1+\dfrac{2l_0}{f_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & L & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ \theta_{11} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A & B & E & F \\ C & D & G & H \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ \theta_{11} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{11.3.40}$$

当 $l_0 \ll \rho_1$、ρ_2、L 时、式中以 P_1 为参考，光腔往返一周矩阵元 A、B、C、D 为

$$\begin{cases} A = 1-2g_2+\dfrac{2l_0}{L}(1+g_1+g_2-2g_1g_2-g_2^2) \\ B = -2g_2L+2l_0(1-2g_1g_2-g_2^2) \\ D = 1+2g_2-4g_1g_2-\dfrac{2l_0}{L}[(1-g_1-g_2)(1-2g_1g_2)-g_2^2] \\ C = \dfrac{AD-1}{B} \end{cases} \tag{11.3.41}$$

失调矩阵元 E、F、G、H 为

$$\begin{cases} E = G = 0 \\ F = 2l_0\varepsilon'_{1x} \\ H = -\dfrac{2l_0(1-g_1)}{L}\varepsilon'_{1x} \end{cases} \tag{11.3.42}$$

光腔 g 参数

$$g_i = 1 - \frac{L}{f_i} \tag{11.3.43}$$

由式(11.3.40)、式(11.3.41)、式(11.3.42)得

$$x_{11} = \frac{(1-D)(E+F) + B(G+H)}{2-A-D}$$

$$= \frac{l_0 g_1 g_2 \varepsilon'_{1x}}{g_1 g_2 - \frac{l_0}{L}(1-g_1 g_2)(g_1+g_2)} \tag{11.3.44}$$

类似地，由

$$\begin{bmatrix} x_{21} \\ \theta_{21} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\frac{2l_0}{f_2} & 2l_0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{f_2}\left(1-\frac{l_0}{f_2}\right) & 1-\frac{2l_0}{f_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & L & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} -1+\frac{2l_0}{f_1} & -2l_0 & 0 & 2l_0\varepsilon'_{1x} \\ \frac{2}{f_2}\left(1-\frac{l_0}{f_1}\right) & -1+\frac{2l_0}{f_1} & 0 & -\frac{2l_0}{f_1}\varepsilon'_{1x} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & L & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ \theta_{21} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A' & B' & E' & F' \\ C' & D' & G' & H' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ \theta_{21} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{11.3.45}$$

式中

$$\begin{cases} A' = 1 - 2g_1 + \frac{2l_0}{L}(1 + g_1 + g_2 - 2g_1 g_2 - g_1^2) \\ B' = -2g_1 L + 2l_0(1 - 2g_1 g_2 - g_1^2) \\ D' = 1 + 2g_1 - 4g_1 g_2 - \frac{2l_0}{L}[(1-g_1-g_2)(1-2g_1 g_2) - g_1^2] \\ C' = \frac{A'D' - 1}{B'} \end{cases} \tag{11.3.46}$$

$$\begin{cases} E' = G' = 0 \\ F' = 2 l_0 g_1 \varepsilon'_{1x} \\ H' = -\dfrac{2 l_0 \varepsilon'_{1x}}{L}(1 + g_1 - 2 g g_2) \end{cases} \tag{11.3.47}$$

由此得出

$$\begin{aligned} x_{21} &= \frac{(1 - D')(E' + F') + B'(G' + H')}{2 - A' - D'} \\ &= \frac{l_0 g_1 \varepsilon_{1x}}{g_1 g_2 - \dfrac{l_0}{L}(1 - g_1 g_2)(g_1 + g_2)} \end{aligned} \tag{11.3.48}$$

对约束稳定交叉球面棱镜腔，在 P_1、P_2 处的基模高斯光束束宽 w_1、w_2 可由式(11.3.41)、式(11.3.46)得知为

$$\begin{aligned} \frac{1}{w_1^2} &= \frac{\pi}{\lambda |B|}\sqrt{1 - \left(\frac{A + D}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\pi \sqrt{(1 - g_1 g_2)\left[g_1 g_2 + \dfrac{l_0}{L}(g_1 + g_2)(2 g_1 g_2 - 1)\right]}}{\lambda |g_2 L - l_0 (1 - 2 g_1 g_2 - g_2^2)|} \end{aligned} \tag{11.3.49}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{w_2^2} &= \frac{\pi}{\lambda |B'|}\sqrt{1 - \left(\frac{A + D}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\pi \sqrt{(1 - g_1 g_2)\left[g_1 g_2 + \dfrac{l_0}{L}(g_1 + g_2)(2 g_1 g_2 - 1)\right]}}{\lambda |g_1 L - l_0 (1 - 2 g_1 g_2 - g_1^2)|} \end{aligned} \tag{11.3.50}$$

将式(11.3.44)、式(11.3.48)、式(11.3.49)、式(11.3.50)代入失调灵敏度参量 D_1 定义式(11.3.2)，经计算并整理得到

$$\begin{aligned} D^2_{xOz,1} = {} & \frac{\pi g_1 l_0^2 \sqrt{(1 - g_1 g_2)\left[g_1 g_2 - \dfrac{l_0}{L}(g_1 + g_2)(1 - 2 g_1 g_2)\right]}}{\lambda g_2 \left[g_1 g_2 - \dfrac{2 l_0}{L}(g_1 + g_2)(1 - g_1 g_2)\right]} \cdot \\ & \left[\frac{g_2^2}{|g_2 L - l_0 (1 - 2 g_1 g_2 - g_2^2)|} + \frac{1}{|g_1 L - l_0 (1 - 2 g_1 g_2 - g_1^2)|}\right] \end{aligned} \tag{11.3.51}$$

再设 P_1 绕 x 轴转 ε'_{1y} 角，经类似的计算步骤得

$$\begin{aligned} D^2_{yOz,1} = {} & \frac{\pi L \sqrt{(1 - g_1 g_2)\left[g_1 g_2 - \dfrac{l_0}{L}(g_1 + g_2)(1 - 2 g_1 g_2)\right]}}{\lambda g_1 \left[g_1 g_2 - \dfrac{2 l_0}{L}(g_1 + g_2)(1 - g_1 g_2)\right]} \cdot \end{aligned}$$

$$\left|\frac{Lg_2-2l_0(1-g_1g_2-g_2^2)}{Lg_2-l_0(1-2g_1g_2-g_2^2)}\right| \tag{11.3.52}$$

于是有

$$D_1^2=D_{xOz,1}^2+D_{yOz,1}^2 \tag{11.3.53}$$

同法设 P_2 失调，绕 y 轴、x 轴失调角分别为 ε'_{2x}、ε'_{2y}，可推得

$$D_{xOz,2}^2=\frac{\pi L\sqrt{(1-g_1g_2)\left[g_1g_2-\dfrac{l_0}{L}(g_1+g_2)(1-2g_1g_2)\right]}}{\lambda g_2\left[g_1g_2-\dfrac{2l_0}{L}(g_1+g_2)(1-g_1g_2)\right]}\cdot$$

$$\left|\frac{Lg_1-2l_0(1-g_1g_2-g_1^2)}{Lg_1-l_0(1-2g_1g_2-g_1^2)}\right| \tag{11.3.54}$$

$$D_{yOz,2}^2=\frac{\pi g_2l_0^2\sqrt{(1-g_1g_2)\left[g_1g_2-\dfrac{l_0}{L}(g_1+g_2)(1-2g_1g_2)\right]}}{\lambda g_1\left[g_1g_2-\dfrac{2l_0}{L}(g_1+g_2)(1-g_1g_2)\right]}\cdot$$

$$\left[\frac{g_1^2}{|g_1L-l_0(1-2g_1g_2-g_1^2)|}+\frac{1}{|g_2L-l_0(1-2g_1g_2-g_2^2)|}\right] \tag{11.3.55}$$

$$D_2^2=D_{xOz,2}^2+D_{yOz,2}^2 \tag{11.3.56}$$

交叉球面棱镜腔的总失调灵敏度参量 D 为

$$D^2=D_1^2+D_2^2=D_{xOz,1}^2+D_{yOz,1}^2+D_{xOz,2}^2+D_{yOz,2}^2 \tag{11.3.57}$$

上面的表示较繁，利用 $l_0\ll\rho_1$、ρ_2、L 条件可进一步简化. 若 l_0^2 项可略去，则（用带“′”量表示）

$$D'_{xOz,1}=D'_{yOz,2}=0 \tag{11.3.58}$$

当 l_0 项亦可略去时，

$$D'^2_{yOz,1}=\frac{\pi L}{\lambda|g_1|}\sqrt{\frac{1-g_1g_2}{g_1g_2}} \tag{11.3.59}$$

$$D'^2_{xOz,2}=\frac{\pi L}{\lambda|g_2|}\sqrt{\frac{1-g_1g_2}{g_1g_2}} \tag{11.3.60}$$

$$D'^2=\frac{\pi L}{\lambda}\sqrt{\frac{1-g_1g_2}{g_1g_2}}\left(\frac{1}{|g_1|}+\frac{1}{|g_2|}\right) \tag{11.3.61}$$

$D_{yOz,1}$ 和 $D'_{yOz,1}$ 比较的数值计算见图 11.3.6，图中取 $\rho_1=1.2$ m，$\rho_2=1.2$ m，$l_0=6.6$ mm，$L=761.8$ mm. 由图知，在实验取值范围内，$\dfrac{D_{yOz,1}}{D'_{yOz,1}}\approx1$，即简化公式式(11.3.58)～式(11.3.61)是可用的.

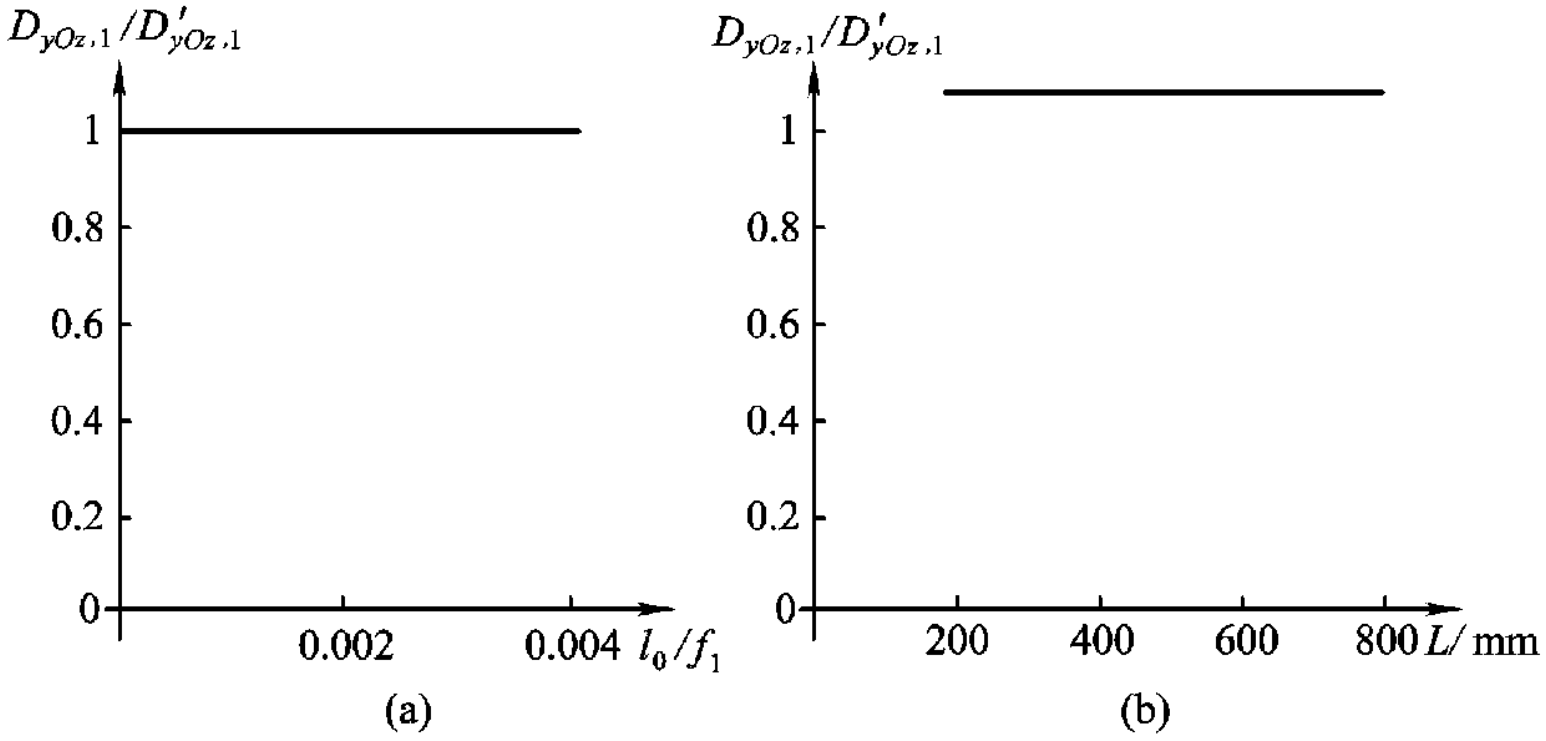


图 11.3.6

(a) $D_{yOz,1}/D'_{yOz,1}$ 随 l_0/f_1 ($f_1=\text{const}$)的变化；(b) $D_{yOz,1}/D'_{yOz,1}$ 随 L 的变化

分析所得式(11.3.51)～式(11.3.61)可知：(1) 稳定交叉球面棱镜腔对敏感方向(图 11.3.5 中 P_1 为绕 x 轴，P_2 为绕 y 轴方向)的失调容限比之平行平面腔大为增加，而且它对绕棱线的失调几乎是完全不灵敏的. 显然，球面棱镜对绕 z 轴的转动也是完全不灵敏的，因此这类光腔有较大的失调容限. (2) 对由曲率半径为 f_1、f_2 的两个常规球面反射镜相距 L 构成的稳定腔，由上一节可知，它的失调灵敏度参量

$$D_{0i}^2=\frac{\pi L}{\lambda}\sqrt{\frac{g_j}{g_i}}\frac{1+g_1g_2}{(1-g_1g_2)^{3/2}} \tag{11.3.62}$$

因此

$$\frac{D_i'^2}{D_{0i}^2}=\frac{(1-g_1g_2)^2}{g_1g_2(1+g_1g_2)} \tag{11.3.63}$$

由式(11.3.63)知，当 $0.33<g_1g_2<1$ 时，交叉球面棱镜腔在敏感方向上的失调容限大于相同几何参数的普通稳定球面腔.

对于两球面棱镜棱线有小的交角情况，或者一个球面棱镜与另一个普通球面(或平面)反射镜构成的稳定腔，其失调特性都可用上面方法分析.

§ 11.4　失调腔的衍射积分方程分析方法

对光腔失调问题最一般的分析方法是使用腔的本征积分方程

$$\gamma_{1x}u_1(x_1)=\int u_2(x_2)K(x_1,x_2)\mathrm{d}x_2 \tag{11.4.1}$$

$$\gamma_{2x}u_2(x_2)=\int u_1(x_1)K(x_2,x_1)\mathrm{d}x_1 \tag{11.4.2}$$

$$K(x_1,x_2)=K(x_2,x_1)=\left(\frac{\mathrm{i}}{\lambda L}\right)^{1/2}\exp(-\mathrm{i}\pi L/\lambda)\cdot$$

$$\exp\left[-\frac{\mathrm{i}\pi}{\lambda L}(g_1x_1^2+g_2x_2^2-2x_1x_2)\right] \tag{11.4.3}$$

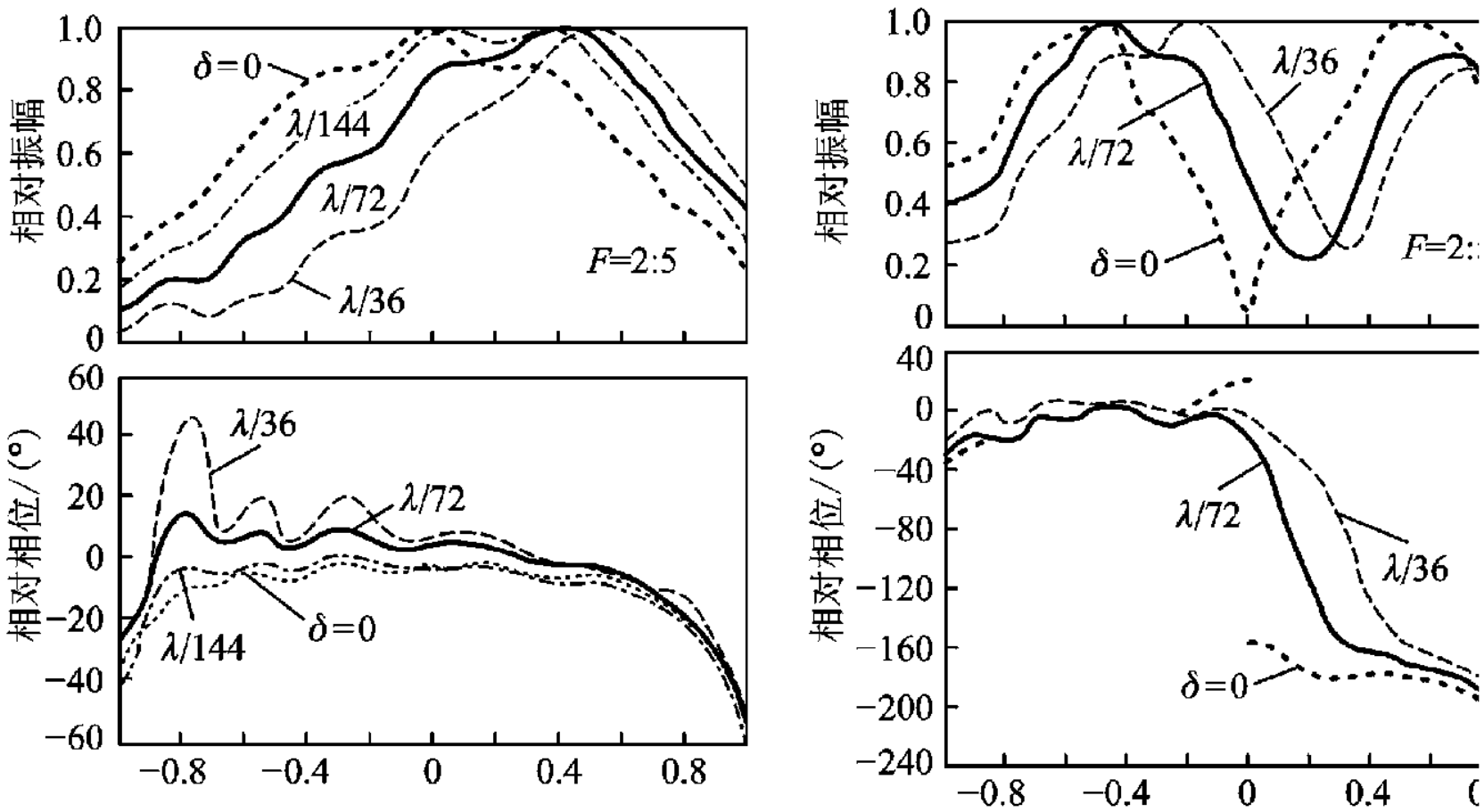
对 y 坐标亦可写出相似的方程.

当两镜面几何尺寸都趋于无限大时,一般认为不存在失调问题,因为反射镜的失调仅使光轴发生偏移,而损耗因子始终为 1,当然这只是对失调角较小的情况而言的.但是,即使在无限大镜的情况下,镜的失调也会引起:

(1) 腔长的变化,这使积分方程的核 $K(x_i,x_j)$、$K(y_i,y_j)$ 发生变化,也使 g 参数有变化.

(2) 在两镜处引起线偏移,这会对光腔的本征函数 $u_i(x_i)$、$v_i(y_i)$ 产生影响.

对有限大镜,当考虑镜失调的上述影响和对积分限的修正后,使用数值积分方法可求出满足自再现条件下失调腔的场分布、相位变化、谐振频率和附加损耗等.作为示例,图 11.4.1 给出了二维失调平行平面腔的数值计算结果.由图可见,失调情况下在平面反射镜处的场已不再呈对称分布,相位也发生了变化.



(a) TEM_0模　　(b) TEM_1模

图 11.4.1　失调平行平面腔的场分布 $\delta=\alpha a$

失调腔的数值计算十分复杂,为此设想在失调较小情况下场分布不

出现严重畸变，并且假定可以按照无限大镜时的本征函数将失调腔的场展开做微扰计算.在这种近似下，求得对基模便于分析的解析结果为

$$V_1 = V_0\left\{1-\frac{8s^2}{\exp(2s^2)-4}\left[\left(\frac{\Delta_{11}}{w_1}\right)^2+\left(\frac{\Delta_{21}}{w_2}\right)^2\right]\right\} \tag{11.4.4}$$

$$V_2 = V_0\left\{1-\frac{8s^2}{\exp(2s^2)-4}\left[\left(\frac{\Delta_{22}}{w_2}\right)^2+\left(\frac{\Delta_{12}}{w_1}\right)^2\right]\right\} \tag{11.4.5}$$

式中 V_1、V_2分别为镜 1 和镜 2 失调时的损耗因子.

可将式(11.4.4)、式(11.4.5)改写为

$$V_i = V_0\left[1-2\left(\frac{\varepsilon_i'}{\Delta\varepsilon_i'}\right)^2\right] \tag{11.4.6}$$

式中

$$\Delta\varepsilon_i' = \frac{\sqrt{\exp(2s^2)-4}}{2sD_i} \tag{11.4.7}$$

s 为式(11.3.1).

式(11.4.6)说明，在失调角较小情况下，V 与 ε_i' 有抛物线关系，这与实验结果符合，也为数值计算结果图 11.4.2 所证实.图 11.4.2 是损耗 δ_i 作为失调角 ε_i' 的函数作出的.

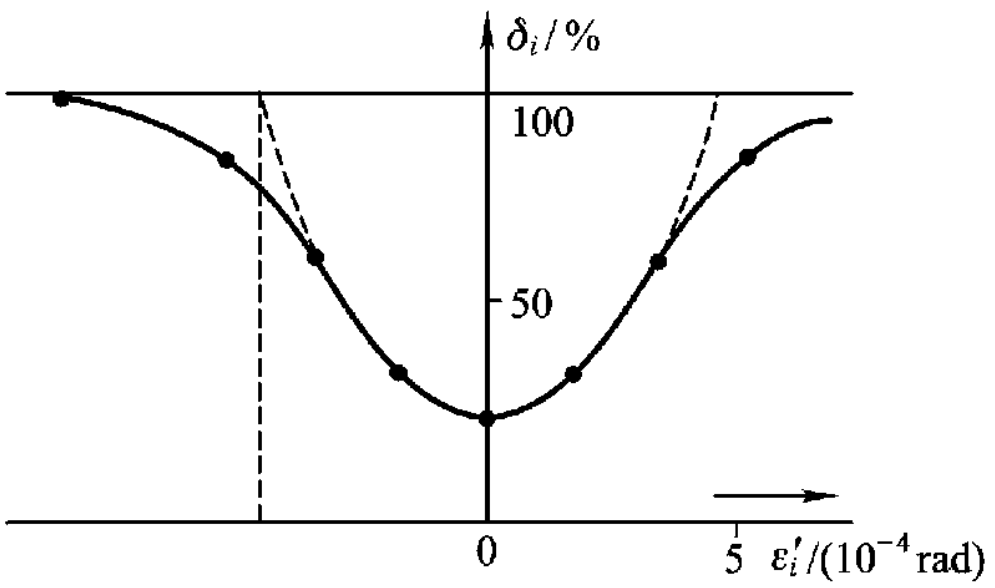


图 11.4.2　损耗 δ_i 随失调角 ε_i' 的变化

微扰计算所得结果还表明，归一化失调腔的损耗因子 V_i/V_0 与失调角 ε_i' 和匹配因子 s 以及腔参数有关.而腔参数对失调特性的影响正好用失调灵敏度参量 D_i 来表征，D_i 越小，因腔失调使损耗因子 V_i 减小得越少，即引入的附加损耗越小，腔对失调就越不灵敏，这与前面简单分析得到的结果是一致的.

习 题

1. 推导式(11.1.8)、式(11.1.9).

2. 推导式(11.1.13)、式(11.1.14).

3. 由图 11.2.1 所示失调量间的几何关系出发,在近轴近似下推出式(11.2.4),并与正文中所用矩阵方法做一比较.

4. 推导出有相对失调厚透镜的增广矩阵.

5. 一个稳定光学谐振腔由平面直角棱镜和一个凹面反射镜组成,试分析该腔的失调特性.

6. 分析球面直角棱镜－球面反射镜构成约束稳定腔的失调特性.

7. 对式(11.3.51)、式(11.3.52)作误差分析.当满足条件 $l_0 \ll \rho_1$、ρ_2、L 时,计算到 l_0 的多少阶次时式(11.3.51)、式(11.3.52)是准确的表示式?

8. 阅读文献[3]中的附录 B,推导出失调光学系统 3×3 增广矩阵表示式.将表 11.2.1 失调光学元件的 4×4 增广矩阵改写为 3×3 增广矩阵,并对 3×3 和 4×4 失调光学元件的增广矩阵做一比较.

参 考 文 献

[1] Krupke W F, W R Sooy. Properties of an unstable confocal resonator CO_2 laser system. IEEE J Quant Electron, 1969, 5:575

[2] Hauck R, Kortz H P, Weber H. Misalignment sensitivity of optical resonators. Appl Opt, 1980, 19:598

[3] Gerrard A, Burch J M. Introduction to Matrix Methods in Optics. London, New York: John Wiley & sons, 1975

[4] Hauck R. Modenvolumen, Beugungsverluste und Dejustierungsempfindlichkeit optischer Resonatoren, Diplomarbeit. Universität Kaiserslautern, 1979

[5] Kortz H P. Die dynamische Stabitität von Laser Resonatoren, Dissertation. Universität Kaiserslautern, 1980

[6] 王绍民,赵道木.矩阵光学原理.杭州:杭州大学出版社,1994

[7] 吕百达,Weber H.多元件光学谐振腔的失调灵敏度.中国激光,1985,12:513

[8] 吕百达,丘悦等.稳态交叉棱镜腔的失调特性.量子电子学,1989,6:111

[9] 宋如华,冯志超,吕百达.单二面直角谐振腔的失调灵敏度.应用激光,1989,9:163

[10] 吕百达,丘悦等.有相对失调光学系统的增广矩阵.激光技术,1989.13:7

[11] 吕百达,胡玉芳等.失调正交棱镜腔的分析.中国激光,1991,18:343

[12] Ding G, Lü B. Propagation of twisted Gaussian Schell－model beams through a misaligned first－order optical system. J Mod Opt, 2001, 48:1 617

[13] Ding G, Lü B. The generalized Huygens－Fresnel diffraction integral for misaligned first－order optical systems and decentered anistroptic Gaussian schell－model beams. J Opt Soc Am A, 2002, 19:485

第十二章　展　　望

1960年激光问世之后，对激光束传输变换的研究工作就已开始.在激光光学发展的早期，研究的重点是以高斯光束为代表的完全相干非匀幅激光束在自由空间、各种介质和在光学谐振腔中的传输变换规律.60年代，以福克斯、厉鼎毅和柯格里克等人的工作为代表、所引入的 *ABCD* 矩阵和 *ABCD* 定律，光腔往返一周自再现模，以及光腔衍射积分的福克斯－厉迭代算法成为研究激光束传输和光学谐振腔问题的基本方法.1970年，柯林斯的开创性工作将复杂光学系统的衍射积分与 *ABCD* 矩阵元联系起来，不仅大为增强了矩阵光学的活力，而且拓宽了衍射积分的应用范围.这些研究成果被推广应用于处理部分相干光、非高斯光束的传输问题，并取得成功.可以认为，绝大多数情况下，在标量衍射理论和近轴近似框架内，使用激光光学方法能够足够好地描述光束通过各种介质、光学系统以及在光学谐振腔内的变换规律，并得到了实验证实.

实际应用的需求促进了激光光学的发展.从20世纪80年代末开始，“光束质量”这个看似简单但却相当模糊的概念成了一个热门论题.激光物理学家、激光工程师、激光器生产厂家和用户从不同角度提出看法，各抒己见，莫衷一是.1991年西格曼教授关于用空间频率和强度矩方法描述激光束传输和光束质量的论文以及1992年在《光学和量子电子学》(Opt. & Quant.Electron.)杂志出版由韦伯教授主编的激光光束质量专辑，反映了这一时期主要的理论和实验研究结果.基于光强二阶矩方法的 M^2 因子被称为“光束质量因子”，并提出了几种测量 M^2 因子的实验方法，生产厂家研制出了 M^2 因子模规和光束剖面分析仪.对激光光束质量的研讨，实质上是对激光束的描述及其传输变换规律更深层次的认识.国际光学界从1993年开始至今已召开了七次关于激光束描述和光束传输的专题国际会议，国际权威的光学刊物辟有光束传输专栏，一些研究成果被国际标准化组织采纳，并写入了相应的ISO文件之中.然而对一些相关学术问题的认识，在国内外都未完全统一.

对光束描述的研究和光束传输变换规律认识的目的是为了使由激光器输出激光，或经光学系统变换后的激光能满足实际应用要求.换言之，光束控制是以激光光学为理论基础的.由于针对不同实际应用目的，对激光束参数，包括束宽、远场发散角、功率(能量)集中度、光强剖面形状、均

匀性和稳定性以及时间持续性等都可能有不同要求，因此，如果兼顾理论和实际应用，对激光光学中一些问题的认识看来还是能够找到共同语言的.

近十余年来，激光科学技术依旧保持了可持续发展的强劲势头，新涌现出的学科生长点对光束描述、传输与控制提出了全新的研究课题，并要求发展新的研究方法或者对原有的研究结果进行修正.在激光光学发展中一些值得重视的研究方向或者可提出思考的问题有：

- 光场的相干性和偏振性

实际的激光束大多是部分时间、空间相干的.光场的经典部分相干理论，包括在空间－时间域和空间－频率域中标量光场的一阶相干理论，矢量光场的二阶相干理论，相干矩阵和偏振矩阵，以及光场的高阶相干理论等已被发展到相当完美的程度.光场的相干性是与光频电磁场的相位密切相关的.激光光学中主要关心相干性对光束传输特性的影响，以及电场实振幅(或光强)与相位部分的关系等问题.对部分相干光而言，目前多采用高斯－谢尔模型光束，其光强分布是高斯的.值得考虑的是，这一模型是否能够足够好地描写实际激光束？对实际的非高斯、部分相干激光束应当如何描述？从理论和应用的角度来看，光场的部分空间和部分时间相干性对光束质量有何影响？光的偏振性对光束质量有何影响？

- 非近轴光束和近场光学

以大的发散角发射的二极管激光、强聚焦(束宽为波长量级)激光束以及通过大数值孔径微光学元件的激光束都可使近轴条件受到破坏.那么，对二极管激光器输出激光应当如何描述？在P－N结区微米量级的近场内光束传输的规律是什么？对其光束质量如何评价？更一般地，非近轴光束如何描述？非近轴光束在非常靠近光源(或衍射屏)处、菲涅耳衍射区和夫朗禾费衍射区以及通过光学元件或系统的变换规律是什么？有无更好的评价非近轴光束光束质量的方法？

- 矢量光束

如果在激光光学中不涉及矢量亥姆霍兹方程或三维瑞利－索末菲衍射积分方程矢量解的讨论至少在理论上是不严格的.然而，在矢量光束理论中如何处理一般的光传输问题？光场的纵向分量对光束特性有何影响？矢量光束有何实际应用？如何评价矢量光束的光束质量？

- 高功率激光的传输与控制

这里，“高功率激光”的含义限制为在目前技术条件下可实现的高能量、高功率激光，例如激光聚变驱动器中的$10^{12}\sim10^{14}$ W、脉宽纳秒量级激光、兆瓦级高能氟化氘(DF)化学激光等.应用中，对这些高功率激光提出

了相当苛刻的光束控制要求，有不少问题需要进行专门研究.

• 真空紫外(200 nm～0.2 nm)、超紫外(100 nm～0.2 nm)和 X 射线(30 nm～0.01 nm)激光的传输与控制

在这些波段，目前已用准分子激光、非线性四波混频和高次谐波等方法获得了相干辐射.几乎所有固体、液体和大多数气体对这些波段激光都有强的吸收，它只能在真空或极稀薄气体中传输.真空紫外、超紫外和 X 光激光的传输，光束质量评价以及 X 光激光腔等都是值得研究的问题.

• 新型光学谐振腔

在高功率光学谐振腔的设计中需要解决高功率和高光束质量二者的矛盾.目前在高功率固体激光器中常用多棒串接平行平面腔方案，与棒数成比例增加输出功率而保持与单棒时相同的光束质量不变.对高功率化学激光器用多模块常规虚共焦非稳腔实现近衍射极限输出.但是，在高功率运转时，光学元件和激光介质的热畸变和增益非均匀性等问题仍存在.值得思考的是，当输出功率继续提高时，这些常规光腔能否满足实用要求？是否应寻求新的光腔理论和技术方案？如何能使补偿畸变的技术，例如受激布里渊散射相位共轭、自适应光学和二元光学方法在提高高功率激光光束质量上获得实际应用？

• 强场物理(Strong－Field Physics)和超强场物理(Ultrastrong－Field Physics)中的光束传输与控制

因啁啾脉冲放大和光参量啁啾脉冲放大技术的出现，实验室可产生太(10^{12})瓦至拍(10^{15})瓦量级的飞秒(10^{-15})超短脉冲光束，聚焦后功率密度可达 10^{18} W·cm^{-2}～10^{21} W·cm^{-2}.在台面系统上已得到接近光周期的飞秒脉冲光束，从而叩开了物理学的一个崭新的领域——强场物理(亦称极端物理，Extreme Physics)的大门，还出现一个称为“非线性相对论光学”(Nonlinear relativistic Optics)的新学科.对几个光周期超短脉冲光束的研究已成为一个热点.当脉冲宽度接近光周期时，在激光光学中的一些常规处理方法，例如缓变振幅近似失效，脉冲光束在传输中一般会出现空间和时间参数耦合等新现象.已用复解析信号法、傅里叶积分变换法和角谱表示法等研究了超短脉冲光束在自由空间、色散介质和通过光学元件的传输特性，然而不少理论研究结果尚待实验证实.强场物理领域的研究方兴未艾，阿(10^{-18})秒脉冲已初露端倪.最近，提出了 10^{18} W～10^{21} W 超短、超强激光和超强场物理新概念，预计聚焦后功率密度可达 10^{26} W·cm^{-2}～10^{28} W·cm^{-2}.可以预见，在超短、超强脉冲光束的传输与控制中，将会面临一些全新的理论和技术问题.

激光光学随着激光器的诞生而出现，激光实际应用的需求推动了激

光光学研究的进展.在新世纪,伴随激光科学技术的蓬勃发展将会提出许多光束描述、光束传输与控制的新问题.爱因斯坦曾说:“如果不相信我们的理论结构能够领悟客观实在,如果不相信我们世界的内在和谐性,那就不会有任何科学.这种观念是,并且永远是一切科学创造的根本动力”.科学技术的发展是永无止境的,对激光光学而言,应当同样是如此.

参 考 文 献

[1] Fox A G, Li T. Resonator modes in a maser interferometer. Bell Syst Techn J, 1961, 40:453

[2] Kogelnik H. Imaging of optical modes - resonators with internal lasers. Bell Syst Tchn J, 1965, 44:455

[3] Collins S A. Lens - system diffraction integral written in terms of matrix optics. J Opt Soc Am, 1970, 60:1 168

[4] Siegman A E. Handbook of laser beam propagation and beam quality formulas using the spatial - frequency and intensity - moments analyses. California: Stanford University, 1991

[5] Weber H. Ed Special issue on laser beam quality. Opt & Quant. Electron, 1992,24

[6] Backus S, Durfee C G et al. High power ultrashort lasers. Rev of Sci Inst, 1998, 69:1 207

[7] Kudryashov A V, Weber H. Laser Resonators, Novel Design and Development. Bellinghan, Washington: SPIE Optical Engineering Press, 1999

[8] 吕百达.强激光的传输与控制.北京:国防工业出版社,1999

[9] Brabec T, Krausz F. Intense few - cycle laser fields: Frontiers of nonlinear optics. Rev of Mod Phys, 2000, 72:545

[10] Weber H. Private communications, 2001,2002

[11] Tajima T, Mourou G. Zettwatt - exawatt lasers and their applications in ultrastrong - field physics. Phys Rev Special Topics - Accelerates and Beams, 2002,5:1

[12] 彭惠民,王世绩主编.X射线激光.北京:国防工业出版社,1997

[13] Einstein A E, Infeld L. “The Evolution of Physics”. Cambridge: Cambridge University Press, 1938

名词索引(英汉对照)

Subject Index (English – Chinese)

A

ABCD law	*ABCD* 定律
ABCD matrix	*ABCD* 矩阵
Aberration	像差
Active resonator	主动腔,有源腔
Adaptive optics	自适应光学
Airy pattern	爱里花样
Airy disc	爱里斑
Angular magnification	角放大率
Angular spectrum representation	角谱表示法
Anisotropic Gaussian Schell – model beam	各向异性高斯 – 谢尔模型光束
Annular aperture	环形光阑
Aperture	光阑
Aperture effect	光阑效应
Aperture lens	光阑透镜
Astigmatic beam	像散光束
Astigmatic element	像散元件
Astigmatic resonator	像散腔
Astigmatism	像散
Asymptotic approach	渐近分析法
Augmented matrix	增广矩阵
Axial magnification	轴向放大率
Axis – asymmetric resonator	非轴对称腔

B

Beam	光束
Beam characterization	光束描述
Beam combination	光束合成

Beam control	光束控制
Beam parameter product (BPP)	光束参数乘积
Beam propagation factor	光束传输因子
Beam quality	光束质量
Beam shaping	光束整形
Beam transformation	光束变换
Beam waist	束腰
Beam width	束宽
Bessel beam	贝塞耳光束
Bessel function	贝塞耳函数
Bifocal lens	双轴透镜
Binary optics	二元光学
Birefringence	双折射
Brewster angle	布儒斯特角

C

Canonical operator	正则算子
Cardinal plane (point)	基面(点)
Cavity	腔
Chirp	啁啾
Chirped pulse	啁啾脉冲
Coherence	相干性
Coherence length	相干长度
Collins formula	柯林斯公式
Complex *ABCD* matrix	复元素 *ABCD* 矩阵
Complex - argument Hermite - Gaussian beam	复宗量厄米 - 高斯光束
Complex - argument Laguerre - Gaussian beam	复宗量拉盖尔 - 高斯光束
Complex degree of spatial coherence	复空间相干度
Complex wavefront	复波前
Confinement stability	约束稳定性
Conjugate points	共轭点
Cross - spectral density function	交叉谱密度函数

D

Defocusing	离焦
Diffraction - free beam	无衍射光束
Diffraction integral	衍射积分
Diffraction limit	衍射极限

Diffraction loss	衍射损耗
Diffraction theory	衍射理论
Dispersion	色散
Dispersive medium	色散介质
Donat mode	简并模
Dynamic stable resonator	动态稳定腔

E

Effective Fresnel number	有效菲涅耳数
Eigenequation	本征方程
Eigenfunction	本征函数
Eigenray	本征光线
Eigenvalue	本征值
Eikonal	程函
Electromagnetic beam	电磁束
Embedded Gaussian beam	嵌入高斯光束
Equivalent lens sequence	等效透镜序列
Equivalent confocal resonator	等效共焦腔
Equivalent resonator	等效腔
Error function	误差函数
Expanded matrix	扩展矩阵
Extreme ultraviolet (EUV) radiation	超紫外辐射

F

Fabry – Perot etalon	法布里 – 珀罗标准具,F – P 标准具
Fabry – Perot interferometer	法布里 – 珀罗干涉仪,F – P 干涉仪
Fabry – Perot resonator	法布里 – 珀罗腔,F – P 腔
Far field	远场
Faraday rotator	法拉第旋转器
Far – field divergence angle	远场发散角
Femtosecond laser	飞秒激光
Fermat's principle	费马原理
Fiber	光纤
Fill factor	填充因子
Finite difference algorithm	有限差分代数法
Flammer function	弗莱姆函数
Flattened Gaussian beam	平顶高斯光束
Flat – topped multi – Gaussian beam	平顶多高斯光束

Flexibility	灵活性
f number	f 数
Focal plane(point)	焦面(点)
Focal shift	焦移
Focal switch	焦开关
Focusability	可聚焦度
Focused beam	聚焦光束
Focusing lens	聚焦透镜
Folded resonator	折叠腔
Fourier optics	傅里叶光学
Fourier transform	傅里叶变换
Fourier－transform operator	傅里叶变换算子
Fox－Li iterative method	福克斯－厉迭代法
Fraunhofer diffraction	夫琅禾费衍射
Fredholm integral equation	弗里德霍姆积分方程
Free space	自由空间
Frequency	频率
Fresnel approximation	菲涅耳近似
Fresnel diffraction	菲涅耳衍射
Fresnel－Kirchoff equation	菲涅耳－基尔霍夫方程
Fresnel number	菲涅耳数
Full width at half maximum(FWHM)	半值全宽
Fundamental mode	基模

G

Gamma function	γ 函数
Gauss formula	高斯公式
Gaussian beam	高斯光束
Gaussian aperture	高斯光阑
Gaussian mirror	高斯反射镜
Gaussian Schell－model beam	高斯－谢尔模型光束
General astigmatism	复杂像散
General astigmatic beam	复杂像散光束
Generalized *ABCD* law	广义 *ABCD* 定律
Generalized Huygens－Frenel diffraction integral	广义惠更斯－菲涅耳衍射积分
Generalized M^2 factor	广义 M^2 因子
Generalized truncation second－order moment	广义截断二阶矩
Geometrical loss	几何损耗

Geometrical optics	几何光学
Geometrical ray	几何光线
$G(g, g', g'', g^*)$ parameter	$G(g, g', g'', g^*)$参数
Green function	格林函数
Group velocity	群速度
Group velocity dispersion	群速度色散

H

Hamilton's canonical equations	哈密顿正则方程
Hamilton optics	哈密顿光学
Hankel function	汉克尔函数
Hard - edged aperture	硬边光阑
Hard - edged diffracted beam	硬边衍射光束
Helmholtz equation	亥姆霍兹方程
Hermite - Gaussian mode	厄米 - 高斯模
Hermite - Gaussian beam	厄米 - 高斯光束
Herriott cell	赫里特室
Higher - order transverse mode	高阶横模
Huygens - Fresnel principle	惠更斯 - 菲涅耳原理
Hyperspheroidal function	超球函数

I

Imaging	成像
Imaging - relaying	像传递
Incomplete Gamma function	非完全 γ 函数
Infrared radiation	红外辐射
Intensity	光强
Intensity moments method	强度矩方法
Interference pattern	干涉花样
Interferometer	干涉仪
International Standard Organization (ISO)	国际标准化组织
Intrinsic astigmatism	本征像散
Irradiation uniformity	辐照均匀性

J

Jones matrix	琼斯矩阵
Jones vector	琼斯矢量

K

Kirchoff diffraction integral 基尔霍夫衍射积分
Kurtosis(K parameter) 陡峭度(K 参数)

L

Lagrange－Helmholtz invariance 拉格朗日－亥姆霍兹不变式
Laguerre－Gaussian beam 拉盖尔－高斯光束
Laser optics 激光光学
Lateral magnification 横向放大率
Lens 透镜
Linewidth 线宽
Longitudinal mode 纵模
Lorentzian line shape 洛伦兹线形

M

Matrix optics 矩阵光学
Matrix method 矩阵方法
Maxwell's equations 麦克斯韦方程组
M^2 factor M^2因子
Method of stationary phase 稳相法
Mirror 反射镜
Misalignment sensitivity 失调灵敏度
Misaligned optical system 失调光学系统
Misaligned resonator 失调腔
Mixed mode 混合模
Mode 模
Mode convector 模转换器
Mode decomposition 模分解
Mode matching 模匹配
Moving knife method 移动刀口法
Moving slit method 移动狭缝法
MOPA(Master－oscillator－power－amplifier) 主振荡器－功率放大器
Multielement confocal unstable resonator 多元件共焦非稳腔
Multielement resonator 多元件腔
Multiple－pass cell(MPC) 多程室
Mutual coherence function 互相干函数
Mutual intensity 互强度

N

Near field	近场
Near－field pattern	近场花样
Negative－branch unstable resonator	负支非稳腔
Newton's formula	牛顿公式
Nodal plane(point)	节面(点)
Nonlinear optics	非线性光学
Non－paraxial beam	非近轴光束,非傍轴光束
Non－uniformity	不均匀度
Numerical calculation	数值计算

O

Object－image equation	物－像方程
Off－axis mirror	离轴反射镜
Off－axis resonator	离轴腔
Operator optical method	算子光学方法
Optical axis	光轴
Optical resonator	光学谐振腔
Overall beam propagation factor	总光束传输因子

P

Paraxial approximation	近轴近似,傍轴近似
Paraxial beam	近轴光束,傍轴光束
Paraxial optics	近轴光学,傍轴光学
Paraxial ray	近轴光线,傍轴光线
Partially coherent light	部分相干光
Passive resonator	被动腔,无源腔
Perturbation stability	微扰稳定性
Phase conjugation	相位共轭
Phase－conjugate resonator	相位共轭腔
Plane－parallel resonator	平行平面腔
Pointing stability	瞄准稳定性
Polarization	偏振
Positive－branch unstable resonator	正支非稳腔
Power	功率
Power in the bucket(PIB)	桶中功率
Principal plane(point)	主面(点)

Prism resonator 棱镜腔
Prony method 帕洛里法

Q

Quadratic phase operator 平方相位算子
Q parameter Q 参数
Q value Q 值
Quarter－wave plate 1/4 波片

R

Rayleigh range(length) 瑞利范围,瑞利长度
Rayleigh－Sommerfeld diffraction integral 瑞利－索末菲衍射积分
Reflection 反射
Refractive power 光焦度
Resonator with a thermal lens 热透镜腔
Resonator with polarizing element 含偏振元件的光腔
Resonator with super－Gaussian reflectivity mirror 超高斯反射镜腔
Resonator with variable reflectivity mirror 非均匀反射镜腔
Ring resonator 环形腔
Rod－imaging unstable resonator 棒成像非稳腔

S

Scalar beam 标量光束
Scalar diffraction theory 标量衍射理论
Scaling operator 标度算子
Second－order moment 二阶矩
Self－consistent condition 自洽条件
Self－convergent beam width 自收敛束宽
Self－filtering unstable resonator 自滤波非稳腔
Self－focusing 自聚焦
Self－imaging unstable resonator 自成像非稳腔
Sellmeier formula 惹尔迈尔公式
Simple astigmatism 简单像散
Skewness 偏斜度
Slowly－varying envelope(SVE) approximation 缓变振幅近似
Space－beam width product 空间束宽积
Space domain 空间域
Space－frequency domain 空间－频率域

Space－time domain	空间－时间域
Spatial filter	空间滤波器
Spatial frequency	空间频率
Spectral density function	谱密度函数
Spectral intensity	谱强度
Spectral shift	谱移动
Spectral switch	谱开关
Spherical crossed－prism resonator	交叉球面棱镜腔
Spherical wave	球面波
Spheroidal function	长球函数
Stability condition	稳定性条件
Stability diagram	稳定图
Stable resonator	稳定腔
Stable－unstable resonator	稳定－非稳腔
Stimulated Brillouin scattering (SBS)	受激布里渊散射
Strehl ratio	斯特列尔比
Strong－field physics	强场物理
Super－Gaussian beam	超高斯光束
Sustainability	时间持续性
Sylvester theorem	谢尔威斯特定理
Symplectic condition	辛条件

T

Telescopic resonator	望远镜腔
Temperature profile	温度剖面
Thermal effect	热效应
Tilted mirror	斜置反射镜
Time domain	时间域
Time－space domain	时间－空间域
Transfer matrix	变换矩阵,传输矩阵
Truncated beam	截断光束
Truncated second－order moment	截断二阶矩
Truncation parameter	截断参数
Twist	扭曲
Twisted beam	扭曲光束

U

Uncertainty relation	不确定关系

Unstable resonator	非稳腔
Ultrashort pulsed beam	超短脉冲光束
Uniformity	均匀性
Unstable resonator with 90° beam rotation	90°束旋转动非稳腔,UR90 腔
Ultraviolet radiation	紫外辐射

V

Vacuum ultraviolet (VUV) radiation	真空紫外辐射
Variable aperture method	可变光阑法
Variable reflectivity mirror	非均匀反射镜
Vector diffraction theory	矢量衍射理论
Vector wave equation	矢量波动方程
Vectorial beam	矢量光束

W

Waist	束腰
Waist width	束腰宽度
Wavefront	波前
Wavefront radius of curvature	波前曲率半径
Wave equation	波动方程
Wave number	波数
Wave vector	波矢
Weber beam	韦伯光束
Wigner distribution function	维格纳分布函数
Wolf effect	沃尔夫效应

X

X - ray laser	X 射线激光
XUV (Extreme ultraviolet) radiation	超紫外辐射

Y

YAG laser	YAG 激光器

Z

Zernike polynomial	切里克多项式