从数学观点看物理世界

——基本粒子与统一场理论

马天 著

科学出版社

(O-5477.01)

www.sciencep.com

ISBN 978-7-03-040434-3

9 787030 404343 >

科学出版中心 数理分社
电 话：(010) 64030228
E-mail：xuyuanyuan@mail.sciencep.com
网 站：http://www.math-phy.cn

销售分类建议：高等数学

定 价：128.00 元

从数学观点看物理世界

——基本粒子与统一场理论

马 天 著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书主要系统介绍由作者和汪守宏教授合作建立的关于基本粒子的弱子模型与耦合四种相互作用的统一场理论. 这些物理结果是建立在这二人新发展的张量场正交分解、散度约束变分学以及统一场几何学理论的基础之上的. 整个工作的特点是物理与数学高度统一、内在逻辑协调一致、结果简单明了. 特别是, 根据新的数学理论提出两个物理基本原理 PID 和 PRI. 由这两个原理可导出统一场方程, 并在这个模型框架下推出大量与自然现象相吻合的物理结论.

本书适合于数学、理论物理学等专业的高年级本科生、研究生以及相关领域的研究人员, 既可作为研究生教材, 也可作为科研参考书.

图书在版编目(CIP)数据

从数学观点看物理世界: 基本粒子与统一场理论/马天著. —北京: 科学出版社, 2014.4

ISBN 978-7-03-040434-3

Ⅰ. ①从… Ⅱ. ①马… Ⅲ. ①数学物理方法 Ⅳ. ①O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014) 第 075204 号

责任编辑: 徐园园 赵彦超 / 责任校对: 胡小洁

责任印制: 赵德静 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014 年 4 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16

2014 年 4 月第一次印刷 印张: 27

字数: 527 000

定价: 128.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言

本书是“从数学观点看物理世界”专著系列的第二部, 第一部是《从数学观点看物理世界 —— 几何分析、引力场与相对论》(科学出版社, 2012). 本书涉及的主要内容是基本粒子与相互作用的统一场. 这两个方向都属于受人们普遍关注的领域, 也是物理学的中心课题.

最近, 作者与汪守宏教授合作新发展了 Riemann 流形上张量场的正交分解理论、散度约束变分学、$SU(N)$ 上的表示不变性理论、统一场几何学以及色代数五个方面的重要数学理论. 建立在前三个新的数学理论基础之上, 我们提出了物理学两个基本原理, 称为相互作用动力学原理 (PID) 和表示不变性原理 (PRI). PID 在许多方面得到物理事实的强有力支持. 而 PRI 是逻辑因果律的必然结论, 它的实质意思是, 相互作用的规范理论的正确性与表达它们的群表示坐标系的选择无关. 根据 PID 和 PRI, 我们建立了统一场几何学, 它与经典的几何学区别在于这个理论是以物理对称性原理决定背景空间 (数学上称为流形) 的几何结构, 而不是像传统做法那样, 流形的几何学是在事先赋予的结构 (如 Riemann 度量) 上展开. 统一场几何学为物理统一场理论提供了坚实的数学基础. 它给出了同时满足广义相对性原理、Lorentz 不变性、规范对称性、表示不变性 (PRI) 四个物理学基本原理的作用量, 此外也给出满足自发对称破缺的质量生成机制并且耦合四种作用力的统一场方程. 这种从原理自动导出自发对称破缺机制要比 Higgs 的人工机制更自然. 色代数是一种新的代数结构. 这个数学理论的产生完全是源于量子色动力学 (QCD). 在 QCD 中, 色量子数缺乏协调一致的运算规则, 同时关于夸克的胶子辐射理论也存在色指标的转换问题. 色代数的建立完全解决了 QCD 自身存在的这些色量子数不协调问题.

以往所有关于统一场的尝试全部都是朝着寻找统一的对称性方向, 以便在这种大对称性下将四种相互作用场耦合在一个统一的作用量中. 这种作用量的统一模式存在着如下几点不可克服的困难: ①高度复杂性; ②退耦困难; ③无法导出弱和强作用力公式; ④不能知道弱和强作用的力源是什么; ⑤ 破坏 PRI 对称性. 事实上, PRI 的发现某种意义上否定了在作用量上进行统一的方式. PRI 与 PID 一起给出了在场方程方面进行统一的道路. 这种模式被证明具有简单性和高度的逻辑协调性. 它能够在一个模型框架下同时解决暗物质暗能量问题 (不仅给出作用力公式, 而且也给出物质形式)、强和弱作用的力源问题, 给出与实验相吻合的强和弱作

用势公式, 合理解释了夸克禁闭与渐近自由, 为亚原子粒子提供了能级模型, 为基本粒子的弱子模型提供有力的理论基础, 合理地解释了所有的衰变、散射、辐射等粒子的跃迁现象.

本书介绍的弱子模型是彻底的基本粒子模型. 它给出的六个基本粒子被称作是弱子, 这是因为它们全部都带弱荷因而都参与弱相互作用. 六个弱子都没有静止质量, 其中三个带电荷, 只有一个带强荷. 所有粒子 (包括光子和胶子) 都是由这六种弱子构成. 从弱子模型的最基本层次看, 许多物理疑问已不再成为问题, 许多守恒律在这个层次已不再有意义. 最重要的一点是, 所有粒子衰变与散射反应式的左右两端各种类型的弱子数保持严格相等. 亚原子粒子的弱子组分是按量子数规则给出的, 而粒子反应式是由实验给出, 这两者之间表现出高度的协调一致性是对弱子模型有力的支持. 此外, 由统一场模型导出的弱作用和强作用势公式自然地给出弱子与夸克禁闭的机制, 为亚原子粒子的跃迁提供了弱子交换机理.

总之, 这部专著正如其名, 从数学与物理的相互关联中同时发现与建立这两个不同领域的新理论. 本书中介绍的五个数学理论与弱子模型、QCD 色指标理论、统一场模型这三个物理理论一起构成一个相互不可分割的整体, 它们表现出高度的逻辑相容性与一致性, 并且大范围地与自然现象相吻合. 我们深信这是一条正确道路.

最后就何为正确的科学研究道路以及如何进行知识能力训练与青年学者进行一些交流. 现如今科学研究已变得非常功利化了, 它已偏离了提高心智与升华心灵的方向, 成为一些人炫耀世智聪辩、追求名利地位的工具. 因此我们现在看到的是大量对人类毫无价值的研究工作: 它们采用华丽的术语, 以复杂的概念充当深刻, 以人为制造的困难来突出成就, 在科学中创造出大量人造品, 它们是智力竞赛的产物. 科学本是寻求宇宙真谛的一个窗口, 因此探索大自然的优美旋律必须配以纯正的心灵、正直无为的心态, 如此才能使人走上正确的人生道路. 天道冥冥、自然有是, 心灵纯正才能自然感应、暗合道妙. 在为人要正的前提下, 下面五种能力的训练与提升也非常关键:

(1) 全局性的眼光与洞察力, 这需要宽广的知识作支撑.

(2) 自然现象与数学之间的相互转换能力, 这是一种双向的转换, 也即自如地将数学结构译成自然规律, 反过来再将观测与实验资料转化成数学理论.

(3) 将复杂问题简单化, 能直指事物本质. 一旦这种能力被训练出来, 在你的心智中就没有所谓深刻的概念. 所谓深刻是由于没有看透事物本质的能力所造成.

(4) 从平凡现象中发现不平凡规律的能力.

(5) 善于观察到不同事物之间的内在联系.

以上能力是每一个人都具有的潜力, 只是要用正确的方式和纯正的品格才能挖

掘出来.

本书得到国家自然科学基金 (No. 11271271) 的资助, 在此表示感谢. 同时也感谢所有参与本书校对的我的学生.

马　天

2014 年 1 月于成都四川大学

目　　录

第 1 章　理论物理基础……1
1.1　物理学的观念与方法……1
1.1.1　基本精神……1
1.1.2　普适性的原理……2
1.1.3　对称性的意义与作用……6
1.1.4　表象理论与第一原理理论……9
1.2　对称性与变换群表示的张量……10
1.2.1　张量与对称性的关系……10
1.2.2　作用量的不变性……13
1.2.3　物理方程的协变性……18
1.2.4　Lorentz 不变性原理……19
1.2.5　相对论作用量与动质能三角公式……22
1.3　相互作用经典理论……26
1.3.1　概况性介绍……26
1.3.2　引力场的广义相对论……32
1.3.3　电磁场 Maxwell 方程……37
1.3.4　强相互作用……40
1.3.5　弱相互作用……42
1.3.6　统一场理论介绍……46
1.4　量子物理基本知识……48
1.4.1　微观粒子的量子化……48
1.4.2　量子力学规则与原理……52
1.4.3　Bose 子场的 Klein-Gordon 方程……56
1.4.4　Fermi 子场的 Dirac 方程……59
1.4.5　Dirac 旋量场与物质流……61
1.4.6　角动量规则……65
1.5　总结与评注……67
第 2 章　基本粒子物理……69
2.1　微观粒子的主要特征……69

2.1.1 粒子的类型 ····· 69
2.1.2 粒子与反粒子 ····· 71
2.1.3 微观运动的主要形式 —— 衰变、散射与辐射 ····· 74
2.1.4 表征粒子身份的量子数 ····· 76
2.1.5 相互作用中的守恒律 ····· 80
2.1.6 粒子表 ····· 81
2.2 轻子的性质 ····· 84
2.2.1 轻子的衰变与轻子数守恒 ····· 84
2.2.2 带电轻子的反常磁矩 ····· 86
2.2.3 中微子及其振荡性质 ····· 88
2.2.4 轨道量子数及宇称 ····· 93
2.2.5 宇称守恒性在弱作用中的破坏 ····· 96
2.3 强子及其性质 ····· 98
2.3.1 强子的衰变与重子数守恒 ····· 98
2.3.2 核子与强子的同位旋 ····· 101
2.3.3 同位旋的用法 ····· 104
2.3.4 奇异数、超荷与 Gell-Mann-Nishijima 关系式 ····· 106
2.3.5 强子的量子数表 ····· 107
2.4 强子结构的夸克模型 ····· 109
2.4.1 强子分类的 Gell-Mann-Ne'eman 八重道 ····· 109
2.4.2 $SU(N)$ 群表示 ····· 111
2.4.3 $SU(N)$ 不可约表示的物理解释与 Young 图计算 ····· 115
2.4.4 Sakata 的 $SU(3)$ 方案 ····· 122
2.4.5 Gell-Mann-Zweig 夸克模型 ····· 123
2.5 基本粒子的弱子模型 ····· 126
2.5.1 衰变意味着内部结构 ····· 126
2.5.2 基本粒子的理论基础 ····· 127
2.5.3 强作用势与弱作用势 ····· 129
2.5.4 弱子及其量子数 ····· 133
2.5.5 复合粒子的弱子构成 ····· 134
2.5.6 弱子禁闭与质量生成 ····· 136
2.5.7 关于弱子的量子规则 ····· 139
2.6 衰变机制 ····· 141
2.6.1 弱子交换 ····· 141
2.6.2 守恒律 ····· 145

2.6.3 衰变与散射的类型 ····· 147
2.6.4 复合粒子的衰变与散射 ····· 149
2.6.5 电子结构与韧致辐射机制 ····· 154
2.7 总结与评注 ····· 156
2.7.1 粒子物理基本问题及其解释 ····· 156
2.7.2 各章节的评注 ····· 158
第 3 章 规范理论与标准模型 ····· 162
3.1 Yang-Mills 规范理论 ····· 162
3.1.1 电磁场的规范不变性 ····· 162
3.1.2 $SU(N)$ 的生成元表示 ····· 164
3.1.3 Yang-Mills 作用量 ····· 165
3.1.4 规范不变性原理 ····· 169
3.2 弱作用衰变的跃迁概率 ····· 171
3.2.1 β 衰变的 Fermi 理论 ····· 171
3.2.2 $V-A$ 理论 ····· 173
3.2.3 中间矢量 Bose 子理论与弱流的物理解释 ····· 176
3.2.4 Cabibo 角 ····· 180
3.2.5 夸克弱流的 CKM 矩阵 ····· 182
3.3 GWS 电弱理论 ····· 185
3.3.1 Glashow 的 $U(1)\times SU(2)$ 方案 ····· 185
3.3.2 质量产生的 Higgs 机制 ····· 189
3.3.3 Weinberg-Salam 作用量 ····· 194
3.3.4 $U(1)\times SU(2)$ 电弱理论的场方程 ····· 198
3.3.5 物理结论与实验检验 ····· 204
3.3.6 存在的问题 ····· 206
3.4 量子色动力学 (QCD) ····· 211
3.4.1 色量子数与 QCD 作用量 ····· 211
3.4.2 胶子及其性质 ····· 213
3.4.3 夸克禁闭与渐近自由 ····· 217
3.4.4 色的数学理论 —— 色代数 ····· 220
3.4.5 w^*- 色代数 ····· 225
3.4.6 亚原子的媒介子云结构 ····· 229
3.5 总结与评注 ····· 232
第 4 章 统一场几何学 ····· 237
4.1 几何概念的物理诠释 ····· 237

4.1.1 反映空间弯曲状态的量 ——Riemann 度量 ····· 238
4.1.2 物理场与向量丛 ····· 242
4.1.3 向量丛的张量积 ····· 245
4.1.4 丛空间的线性变换 ····· 248
4.1.5 向量丛上的协变导数与联络 ····· 253
4.2 Riemann 流形上张量场的正交分解 ····· 257
4.2.1 概况性介绍 ····· 257
4.2.2 张量场的内积空间 ····· 259
4.2.3 梯度与散度算子及其相关性质 ····· 260
4.2.4 流形上的分析基础知识 ····· 265
4.2.5 张量场的正交分解定理 ····· 267
4.2.6 正交分解的唯一性问题 ····· 271
4.2.7 一般 Minkowski 流形上的正交分解 ····· 274
4.3 能量动量守恒约束变分学 ····· 276
4.3.1 经典变分原理 ····· 276
4.3.2 Yang-Mills 泛函的变分导算子 ····· 278
4.3.3 Einstein-Hilbert 泛函的变分导算子 ····· 280
4.3.4 零散度约束下的变分 ····· 283
4.3.5 标量势定理 ····· 287
4.4 $SU(N)$ 上的张量与 Riemann 度量 ····· 290
4.4.1 引言 ····· 290
4.4.2 $SU(N)$ 的流形结构 ····· 291
4.4.3 $SU(N)$ 张量 ····· 295
4.4.4 在 $SU(N)$ 上的自然 Riemann 度量 ····· 298
4.4.5 规范理论的表示不变性 ····· 301
4.5 对称原理支配的几何 ····· 303
4.5.1 对称性决定几何结构的观点 ····· 303
4.5.2 两个物理基本原理 PID 和 PRI ····· 305
4.5.3 广义相对性原理支配的 Riemann 流形 ····· 307
4.5.4 规范不变性与复向量丛结构 ····· 309
4.5.5 PID 与 PRI 的统一场几何 ····· 311
4.6 总结与评注 ····· 316
第 5 章 相互作用的统一场理论 ····· 322
5.1 PID 的物理支持 ····· 322
5.1.1 暗物质与暗能量现象 ····· 322

5.1.2　引力场方程的适定性问题 ····· 324
5.1.3　自发对称破缺机制与 Higgs 粒子 ····· 327
5.1.4　Ginzburg-Landau 超导理论 ····· 328
5.2　统一场模型 ····· 330
5.2.1　PID 与 PRI 统一场模型 ····· 330
5.2.2　耦合参数及物理量纲 ····· 333
5.2.3　统一场方程的标准形式 ····· 334
5.2.4　PRI 产生的强和弱作用势 ····· 337
5.3　相互作用的对偶性与退耦 ····· 338
5.3.1　对偶性 ····· 338
5.3.2　引力场与暗物质暗能量 ····· 340
5.3.3　PID 量子电动力学理论 ····· 342
5.3.4　强相互作用模型 ····· 344
5.3.5　弱相互作用模型 ····· 346
5.4　强相互作用势 ····· 347
5.4.1　夸克的强作用势 ····· 347
5.4.2　强作用势的分层公式 ····· 352
5.4.3　夸克禁闭与渐近自由 ····· 354
5.4.4　Yukawa 核子力与强作用力短程性 ····· 357
5.5　弱相互作用理论 ····· 361
5.5.1　弱作用势方程 ····· 361
5.5.2　弱作用力的分层公式 ····· 364
5.5.3　PID 的对称破缺机制 ····· 367
5.5.4　与传统弱作用衰变跃迁理论的一致性 ····· 371
5.6　粒子能级的数学理论 ····· 373
5.6.1　亚原子粒子能级方案 ····· 373
5.6.2　椭圆算子的负特征值 ····· 376
5.6.3　负特征值数估计公式 ····· 380
5.6.4　Weyl 算子的谱 ····· 384
5.7　亚原子粒子的能级 ····· 387
5.7.1　亚原子粒子的构成与束缚能 ····· 387
5.7.2　质量粒子的谱方程 ····· 391
5.7.3　无质量粒子谱方程 ····· 395
5.7.4　带电轻子与夸克能级 ····· 397
5.7.5　强子的能级 ····· 400

5.7.6　媒介子能级 ····· 402
5.7.7　微观粒子能量分布的有限分立性 ····· 404
5.8　总结与评注 ····· 408
参考文献 ····· 412
索引 ····· 416

第 1 章　理论物理基础

1.1　物理学的观念与方法

1.1.1　基本精神

物理学的主要研究对象就是物质结构、物质形态与运动以及它们之间的相互作用. 物理学的基本精神是实证, 具体地讲, 它要求所有的理论与观点必须具备两个条件:

(1) 它们能够以某种方式转化成数学形式, 并且通过数学手段可以获得一些可观测的数据与性质;

(2) 这些物理性质和数据能够被实验检验, 或者可以用来解释一些自然现象. 需要强调的是, 任何哲理式的理论和观点都不会被物理学接受.

在物理与数学转换方面, 普遍遵循下面的基本原理.

基本原理 1.1　宇宙中所有物理系统都要遵守一定的原理规则和定律, 它们具有如下特性:

(1) 这些原理、规则和定律可用微分方程或数学公式来表达, 即

$$\text{定律} = \text{微分方程};$$

(2) 定律应该具有普适性, 而普适性的具体体现就是要求具有某种对称性, 而对称性在很大程度上决定了微分方程的表达形式;

(3) 微分方程的解提供了相应物理系统的状态和性质. 包含了物理系统所有的物理信息.

可以说理论物理一直是在上述精神指导下发展的, 也就是说理论物理学家的注意力主要是集中在如下几个方面的研究上:

(1) 如何将新的物理观念和思想成功地转化成数学;

(2) 在各个物理系统中寻求基本原理、规则及定律;

(3) 根据物理原理、规则及定律建立数学模型及方程;

(4) 从这些模型与方程的计算中推导出所需的物理.

总之, 一个好的物理必须能够最终转化成可验证的数学.

大自然给我们展现出它的无比玄妙和神奇, 但是所有这些全都是表象, 真正产生这一切的根源都可归结到若干个极其简单而又朴素的普适性原理. 因此, 领悟和探索物理学的正确道路并不是突发奇想, 而是从芸芸万象中追踪宇宙的本源. 物理

学总的精髓可用一句话概括如下:

整个物理学理论大厦是被建立在若干个简单而又普适的基本原理之上.

这是 Einstein 留给我们的遗产. 这其中最根本的核心就是正确的物理理论一定满足如下准则:

朴实与简单.

我们必须牢记这一点! 这部著作自始至终都将体现这种精神, 贯穿性地展现物理与数学的有机融合与相互转化.

1.1.2　普适性的原理

根据上述精神, 了解和领悟普适性的基本原理是整体把握理论物理的关键. 下面将简要介绍物理学各学科分支的基本原理以及它们是如何转化成微分方程的.

首先要介绍的是 Lagrange 动力学原理, 它是物理学最为普适的原理, 适合于所有保守的物理系统, 如天体运动、波的传播量子物理以及所有四种相互作用. 该原理包含两个方面, 其一是关于物体运动的内容, 其二是关于相互作用的内容. 相互作用也称为相互作用动力学原理 (简称 PID). 该原理陈述如下.

基本原理 1.2(Lagrange 动力学原理)　每个独立的物理系统运动状态可用一组函数所描述

$$u = (u_1, \cdots, u_N).$$

同时也存在一个关于 u 的泛函, 称为 Lagrange 作用量, 表达为

$$L(u) = \int_M \mathcal{L}(u, Du, \cdots, D^m u)\mathrm{d}x, \tag{1.1.1}$$

式中 M 是 u 的时空定义域, Du 表示 u 关于时间与空间变量的导数. 关于作用量 (1.1.1), 下面结构成立.

(1) 对于运动系统, 状态函数 u 是 (1.1.1) 的极值点, 即 u 满足 $L(u)$ 的变分方程

$$\delta L(u) = 0. \tag{1.1.2}$$

(2) 对于相互作用系统, 状态函数 u 是 (1.1.1) 在散度为零约束下的极值点, 即 u 满足如下方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} L(u + \lambda v)\bigg|_{\lambda=0} = 0, \quad \forall\ \mathrm{div}_A v = 0, \tag{1.1.3}$$

其中 $\mathrm{div}_A v = \mathrm{div} v - A \cdot v$, A 是相互作用规范势.

这里需要解释一下, 方程 (1.1.2) 和 (1.1.3) 都是微分方程. 一旦 $L(u)$ 的函数形式被给定, 那么方程 (1.1.2) 或 (1.1.3) 的具体形式也被确定. 所谓独立系统是和外界没有关联的运动系统与相互作用系统的总称.

根据基本原理 1.1, 保守物理系统的动力学问题被归到 Lagrange 密度 $\mathcal{L}(u,\cdots,D^m u)$ 表达形式的寻求方向上. 后面将看到对称性原理对确定 $\mathcal{L}$ 的形式起到关键作用.

另一个物理学普适性的原理是关于守恒运动系统的 Hamilton 动力学原理. 该原理陈述如下.

基本原理 1.3(Hamilton 动力学原理) 一个能量守恒的物理系统存在一对共轭函数组 $u=(u_1,\cdots,u_N)$ 和 $v=(v_1,\cdots,v_N)$, 以及能量密度函数 $\mathcal{H}(u,v,\cdots,D^m u, D^m v)$, 使得系统总能量为

$$H=\int_M \mathcal{H}(u,v,\cdots,D^m u,D^m v)\mathrm{d}x,$$

H 称为 Hamilton 能量, 则该物理系统的状态函数满足下面动力学方程, 也称作 Hamilton 系统

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}&=\frac{\delta}{\delta v}H(u,v),\\ \frac{\partial v}{\partial t}&=-\frac{\delta}{\delta u}H(u,v),\end{aligned}\tag{1.1.4}$$

其中 $\delta H/\delta v$ 和 $\delta H/\delta u$ 分别代表 H 关于 v 和 u 的变分导算子.

对一个保守的运动系统, Lagrange 动力学原理与 Hamilton 动力学原理是等价的, 它们之间可通过一种变换相互转换. 但在实际应用中方程 (1.1.2) 和 (1.1.4) 各有它们的方便之处.

下面我们再列出一些重要原理及其作用, 而不再陈述这些原理的具体内容. 阅读时不要纠缠数学和物理细节.

(1) Lorentz 不变性原理. 该原理是 Einstein 相对性原理与光速不变性原理这两个原理的一种等价形式, 它是狭义相对论的核心. 描述 Fermi 子状态的 Dirac 方程和描述 Bose 子状态的 Klein-Gordon 方程就是由该原理在量子规则下获得的. 量子力学的三个主要方程, Schrödinger 方程、Dirac 方程和 Klein-Gordon 方程全部满足 Lagrange 动力学原理和 Hamilton 动力学原理, 可参见 (马天, 2011, 2012).

(2) 广义相对性原理与等效原理. Einstein 的广义相对论引力场理论就是建立在这两个原理和 Lagrange 动力学原理基础之上的. 从这两个原理可得出结论: 引力场空间是一个弯曲的 Riemann 空间 $(M,g_{\mu\nu})$, 其 Riemann 度量 $g_{\mu\nu}$ 代表引力势. 再由广义相对性原理和 Riemann 几何知识可唯一地 (差一个常数) 确定关于 $g_{\mu\nu}$ 的作用量为

$$L=\int_M\left(R+\frac{8\pi G}{c^4}S_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}\mathrm{d}x,\tag{1.1.5}$$

其中 R 为标量曲率, $S_{\mu\nu}$ 为能量动量应力张量, $g=|g_{\mu\nu}|$ 是度量矩阵的行列式. 等式 (1.1.5) 称作是 Einstein-Hilbert 作用量, 由它产生的变分方程 (1.1.2) 取如下形

式：

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \tag{1.1.6}$$

其中 $R_{\mu\nu}$ 为 Ricci 曲率张量, $T_{\mu\nu}$ 为能量动量张量. 方程 (1.1.6) 称作是 Einstein 场方程, 它是关于 $g_{\mu\nu}$ 的一个二阶偏微分方程组.

作用量 (1.1.5) 的约束变分方程 (1.1.3) 取如下形式：

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu \phi, \tag{1.1.7}$$

∇_μ 为协变导数, ϕ 为标量函数. 关于由 (1.1.5) 导出 (1.1.6) 和 (1.1.7) 的过程可参见 (马天, 2012).

(3) 规范不变性原理. 电磁相互作用、弱相互作用、强相互作用, 这三种相互作用都受这个原理的支配. 该原理与 Lorentz 不变性原理一起由 Yang-Mills 理论唯一地 (差一个常数) 确定上述三种相互作用场的作用量.

(4) 相互作用动力学原理 (PID) 与群表示不变性原理 (PRI). PID 即基本原理 1.2 的第二部分. 引力场、电磁场、弱作用场、强作用场, 这四种场作用量的组合在 PID 与 PRI 的支配下唯一地 (差若干参数) 确定了耦合四种相互作用的统一场方程. 本书重点介绍的便是这个理论.

(5) Newton 第二定律. 该定律在许多经典物理领域, 如天体力学、连续介质弹性波、孤立系统的刚体运动等, 是与基本原理 1.2 以及基本原理 1.3 是等价的. 然而在流体动力学领域, Newton 第二定律起到不可取代的作用. 它表述为

$$ma = F. \tag{1.1.8}$$

这个公式是按如下方式转化成流体动力学方程. 令 ρ 为质量密度, $u = (u_1, u_2, u_3)$ 是单位体积的流体颗粒速度场, 则流体颗粒遵循的 Newton 第二定律 (1.1.8) 变为

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right] = \mu \Delta u - \nabla p + f, \tag{1.1.9}$$

式中左端为质量与加速度乘积, 右端为所受总力, 其中 $\mu \Delta u$ 为摩擦力, $-\nabla p$ 为压力差, f 为外力. 再加上质量守恒定律:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \tag{1.1.10}$$

这组方程 (1.1.9) 和 (1.1.10), 称为 Navier-Stokes 方程, 完全支配了流体的运动状态.

(6) 支配热传导与物质扩散运动的是 Fourier 定律与 Fick 定律再加上热量守恒与质量守恒定律. 这些定律的数学表达为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \Delta u + f, \tag{1.1.11}$$

式中 u 为温度或物质密度, κ 为扩散系数, f 为外源.

(7) 极小能量原理. 该原理支配了热力学系统和弹性介质力学等领域. 这些系统的状态方程可由内能与势能泛函在这个原理基础上推导出来, 它们包含了所有基本的物理信息.

(8) 统计物理的 Le Châterlier 原理. 应用该原理可以导出热力学系统平衡相变的动力学方程如下. 根据 Ginzburg-Landau 平均场理论, 任何热力学系统的相变 (称为平衡相变) 可以被一组序参数函数 ψ 所描述

$$\psi = \{\psi_1, \cdots, \psi_k\},$$

由它们决定的自由能可表达成如下形式:

$$G(\psi, \lambda) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}\mu|\nabla\psi|^2 + g(\psi, \nabla\psi, \lambda)\right] \mathrm{d}x, \tag{1.1.12}$$

式中 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_m)$ 是控制参数, 代表温度、压力、外力强度等. Le Châterlier 原理意味着平衡相变动力学方程取如下形式:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \psi_i}{\partial t} = -\beta_i \frac{\delta}{\delta \psi_i} G(\psi, \lambda) + \Phi_i(\psi, \lambda), \quad 1 \leqslant i \leqslant k, \\ &\frac{\partial \psi_j}{\partial t} = \nabla \cdot \left[\sum_{l=k+1}^{K} L_{jl} \nabla \left(\frac{\delta}{\delta \psi_l} G(\psi, \lambda) + \phi_l(\psi, \lambda)\right)\right], \quad k+1 \leqslant j \leqslant K, \end{aligned} \tag{1.1.13}$$

式中 $\psi_1, \cdots, \psi_k$ 是非守恒量, $\psi_{k+1}, \cdots, \psi_K$ 是摩尔数守恒量, L_{jl} 是 Onsager 输运系数并且 (L_{jl}) 是正定对称的, Φ_i 和 ϕ_l 满足下面约束条件:

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \sum_{i=1}^{k} \Phi_i(\psi, \lambda) \frac{\delta}{\delta \psi_i} G(\psi, \lambda) \mathrm{d}x = 0, \\ &\int_\Omega \sum_{j,l=k+1}^{K} \nabla \cdot (L_{jl} \nabla \phi_l) \frac{\delta}{\delta \psi_j} G(\psi, \lambda) \mathrm{d}x = 0, \end{aligned} \tag{1.1.14}$$

方程 (1.1.12)-(1.1.14) 包含了对应系统的全部热力学性质.

上面所列的原理和定律基本上覆盖了物理学所有领域, 从这些内容也可进一步体会到物理学原理 1.1 的意义. 它明确告诉我们, 熟练地掌握物理与数学的转换是理解与探索理论物理的关键. 在物理和数学发展到今天的深度和广度, 任何单一视角来发展各自学科的方式已受到越来越大的局限, 并且是根本性的. 只有真正深入和广泛掌握这两大学科的知识, 并将它们融合在一起, 物理现象与数学概念自如相互翻译, 才能够以全局性的眼光来发展数学和物理. 建立在 PID 与 PRI 基础之上的统一场理论正是从这种全局视角发现的. 任何局部知识和局部角度都不可能建立这个理论.

1.1.3　对称性的意义与作用

Einstein 在两个方面对物理学作出了最重要的贡献：①树立了物理学是建立在基本原理之上的观念；②揭示了对称性在物理中的作用. 在前面 1.1.1 小节和 1.1.2 小节中已对①作了详细阐述. 本小节我们关注对称性的物理意义及作用.

对称性在三个方面起到重要作用：其一，正如物理学原理 1.1 所述，对称性决定了 Lagrange 作用量的形式，或等价地讲决定了微分方程的形式；其二，对称性决定宇宙空间的结构；其三，由 Noether 定理，对称性与物理守恒量有一种对应关系，即一种对称性确定一种守恒量. 图 1.1 直观地展示这两种作用.

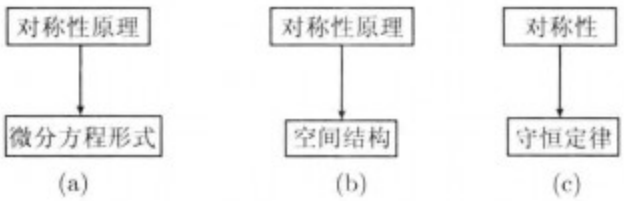


图 1.1

这里必须明确指出，图 1.1(a) 和 (b) 的对称性与 (c) 的对称性互不相混，即决定方程形式的对称性不一定有守恒量，对应于守恒量的对称性不影响微分方程的形式. 可能会有人问，图 1.1(c) 的关系在物理学有什么作用？实际上在粒子物理中许多对称性容易发现而守恒量不易发现. 于是我们可以通过对称性来发现许多重要的守恒量即量子数，如轻子数、重子数、同位旋、宇称等，它们的发现对粒子物理的发展起到重大作用.

一个不了解对称性内涵的读者对于图 1.1 所示的意义理解只能限于表面. 为了使得能更深入理解此意，下面我们将用最初等的方式来介绍物理对称性的含义以及它是如何被用来确定作用量的具体表达形式的过程. 这里采用的是一个假想的物理系统.

Lagrange 作用量是连接物理与数学的桥梁，物理定律正是通过它被转化成微分方程. 同样地，对称性也是通过作用量将它自己数学化的. 因为作用量是一个泛函，即是一个无穷维函数，因此我们不妨用有限维函数当作 Lagrange 作用量来阐述这个问题，这样做不影响本质的理解. 令

$$F:\ R^n \to R^1$$

是一个有限维泛函，它可写成一个 n 元函数形式

$$F = F(x), \quad x = (x_1, \cdots, x_n) \in R^n. \tag{1.1.15}$$

现在将 (1.1.15) 视为某个物理系统的作用量, 并且希望能够确定它的具体表达形式. 从逻辑上和物理意义上有如下两个约束条件:

(A) 由 (1.1.15) 表达的定律是普适的, 这就要求它的数学形式与验证它的实验地点、时间及方位无关.

(B) $F(x)$ 是一个指数不超过二次的多项式 (该条件对应于真实作用量中导数项指数不超过二次, 在物理中这是普遍性条件).

约束 (A) 中的不同地点、时间与方向做实验对应的数学就是坐标变换. 为了简单, 只考虑不同方向的转动变换:

$$\tilde{x} = Ax, \quad A \text{ 是正交矩阵.} \tag{1.1.16}$$

而定律的普适性译成数学就是函数 $F(x)$ 在 (1.1.16) 的正交变换下保持形式不变. 注意到 x 的模是不变的, 即

$$|\tilde{x}|^2 = \tilde{x}_1^2 + \cdots + \tilde{x}_n^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = |x|^2,$$

不变性的函数 $F(x)$ 一定取如下形式:

$$F = F(|x|). \tag{1.1.17}$$

现在再由约束条件 (B), 作用量 (1.1.17) 便被唯一确定 (只差一个常数) 为如下形式:

$$F(x) = \alpha(x_1^2 + \cdots + x_n^2), \quad \alpha \text{ 为常数.} \tag{1.1.18}$$

因为 (1.1.18) 的等值面是一个 $n-1$ 维球面, 当你从不同角度去观察这个球面时会发现图像没有变化, 即图像是对称的. 这就是为什么将作用量在某种变换下的不变性称作是对称性的原因.

走到这里将对称性数学化的过程并没有最终完成, 还有最后一步, 那就是将对称性与群的概念联系起来. 注意到每一个转动变换 (1.1.16) 都对应着一个正交矩阵 A. 于是我们可以将转动变换全体视为一个群 G, 将它用特殊正交群 $SO(n)$ 来表示, 即

$$G \backsimeq SO(n) \quad (\text{称为同构}), \tag{1.1.19}$$

这里 $SO(n)$ 是所有行列式为 1 的 n 阶正交矩阵构成的群:

$$SO(n) = \{A \text{ 是 } n \text{ 阶矩阵} |\ A^{\mathrm{T}} = A^{-1},\ \det A = 1\}. \tag{1.1.20}$$

这样, 前面所述的约束条件 (A) 便可转化为下面数学化的形式. 由于约束条件 (A) 是最基本的, 因而物理上是用原理来命名. 我们可以设想它是一个物理基本原理, 陈述如下.

基本原理 1.4(转动不变性原理)　以 (1.1.15) 作为 Lagrange 作用量的物理系统是关于 $SO(n)$ 群作用下不变的.

从以上的过程我们看到了如何由一个对称性原理来确定物理系统 Lagrange 作用量的机制. 下面解说对称性第二种功能, 即用易观察到的对称性去寻找对应守恒量的作用.

对于函数 (1.1.18), 不难看出它是在空间反射变换下不变的,

$$\tilde{x} = -x. \tag{1.1.21}$$

这种不变性被称为是宇称对称性. 物理学中有一个著名的结果, 叫作 Noether 定理 (马天, 2011, 2012), 其意思是说一个运动系统的 Lagrange 作用量或 Hamilton 能量在某种变换下是不变的, 则一定存在一种对应的守恒量. 根据该定理精神, 上述宇称对称性指导人们在粒子物理中发现宇称量子数. 该物理量只取两个值:

$$\pi = \pm 1,$$

π 称为宇称. 它的守恒性体现在粒子反应过程中. 例如, A 和 B 粒子碰撞产生 C 和 D 粒子:

$$A + B \ \rightarrow \ C + D. \tag{1.1.22}$$

作为一个量子数, 每个粒子都标有一个宇称值. 我们说反应过程 (1.1.22) 是宇称守恒的, 其意思是如下等式成立:

$$(-1)^{l_1}\pi_A\pi_B = (-1)^{l_2}\pi_C\pi_D, \tag{1.1.23}$$

式中 l_1 和 l_2 分别为 AB 系统和 CD 系统的轨道角动量, π_X 代表 X 粒子的宇称.

宇称量子数就是通过量子系统作用量在 (1.1.21) 变换下不变性发现的, 它具有非常重要的意义. 李政道与杨振宁在 1956 年发现宇称守恒性在弱相互作用中被破坏, 即如果 (1.1.22) 是弱相互作用下的反应, 则等式 (1.1.23) 并不普遍成立. 这一发现对粒子物理的发展产生巨大影响.

以上内容是以虚拟的物理系统 (1.1.15) 来分别解说图 1.1(a) 和 (c) 所示的对称性在物理学中如何确定方程形式和空间结构的. 特别是从模拟的基本原理 1.4 可以看到每一种不变性原理都相应地可用一种群来表征它所刻画的对称性. 事实上, 到目前为止只发现四个普适性的对称性原理: Lorentz 不变性原理、广义相对性原理、规范不变性原理、表示不变性原理. 在 1.1.2 小节中已简要地介绍了它们的用途, 后面还会作更详细的讨论, 特别是对规范不变性原理及表示不变性原理.

表 1.1 给出各种对称性与守恒定律的对应关系, 该图表是引自章乃森的著作《粒子物理学》(上册).

表 1.1 一些对称性与守恒量的对应

对称性	不变性	守恒量	适用范围
空间	空间平移	动量 (P)	全部
时间	时间平移	能量 (E)	全部
方向	空间转动	角动量 (J)	全部
粒子相位角	电荷规范变换	电荷 (Q)	全部
重子相位角	重子规范变换	重子数 (B)	全部
e, υ_e 相位角	电子数规范变换	e 轻子数 (L_e)	全部
μ, ν_μ 相位角	μ 子数规范变换	μ 轻子数 (L_μ)	全部
τ, ν_τ 相位角	τ 子数规范变换	τ 轻子数 (L_τ)	全部
左右对称	空间反射	宇称 (π)	除弱作用外
同位旋多重态	同位旋空间旋转	同位旋 (I, I_3)	强作用, I_3 也适于电磁
π 介子对称	G 共轭变换	G 宇称 (G)	强作用适用
过去与未来	时间反射	T 守恒	弱作用部分破坏
正反粒子	电荷共轭变换	C 宇称 (C)	弱作用部分破坏
CPT 对称	电荷共轭(C) 空间反射(P) 时间反射(T) 同时变换	CPT 守恒	全部

1.1.4 表象理论与第一原理理论

物理学精神就是将自然现象数学化. 这个过程主要有两种方式, 一种称作是表象理论, 另一种称作是第一原理理论. 表象方法的特点是直接从实验和观测数据出发采用猜测和推理的手段获得问题的数学表达式. 第一原理方法是根据基本原理或定律采用数学和逻辑演绎方式建立理论. 这两种手段是理论物理最有效的方法. 事实上这两者之间经常没有明确的分界线, 许多物理理论是综合采用这两种方式取得的.

为了能够更具体地理解这两种方法, 我们使用引力理论为例子进行详细解说. Newton 万有引力公式是为人所熟知的, 表达为

$$F = -\frac{mMG}{r^2}, \tag{1.1.24}$$

该公式典型地属于表象理论, 它是根据大量天文观测资料猜出来的. 事实上很容易想到引力与质量成正比, 即两个质量分别为 m 和 M 的物体, 相距为 r 时引力为

$$F = -mM\Phi(r),$$

式中 $\Phi(r)$ 为 r 的待定函数. 考虑两个绕太阳旋转运动的行星, 其速度分别为 v_1, v_2, 与太阳距离分别为 r_1 和 r_2. 由离心力与引力平衡关系式

$$\frac{v_i^2}{r_i} = M\Phi(r_i), \quad i = 1, 2$$

可推出

$$\frac{\Phi(r_1)}{\Phi(r_2)} = \frac{r_2}{r_1}\frac{v_1^2}{v_2^2}. \tag{1.1.25}$$

在 Newton 时代由 Kepler 第三定律 (即 $\tau_1^2/\tau_2^2 = r_1^3/r_2^3$) 可算出 v_1, v_2, 它们的平方显示出与距离成反比, 即 $v_i^2 = k/r_i$. 于是从 (1.1.25) 可猜出

$$\Phi(r) = \frac{G}{r^2}, \quad G \text{ 是引力常数.}$$

这样便猜出 (1.1.24) 的形式. 历史上, Newton 是根据天文学 Kepler 三大行星运动定律猜出万有引力公式的.

到 18 世纪末, Laplace 建立引力势概念, 这是将引力理论从表象走向第一原理迈出的关键一步, 因为引力势才是真正描述引力相互作用的场函数, 它满足 Poisson 方程

$$\Delta\varphi = -4\pi G\rho, \tag{1.1.26}$$

式中 φ 为引力势, ρ 为质量密度. 方程 (1.1.26) 是引力相互作用最简单的定律形式. 在今天通常将 (1.1.26) 称作 Newton 引力定律.

然而, Einstein 的广义相对论才是关于引力相互作用真正的第一原理理论. 该理论第一部分是提出广义相对不变性原理和等效原理, 从这两个原理可导出如下结论:

$$\text{引力场是 Riemann 空间, 其度量 } g_{\mu\nu} \text{ 为引力势.} \tag{1.1.27}$$

其第二部分是根据 Lagrange 动力学原理和广义相对性原理, 再由 (1.1.26) 得到作用量中关于 $g_{\mu\nu}$ 导数不超过二阶的约束, 便可唯一地确定引力场 Lagrange 作用量为 (1.1.5) 的形式, 从而导出如下结论:

$$g_{\mu\nu} \text{ 满足微分方程 (1.1.6).} \tag{1.1.28}$$

结论 (1.1.27) 和 (1.1.28) 是广义相对论的全部数学化形式, 它们完全建立在广义相对性原理、等效原理、Lagrange 动力学原理, 这三大原理基础之上的. 然后由场方程 (1.1.6) 可推导出 Newton 引力定律 (1.1.26). 特别地, 从 (1.1.6) 导出的球对称 Schwarzchild 解获得与 (1.1.24) 完全一致的引力公式, 并且获得比 Newton 理论更精确的三大天文实验检验.

1.2　对称性与变换群表示的张量

1.2.1　张量与对称性的关系

在 1.1 节我们已阐明了对称性的物理意义与作用. 特别地, 在 1.1.3 小节中用有限维函数作为假想的物理系统 Lagrange 作用量来说明对称性是具体怎样起作用

的. 在这一节中我们将用真实的物理系统进一步说明对称性, 并以此机会用通俗的物理方式来解说张量、变换群、不变量这些抽象的数学概念, 以及揭示它们与对称性之间的关系.

1.1.4 小节的例子已表明, 反映物理系统对称性的数学术语就是该系统的 Lagrange 作用量

$$L = \int \mathcal{L}(u, \cdots, D^m u)\mathrm{d}x, \tag{1.2.1}$$

在某种对称变换下保持形式不变, 其中 $u = (u_1, \cdots, u_K)$ 是关于时空变量 x 的一组函数. 然而要真正弄懂这句话的意思, 也即弄懂对称性必须搞清下面两件事情:

(A) 对称变换的含义;

(B) 什么样的作用量, 即密度函数 $\mathcal{L}$ 取什么样的形式能保证在给定变换下保持形式不变.

下面分别解释 (A) 和 (B). 张量、变换群、不变性等概念就是在解说的过程中以自然方式引出. 这里需要强调指出, 弄清问题 (B) 也就彻底理解为什么对称性可确定微分方程的表达形式这一事实.

变换群与张量的概念 所谓关于 (1.2.1) 的变换是指该系统的变量 x, 状态函数 u 及导算子 D 发生的如下变换:

$$x \to \tilde{x}, \quad u \to \tilde{u}, \quad Du \to \widetilde{Du}, \tag{1.2.2}$$

如在 (1.1.15) 中 $u = x$, 而 (1.1.16) 的转动变换便是 (1.2.2). 然而对于真实的作用量 (1.2.1), u 是时空变量 x 的函数. 此时上述变换 (1.2.2) 可分为如下三种情况.

(1) 张量变换. 这种情况空间变换引起函数 u 和导数 Du 跟着变换, 即时空变量 $x = (t, x_1, x_2, x_3)$ 的坐标变换是主动的, 而 u 和 Du 的变换是被动的, 可表达为

$$\tilde{x} = Ax \ \Rightarrow \ \tilde{u} = Tu, \quad \widetilde{Du} = T(Du), \tag{1.2.3}$$

其中 A 是一个矩阵, T 是与 A 有关的称作张量变换算子, 所有坐标变换矩阵 A 的集合构成一个群 M, 记为

$$M = \{A|\ A \text{ 如 (1.2.3) 的矩阵}\}. \tag{1.2.4}$$

在数学中, 满足 (1.2.3) 变换关系的函数 u 称为张量场, D 称作是协变导数, M 称为变换群. 后面会对张量变换 (1.2.3) 进行更具体化的介绍.

(2) 规范变换. 这种情况物理状态函数 u 分为两部分 $u = (\psi, W)$, ψ 和 W 写成

$$\psi = (\psi_1, \cdots, \psi_n), \quad W = (W_1, \cdots, W_N),$$

其中 ψ 发生主动变换, 而 W 和 $D\psi$ 发生被动变换. 更具体地, ψ 是一组复值函数, W 是一组实函数, 其变换关系为

$$\tilde{\psi} = B\psi \ \Rightarrow \ \tilde{W} = GW, \quad \widetilde{D\psi} = B(D\psi), \tag{1.2.5}$$

其中 B 是 n 阶复正交矩阵, G 是与 B 有关的规范变换, 变换群为

$$SU(n) = \{B|\ B \text{ 是 } n \text{ 阶复矩阵}, \ B^{-1} = \bar{B}^{\mathrm{T}}, \ \mathrm{det}B = 1\}. \tag{1.2.6}$$

满足 (1.2.5)-(1.2.6) 变换关系 (不必拘泥它们的具体表达式是什么) 的称作规范变换, W 称作规范场, $SU(n)$ 为规范群, 当 $n = 1$ 时规范群为

$$U(1) = \{e^{\mathrm{i}\theta}|\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}. \tag{1.2.7}$$

(3) 群表示变换. 这种变换是关于规范群 $SU(n)$ $(n > 1)$ 表示的一种变换. 其大意为, $SU(n)$ 中任一矩阵 B 可表示为

$$B = B_0 e^{\mathrm{i}\theta^a \lambda_a}, \quad 1 \leqslant a \leqslant n^2 - 1,$$

这里采用指标求和约定, 即相同指标乘积表示关于它们求和, 即

$$\theta^a \lambda_a = \sum_{a=1}^{K} \theta^a \lambda_a \quad (K = n^2 - 1), \tag{1.2.8}$$

在 (1.2.8) 中 $B_0 \in SU(n)$ 为某个矩阵, θ^a 为复参数, $\theta^a \lambda_a$ 为 n 阶 Hermite 矩阵, λ_a 称作 $SU(n)$ 群表示生成元. 所谓群表示变换是指生成元 λ_a $(1 \leqslant a \leqslant n^2 - 1)$ 进行的如下变换:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\lambda}_K \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_K \end{pmatrix}, \quad K = n^2 - 1, \tag{1.2.9}$$

其中 R 为 K 阶非退化复矩阵, 其变换群由全体 R 构成, 即它是一般复线性群, 表达为

$$GCL(K) = \{R|\ R \text{ 为 } K \text{ 阶复矩阵}, \ \mathrm{det}R \neq 0\}. \tag{1.2.10}$$

以上介绍的关于 (1.2.2) 的三种类型变换覆盖了物理学目前发现的所有对称性原理. 事实上, 物理学中的转动不变性原理 (主要是关于旋量 Bose-Einstein 凝聚问题), Lorentz 不变性原理、广义相对性原理这三个对称性原理属于张量变换范畴; 关于电磁、弱和强相互作用的规范不变性原理是属于在 (1.2.5) 规范变换下作用量 (1.2.1) 不变的对称性原理; 最后关于统一场的 PRI 是在 (1.2.9) 群表示变换下不变的对称性原理. 在物理习惯上, 总是喜欢用变换群来表达对称性. 下面将它们用表 1.2 列出.

表 1.2 变换群与物理学科的对应

原理	变换群	对称性	状态函数	微分方程	适用领域
Galileo 不变性	Galileo 群	时空平移与惯性系统	$(x,\dot{x})$	Hamilton 系统	天体运动
空间转动不变性	$SO(3)$	空间方向	旋量波函数	旋量 BEC 方程	BE 凝聚
Lorentz 不变性	Lorentz 群 L^4	惯性系统	Dirac 旋量	Dirac 方程	量子力学
Lorentz 不变性	Lorentz 群 L^4	惯性系统	标量函数	Klein-Gordon 方程	量子力学
广义相对性	广义坐标变换群 M^4	非惯性系统	度量张量 $\{g_{\mu\nu}\}$	Einstein 场方程	万有引力相互作用
规范不变性与 Lorentz 不变性	$U(1)\times L^4$	$U(1)$ 规范	电磁势 $\{A_\mu\}$	Maxwell 方程	电磁相互作用
规范不变性与 Lorentz 不变性	$SU(2)\times L^4$	$SU(2)$ 规范	弱作用规范场$\{W_\mu^a\}$	弱作用场方程	弱相互作用
规范不变性与 Lorentz 不变性	$SU(3)\times L^4$	$SU(3)$ 规范	强作用规范场$\{S_\mu^k\}$	强作用场方程	强相互作用
广义相对性规范不变性与群表示不变性	$M^4\times U(1)$ $\times SU(2)$ $\times SU(3)$ $\times GCL(2)$ $\times GCL(3)$	非惯性系统 $U(1)\times SU(2)$ $\times SU(3)$规范与PRI对称	$\{g_{\mu\nu},A_\mu,$ $W_\mu^a,S_\mu^k\}$	统一场方程	四种相互作用

1.2.2 作用量的不变性

这一小节主要解释 1.2.1 小节中的问题 (B), 即更具体地说明作用量的不变形式. 为此目的, 首先要对张量有一个更明确的了解. 首先采用转动群

$$M=SO(n)\quad (\text{其定义可见 (1.1.20)}) \tag{1.2.11}$$

作为变换群进行讨论. 此时, 从下面坐标变换开始

$$\tilde{x}=Ax,\quad A\in SO(n). \tag{1.2.12}$$

关于 (1.2.12) 变换下不变的最简单形式就是 x 的模平方 $|x|^2$. 其原因可从下面式子很容易看出

$$\tilde{x}^{\mathrm{T}}\tilde{x}=x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\cdot Ax=x^{\mathrm{T}}x\quad (A^{\mathrm{T}}=A^{-1}), \tag{1.2.13}$$

其中 $x^{\mathrm{T}}=(x_1,\cdots,x_n)$ 是 x 的转置, A^{T} 是 A 的转置.

现在用 $\partial\phi/\partial x$ 取代 x, 这里 ϕ 为一标量函数, 则在 (1.2.12) 变换下, $\nabla\phi = \partial\phi/\partial x$ 按相同规则进行变换:

$$\widetilde{\nabla\phi} = \frac{\partial\phi}{\partial\tilde{x}} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\tilde{x}} = A\nabla\phi. \tag{1.2.14}$$

于是类似于 (1.2.13), 从 (1.2.14) 可导出关于 $\nabla\phi$ 的不变形式为

$$|\widetilde{\nabla\phi}|^2 = \widetilde{\nabla\phi}^{\mathrm{T}} \cdot \widetilde{\nabla\phi} = \nabla\phi^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} \cdot A\nabla\phi = |\nabla\phi|^2, \tag{1.2.15}$$

或者更明显地, (1.2.15) 可写成

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial\tilde{x}_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial\phi}{\partial\tilde{x}_n}\right)^2 = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_n}\right)^2.$$

于是便得到具有物理意义的最简单一个 $SO(n)$ 不变作用量如下:

$$L(\phi) = \int \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 \mathrm{d}x, \tag{1.2.16}$$

它的变分导算子为

$$\delta L(\phi) = -\nabla^2\phi, \quad \nabla^2 \text{ 为 Laplace 算子}. \tag{1.2.17}$$

从 (1.2.16) 的不变性和它的导算子是 (1.2.17), 不难理解为什么几乎所有稳态的物理偏微分方程都含 Laplace 项.

继续观察 $\nabla\phi$, 这个量是一个向量场, 有 n 个分量

$$\nabla\phi = \left\{\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial\phi}{\partial x_n}\right\},$$

当坐标进行 (1.2.12) 变换时, 它按 (1.2.14) 进行变换. 用分量表达为

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tilde{x}_i} = a_{ij}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}, \quad \text{其中 } A = (a_{ij}). \tag{1.2.18}$$

这里采用指标求和约定, 即相同指标乘积表示求和, 即

$$a_{ij}\frac{\partial\phi}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}. \tag{1.2.19}$$

以后全部采用这个求和约定.

再进一步考察 $\nabla\phi$ 中分量乘积构成的场, 记为

$$\nabla\phi \otimes \nabla\phi = \left\{\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right\}, \quad 1 \leqslant i,\ j \leqslant n, \tag{1.2.20}$$

非线性物理有时需要这种场, 它具有 n^2 个分量. 很容易验证在坐标系 (1.1.12) 变换下, 它的分量按如下规则进行变换:

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tilde{x}_i}\frac{\partial\phi}{\partial\tilde{x}_j}=a_{ik}a_{jl}\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\frac{\partial\phi}{\partial x_l}. \tag{1.2.21}$$

关系式 (1.2.21) 可等价地表达成如下矩阵形式:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial\tilde{x}_i}\frac{\partial\phi}{\partial\tilde{x}_j}\right)=A\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right)A^{-1}. \tag{1.2.22}$$

很容易看出 (1.2.20) 的场与任两个向量场 $u^{\mathrm{T}}=(u_1,\cdots,u_n)$ 和 $v^{\mathrm{T}}=(v_1,\cdots,v_n)$ 可构造出一个不变形式如下:

$$u^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right)v=u_iv_j\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}. \tag{1.2.23}$$

事实上, 由向量场的变换规则

$$\tilde{u}^{\mathrm{T}}=u^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\ \text{及}\ \tilde{v}=Av,\quad A^{\mathrm{T}}=A^{-1}, \tag{1.2.24}$$

从 (1.2.22) 可推出 (1.2.23) 的不变性如下:

$$\tilde{u}^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\tilde{x}_i}\frac{\partial\phi}{\partial\tilde{x}_j}\right)\tilde{v}=u^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right)v.$$

数学上, 向量场称为一阶张量, 它们按 (1.2.24) 进行变换, 而按 (1.2.21) 方式变换的称为二阶张量. 上述例子的逻辑延伸便自然引出一般 K 阶张量的概念: 一个 K 阶张量 T 有 n^K 个分量, 即

$$T=\{T_{i_1\cdots i_K}\},\quad 1\leqslant i_1,\cdots,i_K\leqslant n, \tag{1.2.25}$$

它的分量与坐标系 x 的选择有关, 当坐标系按 (1.2.12) 进行变换时, T 的分量按如下规则进行变换:

$$\tilde{T}_{i_1\cdots i_K}=a_{i_1j_1}\cdots a_{i_Kj_K}T_{j_1\cdots j_K},\quad A=(a_{ij}), \tag{1.2.26}$$

这里关于指标 $j_1,\cdots,j_K$ 用到如 (1.2.19) 的求和约定. 当 T 是 x 的函数时便称为 K 阶张量场.

如 (1.2.20) 的运算称为张量积, 而如 (1.2.23) 的运算称为张量的缩并. 缩并运算是获得不变量的唯一手段. 例如, (1.2.25) 的 T 与另一个 K 阶张量 S 可缩并成一个不变量:

$$T\cdot S=T_{i_1\cdots i_K}S_{i_1\cdots i_K}. \tag{1.2.27}$$

因此便可得到关于作用量不变性判据 1.5.

作用量不变性判据 1.5　作用量 (1.2.1) 是不变的, 那么它的密度函数 $\mathcal{L}$ 一定是若干张量场的缩并形式.

这个判据很容易帮助我们识别作用量的不变性. 例如, 下面作用量就是 $SO(n)$ 不变的,

$$L(\phi)=\int\left[\frac{1}{2}|\nabla\phi|^2+v_iD_i\phi+\phi^4\right]\mathrm{d}x, \tag{1.2.28}$$

式中 $D_i=\partial/\partial x_i, v^{\mathrm{T}}=(v_1,\cdots,v_n)$ 是一个向量场, ϕ 是一个标量场. 但是下面给出的泛函就不具有不变性

$$L(\phi)=\int\left[\frac{1}{2}|\nabla\phi|^2+v_1D_1\phi+\phi^4\right]\mathrm{d}x,$$

因为式中 $v_1D_1\phi$ 不是 v 与 $\nabla\phi$ 的缩并.

以上是关于 $SO(n)$ 不变性的讨论, 其缩并 (1.2.27) 的求和指标都是下标. 即 $SO(n)$ 的张量指标没有上、下之分, 或等价地说, $SO(n)$ 张量没有协变与反变的区别. 然而对于一般变换群的张量, 如 Lorentz 群与广义坐标变换群的张量其情况就不同了, 此时张量就存在协变与反变的区别. 下面采用一般线性群 $GL(n)$ 作为变换群进行讨论.

$$GL(n)=\{A|\ A\text{ 是 }n\text{ 阶实矩阵},\ \det A\neq 0\}. \tag{1.2.29}$$

相应坐标变换为

$$\tilde{x}=Ax,\quad A\in GL(n).$$

由于 $A^{\mathrm{T}}\neq A^{-1}$, 因此 A 与 A^{-1} 可分别写成

$$A=(a^i_j),\quad A^{-1}=(b^i_j). \tag{1.2.30}$$

此时上述变换可改写为

$$\tilde{x}^i=a^i_jx^j\quad(\text{即上、下指标求和}). \tag{1.2.31}$$

一个 k 阶反变张量 T 记为

$$T=\{T^{i_1\cdots i_k}\},$$

当坐标系在 (1.2.31) 变换下其分量按如下规则进行变换:

$$\tilde{T}^{i_1\cdots i_k}=a^{i_1}_{j_1}\cdots a^{i_k}_{j_k}T^{j_1\cdots j_k}, \tag{1.2.32}$$

其中 a^i_j 如 (1.2.31). 一个 k 阶协变张量 S 记为

$$S = \{S_{j_1\cdots j_k}\},$$

它的分量在 (1.2.31) 变换下按如下方式变换：

$$\tilde{S}_{j_1\cdots j_k} = b^{i_1}_{j_1}\cdots b^{i_k}_{j_k} S_{i_1\cdots i_k}, \tag{1.2.33}$$

式中 b^i_j 如 (1.2.30). 一个 (k,m) 型混合张量记为

$$R = \{R^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_m}\},$$

其分量变换为

$$\tilde{R}^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_m} = a^{i_1}_{l_1}\cdots a^{i_k}_{l_k} b^{r_1}_{j_1}\cdots b^{r_m}_{j_m} R^{l_1\cdots l_k}_{r_1\cdots r_m}. \tag{1.2.34}$$

这种将上指标张量称作反变, 将下指标张量称为协变只是一种习惯. 按数学术语一阶反变张量场称为向量场, 而将一阶协变张量场称作是余切向量场. 这是因为坐标 $x = (x^1, \cdots, x^n)$ 被约定为反变张量, 因而

$$\mathrm{d}x = (\mathrm{d}x^1, \cdots, \mathrm{d}x^n)$$

也是反变张量. 而任何一个向量场 X 的轨道方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = X(x).$$

该等式左边是反变的, 故 X 也是反变的.

对于 (1.2.28) 的 $GL(n)$ 变换群. 张量的缩并只能在上和下指标之间进行, 例如

$$T^i_j S^j_i \text{ 是一个不变量.}$$

但是像 T^iS^i 和 T_jS_j 这样的量就不再是 $GL(n)$ 的不变量了. 这种规则对所有变换群都成立. 因此, 前面介绍的作用量不变性判据 1.5 对所有类型张量都有效, 只是此时作用量中场的缩并必须是上和下指标进行. 例如, 式 (1.2.28) 的作用量现在就要写成如下形式：

$$L(\phi) = \int \left[\frac{1}{2} D^i\phi D_i\phi + v^i D_i\phi + \phi^4\right] \mathrm{d}x,$$

其中 $D^i\phi$ 为

$$D^i\phi = g^{ij} D_j\phi, \quad (g^{ij}) \text{ 为某个二阶反变张量场.}$$

1.2.3　物理方程的协变性

本书一开篇的物理学原理 1.1 就告诉我们物理定律就是微分方程, 定律的普适性译成数学术语变为对称性. 于是便出现对称性如何体现在表达定律的微分方程上. 从前面的介绍中已知道, 用 Lagrange 作用量表达的物理定律, 对称性就是作用量的不变性, 即

$$\text{物理系统的对称性} = \text{系统作用量的不变性}. \tag{1.2.35}$$

然而, 更一般物理定律的微分方程没有变分结构, 对于它们不能用作用量不变性来体现对称性. 此时能够表现对称性的概念就是微分方程的协变性, 即

$$\text{物理定律的对称性} = \text{微分方程的协变性}. \tag{1.2.36}$$

由 (1.2.36) 表达的对称性定义比 (1.2.35) 的意义更广泛, 这是因为具有不变性的作用量, 它的变分方程一定是协变的. 更严格地, 关于作用量的不变性与它的变分方程协变性有如下定理.

定理 1.6　一个保守系统的 Lagrange 作用量 $L(u)$ 在某个变换群 G 变换下是不变的充要条件就是它的变分方程

$$\delta L(u) = 0$$

在群 G 的变换下是协变的.

接下来要做的事情就是解说方程协变性概念的含义. 一个最直接的解释便是如下关于协变性的数学定义.

定义 1.7　一个微分方程

$$F(x, u, Du, \cdots, D^k u) = 0, \quad x \in R^n, \tag{1.2.37}$$

被称作为在群 G 变换下是协变的, 如果 $F(x, u, \cdots, D^k u)$ 是以 G 为变换群的若干个相同类型张量场的和.

数学定义总是太抽象. 然而要想建立全局看问题的能力, 必须要过这一关, 即要习惯于抽象. 虽然 1.2.2 小节介绍了 $GL(n)$ 群的张量概念, 但是为了准确理解定义 1.7, 下面给出一般张量定义.

定义 1.8　令 G 是一个坐标变换群, 它可用某个矩阵群来表示. 这些矩阵代表如下的坐标变换:

$$\tilde{x} = Ax, \quad A = (a^i_j), \quad A^{-1} = (b^i_j) \in G. \tag{1.2.38}$$

一个以 G 为变换群的 (k,m) 型张量场 R 有 n^{k+m} 个分量

$$R=\{R^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_m}\},\quad 1\leqslant i_1,\cdots,i_k,j_1,\cdots,j_m\leqslant n,$$

在 (1.2.38) 变换下它的分量按 (1.2.34) 方式进行变换.

现在, 根据定义 1.7 要判定方程 (1.2.37) 是否是协变的, 只需考察 F 是否由几个张量场构成, 如下面方程

$$\frac{\partial u^k}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial x^k}=0,\quad 1\leqslant k\leqslant 3,\ x\in R^3, \tag{1.2.39}$$

式中 $u=(u^1,u^2,u^3)$ 是一个向量场, f 为一个标量函数. 根据张量场的定义 1.8, 上述方程 (1.2.39) 便不是 $GL(3)$ 协变的, 但是它是 $SO(3)$ 协变的. 这是因为该方程左端第一项 $\partial u/\partial t$ 是一个 $GL(3)$ 的一阶反变张量场, 而第二项

$$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x^1},\frac{\partial f}{\partial x^2},\frac{\partial f}{\partial x^3}\right)$$

是一阶协变张量场. 因此 (1.2.39) 的左端

$$F=\left\{\frac{\partial u^k}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial x^k}\right\}\quad (1\leqslant k\leqslant 3)$$

不是一个 $GL(3)$ 张量场, 但是它是一阶 $SO(3)$ 张量场.

用这种方法很容易判断 Navier-Stokes 方程

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u^k}{\partial t}+(u^jD_j)u^k-\nabla^2u^k+\frac{\partial p}{\partial x^k}-f^k=0,\quad 1\leqslant k\leqslant 3,\\&\mathrm{div}u=0\end{aligned} \tag{1.2.40}$$

是 $SO(3)$ 协变的, 但不是 $GL(3)$ 协变的. 注意到 (1.2.40) 的左端 F 是由一个 $SO(3)$ 向量场及一个 $SO(3)$ 标量场构成:

$$F=\left\{\frac{\partial u^k}{\partial t}+(u\cdot\nabla)u^k-\nabla^2u^k+\frac{\partial p}{\partial x^k}+f^k\right\}+\{\mathrm{div}u\}.$$

1.2.4 Lorentz 不变性原理

Lorentz 不变性原理是狭义相对论的核心部分. 它是 Einstein 相对性原理与光速不变原理这两条基本原理的等价形式, 即上述两条原理可归并成 Lorentz 不变性这一条原理. 我们曾用虚拟的基本原理 1.4 来表明对称性的作用, 并且在 1.2.1 小节至 1.2.3 小节中很详细地阐述了张量与对称性的关系. 在这里再次强调, 不变性原理的作用是确定物理系统定律的微分方程表达形式与空间结构, 而每个原理最重要的是如下三个关键性的数学要素:

定义域空间, 变换群, 张量场.

因此把握 Lorentz 不变性原理首先要明确的就是这三个要素. 下面先陈述它们, 然后再作解释.

(A) 定义域空间是四维时空的 Minkowski 空间 M^4 记为

$$M^4 = \{x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) |\ x^0 = ct,\ (x^1, x^2, x^3) \in R^3\}, \tag{1.2.41}$$

其中 c 为光速.

(B) 变换群为 Lorentz 群 LG^4, 该群元素是 Lorentz 变换矩阵 E 和空间转动矩阵 R 的复合乘积, 它们定义为

$$E(v) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ -\dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = v/c, \tag{1.2.42}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \quad A \in SO(3), \tag{1.2.43}$$

其中 v 是变换坐标系的相对速度.

(C) 物理上最重要的是四维向量场 A_μ 和 A^μ 以及二阶度量张量 $g_{\mu\nu}$, 称为 Lorentz 度量, 它们可表达为

$$A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3)^{\mathrm{T}}, \tag{1.2.44}$$

$$A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3)^{\mathrm{T}}, \tag{1.2.45}$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.2.46}$$

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}. \tag{1.2.47}$$

于是 Lorentz 不变性原理陈述如下.

基本原理 1.9　所有惯性系 (即匀速直线运动坐标系) 中的物理定律在 Lorentz 变换群 LG^4 作用下是不变的. 即在下面坐标变换下

$$\tilde{x}^\mu = L^\mu_\nu x^\nu, \quad (L^\mu_\nu) \in LG^4, \quad x^\mu \in M^4, \tag{1.2.48}$$

物理系统的 Lagrange 作用量是不变的以及微分方程是协变的.

现在关于这个原理作如下解说.

(1) 由矩阵 (1.2.42) 给出的坐标变换

$$\tilde{x} = Ex, \quad x \in M^4,$$

它的物理意义表示 $\tilde{x}$ 坐标系与 x 坐标系做相对匀速直线运动, 其相对速度为 v, 并且 v 的方向为 x_1 轴, 见图 1.2.

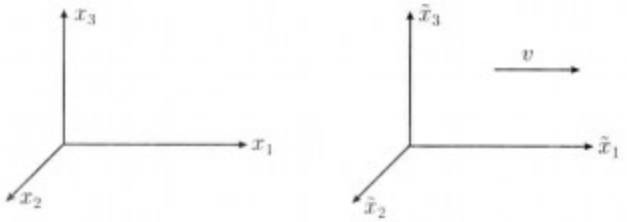


图 1.2 $\tilde{x}$ 与 x 是两个相对速度为 v 的惯性坐标系

(2) 在同方向的两个速度 v 和 u 的 Lorentz 变换乘积等于一个速度为 w 的 Lorentz 变换, 即

$$E(v)E(u) = E(w),$$

其中 $w = (v+u)/(1+uv/c^2)$ 是相对论的速度叠加. 因此这种乘积构成一个子群.

(3) 若惯性速度在 $\vec{r}$ 方向, 则 Lorentz 变换为

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} E \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

即先转动 x^1 轴到 $\vec{r}$ 方向, 再作 (1.2.42) 变换, 然后再转动 x^1 轴回到原位. 这里 A 即为将 x^1 转动到 $\vec{r}$ 方向的正交矩阵, 这就表明 Lorentz 群 LG^4 是 (1.2.42) 与 (1.2.43) 的复合乘积.

(4) Lorentz 度量 (1.2.46) 是一个不变的二阶协变张量, 同样 (1.2.47) 是它的逆也是不变的, 是一个反变二阶张量. 也就是说, 在 (1.2.48) 坐标变换下有

$$\begin{aligned} &(\tilde{g}_{\mu\nu}) = (L^{-1})^{\mathrm{T}}(g_{\mu\nu})L^{-1} = (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ &(\tilde{g}^{\mu\nu}) = L^{\mathrm{T}}(g^{\mu\nu})L = (g^{\mu\nu}), \end{aligned} \tag{1.2.49}$$

式中 $L = (L^{\mu}_{\nu})$ 如 (1.2.48) 的矩阵. 由于 L 是 (1.2.42) 和 (1.2.43) 矩阵 E 和 R 的乘积, 因此 (1.2.49) 很容易被验证.

(5) 由 (1.2.44) 和 (1.2.45) 给出的四维协变与反变向量 A_μ 和 A^μ 之间有如下关系 $A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu$, 它们变换关系为

$$\tilde{A}^\mu = LA^\mu, \quad \tilde{A}_\mu = (L^{\mathrm{T}})^{-1}A_\mu.$$

因此, 关于四维向量可导出它的 Lorentz 不变量为如下形式:

$$A^\mu A_\mu = g^{\mu\nu}A_\nu A_\mu = -A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2. \tag{1.2.50}$$

1.2.5　相对论作用量与动质能三角公式

根据 Lorentz 不变性原理 (基本原理 1.9), 寻找和识别 GL^4 变换群作用下不变的作用量, 也称作相对论作用量, 变得十分必要. 这一小节专门介绍几个很重要的相对论作用量形式, 以便能够很自如地辨认它们. 为此目的, 首先介绍一些重要的四维张量及张量算子.

1. 常用的四维微分算子

在相对论作用量和微分方程中常用的微分算子如下列出, 它们在 Lorentz 变换下也按张量规则进行变换.

$$\begin{aligned}
&\nabla_\mu = \partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right)^{\mathrm{T}},\\
&\nabla^\mu = \partial^\mu = g^{\mu\nu}D_\nu,\\
&\nabla^\mu\nabla_\mu = \partial^\mu D_\mu = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \quad (\text{波算子}),\\
&\mathrm{div}A_\mu = \partial^\mu A_\mu = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_0}{\partial t} + \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3},\\
&\mathrm{div}A^\mu = \partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c}\frac{\partial A^0}{\partial t} + \frac{\partial A^1}{\partial x^1} + \frac{\partial A^2}{\partial x^2} + \frac{\partial A^3}{\partial x^3},
\end{aligned} \tag{1.2.51}$$

其中 ∇^2 为 Laplace 算子.

根据张量缩并性质可以判定 (1.2.51) 中波算子

$$\partial^\mu\partial_\mu = \Box$$

是一个标量算子. 而向量场的散度 $\partial^\mu A_\mu$ 和 $\partial_\mu A^\mu$ 是标量场. 这些微分算子 (1.2.51) 经常出现在 Lorentz 协变的微分方程中.

2. 物理重要的作用量形式

下面三种 Lorentz 不变的作用量形式可以说是物理学中主要的相对论作用量, 它们分别称作是 Klein-Gordon 作用量、Dirac 作用量、规范场作用量. 所有这些作

用量都是取张量场的指标缩并形式, 这是获得不变性的唯一手段. 下面分别给出它们的表达式.

(1) Klein-Gordon 作用量. 物理场函数为标量的实值或复值函数的相对论作用量就是 Klein-Gordon 作用量. 令 ϕ 是一个标量场, 即在 Lorentz 变换下

$$\tilde{x} = Lx, \quad x \in M^4, \quad L \in LG^4, \tag{1.2.52}$$

ϕ 的变换为 $\tilde{\phi}(\tilde{x}) = \phi(Lx)$. 物理学中普遍地有一个关于导数阶数的约束: 物理场方程的导数阶数不超过 2, 即它们最高是二阶偏微分方程. 根据这个约束, 关于标量场 ϕ 的不变 Lagrange 密度取如下形式:

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \phi)^\dagger + f(x, \phi), \quad x \in M^4, \tag{1.2.53}$$

式中 f 为 (x, ϕ) 的函数, $\psi^\dagger$ 为转置共轭, 如 $\psi = (\psi_1, \psi_2)$, 则

$$\psi^\dagger = \begin{pmatrix} \psi_1^* \\ \psi_2^* \end{pmatrix}, \quad \psi_1^*, \psi_2^* \text{ 为复共轭.}$$

于是 Klein-Gordon 作用量取如下形式:

$$L_{KG} = \int \left[(\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \phi)^\dagger + f(x, \phi) \right] \mathrm{d}x. \tag{1.2.54}$$

式 (1.2.53) 称为 Klein-Gordon 密度.

(2) Dirac 作用量. 物理场函数是旋量的 Lorentz 不变作用量称为 Dirac 作用量. 所谓旋量是指复值函数的张量场, 它们的分量个数与定义域空间维数无关, 但必须大于 1. 一个二分分量的一阶复值张量场叫作 Weyl 旋量, 而 Dirac 旋量是一个具有四个分量的一阶复值张量场, 写作

$$\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^{\mathrm{T}}. \tag{1.2.55}$$

在 (1.2.52) 的坐标变换下, Dirac 旋量 (1.2.55) 变换规则为

$$\tilde{\psi} = R(L)\psi, \tag{1.2.56}$$

式中 $R(L)$ 是一个与 Lorentz 矩阵 L 有关的非奇异矩阵, 即

$$R: \ LG^4 \to GL(4)$$

是一个群同态, 称为 Lorentz 群的一个表示, $R(L)$ 的具体表达形式在后面 1.4 节中将给出.

Dirac 作用量密度是一个导数项指标 (即最高导数阶数与导数项指数的乘积) 为 1 的函数, 它取如下形式:

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi + k^2 \psi^\dagger \psi, \tag{1.2.57}$$

式中 $\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$, 其中 γ^μ 的每个分量是一个四阶复矩阵, 在后面 1.2 节中给出它们的形式, $\bar{\psi}$ 为

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0,$$

而 (1.2.56) 中的表示矩阵 $R(L)$ 与 γ^μ 的关系为

$$R^{-1}(\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)R = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)L^{\mathrm{T}}, \tag{1.2.58}$$

或者用更易理解的方式表达 (1.2.58) 如下:

$$R^{-1}\gamma^\mu R = a^\mu_\nu \gamma^\nu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad L = (a^\mu_\nu).$$
$$R^{-1} = \gamma^0 R.$$

由于 D_μ 按协变向量场变换

$$\bar{\partial}_\mu = L^{\mathrm{T}} \partial_\mu,$$

因此由 (1.2.56) 及 (1.2.58) 很容易看出 (1.2.57) 在 (1.2.52) 变换下是不变的. 于是 Dirac 作用量可写成

$$L_D = \int \left[\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi + k\bar{\psi}\psi\right] \mathrm{d}x, \tag{1.2.59}$$

式中 k 是一常数, 当 (1.2.59) 是描述一个质量为 m 的粒子时, k 取为 $k = mc/h$, c 为光速, h 为 Planck 常数.

(3) 规范场作用量. 以四维向量场 A_μ 为场函数的相对论作用量称作是规范场作用量. 这个原因是描述电磁相互作用、弱相互作用、强相互作用的场函数都是满足如 (1.2.5) 规范变换下不变的规范场, 它们全部是四维向量场. 所不同的是, 电磁相互作用只有一个向量场, 弱相互作用是三个向量场, 而强相互作用是八个向量场. 它们记为

$$\begin{aligned}
&\text{电磁场: } A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3),\\
&\text{弱作用 : } W^a_\mu = (W^a_0, W^a_1, W^a_2, W^a_3), \quad 1 \leqslant a \leqslant 3,\\
&\text{强作用: } S^k_\mu = (S^k_0, S^k_1, S^k_2, S^k_3), \quad 1 \leqslant k \leqslant 8.
\end{aligned} \tag{1.2.60}$$

为了简单, 我们就用 A^a_μ $(1 \leqslant a \leqslant N)$ 代表 (1.2.60) 中某一组四维向量场, 即 $N = 0, 3, 8$ 中一个. 我们知道 A_μ 的梯度

$$\nabla_\nu A^a_\mu = \{\partial_\nu A^a_\mu\}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$$

是一组四维二阶协变张量场, 它关于 μ,ν 的指标缩并

$$\partial^\nu A^{a\mu}\partial_\nu A^b_\mu = g^{\nu\alpha}g^{\mu\beta}\partial_\nu A^a_\mu \partial_\alpha A^b_\beta \tag{1.2.61}$$

是 Lorentz 不变的, 因而它们都可作为相对论作用量密度的一项. 然而当考虑 (1.2.5) 规范变换时, (1.2.61) 并不是规范不变的. 此时必须考虑如下形式的二阶张量场:

$$G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g\lambda^{abc}A^b_\mu A^c_\nu, \tag{1.2.62}$$

其中 g 是一个常数, λ^{abc} 是 $SU(n)$ 的结构常数, 关于 $G^a_{\mu\nu}$ 的所有指标 a,μ,ν 进行缩并

$$G^a_{\mu\nu}G^{a\mu\nu} = g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}G^a_{\mu\nu}G^a_{\alpha\beta}, \tag{1.2.63}$$

显然它是 Lorentz 不变的. 在本书第 4 章关于规范场的讨论中可以看到 (1.2.63) 也是规范不变的. 于是规范场作用量, 也称为 Yang-Mills 作用量, 取如下形式:

$$L_{YM} = \int G^a_{\mu\nu}G^{a\mu\nu}\mathrm{d}x. \tag{1.2.64}$$

事实上, (1.2.62)-(1.2.63) 是同时满足 Lorentz 不变性原理与规范不变性原理的唯一形式. 因此, 作用量是被上述两种对称性唯一确定, 除了耦合常数 g 外.

以上三个泛函 (1.2.54), (1.2.59) 和 (1.2.64) 分别是关于零阶张量场 ϕ 和一阶张量场 (旋量场 ψ 和向量场 A^a_μ) 的作用量, 其方程阶数分别为

Klein-Gordon 方程为 2 阶,

Dirac 方程为 1 阶,

规范场方程为 2 阶.

它们是物理学中所有的已知的 Lorentz 协变的方程. 这充分显示了自然界遵从最简单化原则: 张量场阶数与方程阶数的最小化.

最后介绍一个最重要的狭义相对论公式: 动质能三角恒等式. 我们可以这样说, Lorentz 不变性原理与质能三角公式是狭义相对论中最重要的精华. 事实上, 量子物理的 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程正是根据这两者发现的.

3. **动质能三角公式**

Minkowski 空间 M^4 中的四维向量

$$X^\mu = (X^0, X^1, X^2, X^3)^{\mathrm{T}}$$

当坐标系进行 (1.2.52) 的 Lorentz 变换时, 它也按相同方式变换

$$\tilde{X} = LX.$$

在 M^4 中一个最重要的四维向量就是能量动量向量:

$$T^\mu = (E, cP), \quad c \text{ 为光速}, \tag{1.2.65}$$

其中 $T^0 = E$ 为能量, $P = (p_1, p_2, p_3)$ 是动量向量. 由 (1.2.51), 指标缩并产生一个 Lorentz 不变量

$$g_{\mu\nu} T^\mu T^\nu = -E^2 + c^2 P^2.$$

即在 Lorentz 变换下有

$$-\tilde{E}^2 + c^2 \tilde{P}^2 = -E^2 + c^2 P^2.$$

当考虑一个质量为 m 的运动物体时, 取 $\tilde{x}$ 坐标系固定在 m 物体上. 此时该物体在 $\tilde{x}$ 中为静止, 其动能 $\tilde{P} = 0$. 此时有

$$-E^2 + c^2 P^2 = -\tilde{E}^2, \tag{1.2.66}$$

式中 $\tilde{E}$ 是静止质量 m 贡献的能量. 由 Einstein 质能公式

$$\tilde{E} = mc^2, \tag{1.2.67}$$

将它代入到 (1.2.66) 中便得到相对论动质能三角公式如下:

$$E^2 = c^2 P^2 + m^2 c^4. \tag{1.2.68}$$

它就像直角三角形的勾股定理.

注 1.10　将能量 E 作为时间分量 $T^0 = E$ 以及将动量 $P = (p_1, p_2, p_3)$ 作为空间分量 $T^k = cp_k$ $(1 \leqslant k \leqslant 3)$ 构成 M^4 中的一个四维向量, 这个结论完全是猜出来的. 同样, Einstein 质能公式 (1.2.67) 也是推测的. 但是它们获得大量实验的支持. 当动量 $P = 0$ 时, 动质能公式 (1.2.68) 便推出

$$E = \pm mc^2,$$

出现负能. 今天我们解释, 负能态是反电子的真空态.

1.3　相互作用经典理论

1.3.1　概况性介绍

所有物质构成与运动都最终可以归结到四种相互作用上. 这四种相互作用力就是

万有引力、电磁作用力、强相互作用、弱相互作用.

因此理解这四种作用力成为最基本的科学问题.

相互作用的研究有许多层面. 下面就它们在自然界起的作用、功能、研究现状等分别进行简要介绍.

1. 相互作用势与作用力

关于电磁势和电磁力有如下 Coulomb 公式:

$$\text{电力势 } \Phi_e = \frac{Q}{r}, \quad \text{电作用力 } F_e = \frac{Q_1 Q_2}{r^2}. \tag{1.3.1}$$

而引力势和引力有 Newton 公式:

$$\text{引力势 } \Phi_g = -\frac{MG}{r}, \quad \text{引力 } F_g = -\frac{mMG}{r^2}. \tag{1.3.2}$$

关于强相互作用, 它是将核子 (质子与中子) 束缚在一起形成原子核, 同时它也是将夸克束缚在一起形成强子 (重子与介子) 的力量. 然而直到现在我们只是仅仅知道关于核力的 Yukawa(汤川) 势与核子力近似公式如下:

$$\begin{aligned} &\text{Yukawa 势 } \Phi_Y = -\frac{g}{r} e^{-\frac{mc}{\hbar} r}, \quad g \text{ 为常数}, \\ &\text{核子力 } F_Y = -g^2 \left(\frac{1}{r^2} + \frac{mc}{\hbar} \frac{1}{r} \right) e^{-\frac{mc}{\hbar} r}, \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

其中 m 是 Yukawa 介子的质量, c 为光速, $\hbar$ 为 Planck 常数, $r_1 = \hbar/mc = 10^{-13}$cm. 而关于夸克之间强作用势和力的经典理论现状是

$$\text{夸克强作用势 } \Phi_q = ?, \quad \text{夸克强作用力 } F_g = ?. \tag{1.3.4}$$

从公式 (1.3.3) 可以看到 Yukawa 公式很好地描述了核子的强作用力程为 $r_1 = 1$fm, 这是原子核的半径. 然而实验结果表明核子之间存在一个很强的排斥半径 $r^* \simeq 0.6$fm, 即当 $r < r^*$ 时核子之间的强作用力表现出很强的斥力. 但是公式 (1.3.3) 完全不能反映这一点.

关于弱相互作用, 只知道它是不同于其他三种相互作用的第四种力. 但是它的作用势与作用力的公式是怎样的人们一点也不知道. 即经典的弱作用势和力的理论现状是空白,

$$\text{弱作用势 } \Phi_W = ?, \quad \text{弱作用力 } F_W = ?. \tag{1.3.5}$$

上述公式 (1.3.1)-(1.3.5) 基本上就是当前关于相互作用势与作用力理论的现状. 顺便提一下, 作用势 Φ 与作用力 F 之间有如下关系式:

$$F = -g\nabla\Phi,$$

其中 ∇ 为梯度算子, g 是相互作用荷, 它的意义为

$$\begin{aligned} &\Phi \text{ 是引力势时}, \quad g = m \text{ 代表质量 (引力荷)}, \\ &\Phi \text{ 是电力势时}, \quad g = e \text{ 代表电荷}, \\ &\Phi \text{ 是强作用势时}, \quad g = g_s \text{ 为强作用荷}, \\ &\Phi \text{ 是弱作用势时}, \quad g = g_w \text{ 为弱作用荷}. \end{aligned} \tag{1.3.6}$$

这里需要解释一下, (1.3.6) 中后两个概念强作用荷 g_s 与弱作用荷 g_w 是本书将介绍的关于强相互作用与弱相互作用新理论引入的, 在那里我们关于核子势、夸克势与弱作用势都建立了相应的公式.

2. 作用尺度与强度

实验资料显示. 每一种相互作用都有它们作用尺度和占支配地位的范围. 根据力程, 它们的作用尺度分别为

$$\begin{aligned}&\text{引力力程 } r=\infty,\\&\text{电磁力程 } r=\infty,\\&\text{强作用力程 } r=10^{-13}\text{cm},\\&\text{弱作用力程 } r=10^{-16}\text{cm}.\end{aligned}\tag{1.3.7}$$

在物质结构中它们占支配地位的层面是

$$\begin{aligned}&\text{星球与天文学层次主导的是引力},\\&\text{在分子与原子尺度 } 10^{-8}\text{cm}\leqslant r\leqslant 10^{-6}\text{cm} \text{ 是电磁力},\\&\text{在原子核与强子尺度 } 10^{-16}\text{cm}\leqslant r\leqslant 10^{-13}\text{cm} \text{ 是强作用力},\\&\text{在轻子与夸克尺度内 } r<10^{-16}\text{cm} \text{ 是弱作用力}.\end{aligned}\tag{1.3.8}$$

作用力强度数值为

$$\begin{aligned}&\text{引力强度}=Gm_p^2=6\times 10^{-39}\hbar c,\\&\text{电磁强度}=e^2=\frac{1}{137}\hbar c,\\&\text{强作用强度}=g_{\mathrm{Y}}^2=10\hbar c,\\&\text{弱作用强度}=g_w^2=\frac{8}{\sqrt{2}}G_f\left(\frac{m_wc}{\hbar}\right)^2=10^{-1}\hbar c,\end{aligned}\tag{1.3.9}$$

其中 G 为引力常数, m_w 为 w 粒子质量, G_f 为 Fermi 常数, e 和 g_w 如 (1.3.6) 中所介绍的电、强、弱作用荷, g_Y 为 Yukawa 强作用常数.

3. 物质结构与稳定性

实质上, 每一种相互作用决定着物质结构的一个层次, 它们的对应关系如下列出

$$\begin{aligned}&\text{万有引力} \Leftrightarrow \text{星球/星系/宇宙},\\&\text{电磁作用} \Leftrightarrow \text{原子/分子},\\&\text{强作用力} \Leftrightarrow \text{强子/原子核},\\&\text{弱作用力} \Leftrightarrow \text{夸克/轻子}.\end{aligned}\tag{1.3.10}$$

下面关于 (1.3.10) 中每一种对应关系作一简要说明.

(1) 天文学层次. 由 (1.3.7) 可知, 当距离大于原子尺度 $r = 10^{-8}$cm 时, 强相互作用与弱相互作用已不再呈现. 而在分子尺度上, 正负电荷相抵消呈现出电中性, 因而电磁作用也失去效用. 虽然由 (1.3.9) 展现出引力强度非常弱, 但是它是唯一一种关于作用荷 (引力荷为质量) 是叠加的作用力. 正是因为这个性质在引力作用下物质结成团形成星球.

此外, 天文学的恒星系和星系都是由许多小质量星体围绕一个巨大质量的核心作平面旋转运动. 图 1.3(a) 和 (b) 分别显示一个恒星系若干小行星围绕恒星运动以及数千亿颗恒星围绕一个星系核进行旋转运动.

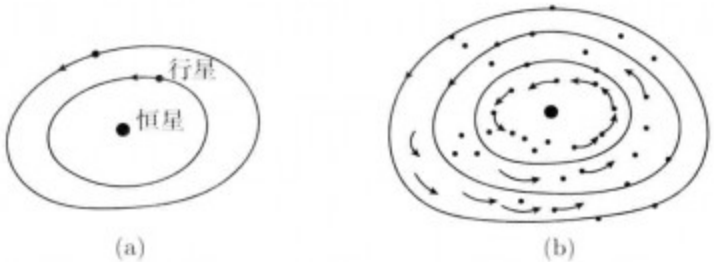


图 1.3 (a) 恒星系; (b) 星系, 中心为星系核

这些系统是靠大质量的中心产生的引力与小质量星体转动离心力的平衡来维持它们的稳定性. 通常一颗行星与恒星及恒星与星系核的质量比约为

$$\frac{m_{\text{行}}}{m_{\text{恒}}} = 10^{-7} \sim 10^{-4}, \quad \frac{m_{\text{恒}}}{m_{\text{星系核}}} \backsimeq 10^{-6}. \tag{1.3.11}$$

这样的比值是保证系统稳定性的关键因素.

(2) 原子与分子结构. 原子是由原子核与轨道电子构成, 分子是由正、负离子组成. 将原子核与电子、正负离子束缚在一起的是由 (1.3.1) 提供的 Coulomb 力. 由于原子半径 r_a 和分子半径 r_m 远大于强和弱作用力程 (见 (1.3.7)):

$$r_a = 10^{-8}\text{cm}, \quad r_m = 10^{-7}\text{cm} \gg 10^{-13}\text{cm}.$$

因此在原子与分子尺度上强和弱作用力都不显现. 而由 (1.3.9), 原子和分子中粒子之间引力 F_g 与 Coulomb 力 F_e 之比约为

$$\frac{F_g}{F_e} = \frac{Gm_p^2}{e^2} \backsimeq 10^{-39}.$$

因而在原子与分子结构中万有引力可以忽略不计.

原子结构可由图 1.4 所示. 轨道电子围绕着原子核进行运动, 但是它们的行为与行星绕恒星运动有很大的差异. 电子轨道能级是分立的, 并且以概率方式出现在

轨道上. 轨道电子不被吸到原子核中正是由于分立的轨道能级与 Pauli 不相容原理这两个量子效应的结果, 但本质上仍是离心力与电引力相平衡的原理. 事实上, 电子与核子质量比由下式给出:

$$\frac{m_{\text{电子}}}{m_{\text{核子}}} \simeq 10^{-3}. \tag{1.3.12}$$

再次强调, 几个物体绕一个中心物体运动的条件是它们的质量比很小. 由 (1.3.11) 和 (1.3.12) 给出的数值都说明了这个特性.

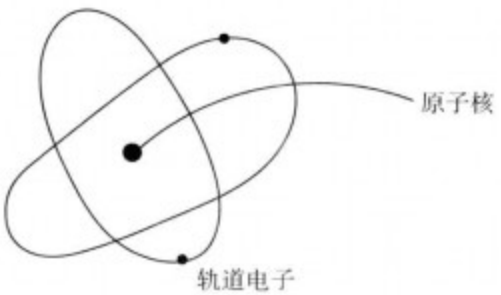


图 1.4　原子结构

分子结构由图 1.5(a) 和 (b) 所示. 其中 (a) 是极性分子, 完全由正负离子构成, 由两个圈表示. 其左边的圈代表正离子, 它的最外轨道多一个电子 (由黑点表示); 其右边的圈代表负离子, 它的最外轨道少一个电子 (由白圈表示). 图 (b) 是同极性分子, 它们是靠公用电子结合在一起的. 从图 1.5 很容易看出, 分子中的离子或原子由于原子核正电斥力阻止它们被吸收到一点上.

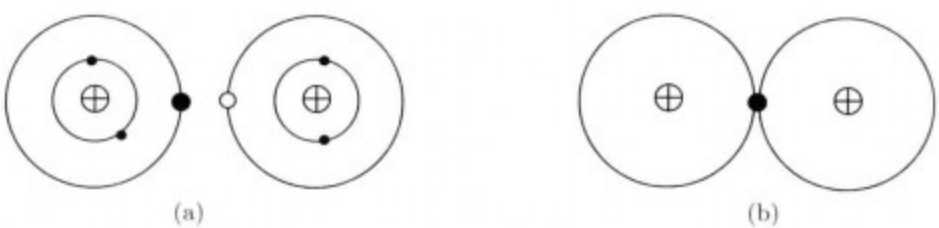


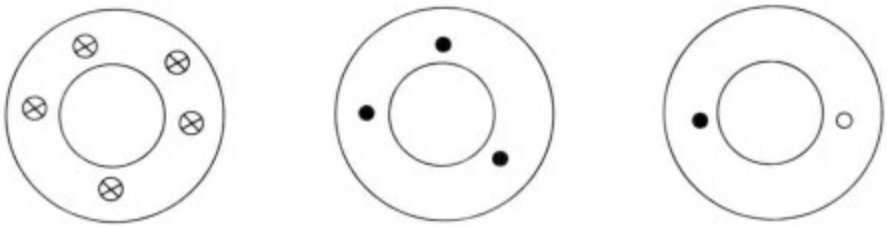
图 1.5　(a) 极性分子; (b) 同极性分子

(3) 原子核与强子. 原子核是由质子和中子组合而成, 强子是由夸克构成. 将它们束缚在一起的是强相互作用力. 强子分为重子和介子两类. 重子由三个夸克组成, 介子由一个夸克和一个反夸克构成. 在强相互作用的有效半径内, 电力 F_e, 弱力 F_w, 引力 F_g 与强作用力 F_s 的比值 (见 (1.3.9)) 分别为

$$\frac{F_e}{F_s} = \frac{e^2}{g_s^2} = 10^{-3}, \quad \frac{F_w}{F_s} = \frac{g_w^2}{g_s^2} = 10^{-2}, \quad \frac{F_g}{F_s} = \frac{Gm_p^2}{g_Y^2} = 10^{-40}.$$

原子核、重子、介子的结构分别由图 1.6(a), (b), (c) 表示. 每个都有两个圈, 其

中在内圈强相互作用为斥力, 在外圈为吸引力, 两个圈的外面强作用力消失 (该性质由新的强作用势公式所验证 (见 1.3.4 小节). 这就解释了为什么粒子与夸克能束缚在一起形成原子核而又不会被吸收到一点的原因.



(a) (b) (c)

图 1.6 (a) 原子核; (b) 重子; (c) 介子

⊗ 为核子; • 为夸克; ○为反夸克

(4) 夸克与轻子. 夸克和轻子目前被认为是构成物质的基本粒子, 它们各有六个. 所有六个夸克的名称为

u 夸克、d 夸克、s 夸克、c 夸克、t 夸克、b 夸克.

六个轻子分别是

电子、e 中微子、μ 子、μ 中微子、τ 子、τ 中微子.

它们的记号分别为

$$e^{\pm},\ \nu_e,\ \mu^{\pm},\ \nu_\mu,\ \tau^{\pm},\ \nu_\tau.$$

人们之所以将它们为轻子是因为它们不参与强相互作用而只参与弱相互作用. 或者可以认为它们不含强荷但都含弱荷.

夸克和轻子被称为基本粒子是由于人类无法再探索它们的内部组分. 这是因为物理实验上要获得一个粒子的内部结构必须用比这个粒子更小的长寿粒子去碰撞它才行. 由于夸克是禁闭的, 即没有自由夸克, 人们找不到比电子更小的长寿粒子. 于是轻子与夸克的内部结构便成为实验的盲区.

然而, 最近发展的相互作用理论导出的弱作用势公式显示出在夸克和轻子尺度内, 有类似于夸克禁闭的弱作用性质. 这意味着可能存在两种更小的粒子,一种是只带弱荷与 $\frac{1}{3},\frac{2}{3}$ 电荷的粒子 ω, 另一种是带弱荷、强荷及 $\frac{2}{3}$ 电荷的粒子 θ, 而中微子 ν 只带弱荷, 使得 e,μ,τ 粒子与夸克 q 是由 ω,θ 及中微子构成, 即它们的组合为

$$e=\omega+\omega+\nu_e,\quad \mu=\omega+\omega+\nu_\mu,\quad \tau=\omega+\omega+\nu_\tau,\quad q=\omega+\omega+\theta.$$

于是在轻子和夸克内部没有强相互作用, 这是因为 ω 不带强作用荷 g_s. 同时由 (1.3.9), 电磁力与弱力之比很小. 因此形成夸克和轻子的主要能量就是弱相互作用.

1.3.2　引力场的广义相对论

前面已经说过, 广义相对论是建立在三条基本原理之上的, 即等效原理、广义相对性原理、Lagrange 动力学原理. 并在 1.1.4 小节中介绍了它们的作用. 这一小节将介绍广义相对论的基本思想及其内容.

广义相对论的发现过程是由经典物理的 Galileo 不变性到狭义相对不变性最后达到广义相对论, 即

$$\text{Galileo 不变性} \ \rightarrow \ \text{Lorentz 不变性} \ \rightarrow \ \text{广义相对论}. \tag{1.3.13}$$

将 (1.3.13) 的过程译成数学才能全面理解广义相对论. 下面我们就是沿着这个思路进行.

广义相对论引力场理论包含两个部分的结论:

(1) 有引力场存在的时空是一个时间和空间都发生弯曲的四维 Riemann 空间 $(E^4, g_{\mu\nu})$, 其中度量 $g_{\mu\nu}$ 代表引力势.

(2) 引力势 $g_{\mu\nu}$ 的 Lagrange 作用量取 (1.1.5) 的形式. 第一个部分是关于空间结构. 第二个部分是关于度量 $g_{\mu\nu}$ 所满足的微分方程表达式. 获得这两个结论的关键就是 Einstein 关于对称性的理解与他同时代的人具有如下差别, 即他首先意识到对称性 (也可见图 1.1) 具有如下功能:

$$\text{对称性} \overset{\text{决定}}{\Longrightarrow} \begin{cases} \text{空间结构}, \\ \text{微分方程形式}. \end{cases} \tag{1.3.14}$$

让我们从路线图 (1.3.13) 的 Galileo 不变性原理作为开始来解说 Einstein 是如何运用 (1.3.14) 的观念从 Newton 引力理论走到广义相对论的.

1. Galileo 不变性

Newton 力学的对称性包含两个变换下的不变性, 一个是 Galileo 的惯性变换, 另一个是转动变换. 这两种不变性统一地归结为如下经典力学的 Galileo 不变性原理.

Galileo 不变性原理 1.11　Newton 力学系统的定律在所有方向和所有惯性系中都是一样的, 从而无法分辨我们的方位和运动状态. 这个断言译成数学可等价地说, Newton 力学的微分方程在如下惯性变换和转动变换下是不变的

$$\begin{cases} \tilde{x} = x + vt, \\ \tilde{t} = t, \end{cases} \tag{1.3.15}$$

$$\tilde{x} = Ax, \quad A \in SO(3), \tag{1.3.16}$$

其中 v 是两个坐标系之间的相对速度, 是一个常值向量.

必须牢记每一个不变性原理标志性的特征是由定义域空间、变换群、张量场这三要素给定. 上述原理 1.11 的三要素是

$$\begin{aligned}&\text{空间} = R^3 \times R^1, \text{ 即 Euclid 空间与时间相互独立},\\ &\text{变换群} = SO(3) \times \text{Galileo 变换群 (1.3.15)},\\ &\text{张量} = SO(3) \text{ 表示的三维 Descartes 张量}.\end{aligned} \tag{1.3.17}$$

由 (1.3.17) 提供的一个满足原理 1.11 的基本不变量是两点 x_1 与 x_2 之间的距离 $\Delta x = x_1 - x_2$, 用 $\mathrm{d}s$ 表示它, 即

$$\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + (\mathrm{d}x^3)^2. \tag{1.3.18}$$

等式 (1.3.18) 就是我们熟悉的勾股定理. 这意味着由 Galileo 不变性原理决定的不变量 (1.3.18) 代表了它的定义域空间 $R^3 \times R^1$ 的平直性结构. 这就自然地可以换一种思考方式, 就是说我们能够将上述情况视为这样一个结论: 不变性原理 1.11 决定了它的定义域空间的平直性及时空独立的结构. 于是便引出如下一个问题:

$$\begin{aligned}&\text{如果存在另一种对称性原理, 那么是否它也决定了}\\ &\text{相应定义域空间的某种几何结构?}\end{aligned} \tag{1.3.19}$$

这个问题在 Einstein 之前从来没有出现在人们的头脑中, 并且在经典力学范畴内问题 (1.3.19) 也无任何意义. 然而当我们过渡到狭义和广义相对不变性原理后, 问题 (1.3.19) 就变得十分重要, 因为它代表着如 (1.3.14) 那样的一种观念.

为了能从 Galileo 过渡到 Lorentz, 需要将勾股定理 (1.3.18) 换成下面一种等价形式

$$\begin{cases}\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \quad (\text{指标缩并求和}),\\ g_{ij} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\end{cases} \tag{1.3.20}$$

此时 $\mathrm{d}s$ 是两点间距离, (g_{ij}) 被称为 Euclid 度量, 被规定为二阶 $SO(3)$ 张量. 容易看出它是不变张量, 即

$$(\tilde{g}_{ij}) = A^{\mathrm{T}}(g_{ij})A = (g_{ij}), \quad A^{\mathrm{T}} = A^{-1}.$$

2. Lorentz 不变性

20 世纪初, Lorentz 首先发现电磁系统不遵循 (1.3.15) 的 Galileo 变换不变性, 而是服从在 (1.2.48) 的时空变换下的不变性. 于是便引出如基本原理 1.9 那样的 Lorentz 对称性. 然而 Lorentz 并没有意识到它是一个普适的物理原理.

现在有两个不变性系统, Galileo 不变性与 Lorentz 不变性, 它们分别适用于经典力学系统和电动力学系统. Einstein 与其他人不一样的地方是, 他首先突破人们如 (1.3.17) 那样的时空相互独立的固有观念, 认为宇宙空间不是 $R^3 \times R^1$ 的结构; 其次他认为变换不变性是一个普适的物理原理, 两种不变性只能有一个成立. Einstein 选择了 Lorentz 不变性, 这种选择是根据光速不变性的物理实验.

Einstein 的成功要点是: ①观念变革; ②将观念转化成可运作的数学形式. 这两个要点被体现在他所提出的下面两个原理上.

Einstein 相对性原理 1.12　宇宙中不存在绝对静止的坐标系, 普适性的物理定律在所有惯性系中都是一样的.

光速不变原理 1.13　真空中的光速与测量它的参照系无关, 在两个做相对匀速运动的坐标系中测得的光速相同.

很容易验证在 Lorentz 变换下光速是不变的 (马天, 2012). 于是上面两原理将 Galileo 原理排除在外, 并可等价地合并成 Lorentz 不变性原理 1.9. 在 1.2.4 小节中已介绍, 该原理的三要素为

$$\begin{aligned} &\text{定义域空间} = \text{Minkowski 空间 } M^4, \\ &\text{变换群} = \text{Lorentz 群 } LG^4, \\ &\text{张量} = LG^4 \text{ 表示的四维张量}. \end{aligned} \tag{1.3.21}$$

根据 (1.3.19) 的观念, 由 (1.3.21) 决定的空间结构可表达如下:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = -c^2\mathrm{d}t^2 + (\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + (\mathrm{d}x^3)^2, \tag{1.3.22}$$

式中 $g_{\mu\nu}$ 是如 (1.2.46) 的 Lorentz 度量.

将 Galileo 不变性的物理系统 (1.3.17)-(1.3.18) 与 Lorentz 不变性的物理系统 (1.3.21)-(1.3.22) 对照就发现, 它们分别决定的空间结构和微分方程形式都发生根本性的差异: Galileo 系统的微分方程是类似于 (1.2.28) 那样的椭圆方程, 空间形式是如 (1.3.18) 的时空分离结构; 而 Lorentz 系统决定的微分方程是如 (1.2.54), (1.2.59), 以及 (1.2.64) 等所提供的双曲波方程, 而空间形式是如 (1.3.22) 那样时空不可分割的双曲型结构.

将狭义相对论两个基本原理 (原理 1.12 和原理 1.13) 转换成 Lorentz 不变性 (1.3.21)-(1.3.22) 数学形式的这种做法是归功于数学家 Minkowski 的. 但是 Einstein 是首先认识到这种转化重要性的物理学家, 并且以此为出发点发展了广义相对论.

3. 广义不变性

因为不变性原理的根源是逻辑合理性. 即坐标系的选择只是为了表达物理定律, 因此不应该存在一类特殊坐标系 (如惯性坐标系), 只有采用它们物理定律才能

正确表达. 事实上, 由于引力场在宇宙中无处不在, 也不可能存在真正的惯性系. 这种基本的逻辑需要使得 Einstein 提出如下广义相对性原理.

广义相对性原理 1.14 所有坐标系在描述物理定律上是平等的, 也就是说, 无论对惯性或是非惯性坐标系变换, 定律的微分方程都是协变的.

这一次由 (1.3.14) 和 (1.3.19) 所代表的观念起到根本作用, 它指导 Einstein 去做如下事情: ①寻找原理 1.14 的三要素; ②确定定义域空间的结构; ③新的空间结构物理意义. 这后两件事导致的结果就是得到广义相对论的结论 (1.1.27), 也即本小节一开始讲到的关于空间结构的结论 (1).

首先关于三要素的变换群已不再是像前面两种情况, 在那里变换群表示矩阵与时空位置无关, 而在这里非惯性坐标系之间的变换不是线性变换, 因而变换群表示矩阵与时空位置有关. 例如, 考虑一个相对于坐标系 $x^\mu = (ct, x)$ 做匀速旋转运动的坐标系 $\tilde{x}^\mu = (c\tilde{t}, \tilde{x}), x^3$ 为转动轴, Ω 为角速度. 此时坐标变换为

$$\begin{cases} \tilde{t} = t, \\ \tilde{x}^1 = x^1 \cos \Omega t + x^2 \sin \Omega t, \\ \tilde{x}^2 = -x^1 \sin \Omega t + x^2 \cos \Omega t, \\ \tilde{x}^3 = x^3, \end{cases} \tag{1.3.23}$$

在每一点 x_0^μ 的邻域, (1.3.23) 的变换可写成

$$\mathrm{d}\tilde{x}^\mu = \left(\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu}\right)_{x_0^\mu} \mathrm{d}x^\nu. \tag{1.3.24}$$

因而 (1.3.23) 在 x_0^μ 的变换矩阵为

$$\left(\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu}\right)_{x_0^\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -x_0^1 \Omega \sin \Omega t_0 + x_0^2 \Omega \cos \Omega t_0 & \cos \Omega t_0 & \sin \Omega t_0 & 0 \\ -x_0^1 \Omega \cos \Omega t_0 - x_0^2 \Omega \sin \Omega t_0 & -\sin \Omega t_0 & \cos \Omega t_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.3.25}$$

显然这个变换矩阵依赖于空间位置 x_0^μ.

其次我们需要考察在非惯性坐标变换下反映空间结构的度量 $\mathrm{d}s^2$ 会发生什么变化. 假设 x^μ 是惯性系, 则

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2 \mathrm{d}t^2 + (\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + (\mathrm{d}x^3)^2. \tag{1.3.26}$$

对于 (1.3.23) 的非惯性系 $\tilde{x}^\mu$, 由 (1.3.24) 和 (1.3.25), 再根据广义不变性原理 1.14 从 (1.3.26) 可算出

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = &(c^2 - (\tilde{x}^1)^2 \Omega^2 - (\tilde{x}^2)^2 \Omega^2) \mathrm{d}\tilde{t}^2 + 2\Omega \tilde{x}^2 \mathrm{d}\tilde{x}^1 \mathrm{d}\tilde{t} \\ &- 2\Omega \tilde{x}^1 \mathrm{d}\tilde{x}^2 \mathrm{d}\tilde{t} - (\mathrm{d}\tilde{x}^1)^2 - (\mathrm{d}\tilde{x}^2)^2 - (\mathrm{d}\tilde{x}^3)^2. \end{aligned}$$

因此一般非惯性系中, 度量微分元 $\mathrm{d}s^2$ 为一般二次形式

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu, \quad g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}, \tag{1.3.27}$$

其中 $(g_{\mu\nu})$ 是一般对称二阶协变张量场. 根据 Riemann 几何知识, 以 (1.3.27) 为度量的空间是一个 Riemann 流形.

将上述例子拓广到如下一般非惯性坐标系变换上,

$$\tilde{x}^\mu = \varphi^\mu(x^\nu), \quad \det\left(\frac{\partial\varphi^\mu}{\partial x^\nu}\right) \neq 0, \tag{1.3.28}$$

关于广义不变性原理 1.14 的三要素及定义域空间结构便可得到如下结论:

$$\begin{aligned} &\text{定义域空间} = \text{Riemann 流形 } (E^4, g_{\mu\nu}),\\ &\text{变换群} = \text{一般矩阵函数群 } \left(\frac{\partial\varphi^\mu(p)}{\partial x^\nu}\right), \quad p \in E^4,\\ &\text{张量场} = \text{矩阵 } (\partial\varphi^\mu/\partial x^\nu) \text{ 表示下的广义张量场}, \end{aligned} \tag{1.3.29}$$

其空间 $(E^4, g_{\mu\nu})$ 的度量

$$(g_{\mu\nu}) \text{ 是二阶协变对称张量场}, \tag{1.3.30}$$

并且 $(g_{\mu\nu})$ 的矩阵是双曲的, 即存在坐标变换使得它变为

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & G_{ij} \end{pmatrix}, \quad (G_{ij}) \text{ 为三阶正定矩阵}, \tag{1.3.31}$$

即 $(E^4, g_{\mu\nu})$ 的度量微分元在这个坐标系下可写成

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 + G_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j. \tag{1.3.32}$$

现在要达到广义相对论结论 (1), 还剩下最后一步, 即需要将 (1.3.29) 中 Riemann 空间 $(E^4, g_{\mu\nu})$ 解释成引力场空间并且度量 $g_{\mu\nu}$ 代表引力势. Einstein 是通过提出等效原理达到这个结论的. 下面就来介绍这个过程.

由 (1.3.23) 的例子可以看到, (1.3.27) 中的非平直度量 $g_{\mu\nu}$ 是由非惯性系所带有的惯性力造成的. Einstein 注意到惯性质量与引力质量相等. 这就意味着人们无法分辨非惯性系的作用力究竟是惯性力还是引力. 因此, 如果等效原理成立, 那么我们就可以将所有非惯性系携带的作用力全部视为一个等效的引力场所造成. 这样便可将 $(E, g_{\mu\nu})$ 视为引力场空间, 而 $g_{\mu\nu}$ 代表引力势.

于是广义相对论结论 (1) 可看作是广义相对性原理 1.14 与下面 Einstein 提出的等效原理的一个推论.

等效原理 1.15　一个做加速运动的非惯性参照系等效于一个引力场. 换句话说, 非惯性系对物体的惯性力, 可以等价地看作是一个引力场的作用.

4. Einstein-Hilbert 泛函

广义相对性原理 1.14 和等效原理 1.15 这两个原理导致广义相对论的结论 (1). 接下来的问题就是要确定度量张量 $g_{\mu\nu}$ 的作用量应是怎样的形式. 由 Riemann 几何理论可知, 一个 Riemann 流形上关于 $g_{\mu\nu}$ 不超过二阶导数项的几何不变量只有标量曲率和常数. 也就是说, 满足广义相对性原理的不超过二阶导数项的关于 $g_{\mu\nu}$ 的作用量密度只能取如下形式:

$$\mathcal{L} = R + \lambda, \quad R \text{ 为标量曲率}, \quad \lambda \text{ 为常数}.$$

再加上外给的能量动量应力张量 $\dfrac{8\pi G}{c^4} S_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$, 便获得广义相对论的 Einstein-Hilbert 作用量密度为

$$\mathcal{L}_{EH} = R + \lambda + \frac{8\pi G}{c^4} S \quad (S = S_{\mu\nu} g^{\mu\nu}). \tag{1.3.33}$$

这里关于导数项不超过二阶的约束来自于经典引力场方程 (1.1.26) 的导数不超过二阶. (1.3.33) 中 λ 称为宇宙常数, 通常取 $\lambda = 0$. 于是得到广义相对论作用量的通常形式 (1.1.5). 根据 Riemann 几何, 标量曲率 R 及 Ricci 曲率 $R_{\mu\nu}$ 分别给出如下:

$$\begin{aligned} &R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \\ &R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \frac{\partial^2 g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu \partial x^\beta} - \frac{\partial^2 g_{\nu\beta}}{\partial x^\mu \partial x^\alpha} \right) \\ &\quad + g^{\alpha\beta} g_{\gamma\theta} \left(\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \Gamma^\theta_{\mu\nu} - \Gamma^\gamma_{\mu\alpha} \Gamma^\theta_{\nu\beta} \right), \end{aligned} \tag{1.3.34}$$

式中

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\gamma\theta} \left(\frac{\partial g_{\alpha\theta}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\theta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} \right).$$

这样广义相对论便被完全建立. 其作用量密度为

$$\mathcal{L}_{EH} = R + \frac{8\pi G}{c^4} S, \quad S = S_{\mu\nu} g^{\mu\nu}. \tag{1.3.35}$$

相应的场方程为

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \tag{1.3.36}$$

式中 $T_{\mu\nu} = \delta(S\sqrt{-g})/\delta g^{\mu\nu}$ 是能量动量张量. 方程 (1.3.36) 是变分方程 (1.1.2) 的表达形式, 它不能解释新观察到的暗物质与暗能量的现象, 而修正的场方程 (1.1.7) 可统一地解释它们.

1.3.3 电磁场 Maxwell 方程

Maxwell 方程是经典电动力学四大定律的方程表达形式. 这四大定律是: Coulomb 定律、Gauss 定律、Ampère 定律、Faraday 定律, 它们的文字陈述分别如下.

Coulomb 定律　在真空中两个点电荷 Q_1 和 Q_2 之间相互作用力大小与 Q_1Q_2 成正比, 与它们距离平方成反比. 其公式表达如 (1.3.1).

Gauss 定律　通过任一闭合曲面的磁通量为零.

Ampère 定律　一个如图 1.7(a) 所示的电流为 I 的电路 L, 在 L 的垂直平面上将产生磁场 H. H 与 I 的关系为

$$\int_l H \cdot \mathrm{d}l = I, \tag{1.3.37}$$

式中 l 为包围 L 的任一闭合回路.

Faraday 定律　一个处在磁场 H 中的闭合回路, 见图 1.7(b), 当该环路做切割磁力线运动时会产生感应电动势. 其总感应电动势 V 等于环路中总磁通量的减少率. 用公式表达为

$$V = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S H \cdot n\mathrm{d}S, \tag{1.3.38}$$

式中 S 为环路所围曲面, n 为曲面右手单位法向量.

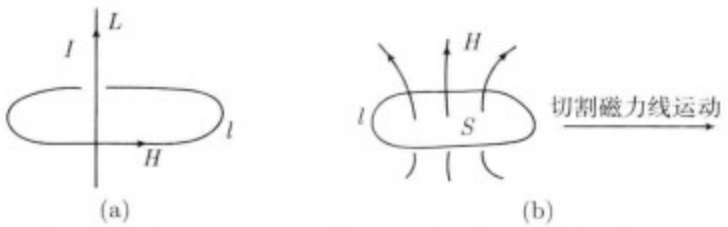


图 1.7

将上述电动力学四大定律的文字译成微分方程形式是由英国物理学家 J. C. Maxwell 完成的, 该方程被称为 Maxwell 方程, 它们表达为

$$\begin{aligned}
&\mathrm{div}H = 0 && \text{(Gauss 定律)}\\
&\mathrm{rot}E = -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} && \text{(Faraday 定律)},\\
&\mathrm{div}E = 4\pi\rho && \text{(Coulomb 定律)},\\
&\mathrm{rot}H = \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}J && \text{(Ampère 定律)},
\end{aligned} \tag{1.3.39}$$

其中 ρ 是电荷密度, J 为电流密度, E 为电场强度, H 为磁场强度.

下面研究 Maxwell 方程的 Lorentz 协变性.

Maxwell 方程 (1.3.39) 是经典形式, 从这个表达式看不出它具有 Lorentz 协变性. 主要原因是两个场函数 E 和 H 在描述电磁相互作用时, 它们并不是最基本的物理量. 根据狭义相对论, 最基本的电磁场物理量应该是四维向量场. 事实上, 电磁场的相对论四维向量场是由 Maxwell 方程 (1.3.39) 中第一对方程产生出来.

根据向量场数学理论,

$$\begin{aligned}&\mathrm{div}H=0\Leftrightarrow\exists\ \vec{A}=(A^1,A^2,A^3)\text{ 使得 }H=\mathrm{rot}\ \vec{A},\\&\mathrm{rot}G=0\Leftrightarrow\exists A^0\text{ 使得 }G=-\nabla A^0.\end{aligned}$$

因而 (1.3.39) 的第一对方程可写成

$$\begin{aligned}&H=\mathrm{rot}\ \vec{A},\\&E=-\nabla A^0-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t},\quad\vec{A}=(A^1,A^2,A^3).\end{aligned}\tag{1.3.40}$$

同时可引入如下四维向量场:

$$\begin{aligned}&A^\mu=(A^0,A^1,A^2,A^3),\\&J^\mu=(J^0,J^1,J^2,J^3),\end{aligned}\tag{1.3.41}$$

其中 $J^0=c\rho,J=(J^1,J^2,J^3)$, 它们是电磁场的基本物理量. 关于 (1.3.41) 满足 Lorentz 变换规则的结论是由物理实验确定. 从 (1.3.41) 又可诱导出下面四维张量场:

$$\begin{aligned}&A_\mu=g_{\mu\nu}A^\nu=(-A^0,A^1,A^2,A^3),\\&J_\mu=g_{\mu\nu}J^\nu=(-J^0,J^1,J^2,J^3),\\&F_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}-\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu},\\&F^{\mu\nu}=g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta},\end{aligned}\tag{1.3.42}$$

其中 $(g_{\mu\nu})$ 和 $(g^{\mu\nu})$ 是如 (1.2.46) 和 (1.2.47) 的 Lorentz 度量.

从 (1.3.41) 和 (1.3.42) 可产生如下 Lorentz 不变作用量:

$$L_{\mathrm{EM}}=\int\left[-\frac{\pi}{16}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\frac{1}{c}A^\mu J_\mu\right]\mathrm{d}x.\tag{1.3.43}$$

很容易验证 (1.3.43) 的变分方程 $\delta L=0$ 可写成

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}=\frac{4\pi}{c}J^\mu.\tag{1.3.44}$$

该方程是 Maxwell 方程 (1.3.39) 中的第二对 (即后两个) 方程, 用 A_μ 具体表达可写成如下形式:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)A^\mu-\partial^\mu(\partial_\nu A^\nu)=\frac{2\pi}{c}J^\mu.\tag{1.3.45}$$

将 (1.3.41) 作为电磁场基本物理量便使得作用量 (1.3.43) 完全确定了 Maxwell 方程. 此时 A^μ,J^μ 满足 (1.3.45), 然后以 (1.3.40) 的方式给出了电磁场强度 E 和 H.

注 1.16　作者在初学电磁场理论时感到疑惑, 由于 E 和 H 是可观测物理量而 A^μ 不是, 因而认为有了如 (1.3.39) 那样工整完备的 Maxwell 方程就够了, 不知为什么还要费那么多精力去考虑像 (1.3.43)-(1.3.44) 那样的等价形式. 等到对物理学有了全局性的了解后才知道, 电磁场的 Lorentz 不变作用量 (1.3.43) 是打开规范不变性原理大门的钥匙, 是建立弱相互作用与强相互作用理论, 乃至统一场理论的基石. 而原始的 Maxwell 方程 (1.3.39) 那种形式是根本没有上述功能.

1.3.4　强相互作用

在本节一开始的介绍中已明确指出, 关于强相互作用, 物理学目前比较成功的理论如 Yukawa 公式以及量子色动力学 (简称为 QCD) 对其了解非常有限. 例如, 下面列出的几个最基本问题这些理论都无能为力.

(1) 实验结果表明, 核子之间存在一个很强的排斥半径 $r^* \simeq 0.6 \times 10^{-13}\text{cm}$, 即 $r < r^*$ 为斥力, $r^* < r < 2 \times 10^{-13}\text{cm}$ 为吸引力. 其强作用势 Φ 可用图 1.8 示意. 但是目前所有理论不能提供一个核子强作用势公式用以合理解释图 1.8 所示的斥力现象.

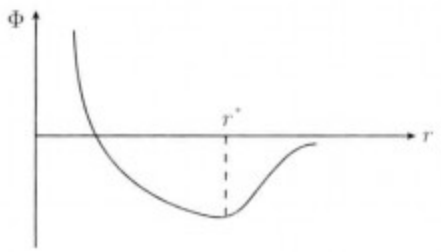


图 1.8　当 $r < r^*$ 时核子之间有斥力, $r > r^*$ 时为吸引力

(2) 怎样获得强相互作用势的统一公式, 使得限制在强子半径内能够说明夸克之间的强作用力并能体现夸克禁闭现象; 当限制在原子核半径内能够解释图 1.8 的性质; 最后, 该公式也必须能够反映强相互作用的短程性.

(3) 如何解释强子内部的夸克渐近自由现象.

(4) 给出强作用荷 g_s 的物理意义, 这能很好地解释轻子不参与强相互作用的原因是它们不含强荷 g_s.

QCD 最核心的部分就是给出强相互作用的作用量, 它是由 $SU(3)$ 规范不变性决定的, 其密度表达式如下:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\frac{1}{4} S^k_{\mu\nu} S^{\mu\nu}_k + \bar{\psi}\left(\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi, \tag{1.3.46}$$

式中关于指标 k, μ, ν 是缩并求和, 等式右端第二项是关于 m 质量夸克的 Dirac 作

用量 (1.2.57), 只是用 D_μ 取代 ∂_μ,

$$\begin{aligned} S^k_{\mu\nu} &= \partial_\mu S^k_\nu - \partial_\nu S^k_\mu + \frac{g_s}{\hbar c} f^k_{ij} S^i_\mu S^j_\nu, \\ D_\mu &= \partial_\mu + \mathrm{i} g_s S^j_\mu \lambda_j, \end{aligned} \tag{1.3.47}$$

这里 g_s 为强荷, f^k_{ij} 为 $SU(3)$ 结构常数, $\lambda_j (1 \leqslant j \leqslant 8)$ 是 Gell-Mann 矩阵 (后面第 3 章中会介绍它们), 而

$$S^k_\mu = (S^k_0, S^k_1, S^k_2, S^k_3), \quad 1 \leqslant k \leqslant 8 \tag{1.3.48}$$

是描述强相互作用场的 8 个四维向量场.

然而由 (1.3.46)-(1.3.48) 提供的量子色动力学场方程

$$\delta L_{\mathrm{QCD}} = 0 \tag{1.3.49}$$

并不能够解决上述强相互作用最基本的四个问题. 其根本原因在于相互作用 Lagrange 动力学原理的场方程必须采用 (1.1.3) 的形式, 而不是 (1.3.49).

这里顺便介绍一下, 建立在 PID 和 PRI (见第 4 章) 基础之上, 由 QCD 作用量密度 (1.3.46) 可导出 (1.1.3) 约束变分方程形式为

$$\partial^\nu S^k_{\nu\mu} - \frac{g_s}{2\hbar c} f^k_{ij} g^{\alpha\beta} S^i_{\alpha\mu} S^j_\beta - g_s Q^k_\mu = \frac{g_s}{\sqrt{\hbar c}} \zeta^k \left(\partial_\mu + \frac{k_1^2}{4} x_\mu \right) \phi, \tag{1.3.50}$$

$$\begin{aligned} \partial^\mu \partial_\mu \phi + k^2 \phi = &- \frac{\sqrt{\hbar c}}{|\zeta|^2} \zeta^k \partial^\mu Q^k_\mu - \frac{k_1^2}{4} x_\mu \partial^\mu \phi \\ &- \frac{1}{2\sqrt{\hbar c}} \cdot \frac{\zeta^k}{|\zeta|^2} f^k_{ij} g^{\alpha\beta} \partial^\mu (S^i_{\alpha\mu} S^j_\beta), \end{aligned} \tag{1.3.51}$$

$$\mathrm{i}\gamma^\mu (\hbar c \partial_\mu + \mathrm{i} g_s S^k_\mu \lambda_k) q - mc^2 q = 0, \tag{1.3.52}$$

其中 $S^k_{\nu\mu}, S^k_\mu, f^k_{ij}, \lambda_k, g_s$ 如 (1.3.46)-(1.3.48), ϕ 为标量场, q 和 m 为夸克波函数与质量, ζ^k 为 $SU(3)$ 表示常值张量, $g^{\alpha\beta}$ 为 Lorentz 度量,

$$Q^k_\mu = \bar{q} \gamma_\mu \lambda^k q \quad (\lambda^k = \lambda_k), \quad k_1 = m_Y c/\hbar,$$

这里 m_Y 为 Yukawa 介子质量, $\gamma_0 = -\gamma^0, \gamma_i = \gamma^i$ 如 (1.4.44).

方程 (1.3.50)-(1.3.52) 便可以解决上述四个强相互作用基本问题. 从这些方程可以导出三个不同层次的强相互作用势公式, 它们是夸克势 Φ^q_s, 核子/ 强子势 Φ^n_s,

以及原子/分子势 Φ_s^a, 其表达式如下:

$$\Phi_s^q = g_s\left[\frac{1}{r} - \frac{B}{\rho_0}e^{-k_0 r}\varphi(r)\right], \tag{1.3.53}$$

$$\Phi_s^n = 3\left(\frac{\rho_0}{\rho_1}\right)^3 g_s\left[\frac{1}{r} - \frac{B_n}{\rho_1}e^{-k_1 r}\varphi(r)\right], \tag{1.3.54}$$

$$\Phi_s^a = 3N\left(\frac{\rho_0}{\rho_1}\right)^3\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^3 g_s\left[\frac{1}{r} - \frac{B_n}{\rho_2}e^{-k_1 r}\varphi(r)\right], \tag{1.3.55}$$

式中 B 和 B_n 是两个正值参数, ρ_0, ρ_1, ρ_2 分别是夸克、核子/强子、原子/分子半径, $g_s = g_s(\rho_0)$ 是夸克的强作用荷, N 是原子或分子中的核子数.

$$k_0 = m_H c/\hbar, \quad k_1 = m_Y c/\hbar,$$

m_H 是强相互作用的 Higgs 粒子质量. $\varphi(r)$ 是 r 正函数, 它的一阶 Taylor 展开表达为

$$\varphi(r) = 1 + k_i \quad (i = 0, 1).$$

这里关于强作用势 Φ 与强作用规范场 S_μ^k 的关系是

$$\Phi = \alpha_k S_0^k, \tag{1.3.56}$$

其中 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_8)$ 是根据 PRI 引入的 $SU(3)$ 表示张量, 它的物理意义是 8 种胶子的分布比例, 满足 $|\alpha|^2 = 1$. S_0^k 为 S_μ^k 的时间分量. (1.3.56) 的 Φ 是 $SU(3)$ 表示不变量, 是电磁场 Coulomb 势 A_0 的相似物, 它也是 PRI 的关键产物之一.

在下面关于 ρ_0, ρ_1, ρ_2 的合理估值下,

$$\rho_0 = 10^{-18}\text{cm}, \quad \rho_1 = 10^{-16}\text{cm}, \quad \rho_2 = 10^{-8}\text{cm} \sim 10^{-7}\text{cm}, \tag{1.3.57}$$

由公式 (1.3.53)-(1.3.54) 便可解释上述四个强相互作用基本问题. 特别地, 这三个公式都显示出内排外吸的性质. 在第 5 章中将给出详细解读.

1.3.5　弱相互作用

弱相互作用是当前人们了解最少的一种相互作用. 在所有已知的理论中关于弱作用势没有任何知识, 此外也不清楚它在物质结构中究竟起到什么作用. 当然物理学对此也不是一无所知, 目前关于弱相互作用最成功的理论就是 Glashow-Weinberg-Salam 弱电理论, 简称 GWS 模型. 它是一种将质量生成的 Higgs 机制加入进来后迫使电磁与弱作用相耦合的 $U(1) \times SU(2)$ 规范理论, 它的成功之处在于

(a) 预言了中性流的存在, 并在 1973 年得到实验证实;

(b) 预言了中间 Bose 子 $W^{\pm}$ 和 Z 及其质量, 并于 1983 年在欧洲核子中心 (CERN) 分别找到它们.

但是 GWS 模型具有如下四条弱点:

(1) 电磁与弱作用不能自动脱耦以便自然地回位到各自对称群下的作用量或者场方程上, 这与现实不符;

(2) 破坏 PRI, 因而违背基本的逻辑合理性;

(3) 无法导出与现实相符的弱作用势公式;

(4) 不能解释为什么轻子不参与强相互作用.

以上四点不仅仅是 GWS 模型的弱点, 也是目前所有已知的各种统一场理论的不足之处.

人们首先发现弱相互作用是从了解原子的 β 衰变开始的. 所谓 β 衰变是指原子核的中子 n 自发地分解成质子 p、电子 e^- 及电子反中微子 $\bar{\nu}_e$ 的过程. 或者更广泛地讲, 下面三种过程都称为 β 衰变:

$$\begin{aligned} &n \to p + e^- + \bar{\nu}_e, \\ &p \to n + e^+ + \nu_e, \\ &e^- + p \to n + \nu_e. \end{aligned} \tag{1.3.58}$$

目前人们只是知 (1.3.58) 的 β 衰变是由弱相互作用造成, 但并不清楚弱作用是如何导致 β 衰变的具体机理.

由于只能从 β 衰变和其他一些弱相互作用产生的衰变获得信息, 因此弱作用理论从一开始就是围绕着如何计算这些衰变的跃迁概率进行. 最早的弱作用跃迁理论是由 Fermi 在 1934 年根据观测资料表象地提出. 他给出一般近似的单位时间内跃迁概率密度公式为

$$W = 2\pi |M|^2 \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}E_0}, \tag{1.3.59}$$

式中 E_0 为初、末态粒子质量差 (衰变能), $\mathrm{d}N/\mathrm{d}E_0$ 为末态单位能量能级数目, M 为跃迁矩阵元.

在计算 (1.3.59) 中, 求得跃迁矩阵元 M 的表达式成为关键. Fermi 类比电磁相互作用的散射矩阵元公式, 提出弱相互作用过程的矩阵元 M 为

$$M = \frac{G_f}{\sqrt{2}} J_h^w J_l^w, \tag{1.3.60}$$

其中 J_h^w 和 J_l^w 分别是强子与轻子弱作用流, G_f 为 Fermi 常数

$$G_f = 1.17 \times 10^{-5} \mathrm{GeV}^{-2}. \tag{1.3.61}$$

在 (1.3.60) 中满足 Lorentz 不变性的弱作用流 J^w 只有五种基本的表达形式. 对于 AB 粒子流, 它们写作

$$\begin{aligned}
&\text{标量型 } S: J^w_{AB} = \bar{\psi}_A \psi_B + h \cdot c \quad \text{(共轭项, 后面略去)},\\
&\text{赝标量型 } P: J^w_{AB} = \bar{\psi}_A \gamma_5 \psi_B,\\
&\text{矢量型 } V: J^w_{AB} = \bar{\psi}_A \gamma^\mu \psi_B,\\
&\text{赝矢量型 } A: J^w_{AB} = \mathrm{i}\bar{\psi}_A \gamma_5 \gamma^\mu \psi_B,\\
&\text{张量型 } T: J^w_{AB} = \mathrm{i}\bar{\psi}_A \gamma^\mu \gamma^\nu \psi_B,
\end{aligned} \tag{1.3.62}$$

公式 (1.3.59)-(1.3.62) 被称作是弱相互作用的 Fermi 理论, 其中 $\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$ 是 Dirac 矩阵, ψ_A, ψ_B 是 A、B 粒子的波函数, $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0, \gamma_5 = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$.

在 1956 年, 李政道与杨振宁共同发现了宇称在弱作用中不守恒. 这个发现促使 Feynman 和 Gell-Mann 在 1958 年提出 $V-A$ 理论. 该理论将 (1.3.62) 中的 S, P, T 类型的弱作用流排除在外, 即这三种类型在实际当中不发生, 只保留 V, A 两种类型. 并且确定为 $V-A$ 弱流 (即 V 减 A). 对于 $n \to p + e + \bar{\nu}_e$ 衰变, $V-A$ 理论的矩阵元 M_{V-A} 可写成

$$M_{V-A} = \frac{G_f}{\sqrt{2}} (\bar{\psi}_p \gamma_\mu (1-\gamma_5) \psi_n)(\bar{\psi}_e \gamma^\mu (1-\gamma_5) \psi_{\nu_e}). \tag{1.3.63}$$

$V-A$ 理论被证实在低能量情况下能够很好地与实验相符合. 但在高能情况下不再有效.

在 1961 年 Glashow 提出中间矢量 Bose 子理论, 简称 IVB 理论. 该理论认为弱相互作用是通过交换带质量的自旋 $S=1$ 的矢量 Bose 子来体现的. 有三种矢量 Bose 子, 带电的 $W^\pm_\mu$ 适于电荷弱作用, 中性的 Z_μ 出现在中性弱相互作用中, 这里

$$W^+_\mu, \quad W^-_\mu, \quad Z_\mu \tag{1.3.64}$$

是作为描述这三种粒子的场函数出现的. 因为它们都是四维向量场, 因而被描述的粒子称为矢量 Bose 子.

IVB 理论的矩阵元 M 包括带电弱作用流 M_e 和中性弱作用流 M_N 两种类型, 即

$$\begin{aligned}
M_{\mathrm{IVB}} &= M_e + M_N,\\
M_e &= \frac{g_w}{\sqrt{2}} (J_\mu W^{+\mu} + J^\dagger_\mu W^{-\mu}),\\
M_N &= \frac{g_w}{\cos\theta_w} J^N_\mu Z^\mu,
\end{aligned} \tag{1.3.65}$$

其中 J_μ, J_μ^N 是 $V-A$ 弱流 (即 V 减 A 弱流), θ_w 为 Weinberg 角, g_w 为弱耦合常数 (它就是弱荷). G_f 与 g_w 关系为

$$g_w^2 = \frac{8}{\sqrt{2}} G_f \left(\frac{m_w c}{\hbar}\right)^2, \quad m_w \text{ 为 } w \text{ 粒子质量.} \tag{1.3.66}$$

以上理论虽然都是以计算弱作用衰变跃迁概率为目的, 但是它们对后来关于弱作用的 $SU(2)$ 规范理论及 $U(1)\times SU(2)\times SU(3)$ 的标准模型建立起到至关重要的作用. 特别是 $V-A$ 理论和 IVB 理论, 它们决定了弱作用的 $SU(2)$ 规范作用量为

$$\mathcal{L}_w = -\frac{1}{4} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} W^a_{\mu\nu} W^a_{\alpha\beta} + \bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu - m)\psi, \tag{1.3.67}$$

其中 $\psi = (\psi^1, \psi^2)^{\mathrm{T}}$ 是参与弱作用的粒子对波函数,

$$\begin{aligned} W^a_{\mu\nu} &= \partial_\mu W^a_\nu - \partial_\nu W^a_\mu + \frac{g_w}{\hbar c} \lambda^a_{bc} W^b_\mu W^c_\nu, \\ D_\mu &= \partial_\mu + \mathrm{i} g_w W^a_\mu \sigma_a, \end{aligned} \tag{1.3.68}$$

式中 $W^a_\mu (a = 1,2,3)$ 是描述弱相互作用的 $SU(2)$ 规范场, λ^a_{bc} 是 $SU(2)$ 结构常数, σ_a 为 Pauli 矩阵. 在 (1.3.64) 中的 $W^\pm_\mu, Z_\mu$ 与 W^a_μ 的关系在本书的统一场理论中为

$$W^\pm_\mu = W^1_\mu \pm \mathrm{i} W^2_\mu, \quad Z_\mu = W^3_\mu. \tag{1.3.69}$$

特别地根据 PID 和 PRI, 从 (1.3.67)-(1.3.68) 可导出关于弱作用的场方程是如下形式:

$$\begin{aligned} &\partial^\mu W^a_{\mu\nu} - \frac{g_w}{2\hbar c} \varepsilon^{abc} g^{\alpha\beta} W^b_{\alpha\nu} W^c_\beta - g_w J^a_\nu \\ &= \left[\partial_\mu + \frac{m_H c}{4\hbar} x_\mu - \frac{g_w}{\hbar c} \alpha^w_b w^b_\nu\right] \phi^a, \quad 1 \leqslant a \leqslant 3, \end{aligned} \tag{1.3.70}$$

$$\mathrm{i}\gamma^\mu (\hbar c \partial_\mu + \mathrm{i} g_w W^a_\mu \sigma_a)\psi - mc^2 \psi = 0, \tag{1.3.71}$$

其中 $\psi = (\psi^1, \psi^2)$ 是参与弱作用粒子对的波函数, $J^a_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu \sigma^a \psi$ 是弱作用流, m_H 是 Higgs 粒子质量, 而 $g_w \alpha^w_b/(\hbar c)$ 代表 W, Z 粒子的质量 m_w 和 m_Z, 它们的关系为

$$\frac{m_w c}{\hbar} = \frac{g_w \alpha^w_1}{\hbar c}, \quad \frac{m_Z c}{\hbar} = \frac{g_w \alpha^w_3}{\hbar c}. \tag{1.3.72}$$

方程 (1.3.70)-(1.3.71) 是以 PID 和 PRI 为基础的统一场理论的自然输出结果. 从它们不仅能够导出 GWS 弱电理论的全部结论, 而且能够解决前面所提到的 GWS 理论 (1)~(4) 的全部疑难问题. 同时, PID 自动提供了与 Higgs 机制完全不同的产生如 (1.3.72) 的 W 和 Z 粒子质量的另一种方式.

最后提一下, 从 (1.3.70)-(1.3.71) 推导出两个层次的弱作用势公式, 即轻子/夸克内部粒子弱作用势 Φ_w^ω 和轻子夸克之间的弱作用势 Φ_w^q, 它们分别写作

$$\Phi_w^\omega = \left(\frac{\rho_0}{\rho_w}\right)^3 g_w e^{-k_1 r}\left(\frac{1}{r} - e^{k_0 r}\psi_1(r)\right), \tag{1.3.73}$$

$$\Phi_w^q = g_w e^{-k_1 r}\left(\frac{1}{r} - e^{k_0 r}\psi_2(r)\right), \tag{1.3.74}$$

其中 ρ_0, ρ_w 分别为夸克或轻子半径与夸克轻子内部粒子半径, $\psi_i(i=1,2)$ 是满足 $\psi_i(0)=0$ 的正函数, 并且它们使得 (1.3.73) 和 (1.3.74) 产生的弱力都具有内斥外吸的作用,

$$k_0 = m_H c/\hbar, \quad k_1 = m_B c/\hbar,$$

这里 m_H 是 Higgs 粒子质量, m_B 是 W, Z 粒子质量. 由于半径比例

$$\rho_0/\rho_w \gg 1 \text{ 非常大},$$

因此 (1.3.73) 足以产生夸克轻子内部粒子的禁闭. 这就是 1.3.1 小节中提到的轻子夸克结构模型的动机.

1.3.6　统一场理论介绍

统一场就是将四种相互作用统一在一个大框架下的理论. 所谓一个大框架是指有一种可能性能够将 Lorentz 不变性、广义相对不变性及规范不变性统一在一个更大的对称性之中, 使得这三种对称性只是这个大对称性的子分支而已. 在这个大对称性原理之下, 存在一种相应的场函数

$$G = (G_1, \cdots, G_N),$$

以及在该大对称变换下不变的作用量密度

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(G, DG, \cdots, D^m G),$$

使得在各自相互作用对称子群作用下或低能态情况下, G 和 $\mathcal{L}$ 都退化到各自相互作用的场函数和作用量上. 也就是说, 在低能态时大对称的变换群将退化到各自子变换群上, 即

$$G \to g_{\mu\nu}, A_\mu, W_\mu^a, S_\mu^k,$$
$$\mathcal{L} \to \mathcal{L}_{EH}, \mathcal{L}_{EM}, \mathcal{L}_W, \mathcal{L}_{\mathrm{QCD}}.$$

这是臆想中统一场理论的一种.

还有一种臆想的统一场, 那就是场函数就是四种相互作用各自场函数的组合

$$g_{\mu\nu}, A_\mu, W_\mu^a, S_\mu^k \quad (1 \leqslant a \leqslant 3, 1 \leqslant k \leqslant 8),$$

而作用量是耦合这四种场函数的一个统一的 Lagrange 密度

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(g_{\mu\nu}, A_\mu, W_\mu^a, S_\mu^k), \tag{1.3.75}$$

使得在高能量密度条件 (即宇宙初始状态) 下, 它们的耦合参数很大, 而当能量密度变小时, 耦合参数为零, (1.3.75) 的 $\mathcal{L}$ 便退化到各自相互作用的作用量上.

以上两种统一模式有一个共同点, 即它们将注意力放在作用量上的统一. 这是 Einstein 的梦, 也是目前所有物理学家心目中想象的统一场方式. 用一句话来强调这一特征:

统一场就是 Lagrange 作用量的统一.

称它为经典模式或作用量统一模式.

然而在本书将介绍的统一场理论与经典模式完全不同. 该理论是将四种相互作用统一在两个基本原理之上: 相互作用动力学原理 (PID) 和表示不变性原理 (PRI). 这个理论的主要特征不是作用量的统一, 而是能将四种相互作用耦合在一起的场方程的统一. 其作用量就是现在已有的各自相互作用的泛函组合, 即

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{EH} + \mathcal{L}_{EM} + \mathcal{L}_W + \mathcal{L}_{\text{QCD}}. \tag{1.3.76}$$

然后根据 PID 和 PRI 由 (1.3.76) 给出统一的场方程. 仍用一句话来给出这个统一场理论的特征:

统一场是建立在 PID 和 PRI 基础上场方程的统一.

称它为原理模式或场方程的统一模式.

到目前为止, 经典模式的统一场理论有超弦理论, 超对称与超引力理论, 关于电弱强三种相互作用的大统一理论, 以及 Weinberg-Salam 弱电理论. 所有这些模型都存在如下几点基本难题.

(1) 无法解释天文学新发现的暗物质暗能量现象;

(2) 从这些模型不能导出与事实相符的各个层次的强相互作用或弱相互作用势的公式;

(3) 不能解释夸克禁闭与渐近自由现象;

(4) 弱作用和强作用耦合常数 g_w 和 g_s 的物理意义不清楚, 从而无法解释为什么轻子不参与强相互作用;

(5) 粒子衰变的机理问题;

(6) 物质结构的稳定性问题;

(7) 弱作用场 W_μ^a 与强作用场 S_μ^k 与作用力的关系是什么;

(8) 这些理论都存在退耦困难, 即不能自然地回位到各自对称群下的场作用量或场方程上;

(9) 一旦退耦到弱作用中间 Bose 子质量生成的 Higgs 机制上, 所有经典模式的统一场理论全部都要破坏 PRI 原理.

以上 9 个问题是所有经典模式统一场理论共同面临的困难. 然而一个最突出的问题是它们全部都非常复杂! 现在, 原理模式的统一场理论不仅可以解决上述问题, 并且是最简单的一种统一理论: 原理、作用量、场方程、物理思想全部都简单.

下面用图 1.9 来展现四种相互作用理论的轮廓与作用.



图 1.9

1.4　量子物理基本知识

1.4.1　微观粒子的量子化

量子物理主要是研究微观粒子行为的一门学科, 其主要组成部分包括量子力学、基本粒子物理、相互作用与量子场论.

量子力学创始于四个物理学家的先驱性工作, 即 M. Planck 在 1900 年提出了平衡辐射的量子假设, A. Einstein 于 1905 年提出了光子理论, N. Bohr 在 1913 年关于原子结构建立的量子化理论, 以及 de Broglie 在 1924 年提出了粒子波粒子二重性的观点. 随后, E. Schrödinger, W. Heisenberg, P. M. Dirac, W. Pauli, 以及 O. Klein 和 W. Gordon 等对量子力学的完全建立作出了实质性的贡献. 这一节就是介绍这方面的基本工作.

1. Planck 量子假设

为了能够比较清楚地了解量子概念的产生过程, 从电磁平衡辐射理论介绍开

始. 描述辐射的物理量是谱密度函数 ρ, 它是辐射频率 ω 与温度 T 的函数,

$$\rho = \rho(\omega, T) \text{ 代表 } \omega \text{ 到 } \omega + \mathrm{d}\omega \text{ 之间辐射能密度.}$$

ρ 与通常电磁能量密度

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2) \tag{1.4.1}$$

的关系为

$$\mathcal{E} = \int_0^\infty \rho(\omega, T)\mathrm{d}\omega. \tag{1.4.2}$$

直接从 (1.4.1) 和 (1.4.2) 无法求出 ρ. 但是通过谐振子方程从 (1.4.1) 和 (1.4.2) 可导出 ρ 与辐射平衡能量 $\bar{E}$ 的关系为

$$\rho = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}\bar{E}. \tag{1.4.3}$$

根据经典统计物理, 粒子按能量分布的函数为

$$N(E) = Ae^{-\frac{E}{kT}},$$

其中 k 为 Boltzmann 常数, 而平均能量为

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \int_0^\infty EN(E)\mathrm{d}E \Big/ \int_0^\infty N(E)\mathrm{d}E \\ &= -\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln\int_0^\infty e^{-\lambda E}\mathrm{d}E\Big|_{\lambda=\frac{1}{kT}} = \frac{\partial}{\partial\lambda}\ln\lambda\Big|_{\lambda=\frac{1}{kT}}. \\ &= kT.\end{aligned} \tag{1.4.4}$$

然而这里出现了一个问题, 即将 (1.4.3) 和 (1.4.4) 代入到 (1.4.2) 后得出辐射能量密度为无穷大的结果:

$$\mathcal{E} = \int_0^\infty \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}kT\mathrm{d}\omega = \infty.$$

这一情况被 Ehrenfest 称为 "紫外灾难".

为了克服这一困难, Planck 提出他的能量量子假设, 即认为在 (1.4.4) 中的能量 E 只能取某个最小能量 ε 整数倍的分立值

$$E = n\varepsilon, \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

此时 (1.4.4) 的积分变为级数求和

$$\begin{aligned}\bar{E} &= -\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln\sum_{n=0}^\infty \varepsilon e^{-\lambda n\varepsilon} = -\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln\frac{\varepsilon}{1-e^{-\lambda\varepsilon}} \\ &= \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}}-1}.\end{aligned} \tag{1.4.5}$$

根据 Wien 热辐射定律: $\rho(\omega)=\omega^3 f\left(\dfrac{\omega}{T}\right)$, Planck 假设

$$\varepsilon=\hbar\omega. \tag{1.4.6}$$

将 (1.4.5) 和 (1.4.6) 代入到 (1.4.3) 便得到平衡辐射的 Planck 公式

$$\rho=\frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3\left(e^{\hbar\omega/kT}-1\right)}. \tag{1.4.7}$$

Planck 量子假设 (1.4.6) 给物理学带来了革命性的思想, 整个量子物理就从这里开端. 由 (1.4.6) 产生的公式 (1.4.7) 立刻得到实验的证实, 这对量子假设 (1.4.6) 给出很强的支持.

2. Einstein 的光粒子理论

继 Planck 在 1900 年的量子假设后, Einstein 在量子理论的发展道路上又推进了一大步. 他提出电磁波是由许多质量为零的粒子构成, 称为光子. 频率为 ω 电磁波的每个光子携带的能量为 $\hbar\omega$. 也就是说, Einstein 在理解辐射能量子化公式 (1.4.6) 时, 将它理解成一粒子.

在经典物理中, 一个粒子不仅具有能量而且还有动量. 将光视为粒子的观点紧接着的问题是光子的动量是由什么来表征的. 由相对论的动质能三角公式 (1.2.68), 一个静止质量为零的粒子, 动能 $\vec{p}$ 与能量 ε 之间的关系为

$$\vec{p}=\frac{1}{c}\varepsilon\,\vec{k}_0,\quad \vec{k}_0 \text{ 为动量方向单位向量}. \tag{1.4.8}$$

而代表光的传播方向的是波矢量 $\vec{k}=\dfrac{2\pi}{\lambda}\,\vec{k}_0$, λ 为波长. 将 $\varepsilon=\hbar\omega$ 代入 (1.4.8), 再由关系式

$$c=\frac{\lambda\omega}{2\pi},$$

便立刻得到一个光子的能量与动量公式

$$\varepsilon=\hbar\omega,\quad \vec{p}=\hbar\,\vec{k}, \tag{1.4.9}$$

式中 $\vec{k}=(k_1,k_2,k_3)$ 为光的波矢, $|\,\vec{k}\,|=2\pi/\lambda$ 为波数.

根据这种观点, Einstein 在 1905 年关于 Hertz 在 1887 年发现的光电效应现象给出一个简单的公式

$$\frac{m_0v^2}{2}=\hbar\omega-W, \tag{1.4.10}$$

该公式左端表明在光照下飞出的电子动能, 而右端为电子吸引光子的能量 $\hbar\omega$ 与电子在金属中的束缚能 W 之差.

公式 (1.4.10) 得到实验的支持. Einstein 的非凡思想 (1.4.9) 被转化成一个可检验的数学公式 (1.4.10), 这反过来能够证明这个物理观念的正确性. 由 (1.4.9) 给出的光子理论在 1923 年被 Compton X 光散射实验完全证实.

3. 关于原子结构的 Bohr 量子化理论

在 1911 年, Rutherford 进行了 α 射线穿越金箔片的著名实验. 该实验证实了原子结构存在一个半径 $r = 10^{-13}$cm 的质量较大并带正电荷的中心. 于是 Rutherford 提出了原子的行星模型, 即原子类似于小质量行星围绕太阳做圆周运动一样, 一个原子是由若干电子围绕一个占几乎全部原子质量带正电的核以封闭轨道进行运动. Coulomb 力是将它们束缚在一起的力量.

然而, 原子的行星模型存在着致命弱点. 当时已发现, 一个做变速运动的电子会辐射出电磁波, 称为韧致辐射. 按照行星模型, 一个做周期轨道运动的电子会不断地发射光子因而失去能量, 直到落入原子核为止. 这显然与实际情况不符.

为了解决这个困难, Bohr 于 1913 年在原子行星模型基础上补充了三条电子轨道的量子化条件如下:

(1) 每个原子的电子轨道能量是守恒并且分立的, 在其上虽然电子做加速运动但是它们不发生辐射.

(2) 这些分立轨道满足下面量子化条件:

$$\int_l p_i \mathrm{d}x_i = 2\pi n\hbar, \tag{1.4.11}$$

式中 l 为闭轨道曲线, $p = (p_1, p_2, p_3)$ 为电子动量.

(3) 当电子从一个能量为 E_n 的轨道跃迁到另一个能量为 E_m 的轨道上, $E_m < E_n$, 原子将发射一个能量为 $\hbar\omega$ 的光子, 其辐射频率 ω 满足如下关系:

$$\omega = \frac{E_n - E_m}{\hbar}. \tag{1.4.12}$$

Bohr 的第一个原子分立能级的假设在 1913 年由 Franck 与 Hertz 的实验所证实. 而由 (1.4.11) 和 (1.4.12) 建立的氢原子理论, 获得的结果与观测到的 Balmer 公式完全吻合. 但这个理论关于多电子原子不再有效, 也不能算出原子跃迁辐射强度. 而这些必须用到后来发展的量子力学理论才可解决.

4. de Broglie 物质波理论

根据 Einstein 关于光的波粒二重性, 法国物理学家 de Broglie 猜测不仅光有波粒二重性, 一般物质粒子也有波粒二重性. 一个质量为 m, 运动速度为 $\vec{v}$ 的粒子, 它的能量 E 和动量 p 为

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{1.4.13}$$

对照 (1.4.9), de Broglie 认为上述粒子的物质波, 其频率 ω 和波矢量 k 应该为

$$\omega = \frac{E}{\hbar}, \quad \vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar}, \tag{1.4.14}$$

式中 E 和 $\vec{p}$ 如 (1.4.13). 从 (1.4.14) 第二个公式可得到运动粒子的波长 λ, 称为 de Broglie 波长, 由下式给出

$$\lambda\!\!\!^{-} = \frac{1}{k} = \frac{\hbar}{p}, \tag{1.4.15}$$

其中 $\lambda\!\!\!^{-} = \lambda/2\pi, k = |\vec{k}|, p = |\vec{p}|$.

de Broglie 物质波理论在 1927 年被 Davisson-Germer 的电子衍射实验所验证. 现在应用物质波理论就可以解释 Bohr 的原子轨道量子化条件 (1.4.11): 只有那些可以容纳整数个 de Broglie 波长的圆形轨道才是可能的电子轨道, 即

$$\frac{2\pi r}{\lambda} = n.$$

1.4.2　量子力学规则与原理

从 Planck 量子假设开始, 历经 24 年到了 de Broglie 波粒二重性理论的出现, 量子物理的大门才被完全打开. 简单的公式 (1.4.14) 直接导致 Schrödinger 方程、Klein-Gordon 方程、Dirac 方程等量子物理基础性定律的诞生. 与此同时, G. E. Uhlenbeck 和 S. A. Goudsmit 在 1924 年提出电子自旋理论, 同年 W. Pauli 发现了不相容原理, Born 于 1926 年给出粒子波函数的统计诠释, W. Heisenberg 在 1927 年发现测不准原理. 到了 1930 年, 经过 30 年努力量子物理的基础全部奠定, 一门新的物理学科建立起来. 下面介绍这些基本知识.

1. Schrödinger 方程

当 Schrödinger 知道了 de Broglie 工作后, 立刻意识到它是正确的, 并且认为描述一个自由粒子波动性的物理量应该是与光子的平面波相同, 即是如下的波函数:

$$\psi = Ae^{-\mathrm{i}(\omega t - \vec{k}\cdot x)} = Ae^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(Et - \vec{p}\cdot x)}. \tag{1.4.16}$$

那时的物理学家们大都具有这种观念: 定律 = 微分方程. 因此在此思想指导下, Schrödinger 认为 (1.4.16) 是控制粒子波动方程的解. 从方程解的已知形式倒推出方程的表达式对于线性方程来讲不是一件困难的事情. 关于 (1.4.16) 求导得

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = E\psi, \quad -\mathrm{i}\hbar\nabla\psi = \vec{p}\ \psi. \tag{1.4.17}$$

因为粒子的波动性质被它的初值条件

$$\psi(0) = \psi_0 \tag{1.4.18}$$

所决定, 这是因果律基本要求. 数学上, 像 (1.4.18) 这样的初值问题决定了方程关于时间导数只能是一阶的. 而在经典力学中, (1.4.17) 中的能量 E 与动量 $\vec{p}$ 的关系为

$$E = \frac{1}{2m}\vec{p}^{\,2} + V, \quad V \text{ 为势能}. \tag{1.4.19}$$

于是根据经典力学定律 (1.4.19), Schrödinger 由 (1.4.17) 关系式导出粒子的波动方程应满足如下条件:

$$0=\left(E-\frac{1}{2m}\overrightarrow{p^2}-V\right)\psi=\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2-V\right)\psi.$$

这便获得量子力学著名的 Schrödinger 方程:

$$-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi-V(x)\psi. \tag{1.4.20}$$

显然 (1.4.20) 不是 Lorentz 协变的 (见 (1.2.50) 给出的 Lorentz 微分算子). 因此方程 (1.4.20) 是非相对论的. 事实上它只适合于低速粒子的行为.

2. 波函数与算符的量子力学解释

一个运动粒子具有波粒二重性. 它的波动性质导致 (1.4.20) 方程的发现. 按照惯性思维的习惯, 它的粒子性也应该对应一个运动方程. 换句话说, 就如宏观情况一样, 每个粒子应该有位置 x 及速度 $\dot{x}$ 它们满足一个类似于 Newton 定律那样的运动方程

$$F(x,\dot{x},\ddot{x})=0. \tag{1.4.21}$$

以便使得 Schrödinger 方程的波函数 ψ 描述粒子的波动性, 而 (1.4.21) 方程的解 $x(t)$ 描述它的粒子性.

然而事实证明对于微观粒子, 类似于 (1.4.21) 的粒子性方程不存在! 于是人们便相信下面结论:

$$\begin{aligned}&\text{Schrödinger 方程是控制微观粒子的运动方程,}\\&\text{它的波函数 } \psi \text{ 包含了粒子所有运动状态信息.}\end{aligned} \tag{1.4.22}$$

伴随这个结论的一个直接问题是, 怎样从 ψ 中提取它的基本运动信息. 关于这一点 Born 关于 ψ 给出了量子力学的统计解释. 在随后的发展中, 这种解释已被完善成如下形式.

(1) ψ 模的平方 $|\psi(x,t)|^2$ 代表粒子在 t 时刻出现在 x 点的概率密度. 从而 ψ 必须满足归一化性质:

$$\int_{R^3}|\psi(x,t)|^2\mathrm{d}x=1.$$

(2) 每一个可观测的物理量由一个线性对称算子 L (也称为 Hermite 算符) 来表示, L 的特征值 λ_k 及特征向量 ψ_k

$$L\psi_k=\lambda_k\psi_k,$$

它们的物理意义为 ψ_k 为具有 λ_k 物理量数值的状态函数, 而 λ_k 是相应于 L 物理量的值.

(3) ψ 按 L 的特征向量展开

$$\psi = \sum \alpha_k \psi_k, \quad \text{或} \quad \psi = \int \alpha(\lambda)\psi(\lambda)\mathrm{d}\lambda,$$

式中系数平方 α_k^2 或 $\alpha^2(\lambda)$ 表示处在 ψ_k 或 $\psi(\lambda)$ 状态的概率.

(4) 以下算子的物理意义分别给出如下:

$$\begin{aligned}
&\hat{x} \text{ 代表位置算子}, \quad \hat{x}\psi = x\psi,\\
&p = -\mathrm{i}\hbar\nabla \text{ 代表动量算子}, \quad p\psi = -\mathrm{i}\hbar\nabla\psi,\\
&E = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t} \text{ 代表能量算子}, \quad E\psi = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{1.4.23}$$

以上是最基本的, 还有许多其他物理量算子, 这里不再介绍.

根据 (1)~(4) 的统计解释, 下面积分记为

$$\langle\psi|L|\psi\rangle = \int \psi^* L\psi \mathrm{d}x, \tag{1.4.24}$$

代表 ψ 关于 L 物理量的平均值.

虽然量子力学没有严格的如 (1.4.21) 那样的关于粒子的 Newton 方程, 但是有了式 (1.4.24) 平均值概念, 便可以用平均值满足的运动方程来近似描述粒子的运动状态. 这就是 Ehrenfest 定理的内容, 介绍如下. 令

$$\langle x\rangle = \langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle = \int x|\psi|^2\mathrm{d}x,$$

$$\langle F(x)\rangle = \langle\psi|F|\psi\rangle = \int \psi^* F(x)\psi\mathrm{d}x,$$

其中 F 为作用力算子. 那么 Ehrenfest 定理说由 ψ 描述的粒子, 它的位置平均值 $\langle x\rangle$ 满足如下 Newton 方程:

$$m\frac{\mathrm{d}^2\langle x\rangle}{\mathrm{d}t^2} = \langle F(x)\rangle. \tag{1.4.25}$$

该方程的意义是, 在一些情况下可能解不出粒子的波函数 ψ, 但是可以得到如下近似条件:

$$\langle F(x)\rangle \simeq F(\langle x\rangle),$$

于是由 (1.4.25) 可得到该粒子 $\langle x\rangle$ 的近似方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2\langle x\rangle}{\mathrm{d}t^2} = F(\langle x\rangle),$$

从而解出粒子的近似轨道 $\langle x\rangle$.

3. Heisenberg 测不准原理

上述量子力学条款 (1)~(4) 也经常作为量子力学公理出现. 但无论怎样, 它们实质上是一种规则. 运用这些规则可以推导出量子物理的一个普适性原理, 称为测不准原理.

测不准原理 1.17 在量子系统中, 粒子的位置 x 与动量 p, 时间 t 与能量 E 不可能同时有确定值, 它们的不确定值 Δx 与 $\Delta p, \Delta t$ 与 ΔE 满足如下关系:

$$\Delta x \Delta p \geqslant \frac{1}{2}\hbar, \quad \Delta t \Delta E \geqslant \frac{1}{2}\hbar. \tag{1.4.26}$$

关系式 (1.4.26) 具有很重要的意义, 下面给出一些解说.

(a) 若一个粒子 A 是由 N 个更小的粒子 A_i $(1 \leqslant i \leqslant N)$ 构成

$$A = A_1 + \cdots + A_N,$$

并且 A 的半径为 r, 则 A 中的每个粒子 A_i 的动量至少为

$$p \geqslant \hbar r^{-1}.$$

因此粒子越小, 它内部的复合粒子动能越大, 因而需要的束缚能也越大.

(b) 大多数微观粒子是不稳定的, 也就是说它们的寿命 τ 很短, 很快就衰变成其他粒子. 因此每个量子系统能量必定有一个分布, 称为宽度 Γ. 由测不准原理 τ 与 Γ 的关系为

$$\tau\Gamma \sim \hbar, \tag{1.4.27}$$

在实验物理中, 关系式 (1.4.27) 非常重要. 因为能谱宽度 Γ 可以被测到, 因而 (1.4.27) 常被用来估计粒子的寿命.

(c) 关系式 (1.4.26) 也意味着在微小的空间和时间段内动量和能量并不守恒. 它们的守恒只是时空平均意义下的结果.

4. 粒子自旋与 Pauli 不相容原理

自旋是微观粒子的一个重要量子数, 它的发现归功于 Uhlenbeck 和 Goudsmit. 粒子被发现可根据自旋分为两类, 一类自旋为 $\frac{1}{2}$ 分数的叫作 Fermi 子, 另一类自旋为整数的叫作 Bose 子, 即

$$\begin{aligned} &\text{Fermi 子为自旋 } S = \frac{n}{2}(n = 1, 3, 5, \cdots) \text{ 的粒子,} \\ &\text{Bose 子为自旋 } s = n \ (n = 0, 1, 2, \cdots) \text{ 的粒子.} \end{aligned}$$

它们表现出来的行为差异很大, 主要体现在三个方面: (A) Pauli 不相容原理; (B) 粒子统计规律; (C) 构成物质的角色分工. 下面分别介绍它们.

(A) Pauli 不相容原理. 该原理说, 在一个量子系统中不可能有两个或两个以上的 Fermi 子处在完全相同的量子态上. 这里所谓相同的量子态是指两个粒子的所有量子数如自旋、轨道量子数、磁量子数等都相同. 夸克的色就是为了服从 Pauli 不相容原理而引入的一种量子数.

Pauli 不相容原理只对 Fermi 子成立, 而关于 Bose 子是无效的, 这就是为什么凝聚态物理的系统都是由 Bose 子构成的原因.

(B) 粒子统计规律. 所谓统计规律就是意味着所涉及的对象是由许多粒子构成的物理系统. 此时, 由 Fermi 子构成的多粒子系统与 Bose 子构成的多粒子系统表现出不同的统计行为, 前者服从 Fermi-Dirac 统计, 而后者服从 Bose-Einstein 统计. 这两种统计在两个方面区分开来. 其一是, F-D 统计涉及的多粒子系统波函数 ψ 关于任两个粒子位置交换是反对称的, 而 B-E 统计的波函数是对称的, 即

$$\begin{aligned} &\text{F-D 统计} \ \Leftrightarrow \ \psi(x_i, x_j) = -\psi(x_j, x_i), \\ &\text{B-E 统计} \ \Leftrightarrow \ \psi(x_i, x_j) = \psi(x_j, x_i). \end{aligned} \tag{1.4.28}$$

其次是两种统计法获得的分布不同, 即

$$\begin{aligned} &\text{F-D 分布}: \ f(\varepsilon_j) = \frac{1}{e^{(\varepsilon_j - \mu)/kT} + 1}, \\ &\text{B-E 分布}: \ f(\varepsilon_j) = \frac{1}{e^{(\varepsilon_j - \mu)/kT} - 1}, \end{aligned} \tag{1.4.29}$$

其中 $f(\varepsilon_j)$ 代表能量为 ε_j 的量子态 j 上平均粒子数, T 是温度, k 是 Boltzmann 常数, μ 是化学势.

从 (1.4.28) 和 (1.4.29) 就非常清楚地看到 Fermi 子与 Bose 子在集体行为 (即统计性质) 表现出巨大的差别. 这个差别与 Pauli 不相容原理有直接的关系. 著名的 Bose-Einstein 凝聚就是从 (1.4.29) 中的 B-E 分布公式推导出的结论.

(C) 构成物质的角色分工. 在物质构成上, Fermi 子起到材料作用, 而 Bose 子起到将它们束缚在一起的粘连作用. 即构成核子与原子的粒子是夸克与电子, 它们都是 Fermi 子, 而在 Fermi 子之间传递作用力的是 Bose 子.

1.4.3　Bose 子场的 Klein-Gordon 方程

Schrödinger 方程 (1.4.20) 是描述一个低速粒子的运动方程, 其波函数 ψ 包含了粒子的所有运动信息. 然而 Yukawa 理论告诉我们, 粒子也具有场的特性. 相互作用就是靠 Bose 子作媒介来传递作用力的. 因此, 按照现代量子场论的观点, 每一种粒子都携带一个场 ψ, 它包含了相互作用的信息. 此时 ψ 称为粒子场, 它的物理

含义通常包含宏观和微观两个方面:

$$\begin{cases} \psi \text{ 在宏观上代表场能量;} \\ \psi \text{ 在微观上 (即 } \psi \text{ 的量子化) 代表 Bose 子若 } \psi \text{ 满足某个} \\ \quad \text{Klein-Gordon 方程, 代表 Fermi 子若 } \psi \text{ 满足 Dirac 方程.} \end{cases} \tag{1.4.30}$$

特别地, 当 ψ 是一个 Bose 子场时, 它所代表的粒子特征为

$$\begin{aligned} &\psi \text{ 是一个标量场} \ \Rightarrow\ \text{标量 Bose 子 (自旋 } s=0), \\ &\psi \text{ 是一个四维向量场} \ \Rightarrow\ \text{矢量 Bose 子 (自旋 } s=1), \\ &\psi \text{ 是一个二阶张量场} \ \Rightarrow\ \text{自旋 } s=2 \text{ 的 Bose 子}, \\ &\psi \text{ 是实值场} \ \Rightarrow\ \text{粒子是中性的}, \\ &\psi \text{ 是复值场} \ \Rightarrow\ \text{粒子是带电的}. \end{aligned} \tag{1.4.31}$$

实质上, 四种相互作用的场方程全部都是 Klein-Gordon 型波方程. 电、弱、强三种相互作用场属于矢量 Bose 子场, 而引力场 $g_{\mu\nu}$ 是自旋 $s=2$ 的引力子场.

下面我们讨论标量 Bose 子场的 Klein-Gordon 方程及其对应的作用量形式. 我们必须清楚, 作为运动方程可以分为 Newton 和 Lorentz (相对论) 两种形式, 因为有低速与高速之分. 但是作为场方程它必须是 Lorentz 协变的.

令 ϕ 是一个标量场. 由 (1.2.51) 关于 ϕ 的 Lorentz 算子取如下形式:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\phi + f(\phi) = 0. \tag{1.4.32}$$

这就是一般形式的 Klein-Gordon 方程, 其对应作用量密度为

$$\mathcal{L}_{\mathrm{KG}} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi + F(\phi), \quad f(\phi) = F'(\phi).$$

对于质量为 m 的标量 Bose 子, 在没有其他场存在的情况下场方程 (1.4.31) 的 $f(\phi)$ 可定出. 这是依据量子规则 (1.4.23)

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t} = \text{能量 } E, \quad -\mathrm{i}\hbar\nabla = \text{动量 } p,$$

以及 (1.2.68) 的相对论质动能三角公式

$$E^2 = c^2p^2 + m^2c^4,$$

然后获得自由的标量 Bose 子场方程如下:

$$0 = (c^2p^2 + m^2c^4 - E^2)\phi = \left(\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\hbar^2\nabla^2 + m^2c^4\right)\phi,$$

它的标准形式写作

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\phi+\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\phi=0, \tag{1.4.33}$$

即 $f(\phi)=(mc/\hbar)^2\phi$. 这是最原始的 Klein-Gordon 方程形式.

当初建立 Klein-Gordon 方程 (1.4.33) 完全是为了获得一个满足 Lorentz 协变的粒子运动方程. 然而由于该方程关于时间导数是二阶的, 它要求配以两个初始条件

$$\psi(0)=\psi_0,\quad \psi'(0)=\psi_1, \tag{1.4.34}$$

才能完全确定方程的解. 然而真实情况只需一个初始状态 ψ_0 即可, 这是因为 ψ_0 已包含了能量 E, 不需要再给定一个初始能量 ψ_1. 因此可以得出结论:

$$\text{Klein-Gordon 方程还适于描述粒子的运动.} \tag{1.4.35}$$

最早 Schrödinger 在建立粒子运动方程时, 首先想到的就是 (1.4.33), 然而他得出结论 (1.4.35) 后放弃了该方程, 转而寻求到如今的 Schrödinger 方程形式. 于是, 在 Klein-Gordon 方程被提出后相当一段时间内人们并不明确它究意是做什么用的, 只是知道它是 Lorentz 协变的. 在 1934 年 Pauli 将它解释为场方程, 随后 Yukawa 用它来解释核子的强作用势, 这些加深了对 Klein-Gordon 方程的理解. 到了 20 世纪 60 年代, 关于基本粒子及其电、弱、强相互作用的标准模型出世, 人们才对这个方程理解到 (1.4.30) 和 (1.4.31) 这个深度.

事实上, 现在将下面形式的量子场方程

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\psi+f(\psi,\cdots,D^2\psi)=g(x), \tag{1.4.36}$$

统称为 Klein-Gordon 型方程, 这里 ψ 是一个张量场. 并且明确地理解到 (1.4.36) 描述了 Bose 子的相互作用场. 特别地, f 的如下形式决定了 ψ 粒子是否有质量及其数值:

$$\begin{cases} f=k^2\psi+h(D\psi,D^2\psi)+o(\psi)\Rightarrow \psi \text{ 有质量 } m=\dfrac{k\hbar}{c}, \\ f=h(D\psi,D^2\psi)+o(\psi)\Rightarrow \psi \text{ 没有质量.} \end{cases} \tag{1.4.37}$$

只有对 Klein-Gordon 方程按 (1.4.30), (1.4.31) 及 (1.4.37) 的方式去理解, 才能够容易理解后面将介绍的标准模型及统一场理论. 然而这些说法有些抽象, 下面用电磁场 A_μ 作例子来解说 (1.4.30)-(1.4.31) 和 (1.4.37) 的具体含义.

首先 A_μ 满足 (1.3.45), 它具有 (1.4.36) 形式, 因而 A_μ 是一个 Klein-Gordon 实向量场. 在 (1.3.45) 中 f 项为

$$f=-\partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) \text{ 不含 } k^2A^\mu \text{ 项.}$$

因而从方程方面和真实物理两方面得到相同结论: A_μ 代表不带电的、没有质量、自旋 $s=1$ 矢量 Bose 子 (光子) 场. 在宏观方面,

$$H = \text{rot } A, \quad E = -\partial^\mu A_\mu$$

代表电磁作用力, 以及

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2) = \frac{1}{8\pi}(|\text{rot } A|^2 + |\partial^\mu A_\mu|^2)$$

代表电磁场能量密度. 这就是 (1.4.30)-(1.4.31) 的具体含义.

1.4.4 Fermi 子场的 Dirac 方程

Schrödinger 方程 (1.4.20) 是非相对论的运动方程, 它只适用于低速粒子. 而 Klein-Gordon 方程 (1.4.36) 是关于 Bose 子场的方程, 它不适合用来描述粒子的运动. 现在的问题是寻求

(1) 关于 Fermi 子的场方程;

(2) 描述 Bose 子和 Fermi 子的相对论性运动方程.

严格地讲, 问题 (1) 和 (2) 可能涉及三个不同方程. 但实际上只是一个方程, 即 Dirac 方程就同时具备了上述 (1) 和 (2) 的全部功能. 这里要强调的是, 在描述粒子的运动方面, Dirac 方程不仅仅是能够反映自旋 $s=\dfrac{1}{2}$ 的Fermi 子, 它同样可以反映所有微观粒子的运动状态. 只是 $s \neq \dfrac{1}{2}$ 粒子的运动受到一定限制.

为了能够得到相对论性的粒子运动方程, P. M. Dirac 在 1928 年提出一个成功的解决方案. 出发点必须是动质能三角公式. 为了克服这个公式中能量平方项 E^2(它产生 $\partial^2/\partial t^2$ 项), Dirac 将能量算子线性化, 即令

$$E = c\alpha_k p_k + \alpha_0 mc^2, \quad p_k \text{ 为动量算子.} \tag{1.4.38}$$

此时, 因为 E 已被视为线性算子, 系数 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 也必须是线性算子, 因而是矩阵. 此外要求 (1.4.38) 满足

$$E^2 = c^2p^2 + m^2c^4,$$

即矩阵 α_0, α_k 必须满足

$$c^2(\alpha_k p_k + \alpha_0 mc)^2 = c^2p^2 + m^2c^4,$$

它等价于如下关系式:

$$\begin{cases} \alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \alpha_0^2 = I, \\ \alpha_k\alpha_j + \alpha_j\alpha_k = 0, \quad \alpha_k\alpha_0 + \alpha_0\alpha_k = 0. \end{cases} \tag{1.4.39}$$

简单的拼凑便可验证满足 (1.4.39) 关系的最低阶矩阵便是 4×4 矩阵, 并且在如下相似变换下它们是唯一的,

$$\alpha_\mu \to A^{-1}\alpha_\mu A, \quad \mu = 0,1,2,3.$$

所有这些矩阵获得的场方程是等价的, 它们中最简单的形式为

$$\alpha_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.4.40}$$

其中 I 是 2 阶单位矩阵, σ_k $(1\leqslant k\leqslant 3)$ 是 Pauli 矩阵,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.4.41}$$

因为 (1.4.38) 是四阶矩阵算子, 描述粒子状态的波函数 ψ 必须有四个分量:

$$\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^{\mathrm{T}}. \tag{1.4.42}$$

应用量子规则 (1.4.23), 算子 (1.4.38) 作用在 (1.4.42) 的 ψ 上便得到相对论性的 Dirac 方程如下:

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\mathrm{i}\hbar c\left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial x^1} + \alpha_2\frac{\partial}{\partial x^2} + \alpha_3\frac{\partial}{\partial x^3}\right)\psi + mc^2\alpha_0\psi. \tag{1.4.43}$$

采用 (1.4.43) 的表达形式在反映 Lorentz 协变性方面很不方便. 通常采用 Dirac 表示, 即取如下矩阵:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \gamma^0\alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad 1\leqslant k\leqslant 3, \tag{1.4.44}$$

它们称为 Dirac 矩阵. 这样 (1.4.43) 可写成下面形式:

$$\left(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0, \tag{1.4.45}$$

其中 $\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$ 如 (1.4.44), ∂_μ 为

$$\partial_\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right).$$

对应于 (1.4.45) 的 Lagrange 作用量密度为

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\left(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi, \tag{1.4.46}$$

式中 $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$.

1.4.5 Dirac 旋量场与物质流

初一看似乎 Dirac 方程 (1.4.45) 是 Lorentz 协变的, 因为 $\gamma^\mu\partial_\mu$ 是一个四维缩并形式. 然而 γ^μ 不是四维向量算子, 即在 Lorentz 变换下 γ^μ 保持形式不变. 因此, 若使得 (1.4.45) 是协变的, 波函数 (1.4.42) 也应按某种规则进行变换.

令坐标系作 Lorentz 变换

$$\tilde{x}^\mu = Ax^\nu, \quad A \in LG^4 \quad (\text{Lorentz 群}). \tag{1.4.47}$$

假设波函数 $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^{\mathrm{T}}$ 按如下规则变换:

$$\tilde{\psi} = U_A\psi, \quad U_A \in SU(4) \quad (\text{即保范变换}). \tag{1.4.48}$$

Dirac 方程的协变性要求在 $\tilde{x}$ 坐标系中有

$$\left(\mathrm{i}\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^\mu} - \frac{mc}{\hbar}\right)\tilde{\psi} = 0. \tag{1.4.49}$$

将 (1.4.47) 和 (1.4.48) 代入到 (1.4.49) 便得到

$$\left(\mathrm{i}U_A^{-1}\gamma^\mu\theta_\mu^\nu U_A\partial_\nu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0, \tag{1.4.50}$$

其中 θ_μ^ν 是 A 的矩阵元. 由协变性, (1.4.50) 与 (1.4.45) 形式一样, 于是有

$$U_A^{-1}\gamma^\mu a_\mu^\nu U_A = \gamma^\nu.$$

它可等价地写成

$$U_A^{-1}\gamma^\mu U_A = a_\nu^\mu\gamma^\nu, \quad A = (a_\nu^\mu) \text{ 如 (1.4.47)}. \tag{1.4.51}$$

关系式 (1.4.51) 就是保证 Dirac 方程 Lorentz 协变的条件, 从这个条件便可求出 (1.4.48) 的变换矩阵 U_A.

物理上, 将满足 (1.4.51) 的矩阵 $U_A \in SU(4)$ 称作是 Lorentz 旋量表示矩阵. 而按 (1.4.48) 规则变换的波函数 ψ 称为 Dirac 旋量场. 根据 (1.2.3) 的精神, 旋量场是一种特殊张量场.

由下面的对应关系

$$A \mapsto U_A, \quad (A, U_A) \text{ 满足 (1.4.51)},$$

可以根据 A 的表达式求出 U_A 的表达式. 具体求法完全是凑出来的. 下面给出旋量表示矩阵 U_A 的表达式.

(a) 当 A 是如 (1.2.42) 矩阵时, A 可等价地写成下面形式:

$$A=\begin{pmatrix}\cosh\theta & -\sinh\theta & 0 & 0\\ -\sinh\theta & \cosh\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

其中 $\cosh\theta=1/\sqrt{1-\beta^2},\sinh\theta=\beta/\sqrt{1-\beta^2}$. 此时对应于 A 的旋量表示 U_A 是如下表达形式:

$$U_A=\cosh\frac{\theta}{2}I+\mathrm{i}\sinh\frac{\theta}{2}\gamma^0\gamma^1. \tag{1.4.52}$$

(b) 当 A 如 (1.2.43) 是空间转动矩阵时, $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & R\end{pmatrix}$,

$$R=\begin{pmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\phi & \sin\phi & 0\\ -\sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

这里 (ψ,θ,ϕ) 为 Euler 转动角. 此时 U_A 表达为

$$\begin{aligned}U_A&=\begin{pmatrix}Q_1 & 0\\ 0 & Q_2\end{pmatrix},\\ Q_1&=\begin{pmatrix}e^{\mathrm{i}(\psi+\phi)/2}\cos\dfrac{\theta}{2} & \mathrm{i}e^{\mathrm{i}(\psi-\theta)/2}\sin\dfrac{\theta}{2}\\ \mathrm{i}e^{-\mathrm{i}(\psi-\phi)/2}\sin\dfrac{\theta}{2} & e^{-\mathrm{i}(\psi+\theta)/2}\cos\dfrac{\theta}{2}\end{pmatrix},\\ Q_2&=\begin{pmatrix}e^{-\mathrm{i}(\psi+\theta)/2}\cos\dfrac{\theta}{2} & -\mathrm{i}e^{\mathrm{i}(\psi-\theta)/2}\sin\dfrac{\theta}{2}\\ -\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}(\psi-\theta)/2}\sin\dfrac{\theta}{2} & e^{\mathrm{i}(\psi+\theta)/2}\cos\dfrac{\theta}{2}\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{1.4.53}$$

下面介绍物质流场的概念.

在量子物理中物质流密度向量场是一个非常重要的物理量, 通常简称为流, 我们所熟悉的电流只是其中的一种. 在 1.3.5 小节中关于 Fermi 弱作用跃迁理论中已简单地介绍了物质流的概念以及流的作用. 这一小节专门对此概念进行论述.

物质流分为经典流与相对论流两种, 它们的区别就是经典流是一个三维向量场而相对论流是四维向量场.

在经典电动力学中电流 $\vec{J}=(J^1,J^2,J^3)$ 是作为可观测的基本物理量出现, 它满足如下电荷守恒定律:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\vec{J}=0, \tag{1.4.54}$$

它也被称为连续性方程. 然而在经典量子力学中, 电流密度 $\vec{J}$ 不再是基本的, 它是由描述电子的波函数 ψ 表达出来. 我们回到 Schrödinger 方程 (1.4.20), 将它写成如下形式:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m_0}\nabla^2\psi + \frac{\mathrm{i}V}{\hbar}\psi = 0, \tag{1.4.55}$$

它的复共轭方程可写成

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial t} + \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m_0}\nabla^2\psi^* - \frac{\mathrm{i}V}{\hbar}\psi^* = 0. \tag{1.4.56}$$

将 (1.4.55) 乘以 ψ^*, (1.4.56) 乘以 ψ, 然后将两个方程相加得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi^*\psi + \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m_0}\mathrm{div}\ (\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi) = 0. \tag{1.4.57}$$

由波函数 ψ 的统计解释,

$$\rho = e\psi^*\psi \text{ 代表电荷密度.} \tag{1.4.58}$$

然后再将 (1.4.57) 与 (1.4.54) 进行对照, 由 (1.4.58) 可推知经典量子力学的电流密度可表达为

$$\vec{J} = \frac{\mathrm{i}e\hbar}{2m_0}(\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi). \tag{1.4.59}$$

这种量子力学的电流密度表达式 (1.4.59) 对于 Ginzberg-Landau 的超导理论起到非常重要的作用.

以上是经典部分. 关于相对论流密度向量场

$$J^\mu = (J^0, J^1, J^2, J^3),$$

它的表达式需要 Dirac 方程 (1.4.45), 将它写成

$$\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - k\psi = 0, \tag{1.4.60}$$

它的共轭形式为

$$-\mathrm{i}\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu - k\bar{\psi} = 0, \quad \bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0. \tag{1.4.61}$$

用 $\bar{\psi}$ 左乘 (1.4.60), ψ 右乘 (1.4.61), 再相减这两个方程便得

$$\partial^\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0. \tag{1.4.62}$$

方程 (1.4.62) 是四维连续性方程, 它意味着相对论流密度向量场 J^μ 可表达成如下形式:

$$J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \tag{1.4.63}$$

下面证明 J^μ 确实是四维向量场. 在 (1.4.47) 变换下,

$$\begin{aligned}\tilde{J}^\mu &= \bar{\tilde{\psi}}\gamma^\mu\tilde{\psi} = \bar{\psi}(U_A^{-1}\gamma^\mu U_A)\psi \quad (\text{由 (1.4.48)})\\ &= a^\mu_\nu\bar{\psi}\gamma^\nu\psi \quad (\text{由 (1.4.51)})\\ &= AJ^\nu, \quad A=(a^\mu_\nu)\in LG^4.\end{aligned}$$

这便证得 J^μ 是一个四维向量场.

在 (1.3.62) 中我们给出 5 种相对论物质流场的类型. 下面给出解释, 说明为什么它们是相对论的. 实质上只需说明 $\gamma_5=\gamma^5$ 的性质即可. γ_5 的定义为

$$\gamma_5=\gamma^5=\mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3=-\frac{\mathrm{i}}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta, \tag{1.4.64}$$

式中

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}=\begin{cases}1, & (\mu\nu\alpha\beta)\text{ 是偶排列},\\ -1, & (\mu\nu\alpha\beta)\text{ 是奇排列}.\end{cases}$$

因为 γ^μ 在 Lorentz 变换下不变, 并且 $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ 是四阶不变 Lorentz 张量, 因此 γ_5 也是 Lorentz 不变. Dirac 方程的反射不变性要求

$$x\to -x \;\Rightarrow\; \gamma^0\to\gamma^0,\quad \gamma^k\to-\gamma^k\quad (k=1,2,3),$$

因此由 (1.4.64) 有

$$x\to -x \;\Rightarrow\; \gamma_5\to-\gamma_5.$$

这说明 γ_5 是赝标量. 于是得到下面五种形式的 Lorentz 张量场, 它们全部都具有某种物质流的意义:

$$\begin{aligned}&\text{标量流: } \bar{\psi}\psi \quad (1\text{ 个分量}),\\ &\text{赝标量流: } \bar{\psi}\gamma_5\psi \quad (1\text{ 个分量}),\\ &\text{矢量流: } \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (4\text{ 个分量}),\\ &\text{赝矢量流: } \bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi \quad (4\text{ 个分量}),\\ &\text{张量流: } \bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi \quad (6\text{ 个独立分量}),\end{aligned} \tag{1.4.65}$$

其中 $\sigma^{\mu\nu}=\dfrac{\mathrm{i}}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]=\dfrac{\mathrm{i}}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu-\gamma^\nu\gamma^\mu)$.

物质流概念的重要性在于两个方面:

(1) 现代实验已证明 Fermi 关于粒子的散射与衰变表现为流–流相互作用. 因此它们是计算散射与衰变概率, 即跃迁矩阵元的基本数学工具.

(2) 在相互作用势的公式推导过程中, 物质流 J_μ 起到不可缺少的作用. 正是由于它的存在, 才使得我们搞清 (1.3.6) 作用荷的物理意义: 每一种相互作用通过自己的作用荷来传递作用力的.

1.4.6 角动量规则

前面曾强调, Dirac 方程在描述粒子运动方面对所有类型的粒子都是有效的, 否则关于 $s \neq \frac{1}{2}$ 的高速粒子便没运动方程来描述它们. 这一简单结论可以导致 $s \neq \frac{1}{2}$ 粒子直线运动的规则. 下面介绍这一重要量子性质.

在量子物理学规则中, 一个粒子系统的运动方程可以表达成下面形式. 即若 H 是一个量子系统的 Hamilton 能量 (即系统总能量), 那么, 在 (1.4.23) 规则下 H 变为一个能量算子. 由 (1.4.17), 运动方程可写成

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi. \tag{1.4.66}$$

从 (1.4.66) 可导出, 若一个算子 L 与 H 是可交换的:

$$LH - HL = 0.$$

那么该系统关于 L 代表的物理量是守恒的.

根据 (1.4.66), Dirac 方程的 Hamilton 算子一般写成如下形式:

$$H = -\mathrm{i}\hbar c(\vec{\alpha}\cdot p) + mc^2\alpha_0 + V(x), \tag{1.4.67}$$

其中 $V(x)$ 是系统的势能, $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 与 α_0 如 (1.4.40).

Dirac 方程一个突出优点是它能够描述原子中电子的自旋特征, 而 Schrödinger 方程不具备这一点. 其简要解说如下.

一个量子系统的轨道角动量算子为

$$L = r \times p. \tag{1.4.68}$$

由于 (1.4.68) 与 Dirac 的 Hamilton (1.4.67) 一般情况下不可交换, 而真实系统总角动量守恒, 因此总角动量必须再加上自旋 S 这一项

$$J = L + S, \tag{1.4.69}$$

由 Pauli 的自旋理论, 描述自旋为 k 的算子为

$$S = k\hbar\tau, \tag{1.4.70}$$

式中 $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$,

$$\tau_k = \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}, \quad \sigma_k \text{ 是 Pauli 矩阵 (1.4.41).}$$

此时, (1.4.69)-(1.4.70) 的自旋算子与 (1.4.67) 的 Hamilton 算子 H 有如下关系:

$$J = L + \frac{1}{2}\hbar\tau \text{ 与 } H \text{ 可交换.} \tag{1.4.71}$$

$$J = k\hbar\tau \text{ 与 } H \text{ 对任意 } k \text{ 可交换, 当 } LH = HL \text{ 时.} \tag{1.4.72}$$

当考虑围绕原子核运动的电子时, Hamilton 算子 H 取如下形式:

$$H_a = -\mathrm{i}\hbar c(\vec{\alpha}\cdot p) + m_0c^2\alpha_0 - \frac{ze^2}{r}, \quad z \text{ 为原子序数.} \tag{1.4.73}$$

此时 $LH \neq HL$. 因此描述原子的轨道电子总角动量必须采用 (1.4.69) 的算子. 这意味着 (1.4.73) 包含了电子自旋 $s = \dfrac{1}{2}$ 的信息. 也就是说, 关于原子轨道电子方程 (1.4.66) 取如下形式:

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H_a\psi, \quad H_a \text{ 如 (1.4.73),} \tag{1.4.74}$$

则用 (1.4.69) 的角动量平方算子 J^2 作用在 (1.4.74) 的解 ψ 上

$$J^2\psi = \sum_k j_k\psi_k$$

可以获得电子角动量的全部信息, 包括电子的 $\dfrac{1}{2}$ 自旋.

正是由于这一点, 许多人误解 Dirac 方程, 认为它只能描述电子或自旋为 $\dfrac{1}{2}$ 的粒子. 实质上这些人只注意到了 (1.4.71), 而忽略了 (1.4.72). 特别地是忽略了如下事实:

$$\begin{aligned}&\text{如果 Dirac 方程不能描述自旋 } s \neq \frac{1}{2} \text{ 的粒子运动,}\\ &\text{则不再存在描述 } s \neq \frac{1}{2} \text{ 粒子的相对论运动方程.}\end{aligned} \tag{1.4.75}$$

由于任何粒子都必须遵守某个相对论运动方程, (1.4.75) 的结论意味着如下结论成立:

$$\text{Dirac 方程对所有类型粒子的运动都有效.} \tag{1.4.76}$$

由 (1.4.71) 和 (1.4.72), 结论 (1.4.76) 意味着只有 $s = \dfrac{1}{2}$ 的粒子才能够做 $LH \neq HL$ 类型的高速运动. 因此 $s \neq \dfrac{1}{2}$ 的粒子只能够做 $LH = HL$ 的高速运动, 即 $L = 0$ 的直线运动.

我们将这一性质总结成如下量子物理规则.

角动量规则 1.18　一个 Hamilton 为 H 的运动系统, 若轨道角动量算子 (1.4.68) 与 H 不可交换, 即 $LH \neq HL$, 则该运动系统的粒子自旋一定是 $s \neq \dfrac{1}{2}$. 换句话说, $s \neq \dfrac{1}{2}$ 的粒子只能做 $L = 0$ 的直线运动, 除非有非零力矩存在.

相对论量子规则 1.18 能够很好地解释为什么半径 $r \leqslant 10^{-13}$cm 的粒子构成总是由 $s = \dfrac{1}{2}$ 的 Fermi 子担当. 其原因就是在 $r \leqslant 10^{-13}$cm 内部, 由测不准原理 1.17, 组元粒子做高速旋转运动. 这对于 $s \neq \dfrac{1}{2}$ 的粒子来讲是禁止的.

1.5 总结与评注

这一章的主要目的就是为后面要介绍的粒子物理, 规范场理论, 关于电、弱、强相互作用的标准模型, 以及由作者和汪守宏建立的统一场理论提供一个必要的理论物理知识基础. 这里采用的方式是强调用全局眼光来审视问题, 用基本原理把握理论框架. 并且特别注重物理观念是如何转化成正确数学形式的解说.

1.1 节: 这一部分是作者的基本观点以及对物理学的理解. 这里突出强调物理观念必须转化成正确数学形式并非是要想用数学取代物理. 恰好相反, 正是绝对注重科学实证才要求好的理论要能够转化成可检验的数据和公式. 不能为了追求数学形式的美而建立物理理论, 但是正确的理论一定是简单并且优美的.

Lagrange 动力学原理 (基本原理 1.2) 的运动学部分与 Hamilton 动力学原理 (基本原理 1.3) 在 (马天, 2011, 2012) 中被提出和介绍过. 而关于相互作用动力学部分, 即 PID, 是作者与汪守宏在 (Ma, Wang, 2012a) 中首次提出. 关于热力学系统平衡相变动力学方程 (1.1.13)-(1.1.14) 是由作者与汪守宏提出, 见 (Ma, Wang, 2013a). 关于对称性与守恒律对应关系表 1.1 取自 (章乃森, 1994).

1.2 节: 物理的对称性表现在数学上就是在某种坐标变换下 Lagrange 作用量保持形式不变. 虽然由 (1.2.3), (1.2.5), (1.2.9) 提供了三种不同的数学变换模式, 但本质上它们都可视为某种坐标变换. 因此, 所有物理量在一般意义下都是张量, 它们扮演着表达对称性的角色.

在物理学中, 所有张量的类型名称为: $SO(3)$ 变换群的 Descartes 张量, LG^4 变换群的 Lorentz 张量, $GL(4)$ 变换群的广义张量, $SO(3)$ 变换群的 BE 旋量, LG^4 变换群的 Weyl 旋量和 Dirac 旋量, $U(1)$ 和 $SU(n)$ 变换群的规范场, $GL(N,C)$ 变换群的群表示张量.

关于狭义相对论更详细的介绍可参见 (马天, 2012), (王正行, 1995), (彭桓武和徐锡申, 1998), (特雷纳, 怀斯, 1987).

1.3 节: 下面观点是本书建立的统一场理论的直接推论.

(1) 每一种相互作用都有它的目的性: 引力产生星体与宇宙, 电磁产生原子与分子, 强相互作用产生强子与原子核, 弱相互作用产生轻子与夸克.

(2) 物质组成的每一个层次都对应一种相互作用. 强相互作用将夸克禁闭在强子内部. 弱相互作用将更小的基本粒子, 称为弱粒子, 禁闭在轻子和夸克内部. 比弱

粒子更小的粒子分类已变得没有意义, 因为它们所对应的相互作用与这些粒子一起被囚禁在更小的空间尺度内无法被观测到.

(3) 每一种相互作用都存在自己的作用荷:

引力荷 m (质量)、电荷 $e^{\pm}$、强荷 g_s、弱荷 g_w.

它们通过自己的荷进行相互作用. 不同的荷之间不产生作用. 引力荷 m 是连续值, 其他三种荷都是分立的. 只有电荷有正负, 而 m, g_s, g_w 都是正的. 质量 m 不守恒, 但是电荷、弱荷、强荷都守恒.

(4) 轻子不含强荷, 因此它们不参与强相互作用.

(5) 所有相互作用都有自己的作用势与作用力公式. 引力由 Newton 公式 (1.3.2) 给出, 电荷力由 Coulomb 公式 (1.3.1) 给出, 强相互作用由统一场方程的解 (1.3.53)-(1.3.55) 提供, 弱相互作用由统一场方程的解 (1.3.73)-(1.3.74) 提供. 特别地, 由统一场方程获得的修正引力公式为

$$F = mMG\left[-\frac{1}{r^2} - \frac{k_0}{r} + k_1 r\right].$$

该公式能够很好地解释暗物质与暗能量现象. 详细可参见 (马天, 2012) 和 (Ma, Wang, 2014).

关于广义相对论的参考书另外还有 (俞允强, 1987), (韦伯, 1977) 和 (朗道, 粟弗席兹, 1959). 相关 Riemann 几何的参考书. 这里推荐 (陈维恒, 李兴校, 2002). 关于经典电动力学参考书有 (朗道, 粟弗席兹,1959) 和 (彭桓武, 徐锡申, 1998). 关于强相互作用与弱相互作用可以参阅 (Kaku, 1993), (Griffiths, 2008), (黄克孙, 1982) 以及 (章乃森, 1994).

1.4 节: 这一节介绍的内容都是属于量子物理的基本知识, 除 1.4.6 小节的内容. 微观粒子的相对论运动规则 1.18 并非意味着 $s \neq \frac{1}{2}$ 粒子绝对不能做弯曲的高速运动, 而是说明不能作角动量守恒 (即总力矩为零) 的弯曲运动. 而这一点对 $s = \frac{1}{2}$ 的 Fermi 子来讲是无效的. 这里需要指出的是, 相对论运动规则 1.18 其实就是等价于结论 (1.4.76), 它对于后面用统一场推导出原子与分子之间强相互作用公式 (1.3.55) 是非常重要的. 同时, 对于后面关于轻子/夸克结构模型的建立也是关键的.

关于量子力学方面参考书有 (索科洛夫等,1983), (王正行,1995), (Bohm, 1979), (Greiner, Müller, 1992). 关于 Dirac 旋量的表示 (1.4.52) 和 (1.4.53) 取自 (特雷纳, 怀斯, 1987). 关于五种物质流 (1.4.65) 的 Lorentz 协变性论证取自 (Kaku, 1993). 关于总角动量算子 $J = L + \frac{1}{2}\hbar\tau$ 与 (1.4.67) 的 H 是可交换的讨论细节可参见 (索科洛夫等, 1983).

第 2 章　基本粒子物理

2.1　微观粒子的主要特征

2.1.1　粒子的类型

我们的世界是由各种类型的粒子构成, 它们在物质的不同层次中起着不同的作用. 在 1.4.2 小节中已根据自旋的整数与分数将粒子分为 Bose 子与 Fermi 子两大类:

$$\begin{cases} \text{Bose 子} = \text{自旋为整数的粒子}, \\ \text{Fermi 子} = \text{自旋为分数 } \dfrac{k}{2} \ (k = \text{奇数}) \text{ 的粒子}. \end{cases}$$

粒子之所以能够按自旋分成两类是因为它们服从两种不同的统计规律, 见 (1.4.28) 和 (1.4.29).

然而按照它们的作用与性质, 粒子又可以分为如下五大类:

轻子、夸克、媒介子、强子、Higgs 子.

下面对这五类粒子进行概况性的介绍.

1. 轻子

轻子的主要特性就是不参与强相互作用, 但是它们都参与弱相互作用. 轻子共有六种味, 分为三对:

$$(e, \nu_e), \quad (\mu, \nu_\mu), \quad (\tau, \nu_\tau).$$

它们被称为三代轻子. 其中电子、μ 子、τ 子带一个电荷, 而三种中微子 ν_e, ν_μ, ν_τ 不带电荷. 加上反粒子, 共有 12 个轻子:

$$\begin{aligned} &\text{正粒子: } (e^-, \nu_e),\ (\mu^-, \nu_\mu),\ (\tau^-, \nu_\tau), \\ &\text{反粒子: } (e^+, \bar{\nu}_e),\ (\mu^+, \bar{\nu}_\mu),\ (\tau^+, \bar{\nu}_\tau). \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

所有轻子都是自旋 $s = \dfrac{1}{2}$ 的 Fermi 子. 中微子目前没有发现有质量.

2. 夸克

夸克是构成强子的基本组元. 与轻子相似, 夸克也被化分为三代, 每代有一对, 共有六种粒子. 它们是下夸克 d、上夸克 u、奇异夸克 s、粲夸克 c、底夸克 b、顶夸

克 t. 三代正反夸克为

$$\begin{aligned}&\text{正夸克: } (d,u),\ (s,c),\ (b,t),\\&\text{反夸克: } (\bar{d},\bar{u}),\ (\bar{s},\bar{c}),\ (\bar{b},\bar{t}).\end{aligned}\tag{2.1.2}$$

六种夸克都带有质量, 它们既参与强相互作用又参与弱相互作用, 并且 d, s, b 夸克带 $-\dfrac{1}{3}$ 电荷, u,c,t 带 $+\dfrac{2}{3}$ 电荷, 即

$$\begin{aligned}&d,s,b \text{ 夸克电荷 } = -\frac{1}{3}e\ \ (e>0 \text{ 为正电子电荷}),\\&u,c,t \text{ 夸克电荷 } = \frac{2}{3}e.\end{aligned}\tag{2.1.3}$$

所有夸克都是自旋 $s=\dfrac{1}{2}$ 的 Fermi 子:

$$\text{夸克自旋 } s=\frac{1}{2}.\tag{2.1.4}$$

没有自由夸克被发现. 它们三个一组被束缚在一起形成重子, 一对正反夸克束缚在一起形成介子. 这两类粒子统称为强子. 它们被囚禁在强子中永远不能被打开, 称为夸克禁闭.

3. 媒介子

根据 Yukawa 相互作用理论, 每一种相互作用都是由相应的一种粒子来传递作用力的, 这种粒子称作是媒介子. 共有四种:

$$\begin{aligned}&\text{引力场的媒介子: 引力子 } g,\\&\text{电磁场的媒介子: 光子 } \gamma,\\&\text{强作用场的媒介子: 胶子 } g^k\ (1\leqslant k\leqslant 8),\\&\text{弱作用场的媒介子: 中间 Bose 子 } W^{\pm},Z.\end{aligned}\tag{2.1.5}$$

所有媒介子都是 Bose 子, 它们的自旋特性如下:

$$\begin{aligned}&g \text{ 是 } s=2 \text{ 的张量 Bose 子},\\&\gamma \text{ 是 } s=1 \text{ 的矢量 Bose 子},\\&g^k\ (1\leqslant k\leqslant 8) \text{ 是 } s=1 \text{ 的有 8 个分量的矢量 Bose 子},\\&W^{\pm},Z \text{ 是 } s=1 \text{ 的三分量矢量 Bose 子},\end{aligned}\tag{2.1.6}$$

其中 g,γ,g^k,z 不带电荷, W^+ 与 W^- 各带一个正与负电荷. 引力子 g, 光子 γ 和胶子 g^k $(1\leqslant k\leqslant 8)$ 都是无质量的, 而 $W^{\pm},Z$ 是有质量的. 描述 (2.1.6) 中各种 Bose

子场的函数为

$$\begin{aligned}&\text{引力子场函数 } = g_{\mu\nu} \text{ 为引力场度量张量},\\&\text{光子场函数 } = A_\mu \text{ 为四维电磁势},\\&\text{胶子场函数 } = SU(3) \text{ 规范场 } S_\mu^k \ (1 \leqslant k \leqslant 8),\\&\text{中间 Bose 子场 } = SU(2) \text{ 规范场 } W_\mu^a \ (1 \leqslant a \leqslant 3).\end{aligned} \tag{2.1.7}$$

上述媒介子性质 (2.1.5)-(2.1.7) 是现代相互作用理论比较成熟的观点.

4. 强子

强子分为重子和介子两种, 它们既参与强相互作用又参与弱相互作用. 重子由三个夸克构成是 Fermi 子, 介子由正反两个夸克构成是 Bose 子. 强子是包含粒子种类最多的一种粒子, 包括共振态在内, 被发现的强子多达几百个. 但是主要的是如下若干种.

主要重子包括自旋 $s=\dfrac{1}{2}$ 重子与 $s=\dfrac{3}{2}$ 重子,

$$\begin{aligned}&s=\frac{1}{2}:\ p,n,\Lambda,\Sigma^{\pm},\Sigma^0,\Xi^0,\Xi^-,A_c^+,\\&s=\frac{3}{2}:\ \Delta^0,\Delta^{\pm},\Delta^{++},\Sigma^{*\pm},\Sigma^{*0},\Xi^{*0},\Xi^{*-},\Omega^-,\end{aligned} \tag{2.1.8}$$

其中 p 为质子, n 为中子.

主要介子包括自旋 $s=0$ 的赝标量介子和 $s=1$ 的矢量介子,

$$\begin{aligned}&s=0:\ \pi^{\pm},\pi^0,\eta,K^{\pm},K^0,D^{\pm},D^0,B^{\pm},B^0,\eta',\\&s=1:\ \rho^{\pm},\rho^0,K^{*\pm},K^{*0},D^{*\pm},D^{*0},\omega,\psi,\gamma.\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

5. Higgs 子

这种粒子是标准模型预言的一种带质量的标量 Bose 子. 它的作用被认为是在弱相互作用过程中使得中间 Bose 子 $W^{\pm},Z$ 获得质量的一种场. 在 2012 年度, 欧洲核子研究中心 (CERN) 宣称初步断定发现了标量 Higgs 粒子 H^0. 它的参数为

$$\begin{aligned}&\text{质量 } m_H \simeq 126\text{GeV/c}^2,\\&\text{寿命 } \tau = 10^{-21}\text{s},\\&\text{电荷 } e=0,\\&\text{自旋 } s=0.\end{aligned} \tag{2.1.10}$$

2.1.2 粒子与反粒子

Dirac 方程 (1.4.43) 不仅解决了量子物理方程的 Lorentz 协变问题, 并且预言了反粒子的存在性. 让我们来解说这一点. 首先 Dirac 方程来源于下面动质能三角

公式：

$$E^2 = c^2p^2 + m^2c^4.$$

能量以 E^2 形式出现. 因此有

$$E = \pm\sqrt{c^2p^2 + m^2c^4},$$

即能量出现负值. 这种负能现象一定会反映在 Dirac 方程上. 事实上, 一个自由运动的粒子, 不失一般性可选 x^3 轴为动量方向, 即在 (1.4.43) 中假设

$$p_1 = p_2 = 0, \quad p_3 \neq 0.$$

此时 Dirac 方程变为

$$\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \mathrm{i}\hbar c\alpha_3\frac{\partial}{\partial x^3} - mc^2\alpha_0\right)\psi = 0. \tag{2.1.11}$$

该方程解为

$$\psi = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} e^{-\mathrm{i}c\varepsilon Kt + \mathrm{i}kx^3}, \tag{2.1.12}$$

其中 $K = \sqrt{k^2 + k_0^2}, k_0 = mc/\hbar$. 方程 (2.1.11) 的解 (2.1.12) 可写成四个独立解 ψ^j $(1 \leqslant j \leqslant 4)$ 如下：

$$\psi^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{1+k_0/k} \\ 0 \\ \sqrt{1-k_0/k} \\ 0 \end{pmatrix} e^{\mathrm{i}\Delta}, \quad \psi^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{1+k_0/k} \\ 0 \\ -\sqrt{1-k_0/k} \end{pmatrix} e^{\mathrm{i}\Delta}, \tag{2.1.13}$$

$$\psi^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{1-k_0/k} \\ 0 \\ -\sqrt{1+k_0/k} \\ 0 \end{pmatrix} e^{\mathrm{i}\Delta}, \quad \psi^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{1-k_0/k} \\ 0 \\ \sqrt{1+k_0/k} \end{pmatrix} e^{\mathrm{i}\Delta}, \tag{2.1.14}$$

其中 $\Delta = -c\varepsilon Kt + kx^3$. 用 (2.1.11) 的能量算子

$$E = -\mathrm{i}\hbar c\alpha_3\frac{\partial}{\partial x^3} + mc^2\alpha_0$$

作用在 (2.1.13) 和 (2.1.14) 上得

$$\begin{aligned} &E\psi^{1,2} = \lambda\psi^{1,2}, \\ &E\psi^{3,4} = -\lambda\psi^{3,4}, \quad \lambda = c\hbar K. \end{aligned} \tag{2.1.15}$$

即 $\psi^{1,2}$ 对应于正能量 λ 的状态, $\psi^{3,4}$ 对应于负能量 $-\lambda$ 的状态. 再使用 $s=\dfrac{1}{2}$ 的自旋算子 $\dfrac{\hbar}{2}\tau_3$ (τ_3 如 (1.4.70)) 作用在 ψ^j 上得

$$\begin{aligned}&\frac{\hbar}{2}\tau_3\psi^1=\frac{\hbar}{2}\psi^1,\quad \frac{\hbar}{2}\tau_3\psi^2=-\frac{\hbar}{2}\psi^2,\\&\frac{\hbar}{2}\tau_3\psi^3=\frac{\hbar}{2}\psi^3,\quad \frac{\hbar}{2}\tau_3\psi^4=-\frac{\hbar}{2}\psi^4.\end{aligned}\tag{2.1.16}$$

这样, 从 (2.1.15) 和 (2.1.16) 可以看到 ψ^1 和 ψ^2 对应着正能量的自旋 $s=\dfrac{1}{2}$ 和 $s=-\dfrac{1}{2}$ 的粒子, ψ^3 和 ψ^4 对应着负能量的自旋 $s=\dfrac{1}{2}$ 和 $s=-\dfrac{1}{2}$ 的粒子.

负能态的出现在最初被认为是 Dirac 方程最严重的缺陷. 这是因为若 ψ^1 和 ψ^2 描述正能态自旋向上 $\uparrow$ 和自旋向下 $\downarrow$ 的电子, ψ^3 和 ψ^4 描述负能态 $\uparrow$ 和 $\downarrow$ 电子, 则在电磁相互作用下电子会辐射光子而损失能量. 因而处在正能态的电子会跃迁到负能态上. 由于负能谱是无穷的, 这意味着所有电子都将掉进这无底洞中. 这显然不符合实际情况.

为了克服这一困难, Dirac 假设在真空态中所有负能量态都被电子占满. 这样便避免了出现负能态的困境. 注意到动量 $p=0$ 时电子能量为

$$E=\pm mc^2,\quad m \text{ 为电子质量.}$$

因此如果给一个负能电子提供一个大于间隙为 $2mc^2$ 的能量. 那么该电子可越过此能隙跃迁到正能态上, 这便产生一个可观测到的电子出现. 此时在负能海中留下一个空穴. 这个空穴被解释成反电子, 如图 2.1 所示.

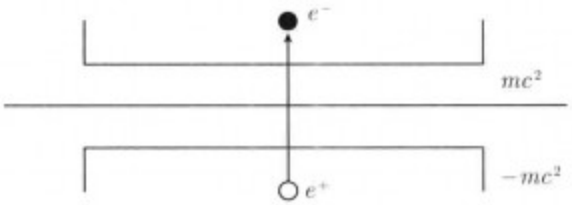


图 2.1 e^+e^- 电子偶的产生

Dirac 的空穴理论不仅预言了反粒子的存在, 并且关于电子偶的产生与湮灭现象给出一种解释. 这种现象在今天已成为人们所熟知的事实.

$$2\gamma\to e^-+e^+\quad (\text{电子偶产生}),$$
$$e^-+e^+\to 2\gamma\quad (\text{电子偶湮灭}),$$

这里 γ 为光子. 正电子在 1932 年由 C. Anderson 发现.

正电子发现后, 一系列的反粒子相继被发现. 现已知道, 所有的粒子都有反粒子存在. 正反粒子可以成对出现, 也可以成对湮灭. 从 Dirac 方程也可推出正反粒子的如下性质:

$$\begin{cases} \text{正反粒子质量 } m, \text{ 自旋 } s, \text{ 寿命 } \tau \text{ 相等}, \\ \text{正反粒子电荷 } e, \text{ 重子数 } B, \text{ 轻子数 } L \text{ 大小相等, 符号相反}. \end{cases} \tag{2.1.17}$$

2.1.3　微观运动的主要形式 —— 衰变、散射与辐射

衰变、散射与辐射是微观粒子的主要运动形式. 在宏观方面主要是通过物体的轨道运动了解引力相互作用与电磁相互作用以及宏观物理学规律. 但是在量子尺度则是通过粒子的衰变、散射、电磁辐射等运动形式来理解微观物理规律. 因此要真正掌握量子物理的实质就必须对粒子的衰变、散射与辐射有所了解.

1. 粒子的衰变

所谓粒子衰变是指一个粒子自发地分解成另外几个粒子的过程. 例如, 最著名的就是中子自发地分解成一个质子, 一个电子和一个反电中微子的 β 衰变, 其反应式为

$$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e.$$

在现在的粒子表中已有几百种不同的粒子. 但是在有质量的粒子中除了电子和质子外, 所有粒子都要发生衰变. 静止质量为零的粒子, 如光子、中微子、胶子等都不发生衰变. 所有的衰变都遵守如下规则:

(a) 衰变是由强、弱、电这三种相互作用造成的, 但根据主次分为强作用衰变, 弱作用衰变, 电磁作用衰变三种类型;

(b) 衰变总是由高质量朝低质量方向发生;

(c) 强和弱两种类型衰变都遵循它们各自的守恒律 (见表 1.1 给出的各种守恒律), 即这些守恒的量子数在衰变式的左右两边按某种规则 (如加法或乘法规则) 保持不变.

以上三点是我们在本书后面将开展的更深层次衰变机理讨论的出发点, 也是建立电子/夸克结构模型的依据.

这里需要对上面规则 (b) 作一解释, 因为在 (1.3.57) 中也将

$$p \to n + e^+ + \nu_e \tag{2.1.18}$$

称作 β 衰变. 由于质子 p 的质量小于中子 n 的质量, (2.1.18) 反应式违背了衰变规则 (b). 其实 (2.1.18) 并非是真正意义的衰变, 它是在一种能量激发条件下发生的, 即外场给质子施加了一定能量. 而真正意义的衰变必须是没有条件的自发过程. 因此将 (2.1.18) 称作 β 衰变只是一种方便说法而已.

2. 碰撞与散射

如果说衰变是粒子的一种自发行为, 那么散射则是在某种条件下粒子之间发生的一种行为. 如粒子之间的碰撞, 能量激发等情况下便会发生散射. (2.1.18) 反应式就是属于散射, 严格地反应式应该写成

$$p+\gamma \to n+e^{+}+\nu_e.$$

更一般的散射反应式写成如下形式:

$$A_1+\cdots+A_n \to B_1+\cdots+B_N, \tag{2.1.19}$$

其中 $A_1,\cdots,A_n$ 称为初态粒子, $B_1,\cdots,B_N$ 为终态粒子.

散射分为弹性与非弹性两种类型. 在 (2.1.19) 的反应过程中, 电磁、强、弱三种相互作用在不同层次上发挥作用. 因此散射过程是实验物理用来发现新粒子、新现象、检验理论的重要实验手段. 粒子加速器的作用就是人工产生高能粒子去碰撞目标粒子以达到实验目的. 散射反应式一律遵守各种量子数的守恒关系.

在量子物理中有一些散射过程, 它们在历史上曾起到重要作用. 将其中一些列出如下.

$$\begin{array}{ll}
\text{Compton 散射 (光子电子弹性散射):} & \gamma+e^{-} \to \gamma+e^{-},\\
\text{电子对湮灭:} & e^{-}+e^{+} \to \gamma+\gamma,\\
\text{电子对创生:} & \gamma+\gamma \to e^{-}+e^{+},\\
\text{Moller 散射 (电子–电子弹性散射):} & e^{-}+e^{-} \to e^{-}+e^{-},\\
\text{Bhabha 散射 (电子–正电子弹性散射):} & e^{-}+e^{+} \to e^{-}+e^{+},\\
\text{韧致辐射:} & e^{-}+p \to e^{-}+p+\gamma.
\end{array} \tag{2.1.20}$$

可以这样讲, 目前的量子场论主体内容都是围绕着如何计算衰变与散射跃迁概率展开的. 它涉及的主要物理概念有: 散射截面 σ、微分截面 $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$($\Omega$ 为立体角)、S- 矩阵 (即散射矩阵)、场量子化、Feynman 图及其规则、重整化等.

3. 辐射

辐射是指电子发射光子的过程, 即

$$e^{-} \to e^{-}+\gamma.$$

在经典电动力学中, 一个加速运动的电子将发射出光子 γ. 在单位时间内所辐射的能量由以下公式决定:

$$W=\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\overline{r}''^2, \quad \overline{r}'' \text{ 为平均加速度.} \tag{2.1.21}$$

在量子物理中, 辐射的原因有第二种方式, 即高能级电子到低能级的跃迁将放出光子. 由 Bohr 理论, 原子是由原子核以及围绕核运动的电子构成, 其电子轨道能级是分立的:

$$E_0 < E_1 < \cdots < E_n < \cdots . \tag{2.1.22}$$

每个在 E_k 能级轨道上运动的电子能量始终保持 E_k 值不变, 并且电子只能在 (2.1.22) 所列出的这些能级轨道上运动. 但是它们可以从一个能级 E_n 轨道上跃迁到另一个能级 E_m 的轨道上. 这种跃迁伴随有光子的吸收和放射过程发生, 即

$$\begin{cases} \text{若 } E_n < E_m, \quad e \text{ 从 } E_n \text{ 跃迁到 } E_m \text{ 时将吸收光子,} \\ \text{若 } E_n > E_m, \quad e \text{ 从 } E_n \text{ 跃迁到 } E_m \text{ 时将放出光子.} \end{cases} \tag{2.1.23}$$

每一种原子都具有相应的光谱就是由 (2.1.23) 的电子能级跃迁造成的.

量子电动力学就是为解决电子从高能级到低能级自发跃迁的辐射机理问题以及如何计算跃迁概率而被创立的. 它对该现象的解释为由电子与真空的光子场 (即零点涨落) 相互作用引起的跃迁. 而计算跃迁概率的方法是将电磁场 A_μ 进行量子化, 即将 A_μ 进行 Fourier 展开后将其系数视为算子.

最后总结性地讲, 微观粒子的运动形式主要是衰变、散射及辐射. 通过对它们的深入研究产生了量子物理学以及电弱强相互作用的规范理论. 特别地, 围绕着关于衰变、散射、辐射的机理与跃迁概率计算问题, 诞生了量子场理论. 量子场理论的核心就是将场函数进行算子化 (即量子化), 只有这样才能在一些规则下算出跃迁概率. 或有人问计算出跃迁概率的价值是什么. 该问题的解答是, 跃迁概率是可实验检验的, 量子理论的正确与否多数是通过这种方式来确定的.

2.1.4　表征粒子身份的量子数

宏观物体很容易辨认. 然而微观粒子的区分就不是那么显而易见. 通常仪器辨别粒子身份时是通过测量它们的各种参数来区别它们. 由于粒子种类很多, 遵循的规则也很多. 每一种规则都是由标识粒子的某种数值 (称为量子数) 体现出来. 因此了解和知道这些参数及量子数是进入粒子物理学科的必备知识. 下面我们一一给出介绍.

1. 质量 m

质量是刻画惯性的量, 即它反映了运动物体速度变化的难易程度. 在宏观世界里物体的质量是连续分布的, 但是在量子世界中, 微观粒子质量是分立的. 同一种粒子的质量严格相等, 但不同粒子的质量谱相互之间存在一个最小的间隙. 在宏观物理中, 质量具有可加性, 即 A 物体是 B 与 C 物体的组合, 则有

$$A = B + C \ \Rightarrow \ m_A = m_B + m_C.$$

但是在微观粒子中, 此关系不成立. 此时 B 与 C 的结合能将以质量的身份出现在 A 粒子上.

质量是粒子最重要的身份标记. 但是由于粒子的最小质量间隙很小, 有些粒子要精确测得质量很难. 因此要区分不同粒子, 仅仅靠质量难以做到.

2. 电荷 Q

电荷是微观粒子的一个重要量子数. 在四种相互作用源 (引力荷 (质量), 电荷, 强荷, 弱荷) 中, 电荷是唯一具有正负值并且是守恒的作用荷. 电荷值是分立的, 它只能以电子电荷整数倍出现:

$$Q = \pm ne \quad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

$e > 0$ 是正电子电荷. 虽然在夸克中出现分数值电荷, 但由于夸克禁闭, 在自然界出现的粒子全部具有整数值电荷.

电荷是一个在所有反应式中都是守恒的量子数, 是一个加法守恒的量, 即对任一反应式

$$A_1 + \cdots + A_n \to B_1 + \cdots + B_N, \tag{2.1.24}$$

若 Q_k^A 和 Q_j^B 分别是 A_k 和 B_j 粒子的电荷, 则恒有

$$\sum_{k=1}^{n} Q_k^A = \sum_{j=1}^{N} Q_j^B.$$

3. 寿命 τ

由于粒子的衰变性质, 于是便有了寿命这个参数. 在 2.13 小节中已提到, 除了光子 γ, 胶子 g, 中微子 ν, 电子 e, 质子 p 以外, 其他所有粒子都要衰变. 因此规定

$$\gamma, g, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, e, p \text{ 的寿命 } \tau = \infty.$$

由于每一种粒子的衰变期分布在一个范围内, 再加上测不准原理 (1.4.27), 因此粒子的寿命取平均值. 通常粒子寿命 τ 很小, 它们的上限为

$$10^{-5}\mathrm{s} > \tau. \tag{2.1.25}$$

但是中子较为特别, 它的寿命为

$$\text{中子 } n \text{ 的寿命 } \tau = 885.7\mathrm{s}.$$

4. 自旋 s

在 1.4.2 小节中已介绍过粒子自旋的概念, 这里再次提到它是作为一个重要的量子数来介绍的. 作为量子数, 自旋 s 不是一个守恒量. 它在宏观测量上表现出角动量特征, 因此用自旋来形容这一内在性质. 其实它并不一定就是表明粒子真的是绕着运动方向 (通常称为 z 轴方向) 在进行自转. 但是我们还是形象地用图 2.2 来描述自旋 $s \neq 0$ 的自由粒子, 目的是为了容易理解.



图 2.2　(a) 粒子右旋 ($s > 0$); (b) 粒子左旋 ($s < 0$)

经常地, 人们将图 2.2(a) 的粒子用 $\uparrow$ 表示它的右旋, 用 $\downarrow$ 表示它的左旋. $s = \dfrac{1}{2}$ 粒子的波函数 $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^{\mathrm{T}}$ 也可分解为左手和右手波函数. 由 (2.1.16) 及 (2.1.13)-(2.1.14) 可以看到, 当采用 Dirac 矩阵表示时, 有

$$\begin{aligned} &\text{左手粒子波函数 } \psi_L = (0, \psi_2, 0, \psi_4)^{\mathrm{T}}, \\ &\text{右手粒子波函数 } \psi_R = (\psi_1, 0, \psi_3, 0)^{\mathrm{T}}. \end{aligned} \tag{2.1.26}$$

在量子力学中, 自旋算子 S 是一个三维向量算子, 定义为

$$\begin{aligned} &\vec{S} = s\hbar(\tau_1, \tau_2, \tau_3), && s \text{ 为自旋值}, \\ &\tau_k = \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}, && \sigma_k \ (1 \leqslant k \leqslant 3) \text{ 为 Pauli 矩阵 (1.4.41)}. \end{aligned} \tag{2.1.27}$$

而在 1.4.2 小节中关于算子的量子力学解释说到, 一个 Hermite 算子 L, 对应的物理量与状态分别由它的特征值 λ 与特征向量 ψ 给出,

$$L\psi = \lambda\psi.$$

在 1.4.6 小节中我们知道, (2.1.27) 的自旋算子 $\vec{S}$, 如果单独使用只能作用在自由粒子上. 此时 $\vec{S}$ 等价于第三分量算子 $S_3 = s\hbar\tau_3$, 具体可见 (2.1.11) 的讨论. 因而 S_3 的特征值 $\pm S$,

$$S_3\psi_R = s\hbar\psi_R, \quad S_3\psi_L = -s\hbar\psi_L,$$

代表了自由粒子如图 2.2(a) 和 (b) 所示的右旋和左旋的自旋值.

5. 宇称 P

宇称是粒子的一个重要量子数. 它的发现是根据 Noether 定理以及在如下空间反射变换下

$$x \to -x \quad (x \in R^3),$$

粒子状态方程的不变性而获得. 每一种粒子都有一个宇称值 π, 它只取 ± 1 两个值: $\pi = \pm 1$. 大多数粒子的宇称值是通过实验手段和人为规定来确定的. 该量子数是乘法量子数, 即对于 (2.1.24) 的反应式, 它的左、右两端宇称值分别为

$$\pi_{左} = (-1)^{l_1}\pi_{A_1}\cdots\pi_{A_n}, \quad \pi_{右} = (-1)^{l_2}\pi_{B_1}\cdots\pi_{B_n}, \tag{2.1.28}$$

其中 l_1, l_2 分别为 (2.1.24) 左和右两端粒子轨道量子数总和.

6. 轻子数 L

轻子数只是轻子所具有的一种量子数, 轻子以外的所有粒子都规定轻子数为零. 在 (2.1.1) 的三代轻子中, 每一代都有自己的轻子数, 因而有电子、μ 子、τ 子三种轻子数, 它们都只取 ± 1:

$$L_e = \pm 1, \quad L_\mu = \pm 1, \quad L_\tau = \pm 1.$$

轻子数是一个加法守恒量子数, 详细介绍见 2.2 节.

7. 重子数 B

在 2.1.1 小节中已介绍强子分为两类: 重子和介子. 之所以这样分类, 除了重子是 Fermi 子而介子是 Bose 子这一差别外, 最重要的原因还是重子具有一个加法守恒的量子数: 重子数. 其他所有粒子的重子数规定为零. 重子数也只取 ± 1 两个值, 即

$$B = \pm 1.$$

重子数的规定比较简单:

$$\text{所有重子 } B = 1, \quad \text{反重子 } B = -1. \tag{2.1.29}$$

8. 同位旋 (I, I_3)

同位旋最早是由 Heisenberg 在 1932 年关于核子提出的一种量子数, 它主要是用来反映质子与中子的强相互作用与电荷无关性质. 但后来在 20 世纪 50 年代粒子物理的发展中, 发现 π 介子、K 介子以及 Σ, Ξ 等重子都具有同位旋, 并且在强相互作用中同位旋是一个守恒的量子数.

每一种重子同位旋由两个分量 (I, I_3) 构成, I 称为同位旋, I_3 称为同位旋第三分量. 多粒子系统中, I 具有与角动量相同的矢量加法规则, I_3 是普通加法量子数. 关于它们的详细介绍见后面 2.3 节.

9. 奇异数 S

在 1947 年, C. D. Rochester 和 C. C. Batler 从宇宙线中首次发现中性奇异粒子 K^0. 随后又发现带电 $K^{\pm}$ 粒子, $\Lambda^0, \Sigma^0, \Sigma^{\pm}, \Xi^-, \Xi^0, \Omega^-$ 等奇异粒子. 它们之所以有这样的称呼是因为这些粒子都带有一种称为奇异数的量子数, 它们是在电磁及强相互作用中守恒的加法量子数. 奇异数 S 取整数

$$S = 0, 1, 2, 3.$$

奇异粒子的奇异数是由实验观测到的反应式来确定.

10. 超荷 Y

超荷是强子的另一种量子数, 它定义为

$$Y = S + B, \tag{2.1.30}$$

其中 S, B 分别为奇异数与重子数. 这也是一种加法量子数. 用 Y 代替 S 来描述强子的相互作用和强子结构经常更方便一些.

11. G 宇称

G 宇称是对应于如下 G 变换下的一种强相互作用的守恒量,

$$G\psi = \hat{c}e^{\mathrm{i}\pi I_2}\psi, \tag{2.1.31}$$

其中 $\hat{c}$ 为正、反粒子变换, 即将粒子的波函数变为反粒子波函数, $e^{\mathrm{i}\pi I_2}$ 是在同位旋空间中绕 I_2 轴旋转 180° 的变换. 这里只是介绍 G 宇称量子数概念, 要真正理解 (2.1.31) 变换的意思, 就必须更进一步参阅 (章乃森,1994).

2.1.5　相互作用中的守恒律

2.1.4 小节介绍了粒子的各种参数与量子数, 其中多数是在各种相互作用的衰变与散射过程中是守恒的. 在表 1.1 中我们已接触到对称性与守恒律之间的对应关系, 这一小节, 我们将列出所有已知的守恒律以及它们在各种相互作用中被遵守的情况.

下面的表 2.1 引自 (章乃森,1994).

表 2.1 守恒律被遵守的情况

守恒量		强作用	电磁作用	弱作用
能量、动量、角动量		是	是	是
电荷 Q		是	是	是
轻子数 L_e, L_μ, L_τ		是	是	是
重子数 B		是	是	是
奇异数 S		是	是	否
宇称 P		是	是	否
同位旋	I	是	否	否
	I_3	是	是	否
G 宇称 G		是	否	否
电荷共轭 C		是	是	否
时间反射 T		是	是	是 (但 K^0 衰变被破坏)
CP 联合		是	是	是 (但 K^0 衰变被破坏)
CPT 联合		是	是	是

在表 2.1 中, CP 是电荷共轭与宇称的复合变换, CPT 是 CP 与时间反射的复合变换. 早些时候, 尽管已经知道宇称 P 与电荷共轭 C 在弱作用中都是不守恒的, 但是物理学界一直认为 CP 联合变换在所有相互作用中都是守恒的. 但是在 1964 年, J. H. Christenson, J. Cronin 和 V. Fitch 发现中性 K 介子 K^0 在弱相互作用的衰变过程中破坏 CP 守恒性. CP 破坏使物理学界感到惊奇, 因为在 1954 年由 G. Lüders 和 W. Pauli 独立证明 CPT 是联合守恒的. 因此 CP 的不守恒性导致 T 变换也在弱作用中是不守恒的.

CPT 守恒定理在量子场论中是一个非常重要的结果. 根据 CPT 不变性可以推出如下结论: 粒子与反粒子具有相同的质量和寿命, 它们的磁矩大小相等而符号相反. 至今为止, CPT 的守恒性仍没有得到任何实验的反例.

2.1.6 粒子表

作为这一节的结束, 这里我们将轻子、夸克、媒介子、重子及介子的名称、组元、质量、电荷、寿命制成表格汇总如下. 这些参数值是取自 (Griffiths, 2008).

在下面表中, 质量单位是 $\mathrm{MeV/c^2}$, 电荷为质子电荷, 寿命为秒.

注 2.1 中微子质量在早期被认为是没有质量的. 但是现代技术的测量表明它们有质量, 但是非常小. 在表 2.2 中将中微子质量写成零是一种近似. 目前测得的质量上限为

$$m_{\nu_e},\ m_{\nu_\mu},\ m_{\nu_\tau} < 0.4\ \mathrm{eV/c^2}. \tag{2.1.32}$$

表 2.2　轻子 (自旋 $J=\frac{1}{2}$)

代	味	质量	电荷	寿命
第一代	电子 e	0.511	-1	∞
	e 中微子 ν_e	0	0	∞
第二代	μ 子	105.659	-1	2.197×10^{-6}
	μ 中微子 ν_μ	0	0	∞
第三代	τ 子	1776.99	-1	2.91×10^{-13}
	τ 中微子 ν_τ	0	0	∞

表 2.3　夸克 (自旋 $J=\frac{1}{2}$)

代	味	质量	电荷
第一代	下夸克 d	7	$-\frac{1}{3}$
	上夸克 u	3	$\frac{2}{3}$
第二代	奇异夸克 s	120	$-\frac{1}{3}$
	粲夸克 c	1200	$\frac{2}{3}$
第三代	底夸克 b	4300	$-\frac{1}{3}$
	顶夸克 t	174000	$\frac{2}{3}$

表 2.4　媒介子

作用力	媒介子	质量	电荷	寿命	自旋
电磁	光子 γ	0	0	∞	1
强作用	8 个胶子 g	0	0	∞	1
弱作用	$W^{\pm}$ (带电)	80420	±1	3.11×10^{-25}	1
	Z^0 (中性)	91190	0	2.67×10^{-25}	1
引力	引力子 G	0	0	∞	2

表 2.5　重子 (自旋 $J=\frac{1}{2}$)

重子	夸克组元	质量	电荷	寿命
p	uud	938.272	1	∞
n	udd	939.565	0	885.7
Λ	$s(du-ud)/\sqrt{2}$	1115.68	0	2.63×10^{-10}
Σ^+	uus	1189.37	1	8.02×10^{-11}

续表

重子	夸克组元	质量	电荷	寿命
Σ^0	$s(ud+du)/\sqrt{2}$	1192.64	0	7.4×10^{-20}
Σ^-	dds	1197.45	-1	1.48×10^{-10}
Ξ^0	uss	1314.8	0	2.9×10^{-10}
Ξ^-	dss	1321.3	-1	1.64×10^{-10}
Λ_c^+	udc	2286.5	1	2.0×10^{-13}

表 2.6 重子 (自旋 $J=\frac{3}{2}$)

重子	夸克组元	质量	电荷	寿命
Δ^{++}	uuu	1230	2	5.6×10^{-24}
Δ^+	uud	1231	1	5.6×10^{-24}
Δ^0	udd	1232	0	5.6×10^{-24}
Δ^-	ddd	1234	-1	5.6×10^{-24}
Σ^{*+}	uus	1383	1	1.8×10^{-23}
Σ^{*0}	uds	1384	0	1.8×10^{-23}
Σ^{*-}	dds	1387	-1	1.8×10^{-23}
Ξ^{*0}	uss	1532	0	6.9×10^{-23}
Ξ^{*-}	dss	1535	-1	6.9×10^{-23}
Ω^-	sss	1672	-1	8.2×10^{-11}

表 2.7 介子 (自旋 $J=0$)

介子	夸克组元	质量	电荷	寿命
π^0	$(u\bar{u}-d\bar{d})/\sqrt{2}$	135	0	8.4×10^{-17}
π^+	$u\bar{d}$	139.57	1	2.6×10^{-8}
π^-	$d\bar{u}$	139.57	-1	2.6×10^{-8}
K^+	$u\bar{s}$	493.68	1	1.24×10^{-8}
K^-	$\bar{u}s$	493.68	-1	1.24×10^{-8}
K^0	$d\bar{s}$	497.65	0	$K_s^0:9\times10^{-11}$
$\bar{K}^0$	$\bar{d}s$	497.65	0	$K_L^0:5.1\times10^{-8}$
η	$(u\bar{u}+d\bar{d}-2s\bar{s})/\sqrt{6}$	547.51	0	5.1×10^{-19}
η'	$(u\bar{u}+d\bar{d}+s\bar{s})/\sqrt{3}$	957.78	0	3.2×10^{-21}
D^0	$c\bar{u}$	1864.5	0	4.1×10^{-13}
$\bar{D}^0$	$\bar{c}u$	1864.5	0	4.1×10^{-13}
D^+	$c\bar{d}$	1869.3	1	1.04×10^{-12}
D^-	$\bar{c}d$	1869.3	-1	1.04×10^{-12}
D_s^+	$c\bar{s}$	1968.2	1	5×10^{-13}

续表

介子	夸克组元	质量	电荷	寿命
D_s^-	$\bar{c}s$	1968.2	-1	5×10^{-13}
B^+	$u\bar{b}$	5279.0	1	1.6×10^{-12}
B^-	$\bar{u}b$	5279.0	-1	1.6×10^{-12}
B^0	$d\bar{b}$	5279.4	0	1.5×10^{-12}
$\bar{B}^0$	$\bar{d}b$	5279.4	0	1.5×10^{-12}

表 2.8　介子 (自旋 $J=1$)

介子	夸克组元	质量	电荷	寿命
ρ^+	$u\bar{d}$	775.5	1	4×10^{-24}
ρ^0	$(u\bar{u}-d\bar{d})/\sqrt{2}$	775.5	0	4×10^{-24}
ρ^-	$\bar{u}d$	775.5	-1	4×10^{-24}
K^{*+}	$u\bar{s}$	894	1	1×10^{-23}
K^{*0}	$d\bar{s}$	894	0	1×10^{-23}
K^{*-}	$\bar{u}s$	894	-1	1×10^{-23}
$\bar{K}^{*0}$	$\bar{d}s$	894	0	1×10^{-23}
ω	$(u\bar{u}+d\bar{d})/\sqrt{2}$	782.6	0	8×10^{-23}
ψ	$c\bar{c}$	3097	0	7×10^{-21}
D^{*+}	$c\bar{d}$	2008	1	3×10^{-21}
D^{*0}	$c\bar{u}$	2008	0	3×10^{-21}
D^{*-}	$\bar{c}d$	2008	-1	3×10^{-21}
$\bar{D}^{*0}$	$\bar{c}u$	2008	0	3×10^{-21}
r	$b\bar{b}$	9460	0	1×10^{-20}

2.2　轻子的性质

2.2.1　轻子的衰变与轻子数守恒

在 2.1 节已介绍, 轻子是不参与强相互作用的粒子, 它们有三代共六种粒子. 在表 2.2 中给出它们基本参数. 这一小节我们将介绍轻子的衰变与轻子数守恒律, 它们是后面关于轻子结构理论的基础.

轻子比强子要简单得多. 首先三代中微子寿命是无穷大, 即

$$\tau_{\nu_e}=\infty,\quad \tau_{\nu_\mu}=\infty,\quad \tau_{\nu_\tau}=\infty.$$

因而 ν_e,ν_μ,ν_τ 没有衰变发生. 此外电子寿命也是无穷大

$$\tau_e=\infty.$$

于是只有 μ 子和 τ 子这两种轻子发生衰变. 按照高质量到低质量衰变规则, μ 子的衰变反应式为

$$\begin{aligned} &\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu, \\ &\mu^+ \to e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu. \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

在轻子表 2.2 和强子表 2.5 至表 2.8 中, 只有电子质量小于 μ 子. 因此 (2.2.1) 是 μ 子的唯一衰变模式.

τ 子有较大的质量, 因而有较多的衰变模式. 它们的反应式为

$$\begin{aligned} &\tau^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\tau, \\ &\tau^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau, \\ &\tau^- \to \pi^- + \nu_\tau, \\ &\tau^- \to \rho^- + \nu_\tau, \\ &\tau^- \to \pi^+ + \pi^- + \pi^- + \nu_\tau, \\ &\tau^- \to K^- + \nu_\tau. \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

τ^+ 具有与 (2.2.2) 相反粒子的衰变. (2.2.1) 与 (2.2.2) 属于弱作用衰变.

从 (2.2.1) 和 (2.2.2) 可以观察到一个规律, 即 μ 子和 τ 子衰变总是有相应的中微子产生, 即 μ^- 和 μ^+ 对应地有 ν_μ 和 $\bar{\nu}_\mu$, τ^- 和 τ^+ 对应地有 ν_τ 和 $\bar{\nu}_\tau$ 产生. 此外衰变式的右端若有 $e^\pm$ 或 $\mu^\pm$ 出现, 那么伴随着一定有它们的反中微子出现. 这个规律便是轻子数守恒定律. 大量实验表明, 这是一个对所有相互作用都成立的守恒律. 对应每一代轻子都有一个轻子数:

电子轻子数 L_e、 μ 子轻子数 L_μ、 τ 子轻子数 L_τ.

它们的数值由表 2.9 给出 (强子的所有轻子数为零).

表 2.9 每代轻子数

代	L_e	L_μ	L_τ	代	L_e	L_μ	L_τ
e^-	1	0	0	e^+	−1	0	0
ν_e	1	0	0	$\bar{\nu}_e$	−1	0	0
μ^-	0	1	0	μ^+	0	−1	0
ν_μ	0	1	0	$\bar{\nu}_\mu$	0	−1	0
τ^-	0	0	1	τ^+	0	0	−1
ν_τ	0	0	1	$\bar{\nu}_\tau$	0	0	−1

根据表 2.9, (2.2.1) 和 (2.2.2) 所有衰变式的左右两端轻子数总和都是相等的. 由轻

子数守恒律, 如下衰变是不可能发生的:

$$\begin{cases} \mu^- \nrightarrow e^- + \gamma, \\ \mu^- \nrightarrow e^- + \nu_\mu, \\ \tau^- \nrightarrow e^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau, \\ \tau^- \nrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_e + \nu_\tau. \end{cases}$$

我们还可以列出无穷多种违背轻子守恒律的衰变模型, 它们在自然界中不发生.

2.2.2　带电轻子的反常磁矩

带电轻子 e, μ, τ 都可产生自旋磁矩 $\vec{\mu}_s$. 然而在现实中, 由 Dirac 方程得到的自旋磁矩值 $\mu_{\text{理论}}$ 与实验值 $\mu_{\text{实验}}$ 之间存在一个微小的差异, 即

$$\mu_{\text{实验}} - \mu_{\text{理论}} = \delta, \quad \delta > 0 \text{ 很小}. \tag{2.2.3}$$

这种微小的变化 (2.2.3) 称作是反常磁矩现象.

带电轻子都有反常磁矩. 这一现象与 W. E. Lamb 在 1947 年发现的氢原子能级发生微小偏差, 这两个事件一起促成了量子场论的诞生. 因此反常磁矩在量子物理中可以说是一个重要的概念, 要想进入量子场论就必须对此概念有清楚的了解. 这里我们将对电子的反常磁矩进行介绍.

为了讨论方便, 首先回忆一下转动电荷的磁矩及其能量公式. 经典电动力学与量子力学都告诉我们, 一个做圆周运动的带电荷 Q 粒子能够产生磁矩 $\vec{\mu}$ (角动量的类似物), 它的表达式为

$$\vec{\mu} = \frac{Q}{2mc} \vec{L}, \tag{2.2.4}$$

式中 m 为粒子质量, $\vec{L}$ 为粒子的轨道角动量. 在一个磁场 $\vec{H}$ 中, 磁矩 $\vec{\mu}$ 具有能量 E_m, 它的公式写作

$$E_M = -\vec{\mu} \cdot \vec{H}. \tag{2.2.5}$$

对于一个运动电子来讲, 它的磁矩 $\vec{\mu}_e$ 含两个部分, 轨道磁矩 $\vec{\mu}_L$ 和自旋磁矩 $\vec{\mu}_s$ 之和:

$$\vec{\mu}_e = \vec{\mu}_L + \vec{\mu}_s, \tag{2.2.6}$$

其中 $\vec{\mu}_L$ 和 $\vec{\mu}_s$ 表达公式分别为

$$\vec{\mu}_L = -g_L \mu_B \vec{L}/\hbar, \tag{2.2.7}$$

$$\vec{\mu}_s = -g_s \mu_B \vec{S}/\hbar, \quad \vec{S} \text{ 为自旋角动量 (见 (2.1.27))}, \tag{2.2.8}$$

式中 g_L 和 g_s 分别称为轨道和自旋 Lande′ 因子, 它们的值为

$$g_L = 1, \quad g_s = 2, \tag{2.2.9}$$

μ_B 为 Bohr 磁子, 将 (2.2.7) 与 (2.2.4) 对照可得

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c}. \tag{2.2.10}$$

以上公式 (2.2.6)-(2.2.10) 都可从 Dirac 方程导出, 是理论结果. 前面讲到的反常磁矩 (2.2.3) 不是体现在轨道磁矩 (2.2.7) 上, 而是表现在自旋磁矩 (2.2.8) 上. (2.2.3) 的偏差被归到 Lande′ 因子上. 在 (2.2.9) 中自旋 Lande′ 因子 Dirac 理论值 $g_s = 2$, 而真实值 g 与 2 有很小的差异, 通常用

$$a = \frac{1}{2}(g-2) \tag{2.2.11}$$

的值代表反常磁矩.

在实验上, 为了测得反常磁矩 (2.2.11) 的值, 需要自旋粒子在磁场的运动方程以求得可观测值. 运动方程取如下形式:

$$h\frac{\mathrm{d}\vec{S}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mu} \times \vec{H}\,. \tag{2.2.12}$$

方程左边为角动量变化率, 右边为磁场 $\vec{H}$ 加在自旋磁矩的力矩. 将真实的自旋磁矩

$$\vec{\mu} = g\mu_B \vec{S}, \quad g \text{ 如 (2.2.11)},$$

代入 (2.2.12) 得到

$$\frac{\mathrm{d}\vec{S}}{\mathrm{d}t} = \frac{ge}{2m_e c}\vec{S} \times \vec{H}\,. \tag{2.2.13}$$

令 ϕ 为自旋 $\vec{S}$ 与速度方向 $\vec{v}$ 的夹角, 则 $\vec{S}$ 可表达为

$$\vec{S} = |\vec{S}|(\vec{v}\cos\phi + \vec{n}\sin\phi),$$

$\vec{n}$ 是垂直于 $\vec{v}$ 的单位向量. 再由 Lorentz 电子运动方程

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{e}{m_e c}\vec{v} \times \vec{H},$$

从 (2.2.13) 可推出

$$\begin{aligned} &\vec{n}\,\phi'\cos\phi + \vec{n'}\sin\phi - \vec{v}\,\phi'\sin\phi \\ &= (g-2)\frac{e}{2m_e c}\cos\phi\,\vec{v} \times \vec{H} + \frac{ge}{2m_e c}\sin\phi\,\vec{n} \times \vec{H}\,. \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

当粒子自旋方向与运动方向一致时, $\phi = 0$. 此时 (2.2.14) 变为

$$\phi' = (g-2)\frac{e}{2m_e c}(\vec{v} \times \vec{H}) \cdot \vec{n}\,. \tag{2.2.15}$$

在最简单情况下, 一束粒子垂直于磁场方向入射, 其自旋也垂直于磁场方向时, 方程 (2.2.15) 写作

$$\phi' = (g-2)\frac{eH}{2m_e c}.$$

因此实验上只要测得 ϕ 的变化率, 便可求得 $g-2$ 的值.

由 R. P. Feynmann, J. Swinger, S. Tomonaga 等发展起来的量子场论 Feynmann 规则及重整化理论给出电子和 μ 子反常磁矩 (2.2.11) 准确的计算, 其理论值与实验值之间达到非常高的吻合. 它被誉为物理学惊人的成就. 下面给出带电轻子反常磁矩 a 的理论与实验结果的数据.

$$\begin{aligned} a_e\ (\text{理论}) &= (1159643.6 \pm 2.3) \times 10^{-9}, \\ a_e\ (\text{实验}) &= (1159644 \pm 7) \times 10^{-9}; \end{aligned} \tag{2.2.16}$$

$$\begin{aligned} a_\mu\ (\text{理论}) &= (1165921 \pm 9) \times 10^{-9}, \\ a_\mu\ (\text{实验}) &= (1165922 \pm 1) \times 10^{-9}. \end{aligned} \tag{2.2.17}$$

目前关于 τ 子的反常磁矩理论值为

$$a_\tau\ (\text{理论}) = (117755 \pm 7.2) \times 10^{-8}. \tag{2.2.18}$$

但是实验值不是很精确, 目前只能测得 a_τ 的上、下界为

$$-0.007 < a_\tau\ (\text{实验}) < 0.005. \tag{2.2.19}$$

这值与理论值 $a_\tau \simeq 0.00118$ 相差很大. 人们期待更精确的实验数据以便与理论值进行比较.

2.2.3　中微子及其振荡性质

中微子是物质构成的组元之一, 是基本粒子的一种. 作为质量粒子, 它具有非常特殊的性质. 主要表现在不衰变 (寿命为无穷大), 只参与弱相互作用 (引力作用小得近似于零), 以及质量小得几乎为零 (速度接近光速) 等几个方面. 它是目前发现的唯一穿透性极强的质量粒子. 此外, 到目前为止中微子与它的反中微子是否为同一个粒子的问题仍没有得到解决, 尽管它们有相反的自旋方向与相反的轻子数.

中微子是由 W. Pauli 在 1930 年首先提出的, 它是为了解释 β 衰变过程中能量损失的问题. 即在中子衰变过程中,

$$n \to p^+ + e^- + \bar{\nu}_e,$$

如果没有 $\bar{\nu}_e$ 这一项, 则上面的衰变就破坏了能量守恒律. 因此 Pauli 建议存在一种当时没有观察到的粒子称作中微子, 以保持 β 衰变的能量守恒性. 在 1942 年, 中

国物理学家王淦昌首先提出用 β 捕获方法探测中微子, 见 (Wang, 1942). 在 1956 年, C. Cowan 和 F. Reine 采用如下 β 捕获反应式的实验:

$$\bar{\nu}_e + p^+ \to n + e^+,$$

证实了 e 中微子 ν_e 的存在性, 为此 Reine 获得 1995 年诺贝尔物理学奖 (Cowan 已去世). 随后, μ 中微子在 20 世纪 40 年代末, τ 中微子在 70 年代中期被理论上提出. μ 中微子在 1962 年被 L. Lederman, M. Schwartz 和 J. Steinberger 在实验中证实, 从而获得 1988 年诺贝尔奖. τ 中微子在 2000 年由 Fermi 实验室的一组实验物理学家发现. 于是三种味的中微子 ν_e, ν_μ, ν_τ 全部被找到.

下面介绍中微子一些特殊性质.

1. 左手螺旋性质

大量实验结果表明, 几乎所有被产生出的和观察到的中微子都具有如图 2.2(b) 所示的左手螺旋性质, 而反中微子是如图 2.2(a) 所示的右手螺旋性质.

在无质量极限情况下, 这种现象是合理的. 因为没有质量的粒子以光速进行运动, 没有比它更快的运动, 因此螺旋性具有不变的意义. 但是如果有质量, 那么存在两个坐标系 A 和 B, A 坐标跑得比该粒子慢, 而 B 坐标跑得比它快. 于是, 从 A 坐标和 B 坐标看这个粒子的运动方向正好相反, 这样该粒子的螺旋性从 A 坐标和 B 坐标上观测也是相反的. 因此中微子左手螺旋性意味着质量几乎为零. 如果中微子与反中微子是全同粒子, 那么左旋性与有质量这两者之间便没有矛盾.

2. 中微子振荡

所谓中微子振荡就是指中微子三种味道之间可以发生相互转换, 即 ν_e 可以变成 ν_μ 或 ν_τ, 而 ν_μ 和 ν_τ 同样也会转变成其他味道中微子. 这个理论起源于 1968 年 R. Davis 关于太阳中微子检测的著名实验. 根据理论计算, 太阳的核聚变反应将产生大量的 e 中微子, 但是 Davis 的检测发现到达地球的 ν_e 数量只是理论值的 1/3 倍. 这便产生了太阳中微子问题. Davis 因他的实验获得 2002 年诺贝尔奖.

为了解释太阳 e 中微子亏损问题, B. Pentecorvo 于 1968 年提出中微子振荡理论. 根据这个理论, 大量太阳中微子 ν_e 在到达地球前就转变成 ν_μ 或者 ν_τ, 从而造成 ν_e 的减少. 而在 Davis 的实验中采用的是 ν_e 捕获方法, 其原理是如下反应式:

$$\nu_e + {}^{37}Cl \to {}^{37}Ar + e^-.$$

因此它只能检测到 ν_e 的亏损而无法获得 ν_μ 和 ν_τ 的数量. Bruno 的中微子振荡理论很好地解释了太阳中微子问题. 随后, 这个理论得到多组不同方式的实验支持.

中微子振荡理论本质上就是量子力学混合态理论. 它首先是建立在三类中微子之间可以相互转换假设基础上 (这个假设得到实验的支持), 此时 ν_e, ν_μ, ν_τ 不能是

(1.4.66) 方程的 Hamilton 算子 H 的特征向量, 取而代之是三个特征态 ν_k,

$$H\nu_k = \lambda_k \nu_k, \quad k = 1, 2, 3. \tag{2.2.20}$$

使得波函数 ν_e, ν_μ, ν_τ 是 ν_k $(k = 1, 2, 3)$ 的线性组合

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = A^\dagger \text{ 是 3 阶 } U \text{ 矩阵.} \tag{2.2.21}$$

这个 U 矩阵 A 称为 MNS 矩阵, ν_1, ν_2, ν_3 称为质量特征态, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 为对应的能量. MNS 矩阵具体表达为

$$A = \begin{pmatrix} C_{12}C_{13} & S_{12}C_{13} & S_{13}e^{-\mathrm{i}\delta} \\ -S_{12}C_{23} - C_{12}S_{23}S_{13}e^{\mathrm{i}\delta} & C_{12}C_{23} - S_{12}S_{23}S_{13}e^{\mathrm{i}\delta} & S_{23}C_{13} \\ S_{12}S_{23} - C_{12}C_{23}S_{13}e^{\mathrm{i}\delta} & -C_{12}C_{23} - S_{12}C_{23}S_{13}e^{\mathrm{i}\delta} & C_{23}C_{13} \end{pmatrix}, \tag{2.2.22}$$

式中 $C_{ij} = \cos\theta_{ij}, S_{ij} = \sin\theta_{ij}, \delta$ 为相因子. 实验测得近似值为

$$\theta_{12} \simeq 34^\circ \pm 2^\circ, \quad \theta_{23} \simeq 45^\circ \pm 8^\circ, \quad \theta_{13} \simeq 10^\circ.$$

下面我们来看一下如何从中微子振荡理论 (2.2.20)-(2.2.21) 推出三种味道 ν_e, ν_μ, ν_τ 之间的转化概率.

为了简单, 只考虑两类中微子 ν_e 和 ν_μ 的情况, 即 $\nu_\tau \equiv 0$. 此时关系式 (2.2.21) 可简化成如下形式:

$$\nu_1 = \cos\theta\ \nu_\mu - \sin\theta\ \nu_e, \quad \nu_2 = \sin\theta\ \nu_\mu + \cos\theta\ \nu_e. \tag{2.2.23}$$

根据量子力学方程 (1.4.66) 及 (2.2.20), ν_1, ν_2 满足

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial \nu_j}{\partial t} = \lambda_j \nu_j, \quad j = 1, 2.$$

该方程的解为

$$\nu_j = \nu_j(0) e^{-\mathrm{i}\lambda_j t/\hbar}, \quad j = 1, 2. \tag{2.2.24}$$

假设粒子初态只是 e 中微子, 即

$$\nu_e(0) = 1, \quad \nu_\mu(0) = 0,$$

则从 (2.2.23) 得到

$$\nu_1(0) = -\sin\theta, \quad \nu_2(0) = \cos\theta. \tag{2.2.25}$$

于是 (2.2.24) 和 (2.2.25) 导出

$$\nu_1 = -\sin\theta\ e^{-\mathrm{i}\lambda_1 t/\hbar}, \quad \nu_\tau = \cos\theta\ e^{-\mathrm{i}\lambda_2 t/\hbar}. \tag{2.2.26}$$

将 (2.2.26) 代入 (2.2.23) 便求得

$$\begin{aligned}\nu_\mu(t) &= \cos\theta\ \nu_1(t) + \sin\theta\ \nu_2(t)\\ &= \sin\theta\cos\theta(-e^{-\mathrm{i}\lambda_1 t/\hbar} + e^{-\mathrm{i}\lambda_2 t/\hbar}).\end{aligned}$$

于是在 t 时刻后由 ν_e 转变为 ν_μ 的概率为

$$P(\nu_e \to \nu_\mu) = |\nu_\mu(t)|^2 = \left[\sin 2\theta \sin\left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2\hbar}t\right)\right]^2. \tag{2.2.27}$$

同理可求得

$$\nu_e(t) = \cos\theta\ \nu_2 - \sin\theta\ \nu_1 = \cos^2\theta e^{-\mathrm{i}\lambda_1 t/\hbar} + \sin^2\theta e^{-\mathrm{i}\lambda_2 t/\hbar},$$

以及 ν_μ 转化为 ν_e 的概率为

$$P(\nu_\mu \to \nu_e) = |\nu_e(t)|^2 = \cos^2\left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2\hbar}t\right) + \cos^2 2\theta \sin^2\left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\hbar}t\right). \tag{2.2.28}$$

从 (2.2.27) 和 (2.2.28) 便看到在 ν_e 与 ν_μ 之间相互变换的周期振荡行为. 这便是中微子振荡名称的由来.

3. MSW 效应

在 1985 年, S. Mikheyev 和 A. Smirnov 拓展了 L. Wolfenstein 在 1978 年的工作, 他们发现了当中微子穿过物质时 Pentecorvo 中微子振荡会产生一个附加效应, 被称为 MSW 效应. 这个效应并不改变像 (2.2.27)-(2.2.28) 这样的函数形式, 但是它能够改变 (2.2.22) 中的混合角 θ_{ij} 以及质量分裂值, 依赖于物质密度与中微子流的能量.

4. 中微子质量

中微子振荡意味着有质量存在, 它们体现在 (2.2.20) 的特征值 λ_k $(k = 1, 2, 3)$ 上. 由质能三角关系 $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ 可得到

$$E \simeq |p|c + \frac{1}{2}\frac{m^2c^3}{2|p|}.$$

特征值 λ_k 与 E 的关系为

$$\lambda_k = E_k \simeq |p|c + \frac{1}{2}\frac{m_k^2c^3}{|p|}, \quad k = 1, 2, 3. \tag{2.2.29}$$

然后有

$$\lambda_i - \lambda_j = E_i - E_j \simeq \frac{(m_i^2 - m_j^2)}{2E} c^4. \tag{2.2.30}$$

由公式 (2.2.30), 只要测得能级分裂 $E_i - E_j$ 便可求得 ν_i 与 ν_j 的质量平方差 $m_i^2 - m_j^2$. 对于三类中微子有三个质量分裂:

$$\Delta_{21} = m_2^2 - m_1^2, \quad \Delta_{32} = m_3^2 - m_2^2, \quad \Delta_{31} = m_3^2 - m_1^2. \tag{2.2.31}$$

它们中只有两个是独立的, 因为 $\Delta_{31} = \Delta_{32} + \Delta_{21}$.

实验测量结果表明

$$\begin{aligned} &\Delta_{32} \simeq 3 \times 10^{-3} (\mathrm{eV/c^2})^2, \\ &\Delta_{21} \simeq 8 \times 10^{-5} (\mathrm{eV/c^2})^2. \end{aligned} \tag{2.2.32}$$

现在再来看中微子 ν_e, ν_μ, ν_τ 的质量与 ν_1, ν_2, ν_3 的质量之间关系是怎样的. 用 Hamilton 算子 H 作用在 (2.2.21) 两端得到

$$H \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \quad (\text{由 (2.2.20)}), \tag{2.2.33}$$

其中 A 是 MNS 矩阵 (2.2.22). 由量子力学规则 (1.4.24), 从 (2.2.33) 与 (2.2.21) 可得到 ν_e, ν_μ, ν_τ 的能量如下:

$$\begin{aligned} E_e &= \int \nu_e^* H \nu_e \mathrm{d}x = \int A_{1k}^* A_{1j} \lambda_j \nu_k^* \nu_j \mathrm{d}x, \\ E_\mu &= \int \nu_\mu^* H \nu_\mu \mathrm{d}x = \int A_{2k}^* A_{2j} \lambda_j \nu_k^* \nu_j \mathrm{d}x, \\ E_\tau &= \int \nu_\tau^* H \nu_\tau \mathrm{d}x = \int A_{3k}^* A_{3j} \lambda_j \nu_k^* \nu_j \mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{2.2.34}$$

式中 A_{ij} 是 A 的矩阵元, A_{ij}^* 为 A_{ij} 的复共轭. λ_k 与 ν_k 的质量 m_k 由 (2.2.29) 给出, 而

$$E_e \simeq |p|c + \frac{m_e^2 c^4}{2E}, \quad E_\mu = |p|c + \frac{m_\mu^2 c^4}{2E}, \quad E_\tau = |p|c + \frac{m_\tau^2 c^4}{2E}.$$

因此 (2.2.34) 给出 ν_e, ν_μ, ν_τ 与 ν_1, ν_2, ν_3 之间质量的关系式.

从 (2.2.34) 很难算出中微子质量. 但是由 $A^{-1} = A^\dagger$ 由 (2.2.34) 可求出三种中微子质量平方和为

$$m_e^2 + m_\mu^2 + m_\tau^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 \simeq \Delta_{32} + 2\Delta_{21} + 3m_1^2,$$

其中 Δ_{32}, Δ_{21} 如 (2.2.32).

2.2.4 轨道量子数及宇称

一般来讲, 弱作用的衰变与散射总是有中微子参与. 而在 2.2.3 小节介绍过中微子具有左旋性质. 正是由于这个左旋性质使得中微子具有左右不对称性, 即空间反射不对称性. 这就意味着有中微子参与的弱作用反应式可能会发生宇称不守恒现象. 宇称不守恒可以说是中微子左旋特性的表现, 为了能更深入了解这个性质, 这一小节将专门介绍宇称及其相关的轨道量子数概念.

1. 轨道量子数

所谓轨道量子数是描述粒子做旋转运动时角动量状态的数值. 当粒子做直线运动时, 没有轨道角动量, 因而轨道量子数为零. 但是对于绕质心做周期转动的粒子 (如原子轨道上的电子, 原子核中的质子与中子等), 便出现轨道量子数.

轨道量子数是反映粒子角动量大小的数值, 它之所以称为量子数是因为它的数值是分立的. 在宏观世界中, 任何一个角动量数值的运动都存在. 但是在微观世界里, 绕每一个给定中心场转动的角动量数值是有限个, 也就是说粒子只能在这有限个角动量数值上运动, 它们表达为 $L=\hbar\sqrt{l(l+1)}$, $l=0,1,\cdots,N$. 在角动量为 $L=\hbar\sqrt{l(l-1)}$ 的轨道上 (注意角动量守恒) 运动的粒子, 它的轨道量子数被定义为 l. 不同 l 的粒子在不同轨道上运动.

我们必须牢记 1.4.2 小节中介绍的量子规则: 粒子的某种物理量必须由对应该量的算子特征值给出. 因此轨道角动量量子数是由如下角动量算子给出

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p},\quad \vec{p}\ \text{为粒子动量算子}.$$

由 (1.4.23), 上述角动量算子 $\vec{L}$ 可表达为

$$\vec{L}=-\mathrm{i}\hbar\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x^1 & x^2 & x^3\\ \dfrac{\partial}{\partial x^1} & \dfrac{\partial}{\partial x^2} & \dfrac{\partial}{\partial x^3}\end{pmatrix}. \tag{2.2.35}$$

$\vec{L}$ 为矢量算子, 它没有特征态. 角动量特征态是由如下两个关于角动量的标量算子提供 (它们与经典 Hamilton 算子 H 可交换):

$$\begin{aligned}&\vec{L}^2=-\hbar^2\left[(x^2\partial_3-x^3\partial_2)^2+(x^3\partial_1-x^1\partial_3)^2+(x^1\partial_2-x^2\partial_1)^2\right],\\ &L_3=-\mathrm{i}\hbar\partial_3,\end{aligned} \tag{2.2.36}$$

其中 L_3 称为角动量 z 分量算子. L_3 对应的物理量称为磁量子数. 在经典物理中没有此对应量. 可能有人会问, 为什么不考虑第一和第二分量算子 $L_j=\mathrm{i}\hbar\partial_j$ $(j=1,2)$ 的特征值? 其原因是 L_3 与 H 及 $\vec{L}^{\,2}$ 是可交换的, 因而 L_3 是守恒量, 并且与 $\vec{L}^{\,2}$

有公共特征向量 ψ, 即 ψ 的粒子可用 L_3 特征值作为新的量子数. 但是 L_1 和 L_2 与 $H, \vec{L}^{\,2}$ 不可交换.

因为 (2.2.36) 所描述的是中心转动运动, 轨道在球面上. 因此 (2.2.36) 的特征函数是球面函数. 这就需要用球面坐标 (θ, ϕ) 来表达算子 (2.2.36), 其表达式为

$$\begin{aligned} \vec{L}^{\,2} &= -\hbar\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right], \\ L_3 &= -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}. \end{aligned} \tag{2.2.37}$$

数学上, $\vec{L}^{\,2}$ 是球调和算子, (2.2.37) 的公共特征函数是球调和函数 $Y_{lm}(\theta, \phi)$, 对应的方程为

$$\begin{aligned} \vec{L}^{\,2}Y_{lm} &= l(l+1)\hbar^2 Y_{lm}, \\ L_3 Y_{lm} &= m\hbar Y_{lm}, \end{aligned} \tag{2.2.38}$$

特征值分别为

$$\begin{aligned} \vec{L}_l^{\,2} &= l(l+1)\hbar^2, \quad l = 0, 1, 2, \cdots, \\ L_z &= m\hbar, \quad m = 0, \pm1, \cdots, \pm l, \end{aligned} \tag{2.2.39}$$

其中 l 称为轨道量子数, m 为磁量子数, $L_l = \sqrt{l(l+1)}\hbar$ 是粒子的轨道角动量.

2. 宇称

在 2.1.4 小节中已介绍过, 宇称是对应于空间反射变换

$$P\psi(x, t) = \psi(-x, t) \tag{2.2.40}$$

的一种量子数. 例如, 一个波函数为 $\psi(x, t)$ 的运动粒子 A, 如果 $\psi(x, t)$ 关于 x 是偶函数, 即

$$P\psi(x, t) = \psi(-x, t) = \psi(x, t),$$

则定义 A 粒子运动宇称值 $\pi_\psi = 1$, 若 ψ 为奇函数则 $\pi_\psi = -1$, 即

$$A \text{ 粒子的 } \psi \text{ 运动态宇称 } \pi_\psi = \begin{cases} 1, & \text{若 } \psi(-x) = \psi(x), \\ -1, & \text{若 } \psi(-x) = -\psi(x). \end{cases} \tag{2.2.41}$$

由 (2.2.41) 可看出粒子宇称值 π 与它的运动状态有关. 此外每一种粒子都有自己的固有宇称 $\pi_{\text{固}}$, 它由实验确定:

$$\text{每种粒子固有宇称 } \pi_{\text{固}} = 1 \text{ 或 } -1, \text{ 由实验决定.} \tag{2.2.42}$$

于是一个处在运动状态 ψ 的粒子宇称值 π 定义为

$$\pi = \pi_\psi \pi_{\text{固}}. \tag{2.2.43}$$

下面定出 π_ψ 的值. 当粒子做直线运动时, $\pi_\psi = 1$. 而粒子做中心转动运动时, 运动波函数为

$$\psi = R_n(r)Y_{ml}(\theta,\phi) = R_n(r)P_l^m(\cos\theta)e^{\mathrm{i}m\phi}, \tag{2.2.44}$$

其中 Y_{ml} 如 (2.2.38) 为球调和函数, $P_l^m(\cos\theta)$ 为 Legendre 多项式. 在空间反射 $x \to -x$ 变换下,

$$\theta \to \pi - \theta, \quad \phi \to \pi + \phi.$$

此时有

$$P_l^m(\cos\theta) \to P_l^m(-\cos\theta) = (-1)^{l-m}P_l^m(\cos\theta),$$
$$e^{\mathrm{i}m\phi} \to e^{\mathrm{i}m(\pi+\phi)} = (-1)^m e^{\mathrm{i}m\phi}.$$

因此从 (2.2.44) 可推出

$$P\psi = (-1)^{l-m}(-1)^m\psi = (-1)^l\psi, \tag{2.2.45}$$

式中 l 为轨道量子数.

因此, 由 (2.2.40)-(2.2.41) 和 (2.2.45) 推出, 一个运动粒子的状态宇称值 π_ψ 可写成

$$\pi_\psi = (-1)^l, \quad l \text{ 为粒子的轨道量子数.}$$

这样, 一个粒子的宇称值 π 由下式给出

$$\pi = (-1)^l\pi_{\text{固}}, \tag{2.2.46}$$

其中 l 为粒子轨道量子数, $\pi_{\text{固}}$ 如 (2.2.42).

3. 宇称的规则

宇称量子数满足如下规则:

(a) 正反 Fermi 子固有宇称相反, 正反 Bose 子固有宇称相同,

$$\text{Fermi 子: } \pi_{\text{正}} = -\pi_{\text{反}}, \quad \text{Bose 子: } \pi_{\text{正}} = \pi_{\text{反}}.$$

(b) 对于多粒子系统的反应式

$$A_1 + \cdots + A_n \to B_1 + \cdots + B_N,$$

宇称守恒性要求下面等式成立

$$\pi_{A_1}\cdots\pi_{A_n} = \pi_{B_1}\cdots\pi_{B_N}.$$

最后, 关于宇称守恒性有如下定理.

宇称守恒性定理 2.2　若一个量子系统的 Hamilton 算子 H 在空间反射下保持不变, 即

$$PH(x) = H(-x) = H(x),$$

则该系统宇称守恒.

证明　在如下反映变换下

$$PH(x)\psi(x) = H(-x)\psi(-x) = H(x)P\psi(x).$$

因此有

$$PH(x) = H(x)P,$$

即宇称算子 P 与 Hamilton 算子 H 是可交换的. 因此由 H 描述的这个量子系统的宇称是守恒的. 定理证毕.

实验结果告诉我们, 宇称在弱作用中守恒性被破坏. 这说明弱作用的反应 Hamilton 量不具有空间反射不变性.

2.2.5　宇称守恒性在弱作用中的破坏

宇称在弱相互作用的反应过程中不守恒是李政道与杨振宁在 1956 年首先提出, 随后由吴健雄等的极化 Co^{60}(钴 -60) 核 β 衰变实验得到证实. 这项发现使得李政道和杨振宁获得 1957 年诺贝尔奖. 下面介绍这一过程.

1. τ-θ 疑难

在宇称弱作用不守恒发现之前, 物理学界存在着一个称为 τ-θ 疑难, 即如下两类衰变:

$$\begin{aligned} &\tau^+ \to \pi^+ + \pi^+ + \pi^-, \\ &\theta^+ \to \pi^+ + \pi^0, \end{aligned} \tag{2.2.47}$$

是否是同一种粒子的两种衰变方式问题. 因而实验测得 τ^+ 质量为 $(966.3 \pm 2.0)m_e$, 而 θ^+ 的质量为 $(966.7 \pm 2.0)m_e$(m_e 为电子质量), 两者很接近, 应该是同一种粒子的两种不同衰变方式. 但是, 按宇称守恒律进行分析, τ^+ 粒子宇称为

$$\pi_{\tau^+} = (\pi_\pi)^3(-1)^l = (-1)^{l+1},$$

其中 l 是 3π 系统角动量, $l = \tau^+$ 的自旋, 测得 $l = 0$. 因此有

$$\pi_{\tau^+} = -1. \tag{2.2.48}$$

而从 (2.2.47) 关于 θ^+ 粒子的宇称为

$$\pi_{\theta^+} = (\pi_\pi)^2(-1)^l = 1. \tag{2.2.49}$$

于是出现这样的疑难问题: 由于 τ^+ 和 θ^+ 在质量、自旋奇异数等参数是相等的, 因此它们应是同一种粒子. 但另一方面, 由 (2.2.48) 和 (2.2.49), 它们又有不同的宇称, 因而又表现出是不同的粒子. 这个问题一直困惑着物理学界.

2. β 衰变中宇称不守恒

τ-θ 疑难问题有两种可能的答案: ① τ^+ 和 θ^+ 是两种不同粒子, 它们质量、奇异数、自旋等量子数相等是一种巧合; ② τ^+ 与 θ^+ 是同一种粒子, 它们宇称也是相同的 (即 $\pi_{\theta^+} = -1$), 出现 (2.2.49) 的错误是由于宇称在一些弱作用衰变过程中不守恒.

李-杨在分析了当时许多实验资料后发现, 没有任何实验证据表明宇称在弱作用过程中应是守恒的. 于是他们选择了后一种答案, 即提出宇称在弱相互作用中不守恒的观点. 这一理论很快被实验验证. 后来人们确认 τ^+ 和 θ^+ 是同一种粒子, 今天被称为 K^+ 粒子.

吴健雄根据李-杨建议, 采用 Co^{60} 的 β 衰变检验宇称守恒性问题. 该反应式表达如下:

$$\mathrm{Co}^{60} \to \mathrm{Ni}^{60} + e^- + \bar{\nu}_e. \tag{2.2.50}$$

通过测量 (2.2.50) 衰变发射出来的电子角分布来判断此过程中宇称是否守恒. 其过程和原理大致如下.

采用技术手段将 Co^{60} 核自旋指向同一方向, 如图 2.3(a) 所示. 然后记录 (2.2.50) 衰变过程发射电子的方向. 实验表明大多数电子是朝着南极方向发射, 即与原子核自旋相反方向. 可以设想用一面镜子来反照这个实验装置, 如图 2.3(b) 所示. 则镜子里的实验等效于作空间反射变换. 如果反射变换是对称的 (即宇称守恒), 则镜子里电子发射的图像应该与现实中的一样, 即发射方向与原子核自旋方向相反. 但是图 2.3(b) 镜子中的电子却与原子核自旋方向相同. 这说明 (2.2.50) 反应式是空间反射不对称的. 于是便验证了宇称在弱作用衰变过程中是不守恒的.

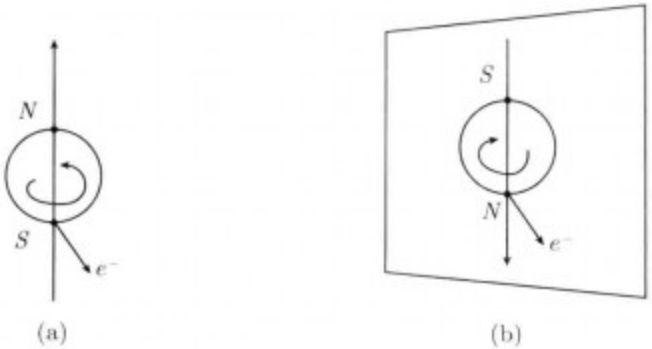


图 2.3 (a) 真实世界实验图像; (b) 镜像世界的实验图像

3. 中微子左旋性与 P、C 守恒的关系

宇称在弱作用过程中不守恒的根本原因是由中微子自旋只有左手螺旋特性造成. 由于自然界中只存在左旋中微子而不存在右旋中微子, 只存在右旋反中微子而不存在左旋反中微子, 因此在空间反演下,

$$\nu_L \xrightarrow{P} (-\nu_R), \quad \bar{\nu}_R \xrightarrow{P} (-\bar{\nu}_L),$$

将自然界中存在的左旋中微子 ν_L 变为自然界中不存在的右旋中微子 $-\nu_R$. 于是有中微子参与的各种过程, 宇称守恒将有可能受到破坏.

中微子的左手性质也破坏电荷共轭变换 C 的对称性. 所谓电荷共轭变换 C 是指将粒子变为反粒子的变换. 在电荷共轭变换下, 一个粒子变成反粒子, 但不改变螺旋性. 因此在电荷共轭 C 的变换下,

$$\nu_L \xrightarrow{C} \bar{\nu}_L, \quad \bar{\nu}_R \xrightarrow{C} \nu_R,$$

同样将左手中微子变为自然界中不存在的左手反中微子. 于是可知电荷共轭 C 在有中微子参与的过程中, 其守恒性也将受到破坏.

2.3　强子及其性质

2.3.1　强子的衰变与重子数守恒

强子在所有五种类型粒子中是粒子数最多的一种. 正如 2.1.1 小节中介绍那样, 它分为重子与介子两大类, 共有二百多个不同的粒子. 但是真正具有特殊重要性的强子并不很多, 其他全部都是它们的共振态, 即较高能量态的形式. 这些特殊重要性的粒子如下, 它们构成强子分类的八重道 (2.4 节将介绍它们).

$$\text{重子: } p, n, \Lambda, \Sigma^{\pm}, \Sigma^0, \Xi^0, \Xi^-;$$
$$\text{介子: } \pi^{\pm}, \pi^0, \eta, K^{\pm}, K^0.$$

熟知各种粒子的主要衰变形式是掌握和理解量子物理的关键之一. 这一小节就是介绍各种强子的一些主要衰变形式以及重子数 B 的守恒定律.

首先我们回忆一下, 强子中只有质子 p 是无穷大的寿命, 它不发生衰变, 其他所有强子都将发生衰变, 见表 2.5 至表 2.8. 在强子的衰变过程中, 有许多守恒律. 但是最重要的是能量守恒与重子数守恒, 它们支配着强子衰变两条基本特征:

$$\text{衰变从高质量粒子朝低质量粒子方向发生;} \tag{2.3.1}$$
$$\text{介子的衰变产物中不含重子 (介子的重子数 } B = 0). \tag{2.3.2}$$

如果用电子辐射光子作类比, 那么重子衰变可理解成质子的辐射. 即其他所有重子都是质子高能级, 衰变只是质子从高能级到低能级的跃迁. 与电子的辐射物只有光子这一种粒子不同, 质子的最终辐射物有三种: 电子、中微子、光子. 即

$$\text{质子的最终辐射粒子} = \text{电子} + \text{中微子} + \text{光子}. \tag{2.3.3}$$

因此, 从强子衰变的基本特征 (2.3.1) 可将重子衰变理解成质子的自发跃迁辐射. 而 (2.3.2) 和 (2.3.3) 可将介子视为质子的中间辐射粒子, 而介子最终衰变为电子、中微子和光子. 于是重子与介子的身份变得清晰了, 表达如下:

$$\begin{aligned} &\text{重子} = \text{质子不同能级态}, \\ &\text{介子} = \text{质子能级跃迁的辐射粒子}. \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

下面给出各种强子的主要衰变反应式以及重子数守恒, 它们能够很强地支持 (2.3.3) 和 (2.3.4) 的观点.

1. 自旋 $J=\dfrac{1}{2}$ 重子衰变

$$\begin{aligned} &n \to p + e^- + \bar{\nu}_e, \\ &\Lambda \to p + \pi^-, \quad \Lambda \to n + \pi^0, \\ &\Sigma^+ \to p + \pi^0, \quad \Sigma^+ \to n + \pi^+, \\ &\Sigma^0 \to \Lambda + \gamma, \\ &\Sigma^- \to n + \pi^-, \\ &\Xi^0 \to \Lambda + \pi^0, \\ &\Xi^- \to \Lambda + \pi^-, \\ &\Lambda_c^+ \to p + K + \pi, \quad \Lambda_c^+ \to \Lambda + \pi + \pi, \quad \Lambda_c^+ \to \Sigma + \pi + \pi. \end{aligned}$$

2. 自旋 $J=\dfrac{3}{2}$ 重子衰变

$$\begin{aligned} &\Delta^{++} \to p + \pi^+, \\ &\Delta^+ \to p + \pi^0, \\ &\Delta^0 \to n + \pi^0, \\ &\Delta^- \to n + \pi^-, \\ &\Sigma^{*+} \to \Sigma^+ + \pi^0, \quad \Sigma^{*+} \to \Lambda + \pi^+, \\ &\Sigma^{*0} \to \Sigma^0 + \pi^0, \quad \Sigma^{*0} \to \Lambda + \pi^0, \end{aligned}$$

$$\Sigma^{*-} \to \Sigma^- + \pi^0, \quad \Sigma^{*-} \to \Lambda + \pi^-,$$
$$\Xi^{*0} \to \Xi^0 + \pi^0,$$
$$\Xi^{*-} \to \Xi^- + \pi^0,$$
$$\Omega^- \to \Lambda + K^-, \quad \Omega^- \to \Xi^- + \pi^0.$$

3. 自旋 $J=0$ 的介子衰变

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu,$$
$$\pi^0 \to 2\gamma,$$
$$\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu,$$
$$K^+ \to \mu^+ + \nu_\mu, \quad K^+ \to \pi^+ + \pi^0, \quad K^+ \to \pi + \pi + \pi,$$
$$K^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu, \quad K^- \to \pi^- + \pi^0, \quad K^- \to \pi + \pi + \pi,$$
$$K^0 \to \pi^+ + \pi^-, \quad K^0 \to \pi + \pi + \pi, \quad K^0 \to \pi^+ + e^- + \bar{\nu}_e,$$
$$\eta \to 2\gamma, \quad \eta \to \pi + \pi + \pi,$$
$$\eta' \to \eta + \pi^+ + \pi^-, \quad \eta' \to \rho^0 + \gamma,$$
$$D^+ \to K^+ + \pi^+ + \pi^-, \quad D^+ \to K^0 + e^+ + \nu_e,$$
$$D^- \to K^- + \pi^+ + \pi^-, \quad D^- \to K^0 + e^- + \bar{\nu}_e,$$
$$D^0 \to K^0 + \pi^+ + \pi^-.$$

4. 自旋 $J=1$ 介子衰变

$$\rho^\pm \to \pi^\pm + \pi^0,$$
$$\rho^0 \to \pi^+ + \pi^-,$$
$$K^{*\pm} \to K^\pm + \pi^0,$$
$$K^{*0} \to K^0 + \pi^0,$$
$$\omega \to \pi^+ + \pi^- + \pi^0, \quad \omega \to \pi^0 + \gamma,$$
$$\psi \to e^+ + e^-, \quad \psi \to \mu^+ + \mu^-,$$
$$D^{*\pm} \to D^\pm + \pi^0, \quad D^{*\pm} \to D^\pm + \gamma,$$
$$D^{*0} \to D^0 + \pi^0, \quad D^{*0} \to D^0 + \gamma,$$
$$\gamma \to e^+ + e^-, \quad \gamma \to \mu^+ + \mu^-, \quad \gamma \to \tau^+ + \tau^-.$$

5. 重子数 B 及其守恒性

重子数 B 是一个在所有相互作用过程中都守恒的量子数. 这个概念是由 E.

Stuckelberg 首先对质子和中子提出, 他规定 p^- 和 n 的重子数 $B=1$, 反质子与反中子 $p^+,\bar{n}$ 的重子数 $B=-1$. 后来随着大量重子的发现, 这个量子数被推广到所有粒子上. 它规定如下:

$$\begin{cases} \text{所有非重子的重子数 } B=0, \\ \text{所有重子的重子数 } B=1, \\ \text{所有反重子的重子数 } B=-1. \end{cases} \tag{2.3.5}$$

重子数的定义 (2.3.5) 及其守恒性使得结论 (2.3.4) 变得非常合理. 而轻子数守恒及 (2.2.1) 和 (2.2.2) 的衰变使得带电轻子与中微子的身份也如同重子与介子的关系那样:

$$\begin{cases} \text{带电轻子} = \text{电子不同能级态}, \\ \text{中微子} = \text{电子能级跃迁的辐射粒子}, \\ \text{电子跃迁最终辐射粒子} = \text{中微子} + \text{光子}. \end{cases} \tag{2.3.6}$$

2.3.2 核子与强子的同位旋

原子核的组元质子和中子统称为核子. 实验数据显示, 质子 p 与中子 n 在强相互作用中表现出相同的性质. 根据这一特点, Heisenberg 在 1932 年关于核子提出同位旋的概念, 其目的是用这个量子数来表达关于质子与中子的这种观点:

$$p \text{ 和 } n \text{ 是同一种粒子的带电与不带电的两种状态.} \tag{2.3.7}$$

根据这种观点, Heisenberg 引入量子数

$$(I, I_3), \tag{2.3.8}$$

其中 I 是同位旋, I_3 为第三分量, 并且规定

$$p \text{ 与 } n \text{ 的同位旋 } I=\frac{1}{2}, \tag{2.3.9}$$

$$p \text{ 的 } I_3=\frac{1}{2}, \quad n \text{ 的 } I_3=-\frac{1}{2}. \tag{2.3.10}$$

因此 (2.3.9) 中 p 与 n 有相同的同位旋意味着在某种意义下它们可视为同一种粒子 N, 而在 (2.3.10) 中具有不同的第三分量值意味着 N 的两种不同状态.

初一看, 这个定义 (2.3.8)-(2.3.10) 很奇怪, 不知为什么采用 $\frac{1}{2}$ 的数值. 实际上核子同位旋概念完全是模仿电子自旋概念引入的. 回忆电子自旋量子数为

$$(S, S_3), \tag{2.3.11}$$

其中 S 为自旋, S_3 为第三个分量, 并且

$$e \text{ 的自旋 } S = \frac{1}{2}, \tag{2.3.12}$$

$$e \text{ 有 } S_3 = \frac{1}{2} \text{ 和 } S_3 = -\frac{1}{2} \text{ 两种状态.} \tag{2.3.13}$$

将 (2.3.8)-(2.3.10) 与 (2.3.11)-(2.3.13) 对照发现同位旋与自旋在形式上是完全相同的. 此外, Heisenberg 按电子自旋模式引入同位旋, 还基于这两者之间的另一相似之处, 即

(a) 在外磁场存在条件下, 电子 $S_3 = \frac{1}{2}$ 与 $S_3 = -\frac{1}{2}$ 两种状态将产生原子光谱双重分裂现象; 而当除去外磁场后, 分裂光谱又合并为一, $S_3 = \frac{1}{2}$ 电子与 $S_3 = -\frac{1}{2}$ 电子便没有区别.

(b) 当考虑电荷的作用时, $I_3 = \frac{1}{2}$ 与 $I_3 = -\frac{1}{2}$ 的核子两种状态将产生原子核能级分裂, 即

$$m_1 \text{ 质子 } + m_2 \text{ 中子系统能级 } \neq m_1 \text{ 中子 } + m_2 \text{ 质子系统能级.}$$

但是当除去 Coulomb 势能后,

$$m_1 \text{ 质子 } + m_2 \text{ 中子系统能级 } = m_1 \text{ 中子 } + m_2 \text{ 质子系统能级.}$$

此时$I_3 = \frac{1}{2}$ 的质子与 $I_3 = -\frac{1}{2}$ 的中子便没有区别.

虽然上述 (a) 与 (b) 的相似性是以 (2.3.9)-(2.3.10) 方式来定义同位旋 (I, I_3) 的动机, 但是同位旋与自旋在物理内涵上具有根本不同的意义. 单就核子间相互作用而言, 同位旋只是一个形式上的概念, 并不能获得什么有价值的应用. 但是此概念提出二十多年后, 粒子物理得到快速发展, 所有强子被发现都具有同位旋, 并且在强相互作用中遵守同位旋守恒律. 于是这个量子数成为粒子物理学中一个非常有用的概念.

1950 年后, 大量强子被发现, 同位旋量子数也被随之推广到整个粒子上. 首先对于所有非强子, 规定

$$\text{所有非强子同位旋 } I = 0, \quad \text{第三分量 } I_3 = 0.$$

而对每一个强子, 它的 (I, I_3) 值是根据实验及守恒律要求来确定的. 反粒子与正粒子的 I 值相同, I_3 符号相反. 对于核子我们知道 $I = \frac{1}{2}, I_3$ 有两个分量 $\frac{1}{2}$ 和

$-\frac{1}{2}$. 对于一般情况来讲, I 取值为 $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \cdots$, 而 I_3 具有 $2I+1$ 个分量. 例如

$$\begin{aligned}
&I=0,\ I_3=0 \text{ 只有一个分量},\\
&I=\frac{1}{2},\ I_3=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) \text{ 有 } 2I+1=2 \text{ 个分量},\\
&I=1,\ I_3=(1,0,-1) \text{ 有 } 2I+1=3 \text{ 个分量},\\
&I=\frac{3}{2},\ I_3=\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right) \text{ 有 } 2I+1=4 \text{ 个分量},
\end{aligned} \tag{2.3.14}$$

如此下去, 每 I 值可得 $2I+1$ 个 I_3 的分量. I_3 的每一个分量代表一种粒子或粒子的一种状态.

下面给出一些重要强子的 (I, I_3) 值.

(1) π 介子的同位旋. π 介子是一个三重态, 它的 (I, I_3) 值定义如下:

$$I=1, \quad I_3=(1,0,-1),$$

其中 $I_3=1$ 代表 $\pi^+, I_3=0$ 代表 $\pi^0, I_3=-1$ 代表 π^-.

(2) K 介子的同位旋. 虽然 K 介子有 K^+, K^0, K^-, 但是如果认为这三种 K 介子是一组电荷三重态, 即同位旋 $I=1$, 则强相互作用中同位旋守恒将受到破坏. 后来发现 K^+ 和 K^0 是一组二重态, $\bar{K}^0$ 与 K^- 为另一组二重态. 这种规定保证了同位旋守恒. 于是有

$$I=\frac{1}{2}, \quad I_3=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),$$

其中$I_3=\frac{1}{2}$ 代表 $K^+, I_3=-\frac{1}{2}$ 代表 K^0. $(K^-, \bar{K}^0)$ 是 (K^+, K^0) 的反粒子二重态, 于是 K^- 的 $I_3=-\frac{1}{2}, \bar{K}^0$ 的 $I_3=\frac{1}{2}$.

(3) η 介子的同位旋. η 介子是一个单态, 没有其他电荷多重态. 因而有

$$I=0, \quad I_3=0.$$

(4) Λ 重子的同位旋. Λ 是一种超子 (后面将介绍这一概念), 它没有电荷多重态. 因此有

$$I=0, \quad I_3=0.$$

(5) Σ 重子的同位旋. Σ 是一个电荷三重态, 有 $\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-$. 因此选定

$$I=1, \quad I_3=(1,0,-1),$$

其中 $I_3=1$ 代表 $\Sigma^+, I_3=0$ 代表 $\Sigma^0, I_3=-1$ 代表 Σ^-.

(6) Ξ 重子的同位旋. Ξ 是一个电荷二重态, 有 Ξ^0 和 Ξ^-. 因此规定

$$I=\frac{1}{2},\quad I_3=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),$$

其中 $I_3=\dfrac{1}{2}$ 代表 Ξ^0, $I_3=-\dfrac{1}{2}$ 代表 Ξ^-.

2.3.3　同位旋的用法

同位旋与电荷、轻子数、重子数以及宇称等不同的是, 它既不是加法量子数, 也不是乘法量子数. 因此它在各种衰变与散射过程中如何使用就不是一个非常简单的问题. 下面将分几步来介绍同位旋的使用方法. 在介绍前我们必须再次明确同位旋 I 和它的第三分量 I_3 在强相互作用中是守恒的这一事实. 正因为如此它们在粒子反应中才有应用价值.

1. 应用对象

与所有具有某种守恒律的量子数一样, 同位旋主要是用在如下粒子反应过程中,

$$A_1+\cdots+A_n\to B_1+\cdots+B_m. \tag{2.3.15}$$

下面需要解说同位旋 I 及其分量 I_3 在反应式 (2.3.15) 中是如何体现出守恒性的.

首先在 2.3.2 小节中已介绍过, 每一种粒子都被标上一个同位旋 I 及其第三分量 I_3 的数值. 因此 (2.3.15) 的左、右两端粒子的 (I,I_3) 值分别记为

$$(I^{A_k},I_3^{A_k})\ (1\leqslant k\leqslant n)\ 与\ (I^{B_j},I_3^{B_j}),\quad 1\leqslant j\leqslant m.$$

反应式左端是一个 n 粒子系统 A, 右端是一个 m 粒子系统 B. 作为一个粒子系统, A 和 B 都各自具有 (I,I_3) 的值:

$$(I^A,I_3^A)\ 和\ (I^B,I_3^B),$$

所谓同位旋 I 及它的第三分量 I_3 在 (2.3.15) 中守恒是指如下两个等式分别成立:

$$I^A=I^B,\quad I_3^A=I_3^B.$$

现在最主要的问题是, I^A 与 I^{A_k} $(1\leqslant k\leqslant n)$, I^B 与 I^{B_j} $(1\leqslant j\leqslant m)$ 之间的关系并非是简单的相加关系. 因此, 接下来要做的事就是介绍多粒子系统同位旋的运算法则.

2. 同位旋的运算法则

因为任何一个 $n \geqslant 2$ 的多粒子系统都可分解成两个粒子系统的组合. 例如, $A_1 + A_2 + A_3$ 可视为 $A_1 + B$ 的组合, $B = A_2 + A_3$ 为一个双粒子系统. 因此, 我们只需介绍两个系统

$$B = A_1 + A_2$$

的同位旋运算规则即可.

令 A_1, A_2 的 (I, I_3) 值为

$$(I^1, I_3^1) \text{ 和 } (I^2, I_3^2). \tag{2.3.16}$$

此时, B 的同位旋 I^B 并非是单值对应, 而是多值对应. 即对应于 (2.3.16) 中 I^1 和 I^2, I^B 的值有两个

$$I^B = I^1 + I^2, \quad \tilde{I}^B = I^1 - I^2 \quad (\text{假设 } I^1 \geqslant I^2). \tag{2.3.17}$$

而 B 的同位旋第三分量 I_3^B 就是简单的加法:

$$I_3^B = I_3^1 + I_3^2. \tag{2.3.18}$$

上述 (2.3.18) 表明 I_3 是加法量子数, 因而关于它的守恒性的定义变得很简单. 但是由于 I 的多值性 (2.3.17), 使得关于 I 的守恒性定义必须作一些说明.

3. 同位旋 I 守恒性解释

由于 (2.3.17) 法则, 使得多粒子系统 I 具有多值性. 例如, 对于 (2.3.15) 的反应式, 左端具有 K_n 个 I 值

$$I_A^1, \cdots, I_A^{K_n}, \tag{2.3.19}$$

而右端有 K_m 个值

$$I_B^1, \cdots, I_B^{K_m}. \tag{2.3.20}$$

K_n 与 K_m 或相等, 或者有一个较大的. 不妨设 $K_n \geqslant K_m$, 则 I 被称为在 (2.3.15) 守恒, 若 (2.3.19) 中存在 K_m 个值 (不妨记为 $I_A^1, \cdots, I_A^{K_m}$), 使得分别等于 (2.3.20) 的 K_m 个值:

$$I_A^1 = I_B^1, \cdots, I_A^{K_m} = I_B^{K_m}.$$

例如, 对于下面反应式

$$\pi^- + p^+ \to \Lambda + K^0. \tag{2.3.21}$$

从 2.3.2 小节可知

$$I_\pi = 1, \quad I_p = \frac{1}{2}, \quad I_\Lambda = 0, \quad I_K = \frac{1}{2}.$$

因此 (2.3.21) 左端系统有两个 I 值, 右端有一个 I 值:

$$I_{\pi p}^{1}=\frac{1}{2},\quad I_{\pi p}^{2}=\frac{3}{2},\quad I_{\Lambda K}=\frac{1}{2}.$$

容易看到 $I_{\pi p}^{1}=I_{\Lambda K}$. 因此 I 在 (2.3.21) 式中守恒.

2.3.4　奇异数、超荷与 Gell-Mann-Nishijima 关系式

在 1947 年短暂的时期内, 物理学界普遍相信基本粒子物理的主要问题已解决了: Dirac 的正电子 e^{+} 已被找到,Yukawa π 介子与 Pauli 中微子已普遍被接受. 因此在那个时期粒子物理似乎已没有太多的事可做了.

但是就是在 1947 年年底, G. D. Rochester 和 C. C. Batler 用云雾室研究宇宙线时发现了当时觉得很奇怪的衰变现象, 一个中性的未知粒子衰变成 π^{+} 和 π^{-} 介子两个带电粒子, 形成 V 型轨迹, 称为 V^{0} 粒子. 但后来改称 K^{0} 介子, 反应式为

$$K^{0}\to\pi^{+}+\pi^{-}.$$

跟着在 1949 年 Brown 公布了 K^{+} 衰变的照片, 该反应式为

$$K^{+}\to\pi^{+}+\pi^{+}+\pi^{+}.$$

在 1950 年又一种中性 V 型粒子被 Anderson 实验小组发现, 它产生出质子 p 和 π^{-} 介子. 这个 V 型粒子被叫作 Λ 粒子, 其衰变式子如下:

$$\Lambda\to p+\pi^{-}.$$

这些粒子由于在当时的奇怪感觉而被同意命名为奇异粒子. 后来在 1952 年第一台粒子加速器被建成后, 大量奇异粒子被发现. 今天已知奇异粒子列出如下:

$$\begin{aligned}&\text{重子奇异粒子: }\Lambda,\Sigma,\Xi,\Sigma^{*},\Xi^{*},\Omega^{-};\\&\text{介子奇异粒子: }K,F.\end{aligned}\tag{2.3.22}$$

由于奇异粒子的出现, 1952 年 A. Pais 提出协同产生的观点, 认为奇异粒子在强相互作用中只能成对产生或消失. 例如

$$\begin{aligned}&\pi+p\to\Sigma^{-}+K^{+},\\&p+p\to p+\Lambda^{0}+K^{+}.\end{aligned}\tag{2.3.23}$$

实验证实了 Pais 的观点. 但是也有一些协同产生过程按理也应该发生, 但实验上却始终没有发现, 例如

$$n+n\nrightarrow\Lambda+\Lambda.\tag{2.3.24}$$

为了解释这些现象, Nishijima 在 1953 年提出奇异量子数 S 的概念. 他认为 (2.3.23) 之所以在右端奇异粒子成对出现, 是因为奇异数在强作用中守恒, 反应式的左端奇异数总和为零, 右端两个奇异粒子一个奇异数 $S=1$, 另一个 $S=-1$, 因而总和也为零. 而像 (2.3.24) 这类反应破坏了奇异数守恒, 因而它不会发生.

奇异数 S 现在已成为一个重要的量子数, 它规定

$$\text{所有通常粒子奇异数 } S=0.$$

而在 (2.3.22) 中所列的粒子奇异数 $S\neq 0$, 具体数值将由实验发现的各种反应式来确定. 在后面表 2.10 中给出每一种粒子的奇异数.

后面人们又发现, 在一些强相互作用中采用一种称为超荷 Y 的量子数要更方便一些. Y 的定义为

$$Y=S+B, \tag{2.3.25}$$

其中 B 为重子数. S 与 Y 都是加法量子数, 它们在强相互作用和电磁相互作用中都是守恒的.

根据引入的奇异量子数 (见 2.3.5 小节的表 2.10) 可以表象地总结出下面关于电荷数 Q, 同位旋第三分量 I_3, 重子数 B. 以及奇异数 S 的公式, 称为 Gell-Mann-Nashijima 关系式

$$Q=I_3+\frac{B}{2}+\frac{S}{2}. \tag{2.3.26}$$

由 (2.3.25), (2.3.26) 也可等价地写作

$$Q=I_3+\frac{1}{2}Y. \tag{2.3.27}$$

对于非奇异强子, $S=0$, 公式 (2.3.26) 可简化为

$$Q=I_3+\frac{B}{2}.$$

而对于非奇异介子, 如 π 介子, $S=0, B=0$. 因而有

$$Q=I_3.$$

2.3.5 强子的量子数表

掌握粒子特性在于了解它们的量子数、守恒律以及衰变和散射形式. 由于轻子比较简单, 它特有的量子数只有轻子数. 而强子就不同了, 它特有的量子数有: 重子数 B、奇异数 S、超荷 Y、同位旋 I、同位旋第三分量 I_3 等. 下面将各种强子的这些量子数汇总成表, 以方便读者查阅.

表 2.10　强子量子数表

粒子多重态	B	S	Y	I	I_3	粒子态	反粒子态
N (核子)	1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	p	$\bar{p}$
					$-\frac{1}{2}$	n	$\bar{n}$
Λ	1	−1	0	0	0	Λ	$\bar{\Lambda}$
Σ	1	−1	0	1	1	Σ^+	$\bar{\Sigma}^+$
					0	Σ^0	$\bar{\Sigma}^0$
					−1	Σ^-	$\bar{\Sigma}^-$
Ξ	1	−2	−1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	Ξ^-	$\bar{\Xi}^-$
					$-\frac{1}{2}$	Ξ^0	$\bar{\Xi}^0$
Δ	1	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	Δ^{++}	$\bar{\Delta}^{++}$
					$\frac{1}{2}$	Δ^+	$\bar{\Delta}^+$
					$-\frac{1}{2}$	Δ^0	$\bar{\Delta}^0$
					$-\frac{3}{2}$	Δ^-	$\bar{\Delta}^-$
Σ^*	1	−1	0	1	1	Σ^{*+}	$\bar{\Sigma}^{*+}$
					0	Σ^{*0}	$\bar{\Sigma}^{*0}$
					−1	Σ^{*-}	$\bar{\Sigma}^{*-}$
Ξ^*	1	−2	−1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	Ξ^{*-}	$\bar{\Xi}^{*-}$
					$-\frac{1}{2}$	Ξ^{*0}	$\bar{\Xi}^{*0}$
Ω	1	−3	−2	0	0	Ω^-	$\bar{\Omega}^-$
π	0	0	0	1	1	π^+	π^-
					0	π^0	π^0
					−1	π^-	π^+
K	0	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	K^+	K^-
					$-\frac{1}{2}$	K^0	$\bar{K}^0$

续表

粒子多重态	B	S	Y	I	I_3	粒子态	反粒子态
η	0	0	0	0	0	η	$\bar{\eta}$
η'	0	0	0	0	0	η'	$\bar{\eta}'$
D	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	D^+	D^-
					$-\frac{1}{2}$	D^0	$\bar{D}^0$
B	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	B^+	B^-
					$-\frac{1}{2}$	B^0	$\bar{B}^0$
ρ	0	0	0	1	1	ρ^+	ρ^-
					0	ρ^0	ρ^0
					-1	ρ^-	ρ^+
K^*	0	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	K^{*+}	K^{*-}
					$-\frac{1}{2}$	K^{*0}	$\bar{K}^{*0}$
ω	0	0	0	0	0	ω	$\bar{\omega}$
J/ψ	0	0	0	0	0	ψ	$\bar{\psi}$
D^*	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	D^{*+}	D^{*-}
					$-\frac{1}{2}$	D^{*0}	$\bar{D}^{*0}$

注 2.3 这里再次强调, 反粒子的同位旋 I 与正粒子相同, 而重子数 B、奇异数 S、超荷 Y、同位旋第三分量 I_3 等四个量子数与正粒子的符号相反.

2.4 强子结构的夸克模型

2.4.1 强子分类的 Gell-Mann-Ne'eman 八重道

从表 2.5 至表 2.8 可以看到很大数量的强子. 如果加上它们的共振态, 强子多达几百个. 这么多的强子一定会存在一些规律将它们分成若干类, 使得每一类的粒子都有某种共性.

现在强子的结构以及分类由于 $SU(3)$ 对称性已发展得十分成熟了. 这个理论

可用如下形式来表达：

$$\begin{aligned} \text{介子} &= 3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1, \\ \text{重子} &= 3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1. \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

用 (2.4.1) 表达的强子结构以及分类被称作是 $SU(3)$ 理论, 它所涉及的数学是 $SU(3)$ 不可约表示, 在 2.4.2 小节会专门介绍它的数学与物理意思.

强子的 $SU(3)$ 理论思想最早是由 Sakata 在 1956 年提出, 他主要目的是想建立强子的结构理论. 但是他所用的三个基本粒子选错了, 他用的是 n, p, Λ 这三个重子. 而事实上后来由 Gell-Mann 和 Zweig 改用三个夸克 u, d, s 取代 Sakata 的 n, p, Λ, 数学框架仍采用 $SU(3)$, 这一下整个理论就正确了.

其实在建立强子结构的夸克模型之前, Gell-Mann 和 Ne'eman 在 1961 年找到了强子分类的正确形式, 被称作是八重道. 从这个八重道以及后来增补的重子十重道理论, 再结合 $SU(3)$ 的张量积不可约表示, 很自然地就可以获得夸克模型. 下面将分别介绍这些理论以及它们的关系.

Gell-mann-Ne'eman 的八重道就是将自旋 $S = \dfrac{1}{2}$ 的八个重子

$$n, p, \Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-, \Lambda, \Xi^-, \Xi^0,$$

以及自旋 $S = 0$ 的八个介子

$$\pi^+, \pi^0, \pi^-, \eta, K^+, K^0, K^-, \bar{K}^0$$

按图 2.4 排列出的正六边形：

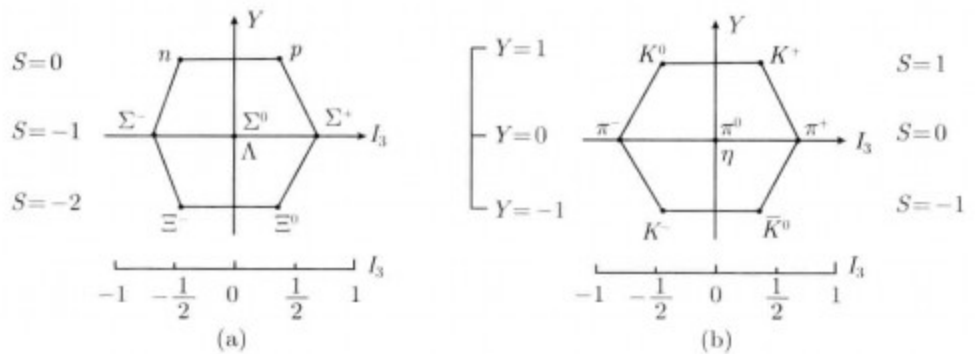


图 2.4

在图 2.4(a) 和 (b) 中可以清楚地看到每个强子按同位旋第三分量 I_3、超荷 Y, 奇异数 S 等量子数坐标有规律地进行排列. 按同样方式, 将自旋 $S = \dfrac{3}{2}$ 的十个重子

$$\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^-, \Sigma^{*+}, \Sigma^{*-}, \Sigma^{*0}, \Xi^{*0}, \Xi^{*-}, \Omega^-$$

按图 2.5 排列成一个正三角形.

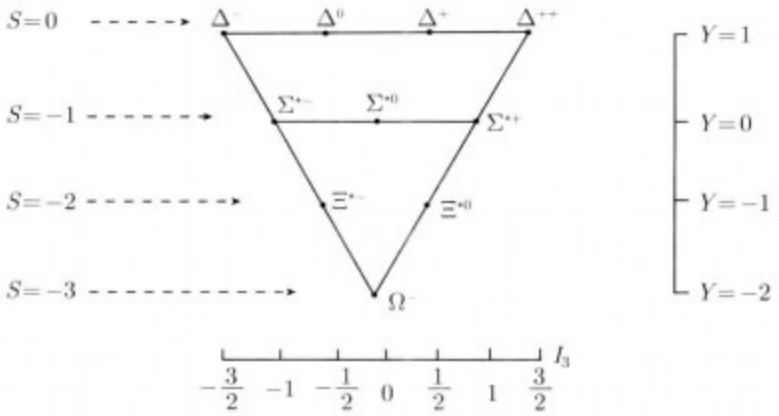


图 2.5

同样地, 表 2.8 中自旋 $S=1$ 的八个介子

$$\rho^+, \rho^0, \rho^-, K^{*+}, K^{*0}, K^{*-}, \bar{K}^{*0}, \omega$$

可以排成一个八重道.

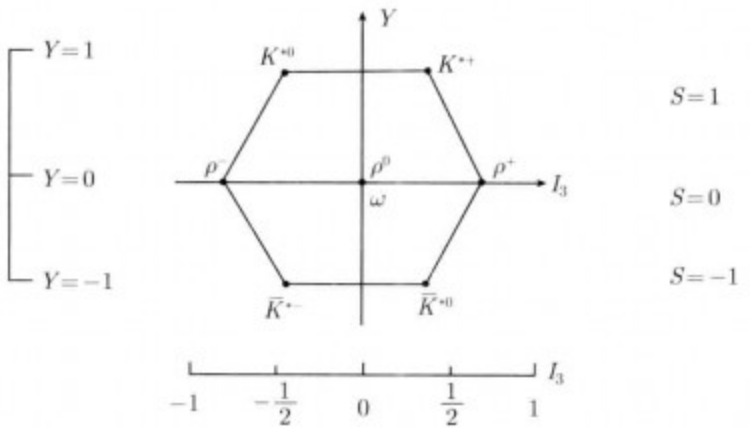


图 2.6

由图 2.4 至图 2.6 提供的强子多重态对称分布图不仅给出众多强子的一个直观并且工整的分类, 而且为后来发展的强子结构夸克模型奠定了坚实的基础. Gell-Mann 由于他的八重道以及夸克模型而获得 1969 年诺贝尔物理学奖.

2.4.2 $SU(N)$ 群表示

要想知道为什么从 Gell-Mann-Ne'eman 八重道可以直接导致夸克模型, 就必须对 $SU(N)$ 不可约表示的数学内容以及它是如何与量子物理相联系等问题有一个清楚的理解. 为此将分几个过程对此事情作一全面介绍.

1. 群表示与不可约表示概念

首先介绍群表示以及不可约表示等基本的数学概念. 令 G 是一个群, A 是某个 n 阶实或复矩阵群. G 与 A 之间的一个同态映射

$$H:\ G \to A \tag{2.4.2}$$

的像 $H(G)$ 称作 G 的一个 n 维表示. 所谓 (2.4.2) 的映射 H 是一个同态, 是指该映射 H 满足如下保乘积的条件:

$$H(g_1 \cdot g_2) = H(g_1) \cdot H(g_2), \quad \forall g_1, g_2 \in G. \tag{2.4.3}$$

因为 A 是一个具有某种性质的 n 阶矩阵构成的群. 因此对任一元素 $g \in G, H(g) \in A$ 可表示为

$$H(g) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

如果存在一个矩阵 M 使得 $M^{-1}H(g)M \in A$, 并且

$$M^{-1}H(g)M = \begin{pmatrix} H_1(g) & 0 \\ 0 & H_2(g) \end{pmatrix}, \quad \forall g \in G, \tag{2.4.4}$$

其中 $H_1(g)$ 和 $H_2(g)$ 分别是 n_1 阶和 n_2 阶矩阵, $n_1, n_2 \neq 0$, 则 $H(G)$ 称作是可约的, 否则 $H(G)$ 称为不可约的. 显然 (2.4.4) 中的 H_1, H_2 分别可视为 G 的 n_1 维与 n_2 维表示. 若 H_1 和 H_2 是不可约的, 则满足 (2.4.4) 的表示 H 可写成

$$H(G) = H_1(G) \oplus H_2(G).$$

物理上将上式称为 $H(G)$ 的不可约表示, 并简记为

$$H(G) = n_1 \oplus n_2. \tag{2.4.5}$$

注意到, (2.4.1) 中 $8 \oplus 1$ 与 $10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$ 表达式的数学内涵与 (2.4.5) 的意义是完全一样的.

2. 矩阵 A 与 B 张量积 $A \otimes B$ 的定义

在 (2.4.1) 中出现矩阵张量积 $\otimes$ 的运算符号. 这里给出两个矩阵 A 与 B 张量积的定义. 令 A 与 B 分别是 n 阶和 m 阶矩阵, 表达形式为

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix},$$

则 $A\otimes B$ 是一个 $n\cdot m$ 阶的矩阵, 写作

$$A\otimes B=\begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nn}B \end{pmatrix}, \tag{2.4.6}$$

其中 $a_{ij}B$ 是以复数 a_{ij} 乘以 B 的 m 阶块矩阵.

3. N 维基础表示 $SU(N)$ 及共轭表示 $SU(\bar{N})$

在粒子物理中, 总是习惯于直接将 $SU(N)$ 群叫作 N 维基础表示, 从而省略了群表示定义 (2.4.2) 中的定义群 G 以及同态映射 H. 实际上, 此时的 G 是

$$G=C^N \text{ 上所有保范线性算子构成的群,} \tag{2.4.7}$$

其中 C^N 是 N 维复空间. C^N 上任一保范线性映射

$$g:\ C^N\to C^N,\quad g\in G, \tag{2.4.8}$$

唯一地存在一个复正交矩阵 $U\in SU(N)$ 使得

$$g(\psi)=U\begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots\\ \psi_N\end{pmatrix},\quad \forall\psi=(\psi_1,\cdots,\psi_N)\in C^N. \tag{2.4.9}$$

于是 (2.4.8) 和 (2.4.9) 给出一个对应 $H(g)=U$, 它定义了如下同态 (实际上是一个同构, 即单一满同态):

$$H:\ G\to SU(N),\quad G \text{ 如(2.4.7).} \tag{2.4.10}$$

于是 (2.4.10) 给出 C^N 上保范变换群 G 的一个 N 维基础表示 $SU(N)$.

通常将 $SU(\bar{N})$ 称为 N 维共轭表示, 这里 $SU(\bar{N})$ 定义为

$$SU(\bar{N})=\{U^*|\ U\in SU(N)\}.$$

共轭表示 $SU(\bar{N})$ 的定义群为 G, 同态映射为

$$H^*:\ G\to SU(\bar{N}),\quad H^*(g)=U^*, \tag{2.4.11}$$

其中 U^* 是 $H(g)=U$ 的复共轭矩阵.

一般简记 $SU(N)\triangleq N, SU(\bar{N})\triangleq\bar{N}$. 此时 (2.4.1) 可具体写成

$$\begin{cases} \text{介子}=SU(3)\otimes SU(\bar{3})=8 \text{ 维表示 } \oplus 1 \text{ 维表示,} \\ \text{重子}=SU(3)\otimes SU(3)\otimes SU(3) \\ \qquad =10 \text{ 维表示 } \oplus \text{ 8 维表示} \oplus \text{ 8 维表示 } \oplus 1 \text{ 维表示.} \end{cases} \tag{2.4.12}$$

4. k 个 $SU(N)$ 张量积表示

在 (2.4.12) 中出现了多个基础表示的张量积. 或更一般地, N 个粒子的 k 重态系统的理论研究要求我们讨论 k 个基础表示 $SU(N)$ 与 $SU(\bar{N})$ 的张量积

$$\underbrace{SU(N)\otimes\cdots\otimes SU(N)}_{k_1}\otimes\underbrace{SU(\bar{N})\otimes\cdots\otimes SU(\bar{N})}_{k_2}\quad (k_1+k_2=k), \tag{2.4.13}$$

以及它的群表示问题. 换句话讲, 需要搞清楚以 (2.4.13) 作为一个群的表示, 它与 $SU(N)$ 及 $SU(\bar{N})$ 群表示 (2.4.10) 和 (2.4.11) 之间的关系是怎样的. 为了简单, 仍用

$$\underbrace{N\otimes\cdots\otimes N}_{k_1}\otimes\underbrace{\bar{N}\otimes\cdots\otimes\bar{N}}_{k_2},\quad k_1+k_2=k \tag{2.4.14}$$

代表 (2.4.13) 的张量积群.

事实上, 由 (2.4.10) 和 (2.4.11) 可直接诱导出如下同态:

$$H_{k_1}^{k_2}:\ G\to\underbrace{N\otimes\cdots\otimes N}_{k_1}\otimes\underbrace{\bar{N}\otimes\cdots\otimes\bar{N}}_{k_2}, \tag{2.4.15}$$

它可由 (2.4.10) 和 (2.4.11) 的同态 H 与 H^* 表达如下:

$$H_{k_1}^{k_2}(g)=\underbrace{H(g)\otimes\cdots\otimes H(g)}_{k_1}\otimes\underbrace{H^*(g)\otimes\cdots\otimes H^*(g)}_{k_2}. \tag{2.4.16}$$

对于 $k=2$ 的情况, 由 (2.4.6) 的定义, 直接计算便可验证 $H_2:G\to N\otimes N$ 满足 (2.4.3) 的乘积条件, 即

$$\begin{aligned}H_2(g_1\cdot g_2)&=[H(g_1)\cdot H(g_2)]\otimes[H(g_1)\cdot H(g_2)]\\&=(H(g_1)\otimes H(g_1))\cdot(H(g_2)\otimes H(g_2))\\&=H_2(g_1)\cdot H_2(g_2).\end{aligned}$$

于是归纳地便可证得 (2.4.15)-(2.4.16) 是一个同态.

注 2.4　由 (2.2.7) 定义的 G 群按 (2.4.10) 的同构可视为

$$G=SU(N)\triangleq N.$$

按张量的观点, $SU(N)$ 群中的每一个元素可看成一个二阶协变张量 $SU(\bar{N})$ 中的元素便是二阶反变张量. 这样,

$$\underbrace{N\otimes\cdots\otimes N}_{k_1}\otimes\underbrace{\bar{N}\otimes\cdots\otimes\bar{N}}_{k_2},\quad k_1+k_2=k$$

是一个 $(2k_1, 2k_2)$ 型的 $2k$ 阶张量空间. 于是 (2.4.15)-(2.4.16) 的表示就等价于两个张量空间的同构:

$$H_{k_1}^{k_2}:\ N \to \underbrace{N \otimes \cdots \otimes N}_{k_1} \otimes \underbrace{\bar{N} \otimes \cdots \otimes \bar{N}}_{k_2}.$$

5. $SU(N)$ 的不可约表示

现在先撇开 (2.4.12) 的物理含义不管, 单就它所表达的数学意思已没有障碍. 但是在那里有一个问题, 那就是为什么有这样的等式:

$$3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1, \quad 3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1. \tag{2.4.17}$$

实际上, 这两个等式是由数学定理保证的. 在数学上, 关于 (2.4.15)-(2.4.16) 的表示, 有一个称为 Young 图的方法, 通过这个方法可以算出它的不可约表示. (2.4.17) 就是两个例子. 此外, 另两个在物理上也很重要的不可约表示为

$$4 \otimes \bar{4} = 15 \oplus 1, \quad 4 \otimes 4 \otimes 4 = 20 \oplus 20 \oplus 20 \oplus 4. \tag{2.4.18}$$

在接下来的 2.4.3 小节中, 将给出 Young 图的计算方法.

2.4.3 $SU(N)$ 不可约表示的物理解释与 Young 图计算

在 2.4.1 小节中介绍了 Gell-Mann-Ne'eman 关于强子的八重道分类理论, 它是用图 2.4~ 图 2.6 将每一类强子按它们的量子数有规律地排成正六边形和正三角形. 每一类的粒子数是 8 个或 10 个. 再注意 $SU(3)$ 的不可约表示的 (2.4.17) 表达式. 在那里 8 与 10 是不可约表示的基本维数. 这不是一种巧合. 八重道分类的每一类粒子数与 $SU(3)$ 不可约表示维数的这种联系首先是由 Sakata 关于 $SU(N)$ 不可约表示的物理解释而被揭示出来. 随后 Gell-Mann 和 Zweig 应用这种关系表象地提出强子的三夸克 (u, d, s) 结构理论, 非常成功地解释了八重道的分类机制. 后来粲克 c 的发现, 使得 $SU(N)$ 的基底数由 $N = 3$ 扩展到 $N = 4$, 粒子物理同样展现出 $SU(4)$ 分类方案的正确性.

下面首先给出 $SU(N)$ 不可约表示的 Sakata 物理解释. 然后再介绍 $SU(N)$ 不可约表示的 Young 图计算方法.

1. $SU(N)$ 不可约表示的 Sakata 解释

首先, $SU(N)$ 中的 N 在粒子物理中代表 N 个粒子, 记

$$e_1, \cdots, e_N \text{ 代表 } N \text{ 个粒子波函数.} \tag{2.4.19}$$

它们的复线性组合集合构成 C^N 空间, 即

$$C^N = \left\{ \sum_{k=1}^{N} z_k e_k |\ z_k \in C,\ 1 \leqslant k \leqslant N \right\}.$$

C^N 构成 (2.4.19) 的 N 个粒子所有可能的状态空间. $SU(N)$ 的基础表示 (2.4.10) 实际上就是将 $SU(N)$ 与 C^N 上所有保范线性映射群 G 等同起来, 即 N 维基础表示的数学含义就是

$$G = SU(N).$$

此时 $SU(N)$ 中每一个元素 U 是一个线性变换

$$U = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{N1} & \cdots & \alpha_{NN} \end{pmatrix} :\ C^N \to C^N, \tag{2.4.20}$$

它的物理意义代表 N 个粒子物理状态之间的转换. 特别地, 对每个 $U \in SU(N)$, 下面 N 个元素 $\{\bar{e}_1, \cdots, \bar{e}_N\}$,

$$\bar{e}_j = Ue_j, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, e_N = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.4.21}$$

表示由 $\{e_1, \cdots, e_N\}$ 变换成 N 个可能的新粒子.

其次, 如果一个更高层次的粒子系统是由 $\{e_1, \cdots, e_N\}$ 中 k 个粒子复合而成, 就如图 1.6 所示的那样, 那么这个新粒子系统就有 N^k 种可能的粒子, 并且

$$e_{j_1} \cdots e_{j_{k_1}} \bar{e}_{i_1} \cdots \bar{e}_{i_{k_2}}\ (1 \leqslant j_1, \cdots, j_{k_1}, i_1, \cdots, i_{k_2} \leqslant N), \quad k_1 + k_2 = k \tag{2.4.22}$$

代表这 N^k 个粒子波函数. 于是它们的复线性组合空间为

$$C^N \otimes \cdots \otimes \bar{C}^N = \left\{ \sum_{1 \leqslant j_1, \cdots, j_k \leqslant N} z_{j_1 \cdots j_k} e_{j_1} \cdots \bar{e}_{j_k} |\ z_{j_1 \cdots j_k} \in C \right\}. \tag{2.4.23}$$

同样, (2.4.23) 给出的 N^k 维复空间

$$C^{N^k} = C^N \otimes \cdots \otimes \bar{C}^N \quad (k \text{ 个张量积})$$

包含了 (2.4.22) 粒子系统所有可能的物理状态.

此时, (2.4.19) 的 k 个粒子复合产生的新粒子状态空间 C^{N^k} 的线性变换由 (2.4.15) 表示给出, 即对每一个 $U \in SU(N)$, 对应地在新粒子态之间诱导出一个线性变换

$$H_{k_1}^{k_2}(U):\ C^{N^k} \to C^{N^k}, \tag{2.4.24}$$

这里 $H_{k_1}^{k_2}(U) \in N \otimes \cdots \otimes \bar{N}$ (k 重张量积) 表达为

$$H_{k_1}^{k_2}(U) = \underbrace{U \otimes \cdots \otimes \bar{U}}_{k} \tag{2.4.25}$$

是一个 N^k 阶复矩阵.

我们再次回忆 k 个 $SU(N)$ 群表示 $SU(N) \otimes \cdots \otimes SU(\bar{N})$ 的不可约表示的数学含义. 令不可约表示为

$$\underbrace{N \otimes \cdots N \otimes \bar{N} \cdots \otimes \bar{N}}_{k} = n_1 \oplus \cdots \oplus n_m \quad \left(\sum_{j=1}^{m} n_j = N^k\right), \tag{2.4.26}$$

则 (2.4.26) 意味着存在一个 N^k 阶复矩阵 M, 使得 (2.4.25) 矩阵 $H_{k_1}^{k_2}(U)$ 可分解成如下形式:

$$MH_{k_1}^{k_2}(U)M^{-1} = \begin{pmatrix} A_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{n_m} \end{pmatrix}, \quad \forall\, U \in SU(N), \tag{2.4.27}$$

式中每个 $A_{n_j} = A_{n_j}(U)$ 是一个 n_j 阶的复矩阵.

现在可以陈述 $SU(N)$ 不可约表示 (2.4.26) 的物理解释.

2. $SU(N)$ 不可约表示的 Sakata 解释

若 (2.4.22) 是由 N 个粒子 $\{e_1, \cdots, e_N\}$ 中的 k 个复合而成的粒子系统, 则 $SU(N)$ 的不可约表示 (2.4.26) 代表着这个新粒子系统 (2.4.22) 可以分成 m 个类 $G_1, \cdots, G_m$, 使得每一类 G_j 中含有 n_j 个不同粒子 $(1 \leqslant j \leqslant m), n_j$ 如 (2.4.26) 是不可约维数. 当然对于 $i \neq j$, 可以允许 $G_i = G_j$. 这里 $SU(\bar{N})$ 代表反粒子的表示.

下面分析这个观点. 由线性代数知识, (2.4.27) 的意思就是若对于 C^{N^k} 的基底

$$B = (E_1, \cdots, E_{N^k}), \quad E_l = e_{j_1} \cdots e_{j_{k_1}} \bar{e}_{i_1} \cdots \bar{e}_{i_{k_2}}$$

作如下变换:

$$\tilde{B} = M \begin{pmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_{N^k} \end{pmatrix}, \quad M \text{ 如 (2.4.27) 中矩阵}, \tag{2.4.28}$$

则在新的基底 $\tilde{B}$ 下, (2.4.24) 的线性映射变为

$$\begin{pmatrix} A_{n_1}(U) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{n_m}(U) \end{pmatrix} : C^{N^k} \to C^{N^k}, \quad \forall U \in SU(N), \tag{2.4.29}$$

这意味着 (2.4.28) 的新基底 $\tilde{B} = (\tilde{E}_1, \cdots, \tilde{E}_{N^k})^{\mathrm{T}}$ 被分解成 m 个子基底 $\tilde{B}_1, \cdots, \tilde{B}_m$,

$$\tilde{B}_1 = (\tilde{E}_1, \cdots, \tilde{E}_{n_1}), \cdots, \tilde{B}_j = \{\tilde{E}_{k_j+1}, \cdots, \tilde{E}_{k_j+n_j}), \quad k_j = \sum_{i=1}^{j-1} n_i,$$

使得每个 $\tilde{B}_j$ 张成的 n_j 维复空间

$$C^{n_j} = \text{span } \tilde{B}_j$$

在 (2.4.29) 变换下是不变的, 即 (2.4.29) 中的子矩阵 $A_{n_j}(U)$ 是 C^{n_j} 上的线性变换算子

$$A_{n_j}(U) : C^{n_j} \to C^{n_j} \ (1 \leqslant j \leqslant m), \quad \forall U \in SU(N). \tag{2.4.30}$$

前面已说过, 基底 $\tilde{B}$ 中每一个组元 $\tilde{E}_j$ $(1 \leqslant j \leqslant N^k)$ 代表一个粒子. 因此 (2.4.29) 可解释为: 由基本粒子 $\{e_1, \cdots, e_N\}$ 复合而成的粒子系统 (2.4.22) 经过 (2.4.28) 的组合变为一组新的粒子系统 $\{\tilde{E}_1, \cdots, \tilde{E}_{N^k}\}$, 它们被分成 m 个类

$$G_j = \{\tilde{E}_{k_j+1}, \cdots, \tilde{E}_{k_j+n_j}\}, \quad k_j = \sum_{i=1}^{j-1} n_i, \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{2.4.31}$$

使得基本粒子 $\{e_1, \cdots, e_N\}$ 在 (2.4.20) 的任意 $U \in SU(N)$ 变换下, G_j 类的粒子状态按 (2.4.30) 方式在它们内部进行变换, 不同的 G_i 与 G_j 类之间不相关联. 于是由 (2.4.31) 给出新粒子系统 $\{\tilde{E}_1, \cdots, \tilde{E}_{N^k}\}$ 一个分类. 这就是上述 $SU(N)$ 不可约表示 Sakata 解释的依据.

注 2.5　由 (2.4.15)-(2.4.16) 给出的群表示 $H_{k_1}^{k_2}(U)$ 与基础表示 (2.4.10) 的 $H(g) = U$ 有如下相关性质. 当 C^N 基底作如下变换时,

$$\tilde{e} = Ae, \quad e = (e_1, \cdots, e_N)^{\mathrm{T}} \tag{2.4.32}$$

作为 C^N 上的线性映射, U 将发生变换

$$\tilde{U} = AUA^{-1}. \tag{2.4.33}$$

此时由于 $H_{k_1}^{k_2}(U)$ 是同态, 因此有

$$\tilde{H}_{k_1}^{k_2} = BH_{k_1}^{k_2}B^{-1}, \quad B = H_{k_1}^{k_2}(A). \tag{2.4.34}$$

从 (2.4.6) 关于矩阵张量积的定义及 (2.4.16) 关于 $H_{k_1}^{k_2}$ 的表达式, 不难验证, 不存在复矩阵 A(A 不要求在 $SU(N)$ 中), 在 (2.4.32) 变换下使得 (2.4.34) 的 $\tilde{H}_{k_1}^{k_2}$ 变成 (2.4.27) 那种不可约表示的形式. 即不存在 A 使得 (2.4.27) 中的 $M = H_{k_1}^{k_2}(A)$.

接着的问题就是, 对每一个如 (2.4.14) 的表示计算出它的不可约表示. 下面介绍的 Young 图方法便可解决这个问题.

3. $SU(N)$ 不可约表示的 Young 图计算

$SU(N)$ 不可约表示的 Young 图计算是用方块图来算出不可约表示的具体表达式. 它分为两个步骤. 第一个步骤是给出方块拼接规则, 拼出如 (2.4.26) 等式右端有 m 个图形的直和如下形式:

$$N \otimes \cdots \otimes \bar{N} = \boxed{1} \otimes \boxed{2} \otimes \cdots \otimes \boxed{m}, \tag{2.4.35}$$

从而求出直和分解的个数 m. 第二个步骤给出 (2.4.35) 右端每个图形所代表的不可约维数 n_j 计算法则, 并且

$$\text{计算 (2.4.35) 图形 } \boxed{j} \text{ 所代表 } A_{n_j} \text{ 的维数 } n_j, \tag{2.4.36}$$

这里 A_{n_j} 是 (2.4.27) 中的对角块矩阵, 从而得到不可约表示 (2.4.26).

第一步. 给出等式 (2.4.35) 拼接法则. 首先在 Young 图方法中, 用一个方块代表 $SU(N)$ 基础表示 N:

$$N = \square,$$

用一列 $N-1$ 个方块代表共轭表示 $\bar{N}$:

$$\bar{N} = \left.\begin{array}{c}\square\\ \square\\ \square\end{array}\right\}_{N-1},$$

这样 (2.4.35) 左端可用下面具体例子来说明它的表达:

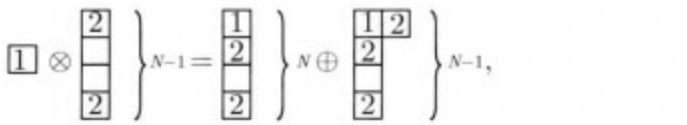
$$\begin{aligned}
&N \otimes N = \square \otimes \square,\\
&N \otimes \bar{N} = \square \otimes \left.\begin{array}{c}\square\\ \square\\ \square\end{array}\right\}_{N-1},\\
&N \otimes N \otimes N = \square \otimes \square \otimes \square,\\
&N \otimes N \otimes \bar{N} = \square \otimes \square \otimes \left.\begin{array}{c}\square\\ \square\\ \square\end{array}\right\}_{N-1},\\
&N \otimes \bar{N} \otimes \bar{N} = \square \otimes \left.\begin{array}{c}\square\\ \square\\ \square\end{array}\right\} \otimes \left.\begin{array}{c}\square\\ \square\\ \square\end{array}\right\}_{N-1}
\end{aligned} \tag{2.4.37}$$

等如此下去.

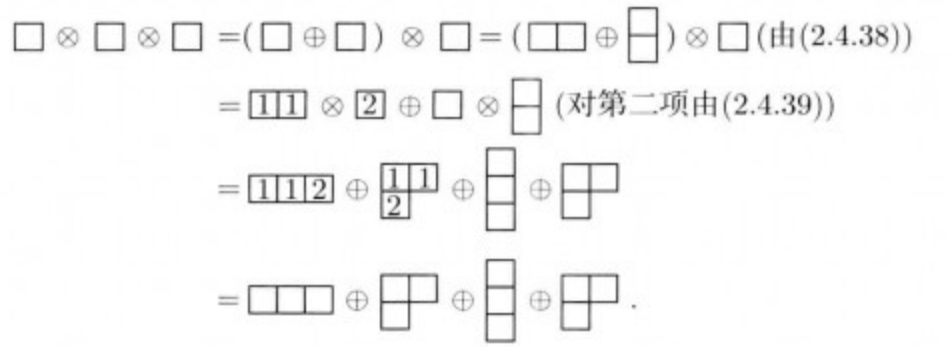
再给出 (2.4.37) 等式右端图形 $\otimes$ 的拼接规则如下:



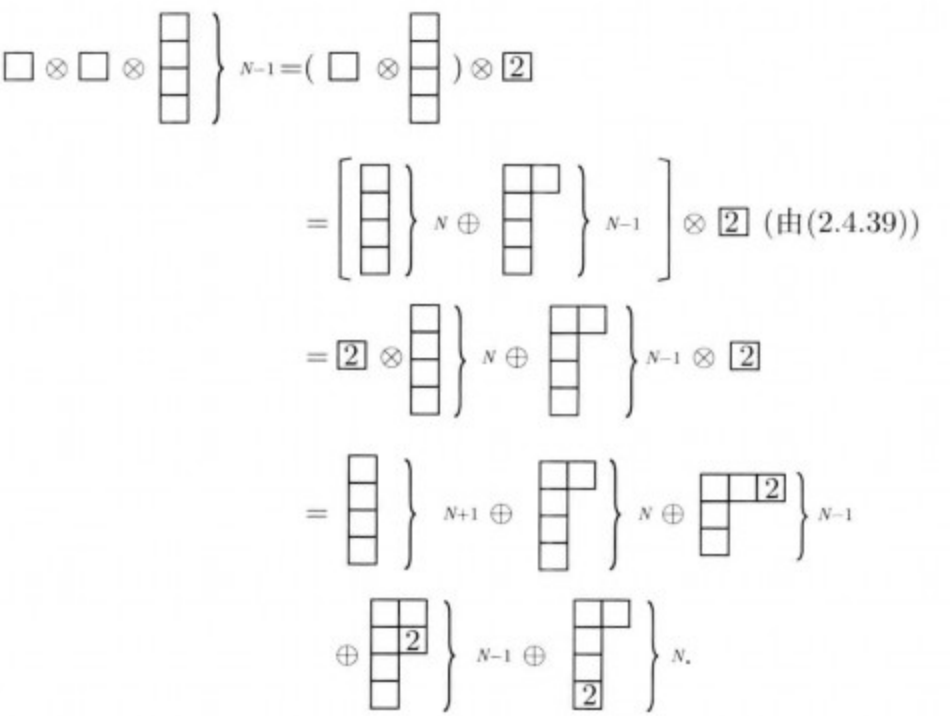
(2.4.38)



(2.4.39)



(2.4.40)



(2.4.41)

正反粒子在群表示上是共轭关系, 即若

$$\underbrace{N\otimes\cdots\otimes N}_{k_1}\otimes\underbrace{\bar{N}\otimes\cdots\otimes\bar{N}}_{k_2}$$

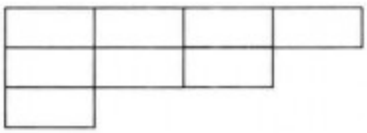
代表正粒子, 则它的共轭

$$\underbrace{\bar{N}\otimes\cdots\otimes\bar{N}}_{k_1}\otimes\underbrace{N\otimes\cdots\otimes N}_{k_2}$$

代表反粒子. 由于正反粒子对称, 以及复合粒子最多三个, 因此 (2.4.38)-(2.4.41) 给出了所有可能的真实物理系统 $SU(N)$ 群表示 Young 图拼接规则.

第二步. 进行 (2.4.36) 的计算. Young 图 (2.4.38)-(2.4.41) 表达式右端每一个图形对应一个整数, 它代表了一个不可约表示的维数. 它的计算法则如下.

例如, 对于下面 Young 图



(2.4.42)

它所代表的 $SU(N)$ 不可约表示的维数 n 由下面公式给出

$$n=\alpha_N/\beta_N, \tag{2.4.43}$$

其中 α_N 的计算方法是先在 (2.4.42) 表格按如下规律填上数字

N	$N+1$	$N+2$	$N+3$
$N-1$	N	$N+1$	
$N-2$			

(2.4.44)

然后 α_N 等于 (2.4.44) 中所有数字的乘积

$$\alpha_N=N(N+1)(N+2)(N+3)(N-1)N(N+1)(N-2). \tag{2.4.45}$$

β_N 的计算方法是在 (2.4.42) 表格按下面规则填数,

6	4	3	1
4	2	1	
1			

(2.4.46)

其中每个表格中的数值等于该方格的右边以及该方格下方的所有方格数之和再加 1. 例如, (2.4.46) 标有 6 字的方格, 其右边有 3 个方格, 下方有 2 个, 因此数值为 3+2+1=6. 然后 β_N 取 (2.4.46) 中所有方格数值的乘积

$$\beta_N=6\times4\times3\times1\times4\times2\times1\times1. \tag{2.4.47}$$

于是根据 (2.4.45) 和 (2.4.47), 由 (2.4.43) 求出 (2.4.42)Young 图的数值 n.

根据以上规则, 很容易由 (2.4.39) 和 (2.4.41) 得到 (2.4.17) 和 (2.4.18) 这两组物理上很重要的 $SU(3)$ 和 $SU(4)$ 的不可约表示.

2.4.4　Sakata 的 $SU(3)$ 方案

由于大量强子的发现, Sakata 根据 $SU(3)$ 不可约表示

$$3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1, \tag{2.4.48}$$

试图对强子建立分类理论以及结构模型, 被称之为 Sakata $SU(3)$ 方案. 正是这个方案蕴含了 2.4.3 小节介绍的 $SU(N)$ 不可约表示的物理解释, 从而导致八重道分类以及夸克模型.

Sakata 的 $SU(3)$ 方案建议用三个粒子

$$p, n, \Lambda,$$

作为构成强子的基本粒子 (当时并不清楚它们不是基本粒子), 它们构成 $SU(3)$ 的基底. 对照表 2.11 与表 2.12 可以清楚地看到用这三个粒子作基本粒子能够很好的解释各种介子的构成. 按照 (2.4.48) 基础表示, 用 p, n, Λ 作基底, 可以作出图 2.7 所示的介子八重态

$$\pi^+, \pi^0, \pi^-, K^+, K^-, K^0, \bar{K}^0, \eta$$

所显示的八重道.

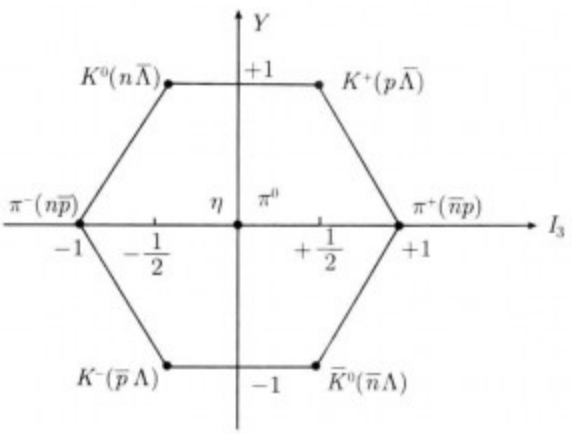


图 2.7

三个粒子 p, n, Λ 的量子数列成表 2.11 如下.

表 2.11

Sakata 粒子	I	I_3	Q	S	B
p	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+1$	0	$+1$
n	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$+1$
Λ	0	0	0	-1	$+1$

由 Sakata 粒子组成的介子量子数列成表 2.12 如下.

在表 2.12 中 J^p 的 J 代表自旋, p 代表宇称, 因此 $J^p = 0^-$ 表示自旋 $J = 0$, 宇称 $P = -1$.

表 2.12

		对应介子	I	I_3	Q	$Y = S$	J^p	质量 (MeV)
三重态	$p\bar{n}$	π^+	1	+1	+1	0	0^-	~ 140
	$-\bar{p}n$	π^-	1	−1	−1	0	0^-	~ 140
	$\dfrac{n\bar{n} - p\bar{p}}{\sqrt{2}}$	π^0	1	0	0	0	0^-	~ 140
二重态	$p\bar{\Lambda}$	K^+	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	+1	1	0^-	~ 495
	$n\bar{\Lambda}$	K^0	$\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{1}{2}$	0	1	0^-	~ 495
二重态	$\Lambda\bar{n}$	$\bar{K}^0$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	0	−1	0^-	~ 495
	$\Lambda\bar{p}$	$\bar{K}^-$	$\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{1}{2}$	−1	−1	0^-	~ 495
单态	$\dfrac{n\bar{n} + p\bar{p} - 2\Lambda\bar{\Lambda}}{\sqrt{6}}$	η	0	0	0	0	0^-	~ 548
单态	$\dfrac{n\bar{n} + p\bar{p} + \Lambda\bar{\Lambda}}{\sqrt{3}}$	η'	0	0	0	0	0^-	~ 958

Sakata 模型能够很好地解释介子的组成, 但是用这个模型来解释重子时出现了困难. 因为用三个 Sakata 粒子去组成重子时, 重子数 $B = 3$. 因此只能认为是两个 Sakata 粒子和一个反 Sakata 粒子去组成重子以保证重子数 $B = 1$. 但这种组合在其他方面遇到与现实不吻合的困难.

2.4.5 Gell-Mann-Zweig 夸克模型

由于表象上 $SU(3)$ 的不可约表示 (2.4.1) 中介子的 8 维表示恰好与图 2.4(b) 和图 2.6 展示的介子八重道分类图相吻合, 而重子的 8 维和 10 维表示与重子分类图 2.6(a) 及图 2.5 相吻合. $SU(N)$ 不可约表示的 Sakata 解释很容易使人产生 $SU(3)$ 的 3 维基底代表组成强子的三个更基本粒子. 于是 Gell-Mann 和 Zweig 在 1964 年在八重道分类基础上, 根据 $SU(3)$ 的不可约表示 (2.4.1), 分别独立提出了强子结构的夸克模型. 他们认为强子是由三种更基本的粒子构成, Gell-Mann 称之为夸克 (quark), 而 Zweig 称之为 aces. 这三个夸克被记为

$$u \text{ 夸克、} d \text{ 夸克、} s \text{ 夸克.}$$

用这三个夸克来取代 Sakata 三个重子 (p, n, Λ) 便能很好地解释所有已知的介子与

重子结构.

建立夸克模型首先便是要确定 (u,d,s) 的量子数如下.

(1) u,d,s 必须是自旋 $J=\dfrac{1}{2}$ 的 Fermi 子. 其原因是夸克与反夸克构成的粒子是介子. 它们是 Bose 子, 而由三个夸克组成的粒子是重子, 为 Fermi 子, 即

介子自旋: $\uparrow\downarrow$ $(J=0)$, $\uparrow\uparrow$ $(J=1)$, $\downarrow\downarrow$ $(J=-1)$,

重子自旋: $\uparrow\uparrow\downarrow$ $\left(J=\dfrac{1}{2}\right)$, $\uparrow\downarrow\downarrow$ $\left(J=-\dfrac{1}{2}\right)$,

$\uparrow\uparrow\uparrow$ $\left(J=\dfrac{3}{2}\right)$, $\downarrow\downarrow\downarrow$ $\left(J=-\dfrac{3}{2}\right)$.

(2) 由于 (p,n,Λ) 在描述介子方面的成功, 在奇异数 S 和同位旋 (I,I_3) 方面, u 与 p 相同, d 与 n 相同, s 与 Λ 相同, 即

$$u:\ (S,I,I_3)=\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\quad d:(S,I,I_3)=\left(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),$$
$$S:\ (S,I,I_3)=(-1,0,0).$$

(3) u,d,s 的重子数应该为 $\dfrac{1}{3}$:

$$u:\ B=\frac{1}{3},\quad d:\ B=\frac{1}{3},\quad s:\ B=\frac{1}{3}.$$

(4) 对于夸克, Gell-Mann-Nishijima 关系式

$$Q=I_3+\frac{B}{2}+\frac{S}{2}$$

仍应该成立. 因而求得电荷数 Q 为

$$u:\ Q=\frac{2}{3},\quad d:\ Q=-\frac{1}{3},\quad s=-\frac{1}{3}.$$

(5) 宇称值被定为 $P=1$,

$$u:\ P=1,\quad d:\ P=1,\quad s:\ P=1.$$

由上述 (1)~(5) 可将 u,d,s 三个夸克量子数汇总成表 2.13.

表 2.13　u,d,s 夸克量子数表

夸克	B	I	I_3	Q	S	Y	J	P
u	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+1$
d	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+1$
s	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+1$

根据表 2.13 的夸克量子数便可根据介子的夸克组合方式 $q\bar{q}$ 与重子的组合方式 qqq 求出每一个组合的量子数, 从而与每个介子与重子对应上. 例如, 夸克组合 uud 的量子数为

$$uud:\ B=1,\ Q=1,\ S=0,\ J=\frac{1}{2},\ I=\frac{1}{2},\ I_3=\frac{1}{2}.$$

与此量子数相吻合的重子是 p. 从而确定

$$p=uud.$$

用同样的方式可将每个强子的夸克组合方式确定下来, 具体每个强子的夸克组合可见表 2.5 至表 2.8. 在那里出现几个线性组合态如下:

$$\begin{aligned}
\text{介子}:\quad & \pi^0=\frac{u\bar{u}-d\bar{d}}{\sqrt{2}},\quad \rho^0=\frac{u\bar{u}-d\bar{d}}{\sqrt{2}},\\
& \omega=\frac{u\bar{u}+d\bar{d}}{\sqrt{2}},\quad \eta=\frac{u\bar{u}+d\bar{d}-2s\bar{s}}{\sqrt{6}},\\
& \eta'=\frac{u\bar{u}+d\bar{d}+s\bar{s}}{\sqrt{3}}.\\
\text{重子}:\quad & \Lambda=\frac{sdu-sud}{\sqrt{2}},\quad \Sigma^0=\frac{sdu+sud}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

出现这种情况是由于考虑到这些粒子没有相对运动角动量 (即 $l=0$) 而作的线性组合, 以保证它们的 $l=0$.

强子的夸克结构理论是由 $SU(3)$ 不可约表示的 Sakata 解释所启发的. 但是我们注意到重子八重道分类方案中只有一个十重态, 一个八重态和一个单态, 而下面不可约表示

$$3\otimes 3\otimes 3=10\oplus 8\oplus 8\oplus 1,$$

有两个 8 维不可约表示, 因此有一个 8 维不可约表示没有相应的重子与此对应. 这说明 $SU(N)$ 不可约表示的粒子结构与分类并非是一个严格准确的数学方案. 但是以此为基础产生的最终结果, 夸克理论是正确的, 它经得起实验检验.

在 1974 年丁肇中和 Richter 领导的两个实验小组分别独立地发现了 J/ψ 粒子. 它意味着一个新夸克, 粲夸克 c 被证实存在. 从而强子分类可由 $SU(3)$ 扩充到由 4 个夸克

$$u,d,s,c$$

作基底的 $SU(4)$ 不可约表示分类方案

$$4\otimes\bar{4}=15\oplus 1, \tag{2.4.49}$$

$$4 \otimes 4 \otimes 4 = 20 \oplus 20 \oplus 20 \oplus 4. \tag{2.4.50}$$

这样就应将 $SU(3)$ 强子扩充为与 (2.4.49) 和 (2.4.50) 不可约表示对应的带粲夸克的粒子: 粲介子与粲重子族.

对应于 (2.4.49) 的 15 个介子族已被证实, 它们是表 2.7 中所列出的前面 15 个介子:

$$\pi^{\pm}, \pi^0, K^{\pm}, K^0, \bar{K}^0, \eta, \eta', D_0, \bar{D}_0, D^{\pm}, D_s^{\pm}.$$

但是对应于 (2.4.50) 不可约表示的重子族仍有很多空缺.

随后, b 夸克和 t 夸克的发现, 使得 $SU(5)$ 与 $SU(6)$ 不可约表示理论出现的不准确现象更为严重. 总之, 夸克理论是一个表象理论, 它所依据的 $SU(N)$ 不可约表示数学方案只能作为一个催化剂, 而不能作为一个严格的理论基础.

2.5　基本粒子的弱子模型

2.5.1　衰变意味着内部结构

在 2.2 节和 2.3 节中我们已看到亚原子粒子衰变. 它们意味着所有带电轻子、夸克、媒介子都能够发生衰变. 举例如下.

- 带电轻子衰变:

$$\begin{aligned} &e^- \to e^- + \gamma \quad (\text{韧致辐射}),\\ &\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu,\\ &\tau^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau. \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

- 夸克衰变:

$$\begin{aligned} &d \to u + e^- + \bar{\nu}_e,\\ &s \to d + \gamma,\\ &c \to d + u + \bar{s}. \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

- 媒介子衰变:

$$\begin{aligned} &2\gamma \to e^+ + e^-,\ q + \bar{q} \quad (\text{正反粒子对创生}),\\ &w^+ \to l^+ + \nu_l \quad (l^+ \text{ 为带正电轻子}),\\ &w^- \to l^- + \bar{\nu}_l \quad (l^- \text{ 为带负电轻子}),\\ &z^0 \to l^+ + l^-. \end{aligned} \tag{2.5.3}$$

所以轻子、夸克和媒介子在当今粒子物理被视为基本粒子. 然而由 (2.5.1)-(2.5.3) 展示的衰变表明这些粒子有内部结构, 因而它们应该被认为是复合粒子而并非是基本粒子. 换句话讲, 有如下结论:

衰变意味着内部结构.

正是在该结论的驱动下, 我们在 (Ma, Wang, 2013b) 中建立了关于基本粒子的弱子模型. 这一节将专门介绍这一理论.

2.5.2 基本粒子的理论基础

我们发展的弱子模型是建立在下面的理论基础之上的: 角动量规则, 关于质量产生的一种新机制, 相互作用荷理论, 强作用势公式, 弱作用势公式. 除了质量生成机制外, 其他四个理论在第 1 章中已作过介绍. 为了方便我们在下面将分别给予阐述.

1. 角动量规则

1.4.6 小节从 Dirac 方程推出只有自旋 $J=\dfrac{1}{2}$ 的粒子才能够做零力矩的转动运动. 它的结论如下:

仅有自旋 $J=\dfrac{1}{2}$ 的 Fermi 子才可以在零力矩条件下绕一个中心做圆周运动. 而 $J\neq\dfrac{1}{2}$ 的粒子只能做直线运动, 除非有一个非零力矩存在.

例如, 如图 2.8(a) 和 (b) 所示的束缚在一个球体内绕中心做零力矩圆周运动的粒子一定是 $J=\dfrac{1}{2}$ 的 Fermi 子.

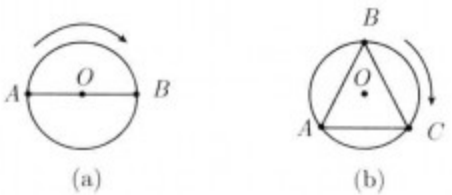


图 2.8 (a) 两个粒子 A,B 绕中心 O 转动; (b) 三个粒子 A,B,C 处在等边三角形顶点上绕中心 O 转动

2. 质量产生机制

一个以速度为 v 进行运动的粒子, 它的质量 m 和能量 E 满足下面 Einstein 关系式:

$$E=mc^2/\sqrt{1-v^2/c^2}. \tag{2.5.4}$$

通常人们将质量 m 视为静止质量是固定的, 能量 E 是运动速度 v 的函数. 而现在我们反过来, 将 E 视为粒子固有能量不变, 而质量 m 是速度 v 的函数, i.e. 关系式 (2.5.4) 改写为

$$m=\sqrt{1-v^2/c^2}E/c^2. \tag{2.5.5}$$

于是, (2.5.5) 意味着一个固有能量为 E 的粒子, 若它以光速 c 进行运动, 则有零质量 $m=0$; 若它以低于光速的速度 $v<c$ 进行运动, 则具有非零质量.

这里认为所有粒子, 包括光子, 它们的运动速度只能充分接近光速 (以光速为极限), 而不能绝对达到光速. 根据这个观点, 由相对论力学公式

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\sqrt{1-v^2/c^2}\,\vec{F}, \\ \vec{P}=m\,\vec{v}\,/\sqrt{1-v^2/c^2}, \end{cases} \tag{2.5.6}$$

如果一个以接近光速运动的粒子在外力 $\vec{F}$ 作用下被减速, 则这个无质量的粒子将会产生瞬时质量. 这便是质量产生的机制. 由这个机制, 几个无质量的粒子能够产生出一个有静止质量的粒子, 如果它们被束缚在这个粒子内部在相互作用阻力下作低于光速的转动运动. 弱子模型将依赖于这个机制.

从这个质量产生机制, 我们也可以理解中微子振荡现象. 直到目前, 实验测得的中微子运动速度为光速. 而另一方面, 在 2.2.3 小节中也看到三代中微子之间可以相互转换, 这意味着在转换瞬间有质量出现. 这种现象可以看作是中微子在振荡瞬间被减速从而产生质量. 该过程完成后中微子又会恢复到通常质量为零的光速运动状态上.

因此, 根据质量生成机制可以断言:

$$\text{中微子静止质量 } m=0. \tag{2.5.7}$$

3. 相互作用荷概念

该理论非常重要, 它不仅是基本粒子模型的基础, 而且能够解释所有相互作用力的来源. 在引力和电磁相互作用中, 作用荷就是我们所熟知的质量与电荷. 而对于强和弱相互作用, 作用荷是强荷与弱荷, 这两个概念来源于 PID 统一场理论, 见后面第 5 章的具体介绍, 也可见 (Ma, Wang, 2012a, 2012b). 相互作用荷记为

$$\begin{array}{ll} \text{引力:} & \text{质量荷 } m, \\ \text{电磁力:} & \text{电荷 } e, \\ \text{强相互作用:} & \text{强荷 } g_s, \\ \text{弱相互作用:} & \text{弱荷 } g_w. \end{array} \tag{2.5.8}$$

若 Φ 是对应于某个相互作用势, 那么由它的作用荷 Q 产生的相互作用力 F 由下面的公式给出:

$$F=-Q\nabla\Phi, \tag{2.5.9}$$

这里 ∇ 为空间梯度算子.

在 (2.5.8) 中的作用荷具有如下物理性质:

(1) 电荷 Q_e, 强荷 Q_s, 弱荷 Q_w 都是守恒的. 但是质量 m 并不守恒, 正如质量生成机制所表明的那样.

(2) 在两个没有共同作用荷的粒子之间没有相应的相互作用力. 例如, 若一个粒子 A 不含强荷 g_s, 那么它与所有的粒子之间不发生任何强相互作用.

(3) 只有电荷取正、负值, 其他作用荷只取非负值.

(4) 只有质量荷 m 是连续的, 其他荷是离散的, 只取分立值.

4. 对偶媒介子理论

由标准模型已经知道每一种相互作用都存在相应的媒介子, 也就是说有四类媒介子:

$$\begin{array}{ll} \text{引力:} & \text{引力子 } g_G, \\ \text{电磁作用:} & \text{光子 } \gamma, \\ \text{弱作用:} & \text{中间矢量 Bose 子 } W^{\pm}, Z^0, \\ \text{强作用:} & \text{8 种胶子 } g^k \ (1 \leqslant k \leqslant 8). \end{array} \tag{2.5.10}$$

根据 PID 统一场理论 (详细见后面第 5 章的介绍), 我们推导出 (2.5.10) 的自然对偶媒介子:

$$\begin{array}{lll} \text{引力子 } g_G & \leftrightarrow & \text{引力对偶子 } \Phi^G, \\ \text{光子 } \gamma & \leftrightarrow & \text{光子对偶子 } \phi_\gamma, \\ \text{矢量 Bose 子 } W^{\pm}, Z^0 & \leftrightarrow & \text{弱作用对偶子 } \phi_W^{\pm}, \phi_Z^0, \\ \text{胶子 } g^k & \leftrightarrow & \text{强作用对偶子 } \phi_g^k. \end{array} \tag{2.5.11}$$

在 (2.5.11) 中的对偶媒介子量子数为

$$\begin{aligned} &\Phi^G: \ m=0, \ J=1, \ Q_e=0, \ \tau=\infty, \\ &\phi_\gamma: \ m=0, \ J=0, \ Q_e=0, \ \tau=\infty, \\ &\phi_W^{\pm}: \ m\sim 10^5, \ J=0, \ Q_e=\pm 1, \ \tau\sim 10^{-21}s, \\ &\phi_Z^0: \ m\sim 1.25\times 10^5, \ J=0, \ Q_e=0, \ \tau\sim 10^{-21}s, \\ &\phi_g^k: \ m=0, \ J=0, \ Q_e=0, \ \tau=\infty. \end{aligned} \tag{2.5.12}$$

我们需要强调指出, 上述对偶媒介子理论 (2.5.11)-(2.5.12) 不仅对于推导出 2.5.3 小节将介绍的强作用和弱作用势公式起到关键作用, 而且在我们所建立的弱子模型中也起到不可缺少的基本作用. 此外引力对偶场 Φ^G 给出暗物质与暗能量的统一理论, 见 (Ma, Wang, 2014).

2.5.3 强作用势与弱作用势

在所有已知的相互作用理论中, 没有一个能够给出弱作用势公式和完整的强相互作用势公式. 要想建立亚轻子和亚夸克的基本粒子模型, 前面介绍的弱荷与强荷

概念, 对偶媒介子理论, 以及下面将介绍的强作用势与弱作用势公式是不可缺少的基本理论.

1. 强作用势公式

应用 PID 统一场方程可以推导出三个层次的强相互作用势公式, 它们分别称为夸克势 S_q, 强子势 S_h, 以及原子/分子势 S_a, 其表达式为如下形式:

$$S_q = g_s \left[\frac{1}{r} - \frac{B}{\rho_0} k_0^2 e^{-k_0 r} \varphi(r) \right], \tag{2.5.13}$$

$$S_h = N_0 \left(\frac{\rho_0}{\rho_1} \right)^3 g_s \left[\frac{1}{r} - \frac{B_1}{\rho_1} k_1^2 e^{-k_1 r} \varphi(r) \right], \tag{2.5.14}$$

$$S_a = N_1 \left(\frac{\rho_0}{\rho_1} \right)^3 \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^3 g_s \left[\frac{1}{r} - \frac{B_1}{\rho_2} k_1^2 e^{-k_1 r} \varphi(r) \right], \tag{2.5.15}$$

其中 N_0 是强子中的夸克数, N_1 是原子/分子中的核子数, g_s 是强荷, B, B_1 是常数, ρ_0, ρ_1, ρ_2 分别是夸克半径, 强子半径及原子/分子半径, 以及

$$k_0 \backsimeq 10^{16}\mathrm{cm}^{-1}, \quad k_1 = 10^{13}\mathrm{cm}^{-1}.$$

从表象的观点, 我们取

$$\rho_0 \backsimeq 10^{-21}\mathrm{cm}, \quad \rho_1 \geqslant 10^{-16}\mathrm{cm}, \quad \rho_2 \backsimeq 10^{-8}\mathrm{cm}. \tag{2.5.16}$$

在公式 (2.5.13)-(2.5.15) 中的函数 $\varphi(r)$ 是一个无穷指数级数, 可近似地写成

$$\varphi(r) = \frac{r}{2} + o(r).$$

公式 (2.5.13) 和 (2.5.14) 可导出关于夸克与强子的结论.

(1) 根据 (2.5.9) 可推出夸克的强作用力 F_q 有如下性质:

$$F_q \begin{cases} > 0, & \text{当 } 0 < r < R_0, \\ = 0, & \text{当 } r = R_0, \\ < 0, & \text{当 } R_0 < r < \rho_1, \end{cases} \tag{2.5.17}$$

式中 R_0 是夸克排斥半径, ρ_1 如 (2.5.16) 是强子半径. 即在 $r < R_0$ 区域内夸克之间表现为斥力, 在环形区域 $R_0 < r < \rho_1$ 内夸克之间是吸引力, 正如图 2.9 所示意的那样.

(2) 在图 2.9 所示的吸引环域 $R_0 < r < \rho_1$ 内, 夸克的束缚能 E 具有 Planck 水平级, 即 $E \backsimeq 10^{19}$GeV(Ma, Wang, 2012b). 该能级表明夸克是禁闭的, 不可能被打开.

(3) 在强子之间, 强相互作用力是由公式 (2.5.14) 支配. 它意味着

$$F_{\text{强子}}\begin{cases} >0, & r<R_1, \\ <0, & R_1<r<R_2, \end{cases} \tag{2.5.18}$$

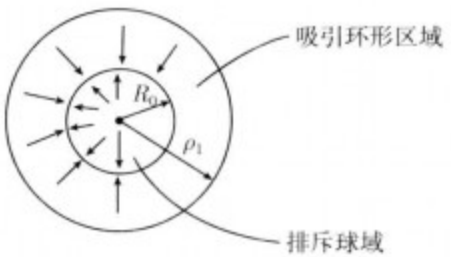


图 2.9 在 $r<R_0$ 内夸克强作用力是排斥的, 在 $R_0<r<\rho_1$ 内是吸引的

式中 R_1 为强子排斥半径, R_2 是吸引半径, 它们的值为

$$R_1=\frac{1}{2}\times 10^{-13}\text{cm}, \quad R_2=4\times 10^{-12}\text{cm}, \tag{2.5.19}$$

即两个强子在 R_1 半径内它们的强作用力是相斥的, 若在 $R_1<r<R_2$ 内强作用力是吸引的. 这个性质与核子之间强作用力的实验观测是相吻合的. 正是 (2.5.17) 与 (2.5.18)-(2.5.19) 的不同层次强作用力性质才能很好地解释为什么强作用衰变表现出在同一尺度内. 强力即是吸引的 (夸克禁闭), 又是排斥的 (衰变后强子的分离).

(4) 特别地, 无论是夸克力还是强子力, 当它们的距离趋于零时, 它们的斥力按 $1/r^2$ 量级趋于无穷大, 即

$$F\sim\frac{1}{r^2}\to\infty, \quad \text{当 } r\to 0. \tag{2.5.20}$$

这表明两个靠得很近的夸克或强子具有很大的斥力.

2. 弱作用势公式

与强相互作用类似, 两个层次的弱作用公式能够从 PID 统一场方程推导出来. 这两个层次是, 弱子势 Φ_w^0 和复合粒子如轻子、夸克和媒介子的弱作用势 Φ_w^1, 它们表达为如下形式

$$\Phi_w^0=g_w\left(\frac{\rho_0}{\rho_w}\right)^3 e^{-k_1 r}\left[\frac{1}{r}-\psi_1(r)e^{-k_0 r}\right], \tag{2.5.21}$$

$$\Phi_w^1=Ng_w e^{-k_1 r}\left[\frac{1}{r}-\psi_2(r)e^{-k_0 r}\right], \tag{2.5.22}$$

其中 g_w 是弱荷, N 是复合粒子所含的弱子数, ρ_0 是复合粒子的半径, ρ_w 是弱子半

径, k_0, k_1 的值为

$$k_0 = \frac{m_H c}{\hbar} \backsimeq 2 \times 10^{16}\mathrm{cm}^{-1},$$
$$k_1 = \frac{m_B c}{\hbar} \backsimeq 10^{16}\mathrm{cm}^{-1},$$

式中 m_H 为 Higgs 粒子质量, m_B 为中间 Bose 子质量. 在 (2.5.21) 和 (2.5.22) 中的 ψ_1 和 ψ_2 是两个无穷指数级数, 可近似写成

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{\beta_1}{\rho_0}\left(1 + \frac{2r}{r_0}\right), \\ \psi_2 &= \frac{\beta_1}{\rho_w}\left(1 + \frac{2r}{r_0}\right). \end{aligned} \tag{2.5.23}$$

根据物理事实, 我们表象地取 ρ_0, ρ_w 的值如下:

$$\rho_w \backsimeq 10^{-26}\mathrm{cm}, \quad \rho_0 \backsimeq 10^{-21}\mathrm{cm}, \quad \rho' \leqslant 10^{-16}\mathrm{cm}, \tag{2.5.24}$$

其中 ρ' 是弱作用力的有效半径.

由 (2.5.21) 和 (2.5.22) 提供的弱力势产生如下结论.

(1) 弱子被禁闭在带电轻子、夸克和媒介子的内部. 事实上, 弱子的束缚能由 (2.5.21) 给出, 它的量级为

$$E = g_w \Phi_w^0(\rho_0) \backsimeq -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\rho_0}{\rho_w}\right)^3 g_w^2 = -10^{36} g_w^2/\mathrm{cm}.$$

由 (1.3.9),

$$g_w^2 = \frac{8}{\sqrt{2}} G_f \left(\frac{m_w c}{\hbar}\right)^2 = 10^{-1}\hbar c.$$

因此束缚能为

$$E = -10^{35}\hbar c/\mathrm{cm} = -10^{21}\mathrm{GeV}.$$

这是在 Planck 水平之上, 它足以将弱子禁闭在它们的复合粒子内部.

(2) 由 (2.5.21) 和 (2.5.23)-(2.5.24), 在弱子之间的弱作用力 F_0 有如下性质:

$$F_0 \begin{cases} > 0, & \text{对 } 0 < r < \dfrac{1}{2}\rho_0, \\ = 0, & \text{对 } r = \dfrac{1}{2}\rho_0, \\ < 0, & \text{对 } \dfrac{1}{2}\rho_0 < r < \rho', \end{cases} \tag{2.5.25}$$

其中 ρ_0 和 ρ' 如 (2.5.24).

(3) 由 (2.5.22) 和 (2.5.23)-(2.5.25), 在复合粒子之间的弱作用力 F_1 有如下性质:

$$F_1 \begin{cases} >0, & \text{对 } 0<r<\rho', \\ <0, & \text{对 } \rho'<r<\rho_2, \end{cases} \tag{2.5.26}$$

对某个 $\rho_2>\rho'$. 因此这些复合粒子之间弱力是排斥的, 如果它们在 ρ' 球内, 是吸引的若在环域 $\rho'<r<\rho_2$ 内.

(4) 当 $r\to 0$ 时, F_0 和 F_1 按 $1/r^2$ 量级趋于无穷:

$$F_0, F_1 \sim \frac{1}{r^2}\to\infty, \quad r\to 0.$$

也就是说, 当两个粒子很接近时具有很大的弱作用排斥力.

上述弱作用力性质对于弱子模型具有关键性的作用.

2.5.4 弱子及其量子数

基于衰变意味着内部结构, 从带电轻子、夸克以及媒介子的衰变现象驱使我们构造一个基本粒子理论, 称为弱子模型. 这些弱子是无质量的, 自旋 $J=\frac{1}{2}$, 并且都带一个单位弱荷的基本粒子. 这个弱子模型是建立在如下理论与观测事实的基础之上的.

(i) 由衰变揭示的带电轻子、夸克、媒介子具有内部结构;

(ii) 弱荷 g_w 与强荷 g_s 新量子数概念;

(iii) 对偶媒介子理论;

(iv) 质量生成机制;

(v) 由弱作用势产生的弱子禁闭.

弱子是由六个基本粒子以及它的反粒子共 16 个粒子构成, 它们的名称与身份是

$$\begin{aligned} &w^*, w_1, w_2, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, \\ &\bar{w}^*, \bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu, \bar{\nu}_\tau, \end{aligned} \tag{2.5.27}$$

其中 ν_e, ν_μ, ν_τ 为三代中微子, w^*, w_1, w_2 是三个新的基本粒子, 被称作是 w 弱子.

这些弱子被赋予如下量子数: 电荷 Q_e, 弱荷 g_w, 强荷 g_s, 弱色荷 Q_c, 重子数 B, 轻子数 L_e, L_μ, L_τ, 自旋 J, 以及质量 m. 它们被列在表 2.14 中.

下面给出一些注释.

注 2.6 这些量子数 $Q_e, Q_c, B, L_e, L_\mu, L_\tau$ 对于正反弱子有相反的符号, 而 g_w, g_s, m 正反粒子有相同的值. 三代中微子 ν_e, ν_μ, ν_τ 具有左手螺旋性质, 自旋取 $J=-\frac{1}{2}$, 它们的反粒子 $\bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu, \bar{\nu}_\tau$ 有右手螺旋性质, $J=\frac{1}{2}$.

表 2.14　弱子量子数

弱子	Q_e	g_w	g_s	Q_c	B	L_e	L_μ	L_τ	J	m
w^*	$+2/3$	1	1	0	$1/3$	0	0	0	$\pm 1/2$	0
w_1	$-1/3$	1	0	1	0	0	0	0	$\pm 1/2$	0
w_2	$-2/3$	1	0	-1	0	0	0	0	$\pm 1/2$	0
ν_e	0	1	0	0	0	1	0	0	$-1/2$	0
ν_μ	0	1	0	0	0	0	1	0	$-1/2$	0
ν_τ	0	1	0	0	0	0	0	1	$-1/2$	0

注 2.7　弱色荷 Q_c 是专门对 w 弱子引入的一种新量子数, 它的目的就是排除一些不实际的弱子组合形式.

注 2.8　在后面的弱子组分可以看到, 除胶子外所有的弱子复合粒子最多只含一个 w^* 弱子. 它表明这些复合粒子中的弱子之间没有强相互作用. 从而对于 (2.5.27) 中的弱子没有必要引入经典的强相互作用量子数如奇异数 S, 同位旋 (I, I_3) 以及宇称 P.

注 2.9　夸克模型是建立在 $SU(3)$ 不可约表示之上的

$$\begin{aligned} &\text{介子} = 3 \otimes \underline{3} = 8 \oplus 1, \\ &\text{重子} = 3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1. \end{aligned}$$

但是与夸克模型不同的是, 弱子模型是建立在前面所述的 (i)~(v) 的理论与观测事实基础之上的.

2.5.5　复合粒子的弱子构成

在这一小节中, 我们给出带电轻子、夸克、媒介子的弱子组合成分. 它们分别被列出如下.

1. 带电轻子与夸克

带电轻子与夸克的弱子构成由下面给出:

$$\begin{aligned} &e = \nu_e w_1 w_2, \quad &&\mu = \nu_\mu w_1 w_2, \quad &&\tau = \nu_\tau w_1 w_2, \\ &u = w^* w_1 \bar{w}_1, \quad &&c = w^* w_2 \bar{w}_2, \quad &&t = w^* w_2 \bar{w}_2, \\ &d = w^* w_1 w_2, \quad &&s = w^* w_1 w_2, \quad &&b = w^* w_1 w_2, \end{aligned} \tag{2.5.28}$$

其中 c, t 和 d, s, b 是由自旋排列来区分. 我们认为

$$\begin{aligned} &u = w^* w_1 \bar{w}_1 (\Uparrow\downarrow, \Downarrow\uparrow, \uparrow\downarrow\uparrow, \downarrow\uparrow\downarrow, \uparrow\Downarrow, \downarrow\Uparrow), \\ &c = w^* w_2 \bar{w}_2 (\Uparrow\downarrow, \Downarrow\uparrow, \uparrow\downarrow\uparrow, \downarrow\uparrow\downarrow), \\ &t = w^* w_2 \bar{w}_2 (\uparrow\Downarrow, \downarrow\Uparrow), \end{aligned} \tag{2.5.29}$$

以及

$$\begin{aligned} d &= w^* w_1 w_2(\uparrow\uparrow\downarrow, \downarrow\downarrow\uparrow), \\ s &= w^* w_1 w_2(\uparrow\downarrow\downarrow, \downarrow\uparrow\uparrow), \\ b &= w^* w_1 w_2(\uparrow\downarrow\uparrow, \downarrow\uparrow\downarrow). \end{aligned} \tag{2.5.30}$$

2. 媒介子

由 (2.5.11) 给出的媒介子对偶在弱子模型中起到一个非常重要的作用. 这是因为媒介子为 Bose 子, 它们的组分由两个 w 弱子构成, 即

$$\text{媒介子} = ww.$$

这意味着自旋排列有一个自然的对偶

$$ww(\uparrow\uparrow, \downarrow\downarrow) \leftrightarrow ww(\uparrow\downarrow, \downarrow\uparrow). \tag{2.5.31}$$

在对偶关系 (2.5.31) 中, 左端部分即是经典理论中的自旋 $J=1$ 的媒介子 (不包括引力子), 而右端部分便是相应的 $J=0$ 对偶媒介子. 这充分表明弱子模型与 PID 统一场理论是高度协调一致, 它们一起构成不可分割的统一体.

为了方便我们写出 $J=1$ 与 $J=0$ 的媒介子对偶关系如下:

$$\begin{array}{lll} J=1 & & \\ \text{光子 } \gamma & \leftrightarrow & \text{光子对偶 } \phi_\gamma, \\ \text{矢量 Bose 子 } W^\pm, Z^0 & \leftrightarrow & \text{弱作用对偶 } \phi_W^\pm, \phi_Z^0, \\ \text{胶子 } g^k \ (1 \leqslant k \leqslant 8) & \leftrightarrow & \text{胶子对偶 } \phi_g^k \ (1 \leqslant k \leqslant 8). \end{array} \tag{2.5.32}$$

根据 (2.5.32) 的对偶关系, 我们构造媒介子组分为

$$\begin{aligned} \gamma &= \cos\theta_w w_1 \bar{w}_1 - \sin\theta_w w_2 \bar{w}_2 \ (\uparrow\uparrow, \downarrow\downarrow), \\ Z^0 &= \sin\theta_w w_1 \bar{w}_1 + \cos\theta_w w_2 \bar{w}_2 \ (\uparrow\uparrow, \downarrow\downarrow), \\ W^- &= w_1 w_2 (\uparrow\uparrow, \downarrow\downarrow), \\ W^+ &= \bar{w}_1 \bar{w}_2 (\uparrow\uparrow, \downarrow\downarrow), \\ g^k &= w^* \bar{w}^* (\uparrow\uparrow, \downarrow\downarrow), \quad k = \text{色指标}, \end{aligned} \tag{2.5.33}$$

以及它们对偶媒介子:

$$\begin{aligned} \phi_\gamma &= \cos\theta_w w_1 \bar{w}_1 - \sin\theta_w w_2 \bar{w}_2 \ (\uparrow\downarrow, \downarrow\uparrow), \\ \phi_Z^0 &= \sin\theta_w w_1 \bar{w}_1 + \cos\theta_w w_2 \bar{w}_2 \ (\uparrow\downarrow, \downarrow\uparrow), \\ \phi_W^- &= w_1 w_2 \ (\uparrow\downarrow, \downarrow\uparrow), \\ \phi_W^+ &= \bar{w}_1 \bar{w}_2 (\uparrow\downarrow, \downarrow\uparrow), \\ \phi_g^k &= w^* \bar{w}^* (\uparrow\downarrow, \downarrow\uparrow), \end{aligned} \tag{2.5.34}$$

其中 $\theta_w \backsimeq 28.76^\circ$ 是 Weinberg 角. 这里 ϕ_Z^0 对应于标准模型中的 Higgs 粒子, 而 $\phi_W^{\pm}$ 可视为带电 Higgs 粒子.

注 2.10　在 (2.5.33) 和 (2.5.34) 中取 γ, Z^0 和 ϕ_γ, ϕ_Z^0 作为 $w_1\bar{w}_1$ 与 $w_2\bar{w}_2$ 的线性组合方式, 其原因是根据 Weinberg-Salam 弱电理论中 $U(1)\times SU(2)$ 规范势为

$$\begin{aligned} A_\mu &= \cos\theta_w B_\mu - \sin\theta_w w_\mu^3, \\ Z_\mu &= \sin\theta_w B_\mu + \cos\theta_w w_\mu^3, \\ \sin^2\theta_w &= 0.23. \end{aligned}$$

这里 A_μ, Z_μ 分别代表 γ 与 Z^0. 当然这种借用的线性组合方式只是一种猜测, 它不一定正确. 但 γ 和 Z^0 是 $w_1\bar{w}_1$ 与 $w_2\bar{w}_2$ 的线性组合一般不会错, 即它们应该是如下形式:

$$\begin{pmatrix} \gamma \\ Z^0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} w_1\bar{w}_1 \\ w_2\bar{w}_2 \end{pmatrix}, \quad \text{对某个 } A \in SO(2).$$

3. ν 媒介子

下面给出的中微子对

$$\nu_e\bar{\nu}_e, \quad \nu_\mu\bar{\nu}_\mu, \quad \nu_\tau\bar{\nu}_\tau \tag{2.5.35}$$

也是一种媒介子. 虽然它们没有被发现, 但是从衰变的角度看它们是存在的. 由于中微子振荡 (见 2.2.3 小节), 在 (2.5.35) 中的三对中微子是不可分辨的, 也就是说它们的线性组合

$$\phi_\nu^0 = \sum_l \alpha_l \nu_l \bar{\nu}_l \ (\downarrow\uparrow), \quad \sum_l \alpha_l^2 = 1 \tag{2.5.36}$$

是一种新的媒介子, 我们称它为 ν 媒介子. 由于中微子的左手螺旋性质, ϕ_ν^0 只有一种自旋组合 $(\downarrow\uparrow)$ 的形式. 因此在 (2.5.36) 中的 ν 媒介子具有如下性质:

$$\begin{aligned} &\phi_\nu^0 : \text{质量 } m=0, \text{ 自旋 } J=0, \text{ 电荷 } Q_e=0, \text{ 强荷 } Q_s=0. \\ &\qquad \text{弱荷 } Q_w=2, \text{ 轻子数 } L_e, L_\mu, L_\tau = 0, \text{ 重子数 } B=0. \end{aligned}$$

ν 媒介子在各种衰变中起到不可缺少的作用.

2.5.6　弱子禁闭与质量生成

一个合理的基本粒子理论应该满足下面五个基本条件:

(1) 基本粒子的禁闭性;

(2) 质量协调性, 即基本粒子与复合粒子在质量上应该是相一致的, 这是所有基本粒子理论所面对的最大问题之一;

(3) 量子数的一致性;

(4) 那些在现实中不存在的基本粒子组合形式应该能够被物理量子规则排除掉;

(5) 该理论可以解释所有形式的衰变、散射及电子辐射. 以上五点全部被前面建立的弱子模型所满足. 其中第 (3) 条很容易被检验, (1) 和 (2) 条将在这一小节给予解释, 第 (4) 条放在 2.5.7 小节, 而第 (5) 条是 2.6 节的内容.

对于弱子禁闭问题, 前面关于弱作用力禁闭性质便可解释为什么没有自由的 w 弱子 w^*, w_1, w_2 被观测到. 这是因为在 (2.5.27) 中的弱子之间, 弱相互作用力是由 (2.5.21) 公式支配. 它们之间的束缚能达到 10^{21}GeV 水平. 因此, 弱子能够以三位一体的方式形成如 (2.5.28) 的带电轻子与夸克, 以及二位一体的方式形成如 (2.5.33)-(2.5.34) 及 (2.5.36) 的媒介子. 并且这些弱子被囚禁在复合粒子内部不能被打开, 只能在它们之间进行弱子交换.

单个的中微子 ν_e, ν_μ, ν_τ 可以被观测到的原因是, 在复合粒子之间的弱子交换过程中, 会出现不同代的正反中微子对:

$$\nu_i + \bar{\nu}_j \ (i \neq j), \quad \nu_i = \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau. \tag{2.5.37}$$

由轻子重子不相容规则 $L_i L_j = 0$ 对 $i \neq j$ (见 2.5.7 小节介绍), (2.5.37) 中的 ν_i 与 $\bar{\nu}_j$ 之间弱作用力受 (2.5.22) 公式支配, 由 (2.5.26) 它们在弱子交换半径 $R(R < \rho_1)$ 内是相互是排斥的. 因此, 一但 ν_i 与 $\bar{\nu}_j$ 在交换过程中被替换出来, 它们将在斥力作用下被分开.

接下来讨论质量问题.

首先考虑下面没有质量的媒介子情况:

$$(\gamma, \phi_\gamma), \quad (g^k, \phi_g^k), \quad \phi_\nu^0. \tag{2.5.38}$$

要解释 (2.5.38) 的粒子无质量性, 必须注意到这些粒子是由如下弱子对构成

$$w\bar{w}_1, \quad w_2\bar{w}_2, \quad w^*\bar{w}^*, \quad \nu_i\bar{\nu}_i. \tag{2.5.39}$$

这些弱子对被束缚在 R_0 的圆周上, 就如图 2.10 所示的那样. 因为每一对弱子的电和弱作用力是在它们的连结线方向, 并且由于弱斥力大于电荷引力 (见 (1.3.9)), 两个弱子处在引力与斥力相等的半径上绕中心 O 转动. 由相对论运动定律

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{P} = \sqrt{1-\nu^2/c^2}\,\vec{F}, \quad \vec{P} = m\vec{v}\,/\sqrt{1-v^2/c^2}, \tag{2.5.40}$$

在 $\vec{F} = 0$ 情况下, 那些在 (2.5.39) 中的每对无质量弱子将以光速 $v \backsimeq c$ 进行转动. 因此, 由 (2.5.39) 中弱子对构成的 (2.5.38) 中的媒介子便没有静止质量.

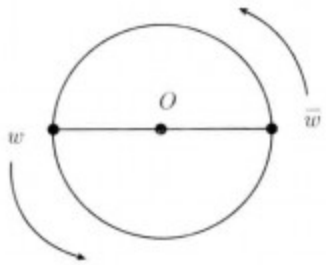


图 2.10

其次再考虑下面具有质量的物质粒子:

$$e, \mu, \tau, u, d, s, c, t, b. \tag{2.5.41}$$

由 (2.5.28), 它们是由三个带不同电荷的弱子构成. 因此三个弱子之间所受的弱力和电磁力是不均匀的, 它们不能如图 2.8(b) 那样排列成等边三角形. 事实上它们是如图 2.11 那样被排列成一个不规则的三角形上做三体运动. 这便导致这三个弱子在它们的运动方向将受到电磁和弱作用的阻力 $\vec{F} \neq 0$. 由 (2.5.40), 它们的运动速度 $v < c$. 于是由 (2.5.5) 这些弱子便有质量产生,

$$m = \sqrt{1 - v^2/c^2} E/c^2 > 0 \quad (v < c).$$

因此, (2.5.41) 的带电轻子与夸克表现出有静止质量.

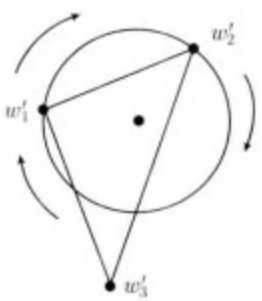


图 2.11

最后需要解释质量媒介子出现质量的问题:

$$(W^{\pm}, \phi_W^{\pm}), \quad (Z^0, \phi_Z^0). \tag{2.5.42}$$

实际上, 在下面将介绍的弱子交换理论中, 我们可以看到在 (2.5.42) 中的媒介子都是弱子交换过程中的中间过渡态. 它们是在交换过程的瞬间从 (2.5.41) 的质量粒子中产生, 因而是处在低于光速的运动状态 $v < c$. 于是 (2.5.42) 中的媒介子是有质量的. 这里需要指出, 在 (2.5.42) 中的对偶媒介子 ϕ_Z^0 便是由 LHC 发现的 Higgs 粒子. 实验表明, 它们的平均寿命都很短, 在 $\tau = 10^{-25}$s 的量级. 这便充分表明它们是弱子交换过程中的中间过渡态.

2.5.7 关于弱子的量子规则

2.5.6 小节解决了 w 弱子禁闭与质量问题. 这一小节将提出几个量子规则以解决不实际的弱子组合问题.

(1) 弱色中性规则: $Q_c = 0$.

根据这个规则, 有许多在自然界中不存在的弱子组合形式被排除掉. 例如下面的 www 组合违背弱色中性规则:

$$\nu w_1 w_1, \quad \nu w_2 w_2, \quad w^* w_1 \bar{w}_2, \cdots .$$

下面 ww 组合形式也不符合弱色中性:

$$\nu w_1,\ \nu w_2,\ w^* w_1,\ w^* w_2,\ w_1 w_1, \cdots .$$

(2) 轻子数与重子数规则:

$$BL = 0, \quad L_i L_j = 0\ (i \neq j), \quad L_i = L_e,\ L_\mu,\ L_\tau, \tag{2.5.43}$$

其中 B, L_i 是重子数和轻子数.

这个规则排除了如下弱子的组合形式:

$$\nu w^*, \quad \nu_i \nu_j, \quad \nu_i \bar{\nu}_j\ (i \neq j), \cdots, \quad \nu_i = \nu_e, \nu_\mu,\ \nu_\tau.$$

(3) 轻子数、重子数与电荷关系式.

在弱子组合中, 它们的轻子数、重子数与电荷满足规则:

$$\begin{cases} L + Q_e = 0, & \text{若 } L \neq 0, \\ |B + Q_e| \leqslant 1, & \text{若 } B \neq 0. \end{cases} \tag{2.5.44}$$

这个规则除去了下面在自然中没有的弱子组合粒子:

$$\nu w_1 \bar{w}_1,\ \nu w_2 \bar{w}_2,\ \bar{\nu} w_1 w_2,\ \bar{w}^* w_1 w_2,\ w^* w^*,\ \nu\nu, \cdots .$$

(4) 自旋选择定则.

在现实中不存在自旋 $J = \dfrac{3}{2}$ 的复合粒子, 如

$$w^* w_1 w_2(\uparrow\uparrow\uparrow, \downarrow\downarrow\downarrow), \quad w^* w_1 \bar{w}_1(\uparrow\uparrow\uparrow, \downarrow\downarrow\downarrow), \quad w^* w_2 \bar{w}_2(\uparrow\uparrow\uparrow, \downarrow\downarrow\downarrow), \tag{2.5.45}$$

以及

$$\nu w_1 w_2(\uparrow\uparrow\uparrow, \downarrow\downarrow\downarrow). \tag{2.5.46}$$

上述 (2.5.45) 的情况能够由 2.5.2 小节中的角动量规则排除. 这个原因在于两个方面. 其一是在 (2.5.45) 中的组合粒子中只带一个强荷 g_s, 它们的半径与夸克相

同从而受到夸克强作用势 (2.5.13) 支配, 这意味着它们会像夸克一样被禁闭在一个如图 2.8(b) 所示的小球内. 其二是, 由测不准原理, 这些束缚粒子将做高速转动运动, 但是在力矩几乎为零条件下, 这是角动量规则所不允许的. 因此当弱子以 www 形式组合并在强作用力下禁闭在小球内时, 会自动按 $J=\dfrac{1}{2}$ 的方式进行结合. 于是表现出夸克的 $J=\dfrac{1}{2}$ 自旋选择定则.

关于 (2.5.46) 情况的排除是由于中微子具有左手螺旋性质造成的. 每个中微子 ν 只有 $J=-\dfrac{1}{2}$ 的自旋, 在与 w_1 和 w_2 的组合过程中, 它要求 w_1 和 w_2 中必须有一个是在 $J=\dfrac{1}{2}$ 状态, 即按

$$\nu w_1 w_2\ (\downarrow\Uparrow, \downarrow\uparrow\downarrow, \Downarrow\uparrow)$$

的方式进行结合.

(5) 胶子的八个量子态.

根据量子色动力学 (QCD), 胶子有八个量子态

$$g^k:\ g^1, \cdots, g^8.$$

在 (2.5.33) 中, 胶子有如下组合形式:

$$w^*\bar{w}^*(\Uparrow, \Downarrow).$$

此外, QCD 表明夸克有三种色:

$$\text{红色}\ (r),\quad \text{绿色}\ (g),\quad \text{蓝色}\ (b),$$

以及三个反色 $\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$. 它们服从下面运算法则:

$$r\bar{r}=g\bar{g}=b\bar{b}=w\ (\text{白色}),\quad rgb=w. \tag{2.5.47}$$

根据 (2.5.28), w^* 也被赋予三种色

$$w_r^*,\ w_g^*,\ w_b^*\ \text{和}\ \bar{w}_{\bar{r}}^*,\ \bar{w}_{\bar{g}}^*,\ \bar{w}_{\bar{b}}^*,$$

它们分别构成 $SU(3)$ 和 $SU(\underline{3})$ 的基底. 从而由

$$SU(3)\otimes SU(\underline{3})=8\oplus 1$$

得到不可约表示八重态如下:

$$g^1=(w^*\bar{w}^*)_w,\quad g^2=w_b^*\bar{w}_r^*,\quad g^3=w_b^*\bar{w}_g^*,\quad g^4=w_r^*\bar{w}_g^*, \tag{2.5.48}$$

$$g^5=(w^*\bar{w}^*)_w,\quad g^6=w_r^*\bar{w}_b^*,\quad g^7=w_g^*\bar{w}_b^*,\quad g^8=w_g^*\bar{w}_r^*, \tag{2.5.49}$$

即 (2.5.49) 中的胶子是 (2.5.48) 中的反胶子态.

总结性地说, 量子规则

$$\begin{array}{ll} \text{弱色中性:} & Q_c = 0, \\ \text{轻子重子不相容性:} & BL = 0,\ L_i L_j = 0\ (i \neq j), \\ \text{轻子电荷关系:} & L + Q_e = 0\ (L \neq 0), \\ \text{重子电荷关系:} & |B + Q_e| \leqslant 1\ (B \neq 0) \end{array} \tag{2.5.50}$$

是从实际粒子资料中总结出来的. 这些规则将所有自然界中不存在的弱子组合形式排除出去, 只剩下由 (2.5.28), (2.5.33) 和 (2.5.36) 这些复合粒子的组合形式. 结合以上 $J = \dfrac{1}{2}$ 自旋自然选择规则, 以及八种胶子色量子态, 再加上 2.5.6 小节的 w 弱子禁闭和质量生成机制, 弱子模型作为基本粒子理论的所有最基本的问题都得到合理的解释.

2.6 衰变机制

2.6.1 弱子交换

弱子模型可以解释所有粒子的衰变行为. 事实上, 粒子衰变是由弱子交换造成的. 这种交换行为是在弱子复合粒子之间发生, 如媒介子与媒介子之间, 轻子与媒介子之间, 夸克与媒介子之间, 正反粒子对之间等. 下面将分别讨论它们.

1. 媒介子之间弱子交换

首先考察粒子物理中最注目的衰变, 电子对创生, 反应式为

$$2\gamma \to e^+ + e^-. \tag{2.6.1}$$

从弱子模型角度, (2.6.1) 的反应式并不完备, 正确的公式应该是

$$2\gamma + \phi_\nu^0 \to e^+ + e^-. \tag{2.6.2}$$

注意到光子 γ 的弱子构成

$$\gamma = \cos\theta_w w_1 \bar{w}_1 - \sin\theta_w w_2 \bar{w}_2,$$

它的意思是光子在 $w_1\bar{w}_1$ 状态的概率为 $\cos^2\theta_w$, 在 $-w_2\bar{w}_2$ 状态的概率为 $\sin^2\theta_w$. 或者说在光子中 $w_1\bar{w}_1(\uparrow\uparrow)$ 和 $-w_2\bar{w}_2(\downarrow\downarrow)$ 的密度分别是 $\cos^2\theta_w$ 和 $\sin^2\theta_w$. 因此反应式 (2.6.2) 应写成

$$w_1\bar{w}_1(\uparrow\uparrow) + w_2\bar{w}_2(\downarrow\downarrow) + \nu_e\bar{\nu}_e(\downarrow\uparrow) \to \nu_e w_1 w_2(\downarrow\uparrow\downarrow) + \bar{\nu}_e\bar{w}_1\bar{w}_2(\uparrow\uparrow\downarrow). \tag{2.6.3}$$

从 (2.6.3) 可以清楚地看到在光子和 ν 媒介子中的弱子 $w_1, \bar{w}_1, w_2, \bar{w}_2, \nu_e, \bar{\nu}_e$ 在弱相互作用下可以重新组合形成新的粒子. 这种重组过程我们称为弱子交换. 这种交换过程的机制能够由弱作用公式 (2.5.21) 和 (2.5.22) 给予解释如下.

弱作用势公式 (2.5.21) 意味着每一个复合粒子都存在一个交换半径 R, 它满足

$$r_0 < R < \rho', \tag{2.6.4}$$

其中 $r_0 \backsimeq \dfrac{1}{2}\rho_0$ 是该粒子半径, ρ_0, ρ' 是如 (2.5.25) 中的半径. 当两个复合粒子 A 和 B 走到它们公共交换半径范围内时, 在弱作用下 A 与 B 内的弱子将有一个重新组合的概率以形成新的粒子. 一旦新粒子形成后, 支配它们的弱作用力为 (2.5.26) 中的 F_1, 它在 (2.6.4) 的交换半径 $R < \rho'$ 内表现出斥力. 因此, 这些新产生的粒子被这个斥力分离开. 这就是所有复合粒子进行弱子交换的机制.

例如, 图 2.12 显示出电子对创生过程的弱子交换行为. 当随机运动的光子和 ν 媒介子, 即 $w_1\bar{w}_1, w_2\bar{w}_2$ 及 $\nu_e\bar{\nu}_e$, 进入到它们公共交换半径内, 它们将有重新组合的概率, 以便形成一个电子 $\nu_e w_1 w_2$ 和一个正电子 $\bar{\nu}_e \bar{w}_1 \bar{w}_2$. 然后它们之间的弱作用的斥力将这对正负电子驱开, 导致 (2.6.1) 的衰变. 这里需要指出, 在这个范围内弱斥力比库仑力要更强. 事实上, 由 (1.3.9) 知 $g_w^2 = 10^{-1}\hbar c$ 及 $e^2 = 1/137\hbar c$. 因此图 2.12 中 e^- 和 e^+ 之间的弱斥力是

$$(3g_w)^2/r^2 \gg \text{Coulomb力 } e^2/r^2.$$

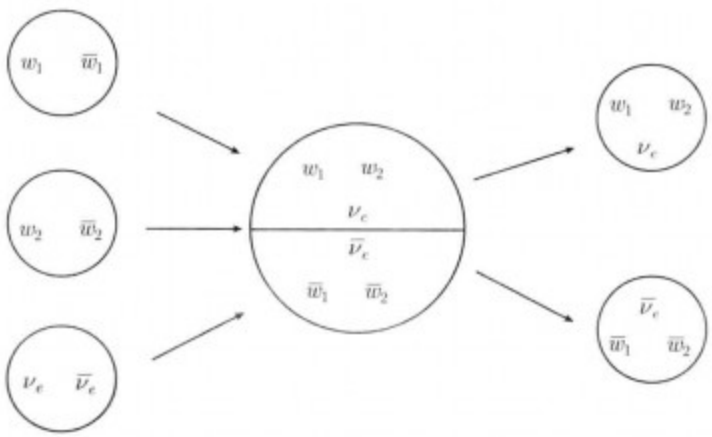


图 2.12

这里需要说明一下, 2.1.2 小节介绍了 Dirac 关于 (2.6.1) 电子对创生的空穴理论, 这种解释显然与这里的弱子交换机制是不相容的. 实际上 Dirac 的空穴理论有两个严重缺陷. 其一是它无法解释其他正反粒子如正反夸克的创生与湮灭现象, 因

为夸克并没有能级概念. 其二是电子负能级的空穴正电荷与质量从何而来也是该理论无法面对的. 然而弱子交换理论不存在这样的问题.

2. 轻子与媒介子之间弱子交换

考查 μ 子衰变, 反应式写作

$$\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu. \tag{2.6.5}$$

关于 (2.6.5), 它的完整形式应该是

$$\mu^- + \phi_\nu^0 \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu.$$

用弱子组分表达为

$$\nu_\mu w_1 w_2 + \nu_e \bar{\nu}_e \to \nu_e w_1 w_2 + \bar{\nu}_e + \nu_\mu. \tag{2.6.6}$$

由轻子重子不相容规则 $L_e L_\mu = 0$, 这两个中微子 $\bar{\nu}_e$ 和 ν_μ 不能被结合形成一个粒子. 因此当 ν_μ 和 ν_e 在 (2.6.6) 中进行交换后, 留下 $\bar{\nu}_e$ 和 ν_μ 作为独立粒子出现.

再来考查 τ 子衰变

$$\tau^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau. \tag{2.6.7}$$

同样它的完整反应式应是

$$\tau^- + \phi_\nu^0 \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau.$$

用弱子组分表达为

$$\nu_\tau w_1 w_2 + \nu_\mu \bar{\nu}_\mu \to \nu_\mu w_1 w_2 + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau, \tag{2.6.8}$$

这里 (2.6.8) 的弱子交换机制与 (2.6.6) 的完全一样.

此外可以看到如下衰变:

$$\begin{aligned}
&\tau^- \to \pi^- + \nu_\tau \quad (\tau^- \to d\bar{u}\ (\uparrow\downarrow) + \nu_\tau),\\
&\tau^- \to \rho^- + \nu_\tau \quad (\tau^- \to d\bar{u}\ (\uparrow\uparrow) + \nu_\tau),\\
&\tau^- \to K^- + \nu_\tau \quad (\tau^- \to s\bar{u}\ (\uparrow\downarrow) + \nu_\tau).
\end{aligned}$$

它们的完整反应式为

$$\begin{aligned}
&\tau^- + g + \gamma \to \pi^- + \nu_\tau \quad (g \text{ 为胶子}),\\
&\tau^- + g + \phi_\gamma^0 \to \rho^- + \nu_\tau,\\
&\tau^- + \phi_g + \gamma \to K^- + \nu_\tau.
\end{aligned}$$

用弱子构成表达为

$$\begin{aligned}&\nu_\tau w_1 w_2(\downarrow\uparrow\downarrow)+w^*\bar{w}^*(\uparrow\uparrow)+\bar{w}_1 w_1(\downarrow\downarrow)\\&\to(w^* w_1 w_2)(\bar{w}^*\bar{w}_1 w_1)(\uparrow\uparrow\downarrow)(\uparrow\downarrow\downarrow)+\nu_\tau(\downarrow),\end{aligned}\tag{2.6.9}$$

$$\begin{aligned}&\nu_\tau w_1 w_2(\downarrow\uparrow\downarrow)+w^*\bar{w}^*(\uparrow\uparrow)+\bar{w}_1 w_1(\uparrow\downarrow)\\&\to(w^* w_1 w_2)(\bar{w}^*\bar{w}_1 w_1)(\uparrow\uparrow\downarrow)(\uparrow\uparrow\downarrow)+\nu_\tau(\downarrow),\end{aligned}\tag{2.6.10}$$

$$\begin{aligned}&\nu_\tau w_1 w_2(\downarrow\uparrow\uparrow)+w^*\bar{w}^*(\downarrow\uparrow)+w_1\bar{w}_1(\downarrow\downarrow)\\&\to(w^* w_1 w_2)(\bar{w}^*\bar{w}_1 w_1)(\downarrow\uparrow\uparrow)(\uparrow\downarrow\downarrow)+\nu_\tau(\downarrow).\end{aligned}\tag{2.6.11}$$

从 (2.6.9)-(2.6.11) 不仅看到弱子交换中弱子数守恒, 而且也清楚地看到自旋守恒以及对偶媒介子的作用.

3. 夸克与媒介子之间弱子交换

在 (2.5.2) 中的夸克衰变为

$$\begin{aligned}&d\to u+e^-+\bar{\nu}_e,\\&s\to d+\gamma,\\&c\to d+u+\bar{s}.\end{aligned}$$

它们的正确形式应该写作

$$\begin{aligned}&d+\gamma+\phi_\nu^0\to u+e^-+\bar{\nu}_e,\\&s+\phi_\gamma\to d+\gamma,\\&c+2\phi_\gamma+g\to d+u+\bar{s}.\end{aligned}\tag{2.6.12}$$

由 (2.5.29) 和 (2.5.30), (2.6.12) 的弱子交换反应式为

$$w^* w_1 w_2+w_1\bar{w}_1+\nu_e\bar{\nu}_e\to w^* w_1\bar{w}_1+\nu_e w_1 w_2+\bar{\nu}_e,\tag{2.6.13}$$

$$w^* w_1 w_2(\uparrow\downarrow\downarrow)+w_1\bar{w}_1(\uparrow\downarrow)\to w^* w_1 w_2(\uparrow\uparrow\downarrow)+w_1\bar{w}_1(\downarrow\downarrow),\tag{2.6.14}$$

$$\begin{aligned}&w^* w_2\bar{w}_2(\uparrow\uparrow\downarrow)+2w_1\bar{w}_1(\uparrow\downarrow)+w^*\bar{w}^*(\uparrow\uparrow)\\&\to w^* w_1 w_2(\uparrow\uparrow\downarrow)+w^* w_1\bar{w}_1(\uparrow\uparrow\downarrow)+\bar{w}^*\bar{w}_1\bar{w}_2(\uparrow\downarrow\downarrow).\end{aligned}\tag{2.6.15}$$

4. 正反粒子之间弱子交换

正反粒子的湮灭现象便是它们之间发生了弱子交换行为. 例如, 电子对 e^-e^+, μ 子对 $\mu^-\mu^+$, τ 子对 $\tau^-\tau^+$ 的湮灭

$$\begin{aligned}&e^-+e^+\to 2\gamma+\phi_\nu^0,\\&\mu^-+\mu^+\to 2\gamma+\phi_\nu^0,\\&\tau^-+\tau^+\to 2\gamma+\phi_\nu^0,\end{aligned}$$

便是如下弱子的交换:

$$\nu_l w_1 w_2 + \bar{\nu}_l \bar{w}_1 \bar{w}_2 \to w_1 \bar{w}_1 + w_2 \bar{w}_2 + \nu_l \bar{\nu}_l,$$

式中 $\nu_l = \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$.

又如夸克对湮灭

$$q + \bar{q} \to 2\gamma + g, \quad 2\phi_\gamma + \phi_g,$$

它们的弱子交换过程为

$$w^* w_1 \bar{w}_1 + \bar{w}^* w_1 \bar{w}_1 \to 2w_1 \bar{w}_1 + w^* \bar{w}^*,$$
$$w^* w_2 \bar{w}_2 + \bar{w}^* w_2 \bar{w}_2 \to 2w_2 \bar{w}_2 + w^* \bar{w}^*,$$
$$w^* w_1 w_2 + \bar{w}^* \bar{w}_1 \bar{w}_2 \to w_1 \bar{w}_1 + w_2 \bar{w}_2 + w^* \bar{w}^*.$$

注 2.11 在带电轻子之间, 带电轻子与夸克、夸克与夸克, 它们之间弱子交换由于受到 (2.5.50) 量子规则以及角动量规则的约束, 这些行为通常不易被分辨从而难于观测到. 特别是由于弱子交换半径 $R < 10^{-16}\text{cm}$(见 (2.6.4)) 很小, 一般情况下带电轻子与强子, 强子与强子之间很难进入这个半径之内, 因此, 上面说到的四种情况: 媒介子与媒介子之间, 带电轻子与媒介子之间, 夸克与媒介子之间, 正反粒子之间, 是弱子交换的主要形式. 由此可见, 媒介子在交换中真正起到了媒介作用.

2.6.2 守恒律

粒子的衰变与散射必须服从一些守恒律, 如电荷守恒、轻子数守恒、重子数守恒、能量守恒等. 因为衰变和散射是由弱子交换造成的, 从而在这最基本层次上的交换行为中这些守恒律应得到自然的解释和体现. 事实上, 在所有相互作用中都成立的守恒律只是复合粒子的弱子构成以及交换过程中弱子数守恒的简单推论. 下面我们将介绍相关守恒律.

1. *弱子数守恒*

在 (2.5.27) 中提供的粒子是参与弱子交换的全部基本粒子. 它们不能再进行任何形式的衰变, 并且三个 w 弱子之间也不能进行相互转换. 虽然中微子振荡将一种类型的中微子转变成另一种类型中微子, 但是在粒子衰变与散射的那一瞬间, 或者弱子交换的那一时刻, 各种类型的中微子数是守恒的. 换句话讲, 这三个轻子数 L_e, L_μ, L_τ 在粒子衰变和散射反应式两端是守恒的.

因此, 对任何粒子反应:

$$A_1 + \cdots + A_n = B_1 + \cdots + B_m, \tag{2.6.16}$$

每一种类型的弱子数是守恒的. 换句话说, 对任何一种类型的弱子 $\tilde{w}$, 它的数目在 (2.6.16) 中是守恒的, 即

$$N_{\tilde{w}}^{A} = N_{\tilde{w}}^{B},$$

式中 $N_{\tilde{w}}^{A}$ 和 $N_{\tilde{w}}^{B}$ 分别是 (2.6.16) 等式左端和右端中 $\tilde{w}$ 弱子总数. 例如, 在 (2.6.6) 反应式中, $\nu_e, \bar{\nu}_e, \nu_\mu, w_1, w_2$ 的数目在等式左和右两端都是 1, 其他弱子的数为零.

2. 自旋守恒

每一个弱子的自旋在交换过程中是不变的. 因此, 弱子数守恒意味着自旋也是一个守恒量子数, 即在 (2.6.16) 中有

$$J_{A_1} + \cdots + J_{A_n} = J_{B_1} + \cdots + J_{B_m},$$

式中 J_A 是 A 粒子的自旋.

在经典粒子物理中, 自旋量子数并不被认为是一种守恒量. 其原因就是旧的粒子反应式, 如 (2.6.5), (2.6.7) 等, 它们都不是完整的. 许多媒介子如胶子 g, ν 媒介子 ϕ_ν^0, 以及对偶媒介子 ϕ_γ, ϕ_g 等, 由于实验仪器无法测得它们, 因此在各种反应式中它们被丢失了. 因而便不能正确获得自旋的守恒性.

在 (2.6.9)-(2.6.11) 及 (2.6.13)-(2.6.15) 这些完整的衰变反应式中, 我们可以清楚地看到自旋守恒律.

3. 其他守恒量子数

从弱子数守恒以及复合粒子的弱子构成 (2.5.28), (2.5.33), (2.5.34), (2.5.36), 可以立刻推出如下守恒量子数:

$$\begin{aligned} &\text{电荷 } Q_e \text{、弱荷 } Q_w \text{、强荷 } Q_s \text{、} \\ &\text{重子数 } B \text{、三代轻子数 } L_e, L_\mu, L_\tau, \end{aligned} \tag{2.6.17}$$

其中 $Q_e, B, L_e, L_\mu, L_\tau$ 的守恒律在实验上被验证是对所有相互作用都成立的守恒量. 而在这里, (2.6.17) 的守恒性是弱子模型的推论. 这也是一个证据, 表明弱子模型是一个合理的, 逻辑上自洽的基本粒子理论.

4. 能量守恒

能量守恒是所有粒子衰变与散射都必须遵守的物理定律. 因而它也是弱子交换所必须遵守的规则. 这个规则是体现在下面一些衰变的禁戒上, 如

$$\begin{aligned} e^- &\nrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_e, \\ e^- &\nrightarrow \tau^- + \bar{\nu}_\tau + \nu_e, \\ \mu^- &\nrightarrow \tau^- + \bar{\nu}_\tau + \nu_\mu. \end{aligned} \tag{2.6.18}$$

虽然这些衰变过程中有弱子交换, 即

$$\begin{aligned} &e^- + \nu_\mu \bar{\nu}_\mu \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_e, \\ &e^- + \nu_\tau \bar{\nu}_\tau \to \tau^- + \bar{\nu}_\tau + \nu_e, \\ &\mu^- + \nu_\tau \bar{\nu}_\tau \to \tau^- + \bar{\nu}_\tau + \nu_\mu, \end{aligned} \tag{2.6.19}$$

关于 (2.5.50) 的量子规则都是允许的, 但是由于质量关系

$$m_\tau > m_\mu > m_e,$$

这些弱子交换过程 (2.6.19) 违背能量守性, 因此它们不能自发地发生. 于是在弱子交换中, 能量守恒定律能更具体地用下面方式陈述:

$$\begin{aligned} &\text{低质量的复合粒子不能与零质量的媒介子} \\ &\text{进行弱子交换使得产生高质量的复合粒子.} \end{aligned} \tag{2.6.20}$$

虽然我们将结论 (2.6.20) 归为能量守恒, 但实际上它比能量守恒还要苛刻, 因为能量守恒并不意味着非要遵守 (2.6.20) 的规则. 因此, (2.6.20) 结论的背后可能还有更深和更基本的原因.

2.6.3 衰变与散射的类型

经典粒子物理学将粒子的衰变与散射分为弱作用与强作用两种类型, 然而却没有明确的定义以区分它们. 通常的方法是靠实验以测得反应强度, 也即跃过概率再结合某些守恒律破坏情况来决定. 但是当我们从基本粒子即弱子交换的角度去看, 传统的观点将会被改变. 这一小节将专门讨论衰变与散射的分类问题.

虽然没有明确定义, 但是经典粒子物理一般按如下判据来区分弱作用与强作用两种类型的衰变.

$$\begin{cases} \text{弱作用型:} & \text{(i) 有轻子参与的反应,} \\ & \text{(ii) 奇异数、同位旋、宇称等守恒性被破坏;} \\ \text{强作用型:} & \text{否则为强作用型.} \end{cases} \tag{2.6.21}$$

上述分类方式是建立在对基本粒子情况以及强、弱相互作用不很清楚的条件下, 因此分类本身也是含糊的.

当从弱子交换这一最基本的层面上看, 情况将发生根本性地变化. 这是因为所有的复合粒子衰变与散射都要经历弱作用支配下的弱子交换行为以形成新的粒子, 然后再根据这些新粒子的类型 (如轻子或强子等) 由弱作用和强作用的斥力将它们分离开.

因此, 建立在弱子模型基础上, 衰变和散射被分为三种类型: 弱作用型, 强作用型, 混合型. 它们是由作用在交换后的终端粒子上作用力类型决定的.

例如, 下面三种衰变是弱作用型的:

$$\begin{aligned} &\nu_\mu + e^- \to \mu^- + \nu_e, \\ &n \to p + e^- + \bar{\nu}_e, \\ &\pi^0 \to 2\gamma. \end{aligned} \tag{2.6.22}$$

而 Δ^{++} 衰变是强作用型的:

$$\Delta^{++} \to p^+ + \pi^+. \tag{2.6.23}$$

混合型的例子是 Λ 衰变:

$$\Lambda \to p^+ + \pi^- \ (\text{即 } \Lambda + g + 2\gamma + \phi_\gamma \to p^+ + \pi^- + \phi_\gamma). \tag{2.6.24}$$

细心观察上面的例子, 可以发现, 在弱作用型衰变 (2.6.22) 中的三个反应式右边终端粒子中最多只有一个强子, 在强作用型衰变式 (2.6.23) 中没有轻子和媒介子, 而在混合型衰变式 (2.6.24) 的终端粒子中含有致少两个强子和一个媒介子或轻子. 由此我们可由反应式终端粒子的类型给出衰变分类判据:

$$\begin{cases} \text{弱作用型:} & \text{最多一个强子,} \\ \text{强作用型:} & \text{没有轻子也没有媒介子,} \\ \text{混合型:} & \text{否则便为混合型.} \end{cases} \tag{2.6.25}$$

注 2.12　对照 (2.6.21) 和 (2.6.25) 两种不同的衰变分类方案可以看到, 在经典的方案中看不出作用力的影响在哪里, 虽然分类名称是用的相互作用类型; 而弱子模型方案却清楚地可以看到相互作用在分类中的作用. 此外根据 (2.6.25) 的定义, 很容易从完整的衰变反应式分辨出反应类型, 但是由于同位旋及宇称难于计算从而从反应式来区别衰变类型变得很困难.

注 2.13　由于经典粒子物理中的宇称、同位旋、奇异数等量子数有一定的人工成分, 它们的守恒性也依赖于 (2.6.21) 的衰变类型定义方式, 因此它们的物理意义只能是相对的. 因为弱子模型是一个基本粒子的理论, 从这里出来的量子数如电荷, 弱荷, 强荷, 自旋, 强子数, 轻子数等是直接来源于弱子的内在禀性, 它们是自然的, 没有人工痕迹. 因而它们是适用于所有粒子衰变的守恒量.

注 2.14　宇称、同位旋、奇异数、超荷等这些经典粒子物理的量子数曾在历史的发展过程中起到重大作用. 虽然当进入到基本粒子的世界中, 在以弱子交换为基础的衰变理论中, 这些量子数至少目前还看不出它们的价值和意义, 但是可以肯定它们是有作用的.

2.6.4 复合粒子的衰变与散射

衰变和散射是由弱子交换造成的. 下面无质量的媒介子

$$(\gamma, \phi_\gamma), \quad (g, \phi_g), \quad \phi_\nu^0, \tag{2.6.26}$$

以各种能级散布在空间中, 其中绝大多数处在低能态. 正是这些在 (2.6.26) 中随机运动的媒介子, 当它们进入到复合粒子的交换半径内发生弱子交换行为便产生衰变. 下面我们将分别讨论弱作用型、强作用型与混合型这三种衰变与散射行为.

1. 弱作用衰变

(1) 首先考虑 $\nu_\mu e^- \to \mu^- \nu_e$ 散射, 其反应式为

$$\nu_\mu + e^- \to \mu^- + \nu_e,$$

它的弱子组分形式为

$$\nu_\mu + \nu_e w_1 w_2 \ \to \ \nu_\mu w_1 w_2 + \nu_e. \tag{2.6.27}$$

我们使用图 2.13 来描述 (2.6.27) 的散射. 该过程是一个高能 μ 中微子 ν_μ 进入电子 $e^- = \nu_e w_1 w_2$ 的交换半径内, ν_μ 与 ν_e 发生交换行为, 于是造成 (2.6.26) 的散射现象.

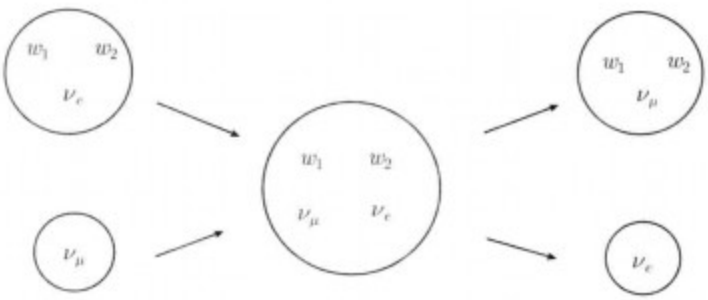


图 2.13 $\nu_\mu e^- \to \mu^- \nu_e$ 散射

(2) β 衰变. 考虑下面熟知的 β 衰变过程

$$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e. \tag{2.6.28}$$

注意到中子 n 和质子 p 的夸克成分

$$n = udd, \quad p = uud,$$

上述 (2.6.28) 的 β 衰变等价于下面 d 夸克衰变:

$$d \to u + e^- + \bar{\nu}_e. \tag{2.6.29}$$

它的完整形式应写成

$$\begin{aligned} & w^* w_1 w_2(d) + \nu_e \bar{\nu}_e(\phi_\nu^0) + w_1 \bar{w}_1(\gamma) \\ \to\ & w^* w_1 \bar{w}_1(u) + w_1 w_2(w^-) + \nu_e \bar{\nu}_e(\phi_\nu^0) \\ \to\ & w^* w_1 \bar{w}_1(u) + \nu_e w_1 w_2(e^-) + \bar{\nu}_e. \end{aligned} \tag{2.6.30}$$

在 (2.6.30) 的 β 衰变中, d 夸克中的 w_2 与光子中的 $\bar{w}_1$ 发生交换产生 u 夸克和中间 Bose 子 W^-, 然后 W^- 从 ν 媒介子 ϕ_ν^0 中捕获一个电中微子 ν_e 形成一个电子 e^- 和一个反电中微子 $\bar{\nu}_e$. 最后在弱作用斥力驱动下, 三个新形成的粒子 $p, e^-, \bar{\nu}_e$ 被加速飞离. 这便是 β 衰变的机制.

(3) 轻子衰变. μ 子和 τ 子衰变:

$$\begin{aligned} \mu^- + \phi_\nu^0 &\to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu, \\ \tau^- + \phi_\nu^0 &\to \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau. \end{aligned}$$

用弱子表达为

$$\begin{aligned} \nu_\mu w_1 w_2 + \nu_e \bar{\nu}_e &\to \nu_e w_1 w_2 + \bar{\nu}_e + \nu_\mu, \\ \nu_\tau w_1 w_2 + \nu_\mu \bar{\nu}_\mu &\to \nu_\mu w_1 w_2 + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau. \end{aligned} \tag{2.6.31}$$

在 (2.6.31) 中的轻子衰变可由图 2.14 示意.

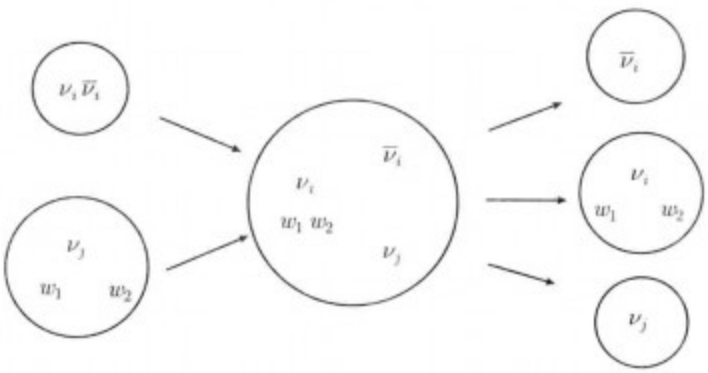


图 2.14　$\nu_i \neq \nu_j$, $\nu_i = \nu_e, \nu_\mu, \nu_j = \nu_\mu, \nu_\tau$

2. 强作用衰变

强作用衰变和混合型衰变总是伴随有正、反夸克创生现象发生. 在 (2.6.15) 中已看到不同正反夸克产生的过程. 为了更好地理解强作用衰变和混合衰变, 需要考察夸克对创生过程.

(1) 夸克对创生. 考虑 $u\bar{u}, d\bar{d}$ 创生过程:

$$g + 2\gamma \to u + \bar{u}, \tag{2.6.32}$$

$$\phi_g + 2\phi_\gamma \to d + \bar{d}. \tag{2.6.33}$$

$u\bar{u}$ 创生过程 (2.6.32) 可写成

$$\begin{aligned} & w^*\bar{w}^* \Uparrow\Uparrow (g) + w_1\bar{w}_1 \Downarrow\Downarrow (\gamma) + w_1\bar{w}_1 \Downarrow\Downarrow (\gamma) \\ & \to w^*w_1\bar{w}_1 \uparrow\Downarrow (u) + \bar{w}^*w_1\bar{w}_1 \uparrow\Downarrow (\bar{u}). \end{aligned} \tag{2.6.34}$$

在 (2.6.34) 中, 一个光子 γ 捕获胶子 $g = w^*\bar{w}^*$ 中的 w^* 弱子形成 u 夸克, 另一个光子 γ 捕获 $\bar{w}^*$ 弱子形成反 u 夸克 $\bar{u}$.

$d\bar{d}$ 创生过程 (2.6.32) 可写成

$$\begin{aligned} & w^*\bar{w}^* \uparrow\downarrow (\phi_g) + w_1\bar{w}_1 \uparrow\downarrow (\phi_\gamma) + w_2\bar{w}_2 \downarrow\uparrow (\phi_\gamma) \\ & \to w^*\bar{w}^* \uparrow\downarrow (\phi_g) + w_1w_2 \uparrow\downarrow (\phi_W^-) + \bar{w}_1\bar{w}_2 \downarrow\uparrow (\phi_W^+) \\ & \to w^*w_1w_2 \Uparrow\downarrow (d) + \bar{w}^*\bar{w}_1\bar{w}_2 \Downarrow\uparrow (\bar{d}). \end{aligned} \tag{2.6.35}$$

在 (2.6.35) 中, 一个 ϕ_γ 中的 $\bar{w}_1$ 与另一个 ϕ_γ 中的 w_2 交换形成 $\phi_W^\pm$(带电 Higgs 粒子). 然后 $\phi_W^\pm$ 分别捕获一个胶子的 w^* 和 $\bar{w}^*$ 从而创生出夸克对 d 和 $\bar{d}$.

(2) Δ^{++} 衰变. 这个衰变式写作

$$\Delta^{++} \to p + \pi^+,$$

它的完整形式为

$$\Delta^{++} + \phi_g + 2\phi_\gamma \to p + \pi^+. \tag{2.6.36}$$

由于终端粒子是质子 p 和 π 介子 π^+, 因而由判据 (2.6.25), Δ^{++} 衰变属强作用型. 由 Δ^{++} 的夸克构成及 u 的弱子构成

$$\Delta^{++} = uuu, \quad u = w^*w_1\bar{w}_1,$$

反应式 (2.6.36) 的弱子表达式为

$$\begin{aligned} & 3w^*w_1\bar{w}_1(\Delta^{++}) + w^*\bar{w}^*(\phi_g) + w_1\bar{w}_1(\phi_\gamma) + w_2\bar{w}_2(\phi_\gamma) \\ & \to 3w^*w_1\bar{w}_1(uuu) + w^*w_1w_2(d) + \bar{w}^*\bar{w}_1\bar{w}_2(\bar{d}) \\ & \to (2w^*w_1\bar{w}_1)(w^*w_1w_2)(uud) + (w^*w_1\bar{w}_1)(\bar{w}^*\bar{w}_1\bar{w}_2)(u\bar{d}). \end{aligned} \tag{2.6.37}$$

很清楚, (2.6.37) 的反应过程包含两个交换过程:

$$\text{夸克对创生:} \quad \phi_g + 2\phi_\gamma \to d\bar{d}, \tag{2.6.38}$$

$$\text{夸克交换:} \quad uuu + d\bar{d} \to uud + u\bar{d}. \tag{2.6.39}$$

d 夸克对创生 (2.6.38) 的弱子交换机制在 (2.6.35) 中已给出, 而夸克交换 (2.6.39) 是纯粹强相互作用的粒子交换行为. 它的交换机制可由强作用势的公式 (2.5.13) 和 (2.5.14) 给出如下.

我们可用图 2.15 来展示 (2.6.39) 的夸克交换机制. 图 2.15(a) 显示一个胶子对偶 $\phi_g = w^*\bar{w}^*$ 和两个光子对偶 $2\phi_\gamma = w_1\bar{w}_1 + w_2\bar{w}_2$ 进入到 $\Delta^{++} = uuu$ 的夸克交换半径内创生出 d 夸克对 $d+\bar{d}$. 然后在图 2.15(b) 中的夸克交换半径内, $u, u, u, d, \bar{d}$ 在 (2.5.17) 的强作用引力下具有平等的相互组合概率 (在夸克组合规则下), 从而当 u, u, d 结合成质子 $p = uud$ 时, 另一对夸克 u 和 $\bar{d}$ 结合成 π 介子 $\pi^+ = u\bar{d}$. 此时 p 与 π^+ 之间的强作用力是由 (2.5.18) 决定, 在夸克交换半径 $R < 10^{-15}$cm 内该作用力是排斥的. 因此 p 与 π^+ 在强作用斥力下被分离开. 这里我们需要指出, 由于弱作用的力程比强作用力还要短, 即由强作用公式 (2.5.13)-(2.5.15) 和弱作用公式 (2.5.21)-(2.5.22) 可知

$$\begin{aligned} \text{强作用力程} &\leqslant 10^{-13}\text{cm}, \\ \text{弱作用力程} &\leqslant 10^{-16}\text{cm}, \end{aligned}$$

因此夸克之间的交换半径大于弱作用力程. 这就使得在图 2.15 所示的范围内弱作用力已变得很小, 起主导作用的是强作用力.

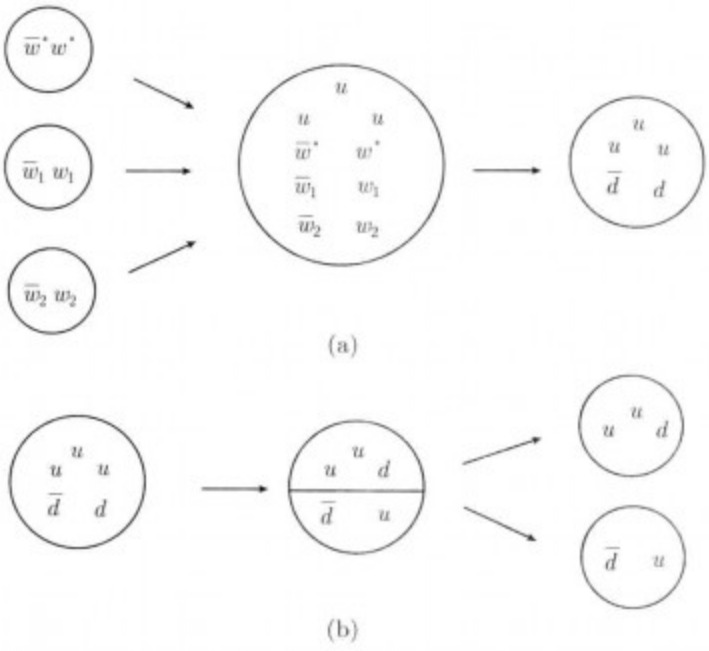


图 2.15　(a) d 夸克对创生, (b) 夸克交换产生 p 和 π^+

(3) D^0 衰变. 另一个重要例子是 D^0 衰变, 反应式为

$$D^0 \to K^- + \pi^+,$$

它的完整形式为

$$D^0 + g + 2\gamma \to K^- + \pi^+. \tag{2.6.40}$$

在经典粒子分类中, (2.6.40) 的衰变为视为弱作用型, 因为反应式左端奇异数 $S=0$, 而右端 $S=-1$, 奇异数不守恒. 而在我们的定义下, 它是属于强作用型, 这是由于 (2.6.40) 右边的终端粒子是两个强子, 没有轻子与媒介子.

D^0 衰变 (2.6.40) 的弱子表达式为

$$\begin{aligned}&(w^*w_2\bar{w}_2)(\bar{w}^*\bar{w}_1w_1)(c\bar{u})+w^*\bar{w}^*(g)+2w_1\bar{w}_1(2\gamma)\\&\to(w^*w_1w_2)(\bar{w}^*\bar{w}_1w_1)(s\bar{u})+(w^*w_1\bar{w}_1)(\bar{w}^*\bar{w}_1\bar{w}_2)(u\bar{d}).\end{aligned}\tag{2.6.41}$$

这个反应是由于 c 夸克衰变

$$c+g+2\gamma\to s+u+\bar{d},$$

它的弱子形式为

$$\begin{aligned}&w^*w_2\bar{w}_2(c)+w^*\bar{w}^*(g)+2w_1\bar{w}_1(2\gamma)\\&\to w^*w_1w_2(s)+w^*w_1\bar{w}_1(u)+\bar{w}^*\bar{w}_1\bar{w}_2(d).\end{aligned}\tag{2.6.42}$$

反应式 (2.6.42) 由两个弱子交换过程构成:

$$w^*w_2\bar{w}_2(c)+w_1\bar{w}_1(\gamma)\to w^*w_1w_2(s)+\bar{w}_1\bar{w}_2(W^+),\tag{2.6.43}$$

$$\bar{w}_1\bar{w}_2(W^+)+w_1\bar{w}_1(\gamma)+w^*\bar{w}^*(g)\to w^*w_1\bar{w}_1(u)+\bar{w}^*\bar{w}_1\bar{w}_2(\bar{d}),\tag{2.6.44}$$

于是 (2.6.41) 的衰变共有三次粒子交换过程:

$$\begin{aligned}&c+\gamma\to s+W^+ && (\text{(2.6.43) 的弱子交换}),\\&W^++\gamma+g\to u+\bar{d} && (\text{(2.6.44) 的弱子交换}),\\&c\bar{u}+g+2\gamma\to s\bar{u}+u+\bar{d}\to s\bar{u}+u\bar{d} && (\text{夸克交换}).\end{aligned}\tag{2.6.45}$$

3. 混合型衰变

按 (2.6.21) 方式看, Λ 衰变

$$\Lambda\to p+\pi^-$$

被视为弱作用类型. 但是它的完整反应式为

$$\Lambda+g+3\gamma\to p+\pi^-+\phi_\gamma,\tag{2.6.46}$$

因此按弱子模型的观点, (2.6.46) 属于混合型.

在 (2.6.46) 衰变中有三次粒子交换过程:

$$\begin{aligned} &g+2\gamma \to u+\bar{u} \quad (\text{(2.6.32) 弱子交换}),\\ &s+\gamma \to d+\phi_\gamma,\\ &uds+\gamma+g+2\gamma \to udd+u+\bar{u},\\ &\qquad\qquad \to uud+d\bar{u} \quad (\text{夸克交换}). \end{aligned} \tag{2.6.47}$$

在 (2.6.47) 中第二个弱子交换式写作

$$w^*w_1w_2 \uparrow\downarrow (s)+w_1\bar{w}_1 \uparrow\uparrow (\gamma) \to w^*w_1w_2 \uparrow\uparrow\downarrow (d)+w_1\bar{w}_1 \downarrow\uparrow (\phi_\gamma).$$

注 2.15　从 (2.6.38)-(2.6.39), 以及 (2.6.45) 和 (2.6.47), 可以清楚地看到, 强作用衰变与混合型衰变都包含有弱子交换与夸克交换这两种不同相互作用的粒子交换过程. 而弱作用型只含有弱子交换过程. 因此也可将衰变分为两种类型:

$$\begin{aligned} &\text{弱作用型: 反应式中不含夸克交换过程,}\\ &\text{强作用型: 否则为强作用型.} \end{aligned} \tag{2.6.48}$$

显然按 (2.6.48) 方式分类与 (2.6.21) 的经典分类具有很大的差异.

2.6.5　电子结构与韧致辐射机制

电子、质子、中子是最重要的三个物质粒子, 这是因为所有的宏观物质都是由这三种粒子组合而成. 而其他的带电轻子与强子都是平均寿命很短的粒子. 在这三个粒子中, 电子又是非常特殊的: 它可产生韧致辐射. 其原因可归为电子的特殊结构, 即它在 $\rho \backsimeq 10^{-16}\text{cm}$ 半径处附有一层媒介子云. 这种媒介子云是由微弱的弱作用吸引力造成的. 而质子和中子的半径已超出弱作用力的有效半径, 因此在它们周围没有媒介子云. 下面我们将分别讨论电子结构以及韧致辐射的机制.

1. 电子结构

电子 e 的弱子构成为

$$e=\nu_e w_1 w_2.$$

这三个弱子 ν_e, w_1, w_2 就如图 2.11 所示的那样在电子内部做高速转动. 注意到 ν_e, w_1, w_2 的电荷与弱荷值为

$$\begin{aligned} &\text{电荷数: } Q_\nu=0,\ Q_{w_1}=-\frac{1}{3},\ Q_{w_2}=-\frac{2}{3},\\ &\text{弱荷数: } C_\nu=1,\ C_{w_1}=1,\ C_w=1, \end{aligned}$$

这三个弱子在电子内部受到的电磁力与弱力是不均匀的. 此外, 电子的弱作用力公式为 (2.5.26), 它存在一个环形的弱力吸附层:

$$\rho_1<r<\rho_2, \quad \rho_1 \backsimeq 10^{-16}\text{cm}. \tag{2.6.49}$$

在 (2.6.49) 的吸附区域内弱作用力很小, 而在此环形区域外, 电子的弱作用力是斥力, 即

$$F_w > 0, \quad \text{当 } r < \rho_1 \text{ 及 } r > \rho_1. \tag{2.6.50}$$

因为所有没有质量的媒介子 $\gamma, \phi_\gamma, g, \phi_g, \phi_\nu^0$ 都是电中性并且含有两个弱荷 $2g_w$, 因而它们被电子弱作用力吸附在 (2.6.49) 的环形区域内形成一个媒介子云, 就如图 2.16 所示那样. 由于 ν_e, w_1, w_2 在电子内部做不规则的三体转动, 它们在此吸引环域内产生微弱力矩, 并且媒介子之间弱作用力也产生力矩和阻力. 因此这些 Bose 子将以低于光速的速度进行高速转动, 从而产生很小的质量依附在裸电子 $e = \nu_e w_1 w_2$ 周围.

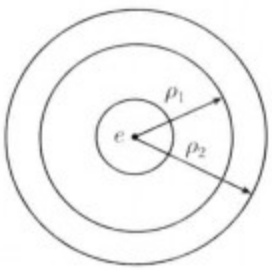


图 2.16 电子结构: 在环形域 $\rho_1 < r < \rho_2$ 内有一层媒介子云

2. 韧致辐射机制

韧致辐射是指当电子进行变速运动时会发射出光子的行为. 而发生韧致辐射的原因在经典理论中得不到解释, 建立在上述电子结构基础上, 下面关于韧致辐射给出一个合理解释, 它能够揭示出该现象的实质.

当一个运动电子处在一个电磁场中时, 该电磁场对这个裸电子 $e = \nu_e w_1 w_2$ 施加一个电磁力, 但是对于它的依附媒介子云没有作用力. 于是裸电子被加速而改变速度, 从而拉动依附媒介子云跟随运动, 这便造成作用在媒介子上力矩的一个摄动. 因为该电子作用在媒介子上的弱作用引力很弱, 因此在这个摄动下离心力使得一些媒介子飞离这个吸引环形区域. 当飞出弱引力环域外之后, 作用在它们之上的弱力 (2.6.50) 是斥力, 从而将它们加速至光速. 上述电子辐射机制如图 2.17 所示.

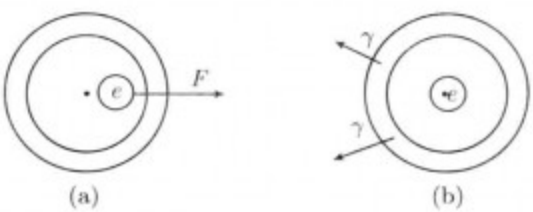


图 2.17 (a) 在一个电磁场中裸电子被加速; (b) 在一个力矩摄动下, 光子 (媒介子) 飞离弱吸引力环形区域

2.7　总结与评注

2.7.1　粒子物理基本问题及其解释

我们世界的物质是由一些基础粒子如轻子、夸克、媒介子、强子等构成. 当今的粒子物理知识告诉我们所有物质形式都是由六个轻子、六个夸克以及媒介子组成, 它们被视为是基本粒子. 所谓基本粒子是指它们是最小的粒子, 没有内部结构. 但是大量的粒子衰变与散射揭示出带电轻子、夸克以及媒介子是有内部结构的, 否则便无法理解它们的衰变行为. 此外经典粒子物理还留给我们如下一些基本问题没有解答, 毫无疑问, 这些问题都与宇宙最深的奥秘相关.

(Q_1) 四种相互作用力的来源是什么?

(Q_2) 为什么轻子不参与强相互作用?

(Q_3) 质量产生的机制是什么?

(Q_4) 为什么粒子会发生衰变, 这些衰变和散射的机制是什么?

(Q_5) 为什么没有质量的光子可产生有质量的正反粒子对?

(Q_6) 轻子、夸克、媒介子是否是基本粒子, 或者说它们具有内部结构吗? 如果有是怎样的?

(Q_7) 相互作用真的是如 Yukawa 所提出的是由交换媒介子产生的吗? 媒介子是如何起作用的?

(Q_8) 在宇宙中为什么正物质比反物质多? 这就是经典的物质起源中的重子不对称问题.

(Q_9) 强作用和弱作用力的公式是怎样的?

(Q_{10}) 夸克禁闭的机制是什么?

(Q_{11}) 为什么在相同的空间尺度内, 强作用力和弱作用力都表现出既有吸引力又有斥力的现象?

(Q_{12}) 韧致辐射的机制是什么?

以上 (Q_1) ~ (Q_{12}) 的问题是目前所有已知的基本粒子模型以及相互作用理论所不能解答的. 但是应用我们发展的统一场理论以及弱子模型能够对上述问题提供合理的解释.

(Q_1) 在统一场方程中就包含了四种相互作用力来源于四种荷. 引力是由质量荷 m 产生的, 电磁作用力是由电荷 e 生出, 弱作用力源于弱荷 g_w, 强相互作用来源于强荷 g_s. 因此在 2.5.2 小节中给出的相互作用荷理论很好地解答了这个问题. 这种观点与 Yukawa 相互作用产生于媒介子交换理论是完全不同的. 但是 Yukawa 理论来自猜测, 而我们的理论是从建立在原理基础上的场方程推导出来的.

(Q_2) 根据相互作用荷理论, 一个不带强荷的粒子就不参与强相互作用. 由弱子模型, 只有 w^* 弱子含一个强荷 g_s, 其他所有弱子不含强荷. 而由带电轻子的弱子构成 (2.5.28) 可以看到, 所有轻子不含 w^* 从而没有强荷. 这就解释了为什么轻子不参与强相互作用的原因.

(Q_3) 质量是如何产生的问题一直是物理学面对的一个难题. Higgs 机制是解决该问题的一个方案. 但是这种机制本身问题很多, 同时它并不能够解决所有粒子的质量来源问题, 详细情况可参见 3.3 节内容. 弱子模型提出所有粒子都是由六种无质量的基本粒子和它们的反粒子构成. 在 2.5.6 小节中, 我们给出无质量的弱子如何组合成一个有质量粒子的质量生成机制, 即无质量的弱子在弱荷力作用下被减速, 从而由 Einstein 质能关系产生出质量. 此外, 作为复合粒子组元的弱子是在弱相互作用的“渐近自由环形域”内运动, 就如公式 (2.5.25) 所表示的那样. 在这个自由带没有作用力, 束缚能与排斥能对质量的贡献相互抵消. 从而这些组元粒子的质量主要是从它们的动力学行为中获得. 正是因为如此才能成功地解释正反弱子对构成的媒介子没有质量, 而三个弱子构成一个有质量的粒子.

(Q_4) 衰变与散射是透露粒子内部结构信息的唯一渠道, 它们与电磁作用, 强作用和弱作用直接相关. 作为 PID 统一场理论的一个组成部分, 弱子模型对粒子衰变与散射提供了一个完美的解释. 特别地, 衰变的机制包含两个环节: ①在基本粒子层次的弱作用下进行弱子交换以形成新的粒子与夸克, 以及在夸克层次的强相互作用下在新旧夸克之间进行交换以形成新的强子; ②在轻子与强子层次的弱斥力与强斥力作用下, 新的复合粒子被驱散开产生衰变现象. 特别需要指出的是, 建立在弱子模型基础之上的衰变反应式中, 衰变前与衰变后所有粒子的成分都十分精确地被知道.

(Q_5) 光子产生正反电子对的经典解释是由 Dirac 的空穴理论所提供. 然而正如在 2.6.1 小节中所说, 空穴理论面临两大难题无法回答, 其一是光子不仅可产生电子对, 它也可创生其他正反粒子对, 而它们没有负能级, 也没有空穴概念; 其二是电子负能级的空穴具有正电荷与质量, 它们从何而来? 而由图 2.12 给出的弱子交换机制不仅清楚地提供了电子对创生的图像, 而且也圆满地解释了它们质量与电荷的来源.

(Q_6) 再一次地重申, 亚原子的衰变给出明确的证据, 说明带电轻子、夸克、媒介子有内部结构, 它们不是基本粒子. 而弱子模型提供的基本粒子在复合粒子的结构成分、量子数及其衰变形式这三个方面都高度一致地协调, 这决不是巧合.

(Q_7) 今天粒子物理流行的观点是 Yukawa 理论, 该理论认为相互作用力是来源于粒子之间所进行的媒介子交换行为. 但是这种观点很含糊, 它无法说清究竟怎样地交换产生这些力. 但是从弱子模型的衰变机制可清楚地看到相互作用力来源于作用荷. 而媒介子提供的弱子交换只是改变了衰变粒子的身份. 因此作用力来源

并非是粒子交换所致. 作用力与粒子交换之间的关系在 Q_4 问题解答中已被清楚地阐明.

(Q_8) 重子不对称问题是建立在大爆炸宇宙起源基础之上的, 它有两个基本观点: 其一是大爆炸初期宇宙是处在光子海状态中; 其二是所有正反电子对和正反夸克对是由光子创生的. 因此这就出现了正物质与反物质应该具有相等的数量问题, 这与现实正物质比反物质多的现象不相符合. 现在从弱子模型观点看, 此问题已不再存在. 因为大爆炸初期是处在弱子海中, 而非光子海. 弱子没有必要非要正粒子数与反粒子数相等.

(Q_9) ~ (Q_{11}) 我们的统一场理论能够导出三个不同层次的强相互作用势公式 (2.5.13)-(2.5.15) 和二个不同层次的弱相互作用势公式 (2.5.21)- (2.5.22). 这两组公式不仅能解释强作用力和弱作用力的短程性质以及夸克禁闭和弱子禁闭, 而且这些不同层次的作用势也能很好地解释在同一个空间区域内弱子之间和夸克之间是吸引的, 因而可以相互交换; 而在新形成的复合粒子之间作用力是排斥的, 从而将它们驱散开.

(Q_{12}) 电子一直被认为是没有结构的点粒子. 这就导致人们无法理解韧致辐射现象. 建立在弱作用势公式 (2.5.21)-(2.5.22) 和弱子模型基础上导出的图 2.16 所示的电子结构可以合理地解释电子辐射行为.

以上关于 (Q_1) ~ (Q_{12}) 的粒子物理基本问题解答, 有力地说明建立在 PID 和 PRI 基础上的统一场理论是在正确的方向上.

2.7.2　各章节的评注

2.1 节: 这一节的内容主要是引自 (章乃森, 1994) 和 (Griffiths, 2008). 它们是粒子物理的基础知识.

2.2 节: 这一节的内容源于 (章乃森, 1994)、(Griffiths, 2008) 和 (Cottingham, Greenwood, 2007).

中微子振荡理论动摇了三种轻子数 L_e, L_μ, L_τ 的守恒性. 但是如果只考虑粒子反应的一瞬间, 此时反应式左右两端 L_e, L_μ, L_τ 的守恒性应该是成立的. 因此如果仅仅考虑粒子反应时的状态, 中微子振荡理论并不影响这三种轻子数的守恒性. 这里需要说明, 中微子质量的出现并不与中微子静止质量为零这一事实相冲突. 关于这一点可参见 2.5.3 小节的讨论.

宇称不守恒是由中微子左手螺旋性造成. 这个结论是从所有涉及中微子发射的实验观测资料中得到的. 也就是说, 所有粒子反应的入射与发射中微子都表现出左手螺旋性, 而反中微子 $\bar{\nu}$ 为右手螺旋性. 这并不影响 ν 与 $\bar{\nu}$ 是同一个粒子的结论. 如果 ν 与 $\bar{\nu}$ 是同一个粒子, 那么左旋的 ν 总是与对应轻子 l 相伴, 而右旋 ν 总是与反轻子 $\bar{l}$ 相伴随.

2.3 节：由 (2.3.3)-(2.3.4) 和 (2.3.6) 给出的观点是作者理解众多粒子的一种方式, 它并没有什么新的物理内容, 只是能将复杂问题简单化. 但是如果这些能级能与强作用势和弱作用势的 Hamilton 算子特征值联系上, 那么这种观点便有了新的物理内涵. 根据后面 2.5 节的内容, (2.3.3)-(2.3.4) 应改写为

$$\begin{cases} \text{重子} = \text{质子不同能级态, 质子为最低能级态,} \\ \text{介子} = \text{质子能级跃迁的中间辐射粒子,} \\ \text{质子的最终辐射粒子} = \text{中微子} + (2.5.14) \text{ 的场粒子.} \end{cases} \tag{2.7.1}$$

而 (2.3.6) 改写为

$$\begin{cases} \text{带电轻子} = \text{电子不同能级态, 电子为最低能级态,} \\ \text{中微子} = \text{所有粒子跃迁的辐射粒子,} \\ \text{电子的最终辐射粒子} = \text{中微子} + (2.5.14) \text{ 的场粒子.} \end{cases} \tag{2.7.2}$$

这两种观点 (2.7.1) 和 (2.7.2) 可以很大地简化粒子的分类.

2.4 节：夸克模型是量子场论所谓标准模型的一个组成部分. 这是一个非常成功的理论, 对于强子结构与强子分类给出很好的描述. 此外夸克模型也是量子色动力学的基础, 强相互作用的 Lagrange 作用量就是由规范场理论结合夸克模型获得的.

夸克模型的产生是借助于八重道分类与 $SU(3)$ 不可约表示在形式上的巧合而猜出来的. 实质上这两者之间并无什么关系. 为了说明这一点, 这里再简要地给予解说.

回忆 $SU(N)$ 不可约表示与 $SU(N)$ 的关系. 为了简单, 只说明 $SU(N)$ 与 $SU(N)\otimes SU(N)$ 关系如下：

$$U \in SU(N) \Leftrightarrow U : C^N \to C^N \text{ 保范线性映射.}$$

每个 $U \in SU(N)$ 可诱导出 $C^{N^2} = C^N \otimes C^N$ 上一个线性映射

$$U \otimes U : \ C^N \otimes C^N \to C^N \otimes C^N.$$

关于矩阵张量积定义可见 (2.4.6). 如下对应关系：

$$U \mapsto U \otimes U \Rightarrow SU(N) \to SU(N) \otimes SU(N) \tag{2.7.3}$$

是一个群同构, 称为 $SU(N)$ 的群表示. 由群表示 Young 理论知道存在一个 N^2 阶复矩阵 M, 使得对所有 $U \otimes U$ 有

$$M(U \otimes U)M^{-1} = \begin{pmatrix} A_n & 0 \\ 0 & A_m \end{pmatrix}, \quad n = \frac{N(N-1)}{2}, \ m = \frac{N(N+1)}{2}, \tag{2.7.4}$$

让我们来看 (2.7.4) 的意义. 若 $\{q_1,\cdots,q_N\}$ 是 C^N 一个基底, 则 $\{q_1q_1,\cdots,q_1q_n,\cdots,q_Nq_1,\cdots,q_Nq_N\}$ 是 $C^N\otimes C^N$ 的对应基底. (2.7.4) 关系式意味着当取

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_{N^2} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} q_1q_1 \\ \vdots \\ q_Nq_N \end{pmatrix} \tag{2.7.5}$$

作为 $C^N\otimes C^N$ 新基底时, 这个基底被分成两组:

$$\{e_1,\cdots,e_n\} \text{ 和 } \{e_{n+1},\cdots,e_{n+m}\},\quad n=\frac{N(N-1)}{2},\ m=\frac{N(N+1)}{2},$$

使得由它们张成的两个子空间

$$E_1^n=\mathrm{span}\{e_1,\cdots,e_n\},\quad E_2^m=\mathrm{span}\{e_{n+1},\cdots,e_{n+m}\}$$

对任何 $U\in SU(N)$ 都是 $U\otimes U$ 的不变子空间:

$$\begin{aligned} &U\otimes U|_{E_1^n}=A_n:\ E_1^n\to E_1^n,\\ &U\otimes U|_{E_2^m}=A_m:\ E_2^m\to E_2^m. \end{aligned} \tag{2.7.6}$$

物理上将 (2.7.3) 和 (2.7.6) 这种关系简单地用

$$N\otimes N=n\oplus m\quad \left(n=\frac{N(N-1)}{2},\ m=\frac{N(N+1)}{2}\right) \tag{2.7.7}$$

来表达. 此时 C^N 基底 $\{q_1,\cdots,q_N\}$ 被视为 N 个夸克, $\{q_1q_1,\cdots,q_Nq_N\}$ 被看作由两个夸克构成的粒子, 而 (2.7.6) 被理解成所有 $q_1q_1,\cdots,q_Nq_N$ 被分成两个不变类:

$$\{e_1,\cdots,e_n\} \text{ 和 } \{e_{n+1},\cdots,e_{n+m}\}.$$

上述解说就是 $SU(3)$ 夸克理论的基本思想. 不过此时 $SU(3)$ 的基底为 $q_1=u,q_2=d,q_3=s$, 并且取代 (2.7.3) 的是

$$U\to U\otimes U\otimes U,$$

而取代 (2.7.7) 的关系为

$$3\otimes 3\otimes 3=10\oplus 8\oplus 8\oplus 1. \tag{2.7.8}$$

巧合的是由三个夸克 (u,d,s) 复合的重子确实可分成一组 10 个粒子和另一组 8 个粒子的分类.

然而细心观察发现. 由 (u,d,s) 组合的重子并非是按

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_{27} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} q_1q_1q_1 \\ \vdots \\ q_3q_3q_3 \end{pmatrix}$$

新基底 $e_1,\cdots,e_{27}$ 的方式进行组合, 这里 M 是满足

$$M(U\otimes U\otimes U)M^{-1} = \begin{pmatrix} A_{10} & & & 0 \\ & A_8 & & \\ & & A_8' & \\ 0 & & & A_1 \end{pmatrix}$$

的矩阵. 因此这种用 (2.7.8) 的方式建立的夸克模型以及强子分类方案只是一种类比, 并非在本质上 $SU(N)$ 不可约表示是这套理论方案的真实数学基础. 当我们将三个夸克扩展到六个时, $SU(6)$ 的不可约表示与现实就相差很远了.

2.5 节和 2.6 节：这两节内容全部是作者与汪守宏提出的新理论, 可见 (Ma, Wang, 2013b).

第 3 章　规范理论与标准模型

3.1　Yang-Mills 规范理论

3.1.1　电磁场的规范不变性

规范对称性是物理学最基本的对称性原理之一, 它决定了除引力场外的所有其他三种相互作用的场方程形式. 规范不变性在电磁场方程中很早就被人们所知. 但是将电磁场的这种对称性推广到强和弱相互作用中去却是一件非常不平凡的事情, 这是经过许多代人不断努力而探索出来的. 这其中, 对规范理论作出先驱性工作的有 H. Weyl, O. Klein, 杨振宁和 Mills, S. L. Glashow, S. Weinberg, A. Salam. 在今天, 这个理论已被大量实验事实证明是一个正确的方向.

为了能够清楚规范理论是如何被创立的, 从 Dirac 方程与电磁场的耦合说起. 它能告诉我们这个变革性思想的起源.

在 1.4.5 小节中已介绍了描述微观粒子的 Dirac 方程, 为了方便, 这里再次将它写出来如下:

$$\mathrm{i}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi-\frac{mc}{\hbar}\psi=0. \tag{3.1.1}$$

此方程只是在没有电磁场存在的情况下有效, 而当微观粒子被放在 A_{μ} 的电磁场内时, 人们已知道取代 (3.1.1) 的方程是如下形式:

$$\mathrm{i}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu}+\mathrm{i}eA_{\mu})\psi-\frac{mc}{\hbar}\psi=0. \tag{3.1.2}$$

此处的电磁场 A_{μ} 满足 Maxwell 方程 (1.3.44), 再次写出为

$$\partial_{\nu}F^{\mu\nu}=\frac{4\pi}{c}J^{\mu}, \tag{3.1.3}$$

式中

$$F^{\mu\nu}=\partial_{\nu}A_{\mu}-\partial_{\mu}A_{\nu}. \tag{3.1.4}$$

方程组 (3.1.2)-(3.1.4) 就是量子电动力学的场方程, 它的 Lagrange 作用量密度为如下形式:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{QED}}=-\frac{\pi}{16}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\bar{\psi}\left(\mathrm{i}\gamma^{\mu}D_{\mu}-\frac{mc}{\hbar}\right)\psi, \tag{3.1.5}$$

其中微分算子 D_{μ} 为

$$D_{\mu}=\partial_{\mu}+\mathrm{i}eA_{\mu},\quad e\text{ 为电荷}. \tag{3.1.6}$$

现在我们就可以从量子力学的角度来阐述规范不变性理论的思想. 注意到复值波函数 $\psi=(\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4)^{\mathrm{T}}$ 是描述微观粒子运动的. 在现实中, ψ 的相位角是无法观测的, 即对于粒子来讲, ψ 的状态与如下相位角变换的状态:

$$\tilde{\psi}=e^{\mathrm{i}\theta}\psi \quad (\theta=\theta(x,t)\text{ 是任意实函数}) \tag{3.1.7}$$

是无法分辨的. 这种自然现象译成数学就是 Dirac 方程在 (3.1.7) 的规范变换下应该是协变的. 这里规范变换是指 (3.1.7) 是一个保范变换:

$$|\tilde{\psi}|^2=\tilde{\psi}^{\dagger}\tilde{\psi}=\psi^{\dagger}\psi.$$

再注意到 (3.1.1) 中的微分作用在 $\tilde{\psi}$ 上有

$$\partial_\mu\tilde{\psi}=\partial_\mu(e^{\mathrm{i}\theta}\psi)=e^{\mathrm{i}\theta}(\partial_\mu+\mathrm{i}\partial_\mu\theta)\psi.$$

因此 (3.1.1) 在 (3.1.7) 的规范变换下并不是协变的, 它多出 $\partial_\mu\theta$ 这一项. 为了使 Dirac 方程是协变的, 我们必须关于微分算子 ∂_μ 作一修正, 加上一项 A_μ, 即 ∂_μ 变为 $D_\mu=\partial_\mu+\mathrm{i}gA_\mu$, g 为常数, 使得在 (3.1.7) 变换下 A_μ 按如下规则进行变换:

$$\tilde{A}_\mu=A_\mu-\frac{1}{g}\partial_\mu\theta. \tag{3.1.8}$$

这样, 用 $D_\mu=\partial_\mu+\mathrm{i}gA_\mu$ 取代 (3.1.1) 的 ∂_μ 后, Dirac 方程便在 (3.1.7) 和 (3.1.8) 变换下是协变的:

$$\left(\mathrm{i}\gamma^\mu\tilde{D}_\mu-\frac{mc}{\hbar}\right)\tilde{\psi}=e^{\mathrm{i}\theta}\left(\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu-\frac{mc}{\hbar}\right)\psi=0, \tag{3.1.9}$$

式中 $\tilde{D}_\mu=\partial_\mu+\mathrm{i}g\tilde{A}_\mu$.

将改造后的 Dirac 方程 (3.1.9) 和已知的与电磁场耦合的 Dirac 方程 (3.1.2) 对照, 便发现由规范不变性产生出的场 A_μ 与电磁场相像. 再由电磁场方程 (3.1.3)-(3.1.4) 在 (3.1.8) 变换下不变的已知事实便可断定 A_μ 就是电磁场, 而常数 g 就是电荷. 这样, 就从粒子的相位角对称性, 也就是通常所说的规范对称性导出如下结论:

$$\begin{cases}\text{粒子的 } U(1) \text{ 规范对称性} \Rightarrow \text{规范场 } A_\mu;\\ U(1) \text{ 规范场 } A_\mu=\text{电磁场};\\ U(1) \text{ 规范耦合常数 } g=\text{电荷 } e,\end{cases} \tag{3.1.10}$$

这里 $U(1)$ 是指 $e^{\mathrm{i}\theta}$ 全体构成的群.

现在物理上总是将 (ψ,A_μ) 称为 $U(1)$ 规范场, 而将 (3.1.7) 和 (3.1.8) 的联合变换, 即

$$\begin{cases}\tilde{\psi}=e^{\mathrm{i}\theta}\psi,\\ \tilde{A}_\mu=A_\mu-\dfrac{1}{e}\partial_\mu\theta,\end{cases} \tag{3.1.11}$$

称作是 $U(1)$ 规范变换.

不难看出量子电动力学场方程 (3.1.2)-(3.1.4) 的 Lagrange 作用量 (3.1.5)-(3.1.6) 是在 (3.1.11) 的 $U(1)$ 规范变换下不变的. 事实上, 可以证明同时满足 Lorentz 不变性与 $U(1)$ 规范不变性的关于规范场 A_μ 的作用量 (不超过二次导数) 只能取如下形式:

$$\int [\alpha F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \beta A_\mu J^\mu]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \tag{3.1.12}$$

其中 J^μ 满足散度为零的条件

$$\partial_\mu J^\mu = 0,$$

它导出 (3.1.12) 积分第二项关于 (3.1.11) 变换的不变性, 即

$$\int \partial_\mu \theta J^\mu = -\int \theta \partial_\mu J^\mu = 0.$$

电磁场的 $U(1)$ 规范不变性实例清楚地展现了可以通过规范不变性来定出相互作用场及其场方程. 这就是规范场理论的核心.

3.1.2　$SU(N)$ 的生成元表示

在自然界中经常出现粒子的不同几种态在某一物理观测中表现出不可分辨性质. 例如, 质子与中子在原子核中的强作用力方面表现出一样的性质. 这种 N 个粒子态在某个方面的不可区分性用数学语言表达就是这 N 个态的波函数 $\psi^k = (\psi_1^k, \psi_2^k, \psi_3^k, \psi_4^k)^{\mathrm{T}}$ $(1 \leqslant k \leqslant N)$ 在下面 $SU(N)$ 规范 (保范) 变换下

$$\begin{pmatrix} \tilde{\psi}^1 \\ \vdots \\ \tilde{\psi}^N \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \vdots \\ \psi^N \end{pmatrix}, \quad \Omega \in SU(N), \tag{3.1.13}$$

关于 ψ^k $(1 \leqslant k \leqslant N)$ 的 Dirac 方程是协变的, 这被称作是 $SU(N)$ 规范对称性. 在上一小节我们已看到, Dirac 方程的 $U(1)$ 规范对称性可以定出电磁场 A_μ 及其场方程 (作用量) 形式. 同样地, 从 Dirac 方程的 $SU(N)$ 规范对称性也可定出一组规范场 G_μ^a $(1 \leqslant a \leqslant K)$ 以及它们的规范不变性作用量 (即场方程). Yang-Mills 理论的主体就是告诉我们如何定出 $SU(N)$ 规范场的作用量形式.

为了介绍 Yang-Mills 理论, 首先需要了解 $SU(N)$ 群生成元表示的基本概念和性质. $SU(N)$ 中的元素就是 N 维复正交矩阵 Ω, 即 Ω 转置再取复共轭 $\Omega^\dagger$ 便是它的逆:

$$\Omega^\dagger = \Omega^{-1}, \quad \forall \Omega \in SU(N). \tag{3.1.14}$$

再注意到指数形式的矩阵 $e^{\mathrm{i}A}$, A 是一个 N 阶复矩阵, 它具有如下性质:

$$(e^{\mathrm{i}A})^\dagger = e^{-\mathrm{i}A^\dagger}. \tag{3.1.15}$$

因此每个 $SU(N)$ 中的元素 Ω, 由 (3.1.14) 和 (3.1.15), 都可表示为

$$\Omega = e^{\mathrm{i}A}, \quad A^\dagger = A, \quad \forall \Omega \in SU(N), \tag{3.1.16}$$

即 A 是 Hermite 矩阵.

$SU(N)$ 是一个 Lie 群, 它既有群结构又有流形结构. 作为一个流形, $SU(N)$ 的维数为 (不熟悉此概念的读者只需接受即可)

$$\dim SU(N) = K, \quad K = N^2 - 1.$$

因此对于任何 $\Omega_0 \in SU(N)$ 的切空间 $T_{\Omega_0}SU(N)$ 是一个 K 维线性空间 R^K, 它由 K 个 Hermite 矩阵生成:

$$\begin{cases} T_{\Omega_0}SU(N) = \mathrm{span}\{\tau_1, \cdots, \tau_K\}, \quad K = N^2 - 1, \\ \tau_a^\dagger = \tau_a \text{ 是 } N \text{ 阶 Hermite 矩阵.} \end{cases} \tag{3.1.17}$$

这 K 个生成元 τ_a $(1 \leqslant a \leqslant K)$ 可以是任意线性无关的 Hermite 矩阵, 它们具有下面两个对于规范理论来讲是最重要的性质:

$$\Omega = \Omega_0 e^{\mathrm{i}\theta^a \tau_a} = e^{\mathrm{i}A} e^{\mathrm{i}\theta^a \tau_a}, \quad \forall \Omega \subset U, \tag{3.1.18}$$

θ^a $(1 \leqslant a \leqslant K)$ 为实数, U 为 Ω_0 的邻域; 以及

$$[\tau_a, \tau_b] = \tau_a \tau_b - \tau_b \tau_a = \mathrm{i}\lambda_{ab}^c \tau_c, \tag{3.1.19}$$

式中 λ_{ab}^c 称为 $SU(N)$ 结构常数, 它依赖于基底 τ_a 的选择.

上述性质 (3.1.18) 表明 $SU(N)$ 中元素 (几乎所有) 可用 (3.1.17) 切空间的生成元来表达, 称作是 $SU(N)$ 的生成元表示. 而性质 (3.1.19) 表明 $SU(N)$ 切空间具有 Lie 代数结构. 对于规范理论来讲只需知道这两个公式即可, 因为就是这两个公式才能够将 (3.1.13) 变换不变性的规范场 G_μ^a $(1 \leqslant a \leqslant N^2 - 1)$ 以及它所同时能够满足 Lorentz 不变性与 $SU(N)$ 规范不变性的作用量确定下来.

3.1.3 Yang-Mills 作用量

Klein 在 1938 年为了建立弦理论曾得到 $SU(N)$ 规范场及其作用量的形式, 但是很快被人忘记. 在 1954 年杨振宁和 Hills 又独立地提出了规范场理论, 并明确地将这一套数学方案作为弱相互作用与强相互作用的候选理论. 现在我们已经知道规范不变性确实是电磁、弱、强三种相互作用的基本原理, 它们的场方程全部是由规范对称性确定的.

这一小节专门介绍 Yang-Mills 理论, 看一下这个理论是如何由 $SU(N)$ 规范不变性来确定规范场方程的.

$SU(N)$ 规范场是由 $K=N^2-1$ 个 Lorentz 向量场 G_μ^a $(1\leqslant a\leqslant K)$ 和 N 个 Dirac 旋量场 ψ^k $(1\leqslant k\leqslant N)$ 构成:

$$G_\mu^1,\cdots,G_\mu^K,\quad \Psi=\begin{pmatrix}\psi^1\\ \vdots\\ \psi^N\end{pmatrix},\quad \psi^j=\begin{pmatrix}\psi_1^j\\ \psi_2^j\\ \psi_3^j\\ \psi_4^j\end{pmatrix}, \tag{3.1.20}$$

其中 N 个旋量场 Ψ 描述了 N 个粒子态, 满足 Dirac 方程

$$\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu\Psi-\frac{c}{\hbar}m\Psi=0, \tag{3.1.21}$$

式中 m 是质量矩阵

$$m=\begin{pmatrix}m_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & m_N\end{pmatrix}, \tag{3.1.22}$$

代表 N 个粒子态的质量, 而导算子 D_μ 是由 (3.1.21) 在 (3.1.13) 规范变换下满足协变性的要求所确定的, 其形式为

$$D_\mu=\partial_\mu+\mathrm{i}gG_\mu^a\tau_a, \tag{3.1.23}$$

这里 τ_a $(1\leqslant a\leqslant K)$ 是如 (3.1.17) 的 $SU(N)$ 生成元, g 为耦合常数, G_μ^a $(1\leqslant a\leqslant K)$ 就是 (3.1.20) 中的规范场.

现在要做的第一件事就是从 (3.1.21) 的协变性推导出 $SU(N)$ 规范场 G_μ^a 在 (3.1.13) 变换下所遵守的变换规则. 由 (3.1.18), $SU(N)$ 规范变换 (3.1.13) 可写成

$$\tilde{\Psi}=\Omega\Psi,\quad \Omega=e^{\mathrm{i}A}e^{\mathrm{i}\theta^a\tau_a},\quad A\text{ 为某个常值矩阵}, \tag{3.1.24}$$

其中 $\theta^a=\theta^a(x), x\in M^4$ 为 Minkowski 空间. Dirac 方程 (3.1.21) 的协变性等价于导算子 D_μ 具有

$$\tilde{D}_\mu\tilde{\Psi}=\Omega D_\mu\Psi, \tag{3.1.25}$$

该等式左端为

$$\begin{aligned}\tilde{D}_\mu\tilde{\Psi}&=(\partial_\mu+\mathrm{i}g\tilde{G}_\mu^a\tau_a)\tilde{\Psi}\\ &=(\partial_\mu+\mathrm{i}g\tilde{G}_\mu^a\tau_a)\Omega\Psi\quad(\text{由 (3.1.24)})\\ &=\Omega\partial_\mu\Psi+(\partial_\mu\Omega)\Psi+\mathrm{i}g\tilde{G}_\mu^a\tau_a\Omega\Psi.\end{aligned}$$

而 (3.1.25) 右端为

$$\begin{aligned}\Omega D_\mu \Psi &= \Omega(\partial_\mu + \mathrm{i}gG_\mu^a\tau_a)\Psi \\ &= \Omega\partial_\mu\Psi + \mathrm{i}g\Omega G_\mu^a\tau_a\Psi.\end{aligned}$$

因此由 (3.1.25) 导出 $\tilde{G}_\mu^a$ 的表达式为

$$\tilde{G}_\mu^a\tau_a = \frac{\mathrm{i}}{g}(\partial_\mu\Omega)\Omega^{-1} + \Omega G_\mu^a\tau_a\Omega^{-1}. \tag{3.1.26}$$

此外质量矩阵 (3.1.22) 按如下规则变换

$$\tilde{m} = \Omega m\Omega^{-1}. \tag{3.1.27}$$

现在将 (3.1.24), (3.1.26) 和 (3.1.27) 合在一起为

$$\begin{cases}\tilde{\Psi} = \Omega\Psi,\ \Omega = e^{\mathrm{i}A}e^{\mathrm{i}\theta^a\tau_a} \subset SU(N), \\ \tilde{G}_\mu^a\tau_a = \Omega G_\mu^a\tau_a\Omega^{-1} + \dfrac{\mathrm{i}}{g}(\partial_\mu\Omega)\Omega^{-1}, \\ \tilde{m} = \Omega m\Omega^{-1}.\end{cases} \tag{3.1.28}$$

这就给出 G_μ^a 的变换规则.

由 (3.1.28) 给出的一组变换被称作是 $SU(N)$ 规范变换. 在这组规范变换下 Dirac 方程 (3.1.21) 是协变的. 通常物理学将 (3.1.24) 取为 $\Omega_0 = I$ 处无穷小变换

$$\Omega = e^{\mathrm{i}\theta^a\tau_a} = I + \mathrm{i}\theta^a\tau_a, \quad \theta^a \text{ 为无穷小}. \tag{3.1.29}$$

将 (3.1.29) 代入到 (3.1.28), 则 $SU(N)$ 规范变换表达为

$$\begin{cases}\tilde{\Psi} = \Psi + \mathrm{i}\theta^a\tau_a\Psi, \\ \tilde{G}_\mu^a = G_\mu^a - \lambda_{bc}^a\theta^b G_\mu^c - \dfrac{1}{g}\partial_\mu\theta^a, \\ \tilde{m} = m + \mathrm{i}\theta^a(\tau_a m - m\tau_a),\end{cases} \tag{3.1.30}$$

其中关于 G_μ^a 的变换表达式用到 (3.1.19).

接下来要做的事情就是寻求关于场函数 G_μ^a 的作用量密度 $\mathcal{L}$, 使得 $\mathcal{L}$ 同时满足 Lorentz 不变性与 (3.1.28) 变换下的 $SU(N)$ 规范不变性.

此寻找方法与 Riemann 几何寻求曲率张量的方法完全一样, 即用 (3.1.23) 的协变导数 D_μ 的交换子

$$[D_\mu, D_\nu] = D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu$$

求得. 这是因为 D_μ 满足 (3.1.25) 的协变性, 因此有

$$\tilde{D}_\mu(\tilde{D}_\nu\tilde{\Psi}) = \tilde{D}_\mu(\Omega D_\nu\Psi) = \Omega D_\mu D_\nu\Psi.$$

从而得到

$$[\tilde{D}_\mu, \tilde{D}_\nu]\tilde{\Psi} = \Omega[D_\mu, D_\nu]\Psi. \tag{3.1.31}$$

在另一方面, 由 D_μ 的表达式 (3.1.23) 有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{i}}{g}[D_\mu, D_\nu] = &\frac{\mathrm{i}}{g}(\partial_\mu + \mathrm{i}gG^a_\mu\tau_a)(\partial_\nu + \mathrm{i}gG^b_\nu\tau_b)\\ &-\frac{\mathrm{i}}{g}(\partial_\nu + \mathrm{i}gG^a_\nu\tau_a)(\partial_\mu + \mathrm{i}gG^b_\mu\tau_b).\end{aligned} \tag{3.1.32}$$

注意到算子运算满足关系

$$\partial_\mu\partial_\nu = \partial_\nu\partial_\mu, \quad \partial(G^a_\beta\tau_a) = \partial G^a_\beta\tau_a + G^a_\beta\tau_a\partial,$$

因此 (3.1.32) 变为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{i}}{g}[D_\mu, D_\nu] &= (\partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu)\tau_a - \mathrm{i}g[G^a_\mu\tau_a, G^b_\nu\tau_b]\\ &= (\partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu + g\lambda^a_{bc}G^b_\mu G^c_\nu)\tau_a \quad (\text{由公式 (3.1.19)}).\end{aligned} \tag{3.1.33}$$

我们记

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu + g\lambda^a_{bc}G^b_\mu G^c_\nu, \tag{3.1.34}$$

由 (3.1.33) 便得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{i}}{g}[\tilde{D}_\mu, \tilde{D}_\nu]\tilde{\Psi} &= \tilde{F}^a_{\mu\nu}\tau_a\tilde{\Psi} = \tilde{F}^a_{\mu\nu}\tau_a\Omega\Psi\\ &= \frac{\mathrm{i}}{g}\Omega[D_\mu, D_\nu]\Psi = \Omega F^a_{\mu\nu}\tau_a\Psi \quad (\text{由 (3.1.31)}),\end{aligned}$$

即

$$\tilde{F}^a_{\mu\nu}\tau_a = \Omega F^a_{\mu\nu}\tau_a\Omega^{-1} = F^a_{\mu\nu}\Omega\tau_a\Omega^{-1}. \tag{3.1.35}$$

因为 μ, ν 是四维张量指标, 为了获得 Lorentz 不变性我们需要关于 (3.1.35) 进行 μ, ν 指标缩并.

$$\begin{aligned}\tilde{F}^a_{\mu\nu}\tau_a\tilde{F}^{\mu\nu b}\tau^\dagger_b &= \tilde{F}^a_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu b}\tau_a\tau^\dagger_b\\ &= F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu b}\Omega\tau_a\tau^\dagger_b\Omega^{-1} \quad (\text{由 } \Omega^\dagger = \Omega^{-1}).\end{aligned} \tag{3.1.36}$$

我们知道, 任意矩阵的迹在相似变换下是不变的, 即

$$\mathrm{Tr}(\tau_a\tau^\dagger_b) = \mathrm{Tr}(\Omega\tau_a\tau^\dagger_b\Omega^{-1}) \quad (\text{可见 3.5 节中证明}),$$

因此从 (3.1.36) 获得同时满足 Lorentz 不变性与 $SU(N)$ 规范不变性的 Lagrange 密度为

$$G_{ab}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu b},\quad G_{ab}=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\tau_a\tau_b^\dagger),\quad 1\leqslant a,b\leqslant N^2-1. \tag{3.1.37}$$

后面第 4 章将证明 (3.1.37) 中的 G_{ab} 是 Lie 群 $SU(N)$ 上的 Riemann 度量, 它满足下面公式:

$$G_{ab}=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\tau_a\tau_b^\dagger)=\frac{1}{4N}\lambda^c_{ad}\lambda^d_{cb}, \tag{3.1.38}$$

其中 λ^c_{ab} 是如 (3.1.19) 中的 $SU(N)$ 结构常数.

表达式 (3.1.37) 是最一般形式的关于规范场 $G^a_{\mu\nu}$ 的作用量密度. 对于 M^4 上的复向量丛来讲, (3.1.34) 的 $F^a_{\mu\nu}$ 相当于 Riemann 几何中的 Ricci 曲率, 而 (3.1.37) 相当于标量曲率. 只有这种形式才能满足在第 4 章中引入的表示不变性原理 (PRI).

在经典的 Yang-Mills 理论中, 生成元 τ_a $(1\leqslant a\leqslant N^2-1)$ 被取为特殊的无迹 Hermite 矩阵, 使得

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\tau_a\tau_b^\dagger)=\delta_{ab}. \tag{3.1.39}$$

此时 (3.1.37) 变为 $F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a}$. 从而 Yang-Mills 理论对于 (3.1.20) 的规范场提供了规范不变性的 Lagrange 作用量如下:

$$L_{YM}=\int_{M^4}\left[-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a}+\bar{\Psi}\left(\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu-\frac{mc}{\hbar}\right)\Psi\right]\mathrm{d}x, \tag{3.1.40}$$

式中 m 是如 (3.1.22) 的质量矩阵,

$$\begin{cases} F^a_{\mu\nu}=\partial_\mu G^a_\nu-\partial_\nu G^a_\mu+g\lambda^a_{bc}G^b_\mu G^c_\nu,\\ D_\mu=\partial_\mu+\mathrm{i}gG^a_\mu\tau_a. \end{cases} \tag{3.1.41}$$

泛函 (3.1.40)-(3.1.41) 被称作是 Yang-Mills 作用量, 它是在 (3.1.39) 约束下规范变换 (3.1.28) 的不变量.

这里有必要强调, 在 G^a_μ 的导数不超过二次的条件下, 同时满足 Lorentz 不变性与 (3.1.28) 和 (3.1.39) 的规范不变性, Yang-Mills 作用量 (3.1.40)-(3.1.41) 是唯一的形式. 这是继 Einstein 的相对论和 Dirac 理论之后, Yang-Mills 理论再次表现出了用对称性来确定物理方程形式的物理学最高精神.

3.1.4 规范不变性原理

由 (3.1.40)-(3.1.41) 所代表的 Yang-Mills 理论奠定了用规范对称性决定 $SU(N)$ 规范场 G^a_μ $(1\leqslant a\leqslant K)$ 及其所满足的作用量形式的数学基础. 而后面发展起来的关于弱相互作用与强相互作用的标准模型则进一步将 Yang-Mills 的数学方案变成现实的物理理论. 这中间的桥梁便是下面介绍的规范不变性原理.

规范不变性原理 3.1　电磁相互作用、弱相互作用与强相互作用都是规范场. 电磁场是 $U(1)$ 规范对称的. 而弱和强作用场分别是某个 $SU(N_1)$ 和 $SU(N_2)$ 规范场, 它们的作用量分别由 $SU(N_1)$ 和 $SU(N_2)$ 的 Yang-Mills 泛函 (3.1.40)-(3.1.41) 提供. 换句话讲, 电磁、弱和强相互作用满足 $U(1)\times SU(N_1)\times SU(N_2)$ 的规范不变性, 其中维数 N_1 和 N_2 由物理事实定出.

标准模型就是具体定出电、弱、强作用是

$$U(1)\times SU(2)\times SU(3) \tag{3.1.42}$$

的规范理论. 历史上, 从 Yang-Mills 理论到 (3.1.42) 的电、弱、强相互作用标准模型, 这期间走了将近二十年的历程. 在这个过程中主要遇到的障碍是如下两点.

(1) 在 20 世纪 50 年代末人们就已发现弱作用的媒介子是有质量的三个矢量 Bose 子. 因此描述这三个 Bose 子的应该是 $SU(2)$ 的三个规范场 G^a_μ $(a=1,2,3)$, 记为

$$\text{弱作用 } SU(2) \text{ 规范场: } W^1_\mu,\ W^2_\mu,\ W^3_\mu.$$

但是由 Yang-Mills 作用量 (3.1.40)-(3.1.41) 导出的关于 $G^a_\mu = W^a_\mu$ $(1\leqslant a\leqslant 3)$ 的场方程 (在第 4 章中可见到具体推导),

$$\begin{aligned}&\partial^\mu F^a_{\mu\nu} - g\lambda^a_{bc}g^{\alpha\beta}F^b_{\alpha\nu}W^c_\beta - gJ^a_\nu = 0,\\ &J^a_\nu = \bar\Psi\gamma^\nu\tau_a\Psi\end{aligned} \tag{3.1.43}$$

是一个没有质量项的非线性 Klein-Gordon 方程 (关于有质量的矢量 Bose 子可参见 (1.4.31) 和 (1.4.37)). 如果人为地在 Yang-Mills 作用量 (3.1.40) 中加上一个质量项,

$$\frac{mc}{\hbar}W^a_\mu W^{\mu a}, \tag{3.1.44}$$

则 (3.1.43) 的变分方程变为

$$\partial^\mu F^a_{\mu\nu} - g\lambda^a_{bc}g^{\alpha\beta}F^b_{\alpha\nu}W^c_\beta + \frac{mc}{\hbar}W^a_\nu - gJ^a_\nu = 0,$$

便有了质量 m. 但是显然在下面 $SU(2)$ 规范变换下,

$$\tilde W^a_\mu = W^a_\mu - \lambda^a_{bc}\theta^b W^c_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a \quad (\text{见 (3.1.30)}),$$

由 (3.1.44) 给出的质量项将破坏规范不变性, 即

$$\tilde W^a_\mu\tilde W^{\mu a} \neq W^a_\mu W^{\mu a}.$$

这个弱作用的质量问题一直是障碍着规范理论被广泛应用到弱相互作用场的根本性困难. 直到 1964 年 Higgs 机制的出现, 这个问题才被克服.

(2) Yang-Mills 理论再结合 Higgs 机制导致了 Weinberg-Salam 弱电模型. 然而当时这个模型又面临界量子场论中著名的重整化问题. 所谓重整化问题就是当人们用相互作用场的作用量去计算衰变和散射概率时会出现令人困惑的无穷大现象. 而由 Feynman, Schwinger, Tomonaga 提出重整化方案可去掉这个非物理的无穷大. 然而当带有 Higgs 项的 WS 作用量出现时, 当时人们并不知道它是否可以被重整化. 这个问题直到 1971 年时被 Gerardus't Hooft 解决, 他证明了 WS 模型是可重整化的. 至此, 规范理论在弱、强相互作用中的支配地位被广泛接受. 也就是说上述规范原理 3.1 被确立为一个物理学中的最基本和最重要的原理之一.

3.2 弱作用衰变的跃迁概率

3.2.1 β 衰变的 Fermi 理论

标准模型关于弱相互作用的 Glashow-Weinberg-Salam 弱电理论本质上是 $U(1)\times SU(2)$ 规范理论. 但是从 Yang-Mills 的 $SU(N)$ 规范场数学方案达到弱电的 $U(1)\times SU(2)$ 物理模型, 这中间起到引导作用的是关于弱作用衰变跃迁概率的 Fermi 理论, Feynman 和 Gell-Mann 提出的 $V-A$(V 减 A) 理论, 以及 Glashow 关于中间矢量 Bose 子的 $SU(2)$ 方案. 因此, 若要全面了解弱相互作用, 必须从这些表象理论开始.

在 1.3.5 小节中已简单地介绍过关于 β 衰变的 Fermi 理论, 这里再次较详细地讨论这个理论. β 衰变式为

$$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e. \tag{3.2.1}$$

直到 1967 年 Weinberg-Salam 弱电理论之前, 人们只知道 β 衰变是由弱作用力造成, 但是对于弱作用力的场没有任何知识. 然而这并不影响人们对弱作用衰变的跃迁概率 W 进行计算. 跃迁概率 W 与衰变的能量宽度 Γ 成正比, 与平均寿命 τ 成反比:

$$W = \alpha_1\Gamma = \frac{\alpha_2\hbar}{\tau}, \quad \alpha_1, \alpha_2 \text{ 为常数}, \tag{3.2.2}$$

而能量宽度 Γ 与平均寿命 τ 都是实验可观测值. 于是关系式 (3.2.2) 在实验与理论之间架起桥梁, 这是 Fermi 理论的真正物理价值所在.

Fermi 在 1934 年采用表象手段首次给出 β 衰变跃迁矩阵元的近似表达公式, 被称作 Fermi 理论. 首先, 根据量子力学微扰理论可算出单位时间内跃迁概率密度 (彭桓武, 徐锡申,1998) 为

$$W = \frac{2\pi}{\hbar}M^2\rho(E), \tag{3.2.3}$$

其中 $\rho(E)$ 为状态密度, M 为跃迁矩阵元. Fermi 理论最关键的要点就是关于 M 的表达式, 它是根据经验猜出来的, 写作

$$M = \frac{G}{\sqrt{2}} J_h J_l, \quad G \text{ 为耦合常数}, \tag{3.2.4}$$

其中 J_l, J_h 分别为轻子流和强子流, 定义为

$$\begin{aligned} J_l &= \bar{\psi}_l^f H \psi_l^i + h \cdot c \quad (\text{Hermite 共轭}), \\ J_h &= \bar{\psi}_h^f H \psi_h^i + h \cdot c \quad (\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0), \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

式中 ψ_l^i, ψ_h^i 为入射轻子和强子波函数, $\bar{\psi}_l^f$ 与 $\bar{\psi}_h^f$ 为终端轻子和强子波函数. 例如,(3.2.1) 的 β 衰变可写成

$$\nu_e + n \to p + e^-,$$

于是 β 衰变的轻子流和强子流表达为

$$\begin{aligned} J_l &= \bar{\psi}_e H \psi_{\nu_e} + h \cdot c, \\ J_h &= \bar{\psi}_p H \psi_n + h \cdot c, \end{aligned}$$

这里 H 为物质流算子, 通常由 Dirac 矩阵构成. 由 (1.4.65) 可知, 关于 (3.2.5) 的物质流有五种不同的形式, 它们满足 Lorentz 不变性. 即有五种 Lorentz 不变的流算子 H 如下:

$$\begin{aligned} &H_1 = I \quad (\text{恒等矩阵}), \\ &H_2 = \gamma_5, \quad \gamma_5 = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \\ &H_3 = \gamma^\mu, \\ &H_4 = \gamma^\mu\gamma_5, \\ &H_5 = \sigma^{\mu\nu} = \frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

相应地有五种 Lorentz 不变的流:

$$\begin{aligned} J_1 &= \bar{\psi} H_1 \Phi + h \cdot c = \bar{\psi}\Phi \ (\text{略去 } h \cdot c), && (S \text{ 型}) \\ J_2 &= \bar{\psi} H_2 \Phi + h \cdot c = \bar{\psi}\gamma_5\Phi, && (P \text{ 型}) \\ J_3 &= \bar{\psi} H_3 \Phi + h \cdot c = \bar{\psi}\gamma^\mu\Phi, && (V \text{ 型}) \\ J_4 &= \bar{\psi} H_4 \Phi + h \cdot c = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\Phi, && (A \text{ 型}) \\ J_5 &= \bar{\psi} H_5 \Phi + h \cdot c = \bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\Phi, && (T \text{ 型}) \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

由 (1.4.64) 可知在空间反射变换下有

$$x \to -x \ \Rightarrow \ J_3 \to J_3, \ J_4 \to -J_4. \tag{3.2.8}$$

正是 (3.2.8) 中 J_4 的变换性质可以反映宇称弱作用的破坏. 这在后面的 $V-A$ 理论中可以体现.

在跃迁矩阵元公式 (3.2.4) 中, 耦合常数 G 与衰变类型有关. 例如,β 衰变 (3.2.1) 有两种类型的允许跃迁: Fermi 型和 Gamov-Taylor 型. Fermi 型允许跃迁的 β 衰变中, 电子与中微子带走的总角动量为零, 即轨道角动量 $L=0$, 自旋 $J=0$. Gamov-Taylor 型允许跃迁的 β 衰变中, 电子与中微子带走的总角动量为 1, $L=0, J=1$. Fermi 型跃迁矩阵元公式为

$$\begin{cases} M=\dfrac{G_f}{\sqrt{2}}(\bar{\psi}_e\gamma^\mu\psi_{\nu_e})(\bar{\psi}_p\gamma_\mu\psi_n), \\ G_f=\text{Fermi 常数 }=1.166\times10^{-5}\text{GeV}^{-2}. \end{cases} \tag{3.2.9}$$

Gamov-Taylor 型跃迁矩阵元公式为

$$\begin{cases} M=\dfrac{G_{gt}}{\sqrt{2}}(\bar{\psi}_e\gamma^\mu\gamma_5\psi_{\nu_e})(\bar{\psi}_p\gamma_\mu\gamma_5\psi_n), \\ G_{gt}=1.26G_f. \end{cases} \tag{3.2.10}$$

Fermi 理论在低能情况下与实验有较好的吻合. 但是显然由 (3.2.8) 可以看出, 矩阵元 (3.2.9) 和 (3.2.10) 在反射变换下是不变的. 因此 Fermi 理论不能解释弱作用的宇称破坏现象. 这里必须强调 (3.2.4) 的跃迁矩阵元 M 被视为弱作用 Lagrange 作用量, 许多物理文献中将它称作 Fermi 作用量密度:

$$\mathcal{L}_F=M=\frac{G}{\sqrt{2}}J_hJ_l. \tag{3.2.11}$$

但事实上, 真正反映弱作用场的 Lagrange 作用量中并不含有 (3.2.11) 的 Fermi 项, 它可视为关于弱作用衰变 (即粒子运动) 的作用量. 但是从 (3.2.11) 的 Fermi 作用量经过 $V-A$ 理论的修正, 再过渡到 Glashow 的 $SU(2)$ 方案, 我们就容易理解 Weinberg-Salam 弱电规范理论被建立的整个过程.

3.2.2 $V-A$ 理论

在 Fermi 作用量 (3.2.11) 中, 从理论上讲有 (3.2.7) 所列出的五种可能的形式. 即对于 β 衰变 $\mathcal{L}_F$ 可写成如下形式:

$$\mathcal{L}_F=\frac{G}{\sqrt{2}}\sum_{i=1}^{5}\alpha_i(\bar{\psi}_eH_i\psi_{\nu_e})(\bar{\psi}_pH_i\psi_n), \tag{3.2.12}$$

式中 α_i 为常数, H_i 如 (3.2.6) 中的算子.

现在的问题是, 在现实中并非所有这五种形式的作用量都存在. 具体哪种形式存在要由实验来确定. 实验表明, 在 (3.2.12) 中 P 型流几乎不起作用, 因而系数

$$\alpha_2=0.$$

此外根据实验与理论分析, (3.2.12) 中其他四个系数之间具有如下关系式:

$$\alpha_1\alpha_3 = 0, \quad \alpha_4\alpha_5 = 0.$$

再一次地用 β 衰变中的 $e^- - \bar{\nu}_e$ 角关联做实验可确定出

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_5 = 0.$$

于是 (3.2.12) 中只剩下 V 型和 A 型这两种物质流形式, 即

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_F = \frac{G}{\sqrt{2}}[&\alpha_\nu(\bar{\psi}_e\gamma^\mu\psi_{\nu_e})(\bar{\psi}_p\gamma_\mu\psi_n)\\ &+\alpha_A(\bar{\psi}_e\gamma^\mu\gamma_5\psi_{\nu_e})(\bar{\psi}_p\gamma_\mu\gamma_5\psi_n)].\end{aligned} \tag{3.2.13}$$

在 1956 年 Li-Yang 发现在弱作用中宇称对称性被破坏, 即弱作用的 Lagrange 作用量的不变性应该在 (3.2.8) 反映变换下被破坏. 显然 (3.2.13) 的形式在 (3.2.8) 变换下是不变的. 因此 Feynman 和 Gell-Mann 在 1958 年将 (3.2.13) 的作用量修改成 $V-A$ 的形式, 即作用量密度为

$$\mathcal{L}_{V-A} = \frac{G}{\sqrt{2}}[\bar{\psi}_e\gamma^\mu(I-\gamma_5)\psi_{\nu_e}][\bar{\psi}_p\gamma_\mu(I-\gamma_5)\psi_n]. \tag{3.2.14}$$

这个作用量被称为 $V-A$ 理论.

显然 (3.2.14) 的作用量在反射变换下不变性被破坏. 事实上, 在 1.4.5 小节中我们已看到

$$\begin{aligned}&x \xrightarrow{P} -x \;\Rightarrow\; \gamma^0 \xrightarrow{P} \gamma^0,\ \gamma^k \xrightarrow{P} -\gamma^k, \quad 1 \leqslant k \leqslant 3,\\ &x \xrightarrow{P} -x \;\Rightarrow\; \gamma_5 \xrightarrow{P} -\gamma_5.\end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned}V^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\Phi &\xrightarrow{P} \begin{cases} +\bar{\psi}\gamma^0\Phi, \\ -\bar{\psi}\gamma^k\Phi, \quad 1 \leqslant k \leqslant 3, \end{cases}\\ A^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\Phi &\xrightarrow{P} \begin{cases} -\bar{\psi}\gamma^0\gamma_5\Phi, \\ +\bar{\psi}\gamma^k\gamma_5\Phi, \quad 1 \leqslant k \leqslant 3. \end{cases}\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

因此由

$$B^\mu B_\mu = g_{\mu\nu}B^\mu B^\mu,$$

从 (3.2.15) 立刻得到

$$\begin{aligned}&V^\mu V_\mu \xrightarrow{P} V^\mu V_\mu,\\ &A^\mu A^\mu \xrightarrow{P} A^\mu A_\mu,\\ &A^\mu V_\mu \xrightarrow{P} -A^\mu V_\mu.\end{aligned} \tag{3.2.16}$$

由此可以推出对任何如下组合的作用量

$$\mathcal{L} = J_\mu^\dagger J^\mu, \quad J_\mu = \alpha V_\mu + \beta A_\mu \quad (\alpha, \beta \neq 0),$$

宇称对称性都将得到破坏. 但是 (3.2.14) 的 $V-A$ 组合是最充分地体现宇称对称性的破坏. 下面将从左、右手螺旋粒子的角度去解说这一点, 这对理解 Weinberg-Salam 弱电理论非常重要.

令 ψ 是一个粒子的波函数, 则该粒子的左旋态 ψ_L 和右旋态 ψ_R 分别定义为

$$\psi_L = \frac{1}{2}(I-\gamma_5)\psi, \quad \psi_R = \frac{1}{2}(I+\gamma_5)\psi. \tag{3.2.17}$$

而反粒子态为

$$\bar{\psi}_L = \bar{\psi}(I+\gamma_5)/2, \quad \bar{\psi}_R = \bar{\psi}(I-\gamma_5)/2. \tag{3.2.18}$$

注意到 Dirac 矩阵表达式

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \ \gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \ \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix} \quad (1 \leqslant k \leqslant 3),$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

直接计算可得到

$$\bar{\psi}_R \gamma^\mu (I-\gamma_5)\phi = 0, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant 3.$$

于是由 (3.2.17)-(3.2.18) 有

$$\bar{\psi}\gamma^\mu(I-\gamma_5)\phi = (\bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R)\gamma^\mu(I-\gamma_5)\phi = 2\bar{\psi}_L\gamma^\mu\phi_L. \tag{3.2.19}$$

这样 $V-A$ 理论的作用量密度 (3.2.14) 可表达为

$$\mathcal{L}_{V-A} = 2\sqrt{2}G(\bar{e}^L\gamma^\mu\nu_e^L)(\bar{p}^L\gamma_\mu n^L), \tag{3.2.20}$$

式中 e^L, ν_e^L, p^L, n^L 分别代表这些粒子左旋态的波函数.

现在由 (3.2.20) 看到, $V-A$ 理论将粒子流变为左旋粒子流之间的相互耦合作用. 这正是宇称破坏的主要特征. 因为由 (3.2.16) 可以看到

$$(V^\mu - A^\mu)(V_\mu - A_\mu) \xrightarrow{P} (V^\mu + A^\mu)(V_\mu - A_\mu),$$

即在空间反射变换下将左旋粒子变为右旋粒子:

$$\mathcal{L}_{V-A} \xrightarrow{P} \mathcal{L}_{V+A} = 2\sqrt{2}G(\bar{e}^R\gamma^\mu\nu_e^R)(\bar{p}^R\gamma^\mu n^R). \tag{3.2.21}$$

这就是为什么 $V-A$ 理论比其他 V 与 A 的组合更合理的原因.

然而 $V-A$ 理论只适用于低能态情况, 在高能量情况下该理论不再有效. 它比 Fermi 理论更好一些的地方就是在宇称对称性破坏方面.

再回头看 Fermi 理论 (3.2.13), 该作用量密度可写作

$$\mathcal{L}=\frac{G}{\sqrt{2}}\left[\alpha_V V^\mu V_\mu+\alpha_A A^\mu A_\mu\right]. \tag{3.2.22}$$

在 (3.2.9) 和 (3.2.10) 中可以看到, 对于 Fermi 型跃迁,

$$\mathcal{L}_F=\frac{G_f}{\sqrt{2}}V^\mu V_\mu \tag{3.2.23}$$

是 V 型流作用, 而对于 Gamov-Taylor 型跃迁

$$\mathcal{L}_{GT}=\frac{G_{gt}}{\sqrt{2}}A^\mu A_\mu \tag{3.2.24}$$

是 A 型流作用. 分别将 (3.2.23) 和 (3.2.24) 对照, 我们发现

$$G_f=G|\alpha_V|,\quad G_{gt}=G|\alpha_A|.$$

再由 (3.2.10) 中的 $G_{gt}=1.26G_f$, 得到

$$\frac{G_{gt}}{G_f}=\left|\frac{\alpha_A}{\alpha_V}\right|=1.26.$$

由极化中子实验可以确定 α_A 与 α_V 比值为负号, 即

$$\frac{\alpha_A}{\alpha_V}=-1.26.$$

Fermi 作用量 (3.2.22) 的物理意义是, 在现实粒子衰变中有三种允许跃迁: Fermi 型 (V 型流起主要作用), Gamov-Taylor 型 (A 型流起主要作用), 以及混合型. Fermi 型跃迁概率由 (3.2.23) 的 $\mathcal{L}_F=M$ 代入 (3.2.3) 求出, Gamov-Taylor 型跃迁概率由 (3.2.24) 求出, 而混合型则由 (3.2.22) 求出. 由此看出, 作为低能态的近似理论, $V-A$ 理论并不能完全取代 Fermi 理论. 它们起到互补作用.

3.2.3　中间矢量 Bose 子理论与弱流的物理解释

弱相互作用被发现的同时, 人们就认识到它具有短程性质. 根据 Yukawa 理论, 一个短程的相互作用一定是通过交换有质量的中间媒介子造成的. 为此李政道和杨振宁建议弱相互作用媒介子是带电的并且具有质量的矢量 Bose 子 $W_\mu^\pm$. 随后在 1961 年 Glashow 提出还应该存在一个具有质量并且不带电荷的矢量 Bose 子 Z_μ. 这样, 弱作用的中间矢量 Bose 子共有三个:

$$W_\mu^+,\quad W_\mu^-,\quad Z_\mu,$$

它们都具有质量. 对应于这三个矢量 Bose 子的 Lagrange 作用量包含有电荷流 (CC) 和中性流 (NC) 两部分:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{IVB}} &= \mathcal{L}_{CC} + \mathcal{L}_{NC},\\ \mathcal{L}_{CC} &= \frac{g}{\sqrt{2}}(J^{\mu^-}W_{\mu}^{+} + J^{\mu^+}W_{\mu}^{-}),\\ \mathcal{L}_{NC} &= \frac{g}{\cos\theta_w}J_{\mu}^{NC}Z^{\mu},\end{aligned} \tag{3.2.25}$$

其中 g 为耦合常数, θ_W 为弱作用转动角,

$$\begin{aligned}J^{\mu^+} &= \sum_{l}\bar{\nu}_l\gamma^{\mu}\left(\frac{I-\gamma_5}{2}\right)l + \sum_{q}\bar{q}\gamma^{\mu}\left(\frac{I-\gamma_5}{2}\right)q',\\ J^{\mu^-} &= \sum_{l}\bar{l}\gamma^{\mu}\left(\frac{I-\gamma_5}{2}\right)\nu_l + \sum_{q}\bar{q}'\gamma^{\mu}\left(\frac{I-\gamma_5}{2}\right)q,\\ J_{\mu}^{NC} &= \sum_{f}g_L^f\bar{f}\gamma_{\mu}\left(\frac{I-\gamma_5}{2}\right)f + \sum_{f\neq\nu}g_R^f\bar{f}\gamma_{\mu}\left(\frac{I+\gamma_5}{2}\right)f,\end{aligned} \tag{3.2.26}$$

这里 l 代表轻子, q 代表夸克, f 为 Fermi 子, ν 为中微子, g_L^f 和 g_R^f 分别为左和右手粒子态耦合常数.

显然在 (3.2.25)-(3.2.26) 的中间矢量 Bose 子作用量中已采纳了 $V-A$ 理论, 它主要表现在 (3.2.26) 的电荷流 J_{μ} 与中性流 J_{μ}^{NC} 表达式中 $(I-\gamma_5)/2$ 这一项上. 此外在 J_{μ}^{NC} 中也加上右手粒子流 $V+A$ 这一项. 在 (3.2.25) 中的耦合常数 g 实质上就是前面提到的弱荷 g_W, 它与 $V-A$ 理论中的 Fermi 常数 G_f 的关系为

$$\frac{G_f}{\sqrt{2}} = \frac{g^2\hbar^2}{8m_W^2c^2}, \tag{3.2.27}$$

其中 m_W 是 $W^{\pm}$ 粒子的质量.

所有上述三种理论产生的作用量: Fermi 作用量 (3.2.13), $V-A$ 作用量 (3.2.14), 中间矢量 Bose 子作用量 (3.2.25) 都可用来作为跃迁矩阵元 M 代入公式 (3.2.3) 计算跃迁概率. 在这些作用量中, 物质流 J^{μ}(称为弱流) 起到根本性的作用. 因此要理解粒子弱作用的衰变与散射, 知道弱流 J^{μ} 的物理内涵便成为最基本的条件. 下面介绍弱流 J_W^{μ} 的物理意义.

我们分几个方面进行解说.

(1) 首先需要解释电流与弱流的区别. 1.4.5 小节介绍了相对论电流的表达形式, 它由 (1.4.63) 给出, 即

$$J_{em}^{\mu} = \bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi, \quad \psi \text{ 为带电粒子波函数.} \tag{3.2.28}$$

电流 J^{μ}_{em} 是一个纯矢量流, 并且 $\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$ 中左右的 ψ 是同一粒子波函数. 而弱流表达式为

$$J^{\mu}_{W} = V^{\mu} - A^{\mu}, \quad V^{\mu} = \bar{\psi}\gamma^{\mu}\Phi, \quad A^{\mu} = \bar{\psi}\gamma^{\mu}\gamma_5\Phi, \tag{3.2.29}$$

它包含矢量流 V 和赝矢量流 A 两部分. 此外表达式中, ψ 和 Φ 在带电弱流中是每一代的两个粒子, 如 $(e,\nu_e),(\mu,\nu_\mu),(\tau,\nu_\tau)$.

(2) 弱作用被认为是交换中间矢量 Bose 子传递的. 由于媒介子包含带电 $W^{\pm}$ 和中性 Z 两类粒子. 因此弱流被分为带弱流和中性弱流两部分, 记为

$$J^{CC}_{\mu} = J^{\pm}_{\mu} \text{ 为带电弱流},$$
$$J^{NC}_{\mu} = J^{0}_{\mu} \text{ 为中性弱流}.$$

(3) 带电弱流描述的是有电荷交换的衰变和散射过程. 例如下面给出的反应过程

$$\begin{aligned} &\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu, \\ &\tau^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau, \\ &\nu_\mu + e^- \to \nu_e + \mu^-, \end{aligned} \tag{3.2.30}$$

都属于有电荷交换过程, 这是因为初始的带电粒子与终端带电粒子已发生变化. 以 (3.2.30) 的 μ^- 衰变为例, 它有两种解释. 第一种是 Fermi 理论的解释, 此时反应式写成

$$\mu^- + \nu_e \to e^- + \nu_\mu.$$

在此过程中 μ^- 子的负电荷转移给 ν_e 使其变为电子 e^-, 而 μ^- 子将电荷转移后变为 ν_μ. 用带电弱流表示这电荷交换的一瞬间点相互作用, 便是 (3.2.23) 的 Fermi 跃迁

$$\frac{G_f}{\sqrt{2}}(J^-_e)^{\alpha}(J^+_{\mu})_{\alpha},$$

其中

$$(J^-_e)^{\alpha} = \bar{e}\gamma^{\alpha}(I-\gamma_5)\nu_e \tag{3.2.31}$$

代表带负电弱流, 表示消失一个 ν_e 同时产生一个电子 e^-, 而

$$(J^+_{\mu})_{\alpha} = \bar{\nu}_{\mu}\gamma_{\alpha}(I-\gamma_5)\mu \tag{3.2.32}$$

代表带正电弱流, 表示消失一个 μ^- 同时产生一个 ν_μ. 这种过程净增一个正电荷, 因而显示出正电弱流.

第二种是中间矢量 Bose 子理论的解释. 对此 μ 子衰变反应式被分解成两个衰变过程:

$$\mu^- \to \nu_\mu + W^-, \tag{3.2.33}$$

$$W^- + \nu_e \to e^-, \tag{3.2.34}$$

上面 (3.2.33) 过程可视为 μ^- 子将一个负电荷转移给 W 媒介子使其变为 W^-, 同时 μ^- 变为 ν_μ, 而 (3.2.34) 则表明 W^- 将获得的负电荷再结合 ν_e 使其变为电子. 上述通过 W 媒介子的传递过程用 (3.2.25) 理论表示就是如下跃迁概率密度:

$$\frac{g}{\sqrt{2}}\left[(J_\mu^-)^\alpha W_\alpha^+ + (J_e^+)^\alpha W_\alpha^-\right],$$

其中 $(J_e^-)^\alpha$ 与 $(J_\mu^+)^\alpha$ 分别如 (3.2.31) 和 (3.2.32).

综合上述讨论, 关于带电弱流可得结论: 带电弱流 J_μ^{CC} 总是在有电荷交换弱作用过程中出现, 它的表达式就如 (3.2.26) 那样. 更具体地可表达为

$$\begin{aligned} J_\mu^- &= \bar{\psi}_A \gamma_\mu \left(\frac{I-\gamma_5}{2}\right)\psi_{B^-}, \\ J_\mu^+ &= \bar{\psi}_{B^-} \gamma_\mu \left(\frac{I-\gamma_5}{2}\right)\psi_A, \end{aligned} \tag{3.2.35}$$

式中 B^- 为带负电荷轻子或夸克, A 与 B^- 是同伴关系. 对轻子来讲, A 与 B^- 属同一代, 而对夸克来讲 A 与 B^- 关系由 Cabibo 角或 CKM 矩阵确定.

(4) 中性弱流描述的是没有电荷交换的弱作用过程, 如

$$\begin{aligned} &\nu_\mu + e^- \to \nu_\mu + e^-, \\ &\bar{\nu}_\mu + e^- \to \bar{\nu}_\mu + e^-, \end{aligned} \tag{3.2.36}$$

以及中微子与核子的散射过程

$$\begin{aligned} &\nu_\mu + N \to \nu_\mu + X \quad (X \text{ 为其他粒子}), \\ &\bar{\nu}_\mu + N \to \bar{\nu}_\mu + X. \end{aligned} \tag{3.2.37}$$

这些反应 (3.2.36) 和 (3.2.37) 在 1973 年被欧洲核子中心 (CERN) 发现. 它们被认为是中性弱流存在的有力证据. 在这些过程中, 初始带电粒子与终端带电粒子没有发生变化, 因而反映它们弱作用 (因为 ν_μ 子只参与弱作用) 的流是中性的, 表达为 (3.2.26) 的形式. 例如, 对 e 和 ν_e 有

$$J_\mu^0 = g_L \bar{\nu}_e \gamma_\mu \left(\frac{I-\gamma_5}{2}\right)\nu_e + g_L \bar{e}\gamma_\mu \left(\frac{I-\gamma_5}{2}\right)e + g_R \bar{e}\gamma_\mu \left(\frac{I+\gamma_5}{2}\right)e. \tag{3.2.38}$$

对于其他轻子都有类似的表达式. 但是对于夸克中性流的表达式同样要用到 Cabibo 角或者 CKM 理论来表达.

将带电弱流 (3.2.35) 与中性弱流对照, 很容易看出它们的区别并将它们分辨出来, 这对弱相互作用理论来讲是基本的知识.

3.2.4　Cabibo 角

前面已经介绍过, 弱流 J^{μ} 是反映衰变与散射跃迁概率的物理量. 对于三代轻子对 (l,ν_l), (3.2.35) 和 (3.2.38) 分别给出带电与不带的轻子弱流表达式为

$$\begin{aligned} &J_{\mu}^{-}=\bar{\nu}_l\gamma_{\mu}\left(\frac{I-\gamma_5}{2}\right)l,\ J_{\mu}^{+}=\bar{l}\gamma_{\mu}\left(\frac{I-\gamma_5}{2}\right)\nu_l,\\ &J_{\mu}^{0}=g_L\left[\bar{\nu}_l\gamma_{\mu}\left(\frac{I-\gamma_5}{2}\right)\nu_l+\bar{l}\gamma_{\mu}\left(\frac{I-\gamma_5}{2}\right)l\right]+g_R\bar{l}\gamma_{\mu}\left(\frac{I-\gamma_5}{2}\right)l. \end{aligned} \tag{3.2.39}$$

但是对于夸克弱流来讲, $J_{\mu}^{\pm}$ 和 J_{μ}^{0} 的表达式就不再像轻子弱流那样用每代的夸克对 $(u,d),(c,s),(t,b)$ 如 (3.2.39) 的方式表达出来. Cabibo 混合角以及它的推广 CKM 矩阵正是为解决夸克弱流表达式而建立的理论. 这一小节专门介绍 Cabibo 混合角理论以及 (u,d) 夸克弱流的表达式.

为此分三步进行.

(1) 首先介绍两种不同类型的弱作用强子衰变过程. 正是因为有两种不同类型的强子衰变, 才造成夸克流表达式出现 Cabibo 混合现象. 观察下面强子衰变

$$\begin{aligned} &n\to p+e^{-}+\bar{\nu}_e,\\ &\Delta^{+}\to p+\pi^{0},\\ &\Sigma^{0}\to\Lambda+\gamma,\\ &\Sigma^{*0}\to\Sigma^{0}+\pi^{0}. \end{aligned} \tag{3.2.40}$$

这些衰变式左右两端奇异数 S 没有发生改变 (参见表 2.10), 即

$$\Delta S=\text{终端 } S-\text{始端 } S=0.$$

再看下面衰变

$$\begin{aligned} &\Lambda\to p+e^{-}+\bar{\nu}_e,\\ &\Sigma^{-}\to n+\mu^{-}+\bar{\nu}_{\mu},\\ &K^{+}\to\pi^{0}+e^{+}+\nu_e,\\ &\Xi^{-}\to\Lambda+e^{-}+\bar{\nu}_e. \end{aligned} \tag{3.2.41}$$

这些衰变式左右两端奇异数 S 改变值为

$$\Delta S=\pm1.$$

因此, 强子衰变被分成 $\Delta S=0$ 和 $\Delta S=\pm 1$ 这两类.

(2) 现在介绍两种类型强子弱流 J_μ^1 ($\Delta S=0$) 和 J_μ^2 ($\Delta S=\pm 1$) 的 Cabibo 理论. 统一的强子弱流 J_μ 在计算 $\Delta S=0$ 和 $\Delta S=\pm 1$ 跃迁概率时与实验不符. Cabibo 在 1963 年针对此现象提出了混合角理论. 他认为虽然 $\Delta S=0$ 的衰变过程与 $\Delta S=\pm 1$ 的强子衰变过程看上去是相互独立的, 但是在反映衰变概率方面是有关联的. 具体地讲就是用于计算 $\Delta S=0$ 和 $\Delta S=\pm 1$ 的衰变概率的强子弱流公式分别为

$$\begin{aligned} &J_\mu^1=\cos\theta_c J_\mu, \quad \Delta S=0 \text{ 情况},\\ &J_\mu^2=\sin\theta_c J_\mu, \quad \Delta S=\pm 1 \text{ 情况}, \end{aligned} \tag{3.2.42}$$

其中 θ_c 为 Cabibo 角, 实验平均值为

$$\theta_c=14^\circ,$$

而 J_μ 就是通用的强子弱流公式. 例如, 对于 (3.2.40) 的 β 衰变 J_μ 为

$$J_\mu=\bar{p}\gamma_\mu\left(\frac{I-\gamma_5}{2}\right)n,$$

对于 (3.2.41) 的第一个衰变式, J_μ 为

$$J_\mu=\bar{p}\gamma_\mu\left(\frac{I-\gamma_5}{2}\right)\Lambda.$$

公式 (3.2.42) 就是 Cabibo 角表达的强子弱流通用形式. 它们与实验有很好的吻合. 但是它仅适用于只带 u,d,s,c 夸克的强子, 而对所有强子有效的强子弱流公式则必须用 CKM 理论.

(3) 下面介绍用夸克表达的 Cabibo 理论. 在 1963 年 N. Cabibo 提出该理论时, 夸克模型还没有提出来. 因此他是采用 (3.2.42) 的强子弱流形式表达出来. 夸克模型建立后, Cabibo 理论的物理意义变得更清楚了.

从夸克角度看, 所有强子的衰变本质上是夸克的衰变. 例如, 中子的衰变过程

$$n(udd)\to p(uud)+e^-+\bar{\nu}_e,$$

实质上就是 d 夸克

$$d\to u+e^-+\bar{\nu}_e$$

的衰变过程. 而 Σ^- 的衰变过程

$$\Sigma^-(dds)\to n(ddu)+\mu^-+\bar{\nu}_\mu$$

就是 s 夸克

$$s \to u + \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$

的衰变过程. 一般地, 有电荷交换的强子衰变中 $\Delta S = 0$ 和 $\Delta S = \pm 1$ 两类过程, 可由 d 和 s 衰变反映:

$$\begin{aligned} &d \to u + e^- + \bar{\nu}_e, \quad \Delta S = 0, \\ &s \to u + e^- + \bar{\nu}_e, \quad \Delta S = \pm 1. \end{aligned} \tag{3.2.43}$$

由于 d 夸克和 s 夸克电荷相同, 它们之间难以区分. 因此在 $SU(3)$ 转动下它们可以相互转化. 因此将它们表达成

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_c & \sin\theta_c \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix},$$

即用 d' 和 s' 表达 d, s 夸克:

$$\begin{aligned} d' &= d\cos\theta_c + s\sin\theta_c, \\ s' &= -d\sin\theta_c + s\cos\theta_c. \end{aligned} \tag{3.2.44}$$

此时对应于 (3.2.42) 的带电夸克弱流可写成下面形式

$$J_\mu = \bar{u}\gamma_\mu \left(\frac{I - \gamma_5}{2}\right) d', \tag{3.2.45}$$

这里 d' 如 (3.2.44).

3.2.5　夸克弱流的 CKM 矩阵

在 (3.2.39) 的轻子弱流中, 总是用三代轻子 $(e, \nu_e), (\mu, \nu_\mu), (\tau, \nu_\tau)$ 进行配对. 但是对于带电夸克流, 由 Cabibo 理论, 它的表达式为 (3.2.45). 由此看到夸克配对是以 (u, d') 取代 (u, d) 的方式. 很自然地人们将此推广到所有夸克流上, 它们的表达式应该以推广的夸克代作为配对, 而不是以原夸克代配对. 即关于夸克流的三代应该取如下形式:

$$(u, d'), \quad (c, s'), \quad (t, b'), \tag{3.2.46}$$

这里 d', s', b' 应是(3.2.44)的推广. (3.2.45)便是这一小节将介绍的Cabibo-Kobayashi-Maskawa (CKM) 理论.

为了对 CKM 理论有一个全面了解, 先从关于中性弱流的 GIM 模型开始, 该模型是 CKM 理论的前奏.

由夸克组分表 2.5～ 表 2.8 以及强子量子数表 2.10 可以看出, 在 (3.2.40) 的 $\Delta S=0$ 衰变中, 后面三个反应式中

$$\begin{aligned}&\Delta^+(uud)\to p(uud)+\pi^0(u\bar{u},d\bar{d}),\\&\Sigma^0(sdu,sud)\to\Lambda(sdu,sud)+\gamma,\\&\Sigma^{*0}(sud)\to\Sigma^0(sud,sdu)+\pi^0(u\bar{u},d\bar{d}),\end{aligned}$$

衰变前后带电粒子 uud 和中性粒子 sud,sdu 没有变化, 因此反映这些衰变的弱流都是中性流.

再注意到 $\Delta S=\pm1$ 的衰变式 (3.2.41), 它们全部都发生电荷转移 (即电荷交换) 行为. 例如

$$\Lambda(sdu,sud)\to p(uud)+e^-+\bar{\nu}_e,$$

其中中性粒子 sdu,sud 变为两个带电粒子 uud 和 e^-. 这就是说 (3.2.41) 的衰变弱流都是带电弱流.

这不是一个偶然现象. 大量实验表明, 所有弱中性流过程都满足 $\Delta S=0$ 的选择规则, 而从没有见到过 $\Delta S=\pm1$ 的弱中性流过程. 这一现象能给我们带来什么启示呢? (3.2.46) 给出了夸克弱流的三代观点, 并没有告诉获得这种看法的原因. 现在可以说明, 正是从上述这个现象, 由 Glashow-Iliopoulous-Maiani 在 1970 年提出了夸克流的两代模型 (即 GIM 模型). 他们提议存在一种当时并不知道的一种粲夸克 c(之前 Gell-Mann 和 Zweig 只提出 u,d,s 这三种夸克), 使得夸克流由下面两代构成:

$$(u,d'),\quad (c,s'),\tag{3.2.47}$$

其中 d',s' 如 (3.2.44).

下面解说这个过程. 带电夸克弱流的 Cabibo 表达式 (3.2.45) 出来后, 自然地, 人们认为中性夸克流应该有 $\Delta S=0$ 和 $\Delta S=\pm1$ 两部分. 由 (3.2.42) 它们应该写作

$$\begin{cases}\Delta S=0,\\ J_\mu^0=\bar{u}\Gamma_\mu u+\cos^2\theta_c\bar{d}\ \Gamma_\mu d+\sin^2\theta_c\bar{S}\Gamma_\mu s,\end{cases}\tag{3.2.48}$$

$$\begin{cases}\Delta S=\pm1,\\ J_\mu^0=\sin\theta_c\cos\theta_c\ (\bar{s}\Gamma_\mu d+\bar{d}\ \Gamma_\mu s),\end{cases}\tag{3.2.49}$$

式中 $\Gamma_\mu=\dfrac{1}{2}\gamma_\mu(I-\gamma_5)$.

但是实验中没有 (3.2.49) 这种 $\Delta S=\pm1$ 的中性流. 为了解释这个现象 Glashow

等提出 (3.2.47) 二代夸克模型 (GIM 模型). 根据这个模型, 弱作用中性流应表达为

$$\begin{cases} J_\mu^0 = \bar{u}\Gamma_\mu u + \bar{c}\Gamma_\mu c + \bar{d}'\Gamma_\mu d' + \bar{s}'\Gamma_\mu s', \\ \Gamma_\mu = \dfrac{1}{2}\gamma_\mu(I-\gamma_5). \end{cases} \tag{3.2.50}$$

将 (3.2.44) 的 d' 和 s' 代入 (3.2.50), 注意到

$$\bar{d}'\Gamma_\mu d' = \bar{d}\Gamma_\mu d\cos^2\theta_c + \bar{s}\Gamma_\mu S\sin^2\theta_c + (\bar{d}\,\Gamma_\mu s + \bar{s}\Gamma_\mu d)\cos\theta_c\sin\theta_c,$$
$$\bar{s}'\Gamma_\mu s' = \bar{s}\Gamma_\mu s\cos^2\theta_c + \bar{d}\,\Gamma_\mu d\sin^2\theta_c - (\bar{d}\,\Gamma_\mu s + \bar{s}\Gamma_\mu d)\cos\theta_c\sin\theta_c,$$

于是我们看到 (3.2.50) 的中性流 J_μ^0 不含 $\Delta S = \pm 1$ 的项

$$(\bar{s}\Gamma_\mu d + \bar{d}\,\Gamma_\mu s)\cos\theta_c\sin\theta_c.$$

这说明当采用 GIM 模型的二代夸克 (3.2.47) 时, 中性流 (3.2.50) 中自动不包含 $\Delta S = \pm 1$ 的中性流 (3.2.49).

GIM 二代夸克的理论有许多成功之处. 但是 M. Kobayashi 和 T. Maskawa 发现两代模型与某些实验数据不吻合. 为此他们在 1973 年提出夸克具有三代的建议, 即多出一代 (t,b). 并且构造夸克弱流的三代 (3.2.46) 中 d', s', b' 与 d, s, b 夸克的关系是由 Cabibo-Kobayashi-Maskawa 矩阵相关联:

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}, \tag{3.2.51}$$

其中 M 是 CKM 矩阵, 表达为

$$\begin{aligned} M = &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\mathrm{i}\delta/2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\mathrm{i}\delta/2} \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}\delta/2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\mathrm{i}\delta/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = &\begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-\mathrm{i}\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{\mathrm{i}\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{\mathrm{i}\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{\mathrm{i}\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{\mathrm{i}\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.2.52}$$

其中 $c_{ij} = \cos\theta_{ij}, s_{ij} = \theta_{ij}$, 共有四个参数: 三个推广的 Cabibo 角 $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$ 和一个相位因子 δ. 在 (3.2.52) 中如果 $\theta_{13} = \theta_{23} = 0$, 则第三代与另外两代不混合. 此时

$\theta_{12}=\theta_c$, (3.2.51)-(3.2.52) 便退化成 Cabibo-GIM 情况. M 的实验值为

$$M=\begin{pmatrix} 0.9738 & 0.2272 & 0.0040 \\ 0.2271 & 0.9730 & 0.0422 \\ 0.0081 & 0.0416 & 0.9991 \end{pmatrix}. \tag{3.2.53}$$

在 CKM 理论基础上, 便可以用统一的公式表达在 (3.2.25) 中的带电夸克流和中性夸克流 $J_\mu^{\pm}$ 和 J_μ^0 如下:

$$\begin{aligned} J_\mu^- &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\bar{q}_k\gamma_\mu(I-\gamma_5)q_k', \\ J_\mu^+ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\bar{q}_k'\gamma_\mu(I-\gamma_5)q_k, \\ J_\mu^0 &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left[\bar{q}_k\gamma_\mu(I-\gamma_5)q_k+\bar{q}_k'\gamma_\mu(I-\gamma_5)q_k'\right], \end{aligned} \tag{3.2.54}$$

式中 (q_k,q_k') $(1\leqslant k\leqslant 3)$ 就是由 (3.2.46) 给出的三代夸克, 而 $q_1'=d', q_2'=s', q_3'=b'$ 由 (3.2.51)-(3.2.53) 给出.

整个 (3.2.51)-(3.2.54) 给出的公式称作 CKM 理论, 它完全是一个表象理论. 目前为止还没有第一原理的弱作用理论能够解释为什么夸克弱流表现出 CKM 的混合现象. 该理论获得很大的成功, 得到大量实验运动, 它成为标准模型的一部分. M. Kobayashi 和 T. Maskawa 因为 CKM 理论的建立而获得 2008 年度诺贝尔物理学奖.

对于读者来讲最重要的是要知道每一个物理公式是作什么用以及如何使用. 这里我们再次强调, 轻子与夸克弱流 J_μ 的公式 (3.2.39) 和 (3.2.54) 是用来计算粒子弱作用造成的衰变与散射概率的. 它们是根据不同情况使用 Fermi 作用量密度 (3.2.13), $V-A$ 作用量密度 (3.2.14), 以及中间矢量 Bose 子作用量密度 (3.2.25) 作为跃迁矩阵元 $M=\mathcal{L}_F,\mathcal{L}_{V-A},\mathcal{L}_{\rm IVB}$, 代入到 (3.2.3) 算出跃迁概率密度 W. 再由公式 (3.2.2) 将 W 与可观测的能量密度 Γ 和平均寿命 τ 联系起来. 特别地, 注意到夸克弱流公式 (3.2.54) 是用 d,s,b 的 CKM 组合表达的, 在具体使用过程中, 若反应式中没有某个夸克参与, 如没有 s 夸克, 则可在弱流中令 $s=0$ 便可.

3.3 GWS 电弱理论

3.3.1 Glashow 的 $U(1)\times SU(2)$ 方案

Yang-Mills 规范理论出现后, 一些物理学家就确信弱相互作用与强相互作用一定是某些 $SU(N)$ 群的规范场. 然而 Yang-Mills 理论只是一个数学方案, 要明确

地确定弱作用与强作用究竟属于哪些 $SU(N)$ 群的规范场, 这不是一件容易做到的事情. 历史上是 Glashow 在 1961 年首先提出将电磁与弱相互作用结合在一起的 $U(1)\times SU(2)$ 规范方案. 接着 Salam 和 Ward 在 1964 年, 以及 Weinberg 在 1967 年分别独立地提出电弱 $U(1)\times SU(2)$ 理论. Weinberg 和 Salam 则在 1967 年先后独立地引入 $U(1)\times SU(2)$ 自发对称破缺的 Higgs 机制, 从而完整地给出了关于电磁与弱相互作用组合在一起的弱电作用量. 为此 Glashow, Weinberg 和 Salam 由于他们关于电弱统一理论而获得 1979 年度诺贝尔物理学奖.

Glashow 的弱电相互作用的 $U(1)\times SU(2)$ 方案的动机来源于中间矢量 Bose 子 (IVB) 理论. IVB 理论是用来计算弱作用衰变跃迁概率的, 它的作用量密度由 (3.2.25)-(3.2.26) 给出, 为了方便这里再次将它们写出如下:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{\mathrm{IVB}}=\mathcal{L}_{CC}+\mathcal{L}_{NC},\\
&\mathcal{L}_{CC}=\frac{g}{\sqrt{2}}(J^{\mu^-}W_\mu^+ + J^{\mu^+}W_\mu^-),\\
&\mathcal{L}_{NC}=\frac{g}{\cos\theta_w}J_\mu^{NC}Z^\mu,\\
&J^{\mu^+}=\sum_l \bar{\nu}_l\gamma^\mu\left(\frac{I-\gamma_5}{2}\right)l,\\
&J^{\mu^-}=\sum_l \bar{l}\gamma^\mu\left(\frac{I-\gamma_5}{2}\right)\nu_l,\\
&J_\mu^{NC}=\sum_f g_L^f\bar{f}\gamma_\mu\left(\frac{I-\gamma_5}{2}\right)f+\sum_{f\neq\nu} g_R^f\bar{f}\gamma_\mu\left(\frac{I+\gamma_5}{2}\right)f,
\end{aligned}\tag{3.3.1}$$

l 代表带电轻子波函数, ν_l 代表对应的中微子波函数, f 为参与衰变的 Fermi 子波函数.

因为 (3.3.1) 在一定程度上得到实验支持, 因而可以作为寻求弱相互作用场理论的出发点. 注意到 (3.3.1) 中有三个矢量场

$$W_\mu^+,\quad W_\mu^-,\quad Z_\mu,\tag{3.3.2}$$

由 (1.4.31), 它们对应于三个矢量 Bose 子. 此外物理实验上表明 $W_\mu^\pm$ 是带正负电荷的粒子, Z_μ 是中性粒子. 再一次地由 (1.4.31) 存在两个实向量场 W_μ^1, W_μ^z 使得

$$W_\mu^\pm=\frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1\pm \mathrm{i}W_\mu^2).$$

于是 W_μ^1, W_μ^2, Z_μ 可以从形式上看成 $SU(2)$ 的三个规范场 (注意 $SU(N)$ 有 N^2-1 个规范场).

Glashow 考虑到弱作用衰变也包含电磁作用 ($W_\mu^\pm$ 含电荷), 因此他认为应该将弱作用与电磁作用耦合在一起用 $U(1)\times SU(2)$ 规范对称性统一地处理. 此时有四

个向量场

$$B_\mu, \quad W_\mu^1, \quad W_\mu^2, \quad W_\mu^3, \tag{3.3.3}$$

其中 B_μ 是 $U(1)$ 规范场, W_μ^a $(1 \leqslant a \leqslant 3)$ 是 $SU(2)$ 规范场, 它们的保范线性组合 (即转动变换)

$$\begin{aligned} A_\mu &= \cos\theta B_\mu - \sin\theta W_\mu^3, \\ Z_\mu &= \sin\theta B_\mu + \cos\theta W_\mu^3, \\ W_\mu^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 + \mathrm{i}W_\mu^2), \\ W_\mu^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 - \mathrm{i}W_\mu^2), \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

产生电磁场 A_μ 和 (3.3.2) 的弱作用矢量 Bose 子 $W_\mu^\pm, Z_\mu$, 其中 θ 角是一个由实验来确定的参数. 今天 θ 被称为 Weinberg 角.

一旦人们明确了电弱相互作用是 $U(1) \times SU(2)$ 规范场. 那么由 Yang-Mills 理论 (3.1.41), 电弱理论的作用量密度便给出

$$\mathcal{L}_{EW} = \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_D, \tag{3.3.5}$$

式中

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W^{\mu\nu a} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}, \\ &\mathcal{L}_D = \bar{\psi}\left(\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi, \\ &W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g\lambda_{bc}^a W_\mu^b W_\nu^c, \quad 1 \leqslant a \leqslant 3, \\ &B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \\ &D_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i}g_0 B_\mu + \mathrm{i}g W_\mu^a \sigma_a, \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

其中 σ_a $(1 \leqslant a \leqslant 3)$ 是 Pauli 矩阵, B_μ, W_μ^a $(1 \leqslant a \leqslant 3)$ 便是 (3.3.3) 规范场.

提出 $U(1) \times SU(2)$ 理论主要原因是在 (3.3.5) 的作用量中, 包含了 (3.3.1) 的作用量 $\mathcal{L}_{\mathrm{IVB}}$. 事实上, 在 (3.3.5) 中 ψ 的导数项

$$\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu \psi,$$

由 (3.3.6) 中 D_μ 的定义, 这一项含有

$$\bar{\psi}\gamma^\mu W_\mu^a \sigma_a \psi. \tag{3.3.7}$$

在如下变换下

$$\begin{pmatrix} W_\mu^+ \\ W_\mu^- \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_\mu^1 \\ W_\mu^2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \sigma^- \\ \sigma^+ \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix},$$

(3.3.7) 式写作

$$\bar{\psi}\gamma^{\mu}W_{\mu}^{a}\sigma_{a}\psi=\sqrt{2}\bar{\psi}(\gamma^{\mu}W_{\mu}^{+}\sigma^{-}+\gamma^{\mu}W_{\mu}^{-}\sigma^{+})\psi+\bar{\psi}\gamma^{\mu}W_{\mu}^{3}\sigma_{3}. \tag{3.3.8}$$

由左手态的定义 (3.2.17), 有

$$\begin{aligned}J^{\mu^+}&=\bar{\nu}_l\gamma^{\mu}\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)l=\bar{\nu}_{lL}\gamma^{\mu}l_L=\bar{\mathcal{L}}_L\gamma^{\mu}\sigma^{+}\mathcal{L}_L,\\ J^{\mu^-}&=\bar{l}\gamma^{\mu}\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\nu_l=\bar{l}_L\gamma^{\mu}\nu_{lL}=\bar{\mathcal{L}}_L\gamma^{\mu}\sigma^{-}\mathcal{L}_L.\end{aligned} \tag{3.3.9}$$

其中 $\mathcal{L}_L$ 是左手态轻子对波函数:

$$\mathcal{L}_L=\begin{pmatrix}\nu_{lL}\\ l_L\end{pmatrix},\quad \bar{\mathcal{L}}_L=(\bar{\nu}_{lL},\bar{l}_L),\quad \sigma^{\pm}=\frac{1}{2}(\sigma_1\pm\mathrm{i}\sigma_2). \tag{3.3.10}$$

于是对于 $\psi=\mathcal{L}_L$, (3.3.8) 变为

$$\bar{\psi}\gamma^{\mu}W_{\mu}^{a}\sigma_{a}\psi=\sqrt{2}(J^{\mu^-}W_{\mu}^{+}+J^{\mu^+}W_{\mu}^{-})+J^{\mu^3}W_{\mu}^{3}. \tag{3.3.11}$$

由 (3.3.1) 知 $W_{\mu}^{\pm}=W_{\mu}^{1}\pm\mathrm{i}W_{\mu}^{2}$. 于是作用量 (3.3.5) 中关于 Dirac 旋量场的部分 $\mathcal{L}_D$ 可写成如下形式:

$$\mathcal{L}_D=\mathcal{L}_{CC}+\mathcal{L}_{NC}+\bar{\psi}\left[\mathrm{i}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu}+\mathrm{i}g_0B_{\mu})-\frac{mc}{\hbar}\right]\psi, \tag{3.3.12}$$

式中 $\mathcal{L}_{CC}=\sqrt{2}g(J^{\mu^-}W_{\mu}^{+}+J^{\mu^+}W_{\mu}^{-}),\mathcal{L}_{NC}=gJ^{\mu_3}W_{\mu}^{3}$.

从 (3.3.12) 可清楚地看到 $SU(2)$ 的 Yang-Mills 作用量中包含了中间矢量 Bose 子理论 (3.3.1) 中的成分 $\mathcal{L}_{CC}$ 和 $\mathcal{L}_{NC}$. 这就是为什么 Glashow 提出电弱 $U(1)\times SU(2)$ 规范理论的重要原因之一.

注 3.2　中间矢量 Bose 子 (IVB) 理论是为了适应实验资料而凑出的一个理论. (3.3.1) 的表达式中 $J_{\mu}^{\pm},J_{\mu}^{NC}$ 及 $W_{\mu}^{\pm},Z_{\mu}$ 的物理意义都是明确的, 但它们的组合方式

$$J^{\mu^-}W_{\mu}^{+}+J^{\mu^+}W_{\mu}^{-}\ \text{以及}\ J_{\mu}^{NC}Z^{\mu}$$

是由于作用量必须是实值函数造成的. 这一点从 (3.3.11) 左端是实函数可以看出. 而 (3.3.11) 左端项

$$\bar{\psi}\gamma^{\mu}W_{\mu}^{a}\sigma_{a}\psi=\psi^{\dagger}\gamma^{0}\gamma^{\mu}W_{\mu}^{a}\sigma_{a}\psi$$

为实函数的原因是该式中的矩阵

$$(\gamma^{0}\gamma^{\mu}W_{\mu}^{a}\sigma_{a})^{\dagger}=\gamma^{0}\gamma^{\mu}W_{\mu}^{a}\sigma_{a}$$

是一个 Hermite 矩阵.

注 3.3 Glashow 的 $U(1)\times SU(2)$ 电弱理论由两个部分构成, 第一个部分就是 $U(1)\times SU(2)$ 的作用量 (3.3.5)-(3.3.6), 该作用量中已包含了 (3.3.1) 的 IVB 理论; 第二部分就是 (3.3.4) 的组合及其物理解释. 一些不太熟悉物理思维方式的读者可能会对 A_μ, Z_μ 的组合方式产生困惑, 以为这种组合是由什么物理原因才这么提出. 其实这里没有原因, 它是最一般的形式, 因为 θ 值交给了实验来确定. 但是在 Weinberg 的 $U(1)\times SU(2)$ 理论中, A_μ, Z_μ 的这种组合是由 Higgs 机制决定的, 并且 $\theta\neq 0$.

3.3.2 质量产生的 Higgs 机制

3.2.3 小节已经说到, IVB 理论中的三个矢量 Bose 子 $W^\pm, Z^0$ 是有质量的, 即对应的四维矢量场 $W_\mu^\pm, Z_\mu$ 是有质量的. 根据 Bose 子场质量判据 (1.4.36)-(1.4.37), 由 (3.3.5)-(3.3.6) 给出的 $U(1)\times SU(2)$ 规范场作用量关于 W_μ^a 和 B_μ 都是没有质量的, 因为它们不含如下质量项

$$(W_\mu^1, W_\mu^2, W_\mu^3, B_\mu)M\begin{pmatrix} W_\mu^1\\ W_\mu^2\\ W_\mu^3\\ B_\mu\end{pmatrix}, \tag{3.3.13}$$

其中 M 是半正定对称质量矩阵

$$M=(m_{ij}), \tag{3.3.14}$$

使得 M 满足

$$\Omega^{-1}M\Omega=\begin{pmatrix} m_w & & & 0\\ & m_w & & \\ & & m_z & \\ 0 & & & 0\end{pmatrix}, \tag{3.3.15}$$

式中 m_w, m_z 分别是 $W^\pm$ 和 Z^0 粒子的质量, Ω 是 (3.3.4) 变换矩阵:

$$\Omega=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & 0 & 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}. \tag{3.3.16}$$

换句话说, Glashow 关于电弱的 $U(1)\times SU(2)$ 规范理论中, 其作用量 (3.3.5)-(3.3.6) 中缺少 (3.3.13) 的质量项, 它必须满足 (3.3.14)- (3.3.16) 性质. 如果人为地

在 (3.3.5) 的作用量中加上 (3.3.13) 质量项, 那么它将破坏 $U(1)\times SU(2)$ 规范对称性, 因为这个质量项在下面 $U(1)\times SU(2)$ 规范变换下它的表达形式必然要发生改变,

$$\begin{cases} \tilde{B}_\mu = B_\mu - \dfrac{\mathrm{i}}{g_0}\partial_\mu\varphi, \\ \tilde{W}^a_\mu\sigma_a = UW^a_\mu\sigma_a U^{-1} + \dfrac{\mathrm{i}}{g}(\partial_\mu U)U^{-1}, \quad U\in SU(2). \end{cases}$$

为了克服这个困难, 在 1964 年同时有三组物理学家: P. Higgs; F. Englert 和 R. Brout; G. Guralnik, C. R. Hagen 和 T. Kibble, 这六个人同时提出了自发对称破缺的质量产生机制, 它也被广泛称为 Higgs 机制. 紧跟着 S. Weinberg 在 1967 年和 A. Salam 在 1968 年他们成功地将这种机制结合到 $U(1)\times SU(2)$ 电弱理论中, 解决了 $W^\pm$ 和 Z 粒子的质量问题.

为了能够清楚地揭示 Higgs 机制的实质, 只用 $U(1)$ 规范场作为例子来讨论自发对称破缺机制. 在这种情况下, Yang-Mills 作用量密度取如下形式:

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) + \bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu - m)\psi, \tag{3.3.17}$$

式中 $g^{\mu\nu}$ 是 Minkowski 度量,

$$D_\mu\psi = (\partial_\mu + \mathrm{i}gA_\mu)\psi. \tag{3.3.18}$$

显然 (3.3.17)-(3.3.18) 在下面 $U(1)$ 规范变换下是不变的:

$$\tilde{\psi} = e^{\mathrm{i}\theta}\psi, \quad \tilde{A}_\mu = A_\mu - \frac{\mathrm{i}}{g}\partial_\mu\theta. \tag{3.3.19}$$

关于 (3.3.17) 的变分方程取如下形式:

$$\begin{aligned} &\Box A_\mu - \partial_\mu(\mathrm{div}\ A) - gJ_\mu = 0 \quad (\mathrm{div}\ A = \partial^\nu A_\nu), \\ &(\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = 0, \\ &J_\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \end{aligned} \tag{3.3.20}$$

其中 $\Box$ 是波算子, 事实上

$$\partial^\nu(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu) = \partial^\nu\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu\partial^\nu A_\nu = \Box A_\mu - \partial_\mu(\mathrm{div}\ A).$$

因此显然 (3.3.20) 关于 (3.3.19) 变换是不变的. 同时也清楚地看到在 (3.3.20) 中的 Bose 子 A_μ 是没有质量的, 因为在第一个方程 (Klein-Gordon 方程) 中不含质量项 k^2A_μ.

所谓 Higgs 机制就是在 (3.3.17) 的作用量中人为地加上一项, 称为 Higgs 作用量密度 $\mathcal{L}_H$, 表达式为

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}_H = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(D_\mu\phi)^\dagger(D_\nu\phi) - \frac{1}{4}(\phi^\dagger\phi - \rho^2)^2,\\&D_\mu\phi = (\partial_\mu + \mathrm{i}gA_\mu)\phi,\\&(D_\mu\phi)^\dagger = (\partial_\mu - \mathrm{i}gA_\mu)\phi^\dagger,\end{aligned} \tag{3.3.21}$$

其中 ϕ 为一个标量函数, 代表自旋为零的 Bose 子, 著名的 Higgs 粒子就是从它产生的, $\rho > 0$ 是一个常数.

现在取代 Yang-Mills 作用量, 考虑如下加入 Higgs 的作用量

$$L = \int [\mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_H]\,\mathrm{d}x, \tag{3.3.22}$$

其中 $\mathcal{L}_{YM}$ 如 (3.3.17), $\mathcal{L}_H$ 如 (3.3.21). 它的变分方程

$$\frac{\delta L}{\delta A_\mu} = 0, \quad \frac{\delta L}{\delta \phi} = 0, \quad \frac{\delta L}{\delta \psi} = 0,$$

再如下形式:

$$\begin{aligned}&\Box A_\mu - \partial_\mu(\mathrm{div}\ A) - gJ_\mu + \frac{\mathrm{i}g}{2}(\phi(D_\mu\phi)^\dagger - \phi^\dagger D_\mu\phi) = 0,\\&(D^\mu)^\dagger D_\mu\phi + (\phi^\dagger\phi - \rho^2)\phi = 0,\\&(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = 0.\end{aligned} \tag{3.3.23}$$

不难看出, 作用量 (3.3.22) 和它的变分方程 (3.3.23) 在如下规范变换下是不变的,

$$\tilde{\psi} = e^{\mathrm{i}\theta}\psi, \quad \tilde{\phi} = e^{\mathrm{i}\theta}\phi, \quad \tilde{A}_\mu = A_\mu - \frac{\mathrm{i}}{g}\partial_\mu\theta. \tag{3.3.24}$$

此外, 注意到当 $A_\mu = 0, \psi = 0$ 时,

$$J_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi = 0, \quad D_\mu = \partial_\mu.$$

因此 $(A_\mu, \psi, \phi) = (0, 0, \rho)$ 是 (3.3.23) 的一个解, 物理上称作是基态或真空态.

考察方程 (3.3.23), 它显然仍是没有质量的. 然而对 $\Phi = (A_\mu, \psi, \phi)$ 考虑在基态 $\Phi_0 = (0, 0, \rho)$ 处作平移变换

$$\Phi = \Phi' + \Phi_0, \quad \Phi' = (A'_\mu, \psi', \phi'), \tag{3.3.25}$$

即将下面变换

$$A_\mu = A'_\mu, \quad \psi = \psi', \quad \phi = \phi' + \rho$$

代入到 (3.3.23) 中, 该方程变为

$$\begin{aligned}&\Box A'_\mu + g^2\rho^2 A'_\mu - \partial_\mu(\mathrm{div}\ A') - gJ'_\mu + \mathrm{i}g\tilde{J}_\mu(\phi') = 0,\\&(D^\mu)^\dagger D_\mu\phi + [\phi'^\dagger\phi' + 2\rho\mathrm{Re}\phi']\phi = 0,\\&(\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu - m)\psi' = 0,\end{aligned}\tag{3.3.26}$$

其中 $\phi = \phi' + \rho, D_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i}gA'_\mu$, 以及

$$\tilde{J}_\mu(\phi') = \mathrm{Im}(\phi' D_\mu\phi + \rho D_\mu\phi').$$

现在来看方程 (3.3.26), 它的第一个方程含有线性项 $g^2\rho^2 A'_\mu$, 从而规范场 A'_μ 获得它的质量 $m = g\rho\hbar/c$. 但是付出的代价是方程 (3.3.26) 关于规范变换

$$\tilde{A}'_\mu = A'_\mu - \frac{\mathrm{i}}{g}\partial_\mu\theta$$

不再保持不变了. 这便是 Higgs 机制: 在 (3.3.25) 的基态平移下关于 (3.3.24) 规范对称性被破坏, 同时质量被创生出来.

为了能够用数学的眼光把握 Higgs 机制, 我们将它抽象成一般数学形式来介绍. 这种方式就是体现了从数学观点看物理世界的精神.

考虑一般 $SU(N)$ 的 Yang-Mills 作用量密度

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a} + \bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu - m)\psi,\tag{3.3.27}$$

其中

$$\begin{cases} F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu + g\lambda^a_{bc}G^b_\mu G^c_\nu,\\ D_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i}gG^a_\mu\tau_a. \end{cases}\tag{3.3.28}$$

在 3.1.4 小节中我们知道, (3.3.27)-(3.3.28) 的规范场 G^a_μ $(1 \leqslant a \leqslant N^2-1)$ 是没有质量的. 从而加入一个标量场 $\phi = (\phi_1, \cdots, \phi_N)$, 代表 N 个自旋为零的粒子. 它的作用量密度 $\mathcal{L}_H$, 称作 Higgs 部分, 写作

$$\mathcal{L}_H = \frac{1}{2}(D^\mu\phi)^\dagger D_\mu\phi + F(\phi),\tag{3.3.29}$$

其中 D_μ 如 (3.3.28), 函数 F 满足

$$F(\rho) = 0 \ \text{对某}\ N\ \text{个非负实数}\ \rho = (\rho_1, \cdots, \rho_N).\tag{3.3.30}$$

考虑加入 Higgs 场的作用量

$$L = L_{YM} + L_H = \int(\mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_H)\mathrm{d}x,\tag{3.3.31}$$

它是在如下规范变换下不变的:

$$\begin{cases} \psi \to e^{\mathrm{i}\theta^a \tau_a}\psi, \quad \phi \to e^{\mathrm{i}\theta^a \tau_a}\phi, \\ G_\mu^a \to G_\mu^a - \dfrac{1}{g}\partial_\mu \theta^a - \lambda_{bc}^a \theta^b W_\mu^c \quad (\text{即 (3.1.30)}). \end{cases} \tag{3.3.32}$$

L 的变分方程为

$$\frac{\delta L_{YM}}{\delta G_\mu^a} + \frac{\delta L_H}{\delta G_\mu^a} = 0, \quad 1 \leqslant a \leqslant N^2 - 1, \tag{3.3.33}$$

$$\frac{\delta L_H}{\delta \phi_k^\dagger} = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant N, \tag{3.3.34}$$

$$\frac{\delta L_{YM}}{\delta \psi} = 0. \tag{3.3.35}$$

现在关于规范场 G_μ^a $(1 \leqslant a \leqslant N^2 - 1)$ 的方程 (3.3.33) 仍然是没有质量. 由 (3.3.29), 在 (3.3.33) 中的 Higgs 部分为

$$\begin{aligned} \frac{\delta L_H}{\delta G^{\mu a}} &= \frac{\partial}{\partial G^{\mu a}}\mathcal{L}_H = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial G^{\mu a}}\left[(\partial^\beta \phi)^\dagger (D_\beta \phi)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[(-\mathrm{i}g\tau_a\phi)^\dagger(\partial_\mu \phi + \mathrm{i}gG_\mu^b \tau_b) + (\mathrm{i}g\tau_a\phi)(\partial_\mu \phi^\dagger - \mathrm{i}gG_\mu^b \tau_b \phi)\right] \\ &\quad (\text{由 } D_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i}gG_\mu^a \tau_a). \end{aligned} \tag{3.3.36}$$

由 (3.3.30) 可知, $(G_\mu^a, \psi, \phi) = (0, 0, \rho)$ 是 (3.3.33)-(3.3.35) 的解, 代表 Higgs 场的基态. 关于这个基态作平衡

$$(G_\mu^a, \psi, \phi) = (\tilde{G}_\mu^a, \tilde{\psi}, \tilde{\phi} + \rho). \tag{3.3.37}$$

将它代入到 (3.3.33) 中, 再由 (3.3.36), 方程变为

$$\partial^\nu \tilde{F}_{\nu\mu}^a + m_b^a \tilde{G}_\mu^b - g\lambda_{bc}^a g^{\alpha\beta}\tilde{F}_{\alpha\mu}^b G_\beta^c - g\tilde{J}_\mu^a + \mathrm{i}g\tilde{J}_\mu^a(\tilde{\phi}) = 0, \tag{3.3.38}$$

式中 (m_b^a) 是质量矩阵:

$$(m_b^a) = (g^2 \rho^{\mathrm{T}} \tau_a \tau_b \rho). \tag{3.3.39}$$

而在 (3.3.37) 平移下, 方程 (3.3.34) 变为

$$\begin{aligned} &D^\mu D_\mu^\dagger \phi + F(\tilde{\phi} + \rho) = 0, \\ &\tilde{F}(\tilde{\phi} + \rho) = \nabla F(\rho)\tilde{\phi} + o(\tilde{\phi}), \end{aligned} \tag{3.3.40}$$

其中

$$\nabla F(\rho) = \left(\frac{\partial F_k(\rho)}{\partial \phi_l}\right) \tag{3.3.41}$$

便是关于 Higgs 粒子的质量.

现在可以总结性地阐述自发对称破缺机制如下. 由于 $SU(N)$ 的 Yang-Mills 规范理论本质性地没有质量项, 若要对一个有质量的物理场建立规范理论, 我们需要在 (3.3.27) 的 Yang-Mills 作用量上加上一个 Higgs 场部分 (3.3.29), 使得描述该物理场的作用量由 (3.3.31) 提供. 这个新引入的作用量也满足 (3.3.32) 的规范不变性, 并且也没有质量项. 但是该系统的 Higgs 场有一个非零基态 ρ, 在该基态的附近物理场方程由 (3.3.38) 和 (3.3.40) 描述, 它们破坏了 (3.3.32) 的规范对称性, 但同时规范场获得它们的质量 (3.3.39), 而 Higgs 场 (代表标量 Bose 子) 也获它们的质量 (3.3.41).

注 3.4　可能会有人问, 由加一个 Higgs 场造成对称破缺而产生出质量与直接加一个质量项也造成对称破缺产生出质量, 这两者之间有什么区别? 该问题解答是, 直接在 Yang-Mills 作用量中加一个质量项这种作法没有物理内涵, 而加一个 Higgs 场的物理意义是明确的, 即该物理系统有 Higgs 粒子参与才产生出质量. 后来的实验支持这种观点. 在弱子模型中也能看到这一点.

注 3.5　Higgs 机制有一个显著特征就是 (3.3.29) 的作用量密度 $\mathcal{L}_H$ 是人为加进去的, 有无穷多种选择方式. 在统一场理论中取代 Higgs 机制的是一个由原理唯一决定的质量产生机制.

3.3.3　Weinberg-Salam 作用量

Higgs 机制在 1964 年出现后, Weinberg 和 Salam 及时地抓住这一思想将它成功地结合到 Yang-Mills 规范理论中完成了称之为 GWS 电弱理论的最后一步: 建立完整的 Lagrange 作用量. 今天该理论已成为标准模型的一个重要组成部分.

与 Glashow 将电磁与弱作用结合到一起的动机不同, Weinberg 和 Salam 主要是从自发对称破缺这一角度来认识到需要将电磁与弱作用糅合到一起才行. 下面分析为什么在 GWS 理论中必须将电磁加入到弱作用中去.

让我们再回到 3.3.2 小节介绍的 Higgs 机制. 在那里, 如果单纯考虑弱作用是 $SU(2)$ 规范场 (这种选择源于 (3.3.1)-(3.3.2) 的 IVB 理论), 那么对称破缺产生的质量矩阵由 (3.3.39) 给出, 具体到 $SU(2)$ 情况为

$$(m_b^a) = \begin{pmatrix} g^2\rho^2 & \mathrm{i}g^2(\rho_1^2-\rho_2^2) & 0 \\ -\mathrm{i}g^2(\rho_1^2-\rho_2^2) & g^2\rho^2 & \mathrm{i}2g^2\rho_1\rho_2 \\ 0 & -\mathrm{i}2g^2\rho_1\rho_2 & g^2\rho^2 \end{pmatrix}. \tag{3.3.42}$$

该矩阵的特征值为

$$\lambda_1 = g^2\rho^2, \quad \lambda_2 = 2g^2\rho^2, \quad \lambda_3 = 0, \quad \rho^2 = \rho_1^2+\rho_2^2. \tag{3.3.43}$$

它们代表了 $SU(2)$ 的三个规范场的质量. 然而 IVB 理论显示 $W^{\pm}, Z^0$ 的质量 $m_{W^{\pm}}$ 和 m_Z 具有性质:

$$m_{W^+} = m_{W^-} \neq 0, \quad m_Z \neq 0. \tag{3.3.44}$$

它与 (3.3.43) 不相符合. 因此它迫使人们考虑再加入一个规范场进去, 以便在对称破缺下产生的质量与 (3.3.44) 相符. 通过拼凑的方法, Weinberg-Salam 发现再加入一个 $U(1)$ 规范场 B_μ 便可获得 (3.3.14)-(3.3.16) 的性质, 也即可以得到一个质量矩阵 (m_{ij}), 它在 (3.3.4) 变换下变为 (3.3.15) 对角矩阵, 其对角线上的四个特征值

$$m_1 = m_2 > 0, \quad m_3 > 0, \quad m_4 = 0,$$

恰好与 $W^{\pm}$ 的质量 $m_W = m_1 = m_2, Z^0$ 质量 $m_Z = m_3$, 以后光子质量 $m_\gamma = 0$ 这一物理事实相吻合. 这便是将电磁场加入到弱作用中建立 $U(1) \times SU(2)$ 电弱理论的根本原因.

接下来介绍 Weinberg-Salam 建立 Higgs 机制的 $U(1) \times SU(2)$ 规范电弱理论的过程. 分为几个步骤进行.

(1) 首先确定 $U(1) \times SU(2)$ 的 Dirac 旋量场. 如果没有任何物理约束, $U(1) \times SU(2)$ 的旋量场很简单地取

$$\begin{aligned} &U(1) \text{ 旋量}: \quad l \text{ 带电轻子}, \\ &SU(2) \text{ 旋量}: \ (\nu_l, l)^{\mathrm{T}} \text{ 轻子对}. \end{aligned}$$

但是在 Glashow 的方案中已看到, 所要建立的 $U(1) \times SU(2)$ 作用量中应该包含 (3.3.1) 的 IVB 理论. 因此旋量场取为

$$\begin{aligned} &U(1) \text{ 旋量}: \quad l_R \text{ 右手带电轻子}, \\ &SU(2) \text{ 旋量}: \quad L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix} \text{ 左手轻子对}. \end{aligned} \tag{3.3.45}$$

关于左、右手旋量场的定义见 (3.2.17) 和 (3.2.18). GWS 电弱理论的旋量场取为 (3.3.45) 的原因是, 由 (3.3.11)-(3.3.12) 可知, 只有 ψ 取为左手态旋量场时,

$$\psi = \begin{pmatrix} \nu \\ l \end{pmatrix}_L,$$

$SU(2)$ 的 Yang-Mills 作用量中的 Dirac 部分才可表示为

$$\mathcal{L}_D = \mathcal{L}_{\mathrm{IVB}} + \bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi,$$

$\mathcal{L}_{\mathrm{IVB}}$ 即是 IVB 理论的作用量密度.

(2) Higgs 标量场. 在上一小节中已知, 需要加上一个 Higgs 场才能在自发对称破缺机制下产生规范场的质量.$SU(N)$ 的 Higgs 场有 N 个分量. 因而 $SU(2)$ 的场取为

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^{\dagger} \\ \phi^{0} \end{pmatrix}, \tag{3.3.46}$$

其中 $\phi^{\dagger}$ 带一个正电荷, ϕ^{0} 为中性标量场. 这里 ϕ 取为 (3.3.46) 形式完全是为了凑成满足下面的公式

$$Q = T^{3} + \frac{Y}{2}, \tag{3.3.47}$$

其中 Q 为电荷, $(T, T^{3}) = \left(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right)$ 为弱同位旋, Y 为弱超荷. 它是仿照强相互作用的 Gell-Mann-Nashijima 公式 (2.3.27) 引入的. 这些量子数的值定义为

$$\text{左手轻子对} \begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix} : Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ (T, T_3) = \left(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right),\ Y = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{Higgs 场} \begin{pmatrix} \phi^{+} \\ \phi^{0} \end{pmatrix} : Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ (T, T_3) = \left(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right),\ Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

这里需要指出, 公式 (3.3.47) 及其量子数都是人工的, 没有什么物理实质. 事实上, 在 GWS 理论中真正产生有实质性物理结论的 Higgs 场取如下形式:

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix}. \tag{3.3.48}$$

(3) Weinberg-Salam 电弱理论的作用量. 该理论涉及的所有场函数由下面给出

$SU(2)$ 规范场: $W_{\mu}^{1},\ W_{\mu}^{2},\ W_{\mu}^{3}$,

$U(1)$ 规范场: B_{μ},

Dirac 旋量场: $L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix}$, l_R 如 (3.3.45),

Higgs 标量场: $\phi = \begin{pmatrix} \phi^{+} \\ \phi^{0} \end{pmatrix}$, 如 (3.3.46).

关于这些场函数的 WS 作用量密度为

$$\mathcal{L}_{\mathrm{WS}} = \mathcal{L}_{G} + \mathcal{L}_{D} + \mathcal{L}_{H}, \tag{3.3.49}$$

其中 $\mathcal{L}_G$ 为规范场部分, $\mathcal{L}_D$ 为 Dirac 部分, $\mathcal{L}_H$ 为 Higgs 部分:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4}W^a_{\mu\nu}W^{\mu\nu a} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu},\\
&\mathcal{L}_D = \mathrm{i}\bar{L}\gamma^\mu D_\mu L + \mathrm{i}\bar{l}_R\gamma^\mu D_\mu l_R,\\
&\mathcal{L}_H = \frac{1}{2}(D_\mu\phi)^\dagger D^\mu\phi - \frac{\lambda}{4}(\phi^\dagger\phi - a^2)^2 - G_l(\bar{L}\phi l_R + \bar{l}_R\phi^\dagger L),
\end{aligned} \tag{3.3.50}$$

式中 G_l, λ, a 都是正常数.

$$\begin{aligned}
&W^a_{\mu\nu} = \partial_\mu W^a_\nu - \partial_\nu W^a_\mu + g_1\varepsilon^a_{bc}W^b_\mu W^c_\nu,\\
&B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu,\\
&D_\mu l_R = (\partial_\mu + \mathrm{i}g_2 B_\mu)l_R,\\
&D_\mu L = \left(\partial_\mu + \mathrm{i}\frac{g_2}{2}B_\mu - \mathrm{i}\frac{g_1}{2}W^a_\mu\sigma_a\right)L,\\
&D_\mu\phi = \left(\partial_\mu - \mathrm{i}\frac{g_2}{2}B_\mu - \mathrm{i}\frac{g_1}{2}W^a_\mu\sigma_a\right)\phi,
\end{aligned} \tag{3.3.51}$$

这里 g_1, g_2 是耦合常数, σ_a $(1 \leqslant a \leqslant 3)$ 是 Pauli 矩阵, ε^a_{bc} 是 $SU(2)$ 对应于 σ_a 的结构常数.

(4) 规范变换. WS 作用量 (3.3.49)-(3.3.51) 是在如下 $SU(2)$ 规范变换和 $U(1)$ 规范变换下不变的.

$SU(2)$ 规范变换:

$$\begin{aligned}
&L \to e^{\frac{\mathrm{i}}{2}\theta^a\sigma_a}L,\\
&\phi \to e^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\theta^a\sigma_a}\phi,\\
&l_R \to l_R,\\
&W^a_\mu \to W^a_\mu - \frac{2}{g_1}\partial_\mu\theta^a + \varepsilon^a_{bc}\theta^b W^c_\mu \quad (\text{即 (3.1.30)}),\\
&B_\mu \to B_\mu,
\end{aligned} \tag{3.3.52}$$

$U(1)$ 规范变换:

$$\begin{aligned}
&L \to e^{\frac{\mathrm{i}}{2}\beta}L,\\
&\phi \to e^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\beta}\phi,\\
&l_R \to e^{\mathrm{i}\beta}l_R,\\
&W^a_\mu \to W^a_\mu - \frac{2}{g_2}\partial_\mu\beta,\\
&B_\mu \to B_\mu + \frac{2}{g_2}\partial_\mu\beta.
\end{aligned} \tag{3.3.53}$$

注 3.6 这里再一次地强调, $\mathcal{L}_{\mathrm{WS}}$ 中的 Dirac 部分 $\mathcal{L}_D$ 中含有 (3.3.1) 的 $\mathcal{L}_{\mathrm{IVB}}$. 事实上由 (3.3.50) 和 (3.3.51), $\mathcal{L}_D$ 中含有如下项:

$$W^a_\mu J^\mu_a, \quad J^\mu_a = \bar{L}\gamma^\mu\sigma_a L.$$

在如下 $SU(2)$ 表示变换下

$$\begin{pmatrix} \sigma_+ \\ \sigma_- \\ \sigma_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix}, \tag{3.3.54}$$

W_μ^a 和 J_a^μ 是 $SU(2)$ 表示张量, 按如下方式变换

$$\begin{pmatrix} W_\mu^+ \\ W_\mu^- \\ W_\mu^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^1 \\ W_\mu^2 \\ W_\mu^3 \end{pmatrix}, \tag{3.3.55}$$

$$v \begin{pmatrix} J^{\mu^-} \\ J^{\mu^+} \\ J_3^\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1^\mu \\ J_2^\mu \\ J_3^\mu \end{pmatrix}. \tag{3.3.56}$$

于是 $\mathcal{L}_D$ 中所含的 $W_\mu^a J_a^\mu$ 在 (3.3.54)-(3.3.56) 变换下为

$$W_\mu^a J_a^\mu = W_\mu^+ J^{\mu^-} + W_\mu^- J^{\mu^+} + W_\mu^3 J_3^\mu, \tag{3.3.57}$$

式中

$$W_\mu^\pm = W_\mu^1 \pm \mathrm{i} W_\mu^2, \quad J^{\mu\pm} = \bar{L}\gamma^\mu \sigma_\pm L, \quad \Sigma_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1 \pm \mathrm{i}\sigma_2). \tag{3.3.58}$$

再根据 (3.3.9)-(3.3.10), 从 (3.3.1) 和 (3.3.57) 便可看到 $\mathcal{L}_D$ 含有 $\mathcal{L}_{\mathrm{IVB}}$ 的成分.

3.3.4　$U(1) \times SU(2)$ 电弱理论的场方程

这一小节将从 WS 作用量 (3.3.49)-(3.3.51) 具体导出 $U(1) \times SU(2)$ 电弱理论的场方程. 然后从这个场方程在基态解的自发对称破缺 (数学上称作稳态解平移变换) 导出规范场的质量矩阵. 从而得到 $W^\pm$ 与 Z^0 的质量.

在推导 (3.3.49) 的 Euler-Lagrange 方程过程中, 用 (3.3.48) 的 Higgs 场取代 (3.3.46) 的场. 这不仅仅是为了简单. 事实上若取 (3.3.37) 场, 则在物理上意味着现实中除了存在一个电中性的 Higgs 粒子外, 还存在一个带正电荷但是没有质量的 Higgs 粒子. 这看来与事实不符. 因此取 Higgs 场为

$$\phi = (0, \varphi).$$

在此情况下, (3.3.50) 中的 Higgs 部分变为

$$\mathcal{L}_H = \frac{1}{2}\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi + \frac{\varphi^2}{2}\left[\frac{g_1^2}{4}W_\mu^a W^{\mu a} + \frac{g_2^2}{4}B^\mu B_\mu - \frac{g_1 g_2}{2}B^\mu W_\mu^3\right]$$
$$-\frac{\lambda}{4}(\varphi^2 - a^2)^2 - G_l\varphi(\bar{l}_L l_R + \bar{l}_R l_L).$$

然后作用量 (3.3.49)-(3.3.51) 的变分方程

$$\frac{\delta L_{\mathrm{WS}}}{\delta W_\mu^a} = 0, \quad \frac{\delta L_{\mathrm{WS}}}{\delta B_\mu} = 0, \quad \frac{\delta L_{\mathrm{WS}}}{\delta L} = 0, \quad \frac{\delta L_{\mathrm{WS}}}{\delta R} = 0, \quad \frac{\delta L_{\mathrm{WS}}}{\delta \varphi} = 0,$$

取如下形式 (关于变分方程的具体推导见第 4 章的内容):

$$\begin{aligned}
&\partial^\nu W_{\nu\mu}^1 - g_1 g^{\alpha\alpha}(W_{\alpha\mu}^2 W_\alpha^3 - W_{\alpha\mu}^3 W_\alpha^2) + \frac{g_1}{2}J_\mu^1 + \frac{g_1^2}{2}\varphi^2 W_\mu^1 = 0,\\
&\partial^\nu W_{\nu\mu}^2 - g_1 g^{\alpha\alpha}(W_{\alpha\mu}^3 W_\alpha^1 - W_{\alpha\mu}^1 W_\alpha^3) + \frac{g_1}{2}J_\mu^2 + \frac{g_1^2}{2}\varphi^2 W_\mu^2 = 0,\\
&\partial^\nu W_{\nu\mu}^3 - g_1 g^{\alpha\alpha}(W_{\alpha\mu}^1 W_\alpha^2 - W_{\alpha\mu}^2 W_\alpha^1) + \frac{g_1}{2}J_\mu^3\\
&\quad + \frac{g_1}{2}\varphi^2(g_1 W_\mu^3 - g_2 B_\mu) = 0,\\
&\partial^\nu B_{\nu\mu} - \frac{g_2}{2}J_\mu^L - g_2 J_\mu^R + \frac{g_2}{2}\varphi^2(g_2 B_\mu - g_1 W_\mu^3) = 0,\\
&\mathrm{i}\gamma^\mu(\partial_\mu + \mathrm{i}g_2 B_\mu)l_R - G_l\varphi l_L = 0,\\
&\mathrm{i}\gamma^\mu\left(\partial_\mu + \mathrm{i}\frac{g_2}{2}B_\mu - \mathrm{i}\frac{g_1}{2}W_\mu^a\sigma_a\right)\begin{pmatrix}\nu_L\\ l_L\end{pmatrix} - G_l l_R\begin{pmatrix}0\\ \varphi\end{pmatrix} = 0,\\
&\partial^\mu\partial_\mu\varphi - \frac{1}{4}\varphi(g_1^2 W_\mu^a W^{\mu a} + g_2^2 B_\mu B^\mu - 2g_1 g_2 W_\mu^3 B^\mu)\\
&\quad + \lambda\varphi(\varphi^2 - a^2) + G_l(\bar{l}_L l_R + \bar{l}_R l_L) = 0,
\end{aligned} \tag{3.3.59}$$

其中 $W_{\mu\nu}^a, B_{\mu\nu}$ 如 (3.3.51), 以及

$$\begin{aligned}
&J_\mu^a = \bar{L}\gamma_\mu\sigma_a L \quad (1 \leqslant a \leqslant 3),\\
&J_\mu^L = \bar{\nu}_L\gamma_\mu\nu_L + \bar{l}_L\gamma_\mu l_L,\\
&J_\mu^R = \bar{l}_R\gamma_\mu l_R.
\end{aligned} \tag{3.3.60}$$

显然对于 $\Phi = (W_\mu^1, W_\mu^2, W_\mu^3, B_\mu, L, l_R, \phi)$(其中$\phi = (0, \varphi)$),

$$\Phi_0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, \phi_0), \quad \phi_0 = (0, a)$$

是 (3.3.59)-(3.3.60) 的一个稳态解. 作平移变换

$$\Phi \to \Phi + \Phi_0,$$

或等价地, 将

$$\varphi = \varphi' + a$$

代入 (3.3.59) 得到 (为了简单去掉 φ' 的上撇)

$$\partial^\nu W^1_{\nu\mu} + \frac{g_1^2 a^2}{2} W^1_\mu - g_1 g^{\alpha\alpha}(W^2_{\alpha\mu} W^3_\alpha - W^3_{\alpha\mu} W^2_\alpha) + \frac{g_1}{2} J^1_\mu + \frac{g_1^2}{2}(\varphi^2 + 2a\varphi) W^1_\mu = 0, \tag{3.3.61}$$

$$\partial^\nu W^2_{\nu\mu} + \frac{g_1^2 a^2}{2} W^2_\mu - g_1 g^{\alpha\alpha}(W^3_{\alpha\mu} W^1_\alpha - W^1_{\alpha\mu} W^3_\alpha) + \frac{g_1}{2} J^2_\mu + \frac{g_1^2}{2}(\varphi^2 + 2a\varphi) W^2_\mu = 0, \tag{3.3.62}$$

$$\partial^\nu W^3_{\nu\mu} + \frac{g_1^2 a^2}{2} W^3_\mu - \frac{g_1 g_2}{2} a^2 B_\mu - g_1 g^{\alpha\alpha}(W^1_{\alpha\mu} W^2_\alpha - W^2_{\alpha\mu} W^1_\alpha) + \frac{g_1}{2} J^3_\mu + \frac{g_1}{2}(\varphi^2 + 2a\varphi)(g_1 W^3_\mu - g_2 B_\mu) = 0, \tag{3.3.63}$$

$$\partial^\nu B_{\nu\mu} + \frac{g_2^2 a^2}{2} B_\mu - \frac{g_1 g_2}{2} a^2 W^3_\mu - \frac{g_2}{2} J^L_\mu - g_2 J^R_\mu + \frac{g_2}{2}(\varphi^2 + 2a\varphi)(g_2 B_\mu - g_1 W^3_\mu) = 0, \tag{3.3.64}$$

$$\mathrm{i}\left(\partial_\mu + \mathrm{i}\frac{g_2}{2} B_\mu\right) l_R - G_l a l_L - G_l \varphi l_L = 0, \tag{3.3.65}$$

$$\mathrm{i}\left(\partial_\mu + \mathrm{i}\frac{g_2}{2} B_\mu - \mathrm{i}\frac{g_1}{2} W^a_\mu \sigma_a\right) \begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix} - G_l l_R \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi + a \end{pmatrix} = 0, \tag{3.3.66}$$

$$\partial^\mu \partial_\mu \varphi + 2\lambda a^2 \varphi + \lambda \varphi^2(\varphi + 3a) + G_l(\bar{l}_L l_R + \bar{l}_R l_L) - \frac{1}{4}(\varphi + a)(g_1^2 W^a_\mu W^{\mu a} + g_2^2 B_\mu B^\mu - 2 g_1 g_2 W^3_\mu B^\mu) = 0. \tag{3.3.67}$$

以上方程 (3.3.61)-(3.3.67) 便是 $U(1)\times SU(2)$ 规范场在 Higgs 场的真空态 $\varphi = a$ 附近展开的场方程. 显然这些方程破坏了 (3.3.52)- (3.3.53) 规范变换的不变性. 但是在此真空态自发地对称破缺下, (W^a_μ, B_μ) 规范场质量项

$$M \begin{pmatrix} W^1_\mu \\ W^2_\mu \\ W^3_\mu \\ B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1^2 & -m_3^2 \\ 0 & 0 & -m_3^2 & m_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^1_\mu \\ W^2_\mu \\ W^3_\mu \\ B_\mu \end{pmatrix}, \tag{3.3.68}$$

被创生出来, 其中

$$m_1 = g_1 a/\sqrt{2}, \quad m_2 = g_2 a/\sqrt{2}, \quad m_3 = \sqrt{g_1 g_2}\, a/\sqrt{2}.$$

为了求出矢量 Bose 子 $W^\pm$ 和 Z^0 的质量, 需要像 (3.3.15) 那样将 (3.3.68) 的质量矩阵 M 进行对角化.

GWS 电弱理论的所有物理性质都储存在 (3.3.61)-(3.3.67) 的场方程中. 从它们中可提取如下信息: 矢量 Bose 子 $W^{\pm}, Z^0$ 及 Higgs 粒子的质量, 各种带电轻子及夸克流 $J_\mu^{\pm}$ 以及中性流 J_μ^{NC} 等. 在提取这些信息时, 我们需要将 (3.3.61)-(3.3.67) 分解成三组不同的方程, 即关于规范场 $W_\mu^{\pm}, Z_\mu, A_\mu$ 的方程, 关于 Dirac 方程以及 Higgs 场方程.

1. $W_\mu^{\pm}, Z_\mu, A_\mu$ 的场方程

由于 (3.3.68) 的质量矩阵 M 不是对角的, 因而必须关于 W_μ^a, B_μ 作线性变换才能将 M 对角化以提取质量. 这是因为对于方程

$$Lu + Mu + J = o(u), \quad o(u) \text{ 为 } u \text{ 的高阶项}, \tag{3.3.69}$$

在 $u = (u_1, \cdots, u_n)^{\mathrm{T}}$ 的如下线性变换下,

$$u = A\tilde{u}, \tag{3.3.70}$$

由 $LA\tilde{u} = AL\tilde{u}$ (L 为线性微分算子), 方程 (3.3.69) 变为

$$L\tilde{u} + A^{-1}MA\tilde{u} + A^{-1}J = o(\tilde{u}).$$

因此关于矩阵 M 作相似变换以获得对角化的方式就是对 u 作 (3.3.70) 的线性变换.

注意到

$$\begin{aligned}\partial^\nu W_{\nu\mu}^a =& \partial^\nu(\partial_\nu W_\mu^a - \partial_\mu W_\nu^a + g_1\varepsilon_{bc}^a W_\mu^b W_\nu^c)\\ =& \Box W_\mu^a - \partial_\mu(\mathrm{div}\ W^a) + o(W),\end{aligned}$$

因此关于 W_μ^a, B_μ 的方程 (3.3.61)-(3.3.64) 可写成

$$\begin{pmatrix} \Box W_\mu^1 \\ \Box W_\mu^2 \\ \Box W_\mu^3 \\ \Box B_\mu \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} W_\mu^1 \\ W_\mu^2 \\ W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} - \partial_\mu \begin{pmatrix} \mathrm{div}\ W^1 \\ \mathrm{div}\ W^2 \\ \mathrm{div}\ W^3 \\ \mathrm{div}\ B \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g_1 J_\mu^1 \\ g_1 J_\mu^2 \\ g_1 J_\mu^3 \\ g_2 J_\mu^0 \end{pmatrix} = o(\Phi), \tag{3.3.71}$$

其中 M 是如 (3.3.68) 中的质量矩阵, $J_\mu^0 = -(J_\mu^L + 2J_\mu^R), \Phi = (W_\mu^1, W_\mu^2, W_\mu^3, B_\mu, \varphi)$. 由于 $W^{\pm}$ 与 W^1, W^2 有如下关系:

$$\begin{pmatrix} W_\mu^+ \\ W_\mu^- \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^1 \\ W_\mu^2 \end{pmatrix},$$

因而在下面 U 变换下

$$\begin{pmatrix} W_\mu^+ \\ W_\mu^- \\ Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} W_\mu^1 \\ W_\mu^2 \\ W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{g_1}{|g|} & \dfrac{g_2}{|g|} \\ 0 & 0 & -\dfrac{g_2}{|g|} & \dfrac{g_1}{|g|} \end{pmatrix}, \tag{3.3.72}$$

在 (3.3.68) 中的质量矩阵 M 变为

$$UMU^\dagger = \frac{c^2}{\hbar^2} \begin{pmatrix} m_W^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_Z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中

$$\frac{c^2 m_W^2}{\hbar^2} = \frac{g_1^2 a^2}{2}, \quad \frac{c^2 m_Z^2}{\hbar^2} = \frac{a^2}{2}|g|^2, \quad |g|^2 = g_1^2 + g_2^2. \tag{3.3.73}$$

而在 (3.3.71) 中的粒子流 J_μ 变为

$$\begin{pmatrix} \dfrac{g_1}{\sqrt{2}} J_\mu^+ \\ \dfrac{g_1}{\sqrt{2}} J_\mu^- \\ |g| J_\mu^{NC} \\ e J_\mu^{em} \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} g_1 J_\mu^1 \\ \dfrac{1}{2} g_1 J_\mu^2 \\ \dfrac{1}{2} g_1 J_\mu^3 \\ \dfrac{1}{2} g_2 J_\mu^0 \end{pmatrix}, \quad J_\mu^0 = -(J_\mu^L + 2J_\mu^R),$$

其中 $e = g_1 g_2/|g|$, 以及

$$\begin{aligned} J_\mu^\pm &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(J_\mu^1 \pm \mathrm{i} J_\mu^2), \\ J_\mu^{NC} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\frac{g_1^2}{|g|^2} J_\mu^3 - \frac{g_2^2}{|g|^2} J_\mu^L - \frac{2g_2^2}{|g|^2} J_\mu^R \right], \\ J_\mu^{em} &= \frac{1}{2}[J_\mu^3 + J_\mu^L + 2J_\mu^R]. \end{aligned} \tag{3.3.74}$$

于是在 (3.3.72) 变换下, 方程 (3.3.71) 变为

$$\Box W_\mu^+ + \left(\frac{m_W c}{\hbar}\right)^2 W_\mu^+ - \partial_\mu(\mathrm{div}\ W^+) + \frac{1}{\sqrt{2}} g_1 J_\mu^+ = o(\tilde{\Phi}),$$

$$\Box W_\mu^- + \left(\frac{m_W c}{\hbar}\right)^2 W_\mu^- - \partial_\mu(\text{div } W^-) + \frac{1}{\sqrt{2}} g_1 J_\mu^- = o(\tilde{\Phi}),$$
$$\Box z_\mu + \left(\frac{m_Z c}{\hbar}\right)^2 Z_\mu - \partial_\mu(\text{div } Z) + |g| J_\mu^{NC} = o(\tilde{\Phi}),$$
$$\Box A_\mu - \partial_\mu(\text{div } A) - e J_\mu^{em} = o(\tilde{\Phi}), \tag{3.3.75}$$

式中 $\tilde{\Phi} = (W_\mu^+, W_\mu^-, Z_\mu, A_\mu, \varphi)$, $|g|^2 = g_1^2 + g_2^2$, $e = g_1 g_2/|g|$. 方程 (3.3.75) 便是 GWS 电弱理论关于中间矢量 Bose 子 $W^\pm, Z^0$ 及光子 γ(被 $W_\mu^\pm, Z_\mu, A_\mu$ 所代表) 的场方程. 它主要包含了关于质量 (3.3.73) 以及关于粒子流 (3.3.74) 的物理信息.

2. GWS 理论的 Dirac 场方程

$U(1) \times SU(2)$ 电弱理论的 Dirac 场方程由 (3.3.65)-(3.3.66) 给出. 它的更具体的形式写作

$$\mathrm{i}\left(\partial_\mu + \mathrm{i}\frac{g_2}{2} B_\mu\right) l_R - \frac{m_l c}{\hbar} l_L - \frac{m_l c}{\hbar} \varphi l_L = 0, \tag{3.3.76}$$
$$\mathrm{i}\left(\partial_\mu + \mathrm{i}\frac{g_2}{2} B_\mu\right) l_L - \frac{m_l c}{\hbar} l_R - \frac{m_l c}{\hbar} \varphi l_R + \frac{g_1}{2}(W_\mu^+ \nu_L - W_\mu^3 l_L) = 0, \tag{3.3.77}$$
$$\mathrm{i}\left(\partial_\mu + \mathrm{i}\frac{g_2}{2} B_\mu\right) \nu_L + \frac{g_1}{2}(W_\mu^- l_L + W_\mu^3 \nu_L) = 0. \tag{3.3.78}$$

由左、右手态的定义 (3.2.17) 和 (3.2.18), 可以看到

$$l_L + l_R = l.$$

再由变换 (3.3.72) 知

$$B_\mu = \frac{g_1}{|g|} A_\mu + \frac{g_2}{|g|} Z_\mu, \quad W_\mu^3 = \frac{g_1}{|g|} Z_\mu - \frac{g_2}{|g|} A_\mu.$$

因此由 (3.3.76) 和 (3.3.77) 可得带电轻子 l 的方程为

$$\mathrm{i}\left(\partial_\mu + \mathrm{i}\frac{e}{2} A_\mu + \mathrm{i}\frac{e'}{2} Z_\mu\right) l - \frac{m_l c}{\hbar} l - \frac{m_l c}{\hbar} \varphi l + \frac{1}{2} g_1 \left(W_\mu^+ \nu_L - \frac{g_1}{|g|} Z_\mu l_L + \frac{g_2}{|g|} A_\mu l_L\right) = 0, \tag{3.3.79}$$

其中 m_l 为 l 轻子质量, e 为电荷, 它们的值为

$$\frac{m_l c}{\hbar} = a G_l, \quad e = \frac{g_1 g_2}{|g|}, \quad e' = \frac{g_2^2}{|g|}.$$

而电弱理论的左手态中微子 ν_L 方程便是 (3.3.78).

3. Higgs 场方程

由 (3.2.17) 和 (3.2.18) 可以看到 $\bar{\psi}_L\psi_L = 0, \bar{\psi}_R\psi_R = 0$. 因此有

$$\bar{\psi}\psi = (\bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R)(\psi_L + \psi_R) = \bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L.$$

于是 GWS 电弱理论的 Higgs 场方程 (3.3.67) 可表达为

$$\begin{aligned}&\Box\varphi + \left(\frac{m_H c}{\hbar}\right)^2 \varphi + \lambda\varphi^2(\varphi + 3a) + G_l \bar{l}\, l \\ &\quad -\frac{1}{4}(\varphi + a)(g_1^2 W_\mu^a W^{\mu a} + g_2^2 B_\mu B_\mu - 2g_1 g_2 W_\mu^3 B_\mu) = 0,\end{aligned} \tag{3.3.80}$$

式中 m_H 为 Higgs 粒子质量, 它的值为

$$\frac{m_H c}{\hbar} = \sqrt{2\lambda}a.$$

3.3.5　物理结论与实验检验

GWS 电弱理论的核心就是 WS 作用量 (3.3.49)-(3.3.51) 以及由此得到的场方程 (3.3.59). 从这些 $U(1) \times SU(2)$ 电弱理论的场方程可获得如下物理结论: ①带电与中性粒子流的存在性; ②中间矢量 Bose 子 $W^{\pm}, Z^0$ 的存在性及其质量; ③Higgs 粒子存在性. 下面将介绍这些结论及其物理实验的检验情况.

1. 带电与中性粒子流

带电粒子流 $J_\mu^{\pm}$ 与中性粒子流 J_μ^{NC} 是 IVB 理论 (3.3.1) 的产物. GWS 理论将 IVB 观点结合到 $U(1) \times SU(2)$ 方案中获得包含 $J_\mu^{\pm}$ 和 J_μ^{NC} 的场方程 (3.3.74)-(3.3.75), 从而得到带电粒子流与中性粒子流的表达式

$$j_\mu^{\pm} = g_1 J_\mu^{\pm}, \quad j_\mu^{NC} = |g| J_\mu^{NC}, \tag{3.3.81}$$

在 (3.3.72) 的 U 矩阵中, 记

$$\cos\theta_w = \frac{g_1}{|g|}, \quad \sin\theta_w = \frac{g_2}{|g|}, \tag{3.3.82}$$

其中 θ_w 称为 Weinberg 角. 那么从 (3.3.81) 可得如下关系:

$$j_\mu^{\pm}/j_\mu^{NC} = \cos\theta_w J_\mu^{\pm}/J_\mu^{NC}.$$

需要指出, (3.3.82) 中的 Weinberg 角 θ_w 是一个靠实验来决定的参数.

带电粒子流是早已知道的事实. 而中性流是在 Glashow 于 1961 年的 $U(1) \times SU(2)$ 理论中预言该流的 12 年后, 在 1973 年被欧洲核子中心 (CERN) 首次观测到.

2. $W^{\pm}, Z^0$ 粒子及其质量

从 (3.3.72) 的变换和 Weinberg 角 (3.3.82) 的定义, 可导出中间矢量 Bose 子 $W^{\pm}, Z^0$ 的波函数表达式为

$$\begin{aligned} W_\mu^{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \pm \mathrm{i}W_\mu^2), \\ Z_\mu &= \cos\theta_W W_\mu^3 + \sin\theta_W B_\mu, \\ A_\mu &= -\sin\theta_W W_\mu^3 + \cos\theta_W B_\mu. \end{aligned} \tag{3.3.83}$$

而从它们的场方程 (3.3.75) 以及 (3.3.73) 便可得到质量关系式

$$m_{W^+} = m_{W^-} = \frac{a\hbar}{\sqrt{2}c} g_1, \quad m_2 = \frac{a\hbar}{\sqrt{2}c}|g|. \tag{3.3.84}$$

再从 (3.3.79), 我们可得到 GWS 理论的所有参数

$$\begin{cases} m_W = \cos\theta_W m_Z, \ m_l = \dfrac{\hbar a G_l}{c}, \ m_H = \dfrac{\sqrt{2\lambda}\hbar a}{c}, \\ e = \sin\theta_W g_1, \ e' = \sin\theta_W g_2, \ |g| = \dfrac{e}{\sin\theta_W \cos\theta_W}, \end{cases} \tag{3.3.85}$$

其中 m_W, m_Z 是 $W^{\pm}$ 和 Z^0 粒子质量, m_l 是带电轻子 l 质量, m_H 是 Higgs 粒子质量, e 是电荷.

由 (1.3.9) 及 (3.3.84) 可得

$$\frac{G_f}{\sqrt{2}} = \frac{g_1^2}{8}\left(\frac{\hbar}{m_W c}\right)^2 = \frac{1}{4a^2}.$$

因此有

$$a^2 = \frac{1}{2\sqrt{2}G_f}, \quad G_f = 10^{-5}\hbar c\left(\frac{\hbar}{m_p c}\right)^2,$$

式中 m_p 为质子质量. 由此看到, 只要测得 θ_w 的值便可以 (3.3.84) 和 (3.3.85) 求出 m_W 和 m_Z 的值. 实验上测得

$$\sin^2\theta_W = 0.23, \quad \theta_W = 28.75^\circ.$$

从而算出 m_W 和 m_Z 的值为

$$m_W = 80\mathrm{GeV/c^2}, \quad m_Z = 91\mathrm{GeV/c^2}. \tag{3.3.86}$$

在 1983 年欧洲核子中心随后找到了 $W^{\pm}$ 粒子和 Z^0 粒子. 它们的质量测得结果与理论值 (3.3.86) 相吻合.

3. Higgs 粒子

Higgs 粒子的场方程由 (3.3.80) 给出, 它的质量为

$$m_H = \sqrt{2\lambda}\hbar a/c.$$

由于 λ 是一个人工引入的参数, 我们无法获得它的值. 因而 m_H 只能通过实验手段测得. 在 2012 年, CERN 宣称发现了 Higgs 粒子, 虽然仍存在一些问题. 该粒子所测得的性质为

$$\text{质量 } m_H = 125 \sim 126\text{GeV/c}^2, \quad \text{电荷 } Q = 0,$$
$$\text{平均寿命 } \tau = 10^{-21}\text{s}, \quad \text{自旋 } J = 0.$$

3.3.6　存在的问题

虽然 GWS 理论获得若干实验支持可以说是一条正确的方向, 但是该理论在具体结构上仍存在着不可克服的根本障碍. 下面将这些问题一一列出.

1. 弱作用力问题

实验观测表明弱相互作用是一种力的作用. 于是, 凡是涉及弱作用的理论都不可避免地要面对如何建立弱作用势的表达式问题. 这是一个最基本的, 也是最重要的问题. 从 GWS 理论的场方程 (3.3.75) 人们只能由它的电磁方程

$$\Box A_\mu - \partial_\mu(\text{div } A) - eJ_\mu^{em} = o(\tilde{\Phi})$$

关于 $A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ 导出电力势的公式:

$$A_0 = \frac{e}{r}, \quad A_0 \text{ 为 Coulomb 势.}$$

但是从 (3.3.75), 或者从 (3.3.61)-(3.3.63) 无法确定四个规范场 $W_\mu^1, W_\mu^2, W_\mu^3, B_\mu$ 究竟哪些是代表弱作用势, 或者是什么样的线性组合代表弱力. 这不仅是 GWS 理论面临的问题, 这也是所有各种类型涉及弱作用场的理论都存在的难题.

事实上, 在后面介绍的表示不变性原理 (PRI) 给出弱作用势 Φ_W 的组合形式如下:

$$\Phi_W = \alpha_1 W_0^1 + \alpha_2 W_0^2 + \alpha_3 W_0^3, \tag{3.3.87}$$

式中 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 是常值 $SU(2)$ 表示张量. 然而按照 (3.3.87) 定义, 从 (3.3.61)-(3.3.63) 只能导出 Φ_W 的公式为

$$\Phi_W = \frac{g_1}{r}, \text{ 或者 } \Phi_W = -\frac{g_1}{r}.$$

即粒子之间弱作用是长程力, 并且或是斥力, 或是引力, 这与观测事实不符. 因为实验观测表明弱作用是短程力 (见 (1.3.7)) 并且在有效范围内即表现出斥力, 又有吸引作用.

2. GWS 理论破坏 PRI

所谓 PRI 是表示不变性原理的英文缩写, 该原理的实质意思是, 由 $SU(N)$ 规范场描述的物理定律与 $SU(N)$ 群表示的生成元选择无关. 因为生成元的选择从本质上看就是关于反映 $SU(N)$ 规范对称性的坐标系选择, 因此可以更直接地讲 PRI 的意思就是, 满足规范对称性的物理定律与表达它的坐标系选取无关. 因此 PRI 与 Einstein 相对性原理一样, 是一个最基本的逻辑因果律的原理. 如果该原理被破坏, 那就意味着逻辑的基本准则被违背.

现在回过来看 GWS 理论的核心部分, 即导致质量对角化的变换 (3.3.72), 它造成了 (3.3.83) 的组合方式:

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_W & \sin\theta_W \\ -\sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}. \tag{3.3.88}$$

由 PRI 原理:

$$\begin{cases} W_\mu^3 \text{ 是 } SU(2) \text{ 表示张量场 } W_\mu^a \text{ 的第三个分量;} \\ B_\mu \text{ 是 } U(1) \text{ 表示张量场.} \end{cases}$$

因此, 对于两个完全不同类型的张量场之间的线性组合 (3.3.88), 它们产生的方程 (3.3.75) 在下面 $SU(2)$ 生成元变换下, 其表达形式一定要发生变化,

$$\begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_1 \\ \tilde{\sigma}_2 \\ \tilde{\sigma}_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix}, \quad A \text{ 是 } 3\times 3 \text{ 非退化矩阵,} \tag{3.3.89}$$

因为此时 $SU(2)$ 表示张量场 W_μ^a 将随着 (3.3.89) 也发生变换:

$$\begin{pmatrix} \tilde{W}_\mu^1 \\ \tilde{W}_\mu^2 \\ \tilde{W}_\mu^3 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} W_\mu^1 \\ W_\mu^2 \\ W_\mu^3 \end{pmatrix}, \quad B = (A^{-1})^{\mathrm{T}}.$$

于是 GWS 理论的方程 (3.3.75) 是违背 PRI.

同样地, 用 (3.3.87) 定义的弱作用势在 (3.3.89) 的 $SU(2)$ 表示变换下是不变的, 但是它在 (3.3.88) 变换下将发生变化.

3. 电磁与弱作用的退耦障碍

GWS 理论的 (3.3.72) 变换对应着如下 $SU(2)$ 生成元 σ_a 与 $U(1)$ 生成元 $\sigma_0 = 1$ 的混合变换:

$$\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_0 \end{pmatrix} = (U^{-1})^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_0 \end{pmatrix}, \quad U \text{ 如 (3.3.72).} \tag{3.3.90}$$

换句话讲, 在数学结构上, $U(1)\times SU(2)$ 的规范场 $(W_\mu^1, W_\mu^2, W_\mu^3, B_\mu)$ 发生 (3.3.72) 变换与它的生成元 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_0)$ 发生 (3.3.90) 变换是相伴进行的. 这便产生一个很重要的问题, 即电磁与弱作用这两种不同相互作用的退耦问题. 在自然界中当弱作用可以忽略的情况下, 电磁场 A_μ 可以独立存在, 并且描述它的 Maxwell 场方程是 $U(1)$ 规范不变的. 这就要求在

$$W_\mu^a = 0, \quad a = 1, 2, 3 \tag{3.3.91}$$

条件下, GWS 方程 (3.3.75) 应还原成 $U(1)$ 规范不变的 Maxwell 方程, 并且是与 (3.3.9) 变换 (即 (3.3.72) 变换) 无关. 但实际上方程 (3.3.75) 不具有这种性质, 因为在 (3.3.91) 条件下进行 (3.3.9) 变换会伴随着电磁场 A_μ 产生出非零的 Z_μ 场和 Higgs 场 φ. 这显然与事实不符. 如果取代 (3.3.91), 用下面条件

$$W_\mu^\pm = 0, \quad Z_\mu = 0 \tag{3.3.92}$$

代表没有弱作用场存在的条件, 那么在 (3.3.90) 变换下, 方程 (3.3.75) 也不能退化成纯 $U(1)$ 规范不变 Maxwell 方程, 因为此时

$$A_\mu = \cos\theta_W B_\mu - \sin\theta_W W_\mu^3,$$

其中 B_μ 是 $U(1)$ 规范场, 而 W_μ^3 是 $SU(2)$ 规范场, 因而 A_μ 不是与 $SU(2)$ 规范变换无关的 $U(1)$ 规范场.

上述事实说明, 无论是在 (3.3.91) 还是在 (3.3.92) 条件下, GWS 理论都不能完整地还原成经典的与 $SU(2)$ 规范变换无关的 $U(1)$ 规范场的 Maxwell 电磁理论. 相互作用理论的退耦问题本质上还是归到 PRI 对称性破坏问题上.

4. Higgs 机制的人工性问题

$U(1)\times SU(2)$ 电弱理论的作用量 (3.3.49)-(3.3.50) 中的 Higgs 部分 $\mathcal{L}_H$ 不是从第一定律中得到, 而是人工加进去的. 虽然加入 $\mathcal{L}_H$ 的方式受到一定约束, 如可重整化等, 但是在满足这些约束条件下 $\mathcal{L}_H$ 的形式仍有无穷多种. 但是物理学要求它的形式除一些待定常数外应是唯一确定的. 换句话讲, GWS 电弱理论的方程有如下特征:

左端由原理确定 = 右端是人工的.

正是由于这种特点使得我们无法从 GWS 理论去获得与观测相符合的弱作用势的表达式. 这也说明 GWS 电弱理论从本质上讲是一个半表象的理论, 它的 Lagrange 作用量是为了迎合 (3.3.1) 的 IVB 理论, 再结合 Higgs 机制而拼凑出来的 $U(1)\times SU(2)$ 规范理论. 因此该理论严格地讲, 它只适用于计算部分弱作用的衰变跃迁概率, 而不是一个真正描述弱相互作用力的理论.

注 3.7 正是因为 GWS 模型是为了满足计算弱作用衰变跃迁概率的需要而建立的理论, 所以它必须满足如下两点限制:

(1) 参与衰变的轻子对和夸克对必须取左手态

$$\begin{pmatrix}\nu\\ l\end{pmatrix}_L \quad \text{和} \quad \begin{pmatrix}q_1\\ q_2\end{pmatrix}_L \qquad (\text{在 (3.3.45) 中没提夸克对是为了简单})$$

以便保证与 $V-A$ 理论相一致. 而这一要求关于弱作用力的理论, 即后面的统一场理论是不必要的. 在前面的弱子模型中也已看到宇称不对称是衰变中的中微子左手螺旋性造成的, 而与弱作用力本身无关, 与弱子交换也无关.

(2) GWS 理论的作用量 (3.3.49)-(3.3.51) 必须是可重整化的 (不熟悉这个概念的读者可以不去管它). 这一点是由 Gerardus't Hooft 在 1971 给予证明. 同样对于弱作用势不需考虑这一点.

5. 公式 (3.3.47) 产生的问题

公式 (3.3.47) 是强相互作用的 Gell-Mann-Nishijima 公式 (2.3.27) 在弱相互作用中的相似物. 该公式是一个人造产品, 由它产生出来的结果与现实不符. 下面先介绍引入 (3.3.47) 的动机, 然后再讨论由它造成的问题.

引入 (3.3.47) 的背景可追溯到 Yang-Mills 规范理论建立的时期. 我们回忆到 $SU(N)$ 规范理论的起始点就是, 有 N 个 Fermi 子状态 $\Psi=(\psi^1,\cdots,\psi^N)$, 它们在某种物理观测中是不可分辨的. 这种不可分辨性导致了 Dirac 方程在如下规范变换下是协变的

$$\tilde{\Psi}=\Omega\psi,\quad \Omega\in SU(N).$$

而 Dirac 方程的这种规范对称性又创生出 $SU(N)$ 的 N^2-1 个规范场 G_μ^a $(1\leqslant a\leqslant N^2-1)$ 的 Yang-Mills 理论.

当初 Yang-Mills 只是考虑建立核子 (即质子与中子) 的强相互作用理论. 质子 p 和中子 n 有同位旋 $(I,I_3)=\left(\dfrac{1}{2},\pm\dfrac{1}{2}\right)$ 它们的第三分量 I_3 有两个态:

$$(\psi_n,\psi_p),\quad \psi_n \text{ 的 } I_3=\frac{1}{2},\quad \psi_p \text{ 的 } I_3=-\frac{1}{2}.$$

它们充当了 $SU(2)$ 的两个 Fermi 子态,并且它们的同位旋 $I_3=\pm\dfrac{1}{2}$ 两个量子数在

强相互作用的物理观测中是不可分辨的. 他们正是以这个作为 $SU(2)$ 规范对称性试图建立强相互作用的 $SU(2)$ 规范理论. 今天我们知道, Yang-Mills 规范理论的数学方案是正确方向, 但具体强相互作用的物理理论是错误的.

当 Glashow 将弱作用归到 $SU(2)$ 规范对称后, 面临的一个问题就是轻子对 (ν, l) 是什么量子态在物理观测中是不可分辨的才使它们在 $SU(2)$ 规范变换下

$$\begin{pmatrix} \tilde{\nu} \\ \tilde{l} \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \nu \\ l \end{pmatrix}, \quad U \in SU(2),$$

Dirac 方程是协变的. 从实验资料中人们找不到这种量子数. 于是仿造强相互作用, 关于轻子对引入弱同位旋概念:

$$(T, T_3) = \left(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right). \tag{3.3.93}$$

跟着又模仿 Gell-Mann-Nishijima 公式, 引入弱超荷 Y 建立了弱相互作用的类似公式. 这便是引入 (3.3.47) 的动机.

接着分析公式 (3.3.47) 产生的问题. 由于要求参与弱作用的所有粒子对 (ψ^1, ψ^2) 都必须满足公式 (3.3.47), 并且这些粒子对的弱同位旋都取 (3.3.93) 的值, 以及弱超荷 Y 取值

$$Y = 1 \text{ 或者 } -1,$$

于是关于 Higgs 粒子就被公式 (3.3.47) 限制只能取

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}, \quad \phi^+ \text{ 带一个正电荷, } \phi^0 \text{ 为中性.}$$

这样, (3.3.50) 的 Higgs 作用量密度写作

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_H = &\frac{1}{2}[D^{\mu *}\phi^{+*} D_\mu \phi^+ + D^{\mu *}\phi^0 D_\mu \phi^0] - \frac{\lambda}{4}(|\phi|^2 - a^2)^2 \\ &- G_l(\bar{\nu}\phi^+ + \bar{l}_L\phi^0)l_R - G_l(\nu\phi^{+*} + l_L\phi^0)\bar{l}_R, \end{aligned} \tag{3.3.94}$$

式中 ϕ^{+*} 和 $D^{\mu *}$ 分别是 ϕ^+ 与 D^μ 的复共轭.

对应于 (3.3.94) 的 ϕ^+ 变分方程为

$$D^\mu D_\mu \phi^+ + \lambda|\phi^+|^2\phi^+ + G_l\bar{l}_R\nu = 0. \tag{3.3.95}$$

显然 (3.3.95) 在如下平移变换下不变

$$\phi^0 \to \phi^0 + a.$$

这就意味着 ϕ^+ 是一个带正电荷并且质量为零的 Bose 子.

于是从 (3.3.95) 得出如下结论: 在 GWS 电弱理论中, 除了预言的 $W^{\pm}, Z^0$ 和 Higgs 粒子 ϕ^0 外, 还有一个没有质量并且带一个正电荷的粒子 ϕ^+. 显然这个没有质量带正电荷的粒子 ϕ^+ 在自然界中不存在. 在 (3.3.59) 的 GWS 理论场方程中, 我们取 Higgs 场为 $\phi = (0, \phi^0), \phi^0 = \varphi$, 它显然不满足公式 (3.3.47).

总结以上存在的问题, 可以得出如下结论.

(1) GWS 理论只是一个适用于弱相互作用衰变跃迁概率的理论, 它是 Fermi 理论的深化, 即

$$\text{Fermi 理论} \rightarrow V-A \text{ 理论} \rightarrow \text{IVB 理论} \rightarrow \text{GWS 理论}.$$

因此该理论在实质上仍属于经验性的, 即是一个表象理论.

(2) 公式 (3.3.47) 不是一个普适正确的关系式.

3.4 量子色动力学 (QCD)

3.4.1 色量子数与 QCD 作用量

在自旋 $J = \dfrac{3}{2}$ 的重子族中有三个重子, 它们的夸克构成为

$$\begin{aligned} \Delta^{++} &= uuu(\uparrow\uparrow\uparrow, \downarrow\downarrow\downarrow), \\ \Delta^{-} &= ddd(\uparrow\uparrow\uparrow, \downarrow\downarrow\downarrow), \\ \Omega^{-} &= sss(\uparrow\uparrow\uparrow, \downarrow\downarrow\downarrow). \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

这些夸克自旋方向全部相同, 并处在相同能量态上. 这种在同一能级上存在三个全同的 Fermi 子的现象是违背 Pauli 不相容原理的. 这就出现了两种可能性:

(1) 重子内部 Pauli 原理不成立;

(2) 在夸克中存在一种新的量子数, 使得 (3.4.1) 的重子内部三个相同味的夸克具有不同的新量子数, 从而它们不是全同粒子, 不受 Pauli 原理的限制.

这个问题曾是夸克模型的困难.

为了解决上述问题, 在 1964 年 O. W. Greenberg 提出了夸克的色量子数概念. 根据 (3.4.1) 的构成, 他认为每一种味的夸克有三种不同色, 称为

$$\text{红色 } r, \quad \text{绿色 } g, \quad \text{蓝色 } b. \tag{3.4.2}$$

反粒子具有三种反色 $\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$. 在关于弱子模型的 2.5.7 小节中介绍过该量子数及其运算规则 (2.5.47).

根据色量子数 (3.4.2), 每一种夸克被标上三种色:

$$q_r,\ q_g,\ q_b,\ \bar{q}_{\bar{r}},\ \bar{q}_{\bar{g}},\ \bar{q}_{\bar{b}}. \tag{3.4.3}$$

同时, 由于强子没有色量子数的迹象, 假设所有强子都是无色的, 或者称为白色 w 的. 于是由 (2.5.47) 的色运算规则, 所有重子关于 (3.4.3) 的夸克构成如下:

$$\text{重子} = q_{1r}q_{2g}q_{3b}, \quad \text{反重子} = \bar{q}_{1\bar{r}}\bar{q}_{2\bar{g}}\bar{q}_{3\bar{b}}, \tag{3.4.4}$$

以及介子的夸克构成为

$$\text{介子} = q_{1r}\bar{q}_{2\bar{r}}, \quad q_{1g}\bar{q}_{2\bar{g}}, \quad q_{1b}q_{2\bar{b}}. \tag{3.4.5}$$

Greenberg 的色量子数理论得到许多实验支持. 量子色动力学 (QCD) 就是在该理论基础上发展的. 色量子数被普遍接受后, 自然地人们会想到夸克的三种色量子态

$$q = (q_r, q_g, q_b) \tag{3.4.6}$$

在强相互作用中是不可分辨的. 这便导致 QCD 的 $SU(3)$ 规范理论, 即给出强相互作用的 Lagrange 作用量如下:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}S^k_{\mu\nu}S^{\mu\nu k} + \bar{q}(\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu - m)q, \tag{3.4.7}$$

式中 q 是如 (3.4.6) 的夸克三种色量子态, m 为夸克质量,

$$\begin{aligned} &S^k_{\mu\nu} = \partial_\mu S^k_\nu - \partial_\nu S^k_\mu + g_s\lambda^k_{ij}S^i_\mu S^j_\nu, \\ &D_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i}g_s S^k_\mu \lambda_k, \end{aligned} \tag{3.4.8}$$

其中 S^k_μ $(1 \leqslant k \leqslant 8)$ 是 $SU(3)$ 的规范场, λ^k_{ij} 是 $SU(3)$ 的结构常数, λ_k $(1 \leqslant k \leqslant 8)$ 是 Gell-Mann 矩阵, 表达为

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ &\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ &\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.4.9}$$

这些结构常数 $\lambda^k_{ij} = 2f_{ijk}$ 关于下标是反对称的, 其值为

$$\begin{aligned} &f_{123} = 1,\ f_{147} = -f_{156} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{367} = \frac{1}{2}, \\ &f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \text{其他}\ f_{ijk} = 0. \end{aligned} \tag{3.4.10}$$

对应于 (3.4.7)-(3.4.8) 的变分方程写作

$$\partial^\nu S^k_{\nu\mu} - g_s\lambda^k_{ij}g^{\alpha\alpha}S^i_{\alpha\mu}S^j_\alpha - g_sJ^k_\mu = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant 8, \tag{3.4.11}$$

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu - m)q = 0, \tag{3.4.12}$$

其中 $g^{\alpha\beta}$ 是 Minkowski 度量,

$$J^k_\mu = \bar{q}(\mathrm{i}\gamma_\mu\lambda^k)q, \quad \gamma_\mu = g_{\mu\alpha}\gamma^\alpha, \quad \lambda^k = \lambda_k.$$

从 (3.4.11) 可推出 QCD 的如下物理结论.

(1) QCD 的场方程 (3.4.11) 是关于 $SU(3)$ 规范场 S^k_μ $(1 \leqslant k \leqslant 8)$ 的 Klein-Gordon 方程, 因此 S^k_μ $(1 \leqslant k \leqslant 8)$ 代表了强相互作用的 8 个自旋 $J = 1$ 的规范场媒介子, 称为胶子 g.

(2) 这些胶子 g 是没有质量的, 并且是电中性的.

注 3.8 与 GWS 电弱理论的弱点一样, QCD 的一个重大缺陷就是从它的场方程 (3.4.11)-(3.4.12) 无法获得与实验观测相符合的强相互作用势的表达式.

3.4.2 胶子及其性质

在 3.4.1 小节已看到, r, g, b 三种色量子数导致强相互作用的 $SU(3)$ 规范作用量 (3.4.7)-(3.4.8), 从它的变分方程 (3.4.11) 得到 8 个没有质量, 自旋 $J = 1$, 电中性的胶子

$$g^k, \quad 1 \leqslant k \leqslant 8.$$

在 1979 年, 实验上发现的三喷注现象很强地支持胶子的存在性. 对于 QCD 来讲, 一个重要的问题就是要从理论上来解释这 8 种不同胶子的物理意义是什么. 下面给出 QCD 的观点.

QCD 的胶子理论包含三个部分: ① 色荷假设; ②胶子在夸克强作用力中的作用; ③夸克的胶子辐射与吸收.

1. 色荷假设

量子色动力学认为夸克带有色量子数是由于存在红、绿、蓝的色与反色荷, 每个夸克带有下面色荷中的一个:

$$\text{红色荷 } r, \quad \text{绿色荷 } g, \quad \text{蓝色荷 } b, \tag{3.4.13}$$

$$\text{反红色荷 } \bar{r}, \quad \text{反绿色荷 } \bar{g}, \quad \text{反蓝色荷 } \bar{b}. \tag{3.4.14}$$

同样地, 胶子也被假设带有色荷, 但是与夸克不同的是它们携带两个色荷: 一种色荷和另一种反色荷, 如 $r\bar{g}$ 等. 于是 8 种胶子就类似于介子的 $3 \otimes \underline{3} = 8 \oplus 1$ 不可约

表示分类法一样, 它们被看作是 $SU_{色}(3)\otimes SU_{色}(\underline{3})$ 不可约表示

$$SU_{色}(3)\otimes SU_{色}(\underline{3})=8\oplus 1 \tag{3.4.15}$$

的八重态, 这里 $SU_{色}(3)$ 的基底是由 (3.4.13) 中三个色荷构成, 而 $SU_{色}(\underline{3})$ 的基底是由 (3.4.14) 三个反色荷构成. 于是 (3.4.15) 中八重态胶子的色荷构成为

$$\begin{aligned} &g^1=r\bar{g},\quad g^2=r\bar{b},\quad g^3=g\bar{b},\quad g^4=\frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{r}-b\bar{b}),\\ &g^5=g\bar{r},\quad g^6=b\bar{r},\quad g^7=b\bar{g},\quad g^8=\sqrt{6}(r\bar{r}+b\bar{b}-2g\bar{g}), \end{aligned} \tag{3.4.16}$$

还有一个色单态为

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(r\bar{r}+g\bar{g}+b\bar{b}).$$

采用 (3.4.16) 的八重色荷态组合方式完全是仿照介子八重态的夸克组合方式. 这种组合只是一种形式, 无法得到实验确定.

注 3.9　将 QCD 的胶子色荷构成 (3.4.16) 与弱子模型胶子的 W^* 色组合 (2.5.48)-(2.5.49) 在形式上是一致的. 不同的是 QCD 的胶子八重态是以色荷为基底的不可约表示 (3.4.15) 来描述的, 而弱子模型的胶子八重态是分别以如下粒子:

$$W_r^*,\ W_g^*,\ W_b^*,\ \text{以及}\ \bar{W}_{\bar{r}}^*,\ \bar{W}_{\bar{g}}^*,\ \bar{W}_{\bar{b}}^*$$

为基底的 $SU(3)\otimes SU(\underline{3})=8\oplus 1$ 不可约表示来描述的.

2. 胶子在强相互作用中所起的作用

QCD 理论认为夸克之间的强相互作用是通过胶子来传递的, 在这里色荷起到根本性的作用. 胶子正如 (3.4.16) 的色荷构成那样, 带有一个色荷和一个反色荷, 它们只与带色荷的粒子耦合产生强相互作用. 因此, 夸克与夸克之间, 夸克与胶子之间, 胶子与胶子之间都通过色荷产生作用力.

实质上, 仅从这段文字看它并非是一个物理理论, 没有任何实质性的具体物理结论. 然而这种观点却指导 QCD 朝着三个可能方向发展. 下面介绍这三个可能发展方向及其存在的问题.

(A) 第一个方向就是希望色荷也像电荷一样能够成为强相互作用的力源, 即可建立类似于电磁相互作用

$$\begin{aligned} &\text{Coulomb 势: } \phi_E=\frac{Q}{r},\\ &\text{Lorentz 力: } F=Q\left(E+\frac{1}{c}\nu\times H\right), \end{aligned} \tag{3.4.17}$$

那样的强相互作用关系式, 在 (3.4.17) 中 Q 为电荷. 也就是说对于三种色荷

$$c_1 = r, \quad c_2 = g, \quad c_3 = b,$$

我们期望建立一个类似于 (3.4.17) 的强相互作用势:

$$\phi_s = \sum_{i=1}^{3} c_i \varphi_i(r), \quad \text{这里 } r \text{ 是距离.} \tag{3.4.18}$$

然而一个最关键的问题是, 在如下色的运算约束下:

$$rgb = 0, \quad r\bar{r} = g\bar{g} = b\bar{b} = 0 \quad (\text{代表白色}).$$

使得人们无法关于正、反色之间定义乘法运算 (见 3.4.4 小节), 即

$$c_i \bar{c}_j \neq r, g, b \text{ 及其反色中任一个}, \quad i \neq j. \tag{3.4.19}$$

这就意味着我们无法定义胶子的色:

$$g_{c_i c_j} \text{ 的色} \neq \text{任何已知的色}. \tag{3.4.20}$$

色荷的不可代数运算性质 (3.4.19) 和 (3.4.20), 使得建立如 (3.4.18) 那样的强作用势存在着根本障碍.

建立 (3.4.18) 的第二个困难是强子之间, 特别是核子之间强作用力一致性问题. 因为强子的色

$$c = w,$$

因而如果存在由色荷作为强作用力源的势公式 (3.4.18), 那么该公式在强子之间是无效的. 从而造成强相互作用在夸克之间和在强子之间的不相一致的问题.

以上存在的两个障碍加上色荷守恒性问题是 QCD 色荷理论的严重问题. 事实上从我们的统一场理论可推出强荷 g_s 是强作用力的主要来源, 它具有代数运算性, 守恒性, 强相互作用的耦合常数 (见公式 (2.5.13)-(2.5.15)) 等所有相互作用力源的特性. 特别地, 由它产生的强相互作用在所有粒子层次上表现出了高度协调一致性.

(B) 第二个方向就是现在流行的作法, 即引入一个称为夸克与胶子之间的耦合常数 α_{QCD}, 它是从计算强相互作用衰变跃迁概率的 Feynman 图运算法则中引入. 该常数 α_{QCD} 是弱作用衰变的 Fermi 常数 G_f 及电磁作用的精细结构常数 $\alpha = e^2/\hbar c$ 的类似物, 它是与散射能量相关的, 可写作 q^2 的函数形式

$$\alpha_{\mathrm{QCD}} = \alpha(q^2), \tag{3.4.21}$$

其中 q^2 是转移动量, 表示入射粒子传给靶粒子的动量值. α_{QCD} 的物理意义代表粒子之间强相互作用的强度. 每一个参与衰变和散射的夸克对应一个 α_{QCD}, 若 $\alpha_{\mathrm{QCD}} = 0$ 则意味着该夸克与其他胶子和夸克之间强作用力为零因此对于 QCD 来讲, 关于不同的强作用衰变与散射算出 (3.4.21) 的函数形式成为主要工作之一. 换句话讲, 这个方向目前是 QCD 理论唯一可走得通的道路, 是量子色动力学支柱性主体之一.

(C) 第三个方向是试图建立强子内部关于夸克与胶子的组合结构理论. 也就是说, 我们希望知道在强子内部的组元, 夸克与胶子, 它们的分布、运动状态以及相互作用是怎样的. 通常这种结构被人们想象成三个夸克在核子内部的胶子海中进行转动, 这些胶子海像黏稠的流体一样. 然而, 这个问题直接依赖于关于强相互作用势的知识, 没有明确的强作用势公式任何想建立强子内部夸克与胶子的分布结构理论都不可能成功.

此外, 强子结构理论还面临着一个重大障碍就是色中性问题. 已有的理论要求强子必须是色中性的, 即

$$\text{强子的色} = w.$$

但是由于 (3.4.19), 目前关于色的代数结构没有被建立, 这就使得胶子的色如 (3.4.20) 那样不能确定. 于是出现这样的问题, 即假设一个质子含有三个不同色的夸克以及 N 个胶子:

$$p = u_{c_1} + u_{c_2} + d_{c_3} + \sum n_k g^k, \quad \sum n_k = N, \tag{3.4.22}$$

那么由于 N 个胶子的存在, 就不能够明确地认定 (3.4.22) 的质子是色中性的. 除非 p 中不含胶子. 事实上, 在后面 3.4.4 小节中, 关于色的运算建立了一个自洽的代数结构, 使得强子色中性问题得到解决. 不仅如此, 这个色代数理论还能很好地解决接下来要介绍的夸克辐射与吸收胶子的色荷问题.

3. 夸克的胶子辐射与吸收

我们知道, 电子会辐射或者吸收光子. 同样地, 夸克也可以辐射或吸引胶子. 例如, 一个红色的 u_r 夸克发射出一个 $r\bar{g}$ 的胶子, 然后变成一个绿色 u_g 夸克, 见图 3.1.

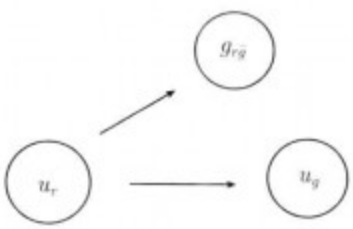


图 3.1

同样地, 一个红色的 u_r 夸克吸收一个 $b\bar{r}$ 胶子, 然后变为一个蓝色的 u_b 夸克. 于是可见, 夸克与胶子的关系就如同电子与光子的关系.

然而 QCD 的夸克辐射理论同样存在色代数的运算问题. 由图 3.1 给出的辐射反应式可写成

$$u_r \to g_{r\bar{g}} + u_g,$$

于是有相应的色运算等式

$$r = (r\bar{g})g = r\bar{g}g = r.$$

但是如果 u_r 发射出 $g_{b\bar{g}}$ 胶子, 由于缺乏进一步的色代数运算, 我们便无法知道 u_r 会变成什么色的 u 夸克, 即

$$u_r \to g_{b\bar{g}} + u_X, \quad X = ?.$$

可能会有读者认为每一种色的夸克, 它的辐射和吸收要受到色约束, 即一个 c_i 色荷的夸克只能发射 $c_i\bar{c}_j$ $(1 \leqslant j \leqslant 3)$ 胶子和吸收 $c_j\bar{c}_i$ $(1 \leqslant j \leqslant 3)$ 胶子. 例如, u_r 只能作如下三种辐射:

$$u_r \to g_{r\bar{r}} + u_r, \quad g_{r\bar{g}} + u_g, \quad g_{r\bar{b}} + u_b.$$

这种方案虽能解决夸克辐射的色荷问题, 但是它仍然无法解决前面所说到的强子色中性问题.

3.4.3 夸克禁闭与渐近自由

夸克禁闭与渐近自由是 QCD 理论的两个重要概念. 所谓夸克禁闭是指夸克被束缚在强子内部, 任何能量都无法将单个夸克从强子内部分离出来. 而渐近自由的物理意义简略地讲就是在强子内部的夸克之间强作用力似乎是零. 这种称呼是由于物理上用高速电子打击质子中的夸克时显示出电子能量越高夸克之间越显得是相互独立的, 所以叫渐近自由.

这两种现象从表面上看似乎是冲突的: 一方面夸克禁闭表现出强相互作用巨大的吸引力将夸克束缚在强子内部, 而另一方面高能电子的探测表明夸克之间有很弱的强作用力. 量子色动力学仅能提供这两个重要概念, 但是我们从 QCD 作用量既不能推出它们, 也无法给出合理解释. 在本书后面的第 5 章中将会看到弱子模型和统一场理论关于夸克禁闭和渐近自由可提供很好的统一证明和解释.

在这一小节中我们从实验观测和理论分析两个方面介绍夸克禁闭与渐近自由这两个概念的由来.

1. 夸克禁闭

夸克禁闭概念的提出是基于两个方面原因. 其一是, 自从 1964 年夸克理论提出后大量的物理实验都聚焦在寻找单个自由夸克方面. 然而所有这方面的努力都

失败了, 于是人们开始转向认为夸克是被囚禁在强子内部不能打开. 第二个原因是源于强相互作用短程性与胶子无质量性的矛盾. 根据 Yukawa 相互作用理论, 没有质量的场媒介子将导致长程的相互作用力. 因此从理论上讲, 无质量的胶子应该产生长程的强相互作用. 但实际上强相互作用是短程的, 这个矛盾使人们认为所有的自由粒子都是色中性的, 从而不会产生长程的胶子场, 即胶子只能在有色荷的粒子之间传递强相互作用. 自由粒子色中性的性质直接产生夸克禁闭的结论, 因为任何单个自由夸克都不是色中性的.

2. 渐近自由

渐近自由的观点来源于理论和实验两个方面. 理论方面是由 H. Politzer 以及 D. Gross 和 F. Wilczek 两组物理学家在 1973 年独立提出, 他们因此而获得 2004 年的诺贝尔奖. 在实验方面, 由 J. L. Friedman, H. W. Kendall, R. E. Taylor 在 1967 年进行了电子–质子深度非弹性散射实验. 在这些实验中除了给出夸克存在的强有力证据外, 同时也显示出渐近自由的特性. 这三个实验物理学家因此而获得 1990 年度诺贝尔物理学奖. 下面将分别从理论和实验两个方面介绍渐近自由.

(1) 理论方面. 量子色动力学通过重整化程序可算出夸克胶子耦合常数 (3.4.21) 的表达式, 它写作

$$\alpha_{\mathrm{QCD}} = \frac{4\pi}{\left(11 - \dfrac{2}{3}n_f\right)\ln(q^2/\lambda^2)}, \tag{3.4.23}$$

其中 λ 是一个参数, n_f 是夸克味的数量. 目前已知 $n_f = 6$, 因此 α_{QCD} 的分母因子

$$11 - \frac{2}{3}n_f = 7 > 0.$$

在 (2.4.21) 中已介绍过, 夸克胶子耦合常数 α_{QCD} 的物理意义代表夸克强相互作用的强度 (它是通过散射概率间接给出的物理解释), 而转移动量 q^2 是实验探测粒子 (电子) 转移给夸克的动量. 因此探测粒子的能量越大, q^2 值越大. 由公式 (3.4.23) 可以看到

$$\alpha_{\mathrm{QCD}} \to 0, \quad \text{当 } q^2 \to \infty. \tag{3.4.24}$$

这就意味着当用高能电子探测核子内部夸克组分时, 电子转移给夸克的动量越大, 耦合常数 α_{QCD} 就越小, 从而显示出夸克的相互独立性越高.

Politzer-Gross-Wilczek 正是从 (3.4.24) 的性质提出强相互作用渐近自由的概念. 显然这个概念的物理意义是有些含糊的, 因为它的解释依赖于散射过程. 因此这个概念不能确定夸克在强子内部究竟是本身处在自由状态, 只是由高速电子才可测出, 还是夸克强相互作用力随它的运动速度增加而减小. 这一点无论是从 (3.4.24) 的理论方面, 还是从下面介绍的电子–质子深度非弹性实验方面都无法区分.

(2) 实验方面. 先介绍一下实验物理的名词. 所谓弹性散射是指碰撞前和碰撞后粒子种类没有变化的反应, 如电子–质子 e-p 弹性散射

$$e^- + p \to e^- + p. \tag{3.4.25}$$

而非弹性散射是碰撞前后粒子种类发生变化. 例如, 两个常见的 e-p 非弹性散射为

$$\begin{aligned} &e^- + p \to e^- + \pi^+ + n, \\ &e^- + p \to e^- + \pi^0 + p. \end{aligned} \tag{3.4.26}$$

物理学家就是用 e-p 散射实验展现出渐近自由现象的. 当人们用一个能量不高的电子去打击一个质子时, 实验观测表明该质子内部的三个夸克表现就像是一个粒子. 正如图 3.2 所示那样, 电子和质子就像两个点粒子被碰撞散射分离. 此时三个夸克被强相互作用束缚成一个整体.

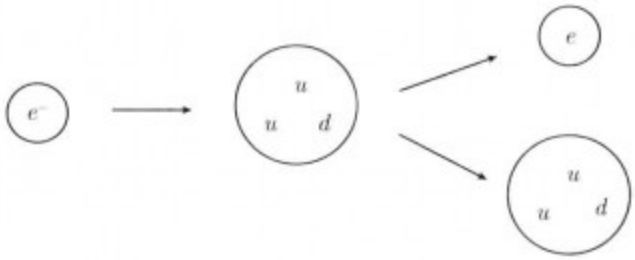


图 3.2 低能电子与质子碰撞产生弹性散射. 质子内部的三个夸克被强相互作用束缚得像一个整体

然而, 当电子被加速到很高能量时, 它能打入质子深部与内部的某个单一夸克发生碰撞产生非弹性散射. 整个过程如图 3.3(a) 和 (b) 所示. 在 (a) 中, 一个高能电子打入质子深部与一个夸克碰撞, 实验显示该夸克表现得就如同一个自由粒子, 被击后偏离质子中心. 在 (b) 中, 偏离中心的夸克, 如是一个 u 夸克, 由于动量转移给某个胶子, 它会变为瞬时正反夸克对 $d\bar{d}$, 然后进行夸克交换组成两个新粒子 n 和 π^+, 即

$$uud + d\bar{d} \to udd + u\bar{d}.$$

于是便产生如 (3.4.26) 第一个那样的反应式.

图 3.2 和图 3.3 给出的便是由实验数据提供的 e-p 散射物理图像. 图 3.2 是弹性散射, 表现出当电子能量较低时, 转移动量 q^2 也低, 于是 (3.4.23) 的耦合常数 α_{QCD} 很大, 于是三个夸克 uud 在很强的强相互作用束缚下像一个点粒子那样与电子发生碰撞散射. 而图 3.3 是 e-p 深度非弹性散射. 当电子能量很高时, 实验显示出碰撞是发生在电子与一个半径很小的自由粒子之间, 这便证实夸克的存在. 而自由夸克意味着它与其他夸克有很弱的强相互作用, 这便是实验方面显示的渐近自由现象.

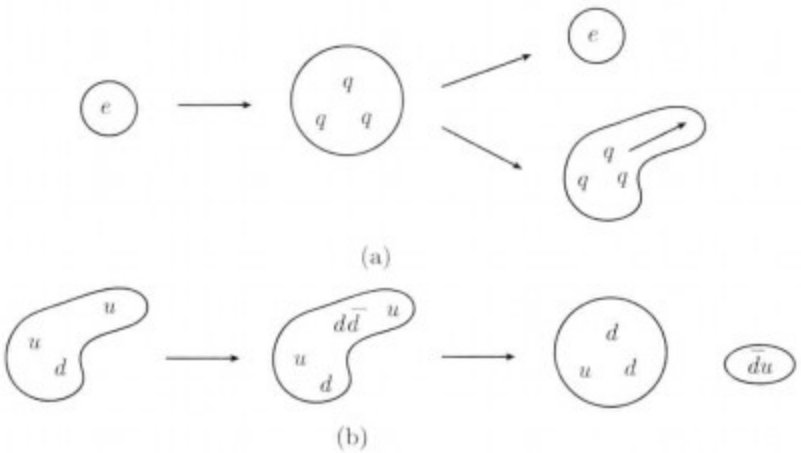


图 3.3　(a) 高能电子打到质子内的一个夸克上, 该夸克表现得像一个自由粒子; (b) 被击夸克又碰撞胶子产生瞬间夸克时, 夸克交换产生新粒子, 然后发生散射

注 3.10　从上述理论和实验两方面介绍的渐近自由行为不难看到, 无论是从 QCD 的理论角度还是从 e-p 深度非弹性散射实验观测分析, 它们所显示的渐近自由现象都不能明确此概念究竟是指在强子内部夸克之间强相互作用力本身就很弱, 还是指夸克强作用力随它的动能增加而减小. 而本书的统一场理论明确证明渐近自由是指前一种含义, 即强子内部的夸克之间几乎没有强相互作用, 它们处在排斥与吸引的交界处, 见夸克的强作用力公式 (2.5.17).

3.4.4　色的数学理论——色代数

所有的量子数都应具有某种代数运算的功能. 然而色量子数至今没有一套完整自洽的运算系统, 这将严重影响该量子数的深入理解. 这一小节就是关于色建立某种自洽的代数结构, 并在此基础上建立强子色指标公式与夸克辐射的色变换理论.

1. 色量子数的代数

首先来看要建立色代数所面临的问题是什么. 根据强子色中性原理, 三种色必须满足如下运算公理:

$$rgb = w, \quad \bar{r}\ \bar{g}\ \bar{b} = w, \tag{3.4.27}$$

$$r\bar{r} = g\bar{g} = b\bar{b} = w. \tag{3.4.28}$$

根据物理事实, 色的乘法应该是可交换和可结合的, 即

$$rg = gr, \quad rb = br, \quad bg = gb \quad (\text{可交换性}),$$

$$rgb = (rg)b = r(gb) \quad (\text{可结合性}).$$

因此从 (3.4.27) 和 (3.4.28) 可推出如下法则:

$$\begin{aligned} &rg=\bar{b}, \quad rb=\bar{g}, \quad bg=\bar{r}, \\ &\bar{r}\ \bar{g}=b, \quad \bar{r}\bar{b}=g, \quad \bar{b}\bar{g}=r. \end{aligned} \tag{3.4.29}$$

再由白色 w 是单位元素, 即

$$wr=r, \quad wg=g, \quad wb=b, \quad w\bar{r}=\bar{r}, \quad w\bar{g}=\bar{g}, \quad w\bar{b}=\bar{b},$$

从 (3.4.27) 和 (3.4.28) 都可推出

$$\begin{aligned} &rr=\bar{r}, \quad gg=\bar{g}, \quad bb=\bar{b}, \\ &\bar{r}\ \bar{r}=r, \quad \bar{g}\ \bar{g}=g, \quad \bar{b}\ \bar{b}=b. \end{aligned} \tag{3.4.30}$$

这是因为用 r 乘于 (3.4.27) 第一个等式两端可得

$$r=(rr)(gb),$$

再用 r 乘于 (3.4.28) 两端可得

$$r=(rr)\bar{r},$$

从 (3.4.29) 可以看到这两个等式都与 (3.4.30) 相容. 同理对于 g 和 b 也可得同样的结论. 于是从 (3.4.27)-(3.4.28) 导出色与色和反色与反色的乘积运算 (3.4.29)-(3.4.30). 但是再往下走, 关于色与反色的乘积运算便会出现不相容问题. 例如, 用 b 乘于 (3.4.27) 两端, 再由 (3.4.30) 可得

$$r(g\bar{b})=b. \tag{3.4.31}$$

然而无论设 $g\bar{b}$ 是什么值, 都会与 (3.4.27)-(3.4.30) 发生矛盾. 例如, 设 $g\bar{b}=r$, 则从 (3.4.31) 推出 $rr=b$, 此与 $rr=\bar{r}$ 不相容. 又若设 $g\bar{b}=\bar{b}$, 则有 $r\bar{b}=b$, 再用 b 乘以两端得 $r=bb=\bar{b}$, 此为矛盾. 因此关于色与反色的乘积出现不相容问题.

这个事实说明色量子数不应该限制在 $r,\bar{r},g,\bar{g},b,\bar{b}$ 这六个数, 而应扩展包括所有正反两色的乘积在内:

$$r\bar{g},\ \bar{r}g,\ r\bar{b},\ \bar{r}b,\ g\bar{b},\ \bar{g}b.$$

但是这六个色只有两个是独立的, 从 (3.4.29) 可以得到

$$r\bar{g}=b\bar{r}=g\bar{b}, \quad g\bar{r}=r\bar{b}=b\bar{g}.$$

定义它为黄色 y 和反黄色 $\bar{y}$, 即

$$\begin{aligned} &y=r\bar{g}=b\bar{r}=g\bar{b}, \\ &\bar{y}=g\bar{r}=r\bar{b}=b\bar{g}. \end{aligned} \tag{3.4.32}$$

于是要想建立自洽的色代数. 必须在原有的六个色量子数中再加上黄色 y 和反黄色 $\bar{y}$ 两种新量子数. 下面关于色量子数给出完备的数学理论: 色代数.

色代数生成元是夸克与胶子, 它们共有 9 种色指标

$$r, g, b, y, \bar{r}, \bar{g}, \bar{b}, \bar{y}, w, \tag{3.4.33}$$

其中 $y, \bar{y}$ 如 (3.4.32). 对于 (3.4.33) 中的色, 可以按如下方式定义一个乘法运算, 规定它是可交换及可结合的, 并且满足

(1) w 是单位元素, 即

$$cw = c, \quad \text{对任何 (3.4.33) 中元素 } c;$$

(2) $\bar{c}$ 是 c 的逆,

$$c\bar{c} = w, \quad c = r, g, b, y;$$

(3) 除了满足 (3.4.27)-(3.4.30) 的运算法则外, 关于 (3.4.32) 的黄色 y 及反黄色 $\bar{y}$ 还满足如下乘法规则:

$$\begin{aligned} &yr = b, \quad yg = r, \quad yb = g, \quad yy = \bar{y}, \\ &\bar{y}r = g, \quad \bar{y}g = b, \quad \bar{y}b = r, \quad \bar{y}\,\bar{y} = y. \end{aligned} \tag{3.4.34}$$

不难验证, 以上 (1)~(3) 乘积运算使得 (3.4.33) 是一个有限交换群.

色代数就是以夸克与胶子为生成元, 以非负整数为系数的生成代数. 它的元素空间可写作如下形式:

$$P = \left\{ \sum_k n_k e_k \middle| \ e_k \text{ 代表 18 个夸克, 8 个胶子} \right\}, \tag{3.4.35}$$

其中 n_k $(1 \leqslant k \leqslant 26)$ 是非负整数. 对每个 $\omega = \sum_k n_k e_k \in P$, 我们定义 ω 的色指标为

$$c_\omega = \prod_k c_k^{n_k}, \quad c_k = e_k \text{ 的色}, \tag{3.4.36}$$

其中若 $n_k = 0$, 则 $c_k^{n_k} = w$.

注 3.11　色代数 P 中的每个元素 $\omega = \sum n_i e_i$ 代表这样一个粒子系统, 它包含色为 c_i 的粒子数为 n_i 个. 特别地, 色为 r, g, b 的粒子必含夸克, 为 $\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$ 的粒子是反夸克, 为 $y, \bar{y}$ 的粒子是胶子.

注 3.12　由 (3.4.32), $r\bar{g}, b\bar{r}, g\bar{b}$ 是同一种黄色, 即三种胶子 $g_{r\bar{g}}, g_{b\bar{r}}, g_{g\bar{b}}$ 是同一种色, 但是它们是不同的量子态. 特别地, 在弱子模型中

$$g_{r\bar{g}} = W_r^* \bar{W}_{\bar{g}}^*, \quad g_{b\bar{r}} = W_b^* \bar{W}_{\bar{r}}^*, \quad g_{g\bar{b}} = W_g^* \bar{W}_{\bar{b}}^*.$$

显然它们属于不同的量子态.

2. 强子色指标公式

在 3.4.2 小节中提到强子色中性问题与夸克的胶子辐射与吸收的色匹配问题. 现在在色代数理论基础上, 这两个问题很容易地得到解决. 下面关于强子建立色指标公式.

首先讨论强子色中性问题. 考虑 (3.4.22) 的质子构成

$$p = u_{c_1} + u_{c_2} + d_{c_3} + \sum n_k g^k, \quad \sum n_k = N > 0. \tag{3.4.37}$$

显然 p 是 (3.4.35) 色代数中的一个元素, 因而按 (3.4.36) 方式可定义质子 p 的色为

$$c_p = c_1 c_2 c_3 \prod_{k=1}^{8} c(g^k)^{n_k}, \quad c(g^k) \text{ 为 } g^k \text{ 的色}. \tag{3.4.38}$$

按色中性要求 $c_p = w$, 但是从 (3.4.38) 可知, 它并不意味着质子的构成 (3.4.37) 中三个夸克一定是 $c_1 c_2 c_3 = w$. 例如, 对于如下的质子构成

$$p = u_r + u_r + d_g + 2g_{r\bar{g}} + g_{r\bar{b}}. \tag{3.4.39}$$

由 (3.4.32) 知

$$c(g_{r\bar{g}}) = y, \quad c(g_{r\bar{b}}) = \bar{y}.$$

于是由 (3.4.30) 和 (3.4.34), 由 (3.4.39) 给出的质子色为

$$c_p = r^2 g y^2 \bar{y} = \bar{r} g y = \bar{r} r = w.$$

但是在 (3.4.39) 中三个夸克的色乘积为

$$c_1 c_2 c_3 = rrg = \bar{r} g = \bar{y} \neq w.$$

于是我们看到, 建立在色代数基础之上的强子构成的色量子数分布与经典的 QCD 理论差异很大.

更一般地, 对于一般重子 $\mathcal{B}$, 它的构成为

$$\mathcal{B} = \sum_{i=1}^{3} q_{c_i} + \sum_{k=1}^{3} (n_k g^k + m_k \bar{g}^k) + N g^4 + M \bar{g}^4, \tag{3.4.40}$$

它的色量子数分布满足下面色指标公式

$$c_1 c_2 c_3 = \bar{y}^{N_1} y^{N_2}, \quad N_1 = \sum_{k=1}^{3} n_k, \ N_2 = \sum_{k=1}^{3} m_k. \tag{3.4.41}$$

对于一般的介子 μ, 它的构成为

$$\mu = q_{c_1} + \bar{q}_{\bar{c}_2} + \sum_{k=1}^{3}(n_k g^k + m_k \bar{g}^k) + N g^4 + M \bar{g}^4, \tag{3.4.42}$$

它的色中性约束为

$$c_1 \bar{c}_2 = \bar{y}^{N_1} y^{N_2}, \tag{3.4.43}$$

式中 N_1, N_2 如 (3.4.41). 在 (3.4.40) 和 (3.4.42) 中

$$\begin{aligned} &g^1 = g_{r\bar{g}}, \quad g^2 = g_{b\bar{r}}, \quad g^3 = g_{g\bar{b}}, \quad g^4 = \text{ 中性胶子的组合}, \\ &\bar{g}^1 = g_{g\bar{r}}, \quad \bar{g}^2 = g_{r\bar{b}}, \quad \bar{g}^3 = g_{b\bar{g}}, \quad \bar{g}^4 = g^4 \text{ 的反胶子}. \end{aligned}$$

公式 (3.3.41) 和 (3.3.43) 便是一般重子和介子的色指标公式.

3. 夸克辐射的色变换

3.4.2 小节介绍了夸克辐射与吸收胶子的性质, 并且讲到夸克辐射的色变换问题. 现在应用色代数理论便可以解决这个问题. 令一个色为 c 的夸克 q_c 发射一个 $g_{c_1\bar{c}_2}$ 胶子, 然后变成色为 c_3 的夸克:

$$q_c \to g_{c_1\bar{c}_2} + q_{c_3}, \tag{3.4.44}$$

那么 q_{c_3} 的色为

$$c_3 = c c_2 \bar{c}_1. \tag{3.4.45}$$

同样地, 当 q_c 吸收一个 $g_{c_1\bar{c}_2}$ 胶子, 然后变为 q_{c_4}:

$$q_c + g_{c_1\bar{c}_2} \to q_{c_4}, \tag{3.4.46}$$

则 q_{c_4} 的色为

$$c_4 = c c_1 \bar{c}_2. \tag{3.4.47}$$

根据色代数运算规则, 由 (3.4.45) 和 (3.4.47) 可算出夸克辐射 (3.4.44) 和夸克吸收 (3.4.46) 的色变换.

注 3.13　在本小节中建立的色代数是从物理色中性原理 (3.4.27)-(3.4.28) 严格推导出来的数学理论, 它的代数结构是唯一的. 从而它可以作为 QCD 的严格数学基础.

3.4.5 w^*- 色代数

3.4.4 小节建立了 QCD 色代数. 所谓色代数抽象地讲就是有一个有限乘法群 CG, 称为色群, 以及一个以 $e_1,\cdots,e_N$ 为生成元定义在整数群 Z(或自然数半群 $\mathbb{N}$) 上的代数

$$P^N=\left\{\sum_{k=1}^{N}n_ke_k|\ n_k\in Z\ (\text{或 } n_k\in\mathbb{N})\right\},\tag{3.4.48}$$

并且存在一个同态

$$H:\ P^N\to CG,\tag{3.4.49}$$

使得对每一个元素 $\omega\in P^N$, 可在 ω 上定义一个色指标如下:

$$\mathrm{Ind}_c(\omega)=H(\omega)=\prod_{k=1}^{N}H(e_k)^{n_k},\quad \text{对 } \omega=\sum_{k=1}^{N}n_ke_k,\tag{3.4.50}$$

式中 $H(e_k)\in CG$ 是 e_k 在 (3.4.49) 的同态像.

根据上面的概念, 可以知道, 一个色代数由一个色群 CG, 一个有限维整数代数 (3.4.48), 以及一个 (3.4.49) 的同态 H, 这样的三联组 (CG,P^N,H) 构成. 不同的三联组构成不同的色代数. 因此在 QCD 色代数的三联组中,

$$\begin{cases}\text{色群 } CG=(r,g,b,y) \text{ 按 (3.4.27)-(3.4.34) 法则构成的四色群,}\\ \text{有限维整数代数 } P^N=\text{(3.4.35) 的代数,}\\ \text{同态 } H:P^N\to CG \text{ 为 } e_k\mapsto c_k \text{ 为 } e_k \text{ 粒子的色.}\end{cases}\tag{3.4.51}$$

QCD 色代数帮助我们解决了强子构成的色分布问题以及夸克辐射的色变换问题. 这是 QCD 的两个最基本问题.

现在将根据弱子模型建立一个新的色代数, 称作 w^*- 色代数, 这里 w^* 就是那个带色的弱子. 根据这个色代数理论再结合统一场的强和弱作用公式, 关于亚原子可建立胶子/媒介子云的结构理论. 应用该理论可在更深的层次揭示亚原子辐射. e-p 深度非弹性散射的机理.

1. w^*- 色代数

根据弱子模型, 夸克 q 和胶子 g 的弱子构成为

$$q=w^*ww,\quad g=w^*\bar{w}^*.$$

而 w^* 是唯一带色的弱子, 共有三种色 r,g,b 的 w^* 弱子:

$$w_r^*,\quad w_g^*,\quad w_b^*,\tag{3.4.52}$$

它们的反粒子带有 $\bar{r},\bar{g},\bar{b}$ 的反色. 因此与 QCD 色代数的三联组 (3.4.51) 不同的是, 对应弱子模型建立的 w^*- 色代数, 它的三联组取如下形式:

$$\text{色群 } CG = \text{ 如 (3.4.51) 的四色群,} \tag{3.4.53}$$

P^N 代数是 $N=3$ 维的整数群上的代数, 即

$$P^3 = \left\{ \sum_{k=1}^{3} n_k w_k^* |\ n_k \in Z,\ w_1^* = w_r^*, w_2^* = w_g^*, w_3^* = w_b^* \right\}. \tag{3.4.54}$$

对应的同态 $H: P^3 \to CG$ 定义为

$$\begin{aligned} &H(w_1^*) = r, \quad H(w_2^*) = g, \quad H(w_3^*) = b, \\ &H(-w_1^*) = \bar{r}, \quad H(-w_2^*) = \bar{g}, \quad H(-w_3^*) = \bar{b}. \end{aligned} \tag{3.4.55}$$

由 (3.4.53)-(3.4.55) 定义的三联组 (CG, P^3, H) 给出了弱子模型的 w^*- 色代数.

由 w^*- 色代数, 对每一个粒子系统 ω 都可以求出它的色, 令 ω 系统含有 n_k 个 q_k 夸克, $\bar{n}_k$ 个 $\bar{q}_k$ 夸克, $q_1 = q_r, q_2 = q_g, q_3 = q_b$, 以及 m_1 个 $g^1 = g_{r\bar{g}}$ 胶子, m_2 个 $g^2 = g_{b\bar{r}}, m_3$ 个 $g^3 = g_{g\bar{b}}, m_4$ 个 $g^4=$ 色中性胶子, $\bar{m}_1$ 个 $\bar{g}^1, \bar{m}_2$ 个 $\bar{g}^2, \bar{m}_3$ 个 $\bar{g}^3$ 及 $\bar{m}_4$ 个 $\bar{g}^4$, 即 ω 可表达为

$$\omega = \sum_{k=1}^{3} (n_k q_k + \bar{n}_k \bar{q}_k) + \sum_{i=1}^{4} (m_i g^i + \bar{m}_i \bar{g}^i), \tag{3.4.56}$$

则 ω 与 P^3 中元素有如下对应:

$$\omega \mapsto X_\omega = N_1 w_1^* + N_2 w_2^* + N_3 w_3^*, \tag{3.4.57}$$

其中

$$\begin{aligned} N_1 &= (n_1 - \bar{n}_1) + (m_1 - m_2) + (\bar{m}_2 - \bar{m}_1), \\ N_2 &= (n_2 - \bar{n}_2) + (m_3 - m_1) + (\bar{m}_1 - \bar{m}_3), \\ N_3 &= (n_3 - \bar{n}_3) + (m_2 - m_3) + (\bar{m}_3 - \bar{m}_2). \end{aligned} \tag{3.4.58}$$

于是对每一个如 (3.4.56) 的粒子系统 ω, 可由 (3.4.57) 的对应定义 ω 的色指标为

$$\mathrm{Ind}_c(\omega) = \mathrm{Ind}_c(X_\omega) = r^{N_1} g^{N_2} b^{N_3}, \tag{3.4.59}$$

其中 N_1, N_2, N_3 如 (3.4.58), 并且若 N_1 是负数 $N_1 = -N$ 时,

$$r^{N_1} = r^{-N} = \bar{r}^N,$$

对于 g^{N_2}, b^{N_3} 也是如此.

显然对于两个粒子系统 ω_1 和 ω_2 的组合 $\omega_1+\omega_2$, 其色为

$$\mathrm{Ind}_c(\omega_1+\omega_2)=\mathrm{Ind}_c(X_{\omega_1})\cdot\mathrm{Ind}_c(X_{\omega_2}). \tag{3.4.60}$$

由于所有的粒子系统都可表达成若干个如 (3.4.56) 子系统之和

$$\omega=\omega_1+\cdots+\omega_k,$$

于是公式 (3.4.59)-(3.4.60) 给出所有粒子系统的色指标计算程序. 特别地, 下面定理对于夸克和电子结构具有重要意义.

2. w^*- 色代数的基本定理

下面给出的结论是 w^*- 色代数的基本定理, 它为弱子模型的亚原子与电子的媒介子云结构色中性奠定了坚实的数学基础.

定理 3.14 关于 w^*- 色代数有如下结论.

(1) 对任何不含夸克与反夸克的胶子族

$$\varepsilon=\sum_{i=1}^{4}(m_ig^i+\bar{m}_i\bar{g}^i),\quad g^i,\bar{g}^i \text{ 如 (3.4.56)}, \tag{3.4.61}$$

它的色满足下面公式

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ind}_c(\varepsilon)=w, \quad \text{对 } \sum_{i=1}^{3}(m_i-\bar{m}_i)=\pm 3k,\\
&\mathrm{Ind}_c(\varepsilon)=y, \quad \text{对 } \sum_{i=1}^{3}(m_i-\bar{m}_i)=\pm 3k+1,\\
&\mathrm{Ind}_c(\varepsilon)=\bar{y}, \quad \text{对 } \sum_{i=1}^{3}(m_i-\bar{m}_i)=\pm 3k+2,
\end{aligned} \tag{3.4.62}$$

式中 $k=0,1,2,\cdots$.

(2) 对于单夸克的胶子族系统

$$\omega=q+\varepsilon,\quad \omega'=\bar{q}+\varepsilon,\quad \varepsilon \text{ 如 (3.4.61)}, \tag{3.4.63}$$

它们的色只能取如下三种之一, 即

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ind}_c(\omega)=r,g,b,\\
&\mathrm{Ind}_c(\omega')=\bar{r},\bar{g},\bar{b}.
\end{aligned} \tag{3.4.64}$$

(3) 对于强子的胶子云系统

$$\begin{aligned}&\pi = q + \bar{q} + \varepsilon \quad (\text{介子系统}),\\ &\mathcal{B} = q + q + q + \varepsilon \quad (\text{重子系统}),\end{aligned} \tag{3.4.65}$$

它们的色只能取

$$\mathrm{Ind}_c(\pi) = w, y, \bar{y}, \quad \mathrm{Ind}_c(\mathcal{B}) = w, y, \bar{y}. \tag{3.4.66}$$

注 3.15　对于粒子物理来讲, 所有最基本和最重要的粒子系统就是定理 3.15 的结论 (1)~(3) 中所给出的系统, 其中 (3.4.61) 代表带电轻子携带的胶子云, (3.4.63) 是夸克所带有的胶子云系统, 而 (3.4.65) 则是强子的胶子云系统 (详细可见 3.4.6 小节).

定理 3.14 的证明　关于结论 (1), 由 (3.4.56)-(3.4.59) 的色指标运算法则, 对于 (3.4.61) 的 ε, 它的色可表达为

$$\mathrm{Ind}_c(\varepsilon) = r^{M_1} g^{M_2} b^{M_3}, \tag{3.4.67}$$

其中 M_1, M_2, M_3 为 (3.4.58) 中 $n, \bar{n} = 0$ 的数, 即

$$\begin{aligned}M_1 &= m_1 - m_2 + \bar{m}_2 - \bar{m}_1,\\ M_2 &= m_3 - m_1 + \bar{m}_1 - \bar{m}_3,\\ M_3 &= m_2 - m_3 + \bar{m}_3 - \bar{m}_2.\end{aligned}$$

由于色指标规定 $c^{-m} = \bar{c}^m$, 因此 (3.4.67) 可写成

$$\mathrm{Ind}_c(\varepsilon) = (r\bar{g})^{m_1}(\bar{r}b)^{m_2}(g\bar{b})^{m_3}(\bar{r}g)^{\bar{m}_1}(r\bar{b})^{\bar{m}_2}(b\bar{g})^{\bar{m}_3}.$$

再根据 (3.4.32) 的法则, 上式可写成

$$\mathrm{Ind}_c(\varepsilon) = y^{m_1} y^{m_2} y^{m_3} \bar{y}^{\bar{m}_1} \bar{y}^{\bar{m}_2} \bar{y}^{\bar{m}_3} = y^M, \quad M = \sum_{i=1}^{3} (m_i - \bar{m}_i). \tag{3.4.68}$$

注意到 (3.4.34) 中 $y^2 = \bar{y}, \bar{y}^2 = y$, 于是从 (3.4.68) 可推出 (3.4.62).

关于结论 (2), 由 (3.4.60) 从 (3.4.63) 和 (3.4.68) 可推出

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ind}_c(\omega) = \mathrm{Ind}_c(q)\mathrm{Ind}_c(\varepsilon) = \mathrm{Ind}_c(q) y^M,\\ &\mathrm{Ind}_c(\omega') = \mathrm{Ind}_c(\bar{q})\mathrm{Ind}_c(\varepsilon) = \mathrm{Ind}_c(\bar{q}) y^M.\end{aligned} \tag{3.4.69}$$

再由

$$\mathrm{Ind}_c(q) = r, g, b, \quad \mathrm{Ind}_c(\bar{q}) = \bar{r}, \bar{g}, \bar{b},$$

从 (3.4.69) 和 (3.4.34) 便可获得结论 (2).

对于结论 (3) 同样有

$$\mathrm{Ind}_c(\pi) = c_i\bar{c}_j y^M, \quad \mathrm{Ind}_c(\mathcal{B}) = c_i c_j c_k y^M \quad (1 \leqslant i,j,k \leqslant 3),$$

其中 $c_1 = r, c_2 = g, c_3 = b$. 再由 (3.4.29) 和 (3.4.32),

$$c_i\bar{c}_j = w, y, \bar{y}, \quad c_i c_j c_k = \bar{c}_l c_k = w, y, \bar{y},$$

便得到 (3.4.66) 的结论. 定理证毕.

注 3.16 在 (3.4.62) 中, $\sum\limits_{i=1}^{3}(m_i - \bar{m}_i) = \pm 3k$ 的物理意义为, 通过弱子交换, (3.4.61) 的系统可变成白色胶子及 y 与 $\bar{y}$ 胶子数相同的胶子系统.

3.4.6 亚原子的媒介子云结构

所谓亚原子是指带电轻子、夸克、强子的统称. 由于强相互作用势与弱相互作用势都由尺度因子而被分为若干层次, 因而产生不同层次的粒子结构: 弱子 (基本粒子) 层次、媒介子层次、带电轻子与夸克层次、强子层次以及原子核层次. 此外, 注意到在亚原子尺度上, 弱作用力和强作用力在裸粒子周围都存在一个比较薄的吸引环形区域, 就如图 2.16 所显示的电子结构那样. 正是这种特性, 使得媒介子被吸附到这些环形域内形成亚原子的媒介子云结构. 这一小节就是结合色理论专门讨论亚原子的媒介子云结构理论.

首先回忆一下弱子模型中的媒介子, 它们是没有质量的光子 γ 与对偶光子 ϕ_γ, 胶子 g^k 及对偶胶子 ϕ_g^k, 以及 ν 媒介子 ϕ_ν, 它们的成分与自旋表达如下:

$$\begin{aligned}
&\gamma = \alpha w\bar{w}_1 + \beta w_2\bar{w}_2(\uparrow\uparrow, \downarrow\downarrow),\\
&\phi_\gamma = \alpha w\bar{w}_1 + \beta w_2\bar{w}_2(\uparrow\downarrow, \downarrow\uparrow), \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1,\\
&\phi_\nu = \alpha_1\nu_e\bar{\nu}_e + \alpha_2\nu_\mu\bar{\nu}_\mu + \alpha_3\nu_\tau\bar{\nu}_\tau(\downarrow\uparrow), \quad \sum_{i=1}^{3}\alpha_i^2 = 1,\\
&g^k = w^*\bar{w}^*(\uparrow\uparrow, \downarrow\downarrow), \quad \phi_g^k = w^*\bar{w}^*(\uparrow\downarrow, \downarrow\uparrow).
\end{aligned} \tag{3.4.70}$$

所有这些媒介子都带两个弱荷参与弱相互作用. 此外 g^k 与 ϕ_g^k 是既带强荷又带色荷, 因而它们又参与强相互作用. 由于 g^k 与 ϕ_g^k 只是自旋排列不同, 因此它们的色组合完全相同. 这就是定理 3.14 中的粒子系统只写入胶子的原因, 在那里就色指标而言 g^k 与 ϕ_g^k 没有区别.

下面将分别考察带电轻子、夸克以及强子这三种不同亚原子的媒介子云结构.

1. 带电轻子的媒介子云

由于相似性, 只讨论电子的情况. 在 2.6.5 小节中, 已经建立了电子的媒介子云结构理论. 这里再给出一些补充. 首先, 由于在裸电子及媒介子它们相互之间存在着弱作用力、电荷偶极化产生的电磁作用、$J=1$ 的自旋微弱磁矩等相互作用, 电子的媒介子云应该是分为若干个分层的. 但是由于缺乏进一步的信息, 在这里无法给出具体理论和建议.

然而我们可以提供如下几点重要结论.

(1) 每层媒介子云的粒子数的估计. 由于媒介子之间存在弱作用力, 它们必须互相之间相距一个距离 r_0, r_0 约等于媒介子的弱斥力半径. 因此每层粒子数 N 受到如下限制:

$$N \leqslant 4\pi r^2/r_0^2, \tag{3.4.71}$$

其中 r 为该粒子层的半径. 例如, 若 $r=r_0$, 则 $N \leqslant 12$.

(2) 通常所说的电子是指裸电子 $e_0 = \nu_e w_1 w_2$ 与它的媒介子云一起构成的系统. 由于媒介子云中含有 $J=1$ 的光子与胶子, 于是便存在总自旋 $J_e = \dfrac{1}{2}$ 的约束. 由于 e_0 的自旋为 $\dfrac{1}{2}$, 因此光子数 N_γ 与胶子数 N_g 都必须是偶数

$$N_\gamma = \text{ 偶数}, \quad N_g = \text{ 偶数}, \tag{3.4.72}$$

它们的一半是左旋, 另一半是右旋.

(3) 电子是色中性的, 从而要求胶子与对偶胶子的总色指标是白的. 胶子与对偶胶子只有 $y, \bar{y}$ 及 w 三种色. 由定理 3.15, 色中性的约束使得 y 和 $\bar{y}$ 的胶子及对偶胶子数应满足 (3.4.62) 中的如下公式:

$$\sum_{i=1}^{3}(m_i - \bar{m}_i) = \pm 3k, \quad k = 0, 1, \cdots. \tag{3.4.73}$$

公式 (3.4.73) 表明, 通过胶子和对偶胶子之间 $w^*, \bar{w}^*$ 的相互交换, 可以达到或者全部是白色粒子, 或者 y 与 $\bar{y}$ 粒子平衡.

注 3.17　由于光子与对偶光子, 胶子与对偶胶子, 它们之间可以通过弱子交换而相互转换. 因此, 电子媒介子云的约束条件 (3.4.72) 和 (3.4.73) 可能意味着所有光子以及胶子都是从对偶光子的弱子自旋交换以及对偶的白色胶子之间 w^*- 弱子自旋与色交换变成的, 因为在交换过程中光子与胶子都是成对出现. 于是媒介子云的所有胶子和对偶胶子可通过胶子交换达到全部是白色的状态.

2. 夸克的媒介子云

夸克的弱子构成与电子相似, 也是由三个弱子构成. 但是与电子不同的是它带

有一个强荷. 因此夸克媒介子云结构会与电子的有所不同. 这种区别主要体现在胶子云的结构上.

在夸克与胶子之间存在强相互作用, 它包含三个部分:

强荷之间的作用, 色荷之间的作用, 强荷与色荷之间的作用. 强荷之间的作用力已有公式 (2.5.13)-(2.5.15), 但是其他两种相互作用还不清楚. 但是可以肯定它们的力程比强荷力程要更短. 正是由于这个特点, 夸克的媒介子云明显地被分为两层:

$$\begin{aligned}&\text{胶子层: 包含胶子与对偶胶子,}\\&\text{光子层: 包含光子, 对偶光子, } \nu \text{ 媒介子.}\end{aligned}\tag{3.4.74}$$

在那里, 胶子层主要是相互作用的产物, 而光子层则是弱作用的结果. 胶子层的半径被看作是夸克半径 ρ_0. 因此, 根据夸克禁闭可推测出它的值为

$$\rho_0 \sim 10^{-23}\text{cm} \sim 10^{-19}\text{cm}.$$

光子层的半径等于电子半径, 为

$$\rho_e \sim 10^{-18}\text{cm} \sim 10^{-16}\text{cm}.$$

由定理 3.15, 任何携带胶子层的夸克, 它的色只取 r, g, b, 而反夸克只取 $\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$ 这三种色. 夸克的胶子层是禁闭的, 但是在强子内部的夸克之间可交换胶子和对偶胶子. 这便是在 3.4.2 小节中介绍的夸克辐射与吸收.

3. 强子的胶子云结构

与电子和夸克不同的是, 强子周围不再有如 (3.4.74) 的光子层, 而只有胶子层. 其原因是裸强子的半径 ρ_h 大于弱作用的力程, 即

$$\rho_h \geqslant 10^{-16}\text{cm}.$$

因此强子只能对胶子和对偶胶子具有强相互作用的吸附力, 以形成一个胶子云. 强子的胶子云半径就是强子半径, 它为

$$r_1 \sim 10^{-16}\text{cm} \sim 10^{-14}\text{cm}.$$

关于强子的色, 我们只是知道它的总色是白的, 即对于如 (3.4.65) 的介子 π 和重子 $\mathcal{B}$ 有

$$\begin{aligned}&\text{Ind}_c(\pi) = c_i\bar{c}_j\text{Ind}_c(\varepsilon) = w,\\&\text{Ind}_c(\mathcal{B}) = c_ic_jc_k\text{Ind}_c(\varepsilon) = w, \quad 1 \leqslant i, j, k \leqslant 3,\end{aligned}$$

其中 $c_1 = r, c_2 = g, c_3 = b, \varepsilon$ 为胶子云的粒子系统. 如果裸强子是白色的, 那么胶子云也是白色的.

以上关于亚原子的媒介子云结构理论完全是建立在强相互作用与弱相互作用力的分层特性以及排斥与吸引的交替性质基础之上的, 同时再结合量子色动力学以及弱子模型. 媒介子云结构能够很好地解释亚原子粒子的各种衰变与散射现象. 这是因为大量的衰变与散射都必须有媒介子参与才可能发生, 而每一个亚原子都伴随有媒介子云在其周围, 以便在条件合适的情况下随时可以提供必要的粒子.

最后需要强调一下, 色代数的建立对于 QCD 来讲是非常重要的. 它改变了许多经典 QCD 的观点. 量子色动力学告诉我们, 夸克和胶子只带三种色荷 r, g, b, 以及它们的反色荷 $\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$. 色荷与强荷一样, 它们之间相互都产生强作用力. 但是由色荷产生的色指标却是一种量子数, 它代表粒子的状态. 色代数告诉我们有四种色荷和四种色 r, g, b, y, 只有这样才可能形成协调一致的量子数运算系统, 从而能成功描述亚原子的胶子云结构. 此外, 经典的 QCD 认为重子的夸克只能是三种不同色组合, 因为 $rgb = w$. 但是色代数却表明, 三种同色同样可成为重子的色组合:

$$rrr = w, \quad ggg = w, \quad bbb = w.$$

总之, 色代数为量子色动力学奠定了坚实的数学基础.

3.5　总结与评注

规范不变性原理与 Lorentz 不变性原理及广义相对性原理一起构成理论物理的三大支柱性原理. 从这些原理出发, 四种相互作用的 Lagrange 作用量被唯一确定 (差一些常数). 这充分显示出大自然规律的内在魅力.

标准模型是关于弱相互作用与强相互作用的粒子衰变与散射的理论. 它的内容主要包括三个部分: 流–流相互作用的粒子衰变理论、GWS 电弱理论、量子色动力学. 在过去发展的几个关于相互作用的理论中它是唯一可具体写出场作用量并且能得到许多实质性物理结论 (即可检验结论) 的模型. 这表明后面要发展的所有相互作用与基本粒子理论都必须与标准模型相容, 它的作用量是新理论的出发点.

然而衡量一个模型是否真是描述某种相互作用的理论, 一个基本标准就是看它是否能够推导出关于这种相互作用势的公式. 广义相对论引力场方程通过 Schwarzschild 精确解可导出 Newton 引力势, Maxwell 电磁场方程可推出电荷 Coulomb 势. 就这个标准来看, 标准模型并不能达到这个要求. 而那些连弱作用和强作用场方程都难写出来的大统一理论、超对称理论和超弦理论等模型更是不用谈了, 它们连一个像样的具有实质性的、简单的物理结论也拿不出来.

正是因为如此, 所以标准模型本质上被归为半表象半原理性的理论. 它的成功之处恰好表现在经验性的表象方面, 是在描述粒子的衰变与散射概率方面. 因此总结性地讲:

标准模型是描述弱作用与强作用粒子衰变的理论.

明确这一点很重要, 否则人们会因混淆不同范畴的概念而产生错觉. 例如, 像宇称对称、同位旋对称、手征性、路径积分、可重整化、Feynman 图计算法则、场量子化等, 所有这些概念都属于描述和计算粒子衰变、散射与辐射跃迁概率等方面. 而从实质上讲, 这些概念与粒子结构以及相互作用力性质无关, 它们根本不能进入到真正的关于相互作用理论中来. 明白了这一点就不会在统一场理论中套用这些概念而产生混乱.

下面关于本章各节进行评注.

3.1 节: 规范不变性原理的思想最早是由 H. Weyl 提出 (Weyl, 1919, 1921). 而真正将这种思想纳入 $SU(N)$ 群以规范对称性来确定规范场作用量形式的作法是分别由 Klein (1938), Yang, Mills (1954), Shaw (1954), 等独立提出, 也可参见 (Utiyama, 1956). 今天这套思想被称为 Yang-Mills 规范理论.

在推导出 $SU(N)$ 的规范不变性 Lagrange 密度 (3.1.37) 时, 我们回到了相似矩阵迹不变的结论, 即

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(BAB^{-1}), \tag{3.5.1}$$

式中矩阵 A 的迹是它的对角线元素之和, 即

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{k=1}^{N} a_{kk}, \quad A = (a_{ij}).$$

这里简要地证明 (3.5.1) 式. 由特征值方程

$$|A - \lambda I| = |B(A - \lambda I)B^{-1}| = |BAB^{-1} - \lambda I| = 0$$

知 A 与 BAB^{-1} 的特征值相同, 并且有

$$\mathrm{Tr}(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n, \quad \mathrm{Tr}(BAB^{-1}) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n,$$

其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的特征值. 这便证得 (3.5.1).

关于 Yang-Mills 作用量 (3.1.40)-(3.1.41) 的变分方程 (3.1.43) 推导过程可见下一章的变分学一节.

3.2 节: 这一节的内容参照 (Herrero, 1998), (章乃森, 1994), Fermi 关于 β 衰变理论首次在 (Fermi, 1934) 中提出. $V - A$ 理论的作用量 (3.2.14) 首先被 Sudarshan 等发现 (Sudarshan et al., 1957), 同时也在 (Feynman, Gell-Mann, 1958) 中建立. 中

间矢量 Bose 子理论 (IVB 理论) 归于杨振宁, 李政道和 Glashow, 见 (Lee, 1961) 和 (Glashow, 1961). IVB 理论的作用量 (3.2.25) 在后来 GWS 电弱理论的发展起到关键性作用. 用 (3.2.44) 的夸克变换来表达弱作用衰变概率的弱流 (3.2.45) 被称作是 Cabibo 理论 (Cabibo, 1963). 该理论的进一步推广便是 GIM 的二代夸克模型 (Glashow, Ilipoulos, Maiani, 1970), 最终导致 CKM 的三代夸克模型 (Kobayashi, Maskawa, 1973).

3.3 节: GWS 电弱理论是由 Glashow (1961), Weinberg (1967) 和 Salam (1968) 这三位物理学家发展起来的. 该理论是在弱作用衰变的 IVB 理论基础上发展的 $SU(2)$ 规范理论再结合 Higgs 机制的产物. Higgs 机制是在 1964 年同时被 Higgs (1964); Englert 和 Brout (1964); Guralnik, Hagen, Kibble (1964) 所提出. Higgs 机制的核心思想就是真空态可造成自发对称破缺从而产生出质量. 这句话很难懂. 它的直白意思就是说, 描述相互作用的 Yang-Mills 规范场作用量

$$\mathcal{L}(W_\mu^a) \text{ 是规范对称, 故不含质量项 } \frac{m}{2}W_\mu^a W^{\mu a}. \tag{3.5.2}$$

如果人为加上质量项

$$\tilde{\mathcal{L}}(W_\mu^a) = \mathcal{L}(W_\mu^a) + \frac{1}{2}mW_\mu^a W^{\mu a}, \tag{3.5.3}$$

那么 (3.5.3) 的规范场粒子 W_μ^a 便有了质量 m, 但是 $\tilde{\mathcal{L}}$ 的规范对称性破坏. 这就是对称破缺这句话的含义:

$$\text{对称性破缺} \Leftrightarrow \text{质量创生}.$$

然而 (3.5.3) 的对称破缺是人工的, 不是自发的 (即不是自然的). 而自发对称破缺的 Higgs 机制是在 (3.5.2) 作用量上再加一个 Bose 子项,

$$\mathcal{L}(W_\mu^a) + \mathcal{L}_1(\phi), \quad \phi \text{ 为 Higgs 粒子场}, \tag{3.5.4}$$

$\mathcal{L}_1$ 中的导数项 $|D\phi|^2$ 中自然地含有

$$\frac{1}{2}m\phi W_\mu^a W^{\mu a}.$$

物理上 $\phi = 1$ 称为真空态. 因为在真空态下 $\mathcal{L}_1(1) = \dfrac{m}{2}W_\mu^a W^{\mu a}$, 于是 (3.5.4) 的作用量在 $\phi = 1$ 条件下变为

$$\tilde{\mathcal{L}}_1(W_\mu^a) = \mathcal{L}(W_\mu^a) + \frac{m}{2}W_\mu^a W^{\mu a}. \tag{3.5.5}$$

因此, (3.5.5) 的对称破缺是在真空态中自发的, 即自然发生的. 这便是自发对称破缺机制的内涵.

将人工对称破缺机制 (3.5.3) 与自发对称破缺机制 (3.5.4)-(3.5.5) 对照, 它们的区别是, 人工机制没有其他粒子而自发机制存在另一种 Bose 子 ϕ, 称为 Higgs 粒子. 人工机制不可取, 而自发机制取决于实验. 在 2012 年, CERN 报告了发现 Higgs 粒子的消息, 尽管仍有一些问题存在.

自发对称破缺现象最早是由 Nambu 和 Jona-Lasinio 发现的, 见 (Nambu, Jona-Lasinio, 1961). Higgs 粒子的发现证实了自发对称破缺机制的正确性. Nambu 因此而获得 2008 年诺贝尔物理学奖.

然而自发对称破缺机制的表现方式不是唯一的. 由 (3.5.4)-(3.5.5) 给出的方式就是所说的 Higgs 机制, 它是半人工的, 因为 (3.5.4) 中 $\mathcal{L}_1(\phi)$ 这一项是人工加进去的, 存在很大的随意性. 在后面介绍的相互作用动力学原理 (PID) 将给出自发对称破缺的另一种方式, 这种机制完全是来自于第一原理.

3.4 节: 量子色动力学自从提出 r, g, b 三种色量子数 (Greenberg, 1964) 后, 具有很大的发展, 并且得到不少实验支持. 如支持色量子数的著名实验事实是, $\pi^0 \to 2\gamma$ 衰变概率的实验, 电子对碰撞截面比值的实验; 支持胶子存在的实验是喷注性现象, 支持渐近自由的是 e-p 深度非强性实验.

量子色动力学的几个重要理论之一就是认为色量子数产生于色荷, 而色荷是造成强相互作用的根源, 就如电荷是产生电磁相互作用的根源一样. 但是作为强相互作用的耦合常数, 色荷应该具有守恒性. 这个基本性质从 QCD 无法推出. 但是从弱子模型很容易获得这个结论. 总之, 作为一个相互作用来源的作用荷应同时具备如下三个基本功能:

$$\text{守恒性、具有代数运算性、相互作用的耦合常数.} \tag{3.5.6}$$

经典的 QCD 无法满足 (3.5.6) 的三个基本要求.

在本书中建立的色代数解决了色荷的代数运算问题, 而弱子模型给出了色荷携带粒子 w^* 的守恒性. 在 (3.5.6) 中最后一个问题, 即色荷应该充当强相互作用耦合常数的作用, 这个问题只有建立了色荷之间的强作用势公式才可解决. 但是现在基本上可以得出结论:

$$\begin{aligned}&\text{强荷 } g_s \text{ 与四种色荷 } r, g, b, y \text{ 都是强相互作用力源,}\\&\text{但强荷 } g_s \text{ 是主要力源它在所有带强荷的粒子之间}\\&\text{起作用, 而色荷只在夸克及带 } y, \bar{y} \text{ 荷的胶子之间起作用.}\end{aligned} \tag{3.5.7}$$

上述结论 (3.5.7) 非常重要, 它是建立在色代数、QCD、弱子模型以及统一场理论的强作用势公式等基础之上的.

夸克的渐近自由理论主要是由夸克-胶子耦合常数公式 (3.4.23) 及其推论 (3.4.24) 构成. 该理论由 Gross, Wilczek (1973) 和 Politzer (1973) 同时提出. 公

式 (3.4.23) 是由计算夸克–胶子相互作用衰变与散射概率过程中得到的, 它不是直接从强相互作用力公式中获得. 因此公式 (3.4.23) 所提供的夸克渐近自由物理图像并不非常清晰, 它看上去与夸克禁闭也无太大关联.

色代数完全是根据 QCD 的物理事实而建立的数学理论. 没有这个数学基础, QCD 中的强子色中性问题、夸克辐射的色变换问题、胶子的色问题以及色荷作为强作用力源问题, 它们都不能得到完满地解决. 色代数的建立很自然地克服了 QCD 的这些困难.

亚原子的媒介子云结构理论是建立在弱子模型、色代数、强相互作用势等理论基础之上的. 由胶子云可以很好地理解夸克辐射现象和 e-p 深度非弹性散射现象. 这里需要强调的是, 虽然实验无法直接测得夸克辐射, 但是许多实验资料都支持这个物理现象. 亚原子媒介子云理论能很好地与电子辐射、夸克辐射以及各类粒子衰变与散射等物理现象相吻合.

第 4 章　统一场几何学

4.1　几何概念的物理诠释

一个普遍存在的现象就是物理学家读不懂数学家, 数学家读不懂物理学家, 从而在现代数学与现代物理之间产生一道难以逾越的鸿沟. 除了知识面造成的限制这个基本原因外, 另一个重要原因是, 绝大多数的数学家和物理学家对他们各自领域所涉及的最简单和最基本的概念没有真正理解和掌握, 一味追求高深和晦涩的名词, 不屑于简单. 从而写出来的著作很难叫人读懂. 此外, 从读者的角度来讲, 难于读懂现代数学与物理的原因大致有如下几种:

(1) 许多数学和物理的概念 (或名词) 不熟悉, 所涉及的数学符号与它们所表达的内容不能通畅地相互沟通.

(2) 所掌握的各学科知识不系统, 是孤立的、不相连通的. 这是由于读书方式采用实用态度造成的, 需要什么读什么, 缺乏系统的多学科知识的结构, 于是出现综合性很强的内容时, 头脑便会呈现一片空白, 甚至于在什么地方不懂都搞不清楚.

(3) 事实上, 每一个重要的基本概念它的涵义都是多重的, 而通常的读者只习惯于理解单一涵义就够了, 从而难于理解由多重涵义概念联系起来的不同学科交汇的内容.

(4) 读书方式不正确, 习惯于纠缠在技术细节方面, 忘记了读书首要搞懂的地方是: 内容的目的是什么, 它要做什么事以及能够做什么事, 所涉及的问题是自然的还是人工的, 使用的概念实在意义是什么, 以及最终输出结果怎样. 特别是, 真正要搞懂的地方就是最终输出结果, 然后才是中间过程. 抓住了目标才能真正理解实现目标的过程.

这一节的开场白似乎与本节内容无关. 但实质上这部著作的内容无论在广度和深度上都属于科学中最高层次, 因而突出地存在着难以读懂的问题. 上面一席话目的是告诫读者不要轻视这一节, 虽然内容只涉及几个概念与名称, 但是它们是搞懂整个统一场理论最关键的核心部分. 这里将采用最简单的方式介绍它们.

再次强调如下三条道理: 我们不理解高深复杂的内容是因为我们在最简单最基本的地方没有理解透彻; 真正有重大突破的原创性工作, 它们的起始点和入手处多数是在平凡而又不起眼的地方; 大多数复杂而又高难度的工作, 如果它们不是扎根于自然和简单, 那么它们有很大的可能性是人工制造品或是智力竞赛产物.

4.1.1　反映空间弯曲状态的量——Riemann 度量

所谓度量就是空间两点之间的距离. 这是一个大家都知道的概念, 然而又是多数人不清楚也不愿意多关注的概念. 但是我们要指出的是, Riemann 开创了以他名字命名的几何学, Einstein 创立了广义相对论, 他们的超人之处不在别的地方, 就是在度量这个平凡的概念上看到了常人看不到的两个重要特性:

(1) Riemann 发现了度量是刻画空间弯曲的量, 从而以度量为基点建立了弯曲空间的几何学 (弯曲空间称为流形);

(2) Einstein 注意到度量 (即距离) 与表达它的坐标系选择无关. 这个看上去再平凡不过的事情在 Einstein 眼里却变成发现广义相对论最关键的线索. 如果一个人不知道这一点而只知道 Einstein 引力场方程, 那么他永远也不可能搞懂广义相对论.

下面我们针对这最要害的两个平凡特点来介绍度量概念. 有耐心读下去的读者从这一小节的内容可体验到对于一些所谓高深的理论我们真正不懂的地方究竟在哪里, 从而可以反观到自己在学习和研究过程中被忽略的最重要东西是什么.

1. 度量如何反映空间的弯曲

首先我们观察图 4.1 和图 4.2 给出的一个平直空间和一个弯曲空间. Euclid 几何告诉我们区别这两种空间的根本标准就是

$$\text{平直空间中勾股定理成立,} \tag{4.1.1}$$

$$\text{弯曲空间中勾股定理不成立.} \tag{4.1.2}$$

在图 4.1 的 n 维平直空间 R^n 中, x_1 和 x_2 两点距离 ΔS 由 (4.1.1) 的勾股定理可表达为

$$|\Delta S|^2 = (\Delta x^1)^2 + \cdots + (\Delta x^n)^2, \quad \Delta x^i = x_2^i - x_1^i, \tag{4.1.3}$$

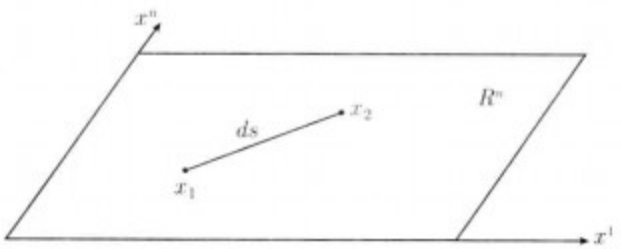


图 4.1　R^n 的平直性等价于空间中勾股定理 (4.1.4) 成立

其中 $(x_k^1, \cdots, x_k^n)$ 是点 x_k $(k = 1, 2)$ 的坐标. 通常用充分接近的两点 x_1 和 x_2 的距离表达度量有很大的方便, 此时可用微分取代 (4.1.3) 的差值表达式, 即 (4.1.3) 改写成

$$\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}x^1)^2 + \cdots + (\mathrm{d}x^n)^2. \tag{4.1.4}$$

在通常的几何书中就将 (4.1.4) 称作 Euclid 度量.

再来看图 4.2 所示的 n 维弯曲空间. 此时空间中两点之间没有直线连接, 因而距离概念变得模糊. 但是任何弯曲空间每一点无穷小的邻域是平直的, 因而充分接近的两个点 p_1 和 p_2 可直线连接, 它们的距离便是如下微分表达:

$$\mathrm{d}s^2 = |\mathrm{d}\vec{r}\,|^2 = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1\,|^2, \quad \vec{r}\,(x) = p \text{ 见图 4.2.} \tag{4.1.5}$$

由于弯曲空间的点 p 用参数 $(x^1, \cdots, x^n)$ 表达, 几何中将这些参变量称为局部坐标系, 就像图 4.2 所显示的那样. 此时 (4.1.5) 中的

$$\mathrm{d}\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1 + \cdots + \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^n}\mathrm{d}x^n, \quad \vec{r}\,(x) = p,$$

因而 (4.1.5) 可用坐标系 $(x^1, \cdots, x^n)$ 表达为

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \quad \text{(注意指标求和约定)}, \tag{4.1.6}$$

其中 $g_{ij} = g_{ji}$ 是对称的, 以及

$$g_{ij} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^j}, \tag{4.1.7}$$

几何学中就将 (4.1.6) 称作 Riemann 度量.

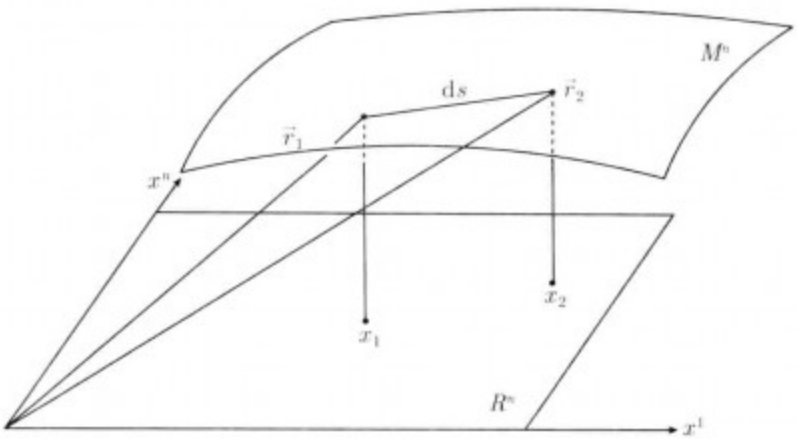


图 4.2 弯曲空间的 $\mathrm{d}s^2$(见 (4.1.6)) 不满足勾股定理

注意到, (4.1.1) 和 (4.1.2) 是用文字将平直空间与弯曲空间区别开, 而 (4.1.4) 和 (4.1.6) 是将这些文字译成度量的表达形式来区分它们. 换句话讲, 一个空间的弯曲状态可由 (4.1.6) 的度量矩阵形式

$$G = (g_{ij}(x)), \quad x \in M^n \tag{4.1.8}$$

来反映, 当 $G=I$ 是单位矩阵时, 空间是平直的, 当 G 不是单位矩阵时 (即对任何坐标系有 $G\neq I$), 则空间 M^n 一定是弯曲的.

Riemann 正是抓住这个关键点, 将度量(4.1.8) 赋予一个流形 M^n, 于是 $\{M^n, g_{ij}\}$ 便是一个由 $\{g_{ij}\}$ 决定的弯曲空间, 称为 Riemann 流形. Riemann 几何便是在 $\{M^n, g_{ij}\}$ 上展开的几何学. 更直白地讲, M^n 只是一个 n 维空间, 并无形状 (几何) 可言. 就像曲面概念, 你不能将它画出来它只是所有各种形状曲面总的名称而已, 然而一但将它具体画出, 它的弯曲状态便被确定. Riemann 几何便是如此, 一旦给 M^n 赋予具体的度量函数 $\{g_{ij}\}$, 那么 $\{M^n, g_{ij}\}$ 就如具体画出的图像一样, 它的几何形状便被给出, 剩下的过程就是如何从给定的度量 $\{g_{ij}\}$ 具体求出 M^n 的几何. 这就是 Riemann 几何最核心的思想.

现在再回过来审视我们自己与 Riemann 眼界的差异. 这可能主要就是表现在我们根本就忽略了 (4.1.1)-(4.1.2) 这个平凡的事实, 同时忘掉了 (4.1.4) 和 (4.1.6) 便是 (4.1.1) 和 (4.1.2) 的数学表达. 此外还缺少一种转换能力, 也就是如上面所说的那样, 将 M^n 配上度量就相当于将 M^n 具体画出来给出形状. 这种在自然现象与数学之间能进行自如地相互转换能力正是通常人们所缺乏的.

有些读者可能会纠缠在这个问题上, 即 (4.1.7) 的 g_{ij} 表达式依赖于点 p 的具体坐标表达 $\vec{r}\ (x)$ 的函数形式, 这个函数形式不知道, 我们就无法知道 g_{ij} 的形式, 因而不能知道 $\{M^n, g_{ij}\}$ 的几何. 这是一种直线思维. Riemann 几何的思维方式是跃过 $\vec{r}\ (x)$ 表达形式这个中间环节, 直接将 $g_{ij}(x)$ 的函数形式给出来. 以 g_{ij} 为起始点, 而不是以 $\vec{r}$ 的坐标表达 (数学上将此称为 M^n 到 R^{n+1} 的局部嵌入) 为起始点来研究 $\{M^n, g_{ij}\}$ 是 Riemann 几何的另一重要特征. 该特征便是数学上常说的 "内蕴几何" 的本质含义.

2. Riemann 几何导致广义相对论的过程

流形 M^n 被配上度量 $\{g_{ij}\}$ 后, $\{M^n, g_{ij}\}$ 便有了形状 (几何). 由 $\{g_{ij}\}$ 的表达式 (4.1.7) 可以推出, 当坐标进行如下变换时,

$$x^i=\varphi^i(\tilde{x}),\quad 1\leqslant i\leqslant n, \tag{4.1.9}$$

g_{ij} 按如下规则进行变换:

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{ij}&=\frac{\partial\vec{r}}{\partial\tilde{x}^i}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial\tilde{x}^j}=\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial\tilde{x}^i}\right)\cdot\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial x^l}\frac{\partial x^l}{\partial\tilde{x}^j}\right)\\&=\frac{\partial x^k}{\partial\tilde{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial\tilde{x}^j}\frac{\partial\vec{r}}{\partial x^k}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial x^l}\\&=\frac{\partial\varphi^k}{\partial\tilde{x}^i}\frac{\partial\varphi^l}{\partial\tilde{x}^j}g_{kl}\quad\text{(由(4.1.9))},\end{aligned} \tag{4.1.10}$$

即 (4.1.10) 的变换规则表明 Riemann 度量 $\{g_{ij}\}$ 是一个二阶协变张量场. 由 Riemann 几何, 从度量张量可引入一组函数

$$\Gamma_{ij}^{k}=\frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^{j}}+\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^{i}}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{l}}\right), \tag{4.1.11}$$

数学上称作 Levi-Civita 联络, 由它可对 Riemann 流形 $\{M^n,g_{ij}\}$ 上任何张量场定义协变导数如下:

$$\begin{aligned}
&D_iu=\frac{\partial u}{\partial x^{i}}, \quad \text{对标量场 } u,\\
&D_iu_j=\frac{\partial u_j}{\partial x^{i}}-\Gamma_{ij}^{k}u_k, \quad \text{对余切向量场 } u_j,\\
&D_iu^k=\frac{\partial u^k}{\partial x^{i}}+\Gamma_{ij}^{k}u^j, \quad \text{对向量场 } u^k,\\
&\cdots\cdots\\
&D_iu_{j_1\cdots j_s}^{k_1\cdots k_r}=\frac{\partial u_{j_1\cdots j_s}^{k_1\cdots k_r}}{\partial x^{i}}-\Gamma_{ij_1}^{l}u_{lj_2\cdots j_s}^{k_1\cdots k_r}-\cdots-\Gamma_{ij_s}^{l}u_{j_1\cdots j_{s-1}l}^{k_1\cdots k_r}\\
&\qquad\qquad+\Gamma_{il}^{k_1}u_{j_1\cdots j_s}^{lk_2\cdots k_r}+\cdots+\Gamma_{il}^{k_r}u_{j_1\cdots j_s}^{k_1\cdots k_{r-1}l}.
\end{aligned} \tag{4.1.12}$$

一旦关于张量场的导数 (4.1.13) 被建立, 那么在 Riemann 流形 $\{M^n,g_{ij}\}$ 上便可建立协变微分方程:

$$G(u,Du,\cdots,D^mu)=0, \quad x\in M^n, \tag{4.1.13}$$

式中 u 为 M^n 上张量场, D 为协变导数.

Riemann 流形 $\{M^n,g_{ij}\}$ 上的关系式 (4.1.11)-(4.1.13) 再加上 (1.3.34) 的曲率张量, 这些内容构成 Riemann 几何的主体框架. 不熟悉 Riemann 几何的读者只需接受这些事实即可. 下面介绍的便是 Einstein 如何将他的物理观念转化成数学形式的广义相对论过程.

Einstein 建立了狭义相对论后, 他进一步地认为一个普适的物理定律不仅对惯性坐标系成立, 而且对所有的非惯性坐标系也同样成立. 这就是广义相对性原理, 它是逻辑上合理的一个平凡结论. 然而 Einstein 的过人之处在于他能够将此原理没有障碍地转化成如下等价的数学形式:

Einstein 广义相对性原理 一个普适的物理定律可由一个微分方程表达, 它对于所有坐标变换都是协变的.

由 Riemann 几何, 对所有坐标变换都是协变的微分方程 (4.1.13) 只能定义在 Riemann 流形 $\{M^n,g_{ij}\}$ 上. 因此广义相对性原理便导出如下结论:

$$\text{宇宙时空是一个四维 Riemann 流形 } \{M^4,g_{\mu\nu}\}. \tag{4.1.14}$$

再由等效原理 (见 1.3.2 小节) 可确定 $g_{\mu\nu}$ 的物理意义为

$$M^4 \text{ 上的度量 } g_{\mu\nu} \text{ 代表引力势.} \tag{4.1.15}$$

最后一步是确定 $g_{\mu\nu}$ 满足的微分方程, 只有这样才可求出 $g_{\mu\nu}$ 的具体表达形式, 从而才能算是一个完整的有意义的理论. 决定引力场方程形式的是 Lagrange 动力学原理, 由此我们只需找到 M^n 上关于 $g_{\mu\nu}$ 不超过二阶导数的作用量密度. 而由 Riemann 几何, 满足上述要求的不变量唯一地由 (1.3.34) 的标量曲率 $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ 给出. 于是便得到广义相对论的作用量, 称为 Einstein-Hilbert 作用量密度

$$\mathcal{L}_{EH} = R + \frac{8\pi G}{c^4}S, \quad S = g^{\mu\nu}S_{\mu\nu}, \tag{4.1.16}$$

$S_{\mu\nu}$ 为能量动量应力张量.

由 (4.1.14)-(4.1.16) 给出的便是广义相对论全部理论基础, 其他所有结论都是从它们推导出来.

4.1.2　物理场与向量丛

所谓向量丛就是一个 n 维流形 (称为底流形)M 的每一点 $p \in M$ 都携带一个 N 维实或者复的向量空间 E^N, 简记为

$$M \times E_p^N \quad (E_p^N = R^N \text{ 或 } C^N), \quad \forall p \in M. \tag{4.1.17}$$

在 (4.1.17) 中 E_p^N 虽然在拓扑结构上与 $p \in M$ 点无关, 但是在几何结构上, 即 E_p^N 的几何位置与 p 有关 (如果无关则为平凡丛). 例如, M 的切空间构成的向量丛, 简称切丛, 记为

$$TM = M \times T_pM, \quad T_pM = R^n \text{ 是 } p \in M \text{ 点的切空间,} \tag{4.1.18}$$

在不同的点 p 上, 切空间 T_pM 几何位置不相同.

引入向量丛概念的物理背景很明确, 就是因为所有物理事件都是发生在某个底流形 M 上, 而描述这个事件的物理量 u 却是定义在 M 的向量丛上. 下面三个例子能很清楚地说明这一点.

例 1　地球表面的流体运动是发生的地球表面的球面 S^2 上, 但是描述该运动状态的速度向量 u 却是定义在 S^2 的切平面上, 即 u 是一个从 S^2 到 TS^2 上的映射:

$$u:\ S^2 \to TS^2, \tag{4.1.19}$$

即 $u(p) \in T_pS^2 = R^2, \forall p \in S^2$.

例 2 电磁相互作用是在四维宇宙时空 M^4 中进行, 而反映电磁场状态的四维向量场 A^μ 是定义在 M^4 的切空间上,

$$A^\mu:\ M^4 \to TM^4, \tag{4.1.20}$$

其中对任何 $p \in M^4$, 切空间 T_pM^4 是 Minkowski 空间.

例 3 电子是在 M^4 中进行运动. 但是反映电子运动状态的是 Dirac 旋量场 $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^{\mathrm{T}}$, 它是定义在四维复空间 C^4 上的, 因而是如下映射:

$$\psi:\ M^4 \to M^4 \times C^4_p, \quad \forall p \in M^4. \tag{4.1.21}$$

以上三个例子 (4.1.19)-(4.1.21) 充分地显示了所有的物理量都是定义在某个流形 M 的向量丛上, 即是一个映射

$$\begin{cases} u:\ M \to M \times E^N_p, & \text{称为向量丛截面,} \\ u(p) \in E^N_p, & \forall p \in M. \end{cases} \tag{4.1.22}$$

从形式上看, 引入向量丛概念来描述物理量, 即用 (4.1.22) 来定义物理量似乎只是换一种语言形式而已, 并没有增添任何新的内容. 但是从作者的体验来讲, 要进入到本书中的统一场数学理论, 不采用向量丛的语言系统将会有很大的困难, 同时也会产生许多概念上的混乱. 事实上, 往往一种新的概念代表一种新的认识问题的视角. 向量丛是一个值得重视的数学概念.

在 (4.1.22) 中给出的物理量 u, 它的值域是 N 维线性空间 E^N, 因此要记住 u 有 N 个分量, 即

$$u = \{u_1, \cdots, u_N\}.$$

物理对称性变换总是可归于 E^N 上某种变换, 从而造成 u 的变换.

使用向量丛来作为语言系统有一个优点就是当用 (4.1.22) 来表达物理量 u 时, u 所属的不同类型物理场直接可由向量丛线性空间 E^N 的类型反映出来. 下面给出常见的物理场.

(1) 一个实 (复) 标量场 ϕ 对应的丛空间为

$$\phi:\ M^4 \to M^4 \times R\ (M^4 \times C), \quad M^4 \text{ 为宇宙时空流形.}$$

(2) 四维向量场 A^μ 对应的丛空间是 M^4 的切空间 TM^4, 即

$$A^\mu:\ M^4 \to TM^4 = M \times T_pM^4, \quad p \in M^4.$$

这里需要强调一下, μ 为上指标的是向量场, 它属于一阶反变张量场, 而 μ 为下指标的称为余切向量场, 也叫作协变向量场. 向量场 A^μ 与协变向量场 A_μ 的关系为

$$A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu \quad \text{(注意指标求和约定),}$$

这里 $g_{\mu\nu}$ 是 M^4 的 Riemann 度量.

(3) 协变向量场 A_μ 对应的从空间是 M^4 的协变切空间, 记为

$$A_\mu:\ M^4 \to T^*M^4 = M^4 \times T_p^*M^4, \quad p \in M^4,$$

(4) M^4 上的一个 (k,r) 型张量场 u 可表达成

$$u = \{u^{\mu_1\cdots\mu_k}_{\nu_1\cdots\nu_r}\},$$

具有 $4^{k\times r}$ 个分量, 它们对应的从空间记为

$$u:\ M^4 \to T_r^k M^4,$$

这里 $T_r^k M$ 表示流形 M 上的 (k,r) 型张量丛, 它也表达为

$$T_r^k M = \underbrace{TM \otimes \cdots \otimes TM}_{k} \otimes \underbrace{T^*M \otimes \cdots \otimes T^*M}_{r}, \tag{4.1.23}$$

其中 $\otimes$ 为线性空间的张量积, 4.1.3 小节将详细介绍此概念.

(5) N 个 Dirac 旋量场 $\Psi = (\psi_1, \cdots, \psi_N)^{\mathrm{T}}$ 对应的从空间为

$$\Psi:\ M^4 \to M^4 \times C_p^{4\times N}, \quad p \in M^4.$$

(6) 引力场 $g_{\mu\nu}$ 对应的从空间为

$$g_{\mu\nu}:\ M^4 \to T^*M \times T^*M.$$

以上 (1)~(6) 所例举的流形上从映射 (数学上称为向量丛的截面) 包括了所有类型的物理场及其对应的向量丛.

耦合四种相互作用的统一场理论是本书的主题之一. 因此知道统一场理论所涉及的所有物理量是很有必要的. 下面给出这些物理场及其对应的向量丛空间. 描述四种相互作用的物理场分别给出如下.

引力相互作用场是 M^4 上的 Riemann 度量:

$$g_{\mu\nu}:\ M^4 \to T_2^0 M = T^*M \otimes T^*M. \tag{4.1.24}$$

电磁相互作用是 $U(1)$ 规范场:

$$(A_\mu, \psi):\ M^4 \to M^4 \times (T_p^*M \oplus C_p^4), \quad p \in M^4, \tag{4.1.25}$$

其中 $\oplus$ 表示线性空间的直和.

弱作用是 $SU(2)$ 规范场:

$$(W_\mu^a, \Psi^w):\ M^4 \to M^4 \times [(T_p^* M)^3 \oplus C_p^{4\times 2}], \tag{4.1.26}$$

其中 W_μ^a $(1 \leqslant a \leqslant 3)$ 是 $SU(2)$ 规范势, $\Psi^w = (\psi_1^w, \psi_2^w)$ 为 $SU(2)$ 的二重 Dirac 旋量, 见 3.1.3 小节.

强作用是 $SU(3)$ 规范场:

$$(S_\mu^k, \Psi^s):\ M^4 \to M^4 \times [(T_p^* M)^8 \oplus C_p^{4\times 3}], \tag{4.1.27}$$

其中 S_μ^k $(1 \leqslant k \leqslant 8)$ 是 $SU(3)$ 规范势, $\Psi^s = (\psi_1^s, \psi_2^s, \psi_3^s)$ 是 $SU(3)$ 的三重 Dirac 旋量.

四种相互作用的对偶场:

$$(\phi^G, \phi^E, \phi_a^w, \phi_k^s):\ M^4 \to M^4 \times [T^* M \oplus R \oplus R^3 \oplus R^8]_p, \tag{4.1.28}$$

其中 $\phi^G = \phi_\mu^G$ 是引力对偶场, 为一个协变向量场, ϕ^E, ϕ_a^w $(1 \leqslant a \leqslant 3)$ 和 ϕ_k^s $(1 \leqslant k \leqslant 8)$ 分别是电磁作用、弱作用与强作用的对偶场, 它们全部是标量场.

由 (4.1.24)-(4.1.28) 提供的就是统一场所涉及的全部物理场, 其中对偶场 (4.1.28) 只出现在统一场方程中, 而并不出现在统一场的 Lagrange 作用量中.

4.1.3 向量丛的张量积

这一小节将介绍在 (4.1.23) 中出现的向量丛空间张量积所代表的意思是什么, 同时也将阐明为什么由 (4.1.23) 所表达的 $T_r^k M$ 向量丛代表了 (k, r) 型张量丛的意义. 这进一步也可表明广义相对性所要求的流形上坐标变换实质上可等效地表达成张量丛 $M \times E_p$ 的丛空间 E_p 上的线性变换, 这种变换将自动地造成物理场 (丛截面)

$$u:\ M \to M \times E_p$$

的相应变换. 只有采用这种方式才能使得后面建立的统一场理论的 Lagrange 作用量同时满足广义相对性原理, Lorentz 不变性原理, 规范不变性原理.

(1) n 维线性空间 E 和它的共轭空间 E^* 中的元素分别是一阶反变张量和一阶协变张量. E 和 E^* 中元素可写成

$$\begin{aligned} x &= x^i e_i, \quad \forall x \in E, \\ y &= y_j e^j, \quad \forall y \in E^*, \end{aligned} \tag{4.1.29}$$

其中 $e_1, \cdots, e_n$ 是 E 的坐标系基底, $e^1, \cdots, e^n$ 是对偶坐标基, 即它们满足如下关系:

$$\langle e_i, e^j \rangle = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \tag{4.1.30}$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为 E 与 E^* 之间的对偶积. 当 E 的坐标基发生变换时,

$$\begin{pmatrix}\tilde{e}_1\\ \vdots\\ \tilde{e}_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}e_1\\ \vdots\\ e_n\end{pmatrix},\quad A\text{ 为 }n\text{ 阶矩阵},\tag{4.1.31}$$

则由 (4.1.30) 可推出对偶坐标基也将发生如下变换:

$$\begin{pmatrix}\tilde{e}^1\\ \vdots\\ \tilde{e}^n\end{pmatrix}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}e^1\\ \vdots\\ e^n\end{pmatrix},\quad A^{\mathrm{T}}\text{ 为 }A\text{ 的转置}.$$

再由 $\tilde{x}^i\tilde{e}_i=x^ie_i$ 及 $\tilde{y}_j\tilde{e}^j=y_je^j$(向量与基底无关) 可推出, 当发生 (4.1.31) 坐标变换时, (4.1.29) 的元素将分别发生如下变换:

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}^1\\ \vdots\\ \tilde{x}^n\end{pmatrix}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}x^1\\ \vdots\\ x^n\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}\tilde{y}_1\\ \vdots\\ \tilde{y}_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}.$$

这意味着 E 和 E^* 中元素分别是一阶反变和一阶协变张量.

(2) 张量积 $E\otimes E$ 的含义. 首先 $E\otimes E$ 是一个 n^2 维的线性空间, 它的坐标基是由 $\{e_i\otimes e_j\}$ 构成, 即 $E\otimes E$ 中任何元素 g 可表达成如下形式:

$$g=g^{ij}e_i\otimes e_j,\quad\forall g\in E\otimes E.\tag{4.1.32}$$

下面将表明 $E\otimes E$ 中的元素是二阶反变张量.

当发生 (4.1.31) 坐标变换时, $E\otimes E$ 的坐标基将按如下方式进行变换:

$$(\tilde{e}_i\otimes\tilde{e}_j)=A(e_i\otimes e_j)A^{\mathrm{T}}.\tag{4.1.33}$$

这是因为 $(e_i\otimes e_j)$ 视为 n 阶矩阵时它等价于如下形式:

$$\begin{aligned}(\tilde{e}_i\tilde{e}_j)&=\begin{pmatrix}\tilde{e}_1\\ \vdots\\ \tilde{e}_n\end{pmatrix}(\tilde{e}_1\cdots\tilde{e}_n)=A\begin{pmatrix}e_1\\ \vdots\\ e_n\end{pmatrix}(e_1\cdots e_n)A^{\mathrm{T}}\\ &=A(e_ie_j)A^{\mathrm{T}},\end{aligned}$$

这便是 (4.1.33) 的变换. 在另一方面, (4.1.32) 的表达式可等价地看作是两个矩阵 $(g^{ij})^{\mathrm{T}}$ 和 $(e_i\otimes e_j)$ 乘积的迹, 即

$$g^{ij}e_i\otimes e_j=\mathrm{Tr}[(g^{ij})^{\mathrm{T}}(e_i\otimes e_j)].$$

于是由迹的不变性可得

$$\tilde{g}^{ij}\tilde{e}_i \otimes \tilde{e}_j = g^{ij}e_i \otimes e_j.$$

再由 (4.1.33) 可推出在 (4.1.31) 变换下, 有

$$(\tilde{g}^{ij}) = (A^{-1})^{\mathrm{T}}(g^{ij})A^{-1}. \tag{4.1.34}$$

变换关于 (4.1.34) 也可写成

$$\tilde{g}^{ij} = b_k^i b_l^j g^{kl}, \quad (b_j^i) = A^{-1}.$$

这便说明 $E \otimes E$ 的元素是二阶反变张量.

类似地, 如下张量积空间:

$$\underbrace{E \otimes \cdots \otimes E}_{k} \otimes \underbrace{E^* \otimes \cdots \otimes E^*}_{r} \tag{4.1.35}$$

是一个 $n^{k\times r}$ 维的线性空间, 它的元素是 (k,r) 型张量.

(3) (k,r) 型张量丛 $T_r^k M$. 先从流形 M 的切丛 TM 和余切丛 T^*M 谈起. T^*M 被定义成 TM 的对偶向量丛, 即在 TM 与 T^*M 之间有一个对偶积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的结构. 也就是说, 对于

$$\begin{aligned} &u:\ M \to TM = M \times T_pM, \quad && u(p) \in T_pM = E, \\ &v:\ M \to T^*M = M \times T_p^*M, \quad && v(p) \in T_p^*M = E^*, \end{aligned} \tag{4.1.36}$$

$\langle u(p), v(p)\rangle$ 是 $p \in M$ 的实函数, 即

$$\langle\cdot,\cdot\rangle:\ TM \times T^*M \to R^1 \tag{4.1.37}$$

是一个双线性泛函 (数学上证明它唯一存在).

由前面关于 E, E^* 的介绍, 从 (4.1.36) 可知, TM 的截面 $u: M \to TM$ 是 M 上的一个反变向量场, 而 T^*M 的截面 $v: M \to T^*M$ 是一个协变向量场. 若

$$(e_1(p), \cdots, e_n(p)) \text{ 是 } T_pM \text{ 的坐标基}, \tag{4.1.38}$$

$$(e^1(p), \cdots, e^n(p)) \text{ 是对偶坐标基}, \tag{4.1.39}$$

那么 TM 和 T^*M 上截面可表达为

$$\begin{aligned} &u = u^i e_i, \quad \forall u:\ M \to TM, \\ &v = v_i e^i, \quad \forall v:\ M \to T^*M. \end{aligned}$$

于是在 (4.1.37) 对偶积作用下有

$$\langle u, v\rangle = u^i v_i,$$

这便是反变向量场与协变向量场的内积.

搞清了 TM 与 T^*M 概念后, 由 (4.1.35) 的数学意义, 我们便立刻可以知道下面向量丛的张量积含义

$$T_r^k M = \underbrace{TM \otimes \cdots \otimes TM}_{k} \otimes \underbrace{T^*M \otimes \cdots \otimes T^*M}_{r}, \tag{4.1.40}$$

也即 (4.1.23) 的向量丛, 它的截面

$$T:\ M \to T_r^k M \text{ 代表一个 } (k,r) \text{ 型张量场.}$$

$T_r^k M$ 称为 (k,r) 型张量丛.

4.1.4　丛空间的线性变换

介绍完了张量丛 $T_r^k M$ 的概念后, 现在讨论流形 M 中的坐标变换与张量丛 $T_r^k M$ 上从空间线性变换之间关系.

回忆流形 M 上的坐标系概念, 它就是在 M 上每一点 $p \in M$ 的邻域 U 取一个如图 4.2 那样的坐标空间 R^n, 用 R^n 中数值化的点 $x = (x^1, \cdots, x^n)$ 来代表 U 中的点. 所谓坐标变换就是取另一个坐标空间 $\bar{R}^n$ 它的坐标为 $\tilde{x} = (\tilde{x}^1, \cdots, \tilde{x}^n)$. 于是 $\tilde{x}$ 与 x 之间便有一个对应关系 (即函数关系), 可写作

$$\tilde{x}^i = \varphi^i(x), \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{4.1.41}$$

这就是坐标变换的具体数学表达.

当坐标发生 (4.1.41) 的变换时, M 的切空间 TM 的从空间 T_pM 也将发生线性变换. 事实上在 $x = (x^1, \cdots, x^n)$ 坐标系下 T_pM 的基底 (4.1.38) 可具体表达成

$$e_i = \partial/\partial x^i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{4.1.42}$$

其原因就是这种表达自动满足坐标基的如下变换关系:

$$\begin{pmatrix} \tilde{e}_1 \\ \vdots \\ \tilde{e}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial/\partial\tilde{x}^1 \\ \vdots \\ \partial/\partial\tilde{x}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x^j}\dfrac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial x^j}\dfrac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^n} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}, \tag{4.1.43}$$

其中 A 是 (4.1.41) 逆变换的 Jacobi 矩阵,

$$A=\left(\frac{\partial\psi^i}{\partial\tilde{x}^j}\right)^{\mathrm{T}},\quad x^i=\psi^i(\tilde{x}). \tag{4.1.44}$$

同理 T_p^*M 的坐标基 (4.1.39) 可写成

$$e^i=\mathrm{d}x^i,\quad 1\leqslant i\leqslant n. \tag{4.1.45}$$

当发生 (4.1.41) 坐标变换时, T_p^*M 的坐标基也发生如下变换:

$$\begin{pmatrix}\tilde{e}^1\\ \vdots\\ \tilde{e}^n\end{pmatrix}=(A^{\mathrm{T}})^{-1}\begin{pmatrix}e^1\\ \vdots\\ e^n\end{pmatrix},\quad A\text{ 如 (3.1.42).} \tag{4.1.46}$$

以上 (4.1.42) 和 (4.1.45) 具体给出了 TM 和 T^*M 的从空间坐标基, 而 (4.1.43) 和 (4.1.46) 则给出 M 的坐标变换 (4.1.41) 与 TM 和 T^*M 从空间变换之间的关系.

进一步地, 由 (4.1.40) 可知 T_r^kM 的坐标基可表达成

$$e_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots j_r}=e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_k}\otimes e^{j_1}\otimes\cdots\otimes e^{j_r}, \tag{4.1.47}$$

其中 e_i,e^j 如 (4.1.42) 和 (4.1.45). 于是在 (4.1.41) 坐标变换下, 由 (4.1.43) 和 (4.1.46) 可推知 T_r^kM 的坐标基按如下规则进行变换:

$$\tilde{e}_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots j_r}=a_{i_1}^{l_1}\cdots a_{i_k}^{l_k}b_{s_1}^{j_1}\cdots b_{s_r}^{j_r}e_{l_1\cdots l_k}^{s_1\cdots s_r}, \tag{4.1.48}$$

其中

$$a_i^l=\frac{\partial\psi^l}{\partial\tilde{x}^i},\quad b_s^j=\frac{\partial\varphi^j}{\partial x^s},\quad \psi\text{ 与 }\varphi\text{ 互为逆变换.}$$

于是, 当 M 发生 (4.1.41) 的坐标变换时, M 的张量从 T_r^kM 将发生 (4.1.48) 的线性变换. 而 T_r^kM 的坐标基变换 (4.1.48) 又会自动引起 (k,r) 型张量场

$$T=T_{j_1\cdots j_r}^{i_1\cdots i_k}e_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots j_r}:\ M\to T_r^kM \tag{4.1.49}$$

的张量变换

$$\tilde{T}_{j_1\cdots j_r}^{i_1\cdots i_k}=b_{l_1}^{i_1}\cdots b_{l_k}^{i_k}a_{j_1}^{s_1}\cdots a_{j_r}^{s_r}T_{s_1\cdots s_r}^{l_1\cdots l_k}. \tag{4.1.50}$$

注 4.1 传统的 (k,r) 型张量场 $T=\{T_{j_1\cdots j_r}^{i_1\cdots i_k}\}$ 的定义是: 当 M 的坐标系发生 (4.1.41) 变换时, T 将发生 (4.1.50) 变换. 而由上面的讨论, 可以抽去 M 的坐标 x 及其变换 (4.1.41), 直接在 T_r^kM 的从空间中给出一组坐标基

$$\{\varepsilon_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots j_r}\}, \tag{4.1.51}$$

以及对任一个 n 阶非退化矩阵 A, 记为

$$A = (a_i^l), \quad A^{-1} = (b_s^j), \tag{4.1.52}$$

进行坐标基变换

$$\tilde{\varepsilon}_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots j_r} = a_{i_1}^{l_1}\cdots a_{i_k}^{l_k} b_{s_1}^{j_1}\cdots b_{s_r}^{j_r}\varepsilon_{l_1\cdots l_k}^{s_1\cdots s_r}, \tag{4.1.53}$$

那么相应地张量丛 $T_r^k M$ 的截面

$$T = T_{j_1\cdots j_r}^{i_1\cdots i_k}\varepsilon_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots j_r} : \ M \to T_r^k M \tag{4.1.54}$$

也将按 (4.1.50) 方式进行变换. 按 (4.1.51)-(4.1.54) 这种方式定义 M 的 (k,r) 型张量场与传统的方式相比较, 它们的差别在于新的方式是用从空间的线性变换 (4.1.52)-(4.1.53) 取代了经典的 M 上坐标变换 (4.1.41). 这种改变对于后面建立的统一场理论是关键性的.

四种相互作用场满足三种对称性 (实质上是四种, 即还有一个是表示不变性原理): 广义不变性原理、Lorentz 不变性原理、规范不变性原理. 这三种对称性都相应地具有自己的变换. 现在将物理场归为向量丛上的截面

$$u : \ M \to M \times E_p, \quad p \in M, \tag{4.1.55}$$

于是上述三种对称性变换可统一地表述成各自对应的从空间 E_p 上的线性变换. 下面分别介绍它们.

1. $SU(N)$ 规范变换

由规范理论知, $SU(N)$ 规范场 (G_μ^a, Ψ) 中的 Ψ 是 N 重 Dirac 旋量, 它是如下复向量从上的截面:

$$\Psi = (\psi^1, \cdots, \psi^N) : \ M^4 \to M^4 \times C_p^{4\times N}. \tag{4.1.56}$$

注意 $SU(N)$ 规范变换 (见 3.1.2 小节) 为

$$\begin{pmatrix} \tilde{\psi}^1 \\ \vdots \\ \tilde{\psi}^N \end{pmatrix} = e^{\mathrm{i}\theta^a\tau_a}\begin{pmatrix} \psi^1 \\ \vdots \\ \psi^N \end{pmatrix}, \quad e^{\mathrm{i}\theta^a\tau_a} \in SU(N). \tag{4.1.57}$$

现在从 (4.1.56) 的映射角度看, (4.1.57) 的规范变换可等价地视为 $M^4 \times C_p^{4\times N}$ 上的从空间 $C_p^{4\times N}$ 的线性变换:

$$e^{\mathrm{i}\theta^a\tau_a} : \ C_p^{4\times N} \to C_p^{4\times N}. \tag{4.1.58}$$

也就是说, 对于 (4.1.56) 的截面 Ψ, 当从空间发生 (4.1.58) 变换时, 它自动会产生 (4.1.57) 的变换.

2. Lorentz 变换

$SU(N)$ 规范场 (G_μ^a, Ψ) 的 G_μ^a $(1 \leqslant a \leqslant N^2-1)$ 中每一个都是 T^*M^4 上的四维向量场, 即

$$G_\mu^a : \ M^4 \to M^4 \times T_p^* M^4.$$

于是 (G_μ^a, Ψ) 是如下向量丛的截面

$$(G_\mu^a, \Psi) : \ M^4 \to M^4 \times (T_p^* M^4)^{N^2-1} \times C_p^{4\times N}. \tag{4.1.59}$$

回忆关于四维向量场 G_μ 和 Dirac 旋量 ψ 的 Lorentz 变换是指 G_μ 和 ψ 进行的如下变换:

$$\tilde{G}_\mu = (L^{\mathrm{T}})^{-1} G_\mu, \quad \tilde{\psi} = U_L \psi, \tag{4.1.60}$$

其中 L 是 Lorentz 矩阵, 由 (1.2.42) 和 (1.2.43) 的复合矩阵, U_L 是由 L 决定的旋量表示矩阵, 见 (1.4.52) 和 (1.4.53). 因此由向量丛截面 (4.1.59) 的观点, (4.1.60) 的变换可视为如下从空间的线性变换导致的结果,

$$(L^T)^{-1} : \ T_p^* M^4 \to T_p^* M^4 \quad (T_p^* M^4 \text{ 为 Minkowski 空间}), \tag{4.1.61}$$

$$U_L : \ C_p^4 \to C_p^4. \tag{4.1.62}$$

即 Lorentz 变换可归结为 (4.1.61)-(4.1.62) 的从空间变换.

3. 广义张量变换

引力场 $g_{\mu\nu}$ 是 $(0,2)$ 型张量从 $T_2^0 M^4$ 上的截面

$$g_{\mu\nu} : \ M^4 \to T_2^0 M^4 = M^4 \times [T_p^* M^4 \otimes T_p^* M^4], \tag{4.1.63}$$

在 (4.1.51)-(4.1.54) 已看到, 关于 $g_{\mu\nu}$ 的张量变换可归结到从空间 $T_p^* M^4 \otimes T_p^* M^4$ 上的线性变换. 这里我们更具体地用矩阵来表达从空间和张量的变换.

M^4 是一个四维流形, (e^1, e^2, e^3, e^4) 是 $T_p^* M^4$ 的一个坐标基, 则

$$\{e^i \otimes e^j\} \text{ 构成 } T_p^* M^4 \otimes T_p^* M^4 \text{ 的坐标基.}$$

关于此基底作如下指标重新安排:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^1 = e^1 \otimes e^1, \quad \varepsilon^2 = e^1 \otimes e^2, \quad \varepsilon^3 = e^1 \otimes e^3, \quad \varepsilon^4 = e^1 \otimes e^4,\\
&\varepsilon^5 = e^2 \otimes e^1, \quad \varepsilon^6 = e^2 \otimes e^2, \quad \varepsilon^7 = e^2 \otimes e^3, \quad \varepsilon^8 = e^2 \otimes e^4,\\
&\varepsilon^9 = e^3 \otimes e^1, \quad \varepsilon^{10} = e^3 \otimes e^2, \quad \varepsilon^{11} = e^3 \otimes e^3, \quad \varepsilon^{12} = e^3 \otimes e^4,\\
&\varepsilon^{13} = e^4 \otimes e^1, \quad \varepsilon^{14} = e^4 \otimes e^2, \quad \varepsilon^{15} = e^4 \otimes e^3, \quad \varepsilon^{16} = e^4 \otimes e^4.
\end{aligned} \tag{4.1.64}$$

则在新的指标 (4.1.64) 排列下, 关于 $\varepsilon^{j_1j_2}=e^{j_1}\otimes e^{j_2}$ 所作的 (4.1.53) 坐标基变换可以写成如下形式:

$$\begin{pmatrix}\tilde{\varepsilon}^1\\ \vdots\\ \tilde{\varepsilon}^{16}\end{pmatrix}=B\otimes B\begin{pmatrix}\varepsilon^1\\ \vdots\\ \varepsilon^{16}\end{pmatrix},\quad B=A^{-1}\text{ 如 (4.1.52) 矩阵},\tag{4.1.65}$$

其中 $B\otimes B$ 是如下的矩阵张量积 (也可见 (2.4.6) 一般定义):

$$B\otimes B=\begin{pmatrix}b_1^1B & b_2^1B & b_3^1B & b_4^1B\\ b_1^2B & b_2^2B & b_3^2B & b_4^2B\\ b_1^3B & b_2^3B & b_3^3B & b_4^3B\\ b_1^4B & b_2^4B & b_3^4B & b_4^4B\end{pmatrix}.$$

于是在 (4.1.65) 的从空间 $T_p^*M^4\otimes T_p^*M^4$ 线性变换下, (4.1.63) 的截面按如下规则进行变换:

$$\begin{pmatrix}\tilde{g}_1\\ \vdots\\ \tilde{g}_{16}\end{pmatrix}=A\otimes A\begin{pmatrix}g_1\\ \vdots\\ g_{16}\end{pmatrix},\quad A\text{ 如 (4.1.52)},\tag{4.1.66}$$

其中 $g_1,\cdots,g_{16}$ 是 $g_{\mu\nu}$ 按 (4.1.64) 的方式进行地指标重新排列.

同样地, 对于一般 n 维流形 M 的 (k,r) 型张量从上截面

$$T:\ M\to T_r^kM,\tag{4.1.67}$$

若从空间坐标基 (4.1.51) 作类似于 (4.1.64) 的指标重排:

$$\varepsilon^1,\cdots,\varepsilon^N,\quad N=n^{k\times r},$$

那么 T_r^kM 从空间的坐标基变换 (4.1.53) 可等价地写成

$$\begin{pmatrix}\tilde{\varepsilon}^1\\ \vdots\\ \tilde{\varepsilon}^N\end{pmatrix}=\underbrace{A\otimes\cdots\otimes A}_{k}\otimes\underbrace{B\otimes\cdots\otimes B}_{r}\begin{pmatrix}\varepsilon^1\\ \vdots\\ \varepsilon^N\end{pmatrix},\tag{4.1.68}$$

式中 A 和 $B=A^{-1}$ 如 (4.1.52), 此时 (4.1.67) 的张量场 T 进行如下变换

$$\begin{pmatrix}\tilde{T}_1\\ \vdots\\ \tilde{T}_N\end{pmatrix}=\underbrace{B\otimes\cdots\otimes B}_{k}\otimes\underbrace{A\otimes\cdots\otimes A}_{r}\begin{pmatrix}T_1\\ \vdots\\ T_N\end{pmatrix},\tag{4.1.69}$$

其中 $(T_1,\cdots,T_N)^{\mathrm{T}}$ 是 $T=\{T^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_r}\}$ 的相应指标重排.

4.1.5 向量丛上的协变导数与联络

在 4.1.1 小节已看到, 当将物理场表达成向量丛截面时,

$$u:\ M \to M \times E_p, \quad p \in M, \tag{4.1.70}$$

对应于三种不变性原理的对称性变换可转化成丛空间 E_p 上的某种线性变换, 即有

$$U:\ E_p \to E_p, \quad p \in M, \quad U \text{ 为一矩阵}. \tag{4.1.71}$$

同时由 U 可确定一个矩阵 H, 使得 (4.1.70) 截面发生如下变换:

$$\tilde{u} = H(p)u, \quad p \in M. \tag{4.1.72}$$

再由 Lagrange 动力学原理, 存在一个作用量

$$L = \int_M \mathcal{L}(u, Du, \cdots, D^m u)\mathrm{d}x, \tag{4.1.73}$$

使得 u 是该作用量 L 变分方程的解, 并且 L 是在 (4.1.72) 变换下不变的. 这种不变性要求 (4.1.73) 中所涉及的导数 D 也应该在 (4.1.71)-(4.1.72) 变换下具有某种协变性. 这便是这一小节将介绍的主要概念协变导数以及联络.

先简要地介绍一下什么是协变导数和联络以及它们之间的关系, 然后再具体介绍统一场所涉及的两种协变导数: 规范协变导数与张量协变导数.

所谓协变导数 D 是指当发生 (4.1.71)-(4.1.72) 变换时, 存在一个与 U 和 H 有关的矩阵 N, 使得

$$\tilde{D}\tilde{u} = NDu. \tag{4.1.74}$$

再回过来看通常的导数

$$\partial = (\partial_1, \cdots, \partial_n)^{\mathrm{T}}, \quad \partial_k = \partial/\partial x^k.$$

将它作用在 (4.1.72) 上时有

$$\tilde{\partial}\tilde{u} = A\partial(Hu) = N\partial u + A\partial Hu, \quad N = AH, \tag{4.1.75}$$

其中 $\tilde{\partial} = A\partial$ 是如 (4.1.43). 对照 (4.1.74) 发现在 (4.1.75) 中多出一项 $A\partial Hu$. 因此通常导数 ∂ 没有协变性. 为解决此问题, 再加上一个场 Γ, 即定义 u 的导数为

$$Du = (\partial + \Gamma)u, \tag{4.1.76}$$

使得 D 满足 (4.1.74) 的协变性, 即

$$(\tilde{\partial} + \tilde{\Gamma})\tilde{u} = N(\partial + \Gamma)u, \quad N = AH. \tag{4.1.77}$$

于是 (4.1.76) 定义的 $D=\partial+\Gamma$ 便是协变导数, 而 Γ 便称为联络. 再由 (4.1.75) 和 (4.1.77) 可推得 Γ 的变换规则为

$$\tilde{\Gamma}=AH\Gamma H^{-1}-A\partial HH^{-1},\quad \text{其中 } \tilde{\partial}=A\partial. \tag{4.1.78}$$

上面给出的协变导数 $D=\partial+\Gamma$ 以及联络 Γ 很抽象. 下面将具体给出两个具有物理意义的协变导数, 即复向量丛上的协变导数与张量丛上协变导数及其联络.

1. 复向量丛上的协变导数与联络

$SU(N)$ 规范物理场 (4.1.70) 是 N 重 Dirac 旋量 $u=\Psi$, 它是 $4N$ 维复向量丛 $M^4\times C_p^{4N}$ 上的截面

$$\Psi=(\psi^1,\cdots,\psi^N)^{\mathrm{T}}:\ M^4\to M^4\times C_p^{4N}, \tag{4.1.79}$$

对应 (4.1.71) 的 $SU(N)$ 规范变换具体表达为

$$U=e^{\mathrm{i}\theta^a\tau_a}:\ C_p^{4N}\to C_p^{4N},\quad U\in SU(N). \tag{4.1.80}$$

此时对应于 (4.1.72) 的变换为

$$\begin{pmatrix}\tilde{\psi}^1\\ \vdots\\ \tilde{\psi}^N\end{pmatrix}=H\begin{pmatrix}\psi^1\\ \vdots\\ \psi^N\end{pmatrix},\quad H=U=e^{\mathrm{i}\theta^a\tau_a}. \tag{4.1.81}$$

对于复向量丛的变换 (4.1.80) 来讲,

$$\tilde{\partial}_\mu=\partial_\mu,\quad \text{即 (4.1.78) 的矩阵 } A=I.$$

于是对 (4.1.79) 的 $u=\Psi$ 来讲, (4.1.76) 的协变导数为

$$D_\mu\Psi=(\partial_\mu+\Gamma_\mu)\Psi,\quad \mu=0,1,2,3, \tag{4.1.82}$$

其中联络 $\Gamma_\mu=(\Gamma_0,\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3)$ 的每个分量都是一个 N 阶复矩阵. 注意到 (4.1.81) 保范变换 H 是由 $SU(N)$ 的生成元 τ_a $(1\leqslant a\leqslant N^2-1)$ 来表示, 故 N 阶矩阵 Γ_μ 也应是 τ_a 的线性组合, 我们将它们写成如下形式:

$$\Gamma_\mu=\mathrm{i}gG_\mu^a\tau_a,\quad g \text{ 为一个常数}, \tag{4.1.83}$$

其中 G_μ^a $(1\leqslant a\leqslant N^2-1)$ 是复向量丛 $M^4\times C_p^{4N}$ 上的联络, 由 (4.1.78) 可知在 (4.1.81) 变换下 G_μ^a 联络变换为

$$\tilde{G}_\mu^a\tau_a=HG_\mu^a\tau_aH^{-1}+\frac{\mathrm{i}}{g}\partial_\mu HH^{-1},\quad H=e^{\mathrm{i}\theta^a\tau_a}. \tag{4.1.84}$$

再由 (4.1.82) 中的 ∂_μ 是 Lorentz 协变导数, 因而对每个指标 a, G_μ^a 都是一个协变的 Lorentz 向量场.

再与 3.1.3 小节中的规范理论对照, 我们发现 $SU(N)$ 规范场 (3.1.20) 的 Ψ 就是复向量丛 $M^4 \times C_p^{4N}$ 的截面 (4.1.79), 而 (3.1.20) 中的 N^2-1 个 Lorentz 向量场 G_μ^a 是 $M^4 \times C_p^{4N}$ 复向量丛上的联络 (4.1.83), 其 $SU(N)$ 规范变换 (3.1.24) 和 (3.1.26) 与这里的变换 (4.1.81) 和 (4.1.84) 完全一致.

因此, 可以得出如下结论:

$$SU(N) \text{ 规范场} = \text{复向量丛 } M^4 \times C_p^{4N} \text{ 上的联络.}$$

2. 张量丛上的协变导数与联络

令 M 是一个 n 维流形. 由于 M 上的一般张量丛 $T_r^k M$ 可表达成 k 个切丛 TM 与 r 个余切丛 T^*M 张量积 (4.1.40) 的形式, 因此先从切丛 TM 和余切丛 T^*M 上的协变导数开始.

(1) TM 上的协变导数与联络. M 上的一个反变向量场 u 就是切丛 TM 上的一个截面

$$u^k : M \to M \times T_pM. \tag{4.1.85}$$

当 T_pM 发生如 (4.1.43) 变换时, 即

$$U : T_pM \to T_pM, \quad U = A = (a_j^i), \tag{4.1.86}$$

则 u 发生如下变换:

$$\tilde{u} = Hu, \quad H = A^{-1} = (b_l^k). \tag{4.1.87}$$

此时 ∂ 按如下规则变换:

$$\tilde{\partial} = A\partial, \quad A = (a_j^i) \text{ 如 (4.1.86).}$$

于是 (4.1.76) 的协变导数限制到 (4.1.85) 的反变向量场 u 的情况时, 它表达成如下形式:

$$D_k u^i = \partial_k u^i + \Gamma_{kl}^i u^l. \tag{4.1.88}$$

对于向量场 $u = (u^1, \cdots, u^n)$ 来讲, (4.1.75) 在这里写成如下形式 (注意这里 $H = A^{-1} = (b_l^k)$):

$$\begin{aligned}\tilde{\partial}_i \tilde{u}^j &= A\partial \otimes (A^{-1}u) = A \otimes A^{-1} \cdot \partial \otimes u + A\partial \otimes A^{-1}u \\ &= a_i^l b_k^j \partial_l u^k + a_i^l \partial_l b_k^j u^k.\end{aligned}$$

此时 (4.1.78) 写成

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}^i_{kj} &= A\otimes A\otimes A^{-1}\Gamma - A\otimes A\cdot\partial\otimes A^{-1}\\ &= a^r_k a^s_j b^i_l \Gamma^l_{rs} - a^r_k a^s_j \partial_r b^i_s.\end{aligned}\tag{4.1.89}$$

这样便得到反变向量场 u^k 的协变导数 (4.1.88) 和相关联络 $\Gamma=\{\Gamma^i_{kj}\}$ 及其变换规则 (4.1.89).

(2) T^*M 上的协变导数. 对于协变向量场 v,

$$v_k:\ M\to M\times T^*_pM,$$

它与反变向量场 u^k 的内积

$$v_iu^i = \text{ 标量场.}$$

而标量场的协变导数就是通常导数 ∂. 于是有

$$\begin{aligned}D_k(u^iv_i) &= D_ku^iv_i + u^iD_kv_i\\ &= \partial_k(u^iv_i) = \partial_ku^iv_i + u^i\partial_kv_i.\end{aligned}\tag{4.1.90}$$

将 (4.1.88) 代入 (4.1.90) 便得

$$u^iD_kv_i = u^i\partial_kv_i - \Gamma^l_{ki}u^iv_l.$$

由于 u^i 是任意的反变张量场. 于是从上式便得到

$$D_kv_i = \partial_kv_i - \Gamma^l_{ki}v_l.$$

这便是协变向量场的协变导数, 其联络 $\{-\Gamma^l_{kj}\}$ 与反变向量场的联络只是符号相反.

(3) 一般张量丛 T^k_rM 上的协变导数. 协变导数 D 关于两个张量场的张量积满足分配律:

$$D(A\otimes B) = DA\otimes B + A\otimes DB.$$

于是对于两个反变向量场 u 和 v 的张量积 $u\otimes v=\{u^iv^j\}$, 它的协变导数为

$$\begin{aligned}D_ku\otimes v &= D_k(u^iv^j) = D_ku^iv^j + u^iD_kv^j\\ &= \partial_ku^iv^j + u^i\partial_kv^j + \Gamma^i_{kl}u^lv^j + \Gamma^j_{kl}u^iv^l\\ &= \partial_k(u^iv^j) + \Gamma^i_{kl}(u^lv^j) + \Gamma^j_{kl}(u^iv^l).\end{aligned}$$

将一般二阶反变张量场 T^{ij} 取代上式的 u^iv^j 便得到 T^2_0M 上的协变导数如下:

$$D_kT^{ij} = \partial_kT^{ij} + \Gamma^i_{kl}T^{lj} + \Gamma^j_{kl}T^{il}.$$

采用同样的方法, 对于一般 (k,r) 型张量场

$$T = T^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_r} : \ M \to T^k_r M,$$

它的协变导数可写成

$$\begin{aligned} D_k T^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_r} =& \partial_k T^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_r} + \Gamma^{i_1}_{kl} T^{li_2\cdots i_k}_{j_1\cdots j_r} + \cdots + \Gamma^{i_k}_{kl} T^{i_1\cdots i_{k-1}l}_{j_1\cdots j_r} \\ & - \Gamma^{l}_{kj_1} T^{i_1\cdots i_k}_{lj_2\cdots j_r} - \cdots - \Gamma^{l}_{kj_r} T^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_{r-1}l}. \end{aligned} \tag{4.1.91}$$

注 4.2 (4.1.10) 曾给出 Riemann 流形上张量场的协变导数. 这里是对一般流形 (不一定是 Riemann 流形) 的张量丛上给出协变导数 (4.1.91), 它们在形式上与 (4.1.10) 是一致的. 特别地, 若 M 是 Riemann 流形, 则联络 Γ^k_{ij} 可表达成 (4.1.11) 的形式, 详细介绍可见 (马天,2012).

4.2 Riemann 流形上张量场的正交分解

4.2.1 概况性介绍

令 M 是一个 n 维 Riemann 流形, u 是 M 上一个张量场

$$u : \ M \to T^k_r M.$$

所谓 u 的正交分解是指 u 能够表达成如下两种张量场之和:

$$u = \nabla\phi + v, \tag{4.2.1}$$

其中 $\nabla\phi$ 是某个张量场 ϕ 的梯度, v 是散度为零的一个张量场,

$$\operatorname{div} v = 0, \tag{4.2.2}$$

并且 $\nabla\phi$ 与 v 是正交的, 即它们的内积为零,

$$\langle \nabla\phi, v\rangle = \int_M \nabla\phi \cdot v \mathrm{d}x = 0. \tag{4.2.3}$$

整个 4.2 节的内容就是围绕着证明任何张量场 u 都具有如 (4.2.1)-(4.2.3) 这样的正交分解而展开的.

从 (4.2.1)-(4.2.3) 可以看到, 关于张量场的分解定理需要涉及张量场的梯度, 散度, 以及如 (4.2.3) 的两个张量场内积等一些基本的分析概念. 同时, 定理的证明也要用到一些关于偏微分方程和泛函分析方面的基础知识. 所有这些在这里都会给予介绍.

为了方便进一步的阅读, 下面将简要地介绍 R^n 上向量场的正交分解, 以便使读者对该定理有一个轮廓性的了解, 并且对它的本质也可得到很好的掌握.

R^n 上的向量场可简记为 R^n 到 R^n 的映射

$$u:\ R^n \to R^n. \tag{4.2.4}$$

它可表达为

$$u(x) = (u^1(x), \cdots, u^n(x)), \quad x \in R^n.$$

u 的散度定义为

$$\text{div } u = \frac{\partial u^1}{\partial x^1} + \cdots + \frac{\partial u^n}{\partial x^n}.$$

R^n 上的一个标量函数 $\phi:\ R^n \to R$ 的梯度定义为

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial \phi}{\partial x^n}\right).$$

现在我们需要考虑向量场 (4.2.4) 关于 (4.2.1)-(4.2.3) 的正交分解. 由于 u 给定, 于是 div u 是一个确定的函数. 考虑下面二阶 Poisson 方程

$$\begin{cases} \Delta\phi = \text{div } (\nabla\phi) = \text{div } u, \\ \phi \to 0,\ |x| \to \infty. \end{cases} \tag{4.2.5}$$

由椭圆方程理论知道 (4.2.5) 存在唯一解 ϕ. 再令

$$v = u - \nabla\phi, \tag{4.2.6}$$

那么由 (4.2.5) 便看到 v 是散度为零的, 即

$$\text{div } v = \text{div } u - \text{div } (\nabla\phi) = 0.$$

于是 (4.2.6) 便是 u 的分解

$$u = v + \nabla\phi, \quad \text{div } v = 0. \tag{4.2.7}$$

再考察 v 与 $\nabla\phi$ 的内积, 它定义为

$$\langle v, \nabla\phi\rangle = \int_{R^n} v \cdot \nabla\phi \mathrm{d}x.$$

由分部积分公式 (也称为 Gauss 公式), 有

$$\int_{R^n} v \cdot \nabla\phi \mathrm{d}x = -\int_{R^n} \phi \text{div } v \mathrm{d}x, \quad \phi \to 0, \text{ 当 } |x| \to \infty.$$

再由 div $v=0$ 便得到正交性结论:

$$\int_{R^n} v\cdot\nabla\phi \mathrm{d}x=0. \tag{4.2.8}$$

于是 (4.2.7)-(4.2.8) 便是向量场 u 的正交分解.

从上面的简要介绍可以看到, 正交分解 (4.2.7) 的实质就是 Poisson 方程 (4.2.5) 解的存在性. 对一般的正交分解 (4.2.1) 也是如此, 关于它两边求散度便得

$$\text{div}\ (\nabla\phi)=\text{div}\ u,\quad \text{在}\ M\ \text{上}. \tag{4.2.9}$$

对于正定的 Riemann 度量, (4.2.9) 是一个椭圆方程; 而对于 Minkowski 型的双曲 Riemann 度量, (4.2.9) 是一个双曲波方程. 因此当 M 是无边流形时, (4.2.9) 存在解 ϕ, 从而有 (4.2.1)-(4.2.3) 的正交分解.

4.2.2 张量场的内积空间

这一节始终假设 M 是一个 n 维 Riemann 流形, 并且没有边界. 考虑 M 上 (k,r) 型张量场

$$u:\ M\to T_r^kM. \tag{4.2.10}$$

在局部坐标 $x=(x^1,\cdots,x^n)$ 下, u 可表达成

$$u(x)=\{u^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_r}\},\quad x\in M. \tag{4.2.11}$$

对于向量场 (4.2.10)-(4.2.11), 需要引入如下内积空间:

1. $L^2(T_r^kM)$ 空间

该空间被定义为

$$L^2(T_r^kM)=\left\{u\ \text{如}\ (4.2.10)\ \middle|\ \int_M u^2\sqrt{g}\mathrm{d}x<\infty\right\}, \tag{4.2.12}$$

其中 $g=\det\ (g_{ij})$, g_{ij} 为 M 的 Riemann 度量, $u^2=u\cdot u$, 而对于任何 $u,v\in L^2(T_r^kM)$ 定义它们的标量积为

$$u\cdot v=g^{j_1l_1}\cdots g^{j_rl_r}g_{i_1s_1}\cdots g_{i_ks_k}u^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_r}v^{s_1\cdots s_k}_{l_1\cdots l_r}. \tag{4.2.13}$$

因为 (4.2.13) 是张量的指标缩并, 因而是一个与坐标选择无关的标量函数. 因此我们可以在 (4.2.12) 的空间中引入如下内积:

$$\langle u,v\rangle=\int_M u\cdot v\sqrt{g}\mathrm{d}x, \tag{4.2.14}$$

如果 M 不是 Riemann 流形, 则无法关于 (4.2.12) 的元素定义如 (4.2.13) 那样的标量函数, 从而不能在 $L^2(T_r^kM)$ 上定义像 (4.2.14) 的内积. 这就是为什么需要假设 M 是 Riemann 流形的根本原因.

通常用 $L^2(M)$ 记 M 上所有平方可积标量函数空间, 即

$$L^2(M)=\left\{f:\ M\to R^1\middle|\ \int_M|f|^2\sqrt{g}\mathrm{d}x<\infty\right\}.$$

2. $H^m(T_r^kM)$ 空间

$H^m(T_r^kM)$ 是由所有 M 上 m 次可微并且平方可积 (k,r) 型张量场构成的空间. 由于对 (k,r) 型张量场 u 作用 m 次协变导数后, D^mu 变为 $(k,r+m)$ 型张量场, 即

$$D^mu:\ M\to T_{r+m}^kM,$$

因此 $H^m(T_r^kM)$ 具体定义为

$$H^m(T_r^kM)=\{u:\ M\to T_r^kM|\ D^iu\in L^2(T_{r+i}^kM),\ 0\leqslant i\leqslant m\}. \tag{4.2.15}$$

同样地, (4.2.15) 是一个 Hilbert 空间, 其内积定义为

$$\langle u,v\rangle_{H^m}=\int_M\sum_{i=0}^mD^iu\cdot D^iv\sqrt{g}\mathrm{d}x. \tag{4.2.16}$$

同样地, 将 M 上所有 m 次可微并且平方可积的全体标量函数所构成的空间记为 $H^m(M)$, 即

$$H^m(M)=\{f:\ M\to R^1|\ D^if\in L^2(T_i^0M),\ 0\leqslant i\leqslant m\}. \tag{4.2.17}$$

4.2.3　梯度与散度算子及其相关性质

R^n 空间上标量场的梯度与向量场的散度是我们所熟悉的概念. 再由 Gauss 公式

$$\int_{R^n}\nabla\phi\cdot v\mathrm{d}x=-\int_{R^n}\phi\mathrm{div}\ v\mathrm{d}x \tag{4.2.18}$$

∇ 与 $-\mathrm{div}$ 是互为共轭的微分算子. 在 4.2.1 小节中已看到正是梯度与散度的这种共轭性质 (4.2.18) 使得向量场能够具有 (4.2.7) 的正交分解. 向量场的正交分解定理能够推广到 Riemann 流形上的一般张量场上, 其原因就是在张量场上也可定义梯度算子 ∇ 和散度算子 div, 并且 ∇ 与 $-\mathrm{div}$ 也是相互共轭的. 这一小节的内容就是介绍这些相关概念与性质.

1. (k,r) 型张量场的梯度

令 $u:\ M \to T_r^k M$ 是流形 M 上的一个 (k,r) 型张量场.

$$u = \{u_{j_1\cdots j_r}^{i_1\cdots i_k}\},$$

则在 u 上定义梯度为

$$\nabla u = \{D_j u_{j_1\cdots j_r}^{i_1\cdots i_k}\}, \quad \text{或者 } \nabla u = \{D^i u_{j_1\cdots j_r}^{i_1\cdots i_k}\}, \tag{4.2.19}$$

其中 $\nabla = (D_1, \cdots, D_n)$ 是协变导数, 见 (4.1.91).

从 (4.2.19) 也可看到, ∇u 是一个 $(k, r+1)$ 型张量场. 因此梯度算子 ∇ 也可视为如下映射

$$\nabla:\ H^1(T_r^k M) \to L^2(T_{r+1}^k M), \quad \text{或者 } \nabla:\ H^1(T_r^k M) \to L^2(T_r^{k+1} M). \tag{4.2.20}$$

经常地, 梯度算子被标为反变算子 D^j 和协变算子 D_j, 其中 D^j 与 D_j 的关系为

$$D^j = g^{ji} D_i. \tag{4.2.21}$$

2. (k,r) 型张量场的散度 $(k+r \geqslant 1)$

若 $k \geqslant 1$, 则 (k,r) 型张量场 $u = \{u_{j_1\cdots j_r}^{i_1\cdots i_k}\}$ 可定义散度为

$$\operatorname{div} u = \{D_{i_1} u_{j_1\cdots j_r}^{i_1\cdots i_k}\}, \tag{4.2.22}$$

若 $r \geqslant 1$, 则可关于下标定义散度为

$$\operatorname{div} u = \{D^{j_1} u_{j_1\cdots j_r}^{i_1\cdots i_k}\}, \quad D^j \text{ 如 (4.2.21)}. \tag{4.2.23}$$

同样地, 由 (4.2.22)-(4.2.23), 散度也可视为如下映射:

$$\begin{cases} \operatorname{div}:\ H^1(T_r^k M) \to L^2(T_r^{k-1} M), & k \geqslant 1, \\ \operatorname{div}:\ H^1(T_r^k M) \to L^2(T_{r-1}^k M), & r \geqslant 1. \end{cases} \tag{4.2.24}$$

当 u 是向量场时, $\operatorname{div} u$ 可简单地表达成如下形式:

$$\operatorname{div} u = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{g}} \dfrac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g} u^k), & u \in H^1(TM), \\ \dfrac{1}{\sqrt{g}} \dfrac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g} g^{kl} u_l), & u \in H^1(T^*M), \end{cases} \tag{4.2.25}$$

其中 $g = \det(g_{ij})$. 这是由于

$$\operatorname{div} u = D_k u^k = \frac{\partial u^k}{\partial x^k} + \Gamma_{kj}^k u^j.$$

由联络 Γ_{ij}^k 的表达式 (4.1.11) 不难推出

$$\Gamma_{kj}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^j} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^j}.$$

于是有

$$\operatorname{div} u = \frac{\partial u^k}{\partial x^k} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^k} u^k = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g} u^k).$$

这样便得到 (4.2.25) 第一个等式. 再将 $u^k = g^{kl} u_l$ 代入 (4.2.25) 第一个等式便得到第二个等式.

3. Laplace 算子 $D^k D_k$

由梯度 ∇ 与散度 div 的复合算子 $\operatorname{div} \cdot \nabla$ 称为 Laplace 算子. 由 (4.2.20) 和 (4.2.21) 可得如下映射:

$$H^2(T_r^k M) \xrightarrow{\nabla} H^1(T_{r+1}^k M) \xrightarrow{\operatorname{div}} L^2(T_r^k M),$$
$$H^2(T_r^k M) \xrightarrow{\nabla} H^1(T_r^{k+1} M) \xrightarrow{\operatorname{div}} L^2(T_r^k M).$$

于是 Laplace 算子 $\operatorname{div} \cdot \nabla$ 是如下映射

$$\operatorname{div} \cdot \nabla : \ H^2(T_r^k M) \to L^2(T_r^k M). \tag{4.2.26}$$

注意到 Riemann 度量 g_{ij} 的协变导数为零 (马天, 2012),

$$D_k(g_{ij}) = 0, \quad D_k(g^{ij}) = 0. \tag{4.2.27}$$

因此 Laplace 算子可表达成

$$\operatorname{div} \cdot \nabla = D^i D_i = D_i D^i = g^{ij} D_i D_j. \tag{4.2.28}$$

由 (4.2.26) 和 (4.2.28) 定义的算子是一个二阶线性微分算子. 当 $\{g_{ij}\}$ 是正定度量时, (4.2.28) 是一个线性椭圆算子, 而当 $\{g_{ij}\}$ 是 Minkowski 双曲度量时, 则 (4.2.28) 是一个线性波算子. 四维时空就是 Minkowski 双曲度量的 Riemann 流形.

下面将给出标量场和向量场这两类场的 Laplace 算子具体表达形式. 首先考虑标量函数

$$u : \ M \to M \times R^1$$

的 Laplace 算子. 此时 u 的梯度为

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x^n} \right).$$

再由公式 (4.2.25) 得到

$$D^iD_iu=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}g^{kl}\frac{\partial u}{\partial x^l}\right). \tag{4.2.29}$$

这就是标量场的 Laplace 算子的表达式.

其次再来考虑向量场的 Laplace 算子表达式. 令

$$u=(u^1,\cdots,u^n):\ M\to TM.$$

由协变导数的定义, 有

$$D_ku^i=\frac{\partial u^i}{\partial x^k}+\Gamma^i_{kj}u^j. \tag{4.2.30}$$

然后由 (4.2.28) 得到

$$D^kD_ku^i=g^{kl}D_lD_ku^i=g^{kl}\left[\frac{\partial}{\partial x^l}(D_ku^i)+\Gamma^i_{lj}D_ku^j-\Gamma^j_{kl}D_ju^i\right].$$

将 (4.2.30) 代入此式便得

$$\begin{aligned}D^kD_ku^i=g^{kl}&\left[\frac{\partial^2u^i}{\partial x^l\partial x^k}+\Gamma^i_{kj}\frac{\partial u^j}{\partial x^l}+\Gamma^i_{lj}\frac{\partial u^j}{\partial x^k}-\Gamma^j_{kl}\frac{\partial u^i}{\partial x^j}\right.\\&\left.+\left(\frac{\partial}{\partial x^l}\Gamma^i_{kj}+\Gamma^i_{ks}\Gamma^s_{kj}-\Gamma^s_{kl}\Gamma^i_{sj}\right)u^j\right].\end{aligned} \tag{4.2.31}$$

同样地, 对于协变向量场可推出

$$\begin{aligned}D^kD_ku_i=g^{kl}&\left[\frac{\partial^2u_i}{\partial x^l\partial x^k}-\Gamma^j_{ki}\frac{\partial u_j}{\partial x^l}-\Gamma^j_{kl}\frac{\partial u_i}{\partial x^j}-\Gamma^j_{li}\frac{\partial u_i}{\partial x^k}\right.\\&\left.-\left(\frac{\partial}{\partial x^l}\Gamma^j_{ki}-\Gamma^s_{kl}\Gamma^j_{si}-\Gamma^s_{li}\Gamma^j_{ks}\right)u_j\right].\end{aligned} \tag{4.2.32}$$

公式 (4.2.31) 和 (4.2.32) 便是向量场的 Laplace 算子表达式.

4. Laplace-Beltrami 算子

对于反变与协变向量场, Laplace-Beltrami 算子 Δ 定义为

$$\begin{aligned}-\Delta u^i&=D^kD_ku^i+g^{ij}R_{jk}u^k,\\-\Delta u_i&=D^kD_ku_i+g^{kj}R_{ji}u_k,\end{aligned} \tag{4.2.33}$$

其中 R_{ij} 是 M 上的 Ricci 曲率张量, 它由 (1.3.34) 给出. 由 (4.2.33) 看到 Laplace-Beltrami 算子 $-\Delta$ 只是比 Laplace 算子多出一个曲率项 $R^i_ku^k$ 或 $R^k_iu_k$ ($R^i_j=g^{il}R_{lj}$).

注 4.3　由 (4.2.33) 定义的 Laplace-Beltrami 算子 $-\Delta$ 在几何中就是 $n-1$ 次微分形式和 1 次微分形式上的 Hodge 算子, 即

$$\Delta = d\delta + \delta d.$$

对于 Hodge 算子可见 (马天, 2010, 2012). 在 Riemann 流形上的流体动力学方程可表达为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = \mu \Delta u - \nabla p + f, \tag{4.2.34}$$

式中 Δ 为 Laplce-Beltrami 算子 (4.2.33), μ 为黏性系数, u 为流体的速度场. 关于方程 (4.2.34) 可见 (Ma, Wang, 2005a, 2005b, 2013a).

注 4.4　关于 Laplace-Beltrami 算子 Δ 还有一个重要的数学性质, 那就是 M 的第一 Betti 数 $\beta_1(M)$ 等于 Δ 零空间的维数, 即

$$\beta_1(M) = \dim \text{ Ker } \Delta, \tag{4.2.35}$$

这里 Ker Δ 为

$$\text{Ker } \Delta = \{u \in H^2(TM) |\ \Delta u = 0\}.$$

公式 (4.2.35) 称为 Hodge 定理, 具体可见 (马天, 2010, 2012).

5. **关于梯度与散度算子的 Gauss 公式**

令 $u \in H^1(T^k_r M)$, $v \in H^1(T^{k+1}_r M)$ 或 $v \in H^1(T^k_{r+1} M)$, 则关于 (4.2.20) 和 (4.2.24) 定义的梯度算子 ∇ 和散度算子 div, 下面积分公式 (称为 Gauss 公式) 成立

$$\begin{aligned} \int_M g_{ij}(\nabla^i u \cdot v^j)\sqrt{g}\mathrm{d}x &= -\int_M u \cdot \text{div } v\sqrt{g}\mathrm{d}x, \\ \int_M g^{ij}(\nabla_i u \cdot v_j)\sqrt{g}\mathrm{d}x &= -\int_M u \cdot \text{div } v\sqrt{g}\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{4.2.36}$$

式中 $u \cdot \text{div } v$ 的定义如 (4.2.13), 而

$$\begin{aligned} (\nabla^i u \cdot v^j) &= g^{j_1 l_1} \cdots g^{j_r l_r} g_{i_1 s_1} \cdots g_{i_k s_k} D^i u^{i_1 \cdots i_k}_{j_1 \cdots j_r} v^{j s_1 \cdots s_k}_{l_1 \cdots l_r}, \\ (\nabla_i u \cdot v_j) &= g^{j_1 l_1} \cdots g^{j_r l_r} g_{i_1 s_1} \cdots g_{i_k s_k} D_i u^{i_1 \cdots i_k}_{j_1 \cdots j_r} v^{s_1 \cdots s_k}_{j l_1 \cdots l_r}. \end{aligned}$$

公式 (4.2.36) 是经典的 Gauss 公式

$$\int_M \text{div } w\sqrt{g}\mathrm{d}x = \int_{\partial M} w \cdot n\mathrm{d}s \tag{4.2.37}$$

的推论. 事实上, 由 M 无边 ($\partial M = \phi$), 以及

$$\begin{aligned} w &= u \cdot v^j, \quad \text{div } w = \nabla u \cdot v^j + u \cdot \text{div } v, \\ w &= u \cdot v_j, \quad \text{div } w = \nabla u \cdot v_j + u \cdot \text{div } v. \end{aligned}$$

于是从 (4.2.37) 便可推得 (4.2.36), 注意这里反复用到 (4.2.27) 的关系式, 即 Riemann 度量关于 D 相当于常数.

6. D_A 与 div_A 算子及其对偶积分公式

令 A 是一个向量场, 则对 $u \in H^1(T_r^k M)$ 可引入 A- 梯度算子 D_A 与 A- 散度算子 div_A 如下:

$$\begin{aligned} D_A u &= D_j u^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_r} + A_j u^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_r}, \\ \mathrm{div}_A u &= D_{i_1} u^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_r} - A_{i_1} u^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_r}. \end{aligned} \tag{4.2.38}$$

不难验证 D_A 与 div_A 是一对共轭算子, 即具有如下积分公式:

$$\int_M D_A u \cdot v\sqrt{g}\mathrm{d}x = -\int_M u \cdot \mathrm{div}_A v\sqrt{g}\mathrm{d}x. \tag{4.2.39}$$

注 4.5 引入 D_A 与 div_A 算子的物理动机是建立统一场理论的需要, 在那里向量场 A 就是电、弱、强相互作用的规范场.

注 4.6 在数学上, 积分公式 (4.2.36) 和 (4.2.39) 的成立对于 v 和 u 其中一个的可微性可降低, 即只要求

$$u \in H^1,\ v \in L^2 \text{ 或 } u \in L^2,\ v \in H^1$$

即可, 此时这些积分公式称为在分布意义下成立.

4.2.4 流形上的分析基础知识

在证明张量场的正交分解定理的过程中, 需要关于线性椭圆方程和线性双曲波方程的弱解存在性的基本结果以及线性全连续场的谱定理. 为了读者的方便, 这里我们不予证明地介绍它们, 有兴趣的读者可参阅相关的参考文献.

首先考虑无边流形 M 上的二阶线性椭圆方程组

$$g^{ij} D_i D_j u = \mathrm{div}\ f + g, \quad \text{在 } M \text{ 上}, \tag{4.2.40}$$

其中 D_i 为协变导数, u 是 M 上 (k,r) 型张量场, f 为 $(k+1,r)$ 型或 $(k,r+1)$ 型及 g 是 (k,r) 型给定张量场, (g_{ij}) 为正定度量.

定义 4.7 令 $f \in L^2(T_r^{k+1}M)$ 或 $f \in L^2(T_{r+1}^k M), g \in L^2(T_r^k M)$. 如果存在一个 $u \in H^1(T_r^k M)$ 使得对所有 $v \in H^1(T_r^k M)$ 下面等式成立

$$\int_M g^{ij} D_i u \cdot D_j v\sqrt{g}\mathrm{d}x = \int_M (f \cdot D_j v - g \cdot v)\sqrt{g}\mathrm{d}x,$$

那么称这个 u 是方程 (4.2.40) 的一个弱解.

关于线性椭圆方程 (4.2.40) 有如下存在性定理.

定理 4.8　假设 f 如定义 4.7, 并且

$$\int_M (\text{div } f + g) \cdot \phi \sqrt{g} \mathrm{d}x = 0, \quad \forall \phi \text{ 满足 } D^j D_j \phi = 0,$$

那么方程 (4.2.40) 存在唯一弱解 $u \in H^1(T_r^k M)$.

当 M 是 Minkowski 型 Riemann 流形时, M 中每一点存在局部坐标系使得 M 的度量张量 g_{ij} 可表达为

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}, \quad G \text{ 为正定度量.}$$

此时 M 上的 Poisson 方程

$$g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu u = \text{div } f, \quad \text{在 } M \text{ 上,} \tag{4.2.41}$$

便是如下双曲波方程

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + G^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta u = \text{div } f,$$

由于 M 是无边界的, 在拓扑结构上 $M = S^1 \times \tilde{M}$, 从而波方程 (4.2.41) 是配以周期边界条件. 用标准的 Galerkin 方法可证得如下结果.

定理 4.9　令 $M = S^1 \times \tilde{M}$ 是 Minkowski 型流形, 若 $f \in H^1(T_r^{k+1} M)$ 则方程 (4.2.41) 存在一个解 $u \in H^2(T_r^k M)$, 并且使得对所有 $v \in H^1(T_r^k M)$ 有

$$\int_M g^{ij} D_i u \cdot D_j v \sqrt{-g} \mathrm{d}x = \int_M f \cdot D v \sqrt{-g} \mathrm{d}x, \tag{4.2.42}$$

其中 $g = \det(g_{ij})$.

最后介绍正定紧 Riemann 流形上 Laplace 算子的谱定理. 令 M 是紧无边流形, g_{ij} 是正定度量. 从 (4.2.29)-(4.2.32) 不难看出, 对任何 (k, r) 型张量场 u, 它的 Laplace 算子都可写成如下形式:

$$D^i D_i u = g^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \text{ 低阶导数项.}$$

由于 M 是紧流形, 这表明 Laplace 算子

$$D^i D_i : \ H^2(T_r^k M) \to L^2(T_r^k M) \tag{4.2.43}$$

是一个全连续场, 于是关于该算子有如下谱定理, 详细可见 (马天, 汪守宏, 2007) 和 (Ma, Wang, 2005b, 2013a).

定理 4.10(Laplace 算子谱定理) 关于 (4.2.43) 的 Laplace 算子 D^iD_i, 它的谱都是实特征值 λ 构成, 即下面方程有非零解

$$D^iD_iu=\lambda u,\quad u\in H^2(T_r^kM);$$

而且所有特征值是一个无穷序列

$$\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_k>\cdots,\quad \lambda_k\to-\infty,\ k\to\infty;$$

每个特征值对应的特征向量空间是有限维的. 特别地, 所有特征向量构成 $L^2(T_r^kM)$ 的一个正交基.

4.2.5 张量场的正交分解定理

这一小节总是假设 M 或者是正定的 Riemann 流形, 或者是 $M=S^1\times\tilde{M}$ 的 Minkowski 型流形.

令 $v\in L^2(T_r^kM)$. 称 v 是 div_A 散度为零的,

$$\mathrm{div}_Av=0, \tag{4.2.44}$$

如果 v 满足

$$\int_M v\cdot D_A\psi\sqrt{g}\mathrm{d}x=0,\quad \forall D_A\psi\in L^2(T_r^kM), \tag{4.2.45}$$

这里 div_A 与 D_A 定义如 (4.2.38).

需要强调的是, 用 (4.2.45) 来定义 v 的散度为零在数学上称作是分布意义的, 它可允许 v 是不可微的情况, 但是当 v 是可微时, 则 (4.2.44) 则是在经典意义下的等式.

下面给出的便是本节主要定理, 它对统一场理论具有基本的重要性, 并对几何学也有重要的意义.

定理 4.11(正交分解定理) 令 A 是一个给定向量场 (允许 $A=0$), $u\in L^2(T_r^kM)(k+r\geqslant 1)$, 那么有如下结论.

(1) 张量场 u 有如下正交分解

$$u=D_A\varphi+v,\quad \mathrm{div}_Av=0, \tag{4.2.46}$$

其中 $\varphi\in H^1(T_r^{k-1}M)$ 或 $\varphi\in H^1(T_{r-1}^kM)$.

(2) 当 M 是紧正定 Riemann 流形时, 则有正交分解

$$u=D_A\varphi+v+h, \tag{4.2.47}$$

其中 φ, v 如 (4.2.46), h 是调和场, 即 h 满足

$$D_A h = 0, \quad \mathrm{div}_A h = 0.$$

(3) 特别地, $L^2(T_r^k M)$ 中所有调和场子空间

$$H(T_r^k M) = \{h \in L^2(T_r^k M) |\ D_A h = 0,\ \mathrm{div}_A h = 0\} \tag{4.2.48}$$

具有有限维, 即 $\dim H(T_r^k M) < \infty$.

证明　我们分两步进行.

第一步. 结论 (1) 的证明. 令 $u \in L^2(T_r^k M)$. 考虑如下方程:

$$D_A^i D_{Ai} \varphi = \mathrm{div}_A u, \quad \text{在 } M \text{ 上.} \tag{4.2.49}$$

当 M 是正定 Riemann 流形时, (4.2.49) 就是如 (4.2.40) 的二阶线性椭圆方程. 而当 M 是 Minkowski 型流形时, 它便是 (4.2.41) 的双曲型线性波方程. 因此对于方程 (4.2.49), 定理 4.8 和定理 4.9 都是有效的.

首先考虑 M 是 Minkowski 型流形情况. 此时由定理 4.9, 方程 (4.2.49) 存在一个弱解 $\varphi \in H^1$, 使得

$$\begin{aligned} \langle D_A \varphi - u, D_A \psi \rangle &= \int_M g^{ij} (D_{Ai} \varphi - u) D_{Aj} \psi \sqrt{g} \mathrm{d}x \\ &= 0 \quad (\text{由 (4.2.40)}), \end{aligned} \tag{4.2.50}$$

对所有 $\psi \in H^1$ 成立. 于是令

$$v = u - D_A \varphi, \tag{4.2.51}$$

则 (4.2.50) 便是如下等式:

$$\langle v, D_A \psi \rangle = \int_M v \cdot D_A \psi \sqrt{g} \mathrm{d}x = 0, \quad \forall \psi \in H^1. \tag{4.2.52}$$

由 (4.2.44)-(4.2.45) 的定义, 等式 (4.2.52) 意味着

$$\mathrm{div}_A v = 0,$$

而 (4.2.51) 便是如 (4.2.46) 的分解, 它的正交性可由 (4.2.52) 导出, 因为将 $D_A \varphi$ 代入 (4.2.52) 便得到 v 与 $D_A \varphi$ 正交.

现在再来考虑 M 是正定 Riemann 流形情况. 由定理 4.8, 若 $\mathrm{div}_A u$ 满足下面等式:

$$\int_M \mathrm{div}_A u \cdot \phi \sqrt{g} \mathrm{d}x = 0, \quad \forall D_A^i D_{Ai} \phi = 0, \tag{4.2.53}$$

那么方程 (4.2.49) 存在一个弱解 $\varphi \in H^1$ 满足 (4.2.50), 这就意味着结论 1) 成立. 因此只需证明 (4.2.53) 成立.

事实上, 当 ϕ 满足 $D_A^i D_{Ai}\phi = 0$ 时, 由 (4.2.39) 知

$$\begin{aligned}\int_M D_A^i D_{Ai}\phi \cdot \phi\sqrt{g}\mathrm{d}x &= \int_M \mathrm{div}_A D_A\phi \cdot \phi\sqrt{g}\mathrm{d}x \\ &= -\int_M D_A\phi \cdot D_A\phi\sqrt{g}\mathrm{d}x \\ &= 0 \quad (\text{由 } D_A^i D_{Ai}\phi = 0).\end{aligned}$$

由度量的正定性, 此式意味着

$$D_A^i D_{Ai}\phi = 0 \ \Leftrightarrow \ D_A\phi = 0.$$

因此关系式 (4.2.53) 对所有 $u \in L^2(T_r^k M)$ 成立. 于是结论 (1) 得证.

第二步. 结论 (2) 和结论 (3) 的证明. 根据结论 (1), 有

$$H^m(T_r^k M) = H_D^m \oplus G^m, \quad L^2(T_r^k M) = L_D^2 \oplus G^2,$$

其中

$$\begin{aligned}H_D^m &= \{u \in H^m(T_r^k M) |\ \mathrm{div}_A u = 0\}, \\ G^{m,2} &= \{u \in H^m(T_r^k M) |\ u = \nabla\psi\},\end{aligned}$$

以及 $L_D^2 = H_D^0, G^2 = G^{0,2}$ 定义算子 $\tilde{\Delta}:\ H_D^2 \to L_D^2$ 为

$$\tilde{\Delta}u = P(D_A^i D_{Ai}u),$$

这里 $P:\ L^2(T_r^k M) \to L_D^2$ 是规范正交投影算子.

Laplace 算子能够表达成

$$D_A^i D_{Ai} = g^{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \text{ 低阶导数项},$$

因为 M 是紧流形, 因此这意味着

$$D_A^i D_{Ai}:\ H^2(T_r^k M) \to L^2(T_r^k M)$$

是一个线性全连续场. 从而

$$\tilde{\Delta}:\ H_D^2(T_r^k M) \to L_D^2(T_r^k M)$$

也是一个线性全连续场. 于是定理 4.10 对于 $\tilde{\Delta}$ 也是有效的. 因此下面空间是有限维的

$$\tilde{H} = \{u \in H_D^2 |\ \tilde{\Delta} u = 0\}, \tag{4.2.54}$$

这是因为它是 $\tilde{\Delta}$ 的零特征值 $\lambda = 0$ 的特征空间.

再由积分公式 (4.2.39), 对 $u \in \tilde{H}$ 有

$$\begin{aligned}\int_M \tilde{\Delta} u \cdot u\sqrt{g}\mathrm{d}x &= \int_M D_A^i D_{Ai} u \cdot u\sqrt{g}\mathrm{d}x \quad (\text{由 } \mathrm{div}_A u = 0)\\ &= -\int_M D_A u \cdot D_A u\sqrt{g}\mathrm{d}x\\ &= 0 \quad (\text{由 } \tilde{\Delta} u = 0).\end{aligned}$$

由此推出

$$u \in \tilde{H} \Leftrightarrow D_A u = 0 \Rightarrow \tilde{H} = H,$$

这里 H 就是由 (4.2.48) 给出的调和函数空间. 于是有

$$\begin{aligned}&L_D^2(T_r^k M) = H(T_r^k M) \oplus L_N^2(T_r^k M),\\ &L_N^2(T_r^k M) = \{v \in L_D^2(T_r^k M) |\ D_A v \neq 0\}.\end{aligned} \tag{4.2.55}$$

而 H 与 L_N^2 的正交性是由谱定理 (定理 4.10) 保证的, 这是因为 $L_N^2(T_r^k M)$ 中元素是所有 $\tilde{\Delta}$ 非零特征值的特征向量线性组合构成, 它们都与 $\tilde{\Delta}$ 的 $\lambda = 0$ 特征向量正交. 于是定理证毕.

注 4.12　正交分解定理 4.11 意味着空间 $L^2(T_r^k M)$ 能够分解成

$$\begin{aligned}&L^2(T_r^k M) = G^2 \oplus L_D^2,\\ &L^2(T_r^k M) = G^2 \oplus L_N^2 \oplus H,\end{aligned} \tag{4.2.56}$$

其中 L_D^2 与 L_N^2 如 (4.2.55), H 如 (4.2.48), 及

$$G^2 = \{u \in L^2(T_r^k M) |\ u = \nabla\varphi,\ \varphi \in H^1(T_{r-1}^k M)\}.$$

并且这些子空间相互正交:

$$L_D^2 \perp G^2,\ L_N^2 \perp G^2,\ L_N^2 \perp H,\ G^2 \perp H.$$

注 4.13　$L^2(T_r^k M)$ 的正交分解 (4.2.56) 意味着如下结论成立, 即若一个张量场 $u \in L^2(T_r^k M)$ 满足

$$\langle u, v\rangle = \int_M u \cdot v\sqrt{g}\mathrm{d}x = 0, \quad \forall\ \mathrm{div}_A v = 0,$$

那么 u 一定是一个梯度场, 即 $u = D_A\varphi$. 又若

$$\langle u, v\rangle = 0, \quad \forall v \in G^2,$$

那么 $u \in L^2_D$. 这便是 (4.2.44)-(4.2.45) 的散度为零定义的原因.

4.2.6 正交分解的唯一性问题

在定理 4.11 中, 一个张量场 $u \in L^2(T^k_r M)$ $(k + r \geqslant 1)$ 能够被正交分解成如下形式:

$$\begin{aligned} &u = \nabla\varphi + v, \quad \operatorname{div} v = 0, \\ &u = \nabla\varphi + v + h, \quad \operatorname{div} v = 0,\ \operatorname{div} h = 0,\ \nabla h = 0,\ \text{当 } M \text{ 正定紧}. \end{aligned} \tag{4.2.57}$$

现在考虑 (4.2.57) 分解的唯一性问题. 事实上, 如果 u 是一个反变或者协变向量场, 即

$$u \in L^2(TM) \text{ 或者 } u \in L^2(T^*M),$$

那么 (4.2.57) 的正交分解是唯一的.

但是当 $u \in L^2(T^k_r M)$ $(k + r \geqslant 2)$ 时, 下面将看到 (4.2.57) 的分解可能会有不同的形式. 例如, 对于 $u \in L^2(T^0_2 M)$. 那么 u 的局部表达为如下形式:

$$u = \{u_{ij}(x)\}.$$

在这种情况下, u 有两种分解方式:

$$\begin{aligned} &u_{ij} = D_i\varphi_j + v_{ij}, \quad D^i v_{ij} = 0, \\ &u_{ij} = D_j\psi_i + w_{ij}, \quad D^j w_{ij} = 0. \end{aligned} \tag{4.2.58}$$

容易看出, 当 $u_{ij} \neq u_{ji}$ 时这两种分解是不相同的, 即

$$\{v_{ij}\} \neq \{w_{ij}\}, \quad (\varphi_1, \cdots, \varphi_n) \neq (\psi_1, \cdots, \psi_n).$$

原因是产生分解的两个微分方程

$$D^i D_i\varphi_j = D^i u_{ij} \text{ 与 } D^i D_i\psi_j = D^i u_{ji} \tag{4.2.59}$$

的给定函数 $D^i u_{ij} \neq D^i u_{ji}$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$.

然而对于对称张量场 $u_{ij} = u_{ji}$, 情况有所不同. 此时对应于 (4.2.58) 的微分方程 (4.2.59) 中

$$D^i u_{ij} = D^i u_{ji} \quad (\text{由于 } u_{ij} = u_{ji}).$$

于是 (4.2.59) 中两个方程的解相同, 即

$$(\varphi_1, \cdots, \varphi_n) = (\psi_1, \cdots, \psi_n).$$

这样, (4.2.58) 的分解可写成

$$\begin{aligned} &u_{ij} = D_i\varphi_j + v_{ij}, \quad D^i v_{ij} = 0, \\ &u_{ij} = D_j\varphi_i + w_{ij}, \quad D^j w_{ij} = 0. \end{aligned} \tag{4.2.60}$$

从 (4.2.60) 能够推出下面唯一性定理.

定理 4.14　令 $u \in L^2(T_2^0 M)$ 是对称的, 即 $u_{ij} = u_{ji}$, 并且 M 的第一 Betti 数 $\beta_1(M) = 0$. 那么有下面结论.

(1) u 的正交分解是唯一的充要条件是存在一个标量场 $\varphi \in H^2(M)$, 使得 u 能够表达成

$$\begin{aligned} &u_{ij} = D_i D_j\varphi + v_{ij}, \\ &D^i v_{ij} = 0, \quad v_{ij} = v_{ji}. \end{aligned} \tag{4.2.61}$$

(2) 如果在 (4.2.60) 中的 v_{ij} 是对称的, 那么 u 的分解是唯一的.

(3) u 具有唯一正交分解的充要条件是如下微分方程存在一个解 $\varphi \in H^2(M), \varphi$ 便是 (4.2.61) 的标量场,

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Delta\varphi + R_i^k \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} = -D^j u_{ji}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{4.2.62}$$

其中 $R_i^k = g^{kj} R_{ij}, R_{ij}$ 是 Ricci 曲率张量, Δ 为标量场 Laplace 算子:

$$\Delta\varphi = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j}\right). \tag{4.2.63}$$

证明　只需证明结论 (2) 和结论 (3).

结论 (2) 的证明. 因为 (4.2.60) 中的 v_{ij} 是对称的, 有

$$D_i\varphi_j = D_j\varphi_i.$$

注意到

$$D_i\varphi_j = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x^i} - \Gamma_{ij}^k \varphi_k.$$

再由 $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, 于是推出

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x^j} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x^i}. \tag{4.2.64}$$

由假设, M 的第一 Betti 数 $\beta_1(M) = 0$, 即 M 的 1 维同调群为零

$$H_1(M) = 0,$$

因此由 de Rham 定理 (马天, 2011), M 上所有闭的 1 次形式

$$\omega = \psi_i \mathrm{d}x^i, \quad \mathrm{d}\omega = \frac{\partial \psi_i}{\partial x^j} \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j = 0$$

都是恰当的, 即存在标量函数 ψ 使得 $\psi_i = \partial\psi/\partial x^i$. 注意到 (4.2.64) 意味着由 $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ 构成的 1 次形式是闭的, 即

$$\mathrm{d}(\varphi_k \mathrm{d}x^k) = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial x^i} \right) \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j = 0.$$

因此推出存在标量场 φ 使得

$$\varphi_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

于是结论 (2) 得证.

结论 (3) 的证明. 关于 (4.2.60) 的等式两端取散度得

$$D^i D_i \varphi_j = D^i u_{ij}. \tag{4.2.65}$$

由 Laplace-Beltrami 算子 (4.2.33),

$$-\Delta_{LB} \varphi_j = D^i D_i \varphi_j + R^k_j \varphi_k, \tag{4.2.66}$$

其中 Δ_{LB} 可写成

$$\Delta_{LB} = \delta d + d\delta.$$

对于 φ_i 构成的微分形式 $\omega = \varphi_i \mathrm{d}x^i$, 有

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \varphi_i = \partial\varphi/\partial x^i, \\ \mathrm{d}\delta\omega = \nabla(\Delta\varphi) \quad &\Leftrightarrow \quad \varphi_i = \partial\varphi/\partial x^i, \end{aligned}$$

这里 ∇ 为梯度算子, Δ 如 (4.2.63). 从这推出

$$\Delta_{LB} \varphi_j = \partial_j(\Delta\varphi) \ \Leftrightarrow \ \varphi_i = \partial\varphi/\partial x^i.$$

这样, 从 (4.2.66) 导出

$$D^i D_i \varphi_j = -\frac{\partial}{\partial x^j}(\Delta\varphi) - R^k_j \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \ \Leftrightarrow \ \varphi_i = \partial\varphi/\partial x^i. \tag{4.2.67}$$

将 (4.2.65) 代入 (4.2.67) 便得到如下方程:

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(\Delta\varphi) + R^k_j \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} = -D^i u_{ij}$$

有解 φ 的充要条件是 (4.2.60) 的 φ_j 是 φ 的梯度场 $\varphi_i = \partial\varphi/\partial x^i$. 于是结论 (3) 得证. 定理证毕.

注 4.15　定理 4.14 的结论对于二阶协变对称张量场 $u = \{u^{ij}\}$ 也是有效的. u 的唯一正交分解由下式给出

$$u^{ij} = D^i D^j \varphi + v^{ij}, \quad \varphi \in H^2(M),$$
$$D_i v^{ij} = 0, \quad v^{ij} = v^{ji}.$$

4.2.7　一般 Minkowski 流形上的正交分解

由于我们所在的宇宙时空是属于四维 Minkowski 流形, 因此在这类流形上的张量场正交分解具有真正的物理意义. 在前面介绍的正交分解定理 4.11 只给出了一类平凡的 Minkowski 流形上张量场的正交分解结果, 即

$$M = S^1 \times \tilde{M}, \quad \tilde{M} \text{ 为 } n-1 \text{ 维无边流形}, \tag{4.2.68}$$

并且 M 上的双曲 Riemann 度量可表达为

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}, \quad G \text{ 为正定度量}. \tag{4.2.69}$$

虽然人们可以用 (4.2.68)-(4.2.69) 这类空时近似描述度量为

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 + (\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + (\mathrm{d}x^3)^2$$

的 Minkowski 空间, 但是在强引力场条件下这种描述具有很大的误差. 事实上, 我们的宇宙时空可能是如下两种情况之一.

情况 1. M 关于时间 t 有起始点, 即

$$M = [0, \infty) \times \tilde{M}_t, \tag{4.2.70}$$

其中 $\tilde{M}_t$ 是与 t 有关的三维无边流形, 代表我们的空间, 在每一时刻 t $(0 < t < \infty)$ 都存在局部坐标系使得 M 的度量可表达成

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + g_{ij}(x,t)\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j. \tag{4.2.71}$$

情况 2. M 关于时间 t 也是无边的. 此时对每一时刻 t 的邻域 M 都可表示成局部乘积结构

$$M_{\Delta T} = (T_0, T_1) \times \tilde{M}_t, \quad T_0 < t < T_1. \tag{4.2.72}$$

从而 M 是所有时间间隔部分 $M_{\Delta T}$ 的并集, 即

$$M = U_k M_{\Delta T_k}, \quad \Delta T_k = (T_k, T_{k+1}). \tag{4.2.73}$$

在每个时间片段 $M_{\Delta T}$, 度量可局部表达成 (4.2.71) 形式.

无论怎样, 一个 Minkowski 流形可严格地定义如下.

定义 4.16 一个 n 维 Riemann 流形 M 被称作是 Minkowski 型的流形, 若在每一点都存在一个邻域 $U \subset M$ 可表达成

$$U = (T_0, T_1) \times \Omega, \quad \Omega \text{ 与 } R^{n-1} \text{ 同胚},$$

并且在该邻域 U 中 M 的度量可表达成 (4.2.71) 形式.

因此, 对于一般 Minkowski 流形 M, 张量场 $u \in L^2(T_r^k M)$ 是否能够具有正交分解完全取决于微分方程 (4.2.49) 具有弱解 $\varphi \in H^1(E), E = T_r^{k-1} M$ 或 $E = T_{r-1}^k M$. 此时 (4.2.49) 写成

$$g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu \varphi = \mathrm{div}_A u \quad \text{在 } M \text{ 上}, \tag{4.2.74}$$

这里 D_μ 是 $D_{A\mu}$ 的简写, $\{g_{\mu\nu}\}$ 是 M 上的双曲 Riemann 度量. 而 (4.2.74) 的弱解 $\varphi \in H^1(E)$ 定义为下面等式

$$\int_M g^{\mu\nu} D_\nu \varphi D_\mu \psi \sqrt{-g} \mathrm{d}x = \int_M u \cdot D_A \psi \sqrt{-g} \mathrm{d}x, \tag{4.2.75}$$

对所有 $\psi \in H^1(E)$ 成立.

根据定理 4.11 的证明过程, 关于一般 Minkowski 流形上的张量场有如下正交分解定理.

定理 4.17 令 M 是一个 Minkowski 流形, $\{g_{\mu\nu}\}$ 是 M 上的双曲 Riemann 度量. 一个张量场 $u \in L^2(T_r^k M)$ 能够正交分解成如下形式:

$$u = D_A \varphi + v, \quad \mathrm{div}_A v = 0, \tag{4.2.76}$$

充分必要条件是 M 上的双曲方程 (4.2.74) 存在弱解 $\varphi \in H^1(E)$, 即对所有的 $\psi \in H^1(E), \varphi$ 满足 (4.2.75).

注 4.18 从数学家的思维角度看定理 4.17 似乎没有太大的意义, 因为对于一般情况下我们无法知道方程 (4.2.74) 是否具有一个弱解 φ. 但是定理 4.17 对统一场来讲是有用的. 这是因为数学家考虑几何问题总是喜欢将 M 和度量 $\{g_{\mu\nu}\}$ 给定, 于是便产生 (4.2.74) 解是否存在的问题. 然而物理学家认为宇宙的几何是由一些原理决定, 其中一个原理就是要求宇宙的 Minkowski 空间上的物理场能够有 (4.2.76) 正交分解 (该原理就是后面将介绍的 PID), 即正交分解是被用来决定我们物理世界的. 于是定理 4.17 告诉我们方程 (4.2.74) 就是用来决定宇宙空间的 $\{g_{\mu\nu}\}$ 和 φ 的场方程.

再次地强调数学与物理视角的差异: 数学家的几何是将 M 和度量 $\{g_{\mu\nu}\}$ 给定, 而物理学却将 $\{g_{\mu\nu}\}$ 作为满足一些原理的方程解来决定 M 及其几何. 本章要建立的统一场几何学所体现的就是这种物理学观念.

事实上, 在许多情况下双曲波方程 (4.2.74) 局部解是存在的. 例如, 当 M 是 (4.2.70) 或 (4.2.73) 情况下, 我们总是可以取 M 的如 (4.2.72) 片段来考虑. 此时方程 (4.2.74) 变为

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - g^{ij}D_iD_j\varphi = \mathrm{div}_A u, \quad T_0 < t < T_1, \tag{4.2.77}$$

关于 t 的边界条件取为

$$\varphi_t = u, \quad \text{在 } t = T_0, T_1. \tag{4.2.78}$$

若 (4.2.77)-(4.2.78) 存在弱解, 即 φ 满足

$$\int_{T_0}^{T_1}\int_{\bar{M}}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t} - g^{ij}D_i\varphi D_j\psi - u\cdot D_A\psi\right]\sqrt{g}\mathrm{d}x = 0,$$

$\forall\psi\in H^1$, 那么 u 可正交分解为

$$u = D_A\varphi + v, \quad \mathrm{div}_A v = 0, \quad v = 0 \text{ 在 } t = T_0, T_1. \tag{4.2.79}$$

对于数学来讲, (4.2.77)-(4.2.78) 的弱解存在性不是一个苛刻的条件. 而对物理来讲, (4.2.79) 的正交分解足以描述我们的物理世界.

4.3　能量动量守恒约束变分学

4.3.1　经典变分原理

经典变分学起源于对一个泛函 (即作用量) 求极小值点的问题. 该问题用抽象的数学语言讲就是, 令 X 是一个 Banach 空间, F 是定义在 X 上的一个泛函, 即

$$F:\ X\to R^1 \tag{4.3.1}$$

是将 X 映到实数空间 R^1 上的一个映射; 所谓有极小值点问题就是寻求 X 中某一点 $u\in X$, 使得在 u 的一个邻域 $U\subset X$ 内 F 在 u 点处取最小值, 也即

$$F(u) = \min_{v\in U} F(v). \tag{4.3.2}$$

极小值问题在物理学中非常普遍地存在. 在本书一开始就介绍的 Lagrange 动力学原理所涉及的就是这个问题. 变分学之所以重要, 除了它所处理的极值问题具有普遍性外, 另一重要之处就是它将 (4.3.2) 的求泛函 F 极小值点问题转化成微分方程求解的问题. 在数学上, 直接寻求 (4.3.2) 的极小值点 u 在绝大多数情况下是行不通的, 然而偏微分方程求解问题却在数学上具有丰富的理论和方法. 因此掌握变分学的一个关键之处就是要熟悉如何将一个泛函 F 具体转化成变分方程的过程. 这个过程就是如何具体求 F 变分导算子的过程.

下面首先用抽象的方法介绍泛函 F 的变分导算子概念, 然后用一个具体例子来说明这个概念.

令 F 是由 (4.3.1) 给出的泛函, X^* 是 X 的对偶空间, 即 X^* 是由所有 X 上的线性有界泛函构成的空间. 若对 $u \in X$ 存在 X 上的一个有界线性泛函, 记为 $\delta F(u) \in X^*$, 使得

$$\langle \delta F(u), v\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(u+tv)|_{t=0}, \quad \forall v \in X, \tag{4.3.3}$$

那么 $\delta F(u)$ 称为 F 在 $u \in X$ 处的变分导算子. 在 (4.3.3) 中符号 $\langle \delta F(u), v\rangle$ 表示线性泛函 $\delta F(u)$ 作用在 v 上的值. 由于对于给定的 $u, v \in X, F(u+tv)$ 是实数 t 的函数, 故 (4.3.3) 等式右端是在 $t=0$ 处的通常导数.

当 u 在 X 中变动时, δF 便是一个映射

$$\delta F:\ X \to X^*. \tag{4.3.4}$$

有了变分导算子的概念后, 便可以定义泛函极值点 (也称为临界点) 的概念如下.

定义 4.19 令 $F: X \to R^1$ 是定义在 X 上的一个可微泛函. $u \in X$ 称为 F 的一个极值点 (或临界点), 若 u 满足

$$\delta F(u) = 0, \tag{4.3.5}$$

即 F 的变分导算子 δF 在 u 为零.

若泛函 F 的变分导算子 δF 是一个微分算子, 那么 (4.3.5) 便是一个微分方程, 于是 F 的极值点便是微分方程的解.

下面将表明 F 的极小值点一定是极值点, 即满足 (4.3.5). 令 $u \in X$ 是如 (4.3.2) 的极小值点, 则对任 $v \in X$

$$f(t) = F(u+tv)$$

是 t 的可微函数. 显然 $t=0$ 是 $f(t)$ 的极小值. 于是由 (4.3.3) 有

$$0 = f'(0) = \langle \delta F(u), v\rangle, \quad \forall v \in X,$$

此式意味着 $\delta F(u) = 0$. 因此 F 极小值点一定是极值点.

现在给出一个具体例子来展示如何具体求出一个泛函的导算子过程, 以便使读者对变分导算子概念有一个形象的理解.

令 $X = H^1(R^n)$, 泛函 $F:\ H^1(R^n) \to R^1$ 由下式给出

$$F(u) = \int_{R^n} \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + f(u)\right] \mathrm{d}x, \quad u \in X = H^1(R^n). \tag{4.3.6}$$

我们将使用公式 (4.3.3) 来求出 F 的变分导算子.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(u+tv)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{R^n}\left[\frac{1}{2}|\nabla u+t\nabla v|^2+f(u+tv)\right]\mathrm{d}x\\&=\int_{R^n}[(\nabla u+t\nabla v)\cdot\nabla v+f'(u+tv)v]\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(u+tv)|_{t=0}&=\int_{R^n}[\nabla u\cdot\nabla v+f'(u)v]\mathrm{d}x\\&=\int_{R^n}[-\mathrm{div}\ (\nabla u)+f'(u)]v\mathrm{d}x\quad(\text{由 Gauss 公式 (4.2.18)}).\end{aligned}$$

再由

$$\langle\delta F(u),v\rangle=\int_{R^n}\delta F(u)v\mathrm{d}x$$

公式 (4.3.3) 意味着

$$\delta F(u)=-\Delta u+f'(u).\tag{4.3.7}$$

于是得到 (4.3.6) 泛函的变分导算子表达式 (4.3.7).

4.3.2　Yang-Mills 泛函的变分导算子

在相互作用理论中有两种泛函具有十分的重要性, 一个是这一小节将讨论的关于规范场的 Yang-Mills 泛函, 另一个就是 4.3.3 小节将讨论的 Einstein-Hilbert 泛函. 由于统一场方程直接与这两种泛函的变分导算子相关, 因此在这一节将分别给出它们导算子的具体推导过程.

首先考虑描述电磁相互作用的 $U(1)$ 规范场作用量

$$F(A_\mu)=\int_M-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\mathrm{d}x=\int_M-\frac{1}{4}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}\mathrm{d}x,\tag{4.3.8}$$

其中 M 是四维 Minkowski 空间, $g^{\mu\nu}$ 是 M 的度量张量,

$$F_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}-\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}.$$

下面算出 (4.3.8) 泛函的变分导算子.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(A_\mu+t\tilde{A}_\mu)|_{t=0}&=\frac{1}{2}\int_M-g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F_{\mu\nu}+t\tilde{F}_{\mu\nu})\mathrm{d}x|_{t=0}\\&=\frac{1}{2}\int_M-g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial\tilde{A}_\mu}{\partial x^\nu}-\frac{\partial\tilde{A}_\nu}{\partial x^\mu}\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由 Gauss 公式有

$$\begin{aligned}
\int_M g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}\frac{\partial\tilde{A}_\mu}{\partial x^\nu}\mathrm{d}x &= -\int_M g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu}\tilde{A}_\mu\mathrm{d}x,\\
\int_M g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}\frac{\partial\tilde{A}_\nu}{\partial x^\mu}\mathrm{d}x &= -\int_M g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}\tilde{A}_\nu\mathrm{d}x\\
&= -\int_M g^{\nu\alpha}g^{\mu\beta}\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu}\tilde{A}_\mu\mathrm{d}x \quad (\mu \text{ 与 } \nu \text{ 指标对换})\\
&= \int_M g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu}\tilde{A}_\mu\mathrm{d}x \quad (\alpha \text{ 与 } \beta \text{ 对换, 再由 } F_{\beta\alpha}=-F_{\alpha\beta}).
\end{aligned}$$

于是得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(A_\mu+t\tilde{A}_\mu)|_{t=0}=\int_M g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu}\tilde{A}_\mu\mathrm{d}x.$$

再由 (4.3.3) 以及

$$\langle\delta F(A_\mu),\tilde{A}_\mu\rangle=\int_M\delta F(A_\mu)\tilde{A}_\mu\mathrm{d}x,$$

立刻得到 (4.3.8) 泛函的变分导算子为

$$\delta F(A_\mu)=\frac{\partial}{\partial x^\nu}F^{\mu\nu}. \tag{4.3.9}$$

现在计算 $SU(N)$ 规范场泛函的变分导算子. $SU(N)$ 的 Yang-Mills 泛函由 (3.1.40) 中的规范场部分构成, 即

$$F(G_\mu^a)=\int_M -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a}\mathrm{d}x, \tag{4.3.10}$$

式中

$$F^a_{\mu\nu}=\partial_\mu G^a_\nu-\partial_\nu G^a_\mu+g\lambda^{abc}G^b_\mu G^c_\nu.$$

函数 $f(t)=F(G^a_\mu+t\tilde{G}^a_\mu)$ 关于 t 的导数为

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(G+t\tilde{G})|_{t=0} &= -\frac{1}{2}\int_M g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F^a_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F^a_{\mu\nu}(G+t\tilde{G})\mathrm{d}x|_{t=0}\\
&= -\frac{1}{2}\int_M g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F^a_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial\tilde{G}^a_\nu}{\partial x^\mu}-\frac{\partial\tilde{G}^a_\mu}{\partial x^\nu}\right)\mathrm{d}x\\
&\quad -\frac{1}{2}\int_M g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F^a_{\alpha\beta}g\lambda^{abc}(G^b_\mu\tilde{G}^c_\nu+\tilde{G}^b_\mu G^c_\nu)\mathrm{d}x\\
&= \int_M g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\left[\frac{\partial F^a_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}-gF^c_{\alpha\beta}\lambda^{cba}G^b_\mu\right]\tilde{G}^a_\nu\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

于是得到 $SU(N)$ 规范场的泛函 (4.3.10) 的变分导算子为

$$\delta F(G^a_\mu)=\partial^\alpha F^a_{\alpha\beta}-gF^c_{\alpha\beta}\lambda^{cba}g^{\mu\alpha}G^b_\mu,\quad 0\leqslant\beta\leqslant 3. \tag{4.3.11}$$

注意到 $SU(N)$ 结构常数

$$\lambda^{cba} = \lambda^a_{cb}.$$

于是由 (4.3.11) 便可推出 Yang-Mills 作用量 (3.1.40) 的规范场方程取 (3.1.43) 的形式.

最后, 对于一般形式的 Yang-Mills 泛函

$$F_{YM}(G^a_\mu) = \int_M -\frac{1}{4} G_{ab} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu b} \mathrm{d}x, \tag{4.3.12}$$

其中 (G_{ab}) 是如 (3.1.38) 的正定对称矩阵,

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu + g\lambda^a_{bc} G^b_\mu G^c_\nu,$$

它的变分导算子为

$$\delta F_{YM}(G^a_\mu) = G_{ab}\partial^\alpha F^b_{\alpha\beta} - g G_{bc}\lambda^c_{da} F^b_{\alpha\beta} g^{\alpha\mu} G^d_\mu. \tag{4.3.13}$$

4.3.3　Einstein-Hilbert 泛函的变分导算子

Einstein-Hilbert 泛函取如下形式:

$$F_{EH}(g_{ij}) = \int_M g^{ij} R_{ij} \sqrt{g} \mathrm{d}x, \tag{4.3.14}$$

式中 $g = \det(g_{ij})$, R_{ij} 是 Ricci 曲率, 表达为

$$\begin{aligned} R_{ij} = & \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i \partial x^k} \right) \\ & + g^{kl} g_{rs} \left(\Gamma^r_{kl} \Gamma^s_{ij} - \Gamma^r_{ik} \Gamma^s_{jl} \right), \end{aligned} \tag{4.3.15}$$

联络 Γ^r_{kl} 为如下形式:

$$\Gamma^r_{kl} = \frac{1}{2} g^{rs} \left(\frac{\partial g_{ks}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ls}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^s} \right). \tag{4.3.16}$$

先给出 (4.3.14) 泛函的变分导算子, 它取如下形式:

$$\delta F_{EH}(g_{ij}) = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R, \quad R = g^{kl} R_{kl}. \tag{4.3.17}$$

然后验证 (4.3.17) 式. 注意到 g_{ij} 与 g^{ij} 的关系为

$$g^{ij} = \frac{1}{g} \times g_{ij} \text{ 余子式}, \quad g_{ij} = g \times g^{ij} \text{ 余子式},$$

由此可推出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det\,(g_{ij}+t\tilde{g}_{ij})|_{t=0}=\tilde{g}_{ij}\times g_{ij}\text{ 余子式 (关于 }i,j\text{ 求和)}\tag{4.3.18}$$
$$=gg^{ij}\tilde{g}_{ij}.$$

再由关系式 $g_{ik}g^{kj}=\delta_i^j$ 可得变分关系式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g_{ik}+t\tilde{g}_{ik})(g^{kj}+t\tilde{g}^{kj})|_{t=0}=0$$

由此得到

$$\tilde{g}_{ij}=-g_{ik}g_{jl}\tilde{g}^{kl}.\tag{4.3.19}$$

于是 (4.3.18) 变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det\,(g_{ij}+t\tilde{g}_{ij})|_{t=0}=-gg_{ij}\tilde{g}^{ij}\tag{4.3.20}$$

关于 (4.3.14) 的泛函求变分导数

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{EH}(g_{ij}+t\tilde{g}_{ij})|_{t=0}=&\int_M\left[R_{ij}\tilde{g}_{ij}\sqrt{g}+\frac{1}{2\sqrt{g}}R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det\,(g_{ij}+t\tilde{g}_{ij})_{t=0}\right.\\&\left.+g_{ij}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R_{ij}(g_{ij}+t\tilde{g}_{ij})|_{t=0}\sqrt{g}\right]\mathrm{d}x\\=&\int_M\left(R_{ij}-\frac{1}{2}g_{ij}R\right)\tilde{g}^{ij}\sqrt{g}\mathrm{d}x\\&+\int_M g^{ij}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R_{ij}(g_{ij}+t\tilde{g}_{ij})|_{t=0}\sqrt{g}\mathrm{d}x\quad(\text{由 (4.3.20)}).\end{aligned}$$

再由公式

$$\int_M\delta F_{EH}(g_{ij})\tilde{g}^{ij}\sqrt{g}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{EH}(g_{ij}+t\tilde{g}_{ij})|_{t=0},$$

可得到

$$\int_M\left[\delta F_{EH}-(R_{ij}-\frac{1}{2}g_{ij}R)\right]\tilde{g}^{ij}\sqrt{g}\mathrm{d}x=\int_M g^{ij}\frac{\partial R_{ij}}{\partial g_{kl}}\tilde{g}_{kl}\sqrt{g}\mathrm{d}x.$$

为了证得 (4.3.17), 只需验证

$$\int_M g^{ij}\delta R_{ij}\sqrt{g}\mathrm{d}x=0,\tag{4.3.21}$$

其中 δR_{ij} 是 R_{ij} 的变分, 即

$$\delta R_{ij}=R_{ij}(g_{kl}+\delta g_{kl})-R_{ij}(g_{kl}).$$

在 Riemann 几何中, R_{ij} 可用联络表达为

$$R_{ij}=\frac{\partial\Gamma^k_{ki}}{\partial x^j}-\frac{\partial\Gamma^k_{ij}}{\partial x^k}+\Gamma^l_{ik}\Gamma^k_{lj}-\Gamma^l_{ij}\Gamma^k_{lk}. \tag{4.3.22}$$

为了证明 (4.3.21), 先采用测地坐标系使得联络 Γ^k_{ij} 在任给定点 x_0 为零 (由微分几何理论知, 该坐标系存在), 即

$$\Gamma^k_{ij}(x_0)=0,\quad x_0\in M \text{ 给定},\ \forall 1\leqslant i,j,k\leqslant n.$$

此时由 (4.2.27) 可知

$$\frac{\partial g_{ij}(x_0)}{\partial x^k}=0,\quad \frac{\partial g^{ij}(x_0)}{\partial x^k}=0,\quad \forall 1\leqslant i,j,k\leqslant n.$$

于是由 (4.3.22), 在 x_0 点有

$$\begin{aligned} g^{ij}\delta R_{ij}&=g^{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\delta\Gamma^k_{ik}-\frac{\partial}{\partial x^k}\delta\Gamma^k_{ij}\right)\\ &=\frac{\partial}{\partial x^k}\left(g^{ik}\delta\Gamma^l_{il}-g^{ij}\delta\Gamma^k_{ij}\right). \end{aligned} \tag{4.3.23}$$

虽然 Γ^k_{ij} 不是一个张量场, 但是它的变分构成张量, 这是因为

$$\delta\Gamma^k_{ij}(x)=\Gamma^k_{ij}(x+\delta x)-\Gamma^k_{ij}(x),$$

由 (4.1.89) 变换规则知, $\delta\Gamma^k_{ij}$ 是按 (1,2) 型张量进行变换. 从而在 x_0 点处, (4.3.23) 可写成如下形式:

$$g^{ij}\delta R_{ij}=\frac{\partial u^k}{\partial x^k}=\operatorname{div}\,u,\quad x_0\in M. \tag{4.3.24}$$

式中

$$u^k=g^{ik}\delta\Gamma^l_{il}-g^{ij}\delta\Gamma^k_{ij}\text{ 是一个向量场.}$$

由于 (4.3.24) 与坐标选取无关, 因此回到一般坐标系上有

$$g^{ij}\delta R_{ij}=\operatorname{div}\,u=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}u^k),\quad x_0\in M, \tag{4.3.25}$$

该表达式可见 (4.2.25). 再由 $x_0\in m$ 为任意的, 因而关系式在整个 M 上成立. 于是有

$$\int_M g^{ij}\delta R_{ij}\sqrt{g}\mathrm{d}x=\int_M \operatorname{div}\,u\sqrt{g}\mathrm{d}x.$$

由于 M 是无边流形, Gauss 公式 (4.2.36) 意味着

$$\int_M g^{ij}\delta R_{ij}\sqrt{g}\mathrm{d}x=0.$$

这便是 (4.3.21). 于是 (4.3.17) 得证.

4.3.4 零散度约束下的变分

令 M 是一个闭流形. M 上的一个 Riemann 度量 G 就是一个映射

$$G : M \to T_2^0 M = T^*M \otimes T^*M,$$

它是对称并且非退化的, 即在一个局部坐标系中 G 可表达为

$$G = \{g_{ij}\}, \quad g_{ij} = g_{ji}, \tag{4.3.26}$$

并且矩阵 (g_{ij}) 是可逆的:

$$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}.$$

如果将 Riemann 度量 $G = \{g_{ij}\}$ 看作是 M 上的一个张量场, 那么 M 上所有度量 G 构成一个拓扑空间, 称为 Riemann 度量空间. 我们记

$$G^{-1} = \{g^{ij}\} : \ M \to T_0^2 M = TM \otimes TM.$$

然后定义

$$\begin{aligned} H^m(M,g) = \{G|\ & G \in H^m(T_2^0 M),\ G^{-1} \in H^m(T_0^2 M), \\ & G \text{ 是如 (4.3.26) 的 Riemann 度量}\}. \end{aligned}$$

显然 $H^m(M,g)$ 是一个度量空间, 但不是一个 Banach 空间. 但是它是两个 Sobolev 空间 $H^m(T_2^0 M)$ 与 $H^m(T_0^2 M)$ 直和的一个子空间,

$$H^m(M,g) \subset H^m(T_2^0 M) \oplus H^m(T_2^0 M).$$

一个定义在 $H^M(M,g)$ 上的泛函

$$F : \ H^m(M,g) \to R^1 \tag{4.3.27}$$

被称作是 Riemann 度量泛函. 通常 (4.3.27) 的泛函可表达为

$$F(g_{ij}) = \int_M f(g_{ij}, \cdots, \partial^m g_{ij}) \sqrt{g} \mathrm{d}x.$$

注意到, $H^m(M,g)$ 并不是一个线性空间. 但是对于一个给定的元素 $g_{ij} \in H^m(M,g)$ 以及任何两个对称张量场 X_{ij} 和 X^{ij}, 存在一个实数 $\lambda_0 > 0$, 使得对任何 $0 < \lambda < \lambda_0$ 有

$$\begin{aligned} & g_{ij} + \lambda X_{ij} \in H^m(M,g), \\ & g^{ij} + \lambda X^{ij} \in H^m(M,g). \end{aligned} \tag{4.3.28}$$

根据 (4.3.28), 我们能够关于 (4.3.27) 的度量泛函定义变分导算子 $\delta_* F$ 和 $\delta^* F$ 如下:

$$\begin{aligned}&\delta_* F:\ H^m(M,g)\to H^{-m}(T_0^2M),\\&\delta^* F:\ H^m(M,g)\to H^{-m}(T_2^0M),\end{aligned}$$

其中 $H^{-m}(E)$ 是 $H^m(E)$ 的对偶空间, $\delta_* F$ 和 $\delta^* F$ 由下式给出

$$\begin{aligned}\langle\delta_* F(g_{ij}),X\rangle&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(g_{ij}+tX_{ij})|_{t=0},\\\langle\delta^* F(g_{ij}),X\rangle&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(g^{ij}+tX^{ij})|_{t=0}.\end{aligned}\tag{4.3.29}$$

对于任何给定的度量 $g_{ij}, \delta_* F(g_{ij})$ 和 $\delta^* F(g_{ij})$ 分别是二阶反变和二阶协变张量场, 即

$$\begin{aligned}&\delta_* F(g_{ij}):\ M\to TM\otimes TM,\\&\delta^* F(g^{ij}):\ M\to T^*M\otimes T^*M.\end{aligned}\tag{4.3.30}$$

关于 (4.3.30) 的变分导算子有如下结论.

定理 4.20　令 F 是由 (4.3.27) 定义的度量泛函, 那么对任何 $g_{ij}\in H^m(M,g), F$ 的变分导算子 $\delta_* F(g_{ij})$ 和 $\delta^* F(g_{ij})$ 都是对称的张量场, 并且 $\delta_* F$ 和 $\delta^* F$ 有如下关系:

$$(\delta^* F(g_{ij}))^{kl}=-g^{kr}g^{ls}(\delta_* F(g_{ij}))_{rs},\tag{4.3.31}$$

其中 $(\delta^* F)^{kl}$ 和 $(\delta_* F)_{kl}$ 分别是 $\delta^* F$ 和 $\delta_* F$ 的分量.

证明　只需证明结论 (4.3.31). 由

$$g_{ik}g^{kj}=\delta_i^j,$$

有如下变分关系:

$$\delta(g_{ik}g^{kj})=g_{ik}\delta g^{kj}+g^{kj}\delta g_{ik}=0.$$

这意味着

$$\delta g^{kl}=-g^{ki}g^{lj}\delta g_{ij}.\tag{4.3.32}$$

关系式实际上就是 (4.3.19). 此外, 在 (4.3.29) 中

$$\lambda X_{ij}=\delta g_{ij},\quad \lambda X^{ij}=\delta g^{ij},\quad \lambda\neq 0\ \text{充分小}.$$

因此由 (4.3.32) 得到

$$\begin{aligned}\langle(\delta_* F)_{kl},\delta g^{kl}\rangle&=-\langle(\delta_* F)_{kl},g^{ki}g^{lj}\delta g_{ij}\rangle\\&=\langle-g^{ki}g^{lj}(\delta_* F)_{kl},\delta g_{ij}\rangle\\&=\langle(\delta^* F)^{ij},\delta g_{ij}\rangle.\end{aligned}$$

由此推出

$$(\delta^* F)^{ij} = -g^{ki}g^{lj}(\delta_* F)_{kl}.$$

这便是 (4.3.31). 定理证毕.

度量泛函 F 的极值点 g_{ij} 是方程

$$\delta F(g_{ij}) = 0 \tag{4.3.33}$$

在如下意义的解

$$\begin{aligned}\langle \delta F(g_{ij}), X\rangle =& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(g_{ij} + tX_{ij})|_{t=0}\\ =& \int_M (\delta F(g_{ij}))^{kl} X_{kl}\sqrt{g}\mathrm{d}x\\ =& 0, \quad \forall X_{kl} = X_{lk} \in L^2(T_2^0 M).\end{aligned} \tag{4.3.34}$$

注意到 (4.3.33) 在通常意义下的解 g_{ij} 应满足

$$\langle \delta F(g_{ij}), X\rangle = 0, \quad \forall X \in L^2(T_2^0 M). \tag{4.3.35}$$

因此, 对照 (4.3.34) 和 (4.3.35) 初看起来满足 (4.3.34) 的度量 g_{ij} 并不是方程 (4.3.33) 在通常意义下的解, 它是在对称 $X_{ij} = X_{ji}$ 约束下的变分解. 但是注意 $L^2(T_2^0 M)$ 能够分解成对称与反对称空间直和

$$\begin{aligned}&L^2(T_2^0 M) = L_s^2(T_2^0 M) \oplus L_c^2(T_2^0 M),\\ &L_s^2(T_2^0 M) = \{u \in L^2(T_2^0 M)|\ u_{ij} = u_{ji}\},\\ &L_c^2(T_2^0 M) = \{u \in L^2(T_2^0 M)|\ u_{ij} = -u_{ji}\},\end{aligned}$$

并且 $L_s^2(T_2^0 M)$ 与 $L_c^2(T_2^0 M)$ 相互正交, 即

$$\int_M g^{ik}g^{jl}u_{ij}v_{kl}\sqrt{g}\mathrm{d}x = -\int_M g^{ik}g^{jl}u_{ij}v_{lk}\sqrt{g}\mathrm{d}x = 0,$$

$\forall u \in L_s^2(T_2^0 M), v \in L_c^2(T_2^0 M)$. 因此满足 (4.3.34) 的 g_{ij} 由于 $\delta F(g_{ij})$ 的对称性 (由定理 4.20), 它一定也满足 (4.3.35). 因此变分方程 (4.3.33) 在 (4.3.34) 意义下的解也是通常意义下的解.

虽然对于变分方程 (4.3.33) 来讲, 对称约束下的变分解 (4.3.34) 与经典意义下变分解 (4.3.35) 是等价的, 但是关于 (4.3.29) 中的变分元 X 进行约束下的变分问题却由此产生. 根据张量场正交分解定理, 当考虑泛函 F 是在零散度约束下变分时, 其变分方程将不再取 (4.3.33) 的形式. 而这种零散度约束变分方程正是统一场

理论所需要的, 这是因为零散度约束的物理意义很清楚, 它代表了动量能量守恒的约束.

在物理背景的驱动下, 我们引入如下零散度约束变分的概念.

定义 4.21　令 $F:\ H^m(M,g)\to R^1$ 是一个 Riemann 度量泛函, 一个度量张量 $\{g_{ij}\}\subset H^m(M,g)$ 被称作是 div_A 零散度约束下的极值点, 若 $\{g_{ij}\}$ 满足如下等式:

$$\begin{aligned}\langle\delta F(g_{ij}),X\rangle&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(g_{ij}+tX)|_{t=0}\\&=0,\quad\forall\ \mathrm{div}_A X=0,\ X\in L^2(T_2^0M),\end{aligned}\tag{4.3.36}$$

其中 div_A 是如 (4.2.38) 的散度算子.

很清楚, 一个满足 (4.3.36) 的 F 极值点并不是方程 (4.3.33) 的解. 下面定理给出 div_A 零散度约束变分方程的形式.

定理 4.22(零散度约束变分定理)　令 $F=F(g_{ij})$ 是一个 Riemann 度量泛函. 那么存在一个向量场 $\Phi\in H^1(TM)$, 使得 F 的零散度 div_A 约束变分极值点 $\{g_{ij}\}$ 满足如下方程:

$$\delta F(g_{ij})_{kl}=(D_k+A_k)\Phi_l,\tag{4.3.37}$$

式中 $D_A=D+A$ 如 (4.2.38), D 是极值点 g_{ij} 的协变导数.

证明　由 (4.3.36), F 的零散度 div_A 约束变的极值点 $\{g_{ij}\}$ 满足如下等式:

$$\int_M\delta F(g_{ij})\cdot X\sqrt{g}\mathrm{d}x=0,\quad\forall X\in L^2(T_0^2M),\ \mathrm{div}_A X=0.$$

这意味着

$$\delta F(g_{ij})\perp L_D^2(T_2^0M)=\{v\in L^2(T_2^0M)|\ \mathrm{div}_A v=0\}.\tag{4.3.38}$$

再由定理 4.11, $L^2(T_0^2M)$ 能够正交分解成

$$\begin{aligned}L^2(T_0^2M)&=L_D^2(T_2^0M)\oplus G(T_2^0M),\\G(T_0^2M)&=\{D_A\Phi|\ \Phi\in H^1(T^*M)\}.\end{aligned}$$

因此, 从 (4.3.38) 推出

$$\delta F(g_{ij})\in G(T_0^2M),$$

这就意味着 (4.3.37) 成立. 定理证毕.

再一般地, 若 M 是一个以 $\{g_{ij}\}$ 为度量的 Riemann 流形,

$$F:\ H^m(T_r^kM)\to R^1\tag{4.3.39}$$

是一个 (k,r) 型张量场空间上的泛函, 则有如下零散度约束变分定理.

定理 4.23 令 F 是如 (4.3.39) 的泛函, 那么存在一个 $(k-1,r)$ 型张量场 $\psi \in H^1(T_r^{k-1}M)$ 对 $k \geqslant 1$ 或一个 $(k,r-1)$ 型张量场 ϕ 对 $r \geqslant 1$, 使得 F 的零散度 div_A 约束变分极值点 u 满足

$$\begin{aligned} &\delta F(u) = D_A\psi, \quad \psi \in H^1(T_r^{k-1}M)\ (k \geqslant 1), \text{ 或者} \\ &\delta F(u) = D_A\Phi, \quad \Phi \in H^1(T_{r-1}^{k}M)\ (r \geqslant 0). \end{aligned} \tag{4.3.40}$$

特别地, 若 $F: H^m(TM) \to R^1$ 是向量场空间上的泛函, 则存在一个标量场 $\phi \in H^1(M)$, 使得零散度 div_A 约束变分极值点 u 满足

$$\delta F(u) = (D+A)\phi. \tag{4.3.41}$$

证明 因为 (4.3.41) 是 (4.3.40) 的特殊情况, 只需证明 (4.3.40) 的情况. 类似地, 对于零散度约束极值点 u 有

$$\int_M \delta F(u)\cdot X\sqrt{g}\mathrm{d}x = 0, \quad \forall X \in L^2(T_r^kM),\ \mathrm{div}_A X = 0. \tag{4.3.42}$$

再由定理 4.11,

$$\begin{aligned} &L^2(T_r^kM) = L_D^2(T_r^kM) \oplus G(T_r^kM), \\ &L_D^2(T_r^kM) = \{v \in L^2(T_r^kM) |\ \mathrm{div}_A v = 0\}, \\ &G(T_r^kM) = \{D_A\psi |\ \psi \in H^1(T_r^{k-1}M) \text{ 或 } \psi \in H^1(T_{r-1}^kM)\}. \end{aligned}$$

于是从 (4.3.42) 推出

$$\delta F(u) \in G(T_r^kM).$$

这便意味着 (4.3.40) 成立. 定理证毕.

4.3.5 标量势定理

在定理 4.22 中若 D_A 的向量场 $A=0$, 并且 M 的第一 Betti 数 $\beta_1(M)=0$, 那么就有下面标量势定理, 该定理对于引力场方程和新发展的暗物质暗能量统一理论 (Ma, Wang, 2014) 中起到关键作用.

定理 4.24(标量势定理) 令 M 的第一 Betti 数 $\beta_1(M)=0, F$ 是一个 Riemann 度量泛函. 那么存在一个标量场 $\varphi \in H^2(M)$, 使得 F 的零散度 div 约束极值点 $\{g_{ij}\}$ 满足如下方程:

$$(\delta F(g_{ij}))_{kl} = D_kD_l\varphi. \tag{4.3.43}$$

证明　令 $\{g_{ij}\}$ 是在 (4.3.36) 约束下的极值点, 则由定理 4.22 以及 $A=0$, 方程 (4.3.37) 被写成如下形式:

$$(\delta F(g_{ij}))_{kl} = D_k \Phi_l.$$

由定理 4.19, $\delta F(g_{ij})$ 是对称的, 因此有

$$D_k \Phi_l = D_l \Phi_k. \tag{4.3.44}$$

再由

$$D_k \Phi_l = \frac{\partial \Phi_l}{\partial x^k} - \Gamma^j_{kl} \Phi_j,$$

以及 $\Gamma^j_{kl} = \Gamma^j_{lk}$, 从 (4.3.44) 推得

$$\frac{\partial \Phi_l}{\partial x^k} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial x^l}.$$

该等式意味着

$$\mathrm{d}(\Phi_k \mathrm{d}x^k) = \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial x^l} - \frac{\partial \Phi_l}{\partial x^k} \right) \mathrm{d}x^l \wedge \mathrm{d}x^k = 0. \tag{4.3.45}$$

由假设 M 的第一 Betti 数 $\beta_1(M)=0$. 因此由 de Rham 定理 (马天, 2011), 等式 (4.3.45) 意味着存在一个标量场 φ 使得

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \mathrm{d}x^k = \Phi_k \mathrm{d}x^k.$$

于是推得

$$\Phi_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}.$$

这样定理便被证得.

如果 M 的第一 Betti 数 $\beta_1(M) \neq 0$, 那么有如下结果.

定理 4.25　令 M 的第一 Betti 数 $\beta_1(M) \neq 0$. 那么对于度量泛函 F, 存在一个标量场 φ 和 $N = \beta_1(M)$ 个向量场 $\psi^j = (\psi^j_1, \cdots, \psi^j_n) \in H^1(T^*M)$, 使得 F 的 (4.3.36) 约束极值点 $\{g_{ij}\}$ 满足如下方程:

$$(\delta F(g_{ij}))_{kl} = D_k D_l \varphi + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j D_k \psi^j_l, \tag{4.3.46}$$

α_j $(1 \leqslant j \leqslant N)$ 为常数, 并且 ψ^j 满足如下方程:

$$D^k D_k \psi^j_l = -R^k_l \psi^j_k \quad (1 \leqslant j \leqslant N), \tag{4.3.47}$$

式中 $R^k_i = g^{kj} R_{ij}$, R_{ij} 为 Ricci 曲率张量.

证明 由于 M 的第一 Betti 数 $\beta_1(M) \neq 0$, 因此根据 de Rham 定理 (马天, 2011), 有 $N = \beta_1(M)$ 个闭的 1 次形式

$$\omega_j = \psi_k^j \mathrm{d}x^k \in H_d^1(M), \quad 1 \leqslant j \leqslant N, \tag{4.3.48}$$

它们构成 1 维 de Rham 上同调群 $H_d^1(M)$ 的基底. 因而 ω_j $(1 \leqslant j \leqslant N)$ 不是恰当的, 并且

$$\mathrm{d}\omega_j = \left(\frac{\partial \psi_k^j}{\partial x^l} - \frac{\partial \psi_l^j}{\partial x^k} \right) \mathrm{d}x^k \wedge \mathrm{d}x^l = 0,$$

从这导出

$$\frac{\partial \psi_k^j}{\partial x^l} = \frac{\partial \psi_l^j}{\partial x^k}, \quad 1 \leqslant j \leqslant N.$$

而该等式意味着 (4.3.44) 成立. 因此定理 4.22 的方程

$$(\delta F(g_{ij}))_{kl} = D_k \Phi_l$$

中的 Φ_l 由于满足 $D_k \Phi_l = D_l \Phi_k$, 它一定取如下形式:

$$\Phi_l = D_l \varphi + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \psi_l^j.$$

因此 (4.3.46) 得证.

此外, 由 Hodge 分解理论 (马天, 2011, 2012), 在 (4.3.48) 中的 1 次闭形式 ω_j $(1 \leqslant j \leqslant N)$ 都是调和的, 即满足

$$\mathrm{d}\omega_j = 0, \quad \delta\omega_j = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant N,$$

这意味着在 (4.3.48) 中的向量场 $\psi^j = (\psi_1^j, \cdots, \psi_n^j)$ 满足

$$\Delta \psi^j = (d\delta + \delta d)\psi^j = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant N. \tag{4.3.49}$$

由 (4.2.33) 的 Laplace-Beltrami 算子表达式, 方程 (4.3.49) 意味着 ψ^j 应该满足如下方程:

$$D^k D_k \psi_l^j = -R_l^k \psi_k^j, \quad 1 \leqslant j \leqslant N,$$

式中 $R_l^k = g^{ki} R_{il}, R_{il}$ 为 Ricci 曲率张量. 此方程便是 (4.3.47). 于是定理得证.

4.4　$SU(N)$ 上的张量与 Riemann 度量

4.4.1　引言

简要地回忆一下 $SU(N)$ 规范理论. 它是说有 N 个 Dirac 旋量 ψ^j $(1 \leqslant j \leqslant N)$ 和 $K = N^2 - 1$ 个向量场 A_μ^a $(1 \leqslant a \leqslant N)$:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \vdots \\ \psi^N \end{pmatrix}, \quad A_\mu^a = \begin{pmatrix} A_\mu^1 \\ \vdots \\ A_\mu^k \end{pmatrix},$$

以及关于这些场的一个 Yang-Mills 作用量

$$L_{YM} = \int (\mathcal{L}_G + \mathcal{L}_D)\mathrm{d}x, \tag{4.4.1}$$

式中 $\mathcal{L}_G$ 和 $\mathcal{L}_D$ 分别为规范场作用量密度和 Dirac 作用量密度:

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_G = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu}^a F_{\alpha\beta}^a, \\ &F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\lambda_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c, \\ &\mathcal{L}_D = \bar{\Psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi, \\ &D_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i}g A_\mu^a \tau_a. \end{aligned} \tag{4.4.2}$$

这个作用量 (4.4.1)-(4.4.2) 在 Lorentz 变换下是不变的, 同时也是在如下规范变换下是不变的,

$$\begin{aligned} &\tilde{\Psi} = \Omega\Psi, \quad \Omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta^a \tau_a} \in SU(N), \\ &\tilde{A}_\mu^a \tau_a = \Omega A_\mu^a \tau_a \Omega^{-1} + \frac{\mathrm{i}}{g}(\partial_\mu \Omega)\Omega^{-1}, \\ &\tilde{m} = \Omega m \Omega^{-1}. \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

规范理论的核心就是用 Lorentz 不变性及 (4.4.3) 的规范变换的不变性来唯一地确定 (4.4.1) 作用量的具体表达为 (4.4.2) 的形式. 然而这里存在一个非常基本和非常重要的问题, 那就是在 (4.4.3) 的规范变换中 $SU(N)$ 的生成元

$$\{\tau_a |\ 1 \leqslant a \leqslant K = N^2 - 1\} \tag{4.4.4}$$

可以有无穷多种选择, 并且每一族生成元对应于一组规范场:

$$\{\tau_a |\ 1 \leqslant a \leqslant K\} \ \leftrightarrow\ \{A_\mu^a |\ 1 \leqslant a \leqslant K\}. \tag{4.4.5}$$

现在不妨假设 (4.4.4) 的 $SU(N)$ 生成元可以进行如下的线性变换 (这一节的数学理论将表明这一点):

$$\tilde{\tau}_b = x_b^a \tau_a, \quad (x_b^a) \text{ 为 } K \text{ 阶复矩阵.} \tag{4.4.6}$$

对应关系 (4.4.5) 使得 A_μ^a 也跟着发生变换

$$\tilde{A}_\mu^a = y_b^a A_\mu^b, \quad (y_b^a) \text{ 是与 } (x_b^a) \text{ 有关的复矩阵.} \tag{4.4.7}$$

那么从道理上讲, 规范场理论的正确性应该与 (4.4.4) 的生成元选取无关, 否则最基本的逻辑合理性将被破坏. 这种与生成元无关的独立性译成数学语言就是 Yang-Mills 作用量 (4.4.1)-(4.4.2) 应该在 (4.4.6)-(4.4.7) 变换下是不变的. 然而从 (4.4.2) 可看到若

$$A_\mu^a \to y_b^a A_\mu^b \Rightarrow \ F_{\mu\nu}^a \to y_b^a F_{\mu\nu}^b,$$

那么 $F_{\mu\nu}^a F_{\alpha\beta}^a$ 将发生如下变换:

$$F_{\mu\nu}^a F_{\alpha\beta}^a \to y_b^a y_c^a F_{\mu\nu}^b F_{\alpha\beta}^c.$$

这意味着 Yang-Mills 泛函

$$L_{YM} = \int \mathcal{L}_G \mathrm{d}x = \int g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu}^a F_{\alpha\beta}^a \mathrm{d}x$$

在 (4.4.6)-(4.4.7) 变换下违背了不变性的原理. 显然这是一个重大的缺陷, 它直接破坏了逻辑因果律.

为了解决规范理论中出现的这一问题, 这一节中将引入 $SU(N)$ 张量的概念, 并且在 $SU(N)$ 上找到一个 Riemann 度量 $\{G_{ab}\}$, 以便改造 Yang-Mills 泛函使其满足上述新的对称性.

4.4.2 $SU(N)$ 的流形结构

在本节的开场中提到需要在 $SU(N)$ 中建立张量概念并且能够引入 Riemann 度量, 只有这样才能改进 Yang-Mills 规范理论使它具有与 (4.4.6)-(4.4.7) 变换无关的对称性. 我们知道, 张量和 Riemann 度量的概念要涉及

$$\text{流形、切空间、坐标系、坐标变换} \tag{4.4.8}$$

等基本结构. 然而又知道, $SU(N)$ 是一个由单位模的复正交矩阵构成的群. 如果 $SU(N)$ 没有如 (4.4.8) 这样的结构, 那么将不能建立规范场新的对称性理论 (称为表示不变性理论), 从而无法解决上一小节讲到的规范理论基本的逻辑问题. 幸运的是, 在数学上早已发现 $SU(N)$ 是一个 $K = N^2 - 1$ 维的流形, 而这一小节目的就是介绍关于 $SU(N)$ 的 (4.4.8) 等概念, 为后面发展的理论提供必要的基础知识.

1. $SU(N)$ 是 R^{2N^2} 中一个子空间

称 M 是一个 n 维流形若在每一点 $p \in M$ 都存在 p 点的一个邻域 $U \subset M$, 使得 U 与 R^n 同胚, 即存在一个单一连续映射

$$\psi : U \to R^n,$$

它有连续的逆映射 $\psi^{-1} : R^n \to U$.

再来看 $SU(N)$ 群, 它的定义为

$$SU(N) = \{A \in GL(C, N) |\ AA^\dagger = I,\ \det A = 1\},$$

其中 $GL(C, N)$ 是所有 N 阶非奇异复矩阵组成的群. 由于每一个元素 $A \in SU(N)$ 可写成

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} = x_{ij} + \mathrm{i}y_{ij},$$

因此可以将 A 视为 R^{2N^2} 中的点 p_A,

$$p_A = (x_{11}, y_{11}, \cdots, x_{1N}, y_{1N}, \cdots, x_{N1}, y_{N1}, \cdots, x_{NN}, y_{NN}).$$

再由于 A 中矩阵元 $a_{ij} = x_{ij} + \mathrm{i}y_{ij}$ 满足条件

$$a_{ij}a^*_{jk} = \delta_{ik}, \quad \det A = 1,$$

因此 $SU(N)$ 是 R^{2N^2} 中一个子空间

$$SU(N) \subset R^{2N^2}, \tag{4.4.9}$$

其中 $SU(N)$ 中每个矩阵 A 代表 R^{2N^2} 中的点 p_A.

2. $SU(N)$ 是一个 $K = N^2 - 1$ 维流形

由 (4.4.9) 提供的性质只能说明 $SU(N)$ 是 R^{2N^2} 中的一个子空间, 并不能表明它是 R^{2N^2} 中的一个子流形. 注意到 R^3 中任何二维子空间 Σ 是一个曲面的条件是 Σ 上每点 p 都有一个切平面. 见图 4.3. 该性质可推广到一般情况, 即 R^n 中任一个子空间 Σ^k 是一个 k 维流形的条件是 Σ^k 上每一点都有一个 k 维切空间. 因此如果能够表明 $SU(N)$ 中每一元素 A 处都有一个 $K = N^2 - 1$ 维的切空间, 便可知道 $SU(N)$ 是一个 K 维流形.

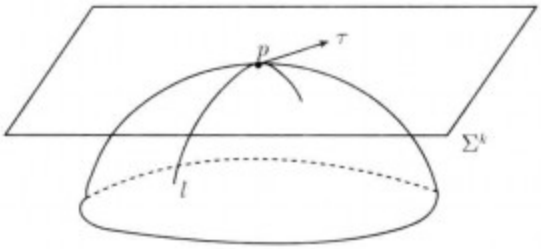


图 4.3

再看图 4.3, p 点切空间上每个给定向量 τ 都是某个过 p 点曲线 $\gamma \subset \Sigma^k$ 的切向量. 因而我们令 $\gamma(t) \subset SU(N)$ 是过 $A \in SU(N)$ 的曲线, τ 是 $\gamma(0) = A$ 处的切向量, 从而 $\gamma(t)$ 满足方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t} = \tau, & \gamma(t) \subset SU(N), \\ \gamma(0) = A, & A \in SU(N) \text{ 为给定矩阵.} \end{cases} \tag{4.4.10}$$

当 $t=$ 无穷小时, 方程 (4.4.10) 的解为

$$\gamma(t) = A + t\tau \in SU(N), \tag{4.4.11}$$

再由 $SU(N)$ 中元素满足 $\gamma(t) \cdot \gamma^{\dagger}(t) = I$, 从 (4.4.11) 可得

$$(A^{\dagger} + t\tau^{\dagger})(A + t\tau) = I.$$

由 $t=$ 无穷小, 上式意味着

$$A^{\dagger}\tau + \tau^{\dagger}A = 0, \quad (A^{\dagger} = A^{-1}). \tag{4.4.12}$$

于是 (4.4.12) 是 N 阶复矩阵 τ 成为 $SU(N)$ 在 A 点处切向量的条件, 即 $\tau A^{\dagger}$ 是一个反对称复矩阵. 由于 A 是给定的, 因此对所有 $A \in SU(N)$, 在 A 点的切向量全体

$$T_A SU_N = \{\tau |\ \tau \text{ 满足 (4.4.12) 的复矩阵}\} \tag{4.4.13}$$

是一个线性空间, 并且维数与 A 无关. 因此 $SU(N)$ 是一个流形.

此外, 关于 $SU(N)$ 的维数有如下关系:

$$\begin{aligned} &\dim\, SU(N) = \dim\, U(N) - 1, \\ &\dim\, U(N) = \dim \mathrm{Te}\, U(N), \end{aligned} \tag{4.4.14}$$

其中 $\mathrm{Te}\, U(N)$ 是 $U(N)$ 在单位元 $e = I$ 处的切空间, $\mathrm{Te}\, U(N)$ 中元素 τ 在 $A \in U(N)$ 处也满足 (4.4.12). 因此有

$$\tau \in \mathrm{Te}\, U(N) \ \Leftrightarrow\ \tau^{\dagger} + \tau = 0,$$

即 τ 的矩阵元满足 $\tau_{ij}=-\tau_{ij}^{\star}$, 而对角元素 τ_{ii} 是纯虚数. 因此有

$$\mathrm{dimTe}\ U(N)=N+2\times\frac{N(N-1)}{2}=N^2.$$

于是由 (4.4.14) 推出

$$\dim\ SU(N)=N^2-1.$$

因此, $SU(N)$ 是一个 $K=N^2-1$ 维的流形.

这里需要指出 $SU(N)$ 切空间 (4.4.13) 的维数比 $U(N)$ 的切空间维数少 1 的原因是, $\tau\in\mathrm{Te}\ SU_N$ 的迹为零:

$$\tau\in\mathrm{Te}\ SU_N\ \Rightarrow\ \mathrm{Tr}\ \tau=0. \tag{4.4.15}$$

3. $SU(N)$ 切空间

在上面的讨论中已看到, $SU(N)$ 切空间的元素 τ 满足 (4.4.12) 和 (4.4.15). 因此 T_ASU_N 严格的表达式为

$$T_ASU_N=\{\mathrm{i}\tau|\ A^{\dagger}\tau-\tau^{\dagger}A=0,\ \mathrm{Tr}\ (A^{\dagger}\tau)=0\}, \tag{4.4.16}$$

并且对任何 $A\in SU(N)$, 存在 A 的一个邻域 U_A 使得

$$\Omega\subset U_A\ \Rightarrow\ \Omega=Ae^{\mathrm{i}A^{\dagger}\tau},\quad \mathrm{i}\tau\in T_ASU_N.$$

零迹性质 (4.4.15) 正是由上面表达式以及下面公式导出

$$\det\ e^A=e^{\mathrm{Tr}\ A}\quad (\text{证明可见 4.6 节}). \tag{4.4.17}$$

特别地, 在单位元 I 处的切空间可写作

$$\mathrm{Te}\ SU_N=\{\mathrm{i}\tau|\ \tau^{\dagger}=\tau,\ \mathrm{Tr}\ \tau=0\}. \tag{4.4.18}$$

并且在 I 的邻域中元素 Ω 可写成

$$\Omega=e^{\mathrm{i}\tau},\quad \tau\in\mathrm{Te}\ SU_N. \tag{4.4.19}$$

4. $SU(N)$ 切空间的坐标系及其变换

因为 (4.4.18)-(4.4.19) 的群表示与一般情况的群表示 (4.4.16)-(4.4.17) 在实质上没有什么差别, 因此只讨论在单位元 I 处的切空间 (4.4.18) 及矩阵表示 (4.4.19).

由于 $\mathrm{Te}\ SU_N$ 是一个 $K=N^2-1$ 线性空间, 我们可以在该空间内取一个坐标基, 称为 $SU(N)$ 生成元基底, 记为

$$\tau_1,\cdots,\tau_K, \tag{4.4.20}$$

使得对任何元素 $\tau \in \mathrm{Te}\ SU_N$ 可写成

$$\tau = \theta^a \tau_a, \tag{4.4.21}$$

其中 θ^a $(1 \leqslant a \leqslant K)$ 是复数, 而 (4.4.19) 可表达为

$$\Omega = e^{\mathrm{i}\theta^a \tau_a}, \quad \Omega \in SU(N).$$

此时 $\{\theta^a |\ 1 \leqslant a \leqslant K\}$ 称为切空间 $\mathrm{Te}\ SU_N$ 的坐标.

当 (4.4.20) 的坐标基发生变换时

$$\tilde{\tau}_a = x_a^b \tau_b, \quad X = (x_a^b) \text{ 为 } K \text{ 阶非奇异复矩阵}, \tag{4.4.22}$$

那么对应于 $\{\tilde{\tau}_a\}$ 的坐标 $\{\tilde{\theta}^a\}$ 也将发生如下变换:

$$\tilde{\theta}^a = y_b^a \theta^b, \quad Y = X^{-1} = (y_b^a). \tag{4.4.23}$$

这是因为 (4.4.21) 的表达与坐标系选择无关, 即

$$\tau = \tilde{\theta}^a \tilde{\tau}_a = (\theta^1, \cdots, \theta^K) XY \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_K \end{pmatrix} = \theta^a \tau_a.$$

这就意味着 $XY = I$.

4.4.3 $SU(N)$ 张量

现在已知知道, $SU(N)$ 是一个流形,

$$\mathrm{Te}\ SU_N = \{\mathrm{i}\tau |\ \tau = \tau^\dagger,\ \mathrm{Tr}\ \tau = 0\}$$

是 $SU(N)$ 在单位矩阵 $e = I$ 的切空间,

$$\tau_a = \{\tau_1, \cdots, \tau_K\} \subset \mathrm{Te}\ SU_N$$

是一个坐标基, 而 $\Omega \in SU(N)$ 可用坐标系 $\{\theta^a\}$ 表达为

$$\Omega = e^{\mathrm{i}\theta^a \tau_a}.$$

并且当坐标基 τ_a 发生 (4.4.22) 变换时, $\{\theta^a\}$ 将发生 (4.4.23) 的变换. 按照惯例, 此时我们可以定义 $SU(N)$ 张量如下.

定义 4.26($SU(N)$ 张量概念) 下面给出的量

$$T = \{T^{a_1 \cdots a_k}_{b_1 \cdots b_r}\}, \quad 1 \leqslant a_i,\ b_j \leqslant K = N^2 - 1, \tag{4.4.24}$$

称作是一个 (k,r) 型 $SU(N)$ 张量, 若 Te SU_N 的坐标基发生 (4.4.22) 变换时, (4.4.24) 的量将发生如下变换:

$$\tilde{T}^{a_1\cdots a_k}_{b_1\cdots b_r}=x^{a_1}_{c_1}\cdots x^{a_k}_{c_k}y^{d_1}_{b_1}\cdots y^{d_r}_{b_r}T^{c_1\cdots c_k}_{d_1\cdots d_r},$$

其中 (x^a_b) 如 (4.4.22), (y^a_b) 如 (4.4.23).

由定义 4.26 可看到, 与 $SU(N)$ 生成元基 $\{\tau_a\}$ 相对应的规范场 $\{A^a_\mu|\ 1\leqslant a\leqslant K\}$ 是一个 $SU(N)$ 一阶反变张量, 即它按如下法则进行变换 (注意不要与 (4.4.3) 的规范变换混淆):

$$\tilde{A}^a_\mu=y^a_bA^b_\mu,\quad Y=X^{-1}=(y^a_b).\tag{4.4.25}$$

此外, 再来考查 $SU(N)$ 的结构常数 λ^a_{bc}, 它定义为

$$[\tau_b,\tau_c]=\mathrm{i}\lambda^a_{bc}\tau_a,$$

这里 $[\tau_b,\tau_c]=\tau_b\tau_c^\dagger-\tau_c\tau_b^\dagger$. 由 (4.4.22) 有

$$\begin{aligned}&[\tilde{\tau}_b,\tilde{\tau}_c]=\mathrm{i}\tilde{\lambda}^a_{bc}x^d_a\tau_d,\\&[\tilde{\tau}_b,\tilde{\tau}_c]=x^a_bx^d_c[\tau_a,\tau_d]=\mathrm{i}x^a_bx^d_c\lambda^f_{ad}\tau_f.\end{aligned}$$

从这推出

$$\tilde{\lambda}^a_{bc}=x^f_bx^g_cy^a_d\lambda^d_{fg}.\tag{4.4.26}$$

从 (4.4.23), (4.4.25) 和 (4.4.26) 看到, θ^a, A^a_μ 是 $SU(N)$ 一阶反变张量, 而结构常数 λ^a_{bc} 是 (1,2) 型张量.

在 $SU(N)$ 上还有两种特殊的二阶协变张量, 它们分别由结构常数 λ^a_{bc} 和生成元基 τ_a 组合而成. 它们的重要性在于它们是 Riemann 度量. 令 $A\in SU(N)$, 则 (4.4.16) 给出 A 点的切空间

$$T_ASU_N=\{\mathrm{i}\omega|\ A^\dagger\omega=(A^\dagger\omega)^\dagger,\ \mathrm{Tr}\ (A^\dagger\omega)=0\}.\tag{4.4.27}$$

于是 $A\in SU(N)$ 处, 结构常数 λ^a_{bc} 满足

$$[\omega_b,\omega_c]=\omega_b\omega_c^\dagger-\omega_c\omega_b^\dagger=\mathrm{i}\lambda^a_{bc}\omega_aA^\dagger,\tag{4.4.28}$$

然后可以在 $SU(N)$ 上定义一个全局的二阶协变张量场为

$$G^0_{ab}=\frac{1}{4N}\lambda^c_{ad}\lambda^d_{cb}.\tag{4.4.29}$$

此外, 还可以在 $SU(N)$ 上定义另一个二阶协变张量场如下:

$$G_{ab}(A)=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ (\omega_a\omega_b^\dagger),\quad \text{在 } T_ASU_N \text{ 上}.\tag{4.4.30}$$

下面定理表明由 (4.4.29) 和 (4.4.30) 给出的两个 $SU(N)$ 张量是对称的二阶协变张量场.

定理 4.27 由 (4.4.29) 和 (4.4.30) 提供的是两个 $SU(N)$ 上的二阶对称协变张量场, 即

$$G^0_{ab}(A) = G^0_{ba}(A), \quad G_{ab}(A) = G_{ba}(A), \quad A \in SU(N).$$

证明 首先由结构常数的反对称性:

$$\lambda^c_{ab} = -\lambda^c_{ba},$$

立刻推出 G^0_{ab} 的对称性:

$$G^0_{ab} = \lambda^c_{ad}\lambda^d_{cb} = \lambda^c_{da}\lambda^d_{bc} = G^0_{ba}.$$

再来考虑 G_{ab} 的对称性. 由 (4.4.27) 可知 $T_A SU_N$ 的坐标基 $\{\omega_a |\ 1 \leqslant a \leqslant K = N^2 - 1\}$ 具有如下性质:

$$A^\dagger \omega_a = (A^\dagger \omega_a)^\dagger, \quad \mathrm{Tr}\ (A^\dagger \omega_a) = 0, \quad A^\dagger = A^{-1}.$$

即 $A^\dagger \omega_a$ 是 Hermite 矩阵. 记 $A^\dagger \omega_a = \tau_a$, 则有

$$\tau_a = \tau_a^\dagger, \quad \mathrm{Tr}\ \tau_a = 0.$$

于是由 (4.4.30) 有

$$G_{ab} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ (\omega_a \omega_b^\dagger) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ (A\tau_a\tau_b^\dagger A^\dagger) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ (\tau_a\tau_b). \tag{4.4.31}$$

再由

$$\tau_a\tau_b = \tau_b\tau_a + \mathrm{i}\lambda^c_{ab}\tau_c, \quad \mathrm{Tr}\ \tau_c = 0,$$

可推出

$$\mathrm{Tr}\ (\tau_a\tau_b) = \mathrm{Tr}\ (\tau_b\tau_a) + \mathrm{i}\lambda^c_{ab}\mathrm{Tr}(\tau_c) = \mathrm{Tr}(\tau_b\tau_a).$$

于是从 (4.4.31) 推出

$$G_{ab} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ (\tau_a\tau_b) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ (\tau_b\tau_a) = G_{ba}.$$

因此 G_{ab} 是对称的. 定理证毕.

4.4.4　在 $SU(N)$ 上的自然 Riemann 度量

由定理 4.27 看到, G^0_{ab} 和 $G_{ab}(A)$ 是定义在 $SU(N)$ 上的两个二阶对称张量场. 这一小节将证明 $G_{ab}(A)$ 对所有 $A \in SU(N)$ 都是正定的, 从而是 $SU(N)$ 上的一个 Riemann 度量.

定理 4.28($SU(N)$ 的 Riemann 度量定理)　关于 $SU(N)$ 上的二阶对称张量场 $G_{ab}(A)$, 有如下结论:

(1) G^0_{ab} 是正定的.

(2) 对每点 $A \in SU(N)$ 存在坐标系使得 $G_{ab}(A) = G^0_{ab}$, 从而 G_{ab} 是 Riemann 度量.

证明　首先证明结论 (1). 因为 G^0_{ab} 是二阶协变张量, 即在 (4.4.22) 坐标变换下, (G^0_{ab}) 将变换为如下矩阵:

$$(\tilde{G}^0_{ab}) = X(G^0_{ab})X^{\mathrm{T}}. \tag{4.4.32}$$

因此, 如果 G^0_{ab} 对于一个给定的生成元基 $\{\tau_a|\ 1 \leqslant a \leqslant K\}$ 是正定的, 那么由 (4.4.32) 便可知道对所有生成元基 G_{ab} 都是正定的.

在物理学中最重要的是 $SU(2)$ 和 $SU(3)$, 因此我们专门对 $N = 2$ 和 $N = 3$ 进行讨论, 然后再讨论一般 N 的情况.

对于 $SU(2)$, 取 Pauli 矩阵:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.4.33}$$

作为生成元基. 对应的结构常数为

$$\lambda^c_{ab} = 2\varepsilon_{abc}, \quad \varepsilon_{abc} = \begin{cases} 1, & \text{若 } (abc) \text{ 为偶排列}, \\ -1, & \text{若 } (abc) \text{ 为奇排列}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

直接计算便可获得

$$G^0_{ab} = \frac{1}{8}\lambda^c_{ab}\lambda^b_{ca} = \delta_{ab}, \quad \delta_{ab} \text{ 为 Kronecker 符号}. \tag{4.4.34}$$

因此, 在 (4.4.33) 的生成元基情况下, (G^0_{ab}) 作为矩阵是恒等矩阵, 因而是一个 Euclid 度量.

对于 $SU(3)$, 我们取 Gell-Mann 矩阵:

$$\lambda_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_2=\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}&0\\\mathrm{i}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$
$$\lambda_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_5=\begin{pmatrix}0&0&-\mathrm{i}\\0&0&0\\\mathrm{i}&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\tag{4.4.35}$$
$$\lambda_7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-\mathrm{i}\\0&\mathrm{i}&0\end{pmatrix},\quad \lambda_8=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}.$$

反对应的结构常数为

$$\lambda_{ab}^c=2f_{abc},\quad 1\leqslant a,b,c\leqslant 8,$$

其中 f_{abc} 是反对称的, 其值为

$$\begin{aligned}&f_{123}=1,\quad f_{147}=f_{246}=f_{257}=f_{345}=\frac{1}{2},\\&f_{156}=f_{367}=-\frac{1}{2},\quad f_{458}=f_{678}=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \text{其他为零.}\end{aligned}\tag{4.4.36}$$

然后根据 (4.4.36) 可以算出

$$\begin{aligned}&\lambda_{ad}^c\lambda_{cb}^d=0,\quad \forall a\neq b,\\&\lambda_{ad}^c\lambda_{ca}^d=12,\quad \forall 1\leqslant a\leqslant 8.\end{aligned}$$

因此获得

$$G_{ab}^0=\frac{1}{12}\lambda_{ad}^c\lambda_{cb}^d=\delta_{ab}.\tag{4.4.37}$$

再次地看到, 在 Gell-Mann 表示 (4.4.35) 下, (G_{ab}^0) 是 Euclid 度量.

现在回过来考虑一般 $N\geqslant 2$ 的情况. 事实上, 对所有 N 都存在 $SU(N)$ 的一个生成元基 $\{\tau_a\}$, 使得所对应的二阶张量 $\{G_{ab}^0\}$ 是一个 Euclid 度量. 这种生成元基 τ_a 是由如下 $N\times N$ 零迹的 Hermite 矩阵给出.

$$
\begin{aligned}
&\tau_1^{(1)}=\begin{pmatrix}\sigma_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \tau_2^{(1)}=\begin{pmatrix}\sigma_2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \tau_3^{(1)}=\begin{pmatrix}\sigma_3 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\\
&\tau_1^{(2)}=\begin{pmatrix}\lambda_4 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \tau_2^{(2)}=\begin{pmatrix}\lambda_5 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \tau_3^{(2)}=\begin{pmatrix}\lambda_6 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\\
&\tau_4^{(2)}=\begin{pmatrix}\lambda_7 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \tau_5^{(2)}=\begin{pmatrix}\lambda_8 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\\
&\vdots\\
&\tau_1^{(N-1)}=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 1\\ \vdots & & \vdots\\ 1 & \cdots & 0\end{pmatrix},\quad \tau_2^{(N-1)}=\begin{pmatrix}0 & \cdots & -\mathrm{i}\\ \vdots & & \vdots\\ \mathrm{i} & \cdots & 0\end{pmatrix},\\
&\tau_3^{(N-1)}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 1 & \cdots & 0\end{pmatrix},\quad \tau_4^{(N-1)}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & -\mathrm{i}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \mathrm{i} & \cdots & 0\end{pmatrix},\\
&\vdots\\
&v\tau_{2N-1}^{(N-1)}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N(N-1)}}\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -(N-1)\end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{4.4.38}
$$

其中 σ_i $(1\leqslant i\leqslant 3)$ 是如 (4.4.33) 的 Pauli 矩阵, λ_k $(4\leqslant k\leqslant 8)$ 是如 (4.4.35) 的 Gell-Mann 矩阵. 对应于 (4.4.38),

$$
G_{ab}^0=\frac{1}{4N}\lambda_{ad}^c\lambda_{cb}^d=\delta_{ab}. \tag{4.4.39}
$$

于是由 (4.4.29) 给出的二阶 $SU(N)$ 张量是对称正定的.

下面证明结论 (2).

对每一点 $A\in SU(N)$, 在 A 处的切空间 T_ASU_N 上取坐标基

$$
\omega_a=A\tau_a,\quad 1\leqslant a\leqslant K=N^2-1, \tag{4.4.40}
$$

其中 τ_a $(1\leqslant a\leqslant K)$ 如 (4.4.38) 的 N 阶矩阵. 由 (4.4.31) 有

$$
G_{ab}=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(\tau_a\tau_b)
$$

此外, 关于 (4.4.38) 的矩阵进行直接计算便可发现

$$\mathrm{Tr}\ (\tau_a\tau_b) = 2\delta_{ab}.$$

于是在 (4.4.40) 的坐标基下有

$$G_{ab} = \delta_{ab} = G^0_{ab}, \quad \text{由 (4.4.39)}. \tag{4.4.41}$$

因为 (4.4.40) 的坐标基 ω_a 的变换与 (4.4.38) 坐标基 τ_a 的变换是完全一样的, 从而由 (4.4.41) 可推出对任何 Te SU_N 上的坐标基 ξ_a $(1 \leqslant a \leqslant K)$, 下面两个张量相等

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ (\xi_a\xi_b) = \frac{1}{4N}\lambda^c_{ad}\lambda^d_{cb}, \tag{4.4.42}$$

其中 λ^c_{ab} 是对应于 ξ_a $(1 \leqslant a \leqslant K)$ 的结构常数. 再由 (4.4.31), 对应于坐标基 $\omega_a = A\xi_a$ 的张量 G_{ab} 为

$$G_{ab} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ (\omega_a\omega_b^\dagger) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ (\xi_a\xi_b). \tag{4.4.43}$$

于是从 (4.4.42) 和 (4.4.43) 便证得结论 (2). 定理证毕.

4.4.5 规范理论的表示不变性

再回过来看规范理论, 它不仅要求满足规范对称性, 而且还必须满足表示不变性, 即在 (4.4.22) 的 $SU(N)$ 生成元基底变换下 Yang-Mills 泛函也应该是不变的.

在 $SU(N)$ 表示不变性的要求下, 根据定理 4.28, 在 (4.4.2) 中的 Yang-Mills 作用量密度 $\mathcal{L}_G$ 应改写为

$$\mathcal{L}_G = G_{ab}(A)F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu b}, \quad A \in SU(N) \tag{4.4.44}$$

这里 G_{ab} 如 (4.4.30),

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g\lambda^a_{bc}A^b_\mu A^c_\nu. \tag{4.4.45}$$

此时, (4.4.44)-(4.4.45) 的规范理论不仅是在如下规范变换下

$$\begin{cases} \tilde{\Psi} = \Omega\Psi, \quad \Omega = Ae^{\mathrm{i}\theta^a(A^\dagger\omega_a)}, \quad A \in SU(N), \\ \tilde{A}^a_\mu A^\dagger\omega_a = \Omega A^a_\mu A^\dagger\omega_a\Omega^{-1} + \dfrac{\mathrm{i}}{g}(\partial_\mu\Omega)\Omega^{-1} \end{cases} \tag{4.4.46}$$

是不变的, 而且也是在如下生成元基底变换下

$$\tilde{\omega}_a = x^b_a\omega_b \tag{4.4.47}$$

是不变的. (4.4.46) 和 (4.4.47) 给出最一般的规范变换和表示变换.

由于在适当坐标系下 $G_{ab}(A)=G^0_{ab}$. 因此通常只需考虑在单位元素 $I\in SU(N)$ 处的规范变换以及生成元基底变换即可. 此时完整的规范理论给出如下.

$SU(N)$ 的规范场为 $\Psi=(\psi^1,\cdots,\psi^N)^{\mathrm{T}}, A^a_\mu=(A^1_\mu,\cdots,A^K_\mu), K=N^2-1$. 关于 Ψ 和 A^a_μ 的 Yang-Mills 作用量为

$$L_{YM}=\int_M [G_{ab}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu b}+\bar{\Psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu-m)\Psi]\mathrm{d}x, \tag{4.4.48}$$

其中 $F^a_{\mu\nu}$ 如 (4.4.45), $D_\mu=\partial_\mu+\mathrm{i}gA^a_\mu\tau_a, G_{ab}$ 为

$$G_{ab}=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(\tau_a\tau_b^\dagger)=\frac{1}{4N}\lambda^{\mathrm{c}}_{ad}\lambda^d_{cb}. \tag{4.4.49}$$

在 (4.4.48)-(4.4.49) 的改进形式下, 这个作用量不仅在 (4.4.3) 规范变换下不变, 而且在如下表示变换下

$$\tilde{\tau}_a=x^b_a\tau_b,\quad X=(x^b_a)\text{ 非奇异矩阵}, \tag{4.4.50}$$

也是不变的.

注 4.29　由 (4.4.1)-(4.4.2) 给出的是经典的 Yang-Mills 理论, 它是 (4.4.48)-(4.4.49) 的特殊情况. 即当 $SU(N)$ 生成元基底取正交坐标基时, (4.4.48)-(4.4.49) 便归为经典情况. 所谓 $SU(N)$ 生成元基是一个正交坐标基是指满足

$$\mathrm{Tr}\,(\tau_a\tau_b^\dagger)=\delta_{ab} \tag{4.4.51}$$

的生成元基 $\{\tau_a\}$. 显然在 (4.4.50) 变换下有

$$(\tilde{G}_{ab})=X(G_{ab})X^\dagger.$$

因此当 (4.4.50) 是正交变换时, 即对

$$X\in U(K),\quad K=N^2-1,$$

正交基仍变为正交基. 注意到 $O(K), SO(K), SU(K)$ 都是 $U(K)$ 的子群. 从而经典 Yang-Mills 理论在任何实和复正交的 (4.4.50) 表示变换下是不变的.

注 4.30　经典 Yang-Mills 理论在正交表示变换下的不变性, 这看上去似乎关于规范理论的 (4.4.48)-(4.4.49) 这种改进并不能增添新的物理内容. 但实际上, 虽然方程的改进本身不能获得新的物理, 然而这套数学理论导致一种新的对称性, 即后面将介绍的表示不变性原理被发现. 而这个新的对称性原理再结合最近建立的相互作用动力学原理, 就唯一地确定了耦合四种相互作用的统一场方程形式, 从而产生大量新的物理结果.

4.5 对称原理支配的几何

4.5.1 对称性决定几何结构的观点

传统数学的几何观念都是给定流形的拓扑与几何结构, 然后再在该流形上展开几何学, 或者是在给定的流形上展开拓扑结构与几何结构之间关联的研究. 更具体地讲, 现代几何学总是首先给定一个具有明确几何结构的流形, 如 Riemann 流形 (M, g_{ij}), 然后再在 (M, g_{ij}) 上展开几何学研究.

然而从物理学观点来看数学, 其观念正好相反. 物理学认为宇宙或者物理系统所在的背景空间 M, 虽然知道它是一个流形, 但是我们既不知道 M 的拓扑结构, 也不知道它的几何结构. 然而我们却知道 M 上的物理系统所遵守的对称性原理和动力学原理, 而这些原理反过来可以确定 M 的拓扑和几何结构. 它是通过如下三个过程完成这一点的:

(1) 由对称性原理来确定反映 M 拓扑与几何结构的数学量是 Riemann 度量 $\{g_{ij}\}$ 或是规范场 $\{G^a_\mu\}$;

(2) 由动力学原理来确定 $\{g_{ij}\}$ 和 $\{G^a_\mu\}$ 所满足的场方程;

(3) 由场方程决定 $\{g_{ij}\}$ 和 $\{G^a_\mu\}$ 的具体函数形式, 从而确定了 M 的拓扑与几何结构, 这最后一个是纯数学过程.

以上三个过程称为由对称性支配的几何学. 这一节的内容就是以本章前四节的理论为基础而建立对称原理几何学. 为了有一个具体的全局性了解, 下面给出简要的轮廓性介绍.

1. Einstein 广义相对性原理决定 Riemann 几何结构

我们的宇宙时空 M 是一个四维流形. 所谓 M 的拓扑结构是指它的空间部分究竟是一个三维球面 S^3 或者 Euclid 空间 R^3, 还是什么其他三维流形. 而几何结构最直接的就是由 M 的 Riemann 度量 $\{g_{ij}\}$ 具体函数表达形式来给出. 于是全局性地了解我们宇宙时空 M 的关键点就是需要知道它的拓扑与几何结构, 要作到这一点, 入手之处便是 Einstein 广义相对性原理与相互作用动力学原理 (简称为 PID, 见 4.5.2 小节的介绍).

4.1.1 小节已介绍了广义相对性原理. 由该原理直接推出宇宙时空 M 是一个四维 Riemann 流形

$$(M, g_{ij}), \tag{4.5.1}$$

这便是上述的第一个过程. 该过程也可视为每一种对称性都对应于 M 的一种几何结构类型, 即

$$\text{时空对称} \leftrightarrow M \text{ 的度量结构 (弯曲结构)}. \tag{4.5.2}$$

进一步, 时空对称性与 Lagrange 动力学原理实质性地确定了 (4.5.1) 中 $g_{\mu\nu}$ 所遵从的作用量形式为 (4.1.16), 即

$$L_{EH}=\int_M\left[R+\frac{8\pi G}{c^4}S\right]\sqrt{-g}\mathrm{d}x, \tag{4.5.3}$$

这里体积元取 $\sqrt{-g}\mathrm{d}x$ 是因为 $\{g_{\mu\nu}\}$ 是 Minkowski 型双曲度量, 因而 $-g=-\det(g_{\mu\nu})>0$.

然后, 再由相互作用动力学原理 (PID), 从 (4.5.3) 得到 $\{g_{\mu\nu}\}$ 所满足的微分方程表达式如下:

$$\delta L_{EH}=D_A\Phi. \tag{4.5.4}$$

最后, 由于不是对于所有拓扑结构的 M 方程 (4.5.4) 都存在解 $\{g_{ij}\}$, 因此 (4.5.4) 的解包括 M 的拓扑结构与 Riemann 度量. 以上便是从 Einstein 广义相对性原理获得流形 M 的拓扑与几何结构的全部过程.

2. 规范不变性决定流形复向量丛结构

我们回忆规范不变性原理, 它可陈述如下 (也见 3.1.4 小节).

***SU*(*N*) 规范不变性原理**　令 $M\times C_p^N$ 是 M 上的一个复向量丛,

$$\Psi:\ M\to M\times C_p^N \text{ 是一个映射 (截面).} \tag{4.5.5}$$

称复向量丛 $M\times C_p^N$ 满足 $SU(N)$ 规范对称性, 若对任何关于 (4.5.5) 截面 Ψ 的微分方程

$$F(\Psi,\cdots,D^m\Psi)=0, \tag{4.5.6}$$

它们在如下 $SU(N)$ 规范变换下是协变的

$$\tilde{\Psi}=\Omega\Psi,\quad \Omega=e^{\mathrm{i}\theta^a\tau_a}\in SU(N), \tag{4.5.7}$$

其中 $\theta^a=\theta^a(p)$ $(1\leqslant p\leqslant N^2-1)$ 是与 $p\in M$ 有关的实值 (或复值) 函数, τ_a $(1\leqslant a\leqslant N^2-1)$ 是 $SU(N)$ 生成元.

正如 4.1.5 小节中所介绍的那样, (4.5.6) 在 (4.5.7) 规范变换下的协变性要求向量丛 $M\times C_p^N$ 上存在一组联络 (称为规范场):

$$A_\mu^a,\quad 1\leqslant a\leqslant N^2-1, \tag{4.5.8}$$

其中每个 A_μ^a 关于下标 μ 是 M 上的一个向量场, 使得 (4.5.6) 的导数为

$$D_\mu=\partial_\mu+\mathrm{i}gA_\mu^a\tau_a, \tag{4.5.9}$$

并且在 (4.5.7) 规范变换下 A_μ^a 按如下规则变换：

$$\tilde{A}_\mu^a \tau_a = \Omega(A_\mu^a \tau_a)\Omega^{-1} + \frac{\mathrm{i}}{g}\partial_\mu \Omega \Omega^{-1}. \tag{4.5.10}$$

现在再回过来讨论规范不变性是如何决定 $M \times C_p^N$ 的拓扑与几何结构的. 首先必须指出, 就像 Riemann 度量给出了流形 M 的一种几何结构一样, 由 (4.5.8)-(4.5.10) 提供的规范场 $\{A_\mu^a\}$ 给出了复向量丛 $M \times C_p^N$ 的拓扑与几何结构 (在 4.5.4 小节中将详细讨论这一点). 因而上面的 $SU(N)$ 规范对称性确定了反映 $M \times C_p^N$ 结构的数学量是该丛上的联络 A_μ^a, 即

$$(M \times C_p^N, A_\mu^a). \tag{4.5.11}$$

也就是说, 规范对称性对应于 M 上复向量丛的联络结构:

$$\text{规范对称性} \ \leftrightarrow \ M \text{ 复向量丛联络结构}. \tag{4.5.12}$$

于是可以看到 (4.5.11)-(4.5.12) 是 (4.5.1)-(4.5.2) 的类似物.

接下来, 由规范对称性和 Yang-Mills 理论唯一地确定了 (4.5.11) 中联络 (规范场) A_μ^a 所遵从的作用量形式为

$$L_{YM} = \int_M G_{ab} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu b} \sqrt{-g}\mathrm{d}x, \tag{4.5.13}$$

式中 G_{ab} 如 (4.4.49), $F_{\mu\nu}^a$ 如 (4.4.45).

再由相互作用动力学原理 (PID), 从 (4.5.13) 得到 A_μ^a 的方程为

$$\delta L_{YM} = D_A \phi. \tag{4.5.14}$$

最后从方程 (4.5.14) 求出解 A_μ^a, 便最终获得 M 复向量丛的结构.

以上给出的是对称原理几何学的轮廓性介绍. 每一种对称性决定一种几何结构. 当将所有对称性原理组合起来统一处理, 所得的几何结构便是我们所称的统一场几何学.

4.5.2 两个物理基本原理 PID 和 PRI

在 4.5.1 小节的介绍中我们已看到, 建立对称原理的几何学需要相互作用动力学原理 (PID). 更进一步地, 若要建立统一场几何学还需要引入表示不变性原理 (PRI). 下面将详细介绍这两个原理.

首先给出 PID 如下.

相互作用动力学原理 (PID) 对于所有的物理相互作用都存在 Lagrange 作用量

$$L(g_{ij}, A, \psi) = \int_M \mathcal{L}(g_{ij}, A, \psi)\sqrt{-g}\mathrm{d}x, \tag{4.5.15}$$

式中 g_{ij} 是 Riemann 度量代表引力势, A 是一组向量场代表规范场, ψ 是粒子的波函数. (4.5.15) 的作用量满足广义相对性原理, Lorentz 不变性以及规范不变性原理. 进一步地, 这些相互作用场 g_{ij}, A, ψ 是 (4.5.15) 在零散度 div_A 约束变分的极值点.

根据 PID 和定理 4.22 和定理 4.23, 关于 (4.5.15) 作用量的约束变分的场方程可写成如下形式:

$$\frac{\delta}{\delta g^{ij}} L(g_{ij}, A, \psi) = (D_i + \alpha_b A_i^b)\Phi_j, \tag{4.5.16}$$

$$\frac{\delta}{\delta A_j^a} L(g_{ij}, A, \psi) = (D_i + \beta_{ab} A_i^b)\varphi^a, \tag{4.5.17}$$

$$\frac{\delta}{\delta \psi} L(g_{ij}, A, \psi) = 0, \tag{4.5.18}$$

其中 $A^1, \cdots, A^N$ 是关于电磁、弱和强相互作用的规范向量场, Φ_j 和 φ^a 分别是如 (3.3.37) 和 (3.3.41) 的场, α_b, β_{ab} 是耦合常数, 但它们依赖于物理系统的能量密度.

然后再给出 PRI 如下.

表示不变性原理 (PRI)　所有 $SU(N)$ 规范理论在生成元基底 $\{\tau_a\}$ 的如下变换下是不变的

$$\tilde{\tau}_a = x_a^b \tau_b, \quad X = (x_a^b) \text{ 为非奇异复矩阵.} \tag{4.5.19}$$

也就是说, $SU(N)$ 的 Yang-Mills 作用量 (4.5.13) 在 (4.5.19) 变换下不变, 而 L_{YM} 的约束变分场方程

$$\delta L_{YM} = D\phi + A\phi \tag{4.5.20}$$

关于 (4.5.19) 的变换是协变的.

下面关于两个物理原理 PID 和 PRI 给出一些说明.

(1) 最初提出 PID 的动机是由于近年来天文学发现了暗物质与暗能量的现象, 这些现象在 Einstein 引力场方程的框架下不能得到解释. 而建立在 PID 基础之上的引力场方程 (Ma, Wang, 2014)

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij} - D_i D_j \varphi$$

却能很好地统一解释了暗物质和暗能量现象. 随后进一步地发展, 我们发现 PID 能够给出比 Higgs 机制更自然的自发对称破缺的质量生成机制. 在下一章我们将会看到 PID 获得的更多物理事实的支持.

(2) 在 Lagrange 动力学原理基础上提出的 div_A 约束变分, 它的合理性在于几个方面. 首先变分元 X 要求散度为零

$$\mathrm{div}_A X = 0, \tag{4.5.21}$$

它的物理意义很清楚, 它就是能量动量守恒, 也就是说作用量的极值点是在能量动量守恒约束下取得. 其次, 通常在不同相互作用之间的耦合能量不具有变分结构. 如果不采用 (4.5.21) 的约束变分, 像方程 (4.5.16) 和 (4.5.17) 右端项这些耦合能量项将无法进入相互作用场方程. 最后一点也很重要的是, 原始的 Einstein 场方程由于广义相对不变性造成独立的方程数多于未知函数的数目, 这使得许多在合理物理条件下 Einstein 场方程无解, 而 PID 的引力场方程可保证方程数与未知函数的数目相同, 见后面 5.1.2 小节或 (Ma, Wang, 2014).

(3) PRI 的提出完全是基于逻辑合理性的要求. 因此 PRI 的正确性是毫无疑问的. 任何破坏 PRI 对称性的物理理论或者是不正确的, 或者是近似正确.

(4) 根据 PRI, 任何两个不同群 $SU(N_1)$ 和 $SU(N_2)$ 的规范场 A_μ^a 和 G_μ^k 之间不能进行如下组合:

$$\alpha A_\mu^a + \beta G_\mu^k, \tag{4.5.22}$$

这是因为 A_μ^a 和 G_μ^k 是属于不同类型的 $SU(N)$ 张量, 因此任何如 (4.5.22) 这样的组合将破坏 PRI. 从这个角度讲, 关于电弱相互作用的 WS 模型 (3.3.76) 是违背 PRI.

(5) 由 PID 与 PRI 一起建立的统一场理论是目前唯一不破坏 PRI 对称性的相互作用理论. 其他任何希望用一种对称群来建立统一场作用量的企图都将破坏 PRI, 除非它不包含规范理论.

4.5.3 广义相对性原理支配的 Riemann 流形

在 4.5.1 小节中已经概况性的介绍了广义相对性原理如何确定一个 Riemann 流形的过程. 这一小节将详细讨论这个课题.

首先由广义相对性原理给出一个 n 维 Riemann 流形 (M, g_{ij}), 这里 Riemann 度量 $\{g_{ij}\}$ 是待定的. 对任何 (k, r) 型张量场

$$u:\ M \to T_r^k M, \tag{4.5.23}$$

由 $\{g_{ij}\}$ 可唯一地产生协变导数 ∇, 即对 (4.5.23) 的 u 有

$$\nabla u:\ M \to T_{r+1}^k M,$$

其中 ∇ 是由 (4.1.11)-(4.1.13) 给出的协变导数.

再根据 Lagrange 动力学原理, 关于 g_{ij} 应该存在一个作用量

$$L = \int_M \mathcal{L}(g_{ij})\sqrt{g}\mathrm{d}x, \tag{4.5.24}$$

使得 (4.5.24) 关于切丛 T_pM 上的如下线性变换:

$$\tilde{e} = A_p e, \quad A_p \text{ 是与 } p \in M \text{ 有关 } n \text{ 阶非奇异矩阵}, \tag{4.5.25}$$

是不变的, 其中 $e=(e_1,\cdots,e_n)^{\mathrm{T}}$ 是 T_pM 上的坐标基. 根据物理要求, (4.5.24) 中的作用量密度 $\mathcal{L}$ 只能包含 g_{ij} 的最高为二次的导数项. 它的寻求方法是由协变导数 ∇ 的交换过程获得, 即由

$$\nabla_i\nabla_j-\nabla_j\nabla_i \tag{4.5.26}$$

来得到, 该算子称为曲率算子. 注意到 ∇_i 作用在一阶和二阶张量场上有

$$\begin{aligned}&\nabla_jA_k=\partial_jA_k-\Gamma^r_{jk}A_r;\\&\nabla_i\nabla_jA_k=\partial_i(\nabla_jA_k)-\Gamma^l_{ij}\nabla_lA_k-\Gamma^l_{ik}\nabla_jA_l.\end{aligned}$$

于是将 (4.5.26) 的曲率算子作用在 A_k 上可得

$$(\nabla_i\nabla_j-\nabla_j\nabla_i)A_k=R^r_{kij}A_r, \tag{4.5.27}$$

式中

$$R^r_{kij}=\frac{\partial\Gamma^r_{ik}}{\partial x^j}-\frac{\partial\Gamma^r_{jk}}{\partial x^i}+\Gamma^l_{ik}\Gamma^r_{lj}-\Gamma^l_{jk}\Gamma^r_{li}. \tag{4.5.28}$$

由于 (4.5.27) 左端是 $(0,3)$ 型张量, 因而右端的 R^r_{kij} 是一个 (1,3) 型张量. 于是由 R^r_{kij} 通过缩并可获得一个标量场

$$R=g^{ij}R_{ij}\quad(R_{ij}=R^k_{ikj}). \tag{4.5.29}$$

它称为标量曲率. 再由联络 Γ^k_{ij} 的表达式 (4.1.11), 从 (4.5.28) 可知标量曲率 R 仅含 g_{ij} 的最高二阶导数项. 这正是 (4.5.24) 作用量所需要的. 于是作用量密度

$$\mathcal{L}=R+\text{ 其他项.}$$

因为 g_{ij} 的协变导数为零 $Dg_{ij}=0$, 因此 R 是唯一只含二阶导数项的标量函数. 于是广义相对性原理和 Lagrange 动力学原理便唯一地 (差一个常数) 决定了 (4.5.24) 的形式为

$$F_{EH}=\int_M R\sqrt{g}\mathrm{d}x,$$

称为 Einstein-Hilbert 泛函. 再加上一个外在给定标量场 $S=g^{kl}S_{kl}$. 其中 S_{ij} 是给定二阶张量场, 于是便给出 Einstein-Hilbert 作用量

$$L_{EH}=\int_M\left(R+\frac{8\pi G}{c^4}S_{ij}g^{ij}\right)\sqrt{g}\mathrm{d}x. \tag{4.5.30}$$

注意, 当 M 是 Minkowski 型流形时, 体积元为 $\sqrt{-g}\mathrm{d}x$.

确定了作用量为 (4.5.30) 的形式后, 可再应用 PID 将 g_{ij} 所满足的场方程具体写出来. 由 (3.4.17),

$$\frac{\delta}{\delta g_{ij}}L_{EH}=R_{ij}-\frac{1}{2}g_{ij}R+\frac{8\pi G}{c^4}T_{ij},\quad T_{ij}=S_{ij}-\frac{1}{2}g_{ij}S.$$

于是 PID 的场方程 (4.5.16) 写作

$$R_{ij}-\frac{1}{2}g_{ij}R=-\frac{8\pi G}{c^4}T_{ij}+D_i\Phi_j+A_i\Phi_j, \tag{4.5.31}$$

其中 A_i 为给定向量场, 可看作是电磁场. 此时场方程的未知函数为

$$\{g_{ij},\Phi_k\},\quad 1\leqslant i,j,k\leqslant n.$$

于是广义相对性原理的几何学场方程是由 (4.5.31) 给出.

4.5.4 规范不变性与复向量丛结构

一个向量丛 $M\times E_p$ ($E_p=R^N$ 或 C^N) 的结构取决于该丛上截面 $\psi:\ M\to M\times E_p$ 的协变导数

$$D\psi=\partial\psi+\Gamma\cdot\psi \tag{4.5.32}$$

中的联络 Γ. 若 $\Gamma=0$ 在 M 上, 则 $M\times E_p=M\times E$ 是几何平凡的. 否则 $M\times E_p$ 便不是几何平凡丛. 特别地, 该向量丛的丛结构由协变导数 (4.5.32) 的曲率算子

$$\omega_{ij}=D_iD_j-D_jD_i \tag{4.5.33}$$

所产生的曲率张量来反映, 就如 (4.5.28) 的 Riemann 曲率张量 R^k_{ijl} 是由 (4.5.27) 曲率算子所产生的那样.

现在来看如何从规范对称性求得反映复向量丛 $M\times C^N$ 结构的联络 A^a_μ(规范场) 的过程. 令

$$\psi:\ M\to M\times C^N_p \text{ 为一个截面.} \tag{4.5.34}$$

考虑下面从空间变换:

$$\Omega:\ C^N_p\to C^N_p,\quad \Omega=e^{\mathrm{i}\theta^a\tau_a}\in SU(N), \tag{4.5.35}$$

其中变换矩阵 Ω 与 $p\in M$ 有关. 此时 (4.5.34) 的截面 ψ 也将跟着发生如下变换:

$$\tilde{\psi}=\Omega\psi,\quad \Omega=\Omega(p),\quad p\in M. \tag{4.5.36}$$

规范对称性要求截面 ψ 的导数关于 (4.5.36) 变换是协变的:

$$\tilde{D}\tilde{\psi}=\Omega D\psi. \tag{4.5.37}$$

于是便产生复向量丛 $M\times C^N_p$ 的联络 (称为规范场)A^a_k ($1\leqslant a\leqslant N^2-1$). 它是 M 上 N^2-1 个向量场, 与协变导数关系为

$$D_k=\partial_k+\mathrm{i}gA^a_k\tau_a. \tag{4.5.38}$$

将 (4.5.38) 的协变导数组成 (4.5.33) 的曲率算子可求得

$$(D_iD_j - D_jD_i)\psi = -\mathrm{i}gF_{ij}^a\tau_a\psi, \tag{4.5.39}$$

其中 F_{ij}^a 便是反映复向量丛 $M \times C_p^N$ 拓扑与几何结构的曲率张量, 它的表达形式在 3.1.3 小节中给出详细推导, 这里再次给出如下:

$$F_{ij}^a = \partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a + g\lambda_{bc}^a A_i^b A_j^c, \tag{4.5.40}$$

其中 λ_{bc}^a 是对应于生成元 $\{\tau_a\}$ 的结构常数.

此时注意到构成曲率张量 (4.5.40) 的联络 A_j^a 具有三种变换:

(1) 规范变换. 这是由 (4.5.36)-(4.5.37) 的变换要求联络 A_j^a 在 (4.5.35) 变换下也必须按如下规则进行变换 (具体可见 3.1.3 小节中的推导过程),

$$\tilde{A}_j^a\tau_a = \Omega(A_j^a\tau_a)\Omega^{-1} + \frac{\mathrm{i}}{g}\partial_i\Omega\Omega^{-1}. \tag{4.5.41}$$

再由 (4.5.40) 的表达式知, 当 A_j^a 按 (4.5.41) 进行变换时, 曲率张量 F_{ij}^a 也将跟着发生变换.

(2) 表示变换. A_j^a 关于上标 a 是一个 $SU(N)$ 张量. 当 $SU(N)$ 的生成元基 $\{\tau_a\}$ 发生如下变换时

$$\tilde{\tau}_a = x_a^b\tau_b, \quad X = (x_a^b) \text{ 为非奇异矩阵},$$

A_j^a 将跟着发生如下反变的变换:

$$\tilde{A}_j^a = y_b^a A_j^b, \quad (y_b^a) = (x_a^b)^{-1} \text{ 为 } X \text{ 逆矩阵}.$$

(3) 切丛 TM 上的丛空间变换 (Lorentz 变换). A_j^a 关于下标是一阶协变张量场, 即

$$A_j^a : \ M \to TM.$$

于是当 $TM = M \times T_pM$ 的丛空间 T_pM 发生线性变换时

$$L : \ T_pM \to T_pM, \quad L \text{ 为 } n \text{ 阶矩阵 (或 Lorentz 矩阵)}, \tag{4.5.42}$$

则 A_j^a 跟着进行如下变换:

$$(\tilde{A}_1^a, \cdots, \tilde{A}_n^a)^{\mathrm{T}} = L(A_1^a, \cdots, A_n^a)^{\mathrm{T}}.$$

以上三种变换各自对应着一种对称性, 也就是说对于复向量丛 $M \times C_p^N$ 的联络 A_j^a 来讲, 它的 Lagrange 作用量必须在上述三种变换下都是保持不变. 这三种对称性就唯一地确定了 A_μ^a 的作用量只能取如下形式:

$$L = \int_M -\frac{1}{4}G_{ab}F_{ij}^a F^{ijb}\sqrt{g}\mathrm{d}x, \tag{4.5.43}$$

其中 G_{ab} 如 (4.4.49), F^a_{ij} 如 (4.5.40). 事实上

$$G = G_{ab}F^a_{ij}F^{ijb} = G_{ab}g^{ik}g^{jl}F^a_{ij}F^b_{kl}$$

就是复向量丛 $M \times C^N_p$ 的标量曲率.

确定了 A^a_μ 的作用量后, 再由 PID 便可从 (4.5.43) 获得 A^a_μ 所满足的偏微分方程为 (4.5.17) 形式. 由 (4.3.13), 该微分方程的具体表达形式可写成

$$G_{ab}\partial^k F^b_{kj} - g\lambda^c_{da}G_{cb}g^{il}F^b_{ij}A^d_l = (\partial_j + \beta_b A^b_j)\varphi_a, \tag{4.5.44}$$

其中 β_b 是参数, φ_a 是 M 上的标量场, 它们关于下标 a 是一阶 $SU(N)$ 协变张量. 显然场方程 (4.5.44) 满足 PRI.

这样, 便获得规范对称原理的几何学场方程取 (4.5.44) 形式. 由该方程获得的解

$$\{A^a_k, \varphi_a |\ 1 \leqslant a \leqslant N^2 - 1\}$$

能够反映复向量丛 $M \times C^N_p$ 的几何与拓扑结构.

注 4.31 事实上, 一个向量丛 $M \times E_p$ 是否是平凡的取决于它的丛空间 E_p 的线性变换

$$L:\ E_p \to E_p \tag{4.5.45}$$

的变换矩阵是否依赖于 $p \in M$. 若 L 与 p 无关, 则 $M \times E_p$ 便是平凡的, 即 $M \times E_p = M \times E$ 纤维空间位置与 p 无关, 否则便不是平凡的. 线性变换 (4.5.45) 也决定了它的联络变换形式. 因此某种意义上讲, 给出 (4.5.45) 的变换形式便是对于向量丛 $M \times E_p$ 赋予了某种几何与拓扑结构. 这就是在 4.1.4 小节中统一地用向量丛的丛空间变换作为各种类型对称变换的原因. 这样做的另一个优点便是在统一场理论中可以将关于度量场 $g_{\mu\nu}$ 的广义坐标变换与关于规范场 A^a_μ 的 Lorentz 变换完全分开. 而按以前传统的作法, 当取定广义坐标变换后, 就无法取 Lorentz 变换, 从而使得关于粒子的 Dirac 旋量无法定义. 换句话讲, 这种广义坐标变换与 Lorentz 变换不相容性根本性地障碍了广义相对论与规范理论的统一性. 4.1.4 小节中统一的采用丛空间变换便克服了这种不相容性.

4.5.5 PID 与 PRI 的统一场几何

前面的讨论告诉我们, 每一种对称性原理决定了流形 M 的一种几何与拓扑结构. 所谓统一场几何就是用所有对称性原理一起来决定 M 的几何与拓扑结构的几何学.

首先将所有对称性原理列出来, 它们共有四个.

广义相对性原理、Lorentz 不变性、规范不变性、表示不变性, 其中表示不变性是从属于规范理论中的一种对称性结构, 而上面前三种对称性每一种都有自己的场函数. 它们是

$$\begin{aligned}&\text{广义相对性原理:}\quad && g_{\mu\nu}:\ M\to T_2^0M,\\ &\text{Lorentz 不变性:}\quad && \text{Dirac 旋量 }\psi:\ M\to M\times C^4,\\ &SU(N)\text{ 规范不变性:}\quad && (\psi,A_\mu^a):\ M\to M\times(C^{4N}\times E^{4k}),\end{aligned}$$

其中 $K=N^2-1, M$ 是四维流形, E^4 是 Minkowski 空间,

$$E^{4K}=\underbrace{E^4\times\cdots\times E^4}_{K}.$$

于是上述三种对称性的全部场函数可统一写成

$$(g_{\mu\nu},A_\mu^a,\psi):\ M\to M\times(T_2^0M\times T^*M^K\times C^{4N})_p, \tag{4.5.46}$$

其中 ψ 是由 N 个 Dirac 旋量构成, $K=N^2-1$.

关于 (4.5.46) 的统一场作用量取为 Einstein-Hilbert 作用量, Yang-Mills 泛函与 Dirac 部分组成, 即

$$L=\int_M[\mathcal{L}_{EH}+\mathcal{L}_{YM}+\mathcal{L}_D]\sqrt{-g}\mathrm{d}x, \tag{4.5.47}$$

式中

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}_{EH}=R+S_{\mu\nu}g^{\mu\nu},\\ &\mathcal{L}_{YM}=-\frac{1}{4}G_{ab}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\mu\nu}^aF_{\alpha\beta}^b,\\ &\mathcal{L}_D=\bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu-m)\psi\quad(m\text{ 为质量矩阵}),\end{aligned} \tag{4.5.48}$$

其中

$$\begin{aligned}&D_\mu=\partial_\mu+\mathrm{i}gA_\mu^a\tau_a,\\ &g_{\mu\nu}:\ M\to T_2^0M\text{ 为 }M\text{ 的 Riemann 度量.}\end{aligned}$$

统一场几何的场函数 (4.5.46) 将面对如下四种变换.

(1) 切丛 T_pM 上的广义坐标变换:

$$(\tilde{e}_1,\cdots,\tilde{e}_4)^{\mathrm{T}}=A_p(e_1,\cdots,e_4)^{\mathrm{T}}, \tag{4.5.49}$$

其中 A_p 是与 $p\in M$ 有关的 n 阶实矩阵. 此时有如下变换:

$$\begin{aligned}&(\tilde{g}_{\mu\nu})=A_p(g_{\mu\nu})A_p^{\mathrm{T}},\quad(\tilde{S}_{\mu\nu})=A_p(S_{\mu\nu})A_p^{\mathrm{T}},\\ &\tilde{A}_\mu=a_\mu^\nu A_\nu,\quad\tilde{\gamma}^\mu=b_\nu^\mu\gamma^\nu,\end{aligned} \tag{4.5.50}$$

而其他量不变, 这里 $A_p=(a_\mu^\nu), A_p^{-1}=(b_\nu^\mu)^{\mathrm{T}}$.

(2) T^*M 上的 Lorentz 变换:

$$L:\ T_p^*M\to T_p^*M, \tag{4.5.51}$$

其中 L 是 Lorentz 矩阵 (见 (1.2.42) 与 (1.2.43)), 它与 $p\in M$ 无关. 此时有如下变换, 而其他量不变:

$$\begin{aligned}&(\tilde g_{\mu\nu})=L(g_{\mu\nu})L^{\mathrm{T}},\ (\tilde S_{\mu\nu})=L(S_{\mu\nu})L^{\mathrm{T}},\\&(\tilde A_1^a,\cdots,\tilde A_4^a)^{\mathrm{T}}=L(A_1^a,\cdots,A_4^a),\quad 1\leqslant a\leqslant K,\\&(\tilde\partial_1,\cdots,\tilde\partial_4)^{\mathrm{T}}=L(\partial_1,\cdots,\partial_4),\\&\tilde\psi=U_L\psi,\end{aligned} \tag{4.5.52}$$

其中 U_L 是如 (1.4.53) 的由 Lorentz 矩阵 L 决定的旋量表示矩阵.

(3) C_p^N 的规范变换:

$$\Omega:\ C_p^N\to C_p^N,\quad \Omega=e^{\mathrm{i}\theta^a\tau_a}\in SU(N), \tag{4.5.53}$$

Ω 与 $p\in M$ 有关. 此时有如下变换, 而其他量不变

$$\begin{aligned}&\tilde A_\mu^a\tau_a=A_\mu^a\Omega\tau_a\Omega^{-1}+\frac{\mathrm{i}}{g}\partial_\mu\Omega\Omega^{-1},\\&\tilde m=\Omega m\Omega^{-1},\end{aligned} \tag{4.5.54}$$

(4) $SU(N)$ 的表示变换:

$$\tilde\tau_a=x_a^b\tau_b,\quad X=(x_a^b)\ \text{为}\ K\ \text{阶复矩阵}. \tag{4.5.55}$$

此时有如下变换, 而其他量不变

$$\begin{aligned}&(\tilde G_{ab})=X(G_{ab})X^\dagger,\\&(\tilde A_\mu^1,\cdots,\tilde A_\mu^K)^{\mathrm{T}}=Y^{\mathrm{T}}(A_\mu^1,\cdots,A_\mu^K)^{\mathrm{T}},\quad Y=X^{-1}.\end{aligned} \tag{4.5.56}$$

前面的讨论已清楚地表明, 统一场几何的作用量 (4.5.47)-(4.5.48) 在上述 (4.5.49)-(4.5.56) 的四种变换下是不变的, 即有如下统一的对称性定理.

定理 4.32(统一场对称性定理) 由 (4.5.47)-(4.5.48) 给出的统一场作用量满足所有四种对称性: 广义相对性原理、Lorentz 不变性、规范对称性以及表示不变性.

该定理非常重要, 它为第 5 章介绍的相互作用的统一场理论奠定了坚实的数学基础.

最后, 根据 PID 的场方程 (4.5.16)-(4.5.18), 对于统一场作用量 (4.5.47)-(4.5.48), 它的场方程可具体写出为

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=-T_{\mu\nu}+(\nabla_\mu+\alpha_b A^b_\mu)\Phi_\nu, \tag{4.5.57}$$

$$G_{ab}\partial^\nu F_{\nu\mu}-g\lambda^c_{da}G_{cb}g^{\alpha\beta}F_{\alpha\mu}A^d_\beta-g\gamma_\mu\bar{\psi}\tau_a\psi=(\nabla_\mu+\beta_b A^b_\mu)\varphi_a, \tag{4.5.58}$$

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu-m)\psi=0, \tag{4.5.59}$$

其中 ∇_μ 为 (4.1.11)-(4.1.13) 给出的 Levi-Civita 协变导数.

注 4.33　方程 (4.5.57) 和 (4.5.58) 关于规范变换 (4.5.54) 它们的右端发生规范对称性被破坏, 而其他所有对称的协变性都得到保证. 事实上, 上述规范对称性破坏正是物理学所需要的, 这种自发对称破缺将自动关于规范场产生出质量.

注 4.34　在 (4.5.49) 的广义坐标变换下, Dirac 矩阵 γ^μ 被要求按反变向量场进行变换:

$$\bar{\gamma}^\mu=b^\mu_\nu\gamma^\nu,\quad (b^\mu_\nu)^{\mathrm{T}}=A_p^{-1}. \tag{4.5.60}$$

这个性质与物理学中引入 Vierbein 张量是一致的. 它记为

$$\text{Vierbein}: e^{a\mu},$$

其中 a 指标对应于 Lorentz 变换, μ 对应于广义坐标变换, 然后关于 Dirac 矩阵 γ^μ 写作

$$\gamma^\mu=\gamma^a e^{a\mu}, \tag{4.5.61}$$

此时 (4.5.61) 的 Dirac 矩阵便满足上述变换性质, 即在广义坐标变换下 γ^μ 按 (4.5.60) 进行变换, 而在 Lorentz 变换下 γ^μ 不变. 此外当 $g_{\mu\nu}$ 是 Lorentz 度量时, γ^μ 便是通常 Dirac 矩阵的形式. 而在一个 Riemann 度量 $g_{\mu\nu}$ 下, γ^μ 取 (4.5.61) 的形式. 这里 $e^{a\mu}$ 满足如下性质:

$$e^{a\mu}=g^{\mu\nu}e^a_\nu,\quad (e^a_\nu)^{-1}=(e^\nu_a),$$
$$e^a_\mu e^a_\nu=g_{\mu\nu},\quad e^a_\mu e^{b\mu}=\delta_{ab}.$$

于是在 (4.5.48) 和 (4.5.59) 中的 Dirac 矩阵 γ^μ 取 (4.5.61) 的形式. 关于 Vierbein 张量可见 (Kaku, 1993).

上面介绍的统一场几何是关于 Dirac 旋量的理论. 如果是关于 Klein-Gordon 场的统一理论, 则 M 可以是一个任意的 n 维流形. 此时统一场函数为

$$(g_{ij},A^a_j,\phi):\ M\to M\times(T^0_2M\times T^*M^K\times C^N), \tag{4.5.62}$$

其中 $K=N^2-1$.

关于 (4.5.62) 的 Lagrange 作用量密度为

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{EH} + \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_{KG}, \tag{4.5.63}$$

其中 $\mathcal{L}_{EH}, \mathcal{L}_{YM}$ 与 (4.5.48) 相同,

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2} g^{ij} (D_i \phi)(D_j \phi)^\dagger + \frac{m^2}{2} |\phi|^2,$$
$$D_k = \partial_k + \mathrm{i} g A_k^a \tau_a.$$

由 (4.5.63) 给出的作用量在 (4.5.53)-(4.5.56) 的 $SU(N)$ 规范变换和表示变换下是不变的, 同时也在如下广义坐标变换及 Lorentz 变换下是不变的.

广义坐标变换:

$$\tilde{e} = Ae, \quad (\tilde{g}_{ij}) = A(g_{ij})A^{\mathrm{T}}, \quad (\tilde{S}_{ij}) = A(S_{ij})A^{\mathrm{T}},$$
$$\tilde{A}_i^a = a_i^j A_j^a, \quad \text{其他量不变.}$$

Lorentz 变换:

$$L: \ T_p^* M \to T_p^* M, \quad (\tilde{g}_{ij}) = L(g_{ij})L^{\mathrm{T}}, \ (\tilde{S}_{ij}) = L(S_{ij})L^{\mathrm{T}},$$
$$\tilde{A}_i^a = L_i^j A_j, \quad \tilde{\partial}_i = L_i^j \partial_j, \quad \text{其他量不变.}$$

关于 (4.5.63) 的统一场几何方程为

$$\begin{aligned} & R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = -T_{ij} + (\nabla_i + \alpha_b A_i^b)\Phi_j, \\ & G_{ab} \partial^i F_{ij} - g \lambda_{da}^c G_{cb} g^{kl} F_{kj} A_l^d - g J_{ja} = (\nabla_j + \beta_b A_j^b)\varphi_a, \\ & D^k D_k \phi - m^2 \phi = 0, \end{aligned} \tag{4.5.64}$$

其中 J_{ja} 为电流密度

$$J_{ja} = \mathrm{i} \tau_a [\phi D_j \phi - D_j \phi \phi^\dagger]. \tag{4.5.65}$$

需要强调指出, 关于 Dirac 旋量的统一场方程 (4.5.47)-(4.5.49) 描述的是 Fermi 子相互作用的物理系统, 而关于 Klein-Gordon 的统一场方程 (4.5.64)- (4.5.65) 描述的是 Bose 子相互作用的物理系统. 如果是两类粒子的混合, 则可考虑将这两类场合在一起的统一场理论. 此时场函数为

$$(g_{\mu\nu}, A_\mu^a, \psi, B_\mu^k, \phi): \ M \to M \times (T_0^2 M \times T^* M^{K_1} \times C^{4N_1} \times T^* M^{K_2} \times C^{N_2}),$$

其中 (A_μ^a, ψ) 是 $SU(N_1)$ 旋量规范场, (B_μ^k, ϕ) 是 $SU(N_2)$ 的 Klein-Gordon 规范场. 它们的作用量密度为

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{GH} + \mathcal{L}_{N_1} + \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_{N_2} + \mathcal{L}_{KG}, \tag{4.5.66}$$

其中 $\mathcal{L}_{N_1}, \mathcal{L}_{N_2}$ 分别是 $SU(N_1)$ 和 $SU(N_2)$ 的 Yang-Mills 作用量密度. 它所产生的统一场方程为如下形式:

$$\begin{aligned}
&R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -T_{\mu\nu} + (\nabla_\mu + \alpha_b^1 A_\mu^b + \alpha_k^2 B_\mu^k)\Phi_j, \\
&G_{ab}^1 \partial^\nu F_{\nu\mu}^b - g_1 \lambda_{da}^c G_{cb}^1 g^{\alpha\beta} F_{\alpha\mu}^b A_\beta^d - g J_{\mu a}^1 \\
&= (\nabla_\mu + \beta_b^1 A_\mu^b + \gamma_k^1 B_\mu^k)\varphi_a^1, \\
&G_{kl}^2 \partial^\nu B_{\nu\mu}^l - g_2 \Lambda_{rk}^l G_{ls}^2 g^{\alpha\beta} B_{\alpha\mu}^s B_\beta^r - g J_{\mu k}^2 \\
&= (\nabla_\mu + \beta_b^2 A_\mu^b + \gamma_k^2 B_\mu^k)\varphi_a^2, \\
&(\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu^1 - m_1)\psi = 0, \\
&D^{2\mu} D_\mu^2 \phi - m_2^2 \phi = 0,
\end{aligned} \tag{4.5.67}$$

其中 λ_{bc}^a 是 $SU(N_1)$ 结构常数, Λ_{kr}^l 是 $SU(N_2)$ 结构常数, g_1, g_2 分别为 $SU(N_1)$ 与 $SU(N_2)$ 的耦合常数,

$$\begin{aligned}
&J_{\mu a}^1 = \gamma_\mu \bar{\psi} \tau_a^1 \psi \text{ 为 Fermi 子流密度}, \\
&J_{\mu a}^2 = i\tau_a^2 [\phi (D_\mu \phi)^\dagger - D_\mu \phi \phi^\dagger] \text{ 为 Bose 子流密度}, \\
&D_\mu^1 = \partial_\mu + i g_1 A_\mu^a \tau_a^1, \quad \tau_a^1 \text{ 为 } SU(N_1) \text{ 生成元}, \\
&D_\mu^2 = \partial_\mu + i g_2 B_\mu^k \tau_k^2, \quad \tau_k^2 \text{ 为 } SU(N_2) \text{ 生成元}.
\end{aligned}$$

场方程 (4.5.67) 描述 Fermi 子与 Bose 子混合系统的统一场几何学方程.

4.6　总结与评注

这一章的目的就是为第 5 章所建立的四种相互作用统一场理论奠定严格的数学基础. 这一章主要内容简要总结如下.

在 4.2 节中建立了正交分解定理, 即流形 M 上所有 (k, r) 型平方可积张量场空间 $L^2(T_r^k M)$ 可正交分解为

$$\begin{aligned}
&L^2(T_r^k M) = L_D^2(T_r^k M) \oplus D^2(T_r^k M), \\
&L_D^2(T_r^k M) = \{u \in L^2(T_r^k M) |\ \mathrm{div}_A u = 0\}, \\
&D^2(T_r^k M) = \{D_A \Phi \in L^2(T_r^k M) |\ \Phi \in H^1(T_{r-1}^k M)\}.
\end{aligned} \tag{4.6.1}$$

在 4.3 节中根据正交分解定理建立了零散度约束变分理论, 即对任何作用在 $L^2(T_r^k M)$ 上的一个泛函

$$F:\ L^2(T_r^k M) \to R^1,$$

F 在下面散度为零的约束变分下

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(u+tv)|_{t=0}=\int_M \delta F(u)v\sqrt{g}\mathrm{d}x,\quad \forall\ \mathrm{div}_A v=0, \tag{4.6.2}$$

那么 (4.6.2) 的约束变分极值点 u 的变分方程可写作

$$\delta F(u)=D_A\Phi. \tag{4.6.3}$$

此时 (4.6.3) 的解是 (u,Φ). 其原因就是约束极值点 u 满足 (4.6.2) 变分为零的条件:

$$\int_M \delta F(u)v\sqrt{g}\mathrm{d}x=0,\quad \forall\ \mathrm{div}_A v=0.$$

这意味着 $\delta F(u)$ 与 $L_D(T^k_r M)$ 中所有元素正交. 再由 (4.6.1) 知

$$\delta F(u)\in D^2(T^k_r M)$$

于是便存在 Φ 使 u 满足 (4.6.3).

在 4.4 节中, 关于 $SU(N)$ 规范理论发现一种新的对称性, 称为表示不变性. 这种对称性是建立在这一节发展的 $SU(N)$ 上的 Riemann 几何理论基础之上的.

在以上新发展的数学理论基础之上, 在本章最后的 4.5 节中建立了以对称性决定流形 M 的拓扑与几何结构的统一场几何学. 这个过程是, 首先根据约束变分理论和 $SU(N)$ 上的 Riemann 几何理论提出了两个物理基本原理:

相互作用动力学原理 (PID)、表示不变性原理 (PRI).

然后依据物理的四种对称性原理:

广义相对性、Lorentz 不变性、规范不变性、PRI,

给出同时满足上述四种对称性的 Lagrange 作用量

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}_{EH}+\mathcal{L}_{YM}+\mathcal{L}_D+\mathcal{L}_{KG}, \tag{4.6.4}$$

其中 $\mathcal{L}_{EH}$ 和 $\mathcal{L}_{YM}$ 分别是 Einstein-Hilbert 广义相对论作用量与 Yang-Mills 规范场作用量, $\mathcal{L}_D$ 与 $\mathcal{L}_{KG}$ 分别是 Dirac 旋量和 Klein-Gordon 场的部分. 最后再根据 PID 的方程 (4.6.3), 由 (4.6.4) 给出统一场几何学完整的场方程 (4.5.67).

整个统一场几何学的核心就是找到同时满足所有物理对称性的场方程 (4.5.67), 然后该方程的解确定了流形 M 上的几何与拓扑结构.

下面给出本章各节的评注.

4.1 节: 该节内容都是经典的 Riemann 几何知识, 它们能够在标准的微分几何著作中找到, 例如, 可参考文献 (陈省身, 陈维恒, 1983), (陈维恒, 李兴校, 2002), (伍鸿熙等 1989), (马天, 2012).

这一节写作的特点是结合物理现象来论述几何概念, 这样作的优点是使读者更容易了解数学与物理是如何相关联的. 特别是, 关于各种对称性的变换可统一归到从空间的线性变换. 并且明确地表明

$$SU(N) \text{ 规范场} = M \text{上复向量丛上的联络.} \tag{4.6.5}$$

这个结论纠正了关于规范场是 M 主丛上联络的误解. (4.6.5) 的结论在本章的 4.5.4 小节中再次明确地得到论述.

4.2 节: 这一节的全部内容是由作者与汪守宏建立 (Ma, Wang, 2012a, 2014), 也可参见 (马天, 2012).

关于张量场的正交分解, 最简单的特殊情况就是 R^3 中向量场的 Helmholtz 分解, 即一个三维向量场 u 正交分解为一个梯度场和一个旋度场的直和

$$u = \nabla\phi + \operatorname{rot} A.$$

然后该结论被 Leray 推广到 R^n 上向量场 V 的分解

$$V = \nabla\phi + v, \quad \operatorname{div} v = 0. \tag{4.6.6}$$

关于 (4.6.6) 的分解可见 (Temam, 2000), (马天, 2011).

当一个张量场 u 是 $(0,k)$ 型反对称 $(1 \leqslant k \leqslant n)$ 情况时, 有一个著名 Hodge 分解定理. 此时 u 可等价地表示成一个 k 形式

$$\omega_k = u_{i_1\cdots i_k} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}.$$

该定理说 ω_k 可正交分解成三个部分

$$\omega_k = \mathrm{d}\alpha_{k-1} + \delta\beta_{k+1} + \omega, \tag{4.6.7}$$

其中 α_{k-1} 和 β_{k+1} 分别是一个 $k-1$ 和 $k+1$ 形式, ω 为调和形式, 即

$$\mathrm{d}\omega = 0, \quad \delta\omega = 0.$$

关于 (4.6.7) 的 Hodge 分解可参见 (瓦内尔, 2008), (伍鸿熙, 陈维恒, 1993), (马天, 2010, 2012).

关于梯度与散度的 Gauss 公式 (4.2.36) 可参见 (Chow et al., 2006). 关于线性椭圆方程 (4.2.40) 解的存在性定理 4.8 实际就是 Fredholm 选择定理的推论. 而关于线性双曲波方程 (4.2.41) 周期解存在性定理 4.9 可用 Fourier 级数展开的 Galerkin 方法证得. 关于这方面的文献可参考 (Evans, 1998).

4.3 节: 这一节的内容取自 (Ma, Wang, 2014) 和 (马天, 2012). 关于经典变分学的参考书可见 (陈文塬, 1981),(钟承奎等, 1998), (张恭庆, 1986), (Courant, Hilbert, 1948).

Einstein-Hilbert 泛函 (4.3.14) 是 Hilbert 在 1915 年听取了 Einstein 关于广义相对论报告后发现的. 当时 Einstein 是从物理直觉猜出了引力场方程取如下形式:

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{ij}, \tag{4.6.8}$$

而 Hilbert 发现引力场方程 (4.6.8) 的变分泛函取 (4.3.14) 形式.

零散度约束变分的思想源于流体动力学的数学理论. 作者与汪守宏在这方面作了许多工作. 它们的一个很关键的地方就是将 Navier-Stokes 方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u - \mu\Delta u - f = \nabla p, \quad x\in\Omega, \\ \text{div } u = 0 \end{cases} \tag{4.6.9}$$

化成如下积分形式进行讨论:

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u - \mu\Delta u - f\right) v\mathrm{d}x = 0, \quad \forall \text{ div } v = 0, \tag{4.6.10}$$

由 (4.6.6) 向量场的正交分解, (4.6.10) 与 (4.6.9) 是等价的两种表达方式. 它们便是 (4.3.36) 与 (4.3.37) 之间关系的原形.

标量势定理 4.24 的意义在于, 当只考虑引力相互作用时, PID 的引力场方程就简单地表达成如下形式:

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{ij} - \nabla_i\nabla_j\varphi.$$

该方程关于暗物质暗能量理论是关键的.

4.4 节: 这一节内容取自 (Ma, Wang, 2012b).

$SU(N)$ 是一个紧 Lie 群. 它即是一个群又是一个流形. 4.4 节可以说是 $SU(N)$ 上的 Riemann 几何. 它的重要性就在于我们不仅从 $SU(N)$ 的几何结构中发现了规范理论的一种新的对称性, 而且由它的 Riemann 度量给出 Yang-Mills 泛函的满足 PRI 的准确数学形式.

这一节用到矩阵的一个重要公式 (4.4.17), 即

$$\det e^A = e^{\mathrm{Tr}\ A}, \quad A \text{ 是一个 } n \text{ 阶复矩阵}. \tag{4.6.11}$$

该公式本质上就是 Jordon 定理, 该定理说对任一矩阵 A, 存在一个非奇异矩阵 B, 使得

$$BAB^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{4.6.12}$$

是一个三角矩阵, 其中对角线上 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in C$ 是 A 的所有特征值. 将 e^A 展开有

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

由 (4.6.12), e^A 的相似变换变为

$$Be^A B^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (BAB^{-1})^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}^k$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

于是得到

$$\det e^A = \det (Be^A B^{-1}) = \det \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

$$= e^{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} = e^{\mathrm{Tr}\ A}.$$

这便是 (4.6.11) 的公式.

4.5 节: 这一节是关于相互作用统一场理论的数学抽象, 4.6 节将专门讨论统一场的物理理论. 一个物理上合理的统一场模型一定要满足如下两个约束条件:

(1) 它的 Lagrange 作用量必须满足所有已知的物理对称性原理, 即广义相对性原理、Lonentz 不变性原理、规范不变性原理以及表示不变性原理 (PRI);

(2) 该 Lagrange 作用量能够自然地退耦成各自相互作用的作用量, 即引力场退耦成 Einstein-Hilbert 作用量, 电磁相互作用退耦成 $U(1)$ 规范场, 弱作用退耦成 $SU(2)$ 规范理论, 强作用退耦成 $SU(3)$ 规范理论.

在这一节中建立的统一场几何理论很好地满足上述两个条件. 首先由 (4.5.66) 提供的统一场 Lagrange 作用量显然满足上述条件 (2). 例如, 当 $A^a_\mu, \psi, B^k_\mu, \Phi$ 都为零时, 该作用量便退耦成 $\mathcal{L}_{EH}$. 此外, 定理 4.32 表明条件 (1) 被满足.

在 4.5.2 小节中提出的 PID 和 PRI 在统一场中具有基本的重要性. 首先由上述条件 (2) 的约束, 相互作用的统一场 Lagrange 作用量中一定要包含 $U(1), SU(2), SU(3)$ 的规范场部分. 而且 PRI 告诉我们不同 $SU(N)$ 的规范场属于不同的类型的表示张量, 它们之间不能进行各种形式的组合, 否则将破坏表示不变性. 这样一来, 约束条件 (2) 与 PRI 一起唯一地确定了统一场的作用量必须是如 (4.5.66) 那样各

自作用量的简单相加. 而 PID 在将 (4.5.66) 的作用量转化成场方程时, 原本在作用量中并未耦合的各类相互作用场在场方程中实质性地被耦合起来.

最后我们强调, 统一场几何学并不仅仅只用在物理学. 从数学的角度看, 它也有丰富的数学结构, 是不同于以往的任何一种几何. 我们期待着它也能成为一个新的几何方向.

第 5 章　相互作用的统一场理论

5.1　PID 的物理支持

在 4.5 节中提出的两个物理基本原理 PID 和 PRI 具有基本的重要性. 其中 PRI 的物理正确性是没有疑问的, 它是逻辑因果律的结果. 但是 PID 却需要一些证据才能表明它是物理正确的, 虽然它具有坚实的数学基础. 这一节将给出四个直接支持 PID 的物理事实, 它们是暗物质与暗能量的天文观测、经典引力场方程的不适定性问题、自发对称破缺机制与 Higgs 粒子的发现、超导现象.

5.1.1　暗物质与暗能量现象

所谓暗物质现象起源于天文学家 V. Rubin 在 20 世纪 70 年代初关于星系转动速度的观测. 她发现所有星系中的星体是以常速围绕星系核运动, 也就是说星体速度 $v(r)$ 具有

$$v(r) \simeq \text{常数在一确定星系中},$$

其中 r 是星体到星系中心的距离. 这个规律被称为 Rubin 转动曲线, 图 5.1(a) 显示了典型的星系转动曲线 (速度单位 km/s).

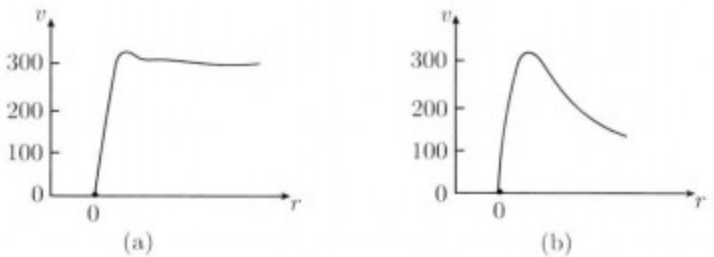


图 5.1　(a) Rubin 实际观测曲线; (b) Newton 引力的理论曲线

但是根据 Newton 引力理论, 星体环绕着星系中心旋转运动的速度 $v(r)$ 应该保证离心力与引力之间的平衡, 即应满足

$$\frac{v^2}{r} = \frac{M_r G}{r^2}, \tag{5.1.1}$$

其中 G 为引力常数 M_r 为 r 半径内所有物质的总质量. 而从实际观测到的 M_r 值由 (5.1.1) 算出理论曲线为图 5.1(b) 所示. 对比两种曲线不难看出实际观测到的质

量 M_r 比 Rubin 曲线显示的质量 $\tilde{M}_r$ 要小, 即

$$M_r < \tilde{M}_r,$$

这种实际物质与可见物质的质量差 $\Delta M = \tilde{M}_r - M_r$ 被称作是暗物质. 天文观测表明

$$\frac{\text{可见物质}}{\text{暗物质}} = \frac{M_r}{\Delta M} = \frac{1}{4}.$$

也就是说在宇宙中可见物质只占总物质的 1/5, 而暗物质占 4/5.

所谓暗能量在天体物理中被视为一种假想的能量形式, 它充满整个空间, 并且表现出与引力相反的效应, 在物质之间是斥力作用. 因为这种能量不在我们通常熟知的物质能量范畴, 也无法用仪器直接测得, 因此它被称作暗能量.

在 1998 年由 A. G. Riess 领导的超新星研究小组以及在 1999 年由 S. Perlmutter 领导的超新星宇宙项目组分别公布了他们的观测资料以及分析, 表明宇宙膨胀不是在减速, 而是在加速. 这在天文学中是一个惊人的发现, 它被认为是暗能量存在的有力证明. 由于他们的发现, 2011 年度的诺贝尔物理学奖授给了宇宙加速膨胀的发现者 Riess, Schmidt 和 Perlmutter 这三位物理学家.

暗物质与暗能量现象的发现突显出 Einstein 广义相对论的缺陷. 我们回忆 Einstein 引力场方程

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{4\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \tag{5.1.2}$$

其中 $T_{\mu\nu}$ 是通常可观测的物质能量动量张量. 由 Bianchi 恒等式, (5.1.2) 左端具有零散度性质

$$\operatorname{div}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R\right) = 0. \tag{5.1.3}$$

这自然导致通常的的质能量动量 $T_{\mu\nu}$ 也是零散度的,

$$\operatorname{div} T_{\mu\nu} = 0. \tag{5.1.4}$$

这个性质 (5.1.4) 在物理上代表了能量动量的守恒. 如果没有暗物质与暗能量现象, (5.1.4) 的守恒性是一个很自然的事性. 但是由于暗物质与暗能量的存在, 通常意义的能量动量肯定不再守恒, 而应该是包括所有物质能量动量的守恒.

根据上述观点, 通常意义的能量动量 $T_{\mu\nu}$ 不再守恒, 即

$$\operatorname{div} T_{\mu\nu} \neq 0.$$

因此由正交分解定理 4.11, $T_{\mu\nu}$ 能够分解成

$$T_{\mu\nu} = \tilde{T}_{\mu\nu} - \frac{c^4}{8\pi G} D_\mu \Phi_\nu, \tag{5.1.5}$$

$$\operatorname{div} \tilde{T}_{\mu\nu} = 0. \tag{5.1.6}$$

于是

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \frac{c^4}{8\pi G} D_\mu \Phi_v \tag{5.1.7}$$

代表了包括暗物质暗能量在内的全部能量动量, 它是守恒的.

此时物理上的合理性要求引力场方程应取如下形式:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} \tilde{T}_{\mu\nu}, \quad \tilde{T}_{\mu\nu} \text{ 代表总能量动量.} \tag{5.1.8}$$

而由 (5.1.3) 和 (5.1.6), 从数学相容性来讲, 引力场方程也应取 (5.1.8) 的形式. 这样, 从 (5.1.7) -(5.1.8) 可知, 一个在物理和数学上都合理的引力场方程取如下形式:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} - D_\mu \Phi_\nu, \tag{5.1.9}$$

其中 $T_{\mu\nu}$ 代表通常的物质能量, 而 $D_\mu \Phi_\nu$ 代表暗物质暗能量.

然而细心观察发现, $D_i \Phi_j$ 不具有变分结构, 它无法被加入到 Einstein-Hilbert 作用量中. 因此从经典的变分学角度看, 方程 (5.1.9) 破坏了 Lagrange 动力学原理. 但是从零散度约束变分的角度看, 方程 (5.1.9) 恰好满足 PID, 即它是

$$\delta L_{HE} = -D_\mu \Phi_v,$$

这里 L_{HE} 如 (4.5.30).

注 5.1　暗物质暗能量现象对于经典广义相对论产生的另一个严重问题就是由 (5.1.2) 导出的 Friedmann 宇宙模型显示出宇宙膨胀是减速的, 这与当前的天文观测完全相反. 若要产生宇宙加速的效应, 必须在作用量中加入一个常数项. 但是这会造成更加严重的与物理实验不相符合的事实, 见最后 5.8 节的评注.

5.1.2　引力场方程的适定性问题

支持 PID 的第二个物理事实是经典的引力场方程是不适定的, 而 PID 场方程是适定的. 让我们来看方程 (5.1.2), 由于对称性, 它的方程个数是 10 个, 而未知函数 g_{ij} 初一看也是 10 个. 但是由于 (5.1.2) 满足广义坐标协变性, 在四个坐标的自由选择下

$$\tilde{x}_\mu = a_\mu^\nu x_\nu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3,$$

可使得 $(g_{\mu\nu})$ 变为如下形式:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & g_{ij} \end{pmatrix}, \quad g_{ij} \text{ 是 } 3 \times 3 \text{ 对称度量.}$$

因此方程 (5.1.2) 的独立未知函数个数是 6 个, 即

$$\begin{cases} \text{引力场方程独立个数} = 10, \\ \text{场方程独立未知函数个数} = 6. \end{cases} \tag{5.1.10}$$

方程的有解性要求方程个数不能大于未知函数的个数. 因此在 (5.1.10) 中出现的问题使得经典引力场方程 (5.1.2) 面临在一般情况下无解的问题, 在下面会给出具体例子.

一些读者会认为 Bianchi 恒等式

$$\operatorname{div}\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R+\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}\right)=0 \tag{5.1.11}$$

使得 (5.1.2) 的独立方程个数也变成 6 个. 但是注意到 (5.1.11) 又产生出四个连续性方程

$$\operatorname{div} T_{\mu\nu}=g^{\alpha\nu}D_\alpha T_{\mu\nu}=0,\quad \mu=0,1,2,3.$$

这四个方程含有未知函数, 它并非自动成立. 因此由于 Bianchi 恒等式 (5.1.3), 严格地引力场方程应该是取如下形式:

$$\begin{cases} R_{\mu\nu}-\dfrac{1}{2}g_{\mu\nu}R=-\dfrac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \\ \operatorname{div} T_{\mu\nu}=0. \end{cases} \tag{5.1.12}$$

该方程仍然存在 (5.1.10) 的适定性问题.

然而由 PID 产生的场方程取如下形式:

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=-\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}-(D_\mu+\alpha A_\mu)\Phi_\nu, \tag{5.1.13}$$

其中 α 为常数, A_μ 为电磁. 此时方程未知函数多了四个 Φ_v. 因此, PID 的引力场方程 (5.1.13) 的方程数与未知函数个数相同. 这说明方程 (5.1.13) 满足适定性条件.

为了能够更具体地看到由 (5.1.10) 带来的 Einstein 场方程适定性问题, 下面讨论中心对称引力场方程无解的例子.

我们知道, 球对称引力场的度量取如下形式:

$$\mathrm{d}s^2=g_{00}c^2\mathrm{d}t^2+g_{11}\mathrm{d}r^2+r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2), \tag{5.1.14}$$

它的坐标系为球面坐标 (ct,r,θ,φ).

在 (5.1.14) 中的度量张量 $g_{\mu\nu}$ 可等价地写成如下形式:

$$\begin{aligned} &g_{00}=-e^u,\quad u=u(r),\\ &g_{11}=e^v,\quad v=v(r),\\ &g_{22}=r^2,\quad g_{33}=r^2\sin^2\theta. \end{aligned} \tag{5.1.15}$$

对于质量为 M, 半径为 r_0 的球体产生的中心引力场是球对称的, 它的引力势必取 (5.1.15) 的形式. 当考虑有暗物质存在时, 或者考虑宇宙背景辐射对中心物质

场的影响时, 由于它们都是均匀分布的, 并且可以忽略压力场, 此时能量密度 $T_{\mu\nu}$ 为

$$T_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} -g_{00}\rho & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho \text{ 为能量密度.} \tag{5.1.16}$$

而对于 (5.1.15), 非零的 Ricci 曲率张量非零分量为

$$\begin{aligned} R_{00}&=-e^{u-\nu}\left[\frac{u''}{2}+\frac{u'}{r}+\frac{u'}{4}(u'-v')\right], \\ R_{11}&=\frac{u''}{2}-\frac{v'}{r}+\frac{u'}{4}(u'-v'), \\ R_{22}&=e^{-\nu}\left[1-e^{\nu}+\frac{r}{2}(u'-\nu')\right], \\ R_{33}&=\sin^2\theta R_{22}. \end{aligned} \tag{5.1.17}$$

在另一方面, 方程 (5.1.12) 可等价地写成如下形式:

$$\begin{cases} R_{\mu\nu}=-\dfrac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu}-\dfrac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right), \\ \operatorname{div} T_{\mu\nu}=0. \end{cases} \tag{5.1.18}$$

由 (5.1.16), 在 (5.1.18) 中的 T 为

$$T=g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}=g^{00}T_{00}=-\rho.$$

于是关于中心球对称的 Einstein 场方程取如下形式:

$$\begin{aligned} R_{00}&=\frac{4\pi G}{c^4}g_{00}\rho, \\ R_{11}&=-\frac{4\pi G}{c^4}g_{11}\rho, \\ R_{22}&=-\frac{4\pi G}{c^4}g_{22}\rho, \\ D^{\mu}T_{\mu\nu}&=0. \end{aligned} \tag{5.1.19}$$

现在我们可推出方程 (5.1.19) 没有解. 由

$$D^{\mu}T_{\mu\nu}=0 \ \Rightarrow\ \Gamma^0_{10}g_{00}=\frac{1}{2}u'\rho=0,$$

它意味着 $u'=0$. 因此由 (5.1.17) 知 $R_{00}=0$. 此与

$$R_{00}=\frac{4\pi G}{c^4}g_{00}\rho \quad (\rho\neq 0)$$

矛盾. 于是推出 Einstein 场方程 (5.1.18) 在暗物质存在条件下, 或当考虑微波背景的中心物质场情况下是无解的. 这种无解的现象就是由 (5.1.10) 的问题所致.

如果采用 (5.1.13) 的 PID 场方程, 则上述中心场情况解一定存在, 因此此时方程数与未知函数个数相同.

5.1.3 自发对称破缺机制与 Higgs 粒子

规范理论的自发对称破缺机制与 Higgs 粒子的发现是对 PID 的有力支持. 首先让我们回忆 $SU(N)$ 规范理论的作用量

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{YM}=&-\frac{1}{4}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}(\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu)(\partial_\alpha A^a_\beta-\partial_\beta A^a_\alpha)\\&-\frac{1}{2}gg^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\lambda^a_{bc}(\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu)A^b_\alpha A^c_\beta\\&-\frac{1}{4}g^2g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\lambda^a_{bc}\lambda^a_{df}A^b_\mu A^c_\nu A^d_\alpha A^f_\beta.\end{aligned}\tag{5.1.20}$$

它不含质量项

$$m^2g^{\mu\nu}A^a_\mu A^a_\nu\quad(m\text{ 为常数代表质量}).$$

因而 (5.1.20) 的通常变分方程

$$\delta L_{YM}=0\tag{5.1.21}$$

也没有质量. 这与物理事实不相符合.

为了弥补这一缺陷, Nambu 和 Jona-Lasinio 首先提出自发对称破缺机制, 即要想使 (5.1.20) 的规范理论有质量创生, 那么必须有一种物理自然的机制来破坏 (5.1.20) 的规范对称性, 尽管他们并不知道是什么样的物理机制.

Higgs 等六位物理学家提出这种物理机制是在 (5.1.20) 的作用量中再加上一个粒子场 ϕ 的作用量

$$\mathcal{L}_{YM}+\mathcal{L}_H(\phi),\tag{5.1.22}$$

使得在 ϕ 的真空态 $\phi=1$ 处 (5.1.22) 产生出质量项:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{YM}+\mathcal{L}_H(\phi+1)=&\mathcal{L}_{YM}+\mathcal{L}_H(1)+\text{Taylor 展开其他项}\\=&\mathcal{L}_{YM}+m^2A^a_\mu A^{\mu a}+\mathcal{L}_H\text{ 其他项}.\end{aligned}\tag{5.1.23}$$

此时 (5.1.23) 的右端将破坏规范对称, 但是有质量产生.

这种由 (5.1.22)-(5.1.23) 给出的具体自发对称破缺机制称为 Higgs 机制, 它的具体过程在 3.3.2 小节至 3.3.4 小节中给出详细讨论. 在 Higgs 机制中, 一个关键点是造成自发对称破缺的物理原因是存在一个由 ϕ 描述的 Bose 子, 称为 Higgs 粒子.

在 1983 年, 自发对称破缺机制产生的质量规范粒子 $W^\pm, Z$ Bose 子被发现. 在 2012 年 Higgs 粒子也被找到. 这些实验结果很强地支持自发对称破缺机制. 然而 Higgs 机制具有如下两点不可克服的缺陷:

(1) 正如 Nambu 指出, 这种机制带有很强的人工色彩. 在 (5.1.22) 作用量中, Higgs 粒子场的部分 $\mathcal{L}_H(\phi)$ 人为给出, 它的形式带有非常大的随意性.

(2) 由 Higgs 机制产生的 WS 弱电理论破坏 PRI.

是否存在一个物理原理使得它能够产生不同于 Higgs 机制的自发对称破缺机制及 Higgs 粒子, 同时又能克服上述两个严重缺陷, 这成为一个重大问题. PID 为该问题提供了很好的解决方案. 下面讨论这一过程.

根据 PID, Yang-Mills 泛函 (5.1.20) 的 PID 场方程为

$$\partial^\mu F^a_{\mu\nu} - g\lambda^a_{bc} g^{\alpha\beta} F^b_{\alpha\nu} A^c_\beta - g J^a_\nu = \left[\partial_\nu - \frac{m^2}{4} x_\nu + \lambda_b A^b_\nu\right] \phi^a, \tag{5.1.24}$$

其中 ϕ^a 是标量场, $\dfrac{1}{4} m^2 x_\mu$ 是标量场 ϕ^a 的质量势. 令 ϕ 具有真空态 $\phi^a = \phi_0$. 那么在下面变换下

$$\phi^a \to \phi^a + \phi_0, \quad A^a_\mu \to A^a_\mu,$$

方程 (5.1.24) 变为

$$\begin{aligned} &\partial^\mu F^a_{\mu\nu} - m_a^2 A^a_\nu - g\lambda^a_{bc} g^{\alpha\beta} F^b_{\alpha\nu} A^c_\beta - g J^a_\nu \\ &= \left[\partial_\nu - \frac{1}{4} m^2 x_\nu + \lambda_b A^b_\nu\right] \phi^a - \frac{1}{4} m^2 x_\nu \phi_0, \end{aligned} \tag{5.1.25}$$

其中 $m_a^2 = \lambda_a \phi_0 > 0$. 于是上述方程 (5.1.25) 在 PID 的自发对称破缺下产生了质量 $m_a = \sqrt{\lambda_a \phi_0}$.

然后在 (5.1.24) 两端取散度, 并注意到

$$\partial^\nu \partial^\mu F^a_{\mu\nu} = 0,$$

于是得到关于 ϕ^a 的方程

$$\partial^\nu \partial_\nu \phi^a + m^2 \phi^a = \lambda_b \partial^\nu (A_\nu \phi^a) - g \partial^\nu \left[\lambda^a_{bc} g^{\alpha\beta} F^b_{\alpha\nu} A^c_\beta - J^a_\nu\right]. \tag{5.1.26}$$

该方程便是描述 Higgs 粒子的 Klein-Gordon 方程, 其中 m 是 Higgs 粒子的质量, 并且自旋为零.

以上讨论表明, PID 自动产生 $SU(N)$ 规范对称破缺的场方程 (5.1.24), 从而产生具有质量的规范场方程 (5.1.25) 和具有质量的 Higgs 粒子的 Klein-Gordon 场方程 (5.1.26). 此外 PID 的自发对称破缺方程 (5.1.24) 满足 PRI. 这正是物理学家所希望的那样: 用物理基本原理给出自发对称破缺机制, 产生规范场质量和产生 Higgs 粒子场方程, 并且满足 PRI.

5.1.4　Ginzburg-Landau 超导理论

超导现象属于电磁相互作用与 Bose-Einsten 凝聚的行为. Ginzburg-Landau 的超导理论也对 PID 提供一个有力的支持. 下面讨论这个问题.

关于超导体的 Ginzburg-Landau 自由能取如下形式：

$$G=\int_{\Omega}\left[\frac{1}{2m_s}|(\mathrm{i}\hbar\nabla+\frac{e_s}{c}A)\psi|^2+a|\psi|^2+\frac{b}{2}|\psi|^4+\frac{1}{8\pi}|\mathrm{rot}\ A|^2\right]\mathrm{d}x, \tag{5.1.27}$$

式中 A 是三维电磁势, ψ 是超导电子的电磁势, Ω 是超导体容积, e_s 和 m_s 是 Cooper 电子对的电荷与质量.

由 Ginzberg-Landau 自由能 (5.1.27) 产生的超导电流方程为

$$\delta G/\delta A=0, \tag{5.1.28}$$

它的具体表达式为

$$\frac{c}{4\pi}\mathrm{rot}^2A=-\frac{e_s^2}{m_sc}|\psi|^2A-\mathrm{i}\frac{\hbar e_s}{m_s}(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*). \tag{5.1.29}$$

令

$$J=\frac{c}{4\pi}\mathrm{rot}^2A,\quad J_s=-\frac{e_s^2}{m_sc}|\psi|^2A-\mathrm{i}\frac{\hbar e_s}{m_s}(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*).$$

物理上, J 代表 Ω 中的总电流, J_s 是超导电流. 因为 Ω 是介质电导体, J 应包含两种电流

$$J=J_s+\sigma E,\quad \Sigma \text{ 为电导率}, \tag{5.1.30}$$

其中 σE 是由电场 E 产生的电流, 而

$$E=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\nabla\Phi=-\nabla\Phi,$$

Φ 为电场势. 因此完整的超导电流方程应取 (5.1.30) 的形式:

$$\frac{c}{4\pi}\mathrm{rot}^2A=-\frac{\sigma}{c}\nabla\Phi-\frac{e_s^2}{m_sc}|\psi|^2A-\mathrm{i}\frac{\hbar e_s}{m_s}(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*). \tag{5.1.31}$$

将 (5.1.31) 与 (5.1.28)-(5.1.29) 比较可得

$$\frac{\delta G}{\delta A}=-\frac{\sigma}{c}\nabla\Phi. \tag{5.1.32}$$

此外, 对于超导体, 固定的规范是 Coulomb 规范, 即

$$\mathrm{div}\ A=0,\quad A\cdot n|_{\partial\Omega}=0,$$

它意味着

$$\int_{\Omega}\nabla\Phi\cdot A\mathrm{d}x=0. \tag{5.1.33}$$

因此方程 (5.1.32) 的右端项 $-\dfrac{\sigma}{c}\nabla\Phi$ 没有变分结构.

而另一方面, (5.1.32) 正好是自由能 (5.1.27) 关于 A 的如下零散度约束变分方程的等价形式:

$$\int \delta G(A)B\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(A+tB)|_{t=0} = 0, \quad \forall \mathrm{div}\ B = 0.$$

于是我们看到 PID 关于 Ginzberg-Landau 超导理论是有效的.

注 5.2　在 (5.1.33) 条件下 $\nabla\Phi$ 没有变分结构的原因是泛函

$$F(A) = \int_\Omega \nabla\Phi \cdot A\mathrm{d}x \tag{5.1.34}$$

的变分导算子便是 $\nabla\Phi$, 即

$$\delta F(A) = \nabla\Phi.$$

因此在 (5.1.33) 条件下泛函 (5.1.34) 不存在.

5.2　统一场模型

5.2.1　PID 与 PRI 统一场模型

在 4.6 节的评注中, 我们已经说到表示不变性原理所起到的实质性作用就是将四种相互作用各自满足的对称性分离开. 换句话说不存在一种统一的对称性使得万有引力、电磁场、弱相互作用与强相互作用的各自对称群是一个更大对称群的子群. 这就意味着同时满足 Einstein 广义相对性原理、Lorentz 不变性、规范不变性原理和 PRI 的统一场的 Lagrange 作用量只能是四种相互作用的各自作用量的简单组合, 见 4.5.5 小节的详细讨论.

我们知道引力场是 Einstein-Hilbert 作用量 $\mathcal{L}_{EH}$, 电磁场是 $U(1)$ 规范作用量 $\mathcal{L}_{\mathrm{QED}}$, 弱作用是 $SU(2)$ 的 GWS 作用量 $\mathcal{L}_{\mathrm{GWS}}$, 而强相互作用是 $SU(3)$ 的 QCD 作用量 $\mathcal{L}_{\mathrm{QCD}}$. 于是统一场的泛函是这四种作用量的自然组合如下:

$$L = \int_M \left[\mathcal{L}_{EH} + \mathcal{L}_{\mathrm{QED}} + \mathcal{L}_{\mathrm{GWS}} + \mathcal{L}_{\mathrm{QCD}} + \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_{KG}\right]\sqrt{-g}\mathrm{d}x, \tag{5.2.1}$$

式中

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{EH} = R + \frac{8\pi G}{c^4} S \quad (S = g^{\mu\nu} S_{\mu\nu}),\\
&\mathcal{L}_{\mathrm{QED}} = -\frac{1}{4} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta},\\
&\mathcal{L}_{\mathrm{GWS}} = -\frac{1}{4} G^w_{ab} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} W^a_{\mu\nu} W^b_{\alpha\beta},\\
&\mathcal{L}_{\mathrm{QCD}} = -\frac{1}{4} G^s_{kl} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} S^k_{\mu\nu} S^l_{\alpha\beta},\\
&\mathcal{L}_D = \bar{\Psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu - m_f)\Psi,\\
&\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (D_\mu \Phi)^\dagger (D_\nu \Phi) + \frac{1}{2} m_b^2 \Phi^\dagger \Phi,
\end{aligned}
\tag{5.2.2}
$$

这里 G^w_{ab} 和 G^s_{kl} 分别是 $SU(2)$ 和 $SU(3)$ 上如 (4.4.44) 的 Riemann 度量, $\{g_{\mu\nu}\}$ 是 M 上的四维 Riemann 度量, Ψ 为 Fermi 子的 Dirac 旋量, Φ 为 Bose 子场, m_f 和 m_b 分别为 Fermi 子与 Bose 子质量, 以及

$$
\begin{aligned}
&F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,\\
&W^a_{\mu\nu} = \partial_\mu W^a_\nu - \partial_\nu W^a_\mu + g_w \lambda^a_{bc} W^b_\mu W^c_\nu, \quad 1 \leqslant a, b, c \leqslant 3,\\
&S^k_{\mu\nu} = \partial_\mu S^k_\nu - \partial_\nu S^k_\mu + g_s \Lambda^k_{lr} S^l_\mu S^r_\nu, \quad 1 \leqslant k, l, r \leqslant 8,
\end{aligned}
\tag{5.2.3}
$$

这里 A_μ, W^a_μ, S^k_μ 分别为电磁势, 弱作用 $SU(2)$ 规范势, 强作用 $SU(3)$ 规范势, 以及 (5.2.2) 中 Dirac 旋量 ψ 和 Bose 子场 Φ 各含有电磁、弱和强作用三个部分:

$$
\psi = (\psi^E, \psi^w, \psi^s), \qquad \Phi = (\Phi^E, \Phi^w, \Phi^s),
$$

使得 D_μ 作用在它们上分别为

$$
\begin{aligned}
&D_\mu(\psi^E, \Phi^E) = (\partial_\mu + \mathrm{i}eA_\mu)(\psi^E, \Phi^E),\\
&D_\mu(\psi^w, \Phi^w) = (\partial_\mu + \mathrm{i}g_w W^a_\mu \sigma_a)(\psi^w, \Phi^w),\\
&D_\mu(\psi^s, \Phi^s) = (\partial_\mu + \mathrm{i}g_s S^k_\mu \tau_k)(\psi^s, \Phi^s),
\end{aligned}
\tag{5.2.4}
$$

其中 e, g_w, g_s 分别为电荷、弱荷、强荷, σ_a, τ_k 分别为 $SU(2)$ 和 $SU(3)$ 的生成元, $\lambda^a_{bc}, \Lambda^k_{lr}$ 为 $SU(2), SU(3)$ 结构常数.

根据 4.5.5 小节中的定理 4.31, 由 (5.2.1)-(5.2.4) 给出的统一场作用量同时满足广义相对性, Lorentz 不变性, $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ 规范不变性以及 PRI. 这里需要强调指出, 对任何规范场 G_μ 和反对称二阶张量场 $G_{\mu\nu}$ 有

$$
\begin{aligned}
&\nabla_\mu G_\nu - \nabla_\nu G_\mu = \partial_\mu G_\nu - \partial_\nu G_\mu,\\
&\nabla^\mu G_{\mu\nu} = \partial^\mu G_{\mu\nu},
\end{aligned}
$$

其中 ∇_μ 是 Levi-Civita 协变导数. 因此 (5.2.3) 关于广义坐标变换也是二阶协变张量.

注 5.3　由于 GWS 弱电理论本质上是关于弱作用衰变跃迁理论, 因此该理论的作用量 (3.3.5) 中的 Dirac 部分 Fermi 子波函数取左手态旋量场. 而 PID 与 PRI 统一场是关于相互作用的理论, 因此关于弱作用部分 $\mathcal{L}_{\rm GWS}$ 根本不需要考虑左手态与右手态旋量场问题, 这是因为弱作用力与左、右手态粒子无关.

以上作用量 (5.2.1)-(5.2.4) 是统一场模型的第一个部分, 它的第二个部分就是根据 PID 建立统一方程.

由统一场几何方程 (4.5.67), 作用量 (5.2.1)-(5.2.4) 产生的 PID 统一场方程取如下形式:

$$\begin{aligned}
&R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R+\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}=D^G_\mu\Phi^G_\nu,\\
&\partial^\mu(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)-eJ^E_\nu=D^E_\nu\phi^E,\\
&G^w_{ab}\partial^\mu W^b_{\mu\nu}-g_w\lambda^c_{da}G^w_{cb}g^{\alpha\beta}W^b_{\alpha\nu}W^d_\beta-g_wJ^w_{\nu a}=D^w_\nu\phi^w_a,\\
&G^s_{kl}\partial^\mu S^l_{\mu\nu}-g_s\Lambda^r_{lk}G^s_{rq}g^{\alpha\beta}S^q_{\alpha\nu}S^l_\beta-g_sJ^s_{\nu k}=D^s_\nu\phi^S_k,\\
&(\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu-m_f)\psi=0,\\
&D_\mu(g^{\mu\nu}D_\nu\Phi)-m_b^2\Phi=0,
\end{aligned}\tag{5.2.5}$$

其中 D_μ 如 (5.2.4),

$$\begin{aligned}
D^G_\mu&=\nabla_\mu+\alpha^0A_\mu+\alpha^1_bW^b_\mu+\alpha^2_kS^k_\mu,\\
D^E_\mu&=\nabla_\mu+\beta^0A_\mu+\beta^1_bW^b_\mu+\beta^2_kS^k_\mu,\\
D^w_\mu&=\nabla_\mu+\gamma^0A_\mu+\gamma^1_bW^b_\mu+\gamma^2_kS^k_\mu-\frac{1}{4}m_w^2x_\mu,\\
D^s_\mu&=\nabla_\mu+\delta^0A_\mu+\delta^1_bW^b_\mu+\delta^2_kS^k_\mu-\frac{1}{4}m_s^2x_\mu,
\end{aligned}\tag{5.2.6}$$

∇_μ 为 Livi-Civita 协变导数, 以及

$$\begin{aligned}
J^E_\mu&=\bar\psi^E\gamma_\mu\psi^E+\mathrm{i}\left[\Phi^E(D_\mu\Phi^E)^\dagger-\Phi^{E\dagger}D_\mu\Phi^E\right],\\
J^w_{\mu a}&=\bar\psi^w\gamma_\mu\sigma_a\psi^w+\mathrm{i}\sigma_a\left[\Phi^w(D_\mu\Phi^w)^\dagger-\Phi^{w\dagger}D_\mu\Phi^w\right],\\
J^s_{\mu k}&=\bar\psi^s\gamma_\mu\tau_k\psi^s+\mathrm{i}\tau_k\left[\Phi^s(D_\mu\Phi^s)^\dagger-\Phi^{s\dagger}D_\mu\Phi^s\right],\\
T_{\mu\nu}&=S_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}S-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{L}'+\frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}}\mathcal{L}',\\
\mathcal{L}'&=\mathcal{L}_{\rm QED}+\mathcal{L}_{\rm GWS}+\mathcal{L}_{\rm QCD}+\mathcal{L}_D+\mathcal{L}_{KG},
\end{aligned}\tag{5.2.7}$$

其中 $\gamma_\mu=\gamma^\mu$, 以及 (5.2.6) 中参数

$$\begin{aligned}&\alpha^0,\beta^0,\gamma^0,\delta^0,m_w,m_s \text{ 是标量参数},\\&\alpha_b^1,\beta_b^1,\gamma_b^1,\delta_b^1 \text{ 是 } SU(2) \text{ 的一阶协变张量},\\&\alpha_k^1,\beta_k^1,\gamma_k^1,\delta_k^1 \text{ 是 } SU(3) \text{ 的一阶协变张量}.\end{aligned}\tag{5.2.8}$$

以上 (5.2.5)-(5.2.7) 便是 PID 与 PRI 统一场方程的一般形式.

5.2.2 耦合参数及物理量纲

由 (5.2.5)-(5.2.7) 给出的是一般形式的统一场方程, 在那里有 (5.2.8) 的 50 个耦合参数, 还有 g_w, g_s 等 $SU(2)$ 和 $SU(3)$ 规范场耦合参数. 此外该方程是在 $SU(2)$ 和 $SU(3)$ 的生成元 σ_a 和 τ_k 为任意情况下的表达.

然而这些方程 (5.2.5)-(5.2.7) 可以进行简化, 参数 (5.2.9) 也可减少. 为此我们首先给出方程中各种量的量纲.

令 E 代表能量, L 为长度, t 为时间, 则关于规范场的量纲为

$$\begin{aligned}&(A_\mu, W_\mu^a, S_\mu^k) = \sqrt{E/L}, \quad (e, g_w, g_s) = \sqrt{EL},\\&(J_\mu^E, J_{\mu a}^w, J_{\mu k}^s) = 1/L^3, \quad (\phi^E, \phi_a^w, \phi_k^s) = \sqrt{E}/L^{\frac{3}{2}},\\&\hbar = Et, \quad C = L/t, \quad mc/\hbar = 1/L \ (m \text{ 为质量}).\end{aligned}$$

此外, 对于引力场物理量有

$$\begin{aligned}&R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = 1/L^2, \quad g_{\mu\nu} = \text{无量纲}, \quad R_{\mu\nu} = 1/L^2,\\&\text{引力常数 } G = L^5/Et^4, \quad T_{\mu\nu} = E/L^3, \quad \Phi_\nu^G = 1/L.\end{aligned}$$

根据上述量纲, 从 (5.2.5)-(5.2.7) 可推出如下参数量纲:

$$\begin{aligned}&(m_w, m_s) = 1/L, \quad (\alpha^0, \beta^0, \gamma^0, \delta^0) = 1/\sqrt{EL},\\&(\alpha_a^1, \beta_a^1, \gamma_a^1, \delta_a^1) = 1/\sqrt{EL}, \quad (\alpha_k^2, \beta_k^2, \gamma_k^2, \delta_k^2) = 1/\sqrt{EL}.\end{aligned}$$

于是 (5.2.8) 的参数可写成

$$\begin{aligned}(m_w, m_s) &= \left(\frac{m_H c}{\hbar}, \frac{m_\pi c}{\hbar}\right),\\(\alpha^0, \beta^0, \gamma^0, \delta^0) &= \frac{e}{\hbar c}(\alpha^E, \beta^E, \gamma^E, \delta^E),\\(\alpha_a^1, \beta_a^1, \gamma_a^1, \delta_a^1) &= \frac{g_w}{\hbar c}(\alpha_a^w, \beta_a^w, \gamma_a^w, \delta_a^w),\\(\alpha_k^2, \beta_k^2, \gamma_k^2, \delta_k^2) &= \frac{g_s}{\hbar c}(\alpha_k^s, \beta_k^s, \gamma_k^s, \delta_k^s),\end{aligned}\tag{5.2.9}$$

其中 m_H 和 m_π 代表 ϕ^w 和 ϕ^s 的质量, 而 (5.2.9) 等式右端的 $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ 是无量纲的参数.

从物理的观点, (5.2.9) 右端的 $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ 参数应该具有性质

$$\begin{aligned}
&(\alpha_1^w,\alpha_2^w,\alpha_3^w)=\alpha^w(\omega_1,\omega_2,\omega_3),\\
&(\beta_1^w,\beta_2^w,\beta_3^w)=\beta^w(\omega_1,\omega_2,\omega_3),\\
&(\gamma_1^w,\gamma_2^w,\gamma_3^w)=\gamma^w(\omega_1,\omega_2,\omega_3),\\
&(\delta_1^w,\delta_2^w,\delta_3^w)=\delta^w(\omega_1,\omega_2,\omega_3),
\end{aligned}\tag{5.2.10}$$

以及

$$\begin{aligned}
&(\alpha_1^s,\cdots,\alpha_8^s)=\alpha^s(\rho_1,\cdots,\rho_8),\\
&(\beta_1^s,\cdots,\beta_8^s)=\beta^s(\rho_1,\cdots,\rho_8),\\
&(\gamma_1^s,\cdots,\gamma_8^s)=\gamma^s(\rho_1,\cdots,\rho_8),\\
&(\delta_1^s,\cdots,\delta_8^s)=\delta^s(\rho_1,\cdots,\rho_8).
\end{aligned}\tag{5.2.11}$$

当 $SU(N)(N=2,3)$ 的生成元取标准基时, 即生成元 τ_a 使得

$$G_{ab}=T_r(\tau_a\tau_b^\dagger)=\delta_{ab},\tag{5.2.12}$$

则 (5.2.10) 和 (5.2.11) 中的 $SU(N)$ 张量 ω_a 和 ρ_k 是单位模:

$$\begin{aligned}
|\{\omega_a\}|^2&=\sum_{a=1}^{3}\omega_a^2=1,\\
|\{\rho_k\}|^2&=\sum_{k=1}^{8}\rho_k^2=1.
\end{aligned}\tag{5.2.13}$$

这两个 $SU(2)$ 和 $SU(3)$ 张量 ω_a 与 ρ_k 非常重要, 这是因为

$$W_\mu=\omega_aW_\mu^a,\quad S_\mu=\rho_kS_\mu^k\tag{5.2.14}$$

是两个 PRI 不变量, 它们的物理意义分别是弱作用向量势与强作用向量势. 后面将会详细讨论它们.

5.2.3　统一场方程的标准形式

当统一场耦合参数被标准化和量纲化后, 在标准生成元基 (5.2.12) 下, (5.2.5) 的场方程取如下标准形式:

$$\begin{aligned}
&R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R+\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}\\
=&\frac{1}{\hbar c}\left[\hbar c\nabla_\mu+e\alpha^EA_\mu+g_w\alpha^wW_\mu+g_s\alpha^SS_\mu\right]\Phi_\nu,
\end{aligned}\tag{5.2.15}$$

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} - eJ_\mu^E = \frac{1}{\hbar c}\left[\hbar(\nabla_\mu + e\beta^E A_\mu + g_w\beta^w W_\mu + g_s\beta^s S_\mu\right]\phi_E, \tag{5.2.16}$$

$$\begin{aligned}&\partial^\nu W_{\nu\mu}^a - \frac{g_w}{\hbar c}\varepsilon^{abc}g^{\alpha\beta}W_{\alpha\mu}^b W_\beta^c - g_w J_\mu^{wa}\\ =&\left[\nabla_\mu + \frac{e\gamma^E}{\hbar c}A_\mu + \frac{g_w\gamma^w}{\hbar c}W_\mu + \frac{g_s\gamma^s}{\hbar c}S_\mu - \frac{1}{4}\left(\frac{m_H c}{\hbar}\right)^2 x_\mu\right]\phi_w^a,\end{aligned} \tag{5.2.17}$$

$$\begin{aligned}&\partial^\nu S_{\nu\mu}^k - \frac{g_s}{\hbar c}f^{kij}g^{\alpha\beta}S_{\alpha\mu}^i S_\beta^j - g_s J_\mu^{sk}\\ =&\left[\nabla_\mu + \frac{e\delta^E}{\hbar c}A_\mu + \frac{g_w\delta^w}{\hbar c}W_\mu + \frac{g_s\delta^s}{\hbar c}S_\mu - \frac{1}{4}\left(\frac{m_\pi c}{\hbar}\right)^2 x_\mu\right]\phi_s^k,\end{aligned} \tag{5.2.18}$$

$$\left(\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu - \frac{m_f c}{\hbar}\right)\psi = 0, \tag{5.2.19}$$

$$D_\mu(g^{\mu\nu}D_\nu\Phi) - \left(\frac{m_b c}{\hbar}\right)^2\Phi = 0, \tag{5.2.20}$$

其中 W_μ 与 S_μ 如 (5.2.14), $(\Phi_\nu, \phi_E, \phi_w^a, \phi_s^k)$ 是 $(g_{\mu\nu}, A_\mu, W_\mu^a, S_\mu^k)$ 的共轭场, ∇_μ 为 Levi-Civita 协变导数, $(\alpha^E, \beta^E, \gamma^E, \delta^E)$ 是 (5.2.9) 中的无量纲参数, $(\alpha^w, \beta^w, \gamma^w, \delta^w)$ 和 $(\alpha^s, \beta^s, \gamma^s, \delta^s)$ 是如 (5.2.10) 和 (5.2.11) 中的无量纲参数, f^{kij} 如 (4.4.37),

$$\varepsilon^{abc} = \begin{cases} 1, & (abc) \text{ 为 } (1\ 2\ 3) \text{ 的偶排列},\\ -1, & (abc) \text{ 为 } (1\ 2\ 3) \text{ 的奇排列},\\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

在 (5.2.19) 和 (5.2.20) 中的导算子 D_μ 对于

$$\psi = (\psi^E, \psi^w, \psi^s), \quad \Phi = (\Phi^E, \Phi^w, \Phi^s)$$

表达为

$$\begin{aligned}D_\mu(\psi^E, \Phi^E) &= \left(\partial_\mu + \mathrm{i}\frac{e}{\hbar c}A_\mu\right)(\psi^E, \Phi^E),\\ D_\mu(\psi^w, \Phi^w) &= \left(\partial_\mu + \mathrm{i}\frac{g_w}{\hbar c}W_\mu^a\sigma_a\right)(\psi^w, \Phi^w),\\ D_\mu(\psi^s, \Phi^s) &= \left(\partial_\mu + \mathrm{i}\frac{g_s}{\hbar c}S_\mu^k\tau_a\right)(\psi^s, \Phi^s).\end{aligned} \tag{5.2.21}$$

$F_{\mu\nu}, W_{\mu\nu}^a, S_{\mu\nu}^k$ 分别写作

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,\\ W_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + \frac{g_w}{\hbar c}\varepsilon^{abc}W_\mu^b W_\nu^c,\\ S_{\mu\nu}^k &= \partial_\mu S_\nu^k - \partial_\nu S_\mu^k + \frac{g_s}{\hbar c}f^{kij}S_\mu^i S_\nu^j.\end{aligned} \tag{5.2.22}$$

粒子流 $J_\mu^E, J_\mu^{wa}, J_\mu^{sk}$ 的量纲形式为

$$
\begin{aligned}
J_{\mu}^{E} &= \bar{\psi}^{E}\gamma_{\mu}\psi^{E} + \mathrm{i}\frac{\hbar}{m_b c}\left[\Phi^{E}(D_{\mu}\Phi^{E})^{\dagger} - D_{\mu}\Phi^{E}\Phi^{E\dagger}\right], \\
J_{\mu a}^{w} &= \bar{\psi}^{w}\gamma_{\mu}\sigma_{a}\psi^{w} + \mathrm{i}\frac{\hbar}{m_b c}\sigma_{a}\left[\Phi^{w}(D_{\mu}\Phi^{w})^{\dagger} - D_{\mu}\Phi^{w}\Phi^{w\dagger}\right], \\
J_{\mu k}^{s} &= \bar{\psi}^{s}\gamma_{\mu}\tau_{k}\psi^{s} + \mathrm{i}\frac{\hbar}{m_b c}\tau_{k}\left[\Phi^{s}(D_{\mu}\Phi^{s})^{\dagger} - D_{\mu}\Phi^{s}\Phi^{s\dagger}\right].
\end{aligned}
\tag{5.2.23}
$$

标准化的统一场方程 (5.2.15)-(5.2.23), 量纲全部给定, 耦合参数被减少到只有 12+2+7=21 个, 其中 12 个标量参数

$$
\begin{aligned}
&(\alpha^{E}, \beta^{E}, \gamma^{E}, \delta^{E}), \\
&(\alpha^{w}, \beta^{w}, \gamma^{w}, \delta^{w}), \\
&(\alpha^{s}, \beta^{s}, \gamma^{s}, \delta^{s}),
\end{aligned}
\tag{5.2.24}
$$

以及单位模的 $SU(2)$ 张量

$$
(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \tag{5.2.25}
$$

和单位模的 $SU(3)$ 张量

$$
(\rho_1, \cdots, \rho_8). \tag{5.2.26}
$$

其中 (5.2.25) 和 (5.2.26) 从本质上讲不属于统一场的耦合参数, 而是属于 PRI 的物理参数, 它独立于统一场模型. 方程 (5.2.17) 和 (5.2.18) 中的 m_H 和 m_π 分别是 Higgs 场 ϕ_w^a 和 ϕ_s^k 的质量. 因此真正属于统一场耦合参数只有 (5.2.24) 所给出的 12 个, 这些参数依赖于物理系统的能量密度. 由于在正常情况下 (即在我们通常的能量密度下), 四种相互作用表现出各自独立性, 因此这些耦合参数 (5.2.24) 在现在的宇宙能量密度下它们都很小, 除了 α^E 和 γ^w 之外, 即

$$
\text{(5.2.24) 的参数 } \backsimeq 0, \quad \text{除了 } \alpha^E \text{ 和 } \gamma^w \text{ 外}, \tag{5.2.27}
$$

这里 α^E 是电磁场与引力场之间的耦合参数, 而 γ^w 与 $W^{\pm}, Z$ 弱作用的矢量 Bose 子质量相关.

此外, (5.2.24) 中下面四个参数很重要

$$
\alpha^{E},\ \beta^{E},\ \gamma^{w},\ \delta^{s}. \tag{5.2.28}
$$

其中 γ^w 代表弱作用矢量 Bose 子质量, β^E 和 δ^s 在非零真空态下代表光子与胶子质量, 在高能量密度情况下, 如在宇宙早期阶段时 $\beta^E, \delta^s \neq 0$, 因为此时光子和胶子也许有质量.

5.2.4 PRI 产生的强和弱作用势

我们回忆 $U(1)$ 规范理论的电磁场物理意义. 在那里规范场

$$A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3)$$

被解释成

$$\begin{array}{ll} A_0 = \Phi & \text{代表电力势,} \\ \vec{A} = (A_1, A_2, A_3) & \text{代表磁力势.} \end{array} \tag{5.2.29}$$

而 e 作为 $U(1)$ 规范联络的耦合常数出现在 (5.2.21) 中, 它被解释

$$U(1) \text{ 规范耦合常数 } e = \text{ 电荷.} \tag{5.2.30}$$

然后 (5.2.29) 和 (5.2.30) 的进一步物理意义为

$$\begin{array}{ll} F_e = -e\nabla\Phi & \text{作用在电荷 } e \text{ 上的电场力,} \\ F_m = \dfrac{e}{c}\vec{v} \times \mathrm{rot}\,\vec{A} & \text{作用在运动电荷 } e \text{ 上的磁力.} \end{array} \tag{5.2.31}$$

现在将 $U(1)$ 规范场的这种观点移植到 $SU(N)(N = 2, 3)$ 的弱作用与强作用上面. 此时

$$\begin{aligned} &SU(2) \text{ 规范场: } W_\mu^a = (W_0^a, W_1^a, W_2^a, W_3^a),\ 1 \leqslant a \leqslant 3, \\ &SU(3) \text{ 规范场: } S_\mu^k = (S_0^k, S_1^k, S_2^k, S_3^k),\ 1 \leqslant k \leqslant 8, \end{aligned}$$

它们是 $SU(N)(N = 2, 3)$ 张量, 有 $N^2 - 1$ 个分量, 并且随 $SU(N)$ 生成元变换而改变. 然而由 (5.2.25) 和 (5.2.26) 的弱作用和强作用张量参数与 W_μ^a 和 S_μ^k 作内积产生 PRI 不变量

$$\begin{aligned} W_\mu &= \omega_a W_\mu^a = (W_0, W_1, W_2, W_3), \\ S_\mu &= \rho_k S_\mu^k = (S_0, S_1, S_2, S_3). \end{aligned} \tag{5.2.32}$$

类似于电磁势 A_μ 的 (5.2.29)-(5.2.31) 物理意义, 由 (5.2.32) 给出的两个向量场 W_μ 和 S_μ 分别代表弱作用和强作用势, 它们的物理意义为

$$\begin{array}{ll} W_0 = \Phi_w & \text{代表弱力势,} \\ \vec{W} = (W_1, W_2, W_3) & \text{代表弱磁势,} \end{array} \tag{5.2.33}$$

$$\begin{array}{ll} S_0 = \Phi_s & \text{代表强力势,} \\ \vec{S} = (S_1, S_2, S_3) & \text{代表强磁势.} \end{array} \tag{5.2.34}$$

出现在 (5.2.21) 中的 $SU(2)$ 和 $SU(3)$ 耦合常数 g_w 和 g_s 解释为

$$\begin{array}{l} SU(2) \text{ 耦合常数 } g_w = \text{ 弱荷,} \\ SU(3) \text{ 耦合常数 } g_s = \text{ 强荷.} \end{array} \tag{5.2.35}$$

然后由 (5.2.33)-(5.2.35) 产生出弱作用力和强作用力如下:

$$\begin{aligned} F^w &= -g_w \nabla \Phi_w \qquad \text{作用在弱荷 } g_w \text{ 的弱作用力,} \\ F_m^w &= \frac{g_w}{c} \vec{v} \times \mathrm{rot}\, \vec{W} \quad \text{作用在运动弱荷 } g_w \text{ 的弱磁力,} \end{aligned} \tag{5.2.36}$$

$$\begin{aligned} F^s &= -g_s \nabla \Phi_s \qquad \text{作用在强荷 } g_s \text{ 的强作用力,} \\ F_m^s &= \frac{1}{c} g_s \vec{v} \times \mathrm{rot}\, \vec{S} \quad \text{作用在运动强荷 } g_s \text{ 的强磁力.} \end{aligned} \tag{5.2.37}$$

于是由 PRI 产生出的 $SU(N)(N=2,3)$ 表示不变量 (5.2.32) 给出了与电磁相互作用相同的物理意义. 如果没有 PRI, $SU(N)$ 的规范理论将与弱作用力和强作用力无缘. 而任何不能反映弱作用势与强作用势的理论不能算作是真正的相互作用理论.

5.3　相互作用的对偶性与退耦

5.3.1　对偶性

在统一场方程 (5.2.15)-(5.2.18) 中很清楚地展示出在相互作用场 $(g_{\mu\nu}, A_\mu, W_\mu^a, S_\mu^k)$ 与它们的共轭场 $(\Phi_\mu, \phi_E, \phi_w^a, \phi_s^k)$ 之间存在一种自然的对偶关系如下:

$$\begin{aligned} &\{g_{\mu\nu}\} \leftrightarrow \Phi_\mu, \\ &A_\mu \leftrightarrow \phi_E, \\ &W_\mu^a \leftrightarrow \phi_w^a, \quad 1 \leqslant a \leqslant 3, \\ &S_\mu^k \leftrightarrow \phi_s^k, \quad 1 \leqslant k \leqslant 8. \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

在上述对偶关系中有一个重要的特性, 那就是在 (5.3.1) 的对偶左边的相互作用场若是 k 阶张量场, 那么对偶的右边共轭场一定是 $k-1$ 阶张量场. 在物理上, 这意味着若一种相互作用的媒介子是自旋为 k 的 Bose 子, 则它的共轭场介子则是自旋为 $k-1$ 的 Bose 子. 因此, (5.3.1) 的对偶性立刻推出如下重要物理结论:

相互作用对偶性原理　对应于每一种相互作用的媒介子都存在一个与其对偶的场粒子, 称为共轭粒子. 若媒介子的自旋为 k, 则它的共轭场粒子自旋为 $k-1$.

这个对偶性原理是 PID 统一场理论的产物. 根据该对偶性, 如果存在自旋为 2 的引力子, 则存在自旋为 1 的共轭粒子, 正是它产生了暗物质与暗能量现象. 此外自旋为 1 的光子应对偶地存在自旋为零的共轭光子, 自旋为 1 的矢量 Bose 子 $W^\pm$ 和 Z 相应地存在自旋为零的 Higgs 粒子 $\phi_W^\pm$ 和 ϕ_Z^0, 自旋为 1 的八个胶子 g^k 也相应地存在八个自旋为零的共轭胶子 ϕ_g^k. 即 (5.3.1) 场的对偶性造成场粒子的如下对

偶性:

$$\begin{aligned}
&\text{引力子 } (J=2) \leftrightarrow \text{共轭引力子 } (J=1),\\
&\text{光子 } (J=1) \leftrightarrow \text{共轭光子 } (J=0),\\
&W^{\pm} \text{ 粒子 } (J=1) \leftrightarrow \text{带电 Higgs 粒子 } \phi_W^{\pm}(J=0),\\
&Z \text{ 粒子 } (J=1) \leftrightarrow \text{中性 Higgs 粒子 } \phi_Z^0(J=0)\\
&\text{胶子 } g^k(J=1) \leftrightarrow \text{共轭胶子 } \phi_g^k(J=0),\ 1 \leqslant k \leqslant 8.
\end{aligned} \tag{5.3.2}$$

在上述 (5.3.2) 的对偶中, 中性 Higgs 粒子 ϕ_Z^0 已被发现.

回忆 2.5 节的弱子模型, 在媒介子中存在一种自然的自旋态对偶关系 (2.5.33) 和 (2.5.34). 这种对偶性与 PID 的对偶性是不谋而合. 这两个理论体系都具有很强的内在逻辑相容性与物理简单性, 并且大面积地与自然现象相吻合. 然而 PID 统一场与弱子模型是各自立足于完全不同逻辑体系的物理理论, 它们所产生的这么高度一致的媒介子对偶性真是令人感叹.

上述 (5.3.1)-(5.3.2) 的一一对应是属于场粒子之间的对偶. 然而作为相互作用力来讲, $SU(2)$ 规范场 W_μ^a $(1 \leqslant a \leqslant 3)$ 和 $SU(3)$ 规范场 S_μ^k $(1 \leqslant k \leqslant 8)$ 它们中关于上标 a 和 k 的每个分量不具有任何意义. 正如 (5.2.32) 所显示的那样, 它们只有作为 $SU(N)$ 张量 $\{W_\mu^a\}$ 和 $\{S_\mu^k\}$ 在弱作用势和强作用势中起作用. 因此, 当考虑相互作用力时, 对偶关系 (5.3.1) 应改变为如下对偶关系:

$$\begin{aligned}
&\{g_{\mu\nu}\} \leftrightarrow \Phi_\mu,\\
&A_\mu \leftrightarrow \phi_E,\\
&\{W_\mu^a\} \leftrightarrow \{\phi_w^a\},\\
&\{S_\mu^k\} \leftrightarrow \{\phi_s^k\}.
\end{aligned} \tag{5.3.3}$$

对应关系 (5.3.3) 与 (5.3.1) 的对应在物理意义上已发生变化. 上述对应 (5.3.3) 代表每一种相互作用都有由一对共轭场相互耦合产生的作用力, 即

$$\begin{aligned}
&\text{引力: 引力势 } \{g_{\mu\nu}\} \text{ 与共轭场 } \Phi_\mu \text{ 的共同作用力},\\
&\text{电磁力: 电磁势 } A_\mu \text{ 与电磁标量场 } \phi_E \text{ 的共同作用力},\\
&\text{弱作用力: } SU(2) \text{ 规范势 } W_\mu \text{ 与对偶场 } \phi_w \text{ 的共同作用力},\\
&\text{强作用力: } SU(3) \text{ 规范势 } S_\mu \text{ 与对偶场 } \phi_s \text{ 的共同作用力}.
\end{aligned} \tag{5.3.4}$$

理论分析表明, 对于正值作用荷的相互作用, 如引力、弱作用与强作用力, 有如下规律: 自旋为偶数的场产生引力, 自旋为奇数的场产生斥力, 两个对偶场的非线性耦合既有引力也有斥力. 即

$$\text{引力} = \{g_{\mu\nu}\} \text{ 的 Newton 引力} + \Phi_\mu \text{ 的斥力 (暗能量)}$$
$$+g_{\mu\nu} \text{ 与 } \Phi_\mu \text{ 非线性耦合力 (暗物质)}, \tag{5.3.5}$$
$$\text{弱力} = \phi_w \text{ 的引力} + W_\mu \text{ 的斥力} + \phi_w \text{ 与 } W_\mu \text{ 的耦合力}. \tag{5.3.6}$$
$$\text{强力} = \phi_s \text{ 引力} + S_\mu \text{ 斥力} + \phi_s \text{ 与 } S_\mu \text{ 的耦合力}. \tag{5.3.7}$$

5.3.2　引力场与暗物质暗能量

统一场方程 (5.2.15)-(5.2.20) 的突出特点是简单、对偶性以及明显地可退耦性. 当单纯考虑引力场时, 统一场方程可归为如下的 PID 引力场方程形式:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} + (\nabla_\mu - \alpha e A_\mu)\Phi_\nu, \tag{5.3.8}$$

其中 $\alpha = \alpha^E$ 为电磁与引力的耦合常数. 这里之所以考虑这一项是由于宇宙微波背景辐射的存在及 (5.2.27) 的考虑.

由 Bianchi 恒等式 (5.1.3), 关于 (5.3.8) 两边求散度得到

$$\nabla^\mu\nabla_\mu\Phi_\nu - \alpha e A_\mu \cdot \nabla^\mu\Phi_\nu = \frac{8\pi G}{c^4}\nabla^\mu T_{\mu\nu}, \tag{5.3.9}$$

这里关于电磁场 A_μ 假设是零散度的, 即

$$\nabla^\mu A_\mu = 0,$$

这里物理合理的假设.

在 1.4.3 小节中曾说过, 一个物理场方面包含两个方面的信息, 从微观角度讲它反映了一个场粒子的基本特征, 如质量、自旋、电荷等, 而从宏观角度讲它描述了场的能量 (包括作用力) 与运动状态. 因此两个 PID 引力场方程 (5.3.8) 和 (5.3.9) 在微观和宏观两个方面分别揭示了 (5.3.1) 和 (5.3.3) 的粒子对偶与相互作用力对偶的基本性. 下面分别介绍它们.

首先考虑粒子的对偶性. 引力场方程 (5.3.8) 在微观方面反映的是引力子的特性. 虽然引力子至今没有被观测到, 但是物理学界普遍认为它可能存在. 从 (5.3.8) 可推知引力子如下特征:

$$\text{引力子: 自旋 } J = 2, \text{ 质量 } m = 0, \text{ 电荷 } Q = 0. \tag{5.3.10}$$

再来看描述共轭引力子场方程 (5.3.9), 从它可得到共轭引力子特征为

$$\text{共轭引力子: } J = 1,\ m = 0,\ Q = 0. \tag{5.3.11}$$

其次考察作用力的对偶性. 当单独只考虑引力势 $g_{\mu\nu}$ 产生的作用力时, 共轭场 $\Phi_\nu = 0$. 此时 (5.3.8) 归到 Einstein 场方程

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \tag{5.3.12}$$

从 (5.3.13) 可以推得中心对称物质场的 Newton 引力公式

$$F_g = -\frac{mMG}{r^2}. \tag{5.3.13}$$

公式 (5.3.13) 产生于球对称场的 Schwarzschild 解, 具体推导过程可见 (马天,2012). 然后当单独考虑对偶引力场 Φ_μ 产生的作用力时,

$$A_\mu = 0, \quad g_{\mu\nu} \text{ 为 Minkowski 度量.}$$

此时方程 (5.3.9) 变为

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi_\mu + \Delta\Phi_\mu = \frac{8\pi G}{c^4}\partial^\nu T_{\nu\mu} \tag{5.3.14}$$

注意到 Φ_μ 的时间分量 Φ_0 代表共轭引力势, 并且在稳态情况下 $\partial^2\Phi_0/\partial t^2 = 0$. 又当暗物质暗能量存在时可设

$$\partial^\nu T_{\nu 0} = \text{常数 } (\neq 0).$$

这样, 由 (5.3.14), Φ_0 满足如下方程

$$\Delta\Phi_0 = \text{ 常数 } (\neq 0).$$

该方程的球对称解为

$$\Phi_0 = \alpha r^2 \quad (\alpha \neq 0 \text{ 为常数}).$$

于是推出对偶引力场产生的作用力为

$$F_\Phi = -m\frac{\mathrm{d}\Phi_0}{\mathrm{d}r} = \beta r \quad (\beta \neq 0 \text{ 为常数}). \tag{5.3.15}$$

根据暗能量现象知 $\beta > 0$.

因此, 引力势 $g_{\mu\nu}$ 产生 (5.3.13) 的 Newton 引力, 它的对偶场 Φ_μ 产生 (5.3.15) 的暗能量斥力.

如果考虑 $g_{\mu\nu}$ 与 Φ_μ 的共同作用产生的相互作用力, 那么在球对称场情况下, 方程 (5.3.8) 变为

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right) - \nabla_\mu\nabla_\nu\varphi + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\Phi, \tag{5.3.16}$$

此时 $\Phi_\mu = \nabla_\mu\varphi$, $\Phi = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\varphi$. 由 (5.3.16) 导出的作用力公式 (具体推导可见 (Ma, Wang, 2014) 和 (马天, 2012)) 取如下形式:

$$F = mMG\left[-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\delta}\Phi r - \frac{1}{\delta}\left(2 + \frac{\delta}{r}\right)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\right], \tag{5.3.17}$$

其中 $\delta = 2MG/c^2, M$ 为球对称物体质量, m 为受力质点质量.

公式 (5.3.17) 便体现了 (5.3.5) 的性质. 在 (5.3.17) 等式右端第一项 Newton 引力, 第二项代表由 Φ_μ 产生的斥力 (这里 $\Phi = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\Phi_\nu$), 而第三项 $g_{\mu\nu}$ 与 Φ_μ 的耦合产生的作用力. (5.3.17) 可近似地写成

$$F = mMG\left[-\frac{1}{r^2} - \frac{k_0}{r} + k_1 r\right], \tag{5.3.18}$$

该公式右端第二项解释了暗物质, 而第三项解释了暗能量.

结论　PID 引力理论导致引力相互作用的两种对偶性: 场粒子对偶与相互作用力对偶. 场粒子对偶得到描述暗物质和暗能量的物质是 (5.3.10) 和 (5.3.11) 的引力子与共轭引力子. 相互作用力对偶产生描述暗物质和暗能量的作用力公式 (5.3.18). 最重要的一点是, 这种从物质和作用力两个层面上关于暗物质与暗能量的合理解释全部是从 PID 基本原理导出, 而不是采用表象手段获得.

5.3.3　PID 量子电动力学理论

当电磁相互作用与其他相互作用脱耦后, 统一场方程中的电磁场方程 (5.2.16) 变为如下形式:

$$\partial^\nu(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\mu) - eJ_\mu = \left(\partial_\mu + \frac{\beta e}{\hbar c}A_\mu\right)\phi, \tag{5.3.19}$$

$$\mathrm{i}\gamma^\mu\left(\partial_\mu + \mathrm{i}\frac{e}{\hbar c}A_\mu\right)\psi - \frac{mc}{\hbar}\psi = 0, \tag{5.3.20}$$

其中 $\beta = \beta^E, J_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ $(\gamma_\mu = \gamma^\mu)$ 是电流满足

$$\partial^\mu J_\mu = 0.$$

方程 (5.3.19)-(5.3.20) 多出一个未知函数 ϕ, 它是 A_μ 的共轭标量场. 因此完备电磁场方程应该再补充一个方程:

$$F(A_\mu, \phi, J_\mu) = 0, \tag{5.3.21}$$

称为固定规范方程.

方程 (5.3.19)-(5.3.21) 称作是 PID 量子电动力学 (QED) 场方程. 其中 (5.3.21) 的固定规范方程形式本应由某个物理原理给出, 但是目前并不知道是什么原理来定它, 也不知道是否存在这种原理. 根据物理学界的惯例, 通常根据不同物理情况给出 (5.3.21) 的不同形式的方程. 一般情况下常取如下几种形式:

$$\begin{aligned}
&\text{Lorentz 规范：}\partial^\mu A_\mu = 0,\\
&\text{Coulomb 规范：}\frac{\partial A_1}{\partial x^1}+\frac{\partial A_2}{\partial x^2}+\frac{\partial A_3}{\partial x^3}=0,\\
&\text{轴规范：}A_3=0,\\
&\text{时间规范：}A_0=0.
\end{aligned}\tag{5.3.22}$$

如果取 (5.3.21) 为 Lorentz 规范方程, 则修正 QED 场方程 (5.3.19)-(5.3.21) 可等价地表达成如下形式：

$$\begin{aligned}
&\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\Delta\right)A_\mu-\frac{\beta e}{\hbar c}\phi A_\mu = eJ_\mu+\partial_\mu\phi,\\
&\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\Delta\right)\phi+\frac{\beta e}{\hbar c}A_\mu\cdot\partial^\mu\phi=0,\\
&\mathrm{i}\gamma^\mu\left(\partial_\mu+\mathrm{i}\frac{e}{\hbar c}A_\mu\right)\psi-\frac{mc}{\hbar}\psi=0,\\
&\partial^\mu A_\mu=0.
\end{aligned}\tag{5.3.23}$$

如果取电磁场强度

$$H=\mathrm{rot}\ \vec{A},\quad E=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\nabla A_0,$$

其中 $\vec{A}=(A_1,A_2,A_3)$, 那么从 (5.3.19) 得到一个修正的 Maxwell 方程, 它的表达形式如下：

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}=-\mathrm{rot}\ E,\\
&H=\mathrm{rot}\ \vec{A},\\
&\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}=\mathrm{rot}\ H+\vec{J}+\nabla\phi-\frac{\beta e}{\hbar c}\phi\vec{A},\\
&\mathrm{div}\ E=\rho+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}-\frac{\beta e}{\hbar c}\phi A_0,\\
&\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\Delta\right)\phi+\frac{\beta e}{\hbar c}\partial^\mu(A_\mu\phi)=0,
\end{aligned}\tag{5.3.24}$$

其中 $\vec{J}=(J_1,J_2,J_3)$ 为电流密度, ρ 为电荷密度.

电磁场对偶性表现在粒子方面是弱子模型的对偶:

$$\text{光子}\ \leftrightarrow\ \text{共轭光子}.$$

描述光子的场是 A_μ, 共轭光子场是 ϕ, 它们的方程为

$$\begin{aligned}
&\partial^\nu(\partial_\nu A_\mu-\partial_\mu A_\nu)=0\quad(\text{描述光子的方程}),\\
&\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\phi=0\quad(\text{描述共轭光子的方程}).
\end{aligned}\tag{5.3.25}$$

由它们获得光子与共轭光子特性如下：

$$\begin{aligned}&\text{光子 } \gamma: \qquad \text{自旋 } J=1,\ \text{质量 } m=0,\ \text{电荷 } Q=0,\\&\text{共轭光子 } \phi_\gamma: \quad J=0,\ m=0,\ Q=0.\end{aligned} \tag{5.3.26}$$

5.3.4　强相互作用模型

强相互作用退耦模型由下面场方程给出

$$\begin{aligned}&\partial^\nu S^k_{\nu\mu}-\frac{g_s}{\hbar c}f^{kij}g^{\alpha\beta}S^i_{\alpha\mu}S^j_\beta-g_sJ^{sk}_\mu\\&=\left(\partial_\mu-\frac{1}{4}\left(\frac{m_\pi c}{\hbar}\right)^2x_\mu+\frac{g_s\delta}{\hbar c}S_\mu\right)\phi^k_s,\quad 1\leqslant k\leqslant 8,\end{aligned} \tag{5.3.27}$$

$$\mathrm{i}\gamma^\mu\left(\partial_\mu+\mathrm{i}\frac{g_s}{\hbar c}S^k_\mu\tau_k\right)\psi-\frac{m_fc}{\hbar}\psi=0, \tag{5.3.28}$$

$$g^{\mu\nu}\left(\partial_\mu+\mathrm{i}\frac{g_s}{\hbar c}S^k_\mu\tau_k\right)^2\Phi-\left(\frac{m_bc}{\hbar}\right)^2\Phi=0, \tag{5.3.29}$$

其中 τ_k 取为 Gell-Mann 矩阵 (4.4.36),

$$\begin{aligned}&S^k_{\mu\nu}=\partial_\mu S^k_\nu-\partial_\nu S^k_\mu+\frac{g_s}{\hbar c}f^{kij}S^i_\mu S^j_\nu,\\&S_\mu=\rho_kS^k_\mu,\quad \rho_k \text{ 如 (5.2.26)},\\&J^{sk}_\mu=\bar\psi\gamma_\mu\tau^k\psi+\mathrm{i}\frac{\hbar}{m_bc}\tau^k\left[\Phi(D_\mu\Phi)^\dagger-D_\mu\Phi\phi^\dagger\right].\end{aligned}$$

1. 粒子对偶性

若考虑强相互作用媒介子对偶

$$S^k_\mu\ \leftrightarrow\ \phi^k_s,\quad 1\leqslant k\leqslant 8,$$

则它们描述的是如弱子模型中胶子 g^k 与共轭胶子 ϕ^k_g 的对偶

$$\text{胶子 } g^k\ \leftrightarrow\ \text{共轭胶子 } \phi^k_g\quad (1\leqslant k\leqslant 8).$$

描述上述对偶粒子的场方程分别为

$$\partial^\nu S^k_{\nu\mu}-\frac{g_s}{\hbar c}f^{kij}g^{\alpha\beta}S^j_{\alpha\mu}S^i_\beta-g_sJ^{sk}_\mu=0\quad (\text{胶子方程}), \tag{5.3.30}$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\phi^k_s-g_s\partial^\mu J^{sk}_\mu=0\quad (\text{共轭胶子方程}), \tag{5.3.31}$$

其中 (5.3.30) 是在 (5.3.27) 中取 $\phi^k_s=0$ 所得方程, 而 (5.3.31) 是关于 (5.3.27) 两端取散度后令 $S^k_\mu=0$ 及 $m_\pi=0$ 所得方程.

从 (5.3.30) 和 (5.3.31) 可得到胶子与共轭胶子的粒子特性如下：

$$\begin{aligned}&\text{胶子：}\quad J=1,m=0,Q_e=0,Q_s\neq 0,\\&\text{共轭胶子：}J=0,m=0,Q_e=0,Q_s\neq 0,\end{aligned}$$

其中 Q_e 为电荷数, Q_s 为强荷数. 在弱子模型中

$$\text{胶子 } Q_s=\text{ 共轭胶子 } Q_s=2.$$

注 5.4 虽然描述胶子和共轭胶子的场方程都是从 (5.3.27)-(5.3.28) 获得, 但是当考虑粒子行为时这两种场 S_μ^k 和 ϕ_s^k 相互不耦合的. 因而 (5.3.29) 与 (5.3.30) 分别是关于胶子场 S_μ^k 和共轭胶子场 ϕ_s^k 的单纯场方程. 此外, 在 (5.3.29) 中

$$J_\mu^{sk}=\bar{\psi}\gamma_\mu\tau^k\psi,\quad \gamma_\mu=\gamma^\mu,\ \tau^k=\tau_k$$

代表第 k 种胶子流, ψ 为胶子波函数. 而在 (5.3.30) 中

$$\partial^\mu J_\mu^{sk}=\partial^\mu(\bar{\psi}\gamma_\mu\tau^k\psi)$$

代表第 k 种共轭胶子流, ψ 为共轭胶子波函数.

2. 强作用势对偶场方程

当考虑强相互作用势的对偶时, 场方程为

$$\begin{aligned}&\partial^\nu S_{\nu\mu}^k-\frac{g_s}{\hbar c}f^{kij}g^{\alpha\beta}S_{\alpha\mu}^iS_\beta^j-g_sJ_\mu^{sk}\\&=\left(\partial_\mu-\frac{1}{4}\left(\frac{m_\pi c}{\hbar}\right)^2x_\mu+\frac{g_s\delta}{\hbar c}S_\mu\right)\phi_s^k,\end{aligned}\tag{5.3.32}$$

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\phi_s^k+\left(\frac{m_\pi c}{\hbar}\right)^2\phi_s^k+\frac{1}{4}\left(\frac{m_\pi c}{\hbar}\right)^2x_\mu\partial^\mu\phi_s^k\\&=g_s\partial^\mu J_\mu^{sk}-\frac{g_s}{\hbar c}\partial^\mu\left(f^{kij}g^{\alpha\beta}S_{\alpha\mu}^iS_\beta^j-\delta S_\mu\phi_s^k\right),\end{aligned}\tag{5.3.33}$$

$$\mathrm{i}\gamma^\mu\left(\partial_\mu+\mathrm{i}\frac{g_s}{\hbar c}S_\mu^k\tau_k\right)\psi-\frac{m_fc}{\hbar}\psi=0,\tag{5.3.34}$$

$$g^{\mu\nu}\left(\partial_\mu-\mathrm{i}\frac{g_s}{\hbar c}S_\mu^k\tau_k\right)^2\Phi-\left(\frac{m_bc}{\hbar}\right)^2\Phi=0,\tag{5.3.35}$$

$$G_k(S_\mu^k,\phi_s^k,\psi,\Phi)=0,\quad 1\leqslant k\leqslant 8,\tag{5.3.36}$$

其中 (5.3.33) 是关于 (5.3.32) 两端求散度获得, 因此 (5.3.32)-(5.3.35) 的独立未知函数比独立方程数多出八个, 于是 (5.3.36) 便是 8 个补偿对偶场的补充方程以达到未知函数与方程数相同的结果. (5.3.36) 的具体表达形式将根据物理情况而定.

在后面 5.4 节中将根据 (5.3.32)-(5.3.36) 导出各种尺度下的强相互作用势的公式, 从那里可清楚地看到 (5.3.4) 的作用力对偶性.

5.3.5　弱相互作用模型

单纯的弱相互作用场方程可由 (5.2.17) 退耦获得, 它与 (5.2.19) 和 (5.2.20) 的 Dirac 方程与 Klein-Gordon 方程一起构成弱相互作用模型. 该模型具体取如下形式:

$$\begin{aligned}&\partial^\nu W^a_{\nu\mu}-\frac{g_w}{\hbar c}\varepsilon^{abc}g^{\alpha\beta}W^b_{\alpha\mu}W^c_\beta-g_wJ^{wa}_\mu\\&=\left(\partial_\mu+\frac{g_w}{\hbar c}\gamma W_\mu-\frac{1}{4}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2x_\mu\right)\phi^a_w,\quad 1\leqslant a\leqslant 3,\end{aligned}\tag{5.3.37}$$

$$\mathrm{i}\gamma^\mu\left(\partial_\mu+\mathrm{i}\frac{g_w}{\hbar c}W^a_\mu\sigma_a\right)\psi-\frac{m_fc}{\hbar}\psi=0,\tag{5.3.38}$$

$$g^{\mu\nu}\left(\partial_\mu-\mathrm{i}\frac{g_w}{\hbar c}W^a_\mu\sigma_a\right)\left(\partial_\mu+\mathrm{i}\frac{g_w}{\hbar c}W^a_\mu\sigma_a\right)\Phi-\left(\frac{m_bc}{\hbar}\right)^2\Phi=0,\tag{5.3.39}$$

其中 σ_a 为 Pauli 矩阵 (4.4.34),

$$\begin{aligned}&W^a_{\mu\nu}=\partial_\mu W^a_\nu-\partial_\nu W^a_\mu+\frac{g_w}{\hbar c}\varepsilon^{abc}W^b_\mu W^c_\nu,\\&W_\mu=\omega_aW^a_\mu,\quad \omega_a\text{ 如 (5.2.25)},\\&J^{wa}_\mu=\bar\psi\gamma_\mu\sigma^a\psi+\frac{\hbar}{m_bc}\sigma^a\left[\Phi(D_\mu\Phi)^\dagger-D_\mu\Phi\Phi^\dagger\right],\end{aligned}$$

这里 $\sigma^a=\sigma_a,\gamma_\mu=\gamma^\mu,D_\mu=\left(\partial_\mu+\mathrm{i}\frac{g_w}{\hbar c}W^a_\mu\tau_a\right)$.

1. 弱作用媒介子对偶性

若考虑弱作用媒介子对偶

$$W^a_\mu\ \leftrightarrow\ \phi^a_w,\quad 1\leqslant a\leqslant 3,$$

则该对偶是弱子模型中矢量 Bose 子与 Higgs 粒子的对偶

$$W^\pm\ \leftrightarrow\ \phi^\pm_H,\quad Z\ \leftrightarrow\ \phi^0_H.\tag{5.3.40}$$

其中 $W^\pm,Z$ 三个矢量 Bose 子和中性 Higgs 粒子 ϕ^0_H 已被发现, 带电 Higgs 粒子 $\phi^\pm_H$ 还有待实验证实.

关于矢量 Bose 子 $W^\pm$ 和 Z 的场方程由 (5.3.37) 取 ϕ^a_w 真空态

$$\phi^a_w=\alpha^a\text{ 为常数.}$$

给出如下:

$$\begin{aligned}&\partial^\nu W^a_{\nu\mu}+\frac{g_w}{\hbar c}\alpha^a\gamma_bW^b_\mu-\frac{g_w}{\hbar c}\varepsilon^{abc}g^{\alpha\beta}W^b_{\alpha\mu}W^c_\beta\\&=g_wJ^{wa}_\mu-\frac{1}{4}\left(\frac{m_Hc}{\hbar}\right)^2x_\mu.\end{aligned}\tag{5.3.41}$$

而对偶的 Higgs 粒子的场方程由 (5.3.37) 两端取散度获得

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\phi_w^a+\left(\frac{m_H c}{\hbar}\right)^2\phi_w^a-g_w\partial^\mu J_\mu^{wa}$$
$$=\frac{g_w}{\hbar c}\partial^\mu\left[\varepsilon^{abc}g^{\alpha\beta}W_{\alpha\mu}^b W_\beta^c-\gamma W_\mu\phi_w^a\right]-\frac{1}{4}\left(\frac{m_H c}{\hbar}\right)^2 x_\mu\partial^\mu\phi_w^a. \tag{5.3.42}$$

在 5.5.3 小节中, 我们将根据 (5.3.41) 和 (5.3.42) 的对偶粒子场方程推导出关于 (5.3.40) 中的 $W^\pm, Z$ 与 $\phi_H^\pm, \phi_H^0$ 粒子特性.

2. *弱作用势的对偶场方程*

当考虑弱作用势时, 它的场方程取为 (5.3.37)-(5.3.39) 和 (5.3.42), 然后再加上三个对偶补偿方程

$$G_b(W_\mu^a, \phi_w^a, \psi, \Phi)=0, \quad 1\leqslant b\leqslant 3, \tag{5.3.43}$$

这三个方程 (5.3.43) 的表达形式将根据具体物理情况而定.

注 5.5 当考虑强相互作用场粒子方程时, (5.3.30) 和 (5.3.31) 采取了两个对偶场 S_μ^k 与 ϕ_s^k 相互独立的方式, 而关于弱作用场粒子方程 (5.3.41) 和 (5.3.42) 却不是这种方式. 其原因是强作用场的胶子与共轭胶子是长寿粒子, 即它们是自然界中真正独立存在的粒子, 而弱作用的场粒子 $W^\pm, Z$ 和它们的共轭粒子 $\phi_H^\pm, \phi_H^0$ 却是弱作用衰变和散射过程的过渡性粒子, 它们的出现与粒子之间的交换反应相关.

5.4 强相互作用势

5.4.1 夸克的强作用势

根据 PID 和 PRI 的统一场理论, 每一种相经作用都有自己的作用荷, 它是产生相互作用的力源. 同时所有相互作用都有各自的作用势 Φ 与作用力 F 的公式, 它们之间的关系为

$$F=-g\nabla\Phi, \quad g \text{ 为作用荷.}$$

对于强相互作用来讲, 反映作用势的物理量是 $SU(3)$ 规范场 S_μ^k, 它的上指标 k 有 8 个分量代表色荷势. 而反映强作用势的物理量应该与色荷无关, 是如下 PRI 不变量:

$$S_\mu=\rho_k S_\mu^k=(S_0, S_1, S_2, S_3), \tag{5.4.1}$$

其中 ρ_k 是如 (5.2.26) 的 $SU(3)$ 张量. 而强作用势与强作用力为

$$\begin{aligned}&\Phi_s=S_0, && S_\mu \text{ 的时间分量,}\\ &F_s=-g_s\nabla\Phi_s, && g_s \text{ 为强荷.}\end{aligned} \tag{5.4.2}$$

这一小节的内容便是求出夸克的强作用势公式. 由于夸克是 Fermi 子, 因此它的势方程取 (5.3.32)-(5.3.34) 以及固定规范方程 (5.3.36), 根据 (5.4.1) 和 (5.4.2), 将方程 (5.3.32) 和 (5.3.33) 关于 ρ_k 求内积得如下 PRI 不变的强作用势与对偶势的方程为

$$\begin{aligned}&\partial^\nu S_{\nu\mu}-\frac{g_s}{\hbar c}\lambda^{ij}g^{\alpha\beta}S^i_{\alpha\mu}S^j_\beta-g_sJ^s_\mu\\&=\left(\partial_\mu-\frac{1}{4}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2x_\mu+\frac{g_s\delta}{\hbar c}S_\mu\right)\phi_s,\end{aligned}\tag{5.4.3}$$

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\phi_s+\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\phi_s+\frac{1}{4}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2x_\mu\partial^\mu\phi_s\\&=g_s\partial^\mu J^s_\mu+\frac{g_s}{\hbar c}\partial^\mu\left(\lambda^{ij}g^{\alpha\beta}S^i_{\alpha\mu}S^j_\beta-\delta S_\mu\phi_s\right),\end{aligned}\tag{5.4.4}$$

其中 $\lambda^{ij}=\rho_kf^{kij}, m=m_\pi$, 以及

$$\begin{aligned}&\phi_s=\rho_k\phi^k_s,\\&J^s_\mu=\rho_k\bar\psi\gamma_\mu\tau^k\psi,\quad \gamma_\mu=\gamma^\mu,\ \tau^k=\tau_k,\\&S_{\nu\mu}=\partial_\nu S_\mu-\partial_\mu S_\nu+\frac{g_s}{\hbar c}\lambda^{ij}S^i_\nu S^j_\mu.\end{aligned}\tag{5.4.5}$$

由于夸克作用势具有叠加性质, 因此 $\Phi_s=S_0$ 与 ϕ_s 应满足线性方程, 也就是说固定规范方程 (5.3.36) 应取得使 $\mu=0$ 的 (5.4.3) 和 (5.4.4) 是两个线性方程, 即固定规范方程应包含如下两个方程:

$$\begin{aligned}&\lambda^{ij}\left[\partial^\nu(S^i_\nu S^j_0)-g^{\alpha\beta}S^i_{\alpha_0}S^j_\beta\right]+\delta S_0\phi_s=0,\\&\partial^\mu\left[\lambda^{ij}g^{\alpha\beta}S^i_{\alpha\mu}S^j_\beta-\delta S_\mu\phi_s\right]=0.\end{aligned}\tag{5.4.6}$$

根据物理简单性, 再取如下的固定规范方程:

$$\begin{aligned}&x_\mu\partial^\mu\phi_s=0,\\&\partial^\mu S_\mu=0,\end{aligned}\tag{5.4.7}$$

再加上静态的自然条件

$$\frac{\partial}{\partial t}S_0=0,\quad \frac{\partial}{\partial t}\phi_s=0.$$

于是, 在上述固定规范方程 (5.4.6)-(5.4.7) 限制下, $\mu=0$ 的夸克作用势方程 (5.4.3) 以及共轭势方程 (5.4.4) 变为

$$-\Delta\Phi_s=g_sQ-\frac{1}{4}k_0^2c\tau\phi_s\quad(x_0=-c\tau),\tag{5.4.8}$$

$$-\Delta\phi_s+k_0^2\phi_s=g_s\partial^\mu J^s_\mu,\tag{5.4.9}$$

其中 $c\tau$ 为 ϕ_s 的波长, $k_0 = mc/\hbar, Q = -J_0^s$. 对于夸克来讲,

$$k_0 = \frac{mc}{\hbar} \backsimeq 10^{16}\mathrm{cm}^{-1}. \tag{5.4.10}$$

下面将从 (5.4.8) 和 (5.4.10) 推出夸克强作用势公式. 首先考虑 (5.4.9) 方程的解. 由 (5.4.5) 有

$$\partial^\mu J_\mu^s = \rho_k \partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu \tau_k \psi + \rho_k \bar{\psi}\gamma^\mu \tau_k \partial \psi_k. \tag{5.4.11}$$

再由 Dirac 方程 (5.3.34), $\bar{\psi}$ 满足

$$-\mathrm{i}\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu = \frac{g_s}{\hbar c} S_\mu^j \bar{\psi}\gamma^\mu \tau_j + \frac{m_f c}{\hbar}\bar{\psi},$$

这样我们有

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu \tau_k \psi &= \mathrm{i}\frac{g_s}{\hbar c} S_\mu^j \bar{\psi}\gamma^\mu \tau_j \tau_k \psi + \mathrm{i}\frac{m_f c}{\hbar}\bar{\psi}\tau_k \psi, \\
\bar{\psi}\gamma^\mu \tau_k \partial_\mu \psi &= -\mathrm{i}\frac{g_s}{\hbar c} S_\mu^j \bar{\psi}\gamma^\mu \tau_k \tau_j \psi - \mathrm{i}\frac{m_f c}{\hbar}\bar{\psi}\tau_k \psi.
\end{aligned}$$

然后由 (5.4.11) 得到

$$\begin{aligned}
\partial^\mu J_\mu^s &= \mathrm{i}\frac{g_s}{\hbar c}\rho_k S_\mu^j \bar{\psi}\gamma^\mu \left[\tau_j, \tau_k\right]\psi \\
&= -\frac{2g_s}{\hbar c}\rho_k S_\mu^j f^{jki} J_i^{s\mu} \quad (\text{由 (3.1.19)}).
\end{aligned} \tag{5.4.12}$$

此外, $J_i^{s\mu} = J_\mu^{si}$ 是夸克流密度, 因此

$$f^{jki}\rho_k J_i^{s\mu} = \theta_j^\mu \delta(r),$$

式中 $\delta(r)$ 是 Dirac 函数, θ_j^μ 为常值张量与夸克体积成反比. 由此得

$$S_\mu^j f^{jki}\rho_k J_i^{s\mu} = \bar{S}_\mu^j \theta_j^\mu \delta(r), \tag{5.4.13}$$

其中 $\bar{S}_\mu^j \backsimeq \bar{S}_\mu^j(0)$ 是如下平均值

$$\bar{S}_\mu^j = \frac{1}{|\beta_{\rho_0}|}\int_{B_{\rho_0}} S_\mu^k \mathrm{d}V,$$

这里 ρ_0 为夸克半径. 后面将看到

$$S_\mu^k \sim \frac{1}{r}, \quad \text{当 } r \to 0.$$

因此我们得到

$$\bar{S}_\mu^j = \xi_\mu^j \rho_0^{-1} \quad (\xi_\mu^j \text{ 为常值张量}). \tag{5.4.14}$$

从 (5.4.12)-(5.4.14) 得到

$$\partial^\mu J^s_\mu = -\kappa\delta(r)/\rho_0 \quad (\rho_0 \text{ 为夸克半径}), \tag{5.4.15}$$

其中 κ 为常数

$$\kappa = \frac{2g_s}{\hbar c}\xi^j_\mu\theta^\mu_j, \quad \kappa\text{与夸克体积 } V_g \text{ 成反比}. \tag{5.4.16}$$

于是方程 (5.4.9) 可具体表达成如下形式:

$$-\Delta\phi_s + k_0^2\phi_s = -g_s\kappa\delta(r)/\rho_0. \tag{5.4.17}$$

(5.4.17) 的解为

$$\phi_s = -\frac{g_s\kappa}{\rho_0}\frac{1}{r}e^{-k_0 r}. \tag{5.4.18}$$

现在考虑夸克势方程 (5.4.8) 的解. 此时 $g_sQ = -g_sJ^s_0$ 为夸克的强荷密度. 因此不妨设

$$Q = \beta\delta(r) \quad (\beta > 0 \text{ 为常数, 与夸克体积成反比}) \tag{5.4.19}$$

于是将 (5.4.18) 和 (5.4.19) 代入 (5.4.8) 便得到

$$-\Delta\Phi_s = g_s\beta\delta(r) + \frac{g_sA}{\rho_0}\frac{1}{r}e^{-k_0 r}, \tag{5.4.20}$$

式中 A 是常数, 表达为

$$A = \frac{1}{4}k_0^2 c\tau\kappa, \quad \kappa \text{ 如 (5.4.16), 量纲为 } 1/\mathrm{L}. \tag{5.4.21}$$

令 (5.4.20) 的解是径向对称的, 即

$$\Phi_s = \Phi_s(r),$$

那么由

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right),$$

方程 (5.4.20) 写成

$$-\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)\Phi_s = g_s\beta\delta(r) + \frac{g_sA}{\rho_0}\frac{1}{r}e^{-k_0 r}.$$

该方程的解取如下形式:

$$\Phi_s = g_s\left[\frac{\beta}{r} - \frac{A}{\rho_0}\varphi(r)e^{-k_0 r}\right], \tag{5.4.22}$$

其中 φ 是如下方程的解：

$$\varphi'' + 2\left(\frac{1}{r} - k_0\right)\varphi' - \left(\frac{2k_0}{r} - k_0^2\right)\varphi = \frac{1}{r}. \tag{5.4.23}$$

假设 (5.4.23) 的解 φ 为

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k r^k \quad (\text{量纲为L}) \tag{5.4.24}$$

那么将 φ 代入 (5.4.23) 中, 比较 r^k 的系数可推出

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = k_0\alpha_0 + \frac{1}{2}, \\ &\alpha_2 = \frac{1}{2}k_0^2\alpha_0 + \frac{1}{3}k_0, \\ &\cdots\cdots \\ &\alpha_k = \frac{2k_0}{k+1}\alpha_{k-1} - k_0^2\alpha_{k-2}, \quad k \geqslant 2, \end{aligned} \tag{5.4.25}$$

其中 k_0 如 (5.4.10), α_0 是一个自由参数, 量纲为 L. 因此由 (5.4.24)-(5.4.25) 给出的 $\varphi(r)$ 可写成如下形式：

$$\varphi(r) = \alpha_0\left(1 + k_0 r + \frac{r}{2\alpha_0} + o(r)\right).$$

通常就取 φ 的二阶近似就够了.

下面介绍夸克强作用势公式.

现在我们获得夸克强作用势公式 (5.4.22) 的精确表达. 这里将它完整地表达如下

$$\Phi_q = g_s\beta_q\left[\frac{1}{r} - \frac{A_q}{\rho_0}\varphi(r)e^{-k_0 r}\right], \tag{5.4.26}$$

其中 $A_q = \alpha_0 A$ 为无量纲常数, $k_0 = 1/r_0, r_0$ 为强子平均半径, $g_s = g_s(\rho_0)$ 是夸克的强作用荷, 而 $\varphi(r)$ 为无量纲函数, 是 (5.4.24)-(5.4.25) 的近似, 为

$$\varphi(r) = 1 + r/r_0. \tag{5.4.27}$$

即在 (5.4.26) 中只有三个常数 β_q, A_q, r_0. 注意到

$$\beta_q \text{ 与 } 1/V_q \text{ 成正比}, \quad V_q \text{ 是夸克体积}. \tag{5.4.28}$$

通常为了简单, 取 $\beta_q = 1, \varphi = 1$. 此时公式 (5.4.26) 被简化成如下形式：

$$\Phi_q = g_s\left[\frac{1}{r} - \frac{A_q}{\rho_0}e^{-k_0 r}\right],$$

这里 Φ_q 代表夸克势.

注 5.6　在这里经常遇到四维向量的微分运算问题. 关于四维向量场的运算可见 (1.2.51), 而关于 x_μ 有

$$\partial^\mu x_\mu = 4, \quad \partial_\mu x^\mu = 4.$$

其原因是四维时空向量及其导数为

$$\begin{aligned} x^\mu &= (x^0, x^1, x^2, x^3), \quad x^0 = ct, \\ x_\mu &= g_{\mu\nu} x^\nu = (-x^0, x^1, x^2, x^3), \\ \partial_\mu &= \partial/\partial x^\mu, \quad \partial^\mu = g^{\mu\nu}\partial/\partial x^\nu. \end{aligned}$$

5.4.2　强作用势的分层公式

与引力和电磁不同的是, 强相互作用是短程力, 并且在实验上显示出不同尺度的粒子之间强相互作用显示不同层次的强度. 例如, 在夸克层次上强作用力将夸克禁闭在强子内部, 在核子层次上强作用力只是将核子束缚在原子核内部, 而在原子和分子之间强作用力几乎消失. 这种强作用力在空间尺度上的分层现象能够在 PID 和 PRI 统一场理论基础上得到很好的解释.

下面将导出强子、原子、分子在不同层次的强作用势分层公式. 先从核子开始进行讨论.

关于核子的强相互作用, 仍采用 $SU(3)$ 的 QCD 作用量:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} S^k_{\mu\nu} S^{\mu\nu k} + \hbar c \bar{n} \left(\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu - \frac{mc}{\hbar} \right) n, \tag{5.4.29}$$

式中 $S^k_{\mu\nu}$ 如 (5.2.3) 代表强作用的 $SU(3)$ 规范势,

$$n = (a_1 n_0, a_2 n_0, a_3 n_0), \quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1, \tag{5.4.30}$$

n_0 是一个核子的波函数,

$$D_\mu n = \left(\partial_\mu + \mathrm{i}\frac{g_s}{\hbar c} S^k_\mu \tau_k \right) n. \tag{5.4.31}$$

上述 (5.4.29)-(5.4.31) 作用量是 $SU(3)$ 规范不变的. 它的物理意义是核子在强相互作用中是不可分辨的.

作用量 (5.4.29) 的 PID 场方程取如下形式:

$$\partial^\nu S^k_{\nu\mu} + \frac{g_s}{\hbar c} f^{kij} g^{\alpha\beta} S^i_{\alpha\mu} S^j_\beta - g_s Q^k_\mu = \left(\partial_\mu - \frac{k_1^2}{4} x_\mu \right) \phi^k_n, \tag{5.4.32}$$

$$\mathrm{i}\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \mathrm{i}\frac{g_s}{\hbar c} S^k_\mu \tau_k \right) n - \frac{mc}{\hbar} n = 0, \tag{5.4.33}$$

其中参数 k_1 为

$$r_1 = \frac{1}{k_1} = 10^{-13}\text{cm}\text{为 Yukawa 半径}, \tag{5.4.34}$$

r_1 代表原子核的平均半径,

$$Q_\mu^k = \bar{n}\gamma_\mu \tau^k n \quad (\gamma_\mu = \gamma^\mu, \tau^k = \tau_k).$$

令核子的强作用势 Φ_n 与对偶势 ϕ_n 为

$$\Phi_n = \rho_k S_0^k, \quad \phi_n = \rho_k \phi_n^k.$$

类似于夸克势方程 (5.4.8)-(5.4.9), 从 (5.4.32) 导出核子势方程为

$$\begin{aligned} -\Delta\Phi_n &= g_s Q_0 - \frac{1}{4}k_1^2 c\tau_1 \phi_n, \\ -\Delta\phi_n + k_1^2\phi_n &= g_s \partial^\mu Q_\mu, \end{aligned} \tag{5.4.35}$$

其中 $c\tau_1$ 为 ϕ_n 的波长,

$$Q_\mu = \rho_k Q_\mu^k = (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3),$$

代表核子流密度.

类似于 (5.4.15) 和 (5.4.19), 有

$$\begin{aligned} \partial^\mu Q_\mu &= -\kappa_n \delta(r)/\rho_n, \\ Q_0 &= \beta_n \delta(r), \end{aligned} \tag{5.4.36}$$

其中 ρ_n 为核子半径, β_n 和 κ_n 是与核子体积成反比的常数. 于是从 (5.4.35)-(5.4.36) 可以得到核子势的公式为

$$\Phi_n = \beta_n g_s \left[\frac{1}{r} - \frac{A_n}{\rho_n}\varphi(r)e^{-k_1 r}\right], \tag{5.4.37}$$

式中 $\varphi(r)$ 如 (5.4.24)-(5.4.25),

$$A_n = \frac{\kappa_n}{4\beta_n}k_1^2 c\tau_1, \quad k_1 \text{ 如 (5.4.34)}.$$

现在注意夸克势公式中的系数 (5.4.27) 与核子势公式 (5.4.37) 中的系数, 它们分别为

$$\begin{aligned} &\beta_q \text{ 正比于 } 1/V_q, \quad V_q \text{ 为夸克体积}, \\ &\beta_n \text{ 正比于 } N/V_n, \quad V_n \text{ 为核子体积}, \end{aligned}$$

其中 $N=3$ 是核子的强荷数. 因此有

$$\frac{\beta_n}{\beta_q}=\frac{NV_q}{V_n}=N\left(\frac{\rho_0}{\rho_n}\right)^3,\quad N=3.$$

于是核子的强作用势公式 (5.4.37) 可写成 (总是假设 $\beta_q=1$):

$$\Phi_n=3g_s\left(\frac{\rho_0}{\rho_n}\right)^3\left[\frac{1}{r}-\frac{A_n}{\rho_n}\varphi(r)e^{-k_1r}\right].$$

总结性地, 对一般带 N 个强荷、半径为 ρ 的粒子, 它的强作用势公式可具体表达成如下形式:

$$\begin{aligned}\Phi&=Ng_s(\rho)\left[\frac{1}{r}-\frac{A}{\rho}\varphi(r)e^{-kr}\right],\\ g_s(\rho)&=\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)g_s,\end{aligned}\tag{5.4.38}$$

其中 ρ_0 为夸克半径, A 为无量纲常数, 依赖于粒子, $1/k$ 为粒子强吸引力半径, $\varphi(r)$ 如 (5.4.27), 即 $\varphi(r)=1+kr$.

更具体地, 根据公式 (5.4.38), 分别写出夸克势 Φ_q, 核子/强子势 Φ_n 和原子/分子势 Φ_a 的公式如下:

$$\begin{aligned}\Phi_q&=g_s\left[\frac{1}{r}-\frac{A_q}{\rho_0}(1+k_0r)e^{-k_0r}\right],\\ \Phi_n&=3g_s\left(\frac{\rho_0}{\rho_n}\right)^3\left[\frac{1}{r}-\frac{A_n}{\rho_n}(1+k_1r)e^{-k_1r}\right],\\ \Phi_a&=3Ng_s\left(\frac{\rho_0}{\rho_a}\right)^3\left[\frac{1}{r}-\frac{A_a}{\rho_a}(1+k_1r)e^{-k_1r}\right],\end{aligned}\tag{5.4.39}$$

其中 N 为原子和分子中的核子数, $g_s=g_s(\rho_0)$ 是夸克的强作用荷, 它的弱子的强作用荷 $g_s(\rho_w)$ 的关系式为 $g_s(\rho_0)=3(\rho_w/\rho_0)^3g_s(\rho_w)$. 公式 (5.4.39) 便给出不同层次的粒子之间强相互作用势公式.

5.4.3　夸克禁闭与渐近自由

3.4.3 小节详细地介绍了夸克禁闭与渐近自由这两个重要的物理现象. 这一小节将应用强作用势的一般分层公式 (5.4.38) 来导出夸克禁闭与渐近自由的性质.

1. 夸克禁闭

首先考虑夸克禁闭问题. 相距为 r 的两个半径为 ρ 的粒子的强作用束缚势能 E 是由下式给出

$$E=g_s(\rho)\Phi(r),\quad \Phi(r)\text{ 如 (5.4.38).}$$

如果能用该公式估计出强子中的夸克束缚势能 E_q 为 Plank 量级 (即 $\geqslant 10^{19}\text{GeV}$), 那么便从理论上证实了夸克禁闭.

从夸克势公式 (5.4.26) 我们看到有两个不同半径: 夸克半径 ρ_0 和夸克吸引力半径 $r_0 = 1/k_0$, 它们分别估计如下:

$$\rho_0 \backsimeq 10^{-19}\text{cm}, \quad r_0 \backsimeq 10^{-16} \sim 10^{-15}\text{cm}. \tag{5.4.40}$$

此外, 根据作用力的公式

$$F = -g_s \nabla \Phi,$$

由 (5.4.28) 可推出夸克之间强作用力为

$$F_q = -g_s \frac{\mathrm{d}\Phi_q}{\mathrm{d}r} = g_s^2 \left[\frac{1}{r^2} - \frac{A_1}{\rho_0} \frac{1}{r_0} e^{-k_0 r} \right] \tag{5.4.41}$$

从 (5.4.40) 和 (5.4.41) 可推出, 存在 r_1 和 $r_2 (\rho_0 < r_1 < r_0 < r_2)$ 使得

$$F_q \begin{cases} > 0, & 0 < r < r_1, \\ < 0, & r_1 < r < r_2. \end{cases} \tag{5.4.42}$$

从 (5.4.42) 看到在 $r_1 < r < r_2$ 的区域内, 夸克之间是吸引的. 特别地, 夸克的最大吸引力有如下数量级:

$$F \sim \frac{1}{\rho_0},$$

也即夸克半径 $\rho_0 \to 0$, 则夸克最大吸引力 $F \to \infty$. 这就是夸克禁闭的缘故. 若从夸克束缚能与原子核束缚能之比的角度就更能说明夸克禁闭现象. 根据 (5.4.39), 夸克束缚能 E_q 与核子束缚能 E_n 的比值为

$$\begin{aligned} \frac{E_q}{E_n} &= \left(\frac{A_q}{\rho_0} \right) e^{(k_1 - k_0) r} \Big/ \left(3 \left(\frac{\rho_0}{\rho_n} \right)^6 \frac{A_n}{\rho_n} \right) \\ &\backsimeq \left(\frac{\rho_n}{\rho_0} \right)^6. \end{aligned} \tag{5.4.43}$$

再由核子半径 ρ_n 与夸克半径 ρ_0 的物理估计

$$\rho_n = 10^{-15}\text{cm}, \quad \rho_0 = 10^{-19}\text{cm},$$

从 (5.4.43) 推出

$$E_q \backsimeq 10^{24} E_n \tag{5.4.44}$$

原子核结合能约为

$$E_n \backsimeq 10^{-2}\text{GeV}.$$

因此 (5.4.44) 显示出夸克在强子内部的束缚能 E_q 是大约在 Planck 数量级左右, 即

$$E_q \geqslant 10^{22}\text{GeV}.$$

这就充分地证明了夸克是禁闭在强子内部不能被分离.

2. 渐近自由

夸克经作用力公式 (5.4.41) 不仅能解决夸克禁闭问题, 而且也能解释渐近自由现象.

我们回忆一下反映渐近自由现象的电子–质子深度非弹性散射的著名实验结果. e-p 散射实验表明, 当用一个能量不高的电子去打击一个质子时, 它们的行为表现出弹性散射

$$e^- + p \to e^- + p. \tag{5.4.45}$$

此时质子内部的三个夸克被束缚在一起, 行为就像一个点粒子一样, 见图 5.2.

但是当电子被加速到很高速度时, 它能打入到质子内部与某个夸克发生碰撞产生非弹性散射

$$\begin{aligned} &e^- + p \to e^- + p + \pi^0, \\ &e^- + p \to e^- + n + \pi^+. \end{aligned} \tag{5.4.46}$$

这种如 (5.4.46) 的非弹性散射反映出三个夸克在质子内部象是自由粒子一样没有受到什么束缚力.

当我们用夸克作用力公式 (5.4.41) 去解释 e-p 散射实验时, 我们就会发现它能帮助我们很好地理解这个现象. 实际上公式 (5.4.41) 表明夸克之间相距 r_1 时强作用力为零

$$F_q = 0, \quad \text{在 } r = r_1 \text{ 处.}$$

这表明在质子内部存在一个自由半径 $\bar{r}$, 当三个夸克处在 $\bar{r}$ 的环形区域内它们是自由的没有受到束缚力的作用. 因此, 在正常情况下, 质子的三个夸克就处在这个自由区域内, 见图 5.2.

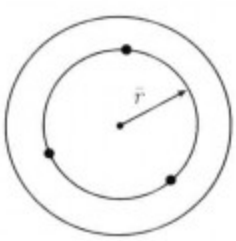


图 5.2　质子结构示意图, $\bar{r}$ 半径处为自由夸克区域

当低能电子打击一个质子时, 由于电磁相互作用使得电子偏离质心, 因此发生如 (5.4.45) 那样的弹性散射. 而相对远离电子的三个夸克, 在与电子发生相互作用时就象是一个点粒子行为一样, 显然不出单个夸克的存在, 见图 5.3(a).

但是当一个高速电子打击质子时, 它能进入到质子的内部而与某一个夸克发生相互作用. 此时电子与单个夸克碰撞. 由于夸克处在质子的自由区中, 没有受到任何作用力, 因此受到电子碰撞的夸克显示出自由的特征, 见图 5.3(b). 当受到碰撞的夸克飞离自由区进入质子的吸引区时, 夸克束缚力将它拉住. 但同时这个夸克与吸引区内的胶子发生碰撞产生夸克交换, 于是发生如 (5.4.46) 那样的非弹性散射, 也可见图 5.3.

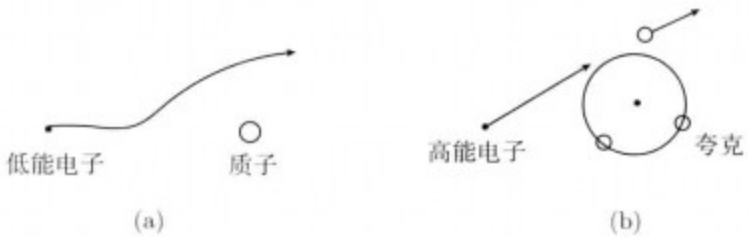


图 5.3 (a) e-p 弹性散射; (b) e-p 非弹性深度散射

于是, 强相互作用势的分层公式 (5.4.39) 同时关于夸克禁闭与渐近自由给出合理解释. 而这两种现象看上去是矛盾的: 一方面表现出强大的束缚力将夸克牢牢抓住, 而另一方面通过高能电子的碰撞显示出质子内部的夸克是自由的, 没有受力的迹象.

5.4.4 Yukawa 核子力与强作用力短程性

强相互作用的神秘之处在于它在夸克层次的表现与在核子层次的表现展示出非常不一致的特性. 即在夸克之间有

$$\text{在 } r = 10^{-16}\text{cm 处夸克之间强作用是无穷大吸引力;} \tag{5.4.47}$$

而在核子之间有

$$\text{在 } 0 < r < 10^{-13}\text{cm 处核子之间强作用是斥力.} \tag{5.4.48}$$

这种由 (5.4.47) 和 (5.4.48) 表现出的强作用力非一致性是所有其他已知的相互作用理论所不能解释的. 但是在 PID 的强相互作用分层公式 (5.4.39) 框架下, 它们能够得到很好地理解. 在 5.4.3 小节我们合理地解释了夸克禁闭与渐近自由, 而这一小节我们将应用核子强作用势公式来描述核子之间的 Yukawa 力以及强相互作用的短程性质.

1. PID 修正的 Yukawa 势

根据经典的强相互作用理论, 将核子束缚在一起形成原子核的是 Yukawa 势, 它表达为

$$\Phi_Y = -\frac{g}{r}e^{-k_1 r}, \quad r_1 = \frac{1}{k_1} = 10^{-13}\text{cm}, \tag{5.4.49}$$

式中 g 称为介子荷. Yukawa 势 (5.4.49) 显示出核子的强作用力为

$$\begin{aligned} F_Y &= -g\frac{\mathrm{d}\Phi_Y}{\mathrm{d}r} = g^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}e^{-k_1 r}\right) \\ &= -g^2\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r_1 r}\right)e^{-k_1 r} < 0, \quad \forall 0 < r. \end{aligned} \tag{5.4.50}$$

它表明在所有 $r > 0$ 处核子之间强作用力都是吸引的.

然而,物理实验表明真实的核子之间强作用势是如图 5.4 所显示的那样, 在 $r < \bar{r} = \dfrac{1}{2}f_m$ 处是斥力, 而在 $\bar{r} < r$ 处是吸引力, 即

$$F_{\text{实验}}\begin{cases} > 0, & 0 < r < \bar{r} \quad \left(\bar{r} = \dfrac{1}{2}\times 10^{-13}\right), \\ < 0, & \bar{r} < r. \end{cases} \tag{5.4.51}$$

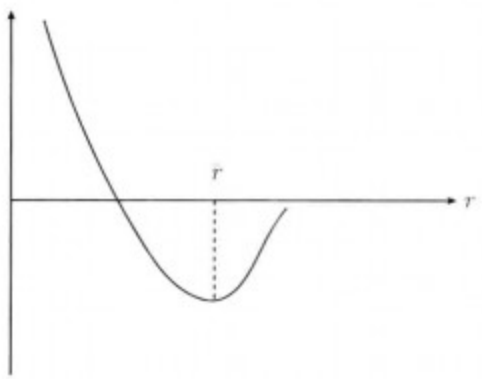


图 5.4　核子强作用势的实验数据示意图

由 (5.4.50) 和 (5.4.51) 显示出 Yukawa 理论与现实不相符合, 它只是在很小的吸引区域以及核子力的短程性方面与实验吻合.

现在应用 (5.4.39) 中核子势 Φ_n 的公式讨论 Yukawa 力. 显然由 PID 的核子势 Φ_n 的公式

$$\Phi_n = 3g_s\left(\frac{\rho_0}{\rho_n}\right)^3\left[\frac{1}{r}-\frac{A_n}{\rho_n}(1+r/r_1)e^{-r/r_1}\right] \tag{5.4.52}$$

可以获得核子强作用势的示意图 5.5, 这里 $g_s = g_s(\rho_0)$ 是夸克的强作用荷. 从图形上看它与实验获得的图 5.4 是大致相符合的.

再从 (5.4.52) 可得核子力公式为

$$F_n = -g_s(\rho_n)\frac{\mathrm{d}\Phi_n}{\mathrm{d}r} = 3g_s^2\left(\frac{\rho_0}{\rho_n}\right)^6\left[\frac{1}{r^2} - \frac{A_n}{\rho_n}\frac{r}{r_1^2}e^{-r/r_1}\right]. \tag{5.4.53}$$

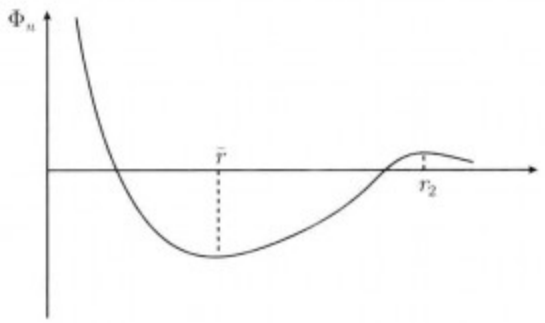


图 5.5 核子强作用势的理论图, $\bar{r} = 1.5f_m, r_2 \backsimeq 9f_m$

其中 ρ_n, r_1 取值为

$$\rho_n = 10^{-15}\mathrm{cm}, \quad r_1 = 10^{-13}\mathrm{cm}. \tag{5.4.54}$$

由 (5.4.53) 和 (5.4.54) 可以由 (5.4.51) 的实验值 $\bar{r}$ 定出常数 A_n 的数值如下. 令 $F_n = 0$ 我们有

$$r^3 e^{-r/r_1} = \frac{1}{A_n}\rho_n r_1^2. \tag{5.4.55}$$

将 $\bar{r} = \dfrac{1}{2}r_1$ 代入 (5.4.55) 便得到

$$A_n = 8e^{\frac{1}{2}} \times 10^{-3}. \tag{5.4.56}$$

同时由 (5.4.55) 和 (5.4.56) 也可求得 F_n 的两个零点 $\bar{r}$ 和 r_2 为

$$\bar{r} = \frac{1}{2}r_1, \quad r_2 \backsimeq 9r_1. \tag{5.4.57}$$

此外, 由 (5.4.50) 可知 Yukawa 核力量级为

$$F_Y \sim 2g^2/r_1^2.$$

而 F_n 的吸引力量级为

$$F_n \sim 3g_s^2\left(\frac{\rho_0}{\rho_n}\right)^6\frac{A_n r_1}{\rho_n}\frac{1}{r_1^2}.$$

对比 $1/r_1^2$ 的系数便求得 g_s 与 g 的关系式为

$$3g_s^2\left(\frac{\rho_0}{\rho_n}\right)^6\frac{A_n r_1}{\rho_n} = 2g^2 \quad (g^2 \backsimeq 1 \sim 10\hbar c). \tag{5.4.58}$$

2. 关于核子强作用力的物理结论

从上面 (5.4.52)-(5.4.58) 可总结成如下结论.

(1) 关于 Yukawa 力的 PID 修正公式为

$$F_n = g^2\left[\frac{1}{4\sqrt{e}}\frac{1}{r^2} - \frac{2r}{r_1^3}e^{-r/r_1}\right], \tag{5.4.59}$$

其中 $g^2 = 1 \sim 10\hbar c$ 为通常的核子强相互作用常数, e 为自然对数的基底.

(2) 核子的强作用力 F_n 的排斥与吸引区域为

$$F_n\begin{cases} >0, & 0<r<\dfrac{1}{2}r_1, \\ <0, & \dfrac{1}{2}r_1<r<9r_1, \\ >0, & 9r_1<r, \end{cases}$$

其中 $r_1 = 10^{-13}\text{cm}$.

(3) F_n 的最大吸引力在 $r \backsimeq 1.5r_1$ 处, 其值为

$$F_{\max} = -\frac{g^2}{\sqrt{e}r_1^2}.$$

(4) 夸克强荷 $g_s = g_s(\rho_0)$ 的数值可由 (5.4.58) 给出如下估计:

$$g_s^2 = \frac{1}{12\sqrt{e}} \times 10^{24}\hbar c.$$

(5) 核子强作用力常数由 (5.4.56) 给出, 即

$$A_n = 8\sqrt{e} \times 10^{-3}.$$

3. 强相互作用短程性

从 PID 修正的 Yukawa 公式 (5.4.59) 可以看到, 核子的强吸引力是短程的, 但是排斥力却是长程的. 然而由强作用力的分层理论, 当核子构成原子核形成原子时, 核子强作用力公式 (5.4.59) 对于原子核及原子以外不再有效, 取而代之的是 (5.4.39) 中的关于原子和分子的公式, 它表达如下:

$$\Phi_a = 3Ng_s\left(\frac{\rho_0}{\rho_a}\right)^6\left[\frac{1}{r} - \frac{A_a}{\rho_a}\left(1+\frac{r}{r_1}\right)e^{-r/r_1}\right], \tag{5.4.60}$$

其中 ρ_0 如 (5.4.40), r_1 如 (5.4.54), ρ_a 为

$$\text{原子: } \rho_a = 10^{-8}\text{cm}, \quad \text{分子: } \rho_a = 10^{-7}\text{cm}. \tag{5.4.61}$$

由 (5.4.60) 可导出强作用力公式为

$$F_a = 9N^2 g_s^2 \left(\frac{\rho_0}{\rho_a}\right)^6 \left[\frac{1}{r^2} - \frac{A_a}{\rho_a}\frac{r}{r_1^2}e^{-r/r_1}\right]. \tag{5.4.62}$$

此外, 原子与分子之间是由电磁吸引力结合在一起, 它们的强度为

$$\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}, \quad \frac{g^2}{\hbar c} \sim 10, \tag{5.4.63}$$

其中 e 为电子电荷. 因此在原子和分子尺度, 强作用斥力 F_a 与电磁引力 F_e 比值由 (5.4.62) 可推出为

$$\begin{aligned}\frac{F_a}{F_e} &= 9N^2 \left(\frac{\rho_0}{\rho_a}\right)^6 g_s^2/N^2e^2 \\ &= \frac{3g^2}{4\sqrt{e}}\left(\frac{\rho_n}{\rho_a}\right)^6 \Big/ e^2, \quad \text{由 (5.4.56) 和 (5.4.58).}\end{aligned} \tag{5.4.64}$$

再由 (5.4.54) 和 (5.4.61),

$$\left(\frac{\rho_n}{\rho_a}\right)^6 = \begin{cases} 10^{-42}, & \text{对原子,} \\ 10^{-48}, & \text{对分子.} \end{cases}$$

于是从 (5.4.63) 和 (5.4.64) 可得

$$\frac{F_a}{F_e} \sim \begin{cases} 10^{-39}, & \text{在原子尺度,} \\ 10^{-45}, & \text{在分子尺度.} \end{cases} \tag{5.4.65}$$

这个比值 (5.4.65) 说明, 到了原子和分子尺度之外, 由于尺度因子 $(\rho_0/\rho)^3$ 的作用使得强作用力随着尺度 ρ 的增长而快速消失, 从而成为短程力.

5.5 弱相互作用理论

5.5.1 弱作用势方程

弱相互作用是由 $SU(2)$ 规范理论来描述. 在 5.2.4 小节中已阐明, 反映弱作用势的物理量由下面 PRI 不变量给出

$$W_\mu = \omega_a W_\mu^a = (W_0, W_1, W_2, W_3),$$

这里 ω_a $(1 \leqslant a \leqslant 3)$ 是如 (5.2.25) 的 $SU(2)$ 张量. 而弱荷势与弱作用力由下面的物理场给出

$$\begin{aligned} &\Phi_w = W_0, && W_\mu \text{ 的时间分量,} \\ &F_w = -g_w \nabla \Phi, && g_w \text{ 为弱荷.} \end{aligned} \tag{5.5.1}$$

下面要做的事情便是从 (5.3.37)-(5.3.39) 和 (5.3.42) 的关于弱相互作用 PID 模型推出关于 (5.5.1) 的公式.

首先要得到关于弱作用势 W_μ 的场方程. 将方程 (5.3.37) 和 (5.3.42) 关于 ω_a 求内积得到如下 PRI 不变的弱作用势 Φ_w 和它的对偶势 ϕ_w 场方程:

$$\begin{aligned}&\partial^\nu W_{\nu\mu} - \frac{g_w}{\hbar c}\kappa^{bc} g^{\alpha\beta} W^b_{\alpha\mu} W^c_\beta - g_w J^w_\mu \\ =&\left(\partial_\mu - \frac{1}{4}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 x_\mu + \frac{g_w}{\hbar c}\gamma W_\mu\right)\phi_w, \end{aligned} \tag{5.5.2}$$

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\phi_w + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi_w - g_w \partial^\mu J^w_\mu \\ =&\frac{g_w}{\hbar c}\partial^\mu\left[\kappa^{bc} g^{\alpha\beta} W^b_{\alpha\mu} W^c_\beta - \gamma W_\mu \phi_w\right] - \frac{1}{4}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 x_\mu \partial^\mu \phi_w. \end{aligned} \tag{5.5.3}$$

其中 $\kappa^{bc} = \omega_a \varepsilon^{abc}, \phi_w = \omega_a \phi^a_\varepsilon$,

$$\begin{aligned}&J^w_\mu = \omega_a \bar{\psi}\gamma_\mu \sigma_a \psi, \\ &W_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + \frac{g_w}{\hbar c}\kappa^{ab} W^a_\mu W^b_\nu. \end{aligned} \tag{5.5.4}$$

物理实验已明确表明, 弱相互作用的 $SU(2)$ 规范场 W_μ 具有质量, 此外, 与 W_μ 对偶的 Higgs 场 ϕ_w 也有质量. 从方程 (5.5.3) 可以看到 ϕ_w 具有质量项 $\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi_w$. 但是在关于 W_μ 的方程 (5.5.2) 中没有质量项. 此时注意到 PID 在 (5.5.2) 自动产生自发对称破缺机制, 即在该方程的右端生出的这一项

$$\frac{g_w}{\hbar c}\gamma W_\mu \phi_w \tag{5.5.5}$$

显然破坏了 $SU(2)$ 规范对称性, 也就是在如下的规范变换下:

$$W_\mu \to W_\mu - \varepsilon^{abc}\omega_a \theta_b W^c_\mu - \frac{1}{g_w}\partial_\mu \theta_a \omega_a,$$

(5.5.5) 的形式一定发生变换.

PID 自动产生自发对称破缺使得我们可以按照物理惯例, 从对偶场 ϕ_w 的非零真空激发产生出 W_μ 的质量, 其过程如下. 令 ϕ_w 存在一个非零真空态 a_0 (a_0 为常数), 然后作变换 (真空激发):

$$\phi_w \to \phi_w + a_0, \quad W_\mu \to W_\mu.$$

在此变换下, 方程 (5.5.2) 和 (5.5.3) 变为

$$\begin{aligned}&\partial^\nu W_{\nu\mu}-k_1^2W_\mu-\frac{g_w}{\hbar c}\kappa^{ab}g^{\alpha\beta}W^a_{\alpha\mu}W^b_\beta-g_wJ^w_\mu\\&=\left(\partial_\mu-\frac{1}{4}k_0^2x_\mu+\frac{g_w}{\hbar c}\gamma W_\mu\right)\phi_w-\frac{1}{4}a_0k_0^2x_\mu,\end{aligned}\tag{5.5.6}$$

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\phi_w+k_0^2\phi_w-g_w\partial^\mu J^w_\mu+k_0^2a_0\\&=\frac{g_w}{\hbar c}\partial^\mu\left[\kappa^{ab}g^{\alpha\beta}W^a_{\alpha\mu}W^b_\beta-\gamma W_\mu(\phi_w+a_0)\right]-\frac{1}{4}k_0^2x_\mu\partial^\mu\phi_w,\end{aligned}\tag{5.5.7}$$

其中 $k_0=m_Hc/\hbar, k_1=m_wc/\hbar$ 为质量, $m_w=\sqrt{\hbar g_wa_0r/c^3}$.

于是在 (5.5.6) 和 (5.5.7) 中都具有了质量项, 其中 m_H 为 Higgs 质量, m_w 为矢量 Bose 子质量,

$$m_H\backsimeq 160\mathrm{GeV/c^2},\quad m_w\backsimeq 80\mathrm{GeV/c^2}.$$

根据 (5.3.43), 方程 (5.5.6) 和 (5.5.7) 可以补充三个对偶场的补偿方程. 再由弱荷势具有叠加性, W_0 与 ϕ_w 应满足线性方程. 于是我们将令时间分量 $\mu=0$ 的 (5.5.6) 方程和它的对偶方程 (5.5.7) 中的非线性部分为零. 也即我们取如下三个对偶补偿方程:

$$\begin{aligned}&\kappa^{ab}\left[g^{\alpha\beta}W^a_{\alpha_0}W^b_\beta-\partial^\mu(W^a_\mu W^b_0)\right]+\gamma W_0\phi_w-\frac{\hbar c}{g_w}\frac{a_0k_0^2}{4}x_0=0,\\&\frac{g_w}{\hbar c}\partial^\mu\left[\kappa^{ab}g^{\alpha\beta}W^a_{\alpha\mu}W^b_\beta-\gamma W_\mu\phi_w\right]-\frac{k_0^2}{4}x_\mu\partial^\mu\phi_w-k_0^2a_0=0,\\&\partial^\mu W_\mu=0.\end{aligned}\tag{5.5.8}$$

再加上静态的自然条件

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi_w=0,\quad \frac{\partial}{\partial t}\phi_w=0.\tag{5.5.9}$$

于是在上面 (5.5.8) 和 (5.5.9) 的条件下, 时间分量 $\mu=0$ 的 (5.5.6) 场方程与它的对偶场方程 (5.5.7) 变为

$$-\Delta\Phi_w+k_1^2\Phi_w=g_wQ_w-\frac{1}{4}k_0^2c\tau\phi_w,\tag{5.5.10}$$

$$-\Delta\phi_w+k_0^2\phi_w=g_w\partial^\mu J^w_\mu,\tag{5.5.11}$$

其中 $x_0=-c\tau$ 为 ϕ_w 的寿命, $Q=-J^w_0$.

方程 (5.5.10) 和 (5.5.11) 便是关于弱作用势 Φ_w 和它的共轭势 ϕ_w 的场方程, 下面将从它们推出弱作用力的公式.

5.5.2　弱作用力的分层公式

类似于强相互作用势的分层公式 (5.4.39), 应用方程 (5.5.10) 和 (5.5.11) 关于弱相互作用也可推出势的分层公式如下:

$$\Phi_w = Ng_w\left(\frac{\rho_w}{\rho}\right)^3 e^{-kr}\left[\frac{1}{r} - \frac{B}{\rho}(1+2kr)e^{-kr}\right], \tag{5.5.12}$$

$$\Phi_w^0 = g_w e^{-kr}\left[\frac{1}{r} - \frac{B_0}{\rho_w}(1+2kr)e^{-kr}\right], \tag{5.5.13}$$

其中 (5.5.12) 是关于半径为 ρ 的携带 N 个弱荷粒子的弱作用势公式, 而 (5.5.13) 为弱子的作用势公式, ρ_w 为弱子半径, B 为依赖于粒子类型的常数, B_0 为对应于弱子的常数,

$$k = \frac{m_w c}{\hbar} = 10^{16}\mathrm{cm}^{-1}, \tag{5.5.14}$$

这里 m_w 为矢量 Bose 子质量.

下面首先关于弱子推出 (5.5.13) 的公式. 对 (5.5.11) 的右端项 $\partial^\mu J_\mu^w$, 由 (5.5.4) 可得

$$\partial^\mu J_\mu^w = \omega_a \partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu \sigma + \omega_a \bar{\psi}\gamma^\mu \sigma_a \partial_\mu \psi.$$

由 Dirac 方程 (5.3.38),

$$\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu \sigma_a \psi = -\mathrm{i}\frac{g_w}{\hbar c} W_\mu^b \bar{\psi}\gamma^\mu \sigma_b \sigma_a \psi + \mathrm{i}\frac{mc}{\hbar}\bar{\psi}\sigma_a\psi,$$

$$\bar{\psi}\gamma^\mu \sigma_a \partial_\mu \psi = \mathrm{i}\frac{g_w}{\hbar c} W_\mu^b \bar{\psi}\gamma^\mu \sigma_a \sigma_b \psi - \mathrm{i}\frac{mc}{\hbar}\bar{\psi}\sigma_a\psi.$$

于是获得

$$\begin{aligned}\partial^\mu J_\mu^w &= \mathrm{i}\frac{g_w}{\hbar c}\omega_a W_\mu^b \bar{\psi}\gamma^\mu [\sigma_a, \sigma_b]\psi \\ &= -2\frac{g_w}{\hbar c}\varepsilon_{abc}\omega_a W_\mu^b J_c^{w\mu}.\end{aligned} \tag{5.5.15}$$

注意到

$$\varepsilon_{abc}\omega_a W_\mu^b = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ W_\mu^1 & W_\mu^2 & W_\mu^3 \end{vmatrix} = \vec{\omega} \times \vec{W}_\mu,$$

其中 $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, $\vec{W}_\mu = (W_\mu^1, W_\mu^2, W_\mu^3)$. 因此 (5.5.15) 可写成

$$\partial^\mu J_\mu^w = -\frac{2g_w}{\hbar c}(\vec{\omega} \times \vec{W}_\mu)\cdot \vec{J}^{w\mu}, \tag{5.5.16}$$

这里 $\vec{J}^{w\mu} = (J_1^{w\mu}, J_2^{w\mu}, J_3^{w\mu})$. 弱流密度 $J_a^{w\mu}$ 为

$$J_a^{w\mu} = \theta_a^\mu \delta(r), \quad \theta_a^\mu \text{ 为混合常值张量.}$$

而在 (5.5.16) 中的 $\vec{W}_\mu$ 取平均值

$$\vec{W}_\mu^*=\frac{1}{|B_{\rho_w}|}\int_{B_{\rho_w}}\bar{W}_\mu \mathrm{d}x.$$

类似于强相互作用的 (5.4.14) 情况 $\bar{W}_\mu^*$ 取值为

$$\bar{W}_\mu^*=\vec{\zeta}_\mu\,\rho_w^{-1},\quad \vec{\zeta}_\mu=(\zeta_\mu^1,\zeta_\mu^2,\zeta_\mu^3).$$

于是 (5.3.16) 可写成如下形式：

$$\partial^\mu J^\mu=-\kappa\delta(r)/\rho_w, \tag{5.5.17}$$

式中 κ 为常数表达为

$$\kappa=\frac{2g_w}{\hbar c}\,\vec{\theta}^{\,\mu}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{\zeta}_\mu)=\frac{2g_w}{\hbar c}\begin{vmatrix}\theta_1^\mu & \theta_2^\mu & \theta_3^\mu\\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3\\ \zeta_\mu^1 & \zeta_\mu^2 & \zeta_\mu^3\end{vmatrix}. \tag{5.5.18}$$

将 (5.5.14) 代入 (5.5.11) 中得

$$-\Delta\phi_w+k_0^2\phi_w=-g_w\kappa\delta(r)/\rho_w,$$

该方程的解为

$$\phi_w=-\frac{\kappa g_w}{\rho_w}\frac{1}{r}e^{-k_0r}. \tag{5.5.19}$$

这便是方程 (5.5.11) 的解.

将 (5.5.19) 代入到 (5.5.10) 中得到

$$-\Delta\Phi_w+k_1^2\Phi_w=g_wQ_w+\frac{g_w\tilde{B}}{\rho_w}\frac{1}{r}e^{-k_0r}, \tag{5.5.20}$$

式中 $\tilde{B}$ 为量纲为 $1/L$ 的如下常数

$$\tilde{B}=\frac{1}{4}\kappa k_0^2c\tau,\quad \kappa \text{ 如 (5.5.18)}.$$

由于 $Q_w=-J_0^w$ 代表弱荷密度, 因此有

$$Q_w=\beta\delta(r),\quad \beta \text{ 为无量纲常数}.$$

将 Q_w 代入到 (5.2.20) 中便得到弱作用势方程的最终形式如下：

$$-\Delta\Phi_w+k_1^2\Phi_w=\beta g_w\delta(r)+\frac{g_w\tilde{B}}{\rho_w}\frac{1}{r}e^{-k_0r}.$$

令 (5.5.20) 的解是径向对称的, 因而上面方程可写成

$$-\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)\Phi_w + k_1^2\Phi_w = g_w\beta\delta(r) + \frac{g_w\tilde{B}}{\rho_w}\frac{1}{r}e^{-k_0 r}. \tag{5.5.21}$$

方程 (5.5.21) 的解可表达成

$$\Phi_w = \frac{g_w\beta}{r}e^{-k_1 r} - \frac{g_w\tilde{B}}{\rho_w}\varphi(r)e^{-k_0 r}. \tag{5.5.22}$$

其中 φ 是如下方程的解:

$$\varphi'' + 2\left(\frac{1}{r} - k_0\right)\varphi' - \left(\frac{2k_0}{r} + k_1^2 - k_0^2\right)\varphi = \frac{1}{r}.$$

令该方程的解 φ 为

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty}\beta_k r^k \quad (\varphi \text{ 的量纲为 L}), \tag{5.5.23}$$

将 φ 代入到 (5.5.22) 中再比较 r^k 的系数可得

$$\begin{aligned}
&\beta_1 = k_0\beta_0 + \frac{1}{2},\\
&\beta_2 = \frac{1}{2}(k_0^2 - k_1^2)\beta_0 + \frac{1}{3}k_0,\\
&\quad\cdots\cdots\\
&\beta_k = \frac{2k_0}{k+1}\beta_{k-1} - (k_0^2 - k_1^2)\beta_{k-2}, \quad k \geqslant 2.
\end{aligned}$$

注意到 (5.5.22) 中常数 $\tilde{B}$ 量纲为 1/L, 而 $\varphi(r)$ 中 β_0 的量纲为 L. 在物理中我们只能测得无量纲常数 $\tilde{B}\beta_0$ 的值. 于是将 (5.5.23) 的 φ 取二阶近似为

$$\varphi = \beta_0(1 + k_0 r).$$

此外, 由 $k_0 = m_H c/\hbar, k_1 = m_w c/\hbar$, 而 Higgs 质量 m_H 约为矢量 Bose 子质量 m_w 的两倍, 即 $m_H \backsimeq 2m_w$. 于是取

$$k_0 = 2k, \quad k = k_1.$$

这样, 关于弱子的弱作用势公式 (5.5.22) 最终表达形式为

$$\Phi_w^0 = g_w\beta e^{-kr}\left[\frac{1}{r} - \frac{B_0}{\rho_w}(1 + 2kr)e^{-kr}\right], \tag{5.5.24}$$

式中 k 如 (5.5.14), β 和 B_0 是两个无量纲常数, ρ_w 为弱子半径.

用同样的方式, 对于一个半径为 ρ, 带有 N 个弱荷的粒子, 可求出它的弱作用势也像强作用势具有分层性质, 其公式为

$$\Phi_w = Ng_w\beta(\rho)e^{-kr}\left[\frac{1}{r} - \frac{B}{\rho}(1+2kr)e^{-kr}\right], \tag{5.5.25}$$

$$g_w(\rho) = \left(\frac{\rho_w}{\rho}\right)^3 g_w,$$

其中 β 如 (5.5.24), B 是依赖于粒子类型的常数. 为了简单取 $\beta = 1$ 时, (5.5.25) 和 (5.5.24) 便是该小节一开始的公式 (5.5.12) 和 (5.5.13).

注 5.7 事实上, 如果我们用某个半径为 ρ_1 粒子作标准, 那么对于半径为 ρ_2 的粒子弱作用势公式为

$$\Phi_2 = Ng_w\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^3 e^{-kr}\left[\frac{1}{r} - \frac{B}{\rho_2}(1+2kr)e^{-kr}\right].$$

例如, 在 (2.5.21) 中, 我们就是用某个半径为 ρ_0 的复合粒子尺度因子作标准来表达弱子的弱作用势公式的.

注 5.8 当考虑半径分别为 ρ_1 和 ρ_2 两个复合粒子之间弱作用力时, 它们之间的弱作用力采用如下尺度的势:

$$\begin{cases} F = -N_1N_2g_s(\rho_1)g_s(\rho_2)\nabla\Phi, \\ \Phi = e^{-kr}\left[\dfrac{1}{r} - \dfrac{\bar{B}}{\sqrt{\rho_1\rho_2}}(1+2kr)\mathrm{e}^{-kr}\right], \end{cases}$$

其中 N_1, N_2 分别为两个粒子的弱荷数, $\bar{B}$ 为两个粒子类型决定的常数.

下面研究弱力的短程性.

从弱作用势公式 (5.5.25), 我们可以立刻推出弱相互作用是一个短程力, 它的力程由 e^{-kr} 给出, 由 (5.5.14) 知

$$r = \frac{1}{k} = 10^{-16}\mathrm{cm}$$

是弱相互作用的力程. 这与实验值是相符合的.

5.5.3 PID 的对称破缺机制

在推导出弱作用势公式 (5.5.6) 和 (5.5.7) 的过程中, 我们已经使用了 PID 的对称破缺机制. 这是一种与 Higgs 机制完全不同的一种质量生成机制. Higgs 的质量产生是人为地加入一个 Bose 子场的作用量来达到, 而 PID 的质量产生完全是由原理自动做到的. 在这一小节, 我们将专门从对偶的角度讨论粒子的 PID 对称破缺机制.

考虑矢量 Bose 子 $W^{\pm}, Z$ 和 Higgs 粒子 ϕ_H 的场方程是由 (5.3.37) 提供. 为了方便, 我们这里再次写出它们

$$\begin{aligned}&\partial^{\nu}W^{a}_{\nu\mu}-\frac{g_w}{\hbar c}\varepsilon^{abc}g^{\alpha\beta}W^{b}_{\alpha\mu}W^{c}_{\beta}-g_wJ^{a}_{\mu}\\&=\left(\partial_{\mu}+\frac{g_w}{\hbar c}\gamma_bW^{b}_{\mu}-\frac{1}{4}k_0^2x_{\mu}\right)\phi^{a},\quad 1\leqslant a\leqslant 3.\end{aligned}\tag{5.5.26}$$

方程 (5.5.26) 需要补充三个对偶补偿方程, 我们取

$$\partial^{\mu}W^{a}_{\mu}=\beta^{a}\quad(1\leqslant a\leqslant 3),\tag{5.5.27}$$

其中 β^a 是参数.

取如下的 $SU(N)$ 生成元变换:

$$\begin{pmatrix}\tilde{\sigma}_1\\ \tilde{\sigma}_2\\ \tilde{\sigma}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\end{pmatrix}.$$

在上述变换下, W^a_{μ} 与 ϕ^a 被变换成

$$\begin{aligned}&(W^1_{\mu},W^2_{\mu},W^3_{\mu})\to(W^{\pm}_{\mu},Z_{\mu})=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(W^1_{\mu}\pm\mathrm{i}W^2_{\mu}),W^3_{\mu}\right),\\&(\phi^1,\phi^2,\phi^3)\to(\phi^{\pm},\phi^0)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi^1\pm\mathrm{i}\phi^2),\phi^3\right).\end{aligned}$$

然后由 PRI, 方程 (5.2.26) 变为

$$\begin{aligned}&\partial^{\nu}W^{\pm}_{\nu\mu}\pm\frac{\mathrm{i}g_w}{\hbar c}g^{\alpha\beta}(W^{\pm}_{\alpha\mu}Z_{\beta}-Z_{\alpha\mu}W^{\pm}_{\beta})-g_wJ^{\pm}_{\mu}\\&=\left[\partial_{\mu}+k_w^2W^{\pm}_{\mu}+k_z^2Z_{\mu}-\frac{1}{4}k_0^2x_{\mu}\right]\phi^{\pm},\end{aligned}\tag{5.5.28}$$

$$\begin{aligned}&\partial^{\nu}Z_{\nu\mu}-\frac{\mathrm{i}g_w}{\hbar c}g^{\alpha\beta}(W^{+}_{\alpha\mu}W^{-}_{\beta}-W^{-}_{\nu\mu}W^{+}_{\beta})-g_wJ^{0}_{\mu}\\&=\left[\partial_{\mu}+k_w^2W^{\pm}_{\mu}+k_Z^2Z_{\mu}-\frac{1}{4}k_0^2x_{\mu}\right]\phi^{0}.\end{aligned}\tag{5.5.29}$$

式中

$$\begin{aligned}&J^{\pm}_{\mu}=\frac{1}{\sqrt{2}}(J^1_{\mu}\pm\mathrm{i}J^2_{\mu}),\quad J^0_{\mu}=J^3_{\mu},\\&W^{\pm}_{\nu\mu}=\partial_{\nu}W^{\pm}_{\mu}-\partial_{\mu}W^{\pm}_{\nu}\pm\frac{\mathrm{i}g_w}{\hbar c}(Z_{\mu}W^{\pm}_{\nu}-Z_{\nu}W^{\pm}_{\mu}),\\&Z_{\nu\mu}=\partial_{\nu}Z_{\mu}-\partial_{\mu}Z_{\nu}+\frac{\mathrm{i}g_w}{\hbar c}(W^{+}_{\mu}W^{-}_{\nu}-W^{-}_{\mu}W^{+}_{\nu}),\end{aligned}\tag{5.5.30}$$

以及

$$k_w^2=\frac{g_w\gamma_1}{\sqrt{2}\hbar c},\quad k_z^2=\frac{g_w\gamma_3}{\hbar c},$$

它们是由 $SU(2)$ 张量 $(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ 如下变换而来

$$\begin{pmatrix}k_w^2\\k_w^2\\k_z^2\end{pmatrix}=\frac{g_w}{\hbar c}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\\\gamma_3\end{pmatrix},$$

其中我们取 σ_a 表示使得 γ_a 的第二个分量 $\gamma_2=0$.

容易看出, 方程 (5.5.28) 关于 W_μ^+ 和 W_μ^- 是复共轭的. 方程 (5.5.28) 和 (5.5.29) 有四类重要的解, 它们描述了不同的弱作用过程.

第一类解. 取

$$W_\mu^\pm=0,\quad \phi^0=1,\quad \beta^a=0\quad(\beta^a\text{ 如 (5.5.27)}),$$

那么 Z_μ 满足如下方程:

$$\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\Delta\right)Z_\mu-k_z^2Z_\mu=g_wJ_\mu^0-\frac{1}{4}k_0^2x_\mu.\tag{5.5.31}$$

这类解描述了涉及中性矢量 Bose 子 Z_μ 的中性流弱作用过程, 并给出 Z 粒子的质量 $m_z=\dfrac{\hbar}{c}k_z$.

第二类解. 取

$$Z_\mu=0,\quad \phi^\pm=1,\quad \beta^a=0,$$

那么 $W_\mu^\pm$ 满足的方程为

$$\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\Delta\right)W_\mu^\pm-k_w^2W_\mu^\pm=gJ_\mu^\pm-\frac{1}{4}k_0^2x_\mu+o(W^\pm).\tag{5.5.32}$$

这类解反映了带电矢量 Bose 子 $W^\pm$ 的粒子特性, 并提供了 $W^\pm$ 粒子的质量为 $m_w=\dfrac{\hbar}{c}k_w$ 以及带电弱流 $J_\mu^\pm$.

第三类解. 取

$$Z_\mu=0,\quad \beta^1<0,\quad \beta^2=0,$$

然后关于方程 (5.5.28) 两端取散度, 得到 $\phi^\pm$ 满足的方程

$$\begin{aligned}&\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\Delta\right)\phi^\pm-(k_0^2+k_w^2|\beta^1|)\phi^\pm+g_w\partial^\mu J_\mu^\pm\\&=\left(\frac{k_0^2}{4}x_\mu-k_w^2W_\mu^\pm\right)\partial^\mu\phi^\pm\pm\left(\frac{g_w}{\hbar c}\right)^2g^{\alpha\beta}W_\beta^\pm\partial^\mu(W_\alpha^+W_\mu^--W_\alpha^-W_\mu^+).\end{aligned}\tag{5.5.33}$$

这类解描述带电 Higgs 粒子 $\phi_H^{\pm}$ 的性质, 给出 $\phi_H^{\pm}$ 的质量为

$$m_{\phi_H^{\pm}} = \frac{\hbar}{c}(k_0^2 + k_w^2|\beta^1|). \tag{5.5.34}$$

第四类解. 取

$$W_\mu^{\pm} = 0, \quad \beta^3 < 0,$$

然后关于 (5.5.29) 两端求散度便得到 ϕ^0 的方程

$$\begin{aligned}&\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta\right)\phi^0 - (k_0^2 + k_2^2|\beta^3|)\phi^0 + g_w\partial^\mu J_\mu^0\\ =&\left(\frac{1}{4}k_0^2 x_\mu - k_z^2 Z_\mu\right)\partial^\mu\phi^0.\end{aligned} \tag{5.5.35}$$

这类解描述中性 Higgs 粒子 ϕ_H^0 的性质, 给出 ϕ_H^0 的质量为

$$m_{\phi_H^0} = \frac{\hbar}{c}(k_0^2 + k_z^2|\beta^3|). \tag{5.5.36}$$

以上四种过程便是采用 PID 的自发对称破缺机制讨论在弱相互作用衰变与散射过程中产生矢量 Bose 子 $W^{\pm}, Z$ 以及它们对偶 Higgs 粒子 $\phi_H^{\pm}, \phi_H^0$ 的行为, 并且给出它们的质量生成机制.

总结性地, 上面讨论可给出下面几个物理结论.

(1) 带电与中性 Higgs 粒子 $\phi_H^{\pm}$ 和 ϕ_H^0 的存在性, 它们的动力学方程分别由 (5.5.33) 和 (5.5.35) 提供. 由这两个方程我们可获得 $\phi_H^{\pm}$ 和 ϕ_H^0 的基本物理性质如下:

$$\text{自旋 } J = 0, \quad \text{质量 } m_{\phi_H^{\pm}} \text{ 和 } m_{\phi_H^0} \text{ 如 (5.5.34) 和 (5.5.36).}$$

(2) 矢量 Bose 子 $W^{\pm}, Z$ 的动力学方程分别由 (5.5.32) 和 (5.5.31) 提供. 由这些方程可给出 $W^{\pm}, Z$ 粒子的物理性质为

$$\text{自旋 } J = 1, \quad \text{质量 } m_{W^{\pm}} = \frac{\hbar}{c}\sqrt{\frac{g_w\gamma_1}{\sqrt{2}\hbar c}}, \quad m_Z = \frac{\hbar}{c}\sqrt{\frac{g_w\gamma_3}{\hbar c}}.$$

(3) 由于 $W^{\pm}$ 和 $\phi_H^{\pm}$ 出现的条件为 $Z_\mu = 0$, 而 Z 与 ϕ_H^0 出现的条件是 $W^{\pm} = 0$. 这就意味着在同一个粒子衰变与散射过程中, $W^{\pm}$ 粒子与 Z 粒子, $\phi_H^{\pm}$ 粒子与 ϕ_H^0 粒子不会同时出现. 即在同一个粒子系统中带电粒子 $W^{\pm}, \phi_H^{\pm}$ 与中性粒子 Z, ϕ_H^0 是不共存的.

(4) 带电粒子与中性粒子质量比分别为

$$\frac{m_{\phi_H^{\pm}}^2}{m_{\phi_H^0}^2} = \frac{k_0^2 + k_w^2|\beta^1|}{k_0^2 + k_2^2|\beta^3|}, \quad \frac{m_{W^{\pm}}^2}{m_Z^2} = \frac{k_w^2}{k_z^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\gamma_1}{\gamma_3}. \tag{5.5.37}$$

注 5.9 注意到 $m_{W^\pm}$ 与 m_Z 有如下比例 (见 (3.3.84)):

$$\frac{m_{W^\pm}}{m_Z} = \cos\theta_W.$$

因此从 (5.5.37) 推断: $\beta^1 = \beta^3, k_0 = 0$, 即

$$\frac{m_{\phi_H^\pm}}{m_{\phi_H^0}} = \frac{m_{W^\pm}}{m_Z} = \cos\theta_w. \tag{5.5.38}$$

5.5.4 与传统弱作用衰变跃迁理论的一致性

建立在 PID 与 PRI 基础之上的弱相互作用理论成功地给出了弱相互作用势的分层公式 (5.5.25), 并且将此公式应用在弱子模型上不仅能够给出弱子禁闭的事实, 并且与强相互作用势的分层公式一起为所有粒子的衰变与散射提供了弱子交换与夸克交换的衰变机制, 使我们能够清楚地理解微观粒子的动力学行为.

接下来弱相互作用理论将面临与传统的衰变跃迁理论的一致性问题. 为了说清楚此问题, 先简要回忆一下在 3.2 节和 3.3 节中所介绍的经典衰变跃迁理论.

弱作用衰变跃迁理论创始于 Fermi 关于下面 β 衰变的工作:

$$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e. \tag{5.5.39}$$

量子力学可得到单位时间内粒子衰变跃迁概率密度 W 为

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} M^2 \rho(E). \tag{5.5.40}$$

为了求出 (5.5.39) 的跃迁概率 W, 在公式 (5.5.40) 中最关键是要求出跃迁矩阵元 M. Fermi 表象地猜出 M 为如下形式:

$$M_F = \frac{G}{\sqrt{2}} J_h^\mu J_{l\mu}, \tag{5.5.41}$$

其中 J_h^μ 和 $J_{l\mu}$ 分别就是我们常说的强子和轻子弱流, 即

$$J_h^\mu = \bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n + h \cdot c \quad (h \cdot c \text{ 为共轭项}),$$
$$J_{l\mu} = \bar{\psi}_e \gamma_\mu \psi_{\nu_e} + h \cdot c \quad (\gamma_\mu = \gamma^\mu).$$

这里 $\psi_n, \psi_p, \psi_e, \psi_{\nu_e}$ 分别是反应式 (5.5.39) 中各种粒子的波函数, 它们满足各自的 Dirac 方程.

现在通常将 (5.4.40) 中的矩阵元 M 称为 Lagrange 作用量, 而将 (5.5.41) 的矩阵元称为 Fermi 作用量 (省去密度一词):

$$\mathcal{L}_F = M_F = \frac{G}{\sqrt{2}} [\bar{\psi}_e \gamma_\mu \psi_{\nu e}][\bar{\psi}_p \gamma_\mu \psi_n] + h \cdot c. \tag{5.5.42}$$

这就是为什么现在讲到衰变理论总是只讲流的作用量的原因.

宇称不守恒被发现后, Fermi 理论被 Feynman 和 Gell-Mann 改进成 $V-A$ 理论. 简单地讲, 就是 Fermi 作用量 $\mathcal{L}_F$ 被修正为如下形式的 $V-A$ 作用量, 它能正确反映宇称破坏的事实,

$$\mathcal{L}_{V-A}=\frac{G}{\sqrt{2}}[\bar{\psi}_e\gamma^\mu(I-\gamma_5)\psi_{\nu_e}][\bar{\psi}_p\gamma_\mu(I-\gamma_5)\psi_n]+h\cdot c. \tag{5.5.43}$$

随着大量粒子的弱作用衰变出现, $V-A$ 理论已不适用许多高能衰变情况. 此时李政道, 杨振宁, Glashow 提出了 IVB 理论, 即用如下 IVB 作用量取代 (5.5.43) 的 $V-A$ 作用量

$$\mathcal{L}_{\mathrm{IVB}}=\frac{g_w}{\sqrt{2}}(J^{\mu^-}W_\mu^+ + J^{\mu^+}W_\mu^-)+\frac{g_w}{\cos\theta_w}J_\mu^0 Z^\mu. \tag{5.5.44}$$

其中 $J_\mu^\pm = J^{\mu^\pm}, J_\mu^0$ 就是如 (3.2.26) 中的带电弱流和中性弱流, 它们全部都具有 $V-A$ 的形式, $W_\mu^\pm$ 和 Z_μ 是如 (3.3.83) 的 $SU(2)$ 规范场. 然而 IVB 理论中的规范场 W_μ^a 所满足的方程

$$\delta L_{YM}=0,\quad L_{YM}\text{ 为 }SU(2)\text{ Yang-Mills 作用量},$$

它没有质量项, 而实验显示 $W_\mu^\pm, Z_\mu$ 有质量.

为了克服 IVB 理论中规范场没有质量的缺陷, Glashow, Weinberg 和 Salam 提出弱作用与电磁相耦合的 $U(1)\times SU(2)$ 规范理论, 再结合 Higgs 机制, 便给出了与 IVB 理论相一致的, 并且使 $W_\mu^\pm$ 和 Z_μ 有质量的 GWS 弱电理论. 该理论的作用量为

$$\mathcal{L}_{\mathrm{GWS}}=\mathcal{L}_{YM}+\mathcal{L}_D+\mathcal{L}_H, \tag{5.5.45}$$

其中 $\mathcal{L}_{YM}$ 为 Yang-Mills 部分, $\mathcal{L}_D$ 为 Dirac 部分, $\mathcal{L}_H$ 为 Higgs 部分. 正是 $\mathcal{L}_D$ 部分中包含了 (5.5.44) 的 IVB 作用量, 即 $\mathcal{L}_D$ 可表达成

$$\mathcal{L}_D=\mathcal{L}_{\mathrm{IVB}}+\bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi.$$

下面对上述弱作用衰变跃迁理论的发展给以总结性的论述. 要计算 (5.5.40) 的概率 W, 找到正确的作用量 $\mathcal{L}$ 是关键, 因为 W 与 $\mathcal{L}$ 的关系为

$$W=\frac{2\pi}{\hbar}\mathcal{L}^2\rho(E). \tag{5.5.46}$$

而历史上关于作用量 $\mathcal{L}$ 的发展经历了四次大的变革, 即从 (5.5.42) 的 Fermi 理论到 (5.5.43) 的 $V-A$ 理论, 中间再过渡到 IVB 理论 (5.5.44), 最后到达 $U(1)\times SU(2)$ 的弱电规范理论 (5.5.45).

然而 GWS 弱电理论在关于公式 (5.5.46) 中的 $\mathcal{L}$ 表达式方面它并没有改变 IVB 的作用量, 只是改变了在作用量中 $W_\mu^\pm$ 和 Z_μ 所满足的场方程. 换句话讲, GWS 理论在用公式 (5.5.46) 来计算弱作用衰变概率 W 时, 作用量仍是 (5.5.44) 的 $\mathcal{L}_{\rm IVB}$, 即

$$W = \frac{2\pi}{\hbar}\mathcal{L}_{\rm IVB}^2\rho(E), \tag{5.5.47}$$

但是 $\mathcal{L}_{\rm IVB}$ 中的 W_μ^a 和 B_μ 所满足的方程为 (3.3.61)-(3.3.67), 或者说 $W_\mu^\pm$ 和 Z_μ 满足的方程是 (3.3.75), 它们是 $\mathcal{L}_{\rm GWS}$ 变分方程

$$\delta L_{\rm GWS} = 0$$

关于 Higgs 场真空态平移变换 $\phi \to \phi + a$ 后所得的方程.

GWS 理论比它前面三个理论更成功的地方是, 前三个理论纯粹是关于弱作用衰变的表象理论, 而 GWS 则是建立在规范不变性原理之上的带有第一原理色彩的理论. 它并不完全是关于衰变的. 它在弱相互作用理论方面作出了如下非常重要的贡献:

(1) GWS 理论确定了描述弱相互作用的是 $SU(2)$ 规范场, 即弱作用满足 $SU(2)$ 规范对称性;

(2) $SU(2)$ 规范场是有质量的, 它们的质量是由自发对称破缺机制生成;

(3) 理论上提出 $W^\pm, Z$ 粒子存在性, 并组出它们的质量;

(4) 给出了带电弱流 $J_\mu^\pm$ 和中性弱流 J_μ^0 的存在;

(5) 预言了 Higgs 粒子.

以上几点全部得到实验的支持.

现在我们回过来看 PID 与 PRI 的弱相互作用理论在用到衰变问题上是如何与经典理论一致的. 事实上, 我们仍然用 (5.5.47) 作为计算跃迁概率 W 的公式, 只是与 GWS 理论不同的是, 这里所涉及的 $SU(2)$ 规范场 $W_\mu^\pm$ 和 Z_μ 所满足的场方程不再是由 Higgs 机制产生的带质量项的场方程 (3.3.75), 而是由 PID 产生的具有质量的场方程 (5.5.28)-(5.5.30). 而由这些场方程, 我们同样能推出 GWS 理论所有得到实验验证的结论.

正是在上述意义上我们可以断言, 在衰变跃迁问题上, PID 与 PRI 的弱相互作用理论与经典理论是一致的.

5.6 粒子能级的数学理论

5.6.1 亚原子粒子能级方案

根据 Bohr 的原子模型, 一个原子是由原子核以及它的轨道电子构成, 电磁相互作用将它们束缚在一起. Bohr 理论的一个显著的重要特点是, 原子的轨道电子

是分级的, 每一级的电子具有固定的能量. 更具体地讲, 每一种原子都有有限个不同的电子轨道能级, 用电子能量 E_k 来表示,

$$0 < E_1 < \cdots < E_N, \tag{5.6.1}$$

能级数 N 与原子核正电荷数有关. 每个轨道电子的能量只能取这个能谱 (5.6.1) 中的某一个能级, 并且在第 k 个能级中所有电子能量都是 E_k. 于是每个原子将根据它的轨道电子在上述各能级的分布而定出原子所处的能级态. 高能级态的原子能够自发地朝低能级态跃迁, 伴随有光子辐射发生. 辐射光子的能量等于原子跃迁能级的差, 即

$$\text{辐射光子能量 } \varepsilon = E_{k_1} - E_{k_2} \quad (k_1 > k_2).$$

原子能级理论能够被 Schrödinger 方程精确地描述. 我们简要地回忆如下. 令 Z 是一个原子的序数, 那么原子核作用在一个轨道电子上的势能为

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r}.$$

在该势能作用下, 如果忽略轨道电子之间的相互作用, 那么这个电子的波函数 ψ 满足如下 Schrödinger 方程:

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta\psi - V(r)\psi = 0, \tag{5.6.2}$$

令 ψ 取如下形式:

$$\psi = e^{-\mathrm{i}\lambda t/\hbar}\varphi(x),$$

λ 为束缚能. 将 ψ 代入 (5.6.2) 得到

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta\varphi + V(r)\varphi = \lambda\varphi.$$

因为所有轨道电子被束缚在原子的内部, 于是有如下条件:

$$\varphi = 0, \quad \text{对 } |x| > r_0,$$

这里 r_0 是原子半径. 于是如果不考虑电子之间的相互作用, 那么轨道电子的束缚能是下面椭圆边值问题的一个负特征值:

$$\begin{cases} -\dfrac{\hbar^2}{2m_0}\Delta\varphi + V(r)\varphi = \lambda\varphi, & x \in B_{r_0}, \\ \varphi|_{\partial B_{r_0}} = 0, \end{cases} \tag{5.6.3}$$

这里 B_{r_0} 是原子半径 r_0 的球体. 令 $\lambda_k < 0$ 是 (5.6.3) 的一个负特征值, 那么 (5.6.1) 中的能级 E_k 与 λ_k 的关系为

$$E_k = E_0 + \lambda_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant N,$$

其中能级数 N 便是 (5.6.3) 的负特征值数.

原子具有能级的事实使得我们产生将这种观点推广到所有亚原子粒子的方案. 亚原子粒子的能级理论是建立在前面所介绍的弱子模型以及关于强和弱相互作用势的基础之上的. 其基本框架可简要地介绍如下.

由第 2 章我们知道, 所有亚原子粒子由六对正反弱子构成:

$$w^*,\ w_1,\ w_2,\ \nu_e,\ \nu_\mu,\ \nu_\tau,$$
$$\bar{w}^*,\ \bar{w}_1,\ \bar{w}_2,\ \bar{\nu}_e,\ \bar{\nu}_\mu,\ \bar{\nu}_\tau.$$

此外, 亚原子粒子共有六类:

带电轻子 l, 夸克 q, 重子, 介子, 中间 Bose 子, 媒介子.

它们的构成分别如下:

$$\begin{aligned}
&l = \nu w_1 w_2 \quad \text{(三个弱子)},\\
&q = w^* w w \quad \text{(三个弱子)},\\
&\text{重子} = qqq \quad \text{(三个夸克)},\\
&\text{介子} = q\bar{q} \quad \text{(二个正和反的夸克)},\\
&\text{中间 Bose 子} = \text{两个弱子},\\
&\text{媒介子} = \text{一对正反弱子}.
\end{aligned}$$

此外, 上述亚原子粒子的束缚能为

$$\begin{aligned}
&l, q,\ \text{中间 Bose 子, 媒介子束缚能} = \text{弱相互作用},\\
&\text{重子与介子束缚能} = \text{强} + \text{弱相互作用}.
\end{aligned}$$

根据上述事实, 由量子力学原理可导出亚原子粒子能级的谱方程, 它们分别是关于质量粒子的椭圆算子谱方程与关于无质量媒介子的 Weyl 算子谱方程, 其形式表达如下:

1. 质量粒子谱方程

考虑一个由 K 个质量为 m_k $(1 \leqslant k \leqslant K)$ 的 Fermi 子构成的亚原子粒子. 这 K 个 Fermi 子的波函数为

$$\psi^k = \begin{pmatrix} \psi_1^k \\ \psi_2^k \end{pmatrix}, \quad 1 \leqslant k \leqslant K,$$

其中 ψ_1^k, ψ_2^k 分别代表左和右自旋态, 则该系统的谱方程为

$$\begin{cases} \left[-\dfrac{\hbar}{2m_k} D^2 + gA_0\right] \psi^k + \vec{\mu}_k \cdot \mathrm{rot}\, \vec{A}\, \psi^k = \lambda \psi^k, \quad 1 \leqslant k \leqslant K, \\ (\psi^1, \cdots, \psi^K)|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{5.6.4}$$

式中 $\Omega \subset R^3$ 代表亚原子粒子的内部区域, $D=(D_1,D_2,D_3)$,

$$\vec{\mu}_k=\frac{\hbar}{2m_k}g\,\vec{\sigma},\quad D_j=\partial_j+\mathrm{i}\frac{g}{\hbar c}A_j\quad(1\leqslant j\leqslant 3),$$

$A_\mu=(A_0,\vec{A})$ 是 Fermi 子之间的强或弱相互作用的四维势, g 是相对应的作用荷, $\vec{\mu}_k$ 是对应相互作用磁矩, $\vec{\sigma}=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ 为 Pauli 矩阵.

2. 媒介子谱方程

媒介子是由一对正反弱子组成的无质量粒子. 令弱子的波函数为 $\psi=(\psi_1,\psi_2)^{\mathrm{T}}$, 则媒介子谱方程取如下形式:

$$\begin{cases}\left[-\hbar cD^2+g\,\vec{\sigma}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{A}\right]\psi+\dfrac{\mathrm{i}g}{2}\left\{(\vec{\sigma}\cdot\vec{D}),A_0\right\}\psi\\ =\mathrm{i}\lambda(\vec{\sigma}\cdot\vec{D})\psi,\quad x\in\Omega\subset R^3,\\ \psi\,|_{\partial\Omega}=0,\end{cases}\tag{5.6.5}$$

其中 $\{A,B\}=AB+BA$ 为反交换子.

亚原子粒子的能级理论就是建立在两个谱方程 (5.6.4) 和 (5.6.5) 基础之上, 它们的负特征值代表束缚能, 特征函数为束缚态. 这些方程包含了亚原子粒子的所有内部结构的信息.

5.6.2　椭圆算子的负特征值

考虑如下线性椭圆微分算子的特征值问题:

$$\begin{cases}-D^2\psi+A\psi=\lambda\psi,\quad x\in\Omega,\\ \psi|_{\partial\Omega}=0,\end{cases}\tag{5.6.6}$$

其中 $\Omega\subset R^n$ 为有界区域, $\psi=(\psi_1,\cdots,\psi_m):\ \Omega\to C^m$ 是 m 维复值函数, $D=(D_1,\cdots,D_n)$ 为如下形式导算子:

$$D_k=\partial_k+\mathrm{i}B_k,\quad 1\leqslant k\leqslant n,$$

这里 A 和 B_k $(1\leqslant k\leqslant n)$ 都是 m 阶 Hermite 矩阵值函数, 即

$$A=(A_{ij}(x)),\quad B_k=(B^k_{ij}(x)).\tag{5.6.7}$$

关于特征值我们需要介绍重数的概念. 令 λ_0 是 (5.6.6) 的一个特征值, 则对应于 λ_0 的特征函数全体构成的集合

$$H_0=\{\psi\in H^1(\Omega,C^m)|\ \psi\text{ 满足 }\lambda=\lambda_0\text{ 的 (5.6.6)}\}$$

是一个有限维复线性空间, 它的复维数

$$K = \dim H_0 \text{ 称为 } \lambda_0 \text{ 的重数.}$$

在物理中, K 称为 λ_0 的简并度, 当 $K > 1$ 时 λ_0 称为简并的, $K = 1$ 为非简并的. 通常我们将重数为 K 的特征值 λ 计入重数后认为是 K 个特征值, 即

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_K = \lambda.$$

1. 基本谱定理

下面的谱定理是经典的并且对于我们的目的也是关键的.

定理 5.10(对称椭圆算子谱定理) 令 (5.6.7) 是 Hermite 矩阵, 其矩阵元函数 $A_{ij}, B_{ij}^k \in L^\infty(\Omega)$, 则有如下结论.

(1) 方程 (5.6.6) 的所有特征值都是实数并且它们的重数是有限的. 全部特征值形成一个无穷序列

$$-\infty < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k \leqslant \cdots, \quad \lambda_k \to \infty,\ k \to \infty,$$

这里 λ_k 是计入重数的.

(2) 对应于 λ_k 的特征函数 Ψ_k, 它们相互是正交的,

$$\int_\Omega \Psi_i^\dagger \Psi_j \mathrm{d}x = 0, \quad \forall i \neq j.$$

并且 $\{\Psi_k\}$ 形成 $L^2(\Omega, C^m)$ 的一个正交基.

(3) $\{\lambda_k\}$ 中只有有限个是负特征值,

$$-\infty < \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_N < 0,$$

其中负特征值数 N 与 A_{ij}, B_{ij}^k 及 Ω 有关.

定理 5.10 是 Lagrange 乘子定理的推论. 我们回忆约束变分的极值原理, 它说线性空间 H 上的一个泛函

$$F:\ H \to R^1$$

在泛函 $G:\ H \to R^1$ 的等值约束下

$$G(u) = 1, \quad u \in H,$$

F 的极值点 $u_0 \in H$ 满足如下方程:

$$\delta F(u_0) = \lambda \delta G(u_0), \tag{5.6.8}$$

其中 λ 是一个实数, 称为 Lagrange 乘子.

回过来考查方程 (5.6.6). 对于下面泛函

$$F(\psi)=\int_{\Omega}\left[|D\psi|^2+\psi^{\dagger}A\psi\right]\mathrm{d}x \tag{5.6.9}$$

在 $G(\psi)=\|\psi\|_{L^2}$ 的等值约束下

$$G(\psi)=\|\psi\|_{L^2}=1,$$

我们不难看出, (5.6.6) 正是如 (5.6.8) 的 Lagrange 约束变分方程. 于是由 Lagrange 乘子定理, (5.6.6) 的特征值 λ_k $(k=1,2,\cdots)$ 可表达成

$$\begin{aligned}\lambda_1&=\min_{\psi\in S}F(\psi),\\ \lambda_k&=\min_{\psi\in S,\psi\in H_k^{\perp}}F(\psi),\end{aligned} \tag{5.6.10}$$

式中 F 是 (5.6.90) 的泛函, 集合 S 和 $H_k^{\perp}$ 为

$$\begin{aligned}S&=\{\psi\in H_0^1(\Omega,C^m)|\ \|\psi\|_{L^2}=1\},\\ H_k^{\perp}&=\left\{\psi\in H_0^1(\Omega,C^m)\middle|\ \int_{\Omega}\psi^{\dagger}\psi_j\mathrm{d}x=0,\ 1\leqslant j\leqslant k-1\right\},\end{aligned}$$

其中 ψ_j 是 λ_j 的特征函数, 即 $H_k^{\perp}$ 是前面 $k-1$ 个特征函数张成子空间 $\mathrm{span}\{\psi_1,\cdots,\psi_{k-1}\}$ 的正交补空间.

这样我们很容易从 (5.6.10) 可推得定理 5.10 的结论 (1)~(3).

2. 负特征值判别定理

对于微观粒子能级理论来讲, 最重要地是关于 (5.6.6) 的负特征值及其特征函数的信息. 下面定理是关于负特征值的判别定理, 该定理对于后面关于负特征值数的计算公式是非常关键的.

定理 5.11　关于 (5.6.6) 的负特征值有如下结论.

(1) 该方程具有负特征值的充要条件是存在一个函数 $\psi\in H_0^1(\Omega,C^m)$ 使得

$$\int_{\Omega}\left[(D\psi)^{\dagger}(D\psi)+\psi^{\dagger}A\psi\right]\mathrm{d}x<0. \tag{5.6.11}$$

(2) 若存在 K 个线性无关的函数 $\psi_1,\cdots,\psi_k\in H_0^1(\Omega,C^m)$ 使得

$$\psi\text{ 满足 (5.6.11)},\quad \forall\psi\in\mathrm{span}\{\psi_1,\cdots,\psi_k\}, \tag{5.6.12}$$

那么 (5.6.6) 的负特征值数 $N\geqslant K$.

证明 由 (5.6.10), 第一特征值 λ_1 满足如下等式:

$$\lambda_1 = \min_{\psi \in H_0^1(\Omega, C^m)} \frac{1}{\|\psi\|_{L^2}} \int_\Omega \left[(D\psi)^\dagger (D\psi) + \psi^\dagger A \psi \right] \mathrm{d}x.$$

由此便可得到结论 (1).

下面证明结论 (2). 用反证法. 假设 $K > N$. 由定理 5.10, 在 (5.6.12) 中的 K 个函数 ψ_j 可以展开为

$$\psi_j = \sum_{i=1}^{N} \alpha_{ji} e_i + \sum_{l=1}^{\infty} \beta_{jl} \varphi_l, \quad 1 \leqslant j \leqslant K, \tag{5.6.13}$$

式中 e_i $(1 \leqslant i \leqslant N)$ 和 φ_l 分别是对应于负特征值和非负特征值的特征函数. 因为 $K > N$, 存在一个 K 阶非退化矩阵 P 使得

$$P\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & * & \end{pmatrix}, \tag{5.6.14}$$

其中

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{K1} & \cdots & \alpha_{KN} \end{pmatrix}, \quad \alpha_{ij} \text{ 是 (5.6.13) 中的系数.}$$

于是在 P 的变换下

$$\tilde{\psi} = P \begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix} \in E^K, \quad \psi = (\psi_1, \cdots, \psi_K)^{\mathrm{T}}, \tag{5.6.15}$$

这里 $E^K = \mathrm{span}\{\psi_1, \cdots, \psi_K\}$.

然而由 (5.6.13) 和 (5.6.14), 在 (5.6.15) 中 $\tilde{\psi}$ 的第一个函数 $\tilde{\psi}_1$ 被表达成如下形式:

$$\tilde{\psi}_1 = \sum_{l=1}^{\infty} \theta_l \varphi_l \in E^K.$$

注意到 φ_l 是对应于 (2.6.6) 非负特征值的特征函数, 因此有

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left[(D\tilde{\psi}_1)^\dagger (D\tilde{\psi}_1) + \tilde{\psi}_1^\dagger A \tilde{\psi}_1 \right] \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \tilde{\psi}_1^\dagger (-D^2 \tilde{\psi}_1 + A\tilde{\psi}_1) \mathrm{d}x = \sum_{l=1}^{\infty} |\theta_l|^2 \lambda_l \geqslant 0, \end{aligned} \tag{5.6.16}$$

这里 $\lambda_l \geqslant 0$ 是 (2.6.6) 的非负特征值. 从 (5.6.15) 和 (5.6.16) 推出与假设 (5.6.12) 相矛盾的结论. 于是结论 (2) 成立. 定理证毕.

5.6.3　负特征值数估计公式

为了简单, 我们只考虑 Laplace 算子的特征值问题, 从物理的角度看这是足够了. 该问题表达为

$$\begin{cases} -\Delta\psi + V(x)\psi = \lambda\psi, & x \in B_r, \\ \psi|_{\partial B_r} = 0, \end{cases} \tag{5.6.17}$$

这里 $B_r \subset R^n$ 是一个半径为 r 的球体.

在物理上, V 代表一个势函数并且在 B_r 中的一个区域内取负值. 由定理 5.12, 这就保证了 (5.6.17) 具有负特征值.

根据物理事实, 对于势函数 $V(x)$ 我们假设

$$V(\rho x) \simeq \rho^{\alpha} V_0(x) \quad (\alpha > -2), \tag{5.6.18}$$

其中 $V_0(x)$ 是定义在单位球体 B_1 上的函数, 并且

$$\Omega = \{x \in B_1 |\ V_0(x) < 0\} \neq \varnothing, \tag{5.6.19}$$

即 Ω 非空. 令 $\theta > 0$ 定义为

$$\theta = \inf_{\psi \in L^2(\Omega, C^m)} \frac{1}{\|\psi\|_{L^2}} \int_{\Omega} |V(x)||\psi|^2 \mathrm{d}x. \tag{5.6.20}$$

这一小节的主要结果是下面定理, 它在 (5.6.17) 的负特征值数 N 与参数 r, θ 之间提供了一个关系式. 令 λ_1 是如下方程的第一特征值:

$$\begin{cases} -\Delta e = \lambda e, & x \in \Omega, \\ e|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{5.6.21}$$

这里 $\Omega \subset B_1$ 如 (5.6.19) 所定义.

定理 5.12　在 (5.6.18) 及 (5.6.19) 的条件下, 方程 (5.6.17) 的负特征值数 N 与区域半径 r 以及 θ 有如下近似关系

$$N \simeq \left(\frac{\theta r^{2+\alpha}}{\lambda_1}\right)^{n/2}, \tag{5.6.22}$$

对于 $\theta r^{2+\alpha}/\lambda_1 \gg 1$ 充分大, 式中 λ_1 是 (5.6.21) 的第一特征值, θ 如 (5.6.20) 所定义.

注 5.13　估计式 (5.6.22) 对于 (5.6.17) 在如下环形区域内

$$B = \{x \in R^n |\ r_0 < |x| < r_1\}, \quad r_0 \ll r_1$$

也同样有效的. 关于亚原子粒子的谱方程便是定义在这样的环形区域内的.

注 5.14 定理 5.11 和定理 5.12 是由作者与汪守宏教授最近在 *Spectral theory of differential operators and energy of levels of subatomic particles* 一文中证得 (2014 年 1 月).

为了证明定理 5.12, 我们需要引入一个引理, 它是由 H. Weyl 证得.

引理 5.15(H. Weyl) 令 λ_N 是下面 $2m$ 阶椭圆算子的第 N 个特征值

$$\begin{cases} (-1)^m \Delta^m e = \lambda e, & x \in \Omega \subset R^n, \\ \partial^k e|_{\partial\Omega} = 0, & 0 \leqslant k \leqslant m-1, \end{cases} \tag{5.6.23}$$

那么 λ_N 有如下渐近关系:

$$\lambda_N \sim \lambda_1 N^{2m/n}, \tag{5.6.24}$$

其中 λ_1 是 (5.6.23) 的第一特征值.

定理 5.12 的证明 球体 B_r 可写成

$$B_r = \{x = ry |\ y \in B_1\}.$$

注意到关系式

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial y},$$

方程 (5.6.17) 可等价地表达为

$$\begin{cases} -\Delta\varphi + r^2 V(ry)\varphi = \beta\varphi, & y \in B_1, \\ \varphi|_{\partial B_1} = 0, \end{cases} \tag{5.6.25}$$

并且 (5.6.17) 的特征值 λ 为

$$\lambda = \frac{1}{r^2}\beta, \quad \beta \text{ 是 (2.6.25) 的特征值.}$$

因此 (2.6.17) 的负特征值数与 (2.6.25) 的负特征值数是相等的. 我们只需对 (2.6.25) 证明该定理即可.

由 (5.6.18), 方程 (2.6.25) 是近似于如下形式:

$$\begin{cases} -\Delta\varphi + r^{2+\alpha} V_0(x)\varphi = \beta\varphi, & x \in B_1, \\ \varphi|_{\partial B_1} = 0 \end{cases} \tag{5.6.26}$$

根据定理 5.11 的结论 (2), 我们需要找到 N 个线性独立的函数 $\varphi_k \in H_0^1(B_1)$ $(1 \leqslant k \leqslant N)$, 使得

$$\int_{B_1} \left[|\nabla\varphi|^2 + r^{2+\alpha} V_0(x)\varphi^2\right] \mathrm{d}x < 0, \tag{5.6.27}$$

对任何 $\varphi \in \mathrm{span}\{\varphi_1, \cdots, \varphi_N\}$ 成立.

为此目的, 我们取 (5.6.21) 的特征值 $\{\lambda_k\}$ 和特征函数 $\{e_k\}$, 并且取 N 满足如下关系:

$$0 < \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_N < \lambda_{N+1},$$

以及

$$\lambda_N < \theta r^{2+\alpha} \leqslant \lambda_{N+1}. \tag{5.6.28}$$

关于特征函数 e_k 作下面延拓

$$\varphi_k = \begin{cases} e_k, & x \in \Omega, \\ 0, & x \in B_1/\Omega. \end{cases}$$

我们知道 φ_k 是弱可微的, 并且 $\varphi_k \in H_0^1(B_1)$. 这些函数 φ_k $(1 \leqslant k \leqslant N)$ 便是我们所需要的. 令

$$\varphi = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k, \quad \|\varphi\|_{L^2} = 1.$$

由定理 5.10 的结论 (2), φ_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ 是正交的:

$$\int_{B_1} \varphi_i \varphi_j \mathrm{d}x = \int_{\Omega} e_i e_j \mathrm{d}x = \delta_{ij}.$$

因此有

$$\|\varphi\|_{L^2} = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k^2 = 1. \tag{5.6.29}$$

于是在 (5.6.27) 中的积分为

$$\begin{aligned}
&\int_{B_1} \left[|\nabla \varphi|^2 + r^{2+\alpha} V_0(x) \varphi^2\right] \mathrm{d}x \\
=&\int_{\Omega} - \left(\sum_{k=1}^{N} \alpha_k e_k\right) \left(\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \Delta e_k\right) \mathrm{d}x + r^{2+\alpha} \int_{\Omega} V_0 \varphi^2 \mathrm{d}x \\
=&\sum_{k=1}^{N} \alpha_k^2 \lambda_k + r^{2+\alpha} \int_{\Omega} V_0(x) \varphi^2 \mathrm{d}x \\
\leqslant&\sum_{k=1}^{N} \alpha_k^2 \lambda_k - \theta r^{2+\alpha} \quad \text{(由 (5.6.19) 和 (5.6.20))} \\
<&0 \quad \text{(由 (5.6.28) 和 (5.6.29))}.
\end{aligned}$$

这样, 由定理 5.11 我们推出方程 (5.6.26) 至少有 N 个负特征值. 当 $\theta r^{2+\alpha} \gg 1$ 充分大时, 关系式 (5.6.28) 意味着

$$\lambda_N \simeq \theta r^{2+\alpha}. \tag{5.6.30}$$

此外, 由 Weyl 渐近关系 (5.6.24) 有

$$\lambda_N \simeq \lambda_1 N^{2/n}.$$

再由 (5.6.30) 便得到估计式 (5.6.21). 定理证毕.

注 5.16 关于 Weyl 估计式 (5.6.24), 读者可参阅 (Courant, Hilbert, 1948) 或者 (Temam, 1997).

注 5.17 在后面的 5.7 节中我们将看到, 对于具有质量的亚原子粒子, 在 (5.6.22) 中的参数为

$$\alpha = 0, \quad r = 1, \quad n = 3, \quad \theta = 4m\rho_1^2 A g^2/\hbar\rho,$$

其中 $g = g_w$ 或 g_s 是弱或强作用荷,ρ 是粒子半径, ρ_1 是弱或强吸引半径. 因此具有质量的亚原子粒子能级数 N 估计式为

$$N \simeq \left[\frac{4}{\lambda_1}\frac{\rho_1^2 A}{\rho}\frac{mc}{\hbar}\frac{g^2}{\hbar c}\right]^{3/2},$$

式中 λ_1 是 $-\Delta$ 在单位球 $B_1 \subset R^3$ 的第一特征值, A 是弱或强相互作用常数, m 为内部组分粒子质量.

下面研究原子能级数估计.

作为定理 5.12 的应用, 这里将讨论原子能级的状态数 N 的估计式. 考虑序数为 Z 的原子外层电子, 当忽略电子之间相互作用时, 谱方程取如下形式:

$$\begin{cases} -\Delta\psi + V(x)\psi = \lambda\psi, & x \in B_{r_0}, \\ \psi = 0, & x \in \partial B_{r_0}, \end{cases}$$

这里 r_0 为原子半径, 势能 V 为

$$V(x) = -\frac{2Zme^2}{\hbar^2}\frac{1}{r}, \quad m \text{ 为电子质量.}$$

对于公式 (5.6.22), 有

$$\alpha = -1, \quad n = 3, \quad r = r_0 = 10^{-8}\text{cm}, \tag{5.6.31}$$

此外, 显然有

$$V_0 = -\frac{2Zme^2}{\hbar^2}, \quad \Omega = B_1.$$

因此

$$\theta = \frac{2Zme^2}{\hbar^2}. \tag{5.6.32}$$

根据物理参数, 我们知道

$$r_0 \times \frac{mc}{\hbar} = \frac{1}{4} \times 10^3, \quad \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}.$$

于是由 (5.6.31) 和 (5.6.32), 公式 (5.6.22) 变为

$$N = \left(\frac{2Z}{\lambda_1}\frac{e^2}{\hbar c} \times r_0 \times \frac{mc}{\hbar}\right)^{3/2} = \left(\frac{10^3 Z}{274\lambda_1}\right)^{3/2}, \tag{5.6.33}$$

式中 λ_1 是 $-\Delta$ 在单位球体 B_1 上的第一特征值.

注 5.18　公式 (5.6.33) 只是一个理想条件下的原子能级状态数的表达式, 即不考虑轨道电子之间相互作用的情况, 并且在质子数 Z 比较大的条件下近似成立.

5.6.4　Weyl 算子的谱

在下一节我们将从量子力学原理推出描述无质量亚原子粒子 (媒介子) 的谱方程取如下形式:

$$\begin{cases} -\hbar c(\vec{\sigma}\cdot\vec{D})^2\varphi + \dfrac{\mathrm{i}g}{2}\{(\vec{\sigma}\cdot\vec{D}), A_0\}\varphi = \mathrm{i}\lambda(\vec{\sigma}\cdot\vec{D})\varphi, \\ \varphi|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{5.6.34}$$

式中 $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^{\mathrm{T}}$, $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ 为 Pauli 矩阵, $\vec{D} = (D_1, D_2, D_3)$ 如 (5.6.4), $\{(\vec{\sigma}\cdot\vec{D}), A_0\}$ 是反交换子, 定义为

$$\{(\vec{\sigma}\cdot\vec{A}), A_0\} = (\vec{\sigma}\cdot\vec{A})A_0 + A_0(\vec{\sigma}\cdot\vec{A}).$$

注 5.19　方程 (5.6.34) 从本质上讲是一个一阶微分算子的特征值问题, 即是如下微分算子的问题:

$$\mathrm{i}\hbar c\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{D}\right) + gA_0.$$

由于它源于 Weyl 方程, 故被称为 Weyl 算子. 此外, 在 (5.6.34) 中 $(\vec{\sigma}\cdot\vec{D})^2$ 是一个椭圆算子, 它可写成

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{D})^2 = D^2 - \frac{g}{\hbar c}\,\vec{\sigma}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{A}, \tag{5.6.35}$$

因此 (5.6.34) 就是由 (5.6.5) 给出的方程. 算子 (5.6.35) 的椭圆性保证了 (5.6.34) 特征值的存在性.

注意到 $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ 代表弱或强相互作用的磁矢量势, 因此在 (3.6.35) 中这一项

$$g\,\vec{\sigma}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{A}$$

代表了弱或强作用的磁能.

由于 (5.6.34) 本质上是一阶微分算子特征值问题, 它的正、负特征值都是无穷多. 然而当只考虑具有物理意义的特征态时, 它的负特征值数便会是有限的. 下面我们给出方程 (5.6.34) 具有物理意义的特征值与特征函数的定义.

定义 5.20 一个数 λ 和一个二分量波函数 $\varphi \in H_0^1(\Omega, C^2)$ 被称作是 (5.6.34) 的一个特征值和特征函数, 若 (λ, φ) 是方程 (5.6.34) 的解, 并且 φ 满足下面不等式:

$$\int_\Omega \varphi^\dagger \left[\mathrm{i}(\vec{\sigma} \cdot \vec{D})\varphi \right] \mathrm{d}x > 0. \tag{5.6.36}$$

条件 (5.6.36) 的物理意义就是粒子处在特征态 φ 的动能是正的.

下面定理保证了 (5.6.34) 的特征值问题在数学上的合理性.

定理 5.21 对于 (5.6.34) 我们有如下结论.

(1) 该方程特征值 λ 是实的并且具有有限重数, 而且满足

$$-\infty < \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k \leqslant \cdots, \quad \lambda_k \to \infty,\ k \to \infty.$$

(2) 特征函数在下面意义下是正交的

$$\int_\Omega \psi_k^\dagger \left[\mathrm{i}(\vec{\sigma} \cdot \vec{D})\psi_j \right] \mathrm{d}x = 0, \quad \forall k \neq j. \tag{5.6.37}$$

(3) 负特征值数是有限的

$$-\infty < \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_N < 0.$$

(4) 方程 (5.6.34) 存在负特征值的充要条件是存在一个满足 (5.6.36) 的函数 $\varphi \in H_0^1(\Omega, C^2)$, 使得

$$\int_\Omega \left[\hbar c |(\vec{\sigma} \cdot \vec{D})\varphi|^2 + \frac{\mathrm{i}g}{2} \varphi^\dagger \left\{ (\vec{\sigma} \cdot \vec{D}), A_0 \right\} \varphi \right] \mathrm{d}x < 0. \tag{5.6.38}$$

证明 容易看出下面的算子

$$L = \mathrm{i}(\vec{\sigma} \cdot \vec{D}) :\ H_0^1(\Omega, C^2) \to L^2(\Omega, C^2)$$

是一个 Hermite 算子. 考虑泛函 $F : H_0^1(\Omega, C^2) \to R^1$,

$$F(\psi) = \int_\Omega \left[\hbar c |L\psi|^2 + \frac{g}{2} \psi^\dagger \{L, A_0\} \psi \right] \mathrm{d}x.$$

由 (5.6.35), 这个算子 $L^2 = -(\vec{\sigma} \cdot \vec{D})^2$ 是椭圆的. 因此泛函 F 在集合 S 上有下界, S 定义为

$$S = \left\{ \psi \in H_0^1(\Omega, C^2) \middle| \int_\Omega \psi^\dagger L \psi \mathrm{d}x = 1 \right\}.$$

也就是说

$$\min_{\psi\in S} F(\psi) > -\infty.$$

根据约束变分的 Lagrange 乘子定理, 方程 (5.6.34) 的第一特征值 λ_1 和第一特征函数 $\psi_1 \in S$ 满足

$$\lambda_1 = F(\psi_1) = \min_{\psi\in S} F(\psi). \tag{5.6.39}$$

进一步, 若

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_m, \quad \psi_1, \cdots, \psi_m$$

是前 m 个特征值和特征函数, 则有

$$\lambda_{m+1} = F(\psi_{m+1}) = \min_{\psi\in S, \psi\in H_m^{\perp}} F(\psi), \tag{5.6.40}$$

这里 $H_m = \mathrm{span}\{\psi_1, \cdots, \psi_m\}, H_m^{\perp}$ 是 H_m 在 (5.6.37) 意义下的正交补.

于是结论 (1)~(4) 从 (5.6.39) 和 (5.6.40) 可以证得. 定理证毕.

下面研究负特征值数的估计

如果相互作用势近似地取为

$$A_\mu = \{-K, 0, 0, 0\}, \quad K > 0 \text{ 为常数.}$$

那么方程 (5.6.34) 变成下面形式:

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = \mathrm{i}(\lambda + K)(\vec{\sigma}\cdot\vec{\partial})\varphi, & x \in \Omega \subset R^n, \\ \varphi = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.6.41}$$

很清楚, (5.6.41) 的负特征值数 N 满足如下关系:

$$\beta_N < K < \beta_{N+1}, \tag{5.6.42}$$

这里 β_k 是下面方程的第 k 个特征值

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_k = \mathrm{i}\beta_k(\vec{\sigma}\cdot\vec{\partial})\varphi_k, \\ \varphi_k|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{5.6.43}$$

对于方程 (5.6.43) 我们有 Weyl 渐近关系:

$$\beta_N \sim \beta_1 N^{\frac{1}{n}}. \tag{5.6.44}$$

这是因为 (5.6.43) 是一个 $m = \dfrac{1}{2}$ 的 $2m$ 阶椭圆方程.

因此, 从 (5.6.42) 和 (5.6.44) 我们获得方程 (5.6.41) 的负特征值数 N 的近似估计公式:

$$N \simeq \left(\frac{K}{\beta_1}\right)^n, \tag{5.6.45}$$

条件是 $K/\beta_1 \gg 1$ 充分大, 式中 β_1 是 (5.6.43) 的第一特征值.

注 5.22 对于媒介子, 如光子和胶子等, 这个在 (5.6.45) 中的数 N 代表能级数, 它可表达成

$$N = \left(\frac{1}{\beta_1}\frac{A\rho_1}{\rho}\frac{g_w^2}{\hbar c}\right)^3,$$

其中 ρ, ρ_1, A 如注 5.18, g_w 为弱作用荷, β_1 是方程 (5.6.43) 在单位球体 $\Omega = B_1$ 上的第一特征值.

5.7 亚原子粒子的能级

5.7.1 亚原子粒子的构成与束缚能

亚原子粒子之所以能够建立能级理论是由于两个基本因素造成的. 第一个因素是每一个亚原子粒子都是由两个或三个次级粒子 (弱子或夸克) 在弱或强相互作用束缚下构成, 这种简单的结构可以使我们关于次级 Fermi 子建立束缚态的谱方程. 第二个因素是我们关于弱或强相互作用建立了明确的作用势理论, 这就使得谱方程可以清晰地表达出来. 为了方便, 这里关于亚原子粒子以及弱和强作用势给以简要地回顾.

1. 基本粒子

基本粒子是六对正反弱子组成, 它们的成员是

$$w^*,\ w_1,\ w_2,\ \nu_e,\ \nu_\mu,\ \nu_\tau,$$
$$\bar{w}^*,\ \bar{w}_1,\ \bar{w}_2,\ \bar{\nu}_e,\ \bar{\nu}_\mu,\ \bar{\nu}_\tau,$$

其中只有 w^* 和 $\bar{w}^*$ 带一个强荷, 而所有弱子都带一个弱荷.

2. 六类亚原子粒子

亚原子粒子有六种类型: 带电轻子, 夸克, 重子, 介子, 中间 Bose 子, 媒介子. 它们的成员分别列表如下.

(1) 带电轻子:

$$e^{\pm},\ \mu^{\pm},\ \tau^{\pm}.$$

(2) 夸克:

$$u,\ d,\ s,\ c,\ b,\ t,$$
$$\bar{u},\ \bar{d},\ \bar{s},\ \bar{c},\ \bar{b},\ \bar{t}.$$

(3) 重子:

$$p^{\pm},\ n,\ \Lambda,\ \Sigma^{\pm},\ \Sigma^{0},\ \Delta^{++},\ \Delta^{\pm},\ \Delta^{0},\ \Xi^{\pm},\ \Xi^{0}\ 等.$$

(4) 介子:

$$\pi^{\pm},\ \pi^{0},\ K^{\pm},\ K^{0},\ \eta,\ \rho^{\pm},\ \rho^{0},\ K^{*\pm},\ K^{*0},\ \omega\ 等.$$

(5) 中间 Bose 子:

$$W^{\pm},\ Z^{0},\ H^{\pm},\ H^{0}\quad (H^{\pm},H^{0}\ 为\ \text{Higgs}\ 粒子).$$

(6) 媒介子:

$$r,\ g,\ \nu,\ \phi_r,\ \phi_g\quad (\phi_r,\phi_g\ 为\ r\ 和\ g\ 的对偶\ \text{Bose}\ 子).$$

3. 亚原子粒子的构成

(1) 带电轻子的弱子构成为

$$e^{-}=\nu_e w_1 w_2,\quad \mu^{-}=\nu_\mu w_1 w_2,\quad \tau^{-}=\nu_\tau w_1 w_2.$$

(2) 夸克的弱子构成:

$$u=w^{*}w_1\bar{w}_1,\quad c=w^{*}w_2\bar{w}_2,\quad t=w^{*}w_2\bar{w}_2,$$
$$d=w^{*}w_1w_2,\quad s=w^{*}w_1w_2,\quad b=w^{*}w_1w_2.$$

(3) 重子的夸克构成. 重子由三个夸克组成,

$$重子=qqq.$$

下面是几个典型重子的夸克构成:

$$p^{+}=uud,\ n=udd,\ \Lambda=uds,\ \Sigma^{+}=uus,\ \Sigma^{-}=dds,$$
$$\Sigma^{0}=uds,\ \Delta^{++}=uuu,\ \Delta^{+}=uud,\ \Delta^{-}=ddd,\ \Delta^{0}=uud.$$

(4) 介子的夸克构成. 介子是由一个夸克和一个反夸克组成,

$$介子=q\bar{q}.$$

下面是一些介子的夸克构成:

$$\pi^{+}=u\bar{d},\ \pi^{-}=\bar{u}d,\ \pi^{0}=(u\bar{u}-d\bar{d})/\sqrt{2},$$
$$K^{+}=u\bar{s},\ K^{-}=\bar{u}s,\ K^{0}=d\bar{s},\ \eta=(u\bar{u}+d\bar{d}-2s\bar{s})/\sqrt{6}.$$

(5) 中间 Bose 子的弱子构成:

$$W^+ = \bar{w}_1\bar{w}_2(\uparrow\uparrow,\downarrow\downarrow),$$
$$W^- = w_1 w_2(\uparrow\uparrow,\downarrow\downarrow),$$
$$Z^0 = \cos\theta_w w_2\bar{w}_2 + \sin\theta_w w_1\bar{w}_1(\uparrow\uparrow,\downarrow\downarrow),$$

对偶粒子 (Higgs 粒子) 为

$$H^+ = \bar{w}_1\bar{w}_2(\uparrow\downarrow,\downarrow\uparrow),$$
$$H^- = w_1 w_2(\uparrow\downarrow,\downarrow\uparrow),$$
$$H^0 = \cos\theta_w w_2\bar{w}_2 + \sin\theta_w w_1\bar{w}_1(\uparrow\downarrow,\downarrow\uparrow),$$

其中 $\theta_w = 28.76^\circ$ 是 Weinberg 角.

(6) 媒介子的弱子构成:

$$r = \cos\theta_w w_1\bar{w}_1 - \sin\theta_w w_2\bar{w}_2(\uparrow\uparrow,\downarrow\downarrow),$$
$$\phi_r = \cos\theta_w w_1\bar{w}_1 - \sin\theta_w w_2\bar{w}_2(\uparrow\downarrow,\downarrow\uparrow),$$
$$g = w^*\bar{w}^*(\uparrow\uparrow,\downarrow\downarrow),$$
$$\phi_g = w^*\bar{w}^*(\uparrow\downarrow,\downarrow\uparrow),$$
$$\nu = \sum_{l=1}^{3}\alpha_l\nu_l\bar{\nu}_l, \qquad \sum_{l=1}^{3}\alpha_l^2 = 1,$$

其中 ν_1,ν_2,ν_3 代表 ν_e,ν_μ,ν_τ.

4. 亚原子粒子束缚势

将弱子和夸克束缚一起形成亚原子粒子的主要作用力是弱和强相互作用力. 根据 5.2 节的理论, 弱和强相互作用力的力源来自于相应的作用荷, 即

$$\text{弱荷 } g_w, \quad \text{强荷 } g_s.$$

它们的四维作用势如 (5.2.32), 即

$$\begin{aligned} &W_\mu = \omega_a W_\mu^a = (W_0,\vec{W}), \quad \vec{W} = (W_1,W_2,W_3),\\ &S_\mu = \rho_k S_\mu^k = (S_0,\vec{S}), \qquad\quad \vec{S} = (S_1,S_2,S_3). \end{aligned} \tag{5.7.1}$$

作用力为

$$\text{弱作用力} = -g_w\nabla W_0,$$
$$\text{强作用力} = -g_s\nabla S_0.$$

以及磁力是

$$\begin{aligned}\text{弱磁性} &= -g_w \mathrm{rot}\ \vec{W},\\ \text{强磁性} &= -g_s \mathrm{rot}\ \vec{S}\ .\end{aligned}$$

由弱子携带弱荷以及 $w^*, \bar{w}^*$ 带有强荷的特性, 再根据上述亚原子粒子的构成, 可以推得各类粒子的主要束缚能为

$$\begin{array}{ll}\text{带电轻子与夸克:} & \text{弱相互作用,}\\ \text{强子 (重子与介子):} & \text{强相互作用,}\\ \text{中间 Bose 子:} & \text{弱相互作用,}\\ \text{胶子 } g \text{ 与对偶 } \phi_g: & \text{弱相互作用 + 强相互作用,}\\ \text{其他媒介子:} & \text{弱相互作用.}\end{array} \tag{5.7.2}$$

这里需要强调指出, 虽然每个夸克都带有三个弱荷, 但是由于弱相互作用的力程为 $r < 10^{-16}\mathrm{cm}$, 而强子内部的夸克之间相距 $r > 10^{-16}\mathrm{cm}$, 因此将夸克拴在一起形成强子的主要束缚能是强相互作用, 而弱相互作用此时已不起实质性的作用了.

5. 弱作用势公式

在 5.5 节中已导出弱作用势的公式, 这里为了方便再次将它写出来. 该公式的一般形式由下式给出:

$$\begin{aligned}W_0 &= g_w(\rho) e^{-r/r_0}\left[\frac{1}{r} - \frac{A_w}{\rho}\left(1+\frac{2r}{r_0}\right)e^{-r/r_0}\right],\\ g_w(\rho) &= \left(\frac{\rho_w}{\rho}\right)^3 g_w,\end{aligned} \tag{5.7.3}$$

其中 ρ_w 和 ρ 分别是弱子半径和所涉及的粒子半径, A_w 是一个常数, $r_0 = 10^{-16}\mathrm{cm}$ 是弱作用半径.

建立在 (5.7.3) 的基础上, 分别带 N_1 和 N_2 个弱荷半径为 ρ_1 和 ρ_2 的两个粒子之间弱作用势能为

$$\Phi_w = N_1 N_2 g_w(\rho_1) g_w(\rho_2) e^{-r/r_0}\left[\frac{1}{r} - \frac{\bar{A}_w}{\sqrt{\rho_1\rho_2}}\left(1+\frac{2r}{r_0}\right)e^{-r/r_0}\right], \tag{5.7.4}$$

式中 $g_w(\rho_k)$ $(k=1,2)$ 如 (5.7.3), $\bar{A}_w$ 是依赖于两个粒子类型的常数.

根据物理已知的参数值, 我们可以定出弱荷 g_w 的关系式. 由标准模型, β 衰变的弱作用耦合常数 G_w 与 Fermi 常数 G_f 之间有如下关系:

$$\begin{aligned}G_w^2 &= \frac{8}{\sqrt{2}}\left(\frac{m_w c}{\hbar}\right)^2 G_f,\\ G_f &= 10^{-5}\hbar c/\left(\frac{m_p c}{\hbar}\right)^2,\end{aligned} \tag{5.7.5}$$

其中 m_w 和 m_p 为 $W^{\pm}$ 粒子和质子质量. 再由规范理论,

$$G_w = g_w(\rho_n), \quad \rho_n \text{ 为核子半径.} \tag{5.7.6}$$

于是从 (5.7.5) 和 (5.7.6) 推出

$$\left(\frac{\rho_w}{\rho_n}\right)^6 g_w^2 = G_w^2 = \frac{8}{\sqrt{2}}\left(\frac{m_w}{m_p}\right)^2 \times 10^{-5}\hbar c.$$

于是得到 g_w 与弱子半径和核子半径关系式如下:

$$g_w^2 = 0.63 \times \left(\frac{\rho_n}{\rho_w}\right)^6 \hbar c. \tag{5.7.7}$$

6. 强作用势公式

强作用势的一般形式由下式给出:

$$\begin{aligned} S_0 &= g_s(\rho)\left[\frac{1}{r} - \frac{A_s}{\rho}\left(1+\frac{r}{R}\right)e^{-r/R}\right], \\ g_s(\rho) &= \left(\frac{\rho_w}{\rho}\right)^3 g_s, \end{aligned} \tag{5.7.8}$$

式中 A_s 是依赖于粒子类型的常数, R 是强相互作用吸引半径,

$$R = \begin{cases} 10^{-16}\text{cm} & \text{对 } w^* \text{ 和夸克,} \\ 10^{-13}\text{cm} & \text{对强子.} \end{cases} \tag{5.7.9}$$

根据 Yukawa 理论可推出

$$g_s^2 = \frac{2}{3(8\sqrt{e}-e)}\left(\frac{\rho_n}{\rho_w}\right)^6 g^2, \tag{5.7.10}$$

这里 $e = 2.718$ 为自然数, g 为经典强作用耦合常数. 实验上测得 g 的范围为 $g^2 = 1 \sim 10\hbar c$.

在两个带 N_1, N_2 强荷半径为 ρ_1, ρ_2 的粒子之间强相互作用的势能由下式给出:

$$\Phi_s = N_1 N_2 g_s(\rho_1) g_s(\rho_2)\left[\frac{1}{r} - \frac{\bar{A}_s}{\sqrt{\rho_1\rho_2}}\left(1+\frac{r}{R}\right)e^{-r/R}\right], \tag{5.7.11}$$

这里 $g_s(\rho_k)$ $(k=1,2)$ 如 (5.7.8) 所定义, $\bar{A}_s$ 是与粒子类型有关的常数.

5.7.2 质量粒子的谱方程

在 5.7.1 节我们看到亚原子粒子由两个或三个 Fermi 子构成, 它们的波函数为

$$\Psi^1, \cdots, \Psi^N, \quad N = 2, 3. \tag{5.7.12}$$

因为每个 Fermi 子的束缚能可近似地看作是其他 $N-1$ 个粒子提供的势能叠加 (这里由于 $N=2,3$ 的缘故), 因此, 对于每个 Fermi 子的四维束缚势取如下形式:

$$gA_\mu=\begin{cases}(N-1)g_wW_\mu & \text{对弱作用},\\ (N-1)g_sS_\mu & \text{对强作用},\\ (N-1)(g_wW_\mu+g_sS_\mu) & \text{对弱作用 + 强作用},\end{cases}\tag{5.7.13}$$

其中 W_μ, S_μ 如 (5.7.1).

令这 N 个粒子的质量为

$$m=\begin{pmatrix} m_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & m_N\end{pmatrix}.$$

那么这 N 个粒子波函数 (5.7.12) 满足 Dirac 方程

$$(\mathrm{i}\hbar c r^\mu D_\mu - c^2 m)\Psi=0,\tag{5.7.14}$$

式中 $\Psi=(\Psi^1,\cdots,\Psi^N)$, 并且

$$D_\mu=\partial_\mu+\mathrm{i}\frac{g}{\hbar c}A_\mu,\quad gA_\mu \text{ 如 (5.7.13)}.\tag{5.7.15}$$

我们知道, 在 (5.7.12) 中每一个波函数都是一个四分量的旋量:

$$\Psi^k=(\Psi_1^k,\Psi_2^k,\Psi_3^k,\Psi_4^k),\quad 1\leqslant k\leqslant N.$$

因此方程 (5.7.14) 取下面等价形式:

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}-gA_0-c^2m_k\right)\begin{pmatrix}\Psi_1^k\\ \Psi_2^k\end{pmatrix}&=\mathrm{i}c\hbar\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{D}\right)\begin{pmatrix}\Psi_3^k\\ \Psi_4^k\end{pmatrix},\\ \left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}-gA_0+c^2m_k\right)\begin{pmatrix}\Psi_3^k\\ \Psi_4^k\end{pmatrix}&=\mathrm{i}c\hbar(\vec{\sigma}\cdot\vec{D})\begin{pmatrix}\Psi_1^k\\ \Psi_2^k\end{pmatrix},\end{aligned}\tag{5.7.16}$$

其中 $\vec{\sigma}=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ 为 Pauli 矩阵, $\vec{D}=(D_1,D_2,D_3)$ 如 (5.7.15).

下面我们采用量子力学的标准方法从 (5.7.16) 推出质量粒子束缚态的谱方程. 令方程 (5.7.16) 的解为如下形式:

$$\Psi^k=e^{-\mathrm{i}(\lambda+m_kc^2)t/\hbar}\psi^k,$$

物理上, λ 的负值代表束缚能, ψ^k 与时间 t 无关代表束缚态. 将 Ψ^k 代入 (5.7.16) 便得到如下方程:

$$(\lambda - gA_0)\begin{pmatrix}\psi_1^k\\ \psi_2^k\end{pmatrix} = \mathrm{i}c\hbar(\vec{\sigma}\cdot\vec{D})\begin{pmatrix}\psi_3^k\\ \psi_4^k\end{pmatrix}, \tag{5.7.17}$$

$$(\lambda - gA_0 + 2m_kc^2)\begin{pmatrix}\psi_3^k\\ \psi_4^k\end{pmatrix} = \mathrm{i}c\hbar(\vec{\sigma}\cdot\vec{D})\begin{pmatrix}\psi_1^k\\ \psi_2^k\end{pmatrix}, \tag{5.7.18}$$

对 $1\leqslant k\leqslant N$. 方程 (5.7.18) 可改写为

$$\begin{pmatrix}\psi_3^k\\ \psi_4^k\end{pmatrix} = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m_kc}\left(1+\frac{\lambda - gA_0}{2m_kc^2}\right)^{-1}(\vec{\sigma}\cdot\vec{D})\begin{pmatrix}\psi_1^k\\ \psi_2^k\end{pmatrix}. \tag{5.7.19}$$

在物理中 $\lambda - gA_0$ 代表粒子的动能, 即

$$\lambda - gA_0 = \frac{1}{2}m_kv^2.$$

对于质量粒子来讲, $v^2/c^2 \ll 1$ 很小. 因此 (5.7.19) 可近似表达为

$$\begin{pmatrix}\psi_3^k\\ \psi_4^k\end{pmatrix} = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m_kc}(\vec{\sigma}\cdot\vec{D})\begin{pmatrix}\psi_1^k\\ \psi_2^k\end{pmatrix}.$$

将此方程代入 (5.7.17), 得到

$$(\lambda - gA_0)\begin{pmatrix}\psi_1^k\\ \psi_2^k\end{pmatrix} = -\frac{\hbar^2}{2m_k}(\vec{\sigma}\cdot\vec{D})^2\begin{pmatrix}\psi_1^k\\ \psi_2^k\end{pmatrix}. \tag{5.7.20}$$

现在我们需要给出 $(\vec{\sigma}\cdot\vec{D})^2$ 的表达式. 为了此目的, 必须注意到 Pauli 矩阵具有下面性质:

$$\sigma_k^2 = 1, \quad \sigma_k\sigma_j = -\sigma_j\sigma_k = \mathrm{i}\varepsilon_{jkl}\sigma_l,$$

这里 ε_{jkl} 为排列符号,

$$\varepsilon_{jkl} = \begin{cases} 1, & (jkl)\text{ 为偶排列},\\ -1, & (jkl)\text{ 为奇排列},\\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

因此可以求得

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{D})^2 = \left(\sum_{k=1}^{3}\sigma_kD_k\right)^2 = D^2 + \mathrm{i}\,\vec{\sigma}\cdot(\vec{D}\times\vec{D}). \tag{5.7.21}$$

注意到 $\vec{D}=\vec{\partial}+\mathrm{i}\dfrac{g}{\hbar c}\vec{A}$, 得到

$$\vec{D}\times\vec{D}=\mathrm{i}\frac{g}{\hbar c}\left[\vec{\partial}\times\vec{A}+\vec{A}\times\vec{\partial}\right].$$

另一方面, 作为算子来讲

$$\vec{\partial}\times\vec{A}=\mathrm{rot}\,\vec{A}-\vec{A}\times\vec{\partial}\,.$$

因此得到

$$\vec{D}\times\vec{D}=\mathrm{i}\frac{g}{\hbar c}\mathrm{rot}\,\vec{A}\,.$$

这样, (5.7.21) 便可写成

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{D})^2=D^2-\frac{g}{\hbar c}\vec{\sigma}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{A}\,. \tag{5.7.22}$$

这个表达式就是我们在 (5.6.35) 中见到的形式.

由 (5.7.22), 方程 (5.7.20) 可写成如下形式:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_k}D^2+gA_0\right]\begin{pmatrix}\psi_1^k\\ \psi_2^k\end{pmatrix}+\vec{\mu}^k\cdot\mathrm{rot}\,\vec{A}\begin{pmatrix}\psi_1^k\\ \psi_2^k\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}\psi_1^k\\ \psi_2^k\end{pmatrix} \tag{5.7.23}$$

式中 $D=(D_1,D_2,D_3),(A_0,\vec{A})$ 如 (5.7.13),

$$D_j=\partial_j+\mathrm{i}\frac{g}{\hbar c}A_j\ (1\leqslant j\leqslant 3),\quad \vec{\mu}^k=\frac{\hbar g}{2m_k}\vec{\sigma}$$

由于 Fermi 子被束缚在亚原子粒子内部区域 Ω 中, 因此在 Ω 外 ψ^k 为零, 于是 (5.7.23) 被配有 Dirichlet 边界条件

$$(\psi_1^k,\psi_2^k)|_{\partial\Omega}=0,\quad 1\leqslant k\leqslant N,\quad \Omega\subset R^3. \tag{5.7.24}$$

特征值问题 (5.7.23)-(5.7.24) 便是具有质量的亚原子粒子能级谱方程. 我们在 (5.6.4) 中曾给出它的表达式.

注 5.23　在方程 (5.7.23) 中, 这一项

$$\vec{\mu}=\frac{\hbar g}{2m}\vec{\sigma}$$

代表带有弱荷 $g=g_w$ 或强荷 $g=g_s$ 的质量 Fermi 子由自旋所产生的弱或强作用磁矩. 这种性质与电荷 e 产生磁矩是一样的. 这表明弱和强相互作用与电磁相互作用具有相似性. 实际上这一点可以从这样的事实得到理解, 即电磁、弱、强三种相互作用都是规范场, 它们的规范群分别为 $U(1),SU(2)$ 和 $SU(3)$.

5.7.3 无质量粒子谱方程

为了得到无质量粒子的谱方程, 我们必须导出它们的波方程. 为此, 我们首先回忆量子力学的一条基本假设.

假设 5.24(量子力学基本原理) 对于一个具有可观测 Hermite 算子 $L_1, \cdots, L_m$ 的量子系统, 若对应于 L_k 的物理量 l_k $(1 \leqslant k \leqslant m)$ 满足一个关系

$$H(l_1, \cdots, l_m) = 0, \tag{5.7.25}$$

那么由 (5.7.25) 所诱导的如下方程:

$$H(L_1, \cdots, L_m)\psi = 0 \tag{5.7.26}$$

描述这个量子系统如果 $H(L_1, \cdots, L_m)$ 是一个 Hermite 算子.

在经典量子力学中, 像 Schrödinger 方程, Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程等, 都是建立在这个量子力学基本假设的基础之上的. 关于无质量粒子的束缚态方程也将从该原理推出.

我们知道, 描述一个自由的无质量粒子的基本方程就是 Weyl 方程, 它取如下形式:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = c(\vec{\sigma} \cdot \vec{\partial})\psi, \tag{5.7.27}$$

这里 $\psi = (\psi^1, \psi^2)^{\mathrm{T}}$ 是一个二分量 Weyl 旋量. 这个 Weyl 方程也满足基本假设 5.25. 事实上, 对于 Weyl 旋量来讲, 能量和动量 (标量值) 算子 E 和 P 可表达为

$$E = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad P = \mathrm{i}\hbar(\vec{\sigma} \cdot \vec{\partial}). \tag{5.7.28}$$

由 de Broglie 关系

$$E = \hbar\omega, \quad P = \hbar/\lambda, \quad c = \omega\lambda$$

得到

$$E = cP. \tag{5.7.29}$$

于是, 从 (5.7.28) 和 (5.7.29) 便推得 Weyl 方程 (5.7.27).

现在当考虑在弱或强相互作作用下的一个无质量粒子束缚态时, 能量和动量算子 (5.7.28) 被下式取代

$$E = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t} - V, \quad P = \mathrm{i}\hbar\left(\vec{\sigma} \cdot \vec{D}\right), \tag{5.7.30}$$

其中 $\vec{D} = (D_1, D_2, D_3)$,

$$V = gA_0, \quad D_k = \partial_k + \mathrm{i}\frac{g}{\hbar c}A_k,$$

g 是弱或强作用荷, $A_\mu=(A_0,A_1,A_2,A_3)$ 是如 (5.7.13) 所定义的四维相互作用势. 这似乎可看到无质量粒子束缚态方程可由关系式 (5.7.29) 和 (5.7.30) 导出. 然而下面的分析给我们带来困难.

在 5.7.1 小节中已看到, 那些无质量的媒介子都是由两个无质量的弱子在弱或强相互作用的吸引下被束缚在一个小球 B_r 的内部. 因此每个弱子的 Weyl 旋量 ψ 被限制在 B_r 内, 即

$$\psi=0 \quad \forall|x|\geqslant r.$$

这就意味着有边界条件

$$\psi|_{\partial B_r}=0. \tag{5.7.31}$$

但是, 对于由 (5.7.29) 和 (5.7.30) 所产生的 Weyl 方程, 从数学的角度看, 它所产生的边值问题

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\mathrm{i}\hbar c(\vec{\sigma}\cdot\vec{D})\psi+V(x)\psi, \quad x\in B_r,\\&\psi|_{\partial B_r}=0,\end{aligned} \tag{5.7.32}$$

在一般情况下是不适定的, 也就是说对一个给定的初始条件 $\psi(0)=\psi_0$ 问题 (5.7.32) 一般没有解. 这是因为这个方程是一阶微分方程, 它不能配上 Dirichlet 边界条件.

上述困难表明对于无质量的束缚态来讲, 在边界条件 (5.7.31) 的约束下, 关系式 (5.7.29) 应该变成如下形式

$$PE=CP^2, \tag{5.7.33}$$

它关于时间 t 是一阶的. 在另一方面, 我们知道 PE 是 Hermite 的充要条件是 P 与 E 可交换, 即

$$PE=EP. \tag{5.7.34}$$

然而对于 $E=E_0-V(E_0=\mathrm{i}\hbar\partial/\partial t)$ 来讲, 一般情况下 $PV\neq VP$. 因此, 为了保证 (5.7.34), 我们用 $\dfrac{1}{2}(PV+VP)$ 来取代 PV, 即

$$PE=PE_0-\frac{1}{2}(PV+VP), \quad E_0=\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}.$$

这样 PE 便是 Hermite 的. 此时关系式 (5.7.33) 变为

$$PE_0=CP^2+\frac{1}{2}(PV+VP). \tag{5.7.35}$$

于是, 根据量子力学基本假设 5.25, 从 (5.7.35) 和 (5.7.30) 我们得到无质量束缚态的边值问题如下:

$$\begin{cases}(\vec{\sigma}\cdot\vec{D})\dfrac{\partial\psi}{\partial t}=c(\vec{\sigma}\cdot\vec{D})^2\psi-\dfrac{\mathrm{i}g}{2\hbar}\left\{(\vec{\sigma}\cdot\vec{D}),A_0\right\}\psi,\\ \psi|_{\partial\Omega}=0,\end{cases} \tag{5.7.36}$$

其中 $\Omega \subset R^n$ 是一有阶区域, $\{\cdot,\cdot\}$ 为反交换子, 即

$$\{(\vec{\sigma}\cdot\vec{D}), A_0\} = (\vec{\sigma}\cdot\vec{D})A_0 + A_0(\vec{\sigma}\cdot\vec{D}). \tag{5.7.37}$$

下面研究 Weyl 算子谱方程.

从 (5.7.36)-(5.7.37) 便可得到无质量粒子能级的谱方程. 令该方程的解取如下形式:

$$\psi = e^{-\mathrm{i}\lambda t/\hbar}\varphi(x), \qquad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \end{pmatrix}.$$

将 ψ 代入 (5.7.36) 便得到

$$\begin{cases} -\hbar c(\vec{\sigma}\cdot\vec{D})^2\varphi + \dfrac{\mathrm{i}g}{2}\{(\vec{\sigma}\cdot\vec{D}), A_0\}\varphi = \mathrm{i}\lambda(\vec{\sigma}\cdot\vec{D})\varphi, \\ \varphi|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{5.7.38}$$

其中 $\{(\vec{\sigma}\cdot\vec{D}), A_0\}$ 如 (5.7.37).

注 5.25 由 (5.7.22), 方程 (5.7.38) 便是我们在 5.6.1 小节中所见到的方程 (5.6.5). 定理 5.22 提供了它的谱性质.

5.7.4 带电轻子与夸克能级

在 5.7.1 小节中看到, 带电轻子与夸克是由三个弱子构成. 这三个弱子质量是由于弱相互作用造成的减速而产生的. 令它们的质量为 m_1, m_2, m_3, 相应的波函数为

$$\psi^k = \begin{pmatrix} \psi_1^k \\ \psi_2^k \end{pmatrix}, \qquad k = 1, 2, 3.$$

这里 ψ_1^k 和 ψ_2^k 代表左手和右手自旋态. 三个弱子是由弱荷产生的弱相互作用将它们束缚在一起形成的粒子. 在 (5.7.13) 中的束缚势对于带电轻子和夸克来讲取如下形式:

$$A_\mu = 2W_\mu = 2(W_0, \vec{W}).$$

由 (5.7.23)-(5.7.24), 关于带电轻子和夸克的谱方程写作

$$\begin{cases} -\dfrac{\hbar^2}{2m_j}\left(\vec{\partial} + \mathrm{i}\dfrac{2g_w}{\hbar c}\vec{W}\right)^2\psi^j + 2(g_w W_0 + \vec{\mu}_w^j\cdot\mathrm{rot}\,\vec{W})\psi^j \\ = \lambda\psi^j, \quad \text{在 } \rho_w < |x| < \rho, \quad 1 \leqslant j \leqslant 3, \\ \psi = 0 \quad \text{在 } |x| = \rho_w, \rho, \end{cases} \tag{5.7.39}$$

这里 $\psi = (\psi^1, \psi^2, \psi^3)$, ρ_w 是弱子半径, ρ 是弱作用的吸引半径, W_0 是由 (5.7.3) 给出, 以及

$$\vec{\mu}_w^j = \frac{\hbar}{2m_j}g_w\,\vec{\sigma} \text{ 是弱作用磁矩.}$$

根据方程 (5.7.39) 可以关于带电轻子与夸克推出一些基本的内在性质如下.

1. 束缚态和能级

我们知道, (5.7.39) 的负特征值及特征函数代表了粒子的束缚能和束缚态. 令

$$-\infty < \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_N < 0 \tag{5.7.40}$$

是 (5.7.39) 的所有负特征值, 对应特征函数为

$$\psi_1, \cdots, \psi_N, \quad \psi_K = (\psi_k^1, \psi_k^2, \psi_k^3)^{\mathrm{T}}.$$

每一个束缚态满足归一性,

$$\int_\Omega |\psi_K^j|^2 \mathrm{d}x = 1, \quad 1 \leqslant j \leqslant 3,\ 1 \leqslant k \leqslant N, \tag{5.7.41}$$

这里 $\Omega \in R^3$ 是环形区域

$$\Omega = \{x \in R^3 |\ \rho_w < |x| < \rho\}.$$

然后, 由 (5.7.39) 和 (5.7.41) 有

$$\begin{aligned} \lambda_k = \frac{\hbar}{2m_j} \int_\Omega \left| \left(\nabla + \mathrm{i}\frac{g_w}{\hbar c} \vec{W}\right) \psi_K^j \right|^2 \mathrm{d}x \\ +2\int_\Omega \psi_k^{j\dagger} \vec{\mu}_w^j \cdot \mathrm{rot}\, \vec{W}\, \mathrm{d}x + 2\int_\Omega g_w W_0 |\psi_K^j|^2 \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{5.7.42}$$

在 (5.7.42) 等式右端, 第一项代表弱子的动能, 第二项代表弱作用磁能, 第三项为弱势能. 由弱作用势公式 (5.7.3), 在 (5.7.42) 中的势能是负的. 因此第 k 个能级的束缚能可表达为

$$\lambda_k = \text{动能} + \text{磁能} + \text{势能}. \tag{5.7.43}$$

此外, 带电轻子与夸克的能量是离散有限的,

$$0 < E_1 < \cdots < E_{N_0}, \quad N_0 \leqslant N\ (N \text{ 为负特征值数}),$$

每个能级 E_k 可表达为

$$E_k = E_0 + \tilde{\lambda}_k, \quad \tilde{\lambda}_k \text{ 为 (5.7.40) 中某个负特征值}. \tag{5.7.44}$$

2. 质量

每一个粒子都处在某个能级态上. 对应于能级 E_k 粒子的质量 M_k 满足下面关系式:

$$M_k = \sum_{j=1}^{3} m_j + \frac{3g_w^2}{\rho_w c^2} + \frac{\tilde{\lambda}_k}{c^2},$$

式中 $\tilde{\lambda}_k$ 如 (5.7.44), m_j 为弱子质量, g_w^2/ρ_w 为弱子固有能量.

3. 电子的物理参数

在所有带电轻子与夸克中, 只有电子既是可观测又是长寿的. 因此电子的各种参数如半径和基态束缚能等是一些重要的物理参数. 由谱方程 (5.7.39) 我们可以获得这方面的一些信息.

我们回忆 (5.7.3) 的弱作用势, 对于弱子该公式表达为

$$W_0 = g_w \left[\frac{1}{r} - \frac{A_w}{\rho_w} \left(1 + \frac{2r}{r_0} \right) e^{-r/r_0} \right] e^{-r/r_0}, \tag{5.7.45}$$

式中 A_w 是关于弱子的常数.

为了简单, 假设三个弱子质量相等. 我们忽略弱作用的磁效应, 也即令 $\vec{W} = 0$. 那么方程 (5.7.39) 被简化为

$$\begin{cases} -\dfrac{\hbar^2}{2m_w} \Delta\psi + 2g_w W_0 \psi = \lambda\psi, & \rho_w < |x| < \rho, \\ \psi = 0, & |x| = \rho_w, \rho. \end{cases} \tag{5.7.46}$$

我们将应用 (5.7.45) 和 (5.7.46) 来求得电子物理参数关系式. 令 λ_e 和 ψ_e 为基态电子的束缚能和束缚态, 即 λ_e 和 ψ_e 是 (5.7.46) 的第一特征值和特征函数. 从 (5.7.45) 和 (5.7.46) 可推出

$$\lambda_e = \frac{1}{2} m_w v^2 + \frac{2g_w^2}{r_e} - \frac{2A_w g_w^2}{\rho_w} \kappa_e, \tag{5.7.47}$$

其中 $\dfrac{1}{2} m_w v^2$ 是电子中每个弱子的平均动能, r_e 为裸电子半径, κ_e 为电子的一个新参数, 它们分别表达为

$$\begin{aligned} r_e &= \int_\Omega \frac{1}{r} e^{-r/r_0} |\psi_e|^2 \mathrm{d}x, \\ \kappa_e &= \int_\Omega \left(1 + \frac{2r}{r_0} \right) e^{-2r/r_0} |\psi_e|^2 \mathrm{d}x, \\ \left(\frac{m_w v}{\hbar} \right)^2 &= \int_\Omega |\nabla \psi_e|^2 \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{5.7.48}$$

4. 电子参数的球坐标表达式

当我们采用球坐标时, 电子参数 (5.7.48) 的表达能够大为简化.在球坐标 (r, θ, φ) 中, (5.7.46) 的第一特征函数可写成

$$\psi_e = \varphi_0(r) Y(\theta, \varphi),$$

这里 φ_0 和 $Y(\theta,\varphi)$ 分别满足如下方程：

$$\begin{cases} -\dfrac{\hbar^2}{2m_w}\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)\varphi_0+2g_wW_0\varphi_0+\dfrac{\beta_k}{r^2}\varphi_0=\lambda_e\varphi_0, \\ \varphi_0(\rho_w)=\varphi_0(\rho)=0, \end{cases} \tag{5.7.49}$$

以及

$$\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]Y_k=\beta_kY_k, \tag{5.7.50}$$

其中 $\beta_k=k(k+1)$, $k=0,1,\cdots$.

因为 λ_e 是 (5.7.49) 的最小特征值, 这意味着 $\beta_k=\beta_0=0$. 而 (5.7.50) 对应于 $\beta_0=0$ 的特征函数 Y_0 为

$$Y_0=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}.$$

于是 ψ_e 为

$$\psi_e=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\varphi_0(r).$$

并且 λ_e 和 φ_0 是下面方程的第一特征值和特征函数：

$$\begin{cases} -\dfrac{\hbar^2}{2m_w}\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)\varphi_0+2g_wW_0\varphi_0=\lambda_1\varphi_0, \\ \varphi_0(\rho_w)=\varphi_0(\rho)=0. \end{cases} \tag{5.7.51}$$

在这种情况下, (5.7.48) 中的参数可简化为

$$\begin{aligned} r_e&=\int_{\rho_w}^{\rho}r\varphi_0^2(r)\mathrm{d}r, \\ \kappa_e&=\int_{\rho_w}^{\rho}r^2\left(1+\frac{2r}{r_0}\right)e^{-2r/r_0}\varphi_0^2(r)\mathrm{d}r, \\ \left(\frac{m_wv}{\hbar}\right)^2&=\int_{\rho_w}^{\rho}r^2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi_0}{\mathrm{d}r}\right)^2\mathrm{d}r. \end{aligned} \tag{5.7.52}$$

5.7.5　强子的能级

强子包括重子与介子. 我们将分别给出重子和介子的谱方程.

1. 重子谱方程

我们知道, 重子由三个夸克构成:

$$B=qqq,$$

而每个夸克由三个 w 弱子构成

$$q=w^*ww \quad 及 \quad q=w^*w\bar{w}.$$

每个夸克具有一个强荷 g_s 和三个弱荷 $3g_w$. 初一看似乎重子的束缚能是弱和强这两种相互作用所提供. 但是由于弱作用的短程性

$$\text{弱作用力程} \leqslant 10^{-16}\text{cm},$$

而重子的半径为

$$r > 10^{-16}\text{cm}.$$

因此将夸克束缚在一起的主要作用力是强相互作用.

令 m_1, m_2, m_3 是重子中三个夸克的质量, $\psi^k = (\psi_1^k, \psi_2^k)^T$ $(1 \leqslant k \leqslant 3)$ 是它们的状态函数, 束缚势 (5.7.13) 为

$$A_\mu = 2S_\mu = 2(S_0, \vec{S}).$$

于是关于重子的谱方程 (5.7.23)-(5.7.24) 取如下形式:

$$\begin{cases} -\dfrac{\hbar^2}{2m_k}\left(\nabla + \mathrm{i}\dfrac{2g_s}{\hbar c}\vec{S}\right)\psi^k + 2g_s S_0\psi^k + 2\vec{\mu}_s^k \cdot \mathrm{rot}\ \vec{S}\ \psi^k \\ = \lambda\psi^k \quad (1 \leqslant k \leqslant 3), \quad \text{在 } \rho_0 < |x| < \rho_1, \\ (\psi^1, \psi^2, \psi^3) = 0, \quad \text{在 } |x| = \rho_0, \rho_1, \end{cases} \tag{5.7.53}$$

这里 ρ_0 是夸克半径, ρ_1 是强作用吸引半径,

$$\vec{\mu}_s^k = \frac{\hbar}{2m_k} g_s \vec{\sigma} \text{ 为强作用磁矩.}$$

每一个 ψ^k 满足归一性条件

$$\int_\Omega |\psi^k|^2 \mathrm{d}x = 1, \quad \Omega = \{x \in R^3 |\ \rho_0 < |x| < \rho_1\}.$$

2. 介子谱方程

介子是由一个夸克和一个反夸克构成

$$M = q\bar{q}.$$

因此束缚势 (5.7.13) 为

$$A_\mu = S_\mu = (S_0, \vec{S}).$$

于是关于介子的谱方程取如下形式

$$\begin{cases} -\dfrac{\hbar^2}{2m_k}\left(\nabla + \mathrm{i}\dfrac{g_s}{\hbar c}\vec{S}\right)\psi^k + g_s S_0\psi^k + \vec{\mu}_s^k \cdot \mathrm{rot}\ \vec{S}\ \psi^k \\ = \lambda\psi^k\ (k = 1, 2), \text{在 } \rho_0 < |x| < \rho_1, \\ (\psi^1, \psi^2) = 0, \text{在 } |x| = \rho_0, \rho_1, \end{cases} \tag{5.7.54}$$

每一个 ψ^k $(k = 1, 2)$ 满足归一性条件.

3. 质子的物理参数

在强子中只有质子和中子是长寿的, 但是它们两个在物理参数上有许多相似之处. 于是我们只讨论质子情况.

由 (5.7.8), 关于夸克的强作用势公式取如下形式:

$$S_0 = g_s \left(\frac{\rho_w}{\rho_0}\right)^3 \left[\frac{1}{r} + \frac{A_q}{\rho_0}\left(1 + \frac{r}{r_0}\right) e^{-r/r_0}\right], \tag{5.7.55}$$

这里 $r_0 = 10^{-16}\text{cm}$, ρ_0 为夸克半径, A_q 是关于夸克的强作用常数.

类似于电子的情况, 关于质子的参数有关系式

$$\lambda_p = \frac{1}{2} m_q v^2 + \left[\frac{2g_s^2}{r_p} - \frac{2A_q g_s^2}{\rho_0}\kappa_p\right]\left(\frac{\rho_w}{\rho_0}\right)^6, \tag{5.7.56}$$

式中 λ_p 为基态质子束缚能, m_q 为夸克质量, r_p 为质子半径, κ_p 为质子的一个新参数. 这些参数 r_p, κ_p 和 v^2 可表达为

$$\begin{aligned} r_p &= \int_{\rho_0}^{\rho_1} r\varphi_p^2(r)\mathrm{d}r, \\ \kappa_p &= \int_{\rho_0}^{\rho_1} r^2 \left(1 + \frac{r}{r_0}\right) e^{-r/r_0}\varphi_p^2(r)\mathrm{d}r, \\ \left(\frac{m_q v}{\hbar}\right)^2 &= \int_{\rho_0}^{\rho_1} r^2 \left(\frac{\mathrm{d}\varphi_p}{\mathrm{d}r}\right)^2 \mathrm{d}r, \end{aligned} \tag{5.7.57}$$

其中 λ_p 和 φ_p 是下面方程第一特征值和特征函数

$$\begin{cases} -\dfrac{\hbar^2}{2m_q}\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)\varphi_p + 2g_s S_0 \varphi_p = \lambda_1 \varphi_p, \\ \varphi_p = 0, \text{在 } r = \rho_0, \rho_1. \end{cases} \tag{5.7.58}$$

5.7.6　媒介子能级

媒介子是无质量粒子, 它们由两个弱子构成. 从相互作用角度来看, 胶子是由弱和强两种相互作用产生, 而其他媒介子则是由弱作用束缚而成. 因此这里我们将这两种情况分开进行讨论.

1. 胶子

胶子的弱子构成为

$$\text{胶子} = w^* \bar{w}^*. \tag{5.7.59}$$

我们知道, w^* 和 $\bar{w}^*$ 含有一个弱荷 g_w 和一个强荷 g_s. 由 (5.7.7) 和 (5.7.10), g_w 与 g_s 有相同的数量级. 因此胶子的束缚能是由弱和强两种作用力产生, 也就是说

(5.7.13) 的束缚势 A_μ 为

$$gA_0 = g_w W_0 + g_s S_0, \quad g\vec{A} = g_w \vec{W} + g_s \vec{S}. \tag{5.7.60}$$

在 (5.7.59) 中, 我们只需考虑一个弱子的束缚态, 这是因为两个弱子是处在对称状态. 因此谱方程由 (5.7.38) 提供. 对于作用势 (5.7.60), 该谱方程被表达为

$$\begin{cases} -\hbar c D^2\psi + [g_w \vec{\sigma} \cdot \mathrm{rot}\, \vec{W} + g_s \vec{\sigma} \cdot \mathrm{rot}\, \vec{S}]\psi \\ +\dfrac{\mathrm{i}}{2}\{(\vec{\sigma}\cdot\vec{D}),\ g_w W_0 + g_s S_0\}\psi = \mathrm{i}\lambda(\vec{\sigma}\cdot\vec{D})\psi,\ \rho_w < |x| < \rho_g, \\ \psi = 0, \quad |x| = \rho_w, \rho_g, \end{cases} \tag{5.7.61}$$

这里 ρ_w, ρ_g 是弱子与胶子半径,

$$\vec{D} = \nabla + \frac{\mathrm{i}}{\hbar c}(g_w \vec{W} + g_s \vec{S}).$$

2. 其他媒介子

它们是由一对正反弱子构成

$$\text{其他媒介子} = w\bar{w}.$$

因为弱子 w 和 $\bar{w}$ 只含一个弱荷, 相互作用是弱力, 即

$$A_\mu = W_\mu = (W_0, \vec{W}).$$

在这种情况下谱方程 (5.7.38) 取如下形式:

$$\begin{cases} -\hbar c D^2\psi + g_w \vec{\sigma} \cdot \mathrm{rot}\, \vec{W}\ \psi + \dfrac{\mathrm{i}g_w}{2}\{(\vec{\sigma}\cdot\vec{D}), W_0\}\psi \\ = \mathrm{i}(\lambda(\vec{\sigma}\cdot\vec{D})\psi, \quad \rho_w < |x| < \rho_m, \\ \psi = 0, \quad |x| = \rho_w, \rho_m, \end{cases} \tag{5.7.62}$$

其中 ρ_m 为媒介子半径,

$$\vec{D} = \nabla + \frac{\mathrm{i}}{\hbar c} g_w \vec{W}.$$

3. 媒介子能级

由定理 5.21, 媒介子谱方程 (5.7.61) 和 (5.7.62) 的负特征值是有限的, 即

$$-\infty < \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_N < -\infty.$$

它们代表了束缚能. 如果不计入重数, 则负特征值为

$$-\infty < \tilde{\lambda}_1 < \cdots < \tilde{\lambda}_{N_0} < -\infty, \quad N_0 \leqslant N. \tag{5.7.63}$$

这说明每一种媒介子能级都是有限分立的:

$$0 < E_1 < \cdots < E_{N_0}, \quad N_0 \text{ 如 (5.7.63)}.$$

每个能级 E_k 可表达为

$$E_k = E_0 + \bar{\lambda}_k, \quad \bar{\lambda}_k \text{ 如 (5.7.63)},$$

其中 E_0 为固有能, 它依赖于媒介子类型.

5.7.7　微观粒子能量分布的有限分立性

前面的讨论表明任何一类亚原子粒子, 它们的能级是有限的:

$$0 < E_1 < \cdots < E_N, \tag{5.7.64}$$

能级数 N 依赖于粒子类型. 而各类中的每一个粒子都处在相应 (5.7.64) 中的某个能级 E_k $(1 \leqslant k \leqslant N)$ 的状态上. 传统观念上认为粒子的能量分布是连续无限的, 即一个粒子可处在任何一个能量 E $(0 < E < \infty)$ 的状态上. 因此从亚原子粒子谱理论得出一个与传统观念完全不同的结论:

$$\text{粒子能量分布是有限分立的.} \tag{5.7.65}$$

我们在实验上没有观察到结论 (5.7.65) 是因为每一类亚原子粒子的平均相邻能级差非常小, 即

$$\Delta E_k = E_{k+1} - E_k \simeq \frac{E_n - E_1}{N} \simeq 0.$$

下面我们将会表明这一点.

为了此目的, 我们需要对每一种粒子的能级数 N 给出估计. 首先估计 g_w^2 和 g_s^2 的数值. 令经典强相互作用耦合常数 g^2 取值为 $g^2 = 5\hbar c$, 那么由 (5.7.7) 和 (5.7.10) 有

$$\frac{g_w^2}{\hbar c} = 0.63 \times \left(\frac{\rho_n}{\rho_w}\right)^6, \quad \frac{g_s^2}{\hbar c} = 0.32 \times \left(\frac{\rho_n}{\rho_w}\right)^6,$$

其中 ρ_w, ρ_n 为弱子及核子半径. 关于 ρ_n/ρ_w 我们取估计值为

$$\frac{\rho_n}{\rho_w} \sim 10^6,$$

那么

$$\frac{g_w^2}{\hbar c} \sim 0.63 \times 10^{36}, \quad \frac{g_s^2}{\hbar c} \sim 0.32 \times 10^{36}. \tag{5.7.66}$$

下面我们讨论各种粒子的能级数估计.

1. 轻子与夸克能级数

为了考虑能级数的近似计算, 我们总是忽略相互作用的磁效应. 此时带电轻子和夸克的谱方程为 (5.7.46). 为了方便我们将它写出如下:

$$\begin{cases} -\dfrac{\hbar^2}{2m_w}\Delta\psi + 2g_w W_0\psi = \lambda\psi, & \rho_w < |x| < \rho, \\ \psi = 0, & |x| = \rho_w, \rho, \end{cases} \tag{5.7.67}$$

这里 m_w 为弱子质量, ρ 为弱子的弱吸引半径.

对于 W_0 的公式 (5.7.45) 我们近似地取

$$W_0 = -\frac{g_w A_w}{\rho_w}.$$

再取量纲变换

$$x \to \rho x, \quad \rho \text{ 如 (5.7.67)}.$$

注意到 ρ_w 是远小于 ρ, 即

$$\rho_w \ll \rho.$$

于是方程 (5.7.67) 可近似表达成如下形式:

$$\begin{cases} -\Delta\psi - \dfrac{4m_w A_w \rho^2}{\hbar^2 \rho_w} g_w^2 \psi = \lambda\psi, & |x| < 1, \\ \psi = 0, & |x| = 1. \end{cases} \tag{5.7.68}$$

很清楚, 在 (5.6.22) 中的参数 θ, r, α 在这里取值为

$$\theta = \frac{4m_w A_w \rho^2}{\hbar^2 \rho_w} g_w^2, \quad r = 1, \quad \alpha = 0.$$

于是由 (5.6.22), 带电轻子和夸克的能级数可近似地估计为

$$N = \left[\frac{4}{\lambda_1}\frac{\rho^2 A_w}{\rho_w}\frac{m_w c}{\hbar}\frac{g_w^2}{\hbar c}\right]^{3/2}, \tag{5.7.69}$$

这里 λ_1 是 $-\Delta$ 在单位球 $B_1 \subset R^3$ 的第一特征值.

2. 强子能级数

N 我们只考虑重子情况, 对于介子情况也是类似的. 类似于 (5.7.68), 对于重子我们可以将 (5.7.53) 近似地变为

$$\begin{cases} -\Delta\psi - \dfrac{4m_q A_q \rho_1^2}{\hbar^2 \rho_q} g_s^2 \psi = \lambda\psi, & |x| < 1, \\ \psi = 0, & |x| = 1, \end{cases} \tag{5.7.70}$$

这里 ρ_q 为夸克半径, ρ_1 为夸克的强作用吸引半径, A_q 为夸克强作用常数.

于是, 由 (5.7.70) 我们能够给出 N 的估计为

$$N=\left[\frac{4}{\lambda_1}\frac{\rho_1^2 A_q}{\rho_q}\frac{m_q c}{\hbar}\frac{g_s^2}{\hbar c}\right]^{3/2}. \tag{5.7.71}$$

这里 λ_1 如 (5.7.69).

3. 媒介子能级数

N 同理, 我们只考虑光子的能级数. 在这种情况, 谱方程 (5.7.62) 可近似简化成

$$\begin{cases} -\Delta\varphi=\mathrm{i}\left(\lambda+\dfrac{A_w\rho_r}{\hbar c\rho_w}g_w^2\right)(\vec{\sigma}\cdot\vec{\partial})\varphi, & |x|<1,\\ \varphi=0, & |x|=1, \end{cases} \tag{5.7.72}$$

这里 ρ_r 为光子半径.

由 (5.7.72) 可以看到, 公式 (5.6.45) 中的参数 K 为

$$K=\frac{A_w\rho_r}{\rho_w}\frac{g_w^2}{\hbar c}.$$

于是由 (5.6.45) 便得到光子能级数为

$$N=\left[\frac{A_w}{\beta_1}\frac{\rho_r}{\rho_w}\frac{g_w^2}{\hbar c}\right]^3, \tag{5.7.73}$$

式中 β_1 是 (5.6.43) 在单位球 $B_1\subset R^3$ 上的第一特征值.

注 5.26　在上面 (5.7.69), (5.7.71) 和 (5.7.73) 中给出的各类亚原子粒子能级数 N 虽然是计入了特征值重数, 但实际上它与不计入重数的能级数具有相同数量级. 这是因为多重特征值是不稳定的, 当考虑电磁相互作用的摄动时, 绝大多数多重特征值变为单特征值.

注 5.27　由 (5.7.69) 提供的是裸轻子和裸夸克能级数估计式, 而 (5.7.71) 只是对每一个给定夸克能级态下的重子能级数. 如果考虑带电轻子与夸克的媒介子云结构, 那么这些亚原子粒子的真实能级数必须计入它们的复合粒子. 因此公式 (5.7.69) 与 (5.7.71) 给出的并不是全部的能级数. 对于带电轻子, 夸克, 强子这些亚原子粒子, 真实的能级数远大于公式所提供的数据. 然而由 (5.7.66) 的数值, 若在物理上估计

$$\rho\sim 10^{-18}\mathrm{cm},\quad \rho_w\sim 10^{-21}\mathrm{cm},\quad A_w\sim 10^{-3},\quad m_w\sim 0.1\mathrm{MeV/c^2},$$

那么由 (5.7.69) 给出的 N 约为

$$N\sim 10^{39}.$$

这是一个巨大的数值. 同样, 由 (5.7.71) 给出重子能级数 N 为

$$N \sim 10^{47}.$$

由注 5.27 我们可以看到, 只有对媒介子来讲利用 (5.7.73) 的能级数 N 来计算平均能级差 ΔE 才能参考价值.

4. 媒介子能级差

ΔE为了简单, 我们只考虑光子. 光子的每个能级 E_k 可表达成如下形式:

$$E_k = E_0 + \lambda_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant N,$$

λ_k 为 (5.7.72) 的第 k 个负特征值. 显然最大和最小能级为

$$E_{\max} = E_0 + \lambda_N, \quad E_{\min} = E_0 + \lambda_1,$$

总能级差为

$$E_{\max} - E_{\min} = \lambda_N - \lambda_1.$$

由于 $|\lambda_1| \gg |\lambda_N|$, 于是平均能级差 ΔE 近似为

$$\Delta E = \frac{E_{\max} - E_{\min}}{N} \simeq \frac{|\lambda_1|}{N}. \tag{5.7.74}$$

方程 (5.7.72) 的第一特征值 λ_1 是无量纲化的, 它的量纲单位是 $\hbar c/\rho_r$, 而 $\lambda_1 \simeq -K$. 此外由 (5.7.73),

$$N = \left(\frac{K}{\beta_1}\right)^3, \quad K = \frac{A_w \rho_r}{\rho_w} \frac{g_w^2}{\hbar c}.$$

于是 (5.7.74) 可写成

$$\Delta E = \beta_1^3 K^{-2} \frac{\hbar c}{\rho_r}. \tag{5.7.75}$$

从物理角度, 我们取如下估计:

$$\rho_r \sim 10^{-19}\text{cm}, \quad \rho_w \sim 10^{-21}\text{cm}, \quad A_w \sim 10^{-3}, \quad \beta_1 \sim 0(1),$$

于是由 (5.7.66) 给出的数值可算出 (5.7.75) 能级差为

$$\Delta E \sim 10^{-59}\text{eV}.$$

这是一个非常小的值, 人们根本无法观测到它.

注 5.28 粒子能量分布的有限分立性结论对于量子场论的重整化理论具有重要意义. 它意味着经典场量子化中出现的无穷大在 (5.7.65) 的结论下不再存在.

5.8　总结与评注

这一章的内容全部是由作者与汪守宏的工作组成, 见 (Ma, Wang, 2012a, 2012b, 2013c). 其核心思想就是用基本原理统一四种相互作用, 而不是寻找统一的对称性.

建立统一场理论的两个基本原理 PID 和 PRI 得到强有力的物理支持. 更重要的是由建立在 PID 与 PRI 基础之上统一场模型, 我们可以获得大量简单而又看上去合理的物理结论, 这些结论大范围地与自然现象相吻合. 它们全部由两个原理的场方程推出, 没有人工的痕迹. 这里将统一场理论的主要内容总结如下.

(1) 建立了两个物理基本原理 PID 与 PRI.

(2) 由 PID 与 PRI 导出统一场方程.

(3) 发现相互作用的对偶性: 场粒子 (媒介子) 的对偶性与作用力在吸引与排斥共存方面的对偶性.

(4) 揭示出强作用力和弱作用力来源于强荷 g_s 与弱荷 g_w, 它们的作用与电荷 e 在电磁场的作用是相同的.

(5) 由 PRI 给出弱作用势 W_μ 和强作用势 S_μ 为

$$W_\mu = \omega_a W_\mu^a, \quad S_\mu = \rho_k S_\mu^k \quad (\mu = 0, 1, 2, 3), \tag{5.8.1}$$

其中 ω_a 和 ρ_k 为 $SU(2)$ 和 $SU(3)$ 张量, W_μ^a 和 S_μ^k 为描述弱和强相互作用的 $SU(2)$ 与 $SU(3)$ 规范场. 从而确立了

$$\begin{aligned} &\text{弱力 } F_w = -g_w \nabla W_0, \quad \text{弱作用磁场 } H_w = \text{rot } \vec{W}, \\ &\text{强力 } F_s = -g_s \nabla S_0, \quad \text{强作用磁场 } H_s = \text{rot } \vec{S}\,. \end{aligned} \tag{5.8.2}$$

这些弱和强作用力的形式与电磁的形式完全一样.

(6) 给出暗物质暗能量统一理论. 即给出暗物质暗能量的物质形式是引力子和它的对偶粒子 (自旋 $J = 1$ 的无质量中性粒子) 以及描述它们的场方程, 同时又给出与暗物质暗能量观测相吻合的作用力公式.

(7) 根据 (5.8.1) 从统一场方程分别推出强荷作用势 $\Phi_s = S_0$ 与弱荷作用势 $\Phi_w = W_0$ 的公式. 它们具有分层的独特性质, 并很好地解释了弱子禁闭、夸克禁闭、渐近自由、核子的强作用力以及强作用力和弱作用力的短程性. 与观测资料很好地相符.

(8) 由 PID 提供了与 Higgs 机制完全不同的但是等效的自发对称破缺机制. 实现了 Nambu 在他的诺贝尔奖演讲中提出的希望能找到由第一原理推出自发对称破缺机制的理论方案以取代 Higgs 的人工机制这一愿望.

(9) 由弱作用和强作用势理论 (5.8.1) 与 (5.8.2) 以及它们的作用势公式, 关于亚原子粒子建立了能级理论. 推出了亚原子粒子具有弱作用和强作用磁矩. 此外也导出媒介子具有有限分立能级的结论, 并给出相邻能级差的估计.

难以想象的是, 以上大量的结果和许多看上去毫不相关的结论竟然是从两个基本原理导出. 这充分说明从最基本的地方入手来发展物理学是一条正确的道路. 将物理观念转化成数学, 再从数学的结构揭示物理这也是一条艰难但是富有成效的道路.

下面给出各节的评注.

5.1 节: 这一节主要是给出支持 PID 的四个物理事实, 这此证据是强有力的. 关于暗物质现象最早是由荷兰天文学家 J. Oort 在 1932 年首次提出 (没有发表论文), 他发现了银河系星体轨道速度比理论值要大. 随后在 1933 年瑞士天文学家 F. Zwicky 从星系团中的星系轨道速度也发现了这种现象 (Zwicky, 1933). 在 1970 年 V. Rubin 提出准确的星系旋转速度曲线 (Rubin, Ford, 1970) 和 (Rubin et al., 1980), 从而明确证实了暗物质现象. 暗物质到目前为止仍是一种假设, 还没有明确的观测资料证实它的存在.

暗能量也是一种新的能量假设形式, 它与通常的物质能量不同的是暗能量在物质之间产生斥力. 暗能量现象被明确认可是由 Ress 和 Schimidt 领导的小组与 Perlmutter 领导的小组分别在 1998 年和 1999 年提供的天文观测资料所确定, 见 (Riess et al., 1998) 和 (Perlmutter et al., 1999). 这三个人因为暗能量的发现被授予 2011 年度的诺贝尔物理奖. 而暗能量现象是由 G. Paal 等首次提出 (Paal et al., 1992).

为了解释暗能量现象, 一些物理学家建议采用宇宙常数项. 但是在 Einstein 的引力场方程中加入宇宙常数项后会产生更严重的问题. 它与实验具有 10^{100} 数量级的误差, 见 (Kaku, 1993).

Higgs 粒子在 2012 年被宣布在 90% 的正确性下存在. 在 2013 年它被肯定地证实. 从而 Higgs 机制提出者中的 Higgs 和 Englert 获得 2013 年度的诺贝尔奖. Higgs 粒子的证实有力地支持自发对称破缺的质量产生机制. 因而也是对 PID 的有力支持.

5.2 节: 统一场方程 (5.2.15)-(5.2.20) 关于四种相互作用场的耦合是表现在场方程 (5.2.15)-(5.2.18) 的等式右端. 注意到场方程左端是满足广义相对性原理、Lorentz 不变性原理以及规范不变性原理的作用量产物, 而方程右端是 PID 与 PRI 的产物. 所谓统一场理论就是找到能将四种相互作用场耦合到一起的场方程. 因此 PID 与 PRI 很自然地做到了这一点.

由 5.2.4 小节给出的结论是统一场理论最重要的输出结果之一. 经典的 $SU(N)$ 规范理论给出 N^2-1 个规范场 G_μ^k $(1 \leqslant k \leqslant N^2-1)$. 在这 N^2-1 个场中我们

无法知道哪一个是描述作用力的. 特别地, 在 GWS 弱电理论和关于强相互作用的 QCD 理论中, 我们都无法知道产生弱作用势和强作用势的作用力源是什么, 然而 (5.2.32) 和 (5.2.33) 明确给出了描述弱和强作用势的场, (5.2.35) 表明弱和强作用力源分别是弱荷 g_w 与强荷 g_s. 这两个常数 g_w, g_s 与电荷 e 是一样的, 它们产生于规范场的耦合, 因而作为弱和强相互作用力源是非常自然的.

5.3 节: 大自然显示四种相互作用各自具有很强的独立性, 因此这就要求任何合理的统一场理论应具有很自然的退耦性. 特别地, 四种相互作用之间的耦合参数应该很小. 由 PID 与 PRI 提供的统一场模型很好地满足了这一条件.

相互作用的对偶性是 PID 与 PRI 统一场理论最具特色的结果. 它的粒子对偶性在弱子模型中显示了巨大作用, 同时在暗物质与暗能量的作用力公式 (5.3.18) 以及强作用势和弱作用势公式 (5.4.38) 与 (5.5.25) 中也显示出吸引力与排斥力的对偶性.

5.4 节: 强相互作用势公式 (5.4.38) 能够实质性地决定三个层次的粒子结构: 胶子、强子、原子核. W^* 弱子的强荷势决定了胶子的束缚能, 夸克势成功地解释了夸克禁闭与渐近自由, 核子势提供的理论数据 (图 5.5 所示) 与散射实验给出的数据 (图 5.4 所示) 具有非常好的吻合. 关于实验数据的图 5.4 可见 (Weisskopf, 1972) 中 20 世纪物理学这一篇. 通过与核子强作用实验数据对照确定出强荷 g_s 的数值为

$$g_s^2 = \frac{1}{12\sqrt{e}} \times 10^{16}\hbar c, \quad e(=2.718\cdots)\text{为自然常数.} \tag{5.8.3}$$

公式 (5.4.52) 中核子强作用力常数 A_n 数值为

$$A_n = 8\sqrt{e} \times 10^{-3}, \quad e \text{ 为自然常数.} \tag{5.8.4}$$

5.5 节: 弱作用势公式 (5.5.12) 主要控制媒介子、带电轻子与夸克这两个粒子层次的内部结构. 同时, 该公式也给带电轻子与夸克提供了外层媒介子吸附层. 换句话讲, 带电轻子与夸克是由它们的核, 即裸电子与裸夸克与它们的外层媒介子吸附层一起构成. 带电轻子吸附层是由弱作用力造成, 夸克的光子与 ν 子吸附层由弱作用力产生, 而夸克的胶子吸附层则主要是由强作用力产生.

5.6 节: 虽然高能加速器产生出成百上千种不同粒子, 但是展现在我们面前的亚原子粒子个数仍是有限的, 并且能谱是分立的. 当我们关于亚原子粒子建立了弱子结构模型并且给出束缚势公式后, 从 Dirac 方程和 Weyl 方程便可以推出质量粒子的谱方程 (5.6.44) 以及无质量粒子的谱方程 (5.6.46). 从这些谱方程可证得能谱的有限分立性.

谱方程 (5.6.44) 的推导过程参照了 (索科洛夫等,1983). 椭圆算子的谱定理 5.11 是经典结果, 可参见 (马天, 2011). 定理 5.12 和定理 5.13 由作者给出. 关于特征值公式 (5.6.33) 也可见 (Temam, 1997).

5.7 节：这节从谱方程推出所有亚原子粒子能谱是有限的. 对于质量粒子来讲, 这个结论是情理之中. 但是对于无质量的光子来讲, 这个结果是不平凡的. 媒介子的能级差估计 (5.7.63) 也解释了为什么我们没有观察到光子能谱的有限性. 媒介子能谱的有限性再结合弱子交换的衰变机制可能对量子场论会产生影响.

关于一阶微分算子的谱理论, 即定义 5.17 及定理 5.18 是由作者发展的. 数学理论与物理同步发展是我们独特的研究风格.

参 考 文 献

陈维恒, 李兴校. 2002. 黎曼几何引论 [M]. 北京: 北京大学出版社.

陈文塬. 1981. 非线性泛函分析 [M]. 兰州: 甘肃人民出版社.

黄克孙. 1982. 夸克、轻子与规范场 [M]. 丁亦兵, 译. 北京: 北京师范大学出版社.

朗道, 粟弗席兹. 1959. 场论 [M]. 任朗, 袁炳南, 译. 北京: 人民教育出版社.

马天. 2010. 流形拓扑学 —— 理论与概念的实质 [M]. 北京: 科学出版社.

马天. 2011. 偏微分方程理论与方法 [M]. 北京: 科学出版社.

马天. 2012. 从数学观点看物理世界 —— 几何分析, 引力场与相对论 [M]. 北京: 科学出版社.

马天, 汪守宏. 2007. 非线性演化方程稳定性与分歧 [M]. 北京: 科学出版社.

彭桓武, 徐锡申. 1998. 理论物理基础 [M]. 北京: 北京大学出版社.

索科洛夫, 罗斯库托夫, 捷尔诺夫. 1983. 量子力学原理 [M]. 王祖望, 译. 上海: 上海科学技术出版社.

特雷纳, 怀斯. 1987. 理论物理导论 [M]. 冯承天, 李顺祺, 张民生. 译. 张民生, 校. 北京: 科学出版社.

瓦内尔. 2008. 微分流形与李群基础 [M]. 谢孔彬, 谢云鹏, 译. 北京: 科学出版社.

王正行. 1995. 近代物理学 [M]. 北京: 北京大学出版社.

韦伯. 1977. 广义相对论与引力波 [M]. 陈风至, 张大卫, 译. 北京: 科学出版社.

伍鸿熙, 陈维桓. 1993. 黎曼几何选讲 [M]. 北京: 北京大学出版社.

俞允强. 1987. 广义相对论引论 [M]. 北京: 北京大学出版社.

张恭庆. 1986. 临界点理论及其应用 [M]. 上海: 上海科技出版社.

章乃森. 1994. 粒子物理学. 上、下册 [M]. 北京: 科学出版社.

钟承奎, 范先令, 陈文塬. 1998. 非线性分析引论 [M]. 兰州: 兰州大学出版社.

Bohm A. 1986. Quantum Machanism: Foundations and Applications [M]. 2nd Ed. New York: Springer.

Cabibbo N. 1963. Unitary symmetry and leptonic decays [J]. Phys. Rev. Lett. 10(12): 531-533.

Chow B, Lu P, Ni Lei. 2006. Hamilton's Ricci Flow [M]. Providence: AMS, Graduate Studies in Math., 19.

Courant R, Hilbert D. 1948. Methods of Mathematical Physics I. II [M]. New York: Interscience-Wiley.

Englert F, Brout R. 1964. Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons [J]. Phys. Rev. Lett. 13(9): 321.

Fermi E. 1934. Tentativo di una teoria dei raggi β [J]. Z. Phys. 88: 161.

Feynman R, Gell-Mann M. 1958. Theory of the Fermi interaction [J]. Phys. Rev. 109: 193-198.

Glashow S L. 1961. Partial symmetries of weak interactions [J]. Nucl. Phys. 22: 579.

Glashow S L, Iliopoulos J, Maiani L. 1970. Weak interactions with lepton-hadron symmetry [J]. Phys. Rev. D3, 1043.

Gottingham W N, Greenwood D A. 2007. An Introduction to the standard model of particle physics [M]. Cambridge: Cambridge University Press.

Greenberg O W. 1964. Spin and unitary-spin independence in a paraquark model of bayons and mesons [J]. Phys. Rev. Lett. 13: 598-602.

Greiner W, Muller B. 1992. Quantum Mechanics Symmetries [M]. Berlin Heidelberg: Springer.

Griffiths D. 2008. Introduction to Elementary Particles [M]. Weinheim: Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA.

Gross D J, Wilczek F. 1973. Asymptotically free gauge theories [J]. Phys. Rev. D 8(10): 3633.

Guralnik G S, Hagen C R, Kibble T W B. 1964. Global conservation laws and massless particles [J]. Phys. Rev. Lett. 13: 585.

Herrero M. 1998. The standard model [J]. arXiv: 9812242v.

Higgs P W. 1964. Broken symmetries, massless particles and gauge fields [J]. Phys. Lett. 12(2): 132-201.

Kaku M. 1993. Quantum Field Theory [M]. Oxford: Oxford University Press.

Klein O. 1938. New Theories in Physics. 77, Intern. Inst. Of Intellectual Co-operation, League of Nations.

Kobayashi M, Maskawa K. 1973. CP-Violation in the renomalizable theory of weak interaction [J]. Prog. Theor. Phys. 49(2): 652-657.

Lee T D. 1961. CERN Report 61-30.

Lee T D, Yang C N. 1956. Question of parity conservation in weak interactin [J]. Phys. Rev. 104(1): 254.

Ma T, Wang S. 2005a. Geometric Theory of Incompressible Flows with Applications to Fluid Dynamics [M]. Providence RI: AMS, Math. Surv. Monogr., 119.

Ma T, Wang S. 2005b. Bifurcation Theory and Applications [M]. Singarpore: World Scientific.

Ma T, Wang S. 2012a. Unified field equations coupling four forces and principle of interaction dynamics [J]. arXiv: 1210.0448.

Ma T, Wang S. 2012b. Unified field theory and principle of representation invariance [J]. arXiv: 1212.4893.

Ma T, Wang S. 2013a. Phase Transition Dynamics [M]. New York: Springer.

Ma T, Wang S. 2013b. Weakton model of elementary particles and decay mechanism. Submitted.

Ma T, Wang S. 2013c. Unified field theory and principle of representation invariance [J]. Appl. Math. Optim., 68:2.

Ma T, Wang S. 2014a. Gravitational field equations and theory of dark matter and dark energy [J]. Dist. Contin. Dyna. Syst., 34(2): 335-366.

Nambu Y, Jona-Lasinio G. 1961. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity [J]. Phys. Rev., 122: 345-358.

Paal G, Horvath I, Lukacs B. 1992. Inflation and compactificatin from galaxy redshifts? [J]. Astro. Space Sci., 191: 107.

Perlmutter, et al. 1999. Measurements of Omega and Lamda from 42 high redshift supernovae [J]. Astro. J., 517(2): 565-586.

Politzer H D. 1974. Asymptotic freedom: an approach to strong interactions [J]. Phys. Rep., 14c: 129.

Riess A G, et al. 1998. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant [J]. Astro. J., 116(3): 1009-1038.

Rubin V, Ford W K. 1970. Rotation of the Andromeda Nebla from a spectroscopic survey of emission Regions [J]. Astro. J., 159: 379.

Rubin V, Thonnard N, Ford W K. 1980. Rotation propeties of 21 Scgalaxies with a large range of luminosities and radii from NGC 4605 (R=4kpc) to UGC 2885(R=122kpc) [J]. Astro. J., 238: 471.

Salam A. 1968. Elementary particle physics: relativistic groups and analyticity [M]. Stockholm: Almquvist and Wiksell.

Shaw R. 1954. The problem of particle type and other contributions to the theory of elementary particles [T]. Cambridge University Ph. D. thesis.

Sudarshan G, Marshak R E. 1957. The nature of the four-fermion interaction [J]. Proc. of Padua-Venice Conf. on Messons and Newly Discovered Particles.

Temam R. 1997. Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics [M]. Berlin: Springer.

Utiyama R. 1956. Invariant theoretical interpretation of interaction [J]. Phys. Rev., 101(5): 1597-1607.

Wang K C. 1942. A suggestion on the detection of the neutrino [J]. Phys. Rev., 61(1-2): 97.

Weinberg S. 1967. A model of leptons [J]. Phys. Rev. Lett. 19(21): 1264-1266.

Weisskopf V F. 1972. Physics in the Twentieth Century [M]. Selected Eassys, MIT Press.

Weyl H. 1919. Ann. Physik., 59(2): 101.

Weyl H. 1921. Space-time-matter [M]. New York: Dover.

Weyl H. 1929. Elektron und gravitation I [J]. Z. f. Physik., 56: 330-352.

Wu C S, et al. 1957. Experimental test of parity conservatin in beta decay [J]. Phys. Rev., 105(4): 1413-1415.

Yang C N, Mills R L. 1954. Conservation of insotopic spin and isotopic gauge invariance [J]. Phys. Rev., 96(1): 191-195.

Zwicky F. 1933. Die rotverschiebung von extra-galaktischen Nebeln [J]. Helv. Physica Acta, 6: 110-127.

索　　引

A

暗能量, 37, 47, 68
暗物质, 37, 47, 68

B

B-E 统计, 56
Bohr
　量子化, 48, 51
　原子模型, 373
标量势定理, 287, 319
标准模型, 45, 58, 67
表示不变性原理, 4, 8, 47

C

Cabibo 角, 179, 180, 181
CKM 矩阵, 179, 180, 182
超荷, 80, 106, 107

D

de Broglie
　波长, 52
　物质波, 51, 52
Dirac
　方程, 3, 13
　旋量, 13, 23
等效原理, 3, 10, 32
电磁相互作用, 4, 13, 24
动质能三角公式, 22, 25, 26
对称性, 1, 3, 6

E

Einstein
　场方程, 4, 13
　Hilbert 作用量, 3
　相对性原理, 3
e-p 非弹性散射, 219

F

Fermi 理论, 44, 171, 172
Fermi-Dirac 统计, 56
反常磁矩, 86, 87, 88
方程协变性, 18
负特征值数估计, 380

G

Galileo
　变换, 33
　不变性原理, 32
GWS 理论, 45, 194, 196
规范不变性原理, 4, 8, 12
广义相对性原理, 3, 8, 10

H

Hamilton 动力学原理, 3, 67
Heisenberg 测不准原理, 55
Higgs
　粒子, 42
　机制, 42, 45
Hodge 定理, 264

I

IVB 理论, 44, 45, 186

J

角动量规则, 65, 66, 127
介子, 9, 27, 30
胶子, 42, 70, 71
渐近自由, 40, 47, 157

K

Klein-Gordon 方程, 3, 13
夸克, 27, 28, 30
夸克禁闭, 31, 40, 47

L

Lagrange
　动力学原理, 2, 3
　密度, 3
　作用量, 2, 6
Laplace-Beltrami 算子, 263, 264, 273
Lorentz
　变换, 3, 7, 8
　不变性原理, 3, 19
　群, 13, 16
　张量, 3, 4, 10
粒子衰变与散射, 145, 146, 147
量子规则, 3, 57, 60
量子数, 6, 8, 55
零散度约束变分定理, 286, 287
联络, 241, 253, 254

M

Maxwell 方程, 13, 37, 38
MSW 效应, 91
Minkowski 空间, 20, 25, 34
媒介子谱方程, 376, 403

N

Noether 定理, 6, 8

P

Pauli
　不相容原理, 30, 55
　矩阵, 45, 60
Planck
　公式, 50
　量子假设, 48, 49, 50
PID, 2, 4, 5

Q

强子, 27, 28, 30
强相互作用
　荷, 27, 28
　力, 27, 28, 42
　势, 27, 28, 42
　势分层公式, 352
切丛, 242, 247, 255
轻子, 6, 9, 28

R

Rubin 转动曲线, 322
韧致辐射机制, 154, 155
弱子
　交换机制, 142, 143
　模型, 126, 128

S

Schrödinger 方程, 3, 52
SU(N)
　规范场, 165, 166
　群表示, 12

生成元, 12, 164, 165
张量, 114, 291
散度算子, 260, 264, 265
色代数, 216, 217, 220
守恒量, 5, 6, 8
四维张量场, 39
四维向量场, 20, 24, 38

T

梯度算子, 27, 128, 260
同位旋, 6, 9, 79
统一场
几何学, 237, 238, 239
方程, 4, 13, 68

V

$V-A$ 理论, 44, 45, 171
Vierbein 张量, 314

W

Weyl
方程, 376
估计式, 380, 383, 406
算子, 384
WS 作用量, 171, 196, 197
Weinberg 角, 45
无质量粒子谱方程, 395

X

相互作用动力学原理, 2, 3, 4
向量丛, 169, 242, 243
协变导数, 4, 11, 167
旋量表示, 61, 62, 251

Y

Yang-Mills
规范理论, 162
作用量, 25, 165
Young 图, 115, 119, 121
Yukawa 势, 27, 358
亚原子粒子谱方程, 375
宇称不守恒, 44, 93, 96
余切丛, 247, 255

Z

质量粒子谱方程, 357, 395
重子, 6, 9, 27
中微子振荡, 89, 90, 91
中间矢量 Bose 子, 44, 129, 171
自发对称破缺机制, 190, 194, 196
自旋, 44, 52, 55