P.T. 马 修 斯

基本粒子
相互作用的
相对论性
量子理论

科 学 出 版 社

53.833
447.1

基本粒子相互作用的相对論性量子理論

P. T. 馬修斯著

黃念宁譯

科学出版社

1962

P. T. MATTHEWS

THE RELATIVISTIC QUANTUM THEORY OF ELEMENTARY PARTICLE INTERACTIONS

Rochester, New York, 1957.

内 容 簡 介

本书扼要地介紹了現代量子場論的最新的基本原理. 书中主要研究場的連續变換和分立变換以及由相互作用相对于这些变換的不变性要求所得出的普遍結果. 作者从統一观点, 頗为全面地研究了洛仑茲变換和規范变換以及近年来为物理学家所注目的一些变換, 詳細地介紹了三类問題: i)弱相互作用中宇称不守恆、双分量中微子理論等; ii)基本粒子的系統和分类、盖尔曼系; iii)強相互作用及其电荷不变性和电荷对称性等. 原书对了解基本粒子相互作用的相对論性量子理論方面的大量文献, 提供了必需的理論基础知識.

本书可供基本粒子物理学、宇宙綫物理学和核物理学及其分支学科的科学工作者参考, 也可供理論物理学、核物理学专业的高年級学生和研究生参考.

基本粒子相互作用的相对論性量子理論

P. T. 馬修斯著

黃 念 宁 譯

科学出版社出版 (北京朝阳門大街 117 号)

北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷 新华书店总經售

1962 年 9 月第 一 版 书号: 2599 字数: 123,000

1962 年 9 月第一次印刷 开本: 850×1168 1/32

(京) 0001—3,650 印张: 5

定价: 0.85 元

中譯本譯者前言

本书无疑是本好书，自从預印本印出以后，得到了不少好評，关于它的內容介紹請参看俄譯本譯者前言。

中譯本原是在 1959 年夏季根据藤井所記录的馬修斯演講的預印本譯出的，由于記录稿难免有錯誤，譯者在翻譯时作了一些訂正。随后俄譯本出版了，譯者又根据俄譯本逐句校訂，把俄譯本的补充得更詳細的部分和更明确的叙述等优点，都吸收到中譯本中来。然而，有时俄譯本改动了一些不必改动的地方，在个别地方增加了少数不合于一般看法的附注，这时中譯本还是保留原本的面貌。

在中譯本中，譯者根据現今量子場論的通用記法，改变了原本中的一个重要公式的写法，这完全是为了我国讀者在閱讀中不致引起不必要的困惑，但为慎重起見，在这里声明一下。

在第二章 § 5 条 2 中的(5.10)式，原記录稿写为

$$\phi'(x') = U_a\phi(x)U_a^{-1} = S\phi(a^{-1}x'),$$

中譯本写作

$$\phi'(x) = U_a\phi(x)U_a^{-1} = S\phi(a^{-1}x).$$

按通用的量子場論文献[1, 2, 16, 28, 29, 54]，原記录稿中的式子的意思是，x 和 x' 为某一物理点 P 在旧坐标系和新坐标系中的坐标，这样原式表示，变換算符 U_a 把同一物理点在旧坐标系和新坐标系中的場量联系起来。改后的式子的意思是，x 为某物理点 P 在旧坐标系中的坐标值，而另一物理点 P' 在新坐标系中的坐标值也是 x，改后的式子表示变換算符 U_a 把不同两点 P 和 P' 在旧、新坐标系中的場量联系了起来。这样原式只涉及同一物理点的場的內部性質，而改后的式子表示两个不同的物理点的場的相互关系，因而也論及場的运动性質。所以宜采用改后的式子的記法。

这問題可能由于記录者的笔誤，但俄譯者也未按通常了解訂正此式。这点如有問題由中譯者負責。

由于此一改写而关联其他式子的改写这里不再一一列出了。

最后，譯者对胡宁教授表示衷心的感謝，在訂正本书的公式中，得到了他的許多帮助。

黃 念 宁

俄譯本譯者前言

本书是根据著名的英国理論家馬修斯于 1957 年在洛切斯特大学(美国)給物理研究生所作的演講的預印本譯出的.

在簡要地引入了現代量子場論的基本概念之后，作者清晰而循序漸进地叙述了这方面最新的基本原理，且証明未局限于某种近似(如微扰論方法). 在整个叙述中,主要是研究場的連續变換和分立变換，以及由相互作用相对于这些变換的不变性要求所得出的普遍結果.

本书从統一的观点并足够全面地研究了洛仑兹变換和規范变換，以及近来为物理学家所注目的一些变換，如空間反射、时間反演和电荷共軛. 与此相关的,詳細研究了三类問題: a) 弱相互作用中宇称不守恆、双分量中微子理論等等; b) 基本粒子的系統和分类、盖尔曼系; c) 強相互作用、它們的电荷不变性、电荷对称性等等.

馬修斯的演講，除了其叙述之清晰和資料掌握之全面等无可爭辯的优点外，看来其优点还在于在演講中第一次汇集了散見于大量杂志論文中的資料.

最后指出,本講义的缺点是叙述过分簡略,以致使对一些問題的了解造成困难. 俄譯本为竭力消除这种缺点,采用了更詳細的叙述,在原文的某些地方采用了較自由的翻譯,并且对譯本附加了一些注释. 此外,还校正了公式和說明中的所有的印刷錯誤和不明确之处.

在馬修斯的講义出版之后，出現了苏达珊、馬尔夏克和費曼、盖尔曼的工作,这是弱相互作用的理論发展中的重要阶段. 在这些工作中，建立了四費米子的弱相互作用的与实驗很好符合的普遍定律. 因此,馬修斯书中关于弱相互作用的叙述現今看来是不

完善的，所以在譯本中补充对这些工作的基本結果的叙述，可能是恰当的。这一附录是譯者所編写的，放在书末。

本书适用于在基本粒子物理学、宇宙綫物理学和核物理学的其他分支学科的領域內工作的专家。本书也适用于以理論物理学和核物理学为专业的物理系研究生和高年級大学生。

B. 李图斯

IO. 烏沙巧夫

原　序

本书的基础是 P. T. 馬修斯博士（英国伯明翰大学教授）从 1957 年 2 月到 5 月間在洛切斯特大学物理系所作的演講.

这一演講的目的是为了給研究生提供必需的理論基础，以便了解基本粒子相互作用的相对性量子理論方面的大量文献. 我們假定讀者熟悉場論的基本知識，例如温泽的书（特别是自由場用吸收算符和放出算符的展开式），并且一般地了解基本粒子物理中現今的实驗状况.

原演講还包括用費曼-戴逊图形方法的微扰論. 本书只保留了海森堡表象、薛定格表象和相互作用表象間的联系的理論. 这一方法的詳細叙述，参看书[1, 2].

这里所包含的內容主要是关于基本粒子相对性相互作用的理論中的最普遍的結果，与微扰論近似无关.

目　　录

中譯本譯者前言……vii

俄譯本譯者前言……ix

原序……xi

第一章　費曼-戴逊公式……1

§1. 变換理論……1

1. 狄拉克記号……1

2. 么正变換……3

3. 薛定格表象……5

4. 海森堡表象……6

5. 相互作用表象……8

§2. 协变微扰論……9

1. S 矩陣及过渡几率……9

2. S 矩陣的微扰解……11

3. 与非协变微扰論的比較……13

§3. 光学定理(玻尔-派尔斯-普拉册克关系)……17

§4. 散射振幅的严格形式……20

1. 传播量……20

2. 传播量用海森堡算符的表示……23

3. 交叉对称……26

第二章　分立变換……28

§5. 物理系統的不变性质……28

1. 古典場的不变性质……28

2. 量子化場的不变性质……29

3. 应用……31

§6. 相对論协变的場……33

1. 洛仑兹变換……33

2. 标量場和贋标量場……34

3. 矢量場(电磁場)……37

06042

4. 旋量場……38
5. γ矩陣的代数……42
6. 矩陣 A, B, C 和 E……44
7. γ矩陣的厄米表象和矩陣 $\bar{C}$……47
8. 双綫型协变量……50
§7. 空間反射和宇称……53
1. 标量場和贋标量場……53
2. 电磁場……55
3. 旋量場……56
4. 双綫型协变量和相互作用……58
5. 应用……60
§8. 电荷共軛(正反粒子共軛)……61
1. 标量場和贋标量場……61
2. 旋量場……63
3. 电荷共軛下的相互作用……65
4. 应用……67
5. 氫衰变的选择定則……68
§9. 强反演……70
1. 力学系統的可反演性……70
2. 时空強反演和时間強反演……72
3. 強反演下相互作用的性質……74
4. 強反演定理(CTP 定理)……76
§10. 弱反演……78
1. 时空弱反演和时間弱反演……78
2. 时間弱反演下的双綫型协变量……78
3. 相关过程……80
4. 倒易定理……82
5. K矩陣的实数性条件……83
6. 拉氏量密度的构成……85
§11. 弱相互作用中某些守恆定律的破坏……87
1. 強相互作用和弱相互作用……87
2. 在弱相互作用中宇称不守恆的实驗証明……90
3. 末态定理……93
4. 双分量中微子理論……95
5. 电荷共軛粒子的衰变……98

第三章　連續变換 …… 100
§12. 与連續变換相关的守恆定律 …… 100
1. 两类連續变換 …… 100
2. 規范变換 …… 101
3. c 量相角的規范变換 …… 102
§13. 电荷規范变換及电磁場 …… 103
1. 电荷和电流 …… 103
2. 电磁場与带电粒子場的相互作用 …… 105
3. 与旋量場的磁矩的相互作用 …… 107
§14. 相互作用中的重子規范变換及超荷規范变換 …… 108
1. 馬約拉納中性粒子和贋中性粒子 …… 108
2. 重子規范与超荷規范 …… 109
3. 基本粒子的分类与最小电磁相互作用原理 …… 110
§15. 自旋 …… 111
1. 在轉动下場的內部变动 …… 111
2. 旋量場 …… 113
3. 标量場与矢量場 …… 115
§16. 电荷独立 …… 116
1. 同位旋公式 …… 116
2. 电荷独立的強相互作用 …… 118
3. 基本粒子的宇称和电荷独立 …… 121
4. K°, $\bar{K}^\circ$ 粒子的产生与 K_1, K_2 粒子的衰变 …… 125
5. π 介子物理学 …… 127
§17. 电荷对称 …… 131
1. 电荷对称 …… 131
2. 广义电荷共軛(G 运算) …… 133
3. 对核子与反核子的湮灭的选择定則 …… 134
参考文献 …… 136
附录　关于弱相互作用理論的現状 ……
…… B. И. 李图斯 和 Ю. Д. 烏沙巧夫 139

第一章　費曼-戴逊公式

§1. 变换理論[1)]

1. 狄拉克記号. 量子力学系統 ψ 由"刃"矢量 $|\psi\rangle$ 或"刁"矢量 $\langle\psi|$ 来表示，这里按定义

$$\langle\psi| = |\psi\rangle^+, \tag{1.1}$$

+ 字号表示厄米共軛运算，即轉置加复数共軛的运算. 厄米算符 α 滿足下列关系：

$$\alpha = \alpha^+. \tag{1.2}$$

把它从左方作用于刃矢量或从右方作用于刁矢量

$$\alpha|\psi\rangle, \qquad \langle\psi|\alpha^+ = \langle\psi|\alpha, \tag{1.3}$$

就把它們变成另外的刃矢量或刁矢量. 在这一节中，我們将用黑体字母表示該量是一算符. 在量子力学中，任何力学变量或可观察量(坐标 $\mathbf{q}$，动量 $\mathbf{p}$，哈密頓量 $\mathbf{H}$，自旋 σ 等等)是厄米算符. 算符 α 的本征值写作 α'，而其本征矢量写作 $|\alpha'\rangle$；即

$$\alpha|\alpha'\rangle = \alpha'|\alpha'\rangle. \tag{1.4}$$

可观察量的所有本征矢量的集合滿足下列两个条件：

1) 正交归一性条件：

$$\langle\alpha'|\alpha''\rangle = \delta(\alpha', \alpha''), \tag{1.5}$$

这里

$\delta(\alpha', \alpha'') = \delta_{\alpha', \alpha''}$，若 α', α'' 屬于分立值譜；

$\delta(\alpha', \alpha'') = \delta(\alpha' - \alpha'')$，若 α', α'' 两者之一或两者均屬于連續值譜.

2) 完备性条件：

---

1) 关于本节所討論的問題参看[3]的第 2—5 章和 § 44.

$$S_{\alpha'}|\alpha'\rangle\langle\alpha'| = I, \tag{1.6}$$

这里

$S_{\alpha'} = \sum_{\alpha'}$, 若 α' 属于分立值譜;

$S_{\alpha'} = \int d\alpha'$, 若 α' 属于連續值譜.

而 I 表示单位算符.

矢量 $|\psi\rangle$ 在 $|\alpha'\rangle$ 方向的分量为 $\langle\alpha'|\psi\rangle$, 这里按定义

$$\langle\alpha'|\psi\rangle = \langle\psi|\alpha'\rangle^*,$$

而星号 $*$ 表示复数共軛.

若在态 ψ 中测量可观察量 α, 則发現它的值为 α' 的几率由下式决定

$$P_\psi(\alpha') = |\langle\alpha'|\psi\rangle|^2. \tag{1.7}$$

例. 在一維空間中单个粒子的薛定格波函数的形式为

$$\langle x|\psi\rangle = \psi(x),$$

在点 x 处发現粒子的几率为

$$P_\psi(x) = |\langle x|\psi\rangle|^2 = |\psi(x)|^2.$$

坐标表象和动量表象間的变換函数为[1)]

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipx}.$$

所以,利用完备性質:

$$\int\cdots p\rangle\langle p\cdots dp = I,$$

得到

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle = \int\langle x|p\rangle\langle p|\psi\rangle dp =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{ipx}\langle p|\psi\rangle dp.$$

同样,利用

$$\int\cdots x\rangle\langle x\cdots dx = I,$$

---

1) 参看 [3], § 23.

得到

$$\langle p|\psi\rangle = \int\langle p|x\rangle\langle x|\psi\rangle dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-i(px)}\langle x|\psi\rangle dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-i(px)}\psi(x)dx.$$

这些关系是周知的由坐标空間到动量空間的富氏变换和其逆变换.

2. 么正变换. 設 α_i 是一組厄米算符，U 是任意么正算符，即满足下列关系的算符:

$$U^+U = I \quad 或 \quad U^+ = U^{-1}. \tag{1.8}$$

利用下式确定一組新算符:

$$\check{\alpha}_i = U\alpha_i U^{-1}, \tag{1.9}$$

則对算符 $\check{\alpha}_i$ 存在下列定理:

定理. 算符 $\check{\alpha}$ 与算符 α 有同样的本征值.

証明. 由关系

$$\alpha|\alpha'\rangle = \alpha'|\alpha'\rangle$$

得出

$$U\alpha U^{-1}U|\alpha'\rangle = \alpha' U|\alpha'\rangle.$$

令 $U|\alpha'\rangle = |\check{\alpha}'\rangle$，可以得到

$$\check{\alpha}|\check{\alpha}'\rangle = \alpha'|\check{\alpha}'\rangle.$$

定理. 算符 $\check{\alpha}$ 和算符 α 一样是厄米的.

証明.

$$\check{\alpha}^+ = (U\alpha U^{-1})^+ = (U^{-1})^+\alpha U^+ = (U^+)^+\alpha U^+$$
$$= U\alpha U^{-1} = \check{\alpha}.$$

現在証明，么正变换

$$\check{\alpha} = U\alpha U^{-1}, \quad |\check{\psi}\rangle = U|\psi\rangle \tag{1.10}$$

保持一切关系不变. 首先注意

$$\langle\check{\psi}| = |\check{\psi}\rangle^+ = (U|\psi\rangle)^+ = \langle\psi|U^+, \tag{1.11}$$

所以若矢量 $|\psi\rangle$ 是归一化的，則矢量 $|\check{\psi}\rangle$ 也是归一化的:

$$\langle\check{\psi}|\check{\psi}\rangle = \langle\psi|U^{+}U|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle = 1.$$

任何方程都保持不变，这是由于

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2|\psi\rangle = |\phi\rangle,$$

$$U\alpha_1U^{-1}U\alpha_2U^{-1}|\psi\rangle = U|\phi\rangle,$$

得到

$$\check{\alpha}_1 \cdot \check{\alpha}_2|\check{\psi}\rangle = |\check{\phi}\rangle,$$

同样由方程

$$(\alpha_1 + \alpha_2)|\psi\rangle = |\phi\rangle,$$

得

$$(\check{\alpha}_1 + \check{\alpha}_2)|\check{\psi}\rangle = |\check{\phi}\rangle.$$

对包含算符的更复杂的函数的方程，情况也是一样的，把这一函数展开为幂級数并逐项应用乘法和加法运算，即可容易地証明这一点.

特别，正則对易关系相对于么正变換保持不变：

$$[\mathbf{q}, \mathbf{p}] = i. \tag{1.12}$$

所以在有記号 ∨ 的新的数学体系中，含有与在原来体系中严格一样的物理知識.

反之，如果两組算符的集合描写同一物理系統，具有同样的哈密頓量与同样的对易关系，那么它們之間可由一个么正变換相联系. 典型的例子是两种不同的表象，一种是一組算符 α_i 是对角化的，另一种是另一組算符 β_i 是对角化的. 薛定格表象、海森堡表象和相互作用表象，按照这里所講的一般原理，由么正变換互相联系.

如果 U 与单位算符之差，是一个无穷小量，那末可令

$$U = I - i\varepsilon F, \tag{1.13}$$

这里 ε 是一个无穷小参量. 逆算符可写作[1]

$$U^{-1} = I + i\varepsilon F; \tag{1.14}$$

由么正性条件：

---

1) 准至一級无穷小：$UU^{-1} = I + \varepsilon^2F^2 \approx I$.——俄譯本譯者注.

$$U^+U = (I + i\varepsilon F^+)(I - i\varepsilon F) =$$
$$= I + i\varepsilon(F^+ - F) = I, \qquad (1.15)$$

得到等式

$$F^+ = F,$$

即 F 是厄米算符. 利用这种无限小么正变换于任何算符,结果为

$$\check{\alpha} = U_\alpha U^{-1} = (I - i\varepsilon F)\alpha(I + i\varepsilon F) =$$
$$= \alpha - i\varepsilon(F\alpha - \alpha F) = \alpha - i\varepsilon[F, \alpha]. \qquad (1.16)$$

公式:

$$\check{\alpha} - \alpha = -i\varepsilon[F, \alpha]$$

在古典力学中也是正确的,如果把对易关系 $[F, \alpha]$ 解释为泊松括号,U 解释为接触变换的生成函数.

3. 薛定格表象. 运动方程描写物理系統随时間的发展,設在某一时刻 t_0,态矢是 $|\psi(t_0)\rangle$,一組算符是 $\alpha_i(t_0)$. 假定算符与时間无关,系統随时間的变化全部由与时間相关的态矢 $|\psi(t)\rangle$ 来描写,这里

$$|\psi(t)\rangle = T(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle. \qquad (1.17)$$

由几率守恆的要求,得

$$\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = \langle\psi(t_0)|T^+(t, t_0)T(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle =$$
$$= \langle\psi(t_0)|\psi(t_0)\rangle;$$

所以

$$T^+(t, t_0)T(t, t_0) = I, \qquad (1.18)$$

即 T 是么正算符. 取时間的无穷小增量 δt 作为无穷小参量,可設

$$T(t + \delta t, t) = I - iH\delta t, \qquad (1.19)$$

这里 H 是一个厄米算符,具有能量的量綱. 这样

$$|\psi(t + \delta t)\rangle = (I - iH\delta t)|\psi(t)\rangle,$$
$$|\psi(t + \delta t)\rangle - |\psi(t)\rangle = -iH|\psi(t)\rangle \cdot \delta t;$$

所以

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle. \qquad (1.20)$$

这就是薛定格运动方程，只要假定H是哈密頓量。 这如同牛頓运动定律一样，是一个物理定律，因为它的結論已被实验証实，因此是有意义的。

在坐标q对角化的表象中，有

$$H = H(q, p) = H\left(q, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial q}\right). \tag{1.21}$$

此外

$$\langle q|\psi(t)\rangle = \psi(q, t), \tag{1.22}$$

得

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\left(q, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial q}\right)\psi. \tag{1.23}$$

这就是薛定格表象中的薛定格方程。

薛定格运动方程的另一种說法是对于T的算符方程，即

$$i\frac{\partial}{\partial t}T(t, t_0) = HT(t, t_0), \tag{1.24}$$

和边界条件：

$$T(t_0, t_0) = I. \tag{1.25}$$

它的形式解为

$$T(t, t_0) = e^{-iH(t-t_0)}. \tag{1.26}$$

4. 海森堡表象。 还可以引入另一种描写物理系統随时間发展的方法，这就是使与时間相依的只是算符，而态矢量不随时間改变。薛定格态矢$|\psi(t)\rangle_S$是[見(1.17)]

$$|\psi(t)\rangle_S = T(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle_S.$$

定义海森堡态矢$|\psi(t)\rangle_H$如下：

$$|\psi(t)\rangle_H = T^{-1}(t, t_0)|\psi(t)\rangle_S = |\psi(t_0)\rangle_S, \tag{1.27}$$

或

$$|\psi(t)\rangle_S = T(t, t_0)|\psi(t)\rangle_H; \tag{1.28}$$

(1.27)式表示把在任何时刻的矢量$|\psi(t)\rangle_S$变回到它的出发态去(在希尔伯空間中)。 按(1.28)定义的矢量$|\psi(t)\rangle_H$显然不随时間改变，相应的算符，依照上述么正变換，变为算符

$$\alpha_H(t) = T^{-1}(t, t_0)\alpha_S(t)T(t, t_0) =$$
$$= T^{-1}(t, t_0)\alpha_S(t_0)T(t, t_0), \qquad (1.29)$$

$\alpha_H(t)$ 随时間的发展为

$$i\frac{\partial}{\partial t}\alpha_H(t) = i\frac{\partial T^{-1}}{\partial t}\alpha_S T + T^{-1}\alpha_S i\frac{\partial T}{\partial t} =$$
$$= -T^{-1}H\alpha_S T + T^{-1}\alpha_S HT =$$
$$= \alpha_H(t)H_H(t) - H_H(t)\alpha_H(t).$$

所以

$$i\frac{\partial}{\partial t}\alpha_H(t) = [\alpha_H(t), H_H(t)]. \qquad (1.30)$$

这就是海森堡运动方程. 在导出(1.30)时,我們計及,由(1.24)的厄米共軛方程

$$-i\frac{\partial T^+}{\partial t} = T^+H,$$

得到

$$i\frac{\partial T^{-1}}{\partial t} = -T^{-1}H. \qquad (1.31)$$

如果算符 α 在薛定格表象中是 p, q 的函数,即 $\alpha_S=\alpha(q_S, p_S)$,则在海森堡表象中也是如此,

$$\alpha_H = T^{-1}\alpha_S T = \alpha(q_H, p_H),$$

这里

$$q_H(t) = T^{-1}(t, t_0)q_S(t_0)T(t, t_0),$$
$$p_H(t) = T^{-1}(t, t_0)p_S(t_0)T(t, t_0).$$

証明是显然的,只要把 α_S 展开成 q_S 和 p_S 的冪級数即得,特别

$$[q_H(t), p_H(t)] = [q_S, p_S] = i. \qquad (1.32)$$

海森堡态矢是在某一确定时刻 t_0 的薛定格态矢,而薛定格算符是在确定时刻 t_0 的海森堡算符.

薛定格方程通常对于实际計算十分有用,海森堡表象在形式上更类似于古典的描写.

例. 一維振子.

質量为 1 的振子的古典方程为

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0.$$

它决定总能量H守恒：

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2),$$

这里 $p = \dot{q}$。系统的量子化条件是

$$[q, p] = i.$$

运动方程为

$$i\frac{\partial q}{\partial t} = [q, H] = \frac{1}{2}[q, p^2] = ip,$$

$$i\frac{\partial p}{\partial t} = [p, H] = \frac{1}{2}\omega^2[p, q^2] = -i\omega^2 q.$$

即

$$\dot{q} = p,$$

$$\dot{p} = -\omega^2 q.$$

因此

$$i\frac{\partial \dot{q}}{\partial t} = [p, H] = -i\omega^2 q.$$

所以

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0,$$

这与古典运动方程一样，只是它是算符方程。

5. 相互作用表象。 假定哈密顿量分成两部：自由的（无微扰的）哈密顿量 H^0 和相互作用的（微扰的）哈密顿量 H^i：

$$H = H^0 + H^i. \tag{1.33}$$

在薛定格表象中，

$$H(t_0) = H^0(t_0) + H^i(t_0), \tag{1.34}$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle_s = H(t_0)|\psi(t)\rangle_s =$$

$$= [H^0(t_0) + H^i(t_0)]|\psi(t)\rangle_s, \tag{1.35}$$

引入一个新的态矢 $|\psi(t)\rangle_I$ [参看公式 (1.28)]：

$$|\psi(t)\rangle_s = R(t, t_0)|\psi(t)\rangle_I, \tag{1.36}$$

这里 $R(t, t_0)$ 是下列方程的解：

$$i\frac{\partial}{\partial t}R(t, t_0) = H^0(t_0)R(t, t_0), \tag{1.37}$$

并具有边界条件

$$R(t_0, t_0) = 1. \tag{1.38}$$

它的形式解是

$$R(t, t_0) = e^{-iH^0(t-t_0)}. \tag{1.39}$$

$|\psi(t)\rangle_I$ 的运动方程可由(1.36)代入(1.35)得

$$i\frac{\partial R}{\partial t}|\psi\rangle_I + iR\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle_I = H^0R|\psi\rangle_I + H^iR|\psi\rangle_I,$$

計及(1.37),由此得

$$iR\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle_I = H^iR|\psi\rangle_I.$$

这方程可改写为

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle_I = H_I^i|\psi(t)\rangle_I. \tag{1.40}$$

这里

$$H_I^i = R^{-1}(t, t_0)H^i(t_0)R(t, t_0) = \\ = H^i[q_I(t), p_I(t)], \tag{1.41}$$

如果 H^i 是 q 和 p 的函数,而

$$q_I(t) = R^{-1}(t, t_0)q_S(t_0)R(t, t_0),$$
$$p_I(t) = R^{-1}(t, t_0)p_S(t_0)R(t, t_0).$$

物理系統用 $|\psi(t)\rangle_I$ 和 $\alpha_I(t) = R^{-1}(t, t_0)\alpha_S(t_0)R(t, t_0)$ 来描写的方式称为相互作用表象,它首先是由狄拉克引入的[1],它是薛定格表象与海森堡表象的中介表象. 算符与时間的相依正如无相互作用的系統的海森堡算符,而态矢随时間的变化完全由相互作用(微扰)引起,換句話說,系統与时間的关联分为两部分:运动学的与动力学的;前者包含在算符中,而后者制約着态矢的变化.

§2. 协变微扰論[2]

1. S 矩陣及过渡几率. 相互作用表象中的运动方程

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle_I = H_I^i|\psi(t)\rangle_I \tag{2.1}$$

1) 見 [3], § 44.

2) 本节討論的問題,参看 [1], 第 8 章和 [2, 6, 7].

可以表示成算符方程，設

$$|\psi(t)\rangle_I = U(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle_I, \tag{2.2}$$

則得

$$i\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0) = H_I^i(t,t_0)U(t,t_0), \tag{2.3}$$

和边界条件

$$U(t_0,t_0) = I. \tag{2.4}$$

定义 S 矩陣为

$$S = \lim_{t\to\infty}\lim_{t_0\to-\infty}U(t,t_0) \equiv U(\infty,-\infty), \tag{2.5}$$

則

$$|\psi(\infty)\rangle_I = S|\psi(-\infty)\rangle_I, \tag{2.6}$$

对于散射过程 $|\psi(-\infty)\rangle_I$ 表示确定的始态：$|\psi(-\infty)\rangle_I = |i\rangle$，而 S 矩陣使 $|i\rangle$ 变成一切可能的末态；即 $S|i\rangle$ 是一切可能末态的迭加．发現系統处于特殊末态 $|f\rangle$ 的几率振幅是

$$\langle f|S|i\rangle. \tag{2.7}$$

一个特殊的始态与一个特殊的末态之間的 S 矩陣元給出 $|i\rangle$ 态到 $|f\rangle$ 态过渡的几率振幅．

始态与末态之間无穷的时間間隔，按照测不准原理保証了严格的能量守恆，我們可以定义一个在“能量曲面”上的矩陣元：

$$\langle f|S|i\rangle = -2\pi i\delta(E_i-E_f)\langle f|\mathscr{S}|i\rangle. \tag{2.8}$$

則对无穷时間間隔的过渡几率 ω_∞ 为

$$\omega_\infty = |\langle f|S|i\rangle|^2 = (2\pi)^2[\delta(E_i-E_f)]^2|\langle f|\mathscr{S}|i\rangle|^2 =$$

$$= (2\pi)^2\delta(E_i-E_f)\left[\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2}e^{i(E_i-E_f)t}dt\right]|\langle f|\mathscr{S}|i\rangle|^2 =$$

$$= 2\pi\delta(E_i-E_f)\left[\lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2}dt\right]|\langle f|\mathscr{S}|i\rangle|^2 =$$

$$= 2\pi\delta(E_i-E_f)|\langle f|\mathscr{S}|i\rangle|^2\lim_{T\to\infty}[T],$$

而单位时間过渡几率 ω 为

$$\omega = \omega_\infty/\lim_{T\to\infty}[T] = 2\pi\delta(E_i-E_f)|\langle f|\mathscr{S}|i\rangle|^2. \tag{2.9}$$

2. S 矩陣的微扰解. 定义算符

$$U(t) = U(t, -\infty), \tag{2.10}$$

則(2.1)和(2.4)变成下列形式:

$$i\frac{\partial}{\partial t}U(t) = H_I^i(t)U(t), \tag{2.11}$$

$$U(-\infty) = I. \tag{2.12}$$

由 $t = -\infty$ 到 $t = t$ 积分:

$$i[U(t) - U(-\infty)] = \int_{-\infty}^{t} H_I^i(t')U(t')dt',$$

或

$$U(t) = I - i\int_{-\infty}^{t} H_I^i(t')U(t')dt', \tag{2.13}$$

这是已計及了初始条件的积分方程.

假定 H_I^i 很小,迭代手續是收敛的,則由逐次代入,最后 (2.13) 变成

$$U(t) = I + (-i)\int_{-\infty}^{t} dt_1 H_I^i(t_1) +$$

$$+ (-i)^2\int_{-\infty}^{t} dt_1\int_{-\infty}^{t_1} dt_2 H_I^i(t_1)H_I^i(t_2) + \cdots =$$

$$= U^{(0)}(t)+U^{(1)}(t)+U^{(2)}(t)+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} U^{(n)}(t), \tag{2.14}$$

这里

$$U^{(n)}(t) = (-i)^n\int_{-\infty}^{t} dt_1\int_{-\infty}^{t_1} dt_2\int_{-\infty}^{t_2} dt_3\cdots\int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n$$

$$H_I^i(t_1)H_I^i(t_2)H_I^i(t_3)\cdots H_I^i(t_n). \tag{2.15}$$

为了把这展开式写成更对称的形式,戴逊引入"时序"算符 P,它的定义是

$$P[A(t_1)B(t_2)\cdots L(t_n)] = A(t_1)B(t_2)\cdots L(t_n), \tag{2.16}$$

这里

$$t_1 > t_2 > \cdots > t_n,$$

P 使得任何与时間有关的算符的乘积按照时序早晚从右排到左.

考虑表达式

$$I_n(t) = \int_{-\infty}^{t} dt_1 \int_{-\infty}^{t} dt_2 \cdot$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{t} dt_3 \cdots \int_{-\infty}^{t} dt_n P[H_I^i(t_1) H_I^i(t_2) \cdots H_I^i(t_n)]. \quad (2.17)$$

由于积分 I_n 相对于 $t_1, t_2 \cdots t_n$ 完全对称，总供献等于由某一特殊 t 的次序所得的供献的 $n!$ 倍. 取一个确定的次序 $t_1 > t_2 > \cdots t_n$，得到[1]

$$I_n(t) = n! \int_{-\infty}^{t} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n H_I^i(t_1) H_I^i(t_2) \cdots$$

$$\cdots H_I^i(t_n) = n! \left(\frac{1}{-i}\right)^n U^{(n)}(t), \quad (2.18)$$

由此

$$U^{(n)}(t) = \frac{1}{n!} (-i)^n I_n(t),$$

因此

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-i)^n I_n(t). \quad (2.19)$$

过渡到 $t \to \infty$ 的极限，得

$$S = U(\infty) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-i)^n I_n(\infty) = \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)} =$$

$$= I + (-i) \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 H_I^i(t_1) +$$

$$+ \frac{1}{2} (-i)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 P[H_I^i(t_1) H_I^i(t_2)] + \cdots.$$

或記作

$$S = P \exp\left[(-i) \int_{-\infty}^{\infty} dt H_I^i(t)\right]. \quad (2.20)$$

表达式(2.20)是上列級数展开式的符号表示式.

在場論中，$H_I^i(t)$ 是哈密頓密度 $\mathscr{H}^i(x, t)$ 的空間积分：

$$H_I^i(t) = \int \mathscr{H}^i(x, t) d^3x = \int \mathscr{H}^i(x) d^3x; \quad (2.21)$$

---

1) 用数学归納法的証明，可以在工作 [4] 中找到.

例如在量子电动力学中,哈密頓密度为

$$\mathscr{H}^i(x) = ie\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A_\mu(x), \tag{2.22}$$

在介子动力学中 ($ps(ps)$ 对称理論),它是

$$\mathscr{H}^i(x) = ig\bar{\psi}(x)\gamma_5\tau_i\psi(x)\varphi_i(x), \tag{2.23}$$

这里"x"用来表示时空坐标的整体,

$$x = (x_1, x_2, x_3, ix_3) = (\mathbf{x}, it).$$

現在(2.20)可以写作下列形式:

$$S = P\exp\left[(-i)\int\mathscr{H}^i(x)d^4x\right], \tag{2.24}$$

这里

$$d^4x = dt\ d^3x = dx_0\,dx_1\,dx_2\,dx_3,$$

而积分遍及全部时空. S 矩陣的这种形式显然是洛仑兹不变的.

3. 与非协变微扰論的比較. 下面我們将証明,矩陣元 $\langle f|S^{(n)}|i\rangle$ 就是含时間微扰論的 n 級矩陣元. 由公式 (1.41) 和 (1.39) 得

$$\begin{aligned} H_I^i(t) &= \lim_{t_0\to-\infty} R^{-1}(t, t_0)H_I^i(t_0)R(t, t_0) = \\ &= \lim_{t_0\to-\infty} e^{iH^0(t-t_0)}H_I^i(t_0)e^{-iH^0(t-t_0)} = \\ &= \lim_{t_0\to-\infty} e^{iH^0t}H_S^i(t_0)e^{-iH^0t}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

这里,我們訊为,在 $t_0 = -\infty$ 时,薛定格表象与相互作用表象相合. 此外假定,态是哈密頓量 H^0 的本征态. 这样

$$H^0|i\rangle = E_i|i\rangle, \tag{2.26}$$

$$\langle f|H^0 = E_f\langle f|, \tag{2.27}$$

对于任何中介(虛)态,有

$$H^0|m\rangle = E_m|m\rangle. \tag{2.28}$$

現在把矩陣元写作为

$$\langle f|S|i\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\langle f|S^{(n)}|i\rangle, \tag{2.29}$$

这时

i)
$$\langle f|S^{(0)}|i\rangle = \langle f|i\rangle = 0, \tag{2.30}$$

若設始末态不相同的話.

$$\text{ii)}\quad \langle f|S^{(1)}|i\rangle = -i\int_{-\infty}^{\infty} dt\,\langle f|H_I^i(t)|i\rangle =$$

$$= -i\int_{-\infty}^{\infty} dt\,\langle f|e^{iH^0t}H_S^i\,e^{-iH^0t}|i\rangle =$$

$$= -i\langle f|H_S^i|i\rangle\int_{-\infty}^{\infty} dt\,e^{i(E_f-E_i)t} =$$

$$= -i\,\langle f|H_S^i|i\rangle 2\pi\delta(E_f-E_i) =$$

$$= -2\pi i\delta(E_f-E_i)\langle f|H_S^i|i\rangle; \qquad (2.31)$$

这就是旧微扰論的一級矩陣元(薛定格表象).

$$\text{iii)}\quad \langle f|S^{(2)}|i\rangle = (-i)^2\int_{-\infty}^{\infty} dt_1\int_{-\infty}^{t_1} dt_2\langle f|H_I^i(t_1)H_I^i(t_2)|i\rangle.$$

利用完备性条件:

$$\sum_m \cdots m\rangle\langle m\cdots = I,$$

則

$$\langle f|S^{(2)}|i\rangle = (-i)^2\sum_m\int_{-\infty}^{\infty} dt_1\langle f|H_I^i(t_1)|m\rangle\int_{-\infty}^{t_1}\langle m|H_I^i(t_2)|i\rangle dt_2 =$$

$$= (-i)^2\sum_m \langle f|H_S^i|m\rangle\langle m|H_S^i|i\rangle\cdot$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(E_f-E_m)t_1}dt_1\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(E_m-E_i)t_2}dt_2.$$

为了使积分$\int dt_2$在下限确定,并使其收敛,作下列替代:

$$\int_{-\infty}^{t_1} dt_2\,e^{i(E_m-E_i)t_2}\to\int_{-\infty}^{t_1} dt_2 e^{i(E_m-E_i-i\varepsilon)t_2},$$

这里,无穷小正量ε在积分后趋于零. 现在

$$\int_{-\infty}^{t_1} dt_2 e^{(i/\hbar)(E_m-E_i-i\varepsilon)t_2} = \frac{1}{-i}\,\frac{e^{i(E_m-E_i-i\varepsilon)t_1}}{E_i-E_m+i\varepsilon},$$

因此

$$\langle f|S^{(2)}|i\rangle = -i\sum_m \langle f|H_S^i|m\rangle\langle m|H_S^i|i\rangle \frac{1}{E_i - E_m + i\varepsilon} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(E_f - E_i)t_1} dt_1 =$$

$$= -2\pi i\delta(E_f - E_i)\sum_m \frac{\langle f|H_S^i|m\rangle\langle m|H_S^i|i\rangle}{E_i - E_m + i\varepsilon}. \quad (2.32)$$

这一表达式与旧微扰論的二級矩陣元全同。 从上述方法，显然可証实第 n 級項等于旧微扰論相应的矩陣元，所以

$$\langle f|S|i\rangle = -2\pi i\delta(E_i - E_f)\Big\{\langle f|H_S^i|i\rangle +$$

$$+\sum_m \frac{\langle f|H_S^i|m\rangle\langle m|H_S^i|i\rangle}{E_i - E_m + i\varepsilon} +$$

$$+\sum_m\sum_{m'} \frac{\langle f|H_S^i|m\rangle\langle m|H_S^i|m'\rangle\langle m'|H_S^i|i\rangle}{(E_i - E_m + i\varepsilon)(E_i - E_{m'} + i\varepsilon)} + \cdots\Big\}. \quad (2.33)$$

由关系(2.28)，(2.33)中的第二項可写成下列形式[1]：

$$\sum_m \frac{\langle f|H_S^i|m\rangle\langle m|H_S^i|i\rangle}{E_i - E_m + i\varepsilon} =$$

$$= \sum_m\sum_{m'} \langle f|H_S^i|m\rangle\langle m|\frac{1}{E_i - H^0 + i\varepsilon}|m'\rangle\langle m'|H_S^i|i\rangle =$$

$$= \langle f|H_S^i \frac{1}{E_i - H^0 + i\varepsilon} H_S^i|i\rangle. \quad (2.34)$$

即能量分母等于算符 $1/(E_i - H^0 + i\varepsilon)$ 在中介态的平均值。 这一算符是自由方程

$$(E_i - H^0)\varphi = 0 \quad (2.35)$$

的、在无穷远处相应于"出射"波(存在 $+i\varepsilon$)的边界条件的格林函数[5][2]。 設 $\langle m|H_S^i|m'\rangle$ 描写由态 $|m'\rangle$ 通过相互作用 $H_S^i \equiv V$ 变

---

1) 注意 $\langle m|\frac{1}{E_i - H_0 + i\varepsilon}|m'\rangle = \delta_{mm'}\frac{1}{E_i - E_m + i\varepsilon}$。——中譯本譯者注。

2) 在能量表象中，算符 $(E - H^0 + i\varepsilon)^{-1}$ 是动量 p 的普通函数，是写在坐标表象中的格林函数 $G(x - x')$ 的富氏变换。在这种表象中的格林函数通常可以算符 $[E - H^0(x) + i\varepsilon]^{-1}$ 作用于 δ 函数而得

$$G(x - x') = [E - H^0(x) + i\varepsilon]^{-1}\delta(x - x').$$

——俄譯本譯者注。

为 $|m\rangle$ 的跃迁过程，则微扰論展开式中的前两项可由費曼图形表示(見图 1 和 2).

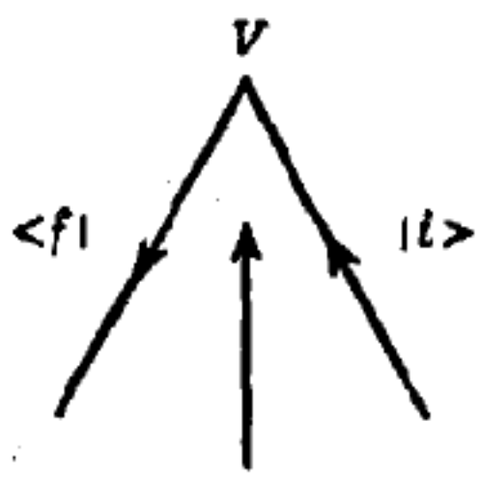


图 1. 由始态 $|i\rangle$ 在微扰 V 作用下变为末态 $|f\rangle$ 的跃迁.

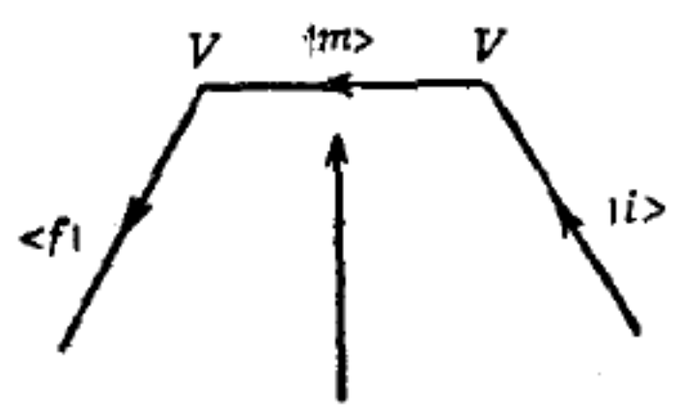


图 2. 传播时有 $[E_i - H^0 + i\varepsilon]^{-1}$ 的因子，$E_i = E_f =$ 总能量 E.

微扰論中的級数展开式可写成簡洁的算符形式，引入矩陣 T 和 $\mathscr{T}$:

$$S = I + T \tag{2.36}$$

$$T = -2\pi i\delta(E_i - E_f)\mathscr{T} \tag{2.37}$$

$$\mathscr{T} = V + V\frac{1}{E - H^0 + i\varepsilon}V + V\frac{1}{E - H^0 + i\varepsilon}V\frac{1}{E - H^0 + i\varepsilon}V + \cdots = V + V\frac{1}{E - H^0 + i\varepsilon}\mathscr{T}. \tag{2.38}$$

用逐次近似，上式的証明是显然的.

把 $\mathscr{T}$ 作用于由(2.35)定义的自由态上，

$$\mathscr{T}\varphi = V\varphi + V\frac{1}{E - H^0 + i\varepsilon}\mathscr{T}\varphi, \tag{2.39}$$

再定义出射散射波——态 $\psi^{(+)}$——如下:

$$\psi^{(+)} = \varphi + \frac{1}{E - H^0 + i\varepsilon}V\psi^{(+)}. \tag{2.40}$$

結果得到关系:

$$V\psi^{(+)} = \mathscr{T}\varphi, \tag{2.41}$$

或

$$\langle f|\mathscr{T}|i\rangle = \langle\varphi_f|V|\psi_i^{(+)}\rangle. \tag{2.42}$$

§3. 光学定理(玻尔-派尔斯-普拉册克关系)

始态与末态借 S 矩陣以下列方式相联系:

$$|f\rangle = S|i\rangle. \tag{3.1}$$

若态 $|i\rangle$ 是归一化的,则 $|f\rangle$ 也必然是归一化的,因为这样才能保持几率守恆:

$$\langle f|f\rangle = \langle i|S^+S|i\rangle = \langle i|i\rangle = 1, \quad S^+S = I. \tag{3.2}$$

即 S 矩陣是么正的[1]. 引入矩陣 T,它的定义为

$$S = I + T. \tag{3.3}$$

算符 I 描写"不发生变化"的現象. 由么正性条件:

$$S^+S=(I+T^+)(I+T)=I+(T^+T)+T^+T=I,$$

得出要求

$$T^+ + T = -T^+T. \tag{3.4}$$

設

$$\langle a|T|b\rangle = 2\pi i\delta_4(p_a - p_b)\langle a|M|b\rangle, \tag{3.5}$$

这里M只是对相同能量的态有定义,式中

$$\delta_4(p_a - p_b) = \delta(E_a - E_b)\delta(\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_b).$$

算符关系(3.4)現在改写成矩陣元的关系,就是

$$2\pi i\delta_4(p_a - p_b)\langle a|M - M^+|b\rangle =$$

$$= -\sum_f (-2\pi i)\delta_4(p_a - p_f)\langle a|M^+|f\rangle$$

$$(2\pi i)\delta_4(p_f - p_b)\langle f|M|b\rangle =$$

$$= 2\pi i\delta_4(p_a - p_b)\sum_f 2\pi i\delta_4(p_a - p_f)\langle a|M^+|f\rangle\langle f|M|b\rangle;$$

这里我們用了等式:

$$\delta_4(p_a - p_f)\delta_4(p_f - p_b) = \delta_4(p_a - p_b)\delta_4(p_a - p_f).$$

---

1) 由于 S 是无穷維矩陣,必須証明 $S^+S = SS^+ = I$ 才能得出么正性. 証明見工作[7].

特别，令 $|a\rangle = |b\rangle = |i\rangle$，再消去一个 δ 函数后得

$$2\,\mathrm{Im}\langle i|M|i\rangle = 2\pi \sum_f \delta_4(p_i - p_f)\langle i|M^+|f\rangle\langle f|M|i\rangle =$$

$$= 2\pi \sum_f \delta_4(p_i - p_f)|\langle f|M|i\rangle|^2. \qquad (3.6)$$

以下我們将証明，在两个粒子碰撞的情形下，(3.6) 的右端与总截面有联系，而左端正比于弹性向前散射振幅。 由始态 $|i\rangle$ 到末态 $|f\rangle$ 的全部时空的过渡几率是

$$|\langle f|T|i\rangle|^2 = (2\pi)^2[\delta_4(p_i - p_f)]^2|\langle f|M|i\rangle|^2 =$$

$$= (2\pi)^2\delta_4(0)\delta_4(p_i - p_f)|\langle f|M|i\rangle|^2, \qquad (3.7)$$

这里 $\delta_4(0)$ 可以解释为整个时空的体积(見 § 2，条 1)：

$$\delta_4(0) = \frac{TV}{(2\pi)^4},$$

T 和 V 分别是时間間隔和整个空間的体积。这样对于单位时間单位体积的过渡几率就是

$$w = \frac{|\langle f|T|i\rangle|^2}{TV} = \frac{1}{(2\pi)^2}\delta_4(p_i - p_f)|\langle f|M|i\rangle|^2. \qquad (3.8)$$

每种入射粒子的密度是 $\rho_i = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3$，而相对速度設为 v，則

$$\text{通量} = \rho_1\rho_2 v = \frac{v}{(2\pi)^6}.$$

所以对于某一特殊的末态 $|f\rangle$ 的截面是

$$\sigma(i \to f) = \frac{w}{\text{通量}} = \frac{(2\pi)^4}{v}\delta_4(p_i - p_f)|\langle f|M|i\rangle|^2. \qquad (3.9)$$

对一切可能的末态求和得到总截面 σ_t：

$$\sigma_t = \frac{(2\pi)^4}{v}\sum_f \delta_4(p_i - p_f)|\langle f|M|i\rangle|^2. \qquad (3.10)$$

下面我們考虑两个粒子的弹性散射。在 § 2，条 3 中曾指出，出射散射波形式的解满足方程

$$\psi^{(+)} = \varphi + \frac{1}{E - H^0 + i\varepsilon}V\psi^{(+)}, \qquad (3.11)$$

而过渡矩阵元写作

$$\langle f|\mathscr{T}|i\rangle = \langle \varphi_f|V|\psi_i^{(+)}\rangle. \tag{3.12}$$

对于弹性散射，状态由相碰粒子的始态和末态的相对动量 $\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{p}$ 表出. 取质心系，把 $\psi^{(+)}$ 换到坐标表示中来

$$\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left\{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \int d^3p\,\frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{E_k - E_p + i\varepsilon}\langle \mathbf{p}|M|\mathbf{k}\rangle\right\}. \tag{3.13}$$

引入矢量 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{x}$ 的夹角 θ，单位矢量 $\hat{x} = \frac{\mathbf{x}}{x}$（这里 $x = |\mathbf{x}|$），$p = |\mathbf{p}|$，并利用关系

$$d^3p = p^2\frac{dp}{dE_p}\,dE_p 2\pi\sin\theta\,d\theta. \tag{3.14}$$

(3.13)中的积分可写作下列形式：

$$\int d^3p\,\frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{E_k - E_p + i\varepsilon}\langle \mathbf{p}|M|\mathbf{k}\rangle =$$

$$= \int dE_p\,\frac{1}{E_k - E_p + i\varepsilon}\,p^2\frac{dp}{dE_p}\,\frac{2\pi}{2px}\,[e^{ipx}\langle p\hat{\mathbf{x}}|M|\mathbf{k}\rangle -$$

$$- e^{-ipx}\langle -p\hat{\mathbf{x}}|M|\mathbf{k}\rangle],$$

对 dE_p 的迴路积分只有第一項有供献[1)]，得到

$$2\pi i\left[\frac{2\pi}{ipx}e^{ipx}\langle p\hat{\mathbf{x}}|M|\mathbf{k}\rangle\right]_{p=k}\left[p^2\frac{dp}{dE_p}\right]_{p=k} =$$

$$= \frac{e^{ikx}}{x}(2\pi)^2\varepsilon\langle k\hat{\mathbf{x}}|M|\mathbf{k}\rangle,$$

这里

$$\varepsilon = \frac{k}{v} = k\frac{dk}{dE_k}.$$

所以

$$\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left\{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + (2\pi)^2\varepsilon\langle k\hat{\mathbf{x}}|M|\mathbf{k}\rangle\,\frac{e^{ikx}}{x}\right\}. \tag{3.15}$$

这与通常形式比較

$$\psi_{\mathbf{k}}^{(+)} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left\{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + f(\theta)\,\frac{e^{ikx}}{x}\right\}, \tag{3.16}$$

---

1) 参看 Umezawa: "Quantum Field Theory" 第 313 頁。——中譯本譯者注。

$f(\theta)$ 是散射振幅. 对向前散射 $\theta = 0$, $k\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{k}$.

所以

$$f(0) = (2\pi)^2\varepsilon\langle\mathbf{k}|M|\mathbf{k}\rangle = (2\pi)^2\varepsilon\langle i|M|i\rangle. \qquad (3.17)$$

因此

$$\langle i|M|i\rangle = \frac{f(0)}{(2\pi)^2\varepsilon}. \qquad (3.18)$$

把(3.10)和(3.18)代入(3.16),得

$$\sigma_t = \frac{4\pi}{v\varepsilon}\operatorname{Im} f(0) = \frac{4\pi}{k}\operatorname{Im} f(0). \qquad (3.19)$$

这称为光学定理或玻尔-派尔斯-普拉册克关系.

§4. 散射振幅的严格形式[1)]

1. 传播量. 定义传播量 $G(x', x)$ 为

$$G(x',x) = \left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}dx_1\cdots dx_n\langle T[\psi(x')\right.$$

$$\left.\bar{\psi}(x)\mathscr{H}^i(x_1)\cdots\mathscr{H}^i(x_n)]\rangle_0\right\}\times$$

$$\times\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}dx_1\cdots\right.$$

$$\left.\cdots dx_n\langle T[\mathscr{H}^i(x_1)\cdots\mathscr{H}^i(x_n)]\rangle_0\right\}^{-1}, \qquad (4.1)$$

这里变量 x, x', x_i 是时空点, ψ 和 $\mathscr{H}^i$ 分别表示在相互作用表象中的狄拉克場和相互作用哈密頓量密度. 記号 $\rangle_0$ 表示"裸"眞空, 即自由哈密頓量的、相应于沒有裸粒子存在的本征态. 算符 T 是維克的时序算符. 維克的 T 算符和戴逊的 P 算符一样,只是再加上一个 ± 1 的因子,

$$T = (\pm 1)P, \qquad (4.2)$$

正負号由下方式决定: 在 T 乘积中按照时序重新排列場算符的过程中,如果狄拉克場算符 ψ 的置換是偶的, 則取 $(+1)$, 如果是奇的,則取 (-1). 在量子电动力学和量子介子力学中,通常湯川型

1) 关于传播量的严格形式的問題的討論已有不少工作,例如工作 [8, 10, 11]. 不应用相互作用表象或微扰論,另一种得出传播量的方法参看工作 [12, 13].

相互作用

$$\mathscr{H}^i(x) = ie\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A_\mu(x),$$
$$\mathscr{H}^i(x) = ig\bar{\psi}(x)\gamma_5\tau_i\psi(x)\varphi_i(x)$$

总是含有狄拉克場的"对":

$$\bar{\psi}(x)\cdot\psi(x),$$

因此置換总是偶的,所以 T 算符和 P 算符当作用于 $\mathscr{H}^i(x)$ 的乘积上时是全同的.

下面我們用图示法考察 G 中的每一項, 从而闡明 G 的意义. (4.1)中的分子N的展开式为

$$N = \langle T[\psi(x')\bar{\psi}(x)]\rangle_0 + \\ + \frac{(-i)^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx_1\,dx_2\langle T[\psi(x')\bar{\psi}(x) \\ \mathscr{H}^i(x_1)\mathscr{H}^i(x_2)]\rangle_0 + \cdots, \qquad (4.3)$$

注意 n 为奇数的項为零,因为这里取的是眞空态的平均值. (4.3)中的各項用費曼图形表示如下:

$$\langle T(\psi(x')\ \bar{\psi}(x))\rangle_0 = \quad x' \longleftarrow x \quad , \qquad (4.4)$$

$$\langle T(\psi(x')\ \bar{\psi}(x)\quad \mathscr{H}^i(x_1)\quad \mathscr{H}^i(x_2))\rangle_0 =$$

$$= \quad x' \overset{\frown}{\longleftarrow} x \quad (x_2, x_1) \quad + \quad \left[\ x' \longleftarrow x \ ;\ x_2 \bigcirc x_1\ \right] \quad , \qquad (4.5)$$

$$\langle T(\psi(x')\quad \bar{\psi}(x)\quad \mathscr{H}^i(x_1)\quad \mathscr{H}^i(x_2)\quad \mathscr{H}^i(x_3)\quad \mathscr{H}^i(x_4))\rangle_0 =$$

$$= \quad x' \overset{\frown}{\longleftarrow} x \quad (x_4, x_3, x_2, x_1) \quad + \quad x' \overset{\frown}{\longleftarrow} x \quad (x_4, x_3, x_2, x_1) \quad + \quad x' \overset{\frown}{\longleftarrow} x \quad (x_4, x_3, x_2, x_1) \quad +$$

$$+ \quad x' \overset{x_3\ \bigcirc\ x_2}{\longleftarrow} x \quad (x_4, x_1) \quad + \quad \left[\ x' \longleftarrow x \ ;\ x_3\ x_1 \ ;\ x_4\ x_2\ \right] \quad + \quad \left[\ x' \longleftarrow x \ ;\ x_3\ x_1 \ ;\ x_4\ x_2\ \right] \quad +$$

$$+ \quad \left[\ x' \longleftarrow x \ ;\ x_4\ \bigcirc\ x_3\ \bigcirc\ x_2\ ;\ x_1\ \right] \quad + \quad \left[\ x' \longleftarrow x \ ;\ x_3\ x_1 \ ;\ x_4\ x_2\ \right] \quad + \quad \left[\ x' \overset{\frown}{\longleftarrow} x \ ;\ x_2\quad x_4 \ ;\ x_3\ \bigcirc\ x_1\ \right] \quad , \qquad (4.6)$$

等等，以及点 x_i 的一切可能置换. 在方括号内的项是所謂"眞空涨落"，它描写眞空由于費米子对的虛产生和消失到眞空的过渡，与任何物理过程并行地独立进行. 同样，(4.1)中分母 D 是对一切眞空涨落的求和

$D =$ 1 +  +  +  +  + ··· (4.7)

注意 D 是从眞空到眞空的 S 矩陣的平均值，但是 S 矩陣中不存在把眞空与别的(非眞空)态联系起来的矩陣元，因此眞空$\rangle_0$ 是算符 S 的本征态：

$$S\rangle_0 = c\rangle_0, \tag{4.8}$$

再由 S 的么正性得

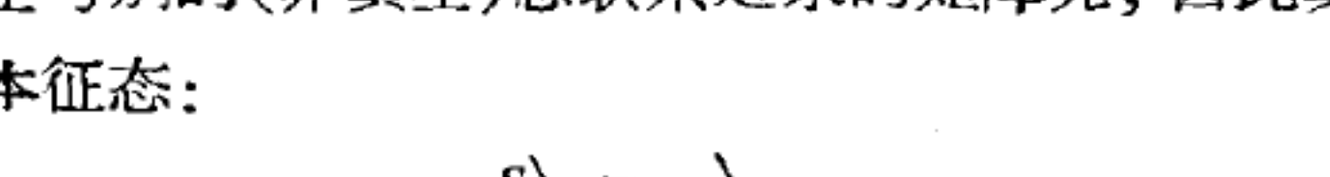
$$|c|^2 = 1, \tag{4.9}$$

$$c = e^{i\alpha},$$

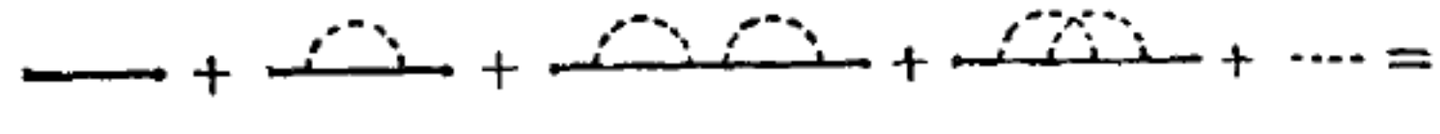
这里 α 是一实数. 换句話說，

$$D = \langle S\rangle_0 = e^{i\alpha}. \tag{4.10}$$

分子 N 可以分解为

$N = [$  $]\times e^{i\alpha}$, (4.11)

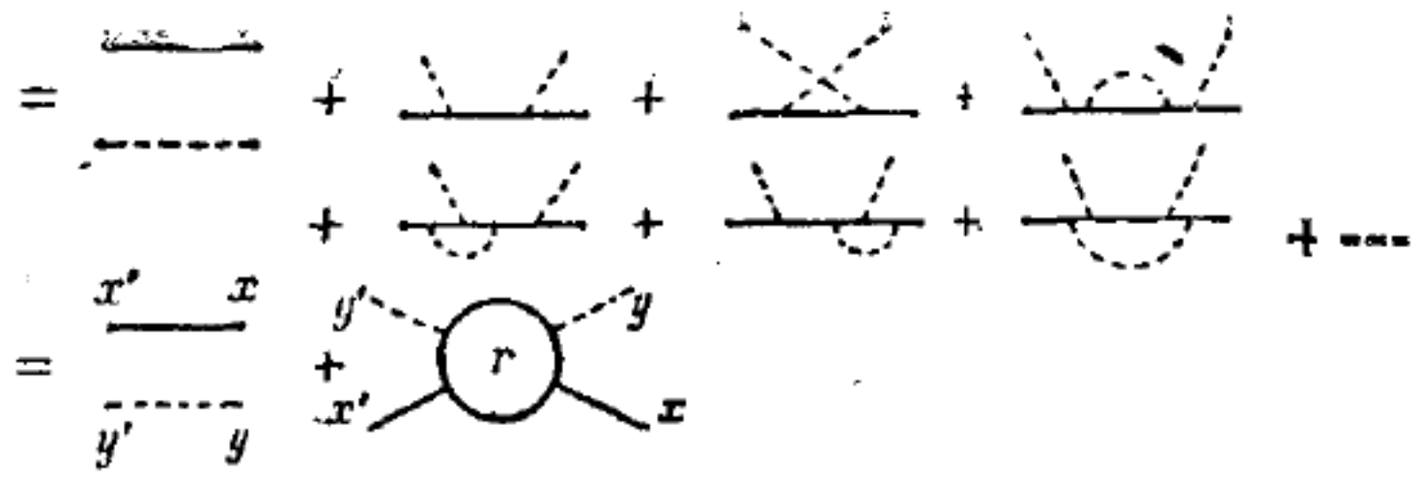
这样在戴逊記号下：

$\frac{N}{D} =$  (4.12)

$= S_F'$

用同样的方法，对于一个狄拉克場 ψ 和一个玻色子場 φ 可以定义传播量为

$$G(x', x;\ y', y) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}dx_1\cdots dx_n\langle T(\psi(x')\ \bar{\psi}(x)\ \varphi(y')\ \varphi(y)\ \mathcal{H}^I(x_i))\rangle_0}{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}dx_1\cdots dx_n\langle T(\mathcal{H}^I(x_i))\rangle_0}$$

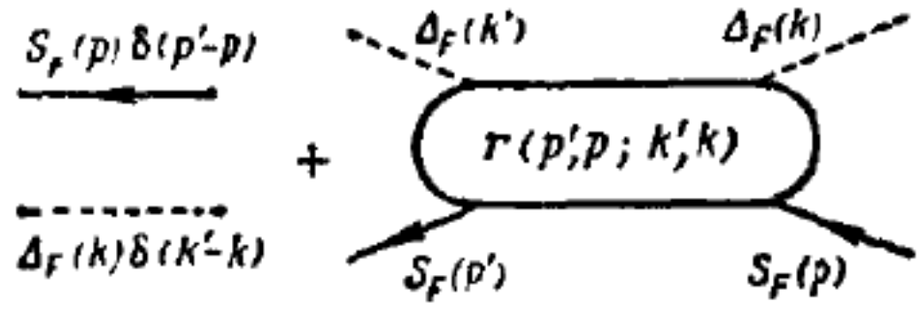


(4.13)

这里 r 是有外綫 x', x, y', y 的一切可能图的总和，一切无联系的眞空涨落項都消去了.

引入 $G(x', x; y', y)$ 的富氏变換:

$$G(p', p; k', k) = \int e^{-i(p'x' - px + k'y' - ky)} G(x', x; y', y)\, dx'dx\,dy\,dy' =$$



(4.14)

这里 $r(p', p; k', k)$ 定义为

$$r(p', p; k', k) = \Delta_F^{-1}(k')S_F^{-1}(p')G(p', p; k', k)S_F^{-1}(p)\Delta_F^{-1}(k). \tag{4.15}$$

函数 G 和 r 是 γ 空間的矩陣，在动量空間中的散射振幅可写作

$$R_{ij}(p', p; k', k) = \bar{u}_{\alpha,i}(p')r_{\alpha\beta}(p', p; k', k)u_{\beta,s}(p), \tag{4.16}$$

这里指标 i 和 j 相应于不同的自旋态和粒子-反粒子态.

对于有任意数目的費米子外綫和玻色子外綫的函数 G 及其富氏变換，可以用类似方法定义. 函数 G 有不同的名称：格林函数，传播量或核.

2. 传播量用海森堡算符的表示.

定理. 传播量 G 可表示为下面的形式:

$$G(x'\cdots x; y'\cdots y) = \langle \Psi_0, T[\psi_H(x')\cdots\bar{\psi}_H(x),$$
$$\varphi_H(y')\cdots\varphi_H(y)]\Psi_0\rangle, \tag{4.17}$$

这里 $\psi_H(x)$, $\varphi_H(y)$ 是海森堡算符，而 $\Psi_0\rangle$ 是物理眞空的态矢，即相互作用系統的总哈密頓量的最低本征值(能量)的本征态矢.

証明. G 中的算符以前是写在相互作用表象中的. 相互作用表象与海森堡表象之間的联系是

对于状态矢量，

$$|\Psi_I(t)\rangle = U(t, t_0)|\Psi_I(t_0)\rangle \equiv U(t, t_0)|\Psi_H\rangle \qquad (4.18)$$

对于算符，

$$O_H(t) = U^{-1}(t, t_0)O_I(t)U(t, t_0), \qquad (4.19)$$

这里指标 H 和 I 分别表示海森堡表象与相互作用表象。算符 $U(t, t_0)$ 满足运动方程：

$$i\frac{\partial}{\partial t}U(t, t_0) = H_I^i(t)U(t, t_0), \qquad (4.20)$$

和边界条件：

$$U(t_0, t_0) = I. \qquad (4.21)$$

由此得到

$$U(t, t_0)U^{-1}(t', t_0) = U(t, t'), \qquad (4.22)$$

这是因为

$$i\frac{\partial}{\partial t}[U(t, t_0)U^{-1}(t', t_0)] = H_I^i(t)[U(t, t_0)U^{-1}(t', t_0)],$$

和

$$U(t', t_0)U^{-1}(t', t_0) = I$$

表示 $U(t, t_0)U^{-1}(t', t_0)$ 和 $U(t, t')$ 满足同样的微分方程及同样的初始条件。

定理証明中的最重要之点是裸眞空 $\rangle_0$ 与眞正眞空 $\Psi_0\rangle$ 間的关系。如已指出的，后者是相互作用場系統的最低能态。如果用裸粒子态来表示，它是总电荷为零、动量为零和費米子数(粒子数減去反粒子数)为零的各种态的复杂迭加。变換 U 描写在相互作用表象中的态随时間的发展。从物理上看，十分合理地把物理眞空看作是由裸眞空通过相互作用的結果經过无穷时間間隔发展来的，

$$\Psi_0\rangle = \frac{cU^{-1}(-\infty, t_0)\rangle_0}{\langle U^{-1}(-\infty, t_0)\rangle_0} = \frac{cU^{-1}(\infty, t_0)\rangle_0}{\langle U^{-1}(\infty, t_0)\rangle_0}, \qquad (4.23)$$

这里 c 是一个归一化常数，这一关系的严格推导見工作[8]的附录。

类似地对于厄米共軛态有下关系：

$$\langle \Psi_0 = c^* \frac{{}_0\langle U(\infty, t_0)}{\langle U(\infty, t_0)\rangle_0}. \tag{4.24}$$

現在对 $G(x', x; y', y)$ 給出詳細的証明，至于推广到更复杂的振幅，完全是直接的.

設在 G 的表达式中，$t_{x'} > t_x > t_{y'} > t_y$，这里 $t_{x'} \equiv x'_0$ 等等. 把 $\psi(x')$ 等等写成 $\psi(t_{x'})$ 等等，令

$$\begin{aligned} J &\equiv \langle \Psi_0, T[\psi_H(x')\bar{\psi}_H(x)\varphi_H(y')\varphi_H(y)]\Psi_0\rangle = \\ &= [\langle U(\infty, t_0)U^{-1}(t_{x'}, t_0)\psi_I(t_{x'})U(t_{x'}, t_0)\cdots \\ &\quad U^{-1}(t_y, t_0)\varphi_I(t_y)U(t_y, t_0)U^{-1}(-\infty, t_0)\rangle_0] \times \\ &\times [\langle U(\infty, t_0)U^{-1}(-\infty, t_0)\rangle_0]^{-1} \end{aligned} \tag{4.25}$$

这里一切量是用相互作用表象写出的，而且是对自由眞空求平均. 注意，归一化常数已抵消了. 利用关系 $U(t, t_0)U^{-1}(t', t_0) = U(t, t')$ 这时公式 (4.25) 变成下列形式：

$$\begin{aligned} J = [&\langle U(\infty, t_{x'})\psi_I(t_{x'})U(t_{x'}, t_x)\bar{\psi}_I(t_x)\cdots \\ &U(t_{y'}, t_y)\varphi_I(t_y)U(t_y, -\infty)\rangle_0] \times [\langle U(\infty, -\infty)\rangle_0]^{-1} \end{aligned} \tag{4.26}$$

这里 U 和 ψ_I, φ_I 正是按照正确的时序排列的. 在 §2 中已証明运动方程的积分給出 $U(t, t')$ 的形式解：

$$U(t, t') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t'}^{t} \cdots \int_{t'}^{t} dx_1 \cdots dx_n T[\mathscr{H}_I^i(x_1)\cdots\mathscr{H}_I^i(x_n)],$$

所以[1]

$$\begin{aligned} J = \Big[&\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots dx_n \langle \psi_I(x')\bar{\psi}_I(x), \\ &\varphi_I(y'), \varphi_I(y) T[\mathscr{H}_I^i(x_1)\cdots\mathscr{H}_I^i(x_n)]\rangle_0\Big] \times \\ \times \Big[&\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots dx_n \langle T[\mathscr{H}_I^i(x_1)\cdots \\ &\cdots\mathscr{H}_I^i(x_n)]\rangle_0\Big]^{-1}. \end{aligned}$$

把一切可能的时序項加在一起，最后得

---

1) 注意 x', x, y', y 是确定的参量，不涉及 U 内的积分. 所以
$$U(\infty, t_{x'})U(t_{x'}, t_x)\cdots U(t_y, -\infty) = U(\infty, -\infty).$$

$$J = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots dx_n \langle T[\psi_I(x'), \right.$$

$$\left. \bar{\psi}_I(x), \varphi_I(y'), \varphi_I(y), \prod_{j=1}^{n} \mathscr{H}_I^i(x_j)]\rangle_0 \right] \times$$

$$\times \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots dx_n \langle T[\prod_{j=1}^{n} \mathscr{H}_I^i(x_j)]\rangle_0\right]^{-1} =$$

$$= G(x', x; y', y). \qquad (4.27)$$

3. 交叉对称[1]. 在动量空間中,传播量写作下列形式:

$$G_{rs}(p', p; k', k) = \int e^{-i(p'x'-px+k'y'-ky)} \langle \Psi_0 T[\psi(x')$$

$$\bar{\psi}(x)\varphi_r(y')\varphi_s(y)]\Psi_0\rangle dx'\, dx\, dy'\, dy, \qquad (4.28)$$

这里算符是海森堡表象中的算符，并取物理眞空态間的平均值. 带撇的四維动量是出射粒子的动量,不带撇的是入射粒子的动量. 指标 r 与 s 表示內自由度(例如同位旋分量).

考虑在始末态中含有同样質量的介子的过程,即

$$(\Box - \mu^2)\varphi_r = (\Box - \mu^2)\varphi_s = 0, \qquad (4.29)$$

因为 φ_r 与 φ_s 是玻色子場,所以它們在 T 乘积号下是对易的，变量 y, y' 是哑变量,即替代 ($y \rightleftarrows y'$) 不引起改变,所以

$$G_{rs}(p', p; k', k) =$$

$$= \int e^{-i(p'x'-px+k'y'-ky)} \langle \Psi_0 T[\psi(x')\bar{\psi}(x)$$

$$\varphi_r(y')\varphi_s(y)]\Psi_0\rangle dx'\, dx\, dy'\, dy =$$

$$= \int e^{-i(p'x'-px+k'y'-ky)} \langle \Psi_0 T[\psi(x')\bar{\psi}(x)$$

$$\varphi_s(y)\varphi_r(y')]\Psi_0\rangle dx'\, dx\, dy'\, dy =$$

$$= \int e^{-i[p'x'-px+(-k)y'-(-k')y]} \langle \Psi_0 T[\psi(x')$$

$$\bar{\psi}(x)\varphi_s(y')\varphi_r(y)]\Psi_0\rangle dx'\, dx\, dy'\, dy.$$

所以

---

1) 这里的論点取自工作[14].

$$G_{rs}(p', p; k', k) = G_{sr}(p', p; -k, -k'). \qquad (4.30)$$

一般說来，任意入射介子和出射介子可以調換：

$$G_{rs\cdots mn}(\cdots, k_r, k_s, \cdots, k_m, k_n) =$$
$$= G_{sr\cdots mn}(\cdots, -k_s, -k_r, \cdots, k_m, k_n).$$

这一性質称为交叉对称性，从上可知，它是 φ 場的玻色統計性的直接結果。

把这一对称性应用到 π 介子和核子散射。 由(3.3)和(3.5)定义的 T 矩陣和 M 矩陣都有交叉对称性：

$$T_{rs}(\cdots; k', k) = 2\pi i\delta_4(p_i - p_f)M_{rs}(\cdots; k', k),$$
$$M_{rs}(\cdots; k', k) = M_{sr}(\cdots; -k, -k'). \qquad (4.31)$$

特别在忽略反沖的近似下，一切核子的变量除自旋和同位旋外都不考虑时，M 只是入射介子和出射介子动量 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{q}$ 及它們的能量 $\omega = \omega_p = \omega_q$ 的函数：

$$M_{rs}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \omega) = M_{sr}(-\mathbf{q}, -\mathbf{p}, -\omega). \qquad (4.32)$$

这个关系就是 π 介子与核子散射在靜止近似下的交叉对称（見[9]）。

第二章　分立变换

§5. 物理系統的不变性質

1. 古典場的不变性質. 考虑拉氏量密度 $\mathscr{L}$，它是由具有一切可能的相互作用的任意場所組成的：

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}[\Phi(x)], \tag{5.1}$$

这里 $\Phi(x)$ 代表一切場量的集合. 但是我們假定，$\mathscr{L}$ 包含場量对时空坐标的导数不高于一級. 今后，字母 Φ 将表示一切可能的場，而不指明它代表那一种特殊的場. Φ 添加的指标表示場的分量或导数. 若有必要区别特殊类型的場，我們将采用下列記号：

φ——无自旋的場(标量場或贋标量場)，

A_μ——电磁場(靜质量为零的矢量場)，

ψ——旋量場.

运动方程由应用变分原理得出

$$\delta \int \mathscr{L}[\Phi(x)]d^4x = 0, \tag{5.2}$$

其形式为

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Phi} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial \Phi/\partial x_\mu)} = 0. \tag{5.3}$$

研究齐次綫性变换 $A(x \to x')$ 如下：

$$x'_\mu = a_{\mu\nu}x_\nu, \tag{5.4}$$

或以記号写作

$$x' = ax,$$

并且

$$\Phi_\alpha(x) \to \Phi'_\alpha(x') = S_{\alpha\beta}\Phi_\beta(x) = S_{\alpha\beta}\Phi_\beta(a^{-1}x').$$

这一关系用在同一物理点的旧函数 $\Phi_\beta(x)$ 定义新函数 $\Phi'_\alpha(x')$[1].

---

1) 即在时空中的同一点. ——俄文本譯者注.
在旧坐标系中的 x 点与新坐标系中的 x' 点是同一物理点. ——中譯本譯者注.

若 a 和 S 已給定，則新場量 Φ' 完全确定.

这时变換后的場的拉氏量密度采取的形式为

$$\mathscr{L}'[\Phi'(x')] = \mathscr{L}[\Phi(x)] = \mathscr{L}[S^{-1}\Phi'(x')], \qquad (5.5)$$

这里第一个等式是用 $\Phi'(x')$ 决定 $\mathscr{L}'$. 它表示 $\mathscr{L}'$ 和 $\mathscr{L}$ 在同一物理点应有同样的值(即函数 $\mathscr{L}$ 应当是标量).

若下列关系成立:

$$\mathscr{L}'[\Phi'(x')] = \mathscr{L}[\Phi'(x')], \qquad (5.6)$$

則在变換 A 下，对系統的描写根本不变. 带撇的量所描写的系統与不带撇的量所描写的系統是相同的，因为拉氏量密度相合. 这样的系統称为相对于变換 A 不变的系統. 系統的不变性質与确定的一些守恆量紧密相联. 例如，相对于四維平移的不变性导致能量动量守恆，而相对于繞空間任意軸的旋轉的不变性导致动量矩守恆. 在工作[15]中可以更仔細地訊識这一問題.

2. 量子化場的不变性質. 用正則形式进行量子化. 由拉氏量密度 $\mathscr{L}[\Phi(x)]$ 出发，定义广义动量

$$\pi_a = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\Phi}_a} = n_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial \Phi_a / \partial x_\mu)}, \qquad (5.7)$$

这里 $n_\mu = (0, 0, 0, i)$ 是沿时間軸方向的单位矢量. 正則对易关系采取下列形式:

$$[\pi_\alpha(\mathbf{x}, t), \Phi_\beta(\mathbf{x}'; t)]_\pm = -i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\delta_{\alpha\beta}, \qquad (5.8)$$

而海森堡运动方程

$$i\dot{\alpha}(\Phi) = [\alpha(\Phi), H] \qquad (5.9)$$

决定場随时間的发展. 在任何确定的时刻，Φ 和 π 可以用产生算符和消失算符表出（这不只是在无相互作用場的情况下可以实現).

变換 $A(x \to x' = ax)$ 使 $\Phi(x)$ 变成 $\Phi'(x')$，这里 $\Phi'(x') = S\Phi(x)$. $\Phi'(x')$ 和 $\Phi(x)$ 之間的关系可以用么正变換表出[1)]

$$\Phi'(x) = U_a \Phi(x) U_a^{-1} = S\Phi(a^{-1}x), \qquad (5.10)$$

---

1) 請參看中譯本的譯者前言. ——中譯本譯者注.

并且这样的算符 U_a 的存在是显然的，只要回忆到 $\Phi'(x')$ 与 $\Phi(x)$ 給出严格相同的物理知識(参看 § 1 条 2)。

在这种情况下，作为 $\Phi(x)$ 的函数的拉氏量密度采取下列形式：

$$U_a\mathscr{L}[\Phi(x)]U_a^{-1} = \mathscr{L}[U_a\Phi(x)U_a^{-1}] = \mathscr{L}[\Phi'(x)]. \quad (5.11)$$

如果系統相对于 A 是不变的，則变換后的拉氏量密度应当等于 $\mathscr{L}[\Phi(a^{-1}x)]$，即

$$U_a\mathscr{L}[\Phi(x)]U_a^{-1} = \mathscr{L}[\Phi(a^{-1}x)]. \quad (5.12)$$

有两种变換是常用的：

1) 連續变換。 連續变換可以由逐次应用无限小变換而得。无限小么正变換具有下列普遍的形式：

$$U_a = 1 - i\varepsilon F_a, \quad (5.13)$$

这里 ε 是无限小参量。U_a 的么正性假定

$$U_a^+U_a = (1 + i\varepsilon F_a^+)(1 - i\varepsilon F_a) =$$

$$= 1 + i\varepsilon(F_a^+ - F_a) + O(\varepsilon^2) = 1. \quad (5.14)$$

由此得出

$$F_a^+ = F_a, \quad (5.15)$$

即算符 F_a 是厄米算符。 由此，算符 F_a 可看作是系統的"可观察量"(或力学变量)。

若系統相对于 A 是不变的，則

$$U_a\mathscr{L}[\Phi(x)]U_a^{-1} = \mathscr{L}[\Phi(x)] +$$

$$+ i\varepsilon[F_a, \mathscr{L}[\Phi(x)]] + O(\varepsilon^2) = \mathscr{L}[\Phi(a^{-1}x)]. \quad (5.16)$$

这意味着(除了动量矩算符的空間时間分量 J_{r4} 外，它們須要特别研究)

$$[H, F_a] = 0,^{1)} \quad (5.17)$$

这里 H 是哈密頓量，上式确定下述事实，可观察量 F_a 是运动常数，

---

1) 因为这时 U_a 实質上为空間轉动，所以 $\int d^3x\mathscr{L}[\Phi(a^{-1}x)] = \int d^3x'\mathscr{L}[\Phi(x')] = \int d^3x\mathscr{L}[\Phi(x)]$，注意对变換 $A(x \to x' = ax)$ 函数行列式 $\left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right| = 1$。——中譯本譯者注。

而它的本征值是守恆的量子数.

相对于四維时空中平移的不变性与四維动量守恆相联；相对于規范变換的不变性与电荷守恆相联. 注意,所有这些力学变数有古典的类似量.

2）分立变換. 它們的特征是 $A^2 = 1$, 即两次变換是恆等变換. 这时

$$U_a^2 = 1. \tag{5.18}$$

因为 U_a 的本征值是 ± 1, 所以 U_a 是么正算符, 又是厄米算符. 因此算符 U_a 本身就是力学变量. 若系統相对于 A 是不变的, 則

$$[H, U_a] = 0, \tag{5.19}$$

即 U_a 也是运动常数, 它的本征值是守恆的量子数.

屬于这样的分立变換的有空間反射, 电荷共軛和(在某种約定下的)时間反演. 相应的力学变量(例如宇称)是系統的可观察的性質, 它們沒有古典的类似量.

3. 应用. 系統相对于某种变換的不变性, 相应着某种可观察量是运动常数. 它所对应的算符我們称之为守恆算符. 但是一般說来, 物理系統不可能处在一切守恆算符的同时的本征态中, 除非它們互相全是可对易的.

可以同时測量的守恆算符的集合，我們称为守恆算符的完全集合.

算符 $U_1, \cdots, U_n, F_1, \cdots, F_m$ 的任何集合是完全集合, 若对于任何項滿足关系:

$$[U_i, U_j] = 0, [U_i, F_j] = 0, [F_i, F_j] = 0. \tag{5.20}$$

在完全集合中, 作为守恆算符还可以包括某种算符 W, 对于它譬如說

$$[W, U_1] \neq 0, \tag{5.21}$$

但在下述条件下, 系統处在这样的态 Ψ 中,

$$\langle \Psi | U_1 | \Psi \rangle = 0. \tag{5.22}$$

作为例子, 可以研究电荷共軛算符 C 和电荷算符 Q. 因为 C 引起粒子 $\rightleftarrows$ 反粒子的变換, 所以

$$C^{-1}QC = -Q,$$

或

$$CQ + QC = 0.$$

由于系統必然处在电荷算符的本征态中，算符 C 一般不能属于守恆算符的完全集合。

但是对于中性系統 $\langle Q\rangle = 0$，算符 C 可以包含在守恆算符的完全集合之中，而它的本征值卽电荷共軛宇称是守恆的量子数(参看§8条5)。

系統的不变性質具有多方面的应用。

1）拉氏量的形式。 如果系統的不变性質已知，从拉氏量具有这种性質出发，不难建立具有所要求的不变性質的理論。 这些条件和某种簡单化的准繩，往往严格地限制拉氏量的这种或那种形式的选取。拉氏方法的主要优点正在于此(参看§10，条6)。

2）选擇定則。 属于完全集合的守恆算符的本征值，对于任何物理过程中的始态和末态应当一样。因此守恆算符的完全集合决定选择定則。

3）相关的过程。 若U是守恆算符，則S矩陣应当滿足条件：

$$S = U^{-1}SU. \tag{5.23}$$

因此

$$\langle f|S|i\rangle = \langle fU^{-1}|S|Ui\rangle, \tag{5.24}$$

例如，若电荷共軛算符是守恆算符，則粒子参加的任何过程的过渡振幅，总是恆等于把粒子都換成反粒子的相应过程的过渡振幅。

4）对散射振幅(傳播函數)的限制。 若相互作用在一定的变換下是不变的，則散射振幅也在这种变換下是不变的。例如，相互作用在空間反射下是不变的，則在散射振幅中不能含有如$\sigma\cdot k$的贋标量。反之，在散射振幅中存在这种項，指出理論相对于这种变換不存在不变性。

下面我們討論場的种种不变性和相应的可观察量或力学变量。 在第二章中，首先我們研究滿足相对論不变性要求的拉氏量的形式，再討論分立变換，在第三章再回头来討論連續变換。

§6. 相对論协变的場

1. 洛仑兹变換. 四維时空度規张量的形式是

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}, \tag{6.1}$$

$$g^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}, \tag{6.2}$$

$$g^i{}_j = g^{ik}g_{jk} = g_j{}^i = \delta_{ij}, \tag{6.3}$$

这里 $i, j = 1, 2, 3, 0$. 张量 g 的分量相对于两个指标是对称的. 四維矢量的协变分量 x_i 和其逆变分量 x^i 由下列关系相联系:

$$x_i = g_{ij}x^j, \; x^i = g^{ij}x_j. \tag{6.4}$$

于是两个矢量的标量积写作下列形式:

$$a^ib_i = a^ig_{ij}b^j = g_{ij}a^ib^j = g^{ij}a_ib_i =$$

$$= g^{ij}a_ib_i = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) - a_0b_0. \tag{6.5}$$

定义順时本征洛仑兹变換

$$x^{i'} = a^i{}_jx^j \quad 或 \quad x'_i = a_i{}^jx_j$$

为具有下列性质的变換:

1) 变換的"洛仑兹"性(实数性和正交性)

$$a^i{}_j \text{ 是实数}, \tag{6.6}$$

$$a^i{}_ja_i{}^k = a_j{}^ia^k{}_i = \delta_{jk}. \tag{6.7}$$

2) 变換的本征性(单位模性)

$$\mathrm{Det}|a| = +1, \tag{6.8}$$

即排除空間反射和时間反演;

3) 順时性(不改变时間的流向)

$$a^0{}_0 > 1. \tag{6.9}$$

在本书中今后若无特殊声明,将簡单地称这种变換为洛仑兹变換.

注意,均匀的洛仑兹变换再分为四部分,相应于下列四种可能性:

$$\mathrm{Det}|a| = \pm 1 \quad 和 \quad a^0_0 > 0, a^0_0 < 0.$$

顺时本征洛仑兹变换是可由恆等变换連續变化得到的那一部分.

矢量算符 $\partial/\partial x_i$ 在洛仑兹变换下变为算符:

$$\frac{\partial}{\partial x'^i} = a_i{}^j \frac{\partial}{\partial x^j} \tag{6.10}$$

往往代替指标为 0 的分量引入指标为 4 的分量. 对于四維点的坐标,或一般的对于任何矢量 (a), 它的定义如下:

$$x_4 = ix^0, \; a_4 = ia^0. \tag{6.11}$$

度规张量这时变成 1:

$$g^{\mu\mu} = g_{\mu\mu} = 1 \text{ (不求和)}, \tag{6.12}$$

$$g^{\mu}{}_{\nu} = g_{\mu}{}^{\nu} = \delta_{\mu\nu}. \tag{6.13}$$

为明确区别采用的是何种度規, 我們約定, 拉丁指标 i, j 取值 $(1, 2, 3, 0)$, 而希腊指标取值 $(1, 2, 3, 4)$.

既然

$$x^0 = g^{0i}x_i = -x_0 = -ix_4 = -ig_{4\mu}x^{\mu} = -ix^4,$$

由此可見,对于矢量 (a)

$$a^1 = a_1, \; a^2 = a_2, \; a^3 = a_3, \; a^4 = a_4, \tag{6.14}$$

即

$$a^0 = -a_0, \; a^4 = ia^0, \; a_4 = -ia_0. \tag{6.15}$$

既然分量 a^{μ} 和 a_{μ} 互相間无区别,我們将簡单地把它們表为 a_{μ}.

2. 标量場和贋标量場. 单分量函数 φ 的拉氏量密度为

$$\mathscr{L} = -\frac{\partial\varphi^+}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial\varphi}{\partial x_{\mu}} - \mu^2\varphi^+\varphi, \tag{6.16}$$

或[1)]

---

1) 若在拉氏量密度上加以具有四維散度性质的任意項,运动方程不变.在拉氏量 L 中的这种項可以变换为对表面的积分,在 L 取变分下将为 0, 若区域的边界是固定的. 注意

$$\varphi^+\Box\varphi = \frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\left[\varphi^+ \frac{\partial\varphi}{\partial x_{\mu}}\right] - \frac{\partial\varphi^+}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial\varphi}{\partial x_{\mu}}.$$

——俄譯本譯者注.

$$\mathscr{L} = \varphi^{+}(\Box - \mu^2)\varphi. \tag{6.17}$$

从它得到运动方程:

$$(\Box - \mu^2)\varphi = 0. \tag{6.18}$$

在洛仑兹变换(具有矩陣 A)

$$x \to x' = ax \tag{6.19}$$

下,函数 $\varphi(x)$ 的变换,按定义如下:

$$\begin{aligned}\varphi'(x') &= \varphi(x) = \varphi(a^{-1}x'),\\ \varphi'^{+}(x') &= \varphi^{+}(x) = \varphi^{+}(a^{-1}x'),\end{aligned} \tag{6.20}$$

換句話說,§5 条 2 中定义的矩陣 S 等于 1.

显然拉氏量密度 $\mathscr{L}$ 相对于 A 是不变的:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}'[\varphi'(x)] &= U\mathscr{L}[\varphi(x)]U^{-1} =\\ &= \varphi'^{+}(x)(\Box - \mu^2)\varphi'(x) = \mathscr{L}[\varphi(a^{-1}x)],\end{aligned} \tag{6.21}$$

这是因为

$$(\Box' - \mu^2) = (\Box - \mu^2).$$

当量子化时,函数 $\varphi(x)$ 和 $\varphi^{+}(x)$ 按平面波展开

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{1}{\sqrt{2k_0}}[a(k)e^{ikx} + b^{+}(k)e^{-ikx}]d^3k, \tag{6.22}$$

$$\varphi^{+}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{1}{\sqrt{2k_0}}[b(k)e^{ikx} + a^{+}(k)e^{-ikx}]d^3k, \tag{6.23}$$

这里

$$k_0 = \sqrt{k^2 + \mu^2}, k = |\mathbf{k}|,$$

$kx = k_\mu x_\mu$ (四維矢量的标量积).

$a(k), a^{+}(k)$ 分别是动量为 $\mathbf{k}$ 的 a 型粒子的消失算符和产生算符,

$b(k), b^{+}(k)$ 是动量为 $\mathbf{k}$ 的 b 型粒子的消失算符和产生算符.

a 型粒子与 b 型粒子是相关联的,它們是粒子和反粒子. 对易关系如下 ($\hbar = 1$):

$$[a(\mathbf{k}), a^{+}(\mathbf{k}')] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \tag{6.24}$$

$$[b(\mathbf{k}), b^{+}(\mathbf{k}')] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \tag{6.25}$$

把 φ 和 $\pi = \dot{\varphi}$ 按 a, b 振幅展开即使在存在相互作用时也成立. 但只有当沒有相互作用或在相互作用繪景中,对易关系才可写成

协变的形式：

$$[\varphi(x), \varphi^+(x')] = -i\Delta(x-x'), \tag{6.26}$$

$$\Delta(x) = \frac{i}{(2\pi)^3}\int e^{ikx}\delta(k^2+\mu^2)\varepsilon(k)d^4k, \tag{6.27}$$

$$\varepsilon(k) = \frac{k_0}{|k_0|},$$

$$d^4k = dk_0\,dk_1\,dk_2\,dk_3,$$

所有其余的对易式全为零．对这一問題的仔細研究可参看[16]的第II部．

自由場的拉氏量密度[参看 (6.16)]

$$-\mathscr{L} = \frac{\partial\varphi^+}{\partial x_\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} + \mu^2\varphi^+\varphi$$

在 q 量理論中应当如下方式对称化．表示式(6.16)恆可写作下形式：

$$-\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\varphi^+}{\partial x_\mu}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right]_+ + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\varphi^+}{\partial x_\mu}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right]_- +$$

$$+\frac{\mu^2}{2}[\varphi^+, \varphi]_+ + \frac{\mu^2}{2}[\varphi^+, \varphi]_-, \tag{6.28}$$

这里对易式是奇异的 c 量，因为由关系

$$[\varphi^+(x), \varphi(x')] = i\Delta(x-x'),$$

得到关系

$$[\varphi^+(x), \varphi(x)] = i\Delta(0);$$

也易驗証，

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2}[\varphi^+(x), \varphi(x)] = \left[\frac{\partial^2\varphi^+}{\partial x_\mu^2}, \varphi\right] +$$

$$+2\left[\frac{\partial\varphi^+}{\partial x_\mu}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right] + \left[\varphi^+, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu^2}\right] =$$

$$= \mu^2[\varphi^+, \varphi] + 2\left[\frac{\partial\varphi^+}{\partial x_\mu}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right] + \mu^2[\varphi^+, \varphi] =$$

$$= i\left(\frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2}\Delta(x)\right)_{x=0},$$

即

$$\left[\frac{\partial\varphi^+(x)}{\partial x_\mu}, \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_\mu}\right] = \frac{i}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2}\Delta(x)\right)_{x=0} - i\mu^2\Delta(0).$$

对易式可以抛弃，因为它們只是引起能量的无限移动. 因此

$$-\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\varphi^+}{\partial x_\mu}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right]_+ + \frac{\mu^2}{2}[\varphi^+, \varphi]_+, \qquad (6.29)$$

或

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}[\varphi^+, (\Box - \mu^2)\varphi]_+. \qquad (6.30)$$

3. 矢量場(电磁場). 从实用考虑，只須研究靜質量为零的矢量場. 根据費米，这种場的拉氏量密度可写作下列形式：

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial A^i}{\partial x^i} - \frac{\partial A^i}{\partial x^i}\right)\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_i}\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial A^i}{\partial x^i}\frac{\partial A_i}{\partial x_i} = -\frac{1}{2}\frac{\partial A^i}{\partial x^i}\frac{\partial A_i}{\partial x_i}, \qquad (6.31)$$

由此得到运动方程：

$$\Box A_i = 0. \qquad (6.32)$$

在洛仑兹变換下，場的变換如一矢量：

$$A_i'(x') = a_i^j A_j(x) = a_i^j A_j(a^{-1}x'),$$

$$A_i'(x) = U A_i(x) U^{-1} = a_i^j A_j(a^{-1}x), \qquad (6.33)$$

但是拉氏量密度的形式保持不变：

$$\mathscr{L}'[A_i'(x)] = U\mathscr{L}[A_i(x)]U^{-1} = -\frac{1}{2}\frac{\partial A'^i}{\partial x^i}\frac{\partial A_i'}{\partial x_i} =$$

$$= -\frac{1}{2}a_k^i\frac{\partial A^k(a^{-1}x)}{\partial x^i}a_i^l\frac{\partial A_l(a^{-1}x)}{\partial x_i} =$$

$$= \mathscr{L}[A_i(a^{-1}x)], \qquad (6.34)$$

要进行量子化，A_i 应按平面波展开

$$A_i(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{\lambda=1}^{4}\int\frac{1}{\sqrt{2k_0}}[a_\lambda(\mathbf{k})e^{ikx} + a_\lambda^+(\mathbf{k})e^{-ikx}]e_i^\lambda d^3k \qquad (6.35)$$

式中 $e^\lambda{}_i$ 表示极化矢量. 振幅 $a_\lambda(\mathbf{k})$ 和 $a_\lambda^+(\mathbf{k})$ 满足对易关系：

$$[a_\lambda(\mathbf{k}), a_{\lambda'}^+(\mathbf{k}')] = \delta_{\lambda\lambda'}\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \qquad (6.36)$$

这里 $k = |\mathbf{k}|$, $a_\lambda(\mathbf{k})$, $a_\lambda^+(\mathbf{k})$ 分别表示动量为 $\mathbf{k}$ 极化为 λ 的光子的消失算符和产生算符.

对无相互作用場,下列关系成立

$$[A_i(x), A_j(x')] = -g_{ij}iD(x-x'), \tag{6.37}$$

$$D(x) = \frac{i}{(2\pi)^3}\int e^{ikx}\delta(k^2)\varepsilon(k)d^4k, \tag{6.38}$$

更詳細的研究参看[1]的第 II 章和[16].

4. 旋量場. i) 狄拉克方程. 这一方程

$$\left(\gamma^i\frac{\partial}{\partial x^i}+m\right)\psi(x)=0 \tag{6.39}$$

的解应当同时满足克莱因-哥东方程:

$$(\Box - m^2)\psi(x)=0. \tag{6.40}$$

由此得出矩陣 γ^i 的分量所满足的反对易关系,因为

$$\left(\gamma^i\frac{\partial}{\partial x^i}-m\right)\left(\gamma^i\frac{\partial}{\partial x^i}+m\right)\psi =$$

$$=\left[\frac{1}{2}\{\gamma^i,\gamma^j\}_+\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^i}-m^2\right]\psi=0,$$

因而

$$\{\gamma^i,\gamma^j\}_+ = \gamma^i\gamma^j+\gamma^j\gamma^i = 2g^{ij}, \tag{6.41}$$

在洛仑兹变换下,函数 ψ 变为函数

$$\psi'_\alpha(x') = S_{\alpha\beta}\psi_\beta(x), \tag{6.42}$$

或可以用記号写成下列形式:

$$\psi'(x') = S\psi(x),$$

而狄拉克方程不变[1]:

$$\left(\gamma^i\frac{\partial}{\partial x'^i}+m\right)\psi'(x')=0,$$

若

$$S^{-1}\gamma^iS = a^i_j\gamma^j. \tag{6.43}$$

这容易验証,把带撇的量用不带撇的量写出来,得

---

1) 假定 γ 矩陣在洛仑兹变换下是不变的.

$$\left(\gamma^i a_i{}^j \frac{\partial}{\partial x^j} + m\right) S\psi(x) = 0,$$

$$\left(S^{-1}\gamma^i a_i{}^j S \frac{\partial}{\partial x^j} + m\right)\psi(x) = 0,$$

因此

$$S^{-1}\gamma^i a_i{}^j S = \gamma^j,$$

由此，乘以 $a^k{}_j$，对 j 求和，得到

$$S^{-1}\gamma^i a_i{}^j S a^k{}_j = S^{-1}\gamma^i g_i{}^k S = S^{-1}\gamma^k S = a^k{}_i \gamma^i.$$

矩陣 S 的存在是泡利所得出的所謂基本定理的結果（参看本节的条 5 和 8）.

ii）平面波形式的解. 狄拉克方程

$$\left(\gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} + m\right)\psi = 0$$

有两类平面波形式的解:

$$\psi = u e^{ipx}, \quad \text{(正頻率部分)} \tag{6.44}$$

$$\psi = v e^{-ipx}, \quad \text{(負頻率部分)} \tag{6.45}$$

这里四維矢量 p 滿足关系:

$$p^2 + m^2 = 0, \tag{6.46}$$

而旋量 u, v 遵守下列代数方程:

$$(i\gamma^j p_j + m)u = 0, \tag{6.47}$$

$$(i\gamma^j p_j - m)v = 0. \tag{6.48}$$

定义算符

$$\Lambda_\pm(p) = \frac{\pm i\gamma^j p_j + m}{2m}, \tag{6.49}$$

則下列关系成立:

$$\Lambda_\pm \Lambda_\mp = 0, \tag{6.50}$$

$$\Lambda_+ + \Lambda_- = 1, \tag{6.51}$$

$$\Lambda_\pm^2 = \Lambda_\pm, \tag{6.52}$$

以及

$$\begin{aligned} &\Lambda_+ u = 0, \quad \Lambda_+ v = v, \\ &\Lambda_- u = u, \quad \Lambda_- v = 0. \end{aligned} \tag{6.53}$$

由此得到，算符 Λ_+ 是負頻率解的投影算符，而算符 Λ_- 是正頻率解的投影算符.

再定义算符

$$\Sigma_{\pm}(\mathbf{p}) = \frac{\mp(\sigma\cdot\mathbf{p}) + |\mathbf{p}|}{2|\mathbf{p}|} = \frac{\mp\sigma_{\mathbf{p}} + 1}{2}, \qquad (6.54)$$

这里

$$\sigma_{\mathbf{p}} = \frac{\sigma\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}.$$

在这种情况下，类似于关系 (6.50—6.52) 的关系也成立:

$$\Sigma_{\pm}\Sigma_{\mp} = 0, \qquad (6.55)$$

$$\Sigma_+ + \Sigma_- = 1, \qquad (6.56)$$

$$\Sigma_{\pm}^2 = \Sigma_{\pm}. \qquad (6.57)$$

此外，利用下列关系定义量 $u_{\pm}$, $v_{\pm}$,

$$\begin{aligned} &\Sigma_+u_+ = 0, \quad \Sigma_-u_+ = u_+, \\ &\Sigma_+u_- = u_-, \quad \Sigma_-u_- = 0, \\ &\Sigma_+v_+ = v_+, \quad \Sigma_-v_+ = 0, \\ &\Sigma_+v_- = 0, \quad \Sigma_-v_- = v_-. \end{aligned} \qquad (6.58)$$

现在可給算符 $\Sigma_{\pm}$ 和量 $u_{\pm}$, $v_{\pm}$ 下列解释:

u_+, v_+ 是函数 u, v 的自旋取向沿 $\mathbf{p}$ 矢量的分量，

u_-, v_- 是 u, v 的自旋取向沿 $-\mathbf{p}$ 矢量的分量，

$\Sigma_{\pm}(\mathbf{p})$ 是在自旋取向沿 $\mp\mathbf{p}$ 矢量的态 u 上的投影算符，也是在自旋取向沿 $\pm\mathbf{p}$ 矢量的态 v 上的投影算符.

一切算符 Λ 与一切算符 Σ 对易

$$[\Lambda_{\pm}, \Sigma_{\pm}] = 0, \qquad (6.59)$$

算符 $\Lambda_{\pm}$ 和 $\Sigma_{\pm}$ 把旋量 u, v 分成四种可能的部分 $u_{\pm}$, $v_{\pm}$, 它們相应于正負頻率和两种自旋方向的四种組合.

iii) 量子化. 量子化按常規进行:

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{r=\pm}\int\sqrt{\frac{m}{\varepsilon_p}}[a_r(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p})e^{ipx} + b_r^+(\mathbf{p})v_r(\mathbf{p})e^{-ipx}]d^3p, \qquad (6.60)$$

$$[a_r(\mathbf{p}),\ a_{r'}^{+}(\mathbf{p}')]_+ = \delta_{rr'}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}'), \tag{6.61}$$

$$[b_r(\mathbf{p}),\ b_{r'}^{+}(\mathbf{p}')]_+ = \delta_{rr'}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}'); \tag{6.62}$$

其余的反对易式为零：$\varepsilon_p = \sqrt{p^2+m^2}$，$p = |\mathbf{p}|$，$a_r(\mathbf{p})$ 是动量为 $\mathbf{p}$、自旋分量为 r 的 a 型粒子的消失算符，而 $b_r^{+}(\mathbf{p})$ 是动量为 $\mathbf{p}$、自旋分量为 r 的 b 型粒子的产生算符。 a 型和 b 型粒子分别称为粒子和反粒子。

对于无相互作用的場，

$$[\psi_\alpha(x),\ \bar{\psi}_\beta(x')]_+ = iS_{\alpha\beta}(x-x'), \tag{6.63}$$

$$S(x) = \left(\gamma^i\frac{\partial}{\partial x^i} - m\right)\Delta(x), \tag{6.64}$$

这里

$$\bar{\psi} = \psi^{+}\gamma_4. \tag{6.65}$$

关于这里所論及的問題的詳情可以在泡利的总結論文[16]或在书[1]第三章中找到.

iv) 拉式量密度的对称化. 自由場的拉氏量密度在洛仑茲变换下应当是不变的，可以写成下列形式：

$$\mathscr{L} = -\bar{\psi}\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)\psi \tag{6.66}$$

（出現的是 $\bar{\psi}$ 而不是 ψ^{+} 的原因見条 8）. 由它可以給出 c 量理論中的狄拉克方程，但是在 q 量理論中应当修改.

为此定义算符

$$\vartheta = \gamma_4\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right), \tag{6.67}$$

这时[1)]

$$-\mathscr{L} = \psi^{+}\vartheta\psi = \psi_\alpha^{+}\vartheta_{\alpha\beta}\psi_\beta = \vartheta_{\alpha\beta}\psi_\alpha^{+}\overset{\downarrow}{\psi}_\beta = \vartheta_{\alpha\beta}(\bar{\psi}\gamma_4)_\alpha\overset{\downarrow}{\psi}_\beta =$$

$$= \vartheta_{\alpha\beta}\bar{\psi}_\nu\overset{\downarrow}{\psi}_\beta(\gamma_4)_{\nu\alpha} =$$

$$= \vartheta_{\alpha\beta}\left[\frac{1}{2}(\bar{\psi}_\nu\overset{\downarrow}{\psi}_\beta - \overset{\downarrow}{\psi}_\beta\bar{\psi}_\nu) + \frac{1}{2}(\bar{\psi}_\nu\overset{\downarrow}{\psi}_\beta + \overset{\downarrow}{\psi}_\beta\bar{\psi}_\nu)\right](\gamma_4)_{\nu\alpha},$$

1) 因为在算符 ϑ 的表示式中出現微分算符，因此应当确定它作用在什么函数上。这一情况我們用箭号(↓)来标出. ——俄譯本譯者注.

第二項是奇异的 c 量：

$$\vartheta_{\alpha\beta}(\bar{\psi}_\nu\overset{\downarrow}{\psi}_\beta + \overset{\downarrow}{\psi}_\beta\bar{\psi}_\nu) = i(\vartheta_{\alpha\beta}S_{\nu\beta}(x))_{x=0},$$

我們把它抛弃，因为它只引起本征值的无限移动. 因此[1]

$$-\mathscr{L} = \frac{1}{2}\vartheta_{\alpha\beta}(\bar{\psi}_\nu\overset{\downarrow}{\psi}_\beta - \overset{\downarrow}{\psi}_\beta\bar{\psi}_\nu)(\gamma_4)_{\nu\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2}[\bar{\psi}_\nu(\gamma_4)_{\nu\alpha}\vartheta_{\alpha\beta}\psi_\beta - \psi_\beta\overleftarrow{\vartheta}^T_{\beta\alpha}(\gamma_4^T)_{\alpha\nu}\bar{\psi}_\nu] =$$

$$= \frac{1}{2}[\bar{\psi}\gamma_4\vartheta\psi - \psi\overleftarrow{\vartheta}^T\gamma_4^T\bar{\psi}] =$$

$$= \frac{1}{2}[\bar{\psi}\gamma_4\vartheta\psi - \psi\overleftarrow{\vartheta}^T\bar{\psi}\gamma_4] =$$

$$= \frac{1}{2}[\psi^+\vartheta\psi - \psi\overleftarrow{\vartheta}^T\psi^+], \qquad (6.68)$$

这一表示式可写作形式：

$$-\mathscr{L} = \frac{1}{2}[\psi^+, \vartheta\psi], \qquad (6.69)$$

因为(6.69)的右端变为

$$\frac{1}{2}[\psi^+\vec{\vartheta}\psi - (\vec{\vartheta}\psi)\psi^+] = \frac{1}{2}[\psi^+\vartheta\psi - \psi\overleftarrow{\vartheta}^T\psi^+].$$

5. γ 矩陣的代数. 狄拉克矩陣满足关系：

$$\{\gamma^i, \gamma^i\} = \gamma^i\gamma^i + \gamma^i\gamma^i = 2g^{ii}, \qquad (6.70)$$

或

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = \gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}. \qquad (6.71)$$

γ 矩陣的数学性質在泡利的工作 [17] 已研究过，关于它的較好的叙述可在[18]和[1]的附录 II 中找到. 下面所有未加証明的論断建議参看这些工作.

由关系(6.71)，应当存在 γ 矩陣乘积的 16 个独立組合：

---

1) 注意

$$\vartheta_{\alpha\beta}\psi_\beta = \left[\gamma_4\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)\right]_{\alpha\beta}\psi_\beta = \psi_\beta\left[\left(\gamma_\mu^T\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_\mu} + m\right)\gamma_4^T\right]_{\beta\alpha} =$$

$$= \psi_\beta\overleftarrow{\vartheta}^T{}_{\beta\alpha}.$$

$\bar{I}$

$\gamma_\mu = \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4,$

$\gamma_{[\mu\nu]} = i\gamma_2\gamma_3, i\gamma_3\gamma_1, i\gamma_1\gamma_2, i\gamma_1\gamma_4, i\gamma_2\gamma_4, i\gamma_3\gamma_4,$

$\gamma_{[\mu\nu\lambda]} = i\gamma_1\gamma_2\gamma_3, i\gamma_1\gamma_2\gamma_4, i\gamma_3\gamma_1\gamma_4, i\gamma_2\gamma_3\gamma_4,$

$\gamma^5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4,$

它們构成超复数的基. 若写成矩陣形式，它們至少必須由 4 × 4 矩陣构成($\sqrt{16} = 4$). 这一事实是所謂白恩塞德定理的結果(参看例如[19]). 現在指出两个重要的定理.

舒尔引理. 一个 4 × 4 矩陣，若与任何 γ_μ 对易，則是一个(复)常数乘以单位矩陣.

泡利基本定理. 若 γ_μ, γ'_μ 是滿足下列式子的 4 × 4 矩陣，

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}, \{\gamma'_\mu, \gamma'_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu},$$

則存在一个非奇异矩陣 S, 使得

$$\gamma'_\mu = S\gamma_\mu S^{-1} \tag{6.72}$$

关系(6.76)周知是 γ_μ 矩陣的"相似性变換".

这样的 S 矩陣除一个常数因子外是唯一的. 証明这点，設 S_1 和 S_2 是两个这样的解:

$$\gamma'_\mu = S_1\gamma_\mu S_1^{-1}, \gamma'_\mu = S_2\gamma_\mu S_2^{-1}.$$

然后消去 γ'_μ, 得

$$S_1\gamma_\mu S_1^{-1} = S_2\gamma_\mu S_2^{-1},$$

或

$$S_2^{-1}S_1\gamma_\mu = \gamma_\mu S_2^{-1}S_1;$$

則由舒尔引理，

$$S_2^{-1}S_1 = k, S_1 = kS_2.$$

有时我們再附加条件 $\mathrm{Det}|S| = 1$;但这时仍有任意因子 $\pm 1, \pm i$, 因为

$$\mathrm{Det}|kS| = k^4\,\mathrm{Det}|S| = 1, k^4 = 1.$$

矩陣 γ_5 滿足

$$(\gamma_5)^2 = 1 \tag{6.73}$$

$$\gamma_5\gamma_\mu = -\gamma_\mu\gamma_5, \mu = 1, 2, 3, 4 \tag{6.74}$$

在 (1, 2, 3, 0) 度規中，矩陣 γ_5 和关系 (6.73) 和 (6.74) 写作形式 ($i = 1, 2, 3, 0$)

$$\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 = i\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_0,$$
$$\gamma^5 = \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4 = -i\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0, \qquad (6.75)$$
$$(\gamma^5)^2 = 1,$$
$$\gamma^5\gamma^i = -\gamma^i\gamma^5. \qquad (6.76)$$

如果下列形式的矩陣方程成立：

$$\Gamma\gamma^i\Gamma^{-1} = -\Lambda\gamma^i\Lambda^{-1}, \qquad (6.77)$$

則

$$\Lambda = k\Gamma\gamma^5 = k\Gamma\gamma_5, k = 常数, \qquad (6.78)$$

因为由关系 $\Gamma = \Gamma'\gamma^5$ 决定的矩陣 Γ' 滿足等式：

$$\Gamma'\gamma^i\Gamma'^{-1} = \Lambda\gamma^i\Lambda^{-1},$$

而由准至常数因子的相似性变換的唯一性已証明了.

6. 矩陣 A, B, C 和 E. i) 矩陣 A, B 和 C. 現在我們定义几个矩陣，它們在討論旋量場的分立变換中是需要的.

矩陣 γ^i 的厄米共軛矩陣、轉置矩陣和复数共軛矩陣分别表示为 $(\gamma^i)^+$, $(\gamma^i)^T$ 和 $(\gamma^i)^*$. 它們每一个都滿足与矩陣 γ^i 一样的反对易关系，例如，取关系 (6.70)

$$\gamma^i\gamma^i + \gamma^i\gamma^i = 2g^{ii}$$

的厄米共軛，得

$$(\gamma^i)^+(\gamma^i)^+ + (\gamma^i)^+(\gamma^i)^+ = 2g^{ii},$$
$$\{(\gamma^i)^+, (\gamma^i)^+\} = 2g^{ii}. \qquad (6.79)$$

所以由泡利基本定理，存在矩陣 A, B 和 C，使得

$$(\gamma^i)^+ = -A\gamma^iA^{-1}, \qquad (6.80)$$
$$(\gamma^i)^T = B\gamma^iB^{-1}, \qquad (6.81)$$
$$(\gamma^i)^* = C\gamma^iC^{-1}. \qquad (6.82)$$

(6.80) 中 A 前的負号的选取是由方便的考虑.

現在研究这些矩陣的性質. 取关系 (6.80) 的厄米共軛的关系：

$$\gamma^i = -(A^{-1})^+(\gamma^i)^+A^+ = (A^+)^{-1}A\gamma^iA^{-1}A^+ =$$
$$= (A^-A^+)^{-1}\gamma^i(A^{-1}A^+),$$

由此

$$(A^{-1}A^{+})\gamma^{i} = \gamma^{i}(A^{-1}A^{+}).$$

按舒尔引理

$$A^{-1}A^{+} = \text{常数}.$$

取这一常数为 1 ,得到

$$A^{+} = A, \tag{6.83}$$

即 A 是厄米(自軛)矩陣.

相似的,取关系式(6.81)的轉置,得

$$\gamma^{i} = (B^{-1})^{T}(\gamma^{i})^{T}B^{T} = (B^{T})^{-1}B\gamma^{i}B^{-1}B^{T} =$$
$$= (B^{-1}B^{T})^{-1}\gamma^{i}(B^{-1}B^{T}),$$

由此

$$(B^{-1}B^{T})\gamma^{i} = \gamma^{i}(B^{-1}B^{T}),$$

所以

$$B^{-1}B^{T} = \text{常数}.$$

这一常数唯一协調的选取是:常数 $= -1$[1, 17—19]. 由此

$$B = -B^{T}. \tag{6.84}$$

現在研究关系式(6.82)的复数共軛关系:

$$\gamma^{i} = C^{*}(\gamma^{i})^{*}(C^{-1})^{*} = C^{*}C\gamma^{i}C^{-1}(C^{*})^{-1} =$$
$$= (C^{*}C)\gamma^{i}(C^{*}C)^{-1},$$

它可以写作下列形式:

$$(C^{*}C)\gamma^{i} = \gamma^{i}(C^{*}C).$$

因此

$$C^{*}C = \text{常数},$$

这一常数可設为 1 ,得到

$$C^{*} = C^{-1}. \tag{6.85}$$

矩陣 A 在討論双綫性协变量时起着重要的作用. 矩陣 B, C 分别出現在弱(維格勒)时間反演和电荷共軛之中.

ii) A, B 和 C 之間的关系. 三个矩陣 $(\gamma^{i})^{+}$, $(\gamma^{i})^{T}$, $(\gamma^{i})^{*}$ 由定义下列运算

$$((\gamma^{i})^{*})^{T} = (\gamma^{i})^{+}. \tag{6.86}$$

以及关系

$$((\gamma^i)^T)^+ = ((\gamma^i)^+)^T. \qquad (6.87)$$

相联系. 表示式(6.86)給出 A, B 和 C 之間的关系,而(6.87)給出 A 和 B 間的关系. 由(6.86)得到

$$(C\gamma^iC^{-1})^T = (C^{-1})^T(\gamma^i)^TC^T = (C^T)^{-1}B\gamma^iB^{-1}C^T =$$
$$= (B^{-1}C^T)^{-1}\gamma^i(B^{-1}C^T) = -A\gamma^iA^{-1},$$

則由条 5 中所說明的論据,

$$A\sim(B^{-1}C^T)^{-1}\gamma^5=(C^{-1})^TB\gamma^5=(C^*)^TB\gamma^5=C^+B\gamma^5.$$

可以选取相因子,使得

$$A = -C^+B\gamma^5 = -C^+B\gamma_5. \qquad (6.88)$$

表示式(6.87)可改写如下形式:

$$(B\gamma^iB^{-1})^+ = (B^{-1})^+(\gamma^i)^+B^+ =$$
$$= -(B^+)^{-1}A\gamma^iA^{-1}B^+ =$$
$$= -(A^{-1}B^+)^{-1}\gamma^i(A^{-1}B^+),$$
$$(-A\gamma^iA^{-1})^+ = -(A^{-1})^T(\gamma^i)^TA^T =$$
$$= -(A^T)^{-1}B\gamma^iB^{-1}A^T =$$
$$= -(B^{-1}A^T)^{-1}\gamma^i(B^{-1}A^T).$$

由相似性变换的唯一性,得到

$$A^{-1}B^+ \sim B^{-1}A^T,$$

常数相因子可选得使

$$B^+ = AB^{-1}A^T. \qquad (6.89)$$

iii) 矩陣 E. 找出满足下列关系的 E:

$$Eu_+ = v_-,\ Eu_- = -v_+, \qquad (6.90)$$
$$Ev_+ = u_-,\ Ev_- = -u_+, \qquad (6.91)$$

或

$$Eu_r = rv_{-r},\ Ev_r = ru_{-r},$$

这里 $r = \pm$. 則

$$E^2u_r = rEv_{-r} = -r^2u_r = -u_r,$$
$$E^2 = -1. \qquad (6.92)$$

旋量 u_r 满足关系 (6.47)

$$(i\gamma^i p_i + m)u_r = 0.$$

因此

$$E(i\gamma^i p_i + m)u_r = (-i\gamma^i p_i + m)Eu_r + i\{E, \gamma^i p_i\}u_r = 0.$$

因为 $Eu_r = rv_{-r}$ 滿足关系(6.48)

$$(-i\gamma^i p_i + m)v_{-r} = 0,$$

所以

$$\{E, \gamma^i p_i\} = 0. \tag{6.93}$$

由于矩陣 E 与所有的 γ_μ 反对易，且 $E^2 = -1$，所以它可以写作形式：

$$E = i\gamma_5. \tag{6.94}$$

矩陣 E 在強(史蘊格)时間反演(参看 §9).

在条 4 中已經証明

$$(i\gamma^i p_i + m)u = 0, \tag{6.47}$$

$$(i\gamma^i p_i - m)v = 0. \tag{6.48}$$

研究关系式(6.47)的复数共軛的关系，并且注意

$$(\gamma^i p_i)^* = (\gamma^i)^*(p_i)^* = C\gamma^i C^{-1} p_i = C\gamma^i p_i C^{-1}.$$

这时

$$\begin{aligned} &(-iC\gamma^i p_i C^{-1} + m)u^* = 0, \\ &C(i\gamma^i p_i - m)C^{-1}u^* = 0. \end{aligned} \tag{6.95}$$

比較(6.95)和(6.48)，得

$$C^{-1}u^* = C^*u^* = v \tag{6.96}$$

或

$$u^* = Cv,\ u = C^*v^*. \tag{6.97}$$

矩陣 E 使 u 变为 v 及 v 变为 u，而 C^* 使 u^* 变为 v 及 v 变为 u^*.

7. γ 矩陣的厄米表象和矩陣 $\bar{C}$. 表示式 (6.80)—(6.82) 在 (1, 2, 3, 0) 度規中为

$$\begin{aligned} (\gamma^i)^+ &= -A\gamma^i A^{-1}; \\ (\gamma^i)^T &= B\gamma^i B^{-1}, \\ (\gamma^i)^* &= C\gamma^i C^{-1} \end{aligned}$$

在 (1, 2, 3, 4) 度規中可改写为下列形式：

$$\gamma_\mu^+ = -A\gamma_\mu A^{-1},$$
$$\gamma_4^+ = A\gamma_4 A^{-1}, \qquad (6.98)$$
$$\gamma_\mu^T = B\gamma_\mu B^{-1}, \qquad (6.99)$$
$$\gamma_\mu^* = C\gamma_\mu C^{-1},$$
$$\gamma_4^* = -C\gamma_4 C^{-1}, \qquad (6.100)$$

这里 $\mu = 1, 2, 3$. 若选取 $A = \gamma_4$, $A^{-1} = \gamma_4$, 则矩陣 γ_μ 成为厄米矩陣. (由四个可能的 $\pm 1, \pm i$ 中)选取确定的相的原因将在下面說明(参看条 8).

方程 (6.89)

$$B^+ = AB^{-1}A^T$$

現在导致方程

$$B^+ = \gamma_4 B^{-1}(\gamma_4)^T = \gamma_4 B^{-1} B\gamma_4 B^{-1} = B^{-1}, \qquad (6.101)$$

而方程 (6.88)

$$A = -C^+ B\gamma_5$$

变成方程

$$C = -(\gamma_4(B\gamma_5)^{-1})^+ = -(\gamma_4\gamma_5 B^{-1})^+ =$$
$$= -(B^+)^{-1}\gamma_5\gamma_4 = -B\gamma_5\gamma_4 = B\gamma_4\gamma_5. \qquad (6.102)$$

定义 $\bar{C}$ 如下:

$$\bar{C} = \gamma_4^T C; \qquad (6.103)$$

則

$$\bar{C} = \gamma_4^T C = B\gamma_4 B^{-1} B\gamma_4\gamma_5 = B\gamma_5, \qquad (6.104)$$

并且矩陣 $\bar{C}^T$ 和 $\bar{C}^+$ 满足关系:

$$\bar{C}^T = (B\gamma_5)^T = \gamma_5^T B^T = -\gamma_5^T B = -\gamma_4^T\gamma_3^T\gamma_2^T\gamma_1^T B =$$
$$= -B\gamma_4\gamma_3\gamma_2\gamma_1 = -B\gamma_5 = -\bar{C}, \qquad (6.105)$$
$$\bar{C}^+ = (B\gamma_5)^+ = \gamma_5 B^+ = \gamma_5 B^{-1} = (B\gamma_5)^{-1} = \bar{C}^{-1}, \quad (6.106)$$

此外

$$\bar{C}\gamma_\mu\bar{C}^{-1} = (B\gamma_5)\gamma_\mu(B\gamma_5)^{-1} = B\gamma_5\gamma_\mu\gamma_5 B^{-1} =$$
$$= -B\gamma_\mu B^{-1} = -\gamma_\mu^T, \qquad (6.107)$$

矩陣 $\bar{C}$ 在文献中总是联系着电荷共軛运算而出現的 (参看 § 8).

总結这里研究的表象的性質.

1）矩陣 $\gamma_\mu(\mu = 1, 2, 3, 4)$ 是厄米的；

2）若矩陣 B 暫时保留未定，則矩陣 A，C 和 $\bar{C}$ 將通过 B 表出，已确定的矩陣如下：

$$A = \gamma_4,\ B = B,\ C = B\gamma_5\gamma_4,\ \bar{C} = B\gamma_5;$$

3）这些矩陣滿足关系：

$$B^T = -B,\quad B^+ = B^{-1},$$
$$C^* = C^{-1}$$
$$\bar{C}^T = -\bar{C},\quad C^+ = \bar{C}^{-1},$$
$$\gamma_\mu^T = B\gamma_\mu B^{-1} = -\bar{C}\gamma_\mu C^{-1}.$$

在实用上，以上研究的矩陣的下列厄米表象是有用的.

I. 狄拉克-泡利表象. 泡利自旋矩陣和单位矩陣：

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

构成 2 × 2 矩陣的基，即任意 2 × 2 矩陣可以写成它們的綫性組合的形式. 矩陣 σ 滿足周知的关系(这里 i, j, k 輪迴变动)：

$$\sigma_i\sigma_j = -\sigma_j\sigma_i = i\sigma_k,\ (\sigma_i)^2 = I.$$

4 × 4 矩陣

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_i \\ i\sigma_i & 0 \end{pmatrix},\ 当\ i = 1, 2, 3;\ \gamma_4 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad (6.108)$$

和

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

滿足 γ 矩陣的反对易关系，这是 σ 矩陣的反对易关系的結果.

在这一表象中，

$$B = B^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}, \quad (6.109)$$

和

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.110)$$

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.111)$$

II. 馬約拉納表象. 对泡利表象中的矩陣 $\gamma^{(p)}$，引入另一种編

号：

$$\gamma_1 = \gamma_4^{(p)},\ \gamma_2 = \gamma_2^{(p)},\ \gamma_3 = \gamma_5^{(p)},\ \gamma_4 = \gamma_1^{(p)},\ \gamma_5 = \gamma_3^{(p)}$$

或写成显明的形式：

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},\quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix},\quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_1 \\ i\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (6.112)$$

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_3 \\ i\sigma_3 & 0 \end{pmatrix};$$

这时

$$B = -B^{-1} = \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & i\sigma_2 \end{pmatrix}, \qquad (6.113)$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \qquad (6.114)$$

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_1 \\ -i\sigma_1 & 0 \end{pmatrix} = -\gamma_4. \qquad (6.115)$$

这一表象的特征是：

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$——是厄米矩陣又是实数矩陣，所以它們是对称的；

γ_4, γ_5——是厄米矩陣又是純虛数矩陣，所以它們是反对称的.

若利用度規 (1, 2, 3, 0)，則所有的矩陣既是实数矩陣又是厄米矩陣，因而是对称的. 这种表象的优点在于，算符 $[\gamma^i(\partial/\partial x_i) + m]$ 和在(6.42)中定义的算符 S 也成为实的. 所以，若 $\psi(x)$ 在某一确定时刻在某一坐标系中是厄米算符，則在任何时刻任意坐标系中 $\psi(x)$ 仍是厄米算符. 这一表象的缺点是，旋量的分量以复杂的方式混在一起，而不象狄拉克-泡利表象中所具有的簡单代数方程那样.

8. 双线型协变量. 在洛仑兹变換

$$x \to x' = ax$$

或

$$x_i' = a_{ij}x_j$$

下，狄拉克方程保持不变，若同时作替代

$$\psi(x) \to \psi'(x') = S\psi(x)$$

或

$$\psi_\alpha(x) \to \psi'_\alpha(x') = S_{\alpha\beta}\psi_\beta(x).$$

算符 S 与 $a^i{}_j$ 通过下式发生关系[参看 (6.43)]:

$$S^{-1}\gamma^i S = a^i{}_j\gamma^j.$$

利用下列关系式定义 γ'^i:

$$\gamma'^i = a^i{}_j\gamma^j, \tag{6.116}$$

那末 γ'^i 仍旧满足和 γ^i 一样的反对易式:

$$\{\gamma'^i, \gamma'^j\} = \{a^i{}_k\gamma^k, a^j{}_l\gamma^l\} = a^i{}_k a^j{}_l\{\gamma^k, \gamma^l\} =$$
$$= a^i{}_k a^j{}_l 2g^{kl} = 2a^i{}_k a^{jk} = 2g^{ij}.$$

因此满足(6.43)的算符 S 是存在的,除一个不定的常数因子外.

由 $a^i{}_j$ 的实数性条件导出算符 S 的下列性质. 取关系式(6.43)的厄米共轭关系

$$a^i{}_j\gamma^j = S^{-1}\gamma^i S,$$

则

$$a^i{}_j(\gamma^j)^+ = (S^+)(\gamma^i)^+(S^{-1})^+ = -(S^+)A\gamma^i A^{-1}(S^+)^{-1} =$$
$$= -(S^+A)\gamma^i(S^+A)^{-1},$$

而同时等式的左端可写作下列形式:

$$a^i{}_j(\gamma^j)^+ = -Aa^i{}_j\gamma^j A^{-1} = -AS^{-1}\gamma^i SA^{-1} =$$
$$= -AS^{-1}\gamma^i(AS^{-1})^{-1},$$

所以按舒尔引理

$$S^+A \sim AS^{-1}.$$

相因子可选得使

$$S^+A = AS^{-1}, \tag{6.117}$$

在洛仑兹变换下,

$$\psi(x) \to \psi'(x') = S\psi(x),$$
$$\psi^+(x) \to \psi'^+(x') = \psi^+(x)S^+,$$

而它們的綫性組合采取形式:

$$\psi'^+\psi' = \psi^+S^+S\psi \neq \psi^+\psi, \tag{6.118}$$

因为

$$S^+S \neq 1. \tag{6.119}$$

S 的这种非么正性是由时空的贋欧几里得性决定的，

$$g^{ij} \neq \delta_{ij}.$$

代替 ψ^+，我們引入由下列关系定义的所謂相伴函数 $\bar{\psi}$：

$$\bar{\psi}(x) = \psi^+(x)A = \psi^+(x)\gamma_4, \tag{6.120}$$

$$\bar{\psi}'(x') = \psi'^+(x')A = \psi'^+(x')\gamma_4; \tag{6.121}$$

則双綫型組合

$$\bar{\psi}'\psi' = \psi'^+AS\psi = \psi^+S^+AS\psi = \psi^+A\psi = \bar{\psi}\psi$$

是不变量。这是因为在洛仑兹变换下，

$$\psi(x) \to \psi'(x') = S\psi(x),$$

$$\bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}'(x') = \psi'^+(x')A = \psi^+(x)S^+A =$$

$$= \psi^+(x)AS^{-1} = \bar{\psi}(x)S^{-1}. \tag{6.122}$$

在一般情况下，定义 $F^{ij\cdots k}$ 为

$$F^{ij\cdots k} = \bar{\psi}\gamma^i\gamma^i\cdots\gamma^k\psi, \tag{6.123}$$

在洛仑兹变换下，这样的 $F^{ij\cdots k}$ 恰如张量一样变换，因为

$$(F^{ij\cdots k})' = \bar{\psi}'\gamma^i\gamma^i\cdots\gamma^k\psi' = \bar{\psi}S^{-1}\gamma^iS\cdot S^{-1}\gamma^i\cdots S^{-1}\gamma^kS\psi =$$

$$= \bar{\psi}a^i_r\gamma^r a^j_s\gamma^s\cdots a^k_t\gamma^t\psi = a^i_r a^j_s\cdots a^k_t\bar{\psi}\gamma^r\gamma^s\cdots\gamma^t\psi =$$

$$= a^i_r a^j_s\cdots a^k_t F^{rs\cdots t}. \tag{6.124}$$

由于矩陣 γ^i 的反对易性，任何张量都归結为下表內 5 个双綫型协变量 $\bar{\psi}\Omega_i\psi$（見表 1）的綫性組合。

表 1

标 記 i	$\bar{\psi}\Omega_i\psi$	名 称
S	$\bar{\psi}\psi$	标量
V	$\bar{\psi}\gamma i\psi$	矢量
T	$\bar{\psi}(\gamma i\gamma i - \gamma i\gamma^i)\psi$	张量
A	$\bar{\psi}\gamma^i\gamma^5\psi$	軸矢量或贋矢量
P	$\bar{\psi}\gamma^5\psi$	贋标量

注意，这里定义的协变性的概念是在“順时本征”洛仑兹变换范围內的，因此在空間反射和时間反演下的协变量的性質还沒有研究。只有在后面的这些变换下，才可区分标量（矢量）和贋标量

(贋矢量),而在表 1 中我們已列出了 § 7[1]中的結果.

§ 7. 空間反射和宇称

1. 标量場和贋标量場. 研究空間反射 σ:

$$x \to x',$$

$$\mathbf{x} = -\mathbf{x}, \quad x_0 = x_0, \tag{7.1}$$

定义自旋为零的場的变換如下:

$$P\varphi(x)P^{-1} \equiv \varphi_P(x) = \eta_P\varphi(\sigma^{-1}x) = \eta_P\varphi(-\mathbf{x}, x_0)$$

$$\varphi_P(x') = \eta_P\varphi(x), \tag{7.2}$$

η_P 是一个(复)常数. 若作两次空間反射,則場回复到原来的情况;因此

$$\eta_P^2 = 1 \quad 或 \quad \eta_P = \pm 1. \tag{7.3}$$

若 $\eta_P = +1$,則場称为标量場,而若 $\eta_P = -1$,則称贋标量場. 量 η_P 称为宇称. 显然自由場的拉氏量密度

$$\mathscr{L} = \varphi^+(x)(\Box - \mu^2)\varphi(x) \tag{7.4}$$

在空間反射 P 下是不变的.

为了証明粒子的內部性質与場在反射下的性質間的联系,建議把場按平面波展开:

$$\varphi(\mathbf{x}, x_0) = \sum_{\mathbf{k}} [a(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{kx}-k_0x_0)} + b^+(\mathbf{k})e^{-i(\mathbf{kx}-k_0x_0)}]. \tag{7.5}$$

这里归一化因子都括在 a, b 之中. 这时

$$P\varphi(\mathbf{x}, x_0)P^{-1} = \sum_{\mathbf{k}} [Pa(\mathbf{k})P^{-1}e^{i(\mathbf{kx}-k_0x_0)} +$$

$$+ Pb^+(\mathbf{k})P^{-1}e^{-i(\mathbf{kx}-k_0x_0)}] = \eta_P\varphi(-\mathbf{x}, x_0) =$$

$$= \sum_{\mathbf{k}} [\eta_Pa(\mathbf{k})e^{i(-\mathbf{kx}-k_0x_0)} + \eta_Pb^+(\mathbf{k})e^{-i(-\mathbf{kx}-k_0x_0)}] =$$

$$= \sum_{\mathbf{k}} [\eta_Pa(-\mathbf{k})e^{i(\mathbf{kx}-k_0x_0)} + \eta_Pb^+(-\mathbf{k})e^{-i(\mathbf{kx}-k_0x_0)}],$$

因此,

---

1) 关于本节所討論的問題,参看[1]第 II, III 章和 [2, 16]. 与 γ 矩陣相关的問題,参看[1]的附录 II 和 [17, 18].

$$P a(\mathbf{k}) P^{-1} = \eta_P a(-\mathbf{k}), \tag{7.6}$$

$$P b^+(\mathbf{k}) P^{-1} = \eta_P b^+(-\mathbf{k}); \tag{7.7}$$

类似地对于 $\varphi^+(x)$,

$$P a^+(\mathbf{k}) P^{-1} = \eta_P a^+(-\mathbf{k}), \tag{7.8}$$

$$P b(\mathbf{k}) P^{-1} = \eta_P b(-\mathbf{k}). \tag{7.9}$$

应用空間反射运算于"单粒子"态

$$a^+(\mathbf{k})\rangle_0,$$

这时

$$P a^+(\mathbf{k})\rangle_0 = P a^+(\mathbf{k}) P^{-1} P\rangle_0 = \eta_P a^+(-\mathbf{k})\rangle_0, \tag{7.10}$$

这里我們选取自然的条件

$$P\rangle_0 = \rangle_0. \tag{7.11}$$

空間反射使动量为 $\mathbf{k}$ 的单粒子态变为动量为 $-\mathbf{k}$ 的单粒子态,同时改变态的符号或者不变符号. 若这种反射运算不改变态的符号($\eta_P = +1$), 則說粒子的內宇称为正; 这样的粒子称为标量粒子. 在相反的情形 ($\eta_P = -1$), 粒子的內宇称为负; 这样的粒子称为贋标量粒子.

我們把場按方程

$$(\Box - \mu^2) u_n(\mathbf{x}, x_0) = 0 \tag{7.12}$$

的具有确定宇称的解展开成級数:

$$u_n(-\mathbf{x}, x_0) = (-1)^n u_n(\mathbf{x}, x_0), \tag{7.13}$$

这里

$$n = 1, 2, 3, \cdots$$

簡单就是数目. 在这种情况下

$$\varphi(\mathbf{x}, x_0) = \sum_n [a_n u_n(\mathbf{x}, x_0) + b_n^+ u_n^*(\mathbf{x}, x_0)]. \tag{7.14}$$

算符 a_n 和 b_n 作用在由波函数 $u_n(x)$ 所描写的粒子和反粒子上.

作为一个例子,按球諧函数展开

$$u_n(\mathbf{x}, x_0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} kj_l(kr) Y_{lm}(\theta, \phi) \frac{e^{-ik_0 x_0}}{\sqrt{2k_0}}$$

这每一項按 $l = 0, 1, 2 \cdots$ 分别称为 $s, p, d, f \cdots$ 态, 这里 n 表示 (l, m) 集体,而 $(-1)^n \equiv (-1)^l$.

这时

$$P\varphi(\mathbf{x}, x_0)P^{-1} = \sum_n [Pa_nP^{-1}u_n(\mathbf{x}, x_0) +$$

$$+ Pb_n^+P^{-1}u_n^*(\mathbf{x}, x_0)] = \eta_P\varphi(-\mathbf{x}, x_0) =$$

$$= \sum_n [\eta_P a_n u_n(-\mathbf{x}, x_0) + \eta_P b_n^+ u_n^*(-\mathbf{x}, x_0)] =$$

$$= \sum_n [\eta_P(-1)^n a_n u_n(\mathbf{x}, x_0) +$$

$$+ \eta_P(-1)^n b_n^+ u_n^*(\mathbf{x}, x_0)], \tag{7.15}$$

即

$$\begin{aligned} Pa_nP^{-1} &= \eta_P(-1)^n a_n, \\ Pb_n^+P^{-1} &= \eta_P(-1)^n b_n^+, \end{aligned} \tag{7.16}$$

相似地

$$Pa_n^+P^{-1} = \eta_P(-1)^n a_n^+, \tag{7.17}$$

$$Pb_nP^{-1} = \eta_P(-1)^n b_n, \tag{7.18}$$

把运算P作用于处在态n的单粒子态

$$a_n^+\rangle_0$$

上,这时得

$$Pa_n^+\rangle_0 = Pa_n^+P^{-1}P\rangle_0 = \eta_P(-1)^n a_n^+\rangle_0, \tag{7.19}$$

即对波函数为u_n的单个标量粒子的态的宇称等于$(-1)^n$[对赝标量粒子态的宇称为$(-1)^{n+1}$]. 由此也显見,赝标量粒子的內宇称为(-1). 所以若标量粒子处在s, d, $\cdots$态, 则这种态的宇称为正,而若标量粒子处在p态,则宇称为負. 反之,若是赝标量粒子处在这些态中,则态的宇称的正負与上述的正好相反.

2. 电磁場. 电磁势(或更恰当些,光子的波函数)是四維矢量,在空間反射P下,如下方式变換:

$$\begin{aligned} PA_\mu(\mathbf{x}, x_0)P^{-1} &= -A_\mu(-\mathbf{x}, x_0), \\ PA_4(\mathbf{x}, x_0)P^{-1} &= A_4(-\mathbf{x}, x_0), \end{aligned} \tag{7.20}$$

这里$\mu = 1, 2, 3$. 对实际的光子,总可取庫仑规范使得

$$A_4 = 0,$$

这样$A_\mu(\mu = 1, 2, 3) = \mathbf{A}$成了一个三維矢量. 和条1的方法一

样，可以証明光子的內宇称为 (-1).

由于場量是矢量，所以相应的粒子（光子）的自旋为 1. 若把場量用球諧函数展成級数，存在两种角动量的耦合

$$J = l \pm 1,\ J = l,$$

这里 J 是总角动量. 因为場有負的內宇称，立即看到，$J = l = 1$ 的态的宇称为

$$(-1)^J(-1) = (-1)^J,$$

而 $J = l$ 的态的宇称为

$$(-1)^{J+1}.$$

前者是电 2^J 极場，后者是磁 2^J 极場.

3. 旋量場. 定义旋量場 $\psi(\mathbf{x}, x_0)$ 在空間反射 P 下的变換为

$$P\psi(x)P^{-1} \equiv \psi_P(x) = S\psi(\sigma^{-1}x) = S\psi(-\mathbf{x}, x_0). \quad (7.21)$$

現在試着来找寻这样的算符 S，使得自由場的拉氏量密度在 P 下保持不变：

$$-\mathscr{L} = \bar{\psi}\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)\psi,$$

$$-P\mathscr{L}(x)P^{-1} = \bar{\psi}'(x)\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)\psi'(x) =$$

$$= \psi^+(\sigma^{-1}x)S^+\gamma_4\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)S\psi(\sigma^{-1}x) =$$

$$= -\mathscr{L}(\sigma^{-1}x) =$$

$$= \bar{\psi}(\sigma^{-1}x)\left(\gamma_4 \frac{\partial}{\partial x_4} - \boldsymbol{\gamma}\frac{\partial}{\partial x} + m\right)\psi(\sigma^{-1}x), \quad (7.22)$$

因此若取

$$S = \eta_P\gamma_4, \quad (7.23)$$

这里 η_P 是一个 c 数，滿足

$$|\eta_P|^2 = 1, \quad (7.24)$$

則不变性就得到保証了. 对于費米子場，两次反射可能引起符号的改变，因为轉 2π 就会改变符号[1]. 因此两次反射 P 导出

---

1) 参看 Жарков Г. Ф., ЖЭТФ, 20, 492 (1950). ——俄譯本譯者注.

$$\eta_P^2 = \pm 1 \tag{7.25}$$

$$\eta_P = \pm 1, \pm i. \tag{7.26}$$

按楊振宁和提姆諾提出的記法[20],旋量場划分为下列四类:

$$\begin{aligned} &\eta_P = +i \to (A), \quad \eta_P = +1 \to (C), \\ &\eta_P = -i \to (B), \quad \eta_P = -1 \to (D). \end{aligned} \tag{7.27}$$

場 B, C, D (有时,場 A, B, D) 称为贋旋量. 如果附加要求,电荷共軛旋量 ψ_c 与旋量 ψ 一样地变换,則在 §8 中将証明,必須选取 $\eta_P = \pm i$, 所以

$$\psi_P = \pm i\gamma_4\psi. \tag{7.28}$$

关于这四类旋量的某些应用将在条 4 中来討論.

現在把 ψ 按平面波展开:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, x_0) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r} [&a_r(\mathbf{k}) u_r(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{kx}-k_0x_0)} + \\ &+ b_r^+(\mathbf{k}) v_r(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{kx}-k_0x_0)}]; \end{aligned} \tag{7.29}$$

于是

$$\begin{aligned} P\psi(\mathbf{x}, x_0)P^{-1} = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r} [&pa_r(\mathbf{k})P^{-1}u_r(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{kx}-k_0x_0)} + \\ &+ Pb_r^+(\mathbf{k})P^{-1}v_r(\mathbf{k})e^{-i(\mathbf{kx}-k_0x_0)}] = \eta_P\gamma_4\psi(-\mathbf{x}, x_0) = \\ = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r} \eta_P[&\gamma_4 a_r(\mathbf{k})u_r(\mathbf{k})e^{i(-\mathbf{kx}-k_0x_0)} + \\ &+ \gamma_4 b_r^+(\mathbf{k})v_r(\mathbf{k})e^{-i(-\mathbf{kx}-k_0x_0)}] = \\ = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r} [&\eta_P a_r(-\mathbf{k})\gamma_4 u_r(-\mathbf{k})e^{i(\mathbf{kx}-k_0x_0)} + \\ &+ \eta_P b_r^+(-\mathbf{k})\gamma_4 v_r(-\mathbf{k})e^{-i(\mathbf{kx}-k_0x_0)}] = \\ = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r} [&\eta_P a_r(-\mathbf{k})u_r(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{kx}-k_0x_0)} - \\ &- \eta_P b_r^+(-\mathbf{k})v_r(\mathbf{k})e^{-i(\mathbf{kx}-k_0x_0)}], \end{aligned}$$

这里我們用到[1)]

---

1) 除規一化因子外

$$u(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} I \\ \dfrac{\sigma\mathbf{k}}{\varepsilon_K + m} \end{pmatrix}, \quad v(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\sigma\cdot\mathbf{k}}{\varepsilon_K + m} \\ I \end{pmatrix}, \quad \text{而 } \gamma_4 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}.$$

$$\gamma_4 u_r(\mathbf{k}) = u_r(-\mathbf{k}),$$
$$\gamma_4 v_r(\mathbf{k}) = -v_r(-\mathbf{k}). \tag{7.30}$$

所以

$$P a_r(\mathbf{k}) P^{-1} = \eta_P a_r(-\mathbf{k}), \tag{7.31}$$
$$P b_r^+(\mathbf{k}) P^{-1} = -\eta_P b_r^+(-\mathbf{k}). \tag{7.32}$$

类似地

$$P a_r^+(\mathbf{k}) P^{-1} = \eta_P^* a_r^+(-\mathbf{k}), \tag{7.33}$$
$$P b_r(\mathbf{k}) P^{-1} = -\eta_P^* b_r(-\mathbf{k}). \tag{7.34}$$

把算符 P 作用到单个粒子态上，得到

$$P a_r^+(\mathbf{k})\rangle_0 = P a_r^+(\mathbf{k}) P^{-1} P\rangle_0 = \eta_P^* a_r^+(-\mathbf{k})\rangle_0, \tag{7.35}$$
$$P b_r^+(\mathbf{k})\rangle_0 = P b_r^+(\mathbf{k}) P^{-1} P\rangle_0 = -\eta_P b_r^+(-\mathbf{k})\rangle_0. \tag{7.36}$$

即对于粒子，宇称等于 η_P^*，而对于反粒子，宇称等于 $-\eta_P$. 注意，反粒子(反费米子)总是与粒子(费米子)有相反的宇称[1].

4. 双綫型协变量和相互作用. i) 双綫型协变量. 考虑双綫型量

$$\bar{\psi}\Omega_i\psi,$$

这里 Ω_i 是由 γ 矩陣組成的. 在空間反射 P 下，变成

$$P\bar{\psi}\Omega_i\psi P^{-1} = P\bar{\psi}P^{-1}\Omega_i P\psi P^{-1} =$$
$$= \bar{\psi}(-\mathbf{x}, x_0)\gamma_4\Omega_i\gamma_4\psi(-\mathbf{x}, x_0). \tag{7.37}$$

可以証明，Ω_i 和 $\gamma_4\Omega_i\gamma_4$ 以下列方式相联系(参看表 2)

表 2

Ω_i	$\gamma_4\Omega_i\gamma_4$	附　　注
1	1	
$i\gamma_\mu$	$-i\gamma_\mu$	当 $\mu = 1, 2, 3$
	$i\gamma_4$	
$\frac{i}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)$	$\frac{i}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)$	当 $\mu, \nu = 1, 2, 3$
	$-\frac{i}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)$	或 $\mu = 1, 2, 3, \nu = 4$ 或 $\nu = 1, 2, 3, \mu = 4$
$i\gamma_\mu\gamma_5$	$i\gamma_\mu\gamma_5$	当 $\mu = 1, 2, 3$
	$-i\gamma_4\gamma_5$	
$i\gamma_5$	$-i\gamma_5$	

1) 更确切点說，粒子与反粒子宇称之积为 —1，因为 $\eta_P^*(-\eta_P) = -\eta_P^*\eta_P = -|\eta_P|^2 = -1$.——中譯本譯者注.

这表中列出的关系說明在 §6 条 8 中我們引入的术語的正确性，表明了标量(矢量)与贋标量(贋矢量)的区别.

如果 $\bar{\psi}$ 和 ψ 属于条 3 中所描写的 A, B, C, D 类中的同一类，則 $\bar{\psi}\Omega_i\psi$ 在变換 P 下总乘以 $|\eta_P|^2 = 1$. 若 $\bar{\psi}$ 与 ψ 属于不同的类，則二者在 η_P 中要就都含有 i，要就都不含 i（卽 $\bar{\psi}$ 和 ψ 应当属于 A 和 B 类，或 C 和 D 类)，否則 $\mathscr{L}$ 不能是不变的. 較之第一种情况所多出的符号是这两种場的相对宇称. 所以，A 和 B 或 C 和 D 有負的相对宇称.

ii) 相互作用. 相互作用的拉氏量或哈密頓量应当是厄米的，这样才能有实的能量本征值. 若理論相对于空間反射是不变的，換句話說，宇称是守恆的量子数，則相互作用拉氏量密度 $\mathscr{L}^i$ 应当是眞正的标量. 若 P 不是守恆的算符，則拉氏量可能是贋标量.

1. 湯川型相互作用. 由旋量場的双綫型协变量与自旋为零的場組成的不含場量导数的相互作用是：对于标量場 φ，

$$\mathscr{L}^i = g\bar{\psi}\psi\varphi, \quad \text{若 } P \text{ 是守恆算符},$$

$$\mathscr{L}^i = ig\bar{\psi}\gamma_5\psi\varphi, \text{ 若 } P \text{ 不是守恆算符},$$

而对于贋标量場 φ，

$$\mathscr{L}^i = ig\bar{\psi}\gamma_5\psi\varphi, \text{ 若 } P \text{ 是守恆算符},$$

$$\mathscr{L}^i = g\bar{\psi}\psi\varphi, \quad \text{若 } P \text{ 不是守恆算符}.$$

这里 g 是耦合常数；它是实数，因为拉氏量 $\mathscr{L}^i$ 是厄米的. 这种类型的相互作用称为湯川型直接相互作用. 同样，例如对于贋标量 φ，可以构成相互作用拉氏量密度：

$$\mathscr{L}^i = ig\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu},$$

它是含导数的相互作用，也是眞正的标量.

2. 費米型相互作用. 四个旋量 ψ_a, ψ_b, ψ_c, ψ_d 之間形式为

$$g(\bar{\psi}_a\Omega_i\psi_b)(\bar{\psi}_c\Omega_i\psi_d) + \text{厄米共軛項}$$

的直接（卽不含有場量的导数）耦合，称为費米型相互作用. g 可以是复数(如果理論在电荷共軛或弱（維格勒）时間反演下不是不

变的，关于这点以下将要討論）. 加上厄米共軛項为的是使整个拉氏量是厄米的.

虽然相互作用拉氏量必然是标量或贋标量，但随着 $\psi_a, \psi_b, \psi_c, \psi_d$ 属于 A, B, C, D 的哪一类，$\Omega_i\Omega_i$ 就有多种的組合. 例如，若旋量 ψ_a, ψ_b, ψ_c 属于 A 类，而旋量 ψ_d 属于 B 类，則可构成下列組合：

标　　量	贋　标　量
$(\bar{\Psi}_a\psi_b)(\bar{\Psi}_c\gamma_5\psi_d)$	$(\bar{\Psi}_a\psi_b)(\bar{\Psi}_c\psi_d)$
$(\bar{\Psi}_a\gamma_\mu\psi_b)(\bar{\Psi}_c\gamma_\mu\gamma_5\psi_d)$	$(\bar{\Psi}_a\gamma_\mu\psi_b)(\bar{\Psi}_c\gamma_\mu\psi_d)$
$(\bar{\Psi}_a\sigma_{\mu\nu}\psi_b)(\bar{\Psi}_c\sigma_{\mu\nu}\gamma_5\psi_d)$	$(\bar{\Psi}_a\sigma_{\mu\nu}\psi_b)(\bar{\Psi}_c\sigma_{\mu\nu}\psi_d)$
$(\bar{\Psi}_a\gamma_\mu\gamma_5\psi_b)(\bar{\Psi}_c\gamma_\mu\psi_d)$	$(\bar{\Psi}_a\gamma_\mu\gamma_5\psi_b)(\bar{\Psi}_c\gamma_\mu\gamma_5\psi_d)$
$(\bar{\Psi}_a\gamma_5\psi_b)(\bar{\Psi}_c\psi_d)$	$(\bar{\Psi}_a\gamma_5\psi_b)(\bar{\Psi}_c\gamma_5\psi_d)$

在这表中

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu).$$

此外，可以变更 $\psi_a, \psi_b, \psi_c, \psi_d$ 的次序，例如写作：$(\bar{\Psi}_c\psi_b)(\bar{\Psi}_a\psi_d)$. 但是次序的变更并未引入什么本質上是新的东西，因为实际上具有变更后的次序的每一种表示式总可以写作具有原来次序 $\psi_a, \psi_b, \psi_c, \psi_d$ 的项的綫性組合. 卽

$$(\bar{\Psi}_c\Omega_i\psi_b)(\bar{\Psi}_a\Omega_i\psi_d) = \sum_j f_{ij}(\bar{\Psi}_a\Omega_i\psi_b)(\bar{\Psi}_c\Omega_i\psi_d),$$

这里系数 $f_{ij}(i, j = S, V, T, A, P)$ 构成矩陣

$$f = \begin{Vmatrix} 1/4 & -1/4 & 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ -1 & -1/2 & 0 & 1/2 & -1 \\ 3/2 & 0 & -1/2 & 0 & -3/2 \\ 1 & -1/2 & 0 & -1/2 & 1 \\ -1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{Vmatrix}$$

这一事实大家知道是費尔兹換位定理. 关于这一問題，参看[21, 22].

5. 应用. i) 散射振幅的結构. 考虑一个自旋为零的粒子和

一个自旋为 1/2 的粒子的散射(例如,介子—核子散射). 始态的相对动量为 $\mathbf{k}_i$, 末态的为 $\mathbf{k}_f$. 矢量 σ 是自旋矢量. 若理論相对于空間反射是不变的,则振幅是眞正的标量: $T = A + B(\sigma\cdot\mathbf{k}_i\times\mathbf{k}_f)$, 这里 $A = A(k_i^2, k_j^2, \mathbf{k}_i\cdot\mathbf{k}_f)$,而 B 也是有类似的結构的. 类似 $\sigma\cdot\mathbf{k}_i$ 的贋标量被排除了.

ii) 負 π 介子的內宇称. 鮑洛夫斯基的实驗[23]确切地証明了,对于"介氘原子",存在負 π 介子被氘吸收的过程

$$\pi^- + D \to n + n.$$

暫时我們訊为,中子和質子具有同样的宇称(参看 § 16 条 3).

由于 π 介子的自旋为零, 可以証明 π 介子是从介原子的 s 态中被吸收的. 这样 $\pi^- + D$ 的系統的总动量矩 $J = 1$,而宇称等于 π^- 介子的內宇称. (由于泡利原理)末态可能是下列态之一:

$$^1S_0, {}^1D_2\cdots; {}^3P_{0,1,2}, {}^3F_{2,3,4}\cdots$$

具 $J = 1$ 的唯一的态是 $^3P_1$,它的宇称为 -1. 因为对于 π 介子的反应, 宇称总是守恆的, 所以可以作出結論, π 介子是贋标粒子.

§ 8. 电荷共軛(正反粒子共軛)

1. 标量場和贋标量場. 自旋为零的非厄米場可展开成級数形式:

$$\varphi(x) = \sum_{\mathbf{k}} [a(\mathbf{k})e^{ikx} + b^+(\mathbf{k})e^{-ikx}], \qquad (8.1)$$

而厄米場(必然是中性的)展成下列級数:

$$\varphi(x) = \sum_{\mathbf{k}} [a(\mathbf{k})e^{ikx} + a^+(\mathbf{k})e^{-ikx}]. \qquad (8.2)$$

正頻率項前的展开系数 $a(\mathbf{k})$ 是粒子算符, 而負頻率項前的系数 $b^+(\mathbf{k})$ 是反粒子算符. 对厄米場,粒子与反粒子全同.

定义电荷共軛运算 C 为使粒子与反粒子互相变換的运算. 按呂德斯的建議,电荷共軛称为"正反粒子共軛"更为合适.

i) 非厄米(荷电)場. 由定义

$$Ca(\mathbf{k})C^{-1} = \eta_c b(\mathbf{k}), \qquad (8.3)$$

$$C b^{+}(\mathbf{k}) C^{-1} = \eta_c a^{+}(\mathbf{k}), \tag{8.4}$$
$$|\eta_c|^2 = 1.$$

这样

$$C\varphi(x)C^{-1} = \sum_{\mathbf{k}} [C a(\mathbf{k}) C^{-1} e^{ikx} + C b^{+}(\mathbf{k}) C^{-1} e^{-ikx}] =$$
$$= \sum [\eta_c b(\mathbf{k}) e^{ikx} + \eta_c a^{+}(\mathbf{k}) e^{-ikx}],$$

或

$$\varphi_c(x) \equiv C\varphi(x)C^{-1} = \eta_c \varphi^{+}(x). \tag{8.5}$$

显然，自由場的拉氏量密度

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\{\varphi^{+}(x), (\Box - \mu^2)\varphi(x)\} \tag{8.6}$$

在电荷共軛下是不变的，

$$C\mathscr{L}C^{-1} = \frac{1}{2}\{C\varphi^{+}(x)C^{-1}, (\Box - \mu^2) C\varphi(x) C^{-1}\} =$$
$$= \frac{1}{2}\{\varphi(x), (\Box - \mu^2)\varphi^{+}(x)\} =$$
$$= \frac{1}{2}\{\varphi^{+}(x), (\Box - \mu^2)\varphi(x)\} = \mathscr{L}.^{1)}$$

ii) 厄米(中性)場. 由定义

$$C a(\mathbf{k}) C^{-1} = \eta_c a(\mathbf{k}), \tag{8.7}$$

这里 η_c 是实数，同样得

$$\varphi_c(x) \equiv C\varphi(x)C^{-1} = \eta_c \varphi^{+}(x) = \eta_c \varphi(x),$$

这时 η_c 必然滿足条件：

$$C\varphi_c(x)C^{-1} = \eta_c^2 \varphi(x) = \varphi(x),$$
$$\eta_c^2 = 1, \ \eta_c = \pm 1, \tag{8.8}$$

---

1) 这里用到 $\frac{1}{2}\{\varphi(x), (\Box - \mu^2)\varphi^{+}(x)\}$ 与 $\frac{1}{2}\{\varphi^{+}(x), (\Box - \mu^2)\varphi(x)\}$ 之間只差一散度項

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\varphi^{+}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\varphi - \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\varphi^{+}\right)\varphi\right]$$

按§6注，这不是实質上的改变. ——中譯本譯者注.

因此

$$Ca(\mathbf{k})C^{-1} = \eta_c a(\mathbf{k}), \tag{8.9}$$

$$Ca^+(\mathbf{k})C^{-1} = \eta_c a^+(\mathbf{k}), \tag{8.10}$$

得到

$$Ca^+(\mathbf{k})\rangle_0 = \eta_c a^+(\mathbf{k})\rangle_0. \tag{8.11}$$

所以单个中性粒子的态是算符 C 的本征态，本征值是 η_c. η_c 称为电荷共軛宇称.

显然，自由場的拉氏量密度

$$\mathscr{L} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right)^2 - \mu^2\varphi^2 = \varphi(x)(\Box - \mu^2)\varphi(x) \tag{8.12}$$

在 C 下是不变的.

2. 旋量場. 用下列关系定义旋量場的电荷共軛运算

$$\begin{aligned} Ca_r(\mathbf{k})C^{-1} &= \eta_c b_r(\mathbf{k}), \\ Cb_r^+(\mathbf{k})C^{-1} &= \eta_c a_r^+(\mathbf{k}), \end{aligned} \tag{8.13}$$

且

$$|\eta_c|^2 = 1.$$

我們現在来看 $\psi_c \equiv C\psi C^{-1}$ 是什么. 因为[1)]

$$\psi(x) = \sum_{\mathbf{k}}\sum_r [a_r(\mathbf{k})u_r(\mathbf{k})e^{ikx} + b_r^+(\mathbf{k})v_r(\mathbf{k})e^{-ikx}],$$

$$\begin{aligned} C\psi(x)C^{-1} &= \sum_{\mathbf{k}}\sum_r [\eta_c b_r(\mathbf{k})u_r(\mathbf{k})e^{ikx} + \eta_c a_r^+(\mathbf{k})v_r(\mathbf{k})e^{-ikx}] = \\ &= \sum_{\mathbf{k}}\sum_r [\eta_c b_r(\mathbf{k})C^*v_r(\mathbf{k})e^{ikx} + \\ &\quad + \eta_c a_r^+(\mathbf{k})C^*u_r(\mathbf{k})e^{-ikx}] = \eta_c C^*\psi^+(x), \end{aligned} \tag{8.14}$$

同样[2)]

$$C\psi^+(x)C^{-1} = \eta_c^* C\psi(x), \tag{8.15}$$

特别是在馬約拉納表象中，$C = C^* = 1$，所以

$$\begin{aligned} \psi_c(x) &= \eta_c\psi^+(x), \\ \psi_c^+(x) &= \eta_c^*\psi(x). \end{aligned} \tag{8.16}$$

---

1) $\psi^* = (\psi^+)^T$，但二者的分量相同：$\psi_a{}^* = \psi_a{}^+$. ——原注.
这里为簡单起見，(8.14)中右端对旋量的轉置記号略去了.——中譯本譯者注.

2) 注意，$C^* = C^{-1}$，$(C^{-1})^+ = C$.

在形式上这就与玻色子場的关系一样了. 用 $\bar{\psi}$ 代替 ψ^+, 则有

$$\psi_c = \eta_c C^* \psi^+ = \eta_c \bar{C}^{-1} (\gamma_4^T)^{-1} \psi^+ =$$

$$= \eta_c \bar{C}^{-1} \psi^+ \gamma_4^{-1} = \eta_c \bar{C}^{-1} \bar{\psi},$$

这里矩陣 $\bar{C}$ 由 §6 条 7 定义为

$$\bar{C} = \gamma_4^T C = B \gamma_5.$$

这一形式在文集[24]中泡利的論文中曾用过.

自由場的拉氏量密度

$$-\mathscr{L} = \frac{1}{2}[\psi^+ \vartheta \psi - \psi \overleftarrow{\vartheta}^T \psi^+] \tag{8.17}$$

在 C 运算下,若取馬約拉納表象,变成

$$-C\mathscr{L}C^{-1} = \frac{1}{2}[C\psi_\alpha^+ C^{-1} \vartheta_{\alpha\beta} C \psi_\beta C^{-1} - C\psi_\alpha C^{-1} \overleftarrow{\vartheta}_{\alpha\beta}^T C \psi_\beta^+ C^{-1}] =$$

$$= \frac{1}{2}|\eta_c|^2[\psi \vartheta \psi^+ - \psi^+ \overleftarrow{\vartheta}^T \psi].$$

由

$$\vartheta = \gamma_4 \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m \right),$$

$$\overleftarrow{\vartheta}^T = \left(\gamma_\mu^T \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_\mu} + m \right) \gamma_4^T,$$

在馬約拉納表象中,有

$$\gamma_\mu^T = \gamma_\mu, (\mu = 1, 2, 3),$$

$$\gamma_4^T = -\gamma_4,$$

所以

$$\gamma_\mu^T \gamma_4^T = -\gamma_\mu \gamma_4 = \gamma_4 \gamma_\mu, \text{当 } \mu = 1, 2, 3,$$

$$\gamma_4^T \gamma_4^T = \gamma_4 \gamma_4,$$

这样

$$\overleftarrow{\vartheta}^T = \gamma_4 \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m \right).$$

我們注意,在拉氏量密度上加以散度項,运动方程不会改变,所以

$$\frac{\vec{\partial}}{\partial x_\mu} = -\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_\mu},$$

因为对任何函数 f 和 g 的导数下式成立

$$f\frac{\vec{\partial}}{\partial x_\mu}g = f\frac{\partial g}{\partial x_\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}(fg) - \frac{\partial f}{\partial x_\mu}g \to -f\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_\mu}g,$$

散度型项 $(\partial/\partial x_\mu)(fg)$ 可变为对表面的积分，因此

$$\overleftarrow{\vartheta}^T \text{ 实质上等于 } -\vec{\vartheta},$$

所以得

$$-C\mathscr{L}C^{-1} = \frac{1}{2}[\psi\vec{\vartheta}\psi^+ - \psi^+\overleftarrow{\vartheta}^T\psi] =$$

$$= \frac{1}{2}[-\psi\overleftarrow{\vartheta}^T\psi^+ + \psi^+\vec{\vartheta}\psi] = -\mathscr{L}. \quad (8.18)$$

$\mathscr{L}$ 在电荷共軛下的不变性在任何表象中都是正确的，因为任一表象都可由另一（例如馬約拉納表象）表象通过相似性变换而得，而矩陣方程

$$F(\bar{\psi}, \psi, \gamma_\mu, \cdots) = \text{实常数}$$

在相似性变换下是保持不变的.

3. 电荷共軛下的相互作用. i) 湯川型相互作用. 考虑双綫型协变量

$$\bar{\psi}\Omega_i\psi \quad (8.19)$$

这里 i 取 S, V, T, A, P. 在 q 量理論中，为了避免奇异性，应当如下法对称化：

$$\frac{1}{2}[\bar{\psi}, \Omega_i\psi]_-. \quad (8.20)$$

这种对称化和对自由場的拉氏量所給出的一样(見 §6 条 4)：

$$\bar{\psi}\Omega\psi = \bar{\psi}_\alpha\Omega_{\alpha\beta}\psi_\beta = \Omega_{\alpha\beta}(\bar{\psi}_\alpha\psi_\beta) \to \frac{1}{2}\Omega_{\alpha\beta}(\bar{\psi}_\alpha\psi_\beta - \psi_\beta\bar{\psi}_\alpha) =$$

$$= \frac{1}{2}[\bar{\psi}_\alpha\Omega_{\alpha\beta}\psi_\beta - \psi_\beta(\Omega^T)_{\beta\alpha}\bar{\psi}_\alpha] =$$

$$= \frac{1}{2}[\bar{\psi}\Omega\psi - \psi\Omega^T\bar{\psi}] = \frac{1}{2}[\bar{\psi}, \Omega\psi]_-.$$

在电荷共軛下，双綫型协变量变为

$$C\frac{1}{2}[\bar{\psi}, \Omega_i\psi]_- C^{-1} = c^{(i)}\frac{1}{2}[\bar{\psi}, \Omega_i\psi]_-, \qquad (8.21)$$

这里 $c^{(i)} = \pm 1$ (見表 3).

表 3

i	Ω_i	$c^{(i)}$
S	1	1
V	$i\gamma_\mu$	−1
T	$\frac{i}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)$	−1
A	$i\gamma_\mu\gamma_5$	1
P	$i\gamma_5$	1

举例来証明上表,例如 $i = V$, 在馬約拉納表象中,有

$$C[\bar{\psi}, \gamma_\mu\psi]C^{-1} = C[\psi^+\gamma_4\gamma_\mu\psi - \psi\gamma_\mu^T\gamma_4^T\psi^+]C^{-1} =$$
$$= C[\psi^+(\gamma_4\gamma_\mu)\psi - \psi(\gamma_4\gamma_\mu)^T\psi^+]C^{-1} =$$
$$= |\eta_c|^2[\psi(\gamma_4\gamma_\mu)\psi^+ - \psi^+(\gamma_4\gamma_\mu)^T\psi], \qquad (8.22)$$

这里(参看条 2)

$$(\gamma_4\gamma_\mu)^T = \gamma_\mu^T\gamma_4^T = \gamma_4\gamma_\mu, \text{ 而 } |\eta_c|^2 = 1,$$

因此

$$C[\bar{\psi}, \gamma_\mu\psi]C^{-1} = -[\bar{\psi}, \gamma_\mu\psi].$$

考虑湯川型相互作用

$$\mathscr{L}^i = g^{(i)}[\bar{\psi}, \Omega_i\psi]\varphi_i,$$

这里函数 φ 的指标 i 的意义是,选择它使得 $\mathscr{L}^i$ 是一个标量和贋标量,例如

$$\mathscr{L}^i = g[\bar{\psi}, \gamma_\mu\psi]\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu},$$

$$\mathscr{L}^i = g[\bar{\psi}, \gamma_5\psi]\varphi$$

等等. 若 $\mathscr{L}^i$ 在电荷共軛下保持不变:

$$C\mathscr{L}^iC^{-1} = g^{(i)}C[\bar{\psi}, \Omega_i\psi]C^{-1}C\varphi_iC^{-1} =$$
$$= g^{(i)}c^{(i)}[\bar{\psi}, \Omega_i\psi]\eta_c^{(i)}\varphi_i =$$
$$= (c^{(i)}\eta_c^{(i)})g^{(i)}[\bar{\psi}, \Omega_i\psi]\varphi_i,$$

則

$$c^{(i)}\eta_c^{(i)} = 1 \quad 或 \quad c^{(i)} = \eta_c^{(i)}, \tag{8.23}$$

即玻色子場的电荷共軛宇称 $\eta_c^{(i)}$ 必須与 $c^{(i)}$ 一致. 由前面 $c^{(i)}$ 的表 3, 如果理論在 C 变換下是不变的, 則 $\eta_c^{(i)}$ 应取的值如表 4.

表 4

玻 色 子 場	i	$\eta_c^{(i)}$
中性标量場和贋标量場	S, P	+1
电磁場(光子)	V	−1
矢量介子場	V	−1
贋矢量介子場	A	+1

ii) 費米型相互作用. 費米型相互作用(見 §7, 条 4)

$$\mathscr{L}^i = g[\bar{\psi}_a\Omega_i\psi_b][\bar{\psi}_c\Omega_i\psi_d] + \text{厄米共軛項} \tag{8.24}$$

在 C 下是不变的, 若 g 是实数.

4. 应用. i) 相关过程. 如果拉氏量密度在电荷共軛下是不变的, 那末运动方程也不变, 因而 S 矩陣也是不变的:

$$S = CSC^{-1}. \tag{8.25}$$

取任意矩陣元, 得

$$\langle f|S|i\rangle = \langle f|e^{-1}SC|i\rangle = \langle fC^{-1}|S|Ci\rangle = \langle \check{f}|S|\check{i}\rangle, \tag{8.26}$$

这里 $|\check{i}\rangle$ 是由 $|i\rangle$ 将每个粒子換成相应的反粒子而得的态. 这样, 例如 π^+ 与質子散射将与 π^- 与反質子的散射一样. 反質子与反質子的相互作用和質子与質子的相互作用完全相同, 如此等等.

ii) 法雷定理. 采取表 4 的結果, 光子的电荷共軛波函数为

$$(A_c)_\mu \equiv CA_\mu C^{-1} = -A_\mu, \tag{8.27}$$

由此可导出法雷定理.

考虑一个有 n 个光子外綫的費曼图形 (見图 3) 的格林函数

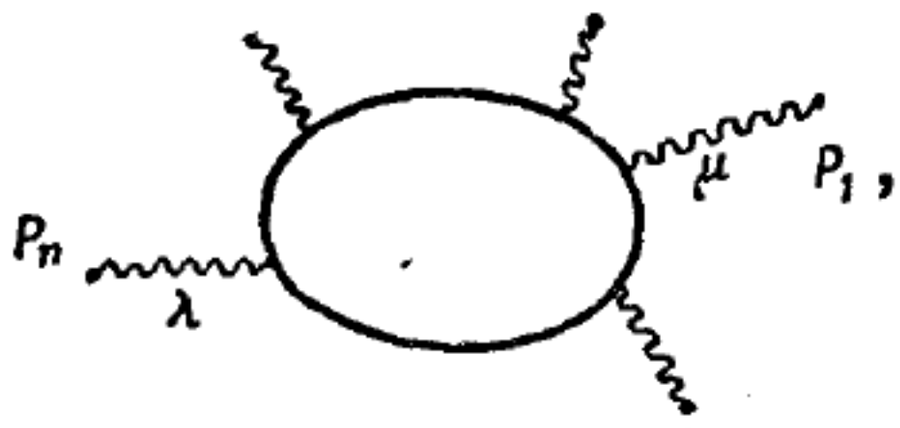


图 3.

(参看 § 4 条 2)

$$G(k_1, k_2, \cdots k_n) = \int e^{i(k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n)} \times$$

$$\times \langle T[A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)\cdots A_\lambda(x_n)]\rangle_0 dx_1dx_2\cdots dx_n. \quad (8.28)$$

应用算符 C,得

$$G(k_1, k_2, \cdots k_n) = \int e^{i(k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n)} \times$$

$$\times \langle T[(A_\mu(x_1))_c\cdots(A_\lambda(x_n))_c]\rangle_0 dx_1dx_2\cdots dx_n =$$

$$= (-1)^n G(k_1, k_2, \cdots k_n), \quad (8.29)$$

如果 n 是奇数,得

$$G = -G = 0. \quad (8.30)$$

由于同样的理由,例如下列过程

$$\pi^0 \to \gamma + \gamma + \gamma$$

的几率为零. 只要 π^0 的自旋为零,因为由表 4

$$C\varphi C^{-1} = \varphi.$$

所以

$$\langle T(\varphi AAA)\rangle_0 = (-1)^3\langle T(\varphi AAA)\rangle = 0.$$

但是对自旋为零的介子,实际上存在衰变过程

$$\pi^0 \to \gamma + \gamma.$$

5. 氫[1]衰变的选择定则. 如果算符与总哈密頓量对易，则是守恆算符(即是运动常数). 如果

$$[H, C] = 0,$$

则电荷共軛算符是守恆的. 总电荷算符 Q 总是守恆的.

$$[H, Q] = 0.$$

然而算符 C 和 Q 是不对易的，因为算符 C 使粒子与反粒子互相轉換:

$$CQC^{-1} = -Q,$$

1) 氫 (Positronium) 是正負电子借电磁相互作用形成的束縛态. 过去曾有人譯作"正負电子系",这不能区分于一般的正負电子系,也有人譯作"正电子代核原子"也显得累贅,譯者提出这一譯名. ——中譯本譯者注.

或

$$[C, Q]_+ = 0.$$

一般說来，不能选取算符 C 和 Q 的共同的本征态，但如

$$\langle Q \rangle = 0,$$

則

$$\langle [C, Q] \rangle = 0.$$

因此电荷为零的态可以是算符 C 和 Q 的共同的本征态. 这时 C 也可以算在守恆算符的完全集合之內. 中性态具有保持守恆的电荷共軛宇称[1].

氫是正負电子借电磁相互作用而形成的束縛态. 电荷可以看作是某种全同粒子的內变量（电子和正电子是由于 e 所标記的电子的两种态）. 与 C 对易的守恆算符和其本征值为

軌道角动量	l,
自旋角动量	s,
总角动量	j.

泡利原理要求，系統的波函数相对于两个粒子交換是反对称的. 这时将发生

空間交換給出因子	$(-1)^l$,
自旋交換給出因子	$(-1)^{s+1}$,
电荷交換給出因子	c.

这里 c 是氫的电荷共軛宇称. 由泡利原理

$$(-1)^l(-1)^{s+1}c = -1,$$

由此得

$$c = (-1)^{l+s}. \tag{8.31}$$

若氫衰变成 n 个光子 $(n \geqslant 2)$，則末态的电荷共軛宇称为

1) 若某态存在确定的电荷宇称，則必須其电荷为零，但此条件并不充分，例如氫原子的电荷为零，但并沒有确定的电荷宇称. 要态 $|\psi\rangle$ 具有确定的电荷宇称，必要和充分的条件是，电荷共軛使它变为自身，或对一切算符 A，若 $|\psi\rangle$ 是其本征态，有 $[C, A]|\psi\rangle = 0$. 氫原子的态 $|H\rangle$ 沒有电荷宇称是因为，在电荷共軛下，它的波函数不变为自身，或者特别因为，它是核子数算符 N 的本征态，但对它却有 $[C, N]|H\rangle \neq 0$.——俄譯本譯者注.

$$c = (-1)^n.$$

量 c 在衰变过程中是守恆的,所以

$$(-1)^{l+s} = (-1)^n. \tag{8.32}$$

例如处在 ^3S 态的氫,(这时 $l = 0, s = 1$) 可衰变为奇数个光子,而处在 ^1S 态的(这时 $l = s = 0$) 可衰变为偶数个光子. 由于衰变成 n 个光子的几率正比于 $\left(\frac{1}{137}\right)^n$,实际上发生的衰变过程将产生尽可能少的光子数. 因此

$$^3S \text{ 态的氫} \to 3\gamma,$$

$$^1S \text{ 态的氫} \to 2\gamma.$$

由电荷共軛所导出的选择定則,不只适用于氫,参看 [25, 26].

§9. 强 反 演

1. 力学系統的可反演性. 在古典力学中,軌道由坐标和动量决定

$$q(t),\ p(t). \tag{9.1}$$

若拉氏量 L 不显式地依賴 t,并且只有 p 的偶次冪,則"时間反演后的"軌道

$$q'(t) = q(-t),\ p'(t) = -p(-t) \tag{9.2}$$

也是物理上可能的解,这样的系統称为时間反演下不变的系統. 在量子力学中也可以考虑"时間反演后的"系統. 但是,导出这种系統的变換,不是么正的,因为在海森堡表象中的正則对易关系在这种变換下

$$[q'(t'), p'(t')] = [q(t), -p(t)] = -[q(t), p(t)] \neq$$
$$\neq [q(t), p(t)]$$

不是不变的.

繞过这一困难的途径是維格勒 [27] 找出的,后来史蘊格 [28] 又加以发展. 这一观念就是把矢量空間 $|\psi\rangle$ 变成它的反串矢量空間 $\langle\psi|$. 实际上,这一变換可由下法来定义: R 首先使場变量的任意乘积的因子的次序顛倒过来 (矩陣 γ 不顛倒),再作为一个么正

变换作用于单个算符上[1]. 因此

$$R\alpha(t)R^{-1} = \alpha'(t) = s\alpha(-t),$$
$$R\alpha(t)\beta(t)R^{-1} = \beta'(t)\alpha'(t),$$
$$R|\psi\rangle = \langle\psi'|,$$
$$\langle\psi|R^{+} = \langle\psi|R^{-1} = |\psi'\rangle. \qquad (9.3)$$

同时定义

$$Rq(t)R^{-1} = q'(t) = q(-t),$$
$$Rp(t)R^{-1} = p'(t) = -p(-t). \qquad (9.4)$$

在 (9.3) 式中引入的量 s 依赖于算符 α 展成 p 和 q 的幂級数相对于 p 的代数結构. 显然正則对易关系在这种变换下是不变的:

$$R[q(t), p(t)]R^{-1} = [p'(t), q'(t)] =$$
$$= [-p(-t), q(-t)] = [q(-t), p(-t)] =$$
$$= [q(t), p(t)].$$

以下我們討論对于单个非相对論的无自旋[2] 的粒子在变換 R 下不变的条件. 在 R 作用下,海森堡运动方程

$$i\frac{\partial}{\partial t}\alpha(t) = [\alpha(t), H(q(t), p(t))] \qquad (9.5)$$

变成

$$R\left[i\frac{\partial}{\partial t}\alpha(t)\right]R^{-1} = R[\alpha(t), H(q(t), p(t))]R^{-1},$$

或

$$i\frac{\partial}{\partial t}\alpha'(t) = [H_{R}(q'(t), p'(t)), \alpha'(t)], \qquad (9.6)$$

---

1) 这意味着, R 可以表为么正算符 U 加以轉置运算的形式. 則由条件,算符 α 在态 $\langle\varphi|$ 和 $|\psi\rangle$ 中的矩陣元等于时間反演后的算符 α' 在时間反演后的态 $\langle\psi'|$ 和 $|\varphi'\rangle$ 之間的矩陣元:

$$\langle\varphi|\alpha|\psi\rangle = \langle\psi'|\alpha'|\varphi'\rangle,$$

应当得到, $\alpha' = R\alpha R^{-1} = (U\alpha U^{-1})^{T}$, $(\alpha\beta)' = \beta'\alpha'$ 等等. 注意, 本书所用的时間反演算符 R 的定义稍不同于一般采用的由維格勒 [27] 所首先給出的定义. 即維格勒的时間反演算符 K 使态 $|\psi\rangle$ 与时間反演后的态 $|\psi'\rangle$ 如下方式相联: $K|\psi\rangle = |\psi'\rangle$, 而 $R|\psi\rangle = \langle\psi'|$. 所以 R 与 K 的差别是一个厄米共軛算符. $\alpha' = R\alpha R^{-1} = (K\alpha K^{-1})^{+}$. 若算符 α 相对于时間反演是不变的, 則 $\alpha' = \alpha$ 和 $\alpha = R\alpha R^{-1}$, 而在維格勒的定义下为 $\alpha^{+} = K\alpha K^{-1}$.——俄譯本譯者注.

2) 在維格勒的論文[27]中,研究过更一般的非相对論系統.

这里 $H_{反}(q,p)$ 就是把因子次序顛倒后的 $H(q,p)$. 由(9.3),(9.4),所以

$$i\frac{\partial}{\partial t}s\alpha(-t)=[H_{反}(q(-t),-p(-t)),s\alpha(-t)],$$

即

$$i\frac{\partial}{\partial t}\alpha(t)=[\alpha(t),H_{反}(q(t),-p(t))]. \tag{9.7}$$

所以,若

$$H_{反}(q(t),-p(t))=H(q(t),p(t)), \tag{9.8}$$

系統在时間反演下不变. 在由古典的哈密頓量过渡到量子的哈密頓量时,应当經过对称化的手續(参看 § 6 条 2 和书[29],§ 7). 因此

$$H_{反}(q,-p)=H(q,-p). \tag{9.9}$$

这样,时間反演下不变性的条件,和在古典的情况一样,是下列等式成立:

$$H(q,p)=H(q,-p). \tag{9.10}$$

若 H 依賴于 p 的偶次冪(这对大多数簡单系統是正确的),則时間反演是守恆的运算.

2. 时空强反演和时間强反演. 現在回到場論,考虑坐标变換

$$x_\mu\to x'_\mu=-x_\mu, \tag{9.11}$$

这时

$$\mathrm{Det}|a|=1, \tag{9.12}$$

而系数

$$a^0{}_0<0.$$

由上列坐标变动引起的变換 R_s(定义見下),称为时空強反演(或史蘊格时空反演).

i) 标量場和贋标量場. 对应于关系式(9.4),定义变換 R_s 如下:

$$\begin{aligned}&R_s\varphi(x)R_s^{-1}=\varphi'(x)=\eta_s\varphi(-x),\\&R_s\pi(x)R_s^{-1}=\pi'(x)=-\eta_s\pi(-x).\end{aligned} \tag{9.13}$$

应用这种变换两次,可証

$$\eta_s^2 = 1. \tag{9.14}$$

按本征函数完备系展开 $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \sum_{\mathbf{k}} [a(\mathbf{k})e^{ikx} + b^+(\mathbf{k})e^{-ikx}].$$

这样

$$R_s\varphi(x)R_s^{-1} = \sum_{\mathbf{k}} [R_s a(\mathbf{k})R_s^{-1}e^{ikx} + R_s b^+(\mathbf{k})R_s^{-1}e^{-ikx}],$$

同时

$$\eta_s\varphi(-x) = \sum_{\mathbf{k}} [a(\mathbf{k})e^{-ikx} + b^+(\mathbf{k})e^{ikx}].$$

因此

$$\begin{aligned} R_s a(\mathbf{k})R_s^{-1} &= \eta_s b^+(\mathbf{k}), \\ R_s b^+(\mathbf{k})R_s^{-1} &= \eta_s a(\mathbf{k}). \end{aligned} \tag{9.15}$$

类似地有

$$\begin{aligned} R_s a^+(\mathbf{k})R_s^{-1} &= \eta_s b(\mathbf{k}), \\ R_s b(\mathbf{k})R_s^{-1} &= \eta_s a^+(\mathbf{k}). \end{aligned}$$

单个动量为 $\mathbf{k}$ 的粒子的态,变成动量为 $\mathbf{k}$ 的反粒子的(反串)态:

$$R_s a^+(\mathbf{k})\rangle_0 = R_s a^+(\mathbf{k})R_s^{-1}R_s\rangle_0 = \eta_{s0}\langle b(\mathbf{k}). \tag{9.16}$$

注意,由刃矢量变成刁矢量意味着始态变成了末态.

ii) 旋量場. 定义 R_s 如下(見 §6, 条 6):

$$R_s\psi(x)R_s^{-1} \equiv \psi'(x) = \eta_s E\psi(-x) = i\eta_s\gamma_5\psi(-x). \tag{9.17}$$

取变换两次,得

$$\eta_s^2 = \pm 1,$$

于是

$$\begin{aligned} R_s\bar{\psi}(x)R_s^{-1} &= R_s\psi^+(x)\gamma_4 R_s^{-1} = \\ &= -i\eta_s^*\psi^+(-x)\gamma_5\gamma_4 = i\eta_s^*\psi^+(-x)\gamma_4\gamma_5 = \\ &= i\eta_s^*\bar{\psi}(-x)\gamma_5 = i\eta_s^*\gamma_5^T\bar{\psi}(-x). \end{aligned} \tag{9.18}$$

在条 3 中将証明这种变换保持拉氏量不变.

現在,把 $\psi(x)$ 展开如下:

$$\psi(x) = \sum_{\mathbf{k}}\sum_{r} [a_r(\mathbf{k})u_r(\mathbf{k})e^{ikx} + b_r^+(\mathbf{k})v_r(\mathbf{k})e^{-ikx}].$$

于是

$$R_s\psi(x)R_s^{-1}=\sum_{\mathbf{k}}\sum_{r}[R_sa_r(\mathbf{k})R_s^{-1}u_r(\mathbf{k})e^{ikx}+$$
$$+R_sb_r^+(\mathbf{k})R_s^{-1}v_r(\mathbf{k})e^{-ikx}],$$

同时

$$E\psi(x)=\sum_{\mathbf{k}}\sum_{r}[a_r(\mathbf{k})Eu_r(\mathbf{k})e^{-ikx}+b_r^+(\mathbf{k})Ev_r(\mathbf{k})e^{ikx}]=$$
$$=\sum_{\mathbf{k}}\sum_{r}[ra_r(\mathbf{k})v_{-r}(\mathbf{k})e^{-ikx}+rb_r^+(\mathbf{k})u_{-r}(\mathbf{k})e^{ikx}].$$

因此，

$$\begin{aligned}R_sa_r(\mathbf{k})R_s^{-1}&=(-r)\eta_sb_{-r}^+(\mathbf{k}),\\ R_sb_r^+(\mathbf{k})R_s^{-1}&=(-r)\eta_sa_{-r}(\mathbf{k}).\end{aligned}\tag{9.19}$$

类似地，

$$\begin{aligned}R_sa_r^+(\mathbf{k})R_s^{-1}&=(-r)\eta_s^*b_{-r}(\mathbf{k}),\\ R_sb_r(\mathbf{k})R_s^{-1}&=(-r)\eta_s^*a_{-r}^+(\mathbf{k}).\end{aligned}\tag{9.20}$$

单个动量为 $\mathbf{k}$ 自旋为 r 的粒子的态变成动量为 $\mathbf{k}$ 自旋为 $-r$ 的反粒子态：

$$R_sa_r^+(\mathbf{k})\rangle_0=R_sa_r^+(\mathbf{k})R_s^{-1}R_s\rangle_0=(-r)\eta_{s0}\langle b_{-r}(\mathbf{k}).\tag{9.21}$$

以符号表示

$$\begin{aligned}|\mathbf{k},r\rangle&=\text{动量为}\ \mathbf{k}\ \text{自旋为}\ r\ \text{的粒子的态},\\ |\tilde{\mathbf{k}},r\rangle&=\text{动量为}\ \mathbf{k}\ \text{自旋为}\ r\ \text{的反粒子的态},\end{aligned}\tag{9.22}$$

则(9.21)可写作

$$R_s|\mathbf{k},r\rangle=(-r)\eta_s\langle\tilde{\mathbf{k}}_s,-r|.\tag{9.23}$$

用下式定义时間強反演(或史蘊格时間反演)：

$$T_s=R_sP,\tag{9.24}$$

这样，在我們的符号表示下，

$$T_s|\mathbf{k},r\rangle=(-r)\eta_s\eta_p\langle-\tilde{\mathbf{k}},-r|,\tag{9.25}$$

这意味着，时間強反演算符 T_s 使得动量为 $\mathbf{k}$ 自旋为 r 的粒子的“始”态变成动量为 $-\mathbf{k}$ 自旋为 $-r$ 的反粒子的“末”态。

3. 强反演下相互作用的性質. 研究由拉氏量密度 $\mathscr{L}=\mathscr{L}[\varphi(x),\psi(x)]$ 描写的耦合的場，$\mathscr{L}$ 可表为

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_B+\mathscr{L}_F+\mathscr{L}^i,\tag{9.26}$$

这里 $\mathscr{L}_B$ 是自由的玻色子場的拉氏量密度：

$$\mathscr{L}_B = \frac{1}{2}\{\varphi^+, (\Box - \mu^2)\varphi\}_+,$$

$\mathscr{L}_F$ 是自由的費米子場的拉氏量密度：

$$\mathscr{L}_F = \frac{1}{2}[\psi^+\partial\psi - \psi\overleftarrow{\partial}^T\psi^+],$$

$\mathscr{L}^i$ 是相互作用拉氏量密度.

显然，在时空強反演变換 R_s 下，拉氏量密度 $\mathscr{L}_B$ 保持不变.

一般情况下，ψ 的双綫型形式变成

$$\begin{aligned} R_s\bar{\psi}(x)\Omega(x)\psi(x)R_s^{-1} &= R_s\bar{\psi}_\alpha(x)\Omega_{\alpha\beta}(x)\psi_\beta(x)R_s^{-1} = \\ &= \psi'_\beta(x)\Omega_{\alpha\beta}(x)\bar{\psi}'_\alpha(x) = \psi'(x)\Omega^T(x)\bar{\psi}'(x) = \\ &= i\eta_s\gamma_5\psi(-x)\Omega^T(x)i\eta_s^*\gamma_5^T\bar{\psi}(-x) = \\ &= -|\eta_s|^2\psi(-x)\gamma_5^T\Omega^T(x)\gamma_5^T\bar{\psi}(-x) = \\ &= -\psi(-x)[\gamma_5\Omega(x)\gamma_5]^T\bar{\psi}(-x). \end{aligned} \tag{9.27}$$

特别是取

$$\Omega(x) = \gamma_4\partial = \gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu} + m,$$

这样

$$R_s\psi^+(x)\partial(x)\psi(x)R_s^{-1} = -\psi(-x)\overleftarrow{\partial}(-x)\psi^+(-x), \tag{9.28}$$

和

$$R_s\mathscr{L}_F(x)R_s^{-1} = \mathscr{L}_F(-x). \tag{9.29}$$

双綫型协变量变成

$$R_s\frac{1}{2}[\bar{\psi}(x), \Omega_i\psi(x)]R_s^{-1} = s^{(i)}\frac{1}{2}[\bar{\psi}(-x), \Omega_i\psi(-x)], \tag{9.30}$$

这里 $s^{(i)}$ 之值見表 5.

表 5

i	Ω_i	$s^{(i)}$
S	1	$+1$
V	$i\gamma_\mu$	-1
T	$\frac{i}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)$	$+1$
A	$i\gamma_\mu\gamma_5$	-1
P	$i\gamma_5$	$+1$

例如，当 $i = A$，由(9.27)得

$$R_s[\bar{\psi}(x), i\gamma_\mu\gamma_5\psi(x)]R_s^{-1} =$$
$$= R_s[\bar{\psi}(i\gamma_\mu\gamma_5)\psi - \psi(i\gamma_\mu\gamma_5)^T\bar{\psi}]R_s^{-1} =$$
$$= -\psi(-x)(\gamma_5 i\gamma_\mu\gamma_5\gamma_5)^T\bar{\psi}(-x) +$$
$$+ \bar{\psi}(-x)(\gamma_5 i\gamma_\mu\gamma_5\gamma_5)\psi(-x) =$$
$$= \psi(-x)(i\gamma_\mu\gamma_5)^T\bar{\psi}(-x) -$$
$$- \bar{\psi}(-x)(i\gamma_\mu\gamma_5)\psi(-x) =$$
$$= -[\bar{\psi}(-x), i\gamma_\mu\gamma_5\psi(-x)]. \qquad (9.31)$$

应用变换 R_s 于湯川型相互作用

$$\mathscr{L}^i(x) = g^{(i)}[\bar{\psi}(x), \Omega_i\psi(x)]\varphi_i(x), \qquad (9.32)$$

这相互作用变成

$$R_s\mathscr{L}^i(x)R_s^{-1} = s^{(i)}\eta_s^{(i)}\mathscr{L}(-x). \qquad (9.33)$$

因此，拉氏量密度 $\mathscr{L}^i$ 可以是在变换 R_s 下不变的，只要选取 $\eta_s^{(i)}$ 满足条件：

$$s^{(i)}\eta_s^{(i)} = 1. \qquad (9.34)$$

S 矩陣相对于变换 R_s 的不变性为

$$S = R_sSR_s^{-1}; \qquad (9.35)$$

所以

$$\langle \mathbf{k}, r|S|\mathbf{k}', r'\rangle = \langle \mathbf{k}, r|R_s^{-1}SR_s|\mathbf{k}', r'\rangle =$$
$$= (-r)(-r')\langle \tilde{\mathbf{k}}', -r'|S|\tilde{\mathbf{k}}, -r\rangle. \qquad (9.36)$$

因此，S 矩陣在強反演下的不变性可以給出粒子参与的过程与反粒子参与的过程之間的某些关系.

4. 强反演定理 (CTP 定理). 我們現在証明，在強反演下的不变性，在洛仑兹不变的理論中，并不給出任何附加的限制或选择定則，只要假定自旋与統計性之間存在通常的联系.

我們的証明只对于单个費米子过程，因为推广到一般情况是直截了当的. 入射动量和出射动量分别为 p 和 q 的粒子的传播量为

$$G_{\alpha\beta}(p, q; k_i) =$$
$$= \int e^{-i(px-qy+\cdots)}\langle T[\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)\cdots]\rangle_0 d^4x d^4y\cdots, \qquad (9.37)$$

这里 k_i 总表示别类粒子的入射和出射动量. 考虑強反演运算 R_s, 对积分变量作替代 $x \to -x$, $y \to -y$, $\cdots$, 得

$$\int e^{-i(px-qy+\cdots)}\langle R, T[\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)$$

$$\cdots]R_s^{-1}\rangle_0 d^4x d^4y\cdots =$$

$$= \int e^{-i(px-qy+\cdots)}\langle T[i\eta_s^*(\gamma_5^T)_{\beta\lambda}\bar{\psi}_\lambda(-y)\times$$

$$\times i\eta_s(\gamma_5)_{\alpha\rho}\psi_\rho(-x)\cdots]\rangle_0 d^4x d^4y\cdots =$$

$$= \int e^{-i(px-qy+\cdots)}(i\gamma_5)_{\alpha\rho}\langle T[\bar{\psi}_\lambda(-y)\psi_\rho(-x)$$

$$\cdots]\rangle_0(i\gamma_5)_{\lambda\beta}d^4x d^4y\cdots =$$

$$= \int e^{-i(-px+qy+\cdots)}[\gamma_5\langle T[\psi(x)\bar{\psi}(y)\cdots]\rangle_0\gamma_5]_{\alpha\beta}\times$$

$$\times d^4x d^4y\cdots = [\gamma_5 G(-p, -q; -k_i)\gamma_5]_{\alpha\beta}. \tag{9.38}$$

因此若在強反演下是不变的,就要求

$$G_{\alpha\beta}(p, q; k_i) = [\gamma_5 G(-p, -q; -k_i)\gamma_5]_{\alpha\beta}.$$

注意最重要之点在于, 因子 $(i)^2$ 被 ψ 場的反对易性(費米統計性)所抵銷了. 現在,由于传播量 G 是协变的,动量 p, q, k_i 必然采取 $\hat{p}$, $\hat{q}$, $\hat{k}_i$ 的形式 ($\hat{p} = \gamma^\mu p_\mu$ 等等)[1], 上式就是

$$G_{\alpha\beta}(\hat{p}, \hat{q}; \hat{k}) = [\gamma_5 G(-\hat{p}, -\hat{q}; -\hat{k})\gamma_5]_{\alpha\beta} \tag{9.39}$$

这就是相对于 R_s 不变的要求对传播量給出的限制. 然而 $\gamma_5\hat{p}\gamma_5 = -\hat{p}$, 等等,所以上式是恆等式,因而沒提供任何限制.

理論相对于时序本征洛仑茲变換的不变性, 若采取自旋和統計性間的通常的联系,則自动地导致相对于強反演的不变性,这一論断有时称为泡利-呂德斯定理或 CTP 定理. 許多作者給出了不同的証明,参看 [28, 30—32]. 在文集[24]中,泡利的論文有更詳細的討論. 这里的討論取自文献[14].

---

1) 注意 $p^2 = q^2 = -m^2$, $k_i^2 = -\mu^2$, $pq = \frac{1}{2}(\gamma p\gamma q + \gamma q\gamma p)$ ——中譯本譯者注.

§10. 弱　反　演

1. 时空弱反演和时間弱反演. 定义时空弱反演(或維格勒时空反演) R_w 为时空強反演 R_s 与电荷共軛 C 的乘积:

$$R_w = R_sC = CR_s. \tag{10.1}$$

定义时間弱反演(維格勒时間反演) T 为

$$T = R_wP = R_sCP. \tag{10.2}$$

这样

$$R_s = CPT, \tag{10.3}$$

这說明強反演定理为什么又称为 CPT, CTP, PCT, $\cdots$ 定理的原因. 在表 6 中汇总了前几节所得到的結果.

应用弱反演变換于場 ψ 所得的場 ψ_w 还可写作另一种形式:

$$\psi_w(x) = i\eta_w\gamma_5C^*\psi^+(-x) = i\eta_w\gamma_5C^*\gamma_4^T\bar{\psi}(-x) =$$
$$= i\eta_w\gamma_4B^{-1}\gamma_4^T\bar{\psi}(-x),$$

因为

$$C^* = C^{-1} = (B\gamma_4\gamma_5)^{-1} = \gamma_5\gamma_4B^{-1}.$$

这时

$$\psi_w(x) = i\eta_w\gamma_4B^{-1}B\gamma_4B^{-1}\bar{\psi}(-x) = i\eta_wB^{-1}\bar{\psi}(-x),$$

和

$$\psi_w^+ = -i\eta_w^*\gamma_4\psi(-x)(B^{-1})^+ = -i\eta_w^*\psi(-x)\gamma_4^TB =$$
$$= -i\eta_w^*\psi(-x)B\gamma_4,$$
$$\bar{\psi}_w = -i\eta_w^*\psi(-x)B.$$

在变換 T 下, 单个动量为 $\mathbf{k}$ 自旋为 $r(=\pm)$ 的旋量粒子的态, 变成动量为 $-\mathbf{k}$ 自旋为 $-r$ 的态(除一个常数因子外):

$$|\mathbf{k}, r\rangle \xrightarrow{R_s} \langle\tilde{\mathbf{k}}, -r| \xrightarrow{C} \langle\mathbf{k}, -r| \xrightarrow{P} \langle-\mathbf{k}, -r|. \tag{10.4}$$

2. 时間弱反演下的双綫型协变量. 双綫型协变量变为

$$T\frac{1}{2}[\bar{\psi}, \Omega\psi]T^{-1} = t^{(i)}\frac{1}{2}[\bar{\psi}(-x_0), \Omega_i\psi(-x_0)], \tag{10.5}$$

这里 $t^{(i)}$ 之值列在表 7 中. 例如,对于 $i = V$ (参看 §7 条 4 和 §8

表 6

場的类型	空間反射变换 P $\mathbf{x}' = -\mathbf{x},\ x_0' = x_0$	电荷共軛变换 C 粒子 $\rightleftarrows$ 反粒子	时空強反演变换 R_s $x' = -x$	时空弱反演变换 R_w $R_w = R_sC$	时間弱反演变换 T $T = R_wP$
标量場或贋标量場 φ	$\varphi_P = \eta_P\varphi(-\mathbf{x})$ $\varphi_P^+ = \eta_P^*\varphi^+(-\mathbf{x})$ $\eta_P^2 = 1$ $\eta_P = 1$ (对标量場) $\eta_P = -1$(对贋标量場)	$\varphi_c = \eta_c\varphi^+$ $\varphi_c^+ = \eta_c^*\varphi$ $\lvert\eta_c\rvert^2 = 1$ (对荷电場) $\eta_c^2 = 1$ (对中性場)	$\varphi_s = \eta_s\varphi(-x)$ $\varphi_s^+ = \eta_s^*\varphi^+(-x)$ $\pi_s = -\eta_s\pi(-x)$ $\pi_s^+ = -\eta_s^*\pi^+(-x)$ $\eta_s^2 = 1$	$\varphi_w = \eta_w\varphi^+(-x)$ $\varphi_w^+ = \eta_w^*\varphi(-x)$ $\eta_w = \eta_c\eta_s$	$\varphi_T = \eta_T\varphi^+(-x_0)$ $\varphi_T^+ = \eta_T^*\varphi(-x_0)$ $\eta_T = \eta_c\eta_s\eta_P^*$
旋量場 ψ	$\psi_P = \eta_P\gamma_4\psi(-\mathbf{x})$ $\psi_P^+ = \eta_P^*\psi^+(-\mathbf{x})\gamma_4$ $\overline{\psi}_P = \eta_P^*\overline{\psi}(-\mathbf{x})\gamma_4$ $\eta_P^2 = \pm 1$ 、 (对 A型場 $\eta_P = 1$)	$\psi_c = \eta_c C^*\psi^+$ $\psi_c^+ = \eta_c^*\psi C$ $\overline{\psi}_c = \eta_c^*\psi C\gamma_4$ $\lvert\eta_c\rvert^2 = 1$ 在馬約拉納表象中 $\psi_c = \eta_c\psi^+$ $\psi_c^+ = \eta_c^*\psi$ $\overline{\psi}_c = \eta_c^*\psi\gamma_4$	$\psi_s = i\eta_s\gamma_5\psi(-x)$ $\psi_s^+ = -i\eta_s^*\psi^+(-x)\gamma_5$ $\overline{\psi}_s = i\eta_s^*\overline{\psi}(-x)\gamma_5$ $\eta_s^2 = \pm 1$ 在馬約拉納表象中 $\psi_s = i\gamma_5\psi(-x)$ $\psi_s^+ = -i\psi^+(-x)\gamma_5$ $\overline{\psi}_s = i\overline{\psi}(-x)\gamma_5$ $\eta_s = 1$ 和在空間反射下为 A型	$\psi_w = i\eta_w\gamma_5 C^*\psi^+(-x)$ $\psi_w^+ = -i\eta_w^*\psi(-x)C\gamma_5$ $\overline{\psi}_w = i\eta_w^*\psi(-x)C\gamma_4\gamma_5$ $\eta_w = \eta_c\eta_s$ 在馬約拉納表象中 $\psi_w = i\eta_c\gamma_5\psi^+(-x)$ $\psi_w^+ = -i\eta_c^*\psi(-x)\gamma_5$ $\overline{\psi}_w = i\eta_c^*\psi(-x)\gamma_4\gamma_5$	$\psi_T = i\eta_T\gamma_5 C^*\overline{\psi}(-x_0)$ $\psi_T^+ = -i\eta_T^*\psi(-x_0)\gamma_4^T C\gamma_5$ $\overline{\psi}_T = i\eta_T^*\psi(-x_0)\gamma_4^T C\gamma_4\gamma_5$ $\eta_T = \eta_c\eta_s\eta_P^*$ 在馬約拉納表象中 $\psi_T = \eta_c\gamma_5\overline{\psi}(-x_0)$ $\psi_T^+ = -\eta_c^*\psi(-x_0)\gamma_4\gamma_5$ $\overline{\psi}_T = \eta_c^*\psi(-x_0)\gamma_5$

条 3)，

$$T[\bar{\psi}, i\gamma_\mu\psi]T^{-1} = CPR_s[\bar{\psi}, i\gamma_\mu\psi]R_s^{-1}P^{-1}C^{-1} =$$
$$= -CP[\bar{\psi}(-x), i\gamma_\mu\psi(-x)]P^{-1}C^{-1} =$$
$$= \begin{cases} C[\bar{\psi}(-x_0), i\gamma_\mu\psi(-x_0)]C^{-1} = \\ \quad = -[\bar{\psi}(-x_0), i\gamma_\mu\psi(-x_0)] \quad \text{当 } \mu = 1, 2, 3, \\ -C[\bar{\psi}(-x_0)i\gamma_4\psi(-x_0)]C^{-1} = \\ \quad = [\bar{\psi}(-x_0), i\gamma_4\psi(-x_0)] \end{cases} \tag{10.6}$$

表 7

i	Ω_i	$s^{(i)}$	对空間分量 (1, 2, 3),时間分量 4
S	I	$+1$	
V	$i\gamma_\mu$	-1	$\mu = 1, 2, 3$
		$+1$	$\mu = 4$
T	$\frac{i}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)$	-1	$\mu, \nu = 1, 2, 3$ $\mu, \nu = 4$
		$+1$	或 $\mu = 1, 2, 3, \nu = 4$ 或 $\mu = 4, \nu = 1, 2, 3$
A	$i\gamma_\mu\gamma_5$	$+1$	$\mu = 1, 2, 3$
		-1	$\mu = 4$
P	$i\gamma_5$	-1	

3. 相关过程. 由 S 矩陣相对于变換 T 的不变性，計及(10.4)，得

$$\langle \mathbf{k}, r|S|\mathbf{k}', r'\rangle =$$
$$= \langle \mathbf{k}, r|T^{-1}ST|\mathbf{k}', r'\rangle \propto \langle -\mathbf{k}', -r'|S|-\mathbf{k}, -r\rangle.$$

以費曼图形表示，时間強反演变換 T_s 使始末曲面对調，相应于"粒子"过程变成"反粒子"过程(参看图 4).

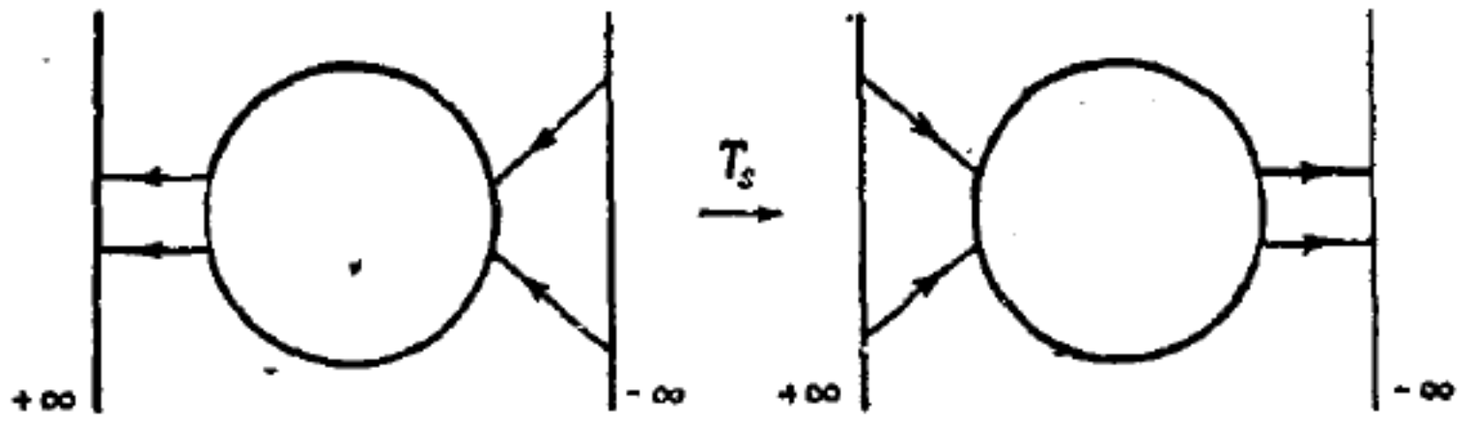


图 4.

时間弱反演变換 T 把始末曲面对調(变換 T_s)，同时使箭头反向(变換 C)，使得"粒子"过程还是变成"粒子"过程(見图 5).

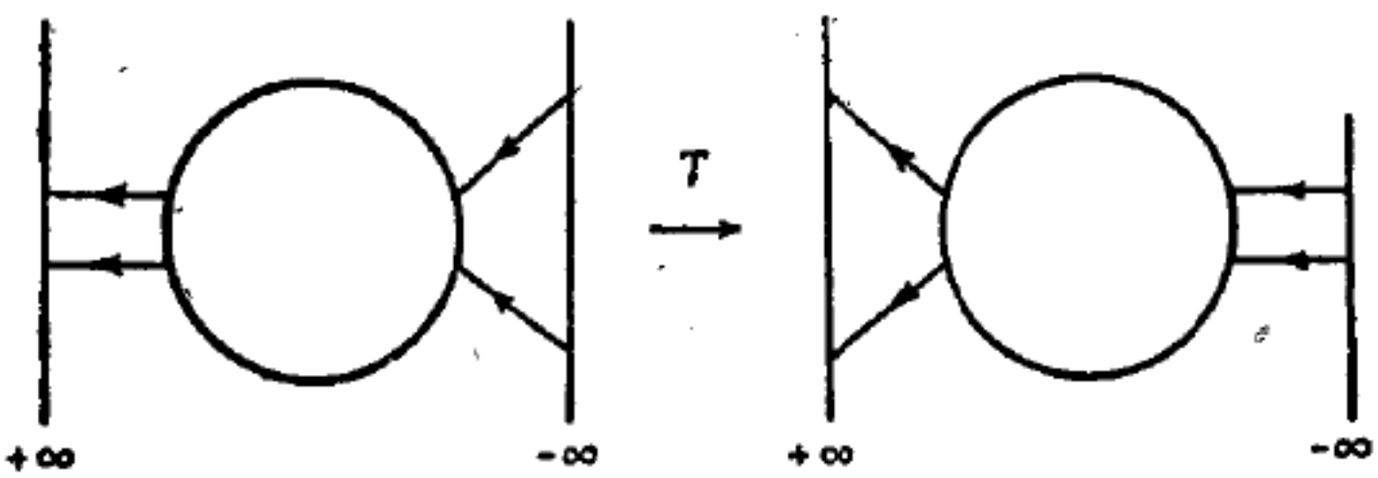


图 5.

在运算 T 下，粒子不变成反粒子，因而这是相应于非相对論理論的时間反演的运算. 由定义，在非相对論理論中(見 § 9, 条 1)，

$$T\mathbf{x}T^{-1} = \mathbf{x},\ T\mathbf{p}T^{-1} = -\mathbf{p}.$$

同时角动量 J 如下方式变換:

$$TJ_iT^{-1} = T(x_jp_k - p_jx_k)T^{-1} = -p_kx_j + x_kp_j = -J_i,$$

这里 i, j, k 輪迴置換，由此得

$$\{J_i, T\}_+ = 0. \tag{10.7}$$

但角动量算符的平方如另一种方式变換:

$$TJ^2T^{-1} = T\left\{\sum_i J_iJ_i\right\}T^{-1} = J^2,$$

由此得

$$[J^2, T]_- = 0. \tag{10.8}$$

同样的关系在場論中也可得出，只要把 T 作用于角动量算符，特别在作用于自旋算符上，可以論証在非相对論两分量旋量理論中的假定

$$T\sigma T^{-1} = -\sigma. \tag{10.9}$$

考虑一个总角动量量子数为 $J^2 = j(j+1)$，在 z 軸上投影为 $J_z = m$ 的一般的态，則

$$J_zT|j, m\rangle = -TJ_z|j, m\rangle = -mT|j, m\rangle, \tag{10.10}$$

这意味着，$T|j, m\rangle$ 是 $J_z = -m$ 的本征态. 因为矩的平方 J^2 是不变量，所以

$$T|j, m\rangle = C_{jm}\langle j, -m|, \tag{10.11}$$

这里 C_{jm} 是依赖于 j 和 m 的常数，且

$$|C_{jm}|^2 = 1. \tag{10.12}$$

4. 倒易定理. 假定 S 矩陣在时間弱反演 T 下是不变的：

$$[S, T] = 0 \quad 或 \quad S = TST^{-1}, \tag{10.13}$$

則

$$\langle f|S|i\rangle = \langle f|T^{-1}ST|i\rangle = \pm\langle i'|S|f'\rangle. \tag{10.14}$$

如果态 i, f 包含狄拉克粒子

$$\begin{aligned} |i\rangle &= |\mathbf{k}_1', r_1'; \mathbf{k}_2', r_2'; \cdots\rangle, \\ \langle i'| &= T|i\rangle = \langle -\mathbf{k}_1', -r_1'; -\mathbf{k}_2', -r_2'; \cdots|, \end{aligned} \tag{10.15}$$

則

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{k}_1, r_1; \mathbf{k}_2, r_2; \cdots|S|\mathbf{k}_1', r_1'; \mathbf{k}_2', r_2'; \cdots\rangle = \\ &= \pm\langle -\mathbf{k}_1', -r_1'; -\mathbf{k}_2', -r_2'; \cdots|S|\mathbf{k}_1, r_1; \mathbf{k}_2, r_2; \cdots\rangle. \end{aligned} \tag{10.16}$$

这一关系是所謂倒易定理. 但它并不同于細致平衡原理，細致平衡原理是

$$\begin{aligned} &|\langle \mathbf{k}_1, r_1; \mathbf{k}_2, r_2; \cdots|S|\mathbf{k}_1', r_1'; \mathbf{k}_2', r_2'; \cdots\rangle|^2 = \\ &= |\langle \mathbf{k}_1', r_1'; \mathbf{k}_2', r_2'; \cdots|S|\mathbf{k}_1, r_1; \mathbf{k}_2, r_2; \cdots\rangle|^2. \end{aligned} \tag{10.17}$$

此外，若 S 矩陣在空間反射下不变

$$P^{-1}SP = S, \tag{10.18}$$

則倒易定理进而变成

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{k}_1, r_1; \mathbf{k}_2, r_2; \cdots|S|\mathbf{k}_1', r_1'; \mathbf{k}_2', r_2'; \cdots\rangle = \\ &= \pm\langle -\mathbf{k}_1', -r_1'; -\mathbf{k}_2', -r_2', \cdots|S|-\mathbf{k}_1, -r_1; -\mathbf{k}_2, -r_2; \cdots\rangle = \\ &= \pm\langle \mathbf{k}_1', -r_1'; \mathbf{k}_2', -r_2'; \cdots|S|\mathbf{k}_1, -r_1; \mathbf{k}_2, -r_2; \cdots\rangle. \end{aligned} \tag{10.19}$$

这与細致平衡原理之差只在自旋方向. 如果对自旋方向求和，則得

$$\begin{aligned} &\sum_{\text{自旋}} |\langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \cdots|S|\mathbf{k}_1', \mathbf{k}_2', \cdots\rangle|^2 = \\ &= \sum_{\text{自旋}} |\langle \mathbf{k}_1', \mathbf{k}_2', \cdots|S|\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \cdots\rangle|^2, \end{aligned} \tag{10.20}$$

它可以称为准細致平衡原理.

考虑一个由总角动量量子数 j 和它的一个分量 m 表征的态.

再假定 S 矩陣在变換 T 下是不变的，則

$$\langle\beta, j, m|S|\alpha, j, m\rangle = \langle\beta, j, m|T^{-1}ST|\alpha, j, m\rangle =$$
$$= |C_{jm}|^2\langle\alpha, j, -m|S|\beta, j, -m\rangle, \qquad (10.21)$$

这里 α, β 是决定反应"道"的别的量子数；在(10.21)中已計及 j 和 m 守恆的要求。 若 S 矩陣又在空間轉动下是不变的，則上式不可能显式地依賴于 m，所以替代 $m \to -m$ 不引起任何变动：

$$\langle\beta, j, m|S|\alpha, j, m\rangle = \langle\alpha, j, -m|S|\beta, j, -m\rangle =$$
$$= \langle\alpha, j, m|S|\beta, j, m\rangle. \qquad (10.22)$$

因此在这里所作的两个假定下，可得由 j 表征的 S 矩陣的子矩陣的細致平衡原理。

5. K 矩陣的实数性条件。 定义 K 矩陣如下：

$$S = \frac{1 + \frac{1}{2}iK}{1 - \frac{1}{2}iK}. \qquad (10.23)$$

这时

$$S^+ = \frac{1 - \frac{1}{2}iK^+}{1 + \frac{1}{2}iK^+}, \qquad (10.24)$$

和

$$S^{-1} = \frac{1 - \frac{1}{2}iK}{1 + \frac{1}{2}iK}. \qquad (10.25)$$

由 S 矩陣的么正性 ($S^+ = S^{-1}$)，得到 K 矩陣的厄米性：

$$K^+ = K. \qquad (10.26)$$

若 S 矩陣分别相对于时間弱反演 T 和空間反射是不变的，則由 (10.22)，根据矩陣 S 和 K 的单值联系，得

$$\langle\beta, j, m|K|\alpha, j, m\rangle = \langle\alpha, j, m|K|\beta, j, m\rangle. \qquad (10.27)$$

因此，在总角动量表象中，矩陣 K 既是厄米的又是对称的，因而它是实数的。矩陣 K 的元給出描写散射的实参量的最少的数目。

利用矩陣 K，可以写出矩陣 T 的算符关系(参看 § 2)：

$$S = 1 + T = \frac{1 + \frac{1}{2} iK}{1 - \frac{1}{2} iK}, \tag{10.28}$$

$$(1 + T)\left(1 - \frac{1}{2} iK\right) = 1 + \frac{1}{2} iK,$$

$$T = iK + \frac{1}{2} iKT. \tag{10.29}$$

利用下列关系，定义在能量曲面上的矩陣元：

$$T = 2\pi i\delta(E_i - E_f)t, \tag{10.30}$$

$$iK = 2\pi i\delta(E_i - E_f)k. \tag{10.31}$$

这时

$$t = k + i\pi \sum_n \delta(E_i - E_n)t|n\rangle\langle n|k, \tag{10.32}$$

特别，当态由能量 E，总角动量 j，它的一个分量 m 和别的量子数的集合 α, β 所表征时，有

$$\langle \beta jmE|t|\alpha jmE\rangle = \langle \beta|\tau(jmE)|\alpha\rangle,$$

$$\langle \beta jmE|k|\alpha jmE\rangle = \langle \beta|x(jmE)|\alpha\rangle. \tag{10.33}$$

$$\tau = x + i\pi\tau x,$$

或

$$\tau = \frac{x}{1 - i\pi x}, \tag{10.34}$$

因为 τ 没有极点.

把这式用于只有一个道的散射，这时指标 α (道的指标) 只取一个值. 因为矩陣 K 是实数，所以可由下式定义一个新的实参量 δ (相移)

$$x = \frac{1}{\pi} \operatorname{tg}\delta, \text{ 这里 } \delta = \delta(jmE), \tag{10.35}$$

现在矩陣 T 也写成通常的形式：

$$\tau = \frac{1}{\pi} \frac{\operatorname{tg}\delta}{1 - i\operatorname{tg}\delta} = \frac{1}{\pi} \frac{\sin\delta}{\cos\delta - i\sin\delta} = \frac{1}{\pi} e^{i\delta}\sin\delta. \tag{10.36}$$

对确定的 j, m 在低能下(即无另外的介子产生)的 (π^+, n) 反应是有两个道的反应的例子:

$$\pi^+ + n \rightleftarrows \pi^+ + n \quad \text{(弹性散射)},$$

$$\rightleftarrows \gamma + P \quad \text{(輻射俘获或光致产生)}.$$

因为 x 既是实数又是对称的,所以它可用实参量 a, b, δ 表出

$$\pi x = \begin{matrix} \gamma p \\ \pi^+ n \end{matrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & \operatorname{tg}\delta \end{pmatrix}. \qquad (10.37)$$

参量 $a \sim 0$, 因为光子在核子上的散射实际上为零. 因此

$$1 - i\pi x = \begin{pmatrix} 1 & -ib \\ -ib & 1 - i\operatorname{tg}\delta \end{pmatrix},$$

$$(1 - i\pi x)^{-1} = \frac{1}{1 - i\operatorname{tg}\delta} \begin{pmatrix} 1 - i\operatorname{tg}\delta & ib \\ ib & 1 \end{pmatrix}, \qquad (10.38)$$

这里假定 b^2 是可以忽略的;

$$\tau = (1 - i\pi x)x = \frac{1}{\pi(1 - i\operatorname{tg}\delta)} \begin{pmatrix} 1 - i\operatorname{tg}\delta & ib \\ ib & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & \operatorname{tg}\delta \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi(1 - i\operatorname{tg}\delta)} \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & \operatorname{tg}\delta \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} 0 & be^{i\delta}\cos\delta \\ be^{i\delta}\cos\delta & e^{i\delta}\sin\delta \end{pmatrix}. \qquad (10.39)$$

因此,若散射相移 δ 已知,则光致产生的过程只依赖于一个实参量 b (参看 [33, 34]).

6. 拉氏量密度的构成. 作为相互作用場的不变性質的总結,我們这里研究建立拉氏量密度的步驟.

a) 拉氏量密度 $\mathscr{L}$ 在順时本征洛仑兹变換下应当是不变的;換句話說, $\mathscr{L}$ 是标量或是贋标量. 例如考虑一个实标量場或贋标量場 φ. 因为假定 $\mathscr{L}$ 不含有 φ 的高于一級的导数,则可以构成下列标量或贋标量:

$$\varphi, \varphi^2, \varphi^3, \cdots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}, \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}, \cdots,$$

导出所需的运动方程的最簡单的标量組合是

$$\mathscr{L} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} - \mu^2\varphi^2.$$

拉氏量密度 $\mathscr{L}$ 可再乘以任意常数(标量变换)而不致变物理結果.
这里 μ^2 是作为一个参量引入的.

对旋量場,有下列形式的标量:

$$\bar{\psi}\psi, \bar{\psi}\gamma_\mu\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}, \cdots$$

同样最簡单的所需的組合是

$$\mathscr{L} = \bar{\psi}\gamma_\mu\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} + m\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)\psi,$$

这里 m 是一个常数参量. 我們已經看到,"簡单性"原理几乎完全决定了 φ 和 ψ 間的耦合.

b) 拉氏量密度 $\mathscr{L}$ 应当是厄米的. 拉氏量密度按通常的哈密頓公式导出总哈密頓量 H. H 的本征值相当用实验可观察的能級,它必然是实数. 所以 H 是厄米的,因而 $\mathscr{L}$ 也是如此. 拉氏量密度的厄米性由下列替代得出

$$\mathscr{L} \to \frac{1}{2}(\mathscr{L} + \mathscr{L}^+). \qquad (10.40)$$

c) 为了消除不可观察的奇异性,要求对称化或反对称化.

若拉氏量密度 $\mathscr{L}$ 包含 $\bar{\psi}\Omega\psi$ 或 $\pi O\varphi$,則反对称化和对称化由下列替代实現:

$$\bar{\psi}\Omega\psi \to \frac{1}{2}[\bar{\psi}, \Omega\psi]_-,$$

$$\pi O\varphi \to \frac{1}{2}\{\pi, O\varphi\}_+. \qquad (10.41)$$

d) 若拉氏量密相对于空間反射不变,則它应当是标量,而排除是贋标量的可能性.

e) 如果拉氏量密度 $\mathscr{L}$ 相对于电荷共軛 C 是不变的,則它相对于粒子和反粒子应当是对称的. 这种对称化可由下替代实現:

$$\mathscr{L} \to \frac{1}{2}(\mathscr{L} + C\mathscr{L}C^{-1}). \qquad (10.42)$$

相对于粒子和反粒子的对称性导致耦合常数的实数性的条件.

f) 如果拉氏量密度 $\mathscr{L}$ 相对于时間弱反演 T 是不变的,則应

作替代

$$\mathscr{L} \to \frac{1}{2}(\mathscr{L} + T\mathscr{L}T^{-1}). \qquad (10.43)$$

由 CTP 定理得到，对于洛仑兹不变的理論，只要“d”和“e”条件满足，这一条件自动满足.

g）如果系統应当满足别种守恆定律，如电荷守恆或重子数守恆等等，則对拉氏量应当作进一步的限制. 这些限制将在第三章中討論(参看，例如 § 14，条 2).

§ 11. 弱相互作用中某些守恆定律的破坏

1. 强相互作用和弱相互作用. a）相互作用的分类. 現今已知的粒子如下：

$$\Xi, \Sigma, \Lambda, N; K(\theta, \tau), \pi, \mu, e, \nu, \gamma.$$

粒子 Ξ，Σ，Λ 和 K 称为“奇异粒子”. 这些粒子之間的相互作用分为三个完全不同的类型.

1）强相互作用. 属于这一类的有 π 介子和核子的相互作用，奇异粒子和 π 介子及核子的、导致奇异粒子产生的相互作用. 这些相互作用的耦合常数的量級为

$$\frac{g^2}{4\pi} \approx 1. \qquad (11.1)$$

2）电磁相互作用. 属于这一类的有一切荷电粒子与电磁場（γ）的相互作用. 电磁相互作用的耦合常数是

$$\frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}. \qquad (11.2)$$

3）弱相互作用. 属于这一类的有导致一切不稳定粒子衰变的相互作用. 这一类的相互作用制約着奇异粒子衰变，中子及 μ 介子的 β 衰变等. 弱相互作用的耦合常数的量級为

$$\frac{f^2}{4\pi} \approx 10^{-12}. \qquad (11.3)$$

应当注意，弱相互作用的耦合常数較之电磁相互作用和强相互作用的耦合常数，数值差别很大.

b）四个旋量的費米型相互作用. 已知一些有四个費米子参加的过程，例如，

β衰变：

$$n \to p + e + \bar{\nu},$$

μ介子的衰变：

$$\mu \to e + \nu + \bar{\nu},$$

μ介子的核俘获：

$$\mu^- + p \to n + \nu.$$

这些过程已知都是弱的. 对于过程

$$A + B \to C + D,$$

这里 A, B, C 和 D 是費米子，費米引入下列形式的相互作用

$$\mathscr{H}^i = g(\bar{\psi}_C \Omega_i \psi_A)(\bar{\psi}_D \Omega_i \psi_B) + \text{厄米共軛項},$$

这里 Ω_i 由双綫型协变量中选取，使得整个乘积是一标量. 这一"唯象的"相互作用，特别在β衰变过程的理論解释中得到了显著的成功.

我們将費米型相互作用視为弱相互作用的代表，来討論四个費米子的相互作用的一般結构（更詳細的知識，参看工作 [35]）. 因为存在五种双綫型协变量，所以

$$\mathscr{H}^i = \sum_{i=1}^{5} g_i(\bar{\psi}_C \Omega_i \psi_A)(\bar{\psi}_D \Omega_i \psi_B) + \text{厄米共軛項},$$

这里耦合常数 g_i 一般是复数，而 i 取值 $1 = S$, $2 = V$, $3 = T$, $4 = A$, $5 = P$. 粒子的組合

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$$

表示，粒子 A 变成 B，而粒子 B 变成 D，不是唯一的. 描写同样的过程也可用粒子的别种組合：

$$\begin{aligned} A + B &\to D + C, \\ A + \bar{C} &\to \bar{B} + D, \\ A + \bar{D} &\to \bar{B} + C, \\ \bar{C} + B &\to \bar{A} + D, \\ \bar{D} + B &\to \bar{A} + C. \end{aligned}$$

等等，即

$$\binom{A}{B}\to\binom{D}{C},\ \binom{A}{C}\to\binom{B}{D}$$

等等. 每一种組合在哈密頓量密度的表达式中有特定的次序 ψ. 按費尔茲換位定理(参看 §7, 条 4), 在 $\mathscr{H}^i$ 的表达式中任何次序的变动，可以表成某种"标准"次序的五种不变量的綫性組合.

c) 双綫型协变量的变換性質. 相互作用拉氏量的結构遵守种种不变性的要求. 为方便起見，在表 8 中，我們总結了双綫型协变量的变換性質.

表 8

i	Ω_i		P	C	R_s	R_w	T
S	I		+	+	+	+	+
V	$i\gamma_\mu$	$\mu=1,2,3$	−	−	−	+	−
		$\mu=4$	+	−	−	+	+
T	$\frac{i}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu)$	$\mu=1,2,3$ $\nu=1,2,3$	+	−	+	−	−
		$\mu=1,2,3$ $\nu=4$ 或 $\nu=1,2,3$ $\mu=4$	−	−	+	−	+
A	$i\gamma_\mu\gamma_5$	$\mu=1,2,3$	+	+	−	−	−
		$\nu=4$	−	+	−	−	+
P	$i\gamma_5$		−	+	+	+	−
	参	看	§7 条 4	§8 条 3	§9 条 3	CR_s	§10 条 2

关于費米型相互作用有下列几点注意.

a) 既然量 Ω_i 的选取是使得整个相互作用是一个标量，宇称就自动守恆，換句話說，P 是守恆算符.

b) 因为 C 或 T 包括取复数共軛的运算，如果 g_i 是实数，則这两个算符是守恆的.

c) 然而也可能建立相互作用，既是洛仑茲不变的又是厄米

的，但在这种相互作用中，运算 P，C，T 的不变性中的任两个(或所有的三个)都被破坏了[36].

2. 在弱相互作用中宇称不守恒的实验証明[1]. i) $\theta-\tau$ 問題. 在弱相互作用中放弃宇称守恆的动机是，存在两种重介子：

$$\theta(K_{\pi 2}) \to \pi + \pi,$$

$$\tau(K_{\pi 3}) \to \pi + \pi + \pi,$$

它們有完全同样的質量，同样的寿命，所以很难看成是不同的粒子. 如果 θ 介子和 τ 介子是同样的，則由 $K_{\pi 3}$ 衰变时的角分布的分析可作出結論，宇称在上述两种衰变过程中不可能是守恆的(参看[38]).

ii) 極化核的 β 衰变的不对称性. 李政道和楊振宁[39]把宇称不守恆的概念推广到 β 衰变的过程，并且发現沒有支持或反对这一假說的实驗証明，因为对直到当时已知的实驗(能譜的形状，β 粒子和中微子間的角关联，β 粒子和 γ 量子間的角关联的測量)的理論描写，只用到标量的量. 因此即使加上一个附加的相互作用，使得 $\mathscr{H}'$ 是标量或贋标量(宇称不守恆的相互作用)之和，在理論中也不导致干涉項的出現，而两个贋标量之乘积又是一个标量. 所以这样的相互作用也不可能用来检驗，这种相应于宇称不守恆的項存在或不存在.

但是在測量某种贋标量例如自旋的平均值 $\langle\sigma\rangle$ 时，检驗宇称不守恆假說的可能性就出現了. 李政道和楊振宁証明，在极化核的 β 衰变下的 β 射綫的角分布的形式是

$$I(\theta)d\theta \sim (1 + \alpha\cos\theta)\sin\theta\, d\theta,$$

这里 θ 是核的自旋方向和 β 粒子的动量間的夹角. 对容許跃迁 $J \to J-1$(核的宇称不变)，系数 α 等于

$$\alpha = \beta\frac{\langle J_z\rangle}{J}$$

---

1) 这一問題在总結論文[37]中研究过.

$$\beta = \mathrm{Re}\Big[g_T g_T'^{*} - g_A g_A'^{*} + \\ + \frac{iZe^2}{\hbar cp}(g_A g_T'^{*} + g_A' g_T^{*})\Big]\frac{v_e}{c}\frac{2}{\xi\left(1+\frac{b}{W}\right)}\left|\int \sigma\right|^2,$$

这里 g_T' 是相应于宇称不守恆的张量项的耦合常数，W 是 β 粒子的能量，v_e 是 β 粒子的速度，

$$\xi = (|g_S|^2 + |g_V|^2 + |g_S'|^2 + |g_V'|^2)\left|\int 1\right|^2 + \\ + (|g_T|^2 + |g_A|^2 + |g_T'|^2 + |g_A'|^2)\left|\int \sigma\right|^2,$$

$$b\xi = \sqrt{1-\frac{e^2Z}{\hbar c}}\Big\{[(g_S^* g_V + g_S g_V^*) + (g_S'^{*} g_V' + g_S' g_V'^{*})]\left|\int 1\right|^2 + \\ + [(g_T^* g_A + g_T g_A^*) + (g_T'^{*} g_A' + g_T' g_A'^{*})]\left|\int \sigma\right|^2,$$

$b\xi$ 是所謂費尔兹干涉項.

系数 α 之值可以由实验找出，通过测量 β 射綫的相对不对称：

$$\alpha = 2\frac{\int_0^{\pi/2} I(\theta)d\theta - \int_{\pi/2}^{\pi} I(\theta)d\theta}{\int_0^{\pi} I(\theta)d\theta}.$$

吳剑雄等人的实验[40]确切地显示出，在极化 Co^{60} 核存在这一預言的不对称，并得到 $\alpha \sim -0.4$，这表示 β 射綫傾向于自核的自旋极化方向的反向放出.

在上列表达式中，α 包含两項：

$$g_T g_T'^{*} - g_A g_A'^{*} \equiv A,$$
$$g_A g_T'^{*} + g_A' g_T^{*} \equiv B.$$

在电荷共軛作用下，耦合常数的变动为

$$g_T \to +g_T^*,\ g_T' \to -g_T'^{*},\ g_A \to +g_A^*,\ g_A' \to -g_A'^{*}.$$

因此

$$C\,\mathrm{Re}\,A\,C^{-1} \neq \mathrm{Re}\,A,$$
$$C\,\mathrm{Im}\,B\,C^{-1} = \mathrm{Im}\,B,$$

即电荷共軛对 A 項不守恆，对 B 項守恆. 因为 B 項之前有一个精

細結构常数，它很小，所以吳剑雄的实驗証明了，P 和 C 二者在 β 衰变中都不守恆. 这是我們将在条 3 中証明的一个更一般的定理的特殊情形.

这些实驗已經在"双分量"中微子理論(見条 4)的基础上作了解释，按这一理論只有两种中微子态——平行于其运动方向100%极化的粒子态和反平行于其运动方向 100% 极化的反粒子态.

iii) μ 介子的極化. 根据中微子双分量理論(見条 4)的結果，由于 π 介子沒有自旋，在衰变过程

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu$$

中，将产生完全縱向极化的 μ 介子 (見图 6). 在已极化的 μ 介子随后的衰变过程

$$\mu^+ \to e^+ + \nu + \bar{\nu}$$

中，假定宇称在这一过程中是不守恆的，一般說来将出現正电子的发射相对于 μ 介子的前后不对称，因为在这情况下微分截面可依賴于贋标量 ($\sigma\mathbf{k}$). 这种不对称已被观察到，李德曼等人[41]采用的方法类似于分子束反射的方法，弗利德曼和特列蒂[42]用核乳胶方法.

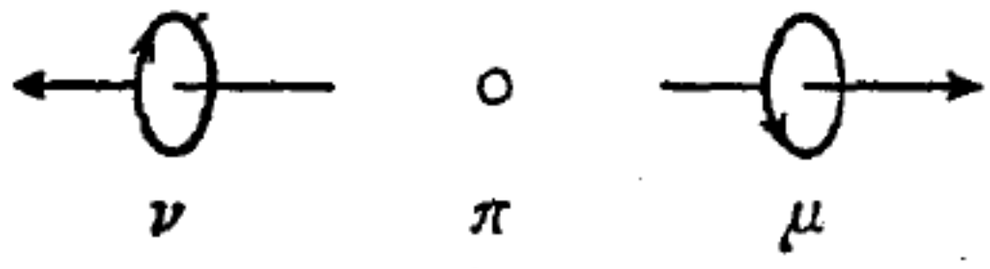


图 6.

按双分量中微子理論，μ 介子如下方式衰变：

$$\mu^+ \to e^+ + \nu + \bar{\nu},$$

而不是如

$$\mu^+ \to e^2 + 2\nu$$

或

$$\mu^+ \to e^+ + 2\bar{\nu}$$

的方式. 第一种形式的衰变适合于密歇尔参量(它表示电子能譜的高能尾端的特性；参看密歇尔的論文[35])的观察值

$$\rho\,(\text{观察值}) = 0{,}67 \sim 0{,}68,$$

而由理論計算，

$$\rho(\mu^+ \to e^+ + \nu + \bar{\nu}) = \frac{3}{4},$$

$$\rho(\mu^+ \to e^+ + 2\nu) = \rho(\mu^+ \to e^+ + 2\bar{\nu}) = 0.$$

这一事实导致輕子数应当守恆的观念(再参看李政道[43]).

iv) 电子的縱向極化. 如果宇称在 β 衰变中是不守恆的, 則产生出的电子将显示出縱向极化, 且极化的程度应当是 v_e/c 的量級[44]. 利用靜电轉向装置, 縱向极化可变成横向极化. 这样测量前后不对称可代以测量莫特散射中的左右不对称 (見图 7). 实驗 [47] 証实理論的預言.

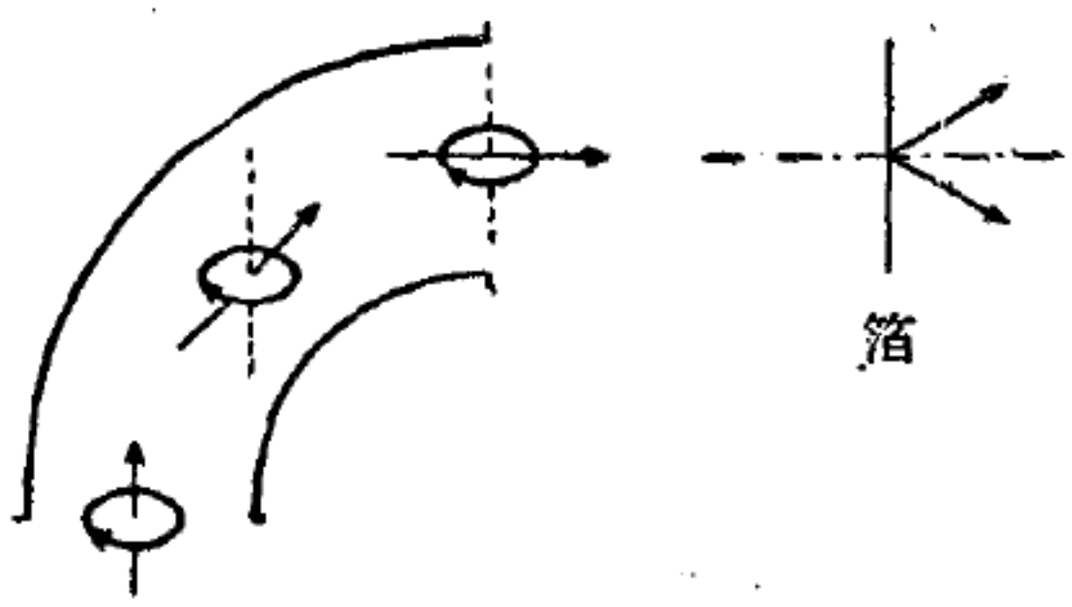


图 7.

在工作[46]中証明了, 在縱向极化的电子的軔致輻射中, 将产生圓极化的光子. 光子的圓极化可利用康普頓散射的自旋相依部分来分析. 确定光子的圓极化的实驗[47]也得到与理論有成效地相符.

3. 末态定理. 因为強反演定理普遍成立, 若 P 不守恆, 則 T 或 C 或两者也是不守恆的. 李政道, 楊振宁和渥麦[36]提出下列一般的說法.

定理. 如果在衰变过程的末态粒子之間沒有強相互作用或电磁相互作用, 則由于宇称 P 不守恆而引起的不对称, 只有在 C 也不守恆的情况下才可以观测到.

証. 假定引起衰变的相互作用哈密頓量 H 滿足条件:

$$[H, C] = 0, [H, P] \neq 0, \tag{11.4}$$

我們建立

$$H_1 = \frac{1}{2}(H + PHP^{-1}), H_2 = \frac{1}{2}(H - PHP^{-1}). \tag{11.5}$$

这时, H_1 和 H_2 滿足关系

$$[H_1, P]_- = 0, [H_2, P]_+ = 0. \tag{11.6}$$

假定态 $|A\rangle$ 衰变成两个态 $|B_1\rangle$ 和 $|B_2\rangle$:

$$|A\rangle \to |B_1\rangle + |B_2\rangle, \tag{11.7}$$

而 $|B_1\rangle$ 和 $|B_2\rangle$ 有相反的宇称. 利用厄米性条件, CPT 定理和关系(11.4)和(11.6),得到[1]

$$\langle B_1|H_1|A\rangle^* = \langle A|H_1|B_1\rangle = \langle A|T^{-1}TH_1T^{-1}T|B_1\rangle =$$
$$= \langle B_1^T|TH_1T^{-1}|A^T\rangle = \langle B_1^T|C^{-1}PH_1P^{-1}C|A^T\rangle =$$
$$= \langle B_1^T|H_1|A^T\rangle. \tag{11.8}$$

若态由角动量及其余的量子数表征,则

$$|A^T\rangle = \langle A|T^{-1} = \langle \alpha, j, m|T^{-1} = C^*_{jm}|\alpha, j, -m\rangle, \tag{11.9}$$

$$\langle B_1^T| = T|B_1\rangle = T|\beta, j, m\rangle = C_{jm}\langle \beta, j, -m|. \tag{11.10}$$

这里 $|C_{jm}|^2 = 1$. 設哈密頓量 H 相对于轉动是不变的(参看 § 10, 条 4), 得

$$\langle B_1^T|H_1|A^T\rangle = \langle B_1|H_1|A\rangle = \langle B_1|H_1|A\rangle^*. \tag{11.11}$$

因此,

$$\langle B_1|H_1|A\rangle = 实数 \equiv a_1. \tag{11.12}$$

由同样的方法,可以証明:

$$\langle B_2|H_2|A\rangle^* = -\langle B_2|H_2|A\rangle = 純虛数 \equiv ia_2, \tag{11.13}$$

这样一来,

$$\langle B|H|A\rangle = a_1 + ia_2, \tag{11.14}$$

而量

$$|\langle B|H|A\rangle|^2 = |a_1|^2 + |a_2|^2 \tag{11.15}$$

不包含干涉項,因此沒有不对称性[2].

---

1) 这里假定 $|B_1\rangle$ 与 $|A\rangle$ 的宇称相同, $|B_2\rangle$ 与 $|A\rangle$ 的宇称相反——中譯本譯者注.

2) 在一般情况下,这里給出的末态定理是不正确的. 問題在于,如果在反应 $A \to B$ 中,态 A 是极化的,且测量态 B 的极化,則这一反应的截面并不由公式(11.15)来表示. 态 A 的极化可由密度矩陣 ρ 来描写,而过渡到我們所研究的态的极化由密度矩陣 ρ' 来描写. 这时反应 $A \to B$ 的微分截面,对应于由极化 ρ 的态过渡到极化 ρ' 的态的,由下列公式决定

$$\mathrm{Sp}(\rho' T \rho T^+) = \sum_{rr'ss'} \rho'_{s's'} T_{s'r} \rho_{rs} T^+_{ss'},$$

这里 T 是过渡振幅,它是以始态和末态的自旋指[illegible]成的矩陣(在我們的情形下

在 β 衰变和 μ 衰变中可观测到的大的不对称性，显然証明，宇称(P)和电荷共軛宇称(C)二者都不守恆. 关于 T 的守恆的問題，至今还未解决(能答复这一問題的实驗已在工作[44]中提出).

4. 双分量中微子理論. 至今所观察到的宇称不守恆的过程总含有中微子. 沙拉姆[48]，李政道和楊振宁[49]，朗道[50]把这种不守恆的性質归之于中微子的特性.

i) 中微子規范. 考察旋量 ψ 的自由場的拉氏量密度:

$$\mathscr{L} = -\bar{\psi}\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)\psi, \qquad (11.16)$$

作变換

$$\psi \to \pm \gamma_5 \psi, \qquad (11.17)$$

則

$$\psi^+ \to \pm \psi^+ \gamma_5, \qquad (11.18)$$

$$\bar{\psi} \to \pm \psi^+ \gamma_5 \gamma_4 = \mp \bar{\psi}\gamma_5. \qquad (11.19)$$

由此得

$$\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \to -\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\gamma_5\psi = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi, \qquad (11.20)$$

$$\bar{\psi}\psi \to -\bar{\psi}\gamma_5\gamma_5\psi = -\bar{\psi}\psi. \qquad (11.21)$$

因此，如果拉氏量密度 $\mathscr{L}$ 相对于变換(11.17)是不变的，(11.16)中的質量項必須为零. 此外，若所有相互作用都假定相对于变換(11.17)是不变的，那么場 ψ 的物理質量(自質量)也必須是零. 这一情况与电磁場的情况很相似，在那里，所有相互作用的規范不变

为 $T_{r'r} = \langle B_{r'}|H|A_r\rangle$). 密度矩陣由粒子的极化张量的集合来表征(极化张量为 1, 2, ···, $2S$ 阶的，这里 S 是相应粒子的自旋). 若粒子的相互作用是弱的，且相对于 C 是不变的，則可証明(見李图斯的学位論文，ФИАН, 1958)，截面由标量項和贋标量項所組成，且这些項只含有总阶为偶数的粒子的极化张量之积，并且在贋标量項中，这一阶的和 $\geqslant 2$. 若态 A, B 的极化未知，或只知道一个极化矢量，則截面不含有贋标量項，因而这里給出的定理实际上是正确的. 但是，若已知两个极化矢量或一个二阶极化张量(或一般任何总阶为偶数的极化张量)，則截面含有贋标量項，P 不守恆甚至可在 C 守恆的情况下观察. 类似地可以証明(也見李图斯的学位論文)，若相互作用是弱的，且相对于 T 是不变的，則截面的标量項含有总阶为偶数的粒子的极化张量之积，而贋标量項含有的是总阶为奇数的粒子的极化张量之积.——俄譯本譯者注.

性导致光子的自质量严格为零.

沙拉姆假定，一切相互作用相对于中微子规范(11.17)是不变的

$$\psi_\nu \to \pm \gamma_5 \psi_\nu ,$$

这样就要求中微子的自质量为零.

ii) 双分量公式. 以ψ表示质量为零的場的通常的四分量的旋量，定义函数

$$\psi_\nu = (1 \pm \gamma_5)\psi , \tag{11.22}$$

则ψ_ν自动地相对于中微子规范不变

$$\gamma_5 \psi_\nu = \pm \psi_\nu , \ \bar{\psi}_\nu \gamma_5 = \mp \bar{\psi}_\nu .$$

在γ矩陣的狄拉克-泡利表象中(見§6，条7)，自由态的函数ψ可写作下列形式

$$\psi(\mathbf{p}, m) = \begin{bmatrix} I & -\dfrac{\sigma \mathbf{p}}{\varepsilon_p + m} \\ \dfrac{\sigma \mathbf{p}}{\varepsilon_p + m} & I \end{bmatrix} . \tag{11.23}$$

对质量为零的粒子，这一表达式变成

$$\psi(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} I & -\sigma_p \\ \sigma_p & I \end{bmatrix} , \ \sigma_p = \frac{\sigma \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} . \tag{11.24}$$

如果取z轴沿$\mathbf{p}$方向，則

对中微子

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{自旋平行于 } \mathbf{p}; \ \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{自旋反平行于 } \mathbf{p} \tag{11.25a}$$

对反中微子

$$\psi = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{自旋平行于 } \mathbf{p}; \ \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{自旋反平行于 } \mathbf{p} \tag{11.25b}$$

矩陣$1 \pm \gamma_5$等于

$$\begin{pmatrix} I & \mp I \\ \mp I & I \end{pmatrix} \tag{11.26}$$

不难驗証，这一矩陣使得第二和第三态或第一和第四态不出現.

所以在中微子的这种公式中，中微子和反中微子的动量和自旋方向有确定的关联(旋向性)：对中微子，自旋平行于 **p**(見图 8a)，对反中微子，自旋反平行于 **p**(見图 8b). 在某种意义下，这种关联可以看作是动量矢量上的螺紋. 早先被看作是"釘子"的中微子，現在应当看作是有确定的螺紋 (譬如右旋) 的"螺絲釘"了. 由于在鏡象中(坐标反射)，螺紋成为左旋的，所以在反射下它不是不变的. 从数学上說，用函数 ψ_ν 代替通常的函数 ψ 显然违反宇称守恆，因为組合 $(1 \pm \gamma_5)$ 违反宇称守恆.

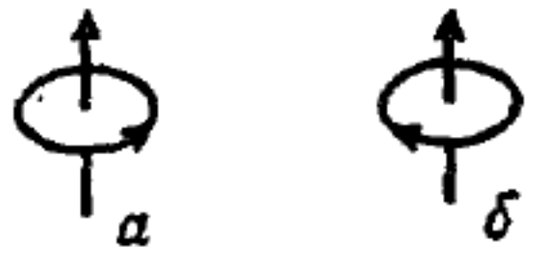


图 8.

iii) 守恆定律. 由中微子和反中微子的确定的縱向极化，立即給出中微子場的某些一般性質.

1) 宇称不守恆. 因为在空間反射 P 下，中微子 ν 和反中微子 $\bar{\nu}$ 变成不存在的态[見图 9a；記号(+)表示粒子，記号(−)表示反粒子].

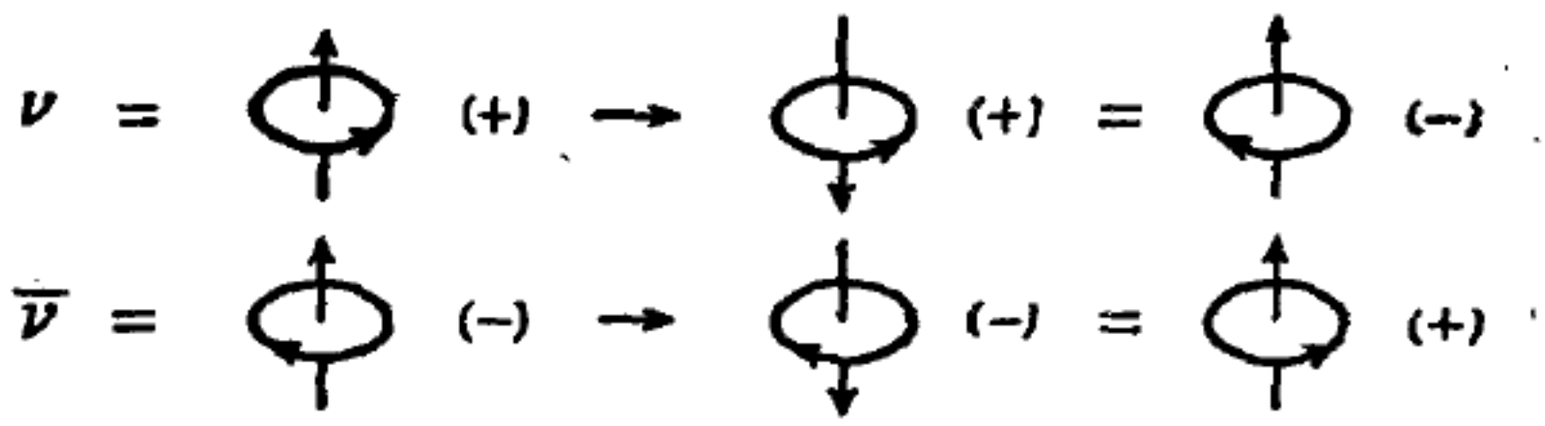


图 9a.

2) 电荷共軛宇称也不守恆，因为在电荷共軛 C 下，ν 和 $\bar{\nu}$ 变到不存在的态(見图 9b)

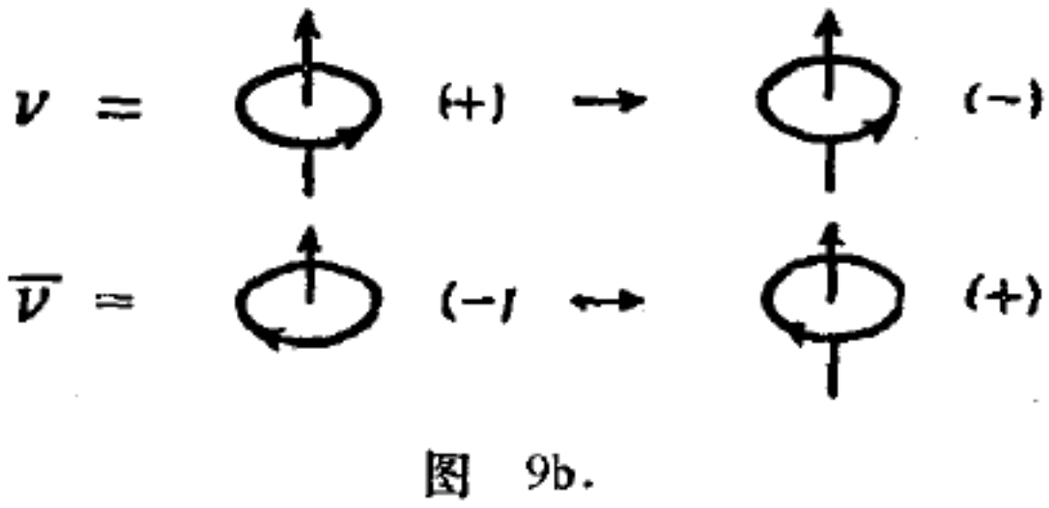


图 9b.

3) 时間反演算符可能是守恆的. 在 P 和 C 共同作用下，中微

子 ν 变成反中微子 $\bar{\nu}$，而反中微子 $\bar{\nu}$ 变成中微子 ν（見图 9c）。 若理論相对于 ν 和 $\bar{\nu}$ 是对称的，則它相对于 CP 之积是不变的，由強反演定理，它相对于时間弱反射 T 也是不变的。 但是如果引入复数的耦合常数，可得在 T 下不是不变的"双分量"拉氏量。

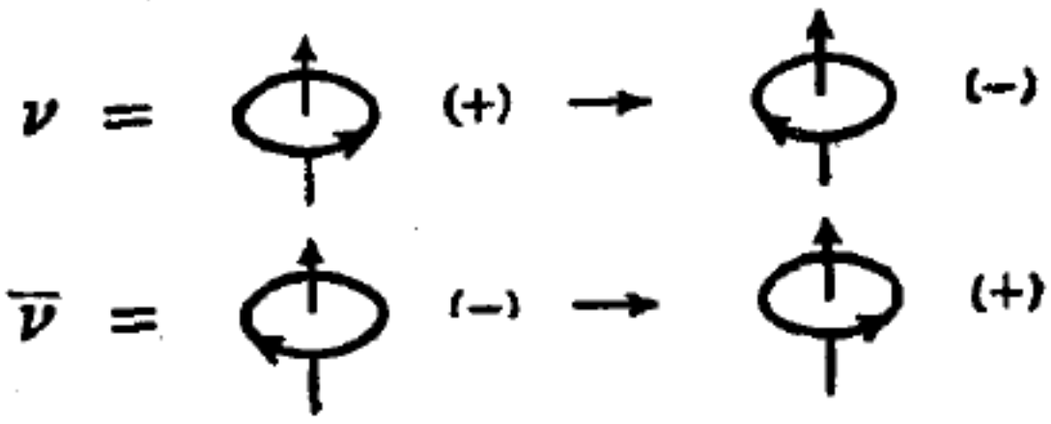


图 9c.

5. 电荷共軛粒子的衰变。 李政道，楊振宁和渥麦証明，即使当导致衰变的相互作用在电荷共軛 C 下不是不变的时候，具有不同的衰变产物的相互电荷共軛的粒子，在弱相互作用的一級近似下，其寿命也是一样的。

現在来証明。考虑粒子 A 的衰变：

$$|A\rangle \to |B\rangle$$

及相应的电荷共軛过程

$$|\bar{A}\rangle \to |\bar{B}\rangle,$$

这里 $|A\rangle$ 和 $|B\rangle$ 是強相互作用的、总角动量 J 等于粒子 A 的自旋的本征态。

若导致衰变的（弱）相互作用哈密頓量 H 相对于 P 不是不变的，則如前面一样可写作下列形式 (11.5)

$$H_1 = \frac{1}{2}(H + PHP^{-1}),$$

$$H_2 = \frac{1}{2}(H - PHP^{-1}).$$

設 $|B\rangle = |B_1\rangle + |B_2\rangle$，这里

$$P|B_1\rangle = +|B_1\rangle,$$

$$P|B_2\rangle = -|B_2\rangle. \qquad (11.27$$

我們取态 $|B_1\rangle$ 和 $|A\rangle$ 有相同的宇称，設 $\langle J_z\rangle = m$。 这时类似于

条 3，利用厄米性条件，CPT 定理和关系(11.6)，(11.9)和(11.10)，得

$$\langle B_1|H_1|A\rangle_m^* = \langle A|H_1|B_1\rangle_m =$$
$$= \langle A|C^{-1}T^{-1}P^{-1}H_1PTC|B_1\rangle_m =$$
$$= \langle\bar{A}|T^{-1}HT|\bar{B}_1\rangle_m = \langle\bar{B}_1|H_1|\bar{A}\rangle_{-m}.$$

再假定哈密頓量H相对于空間轉动是不变的，我們得到

$$\langle B_1|H_1|A\rangle^* = \langle\bar{B}_1|H_1|\bar{A}\rangle.$$

类似地可証

$$\langle B_2|H_2|A\rangle^* = -\langle\bar{B}_2|H_2|\bar{A}\rangle.$$

粒子 A 和 $\bar{A}$ 的寿命分别等于

$$\tau_A \sim \sum_B [|\langle B_1|H_1|A\rangle|^2 + |\langle B_2|H_2|A\rangle|^2],$$

$$\tau_{\bar{A}} \sim \sum_B [|\langle\bar{B}_1|H_1|\bar{A}\rangle|^2 + |\langle\bar{B}_2|H_2|\bar{A}\rangle|^2.$$

因此

$$\tau_A = \tau_{\bar{A}}.$$

第三章　連續变換

§12. 与連續变換相关的守恆定律

1. 两类連續变換. 現在我們来討論从§5条2以后就擱置起来了的連續变換. 場量 Φ 是时空坐标的函数. 由均匀时空变換

$$A: x \to x', \quad x'_\mu = a_{\mu\nu}x_\nu \tag{12.1}$$

所引起的場量变換的特殊形式

$$U\Phi_a(x)U^{-1} = \Phi'_a(x) = S_{a\beta}\Phi_\beta(a^{-1}x) \tag{12.2}$$

决定場 Φ 的时空特性. 从羣論的观点来看, Φ 构成均匀洛仑茲羣(时空轉动羣)的已約表示[1], 均匀变換(A)是連續的, 因此可由无限小变換构成.

还存在另一类的連續变換, 它不变动时空坐标, 但影响場的內部性質; 卽

$$x \to x' = x,$$

但

$$\Phi_a(x) \to \Phi'_a(x') = \Phi'_a(x),$$

这里

$$\Phi'_a(x) = U\Phi_a(x)U^{-1} = S_{a\beta}\Phi_\beta(x).$$

这种变換应当看作是一种附加条件, 用它可以确定那些相应的粒子具有"結构"或內自由度的場 Φ 的特性. 分量 α 的选取是使得它們互相发生变換.

这一类变換的例子可举出規范羣, 它們是"相"的变換:

$$\Phi_a(x) \to \Phi'_a(x) = e^{i\chi(\lambda)}\Phi_a(x), \tag{12.3}$$

这里 $\chi(\lambda)$ 一般是一个依賴于任意連續实参量 λ 的算符(矩陣). 例如托歇克[53]所考慮的中微子規范:

$$\chi(\lambda) = i\gamma_5\lambda.$$

---

1) 非均匀洛仑茲羣(卽包含平移)的表示曾由維格勒研究过(見[51, 52]).

2. 規范变換. 定义規范变換

$$\Phi_a(x) \to \Phi'_a(x) = e^{i\chi(\lambda)}\Phi_a(x), \tag{12.4}$$

这里 $\chi(\lambda)$ 是一个实参量 λ 的实連續函数.

考虑无限小的規范变換:

$$\Phi_a(x) \to \Phi'_a(x) = \Phi_a(x) + \delta\Phi_a(x). \tag{12.5}$$

这时 $\Phi'_a(x)$ 由一个甚近于恆等变換的么正变換給出

$$\Phi'_a(x) = U\Phi_a(x)U^{-1} = S_{a\beta}\Phi_a(x) = (\delta_{a\beta} + T_{a\beta}\delta\lambda)\Phi_\beta(x), \tag{12.6}$$

这里,如上定义的算符 $T_{a\beta}$ 称为"生成元"[1]. 定义算符 F 如下:

$$U = I + iF\delta\lambda. \tag{12.7}$$

由于变換 U 是么正的,所以算符 F 是厄米的. 現在可写下

$$\Phi'_a = (I + iF\delta\lambda)\Phi_a(1 - iF\delta\lambda) = \Phi_a + i[F, \Phi_a]\delta\lambda =$$
$$= \Phi_a + T_{a\beta}\Phi_\beta\delta\lambda. \tag{12.8}$$

因此

$$T_{a\beta}\Phi_\beta = i[F, \Phi_a],$$

或記为

$$T\Phi = i[F, \Phi]. \tag{12.9}$$

F 的解的明显形式为

$$F = \int \pi_a(x)T_{a\beta}\Phi_\beta(x)\, d^3x. \tag{12.10}$$

証明:

$$i[F, \Phi_\rho(x)] = i\int_{x'_0=x_0} [\pi_a(x'), \Phi_\rho(x)]T_{a\beta}\Phi_\beta(x')\, d^3x' =$$
$$= i\int_{x'_0=x_0} \frac{1}{i}\delta_{a\rho}\delta(x' - x)T_{a\beta}\Phi_\beta(x')\, d^3x' =$$
$$= T_{\rho\beta}\Phi_\beta(x),$$

或

$$i[F, \Phi(x)] = T\Phi(x).$$

如果总拉氏量密度 $\mathscr{L}$ 在規范变換(12.3)下是不变的,則由 §5,

1) 这样的算符有时也称为无限小算符.. ——俄譯本譯者注.

条 2 的論点，F 是可观察量，并是运动常数。 F 是一常数的性质可以表成一种更合适的形式。取任一类空曲面 σ，则

$$\pi_a(x) = n_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial\Phi_a/\partial x_\mu)}, \tag{12.11}$$

这里矢量 n_μ 是曲面 σ 的法綫矢量。$n_\mu n_\mu = -1$。由下列替代，F 可以写成协变的形式：

$$\int d^3x \to \int d\sigma,$$

$d\sigma$ 是曲面元。这时

$$F = \int n_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial\Phi_a/\partial x_\mu)} T_{a\beta}\Phi_\beta \, d\sigma = \int f_\mu \, d\sigma_\mu, \tag{12.12}$$

这里

$$f_\mu = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial\Phi_a/\partial x_\mu)} T_{a\beta}\Phi_\beta, \tag{12.13}$$

$d\sigma_\mu = n_\mu \, d\sigma$ 是曲面元四維矢量。因为曲面是任意的，则由格林定理

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\mu} = 0. \tag{12.14}$$

3. c 量相角的規范变换。 如果 $\chi(\lambda)$不是一个算符，而是一个 c 量，且用于非厄米場，可以得出一些簡单的結果。在这种情形下，无限小規范变换为

$$\Phi_a(x) \to \Phi'_a(x) = \Phi_a(x) + i\varepsilon\Phi_a(x)\delta\lambda, \tag{12.15}$$

ε 为某种常量，因为

$$\chi(\delta\lambda) = \chi(0) + \left(\frac{\partial\chi}{\partial\lambda}\right)_0 \delta\lambda = \left(\frac{\partial\chi}{\partial\lambda}\right)_0 \delta\lambda \equiv \varepsilon\delta\lambda,$$

$$e^{i\chi(\delta\lambda)}\Phi_a(x) = e^{i\varepsilon\delta\lambda}\Phi_a(x) = (1 + i\varepsilon\delta\lambda)\Phi_a.$$

注意 $\chi(0) = 0$。 而 $\Phi'_a(x)$ 是这样选定的，当 $\lambda = 0$ 时，它等于 $\Phi_a(x)$。

这一变换的生成元簡单地就是

$$T_{a\beta} = i\varepsilon\delta_{a\beta}. \tag{12.16}$$

同样,可以証明

$$\Phi_a^+(x) \to \Phi_a'^+(x) = \Phi_a^+(x) - i\varepsilon\Phi_a^+(x)\delta\lambda, \qquad (12.17)$$

$$T_{a\beta}^+ = -i\varepsilon\delta_{a\beta}. \qquad (12.18)$$

現在守恆算符 F 是

$$F = \int d^3x\pi_a(x)T_{a\beta}\Phi_\beta(x) =$$

$$= i\varepsilon\int d^3x[\pi_a(x)\Phi_a(x) - \pi_a^+(x)\Phi_a^+(x)]. \qquad (12.19)$$

如果場量展成放出算符与吸收算符,例如

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d^3k}{\sqrt{2k_0}}[a(\mathbf{k})e^{ikx} + b^+(\mathbf{k})e^{-ikx}]$$

及其厄米共軛,一般可得[1]

$$F = \varepsilon\int d^3k[a^+(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) - b^+(\mathbf{k})b(\mathbf{k})] =$$

$$= \varepsilon(n_+ - n_-), \qquad (12.20)$$

这里算符

$$n_+ = \int d^3k a^+(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) = \text{粒子总数},$$

$$n_- = \int d^3k b^+(\mathbf{k})b(\mathbf{k}) = \text{反粒子总数}.$$

守恆量 F 总是正比于粒子数減去反粒子数. 相应的矢量为

$$f_\mu = i\varepsilon\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial\Phi_a/\partial x_\mu)}\Phi_a - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial\Phi_a^+/\partial x_\mu)}\Phi_a^+\right] \qquad (12.21)$$

等等.

§ 13. 电荷規范变換及电磁場

1. 电荷和电流. 对某种非厄米場作一个 c 量 χ 的規范变換:

$$\Phi_a(x) \to e^{i\chi}\Phi_a(x), \quad \Phi_a^+(x) \to e^{-i\chi}\Phi_a^+(x). \qquad (13.1)$$

則按 § 12, 条 3 的一般論述,得到一个算符 F:

$$F = \varepsilon(n_+ - n_-), \qquad (13.2)$$

---

1) 例如参看[54].

它是一个运动常数.

假定对 $\varepsilon=$ 实常数作一个适当选择，可使量 F 就是总电荷 Q：

$$Q = \varepsilon(n_+ - n_-). \tag{13.3}$$

反粒子与粒子的电荷相反，相应的矢量算符 f_μ，以下将証明就是电流密度.

i) 标量場(或赝标量場). 自由場的拉氏量密度等于

$$\mathscr{L} = -\left[\frac{\partial\varphi^+}{\partial x_\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} + \mu^2\varphi^+\varphi\right],$$

由此得

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right)} = -\frac{\partial\varphi^+}{\partial x_\mu}, \quad \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi^+}{\partial x_\mu}\right)} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu},$$

$$f_\mu = -i\varepsilon\left[\frac{\partial\varphi^+}{\partial x_\mu}\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\varphi^+\right]. \tag{13.4}$$

ii) 旋量場. 自由場的拉氏量密度是

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}[\psi^+\vartheta\psi - \psi\vartheta^T\psi^+] =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\psi^+\gamma_4\left(\gamma_\mu\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x_\mu} + m\right)\psi - \psi\left(\gamma_\mu^T\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_\mu} + m\right)\gamma_4^T\psi^+\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\psi_\alpha^+(\gamma_4\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\frac{\partial\psi_\beta}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\psi_\alpha}{\partial\chi_\mu}(\gamma_\mu^T\gamma_4^T)_{\alpha\beta}\psi_\beta^+ + \right.$$

$$\left. + m\psi_\alpha^T(\gamma_4)_{\alpha\beta}\psi_\beta - m\psi_\alpha(\gamma_\mu^T)_{\alpha\beta}\psi_\beta^+\right],$$

由关系

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial x_\mu}\right)} = -\frac{1}{2}[(\psi^+\gamma_4\gamma_\mu)_\alpha - (\gamma_\mu^T\gamma_4^T\psi^+)_\alpha], \quad \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\psi_\alpha^+}{\partial x_\mu}\right)} = 0,$$

导出下列电流表达式：

$$f_\mu = -\frac{i\varepsilon}{2}[\psi^+\gamma_4\gamma_\mu\psi - \psi\gamma_\mu^T\gamma_4^+\psi^+] =$$

$$= -\frac{i\varepsilon}{2}[\bar{\psi}\gamma_\mu\psi - \psi\gamma_\mu^T\bar{\psi}] = -\varepsilon\frac{1}{2}[\bar{\psi}, \gamma_\mu\psi]. \tag{13.5}$$

这样，拉氏量相对于規范变換的不变性导致电荷与电流的存

在. 因此我們应当要求,一切带电粒子,或更确切的說,描写这些带电粒子的場是在"电荷規范"变換下不变的. 从实驗知道,对粒子 Σ^+、p、K^+、π^+、μ^+, $\varepsilon = +e_0$, 对粒子 Ξ^-、Σ^-、e^-, $\varepsilon = -e_0$, 这里 $e_0 = 4.80 \times 10^{-10}$ 靜电单位.

2. 电磁場与带电粒子場的相互作用. 古典(c 量)电磁場在下列規范变換下是不变的:

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{\partial \chi(x)}{\partial x_\mu}, \qquad (13.6)$$

因为場強

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$$

在这一变換下保持不变. 如果任意函数 $\chi(x)$ 滿足

$$\Box\chi = 0,$$

則洛仑茲条件 $\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0$ 也保持不变. 在量子場(q 量)理論中,由于电磁場的靜止質量为零,在这一規范变換下的不变性也是需要的. 电荷規范的定义推广为

$$\Phi_a(x) \to \Phi'_a(x) = e^{ie\chi(x)}\Phi_a(x),$$
$$\Phi^+_a(x) \to \Phi'^+_a(x) = e^{-ie\chi(x)}\Phi^+_a(x), \qquad (13.7)$$

这里 $\chi(x)$ 是一个时空坐标的函数. 这种推广的电荷規范称为第二种規范变換.

我們要求,总拉氏量密度应当是在(13.6)和(13.7)同时变換下不变的. 这一条件几乎唯一地决定带电粒子場与电磁場之相的相互作用. 实际上,試看

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA'_\mu\right)\Phi'_a = \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ie\left(A_\mu + \frac{\partial\chi}{\partial x_\mu}\right)\right)e^{i\chi}\Phi_a =$$
$$= e^{i\chi}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + ie\frac{\partial\chi}{\partial x_\mu} - ieA_\mu - ie\frac{\partial\chi}{\partial x_\mu}\right)\Phi_a =$$
$$= e^{i\chi}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA_\mu\right)\Phi_a.$$

算符

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA_\mu\right) \tag{13.8}$$

使得(13.7)式中的 $\chi(x)$ 好象一个与坐标无关的相因子，因此如果对不含 A_μ 的拉氏量中的带电粒子的場量作下列替代：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\mu}\Phi_a &\to \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA_\mu\right)\Phi_a, \\ \frac{\partial}{\partial x_\mu}\Phi_a^+ &\to \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + ieA_\mu\right)\Phi_a^+, \end{aligned} \tag{13.9}$$

这样得到的总拉氏量在(13.6) 和 (13.7)同时变换下是不变的．坐标相依的規范变换的一般理論可在文献[55,56]中找到．

i) 标量場(或赝标量場)． 对标量場的拉氏量密度的表达式按(13.9)作替代，得

$$\begin{aligned} \mathscr{L} &= -\left[\frac{\partial\Phi^+}{\partial x_\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} + \mu^2\varphi^+\varphi\right] \\ &\to -\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + ieA_\mu\right)\varphi^+\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA_\mu\right)\varphi + \mu^2\varphi^+\varphi\right] = \\ &= -\left[\frac{\partial\varphi^+}{\partial x_\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} + \mu^2\varphi^+\varphi\right] - ie\left(\varphi^+\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\varphi^+}{\partial x_\mu}\varphi\right)A_\mu - \\ &\quad - e^2A_\mu^2\varphi^+\varphi, \end{aligned}$$

所以如果要保持自由場的拉氏量密度 $\mathscr{L}$ 不变，必须加上

$$\begin{aligned} &- ie\left(\varphi^+\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\varphi^+}{\partial x_\mu}\varphi\right)A_\mu - e^2A_\mu^2\varphi^+\varphi = \\ &= j_\mu A_\mu - e^2A_\mu^2\varphi^+\varphi. \end{aligned} \tag{13.10}$$

(13.10) 解释为相互作用拉氏量密度 $\mathscr{L}^i$．第一部分是通常的“电流”(湯川型)相互作用(見图 10)，而第二部分是所謂“危机”相互作用 (見图 11)．

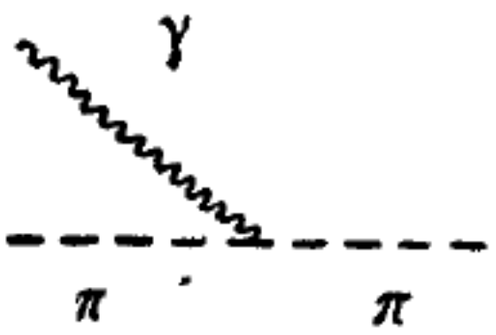


图 10.

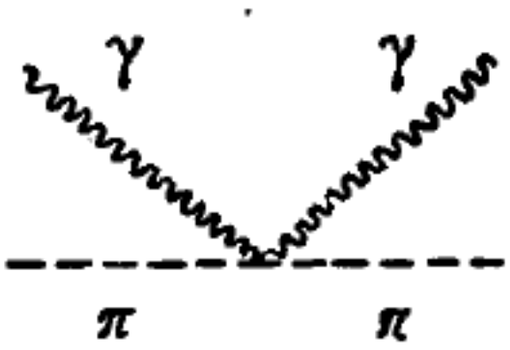


图 11.

ii) 旋量場. 对旋量場的拉氏量密度，替代 (13.9) 得出下列表达式：

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\left[\psi^{+}\gamma_4\left(\gamma_\mu\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x_\mu}+m\right)\psi-\psi\left(\gamma_\mu^{T}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_\mu}+m\right)\gamma_4^{T}\psi^{+}\right]$$

$$\rightarrow \mathscr{L}+\frac{ie}{2}\left[\psi^{+}\gamma_4\gamma_\mu\psi-\psi\gamma_\mu^{T}\gamma_4^{T}\psi^{+}\right]A_\mu.$$

因此，对自由場的拉氏量密度 $\mathscr{L}$ 应当加上相互作用拉氏量密度 $\mathscr{L}^{i}$：

$$\mathscr{L}^{i}=\frac{ie}{2}\left[\bar{\psi},\ \gamma_\mu\psi\right]A_\mu=j_\mu A_\mu. \tag{13.11}$$

如果引入旋量場与标量場或贋标量場的导数型耦合：

$$\mathscr{L}=g\bar{\psi}\Gamma\gamma_\mu\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}, \tag{13.12}$$

这里

$\Gamma=i\gamma_5$，　若 φ 是贋标量，

$\Gamma=1$，　若 φ 是标量，

在作替代(13.9)后就会得到另外一項：

$$-ieg\bar{\psi}\Gamma\gamma_\mu\psi A_\mu\varphi.$$

这也是“危机”相互作用 (見图 12).

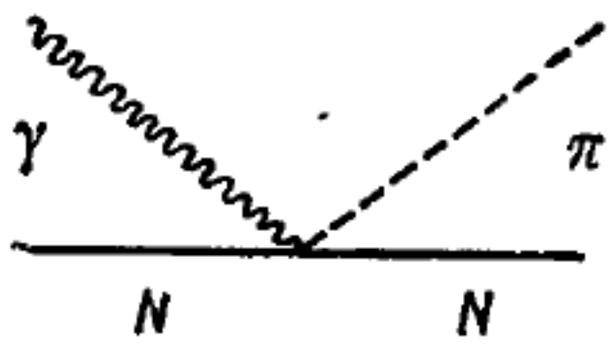


图 12.

3. 与旋量場的磁矩的相互作用. 如果只限制电磁場是在規范变換下不变的和洛仑茲不变的，下列形式的相互作用也是可允許的，不难看出，它是在規范变換下不变的：

$$\mathscr{L}^{i}_{(m)}=\mu_m\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi F_{\mu\nu}, \tag{13.13}$$

这里

$$\sigma_{\mu\nu}=\frac{1}{2i}\left(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu\right), \tag{13.14}$$

和

$$\mathscr{L}^{i}_{(e)}=\mu_e\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}, \tag{13.15}$$

式中 $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}=\pm 1$，視 μ, ν, ρ, σ，与 1, 2, 3, 4 的換位是偶还是奇而定.

在非相对論近似下，

$$\mathscr{L}^{i}_{(m)} \to \mu_m(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{H}), \tag{13.16}$$

$$\mathscr{L}^{i}_{(e)} \to \mu_e(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{E}), \tag{13.17}$$

因此(13.13)和(13.15)称为磁矩（泡利項）相互作用和电矩相互作用．量 μ_m 和 μ_e 是"本征"磁矩和电矩．显然从非相对論的形式可知，电偶极相互作用在空間反演下不是不变的，因为

$$P\boldsymbol{\sigma}P^{-1} = \boldsymbol{\sigma}, \quad P\mathbf{E}P^{-1} = -\mathbf{E}.$$

然而由于在弱作用中宇称守恆不成立，这种相互作用最近又重新考虑．但是在时間反演下，

$$\begin{aligned} T\boldsymbol{\sigma}T^{-1} &= -\boldsymbol{\sigma}, \\ T\mathbf{j}T^{-1} &= -\mathbf{j}, \\ T\mathbf{A}T^{-1} &= -\mathbf{A}, \end{aligned} \tag{13.18}$$

由于 $\mathbf{E} = \mathbf{A}$，所以

$$T\mathbf{E}T^{-1} = \mathbf{E}.$$

得到

$$T(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{E})T^{-1} = -(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{E}), \tag{13.19}$$

由此可知，如果时間反演下的不变性成立，电偶极相互作用仍不能存在．除非 P 和 T 都是不守恆的，否則不可能存在电偶极矩．

§14. 相互作用中的重子規范变換及超荷規范变換

1. 馬約拉納中性粒子和贋中性粒子． 厄米（实）場 Φ 展开式为

$$\Phi_a(x) = \sum_k [a_a(\mathbf{k})e^{ikx} + a_a^{+}(\mathbf{k})e^{-ikx}], \tag{14.1}$$

因为 $\Phi_a(x) = \Phi_a^{+}(x)$．从此可以得出一个必要的結論，只存在一种粒子，即粒子和反粒子是全同的．这时不可能应用任何規范变換，因为任何規范变換都变成一个标量变換，即拉氏量密度乘以常数，这自然沒有什么物理結果．因此不可能定义电荷与电流算符．中性粒子（場）如果它的反粒子就是它本身，我們将称它为馬約拉納中性粒子，熟知的一个例子就是中性 π 介子．

非厄米場Φ的展开式是

$$\Phi_a(x) = \sum_k [a_a(\mathbf{k})e^{ikx} + b_a^+(\mathbf{k})e^{-ikx}], \qquad (14.2)$$

这里对应于場有两种由算符a^+和b^+造成的量子. 中性粒子可以用这种場来描写，只須簡单地把它由电荷規范羣中除去卽得；这样，这种場对电流与电荷还是无貢献. 在这种情况下，两种粒子(粒子和反粒子)都是电荷中性，但不是同一种粒子. 这种粒子称为"膺中性"粒子;熟知的例子有中子及中性K介子.

如果訊为拉氏量在膺中性場的c量相角規范(不是电荷規范)变換下是不变的,則可得相应的守恆算符:

$$F \sim \text{粒子数—反粒子数}. \qquad (14.3)$$

2. 重子規范与超荷規范. 至今已知的具有強相互作用的粒子是

$$\Xi^\circ \quad \Xi^-$$

$$\Sigma^+ \quad \Sigma^\circ \quad \Sigma^-$$

$$\Lambda^\circ$$

$$p \quad n$$

$$K^+ \quad K^\circ(\bar{K}^\circ) \quad K^-$$

$$\pi^+ \quad \pi^\circ \quad \pi^-$$

利用盖尔曼-西島分类系已很好地解释了它們(参看[57,58]). 普兰基和戴斯帕湟[59]指出这一分类系的本質之点(奇异数守恆和K^+与K^-的不对称性)可以无須引入同位旋,而只須作下列的假定:

i) 六个中性粒子中,只有π°介子是馬約拉納中性粒子，其余的都是膺中性粒子.

ii) 除了电荷規范外,拉氏量对于只作用于Ξ°, Ξ^-, Σ^+, Σ°, Σ^-, Λ°, p, n的規范变換也是不变的. 变換是

$$\Phi \to e^{i\chi_N}\Phi, \quad \Phi^+ \to e^{-i\chi_N}\Phi^+, \qquad (14.4)$$

这里χ_N是一个c量,我們称它为重子規范变換.

iii) 拉氏量同时对下列規范变換是不变的，应用于p, n, K^+, K°的

$$\Phi \to e^{i\chi_Y}\Phi, \quad \Phi^+ \to e^{-i\chi_Y}\Phi^+, \qquad (14.5)$$

和应用于 Ξ°, Ξ^- 的

$$\Phi \to e^{-i\chi_Y}\Phi, \quad \Phi^+ \to e^{i\chi_Y}\Phi^+, \tag{14.6}$$

这里 χ_Y 是一个 c 量. 这一种规范变换称为"超荷规范"变换. 根据 § 12 中所說的一般論点,与两种规范变换相关的有两个算符 N 和 Y,它們是守恆的. 按史蘊格,由变换 ii) 得到的守恆量称为"重子数"N或核荷,而粒子 Ξ, Σ, Λ 和核子总称为重子. 这样

$$N = \text{重子数} - \text{反重子数}. \tag{14.7}$$

相应的矢量称为重子流. 由变换 iii) 所得的守恆量称为"超荷"Y. 前一类粒子 p, n, K^+, K° 称为"同位費米子",后一类粒子 Ξ°, Ξ^- 称为"同位反費米子". 按定义,同位費米子的反粒子 $\bar{p}, \bar{n}, \bar{K}^+, \bar{K}^\circ$ 是同位反費米子,那么

$$Y = \text{同位費米子数} - \text{同位反費米子数}, \tag{14.8}$$

相应的矢量是同位費米子流.

強相互作用的拉氏量的一般結构,要保証在重子規范与超荷規范下的不变性,因此

a) 成对地包含重子場与反重子場;

b) 成对地包含同位費米子場与同位反費米子場.

3. 基本粒子的分类与最小电磁相互作用原理. 总結前节的假定,我們对具有強相互作用的粒子按它們的电荷 Q,核荷 N 和超荷 Y 来分类 (見表 9).

量子数 $S = (Y - N)$ 通常称为"奇异数"[1]. 注意由規范变换的定义,反粒子的 Q, N, Y (及 S) 之值与粒子的反号.

在強作用中, Q, N, Y 因而 S 是守恆的. 这导致周知的結果: 粒子 Σ, Λ, K^+, K° 成对产生, 和 K^+ 与 K^- 在物理性質上有严重差别. 从观察知道, 电流 j_μ, 重子流 j_μ^N, 同位費米子流 j_μ^Y 互相对易,因此 N 和 Y 仍旧可以在电磁相互作用中是一个守恆算符,只要电磁相互作用是由

$$\frac{\partial \Phi_a}{\partial x_\mu} \to \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA_\mu\right)\Phi_a$$

1) 奇异数(按西島 η-荷)的概念是在工作[57, 58]中引入的,再参看 [59, 60].

表 9

粒　　子	Q	N	Y	$Y-N=S$
Ξ^0	0	1	−1	−2
Ξ^-	−1	1	−1	−2
Σ^+	1	1	0	−1
Σ^0	0	1	0	−1
Σ^-	−1	1	0	−1
Λ^0	0	1	0	−1
p	1	1	1	0
n	0	1	1	0
K^+	1	0	1	1
K^0	0	0	1	1
$\bar{K}^0$	0	0	−1	−1
$\bar{K}^+\equiv K^-$	−1	0	−1	−1
π^+	1	0	0	0
π^0	0	0	0	0
π^-	−1	0	0	0

方式引入的. 因为这时

$$[j_\mu, j_\nu] = 0 \to [j^N_\mu, A_\nu j_\nu] = 0, \qquad (14.9a)$$

$$[j^Y_\mu, j_\nu] = 0 \to [j^Y_\mu, A_\nu j_\nu] = 0. \qquad (14.9b)$$

(14.9) 式成立的原因是, 如此得出的 j_ν 也一定是成对地含有重子与反重子算符. 但是如果按 § 13 条 3 形式地引入 $F_{\mu\nu}$ 项, 则不能保証它与 j^M_μ, j^Y_μ 对易, 因此会引起这些守恆定律在电磁过程中的失效,而导致重介子的快衰变,可是这与实际冲突. 所以我們引入第四个假定:

iv) 类似的相互作用是不存在的. 这一假設称为盖尔曼的"最小电磁相互作用"假定.

§ 15. 自　　旋

1. 在轉动下場的內部变动. 考虑时空坐标的无限小轉动:

$$x_\mu \to x'_\mu = a_{\mu\nu}x_\nu = x_\mu + \delta x_\mu = (\delta_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu})x_\nu; \qquad (15.1)$$

由正交性条件, $\varepsilon_{\mu\nu}$ 满足关系

$$\varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu}, \qquad (15.2)$$

它是一个无限小量. 于是

$$\Phi_a(x) \to \Phi'_a(x') = S_{a\beta}\Phi_\beta(x) = S_{a\beta}\Phi_\beta(a^{-1}x'), \quad (15.3)$$

$S_{a\beta}$ 应当也近于1. 因为 S 与1之差正比于 ε，定义新算符 $\sum$ 如下:

$$S_{a\beta} = \delta_{a\beta} + \frac{1}{2}\sum{}^{\mu\nu}_{a\beta}\varepsilon_{\mu\nu}. \quad (15.4)$$

取泰勒展开式

$$\Phi'_a(x') = \Phi'_a(x) + \frac{\partial\Phi'_a}{\partial x_\mu}\delta x_\mu$$

代入(15.3),只保留到 ε 的一級項,得

$$\Phi'_a(x) + \frac{\partial\Phi'_a}{\partial x_\mu}\varepsilon_{\mu\nu}x_\nu = \left(\delta_{a\beta} + \frac{1}{2}\sum{}^{\mu\nu}_{a\beta}\varepsilon_{\mu\nu}\right)\Phi'_\beta(x),$$

$$\Phi'_a(x) - \Phi_a(x) = -\frac{\partial\Phi'_a}{\partial x_\mu}\varepsilon_{\mu\nu}x_\nu + \frac{1}{2}\sum{}^{\mu\nu}_{a\beta}\varepsilon_{\mu\nu}\Phi_\beta(x) =$$

$$= -\frac{\partial\Phi_a}{\partial x_\mu}\varepsilon_{\mu\nu}x_\nu + \frac{1}{2}\sum{}^{\mu\nu}_{a\beta}\varepsilon_{\mu\nu}\Phi_\beta(x). \quad (15.5)$$

现在得

$$\Phi'_a(x) - \Phi_a(x) = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}(x_\mu\Phi_{a\nu} - x_\nu\Phi_{a\mu}) +$$

$$+ \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}\sum{}^{\mu\nu}_{a\beta}\Phi_\beta(x), \quad (15.6)$$

式中

$$\Phi_{a\mu} = \frac{\partial\Phi_a}{\partial x_\mu}.$$

由此我們看到場量的泛函变化包含两部分. 第一部分表示場量与其坐标相依的关系直接有关的变化，第二部分表示与轉动相联的內部变动. 只取內部变动部分,即 (15.3)

$$\Phi'_a = \left(\delta_{a\beta} + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}\sum{}^{\mu\nu}_{a\beta}\right)\Phi_\beta. \quad (15.7)$$

这在形式上如一个規范变換(不变坐标)所引起的場改变一样，这里的生成元是 $\sum^{\mu\nu}_{a\beta}$. 由 §12 条2的一般論述,相应的可观察量是

$$S_{\mu\nu} = -\int \pi_a(x)\sum{}^{\mu\nu}_{a\beta}\Phi_\beta(x)\,d^3x, \quad (15.8)$$

这就称为場的內自旋，上式中取 $\hbar = 1$.

2. 旋量場. 在无穷小轉动 [見(15.1)]

$$x_\mu \to x'_\mu = (\delta_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu})x_\nu$$

下，旋量場的內部变化为

$$\psi_\alpha(x) \to \psi'_\alpha(x) = \left(\delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}\sum{}^{\mu\nu}_{\alpha\beta}\right)\psi_\beta(x), \quad (15.9)$$

或者写作

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}\sum{}^{\mu\nu}\right)\psi(x) = S\psi(x). \quad (15.10)$$

算符 $\sum^{\mu\nu}$ 应当是反对称的，因为 $\varepsilon_{\mu\nu}$ 是反对称的

$$\sum{}^{\mu\nu} = -\sum{}^{\nu\mu}. \quad (15.11)$$

保証狄拉克方程的不变性的条件是(見 § 6 条 4)

$$S^{-1}\gamma_\mu S = a_{\mu\nu}\gamma_\nu, \quad (15.12)$$

因此

$$\left(1 - \frac{1}{2}\sum{}^{\rho\sigma}\varepsilon_{\rho\sigma}\right)\gamma_\mu\left(1 + \frac{1}{2}\sum{}^{\xi\eta}\varepsilon_{\xi\eta}\right) = (\delta_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu})\gamma_\nu,$$

$$\frac{1}{2}\gamma_\mu\sum{}^{\xi\eta}\varepsilon_{\xi\eta} - \frac{1}{2}\sum{}^{\rho\sigma}\varepsilon_{\rho\sigma}\gamma_\mu = \varepsilon_{\mu\nu}\gamma_\nu,$$

或者再改写指标得

$$\frac{1}{2}(\gamma_\mu\sum{}^{\rho\sigma} - \sum{}^{\rho\sigma}\gamma_\mu)\varepsilon_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\rho\sigma}(\delta_{\mu\rho}\gamma_\rho - \delta_{\mu\sigma}\gamma_\rho),$$

即

$$[\gamma_\mu, \sum{}^{\rho\sigma}] = \delta_{\mu\rho}\gamma_\sigma - \delta_{\mu\sigma}\gamma_\rho; \quad (15.13)$$

$$[\gamma_\lambda, \sum{}^{\mu\nu}] = \delta_{\lambda\mu}\gamma_\nu - \delta_{\lambda\nu}\gamma_\mu. \quad (15.14)$$

上方程的解是

$$\sum{}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\gamma_\mu\gamma_\nu = \frac{1}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu) = \frac{i}{2}\sigma_{\mu\nu}. \quad (15.15)$$

还可加上任意与 γ_λ 对易的項，但这可略去而不会有損任何普遍性(見[61]). 在狄拉克-泡利表示中(見 § 6 条 7)，

$$\gamma_\mu\gamma_\nu = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_\mu \\ i\sigma_\mu & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_\nu \\ i\sigma_\nu & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_\mu\sigma_\nu & 0 \\ 0 & \sigma_\mu\sigma_\nu \end{pmatrix} = i\sigma_\lambda,$$

这里 λ, μ, ν 是取值 1, 2, 3 的輪迴指标. 所以, 对 $\mu, \nu = 1, 2, 3$,

$$\sigma_{\mu\nu} = \sigma_\lambda. \tag{15.16}$$

这是非相对論的自旋矩陣的相对論的推广.

由拉氏量密度的表达式

$$\mathscr{L} = -\bar{\psi}\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)\psi = -\bar{\psi}\left(-i\gamma_4 \frac{\partial}{\partial x_0} + \boldsymbol{\gamma}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} + m\right)\psi,$$

得

$$\pi = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\bar{\psi}\gamma_4 = i\psi^+.$$

所以相对論的自旋算符为

$$S_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\int \psi^+(x)\sigma_{\mu\nu}\psi(x)\, d^3x, \tag{15.17}$$

在非相对論极限下,

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\int \psi^+(x)\boldsymbol{\sigma}\psi(x)\, d^3x. \tag{15.18}$$

在非相对論近似下,場量用吸收算符和放出算符的展开式为

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1,2} \{a_r(\mathbf{k})u_r e^{+ikx} + b_r^+(k)v_r e^{-ikx}\}, \\
\psi^+(x) &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1,2} \{a_r^+(\mathbf{k})u_r^+ e^{-ikx} + b_r(k)v_r^+ e^{+ikx}\}.
\end{aligned} \tag{15.19}$$

这里

$$u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},$$

表示自旋向上与向下的粒子态. 利用对易关系

$$\{\psi^+(x), \psi(x')\}_{x_0 = x_0'} = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$

对第三个分量得

$$S_3 = \frac{1}{2}\int \psi^+(x)\sigma_3\psi(x)\,d^3x =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}} [a_1^+(\mathbf{k})a_1(\mathbf{k}) - a_2^+(\mathbf{k})a_2(\mathbf{k}) -$$

$$- b_1^+(k)b_1(k) + b_2^+(k)b_2(k)] =$$

$$= \frac{1}{2}(n_1 - n_2 - n_{\bar{1}} + n_{\bar{2}}). \qquad (15.20)$$

这說明我們对 u_r, v_r 的解释是正确的.

3. 标量場与矢量場. 由定义, 在时空轉动下, 标量場变为相同的标量場:

$$x_\mu \to x'_\mu = a_{\mu\nu}x_\nu = (\delta_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu})x_\nu,$$

$$\varphi(x) \to \varphi'(x') = \varphi(x) = \varphi(a^{-1}x'). \qquad (15.21)$$

因此除了由坐标相依的部分引起的場变化以外,沒有內部变化,所以标量或膺标量場沒有自旋.

矢量場 Φ_μ 由定义和坐标同样变化:

$$\Phi_\mu(x) \to \Phi'_\mu(x') = (\delta_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu})\Phi_\nu(x), \qquad (15.22)$$

与一般表示(15.4)

$$\Phi'_\mu(x) = \left(\delta_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}^{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}\right)\Phi_\nu(x)$$

比較,得

$$\sum_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = \delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} - \delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha}, \qquad (15.23)$$

因此,內自旋算符为

$$S_{\mu\nu} = -\int \pi_\alpha(x)(\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} - \delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha})\Phi_\beta(x)\,d^3x, \qquad (15.24)$$

特别是,定义 $S_\lambda = S_{\mu\nu}$, 这里 $\lambda, \mu, \nu = 1, 2, 3$ 是輪換指标,則

$$S_3 = S_{12} = -\int \pi_\alpha(\delta_{1\alpha}\delta_{2\beta} - \delta_{1\beta}\delta_{2\alpha})\Phi_\beta(x)\,d^3x =$$

$$= -\int (\pi_1\Phi_2 - \pi_2\Phi_1)\,d^3x =$$

$$= -\int [\pi\Phi]_3\,d^3x, \qquad (15.25)$$

也就是

$$\mathbf{S} = -\int [\pi \Phi]\, d^3x. \qquad (15.26)$$

§16. 电荷独立

1. 同位旋公式. 自旋 S 与电荷 Q 之間存在着形式上的相似.

由前一节的結果,一个双分量的泡利旋量場的自旋矢量为

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\int \psi^+ \sigma \psi\, d^3x,$$

一个矢量場的自旋矢量为

$$\mathbf{S} = -\int [\pi \Phi]\, d^3x;$$

自旋矢量与其在空間轉动下的內部变換性質相关. 由 S 的积分表示式可看出, $\dot{S}$ 的分量滿足对易关系

$$[S_i, S_j] = iS_k,$$

这里 $i, j, k = 1, 2, 3$ 是輪迴指标.

規范变換可以写成轉动的形式. 非厄米場 Φ 总是可以分成两个厄米場 Φ_1, Φ_2 如下:

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_1 + i\Phi_2),\ \Phi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_1 - i\Phi_2). \qquad (16.1)$$

这样規范变換

$$\Phi \to \Phi' = e^{i\chi}\Phi,$$

写成对 Φ_1, Φ_2 的变換为

$$\Phi_1' + i\Phi_2' = e^{i\chi}(\Phi_1 + i\Phi_2) = (\cos\chi + i\sin\chi)(\Phi_1 + i\Phi_2),$$

$$\Phi_1' = \cos\chi\Phi_1 - \sin\chi\Phi_2,$$

$$\Phi_2' = \sin\chi\Phi_1 + \cos\chi\Phi_2. \qquad (16.2)$$

由此显然, 厄米場 Φ_1, Φ_2 的变換恰似在这种分解下构成的空間中的矢量的前两个分量,而規范变換則是沿着第三軸、轉角为 χ 的轉动. 如果要把电荷規范变換解释成轉动,則这种分解构成的空間称为电荷空間或同位旋空間, 电荷規范变換就是电荷空間沿第三軸的轉动. 相应的守恆量(电荷)是这一空間的"自旋"的第三个分

量. 这一自旋称为同位旋，而它的第三个分量記为 T_3. 这样，我們得到关系

$$T_3 = Q, \tag{16.3}$$

由与方程(15.26)相似的方法得到

$$T_3 = -\int [\pi\Phi]_3 \, d^3x = -\int (\pi_1\Phi_2 - \pi_2\Phi_1) \, d^3x \sim (n_+ - n_-), \tag{16.4}$$

核子，K 介子，Ξ 超子也可以包含在同位旋空間中，如果假定 (p, n)，(K^+, K°)，(Ξ°, Ξ^-) 对在这个空間中构成一个二分量的泡利旋量：

$$\psi_N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}, \quad \psi_K = \begin{pmatrix} K^+ \\ K^\circ \end{pmatrix}, \quad \psi_\Xi = \begin{pmatrix} \Xi^\circ \\ \Xi^- \end{pmatrix}, \tag{16.5}$$

它們一般可写作

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix}.$$

于是守恆算符是

$$T_3 = -\frac{i}{2}\int \pi\tau_3\psi \, d^3x,$$

这里 τ 在形式上就是泡利矩陣 σ，但它是作用在电荷空間中上列旋量的两个分量之上的. 明显形式是

$$T_3 = -\frac{i}{2}\int (\pi_a, \pi_b) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} d^3x =$$

$$= -\frac{i}{2}\int (\pi_a\psi_a - \pi_b\psi_b) \, d^3x = \frac{1}{2}(n_a - n_{\bar{a}}) + n_{\bar{b}} - n_b. \tag{16.6}$$

在 §14 条 2 中对核子，K 介子和 Ξ 粒子引进了同位費米子(即同位旋量)的名称，为的是适合这些粒子在同位旋空間中的这种解释. 現在可以把电荷算符 Q 再用新引入的算符 T_3 和超荷(或同位費米子) Y 表示出：

$$T_3 = \frac{1}{2}(n_a - n_{\bar{a}} + n_b - n_{\bar{b}}), \tag{16.7}$$

$$\frac{Y}{2}=\begin{cases}\frac{1}{2}(n_a-n_{\bar{a}}-n_b+n_{\bar{b}}), & \text{对 } N, K,\\ -\frac{1}{2}(n_a-n_{\bar{a}}-n_b+n_{\bar{b}}), & \text{对 } \Xi,\end{cases} \tag{16.8}$$

$$T_3+\frac{Y}{2}=\begin{cases}n_a-n_{\bar{a}}, & \text{对 } N, K,\\ -(n_b-n_{\bar{b}}), & \text{对 } \Xi.\end{cases} \tag{16.9}$$

我們看到，下列普遍关系总是成立的：

$$Q=T_3+\frac{1}{2}Y, \tag{16.10}$$

因为对 π 和 Σ, $Y=0$. 这样

$$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}(Y-N)=(Q-T_3)-\frac{1}{2}N. \tag{16.11}$$

这就是盖尔曼基于同位旋多重态对奇异数的原始定义. 至此，除了把 Q 用新引入的算符 T_3 表示出外，并沒做出什么.

2. 电荷独立的强相互作用. 同位旋的重要結論只有在引入电荷独立的概念之后才显示出来. 首先，我們特别来討論 π 介子与核子的湯川型相互作用. 因为我們只想要建立电荷空間的耦合系，因此同位旋空間之外的算符簡单地都删去.

把带电 π 介子場表成 $\varphi_c \fallingdotseq \varphi_c^+$，中性 π 介子場表成 $\varphi_0=\varphi_0^+$，質子和中子場表为 ψ_p 和 ψ_n，保持电荷守恆和核子数守恆并是厄米的最一般的湯川型相互作用 $\bar{\psi}\psi\varphi$ 是

$$\mathscr{L}^i=g_c(\bar{\psi}_n\psi_p\varphi_c+\bar{\psi}_p\psi_n\varphi_c^+)+g_n(\bar{\psi}_n\psi_n\varphi_0)+g_p(\bar{\psi}_p\psi_p\varphi_0). \tag{16.12}$$

耦合常数 g 是实数或純虛数，依賴于相互作用的空間和自旋結构[1]. 考慮同位旋量 ψ:

$$\psi=\begin{pmatrix}\psi_p\\ \psi_n\end{pmatrix} \tag{16.13}$$

和同位旋算符 τ (形式就是泡利的 σ)，它是一个电荷空間的矢量，定义算符

1) 对 $s(s)$ 理論 g 是实数，对 $ps(ps)$ 理論 g 是純虛数.

$$\tau_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_1 + i\tau_2) = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\tau_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_1 - i\tau_2) = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{16.14}$$

则

$$\bar{\psi}\tau_+\psi = \sqrt{2}(\bar{\psi}_p\bar{\psi}_n)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix} = \sqrt{2}\,\bar{\psi}_p\psi_n, \tag{16.15}$$

同样

$$\bar{\psi}\tau_-\psi = \sqrt{2}\,\bar{\psi}_n\psi_p. \tag{16.16}$$

所以

$$\mathscr{L}^i = \sqrt{2}\,g_c(\bar{\psi}\tau_-\psi\varphi_c + \bar{\psi}\tau_+\psi\varphi_c^+) + g_n(\bar{\psi}_n\psi_n\varphi_0) + + g_p(\bar{\psi}_p\psi_p\varphi_0). \tag{16.17}$$

引入厄米場 φ_1, φ_2:

$$\varphi_c = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2), \quad \varphi_c^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 - i\varphi_2), \tag{16.18}$$

那么

$$\tau_-\varphi_c + \tau_+\varphi_c^+ = \frac{1}{2}[(\tau_1 - i\tau_2)(\varphi_1 + i\varphi_2) + + (\tau_1 + i\tau_2)(\varphi_1 - i\varphi_2)] = \tau_1\varphi_1 + \tau_2\varphi_2,$$

相互作用的拉氏量密度为

$$\mathscr{L}^i = \sqrt{2}\,g_c\bar{\psi}(\tau_1\varphi_1 + \tau_2\varphi_2)\psi + g_n(\bar{\psi}_n\psi_n\varphi_0) + + g_p(\bar{\psi}_p\psi_p\varphi_0). \tag{16.19}$$

在构成第一、二項用到的电荷守恆，現在在同位旋公式中，表現为这两項在繞第三軸轉动下是不变的. 这一点是显然的,因为(τ_1,τ_2)和(φ_1, φ_2)是这个空間中矢量的第一和第二个分量，对于任何矢量 **a**, **b**, 量 $a_1b_1 + a_2b_2$ 在繞第三軸的轉动下是不变的.

早在 1938 年坎麦建議，中性介子場 φ_0 应当取作是同位旋空間的矢量的第三个分量,而头两个分量由带电介子場决定:

$$\boldsymbol{\Phi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \quad \varphi_3 = \varphi_0, \tag{16.20}$$

并且假定相互作用在电荷空間的任何轉动下是不变的（即是这个

空間的标量)：

$$\mathscr{L}^i = g\bar{\psi}(\tau \cdot \Phi)\psi. \tag{16.21}$$

把这式展开

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^i &= g\bar{\psi}(\tau_1\varphi_1 + \tau_2\varphi_2)\psi + g\bar{\psi}\tau_3\varphi_3\psi = \\ &= g\bar{\psi}(\tau_1\varphi_1 + \tau_2\varphi_2)\psi + g(\bar{\psi}_p\psi_p\varphi_0) - g(\bar{\psi}_n\psi_n\varphi_0),\end{aligned} \tag{16.22}$$

与(16.19)比較，我們看到

$$\sqrt{2}\,g_c = g_p = -g_n = g. \tag{16.23}$$

这一相互作用使得耦合常数的数目化为一个，并且由这一相互作用而得出的另外的对称性，在 π 介子与核子相互作用中，已由实验确定.

相互作用是电荷空間中的标量这一新假定的重要結果是，它在任何轉动下是不变的，因而不只是 T_3，而且总同位旋 T^2 也是守恆算符. 相互作用的这种性質称为电荷独立.

把这一概念推广到奇异粒子，我們認为，在电荷空間中 Ξ, N 和 K 是同位旋量，π 和 Σ 是同位矢量[即加 Σ^0 构成矢量 (Σ_1, Σ_2, ?)]，Λ 是同位标量.

遵守电荷独立及重子数和超荷守恆的相互作用是

$$g_1\bar{N}(\tau \cdot \pi)N, \tag{16.24}$$

$$g_2[\bar{\Lambda}(\Sigma \cdot \pi) + (\bar{\Sigma} \cdot \pi)\Lambda], \tag{16.25}$$

$$g_3 i(\bar{\Sigma} \times \Sigma) \cdot \pi, \tag{16.26}$$

$$g_4\bar{\Xi}(\tau \cdot \pi)\Xi, \tag{16.27}$$

$$g_5[\underline{(\bar{N}K)}\Lambda + \bar{\Lambda}\underline{(\bar{K}N)}], \tag{16.28}$$

$$g_6[\underline{\bar{N}(\tau \cdot \Sigma)K} + \underline{\bar{K}(\tau \cdot \bar{\Sigma})N}], \tag{16.29}$$

$$g_7[\underline{\bar{\Xi}\tau_2\bar{K}}\Lambda + \bar{\Lambda}\underline{K\tau_2\Xi}], \tag{16.30}$$

$$g_8[\underline{(\bar{\Xi}\tau_2)(\tau \cdot \bar{\Sigma})\bar{K}} + \underline{K(\tau \cdot \bar{\Sigma})(\tau_2\Xi)}], \tag{16.31}$$

这里 $\underline{\bar{N}K}$ 表示一个同位标量 $\bar{\psi}_N\psi_K$ 等，而

$$\bar{N} = \bar{\psi}_N = \psi_N^+\gamma_4.$$

在后两項相互作用中含有 τ_2 是为了保証电荷守恆. 給定任一旋

量 u（第一类），我們可以由它构成另一旋量 v（第二类），定义为

$$v = \tau_2 u. \tag{16.32}$$

旋量 u 与另一（第一类）旋量 w 的标积为

$$u^+ w \quad 或 \quad v^+ w = u\tau_2 w.$$

由描写 K 和 Ξ 粒子的同位旋量构成标量，必须利用后一种定义（見 [59, 62]）.

我們注意到，电荷独立（即 $\mathscr{H}^i$ 是电荷空間的标量）的假定，比起相对于三个规范羣 Q, N, Y 的不变性的要求要更強. 它使保持 Q, N, Y 守恆的相互作用下的独立耦合常数的数目大大減少.

如果引入电磁場，需要計及它与电荷 Q 或 T_3 的相互作用. 拉氏量不再是电荷空間中的标量，总同位旋 T^2 不是守恆的量子数.

下列推测是十分有趣的，譬如不考虑与 K 粒子的相互作用，剩下的 π 介子和重子間的相互作用可能在一个更广泛的变換羣，即在四維电荷空間中的轉动下是不变的. 关于这一点有各种不同的推测（最近的文献情况参看史蘊格[63]和盖尔曼[64]）.

最后应当注意，这些关于超子的相互作用的一切都只是理論上的猜想. 只有 π 介子和核子相互作用的电荷独立已由实验所确定，并且 Q, N 和 Y 是守恆的，而至今对于超子相互作用的三維同位旋对称性尚无直接的証明，对任何四維对称性更完全談不上. 例如 Σ° 粒子从规范羣的角度来看完全可以去掉，至今也并未发现[1]. 然而 Σ° 粒子已經被实验观察到了，它的存在也是首先由更清晰的同位旋多重态系預言的.

3. 基本粒子的宇称和电荷独立. 在决定基本粒子的內宇称时，由于相互作用在規范变換下的不变性，使得某一羣粒子之間的相对宇称完全依照慣例选取. 另一方面，电荷独立对于同位旋多重态粒子的相对宇称有严格的限制. 我們現在对这种慣例与限制之間的相互关系加以分析，并把一般的考虑应用于已知的粒子.

---

1) 这一粒子不久前由阿瓦勒茨等发現［見 Alwarez L. W. et al, Phys. Rev. Letters, 2, 215 (1959)］. ——俄譯本譯者注.

假定相互作用的粒子的总拉氏量在对于每种粒子的内宇称选定为 η_i（i 表示粒子的种类）的某一宇称算符 P 下是不变的. 如果拉氏量在 $a, \cdots, b$ 羣的规范变换下也是不变的: $U_a(\chi_a), \cdots, U_b(\chi_b)$, 这里 χ 是相应的相，则在变换

$$P'(\chi_a, \cdots, \chi_b) = PU_a(\chi_a)\cdots U_b(\chi_b) \qquad (16.33)$$

下也是不变的. 如果 $\chi_a, \cdots, \chi_b$ 的值取为 0 或 π, 那么 P' 也满足

$$\begin{aligned} P'\varphi(\mathbf{x}, x_0)P'^{-1} &= \eta_B\varphi(-\mathbf{x}, x_0), \quad \eta_B = \pm 1, \\ P'\psi(\mathbf{x}, x_0)P'^{-1} &= \eta_F\gamma_4\psi(-\mathbf{x}, x_0), \ \eta_F = \pm 1, \pm i \end{aligned} \qquad (16.34)$$

η 的可能值还是一样. 这提供了另一种内宇称的选择，而在物理上是不可分辨的. 显然，取相 $\chi_a = \pi$, 就把 a 羣中一切粒子的内宇称变了号.

这就是維克，外特曼和維格勒[65]所指出的主要之点. 如果表示为规范不变性，这点在物理上是十分明显的. 相互作用在变换

$$\Phi_a \to e^{i\chi_a}\Phi_a,$$
$$\Phi_a^+ \to e^{-i\chi_a}\Phi_a^+$$

下的不变性，保証了某一羣的粒子在任何相互作用中总是成对出现，因此十分显然，属于某一羣之內的粒子，只有相对宇称在物理上是可观察量. 只有不是任何规范羣的成員的粒子，可以在相互作用中产生或消失，而别的粒子在始态和末态两次都出現. 只有这种粒子具有确定的宇称，独立于我們的选取慣例之外（除了把眞空看作宇称是偶的自然慣例外）.

現在还存在一个复杂的地方，就是有几种规范羣，它們的成員可能交叉. 显然在由慣例定义 P 时可以任意选择相角 $\chi_a, \cdots, \chi_b$. 通常是先由慣例选定某些粒子的宇称. 要做到这点，我們要用到一个事实，如果有两个羣，它們的成員是

$$(a_1, \cdots, a_n, \quad b_1, \cdots, b_m),$$
$$(b_1, \cdots, b_m, \quad c_1, \cdots, c_l),$$

則为了确定宇称，我們也可以換一种方法来考虑羣：

$$(a_1, \cdots, a_n, \quad b_1, \cdots, b_m),$$
$$(a_1, \cdots, a_n, \quad c_1, \cdots, c_l).$$

利用这一外加的任意性，我們可以重新安排这些羣，譬如

$$(b_1 b_2 \cdots c_1 c_2 \cdots d_1 d_2 \cdots),$$
$$(c_1 c_2 \cdots d_1 d_2 \cdots),$$
$$(d_1 d_2 \cdots).$$

b 粒子中任何一个的宇称可按慣例任意选定，而其他 b 粒子的宇称，原則上可以由实驗决定. 由慣例确定一个 c 粒子的宇称，則使别的 c 粒的宇称是可测量，如此等等. 每一个羣中的一个粒子的宇称可由慣例确定，那些不在下一个羣中出現的别的粒子的宇称就可以测量了. 前面已經說过，可能有某些粒子，不是任何羣的成員，它們的宇称直接是可观察量，独立于任何慣例之外.

到这里为止，我們一直假定，中性粒子和带电粒子由互相无关的場来描写. 然而，如果这些粒子在电荷独立的公式中看作是同位旋多重态，則带电粒子和中性粒子应作为同一場的不同分量来处理. 这点暗示，至少有一种相 $x_a, \cdots, x_b$ 的选择，使同位旋多重态中的每一个所相应的粒子有同样的宇称. 这样虽然規范不变性使某些粒子的相对宇称完全是按慣例选取的，但电荷独立的假定对于同一个电荷多重态中的粒子的相对宇称又有确定的限制.

最后我們注意，如果存在 1 型 ($\eta_F = \pm 1$，如 C，D 型) 和 i 型 ($\eta_F = \pm i$，如 A，B 型) 費米子，則在宇称守恆的相互作用中，每一型的粒子必須成对出現. 然而这并不等于又有一个新的規范羣，因为可以构成某些許可的相互作用，它們不是由場与其电荷共軛場的乘积构成，这样某一型的粒子数就不守恆了.

現在我們来討論下列粒子的強相互作用：

$$\Xi^\circ, \ \Xi^-, \ \Sigma^+, \ \Sigma^\circ, \ \Sigma^-, \ \Lambda^\circ, \ p, \ n, \ K^+,$$
$$K^\circ, \ \pi^+, \ \pi^\circ, \ \pi^-.$$

假定宇称在強相互作用中是守恆的，并且暫时假定弱相互作用可以完全忽略. 盖尔曼-西島分类的本質之点可以无須引入同位旋而表为強相互作用在下列三种規范下的不变性(參看 § 14 条 2)：

i) 下列場的电荷規范变換

$(-)\Xi^-$, Σ^+, $(-)\Sigma^-$, p, K^+, π^+, $(-)\pi^-$;

ii) 下列場的重子規范变換

Ξ°, Ξ^-, Σ^+, Σ°, Σ^-, Λ°, p, n;

iii) 下列場的同位費米子(或超荷)規范变換

$(-)\Xi^\circ$, $(-)\Xi^-$, p, n, K^+, K°.

上面我們把一切独立的場都明显地写出来了. (一)号表示这个場在規范变換中有負的相因子.

为了确定宇称,我們先看 π°, 它不出現在任何規范羣中,因此它的宇称是已定的(例如由衰变 $\pi^\circ \to 2\gamma$). 代替 iii), 可用

iv) Σ^+, Σ°, Σ^-, Λ°, K^+, K°,

它是 ii) 和 iii) 的組合. i), ii), iv) 羣具有前面所講的形式.

由 ii) 可按慣例选定 n 的宇称, 这样原則上可以測定 Ξ° 的宇称 (如用反应 $\pi^\circ + n \to \Xi^\circ + 2K^\circ$). 如果再按慣例选定 p 的宇称, 則 π^+, π^- 和 Ξ^- 的宇称可由实驗决定 ($p + n \to n + n + \pi^+$, $n + n \to p + n + \pi^-$, $\pi^- + n \to \Xi^- + 2K^\circ$). 最后例如可固定 Λ 的宇称,則 Σ^+, Σ°, Σ^- 和 K^+, K° 的宇称都可决定了. 由于存在包含一个核子及一个 Ξ, Σ 或 Λ 的相互作用, 因此一切重子的宇称是同一型的,例如 $\eta_F = \pm 1$. n, p 和 Λ° 宇称由慣例的选定并不是唯一的,但是一个內部协調的选择总要遵守規范羣的限制.

如果現在把电荷独立的全部內容包括在強相互作用公式中, 則粒子羣

(p, n), (Ξ°, Ξ^-), (K^+, K°), $(\Sigma^+, \Sigma^\circ, \Sigma^-)$, $(\pi^+, \pi^\circ, \pi^-)$

应解释成同位旋多重态. 按慣例, n 和 p 的宇称是一样的,这指明一切在同一重态的其他粒子的宇称也是一样的. 这是电荷独立假說的特殊限制. 由此根据上面論述, π 介子三重态的宇称已由电荷交換散射及光生介子的分析确定了.

至于其他粒子,光子的內宇称已知是負的,因为由古典物理学已知, 矢量势是一个眞正的矢量. 电子 $e^\pm$ 和介子 $\mu^\pm$ 只有通过电磁場有較強的作用. 然而因为重子守恆, 因此电子和 μ 介子的总

数必須是守恆的；然而实际上它們的数目必須分别在电磁相互作用中是守恆的，只有这样才能排除 $\mu \to e$ 的快衰变. 这样 μ 和 e 之間的相对宇称及相对于别的粒子的宇称是沒有物理意义的（自然 e^+ 和 e^-, μ^+ 和 μ^- 的內宇称还是相反的).

如果把弱相互作用的影响包括进来，則上面某些論点有所改变. 因为已知宇称在 $\mu \to e$ 衰变(包含中微子) 中是不守恆的，但只这样还不会改变前面的論述. 如果宇称在别的衰变(不含中微子)中也是不守恆的，上面的一切論述也保持不变，但有一点修改，就是眞正的"奇异"粒子不是宇称算符的本征态，而要包含很少的(10^{-12})相反宇称态的混合. 另一方面，如果宇称在"奇异"粒子衰变中是守恆的，則 Σ, Λ 和 K ((iv) 羣) 相对于核子及 π 介子的宇称就可由实驗决定. 然而只要弱相互作用可以忽略，这一羣之間的相对宇称对于強相互作用仍是沒有意义的，这一說法还是正确的.

为了說明由于規范羣引起的任意性及电荷独立給出的限制，我們考虑 π 介子和核子的情形. 反应 $\pi^+ + d \to n + n$ 的观测是通过 S 态(自旋为 0) 的 π 介子实現的，这一事实确定了 p, n, π^- 三者中只有一个是有負的內宇称的. 电荷与核子数規范羣允許按慣例选定两个粒子 (例如 p 和 n) 的內宇称 (但由这一結果选定的 $\bar{\psi}\gamma_5\psi\varphi$ 相互作用的形式与慣例无关).

由电荷独立的假說，現在預言了 π° 也是負宇称的，这一預言可直接由实驗观测 π° 衰变中 γ 射綫的极化来检驗(参看[66]).

4. K°, $\bar{K}^\circ$ 粒子的产生与 K_1, K_2 粒子的衰变. 在 § 14 和本节里，我們討論了产生超子特别是产生 K 介子的強相互作用. 在这一相互作用中，电荷 Q 及超荷 Y (或同位費米子数) 是守恆的. 显然較方便的是运用在这些規范下有簡单变換性质的場，或者等价地运用为这些算符的本征态的粒子态.

特别，中性 K 介子是贋中性粒子 (K°, $\bar{K}^\circ$)，这种粒子相应于非厄米場 $\theta_0(x)$. 对于 K°, $\bar{K}^\circ$，超荷分别是 $Y = 1, -1$. 因为产生这些粒子的反应中的相互作用相对于电荷共軛是不变的，因此

在这时电荷共轭宇称也是守恆的，但因为它不与 Q 或 Y 对易，因此不能归入守恆算符的完全集合.

然而另一方面，在 K° 或 $\bar{K}^\circ$ 衰变中(弱相互作用)，$Q=0$，而 Y 不守恆. 如果衰变相互作用在电荷共轭 C 下是不变的，则电荷共轭宇称列入守恆量子数的完全集合. 这时把粒子用具有确定电荷共轭宇称的場来表示更为方便些，这点不难做到. 定义

$$\begin{aligned}\theta_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_0(x) + C\theta_0(x)C^{-1}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_0(x) + \theta_0^+(x)), \\ \theta_2(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_0(x) - C\theta_0(x)C^{-1}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_0(x) - \theta_0^+(x)),\end{aligned} \tag{16.35}$$

则

$$\begin{aligned}C\theta_1(x)C^{-1} &= \theta_1(x), \\ C\theta_2(x)C^{-1} &= -\theta_2(x).\end{aligned} \tag{16.36}$$

如果場 $\theta_1(x)$，$\theta_2(x)$ 用吸收算符和产生算符展开，其相应的粒子 K_1，K_2 就分别有确定的电荷共轭宇称 $\eta_c = +1, -1$. 在它們的衰变中，电荷共轭宇称是守恆的，正如对 π° 和氢的情况一样，导致 K_1，K_2 粒子有两种不同的寿命.

把場 $\theta_0(x)$ 的展开式与場 $\theta_1(x)$，$\theta_2(x)$ 的展开式比較，显然吸收算符与放出算符满足相似的关系，即

$$a_0^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^+ + a_2^+).$$

这样，K° 粒子的态矢是

$$a_0^+\rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}[a_1^+\rangle_0 + a_2^+\rangle_0]. \tag{16.37}$$

它是 K_1 和 K_2 粒子的态按确定相角关系的迭加.

除了它們的名称外，这里并沒有任何新穎或奇异的地方，中性

K介子是一个贋中性粒子，它有一个內自由度，取两个值，因而很象自旋. 当我們用"自旋向上"和"自旋向下"态来把这一变量对角化时，我們称它們为粒子和反粒子 (K°, $\bar{K}^\circ$). 当我們用"自旋向左"和"自旋向右"态来对角化时，我們把它們用电荷共軛宇称分为 (K_1, K_2). 总可以把"自旋向上"与"自旋向下"的态表成"自旋向左"及"自旋向右"的态的迭加，反之亦然. 对于产生过程，前者方便，因为算符Y是对角的. 对于衰变，后者方便，因为算符C是对角的.

如果算符C对于衰变的相互作用不是守恆算符，但算符T是，則由強反演定理，CP也应是守恆的. 那时我們可以引入θ_1,θ_2的新定义，即

$$\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_0 + CP\theta_0 P^{-1}C^{-1}),$$
$$\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_0 - CP\theta_0 P^{-1}C^{-1}), \tag{16.38}$$

这里場θ_1, θ_2相对于CP有确定的(相反的)"組合宇称". 上述关于存在两种寿命的論述还是有效的. 如果算符 C, P, T 都是不守恆的，情况就变得十分复杂，但还是可得到存在两种寿命的結論(見§11条5，并参看工作[67—69]).

5. π介子物理学. i) 一般部分. 对于π介子現象的一切有成效的理論分析都是以上面討論的不变性質为基础的. 主要的过程是:

(a) 核子和核子的相互作用. 如果这是由于核子和π介子相互作用引起的，則对于核子和π介子相互作用的电荷独立自动地得出观察到的核力的电荷独立. 这就是最初坎麦引入电荷独立的原因.

(b) π介子和核子散射. 邱和駱[9]指出，如果假定：π介子是贋标量，电荷独立，核子反冲忽略，以及相互作用中P波占主要，則由"交叉对称"(§4，条3)及S矩陣的么正性(見§5)，足以决定在这一过程中的最突出的特点，即在 $T = 3/2$, $J = 3/2$ 的态的共

振.

(c) 光生介子. 用同样的不变性并利用由規范不变性提供的补充知識,邱和駱对光生介子也得出了令人滿意的解释[70].

(d) 核子和核子碰撞中 π 介子的产生. 对这种过程不存在如上那样詳細的理論，但存在利用角动量守恆和同位旋守恆的唯象分析. 这在洛生菲尔德的工作中可見到[71].

为了說明这些方法，我們只来考虑一个在低能 π 介子物理中存在的困难，卽在 π 介子与核子散射中的 S 波相移与同位旋有強的依賴关系.

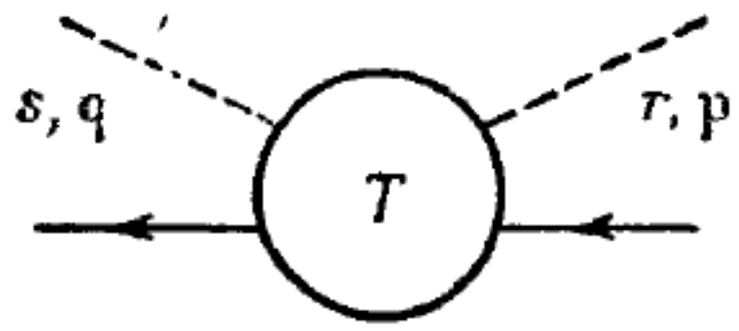


图 13.

(ii) S 波介子与核子的散射. 考虑 π 介子被核子的散射 (如图 13 中的图形). 在这图形上, r, s 是 π 介子的同位旋指标,如果相互作用是电荷独立的,則散射振幅的形式是

$$T_{rs} = A'\tau_r\tau_s + B'\tau_s\tau_r, \qquad (16.39)$$

A', B' 依賴于动力学的結果,是 p, q 和核子四維动量的函数.

因为

$$\tau_r\tau_s = \frac{1}{2}(\tau_r\tau_s + \tau_s\tau_r) + \frac{1}{2}(\tau_r\tau_s - \tau_s\tau_r) =$$

$$= \delta_{rs} + \frac{1}{2}[\tau_r, \tau_s],$$

所以

$$T_{rs} = A\delta_{rs} + B\frac{1}{2}[\tau_r, \tau_s]. \qquad (16.40)$$

π 介子和核子的系統的始末态的总同位旋是 3/2 或 1/2. 对于 $T = 3/2$ 和 $T = 1/2$ 的投影算符是

$$(P_{3/2})_{rs} = \frac{1}{3}\left(2\delta_{rs} - \frac{1}{2}[\tau_r, \tau_s]\right), \qquad (16.41)$$

$$(P_{1/2})_{rs} = \frac{1}{3}\left(\delta_{rs} + \frac{1}{2}[\tau_r, \tau_s]\right). \qquad (16.42)$$

事实上,定义

$$R_{rs} = \tau_r \tau_s$$

$$(R^2)_{rs} = \sum_t R_{rt} R_{ts} = \sum_t \tau_r \tau_t \tau_t \tau_s = 3\tau_r \tau_s = 3(R)_{rs},$$

即下列算符方程成立

$$R^2 - 3R = R(R-3) = 0.$$

这样 R 的本征值 R' 是 0 或 3. 要决定 $T = 3/2$ 属于哪一个本征值,取一个特殊的态 $|p\pi^+\rangle$:

$$|p\pi^+\rangle = |T = \frac{3}{2},\ T_3 = \frac{3}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |p,\ \pi_1 + i\pi_2\rangle,$$

$$\langle p\pi^+ | R | p\pi^+\rangle = \frac{1}{2} \langle p,\ \pi,\ -i\pi_2 | R | p,\ \pi_1 + i\pi_2\rangle =$$

$$= \frac{1}{2} \langle p | R_{11} - iR_{21} + iR_{12} + R_{22} | p\rangle =$$

$$= \frac{1}{2} \langle p | \tau_1\tau_1 + \tau_2\tau_2 - i\tau_2\tau_1 + i\tau_1\tau_2 | p\rangle =$$

$$= \frac{1}{2} \langle p | 2 - 2\tau_3 | p\rangle =$$

$$= \frac{1}{2} [2\langle p | p\rangle - 2\langle p | \tau_3 | p\rangle] = 0.$$

所以

$$R | T = \frac{3}{2}\rangle = 0,$$

因此

$$R | T = \frac{1}{2}\rangle = 3 | T = \frac{1}{2}\rangle,$$

这样

$$(P_{1/2})_{rs} = \frac{1}{3} \tau_r \tau_s, \quad (P_{3/2})_{rs} = 1 - \frac{1}{3} \tau_r \tau_s.$$

这些关系等价于下列关系:

$$\delta_{rs} = (P_{3/2})_{rs} + (P_{1/2})_{rs}, \tag{16.43}$$

$$\frac{1}{2} [\tau_r, \tau_s] = 2(P_{1/2})_{rs} - (P_{3/2})_{rs}, \tag{16.44}$$

$$T_{rs} = (A + 2B)(P_{1/2})_{rs} + (A - B)(P_{3/2})_{rs}. \quad (16.45)$$

或写成算符

$$T = (A + 2B)P_{1/2} + (A - B)P_{3/2}, \quad (16.46)$$

对于低能范围内的入射粒子（能量 ω），散射大多是发生在 S 波，并且 A, B 簡单地是 ω 的函数，因为核子反冲忽略，引入相移 δ_a $\left(\alpha = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$，得

$$T_a \sim \frac{e^{i\delta_a}\sin\delta_a}{k} \doteq \frac{\delta_a}{k}. \quad (16.47)$$

这里 k 是 π 介子的动量，δ_a 是 ω 的函数．这样

$$\frac{\delta_{1/2}}{k} = A(\omega) + 2B(\omega)$$
$$\frac{\delta_{3/2}}{k} = A(\omega) - B(\omega) \quad (16.48)$$

交叉对称（§4，条 3）对振幅 $T_{rs}(\omega)$ 有下列限制：

$$T_{rs}(\omega) = T_{sr}(-\omega), \quad (16.49)$$

或者

$$A(\omega)\delta_{rs} + \frac{1}{2}B(\omega)[\tau_r, \tau_s] = A(-\omega)\delta_{sr} +$$
$$+ \frac{1}{2}B(-\omega)[\tau_s, \tau_r]$$

这表示

$$A(\omega) = A(-\omega), \quad (16.50)$$
$$B(\omega) = -B(-\omega),$$

即 $A(\omega)$ 是 ω 的偶函数，$B(\omega)$ 是 ω 的奇函数．用 ω 展开这两个函数，得

$$A(\omega) = a,$$
$$B(\omega) \doteq b\frac{\omega}{2M}. \quad (16.51)$$

这里引入質量 M，为的是使 a 和 b 有同样的量綱．如果微扰論是可以应用的，那 M 就是核子的質量．对于至今一切試图把 π 介子

和核子的相互作用作为一个封閉系統来处理的計算中，M 也是与核子質量同一个量級．这样

$$\frac{\delta_{1/2}}{k} = a + b\frac{\omega}{M},$$
$$\frac{\delta_{3/2}}{k} = a - \frac{b}{2}\frac{\omega}{M}. \tag{16.52}$$

若M与核子質量同一量級，則 $\frac{\omega}{M} \approx 0$．得到近似的关系

$$\delta_{1/2} = \delta_{3/2}. \tag{16.53}$$

这一关系与实驗数据矛盾(見[72])，按照实驗数据，

$$\delta_{1/2} = (0.167 \pm 0.012)\frac{k}{\mu},$$
$$\delta_{3/2} = (-0.105 \pm 0.010)\frac{k}{\mu}.$$

这里 μ 是 π 介子的質量．这暗示存在某种别的相互作用，如果把它也包括进来，則会抵消 A 項，而略为增強 B 項．这可能是由于虛超子的效应(見[73])．

§17. 电荷对称

1. 电荷对称． 定义电荷对称算符 $T_2(\pi)$，它把系統沿着电荷空間中的第三軸轉 180°．这一运算可由无穷小轉动的积分构成，对于同位旋量 ψ，得

$$T_2(\pi)\psi T_2(\pi)^{-1} = e^{i\frac{\tau_2}{2}\pi}\psi, \tag{17.1}$$

对同位矢量 φ，得

$$T_2(\pi)\varphi T_2(\pi)^{-1} = e^{i\omega_2\pi}\varphi. \tag{17.2}$$

矩陣 τ 和 ω 是同位矢量：

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \tag{17.3}$$

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{17.4}$$

因为[1]

$$(i\tau_2)^2 = -\tau_2^2 = -1$$

$$e^{i\frac{\tau_2}{2}\pi} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\tau_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i\tau_2.$$

由(17.1)得

$$T_2(\pi)\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} T_2(\pi)^{-1} = i\tau_2 \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ -p \end{pmatrix}, \tag{17.5}$$

換句話說，电荷对称算符 $T_2(\pi)$ 使得

$$p \to n, \quad n \to -p. \tag{17.6}$$

注意，$T_2(\pi)$ 是使电荷空間中的第一和第二軸反轉，这样对于矢量[2]为

$$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \to (-\varphi_1, \varphi_2, -\varphi_3). \tag{17.7}$$

現在

$$\varphi_{\pi^+} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2) \to \frac{1}{\sqrt{2}}(-\varphi + i\varphi_2) = -\varphi_{\pi^-},$$

$$\varphi_{\pi^-} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 - i\varphi_2) \to \frac{1}{\sqrt{2}}(-\varphi_1 - i\varphi_2) = -\varphi_{\pi^+},$$

$$\varphi_{\pi^0} = \varphi_3 \to -\varphi_3 = -\varphi_{\pi^0}. \tag{17.8}$$

即

$$\pi^+ \to -\pi^-, \ \pi^- \to -\pi^+, \ \pi^\circ \to -\pi^\circ. \tag{17.9}$$

电荷对称也可以用另一种定义

$$\begin{aligned} &(p, n) \to (n, p) \\ &(\pi^+, \pi^\circ, \pi^-) \to (\pi^-, \pi^\circ, \pi^+). \end{aligned} \tag{17.10}$$

电荷对称还可定义为在运算

$$T_1(\pi) \tag{17.11}$$

---

1) 参看[3]，第 258 頁.

2) 也可用与同位旋量平行的方法，得

$$e^{i\omega_2\pi} = 1 - 2\omega_2^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

只要利用杜芬-坎麦关系 $\omega_2^3 = \omega_2$.

下的不变性，如果假定电荷守恆总是成立（見[74, 75]）. 运算 $T_1(\pi)$ 等于第二，三軸反轉；运算 $T_2(\pi)$ 等于第一，三軸反轉，运算 $T_3(\pi)$ 等于第一，二軸反轉，所以有下列关系

$$T_2(\pi) = T_1(\pi)T_3(\pi). \tag{17.12}$$

系統在 $T_3(\pi)$ 下的不变性总是成立的. 因此在 $T_2(\pi)$ 下的不变性等价于在 $T_1(\pi)$ 下的不变性. 然而由下条可看出，用算符 $T_2(\pi)$ 定义电荷对称是最方便的.

2. 广义电荷共軛（G 运算）. 定义算符 G 为电荷共軛算符 C 与电荷对称算符 $T_2(\pi)$ 的乘积：

$$G = T_2(\pi)C. \tag{17.13}$$

对于核子場，如果采用馬約拉納表象

$$C\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} C^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{n} \end{pmatrix},$$

$$G\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} G^{-1} = i\tau_2\begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{n} \\ -\bar{p} \end{pmatrix},$$

即 G 运算使得

$$p \to \bar{n}, \quad n \to -\bar{p}. \tag{17.14}$$

对于介子場[1]，

$$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \xrightarrow{C} (\varphi_1, -\varphi_2, \varphi_3), \tag{17.15}$$

因此

$$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \xrightarrow{G} (-\varphi_1, -\varphi_2, -\varphi_3), \tag{17.16}$$

或

$$G\varphi G^{-1} = -\varphi. \tag{17.17}$$

π 介子为負的 G 宇称导致广义法雷定理，即如果相互作用在 G 运算下是不变的，任何有奇数个 π 介子外綫的传播量为零. 証明如 §8，条 4 一样. 由这一定理可得，偶数个 π 介子的系統不能衰变

---

1) 在 C 变換下

$$\varphi_{\pi^+} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2) \rightleftarrows \varphi_{\pi^-} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 - i\varphi_2),$$

$$\varphi_{\pi^0} = \varphi_3 \rightleftarrows \varphi_3 = \varphi_{\pi^0}$$

为奇数个 π 介子.

3. 对核子与反核子的湮灭的选择定则[1]. 一个核子与一个反核子組成的系統可以衰变成 π 介子, K 介子和光子, 但大多是通过 π 介子衰变. 我們将限于討論衰变为 π 介子的情况.

假定过程是由电荷独立的相互作用引起的: C, $\mathbf{T}$, N 是守恆算符. 联合 C 与 $\mathbf{T}$, 因 $\mathbf{T}$ 包含 $T_2(\pi)$, 算符 G 也是守恆的. 但这些算符并不总是互相可对易的. 在算符 C, $\mathbf{T}$, N 和 G 間有下列关系:

1)
$$[\mathbf{T}, N] = 0, \tag{17.18}$$

因为 $\mathbf{T}$ 只把不同的电荷态混合起来, 但不混淆粒子和反粒子.

2)
$$[\mathbf{T}, C] \neq 0, \tag{17.19}$$

因为在 $\mathbf{T}$ 下 π 介子場的各个分量 $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ 混变, 但在 C 之下, 它們的变換各不相同.

3)
$$[\mathbf{T}, G] = 0, \tag{17.20}$$

因为 $G\varphi G^{-1} = -\varphi$, φ 的各个分量的变換严格相同(这对于 $G' = T_1(\pi)C$ 就不成立).

4)
$$\{G, N\}_+ = 0. \tag{17.21}$$

因为 G 使粒子 $\rightleftarrows$ 反粒子:

$$GNG^{-1} = -N.$$

因此, 只有当 $N = 0$ 时, G 才列入守恆算符的完全集合 (正如 § 8 条 5 中的电荷共軛算符 C 和电荷算符 Q 一样).

对核子与反核子的系統 $N = 0$, 因此 G, C, T^2, T_3 列入守恆算符的完全集合. 构成电荷三重态和独态的态是

$$T = 1 \begin{cases} T_3 = +1, & p\bar{n}, \\ T_3 = 0, & \dfrac{1}{\sqrt{2}}(p\bar{p} + n\bar{n}), \\ T_3 = -1, & \bar{p}n, \end{cases}$$

$$T = 0,\ T_3 = 0, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}(p\bar{p} - n\bar{n}).$$

---

1) 这一問題, 見工作[26, 76—78].

如果 $(N\bar{N})$ 系統的軌道角动量为 l，自旋角动量为 S，则电荷共軛宇称 c 由泡利原理决定（正如 §8 条 5 一样）[1]，

$$c = (-1)^{l+S}. \tag{17.22}$$

因为电荷守恆，系統在繞第三軸的任何轉动下是不变的．这說明在电荷空間中与角度 φ 无关（見图 14）．这样繞第三軸轉 180°，$T_2(\pi)$ 等于只把第三軸反轉，也等于把电荷空間中的一切軸反轉；这样我們看到算符 $T_2(\pi)$ 有确定的本征值，这由周知的角动量态的反轉性質給出，即

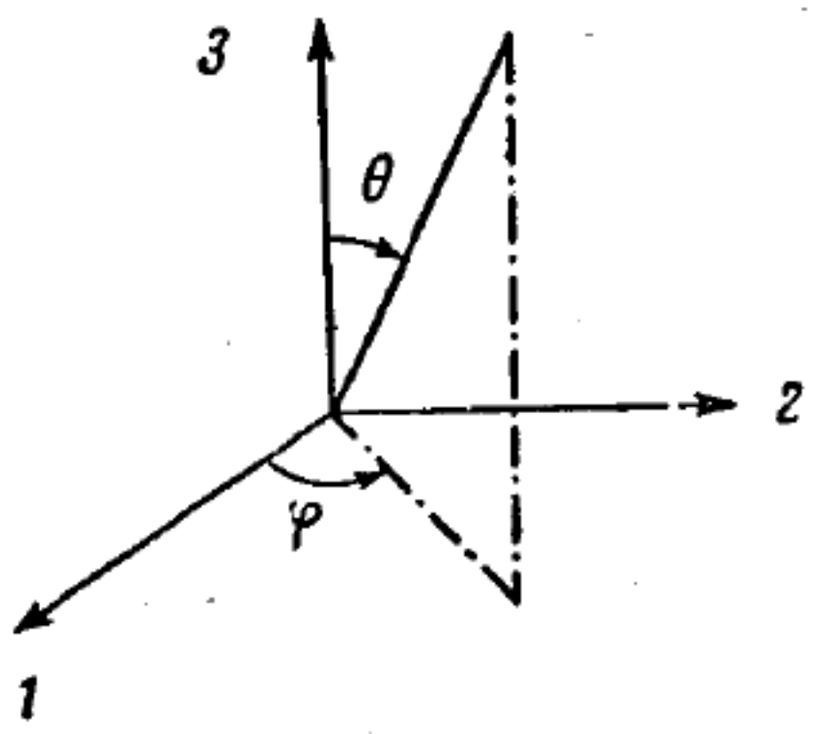


图 14.

$$T_2(\pi)|T, T_3\rangle = (-1)^T|T, T_3\rangle. \tag{17.23}$$

現在 G 宇称的形式是

$$\langle G\rangle_i = c(-1)^T = (-1)^{T+l+S}. \tag{17.24}$$

如果系統衰变成 n 个 π 介子，末态的 G 宇称是 $\langle G\rangle_f = (-1)^n$．因为 G 宇称是守恆的，故得选择定則：

$$(-1)^{T+l+S} = (-1)^n. \tag{17.25}$$

例． $\bar{p}n$ 在 $^1S_0$ 态的衰变

$$\langle G\rangle_i = (-1)^{1+0+0} = -1,$$

这样 n 必然是奇数．特别这表示，在 $^1S_0$ 态的衰变

$$\bar{p} + n \to \pi^\circ + \pi^-,\ \pi^\circ + \pi^- + \pi^+ + \pi^-, \text{等等}$$

是禁戒的．通常 l 之值是尽可能小的，$l = 0, 1, 2, \cdots$，但 n 可达到很大的值 $\left(\text{自然 } n < \dfrac{2BeV}{0.15BeV} = 13\right)$.

---

1) 在一般情况下，核子反核子系統（例如 $\bar{p}n$）不具有确定的电荷共軛宇称．所以这里作者对公式(17.24)的証明是有局限的．但可以証明，公式(17.24)在一般情况下也成立．——俄譯本譯者注．

参 考 文 献

[1] Jauch J., Rohrlich F., Theory of Photons and Electrons (The relativistic quantum field theory of charged particles with spin one-half), Cambridge, 1955.

[2] Schweber S. S., Bethe H. A., de Hoffman F., Mesons and Fields, I, Evanston, Illinois 1955.

[3] Dirac P. A. M., The Principles of Quantum Mechanics, 3-rd ed., London, 1947.

[4] Kinoshita T., Progr. Theor. Phys., **5**, 473 (1950).

[5] Lippmann B. A., Schwinger J., Phys. Rev., **79**, 469 (1950).

[6] Gunn J. C., Rep. Progr. Phys., **18**, 127 (1955).

[7] Gell-Mann M., Goldberger M. L., Phys. Rev., **91**, 398 (1953).

[8] Gell-Mann M., Low F. E., Phys. Rev., **84**, 350 (1951).

[9] Chew G. F., Low F. E., Phys. Rev., **101**, 1570 (1956).

[10] Schwinger J., Proc. Nat. Acad. Sci., **37**, 452, 455 (1951).

[11] Nambu Y., Phys. Rev., **100**, 394 (1955).

[12] Lehmann H., Symanzik K., Zimmerman W., Nuovo Cimento, **1**, 205 (1955).

[13] Symanzik K., Phys. Rev., **105**, 743 (1956).

[14] Feldman G., Matthews P. T., Phys. Rev., **102**, 1421 (1956).

[15] Hill E. L., Rev. Mod. Phys., **23**, 253 (1951).

[16] Pauli W., Rev. Mod. Phys., **13**, 203 (1941).

[17] Pauli W., Ann. Inst. Henri Poincare, **6**, 109 (1936).

[18] Good R. H., Rev. Mod. Phys., **27**, 187 (1955).

[19] van der Waerden B. L., Moderne Algebra, New York, 1943, Part II.

[20] Yang C. N., Tiomno, Phys. Rev., **79**, 495 (1950).

[21] Fierz M., Zs. f. Phys., **104**, 553 (1937).

[22] Case K. M., Phys. Rev., **97**, 810 (1955).

[23] Panofsky W. K. H., Aamodt R. L., Hadley J., Phys. Rev., **81**, 565 (1951).

[24] Niels Bohr and the Development of Physics, ed. by W. Pauli, London, 1955.

[25] Wolfenstein L., Ravenhall D. G., Phys. Rev., **88**, 229 (1953).

[26] Michel L., Nuovo Cimento, **10**, 319 (1953).

[27] Wigner E. P., Göt. Nachr. (Math. Naturwiss. Klasse), **31**, 546 (1932).

[28] Schwinger J., Phys. Rev., **82**, 914 (1951).

[29] Heitler W., Quantum Theory of Radiation, Oxford, 1936.

[30] Lüders G., Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Mat.-fys. Medd., **28**, No. 5 (1954).

[31] Umedzawa H., Kamefuchi S., Tanaka S., Progr. Theor. Phys., **12**, 383 (1954).

[32] Bell J. S., Proc. Roy. Soc., **A231**, 479 (1955)

[33] Gell-Mann M., Watson K., Ann. Rev. Nucl. Sci., **4**, 219 (1954).

[34] Takeda G., Phys. Rev., **101**, 1547 (1956).

[35] Michel L., Proc. Roy. Soc., **A63**, 514 (1950).
[36] Lee T. D., Yang C. N., Oehme R., Phys. Rev., **106**, 340 (1957).
[37] Dalitz R. H., Rep. Progr. Phys., XX, 163 (1957).
[38] Dalitz R. H., Phil. Mag., **44**, 1068 (1952).
[39] Lee T. D., Yang C. N., Phys. Rev., **104**, 254 (1957).
[40] Wu C. S. et al., Phys. Rev., **105**, 1413 (1957).
[41] Lederman L. M. et al., Phys. Rev., **105**, 1415 (1957).
[42] Friedman J. I., Telegdi V. L., Phys. Rev., **105**, 1681 (1957).
[43] Lee T. D., Proc. 7th Rochester Conference, New York, 1957.
[44] Jackson J. D., Freiman S. B., Wyld H. W., Phys. Rev., **106**, 517 (1957).
[45] Frauenfelder H. et al., Phys. Rev., **106**, 386 (1957).
[46] McVoy K. W., Phys. Rev., **106**, 828 (1957).
[47] Goldhaber M., Phys. Rev., **106**, 826 (1957).
[48] Salam A., Nuovo Cimento, **5**, 229 (1957).
[49] Lee T. D., Yang C. N., Phys. Rev., **105**, 1671 (1957).
[50] Ландау Л. Д., Nucl. Phys. **3**, 127 (1957); см. также ЖЭТФ, **32**, 407 (1957).
[51] Wigner E. P., Ann. Math., **40**, 149 (1939).
[52] Bargmann V., Wigner E. P., Proc. Nat. Acad. Sci., **34**, 211 (1948).
[53] Touscheck B. F., Nuovo Cimento, **5**, 754, 1281 (1957).
[54] Wentzel G., Einführung in der Quantentheorie der Wellenfelder, Wien, 1943.
[55] Utiyama R., Phys. Rev., **101**, 1957 (1956).
[56] Yang C. N., Mills R. L., Phys. Rev., **96**, 191 (1954).
[57] Gell-Mann M., Nuovo Cimento, Suppl., **2**, 848 (1956).
[58] Nishijima K., Progr. Theor. Phys., **13**, 285 (1955).
[59] d'Espagnat B., Prentki J., Nucl. Phys., **1**, 33 (1956).
[60] Schwinger J., M. I. T. Lecture Note.
[61] Pauli W., Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik, Handbuch der Physik, **24**, II (1933).
[62] Salam A., Nucl. Phys., **2**, 173 (1956).
[63] Schwinger J., Proc. 7th Rochester conference, New York, 1957.
[64] Gell-Mann M., Proc. 7th Rochester conference, New York, 1957.
[65] Wick G. C., Wightman A. S., Wigner E. P., Phys. Rev., 88, 107 (1952).
[66] Wolfenstein L., Ravenhall D. G., Phys. Rev., 88, 279 (1953).
[67] Gell-Mann M., Pais A., Phys. Rev., **97**, 1387 (1955).
[68] Pais A., Piccioni O., Phys. Rev., **100**, 1487 (1955).
[69] Case K. M., Phys. Rev., **103**, 1449 (1956).
[70] Chew G. F., Low F. E., Phys. Rev., **101**, 1579 (1955).
[71] Rosenfeld A. H., Phys. Rev., **96**, 139 (1954).
[72] Orear J., Nuovo Cimento, **4**, 856 (1956).
[73] Langer, Proc. 7th Rochester Conference, New York, 1957.
[74] Pais A., Jost R., Phys. Rev., **87**, 871 (1952).
[75] Kroll N. M., Foldy L. L., Phys. Rev., **88**, 1177 (1952).

[76] Lee T. D., Yang C. N., Nuovo Cimento, **3**, 749 (1956).
[77] Goebel C., Phys. Rev., **103**, 258 (1956).
[78] Amati D., Vitale B., Nuovo Cimento, **2**, 719 (1955).

附录　关于弱相互作用理論的現状

B. И. 李图斯 和 Ю. Д. 烏沙巧夫

利用沙拉姆[48],李政道和楊振宁[49],和朗道[50]的工作中所发展的双分量的中微子理論，保証了在弱相互作用中相应于实驗要求的宇称不守恆. 然而，尽管对于中微子的宇称不守恆可以說明，这一理論自然不能解释沒有中微子参加的过程中的宇称不守恆. 所以，所謂 τ—θ 問題首先就要求足够严格地解决. 此外，还有不清楚的地方，五种可能的耦合中究竟那些最好地符合实驗資料.

为了說明后一問題,苏达珊和馬尔夏克[1]利用最近关于宇称和电荷宇称不守恆的資料，对弱相互作用的实驗作了仔細的定量分析. 这一分析基于双分量中微子理論及輕子数守恆定律，指出一切关于核的 β 衰变，以及 μ，π 和 K 介子的衰变实驗，可以很好地用具有同样大小的耦合常数的費米相互作用的矢量 (V)和軸矢量 (A)耦合来描写. 这时 β 相互作用的哈密頓量的形式为

$$G(\bar{\psi}_p, \gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi_n)(\bar{\psi}_e\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi_\nu) + \text{厄米共軛項} \quad (\text{Д}.1)$$

假定这种类型的耦合对参与反应 $B + D \to A + C$ (或 $B \to A + C + \bar{D}$) 的任何費米子 A, B, C, D 是普适的,則我們得到下列形式的相互作用哈密頓量:

$$H = G(\bar{\psi}_A\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi_B)(\bar{\psi}_C\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi_D) + \text{厄米共軛項}, \quad (\text{Д}.2)$$

因为 γ_5 与 γ_μ 反对易,所以这种哈密頓量可以写成下列形式:

$$H = G(\bar{\psi}'_A\gamma_\mu\psi'_B)(\bar{\psi}'_C\gamma_\mu\psi'_D) + \text{厄米共軛項} \quad (\text{Д}.2')$$

1) E. C. G., Sudarshan, R. E. Marshak, Proc. Intern. Conf. on Mesons and Recently Discovered Particless Padova-Venezia, 1957.

这里 $\psi'_A, \psi'_B, \psi'_C, \psi'_D$ 是"双分量"場:

$$\psi'_A = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\gamma_5)\psi_A \text{ 等等.}$$

場 $\frac{1}{\sqrt{2}}(1\pm\gamma_5)\psi_A$ 是算符 γ_5 具有本征值为 ± 1 的本征态. 这两个值称为場的左(+1)和右(−1)"自旋性"(спиральность). 矢量和軸矢量的相互作用联系着具有同样自旋性的費米場,而 S, P, T 相互作用联系着具有相反自旋性的費米場. 所以(Д.2)型的相互作用可以看作是唯一滿足下列要求的相互作用,这一要求就是,每一个出現在四个費米子的相互作用中的协变量相对于算符 γ_5 是不变的. 这一要求自动地导致双分量中微子和在一切四个費米子相互作用中的最大的宇称不守恆.

費曼和盖尔曼[1]也提出了弱相互作用的(Д.2)型相互作用. 他們作了一些支持这种相互作用的理論考虑, 令人感覚兴趣的是他們的考虑与宇称不守恆問題无关. 这里闡述他們的考虑.

为什么狄拉克方程[2]

$$\left[\gamma_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA_\mu\right) + m\right]\psi = 0 \qquad (Д.3)$$

的波函数必須有四个分量? 通常支持这点的論点是, 电子具有四个自由度:两个能量的符号,两个自旋态. 但是在描写自旋为零的粒子的克莱因-哥东方程

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2} - \mu^2\right]\varphi = 0$$

中, 我們却碰到另一种原則上不同的状况. 看来場的分量的数目相应于两个可能的能量符号应有两个, 可是 φ 只有一个分量. 所以关于确定能量符号的选取是由在克莱因-哥东方程中(以及任何含有对时間的二次微分的方程中) 在初始时刻給定初始条件 φ 和

---

1) R. Feyman, M. Gell-Mann, Phys. Rev. **109**, 193 (1958).

2) 采用 γ 矩陣的狄拉克-泡利表象 (見 § 6 和 § 7) 和度規

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu},$$

$\frac{\partial}{\partial t}\varphi$ 来实現的.

自然会提出一个問題：电子的方程不可以变为二阶方程的形式嗎？新波函数的分量数目只相应于两个可能的自旋态的数目，卽只有两个.

为了实現这一規划，引入两个新的波函数 χ_1 和 χ_2，利用下列两个变化之一：

$$\chi_1 = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi, \qquad (Д.4)$$

$$\chi_2 = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi. \qquad (Д.5)$$

注意，这两个定义，在算符 γ_5 作用于函数 χ_1 和 χ_2 时是有区别的：

$$\gamma_5\chi_1 = \chi_1, \qquad (Д.6)$$

$$\gamma_5\chi_2 = -\chi_2. \qquad (Д.7)$$

从下列卽将变得明了的考虑，以下取 ψ 函数如 (Д.4) 形式的变換（因此以后略去指标）.

以算符

$$-\frac{1}{m}\left[\gamma_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA_\mu\right) - m\right]$$

作用于(Д.4)等式的两端，并計及运动方程(Д.4)，找出

$$\psi = -\frac{1}{m}\left[\gamma_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA_\mu\right) - m\right]\chi, \qquad (Д.8)$$

把 (Д.8) 代入 (Д.3)，得 χ 的方程

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA_\mu\right)^2 + \frac{1}{2}ie\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - m^2\right]\chi = 0, \qquad (Д.9)$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}A_\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu}A_\mu,$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2i}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu).$$

表示 $\frac{1}{2}e\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 可写为下列形式：

$$\frac{1}{2}e\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{H} + i\mathbf{E}).$$

这里

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix},$$

而 **E** 和 **H** 为电磁場強.

现在注意,四分量的波函数 χ 可以写成下列形式:

$$\chi = \begin{pmatrix} \omega \\ -\omega \end{pmatrix},$$

这里 $\omega = \frac{1}{2}(a - b)$, 而 a, b 是出現在 ψ 中的双分量旋量:

$$\psi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

由此方程 (Д.9) 等价于方程

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA_\mu\right)^2 + \sigma(\mathbf{H} + i\mathbf{E}) - m^2\right]\omega = 0, \quad (Д.10)$$

这里 ω 已是双分量函数,这样,电子的方程也可写为双分量波函数的二阶方程的形式,方程 (Д.10) 在一切电子不产生不消失并沒有正电子的电动力学問題中用起来,与方程 (Д.3) 有同样的成功,但是在描写有电子产生的 β 衰变的过程时, 利用波函数 ω 代替 ψ 可能引起实質的改变.

实际上,用算符 ψ 来建立 β 相互作用,而 ψ 可以替代为

$$-\frac{1}{m}\left[\gamma_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA_\mu\right) - m\right]\begin{pmatrix} \omega \\ -\omega \end{pmatrix}. \quad (Д.11)$$

这时,相互作用中出現了包含 ω 导数的項,如果用算符 χ 来建立 β 相互作用,則 χ 可替代为

$$\frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi, \quad (Д.12)$$

这种相互作用不再保持宇称守恆.

显然,在建立弱相互作用的理論中,应当認为算符 ω 比算符 ψ 更基本. 实际上; 在这种情形下要求相互作用不含有 ω 的导数是适当的,这样我們就不可能利用导致宇称守恆的表示 (Д.11). 但是我們可以利用表示 (Д.12), 并且把不含 ω 的导数的相互作用变

成显然宇称不守恆的形式，因为弱相互作用中宇称不守恆实际上是存在的。这点說明利用算符 ω 要求不含导数建立相互作用是正确的。

这样一来，建立弱耦合四費米子的相互作用的哈密頓量的規則，可以用下列方式表示出。

在弱耦合不含导数的相互作用的所有类型中，我們将一切旋量 ψ_A 算符換成算符[1)]

$$\chi_A = a\psi_A, \tag{Д.13}$$

这里 $a = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)$ 指标 A 相应于粒子 $p, n, e, \nu, \cdots$ 等等。

这样一来，通常的表达式

$$\sum_i C_i(\bar{\psi}_A \Omega_i \psi_B)(\bar{\psi}_C \Omega_i \psi_D),$$

現在变成

$$\sum_i C_i(a\bar{\psi}_A \Omega_i a\psi_B)(a\bar{\psi}_C \Omega_i a\psi_D), \tag{Д.14}$$

計及

$$\overline{a\psi} = \bar{\psi}\bar{a},$$

这里，$\bar{a} = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)$，(Д.14) 可写作

$$\sum_i C_i(\bar{\psi}_A \bar{a}\Omega_i a\psi_B)(\bar{\psi}_C \bar{a}\Omega_i a\psi_D). \tag{Д.15}$$

不难看出，对 S, T, P 型相互作用

$$\bar{a}\Omega_i a = \Omega_i \bar{a} a = 0,$$

而对 V 和 A 型

$$\bar{a}\Omega_i a = \Omega_i a a = \Omega_i a.$$

由此显然，相互作用的各个可能类型中只保留 V 和 A 型相互作用。并且，由于 $\gamma_5 a = a$，矢量和軸矢量相互作用实际上是相互等价的。所以普适的相互作用 (Д.14) 最后可写成下列最一般的形式：

---

1) 注意，在 χ 的相互作用的表达式中，我們仍用双旋量，为的是不改动以前計算的手續。

$$\sqrt{8}\,G(\bar{\psi}_A\gamma_\mu a\psi_B)(\bar{\psi}_C\gamma_\mu a\psi_D). \qquad (Д.16)$$

应当注意,电子的函数 ψ_e 用函数

$$\chi = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi_e$$

来代替意味着在 β 衰变中放出的电子是左旋的（而正电子是右旋的),并且当 $v \to c$ 时极化趋于 100%. 这一情况是选择下列投射算符的結果

$$a = \frac{1}{2}(1+\gamma_5).$$

理論上也完全可以选取算符 $\bar{a}$ [見 (Д.5)], 这时放出的电子将是右旋的,实验的結果符合前一种选择[1](是算符 a, 而不是 $\bar{a}$).

同样,由于中微子的函数总是以 $a\psi_\nu$ 的形式出現,只存在左旋的中微子. 这样, 双分量中微子理論和輕子数守恆定律是正确的.

相互作用 (Д.16) 仍旧有一点是不能单一决定的. 这就是,按 (Д.16) $n \to p + \bar{e} + \bar{\nu}$ 过程的哈密頓量应当采取形式

$$\sqrt{8}\,G(\bar{\psi}_p\gamma_\mu a\psi_n)(\bar{\psi}_e\gamma_\mu a\psi_\nu). \qquad (Д.17)$$

但是如果在 β 衰变中不認为中子和質子是"原始的"粒子,而反中子和反質子才是, 那么对于 $\bar{p} + \nu \to \bar{n} + e^-$ 过程, 我們就有

$$\sqrt{8}\,G(\bar{\psi}_{\bar{n}}\gamma_\mu a\psi_{\bar{p}})(\bar{\psi}_e\gamma_\mu a\psi_\nu) \qquad (Д.18)$$

这一哈密頓量等价于

$$\sqrt{8}\,G(\bar{\psi}_p\gamma_\mu \bar{a}\psi_n)(\bar{\psi}_e\gamma_\mu a\psi_\nu), \qquad (Д.19)$$

所以 $n \to p + e^- + \bar{\nu}$ 过程現在将用 (Д.19) 表达式来描写, 而不用(Д.17), 这就出現了我們以上所指的不定性. 这一不定性是可以消除的, 只要把利用 (Д.17) 和 (Д.19) 計算的結果与极化中子衰变中放出的电子的角分布的实驗結果加以比較. 哈密頓量 (Д.17)导致在角分布中不存在不对称, 而哈密頓量(Д.19)則导致极大的不对称. 注意,在双分量中微子理論中,哈密頓量(Д.17)和

1) 例如参看 Boehm, Novey, Barnes, Stech, Phys. Rev., **108**, 1497 (1957).

(Д.19) 相应于 $(V-A)$ 和 $(V+A)$ 耦合[1].

費曼和盖尔曼的理論导出的普适相互作用的定律完全和苏达珊和馬尔夏克基于大量实驗数据分析导出的一致，这种相互作用的定律与实驗不只是定性的符合，而且是定量的符合. 例如，在費曼和盖尔曼工作中計算出的 μ 介子的寿命是

$$\tau = \frac{192\pi^3}{G^2\mu^5} = (2.26 \pm 0.04) \cdot 10^{-6} \text{秒},$$

如果取耦合常数为 O^{14} 衰变实驗[2] 所要求的那样，$G = (1.01 \pm 0.01) \cdot 10^{-5} M^{-2}$ (M 是质子的质量，$\hbar = c = 1$). 实驗值与理論值相符准至 2%.

特别应当強調的是，这一理論原則上可以严格描写 K 介子衰变中的宇称不守恆的过程，只要認为普适相互作用定律可推广到奇异粒子. 例如，試看 K^+ 介子衰变为二个或三个 π 介子. 由于存在相应于形成奇异粒子的強相互作用，K^+ 介子可以虛的过渡为反 Λ° 粒子 ($\bar{\Lambda}^\circ$) 和质子 (p). 此外，质子和反 Λ° 粒子由于弱相互作用可以与质子和反中子发生耦合：

$$\sqrt{8}\, G(\bar{\psi}_p \gamma_\mu a \psi_{\bar{\lambda}^0})(\bar{\psi}_{\bar{n}} \gamma_\mu a \psi_p),$$

而质子和反中子可湮灭而成二个或三个 π 介子，这里宇称的不守恆是由于在虛过程中的核子函数之前存在算符 a 的緣故.

值得注意的是，在苏达珊和馬尔夏克与費曼和盖尔曼工作发表之时，存在着下列三个看来与它相冲突的实驗，这就是：

1) 在 He^6 衰变中电子和中微子的角关联支持张量型相互作用；

2) 衰变数之比 $(\pi \to e + \nu)/(\pi \to \mu + \nu)$ 过去找到的小于 10^{-5}，可是按費曼和盖尔曼的計算它应当等于 $13.6 \cdot 10^{-5}$；

3) 在极化中子衰变中电子的分布的不对称指出存在 $S-T$ 型相互作用.

---

1) 关于 V 和 A 型相互作用耦合常数的相对符号的选择見 [39].

2) 見 Bromley, Almquist, Gove, Litherland, Paul, Ferguson, Phys. Rev. **105**, 957 (1957).

但是（$V-A$）型相互作用与大多数实验的符合和作为这种相互作用基础的理論考虑的說服力使得需要重做这些实验。这些随后的实验的結果[1]完全符合普适相互作用定律(Д.2)或(Д.16)。

β 衰变的現今理論状况的詳尽总結，讀者可参看斯莫洛金斯基的总結 [УФН, 67, 1, 43 (1959)]。

1) He^6 的 β 衰变角关联的測量：W. B. Herrmannsfeldt, R. L. Burman, P. Stähelin, J. S. Allen, T. H. Braid, Phys. Rev., Letters, **1**, 61 (1958). 衰变数之比 $(\pi\to e+\nu)/(\pi\to\mu+\nu)$ 的測量：T. Fazzini G. Fidecaro, A. W. Merrison, H. Paul, A. V. Tollestrup, Phys. Rev., Letters, **1**, No. 7, 247 (1958); G. Inpeduglia, R. Plamo, A. Prodell, N. Samio, M. Schwartz, J. Steinberger, Phys. Rev. Letters **1**, No. 7, 249 (1958). 极化中子衰变的不对称的測量：M. T. Burgy, V. E. Krohn, T. B. Novey, G. R. Ringo, V. L. Telegdi, Phys. Rev., **110**, 1216 (1958).